



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ  
ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**ΤΟ ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ  
 $SU(5)$  ΚΑΙ Η ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ  
ΤΟΥ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

**Γ. ΖΟΥΠΛΑΝΟΣ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΜΠ

Αθήνα, 21 Οκτωβρίου 2014





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**ΤΟ ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ  $SU(5)$  ΚΑΙ Η  
ΥΠΕΡΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Γ.ΖΟΥΠΙΑΝΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τον Οκτώβρη του 2014.

Υπογραφή	Υπογραφή	Υπογραφή
..... Ζουπιάνος Γεώργιος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	..... Κουτσούμπας Γεώργιος Αν.Καθηγητής Ε.Μ.Π.	..... Τράκας Νικόλαος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 21 Οκτωβρίου 2014

Η παρούσα διπλωματική εργασία, «το Μεγαλοενοποιημένο μοντέλο  $SU(5)$  και η υπερσυμμετρική επέκτασή του», αποτελείται ουσιαστικά από τέσσερα μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά στο Μεγαλοενοποιημένο Μοντέλο  $SU(5)$  το οποίο αποτελεί την πρώτη απόπειρα πραγματικής ενοποίησης των αλληλεπιδράσεων της φύσης (εκτός της βαρύτητας). Γίνεται περιγραφή της μαθηματικής δομής του, των φαινομενολογικών συνεπειών του και τέλος ασκείται κριτική σε αυτές. Το δεύτερο μέρος είναι αφιερωμένο στην υπερσυμμετρία. Στο κομμάτι αυτό εμβαθύνουμε στα τεχνικά ζητήματα και ταυτόχρονα αναλύσαμε τις τροποποιήσεις που επάγει στο Καθιερωμένο Πρότυπο της φυσικής, αναβαθμίζοντάς το σε Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Στο τρίτο μέρος ταιριάζαμε τα δύο προηγούμενα σε μία προσπάθεια να βελτιώσουμε το  $SU(5)$  μοντέλο παίρνοντας την υπερσυμμετρική επέκτασή του με αποτέλεσμα να προκύψει ένα βιώσιμο μοντέλο ενοποίησης. Τέλος, το τελευταίο κομμάτι αποτελεί ένα μαθηματικό παράρτημα που αφορά κυρίως τη Θεωρία Ομάδων και τη Θεωρία Αναπαραστάσεων. Η ύπαρξή του κρίθηκε απαραίτητη καθώς σε αυτό περιγράφονται σημαντικές διαδικασίες που παραλείπονται από το κυρίως σώμα της εργασίας για λόγους συνοχής.

This thesis, "The Grand Unified Theory of  $SU(5)$  and its supersymmetric version" consists of four parts. The first one describes the Grand Unified Theory of  $SU(5)$ , which is considered as the first attempt of true unification of the nature's interactions (except for gravity). It mainly concerns its mathematical structure and its phenomenological consequences. In the end of the section we tried to set the final score by stating the pros and cons of the model. The second part is totally dedicated to supersymmetry. In this part we made a profound analysis on the technical issues and afterwards we examined the modifications that are induced on the Standard Model, due to upgrading it to the Minimal Supersymmetric Standard Model. In the third part we inserted Supersymmetry into the  $SU(5)$  model in order to upgrade it to the Supersymmetric  $SU(5)$ , overcoming the weaknesses of the non-supersymmetric version and resulting to a very promising candidate for the unification. Finally, the last part is a mathematical appendix on the Group Theory and the Representation Theory. Its presence is obligatory because there are many important explanations that are omitted in the main body of the thesis in order not to lack coherence.

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του ΕΜΠ, κ.Ζουπάνο Γεώργιο αφενός για την επίβλεψη και την καθοδήγηση της παρούσας εργασίας και αφετέρου για την εμπιστοσύνη και την εδραίωση ενός πολύ καλού συνεργατικού κλίματος, ελπίζοντας να διατηρηθεί και στο μέλλον.

Έπειτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή του ΕΜΠ, κ.Κουτσούμπα Γεώργιο, για τη συνέπειά του, για τη διαθεσιμότητά του, για τα εύστοχα σχόλιά του και για την προθυμία του να με βοηθήσει στις δυσκολίες που ανέκυψαν κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του ΕΜΠ, κ.Τράκα Νικόλαο ο οποίος - εκτός των άλλων - μου υπέδειξε σημαντικές παρατηρήσεις/διορθώσεις όσον αφορά στη δομή και στην παρουσίαση του κειμένου της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του ΕΜΠ, κ.Μπάκα Ιωάννη για τις μαθηματικές γνώσεις που μου μετέφερε στο μάθημα του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής» τόσο πάνω στη Θεωρία Αναπαραστάσεων όσο και στη Διαφορική Γεωμετρία με την οποία ήταν η πρώτη φορά που πραγματικά ήρθα σε επαφή.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το οικογενειακό μου περιβάλλον για τη στήριξη και την ανεκτικότητα τους. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα μου Μανωλάκου Αικατερίνη, για την υποστήριξή της και για το γεγονός ότι ήταν η πρώτη που με παρότρυνε να μπω στον κόσμο της φυσικής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω το φιλικό μου περιβάλλον και ιδιαίτερα, τον υποψήφιο διδάκτορα Ντρέκη Κωνσταντίνο, ο οποίος αναλαμβάνοντας παραπάνω φόρτο εργασίας με διευκόλυνε να αφοσιωθώ στην εργασία αυτή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τη συνάδελφο και σύντροφό μου Μάνδρατζη Δέσποινα για την υπομονή, την επιμονή της και την πίστη που έχει σε μένα όλα αυτά τα χρόνια. Πιο συγκεκριμένα, οφείλω να την ευχαριστήσω για τη συμβολή της στην πραγματοποίηση της εργασίας, τόσο σε σύνθετα τεχνικά ζητήματα όσο και σε πρακτικά καθημερινά. Τέλος, θα ήθελα να την ευχαριστήσω για τις επικοινωνιακές μας συζητήσεις οι οποίες κατάφεραν - όσο γίνεται- να διευρυνθούν οι νοητικοί ορίζοντές μου και να δομηθεί ο τρόπος σκέψης μου - αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίον της αφιερώνω την εργασία αυτή.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει τίτλο «Το Μεγαλοενοποιημένο Μοντέλο  $SU(5)$  και η υπερσυμμετρική επέκτασή του». Στο πρώτο μέρος, στην αρχή δίνουμε μία γενική περιγραφή των μεγαλοενοποιημένων θεωριών (GUTs) κι έπειτα εξειδικεύουμε στο μοντέλο  $SU(5)$ , το οποίο ήταν η πρώτη πραγμάτωση ενοποίησης των τριών αλληλεπιδράσεων της φύσης (εξαιρείται η βαρυτική). Πιο συγκεκριμένα, αρχικά παρατίθεται η δομή της άλγεβρας που κρύβεται πίσω από την  $SU(5)$  ομάδα κι έπειτα ξεκινάει το χτίσιμο του μοντέλου. Εξηγείται ο τρόπος με τον οποίον τα φερμιόνια και τα μποζόνια τοποθετούνται σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις της ομάδας κι έπειτα εξηγείται πώς συμβαίνει το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, ούτως ώστε να ανακτούμε τη φυσική που γνωρίζουμε από το Καθιερωμένο Πρότυπο αναπαράγοντας ουσιαστικά τις φαινομενολογικές του επιτυχίες. Στη συνέχεια εξηγείται επίσης η ιδιότητα της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου καθώς και η συσχέτιση του φορτίου των λεπτονίων με αυτό των κουάρκ. Επίσης, περιγράφεται το πώς επάγεται η διάσπαση του πρωτονίου και δίνεται η θεωρητική πρόβλεψη για τον χρόνο ζωής του η οποία όμως είναι μικρότερη από το πειραματικό όριο. Έπειτα, δουλεύουμε με τις σταθερές σύζευξης και τις εξισώσεις ομάδας επανακανονικοποίησης και βλέπουμε ότι δε συμβαίνει πραγματική ενοποίηση των τριών σταθερών σύζευξης. Από το μοντέλο αυτό παίρνουμε από τον τομέα των φερμιονίων ένα καλό αποτέλεσμα που προβλέπει τον λόγο δύο φερμιονίων στις χαμηλές ενέργειες σε συμφωνία με το πείραμα αλλά και μία κακή, η οποία προβλέπει δύο τέτοιους λόγους για τις άλλες δύο γενιές να είναι ίσοι, πράγμα που δε συμβαίνει. Ωστόσο, η αρτιότητα του μοντέλου μας παρακινεί να βρούμε έναν τρόπο να περισώσουμε τις αποτυχίες. Ο τρόπος αυτός λέγεται υπερσυμμετρία και η θεμελίωση και περιγραφή της αποτελεί το δεύτερο κομμάτι της διπλωματικής εργασίας.

Στο κομμάτι αυτό περιγράφεται αρχικά το πώς αναδύεται η ανάγκη για την εισχώρησή της στη φυσική (μέσα από το πρόβλημα ότι συνεισφορές στη μάζα των βαθμωτών πεδίων αποκλίνουν τετραγωνικά και οδηγούν στο σοβαρό πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης) κι έπειτα ακολουθείται μία μέθοδος κατά την οποία τα αδιέξοδα και οι ανάγκες προσδιορίζουν την άλγεβρα της υπερσυμμετρίας χωρίς αυτή να επιβάλλεται αυταρχικά. Στην αρχή περιγράφεται το πιο απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο στο οποίο περιλαμβάνεται μόνο μία left chiral supermultiplet και αποτελεί το πιλοτικό μας πρόγραμμα για να περάσουμε αργότερα στο MSSM. Έπειτα, στο απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο βάζουμε και τις αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα παράγοντας τελικά το μοντέλο των Wess - Zumino. Για το μοντέλο αυτό αποδεικνύουμε αναλυτικά, συμπεριλαμβάνοντας όλα τα διαγράμματα ενός βρόχου, ότι όλες οι τετραγωνικές αποκλίσεις που προκύπτουν (και αναγκάζουν την εισαγωγή της λεπτής ρύθμισης εξ αρχής) αλληλοακυρώνονται επακριβώς και οι αποκλίσεις συνεισφορές απλά σθίνουν. Έπειτα, θεμελιώνουμε ένα υπερσυμμετρικό

μοντέλο στο οποίο συμμετέχει μόνο μία gauge supermultiplet ακολουθώντας τις ίδιες τεχνικές με αυτές του απλού υπερσυμμετρικού μοντέλου για την chiral supermultiplet. Στη συνέχεια εισάγουμε το φορμαλισμό των superfields ο οποίος αποτελεί την περιεκτική περιγραφή της υπερσυμμετρίας και αποτελεί το κατάλληλο εργαλείο για τη μελέτη και την ανάλυση του MSSM, το οποίο αποτελεί το αντικείμενο μελέτης του αμέσως επόμενου μέρους της εργασίας.

Στο μοντέλο αυτό αρχικά εξετάζεται η τροποποίηση στο σωματιδιακό φάσμα του SM και πώς η συμπερίληψη υπερσυμμετρικών ταιριών επηρεάζει το φάσμα αυτό. Έπειτα στο μοντέλο αυτό, δίνεται το κατάλληλο superpotential, το οποίο αποτελεί τη συνάρτηση που εμπεριέχει όλες τις Higgs αλληλεπιδράσεις του μοντέλου και η μορφή του γενικά προσδιορίζει το εκάστοτε υπερσυμμετρικό μοντέλο. Στο MSSM εξετάζουμε τις επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις κι έπειτα μελετούμε το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας με δύο τρόπους και πώς αυτό προηγείται και επάγει το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Τέλος, όσον αφορά το MSSM, εξετάζουμε αναλυτικά τον τομέα Higgs και πώς από αυτόν αναδύεται ένας προβλεπτικός περιορισμός για τη μάζα του ελαφρύτερου πεδίου Higgs της θεωρίας.

Στο τελευταίο κομμάτι του κυρίου σώματος της διπλωματικής περνάμε στην εισαγωγή της υπερσυμμετρίας στο μεγαλοενοποιημένο μοντέλο  $SU(5)$  παίρνοντας την υπερσυμμετρική εκδοχή του. Σε αυτήν εξετάζουμε τις τροποποιήσεις από το μη υπερσυμμετρικό μοντέλο και πώς αυτές αίρουν τις αποτυχημένες προβλέψεις του καταλήγοντας σε ένα βιώσιμο -προς το παρόν- μοντέλο, όπου η ενοποίηση των σταθερών σύζευξης είναι πραγματική και ο χρόνος ζωής του πρωτονίου αυξάνεται σημαντικά με αποτέλεσμα το πειραματικό όριο να είναι πλέον χαμηλότερα.

Τέλος, παρατίθεται στην εργασία ένα μαθηματικό παράρτημα στο οποίο περιγράφονται με αναλυτικό τρόπο στοιχεία από τη Θεωρία Ομάδων και τη Θεωρία Αναπαραστάσεων ούτως ώστε να μην παρεμβάλλονται στη ροή της εργασίας και χαλάνε τη συνοχή της.

# Περιεχόμενα

<b>1 Μεγαλοενοποιημένες θεωρίες -Το μοντέλο <math>SU(5)</math></b>	<b>11</b>
1.1 Ανάγκη για μεγαλοενοποιημένες θεωρίες . . . . .	12
1.1.1 Επιτυχίες και αποτυχίες του SM . . . . .	12
1.1.2 Γενικά στοιχεία - Προσδοκίες από GUTs . . . . .	15
1.1.3 Επιλογή του gauge group. Γιατί $SU(5)$ ; . . . . .	16
1.2 Η ομάδα $SU(5)$ - Άλγεβρα $A_4$ . . . . .	17
1.2.1 Καταστρώνοντας την GUT $SU(5)$ . . . . .	30
1.2.2 Φερμιονική ανάθεση . . . . .	32
1.2.3 Κβάντωση του φορτίου . . . . .	37
1.2.4 Ακύρωση των ανωμαλιών . . . . .	39
1.2.5 Τα μποζόνια βαθμίδας . . . . .	43
1.3 Σπάσιμο της $SU(5)$ . . . . .	46
1.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης . . . . .	62
1.5 Διάσπαση του πρωτονίου . . . . .	74
1.6 Φερμιονικές μάζες και γωνίες ανάμιξης στο ελάχιστο $SU(5)$ μοντέλο . . . . .	81
1.7 Διατήρηση της $B - L$ και μάζες νετρίνων . . . . .	92
1.8 $SU(5)$ , το τελικό σκορ . . . . .	95
<b>2 Υπερσυμμετρία</b>	<b>97</b>
2.1 Εισαγωγή και Κίνητρα . . . . .	98
2.2 Σπίνορες Weyl, Dirac και Majorana . . . . .	110
2.2.1 Σπίνορες και μετασχηματισμοί Lorentz . . . . .	111
2.2.2 Κατασκευή αναλλοίωτων αντικειμένων και 4-διανυσμάτων από σπίνορες Weyl . . . . .	117
2.2.3 Συμβολισμός των Weyl σπινωρών . . . . .	125
2.2.4 Dirac σπίνορες χρησιμοποιώντας μόνο $L$ -τύπου σπίνορες . . . . .	131
2.2.5 Majorana σπίνορες . . . . .	135
2.2.6 Κβάντωση των πεδίων Majorana. . . . .	143
2.3 Εισαγωγή στην υπερσυμμετρία και στο MSSM . . . . .	152
2.3.1 Ένα απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο . . . . .	152
2.3.2 Μία πρώτη ματιά στο MSSM . . . . .	158
2.4 Η υπερσυμμετρική άλγεβρα και οι supermultiplets . . . . .	160



2.4.1 Ένας τρόπος να αποκτήσουμε την $SU(2)$ άλγεβρα . . . .	160
2.4.2 Οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας και η άλγεβρά τους .	163
2.4.3 Το υπερσυμμετρικό ρεύμα . . . . .	168
2.4.4 Supermultiplets . . . . .	173
2.4.5 Μία σημαντική επιπλοκή και η λύση της . . . . .	176
2.5 Το μοντέλο Wess-Zumino . . . . .	185
2.5.1 Αλληλεπιδράσεις και το superpotential . . . . .	185
2.5.2 Ακύρωση των τετραγωνικών αποκλίσεων στο μοντέλο W-Z	194
2.6 Superfields . . . . .	215
2.6.1 Υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί πάνω σε πεδία . . .	215
2.6.2 Οι υπερσυμμετρικοί γεννήτορες σε αναπαράσταση διαφο- ρικών τελεστών . . . . .	220
2.6.3 Chiral Superfields . . . . .	224
2.6.4 Γινόμενα από chiral superfields . . . . .	226
2.6.5 Άλλες μορφές chiral superfield . . . . .	230
2.7 Διανυσματικές (ή gauge) supermultiplets . . . . .	239
2.7.1 Η ελεύθερη αβελιανή gauge supermultiplet . . . . .	239
2.7.2 Μη-αβελιανές gauge supermultiplets . . . . .	243
2.7.3 Συνδυάζοντας chiral και gauge supermultiplets . . . .	246
2.8 Το MSSM . . . . .	255
2.8.1 Εξειδίκευση του superpotential . . . . .	255
2.8.2 Οι SM αλληλεπιδράσεις στο MSSM . . . . .	260
2.8.3 R-parity . . . . .	264
2.9 Το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας . . . . .	265
2.9.1 Αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας . . . . .	266
2.9.2 Soft SUSY-breaking όροι . . . . .	275
2.10 Ο Higgs τομέας και το σπάσιμο τη ηλεκτρασθενούς συμμετρίας στο MSSM . . . . .	278
2.10.1 Το βαθμωτό δυναμικό και οι συνθήκες για το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας . . . . .	278
2.10.2 Οι tree-level μάζες των Higgs καταστάσεων στο MSSM .	288
2.10.3 Tree-level συζεύξεις των ουδέτερων Higgs μποζονίων με τα σωματίδια του SM . . . . .	295
<b>3 Υπερσυμμετρικό <math>SU(5)</math></b>	<b>300</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	300
3.1.1 Σωματιδιακή ανάθεση . . . . .	300
3.1.2 Σπάσιμο της συμμετρίας . . . . .	301
3.1.3 Το φάσμα των χαμηλών ενεργειών και doublet-triplet split- ting . . . . .	303
3.1.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης . . . . .	304
3.1.5 Ο Yukawa τομέας του υπερσυμμετρικού $SU(5)$ . . . .	307
3.1.6 Διάσπαση πρωτονίου . . . . .	309

3.1.7 Μέτρηση των παραμέτρων στο ελάχιστο υπερσυμμετρικό $SU(5)$ μοντέλο . . . . .	311
3.1.8 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα . . . . .	311
<b>A' Ομάδες και αναπαράστασεις</b>	<b>314</b>
A.1 Βασικά στοιχεία . . . . .	316
A.2 Κανονική αναπαράσταση . . . . .	317
A.3 Μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις . . . . .	318
A.4 Ομάδες μεταθέσεων - Young Tableaux . . . . .	319
A.5 Ομάδες και άλγεβρες Lie . . . . .	325
A.6 Η άλγεβρα $SU(2)$ . . . . .	329
A.7 Η adjoint αναπαράσταση . . . . .	334
A.8 Πίνακας Cartan - Διαγράμματα Dynkin . . . . .	336
A.9 Θεμελιώδη Βάρη . . . . .	346
A.9.1 Η τανυστική μέθοδος . . . . .	350
A.10 Young tableaux Μέρος β' . . . . .	355
A.11 Εύρεση του αναπτύγματος αναπαράστασης μίας ομάδας σε μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις των υποομάδων της μέσω των διαγραμμάτων Dynkin . . . . .	372

## **Κεφάλαιο 1**

# **Μεγαλοενοποιημένες θεωρίες -Το μοντέλο $SU(5)$**

## 1.1 Ανάγκη για μεγαλοενοποιημένες θεωρίες

### 1.1.1 Επιτυχίες και αποτυχίες του SM

Η αναζήτηση για μια ενιαία θεωρία που να περιλαμβάνει όλες τις αλληλεπιδράσεις της φύσης οδήγησε στην ανοικοδόμηση ενός μοντέλου γνωστό ως Καθιερωμένο Πρότυπο (SM). Παρ'όλο που δεν επιτεύχθηκε η περιγραφή της βαρύτητας σαν ένα gauge group - και επομένως η συμπερίληψή της στο πρότυπο αυτό - το μοντέλο στέφθηκε με επιτυχία μέσω των πανηγυρικών πειραματικών επιβεβαιώσεων των τελευταίων δεκαετιών. Πέρα από τις πειραματικές επιτυχίες, σε θεωρητική βάση, οι κυριότεροι λόγοι που το καθιστούν ικανοποιητικό μοντέλο περιγραφής της φύσης του μικρόκοσμου, είναι οι εξής:

- Το SM είναι μια θεωρία βαθμίδας που σημαίνει ότι άπαξ και πραγματοποιηθεί η φερμιονική ανάθεση, όλες οι αλληλεπιδράσεις είναι καλά ορισμένες.
- Το SM είναι μια επανακανονικοποιήσιμη θεωρία, γεγονός το οποίο του προσδίδει προβλεπτική ισχύ.
- Τα πειραματικά δεδομένα φορτισμένων και ουδέτερων ρευμάτων βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις.
- Στο SM έχουμε ανάμιξη δύο διαφορετικών αλληλεπιδράσεων, της ασθενούς με την ηλεκτρομαγνητική, γεγονός που δείχνει μια πορεία προς την πολυπλοκότητα ενοποίησης.
- Ο τομέας του Higgs περιορίζεται στην οικονομική επιλογή μόλις της μίας διπλέτας με την οποία πραγματοποιείται το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας της ομάδας  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  στην  $U(1)_{em}$  και μας παρέχει όλες τις φερμιονικές μάζες.
- Στο επίπεδο χαμηλότερης τάξης της θεωρίας διαταραχών (tree level) δεν παρατηρείται ουδέτερο ρεύμα αλλαγής της γεύσης σύμφωνα με τον GIM μηχανισμό. Με τουλάχιστον τρεις γενιές προβλέπεται η παραβίαση της CP συμμετρίας.
- Ο βαρυονικός και ο λεπτονικός αριθμός αποτελούν αυτομάτως εκτεταμένες συμμετρίες, με τα νετρίνα να παραμένουν άμαζα.

Αυτομάτως εγείρεται το ερώτημα ότι αφού το SM προσπερνάει με επιτυχία αυτά τα λεπτά σημεία τότε ποιος ο λόγος να ψάξουμε πέρα από αυτό; Ο λόγος είναι ότι οι επιτυχίες δυστυχώς συνοδεύονται και από αποτυχίες - ελλείψεις τις οποίες δεν μπορούμε να παραβλέψουμε:

- Η κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου δεν προβλέπεται από πουθενά αφού το υπερφορτίο είναι εντελώς αυθαίρετο. Αποτελεί ιδιότητα θεμελιώδους

σημασίας, παρ'όλα αυτά το SM αδυνατεί να δώσει εξήγηση για την προέλευσή της. Επίσης η σχέση των λεπτονικών φορτίων με αυτά των κουάρκ δεν εξηγείται.

- Το SM δεν αποτελεί ενοποιημένη θεωρία αφού όπως προαναφέραμε η βαρύτητα μένει εκτός. Ωστόσο ακόμα κι αν εμμείνουμε στις υπόλοιπες τρεις αλληλεπιδράσεις, η ισχυρή αλληλεπίδραση δεν αναμιγνύεται ούτε με την ασθενή ούτε με την ηλεκτρομαγνητική με κανέναν τρόπο. Όμως, παρά την ανάμιξη που επιτυγχάνεται των δύο τελευταίων (ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση), είναι λάθος να μιλάμε για ενοποίηση, αφού η κάθε μία χαρακτηρίζεται από διαφορετική σταθερά σύζευξης ακόμα και μετά την ανάμιξή τους.
- Οι σταθερές σύζευξης των τριών αλληλεπιδράσεων διαφέρουν κατά πολύ ενώ αν επρόκειτο για μια ενοποιημένη εικόνα θα περιμέναμε την εξίσωσή τους.
- Η φερμιονική ανάθεση έγινε ad hoc. Ποιος είναι ο λόγος που τα λεπτόνια τοποθετούνται στην ίδια αναπαράσταση με τα κουάρκ ως προς το ασθενές ισοσπιν;
- Το πρόβλημα των μαζών των νετρίνων λύνεται με έναν «brute force» τρόπο. Έτσι, το  $(\nu^c)_L$  παραλείπεται από το φερμιονικό φάσμα κι έτσι αναγκάζει το νεutrίνο να παραμείνει άμαζο.
- Μεγάλο μυστήριο για το SM είναι το πρόβλημα των φερμιονικών μαζών, τα τρία χαρακτηριστικά του οποίου είναι:
  1. Διαοικογενειακό πρόβλημα: Γιατί υπάρχουν «αντίγραφα»οικογενειών τουλάχιστον τρεις φορές;
  2. Ενδοοικογενειακό πρόβλημα: Οι φερμιονικές μάζες εντός των ίδιων οικογενειών είναι εντελώς απρόβλεπτες.
  3. Οι παράμετροι του KM πίνακα, δηλαδή οι γωνίες ανάμιξης και η φάση της CP παραβίασης, εισάγονται στη θεωρία αντί να προβλέπονται αυτήν.
- Η τάξη του  $G_F$  καθορίζεται «με το χέρι». Πρέπει να ρυθμίσουμε τις παραμέτρους στο δυναμικό του Higgs ώστε η αναμενόμενη τιμή του κενού (VEV) να αναπαράγει τη σωστή τιμή του  $G_F$ .
- Όπως σε όλα τα μοντέλα που κάνουν χρήση του μηχανισμού Higgs, έτσι και στο SM επικρατεί κάποια αυθαιρεσία. Ο αριθμός και οι αναπαραστάσεις των πεδίων Higgs αποτελούν αυθαίρετες επιλογές. Το ίδιο ισχύει και για τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις αλλά και για αυτές με τα φερμιόνια.

- Δεν παρέχεται καμία εξήγηση, έστω ποιοτική, γιατί οι μάζες των κουάρκ και των λεπτονίων είναι τόσο ελαφρύτερες από αυτές των πεδίων βαθμίδας. Επίσης, τα νετρίνα είναι άμαζα λόγω της απουσίας δεξιόστροφων νετρίνων, αλλά ποιός είναι ο λόγος που εξαιρούνται του γενικού κανόνα ;
- Το σημαντικό πρόβλημα της ιεραρχίας. Το απλούστερο μοντέλο του σπασίματος της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας εμπλέκει ένα βαθμωτό σωματίδιο Higgs με μάζα μικρότερη της τάξης του  $TeV$ . Παρ' όλα αυτά, οι διορθώσεις από τα διαγράμματα βρόχων τείνουν να εκτινάξουν τη μάζα του Higgs στην πολύ ψηλότερη φυσική κλίμακα Planck  $\sim 10^{19} GeV$ , εκτός κι αν συμβεί κάποια εξαιρετικά λεπτή ρύθμιση αλληλοαναίρεσης των διορθώσεων με την tree-level τιμή. Το πρόβλημα αυτό βέβαια συμπεριλαμβάνεται στο σημείο αυτό στα πλαίσια μίας γενικότερης κριτικής πάνω στο SM αφού αποτελεί ένα σοβαρό πρόβλημα που όχι μόνο δεν λύνουν οι GUTs αλλά το επιδεινώνουν. Μια πολύ κομψή λύση παρέχεται, όπως θα δούμε παρακάτω, όταν επικαλεστούμε την υπερσυμμετρία<sup>1</sup>.

Η ανεπάρκεια λοιπόν του SM να εδραιωθεί σαν μία θεωρία ενοποίησης ανάγκασε τους επιστήμονες να κινηθούν πέρα από το SM και να το θεωρήσουν -λόγω των επιτυχιών του- ένα βήμα προς μία πιο θεμελιώδη θεωρία, η οποία να μπορεί να ανταποκριθεί στις παραπάνω προσδοκίες.

Ο Einstein πέρασε τα τελευταία του χρόνια προσπαθώντας απελπισμένα να φτάσει σε μια ενοποιημένη θεωρία της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού. Η προσπάθεια αυτή μοιάζει πλέον πρώιμη, όμως επηρέασε τόσο φιλοσοφικά όσο και ιδεολογικά τους σύγχρονους του. Εκφράζει μια ισχυρή πεποίθηση της πλειοψηφίας των φυσικών ότι η επικρατούσα ποικιλία των αλληλεπιδράσεων κάποια στιγμή σταματάει να υπάρχει και η φύση τελικά περιγράφεται από μία ενιαία θεωρία. Με άλλα λόγια, όλες οι αλληλεπιδράσεις αποκτούν την ίδια ισχύ αλληλεπίδρασης κι έτσι αρκεί για την περιγραφή τους μόνο μία σταθερά σύζευξης αίροντας το διαχωρισμό ισχυρών, ηλεκτρομαγνητικών και λοιπών αλληλεπιδράσεων, καταλήγοντας σε μία ενιαία και αδιαίρετη αλληλεπίδραση.

Όμως υπάρχουν και λογικές ενστάσεις σε αυτόν τον υπερβατικό ισχυρισμό. Πώς γίνεται οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις που στο επίπεδο του SM διαφέρουν τόσο σημαντικά, να συγχωνεύονται τελικά σε μία ενιαία. Η απάντηση που δίνεται αποτελεί τη βάση οποιασδήποτε μεγαλοενοποιημένης θεωρίας και επιτρέπει την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης σε μία ενιαία σε κάποιο υψηλότερο ενεργειακό επίπεδο: η ισχύς των διαφορετικών αλληλεπιδράσεων δεν είναι μία απόλυτη έννοια. Οι σταθερές σύζευξης άπαξ και υπολογιστούν στο ενεργειακό επίπεδο του SM δεν παγιώνονται αλλά μεταβάλλονται αργότερα λόγω της εξάρτησής τους από την ενεργειακή κλίμακα. Το επιχείρημα αυτό ήταν αρκετό για να εκτινάξει τη θεωρητική έρευνα σε ασύλληπτες ενεργειακές

---

<sup>1</sup>Βλέπε (2.1)

κλίμακες και να ανοίξει το δρόμο για τη δόμηση των μεγαλοενοποιημένων θεωριών.

### 1.1.2 Γενικά στοιχεία - Προσδοκίες από GUTs

Πριν εξειδικεύσουμε σε κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο ενοποίησης είναι φρόνιμο να αναφέρουμε αρχικά τις σημαντικές προσθήκες και βελτιώσεις που προσφέρουν γενικά οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες (GUTs) πέρα από το SM. Έπειτα, θα αναφέρουμε το - ανεξάρτητο από το μοντέλο - πρόγραμμα που ακολουθείται (συμβαδίζοντας με το SM) και θα γίνει σαφής η συνταγή δόμησης η οποία δεν παρεκκλίνει από αυτήν που ακολουθήθηκε για το χτίσιμο του καθιερωμένου προτύπου.

Αρχικά, λοιπόν, παραθέτουμε τις γενικές συνέπειες της αρχής της μεγάλης ενοποίησης και την παρουσία μίας ενιαίας σταθεράς σύζευξης χωρίς να γίνεται αναφορά σε κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο :

- Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου και συσχέτιση των φορτίων των λεπτονίων με αυτό των κουάρκ.
- Πρόβλεψη του  $\sin^2 \theta_W$ . Πρόκειται για μια ελεύθερη παράμετρο του SM, η τιμή της οποίας φιξάρεται πειραματικά. Στις GUTs η παράμετρος αυτή γίνεται μία υπολογίσιμη ποσότητα.
- Σχέση μεταξύ των φερμιονικών μαζών. Προκύπτει από τη φερμιονική ανάθεση και σε κάποιες περιπτώσεις η συσχέτιση αυτή βρίσκεται σε καλή συμφωνία με το πείραμα.
- Μη διατήρηση των  $B, L$ . Γενικά, μια τέτοια παραβίαση των  $B$ , και  $L$  συμμετριών είναι αναμενόμενη αφού όπως θα δούμε στις GUTs λεπτόνια και κουάρκ «κάθονται» στην ίδια gauge multiplet με αποτέλεσμα να υπάρχουν πεδία βαθμίδας τα οποία να μεσολαβούν μεταβάσεις μεταξύ τους.

Προφανώς εξειδικεύοντας στο εκάστοτε μοντέλο οι προσθήκες και τα πλεονεκτήματα που παρέχονται από τις GUTs πληθύνονται. Τώρα θα αναφέρουμε επιγραμματικά το πρόγραμμα που θα ακολουθήσουμε για το χτίσιμο του μοντέλου μας :

- Διαλέγουμε μια κατάλληλη ομάδα βαθμίδας  $G$ . Αυτή μέσω της απαίτησης της τοπικής αναλλοιωτικότητας μας παρέχει τα σπιν-1 μποζόνια βαθμίδας του μοντέλου.
- Διαλέγουμε την αναπαράσταση των φερμιονίων έτσι ώστε να αναδύεται η δομή του SM στο επίπεδο χαμηλών ενεργειών. Η σύζευξη των φερμιονίων με τα πεδία βαθμίδας δίνεται από την απαίτηση της τοπικά αναλλοιώτης βαθμίδας.

- Διαλέγουμε την αναπαράσταση των βαθμωτών πεδίων έτσι ώστε να δίνει φαινομενολογικά αποδεκτό πρόγραμμα σπασίματος της συμμετρίας της  $G$  στο  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .
- Προσδιορίζουμε τις συζεύξεις Yukawa στη θεωρία εξασφαλίζοντας τις αποδεκτές φερμιονικές μάζες μετά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.

Μία επιλογή -υπακούοντας στους παραπάνω κανόνες- είναι το minimal  $SU(5)$  μοντέλο το οποίο αρχικά αναπτύχθηκε από τους Glashow και Georgi (1974). Θα μελετήσουμε λεπτομερώς το μοντέλο αυτό αφενός επειδή εμπεριέχει τη γενική δομή που συναντάται στα διάφορα μεγαλοενοποιημένα μοντέλα κι αφετέρου επειδή οι φαινομενολογικές του συνέπειες έχουν μελετηθεί εκτεταμένα. Είναι γεγονός ότι μόνο στη minimal εκδοχή οι προβλέψεις μπορούν να είναι ακριβείς και παρ' όλο που δεν υπάρχει κάποιος a priori λόγος ώστε το απλούστερο μοντέλο να είναι και ρεαλιστικό, η επιτυχία του απλού μοντέλου του SM μας ενθαρρύνει να εξετάσουμε τις minimal μεγαλοενοποιημένες επεκτάσεις του. Στο υποκεφάλαιο λοιπόν που ακολουθεί, θα εξετάσουμε τα επιχειρήματα με τα οποία αναπτύχθηκε το πρώτο αυτό μοντέλο μεγαλοενοποιημένης θεωρίας όπου το SM υπεισέρχεται σε μια απλή ομάδα, την  $SU(5)$ .

### 1.1.3 Επιλογή του gauge group. Γιατί $SU(5)$ ;

Ποιές είναι όμως οι απαιτήσεις τις οποίες θα πρέπει να πληροί μια ομάδα  $G$  ώστε να αποτελεί έναν βιώσιμο υποψήφιο για ένα μεγαλοενοποιημένο μοντέλο. Με βάση ποιά επιχειρήματα καταλήγουμε στην ομάδα  $SU(5)$ . Καταρχήν, επειδή η ομάδα του SM έχει 4 διαγώνιους γεννήτορες και πρέπει να εμβαπτίζεται στην  $G$ , καταλήγουμε ότι η  $G$  είναι τουλάχιστον τάξης 4. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ομάδων τάξης ίση με 4 οι οποίες να είναι είτε απλές (περιγραφή από μια σταθερά σύζευξης) είτε γινόμενο ταυτοτικών απλών ομάδων των οποίων οι σταθερές σύζευξης μπορούν να εξισωθούν μέσω μίας διακριτής συμμετρίας. Οι υποψήφιοι είναι:  $[SU(2)]^4$ ,  $[O(5)]^2$ ,  $[SU(3)]^2$ ,  $[G_2]^2$ ,  $O(8)$ ,  $O(9)$ ,  $Sp(8)$ ,  $F_4$  και  $SU(5)$ . Οι πρώτες δύο θεωρούνται ακατάλληλες διότι δεν περιέχουν την  $SU(3)$  σαν υποομάδα τους. Η  $[SU(3)]^2$  παρ' όλο που περιέχει την  $SU(3)$  είναι επίσης ακατάλληλη αφού αν εμβαπτίσουμε στη δεύτερη  $SU(3)$  την υποομάδα  $SU(2) \times U(1)$  θα σημαίνει ότι ο τελεστής του φορτίου θα είναι ένας άχνος γεννήτορας της  $SU(3)$  που σημαίνει ότι το άθροισμα των φορτίων όλων των κουάρκ θα είναι μηδέν, κάτι που δεν προβλέπεται από τη δομή των γενιών του σωματιδιακού φάσματος. Από τις ομάδες που απομένουν, μόνο η  $SU(5)$  κατέχει συζυγείς αναπαραστάσεις. Αν η ομάδα του μοντέλου μας είχε μόνο πραγματικές αναπαραστάσεις, τότε θα ήταν αδύνατη η εισαγωγή φερμιονικών όρων μάζας στη λαγκρατζιανή χωρίς να παραβιάζεται η gauge invariance. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η μόνη υποψήφια ομάδα που περνάει όλα τα τεστ είναι η  $SU(5)$ . Είναι λογικό λοιπόν, πριν το χτίσιμο του μεγαλοενοποιημένου



μοντέλου  $SU(5)$  να εξετάσουμε τη δομή και τις ιδιότητες της ομάδας που θα χρησιμοποιήσουμε.

## 1.2 Η ομάδα $SU(5)$ - Άλγεβρα $A_4$

Η  $SU(5)$  (Special Unitary) είναι η ομάδα που αποτελείται από το σύνολο των μοναδιακών  $5 \times 5$  πινάκων ( $U^\dagger = U^{-1}$ ), οι οποίοι έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα, εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων. Ανήκει στην κατηγορία των Ομάδων Lie που σημαίνει ότι οι γεννήτορές της σχηματίζουν μια μεταθετική άλγεβρα, (Α.40). Η άλγεβρα Lie της ομάδας  $SU(5)$  ονομάζεται άλγεβρα  $A_4$ . Η  $SU(5)$  έχει  $5^2 - 1 = 24$  γεννήτορες από τους οποίους 4 είναι οι γεννήτορες Cartan (διαγώνιοι, ερμιτιανοί) οι οποίοι σχηματίζουν μια αβελιανή υποάλγεβρα. Από την (Α.159) υπολογίζουμε τα στοιχεία πίνακα από τα οποία αποτελούνται οι τέσσερις γεννήτορες. Η παραπάνω φόρμουλα, (Α.159), για τον πρώτο γεννήτορα Cartan ( $m = 1$ ), δουλεύει ως εξής:

$$\begin{aligned} [H_1]_{11} &= \frac{1}{2} (\delta_{11}\delta_{11} - \delta_{12}\delta_{12}) = \frac{1}{2}, \\ [H_1]_{12} &= \frac{1}{2} (\delta_{11}\delta_{21} - \delta_{12}\delta_{22}) = 0, \\ &\vdots \\ [H_1]_{22} &= \frac{1}{2} (\delta_{21}\delta_{21} - \delta_{22}\delta_{22}) = -\frac{1}{2}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία για τον πρώτο γεννήτορα και επαναλαμβάνοντάς την για τους υπόλοιπους τρεις, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_3 &= \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_4 &= \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Αυτοί είναι οι τέσσερις ερμιτιανοί πίνακες των γεννητόρων στη θεμελιώδη αναπαράσταση πέμπτης τάξης. Επίσης, φέρουν την πολύτιμη ιδιότητα ότι είναι άιχνοι σύμφωνα με το θεώρημα Α.5.1. Φυσικά, εφόσον οι γεννήτορες Cartan μετατίθενται, αυτό σημαίνει ότι έχουν κοινό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων. Αν οι

$H_i$  δράσουν πάνω σε μία ιδιοκατάστασή τους  $|\mu\rangle$ , τότε παίρνουμε τις ιδιοτιμές τους, δηλαδή τα βάρη τους:

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle, \quad (1.2)$$

Οι ιδιοτιμές αυτές των  $H_i$  είναι πραγματικές, ως οφείλουν άλλωστε ως ιδιοτιμές ερμιτιανών τελεστών. Αφού οι πίνακες είναι ήδη διαγώνιοι είναι προφανές ότι οι ιδιοτιμές τους (τα βάρη τους) θα είναι:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \\ \mu_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{2}{\sqrt{12}}, 0, 0, \\ \mu_3 &= \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, -\frac{3}{\sqrt{24}}, 0, \\ \mu_4 &= \frac{1}{\sqrt{40}}, \frac{1}{\sqrt{40}}, \frac{1}{\sqrt{40}}, \frac{1}{\sqrt{40}}, -\frac{4}{\sqrt{40}}, 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου οι εκφυλισμένες τιμές είναι ρητά εκπεφρασμένες. Σχηματίζονται λοιπόν τα πέντε τετραδιάστατα διανύσματα βάρους με συνιστώσες τα  $\mu_i$ :

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_1 &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \vec{\mu}_2 &= \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \vec{\mu}_3 &= \left( 0, -\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \vec{\mu}_4 &= \left( 0, 0, -\frac{3}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \vec{\mu}_5 &= \left( 0, 0, 0, -\frac{4}{\sqrt{40}} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Για να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας πρέπει να πραγματοποιήσουμε έναν διαχωρισμό των βαρών ως προς τη θετικότητα τους. Αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας τη σύμβαση ένα βάρος να είναι θετικό, όταν η τελευταία μη μηδενική συνιστώσα του είναι θετική<sup>2</sup>. Με βάση τον ορισμό αυτόν, μπορούμε να ορίσουμε τη διάταξη των διανυσμάτων βάρους κατά τον προφανή τρόπο

$$\mu_i > \mu_j, \text{ αν } \mu_i - \mu_j > 0. \quad (1.5)$$

Συμπεραίνουμε άμεσα ότι για τα βάρη της (1.4) θα ισχύει:

$$\vec{\mu}_1 > \vec{\mu}_2 > \vec{\mu}_3 > \vec{\mu}_4 > \vec{\mu}_5, \quad (1.6)$$

<sup>2</sup>Στο παράρτημα θεωρήσαμε την αντίστροφη σύμβαση περί θετικότητας, ωστόσο αυτό δεν αλλοιώνει τα αποτελέσματά μας.

από όπου συμπεραίνουμε ότι το  $\mu_1$  είναι το μέγιστο βάρος της αναπαράστασης.

Έπειτα, πρέπει να βρούμε τα διανύσματα των απλών ριζών της άλγεβρας  $A_4$  οι οποίες υπολογίζονται από την (Α'.165). Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mu_1 - \mu_2 = (1, 0, 0, 0), & \alpha_2 &= \mu_2 - \mu_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{\sqrt{12}}, 0, 0\right), \\ \alpha_3 &= \mu_3 - \mu_4 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{4}{24}, 0\right), & \alpha_4 &= \mu_4 - \mu_5 = \left(0, 0, -\frac{3}{\sqrt{24}}, \frac{5}{\sqrt{40}}\right).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Πλέον, μέσω των απλών ριζών θα μπορούμε να εκφράζουμε τις αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  σε όρους συντελεστών Dynkin. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας την (Α'.109), βρίσκουμε τους συντελεστές Dynkin

$$\begin{aligned}j = 1 & : \frac{2\alpha_1\mu_1}{\alpha_1^2} = 1, & j = 2 & : \frac{2\alpha_2\mu_1}{\alpha_2^2} = 0, \\ j = 3 & : \frac{2\alpha_3\mu_1}{\alpha_3^2} = 0, & j = 4 & : \frac{2\alpha_4\mu_1}{\alpha_4^2} = 0,\end{aligned}\tag{1.8}$$

όπου  $\alpha_i$  και  $\mu_i$  είναι τα διανύσματα που υπολογίσαμε στις σχέσεις (1.7) και (1.4) αντίστοιχα. Άρα η θεμελιώδης αναπαράσταση (με μέγιστο βάρος ( $\mu_1 = (1, 0, 0, 0)$ )) θα γράφεται σε όρους συντελεστών Dynkin σαν  $(1, 0, 0, 0)$  (η ταύτιση τους είναι συμπωματική).

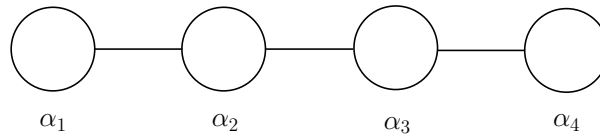
Η εύρεση των απλών ριζών της άλγεβρας  $A_4$  πέρα από τη δυνατότητα που μας έδωσε να εκφράσουμε τις αναπαραστάσεις με τη βολική γραφή των συντελεστών Dynkin, μας προσδίδει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τον πίνακα Cartan της  $A_4$  μέσω της (Α'.105):

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{2\alpha_1\alpha_1}{\alpha_1^2} = 2, & A_{12} &= \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2^2} = -1, \\ &\vdots & & \\ A_{33} &= \frac{2\alpha_3\alpha_3}{\alpha_3^2} = 2, & A_{34} &= \frac{2\alpha_3\alpha_4}{\alpha_4^2} = -1, \\ &\vdots & & \\ A_{43} &= \frac{2\alpha_4\alpha_3}{\alpha_3^2} = -1, & A_{44} &= \frac{2\alpha_4\alpha_4}{\alpha_4^2} = 2.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Επομένως, ο πίνακας Cartan της ομάδας  $SU(5)$  είναι ένας πίνακας  $4 \times 4$  (όπως ήταν αναμενόμενο) και διαμορφώνεται τελικά ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\tag{1.10}$$

Σύμφωνα λοιπόν τώρα με τους κανόνες πάνω που βρίσκονται από την (Α'.106), μπορούμε να παραγάγουμε από τον πίνακα Cartan το αντίστοιχο διάγραμμα Dynkin της απλής άλγεβρας Lie  $A_4$ . Το διάγραμμα αυτό θα αποτελείται από 4 κύκλους -αφού έχουμε ισάριθμες απλές ρίζες- οι οποίοι θα συνδέονται με μονές γραμμές αφού όλα τα γινόμενα  $A_{ij}A_{ji}$  του πίνακα (1.10) είναι ίσα με τη μονάδα. Επίσης δε χρειάζεται να θέσουμε κάποιον προσανατολισμό επειδή τα μη μηδενικά στοιχεία  $A_{ij}$  είναι ίσα με τα συμμετρικά τους. Το διάγραμμα Dynkin που κατασκευάζεται εν τέλει είναι:



Εικόνα 1.1: Οι απλές ρίζες της  $SU(5)$  στο διάγραμμα Dynkin.

Φυσικά, θα μπορούσαμε να είχαμε εκτελέσει την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, μέσω του διαγράμματος Dynkin να πάρουμε τον αντίστοιχο πίνακα Cartan.

Συνεχίζοντας, γενικά ισχύει -εξ' ορισμού- ότι από τον πίνακα Cartan η κάθε γραμμή  $j$  αποτελείται ουσιαστικά από τις  $q_i - p_i$  τιμές της απλής ρίζας  $\alpha_j$ , όπως υποδηλώνει η (Α'.104). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις απλές ρίζες σε συμβολισμό των συντελεστών Dynkin, όπως φαίνεται παρακάτω<sup>3</sup>:

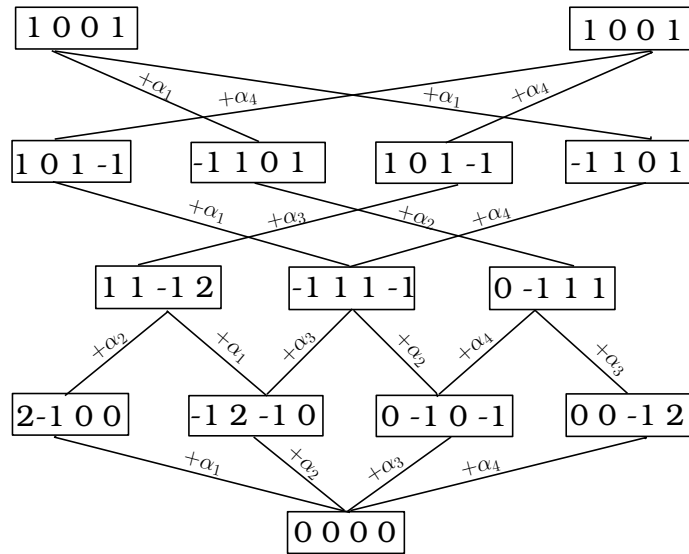
$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Η αλλαγή του συμβολισμού αποσκοπεί στην ευκολότερη εύρεση των υπόλοιπων ριζών της άλγεβρας μέσω της διαδικασίας που ακολουθήσαμε και για την περίπτωση της  $SU(3)$ , όπως φαίνεται στην εικόνα (Α'.6). Ο συνολικός αριθμός των ριζών είναι  $n(n-1)$ , που σημαίνει ότι στην περίπτωσή μας, όπου  $n=5$ , θα έχουμε συνολικά (συμπεριλαμβανομένων και των απλών ριζών) 20 ρίζες. Τις ρίζες αυτές θα τις υπολογίσουμε δρώντας ουσιαστικά με τους τελεστές αναβάθισης  $E_{\alpha_i}$  «κλείνοντας» κάθε φορά τις  $SU(2)$  αναπαραστάσεις που προκύπτουν<sup>4</sup>:

Από το παραπάνω οικοδόμημα κατασκευάζουμε τη λίστα των ριζών της άλγε-

<sup>3</sup>Οι ρίζες σε συμβολισμό Dynkin είναι τοποθετημένες σε πλαίσια για να προοικονομήσουν τη διαδικασία εύρεσης ριζών που αναλύσαμε σε βάθος στο τέλος του υποκεφαλαίου 4.8 του παραρτήματος.

<sup>4</sup>Για αναλυτική επεξήγηση της διαδικασίας βλέπε παράρτημα στο τέλος του 1.8



Εικόνα 1.2: Εύρεση των ριζών της  $SU(5)$ .

βρας:

$$\begin{aligned}
 \alpha_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{\sqrt{12}}, 0, 0 \right), \\
 \alpha_6 &= \alpha_2 + \alpha_3 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{4}{\sqrt{24}}, 0 \right), \\
 \alpha_7 &= \alpha_3 + \alpha_4 = \left( 0, -\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\
 \alpha_8 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{4}{\sqrt{24}}, 0 \right), \\
 \alpha_9 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\
 \alpha_{10} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\
 \alpha_{11} &= -\alpha_1 = (-1, 0, 0, 0), \\
 \alpha_{12} &= -\alpha_2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{3}{\sqrt{12}}, 0, 0 \right), \\
 \alpha_{13} &= -\alpha_3 = \left( 0, \frac{2}{\sqrt{12}}, -\frac{4}{\sqrt{24}}, 0 \right), \\
 \alpha_{14} &= -\alpha_4 = \left( 0, 0, \frac{3}{\sqrt{24}}, -\frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\
 \alpha_{15} &= -\alpha_5 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{3}{\sqrt{12}}, 0, 0 \right), \\
 \alpha_{16} &= -\alpha_6 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{4}{\sqrt{24}}, 0 \right), \\
 \alpha_{17} &= -\alpha_7 = \left( 0, \frac{2}{\sqrt{12}}, -\frac{211}{\sqrt{24}}, -\frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\
 \alpha_{18} &= -\alpha_8 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{4}{\sqrt{24}}, 0 \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{19} = -\alpha_9 &= \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{24}}, -\frac{5}{\sqrt{40}} \right), \\ \alpha_{20} = -\alpha_{10} &= \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{24}}, -\frac{5}{\sqrt{40}} \right),\end{aligned}\tag{1.12}$$

Οι πρώτες 4 ρίζες παραλείπονται από τη λίστα γιατί είναι οι απλές ρίζες οι οποίες έχουν ήδη βρεθεί στην (1.7). Επίσης, αποδεικνύεται ότι οι ρίζες με τους ίδιους συντελεστές, ενώ έχουν διαφορετικό παρελθόν δεν είναι γραμμικές ανεξάρτητες επομένως δεν τις διπλομετρούμε.

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει όλες τις ρίζες της άλγεβρας μπορούμε πλέον να περάσουμε στην εύρεση των θεμελιωδών βαρών πάνω στα οποία μπορούμε να «απλώσουμε» τα υπόλοιπα βάρη, δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε τα θεμελιώδη βάρη σαν μία πλήρη βάση. Επίσης, παίρνοντας σαν μέγιστα βάρη τα θεμελιώδη βάρη, θα μπορέσουμε να εξάγουμε τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις της ομάδας. Τα θεμελιώδη βάρη για μία τυχαία ομάδα  $SU(N)$  δίνονται από την (Α.167), επομένως στην περίπτωση μας, ( $N = 5$ ), έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu_1^f &= \mu_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \mu_2^f &= \mu_1 + \mu_2 = 2 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \mu_3^f &= \mu_1 + \mu_2 = 3 \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{24}}, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \mu_4^f &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_4 = 4 \left( 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{40}} \right), \\ \mu_5^f &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_5 = (0, 0, 0, 0).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Μεταφράζουμε λοιπόν τα παραπάνω διανύσματα των θεμελιωδών βαρών σε όρους των συντελεστών Dynkin κάνοντας χρήση της (Α.110):

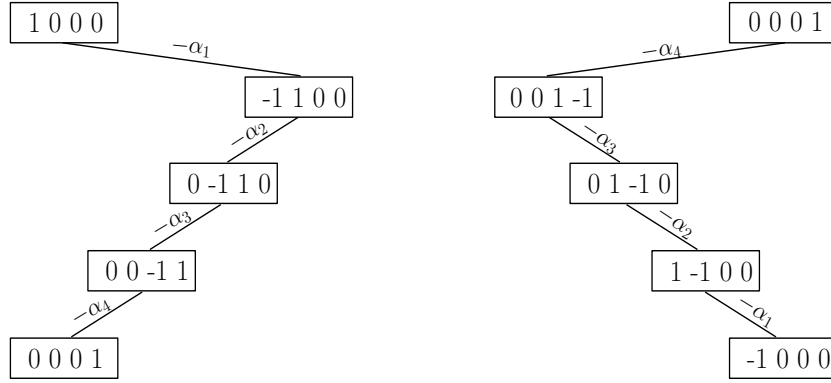
$$\begin{aligned}\mu_1^f &= (1, 0, 0, 0), & \mu_2^f &= (0, 1, 0, 0), \\ \mu_3^f &= (0, 0, 1, 0), & \mu_4^f &= (0, 0, 0, 1).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Οι αναπαραστάσεις λοιπόν που έχουν για μέγιστα βάρη τα θεμελιώδη βάρη μεταφράζονται σε Young tableaux ως εξής:

$$\square, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},\tag{1.15}$$

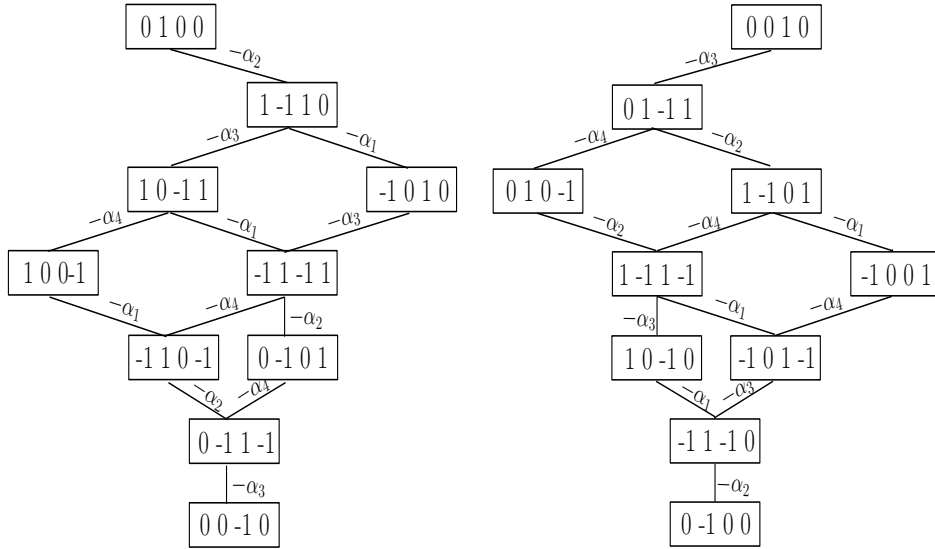
και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο factors over hooks, βρίσκουμε ότι οι διαστάσεις τους είναι 5, 10, 10, 5, αντίστοιχα.

Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα βάρη των θεμελιωδών αναπαράστασεων (κι έπειτα και όποιων άλλων χρειάζεται):



(α) Τα βάρη της  $A_4$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(1, 0, 0, 0)$ .

(β) Τα βάρη της  $A_4$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(0, 0, 0, 1)$ .



(γ) Τα βάρη της  $A_4$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(0, 1, 0, 0)$ .

(δ) Τα βάρη της  $A_4$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(0, 0, 1, 0)$ .

Εικόνα 1.3: Εύρεση των βαρών των θεμελιωδών αναπαράστασεων της  $A_4$ .

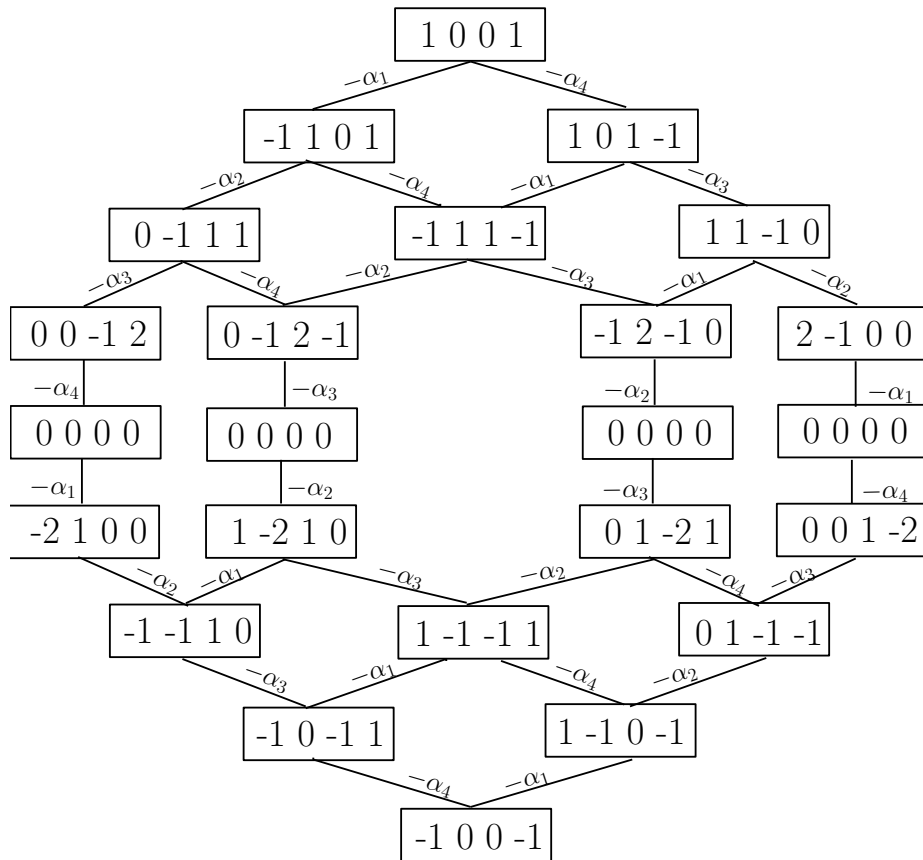
Η αμέσως επόμενη -ως προς τη σημασία της- αναπαράσταση της  $SU(5)$  για το χτίσιμο του ομώνυμου μεγαλοενοποιημένου μοντέλου είναι η adjoint αναπαράσταση. Η πραγματική αυτή αναπαράσταση δίνεται, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του παραρτήματος (στο τέλος του 4.9), σε όρους συντελεστών Dynkin σαν  $(1, 0, 0, 1)$ . Βάσει του γενικού κανόνα που μας υπαγορεύει η εικόνα (Α.12), η adjoint αναπαράσταση μεταφράζεται πολύ εύκολα στο Young

ταμπλώ που της αντιστοιχεί, δηλαδή :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad (1.16)$$

όπου αριθμήσαμε κατάλληλα τα κουτάκια έτσι ώστε μέσω της μεθόδου factors over hooks να βρούμε τη διάστασή της. Πιο συγκεκριμένα:  $d = F/H = (5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)/(2 \cdot 3 \cdot 5) = 24$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η διάσταση της adjoint αναπαράστασης είναι ίση με 24, ίση δηλαδή με τον αριθμό των γεννητόρων της ομάδας όπως ήταν αναμενόμενο.

Τώρα, μπορούμε να στήσουμε ένα ανάλογο οικοδόμημα με αυτά των θεμελιωδών αναπαραστάσεων για να βρούμε όλα τα βάρη της adjoint αναπαράστασης. Δηλαδή,



Εικόνα 1.4: Εύρεση των βαρών της 24 αναπαράστασης της  $SU(5)$ .

Αναλόγως επεξεργαζόμαστε και τις υπόλοιπες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας.



Συνεχίζοντας, πρέπει να αναπτύξουμε τις αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  σε ευθύ άθροισμα των αναπαραστάσεων των υποομάδων της<sup>5</sup>. Αυτό αρχικά επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των Young tableaux μέσω του μηχανισμού  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1) \in SU(N+M)$  τον οποίο αναλύσαμε εκτενώς στο υποκεφάλαιο 4.10 του παραρτήματος. Εκεί παρατίθενται σαν παραδείγματα τα αναπτύγματα των αναπαραστάσεων  $5, \bar{5}, 24$  στις (A.191), (A.192) και (A.195) αντίστοιχα. Επομένως, θα συνεχίσουμε με την εύρεση των αναπτυγμάτων ακόμα δύο αναπαραστάσεων, των  $10, \bar{10}$ , που θα μας χρησιμεύσουν αργότερα.

- Για την αναπαράσταση  $(0, 1, 0, 0)$  ή αλλιώς  $10$  έχουμε:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \bullet \right) \oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left( \bullet \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right). \quad (1.17)$$

Άρα ο κανόνας διακλάδωσης για την  $10$  θα είναι:

$$10 = (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1). \quad (1.18)$$

- Επίσης για τη συζυγή της αναπαράσταση  $\bar{10}$  (ή σε όρους Dynkin συντελεστών  $(0, 0, 1, 0)$ ) θα ισχύει απλά:

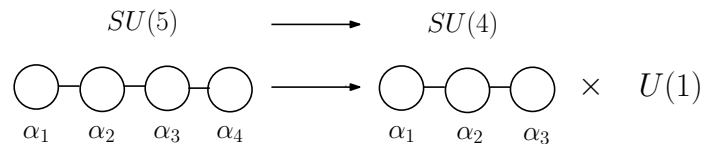
$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \bullet \right) \oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left( \bullet \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \quad (1.19)$$

Άρα, ο κανόνας διακλάδωσης της  $\bar{10}$  θα είναι:

$$\bar{10} = (3, 1) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (1, 1). \quad (1.20)$$

Γενικά, τους κανόνες αυτούς μπορούμε να τους εξαγάγουμε μέσω των διαγραμμάτων Dynkin. Όπως έχουμε αναλύσει στο τέλος του παραρτήματος, αν αποκόψουμε κάποιον κύκλο - δηλαδή κάποια ρίζα - τότε από την αρχική μας άλγεβρα παίρνουμε μια maximal υποάλγεβρα αρκεί να αποζημιώσουμε την απωλεσθείσα ρίζα με μια  $U(1)$  άλγεβρα για την αποκατάσταση του rank. Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση της  $A_4$  που μας ενδιαφέρει, ξεκινώντας από την εικόνα (1.1), θα έχουμε:

- Αν διαγράψουμε την τελευταία ρίζα από το διάγραμμα της εικόνας (1.1), τότε παίρνουμε:



Εικόνα 1.5: Εύρεση maximal υποάλγεβρας της  $SU(5)$  με τη βοήθεια του διαγράμματος Dynkin.

<sup>5</sup>Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή σαν branching rule (κανόνας διακλάδωσης).

- Ενώ αν διαγράψουμε την τρίτη ρίζα της ίδιας εικόνας, θα προκύψει:

$$\begin{array}{ccc}
 SU(5) & \longrightarrow & SU(3) \times SU(2) \\
 \begin{array}{cccc} \bigcirc & \text{---} & \bigcirc & \text{---} & \bigcirc & \text{---} & \bigcirc \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc} \bigcirc & \text{---} & \bigcirc & & \bigcirc \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_4 \end{array} \times U(1)
 \end{array}$$

Εικόνα 1.6: Εύρεση maximal υποάλγεβρας της  $SU(5)$  με τη βοήθεια του διαγράμματος Dynkin.

- Η διαγραφή των ριζών  $\alpha_1$  ή  $\alpha_2$  δεν παράγει κανένα καινούριο διάγραμμα Dynkin (λόγω συμμετρίας) και για το λόγο αυτό παραλείπονται.

Είδαμε λοιπόν, σε επίπεδο αλγεβρών, ότι πήραμε δύο διαφορετικές maximal υποάλγεβρες:

$$SU(5) \supset SU(4) \times U(1) \quad (1.21)$$

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (1.22)$$

Από αυτές τις δύο θα δουλέψουμε με τη δεύτερη, (1.22), καθώς η υποομάδα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  παραπέμπει αυτομάτως στην ομάδα του Καθιερωμένου Προτύπου.

Συνεπώς, περνούμε τώρα στο επίπεδο των αναπαραστάσεων να δούμε πώς αυτές διαμορφώνονται μετά από τη διαγραφή της  $\alpha_3$  ρίζας. Χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα βαρών των αναπαραστάσεων της  $SU(5)$ , διαγράφουμε το τρίτο στοιχείο και από τα υπόλοιπα προσπαθούμε να αναγνωρίσουμε τα βάρη των αναπαραστάσεων των υποομάδων της μέσω των αντίστοιχων διαγραμμάτων τους. Δηλαδή:

- Ξεκινάμε από την 5 αναπαράσταση. Στην πρώτη στήλη της εικόνας δίνονται τα βάρη της, στη δεύτερη πώς αυτά διαμορφώνονται κατά τη διαγραφή και στην τρίτη οι αναπαραστάσεις των υποομάδων της  $SU(5)$  τις οποίες ταυτοποιούμε από τη δεύτερη στήλη:

$$\begin{array}{ccc|c}
(1 \ 0 \ 0 \ 0) & (1 \ 0) & (0) & \\
(-1 \ 1 \ 0 \ 0) & (-1 \ 1) & (0) & \rightarrow \\
(0 \ -1 \ 1 \ 0) & (0 \ -1) & (0) & \\
\hline
(0 \ 0 \ 1 \ 1) & (0 \ 0) & (1) & \\
(0 \ 0 \ 0 \ -1) & (0 \ 0) & (-1) & \rightarrow
\end{array}
\begin{array}{l}
SU(3) \text{ triplet \& } \\
SU(2) \text{ singlet} \\
\\
SU(3) \text{ singlet \& } \\
SU(2) \text{ doublet}
\end{array}$$

Εικόνα 1.7: Εύρεση των αναπαράστασεων των υποομάδων με της 5.

Παρατηρούμε ότι η ταυτοποίηση έγινε αβίαστα με απλή εποπτεία των διαγραμμάτων των βαρών των  $SU(3)$  και  $SU(2)$ , από τις εικόνες (Α'.9α') και (Α'.1) (για τις ειδικές περιπτώσεις όπου  $j = 0$  και  $j = 1$  αντίστοιχα).  
Συνεπώς:

$$5 = (3, 1) \oplus (1, 2) \quad (1.23)$$

- Αναλόγως πορευόμαστε και για την  $\bar{5}$ :

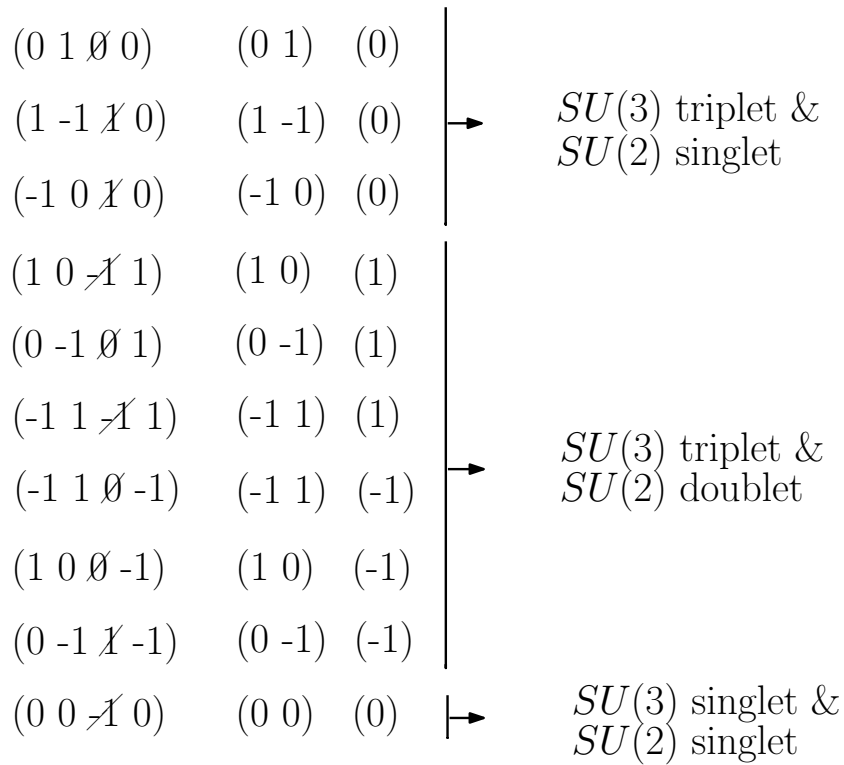
$$\begin{array}{ccc|c}
(0 \ 0 \ 0 \ 1) & (0 \ 0) & (1) & \\
(0 \ 0 \ 1 \ -1) & (0 \ 0) & (-1) & \rightarrow \\
\hline
(0 \ 1 \ 1 \ 0) & (0 \ 1) & (0) & \\
(1 \ -1 \ 0 \ 0) & (1 \ -1) & (0) & \rightarrow \\
(-1 \ 0 \ 0 \ 0) & (-1 \ 0) & (0) &
\end{array}
\begin{array}{l}
SU(3) \text{ singlet \& } \\
SU(2) \text{ doublet} \\
\\
SU(3) \text{ triplet \& } \\
SU(2) \text{ singlet}
\end{array}$$

Εικόνα 1.8: Εύρεση των αναπαράστασεων των υποομάδων με αρχική την  $\bar{5}$ .

Ξανά, ταυτοποιήσαμε τα βάρη που προέκυψαν με τα βάρη αναπαράστασεων των υποομάδων απλά συγκρίνοντας με τα κατάλληλα διαγράμματα, (Α'.9β') και (Α'.1) (για τις περιπτώσεις όπου  $j = 1$  και  $j = 0$  αντίστοιχα).  
Συνεπώς:

$$\bar{5} = (\bar{3}, 1) \oplus (1, 2) \quad (1.24)$$

- Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία για την 10 αναπαράσταση:



Εικόνα 1.9: Εύρεση των αναπαραστάσεων των υποομάδων με αρχική την  $\bar{5}$ .

Παρομοίως, οι αναπαραστάσεις των υποομάδων βρέθηκαν από τα διαγράμματα βαρών (Α'.9α'), (Α'.9β') και (Α'.1) (για τις περιπτώσεις όπου  $j = 1$  και  $j = 0$  αντίστοιχα). Συνεπώς:

$$10 = (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \quad (1.25)$$

- Για την  $\bar{10}$  δεν επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αλλά χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της μιγαδικής συζυγίας των αναπαραστάσεων, που σημαίνει ότι από την (1.25) προκύπτει ότι:

$$\bar{10} = (3, 1) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (1, 1) \quad (1.26)$$

- Τέλος, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για την 24 αναπαράσταση της  $SU(5)$ .

$(1\ 0\ \emptyset\ 1)$	$(1\ 0)$	$(1)$	}	→	$SU(3)$ triplet & $SU(2)$ doublet
$(1\ 0\ X\ -1)$	$(1\ 0)$	$(-1)$			
$(-1\ 1\ \emptyset\ 1)$	$(-1\ 1)$	$(1)$			
$(-1\ 1\ X\ -1)$	$(-1\ 1)$	$(-1)$			
$(0\ -1\ X\ 1)$	$(0\ -1)$	$(1)$			
$(0\ -1\ Z\ -1)$	$(0\ -1)$	$(-1)$			
$(0\ 1\ -2\ 1)$	$(0\ 1)$	$(1)$	}	→	$SU(3)$ triplet & $SU(2)$ doublet
$(1\ -1\ \cancel{X}\ 1)$	$(1\ -1)$	$(1)$			
$(-1\ 0\ \cancel{X}\ 1)$	$(-1\ 0)$	$(1)$			
$(0\ 1\ \cancel{X}\ -1)$	$(0\ 1)$	$(-1)$			
$(1\ -1\ \emptyset\ -1)$	$(1\ -1)$	$(0)$			
$(-1\ 0\ \emptyset\ -1)$	$(-1\ 0)$	$(-1)$			
$(1\ 1\ \cancel{X}\ 0)$	$(1\ 1)$	$(0)$	}	→	$SU(3)$ octaplet & $SU(2)$ singlet
$(-1\ 2\ \cancel{X}\ 0)$	$(-1\ 2)$	$(0)$			
$(2\ -1\ \emptyset\ 0)$	$(2\ -1)$	$(0)$			
$(0\ 0\ \emptyset\ 0)$	$(0\ 0)$	$(0)$			
$(0\ 0\ \emptyset\ 0)$	$(0\ 0)$	$(0)$			
$(-2\ 1\ \emptyset\ 0)$	$(-2\ 1)$	$(0)$			
$(1\ -2\ X\ 0)$	$(1\ -2)$	$(0)$	}	→	$SU(3)$ singlet & $SU(2)$ triplet
$(-1\ -1\ X\ 0)$	$(-1\ -1)$	$(0)$			
$(0\ 0\ \cancel{X}\ 2)$	$(0\ 0)$	$(2)$			
$(0\ 0\ \emptyset\ 0)$	$(0\ 0)$	$(0)$			
$(0\ 0\ X\ -2)$	$(0\ 0)$	$(-2)$			

Εικόνα 1.10: Εύρεση των αναπαριστάσεων των υποομάδων της 24.

$$24 = (8, 1) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (3, 2) \oplus (1, 3) \oplus (1, 1) \quad (1.27)$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται ο κανόνας ότι όταν εκτελούμε τον κανόνα διακλάδωσης στην adjoint αναπαράσταση μίας ομάδας, στο ανάπτυγμα περιέχονται οι adjoint αναπαραστάσεις των υποομάδων της. Συγκεκριμένα, στο ανάπτυγμα της 24 της  $SU(5)$  παίρνουμε την  $(8, 1)$  και  $(1, 3)$ , στις οποίες περιέχονται οι adjoint των  $SU(3)$  και  $SU(2)$  αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, βλέπουμε ότι οι γεννήτορες των  $SU(3)$  και  $SU(2)$  εμπεριέχονται σε αυτούς της  $SU(5)$ .

### 1.2.1 Καταστρώνοντας την GUT $SU(5)$

Η ομάδα βαθμίδας  $SU(5)$ , όπως είδαμε, έχει 24 ερμιτιανούς και άιχνους γεννήτορες,  $L_1 \dots L_{24}$ , που σημαίνει ότι ένα οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$U = \exp\left\{-i \sum_{i=1}^{24} \beta^i L^i\right\}, \quad (1.28)$$

όπου

$$L^i = \frac{\lambda^i}{2}, \quad (1.29)$$

όπου  $\lambda_j$  είναι το σύνολο των  $5 \times 5$  γενικευμένων πινάκων Gell - Mann, οι οποίοι είναι κανονικοποιημένοι σύμφωνα με τη σχέση:

$$\text{Tr}(\lambda^i \lambda^j) = 2\delta^{ij}, \quad (1.30)$$

το οποίο σημαίνει ότι οι γεννήτορες της  $SU(5)$  σύμφωνα με τη σχέση (1.29) είναι κανονικοποιημένοι ως εξής:

$$\text{Tr}(L^i L^j) = \frac{1}{2} \delta^{ij}. \quad (1.31)$$

Οι πίνακες των γεννητόρων επιλέγονται έτσι ώστε η ομάδα  $SU(3)_c$  να δρα στις τρεις πρώτες γραμμές και στήλες ενώ η ομάδα  $SU(2)_L$  να δρα στις δύο τελευταίες. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε μία τυχαία αναπαράσταση της  $SU(5)$  η οποία μπορεί να εκφραστεί σε τανυστικό συμβολισμό σαν:

$$\psi_{kl\dots}^{ij\dots} = U_m^i U_n^j U_k^s U_l^t \dots \psi_{st\dots}^{mn\dots}, \quad (1.32)$$

τότε για να τονιστεί η  $SU(3) \times SU(2)$  υποομάδα της  $SU(5)$  μπορούμε να θεωρήσουμε για τους δείκτες ότι:

$$i = (\alpha, r), \quad (1.33)$$

όπου  $\alpha$  είναι ένας δείκτης χρώματος και  $r$  ένας δείκτης ισοσπίν. Η διαμέριση αυτή των δεικτών είναι κατά κάποιο τρόπο διαισθητική - ίσως φαντάζει και λίγο αυθαίρετη - αλλά ουσιαστικά πρόκειται για μία λογική σκέψη αν εξετάσουμε το ανάπτυγμα της 5 αναπαράστασης στην (1.23), η οποία «πηγαίνει» στις θεμελιώδεις αναπαράστασεις των υποομάδων της. Έτσι, επιλέγουμε να εκφράσουμε τους γεννήτορες με ένα μέρος αυτών (οι δώδεκα πρώτοι) να αντιστοιχούν στους γεννήτορες των υποομάδων τους.

Αρχικά για τους γεννήτορες της  $SU(3)$ , έχουμε:

$$L^\alpha = \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & T^\alpha = \frac{\lambda^\alpha}{2} & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \alpha = 1 \dots 8, \quad (1.34)$$

όπου  $\lambda^\alpha$  οι πίνακες Gell - Mann και  $T^\alpha$  οι γεννήτορες της  $SU(3)$ .

Έπειτα για τους γεννήτορες της  $SU(2)$ , έχουμε:

$$L^r = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R^k = \frac{\sigma^k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right), \quad k = 1 \dots 3 \quad \& \quad r = 9 \dots 11, \quad (1.35)$$

όπου  $\sigma^k$  οι πίνακες του Pauli και  $R^k$  οι γεννήτορες της  $SU(2)$ .

Επίσης, ο γεννήτορας της  $U(1)$ <sup>6</sup> θα είναι:

$$L^{12} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Ο  $L^{12}$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας ο οποίος μετατίθεται με τους πίνακες των άλλων δύο υποομάδων.

Τέλος, υπάρχουν ακόμα 12 ερμιτιανοί γεννήτορες της  $SU(5)$  οι οποίοι δεν αντιστοιχούν σε κανέναν από τους γεννήτορες των υποομάδων της:

$$L^{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

<sup>6</sup>Γενικά ο γεννήτορας της  $U(1)$ , δηλαδή ο τελεστής του υπερφορτίου, καθορίζεται απαιτώντας:  $\hat{Y} \equiv \text{diag}(a, a, a, b, b) \cdot \sqrt{\frac{1}{2(3a^2 + 2b^2)}}$ , με  $3a = -2b$  η συνθήκη αιχνότητας. Κάνοντας την επιλογή  $a = -1$  βρίσκουμε την έκφραση του  $L^{12}$ .

$$L^{15} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{16} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

$$L^{17} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{18} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$L^{19} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{20} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$L^{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{22} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

$$L^{23} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^{24} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Έχοντας λοιπόν αναλύσει τα απαραίτητα στοιχεία της ομάδας  $SU(5)$  και των αναπαράστάσεών της, πρέπει τώρα να βρούμε τις κατάλληλες αναπαράστασεις, οι οποίες θα φιλοξενήσουν τα φερμιόνια της θεωρίας μας.

### 1.2.2 Φερμιονική ανάθεση

Για να ξεκινήσουμε τη διαδικασία ανάθεσης των φερμιονίων στις διάφορες αναπαράστασεις της  $SU(5)$ , πρέπει να επανεξετάσουμε ποιο είναι το σωματιδιακό φάσμα του SM και ποιοί κβαντικοί αριθμοί αντιστοιχούν στο κάθε σωματίδιο, δηλαδή τις αναπαράστασεις στις οποίες αυτά έχουν ήδη ανατεθεί. Τα στοιχεία αυτά μαζεμένα σε ένα πίνακα έχουν ως εξής:



Fermion Content	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \equiv \ell_L^{(i)}$	1	2	-1
$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c_\alpha \\ s_\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t_\alpha \\ b_\alpha \end{pmatrix}_L \equiv Q_L^{(i)}$	3	2	1/3
$e_R \equiv \bar{e}_L \quad \mu_R \equiv \bar{\mu}_L \quad \tau_R \equiv \bar{\tau}_L \equiv \ell_R^{(i)}$	1	1	-2
$u_R^\alpha \equiv \bar{u}_L \quad c_R^\alpha \equiv \bar{c}_L \quad t_R^\alpha \equiv \bar{t}_L \equiv U_R^{(i)}$	$\bar{3}$	1	4/3
$d_R^\alpha \equiv \bar{d}_L \quad s_R^\alpha \equiv \bar{s}_L \quad b_R^\alpha \equiv \bar{b}_L \equiv D_R^{(i)}$	$\bar{3}$	1	-2/3

Εικόνα 1.11: Το φερμιονικό φάσμα του Καθιερωμένου Προτύπου.

Παρατηρήσεις στο φερμιονικό φάσμα :

- Έχουμε 3 γενιές κουάρκ οι οποίες περιγράφονται από αναπαράστασεις μίας  $SU(3)$  ομάδας για την ακρίβεια, της  $SU(3)_c$ . Τα κουάρκ αριστερής χειραλικότητας (αριστερόστροφα (LH)<sup>7</sup>) μετασχηματίζονται κάτω από τη θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(3)_c$ , την 3, ενώ τα δεξιόστροφα (RH) σωματίδια μετασχηματίζονται κάτω από τη συζυγή θεμελιώδη αναπαράσταση,  $\bar{3}$ . Τα λεπτόνια, αριστερόστροφα και δεξιόστροφα, βλέπουμε ότι είναι singlets κάτω από την  $SU(3)_c$  -μετασχηματίζονται κάτω από την τετριμμένη αναπαράσταση-, δηλαδή δε «νιώθουν» την ισχυρή αλληλεπίδραση ως σωματίδια μη φέροντα το φορτίο του χρώματος.
- Ο διαχωρισμός των σωματιδίων που κάναμε παραπάνω σε αριστερόστροφα και δεξιόστροφα συμβαίνει σε όλα τα φερμιόνια (κουάρκ και λεπτόνια) και προκύπτει από το γεγονός ότι μετασχηματίζονται κάτω από διαφορετικές αναπαράστασεις της ομάδας του ισοσπίν  $SU(2)_L$ . Τα LH φερμιόνια μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(2)_L$ , την 2 (ισοσπίν 1/2) - γι' αυτό είναι τοποθετημένα σε διπλέτες -, ενώ τα RH μετασχηματίζονται κάτω από την τετριμμένη (ισοσπίν 0-singlets-) της  $SU(2)_L$ .

<sup>7</sup>Ενώ ο όρος αριστερόστροφα (ή δεξιόστροφα) αναφέρεται στην ελικότητα, στην περίπτωσή μας όπου τα σωματίδια είναι άμαζα η χειραλικότητα και η ελικότητα ταυτίζονται. Διάκριση στις δύο έννοιες δίνει η μάζα του φερμιονίου.

- Το υπερφορτίο  $U(1)_Y$  που παρατίθεται στην τελευταία στήλη, παίρνει «με το χέρι» τις τιμές αυτές έτσι ώστε να αναπαράγεται η σχέση:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.43)$$

η οποία δίνει τις σωστές τιμές του ηλεκτρικού φορτίου για κάθε φερμιόνιο. Αν δε θέταμε τον σύνδεσμο αυτόν, τότε το υπερφορτίο θα έπαιρνε αυθαίρετες τιμές εξ' αιτίας του αβελιανού χαρακτήρα της  $U(1)$  ομάδας.

Στην προσπάθειά μας να αντιστοιχίσουμε τα φερμιόνια σε αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  χρησιμοποιούμε μόνο αριστερόστροφα σωματίδια. Η σύμβαση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι τα φερμιόνια σε μία αναπαράσταση θα πρέπει να έχουν όλα την ίδια ελικότητα, οπότε είναι χρήσιμο να δουλεύουμε σε μία βάση συγκεκριμένης ελικότητας.

Όπως φαίνεται από την εικόνα (1.11), κάθε οικογένεια αποτελείται συνολικά από 15 LH σωματίδια και αντισωματίδια. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε αναλυτικά την πρώτη οικογένεια:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_e \\ e \end{pmatrix}_L : (1, 2), \quad \begin{pmatrix} u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L : (3, 2), \quad \bar{u}_L : (\bar{3}, 1), \\ \bar{e}_L : (1, 1), \quad \bar{d}_L^\alpha : (\bar{3}, 1), \end{aligned} \quad (1.44)$$

όπου ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στις  $SU(3)$  αναπαραστάσεις και ο δεύτερος στις  $SU(2)$ . Οπότε συνολικά έχουμε  $2 + 6 + 3 + 1 + 3 = 15$  LH σωματίδια<sup>8</sup>. Το ίδιο θα ισχύει και για τις άλλες δύο οικογένειες. Συνεπώς, σύμφωνα με την (1.44), περιμένουμε ότι τα LH φερμιόνια θα φιλοξενηθούν σε κάποια 15-διάστατη αναπαράσταση που θα αναπτύσσεται σε αναπαραστάσεις των  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  υποομάδων της ως εξής:

$$(1, 2) \oplus (3, 2) \oplus (\bar{3}, 1) \oplus (\bar{3}, 1) \oplus (1, 1). \quad (1.45)$$

Η πρώτη (και προφανής) υποψήφια αναπαράσταση της  $SU(5)$  που θα υποδεχτεί τα 15 LH φερμιόνια είναι η 15 (ή η συζυγής της,  $\bar{15}$ ). Αν το ανάπτυγμά της ως προς την  $SU(3) \times SU(2)$  ταυτίζεται με το επιθυμητό (1.45), τότε η 15 θα είναι η αναπαράσταση που αναζητούμε.

$$15 : \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \bullet & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & \bullet \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

<sup>8</sup>Για να συμπεριλάβουμε και το RH νεutrino,  $\bar{\nu}_L$ , θα πρέπει να εισαγάγουμε μία singlet αναπαράσταση που θα το φιλοξενήσει.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα αναπτύγματα των  $15$ ,  $\bar{15}$  θα είναι:

$$\begin{aligned} 15 &= (1, 3) \oplus (3, 2) \oplus (6, 1) \\ \bar{15} &= (1, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (\bar{6}, 1) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Συγκρίνοντας τα όμως με το επιθυμητό ανάπτυγμα, (1.45), βλέπουμε ασυμφωνία και αναγκάζομαστε να στραφούμε σε άλλες αναπαραστάσεις. Ξεκινάμε λοιπόν από τις απλούστερες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της  $SU(5)$ , τις θεμελιώδεις:

$$\Psi_i : 5 = (3, 1) \oplus (1, 2) \quad (1.48)$$

$$\Psi^i : \bar{5} = (\bar{3}, 1) \oplus (1, 2) \quad (1.49)$$

Παίρνουμε τώρα το αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο<sup>9</sup> της θεμελιώδους αναπαράστασης με τον εαυτό της:

$$\square \otimes_A \square = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

δηλαδή,  $5 \otimes_A 5 = 10$ . Για το λόγο αυτό -ότι προκύπτει από το αντισυμμετρικό γινόμενο της  $5$  με τον εαυτό της- η  $10$  αναπαράσταση ονομάζεται αντισυμμετρική. Το ανάπτυγμά της σε αναπαραστάσεις της υποομάδας  $SU(3) \times SU(2)$  βρίσκεται εύκολα με τη βοήθεια των Young tableaux καθώς επίσης και με τη χρήση των αναπτυγμάτων της  $5$  παίρνοντας το αντισυμμετρικό γινόμενο:

$$\begin{aligned} 5 \otimes_A 5 &= [(3, 1) \oplus (1, 2)] \otimes_A [(3, 1) \oplus (1, 2)] \\ &= (3, 1) \otimes_A (3, 1) \oplus (3, 1) \otimes_A (1, 2) \oplus (1, 2) \otimes_A (3, 1) \oplus (1, 2) \otimes_A (1, 2) \\ &= (3 \otimes_A 3, 1 \otimes_A 1) \oplus (3 \otimes_A 1, 1 \otimes_A 2) \oplus (1 \otimes_A 3, 2 \otimes_A 1) \oplus (1 \otimes_A 1, 2 \otimes_A 2) \\ &= (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι αντισυμμετρική ( $\chi_{ij} = -\chi_{ji}$ ) αναπαράσταση  $10$  αναπτύσσεται<sup>10</sup> ως εξής:

$$10 = (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \quad (1.52)$$

Το φάσμα λοιπόν όλων των LH φερμιονίων μίας γενιάς, που περιγράφεται από το ευθύ άθροισμα (1.45), βλέπουμε μέσω των (1.49), (1.52) ότι συμπίπτει με το αντίστοιχο άθροισμα των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων  $\bar{5}$ ,  $10$  της

<sup>9</sup>Το τανυστικό γινόμενο  $5 \otimes 5$  δίνει:  $\square \otimes \square = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \oplus \square\square$ , όπου όπως έχουμε δει στο 1.4 του παρατήματος το  $\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$  αντιστοιχεί σε αντισυμμετρική αναπαράσταση ενώ το  $\square\square$  αντιστοιχεί σε συμμετρική.

<sup>10</sup>Βέβαια, το ανάπτυγμα της  $10$  έχει προϋπολογιστεί με τη βοήθεια των Young tableaux, όπως φαίνεται στην (1.17).

$SU(5)$ . Η αναπαράσταση λοιπόν που φιλοξενεί τα φερμιόνια μίας γενιάς είναι η αναγωγίσιμη  $\bar{5} \oplus 10$  και η ανάθεσή τους γίνεται με τον παρακάτω τρόπο.

$$\begin{aligned} \bar{5} & : (\Psi^i)_L = (\bar{d}^1 \bar{d}^2 \bar{d}^3 e - v_e)_L \\ 10 & : (\chi_{ij})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^3 & -u^2 & u_1 & d_1 \\ -\bar{u}^3 & 0 & \bar{u}^1 & u_2 & d_2 \\ \bar{u}^2 & -\bar{u}^1 & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & \bar{e} \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -\bar{e} & 0 \end{pmatrix}_L \end{aligned} \quad (1.53)$$

Θα μπορούσαμε αντίστοιχα αντί για την  $\bar{5}$  να είχαμε διαλέξει την  $5$ , όμως σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να είχαμε «απλώσει» τα RH φερμιόνια. Εμείς πήραμε τη σύμβαση καθορισμένης ελικότητας οπότε θα πέφταμε σε αντίφαση. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή στην  $\bar{5} \oplus 10$  αναπαράσταση, γίνεται η ανάθεση των φερμιονίων των υπολοίπων γενιών του SM.

Στο μοντέλο αυτό λοιπόν βλέπουμε ότι τα κουάρκ και τα λεπτόνια συγκατοικούν σε μία και μόνο αναπαράσταση. Αυτό σημαίνει ότι ίσως συμμετέχουν σε αλληλεπιδράσεις οι οποίες να μη διατηρούν το βαρυονικό ή λεπτονικό αριθμό, αλλά να διατηρούν τη διαφορά  $B - L$ . Αυτός είναι και ο λόγος που ανοίγει ο δρόμος στη διάσπαση του πρωτονίου, του οποίου ο χρόνος ζωής μπορεί να προβλεφθεί από τη δυναμική του μοντέλου  $SU(5)$ <sup>11</sup>.

Αξίζει να τονίσουμε ότι στην προσέγγιση της μίας γενιάς οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας συμπίπτουν με αυτές των ιδιοκαταστάσεων μάζας. Όταν πάρουμε το πλήρες μοντέλο με τις τρεις γενιές, όπως αναμένεται, οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας θα είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων μάζας.

Μία αρνητική συνέπεια της φερμιονικής ανάθεσης που προηγήθηκε είναι ότι η φιλοξενία όλων των φερμιονίων ακριβώς σε μία αναγωγίσιμη αναπαράσταση της οποίας η διάσταση ταυτίζεται με τον αριθμό των φερμιονίων, δεν αφήνει χώρο για την πρόβλεψη φερμιονίων πέρα από το SM. Θα δούμε ότι για τα μποζόνια βαθμίδας δεν ισχύει κάτι παρόμοιο.

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι ισοδύναμα θα μπορούσαμε να είχαμε δουλέψει με RH σωματίδια. Σύμφωνα με τις (1.48) και (1.53), τα φερμιόνια που θα «φώλιαζαν» στη θεμελιώδη αναπαράσταση θα ήταν:

$$5 : (\Psi_i)_R = (d_1 d_2 d_3 e^+ - v_e^c)_R \quad (1.54)$$

Τέλος, επισημαίνουμε ότι έχουμε επιλέξει τη σύμβαση ότι το νεutrino συνοδεύεται από αρνητικό πρόσημο. Αυτό συνάδει με την προηγούμενη επιλογή μας ότι η  $\ell^\alpha = (v, e)_L$  μετασχηματίζεται κάτω από την 2 αναπαράσταση της  $SU(2)$  η οποία σχετίζεται με το συζυγές της  $(e, -v)_L$  μέσω του αντισυμμετρικού τανυστή  $\ell^b = \epsilon^{ab} \ell_\alpha$ . Ως τώρα έχουμε θεωρήσει την ανάθεση με γνώμονα την  $SU(3) \times SU(2)$  υποομάδα. Η ανάθεση θα ολοκληρωθεί αφού συμπεριλάβουμε το  $U(1)$  φορτίο, πράγμα το οποίο θα συμβεί έπειτα από την ανάλυση

<sup>11</sup>Θα δούμε αναλυτικά την πρόβλεψη παρακάτω στο κεφάλαιο 1.4

μίας σημαντικής συνεισφοράς του  $SU(5)$  μοντέλου, την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου.

### 1.2.3 Κβάντωση του φορτίου

Μια πολύτιμη συνεισφορά του  $SU(5)$  μοντέλου (αλλά και οποιουδήποτε άλλου μεγαλοενοποιημένου μοντέλου όπου η ενοποίηση συμβαίνει μέσω μίας απλής ομάδας Lie) είναι η ξεκάθαρη πρόβλεψη της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου (γεγονός το οποίο εξηγεί και την ουδετερότητα του ατόμου σε πολύ μεγάλη ακρίβεια). Το «δωράκι» αυτό μας χαρίζεται από τον μη αβελιανό χαρακτήρα της  $SU(5)$  ομάδας. Γενικά ισχύει ότι οι ιδιοτιμές ενός γεννήτορα μη αβελιανής απλής άλγεβρας Lie είναι διακριτές, ενώ οι ιδιοτιμές του γεννήτορα της αβελιανής ομάδας  $U(1)$  είναι συνεχείς. Αυτός είναι και ο λόγος που το SM αδυνατούσε να προβλέψει την κβάντωση του φορτίου: το υπερφορτίο παίρνει αυθαίρετες τιμές. Η σύνδεση λοιπόν του ηλεκτρικού φορτίου με το αυθαίρετο υπερφορτίο, μας εμπόδιζε να θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο.

Όμως σε αντιδιαστολή με το SM, ο τελεστής του φορτίου είναι πλέον ένας από τους άιχνους γεννήτορες της μη αβελιανής απλής ομάδας Lie,  $SU(5)$ . Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα ιδιοτιμών του θα είναι διακριτό, δηλαδή οι ιδιοτιμές του θα είναι κβαντισμένες.

Εφ'όσον το ηλεκτρικό φορτίο είναι ένας προσθετικός αριθμός, ο τελεστής  $Q$  θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διαγωνίων γεννητόρων της ομάδας. Όπως έχουμε ξαναφέρει υπάρχουν μόνο 4 - οι πίνακες Cartan - και αφού ο  $Q$  μετατίθεται με τους  $SU(3)_c$  γεννήτορες, υπό την έννοια ότι ταυτόσημα κουάρκ διαφορετικού χρώματος φέρουν το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο, η συνθήκη εξάρτησης του ηλεκτρικού φορτίου από το υπερφορτίο που δίνεται από τη σχέση (1.43) θα γίνει:

$$Q = T_3 + cT_0, \quad (1.55)$$

όπου  $T_3$  και  $T_0$  είναι οι διαγώνιοι γεννήτορες που αντιστοιχούν στις υποομάδες των  $SU(2)$  και  $U(1)$ , δηλαδή οι  $L^{11}$  και  $L^{12}$  αντίστοιχα, όπως τους ορίσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Από τη (1.55) βλέπουμε ότι για την  $SU(5)$  περίπτωση η αντίστοιχη σχέση του SM (1.43) δεν επεκτείνεται από όρους πέρα από τους ήδη παρόντες στο Weinberg - Salam μοντέλο. Ο συντελεστής  $c$  που συσχετίζει τους τελεστές  $Y$  και  $T_0$ , μπορεί να αποκτηθεί συγκρίνοντας τις τιμές του  $T_0$  στη θεμελιώδη αναπαράσταση,  $\mathbf{5}$ , όπως αυτές δίνονται από τον  $L^{12}$ , με τις τιμές του υπερφορτίου των σωματιδίων που ανατέθηκαν στην ίδια αναπαράσταση όπως δίνονται από την (1.54). Δηλαδή, παίρνοντας τις τιμές των υπερφορτίων από την τελευταία στήλη της εικόνας (1.11), καταλήγουμε ότι:

$$\frac{Y(\mathbf{5})}{2} = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1 \right) \quad (1.56)$$

και συγκρίνοντας με το γεννήτορα  $T_0$ :

$$T_0 = L^{12} = \text{diag} \left( \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{-3}{\sqrt{15}}, \frac{-3}{\sqrt{15}} \right). \quad (1.57)$$

Συνεπώς, ταυτοποιώντας:

$$\frac{Y}{2} = cT_0, \quad (1.58)$$

παίρνουμε:

$$-\frac{2}{3} = cT_0 \Rightarrow -\frac{2}{3} = c \frac{2}{\sqrt{15}} \Rightarrow c = -\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad (1.59)$$

που σημαίνει ότι η (1.55) γίνεται:

$$Q = T_3 - \sqrt{\frac{5}{3}} T_0 \quad (1.60)$$

Γιατί όμως η παρουσία του συντελεστή  $c$  κρίνεται απαραίτητη; Αυτό συμβαίνει διότι ο τελεστής  $Y/2$  είναι ο γεννήτορας της  $U(1)$  του SM, για τον οποίο δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. Όμως ο  $L^{12}$ , επειδή είναι γεννήτορας της μη αβελιανής ομάδας  $SU(5)$ , πρέπει να υπακούει και αυτός στη συνθήκη κανονικοποίησης (1.31) - όπως ακριβώς υπακούουν σε αυτήν και οι γεννήτορες των  $SU(3)$  και  $SU(2)$  στην περίπτωση του SM - η οποία, ως γνωστό, οφείλεται στο μη μεταθετικό χαρακτήρα της άλγεβρας.

Για να ελέγξουμε το αποτέλεσμα (1.59), εξετάζουμε τη σχέση (1.60) για τη θεμελιώδη αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} Q(\Psi_i) &= \left( T_3 - \sqrt{\frac{5}{3}} T_0 \right) = \left( L_{11} - \sqrt{\frac{5}{3}} L_{12} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{15}} \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \text{diag} \left( -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0 \right) \equiv Q_i \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Για τα φορτία των φερμιονίων που «φωλιάζουν» στην 5 θα ισχύει:

$$\begin{aligned} Q(d_1) &= [Q(\Psi_i)]_{11} = -\frac{1}{3} \\ Q(e^+) &= [Q(\Psi_i)]_{44} = 1 \\ Q(\bar{\nu}_e) &= [Q(\Psi_i)]_{55} = 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για την  $\bar{5}$ , βρίσκουμε ότι έχει φορτίο  $Q(\psi^i) = -Q_i \delta_{ij}$ . Επίσης, από την (1.32) βλέπουμε ότι ένας γενικός τελεστής  $\psi_{k\dots}^{ij\dots}$  έχει τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς με τον  $\psi^i \psi^j \psi_k \dots$ . Επομένως:

$$Q(\psi_{ij}) = Q_i + Q_j, \quad Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j \quad (1.63)$$

Οι ποσότητες αυτές είναι τα διαγώνια στοιχεία του  $Q$  για τις αναπαράστασεις 10 και 24 αντίστοιχα.

Πέρα όμως από την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου, μας δίνεται μια ακόμη πολύ σημαντική πρόβλεψη: η σχέση ανάμεσα στο χρώμα και το ηλεκτρικό φορτίο. Αυτό γίνεται εμφανές αν σκεφτούμε ότι ο  $Q$  είναι ένας άιχνος πίνακας. Έτσι, μέσω της (1.61) αποκτούμε:

$$\text{Tr}Q = 0 \Rightarrow 3Q_d + Q_{\bar{e}} = 0 \Rightarrow Q_d = -\frac{1}{3}Q_{\bar{e}}. \quad (1.64)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα  $d$  κουάρκ κουβαλάνε το  $1/3$  του λεπτονικού φορτίου  $e$ , και ο λόγος είναι ότι τα κουάρκ συναντώνται σε 3 χρώματα.

Από την όλη ιστορία της κβάντωσης του φορτίου στο μοντέλο  $SU(5)$ , παίρνουμε μία μπόνους πληροφορία: οι LH  $SU(2)$  διπλέτες λεπτονίων μπορούν να ταιριαστούν αποκλειστικά με RH  $SU(2)$  singlets από κουάρκ. Αν είχαμε προσπαθήσει να χωρέσουμε στη θεμελιώδη αναπαράσταση μία RH  $SU(2)$  διπλέτα λεπτονίων, ο πίνακας  $Q$  θα κατέληγε να έχει μη μηδενικό ίχνος κι οπότε θα ήταν αδύνατο να ικανοποιηθεί η απαιτούμενη συνθήκη αίχνότητας με κουάρκ και όχι αντικουάρκ. Αυτό σημαίνει ότι η  $SU(5)$  προβλέπει ότι τα RH κουάρκ είναι  $SU(2)$  singlets.

Συνοψίζοντας λοιπόν, η  $SU(5)$  θεωρία μας παρέχει μία λογική εξήγηση για την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου, για την κατανοήση των φορτίων των σωματιδίων και την ανάθεση του συγκεκριμένου υπερφορτίου στα σωματίδια στο μοντέλο του SM. Τέλος, εξηγεί το λόγο που τα RH κουάρκ είναι singlets ως προς την  $SU(2)_L$ .

#### 1.2.4 Ακύρωση των ανωμαλιών

Ανωμαλίες είναι το σπάσιμο των κλασικών συμμετριών από κβαντομηχανικές διορθώσεις ακτινοβολίας (radiative corrections), δηλαδή από διορθώσεις που προκύπτουν από τη θεωρία διαταραχών. Οι διορθώσεις αυτές προκύπτουν όταν οι ομαλοποιήσεις που απαιτούνται για να υπολογίσουμε μικρούς φερμιονικούς βρόχους διαγραμμάτων Feynman συγκρούονται με τις κλασικές συμμετρίες της θεωρίας. Ξεκινάμε με τις chiral ανωμαλίες:

Ας θεωρήσουμε τη λαγκρατζιανή  $\mathcal{L}_{qed}$ :

$$\mathcal{L}_{qed} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - e_0\gamma^\mu B_\mu - m_0)\psi, \quad (1.65)$$

όπου  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ ,  $e_0, m_0$  είναι το γυμνό φορτίο και η γυμνή μάζα αντίστοιχα και  $B_\mu$  είναι το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό.

Κάτω από έναν chiral μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\lambda\gamma_5}\psi, \quad \lambda : \text{constant} \quad (1.66)$$

ο κινητικός όρος της (1.65) παραμένει αναλλοίωτος, καθώς ο  $\gamma_5$  μετατίθεται με το  $\gamma^0\gamma^\mu$ , ενώ ο όρος μάζας δεν παραμένει. Συνεπώς, απλή εφαρμογή του

θεωρήματος της Noether θα οδηγούσε κάποιον στο να περιμένει ότι το axial - vector ρεύμα :

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (1.67)$$

που αποκτάται από τη λαγκρατζιανή πυκνότητα εφαρμόζοντας έναν τοπικό chiral μετασχηματισμό, θα έπρεπε να έχει κάποια απόκλιση που να δίνεται από τη μεταβολή κάτω από chiral μετασχηματισμό του όρου μάζας της (1.65). Στην προσέγγιση επιπέδου μιας κορυφής (tree-level approximation), αυτό είναι όντως έγκυρο. Όμως όταν κάποιος υπολογίσει το AVV διάγραμμα Feynman με ένα axial - vector και δύο vector κορυφές και επιμείνει στη διατήρηση του vector - current  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , βρίσκει σε τάξη  $e_0^2$  ότι το κλασικό θεώρημα της Noether τροποποιείται ώστε να δώσει :

$$\partial^\mu j_\mu^5(x) = 2im_0j^5(x) + \frac{e_0^2}{16\pi^2}F^{\xi\sigma}(x)F^{\tau\rho}(x)\epsilon_{\xi\sigma\tau\rho}, \quad (1.68)$$

όπου  $F^{\xi\sigma}(x) = \partial^\sigma B^\xi(x) - \partial^\xi B^\sigma(x)$  ο ταυσστής δύναμης του ηλοεκτρομαγνητικού πεδίου. Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (1.68), ο οποίος δεν αναμένεται από την εφαρμογή του θεωρήματος Noether είναι η αβελιανή axial - vector ανωμαλία, η οποία συχνά ονομάζεται Adler - Bell - Jackiw (ABJ) ανωμαλία. Επειδή η διατήρηση του vector ρεύματος μαζί με την axial - vector current ανωμαλία, υπονοεί ότι τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα ρεύματα  $j^\mu \pm j_\mu^5$  ακολουθούν την ίδια ανωμαλία, η axial vector ανωμαλία ονομάζεται συχνά και chiral ανωμαλία.

Στην QED το μποζόνιο βαθμίδας (φωτόνιο) συζεύγνυται με το vector ρεύμα κι επομένως οι ιδιότητες ανώμαλης διατήρησης δεν έχουν καμία επίδραση. Η ίδια δήλωση ισχύει και για τα γκλουόνια στην QCD, όταν μελετώνται απομονωμένα από τις άλλες αλληλεπιδράσεις. Όμως, στην ηλεκτρασθενή θεωρία που εμπεριέχει την QED σε μία θεωρία της ασθενούς αλληλεπίδρασης, τα πεδία βαθμίδας ( $W^\pm, Z^0$ ) συζεύγνυται με chiral vectors που είναι LH ή RH γραμμικοί συνδυασμοί των vector και axial - vector ρευμάτων. Στην περίπτωση αυτή η chiral anomaly οδηγεί σε προβλήματα με την επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας εκτός αν οι ανωμαλίες ακυρώνονται μεταξύ των φερμιονικών ειδών. Γράφοντας πάλι όλα τα φερμιόνια σαν LH η συνθήκη για την ακύρωση των ανωμαλιών είναι :

$$\text{Tr}(\{T_a, T_b\}T_c) = \text{Tr}(T_a T_b + T_b T_a)T_c = 0, \quad (1.69)$$

όπου  $T_a$  είναι οι πίνακες σύζευξης των μποζονίων βαθμίδας με τα LH φερμιόνια. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται στο SM χάρη στο γεγονός ότι ικανοποιούνται τρεις μη τριμμενοί κανόνες άθροισης στα φερμιονικά gauge couplings. Η ακύρωση των ανωμαλιών θέτει σημαντικούς περιορισμούς στην κατασκευή των GUTs που συνδυάζουν την ηλεκτρασθενή με την κβαντική χρωμοδυναμική. Για παράδειγμα, στην  $SU(5)$ , όλα τα φερμιόνια ανατίθενται σε μία  $5 \oplus 10$  αναπαράσταση τα οποία συνολικά - αλλά όχι ξεχωριστά - είναι ελεύθερα από ανωμαλίες.



Στην περίπτωση του  $SU(2) \times U(1)$  μοντέλου τα φερμιόνια βρίσκονται είτε σε διπλές είτε σε singlets κάτω από την  $SU(2)$ . Συνεπώς οι πίνακες  $T_a$  της (1.69) θα είναι είτε οι Pauli πίνακες  $\tau^i$  ή το  $U(1)$  υπερφορτίο. Μιας και, όπως φαίνεται παρακάτω, η  $SU(2)$  ομάδα είναι ελεύθερη από ανωμαλίες:

$$\text{Tr} \left( \{ \tau^i, \tau^j \} t^k \right) = 2\delta^{ij} \text{Tr} \tau^k = 0, \quad (1.70)$$

θα θεωρήσουμε περιπτώσεις όπου τουλάχιστον ένας από τους  $T_a$  της (1.69) είναι το υπερφορτίο  $Y$ . Επειδή κάθε μέλος μίας δεδομένης  $SU(2)$  πολλαπλέτας έχει το ίδιο υπερφορτίο, στην περίπτωση που δύο  $T_a$  είναι  $Y$ , θα ισχύει:

$$\text{Tr} (\tau^i Y Y) \sim \text{Tr} \tau^i = 0 \quad (1.71)$$

ενώ στην περίπτωση ενός  $T_a$  να είναι το  $Y$ , έχουμε:

$$\text{Tr} (\{ \tau^i, \tau^j \} Y) = \delta^{ij} \text{Tr} Y \quad (1.72)$$

Επομένως, αυτή η συνεισφορά ανωμαλίας είναι ανάλογη του ίχνους του  $Y$ , το άθροισμα δηλαδή όλων των φερμιονικών τιμών του υπερφορτίου:

$$\text{Tr} Y = \sum_i Y_i = \sum_{lept} Y + \sum_{quar} Y \quad (1.73)$$

Όμως αυτό εξαφανίζεται μετά από ακριβή υπολογισμό σε κάθε γενιά:

$$\begin{aligned} \sum_{lept} Y &= -1 \cdot 2 - 2 = -4 \\ \sum_{quar} Y &= 3 \left( \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = 4, \end{aligned} \quad (1.74)$$

όπου ο συντελεστής 3 οφείλεται στο βαθμό ελευθερίας του χρώματος. Τέλος, για την περίπτωση που όλα τα  $T_a$  της (1.69) είναι το υπερφορτίο  $Y$ , έχουμε:

$$\text{Tr} (Y Y Y) = 8 \text{Tr} (Q^3 - 3Q^2 T_3 + 3Q T_3^2 - T_3^3) \sim \text{Tr} (Q^2 T_3 - Q T_3^2) \quad (1.75)$$

επειδή  $\text{Tr} T_3^3 = 0$  και επειδή μπορούμε να αγνοήσουμε τον  $Q^3$  όρο αφού το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι vector (V) και το  $V V V$  είδος των τριγωνικών φερμιονικών βρόχων δεν έχουν ανωμαλία.

Υπολογίζουμε το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης (1.75):

$$\begin{aligned} \sum_{lept} (Q^2 T_3 - Q T_3^2) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ \sum_{quar} (Q^2 T_3 - Q T_3^2) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

οπότε οι ανωμαλίες αλληλοεξουδετερώνονται και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι αναθέσεις των φερμιονίων στις αναπαραστάσεις για την  $SU(2) \times U(1)$  είναι ελεύθερο από την ανωμαλία ABJ.

Βασικά, υπάρχει πιο εύκολος τρόπος να εξάγουμε την ακύρωση των ανωμαλιών στην περίπτωση όπου ένα  $T_a$  και έπειτα τρία  $T_a$  της (1.69) είναι  $Y$ , με τη βοήθεια της σχέσης (1.43). Συνεπώς, θα έχουμε:

- Αν ένας  $T_a$  είναι το  $Y$ , από την (1.72) θα έχουμε:

$$\text{Tr}Y \sim \text{Tr}Q \quad (1.77)$$

- Αν τρεις  $T_a$  είναι  $Y$ , από την (1.75) θα έχουμε:

$$\text{Tr}(Q^2T_3 - QT_3^2) = \text{Tr}(QT_3(Q - T_3)) \sim \text{Tr}(QT_3Y) \quad (1.78)$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την (1.43), το τελευταίο ίχνος θα γίνει:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(QT_3Y) &= \text{Tr}\left(\left(T_3 + \frac{Y}{2}\right)T_3Y\right) = \text{Tr}(T_3T_3Y) + \text{Tr}(YT_3Y) \\ &= \text{Tr}(T_3^2Y) + \text{Tr}(T_3Y^2) = \cancel{\text{Tr}(T_3^3)} + \text{Tr}(T_3Y^2) \sim \text{Tr}Q \end{aligned} \quad (1.79)$$

Συνεπώς βλέπουμε και στις δύο περιπτώσεις ότι η μη τετριμμένη συνεισφορά στην ABJ ανωμαλία στο  $SU(2) \times U(1)$  μοντέλο είναι ανάλογη του  $\text{Tr}Q$  για το οποίο ισχύει ότι  $\text{Tr}Q = \sum_i Q_i = 0$ .

Δεδομένης της τελευταίας σχέσης,  $\text{Tr}Q = 0$ , αποδεικνύεται ότι ολόκληρο το SM,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  είναι ελεύθερο ανωμαλιών. Αυτό σημαίνει ότι οι συνεισφορές των πρόσθετων τριγωνικών διαγραμμάτων που εμπλέκουν τα γκλουόνια και τα μποζόνια της ηλεκτρασθενούς θεωρίας αλληλοαναιρούνται και καταλήγουμε τελικά σε μία θεωρία χωρίς ανωμαλίες.

Γενικά, οι ομάδες που περιέχουν μόνο πραγματικές αναπαραστάσεις είναι ασφαλείς και αυτομάτως ελεύθερες ανωμαλιών<sup>12</sup>. Όμως, κριτήριο για την επιλογή της αναπαράστασης της ανάθεσης των φερμιονίων ήταν η παρουσία συζυγών αναπαραστάσεων. Συνεπώς, ο μόνος τρόπος να αναθέσουμε τα φερμιόνια σε μία μη πραγματική αναπαράσταση της  $SU(5)$  που να είναι ταυτόχρονα και ελεύθερη ανωμαλιών είναι να βάλουμε δύο ή περισσότερες αναπαραστάσεις που δεν είναι ελεύθερες ανωμαλιών αλλά το άθροισμά τους τελικά να αλληλοακυρώνει τις ανωμαλίες.

Μπορούμε λοιπόν να επαληθεύσουμε ότι στο  $SU(5)$  μοντέλο η LH φερμιονική ανάθεση στην αναπαράσταση  $\bar{5} \oplus 10$  είναι ελεύθερη ανωμαλιών. Βέβαια έχουμε ήδη δείξει μέσω της εξίσωσης  $\text{Tr}Q = 0$  ότι κάθε γενιά σωματιδίων είναι ελεύθερη ανωμαλιών ως προς τα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  μποζόνια βαθμίδας. Επιπλέον πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι φερμιονικές συζεύξεις των υπολοίπων  $SU(5)$  μποζονίων βαθμίδας δεν εισάγουν κάποια ανωμαλία.

<sup>12</sup>Γενικά ισχύει ότι από τις ομάδες που περιέχουν συζυγείς αναπαραστάσεις, μόνο οι  $SU(N)$  για  $N > 2$  έχουν αναπαραστάσεις με μη εξαφανιζόμενη ανωμαλία.

Στην περίπτωση του SM χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.69) η οποία απο-  
τελεί τη συνθήκη για την απουσία ανωμαλιών και προκύπτει από τη γενική  
σχέση:

$$\text{Tr} \left( \{T^a(R), T^b(R)\} T^c(R) \right) = \frac{1}{2} A(R) d^{abc}, \quad (1.80)$$

όταν η ποσότητα  $A(R)$  που χαρακτηρίζει την ανωμαλία για κάθε αναπαρά-  
σταση γίνει μηδέν. Τονίζουμε ότι το  $A(R)$  είναι ανεξάρτητο από τους γεν-  
νήτορες και είναι νορμαλισμένο ως προς μία από τις θεμελιώδεις αναπαρα-  
στάσεις. Επίσης, στην (1.80),  $T^a(R)$  είναι ο πίνακας της  $R$  αναπαράστασης  
και  $d^{abc}$  οι πλήρως συμμετρικές σταθερές που εμφανίζονται στον αντιμεταθέτη  
 $\{\lambda^a, \lambda^b\} = 2d^{abc}\lambda^c$ .

Επομένως αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν  
απλό γεννήτορα ώστε να υπολογίσουμε το  $A(R)$  και να δείξουμε ότι οι ανωμα-  
λίες αλληλοακυρώνονται ανάμεσα στις αναπαράστασεις  $\bar{5}$  και  $10$ . Ας πάρουμε  
λοιπόν  $T^a = T^b = T^c = Q$ , οπότε:

$$\frac{A(\bar{5})}{2} = \text{Tr} (Q^3(\psi^i)) = 3 \left( \frac{1}{3} \right)^3 + (-1)^3 + 0^3 = -\frac{8}{9} \Rightarrow A(\bar{5}) = -\frac{16}{9} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(10)}{2} &= \text{Tr} (Q^3(\psi_{ij})) = \text{Tr} [(Q_i + Q_j)^3] \\ &= 3 \left( -\frac{2}{3} \right)^3 + 3 \left( \frac{2}{3} \right)^3 + 3 \left( -\frac{1}{3} \right)^3 + 1^3 = \frac{8}{9} \Rightarrow A(10) = \frac{16}{9}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

όπου για την εύρεση των γεννητόρων του φορτίου  $Q^3(\psi^i)$ ,  $Q^3(\psi_{ij})$  για τις  
αναπαράστασεις  $\bar{5}$  και  $10$  αντίστοιχα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$Q(\psi^i) = -Q_i \delta_{ij}, \quad Q(\psi_{ij}) = Q_i + Q_j \quad (1.83)$$

του προηγούμενου υποκεφαλαίου.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις (1.81) και (1.82) ότι  $A(\bar{5}) + A(10) = 0$ .  
Αυτό σημαίνει ότι η αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $10 \oplus \bar{5}$  στην οποία διαμένουν  
τα φερμιόνια είναι ελεύθερη ανωμαλιών.

### 1.2.5 Τα μποζόνια βαθμίδας

Αφού λοιπόν αναθέσαμε τα φερμιόνια της θεωρίας μας σε μία αναπαράσταση,  
το ίδιο πρέπει να πράξουμε και για τα διανυσματικά μποζόνια.

Αφενός, λόγω του γεγονότος ότι στο SM τα μποζόνια βαθμίδας των  $SU(3)_c$   
και  $SU(2)_L$  είναι τοποθετημένα στις αντίστοιχες adjoint αναπαράστασεις (τα  
γκλουόνια στην 8 της  $SU(3)$  και τα  $W^\pm, W^0$  στην 3 της  $SU(2)$ ), αν ακολου-  
θήσουμε το μοτίβο αυτό, συνάγουμε ότι τα μποζόνια της  $SU(5)$  θεωρίας θα  
πρέπει να ανατεθούν στην adjoint της, την 24.

Αφετέρου, για την επιλογή της κατάλληλης αναπαράστασης μας αρκεί να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίον αναπτύσσεται η adjoint, 24, αναπαράσταση σε ευθύ άθροισμα μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των  $SU(3), SU(2)$  υποομάδων της, όπως αυτό δίνεται από την (1.27):

$$24 = \underbrace{(8, 1)}_{\text{gluons } G_\beta^\alpha} \oplus \underbrace{(3, 2)}_{A_r^\alpha} \oplus \underbrace{(\bar{3}, 2)}_{A_r^\alpha} \oplus \underbrace{(1, 3)}_{W^\pm, W_3} \oplus \underbrace{(1, 1)}_{B\text{-field}}, \quad (1.84)$$

όπου έχουμε ταυτοποιήσει τρεις από τις αναπαραστάσεις που προκύπτουν με τα διανυσματικά μποζόνια που προέρχονται από το SM. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας του αναπτύγματος της adjoint να περιέχει τις adjoint αναπαραστάσεις των υποομάδων τους. Πέρα όμως από τα 12 προβλεπόμενα διανυσματικά μποζόνια, βλέπουμε ότι η ανάθεση της 24 αναπαράστασης ως «οικοδέσποια» των μποζονίων προβλέπει την ύπαρξη άλλων τόσων διανυσματικών μποζονίων. Συνεπώς, το μποζονικό φάσμα της θεωρίας μας θα είναι 24 πεδία  $A_j^i$ :

- $A_\beta^\alpha : (8, 1) \rightarrow$  Πρόκειται για τα 8 γκλουόνια της  $SU(3)_c$ , με  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ .
- $A_s^r : (1, 3) \rightarrow$  Πρόκειται για τα 3 διανυσματικά πεδία της  $SU(2)_L$  με  $r, s = 4, 5$ .
- $-\frac{1}{\sqrt{15}}A_\alpha^\alpha + \frac{3}{\sqrt{20}}A_r^r : (1, 1) \rightarrow$  Πρόκειται για το  $B$ -πεδίο της  $U(1)_Y$  και αντιστοιχεί στο διαγώνιο στοιχείο του  $A_j^i$  το οποίο δεν ανήκει ούτε στην  $SU(3)$  ούτε στην  $SU(2)$ .
- $A_\alpha^r : (3, 2)$  και  $A_r^\alpha : (\bar{3}, 2) \rightarrow$  Πρόκειται για τα υπόλοιπα 12 πεδία βαθμίδας τα οποία ονομάζονται  $X, Y$  μποζόνια:

$$A_\alpha^r \equiv (X_\alpha, Y_\alpha), \quad A_r^\alpha \equiv \begin{pmatrix} X^\alpha \\ Y^\alpha \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

Συνεπώς, τα 24 διανυσματικά μποζόνια της θεωρίας φιλοξενούνται από την adjoint αναπαράσταση σε έναν  $5 \times 5$  πίνακα ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{24} A^i L^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{24} A^i \lambda^i \Rightarrow \quad (1.86)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{ccc|cc} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^1 & G_3^1 & X^1 & Y^1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_3^2 & X^2 & Y^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X^3 & Y^3 \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{array} \right) \quad (1.87)$$

Στον πίνακα λοιπόν αναλυτικά έχουμε:

- Τα κάτω δεξιά στοιχεία είναι τα μποζόνια βαθμίδας της  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  θεωρίας.
- Τα πάνω αριστερά στοιχεία είναι τα μποζόνια της  $SU(3)_c$ , όπου  $G_b^\alpha$  (γκλουόνια), για τα οποία ισχύει επίσης ότι  $\sum_{\alpha=1}^3 G_\alpha^\alpha = 0$ .
- Τα υπόλοιπα είναι τα νέα μποζόνια βαθμίδας της θεωρίας και από τη σχέση (1.85) συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} A_\alpha^4 &\equiv X_\alpha : (3, 2), & A_4^\alpha &\equiv X^\alpha : (\bar{3}, 2) \\ A_\alpha^5 &\equiv Y_\alpha : (3, 2), & A_5^\alpha &\equiv Y^\alpha : (\bar{3}, 2) \end{aligned} \quad (1.88)$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία αυτά κουβαλάνε  $SU(3)$  και  $SU(2)$  δείκτες<sup>13</sup>. Τα διανυσματικά αυτά πεδία κουβαλούν κλασματικό φορτίο το οποίο υπολογίζεται με τη βοήθεια της (1.63):

$$Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j \Rightarrow Q(A_\alpha^r) = Q_\alpha - Q_r \quad (1.89)$$

Επομένως το φορτίο των μποζονίων θα είναι:

$$\begin{aligned} Q(X_\alpha) &= Q(A_\alpha^4) = Q_\alpha - Q_4 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \\ Q(X^\alpha) &= Q(A_4^\alpha) = Q_4 - Q_\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ Q(Y_\alpha) &= Q(A_\alpha^5) = Q_\alpha - Q_5 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3} \\ Q(Y^\alpha) &= Q(A_5^\alpha) = Q_5 - Q_\alpha = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (1.90)$$

Θεωρώντας λοιπόν τα  $X_\alpha, Y_\alpha$  ως αντιπροσωπευτικά του κάθε είδους ισχύει ότι:

$$Q_X = -\frac{4}{3}, \quad Q_Y = -\frac{1}{3} \quad (1.91)$$

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, σύμφωνα με τη φερμιονική ανάθεση της θεωρίας, το γεγονός ότι στην ίδια αναπαράσταση φιλοξενούνται τόσο κουάρκ όσο και λεπτόνια σημαίνει ότι θα υπάρχουν κάποια διανυσματικά μποζόνια τα οποία θα διαμεσολαβούν αλληλεπιδράσεις στις οποίες από κουάρκ θα παίρνουμε λεπτόνια. Τα διανυσματικά πεδία που επιτρέπουν τις αλληλεπιδράσεις αυτές είναι τα καινούρια μποζόνια της θεωρίας και γι'αυτό το λόγο ονομάζονται *leptoquarks*.

<sup>13</sup>Γενικά, το  $ab$  στοιχείο του πίνακα  $A$ ,  $A_{ab}$ , γράφεται σε τανυστικό συμβολισμό σαν  $A_b^\alpha$  (ένας δείκτης πάνω και ένας κάτω συμβολίζουν την adjoint) το οποίο ισούται με το  $(A_\alpha^b)^\dagger$ . Για το  $SU(3)$  κομμάτι -όπως αναφέρεται και στο παράρτημα-, ένας κάτω δείκτης υπονοεί τη θεμελιώδη αναπαράσταση, 3, ενώ ένας πάνω δείκτης αναφέρεται στη συζυγή της θεμελιώδους,  $\bar{3}$ .

### 1.3 Σπάσιμο της $SU(5)$

Ως εδώ λοιπόν έχουμε αναθέσει όλα τα στοιχειώδη σωματίδια σε αναπαράστασεις της  $SU(5)$ . Η λαγκρατζιανή που περιγράφει τη θεωρία μας δεν περιέχει ρητά όρους μάζας καθώς κάτι τέτοιο θα την καθιστούσε μη επανακανονικοποιήσιμη. Όπως έχουμε δει και στο SM ο ενδεδειγμένος μηχανισμός με τον οποίο αποκτούν μάζα τα σωματίδια της εκάστοτε θεωρίας είναι με το αυθόρμητο σπάσιμο της gauge συμμετρίας, ή αλλιώς ο μηχανισμός Higgs. Στο  $SU(5)$  μοντέλο πρέπει να συμβαίνουν δύο σπασίματα συμμετρίας σε δύο διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες, στη  $M_X$  και στη  $M_W$ . Επομένως, χρειαζόμαστε δύο σπασίματα συμμετρίας: Στο πρώτο η  $SU(5)$  συμμετρία σπάει σε αυτήν του SM, ενώ στο δεύτερο η ομάδα του SM σπάει στην ομάδα  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ .

$$SU(5) \xrightarrow{\langle \phi \rangle} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \times U(1) \quad (1.92)$$

Αρχικά θα αναδείξουμε την καθολικότητα του μηχανισμού αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας κι έπειτα θα εξειδικεύσουμε.

Γενικά, είναι ξεκάθαρο ότι το σπάσιμο της συμμετρίας καθορίζεται από το δυναμικό που εξαρτάται από τα βαθμωτά μποζόνια της θεωρίας. Επομένως, για να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο σπάει κάποια συμμετρία μίας τυχαίας ομάδας ακολουθούμε τη διαδικασία της οποίας τα βήματα είναι:

- Διαλέγουμε μία συγκεκριμένη αναπαράσταση για τα βαθμωτά πεδία και καταγράφουμε το γενικότερο αναλλοίωτο δυναμικό που μπορούμε να πάρουμε,  $V(\phi)$ , το οποίο είναι το πολυώνυμο τετάρτης τάξης ως προς τα βαθμωτά πεδία.
- Βρίσκουμε το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται το δυναμικό λύνοντας την εξίσωση  $\partial V / \partial \phi = 0$ .
- Υπολογίζουμε τον αριθμό των άμαζων μποζονίων βαθμίδας τα οποία καθορίζουν την άσπαστη συμμετρία.

Ξεκινάμε λοιπόν τη διαδικασία για την adjoint αναπαράσταση μίας τυχαίας  $SU(n)$  ομάδας. Αφού επιβάλλουμε μία επιπλέον διακριτή συμμετρία  $\psi \rightarrow -\psi$ , το γενικότερο αναλλοίωτο δυναμικό είναι:

$$V = -\frac{1}{2}\mu^2\psi_i^j\psi_j^i + \frac{1}{4}\lambda_1(\psi_j^i\psi_j^i)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\psi_i^j\psi_j^k\psi_k^l\psi_l^i), \quad (1.93)$$

με  $\psi_i^i = 0$ . Μπορούμε όμως να το πάρουμε στη διαγώνια μορφή του  $\psi_i^j = \delta_i^j\phi_j$ ,  $\phi_i$  πραγματικό, αφού οι  $\psi_i^j$  είναι ερμιτιανοί και μπορούν να διαγωνοποιηθούν από έναν μοναδιακό πίνακα. Επίσης, με την εισαγωγή του συνδέσμου  $\sum_{i=1}^n \phi_i = 0$  μέσω ενός πολλαπλασιαστή Langrange,  $g$ , στη λαγκρατζιανή της θεωρίας, το παραπάνω δυναμικό (1.93) γίνεται:

$$V(\phi_j) = \frac{1}{2}\mu^2 \sum_{j=1}^n \phi_j^2 + \frac{1}{4}\lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2 \sum_{j=1}^n \phi_j^4 - g \sum_{j=1}^n \phi_j. \quad (1.94)$$

Αφού λοιπόν βρήκαμε το αναλλοίωτο δυναμικό, σειρά έχει η ελαχιστοποίησή του. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\phi_j)}{\partial \phi_i} = & -\frac{1}{2}\mu^2 \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) + \frac{1}{4}\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[ \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right)^2 \right] + \frac{1}{4}\lambda_2 \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^4 \right) \\ & - g \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \sum_{j=1}^n \phi_j \right). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\phi_j)}{\partial \phi_i} = & -\frac{1}{2}\mu^2(2\phi_j\delta_{ij}) + \frac{1}{4}\lambda_1 2 \sum_{j=1}^n \phi_j^2 2\phi_j\delta_{ij} + \frac{1}{4}\lambda_2 4\phi_j^3\delta_{ij} - g\delta_{ij} \\ = & -\mu^2\phi_i + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_i + \lambda_2\phi_i^3 - g = 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.96)$$

με  $\sum_{i=1}^n \phi_i = 0$ . Η εξίσωση (1.96) στην οποία καταλήξαμε μετά την ελαχιστοποίηση του δυναμικού (1.94), είναι μία εξίσωση τρίτου βαθμού που σημαίνει ότι θα έχει το πολύ τρεις λύσεις  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Έστω λοιπόν ότι έχουμε τρεις διαφορετικές λύσεις. Σε αυτή, τη γενικότερη περίπτωση, η (1.96) θα γίνει:

$$-\mu^2\phi_1 + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_1 + \lambda_2\phi_1^3 - g = 0, \quad (1.97)$$

$$-\mu^2\phi_2 + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_2 + \lambda_2\phi_2^3 - g = 0, \quad (1.98)$$

$$-\mu^2\phi_3 + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_3 + \lambda_2\phi_3^3 - g = 0. \quad (1.99)$$

Παίρνοντας (1.97)-(1.98), έχουμε:

$$\begin{aligned} & -\mu^2\phi_1 + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_1 + \lambda_2\phi_1^3 - g + \mu^2\phi_2 - \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) \phi_2 - \lambda_2\phi_2^3 + g = 0 \\ & -\mu^2(\phi_1 - \phi_2) + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) (\phi_1 - \phi_2) + \lambda_2(\phi_1 - \phi_2) (\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) = 0 \\ & (\phi_1 - \phi_2) \left[ -\mu^2 + \lambda_1 \left( \sum_{j=1}^n \phi_j^2 \right) + \lambda_2 (\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.100)$$





Τώρα, από τις (1.103) και (1.106), μπορούμε να εκφράσουμε τις λύσεις  $\phi_2, \phi_3$  σε όρους της  $\phi_1$ :

$$\phi_2 = \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \phi_1, \quad (1.107)$$

$$\phi_3 = \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \phi_1. \quad (1.108)$$

Τώρα, είμαστε σε θέση να επιστρέψουμε στη σχέση (1.94) του δυναμικού και να εκφράσουμε τους όρους του συναρτήσεως του  $\phi_1$ :

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= -\frac{1}{2}(n_1\phi_1^2 + n_2\phi_2^2 + n_3\phi_3^2) + \frac{1}{4}\lambda_1(n_1\phi_1^2 + n_2\phi_2^2 + n_3\phi_3^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda_2(n_1\phi_1^4 + n_2\phi_2^4 + n_3\phi_3^4) - g(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\phi_3) \xrightarrow{(1.107)} \overset{0}{\xrightarrow{(1.108)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\phi_1) &= -\frac{1}{2}\mu^2 \left[ n_1\phi_1^2 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 \phi_1^2 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^2 \phi_1^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda_1 \left[ n_1\phi_1^2 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 \phi_1^2 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^2 \phi_1^2 \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda_2 \left[ n_1\phi_1^4 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^4 \phi_1^4 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^4 \phi_1^4 \right] \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\phi_1) &= -\frac{1}{2}\mu^2 \left[ n_1 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^2 \right] \phi_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda_1 \left[ n_1 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^2 \right]^2 \phi_1^4 \\ &\quad + \frac{1}{4}\lambda_2 \left[ n_1 + n_2 \left( \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^4 + n_3 \left( \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_2} \right)^4 \right] \phi_1^4 \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\phi_1) &= -\frac{1}{2}\mu^2 \frac{1}{(n_2 - n_3)^2} [n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2] \\ &\quad + \frac{1}{4(n_2 - n_3)^4} \left\{ \lambda_1 [n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2]^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 [n_1(n_2 - n_3)^4 + n_2(n_1 - n_3)^4 + n_3(n_1 - n_2)^4] \right\} \quad (1.109) \end{aligned}$$

Επομένως, το δυναμικό καταλήγει να έχει τη μορφή:

$$V(\phi_1) = -\alpha\phi^2 + b\phi_1^4, \quad (1.110)$$

όπου για τα  $\alpha, b$  ισχύει:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\mu^2}{2} \frac{1}{(n_2 - n_3)^2} [n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2] \\ b &= \frac{1}{4(n_2 - n_3)^4} \left\{ \lambda_1 [n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2]^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 [n_1(n_2 - n_3)^4 + n_2(n_1 - n_3)^4 + n_3(n_1 - n_2)^4] \right\} .\end{aligned}\quad (1.111)$$

Τώρα πρέπει να βρούμε το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται το δυναμικό (1.110):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\phi_1)}{\partial \phi_1} &= -2\alpha\phi_1 + 4b\phi_1^3 = 0 \Rightarrow \phi_1(-2\alpha + 4b\phi_1^2) = 0 \Rightarrow \\ &\phi_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \phi_1 = \pm v_1,\end{aligned}\quad (1.112)$$

όπου ταυτοποιήσαμε:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2b}} .\quad (1.113)$$

Συνεπώς, η τιμή του δυναμικού στο ελάχιστο θα είναι:

$$\begin{aligned}V_m &= -\alpha \frac{\alpha}{2b} + b \frac{\alpha^2}{4b^2} = -\frac{\alpha^2}{4b} \stackrel{(1.111)}{\implies} \\ V_m &= -\frac{\frac{\mu^4}{4(n_2-n_3)^4} [n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2]^2}{\frac{1}{(n_2-n_3)^4} \left\{ \lambda_1 [n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2]^2 \right.} \\ &\quad \left. + \lambda_2 [n_1(n_2-n_3)^4 + n_2(n_1-n_3)^4 + n_3(n_1-n_2)^4] \right\}}\end{aligned}\quad (1.114)$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{\mu^2}{4} \frac{1}{\frac{\lambda_1 [n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2]^2 + \lambda_2 [n_1(n_2-n_3)^4 + n_2(n_1-n_3)^4 + n_3(n_1-n_2)^4]}{[n_1(n_2-n_3)^2 + n_2(n_1-n_3)^2 + n_3(n_1-n_2)^2]^2}} \\ &= -\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 f(n_1, n_2, n_3)},\end{aligned}\quad (1.115)$$

όπου ορίσαμε ως  $f(n_1, n_2, n_3)$  τη συνάρτηση:

$$f(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_1(n_2 - n_3)^4 + n_2(n_1 - n_3)^4 + n_3(n_1 - n_2)^4}{[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2]^2} .\quad (1.116)$$

Το πρόβλημα πλέον έχει αναχθεί στην εύρεση των τιμών  $n_1, n_2, n_3$  οι οποίες θα δίνουν το μικρότερο ελάχιστο, δηλαδή τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος. Από τις (1.111) παρατηρούμε ότι αν  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , το μικρότερο  $V_m$

αντιστοιχεί στο ελάχιστο της  $f(n_1, n_2, n_3)$ , ενώ αν  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  το μικρότερο  $V_m$  αντιστοιχεί στο μέγιστο του  $f(n_1, n_2, n_3)$ . Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} n_1(n_2 - n_3)^4 + n_2(n_1 - n_3)^4 + n_3(n_1 - n_2)^4 = \\ \frac{1}{2}[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2] \\ \times [(n_2 - n_3)^2 + (n_1 - n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2], \end{aligned}$$

η  $f(n_1, n_2, n_3)$  ανάγεται στην απλούστερη μορφή:

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, n_3) = \\ = \frac{[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2][(n_2 - n_3)^2 + (n_1 - n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2]}{2[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2]^2} \\ = \frac{1}{2} \frac{(n_2 - n_3)^2 + (n_1 - n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2}{n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Εκτελώντας μία αλλαγή μεταβλητών:

$$x \equiv n_1 + n_2, \quad y \equiv n_1 - n_2, \quad (1.118)$$

η συνάρτηση  $f(n_1, n_2, n_3)$  μπορεί να γραφτεί σαν<sup>14</sup>:

$$f(n_1, n_2, n_3) = f(x, y) = \frac{3y^2 + (3x - 2n)^2}{(8n - 9x)y^2 + x(3x - 2n)^2} \quad (1.119)$$

Πρόκειται λοιπόν για μία συνάρτηση η οποία είναι άρτια ως προς  $y$ . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο θετικά  $y$ . Οι επιτρεπόμενες περιοχές για τις μεταβλητές  $x, y$  είναι:

$$0 < x \leq n, \quad 0 < y \leq n, \quad 0 < x - y \leq n \quad (1.120)$$

Για την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x, y)$  ως προς  $y$  παίρνουμε την έκφραση:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{8y(3x - 2n)^3}{[(8n - 9x)y^2 + x(3x - 2n)^2]^2} \quad (1.121)$$

Επομένως, για  $x \neq \frac{2}{3}n$ , η  $f$  είναι μία γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση, πράγμα που σημαίνει ότι τα ακρότατα θα πρέπει να είναι τα όρια, δηλαδή,  $y = 0$  ή  $y = x$ . Αφού η παράγωγος της  $f$  έχει το ίδιο πρόσημο με την  $(3x - 2n)$ , το ελάχιστο θα πρέπει να είναι στις γραμμές  $y = x$  για  $x < \frac{2}{3}n$  και  $y = 0$  για  $\frac{2}{3} < x < n$ . Κατά μήκος της γραμμής  $y = x$ , η  $f$  δίνεται θα είναι:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3nx + n^2}{xn(n - x)} \quad (1.122)$$

<sup>14</sup>Οι ενδιάμεσες πράξεις παραλείπονται ως -αν και κουραστικές- τετριμμένες.

και έχει ελάχιστο σπιν  $x = \frac{1}{2}n$  με τιμή  $f = \frac{1}{n}$ . Πάνω στην άλλη γραμμή,  $y = 0$ , έχουμε  $f = 1/x$  με ελάχιστο στο  $x = n$ , με την ίδια τιμή  $f = 1/n$ . Βασικά, τα δύο αυτά σημεία,  $x = y = 0.5n$  και  $x = n, y = 0$ , που αντιστοιχούν στα

$$n_1 = \frac{1}{2}n, n_2 = 0, n_3 = \frac{1}{2}n \quad \text{και} \quad n_1 = \frac{1}{2}n, n_2 = \frac{1}{2}n, n_3 = 0 \quad (1.123)$$

αντίστοιχα, είναι ισοδύναμα αφού η συνάρτηση  $f(n_1, n_2, n_3)$  είναι συμμετρική ως προς τα  $n_1, n_2, n_3$ . Επομένως, στην περίπτωση που ο  $n$  είναι περιττός, πρέπει να κοιτάξουμε στα γύρω σημεία, αφού  $n_1 = n_2 = 0.5n$ . Προκύπτει ότι το ελάχιστο είναι στα

$$n_1 = \frac{1}{2}(n+1), n_2 = \frac{1}{2}(n-1), n_3 = 0. \quad (1.124)$$

Οπότε επιστρέφοντας στην περίπτωση μας, όπου  $n = 5$ , σύμφωνα με τα αποτελέσματα (1.124), θα ισχύει

$$n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 0. \quad (1.125)$$

Επομένως, τα βαθμωτά πεδία γραμμένα στη μορφή ενός  $5 \times 5$  πίνακα είναι:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & & & & \\ & \phi_1 & & & \\ & & \phi_1 & & \\ & & & \phi_2 & \\ & & & & \phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

Το δυναμικό λοιπόν (1.110) βρίσκεται αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (1.111) και υπολογίσουμε τους συντελεστές  $\alpha, b$  για τα  $n_i$  όπως αυτά δίνονται στην (1.125):

$$\alpha = \frac{\mu^2}{2} \frac{1}{4} (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2) = \frac{30}{8} \mu^2$$

$$b = \frac{1}{4 \cdot 16} [\lambda_1 (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2)^2 + \lambda_2 (3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 3^4)] = \frac{1}{64} (900\lambda_1 + 210\lambda_2). \quad (1.127)$$

Όπως φαίνεται στην (1.112), το δυναμικό γίνεται ελάχιστο όταν  $\phi_1 = v_1$ , το οποίο έχουμε ταυτοποιήσει στην (1.113) και μπορούμε να το υπολογίσουμε για την περίπτωση αυτή:

$$v_1^2 = \frac{\frac{30}{8} \mu^2}{\frac{900\lambda_1 + 210\lambda_2}{32}} = \frac{4\mu^2}{30\lambda_1 + 7\lambda_2}. \quad (1.128)$$

Επίσης, λόγω του ότι ισχύει η συνθήκη αϊχνότητας στον πίνακα (1.126), έχουμε

$$\phi_2 = -\frac{3}{2} \phi_1, \quad (1.129)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\phi_1 = v_1, \quad \phi_2 = -\frac{3}{2}v_1 \quad (1.130)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η αναμενόμενη τιμή του κενού θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= v_1 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{4\mu^2}{30\lambda_1 + 7\lambda_2}} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{3}{2} & \\ & & & & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{4\mu^2}{30\lambda_1 + 7\lambda_2}} \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{15}}{2} v_1 L^{12} \end{aligned} \quad (1.131)$$

Από την τελευταία σχέση, (1.131), καταφαίνεται ότι το αυθόρμητο σπάσιμο της  $SU(5)$  συμμετρίας συμβαίνει στην κατεύθυνση του  $L^{12}$ .

Όπως προαναφέρθηκε, το βαθμωτό πεδίο Higgs βρίσκεται στην adjoint αναπαράσταση κι επομένως οι συνιστώσες του πεδίου Higgs κατοικούν σε έναν πίνακα της μορφής:

$$\phi = \sum_{i=1}^{24} \phi^i L^i = \sum_{i=1}^{24} \frac{\phi^i \lambda^i}{2} \quad (1.132)$$

Επίσης, αφού το ελάχιστο δε βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, πρέπει να μετατοπίσουμε τα πεδία  $\phi$  ορίζοντας ένα νέο σύνολο βαθμωτών πεδίων  $\phi'$ , τα οποία θα είναι:

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle = \begin{bmatrix} & & & \phi_{X_1} & \phi_{Y_1} \\ & & & \phi_{X_2} & \phi_{Y_2} \\ & & & \phi_{X_3} & \phi_{Y_3} \\ \hline \phi_{X_1}^\dagger & \phi_{X_2}^\dagger & \phi_{X_3}^\dagger & & \\ \phi_{Y_1}^\dagger & \phi_{Y_2}^\dagger & \phi_{Y_3}^\dagger & & \\ & & & [\phi_3]_s^r + \frac{3\phi_0}{\sqrt{30}} & \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

Παίρνοντας τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού στο  $\phi = \langle \phi \rangle$  υπολογίζουμε το φάσμα των μαζών των σωματιδίων Higgs. Τα σωματίδια  $(\phi_{X_\alpha}, \phi_{Y_\alpha})$  και  $(\phi_{X_\alpha}^\dagger, \phi_{Y_\alpha}^\dagger)$  παραμένουν άμαζα και αποτελούν τα would - be - Goldstone

μποζόνια της θεωρίας τα οποία «τρώγονται» από τα  $(X_\alpha, Y_\alpha)$  και  $X^\alpha, Y^\alpha$  αντίστοιχα προσδίδοντάς τους την τρίτη, διαμήκη, συνιστώσα τους αποκτώντας τελικά τους απαραίτητους βαθμούς ελευθερίας. Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι ο αριθμός των would - be - Goldstone μποζονίων είναι ίσος με τον αριθμό των μποζονίων που τελικά αποκτούν μάζα μετά το σπάσιμο της συμμετρίας.

Επειδή τα πεδία Higgs φιλοξενούνται στην adjoint αναπαράσταση η συναλλοίωτη παράγωγος θα γράφεται:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + ig[A_\mu, \phi] \stackrel{(1.133)}{\implies} \\ D_\mu \phi &= D_\mu(\phi' + \langle \phi \rangle) = D_\mu \phi' + D_\mu \langle \phi \rangle = D_\mu \phi' + ig[A_\mu, \langle \phi \rangle], \end{aligned} \quad (1.134)$$

όπου  $A_\mu$  είναι ο πίνακας που φιλοξενεί τα διανυσματικά μποζόνια στην (1.87). Συνεπώς, κινητικός όρος της λαγκρανζιανής θα περιέχει την ποσότητα  $g^2|[A_\mu, \langle \phi \rangle|^2$  η οποία παράγει τους όρους μάζας για τα μποζόνια βαθμίδας.

Είναι προφανές από την (1.131) ότι η  $\langle \phi \rangle$  μετατίθεται με τους γεννήτορες της SM υποομάδας. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το  $\langle \phi \rangle$  βρίσκεται στην ίδια κατεύθυνση με τον γεννήτορα του υπερφορτίου  $L^{12}$  για τον οποίο γνωρίζουμε ότι μετατίθεται με όλα τα στοιχεία των  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ . Συνεπώς, καταλαβαίνουμε ότι ο όρος  $g^2|[A_\mu, \langle \phi \rangle|^2$  δε θα παράγει όρους μάζας για τα μποζόνια της ομάδας του SM. Αντιθέτως, τα  $X, Y$  μποζόνια αποκτούν μάζα, την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} g^2|[A_\mu, \langle \phi \rangle|^2 &= g^2|A_\mu \phi - \phi A_\mu|^2 \\ &= \frac{g^2 v_1^2}{4} \left| \left( \begin{array}{cc|cc} & & X^1 & Y^1 \\ & & X^2 & Y^2 \\ & & X^3 & Y^3 \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ & & & -3 \\ & & & & -3 \end{array} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \begin{array}{ccc} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ & & & -3 \\ & & & & -3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc|cc} & & X^1 & Y^1 \\ & & X^2 & Y^2 \\ & & X^3 & Y^3 \\ \hline X_1 & X_2 & X_3 & \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \end{array} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g^2 v_1^2}{4} \left| \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & -3X^1 & -3Y^1 \\ & & & -3X^2 & -3Y^2 \\ & & & -3X^3 & -3Y^3 \\ \hline 2X_1 & 2X_2 & 2X_3 & & \\ 2Y_1 & 2Y_2 & 2Y_3 & & \end{array} \right) - \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & 2X^1 & 2Y^1 \\ & & & 2X^2 & 2Y^2 \\ & & & 2X^3 & 2Y^3 \\ \hline -3X_1 & -3X_2 & -3X_3 & & \\ -3Y_1 & -3Y_2 & -3Y_3 & & \end{array} \right) \right|^2 \\
&= \frac{g^2 v_1^2}{4} \left| \left( \begin{array}{ccc|cc} & & & -5X^1 & -5Y^1 \\ & & & -5X^2 & -5Y^2 \\ & & & -5X^3 & -5Y^3 \\ \hline 5X_1 & 5X_2 & 5X_3 & & \\ 5Y_1 & 5Y_2 & 5Y_3 & & \end{array} \right) \right|^2. \tag{1.135}
\end{aligned}$$

Βρίσκουμε λοιπόν τον πίνακα και καταγράφουμε μόνο τα διαγώνια στοιχεία αφού έτσι κι αλλιώς αυτά αφορούν τους όρους μάζας (τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις) οι οποίοι εισάγονται στη λαγκρατζιανή μέσω του όρου

$$\mathcal{L}_{mass} = -g^2 \text{Tr}(|[A_\mu, \phi]|^2). \tag{1.136}$$

Συνεπώς, παίρνοντας το ίχνος του πίνακα που προκύπτει στην (1.135) και καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
g^2 |[A_\mu, \langle \phi \rangle]|^2 &= \frac{25g^2 v_1^2}{4} [(X^1 X_1 + Y^1 Y_1) + (X^2 X_2 + Y^2 Y_2) + (X^3 X_3 + Y^3 Y_3) \\
&\quad + (X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 X_3) + (Y^1 Y_1 + Y^2 Y_2 + Y^3 Y_3)] \\
&= \frac{25g^2 v_1^2}{2} [X^1 X_1 + X^2 X_2 + X^3 X_3 + Y^1 Y_1 + Y^2 Y_2 + Y^3 Y_3]. \tag{1.137}
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν για τις μάζες των  $X, Y$  ότι θα είναι:

$$M_X = M_Y = \sqrt{\frac{25}{2}} g v_1. \tag{1.138}$$

Ως εδώ λοιπόν, έχουμε περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο το πεδίο  $\phi$  αναπτύσσει VEV και σπάει την  $SU(5)$  συμμετρία με τη φυσική πλέον από εκεί και κάτω, να περιγράφεται από την ομάδα του SM.

Για να πραγματοποιήσουμε τώρα το δεύτερο σπάσιμο συμμετρίας, δηλαδή το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, επιλέγουμε τη θεμελιώδη αναπαράσταση να είναι εκείνη που θα φιλοξενήσει τα βαθμωτά Higgs πεδία. Η αναπαράσταση αυτή θα περιέχει μία τριπλέτα χρώματος  $H^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  την οποία η  $SU(2)_L$  την βλέπει σαν singlet και μία άχρωμη διπλέτα ισοσπίν  $h \equiv H^r$ ,  $r = 1, 2$  η οποία έχει τον ίδιο ρόλο με τη Higgs διπλέτα στην περίπτωση της θεωρίας του SM<sup>15</sup>. Η τριπλέτα του χρώματος θα συμβολίζεται σαν

<sup>15</sup>Μανωλάκος Γιώργος: Διπλωματική εργασία: Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED, σελ.79,87

$H_t : (3, 1)$  ενώ η διπλέτα του ισοσπίν σαν  $H_d : (1, 2)$ , με αποτέλεσμα οι δύο αυτές αναπαράστασεις των δύο ομάδων να συνδιαμορφώνουν την 5 αναπαράσταση της  $SU(5)$  στην οποία συγκατοικούν:  $H = (H_t, H_d)$ .

Πριν περάσουμε στην ανάλυση του δεύτερου αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας (SSB2), πρέπει να τονίσουμε ότι κατά το πρώτο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας (SSB1), το γεγονός ότι το  $\phi$  αναπτύσσει VEV επηρεάζει το  $H$ -σύστημα μέσω των όρων διασταύρωσης του δυναμικού. Ως τώρα, στο SSB1, μελετήσαμε το σπάσιμο της  $SU(5)$  μέσω ενός δυναμικού το οποίο δεν περιέχει καμία πληροφορία για κάποιο δεύτερο σπάσιμο. Επομένως, το γενικότερο  $SU(5)$  αναλλοίωτο δυναμικό 4ης τάξης που να περιέχει δύο ειδών βαθμωτά πεδία είναι:

$$V(\phi, H) = V(\phi) + V(H) + \lambda_4(\text{Tr}\phi^2)(H^\dagger H) + \lambda_5(H^\dagger \phi^2 H), \quad (1.139)$$

όπου

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2}(\text{Tr}\phi^2) + \frac{1}{4}\lambda_1(\text{Tr}\phi^2)^2 + \frac{1}{4}\lambda_2(\text{Tr}\phi^4), \\ V(H) &= -\frac{\nu^2}{2}(H^\dagger H) + \frac{1}{4}\lambda_3(H^\dagger H)^2. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Συνεπώς, το γεγονός ότι το δυναμικό περιέχει όρους διασταύρωσης, σημαίνει ότι οι συνιστώσες του  $H = (H_t, H_d)$  θα αποκτούν επίσης μάζα εξαρτώμενη από το  $v_1 (\sim M_X)^{16}$ :

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\nu^2}{2}H^\dagger H + \lambda_4(\text{Tr}\phi^2)(H^\dagger H) + \lambda_5(H^\dagger \phi^2 H) \\ &= -\frac{\nu^2}{2}H^\dagger H + \frac{\lambda_4}{4}\text{Tr}(v_1^2 \text{diag}(4, 4, 4, 9, 9))H^\dagger H + \frac{\lambda_5}{4}H^\dagger v_1^2 \text{diag}(4, 4, 4, 9, 9)H \\ &= -\frac{\nu^2}{2} \begin{pmatrix} H_t^\dagger & H_d^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_t \\ H_d \end{pmatrix} + \frac{30\lambda_4 v_1^2}{4} \begin{pmatrix} H_t^\dagger & H_d^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_t \\ H_d \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{\lambda_5 v_1^2}{4} \begin{pmatrix} H_t^\dagger & H_d^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4I_3 & 0 \\ 0 & 9I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_t \\ H_d \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\nu^2}{2}H_t^\dagger H_t - \frac{\nu^2}{2}H_d^\dagger H_d + \frac{15\lambda_4 v_1^2}{2}H_t^\dagger H_t + \frac{15\lambda_4 v_1^2}{2}H_d^\dagger H_d \\ &\quad + \lambda_5 v_1^2 H_t^\dagger H_t + \frac{9\lambda_5 v_1^2}{4}H_d^\dagger H_d. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από την (1.141), ότι οι συνιστώσες του  $H$  αποκτούν

<sup>16</sup>Από το συνολικό δυναμικό (1.139), παίρνουμε μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς  $H$ , καθώς γνωρίζουμε ότι μόνο αυτοί συνεισφέρουν σαν όροι μάζας.



