ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξίσωση διάχυσης και εφαρμογές στην οικονομία

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Σπυρίδων Παπαντώνη

Επιβλέπων καθηγητής: Δρόσος Γκιντίδης
Αναπληρωτής Καθηγητής
ΣΕΜΦΕ / ΕΜΠ

Αθήνα, 2014

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία που έχει ως θέμα: «*Εξίσωση διάχυσης και εφαρμογές στην Οικονομία*» εκπονήθηκε στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στο ΔΠΜΣ «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες», κατεύθυνση: «Ανάλυση και Διαφορικές Εξισώσεις» της ΣΕΜΦΕ / ΕΜΠ.

Έχοντας γνωρίσει παλαιότερα τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα σε μεταπτυχιακές σπουδές μου στην «Χρηματοοικονομική Ανάλυση» και τον τρόπο προσέγγισης τους από την πλευρά της Επιστήμης των Χρηματοοικονομικών και προσφάτως μέσα από τις μεταπτυχιακές σπουδές μου στην «Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα» και τον στοχαστικό τρόπο προσέγγισης τους, επέλεξα το συγκεκριμένο θέμα για να προσπαθήσω να τα προσεγγίσω με προχωρημένα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και συνδυαστικά με Οικονομικές Εφαρμογές.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στο εκλεκτό επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Δρόσο Γκιντίδη για: όλα όσα μου προσέφερε, την συνεργασία του, την βοήθεια στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, την καθοδήγηση του, τις συμβουλές, τις διορθώσεις, τις υποδείξεις σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής μου εργασίας.

Πρέπει επίσης να ευχαριστήσω ιδιαίτερα και τους εκλεκτούς καθηγητές κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο και κ. Μιχαήλ Λουλάκη ως μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής μου για όλες τις συμβουλές – κατευθύνσεις – υποδείξεις που με υπομονή μου προσέφεραν.

Τέλος θεωρώ υποχρέωση μου να διατυπώσω τις ευχαριστίες μου σε όλες και όλους τις/τους εκλεκτούς διδάσκοντες κ.κ. καθηγητές μου στη ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ καθώς επίσης και στο εκλεκτό διοικητικό προσωπικό της.

Περιεχόμενα

σελίδα

1. Διάχυση

1. Η Εξίσωση της Διάχυσης

1.1 Εισαγωγή

Η μονοδιάστατη εξίσωση της διάχυσης είναι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:

$$u_t - Du_{xx} = f$$

όπου $u = u(x,t)$, x: μεταβλητή πραγματικού χώρου, t: μεταβλητή χρόνου και D>0 σταθερά (σταθερά διάχυσης).

Όταν το διάνυσμα θέσης $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n>1$ η εξίσωση διάχυσης είναι:

$$u_t - D\Delta u = f \tag{1.1}$$

όπου Δ: τελεστής Laplace:

$$\Delta = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Όταν $f=0$, η εξίσωση λέγεται **ομογενής** και τότε ισχύει η **Αρχή της Επαλληλίας**: Αν u, v λύσεις της (1.1), a, b ανήκουν $\mathbb{R}$ ή συνεπάγεται και $au + bv$ λύση της (1.1)

Πιο γενικά αν: $u_k=u(\mathbf{x},t)$ είναι μια οικογένεια λύσεων που εξαρτάται από την παράμετρο k (ακέραιος ή πραγματικός αριθμός) και $g=g(k)$ μια συνάρτηση που συγκλίνει γρήγορα στο ∞ τότε οι :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x},t)\,g(k) \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} u_k(\mathbf{x},t)\,g(k)\,dk$$

είναι επίσης λύσεις.

Ένα συνηθισμένο παράδειγμα διάχυσης είναι η μεταφορά θερμότητας σε ένα ασταθές σώμα, η οποία προέρχεται από την μοριακή σύγκρουση, και η οποία μεταφέρει θερμότητα μέσω κινητικής ενέργειας χωρίς μακροσκοπική υλική κίνηση. Αν το μέσο είναι ομοιογενές και ισότροπο όσον αφορά τη διάδοση της θερμότητας η εξέλιξη της θερμοκρασίας περιγράφεται από την (1.1). Η f αναπαριστά την ένταση μια εξωγενούς πηγής. Γι' αυτό είναι γνωστή και ως **εξίσωση θερμότητας**.

Ωστόσο η (1.1) αποτελεί ένα πολύ γενικό μοντέλο διάχυσης, όπου με τον όρο "**διάχυση**" εννοούμε πχ την μεταφορά μιας ουσίας λόγω μοριακής κίνησης του περιβάλλοντος μέσου. Σε αυτή την περίπτωση, το u αναπαριστά τη συγκέντρωση ενός ρυπογόνου υλικού ή μιας ύλης διαλυμένης σε υγρό ή αέριο (βαφή σε υγρό, καπνός στην ατμόσφαιρα) ή ακόμα και μια πυκνότητα πιθανότητας. Η εξίσωση διάχυσης ενοποιεί σε μακροσκοπική κλίμακα μια πληθώρα φαινομένων που φαίνονται διαφορετικά όταν τα παρατηρούσαμε σε μικροσκοπική κλίμακα.

Μέσω της (1.1) και μερικών παραλλαγών της θα εξετάσουμε την σύνδεση μεταξύ των πιθανοκρατικών και ντετερμινιστικών μοντέλων σύμφωνα με το πρότυπο:

Διαδικασίες διάχυσης ↔ πυκνότητα πιθανότητας ↔ διαφορικές εξισώσεις

Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές στη κατεύθυνση αυτή είναι η κίνηση ***Brown*** που βγαίνει από το όνομα του βοτανολόγου Brown, ο οποίος παρατήρησε την χαοτική συμπεριφορά μερικών μορίων/σωματιδίων στην επιφάνεια του νερού, λόγω της μοριακής κίνησης. Αυτή η ακανόνιστη κίνηση μοντελοποιείται τώρα ως στοχαστική διαδικασία με το όνομα ***διαδικασία Wiener ή κίνηση Brown***.

Ο τελεστής $\frac{1}{2}\Delta$ είναι αυστηρά συνδεόμενος με την κίνηση *Brown* και πράγματι αιχμαλωτίζει και συνθέτει τα μικροσκοπικά χαρακτηριστικά αυτής της διαδικασίας.

Κάτω από συνθήκες ισορροπίας, δηλαδή όταν δεν υπάρχει χρονική εξέλιξη, η λύση u εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή του χώρου και ικανοποιεί την στάσιμη εκδοχή της εξίσωσης διάχυσης (D=0):

$$-\Delta u = f \tag{1.2}$$

($-u_{xx} = f$ σε διάσταση n=1).

Η (1.2) λέγεται εξίσωση ***Poison***. Όταν $f = 0$, λέγεται εξίσωση ***Laplace*** και οι λύσεις της είναι σημαντικές σε πολλά πεδία που ονομάστηκαν **Αρμονικές Εξισώσεις**.

1.2 Η Μεταφορά Θερμότητας

Η θερμότητα είναι μια μορφή ενέργειας που συχνά βολεύει να την θεωρούμε ως ξεχωριστή από τις άλλες μορφές. Για ιστορικούς λόγους, ως μονάδες μέτρησης χρησιμοποιούνται οι *calories* (θερμίδες) αντί για τα *joules*, με 1 θερμίδα να αντιστοιχεί σε 4.182 *joules*.

Θέλουμε ένα μαθηματικό μοντέλο για την μεταφορά θερμότητας σε ένα ευσταθές σώμα. Υποθέτουμε ότι το σώμα είναι ομογενές και ισότροπο, με σταθερή *πυκνότητα μάζας* ρ, και ότι μπορεί να πάρει ενέργεια από μια εξωτερική πηγή (πχ ηλεκτρικό ρεύμα ή χημική αντίδραση ή εξωτερική απορρόφηση/ακτινοβολία). Συμβολίζουμε με r το ρυθμό ανά μονάδα μάζας με την οποία η θερμότητα προμηθεύεται από την εξωτερική πηγή.

Αφού η θερμότητα είναι μορφή ενέργειας είναι φυσικό να χρησιμοποιήσουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Έστω V ένας αυθαίρετος όγκος μέσα στο σώμα. Ο ρυθμός αλλαγής της θερμικής ενέργειας V ισούται με δίκτυο ροής μέσω του συνόρου ∂V του V λόγω της μεταφοράς, συν τον ρυθμό με τον οποίο προμηθεύεται η ενέργεια από την εξωτερική πηγή.

Αν συμβολίζουμε με $e = e(\mathbf{x}, t)$ την θερμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, η συνολική θερμική ενέργεια μέσα στον V δίνεται από:

$$\int_V e\rho\, d\mathbf{x}$$

και ο ρυθμός μεταβολής της είναι:

$$\frac{d}{dt}\int_V e\rho\, d\mathbf{x} = \int_V e_t \rho\, d\mathbf{x}$$

Έστω $\mathbf{q}$ το διάνυσμα της *ροής θερμότητας* που δείχνει τη διεύθυνση της ροής της θερμότητας και το μέγεθος του ρυθμού της ροής σε μια μονάδα χώρου. Συγκεκριμένα αν $d\sigma$ είναι μια περιοχή που περιέχεται στο ∂V με εσωτερικό μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα $\boldsymbol{\nu}$ τότε το $\mathbf{q}\boldsymbol{\nu}\, d\sigma$ είναι ο ρυθμός ροής ενέργειας μέσω του $d\sigma$ και άρα η *συνολική εσωτερική ροή* μέσω ∂V δίνεται από:

$$-\int_{\partial V} \mathbf{q}\,\boldsymbol{\nu}\,d\sigma = -\int_{V} \mathrm{div}\mathbf{q}\,d\mathbf{x} \quad \text{(θεώρημα απόκλισης)}$$

Τέλος η συνεισφορά της εξωτερικής πηγής δίνεται από:

$$\int_V r\rho\,d\mathbf{x}$$

Έτσι η διατήρηση ενέργειας απαιτεί:

$$\int_V e_t\rho d\mathbf{x} = -\int_V div\mathbf{q}d\mathbf{x} + \int_V r\rho d\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Η αυθαιρετότητα του V μας επιτρέπει να μετατρέψουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (1.3) στην κατά σημείο σχέση:

$$e_t\rho = -\,\mathrm{div}\mathbf{q} + r\rho \tag{1.4}$$

που αποτελεί έναν βασικό νόμο της μεταφοράς θερμότητας. Ωστόσο το e και $\mathbf{q}$ είναι άγνωστα και χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία μέσω δομικών σχέσεων για αυτές τις ποσότητες.

Υποθέτουμε τα ακόλουθα:

- **Νόμος *Fourier*** της μεταφοράς ενέργειας: Υπό "κανονικές" συνθήκες για πολλά ευσταθή υλικά η ροή θερμότητας είναι μια γραμμική συνάρτηση του ανάδελτα της θερμοκρασίας, δηλαδή:

  $$\mathbf{q} = -k\nabla u \tag{1.5}$$

  όπου u είναι η απόλυτη θερμοκρασία και $k>0$ η *θερμική αγωγιμότητα* η οποία εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού. Γενικά το k μπορεί να εξαρτάται από τα u, $\mathbf{x}$, και t, αλλά συχνά διακυμαίνεται τόσο λίγο στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν ώστε αγνοούμε την διακύμανση του. Εδώ θεωρούμε το k σταθερό ώστε:

  $$\mathrm{div}\mathbf{q} = -\,k\Delta u. \tag{1.6}$$

  Το πρόσημο $-$ στην (1.5) αντανακλά την τάση της θερμότητας να ρέει από τις θερμότερες στις ψυχρότερες περιοχές.

- Η θερμική ενέργεια είναι γραμμική συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας:

  $$e = c_v u \tag{1.7}$$

Όπου c_υ είναι η *ειδική θερμότητα* (σε σταθερό όγκο) του υλικού. Σε πολλές περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν το c_υ μπορεί να θεωρηθεί σταθερά. Η σχέση (1.7) είναι εύλογα αληθής σε όχι και πολύ μεγάλα εύρη θερμοκρασίας.

Χρησιμοποιώντας τις (1.6) και (1.7) η (1.4) γίνεται:

$$u_t = \frac{k}{c_\upsilon \rho} \Delta u + \frac{1}{c_\upsilon} r \tag{1.8}$$

που είναι η εξίσωση διάχυσης με:

$$D = \frac{k}{c_\upsilon \rho} \quad \text{και} \quad f = \frac{r}{c_\upsilon}$$

Ο συντελεστής D, που λέγεται και *συντελεστής θερμικής διάχυσης*, κωδικοποιεί τον χρόνο θερμικής ανταπόκρισης του υλικού.

1.3 Καλά ορισμένα προβλήματα (n=1)

Οι κύριες εξισώσεις σε ένα μαθηματικό μοντέλο πρέπει να εμπλουτίζονται από επιπλέον πληροφορίες ώστε να πάρουμε ένα καλά ορισμένο μοντέλο, δηλαδή ένα πρόβλημα που έχει ακριβώς μια λύση που εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα.

Από φυσική άποψη δεν είναι δύσκολο να περιγράψουμε μερικά καλά ορισμένα προβλήματα για την διάχυση θερμότητας. Έστω η εξέλιξη της θερμοκρασίας u μέσα σε μια κυλινδρική μπάρα της οποίας η επιφάνεια είναι τέλεια μονωμένη και που το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο από την περιοχή διατομής A. Παρόλο που είναι τριών διαστάσεων μπορούμε να υποθέσουμε ότι η θερμότητα κινείται μόνο κατά μήκος της μπάρας και ότι η ένταση μεταφοράς ενέργειας είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε κάθε τομέα της μπάρας. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$e = e(x,\, t), \quad r = (x,\, t), \quad \text{με } 0 \le x \le \mathrm{L}.$$

Οι (1.5) και (1.7) γίνονται αντίστοιχα:

$$e = e(x,\, t) = c_\upsilon(x,\, t), \quad \mathbf{q} = -\,k u_x \mathbf{i}$$

Επιλέγοντας:

$$V = A \times [x,\; x + \Delta x]$$

ως τον όγκο στην (1.3), παίρνουμε:

$$\int_x^{x+\Delta x} c_\upsilon \rho u_t \, dx = \int_x^{x+\Delta x} k u_{xx} \, dx + \int_x^{x+\Delta x} r \rho \, dx$$

που για u δίνει την μοναδιάστατη εξίσωση θερμότητας:

$$u_t - Du_{xx} = f.$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη της θερμοκρασίας κατά την διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος, έστω από t=0 έως t=T. Τότε είναι λογικό να καθορίσουμε την αρχική της κατανομή μέσα στην μπάρα: διαφορετικοί αρχικοί σχηματισμοί θα αντιστοιχούν σε διαφορετικές εξελίξεις της θερμοκρασίας κατά μήκος της μπάρας. Έτσι χρειάζεται να δώσουμε την **αρχική συνθήκη**:

$$u(x, 0) = g(x)$$

όπου η g μοντελοποιεί το προφίλ της αρχικής θερμοκρασίας.

Αυτό δεν αρκεί για να καθοριστεί μια μοναδική εξέλιξη. Πρέπει να ξέρουμε και πως αλληλεπιδρά η μπάρα με το περιβάλλον. Πράγματι ξεκινώντας από μια δοσμένη αρχική κατανομή θερμοκρασίας μπορούμε να αλλάξουμε την εξέλιξη της u ελέγχοντας την θερμοκρασία ή την ροή θερμότητας στα δύο άκρα της μπάρας (η μπάρα έχει τέλεια μόνωση στα πλαϊνά), π.χ μπορούμε να κρατήσουμε τη θερμοκρασία σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο (φιξαρισμένο) ή να το αφήσουμε να μεταβάλλεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο που εξαρτάται από το χρόνο. Έτσι θέτουμε:

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t) \tag{1.9}$$

για κάθε t ανήκει $(0, T]$. Οι (1.9) λέγονται **Συνοριακές Συνθήκες του *Dirichlet***.

Θα μπορούσαμε επίσης να καθορίσουμε και τη ροή θερμότητας στα άκρα. Επειδή από τον νόμο *Fourier* έχουμε:

- εσωτερική ροή θερμότητας στο $x=0$: $-ku_x(0,t)$
- εσωτερική ροή θερμότητας στο $x=L$: $ku_x(L,t)$

η θερμική δίνεται μέσω των **Συνοριακών Συνθηκών του *Neumann***:

$$-u_x(0, t) = h_1(t), \quad u_x = (L, t) = h_2(t)$$

για κάθε t ανήκει στο $(0, T]$.

Ένας άλλος τύπος είναι η **Συνθήκη του *Robin* ή Συνθήκη της Ακτινοβολίας**. Έστω ότι το περιβάλλον διατηρείται σε θερμοκρασία U και έστω η εσωτερική ροή θερμότητας από το ένα άκρο, έστω το x=L, εξαρτάται γραμμικά από την διαφορά $U - u$ δηλαδή

$$ku_x = \gamma(U - u) \quad \gamma>0 \tag{1.10}$$

Θέτοντας

$$\alpha = \gamma/k > 0 \quad eh = \gamma U/k$$

η συνθήκη του *Robin* στο x=L δίνει:

$$u_x + \alpha u = h.$$

Προφανώς μπορούμε να θέσουμε **μικτές συνθήκες**, πχ. στο ένα άκρο μια συνθήκη *Dirichlet* και στο άλλο μια συνθήκη *Neumann*.

Τα προβλήματα που σχετίζονται με τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες έχουν μια αντίστοιχη ονοματολογία. Συνοψίζοντας, μπορούμε να δώσουμε τα πιο κοινά προβλήματα για την μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας ως εξής:

Δοθέντων $f=f(x,t)$ (εξωτερική πηγή) και $g=g(x)$ (αρχικά ή *Cauchy* δεδομένα) να βρεθεί $u=u(x,t)$ τέτοια ώστε:

$$\left|\begin{array}{ll} u_t - Du_{xx} = f & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq L \\ \text{και συνοριακές συνθήκες} & 0 < \text{t} \leq T \end{array}\right.$$

όπου οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να είναι:

- ***Dirichlet***

$$u(0,t) = h_1(t), \quad u(L,t) = h_2(t)$$

- ***Neumann***

$$-u_x(0, t) = h_1(t), \quad u_x(L,t)=h_2(t)$$

- ***Robin***

$$-u_x(0, t)+\alpha u(0,t) = h_1(t), \quad u_x(L,t)+\alpha u(L,t) = h_2(t) \quad (\alpha>0)$$

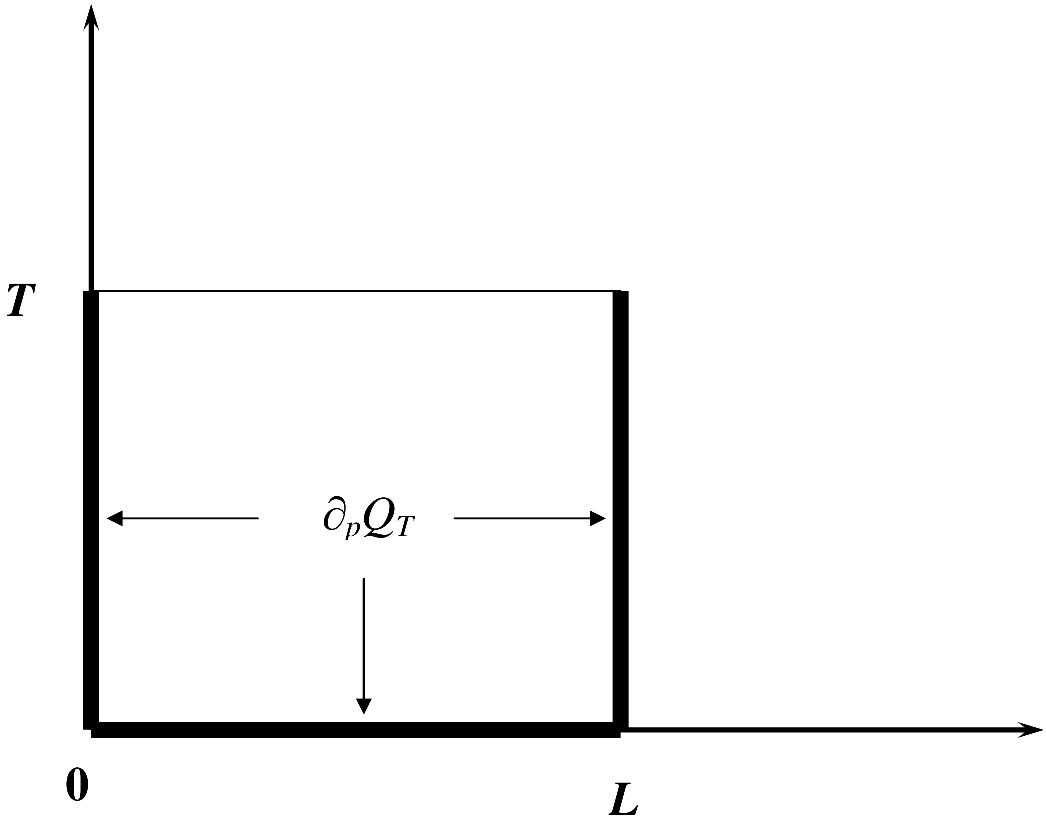
- ή ***μικτές συνθήκες***.

