



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ"

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και μελέτη της αλληλομετατροπής τους. Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα ευρείας κατηγορίας πολυμερικών συστημάτων.

Κατσουρίνης Στυλιανός

Επιβλέπουσα:

Κοντού-Δρούγκα Ευαγγελία, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ

Νοέμβριος 2014

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματεύεται την μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, μέσω των θεμελιωδών συναρτήσεων που την χαρακτηρίζουν, καθώς και των σχέσεων που τις συνδέουν, ώστε να αξιολογηθούν οι μέθοδοι αλληλομετατροπής αυτών, που έχουν αναπτυχθεί, ως προς την αποτελεσματικότητά τους.

Αρχικά γίνεται μια παρουσίαση των βασικών ιξωδοελαστικών φαινομένων και των μεγεθών που τα χαρακτηρίζουν, ενώ παράλληλα εξάγονται οι αντίστοιχες καταστατικές σχέσεις, καθώς και οι σχέσεις εκείνες που συσχετίζουν τις θεμελιώδεις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στα διάφορα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί με σκοπό να προσεγγιστούν τόσο η χαλάρωση όσο και ο ερπυσμός, ξεκινώντας από τα πιο απλά (μοντέλα Maxwell και Kelvin) και καταλήγοντας σε πιο πολύπλοκα, ενώ γίνεται μια πιο λεπτομερής ανάλυση των γενικευμένων μοντέλων Maxwell και Kelvin, τα οποία αποτελούν τα βασικά εργαλεία για την μηχανική αναπαράσταση των ανωτέρω φαινομένων, μέσω της έκφρασης των συναρτήσεων του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας ως σειρές Prony.

Ιδιαίτερη μνεία γίνεται και για τις δυναμικές φορτίσεις και τα ιξωδοελαστικά εκείνα μεγέθη που τις χαρακτηρίζουν, όπως είναι τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών, καθώς και τα αντίστοιχά τους για την περίπτωση του ερπυσμού, ενώ επιπλέον ορίζονται οι έννοιες των φασμάτων χαλάρωσης και καθυστέρησης, καθώς και οι προσεγγιστικές σχέσεις μέσω των οποίων μπορούν να αποκτηθούν αυτά, από αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

Προχωρώντας, παρουσιάζονται διάφοροι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί τόσο για την προσαρμογή των πειραματικών στοιχείων σε σειρές Prony, όσο και για την αλληλομετατροπή των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων που προέκυψαν, ενώ παράλληλα γίνεται αναφορά στην προσαρμογή αντίστοιχων πειραματικών δεδομένων για τα δυναμικά μέτρα σε σιγμοειδείς

συναρτήσεις, και την εξαγωγή από αυτές των φασμάτων, από τα οποία στη συνέχεια θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τις συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης και ενδοτικότητας.

Τελειώνοντας ακολουθεί αξιολόγηση των παραπάνω μεθόδων προσαρμογής και αλληλομετατροπής με τη βοήθεια πειραματικών στοιχείων από διάφορα πολυμερή υλικά όπως το Polymethyl Methacrylate (PMMA) και το Econio[®] LBX 8145 (EC), ενώ επιπλέον γίνεται και μια αναφορά στην επίδραση της θερμοκρασίας και αναπτύσσεται συνοπτικά η αρχή της υπέρθεσης χρόνου-θερμοκρασίας, όπως αυτή χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των τελικών καμπυλών «master curves».

Abstract

This thesis deals with the study of the viscoelastic behavior of materials, by reviewing the fundamental functions of it, and the relationships between them, in order to evaluate the methods developed for interconversion as to their effectiveness.

At first, the basic viscoelastic phenomena along with the values that characterize them is been presented, while the corresponding constitutive equations and interrelations of the fundamental viscoelastic functions are generated. In the following sections we discuss the various models that have been developed in order to approximate both the relaxation and creep behavior, starting from the simplest like Maxwell and Kelvin models, and leading to more complex ones. A more detailed analysis of the generalized Maxwell and Kelvin models is then presented, which are the basis for the mechanical representation of viscoelastic phenomena via the expression of relaxation modulus and creep compliance as a Prony series.

Particular reference is made for dynamic behavior and the corresponding viscoelastic properties, like storage and loss modulus as well as complex compliance, while further down the concepts of relaxation and retardation spectra are discussed, along with approximate relationships for calculating them from the experimental data.

As we proceed, we illustrate the different methods that have been developed for fitting the experimental data in Prony series, and interconverting the fundamental viscoelastic functions obtained. Reference is made as well for fitting the corresponding experimental dynamic data as sigmoidal functions, and generating the relaxation and retardation spectra, from which we can obtain the relaxation modulus and creep compliance respectively.

In conclusion, an evaluation of the methods mentioned above, both for fitting and interconversion is made, using experimental data of various

polymeric materials such as Polymethyl Methacrylate (PMMA) and Ecovio® LBX 8145 (EC). Furthermore the effect of temperature and the principle of time-temperature superposition is discussed, in order to explain how the master curves of fundamental viscoelastic functions are generated.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
Σκοπός	1
1 Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα	3
1.1 Γενικά – Το ιξωδοελαστικό φαινόμενο	3
1.2 Ερπυσμός και Χαλάρωση	4
1.2.1 Ερπυσμός	4
1.2.2 Χαλάρωση	5
1.3 Καταστατικές σχέσεις	6
1.4 Σχέση μεταξύ συναρτήσεων Χαλάρωσης και Ενδοτικότητας	8
1.5 Μοντελοποίηση – Αντιστοιχία με μηχανικά μοντέλα	10
1.5.1 Το μοντέλο Maxwell	11
1.5.2 Το μοντέλο Kelvin (Voigt)	12
1.5.3 Πολυπλοκότερα μοντέλα	13
2 Καταστατικές σχέσεις δυναμικών φορτίσεων	17
2.1 Γενικά – Δυναμικά μέτρα ιξωδοελαστικών συναρτήσεων	17
2.2 Φάσματα καθυστέρησης και χαλάρωσης	21
2.3 Προσεγγιστικοί συσχετισμοί	23

2.3.1	Γενικά	23
2.3.2	Εξαγωγή του φάσματος χαλάρωσης από το μέτρο χαλάρωσης (Προσέγγιση Alfrey).	24
2.3.3	Άλλες προσεγγιστικές σχέσεις	26
3	Γενικευμένα μοντέλα Kelvin και Maxwell	29
3.1	Γενικά	29
3.2	Το γενικευμένο μοντέλο Maxwell	30
3.3	Συζυγή μοντέλα – Κανόνες Alfrey	32
3.4	Το γενικευμένο μοντέλο Kelvin	32
3.5	Χρόνοι χαλάρωσης και καθυστέρησης	34
4	Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης και ερπυσμού	39
4.1	Γενικά – Η μέθοδος Collocation	39
4.2	Η μέθοδος Multidata	40
4.3	Η μέθοδος Multidata – Μια παραλλαγή	42
5	Αλληλομετατροπή των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων	47
5.1	Γενικά	47
5.2	Αλληλομετατροπή από χαλάρωση σε ερπυσμό	49
5.3	Προσδιορισμός των χρόνων χαλάρωσης/καθυστέρησης	53
5.4	Προσδιορισμός σφάλματος	54

6 Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων δυναμικών μέτρων και εξαγωγή συναρτήσεων μέτρου χαλάρωσης και ενδοτικότητας ...	57
6.1 Γενικά	57
6.2 Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων δυναμικών και εξαγωγή φασμάτων.....	58
6.3 Εξαγωγή ιξωδοελαστικών συναρτήσεων από το φάσμα	60
6.4 Συμπερασματικά	62
7 Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα ευρείας κατηγορίας πολυμερικών συστημάτων	63
7.1 Γενικά	63
7.2 Επίδραση θερμοκρασίας – Υπέρθεση χρόνου-θερμοκρασίας	64
7.3 Μετατροπή πειραματικών χαλάρωσης σε ερπυσμό	67
7.3.1 Polymethyl Methacrylate (PMMA)	67
7.3.2 Ecovio® LBX 8145 (EC)	72
7.3.3 Σύνθετο EC20	78
7.4 Μετατροπή πειραματικών ερπυσμού σε χαλάρωση	83
7.4.1 Polymethyl Methacrylate (PMMA)	83
7.4.2 Ecovio® LBX 8145 (EC)	88
7.4.3 Σύνθετο EC20	93
7.5 Εξαγωγή ιξωδοελαστικών συναρτήσεων με τη βοήθεια των Δυναμικών και της προσαρμογής με σιγμοειδής συναρτήσεις	97
7.5.1 Εξαγωγή της συνάρτησης ενδοτικότητας	98
7.5.2 Εξαγωγή της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης	103
7.6 Συμπεράσματα	107
7.7 Επίλογος – Προτάσεις	111

Εισαγωγή

Δεδομένης της όλο και αυξανόμενης χρήσης πολυμερών και σύνθετων υλικών με βάση τα πολυμερή στις κατασκευές, καθώς και της εμφάνισης καινοτόμων υλικών τα οποία παρουσιάζουν ανάλογη συμπεριφορά, η μελέτη της ιξωδοελαστικότητας και των μεγεθών που την χαρακτηρίζουν έχει γίνει επιτακτική προκειμένου να εξασφαλιστεί η ακεραιότητα των κατασκευών.

Πολλές φορές βέβαια δεν είναι δυνατή η απόκτηση όλων εκείνων των ιξωδοελαστικών μεγεθών μέσω πειραματικών διαδικασιών, γεγονός που καθιστά τη μελέτη των ανωτέρω υλικών εξαιρετικά δυσχερές. Για το λόγο αυτό πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με την συσχέτιση αυτών των μεγεθών μεταξύ τους, και την εξαγωγή σχέσεων με τη βοήθεια των οποίων θα μπορούσε να προκύψει μία βασική ιξωδοελαστική συνάρτηση όπως το μέτρο χαλάρωσης, από αντίστοιχα δεδομένα μιας άλλης συνάρτησης η οποία είναι πιο εύκολο να προσδιοριστεί πειραματικά.

Παράλληλα η ανάπτυξη μοντέλων με την βοήθεια των οποίων προσεγγίζεται η συμπεριφορά των ιξωδοελαστικών υλικών, αποτελεί ακόμα έναν τομέα μελέτης που σκοπό έχει την απλούστερη κατανόηση των φαινομένων της ιξωδοελαστικότητας.

Σκοπός

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι μέσω της θεωρητικής μελέτης των βασικών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων και των σχέσεων που τις συνδέουν, να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με τις δυνατότητες αλληλομετατροπής αυτών, καθώς και με την ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων με αντίστοιχα πειραματικά στοιχεία, έτσι ώστε να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα των μεθόδων αυτών στην κατανόηση της συμπεριφοράς των υλικών στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα.

1. Γραμμική Ιξωδοελαστικότητα

1.1 Γενικά – Το Ιξωδοελαστικό φαινόμενο

Η συμπεριφορά των περισσότερων υλικών, όταν αναφερόμαστε σε μικρές παραμορφώσεις, περιγράφεται από το νόμο του Hooke για τη γραμμική ελαστικότητα, ο οποίος για τη μία διάσταση εκφράζεται από την σχέση (1.1),

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$

όπου σ η εφαρμοζόμενη τάση, ε η παραμόρφωση και E το μέτρο ελαστικότητας του Young.

Σε αντίθεση με τα ελαστικά, ένα ιξώδες υλικό ακολουθεί τη σχέση (1.2),

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.2)$$

όπου η αντιπροσωπεύει το εφελκυστικό ιξώδες. Στην πραγματικότητα βέβαια, όλα τα υλικά αποκλίνουν από το νόμο του Hooke, για παράδειγμα επιδεικνύοντας τόσο ελαστική όσο και ιξώδη συμπεριφορά. Τα τελευταία ονομάζονται ιξωδοελαστικά υλικά και η καταστατική εξίσωση, που συνδέει την εφαρμοζόμενη τάση με την παραμόρφωση, εξαρτάται από τον χρόνο.

Όλα τα υλικά παρουσιάζουν κάποια ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Τα μέταλλα, όπως το ασάλι και το αλουμίνιο, σε θερμοκρασία δωματίου και για μικρές παραμορφώσεις, δεν αποκλίνουν από το νόμο της γραμμικής ελαστικότητας. Από την άλλη πλευρά βέβαια τα σύνθετα πολυμερή, το ξύλο, ο ανθρώπινος ιστός, καθώς και τα μέταλλα σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες παρουσιάζουν έντονη ιξωδοελαστική συμπεριφορά.

Καθώς λοιπόν το μεγαλύτερο μέρος των κατασκευών μας αποτελείται από αυτά τα υλικά, και δεδομένου ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ακόμα και η

μικρότερη ιξωδοελαστική απόκριση μπορεί να έχει σημαντικό αντίκτυπο, είναι επιβεβλημένη η μελέτη αυτής της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών.

1.2 Ερπυσμός και Χαλάρωση

1.2.1 Ερπυσμός

Ένα από τα φαινόμενα που χαρακτηρίζουν την ιξωδοελαστικότητα είναι ο ερπυσμός (creep), το οποίο περιγράφεται ως η μεταβολή της παραμόρφωσης ενός υλικού με το χρόνο $\varepsilon(t)$, όταν σε αυτό εφαρμόζεται μια σταθερή τάση σ . Εργαζόμενοι και πάλι στη μία διάσταση και θεωρώντας ότι η εφαρμοζόμενη σταθερή τάση μπορεί να παρασταθεί συναρτήσει του χρόνου από τη σχέση (1.3),

$$\sigma(t) = \sigma_0 u(t) \quad (1.3)$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία συνάρτηση βήματος για την οποία ισχύει ότι,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

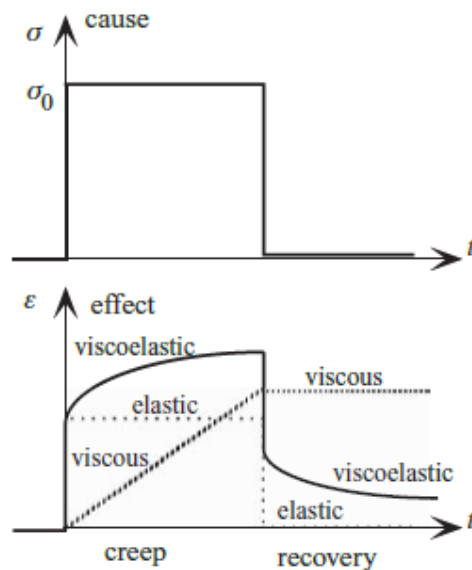
θα παρατηρήσουμε ότι, σε ένα ιξωδοελαστικό υλικό, η παραμόρφωση θα αυξάνει συναρτήσει του χρόνου. Ο λόγος,

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (1.5)$$

καλείται συνάρτηση ενδοτικότητας (creep compliance), και στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα είναι ανεξάρτητος του μεγέθους της εφαρμοζόμενης τάσης. Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζεται ένα τυπικό γράφημα ερπυσμού, στο οποίο είναι φανερό η απόκριση συναρτήσει του χρόνου (αύξηση παραμόρφωσης), σε συνδυασμό με το αίτιο (εφαρμογή σταθερής τάσης και στη συνέχεια αφαίρεση αυτής), ενώ παράλληλα έχουν χαραχθεί και η αντίστοιχη ελαστική και ιξώδης συμπεριφορά.

1.2.2 Χαλάρωση

Ως χαλάρωση ορίζεται η σταδιακή μείωση της εφαρμοζόμενης τάσης συναρτήσει του χρόνου, όταν διατηρούμε το υλικό υπό μία σταθερή παραμόρφωση ε_0 . Εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση του ερπυσμού και θεωρώντας ότι η παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση (1.6),



Σχήμα 1.1: Ερπυσμός. Γραφική απεικόνιση της τάσης σ και της παραμόρφωσης ε συναρτήσει του χρόνου t .

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t) \quad (1.6)$$

τότε παρατηρούμε ότι η τάση $\sigma(t)$ θα παρουσιάσει σταδιακή μείωση συναρτήσει του χρόνου, όπως παριστάνεται και στο αντίστοιχο γράφημα του σχήματος 1.2. Ο λόγος,

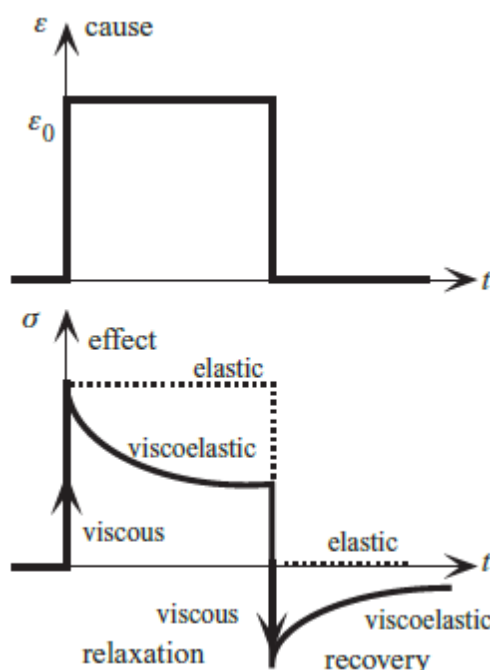
$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (1.7)$$

καλείται συνάρτηση μέτρου χαλάρωσης (relaxation modulus), και όπως και στον ερπυσμό, είναι ανεξάρτητος του μεγέθους της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης, και εξαρτάται μόνο από τον χρόνο.

1.3 Καταστατικές σχέσεις.

Παραπάνω παρατηρήσαμε πως μεταβάλλεται η τάση συναρτήσει του χρόνου $\sigma(t)$, όταν επιβάλουμε μία παραμόρφωση της μορφής $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t)$, οπότε καταλήξαμε στην γενική σχέση

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) \quad (1.8)$$



Σχήμα 1.2: Χαλάρωση. Γραφική απεικόνιση της τάσης σ και της παραμόρφωσης ε συναρτήσει του χρόνου t .

Έστω τώρα ότι η επιβαλλόμενη παραμόρφωση είναι της μορφής,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 [u(t) - u(t - t_1)] \quad (1.9)$$

η οποία σχέση περιγράφει την επιβολή μιας σταθερής παραμόρφωσης ε_0 για $t = 0$, και την αφαίρεση αυτής τη χρονική στιγμή t_1 . Βασιζόμενοι στην αρχή της υπέρθεσης Boltzmann, σύμφωνα με την οποία, το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον συνδυασμό πολλών αιτιών, είναι ίσο με το άθροισμα των αποτελεσμάτων που προκύπτει από κάθε ένα από αυτά τα αίτια ξεχωριστά, προκύπτει ότι,

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E(t) - E(t - t_1)] \quad (1.10)$$

ενώ θα πρέπει να σημειωθεί, ότι η σχέση (1.10), ισχύει για μη γηρασκόμενα υλικά, για υλικά δηλαδή των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες δεν μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου.

Στη γενική περίπτωση λοιπόν, όπου επιβάλλεται μια τυχαία παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου $\varepsilon(t)$, με μηδενική τιμή για $t < 0$, θεωρούμε ότι η παραμόρφωση για το χρονικό διάστημα από $t - \tau$ έως $t - \tau + \Delta\tau$, μπορεί να εκφραστεί από την σχέση (1.11),

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\tau)[u(t - \tau) - u(t - \tau + \Delta\tau)] \quad (1.11)$$

όπου $\varepsilon(\tau)$ η τιμή τη χρονική στιγμή $t = \tau$.

Επομένως, σύμφωνα με την σχέση (1.10), η μεταβολή της τάσης λόγω του παλμού της παραμόρφωσης που επιβλήθηκε, όπως περιγράφεται από τη σχέση (1.11), θα είναι με βάση την αρχή Boltzmann,

$$d\sigma(t) = \varepsilon(\tau)[E(t - \tau) - E(t - \tau + \Delta\tau)] \quad (1.12)$$

και επειδή ισχύει ότι $\frac{dE(t-\tau)}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{E(t-\tau+\Delta\tau) - E(t-\tau)}{\Delta\tau}$, η (1.12) μπορεί να γραφεί,

$$d\sigma(t) = -\varepsilon(\tau) \frac{dE(t - \tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.13)$$

Αποσυνθέτοντας το σύνολο της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης $\varepsilon(t)$, έως τη χρονική στιγμή t , σε στοιχειώδεις βηματικές συναρτήσεις, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 1.3, η συνολική τάση, τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, θα είναι ίση με το άθροισμα των εκάστοτε στοιχειωδών μεταβολών $d\sigma(t)$. Στην οριακή περίπτωση όπου το $\Delta\tau$ είναι πολύ μικρό, το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα, και επομένως θα είναι,

$$\sigma(t) = - \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{dE(t - \tau)}{d\tau} d\tau + E(0)\varepsilon(t) \quad (1.14)$$

όπου ο όρος $E(0)\varepsilon(t)$ προκύπτει από το γεγονός ότι ενώ μετά την αφαίρεση κάθε παλμού παραμόρφωσης ή σειράς παλμών η παραμόρφωση είναι μηδενική, στη γενική περίπτωση της επιβολής μιας τυχαίας παραμόρφωσης, αυτή δεν είναι μηδέν τη χρονική στιγμή t . Επομένως η τελική αύξηση της τάσης

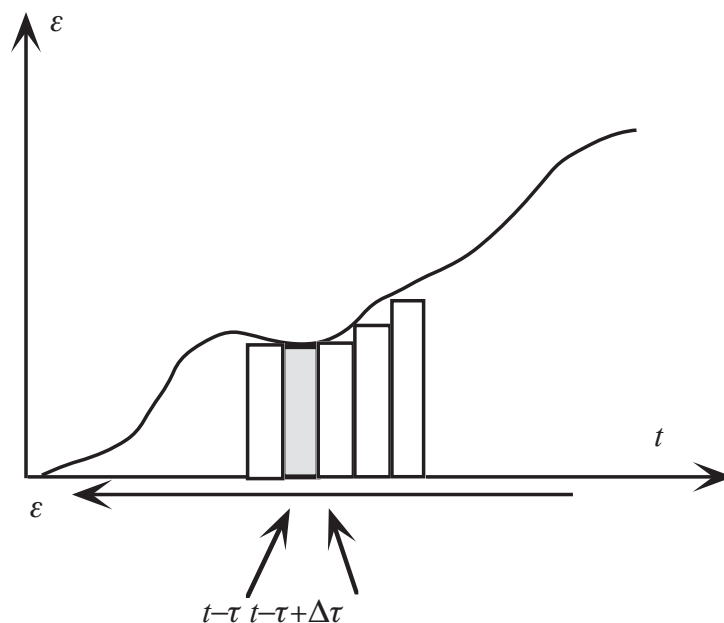
από μηδέν έως $\varepsilon(t)$ ισούται με τον παραπάνω όρο, καθώς η τάση δεν προλαβαίνει να χαλαρώσει.

Μετά την εκτέλεση της παραγοντικής ολοκλήρωσης στη σχέση (1.14), προκύπτει η τελική μορφή για την τάση συναρτήσει του χρόνου,

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.15)$$

ενώ εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και για την περίπτωση του ερπυσμού, προκύπτει η αντίστοιχη ολοκληρωτική σχέση για την παραμόρφωση, όπου

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.16)$$



Σχήμα 1.3: Επιβαλλόμενη τυχαία παραμόρφωση συναρτήσει του χρόνου.

Οι σχέσεις (1.15) και (1.16), αποτελούν τις ολοκληρωτικές καταστατικές εξισώσεις της ιξωδοελαστικότητας, και ονομάζονται ολοκληρώματα Boltzmann, ή ολοκληρώματα μνήμης.

1.4 Σχέση μεταξύ συναρτήσεων Χαλάρωσης και Ενδοτικότητας.

Αυτό που επιθυμούμε τώρα είναι να βρούμε ποια σχέση συνδέει τη συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης $E(t)$ με αυτή της ενδοτικότητας $D(t)$ και

αντίστροφα. Για να το επιτύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$, τον οποίο θα συμβολίζουμε ως $\bar{f}(s) = L[f(t)]$.

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Laplace στα ολοκληρώματα Boltzmann των σχέσεων (1.15) και (1.16) θα πάρουμε αντίστοιχα,

$$\bar{\sigma}(s) = L[\sigma(t)] = L\left[\int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau\right] = L[E(t)]L\left[\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\right]$$

ή

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{E}(s)s\bar{\varepsilon}(s) \quad (1.17)$$

αφού γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού ισχύουν οι σχέσεις,

$$L\left[\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi\right] = L[f(t)]L[g(t)] \quad \text{και} \quad L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL[f(t)] - f(0)$$

και η παραμόρφωση για $t = 0$ είναι μηδενική.

Όμοια θα έχουμε αντίστοιχα και για τον ερπυσμό ότι,

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{D}(s)s\bar{\sigma}(s) \quad (1.18)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (1.17) και (1.18), προκύπτει η ακόλουθη σχέση ανάμεσα στις μετασχηματισμένες συναρτήσεις του μέτρου ελαστικότητας και της ενδοτικότητας,

$$\bar{E}(s)\bar{D}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (1.19)$$

και αν στη συνέχεια εφαρμόσουμε σε αυτή τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, θα πάρουμε τελικά την ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση ανάμεσα στις θεμελιώδεις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις.

$$\int_0^t D(t-\tau)E(\tau)d\tau = \int_0^t E(t-\tau)D(\tau)d\tau = t \quad (1.20)$$

Παράλληλα μπορούμε να εξάγουμε και μία διαφορετική σχέση μεταξύ των $E(t)$ και $D(t)$, αναδιατάσσοντας την (1.19) και εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, όπως παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α.

Έτσι γράφοντας την (1.19) με την ακόλουθη μορφή και εφαρμόζοντας σε αυτή τον αντίστροφο μετασχηματισμό θα έχουμε αντίστοιχα,

$$\bar{E}(s)s\bar{D}(s) = \frac{1}{s} \stackrel{L^{-1}}{\Rightarrow} L^{-1}[\bar{E}(s)s\bar{D}(s)] = 1 \Rightarrow$$
$$\int_0^t E(t-\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau + D(0)E(t) = 1 \quad (1.21)$$

ή αντίστοιχα,

$$\int_0^t D(t-\tau) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau + E(0)D(t) = 1 \quad (1.22)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ολοκληρωτικές σχέσεις είναι άρρητες, ενώ ρητές σχέσεις προκύπτουν μέσω των μετασχηματισμών Laplace, εφόσον οι συναρτήσεις $E(t)$ και $D(t)$ είναι γνωστές μέσω των αναλυτικών τους μορφών.

1.5 Μοντελοποίηση – Αντιστοιχία με μηχανικά μοντέλα.

Μια απλή μέθοδος αναπαράστασης των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών μεγεθών, και κατά συνέπεια της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, είναι με τη χρήση απλών εκθετικών συναρτήσεων, όπου για το μέτρο χαλάρωσης θα έχουμε τη σχέση,

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\rho}} \quad (1.23)$$

ενώ αντίστοιχα η ενδοτικότητα θα δίνεται από μια σχέση της μορφής,

$$D(t) = D_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (1.24)$$

όπου ρ καλείται χαλάρωσης και τ χρόνος καθυστέρησης αντίστοιχα.

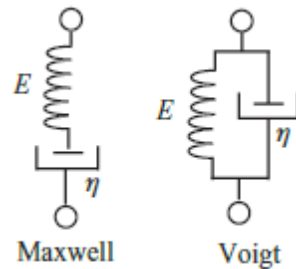
Οι παραπάνω σχέσεις αναπαριστούν απλά μηχανικά μοντέλα, αποτελούμενα από ελατήρια ($\sigma_s = E\varepsilon_s$), τα οποία συμπεριφέρονται απόλυτα ελαστικά, και αποσβεστήρες με πλήρως ιξώδη απόκριση ($\sigma_d = \eta \frac{d\varepsilon_d}{dt}$).

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και τα μοντέλα Maxwell και Kelvin, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω.

1.5.1 Το μοντέλο Maxwell

Αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο συνδεδεμένο σε σειρά με έναν αποσβεστήρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4, οπότε η επιβαλλόμενη τάση είναι κοινή και για τα δύο στοιχεία, ισχύει δηλαδή,

$$\sigma_s = \sigma_d = \sigma \quad (1.25)$$



Σχήμα 1.4: Τα απλά μοντέλα Maxwell και Kelvin (Voigt).

Από την άλλη πλευρά για τις παραμορφώσεις θα ισχύει ότι,

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d \quad (1.26)$$

και επομένως αν θεωρήσουμε τον ρυθμό των παραμορφώσεων, και σε συνδυασμό με την (1.25) και τις καταστατικές σχέσεις του ελατηρίου και του αποσβεστήρα, θα πάρουμε τελικά την παρακάτω σχέση,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_s}{dt} + \frac{d\varepsilon_d}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

ή διαφορετικά,

$$E \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \sigma = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} \quad (1.27)$$

όπου $\tau = \frac{\eta}{E}$.

Επιβάλλοντας μια παραμόρφωση της μορφής $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 u(t)$, σύμφωνα με όσα έχουμε δει, προκύπτει τελικά ότι,

$$E(t) = E e^{-\frac{t}{\rho}} \quad (1.28)$$

με $\rho = \tau = \frac{\eta}{E}$, να αντιστοιχεί στον χρόνο χαλάρωσης.

Από την άλλη πλευρά βέβαια, αν μελετήσουμε το μοντέλο Maxwell μέσω ενός πειράματος ερπυσμού, εφαρμόζοντας μια βηματική συνάρτηση τάσης, προκύπτει ότι,

$$D(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (1.29)$$

όπου είναι φανερό, πως η συνάρτηση ενδοτικότητας της σχέσης (1.29) αναπαριστά ευθεία γραμμή, και δεν ανταποκρίνεται στον πρωταρχικό ερπυσμό.

1.5.2 Το μοντέλο Kelvin (Voigt)

Αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο και έναν αποσβεστήρα συνδεδεμένα εν παραλλήλω, έτσι ώστε και τα δύο στοιχεία να δέχονται την ίδια παραμόρφωση, ενώ η συνολική επιβαλλόμενη τάση να είναι ίση με το άθροισμα των τάσεων που εφαρμόζεται σε κάθε στοιχείο χωριστά, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4. Είναι δηλαδή,

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ή διαφορετικά,

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon + \frac{\eta}{E} \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon + \tau \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.30)$$

όπου $\tau = \frac{\eta}{E}$ ο χρόνος καθυστέρησης.

Όπως και με την προηγούμενη περίπτωση, προκύπτει ότι η συνάρτηση ενδοτικότητας, για το μοντέλο Kelvin, θα δίνεται από τη σχέση,

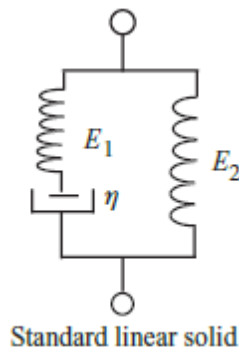
$$D(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1.31)$$

ενώ η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης θα αντιπροσωπεύεται από μία σταθερά ακολουθούμενη από μία συνάρτηση δέλτα.

1.5.3 Πολυπλοκότερα μοντέλα.

Είναι φανερό λοιπόν ότι αυτά τα δύο απλά μοντέλα δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν πλήρως την ιξωδοελαστική συμπεριφορά ενός υλικού. Για τον σκοπό αυτό απαιτούνται πιο πολύπλοκα μοντέλα.

Ένα τέτοιο μοντέλο που ανταποκρίνεται πιο ρεαλιστικά στην συμπεριφορά ενός γραμμικά ιξωδοελαστικού στερεού, είναι το τριπαραμετρικό μοντέλο που αποτελείται από ένα απλό στοιχείο Maxwell και ένα γραμμικό ελατήριο συνδεδεμένα παράλληλα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Αντιπροσωπευτικό τριπαραμετρικό μοντέλο.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.5.1, η καταστατική σχέση που χαρακτηρίζει το μοντέλο Maxwell και περιγράφεται από την (1.27), θα είναι

$$E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} \quad \mu\varepsilon \quad \tau = \frac{\eta}{E_1} \quad (1.32)$$

Παράλληλα, γνωρίζουμε ότι για το γραμμικό ελατήριο ισχύει ότι, $\sigma_2 = E_2 \varepsilon$, και επομένως αν θεωρήσουμε τον ρυθμό της σχέσης αυτής, θα πάρουμε ότι,

$$E_2 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_2}{dt} \quad (1.33)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.32) και (1.33), προκύπτει ότι,

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(E_1 + E_2) = \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{\sigma_1}{\tau} \quad (1.34)$$

και αν προσθέσουμε σε κάθε μέλος της (1.34) τον όρο $\frac{1}{\tau} E_2 \varepsilon = \frac{1}{\tau} \sigma_2$, θα πάρουμε τελικά την ακόλουθη καταστατική σχέση.

$$\frac{d\varepsilon}{dt}(E_1 + E_2) + \frac{\varepsilon}{\tau} E_2 = \frac{\sigma}{\tau} + \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.35)$$

Προκειμένου τώρα να εξαχθούν οι θεμελιώδεις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις του τριπαραμετρικού αυτού μοντέλου, εφαρμόζουμε στην σχέση (1.35) τον μετασχηματισμό Laplace, οπότε εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες του μετασχηματισμού και το γεγονός ότι $\varepsilon(0) = 0$ και $\sigma(0) = 0$, θα πάρουμε τελικά την ακόλουθη σχέση.

$$\bar{\sigma}(s) = s \left[\frac{E_1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{E_2}{s} \right] \bar{\varepsilon}(s) \quad (1.36)$$

Όμως ανακαλώντας την σχέση (1.17), και συγκρίνοντάς την με την σχέση (1.36), προκύπτει ότι,

$$\bar{E}(s) = \frac{E_1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{E_2}{s} \quad (1.37)$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό στην (1.37), θα πάρουμε τη συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης που χαρακτηρίζει το τριπαραμετρικό αυτό μοντέλο, και η οποία θα είναι,

$$E(t) = E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.38)$$

όπου $\rho = \tau = \frac{\eta}{E_1}$, ο χρόνος χαλάρωσης.

Αντίστοιχα, εκμεταλλευόμενοι την σχέση (1.19) θα έχουμε

$$\bar{D}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{E}(s)} \quad (1.39)$$

από την οποία προκύπτει τελικά η συνάρτηση της ενδοτικότητας,

$$D(t) = \frac{1}{E_2} - \frac{E_1}{E_2(E_1 + E_2)} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (1.40)$$

Όπου $\tau_c = \tau \frac{E_1 + E_2}{E_1}$, ο χρόνος καθυστέρησης.

Συμπερασματικά, η μοντελοποίηση με τη χρήση απλών εκθετικών συναρτήσεων, δεν αναπαριστά πλήρως την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών, παρά μόνο για ένα πολύ στενό εύρος χρόνου της τάξης της μίας δεκάδας. Δεδομένου ότι το φαινόμενο του ερπυσμού και της χαλάρωσης εμφανίζονται για μεγάλα χρονικά πεδία, απαιτείται η χρήση ακόμα πιο πολύπλοκων μηχανικών μοντέλων, τα οποία θα παρουσιαστούν σε επόμενο κεφάλαιο.

2. Καταστατικές σχέσεις δυναμικών φορτίσεων.

2.1 Γενικά – Δυναμικά μέτρα ιξωδοελαστικών συναρτήσεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την απόκριση των ιξωδοελαστικών υλικών, όταν υπόκεινται σε δυναμικές φορτίσεις, όπου με τον όρο "δυναμικές" εννοούμε εναλλασσόμενες καταπονήσεις (ταλαντώσεις). Στην ανάλυση αυτή μπορούμε να επιλέξουμε είτε την εφαρμογή μιας αρμονικής τάσης της μορφής $\sigma(\omega t) = \sigma_o \sin \omega t$ (για εφελκυσμό) και να υπολογίσουμε την αντίστοιχη παραμόρφωση, είτε την εφαρμογή μιας αρμονικής παραμόρφωσης και να υπολογίσουμε την τάση που την προκαλεί. Στη συγκεκριμένη εργασία επιλέγουμε την δεύτερη περίπτωση, με τη διαφορά ότι αντί να υποθέσουμε ότι η παραμόρφωση είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, είναι προτιμότερο να τη γράψουμε με την ακόλουθη μορφή.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o e^{i\omega t} = \varepsilon_o (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (2.1)$$

Η χρήση της μορφής της σχέσης (2.1) έχει το πλεονέκτημα της απλότητας στους μαθηματικούς υπολογισμούς και οδηγεί παράλληλα στην επίλυση συγχρόνως δύο όμοιων ταλαντώσεων, μίας ημιτονοειδούς και μίας συνημιτονοειδούς.

Έστω λοιπόν ότι επιβάλουμε μια παραμόρφωση της μορφής που περιγράφει η σχέση (2.1). Αν θεωρήσουμε ότι μια αρμονική συνάρτηση δεν έχει σημείο έναρξης, τότε η ολοκληρωτική καταστατική εξίσωση της σχέσης (1.15), (ολοκλήρωμα Boltzmann), μπορεί να γραφεί επιλέγοντας ως κάτω όριο το $-\infty$. Θα είναι δηλαδή,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (2.2)$$

Για να επιτύχουμε σύγκλιση του ολοκληρώματος (2.2), θεωρούμε ότι η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα μιας

συνάρτησης $\hat{E}(t)$, η οποία τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, και ενός σταθερού όρου $E_e = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = E(\infty)$, ο οποίος καλείται μέτρο ισορροπίας και αντιπροσωπεύει την συμπεριφορά του υλικού σε πολύ μεγάλους χρόνους. Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση, για τη συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης, στην σχέση (2.2), προκύπτει ότι,

$$\sigma(t) = E_e \varepsilon_o e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon_o \int_{-\infty}^t \hat{E}(t - \tau) e^{i\omega \tau} d\tau \quad (2.3)$$

ενώ με αλλαγή μεταβλητής ($t' = t - \tau$), η σχέση (2.3) γίνεται τελικά,

$$\sigma(t) = \varepsilon_o e^{i\omega t} \left[E_e + \omega \int_0^{\infty} \hat{E}(t') \sin \omega t' dt' + i\omega \int_0^{\infty} \hat{E}(t') \cos \omega t' dt' \right] \quad (2.4)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι επιβάλλοντας μία αρμονική μορφή παραμόρφωσης, σύμφωνα με τη σχέση (2.1), προκύπτει ότι η τάση που την προκαλεί θα είναι και αυτή αρμονικής μορφής, με τη διαφορά ότι θα έχει μια διαφορά φάσης ως προς την παραμόρφωση.

Παράλληλα από την σχέση (2.4) μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\sigma(t) = E^*(i\omega) \varepsilon(t) = (E'(\omega) + iE''(\omega)) \varepsilon(t) \quad (2.5)$$

όπου $E^*(i\omega)$ αποτελεί το μιγαδικό μέτρο χαλάρωσης (complex modulus), το πραγματικό μέρος του οποίου $E'(\omega)$ ονομάζεται μέτρο αποθήκευσης (storage modulus), ενώ το φανταστικό μέρος $E''(\omega)$, ονομάζεται μέτρο απωλειών (loss modulus). Από τις σχέσεις (2.4) και (2.5) προκύπτει ότι,

$$E'(\omega) = E_e + \omega \int_0^{\infty} \hat{E}(t') \sin \omega t' dt' \quad (2.6)$$

$$E''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \hat{E}(t') \cos \omega t' dt' \quad (2.7)$$

όπου $\hat{E}(t) = E(t) - E_e$.

Το πηλίκο του μέτρου απωλειών προς το μέτρο αποθήκευσης, ονομάζεται συντελεστής απωλειών και εκφράζει την εφαπτομένη της διαφοράς φάσης ανάμεσα στην επιβαλλόμενη δυναμική παραμόρφωση και την τάση που την προκαλεί,

$$\tan \delta(\omega) \equiv \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (2.8)$$

και επομένως η σχέση (2.5) μπορεί να γραφεί και ως εξής,

$$\sigma(t) = |E^*(i\omega)|\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (2.9)$$

Παρατηρώντας τώρα τις σχέσεις (2.6) και (2.7), βλέπουμε ότι αυτές παρουσιάζουν μια αντιστοιχία με τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης, ο οποίος ως γνωστός δίνεται από την έκφραση,

$$f^*(\omega) = F[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt - i \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt \quad (2.10)$$

ενώ παράλληλα, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο παράρτημα Α (παράγραφος Α4.2) στο βιβλίο του Tschoegl (1989) [1], η συνάρτηση $f(t)$ προκύπτει μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού από τις σχέσεις,

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f'(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (2.11)$$

ή

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f''(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (2.12)$$

όπου $f'(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$ και $f''(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν τις σχέσεις (2.11) και (2.12) θεωρώντας ότι $f(t) \equiv \hat{E}(t)$, $f'(\omega) \equiv \frac{E''(\omega)}{\omega}$ και $f''(\omega) \equiv \frac{E'(\omega) - E_e}{\omega}$, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τη συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης ως προς τα δυναμικά μέτρα.

$$E(t) = E_e + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E'(\omega) - E_e}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (2.13)$$

και

$$E(t) = E_e + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{E''(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega \quad (2.14)$$

Είδαμε λοιπόν ότι όσον αφορά την δυναμική συμπεριφορά των ιξωδοελαστικών υλικών στην περίπτωση της χαλάρωσης, αυτή περιγράφεται από τη σχέση (2.5), ενώ παράλληλα διαπιστώσαμε ότι η επιβολή μιας παραμόρφωσης αρμονικής μορφής συνεπάγεται την εφαρμογή μιας τάσης αντίστοιχης μορφής με μία διαφορά φάσης. Αυτή η τελευταία παρατήρηση μας δίνει τη δυνατότητα να θεωρήσουμε ότι και στην περίπτωση που το αίτιο είναι η επιβολή μιας τάσης της μορφής $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$, η παρατηρούμενη παραμόρφωση θα προκύπτει από τη σχέση (2.5) και θα είναι,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E^*(i\omega)} \sigma(t) \quad (2.15)$$

Σε αντιστοιχία τώρα με το μιγαδικό μέτρο χαλάρωσης η μιγαδική ενδοτικότητα θα ορίζεται από τη σχέση,

$$\varepsilon(t) = D^*(i\omega) \sigma(t) \quad (2.16)$$

όπου $D^*(i\omega) = D'(\omega) - iD''(\omega)$, οπότε συγκρίνοντας τις (2.15) και (2.16), προκύπτει τελικά η ακόλουθη έκφραση ανάμεσα στα δυναμικά μέτρα,

$$D^*(i\omega) = \frac{1}{E^*(i\omega)} \quad (2.17)$$

η οποία, όπως είναι φανερό, είναι πολύ πιο απλοποιημένη από την αντίστοιχη που ισχύει ανάμεσα στις συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας.

Όμοια με την περίπτωση της χαλάρωσης, προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις ανάμεσα στην ενδοτικότητα και τα δυναμικά μέτρα, όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι $D_e = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = D(\infty)$. Έχουμε δηλαδή ότι,

$$D'(\omega) = D_e - \omega \int_0^{\infty} (D_e - D(t')) \sin \omega t' dt' \quad (2.18)$$

$$D''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} (D_e - D(t')) \cos \omega t' dt' \quad (2.19)$$

όπου $D'(\omega)$ καλείται ενδοτικό μέτρο αποθήκευσης και $D''(\omega)$ είναι το ενδοτικό μέτρο απωλειών, ενώ ο συντελεστής απωλειών θα δίνεται και πάλι από τον λόγο του $D''(\omega)$ προς το $D'(\omega)$.

$$\tan \delta(\omega) \equiv \frac{D''(\omega)}{D'(\omega)} \quad (2.20)$$

2.2 Φάσματα καθυστέρησης και χαλάρωσης.

Όπως είδαμε υλικά τα οποία ακολουθούν έναν σχετικά απλό μηχανισμό χαλάρωσης, μπορούν να προσεγγιστούν με τη βοήθεια απλών εκθετικών συναρτήσεων ή από το άθροισμα αυτών. Στην πραγματικότητα βέβαια τα υλικά παρουσιάζουν μια ιξωδοελαστική συμπεριφορά που καλύπτει αρκετές δεκάδες στο πεδίο του χρόνου, και επομένως δεν είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούν πλήρως με αυτόν τον τρόπο.

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι μπορούμε για μικρά χρονικά διαστήματα να περιγράψουμε αυτή την ιξωδοελαστική συμπεριφορά με τμήματα απλών εκθετικών συναρτήσεων, τότε μπορεί να προκύψει μια συνάρτηση, έστω για το μέτρο χαλάρωσης $E(t)$, η οποία αποτελείται από μια κατανομή εκθετικών συναρτήσεων ως ακολούθως,

$$E(t) - E_e = \int_{-\infty}^{\infty} H(\rho) e^{-\frac{t}{\rho}} d \ln \rho = \int_0^{\infty} \frac{H(\rho)}{\rho} e^{-\frac{t}{\rho}} d\rho \quad (2.21)$$

όπου η συνάρτηση $H(\rho)$ καλείται φάσμα χαλάρωσης και $E_e = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = E(\infty)$ το μέτρο ισορροπίας.