μάζες:

$$\begin{aligned} m_t^2 &= -\frac{\nu^2}{2} + \frac{15}{2}\lambda_4 v_1^2 + \lambda_5 v_1^2, \\ m_d^2 &= -\frac{\nu^2}{2} + \frac{15}{2}\lambda_4 v_1^2 + \frac{9}{4}\lambda_5 v_1^2. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Συνάγεται λοιπόν ότι μετά το πρώτο SSB, όλες οι μη μηδενικές τιμές μαζών θα είναι ανάλογες του  $\nu_1$ , δηλαδή της τάξης του  $M_X$ , που σημαίνει ότι όλα τα σωματίδια θα είναι πάρα πολύ βαριά!

Ας επανέλθουμε λοιπόν στο SSB2, το οποίο συμβαίνει στα  $\sim 250\text{GeV}$ . Χρειαζόμαστε λοιπόν μία  $SU(2)$  διπλέτα την οποία ήδη έχουμε εμβαπτίσει στη θεμελιώδη αναπαράσταση, 5. Έτσι λοιπόν, υποθέτουμε ότι «κάπως<sup>17</sup>» το  $m_d^2$  που βρήκαμε στην (1.142), θα είναι πολύ μικρό, ώστε να καταφέρνει να επιζεί στις χαμηλές ενέργειες. Αντίθετα, τα υπόλοιπα υπερ-βαριά σωματίδια που απέκτησαν μάζα από το SSB1 θα αποσυνδεύονται χωρίς τελικά να επιβιώνουν με αποτέλεσμα να μη συνεισφέρουν στο SSB2. Η αντίστοιχη φυσική των «ελαφρών» σωματιδίων θα περιγράφεται από την ομάδα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Το αναλλοίωτο δυναμικό που αντιστοιχεί στην 5 αναπαράσταση είναι:

$$V(H) = -\frac{1}{2}\mu^2 H_i H^i + \frac{1}{4}\lambda_3 (H_i H^i)^2, \quad (1.143)$$

όμως λόγω του ότι το χρώμα παραμένει άσπαστο, η εμβαπτισμένη διπλέτα θα αναλάβει το σπάσιμο με αποτέλεσμα να παίρνουμε το ενεργό δυναμικό που είναι:

$$V_{eff}(H_d) = -\frac{\nu^2}{2} H_d^\dagger H_d + \frac{\lambda}{4} (H_d^\dagger H_d)^2. \quad (1.144)$$

Είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε ότι το δυναμικό (1.144) είναι το δυναμικό του μοντέλου Weinberg-Salam. Για να βρούμε το νέο κενό μετά το σπάσιμο της συμμετρίας, κατά τα γνωστά ελαχιστοποιούμε το ενεργό δυναμικό της (1.144).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial H_d} &= -\frac{\nu^2}{2} H_d^\dagger + \frac{\lambda}{2} (H_d^\dagger H_d) H_d^\dagger = 0 \Rightarrow \\ H_d^\dagger &= 0 \quad \text{ή} \quad H_d^\dagger H_d = v_2^2, \end{aligned} \quad (1.145)$$

όπου

$$v_2^2 \equiv \frac{\nu^2}{\lambda}. \quad (1.146)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αναμενόμενη τιμή του κενού θα είναι:

$$\langle H_d \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.147)$$

<sup>17</sup> Αυτό είναι το πρόβλημα του doublet-triplet splitting το οποίο θα αναφέρουμε αργότερα στο υποκεφάλαιο 3.1.3.

Επομένως, κατά τα γνωστά<sup>18</sup>, μπορούμε μέσω του κινητικού όρου του βαθμωτού πεδίου να υπολογίσουμε από τις μάζες των μποζονίων και από το δυναμικό της θεωρίας να υπολογίσουμε και τη μάζα του βαθμωτού μποζονίου.

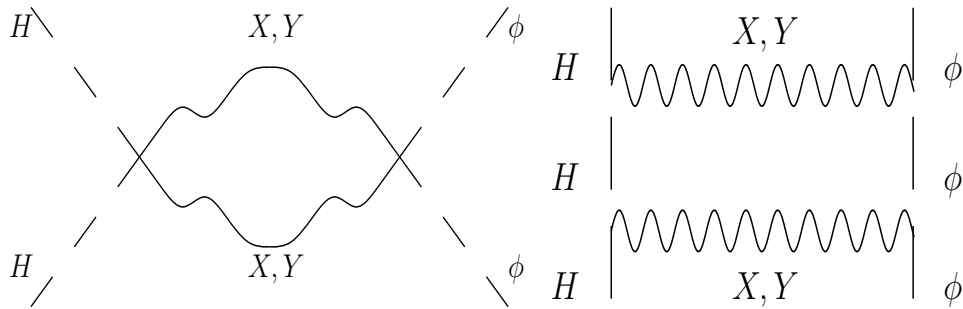
Πρέπει να σημειώσουμε ότι στην παραπάνω ανάλυση έχουμε παραμερίσει σιωπηρά το πώς οι όροι διασταύρωσης συνεισφέρουν στην αναμενόμενη τιμή του κενού  $\langle \phi \rangle$  όταν συμβαίνει το πρώτο SSB, παρά μόνο μελετήσαμε τις συνέπειες που έχει η ανάπτυξη του  $VEV$  στο  $H$ -σύστημα, δηλαδή πώς ουσιαστικά επηρεάζεται το δεύτερο SSB από το πρώτο. Δηλαδή, κατ' ουσίαν δουλέψαμε ως τώρα προσεγγιστικά, θεωρώντας ότι τα δύο σπασίματα συμμετρίας βαθμίδας είναι διαχωρισμένα και συμβαίνουν ανεξάρτητα.

Αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς θα πρέπει να συμπεριλάβουμε τη συνεισφορά των όρων διασταύρωσης και στο πρώτο SSB. Η σωστή ελαχιστοποίηση του συνδυασμένου συστήματος (1.139), δίνει μία αναμενόμενη τιμή που είναι ελαφρώς μετατοπισμένη από την  $\langle \phi \rangle = \frac{v_1}{2} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$ . Αυτό θα επάγει την άρση κάποιων από τους εκφυλισμούς των μαζών των μποζονίων Higgs, ωστόσο οι διορθώσεις που θα προκύψουν είναι πολύ μικρές, της τάξης του  $v_2/v_1$ . Επίσης, τα διανυσματικά μποζόνια  $X, Y$  θα πάρουν και αυτά μία  $\mathcal{O}(v_2)$  διόρθωση.

Όμως, η εισαγωγή των όρων διασταύρωσης δε συμβαίνει μόνο λόγω συνέπειας (επανακανονικοποιησιμότητας) αλλά υπάρχουν δύο βασικές απαιτήσεις που την καθιστούν απαραίτητη.

- Αρχικά, διαπιστώνουμε ότι το δυναμικό  $V = V(\phi) + V(H)$  δεν μπορεί να προσφέρει ένα βιώσιμο μοντέλο. Όντως, όπως φαίνεται από την (1.144), η τριπλέτα του χρώματος  $H^\alpha$  θα παραμείνει στην ίδια μάζα με τη διπλέτα  $H^r$ . Κάτι τέτοιο δεν είναι απλά ανεπιθύμητο, είναι καταστροφικό! Όπως θα δούμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, η τριπλέτα  $H^\alpha$  κατέχει τους κατάλληλους κβαντικούς αριθμούς ώστε να μεσολαβήσει μία διάσπαση πρωτονίου η οποία είναι μία πολυπόθητη πρόβλεψη για το μοντέλο μας (και γενικότερα για όλα τα μεγαλοενοποιημένα μοντέλα). Επομένως το  $H^\alpha$  θα πρέπει να παραμένει ουσιαστικά κατά πολύ βαρύτερο από το  $M_W$ . Η πρόσληψη μεγάλης μάζας από το  $H^\alpha$  δε θα μπορούσε να συμβεί χωρίς την παρουσία όρων διασταύρωσης.
- Επίσης, αν δεν λαμβάναμε υπόψη τους  $SU(5)$  αναλλοίωτους όρους διασταύρωσης και θεωρούσαμε τα δύο δυναμικά γραμμικώς ανεξάρτητα,  $V(\phi, H) = V(\phi) + V(H)$ , παρατηρούμε ότι και πάλι θα επάγονταν τέτοιοι όροι μέσω των διαγραμμάτων σαν διορθώσεις ακτινοβολίας. Αυτό φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.

<sup>18</sup>Οι απαιτούμενες πράξεις παρατίθενται αναλυτικά στη Διπλωματική εργασία: Μανωλάκος Γιώργος, «Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED.», σελίδες 87-93.



Εικόνα 1.12: Αλληλεπιδράσεις από τις οποίες οι όροι διασταύρωσης προκύπτουν σαν διαρθώσεις ακτινοβολίας

Το δυσάρεστο είναι ότι, παραδείγματος χάρη, το πρώτο διάγραμμα είναι αποκλίνον. Αυτό σημαίνει ότι εν απουσία των όρων διασταύρωσης εξ αρχής στη λαγκρατζιανή, οι επαγόμενοι όροι διασταύρωσης δεν εξουδετερώνονται από κανέναν. Το ρόλο του «εξολοθρευτή» θα πρέπει να αναλάβουν οι όροι διασταύρωσης που συμπεριλαμβάνονται, τελικά αναγκαστικά στην αρχική λαγκρατζιανή, για να λειτουργήσουν σαν counter terms και να άρουν τις ανώμαλες αποκλίσεις που θα μας καθιστούσαν τη θεωρία μη επανακανονικοποιήσιμη.

Πλέον, εφόσον θεωρούμε το πλήρες, μικτό, δυναμικό (1.139), τα πεδία  $\phi$  και  $H$  συζεύγγονται, η αναμενόμενη τιμή του κενού  $\langle \phi \rangle$  μπορεί κάλλιστα να σπάσει την  $SU(2)_L$  ενόσω η  $SU(3)_c$  θα παραμένει αυστηρά άσπαστη. Συνεπώς, ψάχνουμε λύσεις της μορφής:

$$\langle \phi \rangle = v_1 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & O \\ & & 1 & & \\ & & & -\frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2} & \\ O & & & & -\frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.148)$$

Στην περίπτωση μηδενισμού των συντελεστών των όρων διασταύρωσης στη λαγκρατζιανή, το  $\epsilon$  θα πρέπει να εξαφανίζεται. Αν δηλαδή στο δυναμικό (1.139) ισχύει ότι  $\lambda_4, \lambda_5 \rightarrow 0$ , θα πρέπει να βρίσκουμε ένα ακρότατο του συνολικού δυναμικού που να συνδέεται με τις μερικές λύσεις που βρήκαμε πριν τη συμμετοχή των όρων διασταύρωσης. Η λύση με τις ιδιότητες αυτές είναι:

$$\epsilon = \frac{3}{20} \frac{\lambda_5 v_2^2}{\lambda_2 v_1^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v_2^4}{v_1^4}\right). \quad (1.149)$$

Η παρουσία λοιπόν του  $\epsilon$  στην αναμενόμενη τιμή του κενού θα πρέπει να παραβιάζει τα επιτυχημένα αποτελέσματα που παίρνουμε από το κενό της

(1.147), το οποίο δίνει τις πειραματικά αποδεδειγμένες μάζες των μποζονίων της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης. Όμως, όσο το  $\epsilon$  είναι πολύ μικρό, η διαφοροποίηση από τα επιτυχημένα αποτελέσματα μπορεί να θεωρείται αμελητέα. Όντως, αφού απαιτούμε  $v_1 \sim \mathcal{O}(M_X)$  και  $v_2 \sim \mathcal{O}(M_W)$  παίρνουμε μέσω της (1.149) την πληροφορία ότι  $\epsilon v_1 \ll v_2$ . Το γεγονός αυτό είναι σίγουρα ευπρόσδεκτο, αφού ουσιαστικά υπονοεί ότι το σπάσιμο της  $SU(2)$  λόγω του  $\langle \phi \rangle$  είναι πολύ μικρότερο από αυτό λόγω του  $\langle H \rangle$ .

Πώς όμως προκύπτει η σχέση (1.149); Στο εν λόγω μοντέλο έχουμε διατυπώσει ήδη ότι τα δύο αυθόρμητα σπασίματα της συμμετρίας που συμβαίνουν έχουν μεγάλη (ενεργειακή) απόσταση, δηλαδή  $v_1 \gg v_2$ . Η τεράστια διαφορά στην ενεργειακή κλίμακα αποτελεί το πρόβλημα της ιεραρχίας<sup>19</sup>. Αντικαθιστώντας λοιπόν στο συνολικό δυναμικό (1.139) τις αναμενόμενες τιμές του κενού (1.147), (1.148), τότε σε όρους των  $\epsilon, v_1, v_2$  θα γράφεται:

$$V(\epsilon, v_1, v_2) = -\frac{1}{4}(15 + \epsilon^2)\mu v_1^2 + \frac{1}{16}\lambda_1(225 + 30\epsilon^2 + \epsilon^4)v_1^4 + \frac{1}{16}\lambda_2(105 + 54\epsilon^2 + \epsilon^4)v_1^4 - \frac{1}{4}\nu^2 v_2^2 + \frac{1}{16}\lambda_3 v_2^4 + \frac{1}{4}\lambda_4(15 + \epsilon^2)v_2^2 v_1^2 + \frac{1}{8}\lambda_5(3 - \epsilon)^2 v_1^2 v_2^2. \quad (1.150)$$

Οι stationary point εξισώσεις για το  $V(v_1, v_2, \epsilon)$  είναι:

$$v_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \mu^2 = \frac{1}{2}((15\lambda_1 + 7\lambda_2)v_1^2 + \left(\lambda_4 + \frac{3}{10}\lambda_5\right)v_2^2 + \left(\lambda_1 + \frac{9}{5}\lambda_2\right)\epsilon^2 v_1^2 + \frac{1}{30}(\lambda_1 + \lambda_2)\epsilon^4 v_1^2 - \frac{1}{5}\lambda_5 \epsilon h^2 + \frac{1}{15}\left(\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5\right)\epsilon^2 v_2^2 - \frac{1}{15}\mu^2 \epsilon^2, \quad (1.151)$$

$$v_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \nu^2 = \frac{1}{2}\lambda_3 v_2^2 + 15\left(\lambda_4 + \frac{3}{10}\lambda_5\right)v_1^2 - 3\lambda_5 \epsilon v_1^2 + \left(\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5\right)\epsilon^2 v_1^2, \quad (1.152)$$

$$v_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \epsilon = v_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \mu^2 = \frac{1}{2}(15\lambda_1 + 27\lambda_2)v_1^2 + \left(\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_5\right)v_2^2 - \frac{3}{2}\lambda_5 v_2^2 / \epsilon + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_5)\epsilon^2 v_1^2. \quad (1.153)$$

Οι εξισώσεις αυτές μας δίνουν το πολύ επτά διαφορετικού τύπου λύσεις. Αυτή που μας αφορά είναι η γενικότερη περίπτωση, δηλαδή  $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, \epsilon \neq 0$ .

<sup>19</sup>Το πρόβλημα αυτό παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των στοιχειωδών σωματιδίων και θα αναφερθούμε πολλές φορές σε αυτό, σε όλη την έκταση της εργασίας. Το πρόβλημα της ιεραρχίας είναι τόσο δυνατό που πυροδότησε την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας στη φυσική.

Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με δύο συζευγμένες κυβικές αλγεβρικές εξισώσεις. Όμως, ίσως και να μη χρειαστεί να τις λύσουμε επακριβώς, αν τα  $\lambda_4, \lambda_5$  είναι αρκετά μικρά. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αναζητήσουμε διαταρακτικές λύσεις των stationary point equations, όπου το μέγεθος της διαταραχής  $\epsilon$  είναι πάρα πολύ μικρό. Αν, πράγματι πάμε στο όριο όπου  $\epsilon^2 v_2^2 \ll 1, \epsilon^4 v_1^2 \ll 1, \epsilon \ll 1, \epsilon v_2^2 \ll 1, \epsilon^2 v_2^2 \ll 1$  αλλά  $\epsilon^2 v_2^2$  πεπερασμένο, οι stationary point equations απλοποιούνται στις:

$$\mu^2 = \frac{1}{2} (15\lambda_1 + 7\lambda_2) v_1^2 + \left( \lambda_4 + \frac{3}{10} \lambda_5 \right) v_2^2 \quad (1.154)$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2} \lambda_3 v_2^2 + 15 \left( \lambda_4 + \frac{3}{10} \lambda_5 \right) v_1^2 - 3\lambda_5 \epsilon v_1^2 \quad (1.155)$$

$$\frac{3}{2} \lambda_5 v_2^2 = \epsilon \left( 10\lambda_5 v_1^2 + \frac{1}{5} \lambda_5 v_2^2 \right) \quad (1.156)$$

Η σχέση (1.156) είναι εκείνη που μας δίνει το  $\epsilon$ , δηλαδή τη σχέση (1.149)<sup>20</sup>.

Από τις (1.154), (1.155) κρίνουμε το πώς σχετίζονται οι παράμετροι  $\mu, \nu$  με τα  $v_1, v_2$ .

Η (1.154) διαφοροποιείται ελάχιστα από την αντίστοιχη σχέση που πήραμε προ θεώρησης των όρων διασταύρωσης, την (1.128). Παραθέτουμε και τις δύο για να φανεί η διαφοροποίηση αυτή.

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{15}{2} \lambda_1 v_1^2 + \frac{7}{2} \lambda_2 v_1^2 \\ \mu^2 &= \frac{1}{2} (15\lambda_1 + 7\lambda_2) v_1^2 + \left( \lambda_4 + \frac{3}{10} \lambda_5 \right) v_2^2 \end{aligned}$$

Η διαφοροποίηση έγκειται στην παρουσία των δύο τελευταίων όρων της (1.154), ο οποίοι όμως είναι αμελητέοι εφόσον όπως έχουμε ήδη τονίσει  $v_2 \ll v_1$ . Ανησυχητική είναι ωστόσο η ερμηνεία του αποτελέσματος της (1.155). Αφού το  $\nu^2$  είναι της τάξης του  $M_W^2$ , ή αλλιώς  $\nu^2 \ll v_1$ , αυτό που θα έπρεπε να συμβαίνει για το  $v_1$  θα ήταν να πάρει μία τιμή συγκρίσιμη με το  $v_2$  ούτως ώστε το δεξί μέλος της (1.155) να παίρνει τιμή της τάξης του  $M_W^2$ . Με άλλα λόγια, χωρίς να θέσουμε κάποιον συγκεκριμένο περιορισμό στα  $\lambda_4, \lambda_5$ , αναμένουμε ότι  $v_2 \sim \mathcal{O}(v_1)$ . Προφανώς κάτι τέτοιο θα κατέστρεφε την προαπαιτούμενη ιεραρχία ανάμεσα στα  $M_W$  και  $M_X$  με αποτέλεσμα η κλίμακα του Fermi να συμπίπτει με την κλίμακα της ενοποίησης. Λόγω του ότι θέλουμε να αποφύγουμε μια τέτοια καταστροφή, πρέπει να παραμερίσουμε τη διαίσθησή μας και να εκτέλεσουμε μία «λεπτή ρύθμιση» (fine tuning) στα  $\lambda_4, \lambda_5$  έτσι ώστε να παίρνουμε το ζητούμενο  $v_1^2/v_2^2 \sim 10^{24}$ . Ακόμα χειρότερο είναι το γεγονός ότι αυτή η ρύθμιση θα πρέπει να επαναλαμβάνεται σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών, εφόσον οι διορθώσεις ακτινοβολίας πρόκειται να μετατοπίσουν τα  $\lambda_4, \lambda_5$  από τις αρχικές τους τιμές.

<sup>20</sup>Η ανάλυση για την εξαγωγή του  $\epsilon$  βρίσκεται στο άρθρο: T.N.Sherry, Higgs potential in the  $SU(5)$  model, 1979

Τελικά με την εισαγωγή των όρων διασταύρωσης στο δυναμικό της θεωρίας μας καταφέραμε να λύσουμε και τα δύο προβλήματα που ανέκυψαν. Οι όροι διασταύρωσης θα λειτουργήσουν σαν counter terms διατηρώντας την επανακανονικοποιησιμότητα της θεωρίας ακυρώνοντας τις διορθώσεις ακτινοβολίες καθώς και η τριπλέτα  $H^\alpha$  θα αποκτήσει μάζα

$$m_{H^\alpha} \sim \lambda_5 v_1, \quad (1.157)$$

της τάξης δηλαδή του  $M_X$ , όπως ακριβώς θέλαμε για τη μεσολάβηση της διάσπασης του πρωτονίου. Γενικά, μπορεί να γίνει λεπτομερής συζήτηση για την απόκτηση μάζας των διανυσματικών και βαθμωτών πεδίων της  $SU(5)$  θεωρίας με δυναμικό το  $V = V(\phi) + V(H) + V(\phi, H)$  αλλά δε θα μας απασχολήσει στην εργασία αυτή.

Κλείνοντας, η ανάλυση που προηγήθηκε είχε σκοπό αφενός τη μελέτη της ελαχιστοποίησης του δυναμικού και την εύρεση των μποζονίων και των βαθμωτών πεδίων και αφετέρου την ανάδειξη του προβλήματος της ιεραρχίας μέσα από αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα. Το πρόβλημα αυτό προβάλλεται σε δύο όψεις:

- Πρώτον, στη δυσκολία επεξήγησης της προέλευσης του μεγάλου ενεργειακού διαστήματος ανάμεσα στο  $M_W$  και  $M_P$ . Αυτό πραγματοποιείται με μία θαυματουργό «λεπτή ρύθμιση» στη μηδενικής τάξης θεωρία διαταραχών στο δυναμικό του Higgs, παρ'όλα αυτά στις μεγαλοενοποιημένες θεωρίες στερούμαστε πλήρως αιτίας του  $M_W/M_P$  λόγου. Η θεωρία της  $N = 1$  τοπικής υπερσυμμετρίας μπορεί να ρίξει φως στο πρόβλημα αυτό.
- Δεύτερον, στο τεχνικό κομμάτι του προβλήματος της ιεραρχίας. Η «λεπτή ρύθμιση» που συμβαίνει στη μηδενικής τάξης θεωρία διαταραχών είναι ασταθής, με αποτέλεσμα να τη χαλάνε οι διορθώσεις ακτινοβολίας. Και πάλι, η υπερσυμμετρία δίνει τη λύση και σε αυτό το πρόβλημα, όπως θα δούμε στο επόμενο κομμάτι.

## 1.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης

Το καθιερωμένο πρότυπο περιγράφει, όπως ήδη γνωρίζουμε, τις ισχυρές, ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις στην ενεργειακή κλίμακα των  $\sim 10^2 GeV$ . Οι αλληλεπιδράσεις αυτές των στοιχειωδών σωματιδίων περιγράφονται από τρεις διαφορετικές ομάδες βαθμίδας,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(1)$  αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι οι αλληλεπιδράσεις δεν εκδηλώνονται με την ίδια ισχύ, γεγονός το οποίο αποτυπώνεται μέσω των σταθερών σύζευξης  $g_s, g, g'$  αντίστοιχα. Όμως δεν υπάρχει κάποια εξήγηση για τη διαφορά αυτή που εμφανίζεται στην ισχύ των τριών αλληλεπιδράσεων. Μία από τις αρετές των μεγαλοενοποιημένων θεωριών (το αρχικό κίνητρο για την ακρίβεια) είναι ότι παρέχουν μία τέτοια εξήγηση (Georgi, Quinn, Weinberg).

Η φιλοσοφία λοιπόν των GUTs είναι ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από μία ενιαία σταθερά σύζευξης. Η παρατήρηση των τριών επιστημόνων ήταν ότι οι σταθερές σύζευξης πρέπει να μεταβάλλονται με την ενέργεια και αν τελικά ισχύει η υπόθεση των GUT, θα πρέπει να εξισώνονται σε μία σύζευξη σε κάποια μεγάλη μάζα  $M_U$ , όπου  $M_U$  εννοούμε την κλίμακα μεγάλης ενοποίησης.

Η μεγαλοενοποιημένη θεωρία έχει εξ' ορισμού μία μόνο σταθερά σύζευξης που σχετίζεται με την ομάδα ενοποίησης, εδώ την  $SU(5)$ . Αυτή η μία σταθερά,  $g_5$ , θα πρέπει να εφαρμόζεται κάλλιστα και στις υποομάδες της  $SU(5)$ . Η δυνατότητα διαφορετικών σταθερών σύζευξης για τις διάφορες υποομάδες στις χαμηλές ενέργειες είναι απόρροια του πρώτου αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας. Τα λεπτοκουάρκ ( $X, Y$  μποζόνια) της  $SU(5)$  αποκτούν μάζες και αποσυνδέονται από τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης. Η αποσύζευξη αυτή προφανώς θα έχει διαφορετικές επιδράσεις στις διορθώσεις ακτινοβολίας των διαφορετικών σταθερών σύζευξης των υποομάδων, επάγοντας τις διαφορετικές ενεργούς συζεύξεις στις χαμηλές ενέργειες μέσω της ενεργειακής εξάρτησης που δίνει η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης. Η αποσύζευξη των βαρέων  $X$  μποζονίων αντικατοπτρίζεται στην ανισότητα των συντελεστών της ομάδας επανακανονικοποίησης για τις σταθερές των υποομάδων. Κάτω από την κλίμακα ενοποίησης,  $M_U$ , (για την περίπτωση της  $SU(5)$ ,  $M_U = M_X$ ) οι σταθερές «τρέχουν» διαφορετικά, αναδεικνύοντας τις παρατηρούμενες διαφορές στην ισχύ των αλληλεπιδράσεων στο  $M_W$ . Συνοψίζοντας, η παρουσία των βαρέων μποζονίων μετά το πρώτο σπάσιμο συμμετρίας ευθύνεται για τη διαφοροποίηση των σταθερών σύζευξης.

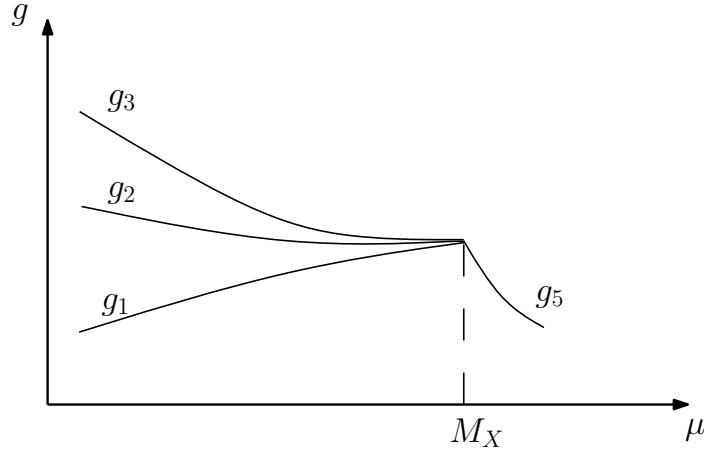
Όπως είπαμε, μετά το πρώτο SSB,  $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , οι διαφορετικές σταθερές συμπεριφέρονται διαφορετικά. Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά αυτή, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο οι σταθερές σύζευξης αλλάζουν με την ενέργεια. Τη γνώση αυτή μας παρέχει ένα δυνατό θεώρημα που πρωτοαποδείχθηκε από τους Appelquist και Carazone:

Το θεώρημα της αποσύζευξης (Decoupling Theorem)

Αν μία gauge αναλλοίωτη (κάτω από μία ομάδα  $G$ ) λαγκρατζιανή θεωρία πεδίου εμπεριέχει σωματίδια με δύο πολύ διαφορετικές μάζες,  $m$  και  $M$ , με  $m \ll M$ , και περιγράφεται από μία επανακανονικοποιήσιμη λαγκρατζιανή, η συμπεριφορά των ελαφρών σωματιδίων της θεωρίας για ενέργεια  $E \ll M$ , μπορεί να περιγραφεί πλήρως από μία επανακανονικοποιήσιμη λαγκρατζιανή που να εμπλέκει μόνο τα ελαφριά σωματίδια. Η επίδραση των βαρέων σωματιδίων περιορίζεται απλά στο να κάνουν rescale στις σταθερές σύζευξης και στις παραμέτρους επανακανονικοποίησης της θεωρίας.

Όσον αφορά στην  $SU(5)$  θεωρία, αυτό σημαίνει ότι αν σε κλίμακα  $M \approx M_X$ , η  $SU(5)$  συμμετρία σπάει στην ομάδα του  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , τότε η συμπεριφορά των σταθερών σύζευξης  $g_1, g_2, g_3$  που αντιστοιχούν στις συμμετρίες αυτές, θα πρέπει να εξελίσσονται σύμφωνα με τις  $\beta$ - συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις  $SU(3), SU(2), U(1)$  αντίστοιχα, χωρίς μνήμη σε ό,τι αφορά την  $SU(5)$ .

Πριν όμως περάσουμε σε λεπτομερή ποσοτική ανάλυση, είναι φρόνιμο να προηγηθούν πρώτα κάποιες ποιοτικές δηλώσεις περί την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα :



Εικόνα 1.13: Για  $\mu > M_X$ , όπου η μάζα του μποζονίου  $X$  μπορεί να αμεληθεί, οι σταθερές σύζευξης που αντιστοιχούν σε διαφορετική ομάδα παραμένουν ενοποιημένες. Για την κλίμακα  $\mu < M_X$ , οι σταθερές σύζευξης εξελίσσονται με έναν τρόπο που εξαρτάται από την ομάδα βαθμίδας.

- Αφού η ενεργειακή εξάρτηση των σταθερών σύζευξης είναι αποκλειστικά λογαριθμική, και αφού στην ενεργειακή περιοχή  $\mathcal{O}(10^2) GeV$ , οι  $g_s, g, g'$  διαφέρουν σημαντικά συμπεραίνουμε ότι η κλίμακα της ενοποίησης  $M_X$  θα πρέπει να είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από το  $M_W$ .
- Από τις εξισώσεις ομάδας επανακανονικοποίησης (RGE), γνωρίζουμε ότι για τις μη αβελιανές ομάδες βαθμίδας η σταθερά σύζευξης μειώνεται με την αύξηση της ενέργειας, ενώ για τις αβελιανές ομάδες συμβαίνει το αντίστροφο. Επομένως, για ενέργειες χαμηλότερες του  $M_X$ , η διάταξη των σταθερών σύζευξης θα είναι  $g_s > g > g'$ , γεγονός που είναι συμβατό με τις πειραματικές παρατηρήσεις.
- Επιπλέον, κάτω από το  $M_X$  οι τρεις τροχιές των σταθερών σύζευξης, όπως φαίνονται στην εικόνα (1.13), πρέπει να έχουν τη σωστή σχετική ισχύ, ώστε να ενώνονται όλες σε ένα σημείο όταν φτάνουν στο  $M_X$ . Αυτό υπονοεί μία μη τριτοβάθμια συνεπή συνθήκη ανάμεσα στα  $g_s, g, g'$ . Η σχέση αυτή προβλέπει τη γωνία Weinberg, η οποία δίνει τη σχέση ανάμεσα στα  $g, g'$ , σε όρους της σταθεράς λεπτής υφής  $\alpha$  και της αντίστοιχης σταθεράς ισχυρών αλληλεπιδράσεων  $\alpha_s$ , όπως θα δούμε παρακάτω.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην ποσοτική ανάλυση. Πρώτα από όλα πρέπει να εξετάσουμε τη σχέση ανάμεσα στις σταθερές σύζευξης των  $SU(3)_c \times$



$SU(2)_L \times U(1)_Y$  και  $SU(5)$  στην κλίμακα της ενοποίησης  $M_X$ <sup>21</sup>. Οι συναλλοιώτες παράγωγοι για αυτές τις δύο ομάδες είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} + ig \sum_{r=1}^3 W_\mu^r \frac{\tau^r}{2} + ig' B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (1.158)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{i=1}^{24} A_\mu^i \frac{\lambda^i}{2}. \quad (1.159)$$

Ο ορισμός των σταθερών σύζευξης εξαρτάται από τη συνθήκη κανονικοποίησης των γεννητόρων των ομάδων. Για τις μη αβελιανές ομάδες, όπως έχουμε ήδη δει (1.30), η κανονικοποίηση αυτή καθορίζεται από τις μεταθετικές σχέσεις των αλγεβρών Lie. Επομένως, οι Gell-Mann πίνακες  $\lambda^\alpha$ , η  $SU(5)$  γενικευμένη εκδοχή τους  $\lambda_i$  καθώς και οι πίνακες του Pauli  $\tau^r$ , όλοι κανονικοποιούνται με τον ίδιο τρόπο,  $\text{Tr}\{\lambda^i \lambda^j\} = 2\delta^{ij}$ . Έχουμε λοιπόν στην περιοχή της ενοποίησης

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1, \quad (1.160)$$

με  $g_3 \equiv g_s$  και  $g_2 \equiv g$  λόγω του ότι, όπως είπαμε, υπακούουν στην ίδια συνθήκη κανονικοποίησης. Η σταθερά  $g_1$  είναι αυτή της αβελιανής υποομάδας της  $SU(5)$ . Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$ig_1 \lambda^{12} A_\mu^{12} = ig' Y B_\mu, \quad (1.161)$$

όπου, κατά τα γνωστά, το  $A_\mu^{12}$  ταυτοποιείται με το  $B_\mu$  πεδίο βαθμίδας. Γνωρίζουμε ότι γενικά η  $U(1)$  αβελιανή ομάδα δεν υπόκειται σε κανέναν μη γραμμικό περιορισμό όσον αφορά στους γεννήτορές της, πράγμα που σημαίνει ότι οι  $Y$  και  $\lambda^{12}$  είναι δυνατό να κανονικοποιούνται διαφορετικά. Ο συντελεστής αναλογίας που συνδέει τους δύο γεννήτορες βρίσκεται εάν παρατηρήσουμε ότι για τη σωματιδιακή ανάθεση της 5, (1.54), πρέπει να έχουμε ασθενές υπερφορτίο:

$$Y = \text{diag} \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1 \right) \quad (1.162)$$

και συγκρίνοντάς το με το γεννήτορα  $L^{12} = \lambda^{12}/2$ :

$$\lambda^{12} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), \quad (1.163)$$

παίρνουμε μέσω της (1.161) (και κατά αντιστοιχία με το αποτέλεσμα της (1.59)), ότι:

$$g_1 \lambda^{12} = g' Y \Rightarrow g_1 \frac{2}{\sqrt{15}} = g' \left( -\frac{2}{3} \right) \Rightarrow g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1. \quad (1.164)$$

<sup>21</sup> Αν και πρέπει ήδη να είναι προφανές στον αναγνώστη, οι διαφορετικού είδους συμβολισμοί για τις σταθερές σύζευξης  $g_s, g, g'$  και  $g_3, g_2, g_1$  δεν είναι συγγραφικό λάθος αλλά, η πρώτη τριάδα αφορά στις σταθερές σύζευξης της ομάδας του SM, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στις υποομάδες της ομάδας ενοποίησης  $SU(5)$ . Αυτό που έπεται είναι να βρούμε το πώς συνδέονται μεταξύ τους οι αντίστοιχες σταθερές σύζευξης από τις δύο τριάδες.

Συνεπώς, αν λάβουμε υπόψη μας την (1.160) και το αποτέλεσμα (1.164) σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα για τη γωνία Weinberg που παίρνουμε από μοντέλο Weinberg - Salam των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων<sup>22</sup> τότε παίρνουμε για την  $\theta_W$  το αριθμητικό αποτέλεσμα :

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3}{5}g_5^2}{g_5^2 + \frac{3}{5}g_5^2} = \frac{3}{8} \quad (1.165)$$

Η τιμή του  $\sin \theta_W$ , (1.165), καθώς και η εξίσωση των σταθερών σύζευξης είναι και τα δύο έγκυρα αποτελέσματα στο όριο του  $M_X$ , δηλαδή ισχύουν για  $\mu > M_X$ . Τώρα πρέπει να μελετήσουμε τί συμβαίνει στο ενεργειακό καθεστώς  $\mu < M_X$ . Η εξέλιξη μίας  $SU(n)$  σταθεράς σύζευξης ελέγχεται από την RGE:

$$\frac{dg_n}{dt} = \beta(g_n) = -b_n g_n^3, \quad n = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad t = \ln \mu, \quad (1.166)$$

όπου για  $n \geq 2$ <sup>23</sup>:

$$b_n = \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2}, \quad (1.168)$$

όπου  $N_F$  ο αριθμός των γεύσεων. Από την άλλη, ο συντελεστής της  $\beta_1$ ,  $b_1$  θα είναι:

$$b_1 = -\frac{N_F}{24\pi^2} \quad (1.169)$$

Είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τη διαφορά των (1.168), (1.169), η οποία θα είναι:

$$b_n - b_1 = \frac{11n}{48\pi^2} \quad (1.170)$$

Γενικά, σε πρώτο επίπεδο, στην καταγραφή των  $\beta$ -συναρτήσεων έχουμε παραλείψει τη συμμετοχή βαθμωτών μποζονίων.  $N_F$  είναι λοιπόν ο αριθμός των γεύσεων των κουάρκ και ισχύει ότι  $N_F = 6$  για μία θεωρία τριών οικογενειών. Σε όλες επανακανονικοποιήσεις των σταθερών σύζευξης οι φερμιονικές συνεισφορές είναι ίσες, πράγμα που μας προκαλεί έκπληξη αν αναλογιστούμε ότι μόνο τα κουάρκ συζεύγγονται με με τα  $SU(3)$  γκλουόνια και ότι τόσο τα κουάρκ όσο και τα λεπτόνια συζεύγγονται με τα  $SU(2)$  και  $U(1)$  μποζόνια. Ας εξετάσουμε το φαινόμενο αυτό αναλυτικά.

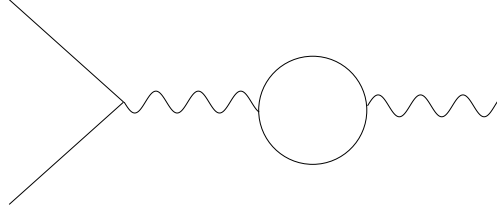
Τα φερμιόνια δίνουν μία συνεισφορά μέσω του διαγράμματος βρόχου :

<sup>22</sup>Μανωλάκος Γιώργος: Διπλωματική εργασία: Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED, σελ.92, εξίσωση (3.109)

<sup>23</sup>Η γενική σχέση των  $\beta$ -συναρτήσεων για  $G = SU(n)$ ,  $n \geq 2$  είναι:

$$\beta(g) = -\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(R)\right) \frac{g^3}{16\pi^3}, \quad (1.167)$$

όπου  $C_2(g)$  είναι η ιδιοτιμή του τετραγωνικού Casimir και  $C(R)$  ο συντελεστής κανονικοποίησης των γεννητόρων. Για τα πεδία βαθμίδας που βρίσκονται στην adjoint αναπαράσταση  $C_2(G) = n$  ενώ για τα φερμιόνια  $C(R) = \frac{1}{2}$



Εικόνα 1.14: Επανακανονικοποίηση των σταθερών σύζευξης λόγω φερμιονικού βρόχου.

η οποία είναι ανάλογη του  $F_n = N_m g_n^2 \text{Tr}(T_i T_j)$ , όπου  $N_m$  είναι ο αριθμός των multiplets των φερμιονίων δύο συνιστωσών που συζεύγνυνται με τα μποζόνια βαθμίδας και όλοι οι γεννήτορες είναι παρομοίως νορμαλισμένοι με  $\text{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ . Θα βρούμε ξεχωριστά τον  $F_n$  παράγοντα για κάθε ομάδα βαθμίδας.

- Για την  $SU(3)$ ,  $N_m$  είναι ο αριθμός των τριπλέτων χρώματος. Αφού τα κουάρκ και τα αντικουάρκ συζεύγνυνται με τα γκλουόνια, έχουμε  $N_m = 2N_F$ , κι επομένως  $F_3 = N_F g_3^2 \delta_{\alpha\beta}$ .
- Για την  $SU(2)$ ,  $N_m$  είναι ο αριθμός των διπλέτων. Εφόσον για κάθε λεπτονική διπλέτα υπάρχουν τρεις διπλέτες χρώματος κουάρκ, έχουμε  $N_m = \frac{1}{2}(1+3)N_F$ , που σημαίνει ότι  $F_2 = N_F g_2^2 \delta_{ab}$ .
- Για την  $U(1)$ ,  $F_1 = N_m g' \text{Tr} Y^2$ . Χρησιμοποιώντας τις (1.59), (1.161) και παίρνοντας  $N_m = 2N_F$  (για τον ίδιο λόγο που το πήραμε και στην περίπτωση της  $SU(2)$ ) τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} F_1 &= N_m g' \text{Tr} Y^2 = 2N_F \frac{3}{5} g_1^2 \frac{5}{3} \text{Tr} L_{12}^2 \\ &= 2N_F \frac{3}{5} g_1^2 \frac{5}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{15} 30 = N_F g_1^2 \end{aligned} \quad (1.171)$$

Από τη σκοπιά της  $SU(5)$ , το γεγονός ότι  $F_3 = F_2 = F_1$  δε φαντάζει συπωματικό -μία ευχάριστη έκπληξη, αλλά συνδέεται με το γεγονός ότι τα φερμιόνια στην  $SU(5)$  θεωρία γεμίζουν μίαν (αναγωγίσιμη) αναπαράστασή της. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πίνακες της αναπαράστασης για κάθε υποομάδα είναι κανονικοποιημένοι με τον ίδιο τρόπο. Επιπροσθέτως, υπάρχει η απαίτηση ότι όλα τα μέλη της αναπαράστασης αποκτούν συγκρίσιμες μάζες  $\ll M_X$ . Αυτό αντιδιαστέλλεται με την περίπτωση των μποζονίων βαθμίδας τα οποία καταλήγουν να αποκτούν μάζες σε δύο πολύ διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες  $M_W \ll M_X$  παρόλο που σχηματίζουν μία πλήρη αναπαράσταση της  $SU(5)$ , την adjoint. Αυτός ο διαχωρισμός στις μάζες των μποζονίων είναι που παράγει διαφορετικές επιδράσεις στην επανακανονικοποίηση των σταθερών σύζευξης των υποομάδων.

Επιστρέφουμε τώρα στην εύρεση των λύσεων των τριών εξισώσεων (1.166). Ξεκινούμε με την  $g_1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dg_1}{d \ln \mu} = -b_1 g_1^3 &\Rightarrow \frac{dg_1(t)}{dt} = -b_1 g_1^3(t) \Rightarrow \\
 dg_1(t) = -b_1 g_1^3(t) dt &\Rightarrow \frac{dg_1}{g_1^3(t)} = -b_1 dt \Rightarrow \\
 \int_{t_0}^t g_1^{-3} dg_1(t) = - \int_{t_0}^t b_1 dt &\Rightarrow -\frac{1}{2} g_1^{-2}(t) \Big|_{t_0}^t = -b_1(t - t_0) \Rightarrow \\
 -\frac{1}{2} (g_1^{-2}(t) - g_1^{-2}(t_0)) = -b_1 t + b_1 t_0 &\Rightarrow g_1^{-2}(t) - g_1^{-2}(t_0) = 2(b_1 t - b_1 t_0) \Rightarrow \\
 g_1^{-2}(\mu) = g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1 (\ln \mu - \ln \mu_0) &\Rightarrow \\
 g_1^{-2}(\mu) = g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1 \ln \frac{\mu}{\mu_0}. & \quad (1.172)
 \end{aligned}$$

Παρομοίως, παίρνουμε τα αποτελέσματα και για τις άλλες δύο σταθερές:

$$g_2^{-2}(\mu) = g_2^{-2}(\mu_0) + 2b_2 \ln \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (1.173)$$

$$g_3^{-2}(\mu) = g_3^{-2}(\mu_0) + 2b_3 \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.174)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να εκφράσουμε τις σταθερές σύζευξης χαμηλής ενέργειας σε όρους των πιο οικείων παραμέτρων χρησιμοποιώντας τις σχέσεις<sup>24</sup>:

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad e = g \sin \theta_W, \\
 g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1, \quad \alpha(\mu) \equiv \frac{e^2(\mu)}{4\pi}. \quad (1.175)
 \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε για την  $g_1(\mu)$ :

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2} \Rightarrow \sin^2 \theta_W g^2 = \cos^2 \theta_W g'^2 \Rightarrow \\
 \frac{3}{5} g_1^2 \cos^2 \theta_W = (g \sin \theta_W)^2 \frac{3}{5} \frac{g_1^2}{4\pi} \cos^2 \theta_W = \frac{e^2}{4\pi} \Rightarrow \\
 \frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W}. \quad (1.176)
 \end{aligned}$$

<sup>24</sup>Οι δύο πρώτες δίνονται στη Διπλωματική «Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED») σελίδες 92,97, εξισώσεις (3.105), (3.140) αντίστοιχα, ενώ η τρίτη είναι το αποτέλεσμα που δίνεται στην (1.161) και η τέταρτη ο ορισμός της σταθεράς λεπτής υφής  $\alpha(\mu)$ .

Παρομοίως, για την  $g_2(\mu)$ :

$$e = g \sin \theta_W \xrightarrow{g \equiv g_2} g_2^2 = \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W} \Rightarrow \frac{g_2^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi \sin^2 \theta_W} \Rightarrow$$

$$\frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} = \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W}, \quad (1.177)$$

ενώ για την  $g_3(\mu)$ :

$$\frac{g_3^2(\mu)}{4\pi} = \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi} \equiv \alpha_s(\mu). \quad (1.178)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν ανά ζεύγη τις (1.172) με (1.176), (1.173) με (1.177) και (1.174) με (1.178), έχουμε διαδοχικά:

- Από το πρώτο ζεύγος εξισώσεων έχουμε:

$$\left( \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W} 4\pi \right)^{-1} = g_1^{-2}(M_X) + 2b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \frac{\cos^2 \theta_W}{4\pi} = \frac{1}{g_1^2(M_X)} + 2b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = \frac{4\pi}{g_5^2} + 8\pi b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = \alpha_5^{-1} + 8\pi b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right). \quad (1.179)$$

- Από το δεύτερο ζεύγος εξισώσεων παίρνουμε:

$$\left( \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W} 4\pi \right)^{-1} = g_2^{-2}(M_X) + 2b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \frac{\sin^2 \theta_W}{4\pi} = \frac{1}{g_2^2(M_X)} + 2b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \frac{4\pi}{g_5^2} + 8\pi b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \alpha_5^{-1} + 8\pi b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right). \quad (1.180)$$

- Τέλος, από το τρίτο ζεύγος εξισώσεων παίρνουμε:

$$\left( \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right)^{-1} = g_3^{-2}(M_X) + 2b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \frac{4\pi}{g_3^2(M_X)} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \frac{4\pi}{g_5^2} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \Rightarrow$$

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right). \quad (1.181)$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς θεωρήσαμε σαν αρχική τιμή την κλίμακα της ενοποίησης,  $\mu_0 = M_X$  αλλά επίσης χρησιμοποιήσαμε την οριακή συνθήκη:

$$g_1(M_X) = g_2(M_X) = g_3(M_X) = g_5 \quad (1.182)$$

και τον ορισμό  $\frac{g_5^2}{4\pi} \equiv \alpha_5$ .

Παίρνοντας τώρα το συνδυασμό  $[2 \cdot (1.181) - 3 \cdot (1.180) + (1.179)]$  υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} 2\alpha_s^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = \\ 2\alpha_5^{-1} + 16\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - 3\alpha_5^{-1} - 24\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) + \alpha_5^{-1} + 8\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ \Rightarrow 2\alpha_s^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = \\ (16\pi b_3 - 24\pi b_2 + 8\pi b_1) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ = 8\pi (2b_3 - 3b_2 + b_1) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ = 8\pi [2(b_3 - b_1) - 3(b_2 - b_1)] \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ \stackrel{(1.170)}{=} 8\pi \left(2\frac{33}{48\pi^2} - 3\frac{22}{48\pi^2}\right) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) = 0. \end{aligned}$$

Οπότε, έχουμε εν συνεχεία:

$$\begin{aligned} 2\alpha_s^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = 0 \\ 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 15\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = 0 \\ 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 15\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = 0 \\ 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 18\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu) = 0 \Rightarrow \\ \sin^2 \theta_W = \frac{3\alpha^{-1}(\mu)}{18\alpha^{-1}(\mu)} + 10\frac{10\alpha_s^{-1}(\mu)}{18\alpha^{-1}(\mu)} \Rightarrow \\ \sin^2 \theta_W = \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9\alpha_s(\mu)}. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Αυτή είναι η μη τετριμμένη σχέση συνέπειας που αναφέραμε στη τρίτη δήλωση κάτω από την εικόνα (1.13). Οι τιμές των σταθερών σύζευξης στο  $\mu = M_W$ , όπου η γωνία Weinberg συνάγεται από πειράματα ουδέτερων ρευμάτων, είναι συμβατές με την πρόβλεψη της (1.183).

Παίρνοντας αυτή τη φορά το γραμμικό συνδυασμό  $\left[ \frac{8}{3}(1.181) - (1.180) - \frac{5}{3}(1.179) \right]$ , αντικαθιστώντας τους συντελεστές  $b_1, b_2, b_3$ <sup>25</sup> και κάνοντας χρήση των (1.179), (1.180) και (1.181) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}\alpha_s^{-1}(\mu) - \alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W - \frac{5}{3}\frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W &= \\ \frac{8}{3}\alpha_5^{-1} + \frac{8}{3}8\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \alpha_5^{-1} - 8\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \frac{5}{3}\alpha_5^{-1} - \frac{5}{3}8\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) &\Rightarrow \\ \frac{8}{3}\alpha_s^{-1}(\mu) - \alpha^{-1}(\mu) &= \frac{64}{3}\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - 8\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \frac{40}{3}\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ &= \frac{8\pi}{3} (8b_3 - 5b_1 - 3b_2) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ &= \frac{8\pi}{3} \left( 8\frac{7}{16\pi^2} + 5\frac{1}{4\pi^2} - 3\frac{5}{24\pi^2} \right) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\ &= \frac{11}{\pi} \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} - \frac{1}{\alpha(\mu)} \right] \frac{\pi}{11} &= \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \Rightarrow \\ \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) &= \frac{\pi}{11} \left( \frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} \right). \end{aligned} \quad (1.184)$$

Η εξίσωση αυτή, (1.184), καθορίζει όπως φαίνεται την κλίμακα της ενοποίησης,  $M_X$ . Επίσης, τροποποιώντας την λίγο:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) &= \frac{\pi}{11} \left( \frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{\alpha_s(\mu)} &= -\frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{3}{8\alpha(\mu)} \end{aligned} \quad (1.185)$$

και συνδυάζοντας το αποτέλεσμα (1.185) με την (1.183), αποκτούμε:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &= \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9\alpha_s(\mu)} \Rightarrow \\ \sin^2 \theta_W &= \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9} \left[ -\frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{3}{8\alpha(\mu)} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

<sup>25</sup>Οι συντελεστές αυτοί για την περίπτωση μας υπολογίζονται μέσω των (1.168) και (1.169):

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2} \underset{N_F=6}{\overset{n=3}{=}} \frac{7}{16\pi^2} \\ b_2 &= \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2} \underset{N_F=6}{\overset{n=2}{=}} \frac{5}{24\pi^2} \\ b_1 &= -\frac{N_F = 6}{24\pi^2} \underset{N_F=6}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta_W &= \frac{1}{6} - \frac{5\alpha(\mu)}{9} \frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{5\alpha(\mu)}{9} \frac{3}{8\alpha(\mu)} \Rightarrow \\
\sin^2 \theta_W &= \frac{1}{6} + \frac{5}{24} - \frac{55\alpha(\mu)}{24\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) \Rightarrow \\
\sin^2 \theta_W &= \frac{3}{8} - \frac{55\alpha(\mu)}{24\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) \tag{1.186}
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει τη γωνία Weinberg όπως αυτή «τρέχει» συναρτήσει της ενέργειας. Παρατηρούμε ότι στο όριο  $\mu \rightarrow M_X$ , αναπαράγεται η αρχική συνθήκη (1.165). Επίσης, αν θεωρήσουμε  $\mu = M_W$  τότε παίρνουμε μία σχέση που συνδέει τις δύο ενεργειακές κλίμακες που μας απασχολούν στο εν λόγω μοντέλο:

$$\sin^2 \theta_W(m_W) = \frac{3}{8} - \frac{55\alpha(m_W)}{24\pi} \ln\left(\frac{M_X}{m_W}\right) \tag{1.187}$$

Επίσης, πρέπει να τονιστεί ότι κατά τον υπολογισμό των  $b_n$  έχουμε πάρει την πιο απλή καταφλκή συμπεριφορά: Για ένα ενδιάμεσο σωματίδιο με  $m < \mu$ , η μάζα θεωρείται μηδενική, ενώ για  $m > \mu$ , η μάζα θεωρείται άπειρη και το σωματίδιο αποσυνδέεται. Συγκεκριμένα για  $\mu > M_X$ , τα  $X, Y$  μποζόνια συνεισφέρουν και η ισότητα των σταθερών σύζευξης, (1.160), διατηρείται σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Για  $\mu < M_X$ , τα πεδία  $X, Y$  αποσυνδέονται και οι συντελεστές  $b_n$  διαφοροποιούνται για τις υποομάδες της  $SU(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(1)$ . Με μία πιο προσεχτική μεταχείριση των καταφλίων μπορούμε ουσιαστικά να ταυτοποιήσουμε το  $M_X$  σαν τη μάζα του  $X$  μποζονίου.

Επίσης, κατά τον υπολογισμό των  $b_n$ , (1.168) και (1.169), έχουμε αμελήσει τη συνεισφορά που προκύπτει από τα βαθμωτά πεδία της θεωρίας. Συμπεριλαμβάνοντας το βαθμωτό Higgs της Weinberg - Salam θεωρίας, δηλαδή μία Higgs διπλέτα, και με πιο προσεχτικό χειρισμό των επιδράσεων μεγαλύτερης τάξης, αποκτούμε τα αποτελέσματα<sup>26</sup>:

$$M_X \approx 4 \cdot 10^{14} GeV, \tag{1.188}$$

$$\sin^2 \theta_W(m_W) \approx 0.21. \tag{1.189}$$

Η πρόβλεψη αυτή για τη γωνία Weinberg, (1.189), βρίσκεται σε ασυμφωνία με τη μέση τιμή των πειραμάτων ουδέτερων ρευμάτων παγκοσμίως αλλά και από πιο σύγχρονα πειράματα μετρήσεων των μαζών των μποζονίων  $W, Z$ :

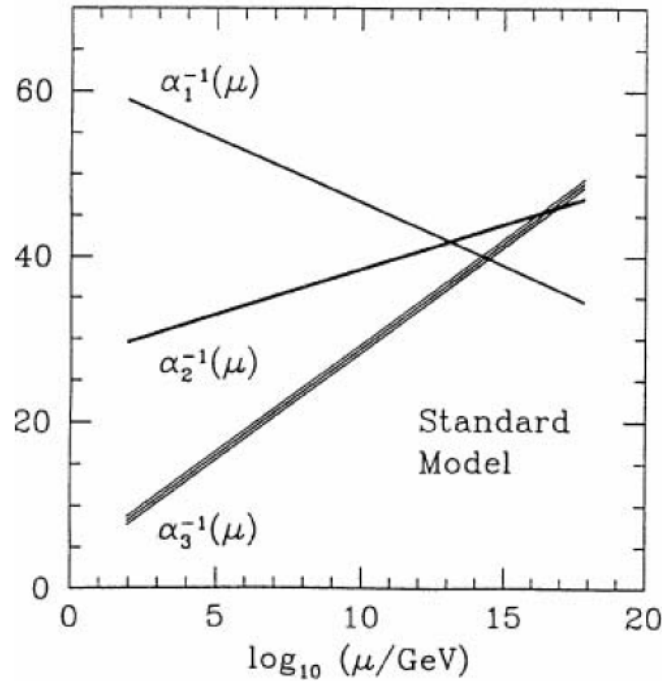
$$\sin^2 \theta_W(m_W) = 0.23161 \pm 0.00018. \tag{1.190}$$

Η ασυμφωνία αυτή αποτυπώνεται στην εικόνα (1.15), η οποία δίνει την εξέλιξη

<sup>26</sup>Για ένα εύρος της QCD παραμέτρου κλίμακας  $\Lambda \approx 300 MeV$ .



των σταθερών σύζευξης στο  $SU(5)$  μοντέλο<sup>27</sup>:



Εικόνα 1.15: Διαγραμματική απεικόνιση της αδυναμίας του μοντέλου να δώσει την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης με αναφορά το σωματιδιακό φάσμα του SM.

Η όλη ιδέα της ενοποίησης φαίνεται να δέχεται ένα αρκετά γερό χτύπημα μη μπορώντας να δώσει ένα σημείο συνάντησης των σταθερών σύζευξης, γεγονός το οποίο δημιουργεί την αμφισβήτηση περί της ρεαλιστικότητάς του. Την κατάσταση σώζει η εισαγωγή της υπερσυμμετρίας, όπου εξετάζοντας την ενοποίηση σαν επέκταση του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου (MSSM)- και όχι του SM - θα δούμε ότι οι σταθερές σύζευξης όντως συναντώνται κάποιο σημείο στο «ενεργειακό μέλλον».

<sup>27</sup> Για την εικόνα αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των τριών παραμέτρων των σταθερών σύζευξης όπως αυτές δίνονται από τον LEP στην κλίμακα του  $M_Z$ :

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = 58.97 \pm 0.05$$

$$\alpha_2^{-1}(M_Z) = 29.61 \pm 0.05$$

$$\alpha_3^{-1}(M_Z) = 8.47 \pm 0.22$$

## 1.5 Διάσπαση του πρωτονίου

Γενικά οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες θεωρείται ότι βρίσκονται ανάμεσα στα πιο ελκυστικά σενάρια περί φυσικής μετά το SM. Ποιοτικά προβλέπουν πάντα δύο πράγματα

- Την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης του SM.
- Τη διάσπαση του πρωτονίου.

Το πρώτο δεν μπορεί να δοκιμαστεί απευθείας αφού η ενοποίηση συμβαίνει σε πολύ μεγάλη ενεργειακή κλίμακα. Από την άλλη μεριά, το δεύτερο μπορεί να δοκιμαστεί και ουσιαστικά προσφέρεται σαν ο μοναδικός τρόπος να τεστάρουμε τη μεγάλη ενοποίηση. Είναι επομένως εύκολο να απορρίψουμε θεωρίες ή να ψάξουμε για βιώσιμα μοντέλα μεγάλης ενοποίησης, όπου η διάσπαση του πρωτονίου όχι απλά προβλέπεται αλλά είναι και πειραματικά προσβάσιμη τόσο σε τρέχοντα όσο και σε μελλοντικά πειράματα.

Από όλες τις εκδοχές μεγαλοενοποιημένων θεωριών, αυτές που βασίζονται στην  $SU(5)$  συμμετρία βαθμίδας είναι οι πιο ανταγωνιστικές ως προς την πρόβλεψη της διάσπασης του πρωτονίου. Από όλες τις απλές ομάδες βαθμίδας που επιτρέπουν την εμβάπτιση της ομάδας του SM, μόνο η  $SU(5)$  έχει τρόπο σπασίματος συμμετρίας στο SM που να συμβαίνει σε ένα βήμα. Αυτό επιτρέπει έναν μάλλον ακριβή καθορισμό των μεγάλων ενεργειακών κλιμάκων στις οποίες συμβαίνει η διάσπαση πρωτονίου.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο της φερμιονικής ανάθεσης, κουάρκ και λεπτόνια συγκατοικούν στην ίδια αναπαράσταση. Λόγω αυτού, κάποιες από τις  $SU(5)$  αλληλεπιδράσεις δε διατηρούν το βαρυονικό αριθμό. Σε αυτήν την παραβίαση βασίζεται το γεγονός ότι η  $SU(5)$  έχει την προβλεπτική ικανότητα της διάσπασης του πρωτονίου. Είναι γνωστό ότι το πρωτόνιο είναι ένα «μακρόβιο» σωματίδιο, όμως αν η αναμενόμενη τιμή του κενού της 24 αναπαράστασης που φιλοξενεί τα βαθμωτά μποζόνια είναι πολύ μεγάλη, τότε οι αλληλεπιδράσεις που προκαλούν την πρωτονιακή διάσπαση είναι αρκετά μικρής εμβέλειας και συνεπώς η πιθανότητα δύο κουάρκ εντός του πρωτονίου να αλληλεπιδράσουν ώστε να επαχθεί η διάσπασή του είναι πολύ μικρή. Γνωρίζοντας όμως περίπου την αναμενόμενη τιμή του κενού της 24, η πρωτονιακή διάσπαση μπορεί τελικά να προβλεφθεί από το  $SU(5)$  μοντέλο.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η πρωτονιακή διάσπαση πραγματοποιείται λόγω του ότι στην ίδια αναπαράσταση φιλοξενούνται τόσο κουάρκ όσο και λεπτόνια, που σημαίνει ότι πλέον υπάρχουν αλληλεπιδράσεις στις οποίες δε διατηρείται ο βαρυονικός αριθμός. Οι αλληλεπιδράσεις τέτοιου είδους ευθύνονται για τη διάσπαση του πρωτονίου. Επομένως, πρέπει πρώτα να φτιάξουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους για τα φερμιόνια στις αναπαραστάσεις  $5, \bar{5}, 10$  κι έπειτα να βρούμε το κομμάτι της λαγκρατζιανής που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις κουάρκ - λεπτονίων.

Αρχικά, οι συναλλοιώτες παράγωγοι των  $5, \bar{5}, 10$  αναπαράστασεων<sup>28</sup> της  $SU(5)$  ομάδας θα είναι:

- Η αναλλοίωτη παράγωγος της  $5$ :

$$(D_\mu \psi)_i = \left( \partial_\mu \delta_i^j + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_i^j \right) \psi_j. \quad (1.191)$$

- Η αναλλοίωτη παράγωγος της  $\bar{5}$ :

$$(D_\mu \psi)^i = \left( \partial_\mu \delta_j^i - i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^i \right) \psi^j. \quad (1.192)$$

- Η αναλλοίωτη παράγωγος της  $10$ :

$$(D_\mu \chi)_{ij} = \partial_\mu \chi_{ij} + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_i^k \chi_{kj} + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^\ell \chi_{i\ell}, \quad (1.193)$$

με  $i, j, k, \ell = 1 \dots 5$ . Ως γνωστό, οι κινητικοί όροι των φερμιονίων εκφράζονται μέσω των συναλλοιώτων παραγώγων, από τις οποίες παίρνουμε τις αλληλεπιδράσεις τους με τα μποζόνια βαθμίδας:

$$\mathcal{L}_{kin}^{mat} = i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (D_\mu \psi)^i + i \bar{\chi}^{ij} \gamma^\mu (D_\mu \chi)_{ij} \quad (1.194)$$

Η (1.194) περιέχει όλες τις φερμιονικές αλληλεπιδράσεις του SM με τον επιπρόσθετο περιορισμό  $g = g_1 = g_2 = g_3$ . Όπως έχουμε ξαναφέρει, οι σταθερές σύζευξης αναμένεται να ενοποιούνται σε μία κλίμακα  $M_X$ , πάνω από την οποία το αυθόρμητο σπάσιμο της  $SU(5)$  δεν επηρεάζει καθόλου τη φυσική μας. Αναπτύσσοντας λοιπόν την (1.194), παίρνουμε πέρα από τις αλληλεπιδράσεις του SM, τις επιπλέον αλληλεπιδράσεις που εμπλέκουν τα μποζόνια  $X, Y$ . Κρατώντας για οικονομία<sup>29</sup> μόνο τους όρους αλληλεπίδρασης με τα μποζόνια αυτά, παίρνουμε:

- Από τον πρώτο όρο της (1.194) κρατώντας μόνο όρους αλληλεπίδρασης (πετώντας δηλαδή όρους που περιέχουν παράγωγο):

$$\begin{aligned} i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (D_\mu \psi)^i &= i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \left( -i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^i \psi^j \right) = \frac{\sqrt{g}}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu (A_\mu)_j^i \psi^j \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_1^1 \psi^1 + \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_2^1 \psi^2 + \dots \\ &\quad + \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_5^1 \psi^5 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu (A_\mu)_1^2 \psi^1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu (A_\mu)_2^2 \psi^2 + \dots \}. \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Αλλά και γενικότερα των  $N, \bar{N}, N(N-1)/2$  αναπαράστασεων της ομάδας  $SU(N)$  με τη διαφορά ότι οι δείκτες θα τρέχουν  $1 \dots N$ .

<sup>29</sup>Στο τέλος των υπολογισμών θα δοθεί η συνολική λαγκρατζιανή με όλους τους όρους αλληλεπίδρασης.

Κρατώντας πλέον μόνο τους όρους των αλληλεπιδράσεων που εμπλέκονται τα  $X, Y$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}_i\gamma^\mu(D_\mu\psi)^i &= \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{\psi}_1\gamma^\mu(A_\mu)_4^1\psi^4 + \bar{\psi}_1\gamma^\mu(A_\mu)_5^1\psi^5 + \bar{\psi}_2\gamma^\mu(A_\mu)_4^2\psi^4 \\
&\quad + \bar{\psi}_2\gamma^\mu(A_\mu)_5^2\psi^5 + \bar{\psi}_3\gamma^\mu(A_\mu)_4^3\psi^4 + \bar{\psi}_3\gamma^\mu(A_\mu)_5^3\psi^5 \\
&\quad + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_1^4\psi^1 + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_2^4\psi^2 + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_3^4\psi^3 \\
&\quad + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_1^5\psi^1 + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_2^5\psi^2 + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_3^5\psi^3\} \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L1}^c\gamma^\mu X_\mu^1 e_L + \bar{d}_{L1}^c\gamma^\mu Y_\mu^1(-\nu_{eL}) + \bar{d}_{L2}^c\gamma^\mu X_\mu^2 e_L \\
&\quad + \bar{d}_{L2}^c\gamma^\mu Y_\mu^2(-\nu_{eL}) + \bar{d}_{L3}^c\gamma^\mu X_\mu^3 e_L + \bar{d}_{L3}^c\gamma^\mu Y_\mu^3(-\nu_{eL}) \\
&\quad + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu 1} d_L^c + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu 2} d_L^c + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu 3} d_L^c \\
&\quad + (-\bar{\nu}_{eL})\gamma^\mu Y_{\mu 1} d_L^c + (-\bar{\nu}_{eL})\gamma^\mu Y_{\mu 2} d_L^c + (-\bar{\nu}_{eL})\gamma^\mu Y_{\mu 3} d_L^c\} \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L\alpha}^c\gamma^\mu X_\mu^\alpha e_L - \bar{d}_{L\alpha}^c\gamma^\mu Y_\mu^\alpha \nu_{eL} + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu\alpha} d_L^c - \bar{\nu}_L\gamma^\mu Y_{\mu\alpha} d_L^c\} \\
&= \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu\alpha} d_L^c - \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu Y_{\mu\alpha} d_L^c + h.c.\}. \quad (1.195)
\end{aligned}$$

- Από το δεύτερο όρο της (1.194) κρατώντας πάλι μόνο τους όρους αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned}
i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(D_\mu\chi)_{ij} &= i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu i\frac{g}{\sqrt{2}}(A_\mu)_i^k\chi_{kj} + i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu i\frac{g}{\sqrt{2}}(A_\mu)_j^\ell\chi_{i\ell} \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(A_\mu)_i^k\chi_{kj} + \bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(A_\mu)_j^\ell\chi_{i\ell}\right) \\
&= -\frac{g}{\sqrt{2}}\{(\bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^1\chi_{11} + \bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^2\chi_{21} + \dots) \\
&\quad + (\bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^1\chi_{11} + \bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^2\chi_{12} + \dots)\}.
\end{aligned}$$

Κρατώντας πλέον μόνο τους όρους των αλληλεπιδράσεων που εμπλέκονται τα  $X, Y$ , καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(D_\mu\chi)_{ij} &= \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L\alpha}^c\gamma^\mu X_\mu^\alpha e_L + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{X}_\mu^\alpha u_L^\beta \\
&\quad - \bar{u}_{L\alpha}\gamma^\mu Y_\mu^\alpha e_L + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{Y}_\mu^\alpha d_L^\beta + h.c.\}. \quad (1.196)
\end{aligned}$$

Οπότε, από τις (1.195), (1.196), η συνολική λαγκκρατζίανή αλληλεπιδράσεων των φερμιονίων με τα  $X, Y$  θα είναι:

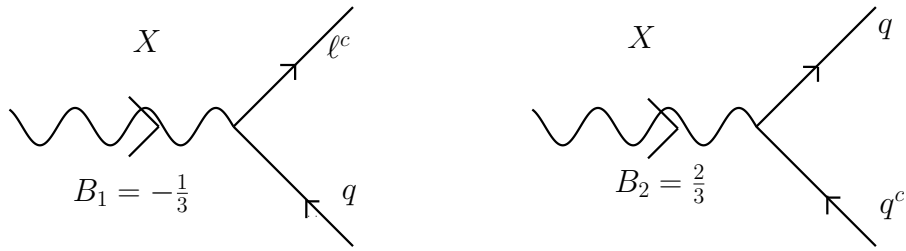
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{X,Y} &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\overbrace{\left(\bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu\alpha} d_L^c + \bar{d}_{L\alpha}^c\gamma^\mu X_\mu^\alpha e_L - \bar{\nu}_L\gamma^\mu Y_{\mu\alpha} d_L^c - \bar{e}_L\gamma^\mu Y_\mu^\alpha u_{L\alpha} + h.c.\right)}^{\text{leptoquark vertices}} \\
&\quad - \frac{g}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{X}_\mu^\alpha u_L^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{Y}_\mu^\alpha d_L^\beta + h.c.\right)}_{\text{diquark vertices}}. \quad (1.197)
\end{aligned}$$

Αξίζει να παρεμβάλλουμε μία μικρή παρένθεση στην ανάλυσή μας στην οποία καταγράφουμε τις λαγκρατζιανές πυκνότητες αλληλεπίδρασης των αναπαριστάσεων  $\bar{5}$  και  $10$  οι οποίες όμως δεν περιέχουν μόνο τους όρους αλληλεπίδρασης με τα  $X, Y$  αλλά και αυτούς του SM.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{\bar{5}} = g & \left\{ \overbrace{\left( \bar{d}_L \gamma^\mu G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} d_L^c \right)}^{SU(3) \text{ interactions}} + \overbrace{\left[ \left( \bar{\nu}_e \quad \bar{e} \right)_L \gamma^\mu W_\mu^i \frac{\tau^i}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \right]}^{SU(2) \text{ interactions}} \right. \\
& + \overbrace{\sqrt{\frac{3}{5}} \left[ -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu B_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu B_\mu e_L + \frac{1}{3} \bar{d}_L^c \gamma^\mu B_\mu d_L^c \right]}^{U(1) \text{ interactions}} \\
& \left. + \overbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\bar{e}_L \gamma^\mu \bar{X}_\mu^\alpha d_{L\alpha}^c \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \bar{\nu}_L \gamma^\mu \bar{Y}_\mu^\alpha d_{L\alpha}^c \right) \right]}^{\text{new interactions}} + h.c. \right\}, \\
\mathcal{L}_{int}^{10} = g & \left\{ \overbrace{\left( \bar{u}_L \gamma^\mu G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} d_L \right)}^{SU(3) \text{ interactions}} + \overbrace{\left[ \left( \bar{\nu}_e \quad \bar{e} \right)_L \gamma^\mu W_\mu^i \frac{\tau^i}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \right]}^{SU(2) \text{ interactions}} \right. \\
& + \overbrace{\sqrt{\frac{3}{5}} \left( \frac{1}{6} \bar{u}_L \gamma^\mu B_\mu u_L + \frac{1}{6} \bar{d}_L \gamma^\mu B_\mu d_L - \frac{2}{3} \bar{u}_L^c \gamma^\mu B_\mu u_L^c + \bar{e}_L^c \gamma^\mu B_\mu e_L^c \right)}^{U(1) \text{ interactions}} \\
& \left. + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \bar{d}_{L\alpha} \gamma^\mu \bar{X}_\mu^\alpha e_L^c + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma^\mu \bar{X}_\mu^\alpha u_L^\beta \right) + \left( -\bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu \bar{Y}_\mu^\alpha e_L^c + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma^\mu \bar{Y}_\mu^\alpha d_L^\beta \right) \right]}^{\text{new interactions}} + h.c. \right\}.
\end{aligned}$$

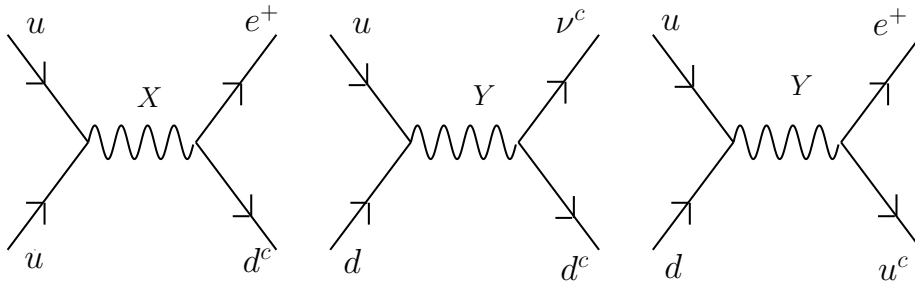
Κλείνοντας λοιπόν την παρένθεση και συνεχίζοντας, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι προς το παρόν δουλεύουμε σε προσέγγιση μίας οικογένειας. Αυτό σημαίνει ότι όταν εισέρχονται και οι δύο άλλες  $\bar{5} + 10$  οικογένειες, τα φερμιονικά πεδία στις παραπάνω λαγκρατζιανές αντικαθίστανται από κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς φερμιονίων που φέρουν τα ίδια  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  φορτία.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα  $X$  μποζόνια συζεύγνυνται σε δύο διαφορετικά κανάλια με διαφορετικούς βαρυονικούς αριθμούς, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (1.16):



Εικόνα 1.16:  $X$  μποζόνια σαν «λεπτοκουάρκ» και «δικουάρκ».

Στη μία περίπτωση,  $B_1 = -1/3$ , συζεύγνυνται με κουάρκ και λεπτόνια - εξ ου και η ονομασία λεπτοκουάρκ. Στη δεύτερη περίπτωση,  $B_2 = 2/3$ , μετατρέπουν κουάρκ σε αντικουάρκ - εξ ου και η ονομασία δικουάρκ. Συνεπώς, με τη διαμεσολάβηση ενός  $X$  μποζονίου, ένα  $B_1 = -1/3$  κανάλι μπορεί να μετατραπεί σε ένα  $B_2 = 2/3$  κανάλι. Με άλλα λόγια, συμβαίνει μία αλληλεπίδραση που δε διατηρεί το βαρυονικό αριθμό σε επίπεδο μηδενικής τάξης θεωρίας διαταραχών (tree-level), όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα :



Εικόνα 1.17: Διαδικασίες που παραβιάζουν το βαρυονικό αριθμό σε tree-level διαγράμματα ανταλλαγής  $X, Y$  μποζονίων.

Από τη γενικότερη λαγκρατζιανή (1.194), λόγω του ότι το  $M_X$  είναι πολύ μεγάλο (πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα φερμιόνια), παίρνουμε τις αλληλεπιδράσεις τεσσάρων φερμιονίων στις οποίες διαμεσολαβούν τα μποζόνια  $X, Y$  και ισχύει ότι ο βαρυονικός αριθμός δε διατηρείται ( $\Delta B \neq 0$ ), όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα (1.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{\Delta B=1} = & \frac{g^2}{8M_X^2} (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma_\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^c \gamma^\mu d_L^\alpha) + h.c. \\ & + \frac{g^2}{8M_Y^2} (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma_\mu d_L^\beta) (-\bar{e}_L^c \gamma^\mu u_L^\alpha - \bar{\nu}_L \gamma^\mu d_L^{c\alpha}) + h.c. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Η λαγκρατζιανή (1.198) έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

- $\Delta(B - L) = 0$ . Διατηρείται η διαφορά βαρυονικού πλύν λεπτονικού αριθμού με αποτέλεσμα η αλληλεπίδραση  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  να επιτρέπεται ενώ αντίθετα, η αλληλεπίδραση  $n \rightarrow e^- \pi^+$  να μην επιτρέπεται.

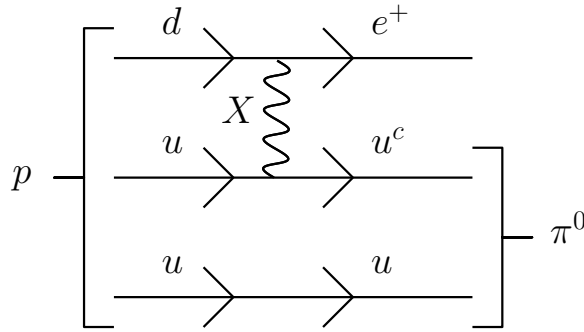
- Αναλλοιώτητα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Όλοι οι δείκτες χρώματος και γεύσης «κλείνουν» καθώς και το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται.

Συνεχίζοντας, για να αποκτήσουμε το χρόνο ζωής του πρωτονίου και τους ρυθμούς διάσπασης από την (1.198), θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα :

- Η  $\mathcal{L}_{eff}^{\Delta B \neq 0}$  ορίζεται στην κλίμακα μεγάλης ενοποίησης,  $M_X$ . Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προεκβληθεί (extrapolate) μέχρι την τυπική ενεργειακή κλίμακα,  $\mathcal{O}(1 GeV)$ , κάνοντας χρήση των εξισώσεων επανακανονικοποίησης ομάδας, συμπεριλαμβάνοντας ασθενείς και ισχυρές QCD διορθώσεις στην κορυφή της αλληλεπίδρασης. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στο να αυξήσει το πλάτος της αλληλεπίδρασης κατά έναν παράγοντα  $\sim 4$ , ελαττώνοντας το χρόνο ζωής του πρωτονίου κατά έναν παράγοντα  $\sim 15$ .
- Το επόμενο βήμα είναι να περάσουμε από την κουάρκ-λεπτονική μορφή της λαγκρατζιανής (1.198) στον υπολογισμό των στοιχείων πίνακα της διάσπασης του πρωτονίου. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ποικίλες φαινομενολογικές hadron-physics τεχνικές. Οι υπολογισμοί αυτοί δίνουν:

$$\tau_p = 2.5 \cdot 10^{28} - 1,6 \cdot 10^{30} yr. \quad (1.199)$$

Η δεσπόζουσα αλληλεπίδραση στη διάσπαση πρωτονίου στα περισσότερα μοντέλα είναι η  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  (η οποία βασίζεται στο τρίτο διάγραμμα της εικόνας (1.17)):



Εικόνα 1.18: Η κύρια αλληλεπίδραση διάσπασης πρωτονίου.

η οποία προκύπτει ότι συμβαίνει με ένα ρυθμό 40 – 60%. Οι υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις είναι οι:

$$p \rightarrow e^+ \omega, \quad e^+ \rho^0, \quad \bar{\nu}_e \pi^+,$$

με ρυθμούς διάσπασης 5 – 20%, 1 – 10% και 16 – 24% αντίστοιχα. Αυτό δίνει μία μέγιστη τιμή στο χρόνο ζωής του πρωτονίου λόγω της διάσπασης  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ :

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0}^{th} \approx 3 \cdot 10^{30} yr. \quad (1.200)$$

Το πιο πρόσφατο πειραματικό όριο<sup>30</sup> είναι αρκετά ψηλότερο από το θεωρητικά αναμενόμενο (1.200):

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0}^{exp} \geq 6.1 \cdot 10^{33} yr. \quad (1.201)$$

Το αποτέλεσμα αυτό λοιπόν θέτει εκτός ανταγωνισμού την υποψηφιότητα του ελάχιστου  $SU(5)$  μοντέλου<sup>31</sup> σαν τη συμμετρία της μεγάλης ενοποίησης.

- Έπειτα πρέπει να συνυπολογίσουμε την επίδραση της ανάμιξης γενιών<sup>32</sup> στη διάσπαση του πρωτονίου. Το βασικό πρόβλημα είναι ότι κατά την παρουσία των φαινομένων ανάμιξης γενιών στα  $SU(5)$  μοντέλα με πολλές γενιές, είναι a priori πιθανό ο πίνακας ανάμιξης που εμφανίζεται στα ασθενή φορτισμένα ρεύματα που διατηρούν το βαρυονικό αριθμό - ο Cabibbo-Kobayashi-Maskawa πίνακας - να μην είναι απαραίτητα ο ίδιος με αυτόν των αλληλεπιδράσεων αλλαγής του βαρυονικού αριθμού. Αυτό θα μπορούσε να έχει βαθιές επιπτώσεις στις προβλέψεις του χρόνου ζωής του πρωτονίου στο μοντέλο  $SU(5)$ . Για παράδειγμα, αν οι δύο πίνακες ανάμιξης είναι διαφορετικοί, θα μπορούσαμε να ρυθμίσουμε τις γωνίες ανάμιξης στον  $\Delta B \neq 0$  τομέα έτσι ώστε να επεκτείνουμε το χρόνο διάσπασης του πρωτονίου. Όμως, οι δύο πίνακες ανάμιξης των αλληλεπιδράσεων βαθμίδας για  $\Delta B = 0$  και  $\Delta B \neq 0$  είναι ίδιοι<sup>33</sup>. Δεν παραθέτουμε τη λεπτομερή απόδειξη εδώ, απλά σημειώνουμε την παρατήρηση κλειδί που οδηγεί στο παραπάνω συμπέρασμα, η οποία είναι η συμμετρία του πίνακα μαζών των up κουάρκ στο ελάχιστο μοντέλο. Το αποτέλεσμα αυτό κάνει ξεκάθαρο το γεγονός ότι στον υπολογισμό της πρόβλεψης του χρόνου διάσπασης του πρωτονίου είναι ασφαλές να αγνοήσουμε πλήρως την ανάμιξη γενιών.

Κλείνοντας, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ενώ το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο φαίνεται να αδυνατεί να αναλάβει το ρόλο της συμμετρίας μεγάλης ενοποίησης, αυτό δεν είναι απόλυτο. Ο συνυπολογισμός επιπλέον μποζονίων Higgs στο μοντέλο ή η εισαγωγή της υπερσυμμετρίας καθιστούν το μοντέλο βιώσιμο ακόμα και σήμερα. Θα δούμε αργότερα στο αντίστοιχο κεφάλαιο πως η υπερσυμμετρία καταφέρνει να ανεβάσει τη θεωρητική πρόβλεψη του χρόνου ζωής του πρωτονίου, σε τιμή τέτοια που να είναι εντός του πειραματικού ορίου.

<sup>30</sup>Το δεδομένο προέρχεται από πειράματα στον Sups-Kamiokande

<sup>31</sup>Ελάχιστο μοντέλο  $SU(5)$  είναι το μοντέλο στο οποίο γίνεται εισαγωγή των ελάχιστων μποζονίων Higgs που απαιτούνται.

<sup>32</sup>Θα μιλήσουμε εκτενώς για την ανάμιξη γενιών ακριβώς στο επόμενο υποκεφάλαιο.

<sup>33</sup>R.N.Mohapatra, Phys. Rev. Lett. 43, 893 (1979)



## 1.6 Φερμιονικές μάζες και γωνίες ανάμιξης στο ελάχιστο $SU(5)$ μοντέλο

Από τη μελέτη του Weinberg-Salam μοντέλου, έχουμε μάθει ότι όταν υπάρχουν διάφορα σωματίδια του ίδιου φορτίου, οι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα μάζων τους είναι γενικά διαφορετικές από αυτές των πεδίων που έχουν καθορισμένους κβαντικούς αριθμούς των αλληλεπιδράσεων βαθμίδας. Οι ιδιοκαταστάσεις μάζας σχετίζονται με τις ιδιοκαταστάσεις των αλληλεπιδράσεων μέσω κάποιου μοναδιακού μετασχηματισμού. Στην προσέγγιση μίας οικογένειας που δουλεύαμε ως τώρα οι διαφορετικές αυτές βάσεις ταυτίζονταν.

Στο κομμάτι αυτό θα συμπεριληφθούν στη θεωρία και οι τρεις  $\bar{5} + 10$  φερμιονικές οικογένειες. Τα φερμιονικά πεδία που χρησιμοποιήθηκαν ως τώρα θα πρέπει να αντικατασταθούν από τις ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας, οι οποίες είναι διανύσματα σε έναν  $3 - D$  χώρο, το χώρο των οικογενειών, με τους δείκτες των διανυσμάτων να είναι  $A = e, \mu, \tau$ .

$$\begin{aligned}
 e &\rightarrow e'_A = \delta_{AB} e_B, & e_B &= (e, \mu, \tau) \\
 \nu_e &\rightarrow \nu'_A = T_{AB}^\dagger \nu_B, & \nu_B &= (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \\
 u &\rightarrow p'_A = U_{AB}^\dagger p_B, & p_B &= (u, c, t) \\
 d &\rightarrow n'_A = V_{AB}^\dagger n_B, & n_B &= (d, s, b)
 \end{aligned} \tag{1.202}$$

Έχουμε επιλέξει τη βάση έτσι ώστε οι φορτισμένες ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας των φορτισμένων λεπτονίων να συμπίπτει με τις ιδιοκαταστάσεις μάζας τους,  $e_A$ . Για τα άμαζα νετρίνα, οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των εκφυλισμένων πεδίων μπορεί να θεωρηθεί η ιδιοκατάσταση μάζας τους, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να θέσουμε το μοναδιακό πίνακα  $T_{AB}$  να είναι, επίσης, ο  $\delta_{AB}$ . Εφόσον οι πίνακες μάζων δεν είναι απαραίτητα συμμετρικοί, οι μοναδιακοί μετασχηματισμοί  $U_{AB}$  και  $V_{AB}$  μπορούν και να διαφέρουν ανάμεσα στα LH και RH πεδία. Με τη σύμβαση που έχουμε ακολουθήσει, να εργαζόμαστε αποκλειστικά με LH φερμιόνια, σημαίνει ότι θα έπρεπε να διακρίνουμε τους μετασχηματισμούς για σωματίδια και αντισωματίδια. Συνεπώς, στην (1.202) θα έπρεπε να προσθέσουμε:

$$\begin{aligned}
 u^c &\rightarrow p'^c_A = U_{AB}^{c\dagger} p^c_B, & p^c_B &= (u^c, c^c, t^c) \\
 d^c &\rightarrow n'^c_A = V_{AB}^{c\dagger} n^c_B, & n^c_B &= (d^c, s^c, b^c),
 \end{aligned} \tag{1.203}$$

όπου γενικά  $U_{AB} \neq U_{AB}^c$  και  $V_{AB} \neq V_{AB}^c$ .

### ***Kinship Hypothesis***

Ενώ η οικογένεια είναι μία καλά ορισμένη έννοια σε όρους των ιδιοκαταστάσεων βαθμίδας, ιστορικά έχουμε επίσης μία διαισθητική ομαδοποίηση των φερμιονικών ιδιοκαταστάσεων μάζας:

- $e$ -family :  $(e, \nu_1, d, u)$
- $\mu$ -family :  $(\mu, \nu_2, s, c)$
- $\tau$ -family :  $(\tau, \nu_3, b, t)$

με κάθε οικογένεια να βρίσκεται ψηλότερα στην κλίμακα της μάζας. Επιπλέον αυτό το σχήμα ομαδοποίησης συνάδει με την εμπειρία μας σχετικά με την ασθενή αλληλεπίδραση με την έννοια ότι μεταβάσεις φορτισμένων ρευμάτων ανάμεσα σε δύο διαφορετικές οικογένειες καταπιέζονται από μικρές γωνίες ανάμιξης. Το ερώτημα λοιπόν είναι αν μπορεί το παραπάνω κομμάτι να γενικευτεί σε μία μεγαλοενοποιημένη θεωρία στην οποία υπάρχουν καινούρια ρεύματα που αλλάζουν τη γεύση και συζεύγνυνται με τα  $X$  μποζόνια. Η παραπάνω δομή οικογενειών που παρατηρείται στις χαμηλές ενέργειες παραμένει έγκυρη στα  $SU(5)$  μοντέλα; Η γενίκευση αυτή ονόμαζεται *kinship hypothesis*. Με άλλα λόγια, υποτίθεται ότι όλες οι διοικογενειακές μεταβάσεις καταπιέζονται από κατάλληλες μικρές γωνίες. Για παράδειγμα, η *kinship hypothesis* λέει ότι οι αλληλεπιδράσεις που αλλάζουν το βαρυονικό αριθμό  $u \rightarrow \tau^+, b^c$  καταπιέζονται σε σχέση με τις  $u \rightarrow e^+, d^c$ . Αυτό φυσικά θα είχε τεράστιες επιπτώσεις στην ανάλυση της διάσπασης του πρωτονίου. Μία ισχυρή παραβίαση της υπόθεσης αυτής θα καταπίεζε σοβαρά το ρυθμό διάσπασης και θα άλλαζε έντονα το μοτίβο των *branching ratio*. Αν θεωρήσουμε πάλι τη γενική λαγκρατζιανή (1.194) συμπεριλαμβάνοντας και τους *flavour* δείκτες, εκτός από αυτούς του χρώματος, (κρατώντας συγκεκριμένους όρους) τότε αυτή μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^{mat} = & -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ (\bar{\nu} \gamma^\mu e + \bar{u}_\alpha \gamma^\mu d_\alpha) \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} X_{\mu\alpha}^a [\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_\gamma^c q_{\beta a} + \epsilon^{ab} (\bar{q}_{ab} \gamma^\mu e^+ - \bar{\ell}_b \gamma^\mu d_\alpha^c)] + \dots \end{aligned} \quad (1.204)$$

Οι αλληλεπιδράσεις βαθμίδας που εμπεριέχονται στην παραπάνω λαγκρατζιανή (1.204) μπορούν να γραφτούν σε όρους των ιδιοκαταστάσεων βαθμίδας σύμφωνα με όσα ορίσαμε παραπάνω:

$$W(\bar{\nu}'_A e'_A + \bar{p}'_A n'_A) + X(\bar{p}'_A p'_A + \bar{n}'_A e'^+_A e'_A n'_A) + Y(\bar{p}'_A n'_A + \bar{p}'_A e'^+_A + \bar{\nu}'_A n'_A), \quad (1.205)$$

όπου έχουμε «πετάξει» όλους τους δείκτες εκτός από αυτόν της οικογένειας  $A$ , μίας και πλέον μιλάμε και για τις τρεις οικογένειες, σε αντίθεση με τη λαγκρατζιανή (1.204) που αναφέρεται στην προσέγγιση της μίας οικογένειας. Εκφράζοντας τις παραπάνω συζεύξεις της (1.205) σε όρους των ιδιοκαταστάων μάζας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} = & W[\bar{\nu}_A e_A + (U_{AB}^\dagger p_B)^\dagger V_{AB}^\dagger n_B] + X \left[ (U_{AB}^{c\dagger} p_B^c)^\dagger U_{AB}^\dagger p_B + (V_{AB}^{c\dagger} n_B^c)^\dagger \delta_{AB} e_B^c \right. \\ & \left. + (\delta_{AB} e_B)^\dagger V_{AB}^{c\dagger} n_B^c \right] + Y \left[ (U_{AB}^{c\dagger} p_B^c)^\dagger V_{AB}^\dagger n_B + (U_{AB}^\dagger p_B)^\dagger \delta_{AB} e_B^c \right. \\ & \left. + (\delta_{AB} \nu_B)^\dagger V_{AB}^{c\dagger} n_B^c \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= W \left[ \bar{\nu}_A e_A + \bar{p}_A (UV^\dagger)_{AB} n_B \right] + X \left[ \bar{p}_A^c (U^c U^\dagger)_{AB} p_B + \bar{n}_A V_{AB} e_B^c + \bar{e}_A (V_{AB}^{c\dagger} n_B^c) \right] \\
&+ Y \left[ \bar{p}_A^c (U^c V^\dagger)_{AB} n_B + \bar{p}(U)_{AB} e_B^c + \bar{\nu}_A (V_{AB}^{c\dagger} n_B^c) \right]. \quad (1.206)
\end{aligned}$$

Οι πίνακες στροφής KM είναι απλά ο συνδυασμός  $UV^\dagger$ . Είναι ξεκάθαρο ότι οι υπόλοιποι έξι πίνακες στροφής στις συζεύξεις με τα  $X, Y$  μποζόνια δεν είναι της μορφής αυτής. Επομένως, αναμένεται να συναντήσουμε αρκετά διαφορετικές γωνίες ανάμιξης σε αυτές τις νέες αλληλεπιδράσεις, η υπόθεση kinship ίσως και να μην είναι σωστή. Παρ' όλα αυτά, θα δείξουμε παρακάτω ότι στην εκδοχή του  $SU(5)$  με την απλούστερη Higgs δομή, το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο (minimal  $SU(5)$  model), όλες οι νέες αναμίξεις ουσιαστικά καταρρέουν στον οικείο KM πίνακα στροφής.

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να τονίσουμε τις δύο συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε ένα πεδίο Higgs να δίνει κατευθείαν μάζα στα φερμιόνια σε μία  $SU(5)$  θεωρία:

- Πρώτον, η αναπαράσταση στην οποία φιλοξενούνται τα πεδία Higgs (ή η μιγαδική συζυγή της) θα πρέπει να εμφανίζεται στο τανυστικό γινόμενο της αναπαράστασης της  $SU(5)$  στην οποία τα φερμιόνια και αντιφερμιόνια κατοικούν.
- Δεύτερον, η Higgs αναπαράσταση πρέπει να έχει μία συνιστώσα η οποία να μετασχηματίζεται κάτω από την  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  ομάδα με τον ίδιο τρόπο όπως το πεδίο Higgs του SM (ή όπως το μιγαδικό συζυγές του).

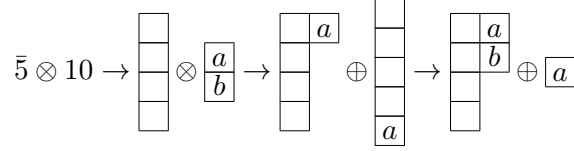
Συνεπώς, αφού τα φερμιόνια ανήκουν στην αναπαράσταση  $\bar{5} + 10$ , τα βαθμωτά πεδία με τα οποία να μπορούν να σχηματίσουν συζεύξεις Yukawa (δηλαδή φερμιονικούς όρους μάζας στη λαγκρατζιανή) θα βρίσκονται σε αναπαραστάσεις οι οποίες εμφανίζονται, όπως προαναφέραμε, στο τανυστικό γινόμενο της αναπαράστασης των φερμιονίων:

$$(\bar{5} \oplus 10) \otimes (\bar{5} \oplus 10) = \bar{5} \otimes \bar{5} + \bar{5} \otimes 10 + 10 \otimes \bar{5} + 10 \otimes 10 \quad (1.207)$$

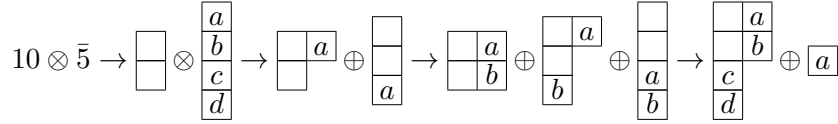
Με τη βοήθεια των Young Tableaux υπολογίζουμε τα γινόμενα που προέκυψαν:

$$\begin{aligned}
\bar{5} \otimes \bar{5} &\rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \square & c \\ \hline \square & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline \end{array} \\
\bar{5} \otimes \bar{5} &= 15 \oplus \bar{10} \quad (1.208) \\
10 \otimes 10 &\rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

$$10 \otimes 10 = \bar{5}0 + \bar{4}5 + \bar{5} \quad (1.209)$$



$$\bar{5} \otimes 10 = 45 \oplus 5 \quad (1.210)$$



$$10 \otimes \bar{5} = 45 \oplus 5 \quad (1.211)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στοχεύουμε σε ένα σωστό σπάσιμο της συμμετρίας  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_c \times U(1)_{em}$ , θα επιλέγαμε την αναπαράσταση  $\bar{5}$  να φιλοξενήσει τα πεδία Higgs μας, αφού όντως αυτή εμφανίζεται στο τανυστικό γινόμενο των φερμιονικών αναπαραστάσεων κι επίσης έχει μία συνιστώσα η οποία μετασχηματίζεται κάτω από την  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , όπως το πεδίο Higgs στο SM.

Ας ελέγξουμε όμως και τις άλλες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που εμφανίζονται στα παραπάνω τανυστικά γινόμενα, μήπως υπάρχει κάποια που να πληροί τις προϋποθέσεις:

$$\begin{aligned} \bar{1}0 &= (3, 1) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (1, 1) \\ \bar{1}5 &= (1, 3) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (\bar{6}, 1) \\ \bar{4}5 &= (1, 2) \oplus (\bar{3}, 1) \oplus (3, 2) \oplus (6, 1) \oplus (8, 2) \oplus (3, 1) \oplus (\bar{3}, 3) \\ 45 &= (1, 2) \oplus (3, 1) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (\bar{6}, 1) \oplus (8, 2) \oplus (\bar{3}, 1) \oplus (3, 3) \\ \bar{5}0 &= (\bar{6}, 1) \oplus (8, 2) \oplus (6, 3) \oplus (3, 2) \oplus (1, 1) \oplus (\bar{3}, 1) \\ 50 &= (6, 1) \oplus (8, 2) \oplus (\bar{6}, 3) \oplus (\bar{3}, 2) \oplus (1, 1) \oplus (3, 1) \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω αναπτύγματα, το πρώτο έχει υπολογιστεί στο παράρτημα, ενώ τα υπόλοιπα υπολογίστηκαν κατά τα γνωστά με τη βοήθεια των Young tableaux, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\bar{1}5 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1, 3) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\bar{3}, 2) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\bar{6}, 1) \end{array} \quad (1.212)$$

$$\bar{45} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \quad (1, 2) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\bar{3}, 1) \\ \\ \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3, 2) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (6, 1) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square \quad (8, 2) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \bullet \quad (3, 1) \\ \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (\bar{3}, 3) \end{array} \right. \quad (1.213)$$

$$\bar{50} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \bullet \quad (\bar{6}, 1) \\ \\ \bullet, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1, 1) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square \quad (8, 2) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (6, 3) \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (\bar{3}, 1) \\ \\ \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (3, 2) \end{array} \right. \quad (1.214)$$

Παρατηρούμε ότι το τανυστικό γινόμενο δίνει διάφορες αναπαραστάσεις από τις οποίες μόνο η 45 (και η  $\bar{45}$ ) έχει συνιστώσα (1, 2) η οποία είναι αυτή που φιλοξενεί το Higgs πεδίο στο SM από το οποίο προκαλείται το σπάσιμο της συμμετρίας. Το minimal  $SU(5)$  μοντέλο έχει βαθμωτά Higgs μόνο στις 24 και 5 αναπαραστάσεις, με την 5 να είναι αυτή που προκαλεί το αυθόρμητο σπάσιμο  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$  και δίνει μάζες στα φερμιόνια.

Επίσης, παρατηρούμε ότι η 24 δεν περιέχεται καν παραπάνω στο τανυστικό γινόμενο και άρα τα βαθμωτά πεδία  $\phi$  δε συζεύγγονται με τα φερμιόνια και αυτός είναι ο λόγος που η θεωρία δεν προβλέπει κάποιο από τα φερμιόνια να παίρνει πολύ μεγάλη μάζα  $\mathcal{O}(M_X)$ .

Μπορούμε λοιπόν τώρα να κατασκευάσουμε τους  $SU(5)$  singlet όρους, δηλαδή τους όρους αλληλεπίδρασης των φερμιονίων με τα Higgs της  $5, \bar{5}_H$ . Οι όροι αυτοί αποτελούν τους όρους που δίνουν μάζα στα φερμιόνια:

$$\underbrace{f_1 10_f 10_f \bar{5}_H}_{10 \otimes 10} + \underbrace{f_2 10_f \bar{5}_f \bar{5}_H}_{10 \otimes \bar{5}} \quad (1.215)$$

Οι συνδυασμοί στους οποίους προέκυψε η  $5$

Αναλυτικά, οι όροι αυτοί της λαγκρατζιανής θα είναι:

$$\mathcal{L}_y = f_{AB}^{(1)} (\chi_{Aij})^T C (\chi_{Bkl}) H_m \epsilon^{ijklm} + f_{AB}^{(2)} (\chi_{Aij})^T C \psi_B^i H^{j\dagger} + h.c., \quad (1.216)$$

όπου  $C$  είναι ο πίνακας συζυγίας φορτίου που ικανοποιεί την εξίσωση  $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ <sup>34</sup>. Λόγω της αντιμεταθετικότητας των φερμιονικών πεδίων και της αντισυμμετρικότητας του  $C \equiv i\gamma^2 \gamma^0$ , οι πίνακες των Yukawa συζεύξεων είναι συμμετρικοί. Ο  $\epsilon^{ijklm}$  είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής και  $A, B$  είναι οι δείκτες που έχουν να κάνουν με το χώρο των οικογενειών,  $H^{j\dagger}$  είναι η  $\bar{5}$  αναπαράσταση, που είναι το ερμιτιανό συζυγές της  $H_j$ .

Όταν λοιπόν το βαθμωτό πεδίο της  $5$  αναπτύσσει VEV

$$\langle H \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} (0, 0, 0, 0, 1), \quad (1.217)$$

οι συζεύξεις της λαγκρατζιανής θα δώσουν όρους τετραγωνικούς ως προς τα φερμιονικά πεδία:

$$v_2 f_{AB}^{(1)} (\bar{p}_A p_B) + v_2 f_{AB}^{(2)} (\bar{n}_A n_B + \bar{e}_A e_B). \quad (1.218)$$

Συνεπώς, οι πίνακες μάζας των  $p, n, e$  καταστάσεων, έχουν τις ιδιότητες:

$$v_2 f_{AB}^{(1)} = M_{AB}^{(p)} = M_{BA}^{(p)},$$

$$v_2 f_{AB}^{(2)} = M_{AB}^{(n)} = M_{AB}^{(e)}.$$

Το γεγονός ότι ο p-quark πίνακας μάζας είναι συμμετρικός, υπονοεί ότι ο  $U^\dagger U^c$  είναι ένας διαγώνιος μοναδιακός πίνακας. Η ισότητα  $M^{(n)} = M^{(e)}$  είναι απόρροια της  $SU(4)$  συμμετρίας του παραπάνω VEV. Αυτό σημαίνει ότι οι ίδιοι biunitary μετασχηματισμοί διαγωνοποιούν τους  $M^{(n)}, M^{(e)}$ . Αφού λοιπόν διαλέξαμε για τα φορτισμένα λεπτόνια οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας να είναι ίδιες με τις ιδιοκαταστάσεις μάζας, θεωρούμε ότι  $V$  και  $V^c$  είναι επίσης ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Επομένως, με απροσδιοριστία ενός μιγαδικού μοναδιαίου πίνακα, όλες οι γωνίες ανάμιξης της (1.206) είναι της μορφής  $UV^\dagger$ , που είναι απλά οι KM στροφές των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Συνεπώς, για το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο η υπόθεση kinship επαληθεύεται πλήρως.

<sup>34</sup>Θα ασχοληθούμε αρκετά με τον τελεστή αυτόν στο κεφάλαιο της υπερσυμμετρίας.

### Σχέσεις μαζών φεπτονίων-κουάρκ

Μετά από όλη την παραπάνω ανάλυση, εγείρεται λοιπόν το ερώτημα: Υπάρχει κάποια ένδειξη που να υποστηρίζει το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο; Η ισότητα  $M^{(n)} = M^{(e)}$  που προαναφέραμε στη δεύτερη ιδιότητα παραπάνω, δεν υπονοεί μόνο την εξίσωση των πινάκων διαγωνοποίησης αλλά και των ιδιοτιμών τους. Επομένως, θα ισχύει:

$$m_e = m_d, \quad m_\mu = m_s, \quad m_\tau = m_b \quad (1.219)$$

Παρατηρούμε λοιπόν αναλογικά με την εξίσωση των σταθερών σύζευξης πάνω από την κλίμακα μεγάλης ενοποίησης, (1.160), επικρατεί και εξίσωση μαζών, (1.219), η οποία, παρομοίως με τις σταθερές σύζευξης, θα αίρεται κατά την προεκβολή στις χαμηλές ενέργειες  $\mathcal{O}(M_W)$ , αφού υπάρχει και στις μάζες έντονη ενεργειακή εξάρτηση. Έτσι λοιπόν, από διαταρακτικούς υπολογισμούς σε διαγράμματα φερμιονικής ιδιενέργειας (self-energy) παίρνουμε:

$$m(\mu) = m - mg_n^2 b_m^{(n)} \ln \left( \frac{\Lambda}{\mu} \right). \quad (1.220)$$

Επομένως, η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης για την ενεργό μάζα θα είναι:

$$\frac{d \ln m(\mu)}{d \ln \mu} = b_m^{(n)} g_n^2(\mu). \quad (1.221)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί εφόσον γνωρίζουμε ήδη την ενεργειακή εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης:

$$g_n^2(\mu) = \frac{g_n^2(\mu_0)}{1 + 2b_n g_n^2(\mu_0) \ln \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)}, \quad (1.222)$$

η οποία προκύπτει λύνοντας την (1.166). Παραγωγίζοντας την (1.222) ως προς  $\ln \mu$  παίρνουμε εύκολα:

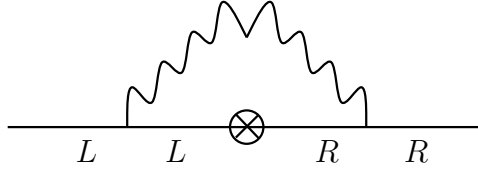
$$\frac{dg_n^2(\mu)}{d \ln \mu} = -2b_n g_n^4(\mu) \quad (1.223)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις αποκτούμε το αποτέλεσμα:

$$\frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \left[ \frac{g_n(\mu)}{g_n(\mu_0)} \right]^{-\frac{b_m^{(n)}}{b_n}}, \quad (1.224)$$

όπου τα  $b_n$  δίνονται από τη σχέση (1.168).

Πιο πάνω, στην (1.220), αναφέραμε ότι το διάγραμμα ιδιοενέργειας φερμιονίων διαφοροποιεί τις τιμές των μαζών κατά την προεκβολή στις χαμηλές ενέργειες. Προχωράμε λοιπόν στον υπολογισμό των  $b_m^{(n)}$  που εμφανίζονται στην (1.220) χρησιμοποιώντας το διάγραμμα ιδιοενέργειας:



Εικόνα 1.19: Διάγραμμα ιδιοενέργειας φερμιονίου.

$$b_m^{(n)} = -\frac{3}{8\pi^2} \sum_{\alpha} (T^{\alpha} T^{\alpha})_{ij}, \quad (1.225)$$

όπου  $T^{\alpha}$  είναι οι κατάλληλοι πίνακες αναπαράστασης για τα φερμιόνια. Για  $SU(n)$  με  $n \geq 2$ , ισχύει:

$$\sum_{\alpha} (T^{\alpha} T^{\alpha})_{ij} = \frac{n^2 - 1}{2n} \delta_{ij}, \quad (1.226)$$

ενώ για την περίπτωση της  $U(1)$ :

$$(T^0)^2 = \frac{3}{5} \left( \frac{Y}{2} \right)^2 \quad (1.227)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (1.169), (1.168), η σχέση (1.224) μας δίνει για τις μάζες των φερμιονίων:

$$\frac{m_p(\mu)}{m_p(\mu_0)} = \left[ \frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right] \frac{8}{11 - 2N_F/3} \left[ \frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right] \frac{-6}{10N_F} \quad (1.228)$$

$$\frac{m_n(\mu)}{m_n(\mu_0)} = \left[ \frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right] \frac{8}{11 - 2N_F/3} \left[ \frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right] \frac{3}{10N_F} \quad (1.229)$$

$$\frac{m_e(\mu)}{m_e(\mu_0)} = \left[ \frac{g_1(\mu)}{g_1(\mu_0)} \right] \frac{-27}{10N_F}, \quad (1.230)$$

όπου  $N_F$  είναι κατά τα γνωστά ο αριθμός των γεύσεων των κουάρκ. Τονίζουμε ότι δεν υπάρχει συνεισφορά από τα  $SU(2)$  μποζόνια βαθμίδας επειδή τα  $RH$  φερμιόνια είναι όλα singlet κάτω από την  $SU(2)$  και η παραπάνω εικόνα (1.19) περιέχει μόνο ένα αναποδογύρισμα της ελκικότητας. Διαιρώντας λοιπόν την (1.229) με την (1.230) και χρησιμοποιώντας την (1.219) σαν αρχική συνθήκη, δηλαδή  $m_n(M_X) = m_e(M_X)$ , καθώς και την (1.160), δηλαδή  $g_3(M_X) = g_1(M_X) = g_5(M_X)$ , παίρνουμε:

$$\frac{m_n(\mu)}{m_e(\mu)} = \left[ \frac{g_3(\mu)}{g_5(M_X)} \right] \frac{8}{11 - 2N_F/3} \left[ \frac{g_1(\mu)}{g_5(M_X)} \right] \frac{3}{N_F} \quad (1.231)$$



Αν πάρουμε την την ενεργό τωρινή μάζα στο  $q\bar{q}$  κατώφλι :

$$\mu = \mu_{th} \equiv 2m_q(\mu_{th}), \quad (1.232)$$

τότε αποκτούμε για  $n_3 = b, e_3 = \tau$  και  $\mu \approx 10GeV$ :

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx 3, \quad (1.233)$$

αποτέλεσμα το οποίο θα πρέπει να θεωρείται σαν επιτυχής πρόβλεψη της θεωρίας. Παρ'όλα αυτά, δεν είναι ξεκάθαρο το πως να υπολογίσουμε κατάλληλα τα φαινόμενα επανακανονικοποίησης για ελαφρύτερα φερμιόνια αφού μία μικρότερη τιμή της παραμέτρου κλίμακας,  $\mu$ , πρέπει να συμπεριληφθεί. Παρ'όλα αυτά, εάν απλώς εξετάσουμε τον RG αναλλοίωτο λόγο<sup>35</sup> που δίνει η (1.219) για τις δύο πρώτες γενιές :

$$\frac{m_\mu}{m_e} = \frac{m_s}{m_d}, \quad (1.234)$$

βλέπουμε ότι τα δύο μέλη διαφέρουν κατά περίπου έναν παράγοντα 10, αφού τωρινοί αλγεβρικοί υπολογισμοί δίνουν  $m_d/m_s \approx 1/24$  ενώ  $m_e/m_\mu \approx 1/207$ . Η αποτυχία αυτή είναι αρκετή για να αποκλείσει το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο από το να είναι μία βιώσιμη θεωρία ; Αυτό είναι ένα πολύ βιαστικό συμπέρασμα καθώς για το πολύ ελαφρύ  $d$  κουάρκ ( $m_d \approx 7MeV$ ) ο RGE διαταρακτικός υπολογισμός δεν αναμένεται να ισχύει. Επομένως, η ορθότητα του ελάχιστου  $SU(5)$  μοντέλου είναι ακόμα ένα ανοιχτό ζήτημα.

Επομένως, προκειμένου να ξεπεράσουμε τον παραπάνω «σκοπέλο», (1.234) και να τροποποιήσουμε το αποτέλεσμα αυτό, αλλά ταυτόχρονα να κρατήσουμε την καλή πρόβλεψη (1.233), υπάρχουν δύο πιθανοί τρόποι :

- Μεγέθυνση του Higgs φάσματος με την προσθήκη μίας 45 Higgs αναπαράστασης (όπως έχουμε δει πληροί τις προϋποθέσεις καθώς εμφανίζεται στο τανυστικό γινόμενο της αναπαράστασης των φερμιονίων).
- Εισαγωγή μη επανακανονικοποιήσιμων ενεργών αλληλεπιδράσεων που να δίνουν την ανάδυση συνεισφορών μάζας στο εύρος των  $MeV$ .

Ας αναλύσουμε τις δύο παραπάνω προτάσεις :

- Από τα αναπτύγματα (1.211), παρατηρούμε ότι πέρα από την 5 και η 45 είναι κατάλληλη για να δώσει μάζα στα φερμιόνια. Η Higgs 45-πλέτα  $H_c^{ab}$  ( $H_c^{ab} = -H_c^{ba}$ ,  $\sum_a H_a^{ab} = 0$ ) εμπλέκεται στις παρακάτω αλληλεπιδράσεις :

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{(45)} = f_{mn}^{(1)} \psi_{Lam}^T C \chi_{Ln}^{bc} H_{bc}^{\dagger a} + f_{mn}^{(2)} \chi_{Ln}^{Tab} C \chi_{Ln}^{cd} H_d^{ef} \epsilon_{abcdef} + h.c. \quad (1.235)$$

<sup>35</sup>RG αναλλοίωτος επειδή τα  $d, s$  ή  $e, \mu$  εμπλέκονται στις ίδιες αλληλεπιδράσεις, άρα και επανακανονικοποιούνται κατά τον ίδιο τρόπο με συνέπεια η ισοτιμία των λόγων να ισχύει για κάθε ενέργεια.

Για να υπολογίσουμε τις συνεισφορές στη μάζα από την (1.235), πρέπει να γνωρίζουμε τα άχρωμα ουδέτερα στοιχεία της  $H_a^{bc}$ . Στο γινόμενο  $\bar{5} \otimes 10$ , ή αλλιώς  $\psi_a \chi^{bc}$ , η  $\bar{5}$  αναπαράσταση αποκτιέται θέτοντας  $a = b$  και αθροίζοντας πάνω στα  $a$  ενώ ταυτόχρονα ο δείκτης  $c$  παραμένει ελεύθερος. Τα υπόλοιπα στοιχεία της  $H_a^{bc}$  με  $\sum_a H_a^{ac} = 0, \forall c$ , δίνουν την  $4\bar{5}$  αναπαράσταση. Δεδομένου του περιεχομένου ως προς το χρώμα και ηλεκτρικού φορτίου της  $\bar{5}$ , μπορούμε να σχηματίσουμε ένα άχρωμο και ηλεκτρικά ουδέτερο αντικείμενο, απλώς με το να πάρουμε την πέμπτη στήλη και σειρά της  $\psi^{bc}$ , δηλαδή  $c = 5$  και το  $b$  συμπίπτει με το  $a$ . Στο τέλος, όλα τα  $H_a^{a5}$ , ( $a = 1 \dots 4$ ) θα είναι ουδέτερα. Το  $H_a^{55}$  εξαφανίζεται καθώς  $\psi^{bc} = -\psi^{cb}$ . Η προηγούμενη συνθήκη  $\sum_{a=1}^5 H_a^{ac} = 0$  γίνεται στην περίπτωσή μας  $\sum_{a=1}^4 H_a^{a5} = 0$ .

Για να διατηρήσουμε το χρώμα, τα τρία πρώτα στοιχεία,  $a = 1, 2, 3$ , πρέπει να αναπτύσσουν το ίδιο VEV, ως το πούμε  $v_{45}$ . Έτσι, η συνθήκη  $\sum_{a=1}^4 H_a^{a5} = 0$  μας λέει ότι το  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$  διατηρούμενο VEV της  $4\bar{5}$  είναι της μορφής:

$$\langle H_a^{bc} \rangle = v_{45} (\delta_a^b - 4\delta_{a4} \delta^{b4}) \delta^{c5}. \quad (1.236)$$

Εισάγοντας το VEV αυτό στον πρώτο όρο της (1.235), παίρνουμε:

$$f_{mn}^{(1)} \psi_{L_{am}}^T C \psi_{L_n}^{bc} v_{45} (\delta_b^a - 4\delta^{a4} \delta_{c5}), \quad (1.237)$$

έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} a = 1, 2, 3 &\rightarrow M_{mn}^{d(45)} = f_{mn}^{(1)} v_{45}, \\ a = 4 &\rightarrow M_{mn}^{e(45)} = f_{mn}^{(1)} (-3) v_{45}. \end{aligned}$$

Συμπερασματικά, αν πούμε  $M_{45}$  τη συνεισφορά της  $4\bar{5}$ -πλέτας του Higgs, στους  $Q = -1$  και  $Q = -1/3$  φερμιονικούς πίνακες μάζας, η (1.237) δίνει:

$$M_{45}^e = -3M_{45}^d \xrightarrow{45} \begin{cases} m_e = 3m_d \\ m_\mu = 3m_s \\ m_\tau = 3m_b \end{cases} \quad (1.238)$$

Αν και οι δύο Higgs αναπαραστάσεις είναι παρούσες και αναπτύσσουν VEV, τότε παίρνουμε:

$$M^e = M_5^e + M_{45}^e = M_5^d - 3M_{45}^d, \quad (1.239)$$

δηλαδή τα  $M^e$  και  $M^d$  δεν είναι είναι πια συσχετισμένα. Όχι μόνο λοιπόν απαλλασσόμαστε από την αμήχανη  $m_d/m_s = m_e/m_\mu$  σχέση, αλλά, δυστυχώς χαλάμε την πολυπόθητη πρόβλεψη  $m_b = m_\tau \Big|_{M_X}$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να λύσουμε και τα δύο προβλήματα θεωρητικά

βάσει μόνο της θεωρίας ομάδων, δηλαδή γράφοντας απλά την πιο γενική  $\mathcal{L}_{Yuk}$  με 5 και 45 πεδία Higgs. Μία λύση ίσως να είναι να επιβάλλουμε «ad hoc» διακριτές συμμετρίες με σκοπό να περιορίσουμε βολικά τους όρους Yukawa κι επομένως να παίρνουμε κάποια συγκεκριμένη μορφή των  $M_d$  και  $M_e$ . Ένα παράδειγμα μίας τέτοιας φιλοσοφίας είναι μία εκδοχή του μοντέλου που δίνεται από τους Georgi και Jarlskog<sup>36</sup>, στο οποίο χρησιμοποιούν πεδία Higgs στις αναπαραστάσεις 5 και 45 και επιβάλλουν μία διακριτή συμμετρία στην  $\mathcal{L}_{Yuk}$ , καταλήγοντας στις σχέσεις  $m_b = m_\tau$ ,  $m_s = 1/3m_\mu$  και  $m_d = 3m_e$  στο  $M_X$ , υπονοώντας ότι  $m_b \approx 3m_\tau$  και  $m_d/m_s = 9m_e/m_\mu$  στο  $M_W$ . Πέρα από τη στοχευμένη κατασκευή της  $\mathcal{L}_{Yuk}$  η μορφή των  $M^d$  και  $M^e$  είναι τέτοια ώστε τα  $b$  και  $\tau$  να μην αναμιγνύονται με άλλα φερμιόνια. Επομένως, το μοντέλο αυτό θα έπρεπε να θεωρηθεί απλώς σαν ένα παράδειγμα του πως η επιβολή διακριτών συμμετριών μπορεί να οδηγήσει σε μία ελάττωση των ελεύθερων παραμέτρων της  $\mathcal{L}_{Yuk}$  κι επομένως σε συγκεκριμένους πίνακες μαζών. Η στρατηγική αυτή έχει τραβήξει αρκετό ενδιαφέρον στις αρχές της δεκαετίας του '80 ώστε να συνδεθεί η γωνία Cabibbo με τους λόγους των μαζών των κουάρκ.

- Μία εναλλακτική στρατηγική για να αποφευχθεί η εξίσωση των δύο λόγων των μαζών ενώ ταυτόχρονα να διατηρήσουμε το  $m_b = m_\tau$  στο  $M_X$ , προκύπτει από την παρατήρηση ότι οι συνεισφορές στη μάζα της τάξης των δύο ελαφρύτερων γενιών μπορεί να επηρεάσει δραστικά του λόγους  $m_d/m_s$  και  $m_e/m_\tau$  αλλά ταυτόχρονα να αποτελούν μόνο μικρές διαταραχές στις  $m_b$  και  $m_\tau$ . Η προέλευση τέτοιων συνεισφορών είναι ακόμα αρκετά υποθετική. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια κλίμακα πάνω από την  $M_X$  μία πραγματική θεωρία ενοποίησης συνδυάζει την  $SU(5)$  με τη βαρύτητα. Τότε, μπορεί στο  $M_X$  να απομένει κάποια  $SU(5)$  αναλλοίωτη μη επανακανονικοποιήσιμη αλληλεπίδραση. Ας δούμε ένα παράδειγμα ενός τέτοιου μη επανακανονικοποιήσιμου όρου Yukawa (μία τέτοια επιλογή δίνεται στο περιεχόμενο της θεωρίας της supergravity).

$$c\psi_{L_{ab}}C\psi_L^d\phi_d^bH^a, \quad (1.240)$$

όπου  $c \sim 1/M_p = 10^{-19}GeV^{-1}$ , θεωρώντας το  $M_p$  να είναι η καινούρια κλίμακα της ενοποίησης  $SU(5) \times \text{gravity}$ . Το γινόμενο  $\phi H$  εμπλέκει έναν γραμμικό συνδυασμό των 5 και 45 οδηγώντας στον όρο μάζας:

$$c\langle\psi\rangle\langle H\rangle(d\bar{d} - \frac{3}{2}\bar{e}e), \quad (1.241)$$

όπου  $d, e$  εκπροσωπούν εδώ γενικά τα φερμιόνια με φορτία  $Q = -1/3$  και  $Q = -1$ , αντίστοιχα. Ο παραπάνω όρος μπορεί να συνεισφέρει έναν όρο μάζας  $\mathcal{O}(10MeV)$ , ο οποίος είναι ικανός να τροποποιήσει τις

<sup>36</sup>H.Georgi and C.Jarlskog, Phys.Lett.868 (1979) 297

προβλέψεις που έχουν να κάνουν με τα  $m_d$  και  $m_e$ , χωρίς όμως να επηρεάζουν αρκετά τα  $m_\mu$  και  $m_s$  και ειδικά τα  $m_b$  και  $m_\tau$ .

Συνοψίζοντας λοιπόν, στο κεφάλαιο αυτό είδαμε ότι η kinship υπόθεση είναι έγκυρη, ότι στην κλίμακα της ενοποίησης του μοντέλου  $SU(5)$  παίρνουμε σχέσεις που συνδέουν τις μάζες των κουάρκ με αυτές των λεπτονίων, με αποτέλεσμα για τα βαρύτερα φερμιόνια να παίρνουμε στις χαμηλές ενέργειες μία σωστή πρόβλεψη, λόγω της εξάρτησης των μαζών τους από την ενεργειακή κλίμακα, ενώ ότι για τις δύο ελαφρύτερες γενιές να μην παίρνουμε έγκυρα αποτελέσματα. Υπάρχουν σενάρια για να σώσουμε την καλή πρόβλεψη και ταυτόχρονα να ξεπεράσουμε την κακή, τα οποία αναθέραμε εν συντομία. Περιτταίρω μελέτη τους ξεφεύγει από το στόχο μας.

## 1.7 Διατήρηση της $B - L$ και μάζες νετρίνων

$B - L$  συμμετρία

Θα κλείσουμε τη μελέτη του  $SU(5)$  μοντέλου με μία παρατήρηση που αφορά το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο, ότι κατέχει ακόμα μία εκτεταμένη  $U(1)$  συμμετρία. Αν θεωρήσουμε τους εκτεταμένους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} 5_f &\rightarrow 5'_f = e^{3ia} 5_f \Rightarrow F(5_f) = 3, \\ \bar{5}_f &\rightarrow \bar{5}'_f = e^{-3ia} \bar{5}_f \Rightarrow F(\bar{5}_f) = -3, \\ 10_f &\rightarrow 10'_f = e^{ia} 10_f \Rightarrow F(10_f) = 1, \\ 5_H &\rightarrow 5'_H = e^{-2ia} 5_H \Rightarrow F(5_H) = -2, \\ \bar{5}_H &\rightarrow \bar{5}'_H = e^{2ia} \bar{5}_H \Rightarrow F(\bar{5}_H) = 2, \\ 24_\phi &\rightarrow 24'_\phi = 24_\phi \Rightarrow F(24_\phi) = 0, \end{aligned}$$

αυτό σημαίνει ότι η (γραμμένη συμβολικά) λαγκρατζιανή (1.216), θα γίνει:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{Yuk} &= f^{(1)}(10'_f)(10'_f)(5'_H) + f^{(2)}(10_f)'(\bar{5}'_f)(\bar{5}'_H) \\ &= f^{(1)}e^{ia}(10_f)e^{ia}(10_f)e^{-2ia}(5_H) + f^{(2)}e^{ia}(10_f)e^{-3ia}(\bar{5}_f)e^{2ia}(\bar{5}_H) \\ &= f^{(1)}(10_f)(10_f)(5_H) + f^{(2)}(10_f)(\bar{5}_f)(\bar{5}_H) = \mathcal{L}_{Yuk}. \end{aligned} \quad (1.242)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η  $\mathcal{L}_{Yuk}$  παρέμεινε αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό που επιβάλλαμε, πράγμα που σημαίνει ότι η θεωρία μας διέπεται από μία εκτεταμένη (global) συμμετρία  $U(1)$ , η οποία σπάει αυθόρμητα από το VEV της  $5_H$ . Όμως, όπως γνωρίζουμε, από το αυθόρμητο σπάσιμο συνεχούς συμμετρίας αναδύεται ένα άμαζο σωματίδιο, το Goldstone μποζόνιο (θεώρημα Goldstone). Υπάρχει λοιπόν, και αν ναι, ποιο είναι το μποζόνιο Goldstone της  $U(1)_F$  που να συνδέεται με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα πρέπει πρώτα να ανακαλέσουμε ότι κατά το SSB, πέρα από την  $U(1)_F$  συμμετρία σπάει και η  $U(1)_Y$

συμμετρία. Είναι προφανές ότι το  $\langle H \rangle$  δεν είναι αναλλοίωτο ούτε κάτω από την  $U(1)_F$  αλλά ούτε και κάτω από την  $U(1)_Y$ . Αυτό γιατί ούτε το

$$F(5_H) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & & & & 0 \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & \\ 0 & & & & -2 \end{pmatrix}, \quad (1.243)$$

<sup>37</sup> αλλά ούτε το

$$F(5_H) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & & & & 0 \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.244)$$

εξοντώνουν το διάνυσμα  $\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, 0, v_2)$ . Είναι λοιπόν εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των  $U(1)_F$  και  $U(1)_Y$  ο οποίος δε σπάει από το VEV της  $5_H$ . Παρ' όλα αυτά, ο γραμμικός συνδυασμός  $R = F + \frac{2}{5}Y$  των γεννητόρων  $F, Y$ , παρουσιάζει μία εξαφανιζόμενη καταχώρηση στην πέμπτη θέση -προσδίδοντας την ιδιότητα  $R(5_H)\langle H \rangle = 0$ - κι επομένως το  $\langle H \rangle$  δε σπάει την  $R$ -συμμετρία. Αυτό είναι ανάλογο με το ταυτόχρονο σπάσιμο του  $Y$  και  $T_3$  στο SM, όπου ένας γραμμικός τους συνδυασμός, το φορτίο  $Q$ , παραμένει άσπαστος. Επομένως, δεν υπάρχει κάποιο Goldstone μποζόνιο, αφού έπεται από το σπάσιμο των  $U(1)_F$  και  $U(1)_Y$ , παίρνουμε μία νέα άσπαστη εκτεταμένη συμμετρία, την  $U(1)_R$ .

Εν συνεχεία, θέλουμε να διερευνήσουμε τη φυσική σημασία αυτής της συμμετρίας, σε αναλογία με το  $Q$  το οποίο ταυτοποιήθηκε σαν το ηλεκτρικό φορτίο. Στοχεύοντας σε αυτό, υπολογίζουμε τους  $U(1)_R$  κβαντικούς αριθμούς των φερμιονίων που φιλοξενούνται στην αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $\bar{5} \oplus 10$  (στην πραγματικότητα θα εξετάσουμε μόνο για την  $\bar{5}$  αφού αρκεί για να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας). Αφού  $R = F + \frac{2}{5}Y$ , και αφού ξέρουμε το υπερφορτίο και τον  $F$ -αριθμό των φερμιονίων, μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$R_{5_f} = \text{diag} \left[ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left( -\frac{2}{3} \right), \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left( -\frac{2}{3} \right), \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left( -\frac{2}{3} \right), \frac{3}{5} + \frac{2}{5} 1, \frac{3}{5} + \frac{2}{5} 1 \right] \Rightarrow$$

$$R_{5_f} = \text{diag} \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1 \right). \quad (1.245)$$

<sup>37</sup>Ο συντελεστής  $1/5$  μπαίνει συμβατικά επειδή έχουμε πάρει  $F(5_H) = -2$ .

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο  $U(1)_Y$  γεννήτορας πρέπει να είναι άχνος, ενώ ο  $U(1)_F$  και συνεπώς και ο  $U(1)_R$ , όχι αφού δεν είναι γεννήτορες της  $SU(5)$ .

Από την (1.245) βλέπουμε ότι  $R = 1/3$  για τα κουάρκ και  $R = 1$  για τα αντιλεπτόνια. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τη 10 προκύπτει ότι  $R = -1$  για τα λεπτόνια και  $R = -1/3$  για τα αντικουάρκ<sup>38</sup>. Συνεπώς, ανακαλύπτουμε ότι η  $R$  δεν είναι τίποτα παραπάνω από την  $B - L$  συμμετρία.

Αποδεικνύεται ότι η  $U(1)_F$  μπορεί να οριστεί επίσης και κατά την παρουσία των πεδίων Higgs της 45 αναπαράστασης:

$$45_H \rightarrow 45'_H = e^{-2ia} 45_H \Rightarrow F(45_H) = -2 \quad (1.246)$$

και συνεπώς, πάλι μέσω του ίδιου γραμμικού συνδυασμού  $R$  παραμένει άσπαστη όταν τα βαθμωτά πεδία των  $5_H$  και  $45_H$  αναπτύσσουν VEV. Συμπερασματικά,  $SU(5)$  μοντέλα με βαθμωτά πεδία στην 5 και/ή στην 45 διατηρούν την  $B - L$  συμμετρία.

#### Μάζες Νευτρίνων

Με την  $B - L$  να διατηρείται, τα νευτρίνα δεν μπορούν να πάρουν μάζα. Όπως στην  $\bar{5} \oplus 10$  αναπαράσταση υπάρχει χώρος μόνο για το LH νευτρίνο κι επομένως σαν όρος μάζας θα λειτουργούσε αναγκαστικά ένας Majorana όρος μάζας με την παραβίαση της  $B - L$  κατά δύο μονάδες. Υπάρχουν λοιπόν δύο δυνατοί τρόποι ώστε να πάρουμε νευτρίνα με μάζα στο  $SU(5)$  μοντέλο.

- Εισάγουμε κάποιο πεδίο Higgs που να φέρει  $B - L$  αριθμό κι έπειτα αναπτύσσει VEV
- Μεγενθύνουμε το φερμιονικό φάσμα της θεωρίας με την εισαγωγή μίας  $SU(5)$  singlet, έτσι ώστε η αναπαράσταση που φιλοξενεί τα φερμιόνια να είναι πλέον η αναγωγίσιμη  $\bar{5} \oplus 10 \oplus 1$ .

Η δεύτερη επιλογή είναι πολύ απλή. Όπως, απλά και μόνο χρησιμοποιώντας το ήδη υπάρχον Higgs της αναπαράστασης  $5_H$  στη θεωρία, μπορούμε να πάρουμε μία σύζευξη Yukawa:

$$\bar{5}_f 1_f 5_H \quad (1.247)$$

κι επομένως ένας όρος μάζας  $\nu_L \nu_R$  ανακύπτει όταν το  $H$  αναπτύσσει VEV. Παίρνοντας μάζα με αυτόν τον τρόπο το νευτρίνο καθίσταται ως ένα σωματίδιο Dirac, με αποτέλεσμα μην υπάρχει παραβίαση της  $B - L$  συμμετρίας.

Η πιο απλή πραγμάτωση της πρώτης επιλογής αποτελείται από την εισαγωγή μίας 15-πλέτας βαθμωτών πεδίων Higgs. Έτσι, η σύζευξη  $\bar{5}_f \bar{5}_f 15_H$  αναδύει ένα Majorana όρο μάζας για τα νευτρίνα:

$$\nu_L^T C \nu_L, \quad (1.248)$$

<sup>38</sup>Έχουμε πάρει τις κανονικοποιήσεις έτσι ώστε να μην προκύπτει κάποιος συντελεστής μπροστά από το  $R_5$ . Γενικά, το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την επιλογή των συντελεστών

μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Όντως, η 15 αναπαράσταση διαθέτει μία άχρωμη, ουδέτερη συνιστώσα που συζεύγνυται με το  $\nu_L^T C \nu_L$ . Η συνιστώσα αυτή ανήκει προφανώς σε μία  $SU(2)_L$  τριπλέτα κι επομένως το VEV της πρέπει να είναι μικρότερο του  $M_W$  (ώστε να επαληθεύεται το  $\rho \approx 1$ ). Αυτό είναι ένα ευπρόσδεκτο συμπέρασμα καθώς θέλουμε να έχουμε μικρές μάζες νετρίνων.

## 1.8 $SU(5)$ , το τελικό σκορ

Κλείνοντας λοιπόν το χτίσιμο και τις εφαρμογές του μοντέλου  $SU(5)$  είναι απαραίτητο να μετρήσουμε το τελικό σκορ. Όπως και το SM πέρασε τη διαδικασία της κριτικής στην αρχή του κεφαλαίου, την ίδια αντιμετώπιση πρέπει να έχει και το  $SU(5)$  μοντέλο. Η κριτική στην οποία θα υποβάλλουμε το μοντέλο θα είναι όσο το δυνατό πιο αντικειμενική, με «πινελιές» της υποκειμενικής μας άποψης για τα υπέρ και τα κατά του. Ξεκινάμε τον απολογισμό, ως είθισται, με τα καλά αποτελέσματα της θεωρίας:

- Η  $SU(5)$  θεωρία είναι η μόνη μεγαλοενοποιημένη θεωρία που να ενσωματώνει την ομάδα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  σαν μέγιστη υποομάδα της. Λόγω του ότι άλλα βιώσιμα μεγαλοενοποιημένα μοντέλα έχουν τάξη μεγαλύτερη από 4, υπάρχει μία μεγαλύτερη ελευθερία στους τρόπους σπασίματος της συμμετρίας και άρα λιγότερη προβλεψιμότητα.
- Εξηγεί την προέλευση της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου και δεν τη θεωρεί a priori ιδιότητα του μοντέλου καθώς και το ότι  $Q(d) = -1/3Q(e^-)$ , με τον αριθμό 3 να προκύπτει από τον αριθμό των χρωμάτων.
- Η ανάθεση ως προς το ισοσπίν των κουάρκ και λεπτονίων είναι συσχετισμένη. Όντως, η 10 περιέχει στο ανάπτυγμά της την  $(3, 2)$ , ενώ η  $\bar{5}$  περιέχει την  $(1, 2)$  συνιστώσα, σεβόμενη το  $SU(3)_c \times SU(2)_L$ .
- Η πρόβλεψη του  $\sin^2 \theta_W$  συμφωνούσε με τα πειραματικά δεδομένα του 1984 και αρχικά θεωρήθηκε επιτυχία.
- Το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο προβλέπει  $m_b/m_\tau = 3$  στις χαμηλές ενέργειες, το οποίο έρχεται σε καλή συμφωνία με το πείραμα.
- Η δομή των ασθενών φορτισμένων ρευμάτων αναπαράγει τα εξαιρετικά αποτελέσματα του SM.
- Το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο, δηλαδή παρουσία μίας μόνο 5-πλέτας Higgs, δεν έχει ουδέτερα ρεύματα αλλαγής γεύσης σε επίπεδο tree-level, σε συμφωνία με το ό,τι συμβαίνει στο SM, με μόνο μία διπλέτα Higgs.
- Η συμμετρία  $B - L$  διατηρείται κι επομένως τα νετρίνα προκύπτουν αυτομάτως άμαζα.

- Οι ανωμαλίες των  $\bar{5}$  και 10 είναι ίσες και αντίθετες, συνεπώς το μοντέλο στερεείται ανωμαλιών.
- Το ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο είναι εξετάσιμο καθώς τίθεται υπό πειραματικά εξέταση όσον αφορά το  $\sin^2 \theta_W$  και τη ζωή του πρωτονίου.

Μετά τα θετικά όμως πρέπει να καταχωρηθούν και τα αρνητικά στοιχεία του μοντέλου. Η «μαύρη λίστα» έχει λοιπόν ως εξής :

- Πρώτο και ισχυρότερο είναι ότι το μοντέλο δέχεται μία πιθανή χαρακτηρισκή βολή από τελευταία πειραματικά όρια που τίθενται στο  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  κανάλι διάσπασης του πρωτονίου. Με την επιβεβαίωση του ορίου των  $10^{32}$  ετών, το  $SU(5)$  μοντέλο είναι δυνατό να επιζήσει μόνο σε μη - ελάχιστες εκδοχές του, όπου δυστυχώς έχουμε απώλεια της προβλεψιμότητας του μοντέλου.
- Στο ελάχιστο  $SU(5)$  μοντέλο προβλέπεται  $m_e/m_\mu = m_d/m_s$ . Τρόποι να υπερνικηθεί η κακή αυτή πρόβλεψη χαλάει την καλή πρόβλεψη  $m_b = m_\tau$  στο  $M_X$ .
- Τα φερμιόνια της κάθε οικογένειας τοποθετούνται σε μία αναγωγίσιμη αναπαράσταση.
- Δεν υπάρχει καμία εξήγηση για την επανάληψη της δομής των οικογενειών. Επίσης, το φάσμα των μαζών των φερμιονίων, αν εξαιρέσουμε το  $m_b \approx 3m_\tau$ , παραμένει ένα μυστήριο.
- Παρά την εγγύτητα του  $M_X$  στο  $M_P$ , η βαρύτητα δεν έχει συμπεριληφθεί σε αυτή την εικόνα ενοποίησης.
- Μία τεράστια «έρημος» απλώνεται ανάμεσα στις δύο ενεργειακές κλίμακες  $M_X$ ,  $M_W$ . Κανένα ενδιάμεσο σπάσιμο συμμετρίας δε λαμβάνει χώρα.
- Η μεγάλη αυθαιρεσία που συνδέεται με την παρουσία των πεδίων Higgs (παράμετροι στο δυναμικό και στη λαγκρατζιανή Yukawa) δεν είναι λιγότερη από ότι ήταν ήδη στο SM.
- Και τελευταίο αλλά όχι λιγότερο σημαντικό, το πολύ σοβαρό πρόβλημα της ιεραρχίας που κάνει αισθητή την παρουσία του.

Όπως φαίνεται, τα χτυπήματα κατά του  $SU(5)$  μοντέλου είναι πολλά και μάλιστα μοιραία. Όμως, δεν είναι διατεθειμένο να εγκαταλείψει αφού η αναβάθμισή του σε υπερσυμμετρική θεωρία μεγάλης ενοποίησης θα καταφέρει να «επουλώσει» κάποιες από τις πληγές του. Το πώς θα συμβεί αυτό θα το αναλύσουμε στο μεθεπόμενο κεφάλαιο, καθώς το επόμενο είναι αφιερωμένο στην υπερσυμμετρία - και την εισαγωγή της στη σωματιδιακή φυσική -, τη θεωρία η οποία αποτελεί το ιερό δισκοπότηρο της πλειοψηφίας των θεωρητικών φυσικών σήμερα.



## **Κεφάλαιο 2**

# **Υπερσυμμετρία**

## 2.1 Εισαγωγή και Κίνητρα

Η υπερσυμμετρία (SUSY) είναι μία συμμετρία η οποία συνδέει τους μποζονικούς και φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας και είναι το μέσο για να «κάνουμε» φυσική πέρα από το SM. Ποιός είναι όμως ο λόγος να πάμε πέρα από το SM ;

*Το πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης (fine-tuning) του SM .*

Ο τομέας των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων εμπεριέχει μία παράμετρο με διαστάσεις ενέργειας:

$$v \approx 246 GeV, \quad (2.1)$$

όπου  $v/\sqrt{2}$  είναι η αναμενόμενη τιμή του κενού του Higgs πεδίου μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Η συσχετιζόμενη λοιπόν παράμετρος (2.1) θέτει γενικά την κλίμακα όλων των μαζών της θεωρίας. Για παράδειγμα, η μάζα των μποζονίων  $W^\pm$  είναι  $M_W = gv/2 \sim 80 GeV$  και η μάζα του βαθμωτού πεδίου Higgs είναι  $M_H = v\sqrt{\lambda/2}$ , όπου  $g$  είναι η  $SU(2)$  σταθερά σύζευξης και  $\lambda$  η ισχύς της αλληλεπίδρασης του Higgs με τον εαυτό του που συναντάται στο Higgs δυναμικό

$$V = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.2)$$

όπου  $\lambda > 0$  και  $\mu^2 > 0$ . Εδώ,  $\phi$  είναι το  $SU(2)$  πεδίο που κατοικεί στη θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(2)$ , τη 2:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το αρνητικό πρόσημο του  $\mu^2$  είναι απαραίτητο ώστε να δουλέψει ο μηχανισμός του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας και να δώσει μη μηδενική τιμή του κενού:

$$|\phi| = \sqrt{2} \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Στην περίπτωση που το  $\mu^2$  είχε θετικό πρόσημο, αυτό θα σήμαινε ότι η τιμή του κενού θα ήταν στο μηδέν στο χώρο των πεδίων, δηλαδή  $v = 0$ , με αποτέλεσμα όλα τα σωματίδια της θεωρίας να παρέμεναν άμαζα.

Προς το παρόν, η συζήτηση έχει παραμείνει σε tree-level αλληλεπιδράσεις, δηλαδή απουσία βρόχων. Τι συμβαίνει όμως αν συμπεριλάβουμε τους βρόχους αυτούς; Το SM είναι μία επανακανονικοποιήσιμη θεωρία, που σημαίνει ότι συνυπολογίζοντας διορθώσεις μεγαλύτερης τάξης της θεωρίας διαταραχών (διαγράμματα με βρόχους), παίρνουμε πεπερασμένα αποτελέσματα ακόμα και αν επεκτείνουμε την εικονική ορμή στα ολοκληρώματα βρόχων μέχρι το άπειρο. Παρ'όλο που αυτό υπονοεί πως η θεωρία είναι καλά ορισμένη και υπολογίσιμη μέχρι άπειρη ενέργεια, στην πράξη κανείς δεν αρκείται στο να

πιστεύει ότι το SM είναι ό,τι πραγματικά υπάρχει ανεβαίνοντας στην ενεργειακή κλίμακα. Παρ'όλο λοιπόν που η θεωρία εγγυάται ότι στα ολοκληρώματα βρόχων της μορφής

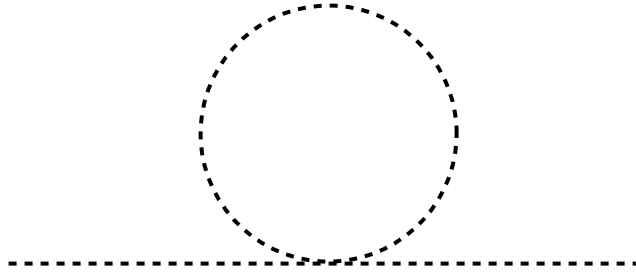
$$\int^{\Lambda} d^4k f(k, \dots) \quad (2.5)$$

ακόμα και αν η σταθερά  $\Lambda$  εκτοξευθεί στο άπειρο δεν επέρχεται καμία ασυνέπεια, ωστόσο, κανείς δεν πιστεύει ότι θα έπρεπε να πάει σε τέτοια ενεργειακά ύψη. Πιο λογικά, θεωρείται ότι το SM αποτελεί ένα μέρος μίας ευρύτερης θεωρίας στην οποία εμπεριέχεται, η «νέα φυσική» στις υψηλές ενέργειες, με τη σταθερά  $\Lambda$  να αποτελεί το ενεργειακό σημείο στο οποίο εισέρχεται η νέα φυσική και η τροποποίηση του SM κρίνεται απαραίτητη. Με την ίδια λογική, θεωρείται ότι υπάρχει ένα σημείο, το σημείο Planck

$$M_P \approx 1.2 \cdot 10^{19} GeV, \quad (2.6)$$

από το οποίο και πάνω η κβαντική βαρύτητα γίνεται σημαντική και πάλι «νέα φυσική» μπαίνει στο παιχνίδι. Αν λοιπόν υπάρχει νέα φυσική πέρα από το SM ακόμα και αν αυτή υπεισέρχεται πολλές τάξεις μεγέθους πάνω από το  $v$ , τότε βλέπουμε ότι ανακύπτει κάποιο πρόβλημα με στο SM μετά το tree-level.

Η τετραμποζονική ιδιο-αλληλεπίδραση, (2.2), παράγει σε τάξη ενός βρόχου μία συνεισφορά στον  $\phi^\dagger\phi$  όρο, που αντιστοιχεί στο διάγραμμα ιδιοενέργειας του βαθμωτού πεδίου:



Εικόνα 2.1: Διάγραμμα ιδιοενέργειας ενός βρόχου στη θεωρία  $\phi^4$

η οποία είναι ανάλογη του

$$\lambda \int^{\Lambda} d^4k \frac{1}{k^2 - M_H^2}. \quad (2.7)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι προφανές ότι αποκλίνει τετραγωνικά και τελικά υπολογίζεται<sup>1</sup> να είναι θετικό, με τη συνεισφορά να είναι

$$\sim \lambda \Lambda^2 \phi^\dagger \phi \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>Σημειώνουμε ότι εδώ δε μας ενδιαφέρουν οι σταθερές που εμπεριέχονται στα αποτελέσματα, τη δουλειά αυτή θα την κάνουμε αργότερα που θα υπολογίσουμε με ακρίβεια τα ολοκληρώματα των βρόχων.

στο «γυμνό»  $-\mu^2\phi^\dagger\phi$  όρο του δυναμικού (2.2). Έτσι, ο συντελεστής  $-\mu^2$  του  $\phi^\dagger\phi$  αντικαθίσταται από τη διορθωμένη σε πρώτη τάξη «φυσική» τιμή  $-\mu_{phys}^2$ , η οποία είναι:

$$-\mu_{phys}^2 = -\mu^2 + \lambda\Lambda^2 \Rightarrow \mu_{phys}^2 = \mu^2 - \lambda\Lambda^2 \quad (2.9)$$

Ξαναελαχιστοποιώντας το δυναμικό (2.2), αλλά με το  $\mu_{phys}$  να έχει πάρει τη θέση του  $\mu$ , βρίσκουμε πάλι το αποτέλεσμα της (2.4). Με το  $v$  να είναι καρφωμένο φαινομενολογικά στα  $246\text{GeV}$ , η (2.4), διορθωμένη εμπλέκοντας το  $\mu_{phys}$ , αποτελεί μία σχέση ανάμεσα στις δύο άγνωστες παραμέτρους  $\mu_{phys}$  και  $\lambda$ :

$$\mu_{phys} \approx \sqrt{\lambda}123\text{GeV}. \quad (2.10)$$

Παίρνουμε σα δεδομένο (αν και το αντίθετο δεν είναι λογικά απαράδεκτο) ότι το  $\lambda$  πρέπει να είναι κοντά στη μονάδα, ώστε ο δεύτερος όρος του δυναμικού (2.2) να μπορεί να μεταχειριστεί διαταρακτικά. Επομένως, από την (2.10) συνάγεται ότι το  $\mu_{phys}$  δεν μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από κάποιες εκατοντάδες  $\text{GeV}$ . Από την άλλη όμως, έχοντας θεωρήσει  $\Lambda \sim M_P \sim 10^{19}\text{GeV}$ , παίρνουμε ότι η διόρθωση στην (2.9) είναι πολύ μεγαλύτερη από  $\sim (100\text{GeV})^2$ :

$$\mu_{phys}^2 = \mu^2 - \lambda(10^{19}\text{GeV})^2 \stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} \lambda(123\text{GeV})^2 = \mu^2 - \lambda(10^{19}\text{GeV})^2 \quad (2.11)$$

Με απλή εποπτεία των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης, (2.11), συμπεραίνουμε ότι για να βρεθούμε σε μία τιμή  $\sim (100\text{GeV})^2$  μετά το συνυπολογισμό της διόρθωσης θα απαιτούσε το  $\mu^2$  να είναι εξ' αρχής εξίσου τεράστιο με τη διόρθωση, ούτως ώστε, βασιζόμενοι σε μία αξιόπιστη ακύρωση, ή αλλιώς λεπτή ρύθμιση (fine-tuning), να κατεβούμε από το  $\sim (10^{19}\text{GeV})$  στο  $\sim (10^2\text{GeV})$ .

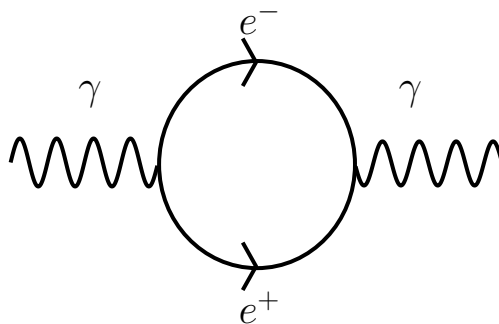
Στο SM, το πρόβλημα του fine-tuning δεν επηρεάζει μόνο τη μάζα του σωματιδίου Higgs ( $M_H = \sqrt{2}\mu_{phys}$ ), αλλά και τις μάζες των  $W$  ( $M_W = g\mu_{phys}/\sqrt{\lambda}$ ) και τελικά όλες τις μάζες στο SM, αφού προκύπτουν από το  $v$  και κατ' επέκταση από το  $\mu_{phys}$ . Αυτό το πολύ σοβαρό πρόβλημα που ξεπροβάλλει στο SM, μέσω της μη φυσικής επιλογής της κλίμακας του  $\mu^2$ , το οποίο οφείλεται από τις τετραγωνικές αποκλίσεις στη μάζα στον βαθμωτό τομέα, επισημάνθηκε πρώτα από τον K.G.Wilson.

Το πρόβλημα του fine-tuning θα ήταν λιγότερο σοβαρό αν για την κλίμακα  $\Lambda$  ίσχυε ότι  $\Lambda \ll M_P$  και συνεπώς αυτή η νέα φυσική ξεκίναγε νωρίτερα. Το πόσο νωρίτερα θα έπρεπε να εμφανίζεται, δηλαδή ποια είναι η αποδεκτή τάξη να γίνει το fine-tuning ώστε να μη θεωρείται πια πρόβλημα είναι κάτι σχετικό. Για την πλειοψηφία των φυσικών, η μόνη φυσική επιλογή θα ήταν η κλίμακα της νέας φυσικής να είναι στην τάξη μεγέθους της κλίμακας της ασθενούς αλληλεπίδρασης, όπως αυτή ορίζεται από την τιμή του  $v$ , δηλαδή όχι πάνω από μερικά  $\text{TeV}$ . Το προφανές ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι ποια θα μπορούσε να είναι αυτή η νέα φυσική.

Ο στόχος για να καταλήξουμε σε μία βελτιωμένη θεωρία είναι να καταφέρουμε να εξαλείψουμε την τετραγωνική εξάρτηση από το  $\Lambda$ , η οποία εμφανίζεται

στις θεωρίες όπου τα βαθμωτά πεδία που προκαλούν το SSB είναι στοιχειώδη. Η πρώτη (ιστορικά) απόκριση στο πρόβλημα του fine-tuning ήταν η υπόθεση ότι το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας συμβαίνει δυναμικά, δηλαδή είναι αποτέλεσμα ενός νέου ισχυρά αλληλεπιδρώντος τομέα στην περιοχή των  $TeV$ . Στις θεωρίες αυτές, που ονομάζονται technicolour, οι βαθμωτές καταστάσεις δεν είναι στοιχειώδεις, αλλά δέσμιες καταστάσεις φερμιονίων-αντιφερμιονίων. Στην περίπτωση αυτή η λαγκραϊζιανή του τομέα Higgs, είναι απλά μία ενεργός θεωρία, έγκυρη μόνο για ενέργειες στις οποίες η δομή της δέσμιας κατάστασης δεν εμφανίζεται,  $\sim 1 - 10TeV$ . Η τιμή της  $\Lambda$  θα βρίσκεται λοιπόν σε αυτήν την ενεργειακή περιοχή η οποία απέχει πολλές τάξεις μεγέθους από το  $M_P$ , ή την κλίμακα της ενοποίησης. Το μοντέλο αυτό δουλεύει αρκετά καλά όσον αφορά στην παραγωγή των μαζών των διανυσματικών πεδίων της ασθενούς αλληλεπίδρασης, όμως είναι προβληματικό όταν πρόκειται για τον υπολογισμό των φερμιονικών μαζών, όπου εμφανίζονται σύνθετες δυναμικές μορφές. Γενικά, οι technicolour θεωρίες είναι αρκετά ελκυστικές και παρά τα προβλήματα που εμφανίζουν δεν έχουν αποκλειστεί.