Έτσι έχουμε το αρχικό *Dirichlet* πρόβλημα, το αρχικό *Neumann* πρόβλημα κ.ο.κ αντίστοιχα. Όταν h_1=h_2=0 λέμε ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι **ομογενείς**.

Σχόλιο 1 Παρατηρούμε ότι μόνο ένα ειδικό κομμάτι του συνόρου του τετραγώνου

$$Q_T = (0,L) \times (0,T)$$

που ονομάζεται *παραβολικό σύνορο* του Q_T κουβαλάει δεδομένα (εικόνα 1). Καμία τελική συνθήκη για ($t=T$, $0<x<L$) δεν χρειάζεται



Εικόνα 1. Το παραβολικό σύνορο του Q_T

Σε σημαντικές περιπτώσεις, πχ στα οικονομικά μαθηματικά το x κινείται πάνω σε μη φραγμένα διαστήματα, συνήθως το $(0, \infty)$ ή το $\mathbb{R}$, Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να απαιτούμε η λύση να μην τείνει στο άπειρο. Αργότερα θα δούμε το ολικό πρόβλημα *Cauchy*:

$$\left| \begin{array}{ll} u_t - Du_{xx} = f & x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \text{και στο άπειρο συνθήκες } x \to \pm\infty . & \end{array} \right.$$

1.4 Προβλήματα διάστασης n>1

Η τυποποίηση των καλώς ορισμένων προβλημάτων της προηγούμενης ενότητας 1.3 μπορεί εύκολα να γενικευθεί σε κάθε διάσταση $n>1$, συγκεκριμένα σε $n=2$ ή $n=3$. Έστω ότι θέλουμε να καθορίσουμε την εξέλιξη της θερμοκρασίας σε ένα σώμα που μεταφέρει θερμότητα, το οποίο πιάνει έναν φραγμένο τομέα Ω γνήσιο υποσύνολο του R^n κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος χρόνου $(0,T]$. Κάτω από τις υποθέσεις της υποενότητας 1.2, η θερμοκρασία είναι μια συνάρτηση $u=u(\mathbf{x},t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας $u_t - D\Delta u=f$, στον κύλινδρο χώρου – χρόνου

$$Q_T=\Omega \times (0,T).$$

Για να διαλέξουμε μια μοναδική λύση πρέπει να δώσουμε καταρχάς την αρχική κατανομή:

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}\in \overline{\Omega}$$

όπου

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

είναι κλειστότητα του Ω.

Ο έλεγχος της αλληλεπίδρασης του σώματος με το περιβάλλον μοντελοποιείται μέσω κατάλληλων συνθηκών στο $\partial\Omega$. Οι πιο συνηθισμένες είναι :

- **Συνθήκη *Dirichlet***: Η θερμοκρασία διατηρείται σε ένα καθορισμένο επίπεδο στο $\partial\Omega$. Έτσι θέτουμε:

$$u(\boldsymbol{\sigma}, t) = h(\boldsymbol{\sigma}, t) \quad \boldsymbol{\sigma} \in\partial\Omega \quad \text{και} \quad t\in(0, T]$$

- **Συνθήκη *Neumann***: Απονέμεται η ροή θερμότητας μέσω του $\partial\Omega$. Για να μοντελοποιήσουμε αυτή τη συνθήκη, υποθέτουμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι μια ομαλή καμπύλη ή επιφάνεια, που έχει εφαπτόμενη γραμμή ή επίπεδο σε κάθε σημείο με εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{\nu}$. Από το νόμο του *Fourier* έχουμε:

$$\mathbf{q} = \text{ροή θερμότητας} = -k\nabla u$$

  και έτσι η εσωτερική ροή θερμότητας είναι:

$$-\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu} = k\nabla u \cdot\boldsymbol{\nu} = k\partial_{\nu} u.$$

  Η συνθήκη του *Neumann* είναι:

$$\partial_{\nu} u(\boldsymbol{\sigma}, t) = h(\boldsymbol{\sigma}, t) \quad \boldsymbol{\sigma} \in\partial\Omega \quad \text{και} \quad t\in(0, T].$$

- **Συνθήκη *Robin*** ή τ***ης ακτινοβολίας***: η εσωτερική (ας πούμε) ροή θερμότητας μέσω του $\partial\Omega$ εξαρτάται γραμμικά από την διαφορά $U\text{–}u$:

$$-\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu} = \gamma(U-u) \quad (\gamma > 0)$$

όπου U είναι η περιβάλλουσα θερμοκρασία. Από το νόμο του *Fourier* παίρνουμε :

$$\partial_\nu u + \alpha u = h \quad \text{στο } \partial\Omega \text{ x } (0, \text{T}]$$

με

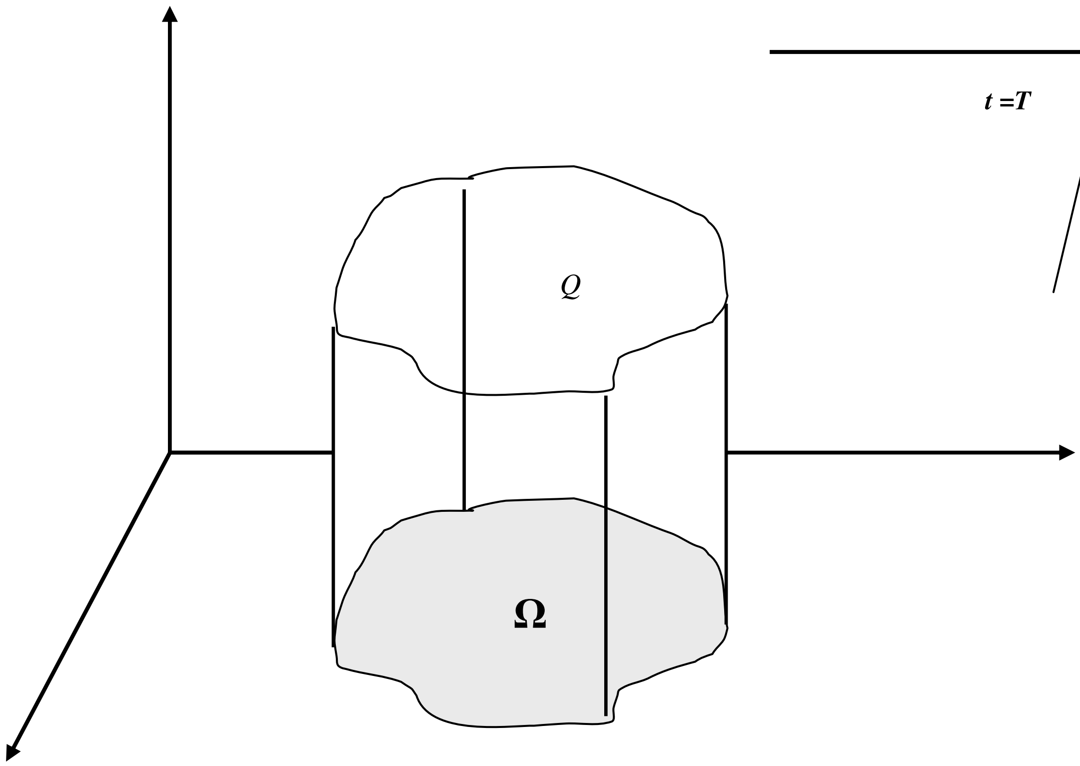
$$\alpha = \gamma / k > 0, \quad h = \gamma U / k \; .$$

- **Μικτές συνθήκες**: το σύνορο του Ω αποσυντίθεται σε διάφορα μέρη όπου βάζουμε διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, η τυποποίηση ενός μικτού *Dirichlet – Neumann* προβλήματος λαμβάνεται γράφοντας:

$$\partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega \quad \text{με} \quad \partial_D\Omega \cap \partial_N\Omega = \varnothing$$

όπου $\partial_D\Omega$ και $\partial_N\Omega$ είναι «λογικά» υποσύνολα του $\partial\Omega$. Τυπικά $\partial_N\Omega=\partial\Omega\cap A$, όπου A ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\partial_N\Omega$ είναι *σχετικά ανοικτό* σύνολο στο $\partial\Omega$. Τότε ορίζουμε:

$$u = h_1 \quad \text{στο } \partial_D\Omega \text{ x } (0, T]$$
$$\partial_\nu u = h_2 \quad \text{στο } \partial_N\Omega \text{ x } (0, \text{T}].$$



Εικόνα 2. Ο κύλινδρος χώρου – χρόνου Q_T

Επίσης σε διάσταση $n > 1$ το ολικό πρόβλημα *Cauchy* είναι σημαντικό:

$$\left| \begin{array}{ll} u_t - D\Delta_{\mathrm{u}} = f & \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}},\ 0 < t < T \\ u(\mathrm{x}, 0) = \mathrm{g}(\mathrm{x}) & \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \\ \text{και συνοριακές συνθήκες καθώς } |\mathrm{x}| \to \infty . & \end{array} \right.$$

Τα δεδομένα δίνονται πάνω στο παραβολικό σύνορο $\partial_p Q_T$ του Q_T που δίνεται από την ένωση στα κάτω σημεία

$\overline{\Omega}$ x{t = 0} και στα πλαϊνά σημεία $\partial\Omega$ x $(0, T]$:

$$\partial_p Q_T = (\overline{\Omega} \text{ x } \{\mathrm{t} = 0\}) \cup (\partial\Omega \text{ x } (0, T]).$$

2. Μοναδικότητα

2.1 Η ολοκληρωτική μέθοδος

Γενικεύοντας την ενεργειακή μέθοδο, είναι εύκολο να δείξουμε ότι όλα τα προβλήματα που τυποποιήσαμε στην προηγούμενη ενότητα έχουν το πολύ μια λύση κάτω από λογικές συνθήκες και δεδομένα. Υποθέτουμε ότι u και υ είναι λύσεις ενός από αυτά τα προβλήματα, οι οποίες έχουν τις ίδιες συνοριακές συνθήκες και έστω $w=u-\upsilon$. Θέλουμε να δείξουμε $w=0$. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις u και υ είναι επαρκώς ομαλές στο Q_T μέχρι το $\partial_p Q_T$ και παρατηρούμε ότι η w ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση:

$$w_t - D\varDelta w = 0 \tag{2.1}$$

στο $Q_T = \varOmega \times (0, T)$ με αρχική συνθήκη

$$w(\mathbf{x},0) = 0$$

στο $\overline{\varOmega}$ και μία από τις ακόλουθες συνθήκες στο $\partial\Omega \times (0,T]$:

$$w = 0 \quad (Dirichlet) \tag{2.2}$$

ή

$$\partial_\nu w = 0 \qquad (Neumann) \tag{2.3}$$

ή

$$\partial_\nu w + \alpha w = 0 \quad \alpha>0 \qquad (Robin) \tag{2.4}$$

ή

$$\mathrm{w} = 0 \text{ στο } \partial_D\varOmega, \qquad \partial_\nu w = 0 \text{ στο } \partial_N\varOmega \qquad (μικτή) \tag{2.5}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.1) με w και ολοκληρώνουμε στο $\varOmega$:

$$\int_\varOmega w w_t d\mathbf{x} = D\int_\varOmega w\varDelta w d\mathbf{x}$$

Τώρα,

$$\int_\varOmega w w_t d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\varOmega w^2 d\mathbf{x} \tag{2.6}$$

και από την ταυτότητα του Green με $u = \upsilon = w$ παίρνουμε:

$$\int_\varOmega w\varDelta w d\mathbf{x} = \int_{\partial\varOmega} w\partial_\nu w d\sigma - \int_\varOmega |\nabla w|^2 \, d\mathbf{x} \tag{2.7}$$

Τότε θέτοντας:

$$E(t) = \int_{\Omega} w^2 dx$$

οι (2.6) και (2.7) δίνουν:

$$\frac{1}{2} E'(t) = D\int_{\partial\Omega} w\partial_\nu w d\sigma - D\int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x}.$$

Αν ισχύει η συνθήκη Robin (2.4) τότε:

$$\int_{\partial\Omega} w\partial_\nu w d\sigma = -a\int_{\Omega} w^2 d\mathbf{x} \leq 0.$$

Αν ισχύει μία από τις (2.2), (2.3), (2.5) τότε:

$$\int_{\partial\Omega} w\partial_\nu w d\sigma = 0.$$

Σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι:

$$E'(t) \leq 0.$$

και άρα η E είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση. Αφού:

$$E(0) = \int_{\Omega} w^2(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 0,$$

πρέπει να έχουμε $E(t) = 0 \ \forall\, t \geq 0$ και αυτό σημαίνει ότι $w(\mathbf{x},t) = 0$ στο Ω για κάθε $t>0$. Άρα $u = \upsilon$.

Οι παρακάτω υπολογισμοί είναι απόλυτα δικαιολογημένοι αν το Ω είναι αρκετά ομαλό χωρίο, για παράδειγμα θέλουμε οι u και υ να είναι συνεχείς στο $\overline{Q_T} = \overline{\Omega} \times [0, \mathrm{T}]$, και αυτό να ισχύει και για τι πρώτες και για τις δεύτερες παραγώγους ως προς το χώρο και τις πρώτες παραγώγους ως προς το χρόνο. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτών των συναρτήσεων με:

$$C^{2,1}(\overline{Q}_T)$$

και συνοψίζουμε με το επόμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2.1</u>: Τα αρχικά προβλήματα *Dirichlet*, *Neumann*, *Robin* και τα *μεικτά* προβλήματα έχουν το πολύ μια λύση που ανήκει στο $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

.

2.2 Αρχές Μεγίστου

Το γεγονός ότι η θερμότητα ρέει από τις περιοχές υψηλότερης στις περιοχές χαμηλότερης θερμοκρασίας, δείχνει ότι η λύση της ομογενούς εξίσωσης θερμότητας φτάνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\partial_p Q_T$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως *Αρχή Μεγίστου*. Επιπλέον, η εξίσωση αντανακλά την αδυναμία χρονικής αντιστρεψιμότητας του φαινομένου που περιγράφει, με την έννοια ότι το μέλλον δεν μπορεί να επηρεάσει το παρελθόν (*αρχή αιτιότητας*). Με άλλα λόγια, η τιμή μιας λύσης u της στιγμή t είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε αλλαγή των δεδομένων μετά το t.

Το επόμενο θεώρημα μεταφράζει αυτές τις αρχές και ισχύει για συναρτήσεις της τάξης

$$C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T).$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνέχεις μέχρι το σύνορο του Q_T με συνεχείς παραγώγους στο εσωτερικό του Q_T.

<u>Θεώρημα 2.2.1:</u> Έστω

$$w \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$$

τέτοια ώστε:

$$w_t - D\Delta w = q \le 0 \quad \text{στο } Q_T. \tag{2.8}$$

Τότε w λαμβάνει το μέγιστο της στο $\partial_p Q_T$:

$$\max_{Q_T} w = \max_{\partial_p Q_T} w \tag{2.9}$$

Συγκεκριμένα, αν $w<0$ στο $\partial_p Q_T$ τότε $w<0$ σε όλο το Q_T.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $T - \varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι:

$$\max_{Q_{T-\varepsilon}} w \le \max_{\partial_p Q_T} w + \varepsilon T \tag{2.10}$$

Έστω $u = w - \varepsilon t$. Τότε:

$$u_t - D\Delta u = q - \varepsilon < 0 \tag{2.11}$$

Ισχυριζόμαστε ότι το μέγιστο της u στο $\overline{Q}_{T-\varepsilon}$ πιάνεται στο $\partial_p \overline{Q}_{T-\varepsilon}$.

Έστω ότι δεν πιάνεται στο $\partial_p \overline{Q}_{T-\varepsilon}$. Έστω $(\mathbf{x}_0, t_0)$ $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, $0 < t_0 \leq T - \varepsilon$ ένα σημείο μεγίστου της u στο $\overline{Q}_{T-\varepsilon}$.

Από στοιχειώδη ανάλυση έχουμε:

$$\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$$

και είτε $\quad u_t(x_0, t_0) = 0$ αν $t_0 < T - \varepsilon$

ή $\quad u_t(x_0, T - \varepsilon) \geq 0.$

Και στις δύο περιπτώσεις:

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$$ που αντιβαίνει στην (2.11).

Συνεπώς:

$$\max_{Q_{T-\varepsilon}} w \leq \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} w \leq \max_{\partial_p Q_T} w \qquad (2.12)$$

αφού $u \leq w$. Από την άλλη μεριά, $w \leq u + \varepsilon T$, και άρα από την (2.12) παίρνουμε:

$$\max_{Q_{T-\varepsilon}} w \leq \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} u + \varepsilon T \leq \max_{\partial_p Q_T} w + \varepsilon T$$

που είναι η (2.10).

Αφού η w είναι συνεχής στο $\overline{Q}_T$ έχουμε ότι:

$$\max_{Q_{T-\varepsilon}} w \to \max_{Q_T} w \qquad \text{καθώς } \varepsilon \to 0.$$

Άρα παίρνοντας $\varepsilon \to 0$ στη (2.10) βρίσκουμε

$$\max_{Q_T} w \leq \max_{\partial_p Q_T} w$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Ως άμεση συνέπεια του προηγουμένου θεωρήματος 2.2 έχουμε ότι αν

$$w_t - D\Delta w = 0 \quad \text{στο } Q_T$$

τότε η w λαμβάνει το μέγιστο και το ελάχιστο στο $\partial_p Q_T$.

Συγκεκριμένα:

$$\max_{\partial_p Q_T} w \leq w(\mathbf{x},t) \leq \max_{\partial_p Q_T} w$$

για κάθε (x, t) $\in Q_T$.

Επιπλέον:

<u>Πόρισμα 2.2.1</u> : (Σύγκριση και ευστάθεια). Έστω ότι υ και w ικανοποιούν τις

$$\upsilon_t - D\Delta\upsilon = f_1$$

και $$wt - D\Delta w = f_2.$$

Τότε:

α. αν $\upsilon \geq w$ στο $\partial_p Q_T$ και $f_1 \geq f_2$ στο Q_T τότε $\upsilon \geq w$ σε όλο το Q_T.

β. Ισχύει η ακόλουθη *εκτίμηση ευστάθειας*:

$$\max_{\overline{Q}_T} |\upsilon - w| \leq \max_{\partial_p Q_T} |\upsilon - w| + T \max_{\overline{Q}_T} |f_1 - f_2|. \tag{2.13}$$

Συγκεκριμένα το αρχικό *Dirichlet* πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση που, επιπλέον, εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα.

Το προηγούμενο πόρισμα 2.1 δίνει τη μοναδικότητα για το αρχικό *Dirichlet* πρόβλημα κάτω από πολύ λιγότερο περιοριστικές υποθέσεις από ότι το θεώρημα 2.1: πράγματι δε ζητά τη συνέχεια καμίας παραγώγου της λύσης μέχρι το $\partial_p Q_T$.

