



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

# **Μοντελοποίηση, Υπολογιστική Ανάλυση και $H_{\infty}$ Αυτόματη Ρύθμιση της Δυναμικής Πολυόροφων Κτιρίων σε Σεισμική Διέγερση**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Ε. Κάραλης

**Επιβλέπων :** Αργύρης Γ. Σολδάτος  
Δρ. Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2014





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»

# Μοντελοποίηση, Υπολογιστική Ανάλυση και $H_{\infty}$ Αυτόματη Ρύθμιση της Δυναμικής Πολυόροφων Κτιρίων σε Σεισμική Διέγερση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Ε. Κάραλης

**Επιβλέπων :** Αργύρης Γ. Σολδάτος  
Δρ. Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 10<sup>η</sup> Μαρτίου 2004 .

.....  
Α. Σολδάτος  
Δρ. Ε.Μ.Π

.....  
Ν. Μαράτος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Ε. Θεοτόκογλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

.....  
Δημήτριος Ε. Κάραλης

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτριος Ε. Κάραλης, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η μοντελοποίηση, η υπολογιστική ανάλυση και η  $H_{\infty}$ -αυτόματη ρύθμιση της δυναμικής απόκρισης ενός πολυόροφου κτιρίου σε σεισμική διέγερση. Οι εύρωστοι ρυθμιστές αναμένεται ότι θα διαδραματίσουν πρωταγωνιστικό ρόλο σε εφαρμογές αντισεισμικής προστασίας προς την οποία στρέφεται η παγκόσμια ερευνητική και ακαδημαϊκή κοινότητα.

Αρχικά, στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, γίνεται μια εισαγωγή στην ιστορική γέννηση και εξέλιξη των αντισεισμικών συστημάτων αυτόματης ρύθμισης σε κτίρια. Δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην τεχνολογία της σεισμικά μονωμένης βάσης. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρέχεται μία αδρή εικόνα της προτεινόμενης εφαρμογής. Ακολουθεί η μοντελοποίηση ενός πολυόροφου κτιρίου με χρήση μηχανικών και αδρανειακών στοιχείων. Εκτίθενται τα αποτελέσματα της απόκρισης του συστήματος στη σεισμική διέγερση El Centro DCZ-270. Μια σύντομη αναφορά γίνεται στα χαρακτηριστικά των υδραυλικών επενεργητών και εξάγεται το αναλυτικό μοντέλο του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα βασικά «εργαλεία» που παρέχει η μαθηματική θεωρία της  $H_{\infty}$ -αυτόματης ρύθμισης, ενώ γίνεται μια ενδιαφέρουσα εισαγωγή στην σχεδίαση εύρωστων  $H_{\infty}$ -ρυθμιστών με χρήση των συναρτήσεων ευαισθησίας. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, γίνεται η προσαρμογή του μοντέλου του κτιρίου στην πρότυπη περιγραφή στο χώρο κατάστασης και σχεδιάζεται το σχήμα  $H_{\infty}$ -αυτόματης ρύθμισης. Κατόπιν, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα εφαρμογής του σχήματος ρύθμισης. Συμπεριλαμβάνονται η δυναμική απόκριση του ρυθμιζόμενου κτιρίου σε διάφορες σεισμικές διεγέρσεις, η προσομοίωση της συμπεριφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου παρουσία δομικής αβεβαιότητας του κτιρίου. Επίσης, γίνεται αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της μεθόδου με εκείνα που εξήχθησαν με χρήση της Εύρωστης Μη Γραμμικής Αυτόματης Ρύθμισης. Τέλος, αποτυπώνεται η βελτίωση της εγγενούς δυναμικής του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας.

### Λέξεις κλειδιά

Πολυόροφα κτίρια, σεισμικά μονωμένη βάση, ενεργητικά συστήματα ρύθμισης, μοντελοποίηση, ευρωστία, χώρος κατάστασης, δυναμική απόκριση,  $H_{\infty}$ -ρύθμιση, δομική αβεβαιότητα, διάγραμμα Bode, διάγραμμα ιδιζουσών τιμών, MATLAB.

## ABSTRACT

The purpose of this thesis is the modeling, the computational analysis and the  $H_\infty$ -automatic control to a multi-storey building dynamic response.  $H_\infty$ -controllers are estimated to play an important role in the anti-seismic design and engineering field, which attracts the global scientific and academic research.

Firstly, in chapter 1, there is an introduction to the historical view of the invention and evolution of earthquake-purposed automatic control applied to buildings. Further, there is a focal reference in base isolation technology. In chapter 2, a rough view of the proposed application is provided. Afterwards, model extraction using mechanical and inertial elements is made. In addition, system response in presence of El Centro DCZ-270 is depicted. Lastly, there is a brief view of hydraulic actuators features, while the linear hydraulic model is extracted analytically.

In chapter 3, we display the basic synergies that stem from  $H_\infty$ -control mathematical theory, whereas an interesting introduction to robust controller's design on the basis of sensitivity functions is presented. In chapter 4, we reformulate our building model on the basis of standard state space description and realize the  $H_\infty$ -controller synthesis. Further, there is a presentation of the results of the  $H_\infty$ -control use. These comprise controlled building dynamic response over several seismic stimuli, the simulation of the closed loop system in presence of building structural uncertainty. Moreover, there is a collation between our results and the ones extracted using robust nonlinear control. Lastly, a depiction of the inherent dynamics improvement is sketched, with reference to the frequency domain.

## Keywords

Multi-storey buildings, base isolation system, active control system, modeling, robustness, state space, dynamic response,  $H_\infty$  control, structural uncertainty, Bode plot, singular value frequency plot, MATLAB.





## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

*Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στο εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου υπό την επίβλεψη του Δρ. κ. Α. Σολδάτου. Ευχαριστώ θερμά τον Δρ. Αργύρη Σολδάτο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση ενός σύγχρονου και αρκετά ενδιαφέροντος θέματος, καθώς και για την αμέριστη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη την πορεία εκπόνησης της εργασίας αυτής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Ν. Μαράτο για την εξαιρετική διδασκαλία του πάνω στο κεφάλαιο των αυτοματισμών στην παραγωγή κατά την διάρκεια της φοίτησής μου, καθώς και για την συμμετοχή του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή. Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Ε. Θεοτόκογλου για την διδασκαλία των πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και για την συμμετοχή του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή. Τέλος, ευχαριστώ τον Δρ. κ. Α. Δρίτσα για τις πολύ χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε στο επίπεδο της επιστημονικής τεκμηρίωσης της εργασίας.*



<b>1. Τεχνολογία Αντισεισμικής Προστασίας Κτιρίων.....</b>	<b>15</b>
1.1 Ιστορική Αναδρομή.....	15
1.2 Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης.....	19
1.2.1 Παθητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης.....	19
1.2.2 Ενεργητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης .....	24
1.2.3 Υβριδικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης.....	28
1.2.4 Ημι-ενεργητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης.....	31
1.3 Σεισμικά Μονωμένη Βάση.....	34
1.3.1 Είδη σεισμικής μόνωσης βάσης.....	35
1.3.2 Εφαρμογές τεχνολογίας σεισμικά μονωμένης βάσης.....	37
1.4 Συνδυασμός Ενεργητικής Αυτόματης Ρύθμισης με Σεισμικά Μονωμένη Βάση.....	41
<b>2. Μοντελοποίηση και Ανάλυση Δυναμικής Κτιρίου.....</b>	<b>43</b>
2.1 Εισαγωγή .....	43
2.2 Δυναμικό Μοντέλο Συστήματος N-Όροφου Κτιρίου.....	44
2.3 Ανάλυση Δυναμικής Συμπεριφοράς Κτιρίου.....	48
2.4 Υδραυλικός Επενεργητής.....	57
2.4.1 Βασικά μέρη και λειτουργία.....	58
2.4.2 Τριβή και φυσική συχνότητα.....	61
2.4.3 Γραμμικός υδραυλικός επενεργητής.....	63
<b>3. Θεωρία <math>H_{\infty}</math> Αυτόματης Ρύθμισης.....</b>	<b>69</b>
3.1 Εισαγωγή .....	69
3.2 Νόρμες Συστημάτων και SVD Παραγοντοποίηση.....	70
3.2.1 $L_p$ νόρμες.....	70
3.2.2 $H_2$ νόρμες.....	72
3.2.3 $H_{\infty}$ νόρμες.....	76
3.2.4 SVD παραγοντοποίηση.....	80
3.3 $H_{\infty}$ Βέλτιστος Έλεγχος.....	82
3.3.1 Φορμαλισμός συστήματος.....	82
3.3.2 Βέλτιστη ανατροφοδότηση κατάστασης.....	85
3.3.3 Βέλτιστη εκτίμηση.....	87
3.3.4 Βέλτιστη αυτόματη ρύθμιση.....	88
3.4 Ειδικά Θέματα Σχεδίασης.....	90
3.4.1 Συναρτήσεις ευαισθησίας.....	90
3.4.2 Στοιχειώδεις περιορισμοί συμπεριφοράς.....	94
3.4.3 Σχηματοποίηση βρόχου.....	97
<b>4. Αυτόματη Ρύθμιση Κτιρίου.....</b>	<b>102</b>
4.1 Σχεδίαση $H_{\infty}$ Αυτόματης Ρύθμισης.....	102
4.2 Αποτελέσματα.....	104
4.2.1 Απόκριση συστήματος.....	104
4.2.2 Απόκριση σε νέες σεισμικές διαταραχές.....	113
4.2.3 Απόκριση παρουσία αβεβαιότητας μοντέλου.....	119
4.2.4 $H_{\infty}$ αυτόματη ρύθμιση και εύρωστη μη γραμμική αυτόματη ρύθμιση.....	121
4.2.5 Συχνотική περιγραφή συστήματος.....	126

<b>5. Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα.....</b>	<b>130</b>
5.1 Σύνοψη Αποτελεσμάτων.....	130
5.2 Ερεθίσματα Περαιτέρω Έρευνας.....	131

<b>Βιβλιογραφικός Κατάλογος .....</b>	<b>132</b>
<b>Ευρετήριο .....</b>	<b>139</b>

<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....</b>	<b>143</b>
<i>A. Μαθηματικές Αποδείξεις.....</i>	<i>143</i>
<i>B. Υπολογισμός Δυναμικών Χαρακτηριστικών Κτιρίου.....</i>	<i>148</i>
<i>Γ. Στοιχεία Υδραυλικών Επενεργητών και Υπολογισμοί.....</i>	<i>153</i>
<i>Δ. Περιγραφή <math>H_{\infty}</math> Αυτόματης Ρύθμισης στο Χώρο Κατάσταση.....</i>	<i>163</i>



# 1. Τεχνολογία Αντισεισμικής Προστασίας Κτιρίων

---

## 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Το φαινόμενο του σεισμού και οι προκαλούμενες καταστροφές συνοδεύουν την ανθρωπότητα απο την γέννησή της. Σε αδρές γραμμές, περιορισμένοι στον πλανήτη Γη, σεισμός είναι η απελευθέρωση συσσωρευμένης ενέργειας που συμβαίνει στον φλοιό της Γης. Ο σεισμός γίνεται αισθητός, καθώς μέρος της ενέργειας μεταφέρεται μέσω των σεισμικών κυμάτων, τα οποία προκαλούν ταλαντώσεις στα πετρώματα, με αποτέλεσμα να προκαλούνται αναταράξεις στο έδαφος. Δεν θεωρείται αμελητέα η εκδήλωση ηλεκτρικών φαινομένων, αφού οι ταλαντώσεις επάγουν διαφορές δυναμικού στα πετρώματα του φλοιού καθώς οδεύουν μέσα από αυτά (σεισμικό-ηλεκτρικό φαινόμενο δευτέρου είδους) [81]. Το τελευταίο φαινόμενο δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία. Η πραγματική αιτία των σεισμών που γεννώνται στον φλοιό της Γης δηλώθηκε σωστά το 1760 από τον Βρετανό John Michell, ο οποίος έγραψε πως οι σεισμοί και τα κύματα ενέργειας που δημιουργούν προκαλούνται από "μάζες πετρωμάτων που μετατοπίζονται, μίλια κάτω από την επιφάνεια". Ο John Michell θεωρείται ο πατέρας της επιστήμης της μελέτης των σεισμών, δηλαδή της Σεισμολογίας.

Σύμφωνα με την αρχαία ελληνική μυθολογία, ο Εγκέλαδος, που ετυμολογικά (έγκειμαι + λας) σημαίνει εγκατεστημένος στα πετρώματα, στον στέρεο φλοιό της Γης, υπήρξε ο αρχηγός των Γιγάντων, γιός του Ταρτάρου και της Γης, που πρωταγωνίστησε στη Γιγαντομαχία, όπου και εφονεύθη [82]. Κατά την επικρατέστερη παράδοση, ο Δίας, ο πρώτος στην ιεραρχία των Ολύμπιων Θεών, διέταξε τους Γίγαντες να νικήσουν τον Εγκέλαδο, τον Θεό των σεισμών που ζει μισός στη θάλασσα και μισός στη στεριά. Οι Γίγαντες παρά την επιβλητική ορμή του κορμιού τους απέτυχαν. Τότε, ο Δίας διέταξε την Αθηνά, τη Θεά της σοφίας, να νικήσει τον Εγκέλαδο. Η Θεά Αθηνά, που διακρίνεται για τη σοφία, αλλά και την πολεμική τακτική της, αφού έτρεψε τον Εγκέλαδο σε φυγή πέταξε πάνω του τη Σικελία ή το όρος Αίτνα. Εδώ, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τον κεντρικό χαρακτηρισμό της Αθηνάς ως «Παλλάδα», διότι κράδαινε το δόρυ στο έδαφος και αυτό πάλλονταν (Βλ. Σχήμα 1.1). Επομένως, απο μία οπτική, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε την επιτυχή επικράτησή της έναντι του Εγκέλαδου σε αυτή την ξεχωριστή ιδιότητα. Με όρους μηχανικής, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε την εξουδετέρωση του Εγκέλαδου μέσω μιας κατάλληλα επιλεγμένης εξωτερικής παλλόμενης (κυματικής) διέγερσης ή αντιστάθμισης (compensation). Η υπόλοιπη εργασία θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι στηρίζει τη συγκεκριμένη ερμηνεία του μύθου.



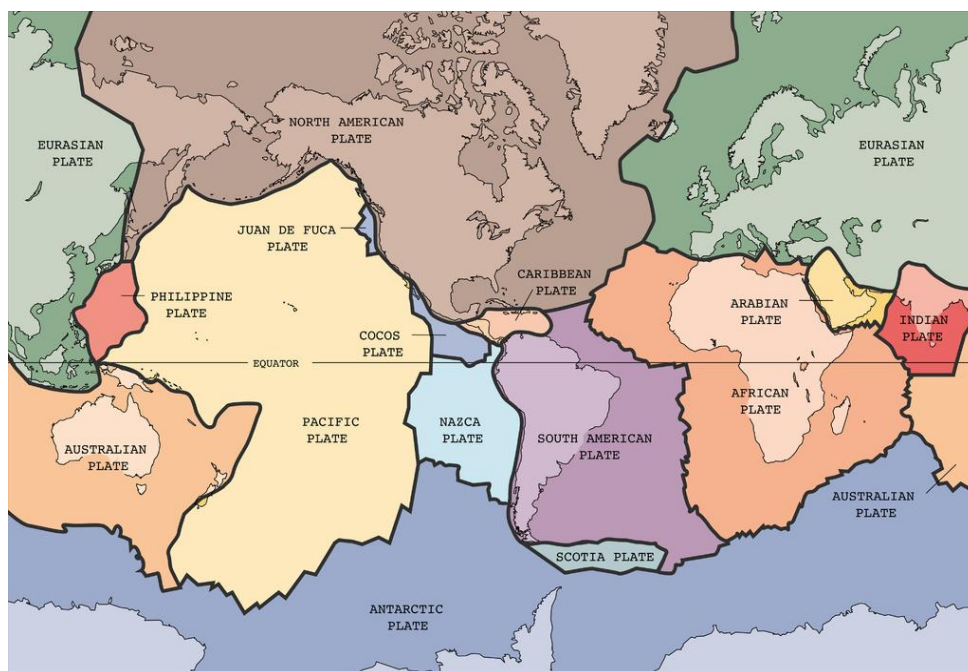
**Σχήμα 1.1:** Θεά Αθηνά η Παλλάδα

Το φαινόμενο του σεισμού, μπορεί να έχει πολλές αιτίες προέλευσης [21] [81]. Με βάση την αιτία προέλευσης, οι σεισμοί χωρίζονται στις εξής κατηγορίες: α) τεκτονικοί, β) εγκατακρημνισιγενείς, γ) ηφαιστειακοί, δ) κρυογενείς, ε) τεχνητοί. Οι πρώτοι οφείλονται στη σχετική κίνηση των τεκτονικών πλακών και συγκεντρώνουν το 90% της εμφανιζόμενης σεισμικής έντασης, ενώ οι υπόλοιποι το 10% περίπου. Θα εστιάσουμε στην πρώτη κατηγορία, αφού κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα υπόλοιπα 4 είδη. Οι εγκατακρημνισιγενείς σεισμοί είναι μικρής έντασης σεισμοί, οι οποίοι συμβαίνουν όταν η «οροφή» ενός σπηλαίου καταρρεύσει ή όταν γίνει μια ογκώδης κατολίσθηση. Οι ηφαιστειακοί σεισμοί είναι αποτέλεσμα αλλαγής της πίεσης στο εσωτερικό της γης, λόγω της εισροής ή εκροής μάγματος και είναι λιγότερο ισχυροί από τους τεκτονικούς, χωρίς να σημαίνει ότι δεν μπορούν να επιφέρουν καταστροφές. Μια σημειακή ακολουθία τέτοιων σεισμών συνολικής διάρκειας 2.5 εκατομμυρίων χρόνων –με τελευταίο αυτόν της «Μινωικής Έκρηξης» τον 17ο αιώνα π.Χ– δημιούργησε τη σημερινή μορφή της Σαντορίνης (Θήρα) [83]. Οι κρυογενείς σεισμοί (frost-quake) προκαλούνται λόγω της διαστολής των πετρωμάτων κατά τη μετατροπή του ρευστού νερού που περιέχει τα πετρώματα σε πάγο. Τέλος, οι τεχνητοί σεισμοί προκαλούνται με εκρήξεις ή χτύπημα της επιφάνειας του γήινου φλοιού.

Αναφορικά με τους τεκτονικούς σεισμούς, η παγκόσμια κατανομή των σεισμικών επικέντρων οδήγησε την ερευνητική κοινότητα στο συμπέρασμα ότι η λιθόσφαιρα αποτελείται από τμηματικά μέρη, που ονομάζονται τεκτονικές πλάκες. Οι επτά βασικές λιθοσφαιρικές πλάκες είναι οι εξής: α) Ανταρκτική, β) Ευρασιατική, γ) Βορείου



Αμερικής, δ) Νοτίου Αμερικής, ε) Ειρηνικού, ζ) Αφρικανική, η) Αυστραλιανή. Οι οκτώ δευτερεύουσες λιθοσφαιρικές πλάκες είναι οι εξής: α) Ινδική, β) Αραβική, γ) Καραϊβική, δ) Φιλιππίνων, ε) Κόκος, ζ) Νάζκα, η) Χουάν Ντε Φούκα, θ) Σκοτία (Βλ. Σχήμα 1.2). Οι τεκτονικές πλάκες μπορούν να πραγματοποιήσουν τριών ειδών σχετικές κινήσεις: α) Σύγκλιση, β) Απόκλιση, γ) Πλευρική Ώθηση. Στην περίπτωση της σύγκλισης δύο πλακών έχουμε την καταβύθιση της βαρύτερης πλάκας απο μια ελαφριά με παράλληλη δημιουργία μιας ζώνης καταβύθισης και μιας τάφρου. Όταν η καταβυθισμένη πλάκα φτάσει σε μεγάλο βάθος, τότε τήκεται ενώ ο φλοιός της καταστρέφεται. Ο μηχανισμός σύγκλισης μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους: α) ωκεάνια – ωκεάνια πλάκα, β) ωκεάνια – ηπειρωτική πλάκα, γ) ηπειρωτική – ηπειρωτική πλάκα. Κατά την απόκλιση δύο πλακών, έχουμε σχετική απομάκρυνση των πλακών και την εκροή μάγματος (δημιουργία ηφαιστείου), το οποίο ανερχόμενο στην επιφάνεια ψύχεται, με αποτέλεσμα τη δημιουργία νέου φλοιού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η Μεσο-ατλαντική ράχη, που σχηματίζεται απο την απόκλιση της Ευρασιατικής και Αφρικανικής πλάκας απο τις πλάκες Βορείου και Νοτίου Αμερικής αντίστοιχα. Κατά την πλευρική ώθηση δύο πλακών, παρατηρείται η ολίσθηση της μιας πλάκας ως προς την άλλη σε (προσεγγιστικά) αντίθετη κατεύθυνση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το Βόρειο Ρήγμα της Ανατολίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την φύση των σεισμών, αλλά και τους μηχανισμούς δημιουργίας μπορεί κανείς να ανατρέξει στην αντίστοιχη βιβλιογραφία [21] [81].



**Σχήμα 1.2:** Οι 7 Βασικές Τεκτονικές Πλάκες [84]

Η μηχανική των σεισμών, ως προς την εμφάνιση τασικού ή παραμορφωσιακού πεδίου περιγράφεται με τα αναλυτικά εργαλεία που παρέχει η Θεωρία Ελαστικότητας (Elasticity Theory), αλλά και η Μηχανική Συνεχούς Μέσου (Continuum Medium Mechanics), όπου εισάγονται οι έννοιες της Επίπεδης Εντατικής Κατάστασης (Plane Stress State), της Επίπεδης Παραμορφωσιακής Κατάστασης (Plane Strain State) [24]

[26]. Ως προς τη διάδοση ρωγμών, χρησιμοποιούνται τα πορίσματα της Μηχανικής Θραύσεων (Fracture Mechanics) που μελετούν τα γραμμικά και μη γραμμικά φαινόμενα που συμβαίνουν στις ελαστοπλαστικές περιοχές μιας αιχμής με τον προσδιορισμό του Συντελεστή Έντασης των Τάσεων  $K_{\infty}$  (Stress Intensity Factor), αλλά και ενεργειακών κριτηρίων εκκίνησης ρωγμών, όπως το Κριτήριο Griffith [22] [23]. Στις δύο ανωτέρω περιγραφές, τα χρησιμοποιούμενα αναλυτικά εργαλεία έρχονται από τη Μιγαδική Ανάλυση. Λόγου χάρι, η Μέθοδος Μιγαδικών Δυναμικών Kolosov-Mushkelishvili αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στην επίλυση του περιγραφόμενου ελαστοπλαστικού προβλήματος. Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι πέραν της ανάλυσης κατασκευών με χρήση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων υπάρχουν και αρκετά εξελιγμένες πειραματικές μέθοδοι μελέτης και προσδιορισμού του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου γύρω από μια ατέλεια (π.χ. έγκλεισμα, οπή κοκ) [22] [23] [27] [28]. Η Μέθοδος των Καυστικών είναι μια από αυτές [23]. Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών λειτουργεί εργαστήριο που πραγματοποιεί τα συγκεκριμένα πειράματα. Για περισσότερες πληροφορίες, σχετικά με την αναλυτική περιγραφή των φαινομένων που διέπουν τους σεισμούς, μπορεί κάποιος να ανατρέξει στην αντίστοιχη βιβλιογραφία [22] [23].

Στην παρούσα εργασία, δεν θα μας απασχολήσει η «μηχανική προέλευση» του σεισμικού φαινομένου, αλλά η επίδραση του σεισμικού φορτίου στην κατασκευή πολυόροφων κτιρίων. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία επικεντρώνεται σε μια ερευνητική κατεύθυνση, η οποία ξεκίνησε στη δεκαετία του '90 στις ΗΠΑ και την Ιαπωνία και αφορά στην προστασία των κτιρίων από σεισμούς με χρήση της τεχνολογίας της Σεισμικά Μονωμένης Βάσης (Base Isolation) συνδυαστικά με τεχνικές Αυτόματης Ρύθμισης. Ο αντικειμενικός σκοπός είναι ο αποτελεσματικός περιορισμός των εγγενών (inner) ή συνοριακών (boundary) μετατοπίσεων ενός κτιρίου από την κατάσταση ισορροπίας τους εντός κάποιων ανεκτών ορίων κατά τη διάρκεια της σεισμικής δόνησης. Λόγω ύπαρξης αβεβαιότητας στον προσδιορισμό των μηχανικών σταθερών (structural uncertainty) της κατασκευής, αλλά και στην ίδια τη σεισμική διέγερση (disturbance signal uncertainty), η σχεδίαση εύρωστων σχημάτων αυτόματης ρύθμισης καθίστανται ζωτικής σημασίας.

Στην παρούσα εργασία, προτείνεται μια υβριδική μεθοδολογία που αφορά τη χρήση ενεργητικού και παθητικού συστήματος αυτόματης ρύθμισης. Η παθητική αυτόματη ρύθμιση αναφέρεται στη χρήση της σεισμικής μόνωσης της βάσης του κτιρίου, δηλαδή στη χρήση ελαστικών εφεδράνων που προκαλούν την απορρόφηση ενός μέρους της σεισμικής ενέργειας που αναφέρθηκε παραπάνω. Έτσι, ελαττώνεται εξ αρχής η σεισμική επίδραση στο κτίριο. Παράλληλα, επεμβαίνει και η ενεργητική αυτόματη ρύθμιση, η οποία με την άσκηση κατάλληλων εξωτερικών δυνάμεων περιορίζει τη μετατόπιση σε μικρά επιθυμητά επίπεδα.

Στην παρούσα εργασία, η περιγραφή περιορίζεται σε μία διάσταση. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι η σεισμική διέγερση και η κίνηση του κτιρίου πραγματοποιούνται κατά μία διεύθυνση. Αρχικά, «κατασκευάζουμε» το γραμμικό μοντέλο ενός N-όροφου κτιρίου. Εν συνεχεία, τα τρία προτεινόμενα σχήματα αυτόματης ρύθμισης που σχεδιάζονται εξαρτώνται από πληροφορία που παρέχει είτε το σύνολο των ορόφων είτε μόνο ο πρώτος. Τέλος, σημειώνεται ότι το σύνολο των προτεινόμενων μεθοδολογιών επενέργειας (actuation) απαιτούν την εφαρμογή δύναμης ελέγχου αποκλειστικά στη βάση του κτιρίου.

## 1.2 Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης

Η βασική αντισεισμική προστασία των κτιρίων προέρχεται από την αντοχή της συνολικής κατασκευής σε σεισμικά φορτία. Πιο συγκεκριμένα, η προαναφερθείσα αντοχή εξαρτάται από την γεωμετρία και τα μηχανικά χαρακτηριστικά της κατασκευής και μεταφράζεται στην βασική ικανότητα του κτιρίου να απορροφά (εξουδετερώνει) ένα μέρος της ενέργειας του σεισμού που διαδίδεται σε αυτό. Η συγκεκριμένη ικανότητα εξασθενεί με το χρόνο –λόγω «γηρανσης» των υλικών κατασκευής- αλλά και με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή σημαντικών σεισμικών φορτίων (κόπωση) στο σύνολο της κατασκευής. Επομένως, μιλάμε για την «εγγενή» ικανότητα του κτιρίου να ανθίσταται σε σεισμικά φορτία διαφορετικής έντασης, συχνότητας και κατεύθυνσης διάδοσης.

Εντούτοις, η παραπάνω βασική αυτή «ικανότητα» πολλές φορές δεν αρκεί στην παρουσία ενός μεγάλου σεισμικού φορτίου. Με άλλα λόγια, ακόμα και ισοστατικές κατασκευές που έχουν κατασκευαστεί με υλικά υψηλής αντοχής σε διάφορων τύπων φορτίσεις (εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση, κρούση κοκ) και με σωστή γεωμετρία υποχωρούν όταν υπόκεινται σε σημαντικά σεισμικά φορτία. Οπότε, απαιτείται η ενίσχυση του κτιρίου απέναντι στον σεισμό με κάποια συστήματα, τα οποία θα μειώνουν τη διάχυση ενέργειας στην πρωτογενή δομή της κτιριακής κατασκευής αντανακλώντας ή απορροφώντας μέρος της ενέργειας εισόδου. Απώτερος σκοπός είναι η μείωση δομικής αστοχίας της κατασκευής [1] [2]. Έτσι, αναπτύχθηκαν τα παθητικά (passive) συστήματα αυτόματης ρύθμισης για τη προστασία κτιρίων [19].

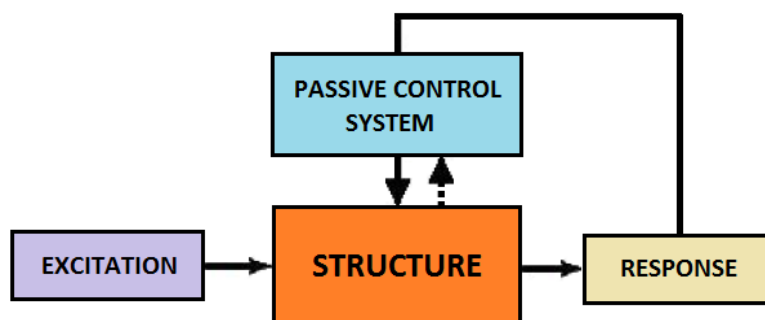
Από την άλλη πλευρά, κατά τις τελευταίες δεκαετίες, η είσοδος των συστημάτων αυτοματισμού στην σχεδίαση κτιριακών εγκαταστάσεων έχει παράσχει μια νέα προσέγγιση αναφορικά με την αντισεισμική προστασία. Η σχεδίαση και αποδοτική χρήση κατάλληλα επιλεγμένων επενεργητών (actuator), οι οποίοι τείνουν να αντισταθμίζουν την έκθεση της κατασκευής σε σεισμικά φορτία, αποτελεί το βασικό αντικείμενο της ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης. Οι διάφορες τεχνικές ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης αντιστοιχούν σε τρεις βασικές κατηγορίες συστημάτων: τα ενεργητικά (active), τα υβριδικά (hybrid) και τα ημι-ενεργητικά (semi-active) συστήματα αυτόματης ρύθμισης. Εν συνεχεία, θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά τις παραπάνω κατηγορίες τεχνικών αυτόματης ρύθμισης.

### 1.2.1 Παθητικά Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης

Τα παθητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης, όπως προαναφέραμε, απορροφούν ή αντανακλούν μέρος της ενέργειας του σεισμικού φορτίου που δέχεται το κτίριο. Δεν απαιτούν την κατανάλωση ενέργειας, προκειμένου να λειτουργήσουν, και ως τέτοια δεν εξαρτώνται από ενδεχόμενες διακοπές ρεύματος που επισυμβαίνουν κατά τη διάρκεια σεισμών. Το παραπάνω αποτελεί σημαντικό δείκτη αξιοπιστίας. Η βασική αρχή λειτουργίας τους έγκειται στη διάχυση της διαδιδόμενης ενέργειας -με χρήση της κίνησης της κατασκευής- σε σχετική κίνηση εντός της συσκευής αυτόματης ρύθμισης, που ισοδυναμεί σε μετατροπή μέρους της κινητικής ενέργειας σε θερμότητα. Η συντήρησή τους είναι χαμηλή σε κόστος. Κατά κανόνα, εφαρμόζονται σε περιοχές χαμηλού σεισμικού κινδύνου είτε σε νεόδμητα είτε σε παλαιά κτίρια [19].

Τα συστήματα αυτά εφαρμόστηκαν και μελετήθηκαν σε ψηλές κατασκευές με σκοπό την αύξηση της απόσβεσης των κραδασμών στις περιοχές κρίσιμων μετατοπίσεων της κατασκευής. Κατ'αυτόν τον τρόπο, παρατηρήθηκε ότι αυξήθηκε η έμφυτη ακαμψία της κατασκευής, όπως αυτή διαμορφώνεται από την βασική κατασκευή. Πρακτικά, η εφαρμογή των παθητικών συστημάτων αυτόματης ρύθμισης απαιτούν μια ακολουθία ενεργειών που πρέπει να προηγηθεί, που συνοψίζεται στον καθορισμό του εύρους διέγερσης με βάση ιστορικά δεδομένα, την εξαγωγή ενός αναλυτικού μοντέλου με βάση τα δυναμικά χαρακτηριστικά της κατασκευής, την αποτύπωση του εύρους απόκρισης με βάση τα δύο προηγούμενα, την επιλογή της κατάλληλης συσκευής, την επιβεβαίωση της αξιοπιστίας του συνολικού συστήματος και την αποτύπωση του απαιτούμενου προγραμματισμού συντήρησης.

Το δομικό διάγραμμα (block diagram) ενός παθητικού συστήματος αυτόματης ρύθμισης περιγράφεται ακολούθως (βλ. Σχήμα 1.3). Η αποτελεσματικότητα ενός παθητικού συστήματος αυτόματης ρύθμισης διαμορφώνεται από τους ακόλουθους παράγοντες: α) μηχανική ασφάλεια, β) ανθρώπινη εργονομία, γ) κόστος. Η μηχανική ασφάλεια προβλέπει την τήρηση περιορισμών μέγιστης παραμόρφωσης ή επιτάχυνσης σε συγκεκριμένα σημαντικά -από δομοστατική σκοπιά- σημεία (ή περιοχές) της κατασκευής. Η ανθρώπινη εργονομία υπαγορεύει ότι το μέτρο της επιτάχυνσης σε ορόφους, όπου ζούν ή εργάζονται άνθρωποι, δεν πρέπει να ξεπερνά ένα συγκεκριμένο όριο. Τέλος, το κόστος του συστήματος παθητικού αυτόματης ρύθμισης πρέπει να είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερο για ευνόητους λόγους.

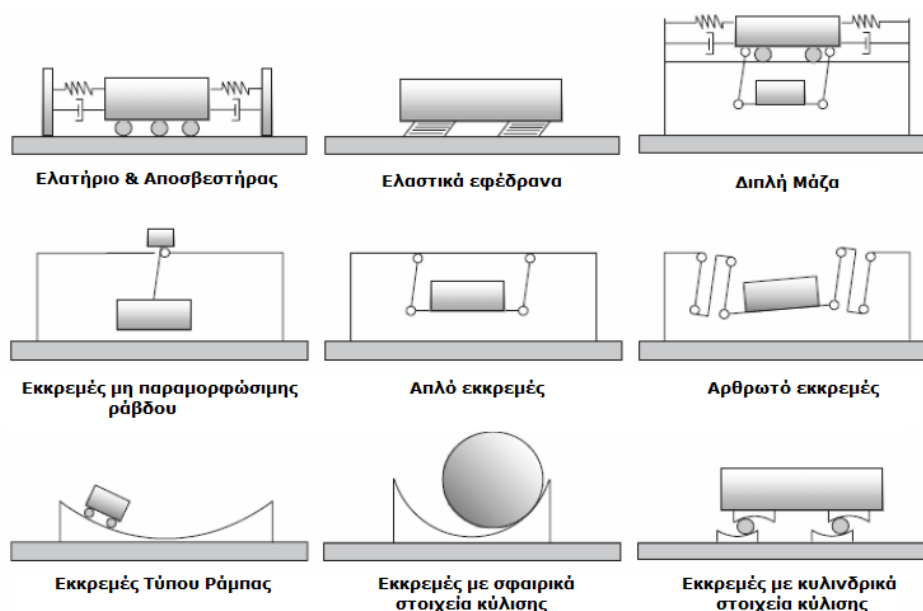


**Σχήμα 1.3:** Δομικό Διάγραμμα Παθητικού Συστήματος Αυτόματης Ρύθμισης [57]

Σε γενικές γραμμές, τα παθητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης περιλαμβάνουν τα συστήματα μονωμένης βάσης (base isolation system), τα συστήματα αντιστήριξης (bracing system), τους ιξωδο-ελαστικούς αποσβεστήρες (viscous-elastic damper - VED), τους ρυθμισμένους αποσβεστήρες μάζας (tuned mass damper - TMD), τους ρυθμισμένους αποσβεστήρες ρευστού (tuned liquid damper - TLD), τους ρυθμισμένους αποσβεστήρες υγρής στήλης (tuned liquid column damper - TLCD). Ακολούθως, θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση των παραπάνω συστημάτων αυτόματης ρύθμισης.

Τα συστήματα μονωμένης βάσης -κατά κανόνα- τοποθετούνται στα θεμέλια της εγκατάστασης και αποσκοπούν στη μείωση των επιπέδων ενέργειας και επιτάχυνσης του δαπέδου, το οποίο μπορεί να μεταδοθεί στην δομή του κτιρίου. Οι δύο βασικές κατηγορίες συστημάτων μονωμένης βάσης είναι οι μονάδες διάτμησης (shear units) και οι μονάδες ολίσθησης (sliding units) [91]. Το κτίριο LA City Hall στις ΗΠΑ αποτελεί την υψηλότερη κατασκευή που έχει κατασκευαστεί με χρήση του συστήματος αυτού.

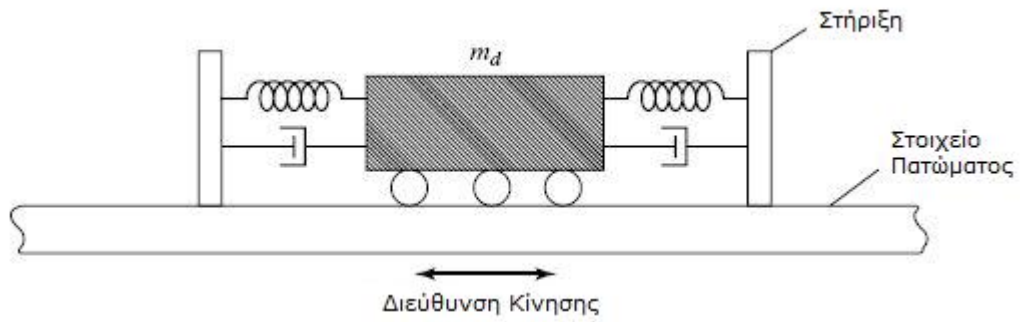
Το συγκεκριμένο είδος παθητικής αυτόματης ρύθμισης θα παρουσιαστεί διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο (Βλ. Παράγραφο 1.3). Έπειτα, οι ρυθμισμένοι αποσβεστήρες μάζας εφαρμόζονται τοπικά σε διακριτά σημεία της κατασκευής με σκοπό την επιθυμητή μεταβολή της δυναμικής απόκρισης του κτιρίου (Βλ. Σχήμα 1.4). Συνήθως, πρόκειται για μηχανικά συστήματα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα (mass-spring-damper), τα οποία απορροφούν μέρος της ενέργειας του σεισμού και τη μετατρέπουν σε θερμότητα (Βλ. Σχήμα 1.5) [19] [20].



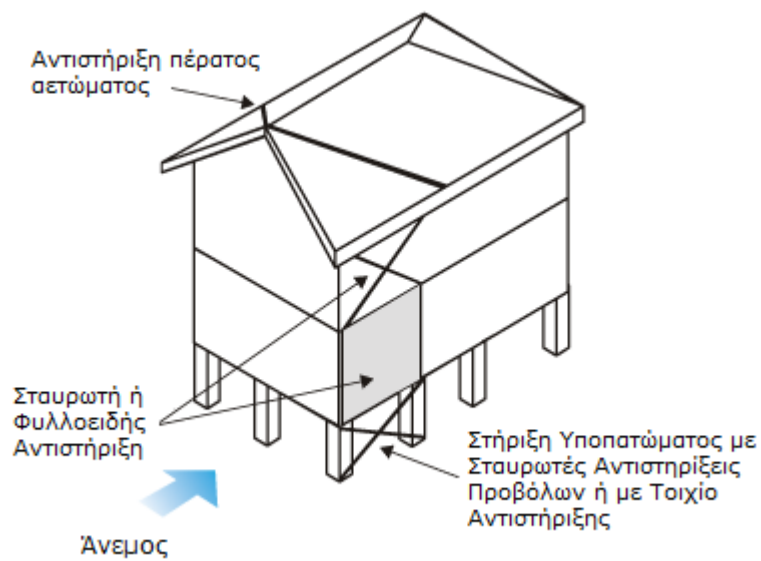
**Σχήμα 1.4:** Ρυθμισμένοι Αποσβεστήρες Μάζας (Tuned Mass Dampers) [59]

Έπειτα, τα συστήματα αντιστήριξης (Βλ. Σχήμα 1.6) χρησιμοποιούνται για τη σταθεροποίηση μόνιμων κτιρίων από εξωτερικά φορτία (π.χ. άνεμοι, σεισμοί). Ύστερα, οι ιξωδο-ελαστικοί αποσβεστήρες κατασκευάζονται από συμπολυμερή ή υαλώδεις χημικές ενώσεις, οι οποίες έχουν την ιδιότητα να εμφανίζουν αυξημένη διατμητική παραμόρφωση κατά την εφαρμογή διαφόρων ειδών φορτίου, διαχέοντας με αυτό τον τρόπο την απορροφούμενη ενέργεια. Ένας τυπικός VE-αποσβεστήρας αποτελείται από στρώσεις VE που συνδέονται με πλάκες από χάλυβα (Βλ. Σχήμα 1.7). Η διάχυση της ενέργειας συμβαίνει κατά την εμφάνιση κραδασμών, οι οποίοι προκαλούν σχετική κίνηση μεταξύ των εξωτερικών χαλύβδινων φλαντζών και των κεντρικών πλακών. Ύστερα, οι ρυθμισμένοι αποσβεστήρες ρευστού λειτουργούν με ανάλογο τρόπο με τους TMD<sup>1</sup>, με τη διαφορά ότι έχουμε την εμφάνιση κυματισμών και οριακού στρώματος στα τοιχώματα μιάς πακτωμένης στην κατασκευή δεξαμενής. Η κατάλληλη ρύθμιση των συσκευών αυτών μπορεί να συντελέσει στη μείωση των εμφανιζόμενων μετατοπίσεων και επιταχύνσεων στο μηχανικό μέρος έδρασης [19]. Τέλος, οι ρυθμισμένοι αποσβεστήρες υγρής στήλης (Βλ. Σχήμα 1.8) συνδυάζουν τις διατάξεις και αρά τα πλεονεκτήματα των δύο προηγούμενων συστημάτων παθητικής ρύθμισης.

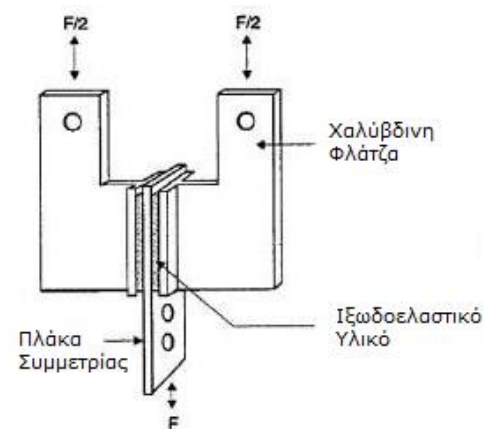
<sup>1</sup> Ο **Frahm** πρώτος κατασκεύασε έναν απλό αποσβεστήρα μάζας-ελατηρίου απορρόφησης κραδασμών το 1909. Ο βασικός στόχος ήταν να μειωθεί η κυλιόμενη κίνηση των πλοίων καθώς και οι δονήσεις του κύτους του πλοίου. Η θεωρητική προσέγγιση για ένα TMD παρουσιάστηκε μεταγενέστερα στις μελέτες από τους Ormondroyd και Den Hartog το 1928. Ο Den Hartog παρείχε στη συνέχεια μια λεπτομερή ανάλυση του βέλτιστου συντονισμού και των παραμέτρων απόσβεσης στο βιβλίο του Μηχανικές Δονήσεις (1940). Μέχρι εκείνη τη στιγμή, η συσκευή έχει αναπτυχθεί για πολλές διαφορετικές εφαρμογές, οι οποίες περιλαμβάνουν εμβολοφόρους κινητήρες, στηρίγματα κινητήρα τζετ, σταθεροποιητές πλοίων, γραμμές μεταφοράς ενέργειας, ηλεκτρικές ξυριστικές μηχανές, οδοστρώτηρες, ελικόπτερα, αυτοκίνητα, διεγείρομενα από σεισμούς και ανέμους κτίρια και γέφυρες [19].



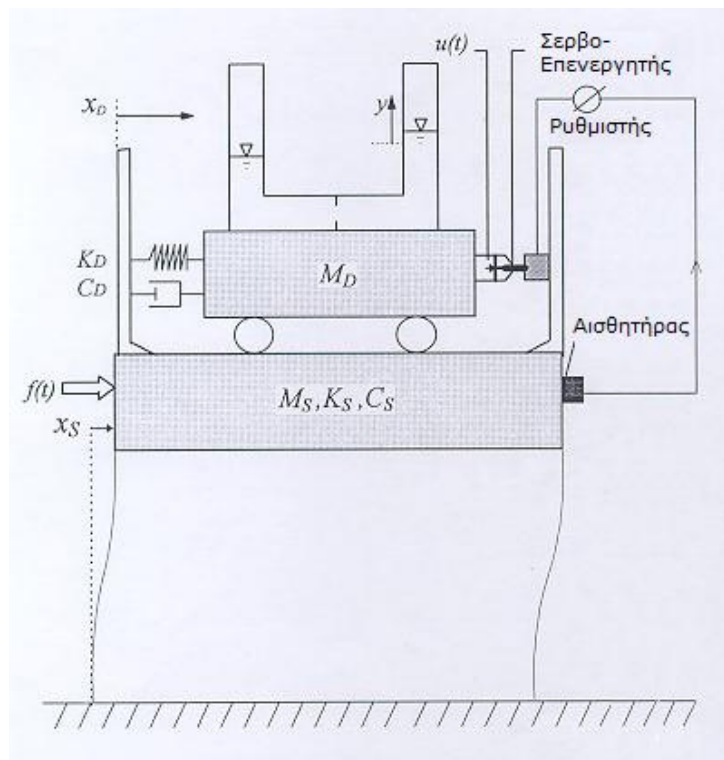
**Σχήμα 1.5:** Ρυθμισμένοι Αποσβεστήρες Μάζας-Ελατηρίου-Αποσβεστήρα [85]



**Σχήμα 1.6:** Συστήματα Αντιστήριξης (Bracing Systems) [86]



**Σχήμα 1.7:** Ιξωδο-ελαστικοί Αποσβεστήρες (VE-Dampers) [58]



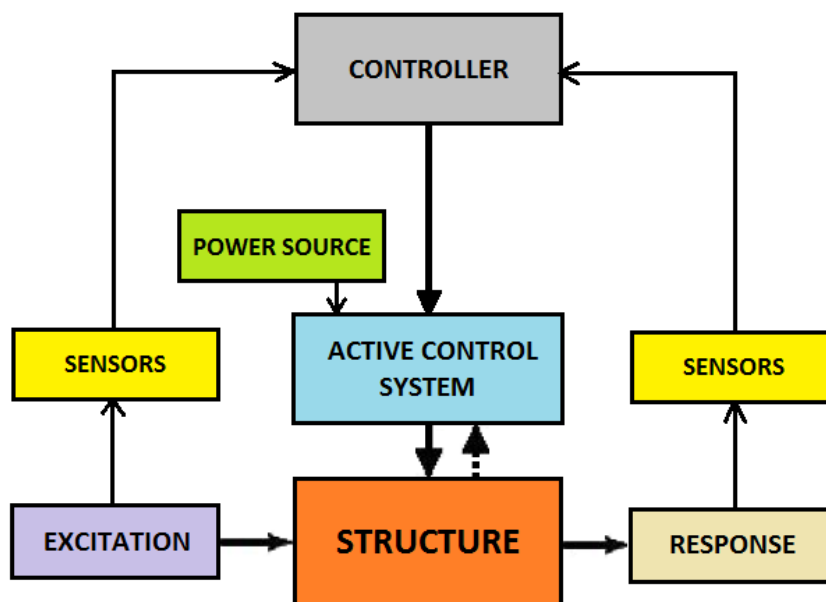
**Σχήμα 1.8:** Ρυθμισμένοι Αποσβεστήρες Υγρής Στήλης (TLC-Dampers) [87]

Τα παθητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης εμφανίζουν ιδιαίτερη αναγνώριση από την ερευνητική και τεχνολογική κοινότητα. Εντούτοις, τα συστήματα αυτά εμφανίζουν κάποιες «εγγενείς» αδυναμίες. Οι αδυναμίες αυτές εντοπίζονται στην αναγκαιότητα σχολαστικής συντήρησής τους και στο γεγονός ότι δεν μπορούν να ανταπεξέλθουν σε σημαντικές εξωτερικές μεταβολές (λ.χ. πλάτος, συχνότητα διέγερσης). Πιο συγκεκριμένα, τα TMD συστήματα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά μόνο σε μία συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων. Επιπλέον, ένα ελατωματικό ή φθαρμένο TMD είναι ικανό να αυξήσει τα επίπεδα δονήσεων της αρχικής κατασκευής δεδομένου φορτίου διέγερσης. Ως προς το σκέλος της συντήρησης, τα TMD απαιτούν τακτική συντήρηση λόγω της συνεχούς φόρτισης των μηχανικών μερών του, η οποία μεταβάλλει τη μηχανική τους συμπεριφορά (προένταση ελατηρίων, ασυνέχεια απόκρισης αποσβεστήρων κοκ). Τις τελευταίες δεκαετίες, οι ερευνητές επιχειρούν να μετριάσουν άν όχι να υπερσκελίσουν τα παραπάνω μειονεκτήματα. Συγκεκριμένα, το φάσμα συχνοτήτων, στο οποίο τα TMD αποκρίνονται με τον επιθυμητό τρόπο, έχει επεκταθεί με αποτέλεσμα τη μείωση της ευαισθησίας σε συχνοτικές μεταβολές. Πρακτικά, σχεδιάστηκε μια προσαρμοστική εκδοχή των TMD συστημάτων με ρυθμιζόμενη φυσική συχνότητα. Εντούτοις, η ύπαρξη κατάλληλων επενεργητών που να ολοκληρώνουν το παραπάνω «ευφυές» σύστημα αποτελεί μέχρι και σήμερα αντικείμενο έρευνας. Επιπλέον, τα προσαρμοστικά TMD αποτελούν συστήματα με μεγάλη πολυπλοκότητα, ενώ απαιτούν την παροχή ηλεκτρικής ενέργειας καθιστώντας τα μη πρακτικά.

## 1.2.2 Ενεργητικά Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης

Τα ενεργητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης, που χρησιμοποιούνται για τον περιορισμό ή την ελαχιστοποίηση των αποτελεσμάτων ενός σεισμού σε ένα κτίριο -σε αντίθεση με τα παθητικά- απαιτούν την παροχή εξωτερικής ηλεκτρικής τροφοδοσίας. Συγκεκριμένα, η τεχνική των συστημάτων αυτών εισήχθη για πρώτη φορά το 1972 από τον Yao<sup>2</sup>. Η ηλεκτρική τροφοδοσία ανέρχεται στην τάξη των δεκάδων KW. Τα συγκεκριμένα συστήματα λειτουργούν ως επενεργητές (actuator) κατά τρόπο ώστε ασκώντας τις κατάλληλες δυνάμεις ελέγχου να ρυθμίζουν την κτιριακή κατασκευή βάσει των επιθυμητών προδιαγραφών λειτουργίας για διάφορα μεγέθη φορτίων και συχνότητες δονήσεων. Η προσαρμοστική αυτή φύση των συστημάτων τα καθιστά ιδιαίτερα αποτελεσματικά σε περιπτώσεις, όπου είτε δεν υπάρχουν επαρκή ιστορικά δεδομένα είτε η στατιστική ανάλυση επί των ιστορικών δεδομένων της περιοχής δίνουν μεγάλα περιθώρια (margin) στις εκτιμήτριες του πλάτους και της συχνότητας της διέγερσης.

Το δομικό διάγραμμα ενός ενεργητικού συστήματος φαίνεται ακολούθως (Βλ. Σχήμα 1.9). Από αυτό, είναι εμφανές ότι το σύστημα αυτόματης ρύθμισης χρησιμοποιεί τις μετρούμενες αποκρίσεις της κατασκευής, ώστε να υπολογίσει κατάλληλο σήμα ελέγχου, το οποίο στη συνέχεια στέλνει στον επενεργητή. Στη συνέχεια, ο επενεργητής ασκεί κατάλληλη δύναμη, ώστε το κτίριο να αντισταθμίσει τις διαδιδόμενες σεισμικές φορτίσεις. Σημειώνουμε ότι το σύστημα αυτόματης ρύθμισης αλληλεπιδρά με την κατασκευή, γεγονός το οποίο έχει φυσική εξήγηση.



Σχήμα 1.9: Δομικό Διάγραμμα Ενεργητικού Συστήματος Αυτόματης Ρύθμισης [57]

<sup>2</sup> Ο James Yao, καθηγητής στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου του Purdue, πρώτος εισήγαγε την ιδέα της ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης μόλις το 1972 με την αξιοποίηση βασικών ιδεών της Θεωρίας Αυτομάτου Ελέγχου. Συγκεκριμένα, ο Yao εισήγαγε την ιδέα του Δομικού Ελέγχου (Structural Control) σε προβλήματα ασφάλειας στη μηχανική κατασκευών. Η πρακτική άποψη της παρουσιαζόμενης τεχνικής παρουσιάζεται μέσα από μια εφαρμογή όπου γίνεται χρήση αναλογικών συσκευών λογικής σε παράλληλη διάταξη. Στην τεχνική αυτή βασίστηκαν αρκετοί επιστήμονες, οι οποίοι εξέλιξαν το αντικείμενο της ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης, όπως οι A. Tani, K. Nishimura, S. Ryu, M. Nishihata και H. Kawamura οι οποίοι συνέθεσαν ένα «ευφές» σχήμα (scheme) ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης σε κτιριακές εγκαταστάσεις με χρήση Προβλεπτικού Ελέγχου (Predictive Control). Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στη σχετική βιβλιογραφία [58].



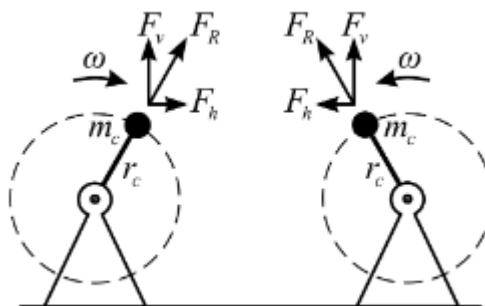
Μια απο τις συνήθειες μεθόδους ενεργητικής ρύθμισης είναι οι ενεργητικοί αποσβεστήρες (active mass dampers - AMD). Σε αυτά τα συστήματα αυτόματης ρύθμισης, γίνεται τοποθέτηση βοηθητικών μαζών, το βάρος των οποίων δεν υπερβαίνει το 1% του συνολικού βάρους της κατασκευής. Η τοποθέτηση των μαζών αυτών γίνεται σε επιλεγμένες περιοχές της κατασκευής και συνήθως επιλέγονται οι τελευταίοι όροφοι του κτιρίου. Ένας επενεργητής (λ.χ. έμβολο) συνδέει την κατασκευή με τις μάζες αυτές. Αισθητήρες μετρούν τις αποκρίσεις της κατασκευής (μετατοπίσεις και επιταχύνσεις), λόγω των σεισμικών διεγέρσεων. Τα δεδομένα αυτά στέλνονται σε μια κεντρική υπολογιστική μονάδα, η οποία περιλαμβάνει τον αλγόριθμο ελέγχου, μέσω του οποίου υπολογίζονται τα κατάλληλα σήματα ελέγχου, τα οποία με τη σειρά τους στέλνονται στον επενεργητή. Ο επενεργητής με τη σειρά του κινεί τις μάζες σε αντίθετη κατεύθυνση απο αυτή της διάδοσης της διαταραχής μειώνοντας την απόκριση της κατασκευής, βάσει των επιθυμητών προδιαγραφών σχεδίασης. Κατά γενικό κανόνα, οι AMD αποσβεστήρες υλοποιούνται με τη χρήση συμβατικών υδραυλικών επενεργητών.

Πέραν των συμβατικών υδραυλικών επενεργητών, κατά το τελευταίο διάστημα έχουν επινοηθεί νέα είδη επενεργητών η αρχή λειτουργίας των οποίων στηρίζεται σε άλλης φύσης συστήματα. Το 2002 ο Ouy ανέπτυξε ένα υποσύστημα επενεργητή που στηρίζεται σε μαγνητική οδήγηση (Βλ. Σχήμα 1.10).



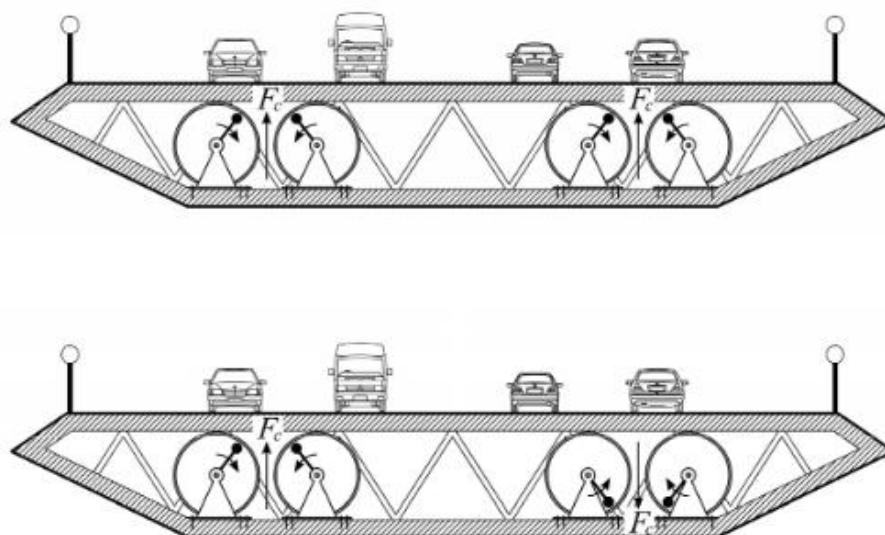
**Σχήμα 1.10:** Μαγνητικός Επενεργητής [15]

Το 2008, οι J. Scheller και U. Starossek απο το Πανεπιστήμιο του Αμβούργου δημιούργησαν ένα καινοτόμο σύστημα ζεύγους στροφικών επενεργητών, που απαρτίζεται απο ένα ζεύγος περιστρεφόμενων μαζών (Βλ. Σχήμα 1.11) [12].



**Σχήμα 1.11:** Ζεύγος Στροφικών Επενεργητών [12]

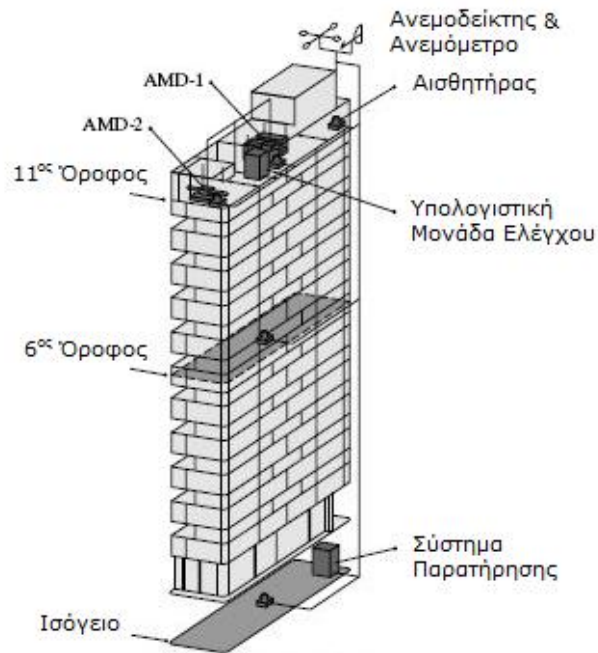
Με τον κατάλληλο συνδυασμό και τοποθέτηση τέτοιων επενεργητών και εν συνεχεία με την οδηγούμενη επιτάχυνση ή επιβράδυνση των περιεχόμενων μαζών είναι δυνατή η εφαρμογή ροπών ή ακόμα και δυνάμεων σε κατασκευές. Η χρήση τους αφορά σε γέφυρες ή κινητά οδοστρώματα (Βλ. Σχήμα 1.12) και παρέχουν κατάλληλο έλεγχο δύο ή και τριών ΒΕ σε σεισμική διέγερση ή διέγερση λόγω ανέμου.



**Σχήμα 1.12:** Εφαρμογή Δύο Ζευγών Στροφικών Επενεργητών προς Δημιουργία Γενικευμένων Δυνάμεων [12]

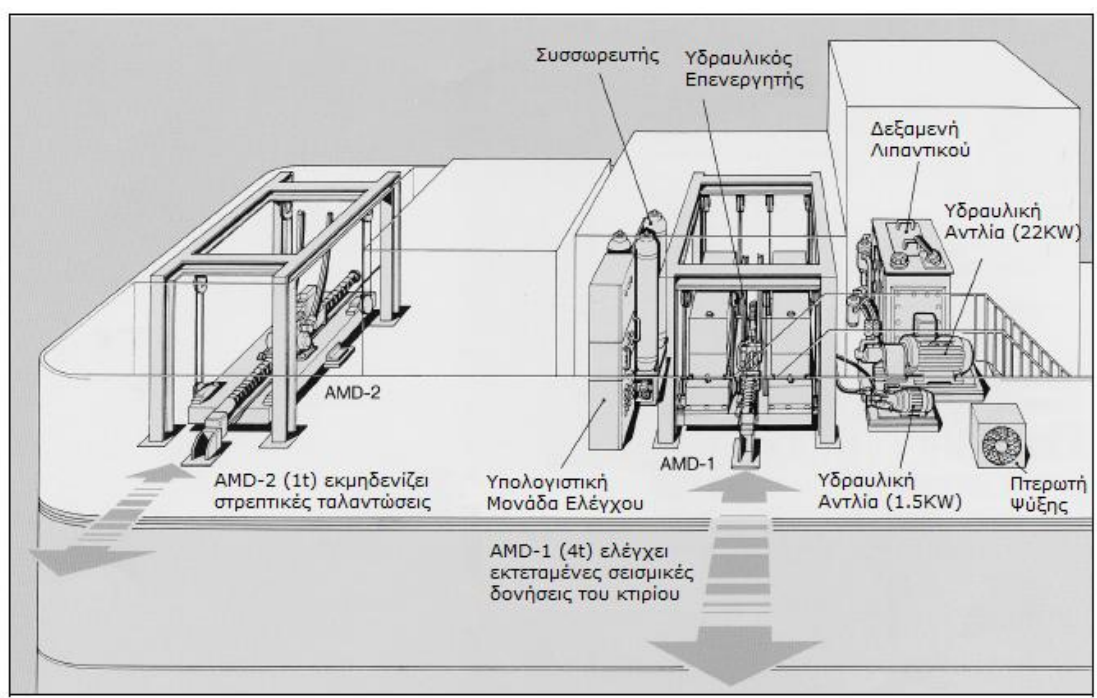
Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια ιστορική αναδρομή στην υλοποίηση τέτοιων σύγχρονων συστημάτων ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης.

Η πρώτη ολοκληρωμένη εφαρμογή ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης σε κτιριακή εγκατάσταση σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε από την εταιρεία Kajima Corporation το 1989 [17] [18]. Πρόκειται για ένα εντεκαόροφο κτίριο στο Τόκιο της Ιαπωνίας, αρκετά περιορισμένου πλάτους, μόλις 4m και μήκους 13,1m. Το κτίριο Kyobashi Seiwa Building (Βλ. Σχήμα 1.13), εφοδιάστηκε με ένα σύστημα αυτόματης ρύθμισης αποτελούμενο από δύο AMD αποσβεστήρες κατασκευασμένους από ανθρακούχο χάλυβα (Βλ. Σχήμα 1.14). Ο πρώτος είχε μάζα 4ton και τοποθετήθηκε στο κέντρο του δαπέδου προς εγκάρσια κίνηση, ώστε να αποσβένουν οι μεγάλες ταλαντώσεις. Ο δεύτερος με μάζα 4ton τοποθετήθηκε στην άκρη του δαπέδου για μείωση της στρεπτικής καταπόνησης. Ο ρόλος του συνολικού ενεργητικού συστήματος είναι να μειώσει την ταλάντωση του κτιρίου υπό την επίδραση ισχυρών ανέμων και μέτριας εντάσεως σεισμών. Η μείωση που επιτυγχάνει ανέρχεται περίπου στο μισό (έως και στο ένα τρίτο) της αντίστοιχης χωρίς προστασίας ταλάντωση. Το συγκεκριμένο σύστημα είναι εφοδιασμένο με ένα εφεδρικό σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μέσω γεννήτριας για την περίπτωση απρόσμενης διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος.



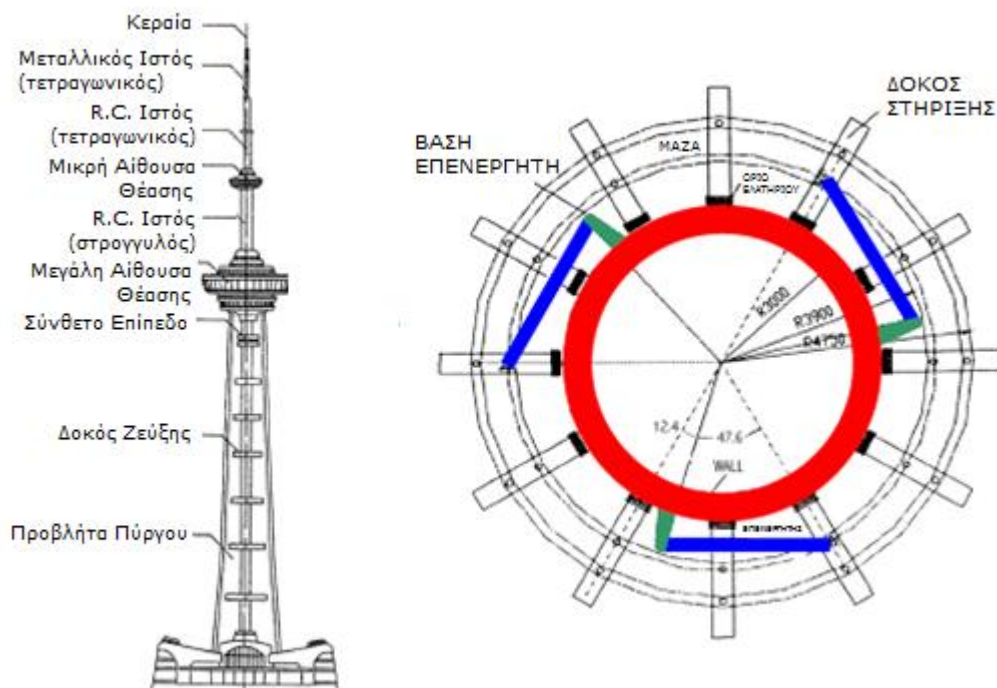
**Σχήμα 1.13:** Κτίριο Kyobashi Seiwa (Τόκιο) [18]

Το παραπάνω σύστημα αποκόμισε τη διεθνή αναγνώριση. Εντούτοις, παρουσιάστηκαν κάποια ιδιαίτερα μηχανολογικά και κατασκευαστικά ζητήματα, τα οποία απαιτούν περαιτέρω έρευνα και επίλυση. Τα σημαντικότερα από αυτά είναι τα εξής: α) μείωση κόστους εγκατάστασης/συντήρησης, β) απαίτηση εξωτερικής παροχής ενέργειας, γ) Η περιορισμένη αξιοπιστία (reliability) και ευρωστία (robustness) του συστήματος.



**Σχήμα 1.14:** Σύστημα 2 AMD Επενεργητών στο Κτίριο Kyobashi Seiwa (Τόκιο) [14]

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατασκευή ενός πύργου τηλεόρασης στην πόλη Nanjing της Κίνας το 1998, που προέκυψε από τη συνεργασία Η.Π.Α. και Κίνας (βλ. Σχήμα 1.15). Το συγκεκριμένο σύστημα ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης χρησιμοποιεί υδραυλικούς AMD αποσβεστήρες ως επενεργητές και αποσκοπεί στην εξουδετέρωση της επίδρασης φορτίων ανέμου στην κατασκευή [13].



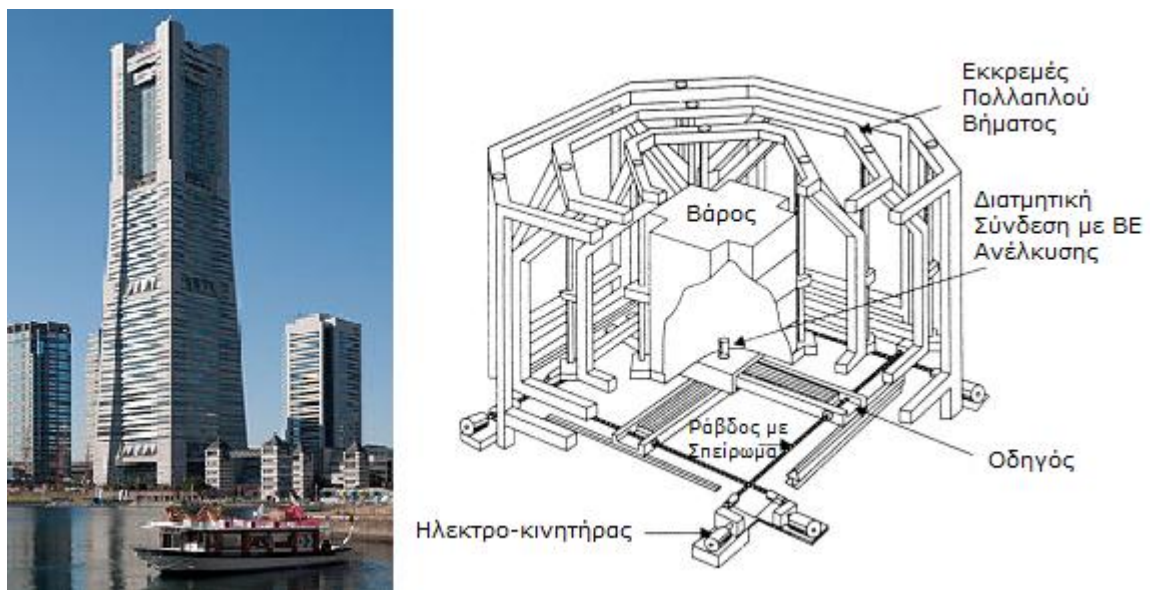
**Σχήμα 1.15:** Πλαϊνή Όψη και Κάτοψη Πύργου Τηλεόρασης (Nanjing) [13]

Οι απαιτήσεις που παρουσιάστηκαν στην περίπτωση του κτιρίου Kyobashi Seiwa Building και μπορούν να γενικευτούν ως αντιπροσωπευτικά για τα ενεργητικά συστήματα αυτόματης ρύθμισης οδήγησαν τους ερευνητές σε μία νέα κατηγορία συστημάτων. Τα συστήματα αυτά συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά της ενεργητικής και της παθητικής αυτόματης ρύθμισης, αυξάνοντας την αξιοπιστία και μειώνοντας τις απαιτήσεις σε ενέργεια. Με βάση αυτή τη λογική, προέκυψαν τα υβριδικά συστήματα ελέγχου, που θα αναλυθούν παρακάτω.

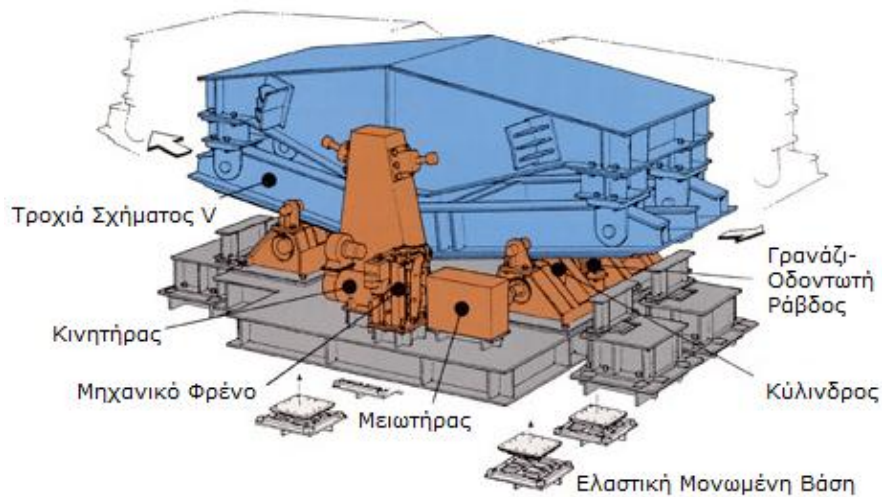
### 1.2.3 Υβριδικά Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης

Οι υβριδικές τεχνικές αυτόματης ρύθμισης στοχεύουν στην εκμετάλλευση της ικανότητας τους προς αύξηση της συνολικής αξιοπιστίας και της αποτελεσματικότητας της ελεγχόμενης κατασκευής [50]. Τυπικά ένα υβριδικό σύστημα αυτόματης ρύθμισης ορίζεται ως ένα σύστημα αυτόματης ρύθμισης, το οποίο συνδυάζει και ενεργητική και παθητική αυτόματης ρύθμιση, αίροντας έτσι τους περιορισμούς από τη χρήση ενός εκ των δύο ειδών ρύθμισης. Η έρευνα στο πεδίο των υβριδικών συστημάτων αυτόματης ρύθμισης έχει εστιαστεί κυρίως σε δύο τύπους συστημάτων. Σε αυτά με τον υβριδικό αποσβεστήρα και σε αυτά με την υβριδική σεισμικά μονωμένη βάση.