Αν, από την άλλη μεριά, συμπεριλάβουμε βαθμωτά πεδία στη θεωρία μας, τότε πώς θα καταφέρουμε να εξαφανίσουμε τις τετραγωνικές αποκλίσεις; Ένα βασικό στοιχείο για την επίλυση του προβλήματος δίνεται αν κατανοήσουμε το γιατί οι αποκλίσεις αυτές φαίνεται να επηρεάζουν μόνο το βαθμωτό τομέα. Στην QED το διάγραμμα της ιδιοενέργειας του φωτονίου :



Εικόνα 2.2: Διάγραμμα ιδιοενέργειας ενός βρόχου στη QED θεωρία.

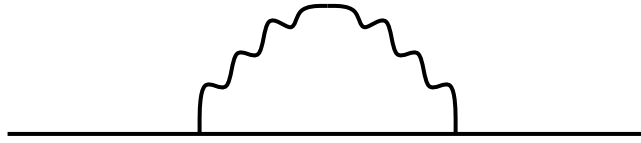
είναι και αυτό τετραγωνικά αποκλίνον (υπάρχουν δύο φερμιονικοί διαδότες ο καθένας από τους οποίους εξαρτάται γραμμικά από την 4-ορμή ολοκλήρωσης). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση των βαθμωτών πεδίων, έτσι και σε αυτήν, η τετραγωνική απόκλιση θα έπρεπε να επάγει μία τεράστια κβαντική διόρθωση στη μάζα του φωτονίου. Στην πραγματικότητα όμως η διόρθωση αυτή απουσιάζει, δεδομένου ότι η θεωρία είναι ομαλοποιημένη κατά έναν gauge-invariant τρόπο. Με άλλα λόγια, η συμμετρία της αναλλοιώτητας βαθμίδας εγγυάται ότι δεν μπορεί να παραχθεί διαταρακτικά κάποιος όρος της

μορφής:

$$m_\gamma^2 A^\mu A_\mu \quad (2.12)$$

σε μία άσπαστη θεωρία βαθμίδας. Συνεπώς, το φωτόνιο παραμένει άμαζο, όπως θα έπρεπε. Το παραπάνω διάγραμμα τελικά δίνει μία λογαριθμική απόκλιση, η οποία απορροφάται από την σταθερά αλληλεπίδρασης (δηλαδή το ηλεκτρικό φορτίο) επανακανονικοποιώντας την.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε το διάγραμμα της ιδιοενέργειας του ηλεκτρονίου στην QED:



Εικόνα 2.3: Διάγραμμα ιδιοενέργειας ηλεκτρονίου στη QED θεωρία.

στο οποίο ένα ηλεκτρόνιο εκπέμπει και επαναπορροφά ένα φώτονιο. Η διαδικασία αυτή δίνει μία διόρθωση  $\delta m$  στη φερμιονική μάζα  $m$  της λαγκρατζιανής, η οποία δίνει μία γραμμική εξάρτηση από τη σταθερά  $\Lambda$ :

$$\delta m \sim \alpha \int^\Lambda \frac{d^4 k}{k^2} \sim \alpha \Lambda, \quad (2.13)$$

Παρ' όλο που δεν είναι τόσο τραγική όσο η τετραγωνική, η γραμμική απόκλιση οδηγεί και αυτή στο ανεπιθύμητο fine-tuning, προκειμένου να αποκτήσουμε τη φυσική μάζα του ηλεκτρονίου. Παρ' όλα αυτά, όταν ο υπολογισμός γίνει λεπτομερώς, βρίσκουμε:

$$\delta m \sim \alpha m \ln \Lambda, \quad (2.14)$$

που σημαίνει ότι ακόμα και αν  $\Lambda \sim 10^{19} GeV$ , παίρνουμε  $\delta m \sim m$  με αποτέλεσμα να μη χρειάζεται κάποιο fine-tuning.

Είναι περίεργο ωστόσο το γεγονός ότι ισχύει  $\delta m \sim m$ , δηλαδή η διόρθωση είναι της τάξης της τιμής της μάζας και όχι αρκετές τάξεις μεγαλύτερη όπως θα περιμέναμε σε αναλογία με την περίπτωση των βαθμωτών πεδίων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η λαγκρατζιανή της QED (και κατ' επέκταση του SM) έχει μία ειδική συμμετρία όταν οι μάζες των φερμιονίων τείνουν στο μηδέν, τη χειραλική συμμετρία (chiral symmetry). Αυτή είναι μία συμμετρία κάτω από μετασχηματισμό της μορφής:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma_5} \psi, \quad (2.15)$$

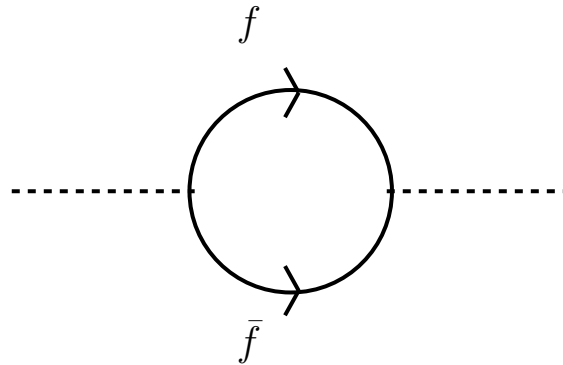
για την περίπτωση της  $U(1)$  και

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5} \psi, \quad (2.16)$$

για την περίπτωση της  $SU(2)$ . Η συμμετρία αυτή εγγυάται ότι όλες οι διορθώσεις ακτινοβολίας από τη θεωρία διαταραχών θα εξαφανίζονται για  $m \rightarrow 0$ . Επομένως, αφού η διόρθωση  $\delta m$  πρέπει να είναι ανάλογη της  $m$  και η εξάρτηση από το  $\Lambda$  μόνο λογαριθμική.

Στα δύο παραπάνω παραδείγματα της QED, δείξαμε το πως η άσπαστη συμμετρία βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και η άσπαστη χειραλική συμμετρία κρατούν τα διανυσματικά μποζόνια και τα φερμιόνια αντίστοιχα άμαζα και εκδιώχνουν την ανεπιθύμητη τετραγωνική (ή γραμμική) απόκλιση από τη θεωρία. Αν λοιπόν, μπορούσαμε να βρούμε κάποια συμμετρία η οποία να μπορούσε να γκρουπάρει τα βαθμωτά πεδία με τα άμαζα φερμιόνια ή τα άμαζα διανυσματικά μποζόνια, τότε τα βαθμωτά πεδία θα απολάμβαναν την ίδια προστασία από τις επικίνδυνες αποκλίσεις όπως τα συμμετρικά τους ταίρια. Η υπερσυμμετρία είναι ακριβώς αυτή η συμμετρία. Η ιδέα ότι η υπερσυμμετρία μπορεί να δώσει λύση στο πρόβλημα του fine-tuning του SM, προτάθηκε από τους Witten, Veltman, Kaul.

Μπορούμε να κατανοήσουμε ποιοτικά το πως η υπερσυμμετρία θα μπορούσε να απαλείψει τις τετραγωνικές αποκλίσεις του διαγράμματος ιδιοενέργειας του βαθμωτού πεδίου, θεωρώντας μία πιθανή διόρθωση στον  $-\mu^2\phi^\dagger\phi$  όρο, προερχόμενη από φερμιονικό βρόχο:



Εικόνα 2.4: Διάγραμμα συνεισφοράς φερμιονικού βρόχου στην ιδιοενέργεια του Higgs.

Για μηδενική εξωτερική ορμή, μία τέτοια συνεισφορά συμπεριφέρεται σαν:

$$\left(-g_f^2 \int^\Lambda d^4k \text{Tr} \left[ \frac{1}{(\not{k} - m_f)^2} \right]\right) \phi^\dagger\phi = \left(-4g_f^4 \int^\Lambda d^4k \frac{k^2 + m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2}\right) \phi^\dagger\phi \quad (2.17)$$

Το αρνητικό πρόσημο εδώ είναι μεγάλης σημασίας και προκύπτει λόγω περιττού αριθμού (ενός) βρόχων. Στην (2.17), ο όρος με το  $k^2$  στον αριθμητή, αποκλίνει τετραγωνικά και με ανάποδο πρόσημο από την τετραγωνική απόκλιση (2.7) λόγω του βαθμωτού βρόχου. Αγνοώντας προς το παρόν τους αριθμητι-

κούς παράγοντες, αυτές οι δύο συνεισφορές μαζί έχουν τη μορφή:

$$(\lambda - g_f^2)\Lambda^2\phi^\dagger\phi. \quad (2.18)$$

Αν λοιπόν υπάρχει η πιθανότητα για κάποιο λόγο να υπάρχει μία σύζευξη μποζονίου-φερμιονίου  $g_f$  που να συνδέεται με τη σταθερά σύζευξης  $\lambda$  του Higgs, μέσω της σχέσης

$$g_f^2 = \lambda, \quad (2.19)$$

τότε αυτή η τετραγωνική εξάρτηση από το  $\Lambda$  δε θα υπήρχε καν.

Μία σχέση ανάμεσα σε σταθερές σύζευξης όπως η (2.19), είναι χαρακτηριστικό μίας συμμετρίας, αλλά στην περίπτωση αυτή πρόκειται για μία συμμετρία που συνδέει μία καθαρά μποζονική κορυφή με μία μποζονική-φερμιονική (Yukawa). Σχέσεις όπως η (2.19) είναι ακριβώς αυτές που συναντώνται στην υπερσυμμετρική θεωρία. Όπως είναι λογικό τα μποζόνια και φερμιόνια που θα ανήκουν στην ίδια multiplet θα έχουν την ίδια μάζα, όταν η υπερσυμμετρία είναι άσπαστη. Οπότε, στο απλό μοντέλο που εξετάζουμε προς το παρόν, θα ισχύει  $M_H = m_f$ . Αξίζει ωστόσο να αναφέρουμε ότι η ακύρωση των τετραγωνικών αποκλίσεων συμβαίνει ανεξάρτητα από τη μάζα των σωματιδίων, καθώς δεν υπεισέρχεται καθόλου στην (2.18). Είναι ένα γενικό αποτέλεσμα σε κάθε υπερσυμμετρική θεωρία και έχει σα συνέπεια ότι οι όροι μάζας που σπάνε την υπερσυμμετρία (όπως απαιτούνται φαινομενολογικά) μπορούν να μπουν με το χέρι χωρίς να χαλάσουν την υπέροχη αλληλοακύρωση των αποκλίσεων.

Για να εφαρμόσουμε λοιπόν την παραπάνω ιδέα, θα πρέπει αναγκαστικά να υποθέσουμε την ύπαρξη φερμιονικών υπερσυμμετρικών εταίρων (superpartners) του πεδίου Higgs, τα Higgsino. Δυστυχώς, αυτό δεν αρκεί ώστε να απαλλαγούμε από όλες τις τετραγωνικές αποκλίσεις παρούσες στον  $-\mu^2\phi^\dagger\phi$  όρο. Προφανώς, οποιοδήποτε φερμιόνιο του SM μπορεί να παίζει το ρόλο του  $f$  του διαγράμματος (2.4), αφού όλα συζεύγνυνται (αλληλεπιδράσεις Yukawa) με το πεδίο Higgs. Για να ακυρωθούν όλες αυτές οι τετραγωνικές αποκλίσεις απαιτείται η εισαγωγή βαθμωτών superpartner για όλα τα φερμιόνια του SM, ένα κατάλληλο σύνολο από squark και slepton. Υπάρχουν επίσης τετραγωνικές αποκλίσεις που σχετίζονται με τις συνεισφορές των βρόχων των πεδίων βαθμίδας στον  $-\mu^2$  όρο, οι οποίοι με τη σειρά τους θα πρέπει να ακυρωθούν από φερμιονικούς superpartner, τα gaugino. Κατά αυτό τον τρόπο θα χτίσουμε αργότερα την υπερσυμμετρική εκδοχή του SM.

Έπειτα λοιπόν από την ακύρωση των  $\Lambda^2$  όρων μέσω της (2.19), η αμέσως επόμενη πιο αποκλίνουσα συνεισφορά στον όρο  $-\mu^2$ , μεγαλώνει λογαριθμικά ως προς  $\Lambda$ , αλλά ακόμα και λογαριθμικοί όροι μπορούν να είναι απαράδεκτα μεγάλοι. Ας θεωρήσουμε ένα απλό μοντέλο ενός πεδίου Higgs και ενός φερμιονίου. Η λογαριθμική συνεισφορά στον όρο  $-\mu^2$  έχει τη μορφή, (βλέπε (2.14)):

$$\sim \lambda(\alpha M_H^2 - bm_f^2) \ln \Lambda, \quad (2.20)$$



$\alpha, b$  αριθμητικοί παράγοντες. Παρ' όλο που η εξάρτηση από το  $\Lambda$  είναι τιθα-  
σευμένη, fine-tuning πρόβλημα θα εμφανιστεί στην περίπτωση όποιουδήποτε  
φερμιονίου με μάζα  $m_f$  πολύ μεγαλύτερη από την ασθενή κλίμακα. Γενικότε-  
ρα, εάν ο τομέας Higgs συζεύγνυται -έστω έμμεσα μέσω βρόχων- με καταστά-  
σεις πολύ μεγάλης μάζας (όπως συμβαίνει στις μεγαλοενοποιημένες θεωρίες),  
οι μάζες των καταστάσεων αυτών θα κυριαρχούν στις διορθώσεις ακτινοβολίας  
του όρου  $-\mu^2$ , απαιτώντας μεγάλες ακυρώσεις για ακόμα μία φορά.

Η κατάσταση αυτή βελτιώνεται δραματικά από την υπερσυμμετρία. Χον-  
δρικά μιλώντας, σε μία υπερσυμμετρική εκδοχή του απλού μοντέλου ένα  
Higgs - ένα φερμιόνιο, η φερμιονική και μποζονική μάζα θα είναι ίσες  $M_H =$   
 $m_f$  κι επομένως οι συντελεστές  $\alpha, b$  της (2.20) θα είναι ίσοι με αποτέλεσμα η  
συνεισφορά (2.20) να εξαφανίζεται. Παρομοίως, άλλες συνεισφορές στην ιδιο-  
ενέργεια από σωματίδια του SM και των superpartner τους θα αλληλοαναι-  
ρούνταν αν η SUSY ήταν ακριβής. Γενικότερα, σε υπερσυμμετρικές θεωρίες  
μόνο οι επανακανονικοποιήσεις των κυματοσυναρτήσεων είναι άπειρες όταν  
 $\Lambda \rightarrow \infty$  οι οποίες θα επάγουν αντίστοιχες λογαριθμικές αποκλίσεις στις τιμές  
των φυσικών (επανακανονικοποιημένων) μαζών. Βέβαια, παρ' όλα αυτά, δεν  
έχουν βρεθεί superpartner των SM σωματιδίων, επομένως συμπεραίνουμε ότι  
πρόκειται για μία σπασμένη συμμετρία με τις μάζες των superpartner να βρί-  
σκονται σε ψηλότερες ενέργειες όπου δεν έχει φτάσει ακόμα το πείραμα. Στο  
απλό μοντέλο μας αυτό σημαίνει ότι  $M_H^2 \neq m_f^2$ . Στην περίπτωση αυτή οι τε-  
τραγωνικές αποκλίσεις συνεχίζουν να ακυρώνονται και η μόνη διόρθωση στον  
φυσικό  $-\mu^2$  όρο θα είναι της τάξης του  $\lambda(M_H^2 - m_f^2) \ln \Lambda$ . Συμπεραίνουμε  
λοιπόν ότι η σπασμένη υπερσυμμετρία ίσως λύνει το fine-tuning πρόβλημα,  
δεδομένου ότι οι νέοι υπερσυμμετρικοί εταίροι δεν είναι πολύ βαρύτεροι από  
την κλίμακα  $v$  (ή  $M_H$ ), αλλιώς επιστρέφουμε πάλι σε ένα είδος fine-tuning.  
Φυσικά, το πόσο fine-tuning μπορεί να ανεχτεί κάποιος είναι υποκειμενικό  
αλλά το παραπάνω επιχείρημα προτείνει ότι η ανακάλυψη της SUSY βρίσκεται  
στην (μελλοντική) εμβέλεια του LHC.

Συνοψίζοντας, η SUSY μπορεί να σταθεροποιήσει την ιεραρχία  $M_{H,W} \ll$   
 $M_P$  με την έννοια ότι οι διορθώσεις ακτινοβολίας δεν πρόκειται να συμπαρα-  
σύρουν τη  $M_{H,W}$  ως την κλίμακα του  $\Lambda$ , με το επιχείρημα αυτό να υπονοεί  
ότι, για να συμβεί η σταθεροποίηση, θα πρέπει η SUSY να γίνει ορατή σε κλί-  
μακα όχι πολύ μεγαλύτερη από λίγα  $TeV$ . Αξίζει να τονίσουμε ότι μία θεωρία  
σαν την υπερσυμμετρική εκδοχή του SM, είναι μία συνεπής ενεργή θεωρία  
πεδίου η οποία είναι διαταρακτικά υπολογίσιμη για οποιαδήποτε ενέργεια  
( $M_P, M_X$ ), χωρίς να απαιτείται fine-tuning. Αξίζει να σημειώσουμε επίσης ότι  
η πρώτη επαφή της υπερσυμμετρίας με τη φυσική δεν έγινε για να δοθεί λύση  
στο fine-tuning πρόβλημα του SM, αλλά στις αρχές του 1970 στη θεωρία των  
χορδών. Τέλος, δε θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι, ανεξάρτητα από τον αν  
αποδειχθεί ή όχι, προς το παρόν η SUSY αποτελεί το πιο ανεπτυγμένο πλαίσιο  
για οδηγός για την έρευνα νέας φυσικής πέρα από το SM.

### Τρεις ποσοτικές ενδείξεις

Εδώ θα παραθέσουμε συνοπτικά τρία ποσοτικά αποτελέσματα από το ελάχιστο υπερσυμμετρικό καθιερωμένο πρότυπο (MSSM), τα οποία έχουν τραβήξει την προσοχή των φυσικών ώστε να αντιμετωπίσουν το μοντέλο με σοβαρότητα.

- Τα πειραματικά στοιχεία σχετικά με την ηλεκτρασθενή θεωρία δείχνουν ότι το  $M_H$  είναι κάτω από  $200\text{GeV}$ . Το MSSM, το οποίο περιέχει δύο διπλές Higgs, προβλέπει ότι το ελαφρύτερο σωματίδιο Higgs δεν ξεπερνά τα περίπου  $140\text{GeV}$ . Στο SM αντιθέτως δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για το  $M_H$ .
- Σε τάξη ενός βρόχου, οι αντίστροφες σταθερές σύζευξης  $\alpha_i^{-1}(Q^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$  του SM τρέχουν γραμμικά ως προς το  $\ln Q^2$ . Παρ'όλο που η  $\alpha_1^{-1}(Q^2)$  μειώνεται ως προς το  $Q^2$ , ενώ οι  $\alpha_2^{-1}$  και  $\alpha_3^{-1}$  αυξάνονται, οι τρεις τείνουν να συναντηθούν αλλά ποτέ δε συναντιούνται (εικόνα (1.15)). Αντιθέτως (δεδομένου ότι οι μάζες των superpartner βρίσκονται στο εύρος  $100\text{GeV} - 10\text{TeV}$ ), στο MSSM όντως συναντιούνται και οι τρεις. Κάτι τέτοιο ενθαρρύνει σημαντικά τα σενάρια περί ενοποίησης.
- Σε οποιαδήποτε επανακανονικοποιήσιμη θεωρία, οι παράμετροι μάζας σε μία λαγκρατζιανή εξαρτώνται από την ενεργειακή κλίμακα (τρέχουν), όπως οι σταθερές σύζευξης. Στο MSSM, η εξέλιξη της παραμέτρου μάζας (στη δευτέρα) του Higgs από μία τυπική τιμή της τάξης τους  $v^2$  έως μία κλίμακα της τάξης του  $10^{16}\text{GeV}$  την πάει σε μία αρνητική τιμή στη σωστή τάξη μεγέθους σε κλίμακες της τάξης του  $100\text{GeV}$ , δίνοντας μία πιθανή εξήγηση για την προέλευση του αυθόρμητου σπασίματος της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας σε αυτή τη χαμηλή κλίμακα. Βασικά, αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η σύζευξη Yukawa του top κουάρκ είναι αρκετά μεγάλη (είναι λογικό αφού είναι ανάλογη της μάζας του) και έχει κυρίαρχη επίδραση στην εξέλιξη. Αυτό το αποτέλεσμα θα μπορούσε να αποκτηθεί και χωρίς την υπερσυμμετρία αλλά οι αρχικές συνθήκες του MSSM για την εξέλιξη είναι εκείνες που δίνουν ένα πιο φυσιολογικό κίνητρο. Πάλι, το αποτέλεσμα αυτό απαιτεί οι μάζες των superpartner να μην είναι πάνω από λίγα  $\text{TeV}$ . Υπάρχει επομένως μία αξιοσημείωτη συνέπεια ανάμεσα στους διαφορετικούς δρόμους που οδηγούν στην ίδια εκτίμηση της κλίμακας της SUSY.

### Θεωρητικές παρατηρήσεις

Είναι κοινώς αποδεκτό ότι τον 20ο αιώνα η έννοια που έπαιξε κεντρικό ρόλο στη φυσική είναι αυτή της συμμετρίας. Είναι φυσικό να ρωτήσουμε αν οι τρέχουσες θεωρίες πεδίου εκμεταλλεύονται όλα τα είδη συμμετριών που μπορεί να υπάρχουν, πάντα σε συνέπεια με τη Lorentz αναλλοιωτήτητα. Από

το θεώρημα Noether γνωρίζουμε ότι όταν ένα σύστημα διέπεται από κάποια συμμετρία, αυτό συνεπάγεται ένα διατηρούμενο φορτίο, μία ποσότητα δηλαδή που δεν αλλάζει με το χρόνο. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα ηλεκτρομαγνητικό φορτίο της μορφής:

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad (2.21)$$

ή ένα  $SU(2)$  φορτίο (τελεστής του ισοσπίν) της μορφής:

$$\mathbf{T} = g \int d^3x \psi^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi, \quad (2.22)$$

όπου στην (2.22) το  $\psi$  είναι μία  $SU(2)$  διπλέτα και τόσο στην (2.21) όσο και στην (2.22) το  $\psi$  είναι ένα φερμιονικό πεδίο. Όλοι αυτοί οι τελεστές συμμετρίας είναι βαθμωτές ποσότητες ως προς το μετασχηματισμό Lorentz (δε φέρουν δείκτες Lorentz που να μην κλείνουν). Αυτό υπονοεί ότι όταν δρουν σε κάποια κατάσταση δεδομένου σπιν, δεν μπορούν να αλλάξουν την κατάσταση αυτήν.

Ασφαλώς γνωρίζουμε ένα διανυσματικό φορτίο, τους τελεστές της 4-ορμής. Αυτοί παράγουν χωροχρονικές μετατοπίσεις των οποίων οι ιδιοτιμές συναποτελούν τη διατηρούμενη 4-ορμή. Υπάρχουν επίσης τελεστές στροφορμής, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε έναν αντισυμμετρικό τανυστή  $M_{\mu\nu}$ . Θα μπορούσαμε να έχουμε ένα διατηρούμενο φορτίο (τελεστή) σε μορφή συμμετρικού τανυστή, έστω  $Q_{\mu\nu}$ ; Οι Coleman και Mandula έχουν αποδείξει ότι δε γίνεται. Θα παραθέσουμε (σε απλοποιημένη μορφή) το επιχειρήμα τους.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα τέτοιο φορτίο δρα πάνω στην κατάσταση ενός σωματιδίου 4-ορμής  $p$ :

$$Q_{\mu\nu}|p\rangle = (\alpha p_\mu p_\nu + \beta g_{\mu\nu})|p\rangle, \quad (2.23)$$

όπου το δεξί μέλος καταγράφηκε με επιχειρήματα συναλλοιώτητας (η πιο γενική έκφραση με τον ενδεδειγμένο από το αριστερό μέλος χαρακτήρα τανυστικού μετασχηματισμού που χτίζεται από τους διαθέσιμους τανυστές). Τώρα ας θεωρήσουμε μία κατάσταση δύο σωματιδίων  $|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle$  και ας θεωρήσουμε επίσης τις τιμές  $Q_{\mu\nu}$  να είναι προσθετικές, διατηρούμενες και ότι δρουν σε ένα σωματίδιο τη φορά (όπως δηλαδή και όλα τα άλλα γνωστά φορτία). Τότε:

$$Q_{\mu\nu}|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle = (\alpha(p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)}) + 2\beta g_{\mu\nu})|p^{(1)}, p^{(2)}\rangle. \quad (2.24)$$

Σε μία αλληλεπίδραση ελαστικής σκέδασης της μορφής  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  από τη διατήρηση των  $Q_{\mu\nu}$  ιδιοτιμών παίρνουμε:

$$p_\mu^{(1)} p_\nu^{(1)} + p_\mu^{(2)} p_\nu^{(2)} = p_\mu^{(3)} p_\nu^{(3)} + p_\mu^{(4)} p_\nu^{(4)}. \quad (2.25)$$

Όμως επίσης, από τη διατήρηση της 4-ορμής θα έχουμε:

$$p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)} + p_\mu^{(4)}. \quad (2.26)$$

Η μόνη λύση που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις (2.25) και (2.26) είναι η :

$$p_\mu^{(1)} = p_\mu^{(3)}, p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(4)}, \text{ ή } p_\mu^{(1)} = p_\mu^{(4)}, p_\mu^{(2)} = p_\mu^{(3)}, \quad (2.27)$$

η οποία μεταφράζεται στο ότι επιτρέπονται μόνο οι εμπρός ή όπισθεν σκεδάσεις, το οποίο είναι προφανώς μη αποδεκτό.

Το γενικό μήνυμα που πρέπει να μας μείνει είναι ότι δεν υπάρχει χώρος για περαιτέρω διατηρούμενους τελεστές με μη τριμμένο λορεντζιανό χαρακτήρα μετασχηματισμού. Όπως είδαμε οι ήδη υπάρχοντες τελεστές  $P_\mu$  και  $M_{\mu\nu}$  επιτρέπουν να συμβούν κατάλληλες σκεδάσεις, αλλά με την επιβολή περισσότερων νόμων διατήρησης (συμμετριών), τα πιθανά σενάρια περιορίζονται. Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγει το θεώρημα των Coleman-Mandula. Όμως, το θεώρημα αυτό φαίνεται ότι δεν αποκλείει φορτία τα οποία κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz μετασχηματίζονται σαν σπίνορες (αντικείμενα που μετασχηματίζονται όπως τα φερμιονικά πεδία  $\psi$ ). Τέτοια φορτία θα συμβολίζονται σαν  $Q_a$ , με τον  $a$  να είναι σπινωριακός δείκτης ο οποίος θα παίρνει τιμές  $a = 1, 2$ , αφού, όπως θα δούμε, θα ασχοληθούμε με σπίνορες δύο συνιστωσών. Για ένα τέτοιο φερτίο, θα ισχύει ότι όταν δράσει πάνω σε κάποια κατάσταση συγκεκριμένου σπιν, η κατάσταση αυτή έπειτα θα αλλάξει:  $Q_a|j\rangle = |j \pm 1/2\rangle$ . Ένας τέτοιος τελεστής δε συνεισφέρει σε στοιχείο πίνακα μίας αλληλεπίδρασης  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  σαν αυτή που είδαμε νωρίτερα, διότι τα σπιν των σωματιδίων δεν αλλάζουν. Οπότε το παραπάνω θεώρημα δεν αφορά την περίπτωση αυτή και δεν αποκλείει την ύπαρξη ενός τέτοιου φορτίου με σπινωριακό δείκτη.

Είναι λοιπόν δυνατό να συμπεριληφθούν τέτοιοι σπινωριακοί τελεστές μαζί με τους ήδη γνωστούς διατηρούμενους τελεστές  $P_\mu$  και  $M_{\mu\nu}$  σε ένα ενιαίο και συνεπές αλγεβρικό σχήμα; Η απάντηση είναι καταφατική και δόθηκε αρχικά από τους Gol' fand - Likhtman. Με τον όρο άλγεβρα εννοούμε σαφώς τις μεταθετικές σχέσεις ανάμεσα στα φορτία -τους γεννήτορες- των ομάδων των συμμετριών (π.χ. οι μεταθετικές σχέσεις των τελεστών στροφορμής της  $SU(2)$  αποτελούν μία άλγεβρα). Το διαφορετικό στην περίπτωσή μας είναι ότι πέρα από τις μεταθετικές σχέσεις που θα απαρτίζουν την άλγεβρα θα υπεισέρχονται και αντιμεταθετικές σχέσεις εφόσον, όπως προαναφέραμε, φορτία τύπου  $Q_a$  έχουν σπινωριακό (φερμιονικό) χαρακτήρα.

Ενώ στα επόμενα κεφάλαια θα δώσουμε αναλυτική περιγραφή της άλγεβρας αυτής, είναι φρόνιμο να δοθούν κάποια γενικά στοιχεία από τώρα για διαισθητικούς λόγους. Λόγω του ότι φορτίο τύπου  $Q_a$  είναι ένας τελεστής συμμετρίας, αυτό σημαίνει ότι θα μετατίθεται με τη χαμιλτονιανή του συστήματος, όποια και να είναι αυτή :

$$[Q_a, H] = 0 \quad (2.28)$$

και κατ' επέκταση θα πρέπει να μετατίθεται και ο αντιμεταθέτης δύο τελεστών  $Q_a$  με τη χαμιλτονιανή :

$$[\{Q_a, Q_b\}, H] = 0. \quad (2.29)$$

Όπως προαναφέραμε, οι σπινωριακοί τελεστές  $Q_a$  έχουν δύο συνιστώσες, επομένως το συμμετρικό αντικείμενο

$$\{Q_a, Q_b\} = Q_a Q_b + Q_b Q_a, \quad (2.30)$$

έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες και περιμένουμε ότι θα πρέπει να μετασχηματίζεται σαν ένα αντικείμενο με σπιν ίσο με 1 (σε πλήρη αντιστοιχία με το συμμετρικό συνδυασμό δύο κυματοσυναρτήσεων με σπιν 1/2). Παρ' όλα αυτά, ως είθισται, σε μία σχετικιστική θεωρία αυτό το σπιν-1 αντικείμενο θα πρέπει να περιγράφεται από κάποιο 4-διάνυσμα το οποίο κιόλας θα διατηρείται λόγω της (2.29). Υπάρχει μόνο ένας διατηρούμενος 4-διανυσματικός τελεστής, ο  $P_\mu$ . Επομένως, καταλαβαίνουμε ότι τα σπινωριακά φορτία  $Q_a$  θα πρέπει να ικανοποιούν μία άλγεβρα της μορφής:

$$\{Q_a, Q_b\} \sim P_\mu. \quad (2.31)$$

Προφανώς, η παραπάνω σχέση (2.31), είναι ενδεικτική και όχι συνεπής αφού όπως είναι προφανές δεν υπάρχει ισορροπία στους δείκτες των δύο μελών. Ωστόσο, μπορούμε ακόμα και από αυτήν την πρώιμη μορφή να εξαγάγουμε σημαντικά συμπεράσματα για το φυσικό νόημα των τελεστών  $Q_a$  και γενικότερα της υπερσυμμετρίας. Η (2.31) μας λέει ουσιαστικά ότι αν κάνουμε δύο SUSY μετασχηματισμούς, δηλαδή εάν δράσουμε δύο φορές με τον τελεστή  $Q_a$  εκ περιτροπής, παίρνουμε τον τελεστή ενέργειας-ορμής, ή αλλιώς, παίρνουμε τον τελεστή των χωροχρονικών μεταθέσεων (την παράγωγο ως προς την 4-θέση). Με άλλα λόγια, ο σπινωριακός τελεστής  $Q_a$  είναι κάτι σαν η τετραγωνική ρίζα του τελεστή της παραγωγού (κάτι ανάλογο με τον τελεστή Dirac που είναι ουσιαστικά η τετραγωνική ρίζα του τελεστή Klein-Gordon).

Πριν κλείσουμε την εισαγωγή, αξίζει να σταθούμε λίγο και να επιμείνουμε στα παραπάνω. Γενικά, στον ανθρώπινο νου, οι 4-διάστατες παράγωγοι είναι συνδεδεμένες με το χωρόχρονο. Το γεγονός ότι παίρνουμε τις τετραγωνικές ρίζες τους είναι κατά κάποιον τρόπο μία εννοιολογική επέκταση του χωρόχρονου αυτού καθ' αυτού (σε αναλογία με την επέκταση που συμβαίνει στον άξονα των πραγματικών αριθμών, αφού εισάγουμε την τετραγωνική ρίζα του  $-1$ , σε μιγαδικό επίπεδο). Η άλγεβρα λοιπόν η οποία περιέχει  $P_\mu$  και  $Q_a$  μας οδηγεί να θεωρήσουμε ότι οι χωροχρονικές συντεταγμένες επεκτείνονται ώστε να μπορέσουν να συμπεριληφθούν και οι περαιτέρω βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι εισέρχονται με τους  $Q_a$  και συνδέονται με τους χωροχρονικούς μέσω μετασχηματισμών που παράγονται από τους  $Q_a$ . Οι έξτρα αυτοί βαθμοί ελευθερίας είναι φερμιονικοί και για αυτό το λόγο μπορούμε να πούμε ότι η SUSY μας προκαλεί να θεωρήσουμε φερμιονικές διαστάσεις και να επεκτείνουμε το χωρόχρονο στον υπερχώρο (superspace). Πέρα λοιπόν από τη θεώρηση της υπερσυμμετρίας σαν εκφυλισμένες multiplets φερμιονίων-μποζονίων (η οποία είναι και φαινομενολογικά σημαντική) είναι σημαντικό να μην ξεχνάμε ότι η υπερσυμμετρία μέσω της φερμιονικής μεγέθυνσης σημαίνει την επέκταση του χωρόχρονου.

## 2.2 Σπίνορες Weyl, Dirac και Majorana

Ας θυμηθούμε σύντομα το πώς περιγράφονται οι συμμετρίες στην κβαντική θεωρία πεδίου. Η εκάστοτε λαγκρατζιανή περιέχει ένα σύνολο πεδίων  $\psi_r$  τα οποία είναι είτε φερμιόνια είτε μποζόνια. Αν για παράδειγμα το σύστημα που περιγράφει η λαγκρατζιανή διέπεται από μία συμμετρία, όπως η  $SU(2)$ , αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από απειροστό μετασχηματισμό των πεδίων της μορφής:

$$\delta_\epsilon \psi_r = -i\epsilon \lambda_{rs} \psi_s, \quad (2.32)$$

όπου υπονοείται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες,  $\lambda_{rs}$  είναι κάποιιο σταθερό συντελεστής (όπως για παράδειγμα στοιχεία των πινάκων Pauli) και  $\epsilon$  είναι μία απειροστή παράμετρος. Σε πλήρη αναλογία, οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί αναμένεται να είναι αυτής της μορφής, αλλά με την παραπάνω πληροφορία ότι μετασχηματίζουν μποζονικά πεδία σε φερμιονικά και αντίστροφα. Για παράδειγμα:

$$\delta_\xi \phi \sim \xi \psi, \quad (2.33)$$

όπου  $\phi$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο (σπιν 0),  $\psi$  είναι ένα φερμιονικό πεδίο (σπιν 1/2) και  $\xi$  είναι μία απειροστή παράμετρος. Όμως η (2.33), για να κρίνουμε τι πρέπει να βάλουμε για να γίνει ισότητα, θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι οι βαθμοί ελευθερίας στα δύο μέλη θα πρέπει να είναι ίσοι. Το απλούστερο είδος μποζονικού πεδίου είναι το (ουδέτερο) βαθμωτό πεδίο το οποίο έχει μόνο μία συνιστώσα και είναι πραγματικό  $\phi^\dagger = \phi$ , δηλαδή έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας. Από την άλλη μεριά, δεν υπάρχει φερμιονικό πεδίο με μόνο ένα βαθμό ελευθερίας, αλλά με τουλάχιστον δύο (σπιν πάνω, σπιν κάτω). Έτσι λοιπόν εμείς πρέπει να θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο με δύο βαθμούς ελευθερίας για να ταιριάζει με το σπινωριακό πεδίο, και καταλήγουμε σε ένα μιγαδικό (φορτισμένο) βαθμωτό πεδίο.

Όμως ποιο είδος φερμιονικού πεδίου θα ταιριάζει με το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο; Από την εξίσωση Dirac γνωρίζουμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις έχουν 4 βαθμούς ελευθερίας, όχι 2: σπιν πάνω, σπιν κάτω σωματίδιο και σπιν πάνω σπιν κάτω αντισωματίδιο. Πρέπει λοιπόν κάπως να κόψουμε στη μέση τους βαθμούς ελευθερίας. Ένας τρόπος είναι να γίνει χρήση των σπινόρων Weyl ή των σπινόρων Majorana.

Πρέπει στο σημείο αυτό να διαφοροποιήσουμε σαφώς τις συνιστώσες από τους βαθμούς ελευθερίας. Κάθε συνιστώσα ενός σπινόρα Weyl (που έχει δύο συνιστώσες) είναι μιγαδική και άρα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας, άρα συνολικά ο σπινόρας Weyl έχει συνολικά 4 βαθμούς ελευθερίας. 4 βαθμούς ελευθερίας έχει και ο Majorana σπινόρας. Αν ο σπινόρας βρίσκεται on-shell (δηλαδή υπακούει στις εξισώσεις κίνησης) τότε ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας μειώνεται στους 2, όσους δηλαδή έχει και το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο. Γενικά, στην κβαντική θεωρία πεδίου πρέπει να θεωρήσουμε τις off-shell καταστάσεις

και άρα οι 4 βαθμοί ελευθερίας δεν μειώνονται. Αυτό σημαίνει ότι απαιτούνται δύο παραπάνω μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας. Θα δούμε αργότερα πως αντιμετωπίζεται το πρόβλημα αυτό.

Ο γνωστός σπίνορας Dirac αποτελείται από δύο πεδία δύο συνιστωσών. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αποδομήσουμε το πεδίο Dirac και να κατανοήσουμε τη φύση των δύο διαφορετικών σπινόρων Weyl που τον συναποτελούν. Η διαφοροποίηση των δύο «μισών» του σπίνορα Dirac έγκειται στο γεγονός ότι κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz μετασχηματίζονται διαφορετικά<sup>2</sup>. Η διαπίστωση αυτή θα μας βοηθήσει να μπορέσουμε να γράψουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς έτσι ώστε να είναι συνεπείς με την Lorentz αναλλοιωτήτα.

### 2.2.1 Σπίνορες και μετασχηματισμοί Lorentz

Στο φυσικό σύστημα μονάδων, στο χώρο των ορμών η εξίσωση Dirac είναι:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\Psi = E\Psi \quad (2.34)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση που συνήθως χρησιμοποιείται στο όριο υψηλών ενεργειών (chiral αναπαράσταση) μιας και ο «μεγάλος όρος» της ορμής είναι σε block διαγώνια μορφή:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

το οποίο υπονοεί ότι:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  είναι οι πίνακες Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

και ότι:

$$\{\gamma_5, \beta\} = \{\gamma_5, \boldsymbol{\gamma}\} = 0. \quad (2.38)$$

<sup>2</sup>Οι σπίνορες Weyl είναι οι καταστάσεις (διανύσματα) που ζουν στους χώρους που ορίζονται από τις δύο διδιάστατες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις  $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  (RH και LH αντίστοιχα) της ομάδας Lorentz,  $SO(1, 3)$ . Η τετραδιάστατη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας Lorentz που προκύπτει σαν το ευθύ άθροισμα των δύο παραπάνω διδιάστατων αναπαραστάσεων  $\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)$  είναι η σπινორιακή αναπαράσταση Dirac της ομάδας και οι ομόνυμοι σπίνορες είναι οι καταστάσεις (διανύσματα) του χώρου που ορίζει. Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι η τετριμμένη αναπαράσταση της ομάδας είναι αυτή που απαρτίζεται από αντικείμενα μίας διάστασης, δηλαδή, τα βαθμωτά πεδία.

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, θεωρούμε ότι ο σπίνορας Dirac αποτελείται από δύο σπίνορες Weyl, δηλαδή γράφεται:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε την (2.39) στην εξίσωση Dirac, (2.34), θα έχουμε:

$$(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = m\chi, \quad (2.40)$$

$$(E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi = m\psi. \quad (2.41)$$

Στο όριο όπου τα πεδία θεωρούνται άμαζα,  $m \rightarrow 0$ , ισχύει:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_0 = E\psi_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 = -E\chi_0 \end{cases} \xrightarrow{E \rightarrow |\mathbf{p}|} \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_0 = \psi_0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_0 = -\chi_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Από το πρώτο αποτέλεσμα της (2.42) συμπεραίνουμε ότι η  $\psi_0$  είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή ελικότητας  $\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  με ιδιοτιμή θετική και ίση με 1, ενώ από το δεύτερο αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η  $\chi_0$  είναι πάλι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή ελικότητας αλλά με αρνητική ιδιοτιμή και ίση με  $-1$ .

Για  $m \neq 0$ , οι  $\psi, \chi$  των εξισώσεων (2.40) και (2.41) δεν είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, αφού η παρουσία της μάζας μπλέκει τα πεδία. Τα πεδία αυτά είναι αυτά τα αντικείμενα δύο συνιστωσών που αναφέραμε νωρίτερα (Weyl σπίνορες) τα οποία μετασχηματίζονται διαφορετικά κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz και είναι εκείνα με τα οποία θα δουλέψουμε στο εξής.

Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι τα πεδία  $\psi, \chi$  δεν είναι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας, είναι ιδιοκαταστάσεις του  $\gamma_5$ , αφού:

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Οι δύο αυτές ιδιοκαταστάσεις του  $\gamma_5$  κατασκευάζονται επίσης αν δράσουμε με τους προβολικούς τελεστές<sup>3</sup>:

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

πάνω στον σπίνορα Dirac:

$$P_R \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_L \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

<sup>3</sup>Οι προβολικοί τελεστές είναι ιδιαίτερα σημαντικοί λόγω των ιδιοτήτων τους  $P_R P_L = 0, P_R^2 = P_R, P_L^2 = P_L$



Η ιδιοτιμή του  $\gamma_5$  ονομάζεται χειραλικότητα (chirality). Το πεδίο  $\psi$  έχει chirality  $+1$  ενώ το πεδίο  $\chi$  έχει  $-1$ . Παρ' όλο που η ελικότητα και η χειραλικότητα δεν ταυτίζονται γενικά (οι δύο έννοιες συμπίπτουν μόνο στην περίπτωση όπου  $m = 0^4$ ), έχει επικρατήσει τα πεδία με θετική ελικότητα να ονομάζονται δεξιόστροφα ενώ αυτά με αρνητική, αριστερόστροφα. Έτσι, ένας σπίνορας  $\psi$  τύπου (θετικής chirality) θα συμβολίζεται  $\psi_R$  ενώ ο σπίνορας  $\chi$  τύπου (αρνητικής chirality) θα συμβολίζεται  $\chi_L$ .

Περνάμε τώρα να εξετάσουμε πως μετασχηματίζονται τα πεδία  $\psi, \chi$  κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Οι μετασχηματισμοί αυτοί έχουν να κάνουν με τη δομή της ομάδας από την οποία παράγονται, συνεπώς πρέπει πρώτα να πούμε δύο λόγια για την ομάδα Lorentz.

Η ομάδα Lorentz, ή αλλιώς  $SO(1, 3)$  έχει στοιχεία όλες τις στερεές στροφές και όλα τα boosts (μετασχηματισμοί της ταχύτητας). Όλα αυτά τα στοιχεία μπορούν να παραχθούν από μόνο 6 γεννήτορες.

- Οι 3 γεννήτορες των στερεών στροφών, ή αλλιώς οι γεννήτορες της  $SO(3)$ ,  $S_i$
- Οι 3 γεννήτορες των boost,  $K_i$

οι οποίοι συνδέονται μέσω των μεταθετικών σχέσεων:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k, [S_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}S_k. \quad (2.46)$$

Υπάρχει μία βάση στην οποία η παραπάνω άλγεβρα απλοποιείται. Θεωρούμε λοιπόν:

$$A_i = \frac{1}{2}(S_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(S_i - iK_i) \quad (2.47)$$

και οι παραπάνω μεταθετικές σχέσεις γίνονται:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, [A_i, B_j] = 0. \quad (2.48)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η άλγεβρα της ομάδας Lorentz ανάγεται σε δύο ανεξάρτητες (μετατίθενται μεταξύ τους)  $SU(2)$  άλγεβρες για τα  $A_i$  και  $B_i$ . Συνεπώς, έχοντας αναλύσει επαρκώς την ομάδα  $SU(2)$  παράρτημα, είναι ευτυχές το γεγονός ότι η άλγεβρα της ομάδας Lorentz ισοδυναμεί με δύο άλγεβρες

<sup>4</sup>Ο λόγος είναι ότι ένα σωματίδιο με μάζα δεν μπορεί κινείται με ταχύτητα μικρότερη του φωτός. Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να πάω σε ένα σύστημα αναφοράς που πηγαίνει πιο γρήγορα από αυτό με συμπέρασμα να βλέπω το σωματίδιο να κινείται προς την ανάποδη μεριά, το διάνυσμα της ορμής αντιστρέφεται. Όμως, επειδή δεν υπάρχει λόγος να αλλάξει η φορά του σπιν η ελικότητα αναγκαστικά αλλάζει. Συνεπώς η παρουσία της μάζας καθιστά την ελικότητα μία «εσωτερική» ιδιότητα του σωματιδίου. Μόνο αν ένα σωματίδιο είναι άμαζο η ελικότητα του σωματιδίου είναι φιξαρισμένη σε όλα τα συστήματα αναφοράς αφού δεν μπορεί να βρεθεί σύστημα που να πηγαίνει γρηγορότερα από την ταχύτητα του φωτός. Αντίθετα, η chirality είναι μία ιδιότητα η οποία δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή και στην ουσία σχετίζεται με το πως μετασχηματίζονται τα πεδία κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι σωματίδια με διαφορετική chirality είναι πραγματικά διαφορετικά σωματίδια. Όταν έχουμε σωματίδιο με θετική ελικότητα γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να υπάρχει και ένα ταίρι του το οποίο θα έχει αρνητική. Αντίθετα, σωματίδιο με συγκεκριμένη χειραλικότητα δε χρειάζεται ταίρι με την αντίθετη.

$SU(2)$  της οποίας οι γεννήτορες είναι οι πίνακες Pauli. Αυτή η ισοδυναμία μας επιτρέπει να βρούμε τις διάφορες αναπαραστάσεις της  $SO(1, 3)$ , οι οποίες περιγράφονται σαν  $(j_1, j_2)$  και το πρόβλημά εύρεσης των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων ανάγεται σε γνωστό, ήδη λυμένο πρόβλημα.

- $(0, 0)$ :  $A_i = 0, B_i = 0 \xrightarrow{(2.47)} S_i = 0, K_i = 0$ . Αυτή είναι η τετριμμένη αναπαράσταση διάστασης 1 στην οποία αντιστοιχούν τα βαθμωτά πεδία.

- $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ :

$$A_i = 0, B_i = \frac{1}{2}\sigma_i \xrightarrow{(2.47)} S_i = \frac{1}{2}\sigma_i, K_i = \frac{i}{2}\sigma_i. \quad (2.49)$$

Η αναπαράσταση αυτή είναι διάστασης 2 και σε αυτήν αντιστοιχούν οι LH σπίνορες Weyl.

- $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ :

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i, B_i = 0 \xrightarrow{(2.47)} S_i = \frac{1}{2}\sigma_i, K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i. \quad (2.50)$$

Η αναπαράσταση αυτή είναι διάστασης 2 και σε αυτήν αντιστοιχούν οι RH σπίνορες Weyl.

- $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$ : Αυτή είναι η spinorial αναπαράσταση. Πρόκειται για μία αναγωγίσιμη αναπαράσταση αφού γράφεται σαν ευθύ άθροισμα των δύο προηγούμενων μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων:

$$S_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$K_i = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\sigma_i \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα τυχαίο πεδίο  $\xi$  μετασχηματίζεται κατά Lorentz, ως εξής<sup>5</sup>:

$$\xi \rightarrow \xi' = \sum_{i=1}^3 e^{i(\epsilon_i S_i - \eta_i K_i)} \xi, \quad (2.53)$$

όπου  $\epsilon_i = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  είναι οι τρεις παράμετροι της ομάδας που συνδέονται με τις στροφές και  $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  είναι οι τρεις παράμετροι της ομάδας που συνδέονται με τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας. Ανάλογα με την αναπαράσταση στην οποία ανήκει το πεδίο, ο παραπάνω μετασχηματισμός θα λάβει την

<sup>5</sup>Aitchison & Hey: Gauge theories in particle physics vol.2, appendix M

ανάλογη μορφή. Συνεπώς, για τα πεδία  $\psi, \chi$  που ανήκουν στις  $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ , μέσω των (2.49), (2.50), θα έχουμε διαδοχικά:

$$\psi' = e^{i\epsilon_i S_i - i\eta_i K_i} \psi \stackrel{K_i = \frac{i}{2}\sigma_i}{S_i = \frac{1}{2}\sigma_i} e^{i\epsilon_i \sigma_i/2 - \eta_i \sigma_i/2} \psi, \quad (2.54)$$

$$\chi' = e^{i\epsilon_i S_i - i\eta_i K_i} \chi \stackrel{K_i = \frac{i}{2}\sigma_i}{S_i = \frac{1}{2}\sigma_i} e^{i\epsilon_i \sigma_i/2 + \eta_i \sigma_i/2} \chi. \quad (2.55)$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί όταν πρόκειται για απειροστή τριδιάστατη στροφή και απειροστές ταχύτητες παίρνουν τη μορφή:

$$\psi \rightarrow \psi' = 1 + i\epsilon_i \frac{\sigma_i}{2} - i\eta_i \frac{\sigma_i}{2} \psi, \quad (2.56)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = 1 + i\epsilon_i \frac{\sigma_i}{2} + i\eta_i \frac{\sigma_i}{2} \chi. \quad (2.57)$$

Συνεπώς, βρήκαμε πως μετασχηματίζονται τα  $R$ -τύπου και  $L$ -τύπου πεδία, (2.56) και (2.57) αντίστοιχα, κάτω από (απειροστούς) μετασχηματισμούς Lorentz.

Επίσης, το διάνυσμα της 4-ορμής,  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ , προφανώς δε μένει αναλλοίωτο κάτω από τις στροφές και τα boosts αλλά μετασχηματίζεται ως εξής:

- Μετασχηματισμός κάτω από απειροστές στροφές:

$$E \rightarrow E' = E, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{p} \quad (2.58)$$

- Μετασχηματισμός κάτω από απειροστές ταχύτητες:

$$E \rightarrow E' = E - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \boldsymbol{\eta} E \quad (2.59)$$

Οι εξισώσεις Weyl, (2.40), (2.41), για το τονούμενο σύστημα θα γίνουν:

$$(E' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')\psi' = m\chi', \quad (2.60)$$

$$(E' + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')\chi' = m\psi'. \quad (2.61)$$

Ας εξετάσουμε αρχικά την ειδική περίπτωση όπου έχουμε μόνο boost μετασχηματισμό:

$$V_\eta = \left(1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right). \quad (2.62)$$

Λόγω του ότι ο μετασχηματισμός είναι απειροστός, θα ισχύει:

$$V_\eta^{-1} = \left(1 + \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right). \quad (2.63)$$

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς συνεπάγεται ότι οι μετασχηματισμοί των πεδίων  $\psi, \chi$ , (2.56) και (2.57) -όταν δεν συμπεριλαμβάνονται στροφές- θα είναι:

$$\psi \rightarrow \psi' = \left(1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \psi, \quad \chi \rightarrow \chi' = \left(1 + \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \chi. \quad (2.64)$$

Παίρνουμε λοιπόν την πρώτη εξίσωση Weyl (2.40), την πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με το  $V_\eta^{-1}$  και εισάγουμε το μοναδιαίο πίνακα  $V_\eta V_\eta^{-1}$ :

$$(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = m\chi \Rightarrow [V_\eta^{-1}(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V_\eta^{-1}] V_\eta\psi = mV_\eta^{-1}\chi. \quad (2.65)$$

Από την (2.64), η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$[V_\eta^{-1}(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V_\eta^{-1}] \psi' = m\chi'. \quad (2.66)$$

Συγκρίνοντας τώρα την (2.66) με την τονούμενη εξίσωση Weyl, (2.60), θα πρέπει

$$E' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}' = V_\eta^{-1}(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V_\eta^{-1}. \quad (2.67)$$

Ας το επαληθεύσουμε ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος και καταλήγοντας στο δεύτερο:

$$\begin{aligned} V_\eta^{-1}(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})V_\eta^{-1} &= \left(1 + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2}\right) (E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2}\right) \\ &= \left(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2}E - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{2}\right) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2}\right) \\ &= E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}E - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2} + E\frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &\quad - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}E\frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} \\ &= E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}E - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2} + E\frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}}{2} \\ &= E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + E\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} \\ &= (E - \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p} - E\boldsymbol{\eta}) = E' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}', \end{aligned} \quad (2.68)$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})1_{2 \times 2} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.69)$$

και κρατήσαμε όρους πρώτης τάξης ως προς  $\boldsymbol{\eta}$  αφού είναι απειροστό.

Όσον αφορά την άλλη ειδική περίπτωση όπου έχουμε μόνο στροφές και καθόλου boost, φαίνεται από τις (2.56), (2.57) ότι οι δύο σπίνορες  $\psi, \chi$  μετασχηματίζονται το ίδιο. Συνεπώς, υπάρχουν δύο είδη σπινόρων δύο συνιστωσών οι οποίοι διακρίνονται τελικά από τον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται κάτω από τα boost. Οι σπίνορες Weyl  $\psi, \chi$  (οι οποίοι διαχωρίζονται και από τους δείκτες  $R, L$  αντίστοιχα) είναι αυτοί με τους οποίους θα δουλέψουμε στο πλαίσιο της υπερσυμμετρίας. Αργότερα θα ασχοληθούμε και με Majorana σπίνορες που είναι 4-συνιστωσών.

Πριν συνεχίσουμε, είναι απαραίτητο να δώσουμε κάποια ονομασία στους μετασχηματισμούς μας, ώστε να μπορούμε να δουλέψουμε πιο άνετα. Έστω  $V$  ο πίνακας μετασχηματισμού του σπινόρα  $\psi$  της (2.56):

$$V = \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right). \quad (2.70)$$

Ο αντίθετος μετασχηματισμός θα είναι:

$$V^{-1} = \left( 1 - \frac{i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right), \quad (2.71)$$

ο ερμιτιανός συζυγής του θα είναι:

$$V^\dagger = \left( 1 - \frac{i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \quad (2.72)$$

και τέλος ο αντίθετος του ερμιτιανού συζυγή θα είναι:

$$V^{\dagger^{-1}} = V^{-1\dagger} = \left( 1 + \frac{i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right), \quad (2.73)$$

ο οποίος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που εμφανίζεται στο μετασχηματισμό του πεδίου  $\chi$  της (2.57).

Συνοψίζοντας, ο σπίνορας  $R$ -τύπου,  $\psi$ , μετασχηματίζεται κάτω από τον πίνακα  $V$ , ενώ ο σπίνορας  $L$ -τύπου,  $\chi$ , μετασχηματίζεται κάτω από τον  $V^{-1\dagger}$ . Το συμπέρασμα αυτό γράφεται συνοπτικά:

$$\psi \rightarrow \psi' = V\psi, \quad \chi \rightarrow \chi' = V^{-1\dagger}\chi \quad (2.74)$$

### 2.2.2 Κατασκευή αναλλοίωτων αντικειμένων και 4-διανυσμάτων από σπίνορες Weyl

Ας θυμηθούμε πρώτα δύο πράγματα για τους σπίνορες Dirac. Από αυτούς τους σπίνορες 4-συνιστωσών, μπορούμε να φτιάξουμε:

- Ένα βαθμωτό αντικείμενο, δηλαδή μία ποσότητα που είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$\bar{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger\beta\Psi \quad (2.75)$$

- Ένα αντικείμενο που μετασχηματίζεται σαν τετραδιάνυσμα κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \Psi^\dagger\beta(\beta, \beta\boldsymbol{\alpha})\Psi = \Psi^\dagger(1, \boldsymbol{\alpha})\Psi \quad (2.76)$$

Εκφράζοντας τώρα τον σπίνορα Dirac,  $\Psi$ , σε όρους των πεδίων δύο συνιστωσών  $\psi, \chi$ :

- Η βαθμωτή ποσότητα (2.75) θα γίνει:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi &= \Psi^\dagger\beta\Psi = \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Παρατηρούμε ότι το αναλλοίωτο αντικείμενο μπλέκει τα πεδία. Επαληθεύουμε ότι το αποτέλεσμα (2.77) είναι αναλλοίωτο κάτω από του Lorentz μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}\psi^\dagger\chi + \psi\chi^\dagger &\rightarrow \psi'^\dagger\chi' + \chi'^\dagger\psi' \stackrel{(2.74)}{=} (V\psi)^\dagger(V^{-1}\chi) + (V^{-1}\chi)^\dagger V\psi \\ &= \psi^\dagger V^\dagger V^{-1}\chi + \chi^\dagger V^{-1}V\psi = \psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi.\end{aligned}\quad (2.78)$$

- Το τετραδιάνυσμα (2.76) θα γίνει:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi &= \Psi^\dagger(1, \boldsymbol{\alpha})\Psi = \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} (1, \boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\psi \\ -\boldsymbol{\sigma}\chi \end{pmatrix} \right] \\ &= (\psi^\dagger\psi + \chi^\dagger\chi, \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi - \chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi) \\ &= (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi) + (\chi^\dagger\chi, \chi^\dagger(-\boldsymbol{\sigma})\chi) \\ &= \psi^\dagger \underbrace{(1, \boldsymbol{\sigma})}_{\sigma^\mu} \psi + \chi^\dagger \underbrace{(1, -\boldsymbol{\sigma})}_{\bar{\sigma}^\mu} \chi = \psi^\dagger\sigma^\mu\psi + \chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi.\end{aligned}\quad (2.79)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του 4–διανύσματος τα πεδία δεν μπλέκονται. Επίσης, αφού ορίσαμε τις ποσότητες

$$\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.80)$$

μπορούμε να γράψουμε το  $\gamma^\mu$  σε όρους αυτών των ποσοτήτων. Όπως κάναμε και στην περίπτωση του βαθμωτού, θα επαληθεύσουμε ότι το αποτέλεσμα (2.79) μετασχηματίζεται όντως σαν 4–διάνυσμα κάτω από τους LT. Για να μετασχηματίζεται μία ποσότητα σαν 4–διάνυσμα κάτω από τους LT, θα πρέπει:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = U(\Lambda)A^\mu. \quad (2.81)$$

Συνεπώς, για το υπό εξέταση αποτέλεσμα (για τον πρώτο όρο) (2.79), έχουμε:

$$(\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi) \rightarrow (\psi'^\dagger\psi', \psi'^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi') = (\psi'^\dagger\psi', \psi'^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi'). \quad (2.82)$$

Για ευκολία, υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη συνιστώσα του υποψήφιου

4–διανύσματος και μετά τις υπόλοιπες τρεις:

$$\begin{aligned}
\psi^\dagger \psi' &\stackrel{(2.74)}{=} \psi^\dagger V^\dagger V \psi = \psi^\dagger \left( 1 - i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \left( 1 + i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \psi \\
&= \psi^\dagger \left( 1 + i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} + i \frac{(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + i \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} \right) \psi \\
&= \psi^\dagger (1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi = \underbrace{(1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_U \psi^\dagger \psi. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi' &\stackrel{(2.74)}{=} \psi^\dagger V^\dagger \boldsymbol{\sigma} V \psi = \psi^\dagger \left( 1 - i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \boldsymbol{\sigma} \left( 1 + i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \psi \\
&= \psi^\dagger \left( 1 - i \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \left( \boldsymbol{\sigma} + i \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \psi \\
&= \psi^\dagger \left( \boldsymbol{\sigma} + i \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - i \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + i \boldsymbol{\sigma} \frac{(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} + \boldsymbol{\sigma} \frac{(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} \right. \\
&\quad \left. - \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - i \boldsymbol{\sigma} \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} + \boldsymbol{\sigma} \frac{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{4} \right) \psi \\
\psi^\dagger [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \psi &= \underbrace{(1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})}_U \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$(\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi) \rightarrow (\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi)' = (1 - \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi). \tag{2.85}$$

Με τον ίδιο τρόπο επαληθεύεται ότι και ο δεύτερος όρος (2.79) μετασχηματίζεται σαν 4–διάνυσμα κάτω από τους LT. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το αποτέλεσμα (2.79) μετασχηματίζεται όλο σαν 4–διάνυσμα κάτω από τους LT.

Σε όρους των  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$ , οι εξισώσεις Weyl, (2.40) και (2.41), γίνονται:

$$\begin{aligned}
\sigma^\mu p_\mu \psi &= m \chi, \\
\bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi &= m \psi.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Τα ευχάριστα νέα που μπορούμε να αναγνώσουμε από τη μορφή αυτή των εξισώσεων Weyl, είναι ότι το  $\sigma^\mu p_\mu$  μετατρέπει ένα  $\psi$ –τύπου πεδίο σε ένα  $\chi$ –τύπου και το  $\bar{\sigma}^\mu p_\mu$  το αντιστρόφο. Αλλιώς, μπορούμε να πούμε ότι το  $\sigma^\mu p_\mu \psi$  μετασχηματίζεται κάτω από τους LT όπως το  $\chi$ , ενώ το  $\bar{\sigma}^\mu p_\mu \chi$  μετατρέπεται σαν το  $\psi$ .

Επίσης, η λαγκρατζιανή σωματιδίου Dirac, μπορεί να γραφτεί σε όρους των  $\psi, \chi$  ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_D &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = \Psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \\
&= \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \chi^\dagger & \psi^\dagger \end{pmatrix} i\gamma^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m\chi^\dagger & m\psi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} \chi^\dagger & \psi^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0(1, \boldsymbol{\alpha})\partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} - m(\chi^\dagger\psi - \psi^\dagger\chi) \\
&= \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \right] \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} - m(\psi^\dagger\chi - \chi^\dagger\psi) \\
&= [i \begin{pmatrix} \psi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma} & -i\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi \\ \partial_\mu\chi \end{pmatrix} - m(\psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi) \\
&= \left( i\psi^\dagger\partial_\mu\psi + i\chi^\dagger\partial_\mu\chi, i\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\partial_\mu\psi + i\chi^\dagger(-\boldsymbol{\sigma})\partial_\mu\chi \right) - m(\psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi) \\
&= (i\psi^\dagger\partial_\mu\psi, i\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\partial_\mu\psi) + (i\chi^\dagger\partial_\mu\chi + i\chi^\dagger(-\boldsymbol{\sigma})\partial_\mu\chi) - m(\psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi) \\
&= i\psi^\dagger(1, \boldsymbol{\sigma})\partial_\mu\psi + i\chi^\dagger(1, -\boldsymbol{\sigma})\partial_\mu\chi - m \\
&= i\psi^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi + i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - m(\psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi). \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το  $\sigma^\mu$  πηγαίνει με το  $\psi$ , ενώ το  $\bar{\sigma}^\mu$  πηγαίνει με το  $\chi$ .

Συνοψίζοντας ως εδώ, είδαμε ότι είναι δυνατό να σχηματίσουμε 4-διανύσματα μόνο από το  $\psi$  ή μόνο από το  $\chi$ ,  $(\psi^\dagger\sigma^\mu\psi), (\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi)$  αντίστοιχα. Όμως, κατασκευάζοντας τη βαθμωτή ποσότητα είδαμε ότι απαιτούνται και τα δύο πεδία,  $(\psi^\dagger\chi + \chi^\dagger\psi)$ . Εγείρεται το ερώτημα αν μπορούμε να φτιάξουμε κάποια Lorentz αναλλοίωτη ποσότητα μόνο από  $\psi$ -τύπου ή  $\chi$ -τύπου σπίνορες. Αυτό είναι σημαντικό (για λόγους που εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, περί ισοδάθμισης των βαθμών ελευθερίας) καθώς θέλουμε να κατασκευάσουμε θεωρίες που να περιλαμβάνουν τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας ενός Weyl σπίνορα δύο συνιστωσών (και όχι ενός σπίνορα Dirac). Επαναδιατυπώνοντας το ερώτημα: Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε κάποιο σπίνορα από τις συνιστώσες, έστω του  $\chi$ , που να έχει το μετασχηματιστικό χαρακτήρα του  $\psi$ ; Με αυτή τη δυνατότητα μπορούμε να επιτύχουμε την κατασκευή ενός σπίνορα Dirac με τους μισούς βαθμούς ελευθερίας (από 8 σε 4). Επίσης, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε τον  $\psi$ -τύπου σπίνορα στο αποτέλεσμα του βαθμωτού (2.77) με τον  $\chi$ -τύπου που έχει τον κατάλληλο χαρακτήρα μετασχηματισμού. Η απάντηση είναι ότι όντως είναι δυνατή μία τέτοια κατασκευή.

As θεωρήσουμε τώρα τον LT του μιγαδικού συζυγή του  $\chi$ , τον  $\chi^*$ :

$$\begin{aligned}
\chi^* &\rightarrow \chi^{*'} = (V^{-1\dagger}\chi)^* = \left( 1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^* \chi^* \Rightarrow \\
\chi^{*'} &= \left( 1 - i\frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \chi^*. \tag{2.88}
\end{aligned}$$



Λαμβάνοντας υπόψη τις αντιμεταθετικές σχέσεις των πινάκων Pauli:

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}1_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 \\ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 \end{cases} \quad (2.89)$$

και το γεγονός ότι οι  $\sigma_1, \sigma_3$  είναι πραγματικοί ενώ ο  $\sigma_2$  φανταστικός:

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \sigma_2^* = -\sigma_2, \quad \sigma_3^* = \sigma_3, \quad (2.90)$$

υπολογίζουμε το πως μετασχηματίζεται η ποσότητα  $\sigma_2\chi^*$  κάτω από τους LT:

$$\begin{aligned} \sigma_2\chi^* &= \sigma_2 \left( 1 - i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right) \chi^* \\ &= \sigma_2 \left[ 1 - i\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{2} \cdot (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3) + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2} \cdot (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3) \right] \chi^* \\ &= \left[ \sigma_2 - i\frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(\sigma_2\sigma_1, -\sigma_2\sigma_2, \sigma_2\sigma_3) + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(\sigma_2\sigma_1, -\sigma_2\sigma_2, \sigma_2\sigma_3) \right] \chi^* \\ &= \left[ \sigma_2 - i\frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(-\sigma_1\sigma_2, -\sigma_2\sigma_2, -\sigma_3\sigma_2) + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(-\sigma_1\sigma_2, -\sigma_2\sigma_2, -\sigma_3\sigma_2) \right] \chi^* \\ &= \left[ \sigma_2 + i\frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\sigma_2 - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\sigma_2 \right] \chi^* \\ &= \left( 1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \sigma_2\chi^* = V\sigma_2\chi^*. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι το  $\sigma_2\chi^*$  μετασχηματίζεται κάτω από τους LT με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζεται ο  $R$ -τύπου σπίνορας  $\psi$ . Εισάγουμε λοιπόν το  $\psi$ -τύπου αντικείμενο που κατασκευάσαμε από το  $\chi$  ορίζοντας:

$$\psi_\chi \equiv i\sigma_2\chi^*, \quad (2.92)$$

όπου το  $i$  τοποθετήθηκε για χάρη ευκολίας (ο  $\sigma_2$  είναι φανταστικός). Επομένως, η (2.77) μας εγγυάται ότι η ποσότητα  $\psi_{\chi^{(1)}}^\dagger \chi^{(2)}$  είναι μία αναλλοίωτη ποσότητα κάτω από τους LT μετασχηματισμούς:

$$\psi_{\chi^{(1)}}^\dagger \chi^{(2)} = (i\sigma_2\chi^{(1)*})^\dagger \chi^{(2)} \stackrel{\sigma_2^\dagger = \sigma_2}{=} \chi^{(1)T} (-i\sigma_2)\chi^{(2)}, \quad (2.93)$$

όπως ακριβώς και η  $\psi^\dagger \chi$ . Προφανώς, το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα  $\chi^{(2)\dagger} \psi_{\chi^{(1)}}$ . Η παραπάνω εξίσωση, (2.93), είναι πολύ σημαντική διότι μας υποδεικνύει πως να κατασκευάζουμε βαθμωτά γινόμενα από δύο  $\chi$ , το οποίο ήταν το ζητούμενο εξ' αρχής. Αυτό είναι το είδος του γινομένου που θα χρειαστούμε για τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (2.33).

Πριν συνεχίσουμε, ας εξετάσουμε λίγο ακόμα την ποσότητα  $\chi^{(1)T} (-i\sigma_2)\chi^{(2)}$ . Παρατηρούμε ότι είναι μία ποσότητα οικεία. Οι σπίνορες Weyl,  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ , αποτελούνται από δύο πεδία με διαφορετικά σπιν:

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} \chi_\uparrow^{(1)} \\ \chi_\downarrow^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} \chi_\uparrow^{(2)} \\ \chi_\downarrow^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Επομένως, αφού

$$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

βρίσκουμε εύκολα ότι η αναλλοίωτη ποσότητα

$$\chi^{(1)T}(-i\sigma_2)\chi^{(2)} = -\chi_{\uparrow}^{(1)}\chi_{\downarrow}^{(2)} + \chi_{\downarrow}^{(1)}\chi_{\uparrow}^{(2)} \quad (2.96)$$

ταυτοποιείται με τον σπιν-0 συνδυασμό δύο καταστάσεων με σπιν-1/2. Αυτό μας δίνει αυτομάτως την πληροφορία ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφές. Αυτό που δείξαμε πιο πριν είναι ότι ουσιαστικά η ποσότητα  $\chi^{(1)T}(-i\sigma_2)\chi^{(2)}$  είναι αναλλοίωτη και κάτω από τα boosts.

Στην περίπτωση τώρα όπου  $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi$ , η ποσότητα  $\psi_{\chi}^{\dagger}$  είναι επίσης Lorentz αναλλοίωτη:

$$\psi_{\chi}^{\dagger}\chi = (i\sigma_2\chi^*)^{\dagger}\chi = \chi^T(-i\sigma_2)\chi = (i\sigma_2\chi)^T\chi. \quad (2.97)$$

Δεδομένου λοιπόν ότι το  $\chi$  είναι σπινόρας δύο συνιστωσών και ότι το  $i\sigma_2$  δίνεται από τη σχέση (2.95), η (2.97) θα γίνει:

$$\begin{aligned} \psi_{\chi}^{\dagger}\chi &= (i\sigma_2\chi)^T\chi = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi_2 & -\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \chi_2\chi_1 - \chi_1\chi_2. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Αν τα  $\chi_1, \chi_2$  είναι συνηθισμένες συναρτήσεις, τότε η ποσότητα  $\chi_2\chi_1 - \chi_1\chi_2$  μηδενίζεται. Λόγω του ότι όμως τα  $\chi_1, \chi_2$  είναι (κβαντισμένα) φερμιονικά πεδία (αλλιώς αριθμοί Grassmann), σημαίνει ότι θα είναι αντιμετατιθέμενες ποσότητες και η ποσότητα  $\chi_2\chi_1 - \chi_1\chi_2$  κρίνεται κατάλληλη για αναλλοίωτο κατά Lorentz<sup>6</sup>.

Είναι λογικό να αναρρωτηθούμε τι συμβαίνει με το  $\psi^*$ . Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την περίπτωση του  $\chi^*$ , βρίσκουμε ότι το  $\sigma_2\psi$  μετασχηματίζεται όπως το  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow &= V\psi = \left(1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi \\ \psi^* \rightarrow &= (V\psi)^* = V^*\psi^* = \left(1 - i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi^*. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Κατά τα γνωστά, υπολογίζουμε τώρα την ποσότητα  $\sigma_2\psi^*$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_2\psi^*)' &= \sigma(V\psi)^* = \sigma_2V^*\psi^* = \sigma_2 \left(1 - i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\psi^* \\ &= \left(1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right)\sigma_2\psi^* = V^{\dagger-1}\sigma_2\psi^*. \end{aligned} \quad (2.100)$$

<sup>6</sup>Από το σημείο αυτό και πέρα θα εννοείται ότι οι σπινόρες είναι κβαντικά φερμιονικά πεδία. Αυτό σημαίνει ότι η μιγαδική συζυγία \* πεδίων δεν είναι κατάλληλος συμβολισμός, οπότε θα την δηλώνουμε συνδυαστικά †T. Όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, θα χρησιμοποιείται καταχρηστικά ο συμβολισμός \*.

Βρήκαμε λοιπόν, ότι η ποσότητα  $\sigma_2\psi^*$  μετασχηματίζεται όπως ο σπίνορας  $\chi$ . Ανάλογα λοιπόν, αυτό μας δίνει το δικαίωμα να εισαγάγουμε τα  $\chi$ -τύπου αντικείμενα από  $\psi$  σπίνορες:

$$\chi_\psi \equiv -i\sigma_2\psi^*. \quad (2.101)$$

Αντίστοιχα λοιπόν, για δύο τυχαία  $\psi$  πεδία,  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$  παίρνουμε για την ποσότητα  $\chi_\psi^\dagger\psi$  ότι:

$$\chi_{\psi^{(1)}}^\dagger\psi^{(2)} = (-i\sigma_2\psi^{(1)*})^\dagger\psi^{(2)} = \psi^{(1)T}(i\sigma_2)\psi^{(2)}, \quad (2.102)$$

το οποίο σημαίνει είναι Lorentz αναλλοίωτη. Τέλος, για την περίπτωση  $\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \psi$ , η παραπάνω ποσότητα θα είναι:

$$\chi_\psi^\dagger\psi = (-i\sigma_2\psi^*)^\dagger\psi = (-i\sigma_2\psi)^T\psi, \quad (2.103)$$

η οποία προφανώς είναι επίσης Lorentz αναλλοίωτη.

### Grassmann αριθμοί

Πριν συνεχίσουμε την πορεία προς τη θεμελίωση των SUSY μετασχηματισμών, είναι φρόνιμο να δώσουμε λίγες πληροφορίες για τους αριθμούς Grassmann.

Στην κβαντική θεωρία πεδίου, υπολογίζοντας τα πλάτη μετάβασης, τα πεδία θεωρούνται απλές συναρτήσεις πράγμα το οποίο μας ικανοποιεί στα χρονολογικά γινόμενα των μποζονικών τελεστών. Όταν όμως έχουμε φερμιονικούς τελεστές, υπάρχει η διαφορά ενός πλην ανάμεσα στις δύο διατάξεις, αφού οι φερμιονικοί τελεστές αντιμετατίθενται. Έτσι, πρέπει να σκεφτούμε σε όρους αντιμετατιθέμενων μεταβλητών.

Δύο αριθμοί Grassmann,  $\theta_1, \theta_2$ , ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = 0, \quad \theta_1^2 = \theta_2^2 = 0. \quad (2.104)$$

Γενικά, οι αριθμοί Grassmann προστίθενται, αφαιρούνται και πολλαπλασιάζονται κανονικά. Αυτό όμως που εμείς θέλουμε να κάνουμε με τους αριθμούς αυτούς είναι να τους ολοκληρώσουμε. Εκεί τα πράγματα είναι διαφορετικά από ότι στους συμβατικούς αριθμούς. Ως γνωστό, σε απλούς αριθμούς αλλά και συναρτήσεις η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη διαδικασία της παραγωγής. Ξεκινάμε, λοιπόν πρώτα από την παραγωγή και μετά θα περάσουμε στην ολοκλήρωση των Grassmann αριθμών. Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\frac{\partial(a\theta)}{\partial\theta} = a, \quad (2.105)$$

όπου  $a$  κανονικός αριθμός. Από την άλλη ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1\theta_2) = \theta_2 \quad (2.106)$$

και αναγκαστικά :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2}(\theta_1 \theta_2) = -\theta_1 . \quad (2.107)$$

Έστω τώρα μία συνάρτηση ενός τέτοιου αριθμού Grassmann. Το ανάπτυγμα της  $f(\theta)$  σε δυνάμεις του  $\theta$  σταματάει μετά από δύο όρους, αφού σύμφωνα με την (2.104),  $\theta^2 = 0$ :

$$f(\theta) = a + b\theta . \quad (2.108)$$

Οπότε παραγωγίζοντας, παίρνουμε :

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(a + b\theta) = b, \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial b}{\partial \theta} = 0, \quad \forall f . \quad (2.109)$$

Επομένως, ο τελεστής  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  δεν έχει αντίστροφο. Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε μέσω μιας αναλογίας με ό,τι συμβαίνει στην άλγεβρα των πινάκων. Είναι λοιπόν, σαν να έχουμε  $A^2 = 0$ . Αν το  $A^{-1}$  υπήρχε τότε:  $A^{-1}A^2 = 0 \rightarrow (A^{-1}A)A = 0 \rightarrow A = 0, \forall A$ . Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να προσεγγίσουμε την ολοκλήρωση Grassmann με άλλο τρόπο.

Χρειάζεται να θεωρήσουμε ολοκληρώματα πάνω στο πλήρες εύρος του  $\theta$ , της μορφής:

$$\int d\theta f(\theta) \stackrel{(2.108)}{=} \int d\theta(a + b\theta) . \quad (2.110)$$

Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα θα πρέπει να είναι γραμμικό στην  $f$ , δηλαδή, θα πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση των  $a, b$ . Υπάρχει ακόμα μία ιδιότητα που φιξάρει την τιμή του ολοκληρώματος: απαιτούμε αναλλοιώτητα κάτω από τις μετατοπίσεις του  $\theta$ :  $\theta \rightarrow \theta + \eta$ , όπου  $\eta$  είναι ένας αριθμός Grassmann. Οπότε, έχουμε διαδοχικά :

$$\int d\theta(a + b\theta) = \int d\theta [(a + b\eta) + b\theta] \quad (2.111)$$

Αυτή η μετατόπιση άλλαξε το σταθερό όρο (ανεξάρτητο του  $\theta$ ) αλλά άφησε το γραμμικό όρο αναλλοίωτο. Η μόνη γραμμική συνάρτηση που συμπεριφέρεται με τον τρόπο αυτόν είναι ένα πολλαπλάσιο του  $b$ , την οποία συμβατικά παίρνουμε να είναι η  $b$ . Οπότε ορίζουμε :

$$\int d\theta(a + b\theta) = b, \quad (2.112)$$

που σημαίνει ότι η ολοκλήρωση είναι κατά κάποιο τρόπο το ίδιο με την παραγωγή!

Όταν τώρα θέλουμε να ολοκληρώσουμε πάνω σε γινόμενα διαφορετικών  $\theta$  πρέπει να ορίσουμε κάποια σύμβαση για τη σειρά των ολοκληρώσεων. Υιοθετούμε λοιπόν τη σύμβαση :

$$\int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_2 \theta_1 = 1, \quad (2.113)$$

δηλαδή από μέσα προς τα έξω.

Αφού θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στα φερμιονικά πεδία, πρέπει να εισάγουμε μιγαδικούς Grassmann αριθμούς, που ως συνήθως αποτελούνται από πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2), \quad (2.114)$$

οπού τονίζουμε ότι εδώ το  $\psi$  δεν είναι ο  $R$ -τύπου Weyl σπινόρας αλλά κάποιο τυχαίο μιγαδικό φερμιονικό πεδίο (2 βαθμοί ελευθερίας), δηλαδή η μία εκ των δύο συνιστωσών του σπινόρα Weyl. Επομένως:

$$\begin{aligned} id\psi d\psi^* &= \frac{i}{2}(d\theta_1 + id\theta_2)(d\theta_1 - id\theta_2) = \frac{i}{2}(d\theta_1^2 + d\theta_2^2 - id\theta_1 d\theta_2 + id\theta_2 d\theta_1) \\ &= \frac{i}{2}(-id\theta_1 d\theta_2 - id\theta_2 d\theta_1) = i(-id\theta_1 d\theta_2) = d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να υπολογίσουμε γκαουσιανά ολοκληρώματα ως προς μεταβλητές Grassmann, τα οποία είναι πολύ χρήσιμα σε μία κβαντική θεωρία πεδίου όπως είναι τα υπερσυμμετρικά μοντέλα με τα οποία θα ασχοληθούμε. Επί παραδείγματι:

$$\int \int d\psi^* d\psi e^{-b\psi^*\psi} = \int \int d\psi^* d\psi (1 - b\psi^*\psi) = \int \int d\psi^* d\psi (1 + b\psi^*\psi) \stackrel{(2.112)}{=} b. \quad (2.116)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με κανονικές μεταβλητές το ολοκλήρωμα αυτό δίνει:

$$\int \int dx dy e^{-b(x^2+y^2)/2} = \frac{2\pi}{b}. \quad (2.117)$$

Σταματάμε λοιπόν εδώ τα χρήσιμα αποτελέσματα για τις πράξεις με τους αριθμούς Grassmann, (τα οποία θα φανούν πολύ χρήσιμα στη συνέχεια της εργασίας) και συνεχίζουμε με την επεξεργασία των Weyl σπινόρων.

### 2.2.3 Συμβολισμός των Weyl σπινόρων

Διαφαίνεται ότι πρόκειται να γίνει αρκετά πληκτικός ο συμβολισμός για να διαφοροποιούμε το ποιος 2-συνιστωσών σπινόρας είναι  $\chi$ -τύπου και ποιος  $\psi$ -τύπου γράφοντας αντικείμενα όπως  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots$  ή ακόμη χειρότερα  $\psi_{\chi^{(1)}}^\dagger, \dots$ . Ένα πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση ενός αρκετά ισχυρού συμβολισμού είναι να συμφωνήσουμε ότι οι συνιστώσες των  $\chi$ -τύπου σπινόρων έχουν μόνο κάτω δείκτες. Δηλαδή, οτιδήποτε είναι γραμμένο με κάτω δείκτες είναι ένας  $\chi$ -τύπου σπινόρας. Πλέον μπορούμε να τους ονομάσουμε με όποιο γράμμα θέλουμε:  $\chi_a, \xi_a, \dots$  ακόμα και  $\psi_a$ .

Μπορούμε λοιπόν να βελτιώσουμε/απλοποιήσουμε το συμβολισμό του αναλλοίωτου  $\psi_{\chi^{(1)}}^\dagger \chi^{(2)}$ , δηλαδή του αναλλοίωτου που αποτελείται από  $\chi$ -τύπου

σπίνορες. Στην (2.93) έχουμε δείξει ήδη πως γίνεται αυτό: Παίρνουμε τον ένα σπίνορα, έστω τον  $\chi^{(1)}$ , και σχηματίζουμε την ποσότητα  $i\sigma_2\chi^{(1)}$ . Έπειτα παίρνουμε το βαθμωτό γινόμενο πινάκων,  $u \cdot v = u^T v$ , με τον άλλον σπίνορα,  $\chi^{(2)}$ . Έτσι, ξεκινώντας από έναν σπίνορα  $\chi$ -τύπου με κάτω δείκτες,  $\chi_a$ , ορίζουμε ένα έναν  $\chi$  σπίνορα με πάνω δείκτες:

$$\begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \equiv i\sigma_2\chi = \begin{pmatrix} \chi_2 \\ -\chi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi^1 \equiv \chi_2 \quad \text{και} \quad \chi^2 \equiv -\chi_1 \quad (2.118)$$

Έστω λοιπόν τώρα ότι  $\xi$  είναι ένας δεύτερος  $\chi$ -τύπου σπίνορας με  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ .

Τότε σχηματίζουμε την ποσότητα  $(i\sigma_2\chi)^T \xi$ , η οποία γνωρίζουμε ότι Lorentz αναλλοίωτη από την (2.93):

$$(i\sigma_2\chi)^T \xi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^1 & \chi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \chi^1 \xi_1 + \chi^2 \xi_2 = \chi^a \xi_a, \quad (2.119)$$

όπου προφανώς για τον δείκτη  $a$  ισχύει ότι  $a = 1, 2$ . Η (2.119) είναι ένας συμπαγής συμβολισμός για αυτό το βαθμωτό γινόμενο, ένα σπινωριακό εσωτερικό γινόμενο (spinor dot product), σε αναλογία με το εσωτερικό γινόμενο της σχετικότητας,  $A^\mu B_\mu$ . Μπορούμε να συμμαζέψουμε κι άλλο το συμβολισμό σε  $\chi \cdot \xi$  ή ακόμα και σε  $\chi\xi$ . Στην περίπτωση που τα πεδία  $\chi, \xi$  ήταν μποζονικά και άρα μετατιθέμενα, δε θα είχε σημασία η διάταξη στο εσωτερικό γινόμενο,  $\chi^a \xi_a = \xi_a \cdot \chi^a$ . Όμως, τα πεδία είναι φερμιονικά, δηλαδή οι συνιστώσες των σπινόρων αντιμετατίθενται. Συνεπώς, στο σπινωριακό εσωτερικό γινόμενο, η σειρά των πεδίων έχει σημασία και διαφέρει κατά ένα αρνητικό πρόσημο. Συνεπώς, χρειαζόμαστε μία σύμβαση για το ποιο είναι το «θετικό» εσωτερικό γινόμενο. Παίρνουμε λοιπόν συμβατικά το θετικό εσωτερικό γινόμενο της μορφής που δίνεται στην (2.119), με το μνημονικό κανόνα, οι αθροιζόμενοι  $\chi$ -τύπου δείκτες εμφανίζονται διαγώνια προς τα κάτω, πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά.

Όπως και στη θεωρία της σχετικότητας το εσωτερικό γινόμενο  $A^\mu B_\mu$  μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή του χώρου Minkowski,  $g^{\mu\nu}$ :

$$A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\nu B_\mu, \quad (2.120)$$

κατά παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να εισαγάγουμε έναν μετρικό τανυστή  $\epsilon^{ab}$  προς σχηματισμό του Lorentz αναλλοίωτου σπινωριακού εσωτερικού γινομένου δύο  $L$ -τύπου σπινόρων, γράφοντας:

$$\chi^a = \epsilon^{ab} \chi_b, \quad \text{δηλαδή} \quad \chi^a \xi_a = \epsilon^{ab} \chi_b \xi_a. \quad (2.121)$$

Για να είναι συνεπής η (2.121) με την (2.118), πρέπει να ισχύει:

$$\epsilon^{12} = +1, \quad \epsilon^{21} = -1, \quad \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0. \quad (2.122)$$

Προφανώς, θεωρώντας τη μετρική  $\epsilon^{ab}$  έναν  $2 \times 2$  πίνακα, παρατηρούμε ότι δεν είναι άλλος από τον  $i\sigma_2$ . Μπορούμε επίσης να εισαγάγουμε τη σπινωριακή μετρική με κάτω δείκτες,  $\epsilon_{ab}$ :

$$\chi_\alpha = \epsilon_{ab}\chi^b, \quad (2.123)$$

με τα στοιχεία του πίνακα να είναι:

$$\epsilon_{12} = -1, \quad \epsilon_{21} = +1, \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0. \quad (2.124)$$

Επίσης για τις μετρικές  $\epsilon^{ab}, \epsilon_{ab}$ , ισχύει ότι:

$$\epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = \delta_a^c. \quad (2.125)$$

Είναι επίσης σημαντικό να σημειωθεί ότι οι  $\epsilon$  πίνακες είναι αντισυμμετρικοί κάτω από την εναλλαγή των δεικτών  $a, b$ , ενώ η μετρική του χώρου Minkowski είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή  $\mu \leftrightarrow \nu$ .

Εν συνεχεία, θα δούμε αρχικά πως γράφεται το εσωτερικό γινόμενο  $\xi \cdot \chi$  σε όρους του εσωτερικού γινομένου  $\chi \cdot \xi$  κι έπειτα το  $\chi_a \xi^a$  σε όρους  $\chi^a \xi_a$ .

- Το  $\xi \cdot \chi$  σε όρους του  $\chi \cdot \xi$ :

$$\begin{aligned} \xi \cdot \chi &= \xi^a \chi_a = \epsilon^{ab} \xi_b \epsilon_{ac} \chi^c = \epsilon^{ab} \epsilon_{ac} \xi_b \chi^c = -\epsilon^{ba} \epsilon_{ac} \xi_b \chi^c \\ &\stackrel{(2.125)}{=} -\delta_c^b \xi_b \chi^c = -\xi_c \chi^c \stackrel{(2.104)}{=} -(-\chi^c \xi_c) = \chi \cdot \xi. \end{aligned} \quad (2.126)$$

- Το  $\chi_a \xi^a$  σε όρους  $\chi^a \xi_a$ :

$$\chi_a \xi^a = \epsilon_{ab} \chi^b \epsilon^{ac} \xi_c = -\epsilon_{ba} \epsilon^{ac} \chi^b \xi_c = -\delta_b^c \chi^b \xi_c = -\chi^a \xi_a. \quad (2.127)$$

Δεδομένου ότι το  $\chi$  μετασχηματίζεται με τον  $V^{-1\dagger}$ , είναι ενδιαφέρον να βρούμε πως μετασχηματίζεται το  $i\sigma_2 \chi$ , δηλαδή η εκδοχή του  $\chi$  με πάνω δείκτη:

$$\begin{aligned} i\sigma_2 \chi &\rightarrow (i\sigma_2 \chi)' = i\sigma_2 \chi' = i\sigma_2 V^{-1\dagger} \chi = \sigma \left( 1 + i \frac{\epsilon \cdot \sigma}{2} + \frac{\eta \cdot \sigma}{2} \right) i\chi \\ &= \left[ \sigma_2 + i \frac{\epsilon}{2} (\sigma_2 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3) + \frac{\eta}{2} (\sigma_2 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3) \right] i\chi \\ &= \left[ \sigma_2 + i \frac{\epsilon}{2} (-\sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_2, -\sigma_3 \sigma_2) + \frac{\eta}{2} (-\sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_2, -\sigma_3 \sigma_2) \right] i\chi \\ &= \left[ \sigma_2 - i \frac{\epsilon}{2} (\sigma_1 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_2) - \frac{\eta}{2} (\sigma_1 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_2) \right] i\chi \\ &= \left[ \sigma_2 - i \frac{\epsilon}{2} (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \sigma_2 - \frac{\eta}{2} (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*) \sigma_2 \right] i\chi \\ &= \left( 1 - i \frac{\epsilon \cdot \sigma^*}{2} - \frac{\eta \cdot \sigma^*}{2} \right) i\sigma_2 \chi = \left( 1 + i \frac{\epsilon \cdot \sigma}{2} - \frac{\eta \cdot \sigma}{2} \right)^* i\sigma_2 \chi \\ &= V^*(i\sigma_2 \chi). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Άρα, αποδείξαμε ότι το  $i\sigma_2 \chi$  μετασχηματίζεται με τον συζυγή του μετασχηματισμού του  $\psi$ , τον  $V^*$ .

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (2.95) έτσι ώστε να επαληθεύσουμε εκ νέου την αναλλοιώτητα του  $(i\sigma_2\chi)^T\xi$ :

$$\begin{aligned}(i\sigma_2\chi)^T\xi &\rightarrow (i\sigma_2\chi)^{T'}\xi' = [V^*(i\sigma_2\chi)]^T V^{-1\dagger}\xi = (i\sigma_2\chi)^T V^{*T}V^{-1\dagger}\xi \\ &= (i\sigma_2\chi)^T V^\dagger V^{\dagger-1}\xi = (i\sigma_2\chi)^T\xi.\end{aligned}\quad (2.129)$$

Συνοψίζοντας τις διεργασίες ως τώρα, μπορούμε να πούμε ότι ένας  $\chi$ -τύπου σπίνορας με κάτω δείκτη μετασχηματίζεται με τον  $V^{-1\dagger}$  ενώ ένας  $\chi$ -τύπου σπίνορας με πάνω δείκτη μετασχηματίζεται με τον  $V^*$ , όπου  $\chi$ -τύπου σπίνορας με πάνω δείκτη είναι μία συντομογραφία του  $i\sigma_2\chi$ .

Προφανώς, θέλουμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για τους  $\psi$ -τύπου σπίνορες. Ο γενικός κανόνας είναι ότι σε αυτούς τους σπίνορες θέτουμε τονούμενους δείκτες (dotted), για παράδειγμα  $\psi^{\dot{a}}$ . Συμβατικά, σε αντίθεση με τους  $\chi$ -τύπου σπίνορες, στους  $\psi$ -τύπου μπαίνουν πάνω δείκτες. Βαθμωτό γινόμενο σχηματίζεται με παρόμοιο τρόπο, αφού πρώτα ορίσουμε για δύο  $\psi$ -τύπου σπίνορες,  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ , τους  $\psi$ -τύπου σπίνορες με κάτω δείκτη:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \equiv -i\sigma_2\psi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{\dot{1}} \\ \psi^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi^{\dot{2}} \\ \psi^{\dot{1}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = -\psi^{\dot{2}} \\ \psi_2 = \psi^{\dot{1}} \end{cases}\quad (2.130)$$

Επομένως, αν  $\zeta$  είναι ένας δεύτερος  $\psi$ -τύπου σπίνορας  $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{\dot{1}} \\ \zeta^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ , γνωρίζουμε ότι η ποσότητα  $(-i\sigma_2\psi)^T\zeta = \psi^T i\sigma_2\zeta$  είναι Lorentz αναλλοίωτη:

$$(-i\sigma_2\psi)^T\zeta = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \zeta^{\dot{1}} \\ \zeta^{\dot{2}} \end{pmatrix} = (\psi_1 \quad \psi_2) \begin{pmatrix} \zeta^{\dot{1}} \\ \zeta^{\dot{2}} \end{pmatrix} = \psi_{\dot{a}}\zeta^{\dot{a}}.\quad (2.131)$$

Ανάλογα με την περίπτωση των  $\chi$ -τύπου σπινόρων, το θετικό βαθμωτό γινόμενο ορίζεται συμβατικά έτσι ώστε οι αθροιζόμενοι τονούμενοι δείκτες να εμφανίζονται διαγώνια προς τα πάνω, από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

Και στην περίπτωση αυτή, θα δείξουμε ότι το  $-i\sigma_2\psi$  μετασχηματίζεται με το  $V^{-1T}$  κι έπειτα θα επαληθεύσουμε μία φορά ακόμη ότι η ποσότητα  $(-i\sigma_2\psi)^T\zeta$  είναι Lorentz αναλλοίωτη.

$$\begin{aligned}-i\sigma_2\psi &\rightarrow (-i\sigma_2\psi)' = -i\sigma_2 V\psi = -i\sigma_2 \left(1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \\ &= -i \left(\sigma_2 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{2}(\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_2, \sigma_2\sigma_3) - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_2, \sigma_2\sigma_3)\right) \psi \\ &= -i \left(\sigma_2 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{2}(-\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3)\sigma_2 - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(-\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3)\sigma_2\right) \psi \\ &= \left(1 + i\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{2}(-\sigma_1^*, -\sigma_2^*, -\sigma_3^*) - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}(-\sigma_1^*, -\sigma_2^*, -\sigma_3^*)\right) (-i\sigma_2\psi) \\ &= \left(1 - \frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\right) (-i\sigma_2\psi) = \left(1 + \frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)^* (-i\sigma_2\psi) \\ &= (V^{-1\dagger})^* (-i\sigma_2\psi) = V^{-1T}(-i\sigma_2\psi).\end{aligned}\quad (2.132)$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι σπίνορες που έχουν ανάποδους δείκτες από τους ορισμούς (2.118) και (2.130), δηλαδή, οι  $\chi$ -τύπου με πάνω δείκτες και οι  $\psi$ -τύπου με κάτω δείκτες μετασχηματίζονται με το συζυγή μετασχηματισμό των έτερων σπινόρων. Δηλαδή:

- Ο  $\chi$ -τύπου σπίνορας με πάνω δείκτη μετασχηματίζεται με τον συζυγή του πίνακα μετασχηματισμού του  $\psi$ -τύπου σπίνορα με πάνω (τονούμενο) δείκτη ( $\psi$ -τύπου πάνω δείκτης με  $V$ ,  $\chi$ -τύπου πάνω δείκτης με  $V^*$ ).
- Ο  $\psi$ -τύπου σπίνορας με κάτω δείκτη μετασχηματίζεται με τον συζυγή του πίνακα μετασχηματισμού του  $\chi$ -τύπου σπίνορα με κάτω δείκτη ( $\chi$ -τύπου κάτω δείκτης με  $V^{-1\dagger}$ ,  $\psi$ -τύπου κάτω δείκτης με  $V^{-1\dagger*}V^{-1T}$ ).

Απομένει να επαληθεύσουμε μία φορά ακόμη ότι η ποσότητα  $(-i\sigma_2\psi)^T\zeta$  είναι Lorentz αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} (-i\sigma_2\psi)^T\zeta &\rightarrow ((-i\sigma_2\psi)^T\zeta)' = (-i\sigma_2\psi)^{T'}\zeta' = (V^{-1T}(-i\sigma_2\psi))^T V\zeta \\ &= (-i\sigma_2\psi)^T V^{-1}V\zeta = (-i\sigma_2\psi)^T\zeta. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Κατά τα γνωστά, μπορούμε να εισαγάγουμε ένα μετρικό τανυστή για το Lorentz αναλλοίωτο βαθμωτό γινόμενο δύο  $R$ -τύπου (τονούμενων) σπινόρων. Γράφουμε λοιπόν:

$$\psi_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\psi^{\dot{b}}, \quad \text{δηλαδή} \quad \psi_{\dot{a}}\zeta^{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\psi^{\dot{b}}\zeta^{\dot{a}}. \quad (2.134)$$

Για να είναι συνεπής η (2.134) με την (2.130), πρέπει να ισχύει:

$$\epsilon_{1\dot{2}} = -1, \quad \epsilon_{\dot{2}1} = +1, \quad \epsilon_{1\dot{1}} = \epsilon_{\dot{2}\dot{2}} = 0. \quad (2.135)$$

Ορίζουμε επίσης:

$$\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = +1, \quad \epsilon^{\dot{2}\dot{1}} = -1, \quad \epsilon^{\dot{1}\dot{1}} = \epsilon^{\dot{2}\dot{2}} = 0, \quad \text{με} \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon^{\dot{b}\dot{c}} = \delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}. \quad (2.136)$$

Ο τανυστής με τονούμενους δείκτες είναι επίσης αντισυμμετρικός στην εναλλαγή  $\dot{a} \leftrightarrow \dot{b}$ .

Μπορούμε να συμμαζέψουμε κι άλλο το συμβολισμό του βαθμωτού γινομένου  $\psi_{\dot{a}}\zeta^{\dot{a}}$  σε  $\psi \cdot \zeta$  ή  $\psi\zeta$ . Όμως, χωρίς την παρουσία των τονούμενων δεικτών δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν στο γινόμενο εμπλέκονται  $\psi$ -τύπου ή  $\chi$ -τύπου σπίνορες. Για το λόγο αυτό, βάζουμε μία μπάρα πάνω από τους  $\psi$ -τύπου σπίνορες ώστε να μην υπάρχει σύγχυση:

$$\psi^{\dot{1}} \equiv \bar{\psi}^{\dot{1}}, \quad \text{και} \quad \psi^{\dot{2}} \equiv \bar{\psi}^{\dot{2}}. \quad (2.137)$$

Συνεπώς, το σπινωριακό βαθμωτό γινόμενο θα είναι απλά  $\bar{\psi} \cdot \bar{\zeta}$ .

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση των  $\chi$ -τύπου σπινόρων, θα δούμε πρώτα πως γράφεται το εσωτερικό γινόμενο  $\bar{\psi} \cdot \bar{\zeta}$  σε όρους του εσωτερικού γινομένου  $\bar{\zeta} \cdot \bar{\psi}$  κι έπειτα το  $\bar{\psi}_{\dot{a}}\bar{\zeta}^{\dot{a}}$  σε όρους  $\bar{\psi}^{\dot{a}}\bar{\zeta}_{\dot{a}}$ .

- Το  $\bar{\psi} \cdot \bar{\zeta}$  σε όρους του  $\bar{\zeta} \cdot \bar{\psi}$  γράφεται :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \cdot \bar{\zeta} &= \bar{\psi}_a \bar{\zeta}^a = \epsilon_{ab} \bar{\psi}^b \epsilon^{ac} \bar{\zeta}_c = \epsilon_{ab} \epsilon^{ac} \bar{\psi}^b \bar{\zeta}_c = -\epsilon_{ba} \epsilon^{ac} \bar{\psi}^b \bar{\zeta}_c \\ &\stackrel{(2.136)}{=} -\delta_b^c \bar{\psi}^b \bar{\zeta}_c = -\bar{\psi}^c \bar{\zeta}_c \stackrel{(2.104)}{=} -(-\bar{\zeta}_c \bar{\psi}^c) = \bar{\zeta} \cdot \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

- Το  $\bar{\psi}_a \bar{\zeta}^a$  σε όρους  $\bar{\psi}^a \bar{\zeta}_a$  γράφεται :

$$\bar{\psi}_a \bar{\zeta}^a = \epsilon_{ab} \bar{\psi}^b \epsilon^{ac} \bar{\zeta}_c = -\epsilon_{ba} \epsilon^{ac} \bar{\psi}^b \bar{\zeta}_c = -\delta_b^c \bar{\psi}^b \bar{\zeta}_c = -\bar{\psi}^c \bar{\zeta}_c = -\bar{\psi}^a \bar{\zeta}_a. \quad (2.139)$$

Συνοψίζοντας, ως τώρα έχουμε καταλήξει σε 4 είδη Weyl σπινόρων 2–συνιστωσών.

- Στον  $\chi_a$ , ο οποίος μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V^{-1\dagger}$ .
- Στον  $\chi^a$ , ο οποίος μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V^*$ .
- Στον  $\bar{\psi}^a$ , ο οποίος μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V$ .
- Στον  $\bar{\psi}_a$ , ο οποίος μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V^{-1T}$ .

Το σημαντικό είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις σχηματισμού βαθμωτών ποσοτήτων, αυτά σχηματίζονται παίρνοντας γινόμενο πινάκων ποσοτήτων που μετασχηματίζονται με  $M$  και  $M^{-1T}$ .

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τώρα τον σπινόρα  $\chi_a^*$ . Αφού ο  $\chi_a$  μετασχηματίζεται με τον  $V^{-1\dagger}$ , ο  $\chi_a^*$  θα μετασχηματίζεται με τον  $V^{-1T}$ . Όμως, αυτός ακριβώς είναι ο πίνακας με τον οποίον μετασχηματίζεται ο σπινόρας  $\bar{\psi}_a$ . Επομένως, είναι συνεπές να γράψουμε ότι :

$$\chi_a^* \equiv \bar{\chi}_a. \quad (2.140)$$

Μπορούμε λοιπόν, να ανεβάσουμε τον τονούμενο δείκτη με τον πίνακα  $i\sigma_2$  -απ'τή στιγμή που έχουμε υιοθετήσει το συμβολισμό με τις μπάρες, το γράμμα του σπινόρα δεν καθορίζει το είδος του- χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση της (2.130):

$$\bar{\psi}_a = -i\sigma_2 \bar{\psi}^a \Leftrightarrow \bar{\psi}^a = i\sigma_2 \bar{\psi}_a. \quad (2.141)$$

Με το ίδιο σκεπτικό, αν θεωρήσουμε το  $\bar{\psi}^{a*}$ , τότε αυτό θα μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V^*$ , αφού ο  $\bar{\psi}^a$  μετασχηματίζεται με τον πίνακα  $V$ . Όμως, με τον πίνακα  $V^*$  μετασχηματίζεται ο  $\chi^a$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε :

$$\psi^a = \bar{\psi}^{a*}. \quad (2.142)$$

Οπότε, η μιγαδική συζυγία πάνω σε κάθε σπινόρα του αλλάζει ουσιαστικά το chirality, από  $L$ -τύπου τον μετατρέπει σε  $R$ -τύπου, και αντίστροφα.

Με βάση λοιπόν τους τελευταίους δύο ορισμούς, μπορούμε να γράψουμε τα 4–διανύσματα της (2.79) σε συμβολισμό με τις μπάρες :

- $\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi = \chi_a^* \bar{\sigma}^{\mu ab} \chi_b = \bar{\chi}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} b} \chi_b = \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \chi$
- $\psi^\dagger \sigma^\mu \psi = \bar{\psi}^{\dot{a} *} \sigma_{\dot{a} b}^\mu \bar{\psi}^b = \psi^a \sigma_{ab}^\mu \bar{\psi}^b = \psi \sigma^\mu \bar{\psi}$ ,

με τη σύμβαση ότι οι δείκτες του  $\bar{\sigma}^\mu$  είναι πάνω, ο πρώτος τονούμενος, ενώ ο δεύτερος όχι, ενώ οι δείκτες του  $\sigma^\mu$  είναι κάτω, ο πρώτος μη τονούμενος, ενώ ο δεύτερος τονούμενος.

Παραθέτουμε την απόδειξη της χρήσιμης σχέσης:

$$\bar{\xi} \bar{\sigma} \chi = -\chi \sigma^\mu \bar{\xi}, \quad (2.143)$$

σαν επίδειξη διαχείρισης πιο δύσκολων υπολογισμών. Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος και καταλήγουμε στο δεξί:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi &= \bar{\xi}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} b} \chi_b = \epsilon_{\dot{a} c} \bar{\xi}^c \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} b} \epsilon_{bd} \chi^d = -\bar{\xi}^c \epsilon_{c \dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} b} \epsilon_{bd} \chi^d \\ &= \bar{\xi}(-i\sigma_2) \bar{\sigma}^\mu (-i\sigma_2) \chi = \bar{\xi}^c \underbrace{\sigma_2 \bar{\sigma}^\mu \sigma_2}_{\sigma^{\mu T}} \chi^d \end{aligned} \quad (2.144)$$

Απομονώνουμε τον όρο  $\sigma_2 \bar{\sigma}^\mu \sigma_2$  για να κάνουμε πιο εύκολα υπολογισμούς και επιστρέφουμε μετά με το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \sigma_2 \bar{\sigma}^\mu \sigma_2 &= \sigma_2(1, \bar{\sigma})\sigma_2 = \sigma_2(1, -\sigma)\sigma_2 = (\sigma_2 1 \sigma_2, \sigma_2(-\sigma)\sigma_2) \\ &= (\sigma_2 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2) \\ &= (\sigma_2^2, -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2, -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_2 \sigma_2) \\ &= (\sigma_2^2, \sigma_1 \sigma_2^2, \sigma_3 \sigma_2^2) = (1, \sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3) \\ &= ((1^T, \sigma_1^T, \sigma_2^T, \sigma_3^T)) = (1^T, \bar{\sigma}^T) = (1, \bar{\sigma})^T = \sigma^{\mu T}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα, (2.145), στην παραπάνω σχέση (2.144):

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi &= \bar{\xi}^c \sigma_2 \bar{\sigma}^\mu \sigma_2 \chi^d = \bar{\xi}^c \sigma^{\mu T} \chi^d = \bar{\xi}^c (\sigma_{cd}^\mu)^T \chi^d \\ &= \bar{\xi}^c \sigma_{dc}^\mu \chi^d = -\chi^d \sigma_{dc}^\mu \bar{\xi}^c = -\chi \sigma^\mu \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Κλείνουμε λοιπόν, παραθέτοντας τη νέα μορφή που παίρνει ο σπίνορας Dirac, μετά τους ορισμούς που δώσαμε για τους σπίνορες Weyl, η οποία θα φανεί εξαιρετικά χρήσιμη στα επόμενα κεφάλαια:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \longrightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{a}} \\ \chi_a \end{pmatrix}. \quad (2.147)$$

## 2.2.4 Dirac σπίνορες χρησιμοποιώντας μόνο $L$ -τύπου σπίνορες

Στην προσέγγιση της SUSY που ακολουθούμε, μέσω των σπινόρων Weyl, συμπεριλαμβάνονται ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και ένα σπινორιακό πεδίο δύο συνιστωσών, όπως έχουμε δει στην (2.33). Συμβατικά χρησιμοποιούνται μόνο

$L$ -τύπου σπίνορες (ίσως και λίγο μεροληπτικά, αφού η  $V - A$  δομή του ηλεκτρασθενούς τομέα διαχωρίζει τα  $L$ -μέρη των πεδίων), δηλαδή σπίνορες με κάτω μη τονούμενους δείκτες, αλλά ωστόσο  $R$ -τύπου πεδία, δηλαδή σπίνορες με πάνω τονούμενους δείκτες, συνεχίζουν να υπάρχουν. Όσον αφορά τη SUSY είναι βολικό να μπορούμε να χρησιμοποιούμε μόνο ένα είδος σπινόρων (στο MSSM πρόκειται να είναι τα  $L$ -τύπου), όμως στην περίπτωση αυτή πώς διαχειριζόμαστε τα  $R$ -τύπου μέρη των πεδίων του SM?

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το πεδίο του  $e^-$  το οποίο είναι:

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \chi_e \end{pmatrix}. \quad (2.148)$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τον  $R$ -τύπου σπίνορα του ηλεκτρονίου, μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε το συζυγές φορτίο (Charge Conjugate (CC)) του  $L$ -τύπου πεδίου του ποζιτρονίου (δηλαδή του αντισωματιδίου του) το οποίο είναι στην ουσία  $R$ -τύπου όπως θα δούμε. Εδώ θα κάνουμε μία παύση για να αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία για τη συζυγία φορτίου:

### Συζυγία φορτίου

Θεωρούμε την εξίσωση του Dirac για σωματίδιο φορτίου  $-e$  εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου  $A^\mu$ :

$$(i \not{\partial} + e \not{A} - m)\Psi = 0. \quad (2.149)$$

Η εξίσωση που ικανοποιείται από σωματίδιο ίδιας μάζας αλλά αντίθετου φορτίου  $+e$ , θα είναι:

$$(i \not{\partial} - e \not{A} - m)\Psi_c = 0. \quad (2.150)$$

Μπορούμε λοιπόν να συσχετίσουμε το  $\Psi_c$  με το  $\Psi$  με τέτοιο τρόπο ώστε η (2.150) να προκύπτει από την (2.149). Παίρνοντας λοιπόν το μιγαδικό συζυγές της (2.150), έχουμε:

$$(-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - e\gamma^{\mu*}A_\mu - m)\Psi_c^* = 0 \quad (2.151)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με έναν πίνακα  $C_0$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (iC_0\gamma^{\mu*}\partial_\mu + eC_0\gamma^{\mu*}A_\mu + C_0m)\Psi_c^* &= 0 \\ [C_0\gamma^{\mu*}(i\partial_\mu + eA_\mu) + C_0m]\Psi_c^* &= 0 \\ [C_0\gamma^{\mu*}C_0^{-1}(i\partial_\mu + eA_\mu) + m]C_0\Psi_c^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Επομένως, αν, συγκρίνοντας τις (2.150) και (2.152), μπορούμε να βρούμε έναν πίνακα  $C_0$  τέτοιον ώστε να ταυτοποιήσουμε ότι  $C_0\gamma^{\mu*}C_0^{-1} = -\gamma^\mu$ , θα μπορούσαμε να ταυτοποιήσουμε έπειτα ότι  $C_0\Psi_c^* = \Psi$ . Μιας και μόνο ο  $\gamma^2$

είναι φανταστικός, μία πιθανή επιλογή του  $C_0$  είναι ο  $i\gamma^2$ . Άρα για τους σπίνορες Dirac,  $\Psi_c, \Psi^*$ , θα ισχύει<sup>7</sup>:

$$\Psi = C_0 \Psi_c^* \Rightarrow \Psi = i\gamma^2 \Psi_c \Rightarrow \Psi_c = i\gamma^2 \Psi^*. \quad (2.153)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το  $\Psi$  να είναι η λύση αρνητικής 4-ορμής της εξίσωσης Dirac ελεύθερου σωματιδίου με ελικότητα  $\lambda = +1$ :

$$\Psi = v(p, \lambda = 1) e^{ipx} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E - |\mathbf{p}|} \chi_- \\ \sqrt{E + |\mathbf{p}|} \chi_- \end{pmatrix} e^{ipx}. \quad (2.154)$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το σπίνορα  $\Psi_c$ :

$$\Psi_c = i\gamma^2 \Psi^* = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{E - |\mathbf{p}|} \chi_-^* \\ \sqrt{E + |\mathbf{p}|} \chi_-^* \end{pmatrix} e^{-ipx}. \quad (2.155)$$

Όμως, ο  $\chi_-$  ικανοποιεί την (2.42),  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_- = -|\mathbf{p}| \chi_-$ , για την οποία το μιγαδικό συζυγές δίνει:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{p} \chi_-^* &= -|\mathbf{p}| \chi_-^* \\ (\sigma_1^* p_1 + \sigma_2^* p_2 + \sigma_3^* p_3) \chi_-^* &= -|\mathbf{p}| \chi_-^* \\ (\sigma_1 p_1 - \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \chi_-^* &= -|\mathbf{p}| \chi_-^*. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το  $\sigma_2$ , έχουμε:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} (-i\sigma_2 \chi_-^*) = |\mathbf{p}| (-i\sigma_2 \chi_-^*). \quad (2.157)$$

Φαίνεται ότι ο  $(-i\sigma_2 \chi_-^*)$  είναι σπίνορας με θετική ελικότητα, ας τον πούμε  $\phi_+$ . Επομένως, για αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε:

$$\psi_c = i\gamma^2 v^*(p, \lambda = 1) e^{-ipx} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + |\mathbf{p}|} \phi_+ \\ \sqrt{E - |\mathbf{p}|} \phi_+ \end{pmatrix} e^{-ipx} = u(p, \lambda = 1) e^{-ipx}. \quad (2.158)$$

Επομένως, η μετασχηματισμένη κυματοσυνάρτηση  $\Psi_c$  είναι ακριβώς η λύση θετικής 4-ορμής με θετική ελικότητα. Παρομοίως, ορίζοντας το  $i\sigma_2 \chi_-^*$  ως  $\phi_-$ , βρίσκουμε ότι

$$i\gamma^2 v^*(p, \lambda = -1) = u(p, \lambda = -1). \quad (2.159)$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός παίρνει τις λύσεις αρνητικής 4-ορμής με ελικότητα  $\lambda$  και τις πηγαίνει σε λύσεις θετικής 4-ορμής με ίδια ελικότητα  $\lambda$ .

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ό,τι πλησιέστερο μπορούμε να πάρουμε (σε μία θεωρία κυματοσυναρτήσεων) για μετατροπή σωματιδίου σε αντισωματίδιο

<sup>7</sup>Κάνοντας χρήση της ιδιότητας  $(i\gamma^2)^2 = 1_{2 \times 2}$

(και αντίστροφα). Θέλουμε λοιπόν έναν τελεστή ο οποίος απλά να αλλάζει ένα σωματίδιο συγκεκριμένης 4–ορμής και ελικότητας σε αντισωματίδιο με την ίδια 4–ορμή και ελικότητα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί στο φορμαλισμό κβαντικής θεωρίας πεδίου, όπου ο απαιτούμενος τελεστής είναι ο  $C$ , με την ιδιότητα:

$$\Psi_c = C\Psi C^{-1} = C_0\Psi^{\dagger T} = i\gamma^2\Psi^{\dagger T}. \quad (2.160)$$

Η επίδραση του μετασχηματισμού στο ανάπτυγμα του πεδίου Dirac είναι:

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E}} \sum_{\lambda} c_{\lambda}(k)u(k, \lambda)e^{-ikx} + d_{\lambda}^{\dagger}(k)v(k, \lambda)e^{ikx}. \quad (2.161)$$

Χρησιμοποιώντας το  $i\gamma^2u(k, \lambda) = v(k, \lambda)$  και την αντίστοιχη έκφραση για  $\lambda = -1$ , βρίσκουμε ότι:

$$\Psi_c(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E}} \sum_{\lambda} c_{\lambda}(k)^{\dagger}v(k, \lambda)e^{ikx} + d_{\lambda}(k)u(k, \lambda)e^{-ikx} \quad (2.162)$$

Από την έκφραση αυτή είναι προφανές ότι το πεδίο  $\Psi_c(x)$  είναι το ίδιο με το  $\Psi(x)$  μόνο που έχει αντικατασταθεί το  $c_{\lambda}(k)$  με  $d_{\lambda}(k)$  και το  $d_{\lambda}^{\dagger}(k)$  με το  $c_{\lambda}^{\dagger}(k)$ , δηλαδή οι τελεστές σωματιδίων από τελεστές αντισωματιδίων.

Έχουμε λοιπόν εισαγάγει την ιδέα συζυγίας σωματιδίου-αντισωματιδίου εντός του πλαισίου της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, η οποία είναι μία «καλή» συμμετρία. Ισχύουν όμως τα παραπάνω και για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις; Η απάντηση είναι αρνητική. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρόνιο που εκπέμπεται στη διάσπαση του μιονίου βρίσκεται κυρίως στην  $\lambda = -1$  κατάσταση ελικότητας. Η συμμετρία σωματιδίου-αντισωματιδίου, θα προέβλεπε ότι ένα ποζιτρόνιο που εκπέμπεται κατά την  $C$ –συζυγή διαδικασία θα έπρεπε να έχει επίσης ελικότητα  $\lambda = -1$ , κάτι το οποίο όμως δε συμβαίνει.

Παρό όλα αυτά, είναι προφανές ότι ο τελεστής της ελικότητας είναι περιττός κάτω από τον μετασχηματισμό αναστροφής χώρου, parity. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός  $CP$  ενός  $e^-$  με  $\lambda = -1$  δίνει ένα  $e^+$  με  $\lambda = +1$  κι επομένως μπορούμε να πούμε ότι στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις διατηρείται η συνδυαστική συμμετρία  $CP$ .

Συνεχίζοντας την ανάλυση, για έναν 4–συνιστωσών σπινόρα Dirac η συζυγία φορτίου ορίζεται ως εξής:

$$\Psi_c = C\bar{\Psi}^T = C_0\Psi^*, \quad (2.163)$$

όπου

$$C = -i\gamma^2\beta = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad C_0 = -i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.164)$$

Όμως, έχουμε γενικά ότι  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$ , που σημαίνει ότι:

$$\Psi_c = C_0\Psi^* = -i\gamma^2 \begin{pmatrix} \psi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix}. \quad (2.165)$$

Οι δύο πάνω συνιστώσες του σπίνορα Dirac είναι ακριβώς αυτό που ονομάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο  $\psi_\chi$ , (2.92), ενώ οι δύο κάτω συνιστώσες είναι ακριβώς αυτό που ονομάσαμε  $\chi_\psi$ , (2.101). Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τη συζυγία φορτίου σε επίπεδο σπινόρων 2 συνιστωσών:

$$\chi^c \equiv i\sigma_2\chi^*, \quad \psi^c \equiv -i\sigma_2\psi^*. \quad (2.166)$$

Όπως αναλύσαμε στο παραπάνω παράρτημα, στην  $\Psi_c$ , οι τελεστές σωματιδίων αντικαθιστώνται από τελεστές αντισωματιδίων και αντίστροφα. Κατά τον ίδιο τρόπο, οι  $\chi$ ,  $\chi^c$  κουβαλούν αντίθετες τιμές διατηρούμενων φορτίων (δηλαδή των προσθετικών κβαντικών αριθμών), επομένως μπορούμε να γράψουμε το γενικό σπίνορα Dirac, (2.148), σαν:

$$\Psi^{(e)} = \begin{pmatrix} \chi_{\bar{e}}^c \\ \chi_e \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \chi_{\bar{e}}^c \equiv i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^*. \quad (2.167)$$

Το γεγονός ότι γενικά ο σπίνορας  $i\sigma_2\chi^*$  μετασχηματίζεται κάτω από τους LT σαν  $R$ -τύπου σπίνορας, (2.91), μας εγγυάται ότι και στην περίπτωσή μας, ο  $\chi_{\bar{e}}^c$  σπίνορας είναι όντως ένας  $\bar{\psi}^{\dot{a}}$ -τύπου σπίνορας. Σε όρους των συνιστωσών του  $\Psi^{(e)}$ , (2.167), ένας όρος μάζας φερμιονίου Dirac θα γράφεται:

$$\begin{aligned} m\bar{\Psi}^{(e)}\Psi^{(e)} &= m \begin{pmatrix} \chi_{\bar{e}}^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} \chi_{\bar{e}}^c \\ \chi_e \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} (i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^*)^\dagger & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^* \\ \chi_e \end{pmatrix} \\ &= m \begin{pmatrix} (i\sigma_2\chi_{\bar{e}})^T & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_e \\ i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^* \end{pmatrix} \\ &= m \left( (i\sigma_2\chi_{\bar{e}})^T \chi_e + \chi_e^\dagger (i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^*) \right) = m (\chi_{\bar{e}} \cdot \chi_e + \chi_e^{*T} i\sigma_2\chi_{\bar{e}}^*) \\ &= m (\chi_{\bar{e}} \cdot \chi_e + \bar{\chi}_{\bar{e}}^{\dot{a}T} i\sigma_2\bar{\chi}_{\bar{e}}^{\dot{a}}) = m (\chi_{\bar{e}} \cdot \chi_e + (-i\sigma_2\bar{\chi}_{\bar{e}}^{\dot{a}})^T \bar{\chi}_{\bar{e}}^{\dot{a}}) \\ &= m (\chi_{\bar{e}} \cdot \chi_e + \bar{\chi}_{\bar{e}}^e \bar{\chi}_{\bar{e}}^{\dot{a}}) = m (\chi_{\bar{e}} \cdot \chi_e + \bar{\chi}_e \cdot \bar{\chi}_{\bar{e}}). \end{aligned} \quad (2.168)$$

Επομένως, ο όρος μάζας Dirac έχει επαναδιατυπωθεί εξ' ολοκλήρου σε όρους δύο  $L$ -τύπου σπινόρων, έναν που σχετίζεται με την  $e$  κατάσταση και έναν με την  $\bar{e}$  κατάσταση.

## 2.2.5 Majorana σπίνορες

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δούμε τι μορφή παίρνουν τα παραπάνω αποτελέσματα αν θεωρήσουμε τους (4-συνιστωσών) σπίνορες Majorana.

Όπως υποδεικνύει η (2.101), ο  $\chi_\psi$  είναι ένας  $\chi$ -τύπου σπίνορας ο οποίος αποτελείται από τον σπίνορα  $\psi$ . Άρα, μπορεί κάλλιστα να καταλαμβάνει τη θέση του 2-συνιστωσών  $L$ -τύπου σπίνορα στον σπίνορα Dirac:

$$\Psi_M^\psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2\psi^* \end{pmatrix}. \quad (2.169)$$

Ο παραπάνω 4–συνιστωσών σπίνορας που κατασκευάσαμε θα πρέπει κάτω από τους LT να συμπεριφέρεται σαν ένα συνηθισμένο Dirac αντικείμενο χτισμένο από  $\psi$  και  $\chi$ . Παρ' όλα αυτά, ο  $\Psi_M^\psi$  έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας από έναν κλασικό σπίνορα Dirac αφού είναι πλήρως ορισμένος από το 2–συνιστωσών αντικείμενο  $\psi$ . Σε έναν σπίνορα Dirac  $\Psi$ , που περιέχει τους  $\psi, \chi$  σπίνορες, ο καθένας προσδιορίζεται από 4 πραγματικές ποσότητες, που σημαίνει ότι έχει 8 συνολικά βαθμούς ελευθερίας. Στον  $\Psi_M^\psi$ , αντίθετα, υπάρχουν 4 πραγματικές ποσότητες (άρα οι μισοί βαθμοί ελευθερίας), αυτές που περιέχονται στον 2–συνιστωσών (τονούμενο) σπίνορα  $\psi$ :

$$\Psi_M^\psi = \begin{pmatrix} \psi^{\dot{1}} \\ \psi^{\dot{2}} \\ -\psi^{\dot{2}*} \\ \psi^{\dot{1}*} \end{pmatrix}. \quad (2.170)$$

Αυτό που πραγματικά συμβαίνει φανερώνεται όταν θεωρήσουμε τη δράση του τελεστή συζυγίας φορτίου όπως τον ορίσαμε στην (2.164):

$$\Psi_{M,c}^\psi = C_0 \Psi_M^{\psi*} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^* \\ -i\sigma_2 \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2 \psi^* \end{pmatrix} = \Psi_M^\psi. \quad (2.171)$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι ο  $\Psi_M^\psi$  περιγράφει ένα σωματίδιο με σπιν  $\frac{1}{2}$  το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό συζυγίας φορτίου -η οποία μας πηγαινει από το σωματίδιο στο αντισωματίδιο και αντίστροφα- που σημαίνει ότι συμπίπτει με το αντισωματίδιό του. Ένα τέτοιο σωματίδιο ονομάζεται φερμιόνιο Majorana και το  $\Psi_M^\psi$  λέμε ότι είναι ένα Majorana σπινοριακό πεδίο.

Αυτή η αυτοσυζυγής ιδιότητα ως προς το φορτίο,  $\Psi_M^\psi$ , είναι προφανώς η φυσική ερμηνεία για τη διαφορά στους βαθμούς ελευθερίας συγκριτικά με την  $\Psi$ . Υπάρχουν τέσσερις φυσικά διακριτοί «τρόποι» σε ένα πεδίο Dirac, π.χ. οι  $e_L^-, e_R^-, e_L^+, e_R^+$ , ενώ σε ένα πεδίο Majorana υπάρχουν μόνο δύο (το αντισωματίδιο συμπίπτει με το σωματίδιο), π.χ. οι  $\nu_L, \nu_R$ , υποθέτοντας ότι τα νετρίνα είναι Majorana φερμιόνια.

Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε τον σπίνορα Majorana ο οποίος αποτελείται μόνο από το  $\chi$ :

$$\Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} \psi_\chi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.172)$$

ο οποίος επίσης είναι αναλλοίωτος κάτω από τη συζυγία φορτίου,  $\Psi_{M,c}^\chi = \Psi_M^\chi$ . Στην περίπτωση αυτή ο 4–συνιστωσών Majorana σπίνορας θα είναι:

$$\Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} \chi_2^* \\ -\chi_1^* \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.173)$$



Ένας φορμαλισμός που κάνει χρήση μόνο  $\chi$ -τύπου σπινόρων πρέπει να είναι ισοδύναμος με έναν που χρησιμοποιεί μόνο  $\Psi_M^\chi$  και παρομοίως για έναν που χρησιμοποιεί μόνο  $\psi$ -τύπου σπινόρες να είναι ισοδύναμος με έναν που χρησιμοποιεί μόνο  $\Psi_M^\psi$ . Σαν παράδειγμα, υπολογίζουμε την αναλλοίωτη ποσότητα  $\bar{\Psi}\Psi$  έτσι ώστε να κατασκευάζεται μόνο από  $\Psi_M^\chi$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^{\chi\dagger} \beta \Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= \left( (i\sigma_2 \chi)^T \quad \chi^\dagger \right) \begin{pmatrix} \chi \\ i\sigma_2 \chi^* \end{pmatrix} = (i\sigma_2 \chi)^T \chi + \chi^\dagger i\sigma_2 \chi^* \\
&= \chi^a \chi_a + \bar{\chi}^T (-i\sigma_2)^T \bar{\chi} = \chi^a \chi_a + (-i\sigma_2 \bar{\chi})^T \bar{\chi} \\
&= \chi^a \chi_a + \bar{\chi}^{\dot{a}} \bar{\chi}^{\dot{a}} = \chi \cdot \chi + \bar{\chi} \cdot \bar{\chi}.
\end{aligned} \tag{2.174}$$

Έχουμε λοιπόν μία πρώτη ισοδυναμία ανάμεσα σε διγραμμικές ποσότητες που περιλαμβάνουν σπινόρες Weyl και ένα διγραμμικό Majorana. Το αποτέλεσμα (2.174) αναπαριστά έναν πιθανό όρο μάζας σε μία λαγκρατζιανή ενός Majorana φερμιονίου. Γενικότερα, αν  $\xi$  είναι ένας  $L$ -τύπου σπινόρας, παίρνουμε:

$$\bar{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi = \xi \cdot \chi + \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}. \tag{2.175}$$

Παρομοίως, η αναλλοίωτη ποσότητα φτιαγμένη από το  $\Psi_M^\psi$  πρέπει να είναι:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_M^\psi \Psi_M^\psi &= \bar{\Psi}_M^{\psi\dagger} \beta \Psi_M^\psi = \begin{pmatrix} \psi^\dagger & -i\sigma_2 \psi^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\sigma_2 \psi^* \end{pmatrix} \\
&= \left( \psi^\dagger \quad -i\sigma_2 \psi^T \right) \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \psi^* \\ \psi \end{pmatrix} = \psi^\dagger (-i\sigma_2) \psi^* + (-i\sigma_2 \psi^T) \psi \\
&= (i\sigma_2 \bar{\psi}^*)^T \bar{\psi}^* + \bar{\psi}_a \bar{\psi}^{\dot{a}} = (i\sigma_2 \psi)^T \psi + \bar{\psi}_a \bar{\psi}^{\dot{a}} \\
&= \psi^a \psi_a + \bar{\psi}_a \bar{\psi}^{\dot{a}} = \psi \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \bar{\psi}.
\end{aligned} \tag{2.176}$$

Η έκφραση αυτή μπορεί επίσης να λειτουργήσει σαν όρος μάζας. Επίσης, γενικεύοντας, αν  $\eta$  είναι ένας  $R$ -τύπου σπινόρας, η (2.176) γίνεται:

$$\bar{\Psi}_M^\eta \Psi_M^\psi = \eta \cdot \psi + \bar{\eta} \cdot \bar{\psi}. \tag{2.177}$$

Παρατηρούμε ότι οι εκφράσεις (2.174), (2.176), θα μηδενίζονταν αν τα πεδία δεν ήταν αντιμετατιθέμενα. Ενδεικτικά, για την (2.174) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\chi \cdot \chi + \bar{\chi} \cdot \bar{\chi} &= \chi^a \chi_a + \bar{\chi}_a \bar{\chi}^{\dot{a}} = \chi^1 \chi_1 + \chi^2 \chi_2 + \bar{\chi}_1 \bar{\chi}^{\dot{1}} + \bar{\chi}_2 \bar{\chi}^{\dot{2}} \\
&= \epsilon^{12} \chi_2 \chi^1 + \epsilon^{21} \chi_1 \chi_2 + \epsilon_{1\dot{2}} \bar{\chi}^{\dot{2}} \bar{\chi}^{\dot{1}} + \epsilon_{2\dot{1}} \bar{\chi}^{\dot{1}} \bar{\chi}^{\dot{2}} \\
&= \chi_2 \chi_1 - \chi_1 \chi_2 - \bar{\chi}^{\dot{2}} \bar{\chi}^{\dot{1}} + \bar{\chi}^{\dot{1}} \bar{\chi}^{\dot{2}}
\end{aligned} \tag{2.178}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως η αντιμετάθεση των φερμιονικών πεδίων αποτρέπει το μηδενισμό της έκφρασης.

Συνεχίζοντας, ενδιαφέρον παρουσιάζει το Lorentz αναλλοίωτο γινόμενο δύο σπινόρων Majorana,  $\Psi_{1M}, \Psi_{2M}$ . Ας θεωρήσουμε λοιπόν:

$$\bar{\Psi}_{1M}\Psi_{2M} = \Psi_{1M}^\dagger\beta\Psi_{2M} \quad (2.179)$$

Από το γεγονός ότι το σωματίδιο είναι ταυτόσημο με το αντισωματίδιό του παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1M}^c &= C_0\Psi_{1M}^* = -i\gamma^2\Psi_{1M}^* \\ \Psi_{1M}^c &= \Psi_{1M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi_{1M} = -i\gamma^2\Psi_{1M}^* \Rightarrow \Psi_{1M}^\dagger \stackrel{\gamma^{2\dagger} = -\gamma^2}{=} \Psi_{1M}^T(-i\gamma^2) \quad (2.180)$$

Συνεπάγεται λοιπόν, ότι η (2.179) θα γίνει:

$$\Psi_{1M}^\dagger\beta\Psi_{2M} = \Psi_{1M}^T(-i\gamma^2)\beta\Psi_{2M} = \Psi_{1M}^T C\Psi_{2M} \quad (2.181)$$

Διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας συζυγίας φορτίου  $C$  που έχουμε ορίσει στην (2.164), λειτουργεί σαν μετρική στο σχηματισμό του εσωτερικού γινομένου δύο  $\Psi_M$  σπινόρων.

Πέρα από το βαθμωτό γινόμενο δύο Majorana σπινόρων, είναι επίσης σημαντικό να υπολογίσουμε τις εξής ποσότητες:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \Psi_M^\chi &= -\xi \cdot \chi + \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} \\ (\beta) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \Psi_M^\chi &= \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi - \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi = \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi - \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi \\ (\gamma) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \gamma^\mu \Psi_M^\chi &= \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi + \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi = \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi + \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \Psi_M^\chi &= \Psi_M^{\xi\dagger} \beta \gamma_5 \Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \xi^* & \xi \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 \xi^* & \xi \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ -\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \xi)^T & \xi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\chi \\ i\sigma_2 \chi^* \end{pmatrix} \\ &= -(i\sigma_2 \xi)^T \chi + \xi^\dagger (i\sigma_2 \chi^*) = -\xi \cdot \chi + (-i\sigma_2 \bar{\xi})^T \bar{\chi} = -\xi \chi + \bar{\xi} \bar{\chi} \quad \bullet \\ & \quad \quad \quad (2.182) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \Psi_M^\chi &= \Psi_M^{\xi\dagger} \beta \gamma^\mu \Psi_M^\chi = \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \xi^*)^\dagger & \xi^\dagger \end{pmatrix} (1, \boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} i\sigma_2 \xi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \xi)^T & \xi^\dagger \end{pmatrix} (1, \boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \xi)^T & \xi^\dagger \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \xi)^T & \xi^\dagger \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\boldsymbol{\sigma} \sigma_2 \chi^* \\ -\boldsymbol{\sigma} \chi \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ (i\sigma_2\xi)^T i\sigma_2\chi^* + \xi^\dagger\chi, (i\sigma_2\xi)^T i\sigma\sigma_2\chi^* + \xi^\dagger(-\sigma\chi) \right] \\
&= \left[ \xi^T(-i\sigma_2)i\sigma_2\chi^* + \xi^\dagger\chi, \xi^T(-i\sigma_2i\sigma\sigma_2)\chi^* + \xi^\dagger(-\sigma\chi) \right] \\
&= \left( \xi^T\chi^* + \xi^\dagger\chi, \xi^T\sigma_2\sigma\sigma_2\chi^* - \xi^\dagger\sigma\chi \right) \\
&\stackrel{\square}{=} \left( \xi^T\chi^* + \xi^\dagger\chi, \xi^T(-\sigma^T)\chi^* - \xi^\dagger\sigma\chi \right) \\
&= \left( \xi^T\chi^*, \xi^T(-\sigma^T)\chi^* \right) + \left( \xi^\dagger\chi - \xi^\dagger\sigma\chi \right) \\
&= \left( \xi^T\chi^*, \xi^T(-\sigma^T)\chi^* \right) + \xi^\dagger(1, -\sigma)\chi \\
&\stackrel{\triangle}{=} \left( -\chi^\dagger\xi, \xi^T(-\sigma^T)\chi^* \right) + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi = - \left( \chi^\dagger\xi, \xi^T\sigma^T\chi^{\dagger T} \right) + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi \\
&= - \left( \chi^\dagger\xi, (\chi^\dagger\sigma\xi)^T \right) + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi \stackrel{\triangle}{=} - \left( \chi^\dagger\xi, -\chi^\dagger\sigma\xi \right) + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi \\
&= -\chi^\dagger(1, -\sigma)\xi + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi = -\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi \quad \bullet \\
&= -\chi_a^\dagger\bar{\sigma}^{\mu ab}\xi_b + \xi_a^\dagger\bar{\sigma}^{\mu ab}\chi_b = -\chi_a^{*T}\bar{\sigma}^{\mu ab}\xi_b + \xi_a^{*T}\bar{\sigma}^{\mu ab}\chi_b \\
&= -\bar{\chi}_a^T\bar{\sigma}^{\mu ab}\xi_b + \bar{\xi}_a^T\bar{\sigma}^{\mu ab}\chi_b = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\xi + \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\chi \quad \bullet
\end{aligned} \tag{2.183}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma) \quad \bar{\Psi}_M^\xi\gamma_5\gamma^\mu\Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^{\xi^\dagger}\beta\gamma_5\beta(1, \alpha)\Psi_M^\chi = -\bar{\Psi}_M^{\xi^\dagger}\beta\overset{1}{\gamma_5}(1, \alpha)\Psi_M^\chi = -\bar{\Psi}_M^{\xi^\dagger}\gamma_5(1, \alpha)\Psi_M^\chi \\
&= - \left( (i\sigma_2\xi^*)^\dagger \quad \xi^\dagger \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (1, \alpha) \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= \left( (i\sigma_2\xi)^T \quad \xi^\dagger \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= \left( (i\sigma_2\xi)^T \quad \xi^\dagger \right) \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \\
&= \left( (i\sigma_2\xi)^T \quad \xi^\dagger \right) \left( \begin{pmatrix} -i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\sigma\sigma_2\chi^* \\ -\sigma\chi \end{pmatrix} \right) \\
&= \left( \xi^T(-i\sigma_2)(-i\sigma_2)\chi^* + \xi^\dagger\chi, \xi^T(-i\sigma_2)(-i\sigma)\sigma_2\chi^* + \xi^\dagger(-\sigma)\chi \right) \\
&= \left( -\xi^T\chi^* + \xi^\dagger\chi, -\xi^T\sigma_2\sigma\sigma_2\chi^* - \xi^\dagger\sigma\chi \right) \\
&\stackrel{\triangle}{=} \left( \chi^\dagger\xi + \xi^\dagger\chi, \xi^T\sigma^T\chi^{\dagger T} - \xi^\dagger\sigma\chi \right) = \left( \chi^\dagger\xi, -\chi^\dagger\sigma\xi \right) + \left( \xi^\dagger\chi, -\xi^\dagger\sigma\chi \right) \\
&= \chi^\dagger(1, -\sigma)\xi + \xi^\dagger(1, -\sigma)\chi = \chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi + \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi \\
&= \chi_a^{*T}\bar{\sigma}^{\mu ab}\xi_b + \xi_a^{*T}\bar{\sigma}^{\mu ab}\chi_b = \bar{\chi}_a^T\bar{\sigma}^{\mu ab}\xi_b + \bar{\xi}_a^T\bar{\sigma}^{\mu ab}\chi_b \\
&= \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\xi + \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\chi \quad \bullet
\end{aligned} \tag{2.184}$$

όπου τα σύμβολα που σημειώνονται στους παραπάνω υπολογισμούς:

•: είναι τα ζητούμενα αποτελέσματα

□: έγινε χρήση της ισότητας  $\sigma_2\sigma\sigma_2 = -\sigma^T$

Δ: εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι η ποσότητα  $\xi^T \chi^*$  είναι αντικείμενο βαθμωτό (μίας συνιστώσας) και άρα ισούται με το ανάστροφό του με τίμημα ένα αρνητικό πρόσημο λόγω αντιμετάθεσης φερμιονικών πεδίων.

Προφανώς, ανάλογα αποτελέσματα παίρνουμε για γινόμενα που χτίζονται από  $\psi$ -τύπου σπίνορες Majorana. Επιπλέον, πέρα από τα παραπάνω γινόμενα που υπολογίσαμε, αποδεικνύουμε τις εξής σχέσεις:

$$(\delta) \quad \xi \cdot \chi = \bar{\Psi}_M^\xi P_L \Psi_M^\chi$$

$$(\epsilon) \quad \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} = \bar{\Psi}_M^\xi P_R \Psi_M^\chi$$

$$(\sigma\tau) \quad \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi = \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu P_L \Psi_M^\chi$$

$$(\zeta) \quad \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi = -\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu P_R \Psi_M^\chi$$

Αποδεικνύουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} (\delta) \quad \bar{\Psi}_M^\xi P_L \Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^{\xi\dagger} \beta \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi_M^\chi = \frac{\bar{\Psi}_M^{\xi\dagger} \Psi_M^\chi}{2} - \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\xi \cdot \chi}{2} + \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}}{2} - \left( -\frac{\xi \cdot \chi}{2} + \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}}{2} \right) = \xi \cdot \chi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\epsilon) \quad \bar{\Psi}_M^\xi P_R \Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^\xi \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi_M^\chi = \frac{\bar{\Psi}_M^{\xi\dagger} \Psi_M^\chi}{2} + \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\xi \cdot \chi}{2} + \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}}{2} - \frac{\xi \cdot \chi}{2} + \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}}{2} = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\tau) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu P_L \Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi_M^\chi = \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \Psi_M^\chi}{2} - \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} - \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} + \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \gamma^\mu \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} - \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} + \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} + \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} = \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta) \quad \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu P_R \Psi_M^\chi &= \bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi_M^\chi = \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \Psi_M^\chi}{2} + \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} - \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} - \frac{\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \gamma^\mu \Psi_M^\chi}{2} \\ &= \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} - \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} - \frac{\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi}{2} - \frac{\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi}{2} = -\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi. \end{aligned}$$

Η (ζ) σχέση που αποδείξαμε ακριβώς παραπάνω, μέσω της (2.146),  $\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi = -\chi \bar{\sigma}^\mu \bar{\xi}$ , που έχουμε αποδείξει νωρίτερα, μπορεί να γίνει:

$$\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu P_R \Psi_M^\chi = -\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \xi = \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi \quad (2.185)$$

Από τη σχέση (β) που αποδείξαμε παραπάνω, μας επιτρέπεται να συσχετίσουμε κινητικούς όρους στους Weyl και Majorana φορμαλισμούς. Ξεκινώντας με τη μορφή Majorana, παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\int d^4x \bar{\Psi}_M^\chi \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi &= \int d^4x \left( \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi \right) \\
&= \int d^4x \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - \int d^4x \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi + \int d^4x \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \\
&= 2 \int d^4x \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi, \tag{2.186}
\end{aligned}$$

όπου μετά το βήμα της παραγοντικής ολοκλήρωσης διώξαμε τον επιφανειακό όρο. Επομένως, σε μία λαγκρατζιανή, ένας κινητικός όρος Weyl  $\chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$  αντιστοιχεί στη μορφή Majorana  $\frac{1}{2} \bar{\Psi}_M^\chi i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi$ .

Έχουμε πλέον συζητήσει τόσο για κινητικό όρο και για όρο μάζας για τα πεδία Majorana. Πώς όμως αυτά σχετίζονται με τους αντίστοιχους όρους για πεδία Dirac που έχουμε βρει στην (2.87); Στην περίπτωση των πεδίων Dirac ο όρος μάζας μπλέκει τα  $R$ -τύπου με τα  $L$ -τύπου πεδία, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί αποκλειστικά από ένα από τα δύο πεδία. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να τον αναπαραστήσουμε σε όρους μόνο ενός πεδίου Majorana, αλλά χρειαζόμαστε δύο, έναν για τους  $\chi$  βαθμούς ελευθερίας και έναν για τους  $\psi$ . Το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για τον κινητικό όρο. Αν λοιπόν θέλουμε να εκφράσουμε τον κινητικό όρο και τον όρο μάζας ενός Dirac ηλεκτρονιακού πεδίου σε όρους Majorana πεδίων, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο από τα Majorana πεδία :

$$\begin{aligned}
\Psi_M^{\psi_e} &= \begin{pmatrix} \psi_e \\ -i\sigma_2 \psi_e^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e^c \\ \psi_e^c \end{pmatrix}, \\
\Psi_M^{\chi_e} &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi_e^* \\ \chi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_e^c \\ \chi_e \end{pmatrix}. \tag{2.187}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το  $L$ -κομμάτι της  $\Psi_M^{\psi_e}$  αποτελείται από το charge conjugate του  $R$ -πεδίου της  $\Psi_e^c$ , ενώ αντίστοιχα, το  $R$ -κομμάτι της  $\Psi_M^{\chi_e}$  αποτελείται από το charge conjugate του  $L$ -πεδίου  $\chi_e^c$ . Προφανώς, ο ηλεκτρονιακός σπινόρας Dirac θα δίνεται από τη σχέση :

$$\Psi^e = P_R \Psi_M^{\psi_e} + P_L \Psi_M^{\chi_e}. \tag{2.188}$$

Επιστρέφουμε να αποδείξουμε τα ζητούμενα :

(η) Όρος μάζας Dirac σε όρους Majorana σπινόρων :

$$\bar{\Psi}^e \Psi^e = \bar{\Psi}^{e\dagger} \beta \Psi^e = \frac{1}{2} \left[ \bar{\Psi}_M^{\psi_e} \Psi_M^{\chi_e} + \bar{\Psi}_M^{\chi_e} \Psi_M^{\psi_e} \right]$$

(θ) Κινητικός όρος Dirac σε όρους Majorana σπινόρων :

$$\bar{\Psi}^e \not{\partial} \Psi^e = \frac{1}{2} \left[ \bar{\Psi}_M^{\psi_e} \not{\partial} \psi_M^{\psi_e} + \bar{\Psi}_M^{\chi_e} \not{\partial} \Psi_M^{\chi_e} \right],$$

τα οποία και αποδεικνύουμε δουλεύοντας και τα δύο μέλη ταυτόχρονα, καταλήγοντας στην ίδια έκφραση :

(η) Δουλεύουμε με το αριστερό μέλος :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^e \Psi^e &= \bar{\Psi}^{e\dagger} \beta \Psi^e = \left( \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \right) \beta \left( P_R \Psi_M^{\psi_e} + P_L \Psi_M^{\chi_e} \right) \\ &= \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \beta P_R \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \beta P_L \Psi_M^{\chi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \beta P_R \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \beta P_L \Psi_M^{\chi_e} \\ &= \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \beta P_L \Psi_M^{\chi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \beta P_R \Psi_M^{\psi_e} = \Psi_M^{\psi_e\dagger} \beta P_L^2 \Psi_M^{\chi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} \beta P_R^2 \Psi_M^{\psi_e} \\ &= \Psi_M^{\psi_e\dagger} \beta P_L \Psi_M^{\chi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} \beta P_R \Psi_M^{\psi_e} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_e \end{pmatrix} = \psi_e^\dagger \chi_e + \chi_e^\dagger \psi_e \end{aligned} \tag{2.189}$$

και τώρα με το δεξί :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \bar{\Psi}_M^{\psi_e} \Psi_M^{\chi_e} + \bar{\Psi}_M^{\chi_e} \Psi_M^{\psi_e} \right] &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} \chi_e^c \\ \chi_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \beta \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_e^c \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_e \\ \chi_e^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e^c \\ \psi_e \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \psi_e^\dagger \chi_e + \psi_e^{c\dagger} \chi_e^c + \chi_e^{c\dagger} \psi_e^c + \chi_e^\dagger \psi_e \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \psi_e^\dagger \chi_e + \chi_e^\dagger \psi_e + (-i\sigma_2 \psi_e^*)^\dagger i\sigma_2 \chi_e^* + (i\sigma_2 \chi_e^*)^\dagger (-i\sigma_2 \psi_e^*) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \psi_e^\dagger \chi_e + \chi_e^\dagger \psi_e + (-\psi_e^T \chi_e^*) + (-\chi_e^T \psi_e^*) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \psi_e^\dagger \chi_e + \chi_e^\dagger \psi_e + \chi_e^\dagger \psi_e + \psi_e^\dagger \chi_e \right) = \psi_e^\dagger \chi_e + \chi_e^\dagger \psi_e. \end{aligned} \tag{2.190}$$

Από (2.189) και (2.190) παίρνουμε την αποδεικτέα (η).

(θ) Δουλεύουμε πάλι πρώτα με το αριστερό μέλος:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}^e \not{\partial} \Psi^e &= \bar{\Psi}^{e\dagger} \beta \not{\partial} \Psi^e = \left( \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \right) \beta \not{\partial} \left( P_R \Psi_M^{\psi_e} + P_L \Psi_M^{\chi_e} \right) \\
&= \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \beta \not{\partial} P_R \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \beta \not{\partial} P_L \Psi_M^{\chi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \beta \not{\partial} P_R \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \beta \not{\partial} P_L \Psi_M^{\chi_e} \\
&= \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R^2 \beta \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L^2 \beta \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^{\chi_e} \\
&= \Psi_M^{\psi_e\dagger} P_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not{\partial} \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} P_L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not{\partial} \Psi_M^{\chi_e} \\
&= \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \not{\partial} \psi_e \\ \not{\partial} \psi_e^c \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \not{\partial} \chi_e^c \\ \not{\partial} \chi_e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \not{\partial} \psi_e^c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \not{\partial} \chi_e^c \end{pmatrix} \\
&= \psi_e^\dagger \not{\partial} \psi_e^c + \chi_e^\dagger \not{\partial} \chi_e^c
\end{aligned} \tag{2.191}$$

και τώρα δουλεύουμε με το δεξιό μέλος:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[ \bar{\Psi}_M^{\psi_e} \not{\partial} \psi_M^{\psi_e} + \bar{\Psi}_M^{\chi_e} \not{\partial} \psi_M^{\chi_e} \right] &= \frac{1}{2} \left( \Psi_M^{\psi_e\dagger} \beta \Psi_M^{\psi_e} + \Psi_M^{\chi_e\dagger} \beta \Psi_M^{\chi_e} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \psi_e^\dagger & \psi_e^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \not{\partial} \\ \not{\partial} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_e^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^{c\dagger} & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \not{\partial} \\ \not{\partial} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_e^c \\ \chi_e \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} \psi_e^{c\dagger} & \not{\partial} & \psi_e^\dagger & \not{\partial} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_e^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_e^\dagger & \not{\partial} & \psi_e^{c\dagger} & \not{\partial} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_e^c \\ \chi_e \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \psi_e^{c\dagger} \not{\partial} \psi_e + \psi_e^\dagger \not{\partial} \psi_e^c + \chi_e^\dagger \not{\partial} \chi_e^c + \chi_e^{c\dagger} \not{\partial} \chi_e \right) \\
&= \psi_e^\dagger \not{\partial} \psi_e^c + \chi_e^\dagger \not{\partial} \chi_e^c,
\end{aligned} \tag{2.192}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι δύο πρώτοι όροι και οι δύο τελευταίοι είναι ίσοι. Συνεπώς, καταλήξαμε να πάρουμε την αποδεικτέα (θ).

Είδαμε λοιπόν πολλές διγραμμικές ποσότητες οι οποίες εμπλέκουν τους σπίνορες Majorana. Αυτές θα φανούν αρκετά χρήσιμες στους υπολογισμούς που θα γίνουν αργότερα στο πλαίσιο του MSSM.

### 2.2.6 Κβάντωση των πεδίων Majorana.

Προς το παρόν δεν είχε χρειαστεί να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο κβαντώνεται ένα πεδίο Majorana, όμως αργότερα θα το χρειαστούμε για να κατανοήσουμε, για παράδειγμα, τη μορφή των διαδοτών για ελεύθερα σωματίδιο Majorana.

Θεωρούμε αρχικά τους συνήθεις σπίνορες 4–συνιστωσών  $\Psi_a(\mathbf{x}, t)$ . Η κβάντωσή τους (για ίδιο χρόνο) δίνεται από τις αντιμεταθετικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_a(\mathbf{x}, t), \Psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t) \right\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab}, \\ \left\{ \Psi_a(\mathbf{x}, t), \Psi_b(\mathbf{y}, t) \right\} &= \left\{ \Psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \Psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Όπως έχουμε δει στην (2.161), το πεδίο  $\Psi$  αναπτύσσεται σε όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, με αποτέλεσμα οι παραπάνω αντιμεταθετικές σχέσεις να ικανοποιούνται αν ισχύει:

$$\begin{aligned} \left\{ c_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), c_{\lambda_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \right\} &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta_{\lambda_1 \lambda_2}, \\ \left\{ c_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1), c_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) \right\} &= \left\{ c_{\lambda_1}^\dagger(\mathbf{k}_1), c_{\lambda_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.194)$$

και αντίστοιχα για τα  $d, d^\dagger$ .

Από την έκφραση (2.162), έχουμε δει ότι το πεδίο Majorana θα αναπτύσσεται ως εξής:

$$\Psi_M(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E}} \sum_{\lambda} c_{\lambda}(k)^\dagger v(k, \lambda) e^{ikx} + d_{\lambda}(k) u(k, \lambda) e^{-ikx}, \quad (2.195)$$

το οποίο φυσικά ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\Psi_{M,c} = C \bar{\Psi}_M^T = \psi_M. \quad (2.196)$$

Τώρα πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει με το διαδότη. Γενικά<sup>8</sup>, στην κβαντική θεωρία πεδίου, όλοι οι διαδότες είναι της μορφής: αναμενόμενη τιμή του κενού του χρονολογικού γινομένου δύο πεδίων (αυτός είναι κιόλας ο ορισμός της σύναψης (contraction)). Για ένα πραγματικό πεδίο λοιπόν ο διαδότης είναι  $\langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle$  ενώ για ένα σπινωριακό πεδίο Dirac θα είναι  $\langle 0|T[\Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2)]|0\rangle$ . Χρονολογικό γινόμενο (time-ordered product) δύο τελεστών ορίζεται το γινόμενο τους με τέτοια σειρά που ο τελεστής που έχει το μεγαλύτερο χρόνο να βρίσκεται στην άκρη αριστερά, ο τελεστής με τον αμέσως μικρότερο χρόνο να βρίσκεται δεξιά του κ.ο.κ. με τελευταίο δεξιά τον τελεστή με το μικρότερο χρόνο<sup>9</sup>. Θα δώσουμε δύο παραδείγματα, ένα για βαθμωτά πεδία και ένα για φερμιονικά πεδία:

- Για βαθμωτά πεδία, αν  $t_1 > t_2 > t_3$ :

$$T[\phi(t_3)\phi(t_1)\phi(t_2)] = \phi(t_1)\phi(t_2)\phi(t_3) \quad (2.197)$$

<sup>8</sup>Θα αναλύσουμε παρακάτω με περισσότερη λεπτομέρεια.