Όμοια ορίζεται και το φάσμα για την περίπτωση του ερπυσμού, οπότε η συνάρτηση ενδοτικότητας μπορεί να γραφεί ως,

$$D(t) = D(0) + \frac{t}{\eta} + \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d \ln \tau \quad (2.22)$$

ή

$$D(t) = D(0) + \frac{t}{\eta} + \int_0^{\infty} \frac{L(\tau)}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) d\tau \quad (2.23)$$

όπου η αντιπροσωπεύει το ασυμπτωτικό ιξώδες, το οποίο για τα στερεά είναι άπειρο και επομένως ο όρος t/η μηδενίζεται, ενώ η συνάρτηση $L(\tau)$ καλείται φάσμα καθυστέρησης [2].

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, όσον αφορά τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης, μπορούμε πλέον να εκφράσουμε και τις δυναμικές συναρτήσεις με βάση αυτά σύμφωνα με τις σχέσεις,

$$E'(\omega) = E_e + \int_0^{\infty} \frac{H(\rho)}{\rho} \frac{\omega^2 \rho^2}{1 + \omega^2 \rho^2} d\rho \quad (2.24)$$

$$E''(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{H(\rho)}{\rho} \frac{\omega \rho}{1 + \omega^2 \rho^2} d\rho \quad (2.25)$$

για την χαλάρωση, ενώ όμοια προκύπτουν και για τον ερπυσμό, όπου

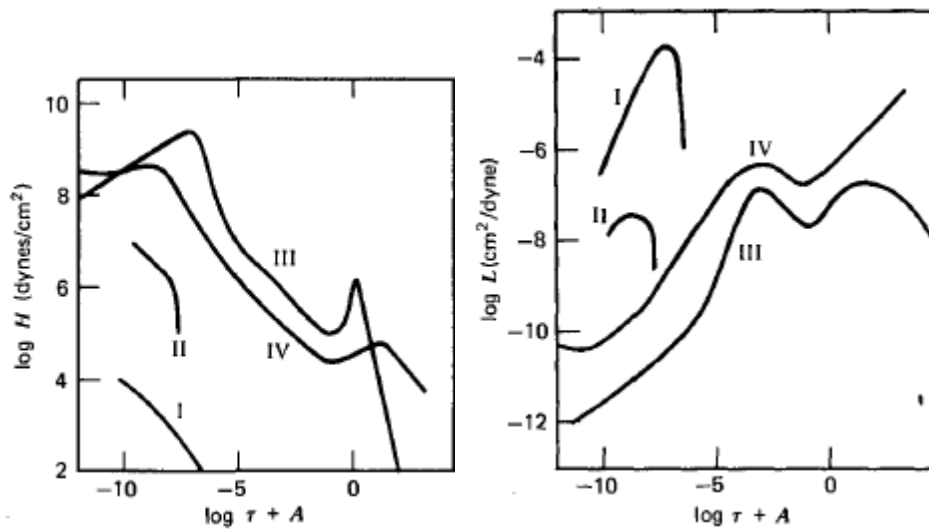
$$D'(\omega) = D(0) + \int_0^{\infty} \frac{L(\tau)}{\tau} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \quad (2.26)$$

$$D''(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{L(\tau)}{\tau} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau \quad (2.27)$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης σχετίζονται μεταξύ τους, ενώ οι σχέσεις αυτές που τα συνδέουν, όπως αναλυτικά παρουσιάζονται από τους Ferry [2] και Lakes [3] στα βιβλία τους, είναι,

$$L(\tau) = \frac{H(\tau)}{\left[E_e - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(u)}{u} d \ln u \right]^2 + \pi^2 H^2(\tau)} \quad (2.28)$$

$$H(\rho) = \frac{L(\rho)}{\left[D(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(u)}{1 - \frac{\rho}{u}} d \ln u \right]^2 + \pi^2 L^2(\rho)} \quad (2.29)$$



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση των φασμάτων χαλάρωσης (αριστερά) και καθυστέρησης (δεξιά) για διάφορα πολυμερή υλικά.[2]

Στο σχήμα 2.1 φαίνονται τυπικά γραφήματα των φασμάτων χαλάρωσης και καθυστέρησης πολυμερών υλικών, όπως είναι το poly(vinyl acetate) (II), η atactic polystyrene (III), το poly(n-octyl methacrylate) (IV).

2.3 Προσεγγιστικοί συσχετισμοί.

2.3.1 Γενικά

Πολλές από τις σχέσεις που έχουν παρουσιαστεί έως τώρα, παρά το γεγονός ότι είναι ακριβείς στο πεδίο της ιξωδοελαστικότητας, δεν μπορούν να ικανοποιήσουν πλήρως την ανάγκη της μετατροπής μιας ιξωδοελαστικής συνάρτησης σε μια άλλη. Κι αυτό γιατί στην διαδικασία εμπλέκονται ολοκληρώματα από το $-\infty$ έως το $+\infty$, χωρίς όμως η αρχικά γνωστή συνάρτηση, να ορίζεται σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος στο πεδίο του χρόνου ή της συχνότητας, ώστε τα ολοκληρώματα αυτά να συγκλίνουν. Παράλληλα η διαδικασία αυτή είναι ευαίσθητη και επομένως εισάγονται σφάλματα στο τελικό αποτέλεσμα. Για τους παραπάνω λόγους λοιπόν έχουν αναπτυχθεί προσεγγιστικές μέθοδοι για την εκτέλεση τέτοιου είδους υπολογισμών.

Οι περισσότερες από τις μεθόδους αυτές χρησιμοποιούν την πρώτη παράγωγο της αρχικά γνωστής συνάρτησης ή αντίστοιχων σχετικών με

αυτή συναρτήσεων, η οποία υπολογίζεται είτε γραφικά είτε αριθμητικά. Πάντως σε κάθε περίπτωση οι προσεγγιστικές μέθοδοι βασίζονται στις αντίστοιχες ακριβείς σχέσεις αλληλεξάρτησης των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων [2].

2.3.2 Εξαγωγή του φάσματος χαλάρωσης από το μέτρο χαλάρωσης (Προσέγγιση Alfrey).

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης εκφράζεται συναρτήσεως του φάσματος χαλάρωσης σύμφωνα με τη σχέση (2.21), η οποία μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$E(t) = E_e + \int_{-\infty}^{\infty} H(\rho) e^{-\frac{t}{\rho}} d \ln \rho \quad (2.30)$$

Όπως αναφέρει και ο Ferry στο βιβλίο του [2], παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του φάσματος χαλάρωσης $H(\rho)$ πολλαπλασιάζεται από μια συνάρτηση kernel $e^{-t/\rho}$, η οποία για $\rho = 0$ παίρνει την τιμή 0 ενώ για $\rho \rightarrow \infty$ την τιμή 1. Αν η τελευταία προσεγγιστεί από μία συνάρτηση βήματος η οποία λαμβάνει την τιμή 1 για $\rho = t$, τότε η σχέση (2.30) γίνεται,

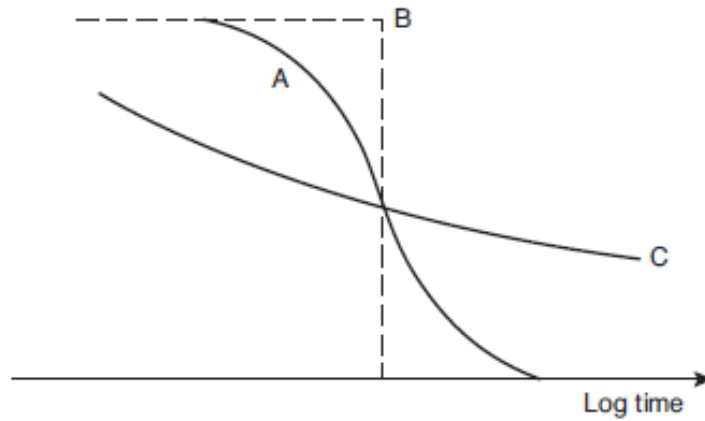
$$E(t) \cong E_e + \int_{\ln t}^{\infty} H(\rho) d \ln \rho \quad (2.31)$$

Με την παραγωγή της σχέσης (2.31) ως προς τη μεταβλητή $d \ln t$, θα πάρουμε τελικά την ακόλουθη έκφραση,

$$H(\rho) \cong - \left. \frac{dE(t)}{d \ln t} \right|_{t=\rho} \quad (2.32)$$

που σημαίνει ότι το φάσμα χαλάρωσης μπορεί κατά προσέγγιση να προσδιοριστεί από την εκάστοτε αρνητική κλίση της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης, όταν το τελευταίο αναπαρίσταται γραφικά ως προς τον λογάριθμο του χρόνου.

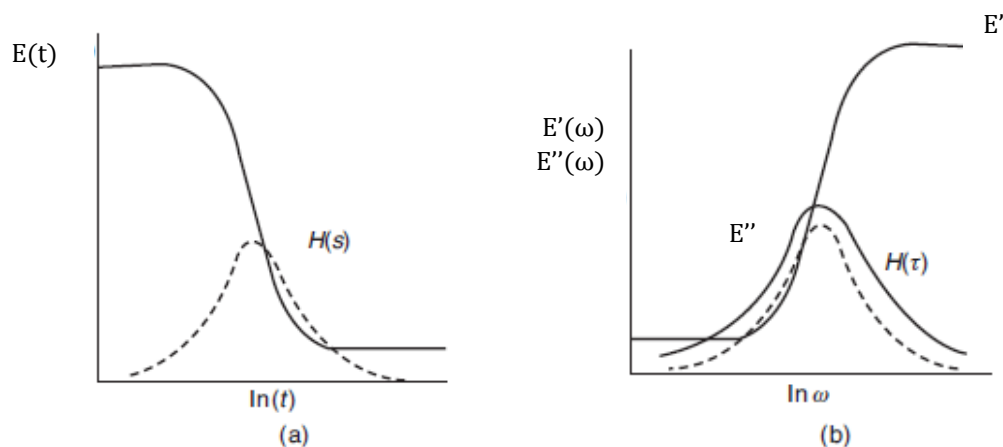
Η παραπάνω σχέση (2.32), είναι γνωστή ως η προσέγγιση Alfrey, ενώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν είναι ακριβής όταν το φάσμα χαλάρωσης μεταβάλλεται πολύ γρήγορα σε σχέση με τον χρόνο.



Σχήμα 2.2: Η προσέγγιση Alfrey. Η εκθετική συνάρτηση (kernel) A, αντικαθίσταται από τη βηματική συνάρτηση B. Η καμπύλη C αναπαριστά το μέτρο χαλάρωσης ενός τυπικού ιξωδοελαστικού πολυμερούς [4].

Παράλληλα, το φάσμα χαλάρωσης, όπως περιγράφει τόσο ο Ward [4] όσο και ο Lakes [3] στα βιβλία τους, μπορεί να προσεγγιστεί, κατά παρόμοιο τρόπο, μέσω του μέτρου αποθήκευσης και του μέτρου απωλειών, σύμφωνα με τις σχέσεις,

$$H(\rho) \cong - \left. \frac{dE'(\omega)}{d \ln \omega} \right|_{1/\omega=\rho} = \frac{2}{\pi} E''(\omega)|_{1/\omega=\rho} \quad (2.33)$$



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση προσεγγιστικών σχέσεων.

Οι παραπάνω σχέσεις (2.32) και (2.33), παριστάνονται γραφικά στο σχήμα 2.3.

2.3.3 Άλλες προσεγγιστικές σχέσεις.

Επιπλέον, προκειμένου να εξασφαλιστούν σχέσεις μεταξύ των θεμελιωδών συναρτήσεων της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας και στη συνέχεια να εξαχθούν από αυτές τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης, έχει χρησιμοποιηθεί η θεωρία του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού των συναρτήσεων αυτών, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο βιβλίο του Tschoegl (1989) [1].

Προκύπτουν λοιπόν οι ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις, οι οποίες μας δίνουν τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης με τη βοήθεια των μιγαδικών μέτρων.

$$H(\rho) \cong \pm \frac{1}{\pi} \text{Im}[E^*(i\omega)]|_{i\omega=\rho^{-1}e^{\pm i\pi}} \quad (2.34)$$

$$L(\tau) \cong \mp \frac{1}{\pi} \text{Im}[D^*(i\omega)]|_{i\omega=\tau^{-1}e^{\pm i\pi}} \quad (2.35)$$

Βέβαια είναι γενικά δύσκολο να προσδιοριστεί ένα συναρτησιακό του μιγαδικού μέτρου χαλάρωσης ή ένδοσης από τα πειραματικά δεδομένα, ενώ την ίδια στιγμή το μέτρο αποθήκευσης ως συνάρτηση της συχνότητας f ή της γωνιακής συχνότητας ω ($\omega = 2\pi f$), μπορούν να εξαχθούν πολύ πιο εύκολα.

Οι S. Bhattacharjee, A. K. Swamy και J. S. Daniel στην εργασία τους (2011) [5], και συγκεκριμένα στο παράρτημα Α, όπως και ο Tschoegl στο βιβλίο του (1989) [1], καταλήγουν στις ακόλουθες σχέσεις,

$$H(\rho) \cong \pm \frac{2}{\pi} \text{Im}[E'(\omega)]|_{\omega=\rho^{-1}e^{\pm i\pi/2}} \quad (2.36)$$

$$L(\tau) \cong \mp \frac{2}{\pi} \text{Im}[D'(\omega)]|_{\omega=\tau^{-1}e^{\pm i\pi/2}} \quad (2.37)$$

όπου είναι φανερό πως αν γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή των $E'(\omega)$ και $D'(\omega)$, μπορούμε να εξάγουμε τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης αντίστοιχα, σε συνεχή μορφή, αντικαθιστώντας όπου ω την παράσταση $\rho^{-1}e^{\pm i\pi/2}$ ή $\tau^{-1}e^{\pm i\pi/2}$.

3. Γενικευμένα μοντέλα Kelvin και Maxwell.

3.1 Γενικά.

Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο πως τα απλά μοντέλα Maxwell και Kelvin (Voigt) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν τα φαινόμενα της χαλάρωσης και του ερπυσμού αντίστοιχα, με τη βοήθεια απλών εκθετικών συναρτήσεων.

Καταλήξαμε λοιπόν στην παράγραφο 1.5.1 για το μοντέλο Maxwell, το οποίο όπως είδαμε αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο σε σειρά με έναν αποσβεστήρα, στην ακόλουθη σχέση για τη συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης,

$$E(t) = E e^{-\frac{t}{\rho}} \quad (3.1)$$

όπου $\rho = \tau = \eta/E$, με το η να αντιπροσωπεύει το ιξώδες του αποσβεστήρα, και το E την ελαστικότητα του ελατηρίου.

Αντίστοιχα στην παράγραφο 1.5.2, είδαμε για το μοντέλο Kelvin (Voigt), το οποίο αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο συνδεδεμένο εν παραλλήλω με έναν αποσβεστήρα, ότι η συνάρτηση ενδοτικότητας θα είναι,

$$D(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.2)$$

όπου $\tau = \eta/E$.

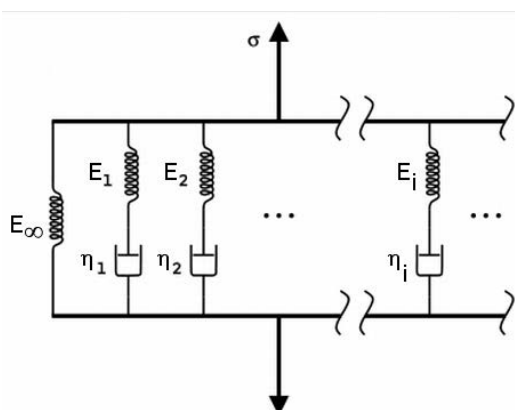
Τα παραπάνω όμως μοντέλα, όπως ήδη αναφέραμε, δεν μπορούν να περιγράψουν πλήρως την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών, όταν αυτή εξετάζεται για ένα πολύ μεγάλο διάστημα στο πεδίο του χρόνου, της τάξης των αρκετών δεκάδων.

Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται πιο πολύπλοκα μοντέλα, τα οποία προκύπτουν από τον συνδυασμό των απλών μοντέλων Maxwell και Kelvin. Τέτοια μοντέλα είναι και τα γενικευμένα Maxwell και Kelvin, τα οποία θα αναλύσουμε στη συνέχεια, καθώς και το τριπαραμετρικό μοντέλο που είδαμε στην παράγραφο 1.5.3.

3.2 Το γενικευμένο μοντέλο Maxwell.

Τοποθετώντας δύο ή περισσότερα απλά μοντέλα Maxwell συνδεδεμένα παράλληλα μεταξύ τους, προκύπτει το γενικευμένο μοντέλο Maxwell, για το οποίο η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης θα δίνεται από τη σχέση,

$$E(t) = \sum_{j=1}^N E_j e^{-\frac{t}{\rho_j}} \quad (3.3)$$



Σχήμα 3.1: Γενικευμένο μοντέλο Maxwell

Βλέπουμε λοιπόν ότι το $E(t)$ προκύπτει από την υπέρθεση απλών εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες αντιπροσωπεύουν κάθε ένα από τα μοντέλα Maxwell.

Μια τέτοια σειρά όπως αυτή της σχέσης (3.3) είναι γνωστή ως σειρά Prony, όπου οι όροι E_j αντιπροσωπεύουν την ελαστικότητα του ελατηρίου του εκάστοτε μοντέλου Maxwell, ενώ οι όροι $\rho_j = \eta_j/E_j$ τους αντίστοιχους χρόνους χαλάρωσης. Παράλληλα θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το μοντέλο που

αναλύθηκε, παριστάνει τη συμπεριφορά υλικών τα οποία παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ρευστών, ενώ για να μπορέσουμε να μοντελοποιήσουμε και υλικά χωρίς χαρακτηριστικά ρευστού, αρκεί η προσθήκη ενός μεμονωμένου ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1, με την αντίστοιχη σχέση του μέτρου χαλάρωσης να γίνεται,

$$E(t) = E_e + \sum_{j=1}^N E_j e^{-\frac{t}{\rho_j}} \quad (3.4)$$

όπου ο όρος E_e , όπως έχουμε ήδη δει, αντιπροσωπεύει την τιμή του μέτρου χαλάρωσης σε άπειρο χρόνο, και σε αντιστοιχία με το σχήμα 3.1 θα είναι $E_e = E_\infty$.

Η σχέση (3.4) μπορεί να γραφεί και με τον ακόλουθο τρόπο,

$$E(t) = E_g - \sum_{j=1}^N E_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho_j}}\right) \quad (3.5)$$

όπου

$$E_g = E(0) = E_e + \sum_{j=1}^N E_j \quad (3.6)$$

Με βάση τα παραπάνω λοιπόν, μπορούμε να υπολογίσουμε το μιγαδικό μέτρο χαλάρωσης, το οποίο θα είναι,

$$E^*(i\omega) = E_e + \sum_{j=1}^N \frac{E_j i\omega \rho_j}{1 + i\omega \rho_j} \quad (3.7)$$

ή

$$E^*(i\omega) = E_g - \sum_{j=1}^N \frac{E_j}{1 + i\omega \rho_j} \quad (3.8)$$

ανάλογα αν χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.4) ή (3.5) αντίστοιχα, και για τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών θα έχουμε ότι,

$$E'(\omega) = E_e + \sum_{j=1}^N \frac{E_j \omega^2 \rho_j^2}{1 + \omega^2 \rho_j^2} \quad \text{ή} \quad E'(\omega) = E_g - \sum_{j=1}^N \frac{E_j}{1 + \omega^2 \rho_j^2} \quad (3.9)$$

και

$$E''(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{E_j \omega \rho_j}{1 + \omega^2 \rho_j^2} \quad (3.10)$$

3.3 Συζυγή μοντέλα – Κανόνες Alfrey.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μια παρένθεση για να αναφερθούμε στα συζυγή μοντέλα. Δύο μοντέλα καλούνται συζυγή, όταν παρουσιάζουν πανομοιότυπη συμπεριφορά στην ίδια διέγερση. Προκειμένου τώρα να κατασκευάσουμε το συζυγές ενός μοντέλου το οποίο αποτελείται από συνδυασμό γραμμικών ελατηρίων και αποσβεστήρων, διατυπώθηκαν από τον Alfrey μια σειρά από κανόνες γνωστοί και ως κανόνες Alfrey [1].

Σύμφωνα λοιπόν με τους κανόνες αυτούς για να θεωρηθούν δύο μοντέλα συζυγή θα πρέπει:

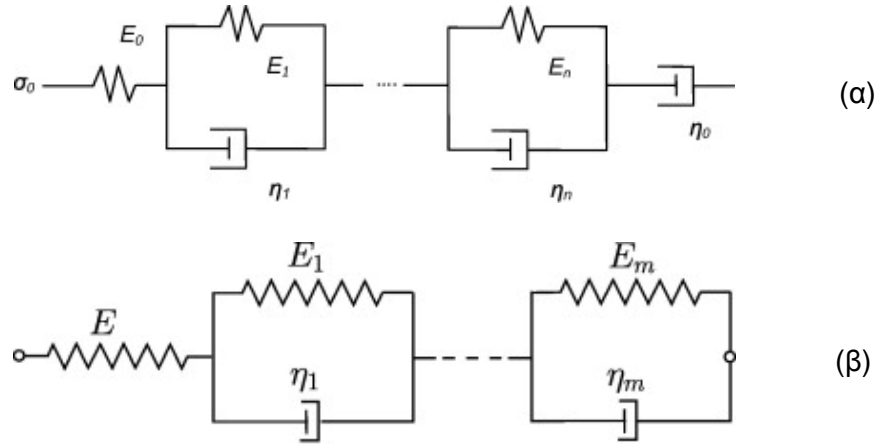
1. Ο αριθμός των στοιχείων από κάθε είδος (ελατήριο ή αποσβεστήρας) να παραμένει ο ίδιος.
2. Ο παράλληλος συνδυασμός δύο στοιχείων διαφορετικού είδους αντικαθίσταται από έναν συνδυασμό εν σειρά και αντίστροφα.
3. Η απουσία (παρουσία) ενός απομονωμένου στοιχείου ενός είδους, απαιτεί την παρουσία (απουσία) ενός απομονωμένου στοιχείου του άλλου είδους στο συζυγές μοντέλο.

Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι οι κανόνες Alfrey ισχύουν μόνο για τα εν σειρά ή εν παράλληλω συνδυασμένα μοντέλα.

3.4 Το γενικευμένο μοντέλο Kelvin.

Εφαρμόζοντας λοιπόν τους παραπάνω κανόνες στα γενικευμένα μοντέλα Maxwell που εξετάσαμε στην παράγραφο 3.2, προκύπτουν τα συζυγή

αυτών για ρευστή και μη ρευστή συμπεριφορά αντίστοιχα, όπως φαίνονται στο σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Γενικευμένο μοντέλο Kelvin για (α) ρευστή και (β) μη ρευστή συμπεριφορά.

Τα μοντέλο αυτό ονομάζεται γενικευμένο μοντέλο Kelvin, για το οποίο η συνάρτηση ενδοτικότητας, για τα υλικά με μη ρευστή συμπεριφορά, θα δίνεται από τη σχέση,

$$D(t) = D_g + \sum_{j=1}^M D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (3.11)$$

ή

$$D(t) = D_e - \sum_{j=1}^M D_j e^{-\frac{t}{\tau_j}} \quad (3.12)$$

όπου $D_g = D(0)$ και $D_e = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$, ενώ επίσης

$$D_e = D_g + \sum_{j=1}^M D_j \quad (3.13)$$

Όπως και στην περίπτωση του γενικευμένου μοντέλου Maxwell προηγουμένως, η μιγαδική ενδοτικότητα για το γενικευμένο Kelvin θα δίνεται από τις σχέσεις,

$$D^*(i\omega) = D_g + \sum_{j=1}^M \frac{D_j}{1 + i\omega\tau_j} \quad (3.14)$$

ή

$$D^*(i\omega) = D_e - \sum_{j=1}^M \frac{D_j i\omega\tau_j}{1 + i\omega\tau_j} \quad (3.15)$$

με τα ενδοτικά μέτρα αποθήκευσης και απωλειών να προσδιορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις,

$$D'(\omega) = D_g + \sum_{j=1}^M \frac{D_j}{1 + \omega^2\tau_j^2} \quad \text{ή} \quad D'(\omega) = D_e - \sum_{j=1}^M \frac{D_j\omega^2\tau_j^2}{1 + \omega^2\tau_j^2} \quad (3.16)$$

και

$$D''(\omega) = \sum_{j=1}^M \frac{D_j\omega\tau_j}{1 + \omega^2\tau_j^2} \quad (3.17)$$

3.5 Χρόνοι χαλάρωσης και καθυστέρησης.

Στις παραπάνω παραγράφους εκφράσαμε τις συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης $E(t)$ και της ενδοτικότητας $D(t)$, όπως προκύπτουν από τα γενικευμένα μοντέλα Maxwell και Kelvin αντίστοιχα, με τη βοήθεια των σειρών Prony, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.4),(3.5),(3.10) και (3.12).

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό Carson $\tilde{E}(s)$ και $\tilde{D}(s)$ των παραπάνω συναρτήσεων, ο οποίος ορίζεται από τις σχέσεις,

$$\tilde{E}(s) = s\bar{E}(s) \quad (3.18)$$

και

$$\tilde{D}(s) = s\bar{D}(s) \quad (3.19)$$

όπου $\bar{E}(s)$, $\bar{D}(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας αντίστοιχα.

Προκύπτουν λοιπόν οι ακόλουθες σχέσεις για τα γενικευμένα μοντέλα Maxwell και Kelvin αντίστοιχα.

$$\tilde{E}(s) = E_e + \sum_{j=1}^N \frac{E_j \rho_j s}{1 + \rho_j s} \quad (3.20)$$

και

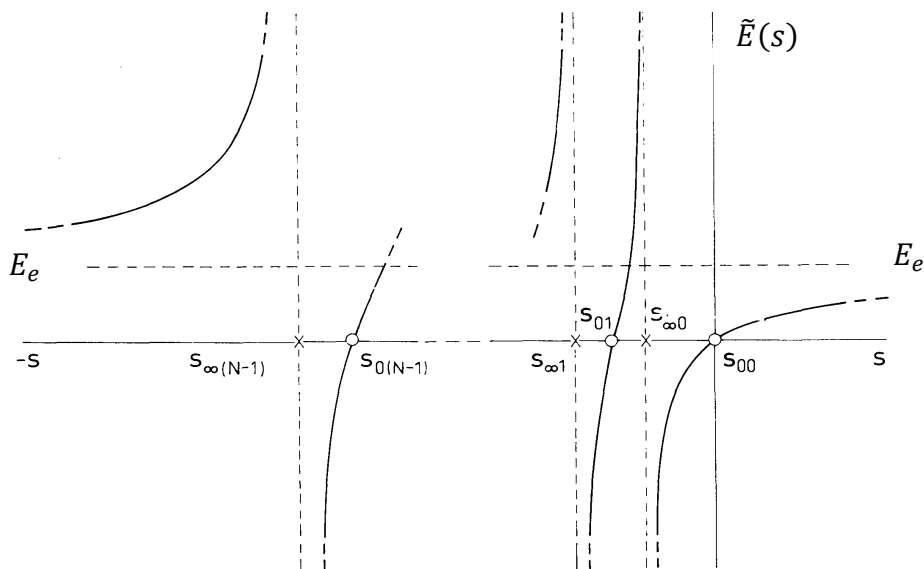
$$\tilde{D}(s) = D_g + \sum_{j=1}^M \frac{D_j}{1 + \tau_j s} \quad (3.21)$$

Από τις σχέσεις (3.18) και (3.19), ανακαλώντας από το κεφάλαιο 1 την (1.19), είναι φανερό ότι θα ισχύει,

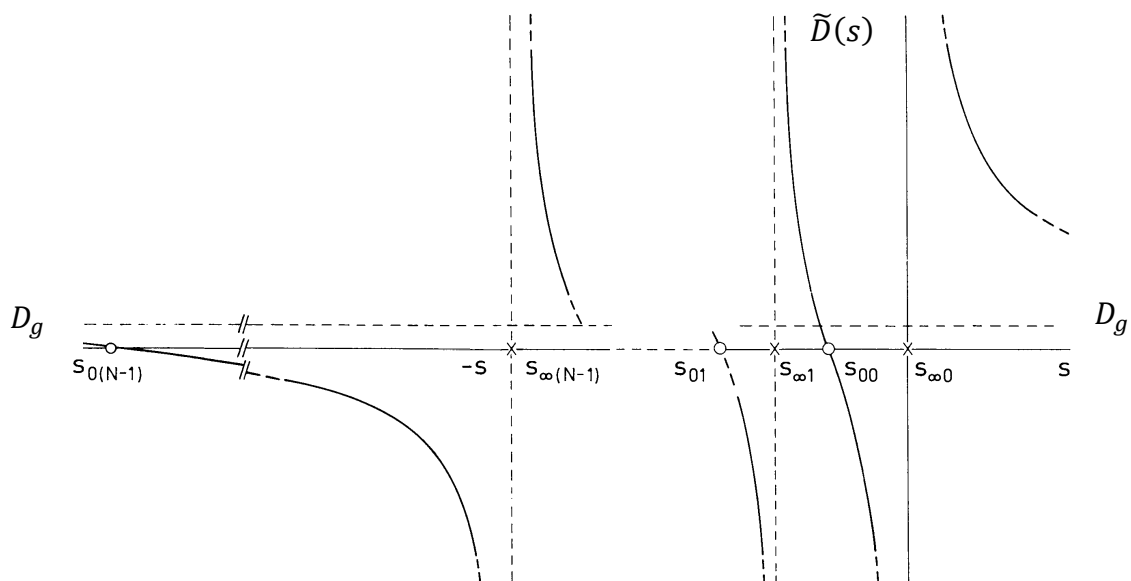
$$\tilde{E}(s)\tilde{D}(s) = 1 \quad (3.22)$$

γεγονός που αναδεικνύει ότι οι ρίζες της εξίσωσης $\tilde{E}(s) = 0$ θα αποτελούν σημεία απειρισμού της $\tilde{D}(s)$ και αντίστροφα, συνθήκη η οποία είναι αναγκαία για να χαρακτηριστούν δύο μοντέλα ως συζυγή [1]. Τέτοια μοντέλα είναι και τα γενικευμένα Maxwell και Kelvin, τα οποία αποτελούν και τον πιο συμφέροντα τρόπο για την προσέγγιση της χαλάρωσης και του ερπυσμού αντίστοιχα.

Τελικά αυτό που παρατηρούμε, είναι ότι τα σημεία μηδενισμού των $\tilde{E}(s)$, $\tilde{D}(s)$ εναλλάσσονται με τα αντίστοιχα σημεία απειρισμού, όπως φαίνεται και στα σχήματα 3.3 και 3.4, ενώ παράλληλα αυτά βρίσκονται στον αρνητικό ημιάξονα της μεταβλητής s , στο επίπεδο του μετασχηματισμού.



Σχήμα 3.3: Το $\tilde{E}(s)$ ως συνάρτηση του s .



Σχήμα 3.4: Το $\tilde{D}(s)$ ως συνάρτηση του s .

Αν προσπαθήσουμε τώρα να κατατάξουμε τα σημεία μηδενισμού και απειρισμού ανάλογα με το μέγεθός τους (τη θέση που κατέχουν στον αρνητικό ημιάξονα s) θα έχουμε για μεν τη χαλάρωση (σχήμα 3.3),

$$s_{01} > s_{\infty 1} > \dots > s_{0N} > s_{\infty N} \quad (3.23)$$

ενώ για τον ερπυσμό (σχήμα 3.4),

$$s_{\infty 1} > s_{01} > \dots > s_{\infty M} > s_{0M} \quad (3.24)$$

όπου s_{0j} και $s_{\infty j}$ αντιπροσωπεύουν τις τιμές της μεταβλητής s για τις οποίες παρατηρούνται τα σημεία μηδενισμού και απειρισμού αντίστοιχα των $\tilde{E}(s)$ και $\tilde{D}(s)$.

Παράλληλα θα πρέπει να επισημάνουμε ότι για την χαλάρωση (γενικευμένο μοντέλο Maxwell) τα σημεία απειρισμού αντιστοιχούν στο αρνητικό αντίστροφο των χρόνων χαλάρωσης, και συγκεκριμένα $s_{\infty j} = -1/\rho_j$, ενώ τα σημεία μηδενισμού αντιστοιχούν στους χρόνους καθυστέρησης του συζυγούς γενικευμένου μοντέλου Kelvin, δηλαδή $s_{0j} = -1/\tau_j$. Αντίστοιχα για τον ερπυσμό οι παραπάνω σχέσεις είναι ανεστραμμένες, δηλαδή $s_{\infty j} = -1/\tau_j$ και $s_{0j} = -1/\rho_j$ [1].

Με βάση λοιπόν τις σχέσεις (3.23) και (3.24), και τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως η κατάταξη των χρόνων χαλάρωσης και καθυστέρησης θα είναι,

$$\tau_1 > \rho_1 > \dots > \tau_N > \rho_N \quad (3.25)$$

Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα θα μας βοηθήσει αργότερα στο να προσδιορίσουμε τους χρόνους χαλάρωσης και καθυστέρησης κατά τη διαδικασία αλληλομετατροπής μεταξύ των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, που θα αναλυθεί παρακάτω.

4. Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης και ερπυσμού.

4.1 Γενικά – Η μέθοδος Collocation.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως μπορούμε να προσεγγίσουμε την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών με τη βοήθεια των γενικευμένων μοντέλων Maxwell και Kelvin, και την αντίστοιχη παράσταση αυτών μέσω των σειρών Prony. Τίθεται τώρα το ερώτημα, πως μπορούμε να εξάγουμε τις αριθμητικές εκείνες τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στα παραπάνω μοντέλα, έχοντας ως δεδομένα πειραματικές μετρήσεις του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας αντίστοιχα, για ένα ορισμένο διάστημα στο πεδίο του χρόνου.

Μια από τις μεθόδους που έχουν προταθεί είναι η μέθοδος Collocation, σύμφωνα με την οποία από έναν αριθμό M πειραματικών δεδομένων, χρησιμοποιείται ένας αριθμός $N < M$ από αυτά, έτσι ώστε να προσδιοριστούν οι παράμετροι E_k για την χαλάρωση ή D_k για τον ερπυσμό, που αντιστοιχούν στους επιλεγμένους χρόνους χαλάρωσης ρ_k ή καθυστέρησης τ_k αντίστοιχα, όπως περιγράφει αναλυτικά ο Schapery (1961) [6].

Η ουσία της μεθόδου έγκειται στην σύγκριση των επιλεγμένων πειραματικών τιμών, έστω του μέτρου χαλάρωσης E_{t_j} , (όμοια θα εργαστούμε και στην περίπτωση του ερπυσμού) με την αντίστοιχη τιμή που προκύπτει από την θεωρητική έκφραση της σχέσης (3.4) για τη χρονική στιγμή t_j . Δηλαδή,

$$E_{t_j} = E(t_j) = E_e + \sum_{k=1}^N E_k e^{-\frac{t_j}{\rho_k}} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

Προκύπτει λοιπόν ένα σύστημα N εξισώσεων, το οποίο βέβαια είναι πολύ δύσκολο να λυθεί, αφού περιέχει ως αγνώστους τόσο τις παραμέτρους

E_k , όσο και τους χρόνους χαλάρωσης ρ_k . Τη δυσκολία αυτή ήρθε να άρει η πρόταση του Schapery (1961) [6], ο οποίος συσχέτισε τους χρόνους χαλάρωσης με τους χρόνους t_j μέσω της σχέσης,

$$\rho_k = \alpha t_k \quad (4.2)$$

όπου α μια παράμετρος που προσδιορίζεται κατάλληλα. Με τον τρόπο αυτό απαλείφονται οι χρόνοι χαλάρωσης ως άγνωστοι του προβλήματος και έχουμε τελικά ένα σύστημα N εξισώσεων με μοναδικούς αγνώστους τις N το πλήθος παραμέτρους E_k .

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η επιλογή των πειραματικών δεδομένων, που θα χρησιμοποιηθούν, γίνεται σε χρονικές στιγμές t_j οι οποίες ισαπέχουν μεταξύ τους, σε λογαριθμική κλίμακα, ενώ παράλληλα η απόσταση αυτή δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ μεγάλη ούτε πολύ μικρή, ώστε να προκύψουν ρεαλιστικά αποτελέσματα ως προς τις τιμές των E_k και ρ_k (π.χ. να μην είναι αρνητικές).

Τέλος είναι φανερό ότι η μέθοδος Collocation δεν παράγει μοναδικά αποτελέσματα. Επιλέγοντας διαφορετικά σημεία δειγματοληψίας, διαφορετικούς χρόνους χαλάρωσης και διαφορετικές αποστάσεις των χρόνων αυτών μεταξύ τους, οδηγούμαστε σε ένα τελείως διαφορετικό αποτέλεσμα, ως προς τις ζητούμενες παραμέτρους, το οποίο βέβαια δεν μεταβάλλει την παραγόμενη καμπύλη, η οποία και πάλι διέρχεται από τα επιλεγμένα σημεία πειραματικών δεδομένων.

4.2 Η μέθοδος Multidata.

Σε αντίθεση με τη μέθοδο Collocation, η μέθοδος Multidata χρησιμοποιεί το σύνολο των πειραματικών δεδομένων, με αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση του σφάλματος στον προσδιορισμό των E_k και D_k .

Η περιγραφή της μεθόδου θα γίνει για τον προσδιορισμό των παραμέτρων E_k όπως κάναμε και παραπάνω, ενώ όμοιες διαδικασίες ακολουθούμε και για τον προσδιορισμό των παραμέτρων D_k .

Είδαμε στο κεφάλαιο 3 ότι η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των σειρών Prony μέσω της σχέσης (3.4). Έστω τώρα ότι E_{t_j} ($j = 1, 2, \dots, M$) οι πειραματικές τιμές του μέτρου χαλάρωσης στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές t_j . Θεωρούμε το άθροισμα των τετραγώνων της διαφοράς των πειραματικών τιμών E_{t_j} από την θεωρητική $E(t_j)$, όπως προκύπτει από την σχέση (3.4) για τους αντίστοιχους χρόνους, οπότε θα είναι

$$K = \sum_{j=1}^M [E_{t_j} - E(t_j)]^2 \quad (4.3)$$

ή

$$K = \sum_{j=1}^M \left[E_{t_j} - E_e - \sum_{k=1}^N E_k e^{-\frac{t_j}{\rho_k}} \right]^2 \quad (4.4)$$

όπου M το πλήθος των πειραματικών δεδομένων.

Δεδομένου λοιπόν ότι και σε αυτή τη μέθοδο οι χρόνοι χαλάρωσης είναι προκαθορισμένοι (Schapery 1961) [6], στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τις παραμέτρους E_k που υπεισέρχονται στη σχέση (3.4), ώστε το υπολογιζόμενο σφάλμα μέσω της σχέσης (4.4) να είναι το ελάχιστο δυνατό. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί να ισχύει $\frac{dK}{dE_k} = 0$, οπότε προκύπτει η σχέση,

$$2 \sum_{j=1}^M [E_{t_j} - E(t_j)] e^{-\frac{t_j}{\rho_k}} = 0 \quad (4.5)$$

αφού

$$\frac{dE(t_j)}{dE_k} = \frac{d}{dE_k} \left(E_e + \sum_{k=1}^N E_k e^{-\frac{t_j}{\rho_k}} \right) = e^{-\frac{t_j}{\rho_k}} \quad (4.6)$$

Η σχέση (4.5) αντιστοιχεί σε ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους (τις παραμέτρους E_k), το οποίο μπορεί πολύ εύκολα να λυθεί.

Στην παραπάνω μέθοδο, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο βιβλίο του Tschoegl (1989) [1], παρατηρούμε ότι εκτός των χρόνων χαλάρωσης οι οποίοι προσδιορίζονται εκ των προτέρων και θεωρούνται γνωστοί, θα πρέπει να

προσδιοριστεί και το μέτρο χαλάρωσης ισορροπίας E_e , το οποίο προκύπτει από την αξιολόγηση των πειραματικών δεδομένων στο άπειρο ή σε πολύ μεγάλους χρόνους, αφού ως γνωστόν είναι,

$$E_e = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) \quad (4.7)$$

4.3 Η μέθοδος Multidata – Μια παραλλαγή.

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μια παραλλαγή της μεθόδου Multidata, που αποτελεί ένα συνδυασμό των μεθόδων που παρουσιάζονται στις εργασίες των J. Kaschta, F. R. Schwarzl (1994) [7] και R. M. Guedes et All (1998) [8], παραλλαγή που χρησιμοποιήθηκε και για την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων σε σειρές Prony, στην παρούσα εργασία.

Σύμφωνα λοιπόν με τον J. Kaschta, οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i επιλέγονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, σε λογαριθμική κλίμακα, σύμφωνα με τη σχέση,

$$\rho_i = \rho_1 b^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

όπου b εκφράζει την απόσταση των χρόνων αυτών μεταξύ τους, ενώ από την άλλη πλευρά, το παράθυρο των πειραματικών δεδομένων $[t_1, t_M]$ είναι αυτονόητο ότι περιορίζει το παράθυρο εκείνο του φάσματος των χρόνων χαλάρωσης. Αυτό δηλαδή που περιμένουμε είναι,

$$\rho_1 \geq t_1 \quad \text{και} \quad \rho_N \leq t_M \quad (4.9)$$

όπου ο πρώτος χρόνος χαλάρωσης ρ_1 επιλέγεται βάσει της παρακάτω σχέσης (4.10).

$$\rho_1 = \alpha t_1 \quad (4.10)$$

Η παράμετρος α επιλέγεται αρχικά ελαφρώς μικρότερη της μονάδας, ενώ για να εξασφαλιστεί ότι ο χρόνος χαλάρωσης ρ_N δεν υπερβαίνει σημαντικά τον χρόνο t_M , εισάγεται μια επιπλέον συνθήκη σχετικά με το πλήθος N των παραμέτρων E_i που εισάγονται στην περιγραφή της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης σύμφωνα με την σχέση (3.4).

Η συνθήκη που προτείνεται από τον J. Kaschta είναι,

$$N = \text{Integer} \frac{\log(t_M/\rho_1)}{\log b} \quad (4.11)$$

ενώ αντίστοιχα ο R. M. Guedes χρησιμοποιεί την ακόλουθη ανισότητα,

$$N \leq \text{Integer} \frac{\log(t_M/t_1)}{\log b} + 2 \quad (4.12)$$

σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε και στην παρούσα εργασία.

Παράλληλα αντί του απόλυτου σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο J. Kaschta αξιολογεί το σχετικό σφάλμα, μέσω της έκφρασης,

$$K = \sum_{j=1}^M \left[\frac{E_{t_j} - E(t_j)}{E_{t_j}} \right]^2 \quad (4.13)$$

ή αλλιώς,

$$K = \sum_{j=1}^M \left[1 - \frac{E_e + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t_j}{\rho_i}}}{E_{t_j}} \right]^2 \quad (4.14)$$

Όμοια με την παράγραφο 4.2, επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τους αγνώστους του προβλήματος οι οποίοι ελαχιστοποιούν την σχέση (4.13) ή (4.14). Θεωρώντας ως αγνώστους τόσο τον όρο E_e όσο και τις παραμέτρους E_i , η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το K είναι,

$$\frac{dK}{dE_e} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dK}{dE_i} = 0 \quad (4.15)$$

οπότε προκύπτει ένα σύστημα $N + 1$ εξισώσεων με $N + 1$ αγνώστους, το οποίο μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως ακολούθως.

$$A^T A \begin{Bmatrix} E_e \\ \vdots \\ E_N \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{t_1}} & \frac{1}{E_{t_1}} e^{-\frac{t_1}{\rho_1}} & \frac{1}{E_{t_1}} e^{-\frac{t_1}{\rho_2}} & \dots & \frac{1}{E_{t_1}} e^{-\frac{t_1}{\rho_N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{E_{t_M}} & \frac{1}{E_{t_M}} e^{-\frac{t_M}{\rho_1}} & \frac{1}{E_{t_M}} e^{-\frac{t_M}{\rho_2}} & \dots & \frac{1}{E_{t_M}} e^{-\frac{t_M}{\rho_N}} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Αφού λοιπόν καθοριστεί η τιμή b της απόστασης των χρόνων χαλάρωσης σε λογαριθμική κλίμακα, επιλέγεται μια αρχική τιμή για την παράμετρο α πλησίον της μονάδας και υπολογίζονται στη συνέχεια οι χρόνοι αυτοί βάση των σχέσεων (4.8) και (4.10), καθώς και οι παράμετροι E_e και E_i , από την επίλυση του συστήματος (4.16), για τις οποίες ενδέχεται μία ή περισσότερες να έχουν αρνητική τιμή.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την παράμετρο α με μία ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή και επαναλαμβάνουμε τους παραπάνω υπολογισμούς έως ότου όλες οι ζητούμενες παράμετροι γίνουν θετικές για πρώτη φορά, οπότε και υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων του σχετικού σφάλματος βάσει της σχέσης (4.14). Η αντικατάσταση της παραμέτρου α συνεχίζεται μέχρι να προκύψουν εκείνες οι θετικές τιμές για τα E_e και E_i οι οποίες ελαχιστοποιούν το K .