Η ανισότητα (2.13) είναι μία ομοιόμορφη κατά σημείο εκτιμήτρια ευστάθειας, πολύ χρήσιμης σε πολλές εφαρμογές. Μάλιστα αν, $\upsilon = g_1$, $w = g_2$ στο $\partial_p Q_T$ και

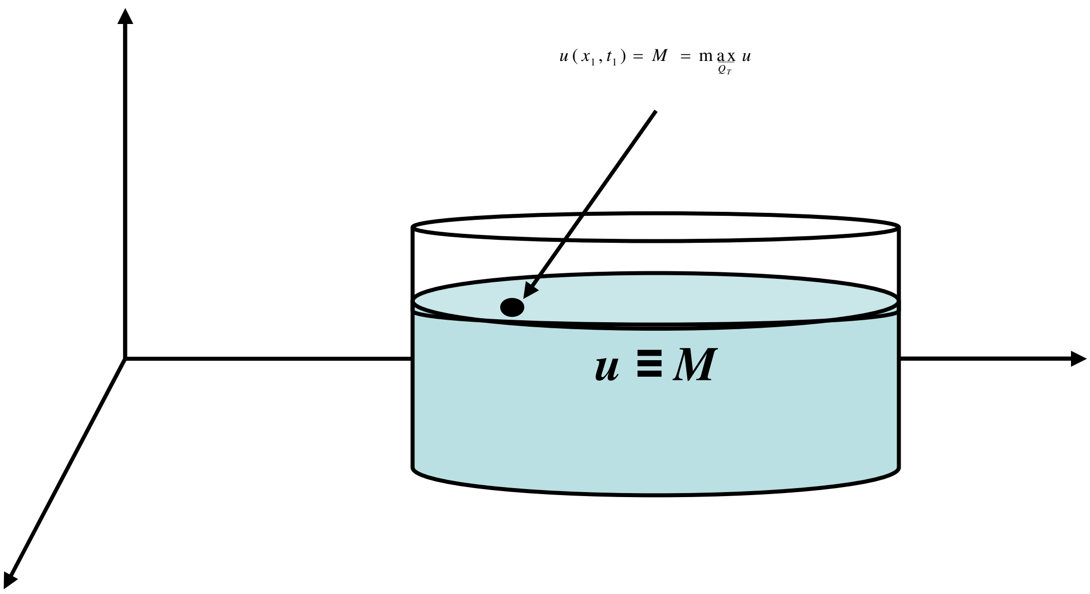
$$\max_{\partial_p Q_T} |g_1 - g_2| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad \max_{\overline{Q}_T} |f_1 - f_2| \leq \varepsilon$$

τότε παίρνουμε:

$$\max_{\overline{Q}_T} |\upsilon - w| \leq \varepsilon (1 + T)$$

Έτσι, σε πεπερασμένο χρόνο, μια ομοιόμορφη απόσταση μεταξύ των δεδομένων σημαίνει μικρή ομοιόμορφη απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων λύσεων.

Ισχυρή Αρχή Μεγίστου. Το θεώρημα 2.2.1 είναι μια έκδοση της επονομαζόμενης Ασθενούς Αρχής Μεγίστου, ασθενούς επειδή αυτό το αποτέλεσμα δεν λέει τίποτα για την πιθανότητα μια λύση να φτάσει το μέγιστο ή το ελάχιστό της και σε κάποιο εσωτερικό σημείο. Για την ακρίβεια ένα πιο ακριβές αποτέλεσμα, γνωστό ως *Ισχυρή Αρχή Μεγίστου*, λέει ότι αν μια λύση της $u_t - D\Delta u = 0$ λαμβάνει το μέγιστο M (ελάχιστο) σε ένα σημείο $(\mathbf{x}_1, t_1)$ με $x_1 \in V$, $0 < t_1 \leq T$ τότε $u = M$ στο $\overline{V}$ x $[0, t_1]$.



Εικόνα 3. Η Ισχυρή Αρχή Μεγίστου

3. Συμμετρικός Τυχαίος Περίπατος (n=1)

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη σχέση μεταξύ των πιθανοθεωρητικών και ντετερμινιστικών μοντέλων στη διάσταση n=1. Κύριος σκοπός είναι να ανακατασκευάσουμε μια κίνηση *Brown*, που είναι ένα **συνεχές μοντέλο** (και στο χώρο και στο χρόνο) ως όριο μιας απλής στοχαστικής ανέλιξης (διαδικασίας), που λέγεται *τυχαίος περίπατος* και η οποία όμως είναι ένα **διακριτό μοντέλο** (και στο χώρο και στο χρόνο). Κατά την διάρκεια της «συνειδητοποίησης» αυτής της διαδικασίας ορίων θα δούμε πως η εξίσωση διάχυσης μπορεί να προσεγγιστεί από μια εξίσωση διαφορών. Επιπλέον αυτή η νέα προοπτική θα ξεκαθαρίσει καλύτερα τη φύση του συντελεστή διάχυσης.

3.1 Προκαταρκτικοί Υπολογισμοί

Θεωρούμε ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας που κινείται τυχαία κατά μήκος του άξονα x, σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

Σταθεροποιούμε τα:

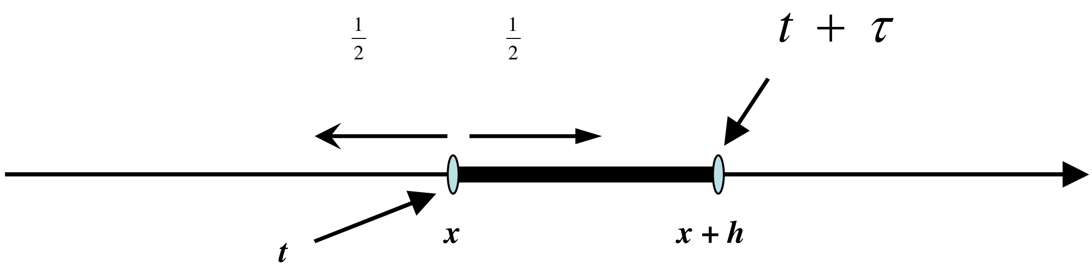
- $h > 0$, βήμα χώρου
- $\tau > 0$, βήμα χρόνου

1. Κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος τ το σωματίδιο κάνει ένα βήμα μήκους h, ξεκινώντας από το x=0.

2. Το σωματίδιο κινείται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά με πιθανότητα p=1/2, ανεξάρτητα από το προηγούμενο βήμα (Εικόνα 4)

Σε χρόνο μετά από $t=N\tau$ βήματα το σωματίδιο θα είναι στο σημείο $x=mh$, όπου $N\geq 0$ και m ακέραιοι, $-N \leq m \leq N$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $p(x, t)$ να βρούμε το σωματίδιο στη θέση x τη στιγμή t.



Εικόνα 4. Συμμετρικός Τυχαίος Περίπατος

Οι τυχαίοι περίπατοι μπορούν να βρεθούν σε μια πληθώρα καταστάσεων. Για παράδειγμα ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο πετάμε ένα δίκαιο νόμισμα. Αν έρθει κορώνα, το σωματίδιο κινείται δεξιά και ο παίκτης κερδίζει 1 δολάριο. Αν έρθουν γράμματα κινείται αριστερά και ο παίκτης χάνει 1 δολάριο: $p(x,t)$ είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης m δολάρια μετά από N ρίψεις.

- *Υπολογισμός της* $p(x,t)$:

Έστω $x= mh$ η θέση του σωματιδίου μετά από N βήματα. Για να φτάσει το x, το σωματίδιο κάνει μερικά βήματα δεξιά, έστω k, και $N–k$ βήματα αριστερά. Προφανώς $0 \le k \le N$ και :

$$m = k - (N - k) = 2k - N \tag{3.1}$$

και τα N και m είναι είτε και τα δύο άρτιοι είτε και τα δύο περιττοί ακέραιοι και

$$k = \frac{1}{2}(N + m)$$

Έτσι, $p(x, t) = p_k$ όπου:

$$p_k = \frac{\text{αριθμός περιπάτων με } k \text{ βήματα δεξιά μετά από } N \text{ βήματα}}{\text{συνολικός αριθμός περιπάτων μετά από } N \text{ βήματα}} \tag{3.2}$$

Ο αριθμός των τυχαίων περιπάτων με k βήματα δεξιά και $N–k$ αριστερά δίνεται από τον διωνυμικό συντελεστή

$$C_{N,k} = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Από την άλλη μεριά ο αριθμός πιθανών περιπάτων μετά από N βήματα είναι 2^N. Άρα, από την (3.2)

$$p_k = \frac{C_{N,k}}{2^N} \qquad x = mh, \quad t = N\tau, \quad k = \frac{1}{2}(N+m). \tag{3.3}$$

- *Μέσο εκτόπισμα και τυπική απόκλιση του x:*

Ο υπέρτατος στόχος μας είναι να αφήσουμε τα h και τ να πάνε στο 0 ώστε να πάρουμε ένα συνεχή τυχαίο περίπατο με ενσωματωμένα τα κύρια χαρακτηριστικά του διακριτού τυχαίου περίπατου. Αυτό είναι ένα ευαίσθητο σημείο αφού αν θέλουμε να πάρουμε στο τέλος ένα συνεχές αξιόπιστο αντίγραφο του τυχαίου περιπάτου πρέπει να απομονώσουμε κάποιες ποσοτικές παραμέτρους που μπορούν να αιχμαλωτίσουν τα βασικά χαρακτηριστικά του τυχαίου περιπάτου και να τις διατηρήσουμε αναλλοίωτες. Στην περίπτωση μας υπάρχουν δυο παράμετροι κλειδιά:

a) το **μέσο εκτόπισμα** του x μετά από N βήματα $= \langle x \rangle = \langle m \rangle h$

b) η **δεύτερη ροπή** του x μετά από N βήματα $= \langle x^2 \rangle = \langle m^2 \rangle h^2$.

Η ποσότητα

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\langle m^2 \rangle} h$$

είναι ουσιαστικά η μέση απόσταση από την αρχή μετά από N βήματα.

Πρώτα παρατηρούμε ότι από την (3.1) έχουμε

$$\langle m \rangle = 2\langle k \rangle - N \tag{3.4}$$

και

$$\langle m^2 \rangle = 4\langle k^2 \rangle - 4kN + N^2. \tag{3.5}$$

Έτσι, για να υπολογίσουμε τα $\langle m \rangle$ και $\langle m^2 \rangle$ αρκεί να υπολογίσουμε τα $\langle k \rangle$ και $\langle k^2 \rangle$. Έχουμε και εξ΄ ορισμού και από την (3.3)

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{N} k p_k = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{N} k C_{N,k}\,, \qquad \langle k^2 \rangle = \sum_{k=1}^{N} k^2 p_k = \frac{1}{2^N} \sum_{k=1}^{N} k^2 C_{N,k}\,. \tag{3.6}$$

Παρόλο που μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς απευθείας από την (3.6), είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε την *πιθανογεννήτρια συνάρτηση*, η οποία ορίζεται από:

$$G(s)=\sum_{k=0}^{N}p_k s^k=\frac{1}{2^N}\sum_{k=0}^{N}C_{N,k}s^k\ .$$

Η συνάρτηση G περιέχει την πληροφορία για τις ροπές του k και ισχύει για όλες τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν ακέραιες τιμές. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$G'(s)=\frac{1}{2^N}\sum_{k=1}^{N}kC_{N,k}s^{k-1}\qquad G''(s)=\frac{1}{2^N}\sum_{k=2}^{N}k(k-1)C_{N,k}s^{k-2}\tag{3.7}$$

Θέτοντας s=1 και χρησιμοποιώντας την (3.6) παίρνουμε:

$$G'(1)=\frac{1}{2^N}\sum_{k=1}^{N}kC_{N,k}=\langle k\rangle\tag{3.8}$$

και

$$G''(1)=\frac{1}{2^N}\sum_{k=2}^{N}k(k-1)C_{N,k}=\langle k(k-1)\rangle=\langle k^2\rangle-\langle k\rangle\ .\tag{3.9}$$

Από την άλλη μεριά, θέτοντας a=1 και b=s στον στοιχειώδη τύπο

$$(a+b)^N=\sum_{k=0}^{N}C_{N,k}a^{N-k}b^k$$

παίρνουμε:

$$G(s)=\frac{1}{2^N}(1+s)^N$$

και άρα

$$G'(1)=\frac{N}{2}\quad\text{και}\quad G''(1)=\frac{N(N-1)}{4}\tag{3.10}$$

Από τις (3.10), (3.8) και (3.7) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\langle k^2\rangle=\frac{N}{2}\qquad\text{και}\qquad\langle k^2\rangle=\frac{N(N+1)}{4}$$

Τέλος αφού $m = 2k – N$, έχουμε

$$\langle m\rangle=2\langle k\rangle-N=2\frac{N}{2}-N=0$$

και επίσης $<x>$ = $<m>$ h = 0, που δεν μας εκπλήσει δεδομένης της συμμετρίας του περιπάτου.

Επιπλέον:

$$\langle m^2 \rangle = 4\langle k^2 \rangle - 4N\langle k \rangle + N^2 = N^2 + N - 2N^2 + N^2 = N$$

από όπου:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{N}h \tag{3.11}$$

που είναι η *τυπική απόκλιση* του *x*, αφού το <*x*> = 0. Ο τύπος (3.11) περιέχει μια πληροφορία – κλειδί: την στιγμή $N\tau$, η απόσταση από την αρχή είναι τάξης $\sqrt{N}h$, δηλαδή **η τάξη της κλίμακας χρόνου είναι το τετράγωνο της κλίμακας χώρου**. Με άλλα λόγια, αν θέλουμε να αφήσουμε την τυπική απόκλιση αναλλοίωτη στη διαδικασία των ορίων πρέπει να αλλάξουμε την κλίμακα χρόνου σε τετράγωνο χώρου, δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια *παραβολική διαστολή χώρου – χρόνου.*

Προχωρώντας βήμα – βήμα, το επόμενο βήμα είναι να παράγουμε μια εξίσωση διαφορών για την πιθανότητα μετάβασης $p=p(x,t)$. Πάνω σε αυτή την εξίσωση θα εφαρμόσουμε την διαδικασία των ορίων.

3.2 Η Οριακή Πιθανότητα μετάβασης

Η κίνηση του σωματιδίου δεν έχει μνήμη αφού κάθε κίνηση είναι ανεξάρτητη από την προηγούμενη. Αν η θέση του σωματιδίου την στιγμή $t+\tau$ είναι x, αυτό σημαίνει ότι τη στιγμή t η θέση του ήταν $x-h$ ή $x+h$ με ίση πιθανότητα. Το θεώρημα ολικής πιθανότητας τότε δίνει:

$$p(x,t+\tau) = \frac{1}{2}p(x-h,t) + \frac{1}{2}p(x+h,t) \tag{3.12}$$

με αρχικές συνθήκες:

$$p\,(0,0) = 1 \qquad \text{και} \qquad p\,(x,0) = 0 \qquad \text{αν } x \neq 0.$$

Κρατώντας τα x και t σταθερά, ας δούμε τι συμβαίνει όταν $h \to 0$, $\tau \to 0$. Μας βολεύει να σκεφτόμαστε το p ως μια ομαλή συνάρτηση που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$ και όχι μόνο στο διακριτό σύνολο σημείων $(mh, N\tau)$. Επιπρόσθετα, περνώντας στο όριο, θα βρούμε μια συνεχή κατανομή πιθανότητας έτσι ώστε $p(x,t)$ όντας η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στο (x,t), να είναι 0. Αν ερμηνεύσουμε το p ως μια *πυκνότητα πιθανότητας*, αυτή η δυσκολία εξαφανίζεται. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Taylor* μπορούμε να γράψουμε:

$$p(x,t+\tau) = p(x,t) + p_t(x,t)\tau + o(\tau),$$

$$p(x \pm h,t) = p(x,t) \pm p_x(x,t)h + \frac{1}{2}p_{xx}(x,t)h^2 + o(h^2)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.12), μετά από κάποιες απλοποιήσεις, βρίσκουμε:

$$p_t\tau + o(\tau) = \frac{1}{2}p_{xx}h^2 + o(h^2)$$

Διαιρώντας με τ:

$$p_t + o(1) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}p_{xx} + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right) \qquad (3.13)$$

Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο: στην τελευταία εξίσωση ξανασυναντούμε το συνδυασμό h^2/τ .

Αν θέλουμε να πάρουμε κάτι μη τετριμμένο όταν $h,\tau \to 0$, **πρέπει να απαιτήσουμε το h^2/τ να έχει πεπερασμένο και θετικό όριο**. Η πιο απλή επιλογή είναι να γράψουμε:

$$\frac{h^2}{\tau} = 2D \qquad (3.14)$$

για κάποιο αριθμό $D>0$ (το 2 είναι μόνο για αισθητικούς λόγους).

Παίρνοντας όριο στην (3.13), έχουμε για το p την εξίσωση:

$$p_t = Dp_{xx} \qquad (3.15)$$

ενώ η αρχική συνθήκη γίνεται

$$\lim_{t \to 0^+} p(x,t) = \delta . \qquad (3.16)$$

Έχουμε ήδη δει ότι η μοναδική λύση του (3.15), (3.16) είναι

$$p(x,t) = \Gamma_D(x,t)$$

αφού:

$$\int_{\mathrm{R}} p(x,t)dx = 1 .$$

Έτσι η σταθερά D στην (3.14) είναι ακριβώς ο *συντελεστής διάχυσης*. Αφού :

$$h^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{N}, \qquad \tau = \frac{1}{N}$$

έχουμε

$$\frac{h^2}{\tau} = \frac{\langle x^2 \rangle}{t} = 2D$$

που σημαίνει: *σε μοναδιαίο χρόνο το σωματίδιο διαχέει μια μέση απόσταση* $\sqrt{2D}$.

Αξίζει να θυμηθούμε ότι οι διαστάσει του D είναι:

$$[D] = [\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma]^2 \times [\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma]^{-1}$$

και ότι ο συνδυασμός x^2/Dt είναι *αδιάστατος* και όχι μόνο αμετάβλητος από παραβολικές διαστολές. Επίσης, από την (3.14) παίρνουμε

$$\frac{h}{\tau} = \frac{2D}{h} \to +\infty . \tag{3.17}$$

Αυτό δείχνει ότι η μέση ταχύτητα h/τ του σωματιδίου σε κάθε βήμα γίνεται μη φραγμένη. Συνεπώς, το γεγονός ότι το σωματίδιο διαχέεται σε μοναδιαίο χρόνο σε μια πεπερασμένη μέση απόσταση οφείλεται καθαρά στις γρήγορες διακυμάνσεις της κίνησης του.

3.3 Από τον τυχαίο περίπατο στην κίνηση *Brown*.

Στα ερωτήματα τι συνέβη στο όριο στον τυχαίο περίπατο και τι είδους κίνηση έγινε, μπορούμε να απαντήσουμε χρησιμοποιώντας μερικά ακόμα εργαλεία από τη θεωρία Πιθανοτήτων.

Έστω $x_j=x(j\tau)$ η θέση του σωματιδίου μετά από j βήματα και έστω για $j \geq 1$:

$$h\xi_j = x_j - x_{j-1}$$

Τα ξ_j *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές*: κάθε μια παίρνει τιμή 1 ή –1 με πιθανότητα 1/2. Έχουν μέση τιμή $<\xi_j>=0$ και διασπορά $<\xi_j^2>=1$. Το εκτόπισμα του σωματιδίου μετά από N βήματα είναι:

$$x_N = h\sum_{j=1}^{N} \xi_j$$

Αν διαλέξουμε:

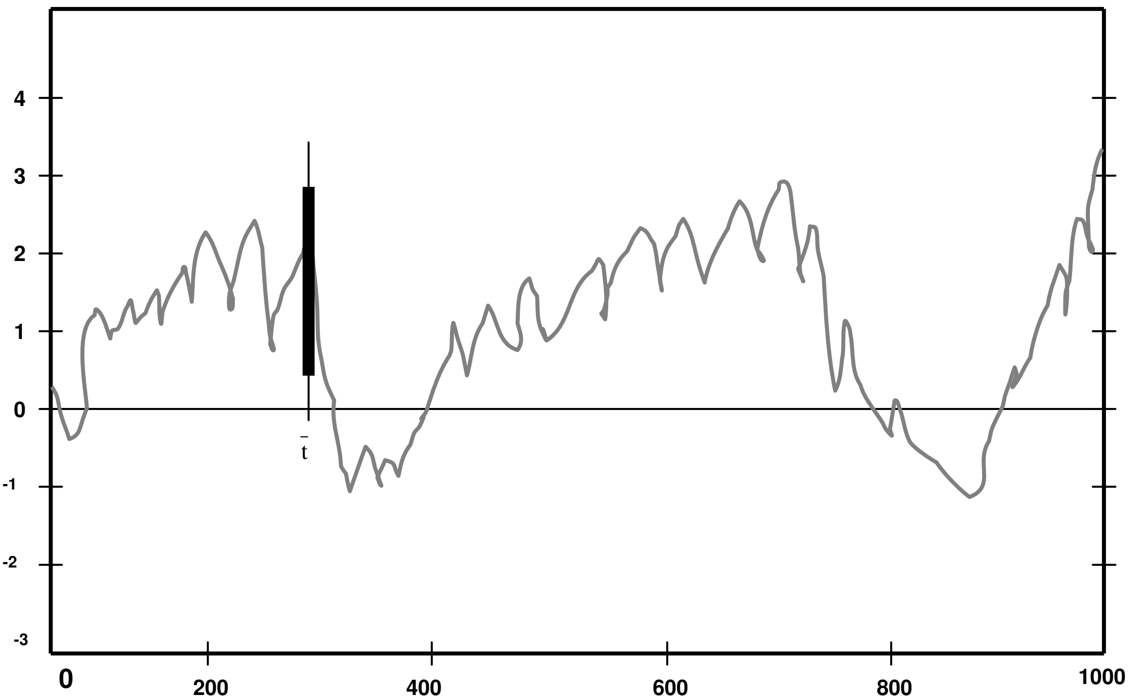
$$h = \sqrt{\frac{2Dt}{N}} ,$$

δηλαδή $h^2/\tau = 2D$ και πάρουμε $N \to \infty$, το *Κεντρικό Οριακό Θεώρημα* εγγυάται ότι το x_N συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή $X=X(t)$ που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά $2Dt$, της οποίας η πυκνότητα είναι η $\Gamma_D(x,t)$.