<sup>9</sup>Κουτσούμπας Γ.: Σημειώσεις θεωρητικής φυσικής, 2012, σελ.29



- Για φερμιονικά πεδία :

$$T [\Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(x')] = \begin{cases} \Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(x'), & t > t' \\ -\bar{\Psi}_b(x')\Psi_a(x), & t < t' \end{cases} \quad (2.198)$$

Στην περίπτωση των φερμιονίων παρατηρούμε την εμφάνιση ενός αρνητικού προσήμου, γεγονός που οφείλεται στη φερμιονική φύση των πεδίων (αντιμεταθετικότητα).

Πριν περάσουμε στην εύρεση του διαδότη ενός Majorana πεδίου, θα δούμε αναλυτικά την εύρεση του διαδότη πραγματικού (κι έπειτα μιγαδικού) βαθμωτού πεδίου, αλλά και σπινωριακού πεδίου Dirac κι επίσης θα δούμε πως αναδύεται η ανάγκη για τον ορισμό του χρονολογικού γινομένου.

### Διαδότες πεδίων

Καταρχήν ως διαδότης ορίζεται το πλάτος μετάβασης από ένα χωροχρονικό σημείο σε ένα άλλο.

Ας θεωρήσουμε αρχικά το πλάτος μετάβασης ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου  $\phi(x)$  από το σημείο  $x' \equiv (t', \mathbf{x}')$  στο σημείο  $x \equiv (t, \mathbf{x})$ , όπου  $t < t'$ .

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x'$  είναι:

$$\langle 0|\phi(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip'x'} \langle 0|\alpha(p') \quad (2.199)$$

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x$  είναι:

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ipx} \alpha^\dagger(p)|0\rangle \quad (2.200)$$

Αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε είναι το πλάτος μετάβασης από το ένα σημείο στο άλλο, δηλαδή, την προβολή της μίας κυματοσυνάρτησης πάνω στην άλλη, με άλλα λόγια, το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ipx} e^{-ip'x'} \langle 0|\alpha(p')\alpha^\dagger(p)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ipx} e^{-ip'x'} \left( \langle 0|\alpha^\dagger(p)\alpha(p')|0\rangle + \delta^{(3)}(p' - p) \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x'-x)}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Στην περίπτωση αυτή όπου  $t < t'$ , το γινόμενο  $\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$  σημαίνει ότι ο τελεστής  $\phi(x)$  δρα πρώτος στο κενό, δημιουργεί ένα σωματίδιο στη θέση  $x$  και στη συνέχεια δρα ο τελεστής  $\phi'(x')$  και καταστρέφει το σωματίδιο αυτό μόλις φτάσει στο σημείο  $x'$ .

Παρομοίως, για  $t > t'$ :

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x$  είναι:

$$\langle 0|\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{-ipx} \langle 0|\alpha(p) \quad (2.202)$$

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x'$  είναι:

$$\phi(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{ip'x'} \alpha^\dagger(p')|0\rangle \quad (2.203)$$

Άρα το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι:

$$\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-x')}, \quad (2.204)$$

όπου στην περίπτωση αυτή το  $\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$  ερμηνεύεται σαν το αντίστροφο από το προηγούμενο γινόμενο.

Το ενδιαφέρον μας είναι στραμμένο στο πλάτος μετάβασης μεταξύ δύο σημείων σε χρόνο  $|t' - t|$ , ανεξάρτητα από το ποια στιγμή προηγείται. Το μέγεθος αυτό είναι ο διαδότης Feynman, που ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$i\Delta_F(x - x') \equiv \Theta(t' - t)\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle + \Theta(t - t')\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle, \quad (2.205)$$

το οποίο με τη βοήθεια του χρονολογικού γινομένου μπορεί να γραφτεί σαν:

$$i\Delta_F(x - x') = \langle 0|T [\phi(x)\phi(x')] |0\rangle. \quad (2.206)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στην (2.205), τις αναμενόμενες τιμές του κενού που έχουμε βρει παραπάνω:

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x - x') &= \Theta(t' - t) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip(x-x')} + \Theta(t - t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-x')} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t' - t) e^{iE_p(t-t') + i\mathbf{p}(x-x')} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \Theta(t - t') e^{-iE_p(t-t') + i\mathbf{p}(x-x')} \end{aligned} \quad (2.207)$$

στο πρώτο ολοκλήρωμα, λόγω του ότι η  $p$  είναι βουθή μεταβλητή, την αλλάξαμε από  $p$  σε  $-p$ . Άρα:

$$i\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\mathbf{p}(x-x')} \left[ \Theta(t' - t) e^{iE_p(t-t')} + \Theta(t - t') e^{-iE_p(t-t')} \right]. \quad (2.208)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της βηματικής συνάρτησης<sup>10</sup>  $\Theta(\tau)$ :

$$\Theta(\tau) = i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{-i\rho\tau}}{\rho + i\epsilon} \quad (2.209)$$

<sup>10</sup>Η απόδειξή της υπάρχει στο: Gauge theories in particle physics vol.1, appendix F των Aitchison and Hey.

αντικαθιστώντας την στην τελευταία έκφραση του διαδότη. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x-x') &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\mathbf{p}(x-x')} \left[ -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t-t')}}{-p'_0 - i\epsilon} e^{iE_p(t-t')} \right. \\
&\quad \left. + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-ip'_0(t-t')}}{p'_0 + i\epsilon} e^{iE_p(t-t')} \right] \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{i\mathbf{p}(x-x')} \left[ -i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-i(-p'_0 - E_p)(t-t')}}{-p'_0 - i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{-i(p'_0 + E_p)(t-t')}}{p'_0 + i\epsilon} \right]. \tag{2.210}
\end{aligned}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

- Στον πρώτο όρο:  $-p_0 - E_p = p_0$
- Στον δεύτερο όρο:  $p'_0 + E_p = p_0$ .

οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x-x') &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t-t') + i\mathbf{p}(x-x')} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2E_p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{i}{p_0 + E_p - i\epsilon} + \frac{i}{p_0 - E_p + i\epsilon} \right]. \tag{2.211}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε αναπαράγει την 4-διάστατη εκδοχή του μετασχηματισμού Fourier:

$$\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \tilde{\Delta}_F(p), \tag{2.212}$$

με

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_F(p) &= \frac{1}{2E_p} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{p_0 - (E_p - i\epsilon)} - \frac{1}{p_0 + (E_p - i\epsilon)} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p_0^2 - (E_p - i\epsilon)^2} \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i(2\epsilon E_p)} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.213}
\end{aligned}$$

Δρώντας με τον τελεστή Klein-Gordon πάνω στο διαδότη που υπολογίσαμε παίρνουμε τη συνάρτηση  $\delta(x)$ . Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι ο διαδότης του Feynman είναι μία συνάρτηση Green για τον τελεστή Klein-Gordon.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε το διαδότη Feynman ενός μιγαδικού (φορτισμένου) βαθμωτού πεδίου. Θεωρούμε λοιπόν:

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x$  είναι :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \left[ a(p)e^{-ipx} + b^\dagger(p)e^{ipx} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \langle 0|\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{-ipx} \langle 0|\alpha(p) \\ \phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} e^{ipx} b^\dagger(p)|0\rangle \end{cases} \end{aligned} \quad (2.214)$$

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x'$  είναι :

$$\begin{aligned}\phi^\dagger(x') &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \left[ a^\dagger(p')e^{ip'x'} + b(p')e^{-ip'x'} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \langle 0|\phi^\dagger(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{-ip'x'} \langle 0|\beta(p') \\ \phi^\dagger(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} e^{ip'x'} a^\dagger(p')|0\rangle \end{cases} \end{aligned} \quad (2.215)$$

Όπως είδαμε στην (2.206), ο διαδότης δίνεται υπολογίζοντας το χρονολογικό γινόμενο :

$$\langle 0|T \left[ \phi(x)\phi^\dagger(x') \right] |0\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-x')}, & t > t' \\ \langle 0|\phi^\dagger(x')\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{+ip(x-x')}, & t < t' \end{cases} \quad (2.216)$$

Διαπιστώνουμε ότι η έκφραση που θα μας οδηγήσει στον υπολογισμό του διαδότη είναι :

$$\Theta(t-t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-x')} + \Theta(t'-t) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip(x-x')} = i\Delta_F(x-x'). \quad (2.217)$$

Συγκρίνοντας απλά με το διαδότη του πραγματικού βαθμωτού πεδίου που υπολογίσαμε νωρίτερα, (2.207), συμπεραίνουμε ότι έχουν την ίδια μορφή, που σημαίνει ότι ο διαδότης στην περίπτωση του μιγαδικού βαθμωτού πεδίου είναι ο ίδιος με αυτόν του πραγματικού. Η ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε στον διαδότη αυτόν είναι η εξής: Για τον πρώτο όρο, όταν  $t > t'$ , το πεδίο δρα με τον τελεστή  $a^\dagger$  στην κατάσταση του κενού και δημιουργεί σωματίδια στη θέση  $x'$ , το οποίο διαδίδεται μέχρι το σημείο  $x$ , όπου το πεδίο δρα με τον τελεστή  $a$  και το καταστρέφει. Δηλαδή, για  $t > t'$ , διαδίδονται σωματίδια από το  $x'$  στο  $x$ . Όταν  $t < t'$ , το πεδίο δημιουργεί σωματίδια με τον  $b^\dagger$  στο σημείο  $x$  κι έπειτα διαδίδεται μέχρι το σημείο  $x'$ , όπου το πεδίο το καταστρέφει με τον τελεστή  $b$ . Με άλλα λόγια, όταν  $t < t'$ , διαδίδονται αντισωματίδια από το  $x$  μέχρι το  $x'$ .

Εντελώς αντίστοιχα, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε την έκφραση του φερμιονικού διαδότη  $S_F$ . Αρχικά, πρέπει να δώσουμε τις κυματοσυναρτήσεις στα δύο χωροχρονικά σημεία  $x, x'$ :

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x$  είναι:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_{s=1,2} \left[ a_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \langle 0 | \psi_a(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_a u_a(\mathbf{p}) e^{-ipx} \langle 0 | \alpha_a(\mathbf{p}) \\ \psi(x) | 0 \rangle(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \sum_a v_a(\mathbf{p}) e^{ipx} b_a^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \end{cases} \end{aligned} \quad (2.218)$$

- Η κυματοσυνάρτηση στο σημείο  $x'$  είναι:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x') &= \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \left[ a_s^\dagger(\mathbf{p}') \bar{u}_s(\mathbf{p}') e^{ip'x'} + b_s(\mathbf{p}') \bar{v}(\mathbf{p}') e^{-ip'x'} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}_b(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \sum_b \bar{u}_b(\mathbf{p}') e^{ip'x'} a_b^\dagger(\mathbf{p}') | 0 \rangle \\ \langle 0 | \bar{\psi}_b(x') = \int \frac{d^3p'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p'}}} \sum_b \bar{v}_b(\mathbf{p}') e^{-ip'x'} \langle 0 | b_b(\mathbf{p}') \end{cases} \end{aligned} \quad (2.219)$$

Κατά τα γνωστά λοιπόν, για να υπολογίσουμε το φερμιονικό διαδότη, ο οποίος ισούται με:

$$iS_{Fab}(x-x') = \langle 0 | T [\psi_a(x) \bar{\psi}_b(x')] | 0 \rangle, \quad (2.220)$$

πρέπει να υπολογίσουμε το παραπάνω χρονολογικό γιγμόμενο:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\psi_a(x) \bar{\psi}_b(x')] | 0 \rangle &\Rightarrow \begin{cases} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_a u_a \bar{u}_a e^{-ip(x-x')}, & t > t' \\ -\langle 0 | \bar{\psi}_b(x') \psi_a(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_a v_a \bar{v}_a e^{+ip(x-x')}, & t < t' \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \langle 0 | \psi_a(x) \bar{\psi}_b(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (\not{p} + m) e^{-ip(x-x')}, & t > t' \\ -\langle 0 | \bar{\psi}_b(x') \psi_a(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} (\not{p} - m) e^{+ip(x-x')}, & t < t' \end{cases} \end{aligned} \quad (2.221)$$

όπου, στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις πληρότητας των σπινόρων:

$$\sum_s u_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) = \not{p} + m, \quad \sum_s v_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) = \not{p} - m. \quad (2.222)$$

Από την (2.221), προκύπτει ότι ο φερμιονικός διαδότης θα βρίσκεται από τη σχέση:

$$iS_F(x-x') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[ \Theta(t-t')(\not{p} + m)e^{-ip(x-x')} - \Theta(t'-t)(\not{p} - m)e^{ip(x-x')} \right]. \quad (2.223)$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου, δουλεύοντας με τη  $\Theta$ -συνάρτηση, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$iS_F(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} i\tilde{S}(p), \quad (2.224)$$

με

$$i\tilde{S}(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (2.225)$$

Και στην περίπτωση αυτή, δρώντας με τον τελεστή Dirac πάνω στο διαδότη που υπολογίσαμε μας δίνει τη συνάρτηση  $\delta(x)$ . Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι ο διαδότης του Feynman είναι μία συνάρτηση Green για τον τελεστή Dirac.

Κλείνοντας, σε αντιστοιχία με το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, ο διαδότης  $S_F(x-x')$  παριστάνει είτε σωματίδιο που διαδίδεται κατά την ορθή φορά του χρόνου, είτε αντισωματίδιο που διαδίδεται κατά την αντίστροφη φορά.

Συνεχίζουμε τώρα στην εύρεση του διαδότη ενός Majorana πεδίου. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερη, καθώς κατά κάποιον τρόπο είναι σαν την περίπτωση του πεδίου Dirac λόγω του σπινοριακού του χαρακτήρα, αλλά κατά έναν άλλο τρόπο είναι σαν την περίπτωση του πραγματικού βαθμωτού πεδίου, αφού δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε σωματίδιο και αντισωματίδιο. Συνέπεια αυτού είναι ότι για Majorana πεδία, παίρνουμε τελικά τρία είδη μη εξαφανιζομένων συνάψεων:

1.  $\langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle$
2.  $\langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\Psi_{Mb}(x_2)] |0\rangle$
3.  $\langle 0|T [\bar{\Psi}_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle$

με την πρώτη να είναι τύπου Dirac και τις δύο επόμενες να είναι τύπου βαθμωτού πεδίου. Συνεπώς, ο πρώτος διαδότης ja είναι αυτός που υπολογίσουμε για τα Dirac φερμιόνια, (2.220):

$$\langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle = S_{Fab}(x_1 - x_2), \quad (2.226)$$

όπου όπως έχουμε δει, (2.224),  $S_F(x_1 - x_2)$  είναι η συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δίνει την (2.225).

Ας θεωρήσουμε τώρα τη δεύτερη σύναψη,  $\langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\Psi_{Mb}(x_2)] |0\rangle$ . Από τη συνθήκη (2.196), έχουμε:

$$\begin{aligned}\Psi_M(x_2) &= C\Psi_M^T = C\beta\Psi_M^{\dagger T}(x_2) \Rightarrow \\ \Psi_{Mb}(x_2) &= C_{bc}\beta_{cd}\Psi_{Md}^{\dagger}(x_2) \\ &= \Psi_{Md}^{\dagger}(x_2)\beta_{dc}C_{cb}^T \\ &= \bar{\Psi}_{Mc}(x_2)C_{cb}^T.\end{aligned}\quad (2.227)$$

Επομένως, παίρνουμε για το δεύτερο διαδότη:

$$\begin{aligned}\langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\Psi_{Mb}(x_2)] |0\rangle &= \langle 0|T [\Psi_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mc}(x_2)] |0\rangle C_{cb}^T \\ &= S_{Fac}(x_1 - x_2)C_{cb}^T.\end{aligned}\quad (2.228)$$

Καταφέραμε λοιπόν να γράψουμε τον πρώτο βαθμωτού-τύπου διαδότη συναρτήσεως του Dirac-τύπου. Το ίδιο θα κάνουμε και για τον δεύτερο βαθμωτού-τύπου.

Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι

$$(i) \quad C^T = -C = C^{-1}, \quad C = -i\gamma^2\beta,$$

$$(ii) \quad \bar{\Psi}_M = \Psi_M^T C, \quad C = -i\gamma^2\beta.$$

Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:

(i)

$$\begin{aligned}C^T &= (-i\gamma^2\beta)^T = -i\beta\gamma^{2T} = -i\beta\gamma^2 = i\gamma^2\beta \\ C^{-1} &= (-i\gamma^2\beta)^{-1} = \left[ -i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= i\beta^{-1}(\gamma^2)^{-1} = i\beta(-\gamma^2) = -i\beta\gamma^2 = i\gamma^2\beta.\end{aligned}\quad (2.229)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\Psi_{M,c} = \Psi_M &= C\bar{\Psi}_M^T \Rightarrow C\bar{\Psi}_M^T = \Psi_M \\ &\Rightarrow C^{-1}C\bar{\Psi}_M^T = C^{-1}\Psi_M \\ &\Rightarrow \bar{\Psi}_M^T = C^{-1}\Psi_M \\ &\Rightarrow \bar{\Psi}_M^T = -C\Psi_M \\ &\Rightarrow \bar{\Psi}_M = -\Psi_M^T C^T \\ &\Rightarrow \bar{\Psi}_M = -\Psi_M^T(-C) \\ &\Rightarrow \bar{\Psi}_M = \Psi_M^T C.\end{aligned}\quad (2.230)$$

Άρα, δείξαμε τα ζητούμενα και τώρα είμαστε σε θέση να περάσουμε στον υπολογισμό του τρίτου διαδότη,  $\langle 0|T [\bar{\Psi}_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle 0|T [\bar{\Psi}_{Ma}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle &\stackrel{(2.230)}{=} \langle 0|T [\bar{\Psi}_{Mc}^T(x_1)C_{ca}\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle \\ &= \langle 0|T [C_{ac}^T\Psi_{Mc}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle \\ &= C_{ac}^T\langle 0|T [\Psi_{Mc}(x_1)\bar{\Psi}_{Mb}(x_2)] |0\rangle \\ &= C_{ac}^T S_{Fcb}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.231)$$

Συνεπώς, όταν χρειαστεί να βρούμε διαδότη ενός φερμιονίου Majorana, παρ'όλο που είναι σπινωριακό το πεδίο, δεν πρέπει να ξεχάσουμε τις δύο βαθμωτού-τύπου συνεισφορές που υπολογίσαμε παραπάνω και τις εκφράσαμε συναρτήσει του διαδότη Dirac.

Πλέον, έχουμε συνθέσει ένα πολύ ισχυρό εργαλειακό υπόβαθρο ώστε να περάσουμε στην υπερσυμμετρία. Η πλειοψηφία των αποτελεσμάτων που υπολογίσαμε μέχρι τώρα θα βοηθήσει να γίνει «ανώδυνα» το πέραςμα αυτό, γλιτώνοντας από υπολογισμούς που πιθανόν να χαλάγανε τη ροή.

## 2.3 Εισαγωγή στην υπερσυμμετρία και στο MSSM

### 2.3.1 Ένα απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ένα από τα απλούστερα υπερσυμμετρικά μοντέλα, το οποίο περιλαμβάνει ένα μιγαδικό σπιν-0 πεδίο  $\phi$  και ένα  $L$ -τύπου σπινωριακό πεδίο  $\chi$ , και τα δύο προφανώς άμαζα. Η λαγκρατζιανή πυκνότητα για το σύστημα αυτό είναι:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi. \quad (2.232)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος του βαθμωτού πεδίου, του οποίου η εξίσωση κίνησης είναι  $\square\phi = 0$ . Ο δεύτερος όρος είναι ο δεύτερος όρος της λαγκρατζιανής Dirac γραμμένη σε όρους Weyl σπινώρων, (2.87), και η εξίσωση κίνησης για αυτό το πεδίο είναι  $i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi = 0$ . Θα βρούμε λοιπόν μετασχηματισμούς στους οποίους η μεταβολή του  $\phi$  θα είναι ανάλογη του  $\chi$  και αντίστροφα, έτσι ώστε η λαγκρατζιανή -ή καλύτερα η δράση- να παραμένει αναλλοίωτη. Για να παραμείνει η δράση αναλλοίωτη αρκεί η λαγκρατζιανή να παραμείνει αναλλοίωτη ή να μεταβάλλεται το πολύ κατά μία ολική παράγωγο, το ολοκλήρωμα της οποίας θεωρείται ότι εξαφανίζεται στο άπειρο.

Για αρχή είναι χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε τις διαστάσεις όλων των μεγεθών που εμπλέκονται. Η δράση, που είναι το ολοκλήρωμα της λαγκρατζιανής πυκνότητας στο 4-διάστατο χώρο, είναι αδιάστατη στο σύστημα φυσικών μονάδων  $\hbar = c = 1$ . Στο σύστημα αυτό υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη διάσταση, την οποία παίρνουμε να είναι η μάζα (ή ισοδύναμα η ενέργεια),  $M$ . Το μήκος έχει προφανώς τις ίδιες διαστάσεις με το χρόνο (αφού  $c = 1$ ), δηλαδή  $M^{-1}$ , αφού  $\hbar = 1$ . Έπεται ότι για να είναι η δράση αδιάστατη, η  $\mathcal{L}$  έχει διάσταση  $M^4$ .



Αφού  $[\partial_\mu] = M$ , μπορούμε από διαστατική ανάλυση να βρούμε τις διαστάσεις των  $\phi, \chi$ :

$$[\phi] = M, \quad [\chi] = M^{3/2} \quad (2.233)$$

Συνεχίζουμε λοιπόν να βρίσκοντας τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς που συνδέουν τα  $\phi, \chi$ . Θεωρούμε αρχικά τη μεταβολή του  $\chi$ ,  $\delta_\xi \phi$ , που έχει τη μορφή:

$$\delta_\xi \phi = \xi \times \chi, \quad (2.234)$$

όπου  $\xi$  είναι μία παράμετρος ανεξάρτητη του  $x$ . Με άλλα λόγια θεωρούμε έναν εκτεταμένο υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό. Αν η παράμετρος  $\xi$  εξαρτιόταν από το  $x$ , δηλαδή στην περίπτωση τοπικού μετασχηματισμού, θα οδηγούμασταν στην supergravity, στην οποία όμως δε θα επεκταθούμε. Στο αριστερό μέλος έχουμε ένα σπιν-0 πεδίο το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από τους LT. Αυτό σημαίνει ότι επειδή και η ποσότητα του δεξιού μέλους θα πρέπει να μετασχηματίζεται το ίδιο κάτω από τους LT, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να φτιάξουμε μία βαθμωτή ποσότητα που να αποτελείται από τα  $\xi$  και  $\chi$ . Ένας απλός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να δηλώσουμε ότι το  $\xi$  είναι επίσης ένας  $L$ -τύπου σπινόρας και να χρησιμοποιήσουμε το Lorentz αναλλοίωτο γινόμενο της (2.119), δηλαδή:

$$\delta_\xi \phi = \xi^T (-i\sigma_2) \chi = \xi^a \chi_a = \xi \cdot \chi. \quad (2.235)$$

Αξίζει να κάνουμε μία παύση για να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις όσον αφορά την παράμετρο  $\xi$ . Πρώτον, επαναλαμβάνουμε ότι πρόκειται για σπινόρα ο οποίος (όπως έχουμε προαναφέρει) δεν εξαρτάται από το  $x$ . Ωστόσο, δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από τους LT, αφού μετασχηματίζεται σαν  $L$ -τύπου σπινόρας, δηλαδή με τον πίνακα  $V^{-1\dagger}$ . Έχει δύο συνιστώσες, η καθεμία από τις οποίες είναι μιγαδική, επομένως 4 βαθμούς ελευθερίας. Δεύτερον, παρ' όλο που το  $\xi$  δεν εξαρτάται από το  $x$  και δεν είναι δηλαδή ένας πεδιακός τελεστής, θα υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες του αντιμετωπίζονται με αυτές των σπινωριακών πεδίων, δηλαδή υποθέτουμε ότι είναι αριθμοί Grassmann. Τρίτον, αφού  $[\phi] = M$  και  $[\chi] = M^{3/2}$ , συμπεραίνουμε ότι για το  $\xi$  ισχύει ότι  $[\xi] = M^{-1/2}$ .

Ας περάσουμε τώρα στο ποιά μπορεί να είναι η αντίστοιχη μεταβολή του  $\chi$ ,  $\delta_\xi \chi$ . Θα πρέπει να είναι της μορφής:

$$\delta_\xi \chi \sim \xi \times \phi. \quad (2.236)$$

Στο αριστερό μέλος έχουμε μία ποσότητα με διαστάσεις  $M^{3/2}$ , ενώ στο δεξιό μέλος, το απλό αλγεβρικό γινόμενο των  $\xi, \phi$  δίνει διάσταση  $M^{-1/2+1} = M^{1/2}$ . Επομένως, στο δεξιό μέλος, πρέπει να εισαγάγουμε μία ποσότητα με διαστάσεις  $M^1$ . Σε αυτήν την άμαξη θεωρία, υπάρχει μόνο ένας υποψήφιος, ο οποίος είναι ο τελεστής  $\partial_\mu$ , η ακόμα καλύτερα ο τελεστής  $i\partial_\mu$ , που ταυτίζεται με αυτόν της ορμής. Όμως, τώρα «κρέμεται» ένας δείκτης  $\mu$  στο δεξιό μέλος. Επικαλούμενοι λοιπόν την Lorentz covariance, για να κλείσουν δηλαδή οι δείκτες, δοκιμάζουμε:

$$\delta_\xi \chi = (i\sigma^\mu \partial_\mu) \phi, \quad (2.237)$$

όπου  $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ . Σημειώνουμε ότι οι  $2 \times 2$  πίνακες που εμπεριέχονται στο  $\sigma^\mu$ , δρουν στο διάνυσμα στήλη 2-συνιστωσών  $\xi$ , για να δώσουν οσωτά μία 2-συνιστωσών στήλη έτσι ώστε να ταιριάζει με το αριστερό μέλος. Παρ' όλο που πετύχαμε την ισοστάθμιση των συνιστωσών στα δύο μέλη, το δεξί μέλος δε μετασχηματίζεται σαν  $\chi$ -τύπου σπίνορας. Αν θυμηθούμε τις εξισώσεις Dirac στον  $\sigma^\mu$  συμβολισμό, (2.86), βλέπουμε ότι ο συνδυασμός  $\sigma^\mu p_\mu$  που δρα σε έναν  $R$ -τύπου σπίνορα μετασχηματίζεται σαν  $\chi$ -τύπου σπίνορας, ενώ ο συνδυασμός  $\bar{\sigma}^\mu p_\mu$  που δρα σε έναν  $L$ -τύπου σπίνορα μετασχηματίζεται σαν ένας  $\psi$ -τύπου σπίνορας. Αυτό προτείνει ότι θα έπρεπε να αφήσουμε το  $\sigma^\mu p_\mu$  να δράσει πάνω σε ένα αντικείμενο  $\psi$ -τύπου -και όχι στο  $\xi$  που είναι  $L$ -τύπου- έτσι ώστε να πάρουμε ένα αποτέλεσμα που να μετασχηματίζεται σαν το  $\chi$ . Αυτό δε μας δυσκολεύει καθώς γνωρίζουμε από την (2.92) πως να φτιάξουμε ένα  $R$ -τύπου αντικείμενο από έναν  $L$ -τύπου σπίνορα, εν προκειμένω από τον  $\xi$ . Απλώς παίρνουμε την ποσότητα  $i\sigma_2 \xi^*$  κι επομένως φτάνουμε για τη μεταβολή του  $\chi$  να έχουμε την έκφραση:

$$\delta_\xi \chi_a = A [i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*)]_a \partial_\mu \phi, \quad (2.238)$$

όπου  $A$  είναι κάποια σταθερά, η οποία θα υπολογιστεί από την απαίτηση η  $\mathcal{L}$  της (2.232) να είναι αναλλοίωτη κάτω από τις μεταβολές (2.235) και (2.238). Παρατηρούμε ότι η ποσότητα  $\partial_\mu \phi$  δεν έχει δομή πίνακα και γι' αυτό έχει μεταφερθεί στο τέλος. Επίσης, βλέπουμε ότι αν περάσουμε στον dotted-undotted συμβολισμό, ο δείκτης  $a$  στην (2.238) φεύγει:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_b^* = \bar{\xi}_b \Rightarrow i\sigma_2 \bar{\xi}_b = \bar{\xi}^b \\ \delta_\xi \chi_a = A [i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*)] \partial_\mu \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_\xi \chi_a = A [i\sigma_{ab}^\mu \bar{\xi}^b] \partial_\mu \phi \Rightarrow \delta_\xi \chi = A [i\sigma^\mu \bar{\xi}] \partial_\mu \phi. \quad (2.239)$$

Έχουμε λοιπόν υπολογίσει τις μεταβολές των  $\phi, \chi$ , ωστόσο, αφού και τα πεδία είναι μιγαδικά, πρέπει να βρούμε και τις μεταβολές των  $\phi^\dagger, \chi^\dagger$ <sup>11</sup>. Συνεπώς, παίρνουμε την (2.235) σε όρους των συνιστωσών κι επομένως γίνεται:

$$\delta_\xi \phi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = -\xi_1 \chi_2 + \xi_2 \chi_1 \quad (2.240)$$

και τώρα θέλουμε να πάρουμε το ερμιτιανό συζυγές της εξίσωσης αυτής. Προσοχή, το ερμιτιανό συζυγές γινομένου σπινωριακών πεδίων συμβαίνει όπως αυτό δύο πινάκων, δηλαδή, δεν πρέπει να ξεχάσουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά τους. Η αντιστροφή αυτή λόγω του ερμιτιανού συζυγούς δεν επάγει την εμφάνιση του αρνητικού προσήμου στην περίπτωση της αντιμετάθεσης δύο φερμιονικών πεδίων. Συνεπώς, έχουμε:

$$\delta_\xi \phi^\dagger = (-\xi_1 \chi_2 + \xi_2 \chi_1)^\dagger = -\chi_2^\dagger \xi_1^* + \chi_1^\dagger \xi_2^* \quad (2.241)$$

<sup>11</sup> Παρ' όλο που λέμε ότι τα πεδία είναι μιγαδικά, δεν ξεχνάμε ότι τα  $\phi, \chi$  είναι κβαντικά πεδία, δηλαδή τελεστές και άρα όπου μιγαδική συζυγία εννοούμε το ερμιτιανό συζυγές. Ωστόσο, όσον αφορά το  $\xi$  που δεν είναι τελεστής, το σύμβολο του \* είναι έγκυρο.

την οποία μπορούμε να γράψουμε σε πιο συμπαγή μορφή :

$$\delta_\xi \phi^\dagger = -\chi_2^\dagger \xi_1^* + \chi_1^\dagger \xi_2^* = \begin{pmatrix} \chi_1^\dagger & \chi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = \chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^* . \quad (2.242)$$

Το αποτέλεσμα αυτό για τη μεταβολή του  $\phi^\dagger$  είναι αρκετά ευπρόσδεκτο, καθώς την έκφραση αυτή την έχουμε ξανασυναντήσει στην (2.168), στην οποία υπολογίσαμε τον όρο μάζας του σπινόρα Dirac σε όρους των σπινόρων Weyl, ο οποίος όπως ξέρουμε από την (2.77), είναι αναλλοίωτος κάτω από τους LT. Το αποτέλεσμα (2.242) μπορούμε να το δουλέψουμε κι άλλο :

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi^\dagger &= \chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^* = \chi_a^\dagger (i\sigma_2) \xi_a^* = [-i\sigma_2 \chi_a^*]^T \xi_a^* \\ &= (-i\sigma_2 \bar{\chi}_a)^T \bar{\xi}_a = (-i\sigma_2 (-i\sigma_2 \bar{\chi}^a))^T (-i\sigma_2 \bar{\xi}^a) \\ &= -(\bar{\chi}^a)^T (-i\sigma_2) \bar{\xi}^a = (-i\sigma_2 \bar{\chi}^a)^T \bar{\xi}^a = \bar{\chi}_a \bar{\xi}^a = \bar{\chi} \cdot \bar{\xi} . \end{aligned} \quad (2.243)$$

Από τις (2.235) και (2.243) διαπιστώνουμε ότι :

$$(\xi \cdot \chi)^\dagger = (\chi \cdot \xi)^\dagger = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} = \bar{\chi} \cdot \bar{\xi} , \quad (2.244)$$

κι επομένως, έχουμε καταλήξει ότι :

$$\delta_\xi \phi = \xi \cdot \chi = \chi \cdot \xi, \quad \delta_\xi \phi^\dagger = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} = \bar{\chi} \cdot \bar{\xi} . \quad (2.245)$$

Συνεχίζουμε με την ίδια λογική για την εύρεση του  $\delta_\xi \chi^\dagger$ , δηλαδή παίρνουμε το ερμιτιανό συζυγές της (2.238) και υπολογίζουμε :

$$\delta_\xi \chi^\dagger = [A i \sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi]^\dagger = A \partial_\mu \phi^\dagger \xi^{T} (i\sigma^\mu) (i\sigma_2) , \quad (2.246)$$

όπου υποθέσαμε ότι το  $A$  είναι πραγματικό και αργότερα θα το επαληθεύσουμε. Τώρα, θα δώσουμε μία ισοδύναμη έκφραση για το (2.246):

$$\begin{aligned} \delta_\xi \chi^\dagger &= A \partial_\mu \phi^\dagger \xi^{T} (i\sigma^\mu) (i\sigma_2) \Rightarrow \delta_\xi \bar{\chi}_a^T = A \partial_\mu \phi^\dagger [\xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu] \Rightarrow \\ \delta_\xi \bar{\chi}_a &= A \partial_\mu \phi^\dagger [\xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu]^T \Rightarrow \delta_\xi \bar{\chi}_a = A \partial_\mu \phi^\dagger [i\sigma^{\mu T} (-i\sigma_2) \xi]_a \Rightarrow \\ \delta_\xi (-i\sigma_2 \bar{\chi}^a) &= A \partial_\mu \phi^\dagger [i\sigma^{\mu T} (-i\sigma_2) \xi]^a \Rightarrow \delta_\xi \bar{\chi}^a = A \partial_\mu \phi^\dagger [(i\sigma_2 (i\sigma^{\mu T}) (-i\sigma_2) \xi)]^a \\ \delta_\xi \bar{\chi} &= i A \partial_\mu \phi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi . \end{aligned} \quad (2.247)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να επιλέξουμε το  $A$ , έτσι ώστε η λαγκρατζιανή (2.232) να είναι αναλλοίωτη κάτω από τις μεταβολές (2.235), (2.238), (2.243), (2.246). Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L} &= \partial_\mu (\delta_\xi \phi^\dagger) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\delta_\xi \phi) + (\delta_\xi \chi^\dagger) i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) \\ &= \partial_\mu (\chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^*) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) + \\ &\quad + A (\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu) i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi + A \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu (i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (2.248)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (2.248), βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο είδη όρων. Το ένα είδος περιέχει την παράμετρο  $\xi^*$  και ο άλλος την παράμετρο  $\xi^T$ . Ας θεωρήσουμε αρχικά τον όρο που εμπεριέχει τον παράγοντα  $A\xi^*$ . Σ' αυτόν εμφανίζεται ο συνδυασμός:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \sigma^\mu \partial_\mu &= (1, -\boldsymbol{\sigma})(\partial_0, \boldsymbol{\nabla})(1, \boldsymbol{\sigma})(\partial_0, \boldsymbol{\nabla}) = (\partial_0 - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nabla})(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \\ &= \partial_0^2 - \boldsymbol{\sigma}^2 \nabla^2 = \partial_0^2 - \nabla^2 = \partial_\mu \partial^\mu.\end{aligned}\quad (2.249)$$

Οπότε ο όρος με  $A\xi^*$  της (2.248), σε συνδυασμό με την (2.249) θα δώσει:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L}|_{A\xi^*} &= A\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu (i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi = -iA\chi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \sigma^\mu \partial_\mu \phi i\sigma_2 \xi^* \\ &= -iA\chi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi \sigma_2 \xi^* = -iA\chi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \sigma_2 \xi^* \phi.\end{aligned}\quad (2.250)$$

Οπότε, το κομμάτι της  $\delta_\xi \mathcal{L}$ , (2.248) που περιέχει το  $\xi^*$  θα είναι:

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^*} = \partial_\mu \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi - iA\chi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \sigma_2 \xi^* \phi \quad (2.251)$$

Η εξίσωση αυτή είναι (εν μέρει) η μεταβολή της λαγκρατζιανής κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς και βλέπουμε ότι δεν καταφέραμε να πετύχουμε την αναλλοιώτητά της, αφού δεν υπάρχει ελπίδα η μεταβολή (2.251) να ακυρώσει τον όρο που περιέχει το  $\xi^T$ , ο οποίος περιλαμβάνει τελείως διαφορετικές παραμέτρους. Όμως η δράση παραμένει αναλλοίωτη αν μπορέσουμε να κανονίσουμε τη μεταβολή της  $\mathcal{L}$  να είναι μία ολική παράγωγος. Αφού το  $\xi$  δεν εξαρτάται από τη θέση, μπορούμε όντως να γράψουμε την (2.251) σαν μία ολική παράγωγο:

$$\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^*} = \partial_\mu (\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi), \quad (2.252)$$

δεδομένου ότι  $A = -1$ . Παρομοίως, αν  $A = -1$ , οι όροι στο κομμάτι της (2.248) που είναι ανάλογοι του  $\xi^T$  συνδυάζονται έτσι ώστε να δώσουν:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^T} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) + A(\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu) i\bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \\ &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) + \partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi.\end{aligned}\quad (2.253)$$

Ο δεύτερος όρος της (2.253) μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\begin{aligned}&\partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) - \phi^\dagger \partial_\mu \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \\ &= \partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \\ &= \partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \sigma^\mu \partial_\mu \chi \\ &= \partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi.\end{aligned}\quad (2.254)$$

Αντικαθιστώντας την (2.254) στην (2.253), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^T} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) + \partial_\mu (\phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi \\ &= \partial_\mu (\phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi) + \partial_\mu (\phi^\dagger \xi^T (i\sigma_2) \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi),\end{aligned}\quad (2.255)$$

όπου ο πρώτος και ο τρίτος όρος της (2.255) συνδυάστηκαν έτσι ώστε, όπως φαίνεται, να δώσουν μία ολική παράγωγο, με αποτέλεσμα όλο το κομμάτι της  $\delta_\xi \mathcal{L}|_{\xi^T}$  να είναι μία ολική παράγωγος. Επόμενως, ως τώρα έχουμε δει ότι κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, για  $A = -1$ , η  $\mathcal{L}$  μεταβάλλεται συνολικά κάτω από μία ολική παράγωγο:

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right), \quad (2.256)$$

με αποτέλεσμα η δράση να παραμένει τελικά αναλλοίωτη - καταλήγοντας λοιπόν σε μία υπερσυμμετρική θεωρία. Όπως θα δούμε αργότερα, το ζευγάρι βαθμωτό πεδίο- $L$ -τύπου σπινοριακό πεδίο, συνιστούν μία left chiral supermultiplet.

Κλείνοντας, θα δείξουμε ότι η (2.256) μπορεί να γραφτεί επίσης με τη μορφή:

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger \right). \quad (2.257)$$

Συγκρίνοντας την (2.256) με την αποδεικτέα (2.257), παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος τους είναι κοινός αλλά διαφέρουν στον δεύτερο και τρίτο όρο. Άρα, αυτό που πρέπει να δείξουμε ουσιαστικά είναι ότι

$$\partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) = \partial_\mu \left( \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger \right). \quad (2.258)$$

Από τον πρώτο όρο του αριστερού μέλους της (2.258), έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi \right) &= \partial_\mu \left( \xi^T i\sigma_2 (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) \phi^\dagger \right) \\ &= \xi^T i\sigma_2 \partial_\mu \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \phi^\dagger + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \partial_\mu \phi^\dagger \\ &= \xi^T i\sigma_2 \partial_\nu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \phi^\dagger + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger \\ &= \xi^T i\sigma_2 \partial_\mu \partial^\mu \chi \phi^\dagger + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger. \end{aligned} \quad (2.259)$$

Από τον δεύτερο όρο του αριστερού μέλους της (2.258), έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) &= \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu (\partial^\mu \chi \phi^\dagger) \\ &= \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi \partial^\mu \phi^\dagger. \end{aligned} \quad (2.260)$$

Συνθέτοντας τα δύο κομμάτια παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \left( \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T (i\sigma_2) \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) = \\ &= \xi^T i\sigma_2 \partial_\mu \partial^\mu \chi \phi^\dagger + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \partial^\mu \chi \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi \partial^\mu \phi^\dagger \\ &= \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi \partial^\mu \phi^\dagger \\ &= \partial_\mu \left( \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2.261)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η μεταβολή στη λαγκρατζιανή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger \right). \quad (2.262)$$

### 2.3.2 Μία πρώτη ματιά στο MSSM

Προς το παρόν, την υπερσυμμετρία την έχουμε συναντήσει σε ένα απλό μοντέλο που περιγράφει μόνο το ζευγάρι μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και  $L$ -τύπου Weyl φερμιονικό πεδίο. Τέτοιου είδους πεδία σχηματίζουν μία supermultiplet η οποία ονομάζεται chiral. Επίσης, υπάρχει άλλο ένα είδος supermultiplet που θα μας απασχολήσει, η vector, ή αλλιώς gauge supermultiplet. Σε αυτή φιλοξενούνται τα διανυσματικά μποζόνια (που έχουν δύο on-shell) βαθμούς ελευθερίας μαζί με Weyl φερμιονικά πεδία. Στην ουσία, μόνο αυτά τα δύο είδη supermultiplet χρησιμοποιούνται στο MSSM, όπως θα δούμε αργότερα. Πρέπει λοιπόν να δούμε πως βαθμωτά, φερμιονικά και διανυσματικά πεδία ανατίθενται στις chiral και gauge supermultiplets. Σημειώνουμε ότι όλα αυτά τα πεδία είναι άμαζα αρχικά, αλλά θα πάρουν μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs ή/και από SUSY-breaking soft όρους.

Ένα κρίσιμο σημείο είναι να διαπιστώσουμε ότι οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί δεν αλλάζουν τους  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_L$ ,  $U(1)_Y$  κβαντικούς αριθμούς. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα σωματίδια που ανήκουν στην ίδια supermultiplet πρέπει να έχουν τους ίδιους  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  κβαντικούς αριθμούς.

Ας ξεκινήσουμε με τα γκλουόνια, τα οποία είναι τα διανυσματικά μποζόνια που σχετίζονται με την  $SU(3)_c$  συμμετρία. Αυτά, αναγκαστικά ανήκουν στην 8-διάστατη adjoint αναπαράσταση και δε «βλέπουν» τη γεύση, δηλαδή είναι flavour-singlets. Λόγω του ότι κανένα φερμιόνιο του Καθιερωμένου Προτύπου δεν φέρει αυτούς τους κβαντικούς αριθμούς, για να κατασκευάσουμε την υπερσυμμετρική εκδοχή του SM θα πρέπει να εισαγάγουμε μία νέα  $SU(3)$  8-πλέτα από Weyl φερμιόνια που ονομάζονται gluinos  $\tilde{G}$ , και αποτελούν τα υπερσυμμετρικά ταίρια των γκλουονίων. Ακριβώς με την ίδια θεώρηση καταλήγουμε στο ότι είμαστε αναγκασμένοι να εισαγάγουμε μία  $SU(2)_L$  τριπλέτα από Weyl φερμιόνια, τα winos ( $\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$ ), για να ταιριάζουν με τα διανυσματικά μποζόνια της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Παρομοίως, πρέπει να γίνει η προσθήκη ενός  $U(1)_Y$  φερμιονίου, του bino ( $\tilde{B}$ ), ώστε να ταιριάζει με το  $B$  διανυσματικό πεδίο. Έτσι λοιπόν έχουμε καταφέρει να στήσουμε την gauge supermultiplet του MSSM.

Ανάλογες προσθήκες πρέπει να γίνουν και για τα SM φερμιόνια στα οποία πρέπει να ταιριάζουμε βαθμωτά πεδία για να συγκατοικήσουν όλα μαζί στην chiral supermultiplet. Αρχικά για τα λεπτόνια, απαγορεύεται να τα ταιριάζουμε με διανυσματικά πεδία αφού ανήκουν στη θεμελιώδη (2-πλέτα) αναπαράσταση της  $SU(2)_L$ , ενώ τα διανυσματικά μποζόνια στην (3-πλέτα) adjoint αναπαράσταση της  $SU(2)_L$ . Συνεπώς, αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να σχηματίσουμε διπλέτες από βαθμωτά πεδία τα οποία θα έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς με τα SM λεπτόνια. Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e} \end{pmatrix}_L, \quad (2.263)$$

όπου  $\tilde{\nu}_e$  είναι το βαθμωτό ταίρι του νετρίνο, το sneutrino, και  $\tilde{e}$  είναι το βαθ-

μωτό ταίρι του ηλεκτρονίου, το selectron.

Επίσης για τα κουάρκ ισχύει το ίδιο πράγμα. Αυτά ανήκουν στη θεμελιώδη αναπαράσταση (3–πλέτα) της ομάδας  $SU(3)_c$ , ενώ τα διανυσματικά μποζόνια ανήκουν στην adjoint (8–πλέτα) αναπαράσταση. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να τα βάλουμε σε μία supermultiplet, αφού διαφέρουν οι κβαντικοί αριθμοί τους. Έτσι, εισάγουμε μία τριπλέτα η οποία περιέχει τα βαθμωτά ταίρια των κουάρκ, τα squark, τα οποία μαζί με τα κουάρκ κατοικούν σε μία chiral supermultiplet. Επίσης, πέρα από το γεγονός ότι έχουν τους ίδιους βρυσονικούς αριθμούς, τα κουάρκ και τα squark πρέπει να έχουν και τους ίδιους ηλεκτρασθενείς κβαντικούς αριθμούς.

Οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις, τόσο για τα λεπτόνια όσο και για τα κουάρκ, είναι chiral, που σημαίνει ότι τα  $L$ –μέρη αλληλεπιδρούν διαφορετικά από τα  $R$ –μέρη τους. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι τα  $q_R, \ell_R$  ανήκουν σε διαφορετική αναπαράσταση από τα  $q_L, \ell_L$ , συγκεκριμένα στην τετριμμένη αναπαράσταση. Είναι δηλαδή,  $SU(2)$  singlets. Έτσι, πρέπει να εισαγάγουμε τα υπερσυμμετρικά βαθμωτά ταίρια για τα RH σωματίδια ξεχωριστά. Για παράδειγμα, το  $u_R$  το ταυιάζουμε με το  $\tilde{u}_R$  και το  $d_R$  με το  $\tilde{d}_R$ , ενώ για τα LH, τα  $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$  ταυιάζονται με τα  $\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$ .

Τέλος, πρέπει να συζητήσουμε τι συμβαίνει και στον Higgs τομέα. Τα βαθμωτά πεδία Higgs θα χρειαστούν τα δικά τους φερμιονικά ταίρια, έτσι ώστε να φιλοξενηθούν όλα μαζί σε μία chiral supermultiplet. Μία πολύ σημαντική συνέπεια στην υπερσυμμετρικοποίηση του SM είναι ότι απαιτούνται δύο διαφορετικές Higgs διπλέτες. Στο SM γνωρίζουμε ότι οι φερμιονικές αλληλεπιδράσεις (Yukawa) με το πεδίο Higgs  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ , δίνουν μάζα στα φερμιόνια με αρνητική συνιστώσα ισοσπίν της διπλέτας,  $T = -1/2$ . Για να πάρουμε όρους μάζας για τα φερμιόνια θετικού ισοσπίν, έπρεπε να πάρουμε μία άλλη διπλέτα Higgs, την charge conjugate της  $\phi$ , την  $\phi_c = i\sigma_2 \phi^{\dagger T} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\bar{\phi}^- \end{pmatrix}$ . Όμως, θα δούμε αργότερα ότι στην υπερσυμμετρική εκδοχή, δεν μπορούμε να συμπεριλάβουμε ένα βαθμωτό πεδίο,  $\phi$ , και το ερμιτιανό συζυγές του,  $\phi^\dagger$ . Επομένως, η χρήση της συζυγίας φορτίου στο μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$  απαγορεύεται και για τον λόγο αυτόν πρέπει να έχουμε δύο ανεξάρτητες Higgs chiral supermultiplets:

$$H_u : \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}, \quad (2.264)$$

$$(2.265)$$

$$H_d : \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}. \quad (2.266)$$

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι οι chiral και gauge supermultiplets απαρτίζουν το MSSM. Τώρα θα κάνουμε μία (μακρά) παύση για την περεταίρω ανάλυση

ση του MSSM (υπερσυμμετρικές αλληλεπιδράσεις soft SUSY-breaking όρους κ.ά.) για τη θεμελίωση των τεχνικών ζητημάτων. Ωστόσο, είμαστε ήδη σε θέση να κάνουμε δύο σημαντικές παρατηρήσεις:

- (α) Κανένα από τα υπερσυμμετρικά ταίρια δεν έχει φανεί ακόμα στο πείραμα, που σημαίνει ότι δεν μπορούν να έχουν την ίδια μάζα με τα SM ταίρια τους.
- (β) Από την πρώτη παρατήρηση, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η υπερσυμμετρία είναι μία σπασμένη συμμετρία.

## 2.4 Η υπερσυμμετρική άλγεβρα και οι supermultiplets

Γενικά γνωρίζουμε ότι πίσω από τη συμμετρία κρύβεται μία ομάδα, δηλαδή μία αντίστοιχη άλγεβρα η οποία περιγράφεται από σχέσεις ανάμεσα στους γεννήτορες. Έχουμε δει, για παράδειγμα, ότι η  $SU(2)$  άλγεβρα ικανοποιεί μία μεταθετική σχέση των γεννητόρων της και αποτελεί την άλγεβρα από την οποία προσδιορίζεται η θεωρία των στροφορμών στην κβαντομηχανική. Η δομή των multiplets (των καταστάσεων σε κάθε αναπαράσταση) μπορεί να αναπτυχθεί μέσω αυτών των μεταθετικών σχέσεων. Για τον λόγο αυτόν κρίνεται απαραίτητο να βρούμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα -δηλαδή τις σχέσεις που ικανοποιούν οι γεννήτορες της- έτσι ώστε να μπορέσουμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τις multiplets της, τις supermultiplets. Θα περιγράψουμε αρχικά μία μέθοδο από την οποία θα εξαγάγουμε τα ήδη γνωστά αποτελέσματα της  $SU(2)$  άλγεβρας κι έπειτα θα την προσαρμόσουμε έτσι ώστε να βρούμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

### 2.4.1 Ένας τρόπος να αποκτήσουμε την $SU(2)$ άλγεβρα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, βρήκαμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς για τα πεδία  $\phi, \phi^\dagger$  και  $\chi, \chi^\dagger$ . Από τους μετασχηματισμούς αυτούς θα εξαγάγουμε την άλγεβρα των SUSY γεννητόρων, όμως πριν από αυτό θα δούμε τη μέθοδο στην πράξη στο πιο οικείο περιεχόμενο της  $SU(2)$ .

Θεωρούμε αρχικά την  $SU(2)$  διπλέτα των πεδίων  $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ , όπου τα πεδία  $u, d$  έχουν την ίδια μάζα και ταυτοτικές αλληλεπιδράσεις, έτσι ώστε η αντίστοιχη λαγκρατζιανή να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους (απειροστούς) μετασχηματισμούς των συνιστωσών του  $q$ , της μορφής:

$$q \rightarrow q' = \left(1 - \frac{\epsilon \cdot \tau}{2}\right) q \equiv q + \delta_\epsilon q, \quad (2.267)$$

όπου

$$\delta_\epsilon q = -i \frac{\epsilon \cdot \tau}{2} q. \quad (2.268)$$



Εδώ,  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  είναι οι πίνακες του Pauli και  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  είναι τρεις πραγματικές παράμετροι της ομάδας οι οποίες καθορίζουν τον μετασχηματισμό. Τα μετασχηματισμένα πεδία,  $q'$ , πρέπει να ικανοποιούν τις ίδιες αντιμεταθετικές σχέσεις με τα αρχικά πεδία,  $q$ , πράγμα που σημαίνει ότι συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός μοναδιακού μετασχηματισμού:

$$q' = UqU^\dagger. \quad (2.269)$$

Για απειροστούς μετασχηματισμούς, ο  $U$  έχει τη γενική μορφή:

$$U_{inf/mal} = (1 + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}), \quad (2.270)$$

όπου  $\mathbf{T}$  είναι οι τρεις (ερμιτιανοί) γεννήτορες της  $SU(2)$ . Από τις (2.269) και (2.270), έχουμε:

$$\begin{aligned} q' &= (1 + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T})q(1 - i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}) \\ &= q + i\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}q - i\boldsymbol{\epsilon} \cdot q\mathbf{T} = q + i\boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{T}, q]. \end{aligned} \quad (2.271)$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα αυτό με την (2.267), συνάγεται ότι:

$$\delta_\epsilon q = i\boldsymbol{\epsilon} \cdot [\mathbf{T}, q] = -i\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\tau}}{2}q. \quad (2.272)$$

Δεν ξεχνάμε ότι, όπως φαίνεται και από την (2.22), οι  $\mathbf{T}$  είναι κβαντικοί πεδιακοί τελεστές οι οποίοι κατασκευάζονται από τα πεδία της λαγκρατζιανής. Συνεχίζουμε στον υπολογισμό των μεταθετικών τους σχέσεων. Παίρνουμε δύο διαφορετικές απειροστές μεταβολές των πεδίων, οι οποίες σύμφωνα με την (2.272) θα είναι:

$$\delta_{\epsilon_1} q = i\epsilon_1[T_1, q] = i\frac{\epsilon_1\tau_1}{2}q, \quad (2.273)$$

$$\delta_{\epsilon_2} q = i\epsilon_2[T_2, q] = i\frac{\epsilon_2\tau_2}{2}q. \quad (2.274)$$

Θα υπολογίσουμε λοιπόν τη διαφορά  $\delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1}$  με δύο διαφορετικούς τρόπους, ο ένας με την πρώτη ισότητα και ο άλλος με τη δεύτερη ισότητα των (2.273), (2.274). Εξισώνοντας τα αποτελέσματα που θα βρούμε θα καταλήξουμε στην αναμενόμενη μεταθετική σχέση των γεννητόρων. Πρώτα, χρησιμοποιούμε τη δεύτερη ισότητα των (2.273), (2.274) και υπολογίζουμε τους δύο όρους της διαφοράς. Για τον πρώτο έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2}q &= \delta_{\epsilon_1}\left(-i\frac{\epsilon_2\tau_2}{2}\right)q \\ &= -i\frac{\epsilon_2\tau_2}{2}\delta_{\epsilon_1}q \\ &= -i\frac{\epsilon_2\tau_2}{2}\left(-i\frac{\epsilon_1\tau_1}{2}\right)q \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_1\epsilon_2\tau_2\tau_1q. \end{aligned} \quad (2.275)$$

Παρομοίως, για τον δεύτερο ισχύει ότι :

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} q &= \delta_{\epsilon_2} \left( -i \frac{\epsilon_1 \tau_1}{2} \right) q \\
&= -i \frac{\epsilon_1 \tau_1}{2} \delta_{\epsilon_2} q \\
&= -i \frac{\epsilon_1 \tau_1}{2} \left( -i \frac{\epsilon_2 \tau_2}{2} \right) q \\
&= -\frac{1}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 \tau_1 \tau_2 q .
\end{aligned} \tag{2.276}$$

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση των  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , αφού είναι απλοί αριθμοί, αλλά δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τους  $\tau_1, \tau_2$  καθώς είναι πίνακες οι οποίοι δεν μετατίθενται. Επομένως, παίρνουμε τη ζητούμενη διαφορά που προέκυψε από τις δεύτερες ισότητες των (2.273), (2.274) και βρίσκουμε :

$$\begin{aligned}
(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) q &= \epsilon_1 \epsilon_2 \left[ \frac{\tau_1}{2}, \frac{\tau_2}{2} \right] q \\
&= \epsilon_1 \epsilon_2 i \frac{\tau_3}{2} q = -i \epsilon_1 \epsilon_2 [T_3, q] ,
\end{aligned} \tag{2.277}$$

όπου στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε το ανάλογο των (2.273), (2.274) για την τρίτη συνιστώσα,  $\delta_{\epsilon_3} = i \epsilon_3 [T_3, q] = -i \epsilon_3 \frac{\tau_3}{2} q$ .

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τη διαφορά  $(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) q$  από τις πρώτες ισότητες των (2.273), (2.274). Για τον πρώτο όρο της διαφοράς έχουμε :

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} q &= \delta_{\epsilon_1} (i \epsilon_2 [T_2, q]) \\
&= i \epsilon_2 \delta_{\epsilon_1} ([T_2, q]) \\
&= i \epsilon_1 \epsilon_2 [T_1, [T_2, q]] .
\end{aligned} \tag{2.278}$$

Παρομοίως και για τον δεύτερο όρο της διαφοράς παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1} q &= \delta_{\epsilon_2} (i \epsilon_1 [T_1, q]) \\
&= i \epsilon_1 \delta_{\epsilon_2} ([T_1, q]) \\
&= i \epsilon_1 \epsilon_2 [T_2, [T_1, q]] .
\end{aligned} \tag{2.279}$$

Επομένως, παίρνουμε τη ζητούμενη διαφορά που προέκυψε από τις πρώτες ισότητες των (2.273), (2.274) και βρίσκουμε ότι :

$$\begin{aligned}
(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) q &= -\epsilon_1 \epsilon_2 \{ [T_1, [T_2, q]] - [T_2, [T_1, q]] \} \\
&= -\epsilon_1 \epsilon_2 \{ [T_1, [T_2, q]] + [T_2, [q, T_1]] \} .
\end{aligned} \tag{2.280}$$

Τώρα, μπορούμε να ανασχηματίσουμε το δεξί μέλος της (2.280) χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi :

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 . \tag{2.281}$$

Επομένως, η (2.280) με τη βοήθεια της (2.281) θα γίνει:

$$(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1})q = -\epsilon_1 \epsilon_2 [[T_1, T_2], q] . \quad (2.282)$$

Εξισώνοντας τις (2.277) και (2.282), όπως είχαμε αναφέρει αρχικά, παίρνουμε:

$$[T_1, T_2] = iT_3, \quad (2.283)$$

το οποίο είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα καθώς γνωρίζαμε ήδη πολύ καλά τη μεταθετική σχέση της άλγεβρας  $A_1$ , της  $SU(2)$  ομάδας, την οποία έχουμε αναλύσει εκτενώς στο παράρτημα. Αυτή τη μέθοδο θα ακολουθήσουμε για να βρούμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα, δεδομένου ότι το μοντέλο μας (αυτό που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) έχει μόνο βαθμωτά και σπινωριακά πεδία.

#### 2.4.2 Οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας και η άλγεβρά τους

Για να προσαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο στην περίπτωση της υπερσυμμετρίας, χρειαζόμαστε το υπερσυμμετρικό ανάλογο της (2.272), δηλαδή τη μεταβολή των πεδίων που υπεισέρχονται στη θεωρία. Οι μεταβολές των πεδίων,  $\delta_\xi \phi$ ,  $\delta_\xi \chi$ , έχουν βρεθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και δίνονται από τις σχέσεις (2.235) και (2.238) για  $A = -1$ , αντίστοιχα:

$$\delta_\xi \phi = \xi^T (-i\sigma_2) \chi, \quad \delta_\xi \chi_a = -[i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*)]_a \partial_\mu \phi. \quad (2.284)$$

Οι μεταβολές αυτές μας δίνουν το ανάλογο των δευτέρων εξισώσεων της (2.272), όμως εμείς θέλουμε και μία μορφή των μεταβολών που να συνάδει με την πρώτη εξίσωση της (2.272), δηλαδή κάτι της μορφής:

$$\delta_\xi \phi \sim i[\xi Q, \phi] = \xi^T (-i\sigma_2) \chi, \quad (2.285)$$

όπου  $Q$  είναι ένας γεννήτορας της SUSY. Δεν ξεχνάμε ότι ο  $\xi$  είναι σπινόρας κι επομένως και το  $Q$  πρέπει να έχει σπινωριακή μορφή, αλλιώς το ένα μέλος της (2.285) θα είναι μποζονικό, ενώ το άλλο φερμιονικό. Έτσι, αφού το  $\phi$  είναι βαθμωτό κάτω από τους LT, θα πρέπει να συνδυάσουμε τα  $\xi, Q$  έτσι ώστε να δίνουν ένα Lorentz αναλλοίωτο γινόμενο. Ας υποθέσουμε ότι ο  $Q$  μετασχηματίζεται όπως ένας  $L$ -τύπου σπινόρας, όπως και ο  $\xi$ . Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα  $\xi^T (-i\sigma_2) Q$  είναι Lorentz αναλλοίωτη, όπως έχουμε δείξει στην (2.119). Επομένως, γράφουμε:

$$\delta_\xi \phi = i[\xi^T (-i\sigma_2) Q, \phi] = \xi^T (-i\sigma_2) \chi, \quad (2.286)$$

ή ισοδύναμα σε πιο περιεκτική γραφή:

$$\delta_\xi \phi = i[\xi \cdot Q, \phi] = \xi \cdot \chi. \quad (2.287)$$

Πρόκειται όμως να υπολογίσουμε τη διαφορά  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi$ , άρα, αφού  $\delta_\xi \phi \sim \chi$ , θα χρειαστούμε και την (2.238). Αυτή εμπεριέχει το  $\xi^*$ , οπότε για να

πάρουμε το πλήρες ανάλογο του  $i\epsilon \cdot T$ , θα χρειαστεί να επεκτείνουμε το  $i\xi \cdot Q$  στο:

$$i \left( \xi^T (-i\sigma_2) Q + \xi^\dagger (i\sigma_2) Q^* \right) = i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}). \quad (2.288)$$

Πρώτα υπολογίζουμε τη διαφορά  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi$  χρησιμοποιώντας τις (2.235) και (2.238) (για  $A = -1$ ), παίρνοντας τη δεύτερη εξίσωση της (2.287):

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi &= \delta_\eta (\xi^T (-i\sigma_2 \chi)) - \delta_\xi (\eta^T (-i\sigma_2 \chi)) \\ &= \xi^T (-i\sigma_2) i\sigma^\mu (-i\sigma_2) \eta^* \partial_\mu \phi - \eta^T (-i\sigma_2) i\sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^* \partial_\mu \phi \\ &= (\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* - \eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) i \partial_\mu \phi, \end{aligned} \quad (2.289)$$

όπου

$$c \equiv i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.290)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.145),  $c \sigma^\mu c = -\bar{\sigma}^{\mu T}$ , και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ποσότητα  $\xi^T \bar{\sigma}^{\mu T} \eta^*$  είναι μία ποσότητα μίας συνιστώσας (και άρα θα ισούται με τον ανάστροφό της πέρα από ένα πλην λόγω αντιμετάθεσης φερμιονικών πεδίων), η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται και γίνεται<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi &= (\xi^T (-\sigma^{\mu T}) \eta^* - \eta^T (-\sigma^{\mu T}) \xi^*) i \partial_\mu \phi \\ &= (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi - \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta) i \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (2.291)$$

Τώρα, περνάμε στον υπολογισμό της διαφοράς  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi$  δουλεύοντας με την πρώτη εξίσωση της (2.287):

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi &= \delta_\eta (\delta_\xi \phi) - \delta_\xi (\delta_\eta \phi) \\ &= \delta_\eta (i[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \phi]) - \delta_\xi (i[\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \phi]) \\ &= (i[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \delta_\eta \phi]) - (i[\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \delta_\xi \phi]) \\ &= - \{ [\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, [\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \phi]] \\ &\quad - [\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, [\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \phi]] \}. \end{aligned} \quad (2.292)$$

Ακολουθώντας κατά γράμμα τη μέθοδο που αναπτύξαμε για την  $SU(2)$ , χρησιμοποιούμε την ταυτότητα Jacobi, (2.281):

<sup>12</sup>Για να κρατήσουμε επαφή με το Majorana συμβολισμό, η παραπάνω διαφορά θα είναι:

$$(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \phi = \bar{\Psi}_M^\eta \gamma^\mu \Psi_M^\xi i \partial_\mu \phi$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \underbrace{\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}}_A, \underbrace{[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]}_B, \underbrace{\phi}_C \right] + \left[ \underbrace{\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}}_B, \underbrace{[\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}]}_A, \underbrace{\phi}_C \right] \\
& = - \left[ \underbrace{\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}}_A, \underbrace{[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]}_B, \underbrace{\phi}_C \right] - \left[ \underbrace{\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}}_B, \underbrace{\phi}_C, \underbrace{[\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}]}_A \right] \\
& = + \left[ \underbrace{\phi}_C, \underbrace{[\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}]}_A, \underbrace{[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]}_B \right] \\
& = - \left[ [\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}], \phi \right]. \tag{2.293}
\end{aligned}$$

Όπως είχαμε σχεδιάσει, εξισώνουμε τα δύο αποτελέσματα (2.289), (2.293) κι έχουμε<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned}
\left[ [\eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}], \phi \right] & = - (\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* - \eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) i \partial_\mu \phi \\
& = (\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* - \eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) [P_\mu, \phi] \\
& = - (\eta^T c \sigma^\mu c \xi^* - \xi^T c \sigma^\mu c \eta^*) [P_\mu, \phi]. \tag{2.295}
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε ότι :

$$\left[ \eta \cdot Q + \bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} \right] = - (\eta^T c \sigma^\mu c \xi^* - \xi^T c \sigma^\mu c \eta^*) P_\mu. \tag{2.296}$$

Παρ' όλα αυτά, για να είναι η (2.296) μία εξίσωση τελεστών, θα πρέπει να ισχύει όταν δρα πάνω σε όλα τα πεδία μίας supermultiplet. Όμως σε μία supermultiplet που περιέχονται βαθμωτά πεδία  $\phi$ , περιέχονται επίσης και  $L$ -τύπου σπίνορες, δηλαδή αναφερόμαστε σε μία chiral supermultiplet. Συνεπώς, θα πρέπει πέρα από το  $\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta$  που δρα πάνω στο  $\phi$ , να υπολογίσουμε και το  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi$ . Η αφελής αντιμετώπιση είναι να βάλουμε στη θέση του  $\phi$  το πεδίο  $\chi$ , στο αποτέλεσμα (2.289):

$$(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi = (\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* - \eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) i \partial_\mu \chi. \tag{2.297}$$

Δυστυχώς όμως, κάτι τέτοιο δεν ισχύει γιατί όπως θα δούμε η κατάσταση περιπλέκεται. Ωστόσο, θα βρούμε κάποιον τρόπο να «επιδιορθώσουμε» τη βλάβη.

Για να αποκτήσουμε τελικά τις (αντι-)μεταθετικές σχέσεις των  $Q$  από το αποτέλεσμά μας (2.296), πρέπει καταρχήν να απαλλαγούμε από τις παραμέτρους  $\eta, \xi$  και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Καταρχήν παρατηρούμε ότι εφόσον

<sup>13</sup>Εισάγοντας τον τελεστή της 4-ορμής  $P_\mu$ , ο οποίος είναι ο γεννήτορας των χωροχρονικών μεταθέσεων και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι

$$[P_\mu, \phi] \Psi = -i \partial_\mu (\phi \Psi) + i \partial_\mu \Psi \phi = -\partial_\mu \phi - i \partial_\mu \Psi \phi + i \partial_\mu \Psi \phi = -i \partial_\mu \phi. \tag{2.294}$$

στο δεξί μέλος δεν υπάρχουν όροι ανάλογοι των  $\eta\xi$  και  $\eta^*\xi^*$  μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$[\eta \cdot Q, \xi \cdot Q] = [\bar{\eta} \cdot \bar{Q}, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] = 0. \quad (2.298)$$

Άρα, από τον πρώτο μεταθέτη της (2.298) έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= (\eta^1 Q_1 + \eta^2 Q_2) (\xi^1 Q_1 + \xi^2 Q_2) - (\xi^1 Q_1 + \xi^2 Q_2) (\eta^1 Q_1 + \eta^2 Q_2) \\ &= -\eta^1 \xi^1 (2Q_1 Q_1) - \eta^1 \xi^2 (Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1) - \eta^2 \xi^1 (Q_2 Q_1 + Q_1 Q_2) - \eta^2 \xi^2 (2Q_2 Q_2). \end{aligned} \quad (2.299)$$

Αφού όλοι οι συνδυασμοί των παραμέτρων που προέκυψαν στην (2.299) είναι ανεξάρτητοι, συμπεραίνουμε ότι:

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad (2.300)$$

και παρομοίως από το δεύτερο μεταθέτη της (2.298), παίρνουμε:

$$\{Q_a^*, Q_b^*\} = 0. \quad (2.301)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι παράμετροι  $\eta, \xi$  απαλείφονται και οι μεταθέτες της (2.298) γίνονται τελικά αντιμεταθέτες.

Τώρα, ας εξετάσουμε τον  $[\eta \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]$  όρο της (2.296).

- Για το  $\bar{\xi} \cdot \bar{Q}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} \cdot \bar{Q} &= \bar{\xi}_a \bar{Q}^a = \xi_a^* Q^{a*} = (\xi_a Q^a)^* = (\xi_a \epsilon^{ab} Q_b)^* \\ &= (\xi_1 \epsilon^{11} Q_1 + \xi_1 \epsilon^{12} Q_2 + \xi_2 \epsilon^{21} Q_1 + \xi_2 \epsilon^{22} Q_2)^* \\ &= (\xi_1 Q_2 - \xi_2 Q_1)^* = \xi_1^* Q_2^* - \xi_2^* Q_1^*. \end{aligned} \quad (2.302)$$

- Για το  $\eta \cdot Q$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta \cdot Q &= \eta^a Q_a = \epsilon^{ab} \eta_b Q_a = -\eta_b \epsilon^{ba} Q_a = -\eta_1 \epsilon^{1a} Q_a \\ &= -\eta_1 \epsilon^{11} Q_1 - \eta_1 \epsilon^{12} Q_2 - \eta_2 \epsilon^{21} Q_1 - \eta_2 \epsilon^{22} Q_2 \\ &= -\eta_1 Q_2 + \eta_2 Q_1. \end{aligned} \quad (2.303)$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} [\eta \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] &= \eta \cdot Q \bar{\xi} \cdot \bar{Q} - \bar{\xi} \cdot \bar{Q} \eta \cdot Q \\ &= (-\eta_1 Q_2 + \eta_2 Q_1)(\xi_1^* Q_2^* - \xi_2^* Q_1^*) - (\xi_1^* Q_2^* - \xi_2^* Q_1^*)(-\eta_1 Q_2 + \eta_2 Q_1) \\ &= -\eta_1 Q_2 \xi_1^* Q_2^* + \eta_2 Q_1 \xi_1^* Q_2^* - \eta_1 Q_2 \xi_2^* Q_1^* - \eta_2 Q_1 \xi_2^* Q_1^* \\ &\quad + \xi_1^* Q_2^* \eta_1 Q_2 - \xi_1^* Q_2^* \eta_2 Q_1 - \xi_2^* Q_1^* \eta_1 Q_2 + \xi_2^* Q_1^* \eta_2 Q_1 \\ &= \eta_1 \xi_1^* Q_2 Q_2^* - \eta_2 \xi_1^* Q_1 Q_2^* - \eta_1 \xi_2^* Q_2 Q_1^* + \eta_2 \xi_2^* Q_1 Q_1^* \\ &\quad \eta_1 \xi_1^* Q_2^* Q_2 - \eta_2 \xi_1^* Q_2^* Q_1 - \eta_1 \xi_2^* Q_1^* Q_2 + \eta_2 \xi_2^* Q_1^* Q_1 \\ &= \eta_1 \xi_1^* (Q_2 Q_2^* + Q_2^* Q_2) - \eta_2 \xi_1^* (Q_1 Q_2^* + Q_2^* Q_1) \\ &\quad - \eta_1 \xi_2^* (Q_2 Q_1^* + Q_1^* Q_2) + \eta_2 \xi_2^* (Q_1 Q_1^* + Q_1^* Q_1). \end{aligned} \quad (2.304)$$

Επομένως, δουλεύοντας με τον πρώτο όρο της (2.296) που είναι ανάλογος του  $\eta\xi^*$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
-(\eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) P_\mu &= - \left[ \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} \right] P_\mu \\
&= - \begin{pmatrix} \eta_2 & -\eta_1 \end{pmatrix} \sigma^\mu \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} P_\mu \\
&= \begin{pmatrix} -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^\mu & \sigma_{12}^\mu \\ \sigma_{21}^\mu & \sigma_{22}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi_2^* \\ \xi_1^* \end{pmatrix} P_\mu \\
&= [(-\eta_2 \sigma_{11}^\mu + \eta_1 \sigma_{21}^\mu) (-\xi_2^*) + (-\eta_2 \sigma_{12}^\mu + \eta_1 \sigma_{22}^\mu) \xi_1^*] P_\mu.
\end{aligned} \tag{2.305}$$

Επομένως, αφού δουλέψαμε και τα δύο μέλη της (2.296), αντικαθιστούμε σε αυτήν τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε στις (2.304) και (2.305) και καταλήγουμε στις ζητούμενες αντιμεταθετικές σχέσεις των υπερσυμμετρικών τελεστών:

$$\begin{aligned}
Q_2 Q_2^* + Q_2^* Q_2 &= \sigma_{22}^\mu P_\mu, & Q_1 Q_2^* + Q_2^* Q_1 &= \sigma_{12}^\mu P_\mu, \\
Q_2 Q_1^* + Q_1^* Q_2 &= \sigma_{21}^\mu P_\mu, & Q_1 Q_1^* + Q_1^* Q_1 &= \sigma_{11}^\mu P_\mu.
\end{aligned} \tag{2.306}$$

Ο  $Q$  είναι κβαντικός πεδιακός τελεστής άρα ενώ ως τώρα χρησιμοποιούσαμε καταχρηστικά το σύμβολο αυτό, πρέπει τώρα να αποκαταστήσουμε την τάξη. Έτσι, με αυτή την αλλαγή, οι 4 παραπάνω αντιμεταθετικές σχέσεις γράφονται σε μία περιεκτική σχέση:

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = \sigma_{ab}^\mu P_\mu. \tag{2.307}$$

Αυτή είναι η πολύ σημαντική σχέση που δίνει τη σωστή έκφραση της (2.31) που είχαμε υποθέσει στο πρώτο κεφάλαιο. Επιβεβαιώνουμε ότι οι τελεστές της υπερσυμμετρίας, συνδέονται με τον τελεστή των χωροχρονικών μεταθέσεων. Δικαιολογείται λοιπόν το γιατί θεωρούμε τη SUSY σαν κάποιο είδος επέκτασης του χωρόχρονου, με τον  $Q$  να παράγει τις υπερσυμμετρικές μεταθέσεις.

Σε συμφωνία με την (2.140), μπορούμε να ορίσουμε:

$$\bar{Q}_{\dot{a}} \equiv Q_a^\dagger, \tag{2.308}$$

με τις αντιμεταθετικές σχέσεις (2.300) και (2.307) να γίνονται:

$$\{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0, \quad \{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu. \tag{2.309}$$

Η υπερσυμμετρική άλγεβρα μπορεί επίσης να γραφτεί σε μορφή Majorana. Όπως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα Majorana σπίνορα από ένα 2–συνιστωσών σπίνορα  $\chi$  (ή  $\psi$ ), με την ίδια λογική μπορούμε να φτιάξουμε ένα 4–συνιστωσών Majorana σπινωριακό φορτίο  $Q_M$ , από το  $L$ –τύπου σπινωριακό φορτίο  $Q$ :

$$Q_M = \begin{pmatrix} i\sigma_2 Q^{\dagger T} \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_2^\dagger \\ -Q_1^\dagger \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \tag{2.310}$$

Έστω  $Q_{M\alpha}$  οι συνιστώσες του παραπάνω Majorana σπίνορα, με  $\alpha = 1 \dots 4$ . Οι αντιμεταθετικές σχέσεις παίρνουν λοιπόν τη μορφή:

$$\{Q_{M\alpha}, Q_{M\beta}\} = (\gamma^\mu (i\gamma^2 \gamma^0))_{\alpha\beta} P_\mu \Rightarrow \{Q_{M\alpha}, \bar{Q}_{M\beta}\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu. \quad (2.311)$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι ο μεταθέτης δύο μεταθέσεων είναι μηδέν (οι μεταθέσεις μετατίθενται) και ότι ο μεταθέτης των  $Q$  και  $P$  επίσης είναι μηδέν, πράγμα σχετικά προφανές, αφού ο  $Q$  δεν εξαρτάται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Επομένως, όλες οι μεταθετικές και αντιμεταθετικές σχέσεις ανάμεσα στους τελεστές  $Q, Q^\dagger, P$  είναι καλά ορισμένες, οπότε λέμε ότι η άλγεβρα των υπερμεταθέσεων (supertranslation) κλείνει.

### 2.4.3 Το υπερσυμμετρικό ρεύμα

Στην περίπτωση των συνηθισμένων συμμετριών, η αναλλοιώτητα της  $\mathcal{L}$  κάτω από μετασχηματισμούς των πεδίων υπονοεί την ύπαρξη ενός 4–διανύσματος  $j^\mu$  (το ρεύμα συμμετρίας), το οποίο διατηρείται:  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Ο γεννήτορας της εκάστοτε συμμετρίας είναι το φορτίο που σχετίζεται με το ρεύμα, δηλαδή το χωρικό ολοκλήρωμα του  $j^0$ . Το διατηρούμενο αυτό ρεύμα βρίσκεται εύκολα, αν θυμηθούμε τη διαδικασία. Έστω ότι η  $\mathcal{L}$  είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό

$$\phi_r \rightarrow \phi_r + \delta\phi_r, \quad (2.312)$$

όπου το  $\phi_r$  είναι ένα πεδίο  $r$  συνιστωσών μίας λαγκρατζιανής. Επομένως,

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_r)} \partial^\mu(\delta\phi_r) + h.c. \quad (2.313)$$

Όμως, από την εξίσωση κίνησης του  $\phi_r$ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right), \quad (2.314)$$

η (2.313) θα γίνει:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{όπου} \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r + h.c. \quad (2.315)$$

Ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα, αυτό της λαγκρατζιανής πυκνότητας:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i \not{\partial} - m)q, \quad \text{όπου} \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.316)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τον  $SU(2)$  απειροστό μετασχηματισμό (2.267), ο οποίος χαρακτηρίζεται από τρεις απειροστές παραμέτρους. Δηλαδή θα υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες συμμετρίες, τρία ρεύματα και τρία φορτία. Ας



πάρουμε το μετασχηματισμό που εμπλέκει μόνο το  $\epsilon_1$ . Έτσι ο μετασχηματισμός θα είναι ο  $\delta q = -i\epsilon_1(\tau_1/2)q$  και το ρεύμα θα είναι:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \delta q_{\epsilon_1} = \bar{q} i \gamma^\mu (-i\epsilon_1(\tau_1/2)) q = \epsilon_1 \bar{q} \gamma^\mu (\tau_1/2) q. \quad (2.317)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις τρεις απειροστές παραμέτρους καταλήγουμε στην ύπαρξη του ισοσπιν ρεύματος:

$$\mathbf{j}^\mu = \bar{q} \boldsymbol{\gamma}^\mu (\boldsymbol{\tau}/2) q, \quad (2.318)$$

με τα φορτία να δίνονται:

$$\mathbf{T} = \int q^\dagger (\boldsymbol{\tau}/2) q d^3 x. \quad (2.319)$$

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή στην περίπτωση της λαγκρατζιανής (2.232),  $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$ , του απλού υπερσυμμετρικού μοντέλου μας μπορούμε να βρούμε το υπερσυμμετρικό ρεύμα. Υπάρχει ωστόσο μία διαφορά ανάμεσα στην περίπτωση του  $SU(2)$  μοντέλου και του υπερσυμμετρικού. Στο πρώτο, η λαγκρατζιανή είναι πραγματικά αναλλοίωτη κάτω από τους πεδιακούς μετασχηματισμούς, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η λαγκρατζιανή δεν είναι μηδέν αλλά μία ολική παράγωγος, ως την ονομάσουμε  $\partial_\mu K^\mu$ , με αποτέλεσμα να μένει τελικά η δράση αναλλοίωτη. Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα θα δίνεται πλέον από τη σχέση<sup>14</sup>:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + h.c. - K^\mu. \quad (2.320)$$

Όμως, αφού τα φορτία της υπερσυμμετρίας είναι οι σπινόρες  $Q_a$ , αναμένουμε τα συσχετιζόμενα ρεύματα να φέρουν και αυτά σπινωριακούς δείκτες, συνεπώς θα είναι  $j_a^\mu$ . Τα υπερσυμμετρικά ρεύματα θα σχετίζονται με μετασχηματισμούς που χαρακτηρίζονται από τις σπινωριακές παραμέτρους  $\xi, \xi^*$ . Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \xi^T (-i\sigma_2) j^\mu + \xi^\dagger i\sigma_2 j^{\mu*} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta \phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \chi)} \delta \chi - K^\mu \\ &= \partial^\mu \phi^\dagger \delta \phi + \delta \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \delta \chi - K^\mu \\ &= \partial^\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \chi + \chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^* \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu (-i\sigma^\nu \bar{\xi} \partial_\nu \phi) \\ &\quad - \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi - \xi^T (i\sigma_2) \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \partial_\nu \phi^\dagger - \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger \\ &= \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu (-i\sigma^\nu) (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\nu \phi - \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger \\ &= \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu i\sigma_2 \xi^* \partial_\nu \phi + \xi^T (-i\sigma_2) \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger. \quad (2.321) \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Μανωλάκος Γιώργος, Διπλωματική εργασία: Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED, 2012

Συνοπώς, καταλήγουμε ότι το ρεύμα είναι:

$$j^\mu = \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger. \quad (2.322)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, το ρεύμα αυτό έχει δύο σπινωριακές συνιστώσες.

Τα υπερσυμμετρικά φορτία (γεννήτορες) δίνονται, όπως προαναφέραμε, από το χωρικό ολοκλήρωμα της  $\mu = 0$  συνιστώσας του υπερσυμμετρικού ρεύματος, (2.322), έτσι ώστε:

$$Q_a = \int (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) d^3 y. \quad (2.323)$$

Θα επαληθεύσουμε ότι αυτά τα φορτία όντως παράγουν τους απαιτούμενους μετασχηματισμούς των πεδίων, δηλαδή ότι:

$$(\alpha) \quad i [\xi \cdot Q, \phi(x)] = \xi \cdot \chi(x) = \delta_\xi \phi$$

$$(\beta) \quad i [\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \chi(x)] = -i \sigma^\mu (i \sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi(x) = \delta_\xi \chi$$

(α) Θα ξεκινήσουμε από το πρώτο μέλος και θα καταλήξουμε στο δεύτερο:

$$\begin{aligned} i [\xi \cdot Q, \phi(x)] &= i [\xi^a Q_a, \phi(x)] = i \left[ \xi^a \int (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) d^3 y, \phi(x) \right] \\ &= i \int \xi^a (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) d^3 y - i \int \xi^a (\sigma^\nu \chi(y))_a \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) d^3 y \\ &= i \int \xi^a (\sigma^0 \chi(y))_a \partial_0 \phi^\dagger(y) \phi(x) - i \int \xi^a (\sigma^0 \chi(y))_a \phi(x) \partial_0 \phi^\dagger(y) d^3 y \\ &\quad + i \int \xi^a (\boldsymbol{\sigma} \chi(y))_a \nabla \phi^\dagger(y) \phi(x) - i \int \xi^a (\boldsymbol{\sigma} \chi(y))_a \phi(x) \nabla \phi^\dagger(y) d^3 y \\ &= i \int \xi^a (\sigma^0 \chi(y))_a \left( \dot{\phi}^\dagger(y) \phi(x) - \phi(x) \dot{\phi}^\dagger(y) \right) d^3 y \\ &\quad + i \int \xi^a (\boldsymbol{\sigma} \chi(y))_a \left( \nabla \phi^\dagger(y) \phi(x) - \phi(x) \nabla \phi^\dagger(y) \right) d^3 y \\ &\stackrel{(2.325)}{=} i \int \xi^a \chi(y) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3 y = i \xi^a \int \chi_a(y) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3 y \\ &= i \xi^a \chi_a(x) = i \xi \cdot \chi(x). \end{aligned} \quad (2.324)$$

Αποδείχθηκε το ζητούμενο, κάνοντας χρήση και των μποζονικών (ίδιου χρόνου) σχέσεων μετάθεσης:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.325)$$

(β) Θα ξεκινήσουμε από το πρώτο μέλος και θα καταλήξουμε στο δεύτερο :

$$\begin{aligned}
 i [\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \chi(x)] &= i [\xi^a Q_a + \bar{\xi}_a \bar{Q}^a, \chi(x)] = i [\xi^a Q_a + \xi_a^* Q^{\dagger a}, \chi(x)] \\
 &= i [\xi^a Q_a - \xi^{a*} Q_a^\dagger, \chi(x)] = \underbrace{+i [\xi^a Q_a, \chi(x)]}_{(1)} - \underbrace{i [\xi^{a*} Q_a^\dagger, \chi(x)]}_{(2)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.326}$$

• Για τον όρο (1) της (2.326):

$$\begin{aligned}
 i [\xi^a Q_a, \chi(x)] &= i \left[ \xi^a \int (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) d^3 y, \chi_b(x) \right] \\
 &= i \int \xi^a (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) \chi_b(x) d^3 y - i \int \chi_b(x) \xi^a (\sigma^\nu \chi(y))_a \partial_\nu \phi^\dagger(y) d^3 y \\
 &= i \int \xi^a \sigma^0 \chi(y) \partial_0 \phi^\dagger(y) \chi_b(x) d^3 y + i \int \xi^a \boldsymbol{\sigma} \chi_a(y) \boldsymbol{\nabla} \phi^\dagger \chi_b(x) d^3 y \\
 &\quad - i \int \chi_b(x) \xi^a \sigma^0 \chi(y) \partial_0 \phi^\dagger(y) d^3 y - i \int \chi_b(x) \xi^a \boldsymbol{\sigma} \chi_a(y) \boldsymbol{\nabla} \phi^\dagger(y) d^3 y \\
 &= i \int \xi^a \left( \chi_a(y) \chi_b(x) + \chi_b(x) \chi_a(y) \right) \partial_0 \phi^\dagger(y) d^3 y \\
 &\quad + i \int \xi^a \boldsymbol{\sigma} \left( \chi_a(y) \chi_b(x) + \chi_b(x) \chi_a(y) \right) \boldsymbol{\nabla} \phi^\dagger(y) d^3 y = 0.
 \end{aligned}$$

- Για τον όρο (2) της (2.326):

$$\begin{aligned}
-i \left[ \xi^{a*} Q_a^\dagger, \chi_b(x) \right] &= -i \left( \int \xi^{a*} \partial_\nu \phi(y) (\chi^\dagger(y) \sigma^\nu)_a \chi_b(x) d^3y \right. \\
&\quad \left. - \int \chi_b(x) \xi^{a*} \partial_\nu \phi(y) (\chi^\dagger \sigma^\nu)_a d^3y \right) \\
&= -i \left( \int \xi^{a*} \partial_0 \phi(y) (\chi^\dagger(y) \sigma^0)_a \chi_b(x) d^3y + \int \xi^{a*} \nabla \phi(y) (\chi^\dagger(y) \boldsymbol{\sigma})_a \chi_b(x) d^3y \right. \\
&\quad \left. + \int \xi^{a*} \chi_b(x) \partial_0 \phi(y) (\chi^\dagger(y) \sigma^0)_a d^3y + \int \xi^{a*} \chi_b(x) \nabla \phi(y) (\chi^\dagger(y) \boldsymbol{\sigma})_a d^3y \right) \\
&= -i \int \xi^{a*} \partial_0 \phi(y) \chi_a^\dagger(y) \chi_b(x) d^3y - i \int \xi^{a*} \nabla \phi(y) \chi_a^\dagger(y) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \chi_b(x) d^3y \\
&\quad + \int \xi^{a*} \chi_b(x) \partial_0 \phi(y) \chi_a^\dagger(y) d^3y + i \int \xi^{a*} \chi_b(x) \nabla \phi(y) \chi_a^\dagger(y) \boldsymbol{\sigma} d^3y \\
&= -i \int \xi^{a*} \partial_0 \phi(y) \left( \chi_a^\dagger(y) \chi_b(x) + \chi_b(x) \chi_a^\dagger(y) \right) d^3y \\
&\quad - i \int \xi^{a*} \nabla \phi(y) \boldsymbol{\sigma} \left( \chi_a^\dagger \chi_b(x) + \chi_b(x) \chi_a^\dagger(y) \right) d^3y \\
&\stackrel{(2.327)}{=} -i \int \xi^{a*} \partial_0 \phi(y) \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3y - i \int \xi^{a*} \nabla \phi(y) \boldsymbol{\sigma} \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3y \\
&= - \int \xi^{a*} (\partial_0, \nabla) \phi(y) (1, \boldsymbol{\sigma}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3y \\
&= -i \int \xi^{a*} \partial_\mu \phi(y) \sigma^\mu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3y = -i \xi^{a*} \partial_\mu \phi(x) \sigma^\mu \\
&= -i \xi^{a*} \sigma^\mu \partial_\mu \phi(x) = -i \xi_a^* (-i \sigma_2) \sigma^\mu \partial_\mu \phi(x) = -i \sigma^\mu (i \sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi(x),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των φερμιονικών (ίδιου χρόνου) σχέσεων αντιμετάθεσης

$$\left[ \chi_a(\mathbf{x}, t), \chi_b^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.327)$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι μόνο ο δεύτερος όρος δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα, οπότε, αντικαθιστώντας στην (2.326), παίρνουμε:

$$i \left[ \xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \chi(x) \right] = -i \sigma^\mu (i \sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi(x), \quad (2.328)$$

που είναι το ζητούμενο.

Κλείνοντας, συνοψίζουμε όλες τις (αντι-)μεταθετικές σχέσεις που βρήκαμε:

$$[Q_a, P_\mu] = 0, \quad (2.329)$$

$$[\bar{Q}_a, P_\mu] = 0, \quad (2.330)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0, \quad (2.331)$$

$$\{\bar{Q}_a, \bar{Q}_b\} = 0, \quad (2.332)$$

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu. \quad (2.333)$$

Στο υποκεφάλαιο που ακολουθεί θα αναλύσουμε τις φυσικές συνέπειες που απορρέουν από τις σχέσεις αυτές.

#### 2.4.4 Supermultiplets

Καταρχήν, σημειώνουμε ότι από τις (2.329), (2.330) καταλαβαίνουμε ότι ο τελεστής  $P^2$  μετατίθεται με όλους τους υπερσυμμετρικούς γεννήτορες  $Q$ . Αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις μιας supermultiplet (οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με τη δράση των γεννητόρων) πρέπει να έχουν όλες την ίδια μάζα. Παρ'όλα αυτά, αφού οι  $Q_a, Q_a^\dagger$  είναι σπινორιακοί τελεστές, αυτό σημαίνει ότι η δράση πάνω σε μία κατάσταση με σπιν  $j$ , θα παράγει μία άλλη κατάσταση που θα διαφέρει από την αρχική,  $j$ , κατά  $1/2$ . Σε αναλογία με την (2.272), γνωρίζουμε ότι κάτω από στροφές ισχύει ότι:

$$\delta Q = -(i\epsilon \cdot \sigma/2)Q = i\epsilon[\mathbf{J}, Q], \quad (2.334)$$

όπου  $J$  είναι οι γεννήτορες των στροφών, ή αλλιώς οι γεννήτορες της ομάδας στροφορμών. Επομένως, για παράδειγμα, για μία στροφή γύρω από τον 3-άξονα έχουμε:

$$-\frac{1}{2}\sigma_3 Q = [J_3, Q], \quad (2.335)$$

το οποίο υπονοεί ότι:

$$[J_3, Q_1] = -\frac{1}{2}Q_1, \quad [J_3, Q_2] = \frac{1}{2}Q_2. \quad (2.336)$$

Έπεται λοιπόν ότι για μία κατάσταση σπιν- $j$  με  $J_3 = m, |j m\rangle$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (J_3 Q_1 - Q_1 J_3)|j m\rangle &= -\frac{1}{2}Q_1|j m\rangle \Leftrightarrow \\ J_3 Q_1|j m\rangle - Q_1 J_3|j m\rangle &= \frac{1}{2}Q_1|j m\rangle \Leftrightarrow \\ J_3 Q_1|j m\rangle - Q_1(m|j m\rangle) &= \frac{1}{2}Q_1|j m\rangle \Leftrightarrow \\ J_3 Q_1|j m\rangle &= mQ_1|j m\rangle + \frac{1}{2}Q_1|j m\rangle \Leftrightarrow \\ J_3(Q_1|j m\rangle) &= \left(m - \frac{1}{2}\right)Q_1|j m\rangle, \end{aligned} \quad (2.337)$$

το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση  $Q_1|j m\rangle$  είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή με ιδιοτιμή  $m - \frac{1}{2}$ . Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής  $Q_1$  κατεβάζει την  $m$ -τιμή κατά  $1/2$ . Ανάλογα, ο τελεστής  $Q_2$ , ανεβάζει την προβολή της στροφορμής  $m$  κατά  $1/2$ . Επίσης, καταλαβαίνουμε ότι αφού  $[J_3, Q_1^\dagger] = \frac{1}{2}Q_1^\dagger$ , βρίσκουμε ότι ο  $Q_1^\dagger$  ανεβάζει την τιμή  $m$  κατά  $1/2$ , ενώ ο  $Q_2^\dagger$  την κατεβάζει.

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε τώρα, είναι να βρούμε τη φύση των καταστάσεων που συνδέονται μεταξύ τους με την εφαρμογή των  $Q_a, Q_a^\dagger$ , δηλαδή

Θέλουμε να πάρουμε το φάσμα των ιδιοκαταστάσεων των υπερσυμμετρικών τελεστών. Η εργασία αυτή είναι η ανάλογη εργασία που έχουμε ήδη κάνει για την περίπτωση των  $J$  γεννητόρων, για την άλγεβρα των περιστροφών (για την οποία έχουμε βρει  $2j + 1$  τον αριθμό ιδιοκαταστάσεις) και βρίσκεται αναλυτικά γραμμένη στο παράρτημα της εργασίας. Με την ίδια λογική λοιπόν, όπως στην περίπτωση της  $SU(2)$  ονομάσαμε τις καταστάσεις  $|j m\rangle$ , έτσι και εδώ θα τις ονομάσουμε  $|p \lambda\rangle$ , όπου (χωρίς βλάβη της γενικότητας) θα πάρουμε την 4-ορμή να είναι  $p^\mu = (E, 0, 0, E)$  -μιας και τα πεδία είναι άμαζα- και  $\lambda$  είναι ελικότητα που εδώ είναι ισοδύναμη με την ιδιοτιμή του  $J_3$ ,  $m$ . Θεωρούμε την κατάσταση  $|p, -j\rangle$  να είναι η κανονικοποιημένη ιδιοκατάσταση του  $J_3$  με ιδιοτιμή  $\lambda = m = -j$ , δηλαδή την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το  $\lambda$  για ένα δοσμένο  $j$ . Επομένως, αφού όπως προαναφέραμε οι τελεστές  $Q_1, Q_2^\dagger$  κατεβάζουν την  $m$ - τιμή κατά  $1/2$ , αυτό σημαίνει ότι όταν δράσουν στην κατάσταση χαμηλότερου  $\lambda = -j$ , θα δίνουν αυτομάτως μηδέν.

$$Q_1|p, -j\rangle = Q_2^\dagger|p, -j\rangle = 0. \quad (2.338)$$

Αυτό επιτρέπει μόνο δύο καταστάσεις που συνδέονται με την  $|p, -j\rangle$  μέσω υπερσυμμετρικών τελεστών, τις:

$$Q_1^\dagger|p, -j\rangle, \quad Q_2|p, -j\rangle. \quad (2.339)$$

Η πρώτη πρέπει να εξαφανίζεται. Αυτό έπεται αν πάρουμε την αντιμεταθετική σχέση (2.307) για  $a = b = 1$ :

$$Q_1^\dagger Q_1 + Q_1 Q_1^\dagger = (\sigma^\mu)_{11} P_\mu. \quad (2.340)$$

Οι μόνες συνιστώσες του  $\sigma^\mu$  που έχουν μη μηδενικό το 11 στοιχείο είναι οι  $(\sigma^0)_{11} = 1, \sigma_{11}^3 = 1$ , επομένως η τελευταία σχέση γίνεται:

$$Q_1^\dagger Q_1 + Q_1 Q_1^\dagger = P_0 + P_3 = P^0 - P^3. \quad (2.341)$$

Επομένως, αν πάρουμε την αναμενόμενη τιμή της κατάστασης  $|p, -j\rangle$ , βρίσκουμε ότι:

$$\langle p, -j|Q_1^\dagger Q_1 + Q_1 Q_1^\dagger|p, -j\rangle = 0, \quad (2.342)$$

αφού στην περιπτώσή μας,  $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ , η διαφορά  $P^0 - P^3$  εξαφανίζεται. Όμως, από την (2.338) έχουμε ότι  $\langle p, -j|Q_1^\dagger = 0$ , κι επομένως συνάγεται ότι:

$$\langle p, -j|Q_1 Q_1^\dagger|p, -j\rangle = 0, \quad (2.343)$$

πράγμα που σημαίνει είτε ότι η κατάσταση  $Q_1^\dagger|p, -j\rangle$  έχει μηδενική νόρμα (που είναι έτσι κι αλλιώς μία μη αποδεκτή κατάσταση), είτε ότι:

$$Q_1^\dagger|p, -j\rangle = 0. \quad (2.344)$$

Συνεπώς, το συμπέρασμα αυτό μας αφήνει με μία μόνο κατάσταση να παράγεται από τη χαμηλότερη κατάσταση  $|p, -j\rangle$ , την  $Q_2|p, -j\rangle$ . Έχουμε βρει ότι

όταν ο  $Q_2$  δράσει πάνω σε μία κατάσταση ανεβάζει την τιμή της προβολής της στροφορμής (εδώ της ελικότητας) κατά  $1/2$ . Συνεπώς:

$$Q_2|p, -j\rangle \sim \left|p, -j + \frac{1}{2}\right\rangle. \quad (2.345)$$

Ας περάσουμε τώρα να δούμε τη δράση των 4 υπερσυμμετρικών γεννητόρων πάνω σε αυτήν τη νέα κατάσταση  $|p, -j + \frac{1}{2}\rangle$ :

1. Δράση με τον τελεστή  $Q_1$ :

$$Q_1\left|p, -j + \frac{1}{2}\right\rangle \stackrel{(2.345)}{\sim} Q_1 Q_2|p, -j\rangle \stackrel{(2.331)}{=} -Q_2 Q_1|p, -j\rangle = 0.$$

2. Δράση με τον τελεστή  $Q_2$ :

$$Q_2\left|p, -j + \frac{1}{2}\right\rangle \stackrel{(2.345)}{\sim} Q_2 Q_2|p, -j\rangle \stackrel{(2.331)}{=} 0.$$

3. Δράση με τον τελεστή  $Q_1^\dagger$ :

$$Q_1^\dagger\left|p, -j + \frac{1}{2}\right\rangle \stackrel{(2.345)}{\sim} Q_1^\dagger Q_2|p, -j\rangle \stackrel{(2.333)}{=} \left( \cancel{(\sigma^0)_{12} P_0} + \cancel{(\sigma^3)_{12} P_3} - Q_2^\dagger Q_1 \right) |p, -j\rangle = 0.$$

4. Δράση με τον τελεστή  $Q_2^\dagger$ :

$$Q_2^\dagger\left|p, -j + \frac{1}{2}\right\rangle \stackrel{(2.345)}{\sim} Q_2^\dagger Q_2|p, -j\rangle \stackrel{(2.333)}{=} \left( \cancel{(\sigma^0)_{22} P_0} + \cancel{(\sigma^3)_{22} P_3} - Q_2 Q_2^\dagger \right) |p, -j\rangle = (2E - Q_2 Q_2^\dagger)|p, -j\rangle \sim |p, -j\rangle.$$

Παρατηρούμε, ότι η δράση του τελεστή  $Q_2^\dagger$  στην κατάσταση  $|p, -j + \frac{1}{2}\rangle$ , μας γυρνάει πίσω στην κατάσταση  $|p, -j\rangle$  από την οποία ξεκινήσαμε. Επομένως, βλέπουμε πως υπάρχουν μόνο δύο καταστάσεις εντός μίας supermultiplet άμαζων σωματιδίων, μία με ελικότητα  $-j$  και μία με ελικότητα  $-j + 1/2$ . Παρ' όλα αυτά, κάθε Lorentz (τοπικά) αναλλοίωτη κβαντική θεωρία πεδίου πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τη συνδυασμένη δράση TCP. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε supermultiplet άμαζων σωματιδίων με ελικότητες  $-j, -j + 1/2$  πρέπει να υπάρχει μία αντίστοιχη supermultiplet άμαζων αντισωματιδίων με ελικότητες  $j, j + 1/2$ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι εξίσου ορθό θα ήταν να είχαμε ξεκινήσει από την κατάσταση μέγιστης ελικότητας  $j$  και να καταλήγαμε τελικά με τις supermultiplets  $|p, \lambda = j\rangle, |p, \lambda = j - 1/2\rangle$  και τις TCP συζυγείς τους.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση  $j = 1/2$ . Σε αυτήν θα έχουμε μία supermultiplet, η οποία αποτελείται από δύο καταστάσεις  $|p, \lambda = -1/2\rangle$  και

$p, \lambda = 0$ ). Η δεύτερη δεν μπορεί να συνδεθεί με κάποιο διανυσματικό μποζόνιο με σπιν-1, αφού δεν υπάρχει ιδιοκατάσταση της ελικοτήτας με ιδιοτιμή  $\lambda = 0$ . Επομένως, θα πρέπει να είναι μία σπιν-0 κατάσταση. Αυτή είναι λοιπόν η left chiral supermultiplet η οποία αποτελείται από μία άμαζη LH σπιν-1/2 κατάσταση και μία άμαζη, βαθμωτή κατάσταση. Τα πεδία στα οποία αντιστοιχούν οι καταστάσεις είναι  $L$ -τύπου Weyl φερμιόνιο  $\chi$  και ένα βαθμωτό  $\phi$ , όπως αυτά που μελετήσαμε στο απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο νωρίτερα.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θα τοποθετήσουμε τα φερμιόνια του SM σε chiral supermultiplets ταιριασμένα με κατάλληλα squarks και sleptons. Ας πάρουμε για παράδειγμα τις καταστάσεις του ηλεκτρονίου και του νετρίνου. Οι αριστερόστροφες συνιστώσες τους σχηματίζουν μία  $SU(2)_L$  διπλέτα η οποία ταιριάζεται από μία διπλέτα βαθμωτών πεδίων σε μία left-chiral supermultiplet:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{eL} \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}. \quad (2.346)$$

Η TCP συμμετρία εγγυάται την παρουσία των καταστάσεων των αντισωματιδίων<sup>15</sup>:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_L \\ \bar{\nu}_{eL} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\bar{e}}_L \\ \tilde{\bar{\nu}}_{eL} \end{pmatrix}. \quad (2.347)$$

Όμως, όπως γνωρίζουμε, η RH συνιστώσα  $e_R$  είναι singlet κάτω από την  $SU(2)_L$  κι επομένως δεν μπορεί να ταιριάζει με την selectron κατάσταση που εισαγάγαμε παραπάνω. Αντίθετα, ταιριάζεται με μία νέα selectron κατάσταση, την  $\tilde{e}_R$  με την οποία σχηματίζουν μία right-chiral supermultiplet,  $e_R, \tilde{e}_R$ . Οι αντίστοιχες καταστάσεις αντισωματιδίων  $\bar{e}_L, \tilde{\bar{e}}_L$  σχηματίζουν μία left-chiral supermultiplet.

Στην περίπτωση όπου  $j = 1$ , η supermultiplet αποτελείται από δύο καταστάσεις,  $|p, \lambda = -1\rangle, |p, \lambda = -1/2\rangle$ , η οποία συνταιριάζει μία άμαζη σπιν-1 κατάσταση με μία LH σπιν-1/2 κατάσταση. Αυτή είναι η διανυσματική ή (gauge) supermultiplet. Σε όρους πεδίων, η supermultiplet περιέχει ένα άμαζο διανυσματικό πεδίο και έναν άμαζο σπίνορα Weyl. Τα διανυσματικά πεδία του SM ανατίθενται στις διανυσματικές supermultiplets. Στην περίπτωση αυτή, η TCP συμμετρία εγγυάται την εμφάνιση και των δύο ελικοτήτων, με τις αντισωματιδικές καταστάσεις να περιέχονται στην ίδια (adjoint) αναπαράσταση της gauge ομάδας με τα αντίστοιχα σωματίδια (δύο τέτοια είναι τα  $W^+, W^-$ ). Στο MSSM τα διανυσματικά πεδία ταιριάζονται με Weyl σπίνορες, οι οποίοι ανήκουν επίσης στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας.

### 2.4.5 Μία σημαντική επιπλοκή και η λύση της

Νωρίτερα, καταλήξαμε στην υπερσυμμετρική άλγεβρα υπολογίζοντας τη διαφορά  $\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta$  με δύο διαφορετικούς τρόπους και εφαρμόζοντας την πάνω

<sup>15</sup>Οι δείκτες στα υπερσυμμετρικά ταιρία δεν αφορούν τα πεδία αυτά αφού είναι βαθμωτά και δεν έχουν χειραλικότητα. Αφορούν τα SM ταιρία τους στα οποία και αντιστοιχούν.



στο πεδίο  $\phi$ . Είναι σημαντικό ένα συνεπές αποτέλεσμα να προκύπτει και αν εφαρμόσουμε τη διαφορά πάνω στο  $\chi$ . Όμως η αφελής αντιμετώπιση να αντικαταστήσουμε με το πεδίο  $\chi$  το πεδίο  $\phi$  στο αποτέλεσμα, (2.297), δεν μας ικανοποίησε και τώρα θα δούμε το λόγο.

Θεωρούμε αρχικά το  $\delta_\eta \delta_\xi \chi_a$ :

$$\begin{aligned} \delta_\eta \delta_\xi \chi_a &\stackrel{(2.284)}{=} \delta_\eta (-i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*))_a \partial_\mu \phi \\ &= (i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \xi^*))_a \partial_\mu \delta_\eta \phi \\ &= (i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \xi^*))_a (\eta^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi). \end{aligned} \quad (2.348)$$

Υπάρχει μία σημαντική ταυτότητα που εμπλέκει γινόμενα τριών σπινόρων, την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να απλοποιήσουμε την (2.348):

$$\lambda_a (\zeta^T (-i\sigma_2) \rho) + \zeta_a (\rho^T (-i\sigma_2) \lambda) + \rho_a (\lambda^T (-i\sigma_2) \zeta) = 0, \quad (2.349)$$

την οποία και εξακριβώνουμε:

$$\begin{aligned} \lambda_a (\zeta^T (-i\sigma_2) \rho) + \zeta_a (\rho^T (-i\sigma_2) \lambda) + \rho_a (\lambda^T (-i\sigma_2) \zeta) = \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} -\lambda_1 \zeta_1 \rho_2 + \lambda_1 \zeta_2 \rho_1 \\ -\lambda_2 \zeta_1 \rho_2 + \lambda_2 \zeta_2 \rho_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_1 \rho_1 \lambda_2 + \zeta_1 \rho_2 \lambda_1 \\ -\zeta_2 \rho_1 \lambda_2 + \zeta_2 \rho_2 \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho_1 \lambda_1 \zeta_2 + \rho_1 \lambda_2 \zeta_1 \\ -\rho_2 \lambda_1 \zeta_2 + \rho_2 \lambda_2 \zeta_1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Όποτε, στην (2.348) εφαρμόζουμε την ταυτότητα (2.349) για:

$$\lambda_a = (\sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^*)_a, \quad \zeta_a = \eta_a, \quad \rho_a = \partial_\mu \chi_a,$$

κι έτσι για την (2.348) έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_\eta \delta_\xi \chi_a &= \underbrace{(i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \xi^*))_a}_{\lambda_a} \underbrace{(\eta^T)}_{\zeta_a^T} \underbrace{(-i\sigma_2)}_{(-i\sigma_2)} \underbrace{\partial_\mu \chi}_a \\ &= -i(\eta \partial_\mu \chi^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^*)_a - i \partial_\mu \chi_a (\sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^*)^T (-i\sigma_2) \eta \\ &= -i \underbrace{(\eta_a \partial_\mu \chi^T \bar{\sigma}^{\mu T} \xi^*)}_{(a)} + \underbrace{\partial_\mu \chi_a (\sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^*)^T (-i\sigma_2) \eta}_b. \end{aligned} \quad (2.350)$$

- Για τον (a) όρο έχουμε:

$$i\eta_a (\partial_\mu \chi^T \bar{\sigma}^{\mu T} \xi^*) = -i\eta_a (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi). \quad (2.351)$$

- Για τον (b) όρο έχουμε:

$$\left[ (\sigma^\mu (-i\sigma_2) \xi^*)^T (-i\sigma_2) \eta \right]^T = -(-\eta^T \xi^* (-i\sigma_2) \sigma^\mu (-i\sigma_2)). \quad (2.352)$$

Επομένως, αντικαθιστούμε στην (2.350) η οποία γίνεται :

$$\delta_\eta \delta_\xi \chi_a = -i\eta_a \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - i\eta^T (-i\sigma_2) (-i\sigma_2) \xi^* \partial_\mu \chi_a. \quad (2.353)$$

Συνεπώς, η συνολική διαφορά  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi$  που μας ενδιαφέρει θα είναι :

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi &= (\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* - \eta^T c \sigma^\mu c \xi^*) i \partial_\mu \chi_a \\ &+ i \xi_a (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) - i \eta_a (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi). \end{aligned} \quad (2.354)$$

Τώρα η δυσκολία γίνεται ορατή. Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της (2.354) είναι όντως ο ίδιος με την (2.297), δηλαδή με την αφελή αντικατάσταση του πεδίου  $\chi$  στο  $\phi$  της (2.291). Ο λόγος λοιπόν που η αφελής αντικατάσταση δεν είναι σωστή, είναι ότι εμφανίζονται δύο πλεονάζοντες όροι στην (2.354). Αυτό βέβαια δε μας εκπλήσσει, καθώς υπάρχει η ειδοποιός διαφορά στα δύο πεδία : ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας τους.

Οι δύο ανεπιθύμητοι όροι εξαφανίζονται όταν για ένα άμαζο πεδίο ικανοποιείται η εξίσωση κίνησης  $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = 0$ , δηλαδή όταν το σωματίδιο είναι on-shell. Όμως αυτό δεν είναι αρκετό καθώς θέλουμε μία συμμετρία να εφαρμόζεται τόσο για τις on-shell εξωτερικές γραμμές, όσο και για τις εσωτερικές γραμμές (off-shell) των διαγραμμάτων Feynman. Η διαφορά στους βαθμούς ελευθερίας (δύο το  $\phi$  πεδίο, τέσσερις το  $\chi$ ) προτείνει ότι πρέπει να εισαγάγουμε δύο βαθμούς ελευθερίας για να συμπληρώσουν τους δύο του  $\phi$  πεδίου, για παράδειγμα, με την εισαγωγή ενός δεύτερου βαθμωτού μιγαδικού πεδίου,  $F$ . Η εισαγωγή αυτή του έξτρα πεδίου γίνεται με τον «φθηνότερο τρόπο» (αρκεί να δουλεύει!), ο οποίος είναι απλά να προσθέσουμε έναν όρο  $F^\dagger F$  στην λαγκρατζιανή (2.232), έτσι ώστε το  $F$  να μην έχει κινητικό όρο :

$$\mathcal{L}_F = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + F^\dagger F. \quad (2.355)$$

Σύμφωνα με τη στρατηγική που ακολουθούμε γενικά, πρέπει να εφεύρουμε έναν SUSY μετασχηματισμό για το νέο βοηθητικό πεδίο  $F$  και τα ήδη υπάρχοντα πεδία  $\phi, \chi$ , τέτοιους ώστε πρώτον, η  $\mathcal{L}_F$  να παραμένει αναλλοίωτη (ή να είναι μία ολική παράγωγος) και δεύτερον οι ανεπιθύμητοι όροι της (2.354) να απαλείφονται.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο  $F$  έχει διάσταση  $M^2$ , προτείνοντας (διαστατικά) ότι το  $\delta_\xi F$  πρέπει να είναι της μορφής :

$$\delta_\xi F \sim \xi \partial_\mu \chi. \quad (2.356)$$

Όμως, προκειμένου να εξασφαλίσουμε τη Lorentz covariance, θα πρέπει να κάνουμε και το δεξί μέλος της (2.356) Lorentz αναλλοίωτο, όπως είναι και το αριστερό μέλος. Από την (2.86), γνωρίζουμε ότι το  $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$  μετασχηματίζεται όπως ένας  $\psi$ -τύπου σπινόρας καθώς επίσης και από την (2.77), ότι το αντικείμενο της μορφής  $\xi^\dagger \psi$  είναι Lorentz αναλλοίωτο. Επομένως, έπεται ότι η προσεγγιστική σχέση (2.356), γίνεται :

$$\delta_\xi F = -i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (2.357)$$

και αντίστοιχα :

$$\delta_\xi F^\dagger = i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi. \quad (2.358)$$

Παρατηρούμε ότι, αφού η παράμετρος  $\xi$  είναι ανεξάρτητη από το  $x$ , οι μεταβολές των  $F, F^\dagger$ , (2.357), (2.358), είναι ολικές παράγωγοι.

Το γεγονός λοιπόν ότι οι μεταβολές αυτές εξαφανίζονται στην περίπτωση που το σωματίδιο είναι on-shell, προτείνει ότι ίσως να είναι ικανές να ακυρώσουν τους ανεπιθύμητους όρους της (2.354).

Πρώτα πρέπει να εξασφαλίσουμε την αναλλοιωτότητα της  $\mathcal{L}_F$  (ή της αντίστοιχης δράσης). Κάτω λοιπόν από τις μεταβολές (2.357), (2.358), ο  $F^\dagger F$  όρος της (2.355) γίνεται :

$$(\delta_\xi F^\dagger)F + F^\dagger(\delta_\xi F) = (i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi)F - F^\dagger(i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi). \quad (2.359)$$

Οι όροι αυτοί έχουν δομή παρόμοια με αυτή που έχει η μεταβολή του  $\chi$ -όρου της  $\mathcal{L}_F$ :

$$\delta_\xi(\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) = (\delta_\xi \chi^\dagger) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi). \quad (2.360)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν επιλέξουμε :

$$\begin{aligned} (\delta_\xi \chi^\dagger)' &= \text{προηγούμενη μεταβολή του } \chi^\dagger + F^\dagger \xi^\dagger \\ &= -\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 i\sigma^\mu + F^\dagger \xi^\dagger, \end{aligned} \quad (2.361)$$

$$\begin{aligned} (\delta_\xi \chi)' &= \text{προηγούμενη μεταβολή του } \chi + \xi F \\ &= -i\sigma^\mu (i\sigma_2) \xi^* \partial_\mu \phi + \xi F, \end{aligned} \quad (2.362)$$

τότε ο πρώτος όρος της (2.360) θα γίνει :

$$\delta_\xi \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \rightarrow (\delta_\xi \chi^\dagger)' i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = \delta_\xi \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + iF^\dagger \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi, \quad (2.363)$$

όπου βλέπουμε ότι ο τελευταίος όρος της (A.37) ακυρώνεται τέλεια από τον δεύτερο όρο της (2.359).

Παρομοίως, ο δεύτερος όρος της (2.360) θα γίνει :

$$\begin{aligned} \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) &\rightarrow \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi)' = \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\xi F) \\ &= \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) + \partial_\mu (\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F) - \partial_\mu \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F. \end{aligned} \quad (2.364)$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος της (2.364) είναι μία ολική παράγωγος, που σημαίνει ότι δε μεταβάλλει τη δράση, ενώ ο τρίτος ακυρώνεται από τον πρώτο όρο της (2.359).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι η συνολική μεταβολή των δύο τελευταίων όρων της  $\mathcal{L}_F$  είναι, πέρα από τις ήδη υπάρχουσες μεταβολές πριν την εισαγωγή του  $F^\dagger F$  όρου, μία αβλαβής ολική παράγωγος. Αφού, ο μετασχηματισμός του

$\phi$  δεν έχει αλλάξει, αυτό συνεπάγεται την αναλλοιώτητα της  $\mathcal{L}_F$  «up to» μίας ολικής παραγώγου:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \mathcal{L}_F &= \partial_\mu (\delta_\xi \phi^\dagger) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\delta_\xi \phi) + (\delta_\xi \chi^\dagger) i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) + \delta_\xi F^\dagger F + F^\dagger \delta_\xi F \\
&= \partial_\mu (\chi^\dagger (i\sigma_2) \xi^*) \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu (\xi^T (-i\sigma_2) \chi) \\
&\quad + \delta_\xi \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \overline{iF^\dagger \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi} + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \chi) + \partial_\mu (\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F) - \overline{\partial_\mu \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F} \\
&\quad + \overline{i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi F} - \overline{F^\dagger i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi} \\
&\stackrel{(2.256)}{=} \partial_\mu \left( \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi \right) + \partial_\mu (\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F) \\
&= \partial_\mu \left( \chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi + \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \partial^\mu \chi + \phi^\dagger \xi^T i\sigma_2 \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F \right). \tag{2.365}
\end{aligned}$$

Όπως φαίνεται στην (2.365), καταλήξαμε στο ότι η μεταβολή της λαγκρανζιανής  $\mathcal{L}_F$  μπορεί να γραφτεί σαν μία ολική παράγωγος, το οποίο οδηγεί στο ευτυχές συμπέρασμα ότι η δράση παραμένει SUSY-αναλλοίωτη μετά την εισαγωγή του όρου  $F^\dagger F$ .

Ας περάσουμε τώρα στον (επαν-)υπολογισμό του  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi$  συμπεριλαμβάνοντας τους νέους όρους που εμπλέκουν το βοηθητικό πεδίο  $F$ . Αναμένουμε ότι θα προκύψουν έξτρα όροι, οι οποίοι θα διώξουν τελικά τους ανεπιθύμητους της (2.354). Αφού η μεταβολή του  $\chi$  δεν έχει αλλάξει,

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \delta_\xi \chi &\stackrel{(2.362)}{=} \delta_\eta (-i\sigma^\mu (i\sigma_2) \xi^*)_a \partial_\mu \phi + \xi F \\
&= (i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \xi^*))_a \partial_\mu \delta_\eta \phi + \xi \delta_\eta F \\
&= (i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \xi^*))_a (\eta^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi) - i\xi_a \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \\
&\stackrel{(2.353)}{=} -i\eta_a (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) - i\eta^T c \sigma^\mu c \xi^* \partial_\mu \chi_a - i\xi_a \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \tag{2.366}
\end{aligned}$$

και αντίστοιχα, κάνοντας την εναλλαγή  $\xi \leftrightarrow \eta$ :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \delta_\eta \chi &= (i\sigma^\mu (-i\sigma_2 \eta^*))_a (\xi^T (-i\sigma_2) \partial_\mu \chi) - i\eta_a \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \\
&= -i\xi_a (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) - i\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* \partial_\mu \chi_a - i\eta_a \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi, \tag{2.367}
\end{aligned}$$

παίρνοντας λοιπόν τη διαφορά  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi$  βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi_a &= \overline{-i\eta_a (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi)} - i\eta^T c \sigma^\mu c \xi^* \partial_\mu \chi_a - \overline{i\xi_a \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi} \\
&\quad + \overline{i\xi_a (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi)} + i\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* \partial_\mu \chi_a + \overline{i\eta_a \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi} \\
&= -i\eta^T c \sigma^\mu c \xi^* \partial_\mu \chi_a + i\xi^T c \sigma^\mu c \eta^* \partial_\mu \chi_a. \tag{2.368}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε για τη διαφορά  $(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \chi$  είναι αυτό της (2.354) χωρίς τους ανεπιθύμητους όρους, όπως θέλαμε. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν για τη δράση της  $\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta$  πάνω στα πεδία  $\phi, F$  (για το πεδίο  $\phi$  δεν έχει αλλάξει κάτι, ισχύει η (2.291)) κι επομένως μπορούμε

να υποστηρίξουμε επιτέλους ότι η (2.296) αποτελεί μία σχέση τελεστών που ισχύει όταν δρα σε οποιοδήποτε πεδίο της θεωρίας.

Για ευκολία στην παραπομπή τους, συνοψίζουμε τους SUSY μετασχηματισμούς των πεδίων  $\phi, \chi, F$  στους οποίους έχουμε καταλήξει:

$$\delta_\xi \phi = \xi \cdot \chi, \quad \delta_\xi \phi^\dagger = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}, \quad (2.369)$$

$$\delta_\xi F = -i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi, \quad \delta_\xi F^\dagger = i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi, \quad (2.370)$$

$$\delta_\xi \chi = -i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi + \xi F, \quad \delta_\xi \chi^\dagger = i\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu + F^\dagger \xi^\dagger. \quad (2.371)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι οι μεταβολές των  $\chi, \chi^\dagger$ , μπορούν να γραφτούν εναλλακτικά στη μορφή:

$$(\alpha) \delta_\xi \chi = -i\sigma^\mu \bar{\xi} \partial_\mu \phi + \xi F, \quad (\beta) \delta_\xi \bar{\chi} = -i\partial_\mu \phi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi + F^\dagger \bar{\xi}. \quad (2.372)$$

Έχουμε λοιπόν:

(α)

$$\begin{aligned} \delta_\xi \chi &= -i\sigma^\mu \bar{\xi} \partial_\mu \phi + \xi F = -i\sigma^\mu \bar{\xi}^{\dot{a}} \partial_\mu \phi + \xi F \\ &= -i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi_a^*) \partial_\mu \phi + \xi_a F = -i\sigma_{ab}^\mu (i\sigma_2 \bar{\xi})^{\dot{b}} \partial_\mu \phi + \xi_a F \\ &= -i\sigma_{ab}^\mu \bar{\xi}^{\dot{b}} \partial_\mu \phi + \xi^a F = -i\sigma^\mu \bar{\xi} \partial_\mu \phi + \xi F. \end{aligned} \quad (2.373)$$

(β) Στο ερώτημα αυτό η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η ίδια με αυτήν που ακολουθήσαμε για να καταλήξουμε στην αντίστοιχη έκφραση χωρίς τον  $F$  όρο, (2.247). Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \chi^\dagger &= i\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu + F^\dagger \xi^\dagger \\ &= i\partial_\mu \phi^\dagger \xi_a^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu + F^\dagger \xi_a^\dagger \Rightarrow \\ \delta_\xi \bar{\chi}_a^T &= i\partial_\mu \phi^\dagger (i\sigma_2 \xi_a)^T \sigma^\mu + F^\dagger \xi_a^\dagger \Rightarrow \\ \delta_\xi \bar{\chi}_{\dot{a}} &= i\partial_\mu \phi^\dagger (\sigma^{\mu T} i\sigma_2 \xi)_{\dot{a}} + F^\dagger \xi_{\dot{a}}^{\dagger T} \Rightarrow \\ \delta_\xi (-i\sigma_2 \bar{\chi}^{\dot{a}}) &= i\partial_\mu \phi^\dagger (\sigma^{\mu T} i\sigma_2 \xi)^{\dot{a}} + F^\dagger \bar{\xi}_{\dot{a}} \\ \delta_\xi \bar{\chi}^{\dot{a}} &= i\partial_\mu \phi^\dagger ((i\sigma_2) \sigma^{\mu T} (-i\sigma_2) \xi)^{\dot{a}} + F^\dagger (i\sigma_2 \bar{\xi}_{\dot{a}}) \\ &= -i\partial_\mu \phi^\dagger \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} b} \xi_b + F^\dagger \bar{\xi}^{\dot{a}} \Rightarrow \\ \delta_\xi \bar{\chi} &= -i\partial_\mu \phi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi + F^\dagger \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (2.374)$$

Τώρα, θα επαληθεύσουμε ότι το supercurrent  $j^\mu = \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger$ , που υπολογίσαμε στην (2.322) για τη λαγκρατζιανή (2.232), είναι το ίδιο και για την

«ενισχυμένη» λαγκρατζιανή με τον  $F$ -όρο, (2.355). Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\xi^T(-i\sigma_2)j^\mu + \xi^\dagger(i\sigma_2)j^{\mu*} &= \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \delta\phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\mu F)} \delta F \\
&+ \delta F^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\mu F)} + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_\mu \chi)} \delta\chi - K^\mu \\
&= \partial_\mu \phi^\dagger \xi \cdot \chi + \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu ((-i\sigma^\nu \bar{\xi} \partial_\nu \phi) + \xi F) \\
&- \underbrace{(\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial_\mu \phi) - \xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger - \xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger}_{\text{simple model tot. der. (2.262)}} - \underbrace{\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F}_{F\text{-field tot. der.}} \\
&= \overset{(1)}{\partial^\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \chi} + \overset{(2)}{\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi} + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu (-i\sigma^\nu) i\sigma_2 \xi^* \partial_\nu \phi \\
&+ \overset{(3)}{\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F} - \overset{(2)}{\chi^\dagger i\sigma_2 \xi^* \partial^\mu \phi} - \overset{(2)}{\xi^T i\sigma_2 \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger} \\
&- \overset{(1)}{\xi^T (-i\sigma_2) \chi \partial^\mu \phi^\dagger} - \overset{(3)}{\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \xi F} \\
&= \underbrace{\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu (-i\sigma^\nu) i\sigma_2 \xi^* \partial_\nu \phi}_{= \xi^T i\sigma_2 j^{\mu*}} + \underbrace{\xi^\dagger (-i\sigma_2) \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger}_{= \xi^T (-i\sigma_2) j^\mu}. \tag{2.375}
\end{aligned}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε για το supercurrent ισχύει:

$$j^\mu = \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger. \tag{2.376}$$

Συγκρίνοντας τις (2.322), (2.376), παρατηρούμε το αναμενόμενο: το ρεύμα μετά την εισαγωγή του  $F$ -πεδίου στη λαγκρατζιανή δεν έχει μεταβληθεί.

Αυτό που απομένει να κάνουμε πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, είναι να μεταφράσουμε την  $\mathcal{L}_F$  αλλά και τους μετασχηματισμούς (2.369), (2.370), (2.371) στη Majorana «διάλεκτο».

Θεωρούμε λοιπόν το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\phi$  ότι αποτελείται από δύο πραγματικά βαθμωτά πεδία  $A, B$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB) \tag{2.377}$$

και παρομοίως, το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $\psi$  αποτελείται από δύο πραγματικά βαθμωτά πεδία  $F, G$ :

$$F = F - iG. \tag{2.378}$$

Επομένως, η λαγκρατζιανή  $\mathcal{L}_F$  της (2.355) θα γίνει:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{F,M} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (A - iB)^\dagger \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu (A - iB) + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\Psi}_M^\chi i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi}_{(2.186)} + (F - iG)^\dagger (F - iG) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu A \partial^\mu A + \frac{1}{2} \partial_\mu B \partial^\mu B + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M^\chi i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi + F^2 + G^2. \tag{2.379}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, θα δούμε τι μορφή παίρνουν οι μετασχηματισμοί των πεδίων.  
 Πρώτα για τους  $\delta_\xi\phi, \delta_\xi\phi^\dagger$  έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_\xi\phi = \xi \cdot \chi \\ \delta_\xi\phi^\dagger = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_\xi(A - iB) = \xi \cdot \chi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_\xi(A + iB) = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(+)} \\ \xrightarrow{(-)} \end{array} \left. \begin{array}{l} \delta_\xi A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi \cdot \chi + \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) \\ \delta_\xi B = -\frac{i}{\sqrt{2}}(-\xi \cdot \chi + \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(2.175)} \\ \xrightarrow{(2.182)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \delta_\xi A = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_M^\xi \Psi_M^\chi \\ \delta_\xi B = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \Psi_M^\chi \end{array} \right. \quad (2.380)$$

Έπειτα για τους  $\delta_\xi F, \delta_\xi F^\dagger$ , έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_\xi F = -i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \\ \delta_\xi F^\dagger = i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \delta_\xi(F - iG) = \xi \cdot \chi \\ \delta_\xi(F + iG) = \bar{\xi} \cdot \bar{\chi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(+)} \\ \xrightarrow{(-)} \end{array} \left. \begin{array}{l} \delta_\xi F = \frac{1}{2}(-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \\ \delta_\xi G = -\frac{i}{2}(i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(2.183)} \\ \xrightarrow{(2.184)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \delta_\xi F = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}_M^\xi \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi \\ \delta_\xi G = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_M^\xi \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi \end{array} \right. \quad (2.381)$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε το  $\delta_\xi \Psi_M^\chi$ . Για να συμβεί αυτό, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις μεταβολές:

- Για την  $\delta_\xi \chi$ , έχουμε:

$$\delta_\xi \chi = -i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi + \xi F = -i\sigma^\mu \partial_\mu \phi (i\sigma_2 \xi^*) + (F - iG)\xi. \quad (2.382)$$

- Για την  $\delta_\xi (i\sigma_2 \chi^*)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} (\delta_\xi \chi^\dagger)^T &= \left( i\partial_\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu \right)^T + (F^\dagger \xi^\dagger)^T = i\partial_\mu \phi^\dagger \sigma^{\mu T} (i\sigma_2) \xi + F^* \xi^* \Rightarrow \\ \delta_\xi (i\sigma_2) \chi^* &= i\partial_\mu \phi^\dagger i\sigma_2 \sigma^{\mu T} i\sigma_2 \xi + i\sigma_2 \xi^* (F + iG) = -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \phi^\dagger \xi + (F + iG)i\sigma_2 \xi^*. \end{aligned} \quad (2.383)$$

Από τις μεταβολές αυτές παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \Psi_M^\chi &= \begin{pmatrix} \delta_\xi(i\sigma_2\chi^*) \\ \delta_\xi\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi^\dagger\xi + (F+iG)i\sigma_2\xi^* \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\phi(i\sigma_2\xi^*) + (F-iG)\xi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F+iG & -i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi^\dagger \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\phi & F-iG \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} i\sigma_2\xi^* \\ \xi \end{pmatrix}}_{=\Psi_M^\xi} \\
&= \left[ \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG & 0 \\ 0 & -iG \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\frac{A+iB}{\sqrt{2}} \\ -i\sigma^\mu\partial_\mu\frac{A-iB}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi_M^\xi \\
&= \left[ F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + iG \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^\mu\partial_\mu A \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^\mu\partial_\mu A & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu B \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu B & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi_M^\xi \\
&= \left[ F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + iG \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu A \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ -\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu B \right] \Psi_M^\xi \\
&= F\Psi_M^\xi + iG\gamma_5\Psi_M^\xi - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\partial_\mu A\Psi_M^\xi + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu B\Psi_M^\xi \\
&= F\Psi_M^\xi + iG\gamma_5\Psi_M^\xi - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\partial_\mu A\Psi_M^\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu B\Psi_M^\xi. \tag{2.384}
\end{aligned}$$

Επομένως, πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, συνοψίζουμε για ευκολία -ως συνήθως- τα αποτελέσματα που βρήκαμε για τις μεταβολές των πεδίων στη Majorana «διάλεκτο»:

$$\delta_\xi A = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_M^\xi\Psi_M^\chi, \quad \delta_\xi B = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_M^\xi\gamma_5\Psi_M^\chi, \tag{2.385}$$

$$\delta_\xi F = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}_M^\xi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_M^\chi, \quad \delta_\xi G = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_M^\xi\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_M^\chi, \tag{2.386}$$

$$\delta_\xi\Psi_M^\chi = F\Psi_M^\xi + iG\gamma_5\Psi_M^\xi - \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma^\mu\partial_\mu A\Psi_M^\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu B\Psi_M^\xi. \tag{2.387}$$



## 2.5 Το μοντέλο Wess-Zumino

### 2.5.1 Αλληλεπιδράσεις και το superpotential

Η λαγκρατζιανή (2.355) περιγράφει μία ελεύθερη left-chiral supermultiplet η οποία περιλαμβάνει ένα βαθμωτό πεδίο  $\phi$ , ένα  $L$ -τύπου σπινωριακό πεδίο  $\chi$  και ένα μη διαδιδόμενο (αφού λείπει ο κινητικός όρος) μιγαδικό βαθμωτό πεδίο  $F$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το MSSM τοποθετεί τα κουάρκ, λεπτόνια και μποζόνια Higgs του SM σε chiral supermultiplets, ταίριασμένα από κατάλληλα υπερσυμμετρικά ταίρια. Οπότε, προσεγγίζοντας το MSSM γενικεύουμε τη λαγκρατζιανή (2.355) σε:

$$\mathcal{L}_{free}^{WZ} = \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i + F_i^\dagger F_i, \quad (2.388)$$

όπου ο αθροιζόμενος δείκτης  $i$  τρέχει σε όλους τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας (γεύση, βαθμίδα).

Αυτό που έπεται είναι επιτέλους να εισαχθούν αλληλεπιδράσεις, τέτοιες ώστε απαραίτητα να διατηρούν την υπερσυμμετρία, δηλαδή να παραμένει η δράση αναλλοίωτη. Αυτό συνέβη πρώτα από τους Wess και Zumino και αποτελεί μία σημαντική συνιστώσα του MSSM.

Για να ξεκινήσουμε την εύρεση των όρων αλληλεπίδρασης είναι απαραίτητο να επιβάλλουμε τη συνθήκη ότι οι όροι αυτοί πρέπει να είναι επανακανονικοποιήσιμοι. Αυτό σημαίνει ότι η διάσταση όλων αυτών των όρων πρέπει να είναι το πολύ  $M^4$ , ή ισοδύναμα, οι σταθερές αλληλεπίδρασης των όρων αυτών θα πρέπει να είναι αδιάστατες ή να έχουν θετική διάσταση. Υπό αυτήν την απαίτηση, το σύνολο των αλληλεπιδράσεων που εμπλέκουν τα πεδία  $\phi, \chi, F$  είναι:

$$\mathcal{L}_{int} = W_i(\phi, \phi^\dagger) F_i - \frac{1}{2} W_{ij}(\phi, \phi^\dagger) \chi_i \cdot \chi_j + h.c.. \quad (2.389)$$

Προς το παρόν, οι  $W_i, W_{ij}$ , είναι τυχαίες συναρτήσεις των μποζονικών πεδίων. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν όροι που να περιέχουν μόνο τα  $\phi, \phi^\dagger$  πεδία. Ο λόγος είναι ότι κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς (2.369), (2.370), (2.371), οι όροι μόνο με μποζονικά πεδία δε θα περιέχουν παράγωγο (ή  $F$ -πεδία) κι επομένως δε θα μπορούσαν να ακυρωθούν από τους μετασχηματισμούς οποιουδήποτε άλλου όρου.

Για το  $W_i$ , μπορούμε να πούμε ότι εφόσον το  $F_i$  έχει διάσταση 2, δεν μπορεί να εξαρτάται από το  $\chi_i$ , το οποίο έχει διάσταση  $3/2$ , ούτε από κάποια δύναμη του  $F_i$  εκτός της πρώτης, η οποία περιέχεται ήδη στην (2.388). Όντως, η  $W_i$  δεν μπορεί να περιέχει δυνάμεις των  $\phi_i, \phi_i^\dagger$  μεγαλύτερες από την δεύτερη. Παρομοίως, αφού το  $\chi_i \cdot \chi_j$  έχει διάσταση 3, το  $W_{ij}$ , αποκλειστικά εξαρτάται από τα  $\phi_i, \phi_i^\dagger$  και να περιέχει πρώτες δυνάμεις τους. Επιπλέον, αφού  $\chi_i \cdot \chi_j = \chi_j \cdot \chi_i$ , η συνάρτηση  $W_{ij}$  πρέπει να είναι αναγκαστικά συμμετρική στην εναλλαγή των δεικτών.

Εφόσον έχουμε αποδείξει ήδη ότι η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, θα απομονώσουμε την  $\mathcal{L}_{int}$  και

θα εξετάσουμε τη μεταβολή της,  $\delta_\xi \mathcal{L}_{int}$ , ξεχωριστά. Πρώτα ασχολούμαστε με το κομμάτι που περιλαμβάνει 4 σπίνορες:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{four\ spin.} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k} \delta_\xi \phi_k (\chi_i \cdot \chi_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k^\dagger} \delta_\xi \phi_k^\dagger (\chi_i \cdot \chi_j) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k} (\xi \cdot \chi_k) (\chi_i \cdot \chi_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k^\dagger} (\bar{\xi} \cdot \bar{\chi}_k) (\chi_i \cdot \chi_j) + h.c.. \end{aligned} \quad (2.390)$$

Κανένας από αυτούς τους όρους δεν μπορεί να ακυρωθεί από τη μεταβολή οποιουδήποτε άλλου όρου. Παρ' όλα αυτά, ο πρώτος όρος μηδενίζεται, δεδομένου ότι το  $\frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k}$  είναι συμμετρικό ως προς  $i, j, k$ . Ο λόγος είναι η ταυτότητα που συνδέει 3 σπίνορες, (2.349), με  $\lambda = \chi_k, \zeta = \chi_i, \rho = \chi_j$ :

$$(\xi \cdot \chi_k)(\chi_i \cdot \chi_j) + (\xi \cdot \chi_i)(\chi_j \cdot \chi_k) + (\xi \cdot \chi_j)(\chi_k \cdot \chi_i) = 0, \quad (2.391)$$

από την οποία το  $\frac{\partial W_{ij}}{\partial \phi_k}$  προκύπτει συμμετρικό και άρα ο πρώτος όρος της (2.390) μηδενίζεται. Δυστυχώς, δεν υπάρχει κάποια αντίστοιχη ταυτότητα για το γινόμενο 4 σπινόρων που να μας απαλλάξει και από τον δεύτερο όρο της. Επομένως, για να διατηρείται η υπερσυμμετρία για τέτοιες αλληλεπιδράσεις, απλά δεν πρέπει το  $W_{ij}$  να εξαρτάται καθόλου από  $\phi_k^\dagger$ , παρά μόνο από το  $\phi_k$ . Αυτό κρύβει μεγάλες φαινομενολογικές συνέπειες για το MSSM αφού είναι ο λόγος που απαιτείται δεύτερη ξεχωριστή διπλέτα για το Higgs πεδίο. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το  $W_{ij}$  πρέπει να έχει τη μορφή:

$$W_{ij} = M_{ij} + y_{ijk} \phi_k, \quad (2.392)$$

όπου ο πίνακας  $M_{ij}$ , ο οποίος έχει διαστάσεις και έννοια μάζας, είναι συμμετρικός ως προς τους δείκτες  $i, j$  και όπου οι συζεύξεις Yukawa είναι επίσης συμμετρικές στην εναλλαγή  $i, j, k$ . Είναι βολικό να γράψουμε την παραπάνω έκφραση για το  $W_{ij}$  με τη μορφή<sup>16</sup>:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}, \quad (2.393)$$

η οποία είναι αυτομάτως συμμετρική στους δείκτες  $i, j$  και όπου:

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k. \quad (2.394)$$

Το γεγονός ότι η έκφραση (2.393) είναι συνεπής ώστε να παραγάγει την (2.392)

<sup>16</sup>Θα μπορούσαμε να είχαμε προσθέσει και έναν γραμμικό όρο της μορφής  $A_l \phi_l$ , ο οποίος δε θα άλλαζε το  $W_{ij}$ . Κάτι τέτοιο θα δούμε όταν θα πρέπει να σπάσουμε την SUSY.

φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \left( \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) \\
&= \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial(\phi_i \phi_j)}{\partial \phi_j} \right) + \frac{1}{6} y_{ijk} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial(\phi_i \phi_j \phi_k)}{\partial \phi_j} \right) \\
&= \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\delta_{ij} \phi_j + \phi_i) + \frac{1}{6} y_{ijk} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\delta_{ij} \phi_j \phi_k + \phi_i \phi_k + \phi_i \phi_j \delta_{kj}) \\
&= \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\phi_i + \phi_i) + \frac{1}{6} y_{ijk} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\phi_i \phi_k + \phi_i \phi_k + \phi_i \phi_k) \\
&= \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (2\phi) + \frac{1}{6} y_{ijk} \frac{\partial}{\partial \phi_i} (3\phi_i \phi_k) \\
&= M_{ij} + \frac{1}{2} y_{ijk} (\phi_k + \delta_{ik} \phi_i) = M_{ij} + \frac{1}{2} y_{ijk} (2\phi_k) \\
&= M_{ij} + y_{ijk} \phi_k .
\end{aligned} \tag{2.395}$$

Έτσι, καταλήγουμε στο γεγονός ότι η μεταβολή της λαγκρατζιανής που περιέχει τους 4 σπίνορες είναι μηδέν, προϋποθέτοντας ότι ο  $\partial W_{ij} / \partial \phi_k$  είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των τριών δεικτών και έχει τη μορφή (2.392).

Πριν περάσουμε να εξετάσουμε ένα άλλο κομμάτι της μεταβολής της λαγκρατζιανής, είναι καλό να δώσουμε πρώτα τη συνολική μεταβολή της  $\mathcal{L}_{int}$ :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \mathcal{L}_{int} &= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} \delta_\xi \phi_k F_i + \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k^\dagger} \delta_\xi \phi_k^\dagger F_i + W_i \delta_\xi F_i \\
&\quad - \frac{1}{2} W_{ij} \delta_\xi \chi_i \chi_j - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i \delta_\xi \chi_j + h.c. + \text{four spinor terms} \\
&= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} \xi \cdot \chi_k F_i + \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k^\dagger} \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}_k F_i + W_i (-i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) \\
&\quad - \frac{1}{2} W_{ij} (i \sigma^\mu (i \sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi_i + \xi F_i) \chi_j - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i (i \sigma^\mu (i \sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi_j + \xi F_j) \\
&\quad + h.c. + \text{four spinor terms} ,
\end{aligned} \tag{2.396}$$

όπου τους όρους 4 σπινόρων τους μελετήσαμε παραπάνω. Τώρα μπορούμε να περάσουμε στο επόμενο κομμάτι της μεταβολής της λαγκρατζιανής που είναι

το σύνολο των όρων που περιέχουν μία παράγωγο  $\partial_\mu$ :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{\partial_\mu} &= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) - \frac{1}{2} W_{ij} (i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi_i \chi_j) \\
&\quad - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i (i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi_j) + h.c. \\
&= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) - \frac{1}{2} W_{ij} (i\sigma^\mu (i\sigma_2 \xi^*) \partial_\mu \phi_i \chi_j) \\
&\quad + \frac{1}{2} W_{ij} [\chi_i^T (i\sigma_2) i\sigma^\mu (i\sigma_2) \xi^*] \partial_\mu \phi_j + h.c. \\
&= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) + \frac{1}{2} W_{ij} (\xi^\dagger (i\sigma_2) i\sigma^{\mu T} (i\sigma_2) \partial_\mu \phi_i \chi_j) \\
&\quad - \frac{1}{2} W_{ij} [\chi_i^T (i\sigma_2) i\sigma^\mu (i\sigma_2) \xi^*] \partial_\mu \phi_j + h.c. \\
&= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) - \frac{1}{2} W_{ij} i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_j \partial_\mu \phi_i - \frac{1}{2} W_{ij} i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i \partial_\mu \phi_j + h.c. \\
&= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) - W_{ij} i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i \partial_\mu \phi_j \\
&= W_i (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i) - i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i \partial_\mu \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right), \tag{2.397}
\end{aligned}$$

όπου κατά τους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ανάστροφο μίας  $1 \times 1$  ποσότητας ισούται με τον εαυτό του, καθώς και την ταυτότητα (2.145),  $(-i\sigma_2) \sigma^{\mu T} (-i\sigma_2) = -\bar{\sigma}^\mu$ . Επίσης στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$W_{ij} \partial_\mu \phi_j \stackrel{(2.393)}{=} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \partial_\mu \phi_j = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^\mu \partial \phi_i} = \partial_\mu \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right). \tag{2.398}$$

Επομένως, η μεταβολή της λαγκρατζιανής που περιέχει τους όρους αλληλεπίδρασης που εμπλέκουν την πρώτη παράγωγο δίνεται στην (2.397). Η μεταβολή αυτή δε γίνεται να ακυρωθεί από κάποιον άλλο όρο, συνεπώς, ο μόνος τρόπος να διατηρήσουμε τη SUSY είναι να τη βγάλουμε ίση με μία ολική παράγωγο, δίνοντας τελικά αναλλοίωτη τη δράση. Για να είναι ολική παράγωγος η (2.397), θα πρέπει το  $W_i$  να έχει τη μορφή:

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \phi_i}. \tag{2.399}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της λαγκρατζιανής (2.397), θα γίνει μέσω της (2.399):

$$\delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{(\partial_\mu)} = \partial_\mu \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i) \right). \tag{2.400}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2.394), η έκφραση που δίνει το  $W_i$  είναι<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned}
W_i &= \frac{\partial W}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left( \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right) \\
&= \frac{1}{2} M_{ij} (\phi_j + \phi_i \delta_{ij}) + \frac{1}{6} y_{ijk} (\phi_j \phi_k + \phi_i \delta_{ij} \phi_k + \phi_i \phi_j \delta_{ik}) \\
&= M_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} y_{ijk} \phi_j \phi_k.
\end{aligned} \tag{2.401}$$

Όμως, πέρα από τα μέρη της μεταβολής της  $\mathcal{L}_{int}$  που αναλύσαμε ως τώρα,  $\delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{four\ spin.}$ ,  $\delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{\partial\mu}$  (μηδενισμός των όρων, ολική παράγωγος αντίστοιχα), από τη συνολική μεταβολή της λαγκρατζιανής των αλληλεπιδράσεων, απομένουν οι παρακάτω όροι οι οποίοι θα δείξουμε ότι δίνουν μηδενική συνεισφορά:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \mathcal{L}_{int}^{rest} &= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} \xi \cdot \chi_k F_i + \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k^\dagger} \bar{\xi} \cdot \bar{\chi}_k F_i - \frac{1}{2} W_{ij} \xi F_i \chi_j - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i \xi F_j \\
&= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} \xi \cdot \chi_k F_i - \frac{1}{2} W_{ij} \xi F_i \chi_j - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i \xi F_j \\
&= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} F_i \left( \xi \cdot \chi_j - \frac{1}{2} \xi \cdot \chi_j - \frac{1}{2} \chi_j \cdot \xi \right) \\
&= \frac{\partial W_i}{\partial \phi_k} F_i \left( \xi \cdot \chi_j - \frac{1}{2} \xi \cdot \chi_j - \frac{1}{2} \xi \cdot \chi_j \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.402}$$

Περίληπτικά, ως τώρα στο κεφάλαιο αυτό, έχουμε βρει τις κατάλληλες συνθήκες για τα  $W_i, W_{ij}$ , τέτοιες ώστε οι αλληλεπιδράσεις της  $\mathcal{L}_{int}$ , (2.389), να αφήνουν τη δράση αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Η ποσότητα  $W$ , από την οποία προκύπτουν τα  $W_i, W_{ij}$ , κωδικοποιεί όλες τις επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις και προφανώς παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο μοντέλο αυτό. Για λόγους που θα γίνουν ξεκάθαροι αργότερα, η ποσότητα  $W$  ονομάζεται *superpotential*.

Είναι καλή στιγμή να βρούμε το υπερσυμμετρικό ρεύμα της συνολικής λαγκρατζιανής  $\mathcal{L}_{WZ} = \mathcal{L}_{WZ}^{free} + \mathcal{L}_{int}$ . Όσον αφορά το κομμάτι της  $\mathcal{L}_{WZ}^{free}$ , η διαδικασία έχει ήδη πραγματοποιηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, (2.376), δίνοντας το αποτέλεσμα  $j^\mu = \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger$ . Αυτό που πρέπει ουσιαστικά να βρούμε είναι τη συνεισφορά της  $\mathcal{L}_{int}$  στο υπερσυμμετρικό ρεύμα διατήρησης. Επομένως, κατά τα γνωστά, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\xi^T (-i\sigma_2) j_{int}^\mu + \xi^\dagger i\sigma_2 j_{int}^{\mu*} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i + \delta \phi_i^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\mu \phi_i^\dagger)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\mu F_i)} \delta F \\
&\quad + \delta F_i^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\mu F_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial (\partial_\mu \chi_i)} \delta \chi_i - K^\mu,
\end{aligned} \tag{2.403}$$

<sup>17</sup>Πέρα από έναν πιθανό επιπλέον σταθερό όρο  $A_i$ .

όπου όλες οι παραπάνω παράγωγοι δίνουν μηδέν, αφού η  $\mathcal{L}_{int}$  δεν περιέχει κάποια παράγωγο πεδίου και στο  $K^\mu$  αντικαθιστούμε την ολική παράγωγο κατά την οποία βρήκαμε ότι μεταβάλλεται η  $\mathcal{L}_{int}$ , (2.400) (χωρίς να ξεχνάμε την ερμιτιανή συζυγή ποσότητά της):

$$\xi^T(-i\sigma_2)j_{int}^\mu + \xi^\dagger i\sigma_2 j_{int}^{\mu*} = -\frac{\partial W}{\partial \phi}(-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i) - \left( \frac{\partial W}{\partial \phi}(-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i) \right)^\dagger. \quad (2.404)$$

Για τον δεύτερο όρο, έχουμε:

$$\begin{aligned} -\left( \frac{\partial W}{\partial \phi}(-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i) \right)^\dagger &= -(i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i)^\dagger \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^\dagger = -(i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_i)^* W_i^\dagger \\ &= -W_i^\dagger i\xi^T \bar{\sigma}^{\mu*} \chi_i^* = -W_i^\dagger i\xi^T(i\sigma_2)(-i\sigma_2)\bar{\sigma}^{\mu T}(-i\sigma_2)i\sigma_2 \chi_i^* \\ &= -W_i^\dagger i\xi^T(i\sigma_2)(-\sigma^\mu)(i\sigma_2 \chi_i^*) = -W_i^\dagger i\xi^T(-i\sigma_2)\sigma^\mu i\sigma_2 \chi_i^*, \end{aligned} \quad (2.405)$$

επομένως, καταλήγουμε ότι:

$$\xi^T(-i\sigma_2)j_{int}^\mu = -W_i^\dagger i\xi^T(-i\sigma_2)\sigma^\mu i\sigma_2 \chi_i^* \Rightarrow j_{int}^\mu = -iW_i^\dagger \sigma^\mu i\sigma_2 \chi_i^*. \quad (2.406)$$

Προσθέτοντας λοιπόν το αποτέλεσμα αυτό στο υπόλοιπο ρεύμα που έχουμε βρει για την  $\mathcal{L}_{WZ}^{free}$ , (2.376), παίρνουμε το διατηρούμενο υπερσυμμετρικό ρεύμα της συνολικής  $\mathcal{L}_{WZ}$ :

$$\begin{aligned} j^\mu &= \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger - iW_i^\dagger \sigma^\mu i\sigma_2 \chi_i^*, \\ j^\mu &= \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \chi \partial_\nu \phi^\dagger + iF_i \sigma^\mu i\sigma_2 \chi_i^*, \end{aligned} \quad (2.407)$$

όπου στο τελευταίο στάδιο χρησιμοποιήσαμε την (2.409) που βρίσκουμε ακριβώς παρακάτω.

Θεωρούμε τώρα το κομμάτι της συνολικής λαγκραζιανής του μοντέλου Wess-Zumino,  $\mathcal{L}_{WZ} = \mathcal{L}_{WZ}^{free} + \mathcal{L}_{int}$ , που να περιέχει μόνο τα πεδία  $F, F^\dagger$ , δηλαδή μόνο τους όρους  $F_i F_i^\dagger + W_i F_i + W_i^\dagger F_i^\dagger$  (ας την ονομάσουμε  $\mathcal{L}_{F, F^\dagger}$ ). Αφού οι όροι αυτοί δεν περιέχουν καμία παράγωγο, οι εξισώσεις Euler-Langrange για τα  $F_i, F_i^\dagger$  είναι απλά:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{F, F^\dagger}}{\partial F_i} = 0 \Rightarrow F_i^\dagger + W_i = 0 \Rightarrow F_i^\dagger = -W_i, \quad (2.408)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{F, F^\dagger}}{\partial F_i^\dagger} = 0 \Rightarrow F_i + W_i^\dagger = 0 \Rightarrow F_i = -W_i^\dagger. \quad (2.409)$$

Μπορούμε λοιπόν, να αντικαταστήσουμε στην  $\mathcal{L}_{WZ}$  τα βοηθητικά πεδία  $F, F^\dagger$  με τα παραπάνω αποτελέσματα (2.408), (2.409)<sup>18</sup>, με αποτέλεσμα να παίρ-

<sup>18</sup>Η αντικατάσταση αυτή μας επιτρέπεται για το λόγο ότι οι σχέσεις που προέρχονται από τις εξισώσεις Euler-Langrange δεν περιέχουν παραγώγους και άρα δεν αλλοιώνουν τις κανονικές σχέσεις μετάθεσης.