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι συνεχίζοντας να μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου α , θα προκύψει και κάποιο άλλο παράθυρο θετικών παραμέτρων, με τη διαφορά ότι η τιμή του K θα είναι μεγαλύτερη.

Είναι φανερό λοιπόν ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν με την τελευταία μέθοδο, οδηγούν σε ακριβή αναπαράσταση των πειραματικών δεδομένων με τη βοήθεια των σειρών Prony, όπως θα δούμε και σε επόμενα κεφάλαια, ενώ παράλληλα δεν απαιτεί την χρήση ειδικών προγραμμάτων για την εφαρμογή της, καθώς καταλήγει στην επίλυση ενός απλού συστήματος εξισώσεων.

Τέλος θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η διαδικασία που περιγράψαμε για την χαλάρωση, εφαρμόζεται και στην περίπτωση του ερπυσμού, με τη διαφορά ότι οι χρόνοι χαλάρωσης αντικαθίστανται από τους χρόνους καθυστέρησης, ενώ το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων θα έχει τη μορφή,

$$A^T A \begin{Bmatrix} D_g \\ \vdots \\ D_N \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{t_1}} & \frac{1}{D_{t_1}}(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}) & \frac{1}{D_{t_1}}(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_2}}) & \dots & \frac{1}{D_{t_1}}(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_N}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{D_{t_M}} & \frac{1}{D_{t_M}}(1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_1}}) & \frac{1}{D_{t_M}}(1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_2}}) & \dots & \frac{1}{D_{t_M}}(1 - e^{-\frac{t_M}{\tau_N}}) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

5. Αλληλομετατροπή των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων.

5.1 Γενικά.

Όπως αναφέρει και ο Tschoegl στο βιβλίο του [1], όλες οι συναρτήσεις στο πεδίο της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας περιέχουν ουσιαστικά την ίδια πληροφορία όσον αφορά την συμπεριφορά των υλικών την οποία και περιγράφουν, υπό την αίρεση ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές για το σύνολο του πεδίου ορισμού τους.

Με λίγα λόγια δηλαδή όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι ισοδύναμες, γεγονός που γίνεται ακόμα πιο εμφανές αν συνειδητοποιήσουμε ότι η μία σχετίζεται με την άλλη, μέσω των αποκρίσεών τους, οι οποίες αποκρίσεις εκφράζονται με τη σειρά τους από τον μετασχηματισμό Carson, όπως αυτός ορίστηκε στην παράγραφο 3.5 από τις σχέσεις (3.20) και (3.21).

Είδαμε λοιπόν ότι μεταξύ αυτών των αποκρίσεων ισχύει η σχέση,

$$\tilde{E}(s)\tilde{D}(s) = 1 \quad (5.1)$$

όπου είναι αντίστοιχα, μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace των σχέσεων (3.18) και (3.19),

$$E(t) = L^{-1} \left[\frac{\tilde{E}(s)}{s} \right] \quad (5.2)$$

και

$$D(t) = L^{-1} \left[\frac{\tilde{D}(s)}{s} \right] \quad (5.3)$$

ενώ παράλληλα συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.7) και (3.14) με τις (3.20) και (3.21) αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για το μιγαδικό μέτρο χαλάρωσης και την μιγαδική ενδοτικότητα.

$$E^*(i\omega) = \tilde{E}(s)|_{s=i\omega} \quad (5.4)$$

και

$$D^*(i\omega) = \tilde{D}(s)|_{s=i\omega} \quad (5.5)$$

Επομένως κάθε συνάρτηση στο πεδίο της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας μπορεί, τουλάχιστον θεωρητικά, να μετατραπεί σε οποιαδήποτε άλλη. Αυτές οι σχέσεις και η αλληλομετατροπή τους θα εξεταστούν σε αυτό το κεφάλαιο. Πως όμως προέκυψε αυτή η ανάγκη μετατροπής μιας συνάρτησης σε μια άλλη και τι εξυπηρετεί μια τέτοια διαδικασία.

Πρώτον όταν αναφερόμαστε στις ιξωδοελαστικές αποκρίσεις, διαχωρίζουμε αυτές σε δύο βασικές κατηγορίες, ανάλογα αν προκύπτουν έχοντας ως διέγερση την επιβολή μιας παραμόρφωσης (χαλάρωση) ή μιας τάσης (ερπυσμός). Γενικά η χαλάρωση επικεντρώνεται στα φαινόμενα που παρατηρούνται σε μικρούς χρόνους, ενώ ο ερπυσμός σε αυτά που συμβαίνουν σε αντίστοιχα μεγάλους χρόνους. Είναι φανερό λοιπόν ότι η αλληλομετατροπή μεταξύ αυτών των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων είναι επιθυμητή ώστε να αποκτηθεί μια πληρέστερη εικόνα για την συμπεριφορά του υλικού.

Παράλληλα μια δεδομένη διέγερση δεν είναι δυνατόν να δώσει πειραματικά δεδομένα που να καλύπτουν ολόκληρο το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης ιξωδοελαστικής συνάρτησης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί από τον συνδυασμό των αποκρίσεων σε διαφορετικές διεγέρσεις, διαδικασία που απαιτεί την αλληλομετατροπή μεταξύ αυτών των αποκρίσεων τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

5.2 Αλληλομετατροπή από χαλάρωση σε ερπυσμό.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν και πάλι το γενικευμένο μοντέλο Maxwell, το οποίο, όπως έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελείται από ένα ελατήριο και m το πλήθος απλά στοιχεία Maxwell συνδεδεμένα παράλληλα. Η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης που προκύπτει για το μοντέλο αυτό θα δίνεται από τη σχέση,

$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (5.6)$$

όπου ρ_i οι χρόνοι χαλάρωσης.

Από την άλλη πλευρά μπορούμε να προσεγγίσουμε την συμπεριφορά του υλικού στον ερπυσμό μέσω ενός γενικευμένου μοντέλου Kelvin, το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο σε σειρά με n το πλήθος απλά στοιχεία Kelvin, με την αντίστοιχη συνάρτηση ενδοτικότητας να προκύπτει από τη σχέση,

$$D(t) = D_g + \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (5.7)$$

όπου τ_j οι χρόνοι καθυστέρησης, ενώ ανακαλώντας τους κανόνες Alfrey ώστε τα δύο παραπάνω μοντέλα να είναι συζυγή και κατά συνέπεια οι συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας να είναι ισοδύναμες, θα πρέπει $n = m$.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι μεταξύ των συναρτήσεων του μέτρου χαλάρωσης $E(t)$ και της ενδοτικότητας $D(t)$ ισχύει η ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση,

$$D(0)E(t) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad , t > 0 \quad (5.8)$$

όπου αν αντικαταστήσουμε σε αυτήν τις σχέσεις (5.6) και (5.7) θα πάρουμε αντίστοιχα ότι,

$$D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) + \int_0^t \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t-\tau}{\rho_i}} \right) \frac{d}{d\tau} \left(D_g + \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right) \right) d\tau = 1 \Rightarrow$$

$$D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) + \int_0^t \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t-\tau}{\rho_i}} \right) \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{\tau_j} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} d\tau = 1 \Rightarrow$$

$$D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) + E_e \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{\tau_j} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} d\tau + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{E_i D_j}{\tau_j} e^{-\frac{t}{\rho_i}} \int_0^t e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_j} - \frac{\tau}{\rho_i}\right)} d\tau = 1 \quad (5.9)$$

Τα ολοκληρώματα που εισάγονται στην σχέση (5.9) μπορούν εύκολα να υπολογιστούν, οπότε θα έχουμε

$$\int_0^t e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} d\tau = \left[-\tau_j e^{-\frac{\tau}{\tau_j}} \right]_0^t = \tau_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \quad (5.10)$$

$$\int_0^t e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_j} - \frac{\tau}{\rho_i}\right)} d\tau = \left[-\frac{\tau_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_j} - \frac{\tau}{\rho_i}\right)} \right]_0^t = \frac{\tau_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_j} - \frac{t}{\rho_i}\right)} \right), \rho_i \neq \tau_j \quad (5.11)$$

και επομένως αντικαθιστώντας τις (5.10) και (5.11) στην (5.9) θα πάρουμε τελικά ότι,

$$D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) + E_e \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{E_i D_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} e^{-\frac{t}{\rho_i}} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_j} - \frac{t}{\rho_i}\right)} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) + E_e \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{E_i D_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) = 1 \quad (5.12)$$

η οποία σχέση (5.12) μπορεί να γραφεί και στις ακόλουθες δύο μορφές, ανάλογα με το ποιες είναι οι ζητούμενες παράμετροι κάθε φορά. Θα είναι λοιπόν,

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \frac{E_i \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + E_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] D_j = 1 - D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) \quad (5.13)$$

και

$$\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{D_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + D_g e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] E_i = 1 - E_e \left(D_g + \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) \quad (5.14)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις είναι φανερό ότι αν είναι γνωστοί οι παράμετροι E_e , E_i , ρ_i ή αντίστοιχα οι D_g , D_j , τ_j και εφόσον οι χρόνοι καθυστέρησης ή χαλάρωσης της ζητούμενης συνάρτησης αντίστοιχα είναι

προσδιορισμένοι εκ των προτέρων (Scharery 1961), μπορούμε να εξάγουμε αυτή την ζητούμενη συνάρτηση ενδοτικότητας $D(t)$ ή του μέτρου χαλάρωσης $E(t)$ αντίστοιχα.

Έστω λοιπόν ότι διαθέτουμε πειραματικά δεδομένα για το μέτρο χαλάρωσης, από τα οποία με τη βοήθεια των μεθόδων που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4, προσδιορίζουμε τις παραμέτρους E_e , E_i και ρ_i . Παράλληλα ορίζουμε και τους αντίστοιχους χρόνους καθυστέρησης τ_j , σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν για τα σημεία μηδενισμού και απειρισμού των αποκρίσεων $\tilde{E}(s)$ και $\tilde{D}(s)$ στην παράγραφο 3.5, και θα αναλυθούν παρακάτω αναλυτικότερα. Τότε, σύμφωνα και με όσα αναφέρουν στην εργασία τους οι Park και Scharery (1999) [9], από την σχέση (5.13) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων με τη μορφή πινάκων, με αγνώστους τις παραμέτρους D_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Είναι δηλαδή,

$$[A]\{D\} = \{B\} \quad \text{ή} \quad A_{kj}D_j = B_k \quad (5.15)$$

όπου

$$A_{kj} = E_e \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{E_i \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right)$$

και

$$B_k = 1 - D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} \right)$$

όπου t_k ($k = 1, 2, \dots, p$) αντιπροσωπεύει έναν διακριτό χρόνο ο οποίος αντιστοιχεί στο πάνω όριο του ολοκληρώματος (5.8).

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων που περιγράφεται από τη σχέση (5.15), χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Collocation, οπότε ο αριθμός των χρόνων δειγματοληψίας t_k είναι ίσος με το πλήθος των χρόνων καθυστέρησης ($p = n$), ενώ θα είναι $t_k = \alpha \tau_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) με την παράμετρο α να παίρνει τις τιμές $\alpha = 1$ ή $\alpha = 1/2$, όπου στην παρούσα εργασία έχει ληφθεί η τιμή $\alpha = 1$. Επιπλέον ο όρος D_g μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των E_e και E_i , σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις οι οποίες βασίζονται στο

θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής του μετασχηματισμού Laplace (Churchill, 1958) όπως παρουσιάζονται και στο παράρτημα Α της εργασίας των Park και Schapery (1999) [9]. Θα είναι επομένως,

$$D_g \equiv \lim_{t \rightarrow 0} D(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{D}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{E}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} E(t)} = \frac{1}{E_e + \sum_{i=1}^m E_i} \quad (5.16)$$

Από τη στιγμή λοιπόν που από την παραπάνω διαδικασία υπολογίζουμε τις παραμέτρους D_g , D_j και τ_j , μπορούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις ενδοτικότητας $D(t)$, $\bar{D}(s)$, $D'(\omega)$ και $D''(\omega)$ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.11), (3.21), (3.16) και (3.17) αντίστοιχα.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και στην περίπτωση που έχουμε πειραματικά δεδομένα για την ενδοτικότητα, και αφού έχουμε προσαρμόσει αυτά με τη βοήθεια των μεθόδων που περιεγράφηκαν στο κεφάλαιο 4 σε σειρά Prony, τότε από τη σχέση (5.14) προκύπτει ένα αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων με αυτό της σχέσης (5.15), με αγνώστους τις παραμέτρους E_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Θα είναι δηλαδή,

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad \text{ή} \quad A_{ki}E_i = B_k \quad (5.17)$$

όπου,

$$A_{ki} = D_g e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} + \sum_{j=1}^n \frac{D_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t_k}{\rho_i}} - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right)$$

και

$$B_k = 1 - E_e \left(D_g + \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t_k}{\tau_j}} \right) \right)$$

Και σε αυτή την περίπτωση για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που περιγράφεται από τη σχέση (5.17), χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Collocation, όπου οι χρόνοι δειγματοληψίας t_k επιλέγονται ώστε $t_k = \alpha \rho_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), με την παράμετρο α να φέρει την τιμή $\alpha = 1$, ενώ παράλληλα ο όρος E_e προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση, κατ' αντιστοιχία με τον όρο D_g , δηλαδή,

$$E_e \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{E}(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{D}(s)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} D(t)} = \frac{1}{D_g + \sum_{j=1}^n D_j} \quad (5.18)$$

5.3 Προσδιορισμός των χρόνων χαλάρωσης/καθυστέρησης.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, υπάρχει σχέση που συνδέει τα σημεία μηδενισμού και απειρισμού των αποκρίσεων $\tilde{E}(s)$ και $\tilde{D}(s)$ με τους χρόνους χαλάρωσης και καθυστέρησης, οι οποίοι εμπλέκονται στην αναπαράσταση των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων με τη βοήθεια των σειρών Prony.

Συγκεκριμένα για το γενικευμένο μοντέλο Maxwell, τα σημεία απειρισμού της απόκρισης $\tilde{E}(s)$ αντιστοιχούν στο αρνητικό αντίστροφο των χρόνων χαλάρωσης ($s_{\infty j} = -1/\rho_j$), ενώ τα αντίστοιχα σημεία μηδενισμού εκφράζουν το αρνητικό αντίστροφο των χρόνων καθυστέρησης του συζυγούς γενικευμένου μοντέλου Kelvin ($s_{0j} = -1/\tau_j$).

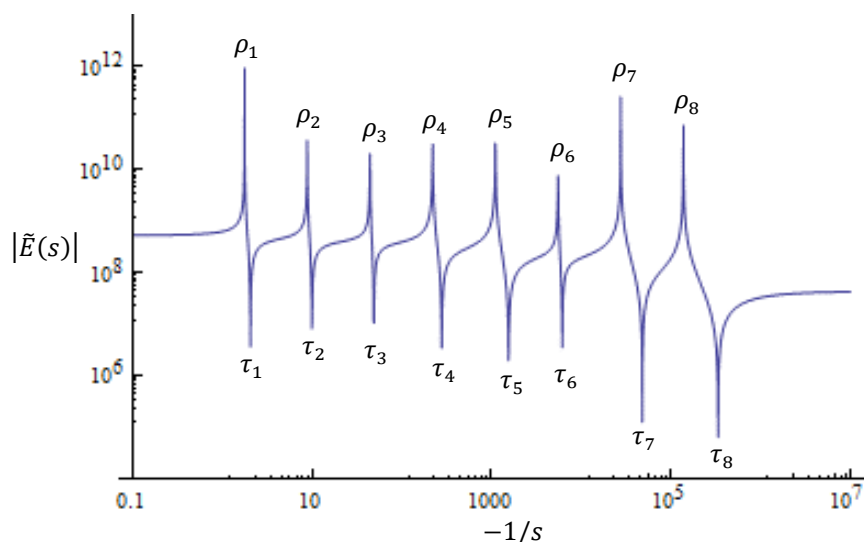
Οι Park και Schapery (1999) [9], όπως αναλυτικά περιγράφουν στο παράρτημα Β της εργασίας τους, εξέφρασαν τις παραπάνω σχέσεις ως ακολούθως.

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\rho_i}} \tilde{E}(s) = \pm \infty \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.19)$$

και

$$\lim_{s \rightarrow -\frac{1}{\tau_j}} \tilde{E}(s) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (5.20)$$

Είναι φανερό λοιπόν από την σχέση (5.20), ότι εάν είναι γνωστές οι παράμετροι E_e , E_i και ρ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), τότε μπορούν να προσδιοριστούν οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), ως το αρνητικό αντίστροφο των λύσεων της εξίσωσης $\tilde{E}(s) = 0$, ($s < 0$), ενώ η εύρεση των λύσεων αυτών μπορεί να γίνει πολύ εύκολα γραφικά, μέσω της αναπαράστασης της συνάρτησης $\tilde{E}(s)$. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται η γραφική αυτή παράσταση της μεταβολής της απόλυτης τιμής του $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$), σε λογαριθμική κλίμακα αξόνων.



Σχήμα 5.1: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$).

Οι κορυφές που αντιστοιχούν στα μέγιστα εκφράζουν τους γνωστούς χρόνους χαλάρωσης ρ_i , ενώ εκείνες οι κορυφές που αντιστοιχούν στα ελάχιστα προσδιορίζουν τους ζητούμενους χρόνους καθυστέρησης τ_j .

Αντίστοιχα μπορούμε να προσδιορίσουμε τους χρόνους χαλάρωσης ρ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) όταν είναι γνωστά τα D_g , D_j και τ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) αναπαριστώντας γραφικά τη μεταβολή της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$), σε λογαριθμική κλίμακα αξόνων. Σε αυτή την περίπτωση τα μέγιστα θα αντιστοιχούν στους χρόνους καθυστέρησης τ_j , ενώ τα ελάχιστα στους ζητούμενους χρόνους χαλάρωσης ρ_i .

5.4 Προσδιορισμός σφάλματος.

Για την αξιολόγηση του σφάλματος που υπεισέρχεται στην μέθοδο αυτή μετατροπής από τη μία συνάρτηση στην άλλη, οι Park και Schapery (1999) [9] εισήγαγαν έναν τρόπο αξιολόγησης της σχέσης (5.8),

$$D(0)E(t) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{dD(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad , t > 0$$

χρησιμοποιώντας την αρχικά δεδομένη συνάρτηση και την αντίστοιχη ζητούμενη, οι οποίες είναι πλέον εκπεφρασμένες ως σειρές Prony σύμφωνα με τις σχέσεις (5.6) και (5.7).

Εφόσον το δεξιό μέλος της εξίσωσης (5.8) είναι πάντοτε μονάδα, τότε η τιμή του αριστερού μέλους που προκύπτει για κάθε χρονική στιγμή, με αντικατάσταση σε αυτό των αντίστοιχων εκφράσεων των (5.6) και (5.7), αν αφαιρεθεί από τη μονάδα, μας δίνει ένα κανονικοποιημένο μέτρο προσδιορισμού του σφάλματος.

Συγκεκριμένα και με τη βοήθεια των σχέσεων (5.13) και (5.14), το σφάλμα αυτό θα δίνεται από τις σχέσεις,

$$er = 1 - D_g \left(E_e + \sum_{i=1}^m E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right) - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \frac{E_i \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + E_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right] D_j \quad (5.21)$$

ή

$$er = 1 - E_e \left(D_g + \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{D_j \rho_i}{\rho_i - \tau_j} \left(e^{-\frac{t}{\rho_i}} - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) + D_g e^{-\frac{t}{\rho_i}} \right] E_i \quad (5.22)$$

Παράλληλα και δεδομένου ότι επιθυμούμε να διαπιστώσουμε κατά πόσο η εξαγόμενη μέσω της ανωτέρω ιξωδοελαστική συνάρτηση επαληθεύει τα πειραματικά δεδομένα σε κάθε περίπτωση, θα χρησιμοποιηθεί ως δείκτης το απόλυτο σφάλμα μεταξύ των λογαρίθμων των θεωρητικών και πειραματικών τιμών, το οποίο απλοποιείται και μπορεί να εκφραστεί ως ο λογάριθμος του λόγου της πειραματικής τιμής, προς την αντίστοιχη θεωρητική τιμή που προκύπτει από την μετατροπή. Δηλαδή αν (t_j, E_{t_j}) θεωρήσουμε τις πειραματικές τιμές έστω της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης, και $E(t_j)$ είναι η αντίστοιχη θεωρητική τιμή, ο ανωτέρω δείκτης απόκλισης θα είναι,

$$\psi = \log E_{t_j} - \log E(t_j) = \log \frac{E_{t_j}}{E(t_j)} \quad (5.23)$$

6. Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων δυναμικών μέτρων και εξαγωγή συναρτήσεων μέτρου χαλάρωσης και ενδοτικότητας.

6.1 Γενικά.

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πως μπορούμε να εξάγουμε μια ιξωδοελαστική συνάρτηση όταν είναι γνωστά πειραματικά δεδομένα μιας άλλης ιξωδοελαστικής συνάρτησης, με την αναπαράσταση αυτών μέσω των σειρών Prony και εκμεταλλευόμενοι την ολοκληρωτική σχέση που ισχύει μεταξύ τους.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια πρακτική και απλή προσέγγιση για την εξαγωγή της ζητούμενης συνάρτησης μέσω του προσδιορισμού ενός συνεχούς φάσματος χαλάρωσης ή καθυστέρησης, έχοντας βέβαια ως αφετηρία πειραματικά ή μη δεδομένα για τα δυναμικά μέτρα χαλάρωσης και ενδοτικότητας [5].

Όπως γνωρίζουμε το μιγαδικό μέτρο χαλάρωσης $E^*(i\omega)$ εκφράζεται με τη βοήθεια του μέτρου αποθήκευσης $E'(\omega)$ και του μέτρου απωλειών $E''(\omega)$ σύμφωνα με τις σχέσεις,

$$E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (6.1)$$

με

$$E'(\omega) = |E^*(i\omega)| \cos \delta \quad E''(\omega) = |E^*(i\omega)| \sin \delta \quad \tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (6.2)$$

όπου δ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης και της παρατηρούμενης τάσης, ενώ $|E^*(i\omega)|$ το μέτρο του μιγαδικού μέτρου χαλάρωσης.

Αντίστοιχα η μιγαδική ενδοτικότητα $D^*(i\omega)$ και το πραγματικό (ενδοτικό μέτρο αποθήκευσης $D'(\omega)$) και φανταστικό (ενδοτικό μέτρο απωλειών $D''(\omega)$) της μέρος προκύπτουν από τις σχέσεις,

$$D^*(i\omega) = \frac{1}{E^*(i\omega)} = D'(\omega) - iD''(\omega) \quad (6.3)$$

αφού

$$D^*(i\omega)E^*(i\omega) = 1 \quad (6.4)$$

οπότε, αντικαθιστώντας την (6.1) στην (6.3) προκύπτει ότι,

$$D'(\omega) = \frac{E'(\omega)}{E'^2(\omega) + E''^2(\omega)} \quad \text{και} \quad D''(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'^2(\omega) + E''^2(\omega)} \quad (6.5)$$

ενώ αντίστοιχα προκύπτουν το μέτρο αποθήκευσης και απωλειών, αν είναι γνωστά τα αντίστοιχα μεγέθη του ερπυσμού, μέσω των σχέσεων,

$$E'(\omega) = \frac{D'(\omega)}{D'^2(\omega) + D''^2(\omega)} \quad \text{και} \quad E''(\omega) = \frac{D''(\omega)}{D'^2(\omega) + D''^2(\omega)} \quad (6.6)$$

6.2 Προσαρμογή πειραματικών δεδομένων δυναμικών και εξαγωγή φασμάτων.

Για την προσαρμογή τώρα των πειραματικών δεδομένων του μέτρου αποθήκευσης $E'(\omega)$ ή το ενδοτικό μέτρο αποθήκευσης $D'(\omega)$, και την μαθηματική παράσταση αυτών των μεγεθών, χρησιμοποιούμε μια σιγμοειδή συνάρτηση της μορφής,

$$\log \chi(f) = k_1 \pm \frac{k_2}{1 + e^{(k_3 - k_4 \log f)}} \quad \text{ή} \quad \ln \chi(\omega) = A \pm \frac{B}{1 + e^{(C - D \ln \omega)}} \quad (6.7)$$

ανάλογα αν εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας f ή της γωνιακής συχνότητας ω .

Στις παραπάνω σχέσεις θα είναι $\chi \equiv E'$ ή D' , ενώ οι συντελεστές A, B, C και D σχετίζονται με τους συντελεστές k_1, k_2, k_3 και k_4 , ως εξής: $A = 2,3026k_1, B = 2,3026k_2, C = k_3 + 0,7982k_4$ και $D = 0,4343k_4$. Επίσης θα

πρέπει να επισημάνουμε ότι το θετικό πρόσημο, στις σχέσεις (6.7), χρησιμοποιείται όταν $\chi \equiv E'$ και το αρνητικό πρόσημο όταν $\chi \equiv D'$.

Ο προσδιορισμός των συντελεστών που υπεισέρχονται στις σχέσεις (6.7), γίνεται με την ελαχιστοποίηση του σφάλματος μεταξύ των πειραματικών τιμών των E' ή D' και των αντίστοιχων θεωρητικών, όπως αυτό προκύπτει από την παρακάτω σχέση,

$$Y = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\log \chi_{f_i} - \log \chi(f_i)}{\log \chi_{f_i}} \right]^2 \quad \text{ή} \quad Y = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\ln \chi_{\omega_i} - \ln \chi(\omega_i)}{\ln \chi_{\omega_i}} \right]^2 \quad (6.8)$$

όπου $\chi_{f_i}, \chi_{\omega_i}$ είναι οι πειραματικές τιμές των E' ή D' για τις αντίστοιχες συχνότητες f_i ή γωνιακές συχνότητες ω_i αντίστοιχα, και $\chi(f_i), \chi(\omega_i)$ οι θεωρητικές τιμές για τις ίδιες συχνότητες.

Από τη σχέση λοιπόν (6.7), και εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι συντελεστές A, B, C και D , το μέτρο αποθήκευσης ή ενδοτικό μέτρο αποθήκευσης θα δίνονται από την έκφραση,

$$\chi(\omega) = e^A e^{\pm \frac{B}{1+e^{(C-D \ln \omega)}}} \quad (6.9)$$

Ανατρέχοντας στο δεύτερο κεφάλαιο και τις σχέσεις (2.36) και (2.37), είδαμε ότι τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης μπορούν να προσδιοριστούν από τις εκφράσεις,

$$H(\rho) \cong \pm \frac{2}{\pi} \text{Im}[E'(\omega)] \Big|_{\omega=\rho^{-1}e^{\pm \frac{i\pi}{2}}} \quad (6.10)$$

$$L(\tau) \cong \mp \frac{2}{\pi} \text{Im}[D'(\omega)] \Big|_{\omega=\tau^{-1}e^{\pm \frac{i\pi}{2}}} \quad (6.11)$$

στις οποίες αν αντικαταστήσουμε την σχέση (6.9), προκύπτουν τελικά οι ακόλουθες διαμορφώσεις για τα φάσματα, όπως αναλυτικά παρουσιάζονται στην εργασία των S. Bhattacharjee, A. K. Swamy και J. S. Daniel (2011) [5].

$$H(\rho) = \frac{2}{\pi} e^{\alpha_1} \sin \beta_1 \quad \text{και} \quad L(\tau) = \frac{2}{\pi} e^{\alpha_2} \sin \beta_2 \quad (6.12)$$

όπου,

$$\alpha_1 = \alpha_1(\rho) = A + \frac{B \left(e^{-\alpha} + \cos \frac{D\pi}{2} \right)}{e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2 \cos \frac{D\pi}{2}}$$

$$\beta_1 = \beta_1(\rho) = \frac{B \sin \frac{D\pi}{2}}{e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2 \cos \frac{D\pi}{2}} \quad \text{και} \quad \alpha = C + D \ln \rho$$

ενώ,

$$\alpha_2 = \alpha_2(\tau) = A - \frac{B \left(e^{-\alpha} + \cos \frac{D\pi}{2} \right)}{e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2 \cos \frac{D\pi}{2}}$$

$$\beta_2 = \beta_2(\tau) = \frac{B \sin \frac{D\pi}{2}}{e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2 \cos \frac{D\pi}{2}} \quad \text{και} \quad \alpha = C + D \ln \tau$$

Οι παραπάνω σχέσεις παρέχουν τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης ως συνεχείς συναρτήσεις ως προς τους χρόνους χαλάρωσης και καθυστέρησης αντίστοιχα, και επομένως, δεδομένου ότι υπάρχουν πειραματικά στοιχεία ως προς τα δυναμικά μέτρα, μπορούμε να αποκτήσουμε τα φάσματα σε συνεχή μορφή.

6.3 Εξαγωγή ιξωδοελαστικών συναρτήσεων από το φάσμα.

Έχοντας λοιπόν υπολογίσει το συνεχές φάσμα σύμφωνα με τις σχέσεις (6.12), μπορούμε να προχωρήσουμε εξάγοντας τις συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης ή της ενδοτικότητας, όπως προκύπτει από τις ακόλουθες εκφράσεις (Tschoegl, 1989) [1].

$$E(t) = E_g - \int_{-\infty}^{\infty} H(\rho) \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho}} \right) d \ln \rho \quad (6.13)$$

και

$$D(t) = D_g + \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) d \ln \tau \quad (6.14)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να αντικατασταθούν από αθροίσματα, δίνοντας έτσι μια ισοδύναμη παράσταση των $E(t)$ και $D(t)$ με τη βοήθεια των σειρών Prony, όπως έχει ήδη αναφερθεί [5]. Θα είναι λοιπόν,

$$E(t) = E_g - \sum_{i=1}^m E_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho_i}}\right) \quad \text{και} \quad D(t) = D_g - \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (6.15)$$

όπου,

$$E_i = H(\rho_i) d \ln \rho_i \quad \text{και} \quad D_j = L(\tau_j) d \ln \tau_j \quad (6.16)$$

ενώ τα $\ln \rho_i$, $\ln \tau_j$ κυμαίνονται από $-\infty$ έως $+\infty$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι λαμβάνοντας διακριτές τιμές των φασμάτων για συγκεκριμένους χρόνους χαλάρωσης ή καθυστέρησης αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στην έκφραση των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων ως σειρές Prony.

Παράλληλα, σύμφωνα με τους M. Baumgaertel και H. H. Winter (1992) [10], στην περίπτωση όπου οι χρόνοι χαλάρωσης ή καθυστέρησης λαμβάνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισαπέχουν σε λογαριθμική κλίμακα, έστω απόσταση b , οι σχέσεις (6.16) γίνονται,

$$E_i = H(\rho_i) \ln b \quad \text{και} \quad D_j = L(\tau_j) \ln b \quad (6.17)$$

όπου στην ειδική περίπτωση με $b = 2,72$ ή $\ln b = 1$ οι παράμετροι E_i και D_j ισοδυναμούν με το συνεχές φάσμα,

$$E_i = H(\rho_i) \quad \text{και} \quad D_j = L(\tau_j) \quad (6.18)$$

ενώ επίσης το διακριτοποιημένο φάσμα μεταπίπτει σε συνεχές στην οριακή περίπτωση που η απόσταση μεταξύ των χρόνων χαλάρωσης ή καθυστέρησης είναι πολύ μικρή ($b \rightarrow 1$).

Τέλος οι όροι E_g και D_g προκύπτουν από την αξιολόγηση των πειραματικών δεδομένων των δυναμικών συναρτήσεων για $t = 0$ ή $\omega \rightarrow \infty$, και $t \rightarrow \infty$ ή $\omega = 0$, γεγονός που καταδεικνύει την σημασία της ύπαρξης στοιχείων σε πολύ μεγάλες και αντίστοιχα πολύ μικρές συχνότητες, ώστε να μην εισάγονται μεγάλα σφάλματα στην τελική ζητούμενη συνάρτηση.

6.4 Συμπερασματικά.

Συνοψίζοντας λοιπόν, σε αυτό το κεφάλαιο είδαμε πως μπορούμε έχοντας ως αφετηρία πειραματικά δεδομένα του μέτρου αποθήκευσης $E'(\omega)$ και του ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης $D'(\omega)$, να εξάγουμε μία μαθηματική έκφραση των φασμάτων χαλάρωσης και καθυστέρησης αντίστοιχα, και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στις παραστάσεις των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων ως σειρές Prony.

Παράλληλα αναδεικνύεται και η δυνατότητα χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα έστω του μέτρου αποθήκευσης $E'(\omega)$ και του μέτρου απωλειών $E''(\omega)$, να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές του ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης $D'(\omega)$ μέσω των σχέσεων (6.5), και στη συνέχεια ακολουθώντας την διαδικασία που περιεγράφηκε στις παραγράφους 6.2 και 6.3, να καταλήξουμε στην συνάρτηση ενδοτικότητας $D(t)$.

7. Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα ευρείας κατηγορίας πολυμερικών συστημάτων.

7.1 Γενικά.

Όπως έχουμε δει έως τώρα, μπορούμε διαχειριζόμενοι τις σχέσεις που ισχύουν ανάμεσα στις θεμελιώδεις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις, να μεταπίπτουμε από τη μία στην άλλη καθώς αυτές είναι ισοδύναμες, και περιέχουν ουσιαστικά την ίδια πληροφορία. Αρχικά τα πειραματικά δεδομένα προσαρμόζονται σε σειρά Prony με τη βοήθεια της μεθόδου Multidata, όπως αυτή αναπτύχθηκε στην παράγραφο 4.3, ενώ στη συνέχεια εξάγεται η έτερη ιξωδοελαστική συνάρτηση, όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 5.

Παράλληλα αν είναι διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα των δυναμικών συναρτήσεων, και ακολουθώντας την διαδικασία του κεφαλαίου 6, μπορούμε να υπολογίσουμε τα φάσματα χαλάρωσης και καθυστέρησης, και στη συνέχεια να αποκτήσουμε μια έκφραση των βασικών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων και πάλι ως σειρές Prony.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα που εξάχθηκαν από την εργασία των P. Fernandez, D. Rodriguez, M. J. Lamela και A. Fernandez-Canteli (2011) [11] και αφορούν το πολυμερές polymethyl methacrylate (PMMA), καθώς επίσης και από δοκιμές που διεξήχθησαν από το εργαστήριο αντοχής των υλικών του τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π., υπό την καθηγήτρια Κα. Κοντού.

Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν στις δοκιμές αυτές ήταν: α) το πολυμερές Ecovio® LBX 8145 (EC) το οποίο αποτελεί μια μίξη του poly(butylene adipateterephthalate) (PBAT) copolyester (Ecoflex® FBX 7011)

που βασίζεται σε μη ανανεώσιμες πηγές, με το PLA (φυσικοί πόροι), και β) σύνθετο υλικό με μήτρα το Ecovio[®] LBX 8145 (EC) και έγκλεισμα ίνες ξύλου τύπου Lignocel[®] BK 40/90 σε ποσοστό 20% κ.β. (κατά βάρος) (EC20).

Για το PMMA τα πειραματικά δεδομένα παρατίθενται στον πίνακα Β.1 του παραρτήματος Β, ενώ τα πειράματα εκτελέστηκαν για μεν τη χαλάρωση και τον ερπυσμό σε ένα εύρος θερμοκρασιών 20-70°C με διάρκεια 1000 sec, για δε τα δυναμικά μεγέθη, σε ένα εύρος θερμοκρασιών 40-75°C με πεδίο συχνοτήτων από 0,01 έως 80 Hz. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των δοκιμών που εκτελέστηκε για κάθε περίπτωση ήταν τέσσερις (4) για την χαλάρωση, πέντε (5) για τον ερπυσμό και επτά (7) για τα δυναμικά, ενώ τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν διαστάσεων 40x10 mm για τα στατικά και 40x5 mm για τα δυναμικά πειράματα, πάχους περίπου 2 mm.

Όσον αφορά τώρα το EC και το σύνθετο EC20, τα πειραματικά δεδομένα παρατίθενται στους πίνακες Β.2 και Β.3 του παραρτήματος Β, ενώ οι δοκιμές εκτελέστηκαν για μεν τη χαλάρωση και τον ερπυσμό σε ένα εύρος θερμοκρασιών 30-60°C με βήμα αύξησης 5°C και διάρκεια 1800 sec, για δε τα δυναμικά το εύρος των συχνοτήτων ήταν από 1 έως 40 Hz, με την συνολική εκτέλεση πέντε (5) πειραμάτων. Τα χρησιμοποιούμενα δοκίμια ήταν διαστάσεων 14x3 mm και πάχους περίπου 1,2 mm, ενώ η συσκευή με την οποία διενεργήθηκαν οι εν λόγω δοκιμές ήταν η DMA TA Q800.

Για την εξαγωγή των τελικών καμπυλών και στις δύο περιπτώσεις, χρησιμοποιήθηκε η αρχή της υπέρθεσης χρόνου-θερμοκρασίας (Time Temperature Superposition – TTS) όπως περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 7.2, όπου οι θερμοκρασίες αναφοράς για το PMMA ήταν 40°C, ενώ για τα EC και το σύνθετο EC20 ήταν 30°C.

7.2 Επίδραση θερμοκρασίας – Υπέρθεση χρόνου-θερμοκρασίας

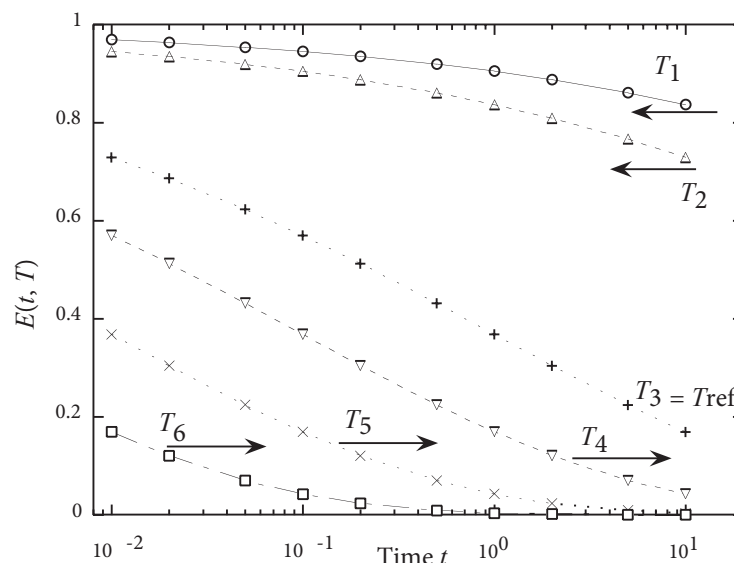
Όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα υπέθεταν ότι το υλικό καταπονούνταν σε συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας. Βέβαια οι ιξωδοελαστικές συναρτήσεις αναμένεται να εξαρτώνται τόσο από το χρόνο όσο και από τη θερμοκρασία, δεδομένου ότι η ιξωδοελαστική συμπεριφορά ενός υλικού προκύπτει ως

αποτέλεσμα των ανακατατάξεων που συμβαίνουν στη μοριακή δομή αυτού, υπό την επίδραση κάποιας τάσης, διαδικασία η οποία εξαρτάται άμεσα από την ταχύτητα της κίνησης των μορίων και κατά συνέπεια επηρεάζεται από τη μεταβολή της θερμοκρασίας.

Σύμφωνα λοιπόν με όσα αναφέρει στο βιβλίο του ο Lakes (2009) [3], αν όλες εκείνες οι διεργασίες που συμβάλουν στην ιξωδοελαστική συμπεριφορά ενός υλικού επιταχύνονται με τον ίδιο ρυθμό από μια αύξηση της θερμοκρασίας, τότε προκύπτει μια συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης (αντίστοιχα θα ισχύουν και για την συνάρτηση ενδοτικότητας) της μορφής,

$$E(t, T) = E(s, T_o) \quad (7.1)$$

όπου το $s = t/a_T(T)$ καλείται μειωμένος χρόνος (reduced time), T_o είναι η θερμοκρασία αναφοράς και $a_T(T)$ ο παράγοντας μετατροπής. Για τέτοιου είδους υλικά μια μεταβολή στη θερμοκρασία "τεντώνει" ή "συρρικνώνει" το αποτελεσματικό πεδίο του χρόνου, και δεδομένου ότι η γραφική παράσταση των ιξωδοελαστικών σταθερών γίνεται ως προς τον λογάριθμο του χρόνου ή της συχνότητας, αυτή η μεταβολή της θερμοκρασίας αντιπροσωπεύει μια οριζόντια μετακίνηση της αντίστοιχης καμπύλης κατά μήκος του άξονα του λογαριθμικού χρόνου ή συχνότητας, όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.1. Τα υλικά που συμπεριφέρονται με αυτόν τον τρόπο, υπακούνε στην αρχή της υπέρθεσης χρόνου-θερμοκρασίας, και ονομάζονται θερμορολογικά απλά.



Σχήμα 7.1: Καμπύλες χαλάρωσης για διάφορες τιμές θερμοκρασίας.

Ο παράγοντας τώρα $a_T(T)$ εξαρτάται τόσο από τη θερμοκρασία όσο και από το υλικό. Για τα πολυμερή, που μας απασχολούν και στην παρούσα εργασία, ο παράγοντας μετατροπής ακολουθεί την εμπειρική σχέση των Williams – Landel – Ferry (WLF), σύμφωνα με την οποία,

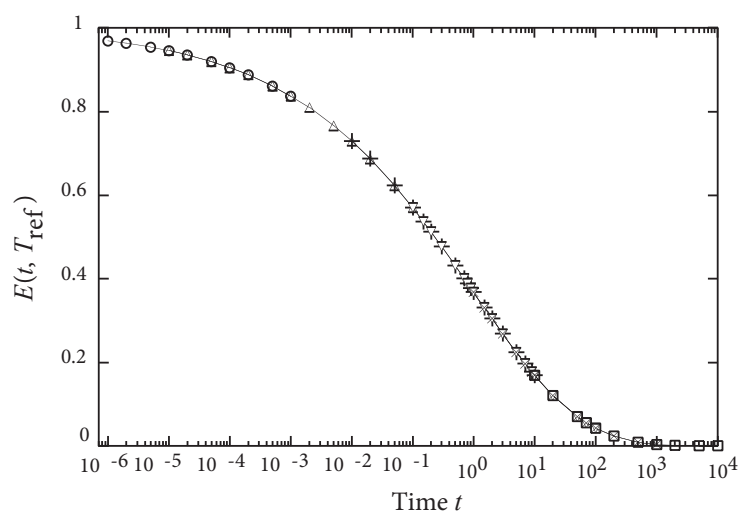
$$\log a_T(T) = -\frac{C_1(T - T_{ref})}{C_2 + (T - T_{ref})} \quad (7.2)$$

όπου T_{ref} η θερμοκρασία αναφοράς.

Η καμπύλη που προκύπτει από την υπέρθεση χρόνου-θερμοκρασίας ονομάζεται "master curve", και η διαδικασία που ακολουθείται για την εξαγωγή αυτής είναι η ακόλουθη:

1. Αρχικά επιλέγεται η θερμοκρασία αναφοράς για την οποία θα προκύψει η τελική "master curve", ενώ παράλληλα η καμπύλη (έστω χαλάρωσης) που αντιστοιχεί σε αυτή λαμβάνεται αυτούσια χωρίς να υπάρξει μετακίνηση.

2. Η "master curve" (σχήμα 7.2), όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.1, συντίθεται από την οριζόντια μετακίνηση των πειραματικών καμπυλών που προκύπτουν για θερμοκρασίες μεγαλύτερες ή μικρότερες της θερμοκρασίας αναφοράς, έως ότου αυτές συμπέσουν σε κάποιο βαθμό, όπως υποδεικνύουν τα βέλη.



Σχήμα 7.2: Τελική καμπύλη "master curve", όπως προκύπτει από τις καμπύλες του σχήματος 7.1 μέσω της υπέρθεσης χρόνου-θερμοκρασίας.

Στην περίπτωση που δεν είναι δυνατόν να υπάρξει σύμπτωση μεταξύ των καμπυλών, τότε το υλικό δεν είναι θερμορολογικά απλό, ενώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι πολλά από τα άμορφα πολυμερή είναι θερμορολογικά απλά, ενώ τα κρυσταλλικά πολυμερή και τα περισσότερα από τα σύνθετα δεν είναι.