Ο τυχαίος περίπατος έγινε συνεχής περίπατος: αν D = 1/2, λέγεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** ή **διαδικασία Wiener**.

Συνήθως το σύμβολο $B=B(t)$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει την τυχαία θέση ενός σωματιδίου Brown. Η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $B(t)$ όπου το t παίζει το ρόλο μιας παραμέτρου είναι ορισμένη σε ένα συνηθισμένο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P), όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος, F μια σ – άλγεβρα στον Ω από μετρήσιμα ενδεχόμενα και P είναι ένα κατάλληλο μέτρο πιθανότητας στην F. Συνεπώς ο σωστός συμβολισμός θα ήταν $B(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$ αλλά η εξάρτηση από το ω παραλείπεται συνήθως και εννοείται (για απλότητα).

Η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $B(t,\omega)$, όπου ο χρόνος t είναι συνεχής παράμετρος, **είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία**. Κρατώντας το $\omega \in \Omega$ σταθερό, παίρνουμε την πραγματική συνάρτηση: $t \to B(t,\omega)$ της οποίας το γράφημα περιγράφει ένα μονοπάτι *Brown*



Εικόνα 5. Ένα μονοπάτι *Brown*

Κρατώντας το t σταθερό, παίρνουμε την τυχαία μεταβλητή: $\omega \to B\ (t, \omega)$.

Χωρίς να μας νοιάζει τι ακριβώς είναι το Ω, είναι σημαντικό να μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα: $P\{B(t)\ \in\ I\}$ όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα λογικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (ένα σύνολο *Borel* όπως λέγεται). Το προηγούμενο σχήμα 5 δείχνει τη σημασία αυτού του υπολογισμού: σταθεροποίηση του t σημαίνει σταθεροποίηση μιας ευθείας γραμμής έστω $t = \bar{t}$. Έστω ότι το I είναι υποσύνολο αυτής της γραμμής, στην προηγούμενη εικόνα το I είναι διάστημα. Η $P\{B(t)\ \in\ I\}$ είναι η πιθανότητα το σωματίδιο να είναι στο I τη στιγμή t.

Οι κύριες ιδιότητες της κίνησης Brown δίνονται παρακάτω. Θα μπορούσαμε να τα συνθέσουμε όλα στον τύπο

$$dB \sim \sqrt{dt}N(0,1) = N(0, dt) \tag{3.18}$$

όπου $N(0,1)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

- *Συνέχεια μονοπατιού*: Με πιθανότητα 1, τα πιθανά μονοπάτια ενός σωματιδίου *Brown* είναι συνεχείς συναρτήσεις

$$t \to B(t),\ t \geq 0.$$

Αφού από την (3.17) η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι άπειρη, τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμα.

- *Νόμος του Gauss για προσαυξήσεις*: Μπορούμε να αφήσουμε το σωματίδιο να ξεκινήσει από ένα σημείο $x \neq 0$, θεωρώντας την διαδικασία:

$$B^x(t) = x + B(t).$$

Με κάθε σημείο x είναι συνδεδεμένη μια πιθανότητα P^x με τις ακόλουθες ιδιότητες (αν $x=0$, $P^0=P$).

a) $P^x\{B^x(0) = x\} = P\{B(0) = 0\} = 1$

b) Για κάθε $s \geq 0$, $t \geq 0$, η προσαύξηση

$$B^x(t+s) - B^x(s) = B(t+s) - B(s)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή **με μέσο μηδέν και διασπορά** *t*, της οποίας η πυκνότητα είναι:

$$\Gamma(x,t) \equiv \Gamma_{\frac{1}{2}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Επιπλέον είναι ανεξάρτητη από κάθε γεγονός που συνέβη σε χρόνο $\leq s$. Για παράδειγμα, τα δυο γεγονότα:

$$\{B^x(t_2) - B^x(t_1) \in I_2\}, \qquad \{B^x(t_1) - B^x(t_0) \in I_1\}$$

με $t_0 < t_1 < t_2$ είναι ανεξάρτητα.

- *Πιθανότητα μετάβασης*: Για κάθε σύνολο Borel $I \subseteq \mathbb{R}$ ορίζεται η *συνάρτηση μετάβασης*:

$$P(x,t,I) = P^x\{B^x(t) \in I\}$$

που δίνει την πιθανότητα το σωματίδιο που βρίσκεται αρχικά στο *x* να βρίσκεται στο *I* τη στιγμή *t*. Μπορούμε να γράψουμε:

$$P(x,t,I) = P\{B(t) \in I - x\} = \int_{I-x} \Gamma(y,t)dy = \int_I \Gamma(y-x,t))dy.$$

- *Σταθερότητα*: Η κίνηση είναι αμετάβλητη σε σχέση με μεταφράσεις.
- *Μαρκοβιανές και ισχυρές Μαρκοβιανές ιδιότητες*: Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αν η αρχική θέση του σωματιδίου είναι τυχαία με κατανομή πιθανότητας μ, μπορούμε να θεωρήσουμε *μια κίνηση Brown με αρχική κατανομή* μ και για αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο B^μ. Με αυτή την κίνηση σχετίζεται μια κατανομή πιθανότητας P^μ τέτοια ώστε, για κάθε σύνολο Borel $F \subseteq \mathbb{R}$

$$P^\mu\{B^\mu(0) \in F\} = \mu(F).$$

Η Πιθανότητα το σωματίδιο να είναι στο *I* τη στιγμή *t* μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου

$$P^\mu\{B^\mu(t) \in I\} = \int_{\mathrm{R}} P^x\{B^x(t) \in I\} d\mu(x) = \int_{\mathrm{R}} P(x,t,I) d\mu(x).$$

Η *Μαρκοβιανή ιδιότητα* μπορεί να διατυπωθεί ως εξής δοθείσης μιας συνθήκης *H*, που σχετίζεται με τη συμπεριφορά του σωματιδίου πριν από τη στιγμή $s \geq 0$, η διαδικασία $Y(t) = B^x(t+s)$ είναι μια κίνηση Brown με αρχική κατανομή:

$$\mu(I) = P^x\{B^x(s) \in I \mid H\}.$$

Αυτή η ιδιότητα ιδρύει την ανεξαρτησία της μελλοντικής διαδικασίας $B^x(t+s)$ από το παρελθόν (απουσία μνήμης) όταν το παρόν $B^x(s)$ είναι γνωστό και αντανακλά την απουσία μνήμης του τυχαίου περίπατου.

Στην *ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα* το s αντικαθίσταται από ένα τυχαίο χρόνο τ, που εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά του σωματιδίου στο διάστημα $[0, \tau]$. Με άλλα λόγια για να αποφασίσουμε αν το γεγονός $\{\tau \leq t\}$ είναι αληθές ή όχι είναι αρκετό να ξέρουμε την συμπεριφορά του σωματιδίου ως την στιγμή t. Αυτού του είδους οι τυχαίοι χρόνοι ονομάζονται χρόνοι ονομάζονται *χρόνοι στάσης*. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι ο πρώτος χρόνος εξόδου από ένα τομέα (θα εξεταστεί σε επόμενο κεφάλαιο). Όμως ο τυχαίος χρόνος τ που ορίζεται ως

$$\tau = \inf\{t : B(t) > 10 \;\text{ και }\; B(t+1) < 10\}$$

δεν είναι χρόνος στάσης. Πράγματι (μετρώντας το χρόνο σε δευτερόλεπτα), το τ είναι ο μικρότερος από τους χρόνους ώστε το μονοπάτι Brown να είναι πάνω από το επίπεδο 10 τη στιγμή t και μετά από 1 δευτερόλεπτο να είναι κάτω από το 10. Προφανώς, για να αποφασίσουμε αν $\tau \leq 3$ για παράδειγμα, δεν αρκεί να ξέρουμε το μονοπάτι μέχρι τη στιγμή t=3, αφού το τ εμπλέκει τη συμπεριφορά του μονοπατιού μέχρι τη μελλοντική στιγμή t=4.

- *Αναμενόμενη τιμή*: Δοθείσης μιας επαρκώς ομαλής συνάρτησης $g = g(y)$ $y \in \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή:

$$Z(t) = g \circ B^x(t) = g(B^x(t)).$$

Η αναμενόμενη τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E^x[Z(t)] = \int_{\mathrm{R}} g(y)P(x,t,dy) = \int_{\mathrm{R}} g(y)\Gamma(y-x,t)dy.$$

που θα συναντήσουμε αργότερα σε μια πολλή διαφορετική κατάσταση.

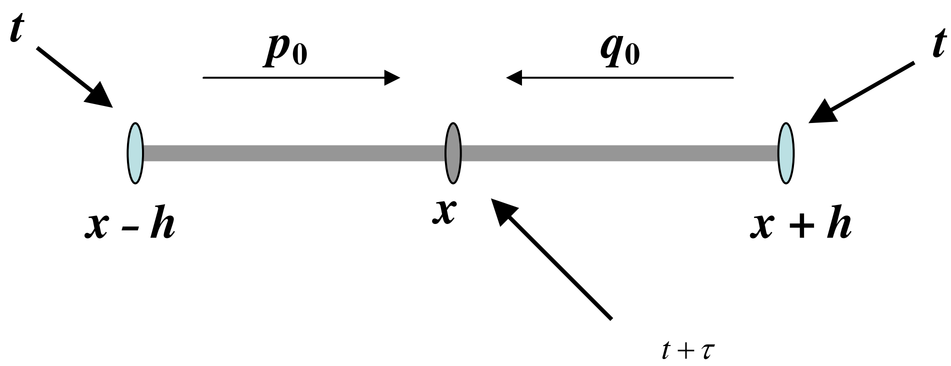
4. Διάχυση, Εκτροπή και Αντίδραση

4.1 Τυχαίος περίπατος με εκτροπή

Η υπόθεση της συμμετρίας του τυχαίου περιπάτου μας μπορεί να αφαιρεθεί. Έστω ότι το σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται κατά μήκος του άξονα x με βήμα $h>0$ σε κάθε χρονικό διάστημα διάρκειας $\tau>0$, σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες (Εικόνα 6)

1. Το σωματίδιο αρχίζει από το $x=0$
2. Κινείται στα δεξιά με πιθανότητα $p_0 \neq ½$ και στα αριστερά με πιθανότητα

   $q_0=1-p_0$, ανεξάρτητα από το προηγούμενο βήμα.



Εικόνα 6. Τυχαίος περίπατος με εκτροπή

Ο κανόνας 2 χαλάει τη συμμετρία του περιπάτου και μοντελοποιεί μια μικρή τάση για κίνηση στα δεξιά ή στα αριστερά, ανάλογα αν το πρόσημο του p_0-q_0 είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα. Συμβολίζουμε ξανά με το $p=p(x,t)$ την πιθανότητα η θέση του σωματιδίου να είναι $x=mh$ για $t=N\tau$. Απο τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$p(x,t+\tau) = p_0 p(x-h,t) + q_0 p(x+h,t) \tag{4.1}$$

με τις συνήθεις αρχικές συνθήκες:

$p(0,0) = 1$ και $p(x,0) = 0$ αν $x \neq 0$.

Όπως και στην συμμετρική περίπτωση, κρατώντας το x και το t σταθερό θέλουμε να εξετάσουμε τι συμβαίνει εάν πάρουμε το όριο για $h \to 0$ και $t \to 0$. Απο τύπο *Taylor*:

$$p(x, t+\tau) = p(x,t) + p_t(x,t)\tau + o(h^2) ,$$

$$p(x \pm h, t) = p(x,t) \pm p_x(x,t)h + \frac{1}{2} p_{xx}(x,t)h^2 + o(h^2) .$$

Αντικαθιστώντας στη (4.1) παίρνουμε:

$$p_t \tau + o(\tau) = \frac{1}{2} p_{xx} h^2 + (q_0 - p_0) h p_x + o(h^2) \tag{4.2}$$

Ένας νέος όρος εμφανίζεται $(q_0 - p_0)hp_x$. Διαιρώντας με τ έχουμε:

$$p_t + o(1) = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau} p_{xx} + \boxed{\frac{(q_0 - p_0)h}{\tau}} + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right). \tag{4.3}$$

Εδώ είναι και πάλι το κρίσιμο σημείο. Εάν $h, t \to 0$, η υπόθεση

$$\frac{h^2}{\tau} = 2D \tag{4.4}$$

από μόνη της δε μας δίνει κάτι μη τετριμμένο από την (4.3). Πράγματι διατηρώντας το p_0 και το q_0 σταθερό έχουμε:

$$\frac{(q_0 - p_0)h}{\tau} \to \infty$$

και από τη (4.3) έχουμε αντίφαση. Γράφοντας

$$\frac{(q_0 - p_0)h}{\tau} = \frac{(q_0 - p_0)}{h} \frac{h^2}{\tau}$$

βλέπουμε ότι επιπροσθέτως με την (4.4) πρέπει

$$\frac{q_0 - p_0}{h} \to \beta \tag{4.5}$$

με β πεπερασμένο. Ας παρατηρήσουμε ότι αφού $q_0 + p_0 = 1$ ή (4.5) είναι ισοδύναμη με την:

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}h + o(h) \quad \text{και} \quad q_0 = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}h + o(h) \tag{4.6}$$

που μπορεί να ερμηνευτεί ως η *συμμετρία της κίνησης σε μικροσκοπική κλίμακα.*

Με την (4.5) να ισχύει, έχουμε

$$\frac{q_0 - p_0}{h}\frac{h^2}{\tau} \to 2D\beta \equiv b$$

και η (4.3) δίνει οριακά

$$p_t = Dp_{xx} + bp_x . \tag{4.7}$$

Ήδη γνωρίζουμε ότι το Dp_{xx} μοντελοποιεί ένα φαινόμενο διάχυσης. Ας αποκρυπτογραφήσουμε τον όρο bp_x εξετάζοντας τις διαστάσεις του b. Αφού το $q_0 - p_0$ είναι αδιάστατο αφού αποτελεί διαφορά πιθανοτήτων, οι διαστάσεις του b είναι αυτές του h/τ δηλαδή της ταχύτητας.

Έτσι, ο συντελεστής b κωδικοποιεί την τάση περιορισμού της οριακής συνεχούς κίνησης, προς μια προνομιούχα κατεύθυνση με ταχύτητα $|b|$: προς τα δεξιά εάν $b<0$ ή προς τα αριστερά αν $b>0$. Με άλλα λόγια εδώ υπάρχει ρεύμα έντασης από όλο το $|b|$ που οδηγεί το σωματίδιο. **Ο *τυχαίος περίπατος έγινε μια* διαδικασία διάχυσης με εκτροπή**.

4.2 Τυχαίος περίπατος αντίδρασης – διάχυσης

Γυρίζουμε πίσω στον μονοδιάστατο περίπατο, υποθέτοντας ότι το σωματίδιο χάνει μάζα με σταθερό ρυθμό $\gamma>0$. Αυτό σημαίνει ότι στο χρονικό διάστημα από t έως $t+\tau$, ένα ποσοστό μάζας :

$$Q(x,t) = \tau\ \gamma\ p(x,t)$$

εξαφανίζεται. Η εξίσωση διαφορών (4.1) για το p γίνεται:

$$p(x,t+\tau) = p_0[p(x-h,t) - Q(x-h,t)] + q_0[p(x+h,t) - Q(x+h,t)]$$

Αφού

$$p_0Q(x-h,t)+q_0Q(x+h,t)=Q(x,t)+(q_0-p_0)hQ_x(x,t)+.......=\tau\gamma\, p(x,t)+O(\tau h)$$

η εξίσωση (4.2) τροποποιείται στην:

$$p_t\tau+o(\tau)=\frac{1}{2}p_{xx}h^2+(q_0-p_0)hp_x-\tau\gamma\, p+O(\tau h)+o(h^2)\,.$$

Διαιρώντας με *τ*, παίρνοντας *h*, *τ*→0 και υποθέτοντας ότι:

$$\frac{h^2}{\tau}=2D\,,\qquad \frac{q_0-p_0}{h}\to\beta$$

παίρνουμε:

$$p_t=Dp_{xx}+bp_x-\gamma\, p\qquad (b=2D\beta)\tag{4.8}$$

Ο όρος $-\gamma p$ εμφανίζεται στην (4.8) ως ένας όρος αλλοίωσης. Από την άλλη μεριά, σε σημαντικές καταστάσεις, το γ θα μπορούσε να είναι αρνητικό, που σημαίνει ότι τώρα έχουμε δημιουργία μάζας με ρυθμό $|\gamma|$. Για αυτό ο τελευταίος όρος λέγεται γενικά όρος αντίδρασης και η (4.8) είναι μια *εξίσωση διάχυσης και αντίδρασης*.

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (4.8), είναι χρήσιμο να εξετάσουμε ξεχωριστά την επίδραση των τριών ορών στο δεξί της μέλος.

- $p_t=Dp_{xx}$ μοντελοποιεί την καθαρή διάχυση. Οι τυπικές επιδράσεις είναι εξομαλυντικές, όπως φαίνεται από την τυπική συμπεριφορά της θεμελιώδους λύσης Γ_D.
- $p_t=bp_x$ είναι μια καθαρή εξίσωση μεταφοράς. Οι λύσεις είναι μετακινούμενα κύματα της μορφής $g(x+bt)$.
- $p_t=-\gamma p$ μοντελοποιεί την καθαρή αντίδραση. Οι λύσεις είναι πολλαπλάσια του $e^{-\gamma t}$, εκθετικά φθίνουσες (αύξουσες) αν $\gamma>0$ ($\gamma<0$)

Ως τώρα δώσαμε πιθανοθεωρητική ερμηνεία για μια κίνηση σε όλο το $\mathbb{R}$, όπου δεν υπάρχει συνοριακή συνθήκη.

5. Πολυδιάστατος Τυχαίος Περίπατος

5.1 Η συμμετρική περίπτωση

Ότι κάναμε στη διάσταση $n=1$ μπορούμε να το επεκτείνουμε εύκολα και σε διάσταση $n>1$, και συγκεκριμένα σε n=2,3. Για να ορίσουμε ένα συμμετρικό τυχαίο περίπατο, εισάγουμε το *πλέγμα* Z^n που δίνεται από ένα σύνολο σημείων $x \in \mathbb{R}^n$, των οποίων οι συντεταγμένες είναι προσημασμένοι ακέραιοι. Δεδομένου του *βήματος χώρου* $h>0$, το σύμβολο hZ^n συμβολίζει το πλέγμα των σημείων με συντεταγμένες προσημασμένους ακεραίους που είναι πολλαπλασιασμένοι με *h*.