Ο υβριδικός αποσβεστήρας είναι η πιο συνηθισμένη διάταξη αυτόματης ρύθμισης που χρησιμοποιείται σε κατασκευαστικές και μηχανολογικές εφαρμογές. Ο υβριδικός αποσβεστήρας μάζας (Hybrid Mass Damper – HMD) είναι ένας συνδυασμός αποσβεστήρα με κινούμενες μάζες (TMD) (παθητική αυτόματη ρύθμιση) και ενός επενεργητή (ενεργητική αυτόματη ρύθμιση). Η ικανότητα αυτής της διάταξης να μειώνει τις αποκρίσεις της κατασκευής βασίζεται κυρίως στη μηχανική κίνηση του TMD. Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται από τον επενεργητή ελέγχου αυξάνουν την αποτελεσματικότητα του HMD, αλλά και τη σθεναρότητα του σε αλλαγές δυναμικών χαρακτηριστικών της κατασκευής. Η ενέργεια και οι δυνάμεις που απαιτούνται για τη λειτουργία ενός τυπικού HMD, είναι αισθητά μικρότερες από εκείνες που απαιτεί ένα αμιγώς ενεργητικό σύστημα αυτόματης ρύθμισης με συγκρίσιμη απόδοση. Επιπλέον, μια ποικιλία εκδοχών του υβριδικού αυτού τύπου αποσβεστήρα είναι αποδοτικές και πρακτικά υλοποιήσιμες. Λόγου χάρη, ο υβριδικός αποσβεστήρας εκκρεμού πολλαπλού βήματος (multi-step pendulum HMD) περιέχει ένα σύστημα αυτόματης ρύθμισης, το οποίο επεμβαίνει ρυθμίζοντας τη ταλάντωση της βοηθητικής μάζας. Δύο τέτοιες διατάξεις έχουν τοποθετηθεί στο Yokohama Landmark Tower (Βλ. Σχήμα 1.16), το οποίο με ύψος 296 m (περίπου) είναι και το ψηλότερο κτίριο της Ιαπωνίας [88]. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί και άλλη μια εκδοχή ενός συστήματος HMD, που εισήχθη από τον Tanida (βλ. Σχήμα 1.17) και είναι γνωστό με την ονομασία υβριδικός αποσβεστήρας τύπου V (V-shaped HMD), το οποίο χρησιμοποιήθηκε σε ποικίλες εφαρμογές (κατασκευή γεφυρών, μείωση απόκρισης κτιρίων, σταθεροποίηση γωνίας αζιμουθίου πλοίων κ.α.) [51] [52].

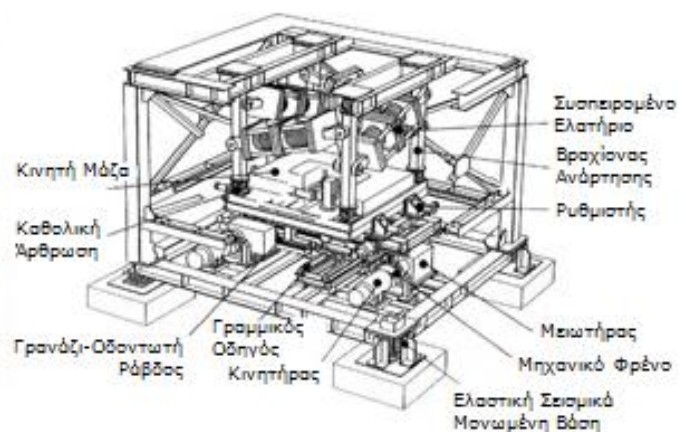


**Σχήμα 1.16:** Υβριδικός Αποσβεστήρας Εκκρεμούς Πολλαπλού Βήματος στο Κτίριο Yokohama Landmark (Ιαπωνία) [88]



**Σχήμα 1.17:** Υβριδικός Αποσβεστήρας Τύπου V [89]

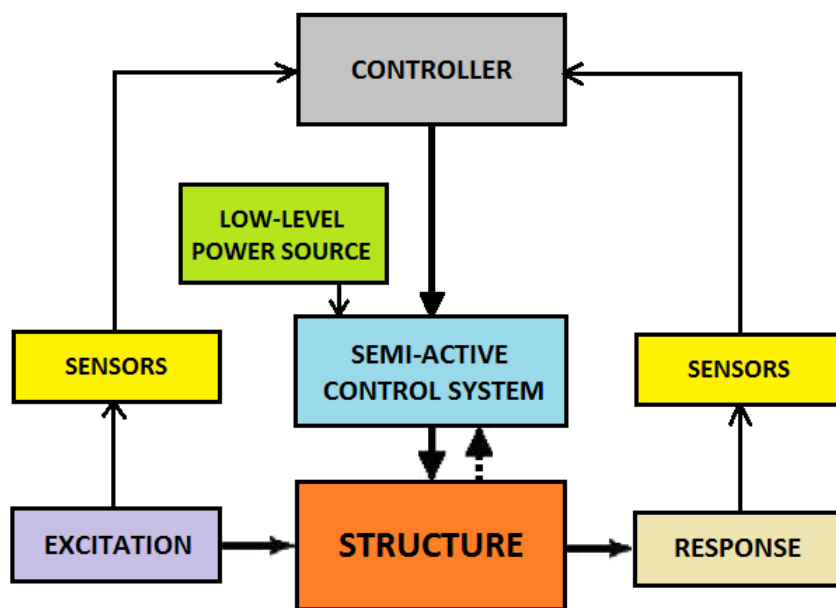
Η υβριδική σεισμικά μονωμένη βάση αποτελείται από το παθητικό σύστημα μόνωσης βάσης, σε συνδυασμό με έναν επενεργητή ελέγχου, που ασκεί κατάλληλες δυνάμεις, ώστε να συμπληρώνει τα αποτελέσματα του συστήματος μονωμένης βάσης. Τα συστήματα μονωμένης βάσης εφαρμόζονται σε κατασκευές παγκοσμίως εδώ και πολλά χρόνια λόγω της ευκολίας εγκατάστασης, της αξιοπιστίας και της αποτελεσματικότητάς τους [53] [54] [55]. Τα συστήματα αυτά θεωρούνται «εν γένει» παθητικά και συνεπώς στερούνται ικανότητας προσαρμογής σε διαφορετικές συνθήκες και απαιτήσεις σεισμικής συμπεριφοράς (Βλ. Σχήμα 1.18). Με την προσθήκη ενός ενεργητικού συστήματος αυτόματης ρύθμισης σε μια κατασκευή με σεισμικά μονωμένη βάση, είναι δυνατό να βελτιωθεί σημαντικά η συμπεριφορά του κτιρίου, χωρίς σημαντική επιβάρυνση στο κόστος κατασκευής. Θα αναφερθούμε αναλυτικότερα στην συγκεκριμένη τεχνολογία υβριδικών συστημάτων αυτόματης ρύθμισης (Βλ. Παράγραφο 1.3).



**Σχήμα 1.18:** Υβριδική Σεισμικά Μονωμένη Βάση [89]

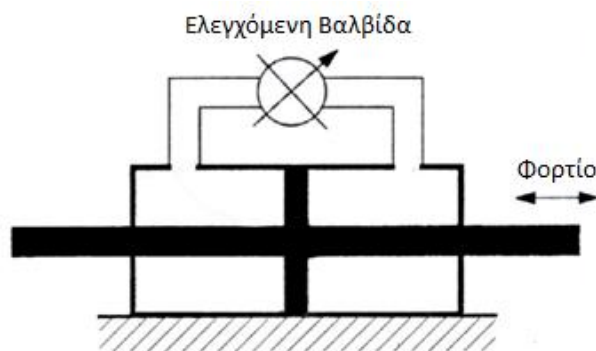
## 1.2.4 Ημι-Ενεργητικά Συστήματα Αυτόματης Ρύθμισης

Οι στρατηγικές αυτόματης ρύθμισης που βασίζονται σε ημι-ενεργητικές τεχνικές συνδυάζουν τα καλύτερα χαρακτηριστικά συστημάτων παθητικής και ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης. Η ειδοποιός διαφορά των ημι-ενεργητικών συστημάτων αυτόματης ρύθμισης (*semi-active control systems*) από όλα τα προηγούμενα συστήματα αυτόματης ρύθμισης είναι ότι κατά τη λειτουργία αυτών δε μεταδίδεται ενέργεια στην ελεγχόμενη κατασκευή, αντιθέτως χρησιμοποιείται η ίδια η κίνηση της κατασκευής για την ανάπτυξη των δυνάμεων ελέγχου [56] [57]. Τα συστήματα αυτά παρουσιάζουν ορισμένες ιδιότητες, οι οποίες μπορεί να καθίστανται δυναμικά μεταβαλλόμενες και μέσω αυτόματης ρύθμισης να τρέπουν το σύστημα στη βέλτιστη απόκριση του (Βλ. Σχήμα 1.19). Είναι αξιοσημείωτο ότι στα συστήματα αυτά, μπορούν να προσαρμοστούν συσκευές ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης, με δραματικά χαμηλότερες απαιτήσεις σε ενέργεια. Πολλές από τις συσκευές αυτές μπορούν να λειτουργήσουν και με μπαταρίες (batteries) ή κυψέλες καυσίμου (fuel cells) κάτι που προσδίδει αυτονομία σε εξαιρετικές περιπτώσεις διακοπής παροχής ηλεκτρικού ρεύματος. Τα συστήματα αυτά μπορεί να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα ή σε συνδυασμό με προηγούμενες τεχνικές αυτόματης ρύθμισης. Επομένως, στο μέλλον ενδέχεται να γνωρίσουν μεγάλη αποδοχή στην τεχνολογία αυτόματης ρύθμισης, ως ένα βιώσιμο μέσο προστασίας των δομικών κατασκευών από τους σεισμούς και από τους ισχυρούς ανέμους. Έπειτα, παρουσιάζουμε τα κυριότερα ημι-ενεργούμενα συστήματα.



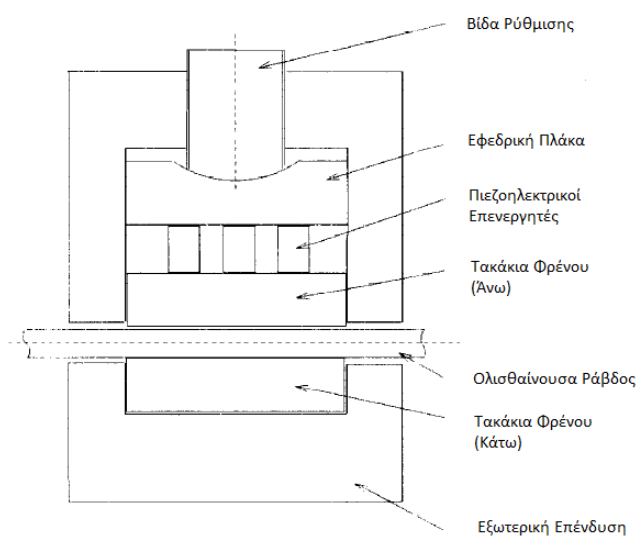
**Σχήμα 1.19:** Δομικό Διάγραμμα Ημι-Ενεργητικού Συστήματος Αυτόματης Ρύθμισης [57]

Πρώτον, ο αποσβεστήρας μεταβλητού στομίου (*Variable Orifice Damper*) υλοποιείται με τη χρήση μιας ελεγχόμενης ηλεκτρομηχανικής βαλβίδας με μεταβλητό στόμιο, ώστε να μεταβάλλεται η ροή του υδραυλικού ρευστού μέσα σε ένα αποσβεστήρα. Τέτοιοι αποσβεστήρες (Βλ. Σχήμα 1.20) βρίσκουν εφαρμογή κυρίως σε γέφυρες και αποσκοπούν στην απορρόφηση των διαταραχών από διερχόμενα οχήματα, ισχυρούς ανέμους και σεισμικές δονήσεις [65].



**Σχήμα 1.20:** Αποσβεστήρας Μεταβλητού Στομίου (*Variable-Orifice Damper*) [20]

Δεύτερον, ο αποσβεστήρας μεταβαλλόμενης τριβής (*Variable-Friction Damper*), του οποίου η αρχή λειτουργίας στηρίζεται στην αναπτυσσόμενη τριβή ανάμεσα στις επιφάνειες κατά τη διάρκεια ενός σεισμού (Βλ. Σχήμα 1.21). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παράδειγμα ένας άξονας τριβής (*friction shaft*), ο οποίος είναι πακτωμένος στην κατασκευή. Η δύναμη τριβής ελέγχεται επιτρέποντας την ελεγχόμενη ολίσθηση της κατασκευής επί του άξονα [31] [32] [33].



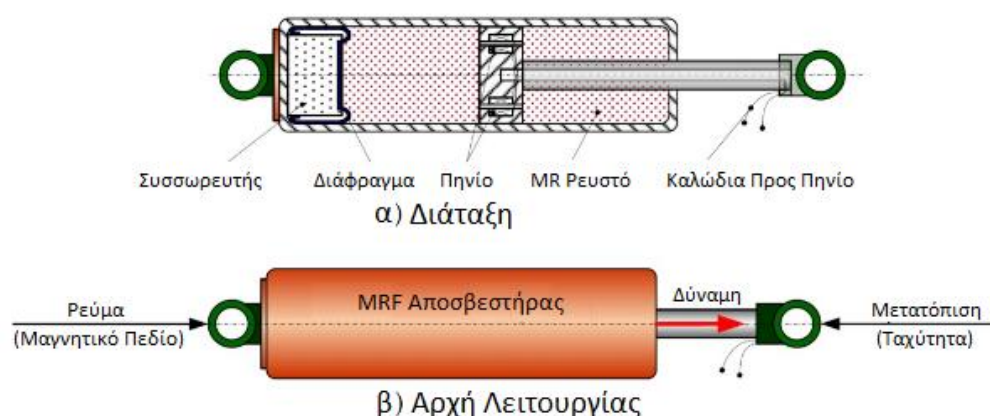
**Σχήμα 1.21:** Αποσβεστήρας Μεταβαλλόμενης Τριβής (*Variable-Friction Damper*) [33]

Τέλος, θα κάνουμε μια πιο λεπτομερή αναφορά στον αποσβεστήρα ελεγχόμενου ρευστού (*Controllable Fluid Damper*). Οι προηγούμενες ημι-ενεργητικές διατάξεις που αναφέρθηκαν απαιτούν ηλεκτρικές βαλβίδες και μηχανισμούς, συστατικά τα οποία μπορεί να αποδειχτούν προβληματικά σε θέματα αξιοπιστίας και συντήρησης. Το πλεονέκτημα των αποσβεστήρων ελεγχόμενου ρευστού είναι το ότι δεν περιέχουν μηχανικά μέρη πλην του εμβόλου. Οι αποσβεστήρες αυτοί χρησιμοποιούν ως ελεγχόμενο ρευστό τα ακόλουθα δύο είδη: α) Τα ηλεκτροροεολογικά (*electro-rheological – ER*) και β) τα μαγνητοροεολογικά (*magneto-rheological – MR*). Το κυριότερο χαρακτηριστικό τους είναι η χαρακτηριστική τους ιδιότητα να μπορούν μεταβάλλουν το ιξώδες τους σε μεγάλο εύρος μέσα σε milliseconds, όταν εκτεθούν σε ηλεκτρικό (ER) ή



μαγνητικό (MR) πεδίο. Τα ER και τα MR ρευστά ανακαλύφθηκαν τη δεκαετία του 1940. Απο τότε, η συντριπτική πλειοψηφία των ερευνών έχει επικεντρωθεί στα ER ρευστά. Εντούτοις, πρόσφατες έρευνες έδειξαν πως και τα MR ρευστά αποτελούν μια καλή λύση, αφού διαθέτουν την ικανότητα να παρέχουν μία απλή και σταθερή διεπαφή (interface) μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών μερών.

Ένα τυπικό ρευστό MR (Βλ. Σχήμα 1.22) αποτελείται από σωματίδια μαλακού σιδήρου 20% έως 40% κ.ο., αιωρούμενα σε κατάλληλο υγρό (λ.χ. ορυκτέλαιο, συνθετικό πετρέλαιο, νερό, γλυκόλη). Στο εύρος μαγνητικού πεδίου 150-250 KA/m εμφανίζουν τάση διαρροής 50 – 100 KPa. Παραμένουν ανεπηρέαστα από τυχόν ακαθαρσίες, ενώ μπορούν να προστεθούν σχετικά εύκολα σε αυτά αντιδιαβρωτικά και πρόσθετα λιπαντικά, χωρίς πρακτικά να μεταβάλλεται η αντοχή τους ή οι απαιτήσεις σε ισχύ [66].



**Σχήμα 1.22:** MR-Αποσβεστήρας Ελεγχόμενου Ρευστού (MR Fluid Damper) [90]

Ως ελεγχόμενο ρευστό το κυριότερο πλεονέκτημα ενός MR ρευστού είναι η μεγάλη, ελεγχόμενη τάση διαρροής, την οποία μπορεί να αποκτήσει. Τυπικά, η μέγιστη τάση διαρροής ενός MR ρευστού, είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτήν του καλύτερου ER ρευστού για (περίπου) το ίδιο ιξώδες. Αυτό έχει άμεσες συνέπειες στο μέγεθος των απαιτούμενων συσκευών, διότι η ελάχιστη ποσότητα ρευστού που απαιτείται σε έναν αποσβεστήρα είναι ανάλογη προς το ιξώδες και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μέγιστης δυνατής τάσης διαρροής [67]. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη ποσότητα MR ρευστού από εκείνη ενός ER ρευστού, προκειμένου να πετύχουμε την ίδια μηχανική συμπεριφορά. Επιπλέον, τα MR ρευστά –σε σύγκριση με τα ER ρευστά– μπορούν να ελεγχθούν πιο εύκολα με χρήση αναλογικών και ψηφιακών μέσων. Επίσης, οι συσκευές MR μπορούν να τροφοδοτηθούν από κοινές πηγές χαμηλής ισχύος για τις ίδιες απαιτήσεις σε παραγόμενη ισχύ.

Τέλος, ένα επιπλέον πλεονέκτημα των MR ρευστών είναι ότι οι ιδιότητές τους παραμένουν σταθερές σε μεταβολές της θερμοκρασίας. Οι Carlson και Weiss απέδειξαν πειραματικά ότι οι μεταβολές στην τάση διαρροής σε θερμοκρασίες από  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  έως  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$  είναι πολύ μικρές [68]. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μαγνητική πόλωση των σωματιδίων δεν εξαρτάται από τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Ομοίως, οι μεταβολές της υγρασίας επηρεάζουν ελάχιστα τις μαγνητικές ιδιότητες του ρευστού. Μια αναλυτική παρουσίαση αποτελεσμάτων εφαρμογής των MR ρευστών γίνεται στην επόμενη παράγραφο (Βλ. Ενότητα 1.3.2).

### 1.3 Σεισμικά Μονωμένη Βάση

Η σεισμικά μονωμένη βάση (*seismic base isolation*) αποτελεί ένα από τα πιο διαδεδομένα παθητικά μέσα αντισεισμικής προστασίας σε κτίρια. Η τεχνολογία αυτή εφαρμόζεται με αντικειμενικό σκοπό τον περιορισμό των συνεπειών των οριζόντιων συνιστωσών της κίνησης του εδάφους στο κτίριο και στο περιεχόμενο αυτού [1]. Η βασική ιδέα της συγκεκριμένης τεχνολογίας συνοψίζεται στην παρεμβολή ενός συστήματος μόνωσης ανάμεσα στην άνω δομή (κτίριο) και της θεμελίωσης, το οποίο επιτυγχάνει την αποσύζευξη του κτιρίου από την οριζόντια κίνηση του εδάφους. Το σύστημα μόνωσης αποτελείται από κατάλληλα εφεδράνα (*bearing*). Τα τελευταία κατασκευάζονται από υλικά που εμφανίζουν αυξημένη οριζόντια ευκαμψία. Η σχεδίαση και η βελτίωση των εφεδράνων ακολουθεί τα επιτεύγματα της τεχνολογίας των ελαστικών (*rubber technology*).

Η συγκεκριμένη τεχνολογία δεν είναι ανακάλυψη των τελευταίων αιώνων, αλλά έρχεται από τους αρχαίους ακόμα χρόνους. Περί τον 4<sup>ο</sup> π.χ. αιώνα, κατασκευάστηκε το Μαυσωλείο του Κύρου (Βλ. Σχήμα 1.23) στην περιοχή Πασαργάδες (*Pasargadae*) που ανήκε στην Περσία και σήμερα στην ευρύτερη περιοχή του Ιράν [5] [91]. Η συγκεκριμένη πέτρινη κατασκευή αποτελείται από 6 υπέργεια πέτρινα επίπεδα στήριξης και το κτίσμα του μνήματος. Τα τρία κάτω επίπεδα στήριξης αποτελούνται από μεγάλες λαξευμένες ορθογωνικές πέτρες που συνδέονται μεταξύ τους με κατάλληλο κονίαμα (*mortar*) τύπου *Sāroj*<sup>3</sup> και συναποτελούν την θεμελίωση της κατασκευής. Η ανώτερη επιφάνεια είναι λεία και εφάπτεται της υποκατασκευής των τριών άνω επιπέδων στήριξης. Τα τρία άνω επίπεδα στήριξης αποτελούνται αντίστοιχα από μικρότερου μεγέθους ορθογωνικές πέτρες, η κατώτερη επιφάνεια των οποίων έχει λειανθεί κατάλληλα. Τελικά, σχηματίζεται ένα ολισθαίνον επίπεδο στη γεινιάζουσα περιοχή ανάμεσα στην ανώτερη επιφάνεια του υποσυστήματος κάτω στήριξης και αυτού της άνω στήριξης. Κατά την εμφάνιση σεισμών, ελάμβανε χώρα σχετική ολίσθηση στο συνοριακό αυτό επίπεδο, αφήνοντας ανέπαφη τη δομή.



**Σχήμα 1.23:** Μαυσωλείο του Κύρου (Πασαργάδες) [91]

<sup>3</sup> Ο τύπος κονιάματος *Sāroj* αποτελείται από μίγμα γύψου με βάση τον ασβέστη και τέφρα ή άμμο [5].

Πιο συγκεκριμένα, η αύξηση της ιδιοπεριόδου της συνολικής κατασκευής συνεπάγεται μεγάλες σχετικές οριζόντιες μετακινήσεις στο σύστημα σεισμικής μόνωσης και μικρής έκτασης οριζόντιες μετακινήσεις στους ορόφους της κατασκευής. Ο μηχανισμός αυτός καθιστά τη σεισμικά μονωμένη βάση μια από τις καλύτερες επιλογές για την αντισεισμική προστασία κτιρίων. Η τεχνολογία αυτή χρησιμοποιεί δύο βασικά είδη εφεδράνων, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 1.3.1 Είδη Σεισμικής Μόνωσης Βάσης

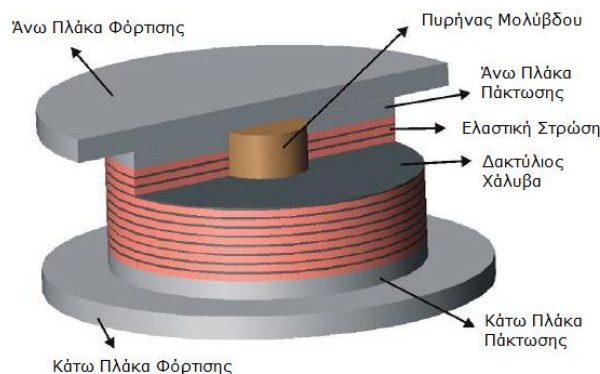
Αναφέραμε ήδη ότι οι σεισμικοί μονωτήρες είναι συσκευές με μεγάλη ευκαμψία και ελαστικότητα κατά τις πλευρικές οριζόντιες διευθύνσεις, που επιτρέπουν τη σημαντική απορρόφηση σεισμικής ενέργειας, με αποτέλεσμα οι οριζόντιες συνιστώσες της δόνησης να μην οδεύουν στο κτίριο. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ωστόσο έχουν σημαντική ακαμψία και αντοχή ώστε να είναι σε θέση να φέρουν όλα τα φορτία βαρύτητας και λειτουργίας της κατασκευής. Παρακάτω αναλύονται οι δύο τύποι σεισμικών μονωτήρων που χρησιμοποιούνται στην πράξη για τη σεισμική μόνωση κατασκευών



**Σχήμα 1.24:** Ελαστικό Εφέδρανο σε Ανέγερση Κτιριακής Εγκατάστασης [93]

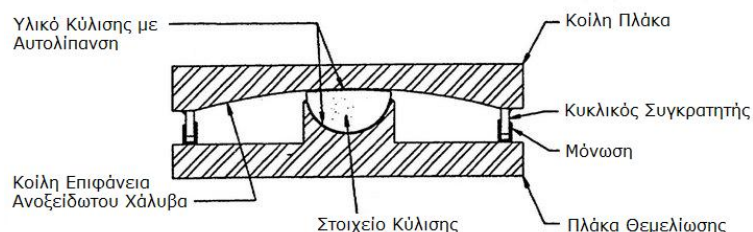
Τα ελαστικά εφέδρανα (*elastic bearings*), τα οποία αποτελούν την απλούστερη μέθοδο μόνωσης και είναι απλά στην κατασκευή τους (Βλ. Σχήμα 1.24). Η βασική ύλη παρασκευής είναι το φυσικό ή τεχνητό λάστιχο, συνήθως νεοπρένιο (*neoprene*). Το νεοπρένιο αποσυντίθεται δυσκολότερα και πιο αργά σε κύκλους φορτίσεων από το φυσικό λάστιχο, παρουσιάζει σταθερότητα, ενώ διατηρεί την ευελιξία του σε ένα μεγάλο εύρος θερμοκρασίας [92]. Τα ελαστικά εφέδρανα εμφανίζουν το μηχανικό χαρακτηριστικό ότι είναι εύκαμπτα κατά την οριζόντια διεύθυνση, παρουσιάζοντας μικρή μηχανική αντίσταση κατά την οριζόντια σχετική κίνηση μεταξύ εδάφους και κτιρίου και αρκετά μεγάλη κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό, οι οριζόντιες συνιστώσες της δόνησης δεν επηρεάζουν την κατασκευή, αφού το μεγαλύτερο μέρος της ενεργείας τους απορροφάται από τους μονωτήρες. Αντίθετα, οι κατακόρυφες συνιστώσες της δόνησης μεταδίδονται αναλλοίωτες στην κατασκευή. Εντούτοις, σημειώνουμε εδώ, ότι τα ελαστικά εφέδρανα παρέχουν μόνωση σε υψηλότερες συχνοτικές διεγέρσεις, που προέρχονται από μικρές κατακόρυφες ταλαντώσεις του εδάφους. Τέτοιου είδους διεγέρσεις μπορεί να προκαλούνται από

υπόγειους σιδηροδρόμους ή απο την κίνηση οχημάτων. Ο συγκεκριμένος τύπος εφεδράνων είναι κατάλληλος για μη παραμορφώσιμες μέχρι και 7 ορόφων κτιριακές εγκαταστάσεις, στις οποίες δεν λαμβάνονται υπ' όψιν τα φορτία ανέμου και στις οποίες δεν μπορεί να προκύψει κατακόρυφη παραμόρφωση των εφεδράνων [5]. Εντούτοις, σε περιπτώσεις πιο υψηλών κτιρίων, όπου τα φορτία ανέμου είναι μη αμελητέα χρησιμοποιείται ο τύπος *ελαστο-μεταλλικού μονωτήρα (lead rubber bearing - LRB)*. Στον τύπο αυτό, οι ενδιάμεσες στρώσεις χάλυβα προσδίδουν αντοχή σε σημαντική κατοκόρυφη φόρτιση, ενώ ο πυρήνας μολύβδου ελέγχει τις περιορίζει τις πλευρικές μετακινήσεις του κτιρίου (Βλ. Σχήμα 1.25). Ο τελευταίος τύπος ελαστικού εφεδράνου χρησιμοποιείται κατά κόρον σε συστήματα που συνδυάζουν σεισμικά μονωμένη βάση με υποσυστήματα ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης.



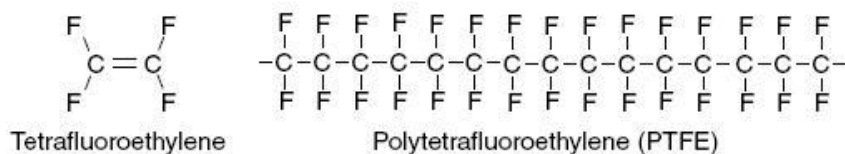
**Σχήμα 1.25:** Ελαστο-μεταλλικός Μονωτήρας (Lead Rubber Bearing) [94]

Τα *εφεδράνα ολίσθησης (sliding bearing)* αποτελούν τον δεύτερο βασικό τύπο εφεδράνων σεισμικής μόνωσης (Βλ. Σχήμα 1.26). Ο συγκεκριμένος τύπος χρησιμοποιεί δύο επίπεδες ή καμπύλες επιφάνειες που ολισθαίνουν σχετικά επιτρέποντας πλευρικές μετακινήσεις. Ο πολύ μικρός συντελεστής τριβής ανάμεσα στις δύο επιφάνειες εξασφαλίζεται με τη χρήση του υλικού PTFE (Βλ. Σχήμα 1.27) με την εμπορική ονομασία Teflon<sup>4</sup>, υλικό παρασκευής των στοιχείων κύλισης. Η λειτουργία του συγκεκριμένου μονωτήρα έχει ως ακολούθως. Όταν η ασκούμενη πλευρική δύναμη ξεπεράσει το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ των δυο επιφανειών του μονωτήρα, οι δυο πλάκες κινούνται σχετικά, αναγκάζοντας την άνω δομή να μετακινηθεί χωρίς να εντείνεται. Μετά το πέρας της οριζόντιας φόρτισης, το βάρος της κατασκευής εξαναγκάζει το μονωτήρα να επανέλθει στην αρχική κατάσταση. Εντούτοις, σε περιπτώσεις μεγάλων σχετικών κινήσεων, οι δυο επιφάνειες μπορεί να οδηγηθούν στην ακραία σχετική γενικευμένη μετατόπιση, εμποδίζοντας την επαναφορά του μονωτήρα.



**Σχήμα 1.26:** Μονωτήρας Ολίσθησης (Sliding Bearing) [95]

<sup>4</sup> Το υλικό αυτό είναι πολυμερές και προκύπτει μέσω μιας χημικής διεργασίας από το μονομερές τετρα-φθορο-αιθυλένιο (tetrafluoroethylene). Συγκεκριμένα, αυτό γίνεται με «σπάσιμο» του διπλού δεσμού ανάμεσα στα άτομα του άνθρακα και με σύνδεση με απλό δεσμό πολλών τέτοιων μονομερών (Βλ. Σχήμα 1.27). Το πολυμερές που σχηματίζεται ονομάζεται πολύ-τετραφθοροαιθυλένιο (PTFE) [96].



**Σχήμα 1.27:** Συντακτικός Τύπος PTFE [96]

### 1.3.2 Εφαρμογές Τεχνολογίας Σεισμικά Μονωμένης Βάσης

Η σεισμική μόνωση επιτυγχάνεται με την επιμήκυνση της φυσικής περιόδου ταλάντωσης της κατασκευής μέσω της χρήσης των ελαστικών εφεδράνων ανάμεσα στις κολόνες και την θεμελίωση, όπως συζητήθηκε προηγουμένως. Κατά συνέπεια, οι σεισμικές επιπτώσεις μειώνονται, γεγονός που συνεπάγεται σημαντικές μειώσεις στις τιμές των μεταβλητών σεισμικής απόκρισης (λ.χ. επιτάχυνση δαπέδου, διάτμηση βάσης). Έπειτα, καθώς η ευκαμψία του συστήματος μόνωσης αυξάνεται, αυξάνονται οι μετατοπίσεις της βάσης. Βάσει προδιαγραφών σχεδίασης, η μέγιστη παραμόρφωση του μονωτήρα δεν πρέπει να υπερβεί μια ορισμένη τιμή. Αν η παραμόρφωση του μονωτήρα υπερβεί αυτή τη τιμή, τότε μπορεί να συμβεί κύρτωση ή ακόμα και κατάρρευση των μονωτήρων. Το τελευταίο εγείρει ένα σημαντικό ζήτημα ασφάλειας [34] [69].

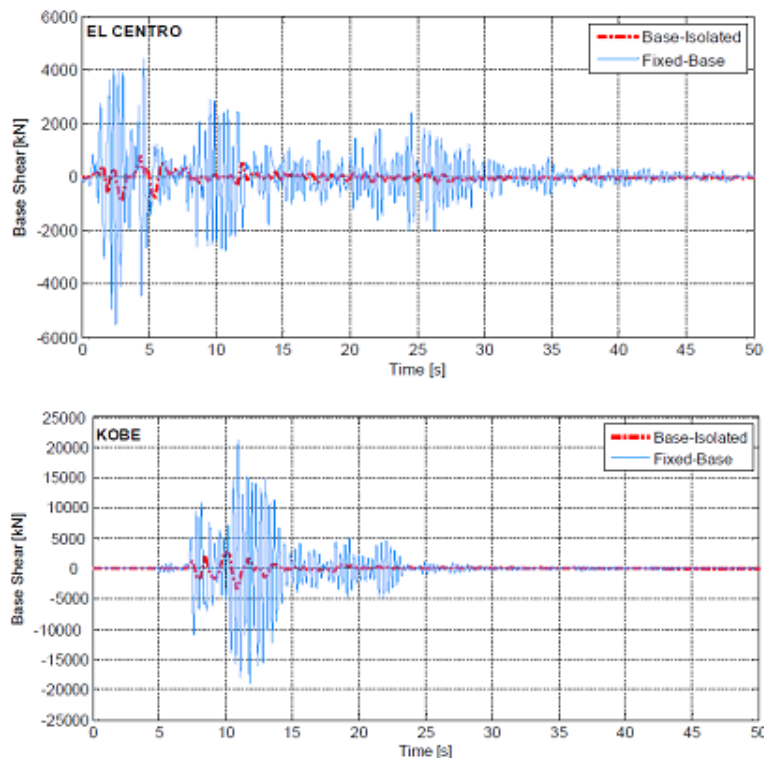
Επομένως, η ακριβής εκτίμηση των μέγιστων παραμορφώσεων της βάσης σε περίπτωση μεγάλων σεισμικών φαινομένων κρίνεται απαραίτητη, ειδικά αν το κτίριο βρίσκεται κοντά σε περιοχή ρήγματος (near-fault region). Σεισμοί που λαμβάνουν χώρα σε τέτοιες περιοχές μπορεί να περιέχουν παλμούς ταχύτητας που χαρακτηρίζονται από μεγάλη περίοδο, η οποία πιθανόν να συμπίπτει με την περίοδο του υποσυστήματος μονωμένης βάσης. Αν συμβεί αυτό, τότε ο μονωτήρας ενδέχεται να παραμορφωθεί σε ακραίο εύρος. Ο κανονισμός *Uniform Building Code (UBC97)* είναι ένας σεισμικός κωδικός, που χρησιμοποιείται ευρέως κατά τη σχεδίαση συστημάτων μονωμένης βάσης. Ο κωδικός αυτός περιέχει αναφορές που αφορούν τις επιπτώσεις των σεισμών με επίκεντρο κοντά σε ενεργό ρήγμα συναρτήσει της πιο κοντινής απόστασης από το ρήγμα αυτό [69].

Το 2009 έγινε μια μελέτη στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου της Κωνσταντινούπολης από τους Cenk Alhan και Metin Altun, όπου πραγματοποιήθηκε η προσομοίωση (simulation) της Μη Γραμμικής Ανάλυσης του χρονικού ιστορικού -σε δυο διευθύνσεις- ενός κτιρίου 4 ορόφων με σεισμικά μονωμένη βάση, ώστε να διερευνηθεί η αποδοτικότητα του συστήματος μονωμένης βάσης, ακολουθώντας τον UBC97. Τέθηκε η παραδοχή ότι το κτίριο βρισκόταν κοντά σε ένα ενεργό ρήγμα, ενώ οι μετατοπίσεις σχεδιασμού των ελαστικών εφεδράνων υπολογίστηκαν με χρήση παραμέτρων, όπως αυτές προβλέπεται στον κανονισμό UBC97. Το κτίριο υποβλήθηκε σε δύο σεισμικά γεγονότα. Εκείνο του 1940 στο El Centro<sup>5</sup>, που μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένας σεισμός μακριά από ρήγμα και σε εκείνο του 1996 στο Kobe<sup>6</sup>, ο οποίος μπορεί να ταξινομηθεί ως σεισμός κοντά σε ρήγμα.

<sup>5</sup> Γνωστός και ως Σεισμός του Imperial Valley συνέβη στις 19 Μαΐου του 1940 και ώρα 5:35 π.μ. στην περιοχή Imperial Valley της νοτιοανατολικής California κοντά στα σύνορα των Η.Π.Α. με το Μεξικό. Η έντασή του ήταν 6.9 βαθμοί της κλίμακας Ρίχτερ. Τα αποτελέσματα του σεισμού ήταν ο θάνατος 9 ανθρώπων, η μερική καταστροφή στο 80% των κτιρίων της πόλης, η ολική κατάρρευση δεξαμενής ύδατος χωρητικότητας 100,000 γαλονιών, σημαντικές ζημιές σε αρδευτικά συστήματα. Σημαντικές βλάβες συνέβηκαν και σε κοντινές περιοχές του Μεξικό, ενώ ο σεισμός έγινε αισθητός στο Los Angeles, το Tucson και την Αριζόνα [97].

<sup>6</sup> Γνωστός και ως Σεισμός του Great Hanshin συνέβη στις 16 Ιανουαρίου του 1995 και ώρα 20:36 μ.μ. στο νότιο μέρος της επικράτειας του Hyogo της Ιαπωνίας. Είχε επίκεντρο 20 km μακρύτερα στη νήσο Awaji, ένταση 6.8 βαθμούς της κλίμακας Ρίχτερ και η διάρκεια 20 sec. Τα αποτελέσματα του σεισμού ήταν ο θάνατος 6434 ανθρώπων, η εκτεταμένη μερική και ολική καταστροφή των κτιρίων της πόλης, οι σημαντικές ζημιές σε υπέργειους και υπόγειους σιδηροδρόμους της πόλης. Η κοστολόγηση των ζημιών ανέρχεται σε 100 δισεκατομμύρια δολάρια Η.Π.Α., που αντιστοιχεί στο 2,5% του ΑΕΠ της Ιαπωνίας κατά τον ίδιο χρόνο [98].

Παρουσιάζονται οι χρονικές ολοκληρώσεις της διατμητικής παραμόρφωσης της βάσης κατά τη x-διεύθυνση κτιρίου με σεισμικά μονωμένη βάση και για το ίδιο κτίριο με σταθερή βάση για τους σεισμούς El Centro και Kobe (Βλ. Σχήμα 1.28). Είναι εμφανές ότι οι σεισμικές επιδράσεις έχουν μειωθεί αισθητά. Ταυτόχρονα, παρατηρούμε ότι η περίοδος του κτιρίου με σεισμικά μονωμένη είναι αισθητά μεγαλύτερη και η διατμητική παραμόρφωση στην βάση πολύ μικρότερη [54].



**Σχήμα 1.28:** Απόκριση Διατμητικής Παραμόρφωσης Βάσης σε Κτίριο με Σεισμικά Μονωμένη Βάση και άνευ στις περιοχές El Centro και Kobe [54] [97] [98]

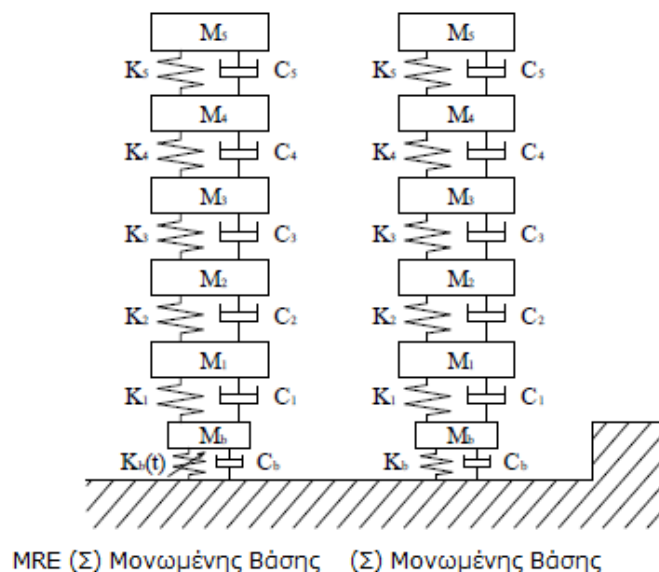
Η ποσοτικοποίηση (quantification) της αποδοτικότητας της κατασκευής σε σεισμική έκθεση κοντά (Kobe) ή μακριά από το ρήγμα (El Centro) γίνεται μέσω κάποιων «κριτηρίων συμπεριφοράς» (performance criteria)  $P_i$ . Σε αυτά περιλαμβάνεται η μέγιστη μετατόπιση βάσης (peak base displacement)  $P_1$ , η σχετική μετατόπιση του 3<sup>ου</sup> ορόφου (roof) ως προς την βάση διαιρούμενη με το ύψος του κτιρίου (roof drift ratio)  $P_2$ , η μέγιστη επιτάχυνση του 3<sup>ου</sup> ορόφου (peak 3<sup>rd</sup> floor acceleration)  $P_3$  και η μέγιστη διατμητική παραμόρφωση βάσης (peak base shear)  $P_4$ . Μια πλήρης παρουσίαση της λίστας των κριτηρίων συμπεριφοράς παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.1, όπου οι αναγραφόμενες μετατοπίσεις, οι επιταχύνσεις και διατμητικές παραμορφώσεις βάσης αναφέρονται στην x-διεύθυνση. Απο τα αποτελέσματα του πίνακα είναι προφανής η υπερίσχυση του συστήματος μονωμένης βάσης αναφορικά με τη μείωση της μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης βάσης και της επιταχύνσης του 3<sup>ου</sup> ορόφου για τους σεισμούς. Είναι αξιοσημείωτο ότι η μέγιστη επιτάχυνση του 3<sup>ου</sup> ορόφου είναι το 60% και 37% της μέγιστης επιτάχυνσης του εδάφους για τον El Centro και τον Kobe σεισμό αντίστοιχα. Ανάλογη είναι η μείωση που επιτυγχάνεται και στην σχετική μετατόπιση του 3<sup>ου</sup> ορόφου ως προς την βάση στην περίπτωση του El Centro σεισμού. Τέλος, η τεράστια διαφορά στην μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση της βάσης ανάμεσα στον El Centro σεισμό –όπου ανέρχεται στα 6.51cm– και τον Kobe –όπου ανέρχεται στα 25.34cm– εξηγείται εύκολα αν λάβουμε υπ όψιν ότι ο πρώτος σεισμός συμβαίνει μακριά από ενεργό ρήγμα, ενώ ο δεύτερος συμβαίνει κοντά σε ενεργό ρήγμα [54].

Κριτήρια Συμπεριφοράς	EL CENTRO		KOBE	
	Σταθερή Βάση	Μονωμένη Βάση	Σταθερή Βάση	Μονωμένη Βάση
$P_1$ (cm)	-	6.51	-	25.34
$P_2$ ( $\times 10^{-3}$ )	2.57	0.6	29.56	1.25
$P_3$ ( $m/s^2$ )	8.24	2.06	21206	3399
$P_4$ (kN)	5532	878	3.61	0.37
$P_3/a_g$	2.41	0.6	3.61	0.37

**Πίνακας 1.1:** Κριτήρια Συμπεριφοράς για τους Σεισμούς *El Centro* και *Kobe* [54]

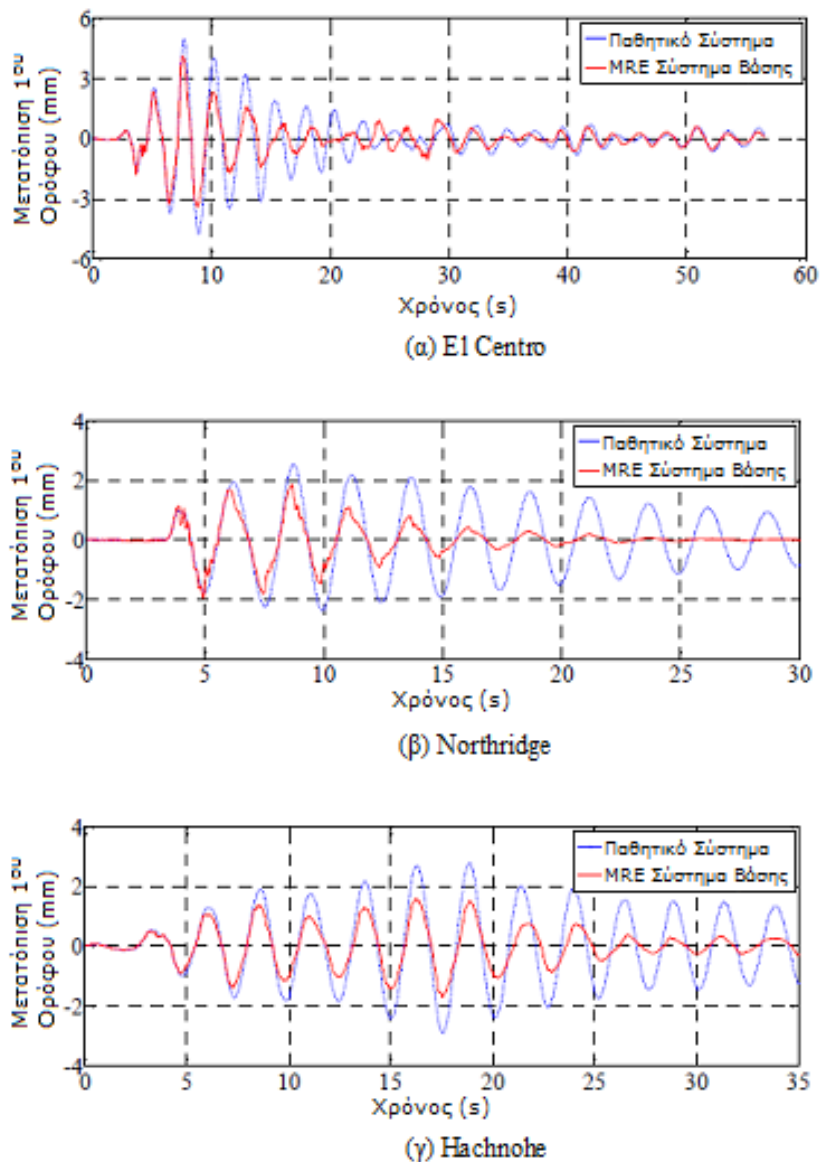
Σε προηγούμενη ενότητα, παρουσιάστηκε η τεχνολογία των συστημάτων ημι-ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης των MR ρευστών. Σε αυτά στηρίζεται η ανάπτυξη των μαγνητο-ρεολογικών ελαστομερών (*Magneto-Rheological Elastomers - MREs*), τα οποία χρησιμοποιούνται σε συστήματα μονωμένης βάσης. Η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου στα MREs αυξάνει τον συντελεστή ελαστικότητας της ακαμψίας [54].

Ο Hwang πραγματοποίησε μια εννοιολογική μελέτη για την εφαρμογή των MREs σε συστήματα μονωμένης βάσης κατά την κατασκευή κτιρίων. Είναι γεγονός ότι η εφαρμοσιμότητα των MREs σε κατασκευές μονωσης βάσης δεν έχει ακόμα διερευνηθεί πλήρως. Εντούτοις, διερευνάται η ανάπτυξη –μέσω αριθμητικής προσομοίωσης- ενός ευφυούς συστήματος μονωμένης βάσης που χρησιμοποιεί τα MREs. Ο Gandhi χρησιμοποιεί ένα ημι-ενεργητικό μοντέλο συσκευής ακαμψίας για ένα δυναμικό μοντέλο από MREs. Στην προσομοίωση, λαμβάνεται ένα 6 BE μοντέλο (Βλ. Σχήμα 1.28) συσσωματωμένο με το σύστημα μονωμένης βάσης. Σαν είσοδο χρησιμοποιούνται τρεις εδαφικές διεργασίες που πάρθηκαν από τις μετρήσεις τριών ιστορικών σεισμών (*El Centro*, *Northridge* και *Hachnohe*) [70].



**Σχήμα 1.29:** Προσομοιούμενο Μηχανικό Σύστημα Κτιρίου-Μονωμένης Βάσης 6 Β.Ε. [70]

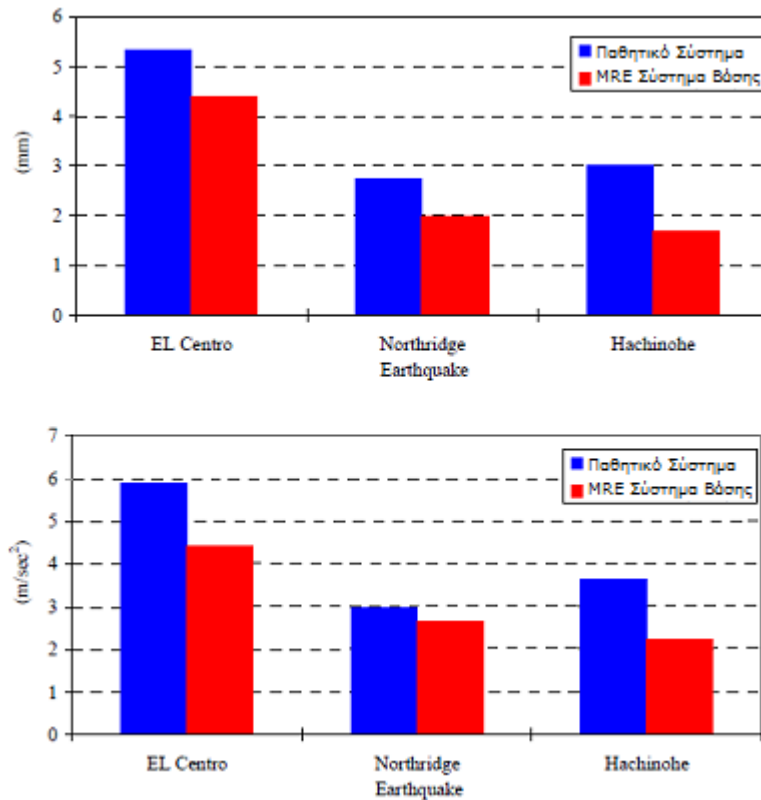
Τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης της απόκρισης του υβριδικού συστήματος που χρησιμοποιεί τα MREs συγκρίθηκαν με εκείνα ενός παθητικού τύπου συστήματος μονωμένης βάσης, στο οποίο χρησιμοποιούνται εφέδρανα απο καουτσούκ (RB). Σαν απόκριση λαμβάνουμε την μετατόπιση του 1<sup>ου</sup> ορόφου για κάθε σύστημα και για τις 3 προαναφερθείσες εισόδους (Βλ. Σχήμα 1.30) [70].



**Σχήμα 1.30:** Απόκριση Μοντέλου Παθητικού Συστήματος και MRE Συστήματος Μονωμένης Βάσης σε Διεγέρσεις (El Centro, Kobe, Hachinohe) [70]

Όπως φαίνεται στο σχήμα, το υβριδικό MRE σύστημα μονωμένης βάσης μειώνει αισθητά ταχύτερα το πλάτος απόκρισης συγκριτικά με το παθητικό σύστημα μονωμένης βάσης και για τις 3 διεγέρσεις. Τέλος, γίνεται σύγκριση του μέτρου της μέγιστης μετατόπισης του 1<sup>ου</sup> ορόφου και της μέγιστης επιτάχυνσης υψηλότερου ορόφου για κάθε είσοδο αντίστοιχα (Βλ. Σχήμα 1.31). Είναι προφανές ότι το MRE υβριδικό σύστημα υπερτερεί του συμβατικού συστήματος μονωμένης βάσης [70].





**Σχήμα 1.31:** Μέγιστα Πλάτη Αποκρίσεων Πεδίου Μετατοπίσεων 1<sup>ου</sup> Ορόφου και Επιταχύνσεων 5<sup>ου</sup> Ορόφου Μοντέλου Παθητικού Συστήματος και MRE Συστήματος Μονωμένης Βάσης σε Διεγέρσεις (El Centro, Kobe, Hachinohe) [70]

## 1.4 Συνδυασμός Ενεργητικής Αυτόματης Ρύθμισης με Σεισμικά Μονωμένη Βάση

Έχουμε δει ότι η σεισμικά μονωμένη βάση ελαττώνει σημαντικά το μέγεθος των δονήσεων που διαδίδονται από το έδαφος στη βάση ενός κτιρίου (ισόγειο). Η απόλυτη απομόνωση μιας κατασκευής θα αναμέναμε να γίνεται μέσω της έδρασης της κατασκευής πάνω σε σφαιρικά εφέδρανα κύλισης (ball bearings). Η συγκεκριμένη διάταξη όμως δεν θα ήταν πρακτική, αφού ακόμη και μικρές διαταραχές (π.χ. άνεμος), θα μπορούσαν να προκαλέσουν σημαντική κίνηση της κατασκευής. Επομένως, κρίνεται απαραίτητη η χρήση ενός συστήματος που θα απομονώνει το κτίριο από τις εξωτερικές διεγέρσεις, ενώ ταυτόχρονα θα περιορίζει την κίνηση του εντός κάποιων αποδεκτών ορίων. Αυτό μπορεί πρακτικά να γίνει με τον συνδυασμό ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης και της ελαστικής μονωμένης βάσης. Πρακτικά, το μέρος της διαταραχής που δεν απορροφάται από την ελαστική βάση, εξουδετερώνεται από το υποσύστημα ενεργητικής αυτόματης ρύθμισης, ώστε τελικά οι μετατοπίσεις του κτιρίου να βρίσκονται εντός κάποιων ορίων γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας, βάσει προδιαγραφών.

Η ενεργητική αυτόματη ρύθμιση των κατασκευών είχε προταθεί και παλαιότερα. Εντούτοις, οι διάφορες προσπάθειες δεν «καρποφόρησαν» εξαιτίας του εγγενούς μειονεκτήματος της απαίτησης μεγάλων δυνάμεων επενέργειας σε κάθε όροφο του κτιρίου, γεγονός που καθιστά την συγκεκριμένη διάταξη τεχνικά απαιτητική και οικονομικά ασύμφορη. Η απαίτηση αυτή πηγάζει από το γεγονός ότι επιθυμούμε να διατηρήσουμε την κίνηση (μετατόπιση και ταχύτητα) κάθε ορόφου σε μικρά όρια, σχετικά με το έδαφος καθώς και με τους γειτονικούς ορόφους. Μικρές σχετικές

μετατοπίσεις και ταχύτητες σημαίνουν και μικρές εσωτερικές τάσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ορόφων. Με άλλα λόγια, η ενεργητική αυτόματη ρύθμιση αποσκοπούσε στο να κινήσει όλη την κατασκευή κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ακολουθεί την κίνηση του εδάφους. Με χρήση σχετικών συντεταγμένων, η επιτάχυνση του εδάφους επιδρά πρακτικά σε διαταραχή σε κάθε όροφο, οπότε και απαιτούνται οι αντίστοιχες δυνάμεις ελέγχου.

Η χρησιμότητα της σεισμικά μονωμένης βάσης έρχεται να ικανοποιήσει σε μεγάλο βαθμό την προαναφερθείσα απαίτηση, αφού τείνει να διατηρήσει την συνολική κατασκευή ακλόνητη ως προς την αρχική θέση ηρεμίας στο τοπικό σύστημα αναφοράς βάσης. Ισοδύναμα, η χρήση ελαστικών εφεδράνων τείνει να διατηρήσει την κατασκευή σε κατάσταση ηρεμίας ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, επιτρέποντας την ελεύθερη κίνηση του εδάφους (καθολικό σύστημα αναφοράς). Είναι εμφανές ότι η καταλληλότερη και πιο βολική περιγραφή του συστήματος είναι η περιγραφή σε απόλυτες συντεταγμένες (αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Κατ'αυτόν τον τρόπο, η διέγερση από το έδαφος, υπό μορφή μετατόπισης και ταχύτητας του εδάφους, επιδρά μόνο στη βάση (ισόγειο). Οπότε και η μοναδική δύναμη ελέγχου εφαρμόζεται αποκλειστικά στη βάση. Παραπέρα, το μέγιστο πλάτος της δύναμης επενέργειας δεν πρέπει να ξεπερνά το μέγιστο πλάτος της δύναμης διέγερσης που διαδίδεται στη βάση. Κατ'αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται η μικρή μετακίνηση της βάσης σε όρους απόλυτης μετατόπισης και ταχύτητας. Συμπερασματικά, η σεισμικά μονωμένη βάση είναι σημαντική, αφού καταφέρνει να διατηρήσει τη μέγιστη κατά πλάτος απόκριση του συστήματος του κτιρίου, οσοδήποτε μικρή.

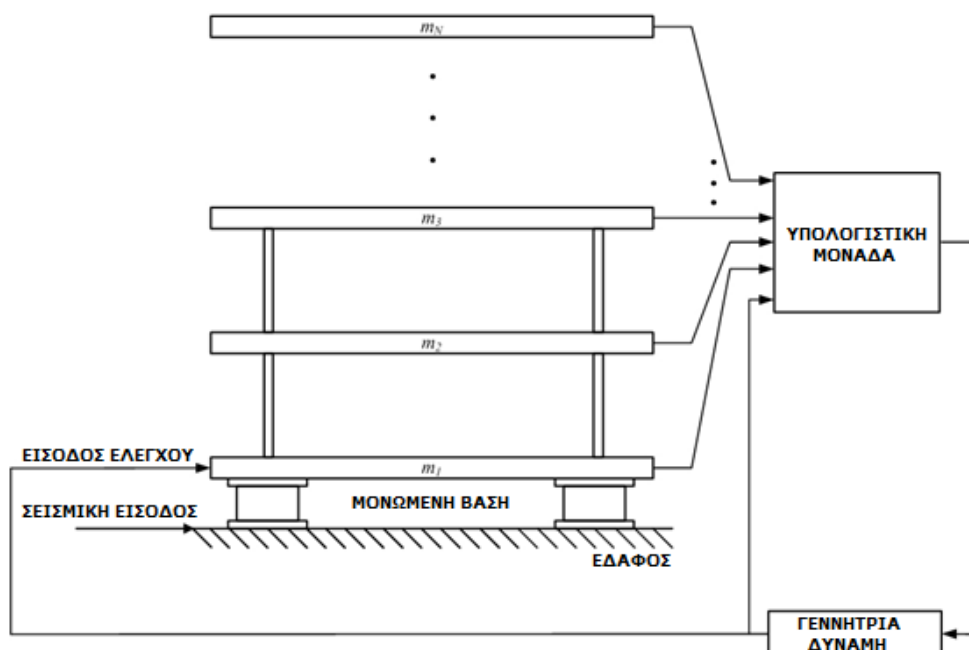
Η δύναμη επενέργειας ασκείται από ένα υδραυλικό έμβολο. Στην παρούσα εργασία, θα βασιστούμε στην παραπάνω συναρμολόγηση (assembly) υποσυστημάτων περιγραφόμενα σε αδρανειακές συντεταγμένες, προκειμένου να μοντελοποιήσουμε και να προσομοιώσουμε την απόκριση πολύοροφων κτιρίων με σεισμικά μονωμένη βάση παρουσία σεισμικών φορτίσεων. Ακόμα παραπέρα, θα σχεδιάσουμε έναν εύρωστο ελεγκτή, βασιζόμενοι στην Θεωρία  $H_{\infty}$ -Αυτόματης Ρύθμισης.

## 2. Μοντελοποίηση και Ανάλυση Δυναμικής Κτιρίου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα προτείνουμε ένα γραμμικό μοντέλο που περιγράφει την δυναμική συμπεριφορά μιας πολυόροφης κτιριακής εγκατάστασης. Συγκεκριμένα, το μοντέλο που προτείνεται αναφέρεται σε ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από τις μάζες των ορόφων, οι οποίες συνδέονται ανά δύο μεταξύ τους με ελατήρια και αποσβεστήρες. Έπειτα, εξάγουμε την απόκριση των επιμέρους υποσυστημάτων σε μία σεισμική φόρτιση. Ακόμα παραπέρα, θα κάνουμε μια εκτενή αναφορά στον υδραυλικό επενεργητή, που αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι στη σύνθεση του συνολικού συστήματος.

### 2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ότι το σύστημα αυτόματης ρύθμισης (Βλ. Σχήμα 2.1) που προτείνουμε αλληλεπιδρά με το σύνολο της κατασκευής ( $N$  όροφοι) με συγκεκριμένο τρόπο. Το διάλυμα αποκρίσεων της κατασκευής –που μετράται μέσω αισθητήρων που είναι προσαρμοσμένοι σε κάθε όροφο– καθώς και η παραγόμενη δύναμη επενέργειας εισάγονται κατά συνεχή τρόπο στην υπολογιστική μονάδα ελέγχου. Η υπολογιστική μονάδα παράγει στην έξοδο το σήμα που στέλνεται στο υποσύστημα επενέργειας προκειμένου να παραχθεί η ανάλογη δύναμη. Η δύναμη αυτή αποτελεί την είσοδο ελέγχου (control input), η οποία εφαρμόζεται στο μηχανικό υποσύστημα του 1<sup>ου</sup> ορόφου. Παράλληλα, η είσοδος από το περιβάλλον (σεισμική διαταραχή) εισάγεται από το έδαφος στο μηχανικό υποσύστημα του 1<sup>ου</sup> ορόφου διαμέσου της μονωμένης βάσης. Σημειώνουμε ότι η δύναμη επενέργειας υλοποιείται με ξεχωριστό ενσωματωμένο (embedded) σύστημα αυτόματης ρύθμισης.



Σχήμα 2.1: Προτεινόμενο Σύστημα Αυτόματης Ρύθμισης Δυναμικής Απόκρισης  $N$ -Οροφου Κτιρίου [5]

Στην πραγματικότητα τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, όπως παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Κατ'αρχάς, η υπολογιστική μονάδα, όπου βρίσκεται και ο ελεγκτής του συστήματος καλείται να προσδιορίσει με την απαιτούμενη ακρίβεια τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος (λ.χ. x-μετατόπιση κάθε ορόφου) με βάση τα σήματα που λαμβάνουν οι αισθητήρες. Εντούτοις, στα σήματα αυτά υφίσταται η αβεβαιότητα, καθώς και θόρυβοι ή διαταραχές [71]. Θεωρούμε ότι η μέτρηση της ασκούμενης δύναμης γίνεται με αρκετά ικανοποιητική ακρίβεια. Αυτό μπορούμε να το στηρίξουμε στο γεγονός ότι πρακτικά οι διατάξεις των επενεργητών είναι σχεδιασμένες κατά τρόπο ώστε με κατάλληλους κωδικοποιητές (encoders) να είναι δυνατός ο ακριβής προσδιορισμός του μέτρου της δύναμης επενέργειας για κάθε χρονική στιγμή.

Επιλέγουμε σαν μεταβλητές κατάστασης του συστήματος την απόλυτη μετατόπιση και την απόλυτη ταχύτητα κάθε ορόφου. Το παραπάνω έχει νόημα, όταν προηγουμένως έχει θεωρηθεί ένα απόλυτο αδρανειακό σύστημα αναφοράς [29]. Το ζητούμενο πεδίο μετατόπισης και ταχύτητας δεν μπορεί να μετρηθεί εύκολα με χρήση αισθητήρων. Εντούτοις, η απόλυτη επιτάχυνση μπορεί να μετρηθεί με ικανοποιητική ακρίβεια με χρήση επιταχυνσιομέτρων<sup>7</sup>. Επομένως τα πεδία μετατόπισης και ταχύτητας προκύπτουν με αριθμητική ολοκλήρωση δεδομένου ότι είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες (initial conditions) του συστήματος και ότι οι διάφοροι θόρυβοι έχουν εξαλειφθεί στο σήμα με χρήση κατάλληλου φίλτρου. Η ορθή εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης σε πραγματικό χρόνο (realtime) αποτελεί συναρπαστικό πεδίο έρευνας. Μερικά από τα «εργαλεία» από την Θεωρία Αυτομάτου Ελέγχου που χρησιμοποιούνται προς αυτή την κατεύθυνση είναι τα *φίλτρα Kalman (Kalman Filter)* και οι *παρατηρητές κατάστασης πλήρους ή μειωμένης τάξης (full or reduced order observer)*. Τα πεδία μετατόπισης και ταχύτητας απαιτούνται για τον υπολογισμό της αντίστοιχης δύναμης επενέργειας.

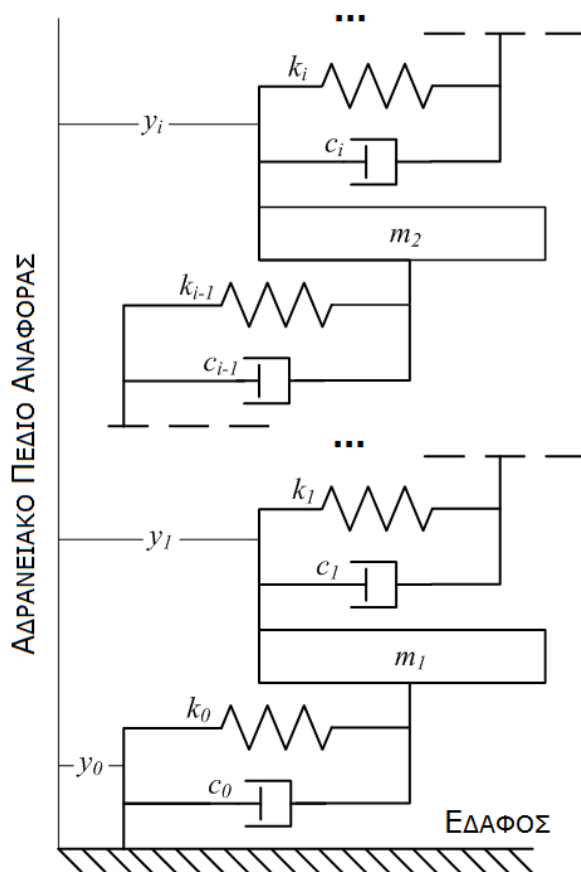
Οι προετινόμενοι επενεργητές είναι υδραυλικά έμβολα. Αυτά είναι τοποθετημένα στο έδαφος, το οποίο όμως κατά τη διάρκεια του σεισμού είναι μη σταθερό. Το γεγονός αυτό εισάγει την απαίτηση λειτουργίας ενός βοηθητικού υποσυστήματος αυτόματης ρύθμισης για τον επενεργητή, ώστε να ασκούνται οι δυνάμεις που επιτάσσει το σήμα εξόδου του ελεγκτή σε κατάλληλους χρόνους [72] [73]. Το γεγονός αυτό εισάγει την ανάγκη κατανάλωσης επιπλέον ενέργειας, ώστε το υποσύστημα επενέργειας να λειτουργεί με ακρίβεια και να παράγει το απαιτούμενο εύρος δυνάμεων βάσει προδιαγραφών. Η υλοποίηση ενός τέτοιου συστήματος είναι σχετικά απλή και δεν απαιτεί σημαντικές εξωτερικές δυνάμεις, όπως συναντάται σε άλλα συστήματα.

## 2.2 Δυναμικό Μοντέλο Συστήματος N-Όροφου Κτιρίου

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η ορθότερη περιγραφή του μηχανικού συστήματος του N-όροφου κτιρίου είναι σε απόλυτες συντεταγμένες. Το μηχανικό σύστημα αποτελείται από μηχανικά υποσυστήματα (όροφοι), καθένα εκ των οποίων χαρακτηρίζεται από τρεις παραμέτρους μηχανικής φύσης. Τα μηχανικά στοιχεία για τον i-όροφο είναι η μάζα  $m_i$  (mass), η μηχανική σταθερά απόσβεσης  $c_i$  (damping coefficient) και η σταθερά ελατηρίου  $k_i$  (hookean coefficient), όπου  $i=1, \dots, N$ . Ο i-όροφος μάζας  $m_i$  συνδέεται με τον (i-1)-όροφο μάζας  $m_{i-1}$  μέσω των στοιχείων  $k_i$  και  $c_i$ . Οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος είναι οι οριζόντιες μετατοπίσεις  $y_i$  και ταχύτητες  $\dot{y}_i$  (Βλ. Σχήμα 2.2). Θεωρώντας λοιπόν ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, έχουμε ότι η διαταραχή εισάγεται σαν είσοδος από το έδαφος (περιβάλλον) στο υποσύστημα (ισόγειο).

<sup>7</sup> Τα *επιταχυνσιόμετρα (accelerometer)* είναι αισθητήρες (sensors) που μετρούν την φυσική επιτάχυνση (proper acceleration) αντικειμένων, η οποία διαφέρει από την «συντεταγμένη» επιτάχυνση (coordinate acceleration) στο ότι αφορά το ίδιο το αντικείμενο και όχι την κίνησή του. Λόγου χάρι, η φυσική επιτάχυνση ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση είναι μηδενική. Αρκετές σύγχρονες εφαρμογές χρησιμοποιούν επιταχυνσιόμετρα (φορητές συσκευές, πλοία, γέφυρες κ.α.). Χαρακτηριστικά επιταχυνσιόμετρα είναι τα πιεζοηλεκτρικής αντίστασης (piezoelectric), τα γυροσκόπια (gyro), τα ηλεκτρομηκυνσιόμετρα (strain gauge) κ.α. [15] [16] [99] [100] [101].

Στο υποσύστημα αυτό καλούμαστε να εφαρμόσουμε κατάλληλη δύναμη επενέργειας, ώστε να αντισταθμίσουμε την «εν δυνάμει» διάδοση της διαταραχής σε περίπτωση που το συνολικό μηχανικό σύστημα αποκρινόταν χωρίς την δική μας παρέμβαση, μέσω ελεγκτή. Πρωτίστως, η επιτυχία του υπό σχεδίαση συστήματος αυτόματης ρύθμισης κρίνεται από την διατήρηση του κτιρίου σε ανεκτά (βάσει προδιαγραφών) όρια γύρω από την αρχική του κατάσταση (κατάσταση ηρεμίας) κατά τη διάρκεια του σεισμού. Ακόμη παραπέρα, η ταχύτητα επαναφοράς του ελεγχόμενου συστήματος στην θέση αυτή, καθώς και η ικανοποιητική λειτουργία του ελεγκτή με μόνιμα χαρακτηριστικά<sup>8</sup> (gain, μήτρα συστήματος ελεγκτή κ.ο.κ) για διαταραχές στις παραμέτρους του μηχανικού συστήματος (μηχανικές σταθερές) αποτελούν κριτήρια επιτυχίας της σύνθεσης του τελικού συστήματος.



Σχήμα 2.2: Μηχανικό Σύστημα N-Οροφου Κτιρίου [5]

Έστω ότι  $y_0(t)$  είναι η οριζόντια μετατόπιση του εδάφους και  $y_i(t)$  η οριζόντια μετατόπιση του i-ορόφου, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (βλ. Σχήμα 2.2). Βασική παραδοχή του μοντέλου μας είναι ότι δεν έχουμε κατακόρυφες μετατοπίσεις. Επομένως, η κίνηση λαμβάνει χώρα σε 1 διάσταση, δηλαδή κατά την οριζόντια διεύθυνση. Τότε, οι εξισώσεις κίνησης ( $2^{\text{ος}}$  Νόμος Νεύτωνα) και οι αρχικές συνθήκες ( $t = t_0$ ) του κτιρίου είναι οι ακόλουθες:

<sup>8</sup> Αναφέρεται ο όρος «μόνιμα χαρακτηριστικά», διότι υπάρχουν ελεγκτές των οποίων τα κέρδη (gain) έχουν οριστεί να ρυθμίζονται βάσει διαταραχών, συνθηκών λειτουργίας κ.ο.κ. Ακόμη παραπέρα, μπορεί να υλοποιηθεί σχεδίαση της εισόδου ελέγχου, ώστε το τελικό σύστημα να παρουσιάζει ασυμπτωτική ευστάθεια, συγκρινόμενο με ένα πρότυπο σύστημα αναφοράς. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται MRAC (Model Reference Adaptive Control). Τα παραπάνω αποτελούν θέματα του Προσαρμοστικού Ελέγχου (Adaptive Control). Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία [37] [38].

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{y}_1 &= -c_0(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) - k_0(y_1 - y_0) + c_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1(y_2 - y_1) \\
m_2 \ddot{y}_2 &= -c_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_1(y_2 - y_1) + c_2(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + k_2(y_3 - y_2) \\
&\vdots \\
m_i \ddot{y}_i &= -c_{i-1}(\dot{y}_i - \dot{y}_{i-1}) - k_{i-1}(y_i - y_{i-1}) + c_i(\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) + k_i(y_{i+1} - y_i) \\
&\vdots \\
m_N \ddot{y}_N &= -c_{N-1}(\dot{y}_N - \dot{y}_{N-1}) - k_{N-1}(y_N - y_{N-1})
\end{aligned} \tag{2.1.α}$$

$$\text{και } y_i(t_0) = y_i^o, \dot{y}_i(t_0) = \dot{y}_i^o \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.1.β}$$

Κάθε μία γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού του συστήματος (2.1.α) μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ζεύγος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού. Για τον λόγο αυτό, επιλέγω το διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2N})^T$ , όπου  $x_i = \dot{y}_i$ ,  $x_{i+N} = y_i$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, N$ . Έπειτα, εισάγουμε το διάνυσμα εξόδου  $\mathbf{q}$ , το οποίο στην ανάλυση μας ταυτίζεται με το διάνυσμα κατάστασης. Άρα, από το αρχικό σύστημα  $N$  εξισώσεων, έπειτα από τις απαιτούμενες πράξεις, προκύπτει το ακόλουθο  $2 \times N$  γραμμικό σύστημα εξισώσεων, που αποτελεί την περιγραφή του ελεύθερου μηχανικού συστήματος στον χώρο κατάστασης (state space):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{v}(t) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t) \tag{2.3}$$

όπου:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right]_{2N \times 2N}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}_{2N \times 2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_{2N \times 2N}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \left[ \begin{array}{cccccccc}
-\frac{(c_0 + c_1)}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\frac{c_1}{m_2} & -\frac{(c_1 + c_2)}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & 0 & \frac{c_{i-1}}{m_i} & -\frac{(c_{i-1} + c_i)}{m_i} & \frac{c_i}{m_i} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{c_{N-1}}{m_N} & -\frac{c_{N-1}}{m_N}
\end{array} \right]_{N \times N},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{(k_o + k_1)}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{(k_1 + k_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{k_{i-1}}{m_i} & -\frac{(k_{i-1} + k_i)}{m_i} & \frac{k_i}{m_i} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{k_{N-1}}{m_N} & -\frac{k_{N-1}}{m_N} \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$A_{21} = \mathbf{I}_{N \times N}, \quad A_{22} = \mathbf{O}_{N \times N}$$

και

$$C_1 = \begin{bmatrix} \frac{c_o}{m_1} & \frac{k_o}{m_1} \\ \mathbf{O}_{(N-1) \times 2} \end{bmatrix}_{N \times 2}, \quad C_2 = \mathbf{O}_{N \times 2}$$

και  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_o(t_o) \\ x_N(t_o) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \dot{y}_o \\ y_o \end{bmatrix}_{2 \times 1}$  είναι η αβέβαιη διαταραχή (απόλυτη μετατόπιση και ταχύτητα σεισμικής διέγερσης) που επιβάλλονται απο το έδαφος στο σύνολο της κατασκευής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα επιλεγμένα δεδομένα της διαταραχής.