νοουμε τη συνολική λαγκρανζιανή του μοντέλου Wess-Zumino:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} &= \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i + |W_i|^2 - |W_i|^2 - \frac{1}{2} W_{ij} \chi_i \cdot \chi_j - |W_i|^2 - \frac{1}{2} W_{ij}^\dagger \bar{\chi}_i \cdot \bar{\chi}_j \\ &= \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i - |W_i|^2 - \frac{1}{2} (W_{ij} \chi_i \cdot \chi_j + h.c.).\end{aligned}\quad (2.410)$$

Ας εξετάσουμε λεπτομερώς το μοντέλο Wess-Zumino, (2.410), στην απλούστερη μορφή του, όπου ασχολούμαστε μόνο για μία supermultiplet, «πειτώντας» δηλαδή τους δείκτες των πεδίων. Καταρχήν, το superfield στην περίπτωση αυτή ανάγεται στο:

$$W = \frac{1}{2} M \phi^2 + \frac{1}{6} y \phi^3, \quad (2.411)$$

με αποτέλεσμα τα  $W_i, W_{ij}$  να είναι:

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial \phi} = M \phi + \frac{1}{2} y \phi^2, \quad (2.412)$$

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} = M + y \phi. \quad (2.413)$$

Ξεκινάμε λοιπόν θεωρώντας τους όρους που είναι τετραγωνικοί ως προς τα πεδία  $\phi, \chi$ , που έχουν να κάνουν με κινητικούς όρους και όρους μάζας. Επομένως, οι τετραγωνικοί όροι για μία μόνο supermultiplet είναι:

$$\mathcal{L}_{WZ}^{quad} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - M M^* \phi^\dagger \phi - \frac{1}{2} M \chi^T (-i \sigma_2) \chi - \frac{1}{2} M^* \chi^\dagger (i \sigma_2) \chi^{\dagger T}. \quad (2.414)$$

Παίρνοντας την εξίσωση Euler-Langrange για το πεδίο  $\phi^\dagger$  της (2.414):

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{WZ}^{quad}}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{WZ}^{quad}}{\partial \phi^\dagger} = 0, \quad (2.415)$$

βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + |M|^2 \phi = 0, \quad (2.416)$$

η οποία είναι η Klein-Gordon εξίσωση για ένα βαθμωτό πεδίο μάζας  $M$ .

Παίρνουμε τώρα την ανάλογη εξίσωση Euler-Langrange για το πεδίο  $\chi^\dagger$ . Κάνουμε αναλυτικά τις πράξεις, διότι αυτή τη φορά παραγωγίζουμε ως προς φερμιονικά πεδία (αριθμούς Grassmann) τα οποία αντιμετατίθενται. Υπολογίζουμε λοιπόν πρώτα τον όρο  $-\frac{1}{2} M \chi \cdot \chi$  της (2.414):

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} M \chi \cdot \chi &= -\frac{1}{2} \chi^T (-i \sigma_2) \chi = -\frac{1}{2} M \begin{pmatrix} \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} M (\chi_2 \chi_1 - \chi_1 \chi_2) = -\frac{1}{2} M (-\chi_1 \chi_2 - \chi_1 \chi_2) = M \chi_1 \chi_2,\end{aligned}\quad (2.417)$$

κι έπειτα τις παραγώγους ως προς  $\chi_1, \chi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi_1} \left( -\frac{1}{2} M \chi \cdot \chi \right) &= \frac{\partial}{\partial \chi_1} (M \chi_1 \chi_2) \stackrel{(2.106)}{=} M \chi_2 \\ \frac{\partial}{\partial \chi_2} \left( -\frac{1}{2} M \chi \cdot \chi \right) &= \frac{\partial}{\partial \chi_2} (M \chi_1 \chi_2) \stackrel{(2.107)}{=} -M \chi_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi_a} \left( -\frac{1}{2} M \chi \cdot \chi \right) = M (-i \sigma_2 \chi)_a, \quad (2.418)$$

Υπολογίζουμε τώρα τον όρο  $-\frac{1}{2} M^* \chi^\dagger (i \sigma_2) \chi^{\dagger T}$  της (2.414):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} M^* \chi^* \cdot \chi^* &= -\frac{1}{2} M^* \chi^{*T} (-i \sigma_2) \chi^* = -\frac{1}{2} M \begin{pmatrix} \chi_1^* & \chi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} M^* (\chi_1^\dagger \chi_2^\dagger - \chi_2^\dagger \chi_1^\dagger) = -\frac{1}{2} M^* (-\chi_2^\dagger \chi_1^\dagger - \chi_2^\dagger \chi_1^\dagger) = M^* \chi_2^\dagger \chi_1^\dagger \end{aligned} \quad (2.419)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi_1^\dagger} \left( -\frac{1}{2} M^* \chi^\dagger (i \sigma_2) \chi^{\dagger T} \right) &= \frac{\partial}{\partial \chi_1^\dagger} (M^* \chi_2^\dagger \chi_1^\dagger) \stackrel{(2.106)}{=} -M^* \chi_2^\dagger \\ \frac{\partial}{\partial \chi_2^\dagger} \left( -\frac{1}{2} M^* \chi^\dagger (i \sigma_2) \chi^{\dagger T} \right) &= \frac{\partial}{\partial \chi_2^\dagger} (M^* \chi_2^\dagger \chi_1^\dagger) \stackrel{(2.107)}{=} M^* \chi_1^\dagger \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi_a^\dagger} \left( -\frac{1}{2} M^* \chi^\dagger (i \sigma_2) \cdot \chi^{\dagger T} \right) &= M^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^\dagger \\ \chi_2^\dagger \end{pmatrix} \\ &= M^* (-i \sigma_2) \chi_a^{\dagger T}. \end{aligned} \quad (2.420)$$

Θεωρούμε λοιπόν τώρα την εξίσωση E-L για το πεδίο  $\chi^\dagger$  της (2.414):

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}^{quad}}{\partial (\partial_\mu \chi_a^\dagger)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_a^\dagger} = 0, \quad (2.421)$$

και βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης:

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = M^* i \sigma_2 \chi^{\dagger T}. \quad (2.422)$$

Γνωρίζουμε από τη λίστα κάτω από την (2.139), ότι το  $\chi_a$  μετασχηματίζεται κάτω από τους LT με τον πίνακα  $V^{-1\dagger}$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $\chi_a^{\dagger T}$  του δεύτερου μέλους μετασχηματίζεται με τον  $V^{-1T}$  με τον οποίον όμως μετασχηματίζεται ένας σπίνορας τύπου  $\bar{\psi}_{\dot{a}}$ . Ο κάτω τονούμενος δείκτης «σηκώνεται» με τον πίνακα  $i \sigma_2$  (στην ουσία με τη σπινωριακή μετρική), δηλαδή, όλο το δεξί μέλος μετασχηματίζεται σαν ένας  $\bar{\psi}^{\dot{a}}$  σπίνορας, δηλαδή με τον πίνακα  $V$ . Αυτό έρχεται σε συμφωνία με το πως μετασχηματίζεται το αριστερό μέλος το οποίο μετασχηματίζεται όπως ένας  $R$ -τύπου σπίνορας, δηλαδή με τον πίνακα  $V$ , γεγονός το οποίο είναι ξεκάθαρο από τη δεύτερη εξίσωση Weyl της (2.86).



Θεωρούμε τώρα την εξίσωση E-L για το πεδίο  $\chi$  της (2.414):

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{WZ}^{quad}}{\partial (\partial_\mu \chi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_a} = 0, \quad (2.423)$$

και βρίσκουμε την εξίσωση κίνησης:

$$\partial_\mu (\chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu) = M (i \sigma_2 \chi) \Rightarrow i \sigma^\mu \partial_\mu (i \sigma_2 \chi^{\dagger T}) = M \chi. \quad (2.424)$$

Από τις (2.422), (2.424), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} i \sigma^\mu \partial_\mu \left( \frac{i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi}{M^*} \right) &= M \chi \Rightarrow i \sigma^\mu \partial_\mu (i \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \chi) = |M|^2 \chi \\ &\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \chi + |M|^2 \chi = 0, \end{aligned} \quad (2.425)$$

από την οποία καταλαβαίνουμε ότι το πεδίο  $\chi$  έχει επίσης μάζα  $|M|$ . Ουσιαστικά, έχουμε επαληθεύσει ότι οι τετραγωνικοί όροι περιγράφουν δύο ελεύθερα πεδία με σπιν-0 και σπιν-1/2 τα οποία είναι εκφυλισμένα με (ίδια) μάζα  $|M|$ . Με άλλα λόγια, ενώ ξεκινήσαμε τη θεωρία με άμαζα πεδία, βλέπουμε ότι μπορεί να στηθεί υπερσυμμετρικό μοντέλο το οποίο να εμπλέκει σωματίδια με μάζα, με τους superpartners να έχουν την ίδια μάζα.

Συνολικά οι όροι των αλληλεπιδράσεων της λαγκρατζιανής (2.410) (πάλι στην περίπτωση μίας supermultiplet) είναι:

$$-|M\phi + \frac{1}{2}y\phi^2|^2 - \frac{1}{2}[(M + y\phi)\chi \cdot \chi + h.c.], \quad (2.426)$$

όπου σε αυτούς, πέρα από τους τετραγωνικούς όρους που δίνουν τη μάζα, εμπεριέχονται τρεις διαφορετικές πραγματικές αλληλεπιδράσεις:

1. Μία κυβική αλληλεπίδραση, cubic, ανάμεσα στα  $\phi$  πεδία:

$$-\frac{1}{2} \left( My^* \phi \phi^{\dagger 2} + M^* y \phi^2 \phi \right). \quad (2.427)$$

2. Μία αλληλεπίδραση τέταρτης δύναμης, quartic, ανάμεσα στα  $\phi$  πεδία:

$$-\frac{1}{4} |y|^2 \phi^2 \phi^{\dagger 2}. \quad (2.428)$$

3. Μία Yukawa- τύπου σύζευξη ανάμεσα στα  $\phi, \chi$  πεδία:

$$-\frac{1}{2} [y\phi\chi \cdot \chi + h.c.]. \quad (2.429)$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά σύζευξης της quartic αλληλεπίδρασης είναι το τετράγωνο της σταθεράς σύζευξης της Yukawa-τύπου αλληλεπίδρασης. Αυτό

συνδέεται με τη σχέση (2.19) που καταλήξαμε στην εισαγωγή όταν επιζητούσαμε μία τέτοια σχέση ώστε να αλληλοαναιρεθούν οι τετραγωνικές αποκλίσεις που προέκυπταν από τις συνεισφορές δεύτερης τάξης των διαγραμμμάτων της ιδιοενέργειας μποζονίου. Αυτήν την αλληλοαναιρέση, η οποία μας απαλλάσσει από τις τετραγωνικές αποκλίσεις και λύνει το πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης, για το μοντέλο Wess-Zumino θα τη δούμε με λεπτομέρεια στο επόμενο υποκεφάλαιο. Πριν από αυτό, όμως, είναι βολικό να εκφράσουμε την  $\mathcal{L}_{WZ}$  σε Majorana μορφή (επεκτείνοντας την (2.379)):

- Πρώτα το τετραγωνικό κομμάτι (2.414):

$$\mathcal{L}_{WZ}^M = \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A - \frac{1}{2}M^2 A + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}M^2 M^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_M^\chi \cdot (i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi_M^\chi \quad (2.430)$$

- Δεύτερον, οι αλληλεπιδράσεις:

( $\alpha$ ) : Η cubic αλληλεπίδραση:

$$\mathcal{L}_c = -MgA(A^2 - B^2). \quad (2.431)$$

( $\beta$ ) : Η quartic αλληλεπίδραση:

$$\mathcal{L}_q = -\frac{1}{2}g^2(A^2 + B^2)^2. \quad (2.432)$$

( $\gamma$ ) : Η Yukawa-τύπου αλληλεπίδραση:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y &= -\frac{1}{2} \left[ y \frac{1}{\sqrt{2}} (A - iB) \chi \cdot \chi + h.c. \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{y}{\sqrt{2}} (A - iB) \chi \cdot \chi + \frac{y}{\sqrt{2}} (A + iB) (\chi \cdot \chi)^\dagger \right] \\ &= -\frac{y}{2\sqrt{2}} \left[ (A - iB) \chi \cdot \chi + (A + iB) (\chi \cdot \chi)^\dagger \right] \\ &= -g [A(\chi \cdot \chi + \bar{\chi} \cdot \bar{\chi}) + iB(\bar{\chi} \cdot \bar{\chi} - \chi \cdot \chi)] \\ &= -g (A\bar{\Psi}_M^\chi \Psi_M^\chi + iB\bar{\Psi}_M^\chi \gamma_5 \Psi_M^\chi). \end{aligned} \quad (2.433)$$

Η παρουσία του  $\gamma_5$  στον δεύτερο όρο δείχνει ότι το  $B$  είναι ψευδοβαθμωτό, ενώ το  $A$  είναι βαθμωτό πεδίο. Επίσης, η σταθερά  $g$  που εμφανίζεται παραπάνω είναι  $g = y/2\sqrt{2}$ .

## 2.5.2 Ακύρωση των τετραγωνικών αποκλίσεων στο μοντέλο W-Z

Θα θεωρήσουμε τις συνεισφορές ενός βρόχου  $\mathcal{O}(g^2)$ <sup>19</sup> του  $A$ -σωματιδιακού διαδότη, που ορίζεται κατά τα γνωστά ως το χρονολογικό γινόμενο της αναμενόμενης τιμής του κενού. Ως κενό της αλληλεπιδρώσας θεωρίας μας, είναι

<sup>19</sup>Η συνεισφορά  $\mathcal{O}(g^0)$  είναι ο ελεύθερος διαδότης  $D_F(x - y)$ , αφού δεν έχουμε καθόλου αλληλεπίδραση ( $\mathcal{L}' = 0$ ). Επίσης η συνεισφορά  $\mathcal{O}(g)$  είναι μηδέν λόγω της παρουσίας μόνο περιττού αριθμού πεδίων.

η θεμελιώδης κατάσταση  $|\Omega\rangle$ . Η γενική έκφραση για το διαδότη (προφανώς στην εικόνα αλληλεπίδρασης) είναι:

$$\langle\Omega|T[A(x)A(y)]|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T[A(x)A(y)\exp(i\int d^4z\mathcal{L}'(z))] |0\rangle}{\langle 0|T[\exp[i\int d^4z\mathcal{L}'(z)]] |\Omega\rangle}, \quad (2.434)$$

όπου  $\mathcal{L}'$  είναι η λαγκρατζιανή πυκνότητα αλληλεπίδρασης, η οποία στην περίπτωση μας είναι το άθροισμα:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_y, \quad (2.435)$$

όπου οι  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_q, \mathcal{L}_y$  δίνονται από τις σχέσεις (2.431), (2.432), (2.433). Συνεπώς, συνεχίζοντας με τη θεωρία διαταραχών, θα αναπτύξουμε το εκθετικό στον αριθμητή της (2.434) σε δυνάμεις της σταθεράς σύζευξης  $g$  και θα υπολογίσουμε μετά όλα τα χρονολογικά γινόμενα. Όσον αφορά τον παρονομαστή, ο ρόλος του είναι να αποκόψει τις συνεισφορές που προκύπτουν στον αριθμητή από όλες τις διαδικασίες που είναι αποσυνδεδεμένες από τα σημεία  $x, y$ . Πλέον είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε τη διαδικασία. Πρώτα θα εξετάσουμε loop συνεισφορές, έπειτα τις tadpole κι τέλος τις υπόλοιπες συνεισφορές από τα non-tadpole συνδεδεμένα διαγράμματα.

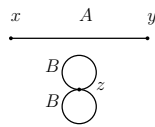
### 1-loop διαγράμματα

Η λαγκρατζιανή (2.428) είναι ανάλογη του  $g^2$  οπότε παίρνοντας τον πρώτο όρο του αναπτύγματος της (2.434), θα έχουμε ήδη μία συνεισφορά  $\mathcal{O}(g^2)$  που ζητάμε. Η συνεισφορά λοιπόν της quartic λαγκρατζιανής, (2.428), είναι:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\left\{A(x)A(y)i\int d^4\mathcal{L}_q(z)\right\}|0\rangle = \\ -i\frac{g^2}{2}\langle 0|T\left\{\int d^4z A(x)A(y)(A^4(z) + B^4(z) + 2A^2(z)B^2(z))\right\}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.436)$$

Από τα παραπάνω χρονολογικά γινόμενα που προκύπτουν, ο όρος με το  $T\{A(x)A(y)B^4(z)\}$  δίνει μόνο αποσυνδεδεμένα διαγράμματα (διαγράμματα χωρίς εξωτερικές γραμμές), αφού στην περίπτωση αυτή ένα  $B(z)$  μπορεί να συνδεθεί μόνο με ένα ένα δεύτερο  $B(z)$ <sup>20</sup>, άρα δε θα ασχοληθούμε περεταίρω. Οι υπόλοιποι όροι δίνουν συνεισφορά της μορφής:

$$-i\frac{g^2}{2}\langle 0|T\left\{\int d^4z A(x)A(y)A^4(z) + 2A(x)A(y)A^2(z)B^2(z)\right\}|0\rangle. \quad (2.437)$$



<sup>20</sup>Ένα τέτοιο διάγραμμα θα είχε τη μορφή

Από τον πρώτο όρο της (2.437), προκύπτει ένα είδος σύναψης, κατά το οποίο συνάπτουμε το  $A(x)$  με ένα από τα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με ένα από τα τρία εναπομείναντα  $A(z)$  και τα δύο  $A(z)$  που απομένουν μεταξύ τους.

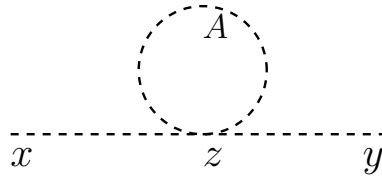
$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 | \quad | \quad | \quad | \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 | \quad | \quad | \quad | \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
 \end{array}$$

$$-i\frac{g^2}{2} \langle 0 | T \{ \int d^4z A(x)A(y)A(z)A(z)A(z)A(z) \} | 0 \rangle$$

Με απλή καταμέτρηση βλέπουμε ότι προκύπτουν 12 ταυτοτικοί συνδυασμοί: Συνεπώς, η συνολική συνεισφορά του  $A$ -loop στην ιδιοενέργεια του  $A$  θα είναι:

$$-6ig^2 \int d^4z D_A(x-z)D_A(y-z)D_A(z-z), \quad (2.438)$$

η οποία αντιστοιχίζεται στο διάγραμμα Feynman:



Εικόνα 2.5: Διάγραμμα  $A$ -βρόχου της ιδιοενέργειας του  $A$ .

Από τον δεύτερο όρο της (2.437), προκύπτει πάλι ένα είδος σύναψης, κατά το οποίο συνάπτουμε το  $A(x)$  με ένα από τα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με το άλλο  $A(z)$  και τα δύο  $B(z)$  που απομένουν μεταξύ τους.

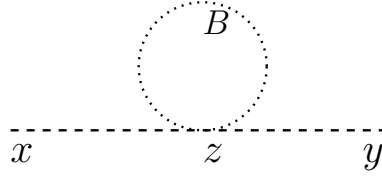
$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 | \quad | \quad | \quad | \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 | \quad | \quad | \quad | \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
 \end{array}$$

$$-i\frac{g^2}{2} \langle 0 | T \{ \int d^4z 2A(x)A(y)A(z)A(z)B(z)B(z) \} | 0 \rangle$$

Με απλή καταμέτρηση βλέπουμε ότι προκύπτουν 2 ταυτοτικοί συνδυασμοί. Συνεπώς, η συνολική συνεισφορά του  $B$ -loop στην ιδιοενέργεια του  $A$  θα είναι:

$$-2ig^2 \int d^4z D_A(x-z)D_A(y-z)D_B(z-z), \quad (2.439)$$

η οποία αντιστοιχίζεται στο διάγραμμα Feynman:



Εικόνα 2.6: Διάγραμμα  $B$ -βρόχου της ιδιοενέργειας του  $A$ .

Θα υπολογίσουμε τις δύο διαφορετικές συνεισφορές (2.438), (2.439) στην ιδιοενέργεια του  $A$ -μποζονίου ξεχωριστά.

*A-loop συνεισφορά*

Πρώτα ξεκινάμε με την (2.438), δηλαδή με τη συνεισφορά του διαγράμματος ενός  $A$ -μποζονικού βρόχου στην ιδιοενέργεια του  $A$ -μποζονίου:

$$\begin{aligned}
& -6ig^2 \int d^4z D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z) \\
&= -6ig^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(y-z)}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(z-z)}}{k^2 - m^2} \\
&= -6ig^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{-iqy}}{q^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{i(p+q)z}.
\end{aligned} \tag{2.440}$$

Ολοκλήρωση πάνω στο  $z$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q)$ . Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
&= -6ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{-iqy}}{q^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
&= -6ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{ipy}}{p^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
&= -6ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} (-i\Pi_A^{(A)}) \frac{i}{p^2 - m^2},
\end{aligned} \tag{2.441}$$

όπου

$$-i\Pi_A^{(A)} = -6ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} = 6g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \tag{2.442}$$

Υπολογίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int dk^0 \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.443}$$

Απομονώνουμε το ολοκλήρωμα ως προς  $dk^0$  και υπολογίζουμε:

$$\int dk^0 \frac{1}{(k^0)^2 - \underbrace{(\mathbf{k}^2 + m^2 + i\epsilon)}_{\equiv A}} = \int dk^0 \frac{1}{(k^0)^2 - A} = \int dk^0 \frac{1}{(k^0 - \sqrt{A})(k^0 + \sqrt{A})}. \quad (2.444)$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι αναλυτική<sup>21</sup> στα σημεία  $z = \pm\sqrt{A}$ , που λέγονται πόλοι. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα των ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy, η οποία λέει ότι όταν μία συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική μέσα και πάνω σε μία κλειστή διαδρομή,  $C$ , η οποία εμπεριέχει έναν πόλο  $z = a$ , τότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a). \quad (2.445)$$

Έτσι λοιπόν και στην περίπτωση μας, θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα αυτή, χρησιμοποιώντας τη συνταγή του  $i\epsilon$  μετατοπίζοντας απειροστά τους πόλους από τον πραγματικό άξονα στον οποίο βρίσκονται και παίρνοντας σαν διαδρομή μία ημικυκλική καμπύλη (με ακτίνα που πάει στο άπειρο και δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα) με διάμετρο πάνω στον πραγματικό άξονα, όπως φαίνεται παρακάτω, στο σχήμα (2.7).

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα (2.444) σαν:

$$\begin{aligned} \int dk^0 \frac{1}{(k^0 - \sqrt{A})(k^0 + \sqrt{A})} &= \int dk^0 \frac{1}{[k^0 - (-\sqrt{A} + i\epsilon)][k^0 - (\sqrt{A} - i\epsilon)]} \\ &= \oint dk^0 \frac{1}{k^0 - (\sqrt{A} - i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (2.446)$$

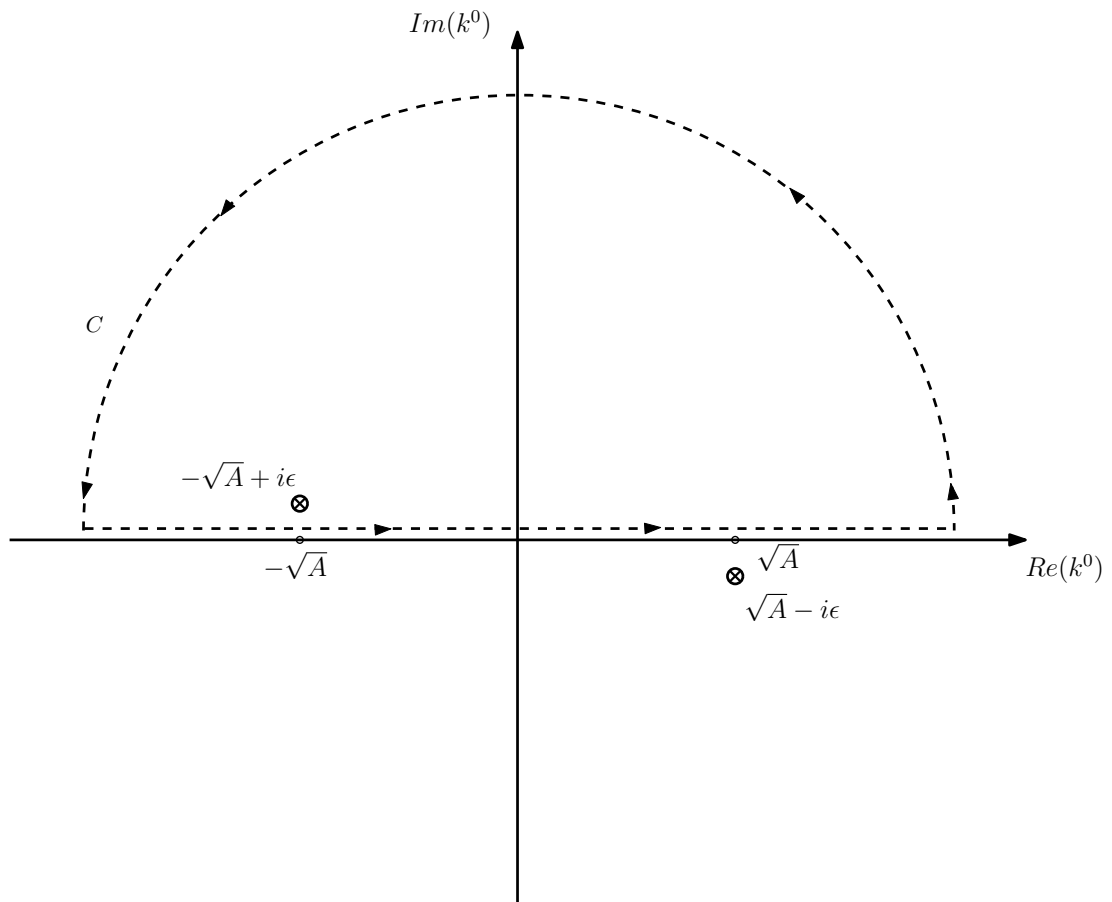
και θεωρώντας  $f(z) = \frac{1}{k^0 - (\sqrt{A} - i\epsilon)}$  και τον περιεχόμενο πόλο  $a = -\sqrt{A} + i\epsilon$ , να πάρουμε από την (2.445) το ολοκληρωτικό υπόλοιπο:

$$\oint dk^0 \frac{1}{k^0 - (\sqrt{A} - i\epsilon)} = \frac{2\pi i}{-\sqrt{A} - \sqrt{A}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{A}} = -\frac{\pi i}{(\mathbf{k}^2 + m^2 + i\epsilon)^{1/2}}. \quad (2.447)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (2.447) στην (2.442), παίρνουμε:

$$-i\Pi_A^{(A)} = 6g^2(-\pi i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m^2 + i\epsilon)^{1/2}}. \quad (2.448)$$

<sup>21</sup>Αν ήταν αναλυτική τα πράγματα θα ήταν απλά εφαρμόζοντας το θεώρημα του Cauchy για μία κλειστή διαδρομή:  $\oint_C f(z)dz = 0$ .



Εικόνα 2.7: Μετατόπιση των πόλων και επιλογή διαδρομής για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (2.444)

Είναι προφανές ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ορμής και όχι τις γωνίες, οπότε η ολοκλήρωση ανάγεται σε μία διάσταση, παίρνοντας έναν παράγοντα  $4\pi$  από την ολοκλήρωση του γωνιακού μέρους. Επομένως, η συνεισφορά, (2.448), θα γίνει:

$$-i\Pi_A^{(A)} = -\frac{3g^2 i}{2\pi^2} \int_0^\Lambda du \frac{u^2}{(u^2 + m^2)^{1/2}}. \quad (2.449)$$

Επομένως, αυτό που απομένει είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\Lambda du \frac{u^2}{(u^2 + m^2)^{1/2}}. \quad (2.450)$$

Θέτουμε  $x = \sqrt{u^2 + m^2}$  με  $du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - m^2}} dx$  και αντικαθιστώντας στο ζητούμενο (2.450) παίρνουμε:

$$\int_0^\Lambda du \frac{u^2}{(u^2 + m^2)^{1/2}} = \underbrace{\int_m^\Lambda \sqrt{x^2 - m^2} dx}_{\equiv I} . \quad (2.451)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν το  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_m^\Lambda \sqrt{x^2 - m^2} \cdot x' dx \\ I &= \left[ x\sqrt{x^2 - m^2} \right]_m^\Lambda - \int_m^\Lambda \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - m^2}} dx \\ I &= \left[ x\sqrt{x^2 - m^2} \right]_m^\Lambda - \int_m^\Lambda \frac{x^2 - m^2 + m^2}{\sqrt{x^2 - m^2}} dx \\ I &= \left[ x\sqrt{x^2 - m^2} \right]_m^\Lambda - \left[ \underbrace{\int \sqrt{x^2 - m^2} dx}_I - \int \frac{m^2}{\sqrt{x^2 - m^2}} dx \right] \\ 2I &= \left[ x\sqrt{x^2 - m^2} \right]_m^\Lambda - \left[ m^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - m^2}) \right] \\ I &= \left[ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - m^2} \right]_m^\Lambda - \left[ \frac{m^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - m^2}) \right]_m^\Lambda \\ I &= \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\Lambda^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \left[ \ln \frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - m^2})}{m} \right] . \end{aligned} \quad (2.452)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (2.452) στην (2.449), το ζητούμενο  $-i\Pi_A^{(A)}$  θα είναι:

$$-i\Pi_A^{(A)} = -\frac{3g^2 i}{2\pi^2} \left[ \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\Lambda^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \ln \frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - m^2})}{m} \right] . \quad (2.453)$$

Όμως επειδή η σταθερά  $\Lambda$  είναι πολύ μεγάλη, φέρνουμε την (2.453) στη βολική μορφή:

$$-i\Pi_A^{(A)} = -\frac{3g^2 i}{4\pi^2} \left[ \Lambda^2 \left( 1 - \frac{m^2}{2\Lambda^2} \right) - m^2 \ln \frac{\Lambda + \Lambda \left( 1 - \frac{m^2}{2\Lambda^2} \right)}{m} \right] , \quad (2.454)$$



και παίρνοντας την προσέγγιση  $\Lambda \gg m$  έχουμε τελικά :

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_A^{(A)} &= -\frac{6g^2 i}{8\pi^2} \left[ \Lambda^2 - \frac{m^2}{2} - m^2 \ln \frac{2\Lambda - \frac{m^2}{2\Lambda}}{m} \right] \Rightarrow \\
 -i\Pi_A^{(A)} &= -\frac{6g^2 i}{8\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda}{m} + \text{πεπερασμένοι όροι} \right]. \quad (2.455)
 \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κυρίαρχη απόκλιση είναι τετραγωνική, δηλαδή, ότι η συνεισφορά του διαγράμματος  $A$ -βρόχου της ιδιο-ενέργειας του  $A$  μποζονίου είναι

$$\Pi_A^{(A)} = \frac{6g^2}{8\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.456)$$

*B-loop συνεισφορά*

Έπειτα συνεχίζουμε με την (2.439), δηλαδή με τη συνεισφορά του διαγράμματος ενός  $B$ -μποζονικού βρόχου στην ιδιοενέργεια του  $A$ -μποζονίου :

$$\begin{aligned}
 &-2ig^2 \int d^4z D_A(x-z) D_A(y-z) D_B(z-z) \\
 &= -2ig^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(y-z)}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(z-z)}}{k^2 - m^2} \\
 &= -2ig^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{-iqy}}{q^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{i(p+q)z}. \quad (2.457)
 \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση πάνω στο  $z$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q)$ . Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
 &= -2ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q) \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{-iqy}}{q^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &= -2ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{ie^{ipy}}{p^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &= -2ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{p^2 - m^2} \\
 &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} (-i\Pi_A^{(A)}) \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (2.458)
 \end{aligned}$$

όπου

$$-i\Pi_A^{(B)} = -2ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} = 2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (2.459)$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα (2.459) της συνεισφοράς του  $B$ -βρόχου στην ιδιοενέργεια του  $A$  μποζονίου είναι το ίδιο ακριβώς με αυτό της (2.442), απλώς με διαφορετικό συντελεστή. Συνεπώς, δεν υπάρχει λόγος να επαναλάβουμε τον υπολογισμό του ολοκλήρωματος της (2.459), καθώς παραπάνω έχουμε καταγράψει αναλυτικά τη διαδικασία. Έτσι λοιπόν, συγκρίνοντας με την (2.453) διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη συνεισφορά  $-i\Pi_A^{(B)}$ , θα είναι:

$$-i\Pi_A^{(B)} = -\frac{g^2 i}{4\pi^2} \left[ \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\Lambda^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \ln \frac{(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 - m^2})}{m} \right]. \quad (2.460)$$

Θέτοντας σε ισχύ το γεγονός ότι  $\Lambda \gg m$ , η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$-i\Pi_A^{(B)} = -\frac{2g^2 i}{8\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda}{m} + \text{πεπερασμένοι όροι} \right]. \quad (2.461)$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κυρίαρχη απόκλιση είναι τετραγωνική, δηλαδή, ότι η συνεισφορά του διαγράμματος  $B$ -βρόχου της ιδιοενέργειας του  $A$  μποζονίου είναι:

$$\Pi_A^{(B)} = \frac{2g^2}{8\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.462)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, από τις (2.456), (2.462), ότι η συνολική απόκλιση λόγω των  $1$ -βρόχου διαγραμμάτων είναι (από την  $\mathcal{L}_q$ ):

$$\Pi_A^{bos, quad} = \Pi_A^{(A)} + \Pi_A^{(B)} = \frac{6g^2}{8\pi^2} \Lambda^2 + \frac{2g^2}{8\pi^2} \Lambda^2 = \frac{8g^2}{8\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.463)$$

Συνεχίζουμε τώρα με άλλου είδους συνεισφορές. Οι λαγκρατζιανές  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_y$  είναι ανάλογες του  $g$ , που σημαίνει ότι στο ανάπτυγμα του εκθετικού, (2.434), ο όρος δεύτερης τάξης θα περιέχει έναν όρο της μορφής:

$$\begin{aligned} & \frac{i^2}{2} \langle 0|T \left[ A(x)A(y) \int d^4z d^4z' (\mathcal{L}_c(z) + \mathcal{L}_y(z)) (\mathcal{L}_c(z') + \mathcal{L}_y(z')) \right] |0\rangle \\ & - \frac{1}{2} \langle 0|T \left\{ A(x)A(y) \int d^4z d^4z' (\mathcal{L}_c(z)\mathcal{L}_c(z') + \mathcal{L}_c(z)\mathcal{L}_y(z') + \mathcal{L}_y(z)\mathcal{L}_c(z') + \mathcal{L}_y(z)\mathcal{L}_y(z')) \right\} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.464)$$

Εφόσον οι  $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_y$  περιέχουν από δύο όρους η καθεμία, στο παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτουν συνολικά 16 γινόμενα:

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{2} \langle 0|T \left\{ \int d^4z d^4z' A(x)A(y) [ \right. \\ & + (-Mg) (A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z)) (-Mg) (A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')) \\ & + (-Mg) (A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z)) (-g) (A(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z') + iB(z')\bar{\Psi}(z')\gamma_5\Psi_M^\chi(z')) \\ & + (-g) (A(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z)\Psi_M^\chi(z) + iB(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z)\gamma_5\Psi_M^\chi(z)) (-Mg) (A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')) \\ & + (-g) (A(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z)\Psi_M^\chi(z) + iB(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z)\gamma_5\Psi_M^\chi(z)) (-g) (A(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z') \\ & \left. + iB(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\gamma_5\Psi_M^\chi(z')) \right\} |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.465)$$

από τα οποία πρέπει να πάρουμε τα χρονολογικά γινόμενά τους. Έτσι, περιπλέκεται πολύ ο υπολογισμός, όμως, αφού φιλτράρουμε τα γινόμενα και απορρίψουμε τα disconnected διαγράμματα, τα πράγματα απλοποιούνται σημαντικά.

### Tadpole διαγράμματα

Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός των συνεισφορών στην απόκλιση λόγω άλλων διαγραμμάτων, των tadpole, δηλαδή 1-loop διαγραμμάτων με ένα εξωτερικό «πόδι» (διαδότη).

### A-tadpole συνεισφορά

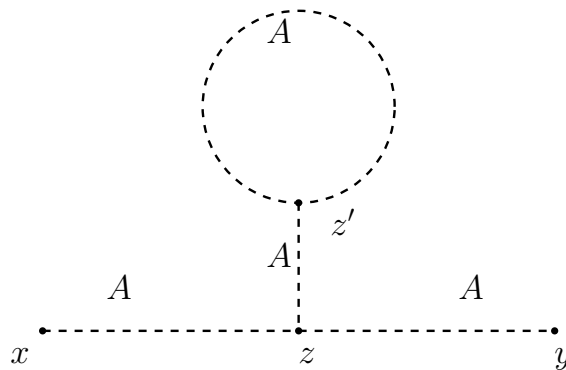
Αρχικά προκύπτει η συνεισφορά:

$$-\frac{1}{2}M^2g^2 \int d^4z d^4z' \langle 0|T [A(x)A(y)A^3(z)A^3(z')] |0\rangle, \quad (2.466)$$

η οποία προκύπτει από την πρώτη γραμμή της (2.465), αν συνάψουμε το  $A(x)$  με οποιοδήποτε από τα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με οποιοδήποτε από τα δύο εναπομείναντα  $A(z)$  και το τελευταίο  $A(z)$  με ένα από τα  $A(z')$  αφήνοντας ένα  $A(z')A(z')$  ζευγάρι μόνο του, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\int d^4z d^4z' T \{ A(x)A(y) [(A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z)) [A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')]] \}$$

Με απλή καταμέτρηση, προκύπτει ότι από τη σύναψη αυτή παίρνουμε 36 ταυτοτικούς συνδυασμούς. Η σύναψη αυτή αντιστοιχίζεται σε ένα tadpole διάγραμμα Feynman:



Εικόνα 2.8: Το A-loop tadpole διάγραμμα του A σωματιδίου

του οποίου η συνεισφορά είναι:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int d^4z d^4z' (-Mg)(-Mg) 36 D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_A(z'-z') \\
& = -18M^2 g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_A(z'-z'), \tag{2.467}
\end{aligned}$$

την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
& -18M^2 g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_A(z'-z') \\
& = -18M^2 g^2 \int d^4z \int d^4z' \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-z)}}{k^2 - m^2} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2 - m^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(z-z')}}{q^2 - m^2} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\ell(z'-z')}}{\ell^2 - m^2}. \tag{2.468}
\end{aligned}$$

Ολοκλήρωση πάνω στα  $z'$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q)$ , ενώ η ολοκλήρωση πάνω στο  $z$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p-q)$ . Συνεπώς παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
& = -18M^2 g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - m^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \\
& \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p-q) \\
& = -18M^2 g^2 \left( -\frac{1}{M^2} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - m^2} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \delta^{(4)}(k+p) (2\pi)^4 \\
& = 18g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - M^2} d^4\ell \frac{1}{\ell^2 - M^2} \frac{e^{iky}}{k^2 - M^2} \\
& = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 - M^2} (-i\Pi_A^{(t,A)}) \frac{i}{k^2 - M^2}, \tag{2.469}
\end{aligned}$$

όπου

$$-i\Pi_A^{(t,A)} = -18g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - M^2}, \tag{2.470}$$

η οποία αποκλίνει τετραγωνικά.

*B-tadpole συνεισφορά*

Περνάμε τώρα στη συνεισφορά:

$$-\frac{1}{2} M^2 g^2 \int d^4z d^4z' \langle 0|T [A(x)A(y)A^3(z)A(z')B^2(z')] |0\rangle, \tag{2.471}$$

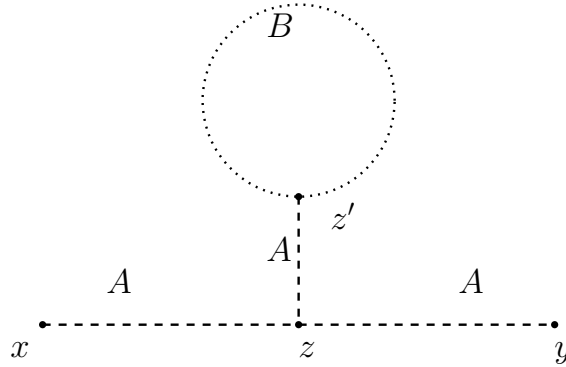
η οποία προκύπτει από την πρώτη γραμμή της (2.465), αν συνάψουμε το  $A(x)$  με οποιοδήποτε από τα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με οποιοδήποτε από τα δύο εναπομείναντα  $A(z)$  και το τελευταίο  $A(z)$  με το ένα  $A(z')$  αφήνοντας ένα  $B(z')B(z')$



$$\int d^4z d^4z' T \{A(x)A(y)[(A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z))[A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')]\}$$

ζευγάρι μόνο του, όπως φαίνεται παραπάνω.

Με απλή καταμέτρηση, προκύπτει ότι από τη σύναψη αυτή παίρνουμε 12 ταυτοτικούς συνδυασμούς. Η σύναψη αυτή αντιστοιχίζεται σε ένα tadpole διάγραμμα Feynman:



Εικόνα 2.9: Το  $B$ -loop tadpole διάγραμμα του  $A$  σωματιδίου

του οποίου η συνεισφορά είναι

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^4z d^4z' (-Mg)(-Mg) 12 D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_B(z'-z') \\ & = -6M^2 g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_B(z'-z'), \end{aligned} \quad (2.472)$$

την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} & -6M^2 g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') D_B(z'-z') \\ & = -6M^2 g^2 \int d^4z \int d^4z' \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-z)}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(z-z')}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\ell(z'-z')}}{\ell^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (2.473)$$

Ολοκλήρωση πάνω στα  $z'$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q)$ , ενώ η ολοκλήρωση πάνω στο  $z$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p - q)$ .

Συνεπώς :

$$\begin{aligned}
&= -6M^2 g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - m^2} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \\
&\quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p-q) \\
&= -6M^2 g^2 \left( -\frac{1}{M^2} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - m^2} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - m^2} \delta^{(4)}(k+p)(2\pi)^4 \\
&= 6g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - M^2} d^4 \ell \frac{1}{\ell^2 - M^2} \frac{e^{iky}}{k^2 - M^2} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 - M^2} (-i\Pi_A^{(t,B)}) \frac{i}{k^2 - M^2}, \tag{2.474}
\end{aligned}$$

όπου

$$-i\Pi_A^{(t,A)} = -6g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - M^2}, \tag{2.475}$$

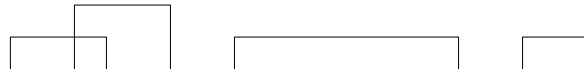
η οποία επίσης αποκλίνει τετραγωνικά.

*χ- tadpole συνεισφορά*

Περνάμε τώρα στην τελευταία tadpole συνεισφορά :

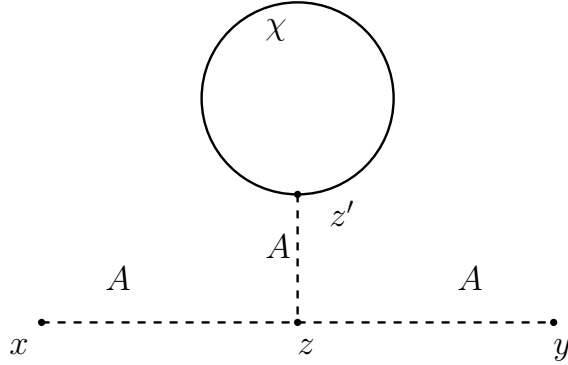
$$-\frac{1}{2} 2Mg^2 \int d^4 z d^4 z' \langle 0|T [A(x)A(y)A^3(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z')] |0\rangle, \tag{2.476}$$

η οποία προκύπτει από την πρώτη και δεύτερη γραμμή της (2.465), αν συνάψουμε το  $A(x)$  με οποιοδήποτε από τα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με οποιοδήποτε από τα δύο εναπομείναντα  $A(z)$  και το τελευταίο  $A(z)$  με το ένα  $A(z')$  αφήνοντας ένα  $\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z')$  ζευγάρι μόνο του, όπως φαίνεται παρακάτω :



$$\int d^4 z d^4 z' T \{ A(x)A(y)[(A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z))[A(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z') + iB(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\gamma_5\Psi_M^\chi(z')]\}$$

Με απλή καταμέτρηση, προκύπτει ότι από τη σύναψη αυτή παίρνουμε 12 ταυτοτικούς συνδυασμούς (στην ουσία 6 συνδυασμούς πολλαπλασιασμένους με το δύο λόγω εναλλαγής των συντεταγμένων  $z, z'$ ). Η σύναψη αυτή αντιστοιχίζεται σε ένα tadpole διάγραμμα Feynman:



Εικόνα 2.10: Το  $\chi$ -loop tadpole διάγραμμα του  $A$  σωματιδίου

του οποίου η συνεισφορά είναι<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^4 z d^4 z' (-Mg)(-g) 12 D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') S_\chi(z'-z') \\ &= 6Mg^2 \int d^4 z d^4 z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') S_\chi(z'-z'), \end{aligned} \quad (2.477)$$

την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} & 6Mg^2 \int d^4 z d^4 z' D_A(x-z) D_A(y-z) D_A(z-z') S_\chi(z'-z') \\ &= 6Mg^2 \int d^4 z \int d^4 z' \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-z)}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(z-z')}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)e^{-i\ell(z'-z')}}{\ell^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση πάνω στα  $z'$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q)$ . Συνεπώς:

$$\begin{aligned} &= 6Mg^2 \int d^4 z \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-z)}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iqz}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)}{\ell^2 - m^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) \\ &= 6Mg^2 \int d^4 z \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-z)}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2 - m^2} \left( -\frac{1}{m^2} \right) \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)}{\ell^2 - M^2} \\ &= -\frac{6g^2}{M} \int d^4 z \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - M^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - M^2} e^{i(k+p)z} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)}{\ell^2 - M^2}. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση πάνω στα  $z$  θα δώσει  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p)$ . Συνεπώς:

$$\begin{aligned} &= -\frac{6g^2}{M} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - M^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipy}}{p^2 - M^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)}{\ell^2 - M^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p) \\ &= -\frac{6g^2}{M} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - M^2} \frac{1}{p^2 - M^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)}{\ell^2 - M^2} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - M^2} (-i\Pi_A^{t,\chi}) \frac{i}{p^2 - M^2}, \end{aligned} \quad (2.478)$$

<sup>22</sup>Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε ένα χαρακτηριστικό αρνητικό πρόσημο το οποίο προκύπτει από αναδιάταξη φερμιονικών (αντιμετατιθέμενων) πεδίων.

όπου<sup>23</sup>:

$$\begin{aligned} -i\Pi_A^{t,\chi} &= \frac{6g^2}{M} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{(\ell + M)_{aa}}{\ell^2 - M^2} = \frac{6g^2}{M} 4M \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - M^2} \\ &= 24g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 - M^2}, \end{aligned} \quad (2.479)$$

το οποίο με τη σειρά του αποκλίνει τετραγωνικά. Παρατηρούμε ότι ενώ και τα τρία ολοκληρώματα που υπολογίσαμε (2.470), (2.475), (2.479), είναι αποκλίοντα, οι αποκλίσεις τους είναι τέτοιες ώστε να μη συνεισφέρουν τελικά στη διόρθωση (το φερμιονικό tadpole εξουδετερώνει τα μποζονικά). Οι αποκλίσεις αλληλοαναιρούνται χωρίς να θέσουμε κανέναν ad hoc περιορισμό. Αυτό σημαίνει ότι αν καταφέρουμε να βρούμε (συνδεδεμένα) διαγράμματα τα οποία να δίνουν αποκλίσεις τέτοιες ώστε να ακυρώνουν αυτή λόγω των 1-βρόχου διαγραμμάτων, (2.463), (με αποτέλεσμα η συνολική απόκλιση να είναι μηδέν), θα μπορούμε επιτέλους να συμπεράνουμε ότι η υπερσυμμετρία λύνει το πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης!

#### *Non-tadpole διαγράμματα*

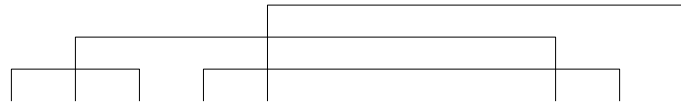
Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός των συνεισφορών στην απόκλιση λόγω των υπόλοιπων διαγραμμάτων, non-tadpole (κυρίως διαγράμματα βρόχων).

#### *A non-tadpole*

Από την (2.465), παίρνουμε πάλι τη συνεισφορά

$$-\frac{1}{2}M^2g^2 \int d^4z d^4z' \langle 0|T [A(x)A(y)A^3(z)A^3(z')] |0\rangle, \quad (2.480)$$

αλλά συνάπτουμε τα πεδία με διαφορετικό τρόπο από αυτόν της (2.466). Δηλαδή, συνάπτουμε το  $A(x)$  με ένα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με ένα  $A(z')$  και τα δύο  $A(z)$  με τα δύο  $A(z')$ , όπως φαίνεται παρακάτω:

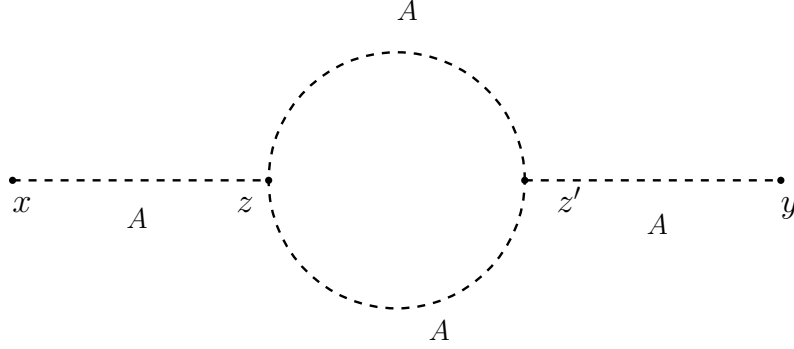


$$\int d^4z d^4z' T \{A(x)A(y)[(A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z))][A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')]\}$$

Με απλή καταμέτρηση βλέπουμε ότι υπάρχουν συνολικά 18 ταυτοτικούς συνδυασμούς, που αντιστοιχίζονται στο παρακάτω διάγραμμα Feynman: από το

<sup>23</sup> Λόγω του ότι οι σπίνορες  $\bar{\Psi}_M^X, \Psi_M^X$  βρίσκονται στο ίδιο σημείο και αναγκαστικά πρέπει να έχουν τον ίδιο σπινωριακό δείκτη. Επίσης, κάνουμε χρήση της ιδιότητας ότι το ίχνος ποιοδήποτε γινομένου με περιττό αριθμό γάμμα πινάκων είναι μηδέν.





Εικόνα 2.11: Το  $A$ -loop non-tadpole διάγραμμα του  $A$  σωματιδίου

οποίο παίρνουμε τη συνεισφορά:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^4 z d^4 z' (-Mg)(-Mg) 18 D_A(x-z) D_A(z-z') D_A(z-z') D_A(z'-y) \\ & = -9M^2 g^2 \int d^4 z d^4 z' D_A(x-z) D_A(z-z') D_A(z-z') D_A(z'-y), \quad (2.481) \end{aligned}$$

την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} & -9M^2 g^2 \int d^4 z d^4 z' D_A(x-z) D_A(z-z') D_A(z-z') D_A(z'-y) \\ & = -9M^2 g^2 \int d^4 z \int d^4 z' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(z-z')}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(z-z')}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\ell(z'-y)}}{\ell^2 - m^2} \\ & = -9M^2 g^2 \int d^4 z \int d^4 z' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{e^{i\ell y}}{q^2 - m^2} \frac{e^{iz(-q-k+p)}}{k^2 - m^2} \frac{e^{q+k-\ell}}{\ell^2 - m^2} \\ & = -9M^2 g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} \frac{e^{i\ell y}}{q^2 - m^2} \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+k-p)}{k^2 - m^2} \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\ell - q - k)}{\ell^2 - m^2} \\ & = -9M^2 g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2} \left( \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} \frac{1}{p^2 - m^2} \right). \quad (2.482) \end{aligned}$$

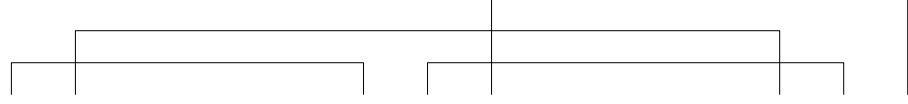
Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα μέσα στην παρένθεση που δίνει τη συνεισφορά στην απόκλιση είναι λογαριθμικά αποκλίνον (4 δυνάμεις στον αριθμητή και 4 στον παρονομαστή) και όχι τετραγωνικά. Συνεπώς, δε θα προχωρήσουμε σε περεταίρω υπολογισμό, αφού δε θα το λάβουμε υπόψη μας. Αναμένουμε να πάρουμε το ίδιο πράγμα ακριβώς και στην περίπτωση που ο βρόχος είναι σωματίδιο  $B$ .

### $B$ non-tadpole

Από την (2.465), παίρνουμε τη συνεισφορά

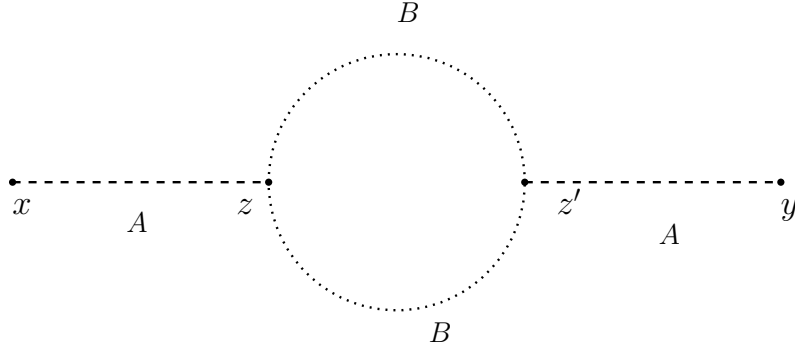
$$-\frac{1}{2} M^2 g^2 \int d^4 z d^4 z' \langle 0|T [A(x)A(y)A(z)A(z')B^2(z)B^2(z')] |0\rangle, \quad (2.483)$$

όπου συνάπτουμε το  $A(x)$  με ένα  $A(z)$ , το  $A(y)$  με ένα  $A(z')$  και τα δύο  $B(z)$  με τα δύο  $B(z')$ , όπως φαίνεται παρακάτω:



$$\int d^4z d^4z' T \{ A(x)A(y)[(A(z)A(z)A(z) + A(z)B(z)B(z))][A(z')A(z')A(z') + A(z')B(z')B(z')]\}$$

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν άλλοι ταυτοτικοί συνδυασμοί, δηλαδή, στο παρακάτω διάγραμμα Feynman αντιστοιχίζεται μόνο ο παραπάνω.



Εικόνα 2.12: Το  $B$ -loop non-tadpole διάγραμμα του  $A$  σωματιδίου

από το οποίο παίρνουμε τη συνεισφορά:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^4z d^4z' (-Mg)(-Mg) D_A(x-z) D_B(z-z') D_B(z-z') D_A(z'-y) \\ & = -\frac{1}{2} M^2 g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_B(z-z') D_B(z-z') D_A(z'-y), \end{aligned} \quad (2.484)$$

την οποία και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} & -\frac{M^2 g^2}{2} \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_B(z-z') D_B(z-z') D_A(z'-y) \\ & = -\frac{M^2 g^2}{2} \int d^4z \int d^4z' \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(z-z')}}{q^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(z-z')}}{k^2 - m^2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\ell(z'-y)}}{\ell^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (2.485)$$

Ο υπολογισμός αυτός έχει ήδη γίνει για το προηγούμενο διάγραμμα, (2.482), κι έτσι αντιστοιχίζουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή (ουσιαστικά αλ-

λάζει ο συντελεστής)

$$= -\frac{M^2 g^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2} \left( \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} \frac{1}{p^2 - m^2} \right). \quad (2.486)$$

Παρατηρούμε λοιπόν, όπως στο προηγούμενο διάγραμμα, ότι το ολοκλήρωμα μέσα στην παρένθεση που δίνει τη συνεισφορά στην απόκλιση είναι λογαριθμικά αποκλίνον (4 δυνάμεις στον αριθμητή και 4 στον παρονομαστή) και όχι τετραγωνικά. Συνεπώς, δε θα προχωρήσουμε σε περαιτέρω υπολογισμό, αφού δε θα το λάβουμε υπόψη μας. Καταλήγουμε λοιπόν ότι το μποζονικού βρόχου non-tadpole διάγραμμα δε συνεισφέρει καθόλου στη συνολική τετραγωνική απόκλιση. Το τελευταίο συνδεδεμένο διάγραμμα που παίρνουμε είναι το φερμιονικού βρόχου non-tadpole διάγραμμα, το οποίο και μελετούμε αναλυτικά παρακάτω.

$\chi$  non-tadpole

Από την τελευταία γραμμή της (2.465) παίρνουμε άλλον έναν όρο που δίνει ένα (το τελευταίο) συνδεδεμένο διάγραμμα. Ο όρος αυτός αποτελείται από το ακόλουθο χρονολογικό γινόμενο:

$$\frac{1}{2} \int d^4 z d^4 z' \langle 0|T \{ A(x)A(y)(-igA(z)\bar{\Psi}_M^\chi(z)\Psi_M^\chi(z))(-igA(z')\bar{\Psi}_M^\chi(z')\Psi_M^\chi(z')) \} |0\rangle. \quad (2.487)$$

Το  $A(x)$  συνάπτεται με το  $A(z)$  και το  $A(y)$  με το  $A(z')$  ή και αντίστροφα. Οι δύο αυτές συνεισφορές είναι ίσες, επομένως η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$-g^2 \int \int d^4 z d^4 z' D_A(x-z)D_A(y-z') \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z)\Psi_{Ma}^\chi(z)\bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z')\Psi_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle, \quad (2.488)$$

όπου βλέπουμε ότι οι σπίνορες που είναι στο ίδιο σημείο έχουν τους ίδιους δείκτες σπιν. Τώρα πρέπει να προχωρήσουμε με προσοχή, καθώς έχουμε να αντιμετωπίσουμε Majorana πεδία, τα οποία όπως έχουμε ήδη δει είναι μία ειδική περίπτωση διαδότη (2.226), (2.228), (2.231). Επομένως, το χρονολογικό γινόμενο της (2.488) θα δώσει δύο διαφορετικές συνάψεις:

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z)\Psi_{Ma}^\chi(z)\bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z')\Psi_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle = \\ & - \langle 0|T \{ \Psi_{Ma}^\chi(z)\bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z')\bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle \\ & + \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z)\bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z')\Psi_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.489)$$

όπου για τα πρόσημα έχουμε να πούμε ότι στον πρώτο όρο είχαμε τρεις «μετακινήσεις» (αντιμεταθέσεις) φερμιονικών πεδίων, εξ ου και το πλην, ενώ για τον δεύτερο όρο είχαμε δύο φερμιονικές «μετακινήσεις», για αυτό και το πρόσημο

βγήκε θετικό. Για τον πρώτο όρο λοιπόν της (2.489), μέσω της (2.226) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & -\langle 0|T \{ \Psi_{Ma}^\chi(z) \bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z') \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle \\ & = -S_{Fab}(z-z') S_{Fba}(z'-z) = -\text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)), \end{aligned} \quad (2.490)$$

όπου το ίχνος εννοεί άθροιση σε όλα τα διαγώνια στοιχεία του γινομένου πινάκων  $S_F S_F$ . Για τον δεύτερο όρο της (2.489), έχουμε μέσω των (2.228), (2.231):

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z') \Psi_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle \\ & = C_{ac}^T S_{Fcb}(z-z') S_{Fbd}(z'-z) C_{da}^T = \text{Tr}(C^T S_F(z-z') S_F(z'-z) C^T) \\ & = \text{Tr}(C^T C^T S_F(z-z') S_F(z'-z)) = -\text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)), \end{aligned} \quad (2.491)$$

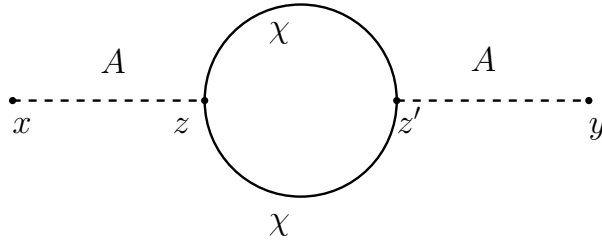
όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε χρήση των ιδιοτήτων για τον  $C$  που δίνονται κάτω από την (2.228). Από τις (2.490), (2.491) διαπιστώνουμε ότι είναι ίδιοι συνεπώς το χρονολογικό γινόμενο της (2.489) θα γίνει:

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \Psi_{Ma}^\chi(z) \bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \Psi_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle = \\ & -\langle 0|T \{ \Psi_{Ma}^\chi(z) \bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z') \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle \\ & + \langle 0|T \{ \bar{\Psi}_{Ma}^\chi(z) \bar{\Psi}_{Mb}^\chi(z') \} |0\rangle \langle 0|T \{ \Psi_{mb}^\chi(z') \Psi_{Ma}^\chi(z) \} |0\rangle \\ & = -\text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)) - \text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)) = -2\text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)). \end{aligned} \quad (2.492)$$

Επομένως, μέσω της (2.492), η (2.488) θα γίνει:

$$+2g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z') \text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)). \quad (2.493)$$

Το διάγραμμα Feynman που αντιστοιχεί στην παραπάνω σύναψη είναι:



Εικόνα 2.13: Το  $\chi$ -loop non-tadpole διάγραμμα του  $A$  σωματιδίου

Συνεχίζουμε τώρα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος (2.493), προκειμένου

να βρούμε τη συνεισφορά στην τετραγωνική απόκλιση του παραπάνω διαγράμματος:

$$\begin{aligned}
& + 2g^2 \int d^4z d^4z' D_A(x-z) D_A(y-z') \text{Tr}(S_F(z-z') S_F(z'-z)) \\
& = 2g^2 \int d^4z d^4z' \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-iq(y-z')}}{q^2 - m^2} \\
& \quad \cdot \text{Tr} \left[ \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-z)}(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-i\ell(z'-z)}(\not{\ell} + m)}{\ell^2 - m^2} \right] \\
& + 2g^2 \int d^4z d^4z' \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{ipz} e^{-iqy} e^{-ikz} e^{i\ell z} e^{i(q+k-\ell)z'}}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)(k^2 - m^2)(\ell^2 - m^2)} \\
& \quad \cdot \text{Tr}((\not{k} + m)(\not{\ell} + m)) \\
& = +2g^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{ipz} e^{-iqy} e^{-ikz} e^{i\ell z} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q+k-\ell)}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)(k^2 - m^2)(\ell^2 - m^2)} \\
& \quad \cdot \text{Tr}((\not{k} + m)(\not{\ell} + m)) \\
& = +2g^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{ipz} e^{-i\ell y} e^{iky} e^{-ikz} e^{i\ell z}}{(p^2 - m^2)((\ell - k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)(\ell^2 - m^2)} \\
& \quad \cdot \text{Tr}((\not{k} + m)(\not{\ell} + m)) \\
& = +2g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{-i\ell y} e^{iky} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-k + \ell + p)}{(p^2 - m^2)((\ell - k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)(\ell^2 - m^2)} \\
& \quad \cdot \text{Tr}((\not{k} + m)(\not{\ell} + m)) \\
& = +2g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx} e^{-iky} e^{iky} e^{ipy} \text{Tr}((\not{k} + m)(\not{k} - \not{p} + m))}{(p^2 - m^2)(p^2 - m^2)((k - p)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \\
& = +2g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2} (-i\Pi_A^{(\chi)}) \frac{i}{p^2 - m^2}, \tag{2.494}
\end{aligned}$$

όπου

$$-i\Pi_A^{(\chi)} = -2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{k} + m)(\not{k} - \not{p} + m)]}{(k^2 - m^2)((k - p)^2 - m^2)}. \tag{2.495}$$

Υπολογίζουμε το ίχνος:

$$\text{Tr}[(\not{k} + m)(\not{k} - \not{p} + m)] = \text{Tr}(\not{k} \not{k} - \not{k} \not{p} + m \not{k} - m \not{p} + m^2). \tag{2.496}$$

Λόγω του ότι το ίχνος περιττού αριθμού γάμμα πινάκων κάνει μηδέν, η παραπάνω έκφραση απλοποιείται και γίνεται:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\not{k} \not{k} - \not{k} \not{p} + m^2) & = \text{Tr}(\not{k} \not{k}) - \text{Tr}(\not{k} \not{p}) + \text{Tr}m^2 \\
& = 4k^2 - 4kp + 4m^2 = 4(k^2 - kp + m^2), \tag{2.497}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα  $\text{Tr}(a b) = 4ab$ . Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα του ίχνους (2.497) πίσω στην (2.495) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
-i\Pi_A^{(\chi)} &= -8g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - kp + m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \\
&= -4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^2 - 2kp + 2m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \\
&= -4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + k^2 - 2kp + p^2 - p^2 - m^2 - m^2 + 4m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \\
&= -4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k-p)^2 - m^2] + (k^2 - m^2) - p^2 + 4m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \quad (2.498)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k-p)^2 - m^2] + (k^2 - m^2)}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} + \frac{-p^2 + 4m^2}{(k^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \xrightarrow{\text{log. diverg.}} \\
&- 4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{(k-p)^2 - m^2} \right) \\
&= -4g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} - 4g^2 \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{k'^2 - m^2}, \quad (2.499)
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα θέσαμε  $k' = k - p$ . Ακολουθώντας λοιπόν ακριβώς τη διαδικασία (2.442)-(2.456), καταλήγουμε ότι τα δύο ολοκληρώματα της (2.499) θα δώσουν:

$$\begin{aligned}
-i\Pi_A^{(\chi)} &= \frac{4gi}{8\pi^2} \Lambda^2 + \frac{4gi}{8\pi^2} \Lambda^2 = \frac{8gi}{8\pi^2} \Rightarrow \\
\Pi_A^{(\chi)} &= -\frac{8g^2}{8\pi^2} \Lambda^2. \quad (2.500)
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τώρα την (2.463) με την (2.500) παρατηρούμε ότι είναι ακριβώς ίσες και αντίθετες. Δηλαδή, η φερμιονική συνεισφορά του διαγράμματος 1-loop non-tadpole του  $\chi$  σωματιδίου ακυρώνει τέλεια την τετραγωνική απόκλιση που προέκυψε από τα 1-loop μποζονικά διαγράμματα. Αυτό σημαίνει πως με έναν αξιοθαύμαστο -αλλά καθόλου «με το χέρι»- τρόπο οι δύο συνεισφορές στην τετραγωνική απόκλιση αλληλοαναιρούνται<sup>24</sup>!

Καταλήξαμε λοιπόν, στο γεγονός ότι από όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα της θεωρίας, είτε δε συνεισφέρουν στην επικίνδυνη τετραγωνική απόκλιση, είτε η συνεισφορά τους ακυρώνεται από κάποια άλλη, έτσι ώστε συνδυαστικά να παίρνουμε μία θεωρία χωρίς τετραγωνικές αποκλίσεις. Αυτός ήταν ο λόγος εξ' αρχής που θέλαμε την υπερσυμμετρία. Να καταστήσει το SM μία θεωρία όπου δε θα υπάρχει το fine-tuning λόγω των τεράστιων αποκλίσεων. Συμπεραίνουμε

<sup>24</sup>Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και αν μελετήσουμε τις διορθώσεις στην ιδιοενέργεια του  $B$  μποζονίου αλλά η δουλειά είναι ακριβώς η ίδια, οπότε δεν υπάρχει λόγος να την επαναλάβουμε.

λοιπόν ότι η υπερσυμμετρία «εκτέλεσε την αποστολή της» και απάλλαξε το SM από το σοβαρό πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης.

Στο αρχικό τους άρθρο, οι Wess-Zumino παρατήρησαν ότι το μοντέλο τους έχει λιγότερες αποκλίσεις από μία συμβατική επανακανονικοποιήσιμη θεωρία. Επαλήθευσαν τις δηλώσεις τους στην προσέγγιση του ενός βρόχου, χρησιμοποιώντας τη θεωρία τους μετά την απαλοιφή των βοηθητικών πεδίων. Όμως, επανέλαβαν την ίδια εργασία, τη μελέτη δηλαδή των αποκλίσεων σε επίπεδο ενός βρόχου, για τη θεωρία τους, χωρίς όμως να αντικαταστήσουν τα βοηθητικά πεδία με τις συναρτήσεις του superpotential. Για την περίπτωση αυτήν βρήκαν ακόμα περισσότερες ακυρώσεις των αποκλίσεων, καταλήγοντας να χρειάζεται μόνο μία σταθερά επανακανονικοποίησης, μία λογαριθμική επανακανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης, την ίδια για όλα τα πεδία της θεωρίας.

Αυτά τα αποτελέσματα στο επίπεδο ενός βρόχου, επεκτάθηκαν από τη δουλειά των Zumino - Ηλιόπουλου σε επίπεδο δύο βρόχων κι έπειτα έδωσαν και μία γενική απόδειξη για όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών, ότι όταν δεν έχουν αντικατασταθεί τα βοηθητικά πεδία μία σταθερά επανακανονικοποίησης στην κυματοσυνάρτηση είναι αρκετή για να επανακανονικοποιηθεί όλη η θεωρία. Αυτό σημαίνει ότι μόνο οι κινητικοί όροι επανακανονικοποιούνται, χωρίς να επανακανονικοποιούνται καθόλου οι υπόλοιποι, δηλαδή, το superpotential δε χρειάζεται επανακανονικοποίηση. Αυτό είναι μία μορφή του SUSY non-renormalization theorem, το οποίο ισχύει γενικά για κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών για κάθε SUSY- αναλλοίωτη θεωρία.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα superfields τα οποία ομαδοποιούν τις συνιστώσες των supermultiplet σε ένα αντικείμενο.

## 2.6 Superfields

Προς το παρόν, έχουμε ακολουθήσει μία «brute force» μέθοδο, με την οποία φτάσαμε στις SUSY- αναλλοίωτες λαγκρατζιανές με απευθείας κατασκευή τους. Ωστόσο υπάρχει μία πιο άμεση διαδικασία από την οποία παράγονται αυτομάτως οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί. Μία τέτοια διαδικασία είναι όντως διαθέσιμη στο πλαίσιο των superfields. Στο πλαίσιο αυτό, θα εμβαθύνουμε στους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς και στη σύνδεσή τους με τις χωροχρονικές μεταθέσεις. Επίσης, η εμφάνιση του βοηθητικού πεδίου  $F$  στη θεωρία γίνεται με έναν αρκετά πιο συνεπή τρόπο. Τέλος, τα superfields χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς στο πλαίσιο του MSSM.

### 2.6.1 Υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί πάνω σε πεδία

Ας θυμηθούμε αρχικά κάποια στοιχεία για τις χωροχρονικές μεταθέσεις. Μία μετάθεση στις συντεταγμένες γράφεται:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (2.501)$$

όπου  $a^\mu$  είναι ένα σταθερό 4-διάνυσμα. Στο αρχικό (μη τονούμενο σύστημα) οι παρατηρητές χρησιμοποιούν καταστάσεις  $|a\rangle, |b\rangle \dots$  και έχουν να κάνουν με πλάτη μετάβασης της μορφής  $\langle b|\phi(x)|a\rangle$ , όπου  $\phi(x)$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο. Στο τονούμενο σύστημα οι παρατηρητές μετρούν το  $\phi$  στο  $x'$  και χρησιμοποιούν καταστάσεις τη μορφής  $|a\rangle' = U|a\rangle \dots$ , όπου  $U$  είναι ένας μοναδιακός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε τα πλάτη μετάβασης να είναι ίσα με αυτά που υπολογίζονται στο μη τονούμενο σύστημα:

$$U^{-1}\phi(x')U = \phi(x) \Leftrightarrow U\phi(x)U^{-1} = \phi(x') = \phi(x + a). \quad (2.502)$$

Για μία απειροστή μετάθεση  $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$U = 1 + i\epsilon^\mu P^\mu, \quad (2.503)$$

όπου οι 4 τελεστές  $P^\mu$  είναι οι γεννήτορες του παραπάνω μετασχηματισμού. Επομένως η (2.502) γίνεται:

$$\phi(x'^\mu) = (1 + i\epsilon_\mu P^\mu)\phi(x)(1 - i\epsilon_\mu P^\mu) = \phi(x^\mu + \epsilon^\mu) = \phi(x^\mu) + \epsilon^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \quad (2.504)$$

δηλαδή,

$$\phi(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x), \quad (2.505)$$

όπου

$$\delta\phi(x) = i\epsilon_\mu [P^\mu, \phi(x)] = \epsilon_\mu \partial^\mu \phi(x), \quad (2.506)$$

από όπου παίρνουμε τη θεμελιώδη μεταθετική σχέση:

$$i[P^\mu, \phi(x)] = \partial^\mu \phi. \quad (2.507)$$

Μπορούμε να δούμε και αλλιώς την (2.506), δηλαδή:

$$\delta\phi = \epsilon_\mu \partial^\mu \phi = -i\epsilon_\mu P^\mu \phi, \quad (2.508)$$

όπου  $P^\mu$  είναι ένας διαφορικός τελεστής που δρα στο  $\phi$  και έχει τη μορφή  $P^\mu = i\partial^\mu$ .

Τώρα, θα κάνουμε την ίδια δουλειά με ανάλογα βήματα χρησιμοποιώντας τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Αυτό θα συνεπιφέρει τη μεγέθυνση του χώρου των συντεταγμένων  $x^\mu$  από τις οποίες τα πεδία μπορούν να εξαρτώνται ώστε να συμπεριλαμβάνονται και οι φερμιονικοί βαθμοί ελευθερίας, πιο συγκεκριμένα, οι σπινωριακοί βαθμοί ελευθερίας  $\theta, \theta^*$ . Τα πεδία τα οποία θα εξαρτώνται τόσο από τις χωροχρονικές συντεταγμένες,  $x^\mu$ , όσο και από τις σπινωριακές,  $\theta, \theta^*$  ονομάζονται *superfields*. Όπως λοιπόν οι τελεστές  $P^\mu$  παράγουν (μέσω του μοναδιακού μετασχηματισμού  $U$ ) μία μετατόπιση στο χωροχρονικό όρισμα του  $\phi$ , έτσι αναμένουμε να μπορούμε να κατασκευάσουμε ανάλογους μοναδιακούς τελεστές από τους  $Q, Q^\dagger$ , οι οποίοι κατά παρόμοιο τρόπο παράγουν μετατοπίσεις στο σπινωριακό όρισμα του πεδίου. Η αλήθεια



είναι ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά και διακριτά αλλά έχουν αρκετό ενδιαφέρον καθώς, με τη σπινωριακή μετατόπιση επάγεται και χωροχρονική, κάτι βέβαια που το περιμέναμε από την αντιμεταθετική σχέση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας (2.307). Αφού λοιπόν θα έχουμε κατασκευάσει τους τελεστές και έχουμε δει τις μετατοπίσεις που επάγουν, θα καταλήξουμε σε μία σχέση ανάλογη της (2.508), δηλαδή θα αποκτήσουμε μία διαφορική αναπαράσταση των τελεστών  $Q, Q^\dagger$ , η διαφορίση στην περίπτωση αυτή θα γίνεται ως προς τους σπινωριακούς βαθμούς ελευθερίας. Τέλος, θα ελέγξουμε αν οι τελεστές που θα βρούμε ικανοποιούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

Αν θεωρήσουμε για μοναδιακό μετασχηματισμό των μεταθέσεων  $e^{ix \cdot P}$ , η (2.502) γράφεται:

$$e^{ix \cdot P} \phi(0) e^{-ix \cdot P} = \phi(x). \quad (2.509)$$

Ανάλογα, θέλουμε έναν υπερσυμμετρικό μοναδιακό μετασχηματισμό,  $U$ , ο οποίος έχει τη μορφή<sup>25</sup>:

$$U(x, \theta, \theta^*) = e^{ix \cdot P} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta}^* \bar{Q}}. \quad (2.510)$$

Εδώ  $Q, \bar{Q}^* (Q^{\dagger T})$  είναι οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας που έχουμε ήδη συναντήσει και  $\theta, \theta^*$  είναι οι σπινωριακοί βαθμοί ελευθερίας που σχετίζονται με τις υπερσυμμετρικές μεταθέσεις. Σημειώνουμε επίσης πως το dot γινόμενο στους εκθέτες είναι το συνηθισμένο:

$$\begin{aligned} \theta \cdot Q &\equiv \theta^T (-i\sigma_2) Q, \\ \bar{\theta} \cdot \bar{Q} &\equiv \bar{\theta}^\dagger (i\sigma^2) Q^{\dagger T}. \end{aligned} \quad (2.511)$$

Όταν το  $\phi(0)$  μετασχηματίζεται μέσω του  $U(x, \theta, \theta^*) \phi(0) U^{-1}(x, \theta, \theta^*)$ , περιμένουμε ότι να αποκτήσουμε ένα  $\phi$  το οποίο θα είναι μία συνάρτηση των  $x, \theta, \theta^*$ , συνεπώς, θα το γράψουμε σαν ένα superfield,  $\Phi$ :

$$U(x, \theta, \theta^*) \Phi(0) U^{-1}(x, \theta, \theta^*) = \Phi(x, \theta, \theta^*). \quad (2.512)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το γινόμενο δύο τυχαίων συνηθισμένων τελεστών χωροχρονικών μεταθέσεων:

$$e^{ixP} e^{iaP} = e^{i(x+a)P}, \quad (2.513)$$

αφού όλες οι συνιστώσες του  $P$  μετατίθενται. Το γινόμενο αυτό επάγει τον μετασχηματισμό  $x \rightarrow x + a$  στον χώρο των παραμέτρων (συντεταγμένων). Θα γενικεύσουμε λοιπόν τώρα πολλαπλασιάζοντας δύο  $U$  της μορφής (2.512) και θα ελέγξουμε τους μετασχηματισμούς που επάγονται στις χωροχρονικές αλλά και σπινωριακές συντεταγμένες.

Ένα τέτοιο γινόμενο θα είναι:

$$U(a, \xi, \xi^*) U(x, \theta, \theta^*) = e^{iaP} e^{i\xi \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \bar{Q}} e^{ixP} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \bar{Q}}. \quad (2.514)$$

<sup>25</sup>Όπως αντίστοιχα στην άλγεβρα των στερεών στροφών παίρνουμε:  $A(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\gamma\tau_3} e^{i\beta\tau_2} e^{i\alpha\tau_3}$ .

Αντίθετα με την περίπτωση γινομένου μόνο των τελεστών χωροχρονικών μεταθέσεων που είδαμε νωρίτερα στην (2.513), στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατό να συνδυάσουμε όλα τα εκθετικά, αφού οι τελεστές  $Q, Q^\dagger$  δεν μετατίθενται, αλλά ικανοποιούν την άλγεβρα (2.307). Βέβαια, οι συνιστώσες του  $P$  μετατίθενται και με τους δύο υπερσυμμετρικούς τελεστές  $Q, Q^\dagger$ , όπως έχουμε ήδη αναφέρει (κάτω από την (2.311)). Επομένως, μπορούμε να μεταφέρουμε τον τελεστή  $e^{ixP}$  ανάμεσα από τους τελεστές στο αριστερό άκρο της (2.514), ώστε να πάρουμε:

$$U(a, \xi, \xi^*)U(x, \theta, \theta^*) = e^{i(x+a)P} e^{i\xi \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}}. \quad (2.515)$$

Θα απομονώσουμε και θα δουλέψουμε με το μη τετριμμένο κομμάτι του γινομένου, το  $e^{i\xi \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}}$ . Για να το απλοποιήσουμε θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Baker-Campbell-Hausdorff (B-C-H):

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{6}[[A,B],B]+\dots}. \quad (2.516)$$

Οπότε, εφαρμόζοντας την (2.516) στο γινόμενο μας για  $A = i\xi \cdot Q, B = i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}$ , παίρνουμε:

$$e^{i\xi \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}} = e^{i\xi Q + i\bar{\xi} \bar{Q} - \frac{1}{2}[\xi \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] + \dots}. \quad (2.517)$$

Υπολογίζουμε λεπτομερώς το μεταθέτη ξεχωριστά:

$$\begin{aligned} [\xi \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] &= [\xi^a Q_a + \bar{\xi}_b \bar{Q}^b] = [\xi^a Q_a, -\bar{\xi}^b \bar{Q}_b] = [\xi^a Q_a, -\xi^{*b} Q_b^\dagger] \\ &= -\xi^a Q_a \xi^{*b} Q_b^\dagger + \xi^{*b} Q_b^\dagger \xi^a Q_a \\ &= \xi^a \xi^{*b} (Q_a Q_b^\dagger + Q_b^\dagger Q_a) = \xi^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu. \end{aligned} \quad (2.518)$$

Αυτό είναι ένα αρκετά χαρμόσυνο αποτέλεσμα, αφού το  $P$  μετατίθεται με τα  $Q, Q^\dagger$  και αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν παραπέρα όροι στην B-C-H για να υπολογίσουμε, οπότε η (2.517) θα γίνει:

$$e^{i\xi \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}} = e^{iAP} e^{\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}}, \quad \text{όπου } A^\mu = \frac{1}{2} i \xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b}, \quad (2.519)$$

όπου μεταφέραμε τον όρο  $e^{iAP}$  μπροστά εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι μετατίθεται με τους  $Q, Q^\dagger$ . Θα κάνουμε μία μικρή παύση στο σημείο αυτό να συζητήσουμε το αποτέλεσμα (2.519). Κάτω από αυτόν τον μεταχηματισμό, οι χωροχρονικές συντεταγμένες αποκτούν μία επιπλέον μετατόπιση, την  $A^\mu$ , η οποία έχει χτιστεί από τις σπινωριακές παραμέτρους. Ωστόσο, φαίνεται σα να θεωρήσαμε a priori το γεγονός ότι το  $A^\mu$  είναι 4-διάνυσμα. Η απόδειξη γίνεται έμμεσα. Έχουμε ήδη δει, (2.85), ότι η ποσότητα  $\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi$  μετασχηματίζεται σαν τετραδιάνυσμα κάτω από τους LT. Επομένως, αν μπορούσαμε να δείξουμε ότι η ποσότητα που ορίσαμε  $A^\mu, \xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b}$  είναι η ίδια με την  $-\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \xi$  ή την  $-\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi$ , θα έχουμε ουσιαστικά αποδείξει το ζητούμενο:

$$\begin{aligned} \xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} &= \xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \bar{\xi}^b = -\bar{\xi}^b (\sigma^\mu)_{ab} \xi^a = -\epsilon^{bc} \bar{\xi}_c (\sigma^\mu)_{ab} \epsilon^{ad} \xi_d \\ &= \bar{\xi}_c \epsilon^{cb} (\sigma^\mu)_{ba}^T \epsilon^{ad} \xi_d = \bar{\xi}_c (i\sigma_2) \sigma^{\mu T} (i\sigma_2) \xi_d \\ &= -\bar{\xi}_c \bar{\sigma}^\mu \xi_d = -\bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \xi. \end{aligned} \quad (2.520)$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι το  $A^\mu$  γράφεται σαν μία ποσότητα που έχουμε αποδείξει ήδη ότι είναι 4–διάνυσμα, άρα θα είναι και το  $A^\mu$ .

Συνεχίζουμε στον υπολογισμό του  $e^{i\xi \cdot Q} e^{i\xi \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}}$ :

$$e^{i\xi \cdot Q} e^{i\xi \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} = e^{iAP} e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q})} e^{i\theta Q} e^{i\bar{\theta} \bar{Q}}. \quad (2.521)$$

Εφαρμόζουμε πάλι την ταυτότητα B-C-H στον δεύτερο και τρίτο παράγοντα του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q})} e^{i\theta Q} &= e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} + \theta Q) - \frac{1}{2}[\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \theta Q] + \dots} \\ &= e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} + \theta Q) - \frac{1}{2}[\xi \cdot Q, \theta Q] + [\bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \theta Q] \dots} \\ &= e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} + \theta Q) + \frac{1}{2}\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} P_\mu}. \end{aligned} \quad (2.522)$$

Οπότε μέχρι τώρα έχουμε:

$$e^{i\xi \cdot Q} e^{i\xi \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} = e^{-\frac{1}{2}\xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} P_\mu + \frac{1}{2}\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} P_\mu} e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} + \theta \cdot Q)} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}}. \quad (2.523)$$

Τώρα εφαρμόζουμε πάλι την ταυτότητα B-C-H (αντίστροφα) στον προτελευταίο όρο της τελευταίας εξίσωσης.

$$e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q} + \theta \cdot Q)} = e^{i(\xi + \theta) \cdot Q} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{Q}} e^{\frac{1}{2}[(\xi + \theta) \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]}. \quad (2.524)$$

Υπολογίζουμε το μεταθέτη:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(\xi + \theta) \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] &= \frac{1}{2}[\xi \cdot Q + \theta \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] = \frac{1}{2}[\xi \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] + \frac{1}{2}[\theta \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] \\ &= \frac{1}{2}\xi^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu + \frac{1}{2}[\theta^a Q_a, -\xi^{*b} Q_b^\dagger] \\ &= \frac{1}{2}\xi^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu + \frac{1}{2}\theta^a \xi^{*b} Q_a Q_b^\dagger + \theta^a \xi^{*b} Q_b^\dagger Q_a \\ &= \frac{1}{2}\xi^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu + \frac{1}{2}\theta^a \xi^{*b} (Q_a Q_b^\dagger + Q_b^\dagger Q_a) \\ &= \frac{1}{2}\xi^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu + \frac{1}{2}\theta^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu. \end{aligned} \quad (2.525)$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας την τελευταία εξίσωση με το ζητούμενο γινόμενο (2.523), παίρνουμε:

$$e^{i\xi \cdot Q} e^{i\xi \bar{Q}} e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} = e^{i(-\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} P_\mu)} e^{i(\xi + \theta) \cdot Q} e^{i(\bar{\xi} + \bar{\theta}) \cdot \bar{Q}}. \quad (2.526)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι το γινόμενο  $U(a, \xi, \xi^*)U(x, \theta, \theta^*)$  θα είναι:

$$U(a, \xi, \xi^*)U(x, \theta, \theta^*) = e^{i(x+a)P} e^{i(\xi + \theta) \cdot Q} e^{i(\bar{\xi} + \bar{\theta}) \cdot \bar{Q}} e^{i(-i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b} P_\mu)}, \quad (2.527)$$

και θα επάγει μετασχηματισμούς της μορφής:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \theta \rightarrow \theta + \xi \\ 0 &\rightarrow \theta^* \rightarrow \theta^* + \xi^* \\ 0 &\rightarrow x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu - i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{*b}. \end{aligned} \quad (2.528)$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός θα γίνει :

$$\begin{aligned}
& U(a, \xi, \xi^*)U(x, \theta, \theta^*)\Phi(0)U^{-1}(x, \theta, \theta^*)U^{-1}(a, \xi, \xi^*) \\
&= U(a, \xi, \xi^*)\Phi(x, \theta, \theta^*)U^{-1}(a, \xi, \xi^*) \\
&= \Phi(x^\mu + a^\mu - i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{*b}, \theta + \xi, \theta^* + \xi^*). \quad (2.529)
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε τώρα στο δεύτερο μέρος της υπερσυμμετρικής επέκτασης των συνηθισμένων μεταθέσεων, δηλαδή στην εύρεση του υπερσυμμετρικού ανάλογου του  $\delta\phi = \epsilon_\mu\partial^\mu\phi = -i\epsilon_\mu P^\mu\phi$ .

### 2.6.2 Οι υπερσυμμετρικοί γεννήτορες σε αναπαράσταση διαφορικών τελεστών

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, θεωρήσαμε απειροστές χωροχρονικές μεταθέσεις και καταλήξαμε στην (2.508), η οποία μας παρέχει μία αναπαράσταση των μεταθέσεων σε μορφή διαφορικού τελεστή. Με τα ίδια βήματα θα καταλήξουμε σε μία τέτοια αναπαράσταση για τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς και θα επαληθεύσουμε στο τέλος ότι ικανοποιούν την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

Παίρνουμε λοιπόν την (2.529), το αποτέλεσμα δηλαδή της εφαρμογής του μετασχηματισμού που παραμετροποιείται από τα  $a, \xi, \xi^*$  στο πεδίο  $\Phi(x, \theta, \theta^*)$ . Για απειροστούς τέτοιους μετασχηματισμούς ως προς τα  $\xi, \xi^*$ , η μεταβολή του  $\Phi$  θα είναι:

$$\delta\Phi = -i\theta^a(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{*b}\partial_\mu\Phi + \xi^a\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^a} + \xi_a^*\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_a^*}. \quad (2.530)$$

Για να υπάρχει συνέπεια στους σπινωριακούς δείκτες, επειδή ένα γινόμενο  $L$ -τύπου σπινόρων γνωρίζουμε ότι είναι «διαγώνια από πάνω αριστερά προς κάτω δεξιά», θα πρέπει η παράγωγος  $\partial/\partial\theta^a$  να συμπεριφέρεται σαν ένα  $L$ -τύπου αντικείμενο,  $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^a}$ . Ας το επαληθεύσουμε. Ένας γρήγορος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την παράγωγο είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}
\partial_a(\theta \cdot \theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta^a}(\theta^b\theta_b) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(\epsilon_{bc}\theta^b\theta^c) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(\epsilon_{12}\theta^1\theta^2 + \epsilon_{21}\theta^2\theta^1) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta^a}(-\theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(-2\theta^1\theta^2). \quad (2.531)
\end{aligned}$$

Επομένως, για  $a = 1$  και  $a = 2$ , η παραπάνω παραγωγή θα γίνει :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial\theta^1}(-2\theta^1\theta^2) = -2\theta^2 = -2\epsilon^{21}\theta_1 = 2\theta_1. \\ \frac{\partial}{\partial\theta^2}(-2\theta^1\theta^2) = \frac{\partial}{\partial\theta^2}(2\theta^2\theta^1) = 2\theta^1 = 2\epsilon^{12}\theta_2 = 2\theta_2. \end{array} \right. \quad (2.532)$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι :

$$\partial_a(\theta \cdot \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(\theta \cdot \theta) = 2\theta_a. \quad (2.533)$$

Με το ίδιο επιχείρημα, καταλήγουμε ότι το  $\partial/\partial\theta_a^*$  θα πρέπει να συμπεριφέρεται σαν ένα  $R$ -τύπου αντικείμενο,  $\bar{\partial}^{\dot{a}} \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_a^*} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{a}}}$ . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για να επαληθεύσουμε την υπόθεση:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{\dot{a}}(\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(\theta_b^* \theta^{b*}) = \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(\epsilon^{bc} \theta_b^* \theta_c^*) = \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(\epsilon^{12} \theta_1^* \theta_2^* + \epsilon^{21} \theta_2^* \theta_1^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(\theta_1^* \theta_2^* - \theta_2^* \theta_1^*) = \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(2\theta_1^* \theta_2^*).\end{aligned}\quad (2.534)$$

Επομένως, για  $a = 1$  και  $a = 2$ , η παραπάνω παραγωγή θα γίνει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial\theta_1^*}(2\theta_1^* \theta_2^*) = 2\theta_2^* = 2\epsilon_{21} \theta_1^* = 2\theta^{1*} = 2\bar{\theta}^{\dot{1}}. \\ \frac{\partial}{\partial\theta_2^*}(2\theta_1^* \theta_2^*) = \frac{\partial}{\partial\theta_2^*}(-2\theta_2^* \theta_1^*) = -2\theta_1^* = -2\epsilon_{12} \theta_2^* = 2\theta^{2*} = 2\bar{\theta}^{\dot{2}}. \end{array} \right. \quad (2.535)$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\bar{\partial}^{\dot{a}}(\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}(\bar{\theta} \cdot \bar{\theta}) = 2\theta^{a*} = 2\bar{\theta}^{\dot{a}}. \quad (2.536)$$

Συνεχίζοντας λοιπόν την ανάλυση, θέλουμε αναλογικά με την (2.508), να εκφράσουμε τη μεταβολή του  $\Phi$ , (2.530), με τη μορφή:

$$\delta\Phi = (-i\xi \cdot Q - i\bar{\xi}\bar{Q})\Phi = (-i\xi^a Q_a - i\xi_a^* Q^{\dagger a})\Phi, \quad (2.537)$$

με άλλα λόγια,

$$\delta\Phi = (\text{παράμετρος}) \times (\text{γεννήτορας}) \times (\text{πεδίο}).$$

Συγκρίνοντας λοιπόν απλώς τις (2.530), (2.537), παίρνουμε:

$$Q_a = i \frac{\partial}{\partial\theta^a} \quad \text{και} \quad Q^{\dagger a} = i \frac{\partial}{\partial\theta_a^*}, \quad (2.538)$$

καθώς και μία ακόμα συνεισφορά:

$$-i\xi_a^* Q^{\dagger a} \Phi = -i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{b*} \partial_\mu \Phi. \quad (2.539)$$

Ο στόχος μας είναι να ελέγξουμε αν ικανοποιούνται οι αντιμεταθετικές σχέσεις των  $Q_a, Q_a^\dagger$ . Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή με κάτω δείκτη  $Q_a^\dagger$  αντί του  $Q^{\dagger a}$  που βρήκαμε. Ας δούμε πως από τον  $Q^{\dagger a}$  παίρνουμε τον ζητούμενο με κάτω δείκτη  $Q_a^\dagger$ :

Ισχύει ότι:

$$\epsilon^{ab} \partial_b = -\partial^a, \quad (2.540)$$

το οποίο και αποδεικνύουμε:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{ab}\partial_b\theta^c &= \epsilon^{ab}\delta_b^c = \epsilon^{ac} \\ -\partial^a\theta^c &= -\partial^a(\epsilon^{cd}\theta_d) = -\epsilon^{cd}\partial^a\theta_d = -\epsilon^{cd}\delta_d^a = -\epsilon^{ca} = \epsilon^{ac} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\epsilon^{ab}\partial_b\theta^c = -\partial^a\theta^c \Rightarrow \epsilon^{ab}\partial_b = -\partial^a \quad \text{και} \quad \partial_a = -\epsilon_{ab}\partial^b. \quad (2.541)$$

Παρομοίως αποδεικνύεται και για την περίπτωση με τους τονούμενους δείκτες:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\bar{\partial}_{\dot{b}} &= -\bar{\partial}^{\dot{a}}, \\ \bar{\partial}_{\dot{a}} &= -\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\partial}^{\dot{b}}. \end{aligned} \quad (2.542)$$

Το «ανεβοκατέβασμα» δεικτών σε σπινωριακές παραγώγους συνεπάγεται την εμφάνιση ενός χαρακτηριστικού πλήν.

Επομένως τώρα μπορούμε να βρούμε την έκφραση  $Q^\dagger$  με κάτω δείκτη:

$$\begin{aligned} Q^{\dagger a} &= i \frac{\partial}{\partial \theta_a^*} \Rightarrow \bar{Q}^{\dot{a}} = i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{a}}} \Rightarrow \bar{Q}^{\dot{a}} = i \bar{\partial}^{\dot{a}} \stackrel{(2.542)}{\Rightarrow} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \bar{Q}_{\dot{b}} = -i \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \bar{\partial}_{\dot{b}} \Rightarrow \\ \bar{Q}_{\dot{b}} &= -i \bar{\partial}_{\dot{b}} \Rightarrow \bar{Q}_b = -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^b} \Rightarrow Q_b^\dagger = -i \frac{\partial}{\partial \theta^{b*}}. \end{aligned} \quad (2.543)$$

Όσον αφορά τη επιπλέον συνεισφορά που βρήκαμε για το  $Q^{\dagger a}$ , (2.539), λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\xi_a^* Q^{\dagger a} = -\xi^{a*} Q_a^\dagger$  (από την (2.139)), έχουμε:

$$\begin{aligned} -i \xi_a^* Q^{\dagger a} \Phi &= -i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \xi^{b*} \partial_\mu \Phi \stackrel{(2.139)}{\Rightarrow} \\ i \xi^{*a} Q_a^\dagger \Phi &= -i \theta^a \xi^{b*} (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \Phi \Rightarrow \\ i \xi^{*a} Q_a^\dagger \Phi &= i \xi^{b*} \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \Phi \stackrel{a \leftrightarrow b}{\Rightarrow} \\ i \xi^{*a} Q_a^\dagger \Phi &= i \xi^{a*} \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \Phi \Rightarrow \\ Q_a^\dagger &= \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.544)$$

Επομένως, συνολικά η έκφραση του  $Q_a^\dagger$  που παίρνουμε από τις δύο συνεισφορές (2.543), (2.544) είναι:

$$Q_a^\dagger = -i \frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu. \quad (2.545)$$

Ξαναγράφουμε και την έκφραση του  $Q_a$ , για χάρη ευκολίας:

$$Q_a = i \frac{\partial}{\partial \theta^a}. \quad (2.546)$$

Απομένει να ελέγξουμε αν οι εκφράσεις των  $Q, Q^\dagger$  στην αναπαράσταση των διαφορικών τελεστών στην οποία καταλήξαμε, ικανοποιεί την υπερσυμμετρική άλγεβρα. Με άλλα λόγια θα εξετάσουμε αν ισχύουν οι αλγεβρικές σχέσεις:

$$1. \left\{ Q_a, Q_b^\dagger \right\} = i (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu$$

$$2. \{Q_a, Q_b\} = 0$$

$$3. \{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} = 0$$

Έχουμε λοιπόν διαδοχικά :

1.

$$\begin{aligned}
\{Q_a, Q_b^\dagger\} \theta^c &= Q_a Q_b^\dagger \theta^c + Q_b^\dagger Q_a \theta^c \\
&= Q_a \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \right) \theta^c + Q_b^\dagger \left( i \frac{\partial}{\partial \theta^a} \right) \theta^c \\
&= Q_a \left( -i \frac{\partial \theta^c}{\partial \theta^{a*}} + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c \right) + i Q_b^\dagger \delta_a^c \\
&= i \frac{\partial}{\partial \theta^a} (\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c) + \left( -\frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \right) i \delta_a^c \\
&= i (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c \Rightarrow \\
\{Q_a, Q_b^\dagger\} &= i (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu . \tag{2.547}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\{Q_a, Q_b\} \theta^c &= Q_a Q_b \theta^c + Q_b Q_a \theta^c \\
&= i \frac{\partial}{\partial \theta^a} \left( i \frac{\partial \theta^c}{\partial \theta^b} \right) + i \frac{\partial}{\partial \theta^c} \left( i \frac{\partial \theta^c}{\partial \theta^a} \right) \\
&= i \frac{\partial}{\partial \theta^a} (i \delta_b^c) + i \frac{\partial}{\partial \theta^b} (i \delta_a^c) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta^a} \delta_b^c - \frac{\partial}{\partial \theta^b} \delta_a^c = 0 . \tag{2.548}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} \theta^c &= Q_a^\dagger Q_b^\dagger + Q_b^\dagger Q_a^\dagger \\
&= Q_a^\dagger \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^{b*}} + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \right) \theta^c + Q_b^\dagger \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \right) \theta^c \\
&= Q_a^\dagger \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c + Q_b^\dagger \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \theta^c \\
&= \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \right) (\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c) + \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^{b*}} + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \right) (\theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \theta^c) \\
&= \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu (\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c) + (\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu) \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \theta^c \\
&= \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^c + \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \partial_\mu \theta^c + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \theta^c \\
&\quad + \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \partial_\mu \theta^c = 0, \tag{2.549}
\end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι :

$$(\sigma^\mu)^T \sigma_\mu = (1, \bar{\sigma}^T)(1, -\bar{\sigma}) = 1 - \bar{\sigma}^T \bar{\sigma} = 1 - \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Έχουμε λοιπόν παραγάγει μία αναπαράσταση διαφορικών τελεστών για τους γεννήτορες της υπερσυμμετρίας σε όρους των φερμιονικών παραμέτρων και παραγώγους ως προς αυτές, η οποία ικανοποιεί την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

### 2.6.3 Chiral Superfields

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα superfield δεν εξαρτάται κάθολου από το  $\theta^*$ , παρά μόνο από τα  $x, \theta$ . Ένα τέτοιο πεδίο συνήθως ονομάζεται left-chiral superfield, καθώς όπως θα δούμε περιέχει μόνο  $\bar{L}$ -τύπου σπίνορες. Αναποτύσσουμε το superfield,  $\Phi$ , σε δυνάμεις του  $\theta$ . Λόγω της φερμιονικής φύσης των παραμέτρων  $\theta$ , που σημαίνει ότι  $\theta^1 = \theta^2 = 0$ , το ανάπτυγμα θα φτάνει μέχρι τον τρίτο όρο, δηλαδή θα περιέχει έναν ανεξάρτητο όρο από το  $\theta$ , έναν γραμμικό ως προς  $\theta$  και έναν όρο που θα εμπλέκει το γινόμενο  $\theta \cdot \theta = -2\theta_1\theta_2$ :

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F(x). \quad (2.550)$$

Αυτή είναι η πιο γενική μορφή ενός τέτοιου superfield (που εξαρτάται δηλαδή μόνο από τα  $x, \theta$ ) και εξαρτάται από τρεις συνιστώσεις-πεδία,  $\phi, \chi, F$ . Ο συμβολισμός που τους δώσαμε είναι προφανώς στοχευμένος και συμπίπτει με την ονοματολογία που δώσαμε στο μοντέλο Wess-Zumino στα πεδία της supermultiplet που μελετήσαμε. Θα δούμε ότι αν εφαρμόσουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς που βρήκαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, (2.545), πάνω στο παραπάνω superfield, θα πάρουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πεδίων  $\phi, \chi, F$  που είδαμε στις (2.369), (2.370), (2.371). Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \left( -i\xi^a Q_a - i\xi_a^* Q^{\dagger a} \right) \Phi = (-i\xi^a Q_a + i\xi_a^* Q_a^\dagger) \Phi \\ &= \left( \xi^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \xi_a^* \frac{\partial}{\partial \theta^{a*}} + i\xi_a^* \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \right) \left( \phi(x) + \theta^c \chi_c + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F \right) \\ &\equiv \delta_\xi \phi + \theta^a \delta_\xi \chi_a + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta \delta_\xi F. \end{aligned} \quad (2.551)$$

Υπολογίζουμε τον πρώτο όρο της δεύτερης γραμμής της παραπάνω εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \xi^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} \left( \theta^c \chi_c + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F \right) &= \xi^a \frac{\partial}{\partial \theta^a} (\theta^c \chi_c) + \xi^a \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta^a} (\theta^a \theta_a) F \\ &\stackrel{(2.533)}{=} \xi^a \delta_a^c \chi_c + \xi^a \frac{1}{2} 2\theta_a F = \xi^a \chi_a + \xi^a \theta_a F. \end{aligned} \quad (2.552)$$



Προφανώς, ο δεύτερος όρος,  $\partial/\partial\theta^{a*}$ , εξαφανίζεται αφού το  $\Phi$  δεν εξαρτάται από το  $\theta^{a*}$ . Ο όρος που απομένει θα είναι:

$$i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\partial_\mu\phi(x) + i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\theta^c\partial_\mu\chi_c + \cancel{i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\frac{1}{2}\theta\cdot\theta\partial_\mu F}, \quad (2.553)$$

όπου ο τελευταίος όρος είναι μηδέν, καθώς η φύση των  $\theta$  αποκλείει οποιονδήποτε κυβικό όρο ως προς  $\theta$ . Οπότε, συμμαζεύοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, η μεταβολή του  $\Phi$ , (2.551), θα γίνει:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \xi^a\chi_a + \theta^a\xi_a F - i\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\xi^{a*}\partial_\mu\phi + i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\theta^c\partial_\mu\chi_c \\ &\equiv \delta_\xi\phi + \theta^a\delta_\xi\chi_a + \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\delta_\xi F. \end{aligned} \quad (2.554)$$

Επομένως ο ανεξάρτητος από το  $\theta$  όρος θα είναι:

$$\delta_\xi\phi = \xi^a\chi_a, \quad (2.555)$$

το γραμμικό κομμάτι ως προς  $\theta$  θα είναι:

$$\theta^a\delta_\xi\chi_a = \theta_a(\xi_a F - i(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}\partial_\mu\phi), \quad (2.556)$$

και αφού η ισότητα αυτή θα πρέπει να αληθεύει για κάθε  $\theta$ , συμπεραίνουμε ότι:

$$\delta_\xi\chi = \xi_a F - i(\sigma^\mu)_{ab}\xi^{b*}\partial_\mu\phi. \quad (2.557)$$

Έχουμε λοιπόν, προς το παρόν, αναπαραγάγει τους μετασχηματισμούς των  $\phi, \chi$  πεδίων, (2.369), (2.371). Απομένει μόνο ο διγραμμικός όρος ο οποίος όπως θα δούμε θα δώσει τη μεταβολή του  $F$ -πεδίου,  $\delta_\xi F$ . Για να φτάσουμε εκεί, γράφουμε πρώτα το γινόμενο  $\theta^a\theta^b$  σε όρους του σπινοριακού γινομένου  $\theta\cdot\theta$ :

$$\begin{aligned} \theta\cdot\theta &= \theta^1\theta_1 + \theta^2\theta_2 = \theta^1\epsilon_{12}\theta^2 + \theta^2\epsilon_{21}\theta^1 = -\theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1 = \begin{cases} +2\theta^2\theta^1 \\ -2\theta^1\theta^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \theta^2\theta^1 = \frac{1}{2}\theta\cdot\theta \\ \theta^1\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta\cdot\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \theta^2\theta^1 = -\frac{1}{2}\epsilon^{21}\theta\cdot\theta \\ \theta^1\theta^2 = -\frac{1}{2}\epsilon^{12}\theta\cdot\theta \end{cases} \Rightarrow \theta^a\theta^b = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}\theta\cdot\theta. \end{aligned} \quad (2.558)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε ότι:

$$\theta^{a*}\theta^{b*} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}. \quad (2.559)$$

Επομένως, για το διγραμμικό όρο της (2.554), έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} i\xi^{a*}\theta^b(\sigma^\mu)_{ba}\theta^c\partial_\mu\chi_c &= i\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ba}\theta^b\theta^c\partial_\mu\chi_c \stackrel{(2.558)}{=} i\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ba}\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{bc}\theta\cdot\theta\right)\partial_\mu\chi_c \\ &= -\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ba}\epsilon^{bc}\partial_\mu\chi_c\frac{1}{2}\theta\cdot\theta = -i\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ab}^T\epsilon^{bc}\partial_\mu\chi_c\frac{1}{2}\theta\cdot\theta. \end{aligned} \quad (2.560)$$

Ταυτοποιώντας λοιπόν την τελική μορφή του διγραμμικού όρου (2.560) με το  $1/2\theta \cdot \theta \delta_\xi F$ , παίρνουμε:

$$\delta_\xi F = -i\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ab}^T \epsilon^{bc} \partial_\mu \chi_c. \quad (2.561)$$

Τροποποιώντας την παραπάνω έκφραση, βρίσκουμε ότι η μεταβολή του  $F$  ταυτίζεται με αυτήν που είχαμε βρει στην (2.369):

$$\begin{aligned} \delta_\xi F &= -i\xi^{a*}(\sigma^\mu)_{ab}^T \epsilon^{bc} \partial_\mu \chi_c \\ &= -i\xi^{*T}(-i\sigma_2)(\sigma^\mu)^T(i\sigma_2)\partial_\mu \chi \\ &= -i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi. \end{aligned} \quad (2.562)$$

Άρα, το left chiral superfield,  $\Phi(x, \theta)$ , περιέχει τα πεδία-συνιστώσες  $\phi, \chi, F$  τα οποία μετασχηματίζονται σωστά κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Μπορούμε να πούμε ότι το chiral superfield παρέχει μία γραμμική αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Παρατηρούμε ότι τρία πεδία συνιστώσες είναι απαραίτητα για το αποτέλεσμα αυτό, γεγονός το οποίο δικαιολογεί καλύτερα την εισαγωγή του βοηθητικού πεδίου στη θεωρία.

Κλείνουμε το κομμάτι αυτό με μία πολύ σημαντική παρατήρηση: η μεταβολή του πεδίου  $F$ , είναι στην πραγματικότητα μία ολική παράγωγος, αφού οι παράμετροι  $\xi$  είναι ανεξάρτητες του  $x$ . Αυτό σημαίνει ότι, γενικά, η  $F$ -συνιστώσα ενός chiral superfield, όσον αφορά το ανάπτυγμά του σε δυνάμεις του  $\theta$ , θα μετασχηματίζεται πάντα σαν μία ολική παράγωγος κι επομένως, αυτομάτως, θα αφήνει SUSY-αναλλοίωτη τη δράση.

Τώρα θα θεωρήσουμε γινόμενα από chiral superfields και θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο αξιοποιούμε την παραπάνω παρατήρηση για να πάρουμε SUSY-αναλλοίωτες αλληλεπιδράσεις, ειδικά αυτές του μοντέλου Wess-Zumino.

#### 2.6.4 Γινόμενα από chiral superfields

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα left-chiral superfield,  $\Phi_i$ , όπου ο δείκτης  $i$  κατά τα γνωστά αφορά τους gauge και flavour βαθμούς ελευθερίας των πεδίων-συνιστωσών. Το  $\Phi_i$  αναπτύσσεται κατά τα γνωστά ως προς το  $\theta$ :

$$\Phi_i(x, \theta) = \phi_i(x) + \theta \cdot \chi_i(x) + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F_i(x). \quad (2.563)$$

Ας πάρουμε τώρα το γινόμενο δύο τέτοιων πεδίων:

$$\Phi_i \Phi_j = \left( \phi_i + \theta \cdot \chi_i + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F_i \right) \left( \phi_j + \theta \cdot \chi_j + \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F_j \right). \quad (2.564)$$

Στο δεξί μέλος της (2.564) υπάρχουν όροι:

- Ανεξάρτητοι του  $\theta$ :

$$\phi_i \phi_j \quad (2.565)$$

- Γραμμικοί ως προς το  $\theta$ :

$$\theta \cdot (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) \quad (2.566)$$

- Διγραμμικοί ως προς το  $\theta$ :

$$\frac{1}{2} \theta \cdot \theta (\phi_i F_j + \phi_j F_i) + \theta \cdot \chi_i \theta \cdot \chi_j \quad (2.567)$$

Ο δεύτερος όρος της (2.567) γράφεται σαν:

$$\begin{aligned} \theta \cdot \chi_i \theta \cdot \chi_j &= \theta^a \chi_{ia} \theta^b \chi_{jb} = -\theta^a \theta^b \chi_{ia} \chi_{jb} \stackrel{(2.558)}{=} \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \theta \cdot \theta \chi_{ia} \chi_{jb} \\ &= -\frac{1}{2} \theta \cdot \theta \epsilon^{ba} \chi_{ia} \chi_{jb} = -\frac{1}{2} \theta \cdot \theta \chi_i^b \chi_{jb} = -\frac{1}{2} \theta \cdot \theta \chi_i \cdot \chi_j. \end{aligned} \quad (2.568)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην (2.567), παίρνουμε για τον διγραμμικό όρο:

$$\frac{1}{2} \theta \cdot \theta (\phi_i F_j + \phi_j F_i) - \frac{1}{2} \theta \cdot \theta \chi_i \cdot \chi_j = \frac{1}{2} (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \cdot \chi_j). \quad (2.569)$$

Θα αποδείξουμε επίσης (για επαλήθευση αφού ήδη είναι γνωστό) ότι οι κυβικοί και τετάρτης δύναμης όροι του γινομένου (2.564) εξαφανίζονται:

- Πρώτα για τους κυβικούς όρους:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \theta \cdot \chi_i \theta \cdot \theta F_j + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F_i \theta \cdot \chi_j = \frac{1}{2} \theta^a \chi_{ia} \theta^b \theta_b F_j + \frac{1}{2} \theta^b \theta_b F_i \theta^a \chi_{ja} \\ &= -\frac{1}{2} \chi_{ia} \theta^a \theta^b \theta_b F_j + \frac{1}{2} \theta^b \theta_b \theta^a \chi_{ja} F_i \\ &= -\frac{1}{2} (\chi_{i1} \theta^1 + \chi_{i2} \theta^2) (\theta^1 \theta_1 + \theta^2 \theta_2) F_j + \frac{1}{2} (\theta^1 \theta_1 + \theta^2 \theta_2) (\theta^1 \chi_{j1} + \theta^2 \chi_{j2}) F_i \\ &= -\frac{1}{2} F_j (\chi_{i1} \theta^1 \theta^1 \theta_1 + \chi_{i1} \theta^1 \theta^2 \theta_2 + \chi_{i2} \theta^2 \theta^1 \theta_1 + \chi_{i2} \theta^2 \theta^2 \theta_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} F_i (\theta^1 \theta_1 \theta^1 \chi_{j1} + \theta^1 \theta_1 \theta^2 \chi_{j2} + \theta^2 \theta_2 \theta^1 \chi_{j1} + \theta^2 \theta_2 \theta^2 \chi_{j2}) \\ &= -\frac{1}{2} F_j \left( \chi_{i1} \cancel{(\theta^1)^2} \theta_1^0 + \chi_{i1} \theta^1 \theta^2 \epsilon_{21} \theta_1 + \chi_{i2} \theta^2 \theta^1 \epsilon_{12} \theta_2 + \chi_{i2} \cancel{(\theta^2)^2} \theta_2^0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\theta^1 \epsilon_{12} \theta^2 \theta^1 \chi_{j1} + \theta^1 \epsilon_{12} \theta^2 \theta^2 \chi_{j2} + \theta^2 \epsilon_{21} \theta^1 \theta^1 \chi_{j1} + \theta^2 \epsilon_{21} \theta^1 \theta^2 \chi_{j2}) \\ &= -\frac{1}{2} (-\chi_{i1} \theta^1 \theta^1 \theta^2 F_j + \chi_{i2} \theta^2 \theta^2 \theta^1 F_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \theta^1 \theta^1 \theta^2 \chi_{j1} F_i - \theta^1 \cancel{(\theta^2)^2} \chi_{j2} F_i + \theta^2 \cancel{(\theta^1)^2} - \theta^2 \theta^2 \theta^1 F_i \chi_{j2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( -\chi_{i1} \cancel{(\theta^1)^2} \theta_1^0 F_j + \chi_{i2} \cancel{(\theta^2)^2} \theta_2^0 F_j \right) + \frac{1}{2} \left( \cancel{(\theta^1)^2} \theta_1^0 \chi_j F_i - \cancel{(\theta^2)^2} \theta_2^0 F_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.570)$$

- Και τώρα για τους όρους τέταρτης δύναμης:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\theta \cdot \theta F_i \frac{1}{2}\theta \cdot \theta F_j &= \frac{1}{4} F_i F_j \theta \cdot \theta \theta \cdot \theta = \frac{1}{4} \theta^a \theta_a \theta^b \theta_b F_i F_j \\
&= \frac{1}{4} F_i F_j (\theta^1 \theta_1 \theta^1 \theta_1 + \theta^1 \theta_1 \theta^2 \theta_2 + \theta^2 \theta_2 \theta^1 \theta_1 + \theta^2 \theta_2 \theta^2 \theta_2) \\
&= \frac{1}{4} F_i F_j (\theta^1 \epsilon_{12} \theta^2 \theta^1 \epsilon_{12} \theta^2 + \theta^1 \epsilon_{12} \theta^2 \theta^2 \theta_2 + \theta^2 \epsilon_{21} \theta^1 \theta^1 \theta_1 + \theta^2 \epsilon_{21} \theta^1 \theta^2 \epsilon_{21} \theta^1) \\
&= \frac{1}{4} F_i F_j \left( -\cancel{(\theta^1)^2} \cancel{(\theta^2)^2} - \theta^1 \cancel{(\theta^2)^2} \theta_2 + \theta^2 \cancel{(\theta^1)^2} \theta_1 - \cancel{(\theta^2)^2} \cancel{(\theta^1)^2} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.571}$$

Συνεχίζοντας, αναπτύσσουμε το γινόμενο  $\Phi_i \Phi_j$  σε δυνάμεις του  $\theta$ , δηλαδή, στα πεδία συνιστώσες:

$$\Phi_i \Phi_j = \phi_{ij} + \theta \cdot \chi_{ij} + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F_{ij}. \tag{2.572}$$

Αφού κάνουμε τις επιμεριστικές, συγκρίνοντας με το γινόμενο (2.564), παίρνουμε:

$$\Phi_i \Phi_j = \phi_i \phi_j + \theta \cdot (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \cdot \chi_j), \tag{2.573}$$

όπου:

$$\phi_{ij} = \phi_i \phi_j, \quad \chi_{ij} = \chi_i \phi_j + \phi_j \chi_i, \quad F_{ij} = \phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \cdot \chi_j. \tag{2.574}$$

Εισάγουμε τώρα μία ποσότητα  $W_{quad}$ , η οποία ορίζεται σαν:

$$W_{quad} = \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j \Big|_F, \tag{2.575}$$

όπου  $\Big|_F$  εννοούμε την  $F$ -συνιστώσα, δηλαδή τον παράγοντα ανάλογο του  $1/2\theta \cdot \theta$  στο γινόμενο των superfields. Επίσης, παίρνουμε το  $M_{ij}$  να είναι συμμετρικό στην εναλλαγή των δεικτών. Τότε:

$$\begin{aligned}
W_{quad} &= \frac{1}{2} M_{ij} (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \cdot \chi_j) \\
&= M_{ij} \phi_i F_j - \frac{1}{2} M_{ij} \chi_i \cdot \chi_j.
\end{aligned} \tag{2.576}$$

Ανακαλώντας την παρατήρηση στο τέλος του προηγούμενου υποκεφαλαίου, το γεγονός ότι η (2.576) είναι η  $F$ -συνιστώσα ενός chiral superfield (το οποίο είναι το γινόμενο δύο άλλων στην περίπτωση αυτή), εγγυάται ότι οι όροι της (2.576) θα δίνουν μία SUSY-αναλλοίωτη δράση. Για την ακρίβεια, πρόκειται για τους όρους που εμπλέκουν το  $M_{ij}$  της (2.389) του W-Z μοντέλου με το

$W_i$  να δίνεται από τον πρώτο όρο της (2.401) και το  $W_{ij}$  από τον πρώτο όρο της (2.392). Τονίζουμε επίσης ότι το  $W_{quad}$  έχει ακριβώς την ίδια μορφή, σαν συνάρτηση των  $\Phi_i, \Phi_j$ , με το  $M_{ij}$  κομμάτι του  $W$  στην (2.394) ως συνάρτηση των  $\phi_i, \phi_j$ .

Έχοντας πάρει πλέον θάρρος, ας θεωρήσουμε το γινόμενο τριών superfields:

$$\begin{aligned} \Phi_i \Phi_j \Phi_k = & \left[ \phi_i \phi_j + \theta \cdot (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta (\phi_i F_j + \phi_j F_i - \chi_i \cdot \chi_j) \right] \\ & \times \left[ \phi_k + \theta \cdot \chi_k + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F_k \right]. \end{aligned} \quad (2.577)$$

Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την απόκτηση υποψηφίων για αναλλοίωτη δράση, θα επικεντρωθούμε μόνο στην  $F$ -συνιστώσα, δηλαδή στους όρους που είναι ανάλογοι του  $1/2\theta \cdot \theta$ , για τους οποίους γνωρίζουμε ήδη ότι η μεταβολή τους είναι ολική παράγωγος. Εύκολα διακρίνουμε τους προφανείς όρους από το παραπάνω τριπλό γινόμενο:

$$\phi_i \phi_j F_k + \phi_j \phi_k F_i + \phi_k \phi_i F_j - \chi_i \cdot \chi_j \phi_k, \quad (2.578)$$

αλλά και έναν επιπλέον όρο:

$$\theta \cdot (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) \theta \cdot \chi_k, \quad (2.579)$$

ο οποίος, σύμφωνα με την (2.569), μπορεί να γραφτεί σαν:

$$-\frac{1}{2} \theta \cdot \theta (\chi_i \phi_j + \chi_j \phi_i) \chi_k. \quad (2.580)$$

Οπότε, όλη μαζί η  $F$ -συνιστώσα του  $\Phi_i \Phi_j \Phi_k$  θα γράφεται σαν:

$$\left. \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right|_F = \phi_i \phi_j F_k + \phi_j \phi_k F_i + \phi_k \phi_i F_j - \chi_i \cdot \chi_j \phi_k - \chi_j \cdot \chi_k \phi_i - \chi_i \cdot \chi_k \phi_j. \quad (2.581)$$

Οπότε, αν θεωρήσουμε το κυβικό ανάλογο του  $W_{quad}$ ,  $W_{cubic}$ , δηλαδή:

$$W_{cubic} = \frac{1}{6} y_{ijk} \left. \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right|_F, \quad (2.582)$$

με τους συντελεστές  $y_{ijk}$  να είναι πλήρως συμμετρικοί ως προς τους  $i, j, k$ , τότε από την (2.581) παίρνουμε άμεσα ότι:

$$W_{cubic} = \frac{1}{2} y_{ijk} \phi_i \phi_j F_k - \frac{1}{2} y_{ijk} \chi_i \cdot \chi_j \phi_k. \quad (2.583)$$

Εδώ, ο πρώτος όρος είναι ακριβώς ο πρώτος όρος της (2.389) με το  $W_i$  να δίνεται από τον δεύτερο όρο της (2.401), ενώ ο δεύτερος όρος της (2.583) είναι ο δεύτερος όρος της (2.389), με το  $W_{ij}$  να δίνεται από τον  $y_{ijk}$  όρο της (2.392).

Σημειώνουμε και εδώ ότι το  $W_{cubic}$  έχει την ίδια μορφή ακριβώς, σα συνάρτηση των  $\Phi$ , με το  $W$  στην (2.394), ως συνάρτηση των  $\phi$ .

Επομένως, έχουμε δείξει ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις του προηγούμενου κεφαλαίου μπορούν να εκφραστούν σαν  $F$ -συνιστώσες γινομένων των superfields, γεγονός το οποίο εξασφαλίζει την αναλλοιώτητα της δράσης. Φυσικά, πρέπει να συμπεριλάβουμε και τους ερμιτιανούς συζυγείς των όρων που θεωρήσαμε εδώ. Επίσης, το γεγονός ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις προκύπτουν από τα γινόμενα των superfields  $W_{quad}, W_{cubic}$ , τους προσδίδει το όνομα superpotentials. Επομένως, το πλήρες superpotential για το W-Z μοντέλο είναι:

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{2} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k, \quad (2.584)$$

όπου είναι κατανοητό το ότι αναφερόμαστε μόνο στην  $F$ -συνιστώσα.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια, οι παραπάνω πληροφορίες, ουσιαστικά, εξάγονται μέσω ολοκλήρωσης ως προς  $\theta_1, \theta_2$ . Τέτοιου τύπου ολοκληρώματα γνωρίζουμε πως να τα μεταχειριστούμε, από την (2.112). Επίσης, ισχύει ότι:

$$d\theta_1 d\theta_2 = -d\theta_2 d\theta_1 = -\frac{1}{2} d\theta \cdot d\theta \equiv d^2\theta, \quad (2.585)$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$\int d^2\theta W = \text{συντελεστής του } \frac{1}{2} \theta \cdot \theta \text{ του } W. \quad (2.586)$$

Τέτοια ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται για την ανάδειξη των επιθυμητών μερών των superfields σε κάθε περίπτωση.

### 2.6.5 Άλλες μορφές chiral superfield

Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε στο κεφάλαιο αυτό, βασίστηκε στο γεγονός ότι ο μοναδιακός τελεστής που σχετίζεται με πεπερασμένους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς είναι της μορφής της (2.510). Θα μπορούσαμε παρ' όλα αυτά να είχαμε ξεκινήσει από τον

$$U_{real}(x, \theta, \theta^*) = e^{ixP} e^{i[\theta \cdot Q + \bar{\theta} \cdot \bar{Q}]}. \quad (2.587)$$

Αφού οι  $Q, Q^\dagger$  δεν μετατίθενται, η (2.587), είναι διαφορετική από την (2.510). Είναι αλήθεια ότι ο μετασχηματισμός της (2.587) μπορεί να θεωρηθεί ως πιο «φυσικός» και πιο συμβατός με τον αντίστοιχο μοναδιακό μετασχηματισμό στην περίπτωση της στροφορμής,  $e^{ia \cdot J}$ . Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, το superfield θα γραφτεί (σύμφωνα με την (2.512)) σαν:

$$\Phi_{real}(x, \theta, \theta^*) = e^{i[\theta \cdot Q + \bar{\theta} \cdot \bar{Q}]} \Phi(x, 0, 0) e^{-i[\theta \cdot Q + \bar{\theta} \cdot \bar{Q}]}. \quad (2.588)$$

Αν υποθέσουμε ότι  $\Phi^\dagger(x, 0, 0) = \Phi(x, 0, 0)$ , τότε,  $\Phi_{real}^\dagger(x, \theta, \theta^*) = \Phi_{real}(x, \theta, \theta^*)$ . Αυτός είναι ο λόγος που ένα superfield που παράγεται με αυτόν τον τρόπο το

αποκαλούμε πραγματικό. Το superfield που παράγεται όπως στην (2.512) δεν είναι ένα τέτοιο. Αυτό το αποκαλούμε type-I superfield και το συμβολίζουμε σαν  $\Phi_I(x, \theta, \theta^*)$  με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό,  $U_I(x, \theta, \theta^*)$ .

Στην περίπτωση τώρα της (2.587), οι επαγόμενοι μετασχηματισμοί (αντίστοιχοι με αυτούς πάνω από την (2.529)) θα είναι :

- $0 \rightarrow \theta \rightarrow \theta + \xi$
- $0 \rightarrow \theta^* \rightarrow \theta^* + \xi^*$
- $0 \rightarrow x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu + ?$

Για να βρούμε πως μετασχηματίζεται το  $x^\mu$  θα πρέπει να θεωρήσουμε το :

$$\begin{aligned} U_{real}(a, \xi, \xi^*) U_{real}(x, \theta, \theta^*) \Phi_{real}(0) U_{real}^{-1}(x, \theta, \theta^*) U_{real}^{-1}(a, \xi, \xi^*) \\ = U_{real}(a, \xi, \xi^*) \Phi_{real}(x, \theta, \theta^*) U_{real}^{-1}(a, \xi, \xi^*) . \end{aligned} \quad (2.589)$$

Επομένως, έχουμε :

$$\begin{aligned} U_{real}(a, \xi, \xi^*) U_{real}(x, \theta, \theta^*) &= e^{iaP} e^{i(\xi \cdot Q + \bar{\xi} \cdot \bar{Q})} e^{ixP} e^{i(\theta \cdot Q + \bar{\theta} \cdot \bar{Q})} \\ &= e^{i(x+a)P} e^{i(\theta+\xi) \cdot Q + i(\bar{\theta}+\bar{\xi}) \cdot \bar{Q} - \frac{1}{2}[\theta \cdot Q + \xi \cdot Q, \bar{\theta} \cdot \bar{Q} + \bar{\xi} \cdot \bar{Q}]} . \end{aligned} \quad (2.590)$$

Υπολογίζουμε τους (μη μηδενικούς) μεταθέτες κι έπειτα αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα στην παραπάνω έκφραση :

$$\begin{aligned} [\xi \cdot Q, \bar{\theta} \cdot \bar{Q}] &= [\xi^a Q_a, \bar{Q}_{\dot{a}} \bar{Q}^{\dot{a}}] = [\xi^a Q_a, \theta_b^* Q^{\dagger b}] \\ &= [\xi^a Q_a, -\theta^{b*}] = -\xi^a Q_a \theta^{b*} Q_b^\dagger + \theta^{b*} Q_b^\dagger \xi^a Q_a \\ &= \xi^a \theta^{b*} Q_a Q_b^\dagger - \theta^{b*} \xi^a Q_b^\dagger Q_a = \xi^a \theta^{b*} (Q_a Q_b^\dagger + Q_b^\dagger Q_a) \\ &= \xi^a \theta^{b*} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu \end{aligned} \quad (2.591)$$

$$[\bar{\xi} \cdot \bar{Q}, \theta \cdot Q] = -[\theta \cdot Q, \bar{\xi} \cdot \bar{Q}] = -\theta^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab} P_\mu . \quad (2.592)$$

Οπότε, αφού οι  $Q_a, Q_a^\dagger$  μετατίθενται με τον  $P$ , η (2.590) θα γίνει :

$$\begin{aligned} U(a, \xi, \xi^*) U(x, \theta, \theta^*) &= e^{i(x+a+\frac{1}{2}i\xi^a \theta^{b*} (\sigma^\mu)_{ab} - \frac{1}{2}i\theta^a \xi^{*b} (\sigma^\mu)_{ab})P} e^{i(\theta+\xi) \cdot Q + i(\theta^*+\xi^*)Q^\dagger} \\ &\stackrel{(2.520)}{=} e^{i(x+a+\frac{1}{2}i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta - \frac{1}{2}i\theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi)P} e^{(\theta+\xi) \cdot Q + (\bar{\theta}+\bar{\xi}) \cdot \bar{Q}} . \end{aligned} \quad (2.593)$$

Συνεπώς, οι επαγόμενοι μετασχηματισμοί θα είναι :

- $0 \rightarrow \theta \rightarrow \theta + \xi$
- $0 \rightarrow \theta^* \rightarrow \theta^* + \xi^*$

- $0 \rightarrow x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu + \frac{1}{2}i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta - \frac{1}{2}i\theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi$

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε πάλι διαφορικούς τελεστές που να αναπαριστούν τους υπερσυμμετρικούς γεννήτορες αναπτύσσοντας τη μεταβολή του superfield ως προς τα  $\xi, \xi^*$ . Αυτό θα δώσει διαφορετικές εκφράσεις για τους υπερσυμμετρικούς τελεστές, οι οποίοι όμως θα ικανοποιούν σίγουρα την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$U_{II}(x, \theta, \theta^*) = e^{ixP} e^{i\bar{\theta}\bar{Q}} e^{i\theta\cdot Q}, \quad (2.594)$$

από τον οποίο πάλι θα επάγονται διαφορετικοί μετασχηματισμοί των πεδίων:

- $0 \rightarrow \theta \rightarrow \theta + \xi$
- $0 \rightarrow \theta^* \rightarrow \theta^* + \xi^*$
- $0 \rightarrow x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu + i\xi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}$

Το αντίστοιχο superfield ονομάζεται type-II και συμβολίζεται σαν  $\Phi_{II}(x, \theta, \theta^*)$ . Κατά τα γνωστά, αναμένουμε ένα τρίτο σετ διαφορικών τελεστών για τους υπερσυμμετρικούς γεννήτορες οι οποίοι θα ικανοποιούν και αυτοί με τη σειρά τους την υπερσυμμετρική άλγεβρα.

Τα τρία είδη των superfields που έχουμε δει ως τώρα συνδέονται μεταξύ τους με έναν απλό τρόπο. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_{real}(x, \theta, \theta^*) &= e^{i(\theta\cdot Q + \bar{\theta}\cdot\bar{Q})} \Phi(x, 0, 0) e^{-i(\theta\cdot Q + \bar{\theta}\cdot\bar{Q})} \\ &= e^{-iBP} \underbrace{e^{i\theta\cdot Q} e^{i\bar{\theta}\cdot\bar{Q}} \Phi(x, 0, 0) e^{-i\bar{\theta}\cdot\bar{Q}} e^{-i\theta\cdot Q}}_{\Phi_I(x, \theta, \theta^*)} e^{iBP}, \end{aligned} \quad (2.595)$$

όπου το  $B^\mu$  ορίζεται όπως το  $A^\mu$  της (2.519) με  $\xi \rightarrow \theta$ , έτσι ώστε:

$$B^\mu = \frac{1}{2}i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab}. \quad (2.596)$$

Επομένως, η (2.595) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Phi_{real}(x, \theta, \theta^*) &= e^{-iBP} \Phi_I(x, \theta, \theta^*) e^{iBP} = \Phi_I(x - B, \theta, \theta^*) \\ &= \Phi_I\left(x^\mu - \frac{1}{2}i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}, \theta, \theta^*\right). \end{aligned} \quad (2.597)$$

Ακολουθώντας ίδια βήματα και για την περίπτωση του  $\Phi_{II}$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_{real}(x, \theta, \theta^*) &= \Phi_I\left(x^\mu - \frac{1}{2}i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}, \theta, \theta^*\right) \\ &= \Phi_{II}\left(x^\mu + \frac{1}{2}i\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}, \theta, \theta^*\right). \end{aligned} \quad (2.598)$$



Οποιοδήποτε από τα τρία superfields που είδαμε μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά ως προς  $\theta, \theta^*$ , όπως κάναμε για το  $\Phi(x, \theta)$ . Όμως, τέτοια αναπτύγματα θα περιέχουν πολύ περισσότερα πεδία-συνιστώσες πέρα από τα  $\phi, \chi, F$ . Αυτά τα γενικά πεδία (εξαρτώμενα από  $\theta, \theta^*$ ) θα δίνουν μία αναπαράσταση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας, αλλά θα πρόκειται για μία αναγωγίσιμη αναπαράσταση, αφού θα μπορούσαμε να βρούμε κάποιο υποσύνολο των πεδίων που να μετασχηματίζονται μεταξύ τους, όπως αυτά σε μία chiral supermultiplet. Αυτό το μη αναγωγίσιμο σύνολο θα μπορούσε να επιλεγεί εξ' αρχής εφαρμόζοντας κάποιον κατάλληλο σύνδεσμο. Για παράδειγμα, πήραμε κατευθείαν την μη αναγωγίσιμη left-chiral supermultiplet ξεκινώντας από την  $\Phi_I(x, \theta, \theta^*)$  και επιβάλλοντας τον σύνδεσμο, να μην εξαρτάται από το  $\theta^*$ , δηλαδή απαιτήσαμε:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_a^*} \Phi_I(x, \theta, \theta^*) = 0. \quad (2.599)$$

Ο λόγος για τον οποίο αυτό δουλεύει είναι επειδή ο τελεστής  $\partial/\partial \theta_a^*$  μετατίθεται με τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό (2.530), δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_a^*} (\delta \Phi_I) = \delta \left( \frac{\partial}{\partial \theta_a^*} \Phi_I \right). \quad (2.600)$$

Επομένως, αν το  $\Phi_I$  δεν εξαρτάται από το  $\theta^*$  δε θα εξαρτάται ούτε το  $\delta \Phi_I$ , που σημαίνει ότι οι συνιστώσες που επιζούν θα σχηματίζουν μία αναπαράσταση από μόνες τους.

Γνωρίζουμε ότι οι συνιστώσες του  $\Phi_I(x, \theta)$  είναι αυτές μίας αριστερόστροφης supermultiplet. Είναι λογικό να αναρρωτηθούμε πώς μία αριστερόστροφη supermultiplet περιγράφεται από ένα πραγματικό superfield,  $\Phi_{real}(x, \theta, \theta^*)$ . Η απάντηση δίνεται από τον τρόπο με τον οποίο η  $\Phi_{real}$  συνδέεται με την (αριστερόστροφη)  $\Phi_I$ , όπως φαίνεται στην (2.598):

$$\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) = \Phi_I(x^\mu - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}, \theta), \quad (2.601)$$

όπου κατά τα γνωστά,

$$\Phi_I(x, \theta) = \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x). \quad (2.602)$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) &= \phi(x^\mu - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}) + \theta \cdot \chi(x^\mu - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}) \\ &+ \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x^\mu - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*}). \end{aligned} \quad (2.603)$$

Τα πεδία του δεξιού μέλους αναπτύσσονται κατά Taylor γύρω από το σημείο  $x$  κι έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) &= \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \partial_\mu \Phi \\ &\quad - \frac{1}{2} i \theta \cdot \partial_\mu \chi \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{8} \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \theta^c (\sigma^\nu)_{cd} \theta^{d*} \partial_\mu \partial_\nu \phi.\end{aligned}\quad (2.604)$$

Η σειρά σταματάει εδώ, αφού όροι με  $\theta, \theta^*$  μεγαλύτερης τάξης από τη δεύτερη εξαφανίζονται. Για τον προτελευταίο όρο της (2.604), έχουμε:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} i \theta \cdot \partial_\mu \chi \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} &= -\frac{1}{2} i \theta^c \partial_\mu \chi_c \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \\ &= \frac{1}{2} i \theta^c \theta^a \partial_\mu \chi_c (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \\ &\stackrel{(2.558)}{=} \frac{1}{2} i \left( -\frac{1}{2} \epsilon^{ca} \theta \cdot \theta \right) \partial_\mu \chi_c (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \\ &= \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \epsilon^{ac} \partial_\mu \chi_c (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \\ &= \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*},\end{aligned}\quad (2.605)$$

ενώ για τον τελευταίο όρο της (2.604), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \theta^c (\sigma^\nu)_{cd} \theta^{d*} \partial_\mu \partial_\nu \phi &= \theta^a \theta^{b*} \theta^c \theta^{d*} (\sigma^\mu)_{ab} (\sigma^\nu)_{cd} \\ &= -\theta^a \theta^c \theta^{b*} \theta^{d*} (\sigma^\mu)_{ab} (\sigma^\nu)_{cd} \\ &\stackrel{(2.558)}{=} - \left( -\frac{1}{2} \epsilon^{ac} \theta \cdot \theta \right) \left( -\frac{1}{2} \epsilon^{bd} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \right) (\sigma^\mu)_{ab} (\sigma^\nu)_{cd} \\ &= -\frac{1}{4} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \underbrace{\epsilon^{ca} (\sigma^\mu)_{ab} \epsilon^{bd}}_{=(-\bar{\sigma}^\mu)^T} (\sigma^\nu)_{cd} \\ &= -\frac{1}{4} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} (-\bar{\sigma}^{\mu cd})^T (\sigma^\nu)_{cd} \\ &= \frac{1}{4} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} (\bar{\sigma}^{\mu T} \sigma^\nu).\end{aligned}\quad (2.606)$$

Όμως, η παρένθεση δίνει:

$$\bar{\sigma}^{\mu T} \sigma^\nu = g^{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\mu T} \sigma_\mu = g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma_1 \\ -\sigma_2 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} = 2g^{\mu\nu}.\quad (2.607)$$

Επομένως, συνεχίζοντας, ο τελευταίος όρος της (2.604) θα γίνει:

$$-\frac{1}{8} \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \theta^c (\sigma^\nu)_{cd} \theta^{d*} \partial_\mu \partial_\nu \phi = \frac{1}{4} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} 2g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} g^{\mu\nu}.\quad (2.608)$$

Επομένως, η (2.604) θα γίνει τελικά :

$$\begin{aligned}\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) &= \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \partial_\mu \phi \\ &\quad + \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \Rightarrow \\ \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) &= \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \partial_\mu \phi \\ &\quad + \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \partial^2 \phi. \quad (2.609)\end{aligned}$$

Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν κι αν θεωρήσουμε ένα δεξιόστροφο superfield, χρησιμοποιώντας το  $\Phi(x, \theta, \theta^*)$  και επιβάλλοντας τον σύνδεσμο να είναι ανεξάρτητο του  $\theta$ . Έτσι παίρνουμε :

$$\begin{aligned}\Phi_{II}^\dagger(x, \theta, \theta^*) &= \left( e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} e^{i\theta Q} \Phi(x, 0, 0) e^{-i\theta \cdot Q} e^{-i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} \right)^\dagger \\ &= e^{i\theta \cdot Q} e^{i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} \Phi^\dagger(x, 0, 0) e^{-i\bar{\theta} \cdot \bar{Q}} e^{-i\theta Q}, \quad (2.610)\end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα τύπου  $-I$  superfield χτισμένο πάνω στο  $\Phi^\dagger(x, 0, 0)$ , ενώ το  $\Phi_I(x, \theta, \theta^*)$  είχε χτιστεί πάνω στο  $\Phi(x, 0, 0)$ . Κατά μία έννοια λοιπόν τα τύπου  $-I$  και τύπου  $-II$  superfields είναι συζυγή μεταξύ τους. Επομένως, η πιο απλή περιγραφή ενός δεξιόστροφου superfield γίνεται μέσω του συζυγούς του  $\Phi_I^L(x, \theta)$ :

$$\Phi_{II}^R(x, \theta^*) = \phi^\dagger(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\chi}(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} F^\dagger(x), \quad (2.611)$$

όπου το  $\bar{\chi}$  είναι φυσικά ένας  $R$ -τύπου σπίνορας.

Μετά την παρεμβολή των τεχνικών ζητημάτων, επιστρέφουμε στο αρχικό μας ερώτημα, δηλαδή, πώς αναπαριστούμε την ελεύθερη λαγκρατζιανή σε όρους των superfields. Απλή εποπτεία της (2.609) προτείνει ότι οι επιθυμητοί όροι θα περιέχονται στο γινόμενο :

$$(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*). \quad (2.612)$$

Το καίριο σημείο είναι ότι το πεδίο με τη μεγαλύτερη διάσταση πρέπει αναγκαστικά να μετασχηματίζεται σαν ολική παράγωγος κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, αφήνοντας τη δράση αναλλοίωτη. Στην περίπτωση του αναπτύγματος όπου  $\Phi_I(x, \theta) \equiv \Phi(x, \theta)$ , είδαμε ότι τον ρόλο αυτόν τον έπαιξε ο συντελεστής του  $\theta \cdot \theta$ , δηλαδή, το πεδίο  $F$ . Στην περίπτωση του superfield  $\Phi_i \Phi_j$ , τον ρόλο αυτόν τον ανέλαβε η  $F$ -συνιστώσα. Στην περίπτωση του τελευταίου γινομένου, (2.612), το ρόλο αναλαμβάνει ο συντελεστής του  $\theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}$ , ο οποίος ονομάζεται  $D$ -συνιστώσα. Θα γράψουμε αναλυτικά το γινόμενο (2.612), ώστε να βρούμε την  $D$ -συνιστώσα, όμως πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε την έκφραση του  $(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger$  από την έκφραση του

$\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*)$  της (2.609):

$$\begin{aligned}
(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger &= \left( \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \partial_\mu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \partial^2 \phi \right)^\dagger \\
&= \phi^\dagger(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} F^\dagger(x) + \frac{1}{2} i \partial_\mu \phi^\dagger \theta^{b* \dagger} (\sigma^\mu)_{ab}^\dagger \theta^{a \dagger} \\
&\quad - \frac{1}{4} i \theta^{b \dagger} (\sigma^\mu)_{ab}^\dagger \partial_\mu \chi^{a \dagger} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} - \frac{1}{16} \partial^2 \phi^\dagger \bar{\theta}^\dagger \cdot \bar{\theta}^\dagger \theta^\dagger \cdot \theta^\dagger \\
&= \phi^\dagger + \bar{\theta} \cdot \bar{\chi} + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} F^\dagger(x) + \frac{1}{2} i \partial_\mu \phi^\dagger \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \theta^{a*} \\
&\quad - \frac{1}{4} i \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \chi^{a \dagger} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} - \frac{1}{16} \partial^2 \phi^\dagger \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}. \quad (2.613)
\end{aligned}$$

Πλέον, από τις (2.609) και (2.613), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το γινόμενο (2.612):

$$\begin{aligned}
&(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) = \\
&= \left( \phi^\dagger(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\chi}(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} F^\dagger(x) + \frac{1}{2} i \partial_\mu \phi^\dagger(x) \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \theta^{a*} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} i \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \chi^{a \dagger}(x) \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} - \frac{1}{16} \partial^2 \phi^\dagger(x) \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \right) \\
&\cdot \left( \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) - \frac{1}{2} i \theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} \partial_\mu \phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} i \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \partial^2 \phi \right) \quad (2.614)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, όπως βλέπουμε παίρνουμε έξι ζευγάρια (γινόμενα του ίδιου χρώματος) τα οποία αποτελούν την  $D$ -συνιστώσα του γινομένου  $(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*)$ :

$$\begin{aligned}
&(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*) \Big|_D = \\
&= \left( -\frac{1}{16} \phi(x) \partial^2 \phi^\dagger(x) - \frac{1}{16} \phi^\dagger(x) \partial^2 \phi(x) + \frac{1}{4} F^\dagger(x) F(x) \right) \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \quad (2.615)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (x) (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} - \frac{1}{4} i \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \chi^{a \dagger}(x) \theta \chi(x) \quad (2.616)$$

$$- \frac{1}{4} \partial_\mu \phi^\dagger(x) \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \theta^{a*} \theta^c (\sigma^\nu)_{cd} \theta^{d*} \partial_\nu \phi(x). \quad (2.617)$$

Στους δύο πρώτους όρους της πρώτης γραμμής, (2.615), (μαύρος και κόκκινος) εμπλέκονται δεύτερες παράγωγοι. Παίρνοντας όμως τα αντίστοιχα ολο-

κληρώματα :

$$\int \phi^\dagger \partial^2 \phi dx = \int \phi^\dagger \overset{0}{\cancel{\partial_\mu \phi}} dx - \int \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi dx ,$$

$$\int \phi \partial^2 \phi^\dagger dx = \int \phi \overset{0}{\cancel{\partial_\mu \phi^\dagger}} dx - \int \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi dx ,$$

βλέπουμε ότι μετά από την παραγοντική ολοκλήρωση, απαλλασσόμαστε από τους επιφανειακούς όρους που προκύπτουν και οι όροι αυτοί (μαύρος και κόκκινος) γίνονται :

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{16} \phi^\dagger \partial^2 \phi - \frac{1}{16} \partial^2 \phi^\dagger \phi \right) \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} &= -\frac{1}{16} \left( \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right) \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \\ &= \frac{1}{8} \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} . \end{aligned} \quad (2.618)$$

Επίσης, ο πρώτος όρος της δεύτερης γραμμής, (2.616), της παραπάνω  $D$ -συνιστώσας μπορεί να γραφτεί σαν :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \partial_\mu \chi^a (\sigma^\mu)_{ab} \theta^{b*} &= \frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \left( -\theta^{b*} (\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \chi^a \right) \\ &= \frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \left( -\epsilon^{\dot{b}c} \bar{\theta}_{\dot{c}} (\sigma^\mu)_{ab} \epsilon^{ad} \partial_\mu \chi_d \right) \\ &= \frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \left( \bar{\theta}_{\dot{c}} \epsilon^{\dot{c}b} (\sigma^\mu)_{ba}^T \epsilon^{ad} \partial_\mu \chi_d \right) \\ &= -\frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \left( \bar{\theta}_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{c}d} \partial_\mu \chi_d \right) \\ &= -\frac{1}{4} i \bar{\chi} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \theta \left( \bar{\theta} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \right) \\ &\stackrel{(2.568)}{=} \frac{1}{8} i \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} . \end{aligned} \quad (2.619)$$

Παρομοίως, ο δεύτερος όρος της δεύτερης γραμμής, (2.616), της παραπάνω  $D$ -συνιστώσας γίνεται :

$$-\frac{1}{4} i \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \partial_\mu \chi^{a\dagger} \theta \chi = -\frac{1}{8} i \partial_\mu \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \chi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} , \quad (2.620)$$

ο οποίος, μετά από μία παραγοντική ολοκλήρωση, είναι ίδιος με τον (2.619).

Τέλος, για τον όρο της τρίτης γραμμής, (2.617), έχουμε :

$$-\frac{1}{4} \partial_\mu \phi^\dagger \theta^b (\sigma^\mu)_{ba} \theta^{a*} \theta^c (\sigma^\nu)_{cd} \theta^{d*} \partial_\nu \phi \stackrel{(2.608)}{=} \frac{1}{8} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} . \quad (2.621)$$

Συμμαζεύοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, η έκφραση της  $D$ -συνιστώσας

του γινομένου  $(\Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*))^\dagger \Phi_{real}^L(x, \theta, \theta^*)$  θα γίνει:

$$\begin{aligned} \Phi_{real}^{L\dagger} \Phi_{real}^L \Big|_D &= \frac{1}{8} \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} + \frac{1}{4} F^\dagger F \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} + \frac{1}{8} i \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \\ &\quad - \frac{1}{8} i \partial_\mu \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} + \frac{1}{8} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \\ &= \frac{1}{4} \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} + \frac{1}{4} i \bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} + \frac{1}{4} F^\dagger F \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}. \end{aligned} \quad (2.622)$$

Όπως γνωρίζουμε ήδη από την (2.388) η ελεύθερη λαγκρατζιανή του μοντέλου Wess-Zumino είναι η:

$$\mathcal{L}_{free}^{WZ} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + F^\dagger F. \quad (2.623)$$

Οπότε, συμπεραίνουμε από την (2.622) ότι σε όρους των superfields, η  $\mathcal{L}_{free}^{WZ}$  γράφεται:

$$\mathcal{L}_{free}^{WZ} = 4 \Phi_{real}^{L\dagger} \Phi_{real}^L \Big|_D. \quad (2.624)$$

Η  $D$ -συνιστώσα ενός superfield αποκτάται από μία Grassmann ολοκλήρωση ανάλογη με αυτήν της (2.586) για την περίπτωση της  $F$ -συνιστώσας. Έτσι λοιπόν σε αναλογία με την (2.585) ορίζουμε:

$$-d\bar{\theta}^{\dot{1}} d\bar{\theta}^{\dot{2}} = d\bar{\theta}^{\dot{2}} d\bar{\theta}^{\dot{1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{2}\dot{1}} d\bar{\theta}^{\dot{2}} d\bar{\theta}^{\dot{1}} = -\frac{1}{2} d\bar{\theta}^{\dot{1}} d\bar{\theta}^{\dot{2}} \equiv d^2\bar{\theta}, \quad (2.625)$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\int d^2\bar{\theta} \frac{1}{2} \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} = 1. \quad (2.626)$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$d^4\theta \equiv d^2\bar{\theta} d^2\theta, \quad (2.627)$$

που σημαίνει ότι τελικά το ελεύθερο κομμάτι της λαγκρατζιανής του μοντέλου Wess-Zumino μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\int d^4\theta \Phi_{real}^{L\dagger} \Phi_{real}^L. \quad (2.628)$$

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό είδαμε πως ορίζονται τα superfields και πόσο χρήσιμα είναι στην υπερσυμμετρική θεωρία. Αυτό διότι, από γινόμενα διάφορων (chiral) superfields προκύπτουν τόσο το superpotential, δηλαδή όλες οι αλληλεπιδράσεις του μοντέλου Wess-Zumino ( $F$ -συνιστώσα), όσο και οι κινητικοί όροι του ίδιου μοντέλου, δηλαδή η ελεύθερη λαγκρατζιανή ( $D$ -συνιστώσα). Στο επόμενο κεφάλαιο θα θεωρήσουμε κι άλλες supermultiplets, συγκεκριμένα αυτές που περιέχουν τα πεδία βαθμίδας, αποβλέποντας στην υπερσυμμετρικοποίηση του SM.

## 2.7 Διανυσματικές (ή gauge) supermultiplets

Έχουμε ήδη συζητήσει για τις chiral supermultiplets, οι οποίες φιλοξενούν τα φερμιονικά πεδία. Έχοντας πλέον αναπτύξει το ισχυρό φορμαλιστικό εργαλείο των superfields, θα ασχοληθούμε και με το δεύτερο είδος supermultiplet, τις διανυσματικές. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η supermultiplet αυτή αποτελείται από άμαζα σπινორιακά πεδία (σπιν-1/2) και από άμαζα διανυσματικά πεδία (σπιν-1). Αρχικά θα ακολουθήσουμε τη διαισθητική προσέγγιση των δοκιμών, όπως κάναμε και για τις chiral supermultiplets. Επομένως, ξεκινάμε με το διανυσματικό ανάλογο του απλού υπερσυμμετρικού μοντέλου που είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο.

### 2.7.1 Η ελεύθερη αβελιανή gauge supermultiplet

Έστω ένα απλό, άμαζο  $U(1)$  πεδίο βαθμίδας  $A^\mu(x)$ , όπως είναι το φωτόνιο. Όπως ξέρουμε, στο σπιν ενός τέτοιου πεδίου είναι ίσο με ένα, αλλά περιέχει μόνο δύο (και όχι τρεις) βαθμούς ελευθερίας - και οι δύο κάθετοι στην διεύθυνση διάδοσης. Σύμφωνα με όσα είπαμε και στον πρόλογο του κεφαλαίου, περιμένουμε η υπερσυμμετρία να «παντρέψει» το διανυσματικό πεδίο με ένα άλλο σπινორιακό πεδίο επίσης με δύο on-shell βαθμούς ελευθερίας. Ένα τέτοιο φερμιονικό ταίρι ενός διανυσματικού πεδίου ονομάζεται gaugino και στη συγκεκριμένη περίπτωση, photino. Το photino θα το συμβολίζουμε με  $\lambda$  και θα επιλέξουμε να είναι  $L$ -τύπου. Επίσης, αφού βρίσκεται στην ίδια supermultiplet με το φωτόνιο, πρέπει να έχει τους ίδιους «εσωτερικούς» κβαντικούς αριθμούς, συγκεκριμένα, πρέπει να έχει μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο. Συνεπώς, δε συζεύγνυται με αυτό. Το photino πρέπει να έχει και την ίδια μάζα με το φωτόνιο, δηλαδή να είναι μηδέν. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η λαγκρατζιανή που θα περιγράφει το σύστημα θα είναι απλά το άθροισμα ενός Maxwell όρου για το φωτόνιο και ενός κατάλληλου κινητικού όρου σπινორιακού πεδίου για το photino:

$$\mathcal{L}_{\gamma\lambda} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda, \quad (2.629)$$

όπου,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Κατά τα γνωστά, θα προσπαθήσουμε να βρούμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των  $\gamma, \lambda$ , έτσι ώστε η δράση να παραμένει αναλλοίωτη.