7.3 Μετατροπή πειραματικών χαλάρωσης σε ερπυσμό.

7.3.1 Polymethyl Methacrylate (PMMA).

Αρχικά, και προκειμένου να προσαρμόσουμε τα πειραματικά δεδομένα του μέτρου χαλάρωσης σε σειρά Prony, επιλέγουμε την απόσταση των χρόνων χαλάρωσης σε λογαριθμική κλίμακα, όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 4.3, ως $b = 11$, έτσι ώστε να καλύψουμε όλο το εύρος στο πεδίο του χρόνου, ενώ παράλληλα η απόσταση αυτή να μην είναι ούτε πολύ μικρή ούτε πολύ μεγάλη. Στη συγκεκριμένη περίπτωση και θέλοντας να είμαστε σε αντιστοιχία με την εργασία των P. Fernandez et All (2011) [11], έγινε η ανωτέρω επιλογή απόστασης προκειμένου η σειρά Prony που θα προκύψει να έχει δέκα (10) όρους, όπως επαληθεύεται και από τη συνθήκη (4.12).

i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	0,063599	3,96E+08
2	0,699593	1,78E+08
3	7,695521	2,2E+08
4	84,65073	1,23E+08
5	931,1581	1,79E+08
6	10242,74	2,29E+08
7	112670,1	1,96E+08
8	1239371	3,53E+08
9	13633085	4,56E+08
10	1,5E+08	1,84E+08
$E_e = 1,42E+09$ Pa		

Πίνακας 7.1: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης για το PMMA

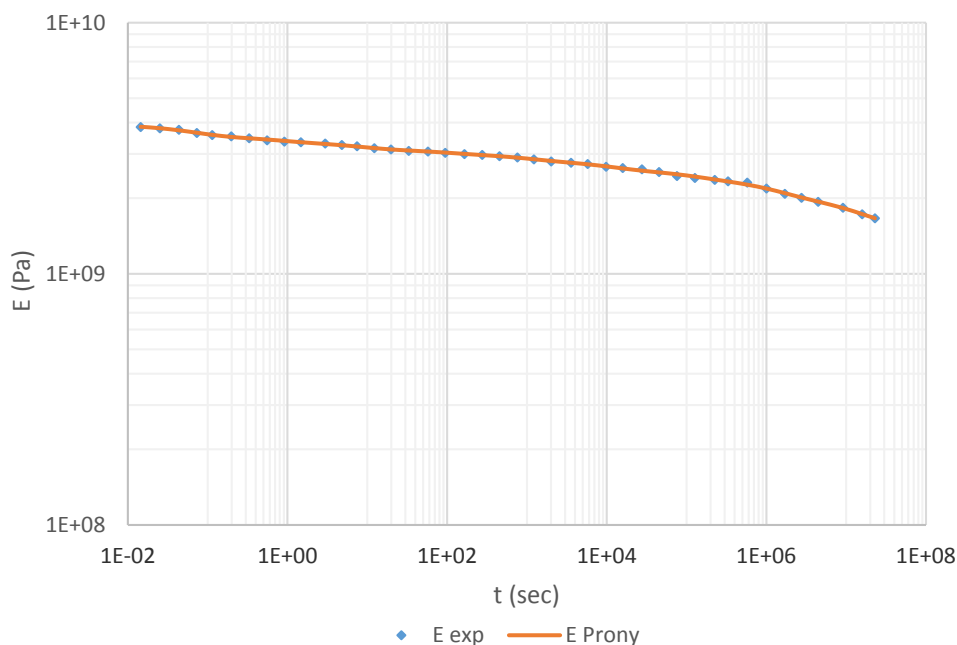
Η εφαρμογή της διαδικασίας που περιεγράφηκε στην παράγραφο 4.3, μας δίνει τους παραπάνω χρόνους χαλάρωσης ρ_i , (προέκυψαν για τιμή της παραμέτρου $\alpha = 4,4$ από τις σχέσεις (4.8) και (4.10)), καθώς και τις αντίστοιχες τιμές για τις παραμέτρους E_e και E_i , όπως παρουσιάζονται στον πίνακα 7.1.

Παράλληλα το σφάλμα που υπεισέρχεται, όπως προκύπτει από τη σχέση (4.13) η οποία εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των εκάστοτε σχετικών σφαλμάτων, θα είναι

$$K = 0,00127$$

ενώ στο σχήμα 7.3 παρουσιάζονται γραφικά τα πειραματικά δεδομένα για τη χαλάρωση, σε αντιπαράθεση με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την θεωρητική έκφραση του μέτρου χαλάρωσης ως σειρά Prony, σύμφωνα με την σχέση,

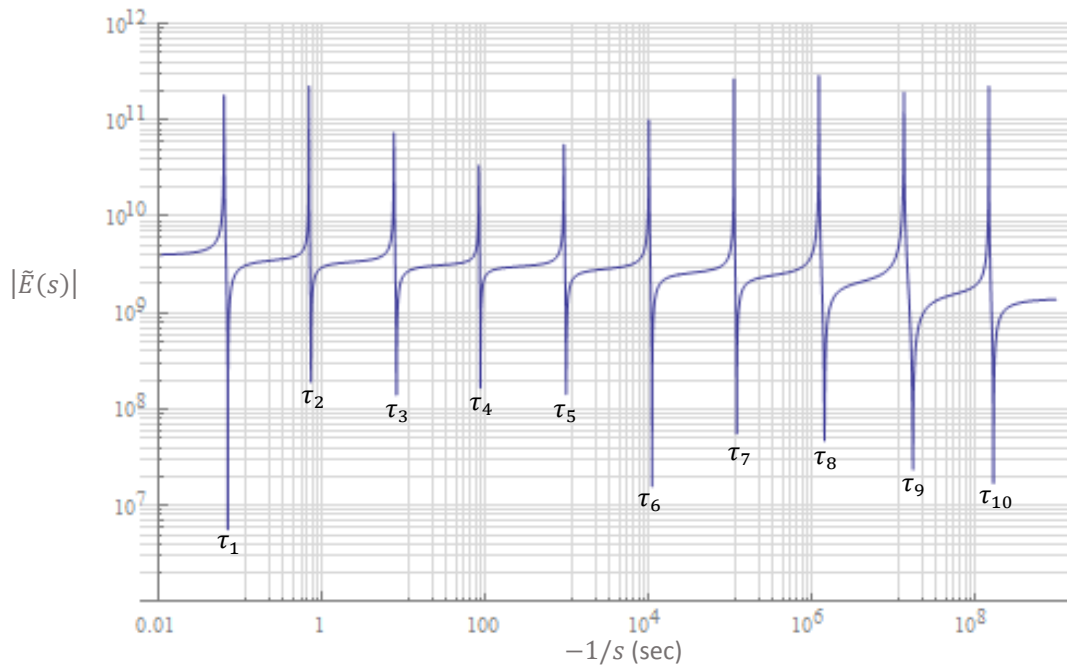
$$E(t) = E_e + \sum_{i=1}^{10} E_i e^{-\frac{t}{\rho_i}} \quad (7.3)$$



Σχήμα 7.3: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης σε σειρά Prony, για το PMMA.

Οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j προσδιορίζονται, σύμφωνα με όσα έχουν περιγραφεί στην παράγραφο 5.3, με τη βοήθεια της γραφικής

απεικόνιση της απόλυτης τιμής της απόκρισης $\tilde{E}(s)$, ως προς το $-1/s$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 7.4 (εκφράζονται από τις τιμές που αντιστοιχούν στα ελάχιστα), ενώ παράλληλα από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που περιγράφεται από τη σχέση (5.15), προκύπτουν οι αντίστοιχες παράμετροι D_j της αναπαράστασης της συνάρτησης ενδοτικότητας ως σειράς Prony.



Σχήμα 7.4: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το PMMA.

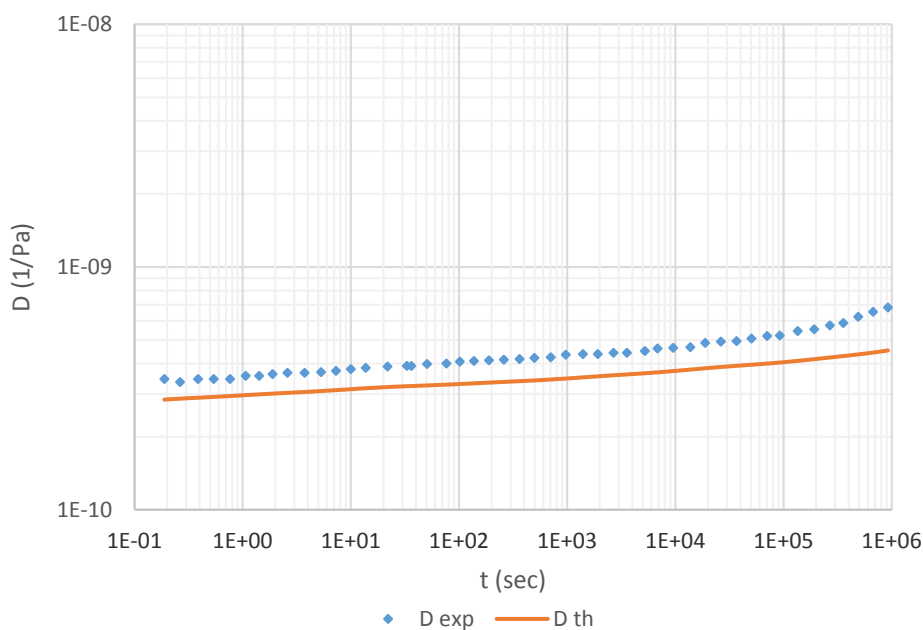
Στον ακόλουθο πίνακα 7.2 παρουσιάζονται οι παραπάνω συντελεστές για τον ερπυσμό, καθώς και ο όρος D_g , ο οποίος προκύπτει από τη σχέση (5.16), και συνθέτουν την συνάρτηση ενδοτικότητας για το PMMA ως σειρά Prony, σύμφωνα με τη σχέση,

$$D(t) = D_g + \sum_{j=1}^{10} D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}} \right) \quad (7.4)$$

ενώ στο σχήμα 7.5 παρουσιάζονται γραφικά τα πειραματικά δεδομένα για τον ερπυσμό, σε αντιπαράθεση με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την θεωρητική έκφραση της ενδοτικότητας (σχέση (7.4)), βάση των στοιχείων του πίνακα 7.2.

j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	0,070678	2,81E-11
2	0,736889	1,51E-11
3	8,234866	2,09E-11
4	88,09906	1,3E-11
5	989,5157	2,07E-11
6	11139,02	3,07E-11
7	121726	3,05E-11
8	1447607	6,82E-11
9	17521263	1,38E-10
10	1,7E+08	8,52E-11
$D_g = 2,54E-10$ 1/Pa		

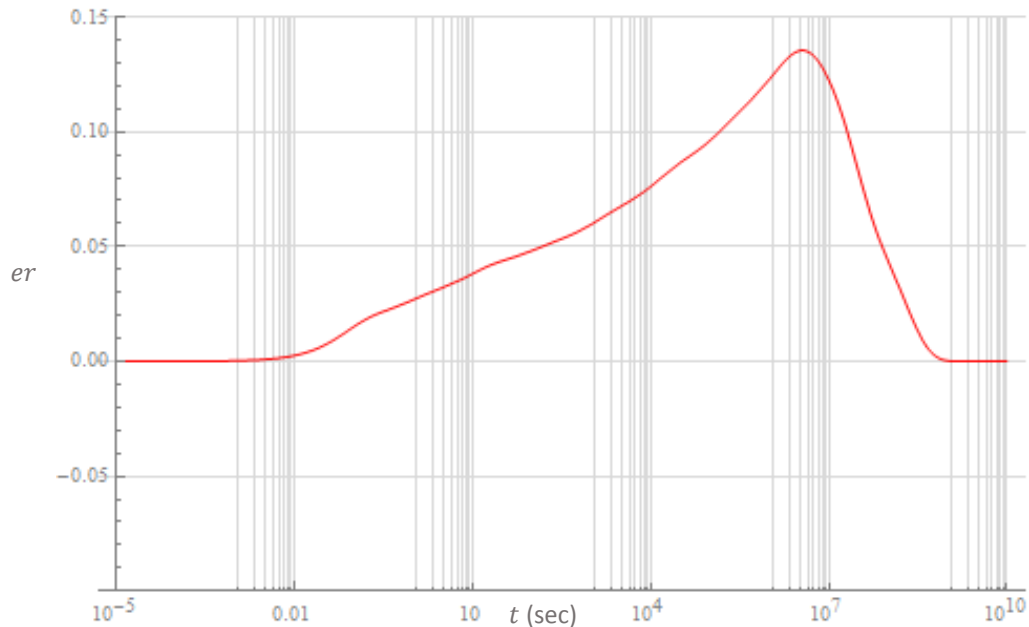
Πίνακας 7.2: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά του μέτρου χαλάρωσης για το PMMA



Σχήμα 7.5: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων ερπυσμού με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων χαλάρωσης, για το PMMA.

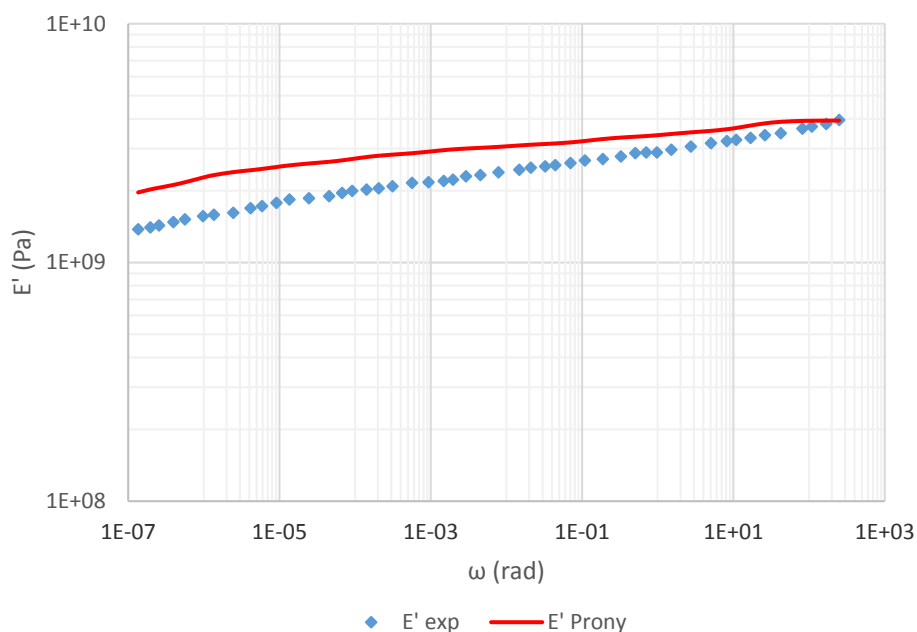
Το σφάλμα που εισάγεται από την παραπάνω διαδικασία, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 5.4 από τις σχέσεις (5.21) και (5.22), παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.6, όπου είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει

είναι $er = 0,14$, ενώ παράλληλα υπολογίζοντας την απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα, όπως εκφράστηκε από τη σχέση (5.23), διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη τιμή είναι $\psi_{max} = 0,177$, με τη μέση τιμή να διαμορφώνεται στο $\psi_{mean} = 0,097$.

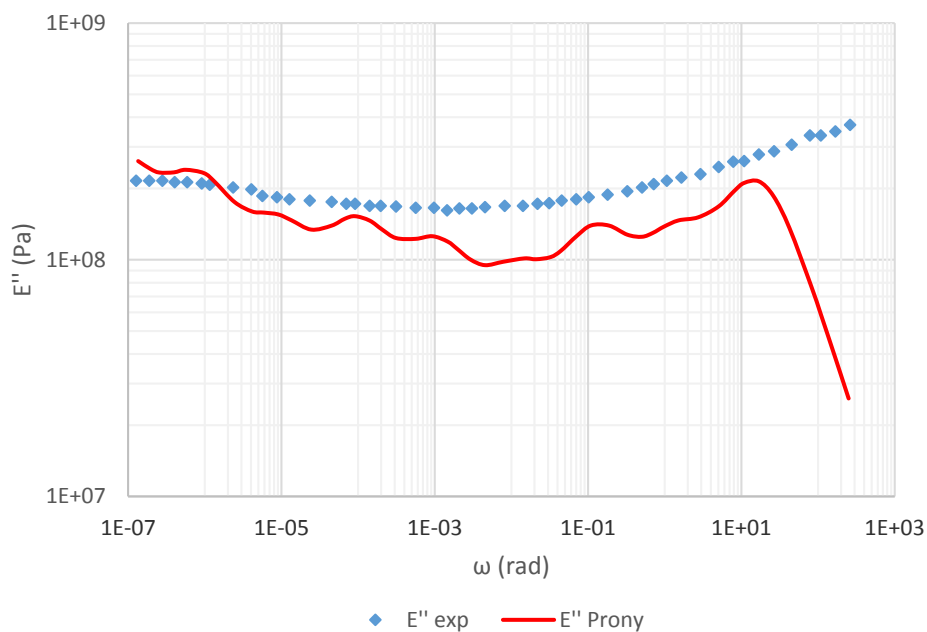


Σχήμα 7.6: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσει του χρόνου.

Τέλος έχοντας πλέον γνωστές τις παραμέτρους της σειράς Prony, όπως προέκυψαν από την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων για το μέτρο χαλάρωσης (Πίνακας 7.1), μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών από τις σχέσεις (3.9) και (3.10), ενώ η συγκριτική γραφική απεικόνιση αυτών με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές φαίνεται στα σχήματα 7.7 και 7.8 αντίστοιχα. Στην περίπτωση του μέτρου αποθήκευσης η μέση απόκλιση από τα πειραματικά στοιχεία είναι $\psi_{mean} = 0,1$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,17$, ενώ στην περίπτωση του μέτρου απωλειών το ανάλογο μέγεθος διαμορφώνεται στο $\psi_{mean} = 0,19$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 1,16$. Είναι φανερό λοιπόν ότι υπάρχει καλύτερη σύγκλιση για το μέτρο αποθήκευσης, απ' ό,τι για το μέτρο απωλειών.



Σχήμα 7.7: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το PMMA



Σχήμα 7.8: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το PMMA

7.3.2 Ecovio® LBX 8145 (EC).

Όσον αφορά τώρα το Ecovio® LBX 8145 (EC), η απόσταση των χρόνων χαλάρωσης, σε λογαριθμική κλίμακα, επιλέχθηκε να είναι $b = 5$, ενώ

παράλληλα, όπως προέκυψε από τη συνθήκη της σχέσης (4.12), το πλήθος των όρων της σειράς Prony που χρησιμοποιήθηκε για την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της χαλάρωσης, ήταν οχτώ (8). Επιπλέον η τιμή της παραμέτρου α για την οποία ελαχιστοποιείται το σφάλμα της σχέσης (4.13) ($K = 0,064$), ήταν $\alpha = 1,21$.

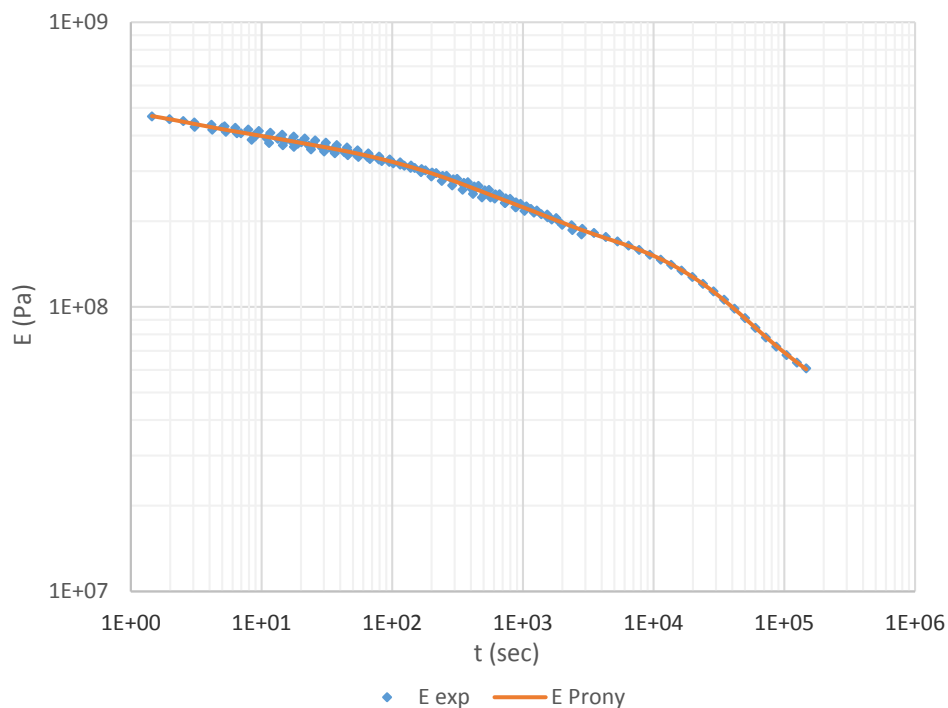
Στον πίνακα 7.3 λοιπόν παρατίθενται οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i , σύμφωνα με τις σχέσεις (4.8) και (4.10), καθώς και οι αντίστοιχοι παράμετροι E_e και E_i , όπως προέκυψαν από την επίλυση του συστήματος (4.16), ενώ στο

i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	1,756799	7,474E+07
2	8,783995	5,080E+07
3	43,91998	3,877E+07
4	219,5999	7,808E+07
5	1097,999	7,965E+07
6	5489,997	2,088E+07
7	27449,98	8,435E+07
8	137249,9	4,968E+07
$E_e=4,293E+07$ Pa		

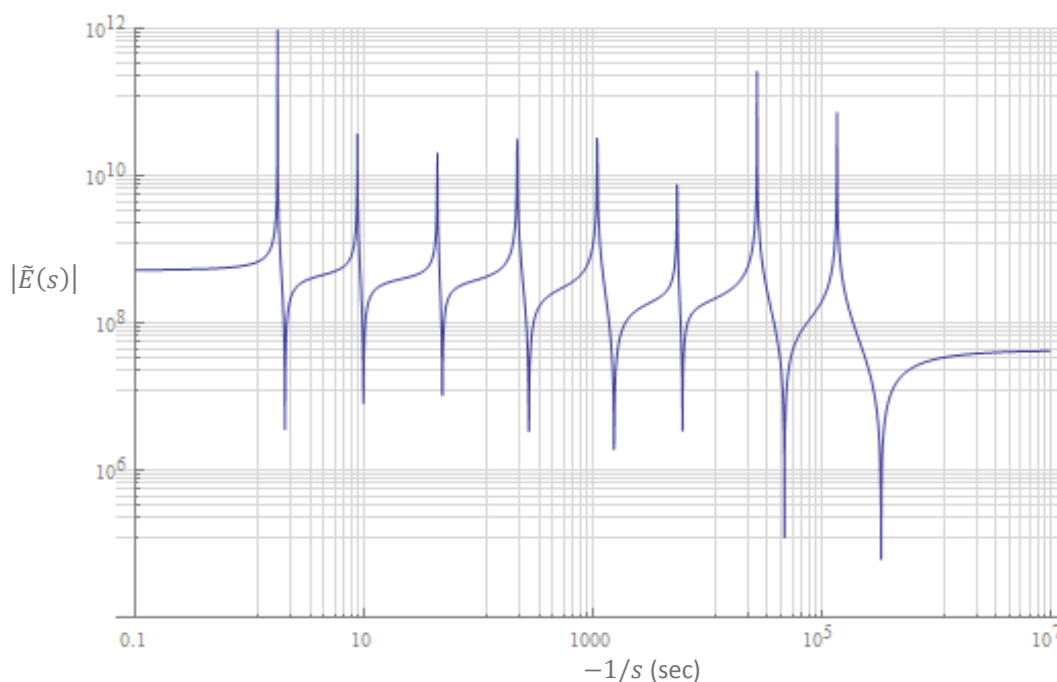
Πίνακας 7.3: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης για το EC.

σχήμα 7.9 παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα των πειραματικών τιμών του μέτρου χαλάρωσης, με τις τιμές που προέκυψαν από την παραπάνω προσαρμογή σε σειρά Prony.

Αντίστοιχα τώρα με την παράγραφο 7.3.1 και το PMMA, προκύπτουν οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j μέσω της γραφικής απεικόνισης της απόλυτης τιμής της απόκρισης $\tilde{E}(s)$, ως προς το $-1/s$, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 7.10, ενώ οι παράμετροι D_g και D_j υπολογίζονται από τη σχέση (5.16) και την επίλυση του συστήματος (5.15) αντίστοιχα.



Σχήμα 7.9: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης σε σειρά Prony, για το EC.

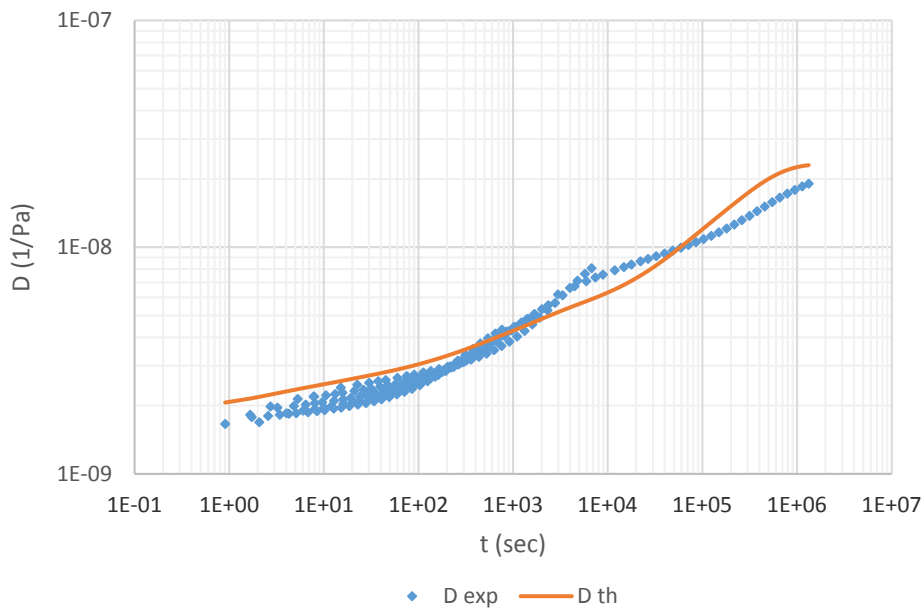


Σχήμα 7.10: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το EC.

Οι τιμές αυτές που προκύπτουν παρατίθενται στον πίνακα 7.4, και η συνάρτηση της ενδοτικότητας, εκφρασμένη ως σειρά Prony, παριστάνεται γραφικά συγκρινόμενη με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα στο σχήμα 7.11.

j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	2,040157	2,978E-10
2	9,916061	2,866E-10
3	48,54911	2,561E-10
4	277,3079	6,774E-10
5	1541,484	1,391E-09
6	6117,026	5,438E-10
7	47725,09	3,176E-09
8	333235,8	1,473E-08
		$D_g=1,924E-09$ 1/Pa

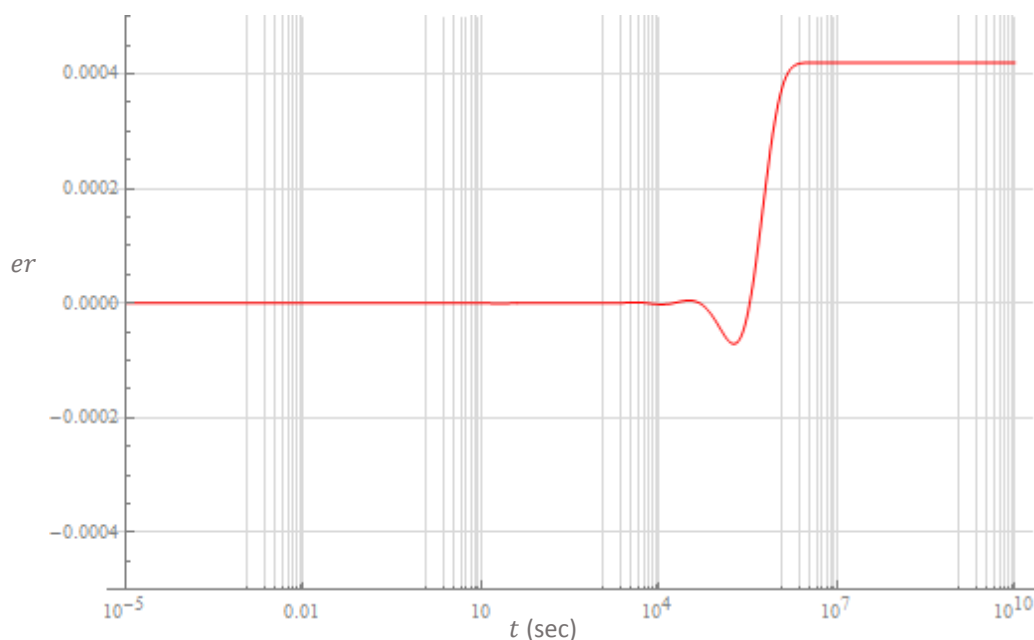
Πίνακας 7.4: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά του μέτρου χαλάρωσης για το EC



Σχήμα 7.11: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων ερπυσμού με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων χαλάρωσης, για το EC.

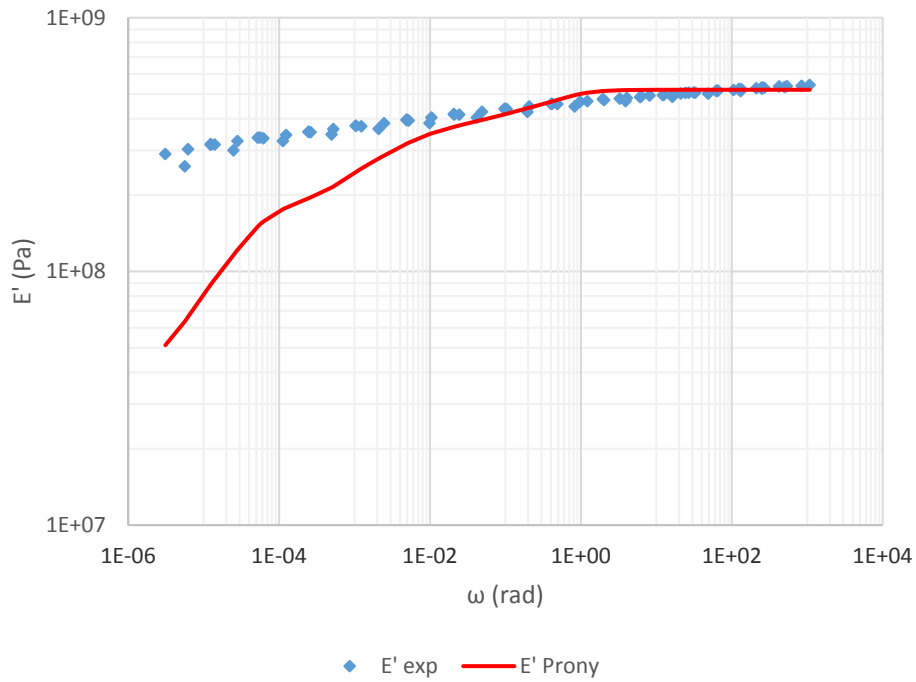
Το σφάλμα που εισάγεται από την παραπάνω διαδικασία, αντίστοιχα με αυτό της προηγούμενης παραγράφου, παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.12, όπου είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει είναι περίπου $er = 0,0004$, ενώ παράλληλα η απόκλιση των θεωρητικών τιμών από

τις πειραματικές λαμβάνει μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,114$, την στιγμή που η μέση τιμή είναι $\psi_{mean} = 0,063$.

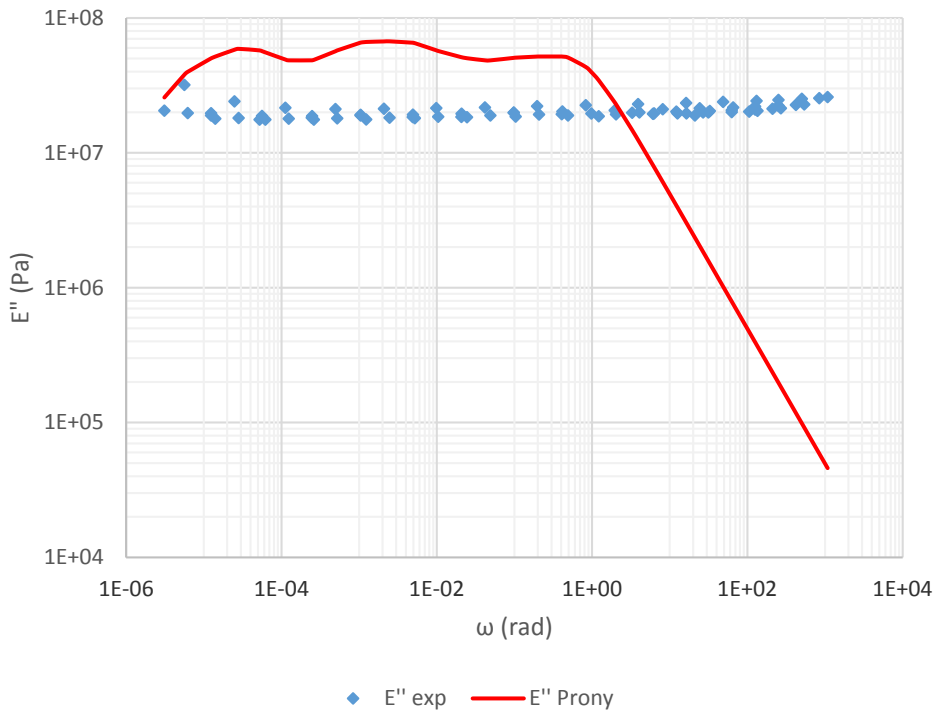


Σχήμα 7.12: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσει του χρόνου για το EC.

Τέλος με την βοήθεια των στοιχείων του Πίνακα 7.3, υπολογίζουμε το μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών από τις σχέσεις (3.9) και (3.10), και παριστάνουμε αυτά γραφικά συγκρίνοντάς τα με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, όπως φαίνεται στα σχήματα 7.13 και 7.14 αντίστοιχα. Στην περίπτωση του μέτρου αποθήκευσης η μέση απόκλιση από τα πειραματικά στοιχεία είναι $\psi_{mean} = 0,12$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,75$, ενώ στην περίπτωση του μέτρου απωλειών το ανάλογο μέγεθος διαμορφώνεται στο $\psi_{mean} = 0,82$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 2,75$. Είναι φανερό λοιπόν ότι υπάρχει καλύτερη σύγκλιση για το μέτρο αποθήκευσης, απ' ότι για το μέτρο απωλειών, αν και βέβαια υπάρχει μεγάλη απόκλιση στις χαμηλές κυρίως συχνότητες, για το E' και στις υψηλές συχνότητες για το E'' .



Σχήμα 7.13: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το EC



Σχήμα 7.14: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το EC.

7.3.3 Σύνθετο EC20.

Όμοια με το EC, έτσι και για το σύνθετο EC20, επιλέγουμε την απόσταση των χρόνων χαλάρωσης, σε λογαριθμική κλίμακα, να είναι $b = 5$. Το πλήθος των όρων της σειράς Prony που χρησιμοποιήθηκε για την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της χαλάρωσης, ήταν και σε αυτή την περίπτωση οχτώ (8), ενώ η τιμή της παραμέτρου α για την οποία ελαχιστοποιείται το σφάλμα της σχέσης (4.13) ($K = 0,289$), ήταν $\alpha = 1,65$. Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι η υψηλή τιμή του σφάλματος K οφείλεται στην σχετικά μεγάλη διασπορά ορισμένων πειραματικών δεδομένων, όπως θα φανεί και από το αντίστοιχο γράφημα.

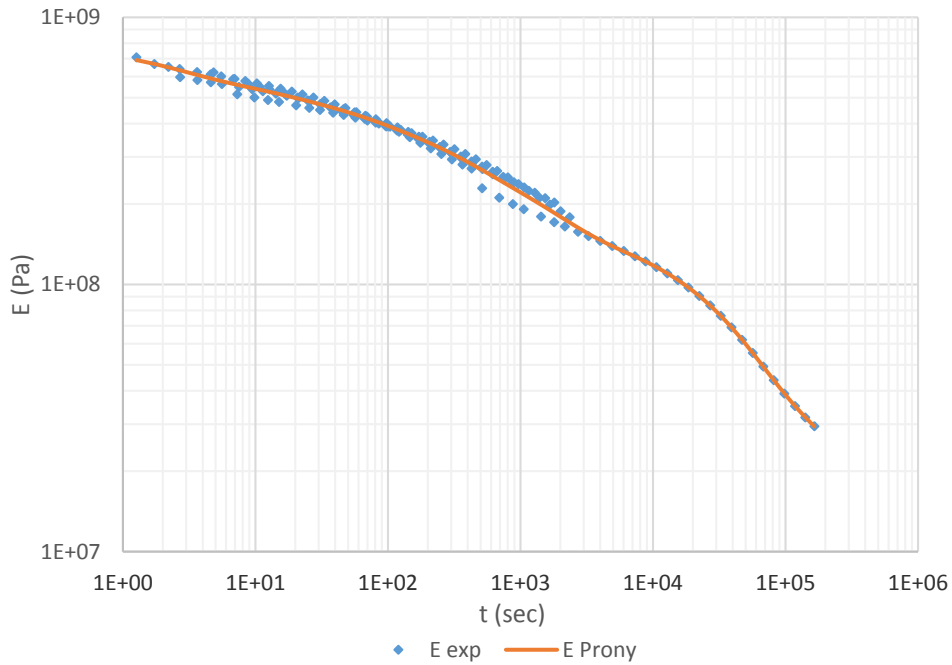
Στον πίνακα 7.5 λοιπόν παρατίθενται οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i , σύμφωνα με τις σχέσεις (4.8) και (4.10), καθώς και οι αντίστοιχοι παράμετροι E_e και E_i , όπως προέκυψαν από την επίλυση του συστήματος (4.16), ενώ στο

i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	2,08527	1,693E+08
2	10,42635	8,015E+07
3	52,13175	1,006E+08
4	260,6588	1,349E+08
5	1303,294	1,331E+08
6	6516,469	2,509E+07
7	32582,34	8,865E+07
8	162911,7	3,173E+07
$E_e = 1,731E+07$ Pa		

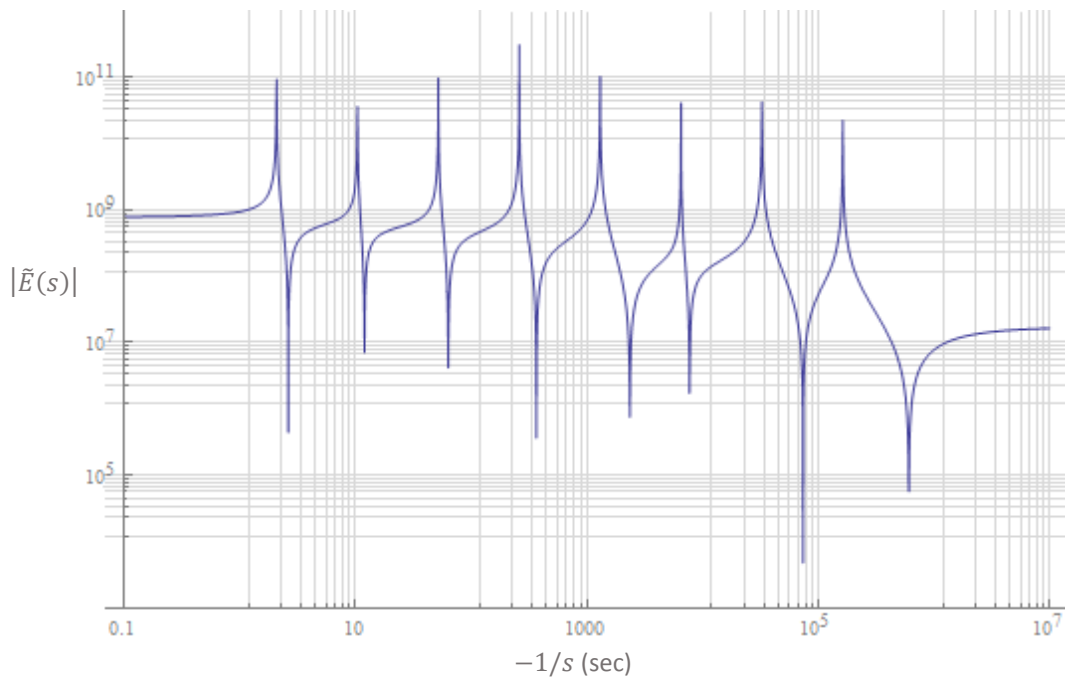
Πίνακας 7.5: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης για το EC.

σχήμα 7.15 παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα των πειραματικών τιμών του μέτρου χαλάρωσης, με τις τιμές που προέκυψαν από την παραπάνω προσαρμογή σε σειρά Prony.

Οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j , όπως προκύπτουν μέσω της γραφικής απεικόνισης της απόλυτης τιμής της απόκρισης $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$, που παρουσιάζεται στο σχήμα 7.16, καθώς και οι παράμετροι D_g και D_j



Σχήμα 7.15: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων του μέτρου χαλάρωσης σε σειρά Prony, για το EC20.

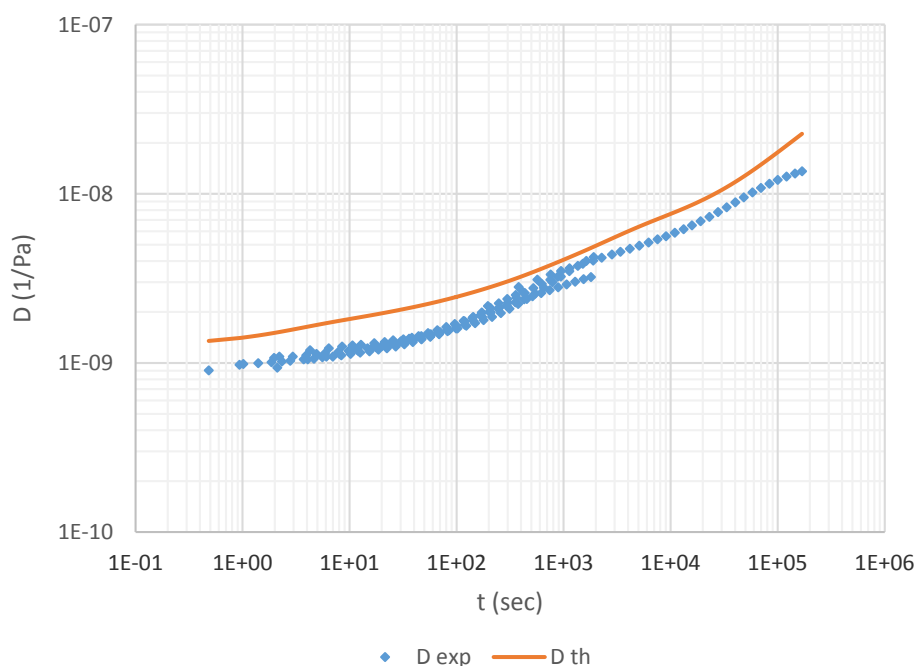


Σχήμα 7.16: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{E}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το EC20.