**Σχόλιο 1:** Το διάνυσμα της διαταραχής  $\mathbf{v}$  είναι φραγμένο, με την έννοια ότι η νόρμα του (λ.χ. ευκλείδια  $\|\cdot\|_2$ ) έχει γνωστό άνω φράγμα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, υπάρχει η αντίστοιχη απόδειξη στο Παράρτημα Α.

**Σχόλιο 2:** Τα block (1,1) και (1,2) στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι *τριδιαγώνιοι* (*tridiagonal*) πίνακες. Οι πίνακες αυτοί παρουσιάζουν αξιοσημείωτες ιδιότητες, όπως είναι η χαμηλής πολυπλοκότητας  $O(8n)$  αντιστροφή τους με ευθεία μέθοδο (Μέθοδος Crout) σε γραμμικά αλγεβρικά συστήματα [41] [42] [44]. Επιπλέον, οι πίνακες αυτοί είναι *διαγώνια επικρατούντες* (*diagonally dominant*), γεγονός που εξασφαλίζει τη σύγκλιση σε επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως είναι η Μέθοδος Gauss-Seidel και Μέθοδος Jacobi [44] [102]. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιες μήτρες προκύπτουν συχνά κατά τη μοντελοποίηση κατασκευών με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [28] [29] [102]. Καλούμε το block-στοιχείο  $A_{11}$  ως *Μήτρα Ανηγμένων Σταθερών Απόσβεσης* (*Induced Damping Coefficient Matrix*) και την  $A_{12}$  ως *Μήτρα Ανηγμένων Ελαστικών Σταθερών* (*Induced Hookean Coefficient Matrix*).

## 2.3 Ανάλυση Δυναμικής Συμπεριφοράς Κτιρίου

Παραπάνω, εξαγάγαμε το μοντέλο του συστήματος ενός N-όροφου κτιρίου. Η είσοδος στο σύστημα είναι η σεισμική διέγερση που εκδηλώνεται με την κίνηση του εδάφους και αποτυπώνεται με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Η κατάσταση του κτιρίου περιγράφεται από τις συνιστώσες απόλυτης μετατόπισης και ταχύτητας για κάθε όροφο του κτιρίου. Το ελεύθερο μηχανικό σύστημα περιγράφεται ως προς τα δομικά χαρακτηριστικά του από τη μήτρα  $A$  (μήτρα χώρου κατάστασης). Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφηκε στη γενική περίπτωση των  $N$  διαστάσεων. Εδώ, θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός 10-όροφου κτιρίου. Στη συνέχεια, θα εξάγουμε τις τιμές των τριάδων αδρανειακών (μάζα) και μηχανικών (σταθερά απόσβεσης, σταθερά ελατηρίου) χαρακτηριστικών για κάθε όροφο.

Προκειμένου να το επιτύχουμε αυτό, στηρίζομαστε στις τιμές που λαμβάνονται κατά την προσομοίωση ενός 6-όροφου κτιρίου [5]. Συγκεκριμένα, παρατηρώντας τις τιμές του αντίστοιχου πίνακα διακρίνουμε την ισχυρά γραμμική εξάρτηση ανάμεσα στις τιμές στη σταθερά απόσβεσης  $c_i$  και στη σταθερά ελατηρίου  $k_i$ . Εφαρμόζουμε γραμμική παρεμβολή (ευθεία ελαχίστων τετραγώνων). Ειδικότερα, θεωρούμε ότι υπάρχει μια αναλογία ανάμεσα στο πλήθος ορόφων και τη μάζα ισογείου, καθώς και ανάμεσα στη μάζα ισογείου και τις μάζες των υπόλοιπων ορόφων. Τέλος, ακολουθούμε την καμπύλη σχετικής κατανομής τιμών στις σταθερές ελατηρίου ανά όροφο, προκειμένου να εξάγουμε την αντίστοιχη καμπύλη κατανομής τιμών για το 10-όροφο κτίριο. Η διαδικασία που περιγράφηκε παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα Β. Επομένως, προκύπτουν οι τιμές χαρακτηριστικών του Πίνακα 2.1.

Όροφος	Μάζα Ορόφου (Kg)	Σταθερά Ελατηρίου (N/m)	Σταθερά Απόσβεσης (Ns/m)
1	13333	$2188.96 \cdot 10^3$	4439.24978
2	9828	$584060.00 \cdot 10^3$	116311.15938
3	9828	$612742.00 \cdot 10^3$	122018.87738
4	9828	$559426.00 \cdot 10^3$	111408.99338
5	9828	$520274.00 \cdot 10^3$	103617.74538
6	9828	$519449.00 \cdot 10^3$	103453.57038
7	9828	$518508.00 \cdot 10^3$	103266.31138
8	9828	$471459.00 \cdot 10^3$	93903.56038
9	9828	$379819.00 \cdot 10^3$	75667.20038
10	9828	$347661.00 \cdot 10^3$	69267.75838

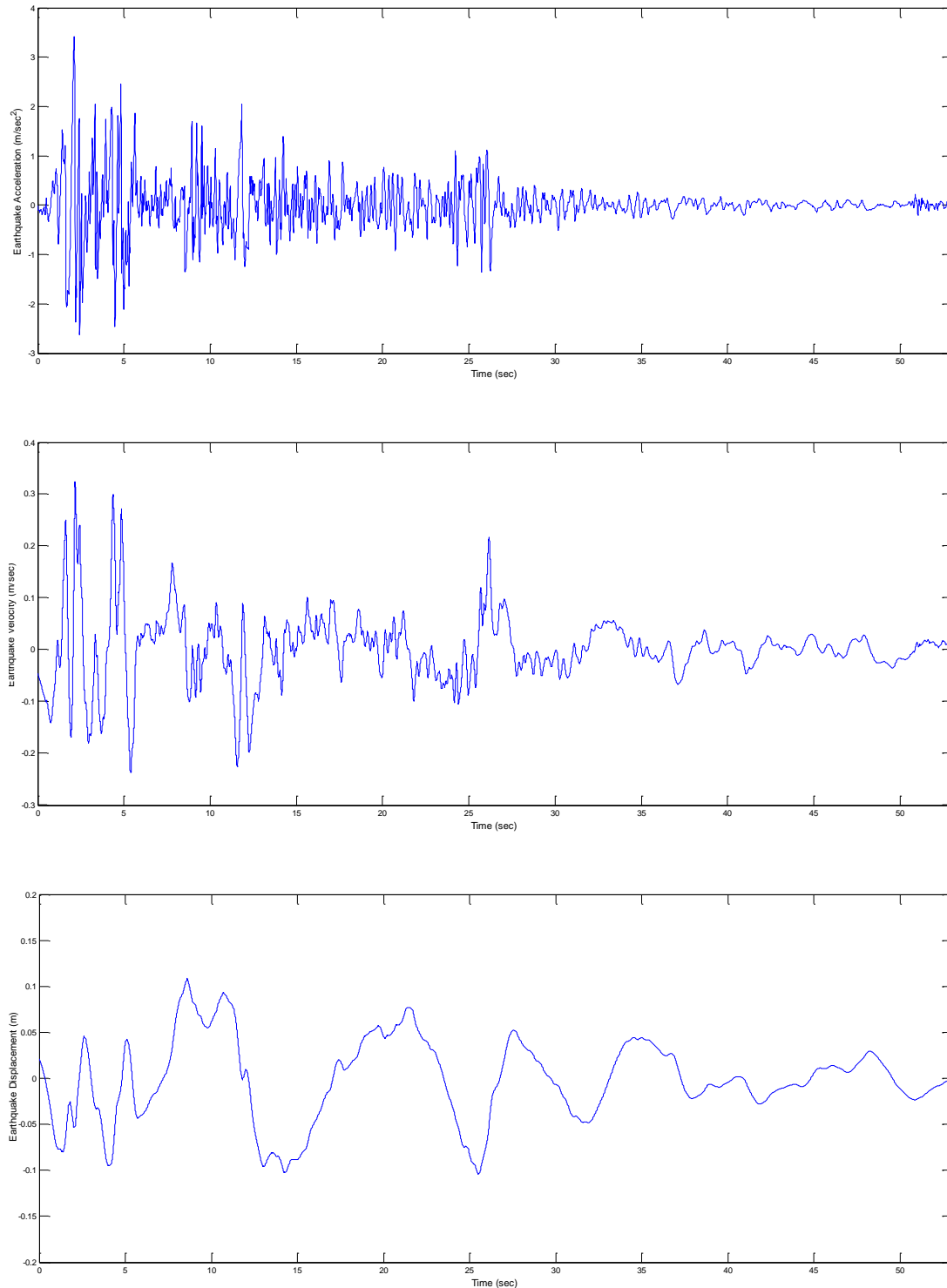
**Πίνακας 2.1:** Τιμές Μηχανικών Χαρακτηριστικών 10-Όροφου Κτιρίου

Σημειώνουμε ότι στην ανάλυσή μας δεν λαμβάνουμε υπ'όψιν τις πραγματικές διαστάσεις και τη γεωμετρία του κτιρίου (μήκος, πλάτος, ύψος, επιφάνεια κελυφών κοκ). Το γεγονός αυτό έχει νόημα δεδομένου ότι εξετάζουμε την δυναμική απόκριση (οριζόντια μετατόπιση και ταχύτητα) του κτιρίου με βάση τα μηχανικά στοιχεία και μόνο. Με άλλα λόγια δεν λαμβάνουμε υπ'όψιν φαινόμενα καμπτικών ροπών, εφελκυσμού και θλίψης, λυγισμού, διάτμησης ή στρέψης.



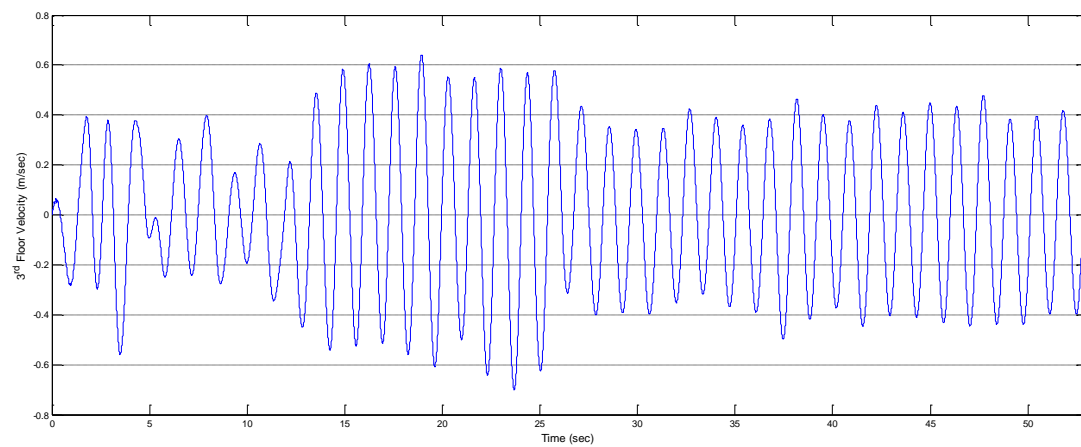
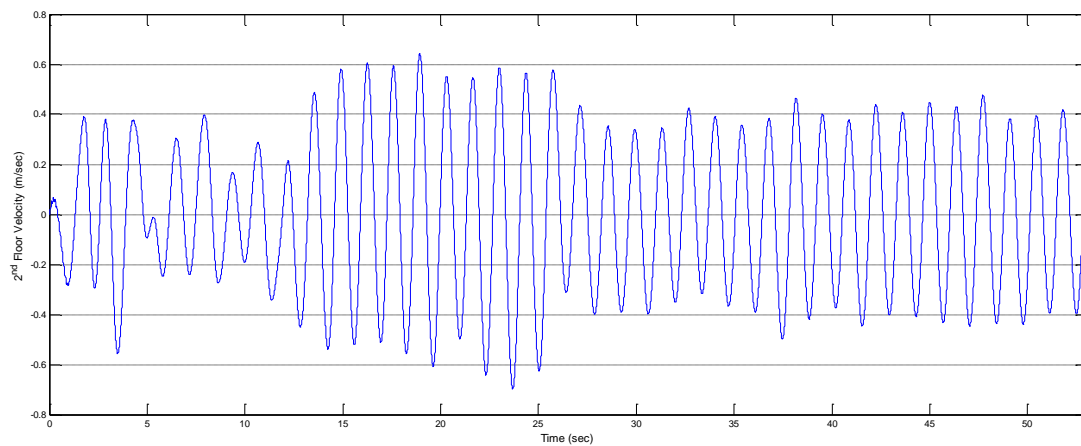
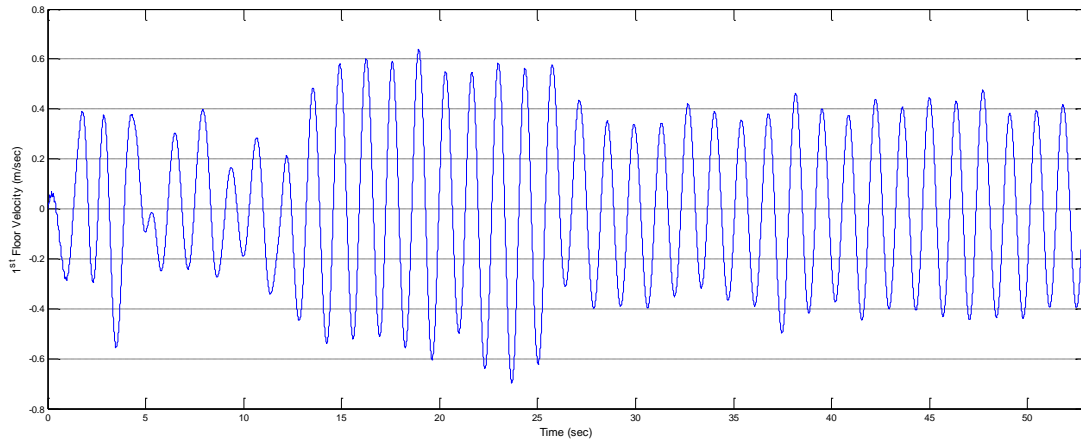
Επομένως, για την παραπάνω εκλογή παραμέτρων (μηχανικά χαρακτηριστικά) του συστήματος, με αντικατάσταση στις εξισώσεις (2.2) και (2.3), προκύπτουν οι μήτρες **A** και **C** του συστήματος. Το αρχείο που πραγματοποιεί τους υπολογισμούς των μητρών του συστήματος είναι το *model.m*.

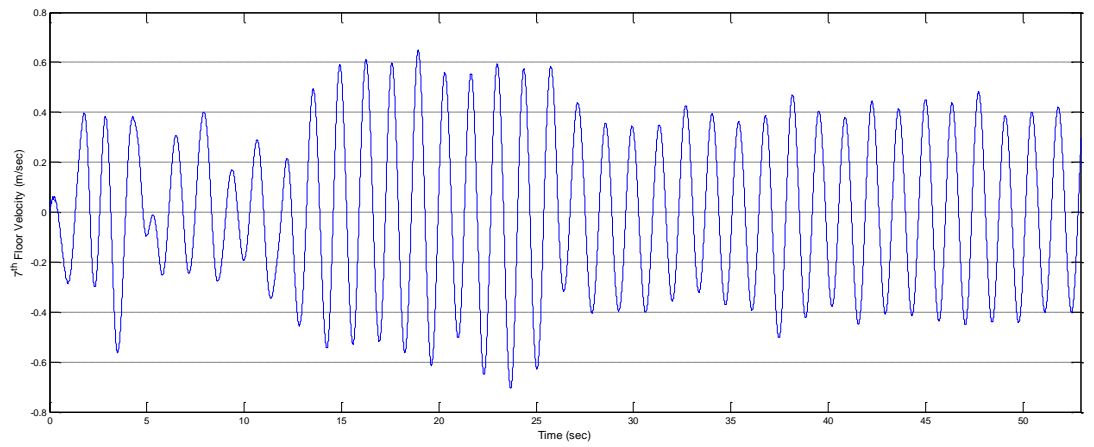
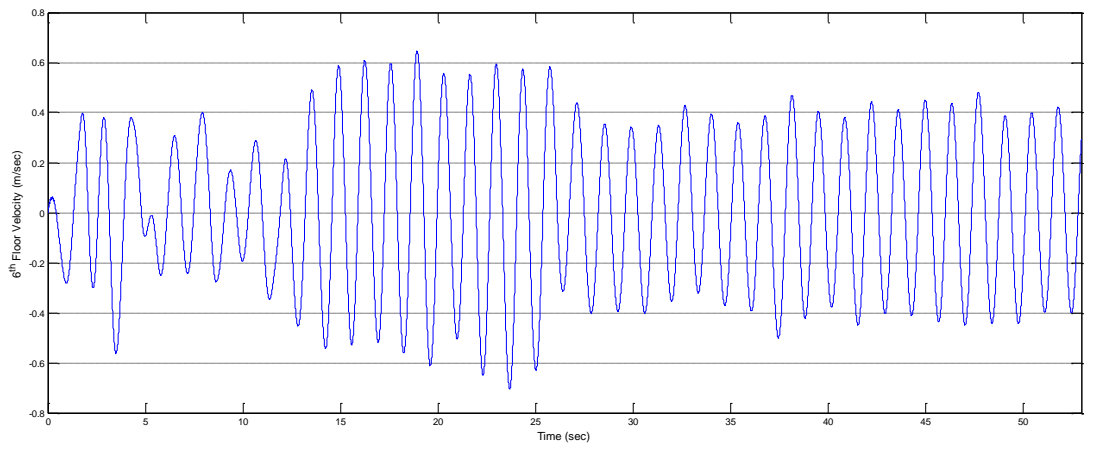
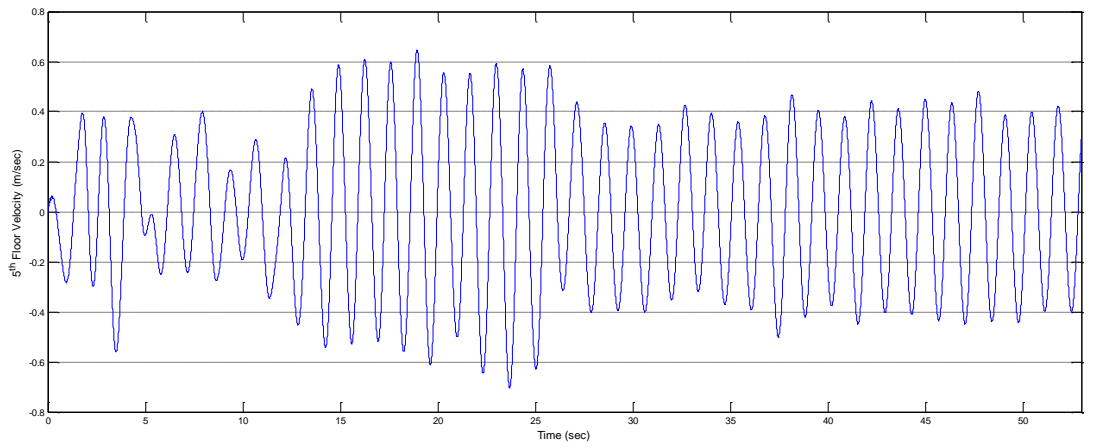
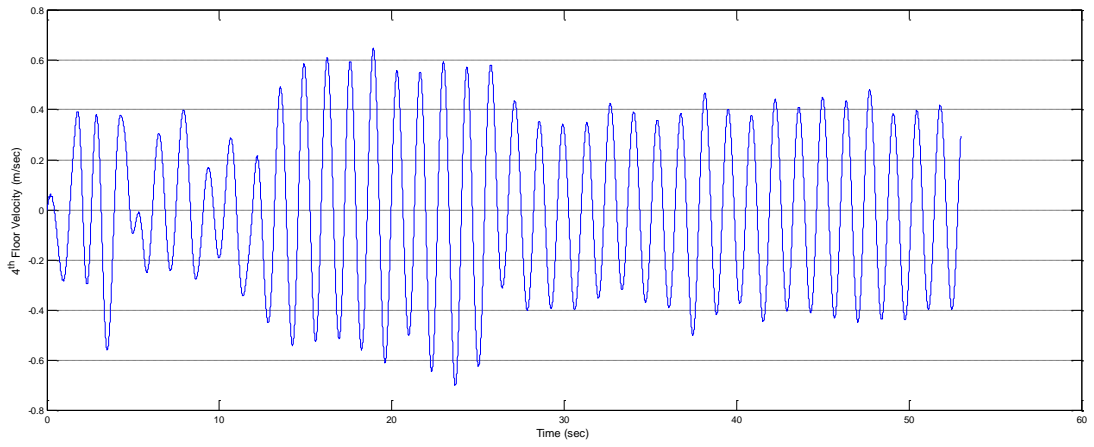
Ακολουθώς, παρουσιάζουμε την είσοδο της σεισμικής διέγερσης DCZ-270, την οποία και εφαρμόζουμε στο σύστημα. Στα αντίστοιχα διαγράμματα αναπαρίσταται η επιτάχυνση, η ταχύτητα και η μετατόπιση του εδάφους κατά την πραγματοποίηση της ανωτέρω σεισμικής διέγερσης (Βλ. Σχήμα 2.3).

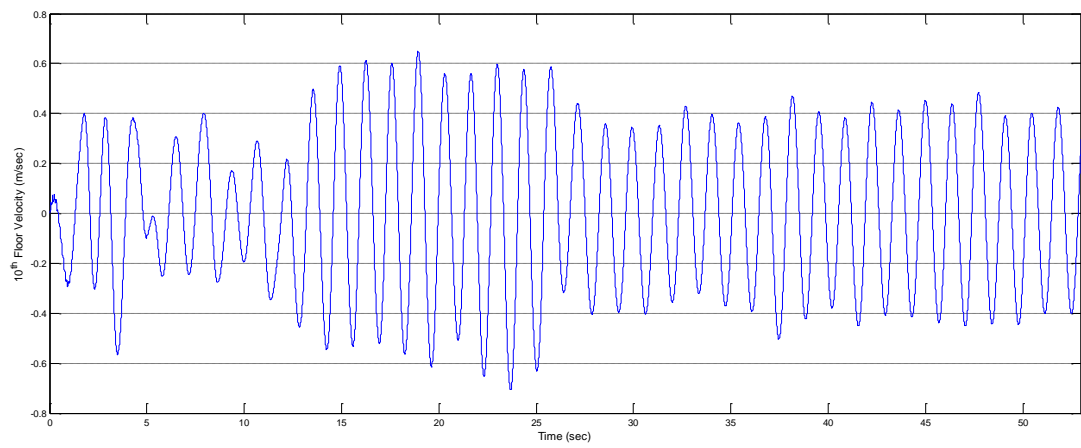
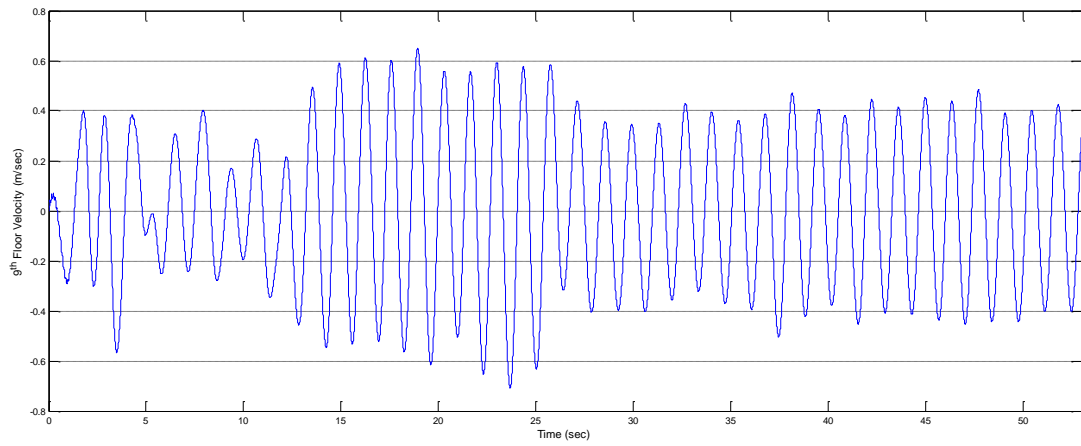
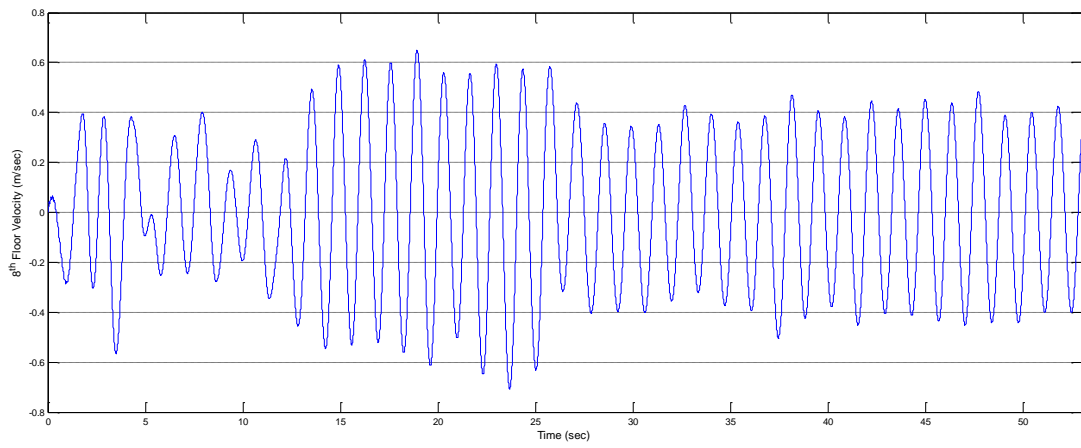


**Σχήμα 2.3:** Επιτάχυνση, Ταχύτητα και Μετατόπιση Σεισμικής Διέγερσης DCZ-270

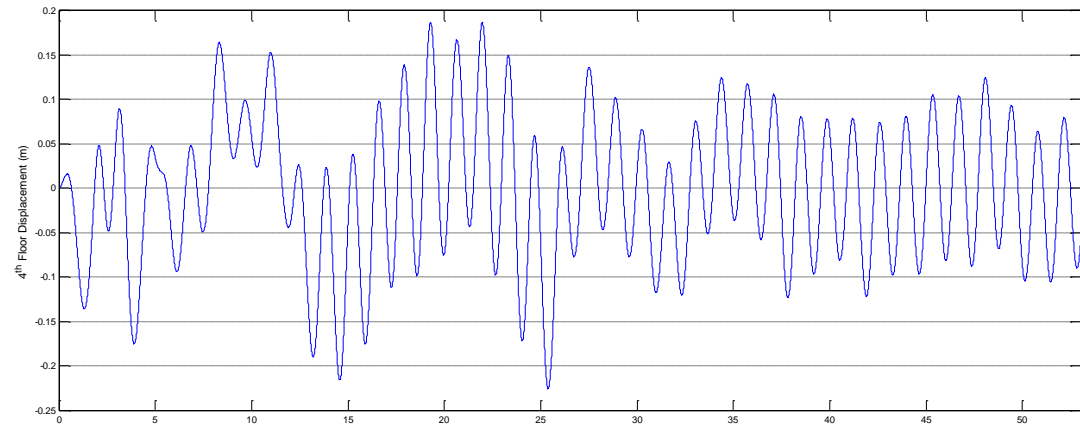
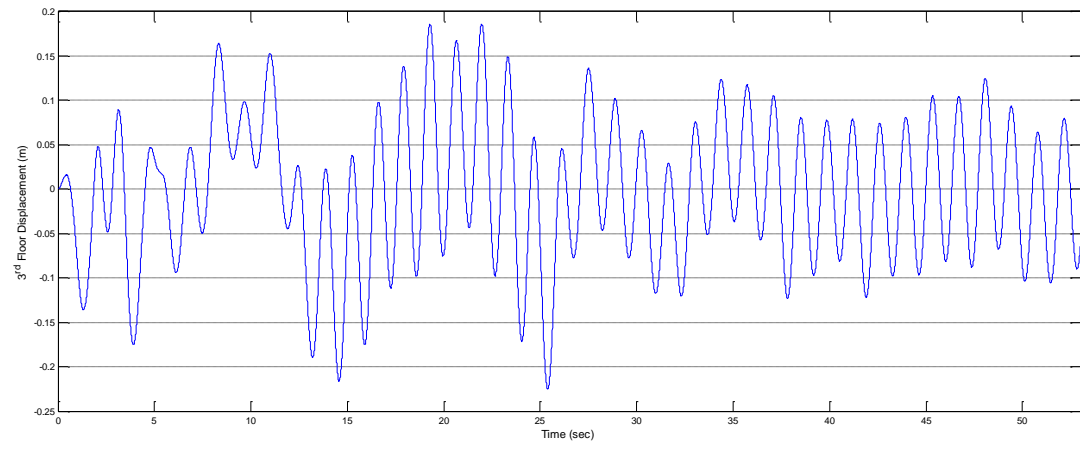
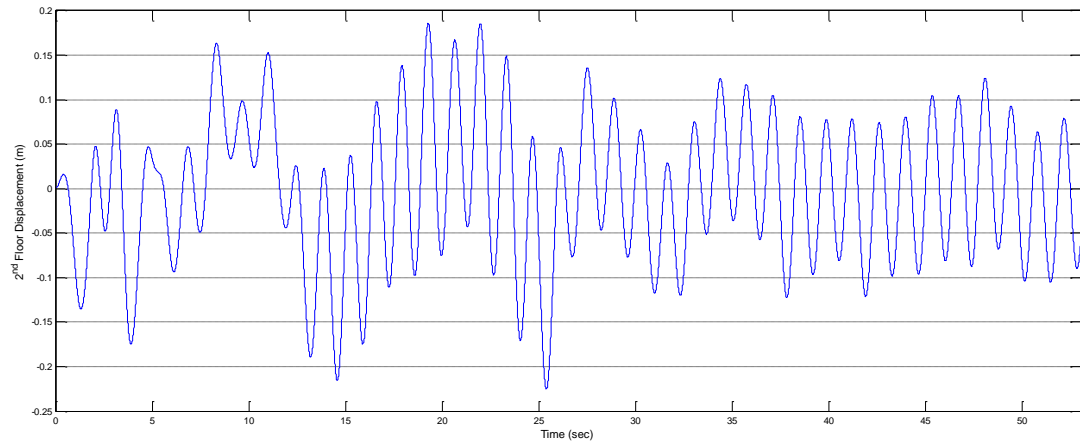
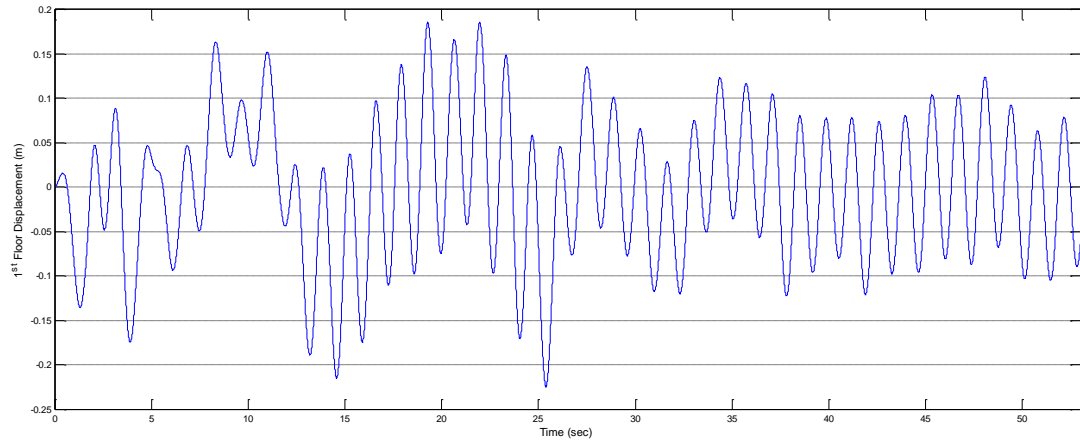
Εφαρμόζοντας την παραπάνω σεισμική διέγερση στο μη επενεργούμενο σύστημά μας λαμβάνουμε την απόκριση της κτιριακής κατασκευής. Συγκεκριμένα, λαμβάνουμε τα διαγράμματα της απόλυτης μετατόπισης και ταχύτητας για κάθε έναν απο τους δέκα ορόφους της κατασκευής (Βλ. Σχήμα 2.4 και 2.5), που αποτελούν τις συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης του συστήματος στο χώρο κατάστασης (Βλ. Σχέση 2.2 και 2.3). Σημειώνουμε ότι οι τιμές των μηχανικών παραμέτρων της σεισμικά μονωμένης βάσης ( $k_o, c_o$ ), λήφθηκαν να είναι ίσες με τις αντίστοιχες παραμέτρους του πρώτου ορόφου.

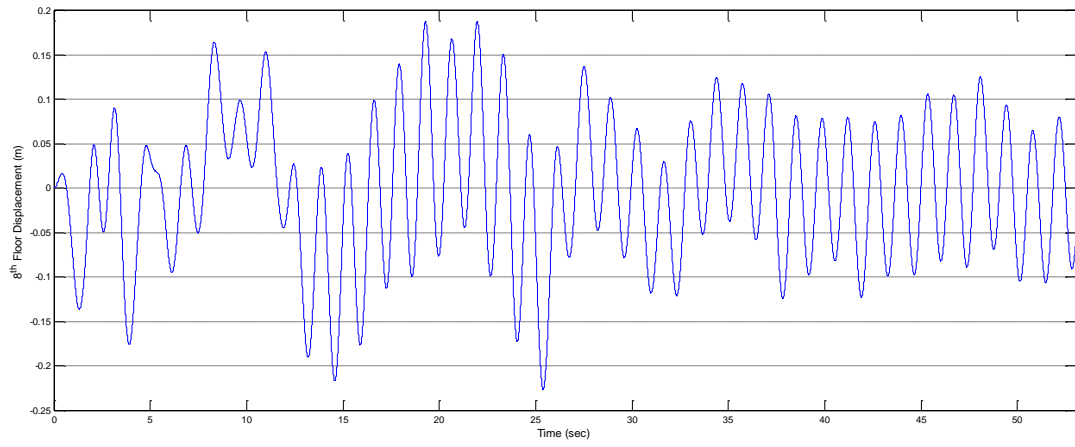
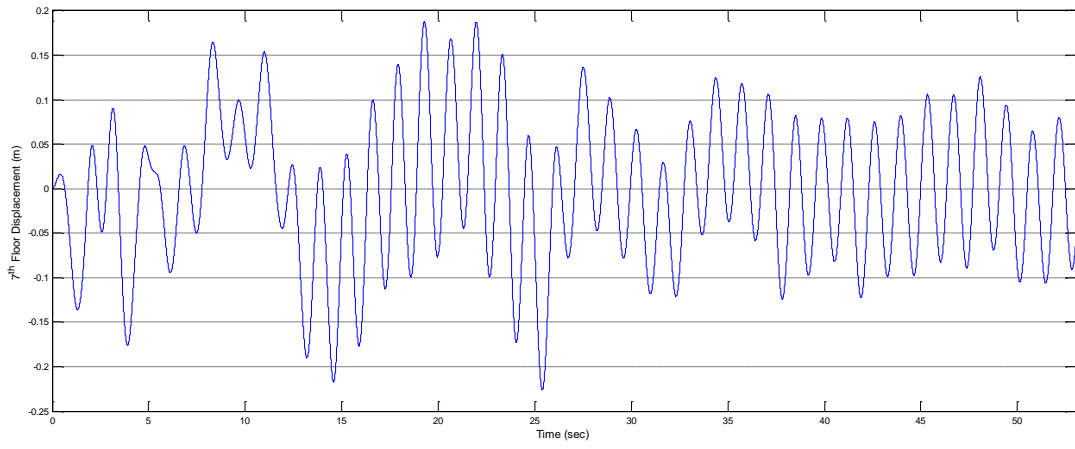
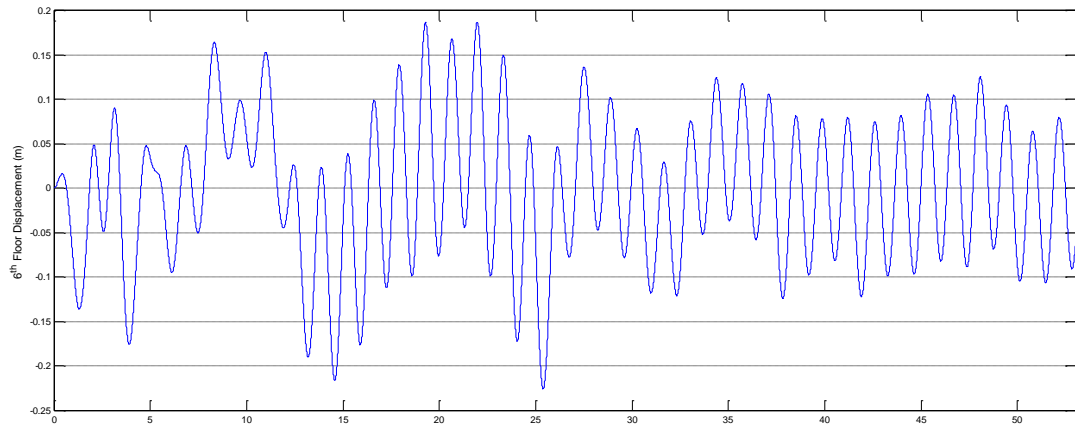
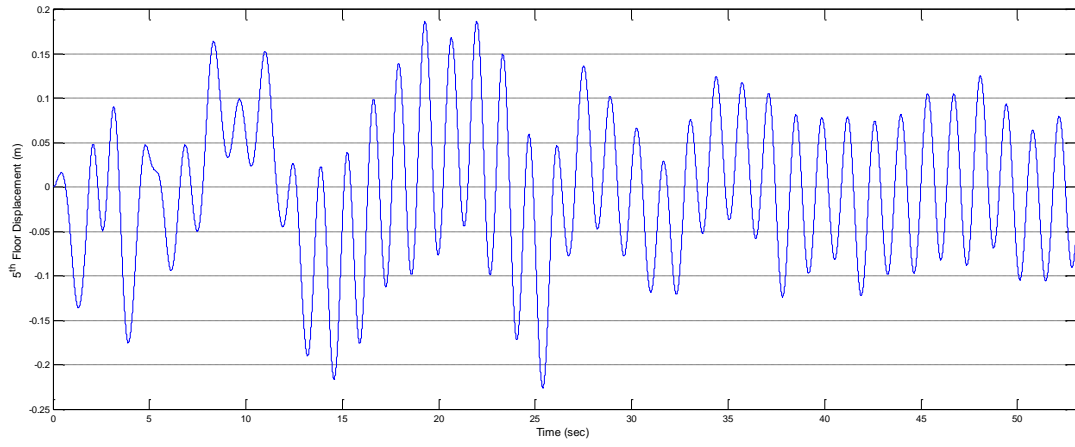


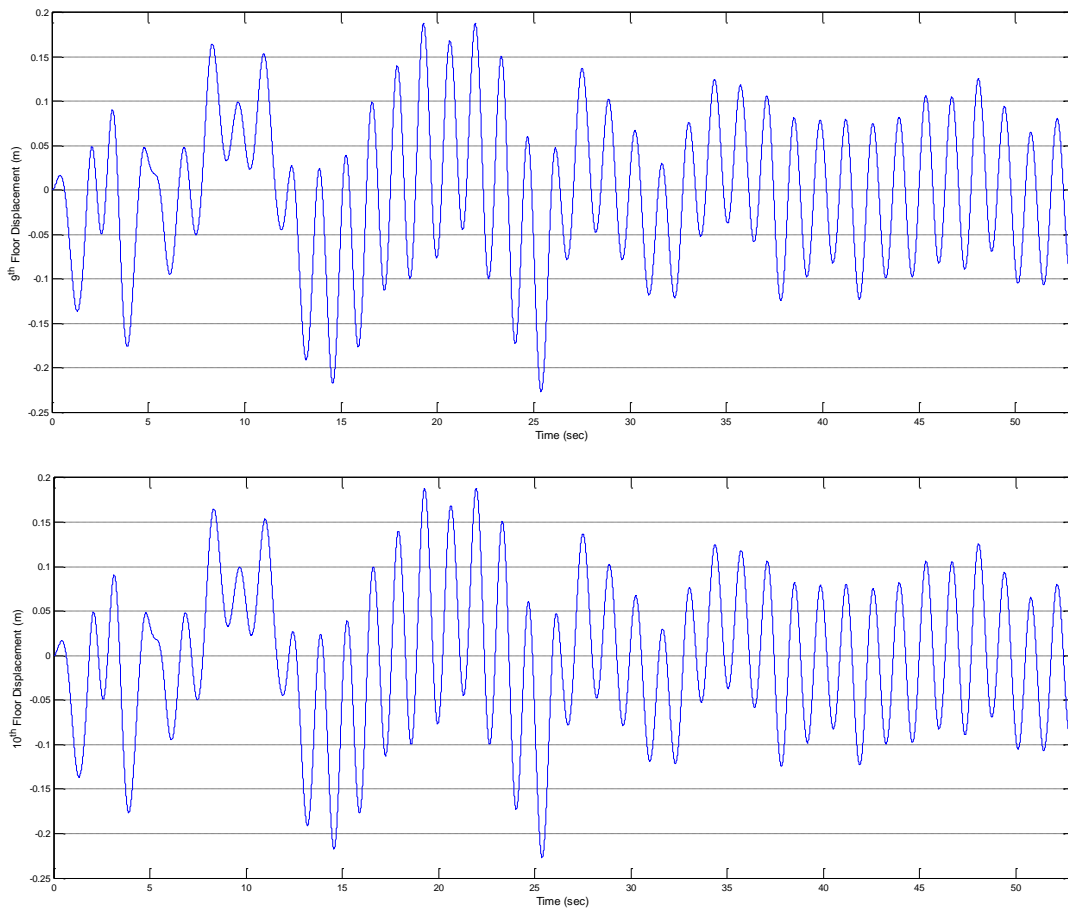




**Σχήμα 2.4:** Δυναμική Απόκριση Συστήματος Κατασκευής στους Ορόφους – Πεδίο Ταχύτητας

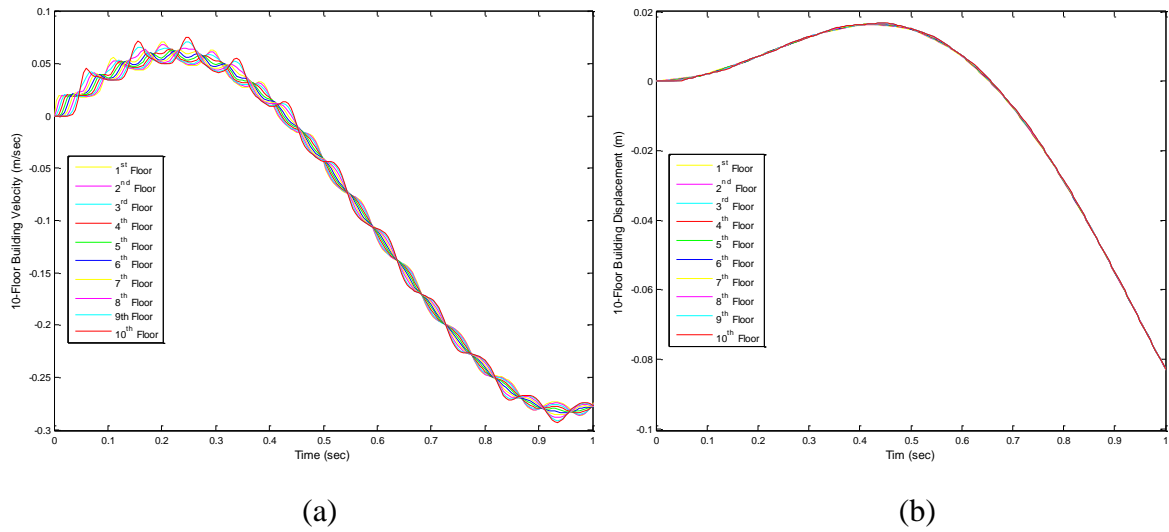




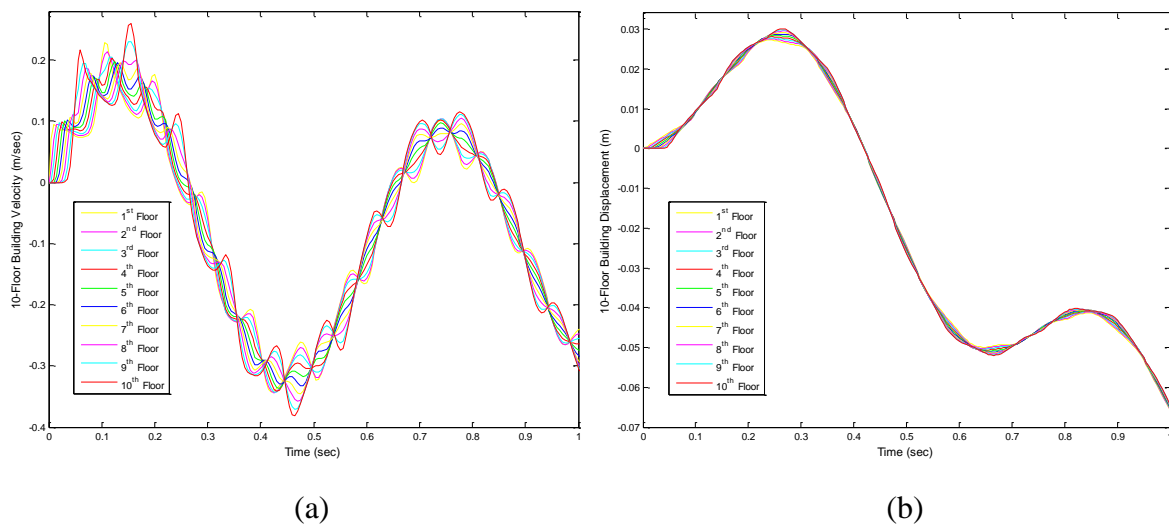


**Σχήμα 2.5:** Δυναμική Απόκριση Συστήματος Κατασκευής στους Ορόφους – Πεδίο Μετατόπισης

Εν συνέχεια, παρατηρούμε ότι, με διαφορετική επιλογή στις τιμές των μηχανικών παραμέτρων ( $k_o, c_o$ ) της σεισμικά μονωμένης βάσης, η δυναμική απόκριση του συστήματος μεταβάλλεται δραματικά (βλ. Σχήμα 2.5, 2.6, 2.7). Συγκεκριμένα, καθώς αυξάνεται το μέτρο καθενός εκ των δύο συντελεστών ( $k_o, c_o$ ), αυξάνει το μέγεθος των σχετικών αποκλίσεων στα πλάτη του πεδίου ταχύτητας και μετατόπισης ανάμεσα στους δέκα ορόφους. Τα παρατηρούμενα πλάτη των συνιστωσών του πεδίου ταχύτητας αυξάνουν. Αντίθετα, τα πλάτη στο πεδίο μετατοπίσεων δεν αυξάνει, ως και αναμένετο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ενισχύεται η συνολική ταλαντωτική συμπεριφορά της κατασκευής.



**Σχήμα 2.6:** Συνιστώσες Δυναμικής Απόκρισης Συστήματος Κατασκευής – a) Πεδίο Ταχύτητας, b) Πεδίο Μετατόπισης –  $(k_o, c_o) = (2188.96 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, 4439.25 \text{ Ns} \cdot \text{m}^{-1})$



**Σχήμα 2.7:** Συνιστώσες Δυναμικής Απόκρισης Συστήματος Κατασκευής – a) Πεδίο Ταχύτητας, b) Πεδίο Μετατόπισης –  $(k_o, c_o) = (10944.80 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, 22196.25 \text{ Ns} \cdot \text{m}^{-1})$



## 2.4 Υδραυλικός Επενεργητής

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το σύστημα που καλείται να ασκήσει κατάλληλη δύναμη στον πρώτο όροφο του υπό έλεγχο κτιρίου είναι ένας υδραυλικός επενεργητής. Τα υδραυλικά συστήματα είναι μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση κίνησης και τη μεταφορά ισχύος από την κινητήρια στην κινούμενη μηχανή (εργομηχανή) και χρησιμοποιούνται ως συνεργαζόμενο μέσο ένα υδραυλικό ρευστό (υγρό ή αέριο).

Η υδραυλική ισχύς είναι στην υπηρεσία του ανθρώπου εδώ και πολλούς αιώνες. Παλαιότερα, έγινε εκτεταμένη χρήση της για την προώθηση πλοίων, τη κίνηση ανεμόμυλων και νεροτροχών. Ακόμη και σήμερα η υδραυλική ισχύς χρησιμοποιείται στους υδραυλικούς σταθμούς ή στους ανεμόμυλους αιολικής ενέργειας για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Στα ανωτέρω παραδείγματα, η κινητική ενέργεια του ρευστού είναι αυτή που μετατρέπεται σε χρήσιμη από τον άνθρωπο κινητική ή ηλεκτρική ενέργεια. Σήμερα και κυρίως σε μηχανολογικές εφαρμογές (βιομηχανικά ρομπότ, ανυψωτικά μηχανήματα, εργαλειομηχανές, φρένα αυτοκινήτων κ.α.), όπου απαιτείται η άσκηση σημαντικών φορτίων επενέργησης, η υδραυλική ισχύς χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τη μεταφορά ισχύος και ενέργειας μέσω (υπό πίεση) ρευστών. Στην περίπτωση αυτή, αναφερόμαστε στην εκμετάλλευση της ανακτώμενης δυναμικής ενέργειας των ρευστών.

Η τελευταία μελετήθηκε και αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τον Pascal<sup>9</sup>, ο οποίος ανακάλυψε τον πολλαπλασιασμό δύναμης με τη χρήση υδραυλικής πίεσης. Με βάση αυτή την αρχή, ο Pascal επινόησε τη σύριγγα [104]. Έναν αιώνα αργότερα, ο J. Braham<sup>10</sup> επινόησε το υδραυλικό πιεστήριο (πρέσσα) [105]. Ο W. J. Armstrong, δύο αιώνες αργότερα, επινόησε τον υδραυλικό συσσωρευτή (hydraulic accumulator). Επρόκειτο για πύργους μεγάλου ύψους, στην κορυφή των οποίων προσαρμόζονταν δεξαμενές όπου συσσωρευόταν όγκος νερού με τη χρήση αντλίας ατμού. Η πίεση του νερού παρείχε την απαιτούμενη υδραυλική ισχύ σε υδραυλικούς γερανούς, οι οποίοι επιτελούσαν το επιθυμητό έργο [106].

Το σημαντικότερο πλεονεκτήματα των υδραυλικών συστημάτων είναι η ικανότητα δημιουργίας μεγάλων δυνάμεων. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό των συστημάτων αυτών που τα καθιστά εύχρηστα σε πρακτικές εφαρμογές είναι ο υψηλός λόγος δύναμης προς το βάρος. Επομένως, σε εφαρμογές όπου απαιτείται μικρό βάρος κατασκευής των συστημάτων επενέργησης, όπως είναι τα αεροπλάνα, τα βλήματα και οι πύραυλοι, οι υδραυλικές αντλίες χρησιμοποιούνται ευρέως. Λόγου χάρη, συγκριτικά με τους ηλεκτρικούς κινητήρες, οι υδραυλικοί επενεργητές για την ίδια ονομαστική ισχύ έχουν μικρότερες διαστάσεις και βάρος. Αναφορικά, στα υδραυλικά συστήματα πιέσεις μέχρι 300 bar είναι συνήθεις, ενώ οι μαγνήτες ηλεκτρικών κινητήρων δύνανται να ασκήσουν δύναμη που αντιστοιχεί σε πίεση μέχρι 20 bar.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τους υδραυλικούς κινητήρες στα βασικά μέρη τους και θα παρουσιάσουμε την αρχή λειτουργίας τους.

---

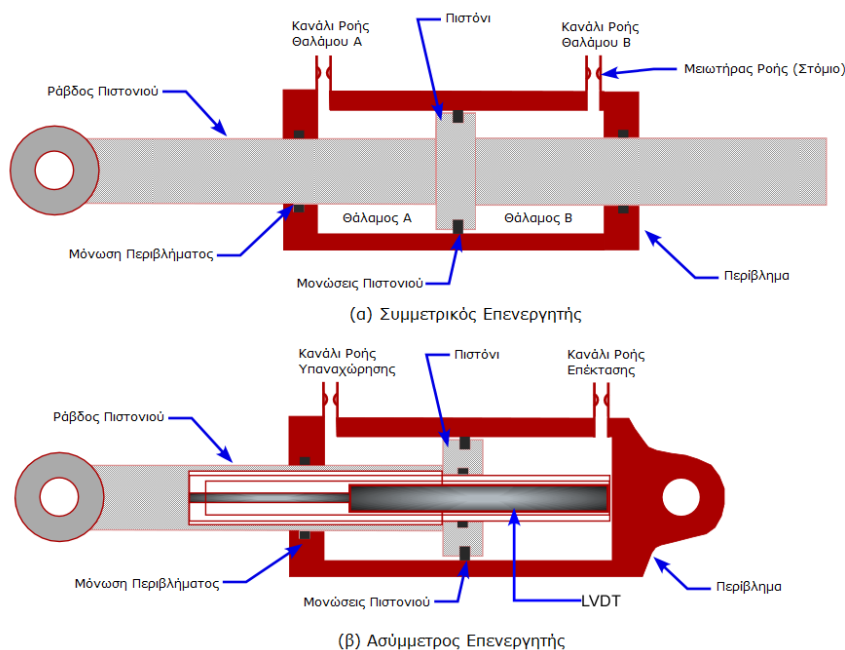
<sup>9</sup> **Blaise Pascal** (19 Ιουνίου 1623 - 19 Αυγούστου 1662) ήταν Γάλλος μαθηματικός, φυσικός, εφευρέτης, συγγραφέας και χριστιανός φιλόσοφος. Στον κλάδο των ρευστών και της υδραυλικής, απέδειξε ότι η υδροστατική πίεση δεν εξαρτάται από το βάρος του υγρού, αλλά από την υψομετρική διαφορά της στάθμης του. Επαλήθευσε την αρχή αυτή πειραματικά με την εφαρμογή ενός λεπτού σωλήνα σε ένα βαρέλι γεμάτο νερό και πλήρωση του σωλήνα με νερό μέχρι το επίπεδο του τρίτου ορόφου ενός κτιρίου. Αυτό προκάλεσε την διαρροή του νερού από τις σχισμές του βαρελιού. Το συγκεκριμένο πείραμα έγινε γνωστό ως Πείραμα του Βαρελιού του Pascal [104].

<sup>10</sup> **Joseph Bramah** (13 Απριλίου 1748 - 9 Δεκεμβρίου, 1814) γεννήθηκε στο Bamsley Yorkshire της Αγγλίας, ήταν εφευρέτης και κλειδαράς. Είναι γνωστός για την επινόηση του υδραυλικού πιεστηρίου (πρέσσα). Το πιεστήριο αποτελούνταν από δύο κυλίνδρους και δύο έμβολα διαφορετικών διατομής. Εάν μια δύναμη εξασκείται επί του μικρού εμβόλου, αυτό θα μπορούσε να μεταφραστεί σε μια μεγαλύτερη δύναμη επί του μεγαλύτερου εμβόλου. Η διαφορά στις δύο δυνάμεις θα είναι ανάλογη με τη διαφορά στην διατομή των δύο εμβόλων. Στην πραγματικότητα οι κύλινδροι δρουν με ανάλογο τρόπο που ένας μοχλός χρησιμοποιείται για την αύξηση της ασκούμενης δύναμης. Ο Bramah έλαβε δίπλωμα ευρεσιτεχνίας για το υδραυλικό πιεστήριο του 1795. Μαζί με την William George Armstrong, θεωρείται ένας από τους δύο πατέρες της υδραυλικής μηχανικής [105].

## 2.4.1 Βασικά Μέρη και Λειτουργία

Η βασική αρχή που διέπει τη λειτουργία των υδραυλικών συστημάτων έχει ως ακολούθως. Αρχικά, η μηχανική ισχύς μετατρέπεται -μέσω της αντλίας- σε υδραυλική ισχύ. Στη συνέχεια, μεταφέρεται στον κύλινδρο ή στον κινητήρα -μέσω του συνεργαζόμενου μέσου- όπου μετατρέπεται και πάλι σε μηχανική ισχύ, με τη μορφή γραμμικής πρισματικής κίνησης (prismatic motion), για την εκτέλεση του έργου στο τελικό εργαλείο δράσης (end-effector).

Τα βασικά εξαρτήματα ενός υδραυλικού συστήματος είναι: α) η αποθήκη συνεργαζόμενου μέσου, β) η αντλία που ενεργοποιεί το υδραυλικό ρευστό, γ) ένας ηλεκτρικός κινητήρας για την κίνηση της αντλίας, δ) βαλβίδες για τον έλεγχο της ροής και πίεσης, ε) ένας υδραυλικός κύλινδρος για γραμμική κίνηση στην εργομηχανή ή ένας υδραυλικός κινητήρας για την περιστροφή της ατράκτου της εργομηχανής. Το απλούστερο υδραυλικό σύστημα μπορεί να περιλαμβάνει: α) μία αντλία, β) μία αποθήκη, γ) μία βαλβίδα και δ) έναν κινητήρα ή κύλινδρο. Μερικά συστήματα μπορεί να περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερες αντλίες, μια επιλογή βαλβίδων διαφόρων τύπων και μια επιλογή απο κινητήρες ή κυλίνδρους για ποικίλες θέσεις εργασίας. Το πλήθος και το είδος των εξαρτημάτων που θα χρησιμοποιηθούν μπορεί να συνδυαστεί κατά τρόπο, ώστε το τελικό υδραυλικό σύστημα να εκτελεί τον επιθυμητό συνδυασμό κίνησης και απόδοσης ισχύος.



**Σχήμα 2.8:** Βασικές Κατηγορίες Υδραυλικών Επενεργητών [107]

Συναντώνται διάφορα είδη υδραυλικών επενεργητών. Εδώ, θεωρούμε τη περίπτωση υδραυλικών επενεργητών με δύο εσωτερικούς θαλάμους<sup>11</sup> (chambers).

<sup>11</sup> Συναντώνται και επενεργητές που διαθέτουν δύο ή περισσότερα πιστόνια και πολλαπλούς θαλάμους, όπως είναι ο **ισοζυγισμένος επενεργητής διπλής σειράς (Balanced Dual Tandem Actuator)**. Ο επενεργητής αυτός λειτουργεί απρόσκοπτα σε ενδεχόμενη αστοχία ενός εκ των δύο υδραυλικών υποσυστημάτων με «θυσία» του μισού της μέγιστης αποδιδόμενης ισχύος.

Ένας διαχωρισμός της κατηγορίας αυτής επενεργητών μπορεί να γίνει με βάση το εμβαδόν των υπο πίεση επιφανιών του πιστονιού. Αν οι επιφάνειες αυτές στους θαλάμους είναι ισεμβαδικές, τότε έχουμε τον ισοζυγισμένο (balanced) υδραυλικό επενεργητή (Βλ. Σχήμα 2.8). Ειδάλλως έχουμε τον μη ισοζυγισμένο (unbalanced). Οι ισοζυγισμένοι υδραυλικοί επενεργητές χρησιμοποιούνται κυρίως σε συστήματα αεροσκαφών, όπου τα φορτία είναι ίδια και προς τις δύο κατευθύνσεις (σύστημα προσγείωσης, περιστροφική απόκριση σε επιφάνειες ελέγχου πτήσης). Απο την άλλη, οι μη ισοζυγισμένοι υδραυλικοί επενεργητές χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου τα φορτία προς τις δύο κατευθύνσεις είναι διαφορετικά (αεροτομή, αναστροφέας ώσης). Οι δεύτεροι χρησιμοποιούν έναν γραμμικό μεταβλητό διαφορικό μετασχηματιστή (*linear variable differential transducer - LVDT*), ο οποίος στέλνει τα δεδομένα θέσης του τελικού εργαλείου δράσης του επενεργητή στην κεντρική μονάδα επεξεργασίας με σκοπό τον έλεγχο θέσης κλειστού βρόχου (closed-loop) και την ανίχνευση βλαβών (fault detection). Οι συγκεκριμένοι προτιμώνται όταν έχουμε περιορισμένο χώρο [107].

Τα σημαντικότερα τεχνικά χαρακτηριστικά ενός υδραυλικού επενεργητή είναι τα εξής [107]:

- **Ικανότητα Φορτίου (Load Capability):** Αποτελεί το κυριότερο κριτήριο που λαμβάνεται υπ'όψιν κατά τη σχεδίαση του μεγέθους του επενεργητή. Η εκτίμηση της τιμής φορτίου πρέπει να είναι ακριβής και να περιλαμβάνει εξωτερικές δυνάμεις, τριβές, αδρανειακές δυνάμεις και τυχόν θορύβους. Σε αρκετές εφαρμογές, το φορτίο είναι συνάρτηση της θέσης του τελικού εργαλείου δράσης (π.χ. σύστημα προσγείωσης). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι αναστροφείς ώσης (thrust reversers), οι οποίοι ως επενεργητές είναι εφοδιασμένοι με ένα βοηθητικό φορτίο κατά την επέκταση και ένα αντίθετης κατεύθυνσης φορτίο κατά την υπαναχώρηση. Σημειώνεται ότι τα φορτία των επιφανειών ελέγχου πτήσης διαφέρουν ανάλογα με τις συνθήκες πτήσης (πίεση, θερμοκρασία).
- **Διατομές Πιστονιών ανά Θάλαμο (Chamber Piston per Area):** Καθορίζουν την αποδιδόμενη δύναμη που μπορεί να αποδώσει ο επενεργητής.
- **Κανάλια Ροής (Flow Port Restrictor):** Το χαρακτηριστικό αυτό καθορίζει τη ροή από και προς τους θαλάμους του επενεργητή και κατ' επέκτασιν την ταχύτητα κίνησης του πιστονιού. Η ταχύτητα του πιστονιού εξαρτάται από τις διαμέτρους των στομιών και της διαφοράς πίεσης ανάμεσα σε αυτά. Έπειτα, είναι σημαντικό να υπάρχει επαρκής ροή στον θάλαμο αυξανόμενου όγκου, χωρίς την εμφάνιση του φαινομένου της σπηλαιώσης (cavitation). Μιά δεύτερη λειτουργία του στομιού είναι η απόσβεση των διακυμάνσεων πίεσης άνωσης (upstream pressure), μειώνοντας τις επιπτώσεις στην κίνηση του πιστονιού.
- **Γεωμετρία Περιβλήματος (Housing Geometry):** Διαμορφώνει τα διάκενα στην κατασκευή και στα προσαρτώμενα εξωτερικά εξαρτήματα. Βάσει προδιαγραφών, υπάρχει ανάγλυφη εσοχή για την προσαρμογή ηλεκτρικού καλωδίου.
- **Διατομή Ράβδου Πιστονιού (Piston Rod Diameter):** Απο κατασκευαστική σκοπιά, ο επενεργητής συμπεριφέρεται σαν μια στήλη που υποβάλλεται σε θλίψη ή εφελκυσμό. Η ικανότητα φόρτισης της στήλης καθορίζονται από το περίβλημα και από τη διατομή της ράβδου του πιστονιού. Η μέγιστη στατική ικανότητα φορτίου ισούται με το ελάχιστο γινόμενο της ικανότητας φορτίου της στήλης επί την διατομή του εμβόλου.
- **Μονώσεις Πιστονιού (Piston Seals):** Συνεισφέρουν στη συνολική τριβή του επενεργητή και καθορίζουν το βαθμό διαρροής συνεργαζόμενου μέσου (ρευστό)

ανάμεσα στους θαλάμους του επενεργητή. Οι ιδανικές μονώσεις παρουσιάζουν μηδενικές διαρροές, που συνεπάγεται ελαχιστοποίηση της παραγόμενης θερμότητας κατά τη λειτουργία του επενεργητή. Οι προδιαγραφές κατασκευής των μονώσεων είναι τέτοιες ώστε να έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερο από τη διάρκεια ζωής του επενεργητή (100,000 κύκλοι καταπόνησης).

- **Μονώσεις Περιβλήματος (Housing Seals):** Συνεισφέρουν στη συνολική τριβή που παρουσιάζει ο επενεργητής και σε ενδεχόμενες εξωτερικές διαρροές. Όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, ιδανικές μονώσεις περιβλήματος εμφανίζουν μηδενικές εξωτερικές διαρροές. Οι μονώσεις περιβλήματος μπορεί να παρουσιάζουν προεξοχές και στις δύο επιφάνειες (εσωτερική και εξωτερική). Επιπλέον, υπάρχουν υδραυλικοί επενεργητές στους οποίους είναι προσαρμοσμένες ειδικές μονώσεις τριβής (*scraper seals*) στην διεπαφή ράβδου-πιστονιού. Οι μονώσεις τριβής χρησιμοποιούν στον καθαρισμό της ράβδου του πιστονιού από πάγο ή άλλες ακαθαρσίες, ώστε να αποτρέπεται η είσοδος ξένων σωματιδίων στο εσωτερικό του επενεργητή και να προστατεύονται οι μονώσεις πίεσης.
- **Όγκος Θαλάμων (Chamber Volume):** Καθορίζονται από τις κινηματικές απαιτήσεις του υδραυλικού μηχανισμού και από την απαιτούμενη επιφάνεια του πιστονιού. Σημειώνεται ότι η επιφάνεια πιστονιού και ο όγκος θαλάμων χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της χαρακτηριστικής συχνότητας απόκρισης του επενεργητή.
- **Χαρακτηριστικά Φορτίσεων Στατικών και Καταπόνησης (Static Load & Fatigue Load Characteristics):** Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το φορτίο και οι απαιτήσεις συχνότητας καθορίζουν τις υπο σχεδίαση επιφάνειες πιστονιού. Εντούτοις, τα δομικά στοιχεία φέροντος φορτίου του επενεργητή πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο επενεργητής να παρουσιάζει αντοχή σε οριακά και τελικά φορτία. Επιπλέον, φορτίσεις κόπωσης<sup>12</sup> (*fatigue*) πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν κατά την σχεδίαση ενός επενεργητή. Πιο συγκεκριμένα, το πρωτεύον σχεδιαστικό κριτήριο σε επενεργητές με μικρούς κύκλους λειτουργίας είναι οι στατικές φορτίσεις. Αντίθετα, σε επενεργητές με μεγάλους κύκλους λειτουργίας ο σημαντικότερος παράγοντας σχεδίασης είναι η καταπόνηση.
- **Άλλα Χαρακτηριστικά Επενεργητή:** Οι ειδικές ασφάλειες διατηρούν την εκτεταμένη ή περιορισμένη θέση του επενεργητή. Οι διακόπτες θέσης παρέχουν την ένδειξη ότι ο επενεργητής βρίσκεται σε πλήρη διαδρομή κατά μία διεύθυνση. Ένα άλλο εξάρτημα που μπορεί να προσαρτηθεί σε έναν υδραυλικό επενεργητή είναι ένα είδος αποσβεστήρα (*snubber*) –το οποίο είναι συνήθως ένα πηνίο ή ένα ελατήριο τύπου *belleville*–, ο οποίος χρησιμοποιείται για την επιβράδυνση του πιστονιού κατά την κίνηση προσέγγισης προς μία εκ των αντιστοιχών δύο εσωτερικών επιφανειών του περιβλήματος. Ο αποσβεστήρας χρησιμοποιείται συνήθως σε περιπτώσεις εμφάνισης αυξημένων φορτίων και μεγάλων ταχυτήτων φόρτισης προς αποτροπή τυχόν βλαβών στο ίδιο το φορτίο ή το περίβλημα του επενεργητή. Μικρή επιφάνεια ροής σημαίνει μειωμένη εκροή. Σε κάποιες εφαρμογές, γίνεται χρήση ενός αποσβεστήρα υδραυλικού στομίου, ο οποίος ρυθμίζεται κατάλληλα, ώστε να ελαχιστοποιεί το μέγιστο της επιβράδυνσης της φόρτισης κατά την προσέγγιση του τέλους της διαδρομής του πιστονιού. Στην περίπτωση αυτή, ο αποσβεστήρας «κουρδίζεται» (*tuning*) κατά τρόπο ώστε να επέρχεται τετραγωνική απόσβεση πίεσης όταν το πιστόνι εισέρχεται στη φάση απόκτησης της μέγιστης εφικτής ταχύτητας.

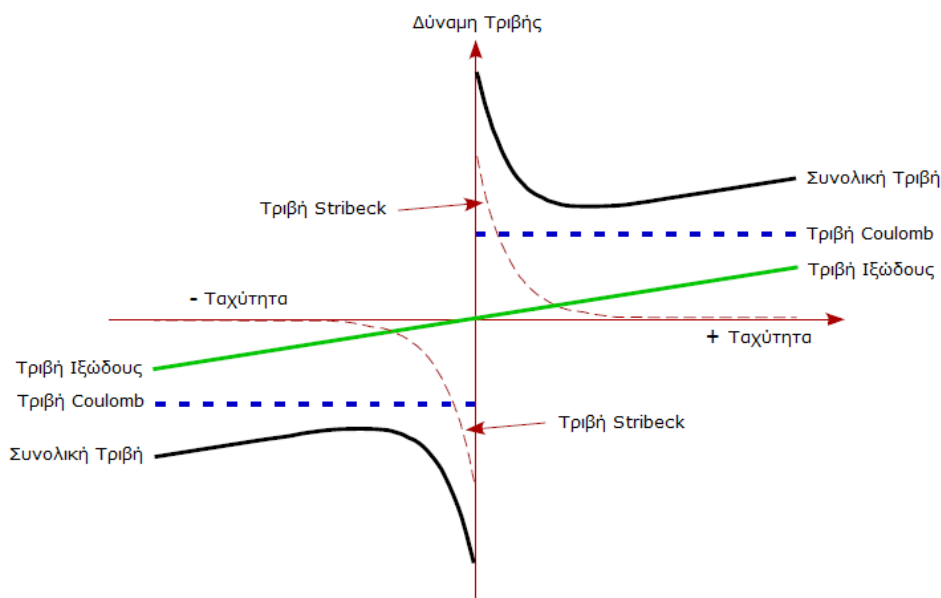
<sup>12</sup> Συνήθως ορίζονται από το φάσμα κύκλου λειτουργίας, το οποίο περιέχει: α) ένα πλήθος κύκλων, β) τη φόρτιση σε κάθε κύκλο, γ) την κρούση και δ) τη συχνότητα λειτουργίας.

## 2.4.2 Τριβή και Φυσική Συχνότητα

Σε γενικές γραμμές, όπως συμβαίνει σε όλα τα είδη επενεργητών, η τριβή είναι μονίμως αντίθετη στην ταχύτητα οδήγησης. Υπάρχουν τρία είδη προέλευσης που διαμορφώνουν τη συνολική τριβή σε έναν υδραυλικό επενεργητή. Αυτά είναι τα ακόλουθα:

- **Τριβή Coulomb:** Προκαλείται από στατικά ηλεκτρικά φορτία, τα οποία αναπτύσσονται κατά την σχετική κίνηση των διαφόρων μεταλλικών μερών του συνολικού συστήματος επενέργειας. Έχει σταθερό μέτρο και επομένως δεν εξαρτάται από τη ταχύτητα του πιστονιού. Μπορεί να γίνει αντιληπτή κατά την έναρξη κίνησης του επενεργητή. Ποσοτικοποιείται σαν την ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη πρόσδοσης (με υδραυλικά μέσα) στον επενεργητή, ώστε αυτός μόλις να ξεκινά να κινείται.
- **Τριβή Ιξώδους:** Προκαλείται από την δημιουργία *οριακών στρωμάτων (boundary layers)* ρευστού στα τοιχώματα των καναλιών ροής [30]. Το μέτρο της τριβής ιξώδους είναι μικρό σε χαμηλές ταχύτητες κίνησης και αυξάνεται γραμμικά με την ταχύτητα του πιστονιού.
- **Τριβή Stribeck:** Αφορά στις τριβές που αναπτύσσονται ανάμεσα στις μονώσεις και το περίβλημα ή την επιφάνεια του πιστονιού. Η τριβή Stribeck είναι υψηλή σε χαμηλές ταχύτητες και φθίνει εκθετικά -κατά μέτρο- αυξανόμενης της ταχύτητας.

Η συνολική τριβή, όπως προαναφέραμε, προκύπτει ως υπέρθεση των τριών παραπάνω ειδών τριβής (Βλ. Σχήμα 2.9). Παρατηρούμε ότι η συνολική τριβή σε χαμηλές ταχύτητες εκπροσωπείται από το σύνολο των τριβών Stribeck, ενώ σε υψηλές ταχύτητες από το σύνολο των τριβών ιξώδους. Η τριβή Coulomb απλά μετατοπίζει προς άνω ή κάτω την καμπύλη συνολικής τριβής.