Όπως έγινε και στην περίπτωση της chiral supermultiplet, δε θα μπορέσουμε να αμελήσουμε τον off-shell βαθμό ελευθερίας του πεδίου βαθμίδας, αλλά θα ξεκινήσουμε τη μελέτη κάνοντάς το. Ας θεωρήσουμε αρχικά τη μεταβολή του πεδίου του φωτονίου,  $\delta_\xi A^\mu$ . Αυτή πρέπει να είναι ένα 4-διάνυσμα καθώς και μία πραγματική ποσότητα, γραμμική ως προς  $\xi, \xi^*$ . Επικαλούμαστε το αποτέλεσμα της (2.79),  $\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi + \chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi$  και δοκιμάζουμε:

$$\delta_\xi A^\mu = \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi, \quad (2.630)$$

όπου το  $\xi$  είναι ένας  $L$ -τύπου σπινόρας με διαστάσεις  $M^{-1/2}$ . Το σπινωριακό πεδίο  $\lambda$  έχει διαστάσεις  $M^{3/2}$ , επομένως, η (2.630) είναι διαστατικά συνεπής, εφόσον το  $A^\mu$  έχει διαστάσεις  $M$ .

Τι συμβαίνει όμως με το  $\delta_\xi \lambda$ ; Αυτό με τη σειρά του θα είναι ανάλογο του  $A^\mu$ , ή ακόμα καλύτερα (αφού το  $\lambda$  είναι gauge-αναλλοίωτο) ανάλογο του  $F^{\mu\nu}$ . Επομένως δοκιμάζουμε:

$$\delta_\xi \lambda \sim \xi F^{\mu\nu}. \quad (2.631)$$

Το καλό νέο είναι ότι έχουμε διαστατική ισορροπία στα δύο μέλη (το  $F^{\mu\nu}$  έχει διάστασεις  $M^2$ ), οπότε αποφεύγεται η εισαγωγή παραγώγου. Το κακό νέο είναι ότι πρέπει να πειράξουμε τους λορετζιανούς δείκτες. Για την ακρίβεια πρέπει κλείσουμε τους δύο «κρεμάμενους» δείκτες  $\mu, \nu$  στο δεξί μέλος και να απομείνουμε με μία ποσότητα που μετασχηματίζεται σωστά σαν ένας  $L$ -τύπου σπινόρας. Από την (2.86) καταλαβαίνουμε ότι η ποσότητα  $\bar{\sigma}^\nu \xi$  μετασχηματίζεται σαν ένας  $R$ -τύπου σπινόρας, ενώ η ποσότητα  $\sigma^\mu \psi$  μετασχηματίζεται σαν  $R$ -τύπου σπινόρας. Επομένως, δοκιμάζουμε:

$$\delta_\xi \lambda = C \overbrace{\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi}^{L\text{-type}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{R\text{-type}}, \quad (2.632)$$

όπου  $C$  είναι μία σταθερά που θα την υπολογίσουμε πιο κάτω, κι επίσης

$$\delta_\xi \lambda^\dagger = C^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu}. \quad (2.633)$$

Συνεχίζουμε λοιπόν παίρνοντας την υπερσυμμετρική μεταβολή του όρου Maxwell της (2.629). Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι ο  $F^{\mu\nu}$  είναι αντισυμμετρικός τανυστής, έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{4} \delta_\xi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \delta_\xi F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\delta_\xi F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta_\xi F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta_\xi F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta_\xi A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu - F_{\nu\mu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu) \\ &= -\frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu + F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu) \\ &= -F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta_\xi A^\nu \\ &\stackrel{(2.630)}{=} -F_{\mu\nu} \partial^\mu (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \lambda + \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\nu \xi). \end{aligned} \quad (2.634)$$

Παίρνοντας τώρα τη μεταβολή του σπινωριακού όρου της λαγκρατζιανής (2.629), έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_\xi (i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda) &= i (\delta_\xi \lambda^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu (\delta_\xi \lambda) \\ &= i (C^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu}) \bar{\sigma}^\rho \partial_\rho \lambda + i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\rho \partial_\rho (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.635)$$



Ο  $\xi$ -όρος της (2.634) πρέπει να ακυρώνει τον  $\xi$ -όρο της (2.635) ή αλλιώς το άθροισμά τους θα πρέπει να ισούται με μία ολική παράγωγο. Παρομοίως, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τους  $\xi^\dagger$ -όρους. Ας ξεκινήσουμε με το  $\xi$ -μέρος της σπινωριακής μεταβολής, (2.635):

$$\begin{aligned} iC^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho \partial_\rho \lambda &\stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} iC^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho F_{\nu\mu} \partial_\rho \lambda \\ &= -iC^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda. \end{aligned} \quad (2.636)$$

Τα  $\sigma$  είναι απλά πίνακες Pauli μαζί με το μοναδιαίο πίνακα και ξέρουμε ότι το γινόμενο δύο πινάκων Pauli θα δίνει έναν τρίτο πίνακα ή τον μοναδιαίο. Επομένως, γινόμενα τριών  $\sigma$  θα πρέπει να μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των  $\sigma$ . Η ταυτότητα που χρειαζόμαστε είναι η:

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\rho = g^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \bar{\sigma}^\delta. \quad (2.637)$$

Όταν εισάγουμε την (2.637) στην (2.636) συμβαίνουν κάποιες απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned} &-iC^* \xi^\dagger (g^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \bar{\sigma}^\delta) F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda \\ &= iC^* \xi^\dagger g^{\mu\nu} \bar{\sigma}^\rho F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda + iC^* \xi^\dagger g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda \\ &\quad - iC^* \xi^\dagger g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda - iC^* \xi^\dagger \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \bar{\sigma}^\delta F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda. \end{aligned} \quad (2.638)$$

Για τον πρώτο όρο:

$$g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} g_{\nu\mu} F^{\nu\mu} = -g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.639)$$

Άρα, μηδενίζεται όλος ο πρώτος όρος της (2.638). Για τον τελευταίο όρο έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda &\stackrel{\text{παρ. ολικ.}}{=} -\partial_\rho F_{\mu\nu} \lambda = -(\partial_\rho \partial_\mu A_\nu - \partial_\rho \partial_\nu A_\mu) \\ &\stackrel{a': \rho \leftrightarrow \mu}{=} -(\partial_\mu \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu \partial_\rho A_\mu) \lambda = -(\partial_\rho \partial_\mu A_\nu - \partial_\rho A_\nu A_\mu) \lambda, \end{aligned} \quad (2.640)$$

που σημαίνει ότι ο πρώτος όρος ( $a'$ ) είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή  $\rho \leftrightarrow \nu$  και ο δεύτερος όρος ( $b'$ ) είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή  $\rho \leftrightarrow \mu$ . Όμως για τον τανυστή  $\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}$  κάτω από αυτές τις εναλλαγές έχουμε:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} &\stackrel{\rho \leftrightarrow \nu}{=} \epsilon^{\mu\rho\nu\delta} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}, & \text{αντισυμμετρικό,} \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} &\stackrel{\rho \leftrightarrow \mu}{=} \epsilon^{\rho\nu\mu\delta} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}, & \text{αντισυμμετρικό.} \end{aligned} \quad (2.641)$$

Συνεπώς, στον τελευταίο όρο της (2.638) συναντώνται γινόμενα του  $F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda$  που είδαμε ότι είναι συμμετρικό στην εναλλαγή δεικτών, (2.640) και του  $\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}$  ο οποίος είναι αντισυμμετρικός στην ίδια εναλλαγή, (2.641). Αυτό σημαίνει ότι τα γινόμενα αυτά θα είναι μηδέν.

Επομένως, καταλήξαμε στο ότι επιζούν μόνο ο δεύτερος κι ο τρίτος όρος της (2.638). Συνεχίζοντας λοιπόν τον υπολογισμό του  $\xi^\dagger$ -μέρους της μεταβολής των σπινωριακών όρων παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
i(\delta_\xi \lambda^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda &= iC^* \xi^\dagger g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu \sigma^\nu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda - iC^* \xi^\dagger g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda \\
&= -iC^* \xi^\dagger (-g^{\mu\rho} \bar{\sigma}^\nu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda + g^{\nu\rho} \bar{\sigma}^\mu F_{\mu\nu} \partial_\rho \lambda) \\
&= -iC^* \xi^\dagger (-F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \lambda + F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\mu \partial^\nu \lambda) \\
&= -iC^* \xi^\dagger (-F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \lambda + F_{\nu\mu} \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \lambda) \\
&= -iC^* \xi^\dagger (-F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \lambda - F_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu \partial^\mu \lambda) \\
&= 2iC^* \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu F_{\mu\nu} \partial^\mu \lambda.
\end{aligned} \tag{2.642}$$

Η τελευταία έκφραση, (2.642), ακυρώνει ακριβώς το  $\xi^\dagger$ -κομμάτι της (2.634) αν  $C = i/2$ . Με αυτήν την επιλογή, ακυρώνονται ακριβώς και τα  $\xi$ -κομμάτια των μεταβολών των δύο πεδίων. Συνεπώς, καταλήγουμε ότι οι απαιτούμενοι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί είναι οι:

$$\delta_\xi \lambda = \frac{1}{2} i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu}, \tag{2.643}$$

$$\delta_\xi \lambda^\dagger = -\frac{1}{2} i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu}. \tag{2.644}$$

Παρ' όλα αυτά, αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το  $\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta$  όπως αυτό εφαρμόζεται πάνω στα πεδία  $\lambda, A^\mu$ , θα διαπιστώσουμε ότι προκύπτουν έξτρα ανεπιθύμητοι όροι που δίνουν μη συνεπή αποτελέσματα (όπως στην περίπτωση των  $\phi, \chi$ , (2.297)), εκτός εάν ικανοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης (on-shell περίπτωση). Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι ικανοποιητικό καθώς θέλουμε τα αποτελέσματα μας να ισχύουν και για τις off-shell καταστάσεις. Το  $A^\mu$  στην off-shell κατάσταση έχει και έναν τρίτο βαθμό ελευθερίας, οπότε, χρησιμοποιώντας την πετυχημένη συνταγή, πρέπει να εισαγάγουμε ένα βοηθητικό μη διαδιδόμενο πεδίο που να έχει έναν βαθμό ελευθερίας, δηλαδή, ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο. Το πεδίο αυτό το ονομάζουμε  $D$  και το εισάγουμε στη λαγκρατζιανή (2.629) μέσω του όρου:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} D^2. \tag{2.645}$$

Συνεπώς, η ελεύθερη λαγκρατζιανή (2.629) θα γίνει:

$$\mathcal{L}_{\gamma\lambda} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2. \tag{2.646}$$

Πρέπει τώρα να θεωρήσουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς συμπεριλαμβανομένου του  $D$ . Αρχικά σημειώνουμε ότι η διάσταση του  $D$  είναι  $M^2$ , όπως ήταν και του  $F$ . Αυτό προτείνει ότι το  $D$  θα μετασχηματίζεται κατά παρόμοιο τρόπο με το  $F$ , (2.357). Όμως, το  $D$  είναι πραγματικό οπότε τροποποιούμε την (2.357) προσθέτοντας τον ερμιτιανό συζυγή όρο, καταλήγοντας στη μεταβολή:

$$\delta_\xi D = -i(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi). \tag{2.647}$$

Όπως και στην περίπτωση του  $F$ , η μεταβολή  $\delta_\xi D$  είναι μία ολική παράγωγος. Ανάλογα με την τροποποίηση που επήλθε για τα  $\chi, \chi^\dagger$  στην (2.371) με την εισαγωγή του  $F$ , κατά παρόμοιο τρόπο τροποποιούμε τις μεταβολές  $\delta_\xi \lambda, \delta_\xi \lambda^\dagger$  μέσω των πρόσθετων όρων:

$$\delta_\xi \lambda = \xi D, \quad \delta_\xi \lambda^\dagger = \xi^\dagger D. \quad (2.648)$$

Η μεταβολή της  $\mathcal{L}_D$  θα είναι λοιπόν:

$$\delta_\xi \left( \frac{1}{2} D^2 \right) = D \delta_\xi D = -iD \left( \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi \right). \quad (2.649)$$

Η μεταβολή του σπινωριακού όρου της  $\mathcal{L}_{\gamma\lambda}$  θα παίρνει πλέον μία επιπλέον συνεισφορά:

$$i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda D + i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi D \quad (2.650)$$

Ο πρώτος όρος της (2.650) ακυρώνει τον πρώτο όρο της (2.649) και το ίδιο συμβαίνει και με τους δεύτερους όρους, αφού πρώτα ολοκληρωθούν κατά παράγοντες.

Για ευκολία, συνοψίζουμε τις μεταβολές των πεδίων:

$$\delta_\xi A^\mu = \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda + \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi, \quad (2.651)$$

$$\delta_\xi \lambda = \frac{1}{2} i \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu} + \xi D, \quad \delta_\xi \lambda^\dagger = -\frac{1}{2} i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu} + \xi^\dagger D, \quad (2.652)$$

$$\delta_\xi D = -i(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi). \quad (2.653)$$

## 2.7.2 Μη-αβελιανές gauge supermultiplets

Βάσει του προηγούμενου παραδείγματος θα πορευτούμε για να βρούμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς στη μη-αβελιανή περίπτωση. Θα θεωρήσουμε μία  $SU(2)$  θεωρία βαθμίδας, σαν αυτή που περιγράφει τον ηλεκτροσθενή τομέα του SM. Ας θυμηθούμε πρώτα κάποια απαραίτητα στοιχεία για τις μη-αβελιανές θεωρίες.

Για μία  $SU(2)$  θεωρία βαθμίδας, ο τανυστής δύναμης πεδίου  $F_{\mu\nu}$  γενικεύεται στον<sup>26</sup>:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (2.654)$$

όπου  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$  τα διανυσματικά πεδία (κατοικούν στην 3 (adjoint) αναπαράσταση της  $SU(2)$ ) και  $g$  η σταθερά σύζευξης. Σε διανυσματική γραφή, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu. \quad (2.655)$$

Αν είχαμε επιλέξει να ασχοληθούμε με την  $SU(3)$  θεωρία βαθμίδας, θα είχαμε 8 πεδία βαθμίδας, τα γκλουόνια, τα οποία ως διανυσματικά πεδία βαθμίδας κατοικούν και αυτά στην adjoint αναπαράσταση της  $SU(3)$ .

<sup>26</sup>Η απόδειξη για το πως βγαίνει η σχέση αυτή υπάρχει στη διπλωματική: Μανωλάκος Γιώργος: Το καθιερωμένο Πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED, 2012, σελ.57

Παίρνοντας τώρα έναν απειροστό (τοπικό) μετασχηματισμό στα πεδία βαθμίδας  $W_\mu^i$ , έχουμε<sup>27</sup>:

$$W_\mu^{i'}(x) = W_\mu^i(x) - \partial_\mu \epsilon^i(x) - g \epsilon^{ijk} \epsilon^j(x) W_\mu^k(x). \quad (2.656)$$

Στην αβελιανή περίπτωση ο τελευταίος όρος λείπει (αφού έχουμε ένα  $\epsilon(x)$ ) και ο τανυστής δύναμης πεδίου  $F_{\mu\nu}$ , όπως έχουμε πει είναι gauge-αναλλοίωτος. Στην  $SU(2)$  ο αντίστοιχος τανυστής πεδίου δύναμης  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  μετασχηματίζεται σαν:

$$F_{\mu\nu}^{i'}(x) = F_{\mu\nu}^i(x) - g \epsilon^{ijk} \epsilon^j(x) F_{\mu\nu}^k(x). \quad (2.657)$$

Στην τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι δεν υπάρχει παράγωγος της παραμέτρου  $\epsilon(x)$ , παρά το γεγονός ότι έχουμε πάρει τοπικούς μετασχηματισμούς. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η γενίκευση της Maxwell λαγκρατζιανής σε όρους των  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ :

$$-\frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}, \quad (2.658)$$

είναι επίσης gauge-αναλλοίωτη, δηλαδή αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς  $SU(2)$  μετασχηματισμούς<sup>28</sup>.

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να γενικεύσουμε το απλό  $U(1)$  υπερσυμμετρικό μοντέλο που εξετάσαμε νωρίτερα. Το πρώτο βήμα είναι το προφανές: να εισαγάγουμε μία  $SU(2)$  τριπλέτα από gauginos, για να ταιριάξουμε την τριπλέτα των διανυσματικών πεδίων. Κάτω από έναν απειροστό  $SU(2)$  μετασχηματισμό βαθμίδας, τα πεδία  $\lambda^i$  θα μετασχηματίζονται ως (κατ'αντιστοιχία με την (2.656)):

$$\lambda^{i'}(x) = \lambda^i(x) - g \epsilon^{ijk} \epsilon^j(x) \lambda^k(x). \quad (2.659)$$

Όμως τα gauginos δεν είναι πεδία βαθμίδας, γι'αυτό και ο μετασχηματισμός τους δεν περιέχει παράγωγο της παραμέτρου  $\epsilon(x)$ . Επομένως, η γενίκευση της (2.629) είναι άμεση:

$$\mathcal{L}_{W,\lambda} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} + i \lambda^{i\dagger} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda^i. \quad (2.660)$$

Παρ'όλο που ο πρώτος όρος είναι αναλλοίωτος, ο δεύτερος δεν είναι καθώς η παράγωγος θα δράσει πάνω στις  $\epsilon^j(x)$  παραμέτρους με αποτέλεσμα να μείνουν όροι  $\partial_\mu \epsilon^j(x)$  που δεν ακυρώνονται μετά τον gauge μετασχηματισμό. Για να απαλλαγούμε από τους όρους αυτούς, αντικαθιστούμε την απλή παράγωγο με τη συναλλοίωτη, η οποία είναι gauge-αναλλοίωτη:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu, \quad (2.661)$$

<sup>27</sup>Το ίδιο και για τη μεταβολή των διανυσματικών πεδίων, σελ.54-55 της προηγούμενης αναφοράς

<sup>28</sup>Το ίδιο και για την αναλλοίωτητα του τανυστή δύναμης πεδίου  $F_{\mu\nu}^i$ , σελ.56 της προηγούμενης αναφοράς

όπου οι πίνακες  $\mathbf{T}$  είναι οι τρεις γεννήτορες της  $SU(2)$  ομάδας, διάστασης  $2t + 1 \times 2t + 1$  όταν δρουν στο  $2t + 1$ -συνιστωσών πεδίο ( $t$  είναι το ισοσπίν). Στην περίπτωση μας  $t = 1$ , δηλαδή τα  $gauginos$  όπως έχουμε πει ανήκουν σε μία τριπλέτα -στην  $adjoint$ <sup>29</sup> αναπαράσταση της ομάδας. Επομένως, στην (2.660) θα χρειαστεί η αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \lambda^i &\rightarrow (D_\mu \lambda)^i = \partial_\mu \lambda^i + ig(\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu)_{ij} \lambda^j \\ &= \partial_\mu \lambda^i + ig(-i\epsilon^{kij} W_\mu^k) \lambda^j \\ &= \partial_\mu \lambda^i + g\epsilon^{kij} W_\mu^k \lambda^j \\ &= \partial_\mu \lambda^i - g\epsilon^{ijk} W_\mu^j \lambda^k.\end{aligned}\quad (2.662)$$

Μετά την αντικατάσταση του  $\partial_\mu \lambda^i$  με το παραπάνω αποτέλεσμα στη λαγκρατζιανή (2.660), η  $\mathcal{L}_{W\lambda}$  καταλήγει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους  $SU(2)$  μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Πρέπει όμως να την κάνουμε και αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Από την εμπειρία μας με τη μη αβελιανή περίπτωση, αναμένουμε ότι θα χρειαστεί να εισαγάγουμε ένα ανάλογο του βοηθητικού πεδίου  $D$ . Στην περίπτωση αυτή χρειαζόμαστε μία τριπλέτα βοηθητικών πεδίων,  $D^i$  για να εξισοροπήσουμε τους off-shell βαθμούς ελευθερίας του κάθε  $W_\mu^i$ . Οπότε, η ζητούμενη  $SU(2)$ - και SUSY-αναλλοίωτη λαγκρατζιανή μίας  $SU(2)$  gauge supermultiplet είναι:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} + i\lambda^{i\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^i + \frac{1}{2} D^i D^i \quad (2.663)$$

Πρέπει τώρα να δούμε πως μετασχηματίζονται τα πεδία της λαγκρατζιανής κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Δοκιμάζουμε αρχικά την προφανή γενίκευση των μεταβολών που βρήκαμε στην  $U(1)$  περίπτωση, (2.651)-(2.653):

$$\delta_\xi W^{\mu i} = \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda^i + \lambda^{i\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi \quad (2.664)$$

$$\delta_\xi \lambda^i = \frac{1}{2} i\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu}^i + \xi D^i, \quad \delta_\xi \lambda^\dagger = -\frac{1}{2} i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu}^i + \xi^\dagger D^i, \quad (2.665)$$

$$\delta_\xi D^i = -i(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^i) - (D_\mu \lambda)^{i\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi. \quad (2.666)$$

Το σύνολο των μετασχηματισμών αυτών όντως δουλεύει, χωρίς να χρειάζεται να συμπληρώσουμε τίποτα. Αυτό σημαίνει ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί των πεδίων αφήνουν τη δράση της (2.663) αναλλοίωτη. Επίσης, η διαφορά  $\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta$  μπορεί να εφαρμοστεί συνεπώς σε όλα τα πεδία  $W_\mu^i, \lambda^i, D^i$  για αυτήν την gauge supermultiplet. Αυτή η υπερσυμμετρική θεωρία βαθμίδας έχει δύο είδη αλληλεπιδράσεων.

- Τις ιδιο-αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα  $W$  πεδία όπως αυτές προκύπτουν από τον όρο  $F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}$ .

<sup>29</sup>Τα στοιχεία της οποίας είναι:  $(T^i)_{bc} = -i\epsilon^{ijk}$ .

- Τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα  $W$  και  $\lambda$  που παράγονται από τον όρο  $i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda^i$  μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου.

Το τελευταίο βήμα πριν το MSSM είναι να χτίσουμε λαγκρατζιανές οι οποίες να περιέχουν τόσο chiral όσο και gauge supermultiplets με τέτοιο τρόπο ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η λαγκρατζιανή (ή καλύτερα η δράση) κάτω από υπερσυμμετρικούς και gauge μετασχηματισμούς.

### 2.7.3 Συνδυάζοντας chiral και gauge supermultiplets

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα κάνουμε το μεγάλο βήμα να συνδυάσουμε τις chiral με τις gauge supermultiplets. Πρώτα, εισάγουμε τις συζεύξεις των πεδίων βαθμίδας με τα βαθμωτά πεδία και τα φερμιόνια στις chiral supermultiplets. Αυτό, όπως ήδη γνωρίζουμε συμβαίνει μέσω των συναλλοίωτων παραγώγων. Αυτό θα είναι υπεύθυνο για τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα πεδία βαθμίδας της gauge supermultiplet και των πεδίων ύλης της chiral supermultiplet. Έπειτα, λόγω του ότι στις gauge supermultiplets εμπεριέχονται, εκτός των πεδίων βαθμίδας, και τα υπερσυμμετρικά τους ταίρια (gaugino) και τα  $D$  πεδία, θα πρέπει θεωρήσουμε και όλους τους πιθανούς επανακανονικοποιήσιμους όρους, δηλαδή αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα gaugino και  $D$  πεδία με τα πεδία ύλης, που να είναι αναλλοίωτοι τόσο κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας όσο και κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

Τα σημαντικά στοιχεία για μία τέτοια κατασκευή περιέχονται στην απλούστερη περίπτωση, που είναι μία μονή  $U(1)$  διανυσματική supermultiplet και μία μονή ελεύθερη χειραλική supermultiplet.

#### Συνδυάζοντας μία $U(1)$ διανυσματική supermultiplet και μία ελεύθερη chiral supermultiplet

Αρχικά πρέπει να «επιδιορθώσουμε» τη λαγκρατζιανή (2.388), έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η gauge-αναλλοιότητα. Αυτό επιτυγχάνεται κατά τον ενδεδειγμένο τρόπο, να αναβαθμίσουμε δηλαδή την απλή παράγωγο με τη συναλλοίωτη που αντιστοιχεί στην  $U(1)$  περίπτωση:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (2.667)$$

όπου  $q$  είναι η  $U(1)$  σταθερά σύζευξης (ηλεκτρικό φορτίο). Κάνοντας λοιπόν την αντικατάσταση της παραγώγου στην (2.388) και προσθέτοντάς την με την  $U(1)$  gauge supermultiplet, (2.646), παίρνουμε τη λαγκρατζιανή:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi + F^\dagger F - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2. \quad (2.668)$$

Πρέπει λοιπόν τώρα να θεωρήσουμε πιθανές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα πεδία ύλης  $\phi, \chi$  και στα άλλα πεδία  $\lambda, D$  της gauge supermultiplet. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις για να είναι αποδεκτές θα πρέπει να πληρούν 4 προϋποθέσεις:

1. Lorentz αναλλοιώτητα
2. επανακανονικοποιησιμότητα<sup>30</sup>
3. gauge αναλλοιώτητα
4. SUSY αναλλοιώτητα

Αφού τα πεδία  $\lambda, D$  είναι ουδέτερα, όλες οι gauge αναλλοιώτες συζεύξεις ανάμεσα σε αυτά και τα φορτισμένα πεδία  $\phi, \chi$ , θα πρέπει να εμπλέκουν ουδέτερους διγραμμικούς συνδυασμούς των  $\phi, \chi$ . Τέτοιοι είναι οι  $\phi^\dagger\phi, \phi^\dagger\chi, \chi^\dagger\phi, \chi^\dagger\chi$ , οι οποίοι έχουν διάσταση 2, 5/2, 5/2, 3, αντίστοιχα. Τα πεδία  $\lambda, D$  έχουν διάσταση 3/2, 2, αντίστοιχα, συνεπώς, απαιτώντας οι συζεύξεις να έχουν διάσταση κάτω από 4, επιζούν μόνο τρεις συνδυασμοί οι οποίοι είναι επίσης gauge και Lorentz αναλλοιώτοι. Αυτοί είναι οι  $(\phi^\dagger\chi) \cdot \lambda, \lambda^\dagger \cdot (\chi^\dagger\phi), \phi^\dagger\phi D$ . Ομαδοποιούμε τις δύο πρώτες συζεύξεις ώστε να πάρουμε μία ερμιτιανή αλληλεπίδραση και φτάνουμε λοιπόν στους τελικούς υποψήφιους όρους αλληλεπίδρασης:

$$Aq[(\phi^\dagger\chi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot (\chi^\dagger\phi)] + Bq\phi^\dagger\phi D. \quad (2.669)$$

Οι συντελεστές<sup>31</sup>  $A, B$  θα υπολογιστούν από την τελευταία απαίτηση, η (2.669) να είναι αναλλοιώτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

Για να εκτελέσουμε τη διαδικασία αυτή πρέπει να προσδιορίσουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πεδίων. Εκ πρώτης όψεως, αυτό φαίνεται απλό, καθώς οι μεταβολές των πεδίων της gauge supermultiplet δίνονται από τις (2.651)-(2.653) και οι μετασχηματισμοί των πεδίων της chiral supermultiplet (2.369)-(2.371) με αντικατάσταση της παραγώγου από τη συναλλοιώτη.

Όπως θα δούμε, δεν υπάρχει επιλογή που να μπορούμε να κάνουμε ώστε η πλήρης λαγκρατζιανή να παραμένει αναλλοιώτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Βέβαια αυτό δεν μας εκπλήσσει, καθώς οι μετασχηματισμοί για τα πεδία της chiral supermultiplet βρεθήκαν για την περίπτωση  $q = 0$  και είναι πιθανό να πρέπει ένας ή περισσότεροι μετασχηματισμοί να τροποποιηθούν ώστε να συμπεριλαμβάνουν το  $q$  (όντως, θα δούμε ότι το  $F$  δεν επηρεάζεται). Υπάρχει επίσης και ένας άλλος λόγος για την αστοχία εύρεσης κατάλληλων συντελεστών. Όντως, οι μεταβολές των πεδίων της gauge supermultiplet και αυτές των πεδίων της chiral supermultiplet, εξασφαλίζουν την SUSY-αναλλοιώτητα των chiral και gauge κομματιών της (2.668) αντίστοιχα

<sup>30</sup>Υπενθυμίζουμε ότι για να είναι επανακανονικοποιήσιμος ένας όρος στη λαγκρατζιανή, πρέπει να έχει διάσταση το πολύ  $M^4$ . Παραθέτουμε τις διαστάσεις όλων των εμπλεκόμενων πεδίων για ευκολία:

$$[\phi] = M, \quad [\chi] = M^{3/2} \quad [F] = M^2 \quad [\lambda] = M^{3/2} \quad [D] = M^2 \quad [F^{\mu\nu}] = M^2$$

<sup>31</sup>Παρατηρούμε ότι για ευκολία έχουμε αποτραβήξει έναν παράγοντα  $q$  από τους δύο συντελεστές.

στο όριο  $q \rightarrow 0$ . Όμως δεν υπάρχει κάποιος a priori λόγος, η σπινωριακή παράμετρος  $\xi$  που χρησιμοποιήθηκε να είναι η ίδια στις δύο περιπτώσεις. Οποιοδήποτε από τα δύο  $\xi$  μπορεί να αναβαθμιστεί από έναν σταθερό παράγοντα, χωρίς να χαλάσει η αναλλοιώτητα σε καμία από τις «υπολαγκρατζιανές». Έτσι λοιπόν, όταν συνδυάσουμε τις λαγκρατζιανές και συμπεριλάβουμε και τους όρους της (2.669), για την περίπτωση της  $q \neq 0$ , θα δούμε ότι η απαίτηση της αναλλοιώτητας της συνολικής λαγκρατζιανής, φιξάρει τη σχετική κλίμακα των δύο  $\xi$  (με αβεβαιότητα ενός προσήμου) και ότι χωρίς την αναβάθμιση δεν μπορούμε να πάρουμε SUSY-αναλλοίωτη θεωρία. Έτσι λοιπόν, διατηρούμε την  $\xi$  παράμετρο στις μεταβολές των πεδίων της chiral supermultiplet, και αναβαθμίζουμε την  $\xi$  της gauge supermultiplet κατά έναν σταθερό παράγοντα  $a$ . Συνεπώς, οι μετασχηματισμοί των πεδίων της gauge supermultiplet θα γίνουν:

$$\delta_\xi A^\mu = a(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda + \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi), \quad (2.670)$$

$$\delta_\xi \lambda = \frac{ai}{2} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu} + a\xi D, \quad \delta_\xi \lambda^\dagger = -\frac{ia}{2} \xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu F_{\mu\nu} + a\xi^\dagger D, \quad (2.671)$$

$$\delta_\xi D = -ai(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi). \quad (2.672)$$

Δουλεύουμε πρώτα με το  $A$  κομμάτι της (2.669). Η μεταβολή του θα είναι:

$$\begin{aligned} Aq\delta_\xi[(\phi^\dagger \chi)\lambda + \lambda^\dagger(\chi^\dagger \phi)] &= Aq \left[ (\delta_\xi \phi^\dagger)\chi \cdot \lambda + \phi^\dagger(\delta_\xi \chi) \cdot \lambda \right. \\ &\quad \left. + \phi^\dagger \chi(\delta_\xi \lambda) + (\delta_\xi \lambda^\dagger)\chi^\dagger \phi + \lambda^\dagger(\delta_\xi \chi^\dagger)\phi + \lambda^\dagger \cdot \chi^\dagger(\delta_\xi \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.673)$$

Ανάμεσα στους παραπάνω όρους, υπάρχουν δύο οι οποίοι είναι γραμμικοί ως προς τα  $q, D$  και προκύπτουν από τον  $\phi^\dagger \chi \cdot (\delta_\xi \lambda)$  και τον ερμιτιανό συζυγή του, δηλαδή:

$$\begin{aligned} Aq \left( \phi^\dagger \chi(\delta_\xi \lambda) + (\delta_\xi \lambda^\dagger)\chi^\dagger \phi \right) \Big|_{D\text{-terms}} &= Aq \left( \phi^\dagger \chi \left( \frac{ai}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi) F_{\mu\nu} + a\xi D \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{ai}{2} (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) F_{\mu\nu} + a\xi^\dagger D \right) \chi^\dagger \phi \right) \Big|_{D\text{-terms}} \\ &= Aq \left( a\phi^\dagger \chi \cdot \xi D + a\xi^\dagger \cdot \chi^\dagger \phi \right) \\ &= Aqa \left( \phi^\dagger \chi \cdot \xi D + \xi^\dagger \cdot \chi^\dagger D \phi \right). \end{aligned} \quad (2.674)$$

Παρομοίως, η μεταβολή του  $B$  μέρους της (2.669) είναι:

$$\begin{aligned} \delta_\xi(Bq\phi^\dagger \phi D) \Big|_{D\text{-terms}} &= Bq(\delta_\xi \phi^\dagger)\phi D + Bq\phi^\dagger(\delta_\xi \phi)D + Bq\phi^\dagger \phi(\delta_\xi D) \Big|_{D\text{-terms}} \\ &= Bq \left( \chi^\dagger \cdot \xi^\dagger \phi D + \phi^\dagger \xi \cdot \chi D + \phi^\dagger \phi(-ai)(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \right) \Big|_{D\text{-terms}} \\ &= Bq(\chi^\dagger \cdot \xi^\dagger \phi D + \phi^\dagger \xi \cdot \chi D). \end{aligned} \quad (2.675)$$



Συγκρίνοντας την (2.674) με την (2.675), διαπιστώνουμε ότι το  $D$ -κομμάτι της μεταβολής του  $B$ -όρου ακυρώνει το  $D$ -κομμάτι της μεταβολής του  $A$ -όρου αν ισχύει ότι :

$$aA = -B. \quad (2.676)$$

Επιπλέον, από τη μεταβολή του  $A$ -μέρους, (2.673), παίρνουμε τον πρώτο και τον τελευταίο όρο :

$$\begin{aligned} \delta_\xi \left( Aq\delta_\xi[(\phi^\dagger\chi)\lambda + \lambda^\dagger(\chi^\dagger\phi)] \right) \Big|_{last}^{first} &= Aq \left[ (\delta_\xi\phi^\dagger)\chi \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot \chi^\dagger(\delta_\xi\phi) \right] \\ &= Aq \left[ \chi^\dagger \cdot \xi^\dagger\chi \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot \chi^\dagger\xi \cdot \chi \right]. \end{aligned} \quad (2.677)$$

Όμως από τον δεύτερο όρο της λαγκρατζιανής (2.668),

$$i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\chi = i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\chi = i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - q\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu A_\mu\chi, \quad (2.678)$$

αν πάρουμε τη μεταβολή του δεύτερου όρου,  $-q\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu A_\mu\chi$  και κρατήσουμε μόνο τον όρο ανάλογο του  $a$ :

$$\delta_\xi(-q\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu A_\mu\chi) \Big|_{\sim a} = -q\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi(\delta_\xi A_\mu) = -qa\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi(\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi) \quad (2.679)$$

και τον απλοποιήσουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$(\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi)(\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi) = 2\chi^\dagger \cdot \lambda^\dagger\chi \cdot \xi, \quad (2.680)$$

την οποία και αποδεικνύουμε :

$$\begin{aligned} (\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi)(\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi) &= -\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\lambda^\dagger\chi\bar{\sigma}^\mu\xi = -\chi^\dagger\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\bar{\sigma}_\mu\chi\xi \\ &= -\chi^\dagger\lambda^\dagger(-2)\chi\xi = 2(\chi^\dagger \cdot \lambda)(\chi \cdot \xi), \end{aligned} \quad (2.681)$$

αφού

$$\bar{\sigma}^\mu\bar{\sigma}_\mu = 1 - \sigma^2 = 1 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 = -2, \quad (2.682)$$

τότε (ο όρος της (2.679)) θα γίνει :

$$-qa\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\chi(\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\lambda + \lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi) = -2qa(\chi^\dagger \cdot \xi^\dagger\chi \cdot \lambda + \chi^\dagger \cdot \lambda^\dagger\chi \cdot \xi). \quad (2.683)$$

Αυτός ο όρος λοιπόν βλέπουμε ότι ακυρώνει ακριβώς τον (2.677), αν ισχύει ότι :

$$A = 2a. \quad (2.684)$$

Προς το παρόν, από τις (2.676), (2.684) δεν υπάρχει κάποιος λόγος που να μας απαγορεύει να θεωρήσουμε το  $a = 1$ , δηλαδή οι  $\xi$  παράμετροι στις δύο

περιπτώσεις να είναι ίσες. Όμως, αναδύεται ένας περιορισμός όταν θεωρήσουμε τη μεταβολή του πρώτου όρου της (2.668), δηλαδή τον όρο αλληλεπίδρασης του  $A^\mu$  με το  $\phi$  και κρατήσουμε πάλι τους όρους ανάλογους του  $a$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \left[ (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) \right] \Big|_{\sim a} &= \delta_\xi \left[ (\partial^\mu - iqA^\mu) \phi^\dagger (\partial_\mu + iqA_\mu) \phi \right] \Big|_{\sim a} \\ &= -iq \delta_\xi (A^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^\dagger A_\mu \phi) \\ &= iqa [\partial_\mu \phi^\dagger (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda + \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \phi - (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda + \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \phi^\dagger \partial_\mu \phi]. \end{aligned} \quad (2.685)$$

Όμως, παρόμοιοι όροι προκύπτουν, αν δουλέψουμε με τους όρους  $Aq[\phi^\dagger(\delta_\xi \chi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot (\delta_\xi \chi^\dagger) \phi]$  της (2.673):

$$Aq[\phi^\dagger(\delta_\xi \chi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot (\delta_\xi \chi^\dagger) \phi] = Aq[\phi^\dagger(-i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^{\dagger T} \partial_\mu \phi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot \partial_\mu \phi^\dagger \xi^T (-i\sigma_2 i\sigma^\mu \phi)]. \quad (2.686)$$

Το πρώτο σπινωριακό γινόμενο της (2.686) θα γίνει:

$$\begin{aligned} \phi^\dagger(-i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^{\dagger T} \partial_\mu \phi) \cdot \lambda &= i\phi^\dagger(-i\sigma_2) \left[ (\sigma^\mu)(-i\sigma_2) \xi^{\dagger T} \partial_\mu \phi \right]^T \lambda \\ &= i\phi^\dagger \partial_\mu \phi (-i\sigma_2) \xi^\dagger (i\sigma_2) \sigma^{\mu T} \lambda \\ &= -i\phi^\dagger \partial_\mu \phi \xi^\dagger \lambda \underbrace{(-i\sigma_2) \sigma^{\mu T} (-i\sigma_2)}_{-\bar{\sigma}^\mu} \\ &= i\phi^\dagger \partial_\mu \phi \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda \end{aligned} \quad (2.687)$$

και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, το δεύτερο σπινωριακό γινόμενο της (2.686) δίνει τον ερμιτιανό συζυγή του (2.687). Επομένως, η (2.686) γίνεται:

$$Aqi \left[ \phi^\dagger (\partial_\mu \phi) \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi \right]. \quad (2.688)$$

Μαζί με τις (2.685), (2.688) πρέπει να πάρουμε και τους δύο τελευταίους όρους του (πλήρους)  $B$ -μέρους της (2.675):

$$Bq \left[ \phi^\dagger \phi (-ai) (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda - (\partial_\mu \lambda^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \xi) \right], \quad (2.689)$$

από τους οποίους, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, παίρνουμε:

$$aiBq \left\{ [(\partial_\mu \phi^\dagger) \phi + \phi^\dagger \partial_\mu \phi] (\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda) - [(\partial_\mu \phi^\dagger) \phi + \phi^\dagger \partial_\mu \phi] (\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi) \right\}. \quad (2.690)$$

Αν θεωρήσουμε λοιπόν όλους μαζί τους όρους που εμπλέκουν την ποσότητα  $\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda$  στις (2.685), (2.688), (2.690), δηλαδή:

$$iqa [(\partial_\mu \phi^\dagger) \phi - \phi^\dagger \partial_\mu \phi] + Aqi \phi^\dagger \partial_\mu \phi + aiBq \left[ (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi + \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right], \quad (2.691)$$

τότε βλέπουμε ότι όλοι αυτοί αλληλοαναιρούνται αν η (2.684),  $A = 2a$ . Ταυτόχρονα ισχύει και η συνθήκη:

$$B = -1. \quad (2.692)$$

Από τις (2.676), (2.684), (2.692) ισχύει ότι

$$a^2 = \frac{1}{2}. \quad (2.693)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνδυασμένη λαγκρατζιανή δε θα είναι SUSY αναλλοίωτη εκτός αν τροποποιήσουμε τη σχετική κλίμακα των σπινωριακών παραμέτρων των chiral και gauge supermultiplet κατά έναν μη τετριμμένο παράγοντα, ο οποίος επιλέγουμε (συμβατικά) να είναι ο:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.694)$$

Με την επιλογή αυτή, ο συντελεστής  $A$  είναι:

$$A = -\sqrt{2}, \quad (2.695)$$

και η συνδυασμένη λαγκρατζιανή μας φιξάρεται.

Βέβαια, δεν έχουμε αναλύσει όλους τους όρους αναλυτικά της μεταβολής της πλήρους λαγκρατζιανής, αντιθέτως κινηθήκαμε αρκετά στοχευμένα για λόγους οικονομίας. Η αλήθεια είναι ότι αν παίρναμε αναλυτικά τη μεταβολή της πλήρους λαγκρατζιανής και υπολογίζαμε όλους του όρους αναλυτικά (μετά από κάποιες παραγοντικές ολοκληρώσεις) θα βρίσκαμε ότι δε θα επιζούσε κανένας από τους όρους αυτούς με μόνη εξαίρεση τους όρους που σχετίζονται με τη μεταβολή των όρων:

$$Aq \left[ \phi^\dagger (\delta_\xi \chi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot (\delta_\xi^\dagger) \phi \right] \quad (2.696)$$

της (2.673), οι οποίοι περιέχουν τον όρο:

$$Aq(\phi^\dagger \xi \cdot \lambda F + \lambda^\dagger \cdot \xi^\dagger F^\dagger \phi). \quad (2.697)$$

Η συνεισφορά αυτή δεν μπορεί να ακυρωθεί από κανέναν άλλον όρο, κι επομένως, αναγκαζόμαστε να τροποποιήσουμε το μετασχηματισμό των πεδίων  $F, F^\dagger$ , έτσι ώστε να παραχθεί ένας όρος ακύρωσης από τη μεταβολή του όρου  $FF^\dagger$  της λαγκρατζιανής. Αυτό απαιτεί λοιπόν:

$$\begin{aligned} \delta_\xi F &= -\sqrt{2}q\lambda^\dagger \cdot \xi^\dagger \phi + (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi), \\ \delta_\xi F^\dagger &= -\sqrt{2}q\xi \cdot \lambda \phi^\dagger + (i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi), \end{aligned} \quad (2.698)$$

όπου οι όροι στις παρενθέσεις είναι οι προηγούμενες εκφράσεις για τις μεταβολές των πεδίων.

Επομένως, συνοψίζοντας, η συνδυασμένη λαγκκραζιανή για την chiral και  $U(1)$  gauge supermultiplet θα είναι:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi + F^\dagger F - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 - \sqrt{2} q \left[ (\phi^\dagger \chi) \cdot \lambda + \lambda^\dagger \cdot (\chi^\dagger \phi) \right] - q \phi^\dagger \phi D \quad (2.699)$$

Σημειώνουμε ότι στη δεύτερη γραμμή της (2.699), οι σταθερές σύζευξης των αλληλεπιδράσεων είναι φιξαρισμένες από την υπερσυμμετρία έτσι ώστε να είναι ανάλογες της σταθεράς σύζευξης  $g$ , ακόμα και αν δεν έχουν τη μορφή των συνηθισμένων gauge αλληλεπιδράσεων. Οι όροι που μπλέκουν το photino με τα πεδία της ύλης μπορούν να θεωρηθούν ότι ανακύπτουν από την υπερσυμμετρικοποίηση των συνηθισμένων συζεύξεων των πεδίων βαθμίδας με τα πεδία της ύλης.

Επίσης, παρατηρούμε ότι η εξίσωση κίνησης της του πεδίου  $D$  είναι:

$$D = q \phi^\dagger \phi \quad (2.700)$$

Αυτό σημαίνει ότι, αφού δεν υπεισέρχονται παράγωγοι του  $D$  (όπως στην περίπτωση του μοντέλου W-Z για τα πεδία  $F, F^\dagger$  (2.408), (2.409)), μπορούμε να εξαλείψουμε το βοηθητικό πεδίο  $D$  από τη λαγκκραζιανή, χρησιμοποιώντας την (2.700). Αυτή η αντικατάσταση έχει ως αποτέλεσμα να αντικαταστήσει τους δύο όρους της που περιέχουν το  $D$  στην (2.699):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_D &= \frac{1}{2} D^2 - q \phi^\dagger \phi D \stackrel{(2.700)}{=} \frac{1}{2} (q \phi^\dagger \phi)^2 - q \phi^\dagger \phi (q \phi^\dagger \phi) \\ &= -\frac{1}{2} q (\phi^\dagger \phi)^2 \end{aligned} \quad (2.701)$$

Αυτή είναι μία  $(\phi^\dagger \phi)^2$  τύπου αλληλεπίδραση, όπως στο δυναμικό Higgs του SM, (2.2), με τη διαφορά ότι εδώ εμφανίζεται με μία σταθερά σύζευξης η οποία δεν είναι άγνωστη αλλά ορισμένη από τη σταθερά σύζευξης  $g$ . Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα δούμε ότι το ίδιο χαρακτηριστικό μεταφέρεται και στην πιο ρεαλιστική μη αβελιανή περίπτωση. Αφού όπως είναι γνωστό η μάζα του Higgs (για ένα καθορισμένο VEV) καθορίζεται από τη σταθερά σύζευξης ( $\lambda$  στο SM), έπεται ότι θα υπάρχει λιγότερη αυθαιρεσία στη μάζα του Higgs στο MSSM από ότι στο SM. Όταν θα εξετάσουμε τον τομέα Higgs σε επόμενο κεφάλαιο θα επαληθεύσουμε την παρατήρηση αυτή.

### Η μη αβελιανή περίπτωση

Ξεκινάμε από τη λαγκκραζιανή του μοντέλου Wess-Zumino, για μία συλλογή από chiral supermultiplets που συμβολίζονται με τον δείκτη  $i$ , συμπεριλαμβάνοντας τους όρους του superpotential.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi_i^\dagger + \chi_i^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i + F_i^\dagger F_i + \left[ \frac{\partial W}{\partial \phi_i} F_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i \cdot \chi_j + h.c. \right], \quad (2.702)$$

στην οποία, κατά τα γνωστά, εισάγουμε τις gauge συζεύξεις μέσω των συναλλοιώτων παραγώγων:

$$\partial_\mu \phi_i \rightarrow D_\mu \phi_i + ig A_\mu^\alpha (T^\alpha \phi)_i, \quad (2.703)$$

$$\partial_\mu \chi_i \rightarrow D_\mu \chi_i + ig A_\mu^\alpha (T^\alpha \chi)_i, \quad (2.704)$$

όπου  $g, A_\mu^\alpha$  είναι οι σταθερές σύζευξης και τα μποζόνια βαθμίδας αντίστοιχα και  $T^\alpha$  είναι οι ερμιτιανοί πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες της κάθε ομάδας βαθμίδας, ανάλογα με την αναπαράσταση στην οποία βρίσκονται. Για παράδειγμα, αν  $\phi_i, \chi_i$  είναι  $SU(2)$  διπλέτες, τα  $T^\alpha$  είναι προφανώς οι  $\tau^\alpha/2, \alpha = 1, 2, 3$ . Υπενθυμίζουμε ότι η υπερσυμμετρία απαιτεί όλα τα πεδία,  $\phi, \chi, F$ , να ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση της αντίστοιχης ομάδας βαθμίδας. Εννοείται ότι, όπως και στην περίπτωση του SM, κάποια πεδία αλληλεπιδρούν με πάνω από ένα πεδίο βαθμίδας, θα πρέπει όλες οι σταθερές σύζευξης να συμπεριληφθούν στις συναλλοιώτες παραγώγους. Είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν συναλλοιώτες παράγωγοι για τα  $F, F^\dagger$  καθώς η απλή παράγωγός τους δεν εμφανίζεται καν στη λαγκρατζιανή (2.702). Έπειτα, θα πρέπει στην (2.702) να εισαγάγουμε τη λαγκρατζιανή των gauge supermultiplets, (2.663), και τέλος να συμπεριλάβουμε και τους επιπλέον επανακανονικοποιήσιμους όρους που θα δίνουν τις «μικτές» αλληλεπιδράσεις, όπως αυτές της (2.669).

Πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε όλους αυτούς τους Lorentz και gauge αναλλοιώτους (επανακανονικοποιήσιμους) όρους ανάμεσα στα πεδία της ύλης με τα gaugino ( $\lambda^a$ ) και με τα ( $D^a$ ) πεδία, όπως κάναμε στην αβελιανή περίπτωση. Λόγω του ότι έχουμε ένα συγκεκριμένο σωματιδιακό φάσμα του SM, θα θεωρήσουμε μόνο περιπτώσεις στις οποίες τα πεδία ύλης είτε είναι singlets κάτω από την ομάδα βαθμίδας (για παράδειγμα τα  $R$ -μέρη των κουάρκ και λεπτονίων) είτε ανήκουν στη θεμελιώδη αναπαράσταση των ομάδων βαθμίδας (για παράδειγμα, οι τριπλέτες για την  $SU(3)$  και οι διπλέτες για την  $SU(2)$ ). Λόγω του ότι τα  $\lambda^a, D^a$  ανήκουν (όπως τα μποζονικά τους ταίρια) στην adjoint αναπαράσταση, διαπιστώνουμε ότι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε gauge αναλλοιώτους όρους ανάμεσα σε αυτά και τα πεδία ύλης που ανήκουν στην τετριμμένη (singlet) αναπαράσταση. Από τα πεδία, όμως, που ανήκουν στις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις, μπορούμε να φτιάξουμε διγραμμικούς συνδυασμούς από αυτά οι οποίοι να μετασχηματίζονται σύμφωνα με την adjoint αναπαράσταση<sup>32</sup> κι έπειτα να τα «κουμπώσουμε» με τα  $\lambda^a, D^a$ , ώστε να παίρνουμε τελικά gauge singlets, δηλαδή, gauge αναλλοιώτες<sup>33</sup> συζεύξεις. Προφανώς και πρέπει να κανονίσουμε οι συζεύξεις αυτές να είναι και Lorentz αναλλοιώτες.

<sup>32</sup>Ο τρόπος με τον οποίο χτίζουμε την adjoint αναπαράσταση μέσω των θεμελιωδών με τη βήθεια της τεχνολογίας των Young tableaux για την,  $SU(3)$  φαίνεται (A.155). Παρομοίως, το ίδιο ισχύει και για την  $SU(2)$ :  $\square \otimes \square = \square \oplus \square = 1 \oplus 3$ . Περισσότερες λεπτομέρειες στο παράρτημα.

<sup>33</sup>Για περισσότερες λεπτομέρειες: Gauge theories in particle physics Volume 2 Non-Abelian Gauge Theories: QCD and the Electroweak Theory Ian J R Aitchison, Anthony J G Hey, σελ.29

Επομένως, οι διγραμμικοί συνδυασμοί που μετασχηματίζονται σύμφωνα με την adjoint αναπαράσταση είναι:

$$\phi_i^\dagger T^a \phi_i, \quad \phi_i^\dagger T^a \chi_i, \quad \chi_i^\dagger T^a \phi_i, \quad \chi_i^\dagger T^a \chi_i, \quad (2.705)$$

όπου, για παράδειγμα στην  $SU(2)$ ,  $T^a = \tau^a/2$ . Οι διγραμμικές αυτές ποσότητες είναι το προφανές ανάλογο αυτών που βγάλαμε στην  $U(1)$  περίπτωση, πιο συγκεκριμένα, έχουν την ίδια διάσταση. Ακολουθώντας λοιπόν ακριβώς την ίδια τακτική, οι επιτρεπόμενοι επιπλέον όροι αλληλεπίδρασης είναι οι:

$$Ag \left[ (\phi_i^\dagger T^a \chi_i) \cdot \lambda^a + \lambda^{a\dagger} \cdot (\chi_i^\dagger T^a \phi_i) \right] + Bg(\phi_i^\dagger T^a \phi_i) D^a. \quad (2.706)$$

Οι συντελεστές  $A, B$  υπολογίζονται με την απαίτηση οι όροι αυτοί να είναι SUSY αναλλοίωτοι.

Οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί σε αυτήν τη μη αβελιανή περίπτωση είναι ουσιαστικά οι ίδιοι με αυτούς της αβελιανής περίπτωσης. Όπως στην  $U(1)$  περίπτωση, πρέπει να αλλάξουμε τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς (2.664)-(2.666), αντικαθιστώντας την παράμετρο  $\xi$  με την  $-\xi/\sqrt{2}$  και τροποποιώντας τη μεταβολή των πεδίων  $F_i, F_i^\dagger$  στις:

$$\begin{aligned} \delta_\xi F_i &= -\sqrt{2}g\lambda^{a\dagger} \cdot \xi^\dagger T^a \phi + (-i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi), \\ \delta_\xi F_i^\dagger &= -\sqrt{2}g\phi_i^\dagger T^a \xi \cdot \lambda^a + (i\partial_\mu \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi), \end{aligned} \quad (2.707)$$

όπου οι όροι στις παρενθέσεις είναι οι προηγούμενες μεταβολές των πεδίων  $F, F^\dagger$ . Οι συντελεστές  $A, B$  της (2.706) είναι και σε αυτήν την περίπτωση  $-\sqrt{2}, -1$ , αντίστοιχα. Η συνδυασμένη λαγκρατζιανή που αποκτούμε τελικά είναι η:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge}^{chiral} &= \overbrace{\mathcal{L}_{gauge}^{(2.663)}} + \overbrace{\mathcal{L}_{W-Z}^{covar}^{(2.702), \partial_\mu \rightarrow D_\mu}} + (2.706) \Big|_{B=-1}^{A=-\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu} + i\lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{1}{2} D^a D^a \\ &\quad + D_\mu \phi_i^\dagger + \chi_i^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_i + F_i^\dagger F_i + \left[ \frac{\partial W}{\partial \phi_i} F_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i \cdot \chi_j + h.c. \right] \\ &\quad - \sqrt{2}g \left[ (\phi_i^\dagger T^a \chi_i) \cdot \lambda + \lambda^{a\dagger} \cdot (\chi_i^\dagger T^a \phi_i) \right] - g(\phi_i^\dagger T^a \phi_i) D^a. \end{aligned} \quad (2.708)$$

Την προσοχή μας τραβά η τελευταία γραμμή της (2.708), για την περίπτωση που οι chiral multiplets,  $\phi_i, \chi_i$ , είναι οι δύο Higgs supermultiplets,  $(H_u, H_d)$ , οι οποίες περιέχουν πεδία Higgs και Higgsino. Όταν τα βαθμωτά Higgs  $H_u^0, H_d^0$  αποκτήσουν VEV, οι όροι αυτοί θα είναι διγραμμικοί ως προς τα Higgsino και gaugino πεδία, που σημαίνει ότι η ανάμιξη ανάμεσα στα πεδία αυτά θα είναι συνέπεια του αυθόρμητου σπασίματος της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας.

Η εξίσωση κίνησης του πεδίου  $D^a$  είναι:

$$D^a = g \sum_i (\phi_i^\dagger T^a \phi_i). \quad (2.709)$$

Όπως συνηθίζουμε, μέσω της τελευταίας εξίσωσης, θα εξαλείψουμε αυτά τα βοηθητικά πεδία από την λαγκρατζιανή. Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε την πλήρη μορφή του -εξαρτώμενου από τα βαθμωτά πεδία- δυναμικού (το  $V$  αν υποθέσουμε ότι η λαγκρατζιανή μας γράφεται στη γενική μορφή  $\mathcal{L} = T - V$ ):

$$V(\phi_i, \phi_i^\dagger) = |W_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_G \sum_a \sum_{i,j} g_G^2 (\phi_i^\dagger T_G^a \phi_i) (\phi_j^\dagger T_G^a \phi_j), \quad (2.710)$$

όπου στο άθροισμα πάνω στις ομάδες υπεισέρχεται το γεγονός ότι εμπλέκεται πάνω από μία ομάδα βαθμίδας, δεδομένου ότι η δομή του SM είναι  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , φυσικά, με διαφορετικές σταθερές αλληλεπίδρασης  $g_G$  και γεννήτορες  $T_G^a$ . Ο πρώτος όρος της (2.710) ονομάζεται  $F$ -όρος και καθορίζεται από τους φερμιονικούς όρους μάζας και τις Yukawa couplings, ενώ ο δεύτερος ονομάζεται  $D$ -όρος και καθορίζεται από τις αλληλεπιδράσεις βαθμίδας. Δεν υπάρχει χώρος για για κανένα άλλο βαθμωτό δυναμικό, ανεξάρτητο από τις παραμέτρους αυτές που να εμφανίζεται σε κάποιον άλλον όρο της λαγκρατζιανής. Πρέπει να τονίσουμε ότι το  $V$  είναι άθροισμα τετραγωνικών όρων, που σημαίνει ότι είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν. Θα δούμε αργότερα πως η μορφή του  $D$ -όρου θέτει ένα σημαντικό όριο στη μάζα του ελαφρύτερου Higgs μποζονίου στο MSSM.

## 2.8 Το MSSM

### 2.8.1 Εξειδίκευση του superpotential

Έχουμε λοιπόν πλέον εισαγάγει όλες τις αλληλεπιδράσεις που συμβαίνουν στο MSSM. Ενώ έχουμε ήδη αναφερθεί στο πως ανατίθενται τα σωματίδια του SM σε supermultiplets, θα τα ταξινομήσουμε για να γίνει πιο σαφής η ανάθεση αυτή.

Λόγω της ιδιότητας των SM φερμιονίων, οι αριστερόστροφες συνιστώσες τους να είναι doublets κάτω από την  $SU(2)_L$ , ενώ οι δεξιόστροφες συνιστώσες τους να είναι singlets κάτω από την  $SU(2)_L$ , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να τις μεταχειριστούμε ξεχωριστά και συνεπώς ο σπίνορας Dirac δεν ενδείκνυται. Επομένως, ο βασικός μας «θεμέλιος λίθος» είναι μία chiral supermultiplet, και μάλιστα, left. Ως τώρα έχουμε δουλέψει μόνο με left-chiral supermultiplets, και έτσι θα συνεχίσουμε. Η επιλογή αυτή είναι καλή για τα αριστερόστροφα σωματίδια  $e_L^-, \mu_L^-, u_L, d_L, \dots$ , ωστόσο, πώς θα συμπεριλάβουμε και τα δεξιόστροφα  $e_R^-, \mu_R^-, \dots$ ; Τα  $R$ -τύπου αυτά σωματίδια μπορούν να φιλοξενηθούν από τις left chiral supermultiplets, αρκεί να τα θεωρήσουμε σαν τα charge conjugate των  $L$ -τύπου αντισωματιδιακών πεδίων. Τα σωματίδια τα συμβολίζουμε επίσης με  $\chi, \psi$ , ώστε να φαίνεται αμέσως η χειραλικότητα

τους, δηλαδή,  $e_R^- \equiv \psi_{e^-}$ ,  $e_L^+ \equiv \chi_{e^+}$ . Δίνουμε ένα παράδειγμα για τον τρόπο χειρισμού των δεξιόστροφων σωματιδίων:

$$e_R^- \equiv \psi_{e^-} = (e_L^+)^c \equiv i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \quad (2.711)$$

Για να θυμηθούμε πως δουλεύει αυτή η σύμβαση, θεωρούμε έναν όρο μάζας Dirac του ηλεκτρονίου και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(e^-)} \Psi^{(e^-)} &\stackrel{(2.77)}{=} \psi_{e^-}^\dagger \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \psi_{e^-} \stackrel{(2.711)}{=} \left( i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \right)^\dagger \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \\ &= \chi_{e^+}^T (-i\sigma_2) \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger i\sigma_2 \chi_{e^+}^{\dagger T} \\ &= \chi_{e^+} \cdot \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \cdot \chi_{e^+}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.712)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω έκφραση περιέχει μόνο αριστερόστροφους σπινόρες Weyl, όπως και επιθυμούσαμε. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\bar{\Psi}^{(e^-)} \gamma_5 \Psi^{(e^-)} = -\chi_{e^+} \cdot \chi_{e^-} + \chi_{e^-}^\dagger \chi_{e^+}^\dagger. \quad (2.713)$$

Ακολουθούν λοιπόν δύο πίνακες στους οποίους κατατάσσουμε όλες τις chiral και gauge supermultiplets που απαρτίζουν το MSSM.

Names		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
squarks, quarks (x 3)	$Q$	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	$(u_L, d_L)$ or $(\chi_u, \chi_d)$	3	2	1/3
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_L = \tilde{u}_R^\dagger$	$\bar{u}_L = (\bar{u}_R)^c$ or $\chi_{\bar{u}} = \psi_u^c$	$\bar{3}$	1	-4/3
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_L = \tilde{d}_R^\dagger$	$\bar{d}_L = (\bar{d}_R)^c$ or $\chi_{\bar{d}} = \psi_d^c$	$\bar{3}$	1	2/3
sleptons, leptons (x 3)	$L$	$(\tilde{\nu}_{eL}, \tilde{e}_L)$	$(\nu_{eL}, e_L)$ or $(\chi_{\nu_e}, \chi_e)$	1	2	-1
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_L = \tilde{e}_R^\dagger$	$\bar{e}_L = (\bar{e}_R)^c$ or $\chi_{\bar{e}} = \psi_e^c$	1	1	2
Higgs, Higgsinos	$H_u$	$(H_u^+, H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	1	2	1
	$H_d$	$(H_d^0, H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	1	2	-1

Εικόνα 2.14: Chiral supermultiplet πεδία στο MSSM.



Names	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
gluinos, gluons	$\tilde{g}$	$g$	8	1	0
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$W^\pm, W^0$	1	3	0
bino, B boson	$\tilde{B}$	$B$	1	1	0

Εικόνα 2.15: Chiral supermultiplet πεδία στο MSSM.

Γνωρίζοντας λοιπόν τις ομάδες βαθμίδας, το σωματιδιακό φάσμα και τις ιδιότητες των μετασχηματισμών βαθμίδας, το μόνο που απομένει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε ένα οποιοδήποτε μοντέλο είναι να δώσουμε το superpotential. Το MSSM προσδιορίζεται από την επιλογή:

$$W = y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u - y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d - y_e^{ij} \bar{e}_i L_j \cdot H_d + \mu H_u \cdot H_d. \quad (2.714)$$

Τα πεδία που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση, (2.714), είναι τα chiral superfields που περιέχονται στην εικόνα (2.14). Σε αυτόν τον φορμαλισμό, ανακαλούμε ότι μόνο η  $F$ -συνιστώσα του  $W$ , (2.584), είναι αυτή που περιέχεται στη λαγκρατζιανή. Στο MSSM, περιγράφει όλες τις non-gauge αλληλεπιδράσεις, δηλαδή, τις αλληλεπιδράσεις που περιέχουν τις Higgs supermultiplets<sup>34</sup>. Μπορούμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε ότι το  $W$  είναι η ίδια συνάρτηση αλλά μόνο των βαθμωτών πεδίων για κάθε chiral supermultiplet (και όχι συνάρτηση των superfields). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παίρνουμε τους όρους αλληλεπιδράσης της λαγκρατζιανής μέσω της  $\mathcal{L}_{int}$ , (2.389), αντικαθιστώντας τα  $W_i$  και  $W_{ij}$  από τις (2.399) και (2.393) αντίστοιχα. Εν πάση περιπτώσει, τα  $y$  είναι  $3 \times 3$  πίνακες στο χώρο των γενιών και είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές του SM. Το « $\cdot$ » σύμβολο υπονοεί το  $SU(2)$  αναλλοίωτο γινόμενο δύο διπλέτων. Επίσης, οι δείκτες του χρώματος παραλείπονται, έτσι ώστε, για παράδειγμα, το  $\bar{u}_i Q_j$  να σημαίνει ουσιαστικά  $\bar{u}_{ai} Q_j^a$ , όπου  $a = 1, 2, 3$  και ο πάνω δείκτης είναι ένας δείκτης τριπλέτας, ενώ ο κάτω είναι ένας δείκτης αντιτριπλέτας. Οι συζεύξεις αυτές δίνουν μάζα στα φερμιόνια, όταν τα πεδία Higgs αναπτύσσουν VEV. Δεν υπάρχουν όροι μάζας στη λαγκρατζιανή καθώς αν υπήρχαν θα έσπαγαν την  $SU(2)_L$  συμμετρία βαθμίδας.

Συνοψίζοντας, με τίμημα την εισαγωγή μόνο μίας παραμέτρου,  $\mu$ , έχουμε μία υπερσυμμετρική επέκταση του SM. Η παράμετρος αυτή δεν είναι η ίδια με αυτήν που εμφανίζεται στην (2.2).

<sup>34</sup>Τα τετραγωνικά και κυβικά γινόμενα των  $\Phi$  φτιάχνονται έτσι ώστε να είναι singlets κάτω από τις ομάδες βαθμίδας, έτσι όλοι οι όροι του (2.714) είναι gauge αναλλοίωτοι.

Στο σημείο αυτό ανοίγουμε μία παρένθεση που έχει να κάνει με την ονομασία που υιοθετήθηκε για τα πεδία Higgs. Στο συμβατικό φορμαλισμό του SM, το πεδίο Higgs,  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ , δίνει μάζα στα  $d$ -τύπου κουάρκ, μέσω μίας Yukawa αλληλεπίδρασης της μορφής (πειτώντας τους δείκτες της γενιάς):

$$g_d \bar{q}_L \phi d_R + h.c., \quad (2.715)$$

όπου  $q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ . Στην περίπτωση αυτή το  $SU(2)$  εσωτερικό γινόμενο είναι απλά  $q_L^T \phi$ , το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς  $q_L' = U q_L, \phi' = U \phi$ . Τώρα  $q_L^\dagger \phi = u_L^\dagger \phi^+ + d_L^\dagger \phi^0$ , οπότε, όταν το  $\phi^0$  αναπτύσσει VEV, η (2.715) δίνει:

$$g_d \langle \phi^0 \rangle \bar{d}_L d_R + h.c., \quad (2.716)$$

η οποία είναι η  $d$ -κουάρκ μάζα. Γιατί όμως στο MSSM συμβολίζουμε το πεδίο Higgs με δείκτη  $u$ ,  $\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$  αντί με δείκτη  $d$ ; Ο λόγος είναι ότι στην υπερσυμμετρική εκδοχή της (2.714) το  $SU(2)$  εσωτερικό γινόμενο που εμπλέκει το  $H_u$  το παίρνουμε με το superfield  $Q$  το οποίο έχει ίδιους κβαντικούς αριθμούς με την κουάρκ διπλέτα  $q_L$  και όχι με την  $q_L^\dagger$  αντικουάρκ διπλέτα. Γράφοντας την (2.714) σε όρους των αντίστοιχων βαθμωτών πεδίων, ο πρώτος όρος της θα γίνει:

$$y_u^{ij} \tilde{u}_{Li} \tilde{u}_{Lj} \cdot H_u = y_u^{ij} \tilde{u}_{Li} \tilde{u}_{Lj} (i\tau_2) H_u = y_u^{ij} \tilde{u}_{Li} (\tilde{u}_{Lj} H_u^0 - \tilde{d}_{Lj} H_u^+). \quad (2.717)$$

Ο πρώτος όρος, μέσω των (2.389) και (2.393), θα δώσει έναν όρο στη λαγκραντζιανή:

$$-\frac{1}{2} y_u^{ij} (\chi_{\bar{u}_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}} + \chi_{u_{Li}} \cdot \chi_{\bar{u}_{Li}}) H_u^0 + h.c. = -y_u^{ij} (\chi_{\bar{u}_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}}) H_u^0 + h.c. \quad (2.718)$$

Όταν λοιπόν το  $H_u^0$  αναπτύξει VEV,  $v_u$ , ο παραπάνω όρος θα γίνει ένας όρος μάζας Dirac για το  $u$ -κουάρκ:

$$-(m_{uij} \chi_{\bar{u}_{Li}} \cdot \chi_{u_{Lj}} + h.c.), \quad (2.719)$$

όπου  $m_{uij} = v_u y_u^{ij}$ . Μετασχηματίζοντας στη βάση που διαγωνοποιεί τους πίνακες μαζών, οδηγεί στην ανάμιξη γεύσεων, ακριβώς όπως στο SM.

Κλείσαμε λοιπόν την παρένθεση και συνεχίζουμε. Οι φερμιονικές μάζες είναι προφανώς ανάλογες στην αντίστοιχη  $y$  παράμετρο, επομένως, από την στιγμή που τα top, bottom και tau είναι τα βαρύτερα φερμιόνια στο SM, είναι πολλές φορές χρήσιμο να θεωρήσουμε την προσέγγιση κατά την οποία οι μόνες μη μηδενικές  $y$  τιμές είναι:

$$y_u^{33} = y_t, \quad y_d^{33} = y_b, \quad y_e^{33} = y_\tau \quad (2.720)$$

Γράφοντας τώρα το  $W$  σε όρους των βαθμωτών πεδίων (δηλαδή των βαθμωτών υπερσυμμετρικών ταιριών από κάθε supermultiplet) και αμελώντας τον  $\mu$ -όρο, η (2.714) θα γίνει:

$$\begin{aligned}
W &= y_u^{ij} \bar{u}_i Q_j \cdot H_u - y_d^{ij} \bar{d}_i Q_j \cdot H_d - y_e^{ij} \bar{e}_i L_j \cdot H_d \\
&= y_u^{33} \tilde{u}_3 Q_3 \cdot H_u - y_d^{33} \tilde{d}_3 Q_3 \cdot H_d - y_e^{33} \tilde{e}_3 L_3 \cdot H_d \\
&= y_t \tilde{t}_L Q_3^T (i\sigma_2) H_u - y_b \tilde{b}_L Q_3^T (i\sigma_2) H_u - y_\tau \tilde{\tau}_L L_3^T (i\sigma_2) H_d \\
&= y_t \tilde{t}_L \begin{pmatrix} \tilde{t}_L & \tilde{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} - y_b \tilde{b}_L \begin{pmatrix} \tilde{t}_L & \tilde{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} \\
&\quad - y_\tau \tilde{\tau}_L \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{\tau L} & \tilde{\tau}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} \\
&= y_t \tilde{t}_L (\tilde{t}_L H_u^0 - \tilde{b}_L H_u^+) - y_b \tilde{b}_L (\tilde{t}_L H_d^- - \tilde{b}_L H_d^0) - y_\tau \tilde{\tau}_L (\tilde{\nu}_{\tau L} - \tilde{\tau}_L H_d^0).
\end{aligned} \tag{2.721}$$

Τα πλην στο  $W$  έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε οι όροι  $y_t \tilde{t}_L \tilde{t}_L$ ,  $y_b \tilde{b}_L \tilde{b}_L$ ,  $y_\tau \tilde{\tau}_L \tilde{\tau}_L$  να έχουν το σωστό πρόσημο για να παραγάγουν όρους μάζας για τα  $t, b, \tau$  σωματίδια όταν  $\langle H_u^0 \rangle \neq 0$  και  $\langle H_d^0 \rangle \neq 0$ .

Δεν ξεχνάμε ότι σε μία τέτοια υπερσυμμετρική θεωρία, πέρα από τις Yukawa συζεύξεις του SM (στις οποίες συζεύγνυνται πεδία Higgs με κουαρκ ή λεπτόνια), υπάρχουν επίσης παρόμοιες συζεύξεις στις οποίες τα Higgsinos μπλέκονται με squarks και κουάρκ ή με sleptons και λεπτόνια, με άλλα λόγια αλλάζουμε δύο συνηθισμένα σωματίδια με τα υπερσυμμετρικά τους ταιρία. Υπάρχουν επίσης αλληλεπιδράσεις βαθμωτών παδίων τέταρτης δύναμης, με σταθερά σύζευξης ανάλογη του  $y_t^2$  οι οποίες προκύπτουν από τον  $|W_i|^2$  όρο του βαθμωτού δυναμικού, (2.710). Επιπλέον, υπάρχουν κι άλλες συζεύξεις βαθμωτού πεδίου τέταρτης δύναμης, ανάλογες των τετραγώνων των  $g, g'$ , οι οποίες προέρχονται από τον  $D$ -όρο της (2.710). Οι συζεύξεις αυτές συμπεριλαμβάνουν και Higgs συζεύξεις τέταρτης τάξης σαν αυτές που υπάρχουν από το SM, όμως τώρα με συντελεστές οι οποίοι είναι καθορισμένοι σε όρους των παραμέτρων  $g, g'$  ήδη παρούσες στο μοντέλο. Αυτό έχει πολύ σημαντική φαινομενολογική σημασία την οποία θα συζητήσουμε στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Παρόλο που, όπως είπαμε, στο  $W$  της (2.714) δεν υπάρχει κάποιος συμβατικός όρος μάζας, υπάρχει ένας όρος ο οποίος είναι τετραγωνικός ως προς τα πεδία, ο επονομαζόμενος  $\mu$ -όρος, ο οποίος εκφράζει την  $SU(2)$ -αναλλοίωτη σύζευξη των δύο διαφορετικών Higgs superfield doublets:

$$\begin{aligned}
W(\mu - term) &= \mu H_u \cdot H_d = \mu H_u^T (i\sigma_2) H_d = \mu \begin{pmatrix} H_u^+ & H_u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^- \\ H_d^0 \end{pmatrix} \\
&= \mu (H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) \equiv \mu (H_{u1} H_{d2} - H_{u2} H_{d1}), \tag{2.722}
\end{aligned}$$

όπου οι δείκτες 1, 2 δηλώνουν προφανώς τη συνιστώσα του ισοσπίνωρα. Αυτή είναι η μόνη διγραμμική σύζευξη των πεδίων Higgs που επιτρέπεται στο  $W$

επειδή οι υπόλοιποι πιθανοί διγραμμικοί συνδυασμοί  $H_u^\dagger \cdot H_u$  και  $H_d^\dagger \cdot H_d$  εμπλέκουν ερμιτιανά συζυγή πεδία, τα οποία θα παραβίαζαν την υπερσυμμετρία. Ως συνήθως, παίρνουμε την  $F$ -συνιστώσα της (2.722) (δηλαδή του γινομένου δύο superfield, βλέπε (2.574)), η οποία είναι:

$$\begin{aligned} \mu H_u \cdot H_d &= \left[ \begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc} H_u^+ & H_u^0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_d^0 \\ F_d^- \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{cc} H_d^0 & H_d^- \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_u^+ \\ F_u^0 \end{pmatrix} \\ & - \left( \begin{array}{cc} \tilde{H}_u^+ & \tilde{H}_u^0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix} \end{aligned} \right] \\ &= \mu \left[ (H_u^+ F_d^- - H_u^0 F_d^0 + H_d^0 F_u^0 - H_d^- F_u^+) - (\tilde{H}_u^+ \cdot \tilde{H}_d^- - \tilde{H}_u^0 \cdot \tilde{H}_d^0) \right], \end{aligned} \quad (2.723)$$

στην οποία πρέπει να προσθέσουμε και την ερμιτιανή συζυγή της. Ο δεύτερος όρος θα συνεισφέρει στους (μη διαγώνιους) όρους μάζας του Higgsino. Ο πρώτος όρος είναι της μορφής  $W_i F_i$  της  $\mathcal{L}_{int}$ , (2.389), κι επομένως (όπως έχουμε δει από τις εξισώσεις κίνησης των  $F_i, F_i^\dagger$ , ισχύει ότι  $F_i = -W_i^\dagger$  και  $F_i^\dagger = -W_i$ ) η έκφραση για τον  $\mu$ -όρο, (2.723), θα γίνει:

$$\mu H_u \cdot H_d = |\mu|^2 (|H_u|^2 + |H_d^-|^2 + |H_u^0|^2 + |H_d^0|^2). \quad (2.724)$$

Παρατηρούμε ωστόσο ότι όλοι οι όροι της (2.724) έχουν θετικό πρόσημο, κατάλληλο για έναν καθιερωμένο μποζονικό όρο μάζας,  $m^2 \phi^\dagger \phi$ , όμως ακατάλληλο για το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας μέσω του Higgs μηχανισμού, όπου το πρόσημο πρέπει να είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι η SUSY-αναλλοίωτηλαγκρατζιανή δεν μπορεί να φιλοξενήσει το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας.

Φυσικά, η υπερσυμμετρία -στο πλαίσιο του MSSM που δουλεύουμε- δεν μπορεί να είναι ακριβής (δηλαδή, δεν είναι συμμετρία του μοντέλου που παραμένει άσπαστη) μιας και δεν έχουν παρατηρηθεί ακόμα τα υπερσυμμετρικά ταίρια των σωματιδίων του SM. Αν και θα συζητήσουμε εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, είναι ήδη προφανές ότι είναι απαραίτητη η εισαγωγή όρων που να σπάνε την υπερσυμμετρία στη λαγκρατζιανή, έτσι ώστε να επιτραπεί το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Το γεγονός ότι μέσω του ενός σπασίματος επάγεται το άλλο προτείνει ότι πρέπει να υπάρχει ένας κοινός μηχανισμός που να είναι υπεύθυνος για τα δύο σπασίματα συμμετρίας.

Πριν όμως περάσουμε στο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, είναι λογικό να δούμε πως στο MSSM περιέχονται οι SM αλληλεπιδράσεις.

## 2.8.2 Οι SM αλληλεπιδράσεις στο MSSM

Αν και έχουμε φτάσει αρκετά πέρα από το MSSM, πριν πάμε παρακάτω πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις του SM αναπαράγονται εντός του πλαισίου του MSSM.

Ξεκινάμε λοιπόν με τις QCD αλληλεπιδράσεις των κουάρκ και γκλουονίων του SM . Πρώτα απ' όλα, οι 3– και 4–αλληλεπιδράσεις των γκλουονίων εμπεριέχονται στον τανυστή πεδίου δύναμης της  $SU(3)_c$ ,  $-\frac{1}{4}F_{a\mu\nu}F^{a\mu\nu}$ . Έπειτα θεωρούμε ότι μία  $SU(3)_c$  τριπλέτα από  $u$ –κουάρκ περιγράφεται από έναν σπίνορα Dirac:

$$\Psi_u = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \chi_u \end{pmatrix}. \quad (2.725)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος, (2.704), θα είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}ig_s\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu, \quad (2.726)$$

όπου  $A_\mu$  είναι τα 8 γκλουονικά πεδία. Έτσι ο gauge-κινητικός όρος για το πεδία  $\chi_u$  δίνει την αλληλεπίδραση:

$$-\frac{1}{2}g_s\chi_u^\dagger\bar{\sigma}^\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_u. \quad (2.727)$$

Στη σύζευξη αυτή, οι 8,  $3 \times 3$ , πίνακες  $\boldsymbol{\lambda}$ , δρουν πάνω στους δείκτες χρώματος του  $\chi_u$ , ενώ οι  $2 \times 2$   $\bar{\sigma}^\mu$  πίνακες δρουν πάνω στους σπινωριακούς δείκτες του. Όσον αφορά το  $R$ –μέρος του σπίνορα Dirac, το γράφουμε σαν το συζυγές φορτίο του  $L$ –τύπου σπίνορα, του  $\bar{u}$ :

$$\psi_u = \chi_{\bar{u}}^c = i\sigma_2\chi_{\bar{u}}^*. \quad (2.728)$$

Πρέπει λοιπόν τώρα να βρούμε τον όρο αλληλεπίδρασης για το πεδίο  $\chi_{\bar{u}}$ . Λόγω του ότι τα αντι-κουάρκ ανήκουν στη  $\bar{3}$  αναπαράσταση της  $SU(3)$ , οι πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες σε αυτήν θα είναι  $-\boldsymbol{\lambda}^*/2$ . Επομένως, ο QCD όρος αλληλεπίδρασης για την left chiral multiplet που περιέχει το  $\chi_{\bar{u}}$  θα είναι:

$$-\frac{1}{2}g_s\chi_{\bar{u}}^\dagger\bar{\sigma}^\mu(-\boldsymbol{\lambda}^*) \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_{\bar{u}}. \quad (2.729)$$

Τη σχέση αυτή θα την ξαναγράψουμε σε όρους του πεδίου  $\chi_{\bar{u}}$ , το οποίο εμφανίζεται στην  $\Psi_u$ :

$$-\frac{1}{2}g_s(-i\sigma_2\chi_{\bar{u}}^{c*})^\dagger(-\boldsymbol{\lambda}^*) \cdot \mathbf{A}_\mu(-i\sigma_2\chi_{\bar{u}}^{c*}) = \frac{1}{2}g_s\chi_{\bar{u}}^{cT}\sigma_2\bar{\sigma}^\mu\sigma_2\boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_{\bar{u}}^{c*}. \quad (2.730)$$

Παίρνουμε τον ανάστροφο του παραπάνω όρου (αλλάζοντας πρόσημο λόγω φερμιονικής εναλλαγής) και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\sigma_2\sigma^\mu\sigma_2 = \sigma^{\mu T}$ , αυτός γίνεται:

$$-\frac{1}{2}g_s\chi_{\bar{u}}^{c\dagger}\sigma^\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_{\bar{u}}^c. \quad (2.731)$$

Από την άλλη μεριά, η QCD αλληλεπίδραση για το Dirac πεδίο,  $\Psi_u = \begin{pmatrix} \chi_{\bar{u}}^c \\ \chi_u \end{pmatrix}$ , θα είναι:

$$-\frac{1}{2}g_s\bar{\Psi}_u\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu\Psi_u = -\frac{1}{2}g_s \left[ \chi_{\bar{u}}^{c\dagger}\sigma^\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_{\bar{u}}^c + \chi_u^\dagger\bar{\sigma}^\mu\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu\chi_u \right]. \quad (2.732)$$

Παρατηρούμε ότι από το άθροισμα των (2.727) και (2.731) ανακτούμε το αποτέλεσμα της (2.732).

Είναι χρήσιμο να δούμε τα ανάλογα βήματα στο Majorana φορμαλισμό. Όπως έχουμε ξαναδεί, χρειάζονται δύο Majorana πεδία ώστε να ισοφαρίσουμε τους βαθμούς ελευθερίας του σπίνορα  $\Psi_u$ :

$$\Psi_M^{\chi_u} = \begin{pmatrix} \chi_u^c \\ \chi_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi_u^* \\ \chi_u \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \Psi_M^{\psi_u} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_u^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u \\ -i\sigma_2 \psi_u^* \end{pmatrix}, \quad (2.733)$$

έτσι ώστε να αναπαράγεται ο  $\Psi_u$  μέσω της σχέσης:

$$\Psi_u = P_R \psi_M^{\psi_u} + P_L \psi_M^{\chi_u}. \quad (2.734)$$

Όπως έχουμε αναφέρει ήδη, (2.186), οι κινητικοί όροι Weyl,  $\chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi$ , είναι ισοδύναμοι με την Majorana έκφραση  $\frac{1}{2} \Psi_M^\chi i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\chi$  και παρομοίως για τον  $R$ -τύπου Weyl σπίνορα  $\psi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi$ , η αντίστοιχη έκφραση Majorana θα είναι  $\frac{1}{2} \Psi_M^\psi i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M^\psi$ . Επομένως, οι QCD αλληλεπιδράσεις για τα  $\Psi_M^{\chi_u}$  και  $\Psi_M^{\psi_u}$  θα είναι:

$$\frac{1}{2} \bar{\Psi}_M^{\chi_u} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_M^{\chi_u} + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M^{\psi_u} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_M^{\psi_u}. \quad (2.735)$$

Αξιολογώντας την εξίσωση αυτή, πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι παρ' όλο που το  $R$ -μέρος της  $\Psi_M^{\psi_u}$  και το  $L$ -μέρος της  $\Psi_M^{\chi_u}$  μετασχηματίζονται σύμφωνα με την 3 αναπαράσταση της  $SU(3)$ , το  $L$ -μέρος της  $\Psi_M^{\psi_u}$  και το  $R$ -μέρος της  $\Psi_M^{\chi_u}$  μετασχηματίζονται κάτω από την  $\bar{3}$  της  $SU(3)$ . Επομένως, το κομμάτι της αλληλεπίδρασης του πρώτου όρου της (2.735) θα είναι:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \bar{\Psi}_M^{\chi_u} \gamma^\mu [\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu P_L - \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu P_R] \Psi_M^{\chi_u} \\ &= -\frac{1}{4} \Psi_M^{\chi_u \dagger} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \left[ \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi_M^{\chi_u} \\ &= -\frac{1}{4} \Psi_M^{\chi_u \dagger} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \end{pmatrix} \Psi_M^{\chi_u} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (i\sigma_2 \chi_u^*)^\dagger & \chi_u^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma^\mu \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_2 \chi_u^* \\ \chi_u \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \left( \chi_u^T (-i\sigma_2) \cdot (-\sigma^\mu \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu) i\sigma_2 \chi_u^* + \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \chi_u^T (-i\sigma_2) \sigma^\mu (-i\sigma_2) \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u^* + \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( -\chi_u^T \bar{\sigma}^{\mu T} \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u^* + \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( (-\chi_u^T \bar{\sigma}^{\mu T} \boldsymbol{\lambda}^* \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u^*)^T + \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u + \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u \right) \\ &= -\frac{1}{2} \chi_u^\dagger \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}_\mu \chi_u. \quad (2.736) \end{aligned}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ίδιο αποτέλεσμα που είχαμε καταλήξει δουλεύοντας με τους σπίνορες Weyl, (2.727). Το αντίστοιχο αποτέλεσμα παίρνουμε και στην περίπτωση του δεύτερου όρου της (2.735) και αν έπειτα προσθέσουμε τα δύο αποτελέσματα αυτά αναπαράγεται προφανώς το αποτέλεσμα που παίρνουμε δουλεύοντας με τον σπίνορα Dirac, (2.732).

Οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις του SM προκύπτουν κατά παρόμοιο τρόπο. Κατ' αρχήν, οι τριγραμμικές και τετραγραμμικές ιδιο-αλληλεπιδράσεις των ασθενών μποζονίων βαθμίδας περιέχονται στους αντίστοιχους  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  τανυστές δύναμης πεδίου.

Ας θεωρήσουμε τώρα την αλληλεπίδραση μίας  $e$ -τύπου διπλέτας  $\begin{pmatrix} \chi_{\nu_e} \\ \chi_e \end{pmatrix}$  με τα  $SU(2)_L$  πεδία βαθμίδας  $\mathbf{W}^\mu$ , η οποία δίνεται:

$$-\frac{1}{2}g \begin{pmatrix} \chi_{\nu_e}^\dagger & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \begin{pmatrix} \chi_{\nu_e} \\ \chi_e \end{pmatrix}, \quad (2.737)$$

όπου οι  $\boldsymbol{\tau}$  δρουν πάνω στον διδιάστατο χώρο των  $\nu_e - e$  και ο  $\bar{\sigma}^\mu$  δρα πάνω στις σπινωριακές συνιστώσες των  $\chi_{\nu_e}, \chi_e$ .

Σε όρους σπίνορα Dirac, η αλληλεπίδραση είναι:

$$-\frac{1}{2}g \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{\nu_e L} & \bar{\Psi}_{eL} \end{pmatrix} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_e L} \\ \Psi_{eL} \end{pmatrix}, \quad (2.738)$$

όπου  $\Psi_{eL} = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\Psi_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_e \end{pmatrix}$  και παρομοίως και για τον  $\Psi_{\nu_e}$ . Για δύο οποιουσδήποτε σπίνορες Dirac,  $\Psi_1, \Psi_2$ , ισχύει:

$$\bar{\Psi}_{2L} \gamma^\mu \Psi_{1L} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \chi_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi_1. \quad (2.739)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η (2.737) είναι η ίδια με την (2.738).

Η  $U(1)_Y$  συναλλοιώτη παράγωγος παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \partial_\mu + \frac{1}{2}ig'Y_{Lf}B_\mu, & \text{Για τις } SU(2)\text{-L διπλέτες.} \\ \partial_\mu + \frac{1}{2}ig'Y_{Rf}B_\mu, & \text{Για τις } SU(2)\text{-R διπλέτες.} \end{cases}, \quad (2.740)$$

όπου, για παράδειγμα,  $Y_{Le} = -1, Y_{Re} = -2$ . Για τη διπλέτα  $\begin{pmatrix} \chi_{\nu_e} \\ \chi_e \end{pmatrix}$ , η  $U(1)_Y$  αλληλεπίδραση θα είναι:

$$-\frac{1}{2}g'Y_{Le} \begin{pmatrix} \chi_{\nu_e}^\dagger & \chi_e^\dagger \end{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu B_\mu \begin{pmatrix} \chi_{\nu_e} \\ \chi_e \end{pmatrix}, \quad (2.741)$$

η οποία είναι η ίδια με την 4-συνιστωσών εκδοχή:

$$-\frac{1}{2}g'Y_{Le} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{\nu_e L} & \bar{\Psi}_{eL} \end{pmatrix} \gamma^\mu B_\mu \begin{pmatrix} \Psi_{\nu_e L} \\ \Psi_{eL} \end{pmatrix}. \quad (2.742)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη singlet  $\psi_e$  με την  $\chi_e^c$ , όπως συνηθίζουμε, τότε το υπερφορτίο θα είναι  $Y_{\bar{e}} = -Y_{Re}$ . Επομένως, η  $U(1)_Y$  αλληλεπίδραση για το  $\chi_{\bar{e}}$  θα είναι:

$$-\frac{1}{2}g'(-Y_{Re})\chi_{\bar{e}}^\dagger\sigma^\mu B_\mu\chi_{\bar{e}}. \quad (2.743)$$

Εκμεταλλευμένοι πάλι τη συζυγία φορτίου, η τελευταία έκφραση γράφεται:

$$-\frac{1}{2}g'Y_{Re}\chi_{\bar{e}}^c\sigma^\mu B_\mu\chi_{\bar{e}}^c, \quad (2.744)$$

η οποία είναι η σωστή αλληλεπίδραση για το δεξιόστροφο ηλεκτρονικό πεδίο.

Στον τομέα των κουάρκ, οι αλληλεπιδράσεις περιπλέκονται λόγω της ανάμιξης γενιών, όμως δεν παρουσιάζεται κάτι διαφορετικό από ότι παίρνουμε από το SM. Τα παραδείγματα των αλληλεπιδράσεων που θεωρήσαμε παραπάνω είναι αρκετά για τον σκοπό μας.

### 2.8.3 R-parity

Όπως δηλώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, η ελάχιστη υπερσυμμετρική εκδοχή του SM καθορίζεται πλήρως από την επιλογή του superpotential, (2.714). Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν κι άλλοι επανακανονικοποιήσιμοι όροι που είναι gauge- αναλλοίωτοι αλλά ωστόσο δεν συμπεριλήφθηκαν στο superpotential της (2.714). Τέτοιοι είναι οι:

$$W_{\Delta L=1} = \lambda_e^{ijk} L_i \cdot L_j \bar{e}_k + \lambda_L^{ijk} L_i \cdot Q_j \bar{d}_k + \mu_L^i L_i \cdot H_u, \quad (2.745)$$

$$W_{\Delta B=1} = \lambda_B^{ijk} \bar{u}_i \bar{d}_j \bar{d}_k. \quad (2.746)$$

Το superfield  $Q_i$  φέρει βαρυονικό αριθμό  $B = 1/3$ , ενώ τα  $\bar{u}, \bar{d}$  φέρουν  $B = -1/3$ . Το  $L_i$  φέρει λεπτονικό αριθμό  $L = 1$ , ενώ το  $\bar{e}$  φέρει  $L = -1$ . Επομένως, διαπιστώνουμε ότι οι όροι της (2.745) παραβιάζουν τη διατήρηση λεπτονικού αριθμού κατά ένα, ενώ οι όροι της (2.746) παραβιάζουν τη διατήρηση βαρυονικού αριθμού πάλι κατά ένα. Όμως, αλληλεπιδράσεις που να παραβιάζουν τις δύο αυτές αρχές δεν έχουν παρατηρηθεί. Αν οι στεθερές σύζευξης  $\lambda_L, \lambda_B$  ήταν μη μηδενικές, τότε θα επιτρεπόταν η διάσπαση του πρωτονίου. Στο SM δεν υπάρχουν επανακανονικοποιήσιμοι όροι που να παραβιάζουν τις παραπάνω αρχές (ένα ωραίο μπόνους) και γι αυτό δεν προβλέπεται η διάσπαση του πρωτονίου. Ένας τρόπος να απαλλαγούμε από τους παραπάνω όρους που παραβιάζουν τις  $B, L$  θα ήταν απλά να επιβάλλουμε τις συμμετρίες αυτές στη λαγκρατζιανή μας. Όμως οι δύο αυτές αρχές είναι γνωστό ότι παραβιάζονται από μη διαταρακτικές ηλεκτρασθενείς επιδράσεις (οι οποίες είναι αμελητέες στις συνηθισμένες ενεργειακές κλίμακες αλλά μπορεί να σχετίζονται με τη βρεφική φάση του σύμπαντος) επομένως δεν μπορούμε να τις θεωρήσουμε σαν θεμελιώδεις και απλώς να τις επιβάλλουμε. Πρέπει λοιπόν να βρούμε μία συμμετρία που να απαγορεύει τους όρους των (2.745), (2.746), αλλά ταυτόχρονα να επιτρέπει όλες τις αλληλεπιδράσεις του MSSM.



Η συμμετρία αυτή είναι η  $R$ -parity, η οποία διατηρείται πολλαπλασιαστικά και ορίζεται σαν:

$$(-1)^{3B+L+2s}, \quad (2.747)$$

όπου  $s$  είναι το σπιν του σωματιδίου. Αμέσως, φαίνεται ότι  $R = +1$  για όλα τα συμβατικά πεδία ύλης και  $R = -1$  για όλα τα βαθμωτά υπερσυμμετρικά ταίρια τους. Αφού λοιπόν, οι όροι των (2.745), (2.746) παραβιάζουν τους  $L, B$  κατά ένα, ενώ το σπιν διατηρείται σε όλες τις αλληλεπιδράσεις, συμπεραίνουμε ότι σε καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν διατηρείται η  $R$ -parity. Αντιθέτως, σε όλους τους όρους της (2.714), η  $R$ -parity διατηρείται, αφού περιέχουν περιττό αριθμό από  $R = -1$  βαθμωτά υπερσυμμετρικά σωματίδια. Συνέπειες της διατήρησης αυτή είναι:

- Το ελαφρύτερο βαθμωτό υπερσυμμετρικό σωματίδιο LSP είναι απολύτως σταθερό και αν είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, τότε είναι ένας καλός υποψήφιος για τη μη-βαρυονική σκοτεινή ύλη.
- Τα παράγωγα των διασπάσεων των άλλων βαθμωτών υπερσυμμετρικών σωματιδίων πρέπει να είναι σε περιττό αριθμό,
- Σε πειράματα επιταχυντών, τα βαθμωτά υπερσυμμετρικά σωματίδια μπορούν να παράγονται μόνο κατά ζεύγη.

Όπως είπαμε και νωρίτερα, κρίνουμε φαινομενολογικά ότι η υπερσυμμετρία δε θα μπορούσε να είναι μία ακριβής συμμετρία καθώς δεν έχουμε παρατηρήσει κανένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο. Περνάμε λοιπόν τώρα να δούμε με ποιον τρόπο συμβαίνει το σπάσιμο αυτό.

## 2.9 Το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας

Εφόσον η υπερσυμμετρία είναι μία σπασμένη συμμετρία των γνωστών ήδη σωματιδίων, αυτό σημαίνει ότι το σπάσιμο της συμμετρίας αυτής πρέπει να αντιμετωπιστεί πριν τη φαινομενολογική εφαρμογή του MSSM. Γενικά γνωρίζουμε δύο τρόπους με τους οποίους μπορεί να σπάσει μία συμμετρία. Ο πρώτος είναι με την απευθείας εισαγωγή όρων που σπάνε τη συμμετρία στη λαγκρατζιανή και ο δεύτερος είναι με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, σαν αυτό που συμβαίνει στο σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας μέσω του μηχανισμού Higgs. Στην περίπτωση του ηλεκτρασθενούς σπασίματος, η απαίτηση ότι οι όροι της λαγκρατζιανής πρέπει να είναι επανακανονικοποιήσιμοι, απαγορεύει την απευθείας εισαγωγή όρων μάζας που θα έσπαγαν την ηλεκτρασθενή συμμετρία. Για το λόγο αυτό υπάρχει προτίμηση στο σπάσιμο της συμμετρίας αυτής μέσω του μηχανισμού Higgs. Για την περίπτωση της υπερσυμμετρίας, αρχικά θα εξετάσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας και μετά θα δούμε πώς σπάει η υπερσυμμετρία και με την εισαγωγή gauge- αναλλοίωτων και υπερσυμμετρικά επανακανονικοποιήσιμων όρων στη

λαγκρατζιανή οι οποίοι επίσης περιορίζονται από την απαίτηση να μην επανεισάγουν τετραγωνικές αποκλίσεις που θα χάλαγαν τη λύση που προσφέρει η υπερσυμμετρία στο πρόβλημα της λεπτής ρύθμισης του SM .

### 2.9.1 Αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας

Η θεμελιώδης απαίτηση για μία συμμετρία σε μία θεωρία πεδίου να μπορεί σπάσει αυθόρμητα είναι ένα πεδίο, του οποίου η μεταβολή κάτω από αυτήν τη συμμετρία δεν είναι μηδέν, να μπορεί να αποκτήσει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή του κενού. Δηλαδή, αν το πεδίο αυτό συμβολίζεται σαν  $\phi'$ , τότε η απαίτησή μας είναι:

$$\langle 0|\phi'(x)|0\rangle \neq 0. \quad (2.748)$$

Αφού το  $\phi'$  δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς της συμμετρίας, αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ανήκει σε κάποια multiplet μαζί με άλλα πεδία και ότι θα πρέπει να μπορεί να εκφραστεί σαν (βλέπε (2.272)):

$$\phi'(x) = i[Q, \phi(x)], \quad (2.749)$$

όπου  $Q$  είναι ένας ερμιτιανός γεννήτορας της ομάδας συμμετρίας και  $\phi(x)$  ένα κατάλληλο πεδίο που ανήκει στην ίδια multiplet. Με άλλα λόγια, με έναν μετασχηματισμό της συμμετρίας, η μία κατάσταση περιστρέφεται στην άλλη. Επομένως, για την παραπάνω αναμενόμενη τιμή του κενού του  $\phi'(x)$ , έχουμε:

$$\langle 0|\phi'|0\rangle = \langle 0|i[Q, \phi]|0\rangle = \langle 0|iQ\phi - i\phi Q|0\rangle \neq 0 \quad (2.750)$$

Γενικά, για τη θεμελιώδη κατάσταση  $|0\rangle$  θεωρούμε ότι είναι τέτοια ώστε  $Q|0\rangle = 0$ , αφού αυτό υπονοεί ότι η  $|0\rangle$  είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς που παράγει ο  $Q$ . Όμως αν θεωρήσουμε  $Q|0\rangle = 0$ , αυτομάτως παραβιάζουμε την απαίτηση (2.750) κι επομένως, για το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας πρέπει να θεωρήσουμε ότι  $Q|0\rangle \neq 0$ . Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η δράση του τελεστή  $Q$  στο κενό δίνει, όχι μηδέν, αλλά ένα άλλο πιθανό κενό  $|0'\rangle$ . Επομένως, με αυτόν τον τρόπο, φυσικά, προτείνεται η ιδέα των εκφυλισμένων κενών (εκφυλισμένα αφού  $[Q, H] = 0$ ). Όμως, η παραπάνω υπόθεση δεν είναι μαθηματικά συνεπής. Για να καταλάβουμε τι συμβαίνει με το κενό με μαθηματική αυστηρότητα θα πρέπει να επικαλεστούμε το θεώρημα των Fabri, Picasso, οι οποίοι απέδειξαν ότι για το κενό ισχύουν ένα από τα δύο παρακάτω:

- (α) Είτε η  $Q|0\rangle = 0$  είναι μία κατάσταση του τελεστή  $Q$ , με μηδενική ιδιοτιμή, έτσι ώστε η κατάσταση  $|0\rangle$  είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό της ομάδας συμμετρίας,
- (β) Είτε η  $Q|0\rangle$  κατάσταση δεν υπάρχει στον χώρο αυτόν, ή αλλιώς, η νόρμα της είναι άπειρη.

Επομένως, στην περίπτωση μας, αποκλείσαμε την πρώτη περίπτωση οπότε ουσιαστικά βρισκόμαστε στη δεύτερη (πιο αυστηρή μαθηματικά δήλωση από αυτή της ύπαρξης ενός δεύτερου κενού).

Συγκεκριμένα στην περίπτωση μας, στην υπερσυμμετρία, υπάρχει μία σημαντική σύνδεση των γεννητόρων της  $Q, Q^\dagger$  με τη χαμιλτονιανή. Από την αντιμεταθετική σχέση της υπερσυμμετρικής άλγεβρας (2.307), έχουμε:

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = \sigma_{ab}^\mu P_\mu \implies \begin{cases} Q_1 Q_1^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 = (\sigma^\mu)_{11} P^\mu = P_0 + P_3 \\ Q_2 Q_2^\dagger + Q_2^\dagger Q_2 = (\sigma^\mu)_{22} P^\mu = P_0 - P_3 \end{cases} \quad (2.751)$$

Που σημαίνει ότι:

$$H \equiv P_0 = \frac{1}{2} (Q_1 Q_1^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 + Q_2 Q_2^\dagger + Q_2^\dagger Q_2), \quad (2.752)$$

όπου  $H$  είναι προφανώς η χαμιλτονιανή της θεωρίας. Αν πάρουμε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή της χαμιλτονιανής, όπως αυτή ορίστηκε ακριβώς παραπάνω, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2} (\langle 0|Q_1 Q_1^\dagger|0\rangle + \langle 0|Q_1^\dagger Q_1|0\rangle + \langle 0|Q_2 Q_2^\dagger|0\rangle + \langle 0|Q_2^\dagger Q_2|0\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|(Q_1^\dagger|0\rangle)|^2 + |(Q_1|0\rangle)|^2 + |(Q_2^\dagger|0\rangle)|^2 + |(Q_2|0\rangle)|^2) \end{aligned} \quad (2.753)$$

Αν θεωρούσαμε SUSY-αναλλοίωτη θεωρία, τότε οι γεννήτορες της  $Q, Q^\dagger$  θα έπρεπε να έχουν μηδενική ιδιοτιμή δρώντας πάνω στην κατάσταση  $|0\rangle$  και θα καταλήγαμε ότι η ενέργεια του κενού (χαμηλότερης κατάστασης) θα ήταν μηδέν.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι κινητικοί όροι της χαμιλτονιανής πυκνότητας δε συνεισφέρουν στην ενέργεια του κενού. Από την άλλη μεριά, η SUSY-αναλλοίωτη πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας δίνεται από την (2.710), η οποία θα μπορούσε να ήταν σε μορφή στην οποία να μην έχουμε απαλείψει τα βοηθητικά πεδία. Όπως ήδη έχουμε τονίσει (κάτω από την (2.710)), η  $V$  είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδέν και καταλαβαίνουμε πλέον ότι η περίπτωση όπου  $V = 0$  αντιστοιχεί στην SUSY-αναλλοίωτη περίπτωση.

Για να μπορεί λοιπόν να σπάσει αυθόρμητα η υπερσυμμετρία, θα πρέπει η  $V$  να μην έχει SUSY-αναλλοίωτο ελάχιστο, αφού, αν είχε, το σύστημα θα είχε αναγκαστικά μηδενική ενέργεια (αφού αυτό είναι το ελάχιστο της  $V$ ), συνεπώς το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, απλά δε θα συνέβαινε. Στην περίπτωση στην οποία το αυθόρμητο σπάσιμο συμβαίνει όταν κάποιο πεδίο αναπτύσσει μη μηδενικό VEV, η ελάχιστη τιμή της  $V$  θα είναι μία μη μηδενική σταθερά και η ενέργεια του κενού θα αποκλίνει. Αυτή η περίπτωση είναι συνεπής με την (2.753) και τη δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος Fabri-Picasso, δηλαδή της άπειρης νόρμας της κατάστασης  $Q_a|0\rangle$ .

Όμως, στην περίπτωση της υπερσυμμετρίας, τι είδους πεδία  $\phi'$  μπορούν να έχουν μη μηδενική τιμή; Επιστρέφοντας στην (2.749), με  $Q$  πλέον να

είναι ο υπερσυμμετρικός γεννήτορας, θεωρούμε όλες τις πιθανές μεταθετικές σχέσεις, ξεκινώντας από αυτές της chiral supermultiplet. Οι μεταθετικές σχέσεις των γεννητόρων με τα πεδία καθορίζεται από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς των πεδίων, οι οποίοι είναι:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \phi &= i[\xi \cdot Q, \phi] = \xi \cdot \chi, \\ \delta_\xi \chi &= i[\xi \cdot Q, \chi] = -i\sigma^\mu i\sigma_2 \xi^* \partial_\mu \phi + \xi, F \\ \delta_\xi F &= i[\xi \cdot Q, F] = -i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi.\end{aligned}\quad (2.754)$$

Η Lorentz αναλλοιώτητα υπονοεί ότι μόνο βαθμωτά πεδία μπορούν να αναπτύξουν VEV, αφού μόνο τέτοια VEVs είναι αναλλοίωτα κάτω από τους LT. Επομένως, παρατηρώντας τα δεξιά μέλη των παραπάνω μετασχηματισμών, καταλαβαίνουμε ότι η μόνη πιθανότητα για ένα SUSY-breaking VEV είναι:

$$\langle 0|F|0\rangle \neq 0. \quad (2.755)$$

Αυτό το είδος σπασίματος της συμμετρίας ονομάζεται  $F$ -τύπου, αφού είναι το βοηθητικό πεδίο  $F$  αυτό που αναπτύσσει VEV.

Ας θυμηθούμε τώρα ότι στο Wess-Zumino μοντέλο με superpotential της μορφής

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} y_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (2.756)$$

(σαν αυτό που χρησιμοποιείται στο MSSM), είχαμε ότι:

$$F_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right)^\dagger = - \left( M_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} y_{ijk} \phi_j \phi_k \right)^\dagger, \quad (2.757)$$

και  $V(\phi) = |F_i|^2$ , το οποίο έχει ένα προφανές ελάχιστο όταν όλα τα πεδία  $\phi$  είναι μηδέν. Επομένως, με αυτήν τη μορφή του  $W$ , η υπερσυμμετρία δεν μπορεί να σπάσει αυθόρμητα. Για να πάρουμε το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας πρέπει να προσθέσουμε μία σταθερά στο  $F_i$ , η οποία είναι ένας γραμμικός όρος στο  $W$  (βλέπε την αναφορά που δίνεται στη σχέση (2.401)) και αφήνει το  $W_{ij}$  απaráλλαχτο. Βέβαια, δεν είναι τόσο απλό όσο φαίνεται να παραχθεί ένα μοντέλο που να δουλεύει. Ένα τέτοιο, που παρήγαγε ο O'Raifeartaigh, εμπλέκει τρία chiral supermultiplets και χρησιμοποιεί σαν  $W$  το:

$$W = m\phi_1\phi_3 + g\phi_2(\phi_3^2 - M^2), \quad (2.758)$$

όπου τα  $m, g$  είναι πραγματικές και θετικές παράμετροι, ενώ το  $M$  είναι πραγματικό. Αυτό δίνει:

$$-F_1^\dagger = m\phi_3, \quad -F_2^\dagger = g(\phi_3^2 - M^2), \quad -F_3^\dagger = m\phi_1 + 2g\phi_2\phi_3. \quad (2.759)$$

Επομένως,

$$V = |F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 = m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3^2 - M^2|^2 + |m\phi_1 + 2g\phi_2\phi_3|^2. \quad (2.760)$$

Οι δύο πρώτοι όροι δεν μπορούν να εξαφανιστούν ταυτόχρονα, κι επομένως, δεν υπάρχει καμία πεδιακή διαμόρφωση που να δίνει την SUSY-διατηρούμενη περίπτωση,  $V = 0$ . Από την άλλη μεριά, για τον τρίτο όρο μπορούμε πάντα να τον κάνουμε να εξαφανίζεται από μία κατάλληλη επιλογή του  $\phi_1$  δεδομένων των  $\phi_2, \phi_3$ . Επομένως, για να βρούμε το SUSY-breaking ελάχιστο της  $V$ , αρκεί να εξετάσουμε μόνο τους δύο πρώτους όρους της (2.760), οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από το  $\phi_3$ . Εισάγοντας λοιπόν το πραγματικό και φανταστικό κομμάτι του  $\phi_3$ ,

$$\phi_3 = \frac{A + iB}{\sqrt{2}}, \quad (2.761)$$

οι δύο πρώτοι όροι της (2.760) θα δώσουν:

$$V_3 = \frac{1}{2}(m^2 - 2g^2 M^2)A^2 + \frac{1}{2}(m^2 + 2g^2 M^2)B^2 + \frac{g^2}{4}(A^2 + B^2)^2 + g^2 M^4. \quad (2.762)$$

Η συνέχεια της ανάλυσης εξαρτάται από το πρόσημο του συντελεστή του  $A^2$ ,  $(m^2 - 2g^2 M^2)$ . Θα θεωρήσουμε την περίπτωση

$$m^2 > 2g^2 M^2, \quad (2.763)$$

στην οποία βλέπουμε ότι το  $V_3$  έχει ένα προφανές SUSY-breaking ελάχιστο στο

$$A = B = 0, \quad \text{δηλαδή,} \quad \phi_3 = 0, \quad (2.764)$$

η οποία υπονοεί μέσω της (2.760) ότι

$$\phi_1 = 0. \quad (2.765)$$

Οι συνθήκες (2.764), (2.765) ερμηνεύονται σαν τα αντίστοιχα VEVs. Παρατηρούμε ωστόσο ότι το  $\phi_2$  παραμένει ακαθόριστο (η επονομαζόμενη επίπεδη συνιστώσα στον χώρο των πεδίων). Επομένως, η λύση αυτή έχει ως αποτέλεσμα, μέσω των (2.759):

$$\langle 0|F_1^\dagger|0\rangle = \langle 0|F_3^\dagger|0\rangle = 0, \quad (2.766)$$

αλλά

$$\langle 0|F_2^\dagger|0\rangle = gM^2, \quad (2.767)$$

δηλαδή, μη μηδενικό VEV. Η ελάχιστη τιμή της  $V$  είναι  $g^2 M^4$ , η οποία είναι πάντα θετική, όπως περιμέναμε. Η παράμετρος  $M$  έχει διαστάσεις μάζας και μπορεί να θεωρηθεί ότι δηλώνει την κλίμακα του αυθόρμητου σπασίματος της υπερσυμμετρίας, μέσω του  $\langle 0|F_2^\dagger|0\rangle \neq 0$ , όπως ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με το σπάσιμο της ηλεκτροσθενούς συμμετρίας, όπου το VEV του Higgs θέτει την αντίστοιχη κλίμακα.

Επίσης, πρέπει όλοι οι όροι στο superpotential του μοντέλου O'Raifeartaigh, (2.758), να είναι απαραίτητα gauge-αναλλοίωτοι, ειδικά ο γραμμικός ως προς το  $\phi_2$ . Όμως, δεν υπάρχει κανένα πεδίο στο SM που να είναι gauge-αναλλοίωτο

καθ' αυτό, δηλαδή, που να έχει όλους τους κβαντικούς αριθμούς βαθμίδας μηδέν (ένα τέτοιο πεδίο ονομάζεται gauge singlet). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο MSSM δεν μπορούμε να έχουμε κάποιον γραμμικό όρο στο αντίστοιχο  $W$ , πράγμα που καθιστά το παρόν μοντέλο μη ρεαλιστικό για το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας.

Παρ' όλα αυτά αξίζει να συνεχίσουμε λίγο τη μελέτη του  $F$ -τύπου σπασίματος της υπερσυμμετρίας. Ας θεωρήσουμε τη δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος Fabri-Picasso. Θα δούμε ότι στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητη η παρουσία κάποιων άμαζων σωματιδίων. Το αν τα σωματίδια αυτά είναι τελικά παρατηρήσιμα εξαρτάται από το αν η θεωρία περιέχει διανυσματικά πεδία. Στην περιπτώσή μας, η υπερσυμμετρία είναι μία εκτεταμένη θεωρία, συνεπώς δεν έχουμε καθόλου διανυσματικά πεδία. Έχουμε λοιπόν τον γεννήτορα  $Q$  της υπερσυμμετρίας και, όπως είπαμε, θεωρούμε την περίπτωση στην οποία το κενό της θεωρίας δεν είναι αναλλοίωτο, δηλαδή, η δράση του  $Q$  πάνω στην κατάσταση του κενού δε δίνει μηδέν.

Έστω λοιπόν το πεδίο  $\chi(x)$ , το οποίο δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από τον υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, (2.754). Θεωρούμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή του κενού  $\langle 0|[Q, \chi(x)]|0\rangle$  για την οποία έχουμε:

$$0 \neq \langle 0|[Q, \chi(x)]|0\rangle = \sum_n \langle 0|Q|n\rangle \langle n|\chi(x)|0\rangle - \langle 0|\chi(x)|n\rangle \langle n|Q|0\rangle, \quad (2.768)$$

όπου εισηγάγαμε ένα πλήρες σύνολο καταστάσεων. Αποδεικνύεται<sup>35</sup> ότι η τελευταία σχέση υπονοεί ότι ανάμεσα στις καταστάσεις  $|n\rangle$  πρέπει να υπάρχει μία άμαζη κατάσταση,  $|\tilde{g}\rangle$ , η οποία να συζεύγνυται με το κενό, μέσω του γεννήτορα  $Q$ ,  $\langle 0|Q|\tilde{g}\rangle \neq 0$ . Αυτή είναι η υπερσυμμετρική εκδοχή του θεωρήματος Goldstone. Το θεώρημα δηλώνει ότι όταν μία συμμετρία σπάει αυθόρμητα, συνεπάγεται την παρουσία ενός ή περισσότερων άμαζων σωματιδίων, τα οποία συζεύγνυται με το κενό μέσω ενός γεννήτορα της συμμετρίας. Έχουμε ήδη συναντήσει -στη μη-υπερσυμμετρική εκδοχή του SM - τα Goldstone μποζόνια τα οποία όμως λόγω του ότι οι συμμετρίες βαθμίδας θεωρήθηκαν τοπικές -και όχι εκτεταμένες- απορροφήθηκαν από τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία βαθμίδας αποκτώντας έτσι μάζα (οι βαθμοί ελευθερίας των would-be Goldstone bosons υπάρχουν πλέον σαν την τρίτη (διαμήκη) συνιστώσα των μποζονίων βαθμίδας). Στην περίπτωση που η συμμετρία μας είναι η υπερσυμμετρία, αφού οι γεννήτορες είναι φερμιονικοί, τα Goldstone σωματίδια είναι φερμιόνια και ονομάζονται Goldstinos. Η κατάληξη -ino δεν υπονοεί ότι πρόκειται για το υπερσυμμετρικό ταίρι του Goldstone μποζονίου, αλλά είναι από μόνο του ένα φερμιονικό Goldstone mode<sup>36</sup>. Μπορούμε να ελέγξουμε (και θα το κάνουμε παρακάτω) ότι το φερμιονικό φάσμα του μοντέλου O'RaiFeartaigh, εμπεριέχει ένα άμαζο πεδίο  $\chi_2$ , το οποίο βρίσκεται σε μία supermultiplet μαζί

<sup>35</sup>Aitchison, Hey: Gauge theories in particle physics Volume II, section 17.4

<sup>36</sup>Γενικά, το Goldstino είναι η φερμιονική συνιστώσα της supermultiplet, της οποίας το βοηθητικό πεδίο αναπτύσσει VEV.

με το βοηθητικό πεδίο  $F_2$  που όπως είδαμε ανέπτυξε το VEV και το βαθμωτό πεδίο  $\phi_2$ , στους οποίους την κατεύθυνση το δυναμικό είναι «επίπεδο». Αυτή είναι μία ανάλογη κατάσταση της ήδη γνωστής περίπτωσης του δυναμικού ((wine-bottle)), στο οποίο το άμαζο σωματίδιο σχετίζεται με διακυμάνσεις γύρω από τον επίπεδο «δακτύλιο» στη βάση του «μπουκαλιού».

Θα δείξουμε τώρα ότι το φάσμα των μαζών των σωματιδίων του μοντέλου O’Raifeartaigh αποτελείται από:

- Έξι πραγματικά πεδία με τετραγωνικές μάζες  $0, 0$  για το πραγματικό και φανταστικό μέρος του  $\phi_2$ , αντίστοιχα,  $m^2, m^2$  για το πραγματικό και φανταστικό μέρος του  $\phi_1$  και  $m^2 - 2g^2M^2, m^2 + 2g^2M^2$  για τα -όχι πια εκφυλισμένα- πραγματικό και φανταστικό μέρος του  $\phi_3$ .
- Τρία  $L$ -τύπου φερμιόνια με μάζες  $0, m, m$ . Η πρώτη τιμή,  $0$ , αφορά το Goldstino,  $\chi_2$  το οποίο είναι εξ’ ορισμού άμαζο, και η δεύτερη και τρίτη τιμή  $m$ , αφορά γραμμικούς συνδυασμούς των  $\chi_1, \chi_3$ .

Για τα βαθμωτά πεδία θα θεωρήσουμε για ευκολία ότι  $\langle \phi_2 \rangle = 0$ , έπειτα θα αναπτύξουμε το δυναμικό γύρω από το σημείο  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$  και θα εξετάσουμε τους τετραγωνικούς όρους. Για τα φερμιόνια θα βρούμε τον πίνακα μαζών  $W_{ij}$  της (2.410) και θα διαγωνοποιήσουμε τον όρο μάζας εισάγοντας τους γραμμικούς συνδυασμούς  $\chi_- = (\chi_1 - \chi_3)/\sqrt{2}$ ,  $\chi_+ = (\chi_1 + \chi_3)/\sqrt{2}$ .

Έχουμε λοιπόν πρώτα για τα βαθμωτά πεδία:

$$\begin{aligned}
V &= m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3^2 - M^2|^2 + |m\phi_1 + 2g\phi_2\phi_3|^2 \\
&= m^2|\phi_3|^2 + g^2(\phi_3^2 - M^2)(\phi_3^{\dagger 2} - M^2) + (m\phi_1 + 2g\phi_2\phi_3)(m\phi_1^\dagger + 2g\phi_2^\dagger\phi_3^\dagger) \\
&= m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3|^4 + g^2M^4 - g^2M^2\phi_3^2 - g^2M^2\phi_3^{\dagger 2} + m^2|\phi_1|^2 + 2gm\phi_1\phi_2^\dagger\phi_3^\dagger \\
&\quad + 2mg\phi_1^\dagger\phi_2\phi_3 + 4g^2|\phi_2|^2|\phi_3|^2 \\
&= m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3|^4 + g^2M^4 - g^2M^2(\phi_3^2 + \phi_3^{\dagger 2}) + m^2|\phi_1|^2 \\
&\quad + 2gm(\phi_1\phi_2^\dagger\phi_3^\dagger + \phi_1^\dagger\phi_2\phi_3) + 4g^2|\phi_2|^2|\phi_3|^2 \\
&= m^2|\phi_1|^2 + m^2|\phi_3|^2 + g^2|\phi_3|^4 + g^2M^4 + 4g^2|\phi_2|^2|\phi_3|^2 - 2g^2M^2\text{Re}(\phi_3^2) \\
&\quad - 2gm\text{Re}(\phi_1^\dagger\phi_2\phi_3) + \mathcal{O}(|\phi_2|^2) \\
&= m^2|A_1 + iB_1|^2 + m^2|A_3 + iB_3|^2 + g^2|\phi_3|^4 + g^2M^4 + 4g^2|\phi_2|^2|\phi_3|^2 \\
&\quad - 2g^2M^2\text{Re}[(A_3 + iB_3)(A_3 + iB_3)] - 2gm\text{Re}(\phi_1^\dagger\phi_2\phi_3) + \mathcal{O}(|A_2 + iB_2|^2) \\
&\stackrel{\text{mass}}{=} m^2A_1^2 + m^2B_1^2 + m^2A_3^2 + m^2B_3^2 + 0A_2^2 + 0B_2^2 - 2g^2M^2\text{Re}(A_3^2 - B_3^2 + 2iA_3B_3) \\
&= m^2A_1^2 + m^2B_1^2 + 0A_2^2 + 0B_2^2 + (m^2 - 2g^2M^2)A_3^2 + (m^2 + 2g^2M^2)B_3^2.
\end{aligned} \tag{2.769}$$

Εξετάζοντας λοιπόν μόνο τους τετραγωνικούς όρους, καταλήξαμε στο ότι υπάρχουν δύο βαθμωτά πραγματικά σωματίδια,  $A_1, B_1$ , με μάζα  $m^2$  και δύο

βαθμωτά πραγματικά σωματίδια,  $A_2, B_2$ , με μηδενική μάζα. Επίσης, βρήκαμε ακόμα ένα βαθμωτό πραγματικό πεδίο,  $B_3$ , με μάζα  $m^2 + 2g^2M^2$  και εφόσον ο συντελεστής του  $A_3^2$  είναι πάντα θετικός, (2.763), άλλο ένα βαθμωτό πραγματικό σωματίδιο,  $A_3$ , με μάζα  $m^2 - 2g^2M^2$ .

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό για τα φερμιονικά πεδία. Για τον πίνακα μαζών  $W_{ij}$ , βρίσκουμε μέσω της (2.758) ότι αποτελείται από τα στοιχεία :

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Rightarrow W_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} (m\phi_1\phi_3 + g\phi_2(\phi_3^2 - M^2)) \\ &\Rightarrow W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.770)$$

Άρα, για την περίπτωση των φερμιονίων θα ασχοληθούμε με τον όρο  $W_{ij}\chi_i \cdot \chi_j + h.c.$  της λακρατζιανής αλληλεπίδρασης της (2.410). Ο όρος αυτός στην περίπτωσή μας γίνεται :

$$W_{13}\chi_1 \cdot \chi_3 + h.c. \quad (2.771)$$

και ψάχνουμε, κατά τα γνωστά, για όρους μάζας. Για να το καταφέρουμε πρέπει να εισάγουμε τους γραμμικούς συνδυασμούς :

$$\begin{cases} \chi_- = \frac{\chi_1 - \chi_3}{\sqrt{2}} \\ \chi_+ = \frac{\chi_1 + \chi_3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{\chi_+ + \chi_-}{\sqrt{2}} \\ \chi_3 = \frac{\chi_+ - \chi_-}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (2.772)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας, παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \{m\chi_1 \cdot \chi_3 + h.c.\} &= \left\{ m \frac{\chi_+ + \chi_-}{\sqrt{2}} \frac{\chi_+ - \chi_-}{\sqrt{2}} + h.c. \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{m\chi_+ \cdot \chi_+ - m\chi_- \cdot \chi_- + 0\chi_2 \cdot \chi_2 + h.c.\} \\ &= \frac{1}{2} (\chi_+ \quad \chi_- \quad \chi_2) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \\ \chi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.773)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι έχουμε δύο φερμιόνια με μάζα  $m$  και ένα φερμιόνιο με μηδενική μάζα που αντιστοιχεί στο Goldstino. Απουσία του αυθόρμητου σπασίματος της συμμετρίας, όπως δηλώνει η (2.414), στο μοντέλο W-Z, μία «μαζική» supermultiplet αποτελείται από ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο (δύο πραγματικά) και από ένα  $L$ -τύπου σπινωριακό πεδίο, εκφυλισμένα ως προς τη μάζα. Είναι ενδιαφέρον ότι στο μοντέλο του O'Rai feartaigh, που είναι η «3» supermultiplet, μετά το σπάσιμο της συμμετρίας, υπακούει στη σχέση :

$$(m^2 - 2g^2M^2) + (m^2 + 2g^2M^2) = 2m^2 = 2m_{\chi_3}^2, \quad (2.774)$$



η οποία ουσιαστικά είναι μία γενίκευση της σχέσης που θα ίσχυε στην SUSY-διατηρούμενη περίπτωση, όπου  $g = 0$  (οι μάζες θα βγαίνουν ίσες). Βασικά, υπάρχει ένας γενικός κανόνας για τις (tree-level) τιμές του  $m^2$  των βαθμωτών πεδίων και chiral φερμιονίων στις θεωρίες με αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας:

$$\sum m_{real\ scal.}^2 = 2 \sum m_{chir. ferm.}^2, \quad (2.775)$$

όπου είναι κατανοητό ότι η άθροιση γίνεται πάνω στους τομείς με ίδιους κβαντικούς αριθμούς. Δυστυχώς ο παραπάνω αθροιστικός κανόνας ουσιαστικά υπονοεί αυτό το είδος του σπασίματος της συμμετρίας δεν μπορεί να είναι φαινομενολογικά βιώσιμο, αφού απαιτεί την ύπαρξη, για παράδειγμα, ελαφρών βαθμωτών ταιριών των ελαφρών SM φερμιονίων, κάτι που έχει αποκλειστεί πειραματικά.

Τώρα, θα θεωρήσουμε ένα αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω όρων που ανήκουν σε μία gauge supermultiplet. Προχωρούμε κατά παρόμοιο τρόπο, παραθέτοντας τους μετασχηματισμούς των πεδίων που εμπλέκονται σε μία gauge supermultiplet:

$$\begin{aligned} \delta_\xi W^{\mu a} &= i[\xi \cdot Q, W^{\mu a}] = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \lambda^a + \lambda^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi), \\ \delta_\xi \lambda^a &= i[\xi \cdot Q, \lambda^a] = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \xi F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi D^a, \\ \delta_\xi D^a &= i[\xi \cdot Q, D^a] = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a - (D_\mu \lambda)^{a\dagger} \bar{\sigma}^\mu \xi\right). \end{aligned} \quad (2.776)$$

Όπως και στην περίπτωση της chiral supermultiplet, μόνο τα βοηθητικά πεδία μπορούν να αναπτύξουν μη μηδενικά VEVs:

$$\langle 0|D^a|0\rangle \neq 0, \quad (2.777)$$

και για αυτό το λόγο αυτού του είδους τα αυθόρμητα σπασίματα συμμετρίας ονομάζονται  $D$ -τύπου. Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι ένας τέτοιος μηχανισμός δεν μπορεί να δουλέψει στο MSSM, του οποίου το βαθμωτό δυναμικό δίνεται από τη σχέση (2.710). Το  $F$ -τύπου σπάσιμο της υπερσυμμετρίας συνέβη μέσω του πρώτου όρου της, έτσι αντίστοιχα, το  $D$ -τύπου σπάσιμο θα συμβαίνει μέσω του δεύτερου όρου της, που περιλαμβάνει τις gauge συνεισφορές. Προφανώς, ο δεύτερος όρος έχει ένα SUSY-preserving ελάχιστο,  $V = 0$ , όταν όλα τα πεδία εξαφανίζονται. Όμως, υπάρχει κι άλλος τρόπος. Όπως στην περίπτωση του  $F$ -τύπου όπου εισηγάγαμε έναν γραμμικό όρο στην  $W$ , ένας ανάλογος μηχανισμός έχει ανακαλυφθεί από τους Fayet και Ηλιόπουλο, για την  $U(1)$  συμμετρία βαθμίδας. Το βοηθητικό πεδίο μίας  $U(1)$  gauge supermultiplet είναι gauge-αναλλοίωτο κι ένας όρος ανάλογος του  $D$  στη λαγκρατζιανή θα είναι επίσης και SUSY-αναλλοίωτος, αφού το  $D$  μετασχηματίζεται κατά μία ολική παράγωγο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι προσθέτουμε έναν όρο  $M^2 D$ , τον όρο Fayet-Ηλιόπουλος, στη λαγκρατζιανή (2.708). Το

κομμάτι που περιλαμβάνει τον  $D$ -όρο θα είναι πλέον:

$$\mathcal{L}_D = M^2 D + \frac{1}{2} D^2 - g_1 D \sum_i e_i \phi_i^\dagger \phi_i, \quad (2.778)$$

όπου  $e_i$  είναι τα  $U(1)$  φορτία των βαθμωτών πεδίων  $\phi_i$  σε μονάδες  $g_1$ , της σταθεράς σύζευξης της  $U(1)$ . Η εξίσωση κίνησης για το  $D$  είναι:

$$D = -M^2 + g_1 \sum_i e_i \phi_i^\dagger \phi_i. \quad (2.779)$$

Το αντίστοιχο δυναμικό είναι πλέον:

$$V_D = \frac{1}{2} \left( -M^2 + g_1 \sum_i e_i \phi_i^\dagger \phi_i \right)^2. \quad (2.780)$$

Ας θεωρήσουμε για λόγους απλότητας μόνο ένα βαθμωτό πεδίο,  $\phi$ , με φορτίο  $eg_1$ . Για  $eg_1 > 0$ , αν ελαχιστοποιήσουμε το δυναμικό ως προς  $\phi$ , θα πάρουμε μία SUSY-διατηρούμενη λύση με  $V_D = 0$  και  $\langle 0|D|0\rangle = 0$  και ταυτόχρονα, παίρνουμε μη μηδενική τιμή του  $\phi$ , δηλαδή αναπτύσσει VEV,  $|\langle 0|\phi|0\rangle| = (M^2/eg_1)^{1/2}$ , το οποίο σπάει την  $U(1)$  συμμετρία και επίσης παράγεται μάζα για το διανυσματικό μποζόνιο.

Αν από την άλλη αν θεωρήσουμε  $eg_1 < 0$ , βρίσκουμε μία SUSY-breaking λύση,  $V_D = \frac{1}{2} M^4$ , όταν  $\langle 0|D|0\rangle = -M^2$ . Επίσης, παίρνουμε ότι  $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$ , δηλαδή ένα  $U(1)$ -διατηρούμενο σπάσιμο, όπως και επιζητούσαμε. Αντικαθιστώντας την τιμή του VEV του  $D$  στην παραπάνω λαγκρατζιανή  $\mathcal{L}_D$ , παίρνουμε:

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2} M^4 - |eg_1| M^2 \phi^\dagger \phi + \dots, \quad (2.781)$$

δείχνοντας ότι το πεδίο  $\phi$  αποκτά μάζα  $M(|eg_1|)^{1/2}$ , ενώ το gaugino,  $\lambda$ , και το  $A^\mu$  παραμένουν άμαζα, με το  $\lambda$  να αναλαμβάνει το ρόλο του άμαζου Goldstino.

Δυστυχώς, ο μηχανισμός αυτός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μη αβελιανή περίπτωση, διότι δεν υπάρχει όρος της μορφής  $D^a$  που να είναι gauge-αναλλοίωτος (δεν είναι singlet, αλλά βρίσκεται στην adjoint). Θα μπορούσαμε τουλάχιστον να μεταφέρουμε το  $D$ -τύπου σπάσιμο της υπερσυμμετρίας στην αβελιανή περίπτωση  $U(1)_Y$  του MSSM; Η απάντηση είναι όχι. Αυτό που εμείς θέλουμε είναι μία κατάσταση στην οποία τα βαθμωτά πεδία της (2.780) να μην αποκτούν VEVs (για παράδειγμα λόγω του ότι έχουν πολύ μεγάλη μάζα στο superpotential) έτσι ώστε το ελάχιστο της (2.780) να αναγκάζει το  $D$  να έχει μη μηδενική αναμενόμενη τιμή στο κενό με αποτέλεσμα να σπάσει την υπερσυμμετρία. Στο MSSM όμως, τα πεδία των squark και slepton δεν έχουν όρους μάζας στο superpotential κι έτσι δεν τα εμποδίζει τίποτα να αποκτήσουν και αυτά VEV κατά την ελαχιστοποίηση του  $V_D$ . Όμως κάτι τέτοιο θα υπονοούσε το σπάσιμο οποιασδήποτε συμμετρίας που σχετίζεται με τους

κβαντικούς αριθμούς που φέρουν τα πεδία αυτά. όπως το χρώμα. Κάτι τέτοια είναι προφανώς μη αποδεκτό.

Γενικά, επικρατεί η άποψη ότι το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας θα μπορούσε να συμβεί σε έναν τομέα που είναι ασθενώς συζευγμένος με τις chiral supermultiplets του MSSM. Για παράδειγμα, θα μπορούσε να συμβεί μέσω βαρυτικών αλληλεπιδράσεων (στην κλίμακα του Planck) ή μέσω ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων βαθμίδας. Παρακάτω θα δούμε έναν άλλο πιθανό τρόπο σπασίματος της υπερσυμμετρίας, με την εισαγωγή των soft SUSY-breaking όρων στη λαγκρατζιανή.

### 2.9.2 Soft SUSY-breaking όροι

Πέρα από την προσπάθεια εύρεσης ενός μοντέλου που να σπάει αυθόρμητα την υπερσυμμετρία, μπορούμε ανεξαρτήτως να ψάξουμε για κάποια παραμετροποίηση των SUSY-breaking όρων που θα έπρεπε να είναι παρόντες στις «χαμηλές ενέργειες» και να κάνουμε φαινομενολογία με αυτούς. Είναι μεγάλης σημασίας, οι όροι αυτοί να είναι soft, δηλαδή, να έχουν διάσταση θετικής μάζας, για παράδειγμα  $M^2\phi^2$ ,  $M\phi^3$ ,  $M\chi\cdot\chi$  κ.ά.. Ο λόγος είναι ότι τέτοιοι όροι (οι οποίοι είναι super-renormalizable) δε θα εισαγάγουν καινούριες αποκλίσεις στις μάζες των βαθμωτών πεδίων και δε θα επαναφέρουν το πρόβλημα της ιεραρχίας των μαζών που έλυσε η υπερσυμμετρία. Όπως είδαμε στην εισαγωγή, μία τυπική ενός-βρόχου διόρθωση ακτινοβολίας για τη μάζα του βαθμωτού πεδίου είναι:

$$\delta m^2 \sim (\lambda_{scalar} - g_{fermion}^2)\Lambda^2. \quad (2.782)$$

Με την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας έχουμε ουσιαστικά  $\lambda_{scalar} = g_{fermion}^2$  κι έτσι η εξάρτηση από το  $\Lambda$  γίνεται -ακίνδυνη- λογαριθμική. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι αδιάστατες σταθερές λαμβάνουν οι ίδιες αποκλίνουσες διορθώσεις ενός βρόχου από τη στιγμή που εμπλέκονται soft SUSY-breaking αλληλεπιδράσεις. Όμως -μετά την εισαγωγή τους- οι όροι αυτοί δε χαλάνε την ακύρωση των τετραγωνικών αποκλίσεων στη μάζα των βαθμωτών πεδίων, αλλά αρκούνται στο να κάνουν τις δύο σταθερές να διαφέρουν σε τάξη  $\ln \Lambda$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $\delta m^2$  θα πηγαίνει περίπου  $m_{soft}^2 \ln(\Lambda/m_{soft})$ , όπου  $m_{soft}$  είναι η τυπική κλίμακα μάζας των soft SUSY-breaking όρων. Αυτή είναι μία ασφαλής μετατόπιση υπό την έννοια του fine-tuning του SM, δεδομένου φυσικά ότι η νέα αυτή  $m_{soft}$  κλίμακα δεν είναι πολύ πάνω από -ας πούμε-  $1TeV$ . Η προέλευση της κλίμακας αυτής είναι άγνωστη. Ο αριθμός των διαφορετικών πιθανών soft SUSY-breaking όρων είναι αρκετά περιορισμένος και για αυτό τους απαριθμούμε:

(α) Μάζες των gaugino για κάθε ομάδα βαθμίδας:

$$-\frac{1}{2}(M_3\tilde{g}^a \cdot \tilde{g}^a + M_2\tilde{W}^a \cdot \tilde{W}^a + M_1\tilde{B} \cdot \tilde{B} + h.c.), \quad (2.783)$$

όπου προφανώς, ο πρώτος δείκτης παίρνει τιμές  $1 \dots 8$ , ο δεύτερος  $1 \dots 3$  και το « $\cdot$ » γινόμενο αφορά το βαθμωτό σπινωριακό γινόμενο. Τα σωμα-

τίδια που εμπλέκονται είναι τα υπερσυμμετρικά φερμιονικά ταίρια των διανυσματικών μποζονίων του SM και είναι όλα  $L$ -τύπου σπίνορες. Παρομοίως με ό,τι είδαμε στο μοντέλο W-Z για τη μάζα του  $L$ -τύπου σπίνορα  $\chi$ , (2.425), οι μάζες των gaugino δίνονται από τις απόλυτες τιμές  $M_i$ . Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι αυτές είναι πραγματικές (για να μην εισαγάγουμε καμία  $CP$ -παραβίαση) αλλά δεν είναι υποχρεωτικό να είναι θετικές. Θα δούμε παρακάτω πως δουλεύουμε στην περίπτωση των αρνητικών  $M_i$ .

(β) Squark (mass)<sup>2</sup> όροι:

$$-m_{\tilde{Q}_{ij}}^2 \tilde{Q}_i^\dagger \cdot \tilde{Q}_j - m_{\tilde{u}_{ij}}^2 \tilde{u}_{Li}^\dagger \tilde{u}_{Lj} - m_{\tilde{d}_{ij}}^2 \tilde{d}_{Li}^\dagger \tilde{d}_{Lj}, \quad (2.784)$$

όπου  $i, j$  είναι οικογενειακοί δείκτες και το « $\cdot$ » γινόμενο αφορά το  $SU(2)_L$ -αναλλοίωτο βαθμωτό γινόμενο των  $2, \bar{2}$  αναπαράστάσεων.

(γ) Slepton (mass)<sup>2</sup> όροι:

$$-m_{\tilde{L}_{ij}}^2 \tilde{L}_i^\dagger \cdot L_j - m_{\tilde{e}_{ij}}^2 \tilde{e}_{Li}^\dagger \tilde{e}_{Lj}. \quad (2.785)$$

(δ) Higgs (mass)<sup>2</sup> όροι:

$$-m_{H_u}^2 H_u^\dagger \cdot H_u - m_{H_d}^2 H_d^\dagger \cdot H_d - (bH_u \cdot H_d + h.c.), \quad (2.786)$$

όπου το  $SU(2)_L$  αναλλοίωτο γινόμενο είναι:

$$\begin{aligned} H_u^\dagger \cdot H_u &= H_u^\dagger H_u = \begin{pmatrix} H_u^{+\dagger} & H_u^{0\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} = H_u^{+\dagger} H_u^+ + H_u^{0\dagger} H_u^0 \\ &= |H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 \end{aligned} \quad (2.787)$$

και αντίστοιχα για το  $H_d^\dagger \cdot H_d$ , ενώ για το  $H_u \cdot H_d$  έχουμε:

$$\begin{aligned} H_u \cdot H_d &= H_u^T (i\sigma_2) H_d = \begin{pmatrix} H_u^+ & H_u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_u^+ & H_u^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^- \\ -H_d^0 \end{pmatrix} = H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0. \end{aligned} \quad (2.788)$$

(ε) Τριπλές βαθμωτές συζεύξεις

$$-a_u^{ij} \tilde{u}_{Li} \tilde{Q}_j \cdot H_u + a_d^{ij} \tilde{d}_{Li} \tilde{Q}_j \cdot H_d + a_e^{ij} \tilde{e}_{Li} \tilde{L}_j \cdot H_d + h.c.. \quad (2.789)$$

Οι πέντε (mass)<sup>2</sup> πίνακες είναι μιγαδικοί γενικά, αλλά πρέπει να είναι ερμιτιανοί ώστε η λαγκρατζιανή να είναι πραγματική. Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις που απαριθμήσαμε σαφώς σπάνε την υπερσυμμετρία, αφού εμπλέκουν μόνο βαθμωτά και gauginos χωρίς τα αντίστοιχα υπερσυμμετρικά τους ταίρια.

Είναι σημαντικό από την άλλη να τονίσουμε ότι οι πέντε πάνω περιπτώσεις εμπεριέχουν όρους οι οποίοι σέβονται τις SM gauge συμμετρίες. Ο  $b$ -όρος της (2.786) και οι τριπλές βαθμωτές συζεύξεις, (2.789), έχουν την ίδια μορφή με τις  $\mu$  και Yukawa συζεύξεις στο gauge-αναλλοίωτο superpotential της (2.714), αλλά προφανώς εδώ έχουμε βαθμωτά πεδία και όχι superfields. Επίσης, μία τρανταχτή παρατήρηση είναι ότι σε αντίθεση με τους όρους μάζας των σωματιδίων του SM, gauge-αναλλοίωτοι όροι μάζας των υπερσυμμετρικών ταιριών τους είναι πιθανοί. Ας πάρουμε την (2.783) σαν παράδειγμα. Τα gauginos γενικά είναι στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας, π.χ. τα Winos βρίσκονται στην  $t = 1$  αναπαράσταση της  $SU(2)$ . Στην αναπαράσταση αυτή, οι πίνακες μετασχηματισμού επιλέγονται να είναι πραγματικοί (οι γεννήτορες είναι καθαρά φανταστικοί) που σημαίνει ότι είναι ορθογώνιοι (αντί για μοναδιακοί), όπως οι πίνακες στροφής στον τρισδιάστατο σφαιρο. Επομένως, ποσότητες του τύπου  $\tilde{W} \cdot \tilde{W}$  είναι αναλλοίωτες κάτω από τους  $SU(2)$  μετασχηματισμούς, συμπεριλαμβανομένων και των τοπικών, αφού δεν περιέχονται καθόλου παράγωγοι. Το ίδιο ισχύει για τα gluino και το bino. Περνώντας στις (2.784) και (2.785), οι όροι μαζών των squarks και sleptons επιτρέπονται αν τα  $i, j$  είναι οικογενειακοί δείκτες και τα  $m_{ij}^2$  είναι ερμιτιανοί πίνακες στο χώρο των γενιών, αφού κάτω από έναν gauge μετασχηματισμό ισχύει  $\phi_i \rightarrow U\phi_i, \phi_j \rightarrow U\phi_j$ , όπου  $UU^\dagger = 1$  και τα  $\phi$  είναι squark και slepton multiplets γεύσεων. Όροι μάζας Higgs του τύπου  $-m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u$  είναι φυσικά παρόντες ήδη στο SM, (θετικό  $-m_{H_u}^2$  αφορά όρο μάζας αλλά αρνητικό  $-m_{H_u}^2$  επάγει το αυθόρμητο σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας μέσω του μηχανισμού Higgs) και, από τη σκοπιά του MSSM πρέπει να συμπεριληφθούν τέτοιοι SUSY-violating όροι ώστε να υπάρχει κάποια πιθανότητα να σπάσει αυθόρμητα η ηλεκτρασθενής συμμετρία. Ο  $b$ -όρος της (2.786) είναι σαν τον  $\mu$ -όρο της (2.722), αλλά περιέχει μόνο τα πεδία Higgs και όχι τα Higgsinos, που σημαίνει ότι σπάει την υπερσυμμετρία. SUSY-breaking όροι μάζας μόνο με Higgsinos απαγορεύονται λόγω της gauge-αναλλοιωτότητας, αλλά ο  $\mu$ -όρος της (2.722) είναι gauge-αναλλοίωτος και συνεισφέρει στους μη διαγώνιους όρους μάζας του Higgsino. Το γενικό συμπέρασμα λοιπόν των παραπάνω θεωρήσεων είναι ότι όροι μάζας που διατηρούν την ηλεκτρασθενή συμμετρία μπορούν να γραφτούν απευθείας για όλα τα -ως τώρα- μη παρατηρημένα σωματίδια του MSSM.

Αντίθετα, παρόμοιοι όροι αποτελούμενοι από τα σωματίδια του SM όλοι σπάνε την ηλεκτρασθενή συμμετρία, το οποίο είναι μη αποδεκτό, γεγονός που σημαίνει ότι οι όροι μάζας πρέπει να αναδυθούν μέσω αυθόρμητου σπασίματος της συμμετρίας. Επομένως, στο πλαίσιο του MSSM, είναι λογικό τα γνωστά σωματίδια να έχουν ανακαλυφθεί αφού είναι «ελαφριά», με την κλίμακα να σχετίζεται με το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας η οποία πρέπει να έπεται αυτό της υπερσυμμετρίας. Υπενθυμίζουμε ότι δεν υπήρχε όρος με το σωστό (αρνητικό) πρόσημο ο οποίος να επάγει το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς θεωρίας στη SUSY-αναλλοίωτη περίπτωση, αφού οι Yukawa-τύπου όροι της (2.714) όντως σέβονται την υπερσυμμετρία αλλά δεν μπορούν

να παράγουν φερμιονικές μάζες, εκτός και αν κάποιο πεδίο Higgs αναπτύξει VEV, κάτι το οποίο δεν είναι δυνατό να συμβεί με το δυναμικό της (2.710). Επίσης, οι gauge-αναλλοιώτες συζεύξεις είναι μέρος μίας SUSY-αναλλοιώτης θεωρίας όμως οι όροι μάζας των διανυσματικών πεδίων της ηλεκτρασθενούς θεωρίας απαιτούν το Higgs VEV. Έτσι οι μάζες των μη ανακαλυφθέντων υπερσυμμετρικών ταιριών (και γενικότερα των παραμέτρων) μπορεί να είναι αρκετά μεγαλύτερες, αλλά όχι τόσο ώστε να δημιουργείται πάλι πρόβλημα λεπτής ρύθμισης. Από αυτήν την οπτική γωνία, δεν υπάρχει ξεκάθαρη διάκριση ανάμεσα στην ηλεκτρασθενή και την SUSY-breaking κλίμακα.

Δυστυχώς, παρ' όλο που είδαμε πως ο αριθμός των μορφών των «soft» όρων που σπάνε την υπερσυμμετρία είναι περιορισμένος, όταν θεωρήσουμε όλα τα πεδία του MSSM παίρνουμε αρκετούς όρους τελικά. Αυτό οδηγεί στην εισαγωγή πολλών νέων παραμέτρων (οι Δημόπουλος και Sutter τις μετρήσανε και βρήκαν ότι είναι 105 συνολικά), δηλαδή, μαζών, γωνιών ανάμιξης και φάσεις. Αξίζει να τονίσουμε ότι η απότομη αυτή αύξηση στον αριθμό των παραμέτρων σχετίζεται αποκλειστικά με το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας, αφού η SUSY-αναλλοιώτη θεωρία έχει μόλις μία καινούρια παράμετρο σε σχέση με το SM, το  $\mu$ . Ξαφνικά λοιπόν ερχόμαστε αντιμέτωποι με μία πολύ μεγάλη αυθαιρεσία στη θεωρία μας, κάτι το οποίο όμως είναι τελικά πλασματικό. Αυτό γιατί εκτενείς περιοχές του χώρου των παραμέτρων αποκλείονται φαινομενολογικά. Αυτό συμβαίνει γιατί οι περισσότερες χαρακτηριστικές τιμές των νέων παραμέτρων επιτρέπουν τα ουδέτερα ρεύματα αλλαγής γεύσης, ή νέες πηγές παραβίασης της  $CP$ , σε επίπεδα τέτοια τα οποία αποκλείονται πειραματικά. Η ύπαρξη τέτοιων ισχυρών περιορισμών στις SUSY-breaking παραμέτρους στην κλίμακα του SM, προτείνει ότι οποιοσδήποτε και να είναι τελικά ο μηχανισμός του σπασίματος της υπερσυμμετρίας, θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να οδηγεί στην καταπίεση επικίνδυνων μη διαγώνιων όρων.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα συζητήσουμε τον τομέα Higgs του MSSM στον οποίο εισέρχονται μόνο λίγες νέες παράμετροι και μπορεί να γίνει και μία πολύ σημαντική πρόβλεψη, δηλαδή να δοθεί ένα άνω όριο στη μάζα του ελαφρύτερου Higgs μποζονίου.

## 2.10 Ο Higgs τομέας και το σπάσιμο τη ηλεκτρασθενούς συμμετρίας στο MSSM

### 2.10.1 Το βαθμωτό δυναμικό και οι συνθήκες για το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε το δυναμικό για τα βαθμωτά πεδία Higgs στο MSSM. Στο μοντέλο αυτό, υπάρχουν δύο  $SU(2)_L$  διπλέτες  $H_u, H_d$  με ασθενές υπερφορτίο  $Y = 1, -1$ , αντίστοιχα. Το κλασικό tree-level δυναμικό για τα βαθμωτά αυτά πεδία συνίσταται από διάφορους όρους. Πρώτον, όπως έχουμε ήδη δει, έχουμε τετραγωνικούς όρους από τη

SUSY-αναλλοίωτη συνεισφορά της (2.724) ( $F$ -όρος), η οποία συμπεριλαμβάνει την παράμετρο  $\mu$  από το superpotential, (2.714). Δεύτερον, έχουμε επίσης συνεισφορά από τον Higgs SUSY-breaking όρο, (2.786), από τον οποίο παίρνουμε:

$$m_{H_u}^2 H_u^\dagger \cdot H_u + m_{H_d}^2 H_d^\dagger \cdot H_d \stackrel{(2.787)}{=} m_{H_u}^2 (|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + m_{H_d}^2 (|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2), \quad (2.790)$$

όπου οι παράμετροι  $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$  έχουν είτε θετικό είτε αρνητικό πρόσημο. Επίσης, από τον Higgs SUSY-breaking όρο, (2.786), παίρνουμε:

$$b H_u \cdot H_d + h.c. \stackrel{(2.788)}{=} b (H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + h.c.. \quad (2.791)$$

Τρίτον πρέπει να συμπεριλάβουμε τους SUSY-αναλλοίωτους όρους τέταρτης τάξης, της μορφής  $(\text{Higgs})^2 (\text{Higgs})^2$ , τους οποίους θα υπολογίσουμε για τον ηλεκτρασθενή τομέα του MSSM, δηλαδή τους  $D$ -όρους της σχέσης (2.710). Έχουμε λοιπόν δύο ομάδες,  $G$ , την  $SU(2)_L$ , με σταθερά  $g$  και την  $U(1)_Y$ , με σταθερά  $g'/2$ ,  $\phi_i = H_u, \phi_j = H_d$  κι επομένως:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_G \sum_a \sum_{i,j} g_G^2 (\phi_i^\dagger T_G^a \phi_i) (\phi_j^\dagger T_G^a \phi_j) = \\ & = \frac{1}{2} g^2 \left( H_u^\dagger \frac{\tau^a}{2} H_u + H_d^\dagger \frac{\tau^a}{2} H_d \right) \left( H_u^\dagger \frac{\tau^a}{2} H_u + H_d^\dagger \frac{\tau^a}{2} H_d \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left( \frac{g'}{2} \right)^2 \left( H_u^\dagger Y_{H_u} H_u + H_d^\dagger Y_{H_d} H_d \right) \left( H_u^\dagger Y_{H_u} H_u + H_d^\dagger Y_{H_d} H_d \right) \\ & = \frac{1}{2} \left[ \left( H_u^\dagger \frac{\tau}{2} H_u \right) \cdot \left( H_u^\dagger \frac{\tau}{2} H_u \right) + \left( H_u^\dagger \frac{\tau}{2} H_u \right) \cdot \left( H_d^\dagger \frac{\tau}{2} H_d \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( H_d^\dagger \frac{\tau}{2} H_d \right) \cdot \left( H_u^\dagger \frac{\tau}{2} H_u \right) + \left( H_d^\dagger \frac{\tau}{2} H_d \right) \cdot \left( H_d^\dagger \frac{\tau}{2} H_d \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{8} g'^2 \left( H_u^\dagger H_u - H_d^\dagger H_d \right) \left( H_u^\dagger H_u - H_d^\dagger H_d \right) \\ & = \frac{1}{8} g^2 \left[ \left| \left( H_u^\dagger \tau_1 H_u, H_u^\dagger \tau_2 H_u, H_u^\dagger \tau_3 H_u \right) \right|^2 + \left| \left( H_d^\dagger \tau_1 H_d, H_d^\dagger \tau_2 H_d, H_d^\dagger \tau_3 H_d \right) \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left( H_u^\dagger \tau_1 H_u, H_u^\dagger \tau_2 H_u, H_u^\dagger \tau_3 H_u \right) \cdot \left( H_d^\dagger \tau_1 H_d, H_d^\dagger \tau_2 H_d, H_d^\dagger \tau_3 H_d \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{8} g'^2 \left( H_u^\dagger H_u - H_d^\dagger H_d \right)^2 \\ & = \frac{1}{8} g^2 \left\{ \left[ \left( |H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 \right) - \left( |H_d^0|^2 + |H_d^-|^2 \right) \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + 4 \left( H_u^+ H_d^{0\dagger} + H_u^0 H_d^{-\dagger} \right) \left( H_u^{+\dagger} H_d^0 + H_u^{0\dagger} H_d^- \right) \right\} \\ & \quad + \frac{1}{8} g'^2 \left[ \left( |H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 \right) - \left( |H_d^0|^2 + |H_d^-|^2 \right) \right]^2. \quad (2.792) \end{aligned}$$

Επομένως, αν βάλουμε όλες μαζί τις συνεισφορές, δηλαδή, τους τετραγωνικούς όρους από (i) τη SUSY-αναλλοίωτη ( $F$ -όρος) συνεισφορά (2.724) και (ii) τους

SUSY-breaking όρους της (2.786) και (iii) τους όρους τέταρτης δύναμης που υπολογίσαμε στην (2.792), παίρνουμε το συνολικό βαθμωτό δυναμικό του MSSM:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) (|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) (|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) \\
&+ [b (H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + h.c.] + \frac{g^2 + g'^2}{8} \times \\
&\times (|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 + \frac{g^2}{2} |H_u^+ H_d^{0\dagger} + H_u^0 H_d^{-\dagger}|^2.
\end{aligned} \tag{2.793}$$

Προτιμήσαμε να μη γράψουμε τα  $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)$  και  $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)$  σαν  $m_1^2, m_2^2$ , αντίστοιχα ώστε να τονίζεται το γεγονός ότι το  $|\mu|^2$  προκύπτει από έναν SUSY-αναλλοίωτο όρο και είναι υποχρεωτικά θετικό, ενώ τα  $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$  προκύπτουν από SUSY-breaking όρους κι έτσι είναι απροσδιόριστου προσήμου.