που υπολογίζονται από τη σχέση (5.16) και την επίλυση του συστήματος (5.15) αντίστοιχα παρουσιάζονται στον πίνακα 7.6. Παράλληλα στο σχήμα 7.17 μπορούμε να δούμε το συγκριτικό γράφημα της συνάρτησης ενδοτικότητας, εκπεφρασμένης ως σειρά Prony, με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

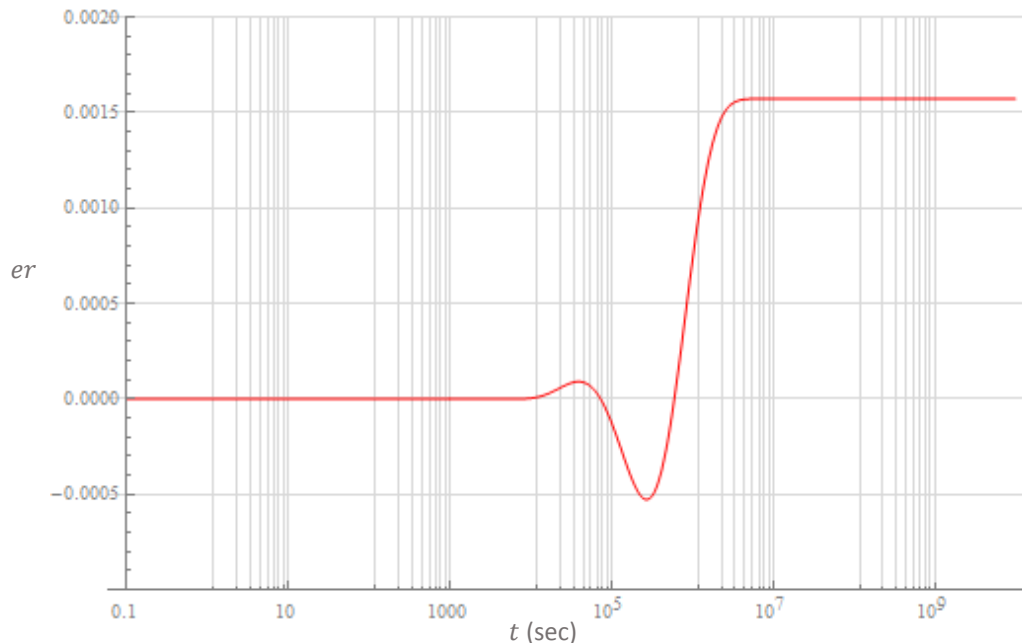
j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	2,632007	3,173E-10
2	11,99216	2,395E-10
3	63,52447	3,767E-10
4	366,9766	8,069E-10
5	2355,312	2,376E-09
6	7732,875	1,078E-09
7	73822,92	5,557E-09
8	603807,9	4,564E-08
$D_g=1,281E-09$ 1/Pa		

Πίνακας 7.6: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά του μέτρου χαλάρωσης για το EC20



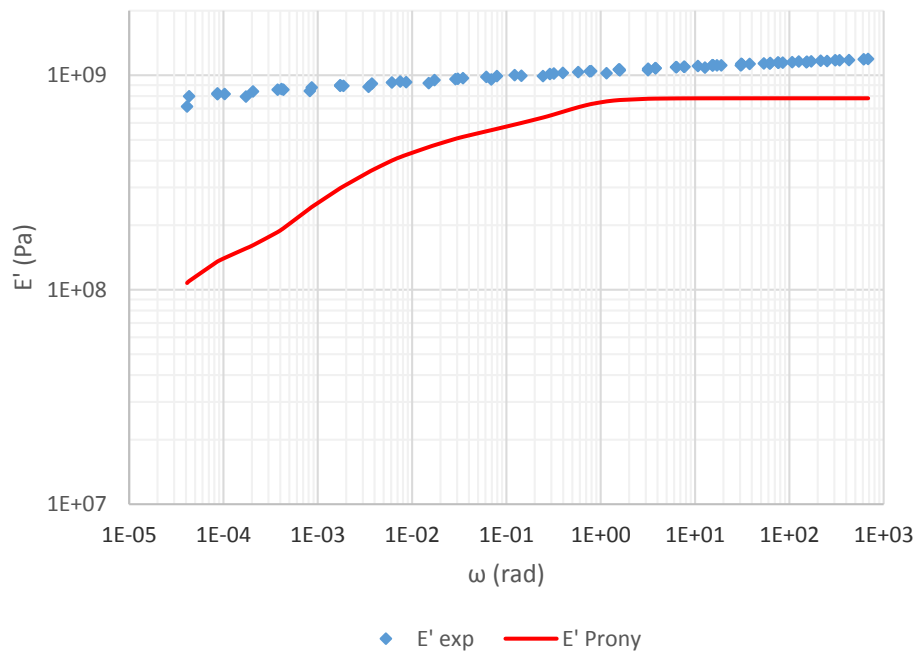
Σχήμα 7.17: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων ερπυσμού με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων χαλάρωσης, για το EC20.

Το σφάλμα που εισάγεται από την παραπάνω διαδικασία, σε αυτήν την περίπτωση, παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.18, όπου είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει είναι περίπου $er = 0,0015$, ενώ παράλληλα η απόκλιση των θεωρητικών τιμών από τις πειραματικές λαμβάνει μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,22$, την στιγμή που η μέση τιμή είναι $\psi_{mean} = 0,16$.

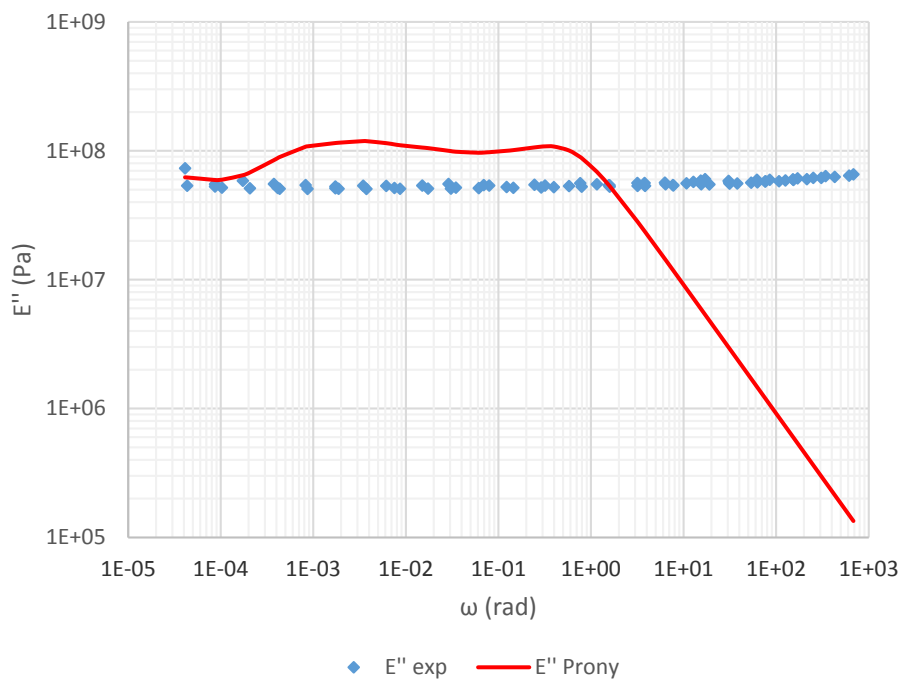


Σχήμα 7.18: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσεσι του χρόνου για το EC20.

Επιπλέον το μέτρο αποθήκευσης και το μέτρο απωλειών, όπως υπολογίζεται από τις σχέσεις (3.9) και (3.10), παριστάνονται γραφικά συγκριτικά με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, στα σχήματα 7.19 και 7.20 αντίστοιχα. Όπως προκύπτει η μέση απόκλιση από τα πειραματικά στοιχεία για το μέτρο αποθήκευσης είναι $\psi_{mean} = 0,28$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,86$, ενώ στην περίπτωση του μέτρου απωλειών το ανάλογο μέγεθος διαμορφώνεται στο $\psi_{mean} = 0,79$, με μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 2,69$. Και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει καλύτερη σύγκλιση για το μέτρο αποθήκευσης, απ' ότι για το μέτρο απωλειών, αν και βέβαια υπάρχει μεγάλη απόκλιση στις χαμηλές κυρίως συχνότητες, για το E' και στις υψηλές συχνότητες για το E'' .



Σχήμα 7.19: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το EC20.



Σχήμα 7.20: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το EC20.

7.4 Μετατροπή πειραματικών ερπυσμού σε χαλάρωση.

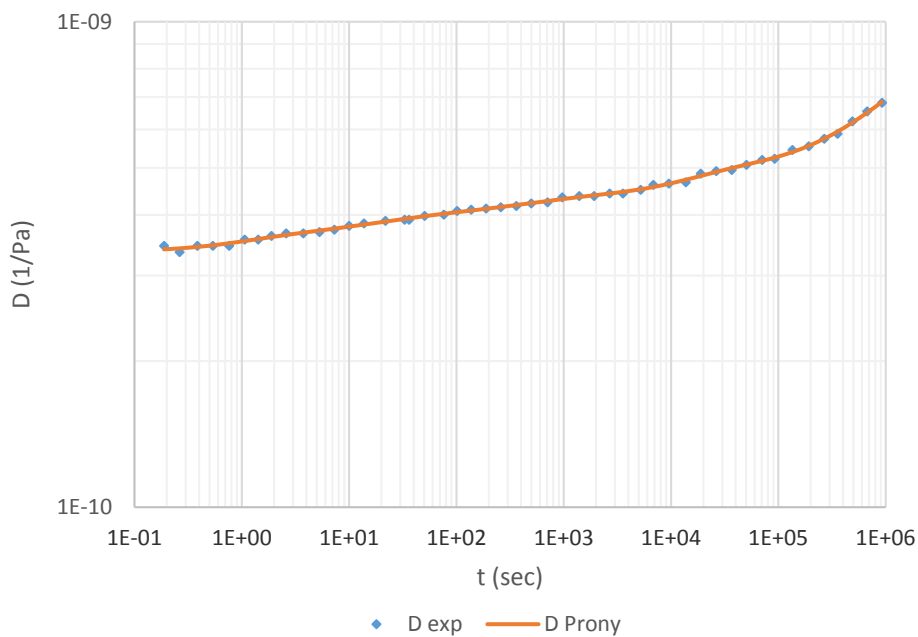
Αντίστοιχα με όσα είδαμε στην παράγραφο 7.3, προκύπτουν τα παρακάτω και για την εξαγωγή των συναρτήσεων του μέτρου χαλάρωσης από τα πειραματικά δεδομένα του ερπυσμού για κάθε υλικό, όπως περιγράφονται στις ακόλουθες παραγράφους.

7.4.1 Polymethyl Methacrylate (PMMA).

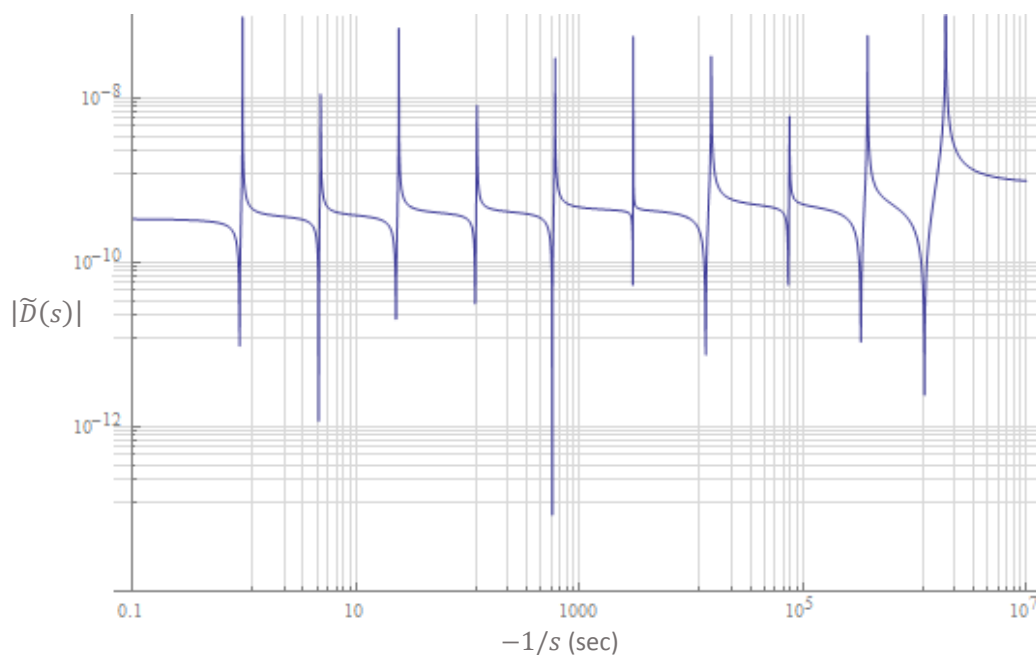
Οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j για το PMMA, όπως προέκυψαν για τιμές $b = 5$ και $\alpha = 5,15$ ($K = 0,0022$), από τις σχέσεις (4.8) και (4.10), καθώς και οι παράμετροι D_g και D_j , που αποτελούν τη λύση του συστήματος (4.18), παρουσιάζονται στον πίνακα 7.7, ενώ στο σχήμα 7.21, παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα των πειραματικών τιμών της ενδοτικότητας, με τις τιμές που προέκυψαν από την παραπάνω προσαρμογή σε σειρά Prony.

j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	0,972007	2,115E-11
2	4,860034	1,493E-11
3	24,30017	2,213E-11
4	121,5008	1,403E-11
5	607,5042	2,390E-11
6	3037,521	2,906E-12
7	15187,61	5,350E-11
8	75938,03	1,146E-11
9	379690,2	6,421E-11
10	1898451	3,269E-10
$D_g=3,352E-10$ 1/Pa		

Πίνακας 7.7: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας για το PMMA.



Σχήμα 7.21: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας σε σειρά Prony, για το PMMA.



Σχήμα 7.22: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το PMMA.

Όσον αφορά τώρα την μετατροπή στην συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης, οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i που προκύπτουν από τη γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ (σχήμα 7.22), καθώς

και οι παράμετροι E_e και E_i , όπως υπολογίζονται από τη σχέση (5.18) και την λύση του συστήματος (5.17) αντίστοιχα, φαίνονται στον πίνακα 7.8.

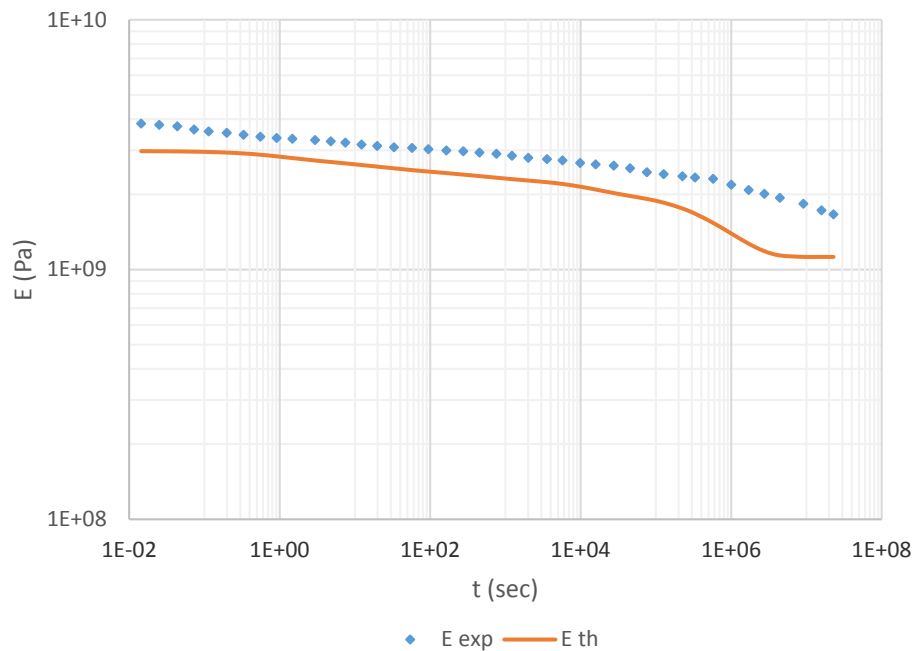
i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	0,91358	1,816E+08
2	4,664322	1,130E+08
3	22,93519	1,508E+08
4	117,3209	8,726E+07
5	573,9932	1,346E+08
6	3016,804	1,610E+07
7	13504,32	2,576E+08
8	74141	4,990E+07
9	330977,1	2,865E+08
10	1224297	5,830E+08
$E_e=1,123E+09$ Pa		

Πίνακας 7.8: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά της ενδοτικότητας για το PMMA.

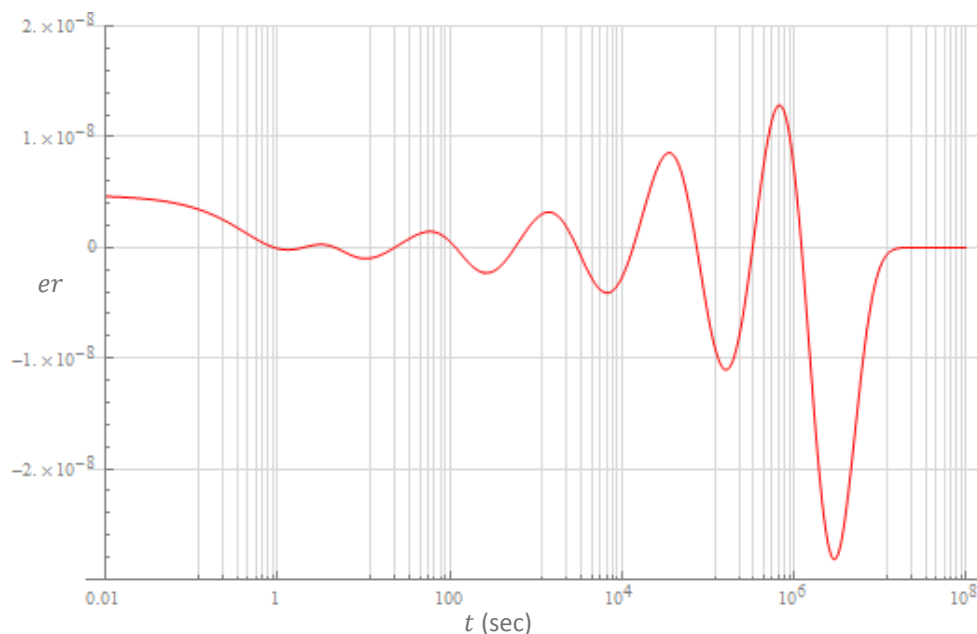
Επιπλέον στο σχήμα 7.23 παρατηρούμε το συγκριτικό γράφημα ανάμεσα στις πειραματικές τιμές του μέτρου χαλάρωσης και τις αντίστοιχες θεωρητικές, που προκύπτουν από την μετατροπή. Το σφάλμα που εισάγεται από την παραπάνω διαδικασία, παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.24, όπου είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει είναι περίπου $er = 2,8E - 8$, σε απόλυτη τιμή, τη στιγμή που η απόκλιση των θεωρητικών τιμών από τις πειραματικές λαμβάνει μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,23$, ενώ η μέση τιμή είναι $\psi_{mean} = 0,11$.

Υπολογίζοντας τώρα το μέτρο αποθήκευσης και μέτρο απωλειών, από τις σχέσεις (3.9) και (3.10) αντίστοιχα, με βάση τις τιμές του πίνακα 7.8 (μετατροπή - $E'_{converted}$), και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα τόσο με τις πειραματικές τιμές (E'_{exp}) όσο και με τις αντίστοιχες τιμές που βρήκαμε στην παράγραφο 3.3.1 (προσαρμογή - E'_{fitted}), προκύπτουν τα γραφήματα των σχημάτων 7.25 και 7.26. Είναι φανερό ότι όσον αφορά το μέτρο αποθήκευσης,

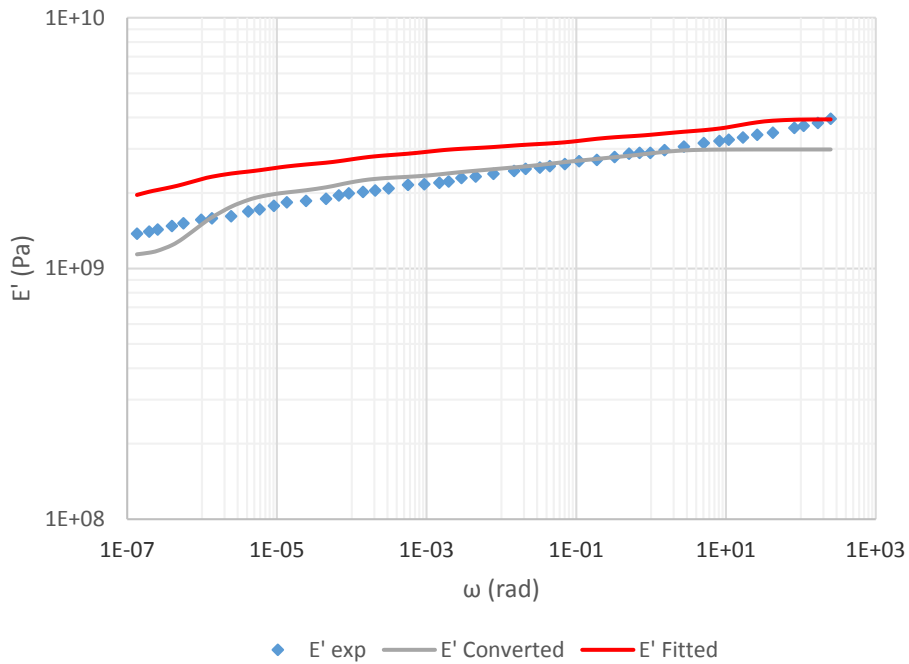
υπάρχει καλύτερη σύγκλιση ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα E'_{exp} και το $E'_{converted}$, παρά με το E'_{fitted} , όπου η μέγιστη απόκλιση, για την πρώτη περίπτωση, είναι $\psi_{max} = 0,12$, ενώ η τιμή της μέσης απόκλισης θα είναι $\psi_{mean} = 0,039$.



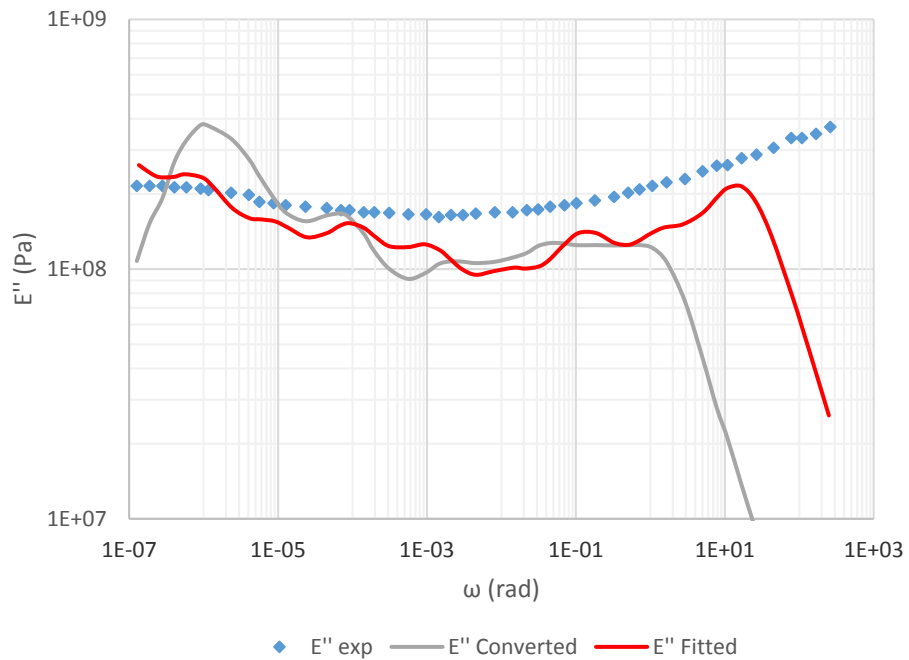
Σχήμα 7.23: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων ερπυσμού, για το PMMA.



Σχήμα 7.24: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσει του χρόνου για το PMMA.



Σχήμα 7.25: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το PMMA, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.



Σχήμα 7.26: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το PMMA, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.

Το αντίστροφο βέβαια ισχύει για το μέτρο απωλειών, όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.26, όπου η μέγιστη απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα των θεωρητικών εκείνων τιμών που προκύπτουν βάση των

παραμέτρων του πίνακα 7.8 είναι $\psi_{max} = 2,6$, και η μέση απόκλιση $\psi_{mean} = 0,48$.

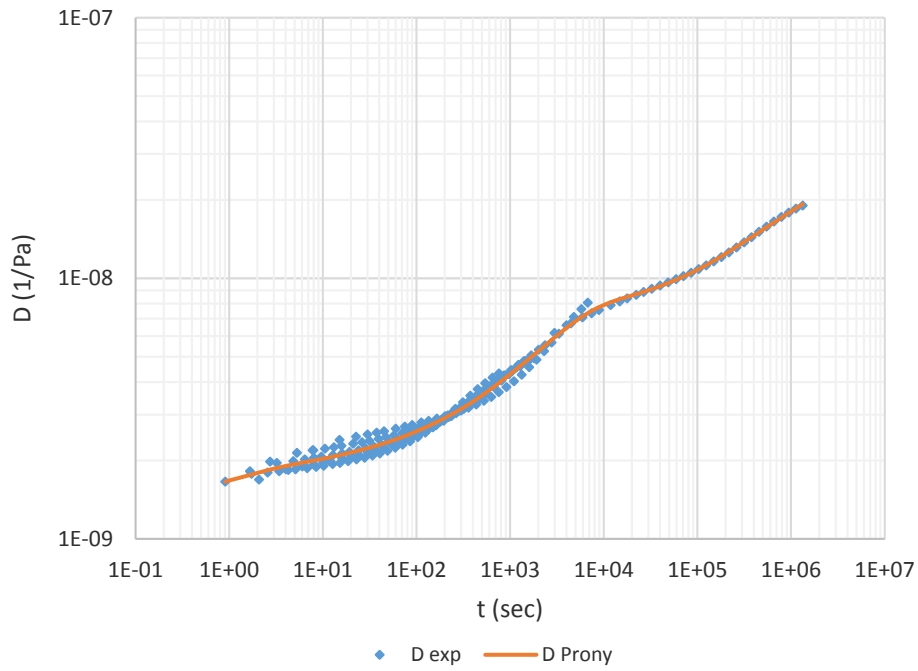
7.4.2 Ecovio® LBX 8145 (EC).

Όσον αφορά τώρα το Ecovio® LBX 8145 (EC), οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j , όπως προέκυψαν για τιμές $b = 7$ και $\alpha = 1,59$ ($K = 0,4$), καθώς και οι παράμετροι D_g και D_j , παρουσιάζονται στον πίνακα 7.9, ενώ στο σχήμα 7.27 παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα των πειραματικών τιμών της ενδοτικότητας, με τις τιμές που προέκυψαν από την παραπάνω προσαρμογή σε σειρά Prony.

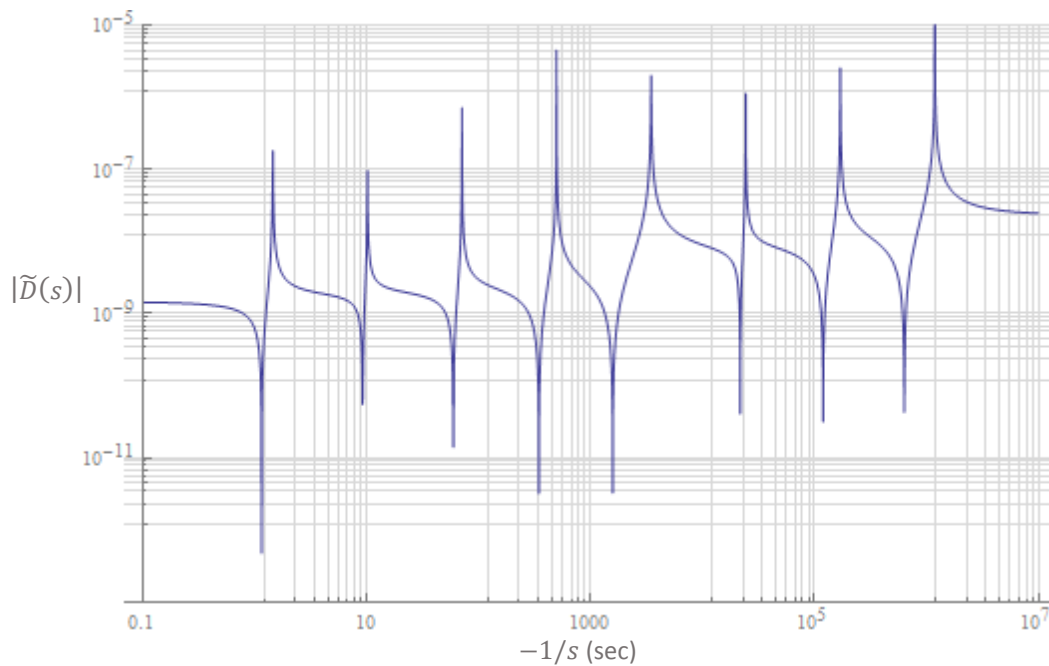
Αντίστοιχα, οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i που προκύπτουν από τη γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ (σχήμα 7.28), καθώς και οι παράμετροι E_e και E_i , που υπολογίζονται κατά την διαδικασία μετατροπής, όπως περιεγράφηκε στην παράγραφο 5.2, φαίνονται στον πίνακα 7.10, ενώ στο σχήμα 7.29 παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα ανάμεσα στις πειραματικές τιμές του μέτρου χαλάρωσης και τις αντίστοιχες θεωρητικές, που προκύπτουν από την μετατροπή, μέσω της απεικόνισης ως σειράς Prony.

j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	1,445199	3,712E-10
2	10,11639	1,881E-10
3	70,81474	3,661E-10
4	495,7032	8,713E-10
5	3469,922	4,299E-09
6	24289,45	9,086E-10
7	170026,2	3,202E-09
8	1190183	1,127E-08
$D_g = 1,464E-09$ 1/Pa		

Πίνακας 7.9: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας για το EC.



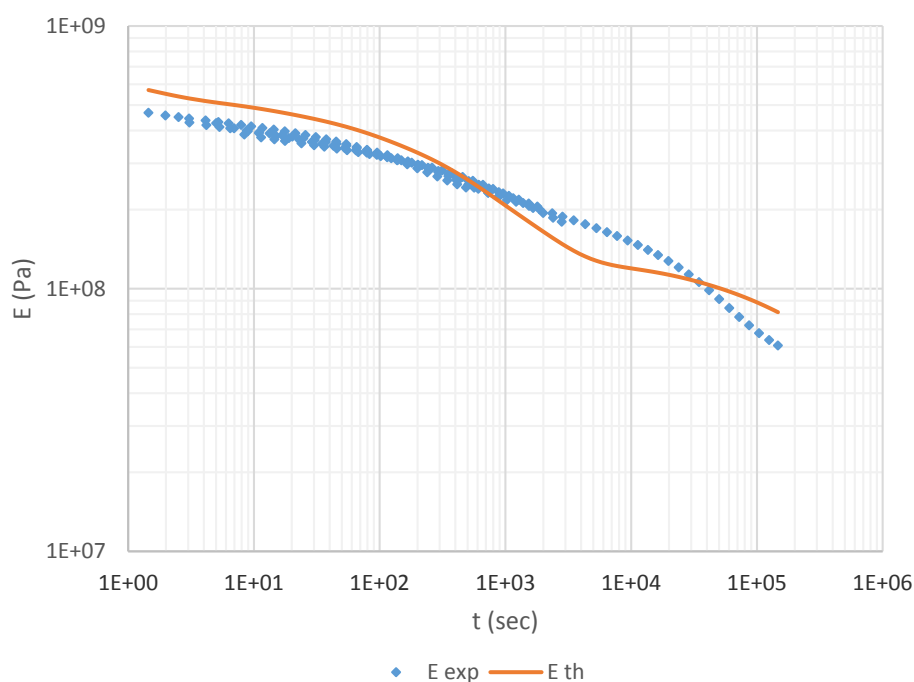
Σχήμα 7.27: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας σε σειρά Prony, για το EC.



Σχήμα 7.28: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το EC.

i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	1,147446	1,433E+08
2	9,169967	5,089E+07
3	59,24608	8,513E+07
4	344,9673	1,382E+08
5	1574,703	1,378E+08
6	21731,63	1,332E+07
7	119508,5	3,660E+07
8	635343,1	3,409E+07
		$E_e=4,360E+07$ Pa

Πίνακας 7.10: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά της ενδοτικότητας για το EC.

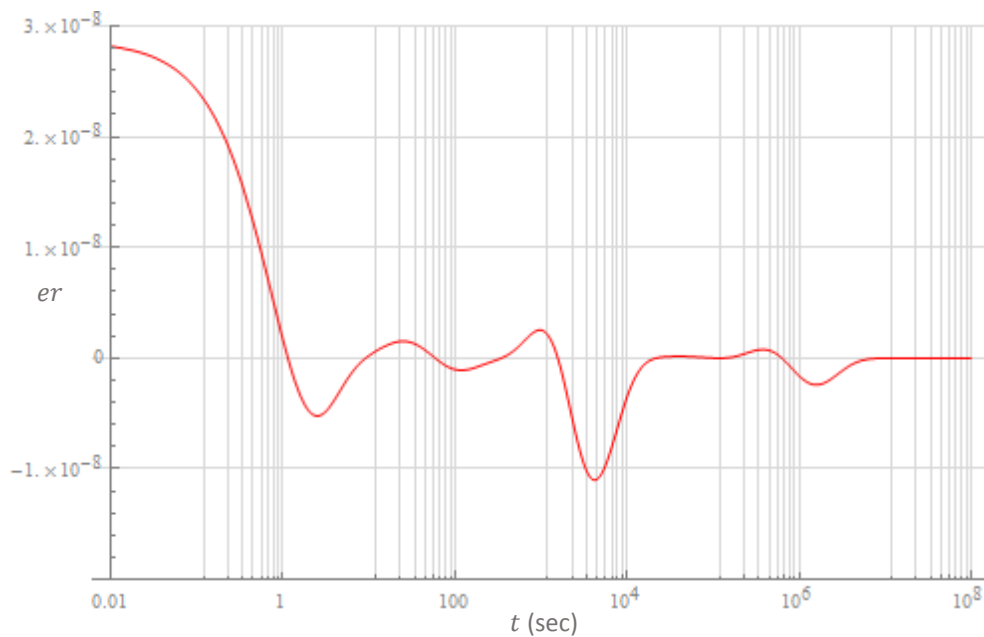


Σχήμα 7.29: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων ερπυσμού, για το EC.

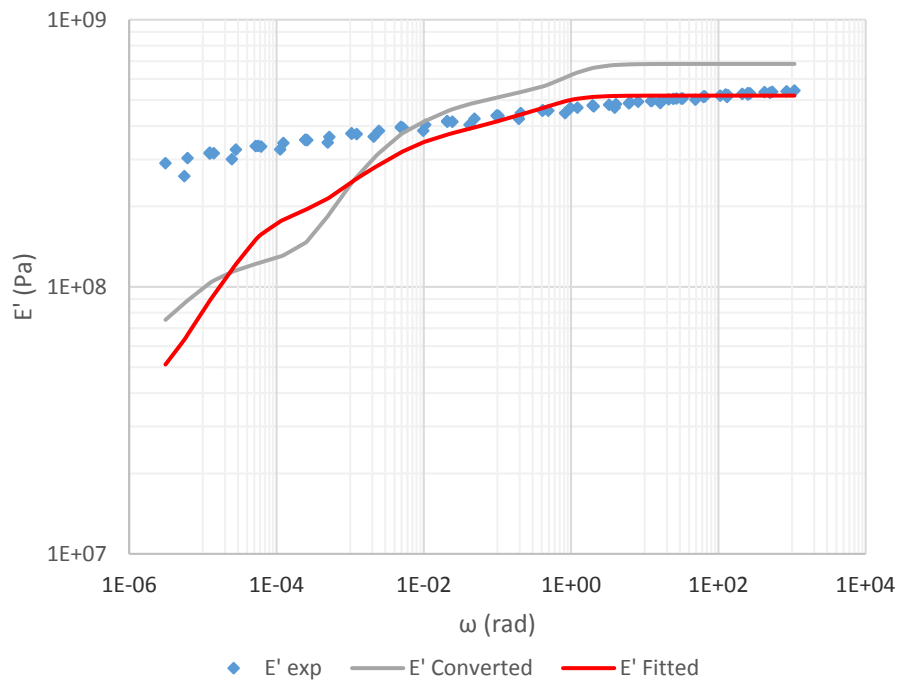
Επιπλέον και σε απόλυτη αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στο σχήμα 7.30 έχουμε τη γραφική απεικόνιση του σφάλματος που υπεισέρχεται από την διαδικασία της μετατροπής και ορίστηκε στην παράγραφο 5.4, η

μέγιστη τιμή του οποίου είναι $er = 2,8E - 8$. Παράλληλα παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της απόκλισης από τα πειραματικά δεδομένα της χαλάρωσης θα είναι $\psi_{max} = 0,129$, τη στιγμή που η μέση απόκλιση κυμαίνεται στο $\psi_{mean} = 0,064$.

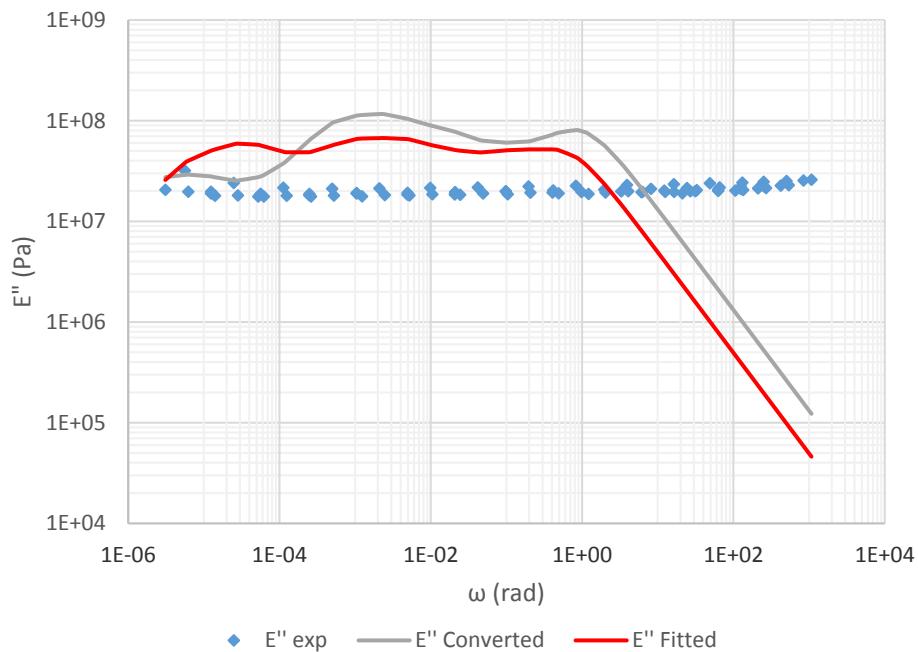
Τέλος στα σχήματα 7.31 και 7.32 παρουσιάζονται τα συγκριτικά γραφήματα ανάμεσα στις πειραματικές τιμές των μέτρων αποθήκευσης και απωλειών (E'_{exp} και E''_{exp}) και τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν βάσει των παραμέτρων του πίνακα 7.10 ($E'_{converted}$ και $E''_{converted}$), καθώς και αυτές που υπολογίσαμε στην παράγραφο 7.3.2 (E'_{fitted} και E''_{fitted}). Η απόκλιση του $E'_{converted}$ από το E'_{exp} παρουσιάζει μια μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,58$ και μία μέση $\psi_{mean} = 0,18$, ενώ τα αντίστοιχα μεγέθη για το μέτρο απωλειών θα είναι $\psi_{max} = 2.32$ και $\psi_{mean} = 0,69$.



Σχήμα 7.30: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσει του χρόνου για το EC.



Σχήμα 7.31: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το EC, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.



Σχήμα 7.32: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το EC, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.

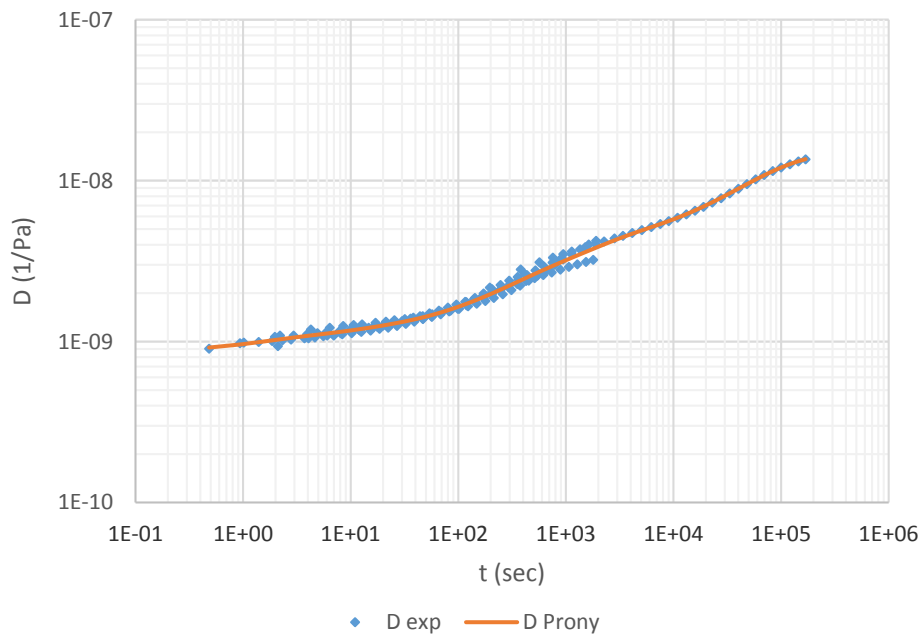
7.4.3 Σύνθετο EC20.

Εξετάζοντας τώρα την περίπτωση του σύνθετου EC20, οι χρόνοι καθυστέρησης τ_j , οι οποίοι προσδιορίστηκαν για τιμές $b = 6$ και $\alpha = 2,78$ ($K = 0,399$), καθώς και οι παράμετροι D_g και D_j , παρατίθενται στον πίνακα 7.11, ενώ στο σχήμα 7.33 παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα των πειραματικών τιμών της ενδοτικότητας, με τις τιμές που προέκυψαν από την παραπάνω προσαρμογή σε σειρά Prony.

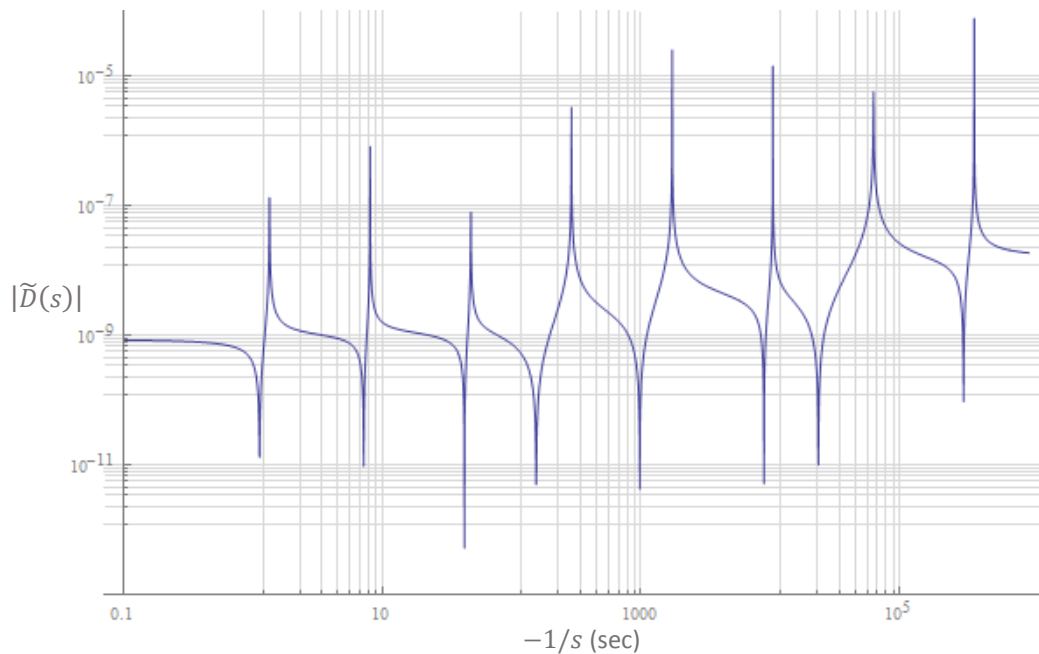
Παράλληλα, οι χρόνοι χαλάρωσης ρ_i που προκύπτουν από τη γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ (σχήμα 7.34), καθώς και οι παράμετροι E_e και E_i , που υπολογίζονται κατά την διαδικασία μετατροπής, όπως περιεγράφηκε στην παράγραφο 5.2, φαίνονται στον πίνακα 7.12, ενώ στο σχήμα 7.35, παρουσιάζεται το συγκριτικό γράφημα ανάμεσα στις πειραματικές τιμές του μέτρου χαλάρωσης και τις αντίστοιχες θεωρητικές, που προκύπτουν από την μετατροπή, μέσω της απεικόνισης ως σειράς Prony.

j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	1,341684	1,597E-10
2	8,050102	1,222E-10
3	48,30061	1,137E-10
4	289,8037	9,581E-10
5	1738,822	1,896E-09
6	10432,93	5,374E-10
7	62597,59	8,366E-09
8	375585,5	3,162E-09
$D_g=8,594E-10$ 1/Pa		

Πίνακας 7.11: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και τιμές παραμέτρων D_j όπως προέκυψαν κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας για το EC20.