Σχήμα 2.9: Είδη Τριβών Υδραυλικού Επενεργητή [107]

Η καμπύλη συνολικής τριβής παρουσιάζει ελάχιστο. Η φυσική ερμηνεία αυτού έγκειται ότι στο σημείο αυτό λειτουργίας (ταχύτητα πιστονιού), ο επενεργητής

εμφανίζει τις μικρότερες ενεργειακές απώλειες (θερμότητα). Παράλληλα, κατά τη λειτουργία σε μία περιοχή του παραπάνω σημείου μειώνεται η *ευαισθησία* (*sensitivity*) του επενεργητή σε εξωτερικές διαταραχές (π.χ. φορτία ανέμου). Γενικά είναι επιθυμητό να υπάρχει ένα χαμηλό επίπεδο τριβών κατά τη λειτουργία ενός επενεργητή. Εντούτοις υπάρχουν περιπτώσεις όπου η σχεδίαση επιβάλλει μεγαλύτερα ελάχιστα συνολικής τριβής, ώστε να αποφεύγονται τυχόν εσωτερικές διαρροές και να ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προδιαγραφές χρηστικής διάρκειας των μονώσεων.

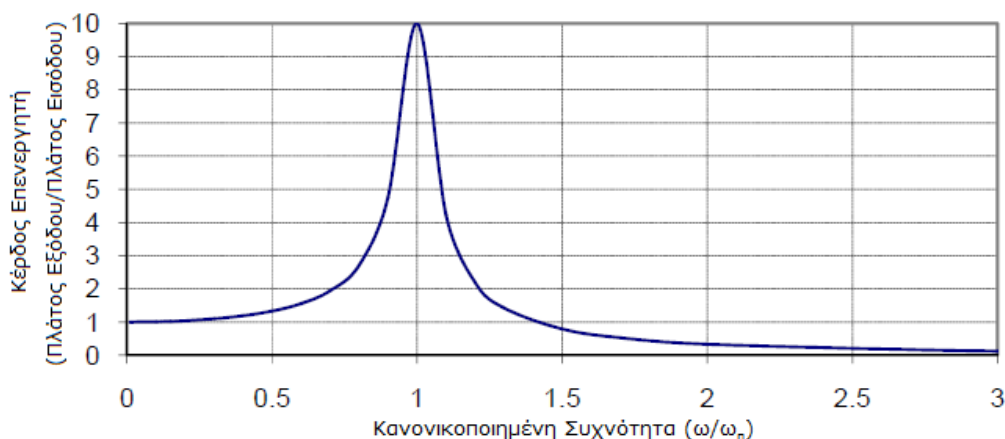
Η φυσική συχνότητα ενός υδραυλικού επενεργητή θέτει φράγματα στην απόδοση του. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό αποτελεί βασική παράμετρο σχεδίασης σε συστήματα επενεργητών που χαρακτηρίζονται από μεγάλη συχνότητα κύκλων λειτουργίας. Η υδραυλική ροή μέσα στον θάλαμο ενός επενεργητή είναι συμπιεστή (*compressible*). Ένα μηχανικό ανάλογο της υδραυλικής συμπεριφοράς αυτής είναι ένα ελατήριο μεγάλης ακαμψίας (*stiffness*). Η ακαμψία είναι συνάρτηση του *συντελεστή ασυμπιεστότητας* του ρευστού<sup>13</sup>, την επιφάνεια πιστονιού και τον όγκο θαλάμου. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το πιστόνι σαν μία αδρανειακή μάζα η οποία συνδέεται με ελατήρια στα εσωτερικά τοιχώματα του επενεργητή. Τότε η φυσική συχνότητα  $\omega_n$  (rad/sec) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_s}{m_p}} \quad (2.4)$$

όπου  $k_s$  : υδραυλική σταθερά τύπου «ελατηρίου» σε N/m

$m_p$  : μάζα πιστονιού σε Kg

Γενικά, κατά τη σχεδίαση, πρέπει να αποκλείεται η λειτουργία του επενεργητή σε συχνότητες που ξεπερνούν τη φυσική συχνότητα του επενεργητή, αφού το σύστημα γίνεται ασταθές και μη ελέγξιμο.



**Σχήμα 2.10:** Διάγραμμα Φασματικού Κέρδους Επενεργητή - Σύστημα 2<sup>ης</sup> Τάξης ( $\zeta=0.05$ ) [107]

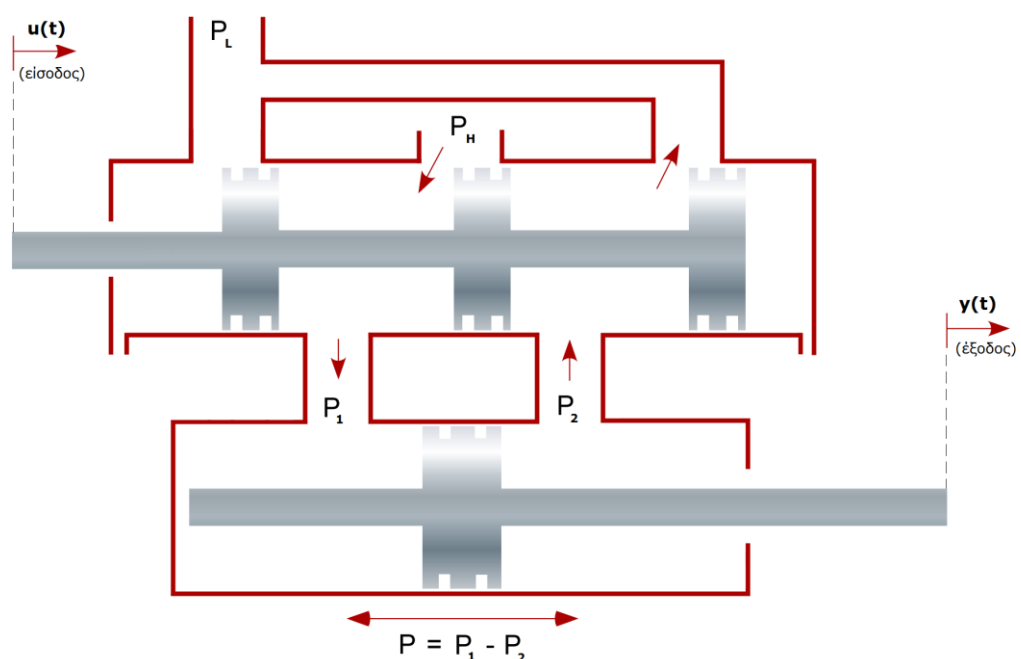
<sup>13</sup> Στα αγγλικά **fluid bulk modulus**. Εκφράζει την αντίσταση του ρευστού σε ομοιόμορφη θλίψη. Ορίζεται ως ο λόγος της απειροστής αύξησης πίεσης στο ρευστό προς τη μεταβολή του όγκου. Δίνεται από τη σχέση:  $K = -V \cdot \frac{dP}{dV}$ . Μονάδα μέτρησης στο S.I.S. είναι το 1 Pascal και η διαστατική σύνθεση μονάδας μέτρησης είναι το  $M^1 \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ . Η σταθερά ασυμπιεστότητας του νερού σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης είναι  $2.2 \times 10^9$  Pa, ενώ η συγκεκριμένη τιμή αυξάνει με την αύξηση της πίεσης περιβάλλοντος [108]. Το αντίστροφο μέγεθος εκφράζει τη συμπιεστότητα του ρευστού και είναι γνωστό στην ελληνική βιβλιογραφία σαν *συντελεστής συμπιεστότητας*.

Συγκεκριμένα, ο υδραυλικός επενεργητής μοντελοποιείται σαν ένα σύστημα 2<sup>ης</sup> Τάξης [16] [25] [35] [36]. Στο σύστημα αυτό, ο συντελεστής απόσβεσης  $\xi$  έχει αρκετά μικρή τιμή ( $\xi \in [0.05, 0.1]$ ). Παρακάτω δίνεται η απόκριση ενός τυπικού συστήματος 2<sup>ης</sup> Τάξης, όπου  $\xi = 0.05$ , για ημιτονοειδή είσοδο (Βλ. Σχήμα 2.10), όπου είναι εμφανής ο δεκαπλασιασμός του πλάτους του σήματος εισόδου στην περιοχή φυσικής συχνότητας του επενεργητή. Επομένως, ο μέγιστος αριθμός κύκλων λειτουργίας πρέπει να είναι αρκούντως μικρότερος από την φυσική συχνότητα του υδραυλικού επενεργητή.

Στην παρούσα εργασία, προτείνουμε την ενσωμάτωση στο συνολικό σύστημά μας ενός μοντέλου επενεργητή, το οποίο θα ασκεί δύναμη προς μία κατεύθυνση και μάλιστα σε μία διάσταση. Πρόκειται για τον γραμμικό υδραυλικό επενεργητή, τον οποίο θα ερευνήσουμε στη συνέχεια.

### 2.4.3 Γραμμικός Υδραυλικός Επενεργητής

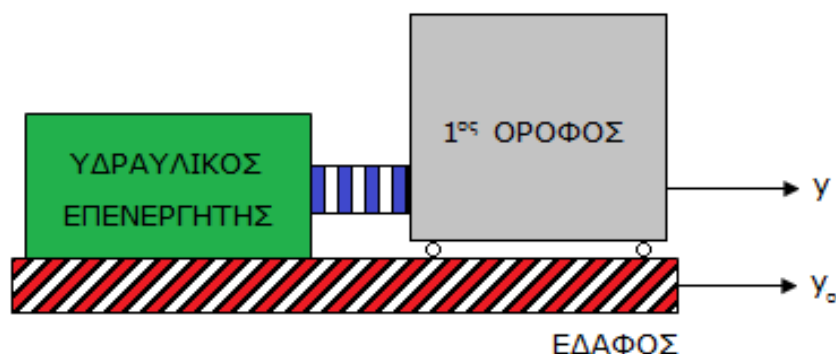
Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο υδραυλικός επενεργητής είναι ουσιαστικά ένας ενισχυτής δύναμης που ελέγχεται μέσω μίας σερβοβαλβίδας. Θεωρούμε την περίπτωση του ισοζυγισμένου επενεργητή, που αναλύθηκε παραπάνω, ο οποίος φέρει πιστόνι κυλινδρικής διατομής. Επιπλέον, θεωρούμε κατάλληλο λιπαντικό ως συνεργαζόμενο μέσο. Στο γραμμικό μοντέλο και συγκεκριμένα στο μέρος του επενεργητή από την είσοδο έως το πιστόνι διακρίνονται δύο κανάλια ροής. Το κανάλι σταθερής παροχής υψηλής πίεσης  $P_H$  και το κανάλι ροής χαμηλής πίεσης  $P_L$  (Βλ. Σχήμα 2.11). Αρχικά θεωρούμε ότι ο επενεργητής ισορροπεί με την έννοια ότι έχουμε απουσία εισερχόμενης ροής λιπαντικού υψηλής πίεσης  $P_H$ . Στη περίπτωση αυτή, οι πιέσεις  $P_1$  και  $P_2$  είναι ίσες. Μία κίνηση  $u(t)$  (είσοδος) της βαλβίδας από την αρχική αυτή θέση ισορροπίας έχει ως αποτέλεσμα την υψηλή εισροή λαδιού στο αντίστοιχο από τα δύο κατώτερα εγκάρσια κανάλια. Ειδικότερα, αν κινήσουμε τη βαλβίδα δεξιά, θα έχουμε αυξημένη εισροή λιπαντικού στο κατώτερο αριστερό κανάλι και άρα την αύξηση της πίεσης  $P_1$  στην αριστερή επιφάνεια του κυλινδρικού πιστονιού σε σύγκριση με την πίεση  $P_2$ , η οποία μάλιστα μειώνεται λόγω ανοίγματος του (άνω δεξιού) καναλιού εξόδου. Η διαφορά πίεσης  $|P_2 - P_1|$  ανάμεσα στα δύο τοιχώματα του πιστονιού προκαλεί κίνηση  $y(t)$  (έξοδος).



Σχήμα 2.11: Γραμμικός Υδραυλικός Επενεργητής με Έλεγχο Βαλβίδας

Σημειώνουμε ότι η εισροή λιπαντικού υψηλής πίεσης παρέχεται απο μια δεξαμενή διαμέσου ενός ακροφυσίου το οποίο χαρακτηρίζεται απο τον συντελεστή ροής ακροφυσίου<sup>14</sup>. Η εκροή λιπαντικού χαμηλής πίεσης απομακρύνεται και στη συνέχεια επανακυκλοφορεί μέσω μιάς υδραυλικής αντλίας. Η επιλογή λιπαντικού είναι σημαντική [62]. Στη συνέχεια, προχωράμε στην εξαγωγή του μοντέλου του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή.

Στην ευρύτερη μοντελοποίηση του συστήματος του κτιρίου, θεωρούμε ότι ο υδραυλικός επενεργητής είναι πακτωμένος στο έδαφος, ενώ το τελικό εργαλείο δράσης επενεργεί επί του 1<sup>ου</sup> ορόφου του κτιρίου (Βλ. Σχήμα 2.12).



**Σχήμα 2.12:** Κινηματικό Σύστημα Εδάφους-Υδραυλικού Επενεργητή-Κτιρίου

Θεωρούμε σαν είσοδο ελέγχου  $u(t)$  τη μετατόπιση της βαλβίδας  $x$ . Μετά απο αναλυτικούς υπολογισμούς (Βλ. Παράρτημα Γ), προκύπτει η εξίσωση της δύναμης που ασκεί το πιστόνι δεδομένης της μετατόπισης της βαλβίδας ρύθμισης:

$$F_{act} = A \cdot \Delta P = A \cdot \frac{C_x \cdot x - A\rho \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt} \right)}{C_p} \quad (2.5)$$

- όπου
- $A$  : ενεργή επιφάνεια του κυλινδρικού πιστονιού σε  $m^2$
  - $C_x, C_p$  : συντελεστές σερβοβαλβίδας σε  $m^2/s$  και  $m^5/(N \cdot s)$
  - $x$  : μετατόπιση σερβοβαλβίδας ρύθμισης σε  $m$
  - $y - y_0$  : σχετική μετατόπιση 1<sup>ου</sup> ορόφου ως προς το έδαφος σε  $m$

Αναφορικά με τους συντελεστές σερβοβαλβίδας  $C_x$  και  $C_p$  σημειώνουμε ότι η γνώση των τιμών τους για το αντίστοιχο υδραυλικό σύστημα κρίνεται απαραίτητη στον καθορισμό της ευστάθειας, της συχνότητας της απόκρισης, καθώς και άλλων δυναμικών χαρακτηριστικών. Ο συντελεστής  $C_x$  ονομάζεται *κέρδος ροής (flow gain)*  $C_x$  και καθορίζει σε σημαντικό βαθμό το μόνιμο κέρδος του ανοικτού βρόγχου ενός συστήματος, ενώ ο *συντελεστής ροής-πίεσης (flow-pressure coefficient)*  $C_p$  επιδρά στο ρυθμό απόσβεσης των συνδυασμών βαλβίδας και πιστονιού. Ειδικότερα, ο συντελεστής  $C_p$  έχει συνήθως πολύ μικρή τιμή σε σχέση με το συντελεστή  $C_x$  [61].

Οι τιμές των συντελεστών σερβοβαλβίδας  $C_x$  και  $C_p$  παίζουν σημαντικό ρόλο στην ευστάθεια του συστήματος ανοικτού βρόγχου (open loop) του επενεργητή. Οι τιμές των συντελεστών της σερβοβαλβίδας μεταβάλλονται με βάση την επιλογή του σημείου λειτουργίας (σημείο γραμμικοποίησης) του συστήματος του επενεργητή. Η λειτουργία του συστήματος συνήθως συμβαίνει γύρω από το σημείο προέλευσης των καμπυλών

<sup>14</sup> Στα αγγλικά *orifice flow coefficient*.



ροής και πίεσης (Βλ. Θέση Ισορροπίας Βαλβίδας / Σχήμα 2.11). Στο σημείο αυτό, το κέρδος ροής  $C_x$  είναι μέγιστο, δίνοντας υψηλό κέρδος στο σύστημα, ενώ ο συντελεστής ροής-πίεσης  $C_p$  είναι ελάχιστος, δίνοντας αποσβέσεις μικρού πλάτους. Επομένως, έχουμε μια φυσική ερμηνεία της σημασίας του σημείου αυτού λειτουργίας ως το πλέον κρίσιμο για την ευστάθεια του συστήματος του επενεργητή. Όταν ένα σύστημα είναι ευσταθές σε αυτό το σημείο, τότε είναι σχεδόν βέβαιο –αν δεν συναντώνται άλλες κατασκευαστικές ιδιομορφές (structural singularities)- ότι αν το σύστημα είναι ευσταθές στο σημείο αυτό, τότε είναι ευσταθές και σε όλα τα υπόλοιπα σημεία λειτουργίας [62].

Έπειτα, προκειμένου να επιλέξουμε επενεργητή και σερβοβαλβίδα, λαμβάνουμε υπ’ όψιν προηγούμενες προσομοιώσεις. Οι προσομοιώσεις αυτές έδειξαν ότι η μέγιστη απαιτούμενη δύναμη ελέγχου για την αντισεισμική προστασία πραγματικών πολύροφων κτιρίων ανέρχεται στα 18 KN [20]. Επομένως, επιλέγουμε επενεργητή που μπορεί να παρέχει την παραπάνω δύναμη, ακόμα και στην περίπτωση ύπαρξης σημαντικών διαταραχών (φορτία ισχυρού ανέμου). Ένας τέτοιος επενεργητής είναι ο 244.23 (Βλ. Σχήμα 2.13), που κατασκευάζει η αμερικάνικη εταιρία MTS, η οποία ειδικεύεται στην παραγωγή γραμμικών επενεργητών υψηλής απόδοσης [63]. Τα εργαστήρια του Κτιρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. είναι εξοπλισμένα με MTS επενεργητές, τους οποίους χρησιμοποιεί σε δοκιμές αντοχής μεταλλικών δοκιμίων. Τέλος, το Εργαστήριο Αντισεισμικής Τεχνολογίας του Ε.Μ.Π. επίσης διαθέτει MTS επενεργητές, τους οποίους χρησιμοποιεί σε σεισμικές προσομοιώσεις, κατά τις οποίες γίνεται παραγωγή και διάχυση δονήσεων σε κτίριο εδραζόμενο πάνω σε τράπεζα. Η συγκεκριμένη σειρά επενεργητών παρέχει ακρίβεια και υψηλή αξιοπιστία σε μια μεγάλη πληθώρα σερβουδραυλικών δοκιμών (στατικών και δυναμικών).



**Σχήμα 2.13:** Γραμμικός Υδραυλικός Επενεργητής - MTS 244 Actuator Series [63]

Τα βασικά τεχνικά χαρακτηριστικά του MTS 244.23 υδραυλικού γραμμικού επενεργητή παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

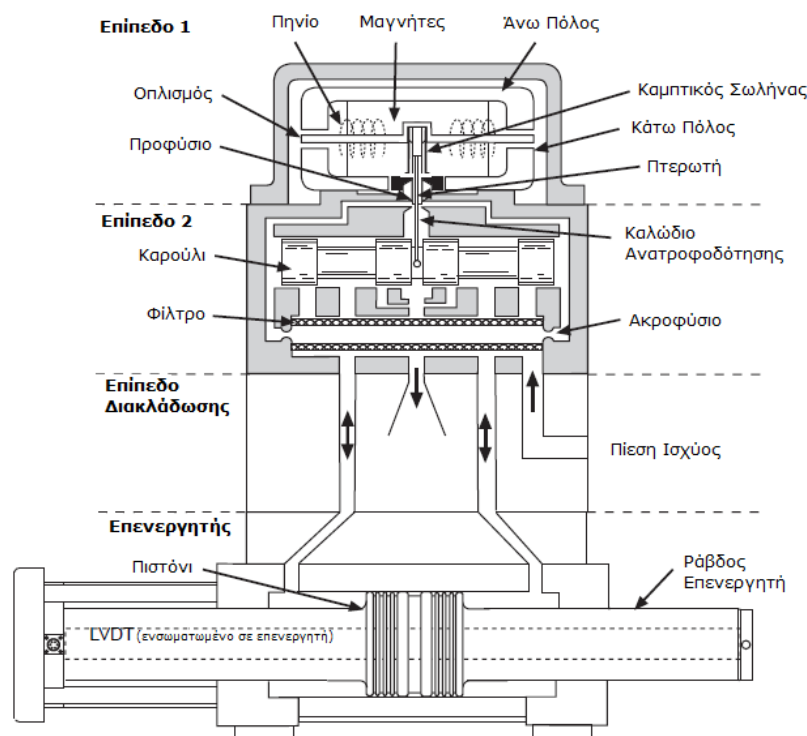
Αποδιδόμενη Δύναμη (KN)	Εύρος Διαδρομής (mm)	Διάμετρος Ράβδου (mm)	Ενεργός Επιφάνεια Πιστονιού (cm <sup>2</sup> )
150	152.4	69.9	82.13

**Πίνακας 2.2:** Τεχνικά Χαρακτηριστικά Υδραυλικού Επενεργητή MTS 244.23 [63]

Περισσότερες πληροφορίες και τεχνικά χαρακτηριστικά του MTS 244.23 επενεργητή παρέχονται στη σχετική βιβλιογραφία [63].

Έπειτα, η μέτρηση της θέσης του πιστονιού πραγματοποιείται μέσω ενός LVDT μετατροπέα (Βλ. Ενότητα 2.4.1). Ο LVDT μετατροπέας μετράει σε κάθε στιγμή την απόλυτη μετατόπιση του εμβόλου και στέλνει το ανάλογο σήμα ανάδρασης (τάση εξόδου) για την αυτόματη ρύθμιση του επενεργητή. Η τοποθέτηση της LVDT διάταξης γίνεται αξονοσυμμετρικά στο εσωτερικό του πιστονιού και της ράβδου του επενεργητή. Τα υπόλοιπα στοιχεία (Βλ. Ενότητα 2.4.1) του επενεργητή είναι προσαρμοσμένα πάνω πάνω σε αυτόν και συνιστούν τη διασύνδεση του με την υδραυλική τροφοδοσία πίεσης.

Το εξάρτημα της σερβοβαλβίδας καθορίζει την ροή ρευστού, καθώς και την ταχύτητα κίνησης του πιστονιού. Πρακτικά, η σερβοβαλβίδα μετατρέπει τα ηλεκτρικά σήματα, που στέλνονται από τη διάταξη LVDT σε κατάλληλα υδραυλικά σήματα για την οδήγηση του επενεργητή (Βλ. Σχήμα 2.14).



**Σχήμα 2.14:** Ανάλυση Δομής Σερβοβαλβίδας MTS 252.25 [64]

Η επιλογή της σερβοβαλβίδας<sup>15</sup> ακολουθεί τα πρότυπα του επενεργητή που επιλέξαμε. Πρόκειται για τη σειρά σερβοβαλβίδων MTS 252. Σημειώνεται ότι η κατασκευάστρια εταιρία των σερβοβαλβίδων αυτών είναι η αμερικανική Moog, η οποία κατέχει παγκοσμίως περίοπτη θέση στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Τελικά, επιλέγουμε τη σερβοβαλβίδα 252.25 (Βλ. Σχήμα 2.15). Η πίεση τροφοδοσίας της 252.25 μπορεί να κυμανθεί από 50 έως 3000psi. Έχει μετρηθεί ότι η πτώση πίεσης της σερβοβαλβίδας είναι 1000psi και δίνει παροχή 56L/min στο κύλινδρο. Η συγκεκριμένη σερβοβαλβίδα (σειρά C) ζυγίζει 1.03Kg. Οι εξωτερικές διαστάσεις της είναι 9.6cm×8.7cm×7.6cm. Περισσότερα χαρακτηριστικά της σερβοβαλβίδας 252.25, καθώς και διαγράμματα χαρακτηριστικών λειτουργίας παρέχονται στη σχετική βιβλιογραφία [64].

<sup>15</sup> Το εργαστήριο του Network for Earthquake Engineering Simulation (NEES) που στεγάζεται στο University at Buffalo στη Νέα Υόρκη διαθέτει τον πλέον σύγχρονο και πλούσιο εξοπλισμό σεισμικών προσομοιώσεων σε εργαστηριακή κλίμακα. Βάσει απαιτήσεων της επιθυμητής εργασίας, παρέχεται μια ποικιλία ολοκληρωμένων υδραυλικών συστημάτων προσομοίωσης, που βασίζεται σε συνδυασμούς υδραυλικών επενεργητών-σερβοβαλβίδων. Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο αναγνώστης προτρέπεται να ανατρέξει στην σχετική βιβλιογραφία [111].



**Σχήμα 2.15:** Σερβοβαλβίδα MTS 252.25 [64]

Κατόπιν, υπολογίζουμε τους συντελεστές  $C_x$  και  $C_p$  της σερβοβαλβίδας, οι οποίοι δίνονται από τους ακόλουθους τύπους (Βλ. Παράρτημα Γ):

$$C_x = C_d k \sqrt{\frac{P_H}{\rho}} \quad (2.6)$$

$$C_p = C_d k \frac{x_o}{4\sqrt{\rho P_H}} \quad (2.7)$$

όπου  $C_d$  : συντελεστής διαρροών (discharge coefficient)  
 $P_H$  : πίεση τροφοδοσίας (supply pressure)  
 $\rho$  : πυκνότητα συνεργαζόμενου ρευστού (fluid density)  
 $x_o$  : μετατόπιση βαλβίδας (valve stroke)  
 $k$  : μήκος στομίου ροής εισόδου (orifice depth)

**Σγόλιο:** Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.6) και (2.7), προκύπτει ότι ο λόγος των συντελεστών  $\lambda = \left( \frac{C_x}{C_p} \right)$  εξαρτάται αποκλειστικά από την πτώση πίεσης της  $P_H$  και από τη διαδρομή της σερβοβαλβίδας (Βλ. Σχέση (2.8)). Εδώ, έχουμε  $|\lambda| = 9.5601 \cdot 10^8$ .

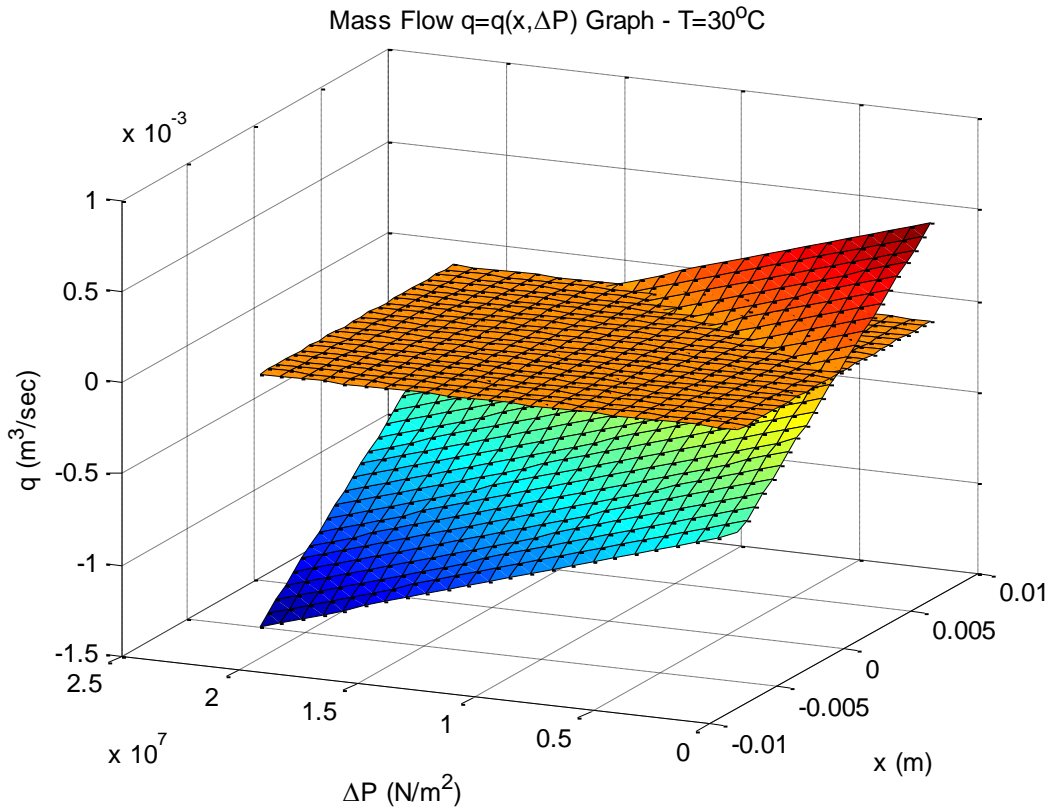
$$\lambda = \lambda(P_H, x_o) = \frac{2 \cdot P_H}{x_o} \quad (2.8)$$

Οι αριθμητικές τιμές που προέκυψαν είναι οι ακόλουθες (Βλ. Παράρτημα Γ):

$$C_x = 7.701276 \cdot 10^{-2} \frac{m}{\text{sec}^2} \quad (2.9)$$

$$C_p = 4.027821 \cdot 10^{-11} \frac{m^5}{N \cdot \text{sec}} \quad (2.10)$$

**Σγόλιο:** Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον εφικτό χώρο λειτουργίας (απο προδιαγραφές) του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή (Βλ. Παράρτημα Γ), προκύπτει το αντίστοιχο διάγραμμα εξάρτησης (Βλ. Σχήμα 2.16) της παροχής μάζας ρευστού  $q$  προς τον επενεργητή απο τη μετατόπιση της σερβοβαλβίδας  $x=x_v$  και τη διαφορά πίεσης ανάμεσα στα τοιχώματα του κυλινδρικού πιστονιού  $\Delta P$ . Επιπλέον, στο διάγραμμα αναπαρίσταται και το (οριζόντιο) επίπεδο μηδενικής παροχής μάζας ρευστού. Η φυσική ερμηνεία είναι ότι εκατέρωθεν του επιπέδου αυτού αναστρέφεται η φορά παροχής. Το αντίστοιχο αρχείο m-file καλείται με το όνομα **flow.m**.



**Σχήμα 2.16:** Γράφημα Παροχής Μάζας Ρευστού Επενεργητή MTS 244 με Εφαρμογή Σερβοβαλβίδας MTS 252.25

Επομένως, απο τον Πίνακα 2.2 (ενεργή επιφάνεια κυλινδρικού πιστονιού) και απο τις σχέσεις (2.5), (2.9) και (2.10) προκύπτει η δύναμη του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή  $F_{act}$  σαν συνάρτηση της μετατόπισης της σερβοβαλβίδας  $x_v$ :

$$F_{act} = 82.13 \cdot (10^{-2})^2 \cdot \frac{7.701276 \cdot 10^{-2} \cdot x_v - 82.13 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 844.2 \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right)}{4.027821 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$F_{act} = \left[ 1.570342 \cdot x_v - 141.377023 \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right) \right] \cdot 10^7 \text{ N} \quad (2.11)$$

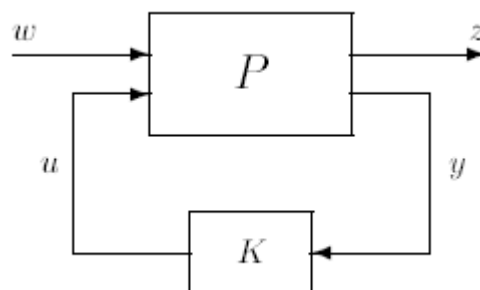
**Συμπέρασμα:** Η δύναμη του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή του συστήματος του 10-όροφου κτιρίου εξαρτάται γραμμικά απο την μετατόπιση της σερβοβαλβίδας (είσοδος) και απο τη σχετική ταχύτητα του 1<sup>ου</sup> ορόφου ως προς το έδαφος (διαταραχή).

# 3. Θεωρία $H_\infty$ Αυτόματης Ρύθμισης

Στο κεφάλαιο αυτό, κάνουμε την απαιτούμενη αναδρομή στην μαθηματική θεωρία θεμελίωσης και ανάπτυξης της  $H_\infty$ -Εύρωστης Αυτόματης Ρύθμισης. Ειδικότερα, κάνουμε μια εισαγωγή σε νόρμες σημάτων και συστημάτων καθώς και στην SVD παραγοντοποίηση, που χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην αντίστοιχη θεωρία. Έπειτα, παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα υλοποίησης της  $H_\infty$ -ρύθμισης όταν το σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάσταση. Έπειτα, θέτουμε τις βασικές αρχές που διέπουν την σχεδίαση της απαιτούμενης  $H_\infty$ -ρύθμισης του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας. Προκειμένου να πετύχουμε το τελευταίο εισάγουμε την έννοια των συναρτήσεων ευαισθησίας.

## 3.1 Εισαγωγή

Σε πραγματικά συστήματα που συναντώνται σε βιομηχανικές και άλλες εφαρμογές επάγεται ένα μέγεθος αβεβαιότητας (uncertainty). Οι πηγές αβεβαιότητας ενός συστήματος εντοπίζονται στα εξής: α) αβεβαιότητα γνώσης της ακριβούς τιμής των παραμέτρων κατά τη μοντελοποίηση του συστήματος, β) διαταραχές που επηρεάζουν το σύστημα. Οι κλασικές μέθοδοι αυτόματης ρύθμισης, όπως είναι οι PID-ρυθμιστές, η ανατροφοδότηση κατάστασης (state feedback) και οι παρατηρητές πλήρους/μειωμένης τάξης (full/reduced order observer) συχνά αδυνατούν να διαχειριστούν αποτελεσματικά την αβεβαιότητα, ικανοποιώντας την ευστάθεια και τις απαιτούμενες προδιαγραφές απόκρισης (λ.χ. χρόνος ανόδου  $t_p$ , υπερπήδηση  $M_p$  και χρόνος αποκατάστασης  $t_s$ ) του κλειστού ανατροφοδοτούμενου συστήματος. Επομένως, παρουσιάζεται η ανάγκη ανάπτυξης ντετερμινιστικών μεθόδων, οι οποίες να επιτυγχάνουν την εύρωστη αυτόματη ρύθμιση των παραπάνω συστημάτων. Η μοντέρνα αυτή θεώρηση εύρωστης αυτόματης ρύθμισης οδήγησε στην Θεωρία του  $H_\infty$  Ελέγχου. Η θεωρία αυτή αναπτύχθηκε στις αρχές του 80' από τους G. Zames, J. W. Helton και A. Tannenbaum [11] [113]. Σε αδρές γραμμές, η συγκεκριμένη τεχνική στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της επίδρασης της διαταραχής επί του συστήματος κλειστού βρόχου. Η επίδραση αυτή εκφράζεται είτε σε όρους μετάβασης σε ευστάθεια (stabilization) είτε σε όρους συμπεριφοράς (performance), βάσει της εκάστοτε μορφοποίησης του προβλήματος. Αναφορικά, η ταυτόχρονη ικανοποίηση εύρωστης ευστάθειας και εύρωστης επιθυμητής απόκρισης είναι αρκετά δύσκολη. Η τεχνική που φαίνεται να ικανοποιεί καλύτερα την παραπάνω απαίτηση είναι η  $H_\infty$  σχηματοποίηση βρόχου ( $H_\infty$  loop shaping) [4] [6] [11].



Σχήμα 3.1: Γενική Διάταξη Εύρωστου Ελέγχου

Εν συνεχεία, παρουσιάζουμε τη γενική διατύπωση του προβλήματος Εύρωστου Ελέγχου, το οποίο η Θεωρία του  $H_\infty$  Ελέγχου καλείται να επιλύσει (Βλ. Σχήμα 3.1). Έστω το αρχικό σύστημα  $P$  και  $K$  ο υπό σχεδίαση ελεγκτής. Έστω τα ακόλουθα σήματα  $w$ : εξωγενές σήμα (exogenous signal),  $z$ : σήμα σφάλματος (error signal),  $y$ : μετρούμενη έξοδος (measured output),  $u$ : είσοδος ελέγχου (control input). Το πρόβλημα συνοψίζεται στην σχεδίαση κατάλληλου ελεγκτή  $K$ , ώστε να ελαχιστοποιείται το μέτρο του σήματος σφάλματος  $z$  ικανοποιώντας τις επιθυμητές προδιαγραφές σχεδίασης (ευστάθεια και συμπεριφορά). Σημειώνουμε εδώ ότι το εξωγενές σήμα  $w$  περιέχει την διαταραχή ή/και το σημείο αναφοράς (set point), ενώ το σήμα σφάλματος  $z$  μπορεί να θεωρηθεί σαν διαταραγμένη έξοδος για το σύστημά μας.

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται η παρουσίαση της σχετικής θεωρίας. Σε αρκετά εξειδικευμένα σημεία που ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας δίνονται οι σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές.

## 3.2 Νόρμες Συστημάτων και SVD Παραγοντοποίηση

Στην παράγραφο αυτή, αφού παρουσιάζουμε τις πίο σημαντικές νόρμες σημάτων και γραμμικών δυναμικών συστημάτων, εισάγουμε στην ανάλυσή μας το ισχυρό μαθηματικό εργαλείο της SVD Παραγοντοποίησης.

### 3.2.1 $L_p$ Νόρμες

Αρχικά, παρουσιάζουμε τις πίο σημαντικές νόρμες σημάτων. Έπειτα, παρουσιάζουμε τις νόρμες που συναντώνται σε γραμμικά δυναμικά συστήματα [7] [74].

**Ορισμός 1.** Έστω  $v(t)$  χρονικά εξαρτημένο βαθμωτό σήμα. Η  $L_2$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|v\|_2 = \left( \int_0^\infty v(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

**Σχόλιο:** Η φυσική ερμηνεία της  $L_2$ -νόρμας ενός σήματος σχετίζεται με την συνολική ενέργεια που αυτό περιέχει. Λόγου χάρη, αν  $v(t)$  συμβολίζει την τάση ή το ρεύμα, τότε η  $L_2$ -νόρμα είναι ανάλογη της ηλεκτρικής ενέργειας που περικλείει το σήμα.

Με χρήση μετασχηματισμού Laplace μεταφερόμαστε στο πεδίο της συχνότητας, οπότε ορίζουμε την  $L_2$ -νόρμα επί του φανταστικού άξονα.

**Ορισμός 2.** Έστω  $\tilde{v}(s)$  σήμα ορισμένο στο  $s$ -πεδίο. Η  $L_2$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|\tilde{v}\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

**Σχόλιο:** Από το Θεώρημα Parseval, οι δύο παραπάνω νόρμες (Βλ. Σχέσεις (3.1), (3.2)) είναι μεταξύ τους ίσες.

Οι παραπάνω ορισμοί για την  $L_2$ -νόρμα γενικεύονται και σε σήματα που αποτελούν διανυσματικές συναρτήσεις. Έστω  $\mathbf{v} = (v_1, v_n, \dots, v_n)$ . Έχουμε στο πεδίο του χρόνου:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \|v_i\|_2^2 \right)^{1/2} = \left( \int_0^\infty \sum_{i=1}^n v_i(t)^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^\infty \mathbf{v}(t)^T \mathbf{v}(t) dt \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα, στο  $s$ -πεδίο, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_2 &= \left( \sum_{i=1}^n \|\tilde{v}_i\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^n |\tilde{v}_i(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(-j\omega) \tilde{v}_i(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\mathbf{v}}(-j\omega)^T \tilde{\mathbf{v}}(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Η  $L_2$ -νόρμα αποτελεί υποπερίπτωση της ευρύτερης κλάσης νορμών, της  $L_p$ -νόρμας.

**Ορισμός 3.** Έστω  $\mathbf{v} = (v_1, v_n, \dots, v_n)$  ένα χρονικά εξαρτημένο σήμα. Η  $L_p$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \int_0^\infty |v_i(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (3.5)$$

Μια ειδική περίπτωση της  $L_p$ -νόρμα είναι αυτή που προκύπτει για  $p=1$ , όπου η νόρμα ισούται με το γενικευμένο ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής της ίδιας της συνάρτησης. Οι  $L_p$ -νόρμες ορίζονται και στο  $s$ -πεδίο. Εντούτοις, δεν παρέχονται ανισοτικές μετρικές σχέσεις<sup>16</sup>, όπως στην περίπτωση της  $L_2$ -νόρμας (Βλ. Θεώρημα Parseval). Τέλος, ορίζουμε την  $L_\infty$ -νόρμα.

**Ορισμός 4.** Έστω  $v(t)$  χρονικά εξαρτημένο βαθμωτό σήμα. Η  $L_\infty$ -νόρμα ή  $\infty$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως<sup>17</sup>:

$$\|v\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |v(t)| \quad (3.6)$$

Ακολούθως περνάμε στις νόρμες συναρτήσεων που εκφράζονται με τις νόρμες των συναρτήσεων μεταφοράς (SISO<sup>18</sup> συστήματα) ή μητρώων μεταφοράς (MIMO<sup>19</sup> συστήματα). Συναντώνται δύο βασικές νόρμες, η  $H_2$ -νόρμα και η  $H_\infty$ -νόρμα. Στην παρούσα εργασία, θα επικεντρωθούμε στην θεωρία που διέπει τη δεύτερη. Εντούτοις, η πρώτη παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφενός λόγω της φυσικής της ερμηνείας στα

<sup>16</sup> Στη σχετική Θεωρία της Πραγματικής Ανάλυσης υπάρχουν ανισοτικές σχέσεις (ιδιότητες) που διέπουν τις  $L_p$ -νόρμες. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά την Ανισότητα Holder και την Ανισότητα Minkowski [77].

<sup>17</sup> Έστω στοιχείο  $s \in A$  που ικανοποιεί τα ακόλουθα: 1)  $x \leq s \quad \forall x \in B$  και 2)  $\forall y \in A: x \leq y$ , τότε  $s \leq y$ . Δηλαδή είναι άνω φράγμα και είναι το ελάχιστο από τα υπάρχοντα άνω φράγματα. Τότε το  $s$  καλείται **supremum** ή **ελάχιστο άνω φράγμα** του συνόλου  $B$ . Το συγκεκριμένο στοιχείο απαιτείται σε περιπτώσεις όπου δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη του μεγίστου ενός συνόλου.

<sup>18</sup> Συντομογραφία της αγγλικής λέξης **Single-Input-Single-Output**. Αναφέρεται στα συστήματα μιάς εισόδου μιάς εξόδου.

<sup>19</sup> Συντομογραφία της αγγλικής λέξης **Many-Inputs-Many-Outputs**. Πρόκειται για συστήματα πολλών εισόδων πολλών εξόδων.

συστήματα ελέγχου αφετέρου λόγω της στενής σύνδεσής της με συμπληρωματικά ή αντίστοιχα θεωρήματα και ορισμούς της  $H_\infty$ -αυτόματης ρύθμισης.

### 3.2.2 $H_2$ Νόρμες

**Ορισμός 5.** Έστω SISO γραμμικό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$ . Ορίζουμε την  $H_2$ -νόρμα<sup>20</sup> του συστήματος ως ακολούθως:

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{G}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

**Ορισμός 6.** Έστω MIMO γραμμικό σύστημα με μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς  $\mathbf{G}(s) = [g_{kl}]$ . Ορίζουμε την  $H_\infty$ -νόρμα του συστήματος ως ακολούθως:

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left( \sum_{k,l} \|g_{kl}\|_2^2 \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l} |g_{kl}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Γράφουμε τη σχέση (3.8) σε πιο βολική μορφή εισάγοντας το ίχνος της  $\mathbf{G}(s)$  ως εξής:

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l} g_{kl}(-j\omega)g_{kl}(j\omega)d\omega \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr[\mathbf{G}(-j\omega)^T \mathbf{G}(j\omega)]d\omega \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Στη σχέση (3.9) κατά τους υπολογισμούς γίνεται χρήση μιάς βασικής ιδιότητας του ίχνους μητρώων με σχέση αναστροφή, η οποία επεκτείνεται στις αναστροφο-συζυγείς μήτρες. Έστω  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^T \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Τότε ισχύει [78]:

$$tr[\mathbf{A}^T \mathbf{A}] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{kl}^2 \quad (3.10)$$

Εντούτοις, στην πράξη, αποφεύγεται η χρήση των τύπων (3.9) και (3.10). Αντ' αυτού, υπολογίζουμε την  $H_2$ -νόρμα στο πεδίο του χρόνου βασιζόμενοι στην περιγραφή του LTI<sup>21</sup> συστήματος στο Χώρο Κατάστασης (Βλ. Σχέση 3.11).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bv(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.12)$$

**Σημείωση:** Από το σημείο αυτό (Βλ. Εξίσωση 3.11) και για το υπόλοιπο κείμενο, οι μήτρες και τα διανύσματα θα συμβολίζονται με απλούς χαρακτήρες, όπως τα βαθμωτά μεγέθη. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης μπορεί να διακρίνει τις διαστάσεις κάθε ποσότητας. Όπου αυτό δεν είναι προφανές θα γίνεται η ανάλογη επισήμανση.

<sup>20</sup> Η γραφή  $H$  στο  $H_2$  (αντί της  $L$ ) οφείλεται στο γεγονός ότι ο συγκεκριμένος χώρος συνεχών συναρτήσεων εκτός του ότι διατηρεί την ιδιότητα της πεπερασμένης  $L_p$ -νόρμας, επιπλέον αποτελείται στοιχεία φραγμένων και αναλυτικών συναρτήσεων στο αριστερό μιγαδικό ημιπίεδο. Δηλαδή συναρτήσεις χωρίς πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιπίεδο. Ο χώρος αυτός καλείται **Χώρος Hardy**  $H_p$ . Άρα ευσταθείς συναρτήσεις ανήκουν στον χώρο αυτόν δεδομένου ότι το αντίστοιχο ολοκλήρωμα είναι φραγμένο. Σε διακριτές συναρτήσεις, η ευστάθεια ικανοποιείται Ο χώρος αυτός πήρε την ονομασία του από τον Βρετανό θεωρητικό μαθηματικό G. H. Hardy (1877-1947).

<sup>21</sup> Συντομογραφία της λέξης **Linear Time-Invariant**, που αναφέρεται στα γραμμικά Χρονικά Μη Μεταβαλλόμενα συστήματα, με την έννοια ότι οι μήτρες  $A, B, C, D$  στην περιγραφή στον χώρο κατάστασης δεν εξαρτώνται από το χρόνο.



Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.11), λαμβάνουμε [43]:

$$z(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t H(t-\tau)v(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

όπου  $H(t)$  η συνάρτηση διέγερσης: 
$$H(\tau) = \begin{cases} Ce^{A\tau}B, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace της  $H(\tau)$ :

$$G(s) = \int_0^{\infty} H(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (3.15)$$

Απο το Θεώρημα Parseval για την συνάρτηση και λόγω των σχέσεων (3.8), (3.9) και (3.13), έπεται η ισοδυναμία των δύο συναρτήσεων στον  $H_2$ -χώρο που επάγεται απο την αντίστοιχη  $\|\cdot\|_2$  νόρμα:

$$\|G\|_2 = \|H\|_2 \quad (3.16)$$

όπου: 
$$\|H\|_2 = \left( \int_0^{\infty} \sum_{k,l} h_{kl}(t)^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^{\infty} tr [H(t)^T H(t)] dt \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η  $\|H\|_2$  είναι πεπερασμένη, άν το σύστημα είναι ευσταθές. Στην περίπτωση αυτή, δυνάμεθα να υπολογίσουμε την  $H_2$ -νόρμα της σχέσης (3.9) με εύρεση της νόρμας στο πεδίο του χρόνου, που δίνεται απο την σχέση (3.17), λόγω της σχέσης (3.16). Απο τις εξισώσεις (3.14) και (3.17) έπεται:

$$\|G\|_2^2 = \|H\|_2^2 = tr \left[ C \left( \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt \right) C^T \right] \quad (3.18)$$

Ορίζουμε τη μήτρα  $P$ , τέτοια ώστε:

$$P \equiv \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt \quad (3.19)$$

Επομένως, η σχέση (3.18), λόγω της (3.19) δίνει την ακόλουθη κομψή εξίσωση:

$$\|H\|_2^2 = tr [CPC^T] \quad (3.20)$$

Ο πίνακας  $P$  αποτελεί λύση της Μητρικής Εξίσωσης Lyapunov, που συνδέεται με τη θεωρία ευστάθειας γραμμικών συστημάτων:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (3.21)$$

Το παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα παρατηρώντας το ακόλουθο:

$$\frac{d}{dt} [e^{At} BB^T e^{A^T t}] = Ae^{At} BB^T e^{A^T t} + e^{At} BB^T e^{A^T t} A^T \quad (3.22)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση (3.22) κατά μέλη απο το 0 ως το  $\infty$  και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι , λόγω ευστάθειας  $e^{At} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  του γραμμικού συστήματος:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{At} B B^T e^{A^T t} \right) dt = e^{At} B B^T e^{A^T t} \Big|_0^{\infty} = -B B^T \quad (3.23)$$

Έπειτα, απο τον ορισμό του πίνακα  $P$  (Βλ. Σχέση 3.19), προκύπτει η εξής σχέση:

$$\int_0^{\infty} \left[ A e^{At} B B^T e^{A^T t} + e^{At} B B^T e^{A^T t} A^T \right] dt = A P + P A^T \quad (3.24)$$

Οπότε, απο την σχέση (3.22), λόγω των (3.23) και (3.24) έπεται η εξίσωση (3.21).

Στη συνέχεια, αποτυπώνουμε τη φυσική ερμηνεία της  $H_2$ -νόρμας σε όρους εισόδου-εξόδου της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Έστω ότι έχουμε το γραμμικό σύστημα, που περιγράφεται απο την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{z}(s) = G(s)\hat{v}(s) \quad (3.25)$$

Θεωρώντας SISO σύστημα με ομοιόμορφη είσοδο στο εύρος συχνοτήτων, δηλαδή  $\hat{v}(s) = 1 \quad \forall s = j\omega$ , τότε απο σχέση (3.25) προκύπτει:

$$\hat{z}(s) = G(s) \quad (3.26)$$

Άρα, για τη νόρμα της εξόδου θα έχω απο σχέση (3.26), λόγω της σχέσης (3.7):

$$\|\hat{z}\|_2 = \|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (3.27)$$

**Συμπέρασμα:** Επομένως, προκύπτει ότι η ποσότητα  $\|G\|_2$  μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα μέσο κέρδος του συστήματος σε όλο το εύρος συχνοτήτων.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί και στα MIMO συστήματα, θεωρώντας την επίδραση μιάς εισόδου κάθε χρονική στιγμή. Έστω ότι η  $k$ -είσοδος απεικονίζεται στην σταθερή τιμή 1 -μέσω μετασχηματισμού Laplace- ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του διανύσματος εισόδου είναι μηδενικά. Τότε το διάνυσμα εισόδου διάστασης  $n$  μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\hat{v}(s) = e_k \quad (3.28)$$

όπου  $e_k$  το  $k$ -μοναδιαίο διάνυσμα:  $e_k = [0 \dots 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0]^T$

Τότε, απο τις σχέσεις (3.26) και (3.27) προκύπτει ότι το διάνυσμα εξόδου θα είναι  $\hat{z}(s) = G(s)e_k$ . Επομένως, προκύπτει για την  $H_2$ -νόρμα του:

$$\begin{aligned} \|\hat{z}\|_2^2 &= \|G e_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_k^T G(-j\omega)^T G(j\omega) e_k d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[ G(-j\omega) e_k e_k^T G(j\omega)^T \right] d\omega \quad (3.29)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω ταυτότητα [78]:

$$\text{tr} [AB] = \text{tr} [A^T B^T] \quad (3.30)$$

Έπειτα, θεωρούμε ότι κάθεμιά συνιστώσα του διανύσματος εισόδου εκφράζεται στο  $s$ -πεδίο σύμφωνα με τη σχέση (3.28). Χρησιμοποιούμε το άθροισμα των  $H_2$ -νορμών των αντίστοιχων εξόδων για όλα τα στοιχεία του διανύσματος εισόδου. Οπότε, από τη σχέση (2.29), έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[ \|\hat{z}\|_2^2 : \hat{v}(s) = e_k, \quad k \in \mathbb{N} \right] &= \sum_{k=1}^n \|G e_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[ G(-j\omega) e_k e_k^T G(j\omega)^T \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[ G(-j\omega) \sum_{k=1}^n (e_k e_k^T) G(j\omega)^T \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[ G(-j\omega) I G(j\omega)^T \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[ G(-j\omega) I G(j\omega)^T \right] d\omega \\ &= \|G\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Στο πεδίο του χρόνου, αναζητώντας κάποια αναλογία με την περίπτωση των SISO συστημάτων, παρατηρούμε ότι η αντίστροφη εικόνα της σταθερής συνάρτησης στο  $s$ -πεδίο είναι το συνάρτηση Dirac.

**Ορισμός 7.** Κάθε πραγματική συνάρτηση  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες καλείται *συνάρτηση Dirac*:

$$1. \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.33)$$

Επομένως, από σχέση (3.13), λόγω των (3.32) και (3.33), για είσοδο  $v(t) = e_k \delta(t)$ , προκύπτει η έξοδος του συστήματος:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t H(t-\tau) e_k \delta(\tau) d\tau \\ &= H(t) e_k \int_0^t \delta(\tau) d\tau \\ &= H(t) e_k \end{aligned} \quad (3.34)$$

Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} z(t)^T z(t) dt &= \int_0^{\infty} e_k^T H(t)^T H(t) e_k dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr} \left[ H(t) e_k e_k^T H(t)^T \right] dt \end{aligned} \quad (3.35)$$

Με ανάλογα επιχειρήματα, προκύπτει αθροίζοντας για κάθε συνιστώσα εισόδου, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[ \int_0^{\infty} z(t)^T z(t) dt : w(t) = e_k \delta(t), k \in \mathbb{N} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \text{tr} \left[ H(t) e_k e_k^T H(t)^T \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr} \left[ H(t) \sum_{k=1}^n (e_k e_k^T) H(t)^T \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr} \left[ H(t) I H(t)^T \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{tr} \left[ H(t) H(t)^T \right] dt \\ &= \|H\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Σχόλιο:** Αξίζει να δούμε την ερμηνεία της  $H_2$ -νόρμας από στοχαστική σκοπιά. Μπορούμε να πούμε ότι σε ένα MIMO σύστημα  $G$  αν η είσοδος είναι διάνυσμα λευκού θορύβου (white noise) με μήτρα συνδιακύμανσης (covariance matrix)  $R_v = I$ , τότε το άθροισμα των στάσιμων διακυμάνσεων (variance) των εξόδων δίνεται από το τετράγωνο της  $H_2$ -νόρμας του συστήματος (Βλ. Σχέση 3.37).

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} z(t)^T z(t) dt \right] = \|G\|_2^2 \quad (3.37)$$

Ακολουθώς, περνάμε σε έναν πιο θεμελιώδη τύπο νόρμας. Ο τύπος αυτός νόρμας παρέχει ένα μέτρο του κέρδους του συστήματος στη χειρότερη περίπτωση. Πρόκειται για την  $H_{\infty}$ -νόρμα. Ο όρος «χειρότερη περίπτωση» θα αποσαφηνιστεί επαρκώς στις γραμμές που ακολουθούν.

### 3.2.3 $H_{\infty}$ Νόρμες

**Ορισμός 8.** Έστω ευσταθές SISO σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$ . Η  $H_{\infty}$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (3.38)$$

**Σχόλιο:** Ο όρος  $|G(j\omega)|$  είναι ο συντελεστής αύξησης του πλάτους μιας ημιτονοειδούς εισόδου γωνιακής συχνότητας  $\omega$ . Επομένως, η  $H_{\infty}$ -νόρμα αποτελεί μέτρο του μέγιστου εμφανιζόμενου συντελεστή, σύμφωνα με τον οποίο οποιοδήποτε ημιτονοειδές μεγενθύνεται διαμέσου του συστήματος.

Η σημαντικότερη ερμηνεία της  $H_\infty$ -νόρμας προκύπτει θεωρώντας την δράση της πάνω στο χώρο των εισόδων με φραγμένη  $L_2$ -νόρμα ενός ευσταθούς συστήματος. Σημειώνουμε ότι ένα ημιτονοειδές σήμα δεν έχει φραγμένη  $L_2$ -νόρμα (Βλ. Σχέση 3.1). Έστω  $v(t)$  είσοδος η οποία είναι  $L_2$ -φραγμένη. Τότε η έξοδος του συστήματος  $\hat{z}(s) = G(s)\hat{v}(s)$  είναι άνω φραγμένη σε όρους  $L_2$ -νόρμας με άνω φράγμα  $\|G\|_\infty \|v\|_2$ , όπως αποδεικνύουμε παρακάτω.

$$\begin{aligned}
\|\hat{z}\|_2 &= \|G\hat{v}\|_2 \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |G(j\omega)\hat{v}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |G(j\omega)|^2 |\hat{v}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_\omega |G(j\omega)| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\hat{v}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \|G\|_\infty \|\hat{v}\|_2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Επομένως, αποδείξαμε την ακόλουθη ανισοτική σχέση που ισχύει γενικότερα στην Ανάλυση Μητρών [76]:

$$\|G\|_\infty \geq \frac{\|\hat{z}\|_2}{\|\hat{v}\|_2}, \quad \forall \hat{v} \neq 0 \tag{3.40}$$

Στην πραγματικότητα, υπάρχουν σήματα  $v$ , για τα οποία η τιμή της νόρμας  $\|G\hat{v}\|_2$  πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο άνω φράγμα (Βλ. Σχέση 3.39). Αυτό μπορεί ποιοτικά να περιγραφεί με την ύπαρξη μιάς περιοχής επί του φανταστικού άξονα, για την οποία το μετασχηματισμένο σήμα  $\hat{v}(j\omega)$  στο  $s$ -πεδίο είναι τέτοιο ώστε  $\| \|G\|_\infty - |G(j\omega)| \| < \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την  $H_\infty$ -νόρμα με τον ακόλουθο πιο πρακτικό ορισμό:

$$\|G\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|G\hat{v}\|_2}{\|\hat{v}\|_2} : \hat{v} \neq 0 \right\} \tag{3.41}$$

**Συμπέρασμα:** Η  $H_\infty$ -νόρμα δίνει τον μέγιστο συντελεστή αύξησης της  $L_2$ -νόρμας οποιασδήποτε εισόδου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον η ποσότητα  $\|G\|_\infty$  καλείται *κέρδος* του συστήματος.

**Σχόλιο:** Στη Θεωρία Τελεστών, ένας τελεστής νόρμας όπως αυτός της σχέσης (3.41) καλείται *ανηγμένη νόρμα*. Στην ορολογία της θεωρίας αυτής, λέμε ότι η  $H_\infty$ -νόρμα ανάγεται από την  $L_2$ -νόρμα.

Εν συνεχεία, περνάμε στον ορισμό της  $H_\infty$ -νόρμας σε MIMO συστήματα. Έστω μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς  $G(j\omega) \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Έστω  $\|\cdot\|$  η ευκλείδια νόρμα ενός στοιχείου. Τότε το μέγιστο κέρδος για τη συχνότητα  $\omega$  δίνεται απο την ακόλουθη ποσότητα:

$$\begin{aligned} \|G(j\omega)\| &= \max \left\{ \frac{\|G(j\omega)v\|}{\|v\|} : v \neq 0, v \in \mathbb{C}_n \right\} \\ &= \max \left\{ \|G(j\omega)v\| : \|v\| = 1, v \in \mathbb{C}_n \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

**Ορισμός 9.** Έστω ευσταθές MIMO σύστημα με μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς  $G(s)$ . Η  $H_\infty$ -νόρμα ορίζεται ως ακολούθως:

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \|G(j\omega)\| \quad (3.43)$$

Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι η νόρμα μήτρας  $\|G(j\omega)\|_\infty$  ισούται με την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή (singular value) της μήτρας  $G(j\omega)$ . Επομένως, συχνά η σχέση (3.43) εκφράζεται και στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.44)$$

Σε αναλογία με την περίπτωση SISO συστημάτων, θα ερευνήσουμε την δράση του συστήματος  $G$  σε μία ημιτονοειδή είσοδο. Έστω διανυσματική είσοδος  $v(t) = [a_1 \sin(\omega t + \theta_1), \dots, a_n \sin(\omega t + \theta_n)]^T$ . Τότε, η έξοδος  $z = Gv$  είναι πάλι ένα διάνυσμα ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας, αλλά διαφορετικού πλάτους και διαφοράς φάσης. Δηλαδή θα έχω  $z(t) = [b_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \dots, b_n \sin(\omega t + \varphi_n)]^T$ .

Έστω  $\|v\|$ ,  $\|z\|$  οι ευκλείδιες νόρμες των διανυσμάτων εισόδου και εξόδου. Τότε μπορεί να δειχθεί ότι ο ορισμός της  $H_\infty$ -νόρμας (Βλ. Σχέση 3.43) είναι ισοδύναμος με την ακόλουθη σχέση:

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \max_{\|a_i\|, \|b_i\|} \left\{ \frac{\|z\|}{\|v\|} : z = Gv, v = [a_1 \sin(\omega t + \theta_1), \dots, a_n \sin(\omega t + \theta_n)]^T \right\} \quad (3.45)$$

**Σχόλιο:** Άρα κι εδώ συμπεραίνουμε ότι η  $H_\infty$ -νόρμα είναι ο μέγιστος συντελεστής αύξησης πλάτους (σε όρους  $L_2$ -νόρμας) απο το σύστημα σε διάνυσμα ημιτονοειδών σημάτων ίδιας συχνότητας.

Έπειτα, σε αναλογία με τη σχέση (3.39), διατυπώνουμε τη σημαντικότερη ερμηνεία της  $H_\infty$ -νόρμας ενός MIMO συστήματος. Θεωρούμε τη δράση της πάνω στο χώρο των εισόδων με φραγμένη  $L_2$ -νόρμα ενός ευσταθούς συστήματος.

$$\begin{aligned} \|\hat{z}\|_2 &= \|G\hat{v}\|_2 \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(-j\omega)^T G(-j\omega)^T G(j\omega) \hat{v}(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \|G(j\omega)\hat{v}(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&\stackrel{(3.42)}{\leq} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|^2 \|\hat{v}(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\omega} \|G(j\omega)\| \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \|G\|_{\infty} \|\hat{v}\|_2
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Επομένως, απο τη σχέση (3.46), προβάλλοντας ανάλογα επιχειρήματα με την περίπτωση SISO συστημάτων, ορίζουμε την ανηγμένη  $H_{\infty}$ -νόρμα απο την  $L_2$ -νόρμα ως ακολούθως:

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|G\hat{v}\|_2}{\|\hat{v}\|_2} : \hat{v} \neq 0 \right\} \tag{3.47}$$

Προχωράμε στην περιγραφή της  $H_{\infty}$ -νόρμας στο πεδίο του χρόνου. Έστω LTI MIMO σύστημα  $G(s)$  με την ακόλουθη περιγραφή στο Χώρο Κατάστασης:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bv(t) \\
z(t) &= Cx(t) + Dv(t)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

με: 
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.49}$$

Απο το Θεώρημα Parseval, η  $H_{\infty}$ -νόρμα μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο του χρόνου ως εξής:

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} : v \neq 0 \right\} \tag{3.50}$$

Απο την σχέση (3.50), έπεται ότι  $\forall \gamma > 0$  ισχύει  $\|G\|_{\infty} < \gamma$  αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}
J_{\infty}(G, \gamma) &\equiv \max_v \left[ \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|v\|_2^2 \right] \\
&= \max_v \int_0^{\infty} \left[ z(t)^T z(t) - \gamma^2 v(t)^T v(t) \right] dt \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Με χρήση της LQ θεωρίας αυτόματης ρύθμισης, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ισχύει  $\|G\|_{\infty} < \gamma$  ελέγχοντας αν το LQ-πρόβλημα μεγιστοποίησης (3.51) έχει φραγμένη λύση. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα που ακολουθεί [7].

**Θεώρημα 1.** Έστω σύστημα  $G(s)$  με περιγραφή στο χώρο κατάστασης που δίνεται από τις εξισώσεις (3.48). Τότε ισχύει  $\|G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \gamma^2 I - D^T D > 0$  και η εξίσωση Riccati<sup>22</sup>:

$$A^T S_\infty + S_\infty A + (S_\infty B + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (B^T S_\infty + D^T C) + C^T C = 0 \quad (3.52)$$

έχει θετικά ημιορισμένη και φραγμένη λύση  $S_\infty$  τέτοια ώστε η μήτρα  $A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (B^T S_\infty + D^T C)$  να είναι ευσταθής.

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. □

**Σχόλιο:** Το Θεώρημα 1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τιμής  $H_\infty$ -νόρμας του συστήματος με την επιθυμητή ακρίβεια εφαρμόζοντας την  $\gamma$ -επανάληψη ( $\gamma$ -iteration). Η τελευταία περιγράφεται αναλυτικά στην Ενότητα 3.1.2.

Στη συνέχεια, περνάμε στην αναλυτική παρουσίαση της SVD Παραγοντοποίησης.

### 3.2.4 SVD Παραγοντοποίηση

Η SVD Παραγοντοποίηση αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό «εργαλείο» που βρίσκει αρκετές εφαρμογές σε πολυμεταβλητά προβλήματα, όπου εμπλέκονται μητρικά στοιχεία (π.χ. Προβλήματα Ελαχίστων Τετραγώνων). Έστω διάνυσμα  $n$ -διάστασης  $x$  και μήτρα  $A \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Θεωρούμε την ακόλουθη νόρμα  $\| \cdot \|$  της μήτρας που επάγεται από την ευκλείδια νόρμα:

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} = \max \{ \|Ax\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{R}^n \} \quad (3.53)$$

Η μέθοδος της SVD Παραγοντοποίησης διατυπώνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.** Έστω μήτρα  $A \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Αν  $p = \min(m, n)$ , τότε  $\exists$  ορθομοναδιαίες<sup>23</sup> μήτρες  $V \in \Pi_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $U \in \Pi_{m \times p}(\mathbb{R})$  και διαγώνια μήτρα  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ , όπου  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$  τέτοιες ώστε:

$$A = U \Sigma V^T \quad (3.54)$$

Η παραγοντοποίηση αυτή ονομάζεται *SVD ή Ιδιάζουσα Παραγοντοποίηση* της μήτρας  $A$ . Οι μη γραμμικές ποσότητες  $\sigma_i \in \mathbb{R}^p$  καλούνται *ιδιάζουσες τιμές* της μήτρας  $A$ . Το διάνυσμα-στήλη  $u_i$  καλείται  *$i$ -αριστερό ιδιάζον διάνυσμα* και το  $v_j$   *$j$ -δεξιό ιδιάζον διάνυσμα*.

**Απόδειξη:** Βλέπε Παράρτημα Α. □

Έπειτα, είναι προφανές (βλ. Σχέση 3.54) ότι η μήτρα απεικονίζει τα διανύσματα  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, p$  στο πολλαπλασιασμένο  $u_i \in \mathbb{R}^m$  επί τον παράγοντα  $\sigma_i \in \mathbb{R}^p$ :

<sup>22</sup> Η γενική μορφή της **Μητρικής Εξίσωσης Riccati** είναι η εξής:  $A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$ , όπου  $X$  η άγνωστη μήτρα.

<sup>23</sup> Μια μήτρα  $W \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$  ονομάζεται **ορθομοναδιαία** αν ισχύει:  $w_i^T w_j = \delta_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ .



$$\begin{aligned}
Av_i &= \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_p \end{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_p^T \end{bmatrix} v_i \\
&= \sum_{j=1}^p \sigma_j u_j v_j^T v_i \\
&= \sum_{j=1}^p \sigma_j u_j \delta_{ij} \\
&= \sigma_i u_i
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Λαμβάνοντας υπ όψιν ότι τα διανύσματα  $u_i$  και  $v_i$  είναι μοναδιαία και ότι κάθε στοιχείο  $x \in \mathbb{R}^n$  μπορεί να εκφραστεί σα γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης  $\{v_i, i=1, \dots, n\}$ , έπεται ότι ο μέγιστος συντελεστής που πολλαπλασιάζει ένα στοιχείο είναι η μέγιστη εμφανιζόμενη ιδιάζουσα τιμή, δηλαδή η  $\sigma_1$ . Το διάνυσμα πολλαπλασιάζεται ακριβώς με αυτήν την τιμή και άρα η επαγόμενη νόρμα  $\|A\|$  ισούται με  $\sigma_1$ . Επομένως, προκύπτει:

$$\|A\| = \bar{\sigma}(A) = \sigma_1 \tag{3.56}$$

**Σχόλιο:** Το Θεώρημα 2 είναι επεκτάσιμο και για την περίπτωση μιγαδικής μήτρας συναρτήσεων μεταφοράς  $G(j\omega)$ . Στην περίπτωση αυτή, η μήτρα  $V^T$  αντικαθίσταται απο την αναστροφοσυζυγή  $V^H$ .

Πρακτικά, οι ιδιάζουσες τιμές και οι ακραίες ιδιάζουσες τιμές<sup>24</sup> μιας μήτρας  $W \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ , άν  $\lambda_i$  οι ιδιοτιμές της μήτρας  $W^T W$  -εξ ορισμού- δίνονται απο τις ακόλουθες χρήσιμες σχέσεις:

$$\sigma_i(W) = \sqrt{\lambda_i(W^T W)} \tag{3.57}$$

$$\underline{\sigma}(W) = \sqrt{\lambda_{\min}(W^T W)}, \quad \bar{\sigma}(W) = \sqrt{\lambda_{\max}(W^T W)} \tag{3.58}$$

**Συμπέρασμα 1:** Η SVD παραγοντοποίηση είναι σημαντική σε πολυμεταβλητά συστήματα ελέγχου, αφού ορίζει τα κέρδη του συστήματος στις διάφορες κατευθύνσεις. Ειδικότερα, έχουμε την *κατεύθυνση υψηλού κέρδους (high-gain direction)* που συνδέεται στην μέγιστη εμφανιζόμενη ιδιάζουσα τιμή  $\sigma_1$  της  $G$  και την *κατεύθυνση χαμηλού κέρδους (low-gain direction)* που συνδέεται με την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή  $\sigma_p$  της  $G$ .

**Συμπέρασμα 2:** Τα διαγράμματα ιδιαζουσών τιμών της μήτρας ενός LTI MIMO συστήματος  $G$  παρέχει μια γενίκευση των γνωστών Bode διαγραμμάτων πλάτους SISO συστημάτων. Δεν παρέχεται μια ευκρινής και εύχρηστη γενίκευση για τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης.

<sup>24</sup>

Υπάρχουν ενδιαφέρουσες μετρικές ανισότητες που συνδέουν τις ιδιοτιμές, μέγιστες και ελάχιστες ιδιάζουσες τιμές, καθώς και τις επαγόμενες νόρμες της μήτρας ενός συστήματος. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία [75] [76].

Κλείνοντας, για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε δύο άλλα σημαντικά μέτρα που χρησιμοποιούνται σε μήτρες. Πρόκειται για τη *φασματική ακτίνα*<sup>25</sup> (*spectral radius*)  $\rho$ , που χρησιμοποιείται σε κριτήρια ευστάθειας σε διακριτά δυναμικά συστήματα, καθώς και το *δείκτη κατάστασης*<sup>26</sup> (*condition number*)  $\kappa$  που σχετίζεται με την αριθμητική ευστάθεια μιας μήτρας. Έστω μήτρες συστημάτων  $W \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες, όπου στην πρώτη σχέση ο  $W \rightarrow$  τετραγωνικός [41] [76]:

$$\rho(W) \equiv \max_i |\lambda_i| \quad (3.59)$$

$$\kappa(W) = \frac{\bar{\sigma}(W)}{\underline{\sigma}(W)} \quad (3.60)$$

### 3.3 Η<sub>∞</sub>-Βέλτιστος Έλεγχος

#### 3.3.1 Φορμαλισμός Συστήματος

Η σχεδίαση του βέλτιστου Η<sub>∞</sub>-ρυθμιστή προϋποθέτει τον φορμαλισμό του γραμμικού δυναμικού προβλήματος σε συγκεκριμένα πρότυπα. Η πρότυπη αναπαράσταση του αρχικού συστήματος στο Χώρο Κατάστασης (standard state space description) δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις [4] [7] [8]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Η γενική διάταξη διατύπωσης ενός Η<sub>∞</sub>-προβλήματος εύρωστου ελέγχου (βλ. Σχήμα 3.1) περιγράφεται από τις ακόλουθες μητρικές εξισώσεις στο s-πεδίο [4] [6]:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$u = K(s)w \quad (3.63)$$

όπου:  $w$  : εξωγενές σήμα (exogenous signal)  
 $z$  : σήμα σφάλματος (error signal)  
 $y$  : μετρούμενη έξοδος (measured output)  
 $u$  : είσοδος ελέγχου (control input)

<sup>25</sup> Αναφορικά με τη φασματική ακτίνα, υπάρχει το Θεώρημα Gelfands, σύμφωνα με το οποίο ισχύει:  $\rho(W) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|W^k\|^{1/k}$ , όπου  $\|\cdot\|$  οποιαδήποτε νόρμα της μήτρας  $W$ . Η έννοια της φασματικής ακτίνας  $\rho$  γενικεύεται στην **κοινή φασματική ακτίνα (joint spectral radius)**, η οποία ορίζεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο από μήτρες και εκφράζει τον μέγιστο ασυμπτωτικό ρυθμός αύξησης των γινομένων μητρών. Η τελευταία χρησιμοποιείται ευρέως σε προβλήματα που συναντώνται σε διάφορους σύγχρονους κλάδους μηχανικής. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία [41] [114].

<sup>26</sup> Ο δείκτης κατάστασης προέρχεται από τη Θεωρία Γραμμικών Αλγεβρικών Συστημάτων. Έστω ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα  $Wx = b$ , τότε ο δείκτης κατάστασης  $\kappa(W)$  ορίζεται από την σχέση:  $\kappa(W) = \|W^{-1}\| \cdot \|W\|$  και εκφράζει τον βαθμό επηρεασμού της λύσης του συστήματος  $x$  σε μικρές μεταβολές του  $b$ . Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε σαν είσοδο τον μη ομογενή όρο  $b$ , τότε ο δείκτης κατάστασης  $\kappa(W)$  αποτελεί συνάρτηση ευαισθησίας του συστήματος  $W$  σε μεταβολές του  $b$ . Προφανώς, ισχύει  $\kappa(W) \geq 1$ . Αν ισχύει  $\kappa(W) \gg 1$ , τότε μικρές μεταβολές του  $b$  οδηγούν σε αρκετά μεγάλες μεταβολές στη λύση  $x$ . Τότε η μήτρα  $W$  χαρακτηρίζεται «**πάσχουσα**» (**ill-conditioned**). Τέτοιες μήτρες όταν χρησιμοποιούνται από αριθμητικές μεθόδους μεταπίπτουν εύκολα σε **αριθμητική αστάθεια (numerical instability)**. Περισσότερες πληροφορίες παρέχονται στη σχετική βιβλιογραφία [41] [115] [116].