Κάθε σημείο $\mathbf{x} \in hZ^n$ έχει μια 'διακριτή γειτονιά' από *2n* σημεία σε απόσταση *h* που δίνονται από

$$\mathbf{x} + he_j \qquad \text{και} \qquad \mathbf{x} - he_j \qquad\qquad (j = 1,2, \ldots\ldots, n),$$

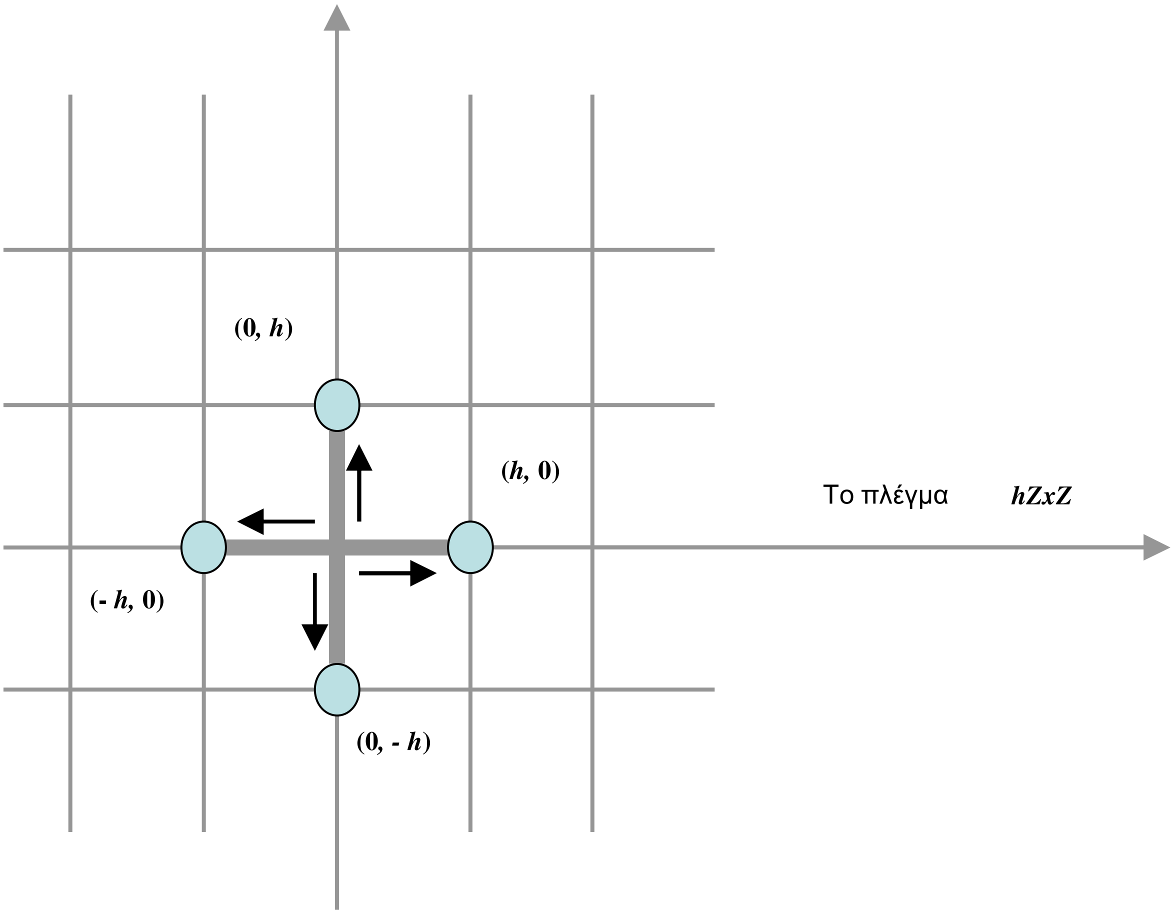
όπου $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \ldots \mathbf{e}_n$, είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Το σωματίδιο κινείται στο hZ^n σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες (Εικόνα 7)

1. Ξεκινά από το $\mathbf{x}=0$
2. Αν τη στιγμή *t* βρίσκεται στο x, τη στιγμή $t + \tau$ η θέση του είναι ένα από τα $2n$ σημεία $\mathbf{x} \pm he_j$ με πιθανότητα $p=1/2\mathrm{n}$.
3. Κάθε βήμα είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο.

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $p(\mathbf{x},t)$ να βρούμε το σωματίδιο στο **x** τη στιγμή *t*.

Προφανώς οι αρχικές συνθήκες για το *p* είναι:

$$p(\mathbf{0},0)=1 \quad \textit{και} \quad p(\mathbf{x},0)=0 \quad \text{αν} \ \ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}.$$



Εικόνα 7. Δυσδιάστατος τυχαίος περίπατος

Το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας δίνει:

$$p(\mathbf{x}, t+\tau) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\{p(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_j, t) + p(\mathbf{x}-h\mathbf{e}_j, t), t\} \tag{5.1}$$

Πράγματι για να φτάσουμε στο **x** την στιγμή t+τ, θα πρέπει την στιγμή t το σωματίδιο να βρισκόταν σε ένα από τα σημεία της διακριτής γειτονιάς του **x** και να μετακινήθηκε από εκεί προς το **x** με πιθανότητα $1/2n$. Για σταθερά **x** και t, θέλουμε να εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν πάρουμε $h \to 0$, $r \to 0$. Υποθέτωντας το p ορισμένο και ομαλό σε όλο το $\mathbb{R}^n$ x $(0,+\infty)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο του *Taylor* για να γράψουμε:

$$p(\mathbf{x}, t+\tau) = p(\mathbf{x}, t) + p_t(\mathbf{x}, t)\tau + o(\tau)$$

$$p(\mathbf{x} \pm h\mathbf{e}_j, t) = p(\mathbf{x}, t) \pm p_{x_j}(\mathbf{x}, t)h + \frac{1}{2}p_{x_j x_j}(\mathbf{x}, t)h^2 + o(h^2)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.1), μετά από κάποιες απλοποιήσεις, παίρνουμε:

$$p_t\tau + o(\tau) = \frac{h^2}{2n}\Delta p + o(h^2)\,.$$

Διαιρώντας με τ παίρνουμε την εξίσωση:

$$p_t\tau + o(1) = \frac{1}{2n}\frac{h^2}{\tau}\Delta p + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right). \tag{5.2}$$

Αυτή η κατάσταση μοιάζει πολύ με αυτή της μονοδιάστατης περίπτωσης: για να πάρουμε στο τέλος κάτι μη τετριμμένο πρέπει να απαιτήσουμε ο λόγος h^2/τ να έχει ένα πεπερασμένο και θετικό όριο. Η απλούστερη επιλογή είναι

$$\frac{h^2}{\tau} = 2nD \tag{5.3}$$

με το $D>0$. Από την (5.3) συμπεραίνουμε ότι *σε μοναδιαίο χρόνο το σωματίδιο διαχέεται με μέση απόσταση* $\sqrt{2nD}$. Οι φυσικές διαστάσεις του D δεν άλλαξαν. Παίρνοντας $h\to 0$, $\tau\to 0$ στην (5.2), βρίσκουμε για το p την εξίσωση διάχυσης :

$$p_t = D\Delta p \tag{5.4}$$

με αρχική συνθήκη :

$$\lim_{t\to 0^+} p(\mathbf{x},t) = \delta \tag{5.5}$$

Αφού

$\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = 1$ για κάθε t, η μοναδική λύση είναι:

$$p(\mathbf{x},t) = \Gamma_D(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4Dt}} \qquad t>0$$

Ο n – διάστατος τυχαίος περίπατος έγινε ένας συνεχής τυχαίος περίπατος. Όταν D=1/2, καλείται η *n–διάστατη κίνηση Brown*. Ορίζουμε με $\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}(t,\omega)$ την τυχαία θέση ενός σωματιδίου *Brown*, ορισμένη για κάθε $t>0$ σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P).

Η οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{B}(t,\omega)$ με το χρόνο t ως μια πραγματική παράμετρο, **είναι μια διανυσματική συνεχής στοχαστική διαδικασία.** Για $\omega \in \Omega$ σταθερό η διανυσματική συνάρτηση

$$t \to \mathbf{B}(t,\omega)$$

περιγράφει ένα n – διάστατο μονοπάτι *Brown* του οποίου τα βασικά χαρακτηριστικά δίνονται παρακάτω.

- *Συνέχεια μονοπατιού*: Με πιθανότητα 1, τα μονοπάτια *Brown* είναι συνεχή για $t \geq 0$.

- *Νόμος του Gauss για προσαυξήσεις*: Η διαδικασία $\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)$ ορίζει μια κίνηση *Brown* με αρχή το $\mathbf{x}$. Κάθε σημείο $\mathbf{x}$ συνδέεται μια πιθανότητα P^{x}, με τις ακόλουθες ιδιότητες (αν $\mathbf{x}=0$, $P^0=P$).

    a. $P^{\mathrm{x}}\,\{\mathbf{B}^{\mathrm{x}}(0)=\mathbf{x}\}=P\,\{\mathbf{B}(0)=0\}=1$

    b. Για κάθε $s \geq 0$, $t \geq 0$ η προσαυξημένη

$$\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(t+s)-\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(s)=\mathbf{B}(t+s)-\mathbf{B}(s) \tag{5.6}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και πίνακα συνδιακύμανσεων $t\mathbf{I}_{\mathrm{n}}$ με πυκνότητα:

$$\Gamma(\mathbf{x},t)=\Gamma_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}}$$

Επιπλέον η (5.6) είναι ανεξάρτητη από κάθε γεγονός που συνέβη πριν από τη χρονική στιγμή s. Πχ τα δύο γεγονότα

$$\{\mathbf{B}(t_2)-\mathbf{B}(t_1)\in A_1\} \qquad \{\mathbf{B}(t_1)-\mathbf{B}(t_2)\in A_2\}$$

είναι ανεξάρτητα αν $t_0 < t_1 < t_2$.

- *Συνάρτηση μεταφοράς.* Για κάθε σύνολο *Borel* $A \subset \mathbb{R}^n$ μία συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται ως:

$$P(\mathbf{x},t,A)=P^{\mathbf{x}}\{B^{\mathbf{x}}(t)\in A\}$$

και αναπαριστά την πιθανότητα το σωματίδιο να βρισκόταν αρχικά στη θέση $\mathbf{x}$ και την στιγμή t να βρίσκεται στο A. Έχουμε:

$$P(\mathbf{x},t,A)=P\{\mathbf{B}(t)\in A-\mathbf{x}\}=\int_{A-\mathbf{x}}\Gamma(\mathbf{y},t)d\mathbf{y}=\int_{A}\Gamma(\mathbf{y}-\mathbf{x},t)d\mathbf{y}$$

- *Σταθερότητα*: Η κίνηση είναι αμετάβλητη ως προς τις στροφές και τις μεταφράσεις.
- *Μαρκοβιανές και Ισχυρές Μαρκοβιανές Ιδιότητες*: Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αν το σωματίδιο έχει τυχαία αρχική θέση με κατανομή πιθανότητας μ, μπορούμε να θεωρήσουμε *μια κίνηση Brown με αρχική κατανομή* μ και γι' αυτή χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbf{B}^{\mu}$. Το $\mathbf{B}^{\mu}$ συνδέεται με μια κατανομή πιθανότητας P^{μ} τέτοια ώστε:

$$P^{\mu}\{\mathbf{B}^{\mu}(0)\in A\}=\mu(A)$$

Η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στο A την στιγμή t μπορεί να υπολογιστεί μέσω της:

$$P^{\mu}\{\mathbf{B}^{\mu}(t)\in A\}=\int_{\mathbf{R}^n}P(\mathbf{x},t,A)\mu(dx)\,. \tag{5.7}$$

Η Μαρκοβιανή Ιδιότητα διατυπώνεται ως εξής: δεδομένης μιας συνθήκης H, που σχετίζεται με τη συμπεριφορά του σωματιδίου πριν τη στιγμή $s\geq 0$, η διαδικασία

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(t+s)$$

είναι μια κίνηση *Brown* με αρχική κατανομή:

$$\mu(A)=P^{\mathbf{x}}\{B^{\mathbf{x}}(S)\in A\mid H\}$$

Και πάλι, αυτή η ιδιότητα καθιερώνει την ανεξαρτησία της μελλοντικής διαδικασίας $\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(t+s)$ από το παρελθόν όταν το παρόν $\mathbf{B}^{\mathrm{x}}(s)$ είναι γνωστό και κωδικοποιεί την απουσία μνήμης της διαδικασίας. Στην ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα την θέση του s παίρνει ένας χρόνος στάσης τ.

- *Αναμενόμενη τιμή*: δεδομένης μιας αρκετά ομαλής πραγματικής συνάρτησης

$$g=g(\boldsymbol{y}),\qquad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,$$

μπορούμε να ορίσουμε μια πραγματικά τυχαία μεταβλητή:

$$Z(t) = (g \circ \mathbf{B}^{\mathbf{x}})(t) = g(\mathbf{B}^{\mathbf{x}}(t)) \ .$$

Η αναμενόμενη τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[Z(t)] = \int_{\mathrm{R}^n} g(\mathbf{y}) P(\mathbf{x}, t, d\mathbf{y}) = \int_{\mathrm{R}^n} g(\mathbf{y}) \Gamma(\mathbf{y} - \mathbf{x}, t) d\mathbf{y}$$

5.2 Περίπατοι με εκτροπή και αντίδραση

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές παραλλαγές του συμμετρικού τυχαίου περίπατου. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιτρέψουμε διαφορετική συμπεριφορά σε κάθε κατεύθυνση διαλέγοντας το βήμα στο χώρο να εξαρτάται από το h_j. Σαν συνέπεια, η οριακή διαδικασία μοντελοποιεί μια ανισοτροπική κίνηση, κωδικοποιημένη στον πίνακα:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & D_2 & ..... & 0 \\ ... & & ..... & \\ 0 & 0 & & D_n \end{pmatrix}$$

όπου $D = \dfrac{h_j^{\,2}}{2n\tau}$ είναι ο συντελεστής διάχυσης στην κατεύθυνση $\mathbf{e}_j$. Η εξίσωση για την πιθανότητα μετάβασης $p(\mathbf{x}, t)$ που προκύπτει είναι :

$$p_t = \sum_{j=1}^{n} D_j p_{x_j x_j} \tag{5.8}$$

Μπορούμε επίσης να χαλάσουμε τη συμμετρία ζητώντας την κατεύθυνση $\boldsymbol{e}_j$ η πιθανότητα να πάμε αριστερά (δεξιά) να είναι q_j (αντίτοιχα p_j).

Εάν

$$\frac{q_j - p_j}{h_j} \to \beta_j \qquad \text{και} \qquad b_j = 2D_j \beta_j$$

το διάνυσμα **b**=($b_1\ldots,b_n$) παίζει το ρόλο ενός διανύσματος εκτροπής, αντανακλώντας την τάση της κίνησης να πηγαίνει ασύμμετρα προς κάθε άξονα.

Προσθέτοντας έναν όρο αντίδρασης της μορφής cp, η εξίσωση *εκτροπής – διάχυσης – αντίδρασης* που προκύπτει είναι:

$$p_t = \sum_{j=1}^{n} D_j p_{x_j x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cp \,. \tag{5.9}$$

6. Το γενικό πρόβλημα Cauchy (n=1)

6.1 Η ομογενής περίπτωση

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε το ολικό πρόβλημα *Cauchy*:

$$u_t - D\, u_{xx} = 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}$$

όπου g, τα αρχικά δεδομένα που δίνονται. Θα περιοριστούμε στη μονοδιάστατη περίπτωση: τεχνικές, ιδέες και τύποι επεκτείνονται εύκολα και στη n – διάστατη περίπτωση.

Το πρόβλημα (6.1) μοντελοποιεί την εξέλιξη της θερμοκρασίας ή της συγκέντρωσης μιας ουσίας κατά μήκος μιας πολύ μεγάλης (άπειρης) μπάρας ή καναλιού αντίστοιχα, δεδομένης της αρχικής (t=0) κατανομής.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση της συγκέντρωση $u(x, y)$ εξαιτίας της διάχυσης μιας μάζας της οποίας η αρχική συγκέντρωση δίνεται από το g ερμηνεύοντας παράλληλα τις βασικές ποσότητες σε σχέση με τη μοντελοποίηση των διακυμάνσεων που εξετάζουμε.

Έτσι η ποσότητα $g(y)dy$ αναπαριστά την μάζα που είναι συγκεντρωμένη στο διάστημα $(y,\ y+dy)$ τη στιγμή $t = 0$. Η $\Gamma(x-y\ ,t)$ είναι μία λύση μοναδιαίας πηγής που αναπαριστά τη συγκέντρωση στο x τη στιγμή t, λόγω της διάχυσης μιας μοναδιαίας μάζας, αρχικά συγκεντρωμένης στο ίδιο διάστημα.

Ανάλογα η

$$\Gamma_D(x-y,t)g(y)dy$$

δίνει τη συγκέντρωση στο x τη στιγμή t, λόγω της διάχυσης της μάζας $g(y)dy$.

Χάρη στη γραμμικότητα της εξίσωσης διάχυσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπέρθεσης και να υπολογίσουμε την λύση ως το άθροισμα όλων των επιμέρους συνεισφορών. Έτσι παίρνουμε:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\Gamma_D(x-y,t)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}dy \qquad (6.2)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι, κάτω από λογικές υποθέσεις στα αρχικά δεδομένα *g* η (6.2) πραγματικά δίνει την μοναδική λύση του προβλήματος *Cauchy*. Κατ΄ αρχάς αν η *g* μεγαλώσει πολύ προς το άπειρο, περισσότερο από μία εκθετική e^{ax^2} $a>0$, παρά την γρήγορη σύγκλιση της γκαουσιανής στο 0, το ολοκλήρωμα στην (6.2) μπορεί να αποκλίνει και ο τύπος (6.2) χάνει κάθε νόημα. Ακόμα πιο εύθραυστο γίνεται το ερώτημα της μοναδικότητας της λύσης,

Ο τύπος (6.2) έχει μία πιθανοθεωρητική ερμηνεία. Έστω $D = ½$ και $B^x(t)$ η θέση ενός σωματιδίου *Brown*, που αρχίζει από το *x*. Έστω $g(y)$ το κέρδος που έχουμε όταν το σωματίδιο περάσει από το *y*. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$u(x,t) = E^x[g(B^x(t))]$$

όπου το E^x συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή με βάση την πιθανότητα P^x, με πυκνότητα $\Gamma(x-y, t)$.

Με άλλα λόγια, για να υπολογίσουμε την *u* στο (x,t) θεωρούμε ένα σωματίδιο *Brown* που ξεκινά από το *x*, υπολογίζουμε την θέση του $B^x(t)$, την στιγμή t και τέλος υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή της $g(B^x(t))$.

6.2 Ύπαρξη λύσης

Το ακόλουθο θεώρημα λέει ότι η (6.2) είναι όντως μια λύση του ολικού προβλήματος *Cauchy* κάτω από αρκετά γενικές υποθέσεις για την *g*, που ικανοποιούνται στις περισσότερες ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Θεώρημα 6.1. Υποθέτουμε ότι η *g* είναι συνάρτηση με πεπερασμένο αριθμό αλμάτων ασυνέχειας στο $\mathbb{R}$ και ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί α και c τέτοιοι ώστε:

$$|g(x)| \le ce^{ax^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad (6.3)$$

Έστω u που δίνεται από τον τύπο (6.2). Τότε:

i) $u \in C^{\infty}$ (x(0,T)) για $T < \dfrac{1}{4Da}$ και στο $\mathbb{R}$ x(0, T):

$$u_t - Du_{xx} = 0.$$

ii) Αν x_0 σημείο συνέχειας της g, τότε:

$$u(y,\ t) \to g(x_0) \quad \text{αν } (y,\ t) \to (x_0,\ 0), \quad t>0$$

iii) Υπάρχουν θετικοί αριθμοί c_1 και A τέτοιοι ώστε:

$$|u(x,t)| \le Ce^{Ax^2} \quad \forall\ (x,\ t) \in \mathbb{R} \text{ x } (0,\ \infty).$$

Το θεώρημα λέει ότι αν έχουμε αρχικά δεδομένα με ελεγχόμενη εκθετική αύξηση στο άπειρο που εκφράζεται από την (6.3), τότε η (6.2) είναι λύση στο $\mathbb{R}$ x(0, T). Θα δούμε ότι κάτω από συνθήκες η (6.2) είναι μοναδική λύση.