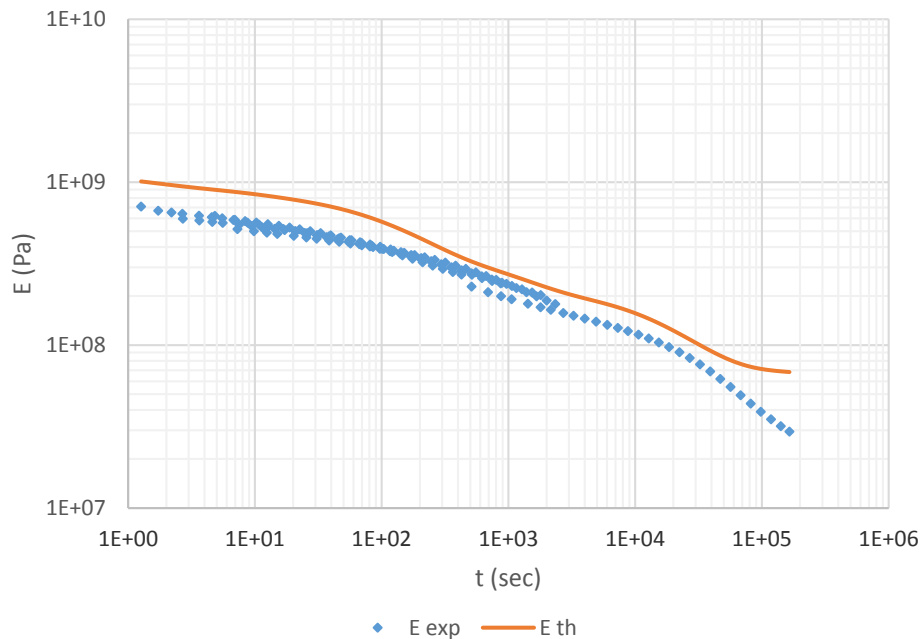
Σχήμα 7.33: Γραφική παράσταση προσαρμογής των πειραματικών δεδομένων της ενδοτικότητας σε σειρά Prony, για το EC20.



Σχήμα 7.34: Γραφική απεικόνιση της απόλυτης τιμής του $\tilde{D}(s)$ ως προς το $-1/s$ ($s < 0$) για το EC20.

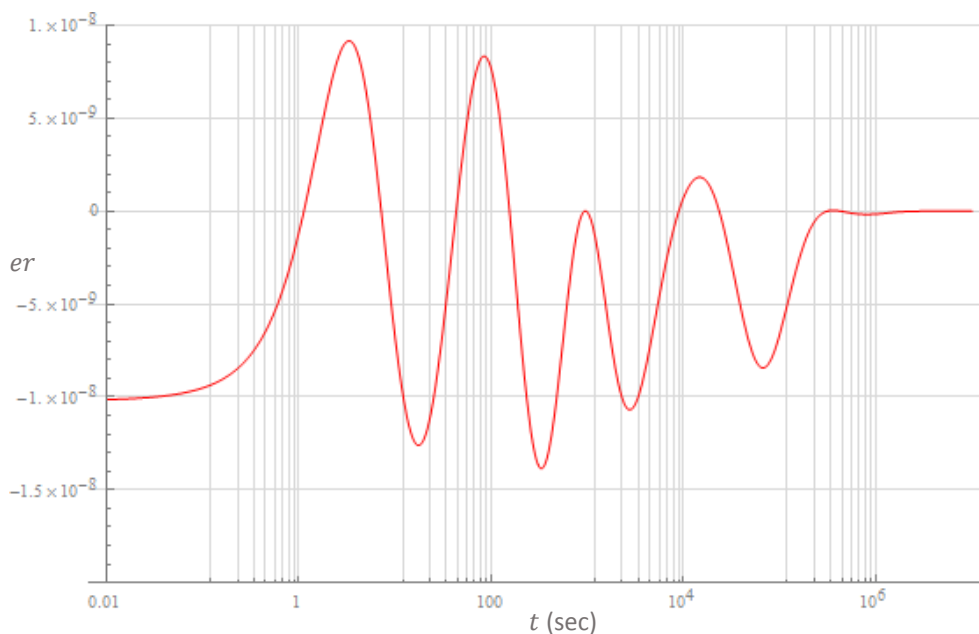
i	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	1,125538	1,926E+08
2	7,17506	1,072E+08
3	43,13794	1,089E+08
4	154,8387	3,735E+08
5	976,4538	1,581E+08
6	8907,248	4,209E+07
7	23499,35	1,084E+08
8	310748,1	1,106E+07
		$E_e=6,183E+07$ Pa

Πίνακας 7.12: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και τιμές παραμέτρων E_i όπως προέκυψαν κατά την μετατροπή από πειραματικά της ενδοτικότητα για το EC20.

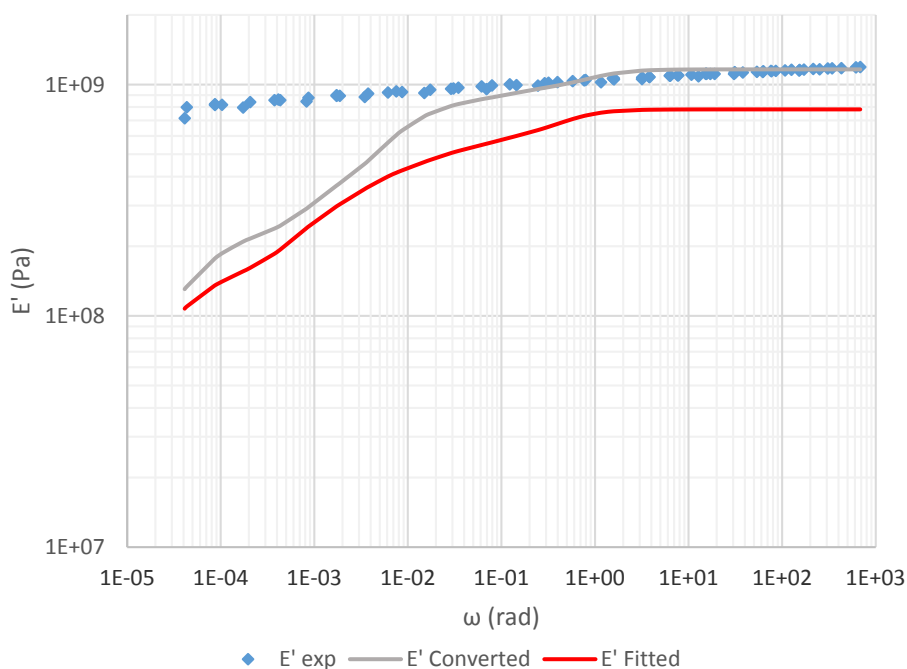


Σχήμα 7.35: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων ερπυσμού, για το EC20.

Το σφάλμα που εισάγεται από την παραπάνω διαδικασία, παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 7.36, όπου είναι φανερό ότι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει είναι περίπου $er = 0,9E - 8$, σε απόλυτη τιμή, τη στιγμή που η απόκλιση των θεωρητικών τιμών από τις πειραματικές λαμβάνει μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,37$, ενώ η μέση τιμή είναι $\psi_{mean} = 0,15$.



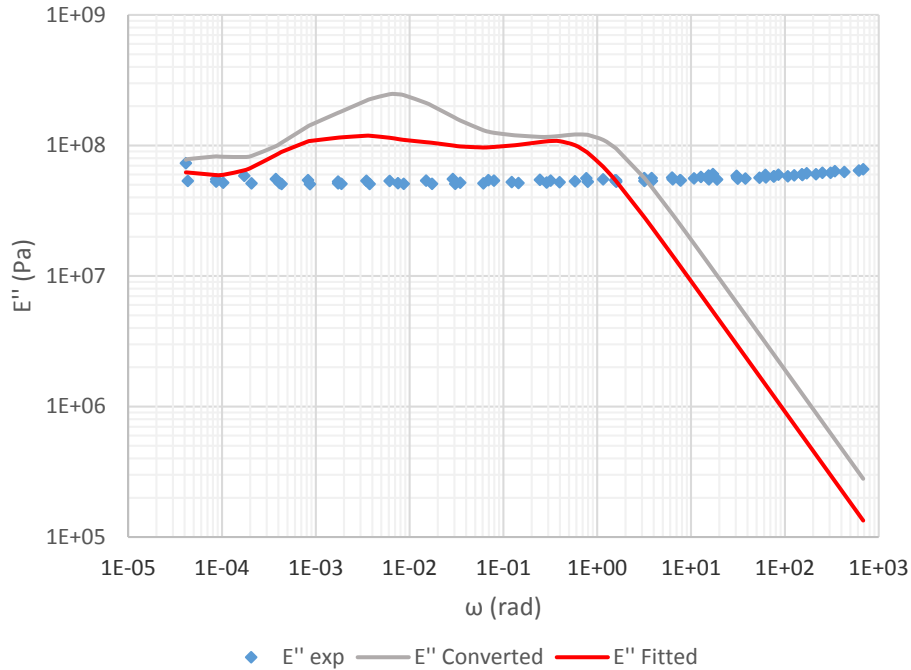
Σχήμα 7.36: Γραφική απεικόνιση σφάλματος er , όπως εκφράστηκε από τις (5.21) και (5.22), συναρτήσει του χρόνου για το EC20.



Σχήμα 7.37: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου αποθήκευσης για το EC20, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.

Όμοια με την περίπτωση του EC, στα σχήματα 7.37 και 7.38 παρουσιάζονται τα συγκριτικά γραφήματα ανάμεσα στις πειραματικές τιμές των μέτρων αποθήκευσης και απωλειών (E'_{exp} και E''_{exp}) και τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν βάσει των παραμέτρων του πίνακα 7.12 ($E'_{converted}$ και

$E''_{converted}$), καθώς και αυτές που υπολογίσαμε στην παράγραφο 7.3.3 (E'_{fitted} και E''_{fitted}). Η απόκλιση του $E'_{converted}$ από το E'_{exp} παρουσιάζει μια μέγιστη τιμή $\psi_{max} = 0,78$ και μία μέση $\psi_{mean} = 0,14$, ενώ τα αντίστοιχα μεγέθη για το μέτρο απωλειών θα είναι $\psi_{max} = 2,37$ και $\psi_{mean} = 0,72$.



Σχήμα 7.38: Συγκριτικό γράφημα πειραματικών και θεωρητικών τιμών μέτρου απωλειών για το EC20, όπως προέκυψαν από την μετατροπή και την προσαρμογή αντίστοιχα.

7.5 Εξαγωγή ιξωδοελαστικών συναρτήσεων με τη βοήθεια των δυναμικών και της προσαρμογής με σιγμοειδής συναρτήσεις.

Προκειμένου να αποκτήσουμε τις θεμελιώδεις ιξωδοελαστικές συναρτήσεις με τη βοήθεια των δυναμικών, ακολουθήσαμε τη διαδικασία που περιγράφεται στις παραγράφους 6.2 και 6.3. Βέβαια θα πρέπει να αναφέρουμε ότι απουσία επαρκών πειραματικών δεδομένων σε μεγάλους χρόνους ώστε από την επεξεργασία αυτών να προκύψουν οι όροι E_g και D_g , θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των μέτρων αποθήκευσης και απωλειών, καθώς και των αντίστοιχων ενδοτικών μέτρων, όπως αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις (3.9), (3.10) και (3.16), (3.17), στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν ως παράμετροι αυτές που προέκυψαν από την προσαρμογή, σε σειρές Prony, των

πειραματικών της χαλάρωσης και του ερπυσμού για κάθε υλικό (πίνακες 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.9 και 7.11).

Έχοντας λοιπόν αρχικά υπολογίσει τις τιμές έστω του μέτρου αποθήκευσης E' και του μέτρου απωλειών E'' , εξάγουμε τις τιμές για το ενδοτικό μέτρο αποθήκευσης, για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές, μέσω της σχέσης (6.5α), και θεωρώντας αυτές ως «πειραματικές» τις προσαρμόζουμε σε μία σιγμοειδή συνάρτηση, ενώ στη συνέχεια βρίσκουμε το φάσμα καθυστέρησης σύμφωνα με όσα περιγράφονται στην παράγραφο 6.2. Η ζητούμενη συνάρτηση ενδοτικότητας προκύπτει εκπεφρασμένη ως σειρά Prony, σύμφωνα με την παράγραφο 6.3 και τη σχέση,

$$D(t) = D_g - \sum_{j=1}^n D_j \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) \quad (7.5)$$

όπου $D_j = L(\tau_j) \ln b$ και b η απόσταση των χρόνων καθυστέρησης σε λογαριθμική κλίμακα.

Ανάλογα εργαζόμαστε και στην περίπτωση που ως αφετηρία έχουμε τα πειραματικά δεδομένα του ερπυσμού.

7.5.1 Εξαγωγή της συνάρτησης ενδοτικότητας.

Οι τιμές του ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης, για κάθε υλικό, όπως προκύπτουν από τη σχέση (6.5α), παρατίθενται στον πίνακα Β.4 του παραρτήματος Β, ενώ οι συντελεστές A, B, C και D , οι οποίοι υπεισέρχονται στην προσαρμογή των «πειραματικών» αυτών τιμών στη σιγμοειδή συνάρτηση

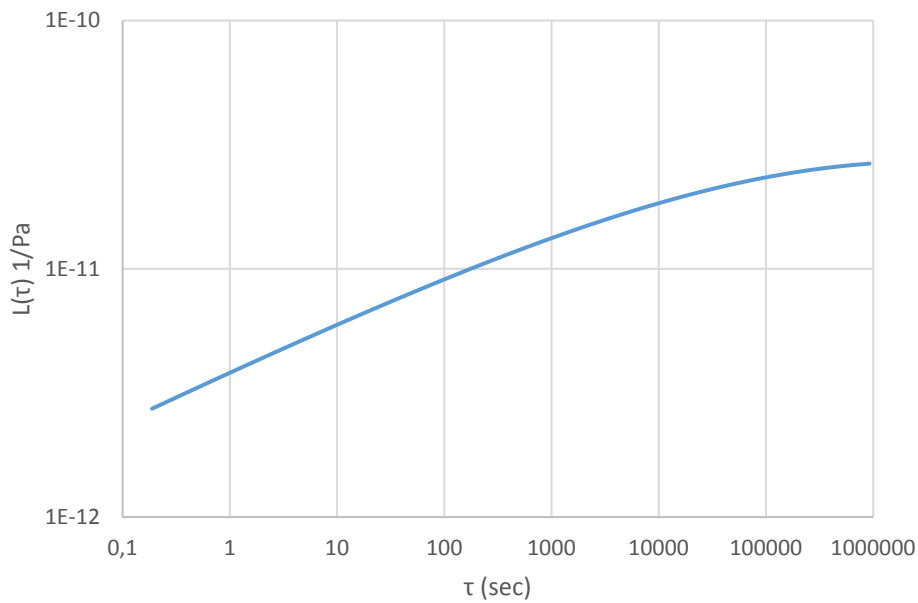
$$\ln \chi(\omega) = A - \frac{B}{1 + e^{(C-D \ln \omega)}} \quad (7.6)$$

με $\chi \equiv D'$, παρουσιάζονται στον πίνακα 7.13.

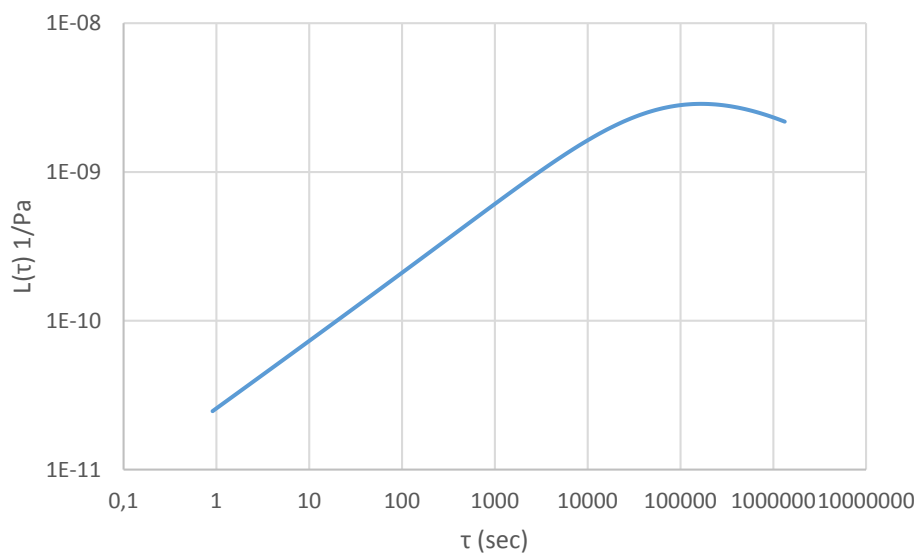
Με βάση τώρα τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε το φάσμα καθυστέρησης σύμφωνα με τις σχέσεις (6.12), οπότε προκύπτουν τα γραφήματα των σχημάτων 7.39 έως 7.41 για κάθε ένα από τα υλικά που εξετάζουμε.

Συντελεστές	PMMA	EC	EC20
A	-22,07	-20,0343	-20,4619
B	-1,07101	-2,49365	-3,6998
C	2,65262	4,38048	4,3067
D	-0,21029	-0,44983	-0.43984

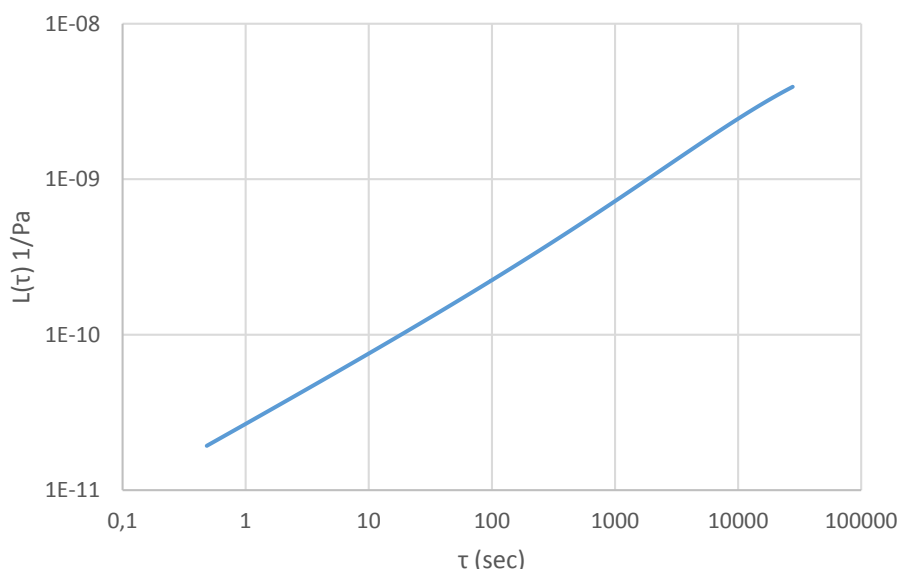
Πίνακας 7.13: Συντελεστές προσαρμογής δεδομένων ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης σε σιγμοειδή συνάρτηση.



Σχήμα 7.39: Φάσμα καθυστέρησης για το PMMA.



Σχήμα 7.40: Φάσμα καθυστέρησης για το EC.



Σχήμα 7.41: Φάσμα καθυστέρησης για το EC20.

Παράλληλα επιλέγουμε τους χρόνους καθυστέρησης τ_j ώστε να απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση σε λογαριθμική κλίμακα, στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε επιλέξει $b = 10$, οπότε οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην έκφραση της ενδοτικότητας ως σειρά Prony, προκύπτουν από τη σχέση,

$$D_j = L(\tau_j) \ln b$$

και παρουσιάζονται, μαζί με τους αντίστοιχους χρόνους καθυστέρησης για κάθε ένα υλικό, στον πίνακα 7.14.

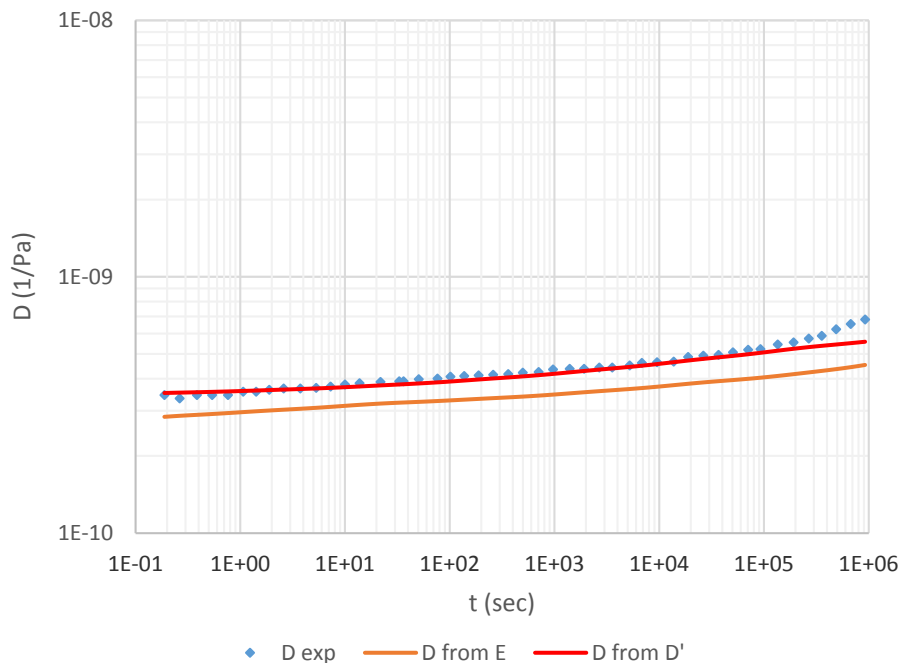
Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι με τη συγκεκριμένη μέθοδο δεν έχουμε κάποιο περιορισμό ως προς το πλήθος των όρων που θα συμμετέχουν στη σειρά Prony, (στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουν επιλεγεί δέκα (10)), ενώ παράλληλα το αποτέλεσμα δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά με την διαφορετική επιλογή των χρόνων καθυστέρησης, αρκεί να έχουμε τουλάχιστον μία τιμή σε κάθε δεκάδα στο πεδίο του χρόνου.

Τα συγκριτικά διαγράμματα για κάθε υλικό, ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα της ενδοτικότητας D_{exp} , τις αντίστοιχες τιμές όπως προέκυψαν στις παραγράφους 7.3.1 έως 7.3.3 και αυτές που υπολογίζονται από την παρούσα μέθοδο φαίνονται στα σχήματα 7.42 έως 7.44.

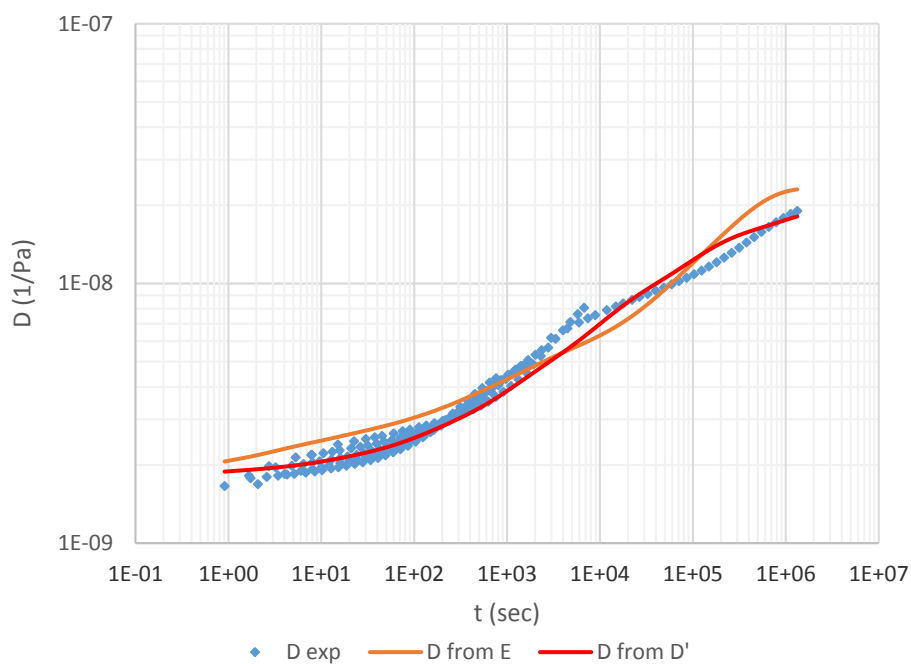
Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

	PMMA		EC		EC20	
j	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)	τ_j (sec)	D_j (1/Pa)
1	0,001	2,152E-12	0,001	2,647E-12	0,002	3,936E-12
2	0,01	3,461E-12	0,01	7,460E-12	0,02	1,086E-11
3	0,1	5,535E-12	0,1	2,104E-11	0,2	3,006E-11
4	1	8,770E-12	1	5,945E-11	2	8,401E-11
5	10	1,369E-11	10	1,688E-10	20	2,405E-10
6	100	2,086E-11	100	4,845E-10	200	7,279E-10
7	1000	3,059E-11	1000	1,404E-09	2000	2,413E-09
8	10000	4,229E-11	10000	3,758E-09	20000	7,868E-09
9	100000	5,375E-11	100000	6,478E-09	200000	1,536E-08
10	1000000	6,120E-11	1000000	5,360E-09	2000000	1,322E-08
	$D_g = 3,4E - 10$ 1/Pa		$D_g = 1,8E - 9$ 1/Pa		$D_g = 8E - 10$ 1/Pa	

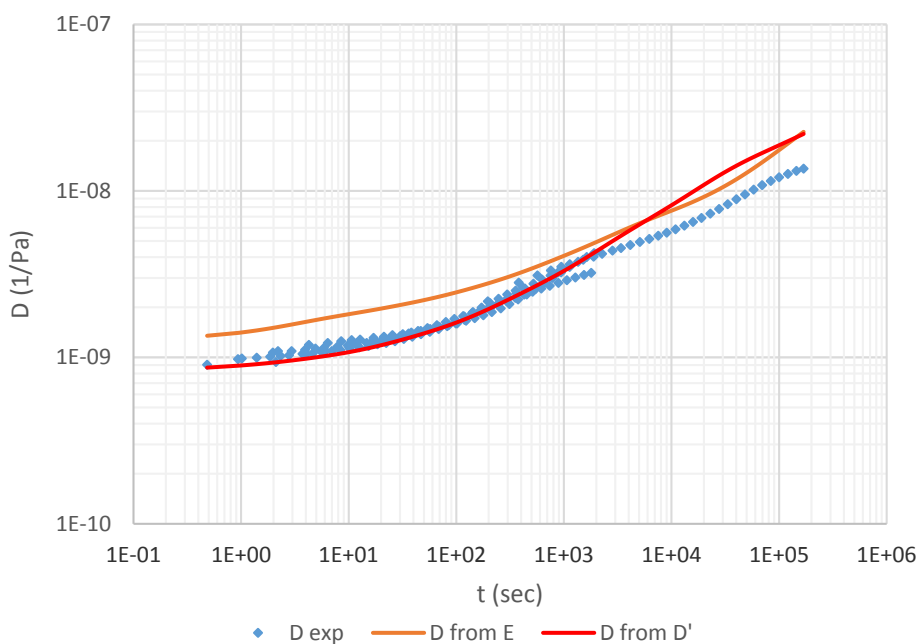
Πίνακας 7.14: Χρόνοι καθυστέρησης τ_j και παράμετροι D_g και D_j , όπως προκύπτουν για κάθε υλικό, από τα αντίστοιχα δεδομένα του ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης και το φάσμα καθυστέρησης.



Σχήμα 7.42: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα ενδοτικότητας και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.3.1 και την παρούσα μέθοδο, για το PMMA.



Σχήμα 7.43: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα ενδοτικότητας και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.3.2 και την παρούσα μέθοδο, για το EC.



Σχήμα 7.44: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα ενδοτικότητας και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.3.3 και την παρούσα μέθοδο, για το EC20.

Είναι φανερό λοιπόν, από τα παραπάνω σχήματα, ότι οι συναρτήσεις της ενδοτικότητας που προκύπτουν από την μέθοδο που

περιεγράφηκε στην παρούσα παράγραφο, βρίσκονται πιο κοντά στα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, απ' ότι οι συναρτήσεις που υπολογίστηκαν στην παράγραφο 7.3. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται και στις τιμές της μέγιστης και μέσης απόκλισης, όπως αυτές παρουσιάζονται για κάθε υλικό στον πίνακα 7.15.

	PMMA	EC	EC20
Μέγιστη απόκλιση (ψ_{max})	0,08	0,11	0,21
Μέση απόκλιση (ψ_{mean})	0,001	0,03	0,047

Πίνακας 7.15: Τιμές μέγιστης και μέσης απόκλισης από τα πειραματικά δεδομένα της ενδοτικότητας.

7.5.2 Εξαγωγή της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης.

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση, στον πίνακα B.5 του παραρτήματος Β παρατίθενται οι τιμές του μέτρου αποθήκευσης, για κάθε υλικό, όπως προκύπτουν από τη σχέση (6.6α), ενώ οι συντελεστές A, B, C και D , οι οποίοι υπεισέρχονται στην προσαρμογή των «πειραματικών» αυτών τιμών στη σιγμοειδή συνάρτηση

$$\ln \chi(\omega) = A + \frac{B}{1 + e^{(C-D \ln \omega)}} \quad (7.7)$$

με $\chi \equiv E'$, παρουσιάζονται στον πίνακα 7.16.

Συντελεστές	PMMA	EC	EC20
A	20,8141	17,5056	17,8649
B	0,97083	2,84763	3,03881
C	-4,49982	-3,08529	-3,54102
D	0,38854	0,36373	0,46885

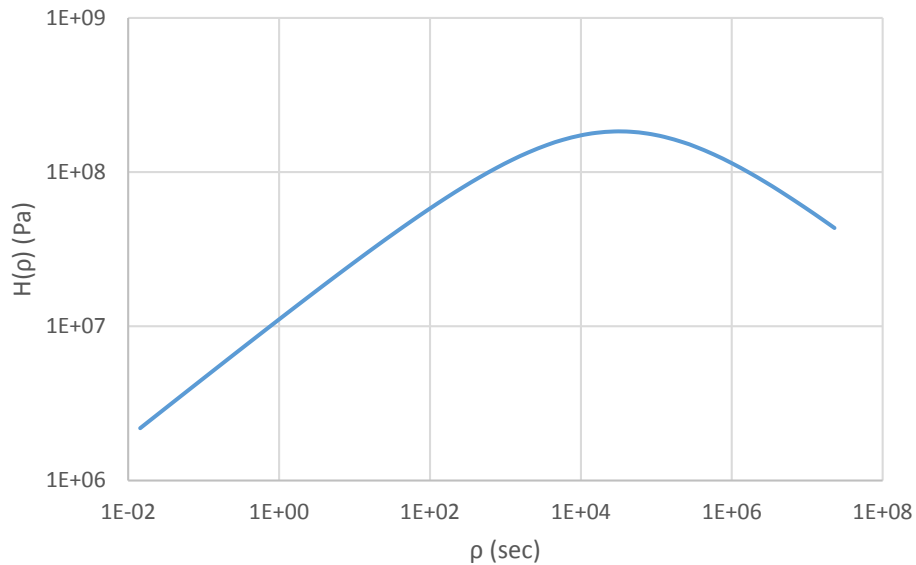
Πίνακας 7.16: Συντελεστές προσαρμογής δεδομένων μέτρου αποθήκευσης σε σιγμοειδή συνάρτηση.

Αντίστοιχα, προκύπτουν τα φάσματα χαλάρωσης $H(\rho)$ όπως αυτά παρουσιάζονται στα γραφήματα των σχημάτων 7.45 έως 7.47, από τα οποία στη συνέχεια και αφού επιλεγθούν οι χρόνοι χαλάρωσης, υπολογίζονται

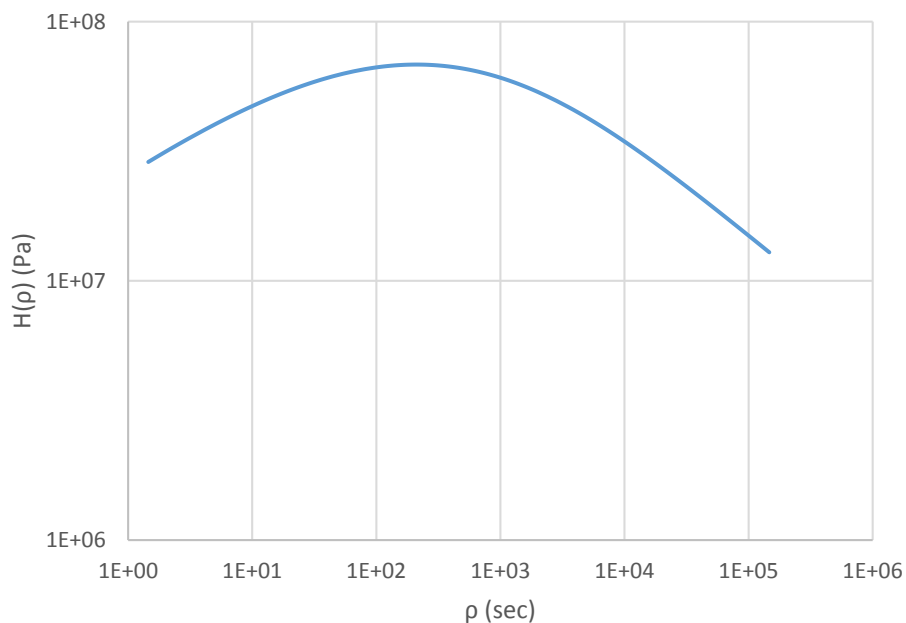
οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην παράσταση της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης ως σειρά Prony, σύμφωνα με τη σχέση,

$$E_i = H(\rho_i) \ln b$$

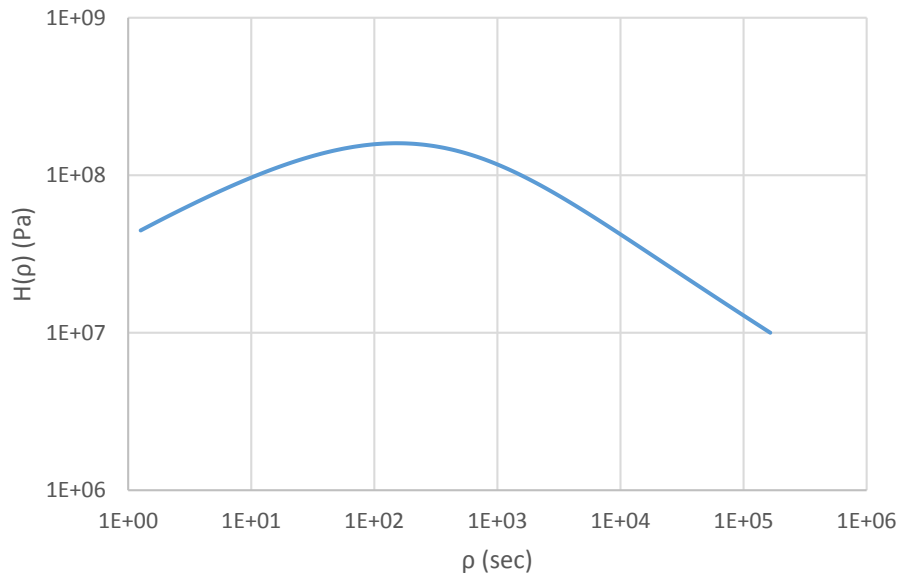
με $b = 10$ να είναι η απόσταση μεταξύ των χρόνων χαλάρωσης σε λογαριθμική κλίμακα.



Σχήμα 7.45: Φάσμα χαλάρωσης για το PMMA.



Σχήμα 7.46: Φάσμα χαλάρωσης για το EC.



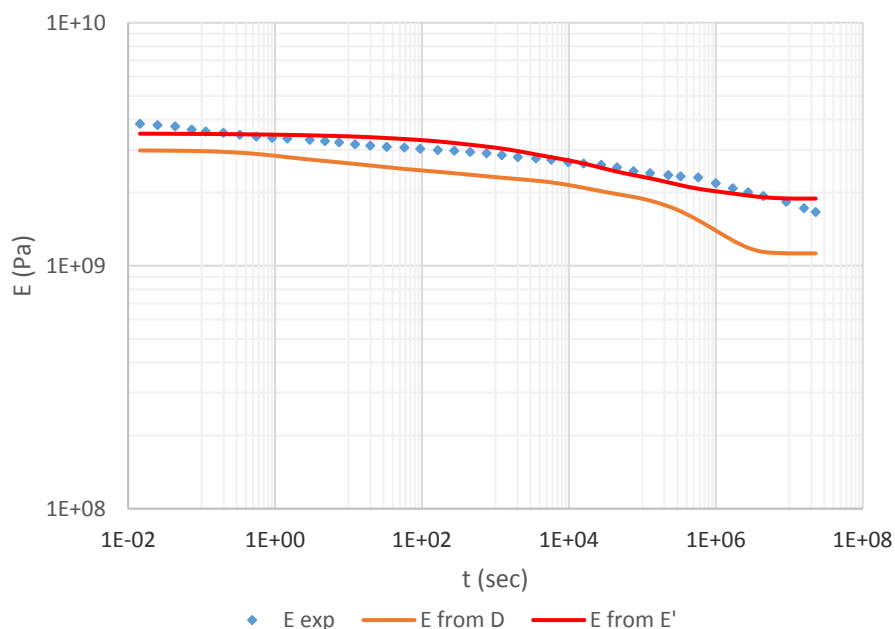
Σχήμα 7.47: Φάσμα χαλάρωσης για το EC20.

Έχοντας την ίδια λογική όπως και προηγουμένως, επιλέγουμε δέκα (10) όρους για την παράσταση της συνάρτησης του μέτρου χαλάρωσης με σειρά Prony, με τους χρόνους χαλάρωσης ρ_i και τις αντίστοιχες παραμέτρους E_i να παρουσιάζονται στον πίνακα 7.17.

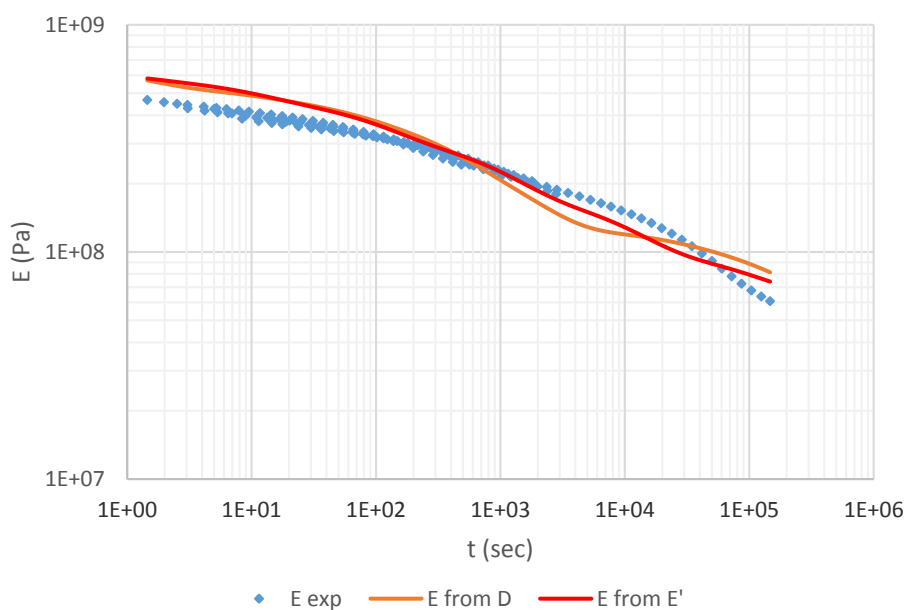
i	PMMA		EC		EC20	
	ρ_i (sec)	E_i (Pa)	ρ_i (sec)	E_i (Pa)	ρ_i (sec)	E_i (Pa)
1	0,002	2,337E+06	0,001	5,691E+06	0,002	5,604E+06
2	0,02	5,697E+06	0,01	1,289E+07	0,02	1,631E+07
3	0,2	1,382E+07	0,1	2,847E+07	0,2	4,641E+07
4	2	3,311E+07	1	5,931E+07	2	1,237E+08
5	20	7,701E+07	10	1,087E+08	20	2,728E+08
6	200	1,669E+08	100	1,533E+08	200	3,654E+08
7	2000	3,087E+08	1000	1,399E+08	2000	2,084E+08
8	20000	4,189E+08	10000	7,937E+07	20000	6,786E+07
9	200000	3,666E+08	100000	3,443E+07	200000	2,090E+07
10	2000000	2,183E+08	1000000	1,409E+07	2000000	6,768E+06
	$E_g = 3,5E + 9$ Pa		$E_g = 6,9E + 8$ Pa		$E_g = 1,17E + 9$ Pa	

Πίνακας 7.17: Χρόνοι χαλάρωσης ρ_i και παράμετροι E_g και E_i , όπως προκύπτουν για κάθε υλικό, από τα αντίστοιχα δεδομένα του μέτρου αποθήκευσης και το φάσμα χαλάρωσης.

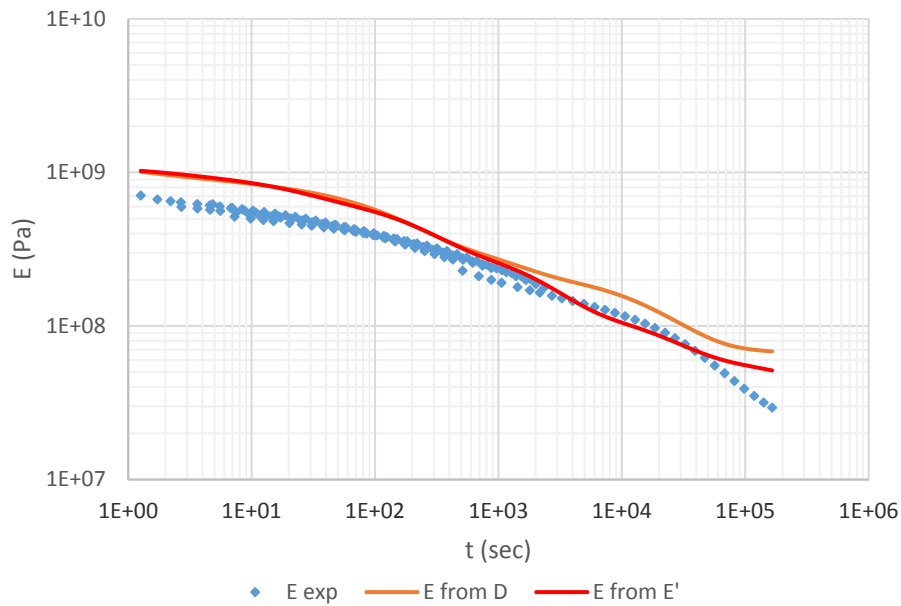
Τα αντίστοιχα συγκριτικά διαγράμματα για κάθε υλικό, ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα του μέτρου χαλάρωσης E_{exp} , τις αντίστοιχες τιμές όπως προέκυψαν στις παραγράφους 7.4.1 έως 7.4.3 και αυτές που υπολογίζονται από την παρούσα μέθοδο φαίνονται στα σχήματα 7.48 έως 7.50.



Σχήμα 7.48: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα χαλάρωσης και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.4.1 και την παρούσα μέθοδο, για το PMMA.



Σχήμα 7.49: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα χαλάρωσης και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.4.2 και την παρούσα μέθοδο, για το EC.



Σχήμα 7.50: Συγκριτικό γράφημα ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα χαλάρωσης και σε αντίστοιχες τιμές που προέκυψαν από την παράγραφο 7.4.3 και την παρούσα μέθοδο, για το EC20.

Όπως και προηγουμένως, οι συναρτήσεις του μέτρου χαλάρωσης που προκύπτουν από την μέθοδο που περιεγράφηκε στην παρούσα παράγραφο, βρίσκονται πιο κοντά στα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, απ' ό,τι οι συναρτήσεις που υπολογίστηκαν στην παράγραφο 7.4. Το γεγονός αυτό αποτυπώνεται και στις τιμές της μέγιστης και μέσης απόκλισης, όπως αυτές παρουσιάζονται για κάθε υλικό στον πίνακα 7.18.

	PMMA	EC	EC20
Μέγιστη απόκλιση (ψ_{max})	0,06	0,12	0,24
Μέση απόκλιση (ψ_{mean})	0,02	0,05	0,12

Πίνακας 7.18: Τιμές μέγιστης και μέσης απόκλισης από τα πειραματικά δεδομένα του μέτρου χαλάρωσης.

7.6 Συμπεράσματα.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα υπάρχει σαφής συσχετισμός μεταξύ των διάφορων μεγεθών της γραμμικής ιξωδοελαστικότητας, γεγονός που μας δίνει τη δυνατότητα έχοντας ως αφετηρία πειραματικά δεδομένα για ένα από

αυτά τα μεγέθη, να καταλήξουμε σε ένα άλλο από αυτά, μέσω μιας διαδικασίας αλληλομετατροπής, και κατά συνέπεια να αποκτήσουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα για την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών.

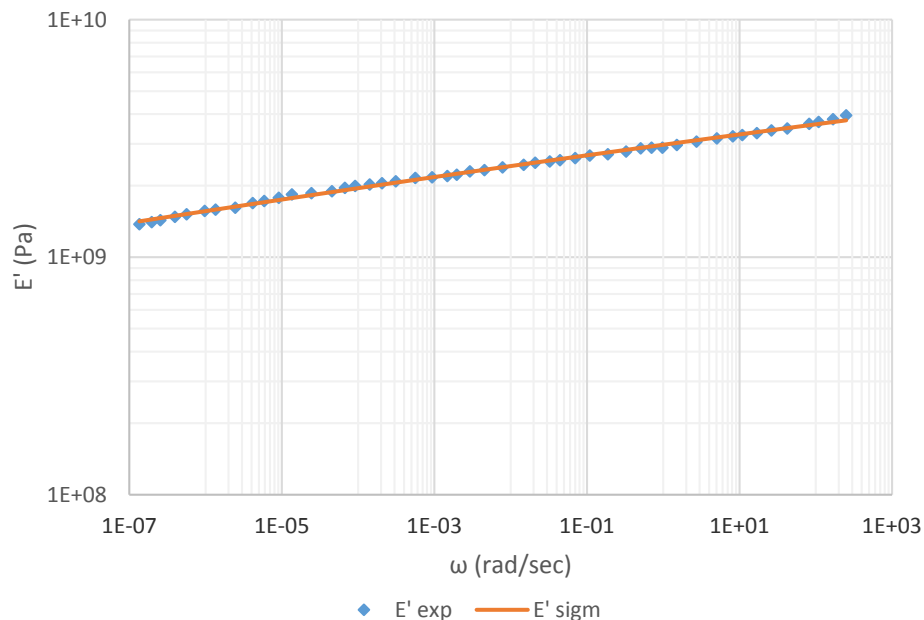
Παράλληλα η χρήση των γενικευμένων μοντέλων Maxwell και Kelvin καθώς και η αντίστοιχη έκφραση των συναρτήσεων του μέτρου χαλάρωσης και της ενδοτικότητας με τη βοήθεια των σειρών Prony, αποδείχτηκε ότι μπορούν να περιγράψουν σε ικανοποιητικό βαθμό την συμπεριφορά των υλικών στην γραμμική ιξωδοελαστικότητα.

Και στις τρεις περιπτώσεις των υλικών που εξετάστηκαν, τόσο κατά την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων, όσο και κατά την αλληλομετατροπή από την μία ιξωδοελαστική συνάρτηση στην άλλη, οι τελικές εκφράσεις των τελευταίων ταυτίστηκαν στην πρώτη περίπτωση, ενώ πλησίασαν αρκετά στην δεύτερη, τα αντίστοιχα πειραματικά. Οι μεγαλύτερες αποκλίσεις παρουσιάστηκαν κατά την σύγκριση με τα στοιχεία των εργαστηριακών δοκιμών, των αντίστοιχων ιξωδοελαστικών συναρτήσεων που προέκυψαν από την διαδικασία της αλληλομετατροπής, γεγονός που πιθανότατα οφείλεται στο ότι οι τελικές καμπύλες (master curves) προήλθαν ως αποτέλεσμα της υπέρθεσης χρόνου-θερμοκρασίας.

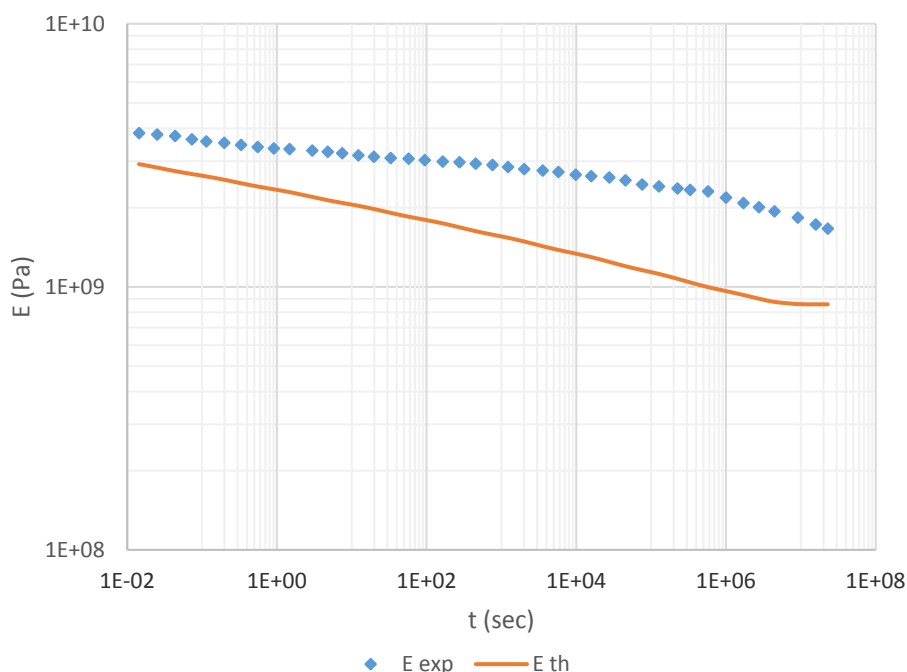
Επιπλέον ένας ακόμα παράγοντας ο οποίος μπορεί να εισάγει σφάλμα στην όλη διαδικασία είναι το κατά πόσο μπορούν να εξασφαλιστούν οι ίδιες συνθήκες κατά την εκτέλεση των πειραμάτων, καθώς και η ομοιογένεια των χρησιμοποιούμενων δοκιμίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εργασία τους οι P. Fernandez, D. Rodriguez, M. J. Lamela και A. Fernandez-Canteli (2011) [11], διαπίστωσαν την σημαντική επίδραση που έχει η υγρασία στα τελικά αποτελέσματα σύνθεσης των "master curves".

Από την άλλη πλευρά βέβαια, παρατηρήσαμε σημαντική μείωση της απόκλισης από τα πειραματικά δεδομένα, όταν ως αφετηρία μας είχαμε τα αντίστοιχα στοιχεία των δυναμικών μέτρων, για τα οποία βέβαια θα πρέπει να υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες τόσο σε πολύ μικρούς χρόνους, όσο και σε αντίστοιχα μεγάλους, ώστε να μπορέσουν να αξιολογηθούν κατάλληλα, δίνοντάς τους όρους E_g και D_g , όπως παρουσιάστηκε αναλυτικά στην

παράγραφο 7.5. Ως επίρρωση των ανωτέρω θα πρέπει να αναφέρουμε ότι, στην προσπάθειά να εξαχθεί η συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης για το PMMA, έχοντας ως αφετηρία τα πειραματικά στοιχεία του μέτρου αποθήκευσης του πίνακα Β.1, διαπιστώθηκε ότι ενώ υπήρξε απόλυτη προσαρμογή αυτών σε μία σιγμοειδή συνάρτηση της μορφής της σχέσης (7.7), όπως φαίνεται και στο σχήμα 7.51, η εξαγόμενη τελική συνάρτηση του μέτρου χαλάρωσης παρουσίαζε σημαντικές αποκλίσεις από τα αντίστοιχα πειραματικά στοιχεία, όπως χαρακτηριστικά παρουσιάζεται στο γράφημα του σχήματος 7.52. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα δεδομένα του μέτρου αποθήκευσης, όπως παρατηρούμε και στο γράφημα του σχήματος 7.51, κινούνται σε ευθεία γραμμή στο λογαριθμικό επίπεδο, χωρίς να γίνεται εμφανής η ύπαρξη κάποιας τιμής ισορροπίας τόσο σε μικρές συχνότητες, όσο και σε μεγάλες, αδυνατώντας έτσι να προσδιορίσουμε με ακρίβεια την τιμή του όρου E_g (στο γράφημα του σχήματος 7.52 χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες τιμές για τους χρόνους χαλάρωσης, καθώς και για τον όρο E_g , με αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν και στον πίνακα 7.17).



Σχήμα 7.51: Γράφημα προσαρμογής πειραματικών δεδομένων μέτρου αποθήκευσης σε σιγμοειδή συνάρτηση για το PMMA.



Σχήμα 7.52: Γραφική παράσταση σύγκρισης πειραματικών δεδομένων χαλάρωσης με αντίστοιχες θεωρητικές τιμές από την μετατροπή των δεδομένων του μέτρου αποθήκευσης, για το PMMA.

Ένας ακόμα παράγοντας που ενισχύει την καλύτερη σύγκλιση της τελευταίας μεθόδου που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 6, και η εφαρμογή της παρουσιάστηκε στην παράγραφο 7.5, είναι η παρουσία των συνεχών φασμάτων χαλάρωσης και καθυστέρησης, η γνώση των οποίων δίνει τη δυνατότητα απόκτησης οποιουδήποτε άλλου ιξωδοελαστικού μεγέθους, καθώς μπορούμε να πούμε ότι χαρακτηρίζουν πλήρως την ιξωδοελαστική συμπεριφορά των υλικών.

Έχοντας επομένως υπόψη τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μοντελοποίηση και η χρήση των σχέσεων μεταξύ των βασικών ιξωδοελαστικών μεγεθών, όπως παρουσιάστηκαν στην παρούσα εργασία, αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο ώστε μέσω της διαδικασίας της αλληλομετατροπής, ανεξάρτητα της μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί, να αποκτήσουμε μια σχετικά αρκετά αξιόπιστη εικόνα για την συμπεριφορά των υλικών στη γραμμική ιξωδοελαστικότητα.

7.7 Επίλογος - Προτάσεις

Τελειώνοντας θα πρέπει να πούμε ότι τόσο για την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων, όσο και για την αλληλομετατροπή των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, καταστρώθηκαν απλά προγράμματα στο Mathematica, τα οποία ουσιαστικά συνίστανται στην επίλυση απλών συστημάτων εξισώσεων, υπολογισμοί που μπορούν πολύ εύκολα να γίνουν και με τη βοήθεια των υπολογιστικών φύλων Excel.

Όσον αφορά τώρα την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων της χαλάρωσης και του ερπυσμού, όπως αναφέραμε και σε προηγούμενες παραγράφους, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Multidata, εμπλουτισμένη με στοιχεία από τις εργασίες των J. Kaschta, F. R. Schwarzl (1994) [7] και R. M. Guedes et All (1998) [8], όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 4.3. Τα αποτελέσματα της παραπάνω μεθόδου συγκρινόμενα με αντίστοιχα αποτελέσματα προσαρμογής με τη χρήση ετοιμών εντολών του Mathematica, ήταν σχεδόν ταυτόσημα, με τη μόνη διαφορά ότι στη δεύτερη περίπτωση, θέτοντας κατάλληλους περιορισμούς και αρχικές τιμές για τις ζητούμενες παραμέτρους, μπορούμε να επιτύχουμε έκφραση των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας περισσότερους όρους στην αντίστοιχη σειρά Prony, γεγονός που δεν είναι πάντα εφικτό στην πρώτη περίπτωση, όπως προκύπτει και από τη συνθήκη της σχέσης (4.12).

Από την άλλη πλευρά, διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος απόκτησης των ιξωδοελαστικών συναρτήσεων με τη μορφή σειρών Prony, μέσω των δυναμικών μέτρων, όπως περιεγράφηκε στο κεφάλαιο 6, μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα ως προς την κλασική μέθοδο αλληλομετατροπής, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι τα πειραματικά δεδομένα εκτείνονται σε ένα ευρύ πεδίο συχνοτήτων, ώστε να περιλαμβάνουν τις περιοχές σταθεροποίησης του μέτρου αποθήκευσης και του αντίστοιχου ενδοτικού μέτρου. Στην παρούσα εργασία, ωστόσο, λόγω ακριβώς αυτής της έλλειψης δεδομένων σε πολύ μικρές συχνότητες, εφαρμόσαμε μια παραλλαγή της μεθόδου, όπου δημιουργήσαμε «πειραματικά» στοιχεία για τα δυναμικά μέτρα, εκμεταλλευόμενοι τη θεωρητική έκφραση των αντίστοιχων πειραματικών της χαλάρωσης και του ερπυσμού σε σειρές Prony, βάσει των σχέσεων (6.5) και

(6.6). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν και παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 7.5, επιβεβαίωσαν την παραπάνω παρατήρηση ως προς την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Αυτό που προτείνουμε ως αντικείμενο για περαιτέρω μελέτη και έρευνα, είναι η εκτέλεση πειραμάτων δυναμικών φορτίσεων σε δοκίμια από ένα ευρύ φάσμα πολυμερών και συνθέτων με βάση αυτά, για ένα διευρυμένο πεδίο συχνοτήτων, ώστε τα δεδομένα που θα προκύψουν να περιέχουν σε μεγάλο βαθμό τις περιοχές σταθεροποίησης του μέτρου αποθήκευσης. Στη συνέχεια, και με βάση τα πειραματικά αυτά στοιχεία, θα πρέπει να γίνει σύγκριση της μεθόδου του κεφαλαίου 6, με την παραλλαγή αυτής ως προς τα αποτελέσματα που παράγουν, ώστε να διαπιστωθεί η σύγκλιση των τελευταίων τόσο μεταξύ τους, όσο και με τα αντίστοιχα πειραματικά της χαλάρωσης και του ερπυσμού.

Παράλληλα θα μπορούσε να γίνει σύγκριση των φασμάτων χαλάρωσης και καθυστέρησης που θα προκύψουν από την παραπάνω διαδικασία, με τα ανάλογα αποτελέσματα άλλων προσεγγιστικών ή αναλυτικών μεθόδων, όπως η προσέγγιση Alfrey.

Παράρτημα A: Ο μετασχηματισμός Laplace.

A.1 Ορισμοί

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης του χρόνου $f(t)$ συμβολίζεται $L[f(t)]$ και ορίζεται για το διάστημα $t \geq 0$ ως εξής:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \bar{f}(s) \quad (\text{A. 1})$$

όπου s , ονομάζεται παράμετρος μετασχηματισμού και είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Για να υπάρχει το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει η συνάρτηση $f(t)$ να είναι τμηματικά ομαλή, το οποίο σημαίνει ότι αυτή θα πρέπει να είναι φραγμένη για κάθε διάστημα $0 \leq t_1 \leq t$ με πεπερασμένο αριθμό τοπικών ακροτάτων και ασυνεχειών, ενώ παράλληλα θα πρέπει να είναι και εκθετικά φραγμένη.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν τώρα οι ακόλουθες ιδιότητες, που καθιστούν τον μετασχηματισμό Laplace έναν γραμμικό τελεστή. Θα είναι δηλαδή,

$$L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)] = \bar{f}(s) + \bar{g}(s) \quad (\text{A. 2})$$

και

$$L[af(t)] = a\bar{f}(s) \quad (\text{A. 3})$$

όπου a μια σταθερά.

Παράλληλα ο μετασχηματισμός Laplace της χρονικής παραγώγου της $f(t)$ θα είναι,

$$L[\dot{f}(t)] = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st}|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} sf(t)e^{-st} dt = -f(0) + s\bar{f}(s) \quad (\text{A. 4})$$

όπου και για την $\dot{f}(t)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν πιο πάνω, να είναι δηλαδή τμηματικά ομαλή και εκθετικά φραγμένη, ενώ η $f(t)$ να είναι συνεχής.

Επαγωγικά τώρα και με τη βοήθεια της σχέσης (A.4) προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις,

$$L[\ddot{f}(t)] = -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2\bar{f}(s) \tag{A.5}$$

$$L[f^{(n)}(t)] = -f^{(n-1)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n\bar{f}(s)$$

όπου $f^{(n)}(t)$ η παράγωγος n -οστής τάξης της συνάρτησης $f(t)$ ως προς τον χρόνο, οι οποίες ισχύουν και για μερικές παραγώγους πολλών μεταβλητών.

A.2 Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace.

Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $\bar{f}(s)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού κατά Laplace, με τα βασικότερα από αυτά, που χρησιμοποιούνται ευρέως για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων γραμμικής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς, να παρουσιάζονται στον πίνακα A.1.

$f(t)$	$\bar{f}(s)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$t^n, n = 0,1,2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
a	$\frac{a}{s}$

Πίνακας A.1: Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace.

Επιπλέον, εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις του μετασχηματισμού των συναρτήσεων βήματος $u(t)$, επικλινούς συνάρτησης $tu(t)$ και συνάρτησης δέλτα $\delta(t)$, για τις οποίες έχουμε ότι,

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$L[tu(t)] = \frac{1}{s^2}$$

και

$$L[\delta(t)]_{0^+} = 0 \quad L[\delta(t)]_{0^-} = 1$$

μπορούμε να επεκτείνουμε τον πίνακα A.1 με τη βοήθεια των ακόλουθων επαγωγικών σχέσεων.

$$L[f(t)u(t - t_o)] = e^{-t_o s} L[f(t - t_o)] \quad (\text{A. 6})$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{A. 7})$$

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds} \bar{f}(s) \quad (\text{A. 8})$$

$$L[e^{-at} f(t)] = \bar{f}(s + a) \quad (\text{A. 9})$$

A.3 Μετασχηματισμοί Laplace ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Στη μελέτη της ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς των υλικών χρησιμοποιείται ευρύτατα μια συνάρτηση που εκφράζει τα ολοκληρώματα εξέλιξης και ορίζεται από τη σχέση,

$$h(t) = \int_0^t f(t')g(t - t')dt' \quad (\text{A. 10})$$

όπου οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ έχουν μηδενικές τιμές για $t < 0$, και κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα $h(t)$ είναι μηδέν για $t' < 0$ και για $t' > t$. Μπορούμε λοιπόν να αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος αυτού ως εξής,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t - t')dt' \quad (\text{A. 11})$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του παραπάνω ολοκληρώματος λοιπόν θα είναι,

$$L[h(t)] = L\left[\int_0^t f(t')g(t-t')dt'\right] = L[f(t)]L[g(t)] \quad (\text{A. 12})$$

η οποία σχέση εκφράζει το θεώρημα εξέλιξης κατά τον μετασχηματισμό Laplace.

A.4 Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής.

Στηριζόμενοι στις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, μπορούμε να αποδείξουμε δύο βασικά θεωρήματα ασύμπτωτης συμπεριφοράς, τα οποία εκφράζονται από τις σχέσεις,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{f}(s) = f(0^+) \quad (\text{A. 13})$$

και

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s) = f(\infty) \quad (\text{A. 14})$$

Η σχέση λοιπόν (A.13), προκύπτει αν λάβουμε το όριο του μετασχηματισμού Laplace της χρονικής παραγώγου της συνάρτησης $f(t)$, όπως φαίνεται παρακάτω. Θα είναι δηλαδή,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} (-f(0) + s\bar{f}(s)) \quad (\text{A. 15})$$

όπου το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μηδέν, όπως προκύπτει από την ακόλουθη έκφραση:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0 \quad (\text{A. 16})$$

Επομένως η σχέση (A.15) καταλήγει στο πρώτο θεώρημα της οριακής τιμής, όπως εκφράστηκε από τη σχέση (A.13).

Ανάλογα η σχέση (A.14), προκύπτει ως εξής:

$$\lim_{s \rightarrow 0} L[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} (-f(0) + s\bar{f}(s)) \quad (\text{A. 17})$$

όπου το αριστερό μέλος της σχέσης (A.17) γίνεται,

$$\lim_{s \rightarrow 0} L[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = f(\infty) - f(0) \quad (\text{A. 18})$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (A.18) στην (A.17) προκύπτει το δεύτερο θεώρημα οριακής τιμής.

Παράρτημα Β: Πειραματικά δεδομένα γραμμικών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων.

Πίνακας Β.1: Πειραματικά δεδομένα PMMA

Χαλάρωση		Ερπυσμός			Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E'' (Pa)
1,445E-02	3,839E+09	1,887E-01	3,455E-10	1,354E-07	1,377E+09	1,267E-07	2,154E+08
2,512E-02	3,793E+09	2,634E-01	3,355E-10	1,965E-07	1,404E+09	1,881E-07	2,154E+08
4,365E-02	3,747E+09	3,857E-01	3,455E-10	2,557E-07	1,431E+09	2,791E-07	2,154E+08
7,311E-02	3,635E+09	5,383E-01	3,455E-10	3,964E-07	1,477E+09	4,052E-07	2,127E+08
1,138E-01	3,570E+09	7,634E-01	3,455E-10	5,631E-07	1,515E+09	5,883E-07	2,127E+08
1,977E-01	3,527E+09	1,066	3,559E-10	9,742E-07	1,565E+09	9,122E-07	2,100E+08
3,311E-01	3,463E+09	1,418	3,559E-10	1,354E-06	1,585E+09	1,161E-06	2,073E+08
5,546E-01	3,401E+09	1,887	3,622E-10	2,447E-06	1,616E+09	2,342E-06	2,021E+08
9,120E-01	3,360E+09	2,593	3,665E-10	4,142E-06	1,690E+09	4,052E-06	1,983E+08
1,472	3,340E+09	3,736	3,665E-10	5,883E-06	1,722E+09	5,631E-06	1,860E+08
2,965	3,299E+09	5,298	3,687E-10	9,122E-06	1,778E+09	8,730E-06	1,836E+08
4,786	3,260E+09	7,279	3,731E-10	1,354E-05	1,836E+09	1,267E-05	1,801E+08
7,447	3,220E+09	10	3,797E-10	2,447E-05	1,860E+09	2,342E-05	1,778E+08
1,225E+01	3,162E+09	1,374E+01	3,843E-10	4,522E-05	1,896E+09	4,522E-05	1,756E+08
1,977E+01	3,124E+09	2,177E+01	3,888E-10	6,710E-05	1,957E+09	7,011E-05	1,722E+08
3,311E+01	3,087E+09	3,290E+01	3,911E-10	9,122E-05	1,995E+09	9,122E-05	1,722E+08
5,754E+01	3,068E+09	3,619E+01	3,911E-10	1,414E-04	2,021E+09	1,414E-04	1,690E+08
9,462E+01	3,031E+09	5,052E+01	3,981E-10	2,053E-04	2,047E+09	1,965E-04	1,690E+08
1,644E+02	2,994E+09	7,634E+01	4,005E-10	3,115E-04	2,087E+09	3,115E-04	1,679E+08
2,754E+02	2,976E+09	1,016E+02	4,076E-10	5,631E-04	2,154E+09	5,631E-04	1,657E+08
4,529E+02	2,940E+09	1,374E+02	4,100E-10	9,324E-04	2,168E+09	9,742E-04	1,657E+08
7,586E+02	2,905E+09	1,887E+02	4,125E-10	1,478E-03	2,196E+09	1,446E-03	1,616E+08
1,225E+03	2,853E+09	2,593E+02	4,149E-10	1,965E-03	2,224E+09	2,099E-03	1,647E+08
2,014E+03	2,801E+09	3,619E+02	4,174E-10	2,916E-03	2,297E+09	3,047E-03	1,647E+08
3,565E+03	2,768E+09	4,972E+02	4,223E-10	4,522E-03	2,326E+09	4,522E-03	1,668E+08
5,754E+03	2,734E+09	7,051E+02	4,248E-10	7,824E-03	2,387E+09	8,175E-03	1,690E+08

Χαλάρωση		Ερπυσμός			Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E'' (Pa)
9,817E+03	2,669E+09	9,687E+02	4,350E-10	1,478E-02	2,448E+09	1,414E-02	1,690E+08
1,585E+04	2,637E+09	1,396E+03	4,375E-10	2,099E-02	2,496E+09	2,193E-02	1,722E+08
2,754E+04	2,605E+09	1,918E+03	4,375E-10	3,254E-02	2,528E+09	3,115E-02	1,733E+08
4,529E+04	2,543E+09	2,677E+03	4,427E-10	4,424E-02	2,561E+09	4,522E-02	1,778E+08
7,586E+04	2,452E+09	3,562E+03	4,427E-10	7,011E-02	2,610E+09	7,011E-02	1,801E+08
1,271E+05	2,408E+09	5,215E+03	4,507E-10	1,087E-01	2,678E+09	1,018E-01	1,836E+08
2,249E+05	2,364E+09	6,831E+03	4,614E-10	1,881E-01	2,712E+09	1,800E-01	1,884E+08
3,311E+05	2,336E+09	9,535E+03	4,642E-10	3,254E-01	2,783E+09	3,254E-01	1,945E+08
5,754E+05	2,308E+09	1,374E+04	4,669E-10	5,046E-01	2,873E+09	5,046E-01	2,021E+08
1,000E+06	2,185E+09	1,887E+04	4,866E-10	7,011E-01	2,891E+09	7,167E-01	2,087E+08
1,706E+06	2,082E+09	2,634E+04	4,924E-10	9,742E-01	2,891E+09	1,064	2,154E+08
2,754E+06	2,007E+09	3,677E+04	4,953E-10	1,511	2,966E+09	1,649	2,224E+08
4,446E+06	1,936E+09	5,052E+04	5,071E-10	2,731	3,063E+09	2,916	2,297E+08
9,120E+06	1,833E+09	7,051E+04	5,193E-10	5,046	3,162E+09	5,046	2,464E+08
1,585E+07	1,725E+09	9,237E+04	5,223E-10	8,175	3,224E+09	7,824	2,594E+08
2,291E+07	1,664E+09	1,352E+05	5,444E-10	1,087E+01	3,265E+09	1,087E+01	2,610E+08
		1,918E+05	5,541E-10	1,686E+01	3,328E+09	1,686E+01	2,783E+08
		2,677E+05	5,741E-10	2,614E+01	3,415E+09	2,671E+01	2,873E+08
		3,562E+05	5,878E-10	4,234E+01	3,481E+09	4,522E+01	3,063E+08
		4,894E+05	6,236E-10	8,175E+01	3,640E+09	7,824E+01	3,350E+08
		6,723E+05	6,537E-10	1,087E+02	3,711E+09	1,087E+02	3,350E+08
		9,237E+05	6,813E-10	1,686E+02	3,807E+09	1,686E+02	3,481E+08
				2,501E+02	3,956E+09	2,614E+02	3,711E+08

Πίνακας Β.2: Πειραματικά δεδομένα ΕC

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
1,452	4,671E+08	9,089E-01	1,660E-09	3,105E-06	2,906E+08	2,056E+07
1,978	4,566E+08	1,664	1,820E-09	5,626E-06	2,597E+08	3,186E+07
2,518	4,497E+08	1,733	1,780E-09	6,210E-06	3,035E+08	1,969E+07
3,058	4,446E+08	2,080	1,690E-09	1,242E-05	3,157E+08	1,965E+07
3,077	4,291E+08	2,578	1,800E-09	1,242E-05	3,180E+08	1,892E+07
4,138	4,367E+08	2,730	1,980E-09	1,407E-05	3,164E+08	1,793E+07
4,193	4,191E+08	3,224	1,960E-09	2,484E-05	3,006E+08	2,406E+07
5,010	4,264E+08	3,424	1,820E-09	2,813E-05	3,268E+08	1,809E+07
5,217	4,309E+08	4,030	1,850E-09	5,230E-05	3,368E+08	1,761E+07
5,337	4,126E+08	4,269	1,840E-09	5,626E-05	3,373E+08	1,877E+07
6,297	4,260E+08	4,823	1,990E-09	6,210E-05	3,352E+08	1,762E+07
6,480	4,077E+08	5,114	1,850E-09	1,125E-04	3,269E+08	2,157E+07
6,960	4,076E+08	5,287	2,140E-09	1,242E-04	3,454E+08	1,792E+07
7,916	4,200E+08	6,030	1,900E-09	2,463E-04	3,549E+08	1,820E+07
8,391	3,863E+08	6,423	2,020E-09	2,484E-04	3,556E+08	1,872E+07
8,768	4,001E+08	6,805	1,870E-09	2,615E-04	3,541E+08	1,761E+07
8,960	3,979E+08	7,794	2,190E-09	4,968E-04	3,468E+08	2,109E+07
9,535	4,149E+08	7,907	2,190E-09	5,230E-04	3,642E+08	1,803E+07
1,096E+01	3,911E+08	8,024	2,050E-09	1,046E-03	3,745E+08	1,891E+07
1,106E+01	3,944E+08	8,030	1,930E-09	1,046E-03	3,759E+08	1,911E+07
1,143E+01	3,766E+08	8,496	1,890E-09	1,232E-03	3,736E+08	1,768E+07
1,170E+01	4,091E+08	9,623	2,070E-09	2,092E-03	3,652E+08	2,122E+07
1,334E+01	3,897E+08	1,003E+01	1,960E-09	2,463E-03	3,838E+08	1,821E+07
1,439E+01	4,031E+08	1,019E+01	1,910E-09	4,899E-03	3,973E+08	1,843E+07
1,455E+01	3,700E+08	1,053E+01	2,220E-09	4,926E-03	3,946E+08	1,916E+07
1,496E+01	3,816E+08	1,203E+01	1,990E-09	5,230E-03	3,938E+08	1,805E+07
1,678E+01	3,840E+08	1,272E+01	1,940E-09	9,853E-03	3,843E+08	2,145E+07
1,763E+01	3,969E+08	1,282E+01	2,100E-09	1,046E-02	4,046E+08	1,852E+07
1,767E+01	3,650E+08	1,316E+01	2,250E-09	2,073E-02	4,175E+08	1,848E+07
1,896E+01	3,746E+08	1,507E+01	2,400E-09	2,092E-02	4,155E+08	1,950E+07
2,021E+01	3,790E+08	1,526E+01	1,960E-09	2,449E-02	4,152E+08	1,838E+07
2,141E+01	3,907E+08	1,578E+01	2,280E-09	4,184E-02	4,046E+08	2,169E+07

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
2,296E+01	3,690E+08	1,602E+01	2,130E-09	4,899E-02	4,261E+08	1,890E+07
2,390E+01	3,574E+08	1,603E+01	2,040E-09	9,797E-02	4,372E+08	1,988E+07
2,478E+01	3,734E+08	1,864E+01	1,990E-09	9,797E-02	4,381E+08	1,981E+07
2,573E+01	3,844E+08	1,922E+01	2,160E-09	1,037E-01	4,367E+08	1,858E+07
2,896E+01	3,621E+08	2,003E+01	2,080E-09	1,959E-01	4,259E+08	2,216E+07
3,014E+01	3,516E+08	2,102E+01	2,320E-09	2,073E-01	4,475E+08	1,921E+07
3,050E+01	3,676E+08	2,257E+01	2,470E-09	4,070E-01	4,569E+08	1,932E+07
3,113E+01	3,777E+08	2,287E+01	2,020E-09	4,146E-01	4,587E+08	2,026E+07
3,496E+01	3,564E+08	2,402E+01	2,190E-09	4,899E-01	4,568E+08	1,894E+07
3,638E+01	3,469E+08	2,403E+01	2,110E-09	8,292E-01	4,475E+08	2,252E+07
3,736E+01	3,616E+08	2,626E+01	2,350E-09	9,797E-01	4,675E+08	1,955E+07
3,761E+01	3,704E+08	2,794E+01	2,050E-09	1,219	4,691E+08	1,867E+07
4,296E+01	3,500E+08	2,882E+01	2,220E-09	1,959	4,782E+08	2,066E+07
4,516E+01	3,630E+08	3,003E+01	2,160E-09	2,035	4,739E+08	1,930E+07
4,537E+01	3,557E+08	3,005E+01	2,520E-09	3,280	4,803E+08	1,980E+07
4,573E+01	3,411E+08	3,151E+01	2,380E-09	3,919	4,689E+08	2,295E+07
5,296E+01	3,431E+08	3,386E+01	2,090E-09	4,070	4,834E+08	1,992E+07
5,434E+01	3,550E+08	3,522E+01	2,260E-09	6,095	4,867E+08	1,944E+07
5,452E+01	3,499E+08	3,603E+01	2,200E-09	6,283	4,911E+08	1,962E+07
5,509E+01	3,364E+08	3,753E+01	2,560E-09	8,139	4,934E+08	2,104E+07
6,496E+01	3,363E+08	3,938E+01	2,420E-09	1,219E+01	4,960E+08	2,018E+07
6,568E+01	3,463E+08	4,062E+01	2,130E-09	1,257E+01	4,974E+08	1,961E+07
6,596E+01	3,434E+08	4,322E+01	2,290E-09	1,628E+01	4,879E+08	2,340E+07
6,756E+01	3,310E+08	4,403E+01	2,260E-09	1,640E+01	4,980E+08	1,961E+07
7,896E+01	3,296E+08	4,504E+01	2,590E-09	2,113E+01	5,034E+08	1,893E+07
7,917E+01	3,373E+08	4,725E+01	2,460E-09	2,438E+01	5,057E+08	2,138E+07
7,969E+01	3,366E+08	4,907E+01	2,180E-09	2,696E+01	5,069E+08	1,991E+07
8,315E+01	3,253E+08	5,282E+01	2,340E-09	3,142E+01	5,075E+08	1,990E+07
9,496E+01	3,231E+08	5,403E+01	2,320E-09	3,280E+01	5,071E+08	2,042E+07
9,537E+01	3,279E+08	5,773E+01	2,500E-09	4,876E+01	5,024E+08	2,385E+07
9,571E+01	3,296E+08	5,922E+01	2,240E-09	6,283E+01	5,144E+08	2,002E+07
1,019E+02	3,194E+08	6,000E+01	2,650E-09	6,283E+01	5,161E+08	2,068E+07
1,148E+02	3,180E+08	6,402E+01	2,380E-09	6,560E+01	5,166E+08	2,171E+07
1,150E+02	3,163E+08	6,603E+01	2,390E-09	1,057E+02	5,197E+08	2,021E+07
1,152E+02	3,220E+08	7,085E+01	2,550E-09	1,257E+02	5,228E+08	2,095E+07

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
1,237E+02	3,136E+08	7,106E+01	2,300E-09	1,257E+02	5,251E+08	2,203E+07
1,380E+02	3,080E+08	7,498E+01	2,700E-09	1,312E+02	5,145E+08	2,427E+07
1,390E+02	3,094E+08	7,681E+01	2,430E-09	1,348E+02	5,223E+08	2,049E+07
1,392E+02	3,137E+08	8,003E+01	2,460E-09	2,113E+02	5,277E+08	2,121E+07
1,486E+02	3,079E+08	8,543E+01	2,370E-09	2,513E+02	5,316E+08	2,234E+07
1,661E+02	2,976E+08	8,659E+01	2,600E-09	2,513E+02	5,252E+08	2,468E+07
1,670E+02	3,027E+08	8,996E+01	2,740E-09	2,696E+02	5,298E+08	2,139E+07
1,678E+02	3,051E+08	9,281E+01	2,490E-09	4,227E+02	5,361E+08	2,264E+07
1,798E+02	3,017E+08	9,603E+01	2,540E-09	5,026E+02	5,332E+08	2,511E+07
1,996E+02	2,873E+08	1,032E+02	2,460E-09	5,393E+02	5,377E+08	2,284E+07
2,010E+02	2,957E+08	1,049E+02	2,660E-09	8,453E+02	5,394E+08	2,543E+07
2,021E+02	2,963E+08	1,120E+02	2,560E-09	1,079E+03	5,436E+08	2,590E+07
2,172E+02	2,954E+08	1,124E+02	2,800E-09			
2,395E+02	2,771E+08	1,160E+02	2,630E-09			
2,430E+02	2,883E+08	1,243E+02	2,560E-09			
2,433E+02	2,871E+08	1,259E+02	2,710E-09			
2,609E+02	2,889E+08	1,344E+02	2,640E-09			
2,875E+02	2,673E+08	1,349E+02	2,840E-09			
2,925E+02	2,777E+08	1,400E+02	2,720E-09			
2,930E+02	2,806E+08	1,497E+02	2,680E-09			
3,139E+02	2,819E+08	1,522E+02	2,780E-09			
3,453E+02	2,580E+08	1,616E+02	2,730E-09			
3,519E+02	2,681E+08	1,648E+02	2,900E-09			
3,530E+02	2,727E+08	1,680E+02	2,820E-09			
3,794E+02	2,741E+08	1,801E+02	2,820E-09			
4,059E+02	2,597E+08	1,836E+02	2,860E-09			
4,144E+02	2,494E+08	1,952E+02	2,840E-09			
4,229E+02	2,586E+08	2,020E+02	2,940E-09			
4,250E+02	2,647E+08	2,023E+02	2,960E-09			
4,573E+02	2,661E+08	2,165E+02	2,980E-09			
4,856E+02	2,426E+08	2,204E+02	2,940E-09			
5,075E+02	2,493E+08	2,352E+02	2,960E-09			
5,110E+02	2,567E+08	2,440E+02	3,070E-09			
5,509E+02	2,576E+08	2,472E+02	3,030E-09			
5,648E+02	2,424E+08	2,604E+02	3,160E-09			

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
6,093E+02	2,401E+08	2,649E+02	3,040E-09			
6,150E+02	2,486E+08	2,832E+02	3,100E-09			
6,631E+02	2,487E+08	2,940E+02	3,200E-09			
7,277E+02	2,321E+08	2,996E+02	3,110E-09			
7,317E+02	2,317E+08	3,128E+02	3,350E-09			
7,390E+02	2,407E+08	3,200E+02	3,160E-09			
7,972E+02	2,397E+08	3,408E+02	3,250E-09			
8,781E+02	2,239E+08	3,541E+02	3,350E-09			
8,870E+02	2,330E+08	3,595E+02	3,190E-09			
8,905E+02	2,247E+08	3,754E+02	3,550E-09			
9,594E+02	2,303E+08	3,856E+02	3,290E-09			
1,029E+03	2,176E+08	4,096E+02	3,420E-09			
1,065E+03	2,256E+08	4,261E+02	3,520E-09			
1,153E+03	2,210E+08	4,344E+02	3,280E-09			
1,217E+03	2,143E+08	4,506E+02	3,760E-09			
1,279E+03	2,181E+08	4,643E+02	3,450E-09			
1,383E+03	2,117E+08	4,928E+02	3,620E-09			
1,535E+03	2,110E+08	5,121E+02	3,690E-09			
1,543E+03	2,066E+08	5,243E+02	3,390E-09			
1,661E+03	2,029E+08	5,411E+02	3,960E-09			
1,799E+03	2,053E+08	5,587E+02	3,630E-09			
1,869E+03	2,006E+08	5,920E+02	3,820E-09			
1,995E+03	1,943E+08	6,161E+02	3,870E-09			
2,358E+03	1,936E+08	6,291E+02	3,510E-09			
2,394E+03	1,863E+08	6,493E+02	4,160E-09			
2,805E+03	1,799E+08	6,715E+02	3,830E-09			
2,847E+03	1,881E+08	7,104E+02	4,030E-09			
3,499E+03	1,820E+08	7,401E+02	4,060E-09			
4,314E+03	1,760E+08	7,563E+02	3,660E-09			
5,292E+03	1,699E+08	7,600E+02	4,320E-09			
6,433E+03	1,641E+08	8,078E+02	4,060E-09			
7,737E+03	1,586E+08	8,527E+02	4,240E-09			
9,367E+03	1,526E+08	8,881E+02	4,250E-09			
1,132E+04	1,466E+08	9,136E+02	3,830E-09			
1,361E+04	1,405E+08	9,704E+02	4,290E-09			

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
1,638E+04	1,342E+08	1,024E+03	4,450E-09			
1,980E+04	1,274E+08	1,066E+03	4,430E-09			
2,388E+04	1,204E+08	1,101E+03	4,030E-09			
2,877E+04	1,133E+08	1,165E+03	4,550E-09			
3,464E+04	1,060E+08	1,229E+03	4,660E-09			
4,165E+04	9,861E+07	1,280E+03	4,610E-09			
5,012E+04	9,130E+07	1,325E+03	4,270E-09			
6,023E+04	8,440E+07	1,398E+03	4,810E-09			
7,229E+04	7,807E+07	1,438E+03	4,820E-09			
8,679E+04	7,253E+07	1,534E+03	4,850E-09			
1,040E+05	6,770E+07	1,536E+03	4,790E-09			
1,250E+05	6,373E+07	1,595E+03	4,560E-09			
1,470E+05	6,077E+07	1,679E+03	5,070E-09			
		1,798E+03	4,940E-09			
		1,917E+03	4,880E-09			
		2,014E+03	5,320E-09			
		2,306E+03	5,260E-09			
		2,358E+03	5,540E-09			
		2,770E+03	5,670E-09			
		2,974E+03	6,180E-09			
		3,325E+03	6,130E-09			
		3,991E+03	6,610E-09			
		4,453E+03	6,720E-09			
		4,792E+03	7,110E-09			
		5,750E+03	7,620E-09			
		5,929E+03	7,080E-09			
		6,731E+03	8,070E-09			
		7,405E+03	7,350E-09			
		8,885E+03	7,560E-09			
		1,184E+04	7,900E-09			
		1,479E+04	8,160E-09			
		1,775E+04	8,380E-09			
		2,218E+04	8,650E-09			
		2,661E+04	8,870E-09			
		3,252E+04	9,120E-09			

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
		3,991E+04	9,380E-09			
		4,877E+04	9,650E-09			
		5,911E+04	9,930E-09			
		7,093E+04	1,021E-08			
		8,570E+04	1,052E-08			
		1,030E+05	1,085E-08			
		1,240E+05	1,122E-08			
		1,490E+05	1,162E-08			
		1,800E+05	1,207E-08			
		2,170E+05	1,258E-08			
		2,610E+05	1,313E-08			
		3,150E+05	1,374E-08			
		3,780E+05	1,439E-08			
		4,550E+05	1,509E-08			
		5,470E+05	1,580E-08			
		6,560E+05	1,652E-08			
		7,870E+05	1,721E-08			
		9,450E+05	1,788E-08			
		1,130E+06	1,852E-08			
		1,330E+06	1,904E-08			

Πίνακας Β.3: Πειραματικά δεδομένα EC20

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
1,264	7,084E+08	4,826E-01	9,040E-10	4,121E-05	7,158E+08	7,326E+07
1,726	6,681E+08	9,351E-01	9,760E-10	4,327E-05	7,985E+08	5,359E+07
2,201	6,514E+08	1,018	9,850E-10	8,653E-05	8,171E+08	5,527E+07
2,675	6,403E+08	1,399	9,960E-10	8,653E-05	8,234E+08	5,293E+07
2,699	5,967E+08	1,863	1,010E-09	1,030E-04	8,189E+08	5,191E+07
3,623	6,236E+08	1,971	1,070E-09	1,731E-04	7,969E+08	5,864E+07
3,642	5,821E+08	2,110	9,380E-10	2,060E-04	8,411E+08	5,124E+07
4,572	6,110E+08	2,202	1,090E-09	3,751E-04	8,568E+08	5,533E+07
4,609	5,711E+08	2,327	1,020E-09	4,121E-04	8,630E+08	5,153E+07
4,830	6,216E+08	2,791	1,030E-09	4,327E-04	8,574E+08	5,075E+07
5,520	6,009E+08	2,950	1,090E-09	8,242E-04	8,461E+08	5,428E+07
5,577	5,623E+08	3,719	1,050E-09	8,653E-04	8,782E+08	5,062E+07
6,780	5,860E+08	3,928	1,110E-09	1,731E-03	8,998E+08	5,127E+07
6,943	5,880E+08	4,060	1,050E-09	1,731E-03	8,941E+08	5,294E+07
7,275	5,150E+08	4,271	1,190E-09	1,875E-03	8,941E+08	5,080E+07
7,511	5,486E+08	4,647	1,060E-09	3,461E-03	8,845E+08	5,363E+07
8,366	5,774E+08	4,906	1,130E-09	3,751E-03	9,149E+08	5,068E+07
8,780	5,647E+08	5,576	1,080E-09	6,124E-03	9,259E+08	5,350E+07
9,445	5,379E+08	5,886	1,140E-09	7,502E-03	9,363E+08	5,150E+07
9,818	5,007E+08	6,060	1,090E-09	8,653E-03	9,302E+08	5,083E+07
1,026E+01	5,654E+08	6,396	1,220E-09	1,500E-02	9,206E+08	5,380E+07
1,078E+01	5,490E+08	6,968	1,090E-09	1,731E-02	9,502E+08	5,094E+07
1,138E+01	5,289E+08	7,842	1,160E-09	2,890E-02	9,596E+08	5,529E+07
1,243E+01	4,900E+08	8,060	1,130E-09	3,062E-02	9,633E+08	5,094E+07
1,263E+01	5,529E+08	8,360	1,110E-09	3,461E-02	9,710E+08	5,191E+07
1,278E+01	5,364E+08	8,516	1,250E-09	6,124E-02	9,832E+08	5,136E+07
1,428E+01	5,177E+08	9,799	1,180E-09	6,922E-02	9,574E+08	5,421E+07
1,504E+01	4,816E+08	1,006E+01	1,160E-09	7,932E-02	9,926E+08	5,384E+07
1,548E+01	5,400E+08	1,022E+01	1,130E-09	1,225E-01	1,003E+09	5,250E+07
1,678E+01	5,164E+08	1,064E+01	1,270E-09	1,445E-01	9,954E+08	5,162E+07
1,718E+01	5,083E+08	1,176E+01	1,200E-09	2,450E-01	9,916E+08	5,452E+07
1,880E+01	5,271E+08	1,206E+01	1,180E-09	2,890E-01	1,015E+09	5,199E+07
2,025E+01	4,683E+08	1,254E+01	1,150E-09	3,185E-01	1,019E+09	5,375E+07
2,078E+01	5,010E+08	1,276E+01	1,280E-09	3,966E-01	1,027E+09	5,229E+07

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
2,105E+01	4,977E+08	1,469E+01	1,220E-09	5,779E-01	1,036E+09	5,328E+07
2,259E+01	5,144E+08	1,532E+01	1,170E-09	7,654E-01	1,044E+09	5,623E+07
2,478E+01	4,883E+08	1,606E+01	1,220E-09	7,932E-01	1,047E+09	5,280E+07
2,546E+01	4,580E+08	1,700E+01	1,310E-09	1,156	1,024E+09	5,508E+07
2,589E+01	4,866E+08	1,763E+01	1,240E-09	1,550	1,064E+09	5,417E+07
2,734E+01	5,009E+08	1,857E+01	1,200E-09	1,586	1,067E+09	5,417E+07
3,068E+01	4,496E+08	2,006E+01	1,260E-09	1,593	1,055E+09	5,276E+07
3,078E+01	4,727E+08	2,125E+01	1,330E-09	3,173	1,057E+09	5,639E+07
3,169E+01	4,751E+08	2,154E+01	1,270E-09	3,185	1,074E+09	5,355E+07
3,303E+01	4,867E+08	2,228E+01	1,220E-09	3,795	1,081E+09	5,632E+07
3,678E+01	4,599E+08	2,406E+01	1,300E-09	3,827	1,079E+09	5,346E+07
3,846E+01	4,639E+08	2,549E+01	1,360E-09	6,283	1,093E+09	5,672E+07
3,850E+01	4,393E+08	2,643E+01	1,290E-09	6,370	1,093E+09	5,509E+07
3,967E+01	4,723E+08	2,692E+01	1,250E-09	7,654	1,097E+09	5,433E+07
4,478E+01	4,457E+08	3,006E+01	1,340E-09	7,749	1,097E+09	5,402E+07
4,620E+01	4,526E+08	3,185E+01	1,380E-09	1,074E+01	1,105E+09	5,604E+07
4,633E+01	4,307E+08	3,231E+01	1,320E-09	1,274E+01	1,087E+09	5,748E+07
4,773E+01	4,571E+08	3,249E+01	1,290E-09	1,531E+01	1,115E+09	5,596E+07
5,478E+01	4,311E+08	3,606E+01	1,390E-09	1,535E+01	1,113E+09	5,887E+07
5,587E+01	4,404E+08	3,822E+01	1,410E-09	1,550E+01	1,115E+09	5,509E+07
5,676E+01	4,207E+08	3,899E+01	1,330E-09	1,707E+01	1,114E+09	6,035E+07
5,769E+01	4,409E+08	3,915E+01	1,360E-09	1,897E+01	1,113E+09	5,494E+07
6,678E+01	4,169E+08	4,406E+01	1,440E-09	3,061E+01	1,113E+09	5,850E+07
6,749E+01	4,279E+08	4,670E+01	1,440E-09	3,100E+01	1,133E+09	5,686E+07
6,955E+01	4,243E+08	4,688E+01	1,380E-09	3,142E+01	1,126E+09	5,565E+07
6,980E+01	4,104E+08	4,698E+01	1,390E-09	3,795E+01	1,130E+09	5,587E+07
8,078E+01	4,031E+08	5,406E+01	1,500E-09	5,372E+01	1,137E+09	5,666E+07
8,103E+01	4,150E+08	5,662E+01	1,430E-09	6,199E+01	1,134E+09	5,957E+07
8,377E+01	4,074E+08	5,677E+01	1,430E-09	6,283E+01	1,143E+09	5,693E+07
8,544E+01	3,999E+08	5,731E+01	1,480E-09	7,589E+01	1,148E+09	5,786E+07
9,678E+01	3,901E+08	6,606E+01	1,560E-09	7,677E+01	1,144E+09	5,810E+07
9,747E+01	4,014E+08	6,822E+01	1,500E-09	8,535E+01	1,147E+09	5,970E+07
1,009E+02	3,903E+08	6,852E+01	1,480E-09	1,074E+02	1,153E+09	5,810E+07
1,037E+02	3,896E+08	7,004E+01	1,520E-09	1,257E+02	1,160E+09	5,900E+07
1,168E+02	3,770E+08	8,006E+01	1,630E-09	1,518E+02	1,151E+09	6,018E+07

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
1,178E+02	3,870E+08	8,215E+01	1,580E-09	1,535E+02	1,159E+09	5,941E+07
1,212E+02	3,730E+08	8,221E+01	1,540E-09	1,707E+02	1,162E+09	6,127E+07
1,246E+02	3,793E+08	8,489E+01	1,560E-09	2,149E+02	1,170E+09	6,033E+07
1,408E+02	3,639E+08	9,606E+01	1,700E-09	2,513E+02	1,166E+09	6,178E+07
1,420E+02	3,721E+08	9,885E+01	1,600E-09	3,071E+02	1,176E+09	6,178E+07
1,459E+02	3,559E+08	9,885E+01	1,660E-09	3,414E+02	1,177E+09	6,365E+07
1,506E+02	3,684E+08	1,019E+02	1,600E-09	4,297E+02	1,178E+09	6,274E+07
1,688E+02	3,514E+08	1,161E+02	1,770E-09	6,142E+02	1,188E+09	6,428E+07
1,710E+02	3,571E+08	1,188E+02	1,760E-09	6,828E+02	1,192E+09	6,570E+07
1,753E+02	3,390E+08	1,194E+02	1,680E-09			
1,819E+02	3,571E+08	1,231E+02	1,660E-09			
2,028E+02	3,389E+08	1,401E+02	1,840E-09			
2,058E+02	3,419E+08	1,429E+02	1,870E-09			
2,104E+02	3,229E+08	1,439E+02	1,770E-09			
2,185E+02	3,457E+08	1,486E+02	1,720E-09			
2,448E+02	3,260E+08	1,681E+02	1,920E-09			
2,474E+02	3,267E+08	1,717E+02	1,990E-09			
2,526E+02	3,077E+08	1,732E+02	1,870E-09			
2,628E+02	3,337E+08	1,782E+02	1,790E-09			
2,948E+02	3,134E+08	1,961E+02	2,170E-09			
2,977E+02	3,117E+08	2,021E+02	2,000E-09			
3,033E+02	2,937E+08	2,060E+02	2,120E-09			
3,175E+02	3,209E+08	2,085E+02	1,990E-09			
3,548E+02	3,009E+08	2,143E+02	1,870E-09			
3,577E+02	2,970E+08	2,441E+02	2,090E-09			
3,640E+02	2,810E+08	2,473E+02	2,250E-09			
3,827E+02	3,076E+08	2,505E+02	2,120E-09			
4,266E+02	2,713E+08	2,589E+02	1,970E-09			
4,268E+02	2,883E+08	2,941E+02	2,180E-09			
4,293E+02	2,831E+08	2,970E+02	2,390E-09			
4,610E+02	2,939E+08	3,014E+02	2,270E-09			
5,126E+02	2,290E+08	3,119E+02	2,090E-09			
5,128E+02	2,761E+08	3,541E+02	2,280E-09			
5,153E+02	2,701E+08	3,564E+02	2,520E-09			
5,549E+02	2,799E+08	3,621E+02	2,430E-09			

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
6,168E+02	2,641E+08	3,756E+02	2,230E-09			
6,188E+02	2,581E+08	3,798E+02	2,810E-09			
6,670E+02	2,657E+08	4,172E+02	2,620E-09			
6,917E+02	2,113E+08	4,261E+02	2,380E-09			
7,408E+02	2,526E+08	4,344E+02	2,590E-09			
7,426E+02	2,474E+08	4,519E+02	2,390E-09			
8,026E+02	2,516E+08	5,121E+02	2,480E-09			
8,703E+02	2,391E+08	5,215E+02	2,770E-09			
8,753E+02	1,997E+08	5,432E+02	2,570E-09			
8,888E+02	2,414E+08	5,680E+02	3,110E-09			
9,643E+02	2,376E+08	6,161E+02	2,590E-09			
1,059E+03	1,913E+08	6,262E+02	2,930E-09			
1,067E+03	2,307E+08	6,535E+02	2,780E-09			
1,157E+03	2,241E+08	7,401E+02	2,690E-09			
1,281E+03	2,203E+08	7,515E+02	3,100E-09			
1,389E+03	2,113E+08	7,562E+02	3,330E-09			
1,426E+03	1,794E+08	7,850E+02	3,000E-09			
1,537E+03	2,104E+08	8,797E+02	3,230E-09			
1,668E+03	1,991E+08	8,880E+02	2,800E-09			
1,794E+03	1,710E+08	9,419E+02	3,240E-09			
1,799E+03	2,027E+08	9,450E+02	3,500E-09			
2,002E+03	1,879E+08	1,066E+03	2,910E-09			
2,162E+03	1,647E+08	1,131E+03	3,490E-09			
2,346E+03	1,786E+08	1,133E+03	3,630E-09			
2,712E+03	1,574E+08	1,280E+03	3,020E-09			
3,264E+03	1,516E+08	1,358E+03	3,750E-09			
3,999E+03	1,454E+08	1,510E+03	3,860E-09			
4,918E+03	1,393E+08	1,536E+03	3,130E-09			
6,020E+03	1,333E+08	1,629E+03	4,010E-09			
7,306E+03	1,275E+08	1,798E+03	3,220E-09			
8,776E+03	1,219E+08	1,887E+03	4,030E-09			
1,061E+04	1,160E+08	1,907E+03	4,230E-09			
1,282E+04	1,099E+08	2,263E+03	4,190E-09			
1,539E+04	1,038E+08	2,829E+03	4,380E-09			
1,851E+04	9,733E+07	3,394E+03	4,540E-09			

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

Χαλάρωση		Ερπυσμός		Δυναμικά Μέτρα		
t (sec)	E (Pa)	t (sec)	D (1/Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	E'' (Pa)
2,237E+04	9,049E+07	4,147E+03	4,730E-09			
2,697E+04	8,343E+07	5,089E+03	4,930E-09			
3,248E+04	7,624E+07	6,220E+03	5,150E-09			
3,909E+04	6,904E+07	7,538E+03	5,380E-09			
4,699E+04	6,206E+07	9,045E+03	5,610E-09			
5,655E+04	5,540E+07	1,093E+04	5,880E-09			
6,794E+04	4,927E+07	1,319E+04	6,180E-09			
8,153E+04	4,380E+07	1,583E+04	6,510E-09			
9,788E+04	3,904E+07	1,903E+04	6,880E-09			
1,180E+05	3,506E+07	2,299E+04	7,310E-09			
1,410E+05	3,179E+07	2,770E+04	7,790E-09			
1,650E+05	2,944E+07	3,335E+04	8,330E-09			
		4,013E+04	8,910E-09			
		4,823E+04	9,530E-09			
		5,803E+04	1,019E-08			
		6,971E+04	1,084E-08			
		8,364E+04	1,147E-08			
		1,000E+05	1,208E-08			
		1,210E+05	1,265E-08			
		1,450E+05	1,318E-08			
		1,690E+05	1,359E-08			

Πίνακας Β.4: Τιμές ενδοτικού μέτρου αποθήκευσης όπως προκύπτει από τη σχέση (6.5)

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)
5,910E-14	7,040E-10	5,908E-14	2,329E-08	1,170E-14	4,990E-08
6,420E-14	7,040E-10	6,417E-14	2,329E-08	5,790E-14	4,990E-08
9,480E-14	7,040E-10	9,483E-14	2,329E-08	5,830E-14	4,990E-08
2,140E-13	7,040E-10	2,139E-13	2,329E-08	1,170E-13	4,990E-08
2,950E-13	7,040E-10	2,954E-13	2,329E-08	1,490E-13	4,990E-08
3,210E-13	7,040E-10	3,208E-13	2,329E-08	2,330E-13	4,990E-08
4,740E-13	7,040E-10	4,742E-13	2,329E-08	2,900E-13	4,990E-08
4,990E-13	7,040E-10	4,986E-13	2,329E-08	2,910E-13	4,990E-08
5,910E-13	7,040E-10	5,908E-13	2,329E-08	4,670E-13	4,990E-08
6,420E-13	7,040E-10	6,417E-13	2,329E-08	5,790E-13	4,990E-08
9,480E-13	7,040E-10	9,483E-13	2,329E-08	6,810E-13	4,990E-08
1,070E-12	7,040E-10	1,070E-12	2,329E-08	7,450E-13	4,990E-08
1,180E-12	7,040E-10	1,182E-12	2,329E-08	1,160E-12	4,990E-08
1,280E-12	7,040E-10	1,283E-12	2,329E-08	1,420E-12	4,990E-08
1,840E-12	7,040E-10	1,836E-12	2,329E-08	1,460E-12	4,990E-08
1,900E-12	7,040E-10	1,897E-12	2,329E-08	1,490E-12	4,990E-08
2,140E-12	7,040E-10	2,139E-12	2,329E-08	2,320E-12	4,990E-08
2,360E-12	7,040E-10	2,363E-12	2,329E-08	2,910E-12	4,990E-08
2,490E-12	7,040E-10	2,493E-12	2,329E-08	2,980E-12	4,990E-08
2,570E-12	7,040E-10	2,567E-12	2,329E-08	3,410E-12	4,990E-08
3,790E-12	7,040E-10	3,793E-12	2,329E-08	4,190E-12	4,990E-08
4,280E-12	7,040E-10	4,279E-12	2,329E-08	5,830E-12	4,990E-08
4,990E-12	7,040E-10	4,986E-12	2,329E-08	5,960E-12	4,990E-08
5,510E-12	7,040E-10	5,514E-12	2,329E-08	6,810E-12	4,990E-08
8,560E-12	7,040E-10	8,557E-12	2,329E-08	7,080E-12	4,990E-08
9,180E-12	7,040E-10	9,180E-12	2,329E-08	1,170E-11	4,990E-08
9,970E-12	7,040E-10	9,971E-12	2,329E-08	1,170E-11	4,990E-08
1,840E-11	7,040E-10	1,836E-11	2,329E-08	1,360E-11	4,990E-08
1,990E-11	7,040E-10	1,994E-11	2,329E-08	1,420E-11	4,990E-08
2,230E-11	7,040E-10	2,228E-11	2,329E-08	2,090E-11	4,990E-08
2,760E-11	7,040E-10	2,757E-11	2,329E-08	2,720E-11	4,990E-08
3,670E-11	7,040E-10	3,672E-11	2,329E-08	2,830E-11	4,990E-08
5,510E-11	7,040E-10	5,514E-11	2,329E-08	4,190E-11	4,990E-08

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)
7,340E-11	7,040E-10	7,344E-11	2,329E-08	5,660E-11	4,990E-08
7,860E-11	7,040E-10	7,858E-11	2,329E-08	5,860E-11	4,990E-08
1,100E-10	7,040E-10	1,103E-10	2,329E-08	6,300E-11	4,990E-08
1,110E-10	7,040E-10	1,114E-10	2,329E-08	8,370E-11	4,990E-08
2,210E-10	7,040E-10	2,206E-10	2,329E-08	1,170E-10	4,990E-08
2,230E-10	7,040E-10	2,228E-10	2,329E-08	1,670E-10	4,990E-08
3,720E-10	7,040E-10	3,721E-10	2,329E-08	2,030E-10	4,990E-08
3,930E-10	7,040E-10	3,929E-10	2,329E-08	2,340E-10	4,990E-08
4,460E-10	7,040E-10	4,455E-10	2,329E-08	3,150E-10	4,990E-08
7,860E-10	7,030E-10	7,858E-10	2,329E-08	4,690E-10	4,990E-08
8,910E-10	7,020E-10	8,910E-10	2,329E-08	6,300E-10	4,990E-08
1,570E-09	6,980E-10	1,572E-09	2,329E-08	6,830E-10	4,990E-08
1,570E-09	6,980E-10	1,572E-09	2,329E-08	1,020E-09	4,990E-08
1,860E-09	6,960E-10	1,861E-09	2,329E-08	1,260E-09	4,990E-08
3,140E-09	6,850E-10	3,143E-09	2,329E-08	2,030E-09	4,990E-08
3,720E-09	6,790E-10	3,721E-09	2,329E-08	2,520E-09	4,990E-08
7,120E-09	6,520E-10	7,115E-09	2,329E-08	3,416E-09	4,990E-08
7,440E-09	6,490E-10	7,442E-09	2,329E-08	3,507E-09	4,990E-08
7,860E-09	6,470E-10	7,858E-09	2,329E-08	4,062E-09	4,990E-08
1,490E-08	6,220E-10	1,488E-08	2,329E-08	6,832E-09	4,990E-08
1,570E-08	6,200E-10	1,572E-08	2,329E-08	8,124E-09	4,990E-08
3,110E-08	5,900E-10	3,105E-08	2,329E-08	1,082E-08	4,990E-08
3,140E-08	5,900E-10	3,143E-08	2,329E-08	1,366E-08	4,990E-08
3,560E-08	5,830E-10	3,557E-08	2,329E-08	1,753E-08	4,990E-08
6,290E-08	5,440E-10	6,287E-08	2,329E-08	2,733E-08	4,990E-08
7,120E-08	5,350E-10	7,115E-08	2,328E-08	3,507E-08	4,990E-08
1,410E-07	4,980E-10	1,407E-07	2,326E-08	5,408E-08	4,990E-08
1,420E-07	4,980E-10	1,423E-07	2,326E-08	5,603E-08	4,990E-08
1,550E-07	4,950E-10	1,553E-07	2,325E-08	7,014E-08	4,990E-08
2,850E-07	4,770E-10	2,846E-07	2,316E-08	1,082E-07	4,980E-08
3,110E-07	4,740E-10	3,105E-07	2,313E-08	1,403E-07	4,980E-08
6,210E-07	4,520E-10	6,210E-07	2,268E-08	2,163E-07	4,960E-08
6,210E-07	4,520E-10	6,210E-07	2,268E-08	2,163E-07	4,960E-08
7,030E-07	4,470E-10	7,033E-07	2,252E-08	2,802E-07	4,940E-08
1,240E-06	4,290E-10	1,242E-06	2,112E-08	4,327E-07	4,860E-08

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)
1,410E-06	4,260E-10	1,407E-06	2,062E-08	5,603E-07	4,770E-08
2,810E-06	4,140E-10	2,813E-06	1,633E-08	1,030E-06	4,330E-08
2,810E-06	4,140E-10	2,813E-06	1,633E-08	1,082E-06	4,280E-08
3,110E-06	4,130E-10	3,105E-06	1,559E-08	1,121E-06	4,230E-08
5,630E-06	4,040E-10	5,626E-06	1,160E-08	2,163E-06	3,120E-08
6,210E-06	4,030E-10	6,210E-06	1,108E-08	2,241E-06	3,050E-08
1,240E-05	3,920E-10	1,242E-05	8,536E-09	4,327E-06	1,850E-08
1,240E-05	3,920E-10	1,242E-05	8,536E-09	4,327E-06	1,850E-08
1,410E-05	3,900E-10	1,407E-05	8,202E-09	5,151E-06	1,620E-08
2,480E-05	3,840E-10	2,484E-05	6,895E-09	8,653E-06	1,180E-08
2,810E-05	3,820E-10	2,813E-05	6,657E-09	1,030E-05	1,090E-08
5,230E-05	3,760E-10	5,230E-05	5,804E-09	2,060E-05	8,450E-09
5,630E-05	3,750E-10	5,626E-05	5,737E-09	2,060E-05	8,450E-09
6,210E-05	3,730E-10	6,210E-05	5,654E-09	2,163E-05	8,320E-09
1,130E-04	3,640E-10	1,125E-04	5,277E-09	4,121E-05	6,980E-09
1,240E-04	3,620E-10	1,242E-04	5,224E-09	4,327E-05	6,910E-09
2,460E-04	3,550E-10	2,463E-04	4,845E-09	8,653E-05	6,160E-09
2,480E-04	3,540E-10	2,484E-04	4,840E-09	8,653E-05	6,160E-09
2,620E-04	3,540E-10	2,615E-04	4,810E-09	1,030E-04	6,020E-09
4,970E-04	3,490E-10	4,968E-04	4,365E-09	1,731E-04	5,510E-09
5,230E-04	3,490E-10	5,230E-04	4,324E-09	2,060E-04	5,300E-09
1,050E-03	3,410E-10	1,046E-03	3,789E-09	3,751E-04	4,450E-09
1,050E-03	3,410E-10	1,046E-03	3,789E-09	4,121E-04	4,310E-09
1,230E-03	3,400E-10	1,232E-03	3,682E-09	4,327E-04	4,240E-09
2,090E-03	3,350E-10	2,092E-03	3,394E-09	8,242E-04	3,480E-09
2,460E-03	3,340E-10	2,463E-03	3,315E-09	8,653E-04	3,440E-09
4,900E-03	3,300E-10	4,899E-03	3,012E-09	1,731E-03	2,920E-09
4,930E-03	3,300E-10	4,926E-03	3,010E-09	1,731E-03	2,920E-09
5,230E-03	3,300E-10	5,230E-03	2,988E-09	1,875E-03	2,870E-09
9,850E-03	3,260E-10	9,853E-03	2,800E-09	3,461E-03	2,550E-09
1,046E-02	3,250E-10	1,046E-02	2,786E-09	3,751E-03	2,510E-09
2,073E-02	3,210E-10	2,073E-02	2,644E-09	6,124E-03	2,320E-09
2,092E-02	3,210E-10	2,092E-02	2,642E-09	7,502E-03	2,250E-09
2,449E-02	3,200E-10	2,449E-02	2,613E-09	8,653E-03	2,200E-09
4,184E-02	3,170E-10	4,184E-02	2,519E-09	1,500E-02	2,040E-09

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)
4,899E-02	3,160E-10	4,899E-02	2,493E-09	1,731E-02	2,010E-09
9,797E-02	3,100E-10	9,797E-02	2,369E-09	2,890E-02	1,910E-09
9,797E-02	3,100E-10	9,797E-02	2,369E-09	3,062E-02	1,890E-09
1,037E-01	3,100E-10	1,037E-01	2,358E-09	3,461E-02	1,870E-09
1,959E-01	3,030E-10	1,959E-01	2,243E-09	6,124E-02	1,770E-09
2,073E-01	3,030E-10	2,073E-01	2,234E-09	6,922E-02	1,750E-09
4,070E-01	2,980E-10	4,070E-01	2,117E-09	7,932E-02	1,730E-09
4,146E-01	2,980E-10	4,146E-01	2,114E-09	1,225E-01	1,650E-09
4,899E-01	2,970E-10	4,899E-01	2,085E-09	1,445E-01	1,620E-09
8,292E-01	2,940E-10	8,292E-01	2,005E-09	2,450E-01	1,520E-09
9,797E-01	2,930E-10	9,797E-01	1,986E-09	2,890E-01	1,500E-09
1,219	2,910E-10	1,219	1,967E-09	3,185E-01	1,480E-09
1,959	2,870E-10	1,959	1,942E-09	3,966E-01	1,440E-09
2,035	2,870E-10	2,035	1,941E-09	5,779E-01	1,380E-09
3,280	2,830E-10	3,280	1,930E-09	7,654E-01	1,330E-09
3,919	2,820E-10	3,919	1,928E-09	7,932E-01	1,330E-09
4,070	2,820E-10	4,070	1,928E-09	1,156	1,290E-09
6,095	2,790E-10	6,095	1,926E-09	1,550	1,270E-09
6,283	2,780E-10	6,283	1,925E-09	1,586	1,270E-09
8,139	2,760E-10	8,139	1,925E-09	1,593	1,270E-09
1,219E+01	2,710E-10	1,219E+01	1,924E-09	3,173	1,250E-09
1,257E+01	2,700E-10	1,257E+01	1,924E-09	3,185	1,250E-09
1,628E+01	2,660E-10	1,628E+01	1,924E-09	3,795	1,250E-09
1,640E+01	2,660E-10	1,640E+01	1,924E-09	3,827	1,250E-09
2,113E+01	2,630E-10	2,113E+01	1,924E-09	6,283	1,240E-09
2,438E+01	2,610E-10	2,438E+01	1,924E-09	6,370	1,240E-09
2,696E+01	2,600E-10	2,696E+01	1,924E-09	7,654	1,240E-09
3,142E+01	2,590E-10	3,142E+01	1,924E-09	7,749	1,240E-09
3,280E+01	2,590E-10	3,280E+01	1,924E-09	1,074E+01	1,240E-09
4,876E+01	2,560E-10	4,876E+01	1,924E-09	1,274E+01	1,240E-09
6,283E+01	2,560E-10	6,283E+01	1,924E-09	1,531E+01	1,240E-09
6,283E+01	2,560E-10	6,283E+01	1,924E-09	1,535E+01	1,240E-09
6,560E+01	2,560E-10	6,560E+01	1,924E-09	1,550E+01	1,240E-09
1,057E+02	2,550E-10	1,057E+02	1,924E-09	1,707E+01	1,240E-09
1,257E+02	2,550E-10	1,257E+02	1,924E-09	1,897E+01	1,240E-09

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)	ω (rad/sec)	D' (1/Pa)
1,257E+02	2,550E-10	1,257E+02	1,924E-09	3,061E+01	1,240E-09
1,312E+02	2,550E-10	1,312E+02	1,924E-09	3,100E+01	1,240E-09
1,348E+02	2,550E-10	1,348E+02	1,924E-09	3,142E+01	1,240E-09
2,113E+02	2,540E-10	2,113E+02	1,924E-09	3,795E+01	1,240E-09
2,513E+02	2,540E-10	2,513E+02	1,924E-09	5,372E+01	1,240E-09
2,513E+02	2,540E-10	2,513E+02	1,924E-09	6,199E+01	1,240E-09
2,696E+02	2,540E-10	2,696E+02	1,924E-09	6,283E+01	1,240E-09
4,227E+02	2,540E-10	4,227E+02	1,924E-09	7,589E+01	1,240E-09
5,026E+02	2,540E-10	5,026E+02	1,924E-09	7,677E+01	1,240E-09
5,393E+02	2,540E-10	5,393E+02	1,924E-09	8,535E+01	1,240E-09
8,453E+02	2,540E-10	8,453E+02	1,924E-09	1,074E+02	1,240E-09
1,079E+03	2,540E-10	1,079E+03	1,924E-09	1,257E+02	1,240E-09
				1,518E+02	1,240E-09
				1,535E+02	1,240E-09
				1,707E+02	1,240E-09
				2,149E+02	1,240E-09
				2,513E+02	1,240E-09
				3,071E+02	1,240E-09
				3,414E+02	1,240E-09
				4,297E+02	1,240E-09
				6,142E+02	1,240E-09
				6,828E+02	1,240E-09

Πίνακας Β.5: Τιμές μέτρου αποθήκευσης όπως προκύπτει από τη σχέση (6.6)

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)
5,910E-14	1,120E+09	5,910E-14	4,120E+07	1,170E-14	5,870E+07
6,420E-14	1,120E+09	6,420E-14	4,120E+07	5,790E-14	5,870E+07
9,480E-14	1,120E+09	9,480E-14	4,120E+07	5,830E-14	5,870E+07
2,140E-13	1,120E+09	2,140E-13	4,120E+07	1,170E-13	5,870E+07
2,950E-13	1,120E+09	2,950E-13	4,120E+07	1,490E-13	5,870E+07
3,210E-13	1,120E+09	3,210E-13	4,120E+07	2,330E-13	5,870E+07
4,740E-13	1,120E+09	4,740E-13	4,120E+07	2,900E-13	5,870E+07
4,990E-13	1,120E+09	4,990E-13	4,120E+07	2,910E-13	5,870E+07
5,910E-13	1,120E+09	5,910E-13	4,120E+07	4,670E-13	5,870E+07
6,420E-13	1,120E+09	6,420E-13	4,120E+07	5,790E-13	5,870E+07
9,480E-13	1,120E+09	9,480E-13	4,120E+07	6,810E-13	5,870E+07
1,070E-12	1,120E+09	1,070E-12	4,120E+07	7,450E-13	5,870E+07
1,180E-12	1,120E+09	1,180E-12	4,120E+07	1,160E-12	5,870E+07
1,280E-12	1,120E+09	1,280E-12	4,120E+07	1,420E-12	5,870E+07
1,840E-12	1,120E+09	1,840E-12	4,120E+07	1,460E-12	5,870E+07
1,900E-12	1,120E+09	1,900E-12	4,120E+07	1,490E-12	5,870E+07
2,140E-12	1,120E+09	2,140E-12	4,120E+07	2,320E-12	5,870E+07
2,360E-12	1,120E+09	2,360E-12	4,120E+07	2,910E-12	5,870E+07
2,490E-12	1,120E+09	2,490E-12	4,120E+07	2,980E-12	5,870E+07
2,570E-12	1,120E+09	2,570E-12	4,120E+07	3,410E-12	5,870E+07
3,790E-12	1,120E+09	3,790E-12	4,120E+07	4,190E-12	5,870E+07
4,280E-12	1,120E+09	4,280E-12	4,120E+07	5,830E-12	5,870E+07
4,990E-12	1,120E+09	4,990E-12	4,120E+07	5,960E-12	5,870E+07
5,510E-12	1,120E+09	5,510E-12	4,120E+07	6,810E-12	5,870E+07
8,560E-12	1,120E+09	8,560E-12	4,120E+07	7,080E-12	5,870E+07
9,180E-12	1,120E+09	9,180E-12	4,120E+07	1,170E-11	5,870E+07
9,970E-12	1,120E+09	9,970E-12	4,120E+07	1,170E-11	5,870E+07
1,840E-11	1,120E+09	1,840E-11	4,120E+07	1,360E-11	5,870E+07
1,990E-11	1,120E+09	1,990E-11	4,120E+07	1,420E-11	5,870E+07
2,230E-11	1,120E+09	2,230E-11	4,120E+07	2,090E-11	5,870E+07
2,760E-11	1,120E+09	2,760E-11	4,120E+07	2,720E-11	5,870E+07

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)
3,670E-11	1,120E+09	3,670E-11	4,120E+07	2,830E-11	5,870E+07
5,510E-11	1,120E+09	5,510E-11	4,120E+07	4,190E-11	5,870E+07
7,340E-11	1,120E+09	7,340E-11	4,120E+07	5,660E-11	5,870E+07
7,860E-11	1,120E+09	7,860E-11	4,120E+07	5,860E-11	5,870E+07
1,100E-10	1,120E+09	1,100E-10	4,120E+07	6,300E-11	5,870E+07
1,110E-10	1,120E+09	1,110E-10	4,120E+07	8,370E-11	5,870E+07
2,210E-10	1,120E+09	2,210E-10	4,120E+07	1,170E-10	5,870E+07
2,230E-10	1,120E+09	2,230E-10	4,120E+07	1,670E-10	5,870E+07
3,720E-10	1,120E+09	3,720E-10	4,120E+07	2,030E-10	5,870E+07
3,930E-10	1,120E+09	3,930E-10	4,120E+07	2,340E-10	5,870E+07
4,460E-10	1,120E+09	4,460E-10	4,120E+07	3,150E-10	5,870E+07
7,860E-10	1,120E+09	7,860E-10	4,120E+07	4,690E-10	5,870E+07
8,910E-10	1,120E+09	8,910E-10	4,120E+07	6,300E-10	5,870E+07
1,570E-09	1,120E+09	1,570E-09	4,120E+07	6,830E-10	5,870E+07
1,570E-09	1,120E+09	1,570E-09	4,120E+07	1,020E-09	5,870E+07
1,860E-09	1,120E+09	1,860E-09	4,120E+07	1,260E-09	5,870E+07
3,140E-09	1,120E+09	3,140E-09	4,120E+07	2,030E-09	5,870E+07
3,720E-09	1,120E+09	3,720E-09	4,120E+07	2,520E-09	5,870E+07
7,115E-09	1,120E+09	7,115E-09	4,120E+07	3,420E-09	5,870E+07
7,442E-09	1,120E+09	7,442E-09	4,120E+07	3,510E-09	5,870E+07
7,858E-09	1,120E+09	7,858E-09	4,120E+07	4,060E-09	5,870E+07
1,488E-08	1,120E+09	1,488E-08	4,120E+07	6,830E-09	5,870E+07
1,572E-08	1,120E+09	1,572E-08	4,120E+07	8,120E-09	5,870E+07
3,105E-08	1,120E+09	3,105E-08	4,130E+07	1,080E-08	5,870E+07
3,143E-08	1,120E+09	3,143E-08	4,130E+07	1,370E-08	5,870E+07
3,557E-08	1,120E+09	3,557E-08	4,130E+07	1,750E-08	5,870E+07
6,287E-08	1,130E+09	6,287E-08	4,140E+07	2,730E-08	5,870E+07
7,115E-08	1,130E+09	7,115E-08	4,140E+07	3,510E-08	5,870E+07
1,407E-07	1,140E+09	1,407E-07	4,200E+07	5,410E-08	5,870E+07
1,423E-07	1,140E+09	1,423E-07	4,210E+07	5,600E-08	5,870E+07
1,553E-07	1,140E+09	1,553E-07	4,220E+07	7,010E-08	5,870E+07
2,846E-07	1,190E+09	2,846E-07	4,420E+07	1,080E-07	5,870E+07
3,105E-07	1,200E+09	3,105E-07	4,470E+07	1,400E-07	5,870E+07
6,210E-07	1,350E+09	6,210E-07	5,040E+07	2,160E-07	5,870E+07
6,210E-07	1,350E+09	6,210E-07	5,040E+07	2,160E-07	5,870E+07

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)
7,033E-07	1,390E+09	7,033E-07	5,170E+07	2,800E-07	5,880E+07
1,242E-06	1,570E+09	1,242E-06	5,840E+07	4,330E-07	5,880E+07
1,407E-06	1,610E+09	1,407E-06	6,010E+07	5,600E-07	5,890E+07
2,813E-06	1,800E+09	2,813E-06	7,190E+07	1,030E-06	5,930E+07
2,813E-06	1,800E+09	2,813E-06	7,190E+07	1,080E-06	5,940E+07
3,105E-06	1,820E+09	3,105E-06	7,400E+07	1,120E-06	5,940E+07
5,626E-06	1,930E+09	5,626E-06	8,710E+07	2,160E-06	6,120E+07
6,210E-06	1,940E+09	6,210E-06	8,920E+07	2,240E-06	6,140E+07
1,242E-05	2,000E+09	1,242E-05	1,030E+08	4,330E-06	6,670E+07
1,242E-05	2,000E+09	1,242E-05	1,030E+08	4,330E-06	6,670E+07
1,407E-05	2,010E+09	1,407E-05	1,060E+08	5,150E-06	6,890E+07
2,484E-05	2,050E+09	2,484E-05	1,150E+08	8,650E-06	7,710E+07
2,813E-05	2,060E+09	2,813E-05	1,160E+08	1,030E-05	8,030E+07
5,230E-05	2,120E+09	5,230E-05	1,220E+08	2,060E-05	9,700E+07
5,626E-05	2,130E+09	5,626E-05	1,220E+08	2,060E-05	9,700E+07
6,210E-05	2,150E+09	6,210E-05	1,230E+08	2,160E-05	9,860E+07
1,125E-04	2,220E+09	1,125E-04	1,280E+08	4,120E-05	1,290E+08
1,242E-04	2,230E+09	1,242E-04	1,290E+08	4,330E-05	1,320E+08
2,463E-04	2,290E+09	2,463E-04	1,440E+08	8,650E-05	1,770E+08
2,484E-04	2,290E+09	2,484E-04	1,450E+08	8,650E-05	1,770E+08
2,615E-04	2,290E+09	2,615E-04	1,470E+08	1,030E-04	1,860E+08
4,968E-04	2,320E+09	4,968E-04	1,840E+08	1,730E-04	2,100E+08
5,230E-04	2,320E+09	5,230E-04	1,880E+08	2,060E-04	2,170E+08
1,046E-03	2,350E+09	1,046E-03	2,480E+08	3,750E-04	2,400E+08
1,046E-03	2,350E+09	1,046E-03	2,480E+08	4,120E-04	2,440E+08
1,232E-03	2,360E+09	1,232E-03	2,620E+08	4,330E-04	2,460E+08
2,092E-03	2,400E+09	2,092E-03	3,050E+08	8,240E-04	2,900E+08
2,463E-03	2,410E+09	2,463E-03	3,170E+08	8,650E-04	2,950E+08
4,899E-03	2,460E+09	4,899E-03	3,640E+08	1,730E-03	3,630E+08
4,926E-03	2,460E+09	4,926E-03	3,640E+08	1,730E-03	3,630E+08
5,230E-03	2,460E+09	5,230E-03	3,680E+08	1,880E-03	3,720E+08
9,853E-03	2,500E+09	9,853E-03	4,150E+08	3,460E-03	4,580E+08
1,046E-02	2,510E+09	1,046E-02	4,200E+08	3,750E-03	4,720E+08
2,073E-02	2,550E+09	2,073E-02	4,610E+08	6,120E-03	5,650E+08
2,092E-02	2,550E+09	2,092E-02	4,610E+08	7,500E-03	6,040E+08

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)
2,449E-02	2,570E+09	2,449E-02	4,670E+08	8,650E-03	6,310E+08
4,184E-02	2,610E+09	4,184E-02	4,830E+08	1,500E-02	7,240E+08
4,899E-02	2,630E+09	4,899E-02	4,870E+08	1,731E-02	7,450E+08
9,797E-02	2,680E+09	9,797E-02	5,050E+08	2,890E-02	8,090E+08
9,797E-02	2,680E+09	9,797E-02	5,050E+08	3,062E-02	8,150E+08
1,037E-01	2,690E+09	1,037E-01	5,070E+08	3,461E-02	8,260E+08
1,959E-01	2,740E+09	1,959E-01	5,330E+08	6,124E-02	8,680E+08
2,073E-01	2,740E+09	2,073E-01	5,360E+08	6,922E-02	8,760E+08
4,070E-01	2,800E+09	4,070E-01	5,690E+08	7,932E-02	8,840E+08
4,146E-01	2,800E+09	4,146E-01	5,700E+08	1,225E-01	9,080E+08
4,899E-01	2,810E+09	4,899E-01	5,780E+08	1,445E-01	9,170E+08
8,292E-01	2,860E+09	8,292E-01	6,060E+08	2,450E-01	9,520E+08
9,797E-01	2,880E+09	9,797E-01	6,150E+08	2,890E-01	9,650E+08
1,219	2,900E+09	1,219	6,270E+08	3,185E-01	9,730E+08
1,959	2,940E+09	1,959	6,480E+08	3,966E-01	9,930E+08
2,035	2,940E+09	2,035	6,490E+08	5,779E-01	1,030E+09
3,280	2,960E+09	3,280	6,600E+08	7,654E-01	1,050E+09
3,919	2,970E+09	3,919	6,630E+08	7,932E-01	1,060E+09
4,070	2,970E+09	4,070	6,630E+08	1,156	1,090E+09
6,095	2,980E+09	6,095	6,660E+08	1,550	1,110E+09
6,283	2,980E+09	6,283	6,660E+08	1,586	1,110E+09
8,139	2,980E+09	8,139	6,670E+08	1,593	1,110E+09
1,219E+01	2,980E+09	1,219E+01	6,680E+08	3,173	1,160E+09
1,257E+01	2,980E+09	1,257E+01	6,680E+08	3,185	1,160E+09
1,628E+01	2,980E+09	1,628E+01	6,680E+08	3,795	1,170E+09
1,640E+01	2,980E+09	1,640E+01	6,680E+08	3,827	1,170E+09
2,113E+01	2,980E+09	2,113E+01	6,680E+08	6,283	1,190E+09
2,438E+01	2,980E+09	2,438E+01	6,690E+08	6,370	1,190E+09
2,696E+01	2,980E+09	2,696E+01	6,690E+08	7,654	1,190E+09
3,142E+01	2,980E+09	3,142E+01	6,690E+08	7,749	1,190E+09
3,280E+01	2,980E+09	3,280E+01	6,690E+08	1,074E+01	1,200E+09
4,876E+01	2,980E+09	4,876E+01	6,690E+08	1,274E+01	1,200E+09
6,283E+01	2,980E+09	6,283E+01	6,690E+08	1,531E+01	1,200E+09
6,283E+01	2,980E+09	6,283E+01	6,690E+08	1,535E+01	1,200E+09
6,560E+01	2,980E+09	6,560E+01	6,690E+08	1,550E+01	1,200E+09

Θεωρητική μελέτη των θεμελιωδών ιξωδοελαστικών συναρτήσεων, και της αλληλομετατροπής τους.

PMMA		EC		EC20	
ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)	ω (rad/sec)	E' (Pa)
1,057E+02	2,980E+09	1,057E+02	6,690E+08	1,707E+01	1,200E+09
1,257E+02	2,980E+09	1,257E+02	6,690E+08	1,897E+01	1,200E+09
1,257E+02	2,980E+09	1,257E+02	6,690E+08	3,061E+01	1,200E+09
1,312E+02	2,980E+09	1,312E+02	6,690E+08	3,100E+01	1,200E+09
1,348E+02	2,980E+09	1,348E+02	6,690E+08	3,142E+01	1,200E+09
2,113E+02	2,980E+09	2,113E+02	6,690E+08	3,795E+01	1,200E+09
2,513E+02	2,980E+09	2,513E+02	6,690E+08	5,372E+01	1,200E+09
2,513E+02	2,980E+09	2,513E+02	6,690E+08	6,199E+01	1,200E+09
2,696E+02	2,980E+09	2,696E+02	6,690E+08	6,283E+01	1,200E+09
4,227E+02	2,980E+09	4,227E+02	6,690E+08	7,589E+01	1,200E+09
5,026E+02	2,980E+09	5,026E+02	6,690E+08	7,677E+01	1,200E+09
5,393E+02	2,980E+09	5,393E+02	6,690E+08	8,535E+01	1,200E+09
8,453E+02	2,980E+09	8,453E+02	6,690E+08	1,074E+02	1,200E+09
1,079E+03	2,980E+09	1,079E+03	6,690E+08	1,257E+02	1,200E+09
				1,518E+02	1,200E+09
				1,535E+02	1,200E+09
				1,707E+02	1,200E+09
				2,149E+02	1,200E+09
				2,513E+02	1,200E+09
				3,071E+02	1,200E+09
				3,414E+02	1,200E+09
				4,297E+02	1,200E+09
				6,142E+02	1,200E+09
				6,828E+02	1,200E+09

Αναφορές

1. Tschoegl, N.W., 1989. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. Springer – Verlag, Berlin.
2. Ferry, J.D., 1980. Viscoelastic Properties of Polymers, 3rd edition. John Wiley and Sons, New York.
3. Lakes, R., 2009. Viscoelastic Materials. Cambridge University Press, New York.
4. Ward, I.M., Sweeney, J., 2013. Mechanical Properties of Solid Polymers, 3rd edition. John Wiley and Sons, New York.
5. Bhattacharjee, S., Swamy, A.K., Daniel, J.S., 2011. Continuous relaxation and retardation spectrum method for viscoelastic characterization of asphalt concrete. Mechanics of Time-Dependent Materials.
6. Schapery, R.A., 1961. A simple collocation method for fitting viscoelastic models to experimental data. GALCIT SM 61-23A, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
7. Kaschta, J., Schwarzl, F.R., 1994. Calculation of discrete retardation spectra from creep data – I. Method. Rheologica Acta 33, 517-529.
8. Guedes, R.M., Marques, A.T., Cardon, A., 1998. Creep or relaxation master curves calculated from experimental dynamic viscoelastic function. Science and Engineering of Composite Materials 7(3), 259-267.
9. Park, S.W., Schapery, R.A., 1999. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I – a numerical method

- based on Prony series. *International Journal of Solids and Structures* 36, 1653-1675.
10. Baumgaertel, M., Winter, H.H., 1992. Interrelation between continuous and discrete relaxation time spectra. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 44, 15-36.
 11. Fernandez, P., Rodriguez, D., Lamela, M.J., Fernandez-Canteli, A., 2011. Study of the interconversion between viscoelastic behavior functions of PMMA. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 15, 169-180.
 12. Bradshaw, R.D., Brinson, L.C., 1997. A sign control method for fitting and interconverting material functions for linearly viscoelastic solids. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 1, 85-108.
 13. Kaschta, J., Schwarzl, F.R., 1994. Calculation of discrete retardation spectra from creep data – II. Analysis of measured creep curves. *Rheologica Acta* 33, 530-541.
 14. Park, S.W., Kim, Y.R., 2001. Determination of discrete relaxation and retardation spectra from experimental data with power law pre-smoothing. *Journal of Materials in Civil Engineering* 13, 26-31.
 15. Park, S.W., Schapery, R.A., 1999. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II – an approximate analytical method. *International Journal of Solids and Structures* 36, 1677-1699.