Απο τις μητρικές σχέσεις (3.61) και (3.62), λαμβάνουμε την ακόλουθη block-μορφή στο χώρο κατάστασης για το γενικευμένο σύστημα  $P$ :

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.64)$$

Το πρόβλημα συνοψίζεται στην σχεδίαση κατάλληλου ελεγκτή  $K$  που ενισχύει την ευστάθεια<sup>27</sup> του γενικευμένου συστήματος  $P$  και ελαχιστοποιεί την  $H_\infty$ -νόρμα της μήτρας συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου  $F(P, K)$ .

Επομένως, αν  $F(P, K)$  η συνάρτηση μεταφοράς του ανατροφοδοτούμενου συστήματος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως μέτρο συμπεριφοράς (performance) την ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

$$J_\infty(K) = \|F(P, K)\|_\infty \quad (3.65)$$

όπου: 
$$z = F(P, K)w \quad (3.66)$$

και 
$$F(P, K) = P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.67)$$

**Σημείωση:** Ο ανωτέρω φορμαλισμός εφαρμόζεται και στην περίπτωση κατάστρωσης ενός  $H_2$ -βέλτιστης αυτόματης ρύθμισης. Το συγκεκριμένο σχήμα αυτόματης ρύθμισης αποτελεί την γενική περίπτωση, στην οποία μπορεί να ενταχθεί η αρκετά διαδεδομένη LQG αυτόματη ρύθμιση (Linear Quadratic Gaussian Control). Οι τεχνικές αυτές παρουσιάζονται αναλυτικά στη σχετική βιβλιογραφία [4] [7] [10].

Αν το σήμα  $w$  είναι  $L_2$ -φραγμένο με  $L_2$ -νόρμα  $\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty \sum_i |w_i(t)|^2 \right)^{1/2}$  και το απειροσύνολο  $\left\{ \frac{\|z(j\omega)\|_2}{\|w(j\omega)\|_2}, \omega \in \mathbb{R}_+ \right\}$  έχει μέγιστο, τότε απο την σχέση (3.50), έχουμε το ακόλουθο μέτρο συμπεριφοράς στη περίπτωση χειρίστου κέρδους σε όρους  $L_2$ -νόρμας:

$$\|F(G, K)\|_\infty = \max \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \neq 0 \right\} \quad (3.68)$$

Ο ευθύς υπολογισμός του συναρτησιακού κόστους  $J_\infty(K)$  είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα. Αντί αυτού, κατασκευάζουμε μια σειρά συνθηκών οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται, ώστε να υπάρχει  $H_\infty$ -ρυθμιστής τέτοιος ώστε για δεδομένο  $\gamma > 0$  να εξασφαλίζεται η ακόλουθη σχέση:

$$J_\infty(K) < \gamma \quad (3.69)$$

Ελέγχοντας αν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές και μεταβάλλοντας την τιμή της παραμέτρου  $\gamma$ , είναι εφικτό να βρούμε το ελάχιστο του  $J_\infty(K)$  στον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Η διαδικασία αυτή καλείται  $\gamma$ -επανάληψη.

<sup>27</sup> Στα αγγλικά *stabilizing*.

Οι προαναφερθείσες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται αφορούν στις μήτρες της πρότυπης περιγραφής του συστήματος στο χώρο κατάστασης (Βλ. Σχέση 3.61) και είναι οι ακόλουθες [4]:

(A1) Η  $(A, B_2, C_2)$  είναι ευσταθειοποιήσιμη<sup>28</sup> και παρατηρήσιμη<sup>29</sup>.

(A2) Οι  $D_{12}$  και  $D_{21}$  είναι πλήρους τάξης (full rank).

(A3) Η  $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$  είναι πλήρους τάξης  $\forall \omega$ .

(A4) Η  $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$  είναι πλήρους τάξης  $\forall \omega$ .

(A5)  $D_{11} = D_{22} = 0$

Η συνθήκη (A1) εξασφαλίζει την ύπαρξη ελεγκτών  $K$  που προσδίδουν ευστάθεια (stabilizing). Η συνθήκη (A2) εξασφαλίζει ότι οι ελεγκτές αυτοί είναι πραγματοποιήσιμοι. Οι συνθήκες (A3) και (A4) εξασφαλίζουν ότι δεν γίνονται διαγραφές πόλων και μηδενικών επί του φανταστικού άξονα, γεγονός που θα μπορούσε να προκαλέσει αστάθεια του κλειστού συστήματος. Η συνθήκη (A5) απλοποιεί σημαντικά την κατασκευή του σχετικού αλγόριθμου. Σημειώνουμε ότι η συνθήκη (A5) αποτελεί αναγκαία συνθήκη στην περίπτωση του  $H_2$ -βέλτιστης αυτόματης ρύθμισης. Τέλος, αναφέρονται και κάποιες επιπλέον συνθήκες, οι οποίες δεν είναι δεσμευτικές και χρησιμεύουν απλώς στην απλοποίηση της μορφοποίησης του προβλήματος [4] [6].

Έπειτα, από την σχέση (3.69), λόγω σχέσεων (3.65) και (3.68) έχουμε:

$$\|z\|_2 < \gamma \cdot \|w\|_2, \quad w \neq 0 \quad (3.70)$$

**Σχόλιο:** Η ανισότητα (3.70) δείχνει ότι δεδομένης μιας διαταραχής  $w$  όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου  $\gamma$  τόσο μικρότερο είναι το πλάτος της παραγόμενης διαταραγμένης εξόδου  $z$ .

Ο γενικός αλγόριθμος κατασκευής του  $H_\infty$ -ρυθμιστή αποτελεί σύνθεση δύο επιμέρους υποπροβλημάτων. Το πρώτο είναι το πρόβλημα εύρεσης  $H_\infty$ -βέλτιστης ρύθμισης ανατροφοδότησης κατάστασης ( $H_\infty$ -optimal state feedback control) και το δεύτερο είναι το πρόβλημα εύρεσης  $H_\infty$ -βέλτιστου εκτιμητή ( $H_\infty$ -optimal estimator). Ακολουθεί η διατύπωση των σχετικών θεωρημάτων.

<sup>28</sup>

Η έννοια της ευσταθειοποίησης αποτελεί μια ασθενή (weak) μορφή της ελεγχιμότητας. Ένα σύστημα είναι **ευσταθειοποιήσιμο (stabilizable)** αν το σύνολο των μη ελέγξιμων καταστάσεων έχουν ευσταθή δυναμική. Επομένως, σε ένα τέτοιο σύστημα το σύνολο των ελέγξιμων καταστάσεων και των μη ελέγξιμων καταστάσεων εγγυώνται το φραγμένο του συνολικού διανύσματος κατάστασης καθ' όλη τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι ένα σύστημα  $(A, B, C, D)$  είναι **πλήρως ελέγξιμο (full controllable)** όταν  $\forall x(t)$  κατάσταση με δεδομένες Α.Σ.  $x_0, \exists$  είσοδος  $u(t)$  τέτοια ώστε το σύστημα να μεταβαίνει στην κατάσταση αυτή. Δηλαδή, πρόκειται για την «ικανότητα» της εισόδου να επηρεάζει όλες τις συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης.

<sup>29</sup>

Η παρατηρησιμότητα (observability) ενός συστήματος αναφέρεται στην ικανότητα όλων των συνιστωσών του διανύσματος κατάστασης να επηρεάζουν την έξοδο του συστήματος. Ένα σύστημα  $(A, B, C, D)$  είναι **πλήρως παρατηρήσιμο (full observable)** όταν για δεδομένη είσοδο  $u(t)$  είναι δυνατός ο προσδιορισμός κάθε κατάστασης  $x(t)$  μόνο από μετρήσεις στην έξοδο.

### 3.3.2 Βέλτιστη Ανατροφοδότηση Κατάστασης

**Θεώρημα 3 (H<sub>∞</sub>-βέλτιστη ρύθμιση ανατροφοδότησης κατάστασης).** Έστω το σύστημα (3.61). Έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (A1)-(A5). Επιπλέον, έστω ότι η είσοδος  $u(t)$  έχει πρόσβαση σε όλες τις παρελθούσες και τρέχουσες τιμές του διανύσματος κατάστασης  $x(\tau)$ ,  $\tau \leq t$ . Τότε υπάρχει ρυθμιστής ανατροφοδότησης κατάστασης  $K_\infty$ :  $J_\infty(K) < \gamma$  αν και μόνον αν  $\exists$  θετικά (ημι)ορισμένη λύση  $X$  της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$A^T X + XA - XB_2 \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1} B_2^T X + \gamma^{-2} X B_1 B_1^T X + C_1^T C_1 = 0 \quad (3.71)$$

τέτοια ώστε η μήτρα:

$$A - B_2 \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1} B_2^T X + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X \quad (3.72)$$

είναι ευσταθής.

Η ανατροφοδότηση κατάστασης περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$K_\infty = - \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1} B_2^T X \quad (3.73)$$

$$u(t) = K_\infty x(t) \quad (3.74)$$

**Απόδειξη:** Βλέπε Παράρτημα Α. □

Έπειτα, εξάγουμε τον νόμο της H<sub>∞</sub>-βέλτιστης ρύθμισης ανατροφοδότησης κατάστασης. Χρησιμοποιούμε την έκφραση του συναρτησιακού κόστους  $L(w, u)$  που δίνεται από την σχέση (A.22) (βλ. Παράρτημα Α) και μετασχηματίζει το παρόν πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα H<sub>∞</sub>-βέλτιστης εκτίμησης. Ορίζουμε, λοιπόν τα σήματα εκτίμησης  $\tilde{z}(t)$  και  $\tilde{w}(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{z}(t) &\equiv \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{1/2} \left( u(t) - u^0(t) \right) \tilde{w}(t) \\ \tilde{w}(t) &\equiv w(t) - w^0(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (A.19) \\ \Rightarrow \\ (A.20) \end{array}$$

$$\tilde{z}(t) = \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{1/2} \cdot u(t) + \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1/2} B_2^T X \cdot x(t) \quad (3.75)$$

$$\tilde{w}(t) = w(t) - \gamma^{-2} B_1^T X \cdot x(t) \quad (3.76)$$

Συνεπώς, προκύπτει η έκφραση για το συναρτησιακό κόστους:

$$\begin{aligned} L(w, u) &= \int_0^\infty \left[ z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \right] dt = \int_0^\infty \left[ \tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) \right] dt \\ &= \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = \|\tilde{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|_2^2 = \tilde{L}(\tilde{w}, u) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Επομένως, το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστου ρυθμιστή που να ικανοποιεί το φραγμένο που περιγράφεται από τη σχέση (3.70) σε όρους  $\tilde{z}(t)$  και  $\tilde{w}(t)$  διαμορφώνεται έπειτα από την απαιτούμενη άλγεβρα πράξεων στο σύστημα (3.61):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}_1 \tilde{w}(t) + \tilde{B}_2 u(t) \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{C}_1 x(t) + \tilde{D}_{12} u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}_2 x(t) + \tilde{D}_{21} \tilde{w}(t) \end{aligned} \quad (3.78)$$

όπου:

$$x(0) = 0$$

$$\tilde{A} = A + \gamma^2 B_1 B_1^T X$$

$$\tilde{B}_1 = B_1$$

$$\tilde{B}_2 = B_2$$

και

$$\tilde{C}_1 = (D_{12}^T D_{12})^{1/2} B_2^T X \quad (3.79)$$

$$\tilde{C}_2 = C_2 + \gamma^{-2} B_1^T X$$

$$\tilde{D}_{12} = (D_{12}^T D_{12})^{1/2}$$

$$\tilde{D}_{21} = D_{21}$$

**Σχόλιο:** Στην περίπτωση του σχήματος ανατροφοδότησης κατάστασης, η έξοδος  $\tilde{z}$  μπορεί να γίνει ίση με το μηδέν με την εφαρμογή του ρυθμιστή (3.73). Απο την άλλη, αν έχουμε ανατροφοδότηση εξόδου, η καλύτερη τακτική είναι να βασίσουμε τη σχεδίαση του ρυθμιστή σε μία εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης  $x(t)$  ή ακόμα καλύτερα της εξόδου  $\tilde{z}(t)$ . Οπότε, εξετάζουμε το πρόβλημα του  $H_\infty$ -βέλτιστου εκτιμητή.

Εξετάζουμε το ακόλουθο πρόβλημα, το οποίο προκύπτει απο το σύστημα (3.61), αν θεωρήσουμε ότι  $B_2 = 0$  και  $D_{12} = 0$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t), \quad x(0) = 0$$

$$z(t) = C_1 x(t) \quad (3.80)$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t)$$

Θεωρούμε αιτιοκρατικούς<sup>30</sup> εκτιμητές  $F$  της (διαταραγμένης) εξόδου  $z$  βασιζόμενοι στη μετρούμενη έξοδο  $y$ . Επομένως έχουμε ότι  $\hat{z}(s) = F(s)y(s)$ . Στο πρόβλημα του  $H_\infty$ -βέλτιστου εκτιμητή ορίζουμε την  $H_\infty$ -νόρμα της συνάρτησης μεταφοράς απο την διαταραχή  $w$  στο σφάλμα εκτίμησης  $z - \hat{z}$ . Επομένως, ορίζουμε το ακόλουθο συναρτησιακό κόστους:

$$J_{e,\infty}(F) = \sup \left\{ \frac{\|z - \hat{z}\|_2}{\|w\|_2} : w \neq 0 \right\} \quad (3.81)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με το πρόβλημα ανατροφοδότησης κατάστασης, θεωρούμε τις αναγκαίες προϋποθέσεις ύπαρξης ενός εκτιμητή που ικανοποιεί το φράγμα:

$$J_{e,\infty}(F) < \gamma \quad (3.82)$$

ή ισοδύναμα:

$$L(w, \hat{z}) = \|z - \hat{z}\|_2 - \gamma \|w\|_2 < 0, \quad \forall w \neq 0 \quad (3.83)$$

<sup>30</sup> **Αιτιοκρατικό (causal)** σύστημα είναι κάθε σύστημα είναι κάθε σύστημα του οποίου η έξοδος εξαρτάται αποκλειστικά απο παρελθοντικές ή τρέχουσες εισόδους. Στην ξένη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται και οι λέξεις physical ή nonanticipative.

### 3.3.3 Βέλτιστη Εκτίμηση

**Θεώρημα 4 (H<sub>∞</sub>-βέλτιστος εκτιμητής).** Έστω το σύστημα (3.78). Έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (A1)-(A5) και επιπλέον ικανοποιείται η συνθήκη  $D_{21}B_1^T = 0$ . Τότε υπάρχει ευσταθής εκτιμητής  $F : J_{e,\infty}(F) < \gamma$  αν και μόνον αν  $\exists$  θετικά ορισμένη λύση  $Y$  της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$A^T Y + YA - YC_2 \left( D_{21}^T D_{21} \right)^{-1} C_2^T Y + \gamma^{-2} Y C_1 C_1^T Y + B_1^T B_1 = 0 \quad (3.84)$$

τέτοια ώστε η μήτρα:

$$A - YC_2^T \left( D_{21}^T D_{21} \right)^{-1} C_2 + \gamma^{-2} Y C_1^T C_1 \quad (3.85)$$

είναι ευσταθής.

Ο εκτιμητής της εξόδου  $z$  περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + L_\infty [y(t) - C_2\hat{x}(t)] \\ \hat{z}(t) &= C_1\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3.86)$$

όπου: 
$$L_\infty = YC_2^T \left( D_{21}^T D_{21} \right)^{-1} \quad (3.87)$$

**Απόδειξη:** Βλέπε Παράρτημα Α. □

**Σχόλιο:** Παρατηρώντας τις εξισώσεις (3.71)-(3.72) και (3.84)-(3.85) είναι προφανές ότι τα δύο θεμελιώδη υποπροβλήματα διέπονται από μία σχέση δυϊσμού (duality). Είναι εύκολο να εκμαιεύσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις αντίστοιχες μήτρες στις δύο σχετικές περιγραφές στο χώρο κατάστασης (Βλ. Παράρτημα Α).

Όπως προαναφέραμε, το πρόβλημα σχεδίασης του H<sub>∞</sub>-βέλτιστου ρυθμιστή του συνολικού συστήματος (Βλ. Σχήμα 3.1) βασίζεται στα δύο υποπροβλήματα που περιγράφονται από τα θεωρήματα 3 και 4. Δεδομένου ότι παρέχεται μόνο η μετρούμενη έξοδος, ο αντικειμενικός σκοπός είναι να βρούμε μια εκτίμηση  $\hat{z}$  της διαταραγμένης εξόδου και μία είσοδο ελέγχου τέτοια ώστε  $\hat{z} = 0$ . Εισάγουμε το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 1.** Έστω μήτρα  $A \in \Pi_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Τότε:  $A \rightarrow$  αντιστρέψιμη  $\Leftrightarrow A^2 \rightarrow$  αντιστρέψιμη.

**Απόδειξη:** Έχουμε ότι:  $A^2 \rightarrow$  αντιστρέψιμη  $\Leftrightarrow 0 \neq \det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \rightarrow$  ομαλός. □

Ειδικότερα, από το Θεώρημα 4, έχουμε ότι μια H<sub>∞</sub>-εκτίμηση της διαταραγμένης εξόδου  $\hat{z}$  του μετασχηματισμένου συστήματος (3.78) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{z}(t) = \tilde{C}_1 \hat{x}(t) + \tilde{D}_{12} u(t) \quad (3.88)$$

Από τις σχέσεις (3.79) και από Λήμμα 1 έπεται ότι η μήτρα  $\tilde{D}_{12}^2 = D_{12}^T D_{12}$  είναι αντιστρέψιμη. Άρα εφαρμόζουμε τον νόμο ελέγχου:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\left( \tilde{D}_{12}^2 \right)^{-1} \tilde{C}_1 \hat{x}(t) \\ &= -\left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1} B_2^T X \hat{x}(t) \\ &= K_\infty \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3.89)$$

ο οποίος τελικά εξασφαλίζει ότι  $\hat{z} = 0$ . Εφαρμόζοντας τον παραπάνω ρυθμιστή, η έξοδος του συστήματος (3.78) δίνεται απο την σχέση  $\tilde{z} = \tilde{C}_1(x - \hat{x})$  και το συναρτησιακό κόστους  $\tilde{L}(\tilde{w}, u)$  που περιγράφεται στην σχέση (3.77) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\tilde{L}(\tilde{w}, u) &= \|\tilde{C}_1(x - \hat{x})\|_2^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|_2^2 \\ &= \|z - \hat{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|_2^2\end{aligned}\quad (3.90)$$

Άρα η συνθήκη φράγματος ικανοποιείται αν και μόνο αν η εκτίμηση εξόδου  $\hat{z}$  ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\tilde{L}(\tilde{w}, \hat{z}) = \|z - \hat{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|_2^2 < 0, \quad \forall \tilde{w} \neq 0 \quad (3.91)$$

Όμως, απο το Θεώρημα 4, δεδομένου ότι υπάρχει ένας βέλτιστος εκτιμητής, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν εκτιμητή που να ικανοποιεί τη συνθήκη (3.91) για το σύστημα της σχέσης (3.78). Επομένως, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το τελικό θεώρημα που διέπει τη σχεδίαση του συνολικού  $H_\infty$ -βέλτιστου ρυθμιστή. Στην απόδειξη του θεωρήματος γίνεται χρήση του ακόλουθου λήμματος [7].

**Λήμμα 2.** Έστω  $X, Y$  συμμετρικές θετικά ημιορισμένες μήτρες. Τότε ισχύει:

$$\rho(XY(\gamma^2 I + XY)^{-1}) = \frac{\rho(XY)}{\gamma^2 + \rho(XY)} < 1 \quad (3.92)$$

**Απόδειξη:** Παραλείπεται. □

### 3.3.4 Βέλτιστη Αυτόματη Ρύθμιση

**Θεώρημα 5 ( $H_\infty$ -βέλτιστος ρυθμιστής).** Έστω το σύστημα (3.61). Έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (A1)-(A5) και (B1):  $D_{12}^T C_1 = 0$ . Τότε  $\exists$  ρυθμιστής  $u = Ky$  που προσδίδει ευστάθεια στο σύστημα, ο οποίος ικανοποιεί το  $H_\infty$ -φράγμα  $J_\infty(K) < \gamma$  αν και μόνον αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(α)  $\exists$  συμμετρική θετικά (ημι)ορισμένη λύση  $X$  στην εξίσωση Riccati (3.71) τέτοια ώστε η μήτρα (3.71) να είναι ευσταθής.

(β)  $\exists$  συμμετρική θετικά (ημι)ορισμένη λύση  $Y$  στην εξίσωση Riccati (3.84) τέτοια ώστε η μήτρα (3.85) να είναι ευσταθής.

(γ)  $\rho(XY) < \gamma^2$ .

Επιπλέον, άν ικανοποιούνται οι συνθήκες (α), (β), (γ), ο ρυθμιστής που ικανοποιεί το φράγμα συμπεριφοράς  $J_\infty(K) < \gamma$  δίνεται απο την ακόλουθη περιγραφή στο χώρο κατάστασης:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left[ A + \gamma B_1 B_1^T X - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X - L_z (C_2 + \gamma^2 D_{21} B_1^T X) \right] \hat{x}(t) + L_z y(t) \quad (3.93)$$

$$u(t) = K_\infty \hat{x}(t)$$

$$\text{όπου:} \quad K_\infty = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X$$

$$L_z = Y(I - \gamma^{-2} XY)^{-1} (C_2^T + \gamma^{-2} X^T B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$



Η  $\gamma$ -επανάληψη ( $\gamma$ -iteration) είναι μια επαναληπτική μέθοδος, που στηρίζεται στη Μέθοδο Διχοτόμου<sup>31</sup>. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται στην εύρεση του ελαχίστου του συναρτησιακού κόστους  $J_\infty(K)$  στον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας. Έστω  $\gamma_{\inf}$  η τιμή της παραμέτρου  $\gamma$  που δίνει την ελάχιστη εφικτή τιμή της  $H_\infty$ -νόρμας.

**Ορισμός 10.** Ορίζουμε το  $\gamma$ -μέγιστο κάτω φράγμα ως ακολούθως:

$$\gamma_{\inf} = \inf \left\{ \|F(P, K)\|_\infty : u = Ky, K \text{ stabilizing} \right\} \quad (3.94)$$

Ο αλγόριθμος της  $\gamma$ -επανάληψης περιγράφεται ως εξής:

**Input :** ανοχή  $\delta$ , αρχικό σημείο  $(\underline{\gamma}, \bar{\gamma})$ .

**Output :** η προσεγγιστική τιμή  $\gamma$  του  $\gamma_{\inf}$  και ο  $H_\infty$ -βέλτιστος ρυθμιστής  $K$ .

**Βήμα 0 :** Έλεγχε αν:  $\underline{\gamma} < \gamma_{\inf} < \bar{\gamma}$ .

**Βήμα 1 :** Θέσε  $\gamma = \frac{\underline{\gamma} + \bar{\gamma}}{2}$ .

**Βήμα 2 :** Αν  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  ικανοποιούνται, τότε θέσε  $\gamma = \bar{\gamma}$ . Ειδιάλλως, θέσε  $\gamma = \underline{\gamma}$ .

**Βήμα 3 :** Αν  $\bar{\gamma} - \underline{\gamma} > \delta$ , τότε εκτέλεσε τα βήματα 1, 2, 3.

**Βήμα 4 :**  $\exists K : J_\infty(K) < \gamma$  και για  $\gamma = \bar{\gamma}$  ικανοποιεί τη σχέση:  $\|F(P, K)\|_\infty \leq \gamma_{\inf} + \delta$ .

**Σγόλιο 1:** Το αρχικό σημείο (initial point) της  $\gamma$ -επανάληψης επιλέγεται αυθαίρετα και είναι σταθερό (fixed point).

**Συμπέρασμα:** Το παραπάνω θεώρημα συνδυάζεται με την  $\gamma$ -επανάληψη παρέχοντας τον αλγόριθμο σχεδίασης του  $H_\infty$ -βέλτιστου ρυθμιστή για ένα σύστημα, δεδομένου ότι το δεύτερο ικανοποιεί τις συνθήκες (A1)-(A5) και (B1).

**Σγόλιο 2:** Συνήθως, σε πραγματικά προβλήματα, δεν απαιτείται η εύρεση και εφαρμογή του βέλτιστου  $H_\infty$ -ρυθμιστή. Εντούτοις, για λόγους υπολογιστικού κόστους ή ακόμα και φυσικών απαιτήσεων του εκάστοτε προβλήματος επιλέγεται η σχεδίαση ενός υποβέλτιστου ρυθμιστή. Το γεγονός αυτό δεν «αποδυναμώνει» τα ειδοποιά χαρακτηριστικά της  $H_\infty$  σχεδίασης, δηλαδή την πρόσδοση ευστάθειας (stabilizability) και η συμπεριφορά (performance).

**Σγόλιο 3:** Πέραν της μεθόδου σχεδίασης του  $H_\infty$ -βέλτιστου ρυθμιστή όπως αυτή παρουσιάστηκε παραπάνω, συναντώνται και δύο άλλες προσεγγίσεις. Πρώτον, η *Youla-Kucera Παραμετροποίηση* (*Youla-Kucera Parametrization*), η οποία εφαρμόζεται στο σύστημα κλειστού βρόχου προς σχεδίαση ενός ρυθμιστή που προσδίδει ευστάθεια (stabilizing) υψηλής τάξης [117]. Δεύτερον, μια αναδιάταξη των εξισώσεων Riccati με κριτήρια βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί γραμμικές μητρικές εξισώσεις και απαιτεί λιγότερες παραδοχές.

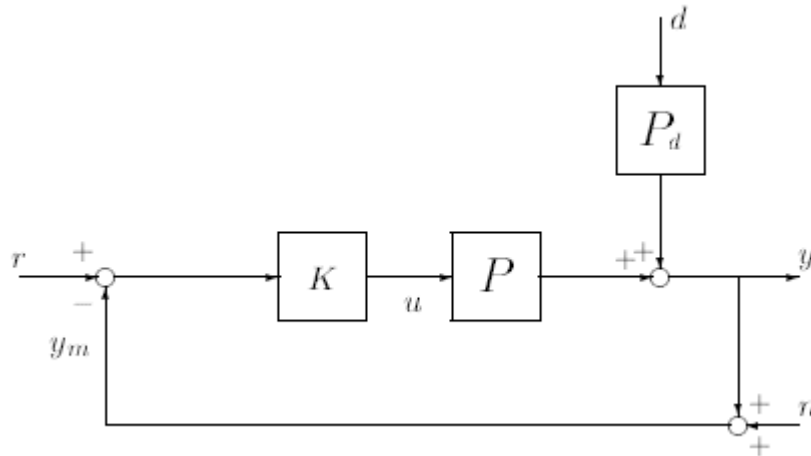
<sup>31</sup> Στα αγγλικά **bisection method**. Για περισσότερες λεπτομέρειες [42].

### 3.4 Ειδικά Θέματα Σχεδίασης

Στις προηγούμενες παραγράφους θεμελιώσαμε και αναλύσαμε το πρόβλημα της σύνθεσης του βέλτιστου  $H_\infty$ -ρυθμιστή. Στην παρούσα ενότητα, θα ασχοληθούμε με διάφορα ζητήματα που αφορούν στη σχεδίαση του ρυθμιστή κινούμενοι αποκλειστικά στο πεδίο της συχνότητας. Κατά τη διαδικασία της σχεδίασης με την έννοια αυτή καλούμαστε να επιλέξουμε κατάλληλη συνάρτηση κόστους καθώς και το κατάλληλο διάνυσμα ελεγχόμενης εξόδου  $z$ . Σε αδρές γραμμές, οι αντικειμενικοί σκοποί σχεδίασης ενός  $H_\infty$ -ρυθμιστή στο πεδίο της συχνότητας είναι η ταχεία απόκριση, η μικρή υπερπήδηση<sup>32</sup>, ικανοποιητική ευρωστία. Επομένως, η μετουσίωση των παραπάνω σκοπών σχεδίασης σε ένα ποσοτικό πρόβλημα σύνθεσης ρυθμιστή καθίσταται επιτακτική [4] [6] [7] [9].

#### 3.4.1 Συναρτήσεις Ευαισθησίας

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε ένα γενικότερο σχήμα κλειστού βρόχου (Βλ. Σχήμα 3.2), προκειμένου να εξάγουμε κάποιες ειδικές συναρτήσεις που θα παίξουν σημαντικό ρόλο στη σχεδίαση του  $H_\infty$ -ρυθμιστή στο πεδίο της συχνότητας. Εδώ, το  $y$  είναι η έξοδος, το  $u$  η είσοδος ελέγχου, τα  $d$  και  $n$  οι διαταραχές του συστήματος και της μέτρησης αντίστοιχα, το  $y_m$  η μετρούμενη έξοδος και  $r$  το σήμα αναφοράς.



Σχήμα 3.2: Γενική Διάταξη Κλειστού Βρόχου

Απο την γραμμικότητα του περιγραφόμενου δυναμικού συστήματος έχουμε για τις συναρτήσεις μεταφοράς απο τα σήματα  $r$ ,  $d$  και  $n$  στην έξοδο  $y$ :

$$\bullet \quad d = n = 0: y = PK(r - y) \quad \Rightarrow \quad G_{ry} = (1 + PK)^{-1} PK \quad (3.95)$$

$$\bullet \quad r = n = 0: y = P_d d + PK(-y) \quad \Rightarrow \quad G_{dy} = (1 + PK)^{-1} P_d \quad (3.96)$$

$$\bullet \quad d = r = 0: y = PK[-(y + n)] \quad \Rightarrow \quad G_{ny} = -(I + PK)^{-1} PK \quad (3.97)$$

<sup>32</sup> Στα αγγλικά **overshoot**. Για περισσότερες λεπτομέρειες [3] [16] [36].

Επομένως, απο Αρχή Γραμμικής Υπέρθεσης και απο τις σχέσεις (3.95), (3.96), (3.97) έπεται η έκφραση της εξόδου  $y$ :

$$y = (I + PK)^{-1} PK \cdot r + (I + PK)^{-1} P_d \cdot d - (I + PK)^{-1} PK \cdot n \quad (3.98)$$

Εισάγουμε την συνάρτηση ευαισθησίας (sensitivity function)  $S$  και την συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας (complementary sensitivity function)  $T$ :

$$S \equiv (I + PK)^{-1} \quad (3.99)$$

$$T \equiv (I + PK)^{-1} PK \quad (3.100)$$

**Σχόλιο:** Είναι εύκολο να δούμε ότι  $S + T = I$ . Εξ ου και οι αντίστοιχες ονομασίες. Επιπλέον, είναι προφανές ότι η συνάρτηση αποτελεί συγχρόνως την συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου αν εξαιρέσουμε τις διαταραχές.

Επομένως, η έκφραση (3.98), λόγω των ορισμών (3.99) και (3.100), παίρνει τη μορφή:

$$y = Tr + SP_d d - Tn \quad (3.101)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το σήμα της εισόδου ελέγχου  $u$ , το οποίο εκφράζουμε με ανάλογο με πριν τρόπο ως γραμμική συνάρτηση της τριάδας σημάτων  $(r, d, n)$ :

$$\bullet \quad d = n = 0: u = (r - uP)Kr \Rightarrow u = K(I + PK)^{-1} r \Rightarrow G_{nu} = KS \quad (3.102)$$

$$\bullet \quad r = n = 0: u = -(P_d d + Pu)Kd \Rightarrow u = -K(I + PK)^{-1} P_d d \Rightarrow G_{du} = -KSP_d \quad (3.103)$$

$$\bullet \quad d = r = 0: u = -(Pu + n)K \Rightarrow G_{ny} = -K(I + PK)^{-1} n \Rightarrow G_{nu} = -KS \quad (3.104)$$

Επομένως, απο τις σχέσεις (3.102), (3.103), (3.104), έπεται:

$$u = KSr - KSP_d d - KSn \quad (3.105)$$

Έπειτα, για το σήμα σφάλματος  $e = r - y$ , έχουμε απο σχέση (3.101):

$$e = r - (Tr + SP_d d - Tn) \Rightarrow e = (I - T)r - SP_d d + Tn \Rightarrow$$

$$e = Sr - SP_d d + Tn \quad (3.106)$$

Η φυσική ερμηνεία της συνάρτησης  $S$  εκφράζει τη μείωση στην ευαισθησία της εξόδου που πραγματοποιείται λόγω της ανατροφοδότησης. Άλλωστε, η συνάρτηση ευαισθησίας ισούται με το λόγο της σχετικής μεταβολής της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου  $dT/T$  προς το σχετικό σφάλμα του μοντέλου  $dP/P$ :

$$S = \frac{dT/T}{dP/P} \quad (3.107)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό μας (Βλ. Σχέση 3.107). Απο την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου  $T$ , διαφορίζοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 T &= (I + PK)^{-1} PK \Rightarrow dT = d\left(\frac{PK}{I + PK}\right) \Rightarrow \\
 dT &= \frac{d(PK)(I + PK) - PKd(PK)}{(I + PK)^2} \stackrel{K \rightarrow \text{scalar}}{\Rightarrow} \\
 dT &= \frac{-K^2 PdP + KdP(I + PK)}{I + PK} \cdot (I + PK)^{-1} \Rightarrow \\
 dT &= \frac{KdP}{I + PK} \cdot S \Rightarrow \\
 dT &= \frac{dP}{P} [(I + PK)^{-1} PK] \cdot S \Rightarrow \\
 S &= \frac{dT/T}{dP/P} \quad \square
 \end{aligned}$$

Αν επιθυμούμε καλή παρακολούθηση (tracking) του συνολικού συστήματος στο σήμα αναφοράς  $r$ , τότε απαιτείται μικρό  $e$ . Απο σχέση (3.106), αυτό επιτυγχάνεται όταν η συνάρτηση ευαισθησίας  $S$  είναι μικρή. Συγχρόνως, θα πρέπει να συμπίπτει η συνεισφορά του θορύβου  $n$  στην μετρούμενη έξοδο, που μεταφράζεται σε μικρές τιμές της  $T$ . Εντούτοις, λόγω της συμπληρωματικότητας των  $S$  και  $T$ , οι συναρτήσεις αυτές δεν γίνεται να είναι μικρές ταυτόχρονα. Επομένως, επιβάλλεται ένας συμβιβασμός ανάμεσα στην καλή παρακολούθηση αναφοράς και του θορύβου μέτρησης. Ευτυχώς, το σήμα αναφοράς  $r$  έχει συνήθως χαμηλόσυχο περιεχόμενο, ενώ ο θόρυβος  $n$  είναι σημαντικός σε υψηλές συχνότητες.

**Συμπέρασμα:** Είναι δυνατή η σχεδίαση ρυθμιστών με χαρακτηριστικά καλής παρακολούθησης (χαμηλές συχνότητες) και συγχρόνως ιδιότητες αποτελεσματικής εξάλειψης θορύβων (υψηλές συχνότητες), κάνοντας την  $S$  μικρή σε χαμηλές συχνότητες και την  $T$  μικρή σε υψηλές συχνότητες.

Η συνάρτηση ευαισθησίας συνδέεται -εκτός απο την συμπεριφορά- και με την ευρωστία. Εισάγουμε την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου  $L$ :

$$L \equiv PK \quad (3.108)$$

Τότε, απο σχέσεις (3.99) και (3.100) οι συνάρτησεις ευαισθησίας  $S$  και  $T$  γράφονται ως εξής:

$$S = (1 + L)^{-1} \quad (3.109)$$

$$T = (1 + L)^{-1} L \quad (3.110)$$

**Σχόλιο:** Προφανώς η κρίσιμη συχνότητα<sup>33</sup>  $\omega_{cr}$  προκύπτει απο την χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου:  $|L(j\omega)| = 1$ .

<sup>33</sup> Στα αγγλικά **cross-over frequency**.

Στην περίπτωση ενός SISO συστήματος, η απόσταση ενός σημείου της συνάρτησης  $L(j\omega)$  από το σημείο  $(-1,0)$  στο Διάγραμμα Nyquist είναι  $|1+L(j\omega)|=1/|S(j\omega)|$ . Άρα η απόσταση του σημείου της  $L(j\omega)$  είναι μεγαλύτερη από  $1/M_S$  αν και μόνον αν ισχύει:

$$|S(j\omega)| < M_S, \forall \omega \quad (3.111)$$

Επομένως, τα «κλασικά» περιθώρια ευστάθειας (stability margins) επιβάλλουν ένα φράγμα στην  $\|S\|_\infty$ .

**Σχόλιο:** Το μέγεθος  $M_S$  είναι το μέγιστο μέτρο της  $S(j\omega)$  και αποτελεί μία από τις προδιαγραφές του μέτρου  $|S(j\omega)|$ . Στην Ενότητα 3.3.3 δίνεται πληρέστερη αναφορά.

Έπειτα, η συνάρτηση  $T$  συνδέεται επίσης με την ευρωστία. Θεωρούμε ότι το σύστημα είναι ένα αβέβαιο σύστημα. Έστω  $P$  το ονομαστικό σύστημα και έστω ότι έχουμε *πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα*<sup>34</sup>. Οπότε, έχουμε για το αβέβαιο σύστημα  $P_\Delta$ :

$$P_\Delta = (1 + \Delta_M)P \quad (3.112)$$

όπου  $\Delta_M$ : η σχετική αβεβαιότητα.

Υποθέτουμε ότι η αβεβαιότητα  $\Delta_M$  είναι φραγμένη  $\forall \omega$  ως εξής:

$$|\Delta_M| \leq l(\omega) \quad (3.113)$$

Αν  $L_\Delta$  η συνάρτηση μεταφοράς (ανοικτού) βρόχου του αβέβαιου συστήματος, τότε από την σχέση (3.112), θα έχουμε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού βρόχου:

$$1 + L_\Delta = 1 + (1 + \Delta_M)PK = (1 + PK)(1 + \Delta_M T) \quad (3.114)$$

Η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου απαιτεί να ισχύει  $1 + L_\Delta \neq 0$ . Από τη σχέση (3.114), έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές  $\forall \Delta_M$  αν και μόνον αν ισχύει:

$$1 + \Delta_M T \neq 0 \Rightarrow |\Delta_M T| \neq 1 \quad (3.115)$$

Όμως ισχύει:  $|\Delta_M T| \leq |\Delta_M| |T| \stackrel{(3.109)}{\Rightarrow} |\Delta_M T| \leq l(\omega) |T| \quad (3.116)$

Επομένως, από την σχέση (3.116), συμπεραίνουμε ότι μια επιλογή για την ποσότητα  $|T|$ , ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.110) είναι η ακόλουθη  $\forall \omega$ :

$$|T(j\omega)| < 1/l(\omega) \quad (3.117)$$

Τότε, από την σχέση (3.116) προκύπτει ότι  $|\Delta_M T| < 1$ .

<sup>34</sup> Ο όρος αυτός είναι γνωστός ως **multiplicative uncertainty** στη σχετική ορολογία.

### 3.4.2 Στοιχειώδεις Περιορισμοί Συμπεριφοράς

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι σε ένα σύστημα η σχηματοποίηση βρόχου (loop shaping) μπορεί να πραγματοποιηθεί με σχηματοποίηση των μέτρων  $|S(j\omega)|$  και  $|T(j\omega)|$  κατά τρόπο ώστε να ικανοποιούνται κριτήρια συμπεριφοράς και ευρωστίας. Εντούτοις, τα μέτρα των συναρτήσεων μεταφοράς του κλειστού βρόχου δεν μπορούν να σχηματοποιηθούν ελεύθερα, λόγω της ύπαρξης στοιχειωδών περιορισμών αναφορικά με την συμπεριφορά, τους οποίους και απαριθμούμε στην παρούσα ενότητα.

**Θεώρημα 6 (Σχέση Μέτρου-Φάσης Bode).** Έστω  $P(s)$  καλά ορισμένη και ευσταθής συνάρτηση μεταφοράς συστήματος ελαχίστης φάσης<sup>35</sup> και χωρίς καθυστέρηση. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\arg(P(j\omega_o)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \log |P(j\omega)|}{d \log \omega} \log \left| \frac{\omega + \omega_o}{\omega - \omega_o} \right| \cdot \frac{d\omega}{\omega} \quad (3.118)$$

**Σχόλιο 1:** Η σχέση (3.118) περιγράφει την ελάχιστη δυνατή υστέρηση φάσης (phase lag) ενός συστήματος δεδομένου μέτρου (κέρδους) απόκρισης  $|P(j\omega)|$ . Επομένως, η πραγματοποίηση ενός γραμμικού συστήματος δεδομένου μέτρου απόκρισης εισάγει ένα συγκεκριμένο ποσό μετατόπισης φάσης.

**Σχόλιο 2:** Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας  $\log \left[ \frac{\omega + \omega_o}{\omega - \omega_o} \right]$  τείνει στο άπειρο καθώς  $\omega \rightarrow \omega_o$ , ενώ αλλού είναι πεπερασμένος. Άρα στην περίπτωση αυτή, το όρισμα  $\arg(P(j\omega_o))$  εξαρτάται από την τοπική κλίση του λογαρίθμου του μέτρου της  $P$ :  $d \log |P(j\omega)| / d \log \omega \big|_{\omega=\omega_o}$ . Άρα, επειδή έχουμε ότι  $\int_{-\infty}^{\infty} \log \left[ \frac{\omega + \omega_o}{\omega - \omega_o} \right] \cdot d\omega / \omega = \pi/2$ , προκύπτει ο ακόλουθος προσεγγιστικός για συστήματα ελαχίστης φάσης:

$$\arg(P(j\omega_o)) \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{d \log |P(j\omega)|}{d \log \omega} \right)_{\omega=\omega_o} \quad (3.119)$$

Επομένως, από το Σχόλιο 2, έχουμε ότι μια κλίση -20 db/decade στο κέρδος στην περιοχή του  $\omega_o$ , δηλαδή  $d \log |P(j\omega)| / d \log \omega = -1$ , σημαίνει γωνία φάσης περίπου ίση με  $-\pi/2$  rad/sec. Ομοίως, μια κλίση -40 db/decade στο κέρδος σημαίνει γωνία φάσης περίπου ίση με  $-\pi$  rad/sec. Επομένως, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι για να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, θα πρέπει να συγκρατήσουμε την κλίση του κέρδους συνάρτησης ανοικτού βρόχου  $|L(j\omega)|$  στην περιοχή μεταξύ -20 και -30 db/decade στην κρίσιμη συχνότητα  $\omega_{cr}$  (όπου  $|L(j\omega)|=1$ ), αφού αυτό θα σήμαινε υστέρηση φάσης μικρότερη των  $-180^\circ$ .

<sup>35</sup> Ένα συνεχές γραμμικό σύστημα καλείται σύστημα ελαχίστης φάσης (minimum phase) αν δεν έχει μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημιπίεδο. Ειδικά, το σύστημα καλείται σύστημα μη ελαχίστης φάσης (nonminimum phase).

**Σχόλιο 3:** Απο την κλασική θεωρία SISO συστημάτων αυτόματης ρύθμισης, γνωρίζουμε ότι για λόγους ευστάθειας του συστήματος θα πρέπει να ισχύει  $|L(j\omega)| < 1$  στην κρίσιμη συχνότητα  $\omega_{cr}$ , όπου έχουμε  $\arg(L(j\omega_o)) = -180^\circ$ . Έπειτα, απο τη σχέση (3.109), είναι προφανές ότι μικρές τιμές της συνάρτησης  $S$  συνεπάγεται μεγάλες τιμές για την  $L$  και αντίστροφα. Απο τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι επιβάλλονται κάποιοι περιορισμοί στο κέρδος  $|S(j\omega)|$ .

**Σχόλιο 4:** Γνωρίζουμε ότι τα φυσικά δυναμικά συστήματα εξασθενούν σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(j\omega) = 0$ . Άρα απο Σχόλιο 3 έπεται ότι  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(j\omega) = 1$ . Αυτό θα μπορούσαμε να το δούμε και απο την σκοπιά των απαιτήσεων ευρωστίας. Θεωρούμε το αβέβαιο σύστημα της εξίσωσης (3.112). Είναι πρακτικά αδύνατο να εξάγουμε την μετατόπιση φάσης<sup>36</sup> ή το σχετικό μέτρο<sup>37</sup> του  $P_\Delta$  σε μεγάλες συχνότητες. Άρα σε μεγάλες συχνότητες έχουμε και λόγω της μεγάλης αβεβαιότητας στην μετατόπιση φάσης ή το σχετικό μέτρο  $|\Delta_M|$  (Βλ. Σχέση 3.113) θα είναι μεγάλο, δηλαδή  $|l(\omega)| \gg 1$ . Άρα απο τη σχέση (3.112) έπεται ότι  $|T(j\omega)| \ll 1$ . Άρα απο συμπληρωματικότητα των  $S$  και  $T$  έχουμε ότι  $S(j\omega) \approx 1$ , σε υψηλές συχνότητες.

Έπειτα, υπάρχει μία ενδιαφέρουσα ικανή συνθήκη απο την κλασική θεωρία SISO συστημάτων, που δείχνει ότι η μέση πραγματοποιήσιμη συμπεριφορά (performance) μπορεί να ποσοτικοποιηθεί.

**Θεώρημα 7 (Ολοκλήρωμα Ευαισθησίας Bode).** Έστω  $L(s)$  το οποίο:

- (α) δεν έχει μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
- (β) έχει τουλάχιστον δύο περισσότερους πόλους απο μηδενικά.
- (γ) έχει  $N_p$  το πλήθος πόλους  $p_i$  στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Τότε αν η συνάρτηση ευαισθησίας  $S$  ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_0^\infty \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i) \quad (3.120)$$

το σύστημα κλειστού βρόχου  $\rightarrow$  ευσταθές.

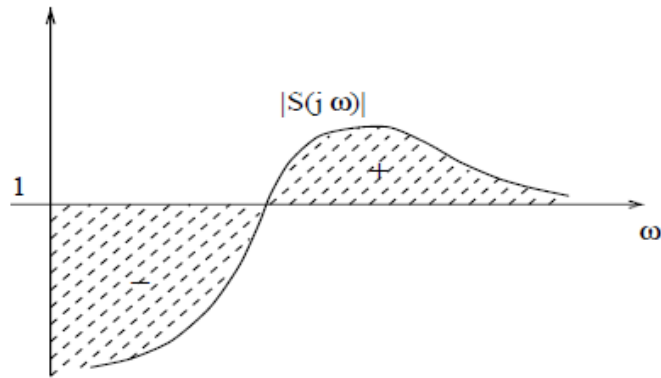
**Σχόλιο 1:** Σε ένα ευσταθές σύστημα ( $N_p = 0$ ) η σχέση (3.120) δίνει:  $\int_0^\infty \log |S(j\omega)| d\omega = 0$ .

Δηλαδή το εμβαδό της επιφάνειας μείωσης ευαισθησίας, όπου  $\log |S| < 0$  (δηλ.  $|S| < 1$ ), ισούται με την αυτό της αύξησης, όπου  $\log |S| > 0$  (δηλ.  $|S| > 1$ ). Δηλαδή, αν επιλέξουμε για λόγους σχεδίασης το κέρδος της συνάρτησης ευαισθησίας να «κρατηθεί» κάτω απο 1 σε ένα εύρος συχνοτήτων, τότε θα υπάρχει κάποια άλλη συχνοτική περιοχή όπου το κέρδος θα ξεπερνάει το 1. Με άλλα λόγια, τα πλεονεκτήματα και το κόστος της ανατροφοδότησης ισορροπούν ακριβώς. Η εικόνα αυτή είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία σαν το *φαινόμενο στρώματος νερού*<sup>38</sup> (Βλ. Σχήμα 3.3).

<sup>36</sup> Στα αγγλικά **phase shift**.

<sup>37</sup> Στα αγγλικά **relative magnitude**.

<sup>38</sup> Στα αγγλικά **water bed effect**.



**Σχήμα 3.3:** Φαινόμενο Στρώματος Νερού Συνάρτησης Ευαισθησίας  $S$  [6]

**Σχόλιο 2:** Ο τύπος (3.120) επεκτείνεται σε MIMO συστήματα, όπου πλέον έχουμε μήτρα συναρτήσεων ευαισθησίας  $S$  :

$$\int_0^{\infty} \log |\det(S(j\omega))| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i) \quad (3.121)$$

Το ολοκλήρωμα ευαισθησίας Bode (Βλ. Σχέση 3.120) μας λέει ότι το μέγιστο που μπορούμε να πετύχουμε εφαρμόζοντας την αυτόματη ρύθμιση είναι να επικεντρωθούμε σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων της μορφής  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ , αφού το συμπλήρωμα τους εύρους αυτού θα δίνει καθαρό αποτέλεσμα το λιγότερο μηδέν. Ευτυχώς, στα συστήματα ελαχίστης φάσης τα πράγματα δεν είναι τόσο άσχημα όπως δείχνει το θεώρημα. Αφού η συμπληρωματική (στο εύρος) περιοχή  $\omega_1 < \omega < \infty$ , που συνεισφέρει στο  $(1, \infty)$ -πεδίο τιμών του  $|S(j\omega)|$  είναι μη πεπερασμένη, τότε το κέρδος αυτό μπορεί να τεθεί αυθαίρετα κοντά στην τιμή  $1^+$ ,  $\forall \omega$ . Ακολουθεί το σχετικό θεώρημα.

**Θεώρημα 8 (Πραγματοποιήσιμη Συμπεριφορά Συστημάτων Ελαχίστης Φάσης).** Έστω  $P(s)$  σύστημα ελάχιστης φάσης. Έστω  $\omega_1 > 0$ . Τότε  $\forall \varepsilon > 0$  και  $\forall \delta > 0 \exists$  ρυθμιστής  $K$  που προσδίδει ευστάθεια τέτοιος ώστε:

$$|S(j\omega)| < \varepsilon, \quad \forall |\omega| \leq \omega_1 \quad (3.122)$$

και

$$|S(j\omega)| < 1 + \delta, \quad \forall \omega \quad (3.123)$$

Στα συστήματα μη ελαχίστης φάσης δεν ισχύουν τα ευνοϊκά αποτελέσματα του Θεωρήματος 8. Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 9 (Πραγματοποιήσιμη Συμπεριφορά Συστημάτων Μη Ελαχίστης Φάσης).** Ορίζουμε  $M = \max_{|\omega| \leq \omega_1} |S(j\omega)|$ . Έστω το σύστημα  $P(s)$ , τέτοιο ώστε  $\exists s_o : \operatorname{Re}(s_o) > 0$  και  $P(s_o) = 0$ . Τότε  $\exists c = c(\omega_1, P) > 0 : \forall K$  ρυθμιστή που προσδίδει ευστάθεια ισχύει:

$$M |S(j\omega)|^c \geq 1 \quad (3.124)$$

για κάποιο  $\omega > \omega_1$ .

**Σχόλιο :** Το θεώρημα μας λέει ότι σε συστήματα μη ελαχίστης φάσης καθώς το  $M \rightarrow 0$ , το αυξάνει  $|S(j\omega)|$  απεριόριστα σε κάποια άλλο συχνοτικό εύρος ή τιμή.



### 3.4.3 Σχηματοποίηση Βρόχου

Στην Ενότητα 3.1.1, βρήκαμε τις εκφράσεις της εισόδου ελέγχου  $u$  και του σφάλματος παρακολούθησης  $e$  ως γραμμικούς συνδυασμούς του σήματος αναφοράς  $r$  και των διαταραχών μοντέλου και μέτρησης  $d$  και  $n$  αντίστοιχα. Οι συντελεστές στάθμισης (weight coefficients) δίνονται απο το σύνολο συναρτήσεων μεταφοράς  $(K, S, P_d)$  στην περίπτωση της εισόδου ελέγχου  $u$  και απο το σύνολο  $(S, T, P_d)$  στην περίπτωση του σφάλματος  $e$  (Βλ. Σχέσεις 3.105 και 3.106). Επομένως, σε μητρωική μορφή έχουμε τις σχέσεις:

$$u = \begin{bmatrix} KS & -KSP_d & -KS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} S & -SP_d & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $P_d(j\omega)$  συνδέεται με την διαταραχή στο μοντέλο -οπότε και μπορεί να εξαιρεθεί απο τα διανύσματα στάθμισης- έχουμε ότι δεδομένης της μορφής των σημάτων  $(r, d, n)$ , το σφάλμα  $e$  εξαρτάται απο τις συναρτήσεις  $S$  και  $T$ , ενώ η είσοδος ελέγχου απο τη συνάρτηση  $KS$ . Έπειτα, θυμίζουμε τις αντικειμενικές προδιαγραφές σχεδίασης βάσει των οποίων ζητείται να πετύχουμε καλή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς και ικανοποιητική εξασθένηση των θορύβου του συστήματος. Επιπλέον, σε εφαρμογές είναι επιθυμητό το σήμα της εισόδου ελέγχου να είναι φραγμένη στο εφικτό εύρος συχνοτήτων για το κλειστό σύστημα. Το τελευταίο υπονοεί ένα φράγμα στο μέτρο  $|K(j\omega)S(j\omega)|$ .

Τα τρία παραπάνω αντικειμενικά κριτήρια σχεδίασης μπορούν να «μεταφραστούν» συνολικά με την απαίτηση η τιμή  $|S(j\omega)|$  να είναι μικρή στις χαμηλές συχνότητες και συγχρόνως οι τιμές των  $|T(j\omega)|$  και  $|K(j\omega)S(j\omega)|$  να είναι μικρές στις υψηλές συχνότητες. Έτσι, ορίζουμε την ακόλουθη πολυβάθμια μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς:

$$N = \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \\ W_u KS \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

όπου  $(W_s, W_T, W_u)$ : μια κατάλληλη τριπλέτα φίλτρων στάθμισης.

Κατ'αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα βέλτιστης σχεδίασης μεταφέρεται στην επιλογή κατάλληλων «βαρών» και στην ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού κόστους που περιλαμβάνει την  $N$ . Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται *πρόβλημα μεικτής ευαισθησίας*<sup>37</sup>, λόγω της μεικτής φύσης του.

Χρησιμοποιώντας την  $H_2$ -νόρμα, διαμορφώνουμε το τετραγωνικό  $H_2$ -κόστος:

$$\begin{aligned} J_2(N) &= \|N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \\ W_u KS \end{bmatrix}^T (-j\omega) \begin{bmatrix} W_s S \\ W_T T \\ W_u KS \end{bmatrix} (j\omega) d\omega \\ &= \|W_s S\|_2^2 + \|W_T T\|_2^2 + \|W_u KS\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.127)$$

<sup>37</sup> Στα αγγλικά **mixed-sensitivity problem**.

Η συγκεκριμένη προσέγγιση εμφανίζει την «εγγενή» αδυναμία ότι, ακόμα και αν η τιμή του τετραγωνικού κόστους είναι μικρή, δεν παρέχεται κάποια εξασφάλιση ότι οι συναρτήσεις  $S$ ,  $T$ ,  $KS$  θα διατηρούν μικρές τιμές σε όλες τις συχνότητες του εύρους ενδιαφέροντος. Αυτό συμβαίνει διότι ουσιαστικά ελαχιστοποιούμε μία μέση τιμή.

Επομένως, προκειμένου να εξασφαλίσουμε δεδομένα φράγματα για τις συναρτήσεις  $S(j\omega)$ ,  $T(j\omega)$  και  $K(j\omega)S(j\omega)$  για κάθε συχνότητα  $\omega$ , βασίζουμε τη σχεδίασή μας σε ένα  $H_\infty$ -τύπου κόστος. Θεωρούμε την περίπτωση SISO συστημάτων. Είναι εύκολη η μετάβαση σε MIMO συστήματα, αν αντικαταστήσουμε το μέτρο του μιγαδικού  $|P(j\omega)|$  με τη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή  $\bar{\sigma}(P(j\omega))$ . Έχουμε λοιπόν το  $\gamma$ -φράγμα:

$$\|N\|_\infty < \gamma \quad (3.128)$$

η οποία ανισότητα μεταφράζεται στις ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις:

$$|W_S(j\omega)S(j\omega)| < \gamma \quad (3.129)$$

$$\|W_S S\|_\infty < \gamma, \|W_T T\|_\infty < \gamma, \|W_u KS\|_\infty < \gamma \Rightarrow |W_T(j\omega)T(j\omega)| < \gamma \quad (3.130)$$

$$|W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)| < \gamma, \forall \omega \quad (3.131)$$

Απο τις σχέσεις (3.129), (3.130) και (3.131), εξάγουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_S(j\omega)| \quad (3.132)$$

$$|T(j\omega)| < \gamma/|W_T(j\omega)| \quad (3.133)$$

$$|K(j\omega)S(j\omega)| < \gamma/|W_u(j\omega)|, \forall \omega \quad (3.134)$$

Σε αρκετές περιπτώσεις, οι διάφορες συναρτήσεις μεταφοράς που επιχειρούμε να περιορίσουμε είναι μη γεινιάζουσες. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη μήτρα στάθμισης επικρατεί αριθμητικά στο αντίστοιχο υπο-εύρος συχνοτήτων. Λόγου χάρη, όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε χαμηλές συχνότητες απαιτείται μικρή τιμή της συνάρτησης ευαισθησίας, ενώ οι δύο άλλες συναρτήσεις είναι μικρότερης σημασίας. Οπότε, θα πρέπει η σχεδίασή μας να γίνεται κατά τρόπο ώστε  $|W_S(j\omega)| \gg |W_T(j\omega)|$  και  $|W_S(j\omega)| \gg \gamma/|W_u(j\omega)|$  για  $|\omega| < \omega_1$  για κάποιο  $\omega_1$ . Στην περίπτωση αυτή, προκύπτει ότι  $\bar{\sigma}(N(j\omega)) \approx |W_S(j\omega)S(j\omega)|$ . Επιπλέον, οι  $H_\infty$ -ρυθμιστές έχουν την ιδιότητα αν η τιμή της παραμέτρου  $\gamma$  δεν είναι πολύ μεγαλύτερη από το  $\gamma_{\text{inf}}$ , τότε η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι αρκετά κοντά στο  $H_\infty$ -φράγμα τουλάχιστον σε χαμηλές συχνότητες. Δηλαδή ισχύει  $\bar{\sigma}(N(j\omega)) = \gamma$ . Και φυσικά έπεται ότι  $|W_S(j\omega)S(j\omega)| \approx \gamma$ . Ισοδύναμα από τη σχέση (3.127), λαμβάνουμε την ακόλουθη βασική αρχή σχηματοποίησης βρόχου:

$$|S(j\omega)| \approx \gamma/|W_S(j\omega)| \quad (3.135)$$

**Σημείωση:** Ένας αποδεκτός δείκτης ευρωστίας που χρησιμοποιείται κατά τη σχεδίαση εύρωστων  $H_\infty$ -ρυθμιστή σε συστήματα είναι η ποσότητα  $\gamma = \max_{\omega} \{|S(j\omega)| + |T(j\omega)|\}$ , όπως αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία [79].

Προκειμένου να επιλύσουμε το πρόβλημα του  $H_\infty$ -ρυθμιστή, ο οποίος ικανοποιεί το όριο που περιγράφεται στη σχέση (3.128), απαιτείται να ορίσουμε ένα μοντέλο περιγραφόμενο στο χώρο κατάστασης, το οποίο έχει σα συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου τη μήτρα  $N$ . Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε το σήμα μετρούμενης εξόδου  $y_m$  (Βλ. Σχήμα 3.2) και έχουμε λόγω της σχέσης (3.101) και δεδομένου ότι  $S = I - T$ :

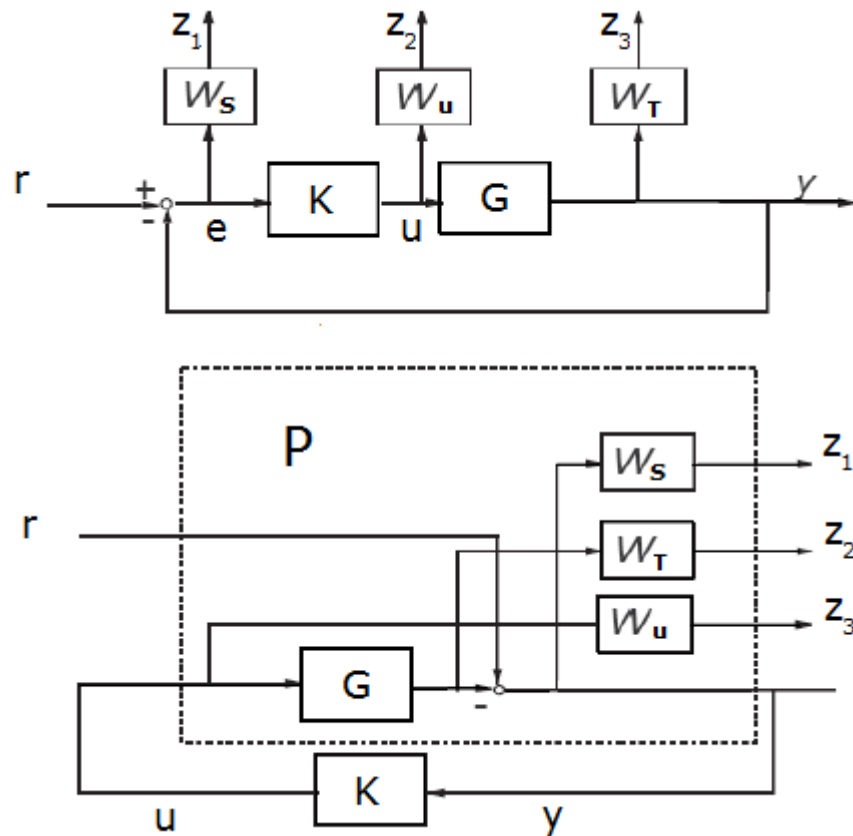
$$y_m = y + n \Rightarrow y_m = Tr + SP_d d + Sn \quad (3.136)$$

Επομένως, θεωρώντας την ειδική περίπτωση συστήματος ρύθμισης όπου  $d = r = 0$  (Βλ. Σχήμα 3.2), θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} y_m \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ -T \\ -KS \end{bmatrix} n \quad (3.137)$$

και άρα απο την μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς κλειστού βρόχου  $N$ , όπου προφανώς έχουμε τα βάρη  $W_S = I$ ,  $W_T = -I$ ,  $W_u = -I$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε την απαιτούμενη περιγραφή στο χώρο κατάστασης.

Εφαρμόζοντας λοιπόν τα τρία αυτά φίλτρα στάθμισης, προκύπτει η πρότυπη μορφή του προβλήματος μεικτής ευαισθησίας τύπου  $S/T/KS$  (Βλ. Σχήμα 3.4). Η είσοδος ελέγχου  $u$  και το σφάλμα παρακολούθησης  $e$  δίνονται απο τη σχέση (3.125). Χάριν απλούστευσης, στο γενικευμένο σύστημα θεωρούμε ότι  $d = n = 0$ . Αναπαριστώνται και τα σήματα σφάλματος  $z_1$ ,  $z_2$  και  $z_3$ .



**Σχήμα 3.4:** Πρότυπη Μορφή Προβλήματος Μεικτής Ευαισθησίας Τύπου  $S/T/KS$  [75]

Στη συνέχεια, επιχειρούμε να μοντελοποιήσουμε τις μήτρες στάθμισης  $W_i$ . Θεωρούμε την περίπτωση SISO συστημάτων. Οι συναρτήσεις στάθμισης, οι οποίες ικανοποιούν τις περιγραφείσες προδιαγραφές είναι βαθυπερατά (low-pass), υψιπερατά (high-pass) και ζωνοπερατά (band-pass) φίλτρα. Ένα απλό φίλτρο 1<sup>ης</sup> τάξης που χρησιμοποιείται συχνά στη σχεδίαση συστημάτων ρύθμισης προκύπτει από την ακόλουθη παρατήρηση. Έστω ότι σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε ένα φίλτρο στάθμισης τέτοιο ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

- $1/|W(j\omega)| = A$  για μικρά  $\omega$ .
- $1/|W(j\omega)| = B$  για μεγάλα  $\omega$ .
- Κρίσιμη συχνότητα (χαμηλόσυχνη  $\rightarrow$  υψίσυχνη περιοχή) ίση με  $\omega_o$ .

Εδώ είτε έχουμε  $A > 1$  και  $B < 1$  (υψιπερατό φίλτρο) είτε έχουμε  $A < 1$  και  $B > 1$  (βαθυπερατό φίλτρο). Το φίλτρο που ικανοποιεί τις παραπάνω προδιαγραφές είναι το ακόλουθο:

$$W(s) = \frac{1}{B} \frac{s + B\omega_o}{s + A\omega_o} \quad (3.138)$$

όπου:  $A$ : κέρδος χαμηλόσυχνου σήματος εισόδου ελέγχου  
 $B$ : κέρδος υψίσυχνου σήματος θορύβου  
 $\omega_o$ : κρίσιμη συχνότητα μετάβασης

Η καμπύλη μετάβασης από την χαμηλόσυχνη στην υψίσυχνη περιοχή μπορεί να αποκτήσει μεγαλύτερη γωνία με τον οριζόντιο άξονα αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου. Επομένως, στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε το ακόλουθο φίλτρο n-τάξης:

$$W_n(s) = \frac{1}{B} \frac{(s + B^{1/n}\omega_o)^n}{(s + A^{1/n}\omega_o)^n} \quad (3.139)$$

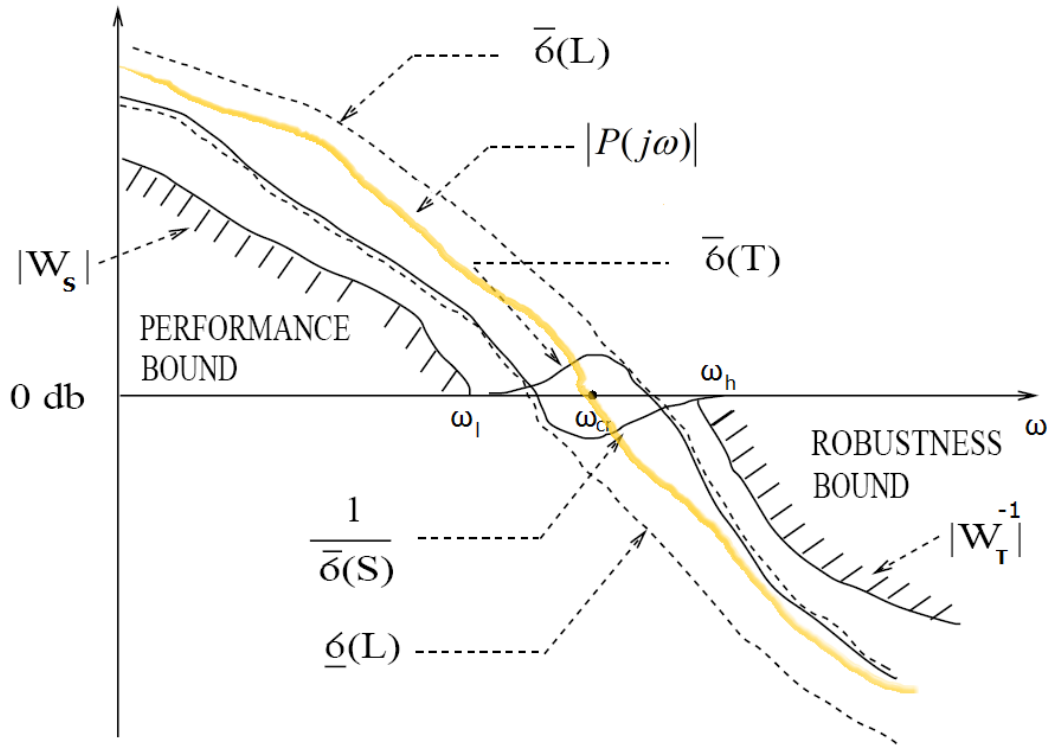
Τέλος, μπορούμε να κατασκευάσουμε ζωνοπερατά φίλτρα μορφοποιώντας κατάλληλα γινόμενα από βαθυπερατά και υψιπερατά φίλτρα, τα επιτρεπόμενα εύρη συχνοτήτων των οποίων αλληλοεπικαλύπτονται.

Στη συνέχεια, θα περάσουμε σε μια απεικόνιση των όσων αναλύσαμε σε ένα πιο διαφωτιστικό παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε ένα αβέβαιο σύστημα  $P_\Delta$ . Θεωρούμε ότι η αβεβαιότητα του συστήματος εκφράζεται ως πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα (Βλ. Σχέση 3.112). Μεταφράζουμε το μέγεθος της αβεβαιότητας αυτής (Βλ. Σχέση 3.113) σε προδιαγραφές αναφορικά με τις συναρτήσεις ευαισθησίας  $S$  και  $T$ . Σημειώνουμε εδώ ότι δεν θα ασχοληθούμε με απαιτήσεις που να αφορούν την είσοδο ελέγχου  $u$ . Διαμορφώνουμε, λοιπόν, τα βάρη  $W_S$  και  $W_T$  κατάλληλα. Έστω ότι εδώ  $\gamma = 1$ . Τότε, από τις σχέσεις (3.132) και (3.133) λόγω της (3.56), λαμβάνουμε τις ακόλουθες προδιαγραφές σχεδίασης:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq 1/|W_S(j\omega)| \quad (3.140)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq 1/|W_T(j\omega)| \quad (3.141)$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω προδιαγραφές σε συνδυασμό με την επιθυμητή τιμή της κρίσιμης συχνότητας  $\omega_{cr}$ , λαμβάνουμε το ακόλουθο (ποιοτικό) διάγραμμα.



**Σχήμα 3.5:** Επιθυμητό Κέρδος Βρόχου Βάσει Προδιαγραφών Ιδιάζουσων Τιμών [75]

**Συμπέρασμα 1:** Απο το σχήμα 3.4, όπου αναπαρίσταται το Διάγραμμα Ιδιάζουσών Τιμών των σχετικών συναρτήσεων μεταφοράς, έχουμε ότι  $\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx 1/\bar{\sigma}(S(j\omega))$  στην χαμηλόσυχη περιοχή και  $\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \bar{\sigma}(T(j\omega))$  στην υψίσυχη περιοχή.

**Συμπέρασμα 2:** Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τα απαιτούμενα χωρικά φράγματα συμπεριφοράς (performance bound) και ευρωστίας (robustness bound) απαιτείται να «σπρώχνουμε» κατάλληλα την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή της προς τα πάνω στις χαμηλές συχνότητες και συγχρόνως να εξασφαλίζουμε ότι η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή είναι μικρή στις υψηλές συχνότητες.

Έπειτα, θεωρούμε την περίπτωση όπου επιθυμούμε να απαλείψουμε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης (steady-state error) στο σήμα  $e$ . Για να το πετύχουμε αυτό, κατά τη συνήθη τακτική στην θεωρία της αυτόματης ρύθμισης, αρκεί να εισάγουμε έναν ολοκληρωτή σειριακά στον ρυθμιστή. Με άλλα λόγια, αυξάνουμε τον τύπο του συστήματος κατά 1. Εντούτοις, έχουμε ότι στο επαυξημένο γενικευμένο σύστημα (Βλ. Σχήμα 3.3) η κατάσταση που αντιστοιχεί στον ασταθή πόλο του ολοκληρωτή θα είναι μη παρατηρήσιμη απο την μετρούμενη έξοδο που τροφοδοτείται στον ρυθμιστή. Αυτό πιθανότατα να έχει σαν αποτέλεσμα οι αριθμητικές μέθοδοι σύνθεσης του ρυθμιστή να αποτυγχάνουν κατά τους υπολογισμούς. Επομένως, προτιμάται κατά τους υπολογισμούς ο παράγοντας  $1/s$  του ολοκληρωτή να αντικαθίσταται απο τον  $1/(s + \varepsilon)$ , όπου  $\varepsilon > 0$  μία μικρή σταθερά.

**Σημείωση:** Υπάρχουν και άλλες ενδιαφέρουσες πτυχές αναφορικά με την σχεδίαση των συναρτήσεων ευαισθησίας στο πρόβλημα μεικτής ευαισθησίας, οι οποίες αναλύονται και τεκμηριώνονται στη σχετική βιβλιογραφία [4] [6] [9] [11] [40] [50] [60] [80].

# 4. Αυτόματη Ρύθμιση Κτιρίου

Στο κεφάλαιο αυτό, μορφοποιούμε το αρχικό μοντέλο της πολυόροφης κτιριακής εγκατάστασης στα πρότυπα της Θεωρίας  $H_\infty$  Ευρωστης Αυτόματης Ρύθμισης που αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εν συνεχεία, υλοποιούμε τη σχεδίαση ενός κατάλληλου  $H_\infty$  ρυθμιστή, ο οποίος πληροί τις απαιτούμενες προδιαγραφές δυναμικής απόκρισης και ευστάθειας. Έπειτα, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής του συγκεκριμένου σχήματος αυτόματης ρύθμισης επί του συστήματος παρουσία της διαταραχής της σεισμικής διέγερσης. Κατόπιν, παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου σε νέες σεισμικές διαταραχές. Η ευρωστία του  $H_\infty$  ρυθμιστή κρίνεται με εισαγωγή αβεβαιότητας στο μοντέλο. Τέλος, τα αποτελέσματα της  $H_\infty$  ρύθμισης αντιπαραβάλλονται με δημοσιευμένα αποτελέσματα που παράχθηκαν με εφαρμογή της Μη Γραμμικής Εύρωστης Αυτόματης Ρύθμισης στην ίδια κατασκευή. Τέλος, συγκρίνονται τα διαγράμματα ιδιαιζουσών τιμών και Bode του ελεύθερου και του ρυθμιζόμενου συστήματος.

## 4.1 Σχεδίαση $H_\infty$ -Αυτόματης Ρύθμισης

Το αρχικό σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης από τις εξισώσεις (2.2) και (2.3). Προκειμένου να φέρουμε το πρόβλημα στην πρότυπη αναπαράσταση στον χώρο κατάστασης, όπως απαιτείται από την θεωρία της  $H_\infty$  Ευρωστης Αυτόματης Ρύθμισης (Βλ. Σχέση 3.61), πραγματοποιούμε τις ακόλουθες μεταθέσεις συμβολισμών στις αντίστοιχες μήτρες και στοιχεία:

$$\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}_1 \quad (4.1)$$

Έπειτα, εισάγουμε στο σύστημα την είσοδο ελέγχου  $u$ , η οποία ουσιαστικά αναπαριστά την δύναμη επενέργειας στην έξοδο του  $H_\infty$ -ρυθμιστή, η οποία ασκείται στο υποσύστημα του 1<sup>ου</sup> ορόφου. Επομένως, η πρώτη εξίσωση του πακέτου εξισώσεων (2.1.α), στην οποία έχουμε εισάγει τον συμβολισμό του διανύσματος κατάστασης  $\mathbf{x}$ , παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{c_0 + c_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & -\frac{k_0 + k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{N+1} \\ x_{N+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_0}{m_1} & \frac{k_0}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_N \end{bmatrix} + \frac{1}{m_1} \cdot [u] \quad (4.2)$$

Από τον συντελεστή του 3<sup>ου</sup> βαθμωτού όρου της εξίσωσης (4.2) διαμορφώνουμε τη προστιθέμενη στο γραμμικό σύστημα των σχέσεων (2.2) και (2.3) μήτρα  $\mathbf{B}_2$ . Έπειτα, επειδή το διάνυσμα του σήματος σφάλματος  $\mathbf{z}$  ταυτίζεται με το διάνυσμα μετρούμενων εξόδων  $\mathbf{y}$ , έχουμε ότι  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ . Έπειτα, εισάγουμε τις απαιτούμενες μήτρες  $\mathbf{D}_{11}$ ,  $\mathbf{D}_{12}$ ,  $\mathbf{D}_{21}$ ,  $\mathbf{D}_{22}$  (Βλ. Σχέση 3.61) κατάλληλων διαστάσεων στην δεύτερη και τρίτη μητρική εξίσωση, ελέγχοντας ότι ικανοποιούνται οι απαιτούμενες συνθήκες που περιγράφονται στην Ενότητα 3.3.1. Οπότε από τα παραπάνω διαμορφώνουμε το γενικευμένο σύστημα (Βλ. Σχήμα 3.1) που περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]_{2N \times 2N}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{c_o}{m_1} & \frac{k_o}{m_1} \\ \mathbf{O}_{(2N-1) \times 2} \end{bmatrix}_{2N \times 2}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \mathbf{O}_{(2N-1) \times 1} \end{bmatrix}_{2N \times 1},$$

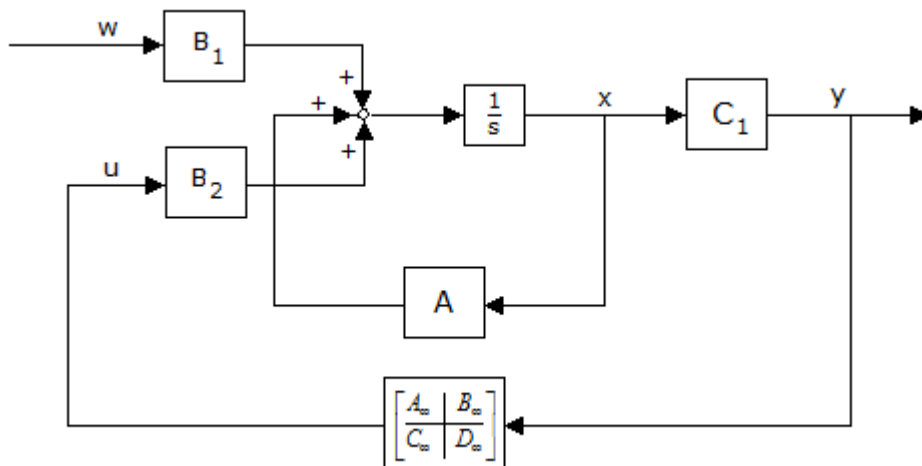
$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{I}_{2N \times 2N}, \quad \mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{12} = \mathbf{O}_{2N \times 2}, \quad \mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_{22} = \mathbf{O}_{2N \times 1},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_o(t_o) \\ x_N(t_o) \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \dot{y}_o \\ y_o \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

και:  $\mathbf{w}$  : αβέβαιη σεισμική διαταραχή  
 $\mathbf{z}$  : σήμα σφάλματος  
 $\mathbf{y}$  : μετρούμενη έξοδος  
 $\mathbf{u}$  : δύναμη ελέγχου

Στη συνέχεια, υλοποιούμε σε κώδικα τους επιλυτές των δύο εξισώσεων Riccati που διέπουν τα αντίστοιχα υποπροβλήματα σχεδίασης  $H_\infty$ -βέλτιστου ρυθμιστή, που περιγράφηκαν στις Ενότητες 3.3.2 και 3.3.3. Δηλαδή την εξίσωση Riccati που διέπει το Πρόβλημα Βέλτιστης Ανατροφοδότησης Κατάστασης και την εξίσωση Riccati που διέπει το Πρόβλημα Βέλτιστης Εκτίμησης για κατάλληλη τιμή του  $\gamma$ -φράγματος. Πρόκειται για τις μητρωικές σχέσεις (3.71) και (3.84). Παράλληλα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις ευστάθειας των μητρών των σχέσεων 3.72 και 3.85. Έπειτα, εφαρμόζουμε την  $\gamma$ -επανάληψη, όπως αυτή περιγράφεται αλγοριθμικά στην Ενότητα 3.3.4. Η τιμή της παράμετρου  $\gamma$  επιλέχθηκε με μοναδικό κριτήριο την εξαγωγή δυνάμεων επενέργειας, η τάξη μεγέθους των οποίων έχει φυσικό νόημα σε δυνητική πρακτική υλοποίηση. Άρα, πρόκειται να σχεδιάσουμε έναν υπο-βέλτιστο  $H_\infty$ -ρυθμιστή.

Σε κάθε επανάληψη, εξάγουμε τις λύσεις των δύο εξισώσεων Riccati και τις εισάγουμε στην εξίσωση (3.93), που αποτελεί την περιγραφή της δυναμικής εξίσωσης του ρυθμιστή στο χώρο κατάστασης, υπολογίζοντας τις αντίστοιχες μήτρες (Βλ. Παράρτημα Δ). Το σύστημα κλειστού βρόχου περιγράφεται από το δομικό διάγραμμα (block diagram) του Σχήματος 4.1.



**Σχήμα 4.1:** Δομικό Διάγραμμα Επενεργούμενου Συστήματος Κτιρίου

## 4.2 Αποτελέσματα

Εδώ, εφαρμόζοντας τα απαιτούμενα στοιχεία της θεωρίας που παρουσιάστηκε παραπάνω (Βλ. Παράγραφο 3.1), σχεδιάζουμε έναν κατάλληλο υποβέλτιστο (suboptimal)  $H_\infty$ -ρυθμιστή. Η επιλογή του ρυθμιστή αυτού απο την ευρύτερη κλάση των υποβέλτιστων  $H_\infty$ -ρυθμιστών έγινε με μοναδικό κριτήριο η αποδιδόμενη δύναμη επενέργειας να διατηρείται εντός πεδίου τιμών, που έχει πρακτικό νόημα σε εφαρμογές βιομηχανικής κλίμακας. Έπειτα, εφαρμόζουμε τον  $H_\infty$ -ρυθμιστή που σχεδιάσαμε στο αρχικό σύστημα και παρατηρούμε την βελτίωση στην απόκριση του επενεργούμενου συστήματος.

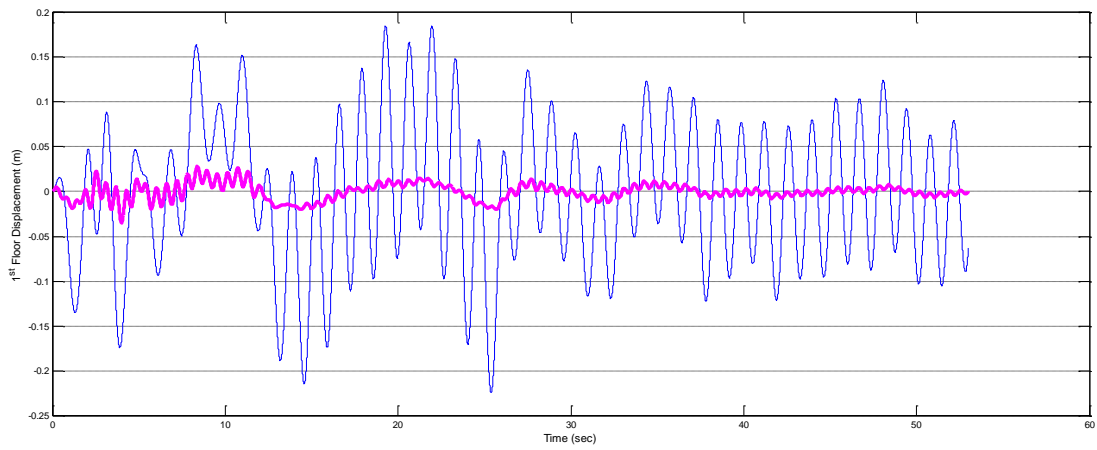
Στη συνέχεια, υποβάλλουμε το ανατροφοδοτούμενο σύστημα σε μία σειρά απο νέες διαταραχές, οι οποίες περιέχουν ανάλογο πλάτος, αλλά μια μεγαλύτερη ποικιλία αναφορικά με το περιεχόμενο εύρος συχνοτήτων. Έπειτα, εισάγουμε αβεβαιότητα στο αρχικό σύστημα του 10-όροφου κτιρίου, προκειμένου να αποκτήσουμε βάσιμες ενδείξεις για την ευρωστία του ρυθμιστή που σχεδιάστηκε. Ύστερα, εφαρμόζουμε την παραπάνω τεχνική σχεδίασης σε ένα σύστημα ενός 6-όροφου κτιρίου. Ακολούθως συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα εφαρμογής στο ίδιο κτίριο ενός ρυθμιστή με χρήση της θεωρίας του Μη Γραμμικού Εύρωστου Ελέγχου. Τέλος, λαμβάνουμε και συγκρίνουμε την εικόνα του συστήματος στο συχνοτικό πεδίο άνευ και με εφαρμογή του  $H_\infty$ -ρυθμιστή.

### 4.2.1 Απόκριση Συστήματος

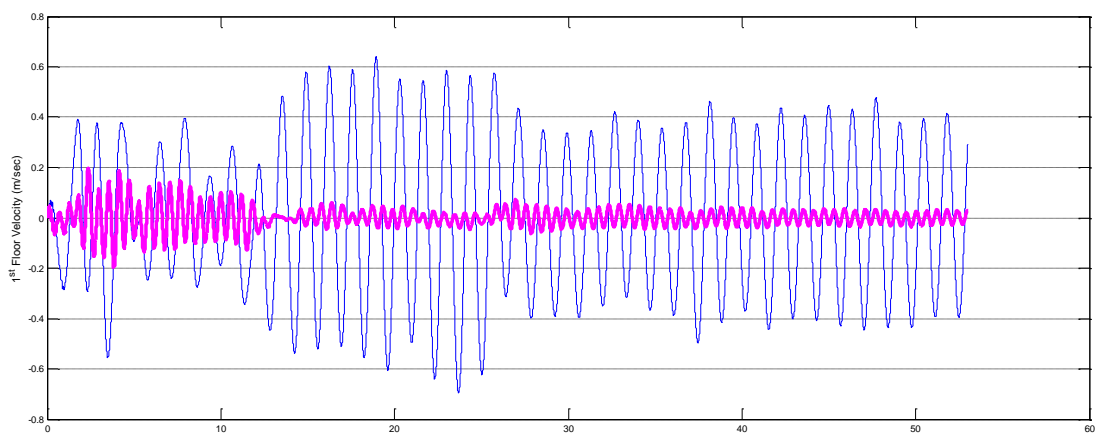
Υλοποιούμε τη σχεδίαση του  $H_\infty$ -ρυθμιστή, που προσδίδει ευστάθεια στο σύστημα. Ειδικότερα, επιλέγουμε μια ποικιλία απο σύνολα μετρήσεων στην έξοδο του αρχικού συστήματος. Επιλέγουμε μία, τρείς, δέκα μετρήσεις, καθώς και το πλήρες διάνυσμα εξόδου. Βασιζόμενοι στο καθένα απο αυτά τα σύνολα μετρήσεων σχεδιάζουμε τον αντίστοιχο  $H_\infty$ -ρυθμιστή, εφαρμόζοντας τη θεωρία που περιγράφηκε προηγουμένως (Βλ. Παράγραφο 3.3) στο μορφοποιημένο σύστημα του 10-όροφου κτιρίου. Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε την  $\gamma$ -επανάληψη επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση Riccati του προβλήματος Ελέγχου Ανατροφοδότησης Κατάστασης και την εξίσωση Riccati του προβλήματος εύρεσης Εκτιμητή και ελέγχοντας άν πληρούνται οι συνθήκες των δύο θεωρημάτων. Οπότε, καταλήγουμε στον αντίστοιχο υποβέλτιστο  $H_\infty$ -ρυθμιστή.

Σημειώνουμε ότι εισάγουμε την ίδια σεισμική διαταραχή DCZ-270, που χρησιμοποιήθηκε κατά τη μελέτη της ελεύθερης απόκρισης του συστήματος μας (Βλ. Παράγραφο 2.2). Ακολούθως, παραθέτουμε τα σχετικά διαγράμματα απόκρισης σε όρους μετατόπισης και ταχύτητας του 1<sup>ου</sup> ορόφου, καθώς και εκείνα της δύναμης επενέργειας.

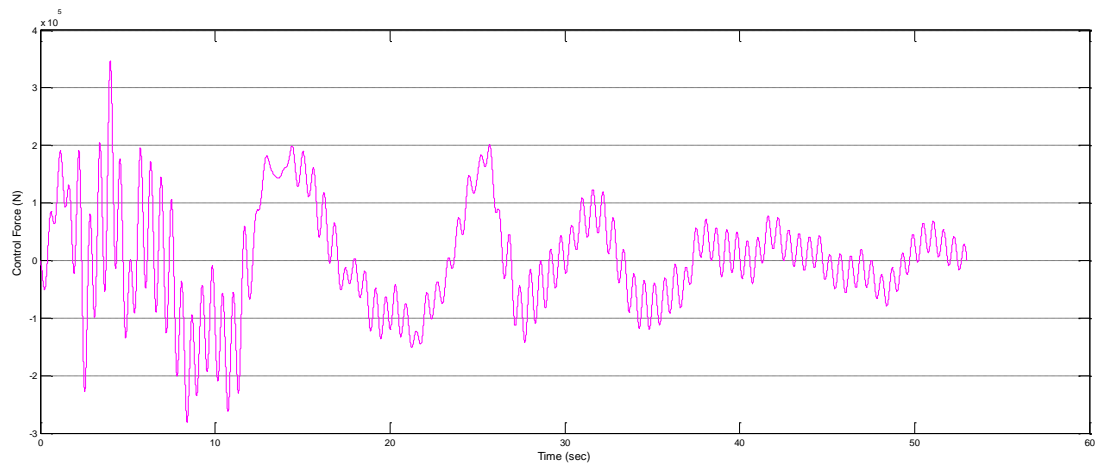




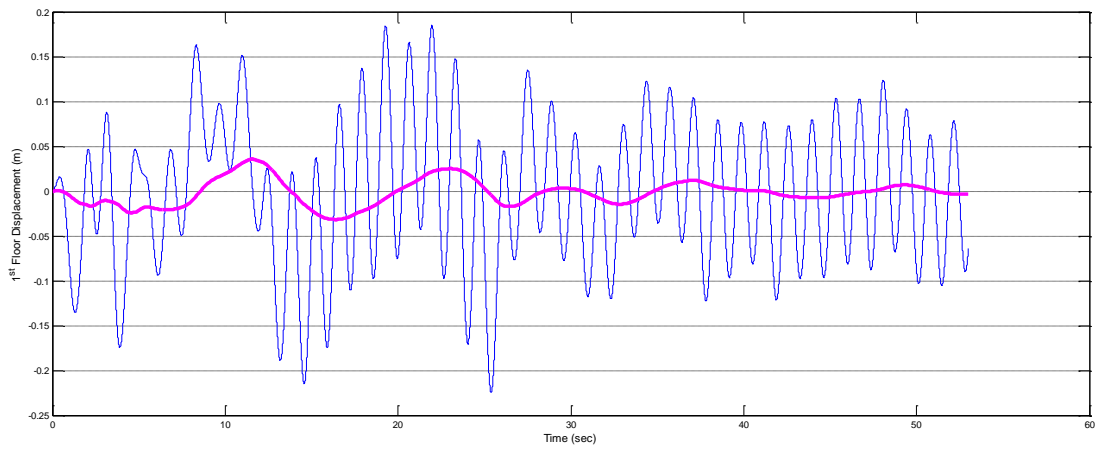
**Σχήμα 4.2:** Μετατόπιση 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



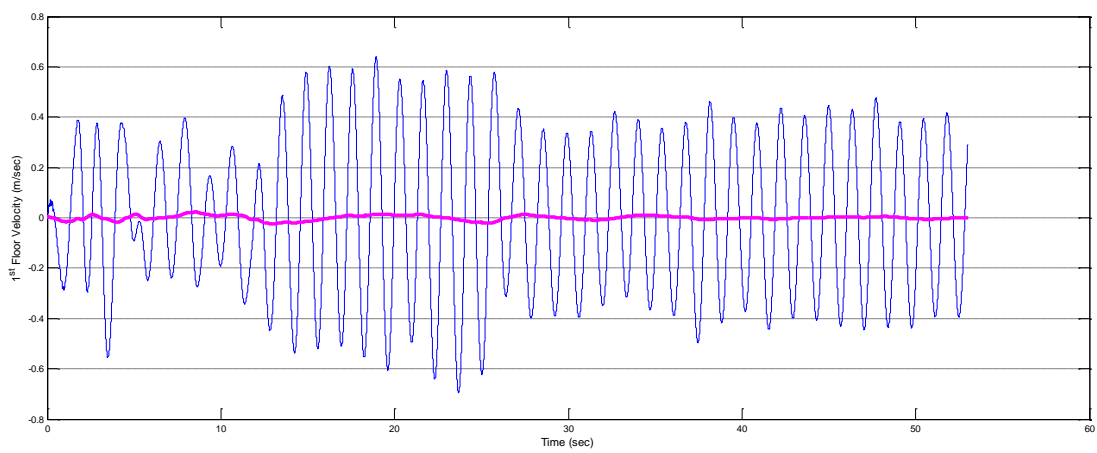
**Σχήμα 4.3:** Ταχύτητα 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



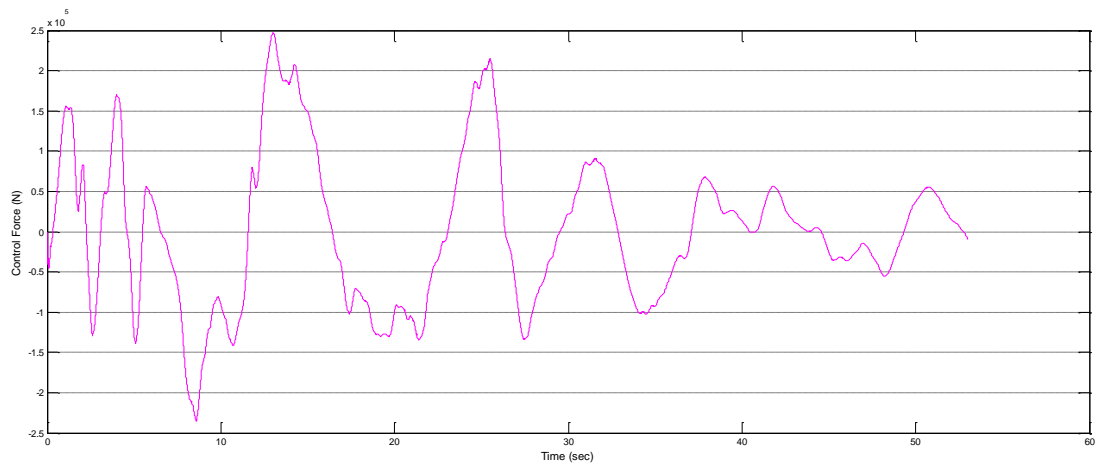
**Σχήμα 4.4:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Μετατόπισης 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



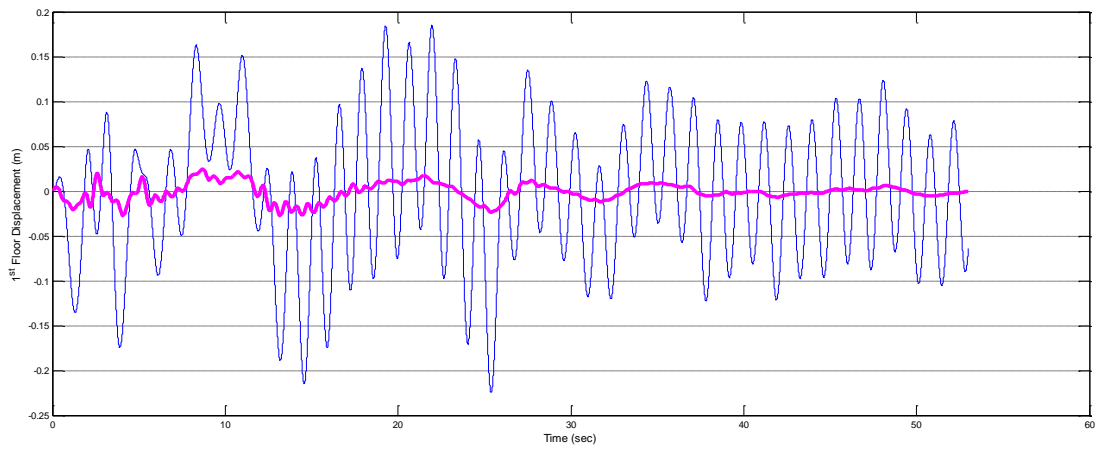
**Σχήμα 4.5:** Μετατόπιση 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



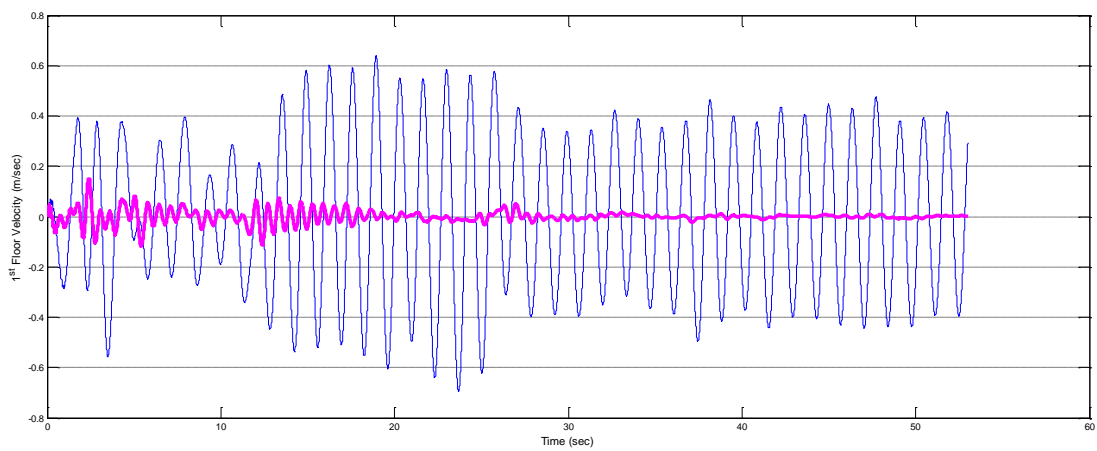
**Σχήμα 4.6:** Ταχύτητα 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



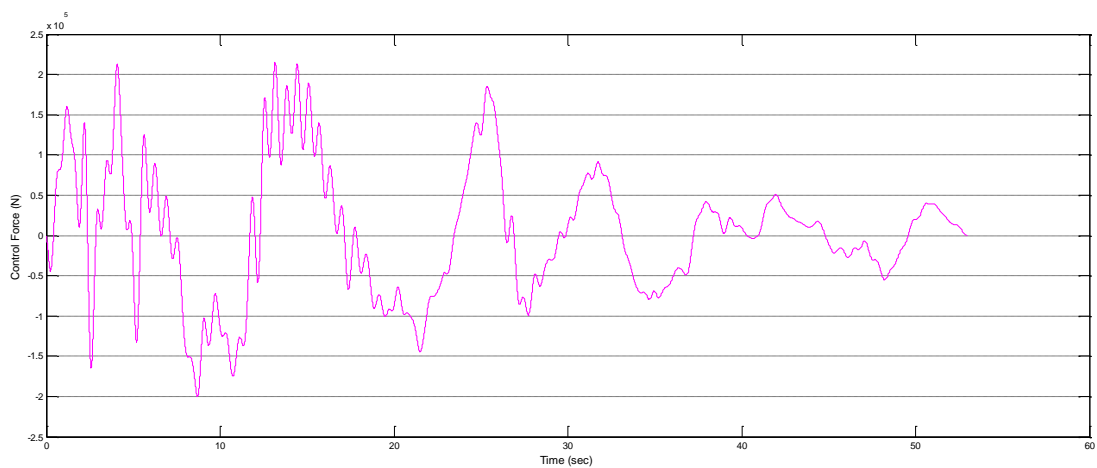
**Σχήμα 4.7:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Ταχύτητας 1<sup>ο</sup> Ορόφου ( $\gamma=1.0938$ )



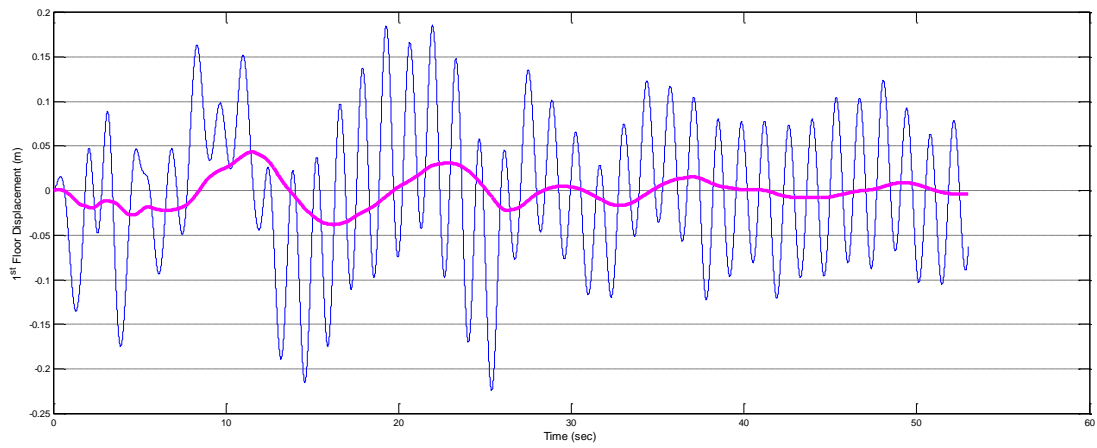
**Σχήμα 4.8:** Μετατόπιση 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



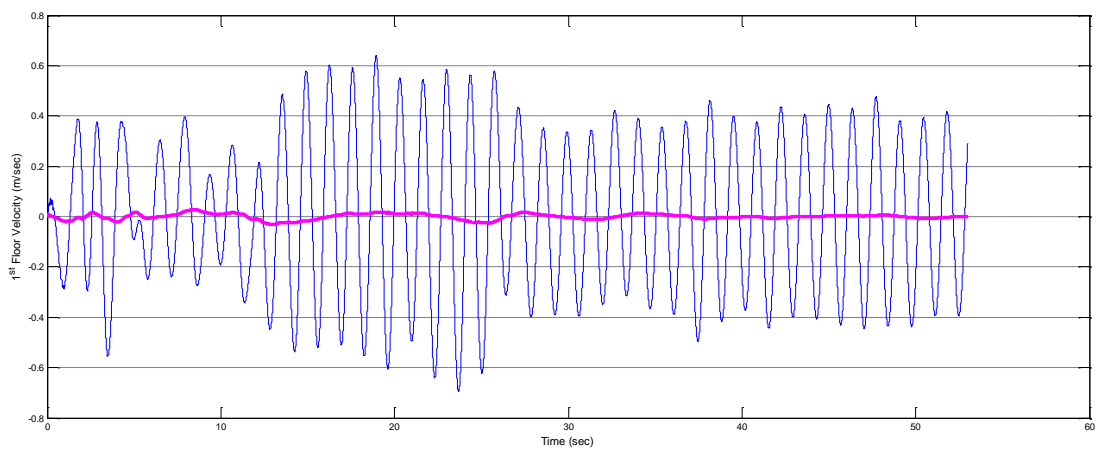
**Σχήμα 4.9:** Ταχύτητα 1<sup>ο</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



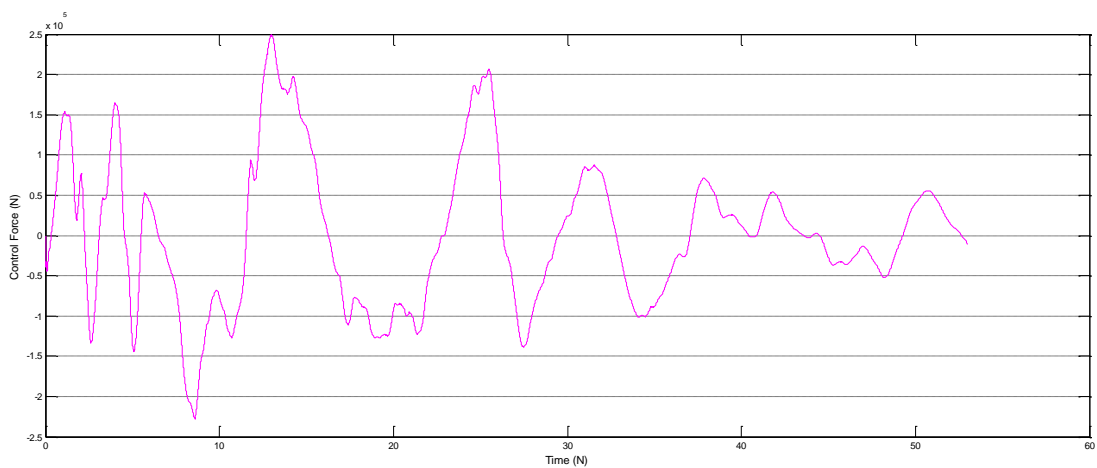
**Σχήμα 4.10:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Μετατόπισης (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



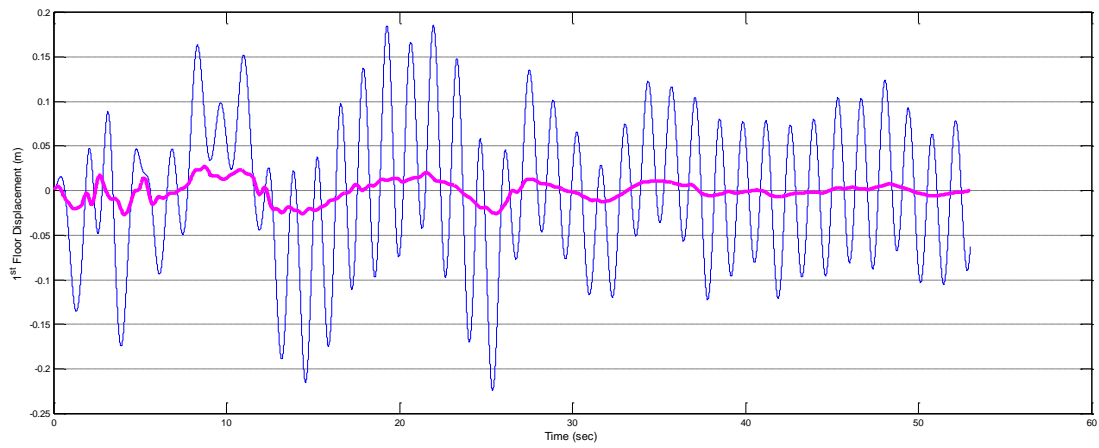
**Σχήμα 4.11:** Μετατόπιση 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



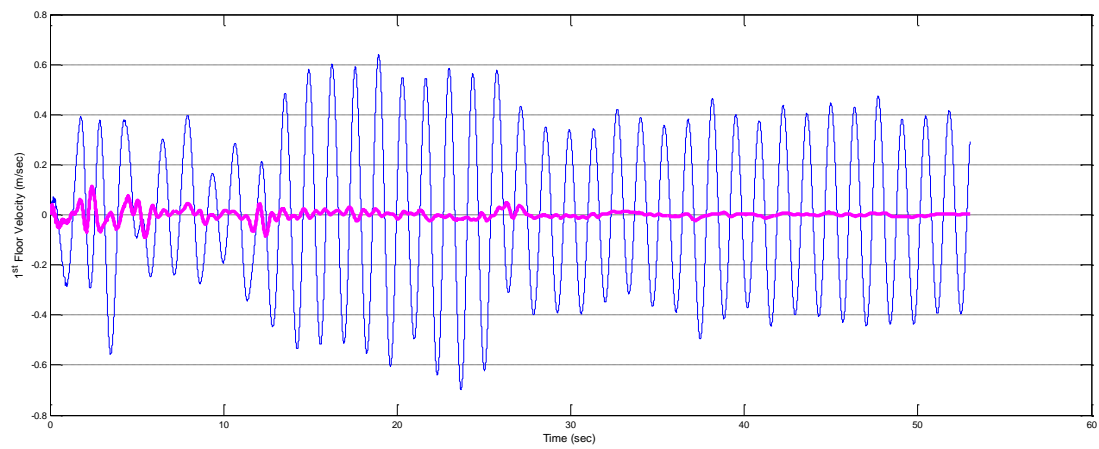
**Σχήμα 4.12:** Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



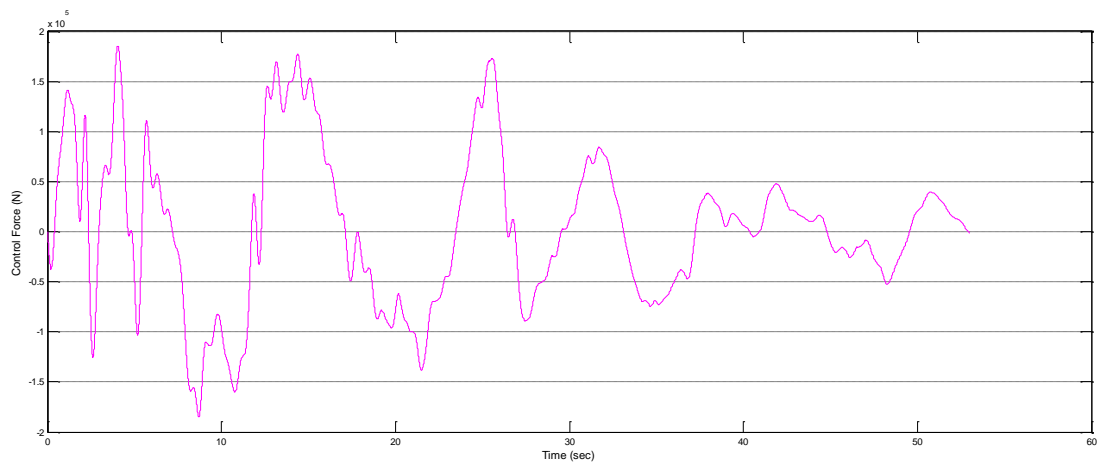
**Σχήμα 4.13:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Ταχύτητας (1,2,3)-Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



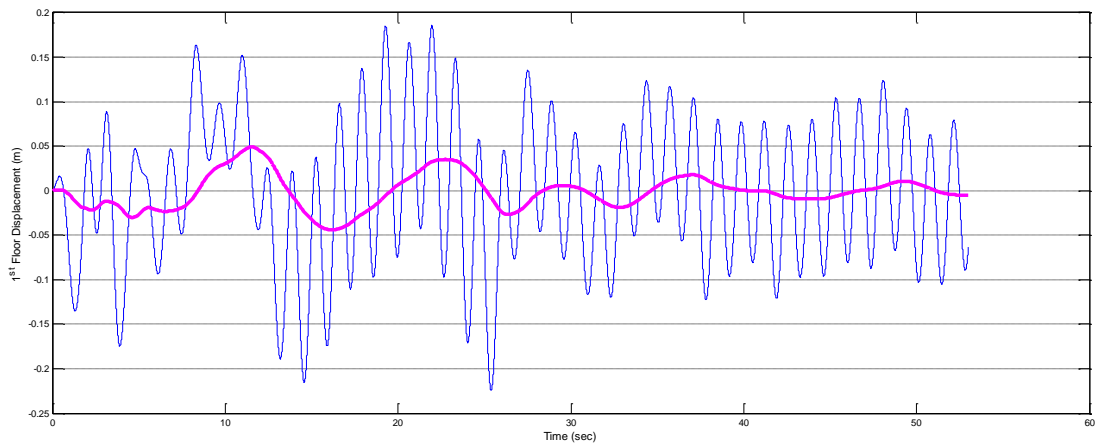
**Σχήμα 4.14:** Μετατόπιση 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



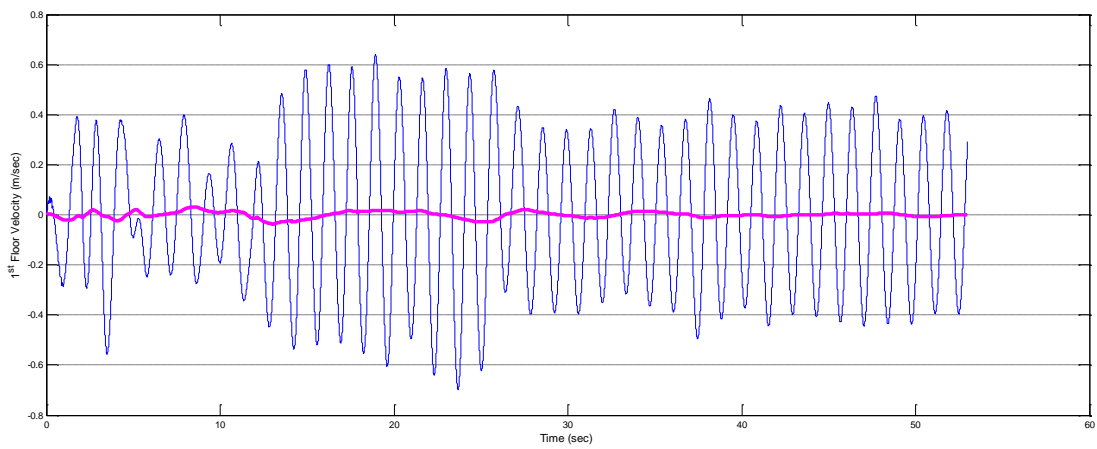
**Σχήμα 4.15:** Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Μετατόπισης 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



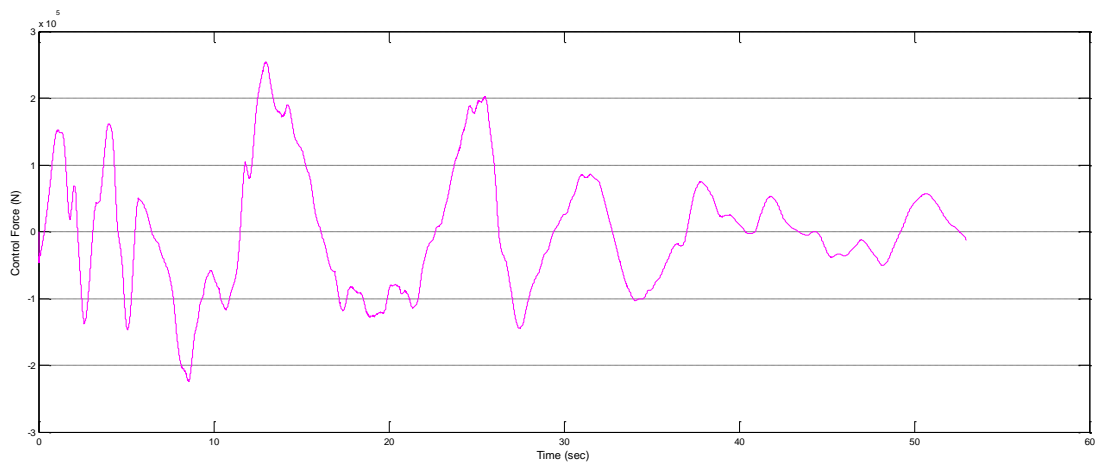
**Σχήμα 4.16:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Μετατόπισης 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



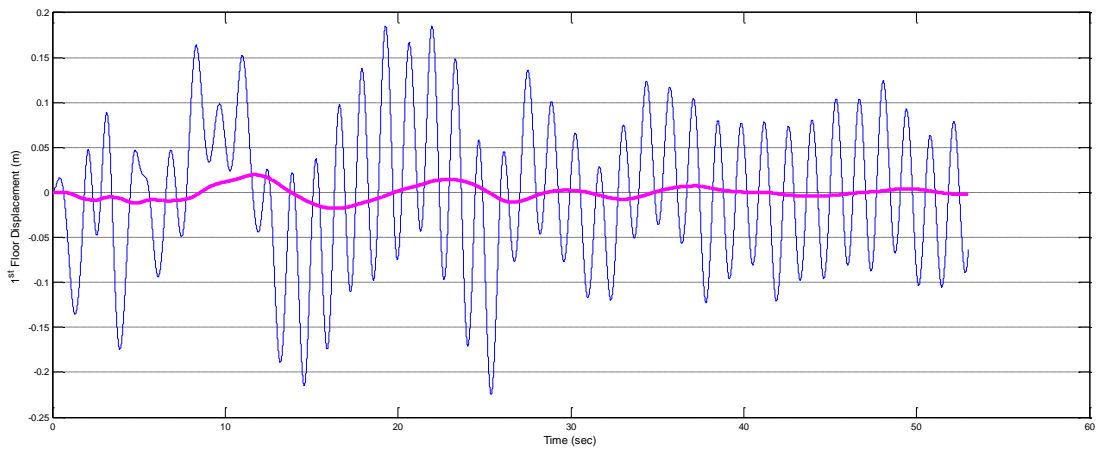
**Σχήμα 4.17:** Μετατόπιση 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



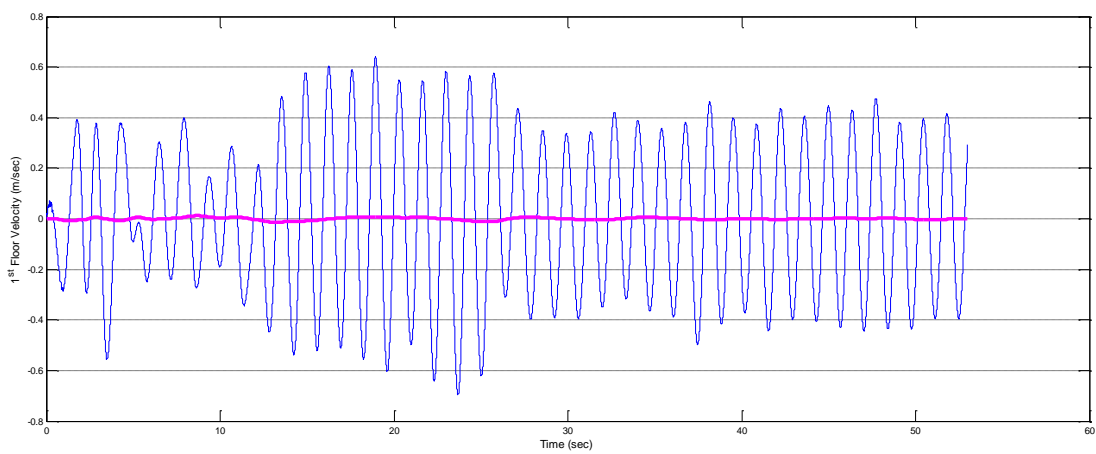
**Σχήμα 4.18:** Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Μέτρηση Ταχύτητας 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



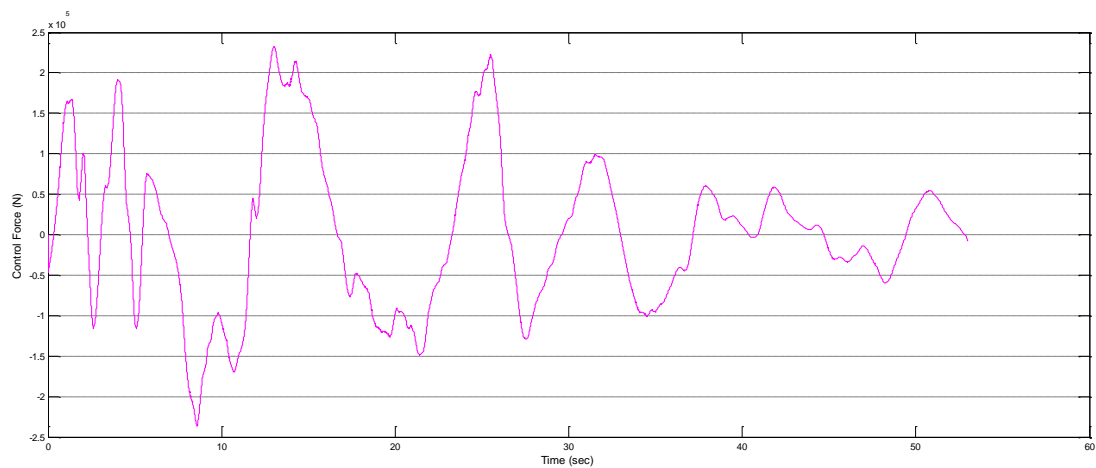
**Σχήμα 4.19:** Δύναμη Επενέργησης – Μέτρηση Ταχύτητας 10 Ορόφων ( $\gamma=1.0703$ )



**Σχήμα 4.20:** Μετατόπιση 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Πλήρης Μέτρηση Β.Ε. ( $\gamma=1.9910$ )



**Σχήμα 4.21:** Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου – Πλήρης Μέτρηση Β.Ε. ( $\gamma=1.9910$ )



**Σχήμα 4.22:** Δύναμη Επενέργησης – Πλήρης Μέτρηση Β.Ε. ( $\gamma=1.9910$ )

Απο τα παραπάνω διαγράμματα, γίνεται εμφανές ότι όσες περισσότερες μετρήσεις έχουμε τόσο μικρότερες είναι οι ταλαντώσεις στην κυματομορφή της απόκρισης και της αντίστοιχης δύναμης επενέργησης. Αυτό εξηγείται εύκολα αν αναλογιστούμε ότι ελαχιστοποιώντας μία επιλογή συνιστωσών του διανύσματος εξόδου, αφήνουμε τις υπόλοιπες να επηρεάζουν το συζευγμένο μηχανικό σύστημα. Έτσι, λαμβάνοντας χρησιμοποιώντας στην ανατροφοδότηση μόνο την μέτρηση της μετατόπισης του 1<sup>ου</sup> ορόφου, ελαχιστοποιούμε μεν την αντίστοιχη νόρμα σφάλματος σε μονάδες νόρμας

διαταραχής, οι υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης δε συνεχίζουν να εξελίσσονται «ελεύθερα» διαδίδοντας ταλαντώσεις στη συνολική κατασκευή μέσω των γειτονικών ορόφων.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η επιλογή των μετρούμενων εξόδων καθορίζει σε σημαντικό βαθμό την απόκριση σε όρους μετατόπισης ή ταχύτητας. Αυτό εξηγείται εύκολα, αν λάβουμε υπ' όψιν το αντικειμενικό πρόβλημα που επιλύει ο συγκεκριμένος ρυθμιστής. Με άλλα λόγια, η ελαχιστοποίηση του κόστους, που ορίζεται σαν το supremum της νόρμας διαταραγμένης εξόδου (σήμα σφάλματος) προς τη νόρμα της διαταραχής που υπεισέρχεται στο σύστημα για κάθε μη μηδενική διαταραχή, εξασφαλίζει καλύτερη απόκριση στις θεωρούμενες συνιστώσες του διανύσματος εξόδου. Επομένως, παρατηρούμε, λόγου χάρη, ότι σε περιπτώσεις όπου επιλέγουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας απόκριση των υποσυστημάτων βελτιώνεται αισθητά η απόκριση του συνολικού συστήματος ως προς την ταχύτητα. Στην σχεδίαση μας, θέτουμε ως αντικειμενικό σκοπό την όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερη απόσβεση στις αναπτυσσόμενες ταχύτητες των ορόφων, αλλά και στις μετατοπίσεις αυτών.

Επομένως, επιλέγουμε τον  $H_\infty$ -ρυθμιστή πλήρους μέτρησης. Η δυναμική εξίσωση που διέπει τον ρυθμιστή δίνεται στον Χώρο Κατάστασης (Βλ. Παράρτημα Δ). Το γεγονός ότι το συνολικό σύστημα παραμένει ευσταθές αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση. Εντούτοις, συναντώνται αρκετές βιομηχανικές εφαρμογές, όπου απαιτείται και τα επιμέρους υποσυστήματα να είναι επίσης ευσταθή. Άρα, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του  $H_\infty$ -ρυθμιστή (Βλ. Πίνακας 4.1). Διαπιστώνουμε ότι ο ρυθμιστής είναι ευσταθής. Επομένως, ικανοποιείται η προαναφερθείσα «εν δυνάμει» απαίτηση.

<b><math>H_\infty</math> Controller Eigenvalues</b>
-3.338049144653010
-0.002433838527135 ± 0.004307661153060i
-0.000020179590913 ± 0.000449713216140i
-0.000017231109503 ± 0.000415617524982i
-0.000013495052686 ± 0.000367862615592i
-0.000010205645754 ± 0.000319948533737i
-0.000006899145212 ± 0.000263109316608i
-0.000003765686918 ± 0.000194415244211i
-0.000001445848032 ± 0.000120483959120i
-0.000000184536482 ± 0.000043019392332i
-0.000000000000299

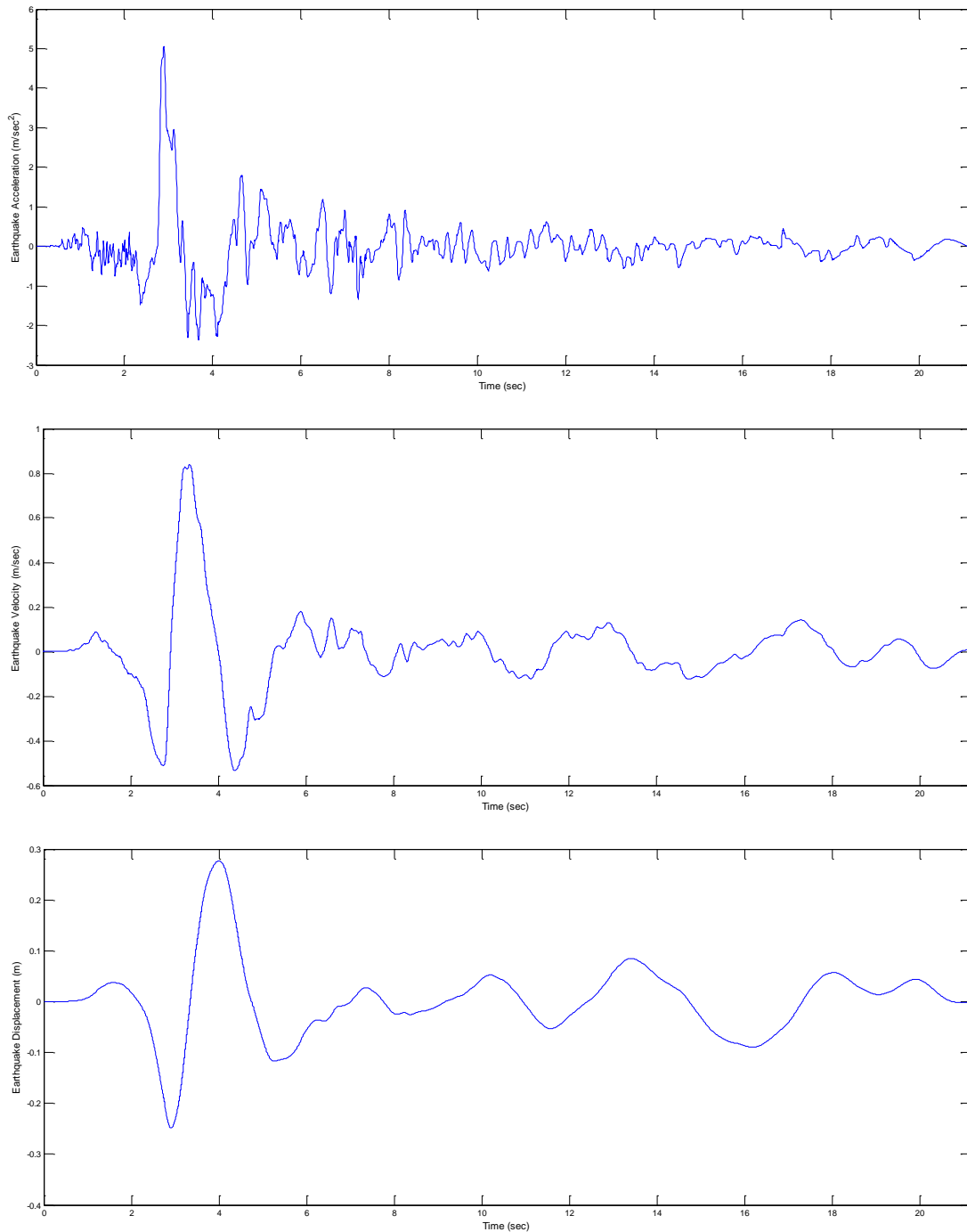
**Πίνακας 4.1:** *Ιδιοτιμές  $H_\infty$ -ρυθμιστή*



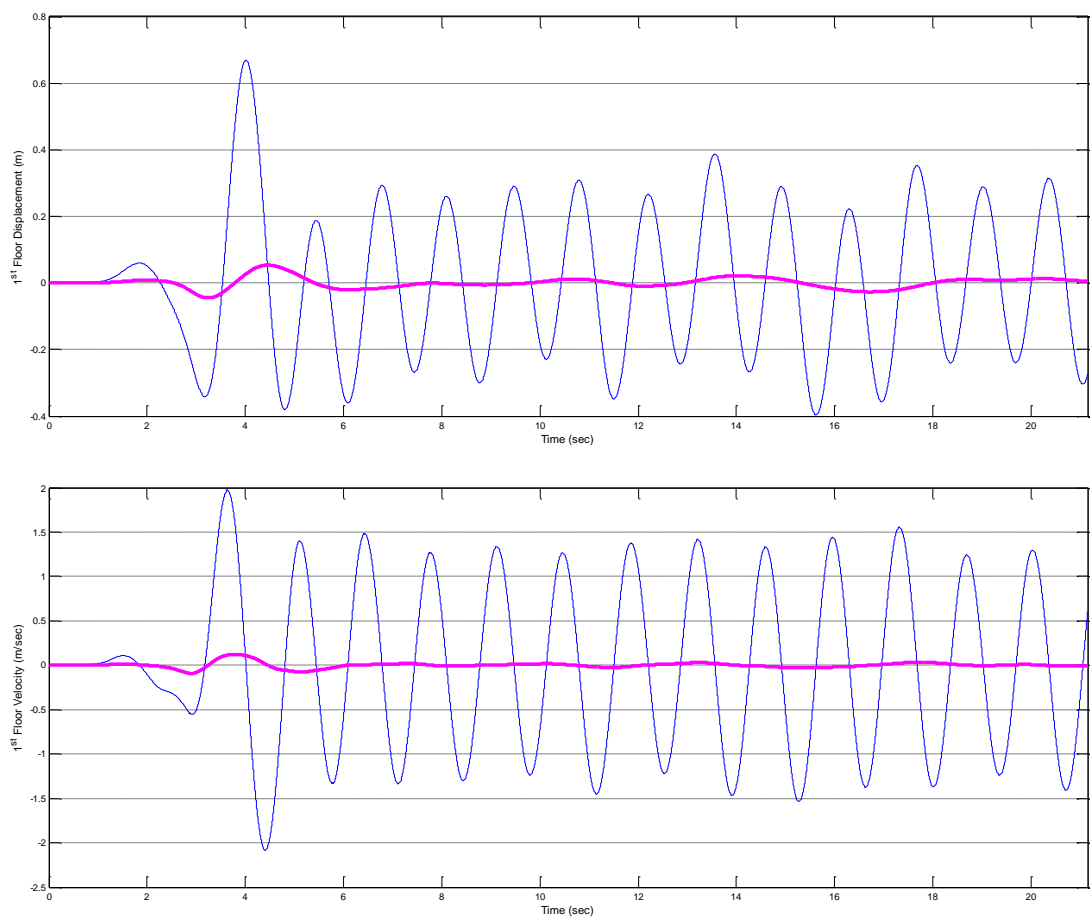
## 4.2.2 Απόκριση σε Νέες Σεισμικές Διαταραχές

Εφαρμόζουμε τον  $H_{\infty}$ -ρυθμιστή με πλήρη μέτρηση στο αρχικό σύστημα του 10-όροφου κτιρίου. Το συνολικό σύστημα υποβάλλεται σε μία σειρά νέων σεισμικών διαταραχών ίδιας τάξης πλάτους και με ποικιλία στο περιεχόμενο εύρος συχνοτήτων. Παρακάτω λαμβάνουμε τις ακόλουθες αποκρίσεις ανά σεισμική διαταραχή.

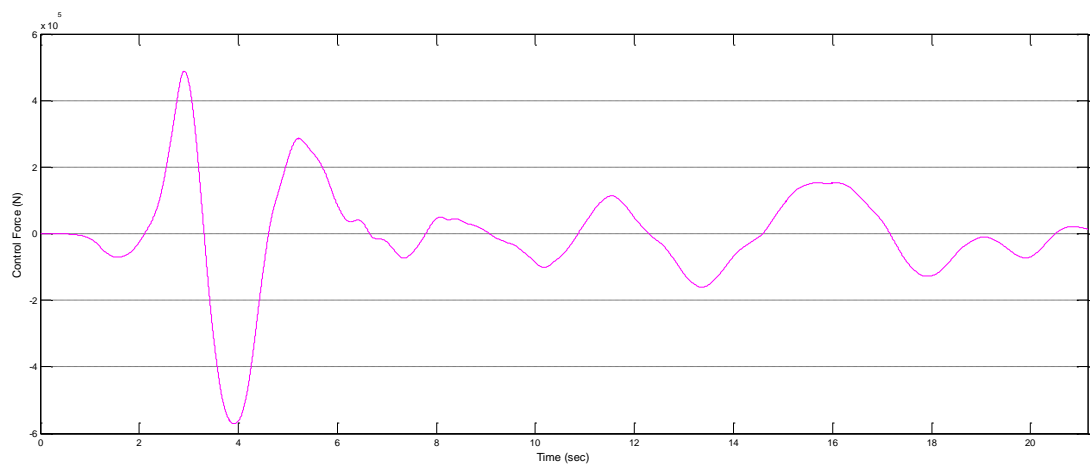
- Σεισμική Διαταραχή DCZ-000



**Σχήμα 4.23:** Επιτάχυνση, Ταχύτητα και Μετατόπιση Σεισμικής Διέγερσης DCZ-000

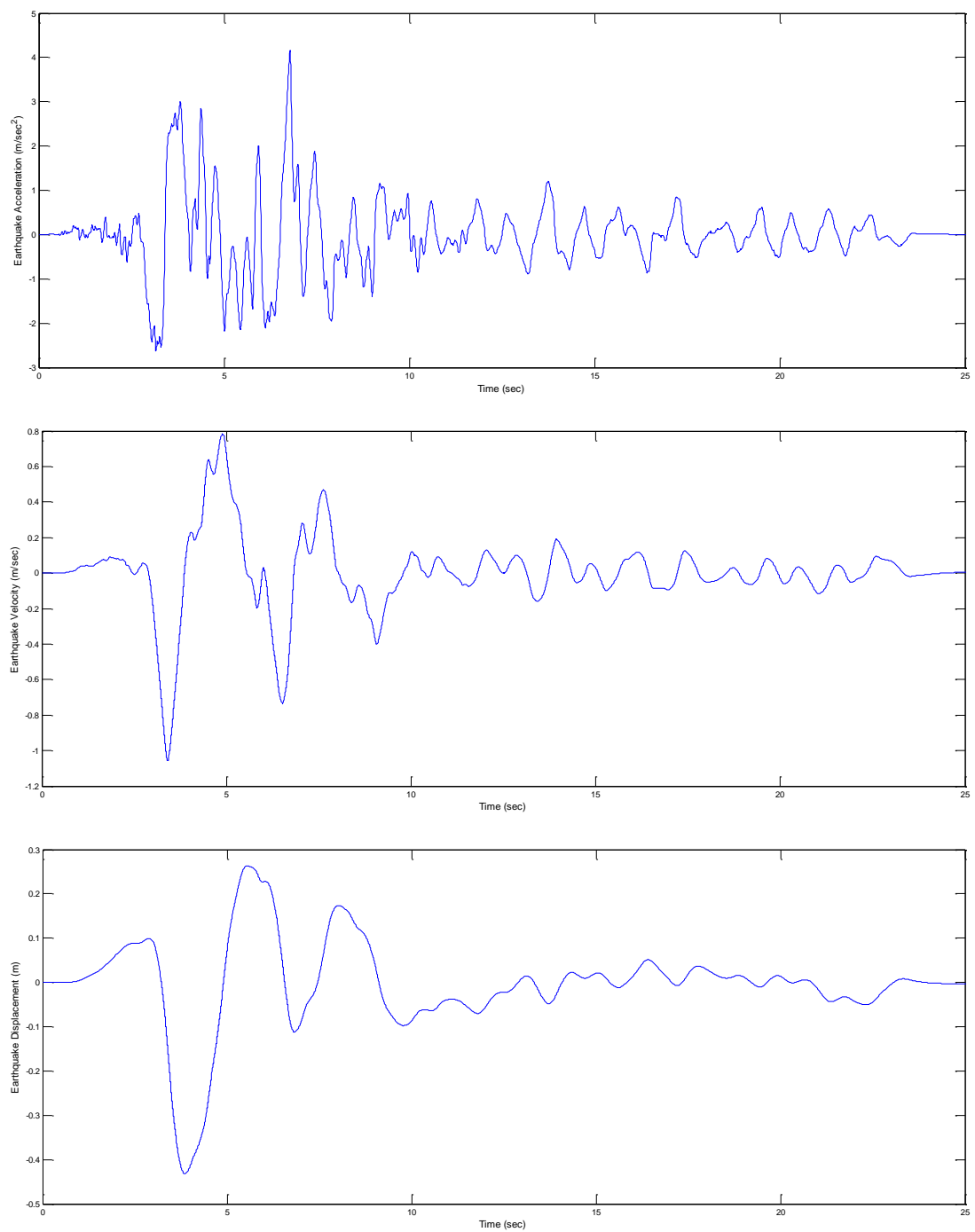


**Σχήμα 4.24:** Μετατόπιση και Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-000

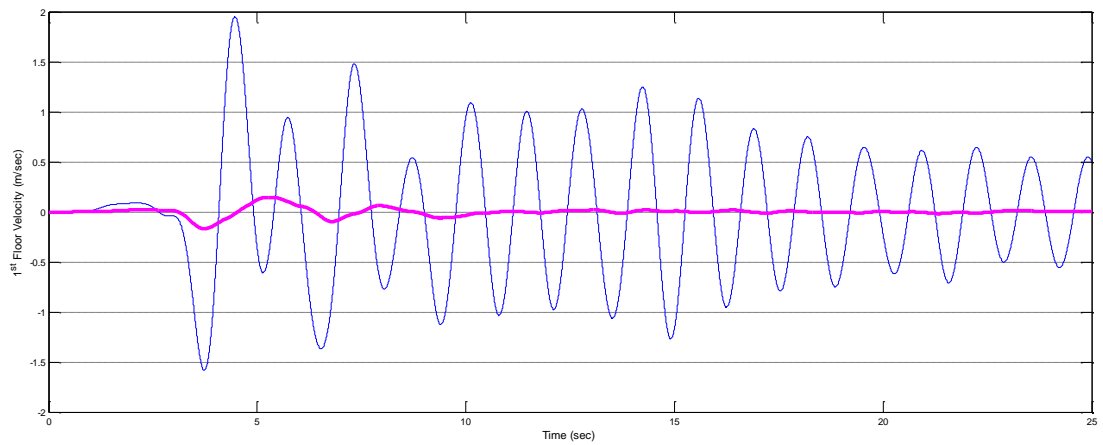
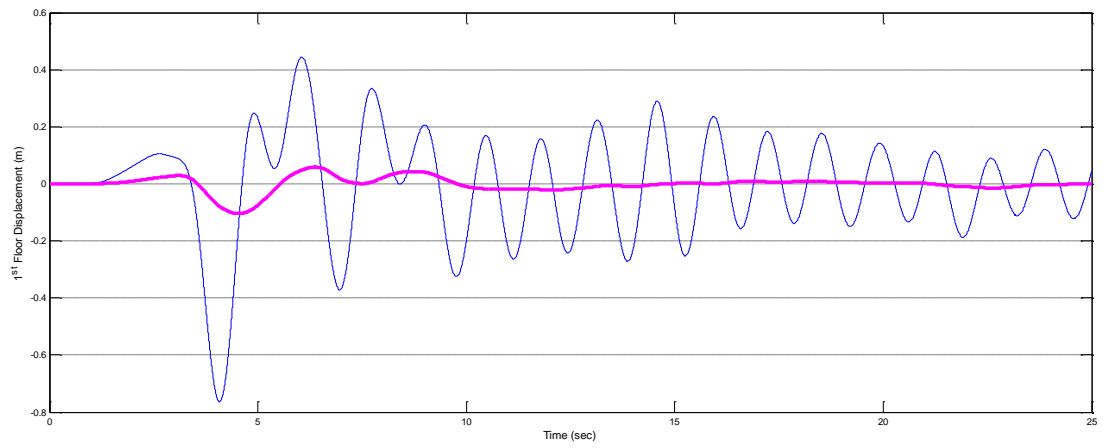


**Σχήμα 4.25:** Δύναμη Επενέργησης Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-000

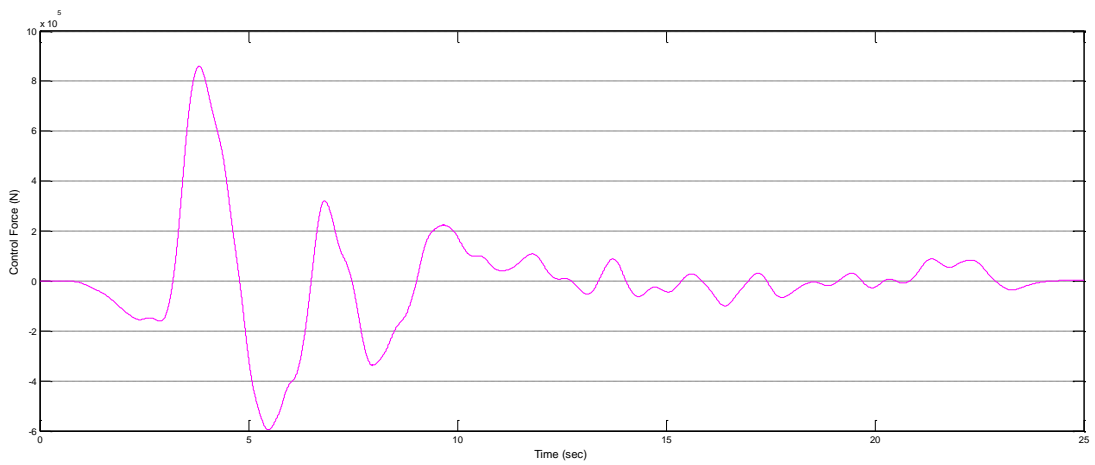
- **Σεισμική Διαταραχή DCZ-022**



**Σχήμα 4.26:** Επιτάχυνση, Ταχύτητα και Μετατόπιση Σεισμικής Διέγερσης DCZ-022

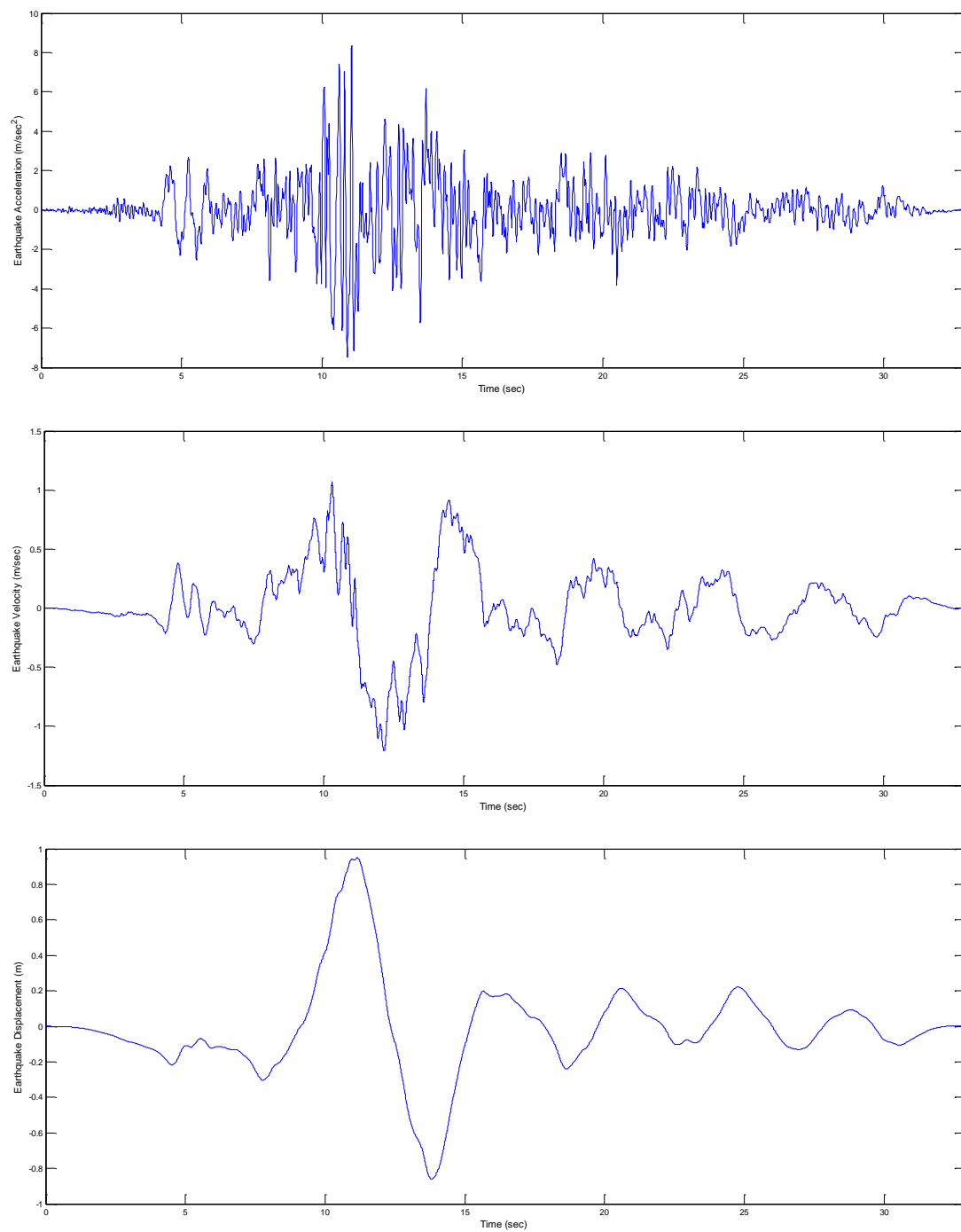


**Σχήμα 4.27:** Μετατόπιση και Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-022

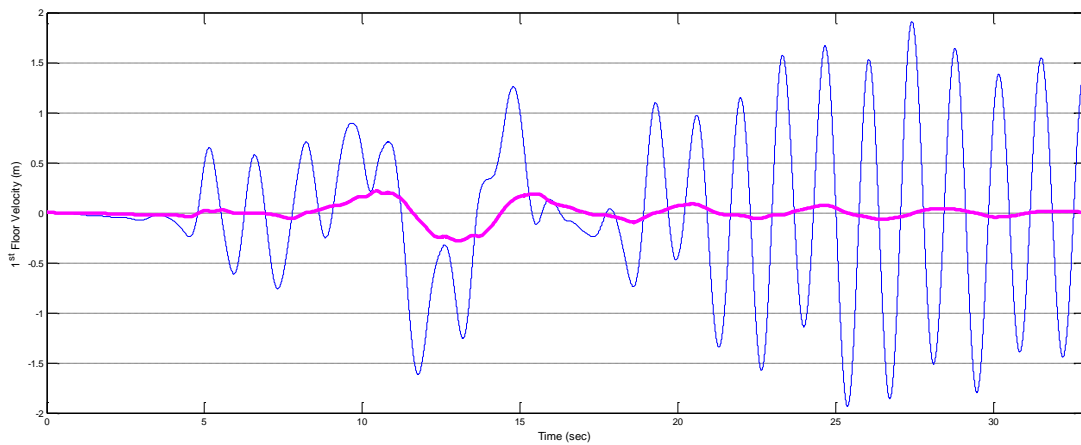
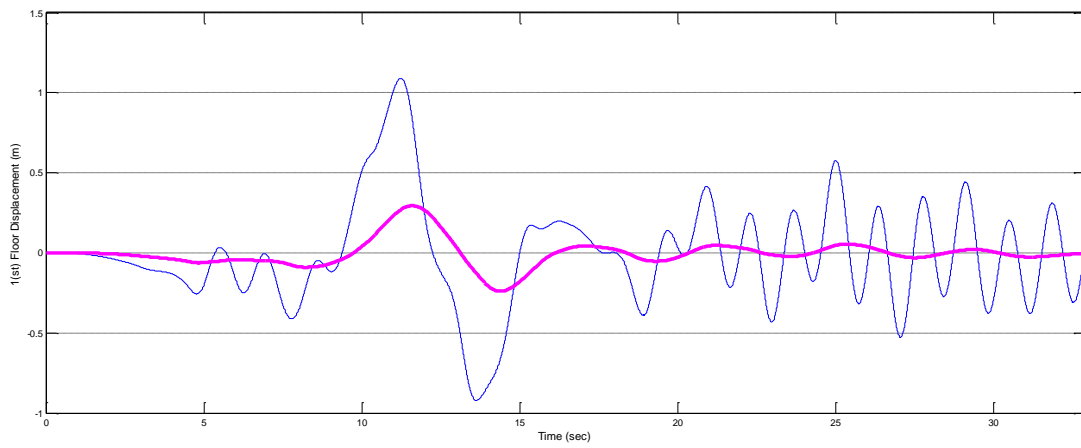


**Σχήμα 4.28:** Δύναμη Επενέργησης Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-022

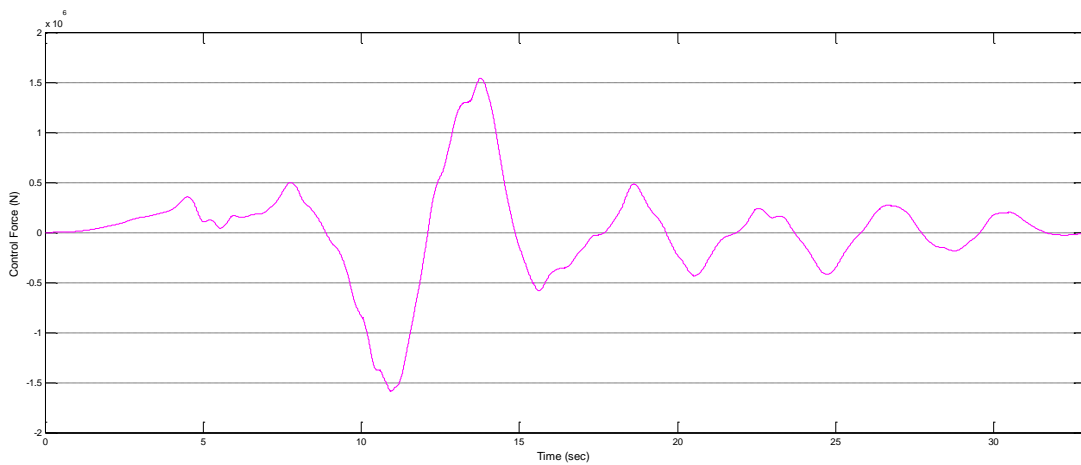
- **Σεισμική Διαταραχή DCZ-074**



**Σχήμα 4.29:** Επιτάχυνση, Ταχύτητα και Μετατόπιση Σεισμικής Διέγερσης DCZ-074



**Σχήμα 4.30:** Μετατόπιση και Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-074



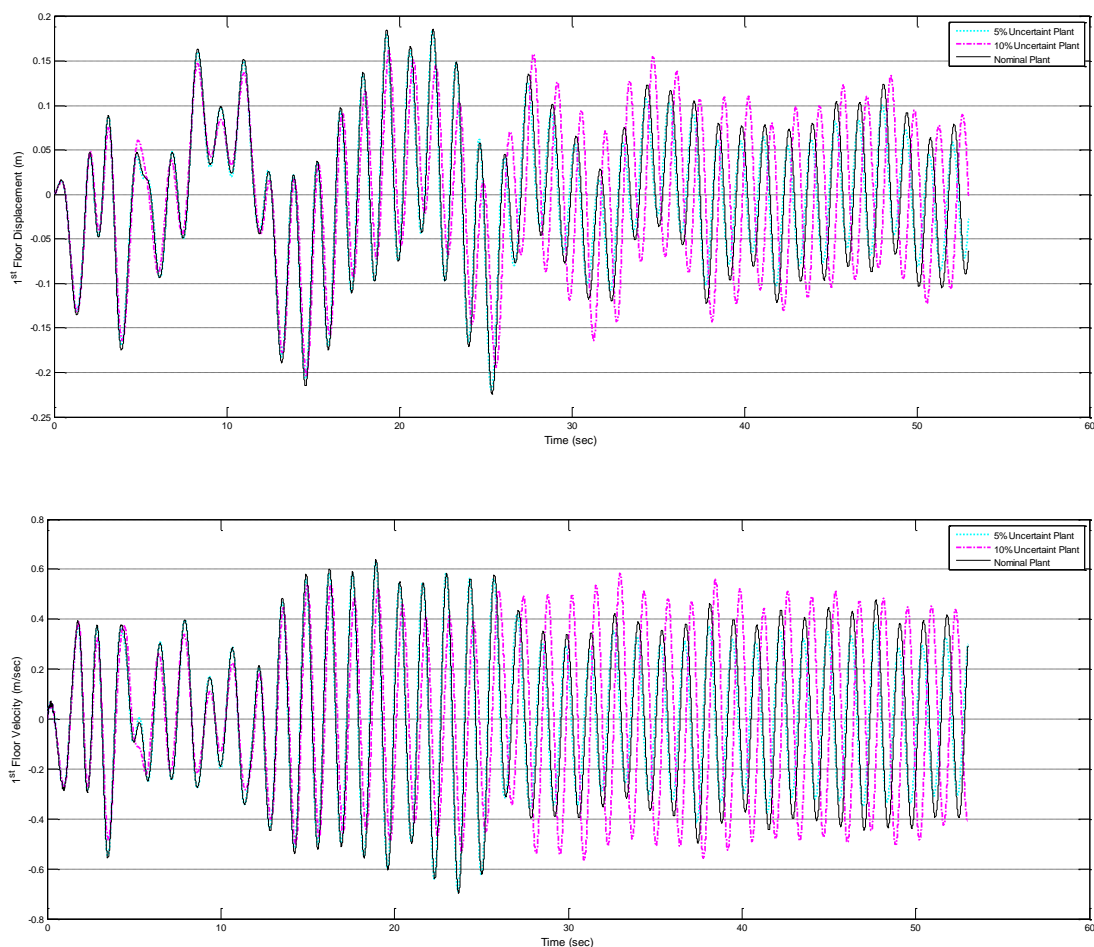
**Σχήμα 4.31:** Δύναμη Επενέργησης Σε Σεισμική Διέγερση DCZ-074

**Συμπέρασμα:** Το συνολικό επενεργούμενο σύστημα, παρά το περιεχόμενο εύρος νέων συχνοτήτων, αποκρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητικά.

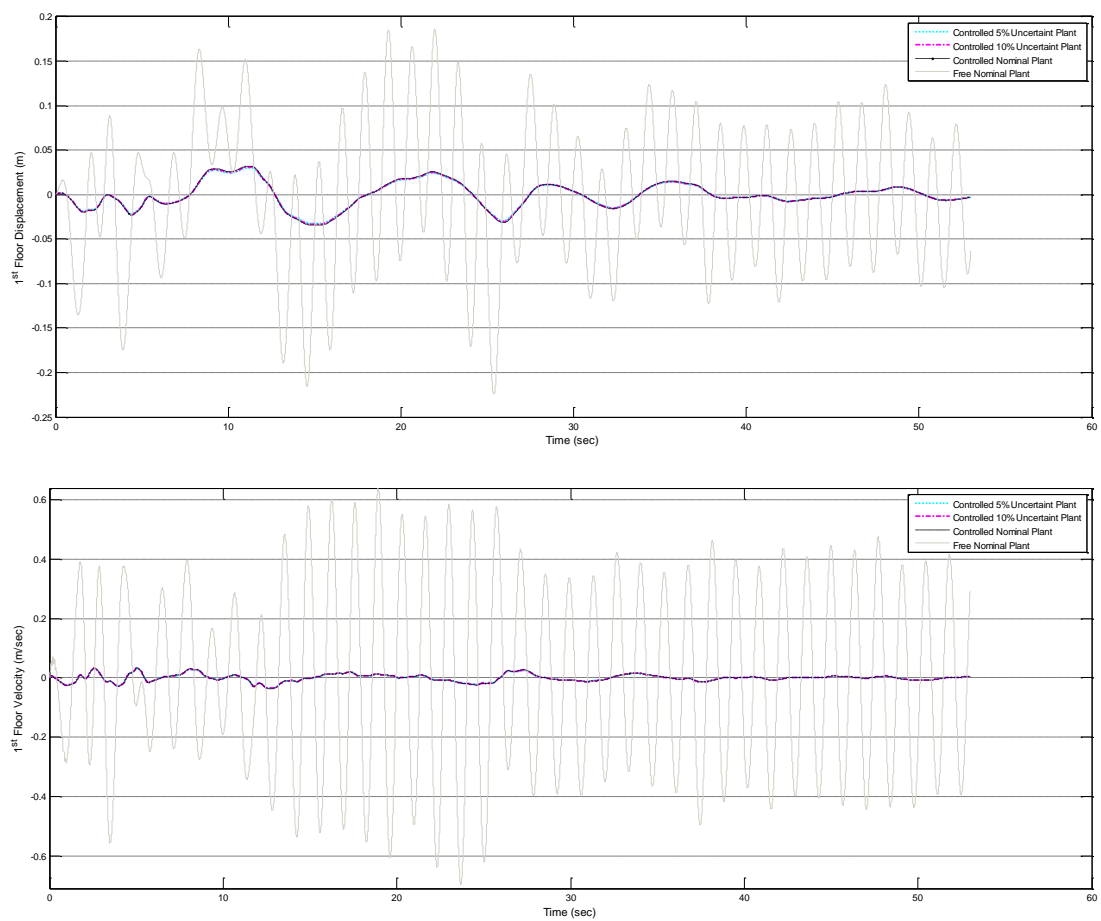
### 4.2.3 Απόκριση Παρουσία Αβεβαιότητας Μοντέλου

Ακολούθως θεωρούμε ότι το αρχικό μοντέλο του 10-όροφου κτιρίου χαρακτηρίζεται από μια «εγγενή» δομική αβεβαιότητα (structural uncertainty). Αυτή μπορεί να οφείλεται είτε σε μεταβολές στην συνολική μάζα κάθε ορόφου (π.χ. πλήθος ατόμων, έπιπλα) είτε σε επερχόμενες μεταβολές στις μηχανικές παραμέτρους του κτίριου, λόγω κόπωσης σε σεισμικά και λοιπά φορτία (λ.χ. άνεμος). Η δομική, λοιπόν, αυτή αβεβαιότητα εκφράζεται με μια ομοιόμορφη κατανομή στις τιμές των αδρανειακών κάθε υποσυστήματος (όροφος), καθώς και των μηχανικών χαρακτηριστικών που πραγματοποιούν την σύζευξη (coupling) των διαδοχικών υποσυστημάτων γύρω από την αντίστοιχη ονομαστική τους τιμή. Θεωρούμε ότι οι ονομαστικές τιμές των παραπάνω ποσοτήτων δίνονται από τον Πίνακα 2.1. Η τυχαία αυτή ομοιόμορφη κατανομή περιορίζεται από το εύρος που εισάγουμε εμείς στο αβέβαιο μοντέλο μας. Ακολούθως, θεωρούμε 5% και 10% εύρη κατανομής αβεβαιότητας και αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα σε κοινό διάγραμμα.

Σημειώνουμε εδώ ότι χρησιμοποιούμε τα δεδομένα της σεισμικής διαταραχής DCZ-270, που είχαμε αρχικώς εξετάσει. Το αντίστοιχο m-file που παράγει το αβέβαιο μοντέλο μας βάσει εύρους είναι το **H\_inf\_controller\_10F.m**, το οποίο με τη σειρά του χρησιμοποιεί κάποιες function που υπολογίζουν τις αβέβαιες μήτρες του συστήματος στο χώρο κατάστασης. Το αντίστοιχο simulink διάγραμμα βαθμίδας (block diagram) καλείται με το όνομα **System\_10F\_Controlled\_All.mdl**.

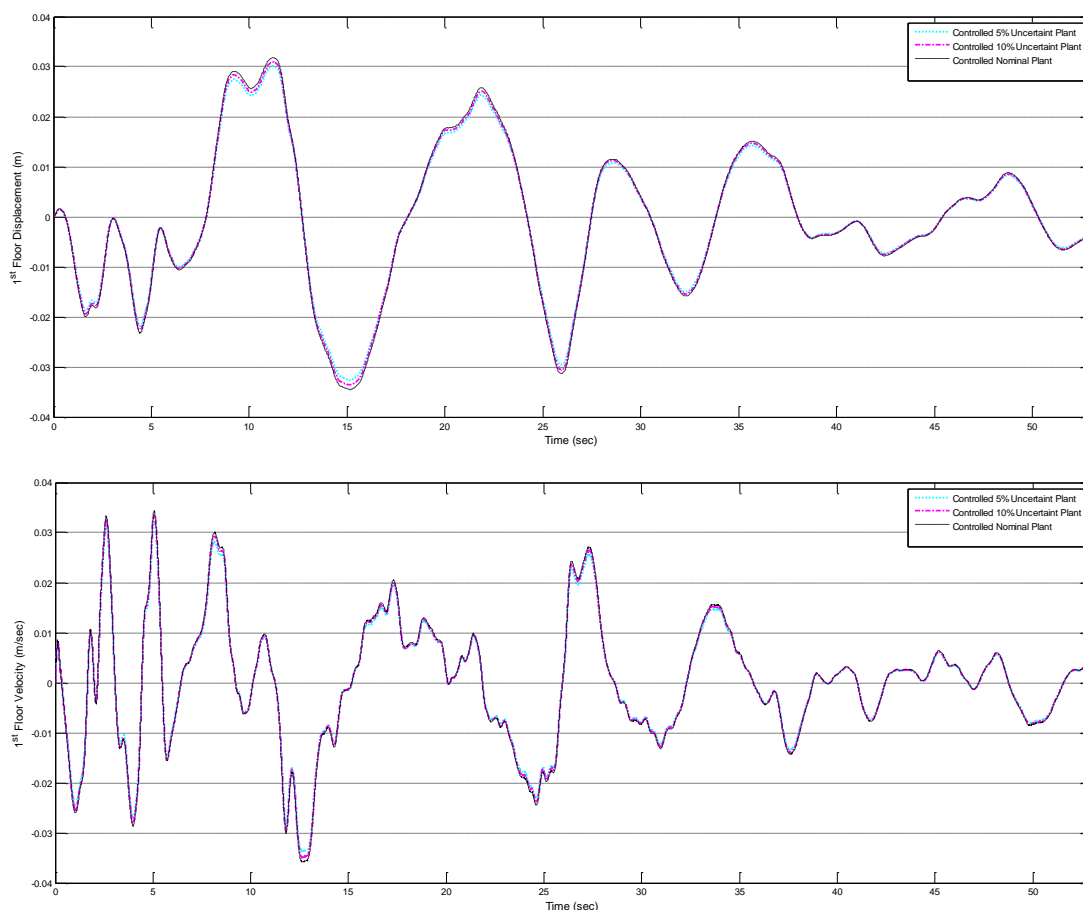


**Σχήμα 4.32:** Μετατόπιση και Ταχύτητα 1<sup>ο</sup> Ορόφου Αρχικού, 5% και 10% Αβέβαιου Συστήματος Απουσία Επενέργειας



**Σχήμα 4.33:** Μετατόπιση και Ταχύτητα  $1^{ov}$  Ορόφου Αρχικού, 5% και 10% Αβέβαιου Συστήματος Με  $H_{\infty}$  Επενέργηση ( $\gamma=2.0547$ )





**Σχήμα 4.34:** Μετατόπιση και Ταχύτητα  $1^{ου}$  Ορόφου Αρχικού, 5% και 10% Αβέβαιου Συστήματος Με  $H_{\infty}$  Επενέργηση ( $\gamma=2.0547$ ) - Λεπτομέρεια

**Συμπέρασμα:** Η εκτεταμένη αβεβαιότητα που υπαισέρχεται στα δομικά στοιχεία του αρχικού συστήματος μεταβάλλει αισθητά το πλάτος, αλλά και τις εμφανιζόμενες περιοδικότητες στην απόκριση. Εντούτοις, ο  $H_{\infty}$ -ρυθμιστής αποκρίνεται με ευρωστία (Βλ. Σχήμα 4.34). Φυσικά, διατηρείται το μέγεθος πρόσδωσης ευστάθειας στο σύστημα γύρω από την κατάσταση μηδενικού σφάλματος (ηρεμία κτιρίου).

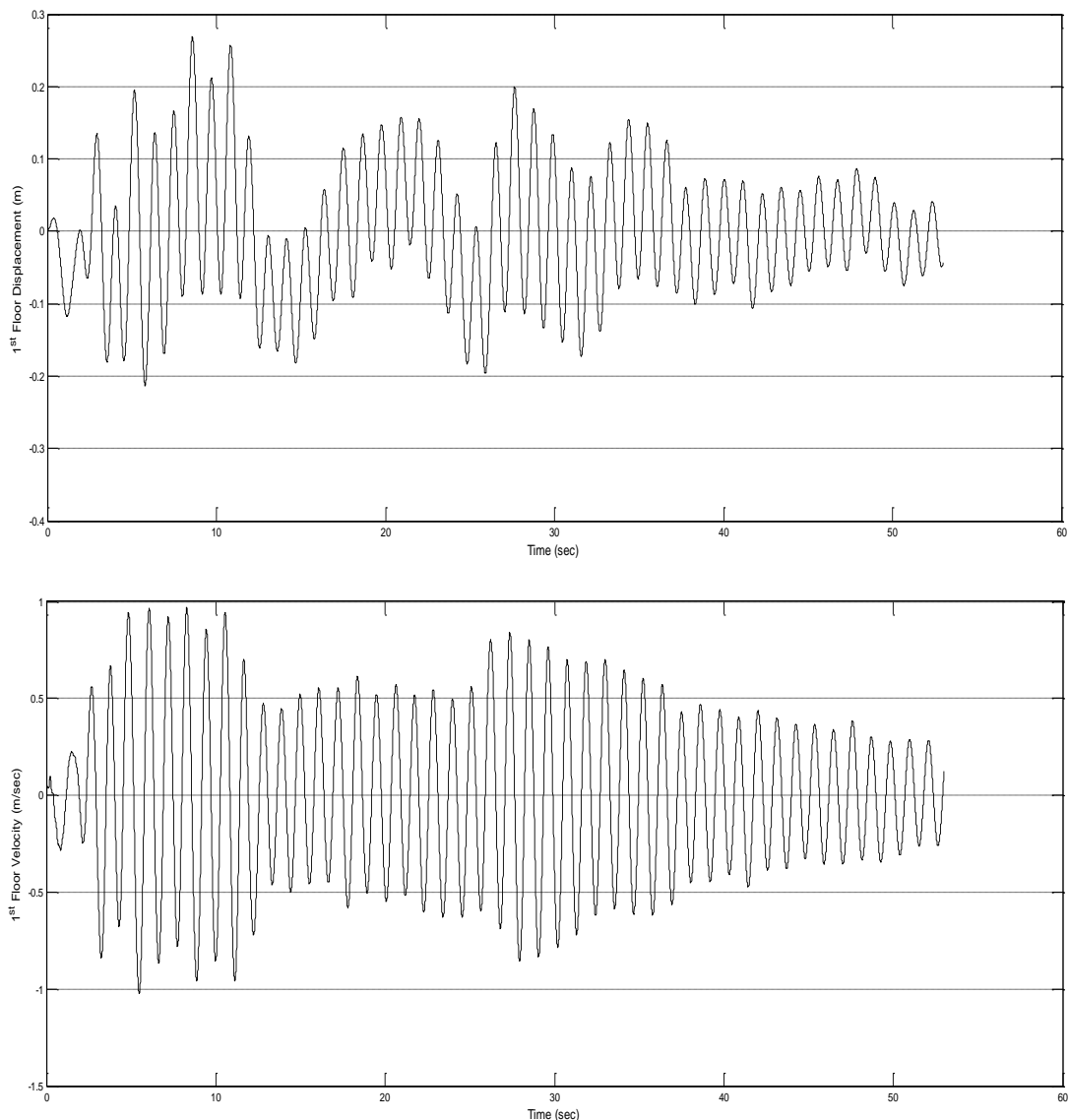
#### 4.2.4 $H_{\infty}$ -Αυτόματη Ρύθμιση και Εύρωστη Μη Γραμμική Αυτόματη Ρύθμιση

Στην παρούσα ενότητα, επιχειρούμε να λάβουμε μία εικόνα του μέτρου της αποτελεσματικότητας του  $H_{\infty}$ -ρυθμιστή, τον οποίο υλοποιήσαμε. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε το ίδιο σχήμα αυτόματης ρύθμισης σε ένα 6-όροφο κτίριο (Βλ. Σχήμα 1.29) με δεδομένα αδρανειακά και μηχανικά χαρακτηριστικά που δίνονται στον Πίνακα Β.1 (Βλ. Παράρτημα Β). Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά που προκύπτουν με εφαρμογή ενός Εύρωστου Μη Γραμμικού Ρυθμιστή. Η σύγκριση έχει νόημα όταν λαμβάνουμε σαν αναφορά την ίδια ποσότητα δύναμης επενέργησης. Επομένως, επιλέγουμε την τιμή της  $\gamma$ -παραμέτρου τέτοια, ώστε ο αντίστοιχος υποβέλτιστος  $H_{\infty}$ -ρυθμιστής να αποδίδει δύναμη επενέργησης ίση με  $8 \cdot 10^4$  N.

Η Εύρωστη Μη Γραμμική Αυτόματη Ρύθμιση αποτελεί επέκταση της Θεωρίας Lyapunov που διέπει την ποιοτική περιγραφή μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Κεντρικό ρόλο λαμβάνει η έννοια της πρακτικής ευστάθειας (practical stability) ενός συστήματος, η οποία ικανοποιείται όταν το σύστημα ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο

ιδιότητες: α) ομοιόμορφα φραγμένο<sup>38</sup>, β) τελικά ομοιόμορφα φραγμένο<sup>39</sup> [74]. Επιλέγουμε τον ρυθμιστή που σχεδιάστηκε με επιλεγμένη τιμή για την σχεδιαστική παράμετρο  $\varepsilon=10^{-6}$ . Η σχεδίαση του συγκεκριμένου ρυθμιστή περιγράφεται αναλυτικά στη σχετική βιβλιογραφία [5].

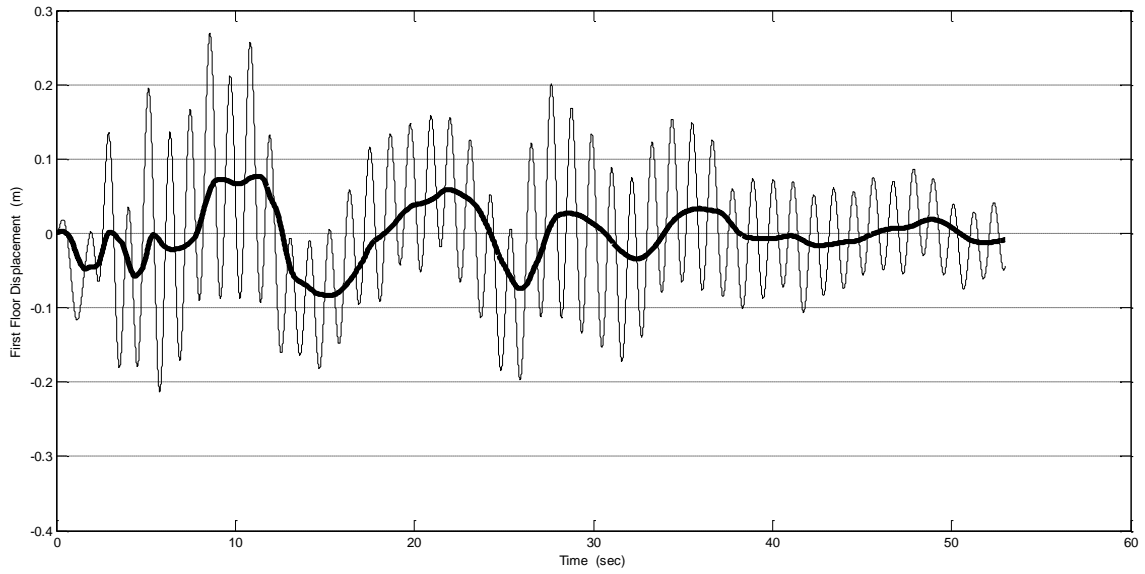
Αρχικά, παρουσιάζουμε την απόκριση του μη επενεργούμενου συστήματος. Έπειτα, παραθέτουμε τα συγκριτικά αποτελέσματα απόκρισης για τους δύο ρυθμιστές.



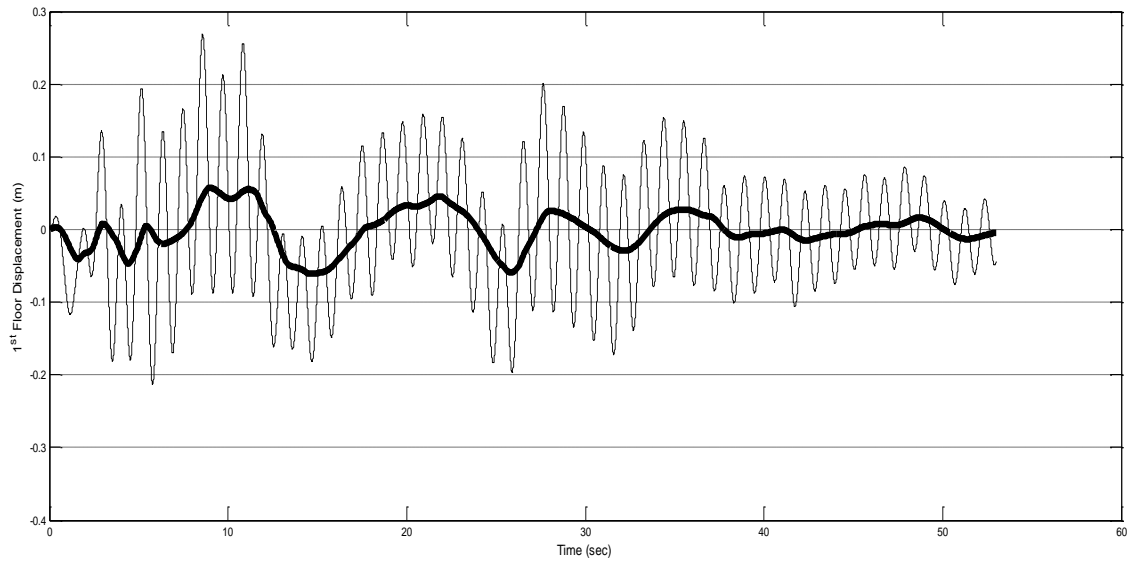
**Σχήμα 4.35:** Μετατόπιση και Ταχύτητα 1<sup>ο</sup>υ Ορόφου 6-Όροφου Κτιρίου σε DCZ-270 Διέγερση Χωρίς Επενέργηση

<sup>38</sup> Ένα χρονικά εξαρτημένο σύστημα καλείται **ομοιόμορφα φραγμένο (uniformly bounded)** αν και μόνον αν για κάθε  $\mathbf{x}(t)$  λύση με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}_0$ ,  $\exists \delta = \delta(\mathbf{x}_0) > 0$ : η  $\mathbf{x}(t)$  παραμένει μέσα σε μία ανοικτή σφαίρα  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{0}, \delta)$ .

<sup>39</sup> Ένα χρονικά εξαρτημένο σύστημα καλείται **τελικά ομοιόμορφα φραγμένο (ultimately uniformly bounded)** αν και μόνον αν  $\forall \mathbf{x}(t)$  λύση με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{x}_0$  και  $\forall \delta_0 > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\mathbf{x}_0) > 0$ :  $\exists t_0 = t_0(\mathbf{x}_0, \delta_0) > 0$  η  $\mathbf{x}(t)$  παραμένει μέσα σε μία ανοικτή σφαίρα  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{0}, \delta)$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

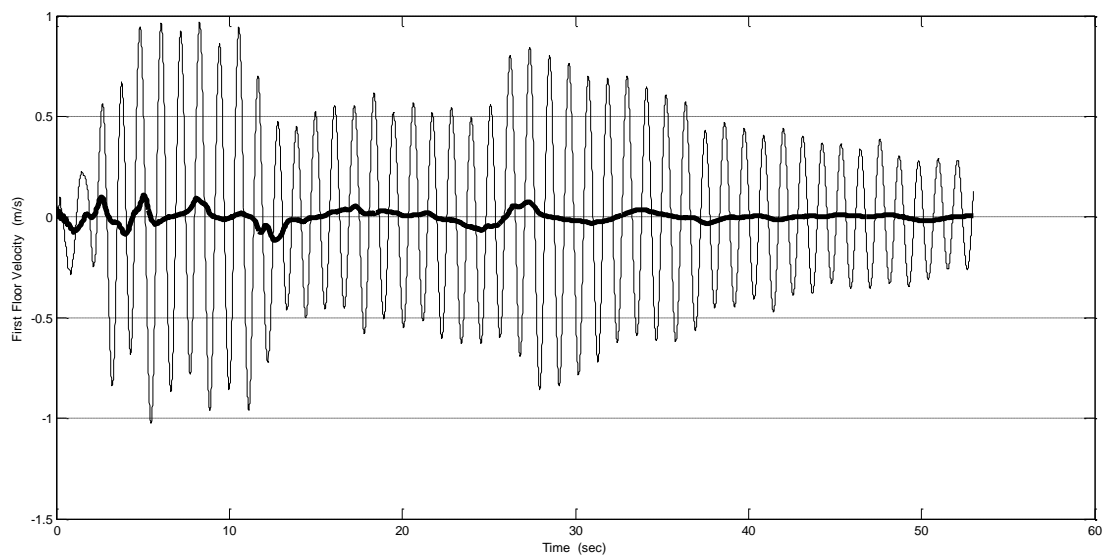


(α)

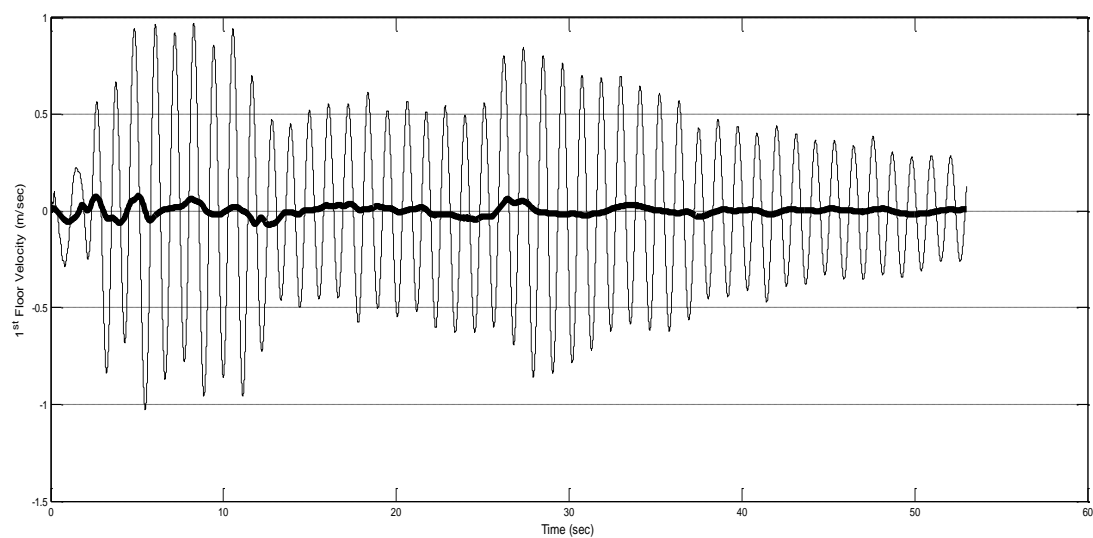


(β)

**Σχήμα 4.36:** Μετατόπιση 1<sup>ου</sup> Ορόφου 6-Όροφου Κτιρίου σε DCZ-270 Διέγερση: α) Μη Γραμμική Σθεναρή Επενέργηση ( $\epsilon=10^{-6}$ ), β)  $H_{\infty}$  Επενέργηση ( $\gamma= 3.9531$ )

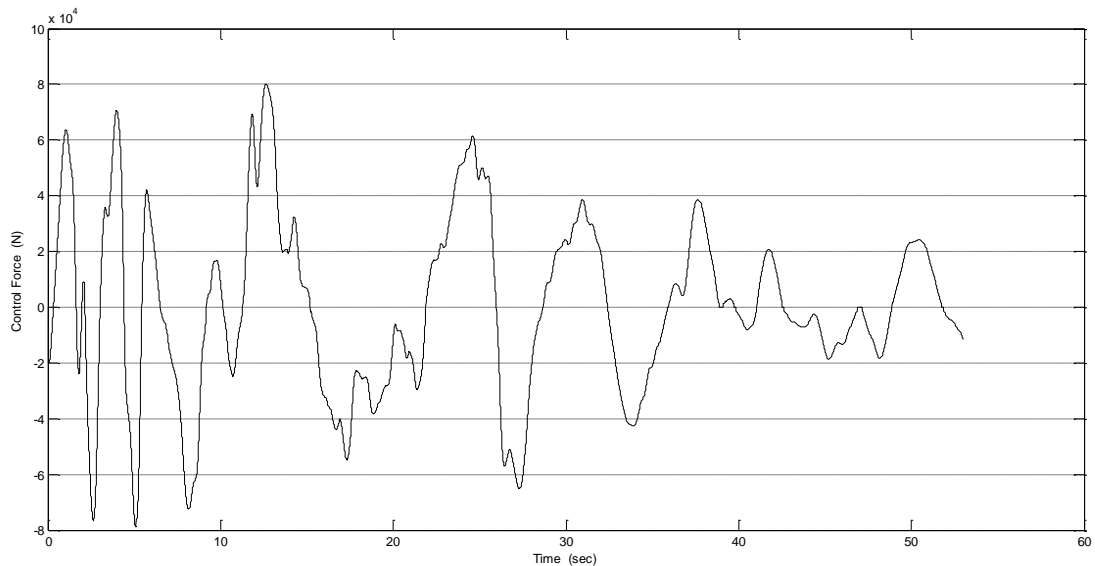


(α)

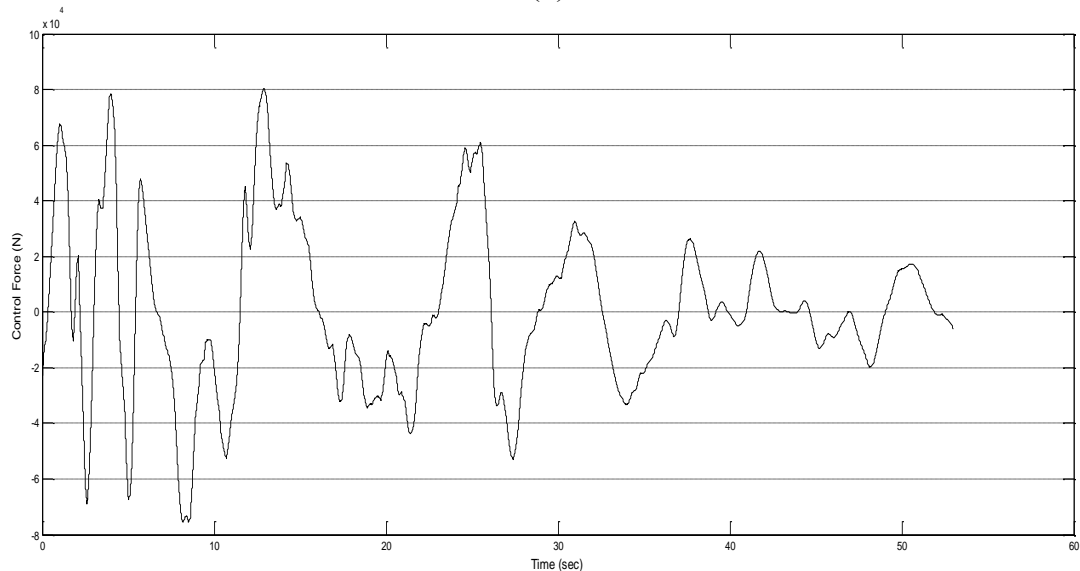


(β)

**Σχήμα 4.37:** Ταχύτητα 1<sup>ου</sup> Ορόφου 6-Οροφου Κτιρίου σε DCZ-270 Διέγερση: α) Μη Γραμμική Σθεναρή Επενέργιση ( $\epsilon=10^{-6}$ ), β)  $H_{\infty}$  Επενέργιση ( $\gamma= 3.9531$ )



(α)



(β)

**Σχήμα 4.38:** Δύναμη Επενέργησης 6-Όροφου Κτιρίου σε DCZ-270 Διέγερση: α) Μη Γραμμική Σθεναρή Επενέργηση ( $\varepsilon=10^{-6}$ ), β)  $H_{\infty}$  Επενέργηση ( $\gamma=3.9531$ )

**Σχόλιο 1:** Συγκρίνοντας τα ποσοτικά αποτελέσματα των δύο ανωτέρω τεχνικών, παρατηρούμε ότι με την χρήση της τεχνικής  $H_{\infty}$ -ρύθμισης επιτυγχάνουμε 28.57% βελτίωση στην απόκριση μετατόπισης και 31.82% στην απόκριση ταχύτητας του 1<sup>ου</sup> ορόφου για το ίδιο επίπεδο δυνάμεων επενέργησης.

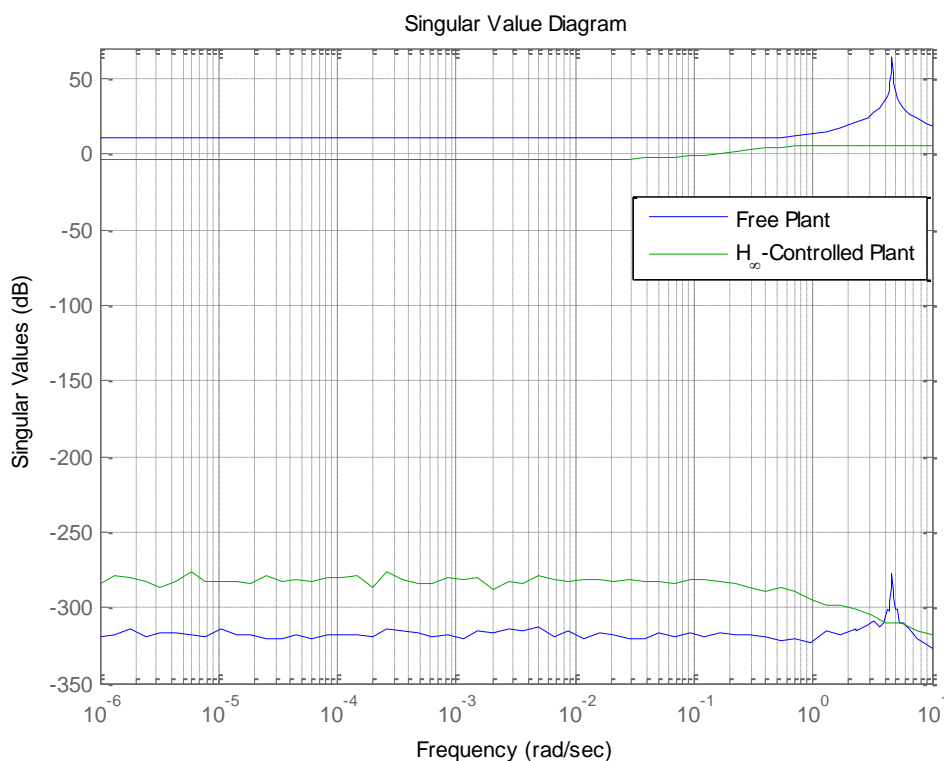
**Σχόλιο 2:** Στην παραπάνω ποσοτική σύγκριση των δύο τεχνικών, λάβαμε υπ' όψιν τα μέγιστα εμφανιζόμενα πλάτη στα αντίστοιχα διαγράμματα χρονικής απόκρισης. Ουσιαστικά, η συγκεκριμένη θεώρηση αποτελεί απλά έναν δείκτη βελτίωσης. Προκειμένου να έχουμε πλήρη και σαφή εικόνα, θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέσο σφάλμα των αντίστοιχων σημάτων απόκρισης απο το μηδέν στην διάρκεια της σεισμικής διαταραχής. Εντούτοις, για την περίπτωση της τεχνικής της εύρωστης μη γραμμικής αυτόματης ρύθμισης δεν διαθέτουμε τα απαιτούμενα αριθμητικά δεδομένα.

**Συμπέρασμα:** Η σχεδίαση της  $H_{\infty}$ -αυτόματης ρύθμισης κρίνεται επιτυχημένη.

## 4.2.5 Συχνοτική Περιγραφή Συστήματος

Παραπάνω είδαμε την χρονική απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου. Στα παραπάνω αποτελέσματα, παρατηρήσαμε την αισθητή βελτίωση που επέρχεται στην απόκριση του συστήματος του 10-όροφου κτιρίου με εφαρμογή της  $H_\infty$ -αυτόματης ρύθμισης. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την βελτίωση που αναμένουμε στο πεδίο των συχνοτήτων. Για να το πετύχουμε αυτό, σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ιδιζουσών τιμών, τα οποία -όπως αναλύσαμε στην Ενότητα 3.2.4- δίνουν μια συνολική εικόνα για την μεταβολή του κέρδους στο εξεταζόμενο εύρος συχνοτήτων. Ακόμα παραπέρα, σχεδιάζουμε μια εκλογή Bode διαγραμμάτων κέρδους και φάσης, αφού πραγματοποιήσουμε την απαιτούμενη αντίστοιχη αποσύζευξη (decoupling) στο σύστημα. Το τελευταίο γίνεται αφού είναι γνωστό ότι τα Bode διαγράμματα ορίζονται σε SISO συστήματα. Σημειώνουμε ότι το εξεταζόμενο εύρος συχνοτήτων επιλέγεται στο διάστημα  $[0,10]$  Hz. Η τάξη αυτή μεγέθους στο εύρος συχνοτήτων έχει φυσικό νόημα σε μια κατασκευή, όπως ένα πολυόροφο κτίριο. Στις περιπτώσεις των διαγραμμάτων θεωρούμε ότι η είσοδος των συστημάτων είναι η αβέβαιη σεισμική διαταραχή.

Επομένως, λαμβάνουμε το ακόλουθο SV-Διάγραμμα για το ελεύθερο και το επενεργούμενο σύστημα:

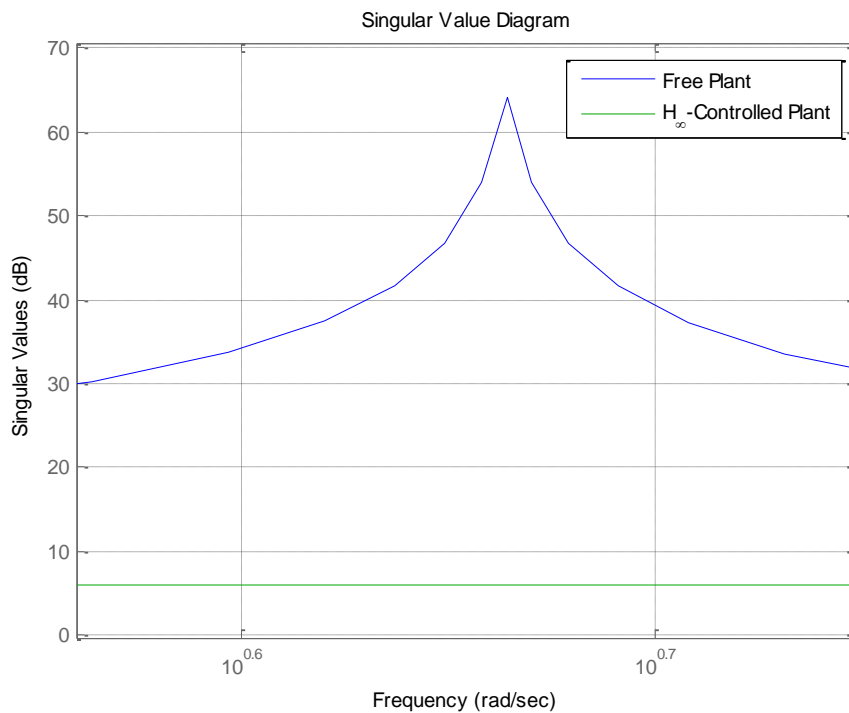


**Σχήμα 4.39:** Διάγραμμα Ιδιζουσών Τιμών

**Συμπέρασμα:** Είναι προφανές ότι με την εφαρμογή του σχήματος  $H_\infty$ -αυτόματης ρύθμισης επήλθε συνολική βελτίωση στο κέρδος του συστήματος του κτιρίου.

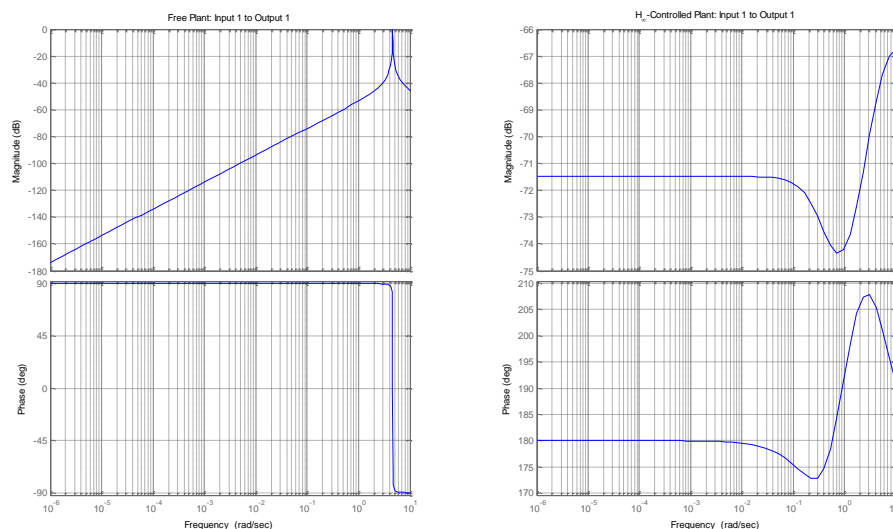
Παρατηρώντας το Διάγραμμα Ιδιζουσών Τιμών (Βλ. Σχήμα 4.39), διαπιστώνουμε ότι το ελεύθερο σύστημα εμφανίζει μία αιχμή στο κέρδος του στην συχνοτική τιμή  $\omega_o = 4.624\text{Hz}$ . Με την  $H_\infty$ -αυτόματη ρύθμιση που εφαρμόσαμε είναι εμφανές ότι η συγκεκριμένη «παθογένεια» εξαλείφεται αποτελεσματικά (Βλ. Σχήμα 4.40). Πρακτικά,

βλέπουμε ότι η  $H_\infty$ -νόρμα του συστήματος μειώθηκε δραστικά. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι  $\|P(j\omega)\|_\infty = \bar{\sigma}(P(j\omega_o)) = 64.143 \text{ dB}$  και  $\|P_{CL}(j\omega)\|_\infty = \bar{\sigma}(P_{CL}(j\omega_o)) = 5.954 \text{ dB}$ . Επομένως, επήλθε 977.31% μείωση της  $H_\infty$ -νόρμας του συστήματος σε όρους dB.

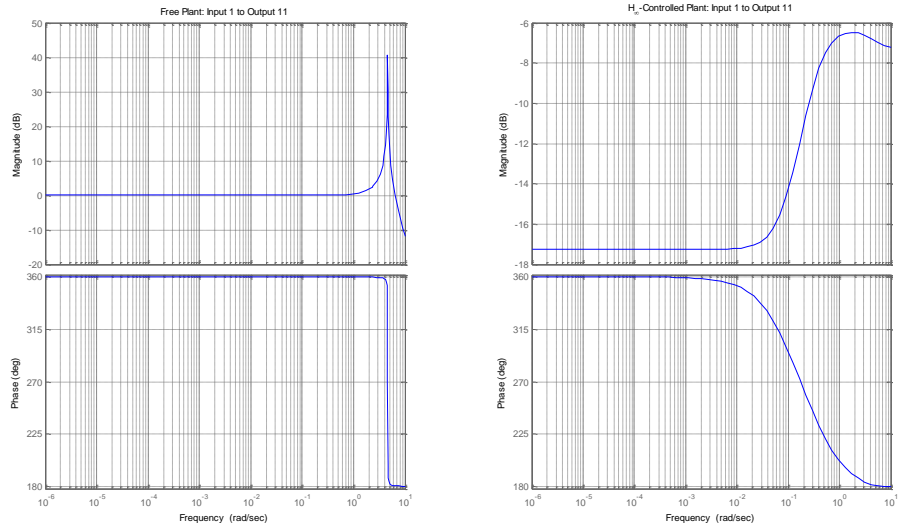


**Σχήμα 4.40:** Διάγραμμα Ιδιαζουσών Τιμών - Λεπτομέρεια

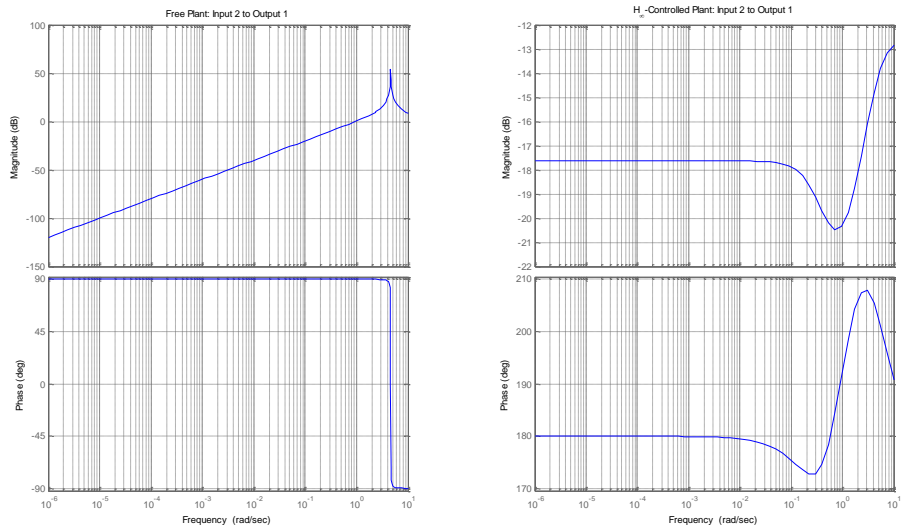
Στην περίπτωση των Bode Διαγραμμάτων, πραγματοποιούμε αποσύζευξη (decoupling) του πολυμεταβλητού συστήματος, θεωρώντας συγκεκριμένες 1-1 συνδέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του διανύσματος εισόδου  $\mathbf{w}$  διάστασης δύο και σε εκείνα του διανύσματος εξόδου  $\mathbf{y}$  διάστασης είκοσι. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε τους τέσσερις συνδυασμούς ανάμεσα στην ταχύτητα και τη μετατόπιση του σεισμού με την ταχύτητα και τη μετατόπιση του 1<sup>ου</sup> ορόφου του κτιρίου. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε απεικονίζονται στα ακόλουθα διαγράμματα.



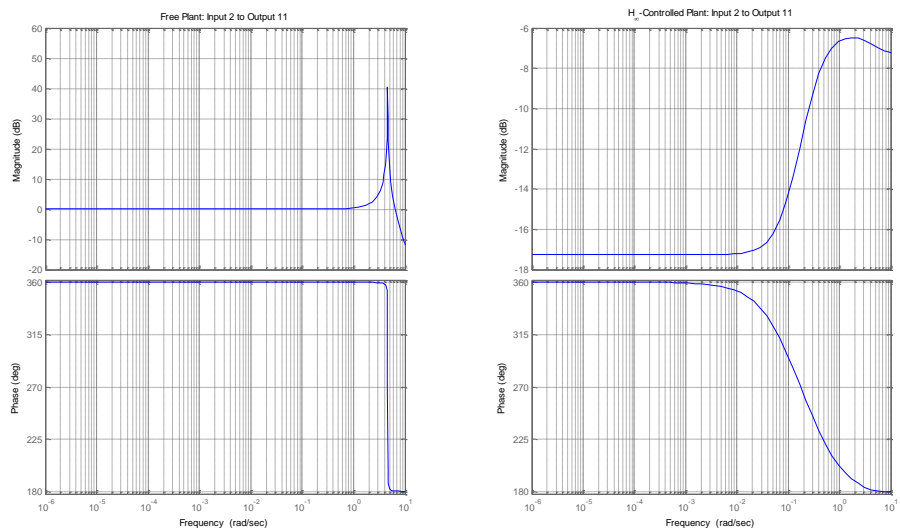
**Σχήμα 4.41:** Διάγραμμα Bode II-OI



**Σχήμα 4.42:** Διάγραμμα Bode I1-O11



**Σχήμα 4.43:** Διάγραμμα Bode I2-O1



**Σχήμα 4.44:** Διάγραμμα Bode I2-O11



**Συμπέρασμα:** Απο τις ενδεικτικές παραπάνω διασυνδέσεις καθίσταται εμφανές με την εφαρμογή του σχήματος  $H_{\infty}$ -αυτόματης ρύθμισης επήλθε ισχυρή βελτίωση στα αντίστοιχα «αποσυζευγμένα» κέρδη των υποσυστημάτων του κτιρίου.

# 5. Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

---

## 5.1 Σύνοψη Αποτελεσμάτων

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία έγινε μια παρουσίαση των σύγχρονων τεχνολογιών αντισεισμικής προστασίας κτιρίων. Στην συνέχεια, αφού εισάγαμε τις απαιτούμενες απλουστευτικές παραδοχές του προτύπου, προχωρήσαμε στην μοντελοποίηση του συστήματος της κτιριακής εγκατάστασης. Η μοντελοποίηση αυτή βασίστηκε στην χρήση μηχανικών και αδρανειακών στοιχείων. Στην μοντελοποίηση συμπεριελήφθη η σεισμικά μονωμένη βάση. Επιπλέον, αποδείξαμε το μοντέλο του απλού υδραυλικού επενεργητή, ο οποίος θα μπορούσε να αποτελέσει το τελικό εργαλείο επενέργειας σε μια πρακτική υλοποίηση του συνολικού συστήματος του κτιρίου.

Η εργασία επικεντρώθηκε στην υπολογιστική ανάλυση της χρονικής απόκρισης των επιμέρους υποσυστημάτων του κτιρίου σε εφαρμογή σεισμικής διέγερσης και στη σχεδίαση ενός αποδοτικού  $H_{\infty}$  υποβέλτιστου ρυθμιστή. Για να πετύχουμε το πρώτο, αναπτύξαμε τον ανάλογο κώδικα, στηριζόμενοι σε σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης. Στην υπολογιστική ανάλυση της δυναμικής απόκρισης του μοντέλου παρατηρήσαμε μια ταλαντωτική κίνηση αυξημένου πλάτους. Κατά τη σχεδίαση του  $H_{\infty}$  υποβέλτιστου ρυθμιστή υλοποιήσαμε τα αντίστοιχα θεωρήματα. Κατόπιν, εφαρμόσαμε τον  $H_{\infty}$  υποβέλτιστο ρυθμιστή στο αρχικό σύστημα και παρατηρήσαμε την αισθητή βελτίωση στην χρονική απόκριση του συστήματος. Κατόπιν, υποβάλαμε το σύστημα κλειστού βρόχου σε νέες σεισμικές διαταραχές και παρατηρήσαμε την απόκριση. Έπειτα, εισάγαμε ένα ποσοστό αβεβαιότητας στο αρχικό μοντέλο και εφαρμόζοντας την αρχική σεισμική διέγερση λάβαμε μια ενδεικτική εικόνα για την ευρωστία του  $H_{\infty}$  ρυθμιστή που σχεδιάστηκε. Τέλος, εφαρμόσαμε τον  $H_{\infty}$  ρυθμιστή σε μία άλλη κτιριακή κατασκευή και, αφού συγκρίναμε τα αποτελέσματα με δημοσιευμένα αποτελέσματα που παράχθηκαν με εφαρμογή της Μη Γραμμικής Εύρωστης Αυτόματης Ρύθμισης, διαπιστώσαμε την αποτελεσματικότητα του ρυθμιστή που σχεδιάσαμε. Τέλος, συγκρίναμε μια επιλογή χαρακτηριστικών αποσυζευγμένων Bode διαγραμμάτων και τα διαγράμματα των ιδιαζουσών τιμών για το ελεύθερο και το ρυθμιζόμενο σύστημα. Απο τη σύγκριση, διαπιστώσαμε την σημαντική βελτίωση που επήλθε στη συχνοτική «αντίληψη» του συστήματος.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας δείχνουν ότι η συγκεκριμένη μεθοδολογία σχεδίασης ρυθμιστών μπορεί να παρέχει σημαντικές λύσεις στον τομέα αντισεισμικής προστασίας σε κτιριακές, αλλά και άλλες βιομηχανικές εγκαταστάσεις. Η οπτική αυτή μπορεί να στηριχτεί στην φύση των συστημάτων εύρωστου ελέγχου, τα οποία έχουν την δυνατότητα να παρέχουν σταθερή απόδοση βάσει προδιαγραφών παρουσία δομικής αβεβαιότητας του εκάστοτε συστήματος ή αβέβαιων εξογενών διαταραχών. Επιπλέον, τα συστήματα αυτά δεν απαιτούν προσαρμοστικού τύπου αυτο-ρύθμιση σε πραγματικό χρόνο κατά την εξέλιξη ενός φαινομένου. Το γεγονός αυτό μεταφράζεται σε ευκολία σε βιομηχανική υλοποίηση, καθώς και σε ελάχιστες ανάγκες συντήρησης και επισκευής.

## 5.2 Ερεθίσματα Περαιτέρω Έρευνας

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια «απόπειρα» εντρύφησης σε μία τεχνική εύρωστης αυτόματης ρύθμισης που άνθησε τις δεκαετίες του 80' και 90'· αυτή της  $H_{\infty}$  ρύθμισης. Εφαρμόσαμε τα «εργαλεία» που παρέχει η σχετική θεωρία κινούμενοι στην περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης. Διαπιστώσαμε ότι το θεωρητικό υπόβαθρο εκτείνεται σε βάθος και παρέχει μία διεισδυτική θεώρηση και μεθοδολογία, η οποία θεμελιώνεται στην συχνοτική περιγραφή των υπο ρύθμιση συστημάτων. Είναι προφανές ότι το θέμα δεν εξαντλείται εδώ.

Παραθέτουμε μερικά ζητήματα, τα οποία αποτελούν «εν δυνάμει» αντικείμενα περαιτέρω έρευνας:

- Η σχεδίαση ενός προσαρμοστικού σχήματος ελέγχου με την ενσωμάτωση κατάλληλων επιταχυνσιομέτρων, τα οποία θα στέλνουν δεδομένα σε έναν επεξεργαστή, ο οποίος με τη σειρά του θα ρυθμίζει κατάλληλα τα κέρδη του επενεργητή.
- Η ενσωμάτωση του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή στο σύστημα κλειστού βρόχου του κτιρίου, ώστε να συνίσταται ένα εφαρμοσμένο ολοκληρωμένο σύστημα.
- Η περιγραφή ενός πιο ρεαλιστικού μοντέλου του κτιρίου στις τρεις διαστάσεις με εισαγωγή σχετικών στροφών και καμπτικών ροπών. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

- [1] J. M. Kelly, G. Leitmann, A. G. Soldatos, *Robust Control of Base - Isolated Structures Under Earthquake Excitation*, Journal of Optimization Theory and Applications (1987) 159-180.
- [2] D. Benedetti, P. G. Carydis, P. Pezzoni, *Shaking Table Tests on 24-Simple Masonry Buildings*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics (1998) 67-90.
- [3] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5<sup>th</sup> Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2010.
- [4] S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley, West Sussex, 2000.
- [5] A. G. Soldatos, T. M. Rassias, P. M. Pardalos, V. A. Kalyagin, *Nonlinear Robust Stability Control of Structures*, Elsevier, Under Publication.
- [6] K. Zhou, J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1999.
- [7] H. T. Toivonen, *Robust Control Methods*, Process Control Laboratory, Åbo Akademi University, Finland, 1998.
- [8] A. A. Stoorvogel, *The  $H_\infty$  Control Problem: A State Space Approach*, University of Michigan, U.S.A., 2000.
- [9] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Cornwall, 1989.
- [10] W. K. Gawronski, *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [11] J. C. Doyle, B. A. Francis, A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan, New York, 1992.
- [12] J. Scheller, U. Starossek, *Twin Rotor Damper for Control of Wind-Induced Bridge Deck Vibrations*, 15<sup>th</sup> Asian Pacific Vibration Conference (2013) 347-352.
- [13] R. J. Helgeson, A. M. Reinhorn, T. Soong, *Active Control of a Communication Tower in Nanjing China*, Proceedings IMAC XVII - Society of Experimental Mechanics (1999) 424-430.
- [14] J. P. Lynch, *Active Structural Control Research at Kajima Corporation*, National Science Foundation's Summer Institute in Japan Program, Stanford University, USA, 1998.
- [15] M. Kaltenbacher, *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, New York, 2007.
- [16] Ε. Παπαδόπουλος, *Σημειώσεις Μαθήματος Μηχανοτρονικά Συστήματα*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [17] T. Kobori, S. Kamagata, *Dynamic Intelligent Buildings - Active Seismic Response Control*, Intelligent Structures (1991) 279-282.

- [18] T. Kobori, N. Koshika, K. Yamada, Y. Ikeda, *Seismic Response Controlled Structure with Active Mass Driver System. Part 1: Design*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics (1991) 133-149.
- [19] Ι. Αγγελόπουλος, *Τεχνολογία Συστημάτων Συντονισμένης Μάζας*, Διπλωματική Εργασία, Πολυτεχνείο Κρήτης, Αθήνα, 2008.
- [20] Δ. Α. Τσώνης, *Μελέτη Υδραυλικού Συστήματος Για Αντισεισμική Προστασία Κτιρίων*, Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π, Αθήνα, 2003.
- [21] Δ. Μπαρτζώκας, Γ. Σφυρής, *Εισαγωγή στη Μηχανική των Σεισμών*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα, 2004.
- [22] M. Janssen, J. Zuidema, R. Wanhill, *Fracture Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Spon Press, USA, 2005.
- [23] Ν. Ανδριανόπουλος, Δ. Πάζης, *Μηχανική των Θραύσεων*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα, 1998.
- [24] Ν. Ανδριανόπουλος, Ε. Κυριαζή, Κ. Λιακόπουλος, *Πειραματική Αντοχή Υλικών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.
- [25] G. Stephanopoulos, *Chemical Process Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- [26] Χ. Γεωργιάδης, *Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2003.
- [27] G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Series in Automatic Computation, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- [28] J. N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3<sup>rd</sup> Edition, Mc Graw Hill, USA, 2006.
- [29] Δ. Ε. Παναγιωτουνάκος, Γ. Α. Παπαδόπουλος, *Θεωρητική Μηχανική*, Εκδόσεις Φούντας, Αθήνα, 2001.
- [30] Α. Θ. Παπαϊωάννου, *Μηχανική των Ρευστών*, 2<sup>η</sup> Έκδοση, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2002.
- [31] Z. Akbay, H. M. Aktan, *Intelligent Energy Dissipation Devices*, Proceedings of 4<sup>th</sup> U.S. National Conference on Earthquake Engineering (1990) 427-435.
- [32] S. Kannan, H. M. Uras, H. M. Aktan, *Active Control of Building Seismic Response by Energy Dissipation*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics (1995) 747-759.
- [33] J. Hirai, N. Naruse, H. Abiru, *Structural Control with Variable Friction Damper For Seismic Response*, 11<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering (1996) No 1934.
- [34] A. G. Soldatos, *An Investigation on Antiseismic Base-Isolation and Control*, Proceedings of 4<sup>th</sup> Workshop on Control Mechanics, Springer-Verlag (1992) 232-247.
- [35] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 2008.
- [36] Π. Παρασκευόπουλος, *Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο. Θεωρία και Εφαρμογές*, Ε.Μ.Π, Αθήνα, 2004.

- [37] K. J. Åström, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, 2<sup>nd</sup> Edition, Dower Publications Inc, New York, 2008.
- [38] P. Ioannou, B. Fidan, *Adaptive Control Tutorial*, Advances in Design and Control Series, SIAM, Philadelphia, 2006.
- [39] J. Doyle, *Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties*, IEE Proceedings (1982) 242-250.
- [40] A. Dorobantu, A. M. Murch, G. J. Balas, *H<sub>∞</sub> Robust Control Design for the NASA AirSTAR Flight Test Vehicle*, 50<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting (2012) No 1181.
- [41] G. Strang, *Computational Science and Engineering*, Wellesley Cambridge Press, Cambridge, Massachusetts, 2007.
- [42] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Brooks & Cole, USA, 2001.
- [43] W. Boyce, R. DiPrima, *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.
- [44] Δ. Κάραλης, *Advanced Numerical Analysis Issues*, Materials Process Design and Control Lab., Ithaca, New York, 2010.
- [45] F. A. Morrison, *Obtaining Uncertainty Measures on Slope and Intercept of a Least Squares Fit with Excel's LINEST*, Michigan Technological University, 2014.
- [46] *MATLAB® 7 Getting Started*. The Mathworks, Inc, 2008.
- [47] Γ. Γεωργίου, Χ. Ξενοφώντος, *Εισαγωγή στον MATLAB*, Kantzilaris, Cyprus, 2007.
- [48] L. F. Shampine, M. W. Reichelt, *The Matlab ODE Suite*, SIAM Journal on Scientific Computing 18 2009 1-22.
- [49] J. D. Logan, *Applied Mathematics*, Wiley, Nebraska, 2002.
- [50] T. T. Soong, A.M. Reinhorn, *An Overview of Active and Hybrid Structural Control Research in the U.S.*, The Structural Dynamic Design of Tall Buildings (1993) 192-209.
- [51] K. Tanida, Y. Koike, K. Mutaguchi, N. Uno, *Development of Hybrid Active - Passive Damper, Active and Passive Damping*, ASME (1991) 21-26.
- [52] K. Tanida, *Active Control of Bridge Towers During Erection*, Proceedings of 3<sup>rd</sup> Colloquium on Vibration Control of Structures, JSCE (1995) 173-184.
- [53] I. G. Buckle, R. L. Mayes, *Seismic Isolation History, Application and Performance – A World View*, Earthquake Spectra (1990) 161-201.
- [54] J. M. Kelly, *Base Isolation: Linear Theory and Design*, Earthquake Spectra 6 (1990) 223-244.
- [55] T. T. Soong and M. C. Constantinou, *Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering*, Springer-Verlag, New York, 1994.

- [56] M. D. Symans, M. C. Constantinou, *Semi-Active Control Systems for Seismic Protection of Structures: A State-of-the-Art Review*, Engineering Structures (1999) 469-487.
- [57] T. K. Datta, *A State-Of-The-Art Review On Active Control Of Structures*, ISET Journal of Earthquake Technology (2003) 1-17.
- [58] A. Tani, K. Nishimura, S. Ryu, M. Nishihata, H. Kawamura, *Experimental Research on Intelligent Active Control of Building Structures by Fuzzy Optimal Logic*, 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering (2000) No 0755.
- [59] E. Matta, A. De Stefano, B. F. Spencer, *A New Passive Rolling-Pendulum Vibration Absorber Using A Non-Axial-Symmetrical Guide To Achieve Bidirectional Tuning*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics (2009) No 929.
- [60] MTS Systems Corporation, *Series 252 Hydraulic Actuators*, 100-016-993 HydAct244-01, USA, 1999.
- [60] L. Březina, T. Březina,  *$H_\infty$  Controller Design for A DC Motor Model With Uncertain Parameters*, Engineering Mechanics (2011) 271-279.
- [61] E. Lewis, H. Stern, *Design of Hydraulic Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- [62] H. E. Merritt, *Hydraulic Control Systems*, Wiley, New York, 1967.
- [63] MTS Systems Corporation, *Series 244 Hydraulic Actuators*, 100-016-993 HydAct244-01, USA, 1999.
- [64] MTS Systems Corporation, *Series 252 Servo-valves*, 011-182-906 N, USA, 2013.
- [65] R. L. Sack, W. Patten, *Semi-active Hydraulic Structural Control*, Proceedings of International Workshop on Structural Control (1994) 417-431.
- [66] K. D. Weiss, T. G. Duclos, J. D. Carlson, M. J. Chrzan, A. J. Margida, *High Strength Magneto-and Electro-rheological Fluids*, Society of Automotive Engineers (1993) No 932451.
- [67] J. D. Carlson, D. M. Catanzarite, K. A. Clair, *Commercial Magneto-Rheological Fluid Devices*, Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on ER Fluids, MR Suspensions and Associated Technology, International Journal of Modern Physics (1996) Sheffield.
- [68] J. D. Carlson, K. D. Weiss, *A Growing Attraction To Magnetic Fluids*, Machine Design (1994) 61-64.
- [69] C. Alhan, M. Altun, *Performance of Non-Linear Base Isolation Systems Designed According to Uniform Building Code*, 5<sup>th</sup> International Advanced Technologies Symposium (2009) Instabul.
- [70] I. H. Hwang, J. H. Lim, J. S. Lee, *A Study on Base Isolation Performance of Magneto-Sensitive Rubbers*, Journal of Earthquake Engineering Society of Korea, (2006) 77-84.
- [71] J. Tsinias, *The Concept of Exponential ISS for Stochastic Systems and Applications to Feedback Stabilization*, Systems and Control Letters (1997) Preprint.

- [72] N. Krikelis, *Constrained Regulation Design of Linear Discrete - Time Descriptor Systems*, Control Theory and Advanced Technology (1992) 257-268.
- [73] N. Krikelis, *Eigenstructure Assignment for Descriptor Systems via State Variable Feedback*, International Journal of Systems Science (1992) Vol.23.
- [74] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Éditions Masson, Paris, 1983.
- [75] Λ. Δρίτσας, *Σημειώσεις Θεωρίας  $H_\infty$  Ελέγχου και Μεθόδων Μεικτής Ευαισθησίας*, Αθήνα, 2014.
- [76] Ι. Μαρουλάς, *Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2005.
- [77] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2004.
- [78] Σ. Καρανάσιος, Ν. Καδιανάκης, *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
- [79] S. S. Nair, *Automatic Weight Selection Algorithm for Designing  $H_\infty$  Controller for Active Magnetic Bearing*, International Journal of Engineering Science and Technology, (2011) 122-138.
- [80] G. Filardi, O. Sename, A. Voda, H. Schroeder, *Robust  $H_\infty$  Control of a DVD Drive Under Parametric Uncertainties*, European Control Conference, (2003) No 132.



- [81] <http://en.wikipedia.org/wiki/Earthquake>
- [82] [http://en.wikipedia.org/wiki/Enceladus %28mythology%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Enceladus_%28mythology%29)
- [83] <http://en.wikipedia.org/wiki/Santorini>
- [84] [http://en.wikipedia.org/wiki/Plate tectonics](http://en.wikipedia.org/wiki/Plate_tectonics)
- [85] [http://www.joostdevree.nl/bouwkunde2/tuned mass damper.htm](http://www.joostdevree.nl/bouwkunde2/tuned_mass_damper.htm)
- [86] [https://www.dlsweb.rmit.edu.au/toolbox/buildright/content/bcgbc4010a/11 wall systems/02 bracing/page 004.htm](https://www.dlsweb.rmit.edu.au/toolbox/buildright/content/bcgbc4010a/11_wall_systems/02_bracing/page_004.htm)
- [87] <http://www.eng.nus.edu.sg/EResnews/9711/nov97p2.html>
- [88] [http://en.wikipedia.org/wiki/Yokohama Landmark Tower](http://en.wikipedia.org/wiki/Yokohama_Landmark_Tower)
- [89] [http://www.ihl.co.jp/iis/english/products/damper mass.html](http://www.ihl.co.jp/iis/english/products/damper_mass.html)
- [90] <http://www.intechopen.com/source/html/39980/media/image3.jpeg>
- [91] [http://en.wikipedia.org/wiki/Base isolation](http://en.wikipedia.org/wiki/Base_isolation)
- [92] <http://en.wikipedia.org/wiki/Neoprene>
- [93] [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pole 3 building seismic base isolator.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pole_3_building_seismic_base_isolator.jpg)
- [94] <http://seismicdesignzone.com/designing-around-base-isolation/>
- [95] [http://file.scirp.org/Html/3-1880089 32273.htm](http://file.scirp.org/Html/3-1880089_32273.htm)
- [96] <http://en.wikipedia.org/wiki/Polytetrafluoroethylene>
- [97] [http://en.wikipedia.org/wiki/1940 El Centro earthquake](http://en.wikipedia.org/wiki/1940_El_Centro_earthquake)
- [98] [http://en.wikipedia.org/wiki/Great Hanshin earthquake](http://en.wikipedia.org/wiki/Great_Hanshin_earthquake)
- [99] <http://en.wikipedia.org/wiki/Accelerometer>
- [100] [http://en.wikipedia.org/wiki/Piezoelectric accelerometer](http://en.wikipedia.org/wiki/Piezoelectric_accelerometer)
- [101] [http://en.wikipedia.org/wiki/Strain gauge](http://en.wikipedia.org/wiki/Strain_gauge)
- [102] [http://en.wikipedia.org/wiki/Diagonally dominant matrix](http://en.wikipedia.org/wiki/Diagonally_dominant_matrix)
- [103] [http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient of determination](http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination)
- [104] [http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise Pascal](http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal)
- [105] [http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph Bramah](http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bramah)

- [106] [http://en.wikipedia.org/wiki/William\\_George\\_Armstrong](http://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Armstrong)
- [107] <http://www.daerospace.com/HydraulicSystems/ActuatorHydraulicDesc.php>
- [108] [http://en.wikipedia.org/wiki/Bulk\\_modulus](http://en.wikipedia.org/wiki/Bulk_modulus)
- [109] [http://en.wikipedia.org/wiki/Orifice\\_plate](http://en.wikipedia.org/wiki/Orifice_plate)
- [110] <http://www.viscopedia.com/viscosity-tables/substances/engine-oil/>
- [111] <http://nees.buffalo.edu/sees/DESCRIPTIONOFLABORATORYEQUIPMENT.html>
- [112] <http://www.iasa.gr/magnetLAB/Units1.pdf>
- [113] [http://en.wikipedia.org/wiki/H-infinity\\_methods\\_in\\_control\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/H-infinity_methods_in_control_theory)
- [114] [http://en.wikipedia.org/wiki/Joint\\_spectral\\_radius](http://en.wikipedia.org/wiki/Joint_spectral_radius)
- [115] [http://en.wikipedia.org/wiki/Condition\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number)
- [116] [http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_stability](http://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_stability)
- [117] [http://en.wikipedia.org/wiki/Youla%E2%80%93Kucera\\_parametrization](http://en.wikipedia.org/wiki/Youla%E2%80%93Kucera_parametrization)

**A**

αιτιοκρατικός 86  
 ανατροφοδότηση κατάστασης 69, 85  
 άξονας τριβής 32  
 αποσβεστήρας  
     μεταβαλλόμενης τριβής 32  
     μεταβλητού στομίου 31, 32  
     ελεγχόμενου ρευστού 32, 33  
 αριθμητική αστάθεια 82

**A**

accelerometer 44  
 active 19, 25  
 adaptive control 45  
 AMD 25, 28

**B**

βαθυπερατό 100

**B**

band-pass 100  
 base isolation 18, 20, 34  
 belleville 60  
 bisection method 89  
 block 20, 47, 83, 103, 119  
 bode 81, 94, 102, 126  
 boundary layer 61

**Γ**

γ-επανάληψη 80, 89, 103, 104

**C**

causal 86  
 cavitation 59  
 closed-loop system 59  
 condition number 82  
 controllable 32, 84  
 controllable fluid damper 32  
 coordinate acceleration 44  
 coupling 119  
 covariance matrix 76  
 cross-over frequency 92

**Δ**

δείκτης κατάστασης 82  
 διατήρηση μάζας 159

**D**

damping coefficient 79  
 decoupling 126, 127  
 determination coefficient 148  
 diagonally dominant 47  
 discharge coefficient 67, 153, 158

**E**

ελαστικό εφέδρανο 35  
 ελαστομεταλλικός μονωτήρας 36  
 ελαχίστης φάσης 94, 96  
 εξίσωση Lyapunov 73  
 εξίσωση Riccati 80, 85, 87, 88, 89, 103, 104  
 επίπεδη εντατική κατάσταση 17  
 επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση 17  
 επιταχυνσιόμετρο 44, 131  
 εφέδρανο ολίσθησης 36  
 εφικτός χώρος 68  
 ευθεία ελαχίστων τετραγώνων 48  
 ευσταθειοποιήσιμος 84

**E**

elastic bearing 35  
 end-effector 11  
 ER 32, 33  
 exogenous 70, 82  
 extrapolate 150

**Z**

ζωνοπερατό 100

**F**

fatigue 60  
 feasible region 162  
 fitting 148, 149  
 fixed point 89  
 flow gain 64  
 flow port restrictor 59  
 flow-pressure coefficient 64  
 fluid bulk modulus 62  
 fuel cell 31  
 full order observer 44, 69

**H**

$H_p$ -χώρος 72  
 $H_2$ -κόστος 97  
 $H_2$ -νόρμα 71, 72, 73, 74, 75, 76  
 $H_\infty$ -κόστος 98  
 $H_\infty$ -νόρμα 71, 72, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 89, 127  
 ηλεκτρορολογικός 32  
 ημι-ενεργητικός 19, 31, 33, 39

**G**

gyro 44

**Θ**

θεώρημα Parseval 70, 71, 73, 79

**H**

high-gain direction 81

high-pass 100

HMD 29

hookean coefficient 44, 47

hybrid 19, 29

**I**

ιδιάζον διάνυσμα 80

ιδιάζουσα παραγοντοποίηση 80

ιδιοτιμές 81, 112

**I**

ill-conditioned 82

initial point 89

**K**

κατεύθυνση υψηλού κέρδους 81

κατεύθυνση χαμηλού κέρδους 81

κέρδος ροής 64, 65

κοινή φασματική ακτίνα 82

κρίσιμη συχνότητα 92, 94, 95, 100

κριτήριο Griffith 18

κυψέλη καυσίμου 31

**J**

joint spectral radius 82

**Λ**

λευκός θόρυβος 76

**K**

Kalman filter 18

Kolosov-Mushkelishvili 18

**M**

μαγνητορεολογικός 32

μέγιστη μετατόπιση βάσης 38

μέθοδος διχοτόμου 89

μέθοδος Crout 47

μέθοδος Gauss-Seidel 47

μέθοδος Jacobi 47

μετασχηματισμός Laplace 70, 73, 74

μη γραμμική ρύθμιση 102, 104, 125

μη ελαχίστης φάσης 94, 96

μήτρα συνδιακύμανσης 76

μεικτή ευαισθησία 97, 99, 101

μετατόπιση φάσης 95

**L**

$L_\infty$  -νόρμα 71

$L_2$  -νόρμα 70, 71, 77, 78, 79

$L_p$  -νόρμα 71

load capability 59

loop shaping 69, 94

low-gain direction 81

low-pass 100

LQG control 27

LRB 36

LTI 72, 79, 81, 93, 122

LVDT 59, 66

**N**

νεοπρένιο 35

**M**

MIMO 71, 74, 76, 78, 79, 81, 96, 98

minimum phase 94

mixed sensitivity 97

MR 32, 33, 39

MRAC 45

multiplicative uncertainty 93

multi-step pendulum 29

**N**

neoprene 35

non-minimum phase 94

numerical instability 82

**O**

ομοιόμορφα φραγμένο 122

οριακό στρώμα 61

**O**

open-loop system 64

orifice flow coefficient 64

overshoot 90

**Π**

παρατηρήσιμος 84, 101

παρατηρητής κατάστασης 44, 69

παρατηρητής μειωμένης τάξης 44, 69

παρεμβολή 48

πεπερασμένα στοιχεία 18, 47, 131

περιθώριο ευστάθειας 93

πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα 93, 100

πρακτική ευστάθεια 121

προβλεπτικός έλεγχος 24

προσαρμοστικός έλεγχος 45, 130, 131

## P

passive 19  
proper acceleration 44  
peak base displacement 38  
peak base shear 38  
performance 38, 69, 83, 89, 95, 101  
PID 69  
piezoelectric 44  
plane strain state 17  
plane stress state 17  
practical stability 121  
predictive control 24  
phase shift 95  
PTFE 36, 37

## Q

observable 84

## Σ

σεισμικά μονωμένη βάση 28, 30, 34, 35, 36, 38, 41, 42, 130  
σπηλαίωση 59  
σταθερά απόσβεσης 44, 48  
σταθερά ελατηρίου 44, 48  
στροφικός επενεργητής 25, 26  
σύζευξη 119, 126, 127  
συνάρτηση ευαισθησίας 82, 91, 92, 95, 98, 100, 101  
συνάρτηση Dirac 75  
συναρτησιακό κόστους 85, 86, 88, 97  
συντελεστής ασυμπιεστότητας 62  
συντελεστής διαρροών 67  
συντελεστής έντασης τάσεων 18  
συντελεστής προσδιορισμού 148  
συντελεστής ροής-πίεσης 64, 65  
σηματοποίηση βρόχου 69, 94, 97

## R

reduced order observer 44, 69  
roof drift ratio 38

## T

τριβή  
    ιξώδους 61  
    Coulomb 61  
    Stribeck 61  
τριδιαγώνιος 47

## S

semi-active 19, 31

simulink 119  
singular value 78  
SISO 71, 74, 75, 78, 81, 93, 95, 100, 126  
sliding bearing 36  
spectral radius 82  
state feedback 84  
state space 46, 82  
stability margin 93  
stabilizable 84  
stabilization 69  
stiffness 62  
strain gauge 44  
stress intensity factor 18  
structural uncertainty 18, 119  
SVD 70, 80, 81

## T

Teflon 36  
tetrafluoroethylene 36  
TLCD 20  
TLD 20  
TMD 20, 21, 23, 29,  
tridiagonal 47  
tuning 60

## Φ

φασματική ακτίνα 82  
φίλτρο Kalman 44

## U

uniformly bounded 122

## X

χώρος κατάστασης 46, 50, 72, 79, 80, 82, 83, 84, 87, 88, 99, 102, 103, 112, 119  
χώρος Hardy 72

## V

variable friction damper 32  
variable orifice damper 31  
VED 20  
v-shaped 29

## W

water-bed effect 95  
weight coefficient 97  
white noise 76

## Y

Youla-Kucera parametrization 89



## A. Μαθηματικές Αποδείξεις

### A.1 Θεώρημα 1 (SVD Παραγοντοποίηση)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η μήτρα  $A \in \Pi_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Η θεώρηση αυτή δεν μας περιορίζει, αφού μπορούμε να μετατρέψουμε οποιαδήποτε ορθογώνια μήτρα σε τετραγωνική προσθέτοντας μηδενικές γραμμές ή στήλες κατάλληλα. Απο το ορθομοναδιαίον των μητρών  $U$  και  $V$  έχουμε:

$$V^T V = I, \quad U^T U = I \quad (A.1)$$

Όμως οι μήτρες  $U$  και  $V$  είναι τετραγωνικές. Άρα απο σχέση (A.1) προκύπτει:

$$V^{-1} = V^T, \quad U^{-1} = U^T \quad (A.2)$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η μήτρα  $A$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί σύμφωνα με τη σχέση (3.54). Απο την σχέση (3.54), λόγω της σχέσης (A.2), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \quad (A.3)$$

Συμβολίζουμε  $\|A\| = \sigma$ . Έστω  $x, y$  μοναδιαία διανύσματα (δηλ.  $\|x\| = \|y\| = 1$ ) τέτοια ώστε  $Ax = \sigma y$ . Εισάγουμε τις ακόλουθες μήτρες, τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (A.2):

$$V = [x, V_1], \quad U = [y, U_1] \quad (A.4)$$

Αποδεικνύεται ότι είναι πάντα δυνατή η εύρεση κατάλληλων μητρών  $V_1$  και  $U_1$ . Εντούτοις, γενικά υπάρχουν περισσότερα απο ένα τέτοια ζεύγη μητρών. Τότε για τη μήτρα  $A_1 = U^T A V$  ισχύει:

$$\begin{aligned} A_1 = U^T A V &= \begin{bmatrix} y^T \\ U_1^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x & V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^T \\ U_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma y & A V_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma & w^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.5)$$

όπου θέσαμε  $w^T = y^T A V_1$  και  $B = U_1^T A V_1$ , ενώ χρησιμοποιήσαμε τον ισχυρισμό  $Ax = \sigma y$  και την ορθοκανονικότητα του  $U_1$  (δηλαδή  $U_1^T y = 0$ ).

Αρκεί να δείξουμε ότι στη σχέση (A.5) ισχύει  $w = 0$ . Ισχυριζόμαστε ότι οι μήτρες  $A$  και  $A_1$  έχουν την ίδια νόρμα. Αυτό ισχύει αφού, δεδομένου ενός  $x$ , αν ορίσω το διάνυσμα  $x_1 = V^{-1}x$  έχουμε ότι  $\|x\| = x^T x = x_1^T V^T V x_1 = x_1^T x_1 = \|x_1\|$ . Όμως,  $\|A_1 x_1\|^2 = x_1^T A_1^T A_1 x_1 = x_1^T V^T A^T U U^T A V x_1 = x_1^T x_1 = x^T V V^T A^T U U^T A V V^T x = x^T A^T A x = \|Ax\|^2$ . Επομένως, απο τις σχέσεις (3.53), έπεται ότι  $\|A\| = \|A_1\|$ . Άρα, απο τη σχέση (A.5) έχουμε:

$$A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + w^T w \\ Bw \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Άρα για την ευκλείδια νόρμα του διανύσματος του πρώτου μέλους της σχέσης (A.6) ισχύει:

$$\begin{aligned} \left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix} \right\| &= \left( (\sigma^2 + w^T w)^2 + w^T B^T B w \right)^{1/2} \\ &\geq \sigma^2 + w^T w = (\sigma^2 + w^T w)^{1/2} (\sigma^2 + w^T w)^{1/2} \\ &= (\sigma^2 + w^T w)^{1/2} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \sigma \\ w \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (A.7)$$

Απο την σχέση (A.7) έπεται ότι  $\|A_1\| \geq (\sigma^2 + w^T w)^{1/2}$ . Όμως, εξ αρχής, έχουμε επιλέξει  $\sigma$  τέτοιο ώστε  $\sigma = \|A\| = \|A_1\|$ . Άρα κατ' ανάγκη πρέπει να ισχύει  $w=0$ . Επομένως, η  $A_1$  δίνεται απο τη σχέση:

$$A_1 = U^T A V = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

Η ζητούμενη σχέση (A.3) μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω βήματα (βλ. Σχέσεις A.4 έως A.8) στη μήτρα  $B$ .  $\square$

## A.2 Θεώρημα 3 ( $H_\infty$ -Βέλτιστη Ρύθμιση Ανατροφοδότησης Κατάστασης)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη επιπλέον συνθήκη ορθογωνιότητας (πλέον των A1-A5):

$$(B1) \quad D_{12}^T C_1 = 0$$

Έστω ότι η αλγεβρική εξίσωση Riccati (3.71) έχει μια θετικά ημιορισμένη λύση  $X$  τέτοια ώστε ο πίνακας (3.72) είναι ευσταθής. Τότε, απο την σχέση (3.70) ορίζουμε το συναρτησιακό κόστους:

$$L(w, u) \equiv \int_0^\infty \left[ z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \right] dt \quad (A.9)$$

Η σχέση (A.9), λόγω της σχέσης (3.61) της συνθηκης (A5), δίνει:

$$\begin{aligned} L(w, u) &= \int_0^\infty \left[ (C_1 x + D_{12} u)^T (C_1 x + D_{12} u) - \gamma^2 w^T w \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[ (C_1 x + D_{12} u)^T (C_1 x + D_{12} u) - \gamma^2 w^T w + \frac{d(x^T X x)}{dt} \right] dt - \overbrace{x(\infty)^T X x(\infty)}^{A. \Sigma.: x(0)=0} + \overbrace{x(0)^T X x(0)}^{Ευστάθεια: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left[ (C_1 x + D_{12} u)^T (C_1 x + D_{12} u) - \gamma^2 w^T w + \dot{x}^T X x + \cancel{x^T \dot{X} x} + x^T X \dot{x} \right] dt \\
&= \int_0^{\infty} \left[ x^T C_1^T C_1 x + \overbrace{x^T C_1^T D_{12} u}^{(B1)} + \overbrace{u^T D_{12}^T C_1 x}^{(B1)} + u^T D_{12}^T D_{12} u - \gamma^2 w^T w + \dot{x}^T X x + x^T X \dot{x} \right] dt \\
&= \int_0^{\infty} \left[ x^T C_1^T C_1 x + u^T D_{12}^T D_{12} u - \gamma^2 w^T w + \overbrace{\dot{x}^T X x}^{\Lambda_1} + \overbrace{x^T X \dot{x}}^{\Lambda_2} \right] dt \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Θέτουμε τους όρους  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  στην εξίσωση (A.10), οπότε έχουμε:

$$\Lambda_1 = (Ax + B_1 w + B_2 u)^T X x = x^T A^T X x + w^T B_1^T X x + u^T B_2^T X x \tag{A.11}$$

$$\Lambda_2 = x^T X (Ax + B_1 w + B_2 u) = x^T X A x + x^T X B_1 w + x^T X B_2 u \tag{A.12}$$

Λαμβάνοντας τους πρώτους όρους απο τα δεύτερα μέλη κάθεμιάς σχέσης (A.11) και (A.12), παραγοντοποιώντας κατάλληλα, λόγω της Εξίσωσης Riccati (3.71), προκύπτει ο όρος:

$$x^T \left( X B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X - \gamma^{-2} X B_1 B_1^T X - C_1^T C_1 \right) x \tag{A.13}$$

Ο όρος (A.13) απλοποιεί τον πρώτο βαθμωτό όρο μέσα στο ολοκλήρωμα της σχέσης (A.10) και άρα προκύπτει ο όρος:

$$x^T \left( X B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X - \gamma^{-2} X B_1 B_1^T X \right) x \tag{A.14}$$

Έπειτα, συνδυάζοντας τον δεύτερο όρο μέσα στο ολοκλήρωμα της σχέσης (A.10) με τους τρίτους όρους στις σχέσεις (A.11) και (A.12) και προσθέτοντας τον δεύτερο όρο του αθροίσματος (A.14), προκύπτει ο όρος  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1 = u^T D_{12}^T D_{12} u + w^T B_2^T X x + x^T X B_2 u + x X B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T X x^T \tag{A.15}$$

Ομοίως, συνδυάζοντας τον τρίτο όρο μέσα στο ολοκλήρωμα της σχέσης (A.10) με τους δεύτερους όρους στις σχέσεις (A.11) και (A.12) και προσθέτοντας τον πρώτο όρο του αθροίσματος (A.14), προκύπτει ο όρος  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = -\gamma^2 \|w\|^2 + w^T B_1^T X x + x^T X B_1 w - \gamma^{-2} x^T X B_1 B_1^T X x \tag{A.16}$$

Η σχέση (A.10), λόγω των σχέσεων (A.15) και (A.16), δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$L(w, u) = \int_0^{\infty} [\Phi_1 + \Phi_2] dt \tag{A.17}$$

Θέτουμε τις ακόλουθες ποσότητες  $u^0(t)$  και  $w^0(t)$ :

$$u^0(t) = -\left( D_{12}^T D_{12} \right)^{-1} B_2^T X x(t) \tag{A.18}$$

$$w^0(t) = \gamma^{-2} B_1^T X x(t) \quad (A.19)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις σχέσεις (A.15), (A.16), (A.17) και (A.18), είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = (u - u^0)^T D_{12}^T D_{12} (u - u^0) - \gamma^2 (w - w^0)^T (w - w^0) \quad (A.20)$$

Επομένως, απο σχέσεις (A.19) και (A.20), προκύπτει η έκφραση του  $L(w, u)$ :

$$L(w, u) = \int_0^\infty \left[ (u - u^0)^T D_{12}^T D_{12} (u - u^0) - \gamma^2 (w - w^0)^T (w - w^0) \right] dt \quad (A.21)$$

Η έκφραση (A.21) δείχνει ότι χρησιμοποιώντας την ανατροφοδότηση κατάστασης που περιγράφεται απο τη σχέση (3.73) (Βλ. Σχέση A.19) ικανοποιείται η ανίσωση  $L(w, u) \leq 0$ ,  $\forall w \neq 0$ . Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το  $L(w, u)$  είναι η τιμή 0 και την λαμβάνει αν και μόνον αν  $w(t) = w^0(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Όμως έχουμε ότι  $x(0) = 0$ . Άρα απο σχέση (A.19), θα είχαμε ότι  $w(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Άτοπο, διότι τότε δεν θα είχα διαταραχή στο σύστημα. Επομένως, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$L(w, u) = \int_0^\infty \left[ z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \right] dt < 0, \quad \forall w \neq 0 \quad (A.22)$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται δείχνοντας ότι αν υπάρχει τουλάχιστον ένας ελεγκτής με ανατροφοδότηση κατάστασης που ικανοποιεί τη σχέση (A.22), τότε η αλγεβρική εξίσωση Riccati (3.71) διαθέτει μια θετικά ημιορισμένη λύση τέτοια ώστε η μήτρα που δίνεται απο τη σχέση (3.72) να είναι ευσταθής. Αυτό μπορεί να δειχθεί θεωρώντας πρόβλημα ελέγχου πεπερασμένου ορίζοντα και παίρνοντας το όριο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Η απόδειξη αυτή είναι τεχνική και παραλείπεται.  $\square$

### A.3 Θεώρημα 4 ( $H_\infty$ -Βέλτιστος Εκτιμητής)

Η απόδειξη του θεωρήματος θα βασιστεί στην θεώρηση ενός δυϊκού προβλήματος. Η  $H_\infty$ -νόρμα μιας μήτρας συναρτήσεων μεταφοράς  $P$  ισούται με την ίδιου τύπου νόρμα της ανάστροφης μήτρας  $P^T$ . Αυτό ισχύει διότι οι  $P$  και  $P^T$  έχουν τις ίδιες ιδιάζουσες τιμές. Επομένως, ισχύει:

$$\|P\|_\infty = \|P^T\|_\infty \quad (A.23)$$

Το πρόβλημα εύρεσης του  $H_\infty$ -βέλτιστου εκτιμητή του αρχικού συστήματος (Βλ. Σχέση 3.80) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης  $H_\infty$ -βέλτιστης ρύθμισης ανατροφοδότησης κατάστασης του ανάστροφου συστήματος. Έχουμε τις ακόλουθες απαιτούμενες μεταθέσεις μητρών για το πέρασμα απο το ένα σύστημα στο άλλο:

$$A \rightarrow A^T, \quad C_1 \rightarrow B_1^T, \quad B_2 \rightarrow C_2^T, \quad D_{12} \rightarrow D_{21}^T, \quad B_2 \leftrightarrow C_2^T \quad (A.24)$$

Έπειτα, απο σχέσεις (3.81) και (3.86) έπεται ότι το σφάλμα εκτίμησης δίνεται απο την ακόλουθη σχέση:

$$z - \hat{z} = [P_1 - FP_2]w \quad (A.25)$$

$$\text{όπου: } P_1 = C_1(sI - A)^{-1}B_1, \quad P_2 = C_2(sI - A)^{-1}B_1 + D_{21} \quad (A.26)$$

Άρα απο τον ορισμό του συναρτησιακού κόστους  $J_{e,\infty}(F)$  (Βλ. Σχέση 3.84) και απο τη σχέση (A.26), προκύπτει ότι:

$$J_{e,\infty}(F) = \|P_1 - FP_2\|_\infty = \|P_1^T - P_2^T F^T\|_\infty \quad (A.27)$$

Το τρίτο μέλος της σχέσης αποτελεί την  $H_\infty$ -νόρμα του συστήματος κλειστού βρόχου του δυϊκού συστήματος και του νόμου ελέγχου:

$$r = \begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \quad (A.28)$$

$$\eta = -F^T w \quad (A.29)$$

Επομένως, μετατρέψαμε το πρόβλημα του  $H_\infty$ -βέλτιστου εκτιμητή σε πρόβλημα  $H_\infty$ -βέλτιστης ρύθμισης ανατροφοδότησης κατάστασης. Έπειτα, το δυϊκό σύστημα της σχέσης (A.28) έχει την ακόλουθη περιγραφή στο χώρο κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= A^T p(t) + C_1^T w(t) + C_2^T \eta(t), \quad p(0) = 0 \\ r(t) &= B_1^T p(t) + D_{21}^T \eta(t) \end{aligned} \quad (A.30)$$

Ο βέλτιστος δυϊκός ρυθμιστής (A.29) που ικανοποιεί το φράγμα απόδοσης του συναρτησιακού κόστους  $J_{e,\infty}(F)$  μπορεί να αποτελέσει τον βέλτιστο ρυθμιστή ανατροφοδότησης κατάστασης για το δυϊκό σύστημα (A.30), αφού η κατάσταση  $p$  είναι δεδομένη και καθοριζόμενη μονοσήμαντα απο τις εισόδους  $w$  και  $\eta$ . Απο τις σχέσεις (3.73) και (3.74), κάνοντας τις αντικαταστάσεις (A.24), προκύπτει η βέλτιστη στάσιμη ανατροφοδότηση κατάστασης:

$$\eta(t) = -F_{opt}^T p(t), \quad F_{opt}^T = (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 Y \quad (A.31)$$

όπου: η μήτρα  $Y$  δίνεται απο την εξίσωση Riccati (3.81).

Έπειτα, συνδυάζοντας τις σχέσεις (A.30) και (A.31), προκύπτει ο δυϊκός ρυθμιστής ανατροφοδότησης κατάστασης με την ακόλουθη περιγραφή στο χώρο κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= (A^T - C_2^T F_{opt}^T) p(t) + C_1^T w(t) \\ \eta(t) &= -F_{opt}^T p(t) \end{aligned} \quad (A.32)$$

Πολλαπλασιάζοντας, επομένως, τις δύο σχέσεις του συστήματος (A.32) επί -1 και εφαρμόζοντας αναστροφή κατά μέλη, προκύπτει λόγω της σχέσης (A.31):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - F_{opt} C_2) \hat{x}(t) + F_{opt} y(t) \\ \hat{z}(t) &= C_1 \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (A.33)$$

που αποτελεί τον ζητούμενο βέλτιστο εκτιμητή  $\hat{x}(t) = F\hat{x}(t)$  τη σχέσης (3.86).  $\square$

## B. Υπολογισμός Δυναμικών Χαρακτηριστικών Κτιρίου

Απο σχετική ερευνητική εργασία, λαμβάνουμε κατάλληλες αριθμητικές τιμές για τα μηχανικά χαρακτηριστικά ενός 6-όροφου κτιρίου [5]. Με τον όρο «κατάλληλες», εννοούμε ότι έχουμε φυσικό νόημα, δεδομένων των πραγματικών δομοστατικών απαιτήσεων που παρουσιάζουν οι κτιριακές εγκαταστάσεις σήμερα. Τα μηχανικά χαρακτηριστικά αφορούν τις τριάδες μηχανικών χαρακτηριστικών ανά όροφο (Βλ. Πίνακα Β.1).

Όροφος	Μάζα Ορόφου (Kg)	Σταθερά Ελατηρίου (N/m)	Σταθερά Απόσβεσης (Ns/m)
1	6800	$1200 \cdot 10^3$	2400
2	5897	$33732 \cdot 10^3$	67000
3	5897	$29093 \cdot 10^3$	58000
4	5897	$28621 \cdot 10^3$	57000
5	5897	$24954 \cdot 10^3$	50000
6	5897	$19059 \cdot 10^3$	38000

**Πίνακας Β.1:** Τιμές Μηχανικών Στοιχείων 6-Όροφου Κτιρίου [5]

Θεωρούμε ότι το υπό διερεύνηση 10-όροφο κτίριο εμφανίζει το ίδιο «πορτραίτο» δυναμικών χαρακτηριστικών (παραμέτρων) με αυτό του 6-όροφου κτιρίου σε όλη την έκτασή του. Δεδομένου αυτού, προχωράμε σε στατιστικούς υπολογισμούς, καθώς και αναλογίες που έχουν φυσικό νόημα.

Κατ'αρχάς, θεωρώντας τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε μια ισχυρά γραμμική εξάρτηση ανάμεσα στην τιμή της σταθεράς ελατηρίου  $k_i$  και της σταθεράς απόσβεσης  $c_i$ . Πραγματοποιούμε παλινδρόμηση (regression) με χρήση του μοντέλου της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων (least square line). Συμπεραίνουμε ότι το γραμμικό μοντέλο που διέπει την εξάρτηση  $c_i = c_i(k_i)$ ,  $i = 1, \dots, 6$  είναι το ακόλουθο:

$$c = 0.002 \cdot k + 83.219 \quad (B.1)$$

όπου:  $k \in [1200 \cdot 10^3, 337320 \cdot 10^3]$

Σημειώνουμε εδώ ότι ο δείκτης  $R^2$  καλείται *συντελεστής προσδιορισμού* (*determination coefficient*) και εκφράζει τον βαθμό επιτυχίας της περιγραφής των δεδομένων απο το γραμμικό ή το μη γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης (fitting model) [45] [103]. Έστω ένα δείγμα ζευγών δεδομένων  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ο συντελεστής  $R^2$  δίνεται απο τον ακόλουθο τύπο:

$$R^2 = \frac{(\text{explained error})}{(\text{total error})} = \frac{SS_R}{SS_T} \quad (B.2)$$

όπου: 
$$SS_R = SS_T - SS_E \quad (B.3)$$

και

$$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (B.4)$$

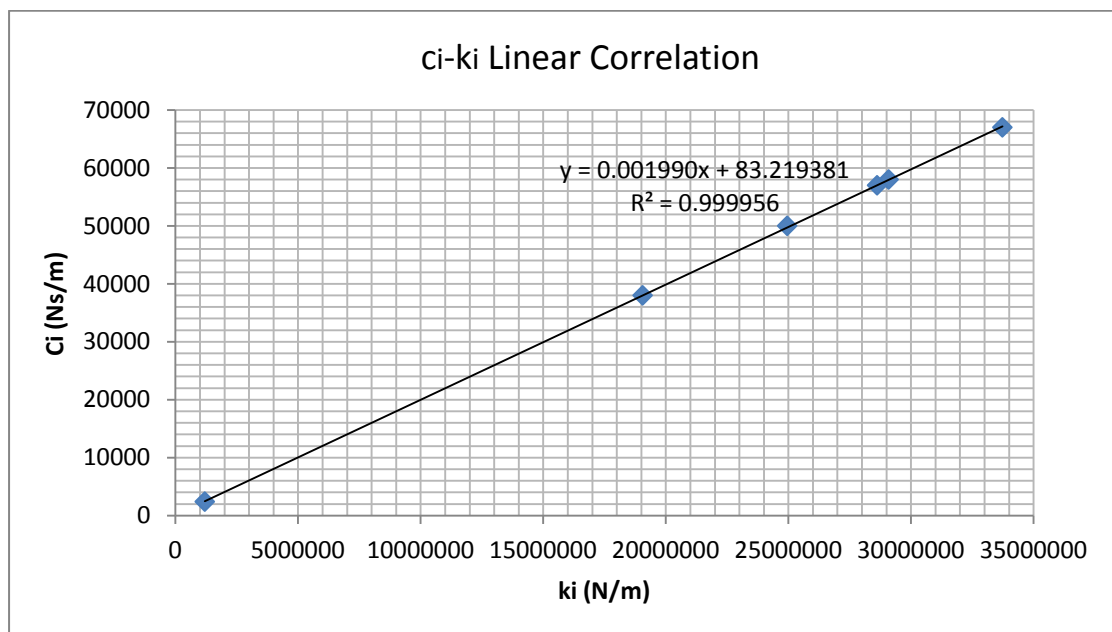
$$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (B.5)$$

όπου:  $SS_R$ : το άθροισμα τετραγώνων παλινδρόμησης (regression sum of squares)

$SS_T$ : το άθροισμα τετραγωνικών διαφορών (total sum of squares)

$SS_E$ : το άθροισμα τετραγωνικών σφαλμάτων (square of errors residual sum)

**Σχόλιο:** Απο τους τύπους (B.1) - (B.5) συνάγεται ότι όσο καλύτερο είναι το «ταίριασμα» (fitting) του εξαγόμενου μοντέλου στα δεδομένα, τόσο η ποσότητα  $SS_E \rightarrow 0$ , που σημαίνει  $R^2 \rightarrow 1$ , γεγονός που επαληθεύεται απο το γραμμικό μοντέλο μας (Βλ. Σχήμα Β.1).



**Σχήμα Β.1:** Γραμμική Παλινδρόμηση Μηχανικών Συντελεστών  $c_i = c_i(k_i)$

Έπειτα, θεωρώντας ότι ένα ψηλότερο κτίριο απαιτείται να έχει αναλογικά μεγαλύτερη μάζα στο υποσύστημα του ισόγειου ορόφου, προκειμένου να στηρίζει κατάλληλα όλους τους ανωτέρω ορόφους, υπολογίζουμε τη μάζα  $m_1$ :

$$m_1 = \left( \frac{N}{N_{init}} \right) \cdot m_1^{init} \Rightarrow m_1 = \left( \frac{10}{6} \right) \cdot 6800 \Rightarrow$$

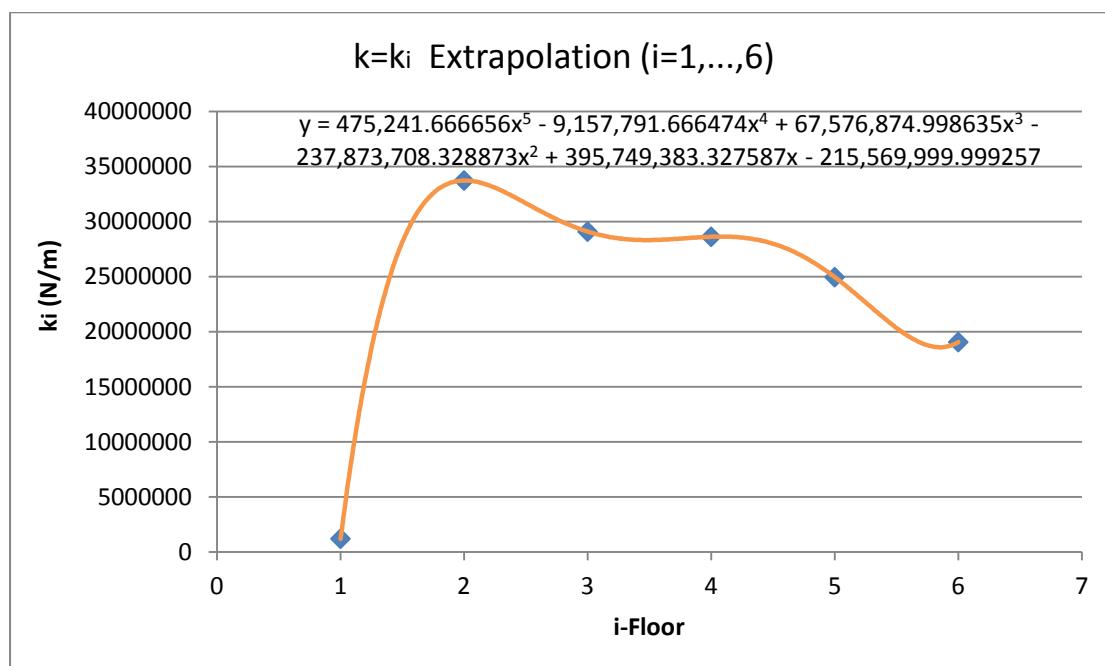
$$m_1 = 11,333kg \quad (B.6)$$

Ύστερα, θεωρούμε ότι ο λόγος μαζών ανάμεσα στον 1<sup>ο</sup> όροφο (ισόγειο) και όλους τους υπόλοιπους ορόφους παραμένει αμετάβλητος. Επομένως, θα έχουμε απο τις μάζες του 6-όροφου κτιρίου:

$$\left( \frac{m_1}{m_j} \right)_{init} = \frac{6,800}{5,897} = \frac{m_1}{m_j} \quad (B.6) \Rightarrow$$

$$m_j = 9,828kg, \forall j \neq 1 \quad (B.7)$$

Έπειτα, θεωρούμε την καμπύλη κατανομής τιμών των μηχανικών σταθερών  $k_i$  ανά όροφο ( $i=1, \dots, 6$ ). Η καμπύλη αυτή προκύπτει ως το αποτέλεσμα παρεμβολής (extrapolation) των σημείων της ακολουθιακής συνάρτησης  $k = (k_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$  απο ένα πολυώνυμο 5<sup>ου</sup> βαθμού (Βλ. Σχήμα Β.2). Το συγκεκριμένο πολυώνυμο παρεμβολής έχει μηδενικό σφάλμα στα σημεία παρεμβολής, αφού οι συντελεστές του υπολογίζονται μονοσήμαντα με επίλυση του αντίστοιχου 6×6 γραμμικού αλγεβρικού συστήματος [43] [45]. Θεωρούμε την ίδια καμπύλη με την διαφοροποίηση ότι έχουμε 10 κόμβους -αντί για 6- στο πλέγμα (grid) του οριζόντιου άξονα (πλήθος ορόφων) και ότι το πλάτος του πεδίου τιμών της  $k = (k_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$  αυξάνεται κατάλληλα.



**Σχήμα Β.2:** Πολυωνυμική Παρεμβολή Συνάρτησης  $k = (k_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$

Επομένως, προκύπτει το ακόλουθο πολυώνυμο παρεμβολής 5<sup>ου</sup> βαθμού

$$k_i = 475241.667 \cdot i^5 - 9157791.666 \cdot i^4 + 67576874.999 \cdot i^3 - 237873708.329 \cdot i^2 + 395749383.328 \cdot i - 215569999.999 \quad (B.8)$$

Η βασική ιδέα είναι η εφαρμογή κατάλληλης βαθμονόμησης (scaling) στο πολυώνυμο (B.8), ώστε αυτό να διέρχεται απο το σημείο  $(1, k_1)$ , όπου  $k_1 = k_1^{est}$  κατάλληλη εκτιμήτρια. Η εκτιμήτρια προκύπτει λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συζευγμένες μάζες 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> ορόφου για τα δύο κτίρια και βασιζόμενοι στην  $k_1$ -τιμή που αντιστοιχεί στο 6-όροφο κτίριο. Άρα για το «βαθμονομημένο» (scaled) πολυώνυμο παρεμβολής, θα έχω:

$$\tilde{k}_i = (scale) \cdot k_i \quad (B.9)$$

Απο Εξισώσεις (B.6), (B.8) και απο Πίνακα B.1, θα έχω για την εκτιμήτρια τιμή  $k_1^{est}$ :

$$k_1^{est} = \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1^{init} + m_2^{init}} \right) \cdot k_1^{init} \xrightarrow[(B.8)]{(B.6)} k_1^{est} = \left( \frac{13333 + 9828}{6800 + 5897} \right) \cdot 1200 \cdot 10^3$$

$$k_1^{est} = 2.188958 \cdot 10^6 \text{ N / m} \quad (B.10)$$

Επομένως, απο τις σχέσεις (B.8), (B.9) και (B.10), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $\tilde{k}_1 = k_1^{est}$  προκύπτει:

$$(scale) = 1.82413 \quad (B.11)$$

Απο την σχέση (B.9), λόγω των σχέσεων (B.8) και (B.11) και παίρνοντας 10 κόμβους και άρα 9 ισομήκη υποδιαστήματα, προκύπτουν οι τιμές σταθερών επαναφοράς:

10-Floor Building		
Floor	y	k <sub>y</sub>
1	1.00000	2188960
2	1.55556	58406000
3	2.11111	61274200
4	2.66667	55942600
5	3.22222	52027400
6	3.77778	51944900
7	4.33333	51850800
8	4.88889	47145900
9	5.44444	37981900
10	6.00000	34766100

**Πίνακας B.2:** Εκτιμήτριες Τιμές Ελαστικών Σταθερών 10-Οροφου Κτιρίου

Τελικά απο τις σχέσεις (B.1), (B.6), (B.7) και απο τον Πίνακα B.2, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μηχανικών χαρακτηριστικών για το 10-όροφο κτίριο:

Όροφος	Μάζα Ορόφου (Kg)	Σταθερά Ελατηρίου (N/m)	Σταθερά Απόσβεσης (Ns/m)
1	13333	$2188.96 \cdot 10^3$	4439.24978
2	9828	$584060.00 \cdot 10^3$	116311.15938
3	9828	$612742.00 \cdot 10^3$	122018.87738
4	9828	$559426.00 \cdot 10^3$	111408.99338
5	9828	$520274.00 \cdot 10^3$	103617.74538
6	9828	$519449.00 \cdot 10^3$	103453.57038
7	9828	$518508.00 \cdot 10^3$	103266.31138
8	9828	$471459.00 \cdot 10^3$	93903.56038
9	9828	$379819.00 \cdot 10^3$	75667.20038
10	9828	$347661.00 \cdot 10^3$	69267.75838

**Πίνακας Β.2:** Τιμές Μηχανικών Χαρακτηριστικών 10-Όροφου Κτιρίου



## Γ. Στοιχεία Υδραυλικών Επενεργητών και Υπολογισμοί

### Γ.1 Προσδιορισμός Συντελεστών Σερβοβαλβίδας και Δύναμης Επενεργητή

Έστω  $P_{12}$  η διαφορά πιέσεων ανάμεσα στις δύο δεξαμενές που επικοινωνούν μέσω ενός στομίου (orifice). Τότε έχουμε:

$$P_{12} = P_1 - P_2 \quad (\Gamma.1)$$

Ο ρυθμός ροής ενός ρευστού  $q$  διαμέσου ενός στομίου (orifice) δίνεται από την ακόλουθη σχέση [60] [61] [109]:

$$q = c \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2g}{\gamma} P_{12}} \quad (\Gamma.2)$$

όπου  $c$  : ο συντελεστής ροής στομίου<sup>14</sup>

$a$  : η διατομή στομίου σε  $m^2$

$P_{12}$  : το φορτίο πίεσης σε  $Kg/(m \cdot s^2)$

$\rho$  : η πυκνότητα ρευστού σε  $Kg/m^3$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις ακριβείς τιμές των συντελεστών της σερβοβαλβίδας  $C_x$  και  $C_p$  θα πρέπει να διαθέτουμε τα αντίστοιχα πειραματικά  $q-x$  και  $q-P$  διαγράμματα. Αυτό δεν κατέστη εφικτό. Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τους κάτωθι εμπειρικούς τύπους, που εφαρμόζονται κατά τη μοντελοποίηση του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή [62]. Παρακάτω, αποδεικνύουμε τους τύπους αυτούς και αναλυτικά.

$$C_x = C_d \cdot w \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_H - P)} \quad (\Gamma.3)$$

$$C_p = \frac{C_d x_v \cdot w \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_H - P)}}{2(P_H - P)} \quad (\Gamma.4)$$

όπου  $P$  : πίεση φορτίου (load pressure)

$P_H$  : πίεση τροφοδοσίας (supply pressure)

$C_d$  : συντελεστής διαρροών (discharge coefficient)

$\rho$  : πυκνότητα συνεργαζόμενου ρευστού (fluid density)

$x_v$  : μετατόπιση βαλβίδας (valve stroke)

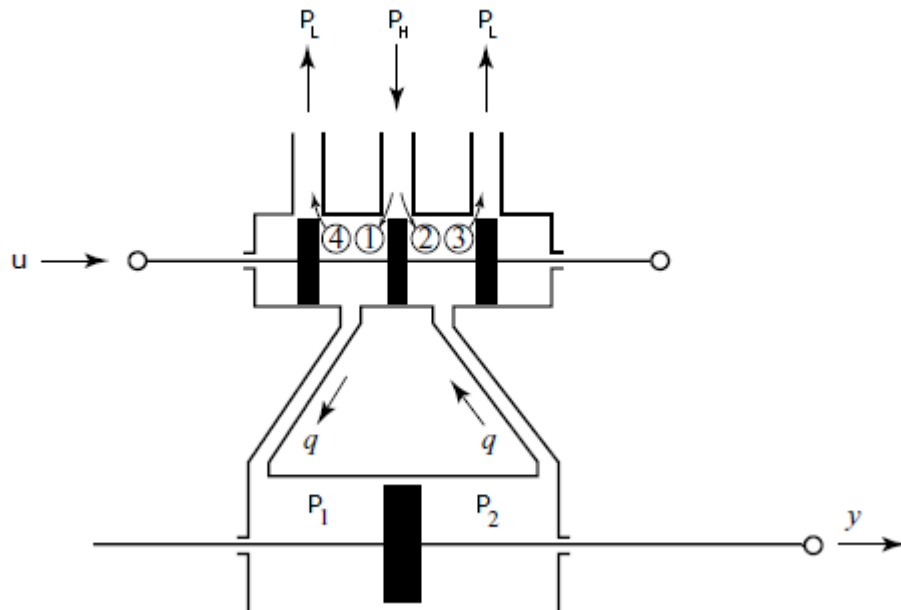
$w$  : μήκος στομίου ροής εισόδου (orifice depth)

Έπειτα, εφαρμόζουμε διαστατική ανάλυση (dimensional analysis). Αυτό το κάνουμε για δύο λόγους. Πρώτον, προκειμένου να επαληθεύσουμε την ισχύ των εμπειρικών σχέσεων (Γ.3) και (Γ.4). Δεύτερον, για να υπολογίσουμε τις μονάδες των συντελεστών  $C_x$  και  $C_p$ . Σημειώνουμε ότι, για το δεύτερο, εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την σχέση (Γ.4) σκεπτόμενοι αντίστροφα [49].

$$\begin{aligned}
(\Gamma.14) \Rightarrow [C_x] &= [C_d] \cdot [w] \cdot [\rho]^{-\frac{1}{2}} \cdot [P]^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_x] &= [C_d] \cdot [w] \cdot ([m] \cdot [V]^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot ([F] \cdot [A]^{-1})^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_x] &= [C_d] \cdot [w] \cdot \left( ([F] \cdot [a]^{-1}) \cdot [V]^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot ([F] \cdot [A]^{-1})^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_x] &= 1 \cdot [x] \cdot \left( \left( [F] \cdot ([x] \cdot [t]^{-2})^{-1} \right) \cdot ([x]^3)^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( [F] \cdot ([x]^2)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_x] &= [F]^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot [x]^{1+2-1} \cdot [t]^{-1} && \Rightarrow \\
[C_x] &= [F]^0 \cdot [x]^2 \cdot [t]^{-1} && \Rightarrow \\
[C_x] &= [x]^2 \cdot [t]^{-1} && (\Gamma.5)
\end{aligned}$$

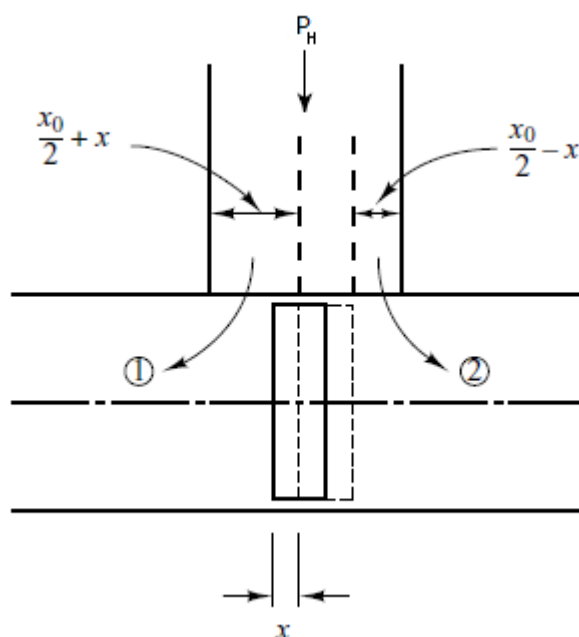
$$\begin{aligned}
(\Gamma.15) \Rightarrow [C_p] &= [C_d] \cdot [w] \cdot [x_v] \cdot [0.5] \cdot [\rho]^{-\frac{1}{2}} \cdot [P]^{\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_p] &= 1 \cdot [x] \cdot [x] \cdot 1 \cdot ([F] \cdot [x]^4 \cdot [t]^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot ([F] \cdot [x]^{-2})^{-\frac{1}{2}} && \Rightarrow \\
[C_p] &= [F]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \cdot [x]^{2+2+1} \cdot [t]^{-1} && \Rightarrow \\
[C_p] &= [F]^1 \cdot [x]^5 \cdot [t]^{-1} && (\Gamma.6)
\end{aligned}$$

Ακολουθώς, περνάμε στην αναλυτική απόδειξη των τύπων (Γ.3) και (Γ.4), οι οποίοι αντιστοιχούν στους συντελεστές  $C_x$  και  $C_p$ . Θεωρούμε την ισοδύναμη απλοποιημένη σχηματική αναπαράσταση του μηχανισμού της σερβοβαλβίδας (Βλ. Σχήμα Γ.1), στην οποία έχουμε ομαδοποιήσει τις ροές του ασυμπίεστου ρευστού από το άνω κεντρικό ακροφύσιο (υψηλή πίεση) προς τα δύο άνω πλευρικά (χαμηλή πίεση). Διατηρούμε τους ίδιους συμβολισμούς.



**Σχήμα Γ.1:** Ροές Υδραυλικού Επενεργητή με Έλεγχο Βαλβίδας [3]

Αρχικά, θεωρούμε ότι η άνω ράβδος αφήνει τους εγκάρσιους άξονες των τριών άνω πιστονιών επί των αξόνων συμμετρίας των αντίστοιχων ακροφυσίων. Επιπλέον, θεωρούμε κοινό πάχος για τα πιστόνια που αντιστοιχούν στο ακροφύσιο χαμηλής πίεσης. Τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά περιγράφουν την συμμετρική βαλβίδα. Θεωρούμε ότι το πάχος των πιστονιών στη άνω συστοιχία διαμερισμένων θαλάμων είναι μικρότερο από το διαμήκες πλάτος διατομής των αντιστοιχών ακροφυσίων. Έστω  $x_0$  η διαφορά αυτή μήκους. Τότε είναι προφανές ότι σε μετακίνηση  $u$  της άνω ράβδου κατά  $x$ , οι δημιουργούμενες αποστάσεις των πλευρικών επιφανειών του κεντρικού πιστονιού από τις εσωτερικές επιφάνειες του ακροφυσίου ισούνται με  $\frac{x_0}{2} + x$  και  $\frac{x_0}{2} - x$  (βλ. Σχήμα Γ.2). Έστω  $A_1, A_2, A_3$  και  $A_4$  οι διατομές των μεταβαλλόμενων καναλιών 1, 2, 3 και 4 αντίστοιχα. Έστω επίσης  $q_1, q_2, q_3$  και  $q_4$  οι αντίστοιχοι ρυθμοί παροχής ρευστού.



**Σχήμα Γ.2:** Ροές Άνω Κεντρικού Ακροφυσίου Υδραυλικού Επενεργητή με Έλεγχο Βαλβίδας [3]

Από τη συμμετρία της βαλβίδας, έπεται ότι  $A_1 = A_3$  και  $A_2 = A_4$ . Έστω  $k$  η προβολή του νοητού (γενικά) καμπυλόγραμμου τμήματος στο σύνορο ακροφυσίου-θαλάμου. Για μικρές μετατοπίσεις της βαλβίδας κατά  $x$  προκύπτει:

$$A_1 = A_3 = k \left( \frac{x_0}{2} + x \right) \quad (\Gamma.7)$$

$$A_2 = A_4 = k \left( \frac{x_0}{2} - x \right) \quad (\Gamma.8)$$

Έπειτα, θεωρούμε ότι η χαμηλή πίεση  $P_L$  είναι αρκούντως μικρή, ώστε να θεωρείται αμελητέα. Η αντλία τροφοδοτεί το εσωτερικό του επενεργητή με λιπαντικό υπό σταθερή πίεση  $P_H$ . Τότε, αν  $\gamma = \rho g$  ( $g$ : η επιτάχυνση βαρύτητας σε  $m/sec^2$ ) το

ειδικό βάρος του συνεργαζόμενου ρευστού και  $c_1, c_2$  σταθερές που εξαρτώνται από τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της σερβοβαλβίδας, από τη σχέση (Γ.2) λόγω των σχέσεων (Γ.7) και (Γ.8), προκύπτουν οι ρυθμοί παροχής διαμέσου των τεσσάρων καναλιών:

$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_H - P_1)} = C_1 \sqrt{(P_H - P_1)} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) \quad (\Gamma.9)$$

$$q_2 = c_2 A_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_H - P_2)} = C_2 \sqrt{(P_H - P_2)} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) \quad (\Gamma.10)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_2 - P_L)} = C_1 \sqrt{(P_2 - P_L)} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) = C_1 \sqrt{P_2} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) \quad (\Gamma.11)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (P_1 - P_L)} = C_2 \sqrt{(P_1 - P_L)} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) = C_2 \sqrt{P_1} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) \quad (\Gamma.12)$$

όπου:  $C_1 = \sqrt{2k\rho}c_1, C_2 = \sqrt{2k\rho}c_2$

Από τις σχέσεις (Γ.9), (Γ.10), (Γ.11) και (Γ.12), θα έχουμε για τους ρυθμούς παροχής στο αριστερό και δεξιό μέρος του πιστονιού ισχύος,  $q_{LHS}$  και  $q_{RHS}$  αντίστοιχα:

$$q_{LHS} = q_1 - q_4 = C_1 \sqrt{(P_H - P_1)} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{P_1} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) \quad (\Gamma.13)$$

$$q_{RHS} = q_3 - q_2 = C_1 \sqrt{P_2} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{(P_H - P_2)} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) \quad (\Gamma.14)$$

Λόγω ασυμπίεστου ρευστού και συμμετρίας της βαλβίδας έπεται ότι  $q_1 = q_3$  και  $q_2 = q_4$ . Άρα από τη δεύτερη ισότητα, λόγω των σχέσεων (Γ.10) και (Γ.12), έπεται:

$$\begin{aligned} \sqrt{P_H - P_1} = \sqrt{P_2} &\Rightarrow P_H - P_1 = P_2 \Rightarrow \\ P_H &= P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (\Gamma.15)$$

Έπειτα, το φορτίο ισχύος του πιστονιού ισούται με την διαφορά πίεσης ανάμεσα στα δύο τοιχώματα  $\Delta P$ :

$$\Delta P = P_1 + P_2 \quad (\Gamma.16)$$

Από σχέσεις (Γ.15) και (Γ.16), λύνοντας ως προς τους όρους  $P_1$  και  $P_2$ , προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$P_1 = \frac{P_H + \Delta P}{2} \quad (\Gamma.17)$$

$$P_2 = \frac{P_H - \Delta P}{2} \quad (\Gamma.18)$$

Εδώ, σημειώνουμε ότι για την περίπτωση της συμμετρικής βαλβίδας (Βλ. Σχήμα Γ.1) που εξετάζουμε, στην περίπτωση απουσίας φόρτισης έχουμε ότι  $P_1 = P_2 = P_H/2$ . Κατά τη μετακίνηση της βαλβίδας κατά  $x$  έχουμε αύξηση πίεσης απο τη μία πλευρά του πιστονιού και ισόποση μείωση πίεσης απο την άλλη πλευρά. Έπειτα, λόγω του γεγονότος ότι ο συνολικός μηχανισμός της σερβοβαλβίδας θεωρείται μονωμένο σύστημα, έχουμε ότι δεν υπάρχει απώλεια ρυθμούς παροχής. Επομένως, έχουμε ότι  $\sum_i q_i = 0$ , δηλαδή οι ρυθμοί παροχής  $q_{LHS}$  και  $q_{RHS}$  είναι ίσοι κατά μέτρο –έστω  $q$ – με αντίθετη φορά ροής. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την αναλυτική έκφραση ενός εκ των δύο. Έπειτα, απο την σχέση (Γ.13), λόγω της σχέσης (Γ.17), λαμβάνουμε:

$$q = q(x, \Delta P) = C_1 \sqrt{\frac{P_H - \Delta P}{2}} \left( \frac{x_o}{2} + x \right) - C_2 \sqrt{\frac{P_H + \Delta P}{2}} \left( \frac{x_o}{2} - x \right) \quad (\Gamma.19)$$

Έπειτα, γραμμικοποιούμε την πραγματική συνάρτηση  $q = q(x, \Delta P)$  σε μια περιοχή ακτίνας  $\varepsilon > 0$  γύρω από ένα εκ των κανονικών σημείων λειτουργίας  $(x^*, \Delta P^*)$  ώστε  $|x - x^*| < \varepsilon$ , λαμβάνοντας μια περιοχή ακτίνας  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  στο  $q$ -πεδίο, τέτοια ώστε  $|\delta q| < \delta$ . Οπότε, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\delta q = \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)} \cdot (x - x^*) + \left. \frac{\partial q}{\partial \Delta P} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)} \cdot (\Delta P - \Delta P^*) \quad (\Gamma.20)$$

Απο τις σχέσεις (Γ.19) και (Γ.20), προκύπτει για τους συντελεστές των διαφορικών του δευτέρου μέλους:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( C_1 \sqrt{P_H - \Delta P^*} + C_2 \sqrt{P_H + \Delta P^*} \right) \quad (\Gamma.21)$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \Delta P} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{C_1}{\sqrt{P_H - \Delta P^*}} \left( \frac{x_o}{2} + x^* \right) + \frac{C_2}{\sqrt{P_H + \Delta P^*}} \left( \frac{x_o}{2} - x^* \right) \right] \quad (\Gamma.22)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος της σχέσης (Γ.22) είναι αρνητικός. Έπειτα, ορίζουμε τους θετικούς συντελεστές  $C_x$  και  $C_p$  (Βλ. Σχόλιο 3) ως ακολούθως:

$$C_x = \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)}, \quad C_p = -\left. \frac{\partial q}{\partial \Delta P} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)} \quad (\Gamma.23)$$

Γραμμικοποιούμε γύρω απο το κανονικό σημείο λειτουργίας  $(x^*, \Delta P^*) = (0, 0)$ ,  $q^* = 0$ . Άρα, απο τις σχέσεις (Γ.21) και (Γ.22), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C_x = (C_1 + C_2) \sqrt{\frac{P_H}{2}} \quad (\Gamma.24)$$

$$C_p = (C_1 + C_2) \frac{x_o}{4\sqrt{2}\sqrt{P_H}} \quad (\Gamma.25)$$

Απο τους τύπους των συντελεστών  $C_1$  και  $C_2$  που χρησιμοποιήσαμε στις σχέσεις (Γ.9) έως (Γ.10) και απο τις σχέσεις (Γ.24) και (Γ.25), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις που δίνουν τους συντελεστές  $C_x$  και  $C_p$  της σερβοβαλβίδας:

$$C_x = (c_1 + c_2)k \sqrt{\frac{P_H}{\rho}} \quad (\Gamma.26)$$

$$C_p = (c_1 + c_2)k \frac{x_o}{4\sqrt{\rho P_H}} \quad (\Gamma.27)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (Γ.3), (Γ.26) και (Γ.4), (Γ.27), συμπεραίνουμε ότι οι αντίστοιχοι τύποι διατηρούν την ίδια αναλογία φυσικών μεγεθών, ενώ εμφανίζουν ικανοποιητική συμφωνία. Εντούτοις, διαφέρουν σε τρία σημεία, τα οποία και επεξηγούμε. Αρχικά, ο περιεχόμενος όρος πίεσης έχει απωλέσει τον όρο πίεσης φορτίου  $P$  η διαφορά του οποίου απο την υψηλή πίεση  $P_H$  εκφράζει την πτώση πίεσης, η οποία αποτελεί μηχανικό χαρακτηριστικό της σερβοβαλβίδας. Αυτό δεν μας απασχολεί, διότι στη θεώρησή μας έχουμε λάβει την τιμή της χαμηλής πίεσης  $P_L$  αμελητέα. Δεύτερον, ο παράγοντας  $c_1 + c_2$  είναι μια σταθερά που εξαρτάται απο τα γεωμετρικά και μηχανικά χαρακτηριστικά της βαλβίδας. Ο παράγοντας αυτός αντικαθίσταται απο τον συντελεστή διαρροών  $C_d$ , που περιέχεται στις σχέσεις (Γ.3) και (Γ.4). Τρίτον, στον παρονομαστή του τύπου (Γ.27) έχουμε τον συντελεστή 4, ενώ στον τύπο (Γ.4) είχαμε τον συντελεστή 2. Διατηρούμε τον συντελεστή που εξάγαμε στην απόδειξη. Έπειτα, απαριθμούμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες συμβόλων:  $w \leftrightarrow x_o$ ,  $x_v \leftrightarrow k$ . Τέλος, σημειώνουμε ότι η διαστατική ορθότητα που επαληθεύσαμε για τους τύπους (Γ.3) και (Γ.4) αποτελεί ένα επιπλέον επιχείρημα που συνηγορεί στην φυσική αποδοχή των συγκεκριμένων τύπων.

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, διαμορφώνουμε τους ακόλουθους τελικούς τύπους των συντελεστών της σερβοβαλβίδας:

$$C_x = C_d k \sqrt{\frac{P_H}{\rho}} \quad (\Gamma.28)$$

$$C_p = C_d k \frac{x_o}{4\sqrt{\rho P_H}} \quad (\Gamma.29)$$

όπου  $C_d$  : συντελεστής διαρροών (discharge coefficient)  
 $\rho$  : πυκνότητα συνεργαζόμενου ρευστού (fluid density)  
 $P_H$  : πίεση τροφοδοσίας (supply pressure)  
 $x_o$  : μετατόπιση βαλβίδας (valve stroke)  
 $k$  : μήκος στομίου ροής εισόδου (orifice depth)

**Σχόλιο 1:** Στην παραπάνω ανάλυσή μας, έχουμε αθόρυβα θεωρήσει ότι οι μεταβλητές  $x$  και  $\Delta P$  στη γραμμική σχέση (Γ.19) είναι ανεξάρτητες. Το γεγονός αυτό αποτελεί βασική παραδοχή στο μοντέλο μας.

**Σχόλιο 2:** Πληροφορίες σχετικά με τη φυσική ερμηνεία των συντελεστών  $C_x$  και  $C_p$  και τον ρόλο στη διαμόρφωση της συνολικής ευστάθειας του συστήματος του επενεργητή δίνονται στην Ενότητα 2.4.3.

**Σχόλιο 3:** Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του γραμμικοποιημένου υδραυλικού επενεργητή είναι παράλληλες ευθείες κατά  $x$  (καθώς το  $\Delta P$  παραμένει σταθερό) και κατά  $\Delta P$  (καθώς το  $x$  παραμένει σταθερό), των οποίων η κλίση εξαρτάται από τις τιμές των συντελεστών  $C_x$  και  $C_p$ . Από τον μηχανισμό του υδραυλικού συστήματος του επενεργητή, έχουμε ότι αύξηση του  $x$  συνεπάγεται αύξηση του  $q$ . Άρα, ο συντελεστής  $C_x$  έχει θετικό πρόσημο. Αντίθετα, αύξηση του  $\Delta P$  συνεπάγεται μείωση

του  $q$ . Άρα, ο όρος  $\left. \frac{\partial q}{\partial \Delta P} \right|_{(x, \Delta P) = (x^*, \Delta P^*)}$  έχει αρνητικό πρόσημο και επομένως ο

συντελεστής  $C_p$  είναι θετικός αριθμός. Άρα, συμπεραίνουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες της παροχής  $q$  κατά  $x$  είναι παράλληλες ευθείες θετικής κλίσης και κατά  $\Delta P$  είναι παράλληλες ευθείες αρνητικής κλίσης. Επιπλέον, ο ορισμός των συντελεστών  $C_x$  και  $C_p$  ως θετικών ποσοτήτων αποσκοπεί στην διευκόλυνση της απευθείας εξαγωγής του δομικού διαγράμματος (block diagram), καθώς και στην εύκολη σύγκριση του λόγου μεταβολών του πλάτους εξόδου ως προς το πλάτος εισόδου στο σύστημα του υδραυλικού επενεργητή.

Εν συνεχεία, από τις σχέσεις (Γ.20) και (Γ.23) εξάγουμε την γραμμική εξίσωση ρυθμού παροχής (μάζας)  $q$  της σερβοβαλβίδας:

$$q = C_x \cdot x - C_p \cdot \Delta P \quad (\Gamma.30)$$

Από Αρχή Διατήρησης Μάζας εντός της σερβολβίδας έχουμε ότι η παροχή λαδιού  $q$  ( $\text{m}^3/\text{sec}$ ) σε χρόνο  $dt$  (sec) προκαλεί την κίνηση του πιστονιού ισχύος διατομής  $A$  ( $\text{m}^2$ ) κατά  $dy$  (m). Οπότε έχουμε την εξίσωση σε μονάδες μάζας:

$$q \cdot dt = A\rho \cdot dy \Rightarrow$$

$$q = A\rho \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\Gamma.31)$$

Παρατηρούμε ότι η παροχή που προκαλεί την κίνηση του πιστονιού είναι ευθέως ανάλογη προς την ταχύτητα του εμβόλου. Όπως έχει ήδη αναφερθεί (Βλ. Ενότητα 2.4.3), ο επενεργητής είναι πακτωμένος στο έδαφος. Επομένως, εισάγουμε στην εξίσωση τη συνιστώσα της ταχύτητας του εδάφους  $v_G = \frac{dy_o}{dt}$  (λόγω σεισμού), της οποίας το διάνυσμα έχει αντίθετη κατεύθυνση προς την ταχύτητα του εμβόλου (Βλ. Σχήμα 2.12). Επομένως, από τη σχέση (Γ.31), λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$q = A\rho \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right) \quad (\Gamma.32)$$

Απο τις σχέσεις (Γ.30) και (Γ.32) λαμβάνουμε την εξίσωση της ροής του επενεργητή:

$$C_x \cdot x - C_p \cdot \Delta P = A\rho \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right) \quad (\Gamma.33)$$

Λύνοντας ως προς την διαφορά πίεσης στα τοιχώματα του πιστονιού  $\Delta P$  προκύπτει:

$$\Delta P = \frac{C_x x - A\rho \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right)}{C_p} \quad (\Gamma.34)$$

Επομένως, η δύναμη που ασκεί το τελικό εργαλείο δράσης (πιστόνι ισχύος) ισούται με:

$$F_{act} = A \cdot \Delta P = A \cdot \frac{C_x \cdot x - A\rho \cdot \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dy_o}{dt} \right)}{C_p} \quad (\Gamma.35)$$

## Γ.2 Αριθμητικός Υπολογισμός Συντελεστών Σερβοβαλβίδας

Εν συνεχεία, βρίσκουμε τις αριθμητικές τιμές των παραγόντων που εμφανίζονται στο δεύτερο μέλος της σχέσης (Γ.30). Κάνουμε τις ανάλογες αντικαταστάσεις και υπολογίζοντας το σύνολο των μονάδων στο S.I.S. [112].

- Απο τα τεχνικά χαρακτηριστικά της κατασκευάστριας εταιρίας για την MTS 252.25 έχουμε ότι η πτώση πίεσης της σερβοβαλβίδας δίνεται ίση με 1000 psi [64]. Άρα, λόγω της αμελητέας ποσότητας  $P_L$ , έπεται ότι η τιμή αυτή ισούται με  $P_H$ :

$$P_H = 1000 \text{ psi} \xrightarrow{\text{S.I.}} P_H = 1000 \cdot 6894.745 \Rightarrow$$

$$P_H = 6894744.825 \text{ N/m}^2 \quad (\Gamma.36)$$

- Απο δεδομένα που λήφθηκαν απο τεχνικά δελτία του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. και θεωρώντας ότι η βαλβίδα ανοίγει (ή κλείνει) εντελώς απο την αρχική θέση ισορροπίας, έχουμε ότι η μετατόπιση της βαλβίδας  $x_o$  ισούται με τη διάμετρο του ακροφυσίου υψηλής πίεσης, δηλαδή με 0.56 inch [20]:

$$x_o = 0.56 \text{ inch} \xrightarrow{\text{S.I.}} x_o = 0.56 \cdot 0.0254 \Rightarrow$$

$$x_o = 1.4424 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (\Gamma.37)$$

- Ομοίως, το μήκος στομίου ροής εισόδου  $w$  ισούται με 0.055 inch [20]:

$$k = 0.055 \text{ inch} \xrightarrow{\text{S.I.}} k = 0.055 \cdot 0.0254 \Rightarrow$$

$$k = 0.1397 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (\Gamma.38)$$



- Μια προσεγγιστική τιμή για τον συντελεστή διαρροών  $C_d$  για τον εξεταζόμενο τύπο σερβοβαλβίδας είναι η 0.61, όπως δίδεται στη σχετική βιβλιογραφία [62]:

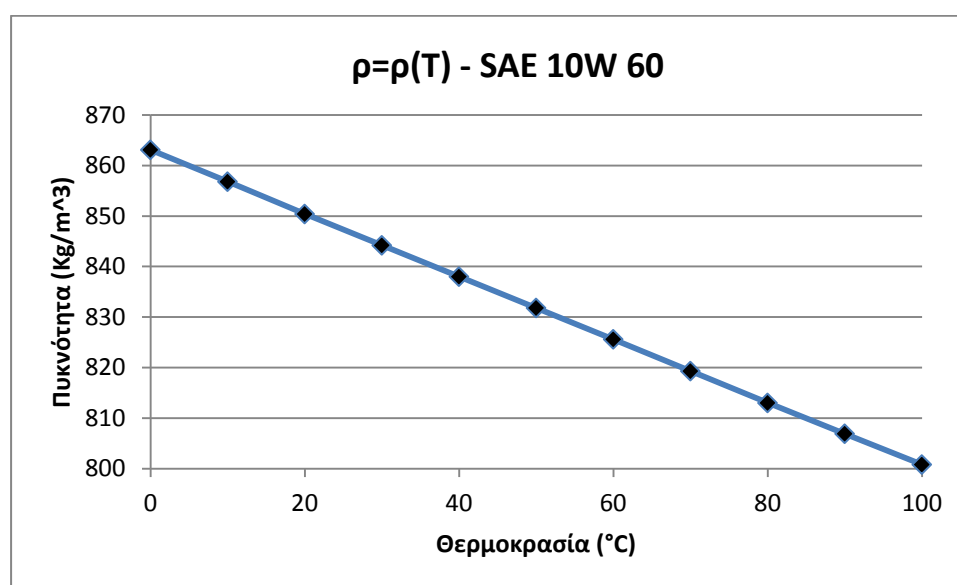
$$C_d \approx 0.61 \quad (Γ.39)$$

- Επιλέγουμε σαν συνεργαζόμενο ρευστό το λιπαντικό τύπου SAE 10W-60, το οποίο παρουσιάζει μέση πυκνότητα  $\rho$  για θερμοκρασία λειτουργίας απο 0°C έως 60°C ίση με 844.2 Kg/m<sup>3</sup> (Βλ. Πίνακα Γ.1 & Σχήμα Γ.1) [110]:

$$\rho = 844.2 \text{ Kg} / \text{m}^3 \quad (Γ.40)$$

Θερμοκρασία (°C)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Πυκνότητα (Kg/m <sup>3</sup> )	863.1	856.8	850.4	844.2	838.0	831.8	825.6	819.3	813.0	806.9	800.8

**Πίνακας Γ.1:** Πυκνότητα Λιπαντικού SAE 10W-60 και Θερμοκρασία Λειτουργίας [110]



**Σχήμα Γ.3:** Καμπύλη Πυκνότητας Λιπαντικού SAE 10W-60 Συναρτήσεως της Θερμοκρασίας Λειτουργίας [110]

Επομένως, απο τις σχέσεις (Γ.5) και (Γ.6), έχουμε διαστατικά ότι:  $[C_x] = m^2/s$  και  $[C_p] = m^5/(N \cdot s)$ . Έπειτα, απο τις σχέσεις (Γ.28) και (Γ.29) λόγω των σχέσεων (Γ.36), (Γ.37), (Γ.38), (Γ.39) και (Γ.40), προκύπτουν οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών  $C_x$  και  $C_p$ :

$$C_x = 0.61 \cdot 0.1397 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{\frac{6894744.825}{844.2}} \Rightarrow$$

$$C_x = 7.701276 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{sec} \quad (Γ.41)$$

και

$$C_p = \frac{0.61 \cdot 0.1397 \cdot 10^{-2} \cdot 1.4424 \cdot 10^{-2}}{4\sqrt{844.2 \cdot 6894744.825}} \Rightarrow$$

$$C_p = 4.027821 \cdot 10^{-11} \frac{m^5}{N \cdot sec} \quad (Γ.42)$$

### Γ.3 Αριθμητικός Υπολογισμός Γραμμικού Μοντέλου Παροχής

Απο σχέση (Γ.30), λόγω των σχέσεων (Γ.41) και (Γ.42), προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό μοντέλο παροχής (μάζας) ρευστού στον επενεργητή:

$$q = q(x, \Delta P) = 7.701276 \cdot 10^{-2} \cdot x - 4.027821 \cdot 10^{-11} \cdot \Delta P \quad (Γ.43)$$

Έπειτα, απο προδιαγραφές της MTS 252.25 σερβοβαλβίδας (Βλ. Ενότητα 2.4.3) και απο σχέση (Γ.37), ο εφικτός χώρος λειτουργίας (operational feasible region) του γραμμικού υδραυλικού επενεργητή αποτελείται απο το διδιάστατο επίπεδο, όπου υπολογίζουμε με S.I. μονάδες:

$$(x, \Delta P) \in \left[ -\frac{x_o}{2}, \frac{x_o}{2} \right] \times [P_{\min}, P_{\max}] \Rightarrow$$

$$(x, \Delta P) \in [-7.212 \cdot 10^{-3} m, 7.212 \cdot 10^{-3} m] \times [50 psi, 3000 psi] \stackrel{s.i.}{\Rightarrow}$$

$$(x, \Delta P) \in [-7.212 \cdot 10^{-3}, 7.212 \cdot 10^{-3}] \times [344737.241, 20684234.476] \quad (Γ.44)$$

# Δ. Περιγραφή $H_\infty$ -Αυτόματης Ρύθμισης στο Χώρο Κατάστασης

$$A_c = \begin{pmatrix} -3342893 & -1.4E+09 & -6676.54 & -4174.39 & -1220.16 & 1745.39 & 4456.45 & 6928.492 & 9119.577 & 10362.5 & -211709 & -109674 & -155650 & -55058.6 & -92702.4 & 47037.05 & 45392.87 & 127382.8 & 167626.1 & 236944.8 \\ 11.83467 & -24.2501 & 12.41543 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 59428.16 & -121775 & 62346.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.41543 & -23.7513 & 11.33588 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62346.56 & -119268 & 56921.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.33588 & -21.879 & 10.54312 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56921.65 & -109860 & 52937.93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.54312 & -21.0695 & 10.52641 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52937.93 & -105792 & 52853.99 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.52641 & -21.0338 & 10.50736 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52853.99 & -105612 & 52758.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.50736 & -20.0621 & 9.554697 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52758.24 & -100729 & 47971 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.554697 & -17.2538 & 7.699145 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47971 & -86617.6 & 38646.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.699145 & -14.7471 & 7.048001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38646.62 & -74021.2 & 35374.54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.048001 & -7.048 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35374.54 & -35374.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 669958128.59 & 275292725030.54 & \mathbf{O}_{18 \times 18} \\ \mathbf{O}_{19 \times 1} & \mathbf{O}_{19 \times 1} & \mathbf{O}_{19 \times 18} \end{pmatrix}$$

$$C_c = (-885486 \quad -564877 \quad -442398 \quad -276602 \quad -80849.4 \quad 115652.3 \quad 295291.5 \quad 459092.9 \quad 604277.7 \quad 686636 \quad -1.1E+07 \quad -1E+07 \quad -1E+07 \quad -3648273 \quad -6142605 \quad 3116750 \quad 3007804 \quad 8440584 \quad 11107169 \quad 15700338)$$

$$D_c = \mathbf{O}_{1 \times 20}$$