Σε μερικές εφαρμογές (πχ. στα χρηματοοικονομικά), τα αρχικά δεδομένα πηγαίνουν στο άπειρο όχι γρηγορότερα από την $c_1 e^{a_1|x|}$. Σε αυτή την περίπτωση η (6.3) ικανοποιείται επιλέγοντας έναν οποιοδήποτε θετικό αριθμό a και ένα κατάλληλο c. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει περιορισμός στο T αφού:

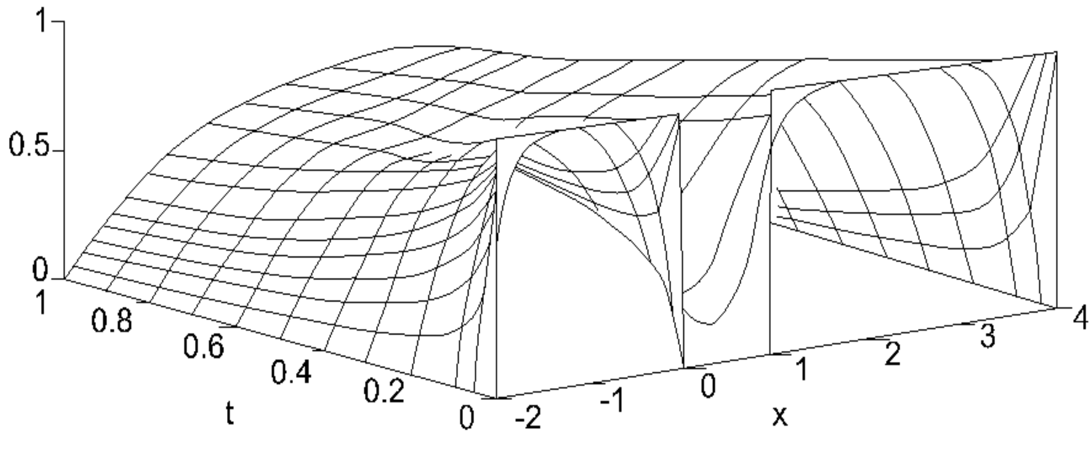
$$T < \frac{1}{4Da} \qquad \text{και το } a \text{ μπορεί να επιλεγεί όσο μικρό θέλουμε.}$$

Η ιδιότητα i) δείχνει ένα συνηθισμένο και σημαντικό φαινόμενο που συνδέεται με την εξίσωση διάχυσης: ακόμα και αν τα αρχικά δεδομένα είναι ασυνεχή σε κάποιο σημείο, αμέσως μετά από αυτό η λύση είναι ομαλή. Η διάχυση λοιπόν είναι μία **διαδικασία εξομάλυνσης**. Στο σχήμα 8 που ακολουθεί φαίνεται αυτό το φαινόμενο για αρχικά δεδομένα

$$g(x) = \mathcal{X}_{(-2,0)}(x) + \mathcal{X}_{(1,4)}(x)$$

όπου $\mathcal{X}_{(a,b)}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος (a, b).

Από την ii) αν τα αρχικά δεδομένα g είναι συνεχή σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε η λύση είναι συνεχής ως το $t=0$ δηλαδή στο $\mathbb{R}$ x$[0,T)$.



Εικόνα 8 . Εξομαλυντική δράση της εξίσωσης διάχυσης

6.3 Η μη ομογενής περίπτωση. Μέθοδος Duhamel

Η εξίσωση διαφορών (ή ο τύπος της πιθανότητας):

$$p(x,t+\tau) = \frac{1}{2}p(x-h,t) + \frac{1}{2}p(x+h,t)$$

που βρήκαμε στην υποενότητα 3.2 στην ανάλυση του τυχαίου περιπάτου μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανοθεωρητική έκδοση της *διατήρησης της αρχικής μάζας*: η πιθανότητα της μάζας στο x τη στιγμή $t+\tau$ *είναι το άθροισμα των πυκνοτήτων που διαχέονται από τις* $x+h$, $x–h$ τη στιγμή t (δεν προστέθηκε ή αφαιρέθηκε μάζα στο χρονικό διάστημα $[t,\ t+\tau]$.

Ανάλογα η έκφραση:

$$p(x,t+\tau) - [\frac{1}{2}p(x-h,t) + \frac{1}{2}p(x+h,t)] \qquad (6.4)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της χαμένης/προστιθέμενης πυκνότητας μάζας στο διάστημα $[t,\ t+\tau]$. Επεκτείνοντας με τον τύπο του *Taylor* όπως κάναμε και σε προηγούμενη ενότητα κρατώντας το $h^2/\tau = 2D$ σταθερό, διαιρώντας με τ και θέτοντας $h,\tau \to 0$ στην (6.4) βρίσκουμε το

$$p_t - Dp_{xx}.$$

Άρα ο διαφορικός τελεστής $\partial_t - D\partial_{xx}$ **μετρά τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής πυκνότητας.**

Υποθέτουμε τώρα ότι από t=0 ως μία συγκεκριμένη στιγμή t=s>0 δεν υπάρχει μάζα και ότι την στιγμή s εμφανίζεται στο σημείο y (άπειρη πυκνότητα) μία μονάδα μάζας. Ξέρουμε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε αυτό το είδος πηγής μέσω ενός μέτρου *Dirac* στο y, που πρέπει να εξαρτάται από το χρόνο αφού η μάζα εμφανίζεται μόνο τη χρονική στιγμή s. Μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή

$$\delta(x - y, t - s).$$

Έτσι οδηγούμαστε στη μη ομογενή εξίσωση:

$$p_t - Dp_{xx} = \delta(x - y, t - s) \qquad \text{με } p(x,0) = 0 \qquad \text{αρχική συνθήκη.}$$

Ποια μπορεί να είναι η λύση? Ως το $t=s$ δεν συμβαίνει τίποτα και μετά το s έχουμε $\delta(x - y, t - s)$=0. Άρα είναι σαν να ξεκινάμε από το χρόνο $t=s$ και να λύνουμε το πρόβλημα:

$$p_t - Dp_{xx} = 0 \text{ , } x \in \mathbb{R}, t > s$$

με αρχική συνθήκη:

$$p(x, s) = \delta(x - y, t - s).$$

Έχουμε λύσει αυτό το πρόβλημα για s=0: η λύση είναι η $\Gamma_D(x - y, t)$. Από την σταθερότητα της εξίσωσης διάχυσης στη χρονική μετάφραση, παίρνουμε ότι η λύση $\forall\, s$>0 δίνεται από την:

$$p(x, t) = \Gamma_D (x - y, t - s) \tag{6.5}$$

Θεωρούμε τώρα μια κατανεμημένη πηγή στον ημιάξονα t >0, ικανή να παράγει πυκνότητα μάζας με χρονικό ρυθμό $f(x, t)$. Για την ακρίβεια η $f(x,t)dxdt$ είναι η μάζα που παράγεται μεταξύ x και x+dx στο διάστημα (t, t+dt). Αν αρχικά δεν υπάρχει μάζα οδηγούμαστε στο *μη ομογενές* πρόβλημα *Cauchy*:

$$\left| \begin{array}{ll} \upsilon_t - D\, \upsilon_{xx} = f(x, t) & \text{στο } \mathbb{R} \text{ x } (0, \mathrm{T}) \\ \upsilon(x,0) = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{6.6}$$

Όπως και στην υποενότητα 6.1 βρίσκουμε την μορφή της λύσης στο (x,t) χρησιμοποιώντας ευρετικούς συλλογισμούς. Ας υπολογίσουμε την συνεισφορά *dυ* στη $\upsilon(x,t)$ της μάζας $f(y,s)dyds$. Είναι σαν να έχουμε ένα όρο για την πηγή της μορφής:

$f^*(x, t) = f(x, t)\, \delta(x - y, t - s)$ και άρα ανακαλώντας την (6.5) έχουμε:

$$d\upsilon(x,t) = \Gamma_D(x - y,\ t - s)\, f(y,\ s)dyds. \tag{6.7}$$

Παίρνουμε την λύση με υπέρθεση, αθροίζοντας όλες τις συνεισφορές (6.7). Έχουμε τα ακόλουθα βήματα:

- αθροίζοντας ως προς *y* τις συνεισφορές για σταθερό *s* για να πάρουμε την συνολική πυκνότητα στο (*x, t*), λόγω της διάχυσης της μάζας που παράγεται τη στιγμή *s*. Το αποτέλεσμα είναι $w(x,t,s)ds$, όπου:

$$w(x,t,s) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t-s) f(y,s)dy\,. \tag{6.8}$$

- αθροίζουμε τις παραπάνω εισφορές για *s* από 0 έως *t*:

$$\upsilon(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t-s) f(y,s)dyds\,.$$

Η παραπάνω κατασκευή είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου *Duhamel* που ακολουθεί:

Μέθοδος Duhamel: Η διαδικασία λύσης του προβλήματος (6.6) αποτελείται από τα ακόλουθα δύο βήματα:

1. Κατασκευάζουμε μια οικογένεια λύσεων ομογενών προβλημάτων *Cauchy*, με μεταβλητό αρχικό χρόνο $s > 0$ και αρχικά δεδομένα $f(x,s)$.
2. Ολοκληρώνουμε την παραπάνω οικογένεια ως προς *s* πάνω στο (0, *t*).

Ας εξετάσουμε τα παραπάνω βήματα:

1. Θεωρούμε τα ομογενή προβλήματα *Cauchy*:

$$\begin{aligned} &w_t - Dw_{xx} = 0 && x \in \mathbb{R},\ t > s \\ &w(x, s, s) = f(x, s) && x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.9}$$

όπου ο αρχικός χρόνος *s* παίζει το ρόλο παραμέτρου.

Η συνάρτηση $\Gamma^{y,s}(x,\ t) = \Gamma_D\ (x - y,\ t - s)$ είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης διάχυσης που ικανοποιεί για $t = s$ την αρχική συνθήκη:

$$\Gamma^{y,s}(x,\ s) = \delta\ (x - y).$$

Άρα η λύση του (6.9) είναι η συνάρτηση (6.8):

$$w(x,\ t,\ s) = \int_{R} \Gamma_D\ (x - y,\ t - s)\, f(y,\ s)dy.$$

Έτσι η $w(x,\ t,\ s)$ είναι η ζητούμενη οικογένεια.

2. Ολοκληρώνοντας την w επί του $(0,\ t)$ ως προς s βρίσκουμε:

$$\upsilon(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)ds = \int_0^t \int_R \Gamma_D(x-y,t-s)f(y,s)dyds \tag{6.10}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.9) έχουμε:

$$\upsilon_t - D\upsilon_{xx} = w(x,t,t) + \int_0^t [w_t(x,t,s) - Dw_{xx}(x,t,s)] = f(x,t)\ .$$

Επιπλέον $\upsilon(x,\ 0) = 0$ και άρα η υ είναι μια λύση του (6.6). Η μέθοδος αυτή ισχύει με όχι ιδιαίτερα απαιτητικές υποθέσεις ομαλότητας για την f. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 6.2: Αν η f και οι παράγωγοι της f_t, f_x, f_{xx} είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbb{R}$ x $[0,\ T)$ τότε η (6.10) δίνει μια λύση υ του προβλήματος (6.6) στο $\mathbb{R}$ x $[0,\ T)$, συνεχή ως το $t = 0$, με συνεχείς στο $\mathbb{R}$ x $[0,\ T)$ παραγώγους υ_t, υ_x, υ_{xx}.

Ο τύπος για το γενικό πρόβλημα *Cauchy*:

$$\begin{aligned} &u_t - D\,u_{xx} = 0 && \text{στο } \mathbb{R} \text{ x } (0,\infty) \\ &u(x,0) = g(x) && \text{στο } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.11}$$

λαμβάνεται από υπέρθεση των (6.2) και (6.6):

$$u(x,t) = \int_R \Gamma_D(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_R \Gamma(x-y,t-s)f(y,s)dyds\,. \tag{6.12}$$

Υπό τις υποθέσεις για τις f και g που δόθηκαν στα θεωρήματα 6.1 και 6.2, η (6.12) είναι μια λύση της (6.11) στο $\mathbb{R}$ x $(0,\ T)$,

$$T < \frac{1}{4Da},$$

συνεχής με τις παραγώγους της u_t, u_x, u_{xx}.

Η αρχική συνθήκη σημαίνει ότι $u(x, t) \to g(x_0)$, καθώς $(x, t) \to (x_0,0)$ σε κάθε σημείο συνέχειας x_0 της g. Συγκεκριμένα, αν η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η u είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, T)$.

6.4 Συνθήκες μεγίστου και μοναδικότητα

Η μοναδικότητα της λύσης του ολικού προβλήματος *Cauchy* δεν έχει συζητηθεί ακόμη. Αυτό δεν είναι ένα τετριμμένο ερώτημα αφού το επόμενο αντιπαράδειγμα του *Tychonov* δείχνει ότι θα μπορούσαν να υπάρχουν πολλές λύσεις του ομογενούς προβλήματος. Έστω:

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^2} & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t \le 0 . \end{cases}$$

Μπορεί να ελεγχθεί ότι η συνάρτηση:

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k}{dt^k} h(t)$$

είναι λύση της $\quad u_t - u_{xx} = 0 \quad$ στο $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$

με $\quad u(x, 0) = 0 \quad$ στο $\mathbb{R}$.

Αφού και η $u(x,0) \equiv 0$ είναι λύση του ίδιου προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι γενικά το πρόβλημα *Cauchy* δεν είναι καλά ορισμένο.

Αυτό που πάει στραβά με την T *είναι* ότι μεγαλώνει πάρα πολύ στο άπειρο για μικρούς χρόνους. Πράγματι η καλύτερη διαθέσιμη εκτίμηση για την T είναι:

$$|T(x,t)| \le C \exp\left\{\frac{x^2}{\vartheta t}\right\} \qquad (\theta > 0)$$

που εκφυλίζεται πολύ γρήγορα όταν $t \to 0^+$ λόγω του παράγοντα $1/\theta t$.

Αν αντί για το $1/\theta t$ είχαμε μία σταθερά A, όπως στη συνθήκη ii) του θεωρήματος 6.1, τότε θα εξασφαλίζαμε την μοναδικότητα.

Με άλλα λόγια, μέσα στην κλάση συναρτήσεων που η σύγκλιση τους στο άπειρο ελέγχεται από εκθετική τύπου Ce^{Ax^2} $\forall\, t \geq 0$ (η λεγόμενη κλάση *Tychonov*), η λύση του ομογενούς προβλήματος Cauchy είναι μοναδική.

Αυτό είναι συνέπεια της ακόλουθης αρχής μεγίστου:

<u>Θεώρημα 6.3 (Αρχή ολικού μεγίστου)</u>: Έστω z συνεχής στο $\mathbb{R}$ x$[0, T]$ με παραγώγους z_x, z_{xx}, z_t συνεχείς στο $\mathbb{R}$ x$(0, T)$ τέτοια ώστε στο $\mathbb{R}$ x$(0, T)$:

$$z_t - Dz_{xx} \leq 0 \text{ (αντίστοιχα } \geq 0)$$

και

$$z(x,t) \leq Ce^{Ax^2} \qquad \text{(αντίστοιχα } \geq -Ce^{Ax^2}) \qquad (6.13)$$

όπου $C > 0$. Τότε:

$$\sup_{\mathrm{R}x[0,T]} z(x,t) \leq \sup_{\mathrm{R}} z(x,0) \qquad \text{(αντίστοιχα } \inf_{\mathrm{R}x[0,T]} z(x,t) \geq \inf_{\mathrm{R}} z(x,0)).$$

Η απόδειξη είναι αρκετά δύσκολη αλλά αν υποθέσουμε ότι η z είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη (A=0 στην 6.13) τότε η απόδειξη βασίζεται σε μία απλή εφαρμογή της ασθενούς αρχής μεγίστου (θεώρημα 6.2).

Μπορούμε τώρα να δώσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα μοναδικότητας:

<u>Πόρισμα 6.1 Μοναδικότητα Ι</u>. Έστω u μία λύση του

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \text{ x}(0, T) \\ u(x, 0) = 0 & \text{στο } \mathbb{R} \end{cases}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}$x$[0, T]$ με παραγώγους u_x, u_{xx}, u_t συνεχείς στο $\mathbb{R}$ x$(0, T)$. Αν η $|u|$ ικανοποιεί την (6.13) τότε $u \equiv 0$.

<u>Απόδειξη</u>:

Από το θεώρημα 6.3 έχουμε:

$$0=\inf_{\mathrm{R}} u(x,0) \le \inf_{\mathrm{R}x[0,T]} u(x,t) \le \sup_{\mathrm{R}x[0,T]} u(x,t) \le \sup_{\mathrm{R}} u(x,0)=0$$

Άρα $u \equiv 0$. ▯

Παρατηρούμε ότι αν:

$$|g(x)| \le ce^{ax^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ (c,\alpha>0) \tag{6.14}$$

ξέρουμε από το θεώρημα 6.1 ότι η:

$$u(x,t)=\int_{\mathrm{R}} \Gamma_D(x-y,t)g(y)dy$$

ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|u(x,t)| \le Ce^{Ax^2} \qquad \text{στο } \mathbb{R}\ \text{x}(0,T) \tag{6.15}$$

και άρα ανήκει στην κλάση *Tychonov* στο $\mathbb{R}$ x(0, *T*) για $T < 1/4D\alpha$.

Επιπλέον, αν η f είναι όπως στο θεώρημα 6.2 και

$$\upsilon(x,t)=\int_0^t \int_{\mathrm{R}} \Gamma_D(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

παίρνουμε την εκτίμηση:

$$t\inf_{\mathrm{R}} f \le \upsilon(x,t) \le t\sup_{\mathrm{R}} f \tag{6.16}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \le t \le T$.

Για την ακρίβεια:

$$\upsilon(x,t) \le \sup_{\mathrm{R}} f \int_0^t \int_{\mathrm{R}} \Gamma_D(x-y,t-s)dyds = t\sup_{\mathrm{R}} f$$

αφού

$$\int_{\mathrm{R}} \Gamma_D(x-y,t-s)dy=1$$

$\forall\, x, t, s, t > s$. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι $\upsilon(x,t) \ge t\inf_{\mathrm{R}} f$

Ως συνέπεια έχουμε:

$$\upsilon(x,t) \geq t \inf_{\mathrm{R}} f \qquad \text{ή} \qquad \upsilon(x,t) \geq t \inf_{\mathrm{R}} f$$

<u>Πόρισμα 6.2 Μοναδικότητα ΙΙ.</u> Έστω g συνεχής στο $\mathbb{R}$, που ικανοποιεί την (6.15) και έστω f όπως στο θεώρημα 6.3. Τότε το πρόβλημα *Cauchy* (6.11) έχει μοναδική λύση u στο $\mathbb{R}$x(0, T) για $T < 1/4D\alpha$, που ανήκει στην κλάση *Tychonov*. Αυτή η λύση δίνεται από την (6.12) και επιπλέον:

$$\inf_{\mathrm{R}} g + t \inf_{\mathrm{R}} f \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathrm{R}} g + t \sup_{\mathrm{R}} f \tag{6.17}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αν u και υ είναι λύσεις του ίδιου προβλήματος *Cauchy* (6.11), τότε $w = u - \upsilon$ είναι λύση του (6.11) με $f = g = 0$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις του πορίσματος 6.1. Προκύπτει ότι $w(x, t) \equiv 0$. ▯

- *Σταθερότητα και σύγκριση*: όπως στο πόρισμα 6.1 η ανισότητα (6.17) είναι μια εκτίμηση για την αντιστοιχία:

$$\text{δεδομένα} \mapsto \text{λύση}.$$

Πράγματι έστω u_1 και u_2 λύσεις του (6.11), με δεδομένα g_1, f_1 και g_2, f_2 αντίστοιχα. Κάτω από τις υποθέσεις του πορίσματος 6.1, από (6.17) μπορούμε να γράψουμε:

$$\sup_{\mathrm{Rx}[0,T]} |u_1 - u_2| \leq \sup_{\mathrm{R}} |g_1 - g_2| + T \sup_{\mathrm{Rx}[0,T]} |f_1 - f_2|$$

Άρα αν:

$$\sup_{\mathrm{Rx}[0,T]} |f_1 - f_2| \leq \varepsilon, \qquad \sup_{\mathrm{R}} |g_1 - g_2| \leq \varepsilon$$

τότε και

$$\sup_{\mathrm{Rx}[0,T]} |u_1 - u_2| \leq \varepsilon(1+T)$$

που σημαίνει *ομοιόμορφη κατά σημείο σταθερότητα.*

Αυτή δεν είναι η μόνη συνέπεια της (6.17). Μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε στη σύγκριση δύο λύσεων. Για παράδειγμα, από την αριστερή ανισότητα παίρνουμε αμέσως ότι αν $f \geq 0$ και $g \geq 0$ τότε $u \geq 0$.

Ομοίως, αν $f_1 \geq f_2$ και $g_1 \geq g_2$ τότε

$$u_1 \geq u_2.$$

7. Μια εφαρμογή στα Οικονομικά

7.1 Ευρωπαϊκά δικαιώματα (*European Options*)

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζουμε την προαναφερθείσα θεωρία για να καθορίσουμε την τιμή κάποιων χρηματοοικονομικών προϊόντων, συγκεκριμένα μερικών *παράγωγων* προϊόντων, που λέγονται *Ευρωπαϊκά δικαιώματα*.

Ένα χρηματοοικονομικό προϊόν είναι ένα *παράγωγο* αν η πληρωμή του εξαρτάται από την συμπεριφορά της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου, στην αργό του συνεπαγόμενου π.χ μιας μετοχής, ενός συναλλάγματος ή ενός προϊόντος.