Πρέπει λοιπόν τώρα να εξετάσουμε αν το δυναμικό (2.793) μπορεί να αποκτήσει ελάχιστο το οποίο να σπάει την ηλεκτρασθενή συμμετρία στην  $U(1)_{em}$  και αν ναι, κάτω από ποιες συνθήκες.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία βαθμίδας, για να απλοποιήσουμε κάπως τις πράξεις. Όπως στην περίπτωση του SM, μπορούμε να ελαττώσουμε ένα πιθανό VEV μίας συνιστώσας είτε του  $H_u$  ή του  $H_d$  στο μηδέν μέσω ενός  $SU(2)_L$  μετασχηματισμού (unitary gauge). Έτσι επιλέγουμε  $H_u^+ = 0$  στο ελάχιστο του  $\mathcal{V}$  κι επομένως οι συνθήκες  $H_u^+ = 0$  και  $\partial\mathcal{V}/\partial H_u^+ = 0$  θα μας δώσουν:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial H_u^+} &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) H_u^{+\dagger} + b H_d^- + \frac{g^2 + g'^2}{2} \times \\
&\times 2 (|H_u^+|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2) H_u^{+\dagger} \\
&+ \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} (H_d^0 H_u^{+\dagger} + H_d^- H_u^{0\dagger}) = 0 \\
\stackrel{H_u^+ = 0}{=} & b H_d^- + \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_d^- H_u^{0\dagger} = H_d^0 \left( b + \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger} \right) = 0 \\
\implies & H_d^- = 0 \quad \text{ή} \quad b + \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger} = 0.
\end{aligned} \tag{2.794}$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα της (2.794) θα μετατρέψει τον  $b$ -όρο της (2.793) σε:

$$\begin{aligned}
b (H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + h.c. &= b \left( \cancel{H_u^+}^0 H_d^- - H_u^0 H_d^0 \right) + b^\dagger \left( H_d^{-\dagger} \cancel{H_u^+}^0 - H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger} \right) \\
&= -\frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger} (-H_u^0 H_d^0) - \frac{g^2}{2} H_u^0 H_d^0 (-H_d^{0\dagger} H_u^{0\dagger}) \\
&= g^2 |H_d^0|^2 |H_u^0|^2,
\end{aligned} \tag{2.795}$$



το οποίο είναι πάντα θετικό και ασύμβατο με το σπάσιμο της συμμετρίας. Όπως θα δούμε, το πρώτο αποτέλεσμα της (2.794),  $H_d^- = 0$ , οδηγεί σε μίαν αρνητική  $b$ -συνεισφορά.

Δεχόμενοι λοιπόν εναλλακτικά τη λύση  $H_d^- = 0$ , σημαίνει ότι ούτε το  $H_u^+$  αλλά ούτε το  $H_d^-$  αναπτύσσουν VEV, με (ικανοποιητικό) αποτέλεσμα, ο ηλεκτρομαγνητισμός να μην σπάει αυθόρμητα. Αμελώντας πλέον τις φορτισμένες Higgs συνιστώσες, συγκεντρωνόμαστε στο δυναμικό για τα ουδέτερα πεδία που είναι:

$$\mathcal{V}_n = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) |H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) |H_d^0|^2 - (bH_u^0 H_d^0 + h.c.) + \frac{g^2 + g'^2}{8} (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \quad (2.796)$$

Εδώ είναι ένα καλό σημείο να τονίσουμε το γεγονός ότι ο συντελεστής του όρου τέταρτης δύναμης δεν είναι μία ελεύθερη παράμετρος του μοντέλου, αλλά καθορίζεται από τις καλά ορισμένες σταθερές σύζευξης ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων,  $(g^2 + g'^2)/8 \approx 0.065$ . Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με την περίπτωση του SM καθώς σε αυτό ο αντίστοιχος όρος έχει συντελεστή  $\lambda/4$ , με το  $\lambda$  να είναι μία ελεύθερη παράμετρος. Από το εισαγωγικό κεφάλαιο, θυμόμαστε ότι η μάζα του μποζονίου Higgs για ένα συγκεκριμένο VEV, είναι ανάλογη του  $\sqrt{\lambda}$ , γεγονός το οποίο προτείνει ότι στο MSSM πρέπει να υπάρχει ένα σχετικά ελαφρύ Higgs σωματίδιο.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον  $b$ -όρο της (2.796), ο οποίος είναι ο μόνος όρος που εξαρτάται από τις φάσεις των πεδίων (και όχι μόνο από τα μέτρα). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγουμε ο  $b$  να είναι πραγματικός και θετικός, με την τυχαία φάση του  $b$ , να απορροφάται στη σχετική φάση των  $H_u^0, H_d^0$ . Για ένα ελάχιστο του  $\mathcal{V}_n$  το γινόμενο  $H_u^0 H_d^0$  πρέπει να είναι πραγματικό και θετικό, το οποίο σημαίνει ότι (στο ελάχιστο) τα VEV των  $H_u^0, H_d^0$  θα πρέπει να έχουν ίσες και αντίθετες φάσεις. Εφόσον τα πεδία αυτά έχουν ίσα και αντίθετα υπερφορτία, μπορούμε να κάνουμε έναν  $U(1)$  μετασχηματισμό για να γίνουν και οι φάσεις και των δύο μηδέν. Όλα τα VEV και οι συζεύξεις μπορούν να επιλεχθούν πραγματικές, το οποίο σημαίνει ότι η  $CP$ -συμμετρία δε σπάει αυθόρμητα από το βαθμωτό δυναμικό του MSSM.

Επομένως, τώρα το βαθμωτό ουδέτερο δυναμικό παίρνει την πιο εύχρηστη μορφή:

$$\mathcal{V} = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) x^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) y^2 - 2bxy + \frac{g^2 + g'^2}{8} (x^2 - y^2)^2, \quad (2.797)$$

όπου  $x = |H_u^0|$  και  $y = |H_d^0|$ , και εξαρτάται μόνο από τις τρεις παραμέτρους  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$ ,  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  και  $b$ . Θέλουμε να βρούμε τις απαιτούμενες συνθήκες ώστε να παίρνουμε ένα σταθερό ελάχιστο του  $\mathcal{V}_n$  για μη μηδενικές τιμές των  $x, y$ .

Κατ' αρχήν σημειώνουμε ότι κατά μήκος της «επίπεδης» διεύθυνσης  $x = y$

το δυναμικό θα είναι :

$$\begin{aligned} V_n(x=y) &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)^2 x^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)^2 x^2 - 2bxx + \frac{g^2 + g'^2}{8}(x^2 - x^2)^2 \\ &= (2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 - 2b) x^2 \end{aligned} \quad (2.798)$$

και δε θα έχει ελάχιστο, εκτός αν η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού είναι θετική, δηλαδή :

$$V'' = 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 - 2b > 0 \Rightarrow 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 > 2b > 0 \quad (2.799)$$

Η συνθήκη αυτή μας υποδεικνύει ότι δε γίνεται τα  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  και  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  να είναι ταυτόχρονα αρνητικά. Αυτό υπονοεί ότι το σημείο  $x = y = 0$  δεν μπορεί να είναι ένα μέγιστο του  $\mathcal{V}_n$ . Στην περίπτωση που τα  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  και  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  είναι και τα δύο θετικά, τότε η αρχή είναι ένα ελάχιστο - γεγονός που δεν επιτρέπει το σπάσιμο της συμμετρίας- εκτός αν είναι ένα σαγματικό σημείο<sup>37</sup> (saddle point). Για να είναι ένα σημείο σαγματικό θα πρέπει η ορίζουσα του Hessian πίνακα στο σημείο αυτό να είναι αρνητική (αν η ορίζουσα είναι θετική και η δεύτερη παράγωγος θετική τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο, ενώ αν η ορίζουσα είναι θετική αλλά η δεύτερη παράγωγος αρνητική, τότε είναι τοπικό μέγιστο). Επομένως βρίσκουμε τον  $H(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{xx} & \mathcal{V}_{xy} \\ \mathcal{V}_{yx} & \mathcal{V}_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(|\mu|^2 + m_{H_u}^2) + \frac{g^2 + g'^2}{2}(3x^2 - y^2) & -2b - (g^2 + g'^2)xy \\ -2b - (g^2 + g'^2)xy & 2(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) + \frac{g^2 + g'^2}{2}(3y^2 - x^2) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow H(x=0, y=0) &= \begin{pmatrix} 2(|\mu|^2 + m_{H_u}^2) & -2b \\ -2b & 2(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.800)$$

και υπολογίζουμε την ορίζουσά του,  $D(0, 0)$ :

$$D(0, 0) = 2(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)2(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) - 4b^2. \quad (2.801)$$

Όπως είπαμε για να είναι το σημείο σαγματικό θα πρέπει η  $D(0, 0)$  να είναι αρνητική:

$$\begin{aligned} D(0, 0) < 0 &\Rightarrow 4(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) - 4b^2 < 0 \\ &\Rightarrow (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) < b^2. \end{aligned} \quad (2.802)$$

Επομένως, καταλήξαμε στο ότι για να μην είναι το σημείο  $(0, 0)$  ελάχιστο του βαθμωτού δυναμικού, θα πρέπει να είναι σαγματικό σημείο, γεγονός το οποίο

<sup>37</sup>Σημείο εντός του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης όπου η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο.

ισχύει αν ικανοποιείται η (2.802). Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αυτομάτως όταν ένας από τους δύο παράγοντες είναι αρνητικός.

Η πρώτη συνθήκη, (2.799) μας πληροφορεί ότι τα  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  και  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα αρνητικά αλλά η δεύτερη συνθήκη, (2.802), επιβάλλει το ένα από τα δύο να είναι αρνητικό. Επομένως, θέλουμε τον έναν παράγοντα θετικό και τον άλλον αρνητικό.

Ο  $b$ -όρος λοιπόν ευνοεί το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, αλλά δεν απαιτείται (το  $b$ ) να είναι μη μηδενικό. Τι μπορούμε όμως να πούμε για τα  $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$ ; Καταρχήν, για να ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες, (2.799), (2.802), που βρήκαμε ταυτόχρονα, δεν μπορεί να ισχύει  $m_{H_u}^2 = m_{H_d}^2$  (η ισότητα υπουίθεται ότι θα ισχύει σε κάποιο σημείο ενοποίησης). Αν βρούμε τις  $\beta$ -συναρτήσεις των βαθμωτών σωματιδίων στο softly σπασμένο MSSM, ισχύει ότι η RGE οδηγεί την παράμετρο  $m_{H_u}^2$  σε αρνητικές τιμές στην κλίμακα των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Είναι γεγονός ότι μία αρνητική τιμή του  $m_{H_u}^2$  αποτελεί καλή είδηση γιατί τείνει να ικανοποιήσει το γεγονός ότι ένας από τους δύο  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  και  $|\mu|^2 + m_{H_d}^2$  πρέπει να είναι αρνητικός. Όμως, ακόμα και αν  $m_{H_u}^2 < 0$  δε σημαίνει αναγκαστικά ότι ο  $|\mu|^2 + m_{H_u}^2$  θα είναι αρνητικός, αφού μπορεί το  $\mu^2$  να είναι μεγαλύτερο από το  $|m_{H_u}^2|$ . Μία μεγάλη αρνητική τιμή του  $m_{H_u}^2$  δεν είναι κάτι παρατραβηγμένο, όμως δε μας επιτρέπεται να πούμε με σιγουριά ότι το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας ΘΑ συμβεί με αυτόν τον μηχανισμό.

Έχοντας λοιπόν θεμελιώσει τις συνθήκες, (2.799), (2.802), που απαιτούνται για να αποκτήσουν τα  $|H_u^0|, |H_d^0|$  μη μηδενικό VEV, ας πούμε  $v_u, v_d$ , αντίστοιχα, μπορούμε να προχωρήσουμε βρίσκοντας τις εξισώσεις που θα μας καθορίσουν τα VEVs, οι οποίες βρίσκονται επιβάλλοντας τις συνθήκες:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right|_{v_u} = \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right|_{v_d} = 0. \quad (2.803)$$

Εκτελούμε τις παραγωγίσεις κι έπειτα αντικαθιστούμε  $x = v_u$  και  $y = v_d$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} &= 2(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)x - 2by + \frac{g^2 + g'^2}{2}(x^2 - y^2)x \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} &= 2(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)y - 2bx - \frac{g^2 + g'^2}{2}(x^2 - y^2)y \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \Big|_{v_u} &= 2(|\mu|^2 + m_{H_u}^2)v_u - 2bv_d + \frac{g^2 + g'^2}{2}(v_u^2 - v_d^2)v_u = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \Big|_{v_d} &= 2(|\mu|^2 + m_{H_d}^2)v_d - 2bv_u - \frac{g^2 + g'^2}{2}(v_u^2 - v_d^2)v_d = 0 \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)v_u - bv_d + \frac{g^2 + g'^2}{4}(v_u^2 - v_d^2)v_u &= 0 \\ (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)v_d - bv_u - \frac{g^2 + g'^2}{4}(v_u^2 - v_d^2)v_d &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.804) \end{aligned}$$

Ένας συνδυασμός των  $v_u, v_d$  δίνεται από το πείραμα αφού καθορίζει τη μάζα των  $W$  και  $Z$  μποζονίων. Οι σχετικοί όροι στον ηλεκτρασθενή τομέα είναι:

$$(D_\mu H_u)^\dagger (D^\mu H_u) + (D_\mu H_d)^\dagger (D^\mu H_d), \quad (2.805)$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu. \quad (2.806)$$

Θα βρούμε λοιπόν ποιος είναι ο συνδυσμός αυτός μέσω της (2.805):

$$\begin{aligned}
& (D_\mu H_u)^\dagger (D^\mu H_u) + (D_\mu H_d)^\dagger (D^\mu H_d) = \\
& = \left[ \left( \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v_u + \eta \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[ \left( \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v_u + \eta \end{pmatrix} \right] \\
& \quad + \left[ \left( \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} v_d + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[ \left( \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} v_d + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
& = \begin{pmatrix} 0 & v_u + \eta \end{pmatrix} \left( \partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_u + \eta \end{pmatrix} \\
& \quad + \begin{pmatrix} v_d + \xi & 0 \end{pmatrix} \left( \partial_\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & v_u + \eta \end{pmatrix} \left| \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v_u + \eta \end{pmatrix} \\
& \quad + \begin{pmatrix} v_d + \xi & 0 \end{pmatrix} \left| \partial_\mu + ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right|^2 \begin{pmatrix} v_d + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \stackrel{\text{no}}{\text{deriv.}} = \begin{pmatrix} 0 & v_u + \eta \end{pmatrix} \left| ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v_u + \eta \end{pmatrix} \\
& \quad + \begin{pmatrix} v_d + \xi & 0 \end{pmatrix} \left| ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \mathbf{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right|^2 \begin{pmatrix} v_d + \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \stackrel{\text{quad. terms}}{\text{gauge fields}} = v_u^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu & \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -\frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \quad + v_d^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g}{2} W_\mu^3 - \frac{g'}{2} B_\mu & \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -\frac{g}{2} W_\mu^3 - \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = v_u^2 \begin{pmatrix} \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -\frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ -\frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\
& \quad + v_d^2 \begin{pmatrix} \frac{g}{2} (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -\frac{g}{2} W_\mu^3 - \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g}{2} (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ -\frac{g}{2} W_\mu^3 - \frac{g'}{2} B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.807)
\end{aligned}$$

Από την έκφραση αυτή θα πρέπει να πάρουμε τους όρους μάζας των διανυσματικών μποζονίων. Δηλαδή, θα ταυτοποιήσουμε τους όρους της με τους

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (2.808)$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} &= v_u^2 \left( \frac{g^2}{4} W_\mu^{1^2} + \frac{g^2}{4} W_\mu^{2^2} \right) + v_d^2 \left( \frac{g^2}{4} W_\mu^{1^2} + \frac{g^2}{4} W_\mu^{2^2} \right) \\ &= \frac{g^2}{4} (v_u^2 + v_d^2) (W_\mu^{1^2} + W_\mu^{2^2}). \end{aligned} \quad (2.809)$$

Ορίζοντας  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^{1^2} \mp iW_\mu^{2^2})$ , αποκτούμε:

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g^2}{2} (v_u^2 + v_d^2) W_\mu^+ W^{\mu-} \Rightarrow M_W^2 = \frac{g^2}{2} (v_u^2 + v_d^2). \quad (2.810)$$

Επίσης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_z^2 Z_\mu Z^\mu &= v_u^2 \left( \frac{g}{2} W_\mu^3 - \frac{g'}{2} B_\mu \right)^2 + v_d^2 \left( \frac{g}{2} W_\mu^3 + \frac{g'}{2} B_\mu \right)^2 \\ &= \frac{v_u^2}{4} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{v_d^2}{4} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & gg' \\ gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.811)$$

Διαγώνοιώντας τους δύο πίνακες θα καταλήξουμε με τις μάζες των φυσικών πεδίων  $A^\mu, Z^\mu$ . Οι δύο πίνακες, έστω  $A, B$  αντίστοιχα, έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο αφού η ορίζουσα τους είναι μηδέν και το ίχνος τους  $(g^2 + g'^2)$ . Οι ρίζες του πολυωνύμου θα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα δηλαδή:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= t^2 - \text{Tr}(A) + \det(A) = t^2 - (g_1^2 + g_2^2)t + (g_1^2 g_2^2 - g_1^2 g_2^2) = 0 \Rightarrow \\ \Delta(t) &= t [t - (g_1^2 + g_2^2)] = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{ή} \quad t = g^2 + g'^2. \end{aligned} \quad (2.812)$$

Επομένως, ο διαγώνιος πίνακας που προκύπτει είναι:

$$M = \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.813)$$

Διαγώνοιωση του πίνακα  $A$  σημαίνει ότι μπορεί να γραφτεί σαν  $A = PMP^{-1}$ , όπου  $P$  είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Επομένως, σε κάθε ιδιοτιμή  $t_i$  αντιστοιχεί και από ένα ιδιοδιάνυσμα  $v_i$ , οπότε τα υπολογίζουμε μέσω της σχέσης:

$$(A - t_i I)v_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} Av_1 = t_1 Iv_1 \\ Av_2 = t_2 Iv_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g^2 + g'^2)x \\ (g^2 + g'^2)y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Συνεπώς, τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα θα είναι :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix}, \quad (2.814)$$

ο πίνακας  $P$  θα είναι :

$$P = (v_1 \ v_2) = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \quad (2.815)$$

και αντίστοιχα ο αντίστροφος του  $P$  θα είναι :

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix}. \quad (2.816)$$

Επομένως, η (2.811) θα γίνει :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v_u^2}{4} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} P M P^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{v_d^2}{4} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} P M P^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{v_u^2}{4} + \frac{v_d^2}{4} \right) \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} P M P^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.817)$$

Έτσι λοιπόν, καταλήξαμε στην :

$$\frac{1}{2} M_z^2 Z_\mu Z^\mu = \left( \frac{v_u^2}{4} + \frac{v_d^2}{4} \right) \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix},$$

από την οποία παίρνουμε τη μάζα του φυσικού μποζονίου  $Z^\mu$  (στη τη μάζα του φωτονίου αντιστοιχεί η μηδενική ιδιοτιμή) και την έκφραση των δύο φυσικών μποζονίων σαν συνδυασμό των  $W^{\mu 3}, B^\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_z^2 &= \frac{v_u^2 + v_d^2}{4} (g^2 + g'^2) \Rightarrow M_z^2 = \frac{v_u^2 + v_d^2}{2} (g^2 + g'^2) \\ \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \\ Z^\mu &= \frac{g W^{\mu 3} - g' B^\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{και} \quad A^\mu = \frac{g W^{\mu 3} + g' B^\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \end{aligned} \quad (2.818)$$

Από την έκφραση της μάζας των  $W^\pm$ , (2.810), παίρνουμε :

$$M_W^2 = \frac{g^2}{2} (v_u^2 + v_d^2) \Rightarrow v_u^2 + v_d^2 = \left( \frac{2M_W^2}{g^2} \right)^{1/2} (= 174 \text{ GeV}). \quad (2.819)$$

Ορίζοντας λοιπόν:

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d} \quad (2.820)$$

και έχοντας έναν συνδυασμό των VEV συναρτήσει της μάζας των  $W$  που γνωρίζουμε από τη φαινομενολογία, θα γράψουμε τώρα τις εκφράσεις που δίνουν τα VEVs, (2.804) σαν:

$$\begin{aligned} (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) v_u &= b v_d + \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_d^2 - v_u^2) v_u \\ (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) v_u &= b v_d + \frac{g^2 + g'^2}{4} \frac{v_u^2 + v_d^2}{v_u^2 + v_d^2} (v_d^2 - v_u^2) v_u \\ (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) &= b \frac{v_d}{v_u} + \frac{1}{2} \frac{g^2 + g'^2}{2} \frac{v_d^2 - v_u^2}{v_u^2 + v_d^2} (v_d^2 + v_u^2) \\ &\quad \frac{v_d^2 - v_u^2}{v_d^2 + v_u^2} \\ (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) &= b \cot \beta + \frac{1}{2} M_z^2 \frac{v_d^2}{v_d^2 + v_u^2} \\ &\quad \frac{v_d^2}{v_d^2} \\ (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) &= b \cot \beta + \frac{M_z^2}{2} \frac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta} \\ (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) &= b \cot \beta + \frac{M_z^2}{2} \cos 2\beta. \end{aligned} \quad (2.821)$$

Παρομοίως:

$$(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) = b \tan \beta - \frac{M_z^2}{2} \cos 2\beta. \quad (2.822)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις για να απαλείψουμε τα  $|\mu|$ ,  $b$ , όμως η φάση του  $\mu$  παραμένει αδιευκρίνιστη. Επίσης, αφού τα  $v_u, v_d$  είναι πραγματικά και θετικά, η γωνία  $\beta$  βρίσκεται στο διάστημα  $[0, \pi/2)$ . Παρακάτω θα βρούμε το φάσμα των μαζών των σωματιδίων Higgs.

## 2.10.2 Οι tree-level μάζες των Higgs καταστάσεων στο MSSM

Στο SM υπάρχουν τέσσερα πραγματικά πεδία, ή αλλιώς, τέσσερις βαθμοί ελευθερίας. Μετά το σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, οι τρεις από αυτούς γίνονται οι διαμήκεις βαθμοί ελευθερίας των τριών διανυσματικών μποζονίων, ενώ ο τέταρτος είναι το ουδέτερο σωματίδιο Higgs. Η μάζα του φυσικού μποζονίου Higgs βρίσκεται αν θεωρήσουμε τετραγωνικές αποκλίσεις από την κατάσταση του κενού. Στο MSSM υπάρχουν οχτώ πραγματικά πεδία -βαθμοί ελευθερίας- τρία από τα οποία είναι άμαζα, και όπως στην περίπτωση του SM, «καταπίνονται» από τα  $W^\pm, Z^0$ . Οι μάζες των υπόλοιπων πέντε βρίσκονται πάλι αναπτύσσοντας το δυναμικό σε δεύτερη τάξη ως προς τα πεδία. Παρόλο που φαίνεται σαν μία επανάληψη της διαδικασίας του SM, δεν είναι τόσο απλή, λόγω του ότι οι τετραγωνικές αποκλίσεις δεν είναι διαγώνιες ως προς τα πεδία, έτσι ώστε να χρειάζεται κάποια διαγωνοποίηση για να βρούμε τις μάζες.



Πιλοτικά, θα δείξουμε τη διαδικασία, θεωρώντας τη λαγκρατζιανή:

$$\mathcal{L}_{12} = \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - V(\phi_1, \phi_2), \quad (2.823)$$

όπου το  $V(\phi_1, \phi_2)$  έχει ελάχιστο στο  $\phi_1 = v_1, \phi_2 = v_2$ . Αναπτύσσουμε το  $V$  γύρω από το ελάχιστο, κρατώντας μόνο τετραγωνικούς όρους:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12}^{quad} &= \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2} (\phi_1 - v_1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2} (\phi_2 - v_2)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} (\phi_1 - v_1)(\phi_2 - v_2), \end{aligned} \quad (2.824)$$

όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται προφανώς στα  $\phi_1 = v_1, \phi_2 = v_2$ . Ορίζοντας τώρα:

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - v_1), \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 - v_2), \quad (2.825)$$

η (2.824) γίνεται:

$$\mathcal{L}_{12}^{quad} = \partial_\mu \tilde{\phi}_1 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \partial_\mu \tilde{\phi}_2 \partial^\mu \tilde{\phi}_2 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 & \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix} M^{sq} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.826)$$

όπου ο πίνακας των τετραγωνικών μαζών  $M^{sq}$  είναι:

$$M^{sq} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V''_{11} & V''_{12} \\ V''_{21} & V''_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } V''_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}(v_1, v_2). \quad (2.827)$$

Ο πίνακας  $M^{sq}$  είναι πραγματικός και συμμετρικός, συνεπώς μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.828)$$

Επομένως, αν οι ιδιοτιμές του  $M^{sq}$  είναι  $m_1, m_2$ , η (2.826) γίνεται στη νέα βάση:

$$\mathcal{L}_{12}^{quad} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_+ \partial^\mu \phi_+ + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_- \partial^\mu \phi_- - \frac{1}{2} \phi_+^2 m_+^2 - \frac{1}{2} \phi_-^2 m_-^2, \quad (2.829)$$

από την οποία έπεται ότι  $m_+^2, m_-^2$  είναι οι μάζες των πεδίων  $\phi_+, \phi_-$ .

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία στο ζευγάρι των πεδίων  $ImH_u^0, ImH_d^0$ . Το κομμάτι του βαθμωτού δυναμικού της (2.796) που εμπλέκει το ζευγάρι αυτό των πεδίων είναι:

$$\begin{aligned} V_A &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) (ImH_u^0)^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) (ImH_d^0)^2 + 2b (ImH_u^0) (ImH_d^0) \\ &\quad + \frac{g^2 + g'^2}{8} \left[ (ReH_u^0)^2 + (ImH_u^0)^2 - (ReH_d^0)^2 - (ImH_d^0)^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (2.830)$$

Υπολογίζουμε τις δεύτερες παραγώγους του παραπάνω δυναμικού για να βρούμε τα στοιχεία πίνακα του  $M^{sq}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{sq} &= \frac{1}{2} V''_{A11} = \frac{\partial^2 V_{A11}}{\partial (Im H_u^0)^2} \bigg|_{\substack{|H_d^0|=v_d \\ |H_u^0|=v_u}} = |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_u^2 - v_d^2) \stackrel{(2.804)}{=} b \cot \beta \\
 M_{22}^{sq} &= \frac{1}{2} V''_{A22} = \frac{\partial^2 V_{A22}}{\partial (Im H_u^0)^2} \bigg|_{\substack{|H_d^0|=v_d \\ |H_u^0|=v_u}} = |\mu|^2 + m_{H_d}^2 + \frac{g^2 - g'^2}{4} (v_u^2 - v_d^2) \stackrel{(2.804)}{=} b \tan \beta \\
 M_{12}^{sq} &= M_{21}^{sq} = \frac{1}{2} V''_{12} = \frac{\partial^2 V_{A12}}{\partial (Im H_u^0) \partial (Im H_d^0)} \bigg|_{\substack{|H_d^0|=v_d \\ |H_u^0|=v_u}} = b.
 \end{aligned} \tag{2.831}$$

Επομένως, ο  $M^{sq}$  θα είναι ο:

$$M^{sq} = \begin{pmatrix} b \cot \beta & b \\ b & b \tan \beta \end{pmatrix}, \tag{2.832}$$

και θα πρέπει να διαγωνοποιηθεί. Για να γίνει αυτό, είτε μπορούμε να βρούμε έναν ορθογώνιο πίνακα όπως υπαγορεύει η πιλοτική διαδικασία, είτε κατά τα γνωστά, να βρούμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Για συντομία θα επιλέξουμε τον δεύτερο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 \Delta(t) &= t^2 - \text{Tr}(M^{sq}) + |M^{sq}| \\
 &= t^2 - b(\cot \beta + \tan \beta)t + (b \cot \beta b \tan \beta - b^2) = 0 \\
 \Rightarrow t_1 &\equiv m_+^2 = 0 \quad \text{ή} \quad t_2 \equiv m_-^2 = \frac{2b}{\sin 2\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.833}$$

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τις καταστάσεις (ιδιοδιανύσματα), έχουμε:

$$(M^{sq} - t_i I) v_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} M^{sq} v_1 = t_1 I v_1 \\ M^{sq} v_2 = t_2 I v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} b \cot \beta & b \\ b & b \tan \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x \\ 0y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b \cot \beta & b \\ b & b \tan \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{\sin 2\beta} w \\ \frac{2b}{\sin 2\beta} z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Συνεπώς, τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα θα είναι τα:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \tag{2.834}$$

ο πίνακας ομοιότητας  $P$  θα είναι ο:

$$P = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix}, \tag{2.835}$$

και αντίστοιχα ο αντίστροφος του  $P$  θα είναι :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (2.836)$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2.826), (2.825) (ή απλά από το γεγονός ότι ο  $M^{sq}$  γράφεται σαν  $PM P^{-1}$ ) παίρνουμε τις καταστάσεις :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} ImH_u^0 \\ ImH_d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta & -\cos \beta \\ \cos \beta & \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ImH_u^0 \\ ImH_d^0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \sqrt{2} [\sin \beta (ImH_u^0) - \cos \beta (ImH_d^0)] \\ \sqrt{2} [\cos \beta (ImH_u^0) + \sin \beta (ImH_d^0)] \end{cases} \quad (2.837)$$

Η πρώτη είναι η ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην άμαζη κατάσταση και μετατρέπεται στη διαμήκη συνιστώσα του  $Z^0$  και η δεύτερη αντιστοιχεί σε ένα βαθμωτό σωματίδιο  $A^0$  με μάζα

$$m_{A^0} = \left( \frac{2b}{\sin 2\beta} \right). \quad (2.838)$$

Λόγω των παραπάνω αποτελεσμάτων, στον παραμετρικό χώρο του τομέα Higgs, το ζευγάρι των παραμέτρων  $(b, \tan \beta)$  αντικαθίσταται από το ζευγάρι  $(m_{A^0}, \tan \beta)$ .

Ας περάσουμε τώρα να βρούμε τις φυσικές μάζες του φορτισμένου ζεύγους  $H_u^+, H_d^{-\dagger}$ . Στην περίπτωση αυτή το δυναμικό είναι το κομμάτι που αφορά το φορτισμένο ζεύγος της (2.793) και αντίστοιχα η λαγκραϊανή είναι :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ch}^{quad} = & (\partial_\mu H_u^+)^\dagger (\partial^\mu H_u^+) + (\partial_\mu H_d^-)^\dagger (\partial^\mu H_d^-) - \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial H_u^{+\dagger} \partial H_u^+} H_u^{+\dagger} H_u^+ \\ & - \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial H_d^{-\dagger} \partial H_d^-} H_d^{-\dagger} H_d^- - \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial H_u^+ \partial H_d^-} H_u^+ H_d^- - \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial H_u^{+\dagger} \partial H_d^{-\dagger}} H_u^{+\dagger} H_d^{-\dagger}, \end{aligned} \quad (2.839)$$

όπου προφανώς, οι παράγωγοι υπολογίζονται στα  $H_u^0 = v_u, H_d^0 = v_d, H_u^+ = H_d^- = 0$ . Μετονομάζουμε για ευκολία τα πεδία  $H_u^+ \equiv A, H_d^{-\dagger} \equiv B$ .

Οι όροι του δυναμικού της  $\mathcal{L}_{ch}^{quad}$  γράφονται κατά τα γνωστά :

$$\begin{pmatrix} H_u^{+\dagger} & H_d^- \end{pmatrix} M_{ch}^{sq} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_d^{-\dagger} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} A^\dagger & B^\dagger \end{pmatrix} M_{ch}^{sq} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (2.840)$$

όπου

$$M_{ch}^{sq} = \begin{pmatrix} M_{++}^{sq} & M_{+-}^{sq} \\ M_{-+}^{sq} & M_{--}^{sq} \end{pmatrix}. \quad (2.841)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τα στοιχεία του πίνακα  $M_{ch}^{sq}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial A \partial A^\dagger} &= \frac{\partial}{\partial A^\dagger} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A} = |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{g^2 + g'^2}{4} \frac{\partial}{\partial A^\dagger} (|A|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |B|^2) A^\dagger \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \frac{\partial}{\partial A^\dagger} (H_d^0 A^\dagger + B^\dagger H_u^0) H_d^{0\dagger} \\
&= |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{g^2 + g'^2}{4} \frac{\partial}{\partial A^\dagger} (|A|^2 + |H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |B|^2) \\
&\quad + \frac{g^2 + g'^2}{4} A^\dagger A + \frac{g^2}{2} H_d^{0\dagger} H_d^0 \Big|_{\substack{H_u^+ = H_d^- = 0 \\ H_{u,d}^0 = v_{u,d}}} \\
&= |\mu|^2 + m_{H_u}^2 + \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_u^2 - v_d^2) + \frac{g^2 v_d^2}{2} = b \cot \beta + \frac{g^2 v_d^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.842}$$

Ανάλογα προκύπτουν και τα υπόλοιπα στοιχεία πίνακα:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial B \partial B^\dagger} &= b \tan \beta + \frac{g^2 v_u^2}{2}, \\
\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial A \partial B^\dagger} &= \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial A^\dagger \partial B} = b + \frac{g^2}{2} v_u v_d.
\end{aligned} \tag{2.843}$$

Επομένως, ο πίνακας  $M_{ch}^{sq}$  θα είναι ο:

$$M_{sq}^{ch} = \begin{pmatrix} b \cot \beta + \frac{g^2 v_d^2}{2} & b + \frac{g^2 v_u v_d}{2} \\ b + \frac{g^2 v_u v_d}{2} & b \tan \beta + \frac{g^2 v_u^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.844}$$

Βρίσκοντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του παραπάνω πίνακα παίρνουμε τις ιδιοτιμές του, που είναι οι:

$$t_1 = 0 \quad \text{και} \quad t_2 = m_W^2 + m_{A^0}^2. \tag{2.845}$$

Έπειτα βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα και από αυτά τις ιδιοσυναρτήσεις, που συνθέτουν τον πίνακα ομοιότητας, με τη βοήθεια του οποίου βρίσκουμε τις ιδιοκαταστάσεις:

$$G^+ = \sin \beta H_u^+ - \cos \beta H_d^{-\dagger}, \quad \text{και} \quad H^+ = \cos \beta H_u^+ + \sin \beta H_d^{-\dagger}. \tag{2.846}$$

Η ιδιοκατάσταση  $G^+$  αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή, άρα πρόκειται για την άμαξη κατάσταση και δίνει τη διαμήκη συνιστώσα στο  $W^+$  μποζόνιο. Η ιδιοκατάσταση  $H^+$  αντιστοιχεί στη μη μηδενική ιδιοτιμή,  $m_{H^+} = (m_W^2 + m_{A^0}^2)^{1/2}$ . Η λαγκρατζιανή της (2.839) μετά τη διαγωνοποίηση θα γίνει:

$$(\partial_\mu G^+)^\dagger (\partial^\mu G^+) + (\partial_\mu H^+)^\dagger (\partial^\mu H^+) - m_{H^+}^2 H^{+\dagger} H^+. \tag{2.847}$$

Παρατηρούμε (αν πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης του  $H^+$ ) ότι το  $m_{H^+}^2$  ταυτοποιείται σωστά με τη φυσική τετραγωνική μάζα χωρίς τους παράγοντες  $1/2$  που παρουσιάστηκαν στην πιλοτική περίπτωση.

Επίσης παίρνοντας το ζευγάρι  $(H_u^\dagger, H_d^-)$  βρίσκουμε παρόμοιες καταστάσεις με τις παραπάνω:

$$G^- \equiv (G^+)^\dagger \quad \text{και} \quad H^- \equiv (H^+)^\dagger. \quad (2.848)$$

Η πρώτη είναι άμαζη και απορροφάται από το  $W^-$  ενώ η δεύτερη έχει ίδια μάζα με την  $H^+$ .

Προς το παρόν έχουμε δει τι συμβαίνει με τα έξι από τα οχτώ πεδία Higgs του MSSM. Τα τρία άμαζα απορροφήθηκαν από τα διανυσματικά μποζόνια  $W^\pm, Z^0$  ενώ τα υπόλοιπα τρία απέκτησαν μάζα και είναι φυσικά βαθμωτά πεδία.

Τέλος, πρέπει να θεωρήσουμε το τελευταίο ζευγάρι,  $(ReH_u^0 - v_u, ReH_d^0 - v_d)$ , το οποίο είναι παρόμοιο με το  $ImH_u^0, ImH_d^0$  που είδαμε πρώτο. Κατά τα γνωστά, ο πίνακας τετραγωνικών μαζών είναι ο:

$$M_{h,H}^{sq} = \begin{pmatrix} b \cot \beta + m_Z^2 \sin^2 \beta & -b - (m_Z^2 \sin 2\beta)/2 \\ -b - (m_Z^2 \sin 2\beta)/2 & b \tan \beta + m_Z^2 \cos^2 \beta \end{pmatrix}, \quad (2.849)$$

ο οποίος έχει ιδιοτιμές:

$$m_{h^0}^2 = \frac{1}{2} \left\{ m_{A^0}^2 + m_Z^2 - [(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_{A^0}^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta]^{1/2} \right\}, \quad (2.850)$$

$$m_{H^0}^2 = \frac{1}{2} \left\{ m_{A^0}^2 + m_Z^2 + [(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_{A^0}^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta]^{1/2} \right\}. \quad (2.851)$$

Στις ιδιοτιμές αυτές φαίνεται η εξάρτηση των  $m_{h^0}, m_{H^0}$  από τις παραμέτρους  $m_{A^0}, \beta$ . Οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις θα βρεθούν στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου.

Το κρίσιμο σημείο στο οποίο πρέπει να εστιάσουμε είναι ότι παρ' όλο που στις μάζες  $m_{A^0}, m_{H^0}, m_{H^\pm}$  δεν έχουμε κάποιον περιορισμό (όλες εξαρτώνται από το  $b/\sin \beta$  το οποίο μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές), η μάζα  $m_{h^0}$  είναι περιορισμένη από πάνω. Γράφουμε για ευκολία  $x = m_{A^0}^2, a = m_Z^2$ , επομένως η (2.850) γίνεται:

$$m_{h^0}^2 = \frac{1}{2} \left\{ x + a - [(x + a)^2 - 4ax \cos^2 2\beta]^{1/2} \right\}. \quad (2.852)$$

Βλέπουμε ότι για πεπερασμένες τιμές του  $x$ , η συνάρτηση αυτή δεν έχει στάσιμα σημεία. Όμως, για μικρά  $x$ , βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (x + a) - (x + a) \sqrt{1 - \frac{4ax \cos^2 2\beta}{(x + a)^2}} \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \left[ (x + a) - (x + a) \left( 1 - \frac{2ax \cos^2 2\beta}{(x + a)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{2ax \cos^2 2\beta}{x + a} \approx \frac{ax \cos^2 2\beta}{a} = x \cos^2 2\beta, \end{aligned} \quad (2.853)$$

και για μεγάλα  $x$  βρίσκουμε ότι :

$$m_{h^0}^2 \rightarrow a \cos^2 2\beta - \frac{a^2}{4x} \sin^2 4\beta. \quad (2.854)$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή του  $m_{h^0}^2$ , για  $x = m_{A^0}^2$  είναι το  $\cos^2 2\beta$ , συνεπώς :

$$m_{h^0} \leq m_z |\cos 2\beta| \leq m_Z. \quad (2.855)$$

Παρατηρούμε ότι το  $|\cos 2\beta|$  εξαφανίζεται όταν  $\tan \beta = 1$  ( $\beta = \pi/4$ ), και μεγιστοποιείται για μικρό ή μεγάλο  $\tan \beta$ , ( $\beta \approx 0, \pi/2$ ).

Στην (2.855) δίνεται λοιπόν το πολυπόθητο άνω όριο για ένα ουδέτερο πεδίο Higgs, ότι δηλαδή δεν μπορεί να ξεπεράσει τη μάζα του μποζονίου  $Z^0$ . Βέβαια, το όριο αυτό που δίνει το MSSM δεν αποτελεί μία εύστοχη πρόβλεψη, συγκρίνοντας με τα πειραματικά δεδομένα.

Ευτυχώς -για την επιβίωση του MSSM - η tree-level φόρμουλα που αναπτύξαμε παραπάνω για τον υπολογισμό των μαζών επιδέχεται σημαντικές διορθώσεις ενός βρόχου, ειδικά στην περίπτωση του  $h^0$  όπου η μάζα μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά ένα σημαντικό ποσό. Μία σημαντική συνεισφορά στο  $m_{h^0}^2$  προκύπτει από την ατελή ακύρωση των βρόχων του top κουάρκ και των stop κουάρκ (η ακύρωση είναι τέλεια στην περίπτωση της άσπαστης υπερσυμμετρίας). Αν για λόγους απλότητας αμελήσουμε τους όρους ανάμιξης (δηλαδή μηδενίσουμε τα μη διαγώνια στοιχεία του αντίστοιχου πίνακα τετραγωνικών μαζών), τότε, η συνεισφορά αυτή και μόνο τροποποιεί το (2.855):

$$m_{h^0}^2 \leq m_Z^2 + \frac{3m_t^4}{2\pi^2(v_u^2 + v_d^2)} \ln \left( \frac{m_S}{m_t} \right), \quad (2.856)$$

όπου  $m_t$  είναι η μάζα του top κουάρκ και  $m_S$  είναι η μέση τιμή των τετραγώνων των μαζών των δύο top squarks. Για να πάρουμε μία ιδέα για το πόσο μετατοπίζεται το όριο, θέτουμε  $m_S = 500 GeV, m_t = 174 GeV = (v_u^2 + v_d^2)$ . Έτσι, το τροποποιημένο όριο δίνει :

$$m_{h^0}^2 \leq m_Z^2 + (70 GeV)^2 = (115 GeV)^2. \quad (2.857)$$

Βλέπουμε ότι για αυτή την a priori μεγάλη τιμή των μαζών των top squarks, το άνω όριο για τη μάζα του  $h^0$  αυξήθηκε αρκετά.

Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το  $m_{h^0}^2$  στο MSSM θέτοντας τον περιορισμό  $m_S \leq 2TeV$ . Συμπεριλαμβανομένων λοιπόν ακόμα και 2-βρόχων (leading) συνεισφορών παίρνοντας  $m_S = 2TeV$  και  $m_t = 179.4 GeV$ , βρίσκεται το σενάριο της μέγιστης τιμής  $m_{h^0}$  και προβλέπεται ότι :

$$m_{h^0} \leq 140 GeV. \quad (2.858)$$

Αυτό είναι αρκετά σημαντικό αποτέλεσμα και σύμφωνα με τον Drees αν το πείραμα αποτύχει να βρει έστω ένα πεδίο Higgs στην περιοχή αυτή, τότε το MSSM μπορεί να αποκλειστεί πλήρως.

### 2.10.3 Tree-level συζεύξεις των ουδέτερων Higgs μποζονίων με τα σωματίδια του SM

Η συζήτηση που προηγήθηκε αφορούσε αποκλειστικά τις παραμέτρους των μαζών των σωματιδίων Higgs του MSSM. Η φαινομενολογία όμως του τομέα Higgs εξαρτάται και από τις συζεύξεις τους σε διαδικασίες παραγωγής και διάσπασης. Στο κομμάτι αυτό θα εξαγάγουμε τις πιο σημαντικές συζεύξεις των ουδέτερων Higgs καταστάσεων  $h^0, H^0, A^0$ .

Πρωτίστως, σημειώνουμε ότι μετά τη μετατροπή στη βάση όπου οι πίνακες μάζας είναι διαγώνιοι, η σχέση (2.719) (και παρομοίως για τα  $m_{dij}, m_{eij}$ ) γίνεται:

$$m_{u,c,t} = v_u y_{u,c,t}, \quad m_{d,s,b} = v_d y_{d,s,b}, \quad m_{e,\mu,\tau} = v_d y_{e,\mu,\tau}. \quad (2.859)$$

Στη βάση αυτή, οι συζεύξεις Yukawa στο superpotential είναι (κάνοντας χρήση της (2.810)<sup>38</sup>):

$$\begin{aligned} y_{u,c,t} &= \frac{m_{u,c,t}}{v_u} = \frac{g m_{u,c,t}}{\sqrt{2} m_W \sin \beta}, \\ y_{d,s,b} &= \frac{m_{d,s,b}}{v_d} = \frac{g m_{d,s,b}}{\sqrt{2} m_W \cos \beta}, \\ y_{e,\mu,\tau} &= \frac{m_{e,\mu,\tau}}{v_d} = \frac{g m_{e,\mu,\tau}}{\sqrt{2} m_W \cos \beta}. \end{aligned} \quad (2.860)$$

Για να βρούμε λοιπόν τις συζεύξεις των ουδέτερων πεδίων Higgs του MSSM με τα φερμιόνια, επιστρέφουμε στην (2.718) (μαζί με τις ανάλογες για τις  $y_d^{ij}, y_e^{ij}$ ) και αναπτύσσουμε κατά τα γνωστά τα  $H_u^0, H_d^0$  γύρω από τις αναμενόμενες τιμές τους. Για να πάρουμε το αποτέλεσμα σε όρους των φυσικών πεδίων  $h^0, H^0$ , θα πρέπει να ξέρουμε πως αυτά σχετίζονται με τα  $ReH_u^0, ReH_d^0$ , δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις των ιδιοκαταστάσεων που βρήκαμε από τον πίνακα τετραγωνικών μαζών  $M_{h,H}^{sq}$  της (2.849), που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $m_{h^0}^2, m_{H^0}^2$  των (2.850), (2.851):

$$M_{h,H}^{sq} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + Bc & -As \\ -As & A - Bc \end{pmatrix}, \quad (2.861)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει για ευκολία  $A = (m_{A^0}^2 + m_Z^2), B = (m_{A^0}^2 - m_Z^2), c = \cos 2\beta, s = \sin 2\beta$  και χρησιμοποιήσαμε επίσης την (2.838). Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $M_{h,H}^{sq}$  είναι τα:

<sup>38</sup>Την οποία επιλύουμε ως προς  $v_u$ :

$$\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{g^2}{2} (v_u^2 + v_d^2) \Rightarrow \frac{2m_W}{g^2} = v_u + \frac{v_u}{\tan \beta} \Rightarrow \\ v_u^2 \frac{1 + \tan^2 \beta}{\tan^2 \beta} &= \frac{2m_W^2}{g^2} \Rightarrow v_u^2 \frac{1}{\sin^2 \beta} = \frac{2m_W^2}{g^2} \Rightarrow v_u = \sqrt{2} \frac{m_W \sin \beta}{g} \end{aligned}$$

$$(M^{sq} - t_i I)v_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} M^{sq}v_1 = t_1 I v_1 \\ M^{sq}v_2 = t_2 I v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} b \cot \beta & b \\ b & b \tan \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x \\ 0y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b \cot \beta & b \\ b & b \tan \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{\sin 2\beta} w \\ \frac{2b}{\sin 2\beta} z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Συνεπώς, τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα θα είναι:

$$v_h = \begin{pmatrix} \sin a \\ -\cos a \end{pmatrix}, \quad v_H = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}, \quad (2.862)$$

με ιδιοτιμές  $m_{h^0}^2, m_{H^0}^2$  αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$m_{h^0}^2 = \frac{1}{2}(A - C), \quad m_{H^0}^2 = \frac{1}{2}(A + C), \quad (2.863)$$

με  $[A^2 - (A^2 - B^2)c^2]^{1/2}$ . Η εξίσωση ιδιοτιμών που καθορίζει το  $v_h$  είναι:

$$\begin{pmatrix} A + Bc & -As \\ -As & A - Bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin a \\ -\cos a \end{pmatrix} = (A - C) \begin{pmatrix} \sin a \\ -\cos a \end{pmatrix}. \quad (2.864)$$

Από αυτήν παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$$(C + Bc) \cos a = -As \sin a, \quad (2.865)$$

$$(-C + Bc) \sin a = As \cos a. \quad (2.866)$$

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις αυτές σε πιο βολική μορφή. Πολλαπλασιάζοντας την (2.865) με το  $\sin a$  και την (2.866) με το  $\cos a$ , κι έπειτα αφαιρώντας τα αποτελέσματα, παίρνουμε:

$$\begin{cases} (C + Bc) \cos a \sin a = -As \sin^2 a \\ (-C + Bc) \sin a \cos a = As \cos^2 a \end{cases} \xrightarrow{(-)} \sin 2a = -\frac{As}{C} = -\frac{m_{A^0}^2 + m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2} \sin 2\beta. \quad (2.867)$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την (2.865) με το  $\cos a$  και την (2.866) με το  $\sin a$ , κι έπειτα προσθέτοντας τα αποτελέσματα, παίρνουμε:

$$\begin{cases} (C + Bc) \cos^2 a = -As \sin a \cos a \\ (-C + Bc) \sin^2 a = As \sin a \cos a \end{cases} \xrightarrow{(-)} \cos 2a = -\frac{Bc}{C} = -\frac{m_{A^0}^2 - m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2} \cos 2\beta. \quad (2.868)$$

Από τις (2.867), (2.868) καταλαβαίνουμε ότι για τη γωνία ανάμιξης  $a$  ισχύει  $-\pi/2 \leq a \leq 0$ .



Οι φυσικές καταστάσεις θα είναι:

$$\begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ReH_u^0 - v_u \\ ReH_d^0 - v_d \end{pmatrix}, \quad (2.869)$$

ή αλλιώς

$$ReH_u^0 = \left[ v_u + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos ah^0 + \sin aH^0) \right] \quad (2.870)$$

$$ReH_d^0 = \left[ v_d + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin ah^0 + \cos aH^0) \right]. \quad (2.871)$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε αυτό που ζητούσαμε από την αρχή, να γράψουμε τα  $ReH_u^0, ReH_d^0$  σε όρους των φυσικών πεδίων  $h^0, H^0$ , με σκοπό να βρούμε τις Yukawa αλληλεπιδράσεις, δηλαδή τις συζεύξεις των ουδέτερων μποζονίων Higgs με τα φερμιόνια του μοντέλου μας.

Παρομοίως, για το ζευγάρι  $(ImH_u^0, ImH_d^0)$ , μέσω των (2.837), έχουμε:

$$ImH_u^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \beta H_Z + \cos \beta A^0), \quad (2.872)$$

$$ImH_d^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \beta H_Z + \sin \beta A^0), \quad (2.873)$$

όπου  $H_Z$  είναι το άμαζο πεδίο που απορροφάται από το μποζόνιο  $Z^0$ .

Είμαστε λοιπόν σε θέση να πάρουμε τις συζεύξεις Yukawa. Για παράδειγμα, η σύζευξη Yukawa της (2.718):

$$-y_t^{ij} (\chi_{\bar{u}Li} \cdot \chi_{uLj}) H_u^0 + h.c. \quad (2.874)$$

για την περίπτωση της τρίτης γενιάς λεπτονίων θα είναι:

$$-y_t \left[ \chi_{\bar{t}L} \cdot \chi_{tL} (ReH_u^0 + iImH_u^0) + \chi_{\bar{t}L}^\dagger \cdot \chi_{tL}^\dagger (ReH_u^0 - iImH_u^0) \right]. \quad (2.875)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την έκφραση (2.870) για το  $ReH_u^0$  και παίρνουμε έναν όρο ανάλογο του  $v_u$ , ο οποίος προφανώς είναι ένας όρος μάζας Dirac -όπως αυτός της (2.719)- και

$$\begin{aligned} & -\frac{m_t}{\sqrt{2}} \left( \chi_{\bar{t}L} \cdot \chi_{tL} + \chi_{\bar{t}L}^\dagger \cdot \chi_{tL}^\dagger \right) (\cos ah^0 + \sin aH^0) \\ & = -\left( \frac{gm_t}{2m_W} \right) \bar{\Psi}_t \Psi_t \left( \frac{\cos a}{\sin \beta} h^0 + \frac{\sin a}{\sin \beta} H^0 \right), \end{aligned} \quad (2.876)$$

όπου, από την (2.168),  $\bar{\Psi}_t \Psi_t$  είναι το 4-συνιστωσών διγραμμικό Dirac. Η αντίστοιχη έκφραση στο SM θα ήταν απλά:

$$-\frac{gm_t}{2m_W} \bar{\Psi}_t \Psi_t H_{SM}, \quad (2.877)$$

όπου  $H_{SM}$  είναι το μποζόνιο Higgs του SM. Η (2.876) δείχνει λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο η σύζευξη Yukawa του SM τροποποιείται στο MSSM . Παρομοίως λοιπόν η αντίστοιχη σύζευξη για το  $b$ -κουάρκ είναι:

$$-\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\bar{\Psi}_b\Psi_b\left(-\frac{\sin a}{\cos\beta}h^0+\frac{\cos a}{\cos\beta}H^0\right), \quad (2.878)$$

ενώ η ίδια σύζευξη στο SM είναι:

$$-\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\bar{\Psi}_b\Psi_bH_{SM}. \quad (2.879)$$

Επίσης, η σύζευξη του  $\tau$ -λεπτονίου έχει την ίδια μορφή με αυτήν του  $b$ -κουάρκ, με την προφανή αντικατάσταση του  $m_b$  με το  $m_\tau$ .

Τέλος, μπορούμε να πάρουμε την  $t - A^0$  σύζευξη η οποία προκύπτει αντικαθιστώντας την (2.872) στην (2.875) -και χρησιμοποιώντας την (2.713)- με αποτέλεσμα:

$$-i\frac{m_t}{v_u}\left(\chi_{tL}\cdot\chi_{tL}-\chi_{tL}^\dagger\cdot\chi_{tL}^\dagger\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta A^0=i\left(\frac{gm_t}{2m_W}\right)\cot\beta\bar{\Psi}_t\gamma_5\Psi_tA^0 \quad (2.880)$$

και παρομοίως για την  $b - A^0$  σύζευξη:

$$i\left(\frac{gm_b}{2m_W}\right)\tan\beta\bar{\Psi}_b\gamma_5\Psi_bA^0. \quad (2.881)$$

Επίσης, η σύζευξη  $\tau - A^0$  είναι η ίδια με την (2.881), με αντικατάσταση του  $m_b$  με το  $m_\tau$ .

Η  $\gamma_5$  σύζευξη δείχνει ότι το  $A^0$  είναι ψευδοβαθμωτή ποσότητα ενώ οι προηγούμενες συζεύξεις δείχνουν ότι τα  $h^0, H^0$  είναι βαθμωτά.

Δείξαμε λοιπόν πως διαμορφώνονται οι συζεύξεις των βαθμωτών πεδίων με τα φερμιόνια στο πλαίσιο του MSSM . Τώρα θα περάσουμε να εξετάσουμε ποιες είναι οι συζεύξεις των ουδέτερων βαθμωτών Higgs με τα διανυσματικά μποζόνια του SM . Οι συζεύξεις αυτές καθορίζονται από την  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  αναλλοιώτητα βαθμίδας, δηλαδή από τους όρους της (2.805) με τη συναλλοιώτη παράγωγο να δίνεται από την (2.806). Οι όροι που εμπεριέχουν τα  $W_\mu^1, W_\mu^2, ReH_u^0, ReH_d^0$  είναι οι:

$$\frac{g^2}{4}\left(W_\mu^1W^{1\mu}+W_\mu^2W^{2\mu}\right)\left[\left(ReH_u^0\right)^2+\left(ReH_d^0\right)^2\right]. \quad (2.882)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.870), (2.871), τα  $v_u, v_d$  μέρη παράγουν τη μάζα του  $W$ -μποζονίου, (2.810). Οι τρι-γραμμικές συζεύξεις  $W - W - (h^0, H^0)$  προκύπτουν αν ένα από τα ουδέτερα πεδία Higgs αντικατασταθεί από το VEV του:

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{4} (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \sqrt{2} [v_u (\cos ah^0 + \sin aH^0) + v_d (-\sin ah^0 + \cos aH^0)] \\ & = \frac{gm_W}{2} (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) [\sin(\beta - a)h^0 + \cos(\beta - a)H^0] . \end{aligned} \quad (2.883)$$

Παρομοίως, οι τριγραμμικές  $Z - Z - (h^0, H^0)$  συζεύξεις θα είναι:

$$\frac{gm_Z}{2 \cos \theta_W} Z - \mu Z^\mu [\sin(\beta - \alpha)h^0 + \cos(\beta - \alpha)H^0] . \quad (2.884)$$

Υπάρχουν επίσης και τέτρα-γραμμικές συζεύξεις οι οποίες παράγονται όταν και τα δύο ουδέτερα πεδία Higgs ποικίλουν.

$$\frac{1}{8} [g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + (g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W)^2 Z_\mu Z^\mu] (h^{02} + H^{02} + A^{02}) . \quad (2.885)$$

Τέλος, υπάρχουν και τρι-γραμμικές συζεύξεις ανάμεσα στο  $Z^0$  και τα ουδέτερα Higgs πεδία, όπου συμπεριλαμβάνονται και παράγωγοι των τελευταίων:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) \times \\ & [\cos(a - \beta) (A^0 \partial^\mu h^0 - h^0 \partial^\mu A^0) - \sin(a - \beta) (H^0 \partial^\mu A^0 - A^0 \partial^\mu H^0)] . \end{aligned} \quad (2.886)$$

Βλέπουμε ότι συζεύξεις του  $Z^0$  με τα  $h^0 h^0$ ,  $H^0 H^0$  και  $h^0 H^0$  απουσιάζουν λόγω της  $CP$ -αναλλοιωτότητας του τομέα Higgs . Η  $CP$  επιτρέπει στο  $Z^0$  να συζευχθεί με ένα βαθμωτό και ένα ψευδοβαθμωτό μποζόνιο.

Καταλήξαμε λοιπόν να έχουμε τις αλληλεπιδράσεις των ουδέτερων μποζονίων Higgs με τα φερμιόνια του SM και με τα διανυσματικά πεδία της  $SU(2) \times U(1)$ . Έτσι, έχουμε αποκτήσει μία πλήρη εικόνα για τις αλληλεπιδράσεις των ουδέτερων βαθμωτών με τα σωματίδια του SM . Για να ολοκληρωθεί η διερεύνηση του τομέα Higgs απομένει να δοθούν οι συζεύξεις των ουδέτερων μποζονίων με τα υπερσυμμετρικά τάρια των SM σωματιδίων, στις οποίες όμως δε θα επεκταθούμε.

Είδαμε στο πρώτο μέρος της εργασίας ότι στο πλαίσιο του SM προβλέπεται ενοποίηση των αλληλεπιδράσεων, δηλαδή, μία μεγαλύτερη συμμετρία βαθμίδας η οποία μετά από αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας αναπαράγει το SM . Τώρα θα δούμε πως η υπερσυμμετρία επηρεάζει το μεγαλοενοποιημένο αυτό μοντέλο και πως μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας αναπαράγεται αυτή τη φορά το MSSM . Επίσης, θα δούμε πώς η εισαγωγή της υπερσυμμετρίας δίνει πολύ ευχάριστα αποτελέσματα-βελτιώσεις και καθιστά το  $SU(5)$  μοντέλο βιώσιμο.

## Κεφάλαιο 3

# Υπερσυμμετρικό $SU(5)$

### 3.1 Εισαγωγή

Ο κύριος λόγος για την υπερσυμμετρικοποίηση των μεγαλοενοποιημένων θεωριών είναι η λύση του gauge hierarchy προβλήματος. Έχουμε δει ότι συμβαίνει μία «μίτωση» στο σωματιδιακό φάσμα στις χαμηλές ενέργειες, με κάθε «γνωστό» σωματίδιο να έχει ένα υπερσυμμετρικό ταίρι με διαφορά στη μάζα  $\mathcal{O}(M_W)$ . Η παρουσία των σωματιδίων αυτών θα επηρεάσει το καθιερωμένο πρόγραμμα της μεγάλης ενοποίησης και υπάρχει κίνδυνος να το χαλάσει. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι επιτυχίες των μη υπερσυμμετρικών μοντέλων παραμένουν λίγο-πολύ άθικτες. Θα δούμε λοιπόν παρακάτω πως το πρόγραμμα της ενοποίησης τροποποιείται στην περίπτωση του  $SU(5)$ . Η προφανής αλλαγή είναι ότι το υπερσυμμετρικό  $SU(5)$  θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον το υπερσυμμετρικό  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  μοντέλο, δηλαδή, το MSSM.

#### 3.1.1 Σωματιδιακή ανάθεση

Για την κατασκευή της ελάχιστης υπερσυμμετρικής επέκτασης του  $SU(5)$ , το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να είναι η σωματιδιακή ανάθεση, δηλαδή η αναβάθμιση των  $SU(5)$  multiplets σε supermultiplets. Τα πεδία βαθμίδας πρέπει να ανατεθούν στην adjoint, 24, supermultiplet, καθώς επίσης και τα υπερσυμμετρικά τους ταίρια, gaugino. Τα κουάρκ και λεπτόνια επίσης ανατίθενται σε left-handed chiral supermultiplet και μετασχηματίζονται κάτω από την  $(\bar{5} \oplus 10)$  αναγωγίσιμη αναπαράσταση. Όπως και στην υπερσυμμετρική εκδοχή του SM -για το αυθόρμητο σπάσιμο της ηλεκτρασθενούς συμμετρίας- θα χρειαστούμε δύο διαφορετικά Higgs superfields. Οι δύο αυτές chiral supermultiplets μετασχηματίζονται κάτω από τις  $5, \bar{5}$  αναπαράσεις της  $SU(5)$ . Τέλος, απαραίτητη είναι η εισαγωγή μίας adjoint chiral supermultiplet,  $\phi$ , για να φιλοξενήσει τα βαθμωτά πεδία Higgs που σπάνε την  $SU(5)$  στην ομάδα του SM. Εκτός λοιπόν από το επιπρόσθετο Higgs superfield, όλα τα άλλα πεδία είναι απλά υπερσυμμετρικές επεκτάσεις των πεδίων που είναι ήδη παρόντα στο μη υπερσυμμετρικό  $SU(5)$  μοντέλο.

### 3.1.2 Σπάσιμο της συμμετρίας

Το επόμενο βήμα για την κατασκευή του μοντέλου είναι να δώσουμε το superpotential  $W(H_u, H_d, \phi, \Psi, \chi)$ . Το superpotential θα πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις:

- Να δίνει ρεαλιστικό σπάσιμο της  $SU(5)$  συμμετρίας στο MSSM και μετέπειτα στο  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$
- Να δίνει μάζα στα κουάρκ και λεπτόνια

Συνεπώς καταλαβαίνουμε ότι θα είναι της μορφής:

$$W = W_Y + W_G + W_u + W', \quad (3.1)$$

όπου:

- $W_Y = h_u^{ab} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\sigma} \chi_a^{\alpha\beta} \chi_b^{\gamma\delta} H^\sigma + h_d^{ab} \chi_a^{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\alpha\beta} \bar{H}_\beta$ , όπου  $a, b$  είναι δείκτες γενιάς. Το κομμάτι αυτό του superpotential είναι υπεύθυνο για την απόκτηση μάζας των φερμιονίων.
- $W_G = z \text{Tr} \phi + x \text{Tr} \phi^2 + y \text{Tr} \phi^3 + \lambda_1 (H \phi \bar{H} + M H \bar{H})$ . Το κομμάτι αυτό ευθύνεται για το σπάσιμο της συμμετρίας για την απόκτηση των ελαφρών Higgs διπλέτων κάτω από το  $M_U$ . Παρ'όλο που (όπως στη μη υπερσυμμετρική εκδοχή του μοντέλου)  $\text{Tr} \phi = 0$ , ο  $z$ -όρος προστέθηκε σαν ένας πολλαπλασιαστικός Lagrange για να αναδείξει τον περιορισμό αυτόν κατά την ελαχιστοποίηση του δυναμικού.
- $W_h$  είναι ο κρυφός τομέας του superpotential, ο οποίος ευθύνεται για το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας.
- $W'$  είναι το κομμάτι που περιέχει τους όρους που σπάνε την  $R$ -ομοτιμία.

Ψάχνουμε λοιπόν για την ακόλουθη αλυσίδα σπασίματος συμμετρίας:

$$SU(5) \times SUSY \xrightarrow{\langle \phi \rangle \neq 0} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times SUSY \quad (3.2)$$

Αφού ο στόχος μας είναι να κάνουμε τις παραμέτρους της λεπτής ρύθμισης φυσικές, αυτό σημαίνει ότι θα θέλαμε η υπερσυμμετρία να παραμένει άσπαστη ως την κλίμακα των ασθενών αλληλεπιδράσεων  $\sim m_W/g$ . Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους  $F$ -όρους και θα τους θέσουμε μηδέν. Συνεπώς:

$$\langle F_{\phi, \beta}^\alpha \rangle = z \delta_\beta^\alpha + 2x \phi_\beta^\alpha + 3y \phi_\gamma^\alpha \phi_\beta^\gamma. \quad (3.3)$$

Εφόσον  $\text{Tr} \langle F_\phi \rangle = 0$ , συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \langle F_\phi \rangle &= \text{Tr}(z \delta_\beta^\alpha) + \text{Tr}(2x \langle \phi_\beta^\alpha \rangle) + \text{Tr}(3y \langle \phi_\gamma^\alpha \phi_\beta^\gamma \rangle) = 0 \\ 5z + 2x0 + 3y \text{Tr} \langle \phi^2 \rangle &= 0 \\ z &= -\frac{3}{5} y \text{Tr} \langle \phi^2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Αν υποθέσουμε ότι  $diag\langle\phi\rangle = (a_1, a_2, a_3, s_4, a_5)$ , τότε παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\sum_i a_i = 0 \quad \text{και} \quad z + 2xa_i + 3ya_i^2 = 0, \quad \text{με} \quad i = 1 \dots 5. \quad (3.5)$$

Επομένως, έχουμε πέντε εξισώσεις και δύο παραμέτρους. Επομένως, υπάρχουν τρεις διαφορετικές επιλογές για τα  $a_i$  που μπορούν να λύσουν τις παραπάνω εξισώσεις. Αυτές είναι:

**Case A:**  $\langle\phi\rangle = 0$ . Πρόκειται για την τετριμμένη λύση. Στην περίπτωση αυτή η συμμετρία παραμένει άσπαστη καθώς το  $\phi$  δεν αποκτά μη μηδενικό VEV.

**Case B:**  $diag\langle\phi\rangle = (a, a, a, a, -4a)$ . Στην περίπτωση αυτή η  $SU(5)$  σπάει στην  $SU(4) \times U(1)$ . Επομένως, βρίσκουμε για το  $a$  (αφού  $\text{Tr}\langle\phi^2\rangle = 20a^2$ ):

$$\begin{aligned} z + 2xa^2 + 3ya^2 = 0 &\Rightarrow -\frac{3}{5}y\text{Tr}\langle\phi^2\rangle + 2xa + 3ya^2 = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{3}{5}y20a^2 + 2xa + 3ya^2 = 0 \Rightarrow -12ya^2 + 2xa + 3ya^2 \\ &\stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} a = \frac{2x}{9y}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Case C:**  $diag\langle\phi\rangle = \left(b, b, b, -\frac{3}{2}b, -\frac{3}{2}b\right)$ . Στην περίπτωση αυτή η  $SU(5)$  σπάει στην ομάδα του SM και άρα αυτό είναι το επιθυμητό κενό. Επομένως, βρίσκουμε για το  $a$  (αφού  $\text{Tr}\langle\phi^2\rangle = \frac{15}{2}a^2$ ):

$$\begin{aligned} z + 2xb^2 = 3yb^2 = 0 &\Rightarrow -\frac{3}{5}y\text{Tr}\langle\phi^2\rangle + 2xb + 3yb^2 = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{9}{2}yb^2 + 2xb + 3yb^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{4x}{3y}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

και επιλέγουμε τις παραμέτρους  $x$  να είναι της τάξης του  $M_U$ .

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι το  $W$  οδηγεί σε έναν τριπλό εκφυλισμό. Έναν που αντιστοιχεί στην (τετριμμένη) άσπαστη περίπτωση, έναν που αντιστοιχεί στην  $SU(4) \times U(1)$  και έναν που αντιστοιχεί στην  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Το γεγονός αυτό του εκφυλισμού δημιουργεί κοσμολογικά προβλήματα, αφού κατά την ψύξη του σύμπαντος κάτω από θερμοκρασία  $T \sim M_X/g$ , βρίσκει τρία εκφυλισμένα ελάχιστα συμπεριλαμβανομένου και του ενός στο οποίο βρίσκεται ήδη (το  $SU(5)$ ). Επομένως, αποτυγχάνουμε να κατανοήσουμε το γιατί κάτω από την  $SU(5)$  κλίμακα, η  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  είναι η συμμετρία της ηλεκτρασθενούς φυσικής στο μοντέλο αυτό. Πάλι, οι διορθώσεις ακτινοβολίας

δεν μπορούν να αλλάξουν την εικόνα αυτή λόγω του non-renormalization θεωρήματος. Αυτό είναι ένα πρώτο τμήμα που πληρώνουμε για την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας στο μεγαλοενοποιημένο μοντέλο του  $SU(5)$ . Το πρώτο ελάχιστο αποβάλλεται εύκολα με την εισαγωγή ενός singlet πεδίου  $X$  και ξαναγράφοντας το κομμάτι του superpotential  $W_G$  σαν:

$$W(\phi) = \lambda_2 X (\text{Tr} \phi^2 - \mu^2). \quad (3.8)$$

Παρ' όλα αυτά, δεν υπάρχει τρόπος να διαχωρίσουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις των ελαχίστων. Αυτό που τελικά δίνει τη λύση είναι η εισαγωγή supergravitational αλληλεπιδράσεων. Επίσης, σημαντική συνεισφορά ενδέχεται να προσδίδουν όροι που εξαρτώνται από τη θερμοκρασία και μπορεί να μεροληπτούν υπέρ κάποιου συγκεκριμένου ελάχιστου στα πρώτα στάδια μετά το big bang. Όπως και να χει, «κάπως», η συμμετρία του κενού είναι μοναδικά επιλεγμένη να είναι η  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  κάτω από την κλίμακα ενοποίησης.

### 3.1.3 Το φάσμα των χαμηλών ενεργειών και doublet-triplet splitting

Κατά πόσο όμως το MSSM αναδύεται κάτω από την κλίμακα ενοποίησης στο μοντέλο αυτό; Τα σωματίδια ύλης του MSSM βρίσκονται σε multiplets των  $\Psi(\bar{5})$  και  $\chi(10)$ . Το ερώτημα που παραμένει είναι αυτό των δύο Higgs superfields  $H_u, H_d$ . Αυτά πρέπει να αναδυθούν από τις  $H, \bar{H}$  multiplets. Γράφοντας  $H \equiv \begin{pmatrix} \zeta_u \\ H_u \end{pmatrix}$  και  $\bar{H} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_d \\ H_d \end{pmatrix}$  και αντικαθιστώντας στο  $W_G$  το  $\langle \phi \rangle$  της τρίτης περίπτωσης, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} W_G &= z \text{Tr} \phi + x \text{Tr} \phi^2 + y \text{Tr} \phi^3 + \lambda_1 (H \phi \bar{H} + M H \bar{H}) \Rightarrow \\ W_{eff} &= \lambda_1 H \phi \bar{H} + M H \bar{H} = \lambda_1 H \langle \phi \rangle \bar{H} + M H \bar{H} \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} \zeta_u & H_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b 1_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} b 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_d \\ H_d \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \zeta_u & H_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_d \\ H_d \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &= \lambda_1 b \zeta_u \bar{\zeta}_d + M \zeta_u \bar{\zeta}_d - \lambda_1 \frac{3}{2} b H_u H_d + M H_u H_d \\ &= \lambda_1 (b + M) \zeta_u \bar{\zeta}_d + \lambda_1 \left( -\frac{3}{2} b + M \right) H_u H_d. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Αν επιλέξουμε  $\frac{3}{2} b = M$ , τότε οι άμαζες διπλέτες του SM θα παραμένουν και κάθε άλλο σωματίδιο του  $SU(5)$  μοντέλου θα παίρνει μεγάλη μάζα. Προκαλεί αμηχανία το γεγονός ότι η προσαρμογή των παραμέτρων γίνεται με το χέρι και δεν προκύπτει με κάποιο φυσικό τρόπο. Η διαδικασία αυτή του διαχωρισμού των τριπλέτων χρώματος  $\zeta_{u,d}$  από τις  $SU(2)_L$  διπλέτες  $H_u, H_d$  ονομάζεται doublet-triplet splitting και είναι ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα σε όλες τις

μεγαλοενοποιημένες θεωρίες. Ένα πλεονέκτημα των υπερσυμμετρικών μεγαλοενοποιημένων θεωριών είναι ότι άπαξ και γίνει η λεπτή ρύθμιση στο tree-level, αυτό διατηρείται σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών, λόγω του non-renormalization theorem. Αυτό λύνει μερικώς το gauge hierarchy πρόβλημα. Αυτό είναι ένα βήμα εμπρός συγκριτικά με τις μη υπερσυμμετρικές μεγαλοενοποιημένες θεωρίες καθώς η ακύρωση ανάμεσα στα  $b, M$  θα πρέπει να γίνεται σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών. Μια πλήρως ικανοποιητική κατάσταση θα ήταν να προκύπτει φυσικά το doublet-triplet splitting λόγω της θεωρίας ομάδων ή της υποθόσκουσας δυναμικής. Τέλος, πρέπει να τονίσουμε ότι οι SUSY-breaking όροι που εισάγονται στο superpotential, για να κάνουν το μοντέλο φαινομενολογικά αποδεκτό, πρέπει οπωσδήποτε να σέβονται τη συμμετρία της  $SU(5)$ .

### 3.1.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης

Είναι πράγματι αξιοσημείωτο ότι στις υπερσυμμετρικές μεγαλοενοποιημένες θεωρίες η γενική επιτυχία των μη υπερσυμμετρικών μεγαλοενοποιημένων θεωριών παραμένει λίγο-πολύ αλώβητη. Ας δούμε λοιπόν τώρα πως αλλάζει το πρόγραμμα της ενοποίησης.

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, η υπερσυμμετρική μεγαλοενοποιημένη θεωρία θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον το MSSM. Η πληροφορία αυτή από μόνη της είναι αρκετή για να δώσει ένα είδος γενικής ανάλυσης. Είναι προφανές εξ αρχής ότι το σημείο της ενοποίησης θα πρέπει να ανέβει. Οι νέοι ελαφρείς βαθμοί ελευθερίας εμπλέκουν φερμιόνια και βαθμωτά, επομένως η συνεισφορά τους στις  $\beta$ -συναρτήσεις επιδρά έτσι ώστε να καθυστερεί η μεταβολή των διάφορων σταθερών σύζευξης ως προς την ενέργεια. Αξιοσημείωτα, η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης πέφτει πιο «απαλά», με αποτέλεσμα κι επομένως θα αργήσει ενεργειακά η συνάντηση όλων των σταθερών σύζευξης.

Πιο συγκεκριμένα, είχαμε δει στην περίπτωση του μη υπερσυμμετρικού  $SU(5)$ , ότι η  $\beta$ -συναρτήσεις για μία  $SU(N)$  ομάδα είναι:

$$b_N^{SM} = \frac{11}{3}N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s. \quad (3.10)$$

Όμως στο MSSM, η εξίσωση αυτή πρέπει να τροποποιηθεί έτσι ώστε για κάθε  $SU(N)$  τα πεδία βαθμίδας να συνοδεύονται από τα gauginos στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας. Οι συνεισφορές στο  $b_n$  είναι  $-\frac{2N}{3}$ . Επιπροσθέτως, πρέπει να συμπεριλάβουμε τα βαθμωτά ταίρια των κουάρκ και λεπτονίων, τα sfermions, τα οποία βρίσκονται στις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των ομάδων  $SU(2), SU(3)$ . Τέλος, δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι έχουμε δύο Higgs διπλέτες οι οποίες συνοδεύονται από δύο Higgsinos διπλέτες. Οι αλλαγές αυτές θα δώσουν λοιπόν:

$$b_N^{MSSM} = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s, \quad (3.11)$$



όπου  $n_f$  είναι ο αριθμός των φερμιονικών multiplets (μετρώντας τις δύο καταστάσεις χειραλικότητας ξεχωριστά),  $n_s$  είναι ο αριθμός των βαθμωτών μιγαδικών multiplets που συζεύγγονται με τα διανυσματικά μποζόνια. Συνεπώς, εφαρμόζουμε και βρίσκουμε τα  $b_3, b_2$ :

$b_3$  : Για  $N = 3$  δε συνεισφέρουν τα Higgs και Higgsinos, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} b_N &= 3N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s \Rightarrow \\ b_3 &= 3 \cdot 3 - \frac{1}{3}12 - \frac{1}{6}12 = 3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

$b_2$  : Για  $N = 2$  τα Higgs και Higgsinos συνεισφέρουν κανονικά με δύο διπλέτες έκαστα. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} b_N &= 3N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s \Rightarrow \\ b_2 &= 3 \cdot 2 - \frac{1}{3}14 - \frac{1}{6}14 = -1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Για το  $b_1$ , λόγω του ότι η  $U(1)$  είναι αβελιανή δεν υπακούει στην παραπάνω φόρμουλα. Στην περίπτωση του SM η  $b_1$  είναι:

$$b_1^{SM} = -\frac{2}{3} \sum_f Y_f^2 - \frac{1}{3} \sum_s Y_s^2 = -\frac{2}{3} \frac{3}{5} \sum_f y_f^2 - \frac{1}{3} \frac{3}{5} \sum_s y_s^2. \quad (3.14)$$

Για το  $b_1^{MSSM}$  δεν έχουμε συνεισφορά από διανυσματικά πεδία και από τα φερμιονικά τους ταίρια. Επομένως, η μορφή του  $b_1^{MSSM}$  είναι η ίδια με του  $b_1^{SM}$  μόνο που τώρα εκτός από φερμιόνια και τα βαθμωτά της θεωρίας, έχουμε συνεισφορά και από τα sfermions:

$$\begin{cases} b_1^{MSSM}(f, sf) = -6 \\ b_1^{MSSM}(H, \bar{H}) = -\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow b_1^{MSSM} = -\frac{33}{5}. \quad (3.15)$$

Επομένως, οι διαφορικές εξισώσεις των running coupling constants θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_3(\mu)} &= \frac{1}{a_{SG}} - \frac{1}{2\pi} b_3^{MSSM} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right) = \frac{1}{a_{SG}} - \frac{3}{2\pi} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right), \\ \frac{1}{a_2(\mu)} &= \frac{1}{a_{SG}} - \frac{1}{2\pi} b_2^{MSSM} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right) = \frac{1}{a_{SG}} + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right), \\ \frac{1}{a_1(\mu)} &= \frac{1}{a_{SG}} - \frac{1}{2\pi} b_1^{MSSM} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right) = \frac{1}{a_{SG}} - \frac{33}{10\pi} \ln \left( \frac{M_{SX}}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου,  $\mu \sim \mathcal{O}(M_W)$ ,  $a_{SG}$  είναι η σταθερά λεπτής υφής στην κλίμακα της ενοποίησης και, κατά τα γνωστά,  $a_i = \frac{g_i}{4\pi}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Εξαφανίζοντας από τις εξισώσεις αυτές τα  $a_{SG}$ ,  $\ln\left(\frac{M_{SX}}{\mu}\right)$ , παίρνουμε μία συνθήκη που συνδέει τις μετρούμενες ποσότητες  $a_i^{-1}(\mu)$  με τους υπολογισμένους θεωρητικά  $b_i$ :

$$\frac{a_3^{-1}(\mu) - a_2^{-1}(\mu)}{a_2^{-1}(\mu) - a_1^{-1}(\mu)} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}. \quad (3.17)$$

Ας ονομάσουμε την ποσότητα του αριστερού μέλους  $B_{exp}$ . Χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W(m_Z) &= 0.231, & a_3^{-1}(m_Z) &= 8.40, & a_{em}^{-1}(m_Z) &= 128, \\ a_2^{-1} &= a_{em}^{-1}(m_Z), & \sin^2 \theta_W(m_Z) &= 29.6, & a_1^{-1} &= 59.12, \end{aligned} \quad (3.18)$$

βρίσκουμε ότι  $B_{exp} = 0.72$ . Τώρα, ονομάζουμε το δεξιό μέλος της (3.17)  $B_{th}$  και βρίσκουμε ότι:

$$B_{th} = \frac{5}{7} = 0.714. \quad (3.19)$$

Συγκρίνοντας το θεωρητικό με το πειραματικό αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι έχουμε πολύ καλή συμφωνία. Η ίδια διαδικασία για τα  $b_i$  του SM δίνει  $B_{th}^{SM} = 0.528$ , το οποίο βρίσκεται σε κακή συμφωνία με το πείραμα.

Για ακόμη ακριβέστερους υπολογισμούς θα έπρεπε να είχαμε συνυπολογίσει στις  $\beta$ -συναρτήσεις με τις διορθώσεις δύο βρόχων. Επίσης, η υπερσυμμετρία πρέπει να είναι σπασμένη σε τάξη  $\sim 1TeV$  ή πιο κάτω, οπότε οι διαφορές στη μάζα ανάμεσα στα σωματίδια και τα υπερσυμμετρικά τους ταίρια θα οδηγούσαν σε διορθώσεις κατωφλίου. Ο Pokorski στην ανάλυσή του, καταλήγει ότι τα πειραματικά αποτελέσματα βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τις προβλέψεις του υπερσυμμετρικού  $SU(5)$ .

Φυσικά, κάποιος μπορεί να φτιάξει οσαδήποτε μοντέλα που να δίνουν το  $B_{exp}$ , αλλά δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι η πρόβλεψη  $B_{th}^{MSSM}$  είναι μία απλή συνέπεια του περιεχομένου των πεδίων του MSSM. Η συμφωνία με το πείραμα δεν ήταν εξασφαλισμένο ότι θα συμβεί, γεγονός που ενισχύει το σενάριο του υπερσυμμετρικοποιημένου καθιερωμένου προτύπου.

Επιστρέφοντας στις διαφορικές εξισώσεις (3.16), αν επαναλάβουμε τη διαδικασία που προηγήθηκε στο μη υπερσυμμετρικό  $SU(5)$  καταλήγουμε σε μία εξίσωση ανάλογη της (1.184), από την οποία παίρνουμε την κλίμακα ενοποίησης:

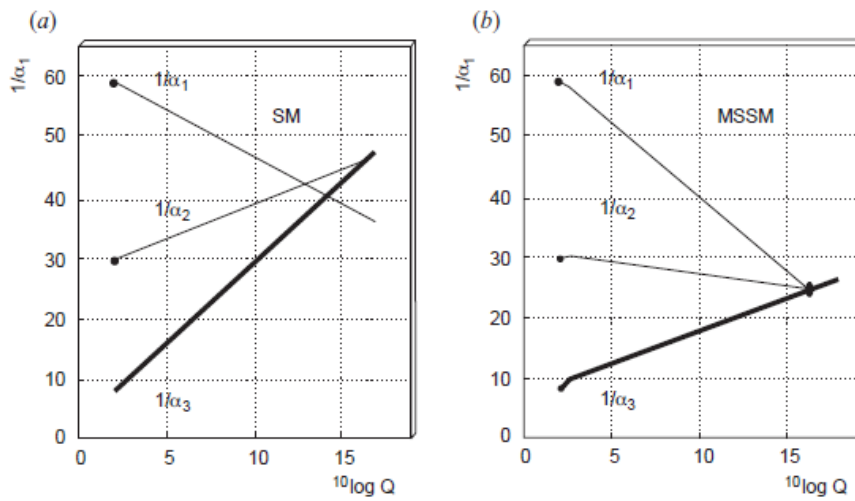
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{M_{SX}}{M_Z}\right) &= \frac{10\pi}{28} [a_1^{-1}(M_Z) - a_2^{-1}(M_Z)] \approx 33.1 \Rightarrow \\ M_{SX} &= 2.2 \cdot 10^{16} GeV. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο ενοποίησης έχει ανέβει όπως περιμέναμε συγκριτικά με την αντίστοιχη πρόβλεψη στο μη υπερσυμμετρικό μοντέλο,  $M_X =$

$4 \cdot 10^{14} GeV$ , (1.189). Επίσης, για τη γωνία Weinberg έχουμε:

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.236, \quad (3.21)$$

η οποία σε αντίθεση με την τιμή του μη υπερσυμμετρικού  $SU(5)$ , (1.189), είναι επίσης σε καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή. Οι εύστοχες προβλέψεις του υπερσυμμετρικού  $SU(5)$  -ουσιαστικά η πραγματική ενοποίηση των σταθερών σύζευξης- φαίνονται στην παρακάτω εικόνα, στην οποία αντιδιαστέλλουμε την αποτυχία του μη υπερσυμμετρικού μοντέλου να ενοποιήσει πραγματικά τις σταθερές σύζευξης:



Εικόνα 3.1: Η ενοποίηση των σταθερών σύζευξης στο υπερσυμμετρικό  $SU(5)$  και η αποτυχία του μη υπερσυμμετρικού μοντέλου.

Η επίτευξη της ενοποίησης των σταθερών σύζευξης είναι μία πρόβλεψη η οποία περιορίζει τη γενικότερη ιδέα της ενοποίησης αλλά και ενθαρρύνει την υποστήριξη της υπερσυμμετρίας.

### 3.1.5 Ο Yukawa τομέας του υπερσυμμετρικού $SU(5)$

Όπως είδαμε στο υποκεφάλαιο του σπασίματος της συμμετρίας, χτίσαμε το superpotential έτσι ώστε να ικανοποιεί δύο λειτουργίες. Η μία που μας αφορά στο σημείο αυτό είναι να δίνει μάζα στα κουάρκ και τα φορτισμένα λεπτόνια. Η διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται μέσω του όρου  $W_Y$  της (3.1), όταν τα πεδία Higgs που ανήκουν στις chiral supermultiplets  $\bar{5}, \bar{5}$ , αναπτύσσουν VEV (για την ακρίβεια η  $SU(2)$  συνιστώσα τους). Η  $\bar{5}_H$  δίνει μάζα στα φορτισμένα λεπτόνια και στα  $d$ -τύπου κουάρκ, ενώ η  $5_H$  στα  $up$ -τύπου κουάρκ. Το αντίστοιχο superpotential είναι:

$$W_Y = Y_{\bar{5}}^{ij} \bar{5}_F^i 10_F^j \bar{5}_H + Y_5^{ij} 10_F^i 10_F^j 5_H. \quad (3.22)$$

Αφού τα πεδία Higgs αναπτύξουν VEV, παίρνουμε:

$$M_d = M_e^T = Y_5^T \langle \bar{5}_H \rangle, \quad M_u = Y_5 \langle 5_H \rangle. \quad (3.23)$$

Σημειώνουμε ότι λόγω των ιδιοτήτων συμμετρίας του διγραμμικού  $10_F^i 10_F^j$ , οι  $up$ -τύπου κουάρκ συζευξεις Yukawa είναι συμμετρικές ως προς την εναλλαγή των δεικτών γενιάς, δηλαδή

$$M_u = M_u^T. \quad (3.24)$$

Κανένας από τους δύο περιορισμούς, (3.23), (3.24) δεν είναι παρών στο MSSM. Επομένως, υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι Yukawa πίνακες (ο ένας συμμετρικός). Από τη σχέση  $Y_d = Y_e^T$  παίρνουμε μία μη τετριμμένη πρόβλεψη, ότι οι  $d$ -τύπου μάζες είναι ίδιες με αυτές των φορτισμένων λεπτονίων. Στην περίπτωση της τρίτης γενιάς παίρνουμε ότι  $m_b = m_\tau$  στην κλίμακα των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{\left(\frac{m_b}{m_\tau}\right)_{SUSY}}{\left(\frac{m_b}{m_\tau}\right)_{ORD}} = 1. \quad (3.25)$$

Με άλλα λόγια βρήκαμε ότι το  $m_b/m_\tau$  βρίσκεται σε συμφωνία με το πείραμα αλλά και με την πρόβλεψη του μη υπερσυμμετρικού  $SU(5)$  - μία αρκετά ενδιαφέρουσα σύμπτωση. Η ισότητα λοιπόν  $m_b = m_\tau$  στην κλίμακα της ενοποίησης είναι ένα καλό αποτέλεσμα, σε αντίθεση με αυτά που παίρνουμε για τις δύο ελαφρύτερες γενιές. Αν θεωρήσουμε τις πειραματικές τιμές (ηλεκτρασθενή κλίμακα) σαν αρχικές συνθήκες στις RGE, τότε στην κλίμακα της ενοποίησης βρίσκουμε χονδρικά ότι  $m_d \approx 3m_e$  και  $m_\mu \approx 3m_s$ , πράγμα που σημαίνει ότι η πρόβλεψη του υπερσυμμετρικού  $SU(5)$   $m_d = m_e$  είναι αρκετά αυστηρή.

Επίσης, η σχέση ανάμεσα στις Yukawa couplings ισχύει για κάθε γενιά με αποτέλεσμα να παίρνουμε σχέσεις ανάμεσα στις φερμιονικές μάζες του τύπου

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_e}{m_\mu}. \quad (3.26)$$

Η σχέση αυτή δεν εξαρτάται από την ενεργειακή κλίμακα κι επομένως ισχύει και στην κλίμακα των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων, όμως βρίσκεται σε ασυμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα κατά έναν παράγοντα  $\sim 15$ . Αυτό είναι γενικά ένα μεγάλο πλήγμα για το  $SU(5)$  μοντέλο. Το πρόβλημα αυτό δεν αποτελεί κάποια θεμελιώδη δυσκολία ως προς την ευρύτερη ιδέα της μεγάλης ενοποίησης αλλά κυρίως με την πραγματοποίησή της. Ένας τρόπος να υπερπηδήσουμε το εμπόδιο αυτό είναι να εισαγάγουμε παραπάνω multiplets στη θεωρία, όπως την 45. Άλλος τρόπος είναι να συμπεριλάβουμε τελεστές μεγαλύτερης διάστασης στη θεωρία όπως ο  $\chi \bar{\Psi} \phi \bar{H} / M_{Pl}$  ο οποίος μπορεί να είναι της τάξης του  $0.1 GeV$  και θα μπορούσε να φτιάξει, για παράδειγμα, την πρόβλεψη της μάζας του μιονίου από το  $SU(5)$ .

### 3.1.6 Διάσπαση πρωτονίου

Στην υπερσυμμετρική εκδοχή των μεγαλοενοποιημένων θεωριών η διάσπαση του πρωτονίου επιτυγχάνεται και με νέες υπερσυμμετρικές συνεισφορές πέρα από το συμβατικό τρόπο ανταλλαγής των  $X, Y$  μποζονίων. Η διάσπαση του πρωτονίου επάγεται από τελεστές διάστασης 4, 5, 6.

- Για τους  $d = 6$  τελεστές:  
Έχουμε δει από την μη υπερσυμμετρική εκδοχή του  $SU(5)$  ότι οι συνεισφορές από την ανταλλαγή των διανυσματικών μποζονίων εξαρτώνται από την κλίμακα ενοποίησης. Αφού η κλίμακα αυτή αυξάνεται κατά έναν παράγοντα  $\sim \mathcal{O}(10)$ , διάσπαση του πρωτονίου κατά τον συμβατικό τρόπο ανταλλαγής διανυσματικών μποζονίων μέσω του καναλιού  $p \rightarrow e^+ \pi^0$ , καταπιέζεται κατά έναν παράγοντα  $\mathcal{O}(10^4)$ , το οποίο μεταφράζεται σε  $\tau_p \approx 4.5 \cdot 10^{37} yrs$ . Έτσι, αποφεύγεται η οποιαδήποτε σύγκρουση με το τωρινό χαμηλότερο πειραματικό όριο  $\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0}^{exp} \geq 10^{34} yrs$ , κι έτσι η υπερσυμμετρική  $SU(5)$  θεωρία δεν καταρρίπτεται από την πρόβλεψη αυτή όπως η μη υπερσυμμετρική εκδοχή της.
- Για τους  $d = 4$  τελεστές:  
Οι τελεστές διάστασης 4 αποτελούν έναν πραγματικό κίνδυνο για την SUSY  $SU(5)$ . Ευτυχώς, η  $R$ -ομοτιμία απαγορεύει όλους τους τελεστές  $d = 4$  (και  $d = 3$ ) οι οποίοι παραδιάζουν βαρυονικό ή λεπτονικό αριθμό. Είναι επομένως ένα απαραίτητο συστατικό για οποιαδήποτε «φυσική» SUSY-GUT.
- Για τους  $d = 5$  τελεστές: Οι τελεστές αυτοί είναι της μορφής  $QQQL + U^c U^c D^c E^c$ , ή όπως συμβολίζονται χαρακτηριστικά  $LLLL + RRRR$ .

Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, στη διάσπαση του πρωτονίου μπορούν να συνεισφέρουν τελεστές  $d = 4, 5, 6$ . Η ζωή του πρωτονίου μέσω των  $d = 6$  είναι πολύ μεγάλη, λόγω της μεγάλης τιμής της κλίμακας ενοποίησης και καταφέρει να προσπεράσει το υψηλό πειραματικό όριο. Οι  $d = 4$  τελεστές είναι απαραίτητως απαγορευμένοι ενσωματώνοντας την  $R$ -ομοτιμία. Επομένως, οδηγούμαστε να θεωρήσουμε τελεστές  $d = 5$ , οι οποίοι αποτελούν τη δεσπόζουσα συνεισφορά στη διάσπαση πρωτονίου στη SUSY  $SU(5)$  θεωρία.

Όπως είπαμε παραπάνω υπάρχουν δύο είδη  $d = 5$  τελεστών,  $RRRR$  και  $LLLL$ :

$$\begin{aligned} O_A^{(R)} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_{Ra}^\alpha u_{Rb}^\beta u_{Rc}^\gamma e_{Rd}, \\ O_B^{(L)} &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijkl} q_{La}^\alpha q_{Lb}^\beta q_{Lc}^\gamma \ell_{Ld}^l, \end{aligned} \quad (3.27)$$

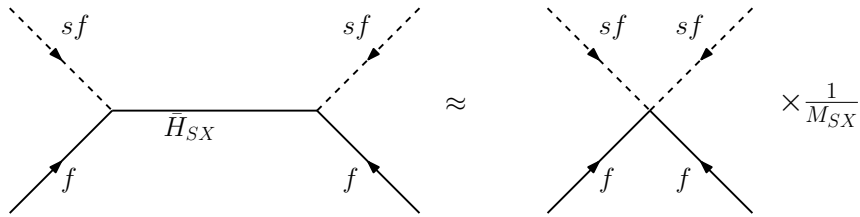
όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι δείκτες χρώματος,  $i, j, k, l$  είναι ισοσπινωριακοί δείκτες και  $a, b, c, d$  είναι δείκτες γενιάς. Οι  $d = 5$  τελεστές που παραδιάζουν τη διατήρηση του βαρυονικού αριθμού είναι απαγορευμένοι σε tre-level από συμμετρίες της

$SU(5)$ . Όμως στην ουσία οι συμμετρίες αυτές σπάνε από το VEV που είναι υπεύθυνο για τις μάζες των Higgs τριπλέτων χρώματος  $\zeta_u, \bar{\zeta}_d$ . Όπως αναφέραμε ήδη στο doublet-triplet splitting, οι Higgs τριπλέτες παίρνουν μάζα  $\sim M_{SX}$ . Συνεπώς, αυτοί οι  $d = 5$  τελεστές γενικά παράγονται μέσω της ανταλλαγής των color triplet higgsino,  $\bar{\zeta}_d$ . Το κυρίαρχο κανάλι διάσπασης του πρωτονίου από  $d = 5$  τελεστές είναι το:

$$p \rightarrow K^+ \bar{\nu}, \quad (3.28)$$

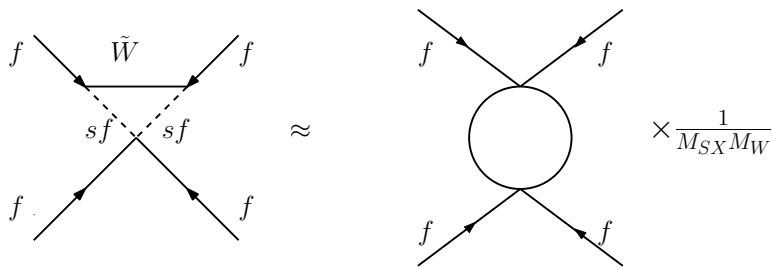
και οφείλεται σε επιχειρήματα συμμετρίας. Οι τελεστές  $(q_a, q_b, q_c, \ell_d), (u_a^c, u_b^c, u_c^c, e_d^c)$ , όπου οι δείκτες  $a, b, c, d$  είναι δείκτες γενιάς, πρέπει να είναι αναλλοίωτοι κάτω από την  $SU(3)_c$  και  $SU(2)_L$ . Σαν αποτέλεσμα, οι δείκτες χρώματος και ισοσπίν πρέπει να είναι αντισυμμετρικοί. Παρ' όλα αυτά, αφού οι τελεστές αυτοί δίνονται από μποζονικά superfields, πρέπει να είναι πλήρως συμμετρικοί κάτω από την εναλλαγή των δεικτών. Επομένως, ο πρώτος τελεστής εξαφανίζεται για  $a = b = c$  και ο δεύτερος εξαφανίζεται για  $a = b$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένα μέλος δεύτερης ή τρίτης γενιάς πρέπει να εμφανίζεται στην τελική κατάσταση μετά τη διάσπαση.

Η συνεισφορά λοιπόν από τους  $d = 5$  τελεστές στη διάσπαση του πρωτονίου απαιτεί διαγράμματα της μορφής:



Εικόνα 3.2: Διάσπαση πρωτονίου με ανταλλαγή Higgsino.

στα οποία απαιτείται ένα «ντύσιμο»:



Εικόνα 3.3: «Ντυμένο» διάγραμμα διάσπασης πρωτονίου με βρόχο.

Χρειάστηκε λοιπόν το «ντύσιμο» στο πρώτο διάγραμμα επειδή ο αντίστοιχος τελεστής εμπλέκει squark και slepton πεδία κι επομένως δεν μπορεί να επάγει τη διάσπαση του πρωτονίου σε χαμηλότερη τάξη. Το «ντύσιμο» επιτρέπει

στα πεδία squarks και sleptons να μετατραπούν σε κουάρκ και λεπτόνια αντίστοιχα με την εκπομπή ενός weak gaugino. Συνεισφορές στη διάσπαση του πρωτονίου στο συγκεκριμένο κανάλι παίρνουμε και από το διάγραμμα όπου ένα gluino εκπέμπεται κατά την εναλλαγή των squark σε κουάρκ. Παρομοίως, συνεισφορά παίρνουμε και με ανταλλαγή higgsino διπλέτων,  $\bar{H}^\pm$ .

Το θεωρητικό όριο που προκύπτει από τις παραπάνω συνεισφορές είναι:

$$\tau_{p \rightarrow K + \bar{\nu}} \leq \left( \frac{1}{3} - 3 \right) \cdot 10^{34} \text{ yrs}. \quad (3.29)$$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που παίρνουμε λοιπόν από την εισαγωγή της SUSY στο μοντέλο  $SU(5)$  είναι ότι το κυρίαρχο κανάλι διάσπασης του πρωτονίου δεν είναι το ίδιο με αυτό του  $SU(5)$  πριν την εισαγωγή της. Επομένως, θεωρούμε ότι η παρουσία του νέου καναλιού είναι μία ένδειξη της υπερσυμμετρικής φύσης ή τουλάχιστον του γεγονότος ότι τα Higgs πεδία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διάσπαση του πρωτονίου.

### 3.1.7 Μέτρηση των παραμέτρων στο ελάχιστο υπερσυμμετρικό $SU(5)$ μοντέλο

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε το μοντέλο με άλλα υπερσυμμετρικά μεγαλύτερα μοντέλα, θα πρέπει να μετρήσουμε τις αυθαίρετες παραμέτρους του. Έχουμε λοιπόν:

- Υπάρχουν 4 μιγαδικές συζεύξεις στο Higgs superpotential, όπου έπεται από επαναορισμό των δύο Higgs πεδίων, απομένουν 6 πραγματικές παράμετροι.
- Στον τομέα Yukawa υπάρχουν 6 μιγαδικά στοιχεία του συμμετρικού  $Y_u$  και 9 μιγαδικά στοιχεία στο  $Y_d = Y_e^T$ . Προφανώς, δεν είναι όλες φυσικές κι έπειτα από διαγωνοποίηση του  $Y_d$  απομένουν τρεις πραγματικές παράμετροι στον τομέα Yukawa των  $d$ -κουάρκ και φορτισμένων λεπτονίων. Έπειτα από αυτό, δεν υπάρχει περαταίρω ελευθερία στην  $up$ -κουάρκ σύζευξη, «up to» έναν επαναορισμό φάσης.
- Μία ενιαία σταθερά σύζευξης,  $g$ .

Συνολικά παίρνουμε 21 ανεξάρτητες πραγματικές παραμέτρους στο ελάχιστο υπερσυμμετρικό  $SU(5)$  μοντέλο. Οι soft susy όροι δεν έχουν ληφθεί υπόψη, καιώς βρίσκοντα σε όλα τα πιθανά ρεαλιστικά μοντέλα.

### 3.1.8 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα

Ας κάνουμε έναν τελικό απολογισμό για το αν η εισαγωγή της υπερσυμμετρίας στο  $SU(5)$  μοντέλο βελτιώνει ή όχι τη μη υπερσυμμετρική εκδοχή.

Πλεονεκτήματα:

- Δε χαλάει τις επιτυχημένες προβλέψεις του  $SU(5)$ .
- Προβλέπει την πραγματική ενοποίηση των τριών σταθερών σύζευξης.
- Λόγω της αύξησης της κλίμακας ενοποίησης και του γεγονότος ότι υπάρχει καινούριο κανάλι διάσπασης του πρωτονίου, ο χρόνος ζωής του αυξάνεται και βρίσκεται πάνω από το ελάχιστο όριο που δίνει το πείραμα με αποτέλεσμα να καθίσταται το μοντέλο βιώσιμο.
- Η προβλεπόμενη τιμή για τη γωνία Weinberg,  $\sin^2 \theta_W \approx 0.236$ , είναι σε σχετικά καλή συμφωνία με την πειραματική ( $\sin^2 \theta_W \approx 0.232$ ), σίγουρα καλύτερη από την πρόβλεψη που δίνει το μη υπερσυμμετρικό μοντέλο,  $\sin^2 \theta \approx 0.210$ .

Μειονεκτήματα :

- Σπάσιμο της  $R$ -ομοτιμίας:  
Υπάρχουν επανακανονικοποιήσιμοι όροι στο superpotential οι οποίοι δε διατηρούν το βαρυονικό και λεπτονικό αριθμό, για παράδειγμα :

$$W' = \lambda_{abc} \chi_a \bar{\Psi}_b \bar{\Psi}_c, \quad (3.30)$$

οι οποίοι όταν γράφονται σε όρους των πεδίων συνιστώσών τους οδηγούμαστε σε όρους που σπάνε την  $R$ -ομοτιμία του MSSM, όπως  $L_a L_b e_c^c$ ,  $QLD^c$ ,  $u^c d^c d^c$ , κ.ά. Αυτό που προκύπτει από τη μεγάλη ενοποίηση είναι ότι οι τρεις αυτοί όροι περιγράφονται από μία παράμετρο σύζευξης κι επίσης η σταθερά  $\lambda$  ικανοποιεί την αντισυμμετρικότητα στην εναλλαγή δύο δεικτών γενιάς. Ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων που σπάνε την  $R$ -ομοτιμία είναι 9 αντί για 45 που είναι στο MSSM . Συνεπώς, η SUSY  $SU(5)$  δεν οδηγεί σε ένα LSP που να είναι σταθερό και να ταιριάζει για υποψήφιος για τη σκοτεινή ύλη.

- Doublet-Triplet splitting problem:  
Είδαμε νωρίτερα ότι για να παραχθούν οι ελαφριές διπλέτες του MSSM , θα πρέπει να ρυθμίσουμε τις δύο παραμέτρους  $3/2b$  και  $M$  στο superpotential. Όμως, άπαξ και συμβεί το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας μέσω του μηχανισμού του κρυφού τομέα, παίρνουμε τη λαγκρατζιανή της μορφής:

$$\mathcal{L}_{SB} = A\lambda\bar{H}\phi H + BM\bar{H}H + h.c., \quad (3.31)$$

όπου τα σύμβολα εδώ αφορούν μόνο τις βαθμωτές συνιστώσες των superfields. Έπεται λοιπόν ότι όταν τα Higgsinos ρυθμιστούν να έχουν μάζα στην κλίμακα των ασθενών αλληλεπιδράσεων, η ίδια λεπτή ρύθμιση δεν αφήνει τα βαθμωτά Higgs στην ίδια κλίμακα. Υπάρχουν δύο τρόποι να λυθεί το πρόβλημα αυτό:



- Ο πρώτος τρόπος είναι να εισαγάγουμε ένα singlet πεδίο και να διαλέξουμε το superpotential της μορφής

$$W_{DT} = 2\bar{H}\phi H + S\bar{H}H. \quad (3.32)$$

Το υπερσυμμετρικό ελάχιστο της θεωρίας αυτής είναι:

$$F_H = H_u(-3b + \langle S \rangle) = 0. \quad (3.33)$$

Η  $F_\zeta$  εξίσωση ικανοποιείται αυτομάτως όταν το χρώμα παραμένει άσπαστο, κάτι το οποίο απαιτείται για τη φυσικότητα της θεωρίας. Έτσι αυτομάτως παίρνουμε  $\langle S \rangle = 3b$ , η οποία είναι η συνθήκη που κρατά τις διπλές ελαφριές. Επομένως, οι διπλές παραμένουν φυσικά στην ηλεκτρασθενή κλίμακα χωρίς να χρειάζεται κάποια λεπτή ρύθμιση. Αυτός ο μηχανισμός ονομάζεται sliding singlet mechanism. Στην περίπτωση αυτή το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας στο tree-level διατηρεί άμαζες τις διπλές τόσο για τα φερμιόνια όσο και για τις μποζονικές συνιστώσες. Όμως, όταν συμπεριληφθούν διορθώσεις ενός βρόχου, αναδύεται ένα πρόβλημα, ότι οι διορθώσεις του  $\langle S \rangle$  παράγουν μία απόκλιση από την ακύρωση των μποζονικών Higgs μαζών.

- Ο δεύτερος μηχανισμός που δουλεύει καλύτερα από τον προηγούμενο είναι ο missing partner mechanism. Στον μηχανισμό αυτόν, διαλέγουμε να σπάσουμε τη συμμετρία της ενοποίησης με μία multiplet η οποία συζεύγνυται με τα  $H, \bar{H}$  και άλλες multiplets με τέτοιο τρόπο ώστε άπαξ και η  $SU(5)$  συμμετρία σπάσει, μόνο οι τριπλές χρώματός τους να έχουν πολλαπλές στο πεδίο το οποίο συζεύγνυται μαζί τους, αλλά όχι ασθενείς διπλές.
- Δεν υπάρχει κάποιος φυσικός μηχανισμός παραγωγής των μαζών των νετρίνων, παρ' όλο που πολλές φορές έχουν προταθεί όροι που παραβιάζουν την  $R$ -ομοτιμία. Θα πρέπει να δεχτούμε προς το παρόν ότι η απαιτούμενες μικρές παράμετροι σύζευξης θα πρέπει να μπουν με το χέρι.
  - Το κενό είναι τριπλά εκφυλισμένο και η επιλογή εκείνου που οδηγεί στο SM γίνεται χωρίς κάποια φυσική αιτία. Όταν αναβαθμίζεται όμως η SUSY σε τοπική συμμετρία (supergravity), αίρεται ο εκφυλισμός των τριών κενών από βαρυτικές συνεισφορές.

## Παράρτημα Α΄

# Ομάδες και αναπαραστάσεις

Πριν την έναρξη συγγραφής της εργασίας η ύπαρξη ενός τέτοιου παραρτήματος ήταν αμφίβολη. Η εναλλακτική λύση ήταν οι απαραίτητες μαθηματικές επεξηγήσεις και η προέλευση των μεθόδων που χρησιμοποιούμε να παρεμβάλλονται μέσα στο χτίσιμο του μοντέλου  $SU(5)$ . Έπειτα από σκέψη θεωρήσαμε ότι η εκδοχή αυτή έχει δύο πολύ σοβαρά μειονεκτήματα. Πρώτο και σημαντικότερο είναι ότι η ροή θα κοβόταν από εκτενείς παρεμβολές, πράγμα πολύ κουραστικό για τον αναγνώστη. Δεύτερον, η πορεία προς τις προβλέψεις και γενικότερα όλη η φυσική που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει θα χάνονταν μέσα στα ποικίλα (για κάποιους δευτερεύοντα) τεχνικά ζητήματα. Έτσι λοιπόν η επίκληση στο παράρτημα θα είναι συχνή και ταυτόχρονα η ανάγνωση του κυρίως σώματος της διπλωματικής πιο ευχάριστη.

Στο παράρτημα λοιπόν αυτό, παραθέτουμε στοιχεία από τη Θεωρία Ομάδων και τη Θεωρία Αναπαραστάσεων. Παρ'όλο που - προς διατήρηση της γενικότητας - μελετάμε τις θεωρίες αυτές από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η ακόλουθη ανάλυση απλώνεται γύρω από τη φυσική στην οποία εφαρμόζονται, δηλαδή τα μοντέλα μεγαλοενοποιημένων θεωριών.

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά θα αναφερθούμε σε κάποια βασικά στοιχεία για τις ομάδες και τις αναπαραστάσεις τους. Έπειτα θα αναλύσουμε την πολύ σημαντική *adjoint* αναπαράσταση καθώς και άλλες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ομάδων Lie. Μετά, θα περιγράψουμε τον τρόπο εύρεσης όλων των ριζών μιας άλγεβρας βρίσκοντας υποδόσκουσες  $SU(2)$  αναπαραστάσεις μέσα στο όλο οικοδόμημα. Επίσης, με την ίδια διαδικασία, δηλαδή με τη μέθοδο της καταβίβασης ξεκινώντας από το μέγιστο βάρος βρίσκοντας  $SU(2)$  αναπαραστάσεις, θα εξηγήσουμε πως βρίσκουμε όλα τα βάρη (καταστάσεις) μιας τυχαίας αναπαράστασης. Δε θα μπορούσαμε να παραλείψουμε την περιγραφή των διαγραμμάτων Dynkin, δηλαδή τη γεωμετρική αναπαράσταση των απλών ριζών για κάθε άλγεβρα. Έπειτα ακολουθεί η περιγραφή της τανυστικής μεθόδου μέσω της οποίας καταφέρνουμε να κάνουμε χρήση της τεχνολογίας

των Young tableaux που ορίζονται μέσω των ομάδων μεταθέσεων. Τέλος, το παράρτημα κλείνει με την περιγραφή δύο πολύ σημαντικών διαδικασιών: 1) τον υπολογισμό τανυστικών γινομένων και εύρεση του αναπτύγματος Clebsch Gordan και 2) την εύρεση του αναπτύγματος μιας τυχαίας αναπαράστασης μιας ομάδας σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των υποομάδων της. Τα όπλα μας για τις παραπάνω διαδικασίες είναι τα Young tableaux και τα διαγράμματα Dynkin γι' αυτό και παραθέτουμε και κάποια παραδείγματα, ώστε να γίνει σαφής ο τρόπος με τον οποίον τα χρησιμοποιούμε.

## Α.1 Βασικά στοιχεία

Η Θεωρία Ομάδων αφορά τη μελέτη συμμετριών. Συνεπώς αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο στα χέρια του φυσικού για την εξήγηση φυσικών συστημάτων. Η απόσταξη των πληροφοριών για τα φυσικά συστήματα δε γίνεται μέσω των ομάδων αυτών καθ' αυτών, αλλά μέσω των αναπαράστασών τους. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μια διαισθητική προσέγγιση για το τί είναι αναπαράστασεις πριν αποδώσουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό τους.

Έννοιες όπως η ομάδα, ο διανυσματικός χώρος κ.ά. αποτελούν αφηρημένες μαθηματικές δομές. Οποιοδήποτε μαθηματικό σύστημα (με κατάλληλες ιδιότητες και πράξεις) λέμε ότι αποτελεί μια **πραγμάτωση** (realization) μίας αφηρημένης μαθηματικής δομής (π.χ. της ομάδας) αν είναι δυνατό να ορίσουμε μian απεικόνιση ανάμεσα στην αφηρημένη μαθηματική δομή και το συγκεκριμένο μαθηματικό σύστημα. Με την έννοια απεικόνιση εννοούμε οι πράξεις της αφηρημένης δομής να αντανakλώνται πάνω στις πράξεις που έχουν οριστεί στο μαθηματικό μας σύστημα.

Ας ορίσουμε λοιπόν την πραγμάτωση μιας ομάδας. Έστω ομάδα  $G$  με σύνολο  $G = \{A, B, C, \dots\}$ , σύνολο  $S = \{x, y, z, \dots\}$  και  $M(S)$  το σύνολο των μετασχηματισμών του  $S$ :

$$M(S) = \{f | f : S \rightarrow S\}, \quad \text{όπου } f : 1-1 \text{ και επί.} \quad (\text{A.1})$$

Εάν μπορούμε να βρούμε μian απεικόνιση  $T$ :

$$T : A \in G \rightarrow T(A) = T_A \in M(S),$$

με την ιδιότητα σε κάθε στοιχείο  $A \in G$ , αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός  $T_A$  του  $S$ , δηλαδή:

$$T_A : S \rightarrow S, \quad (\text{A.2})$$

ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, έτσι ώστε η σύνθεση δύο τέτοιων μετασχηματισμών  $T_A T_B$  να υπάρχει και να είναι ο μετασχηματισμός  $T_{AB}$ , δηλαδή:

$$T_A T_B = T_{AB}, \quad (\text{A.3})$$

τότε λέμε ότι έχουμε μια πραγμάτωση της ομάδας  $G$  μέσα από τους μετασχηματισμούς του  $S$ .

Η **αναπαράσταση** (representation) (ή ορθότερα γραμμική αναπαράσταση) είναι η κατηγορία πραγμάτωσης της ομάδας που θα μας απασχολήσει. Η κατηγορία αυτή προκύπτει εάν στο σύνολο  $S$  αντιστοιχίσουμε έναν (πραγματικό ή μιγαδικό) διανυσματικό χώρο  $V$  και οι μετασχηματισμοί  $T_A, T_B, \dots$  είναι μη ιδιάζοντες γραμμικοί μετασχηματισμοί (**τελεστές**) στο χώρο αυτόν. Είναι γνωστό από τη θεωρία τελεστών ότι σε κάθε τελεστή που επενεργεί στο χώρο αυτό αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης  $n$  ως προς κάποια βάση, όπου  $n = \dim V$ , η διάσταση του διανυσματικού χώρου. Η έννοια λοιπόν της αναπαράστασης συνδυάζει δύο αλγεβρικές δομές: το διανυσματικό χώρο και

την ομάδα. Από το συνδυασμό αυτό προκύπτουν πίνακες που αναπαριστούν τα στοιχεία της ομάδας. Η μελέτη των πινάκων αυτών γίνεται μέσω της θεωρίας αναπαραστάσεων<sup>1</sup>.

Έφτασε η στιγμή να ορίσουμε τι είναι αναπαράσταση. Αναπαράσταση της ομάδας  $G$  είναι η απεικόνιση  $D$  των στοιχείων της  $G$  πάνω σε ένα σύνολο γραμμικών τελεστών με τις ακόλουθες ιδιότητες.

- $D(e) = 1$ , όπου 1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής στο διανυσματικό χώρο στον οποίο δρουν οι γραμμικοί τελεστές,
- $D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2)$ , δηλαδή ο πολλαπλασιαστικός κανόνας της ομάδας απεικονίζεται στον απλό πολλαπλασιασμό στο γραμμικό χώρο στον οποίο δρουν οι γραμμικοί τελεστές.

Διάσταση μιας αναπαράστασης είναι η διάσταση του χώρου στον οποίο δρα. Όπως προαναφέραμε, ένας τελεστής  $T : V \rightarrow V$  ως προς μια βάση  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  μπορεί να λάβει τη μορφή τετραγωνικού πίνακα τάξης  $n$  με στοιχεία  $D_{ij}$ :

$$[D(g)]_{ij} = \langle e_i | D(g) | e_j \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Οι πίνακες λοιπόν αποτελούνται από τα στοιχεία πίνακα των γραμμικών τελεστών.

Η απλούστερη αναπαράσταση είναι εκείνη που σε κάθε στοιχείο της ομάδας  $G$  αντιστοιχίζεται ο ταυτοτικός πίνακας οποιασδήποτε τάξης και ονομάζεται **τριμμένη αναπαράσταση**.

Παρακάτω θα αναλύσουμε κάποιες σημαντικές αναπαραστάσεις οι οποίες αποτελούν τα «καλούπια» στα οποία και θα χτίσουμε τα διάφορα μοντέλα της φυσικής.

## A.2 Κανονική αναπαράσταση

Θα δώσουμε την κανονική αναπαράσταση μιας πεπερασμένης ομάδας<sup>2</sup> μέσα από ένα παράδειγμα με τη βοήθεια της κυκλικής ομάδας<sup>3</sup>  $\langle Z_3, * \rangle$  με στοιχεία το σύνολο  $Z_3 = \{e, a, b\}$ . Η ομάδα αυτή είναι τάξης 3, αβελιανή (η διμελής πράξη της είναι αντιμεταθετική) και έχει τον εξής πολλαπλασιαστικό πίνακα:

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

<sup>1</sup>Θεωρία Ομάδων και Θεωρία Τελεστών, Δημήτρης Σούρλας, 2008

<sup>2</sup>Πεπερασμένη είναι η ομάδα που έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Ο αριθμός αυτός λέγεται τάξη. Αν δεν είναι πεπερασμένη, είναι άπειρη.

<sup>3</sup>Κυκλική ονομάζεται μία ομάδα, αν υπάρχει κάποιο στοιχείο που ανήκει στην ομάδα και παράγει όλη την ομάδα.

Κανονική αναπαράσταση είναι εκείνη που προκύπτει εάν πάρουμε τα στοιχεία της ομάδας και σχηματίσουμε με αυτά μια ορθοκανονική βάση σε ένα διανυσματικό χώρο. Συνεπώς, στην περίπτωση της  $Z_3$ , η ορθοκανονική βάση αποτελείται από τα διανύσματα  $|e\rangle, |a\rangle, |b\rangle$ . Επομένως συμπεραίνουμε ότι η διάσταση της αναπαράστασης θα είναι όσα και τα διανύσματα βάσης, δηλαδή, ίση με την τάξη της ομάδας.

Τώρα αν ορίσουμε:

$$D(g_1)|g_2\rangle = |g_1g_2\rangle, \quad (\text{A'.5})$$

έπειτα μετονομάσουμε τα διανύσματα της βάσης:

$$|e_1\rangle \equiv |e\rangle, \quad |e_2\rangle \equiv |a\rangle, \quad |e_3\rangle \equiv |b\rangle, \quad (\text{A'.6})$$

και τέλος επικαλεστούμε τη σχέση (A'.4) που μας επιτρέπει να πηγαίνουμε από τους τελεστές στους πίνακες και αντίστροφα, τότε μπορούμε να πάρουμε τους πίνακες που αποτελούν την κανονική αναπαράσταση της  $Z_3$ :

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι η παραπάνω κατασκευή της κανονικής αναπαράστασης γενικεύεται σε όλες τις πεπερασμένες ομάδες. Συνοψίζοντας, ορίσαμε έναν διανυσματικό χώρο στον οποίο τα διανύσματα βάσης είναι τα στοιχεία της ομάδας κι έπειτα μέσω της (A'.5) (που ουσιαστικά ορίζει την κανονική αναπαράσταση) πήραμε τους πίνακες της αναπαράστασης.

### A'.3 Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις

Αυτό που καθιστά τις αναπαραστάσεις τόσο ισχυρές και χρήσιμες είναι το γεγονός ότι ζουν σε γραμμικούς χώρους. Το αξιοθαύμαστο δώρο που μας προσφέρουν οι γραμμικοί χώροι είναι ότι μας δίνουν την ελευθερία να αναπαραστήσουμε τις καταστάσεις με έναν πιο βολικό τρόπο, κάνοντας απλά ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Εφόσον ο μετασχηματισμός είναι αντιστρεπτός, οι νέες καταστάσεις κάνουν τη δουλειά τους εξίσου καλά με τις παλιές. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός στις καταστάσεις παράγει ένα **μετασχηματισμό ομοιότητας** στους γραμμικούς τελεστές, έτσι ώστε να μπορούμε να σχηματίσουμε μια νέα αναπαράσταση της μορφής:

$$D(g) \rightarrow D'(g) = S^{-1}D(g)S \quad (\text{A'.7})$$

Εξ αιτίας της δομής του μετασχηματισμού ομοιότητας το νέο σύνολο των τελεστών έχουν τον ίδιο πολλαπλασιαστικό κανόνα με τον παλιό κι επομένως η  $D'$  είναι μια **ισοδύναμη αναπαράσταση**, αφού διαφέρει από την παλιά μόνο κατά μια τετριμμένη αλλαγή βάσης.

Οι μοναδιακοί τελεστές ( $U^{-1} = U^\dagger$ ) είναι ιδιαίτερος χρήσιμοι. Εάν όλοι οι πίνακες μιας αναπαράστασης,  $D(g)$ , είναι μοναδιακοί, τότε η αναπαράσταση ονομάζεται **μοναδιακή** (unitary). Αποδεικνύεται ότι όλες οι αναπαραστάσεις των πεπερασμένων ομάδων είναι ισοδύναμες με μοναδιακές αναπαραστάσεις.

Μια αναπαράσταση είναι **αναγωγίσιμη** εάν εμπεριέχει έναν αναλλοίωτο υπόχωρο, που πρακτικά σημαίνει ότι η δράση ενός  $D(g)$  πάνω σε ένα διάνυσμα του υπόχωρου, δίνει διάνυσμα που ανήκει στον υπόχωρο αυτόν. Μια αναπαράσταση ονομάζεται **μη αναγωγίσιμη** όταν δεν είναι αναγωγίσιμη. Μια αναπαράσταση ονομάζεται **πλήρως αναγωγίσιμη** όταν είναι ισοδύναμη με μια αναπαράσταση της οποίας τα στοιχεία πίνακα έχουν τη μορφή:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & D_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A'.8})$$

όπου οι αναπαραστάσεις  $D_j(g)$  είναι μη αναγωγίσιμες  $\forall j$ . Αυτή η μορφή ονομάζεται block διαγώνια μορφή. Αυτό σημαίνει ότι η αναπαράσταση  $D(g)$  αποτελείται από το ευθύ άθροισμα των  $D_j(g)$ :

$$D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \dots \quad (\text{A'.9})$$

Αν λοιπόν μετασηματίσουμε μια αναπαράσταση σε block διαγώνια μορφή, ουσιαστικά αποσυνθέτουμε την αρχική αναπαράσταση σε ευθύ άθροισμα των μη αναγωγίσιμων συνιστωσών της. Αυτό μας παρέχει έναν άλλο τρόπο να ορίσουμε τις πλήρως αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις: είναι οι αναπαραστάσεις εκείνες που αποσυντίθενται σε ευθύ άθροισμα μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων.

## Α'.4 Ομάδες μεταθέσεων - Young Tableaux

**Ορισμός Α'.4.1** (Μετάθεση) **Μετάθεση** ενός συνόλου  $A$  λέγεται μια συνάρτηση από το  $A$  στο  $A$  που είναι ταυτόχρονα ένα-προς-ένα και επί. Με άλλα λόγια, μια μετάθεση του  $A$  είναι μια ένα-προς-ένα απεικόνιση του  $A$  επί του  $A$ .

**Θεώρημα Α'.4.1** Έστω  $A$  ένα μη κενό σύνολο, και έστω  $S_A$  η συλλογή όλων των μεταθέσεων του  $A$ . Τότε το  $S_A$  είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων (σύνθεση συναρτήσεων).

Οι ομάδες μεταθέσεων είναι μη αβελιανές ομάδες (η διμελής τους πράξη είναι μη αντιμεταθετική) και αυτό τους προσδίδει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ακολουθεί παράδειγμα μεταθετικής ομάδας για να αναδείξουμε τη σημασία της.

Παράδειγμα :

Ένα αρκετά ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η ομάδα  $S_3$  με  $3! = 6$  στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή το μη κενό μας σύνολο είναι το  $A = \{1, 2, 3\}$ . Γράφουμε όλες τις μεταθέσεις του  $A$  και βαφτίζουμε την καθεμία με ένα ελληνικό γράμμα με δείκτη (η σημασία του συμβολισμού θα φανεί αργότερα). Θέτουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \mu_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \mu_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \mu_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Αυτά τα έξι στοιχεία της ομάδας  $S_A$  δίνουν τον παρακάτω πολλαπλασιαστικό πίνακα από όπου γίνεται προφανής η μη αβελιανότητα της ομάδας.

	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
$\rho_0$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
$\rho_1$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\rho_2$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_1$
$\mu_1$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\rho_0$	$\rho_1$	$\rho_2$
$\mu_2$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\rho_2$	$\rho_0$	$\rho_1$
$\mu_3$	$\mu_3$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_0$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχει μια φυσική αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία της  $S_3$  και τους τρόπους με τους οποίους δύο αντίγραφα ενός ισόπλευρου τριγώνου με κορυφές ονόματι 1, 2, 3 μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε το ένα να καλύπτει το άλλο. Αυτή είναι και η αιτία που η ομάδα  $S_3$  λέγεται και ομάδα  $D_3$  των συμμετριών ενός ισόπλευρου τριγώνου<sup>4</sup>. Τα στοιχεία  $\rho_i$  της  $S_3$  αντιστοιχούν στις στροφές ενώ τα  $\mu_i$  αντιστοιχούν στις ανακλάσεις ως προς τις διχοτόμους των γωνιών. Η ομάδα αυτή ονομάζεται τρίτη διεδρική ομάδα.

Οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας μεταθέσεων πάνω σε  $n$  στοιχεία μπορεί να γραφτεί σε όρους κύκλων, όπου **κύκλος** είναι μία κυκλική μετάθεση ενός υποσυνόλου. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα :

- (1) σημαίνει  $x_1 \rightarrow x_1$
- (1372) σημαίνει  $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_7 \rightarrow x_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$

Κάθε στοιχείο της  $S_n$  εμπεριέχει κάθε ακέραιο από το 1 έως το  $n$  σε ακριβώς έναν κύκλο.

<sup>4</sup>John B. Fraleigh: Εισαγωγή στην άλγεβρα, ΠΕΚ, 2010 σελ.79.



Παραδείγματα :

- Το ταυτοτικό στοιχείο μπορεί να είναι  $e = (1)(2) \cdots (n)$ , δηλαδή  $n$  τον αριθμό 1-κύκλοι.
- Μια εναλλαγή δύο στοιχείων μπορεί να είναι  $(12)(3) \cdots (n)$ , δηλαδή ένας 2-κύκλος και  $n - 2$  1-κύκλοι.

Ένα τυχαίο στοιχείο έχει  $k_j$  τον αριθμό  $j$ -κύκλους, όπου :

$$\sum_{j=1}^n j k_j = n \quad (\text{A'.10})$$

Για παράδειγμα, η μετάθεση  $(123)(456)(78)(9)$  έχει δύο 3-κύκλους, έναν 2-κύκλο και έναν 1-κύκλο που σημαίνει ότι  $k_1 = k_2 = 1$  και  $k_3 = 2$ . Βλέπουμε επίσης ότι επαληθεύεται και η (A'.10):

$$\sum_{j=1}^n j k_j = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \quad (\text{A'.11})$$

**Ορισμός A'.4.2** (Κλάσεις συζυγίας) Κλάσεις συζυγίας ονομάζονται τα σύνολα  $S$  τα οποία για κάθε στοιχείο  $g$  μιας ομάδας  $G$  ικανοποιούν τη συνθήκη :

$$g^{-1} S g = S, \quad \forall g \in G \quad (\text{A'.12})$$

Επίσης, η απεικόνιση

$$G \rightarrow g G g^{-1} \quad (\text{A'.13})$$

για ένα συγκεκριμένο  $g$  είναι επίσης σημαντική και ονομάζεται εσωτερικός αυτομορφισμός.

Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, βρίσκουμε ότι οι κλάσεις συζυγίας της ομάδας μεταθέσεων (η ομάδα που όπως είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα έχει για στοιχεία όλες τις πιθανές μεταθέσεις τριών διαφορετικών αντικειμένων)  $S_3 = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ <sup>6</sup> είναι τα σύνολα :

$$\{e\}, \quad \{a_1, a_2\}, \quad \{a_3, a_4, a_5\} \quad (\text{A'.14})$$

Για τις ομάδες μεταθέσεων, κλάσεις συζυγίας είναι απλά η δομή των κύκλων, που σημαίνει ότι μπορούν να παρασταθούν από τους ακεραίους  $k_j$ . Για παράδειγμα, όλες οι εναλλαγές ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας. Είναι αρκετό να

<sup>5</sup>Αν στη θέση των συνόλων  $S$  έχουμε κάποια υποομάδα της  $G$ ,  $H$ , τότε η σχέση αυτή δίνει τον ορισμό της αναλλοίωτης (ή κανονικής) υποομάδας

<sup>6</sup>Για χάρη ευκολίας εδώ μετονομάζουμε τα στοιχεία της  $S_3$  σε σχέση με τα ονόματα που δώσαμε στο παραπάνω παράδειγμα. Έτσι ορίζουμε  $a_1$  την κυκλική μετάθεση των αντικειμένων,  $a_2$  την αντικυκλική και  $a_3, a_4, a_5$  τις τρεις πιθανές εναλλαγές των αντικειμένων.

ελέγχουμε ότι ο εσωτερικός αυτομορφισμός  $gg_1g^{-1}$  δεν αλλάζει την κυκλική δομή του  $g_1$  όταν το  $g$  είναι κάποια εναλλαγή. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \overbrace{(12)(3)(4)}^g \cdot \overbrace{(1)(23)(4)}^{g^1} \cdot \overbrace{(12)(3)(4)}^{g^{-1}}{}^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (2)(13)(4). \quad (\text{A'.15}) \end{aligned}$$

Όπως φαίνεται, η δομή ως προς τους κύκλους δεν άλλαξε, απλά εναλλάχθηκαν το 1 με το 2.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι μια κλάση συζυγίας αποτελείται από τις μεταθέσεις της μορφής  $k_1$  1-κύκλοι,  $k_2$  2-κύκλοι, κ.ο.κ, ικανοποιώντας την (A'.10), ο αριθμός των διαφορετικών μεταθέσεων εντός μιας κλάσης συζυγίας είναι

$$\frac{n!}{\prod_j j^{k_j} k_j!}, \quad (\text{A'.16})$$

επειδή κάθε μετάθεση των αριθμών 1 ως  $n$  δίνει μετάθεση μέσα στην κλάση, αλλά εντός ενός κύκλου η σειρά δεν έχει σημασία: ο κύκλος (1 2 3) είναι ο ίδιος με τον (2 1 3) και επίσης η διάταξη ανάμεσα σε κύκλους ίσου μήκους δεν παίζει κάποιο ρόλο: (1 2)(3 4) είναι το ίδιο με το (3 4)(1 2).

Είναι χρήσιμο να αναπαριστούμε κάθε  $j$ -κύκλο με μια στήλη από κουτάκια μήκους  $j$ , σε αύξουσα σειρά από πάνω προς τα κάτω και διατεταγμένα έτσι ώστε το  $j$  να φθίνει προς τα δεξιά. Ο συνολικός αριθμός των κουτιών, όπως είναι αναμενόμενο, είναι  $n$ . Οι συλλογές των κουτιών που προκύπτουν ονομάζονται **πινάκια Young (Young Tableaux)**. Κάθε διαφορετικό πινάκιο αναπαριστά μια διαφορετική κλάση συζυγίας και επομένως τα πινάκια βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, οι κλάσεις συζυγίας της  $S_3$ , (A'.14), αναπαρίστανται από τα εξής πινάκια Young:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (\text{A'.17})$$

Το πρώτο αποτελείται από τρεις 1-κύκλους (ταυτοτικό στοιχείο), το δεύτερο από έναν 2-κύκλο και έναν 1-κύκλο και το τρίτο έναν 3-κύκλο.

Όπως είπαμε ένα Young Tableau με  $n$  κουτάκια σχετίζεται με μια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας  $S_n$ . Μπορούμε πράγματι να χρησιμοποιήσουμε τα Young Tableaux για να κατασκευάσουμε τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, ταυτοποιώντας έναν κατάλληλο υπόχωρο της κανονικής αναπαράστασης της  $S_n$ .

Για να βρούμε ποια είναι η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, ξεκινούμε βάζοντας ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το  $n$  στα κουτάκια με όλους τους

δυνατούς τρόπους. Προφανώς, το σύνολο των διαφορετικών τρόπων θα είναι  $n!$ . Έπειτα, ταυτοποιούμε τον κάθε διαφορετικό τρόπο ανάθεσης των ακεραίων με μια κατάσταση στην κανονική αναπαράσταση της  $S_n$ , ορίζοντας μια διάταξη, από τα αριστερά στα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω (όπως διαβάζουμε ένα κείμενο):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 7 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow |6532174\rangle \quad (\text{A'.18})$$

όπου  $|6532174\rangle$  είναι η κατάσταση που αντιστοιχεί στη μετάθεση  $1234567 \rightarrow 6532174$ . Οπότε, κάθε μία από τις  $n!$  αναθέσεις των ακεραίων περιγράφει μια από τις  $n!$  καταστάσεις της κανονικής αναπαράστασης. Έπειτα, για ένα συγκεκριμένο Young tableau, συμμετρικοποιούμε την αντίστοιχη κατάσταση ως προς τους αριθμούς κάθε γραμμής και αντισυμμετρικοποιούμε ως προς τους αριθμούς κάθε στήλης. Για παράδειγμα :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |12\rangle + |21\rangle \quad (\text{A'.19})$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \quad (\text{A'.20})$$

Το σύνολο των καταστάσεων που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο, καλύπτει κάποιον υπόχωρο της κανονικής αναπαράστασης. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τις καταστάσεις και ξέρουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μεταθέσεις δρουν στις καταστάσεις αυτές. Ο υπόχωρος που κατασκευάζεται με τον τρόπο αυτό είναι αναπαράσταση της  $S_n$ , αφού μια μετάθεση απλώς αντιστοιχεί στο ξεκίνημα με μια διαφορετική αριθμητική ανάθεση στο Young tableaux, επομένως δρώντας μία μετάθεση σε οποιαδήποτε κατάσταση του υπόχωρου, παράγει μία κατάσταση η οποία βρίσκεται επίσης στον ίδιο υπόχωρο. Όντως, η αναπαράσταση αυτή είναι μη αναγωγίσιμη και είναι η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση που σχετίζεται με τα Young tableaux.

Ας πάρουμε το παράδειγμα της  $S_3$ :

- Το πρώτο ταμπλό της (A'.17) δίνει πλήρως συμμετρικές καταστάσεις :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |321\rangle \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |132\rangle + |231\rangle \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow |213\rangle + |312\rangle \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow |231\rangle + |132\rangle \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |312\rangle + |213\rangle \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow |321\rangle + |123\rangle, \end{array} \quad (\text{A'.21})$$

που σημαίνει ότι σχετίζεται με έναν μονοδιάστατο υπόχωρο ο οποίος μετασχηματίζεται κάτω από την τριμμένη αναπαράσταση.

- Το δεύτερο ταμπλό της (A'.17) δίνει πλήρως αντισυμμετρικές καταστά-

σεις :

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle - |321\rangle \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow |213\rangle - |312\rangle \\
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |312\rangle - |213\rangle
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow |132\rangle - |231\rangle \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow |231\rangle - |132\rangle \\
 \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow |321\rangle - |123\rangle
 \end{array}$$

(A'.22)

και συμπεραίνουμε ότι σχετίζεται με έναν μονοδιάστατο υπόχωρο αυτή τη φορά μετασχηματιζόμενο κάτω από την αναπαράσταση στην οποία οι εναλλαγές αναπαρίστανται από το -1 (αναπαράσταση προσήμου).

- Το τρίτο ταμπλό της (A'.17) δίνει τις ακόλουθες καταστάσεις.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |231\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |321\rangle + |231\rangle - |123\rangle - |213\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |231\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |312\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |132\rangle + |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |312\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow |213\rangle + |123\rangle - |312\rangle - |132\rangle
 \end{array}$$

(A'.23)

Παρατηρούμε ότι εναλλάσσοντας δύο στοιχεία σε μία στήλη ενός ταμπλό απλά αλλάζει το πρόσημο της κατάστασης. Αυτό είναι μία ιδιότητα που ισχύει γενικά. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα τριών καταστάσεων που σχετίζεται με κυκλικές μεταθέσεις εξαφανίζεται. Επομένως, ο υπόχωρος είναι δύο διαστάσεων και μετασχηματίζεται κάτω από τη διδιάστατη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της  $S_3$  που ονομάζεται **standard representation**. Γενικότερα, μπορούμε να περιγράψουμε μια βάση κάθε μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης των  $S_n$ , χρησιμοποιώντας τα standard Young tableaux, τα οποία είναι ίδια με τα απλά Young tableaux με τη διαφορά ότι τα νούμερα δεν τοποθετούνται μες στα κουτάκια με όλους τους δυνατούς τρόπους αλλά σε αύξουσα σειρά ως προς τις γραμμές και τις στήλες. Για παράδειγμα, η βάση της standard αναπαράστασης της  $S_3$  αντιστοιχεί στα δύο standard Young Tableaux:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

(A'.24)

Η διάσταση της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από το Young tableau με τη βοήθεια της φόρμουλας των «γάντζων», για την οποία θα συζητήσουμε παρακάτω στο δεύτερο μέρος των Young tableaux.

Είναι αλήθεια ότι μπορούμε να συζητήσουμε εκτενέστερα για τις αναπαραστάσεις των πεπερασμένων ομάδων γενικότερα, όμως το κύριο μέλημα μας είναι οι συνεχείς. Παρακάτω θα διαπιστώσουμε ότι οι αναπαραστάσεις της ομάδας μεταθέσεων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στις συνεχείς ομάδες.

## Α.5 Ομάδες και άλγεβρες Lie

Αλλάζοντας κάπως το σκηνικό, περνάμε στην περιγραφή μιας κατηγορίας άπειρων συνεχών ομάδων, τις ομάδες Lie, οι οποίες εμφανίζουν τεράστιο ενδιαφέρον και αξίζει να μελετηθούν εις βάθος. Εδώ, θα αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία και έπειτα θα περάσουμε κατευθείαν στο κομμάτι που μας ενδιαφέρει, δηλαδή στη μελέτη των αναπαραστάσεων των ομάδων αυτών.

Ας υποθέσουμε ότι τα στοιχεία της ομάδας,  $g \in G$ , εξαρτώνται «ομαλά» από ένα σύνολο συνεχών παραμέτρων, δηλαδή  $g = g(\alpha)$ . Αυτό που εννοούμε με τη λέξη «ομαλά» είναι μια έννοια κλειστότητας της ομάδας τέτοια ώστε αν δύο στοιχεία είναι «αρκετά κοντά» τότε και οι παράμετροι,  $\alpha$ , που τα περιγράφουν να είναι επίσης.

Καθώς γνωρίζουμε ότι το ταυτοτικό στοιχείο είναι ένα πολύ σημαντικό στοιχείο των ομάδων γενικά, παραμετροποιούμε τα στοιχεία με τέτοιο τρόπο ώστε για  $\alpha = 0$  να παίρνουμε το ταυτοτικό στοιχείο.

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = e. \quad (\text{A'.25})$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι σε κάποια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου, τα στοιχεία της ομάδας μπορούν να περιγραφούν σαν μια συνάρτηση  $N$  πραγματικών παραμέτρων,  $\alpha_a$ , με  $a = 1 \dots N$ .

Επομένως, βρίσκοντας κάποια αναπαράσταση της ομάδας, οι γραμμικοί τελεστές της θα παραμετροποιούνται κατά τον ίδιο τρόπο:

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = 1. \quad (\text{A'.26})$$

Έτσι, σε κάποια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου μπορούμε να αναπτύξουμε το  $D(\alpha)$  κατά Taylor, και δεδομένου ότι δεν απομακρυνόμαστε αρκετά, κρατάμε μόνο τον πρώτο όρο:

$$D(\alpha) = 1 + i\alpha_a X_a + \dots, \quad (\text{A'.27})$$

όπου ορίσαμε:

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)|_{\alpha=0}. \quad (\text{A'.28})$$

Τα  $X_a$  για  $a = 1 \dots N$  ονομάζονται γεννήτορες της ομάδας. Αν η παραμετροποίηση είναι βηματική (δηλαδή όλες οι παράμετροι χρειάζονται για να

διακρίνουμε τα διαφορετικά στοιχεία της ομάδας) τότε οι γεννήτορες είναι ανεξάρτητοι. Σημειώνουμε επίσης ότι στον ορισμό των γεννητόρων έχουμε συμπεριλάβει το  $i$  έτσι ώστε αν η αναπαράσταση είναι μοναδιακή, οι γεννήτορες να είναι ερμιτιανοί τελεστές. Όπως έδειξε ο Sophus Lie, οι γεννήτορες μπορούν να ορισθούν χωρίς να εμπλέξουμε την έννοια των αναπαραστάσεων. Αυτός είναι και ο λόγος που οι ομάδες αυτές φέρουν το όνομά του.

Αν τώρα προσπαθήσουμε να απομακρυνθούμε από το ταυτοτικό στοιχείο, για παράδειγμα υψώνοντας ένα απειροστό στοιχείο της ομάδας  $D(\alpha) = 1 + i\alpha_a X_a$  σε κάποια μεγάλη δύναμη, λόγω της ιδιότητας της κλειστότητας των ομάδων, θα παίρνουμε πάντα σαν αποτέλεσμα πάλι κάποιο στοιχείο της ομάδας. Η ιδιότητα αυτή οδηγεί σε έναν νέο ορισμό της αναπαράστασης των στοιχείων της ομάδας για πεπερασμένο πια  $\alpha$  σαν:

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + i\alpha_a X_a/k)^k = e^{i\alpha_a X_a}. \quad (A'.29)$$

Έτσι ορίζεται μια συγκεκριμένη παραμετροποίηση των αναπαραστάσεων (εκθετική αναπαράσταση) κι επομένως και του πολλαπλασιαστικού κανόνα. Πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία της ομάδας (τουλάχιστον σε μια γειτονιά κοντά στο ταυτοτικό στοιχείο) σε όρους των γεννητόρων. Αυτό είναι ιδιαίτερα ευχάριστο καθώς, αντιθέτως με τα στοιχεία της ομάδας, οι γεννήτορες σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο. Μπορούν δηλαδή να προστεθούν μεταξύ τους και να πολλαπλασιαστούν από πραγματικούς αριθμούς.

Πλέον, σε κάθε συγκεκριμένη κατεύθυνση, ο πολλαπλασιαστικός κανόνας της ομάδας παύει να είναι πολύπλοκος. Υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια των στοιχείων ομάδας της μορφής

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a}, \quad (A'.30)$$

κι επομένως ο πολλαπλασιαστικός κανόνας είναι:

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (A'.31)$$

Παρ'όλα αυτά, αν πολλαπλασιάσουμε στοιχεία ομάδας που παράγονται από δύο διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς των γεννητόρων τα πράγματα δεν είναι και τόσο απλά. Γενικά:

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_a) X_a}. \quad (A'.32)$$

Από την άλλη μεριά λόγω του ότι τα εκθετικά σχηματίζουν μιαν αναπαράσταση της ομάδας (τουλάχιστον κοντά στο ταυτοτικό), πρέπει να αληθεύει ότι το γινόμενο είναι κάποιο εκθετικό κάποιου γεννήτορα λόγω κλειστότητας της ομάδας, δηλαδή:

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a}. \quad (A'.33)$$

για κάποιο  $\delta$ . Λόγω του ότι τα πάντα είναι «ομαλά», μπορούμε να βρούμε τα  $\delta_a$  αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (A'.33) και εξισώνοντας κατάλληλες δυνάμεις των  $\alpha, \beta$ . Κάνοντας αυτό προκύπτει ένα πολύ ενδιαφέρον

αποτέλεσμα. Βρίσκουμε ότι αυτό δουλεύει μόνο εάν οι γεννήτορες σχηματίζουν μια **μεταθετική άλγεβρα**. Για να το δούμε αυτό, παίρνουμε την (Α'.33), προσθαφαιρούμε τη μονάδα στο δεξί μέλος, έπειτα λογαριθμούμε και έχουμε:

$$\ln \left( 1 + e^{\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \right) = i\delta_a X_a \quad (\text{Α'.34})$$

Αναπτύσσουμε τώρα κατά Taylor κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς  $\alpha, \beta$  χρησιμοποιώντας το γνωστό ανάπτυγμα της συνάρτησης  $\ln(1 + K)$ , όπου:

$$\begin{aligned} K &= e^{\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} - 1 \\ &= \left( 1 + i\alpha_a X_a - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 + \dots \right) \left( 1 + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \right) - 1 \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{Α'.35})$$

Συνεπώς η (Α'.34) θα δίνει:

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \alpha_a X_a \beta_b X_b - \frac{1}{2}(\alpha_a X_a)^2 - \frac{1}{2}(\beta_b X_b)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha_a X_a + \beta_b X_b)^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{Α'.36})$$

Οι όροι μεγαλύτερης τάξης τείνουν να αλληλοακυρωθούν. Αν τα  $X$  ήταν αριθμοί τότε όντως θα συνέβαινε, σκεπτόμενοι επίσης ότι το γινόμενο των εκθετικών είναι ίσο με το εκθετικό του αθροίσματος. Όμως αποτυγχάνουν να αλληλοακυρωθούν αφού οι  $X$  είναι γραμμικοί τελεστές και άρα δε μετατίθενται. Επομένως, η (Α'.36) θα γίνει:

$$\begin{aligned} i\delta_a X_a &= K - \frac{1}{2}K^2 + \dots \\ &= i\alpha_a X_a + i\beta_b X_b - \frac{1}{2}[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] + \dots \end{aligned} \quad (\text{Α'.37})$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι χρησιμοποιώντας μόνο την ιδιότητα της κλειστότητας των ομάδων και την «ομαλότητα», η οποία μας επέτρεψε να αναπτύξουμε κατά Taylor, καταλήξαμε στη σχέση (Α'.37). Για τον μεταθέτη συμπεραίνουμε ότι:

$$[\alpha_a X_a, \beta_b X_b] = -2i(\delta_c - \alpha_c - \beta_c)X_c + \dots \equiv i\gamma_c X_c, \quad (\text{Α'.38})$$

όπου το  $i$  το βάζουμε για να κάνουμε το  $\gamma$  πραγματικό, ενώ οι κάτω τελείες αναπαριστούν τους όρους που έχουν πάνω από δύο παράγοντες των  $\alpha$  ή  $\beta$ . Επειδή η (Α'.38) πρέπει να ισχύει για όλα τα  $\alpha$  και  $\beta$ , πρέπει να έχουμε:

$$\gamma_c = \alpha_a \beta_b f_{abc} \quad (\text{Α'.39})$$

για κάποιες σταθερές  $f_{abc}$ . Επομένως:

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c, \quad (\text{A'.40})$$

όπου

$$f_{abc} = -f_{bac}, \quad \text{επειδή} \quad [A, B] = -[B, A] \quad (\text{A'.41})$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$\delta_a - \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2} \gamma_a + \dots \quad (\text{A'.42})$$

έτσι ώστε εάν το  $\gamma$  και οι ανώτεροι όροι εξαφανιστούν, να ανακτούμε την ισότητα της (A'.32).

Η μορφή της (A'.40) είναι αυτό που ονομάζουμε: «οι γεννήτορες σχηματίζουν μια μεταθετική άλγεβρα». Δείξαμε λοιπόν ότι αυτό προέκυψε από τις ιδιότητες των ομάδων Lie, ότι δηλαδή τα στοιχεία των ομάδων εξαρτώνται «ομαλά» από τις παραμέτρους. Η μεταθετική άλγεβρα, (A'.40), παίζει στις συνεχείς ομάδες ανάλογο ρόλο με αυτόν που παίζει ο πολλαπλασιαστικός πίνακας στις διακριτές.

Είναι λογικό να σκεφτούμε ότι αν κρατούσαμε όρους μεγαλύτερους από δεύτερης τάξης στο ανάπτυγμα της (A'.34), θα χρειαζόμασταν κι άλλες συνθήκες για να εξασφαλίσουμε ότι διατηρείται ο πολλαπλασιαστικός κανόνας. Το αξιοσημείωτο είναι ότι δε χρειαζόμαστε. Η μεταθετική σχέση (A'.40) είναι αρκετή. Πράγματι, αν γνωρίζουμε τις σταθερές  $f_{abc}$  τότε μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το  $\delta$  με όση ακρίβεια θέλουμε για κάθε  $\alpha, \beta$  σε κάποια πεπερασμένη γειτονιά της αρχής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα  $f_{abc}$  είναι εξαιρετικά σημαντικά: συνοψίζουν εικονικά ολόκληρο τον πολλαπλασιαστικό κανόνα της ομάδας. Για το λόγο αυτό ονομάζονται *σταθερές δομής της ομάδας* και μπορούν να υπολογιστούν σε οποιαδήποτε (μη τετριμμένη) αναπαράσταση. Συνοψίζοντας λοιπόν, η μεταθετική σχέση (A'.40) καλείται *άλγεβρα Lie* της ομάδας και ορίζεται ολοκληρωτικά από τις σταθερές δομής της ομάδας, οι οποίες είναι ίδιες για όλες τις αναπαραστάσεις αφού προσδιορίζονται αποκλειστικά από τον πολλαπλασιαστικό κανόνα της ομάδας και την «ομαλότητα». Αξίζει να σημειωθεί ότι αν υπάρχει κάποια μοναδιακή αναπαράσταση της άλγεβρας, τότε οι σταθερές δομής είναι πραγματικές. Πράγματι, αν πάρουμε το αναστροφοσυζυγές της μεταθετικής σχέσης για τους ερμιτιανούς  $X$ , αποκτούμε:

$$[X_a, X_b]^\dagger = -i f_{abc}^* X_c \Rightarrow [X_b, X_a] = -i f_{abc}^* X_c. \quad (\text{A'.43})$$

Όμως επειδή:

$$[X_b, X_a] = i f_{bac} X_c = -i f_{abc} X_c, \quad (\text{A'.44})$$

θα ισχύει:

$$f_{abc}^* = f_{abc}. \quad (\text{A'.45})$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι σταθερές δομής είναι πραγματικές. Συνεπώς, αφού ενδιαφερόμαστε για ομάδες που έχουν μοναδιακές αναπαραστάσεις, θα υποθέσουμε ότι οι σταθερές δομής είναι πραγματικές<sup>8</sup>.

Κλείνουμε με ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

**Θεώρημα Α'.5.1** *Το ίχνος οποιουδήποτε γεννήτορα σε οποιαδήποτε αναπαράσταση μιας συμπαγούς<sup>9</sup> απλής άλγεβρας Lie είναι μηδέν<sup>10</sup>.*

Περνάμε λοιπόν τώρα στη μελέτη των ομάδων Lie εξετάζοντας τη δομή των αλγεβρών τους αλλά και τις αναπαραστάσεις τους.

## Α'.6 Η άλγεβρα $SU(2)$

Καταρχήν,  $SU(2)$  είναι η ομάδα όλων των  $2 \times 2$  μοναδιακών πινάκων με ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Χτίζεται εξ' ολοκλήρου από τρεις γεννήτορες,  $J_i$ , οι οποίοι είναι ερμιτιανοί πίνακες (πίνακες Pauli). Η άλγεβρα Lie  $A_2$  της ομάδας  $SU(2)$  περιγράφεται από τη μεταθετική σχέση των γεννητόρων:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (\text{A'.46})$$

και αποτελεί την απλούστερη συμπαγή άλγεβρα Lie καθώς έχει σταθερές δομής που δίνονται από τον πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή με 3 δείκτες. Από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι η (A'.46) είναι ισοδύναμη με τη σχέση των στροφορμών (σπιν). Έτσι λοιπόν, θα ορίσουμε τον τελεστή  $J^2$ <sup>11</sup> ως εξής:

$$J^2 := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \quad (\text{A'.47})$$

Παρατηρούμε ότι μετατίθεται με όλα τα  $J_i$ :

$$[J^2, J_i] = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{A'.48})$$

Οπότε, εφόσον μετατίθενται (διαγώνοποιούνται ταυτόχρονα), έχει πλέον νόημα να θεωρήσουμε το κοινό πρόβλημα ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων των τελεστών  $J^2$  και ενός εκ των  $J_i$ , έστω του  $J_3$ :

$$J^2\Psi = \Lambda\Psi \quad \text{και} \quad J_3\Psi = m\Psi \quad (\text{A'.49})$$

Παραμετροποιούμε λοιπόν  $\Lambda = j(j+1)$  και αλλάζουμε το συμβολισμό των ιδιοσυναρτήσεων στο συμβολισμό του Dirac:  $\Psi = |j\ m\rangle$ . Επομένως η πρώτη εξίσωση της (A'.49) γίνεται:

$$J^2|j\ m\rangle = j(j+1)|j\ m\rangle \quad (\text{A'.50})$$

$$J_3|j\ m\rangle = m|j\ m\rangle. \quad (\text{A'.51})$$

<sup>8</sup>Georgi Howard: Lie algebras in particle physics, from isospin to Unified theories, 1999,σελ.123

<sup>9</sup>Για τον ορισμό της συμπαγούς ομάδας Lie βλ. σελ.22

<sup>10</sup>Georgi Howard: Lie algebras in particle physics, from isospin to Unified theories, 1999,σελ.123

<sup>11</sup>Το τετράγωνο του τελεστή της στροφορμής αποτελεί τον τελεστή Casimir της άλγεβρας  $A_1$ .

Στη συνέχεια (εμπνευσμένοι από την κβαντομηχανική), ορίζουμε τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης (θα φανεί στο τέλος γιατί ονομάζονται έτσι):

$$J^\pm = J_1 \pm iJ_2, \quad (\text{A'.52})$$

οπότε οι τρεις μεταθετικές σχέσεις (A'.46) παίρνουν τη μορφή:

$$[J^+, J^-] = 2J_3 \quad (\text{A'.53})$$

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm. \quad (\text{A'.54})$$

Αυτή η μορφή των μεταθετικών σχέσεων αποτελεί μια βολική περιγραφή για την επίτευξη του στόχου μας, τη συστηματική μελέτη των αναπαραστάσεων της άλγεβρας. Στην καινούρια μας βάση για τον τελεστή  $J^2$  θα έχουμε μέσω της (A'.47):

$$\begin{aligned} J^2 &= \overbrace{[(J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) + iJ_1J_2 - iJ_2J_1]}^{J_1^2 + J_2^2} + J_3^2 = J^+J^- + i[J_1, J_2] + J_3^2 \\ &= J^+J^- - J_3 + J_3^2. \end{aligned} \quad (\text{A'.55})$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τη δράση των τελεστών  $J^\pm$  στην κατάσταση  $|j m\rangle$ , η οποία δεν είναι ιδιοκατάστασή τους, τότε προκύπτει η κατάσταση  $J^\pm |j m\rangle$ . Δρούμε αρχικά τον τελεστή  $J^2$  πάνω στην κατάσταση αυτή και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} J^2 (J^\pm |j m\rangle) &= J^2 J^\pm |j m\rangle \stackrel{(\text{A'.48})}{=} J^\pm J^2 |j m\rangle = J^\pm (J^2 |j m\rangle) \\ &\stackrel{(\text{A'.50})}{=} j(j+1) J^\pm |j m\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A'.56})$$

Άρα δείξαμε ότι αφού η  $|j m\rangle$  είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή  $J^2$  με ιδιοτιμή  $j(j+1)$ , τότε η κατάσταση  $J^\pm |j m\rangle$  είναι επίσης ιδιοκατάσταση του  $J^2$  με ίδια ιδιοτιμή  $j(j+1)$ .

Δρούμε τώρα με τον τελεστή  $J_3$  πάνω στην κατάσταση  $J^\pm |j m\rangle$  και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} J_3 (J^\pm |j m\rangle) &= J_3 J^\pm |j m\rangle = J^\pm (J_3 |j m\rangle) \pm [J_3, J^\pm] |j m\rangle \\ &\stackrel{(\text{A'.51})}{=} m J^\pm |j m\rangle \pm [J_3, J^\pm] |j m\rangle \stackrel{(\text{A'.54})}{=} m J^\pm |j m\rangle \pm J^\pm |j m\rangle \\ &= (m \pm 1) (J^\pm |j m\rangle). \end{aligned} \quad (\text{A'.57})$$

Επομένως, καταλαβαίνουμε ότι αφού  $|j m\rangle$  είναι ιδιοκατάσταση του  $J_3$ , με ιδιοτιμή  $m$ , τότε η κατάσταση  $J^\pm |j m\rangle$  είναι επίσης ιδιοκατάσταση του  $J_3$  με ιδιοτιμή  $m \pm 1$ . Με βάση λοιπόν τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να γράψουμε:

$$J^\pm |j m\rangle = C_\pm(j, m) |j m \pm 1\rangle. \quad (\text{A'.58})$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς μας πληροφορεί ότι όταν ένας τελεστής αναβίβασης (καταβίβασης) δράσει πάνω σε μια ιδιοκατάσταση  $|j m\rangle$ , τότε μας πηγαίνει σε μια νέα κατάσταση, την  $|j m \pm 1\rangle$ . Το μόνο που

απομένει να κάνουμε προτού βγάλουμε τα τελικά μας συμπεράσματα είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές  $C_{\pm}(j, m)$ :

Καταρχήν, αφού οι γεννήτορες  $J_i$  είναι ερμιτιανοί αυτό σημαίνει ότι για τους γεννήτορες  $J^{\pm}$  της νέας βάσης θα ισχύει:

$$(J^{\pm})^{\dagger} = (J_1 \pm iJ_2)^{\dagger} = J_1^{\dagger} \mp iJ_2^{\dagger} \stackrel{J_i^{\dagger}=J_i}{=} J_1 \mp iJ_2 \Rightarrow (J^{\pm})^{\dagger} = J^{\mp}. \quad (\text{A'.59})$$

Υποθέτοντας ότι το πλήρες σύστημα των ιδιοκαταστάσεων είναι ορθοκανονικοποιημένο:

$$\langle j m | j m' \rangle = \delta_{mm'}, \quad \forall j, \quad (\text{A'.60})$$

υπολογίζουμε το μέτρο της κατάστασης  $J^{\pm}|j m\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle j m | J^{\pm\dagger} J^{\pm} | j m \rangle &= |C_{\pm}(j, m)|^2 \langle j m \pm 1 | j m \pm 1 \rangle \\ \stackrel{(\text{A'.60})}{\Rightarrow} \langle j m | J^{\mp} J^{\pm} | j m \rangle &= |C_{\pm}(j, m)|^2 \\ \stackrel{(\text{A'.55})}{\Rightarrow} |C_{\pm}(j, m)|^2 &= \langle j m | J^2 | j m \rangle - \langle j m | J_3^2 | j m \rangle \mp \langle j m | J_3 | j m \rangle \\ \Rightarrow |C_{\pm}(j, m)|^2 &= j(j+1) - m^2 \mp m = (j \mp m)(j \pm m + 1) \\ \Rightarrow |C_{\pm}(j, m)| &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{A'.61})$$

Συνεπώς, συνοψίζοντας:

$$J^{\pm}|j m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j m \pm 1\rangle. \quad (\text{A'.62})$$

Παρατητούμε λοιπόν ότι:

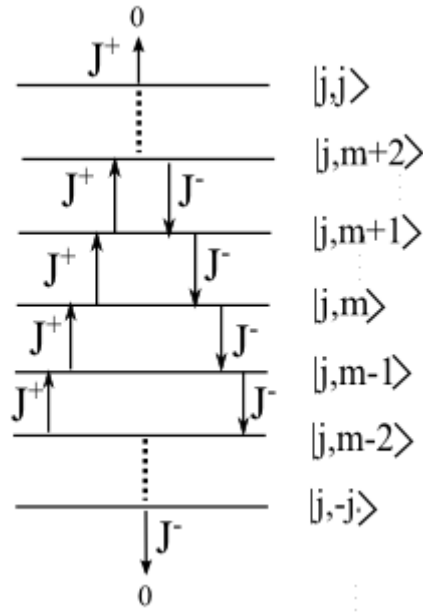
- Για  $m = j$ , τότε

$$J^+|j j\rangle = 0 \quad (\text{A'.63})$$

- Για  $m = -j$ , τότε

$$J^-|j - j\rangle = 0 \quad (\text{A'.64})$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι έχουμε μοναδιακές αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης  $2j + 1$ , που σημαίνει ότι το  $j$  παίρνει τιμές  $j = 0, 1/2, 1, 3/2 \dots$  και για κάθε διαφορετικό  $j$ ,  $m = -j, \dots, 0, \dots, j$ . Όλες οι καταστάσεις των αναπαραστάσεων (για δεδομένο  $j$  παίρνουμε και διαφορετική αναπαράσταση), μπορούν να προκύψουν ξεκινώντας από την κατάσταση  $|j m\rangle = |j j\rangle$  δρώντας διαδοχικά με τον τελεστή καταβίβασης μέχρι να σταματήσει η διαδικασία λόγω της (A'.64). Φυσικά, ισοδύναμη είναι και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή μπορούμε να ξεκινήσουμε από την κατάσταση  $|j m\rangle = |j - j\rangle$  και δρώντας διαδοχικά με τον τελεστή αναβίβασης να πάρουμε όλες τις καταστάσεις με την (A'.63) να αποτελεί αυτή τη φορά τη συνθήκη τερματισμού. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε να αποκτήσουμε έναν πλήρη κατάλογο των μη αναγωγίσιμων μοναδιακών αναπαραστάσεων της άλγεβρας  $A_1$ .



Εικόνα Α.1: Εύρεση των καταστάσεων της  $j$ -σπιν αναπαράστασης της ομάδας  $SU(2)$  με τη δράση των τελεστών αναβίβασης - καταβίβασης.

Για κάθε αναπαράσταση (διαφορετικό  $j$ ), οι γεννήτορες  $J_i$  αναπαρίστανται σαν πίνακες διάστασης  $2j + 1 \times 2j + 1$ , με κάθε στοιχείο να είναι στοιχείο πίνακα της μορφής:

$$[J_i]_{mm'} = \langle j m | J_i | j m' \rangle. \quad (A'.65)$$

Φυσικά, η μεταθετική σχέση (Α'.46) ισχύει σε καθολικό επίπεδο για όλες τις αναπαράστασεις, επομένως σε επίπεδο στοιχείων πίνακα θα είναι:

$$\sum_{m=-j}^j \{ [J_i]_{mm'} [J_j]_{m'm''} - [J_j]_{mm'} [J_i]_{m'm''} \} = i \epsilon_{ijk} [J_k]_{mm''}. \quad (A'.66)$$

Σαν εφαρμογή της παραπάνω ανάλυσης θα υπολογίσουμε τους γεννήτορες της  $j = 1/2$  αναπαράστασης. Οι πίνακες θα είναι διάστασης  $2 \cdot 1/2 + 1 = 2$  και οι τιμές του  $m$  θα είναι  $1/2, -1/2$ . Τα στοιχεία που θα απαρτίζουν τους τρεις πίνακες θα βρεθούν μέσω της σχέσης (Α'.65), για το λόγο ότι γνωρίζουμε πολύ καλά τον τρόπο με τον οποίον δρουν οι τελεστές  $J_3, J^+, J^-$  πάνω στις διάφορες καταστάσεις. Συνεπώς με τη βοήθεια των (Α'.51), (Α'.65) και (Α'.60)

Θα υπολογίσουμε τα στοιχεία πίνακα του  $J_3$ :

$$\begin{aligned}
[J_3]_{11} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \\
[J_3]_{12} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \\
[J_3]_{21} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \\
[J_3]_{22} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J_3 \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{A'.67}$$

Με τον ίδιο τρόπο, μέσω των (A'.62), (A'.65) και (A'.60), υπολογίζουμε τα στοιχεία πίνακα των  $J^\pm$ :

$$\begin{aligned}
[J^+]_{11} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{(A'.63)}{=} 0 \\
[J^+]_{12} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \\
[J^+]_{21} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{(A'.63)}{=} 0 \\
[J^+]_{22} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J^+ \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{A'.68}$$

Ομοίως για τα  $J^-$ :

$$\begin{aligned}
[J^-]_{11} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J^- \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \\
[J^-]_{12} &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| J^- \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{(A'.64)}{=} 0 \\
[J^-]_{21} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J^- \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \\
[J^-]_{22} &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| J^- \right| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \stackrel{(A'.64)}{=} 0.
\end{aligned} \tag{A'.69}$$

Από τον ορισμό των  $J^\pm$ , (Α'.52), προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε τους γεννήτορες  $J_1, J_2$  σε όρους των  $J^\pm$ :

$$J_1 = \frac{1}{2} (J^+ + J^-), \quad J_2 = -\frac{i}{2} (J^+ - J^-) \quad (\text{Α'.70})$$

Επομένως, μέσω των (Α'.68), (Α'.69) βρίσκουμε τους πίνακες  $J_1, J_2$  και μέσω της (Α'.67) βρίσκουμε τον πίνακα  $J_3$ <sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1 \\ J_2 &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2 \\ J_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3, \end{aligned} \quad (\text{Α'.71})$$

όπου  $\sigma_i$  είναι οι γνωστοί πίνακες Pauli. Οι τρεις πίνακες  $J_i$  λοιπόν, αποτελούν τους γεννήτορες της  $SU(2)$  ομάδας για την  $j = 1/2$  αναπαράσταση - διάστασης 2. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε και για αναπαραστάσεις μεγαλύτερης διάστασης. Παρακάτω θα συνεχίσουμε με άλγεβρες ομάδων μεγαλύτερης τάξης, όπου θα γίνει εμφανές το ότι η περιγραφή τους αποτελεί απλά γενίκευση της ανάλυσης που προηγήθηκε για την άλγεβρα  $A_1$  της πολύ σημαντικής ομάδας  $SU(2)$ .

## Α'.7 Η adjoint αναπαράσταση

Παραπάνω αναδείξαμε τη σημαντικότητα των σταθερών δομής μιας ομάδας και το γεγονός ότι δεν εξαρτώνται από την αναπαράσταση την οποία χρησιμοποιούμε αποτελεί μια πολύ δυνατή ιδιότητα. Επιπλέον, οι σταθερές δομής αυτές καθαυτές παράγουν μια αναπαράσταση της άλγεβρας η οποία ονομάζεται adjoint αναπαράσταση. Αν χρησιμοποιήσουμε τη μεταθετική σχέση (Α'.40), παίρνουμε:

$$[X_a, [X_b, X_c]] = i f_{bcd} [X_a, X_d] = -f_{bcd} f_{ade} X_e \quad (\text{Α'.72})$$

Από την εξίσωση αυτή χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi<sup>13</sup> που ικανοποιούν οι γεννήτορες, καταλήγουμε:

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0 \quad (\text{Α'.73})$$

<sup>12</sup>Όπως φαίνεται, ο πίνακας  $J_3$  είναι διαγώνιος και αποτελεί όπως θα δούμε τον ένα και μοναδικό γεννήτορα Cartan της άλγεβρας. Όπως θα δούμε λίγο παρακάτω, οι ιδιοτιμές του  $J_3$  ονομάζονται βάρη και ο τρόπος κατασκευής των καταστάσεων ονομάζεται κατασκευή μεγίστου βάρους για προφανείς λόγους

<sup>13</sup> $[X_a, [X_b, X_c]] + \text{κυκλ. μεταθέσεις} = 0$

Αν ορίσουμε ένα σύνολο πινάκων  $T_a$ , τα στοιχεία πίνακα θα δίνονται από τη σχέση:

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \quad (\text{A'.74})$$

κι επομένως η (A'.73) επαναδιατυπώνεται:

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (\text{A'.75})$$

Όπως φαίνεται οι σταθερές δομής από μόνες τους αποτελούν μian αναπαράσταση της άλγεβρας, την **adjoint**. Η διάσταση της αναπαράστασης ισούται με τη διάσταση του γραμμικού χώρου στον οποίο δρα. Η διάσταση λοιπόν της adjoint αναπαράστασης είναι απλά ο αριθμός των ανεξάρτητων γεννητόρων<sup>14</sup>, δηλαδή, ο αριθμός των πραγματικών παραμέτρων που απαιτούνται για να περιγραφεί ένα στοιχείο της ομάδας. Σημειώνουμε ότι αφού οι σταθερές δομής είναι πραγματικές, οι γεννήτορες στην adjoint αναπαράσταση θα είναι καθαρά φανταστικοί.

Για να αναβαθμιστεί ο γραμμικός χώρος των γεννητόρων της adjoint αναπαράστασης σε διανυσματικό, πρέπει να εισαχθεί ένα βολικό βαθμωτό γινόμενο. Ένα τέτοιο είναι να χρησιμοποιήσουμε το ίχνος της αναπαράστασης. Αποδεικνύεται<sup>15</sup> ότι η σχέση αυτή είναι:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k^a \delta_{ab}, \quad \text{όχι άθροιση στους δείκτες} \quad (\text{A'.76})$$

Γενικά, στις άλγεβρες με τις οποίες θα ασχοληθούμε, θα υποθέσουμε ότι τα  $k^a$  είναι θετικά. Αυτό ορίζει μια κατηγορία αλγεβρών που ονομάζονται **συμπαγείς άλγεβρες Lie**.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η adjoint αναπαράσταση είναι μοναδιακή, αφού οι  $T_a$  είναι φανταστικοί και αντισυμμετρικοί (αφού οι σταθερές δομής είναι πλήρως αντισυμμετρικές) κι επομένως ερμιτιανοί.

Πηγαίνοντας λίγο παραπέρα, η σημαντικότητα της adjoint αναπαράστασης φαίνεται κιόλας από τον ορισμό της (A'.74). Λόγω του ότι οι γραμμές και στήλες των πινάκων, όπως ορίζονται από την (A'.74), έχουν σαν ετικέτα τον ίδιο δείκτη που έχουν και οι γεννήτορες, οι καταστάσεις της αναπαράστασης αντιστοιχούν στους ίδιους τους γεννήτορες. Μια κατάσταση της adjoint αναπαράστασης θα την αντιστοιχίζουμε σε έναν αυθαίρετο γεννήτορα  $X_a$  και θα τη συμβολίζουμε σαν  $|X_a\rangle$ . Συνεπώς καταλήγουμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι γραμμικοί συνδυασμοί των καταστάσεων αντιστοιχούν σε γραμμικούς συνδυασμούς των γεννητόρων:

$$\alpha|X_a\rangle + \beta|X_b\rangle = |\alpha X_a + \beta X_b\rangle \quad (\text{A'.77})$$

<sup>14</sup>Εδώ βλέπουμε μian αναλογία με την κανονική αναπαράσταση όπου η διάστασή της ισούται με τον αριθμό των στοιχείων της διακριτής ομάδας

<sup>15</sup>Georgi Howard: Lie algebras in particle physics, from isospin to Unified theories, 1999, σελ. 123

Τέλος, κλείνουμε το υποκεφάλαιο υπολογίζοντας τη δράση ενός γεννήτορα πάνω σε μία τυχαία κατάσταση χρησιμοποιώντας τις (Α'.74) και (Α'.77):

$$\begin{aligned} X_a|X_b\rangle &= \sum_c |X_c\rangle \langle X_c|X_a|X_b\rangle = |X_c\rangle [T_a]_{bc} = -if_{acb}|X_c\rangle \\ &= if_{abc}|X_c\rangle = |if_{abc}X_c\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \end{aligned} \quad (\text{Α'.78})$$

## Α'.8 Πίνακας Cartan - Διαγράμματα Dynkin

Θέλουμε τώρα να πάρουμε το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο από μετατιθέμενους ερμιτιανούς γεννήτορες αφού θέλουμε να διαγωνοποιούμε όσο το δυνατό περισσότερους. Ένα υποσύνολο από μετατιθέμενους, ερμιτιανούς γεννήτορες που είναι όσο μεγαλύτερο γίνεται ονομάζεται *υπόάλγεβρα Cartan* και είναι μοναδική για κάθε άλγεβρα. Οι γεννήτορες που την απαρτίζουν ονομάζονται, προφανώς, *γεννήτορες Cartan*<sup>16</sup>. Συνεπώς σε κάποια αναπαράσταση, οι γεννήτορες Cartan,  $H_i$  για  $i = 1 \dots m$ , θα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$H_i = H_i^\dagger, \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (\text{Α'.79})$$

Όλη η δύναμη των γεννητόρων αυτών συγκεντρώνεται στο γεγονός ότι μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Η δράση λοιπόν ενός τέτοιου γεννήτορα πάνω σε μια κατάσταση  $|\mu\rangle$  κάποιας τυχαίας αναπαράστασης θα δώσει:

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle \quad (\text{Α'.80})$$

Οι ιδιοτιμές  $\mu_i$  ονομάζονται *βάρη* και είναι πραγματικές εφόσον είναι ιδιοτιμές ερμιτιανού τελεστή. Το διάνυσμα,  $\vec{\mu}$ ,  $m$  συνιστώσων με συνιστώσες τα  $\mu_i$ , με  $i = 1 \dots m$ , ονομάζεται *διάνυσμα βάρους*.

*Ρίζες* είναι τα βάρη της adjoint αναπαράστασης. Λόγω του ότι  $[H_i, H_j] = 0$  οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στους γεννήτορες Cartan έχουν μηδενικό βάρος:

$$H_i|H_j\rangle = |[H_i, H_j]\rangle = 0 \quad (\text{Α'.81})$$

Οπότε, όλες οι καταστάσεις στην adjoint αναπαράσταση που έχουν μηδενικά διανύσματα βάρους αντιστοιχούν στους γεννήτορες Cartan. Οι υπόλοιπες καταστάσεις που δεν αντιστοιχούν στους γεννήτορες Cartan, έχουν μη μηδενικά διανύσματα βάρους  $\vec{\alpha}$  με συνιστώσες  $\alpha_i$ :

$$H_i|E_\alpha\rangle = \alpha_i|E_\alpha\rangle \quad (\text{Α'.82})$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχοι γεννήτορες ικανοποιούν τη σχέση:

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (\text{Α'.83})$$

Για την adjoint αναπαράσταση, τα μη μηδενικά βάρη ορίζουν κατά μοναδικό τρόπο τις αντίστοιχες καταστάσεις. Επίσης, όπως και στην περίπτωση της

<sup>16</sup>Ο αριθμός των γεννητόρων Cartan ονομάζεται τάξη της άλγεβρας.



$SU(2)$  με τους τελεστές δημιουργίας - καταστροφής, τα  $E_\alpha$  δεν είναι ερμιτιανοί. Αυτό φαίνεται αν πάρουμε το αναστροφοσυζυγές της (Α'.83):

$$[H_i, E_\alpha]^\dagger = (\alpha_i E_\alpha)^\dagger \Rightarrow [H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger \quad (\text{Α'.84})$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \quad (\text{Α'.85})$$

Συμμαζεύοντας τους ορισμούς ως εδώ, τα βάρη  $\alpha_i$  ονομάζονται ρίζες και τα διανύσματα βάρους  $\alpha$  με συνιστώσες  $\alpha_i$  ονομάζονται διανύσματα ρίζας.

Οι  $E_{\pm\alpha}$  είναι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για τα βάρη, επειδή η κατάσταση  $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle$  έχει βάρος  $\mu \pm \alpha$ :

$$H_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}]|\mu\rangle + E_{\pm\alpha} H_i|\mu\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle \quad (\text{Α'.86})$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε αναπαράσταση αλλά έχει ιδιαίτερη σημασία για την adjoint αναπαράσταση. Αν θεωρήσουμε την κατάσταση  $E_\alpha|E_{-\alpha}\rangle$ , βλέπουμε ότι έχει μηδενικό βάρος. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω κατάσταση είναι γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων που αντιστοιχούν στους γεννήτορες Cartan. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η ακριβής σχέση είναι:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H \quad (\text{Α'.87})$$

Αυτό παραπέμπει κατευθείαν στη μεταθετική σχέση που διέπει την  $SU(2)$

$$[J^+, J^-] = J_3 \quad (\text{Α'.88})$$

και είναι η αναλογία αυτή που θα μας επιτρέψει να διερευνήσουμε τις συμπαγείς ομάδες Lie και τις αναπαραστάσεις τους.

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μη μηδενικό ζευγάρι διανυσμάτων ρίζας  $\pm\alpha$  υπάρχει μια  $SU(2)$  υποάλγεβρα της ομάδας με γεννήτορες:

$$E^\pm \equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha}, \quad E_3 \equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \quad (\text{Α'.89})$$

Αυτό φαίνεται εύκολα υπολογίζοντας τους δύο μεταθέτες:

$$\begin{aligned} [E_3, E^\pm] &= |\alpha|^{-3} [\alpha \cdot H, E_{\pm\alpha}] = |\alpha|^{-3} \alpha \cdot (\pm\alpha) E_{\pm\alpha} = \pm |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} = \pm E^\pm \\ [E^+, E^-] &= |\alpha|^{-2} [E_\alpha, E_{-\alpha}] = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H = E_3 \end{aligned} \quad (\text{Α'.90})$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι πολύ σημαντικό. Η μελέτη κάθε άλγεβρας μπορεί να αναχθεί σε μελέτη πολλών  $SU(2)$  αλγεβρών. Κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μπορεί να αποσυντεθεί σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των  $SU(2)$  υποαλγεβρών για τις οποίες ξέρουμε τα πάντα! Αυτό θέτει αρκετούς περιορισμούς στη φύση των ριζών, για παράδειγμα συνάγεται ότι κάθε διάνυσμα ρίζας αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό γεννήτορα.

Αν τώρα δράσουμε με τον  $E_3$  στην ιδιοκατάσταση  $|\mu\rangle$  η ιδιοτιμή του θα είναι:

$$E_3|\mu\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} |\mu\rangle \quad (\text{A'.91})$$

Λόγω του περιορισμού που επιβάλλει η  $SU(2)$  ότι οι ιδιοτιμές του  $E_3$  πρέπει να είναι ακέραιοι ή ημιακέραιοι, προκύπτει ότι το

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \quad (\text{A'.92})$$

είναι άκεραιος. Η γενική κατάσταση  $|\mu\rangle$  μπορεί να γραφτεί σα γραμμικός συνδυασμός καταστάσεων που μετασχηματίζονται σύμφωνα με συγκεκριμένες αναπαραστάσεις της  $SU(2)$  που ορίσαμε στην (A'.90). Υποθέτουμε ότι η κατάσταση υψηλότερου σπιν που εμφανίζεται στο γραμμικό συνδυασμό είναι  $j$ , τότε υπάρχει κάποιος μη αρνητικός ακέραιος αριθμός  $p$  τέτοιος ώστε

$$(E^\pm)^p |\mu\rangle \neq 0 \quad (\text{A'.93})$$

με βάρος  $\mu + p\alpha$ , δηλαδή να είναι η υψηλότερή  $E_3$  κατάσταση της  $SU(2)$  σπιν  $j$  αναπαράστασης, δηλαδή

$$(E^+)^{p+1} |\mu\rangle = 0 \quad (\text{A'.94})$$

Η ιδιοτιμή του τελεστή  $E_3$  της παραπάνω υψηλότερης δυνατής κατάστασης είναι:

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \quad (\text{A'.95})$$

Παρομοίως υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος  $q$  τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(E^-)^q |\mu\rangle \neq 0 \quad (\text{A'.96})$$

που σημαίνει ότι αν δράσω  $q$  φορές με τον τελεστή καταβίβασης  $E^-$  θα πάρω την κατάσταση χαμηλότερου βάρους  $(\mu - q\alpha)$  της συγκεκριμένης  $j$  αναπαράστασης, δηλαδή

$$(E^-)^{q+1} |\mu\rangle = 0 \quad (\text{A'.97})$$

Δρώντας λοιπόν στη χαμηλότερη κατάσταση (A'.96) με τον  $E_3$ , παίρνουμε την ιδιοτιμή:

$$\frac{\alpha(\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j \quad (\text{A'.98})$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (A'.95) και (A'.98), τότε παίρνουμε:

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad (\text{A'.99})$$

Από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε στην τελευταία εξίσωση σαν τη «master formula». Ένα πολύ σημαντικό «προϊόν» της παραπάνω ανάλυσης είναι το γεγονός ότι μέσω των (A'.95), (A'.98) και (A'.99) οδηγούμαστε σε μια γεωμετρική

ταξινόμηση των συμπαγών ομάδων Lie. Ένα πρώτο βήμα είναι το εξής: έστω ένα ζευγάρι ριζών  $\alpha, \beta$ . Αφού ορίσουμε τις δύο  $SU(2)$  άλγεβρες με  $E_\alpha$  και  $E_\beta$ , εφαρμόζουμε την (Α'.99) στο παραπάνω ζευγάρι διακριτών ριζών δύο φορές.

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad \text{και} \quad \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p' - q') \quad (\text{Α'.100})$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη και έχοντας υπόψη τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων παίρνουμε την πολλή σημαντική σχέση για τη γωνία  $\theta_{\alpha\beta}$  που σχηματίζουν οι ρίζες  $\alpha, \beta$  μεταξύ τους:

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4} \quad (\text{Α'.101})$$

Αυτό που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι το  $(p - q)(p' - q')$  πρέπει να είναι ακέραιο και επειδή είναι μη αρνητικό προκύπτουν μόνο τέσσερις ενδιαφέρουσες επιλογές για τις γωνίες των ριζών:

$(p - q)(p' - q')$	$\theta_{\alpha\beta}$
0	$90^\circ$
1	$60^\circ$ ή $120^\circ$
2	$45^\circ$ ή $135^\circ$
3	$30^\circ$ ή $150^\circ$
4	$0^\circ$ ή $180^\circ$

Η τελευταία περίπτωση δεν παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον καθώς για  $0^\circ$  σημαίνει ότι οι ρίζες ταυτίζονται - άτοπο θεωρήσαμε διακριτές ρίζες (ούτως ή άλλως οι ρίζες είναι μοναδικές, δεν ευθύνεται απλά η θεώρησή μας για τον αποκλεισμό της περίπτωσης των  $0^\circ$ ), ενώ για  $180^\circ$  παίρνουμε την τετριμμένη περίπτωση αφού οι ρίζες πάντα έρχονται σε ζεύγη με ανάποδο πρόσημο και οι δύο στην ίδια  $SU(2)$  υποάλγεβρα.

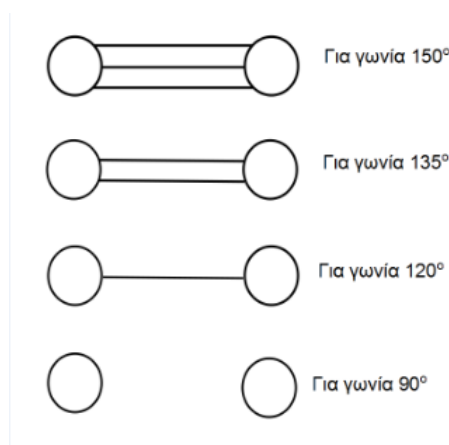
Στην adjoint αναπαράσταση οι θετικές ρίζες<sup>17</sup> αντιστοιχούν σε τελεστές αναβάθισης ενώ οι αρνητικές ρίζες σε τελεστές καταβίβασης. Το μεγαλύτερο βάρος μιας αναπαράστασης έχει την ιδιότητα να μην μπορούμε να το ανεβάσουμε άλλο. Αυτό σημαίνει ότι όλοι γεννήτορες - τελεστές που αντιστοιχούν σε θετικές ρίζες πρέπει να μηδενίζουν την κατάσταση μεγίστου βάρους. Γενικά, - αν δε χρειάζεται - δε θέλουμε να πραγματοποιούμε έλεγχο όλων των ριζών πάνω στην κάθε κατάσταση βάρους για κρίνουμε αν είναι κατάσταση μεγίστου βάρους ή όχι. Είναι προφανές λοιπόν ότι κάποιες από τις θετικές ρίζες θα χτίζονται από άλλες. Ορίζουμε λοιπόν ως **απλές ρίζες** τις ρίζες εκείνες που δεν μπορούν να γραφτούν σαν άθροισμα των άλλων θετικών ριζών. Αν λοιπόν οι γεννήτορες που αντιστοιχούν στις απλές ρίζες εξαφανίζουν κάποια κατάσταση βάρους τότε αυτή είναι κατάσταση μεγίστου βάρους μίας μη αναγωγίσιμης

<sup>17</sup>Γενικότερα, ένα διάνυσμα βάρους είναι θετικό εάν η πρώτη μη μηδενική συνιστώσα του είναι θετική ενώ αντίστοιχα είναι αρνητικό εάν η πρώτη μη μηδενική συνιστώσα είναι αρνητική. Μέσω αυτού του ορισμού μπορούμε να ορίσουμε και τη διάταξη:  $\vec{\mu} > \vec{\nu}$  αν  $\vec{\mu} - \vec{\nu} > 0$ .

αναπαράστασης. Επιπλέον, από τη γεωμετρία των απλών ριζών είναι δυνατό να βρεθούν όλες οι ρίζες ανακατασκευάζοντας τελικά ολόκληρη την άλγεβρα!

Προς το παρόν έχουμε ασχοληθεί κυρίως με τη φύση των ριζών αλλά τώρα έφτασε το σημείο να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του υπολογισμού τους. Η εύρεση όλων των ριζών μιας άλγεβρας μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους (π.χ. με τη χρήση της «master formula») αλλά εμείς εδώ θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία εύρεσης των ριζών με τη βοήθεια του πίνακα Cartan.

Πριν ξεκινήσουμε τη διαδικασία αυτή είναι φρόνιμο να προηγηθεί μια σύντομη αναφορά στα **διαγράμματα Dynkin**. Τα διαγράμματα αυτά είναι ουσιαστικά μια συντομογραφία καταγραφής των απλών ριζών (Βέβαια προσφέρει πολλά παραπάνω από αυτό, η σημασία του θα εκτιμηθεί αργότερα βλέπε το τελευταίο υποκεφάλαιο του παραρτήματος). Κάθε απλή ρίζα αναπαρίσταται από έναν ανοιχτό κύκλο. Τα ζευγάρια των κύκλων συνδέονται με γραμμές, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζουν οι αντίστοιχες απλές ρίζες.



Εικόνα A.2: Γωνίες απλών ριζών και γραμμές σε διαγράμματα Dynkin .

Αυτό που πέτυχε ο Dynkin είναι η ταξινόμηση των απλών αλγεβρών Lie μέσω ενός συστηματικού τρόπου κατασκευής διαγραμμάτων. Το ίδιο βέβαια κατάφερε και ο Cartan, την ταξινόμηση δηλαδή των αλγεβρών Lie όχι όμως με τη βοήθεια γεωμετρικού σχήματος αλλά με τη συστηματοποιημένη κατασκευή αντίστοιχων πινάκων. Όπως αναμένεται, οι δυο τρόποι ταξινόμησης σύνδεονται και από τον ένα μπορεί να παραχθεί ο άλλος.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η εύρεση όλων των ριζών μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ο πιο απλός και ταυτόχρονα επώδυνος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη «master formula» και γεωμετρικά επιχειρήματα, όμως απαιτούνται συνεχείς δοκιμές με αποτέλεσμα την εκτέλεση άχρηστων πράξεων. Η εναλλακτική λύση προς αποφυγή των περιεργών γεωμετρικών υπολογισμών είναι να ονομάσουμε τις απλές ρίζες όχι με βάση τις συνιστώσες τους αλλά με

βάση τις  $q^i - p^i$  τιμές τους. Γνωρίζουμε από την (Α.99) ότι το  $q^i - p^i$  οποιουδήποτε βάρους,  $\mu$ , είναι απλά το διπλάσιο της  $E_3$  ιδιοτιμής του, όπου  $E_3$  είναι ο γεννήτορας Cartan της  $SU(2)$  που σχετίζεται με την αντίστοιχη απλή ρίζα  $\alpha^i$ , αφού:

$$2E_3|\mu\rangle = \frac{2H \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = (q^i - p^i)|\mu\rangle \quad (\text{Α.102})$$

Λόγω του ότι οι απλές ρίζες είναι πλήρεις και γραμμικώς ανεξάρτητες, οι  $q^i - p^i$  τιμές των βαρών εμπεριέχουν τις ίδιες πληροφορίες με τις τιμές των συνιστωσών των διανυσμάτων βάρους, οπότε γι' αυτό χρησιμοποιούνται για να ονομάσουμε τα βάρη. Το πλεονέκτημα που μας δίνεται μέσω αυτής της διαδικασίας είναι η ανάδειξη της δομής των αναπαραστάσεων από τις  $SU(2)$  μέσω των απλών ριζών.

Συνεπώς, αφού μια θετική ρίζα,  $\phi$ , μπορεί να γραφτεί σε γραμμικός συνδυασμός των θετικών απλών ριζών

$$\phi = \sum_j k_j \alpha^j. \quad (\text{Α.103})$$

μέσω της «master formula» παίρνουμε:

$$q^i - p^i = \frac{2\phi \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} = \sum_j k_j \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} = \sum_j k_j A_{ji}, \quad (\text{Α.104})$$

όπου  $A$  είναι ο πίνακας Cartan

$$A_{ji} \equiv \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} \quad (\text{Α.105})$$

Το στοιχείο πίνακα  $A_{ji}$  είναι η  $q - p$  τιμή για την απλή ρίζα  $\alpha^i$  που δρα στην κατάσταση  $|\alpha^j\rangle$ , δηλαδή το διπλάσιο της ιδιοτιμής του  $E_3$  άρα όλες οι καταχωρημένες τιμές του  $A$  είναι ακέραιοι. Είναι προφανές από τον ορισμό των στοιχείων του πίνακα (αν  $\alpha^i = \alpha^j$ ) ότι τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με το 2. Αυτό φαίνεται επίσης από το γεγονός ότι όλες οι απλές ρίζες έχουν  $E_3 = 1$  αφού οι γεννήτορες καθαυτοί μετασχηματίζονται κάτω από την adjoint σπιν 1 αναπαράσταση. Τα μη διαγώνια στοιχεία παίρνουν τιμές 0, -1, -2, -3 και στην ουσία καταγράφουν τις γωνίες ανάμεσα στις απλές ρίζες και τα σχετικά τους μήκη (ίδια πληροφορία με τα διαγράμματα Dynkin) και μας πληροφορούν για το πως οι απλές ρίζες ταιριάζουν σε αναπαραστάσεις των διάφορων  $SU(2)$  υποαλγεβρών σε σύνδεση με τις υπόλοιπες απλές ρίζες. Σημειώνουμε ότι η  $j$ -οστή γραμμή του Cartan πίνακα αποτελείται από  $q_i - p_i$  τιμές της απλής ρίζας  $\alpha^j$ .

Για να δείξουμε το συσχετισμό των πινάκων Cartan με τα διαγράμματα Dynkin, αρχικά ανακεφαλαιώνουμε: ο αριθμός των γεννητόρων που σχηματίζουν μια αβελιανή υποάλγεβρα τάξης  $r$  ονομάζονται γεννήτορες Cartan της απλής άλγεβρας. Διαφορετικές απλές άλγεβρες Lie αντιστοιχούν σε διαφορετικές επιλογές του πίνακα Cartan, τάξης  $r$ . Οι επιτρεπτοί πίνακες Cartan για απλές άλγεβρες υπόκεινται στους παρακάτω κανόνες.

- Τα διαγώνια στοιχεία ισούνται με 2:  $A_{ii} = 2$
- Αν για  $i \neq j$  ισχύει ότι  $A_{ij} = 0$  τότε  $A_{ji} = 0$
- Για  $i \neq j$  ισχύει ότι  $A_{ij} \leq 0$ , δηλαδή τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μη θετικά με τον περιορισμό  $A_{ij}A_{ji} \leq 3$ .

Με βάση τώρα τους κανόνες αυτούς η αντιστοίχιση του πίνακα Cartan σε ένα διάγραμμα Dynkin έχει ως εξής:

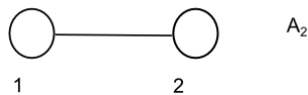
- Ο αριθμός των γραμμών που συνδέει τον κόμβο  $i$  με τον  $j$  (για  $i \neq j$ ) είναι ίσος με το γινόμενο  $A_{ij}A_{ji}$
- Οι συνδετικές γραμμές έχουν προσανατολισμό από τον κόμβο  $j$  στον κόμβο  $i$  αν  $A_{ij} < A_{ji}$  και αντίστροφα.

Με τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε να παράγουμε από τα διαγράμματα Dynkin τον αντίστοιχο πίνακα Cartan. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας τις απλές ρίζες, ο πίνακας Cartan της  $SU(3)$  βρίσκεται μέσω της (Α.105) και είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Α.106})$$

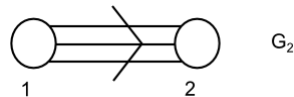
- Καταρχήν, αφού πίνακας είναι  $2 \times 2$  το διάγραμμα Dynkin θα έχει δύο κόμβους (δύο απλές ρίζες).
- Ο αριθμός των γραμμών είναι  $A_{12}A_{21} = 1$  και δεν υπάρχει προσανατολισμός αφού  $A_{12} = A_{21}$ .

Συνεπώς το διάγραμμα Dynkin που προκύπτει είναι:



Εικόνα Α.3: Διάγραμμα Dynkin της  $A_2$ .

Τώρα αντίστροφα: Εάν μας δίνεται το διάγραμμα Dynkin μιας άλγεβρας μπορούμε να αναπαράγουμε τον πίνακα Cartan. Για παράδειγμα, το διάγραμμα Dynkin της άλγεβρας  $G_2$  είναι:



Εικόνα Α.4: Διάγραμμα Dynkin της  $G_2$ .

Επομένως:

- Αφού  $r = 2$ , ο πίνακας θα είναι  $2 \times 2$ .
- Τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με 2.
- Εφόσον το διάγραμμα έχει τρεις συνδετικές γραμμές, θα ισχύει  $A_{12}A_{21} = 3$ . Επειδή τα στοιχεία του πίνακα είναι αρνητικά, οι δύο έγκυροι συνδυασμοί είναι τα ζευγάρια  $-3(-1)$  και  $-1(-3)$ . Το δίλημμα μας λύνεται από την παρουσία του προσανατολισμού. Αφού  $1 \rightarrow 2 \Rightarrow A_{21} < A_{12}$ . Άρα ο πίνακας Cartan είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A'.107})$$

Θα κλείσουμε την ανάλυση με τη διαδικασία εύρεσης των ριζών. Η διαδικασία απλοποιείται αρκετά με τη χρήση του πίνακα Cartan για το χτίσιμο όλων των ριζών από τις απλές ρίζες. Στο τέλος θα δούμε πώς οι  $SU(2)$  υποάλγεβρες προσφέρουν έναν ακόμα πιο γρήγορο και άμεσο τρόπο για τον υπολογισμό των ριζών.

Όταν πηγαίνουμε από μία ρίζα  $\phi$  στην  $\phi + \alpha^j$  μέσω της δράσης του τελεστή αναβάθισης  $E_{\alpha^j}$ , αλλάζει το  $k_j \rightarrow k_j + 1$  και συνεπώς  $q^i - p^i \rightarrow q^i - p^i + A_{ji}$ . Αν θεωρήσουμε τα  $q^i - p^i$  σαν στοιχεία ενός πίνακα γραμμής, αυτό είναι ισοδύναμο απλά με το να προσθέσουμε την  $j$ -οστή γραμμή του πίνακα Cartan, το οποίο είναι ουσιαστικά το  $q - p$  διάνυσμα που σχετίζεται με την απλή ρίζα  $\alpha^j$ . Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε όλες τις ρίζες.

Ξεκινάμε λοιπόν με τις απλές ρίζες στον  $q - p$  συμβολισμό. Τις βάζουμε σε κουτάκια τη μια δίπλα στην άλλη σε οριζόντια γραμμή πράγμα που δείχνει ότι αποτελούν το  $k = 1$  στρώμα των θετικών ριζών (οι απλές ρίζες). Είναι βολικό να βάλουμε μια γραμμή κάτω το  $k = 0$  στρώμα που αναπαριστά τους γεννήτορες Cartan. Προς το παρόν το σχεδιάγραμμά μας φαίνεται ως εξής: Αν λοιπόν

$$\begin{array}{ccc} k = 1 & \boxed{2 \ -1} & \boxed{-1 \ 2} & \alpha^1, \alpha^2 \\ k = 0 & \boxed{0 \ 0} & & H_i \end{array}$$

Εικόνα A.5: Πορεία προς την εύρεση ριζών της  $SU(3)$ .

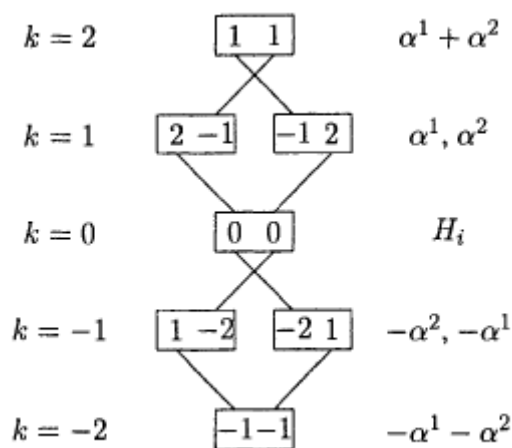
τώρα για κάθε στοιχείο των πλαισίων γνωρίζουμε τις τιμές  $p, q$  τότε μπορούμε να προσθέτουμε κάθε φορά την κατάλληλη ρίζα (δηλαδή την κατάλληλη γραμμή του πίνακα Cartan) και όταν όλα τα  $p$  μηδενιστούν αυτό σημαίνει ότι έχουμε φτάσει στην κατάσταση μεγίστου βάρους και τότε σταματάμε διαδικασία.

Για το  $i$ -οστό στοιχείο της  $\alpha^i$ , έχουμε  $q^i = 2$ , αφού η ρίζα είναι το μέγιστο βάρος της  $SU(2)$  σπιν 1 αναπαράστασης που αποτελείται από τα  $E_{\pm}$  και  $\alpha_i \cdot H$ .

Για όλα τα άλλα στοιχεία,  $q^j = 0$ , γιατί το  $\alpha^i - \alpha^j$ <sup>18</sup> δεν είναι ρίζα<sup>19</sup>.

Επομένως γνωρίζοντας σε κάθε στάδιο το  $q$  μπορούμε να υπολογίζουμε το  $p$  αφαιρώντας από τα στοιχεία του κάθε πλαισίου (διανύσματος γραμμής) το αντίστοιχο  $q$ . Για κάθε μη μηδενικό  $p$  τραβάμε μια γραμμή από την απλή ρίζα σε μια νέα ρίζα με  $k = 2$ , ανεβαίνοντας παραπάνω κατά ένα στρώμα. Είναι αρκετά εύχρηστο οι γραμμές να ξεκινάνε από το κατάλληλο στοιχείο του κάθε πλαισίου, ώστε οι γραμμές που σχετίζονται με κάθε ρίζα να είναι παράλληλες με αυτές της μετάβασης από το  $k = 0$  στο  $k = 1$ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται (μπορεί να στηθεί και κάποιος αλγόριθμος για την εύρεση των ριζών) μέχρι να μηδενιστούν όλα τα  $p$ .

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας τον πίνακα Cartan για την  $SU(3)$  που δίνεται από την (Α.106) εκτελούμε τη διαδικασία η οποία σταματάει στο  $k = 2$  στάδιο. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τις αρνητικές ρίζες (αρνητικά  $k$ ) οι οποίες παρατηρούμε ότι διαφέρουν από τις θετικές μόνο κατά το πρόσημο. Το μεγαλείο της διαδικασίας είναι ότι αναδεικνύει τις μετασχηματιστικές ιδιό-



Εικόνα Α.6: Οι ρίζες της  $SU(3)$ .

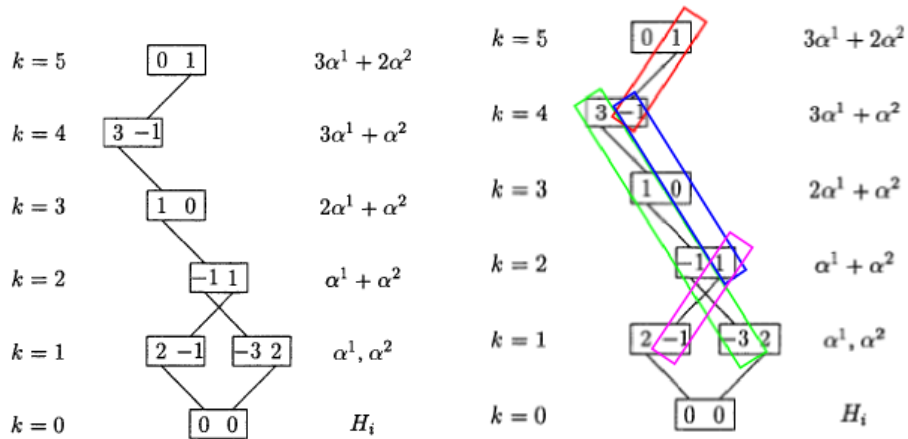
τητες των ριζών κάτω από τις δύο  $SU(2)$  υποάλγεβρες. Είναι γεγονός ότι αντί να σκεφτόμαστε σε όρους των  $p, q$  μπορούμε απλά να δούμε το πώς η κάθε  $E_3$  τιμή ταιριάζει σε κάποια  $SU(2)$  αναπαράσταση. Έτσι, η διαδικασία σταματάει μόλις όλες οι  $SU(2)$  αναπαραστάσεις είναι πλήρεις. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να υπολογίζουμε τα  $p, q$  αφού σκεφτόμασταν ήδη σε όρους  $SU(2)$  μέσω της «master formula» έτσι κι αλλιώς, αλλά ο τελευταίος τρόπος είναι πιο γρήγορος και απλός. Θα δώσουμε ως παράδειγμα τον υπολογισμό των ριζών

<sup>18</sup>Δεν ξεχνάμε τον ορισμό του  $q$  το οποίο μας πληροφορεί το πόσες φορές πρέπει να δράσει ο τελεστής καταβίβασης μιας απλής ρίζας πάνω σε μια τυχαία κατάσταση ώστε να φτάσουμε στην κατάσταση ελαχίστου βάρους.

<sup>19</sup>Η διαφορά δύο απλών ριζών δεν είναι ρίζα, αφού  $\alpha^i - \alpha^j = \phi \Rightarrow \alpha^i = \phi + \alpha^j$ , που όμως είναι άτοπο αφού μια απλή ρίζα δεν μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα δύο άλλων ριζών



της άλγεβρας  $G_2$  και από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τη διαδικασία αυτή.

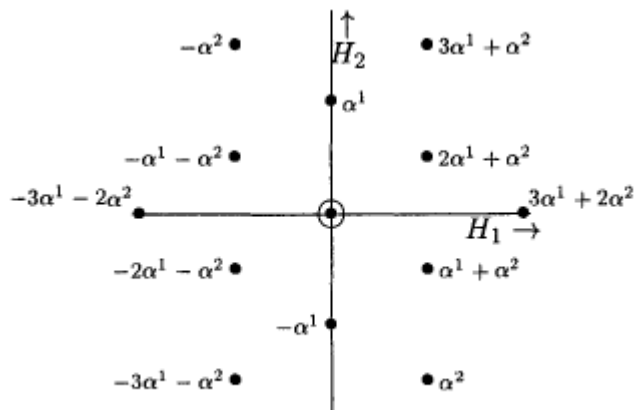


(α) Εύρεση των ριζών της άλγεβρας  $G_2$ .

(β)  $SU(2)$  αναπαραστάσεις κατά την εύρεση των ριζών της άλγεβρας  $G_2$ .

Εικόνα Α.7: Οι ρίζες της  $G_2$ .

Το επιχειρήμα σε όρους της  $SU(2)$  δομής έχει ως εξής: Γνωρίζουμε ότι οι απλές ρίζες  $\alpha^1, \alpha^2$  είναι τα μέγιστα βάρη της σπιν 1 αναπαράστασης των αντίστοιχων  $SU(2)$ , άρα σίγουρα δεν ξεκινάει λόγω αυτών κάποια αναπαράσταση (αφού βρίσκουμε θετικές ρίζες δρούμε ουσιαστικά με τον τελεστή αναβάισης και άρα η δράση του στις απλές ρίζες μηδενίζει την κατάσταση). Η  $\alpha^1$  (μωβ πλαίσιο) πρέπει να είναι ο πάτος μιας διπλέτας κάτω από την  $\alpha^2$  λόγω του  $-1$ . Η  $\alpha^2$  (πράσινο πλαίσιο) είναι ο πάτος μιας σπιν  $3/2$  τετραπλέτας κάτω από την  $\alpha^1$  λόγω του  $-3$ . Οπότε, συνεχίζοντας μέχρι το τέλος, εξακριβώνουμε ότι κάθε ρίζα ταιριάζει ευτυχισμένη σε αναπαραστάσεις κάτω από τις  $SU(2)$ . Η ρίζα  $\boxed{-1 \ 1}$  είναι η κορυφή της  $\alpha^2$  διπλέτας (μωβ πλαίσιο) αλλά ανήκει και στην  $\alpha^1$  τετραπλέτα (πράσινο πλαίσιο). Η ρίζα  $\boxed{3 \ -1}$  αποτελείώνει την  $\alpha^1$  τετραπλέτα (πράσινο πλαίσιο) και ξεκινάει μια καινούρια  $\alpha^2$  διπλέτα (κόκκινο πλαίσιο). Τέλος, η ρίζα  $\boxed{0 \ 1}$  σταματάει την  $\alpha^2$  διπλέτα (κόκκινο πλαίσιο) και ταυτόχρονα αποτελεί μια  $\alpha^1$  singlet που σημαίνει ότι δεν ξεκινάει κάποια καινούρια και η διαδικασία σταματάει. Στην εικόνα (Α.7) στο πλάι έχουν σχηματιστεί οι γραμμικοί συνδυασμοί των απλών ριζών που δίνουν τις υπόλοιπες ρίζες. Οπότε αν εκφράσουμε τις απλές ρίζες με τις συνιστώσες τους και υπολογίσουμε και τις αρνητικές ρίζες, παίρνουμε τελικά όλες τις ρίζες τις οποίες μπορούμε να σχεδιάσουμε στο επίπεδο.



Εικόνα Α.8: Τα διανύσματα ριζών της  $G_2$  στο επίπεδο.

### Α'.9 Θεμελιώδη Βάρη

Ας υποθέσουμε ότι οι απλές ρίζες κάποιας άλγεβρας Lie είναι οι  $\alpha^j$ ,  $j = 1 \dots m$ . Το μέγιστο βάρος,  $\mu$ , μίας αναπαράστασης,  $D$ , έχει την ιδιότητα το  $\mu + \phi$  να μην είναι βάρος για οποιαδήποτε θετική ρίζα  $\phi$ , αφού αυτή είναι σίγουρα γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών. Επίσης, για την κατάσταση μεγίστου βάρους γνωρίζουμε ότι αμα δράσουμε με έναν τελεστή αναβίβασης - που αντιστοιχεί στις θετικές απλές ρίζες - τη μηδενίζει. Αυτή είναι μια αναγκαία και ικανή δήλωση, αφού όπως θα δούμε μία ολόκληρη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μπορεί να κατασκευαστεί εφαρμόζοντας τελεστές καταβίβασης στην κατάσταση με την ιδιότητα αυτή. Έτσι, αν ισχύει:

$$E_{\alpha^j}|\mu\rangle = 0, \quad \forall j, \quad (\text{Α'.108})$$

τότε η  $\mu$  είναι κατάσταση μεγίστου βάρους μίας μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε  $E_{\alpha^j}$  που δρα στην  $|\mu\rangle$ ,  $p = 0$  (αφού δρούμε μόνο με τελεστές καταβίβασης) κι επομένως από τη «master formula», (Α'.99), παίρνουμε:

$$\frac{2\alpha^j \mu}{\alpha^j{}^2} = q^j - p^j \stackrel{p=0}{=} q^j \equiv \ell^j, \quad (\text{Α'.109})$$

όπου τα  $\ell^j$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Αφού τα  $\alpha^j$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οι ακέραιοι  $\ell^j$  καθορίζουν πλήρως την  $\mu$ . Κάθε σύνολο των  $\ell^j$  δίνουν ένα  $\mu$ , το οποίο είναι το μέγιστο βάρος μίας μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης. Στην ουσία αντιστοιχίσαμε την κάθε απλή ρίζα σε έναν ακέραιο και το σύνολο των  $m$  απλών ριζών μίας άλγεβρας Lie μας έδωσε ένα σύνολο από  $m$  ακεραίους που φέρουν την ίδια πληροφορία. Επομένως, μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας απλής άλγεβρας Lie τάξης  $m$  μπορεί να ετικετοποιηθεί από ένα σύνολο  $m$  μη αρνητικών ακεραίων, το  $\ell^j$ . Οι ακέραιοι αυτοί ονομάζονται **συντελεστές Dynkin**.

Είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε ότι τα διανύσματα βάρους,  $\mu^j$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{2\alpha^j \mu^j}{\alpha^{k2}} = \delta_{jk}. \quad (\text{A'.110})$$

Επίσης κάθε μέγιστο βάρος,  $\mu$ , μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο με τη μορφή:

$$\mu = \sum_{j=1}^m \ell^j \mu^j. \quad (\text{A'.111})$$

Τα διανύσματα  $\mu^j$  ονομάζονται **θεμελιώδη βάρη** και οι  $m$  τον αριθμό μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που τα έχουν σα μέγιστα βάρη ονομάζονται **θεμελιώδεις αναπαραστάσεις**<sup>20</sup>.

Αφού λοιπόν τα θεμελιώδη βάρη σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο, μπορούμε να αναπτύξουμε οποιοδήποτε βάρος οποιασδήποτε αναπαράστασης ως προς τα θεμελιώδη βάρη, όπως μας υποδεικνύει η (A'.111). Συνεπώς, αναστρέφοντας το επιχείρημα, ανακτούμε την (A'.109) η οποία όταν δεν αναφερόμαστε σε ένα μέγιστο βάρος αλλά σε ένα τυχαίο, υπονοεί ότι:

$$\ell^j = q^j - p^j, \quad (\text{A'.112})$$

δηλαδή, ότι το  $\ell^j$  είναι ουσιαστικά η  $q^j - p^j$  τιμή για την απλή ρίζα  $\alpha^j$ . Επομένως, τα στοιχεία πίνακα των διανυσμάτων που διαχειριζόμασταν στην κατασκευή των θετικών ριζών για διάφορες άλγεβρες, ήταν απλά οι συντελεστές Dynkin των ριζών. Πιο συγκεκριμένα, το υψηλότερο κουτάκι της κατασκευής περιέχει συντελεστές Dynkin, οι οποίοι αντιστοιχούν στο μέγιστο βάρος της adjoint αναπαράστασης (είναι φυσικό αφού όπως είπαμε οι συντελεστές Dynkin δίνουν το μέγιστο βάρος κάποιας μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης).

Για να γίνουν τα παραπάνω κατανοητά, ξεκινάμε με την απλή άλγεβρα της ομάδας  $SU(3)$ . Έστω ότι γνωρίζουμε τις δύο απλές ρίζες της άλγεβρας:

$$\alpha^1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \alpha^2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (\text{A'.113})$$

Μέσω της πολύ σημαντικής σχέσης (A'.110), η οποία ουσιαστικά πρόκειται για μία σχέση ορθοκανονικοποίησης (άρα δίνει δύο σχέσεις στην ουσία), μπορούμε να βρούμε τα θεμελιώδη βάρη  $\mu^i$ , δηλαδή τα μέγιστα βάρη των θεμελιωδών αναπαραστάσεων. Έστω  $\mu^i = (x^i, y^i)$ ,  $i = 1, 2$  οι συνιστώσες των δύο θεμελιωδών βαρών. Τότε:

- Λόγω ορθογωνιότητας, από την (A'.110) για  $i \neq j$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^j \cdot \mu^i}{\alpha^{j2}} = \delta_{ji} &\Rightarrow \frac{2\alpha^j \cdot \mu^i}{\alpha^{j2}} = 0 \Rightarrow \alpha^j \cdot \mu^i = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^i \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y^i = 0 \Rightarrow x^i = \pm\sqrt{3}y^i \end{aligned} \quad (\text{A'.114})$$

<sup>20</sup>Επίσης, θεμελιώδης αναπαράσταση (Fundamental/Defining/Standard representation) είναι η μικρότερη διάστασης πιστή αναπαράσταση.

- Λόγω κανονικοποίησης, από την (Α'.110) για  $i = j$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^j \cdot \mu^i}{\alpha^{j^2}} = \delta_{ji} &\Rightarrow \frac{2\alpha^j \cdot \mu^j}{\alpha^{j^2}} = 1 \Rightarrow \alpha^j \cdot \mu^j = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x^j \pm \frac{\sqrt{3}}{2}y^j = \frac{1}{2} \stackrel{(A'.114)}{\Rightarrow} \pm\sqrt{3}y^j \pm \sqrt{3}y^j = 1 \\ &\Rightarrow y^j = \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{και από (Α'.114)} \quad x^j = \frac{1}{2} \quad (A'.115) \end{aligned}$$

Επομένως τα θεμελιώδη βάρη είναι:

$$\mu^1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad \mu^2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right). \quad (A'.116)$$

Προφανώς, το  $\mu^1$  είναι το μέγιστο βάρος της θεμελιώδους αναπαράστασης που παίρνουμε από τους 8 γεννήτορες - πίνακες Gell-Mann.

Τώρα, μέσω της (Α'.109), μπορούμε να περάσουμε από το συμβολισμό των βαρών μέσω των συνιστωσών τους στο συμβολισμό μέσω των συντελεστών Dynkin. Δηλαδή, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα βάρη μέσω των ιδιοτήτων των τελεστών καταβίβασης, στον  $q - p$  συμβολισμό, ξεκινώντας από το μέγιστο βάρος. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την (Α'.109):

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^1 \cdot \mu^1}{(\alpha^1)^2} &= \ell^1 \Rightarrow \ell^1 = 1, \\ \frac{2\alpha^2 \cdot \mu^1}{(\alpha^1)^2} &= \ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 0. \end{aligned} \quad (A'.117)$$

Το  $\mu^1$  συμβολίζεται με το διάνυσμα  $(1, 0)$  και αντιγράφοντας τη διαδικασία με την οποία βρήκαμε τις ρίζες στον  $q - p$  συμβολισμό, βρίσκουμε όλα τα βάρη της αναπαράστασης.

Κατά την εύρεση των ριζών καθιερώσαμε μία μέθοδο εύρεσης μέσω εκπλήρωσης των  $SU(2)$  αναπαραστάσεων. Το ίδιο κάνουμε και εδώ. Όπως φαίνεται στην εικόνα Α'.9α', το μέγιστο βάρος είναι η κορυφή μίας  $\alpha^1$  διπλέτας. Αφαιρώντας λοιπόν την  $\alpha^1$  (μπλε πλαίσιο) δίνει  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , επομένως επειδή το δεύτερο στοιχείο του πλαισίου είναι 1 και δεν υπάρχει κατάσταση από πάνω του στην κατεύθυνση  $\alpha^2$ , θα είναι η κορυφή μίας  $\alpha^2$  διπλέτας. Αφαιρώντας την  $\alpha^2$  θα πάρουμε (κόκκινο πλαίσιο)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , επομένως δεν ξεκινάει κάποια άλλη αναπαράσταση της  $SU(2)$  και η διαδικασία σταματάει και τα βάρη είναι:

$$\mu^1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad \mu^1 - \alpha^1 = \left( 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \mu^1 - \alpha^1 - \alpha^2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (A'.118)$$

τα οποία τοποθετούνται στο επίπεδο των  $H_i$ , όπως φαίνεται στην εικόνα (Α'.10α').



(α) Τα βάρη της  $A_2$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(1, 0)$ .

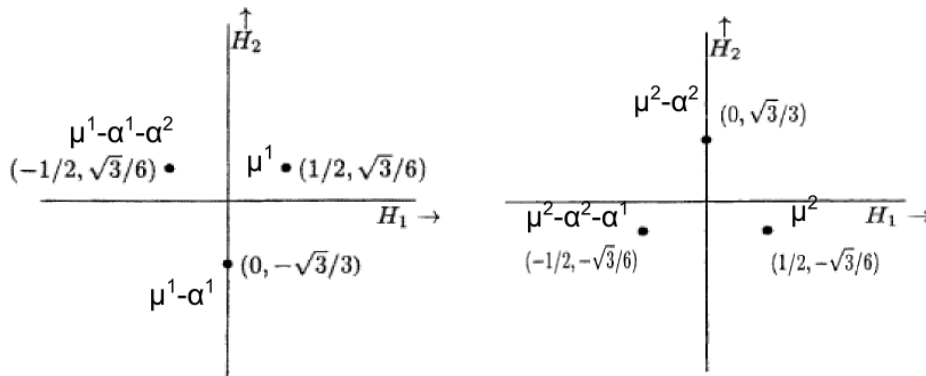
(β) Τα βάρη της  $A_2$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(0, 1)$ .

Εικόνα A.9: Εύρεση των βαρών με αρχή το μέγιστο βάρος των θεμελιωδών αναπαραστάσεων της  $A_2$ .

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να βρούμε τα βάρη της αναπαράστασης που έχει μέγιστο βάρος το δεύτερο θεμελιώδες βάρος,  $\mu^2$ , το οποίο σχετίζεται κατά τα γνωστά πλέον με το διάνυσμα  $(0, 1)$ . Συνεπώς, το αντίστοιχο σχήμα που παίρνουμε είναι αυτό που φαίνεται στην εικόνα A.9β και τα βάρη της αναπαράστασης θα είναι:

$$\mu^2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad \mu^2 - \alpha^2 = \left( 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad \mu^2 - \alpha^2 - \alpha^1 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (\text{A.119})$$

τα οποία, παρομοίως, στο επίπεδο των  $H_i$  είναι τα σημεία που φαίνονται στην εικόνα A.10β.



(α) Τα βάρη της  $A_2$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(1, 0)$  στο επίπεδο.

(β) Τα βάρη της  $A_2$  αναπαράστασης με μέγιστο βάρος το  $(0, 1)$  στο επίπεδο.

Εικόνα A.10: Τα βάρη της  $A_2$  στο επίπεδο  $(H_1, H_2)$ .

Παρατηρούμε ότι τα βάρη της δεύτερης θεμελιώδους αναπαράστασης είναι τα αντίθετα από τα βάρη της πρώτης. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο αναπαραστάσεις συνδέονται με τη σχέση της μιγαδικής συζυγίας.

Γενικεύοντας, αυτό αποδεικνύεται εύκολα αν θεωρήσουμε  $T_\alpha$  τους γεννιότερες μίας αναπαράστασης  $D$  μίας άλγεβρας Lie, τότε τα αντικείμενα  $-T_\alpha^*$  ικανοποιούν τις ίδιες μεταθετικές σχέσεις. Παίρνουμε λοιπόν το συζυγές της μεταθετικής σχέσης των  $T_\alpha$  και βρίσκουμε:

$$([T_\alpha, T_b])^* = (if_{abc}T_c)^* \Rightarrow [T_\alpha^*, T_b^*] = -if_{abc}T_c^* \Rightarrow [-T_\alpha^*, -T_b^*] = if_{abc}(-T_c^*). \quad (\text{A'.120})$$

Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται **μιγαδική συζυγής αναπαράσταση** της **πραγματικής**  $D$  και συμβολίζεται με  $\bar{D}$ . Ένας συνηθισμένος συμβολισμός των αναπαράστασεων (ειδικά για αναπαράστασεις μικρής διάστασης) δίνεται από τη διάστασή της και διαχωρίζεται από τη μιγαδική συζυγή με μία παύλα πάνω από τον αριθμό. Για παράδειγμα, για τις θεμελιώδεις αναπαράστασεις της  $SU(3)$  θα είναι:

$$(1, 0) \equiv 3, \quad (0, 1) \equiv \bar{3}. \quad (\text{A'.121})$$

Γενικά η μιγαδική συζυγής της  $(n, m)$  είναι η  $(m, n)$ . Αναπαράστασεις της μορφής  $(n, n)$  είναι πραγματικές. Μία τέτοια είναι η adjoint αναπαράσταση της  $A_2$  που συμβολίζεται  $(1, 1)$ .

### A'.9.1 Η τανυστική μέθοδος

Το σημείο αυτό προσφέρεται για να περιγράψουμε σύντομα την έννοια του τανυστικού τελεστή έτσι ώστε να αναδειχθεί η χρησιμότητά του και να λειτουργήσει σαν εργαλείο στο χτίσιμο των μοντέλων μας.

Θα πραγματοποιήσουμε την ανάλυση με τη βοήθεια της άλγεβρας της  $SU(3)$  και έπειτα θα γενικεύσουμε. Η ιδέα ξεκινάει βαφτίζοντας τις καταστάσεις της θεμελιώδους αναπαράστασης της  $SU(3)$ ,  $3$ , σαν:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle &\equiv |1\rangle \\ \left| -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle &\equiv |2\rangle \\ \left| 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle &\equiv |3\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A'.122})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε για την ονομασία τα αντίστοιχα βάρη από την (A'.118). Αν ορίσουμε ένα σύνολο πινάκων με έναν πάνω και έναν κάτω δείκτη:

$$[T_\alpha]_j^i = \frac{1}{2}[\lambda_\alpha]_{ij}, \quad (\text{A'.123})$$

τότε η τριάδα των καταστάσεων,  $|i\rangle$ , θα μετασχηματίζεται κάτω από την άλγεβρα σαν:

$$T_\alpha |i\rangle = |j\rangle [T_\alpha]_i^j. \quad (\text{A'.124})$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η άθροιση πάνω στα  $j$  συμβαίνει ανάμεσα σε έναν άνω και έναν κάτω δείκτη.

Επαναλαμβάνοντας, αν ορίσουμε τις καταστάσεις της δεύτερης θεμελιώδους αναπαράστασης της  $SU(3)$ ,  $\bar{3}$ , σαν:

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle &\equiv |^1\rangle \\ \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle &\equiv |^2\rangle \\ \left| 0 \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle &\equiv |^3\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A'.125})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε για την ονομασία τα αντίστοιχα βάρη από την (A'.119), η τριάδα των καταστάσεων  $|^i\rangle$ , θα μετασχηματίζεται κάτω από την άλγεβρα:

$$T_\alpha |^i\rangle = -|^j\rangle [T_\alpha]_j^i. \quad (\text{A'.126})$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία κατάσταση του τανυστικού γινομένου από  $n$  τον αριθμό 3 αναπαραστάσεις, και  $m$  τον αριθμό  $\bar{3}$  αναπαραστάσεις:

$$T_\alpha |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}\rangle = \sum_{\ell=1}^n |_{j_1 \dots j_{\ell-1} k j_{\ell+1} \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}\rangle [T_\alpha]_{j_\ell}^k - \sum_{\ell=1}^m |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_{\ell-1} k i_{\ell+1} \dots i_m}\rangle [T_\alpha]_k^{i_\ell}. \quad (\text{A'.127})$$

Η διαφοροποίηση αυτή ανάμεσα στους άνω και κάτω δείκτες είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αφού η  $SU(3)$  (και όχι μόνο) έχει δύο διαφορετικές 3-διάστατες αναπαραστάσεις, τις  $3, \bar{3}$ . Ο διαχωρισμός αυτός αποτελεί λοιπόν έναν πολύ βολικό συμβολισμό για να τις ξεχωρίζουμε.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία τυχαία κατάσταση:

$$|v\rangle = |_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}\rangle v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}. \quad (\text{A'.128})$$

Το  $v$  είναι λοιπόν ένας τανυστής. Ένας τανυστής συμπεριφέρεται όπως μία κυματοσυνάρτηση<sup>21</sup>, αφού μπορούμε να βρούμε το  $v$  παίρνοντας το στοιχείο πίνακα της  $|v\rangle$  με την κατάσταση του τανυστικού γινομένου:

$$v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \langle_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} | v \rangle. \quad (\text{A'.129})$$

Ο τανυστής  $v$  χαρακτηρίζεται από τις τανυστικές του συνιστώσες,  $v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$ . Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε τη δράση των γεννητόρων πάνω στην  $|v\rangle$  σαν δράση στις τανυστικές συνιστώσες:

$$T_\alpha |v\rangle = |T_\alpha v\rangle, \quad (\text{A'.130})$$

<sup>21</sup>Η αντιστοιχία αυτή φαίνεται από τη σχέση ανάμεσα στη χωρική κυματοσυνάρτηση και την κατάσταση που περιγράφει το σωματίδιο στο χώρο Hilbert  $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$  στην κβαντομηχανική

όπου

$$T_\alpha v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \sum_{\ell=1}^n [T_\alpha]_{i_1 \dots i_m}^{j_\ell} v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots k \dots j_n} - \sum_{\ell=1}^m [T_\alpha]_{i_\ell}^k v_{i_1 \dots k \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}. \quad (\text{A'.131})$$

Αυτό λοιπόν ορίζει τη δράση των γεννητόρων πάνω σε έναν τυχαίο τανυστή.

Μπορούμε πλέον να συνδέσουμε τις μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις με τους τανυστές. Χρησιμοποιούμε τώρα τη διαδικασία μεγίστου βάρους για να διαλέξουμε τις καταστάσεις στο τανυστικό γινόμενο που αντιστοιχούν στη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση  $(n, m)$ . Επειδή η  $|1\rangle$  είναι η κατάσταση μεγίστου βάρους της  $(1, 0)$  αναπαράστασης και  $|2\rangle$  είναι η κατάσταση μεγίστου βάρους της  $(0, 1)$  αναπαράστασης, η κατάσταση με μέγιστο βάρος  $(n, m)$  είναι η  $|111\dots\rangle$  και αντιστοιχεί στον τανυστή  $v_H$  με συνιστώσες:

$$v_{H i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = N \delta_{j_1 1} \cdots \delta_{j_n 1} \delta_{i_1 2} \cdots \delta_{i_m 2}. \quad (\text{A'.132})$$

Επομένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλες τις καταστάσεις της αναπαράστασης  $(n, m)$  δρώντας στον τανυστή  $v_H$  με τελεστές καταβίβασης. Το σημαντικό σημείο που αξίζει να τονιστεί είναι ότι ο  $v_H$  έχει δύο ιδιότητες που είναι αναλλοίωτες στον μετασχηματισμό  $v_H \rightarrow T_\alpha v_H$ .

1. Ο  $v_H$  είναι συμμετρικός ως προς τους άνω δείκτες και συμμετρικός ως προς τους κάτω.
2. Ο  $v_H$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$\delta_{j_1}^{i_1} v_{H i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = 0. \quad (\text{A'.133})$$

Η πρώτη ιδιότητα ισχύει επειδή οι γεννήτορες δρουν με τον ίδιο τρόπο σε όλους τους άνω και κάτω δείκτες. Η δεύτερη ισχύει λόγω του αρνητικού προσήμου στην (A'.131) και λόγω του γεγονότος ότι οι  $T_\alpha$  είναι άιχνοι (στην ουσία πρόκειται για μία γενίκευση της αιχνότητας των πινάκων). Συνοψίζοντας, όλες οι καταστάσεις της  $(n, m)$  αντιστοιχούν σε τανυστές που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες και αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, ότι κάθε τέτοιος τανυστής δίνει μία μοναδική κατάσταση της αναπαράστασης  $(n, m)$ .

Ο  $\delta_{j_1}^{i_1}$  ονομάζεται αναλλοίωτος τανυστής. Ένας αναλλοίωτος τανυστής δεν αλλάζει κάτω από έναν  $SU(3)$  μετασχηματισμό. Η μεταβολή σε έναν τανυστή είναι ανάλογη της δράσης κάποιου γραμμικού συνδυασμού των γεννητόρων, αλλά εδώ:

$$[T_\alpha \delta]_j^i \stackrel{(\text{A'.131})}{=} [T_\alpha]_k^i \delta_j^k - [T_\alpha]_j^k \delta_k^i = [T_\alpha]_j^i - [T_\alpha]_j^i = 0, \quad (\text{A'.134})$$

επομένως ο  $\delta_{j_1}^{i_1}$  δε μεταβάλλεται κάτω από οποιονδήποτε  $SU(3)$  μετασχηματισμό. Υπάρχουν βέβαια και άλλοι δύο αναλλοίωτοι τανυστές στην  $SU(3)$ , οι πλήρως αντισυμμετρικοί τανυστές  $\epsilon^{ijk}$  και  $\epsilon_{ijk}$ . Αυτοί οφείλουν την αναλλοιωτήτα τους στην αιχνότητα των γεννητόρων  $T_\alpha$ . Θεωρούμε το:

$$[T_\alpha \epsilon]^{ijk} = [T_\alpha]_\ell^i \epsilon^{\ell j k} + [T_\alpha]_\ell^j \epsilon^{i \ell k} + [T_\alpha]_\ell^k \epsilon^{i j \ell}, \quad (\text{A'.135})$$



το οποίο είναι πλήρως αντισυμμετρικό, οπότε αν κοιτάξουμε την 123 συνιστώσα:

$$[T_\alpha \epsilon]^{123} = [T_\alpha]_\ell^1 \epsilon^{\ell 23} + [T_\alpha]_\ell^2 \epsilon^{1 \ell 3} + [T_\alpha]_\ell^3 \epsilon^{12 \ell} = [T_\alpha]_1^1 \epsilon^{123} + [T_\alpha]_2^2 \epsilon^{123} + [T_\alpha]_3^3 \epsilon^{123} = 0, \quad (\text{A'.136})$$

όπου έγινε άθροιση στον ίδιο δείκτη  $\ell$ , επέζησαν μόνο οι συνιστώσες με διαφορετικούς όλους τους δείκτες και τέλος χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ίχνος των γεννητόρων είναι 0 (υπονοείται ότι βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $\epsilon^{123}$ ). Επομένως, ο  $\epsilon^{ijk}$  είναι αναλλοίωτος τανυστής.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τανυστές για να αναπτύξουμε τανυστικά γινόμενα. Ας υποθέσουμε ότι ο  $u$  είναι ένας τανυστής με  $n$  άνω δείκτες και  $m$  κάτω δείκτες και  $v$  ένας τανυστής με  $p$  άνω δείκτες και  $q$  κάτω δείκτες. Έπεται από τον ορισμό του τανυστή ότι το γινόμενο  $u \otimes v$  ορίζεται από το γινόμενο των τανυστικών συνιστωσών:

$$[u \otimes v]_{j_1 \dots j_m j'_1 \dots j'_q}^{i_1 \dots i_n i'_1 \dots i'_p} = u_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} v_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}, \quad (\text{A'.137})$$

το οποίο είναι το γινόμενο που περιγράφει το τανυστικό γινόμενο των καταστάσεων  $|u\rangle \otimes |v\rangle$ . Επομένως μπορούμε να αναλύσουμε τανυστικά γινόμενα μεταχειριζόντας τανυστές - τις κυματοσυναρτήσεις των αντίστοιχων καταστάσεων. Γενικά η στρατηγική για να πραγματοποιήσουμε αυτά τα αναπτύγματα είναι να δημιουργήσουμε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις από το γινόμενο των τανυστών και μετά να εκφράσουμε το αρχικό γινόμενο σαν άθροισμα όρων που θα είναι ανάλογοι των διάφορων μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων (Clebsch-Gordan decompositions). Το πλεονέκτημα της διαδικασίας αυτής είναι ότι υπολογίζουμε απευθείας κυματοσυναρτήσεις που είναι συχνά αυτό που θέλουμε να γνωρίζουμε. Ας πάρουμε για παράδειγμα το γινόμενο  $\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3}$ . Αυτό μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$u^i v^j = \underbrace{\frac{1}{2} (u^i v^j + u^j v^i)}_{\text{συμμετρικό κομμάτι}} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} u^\ell v^m}_{\text{αντισυμμετρικό κομμάτι}}. \quad (\text{A'.138})$$

Ο πρώτος όρος μετασχηματίζεται σαν την  $\mathfrak{6}$  και περιέχει την κατάσταση μεγίστου βάρους  $u^1 v^1$ . Έχουμε προσθέσει τον όρο  $u^j v^i$  για να τον κάνουμε πλήρως συμμετρικό ως προς τους δύο πάνω δείκτες (κι επομένως μη αναγωγίσιμο). Το αντικείμενο με τους κάτω δείκτες (αντισυμμετρικό κομμάτι)  $\epsilon_{klm} u^\ell v^m$  έχει μόνο έναν κάτω δείκτη από όπου συμπεραίνουμε ότι μετασχηματίζεται σαν την  $\bar{\mathfrak{3}}$  αναπαραστάση. Επομένως έχουμε αναπτύξει το τανυστικό γινόμενο σε άθροισμα των αναπαραστάσεων  $\mathfrak{6}$  και  $\bar{\mathfrak{3}}$ . Αυτό δε δείχνει μόνο το γεγονός ότι:

$$\mathfrak{3} \otimes \mathfrak{3} = \mathfrak{6} \oplus \bar{\mathfrak{3}}, \quad (\text{A'.139})$$

ή αλλιώς

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1), \quad (\text{A'.140})$$

αλλά δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε πράγματι να χτίσουμε κυματοσυναρτήσεις με την απαιτούμενη συμμετρία. Επειδή όσο ανεβαίνει η διάσταση των αναπαραστάσεων η διαδικασία αυτή γίνεται όλο και πιο δύσκολη θα δούμε πως ο ιδανικός τρόπος για να βρούμε τα αναπτύγματα αυτά είναι η χρήση των Young tableaux .

Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι η bra κατάσταση  $\langle v |$  είναι:

$$\langle v | = v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \langle i_1 \dots i_m |_{j_1 \dots j_n}. \quad (\text{A'.141})$$

και μετασχηματίζεται κάτω από την άλγεβρα με ένα παραπάνω πλην. Για παράδειγμα, η τριπλέτα  $\langle_i |$  μετασχηματίζεται σαν:

$$-\langle_i | T_\alpha = -\langle_i | T_\alpha |_j \rangle \langle_j | = -[T_\alpha]_j^i \langle_j |. \quad (\text{A'.142})$$

Με απλά λόγια, αυτό μας λέει ότι το bra με κάτω δείκτη μετασχηματίζεται σαν να είχε πάνω δείκτη. Αυτό οφείλεται στη μιγαδική συζυγία που εμπλέκεται μεταβαίνοντας από το bra στο ket. Παρομοίως, το bra με άνω δείκτη μετασχηματίζεται σαν να είχε κάτω δείκτη. Αυτό μας ωθεί να ορίσουμε έναν τανυστή που αντιστοιχεί σε μία bra κατάσταση με αναποδογυρισμένους τους δείκτες ώστε να λειτουργεί η άθροιση στην (A'.142). Επομένως, οι συνιστώσες ενός τέτοιου τανυστή θα είναι:

$$\bar{v}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \equiv v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}, \quad (\text{A'.143})$$

που σημαίνει ότι η (A'.141) γίνεται:

$$\langle v | = \bar{v}_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \langle i_1 \dots i_m |_{j_1 \dots j_n}. \quad (\text{A'.144})$$

Επομένως όταν η κατάσταση  $\langle v |$  μετασχηματίζεται σαν  $-\langle v | T_\alpha$ , ο τανυστής  $\bar{v}$  μετασχηματίζεται σαν  $T_\alpha \bar{v}$

Κλείνοντας, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια των τανυστών έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε τους συντελεστές των τανυστικών τελεστών με έναν προφανή τρόπο. Για παράδειγμα, αν ένα σύνολο τελεστών,  $O$ , μετασχηματίζεται σύμφωνα με την  $(n, m)$  αναπαράσταση της  $SU(3)$ , μπορούμε να σχηματίσουμε έναν γενικό γραμμικό μετασχηματισμό

$$W = w_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} O_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}. \quad (\text{A'.145})$$

Επομένως, αν ο  $W$  μετασχηματίζεται κάτω από μετάθεση με τους γεννήτορες, οι συντελεστές  $w_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$  μετασχηματίζονται σύμφωνα με την  $(n, m)$  αναπαράσταση, (A'.131).

Πριν την παρεμβολή των τανυστών, είχαμε καταλήξει στο ότι οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μίας ομάδας Lie τάξης  $n$  περιγράφονται από  $n$  θετικούς ακέραιους αριθμούς.

Παραδείγματα:

1. Για την  $SU(2)$ , που είναι ομάδα τάξης 1, οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ορίζονται από έναν ακέραιο.

- (1):  $\xi^\alpha$
- (4):  $\xi^{abcd}$

2. Για την  $SU(3)$ , που είναι ομάδα τάξης 2, οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ορίζονται από δύο ακεραίους.

- (0,0): Τετριμμένη αναπαράσταση
- (1,0): Θεμελιώδης αναπαράσταση ( $\xi^\alpha$ )
- (0,1): Θεμελιώδης (συζυγής) αναπαράσταση ( $\xi_\alpha$ )
- (1,1): Adjoint αναπαράσταση ( $\xi_b^\alpha$ )

3. Για την  $SU(4)$ , που είναι ομάδα τάξης 3, οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις ορίζονται από τρεις ακεραίους.

- (0,0,0): Τετριμμένη αναπαράσταση
- (1,0,0): Θεμελιώδης αναπαράσταση ( $\xi^\alpha$ )
- (0,0,1): Θεμελιώδης (συζυγής) αναπαράσταση ( $\xi_\alpha$ )
- (1,0,1): Adjoint αναπαράσταση ( $\xi_b^\alpha$ )
- (0,1,0): Θεμελιώδης αναπαράσταση ( $\xi^{\dot{\alpha}}$ )

4. Ανεβαίνοντας στην τάξη της ομάδας, βλέπουμε τα εξής μοτίβα :

- $(0, \dots, 0)$  είναι πάντα η τετριμμένη αναπαράσταση
- $(1, 0, \dots, 0)$  είναι πάντα η θεμελιώδης αναπαράσταση
- $(1, 0, \dots, 0, 1)$  είναι πάντα η adjoint αναπαράσταση
- $(\overline{a, b, \dots, c}) = (c, \dots, b, a)$ , συζυγία αναπαραστάσεων

Από το τελευταίο, βλέπουμε ότι οι adjoint αναπαραστάσεις είναι πάντα πραγματικές.

Δυστυχώς, τα  $(a, b, \dots, c) \otimes (a', b', \dots, c')$  και  $(a, b, \dots, c) \oplus (a', b', \dots, c')$  δεν μπορούμε να τα αποτυπώσουμε εύκολα οπότε ο συμβολισμός αυτός καθίσταται δύσχρηστος. Όπως έχουμε ξαναφέρει, τη λύση θα τη δώσει το πολύ ισχυρό εργαλείο των Young tableaux .

## A'.10 Young tableaux Μέρος β'

Αφού λοιπόν συζητήσαμε τη σύνδεση των Young tableaux με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της ομάδας μεταθέσεων, ήρθε η ώρα να δούμε τον τρόπο με τον οποίο τα Young tableaux συνδέονται με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των ομάδων Lie. Κατά τα γνωστά, θα ξεκινήσουμε την περιγραφή για την  $SU(3)$  κι έπειτα θα γενικεύσουμε για τις  $SU(N)$ .

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η  $\bar{3}$  αναπαράσταση είναι ο αντισυμμετρικός συνδυασμός δύο 3 αναπαραστάσεων, όπως φαίνεται στην (A.138), οπότε στην πραγματικότητα δε χρειαζόμαστε τη δεύτερη θεμελιώδη αναπαράσταση για να κατασκευάσουμε αναπαραστάσεις μεγαλύτερης διάστασης. Μπορούμε να γράψουμε μία τυχαία αναπαράσταση σαν το τανυστικό γινόμενο 3 αναπαραστάσεων με την κατάλληλη συμμετρία. Όπως έχουμε ήδη δει, τα Young tableaux αντιστοιχούν σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των ομάδων μεταθέσεων και η σύνδεση με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της  $SU(3)$  (και γενικότερα με αυτές των  $SU(N)$  ομάδων) είναι ότι οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της  $SU(3)$  μετασχηματίζονται μη αναγωγίσιμα κάτω από τις μεταθέσεις των δεικτών.

Ας θεωρήσουμε μία γενική αναπαράσταση της  $SU(3)$ ,  $(n, m)$ . Αυτή μεταφράζεται σαν ένας τανυστής με συνιστώσες:

$$A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (\text{A.146})$$

όπως έχουμε πει, συμμετρικός ξεχωριστά ως προς τους πάνω και κάτω δείκτες και άιχνος. Μπορούμε να ανεβάσουμε όλους τους κάτω δείκτες με τη βοήθεια του (αναλλοίωτου) πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή  $\epsilon$ , παίρνοντας:

$$\alpha^{i_1 \dots i_n k_1 \ell_1 \dots k_m \ell_m} = \epsilon^{j_1 k_1 \ell_1} \dots \epsilon^{j_m k_m \ell_m} A_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (\text{A.147})$$

Είναι ξεκάθαρο ότι είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή  $k_i \leftrightarrow \ell_i$  και συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των ζευγών  $k_i \ell_i \leftrightarrow k_j \ell_j$ .

Τώρα, για κάθε τέτοιο τανυστή, (A.147), μπορούμε να συσχετίσουμε ένα Young tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_1 & \dots & k_m & i_1 \dots i_n \\ \hline \ell_1 & \dots & \ell_m & \\ \hline \end{array} \quad (\text{A.148})$$

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να βρούμε έναν κανόνα ο οποίος να συσχετίζει τη συγκεκριμένη συμμετρία του τανυστή (A.147) με το Young tableau. Μπορούμε να το πετύχουμε αυτό σκεπτόμενοι το μέγιστο βάρος της αναπαράστασης  $(n, m)$ . Λόγω του ότι οι τελεστές καταβίβασης διατηρούν τη συμμετρία, αν καταφέρουμε να βρούμε κάποια συμμετρία των τανυστικών συνιστωσών που να περιγράφει το μέγιστο βάρος, τότε όλες οι καταστάσεις θα διέπονται από τη συμμετρία αυτή. Το μέγιστο βάρος σχετίζεται με τις συνιστώσες στις οποίες όλα τα  $i$  είναι 1, και όλα τα ζευγάρια  $k, \ell$  είναι 1, 3. Όλες αυτές οι συνιστώσες μπορούν να ληφθούν αντισυμμετρικοποιώντας τα  $k, \ell$  ζεύγη από τη συνιστώσα στην οποία όλα τα  $k$  είναι 1 και όλα τα  $\ell$  είναι 3. Όμως αυτή η συνιστώσα είναι συμμετρική κάτω από τυχαίες μεταθέσεις των  $i$  και  $k$  και ξεχωριστά συμμετρική κάτω από τις μεταθέσεις των  $\ell$ . Επομένως, θα αποκτήσουμε έναν τανυστή με  $n + 2m$  συνιστώσες και αρχικά συμμετρικοποιούμε όλα τα  $i$  και  $k$  και ξεχωριστά τα  $\ell$  και μετά αντισυμμετρικοποιούμε σε όλα τα  $k, \ell$  ζεύγη. Στη γλώσσα των Young tableaux αυτό είναι πολύ εύκολο. Πρώτα συμμετρικοποιούμε ως προς τις συνιστώσες στις γραμμές και μετά αντισυμμετρικοποιούμε ως προς τις συνιστώσες στις στήλες. Το αποτέλεσμα είναι συμμετρικό ως προς τα  $i$  και

τα  $k, \ell$  ζεύγη, όπως άλλωστε απαιτεί και η (Α'.147). Όμως, έχει και μία ιδιότητα ανάλογη της αϊχνότητας. Λόγω του ότι έχουμε ανεβάσει τους δείκτες με τη βοήθεια των πλήρως αντισυμμετρικών τανυστών  $\epsilon$ , η συνθήκη της αϊχνότητας γίνεται:

$$\epsilon_{i_1 k_1 \ell_1} \alpha^{i_1 \dots i_n k_1 \ell_1 \dots k_m \ell_m} = 0. \quad (\text{A'.149})$$

Αυτό εξαφανίζεται για έναν τανυστή με τις ιδιότητες συμμετρίας που περιγράψαμε μόλις παραπάνω, λόγω της συμμετρικοποίησης των συνιστωσών στις γραμμές.

Επομένως, ένα Young tableau όπως το (Α'.148) είναι ουσιαστικά ένας κανόνας για να ξεπροβάλλουν οι συγκεκριμένες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, αν ο  $\alpha^{j_1 j_2 k_1}$  είναι ένας τυχαιός τανυστής με τρεις άνω δείκτες, αλλά όχι κάποια συγκεκριμένη συμμετρία, το Young διάγραμμα του θα είναι:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline j_1 & j_2 \\ \hline k_1 & \\ \hline \end{array}, \quad (\text{A'.150})$$

το οποίο δίνει τον τανυστή:

$$\alpha^{j_1 j_2 k_1} + \alpha^{j_2 j_1 k_1} - \alpha^{k_1 j_2 j_1} - \alpha^{j_2 k_1 j_1}, \quad (\text{A'.151})$$

ο οποίος μετασχηματίζεται σύμφωνα με την  $(1, 1)$  adjoint αναπαράσταση.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδέα σε Young tableaux με περισσότερες γραμμές, αλλά ο γενικός κανόνας παραμένει ο ίδιος: Βάζουμε δείκτες στα κουτάκια, συμμετρικοποιούμε ως προς τις γραμμές και αντισυμμετρικοποιούμε ως προς τις στήλες.

Στην  $SU(3)$  οι τανυστές που αντιστοιχούν σε Young tableaux με περισσότερα από τρία κουτάκια ανά στήλη εξαφανίζονται αφού δεν υπάρχει τανυστής που να είναι πλήρως αντισυμμετρικός σε τέσσερις ή παραπάνω δείκτες και να παίρνει μόνο τρεις τιμές. Οποιαδήποτε στήλη με τρία κουτάκια αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα του  $\epsilon$  ως προς τους τρεις δείκτες:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline k \\ \hline \end{array}. \quad (\text{A'.152})$$

Επομένως, τα Young tableaux της μορφής

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \dots & k_1 & \dots & k_m & i_1 & \dots & i_n \\ \hline \dots & \ell_1 & \dots & \ell_m & & & \\ \hline \dots & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{A'.153})$$

περιγράφουν την ίδια αναπαράσταση όπως το (Α'.148).

Το πανίσχυρο εργαλείο που μας δίνει η παραπάνω συσχέτιση των Young tableaux με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των ομάδων Lie είναι η κατασκευή ενός αλγορίθμου για τα αναπτύγματα Clebsch-Gordan ενός τανυστικού γινόμενου (Α'.138).

Έστω  $a, b$  δύο μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της  $SU(3)$  των οποίων θέλουμε να αναπτύξουμε το τανυστικό γινόμενο. Αυτές αντιστοιχούν στα Young tableaux  $A, B$  αντίστοιχα. Παίρνουμε λοιπόν τα κουτάκια του  $B$  και τα τοποθετούμε στο  $A$  με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάμε τοποθετώντας δείκτες μέσα στα κουτάκια, για την ακρίβεια  $\alpha$  σε αυτά της πρώτης γραμμής και  $\beta$  σε αυτά της δεύτερης. Παίρνουμε τα κουτάκια από την πάνω γραμμή του  $B$ , δηλαδή αυτά με την ετικέτα  $\alpha$ , και τα τοποθετούμε δεξιά και/ή κάτω από αυτά του  $A$  κατασκευάζοντας όμως νόμιμα ταμπλώ (δηλαδή, συλλογές κουτιών στις οποίες οι αριθμοί των κουτιών στις γραμμές δεν αυξάνουν καθώς πηγαίνουμε προς τα κάτω και οι αριθμοί των κουτιών δεν αυξάνουν καθώς πηγαίνουμε προς τα δεξιά) στα οποία δε βάζουμε στην ίδια στήλη κουτάκια με την ίδια ετικέτα - εδώ με την ετικέτα  $\alpha$ . Στα Young tableaux που έχουν προκύψει, προσθέτουμε τα κουτάκια της δεύτερης γραμμής του  $B$ , αυτά με την ετικέτα  $\beta$ , πάλι σχηματίζοντας νόμιμα Young tableaux με την επιπλέον συνθήκη ο αριθμός των  $\alpha$  πάνω και δεξιά από το πρώτο  $\beta$  να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από αυτόν των  $\beta$ . Ο κανόνας αυτός υπάρχει για να αποφύγουμε το διπλό μέτρηση. Τα ταμπλώ που παράγονται με αυτόν τον τρόπο είναι το ανάπτυγμα του τανυστικού γινομένου  $\alpha \otimes \beta$ . Τέλος, από κάθε ταμπλώ που προκύπτει μπορούμε να καταλάβουμε για ποια αναπαράσταση πρόκειται αφού μέσω του (A'.148) καταλαβαίνουμε ότι η πρώτη γραμμή έχει  $n + m$  κουτάκια, ενώ η δεύτερη έχει  $m$ . Έτσι μπορούμε να βρούμε την αναπαράσταση  $(n, m)$ . Ακολουθούν δύο παραδείγματα για εμπέδωση των κανόνων.

### Παράδειγμα 1

Θέλουμε να βρούμε το ανάπτυγμα του τανυστικού γινομένου  $(0, 1) \otimes (1, 0)$  ή αλλιώς  $\bar{3} \otimes 3$ . Μεταφράζουμε σε Young tableaux και εφαρμόζουμε τους παραπάνω κανόνες:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \quad (\text{A'.154})$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι:

$$(0, 1) \otimes (1, 0) = (1, 1) \oplus (0, 0) \quad \text{ή} \quad \bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1. \quad (\text{A'.155})$$

### Παράδειγμα 2

Θέλουμε να βρούμε το ανάπτυγμα του τανυστικού γινομένου  $(1, 1) \otimes (1, 1)$  ή αλλιώς  $8 \otimes 8$ :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \alpha \\ \hline \beta & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \alpha \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \alpha \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \alpha & \square \\ \hline \end{array} \\ \text{(1)} \quad \text{(2)} \quad \text{(3)} \\ \text{(1)} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \alpha & \alpha \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \alpha \\ \hline \square & \alpha & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \alpha \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \alpha & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \text{(4)} \quad \text{(5)} \quad \text{(6)}$$

$$\begin{aligned}
(2) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \alpha & \alpha \\ \hline \end{array} \\
&\quad \quad \quad (7) \quad \quad \quad (8) \\
(3) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & & \\ \hline \alpha & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \alpha \\ \hline \alpha & \\ \hline \end{array} \\
&\quad \quad \quad (9) \quad \quad \quad (10) \\
(5) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \alpha & \alpha \\ \hline & \beta & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \alpha & \alpha \\ \hline & & & \\ \hline & \beta & & \\ \hline \end{array} \\
(6) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & & \alpha \\ \hline & \beta & \\ \hline \end{array} \\
(8) &\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & \beta & \\ \hline \alpha & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \alpha \\ \hline \alpha & & \beta \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε στο ανάπτυγμα :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \alpha & \alpha \\ \hline & \beta & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \alpha & \alpha \\ \hline & & & \\ \hline & \beta & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & & \alpha \\ \hline & \beta & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \alpha \\ \hline & \beta & \\ \hline \alpha & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline \end{array}$$

Το οποίο μεταφράζεται :

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = (2, 2) \oplus (3, 0) \oplus (0, 3) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0), \quad (A'.156)$$

ή αλλιώς, συμβολίζοντας τις αναπαραστάσεις σύμφωνα με τη διάστασή τους :

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \quad (A'.157)$$

Παρατηρήσεις για το Παράδειγμα 2:

- Κατά την τοποθέτηση του κουτιού με την ετικέτα  $\beta$ , αμελήσαμε τα ταμπλώ (7), (9) και (10). Ο λόγος είναι ότι είναι ακριβώς ίδια με τα (5), (6) και (8), άρα θα καταλήγαμε στα ίδια τελικά ταμπλώ.
- Στο τελικό αποτέλεσμα βλέπουμε ότι υπάρχει το ίδιο ταμπλώ δύο φορές. Ο λόγος που δεν το διαγράψαμε προς αποφυγή διπλού μετρήματος είναι ότι ενώ είναι ίδια στο σχήμα, η θέση των ετικετών είναι διαφορετική. Συνεπώς, πρόκειται για διαφορετικά ταμπλώ και πρέπει να τα κρατήσουμε και τα δύο.
- Οι πιθανοί τρόποι τοποθέτησης των κουτιών  $\alpha, \beta$  είναι πολύ περισσότεροι, όμως κρατήσαμε κατευθείαν μόνο τους νόμιμους συνδυασμούς.

Στο σημείο αυτό, για να γενικεύσουμε τη χρήση των Young tableaux για τις ομάδες  $SU(N)$ , όπου πλέον  $N > 3$ , πρέπει να προηγηθεί περιγραφή της δομής της άλγεβρας μίας τέτοιας ομάδας.

Καταρχήν, οι γεννήτορες περιγράφονται (στη θεμελιώδη αναπαράσταση) από τους γενικευμένους πίνακες Gell - Mann, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση κανονικοποίησης (όπως ισχύει και για τις  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ):

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (\text{A'.158})$$

Παίρνουμε λοιπόν τους τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης να είναι πίνακες οι οποίοι έχουν μόνο ένα μη διαγώνιο στοιχείο μη μηδενικό και ίσο με  $1/\sqrt{2}$ . Η ομάδα  $SU(N)$  είναι  $N - 1$  τάξης που σημαίνει ότι υπάρχουν  $N - 1$  ανεξάρτητοι άιχνοι διαγώνιοι πραγματικοί πίνακες που αποτελούν τους γεννήτορες Cartan της ομάδας. Οι πίνακες αυτοί δομούνται από την παρακάτω σχέση που μας δίνει τα στοιχεία των πινάκων αυτών:

$$[H_m]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \delta_{jk} - \delta_{i,m+1} \delta_{j,m+1} \right). \quad (\text{A'.159})$$

Για παράδειγμα:

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad H_4 = \dots \quad (\text{A'.160})$$

Συνολικά υπάρχουν  $N^2 - 1$  ανεξάρτητοι, άιχνοι, ερμιτιανοί πίνακες από τους οποίους κατασκευάζεται η  $N -$  διάστατη θεμελιώδης αναπαράστασης  $SU(N)$ . Τα βάρη είναι  $N - 1$ -διάστατα διανύσματα, των οποίων οι συνιστώσες δίνονται από τη σχέση:

$$[v^j]_m = [H_m]_{jj} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{jk} - m \delta_{j,m+1} \right). \quad (\text{A'.161})$$

Μέσω της σχέσης (A'.161) αποδεικνύεται εύκολα ότι όλα τα βάρη έχουν το ίδιο μήκος και ότι οι γωνίες ανάμεσα σε δύο διαφορετικά βάρη είναι ίσες:

$$|v^i|^2 = \frac{N-1}{2N} \quad \text{και} \quad v^i \cdot v^j = -\frac{1}{2N}, \quad \text{για } i \neq j, \quad (\text{A'.162})$$



ή αλλιώς σε συμπυγμένη μορφή:

$$v^i \cdot v^j = -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\delta_{ij}. \quad (\text{A'.163})$$

Για λόγους ευκολίας, θα επιλέξουμε την ανάποδη σύμβαση περί θετικότητας των βαρών. Δηλαδή, θετικό είναι ένα βάρος όταν η τελευταία μη μηδενική του συνιστώσα είναι θετική. Με τον ορισμό αυτό τα βάρη ικανοποιούν τη σχέση:

$$v^1 > v^2 > \dots > v^{N-1} > v^N \quad (\text{A'.164})$$

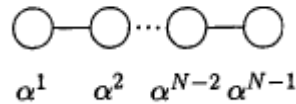
Οι  $E$  τελεστές μας πηγαίνουν από το ένα βάρος στο άλλο, επομένως οι ρίζες θα είναι διαφορές των βαρών  $v^i - v^j$  για  $i \neq j$ . Οι θετικές ρίζες είναι  $v^i - v^j$  για  $i < j$ . Οι απλές ρίζες είναι:

$$\alpha^i = v^i - v^{i+1}, \text{ για } i = 1 \dots N-1, \quad (\text{A'.165})$$

όλες με μήκος ίσο με τη μονάδα. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (A'.163) βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha^i \cdot \alpha^j &= (v^i - v^{i+1})(v^j - v^{j+1}) \\ &= v^i v^j - v^i v^{j+1} - v^{i+1} v^j + v^{i+1} v^{j+1} \\ &= -\frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2}\delta_{i,j+1} + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2}\delta_{i+1,j} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\delta_{i+1,j+1} \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{i,j\pm 1} \end{aligned} \quad (\text{A'.166})$$

κι επομένως το διάγραμμα Dynkin θα είναι:



Εικόνα A.11: Οι ρίζες της  $SU(N)$  - Διάγραμμα Dynkin.

Τα θεμελιώδη βάρη δίνονται από τη σχέση

$$\mu^j = \sum_{k=1}^j v^k. \quad (\text{A'.167})$$

Είναι επίσης εύκολο να επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας την (A'.163) ότι ισχύει η σχέση (A'.110):

$$\frac{2\alpha^i \cdot \mu^j}{\alpha^{i2}} = 2 \left( v^i - v^{i+1} \sum_{k=1}^j v^k \right) = \delta_{ij}, \quad (\text{A'.168})$$

αφού όλοι οι όροι  $1/2N$  απαλείφονται, διότι οι απλές ρίζες είναι διαφορές των θεμελιωδών βαρών. Συνεπώς, το  $\mu^1$  είναι το μέγιστο βάρος της θεμελιώδους αναπαράστασης.

Για να φτάσουμε στον τελικό μας στόχο, να γενικεύσουμε το εργαλείο των Young tableaux σε ομάδες  $SU(N)$  για  $N > 3$  πρέπει να αντιστοιχίσουμε αρχικά τις καταστάσεις με τανυστές, όπως πράξαμε και στην περίπτωση της  $SU(3)$ :

$$|v^i\rangle \rightarrow |i\rangle \quad (\text{A.169})$$

κι έπειτα να μας επιτραπεί να χτίσουμε τυχαίες αναπαραστάσεις σαν τανυστικά γινόμενα. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον αντισυμμετρικό συνδυασμό  $m$  θεμελιωδών αναπαραστάσεων. Οι καταστάσεις θα είναι:

$$A^{[i_1 \dots i_m]} |i_1 \dots i_m\rangle, \quad (\text{A.170})$$

όπου ο  $A^{[i_1 \dots i_m]}$  είναι πλήρως αντισυμμετρικός. Το σύνολο αυτών των καταστάσεων σχηματίζει μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, λόγω της αντισυμμετρικότητας η οποία δεν επιτρέπει στους δείκτες να πάρουν την ίδια τιμή. Συνεπώς, το μέγιστο βάρος σε αυτό το σύνολο καταστάσεων προκύπτει όταν ένας από τους δείκτες είναι 1, άλλος 2 κοκ. Αυτό σημαίνει ότι το μέγιστο βάρος είναι το θεμελιώδες βάρος  $\mu^m$ :

$$\sum_{k=1}^m v^k = \mu^m. \quad (\text{A.171})$$

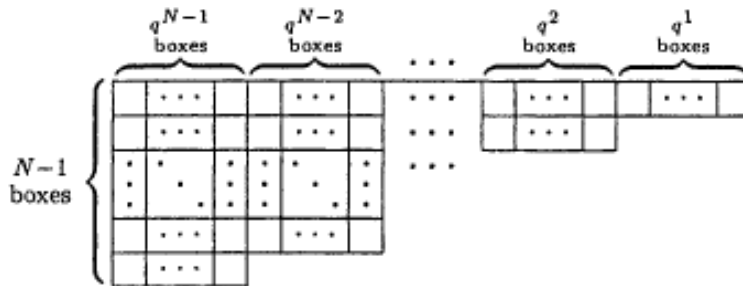
Επομένως η αναπαράσταση αυτή είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση  $D^m$ .

Κατά τα γνωστά, το μέγιστο βάρος οποιασδήποτε μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης μπορεί να γραφτεί σε όρους των συντελεστών Dynkin,  $q^k$ , σαν:

$$\mu = \sum_k q_k \mu^k. \quad (\text{A.172})$$

Οι συντελεστές  $q^k$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Ο τανυστής που σχετίζεται με αυτήν την αναπαράσταση έχει, για κάθε  $k = 1 \dots N-1$ ,  $q_k$  τον αριθμό σύνολα από  $k$  δείκτες που είναι αντισυμμετρικοί εντός κάθε συνόλου. Γενικεύοντας λοιπόν την ανάλυση που προηγήθηκε για την  $SU(3)$ , βλέπουμε ότι η συμμετρία του τανυστή μπορεί να αποκτηθεί από το παρακάτω Young tableaux με  $q^k$  τον αριθμό στήλες από  $k$  κουτιά η κάθε μία:

Για τους ίδιους λόγους που το Young tableau (A.148) δίνει τανυστή της σωστής συμμετρίας, έτσι και στη γενικευμένη περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, το Young tableau της εικόνας A.12 δίνει τον ως προς τη συμμετρία σωστό τανυστή. Η κατάσταση μεγίστου βαρους έχει έναν όρο στον οποίο οι δείκτες της πάνω γραμμής είναι όλοι 1, της δεύτερης είναι όλοι 2, της τρίτης είναι όλοι 3 κτλ. Επομένως, ο τανυστής που θέλουμε αποκτάται συμμετρικοποιώντας τους δείκτες των γραμμών και αντισυμμετρικοποιώντας τους δείκτες των στηλών. Αυτή είναι ακριβώς η συνθήκη συμμετρικοποίησης που χρησιμοποιήσαμε για



Εικόνα A.12: Η γενική εικόνα ενός Young tableau για έναν τανυστή μίας τυχαίας μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης.

να κατασκευάσουμε τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των ομάδων μεταθέσεων. Άρα καταλήγουμε στο ότι οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των  $SU(N)$  με  $m$  δείκτες σχετίζονται με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των  $S_m$ .

Όπως στην  $SU(3)$ , ταμπλώ με περισσότερα από  $N$  κουτιά σε κάθε στήλη αντιστοιχούν σε τανυστές που εξαφανίζονται ταυτοτικά. Όλες οι στήλες με  $N$  κουτιά συνεισφέρουν έναν παράγοντα του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή με  $N$  δείκτες. Ταμπλώ τα οποία είναι ίδια πέραν από στήλες με  $N$  κουτιά αντιστοιχούν στην ίδια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση.

Πολλές φορές θα συμβολίζουμε μίαν αναπαράσταση που αντιστοιχεί σε ένα Young Tableau καταγράφοντας τον αριθμό των κουτιών σε κάθε στήλη του ταμπλώ, δηλαδή θα παίρνουμε μία φθίνουσα σειρά ακεραίων,  $[\ell_1, \ell_2, \dots]$ . Για παράδειγμα, η adjoint αναπαράσταση της  $SU(N)$ , όπως και στην  $SU(3)$ , αντιστοιχεί σε έναν τανυστή με έναν πάνω και έναν κάτω δείκτη. Για να τον φέρουμε στην καθιερωμένη μορφή τανυστών θα πρέπει να ανεβάσουμε τον κάτω δείκτη με τη βοήθεια του ολήρως αντισυμμετρικού τανυστή  $N$  συνιστωσών. Επομένως, η adjoint θα συμβολίζεται σαν  $[N - 1, 1]$ .

Όλη αυτή η γενίκευση που προηγήθηκε στοχεύει στο να αναδείξουμε το μεγαλείο που προσφέρει η τεχνολογία των Young tableaux στο χτίσιμο των μοντέλων μας με:

- το ανάπτυγμα Clebsch-Gordan
- με το ανάπτυγμα μίας τυχαίας αναπαράστασης στο ευθύ άθροισμα μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των υποομάδων τους.

Αρχικά, όσον αφορά στο ανάπτυγμα Clebsch-Gordan, η διαδικασία δουλεύει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, μόνο που εδώ χρειαζόμαστε για δείκτες περισσότερα γράμματα  $c, d, e, \dots$ , πέρα από τα  $\alpha, \beta$ , γιατί έχουμε εν γένει περισσότερες γραμμές στα Young tableaux. Σαν επιπρόσθετη συνθήκη μπαίνει η προφανής γενίκευση ότι διαβάζοντας κατα μήκος των γραμμών από δεξιά προς τα αριστερά και από πάνω προς τα κάτω ο αριθμός των  $\alpha$  πρέπει να είναι

μεγαλύτερος από τον αριθμό των  $\beta$  και αυτός μεγαλύτερος από τον αριθμό των  $c$  κλπ.

Για παράδειγμα :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \alpha \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \\
 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \alpha \\ \hline & \beta \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \alpha \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \beta \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \\
 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline & \beta & \\ \hline & c & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline & \beta & \\ \hline & & c \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \alpha \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \beta \\ \hline & c \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline c \\ \hline \end{array} \\
 \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \\ \hline \beta & \\ \hline c & \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \\ \hline \beta & c \\ \hline & \\ \hline & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \\ \hline \beta & \\ \hline & c \\ \hline & d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \\ \hline \beta \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \tag{A.173}$$

Στον συμβολισμό που αντιστοιχεί στον αριθμό των κουτιών των στηλών που περιγράψαμε παραπάνω, το ανάπτυγμα (A.173) γράφεται :

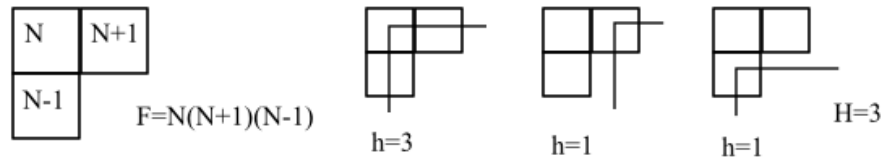
$$[4] \otimes [4] = [4, 4] \oplus [5, 3] \oplus [6, 2] \oplus [7, 1] \oplus [8].
 \tag{A.174}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κανόνας που αφορά τον αριθμό των  $\alpha$  να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των  $\beta$  κ.ο.κ. εμποδίζει την επανάληψη ίδιων διαγραμμάτων, δηλαδή την επανάληψη των αναπαραστάσεων. Φυσικά, αφού στο παράδειγμά μας δεν έχουμε ορίσει την τάξη της ομάδας για την οποία υπολογίζουμε το ταυστικό γινόμενο, αν το  $N < 8$  τότε κάποια από τα ταμπλώ θα δίνουν εξαφανιζόμενους ταυστές ενώ άλλα που έχουν στήλες με  $N$  αριθμό κουτιών θα απλοποιούνται. Πριν περάσουμε στην επεξήγηση του τρόπου με τον οποίο εξάγουμε τη διάσταση των αναπαραστάσεων από ένα Young Tableau, αξίζει να σημειώσουμε ότι, γενικά, στη διαδικασία του ανάπτυγματος Clebsch - Gordan, η μόνη περίπτωση κατά την οποία τα κουτιά εξαφανίζονται είναι αυτή όπου οι στήλες  $N$  κουτιών απαλείφονται. Επομένως, κάθε ταμπλώ που προκύπτει αναπτύσσοντας δύο αναπαραστάσεις της μορφής (ταμπλώ με  $j$  κουτιά)  $\otimes$  (ταμπλώ με  $k$  κουτιά) θα έχει τελικά αριθμό κουτιών

ίσο με  $j + k \pmod N$ . Στην περίπτωση της  $SU(3)$  αυτό ονομάζεται triality, και γενικεύοντας στην περίπτωση της  $SU(N)$  η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται από τη «γλωσσική βαρβαρότητα»<sup>22</sup>,  $N - ality$ .

Υπάρχει ένας σχετικά απλός και εύχρηστος κανόνας για να υπολογίζουμε τη διάσταση οποιασδήποτε αναπαράστασης από το ταμπλώ που της αντιστοιχεί. Λέγεται «παράγοντες ανά γάντζο», (factors over hooks) και δουλεύει ως εξής: Τοποθετούμε την τάξη της ομάδας,  $N$ , στο πάνω αριστερό κουτί του ταμπλώ. Έπειτα, τοποθετούμε παράγοντες σε όλα τα άλλα κουτιά, οι οποίοι όταν κινούμαστε προς τα δεξιά αυξάνουν κατά μία μονάδα, ενώ όταν κινούμαστε προς τα κάτω μειώνονται κατά μία μονάδα. Το γινόμενο όλων αυτών των παραγόντων ονομάζεται  $F$ . Ορίζουμε ως γάντζο τη γραμμή που περνάει κάθετα προς τα πάνω μέσα από τον πάτο κάποιας στήλης κουτιών, πραγματοποιώντας μία δεξιά στροφή σε κάποιο κουτί και διαπερνώντας τα υπόλοιπα δεξιά κουτιά της γραμμής εξέρχεται από το ταμπλώ. Κάθε κουτί διαπερνάται σίγουρα από έναν γάντζο. Αν ονομάσουμε τον αριθμό των κουτιών που διαπερνάει ο γάντζος  $h$  και  $H$  το γινόμενο των  $h$  για όλους τους γάντζους, τότε η διάσταση της αναπαράστασης δίνεται από το πηλίκο  $F/H$ .

Για παράδειγμα, για το ταμπλώ  $[2, 1]$  έχουμε:



Εικόνα A.13: Υπολογισμός της διάστασης μίας αναπαράστασης μέσω του ταμπλώ Young με τον κανόνα factors over hooks.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διάσταση της αναπαράστασης θα είναι:

$$\dim D = \frac{F}{H} = \frac{N(N+1)(N-1)}{3}. \quad (\text{A}.175)$$

Οι περισσότερες αναπαραστάσεις των  $SU(N)$  είναι μιγαδικές (Complex). Γενικά, η μιγαδική συζυγής μίας αναπαράστασης είναι της μορφής:

$$\overline{[\ell_1, \dots, \ell_n]} = [N - \ell_n, \dots, N - \ell_1]. \quad (\text{A}.176)$$

Για παράδειγμα για την  $SU(3)$ , η συζυγής της  $[1]$  (ή αλλιώς  $(1, 0)$ ) είναι η:

$$[\bar{1}] = [3 - 1] = [2], \quad (\text{A}.177)$$

ή αλλιώς η  $(0, 1)$ , όπως είναι ήδη γνωστό.

<sup>22</sup>Κατά τη γνώμη του Georgi.

Όπως αναφέραμε στην αρχή της καταμέτρησης των αρετών της τεχνολογίας των Young tableaux , πέρα από το το ανάπτυγμα Clebsch-Gordan που μόλις αναλύσαμε, αναφέραμε ότι υπάρχει και μία δεύτερη εξίσου σημαντική με την προαναφερθείσα, η εύρεση του αναπτύγματος (decomposition ) μίας τυχαίας αναπαράστασης σε ευθύ άθροισμα μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των υποομάδων τους, δηλαδή  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1) \in SU(N + M)$ . Θα ξεκινήσουμε από την απλή περίπτωση όπου  $SU(2) \otimes U(1) \in SU(3)$ , η οποία έχει φαινομενολογική σημασία -  $SU(3)$  αναπαραστάσεις αναπτύσσονται σε αναπαραστάσεις του ισόσπιν και του υπερφορτίου - και έπειτα θα γενικεύσουμε.

Η θεμελιώδης αναπαράσταση της  $SU(3)$ , 3, αναπτύσσεται σε μία διπλέτα (σπιν 1/2) με υπερφορτίο 1/3 και σε μία singlet (σπιν 0) με υπερφορτίο  $-2/3$ . Θεωρούμε αρχικά ένα Young Tableau (μίας αναπαράστασης της  $SU(3)$ ) με  $n$  κουτιά και ψάχνουμε τις συνιστώσες στις οποίες  $j$  δείκτες μετασχηματίζονται σαν διπλέτες της  $SU(2)$ , ενώ οι υπόλοιποι  $n - j$  δείκτες μετασχηματίζονται σαν singlets πάλι της  $SU(2)$ . Για κάθε ταμπλώ που προκύπτει, το συνολικό υπερφορτίο θα είναι:

$$\frac{j}{3} - \frac{2(n-j)}{3} = -\frac{2n}{3} + j \quad (\text{A'.178})$$

Γενικά τις  $n - j$  singlet συνιστώσες θα τις συμβολίζουμε με ένα Young Tableau από  $n - j$  κουτιά σε μία γραμμή. Αυτό είναι και το μόνο έγκυρο ταμπλώ που μπορεί να χτιστεί για αυτές αφού φέρουν τον ίδιο δείκτη κι επομένως δεν μπορούν να διαταχθούν στην ίδια στήλη.

Οι  $SU(2)$  αναπαραστάσεις κάτω από τις οποίες μετασχηματίζονται οι συνιστώσες αυτές θα είναι κάποιο υποσύνολο των αναπαραστάσεων που μπορούν να χτιστούν από  $j$  κουτιά. Εδώ είναι το κρίσιμο σημείο: για να αποφασίσουμε εάν μία δεδομένη αναπαράσταση της  $SU(2)$ ,  $\alpha$ , εμφανίζεται στο ανάπτυγμα, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε το τανυστικό γινόμενο της  $\alpha$  με τις γραμμές αποτελούμενες από  $n - j$  κουτιά. Τότε, όσες φορές εμφανίζεται η αρχική αναπαράσταση της  $SU(3)$  που θέλουμε να αναπτύξουμε, τόσες φορές εμφανίζεται η  $\alpha$  αναπαράσταση στο ανάπτυγμα. Φαίνεται να προκαλεί λίγη σύγχυση αλλά το επόμενο παράδειγμα θα αποσαφηνίσει τη διαδικασία.

Παράδειγμα:

Έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε εάν το ανάπτυγμα Clebsch - Gordan της adjoint αναπαράστασης της  $SU(3)$ , (1, 1) ή 8, περιέχει την 3 αναπαράσταση της  $SU(2)$  και αν ναι, πόσες φορές. Εδώ λοιπόν η  $\alpha$  αναπαράσταση είναι η 3 της  $SU(2)$  και  $n = 3$  αφού το Young Tableau της 8 της  $SU(3)$  αποτελείται από 3 κουτιά. Συνεπώς, αφού η 3 αναπαράσταση της  $SU(2)$  αποτελείται από  $j = 2$  κουτιά, η οριζόντια γραμμή με την οποία θα υπολογίσω το τανυστικό γινόμενο της με την 3 θα αποτελείται από  $n - j = 3 - 2 = 1$  κουτί. Υπολογίζω διαγραμματικά το τανυστικό γινόμενο, σύμφωνα πάντα με τους κανόνες που αναλύσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (\text{A'.179})$$

Παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα Clebsch - Gordan της (Α'.179) το τελευταίο διάγραμμα που δίνει την θεμελιώδη αναπαράσταση 2 της  $SU(2)$  αντιστοιχεί επίσης και στην αρχική αναπαράσταση της  $SU(3)$ , 8, της οποίας το ανάπτυγμα θέλουμε να ελέγξουμε εάν περιέχει τη 2 της  $SU(2)$ . Συνεπώς, η απάντηση στο αρχικό ερώτημα είναι καταφατική: όντως η 2 αναπαράσταση της  $SU(2)$  περιέχεται στο ανάπτυγμα της adjoint της  $SU(3)$  μία φορά.

Τώρα θα συνεχίσουμε με τέσσερα παραδείγματα (το ένα είναι αυτό με το οποίο ανοίξαμε την ανάλυση και αφορά στην 3 της  $SU(3)$  για την οποία γνωρίζουμε ήδη το αποτέλεσμα) μέσα από τα οποία θα προσπαθήσουμε να διευκρινίσουμε το πώς βρίσκουμε το ανάπτυγμα μίας αναπαράστασης της  $SU(3)$  σε αναπαραστάσεις των υποομάδων της. Γενικά η μέθοδος που ακολουθούμε είναι να παίρνουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς τανυστικών γινομένων από τους οποίους μπορεί να έχουν προέλθει τα Young tableaux των αρχικών αναπαραστάσεων της  $SU(3)$  που μας ενδιαφέρουν. Πριν περάσουμε στα πρακτικά προβλήματα, πρέπει να αναφέρουμε ότι το τετριμμένο Young tableau, αυτό δηλαδή που δεν έχει καθόλου κουτιά, συμβολίζεται με  $\bullet$  και ότι το υπερφορτίο σε όλες τις περιπτώσεις υπολογίζεται από τη σχέση (Α'.178). Τέλος, τονίζουμε ότι το δεξί ταμπλώ των διατεταγμένων ζευγών δεν μπορεί να έχει στήλη κουτιών (δηλαδή δεύτερη ή παραπάνω γραμμή) επειδή αυτό θα απεικόνιζε αντισυμμετρικό συνδυασμό καταστάσεων με μόνο έναν δείκτη, το οποίο εξαφανίζεται.

- Η θεμελιώδης αναπαράσταση 3 ή  $(1, 0)$  της  $SU(3)$  αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \square &\rightarrow \left( \begin{array}{cc} \square & \bullet \end{array} \right) & 2_{1/3} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cc} \bullet & \square \end{array} \right) & 1_{-2/3} \end{aligned} \quad (\text{Α'.180})$$

δηλαδή

$$3 \rightarrow 2_{1/3} \oplus 1_{-2/3}. \quad (\text{Α'.181})$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που αναλύσαμε παραπάνω, πριν και μετά από την (Α'.179), βρίσκουμε ότι η κάθε αναπαράσταση εμφανίζεται από μία φορά.

- Ας εξετάσουμε τη μιγαδική θεμελιώδη αναπαράσταση  $\bar{3}$  ή  $(0, 1)$  της  $SU(3)$ . Αυτή αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &\rightarrow \left( \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} & \bullet \end{array} \right) & 1_{2/3} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cc} \square & \square \end{array} \right) & 2_{-1/3}, \end{aligned} \quad (\text{Α'.182})$$

δηλαδή

$$3 \rightarrow 2_{-1/3} \oplus 1_{2/3}. \quad (\text{A'.183})$$

Παρατηρούμε ότι στις μιγαδικές συζυγείς αναπαραστάσεις το ανάπτυγμα είναι το ίδιο με τη διαφορά ότι το υπερφορτίο έχει αντίθετο πρόσημο.

- Η αναπαράσταση 6 ή (2, 0) της  $SU(3)$  αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \bullet \right) & 3_{2/3} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) & 2_{-1/3} \\ &\rightarrow \left( \bullet \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) & 1_{-4/3}, \end{aligned} \quad (\text{A'.184})$$

δηλαδή,

$$6 \rightarrow 3_{2/3} \oplus 2_{-1/3} \oplus 1_{2/3}. \quad (\text{A'.185})$$

Όπως βλέπουμε όλες οι αναπαραστάσεις εμφανίζονται μία φορά.

- Τέλος, θεωρούμε την adjoint αναπαράσταση της  $SU(3)$ , 8 ή (1, 1) η οποία αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \bullet \right) & 2_1 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) & 1_0 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) & 3_0 \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) & 2_{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A'.186})$$

δηλαδή,

$$8 \rightarrow 2_1 \oplus 1_0 \oplus 3_0 \oplus 2_{-1}. \quad (\text{A'.187})$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι αναπαραστάσεις εμφανίζονται από μία φορά.

Συνοψίζοντας, αναδειξαμε μία ακόμα σημαντική λειτουργία που μας προσφέρει η τεχνολογία των Young tableaux, το ανάπτυγμα των αναπαραστάσεων της ομάδας  $SU(3)$  σε αναπαραστάσεις των υποομάδων της  $SU(2)$  και  $U(1)$ . Η σημασία της διαδικασίας αυτής δε σταματάει εδώ. Το μεγαλείο της θα φανεί παρακάτω, όπου θα γενικεύσουμε τη διαδικασία αυτή για ομάδες  $SU(N)$  για οποιαδήποτε τάξη της ομάδας.



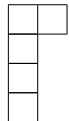
Γενικεύοντας λοιπόν την παραπάνω συζήτηση για την  $SU(3) \in SU(2) \times U(1)$ , θεωρούμε την  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$  υποομάδα της  $SU(N+M)$  στην οποία η  $SU(N)$  δρα πάνω στους πρώτους  $N$  δείκτες και η  $SU(M)$  δρα στους τελευταίους  $M$ <sup>23</sup>. Και οι δύο αυτές υποομάδες μετατίθενται με μία  $U(1)$  την οποία μπορούμε να πάρουμε  $M$  για τους πρώτους  $N$  δείκτες και  $-N$  για τους τελευταίους  $M$ .

$$\square = \left( \square \quad \bullet \right)_M \oplus \left( \bullet \quad \square \right)_{-N}. \quad (A.188)$$

Ο σκόπος είναι λοιπόν να αποφασίσουμε πώς μία τυχαία αναπαράσταση της  $SU(N+M)$  αναπτύσσεται σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της υποομάδας  $SU(N) \otimes SU(M) \otimes U(1)$ . Όπως και στην ειδική περίπτωση της  $SU(3)$  και εδώ αν υποθέσουμε ότι έχουμε μία  $SU(N+M)$  αναπαράσταση με  $n+m$  κουτιά στο αντίστοιχο Young tableau, για να υπολογίσουμε το πόσες φορές εμφανίζεται το γινόμενο μίας αναπαράστασης,  $A$ , της  $SU(N)$  με  $n$  κουτιά και μίας αναπαράστασης,  $B$ , της  $SU(M)$  με  $m$  κουτιά στα αντίστοιχα Young tableaux, στην  $SU(N+M)$  αναπαράσταση όταν περιορίσουμε  $n$  δείκτες να παίρνουν τιμές  $1 \dots N$  και  $m$  δείκτες να παίρνουν τιμές  $N+1 \dots N+M$ , χαλαρώνουμε τη συνθήκη αυτή και αφήνουμε όλους τους δείκτες να τρέξουν πάνω σε όλες τις  $N+M$  τιμές και υπολογίζουμε το τανυστικό γινόμενο  $A \otimes B$  (σαν αναπαραστάσεις της  $SU(N+M)$  ομάδας). Έπειτα, στο Clebsch - Gordan ανάπτυγμα που προκύπτει, οι φορές που το υπο εξέταση ζευγάρι  $(A, B)$  εμφανίζεται στο ανάπτυγμα είναι ίσες με τις φορές που η αρχική  $SU(N+M)$  αναπαράσταση εμφανίζεται στο τανυστικό γινόμενο  $A \otimes B$ . Σημειώνουμε επίσης ότι το  $U(1)$  φορτίο της αναπαράστασης είναι  $nM - mN$ . Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο εξετάζουμε εάν ένα ζεύγος αναπαραστάσεων των υποομάδων εμφανίζεται στο ανάπτυγμα της αναπαράστασης της αρχικής ομάδας.

Παράδειγμα:

Θέλουμε να ελέγξουμε εάν στο ανάπτυγμα της adjoint αναπαράστασης της  $SU(5)$ , 24, σε ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων των υποομάδων της  $SU(3), SU(2)$  εμφανίζεται το ζευγάρι αναπαραστάσεων  $(1, 3)_0$ <sup>24</sup>. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε τα Young tableaux ως εξής:

- Η adjoint αναπαράσταση της  $SU(5)$  θα συμβολίζεται σε όρους των Young tableaux σαν  το οποίο προκύπτει από το τέταρτο παράδειγμα κάτω από την (A.145) αφού σε όρους συντελεστών Dynkin η 24 αναπαράσταση

<sup>23</sup>Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι ξεκινώντας το χτίσιμο του μοντέλου  $SU(5)$  η φαινομενικά αυθαίρετη απαίτηση που παίρνουμε για το διαχωρισμό των πέντε δεικτών σε τρεις δείκτες χρώματος και δυο δείκτες ισοσπιν δεν είναι και τόσο αυθαίρετη

<sup>24</sup>Ο δείκτης όπως προαναφέραμε απεικονίζει το φορτίο της  $U(1)$  και υπολογίζεται από τη σχέση  $nM - mN = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$ , αφού 3 και 2 αντίστοιχα είναι ο αριθμός των κουτιών των αντίστοιχων αναπαραστάσεων των αντίστοιχων Young tableaux.

της  $SU(5)$  συμβολίζεται σαν  $(1, 0, 0, 1)^{25}$ .

- Η αναπαράσταση με το συμβολισμό 1 της  $SU(3)$  είναι μία singlet. Λόγω όμως του ότι στο τανυστικό γινόμενο τους συμπεριφερόμαστε σαν να είναι αναπαράστασεις της  $SU(5)$ , δε θα συμβολίσουμε τη singlet σαν μία κουκίδα όπως συνηθίζουμε αλλά σαν  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  που στην ουσία δίνει την τετριμμένη αναπαράσταση της  $SU(3)$ .
- Η αναπαράσταση με το συμβολισμό 3 της  $SU(2)$  συμβολίζεται κατά τα γνωστά σαν  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ .

Συνεπώς είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε πλέον το τανυστικό γινόμενο των δύο παραπάνω αναπαράστασεων:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\
 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (\text{A'.189})$$

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο ταμπλό του τελικού αθροίσματος συμπίπτει με το Young Tableau της adjoint αναπαράστασης της ομάδας  $SU(5)$ . Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι όντως το ζευγάρι  $(1, 3)_0$  θα το συναντήσουμε μία φορά στο ανάπτυγμα της 24 αναπαράστασης της  $SU(5)$ .

Τώρα θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε το πολυπόθητο ανάπτυγμα μέσα από τρία παραδείγματα με αρχική ομάδα την  $SU(5)$  που γενικά θα μας απασχολήσει πολύ, δηλαδή το  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \in SU(5)$ . Γενικά, η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι η ίδια με την περίπτωση της  $SU(3)$  που είδαμε παραπάνω, δηλαδή, παίρνουμε όλους τους πιθανούς, επιτρεπούς συνδυασμούς από τους οποίους μπορεί να έχει προκύψει το ταμπλό της αρχικής αναπαράστασης. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε στη διαδικασία αυτή είναι ότι, για την πρώτη αναπαράσταση της  $SU(3)$  το αντίστοιχο Young Tableau μπορεί να έχει μέχρι τρεις γραμμές ενώ για τη δεύτερη αναπαράσταση που αφορά στην  $SU(2)$ , επιτρέπεται να κατανειμουμε τα κουτιά προσέχοντας ότι δεν πρέπει να υπερβούμε τις δύο γραμμές. Το υπερφορτίο κάθε φορά θα υπολογίζεται από τη σχέση που συζητήσαμε παραπάνω.

- Ξεκινάμε με την πιο απλή περίπτωση, παίρνοντας σαν αναπαράσταση της αρχικής ομάδας τη θεμελιώδη αναπαράσταση  $(1, 0, 0, 0)$  ή 5 ή  $[1]$ ,

<sup>25</sup>Για πληρότητα αναφέρουμε ότι σε όρους αρίθμησης των κουτιών των στηλών του αντίστοιχου Young tableau ο συμβολισμός της adjoint αναπαράστασης της  $SU(5)$  θα είναι  $[4, 1]$ , αφού γενικά η adjoint αναπαράσταση μίας ομάδας  $SU(N)$  έχουμε δείξει πάνω από το παράδειγμα (A'.173) ότι συμβολίζεται σαν  $[N - 1, 1]$ .

από όπου βρίσκουμε:

$$\square = \left( \begin{array}{c} \square \\ \bullet \end{array} \right)_2 \oplus \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array} \right)_{-3}. \quad (\text{A'.190})$$

Η θεμελιώδης λοιπόν αναπαράσταση  $\bar{5}$  της  $SU(5)$  γράφεται σαν άθροισμα των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των υποομάδων της σαν:

$$\bar{5} = (3, 1)_2 \oplus (1, 2)_{-3}, \quad (\text{A'.191})$$

με το φορτίο της  $U(1)$  που υπολογίστηκε ως εξής:

- Για το ζεύγος  $(3, 1)$ :  $nM - mN = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = 2$
- Για το ζεύγος  $(1, 2)$ :  $nM - mN = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -3$

- Συνεχίζουμε με τη συζυγή θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(5)$ , την  $\bar{5}$ . Πριν περάσουμε στην εφαρμογή της μεθοδολογίας και εύρεση του αναπτύγματος, περιμένουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι

$$\bar{5} = (\bar{3}, 1)_{-2} \oplus (1, 2)_3, \quad (\text{A'.192})$$

αν πάρουμε τη συζυγή παράσταση της (A'.191). Ας δούμε αν ο αναλυτικός υπολογισμός επαληθεύει την πρόβλεψη:

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} = \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad \square \right) \oplus \left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right) \quad (\text{A'.193})$$

με το φορτίο που υπολογίζεται ως εξής:

- Για το ζεύγος  $(\bar{3}, 1)$ :  $nM - mN = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -2$
- Για το ζεύγος  $(1, 2)$ :  $nM - mN = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 3$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όντως ο υπολογισμός του αθροίσματος έδωσε το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Εκ πρώτης όψεως αυτό φαντάζει απλά σα μία παρατήρηση, όμως μας προσφέρει ένα δυνατό όπλο ώστε να υπολογίζουμε γρηγορότερα και με μικρότερη πιθανότητα στο λάθος το ανάπτυγμα κάποιας αναπαράστασης αλλά και το ανάπτυγμα Clebsch - Gordan. Για παράδειγμα, αν χρειαζόμαστε το τανυστικό γινόμενο  $24 \otimes \bar{3}$  αναπαραστάσεων της  $SU(5)$ , είναι πιο οικονομικό να υπολογίσουμε το γινόμενο  $24 \otimes \bar{3}$  και μετά να πάρουμε το μιγαδικό συζυγές του αναπτύγματος Clebsch - Gordan που έχει προκύψει αφού ο υπολογισμός του  $24 \otimes \bar{3}$  σε όρους Young tableaux είναι πολύ πιο εύκολος από τον υπολογισμό του  $24 \otimes \bar{3}$  ο οποίος περιέχει κουτάκια με διαφορετικούς δείκτες.

- Τέλος υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της adjoint αναπαράστασης της  $SU(5)$ , 24.

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \square \right)_5 \oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \\
 &\oplus \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_0 \oplus \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)_{-5} .
 \end{aligned}
 \tag{A'.194}$$

Η adjoint λοιπόν αναπαράσταση 24 της  $SU(5)$  γράφεται σαν άθροισμα των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των υποομάδων της σαν:

$$24 = (3, 2)_5 \oplus (1, 3)_0 \oplus (1, 1)_0 \oplus (8, 1)_0 \oplus (\bar{3}, 2)_{-5}, \tag{A'.195}$$

όπου το φορτίο της  $U(1)$  υπολογίστηκε όπως στα παραπάνω δύο παραδείγματα - είναι περιττό να επαναλάβουμε τη διαδικασία.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση όπου  $M = 1$ , η  $SU(M)$  εξαφανίζεται αφού δεν υπάρχει άλγεβρα  $SU(1)$  - δεν έχει ούτε έναν γεννήτορα. Πα' όλα αυτά όλη η παραπάνω διαδικασία παραμένει έγκυρη. Αυτή είναι κιόλας η περίπτωση με την οποία δουλέψαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο σαν ειδική περίπτωση για να βρούμε το ανάπτυγμα μίας  $SU(3)$  αναπαράστασης σε αναπαραστάσεις της υποομάδας  $SU(2) \times U(1)$ .

Για να κλείσουμε, τονίζουμε ότι πλέον έχουμε στα χέρια μας ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για να βρίσκουμε το ανάπτυγμα αναπαραστάσεων των  $SU(N)$  ομάδων σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των υποομάδων τους.

### **Α'.11 Εύρεση του ανάπτυγματος αναπαράστασης μίας ομάδας σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των υποομάδων της μέσω των διαγραμμάτων Dynkin**

Υπάρχει βέβαια και ένας δεύτερος πολύ ενδιαφέρων τρόπος να βρούμε το ανάπτυγμα μίας αναπαράστασης μίας  $SU(N)$  ομάδας σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των υποομάδων της πέρα από τον παραπάνω, με τη χρήση δηλαδή των Young tableaux . Στον τρόπο αυτό που θα αναλύσουμε παρακάτω, κεντρικό ρόλο διαδραματίζουν τα διαγράμματα Dynkin. Ας ξεκινήσουμε όμως δίνοντας πρώτα κάποιους ορισμούς.

*Κανονική υποάλγεβρα* (regular subalgebra),  $R$ , μίας απλής άλγεβρας Lie,  $A$ , είναι μία υποάλγεβρα τέτοια ώστε οι ρίζες της  $R$  να είναι ένα υποσύνολο των ριζών της  $A$  και οι γεννήτορες της υποάλγεβρας Cartan να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γεννητόρων Cartan της  $A$ . Μια κανονική υποάλγεβρα

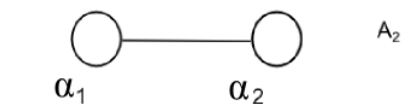
ονομάζεται μέγιστη (maximal) αν η τάξη της  $R$  είναι η ίδια με την τάξη της  $A$ , δηλαδή αν οι υποάλγεβρες Cartan είναι ίδιες.

Αν τώρα πάρουμε ένα διάγραμμα Dynkin και αφήσουμε έξω έναν κύκλο, το αποτέλεσμα είναι ένα διάγραμμα από δύο αποσυνδεδεμένα διαγράμματα. Αυτά σχετίζονται με μία κανονική υποάλγεβρα της αρχικής άλγεβρας, η οποία με τη σειρά της (η κανονική υποάλγεβρα) σχετίζεται με ένα υποσύνολο των αρχικών απλών ριζών. Το παραπάνω επιχείρημα φαίνεται αρκετά λογικό αφού όπως έχουμε αναλύσει, ο κάθε κύκλος σε ένα διάγραμμα Dynkin αντιπροσωπεύει μία απλή ρίζα. Επομένως, για παράδειγμα, η  $SU(n) \times SU(m)$  υποομάδα της  $SU(n+m)$  αποκτάται με τον τρόπο αυτόν. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία παίρνουμε κι άλλες κανονικές υποομάδες. Παρ'όλα αυτά αυτές οι υποάλγεβρες έχουν μικρότερη τάξη από τις αρχικές ομάδες. Οι γεννήτορες Cartan που έχουν μείνει απ'έξω γεννούν  $U(1)$  παράγοντες της υποάλγεβρας. Υπάρχουν επίσης και non-maximal αλλά κανονικές υποάλγεβρες οι οποίες δεν μπορούν να αποκτηθούν πετώντας απλά έναν κύκλο από το Dynkin διάγραμμα, αλλά αποκτώνται από μία διαδικασία συνένωσης (merging) η οποία χρησιμοποιείται για την καθιέρωση του θεωρήματος ταξινόμησης<sup>26</sup>. Η παραπάνω διαδικασία θα γίνει κατανοητή μέσα από ένα παράδειγμα του οποίου γνωρίζουμε ήδη τα αποτελέσματα κι έτσι θα μπορούμε να επαληθεύσουμε.

Παράδειγμα:

Θέλουμε να δούμε πως προκύπτει το ανάπτυγμα της adjoint αναπαράστασης της ομάδας  $SU(3)$  σε μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των υποομάδων της. Στην ουσία μέσω του διαγράμματος Dynkin της ομάδας θα βρούμε την maximal υποάλγεβρα της απλής άλγεβρας  $A_2$  και έπειτα θα βρούμε τις αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν μέσω των απλών ριζών της ομάδας  $SU(3)$ .

Όπως φαίνεται και στην εικόνα Α.3 το διάγραμμα Dynkin της  $A_2$  είναι:



Εικόνα Α.14: Διάγραμμα Dynkin της  $A_2$ .

Αν σε αυτό το διάγραμμα πετάξουμε έξω τον δεξιό κύκλο που αναπαριστά τη ρίζα  $\alpha_2$  τότε το διάγραμμα μετατρέπεται στο

<sup>26</sup>Το θεώρημα αυτό δε θα το αναλύσουμε σε αυτήν την εργασία γιατί ξεφεύγει από τους σκοπούς μας, όμως αξίζει η μελέτη του, βλ. Georgi Howard: Lie algebras in particle physics, Chapter 20, Second edition, 1999.

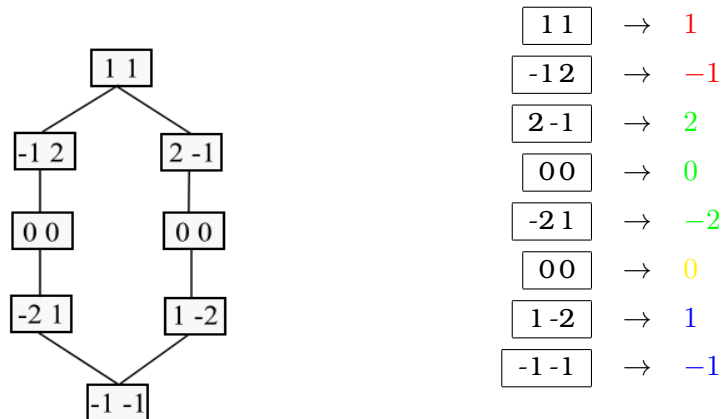
$$\bigcirc_{\alpha_1} \times U(1)$$

Εικόνα A.15: Διάγραμμα Dynkin της  $A_2$  με αποκομμένη τη ρίζα  $\alpha_2$ .

Βλέπουμε ότι η απώλεια της δεύτερης ρίζας μας «φορτώνει» έναν παράγοντα  $U(1)$  και το εναπομείναν κυκλάκι πλέον είναι το διάγραμμα Dynkin της  $SU(2)$ , δηλαδή της άλγεβρας  $A_1$ . Συνεπώς βλέπουμε με έναν πολύ απλό τρόπο ότι:

$$SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1). \quad (\text{A'.196})$$

Τώρα, αφού βρήκαμε την  $\text{maximal}$  υποάλγεβρα, πρέπει να σκάσουμε λίγο βαθύτερα και να δούμε τι συμβαίνει με τις αναπαραστάσεις. Το διάγραμμα που μας δίνει όλα τα βάρη για την  $(1, 1)$  αναπαράσταση της  $SU(3)$  είναι κατά τα γνωστά:



Εικόνα A.16: Τα βάρη της αναπαράστασης με μέγιστο βάρος  $(1, 1)$ .

Στη δεξιά στήλη παίρνουμε όλες τις καταστάσεις που εμφανίζονται (την κατάσταση  $(0, 0)$  την παίρνουμε δύο φορές γιατί ενώ έχουν ίδιο βάρος είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα ο χώρος των βαρών περιέχει και τις δύο) και αφού από το διάγραμμα Dynkin αποκόπουμε τη δεύτερη απλή ρίζα, έτσι αποκόπουμε και από τις παραπάνω καταστάσεις τη δεύτερη τιμή. Στα διπλανά μεμονωμένα πλέον νούμερα που έχουν προκύψει, ψάχνουμε να βρούμε τις καταστάσεις που εμπλέκονται στη διαδικασία εύρεσης των καταστάσεων με τη μέθοδο της καταβίβασης από κάποιο μέγιστο βάρος προφανώς τη για την ομάδα  $SU(2)$ . Με άλλα λόγια, μετά την αποκοπή της μίας ρίζας, ψάχνουμε συνδυασμούς των αριθμών που σχηματίζουν αναπαραστάσεις της  $SU(2)$ . Πιο συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι με κόκκινο χρώμα σχηματίζεται μία διπλέτα,

δηλαδή έχουμε τη θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(2)$ , ή αλλιώς τη 2. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τα μπλε νούμερα. Με πράσινο χρώμα έχουμε μία τριπλέτα, δηλαδή την adjoint αναπαράσταση της  $SU(2)$ , ή αλλιώς την 3. Τέλος, με κίτρινο χρώμα έχουμε μία singlet, δηλαδή την τετριμμένη αναπαράσταση ή αλλιώς την 1.

Επομένως, μετά την παραπάνω επιχειρηματολογία για την εύρεση των αναπαριστάσεων της  $SU(2)$  και παρακάμπτοντας την εύρεση του υπερφορτίου, είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε το ανάπτυγμα της adjoint αναπαράστασης της  $SU(3)$  σε αναπαραστάσεις της υποάλγεβράς της:

$$8 = 2 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 1. \quad (\text{A'.197})$$

Ας πούμε τώρα δυο λόγια για το υπερφορτίο που παρακάμψαμε. Αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα μίας ομάδας  $SU(n)$  στην υποομάδα  $SU(m) \times SU(n - m) \times U(1)$  σε μία block diagonal μορφή, παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} SU(m) & 0 \\ 0 & SU(n - m) \end{pmatrix}. \quad (\text{A'.198})$$

Η έξτρα  $U(1)$  προσθήκη εμβαφτίζεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \cdot I_m & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(n-m)} \cdot I_{n-m} \end{pmatrix}. \quad (\text{A'.199})$$

όπου μπορεί να πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε παράγοντα, με μόνη συνθήκη να εξακολουθεί το ίχνος να είναι μηδέν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα,  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$  έχουμε  $n = 3, m = 2$ , συνεπώς για την  $U(1)$  θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot I_2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1} \cdot I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A'.200})$$

όπου στο τελευταίο βήμα πολλαπλασιάσαμε με το 2 χωρίς να υπάρχει κάποιο τμήμα εφόσον παραμένει το ίχνος ακόμα μηδέν. Γενικά, για τον γεννήτορα της  $U(1)$  ομάδας επικρατεί κάποια αυθαιρεσία (λόγω αβελιανότητας) η οποία αίρεται από τα φυσικά επιχειρήματα που συνοδεύουν το εκάστοτε μοντέλο. Για παράδειγμα στο Καθιερωμένο Πρότυπο, το υπερφορτίο δεν περιορίζεται αλλά παίρνει τελικά τις γνωστές τιμές σε κάθε περίπτωση ούτως ώστε να προκύπτουν τα σωστά ηλεκτρικά φορτία των σωματιδίων. Όταν όμως η  $U(1)$  προκύπτει στο ανάπτυγμα κάποιας μη αβελιανής ομάδας τότε «κληρονομεί» τη συνθήκη κανονικοποίησης της αρχικής ομάδας, όπως στην παραπάνω περίπτωση  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)$ . Κατά το χτίσιμο του μοντέλου  $SU(5)$  η παρατήρηση αυτή θα γίνει ακόμα πιο σαφής. Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι

πέρα από τη χρήση των Young tableaux ή των διαγραμμάτων Dynkin , υπάρχει ένας ακόμα τρόπος για να βρούμε τη maximal υποομάδα μίας ομάδας Lie τη βοήθεια του εκάστοτε πίνακα προβολής<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup>Αναλυτικά η διαδικασία υπάρχει στο βιβλίο Group theory for unified model building του R.Slansky.



# Βιβλιογραφία

- [1] Ian Aitchison: Supersymmetry in Particle Physics
- [2] Graham G.Ross:Grand Unified Theories
- [3] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li: Gauge Theory of elementary particle physics
- [4] Aitchison I J R & Hey A J G: Gauge Theories In Particle Physics Volume 1: From Relativistic Quantum Mechanics To QED
- [5] Aitchison I J R & Hey A J G: Gauge Theories In Particle Physics Volume 2: Non-Abelian Gauge Theories: QCD and Electroweak theory
- [6] C.Kounnas, A.Masiero, D.V.Nanopoulos, K.A.Olive: Grand Unification with and without Supersymmetry
- [7] Rabindra N.Mohapatra: Unification and Supersymmetry: The frontiers of Quark-Leptons Physics, 3rd edition
- [8] Georgi Howard: Lie Algebras in Particle Physics
- [9] Peskin & Schroeder: An Introduction To Quantum Field Theory
- [10] Ryder H. Lewis: Quantum Field Theory
- [11] Richard Slansky: Group Theory for unified model building
- [12] Adel Bilal: Introduction to supersymmetry (arXiv:hep-th/0101055v1 10 Jan 2001)
- [13] Stephen P. Martin: A Supersymmetry Primer (arXiv:hep-ph/9709356v6 6 Sep 2011)
- [14] D.I.Kazakov: Beyond The Standard Model. (In Search Of Supersymmetry), (arXiv:hep-ph/0012288v2 11 Jan 2001)
- [15] Stephen L. Adler: Anomalies, (arXiv:hep-th/0411038v3 17 Nov 2004)
- [16] Guido Altarelli: Beyond the Standard Model (presentation GUT's 2012)

- [17] Andrew E. Blechman: Advanced Topics in Effective Field Theory
- [18] Safinaz Ramadan: SU(5) Grand Unified Theory (presentation)
- [19] Ζουπάνος Γιώργος: Σημειώσεις Του Μαθήματος «Στοιχειώδη Σωματίδια II»
- [20] Τράκας Νίκος: Σημειώσεις Του Μαθήματος «Θεωρητική Φυσική»
- [21] Μπάκας Ιωάννης: Σημειώσεις του μαθήματος Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής
- [22] Κουτσούμπας Γιώργος: Σημειώσεις Θεωρητικής Φυσικής
- [23] Βαγιονάκης Ε.Κωνσταντίνος:Σωματιδιακή Φυσική, Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης
- [24] Βέργαδος Ι.Δ.:Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής III, Θεωρία Ομάδων
- [25] Σούρλας Δημήτριος: Θεωρία Ομάδων και Θεωρία Τελεστών
- [26] John B. Fraleigh: Εισαγωγή Στην Άλγεβρα
- [27] Alfredo Aranda, J. L. Diaz-Cruz and Alma D. Rojas: Anomalies, Beta Functions and Supersymmetric Unification with Multi-Dimensional Higgs Representations (arXiv:0907.4552v1 [hep-ph] 27 Jul 2009)
- [28] Marina von Steinkirch: The gauge group SU(5) as a simple GUT
- [29] Edward Witten: Grand Unification with and without Supersymmetry
- [30] Howard Georgi and S. L. Glashow: Unity of All Elementary-Particle Forces
- [31] T N Sherry: Higgs potential in the SU(5) model
- [32] Ling-Pong Li: Group theory of the spontaneously broken gauge symmetries
- [33] R. N. Mohapatra: Supersymmetric Grand Unification: Lectures at TASI97 (arXiv:hep-ph/9801235v2 12 Jan 1998)
- [34] Διπλωματική Εργασία: Χατζηδάκης Γεώργιος: Μελέτη των συναρτήσεων  $\beta$  και ενοποίηση στο καθιερωμένο πρότυπο και στο ελάχιστο υπερσυμμετρικό καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων
- [35] Διπλωματική Εργασία: Μανωλάκος Γιώργος: Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής
- [36] [www.scholarpedia.org/article/Grandunification](http://www.scholarpedia.org/article/Grandunification)