Ανάμεσα στα πιο απλά παράγωγα είναι τα **Ευρωπαϊκά δικαιώματα call** και **put**, τα οποία είναι συμβόλαια σε ένα προκαθορισμένο στοιχείο μεταξύ ενός κατόχου και ενός συνδρομητή, με τους ακόλουθους κανόνες.

Την στιγμή σύνταξης του συμβολαίου (έστω t=0) μια τιμή εξάσκησης E σταθεροποιείται.

Σε μια **ημερομηνία λήξης** T σταθεροποιημένης και μελλοντικής

- Ο κάτοχος ενός δικαιώματος *call* μπορεί (αλλά δεν υποχρεούται) να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράζοντας το στοιχείο στην τιμή E. Αν ο κάτοχος αποφασίσει να αγοράσει το στοιχείο, ο συνδρομητής πρέπει να το πουλήσει.

- Ο κάτοχος ενός δικαιώματος *put* μπορεί (αλλά δεν υποχρεούται) να εξασκήσει το δικαίωμα πουλώντας το στην τιμή E. Αν ο κάτοχος αποφασίσει να πουλήσει το στοιχείο, ο συνδρομητής πρέπει να το αγοράσει.

Αφού ένα δικαίωμα δίνει στον κάτοχο ένα δικαίωμα χωρίς καμία υποχρέωση, το δικαίωμα έχει μια τιμή και το βασικό ερώτημα είναι: ποια είναι η σωστή τιμή που πρέπει να πληρωθεί στο t=0;

Αυτή η τιμή σίγουρα εξαρτάται από την εξέλιξη της τιμής S του συνεπαγόμενου στην τιμή εξάσκησης E, στο χρόνο λήξης T και στο τωρινό ακίνδυνο επιτόκιο r>0.

Για παράδειγμα για ένα δικαίωμα *call*, σε μια χαμηλότερη E αντιστοιχεί μια μεγαλύτερη τιμή και για το *put* ισχύει το αντίστροφο.

Οι διακυμάνσεις της τιμής του συνεπαγόμενου επηρεάζουν με κρίσιμο τρόπο την τιμή ενός δικαιώματος αφού ενσωματώνει το μέγεθος του κινδύνου.

Για να απαντήσουμε το βασικό μας ερώτημα, εισάγουμε την **συνάρτηση αποτίμησης** $V = V(S, t)$, που δίνει την κατάλληλη τιμή στο δικαίωμα αν τη στιγμή t η τιμή του συνεπαγόμενου είναι S. Χρειάζεται να ξέρουμε το $V(S(0), 0)$. Όταν θέλουμε να διαχωρίσουμε τα *call* και *put* θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $C(S, t)$ και $P(S, t)$ αντίστοιχα.

Το πρόβλημα τότε είναι να καθορίσουμε τη V σύμφωνα με την οικονομική αγορά, όπου και το συνεπαγόμενο και το δικαίωμα ανταλλάσσονται. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ***Black-Scholes***, βασιζόμενοι στην υπόθεση ενός λογικού μοντέλου εξέλιξης της S και στην θεμελιώδη αρχή της χωρίς διαιτησία μελλοντικής αξίας.

7.2 Ένα μοντέλο εξέλιξης της τιμής S

Αφού η S εξαρτάται από λίγο – πολύ προβλεπόμενους παράγοντες, είναι ξεκάθαρο ότι δε μπορούμε να περιμένουμε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο για την εξέλιξη της S. Για να το κατασκευάσουμε υποθέτουμε μια επάρκεια στην αγορά με την ακόλουθη έννοια:

a) Η αγορά ανταποκρίνεται στιγμιαία σε καινούριες πληροφορίες για το στοιχείο.

b) Η τιμή δεν έχει μνήμη: η παρελθούσα ιστορία είναι πλήρως αποθηκευμένη στην παρούσα τιμή, χωρίς περαιτέρω πληροφορία.

Η συνθήκη (α) υπονοεί την υιοθέτηση ενός συνεχούς μοντέλου. Η συνθήκη (β) απαιτεί μια αλλαγή dS της τιμής του συνεπαγόμενου να έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, όπως και η κίνηση *Brown*.

Θεωρούμε τώρα ένα χρονικό διάστημα από t έως $t+dt$, κατά τη διάρκεια του οποίου η S αλλάζει από S σε $S+dS$. Ένα από τα πιο κοινά μοντέλα υποθέτει ότι η επιστροφή dS/S δίνεται από το άθροισμα δύο όρων. Ο ένας είναι ένας ντετερμινιστικός όρος που δίνει μια συνεισφορά μdt που οφείλεται σε μια σταθερή εκτροπή μ αναπαριστώντας τον μέσο ρυθμό αύξησης της S. Μόνο με αυτόν τον όρο θα είχαμε:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

και άρα $d \log S = \mu dt$, που δίνει την εκθετική αύξηση $S(t) = S(0)e^{\mu t}$.

Ο άλλος όρος είναι στοχαστικός και λαμβάνει υπόψη τα τυχαία στοιχεία της εξέλιξης. Δίνει τη συνεισφορά:

$$\sigma dB$$

όπου *dB* είναι μια προσαύξηση μιας κίνησης *Brown* και έχει μηδενικό μέσο και διασπορά *dt*. Ο συντελεστής *σ*, που υποθέτουμε ότι είναι σταθερός, λέγεται **μεταβλητότητα** και μετρά την τυπική απόκλιση της επιστροφής.

Αθροίζοντας τις συνεισφορές έχουμε:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB \tag{7.1}$$

Οι φυσικές διαστάσεις των *μ* και *σ* είναι:

$[\mu]= [\text{time}]^{-1}$, $[\sigma]= [\text{time}]^{-1/2}$.

Η (7.1) είναι μια **στοχαστική διαφορική εξίσωση** (σ.δ.ε).

Για να την λύσουμε μπορούμε να γράψουμε

$$d \log S = \mu dt + \sigma dB$$

να ολοκληρώσουμε μεταξύ 0 και *t* και να πάρουμε:

$$\log \frac{S(t)}{S(0)} = \mu t + \sigma(B(t) - B(0)) = \mu t + \sigma B(t)$$

αφού *B*(0)=0. Όμως αυτό είναι λάθος. Ο όρος διάχυσης *σdB* απαιτεί τη χρήση του ολοκληρώματος του **Ito**, μιας στοχαστικής έκδοσης του κανόνα της αλυσίδας. Ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις γι' αυτόν τον τύπο.

Παρέκβαση στο ολοκλήρωμα του **Ito**: Έστω $B=B(t)$ η συνήθης κίνηση *Brown*. Μια διαδικασία $X=X(t)$ είναι μια λύση μιας σ.δ.ε τύπου:

$$dX = \alpha(X,t)dt + \sigma(X,t)dB \tag{7.2}$$

όπου α είναι ο όρος εκτροπής και σ ο συντελεστής μεταβλητότητας.

Όταν $\sigma=0$, η εξίσωση είναι ντετερμινιστική και οι τροχιές μπορούν να υπολογιστούν με τις συνήθεις αναλυτικές μεθόδους. Επιπλέον, δεδομένης μιας ομαλής συνάρτησης $F=F(x,t)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα της F κατά μήκος αυτών των τροχιών. Αρκεί να υπολογίσουμε το

$$dF = F_t dt + F_x dX = \{F_t + aF_x\}dt \ .$$

Έστω τώρα ότι $\sigma\neq 0$. Ο προηγούμενος υπολογισμός θα έδινε

$$dF = F_t dt + F_x dX = \{F_t + aF_x\}dt + \sigma F_x dB$$

αλλά αυτός ο τύπος δεν δίνει το πλήρες διαφορικό της F. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Taylor*, θέτοντας $X(0)=X_0$, έχουμε:

$$F(X,t) = F(X_0,0) + F_t dt + F_x dX + \frac{1}{2}\left\{F_{xx}(dX)^2 + 2F_{xt}dXdt + F_{tt}(dt)^2\right\} + \ldots\ldots$$

Το διαφορικό της F μαζί με τις τροχιές της (7.2) λαμβάνεται διαλέγοντας στο δεξί μέλος του προηγούμενο τύπου τους όρους που είναι γραμμικοί ως προς dt ή dX. Πρώτα βρίσκουμε τους όρους

$$F_t dt + F_x dX = \left\{F_t + aF_x\right\}dt + \sigma F_x dB \ .$$

Οι όροι $2F_{xt}dXdt$ και $F_{tt}(dt)^2$ είναι μη γραμμικοί ως προς τα dt και dX και άρα δεν είναι στο διαφορικό. Ας ελέγξουμε τώρα τον όρο $(dX)^2$. Έχουμε

$$\left(dX\right)^2 = [adt + \sigma dB]^2 = a^2(dt)^2 + 2a\sigma dBdt + \boxed{\sigma^2(dB)^2}\ .$$

Ενώ τα $\alpha^2(dt)^2$ και $2\alpha\sigma dBdt$ δεν είναι γραμμικά ως προς dt και dX, ο πλαισιομένος όρος είναι τελικά ακριβώς $\sigma^2 dt$.

Αυτό είναι συνέπεια του βασικού τύπου

$$dB \sim \sqrt{dt}\,N(0,1)$$

που ορίζει το $\sqrt{dt}$ ως τυπική απόκλιση του dB.

Έτσι το διαφορικό της F μαζί με τις τροχιές της (7.2) δίνεται από το ακόλουθο

$$dF = \left\{ F_t + aF_x + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx} \right\} dt + \sigma F_x dB \tag{7.3}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να λύσουμε την (7.1), την οποία γράφουμε στη μορφή:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB .$$

Έστω $F(S) = \log S$. Αφού

$$F_t = 0, \quad F_s = \frac{1}{2}, \quad F_{ss} = -\frac{1}{S^2}$$

η *Ito formula* δίνει, με $X = S$, $\alpha(S,t) = mS$, $\sigma(S,t) = \sigma S$:

$$d \log S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t) .$$

Ολοκληρώνουμε από το 0 ως t και έχουμε:

$$\log S(t) = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t) . \tag{7.4}$$

Η (7.4) δείχνει ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = \log S$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t$ και διασπορά $\sigma^2 t$.

Άρα η πυκνότητα πιθανότητας της είναι:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp \left\{ - \frac{\left(y - \log S_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right)^2}{2\sigma^2 t} \right\}$$

και η πυκνότητα της S είναι:

$$p(s) = \frac{1}{2} f\left(\log s\right) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \left\{ - \frac{\left(\log s - \log S_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right)^2}{2\sigma^2 t} \right\}$$

που ονομάζεται **λογαριθμοκανονική (*lognormal*)** πυκνότητα.

7.3 Η εξίσωση *Black – Scholes*

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια διαφορική εξίσωση ικανή να περιγράψει την εξέλιξη της $V(S,t)$. Δουλεύουμε κάτω από τις εξής υποθέσεις:

- Η S ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή.
- Η μεταβλητότητα σ είναι γνωστή σταθερά.
- Δεν υπάρχουν κόστη ή μερίσματα
- Είναι δυνατό να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε οποιοδήποτε αριθμό του συνεπαγόμενου στοιχείου.
- Υπάρχει επιτόκιο $r>0$, για μια ακίνδυνη επένδυση. Αυτό σημαίνει ότι 1 δολάριο στην τράπεζα τη στιγμή $t=0$ γίνεται e^{rT} δολάρια τη στιγμή T.
- Η αγορά είναι ελεύθερη για ***arbitrage***.

Η τελευταία υπόθεση είναι κρίσιμη στην κατασκευή του μοντέλου και σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευκαιρία για κέρδος χωρίς κίνδυνο. Μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας νόμος συντήρησης χρημάτων.

Η μετάφραση αυτής της αρχής σε μαθηματικούς όρους συνδέεται με την έννοια της αντιστάθμισης και την ύπαρξη ίδιο – χρηματοδοτικών χαρτοφυλακίων. Η βασική ιδέα είναι να υπολογίσουμε πρώτα την επιστροφή της V μέσω της *Ito formula* και μετά να κατασκευάσουμε ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο Π που περιέχει μερίδες της S και το δικαίωμα. Από την υπόθεση της ελεύθερης από διαιτησία αγοράς (*arbitrage*) το Π πρέπει να αυξάνεται με τον τωρινό ρυθμό επιτοκίου r, δηλαδή $d\Pi = r\pi dt$, που καταλήγει να συμπίπτει με την θεμελιώδη εξίσωση *Black – Scholes*.

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο του *Ito* για να υπολογίσουμε το διαφορικό της V.

Αφού:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

βρίσκουμε ότι:

$$dV = \left\{ V_t + \mu S Vs + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Vss \right\} dt + \sigma S Vs dB \,. \tag{7.5}$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να απαλλαγούμε από τον όρο κινδύνου $\sigma S V_S dB$ κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο *Π* που περιέχει το δικαίωμα και μια ποσότητα *–Δ* του συνεπαγομένου:

$$\Pi = V - S\Delta$$

Αυτή είναι μια σημαντική χρηματοοικονομική διαδικασία που λέγεται αντιστάθμιση (*headging*). Θεωρούμε τώρα το χρονικό διάστημα (*t, t+dt*) κατά τη διάρκεια του οποίου το Π έχει μεταβολή

$$d\Pi = dV - \Delta dS \ .$$

Αυτό είναι σημείο – κλειδί στην κατασκευή και πρέπει να δικαιολογηθεί προσεκτικά.

Χρησιμοποιώντας την (7.5) βρίσκουμε

$$d\Pi = dV - \Delta dS = \left\{V_t + \mu S V_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss} - \mu S\, \Delta\right\} dt + \sigma S(Vs - \Delta) dB \qquad (7.6)$$

Έτσι αν διαλέξουμε

$$\Delta = V_S \qquad (7.7)$$

που σημαίνει ότι το *Δ* είναι η τιμή της V_S στο *t* εξαφανίζουμε την στοχαστική συνιστώσα στην (7.6). Η εξέλιξη του χαρτοφυλακίου *Π* είναι τώρα εντελώς ντετερμινιστική και η δυναμική της δίνεται από την εξίσωση:

$$d\Pi = \left\{V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right\} dt \qquad (7.8)$$

Η επιλογή (7.7) εμφανίζεται σχεδόν σαν θαύμα αλλά δικαιολογείται μερικώς από το ότι τα *V* και *S* είναι εξαρτημένα και η τυχαία συνιστώσα στην δυναμική τους είναι ανάλογη της *S*. Έτσι, σε ένα κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των *V* και *S* μια τέτοια συνιστώσα πρέπει να εξαφανιστεί.

Χρησιμοποιούμε τώρα την αρχή της μη διαιτησίας (*no-arbitrage*) επενδύοντας *Π* στον ακίνδυνο επιτόκιο *r*, μετά από χρόνο *dt* έχουμε μια προσαύξηση $r\Pi dt$. Συγκρίνοντας το $r\Pi dt$ με το $d\Pi$ που δίνεται από την (7.8).

- Αν $d\Pi > r\Pi dt$, δανειζόμαστε ένα ποσό Π για να επενδύσουμε στο χαρτοφυλάκιο. Η επιστροφή θα είναι μεγαλύτερη από το κόστος, οπότε έχουμε ένα στιγμιαίο ακίνδυνο κέρδος

$$d\Pi - r\Pi dt$$

- Αν $d\Pi < r\Pi dt$, πουλάμε το χαρτοφυλάκιο Π επενδύοντας το σε μια τράπεζα με επιτόκιο r. Αυτή τη φορά θα έχουμε ένα στιγμιαίο ακίνδυνο κέρδος

$$r\Pi dt - d\Pi.$$

Άρα, η υπόθεση της ελεύθερης από διαιτησία αγοράς δίνει:

$$d\Pi = \left\{V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right\} dt = r\Pi\, dt \tag{7.9}$$

Αντικαθιστώντας το

$$\Pi = V - S\Delta = V - V_S S$$

Στην (7.9), παίρνουμε την εξίσωση ***Black–Scholes***

$$\mathcal{L}V = Vt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \tag{7.10}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μ, η εκτροπή της S, δεν εμφανίζεται στην (7.10). Αυτό είναι αντί-διαισθητικό και δείχνει μια ενδιαφέρουσα πλευρά του μοντέλου. Η οικονομική σημασία της εξίσωσης *Black – Scholes* τονίζεται από την αποσύνθεση του δεξιού μέλους της:

$$\mathcal{L}V = \underbrace{Vt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}}_{portfolio\ \ return} + \underbrace{r(V - SV_S)}_{bank\ \ investment}$$

Η εξίσωση *Black – Scholes* είναι λίγο πιο γενική από αυτές που έχουμε δει μέχρι τώρα. Πράγματι, οι συντελεστές διάχυσης και εκτροπής εξαρτώνται και οι δύο από την S. Ωστόσο μπορούμε να τη μετατρέψουμε στην εξίσωση διάχυσης $u_t = u_{xx}$, όπως θα δούμε παρακάτω.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του V_{SS} είναι θετικός και άρα η (7.10) είναι μια **αναδρομική εξίσωση**. Για να έχουμε ένα καλά ορισμένο πρόβλημα χρειαζόμαστε μια

τελική συνθήκη (στο $t=T$), μια πλευρική συνθήκη στο $S=0$ και μια συνθήκη για $S \to +\infty$.

- *Τελικές συνθήκες*: Εξετάζουμε τι συνθήκες χρειαζόμαστε στο $t=T$.

  Call: Αν τη στιγμή T έχουμε $S>E$, εξασκούμε το δικαίωμα με κέρδος $S–E$. Αν $S \leq E$, δεν εξασκούμε το δικαίωμα και δεν έχουμε κέρδος. Το τελικό κέρδος από το δικαίωμα είναι λοιπόν:

  $$C(S,\ T) = max\ \{S–E,\ 0\} = (S - E)^{+} \qquad\qquad S>0.$$

  Put: Αν τη στιγμή $t=T$ έχουμε $S \geq E$, δεν εξασκούμε το δικαίωμα, ενώ όταν $S<E$ το εξασκούμε. Το τελικό κέρδος είναι λοιπόν:

  $$P(S,\ T) = max\{E–S,\ 0\} = (E - S)^{+} \qquad\qquad S>0.$$

- *Συνοριακές συνθήκες :* Εξετάζουμε τώρα τις συνθήκες που πρέπει να βάλουμε για $S=0$ και $S \to +\infty$.

  Call: *Αν* $S=\underline{0}$ τη στιγμή t, η (7.1) δείχνει ότι $S=0$ από κει και πέρα και το δικαίωμα δεν έχει τιμή. Άρα

  $$C(\underline{0},\ t) = 0 \qquad\qquad t \geq 0.$$

  Καθώς $S \to +\infty$, τη στιγμή t, το δικαίωμα θα ασκηθεί και η τιμή του θα γίνει σχεδόν ίση με S μείον την εκπτωτική τιμή άσκησης, δηλαδή:

  $$C(S,\ t) - (S\text{-}e^{-r(T-t)}E) \to 0 \qquad\qquad S \to \infty.$$

  Put: Αν κάποια συγκεκριμένη στιγμή είναι $S=0$, ώστε $S=0$ από εκεί και πέρα, το τελικό κέρδος είναι E. Έτσι για να καθορίσουμε την $P(0,t)$ πρέπει να καθορίσουμε την παρούσα τιμή του E την στιγμή T, δηλαδή:

  $$P(0,\ t) = Ee^{-r(T-t)}.$$

  Αν $S \to +\infty$, δεν εξασκούμε το δικαίωμα και άρα:

  $$P(S,\ t)=0, \qquad\qquad \text{καθώς}\ \ S \to +\infty$$

7.4 Οι λύσεις

Ας συνοψίσουμε το μοντέλο μας για τις δύο περιπτώσεις.

Εξίσωση *Black-Scholes*:

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0. \tag{7.11}$$

Τελικά Κέρδη:

$$C(S,\ T) = (S - E)^+ \qquad (call)$$

$$P(S,\ T) = (E - S)^+ \qquad (put).$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$C(0,t) = 0, \quad C(S,t) - (S - e^{-r(T-t)}E) \to 0 \quad \text{καθώς } S \to \infty \qquad (call)$$

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad p(S,T) = 0 \quad \text{καθώς } S \to \infty \qquad (put)$$

Αποδεικνύεται ότι τα παραπάνω προβλήματα μπορούν να μειωθούν σε ένα ολικό πρόβλημα *Cauchy* για την εξίσωση θερμότητας. Έτσι μπορούμε να βρούμε αναλυτικούς τύπους για τις λύσεις. Καταρχάς κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών για να ελαττώσουμε την εξίσωση *Black–Scholes* σε σταθερούς συντελεστές και να πάμε από πίσω μπροστά στο χρόνο. Επίσης παρατηρούμε ότι το $1/\sigma^2$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας εσωτερικός χρόνος αναφοράς ενώ η τιμή εξάσκησης E δίνει μια χαρακτηριστική τάξη μεγέθους για τα S και V. Έτσι, τα $1/\sigma^2$ και E μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παράγοντες αλλαγής κλίμακας για την εισαγωγή αδιάστατων μεταβλητών.

Θέτουμε

$$x = \log\frac{S}{E}, \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma 2(T - t), \qquad w(x,\tau) = \frac{1}{E}V\left(Ee^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right).$$

Όταν η S πάει από το 0 στο $+\infty$, η x μεταβάλλεται από το $-\infty$ στο $+\infty$. Όταν $t = T$, έχουμε $r = 0$. Επιπλέον:

$$V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 E w_\tau$$

$$V_S = \frac{E}{S} w_x , \qquad V_{SS} = -\frac{E}{S^2} w_x + \frac{E}{S^2} w_{xx} .$$

Αντικαθιστώντας στην (7.11), μετά από κάποιες απλοποιήσεις, παίρνουμε

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 w_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2(-w_x + w_{xx}) + rw_x - rw = 0$$

ή

$$w_\tau = w_{xx} + (k-1)w_x - kw$$

όπου $k = 2r/\sigma^2$ είναι μία αδιάστατη παράμετρος. Θέτοντας:

$$w(x,\tau) = e^{-\frac{k-1}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau}\upsilon(x,\tau)$$

έχουμε βρει ότι το υ ικανοποιεί:

$$\upsilon_r - \upsilon_{xx} = 0 \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad 0 \le \tau \le T.$$

Η τελική συνθήκη για το V γίνεται αρχική συνθήκη για το υ. Για την ακρίβεια, μετά από κάποιους χειρισμούς, έχουμε :

$$\upsilon(x,0) = g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k+1)x - e\frac{1}{2}(k-1)x} & x \ge 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

για το *call option*,

και

$$\upsilon(x,0) = g(x) = \begin{cases} \upsilon(x,0) = g(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x - e\frac{1}{2}(k+1)x} & x \le 0 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}$$

για το *put option*.

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 6.1 και το πόρισμα 6.2. Η λύση είναι μοναδική και δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{\mathrm{R}} g(x)e^{-(x-y)^2}dy$$

Για να έχουμε ένα πιο συγκεκριμένο τύπο θέτουμε:

$$y = \sqrt{2\tau}\, z + x$$

και τότε για το δικαίωμα *call* έχουμε:

$$\upsilon(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathrm{R}} g(\sqrt{2\tau}\, z + x) e^{-\frac{z^2}{2}} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\frac{z}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x(\sqrt{2\tau}z+x)-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)x(\sqrt{2\tau}z+x)-\frac{1}{2}z^2} dz \right\}.$$

Μετά από κάποιους χειρισμούς στα δύο ολοκληρώματα, παίρνουμε

$$\upsilon(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_+) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_-)$$

όπου

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυποποιημένης κανονικής τυχαίας μεταβλητής και

$$d_{\pm} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k \pm 1)\sqrt{2\tau}\ .$$

Γυρίζοντας στις αρχικές μεταβλητές έχουμε για το δικαίωμα ***call***:

$$C(S,t) = SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)} N(d_-)$$

με

$$d_{\pm} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k \pm 1)\sqrt{2\tau}\ .$$

Ο τύπος για το δικαίωμα ***put*** είναι

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)} N(-d_-) - SN(-d_+)$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι

$\varDelta = C_S = N(d_+) > 0$ για το ***call***

$$\Delta = P_S = N(d_+) - 1 < 0 \qquad \text{για το } \textbf{\textit{put}}.$$

Παρατηρούμε ότι οι C_S και P_S είναι γνησίως αύξουσες ως προς S, αφού η N είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και η d_+ είναι γνησίως αύξουσα ως προς S. Οι C, P είναι λοιπόν γνησίως κυρτές συναρτήσεις του S για κάθε t, δηλαδή $C_{SS} > 0$, $P_{SS} > 0$.

- *Ισοτιμία put-call*: Τα δικαιώματα *put* και *call* με την ίδια τιμή εξάσκησης και τον ίδιο χρόνο λήξης μπορούν να συνδεθούν με τον σχηματισμό του ακόλουθου *portfolio*:

  $$\Pi = S + P - C$$

  Όπου το – μπροστά από το C δείχνει μια λεγόμενη αρνητική (*short*) θέση (αρνητική περιουσία).

  Γι' αυτό το *portfolio* το τελικό κέρδος είναι :

$$\Pi(S,T) = S + (E - S)^+ - (S - E)^+ .$$

Αν $E \geq S$, έχουμε :

$$\Pi(S,T) = S + (E - S) - 0 = E$$

Αν $E \leq S$

$$\Pi(S,T) = S + 0 - (E - S) = E .$$

Έτσι στην λήξη το κέρδος είναι πάντα E και αποτελεί ένα ακίνδυνο κέρδος του οποίου η τιμή στο t πρέπει να είναι ίση με την εκπτωτική τιμή της E, λόγω της συνθήκης της μη-διαιτησίας (no arbitrage). Άρα βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση (ισοτιμία *put – call*):

$$S + P - C = Ee^{-r(T-t)} \tag{7.12}$$

Ο τύπος (7.12) δείχνει επίσης ότι, δεδομένης της τιμής του C (ή του P), μπορούμε να βρούμε την τιμή του P (ή του C).

Από την (7.12), αφού

$$Ee^{-r(T-t)} \leq E \qquad \text{και} \qquad P \geq 0, \text{ έχουμε:}$$

$$C(S,t) = S + P - Ee^{-r(T-t)} \geq S - E$$

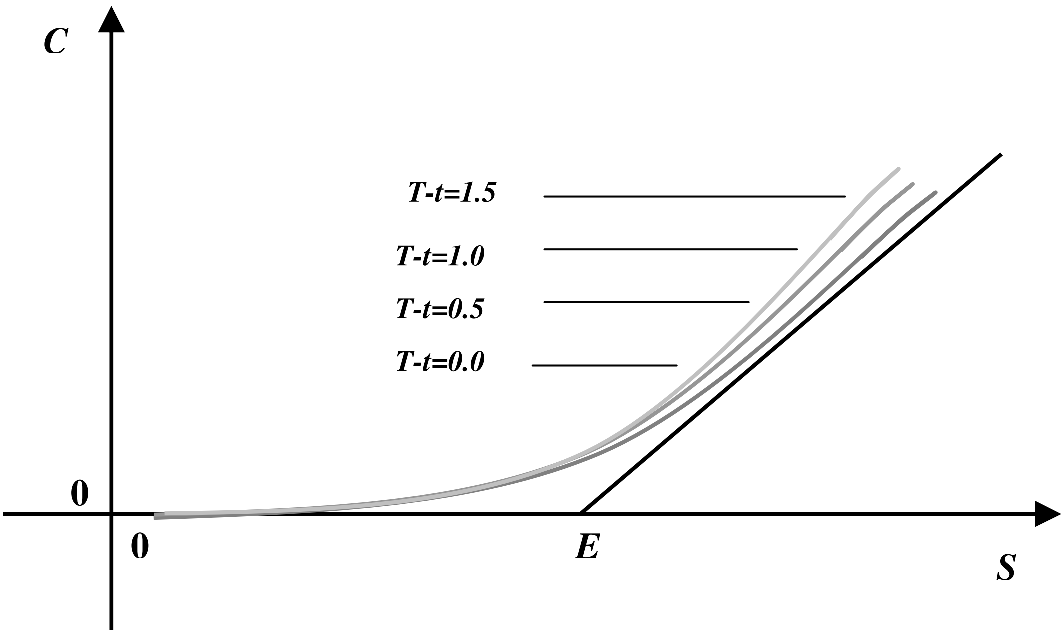
και άρα αφού $C \geq 0$

$$C(S,t) \geq (S - E)^{+}$$

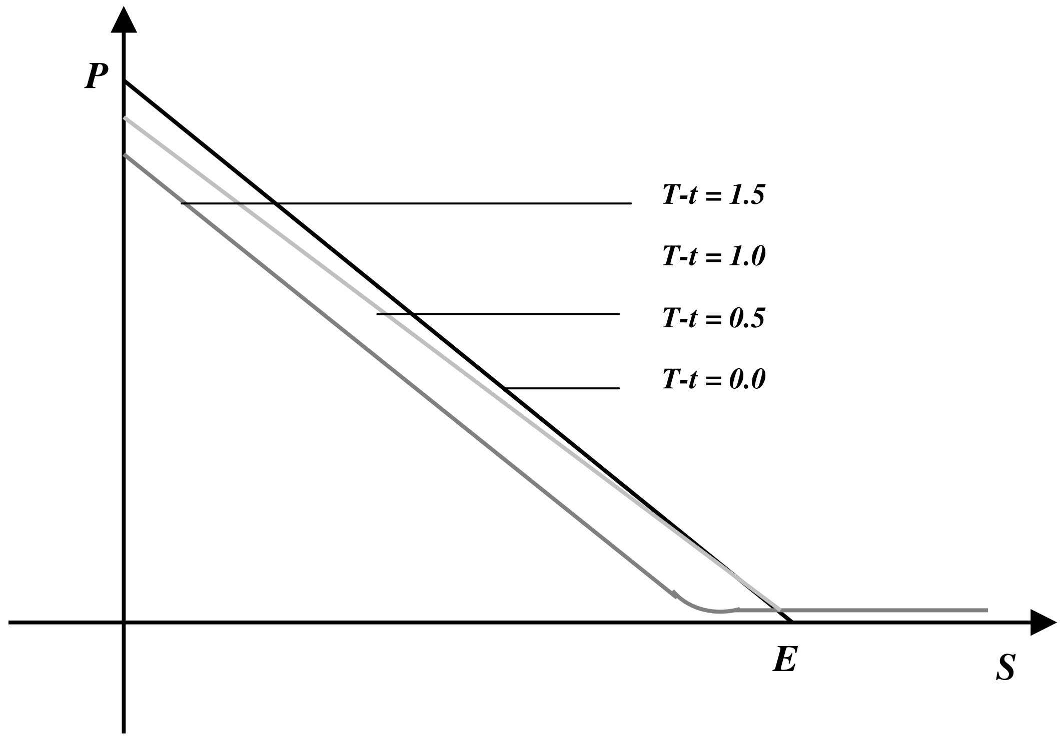
Προκύπτει ότι η τιμή της *C* είναι πάντα μεγαλύτερη από το τελικό κέρδος. Αυτό δεν ισχύει για το *put*. Συγκεκριμένα:

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \leq E$$

Και άρα η τιμή της *P* είναι κάτω από το τελικό κέρδος όταν η *S* είναι κοντά στο 0, ενώ είναι πάνω λίγο πριν τη λήξη. Τα επόμενα σχήματα 9 και 10 δείχνουν την συμπεριφορά των *C* και *P* έναντι της *S*, για κάποιες τιμές $T - t$ ως την λήξη.



Εικόνα 9. Η συνάρτηση αποτίμησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος *call*



Εικόνα 10. Η συνάρτηση αποτίμησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος *put*

- *Διαφορετικές μεταβλητότητες*: Τα επιχειρήματα της αρχής μεγίστου στην υποενότητα 6.4 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την σύγκριση των τιμών δυο δικαιωμάτων με διαφορετικές μεταβλητότητες σ_1 και σ_2, που έχουν την ίδια τιμή εξάσκησης E και τον ίδιο χρόνο λήξης T. Υποθέτουμε ότι $\sigma_1 > \sigma_2$ και συμβολίζουμε με $C^{(1)}$ και $C^{(2)}$ τις τιμές των αντίστοιχων *call* δικαιωμάτων. Μειώνοντας το μέγεθος του κινδύνου, η τιμή του δικαιώματος πρέπει να μειώνεται και πράγματι θέλουμε να επιβεβαιώσουμε ότι

$$C^{(1)} > C^{(2)} \qquad S > 0, \qquad 0 \le t < T.$$

Έστω $W = C^{(1)} - C^{(2)}$. Τότε

$$W_t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 W_{SS} + rSW_S - rW = \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) S^2 C_{SS}^{(1)} \tag{7.13}$$

με $W(S, T) = 0$, $W(0, t) = 0$ και $W \to 0$ καθώς $S \to \infty$.

Η (7.13) είναι μια μη – ομογενής εξίσωση, της οποίας το δεξί μέλος είναι αρνητικό για $S>0$ διότι $C_{SS}^{(1)}>0$. Αφού η W είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ x $[0,T]$ και εξαφανίζεται στο άπειρο, παίρνει το ελάχιστό της στο (S_0, t_0).

Ισχυριζόμαστε ότι το ελάχιστο είναι το 0 και δεν πιάνεται σε σημείο του $(0,+\infty)\text{x}[0,T)$. Αφού η εξίσωση είναι αναδρομική, $t_0=0$ απορρίπτεται. Υποθέτουμε ότι $W(S_0,\ t_0)$ με $S_0>0$ και $0<t_0<T$. Έχουμε

$$W_t\ (S_0,\ t_0)\ =\ 0$$

και

$$W_S\ (S_0,\ t_0)\ =\ 0, \qquad W_{SS}\ (S_0,\ t_0)\ \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας, $S=S_0,\ t=t_0$ στην (7.13) παίρνουμε μια αντίφαση.

Αρα $\quad W\ =\ C^{(1)}\ -\ C^{(2)}>0 \qquad$ για $\qquad S>0,\ 0<t<T.$

7.5 Ισοστάθμιση και ίδιο–χρηματοδοτικές στρατηγικές

Η μαθηματική μετάφραση της αρχής της μη-διαιτησίας (no arbitrage) μπορεί να γίνει πιο αυστηρά από αυτή που κάναμε στην υποενότητα 7.2, εισάγοντας την έννοια του ίδιο–χρηματοδοτικού *portfolio*. Η ιδέα είναι να φτιάξουμε ένα αντίγραφο της V μέσω της S και ένα ομόλογο Z, μια χωρίς κινδύνους επένδυση που αυξάνεται με ρυθμό r, π.χ $Z(t)=e^{rt}$.

Για αυτό ας προσπαθήσουμε να καθορίσουμε δύο διαδικασίες $\varphi=\varphi(t)$ και $\psi=\psi(t)$ έτσι ώστε:

$$V\ =\ \varphi S\ +\ \psi Z \qquad (0\ \leq t\ \leq T) \tag{7.14}$$

ώστε να εξαφανίσει κάθε παράγοντα κινδύνου. Για την ακρίβεια, παίζοντας το ρόλο του συνδρομητής (που πρέπει να πουλήσει), ο κίνδυνος είναι την στιγμή T η τιμή $S(T)$ να είναι μεγαλύτερη από E, ώστε ο κάτοχος να εξασκήσει το δικαίωμα. Αν εν τω μεταξύ ο συνδρομητής έχει κατασκευάσει το *portfolio* (7.14), το κέρδος από αυτό είναι ακριβώς ίσο με τα κεφάλαια που πρέπει να πληρώσει στον κάτοχο. Από την άλλη μεριά, αν το δικαίωμα έχει τιμή 0 την στιγμή T, το *portfolio* επίσης δεν έχει τιμή.

Για να έχει νόημα η επιχείρηση, είναι απαραίτητο ο συνδρομητής να μην βάλει επιπλέον λεφτά σε αυτή τη στρατηγική (ισοστάθμιση). Αυτό μπορεί να εξασφαλισθεί απαιτώντας το *portfolio* (7.14) να είναι αυτο–χρηματοδοτικό, δηλαδή οι αλλαγές στην τιμή του να εξαρτώνται από μεταβολές των S και Z και μόνο από αυτές, Με τύπο, αυτή η απαίτηση γράφεται:

$$dV = \phi dS + \psi dZ \qquad (0 \le t \le T)\,. \tag{7.15}$$

Βασικά έχουμε ήδη κάτι σαν την (7.15) όταν κατασκευάζαμε το *portfolio* $\Pi = V - S\Delta$ ή $V = \Pi + S\Delta$ απαιτώντας $dV = d\Pi + \Delta dS$. Αυτή η κατασκευή δεν είναι τίποτα άλλο από ένα αντίγραφο της V μέσω ενός ιδιο–χρηματοδοτικού *portfolio* με το Π να παίζει το ρόλο του Z και διαλέγοντάς $\psi=1$.

Αλλά, ποια είναι η πραγματική σημασία της (7.15); Αυτό το βλέπουμε καλύτερα σε ένα διακριτό πλαίσιο. Θεωρούμε μια ακολουθία στιγμών:

$$t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_N$$

και υποθέτουμε ότι το διάστημα ($t_j - t_{j-1}$) είναι πολύ μικρό. Συμβολίζουμε με S_j και Z_j τις τιμές στο t_j των S και Z. Συνεπώς ψάχνουμε για δύο ακολουθίες φ_j και ψ_j που αντιστοιχούν στις ποσότητες των S και Z για να τις χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του *portfolio* (7.14) από t_{j-1} στο t_j. Παρατηρούμε ότι τα φ_j και ψ_j διαλέγονται τη στιγμή t_{j-1}.

Έτσι δεδομένου του διαστήματος (t_{j-1}, t_j), το

$$V_j = \phi_j S_j + \psi_j Z_j$$

αναπαριστά την τιμή κλεισίματος του *portfolio*, ενώ το :

$$\Phi_{j+1} S_j + \psi_{j+1} Z_j$$

είναι η τιμή του ανοίγματος, το ποσό των χρημάτων που χρειάζονται για να αγοράσουμε το νέο. Η συνθήκη της ιδιο – χρηματοδότησης σημαίνει ότι η τιμή V_j του *portfolio* τη στιγμή t_j που καθορίζεται από το ζεύγος (φ_j, ψ_j) είναι το ίδιο με το κόστος αγοράς του *portfolio* στο διάστημα (t_j, t_{j+1}) που καθορίζεται από το (φ_{j+1},ψ_{j+1}). Αυτό σημαίνει

$$\Phi_{j+1} S_j + \psi_{j+1} Z_j = \phi_j S_j + \psi_j Z_j \tag{7.16}$$

ή το **οικονομικό κενό**:

$$D_j = \Phi_{j+1} S_j + \psi_{j+1} Z_j - V_j$$

πρέπει να είναι 0, αλλιώς ένα χρηματικό ποσό D_j πρέπει να εισαχθεί για να διατηρηθεί η στρατηγική ($D_j > 0$) ή το ίδιο χρηματικό ποσό μπορεί να αφαιρεθεί από αυτό ($D_j < 0$).

Από την (7.16) παίρνουμε ότι:

$$V_{j+1} - V_j = (\Phi_{j+1} S_{j+1} + \psi_{j+1} Z_{j+1}) - (\phi_j S_j + \psi_j Z_j)$$

$$= (\Phi_{j+1} S_{j+1} + \psi_{j+1} Z_{j+1}) - (\phi_{j+1} S_j + \psi_{j+1} Z_j)$$

$$= \Phi_{j+1}(S_{j+1} - S_j) + \psi_{j+1}(Z_{j+1} - Z_j)$$

ή

$$\Delta V_j = \Phi_{j+1} \Delta S_j + \psi_{j+1} \Delta Z_j$$

της οποίας η συνεχής έκδοση είναι ακριβώς η (7.15).

Επιστρέφοντας στην συνεχή περίπτωση, συνδυάζοντας τις (7.5) και (7.15) για dV παίρνουμε:

$$\left\{ V_t + \mu S V_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} \right\} dt + \sigma S V_S dB = \phi(\mu S dt + \sigma S dB) + \psi r Z dt .$$

Επιλέγοντας $\varphi = V_S$, ξαναβρίσκουμε την εξίσωση *Black-Scholes*

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 . \tag{7.17}$$

Από την άλλη μεριά, αν η V ικανοποιεί την (7.17) και

$$\Phi = V_S , \qquad \psi = Z^{-1}(V - V_S S) = e^{-rt}(V - V_S S) ,$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνθήκη της ιδιο–χρηματοδότησης (7.15) ικανοποιείται για το *portfolio* $\varphi S + \psi Z$.

Βιβλιογραφία

1. Santro Salsa, *Partial Differential Equation in Action From Modeling to Theory*, Springer

2. Γ. Δάσιος – Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, 1994

3. Σπηλιώτης Ι., *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Εκδόσεις Συμεών

4. Γιαννακόπουλος Α., *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική*. Σημειώσεις παραδόσεων. Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ.

5. Μπούτσικας Μ., *Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*. Σημειώσεις Παραδόσεων. Τμήμα Στατιστικής και ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς.