



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

*ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΟΥΣ  
ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ  
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ*

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ  
ΣΥΓΓΡΑΦΗ: ΚΟΥΡΟΥΤΖΟΓΛΟΥ ΕΥΘΑΛΙΑ

ΑΘΗΝΑ 2014



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

*ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΟΥΣ  
ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ  
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ*

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ  
ΣΥΓΓΡΑΦΗ: ΚΟΥΡΟΥΤΖΟΓΛΟΥ ΕΥΘΑΛΙΑ

ΑΘΗΝΑ 2014



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, συμβάλλοντας στην επιτυχή ολοκλήρωση της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Αιμίλιο Σιδερίδη, Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ, για την επιστημονική του καθοδήγηση, την αμέριστη συμπαράσταση του αλλά και για όλες τις γνώσεις που έλαβα από τον ίδιο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Ολόψυχες ευχαριστίες στον σύζυγο μου Γιώργο, τους γονείς και τον αδερφό μου για την στήριξη, εμπιστοσύνη και κατανόηση που δείχνουν στις προσπάθειες μου.

**Με τιμή,**  
Ευθαλία Κουρουτζόγλου  
Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Περιεχόμενα	
ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	8
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ .....	9
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ .....	9
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ .....	15
1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ .....	16
1.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ .....	16
1.4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ.....	17
1.5 ΜΗΤΡΕΣ.....	18
1.5.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	19
1.5.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	22
1.5.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ.....	23
1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ.....	24
1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	24
1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ.....	24
1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ .....	25
1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ .....	26
1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ .....	28
1.7.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ .....	28
1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ.....	28
1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ .....	31
1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ .....	32
1.9.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ .....	32
1.9.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	32
1.9.3 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ.....	33
1.9.4 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ.....	34
1.9.5 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ.....	40
1.9.6 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ.....	42
1.9.7 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ.....	43
1.9.8 ΤΡΙΧΙΤΕΣ(WHISKERS).....	44
1.9.9 ΙΝΕΣ ΦΥΛΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ .....	45
1.9.10 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ.....	46
1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ .....	47
1.11 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ .....	49

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ</b>	
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ .....	52
2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ .....	52
2.1.3 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ.....	58
2.1.2 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ .....	59
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ .....	60
2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ $T_g$ .....	60
2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	61
2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ .....	62
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ</b>	
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΕΤΡΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ.....	68
3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ .....	68
3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ.....	72
3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ .....	73
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ</b>	
4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ .....	80
4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ .....	81
4.1.2 ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ.....	86
4.1.3 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ .....	90
4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	90
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ</b>	
5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ .....	135
5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$ .....	136
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$ .....	152
5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$ .....	155
5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{TT}$ .....	172
5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$ .....	173
5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E_\theta$ , $\nu_\theta$ & $G_\theta$ .....	185
5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ .....	186
5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$ .....	186
5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$ .....	187

5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_T$ .....	188
5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_L$ .....	190
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	
6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ .....	192
6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ .....	193
6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ .....	200
6.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	209
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	214

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Σε αυτή την μεταπτυχιακή εργασία, αναπτύχθηκαν θεωρητικές εκφράσεις για την πρόβλεψη των ελαστικών σταθερών ενός ινώδους σύνθετου υλικού.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η έννοια της ενδιάμεσου φάσης ανάμεσα στις ίνες και τη μήτρα. Αυτό το μοντέλο θεωρεί ότι το σύνθετο υλικό αποτελείται από επτά φάσεις, δηλαδή, ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα-ενδιάμεση φάση-ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα. Η ενδιάμεση φάση είναι το τμήμα της πολυμερικής μήτρας που κείται κοντά στην επιφάνεια της ίνας. Στην παρούσα μελέτη θεωρούμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής με συνεχώς μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες.

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson του σύνθετου υλικού συνολικά ελήφθησαν υπόψη διαφορετικοί νόμοι μεταβολών.

Για τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της θερμικής ανάλυσης.

Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες τιμές άλλων μοντέλων όπως επίσης και με πειραματικά δεδομένα.

## **ABSTRACT**

Theoretical expressions for the prediction of the elastic moduli in fiber-reinforced composites were developed. The concept of interphase between fibers and matrix was used for the development of the model. This model considers that the composite material consists of three phases, that is, fiber-interphase-matrix-interphase-fiber-interphase-matrix. The latter is the part of the polymer matrix lying at the close vicinity of the fiber surface. In the present investigation it was assumed that the interphase is inhomogeneous in nature with continuously varying mechanical properties. Different laws of variation of its elastic modulus and Poisson ratio were taken into account in order to define the overall moduli of the composite. Thermal analysis method was used for the estimation of the thickness of the interphase. The results obtained were compared with the respective values of other models as well as with experimental data.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

## 1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Για ένα σύστημα ο όρος «σύνθετο» σημαίνει ότι τούτο αποτελείται από δύο ή περισσότερα διακριτά μέρη. Από γενική άποψη, λοιπόν, ένα υλικό αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα διαφορετικά υλικά ή φάσεις, μπορεί να χαρακτηριστεί ως σύνθετο υλικό (composite material). Πιο ειδικά σήμερα, ως σύνθετα αναγνωρίζονται εκείνα τα υλικά, τα οποία συντίθενται από επιμέρους υλικά με σημαντικά διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες μεταξύ τους, ενώ και το ίδιο το σύνθετο υλικό έχει επίσης σημαντικά διαφορετικές ιδιότητες από εκείνες των συστατικών του.

Για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των σύνθετων, θα ακολουθείται ο εξής κανόνας: Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός από τα μέρη αυτά να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5πλάσιες) και η κατ'όγκο περιεκτικότητα του ενός να μην είναι πολύ μικρή (>10%).

**ΟΡΙΣΜΟΣ** (Agarwal-1990): Σύνθετα είναι τα υλικά, τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά μέρη που έχουν μια συγκεκριμένη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ τους.

Το ένα από τα συστατικά μέρη, χαρακτηρίζεται ως συστατικό ενίσχυσης και προσδίδει στο σύνθετο βελτιωμένες μηχανικές κυρίως ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται μήτρα, είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

## 1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται ευρύτατα από τον άνθρωπο από αρχαιοτάτων χρόνων. Υλικά που εύκολα βρίσκουμε στη φύση (ξύλο, πέτρα, πηλός, κόκκαλα) χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα από τον άνθρωπο, ο οποίος σύντομα έμαθε να βελτιώνει τις ιδιότητες τους ενισχύοντας τα υλικά αυτά με πρόσθετα συστατικά.

Για παράδειγμα, οι Αιγύπτιοι (5000π.Χ.) χρησιμοποιούσαν την τεχνική της ενίσχυσης τούβλων πηλού με πλέγμα άχυρων, με αποτέλεσμα τη μείωση

των τάσεων συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, παρατήρησαν ότι οι πλάκες από πολύστρωτες βέργες ξύλου, παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερη αντοχή από το φυσικό ξύλο έναντι στρέβλωσης που οφειλόταν στην απορρόφηση υγρασίας.

Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικώματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς, ενώ, κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους, η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η χρήση της σιδηρόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής, δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μια πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο σύνθετο υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μείγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεύδη, γνωστό ως βακελίτης προς τιμή του Βέλγου επιστήμονα Leo Baekeland.

Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών κατά τη διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία και συνδυάστηκε με την προηγηθείσα ανάπτυξη των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960) και την έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες, οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες τελευταία αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες τώρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα ελαστικά αυτοκινήτων, καθώς και σε αρκετές αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές.

Η ειδική αντοχή (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και η ειδική δυσκαμψία (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) των ενισχυτικών ινών βαίνουν συνεχώς αυξανόμενες τα τελευταία 30 χρόνια π.χ η ειδική αντοχή και δυσκαμψία των ινών γυαλιού, άνθρακα, αραμιδίου και βορίου έχουν φθάσει στο 10-14 πλάσιο των αντίστοιχων τιμών του αλουμινίου (ελαφρό μέταλλο). εφαρμογές των σύνθετων υλικών, τα τελευταία χρόνια, δημιούργησαν

Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν μεγάλο μέρος των εφαρμογών των νέων τεχνολογιών αιχμής στις κατασκευές και έχουν μεταβάλλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης.

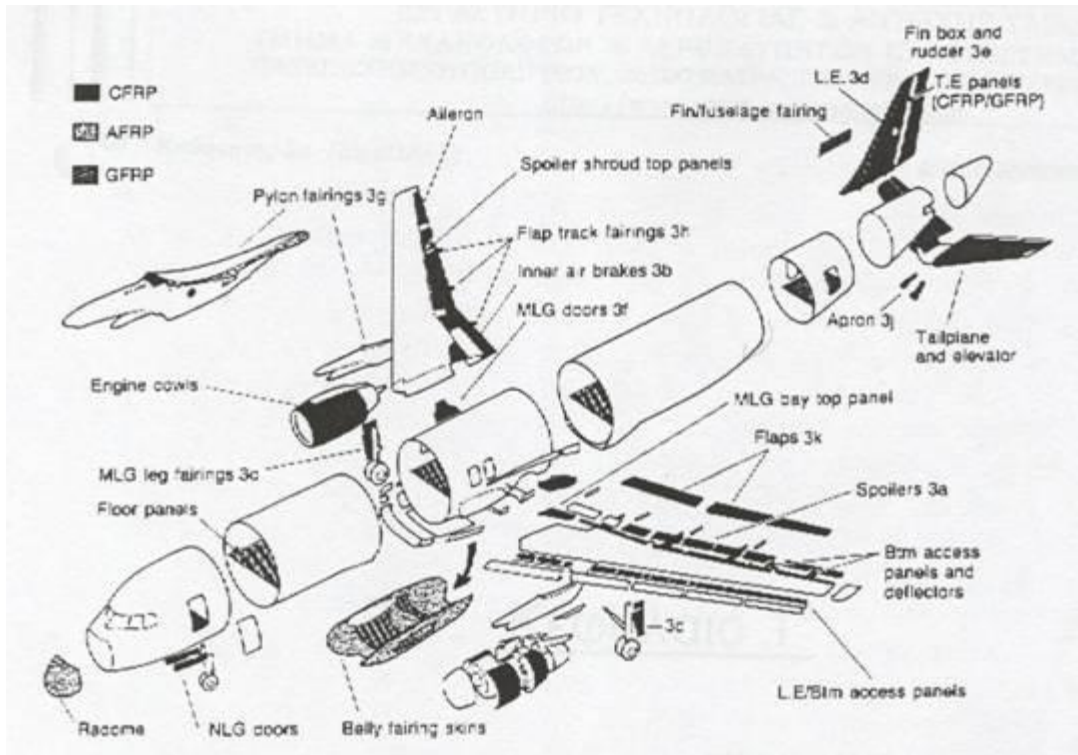
Η μεγάλη ποικιλία ινών και ρητινών, καθώς και οι διάφορες μέθοδοι κατασκευής παρέχουν στο σχεδιαστή τη δυνατότητα να επιλέξει το πιο κατάλληλο σύστημα υλικών που καλύπτει τις απαιτήσεις του, σύστημα που έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες, που πολλές φορές μπορεί να είναι και μοναδικά.

Το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης είναι μερικοί από τους παράγοντες εκείνους που έχουν οδηγήσει τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ των κατασκευαστικών υλικών για μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Μερικά μειονεκτήματα των σύνθετων υλικών, όπως: τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες περιβάλλοντος (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλές θερμοκρασίες, χημικό περιβάλλον, κ.λ.π) καθώς και το αρκετά υψηλό αρχικό τους κόστος, βαθμιαία αντιμετωπίζονται πιο αποτελεσματικά μέσω της συνεχούς τεχνολογικής ανάπτυξης στην παραγωγή νέων και καλύτερων ινών, ρητινών και εξέλιξης των μεθόδων παραγωγής.



Εικόνα 1



Εικόνα 2



Εικόνα 3



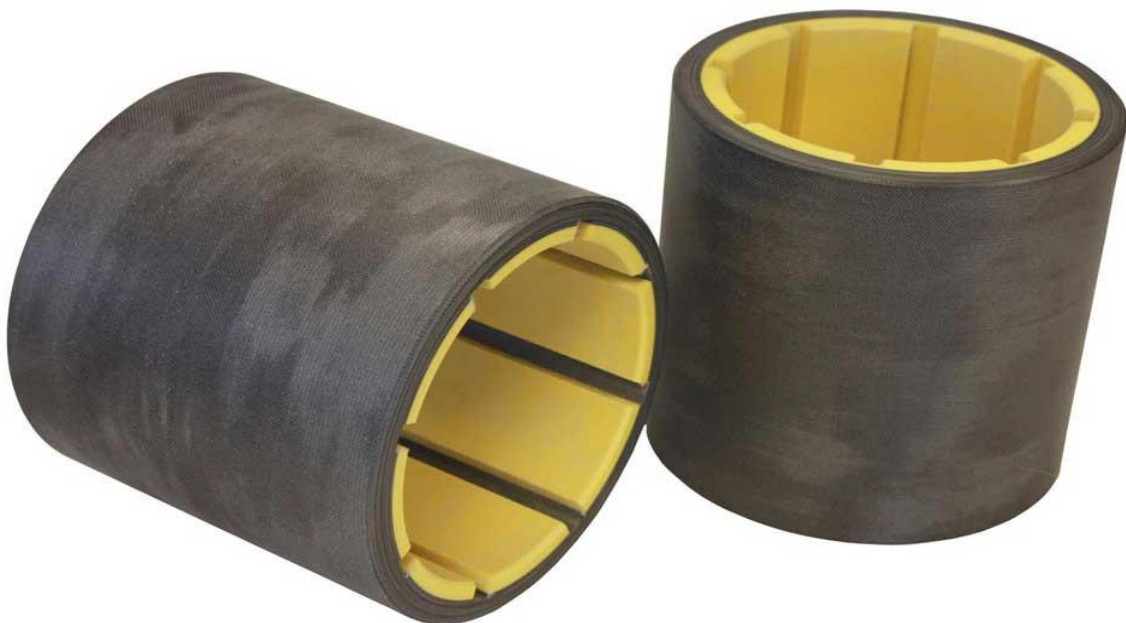
Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6



Εικόνα 7

### 1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ραγδαία αύξηση στο ρυθμό αντικατάστασης παραδοσιακών υλικών από σύνθετα, σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές και κατασκευές. Αυτή η τάση αντικατάστασης μόνο τυχαία δε θα μπορούσε να θεωρηθεί, μιας και τα σύνθετα υλικά πλεονεκτούν έναντι των παραδοσιακών υλικών σε μια σειρά από παραμέτρους και ιδιότητες και κυρίως στο γεγονός ότι διαθέτουν συνήθως τις βέλτιστες ιδιότητες των υλικών που τα αποτελούν, αλλά και επιπλέον ιδιότητες που τα αρχικά υλικά δεν διαθέτουν.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών έναντι των παραδοσιακών, είναι οι άριστες μηχανικές ιδιότητες, αποτέλεσμα της από κοινού συνεισφοράς ινών και μήτρας στη βελτίωση της συνολικής μηχανικής συμπεριφοράς του σύνθετου. Καταλυτικό ρόλο σε αυτή τη πτυχή των συνθέτων, έπαιξε η δυνατότητα σχεδιασμού και κατασκευής ενός τέτοιου υλικού, σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής για την οποία προορίζεται, έχοντας τις επιθυμητές ιδιότητες. Ο σχεδιασμός ενός σύνθετου είναι άλλο ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των υλικών, μιας και υπάρχει μια σειρά παραμέτρων, που εάν ληφθούν υπόψη, μπορούν να συμβάλλουν ουσιαστικά στις τέλειες ιδιότητες, αλλά και στη συμπεριφορά του σύνθετου. Η συμβατότητα για παράδειγμα, των αρχικών υλικών που θα επιλεγθούν να απαρτίσουν ένα σύνθετο είναι μείζονος σημασίας, όπως επίσης και ο τρόπος κατασκευής του.

Ο σημαντικότερος λόγος που επιλέγονται τα σύνθετα υλικά σε διάφορες εφαρμογές, είναι οι «ειδικές ιδιότητες» (specific properties) που διαθέτουν, έναντι άλλων υλικών. Με τον όρο ειδική ιδιότητα, αναφερόμαστε στο λόγο μιας ιδιότητας του υλικού, προς την πυκνότητα του. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της ειδικής ιδιότητας, τόσο ελαφρύτερο είναι το υλικό, διαθέτοντας ταυτόχρονα υψηλότερη τιμή της συγκεκριμένης ιδιότητας. Αυτή η παράμετρος είναι ζωτικής σημασίας για τη χρήση των συνθέτων σαν δομικά στοιχεία, σε εφαρμογές όπου η ελάττωση του βάρους έχει σαν αντίκτυπο στην αποδοτικότερη λειτουργία τους, όπως επίσης και στη μείωση του κόστους. Αντικαθιστώντας μεταλλικά υλικά με σύνθετα σε κατασκευές, όπως οι άτρακτοι των αεροπλάνων, οι μειώσεις του βάρους μπορούν να φτάσουν αλλά και να υπερβούν ορισμένες το 50%.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν, ακόμα και μετά από πιθανή αστοχία τους. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε σε στατικές δοκιμές σε ινώδη σύνθετα υλικά και οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και μετά την

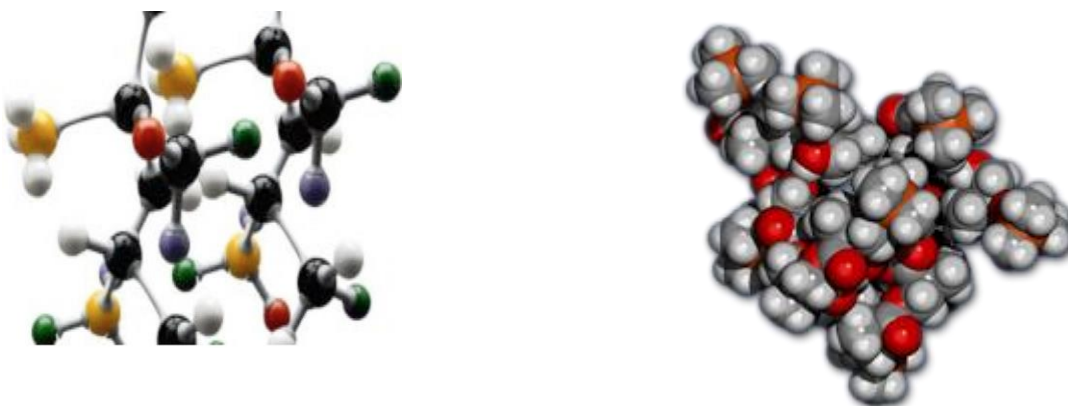
αστοχία του σύνθετου, παρόλο που οι ίνες θραύονται, η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού και κυρίως σε άλλες ίνες οι οποίες δεν έχουν ακόμη αστοχήσει. Παρατηρήθηκε επίσης ότι τα ινώδη σύνθετα παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγχοπών, ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Κατασκευές από τέτοια σύνθετα υλικά, επέδειξαν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής και αυξημένη αντοχή σε κόπωση, συγκριτικά με αυτή αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών.

Κάποια άλλα πλεονεκτήματα των συνθέτων είναι η καταπληκτική αντίσταση τους στην ηλεκτροχημική διάβρωση, φαινόμενο ασυνήθιστο στα μεταλλικά υλικά. Η απόσβεση ταλαντώσεων που παρουσιάζουν κάποιοι τύποι σύνθετων (sandwich), μέσω της μεγάλης απορρόφησης ενέργειας είναι ένα χαρακτηριστικό τους γνώρισμα, όπως επίσης και η υψηλή αντοχή που επιδεικνύουν τα ινώδη σύνθετα σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας, με αποτέλεσμα τη διατήρηση της σταθερότητας των κατασκευών στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή.

## 1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ

### 1.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Πολυμερή ονομάζονται οι χημικές ενώσεις με μεγάλα μόρια, τα «μακρομόρια», που σχηματίζονται από τη σύνδεση πολλών μικρών μορίων. Τα πολυμερή προκύπτουν από την χημική αντίδραση των μονομερών που ονομάζεται πολυμερισμός.



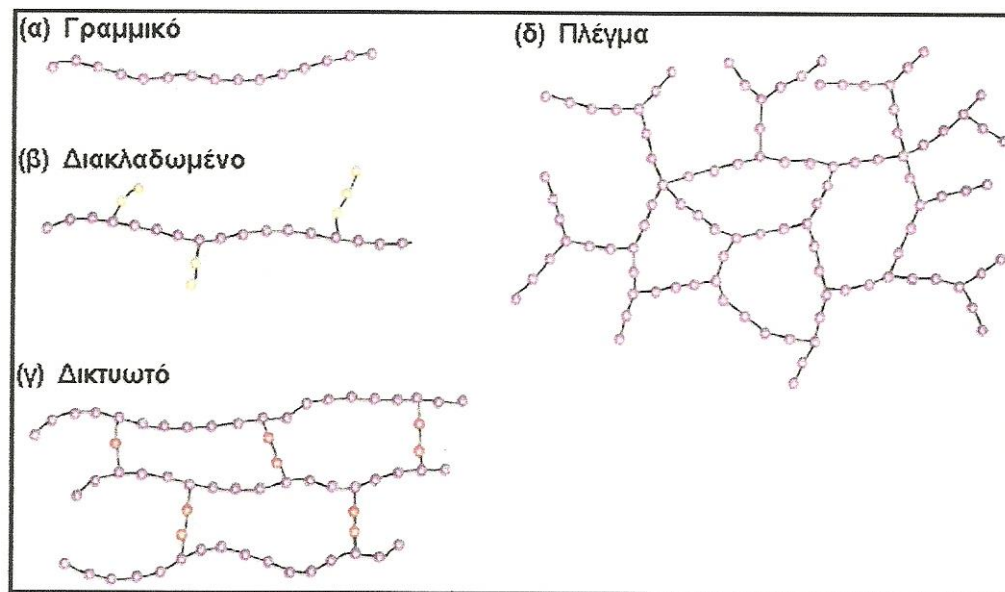
Εικόνα 8



### 1.4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

Α. Με κριτήριο την αρχιτεκτονική της πολυμερικής αλυσίδας τους διακρίνονται σε:

1. Γραμμικά
2. Διακλαδωμένα
3. Δικτυωτά ή διασταυρούμενα (crosslinked) ή πλέγμα (network)



Εικόνα 9

Β. Με κριτήριο το είδος των ατόμων που συμμετέχουν στη δομή της κύριας αλυσίδας τους:

1. Ομοαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από ένα είδος ατόμων
2. Ετεροαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από περισσότερα είδη ατόμων.

Γ. Με κριτήριο την προέλευση και τη χημική τους σύσταση διακρίνονται σε:

1. Φυσικά: Λαμβάνονται απευθείας από τη φύση (μαλλί, μετάξι)
2. Ημισυνθετικά : Προκύπτουν από χημικό μετασχηματισμό φυσικών προϊόντων (εβονίτης, νιτροκυτταρίνη, rayon, cellofan).
3. Συνθετικά: Τα μονομερή που τα συνθέτουν, δεν υπάρχουν στη φύση

(PVC, Nylon 6 και 6.6, Teflon).

Δ. Με κριτήριο την οργάνωση της κύριας αλυσίδας τους διακρίνονται σε:

1. Ομοπολυμερή: Τα μόρια τους αποτελούνται από ένα είδος δομικών μονάδων.
2. Συμπολυμερή: Τα μόρια τους αποτελούνται από δύο (συνήθως) ή περισσότερα είδη δομικών μονάδων.

Ε. Με κριτήριο τις μηχανοθερμικές τους ιδιότητες διακρίνονται σε:

1. Θερμοπλαστικά
2. Θερμοσκληρυνόμενα
3. Ελαστομερή

ΣΤ. Με κριτήριο τη χρήση τους διακρίνονται σε:

1. Ευρείας χρήσης: Παράγονται σε πολύ υψηλό ποσοστό, είναι φθηνά και έχουν ποικίλα πεδία εφαρμογών στην καθημερινή ζωή (πολυαιθυλένιο, πολυστυρένιο, PVC, ABS).
2. Τεχνικά: Με μηχανικές ιδιότητες σημαντικά ανώτερες από εκείνες των πολυμερών ευρείας χρήσης, χρησιμοποιούνται δε, σε τμήματα μηχανών και κατασκευών σε αντικατάσταση μεταλλικών τμημάτων τους (πολυαμίδια (nylon), πολυανθρακικά (PC), εποξειδικές ρητίνες)
3. Προηγμένα: Με εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες και μεγάλη σταθερότητα σε υψηλές θερμοκρασίες, παράγονται σε μικρές ποσότητες και προορίζονται για ειδικές εφαρμογές (Πολυαμίδια, πολύ(αιθερο κετόνη), πολύ (μεθακρυλικό μεθύλιο)).

## 1.5 ΜΗΤΡΕΣ

Ο ρόλος της μήτρας συνίσταται σε:

- Συγκράτηση των ινών μεταξύ τους.
- Προστασία των ινών από περιβαλλοντικές φθορές και προσβολές.
- Μεταβίβαση των μηχανικών τάσεων που ασκούνται συνολικά στο σύνθετο υλικό προς τις ίνες.
- Ανακοπή της διάδοσης των ρωγμών , που ξεκινούν από θραύση των ινών.

Για να ικανοποιεί τον ρόλο με τον οποίο είναι επιφορτισμένη η μήτρα πρέπει να χαρακτηρίζεται από:

- Ολκιμότητα
- Ανθεκτικότητα
- Σχετική ευκαμψία
- Σημείο τήξης μεγαλύτερο από τη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του σύνθετου υλικού.

Οι ιδιότητες αυτές πρέπει να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ενισχυτικών ινών.

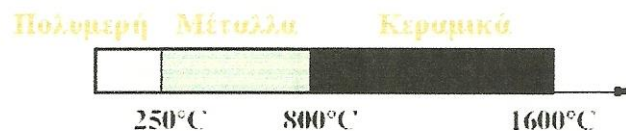
Συνήθως, το υλικό της μήτρας έχει μεγαλύτερη πυκνότητα, αντοχή και δυσκαμψία από τις ίνες.

Τέλος, για τη σωστή λειτουργία του σύνθετου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση ίνας-μήτρας.

Ανάλογα με το υλικό της μήτρας διακρίνουμε τις ακόλουθες ομάδες υλικών μήτρας για σύνθετα υλικά:

- Οργανικές
- Μεταλλικές
- Κεραμικές

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του σύνθετου. Μια γενική οδηγία αναφορικά με τα θερμοκρασιακά όρια για κάθε ομάδα υλικών παρουσιάζεται στη παρακάτω Εικόνα.



Εικόνα 10

Τα αντίστοιχα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται με τις ακόλουθες συντμήσεις:

PMC: Polymer Matrix Composite

MMC: Metal Matrix Composite

CMC: Ceramic Matrix Composite

## 1.5.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

### 1. Θερμοπλαστικές

Τα θερμοπλαστικά υλικά είναι μια κατηγορία υλικών που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αυτό οφείλεται στο χαμηλό τους κόστος στην κατεργασιμότητα τους καθώς και στην ευκολία με

την οποία επεξεργάζονται με κοινές μεθόδους μορφοποίησης πλαστικών. Αποτελούνται κυρίως από γραμμικά μακρομόρια που συνδέονται μεταξύ τους με ασθενείς δεσμούς Van der Waals και εκείνο που τα χαρακτηρίζει είναι όταν θερμανθούν γίνονται μαλακά και εύκαμπτα και σε υψηλότερες θερμοκρασίες ρέουν. Αυτό συμβαίνει λόγω της χαλάρωσης των μοριακών δεσμών. Αν θερμανθούν σε θερμοκρασία ανώτερη από εκείνης της θερμοκρασίας υαλώδους μετάβασης ( $T_g$ ) και στη συνέχεια ψυχθούν, τότε μετατρέπονται και πάλι σε στερεά έχοντας επανακτήσει εν μέρει τις ιδιότητες τους. Οι κύκλοι θέρμανσης-ψύξης μπορεί να είναι πάρα πολλοί και τα θερμοπλαστικά να επαναμορφοποιούνται χωρίς να υφίστανται σημαντικές μεταβολές στη δομή και τις ιδιότητες τους. Βέβαια με την επανάληψη των κύκλων θέρμανσης-ψύξης, υπάρχει σταδιακή υποβάθμιση των ιδιοτήτων τους ανάλογα με το πολυμερές και έτσι υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των επαναλαμβανόμενων κύκλων που μπορεί να εφαρμοστούν.

Οι πιο γνωστές ρητίνες αυτής της κατηγορίας είναι το πολυαιθυλένιο (PE), το πολυβινυλχλωρίδιο (PVC), το πολυπροπυλένιο (PP), το πολυστυρένιο (PS), τα πολυαμίδια (Nylon), πολυαιθερική κετόνη (PEK), το φαινύλο-σουλφίδιο (PPS), κ.α.

Οι θερμοπλαστικές ρητίνες δεν αναπτύσσουν σταυροδεσμούς. Οι ιδιότητες τους απορρέουν από τις ιδιότητες των μονομερών που σχηματίζουν τις αλυσίδες και του υψηλού μοριακού βάρους. Στις άμορφες θερμοπλαστικές ρητίνες υπάρχει μεγάλη συγκέντρωση μοριακών διαπλοκών, που σχηματίζουν ένα τρισδιάστατο δίκτυο. Στις ημικρυσταλλικές θερμοπλαστικές ρητίνες υπάρχει τάξη και διευθέτηση των αλυσίδων.

Με θέρμανση, ένα θερμοπλαστικό υλικό από δύσκαμπτο μετατρέπεται σε ρευστό και στη συνέχεια μπορεί να μετατραπεί σε άμορφο ή ημικρυσταλλικό στερεό ανάλογα με τις συνθήκες μορφοποίησης και θερμοκρασίας.

## **2. Θερμοσκληρυνόμενες**

Στις θερμοσκληρυνόμενες ρητίνες, οι ρευστές ρητίνες αναμιγνύονται με τους κατάλληλους σκληρυντές και μετατρέπονται σε σκληρά, άκαμπτα ψαθυρά στερεά μέσω του σχηματισμού σταυροδεσμών (crosslinking). Οι σταυροδεσμοί που δημιουργούνται έχουν σαν αποτέλεσμα τον σχηματισμό ενός ισχυρού τρισδιάστατου δικτύου. Αυτή η διαδικασία γίνεται στο στάδιο της μορφοποίησης του σύνθετου υλικού. Οι μηχανικές ιδιότητες εξαρτώνται από τις μοριακές μονάδες που συνιστούν το τρισδιάστατο πλέγμα αλυσίδων, το μήκος των αλυσίδων και την πυκνότητα των σταυροδεσμών. Η μέθοδος κατασκευής και ειδικά η διαδικασία θερμικής κατεργασίας (curing) καθορίζει τη πυκνότητα των σταυροδεσμών. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή όταν θερμανθούν πολυμερίζονται και η διαδικασία αυτή είναι μη αναστρέψιμη και

για αυτό άλλωστε μορφοποιούνται κατά την πρώτη τους θέρμανση. Δηλαδή, όταν επαναθερμανθούν αυτά δεν ρευστοποιούνται αλλά αν θερμανθούν σε μεγάλο βαθμό αποσυντίθενται .

Επειδή η δημιουργία των σταυροδεσμών είναι χημικής φύσεως, τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή είναι δύσκαμπτα και οι ιδιότητες τους δεν επηρεάζονται έντονα από τη θερμοκρασία. Το μεγάλο πλήθος των εφαρμογών αυτών των πλαστικών οφείλεται στη θερμοσταθερότητα τους αφού έχουν υψηλό σημείο τήξης, τις θερμικές τους ιδιότητες, την υψηλή δυσκαμψία, την επιφανειακή σκληρότητα και την μειωμένη αναφλεξιμότητα τους.

Οι πιο γνωστές θερμοσκληρυνόμενες μήτρες για σύνθετα υλικά είναι οι εποξειδικές ρητίνες, οι ακόρεστοι πολυεστέρες (UP), οι φαινόλες, οι βινυλεστέρες, τα πολυσουλφονικά, τα πολυαμίδια κ.α. Αυτές καλύπτουν πλήθος χημικών συστάσεων και καλύπτουν μεγάλο εύρος φυσικών και χημικών ιδιοτήτων.

- **Πολυεστερικές ρητίνες** ,οι οποίες ενισχύονται με ίνες γυαλιού και δίνουν υαλονήματα
- **Εποξειδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200°C , με καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και ευρεία χρήση στην αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες** οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους ωστόσο, φτάνει τους 400°C.



Εικόνα 11(Πολυεστερική ρητίνη)

### 3. Ελαστομερείς

Είναι συνήθως γραμμικά πολυμερή με διακλαδισμένες αλυσίδες οι οποίες έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Διαθέτουν μικρή δυσκαμψία με αποτέλεσμα όταν υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις να επανέρχονται στο

αρχικό τους σχήμα μετά την άρση του εξωτερικού φορτίου που τις προκάλεσε. Το φυσικό και συνθετικό καουτσούκ βρίσκει την κυριότερη εφαρμογή του στα λάστιχα των αυτοκινήτων. Το φυσικό καουτσούκ, το λάστιχο, δεν επανέρχεται πλήρως στο αρχικό του μήκος μετά την αποφόρτιση γιατί τα μακρομόρια έχουν υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Για να αποφευχθεί η πλαστική παραμόρφωση γίνεται ο λεγόμενος βουλκανισμό, όπου το καουτσούκ θερμαίνεται με θείο. Η διαδικασία του βουλκανισμού έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία σταυροδεσμών (cross-link) μεταξύ των μορίων, οι οποίοι ενισχύουν τη δομή του ελαστικού. με τον τρόπο αυτόν το ελαστομερές γίνεται σκληρότερο, ανθεκτικότερο, αποκτά αντίσταση στη διάβρωση από λάδια, όζον, οξέα και καθιστά λιγότερο ευαίσθητο στις θερμοκρασιακές μεταβολές. Όμως η διαδικασίς του βουλκανισμού είναι μια πολυδάπανη και χρονοβόρα διαδικασία και για αυτό αναπτύχθηκαν τα ελαστομερή που διαθέτουν τις ιδιότητες του καουτσούκ και των οποίων είναι εύκολη η μορφοποίηση και αντίστοιχη εκείνης των θερμοπλαστικών.

### 1.5.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Μέταλλα, όπως το αλουμίνιο, το τιτάνιο και το νικέλιο, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο ως υλικά μήτρας προσφέροντας σημαντικά πλεονεκτήματα. Για εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών επιβάλλεται η χρήση μεταλλικών ή κεραμικών μήτρων, αφού η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρησιμοποίησης οργανικών μήτρων είναι πολύ χαμηλή (~300°C), ενώ οι ανθρακούχες μήτρες οξειδώνονται σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από 500 °C.

Σε σχέση με τις οργανικές μήτρες, οι μεταλλικές παρουσιάζουν πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα τα οποία φαίνονται στο παρακάτω πίνακα.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλύτερες μηχανικές ιδιότητες</li> <li>• Βελτίωση μηχανικών ιδιοτήτων του σύνθετου σε καταπονήσεις ασκούμενες σε διευθύνσεις διαφορετικές από αυτές από αυτές του προσανατολισμού των ινών.</li> <li>• Βελτίωση της ακαμψίας και αύξηση του μέτρου</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Δημιουργία εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων στη διεπιφάνεια μετάλλου-ίνας συμβάλλουν στην αποκόλληση ινών από τη μήτρα που οδηγεί στη μικρορωγμάτωση και τη θραύση των ινών.</li> <li>• Μεγαλύτερη πυκνότητα και επομένως μεγαλύτερο βάρος</li> </ul>

<p>ελαστικότητας του σύνθετο.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Μείωση της ευαισθησίας του σύνθετου στην παρουσία διαλυτών και διερυνση των θερμοκρασιακών ορίων χρήσης του σύνθετου.</li> <li>• Βελτίωση της θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας του σύνθετου για ειδικές εφαρμογές.</li> <li>• Ευκολότερη σύνδεση τεμαχίων του σύνθετου υλικού (συγκόλληση, κόλληση).</li> </ul>	<p>της συνολικής κατασκευής.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Φαινόμενα διάλυσης ινών στη μήτρα, σε υψηλές θερμοκρασίες (π.χ διάλυση ινών SiO<sub>2</sub> σε μήτρα Al).</li> <li>• Ασυνέχεια της καμπύλης εφελκυσμού των σύνθετων υλικών στο όριο διαρροής της μήτρας.</li> <li>• Δύσκολη παραγωγή σύνθετου υλικού και μεγαλύτερο κόστος.</li> </ul>
--	--

Πίνακας Α

### 1.5.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Τα κεραμικά υλικά είναι σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στη διάβρωση και την χημική προσβολή.

Στη περίπτωση της κεραμικής μήτρας, οι ίνες αποβλέπουν αφενός στη βελτίωση της αντοχής του κεραμικού στους θερμικούς αιφνιδιασμούς και αφετέρου στην αύξηση της μηχανικής του αντοχής. Η ολκιμότητα και το ποσοστό των ινών επιδρούν ευνοϊκά στη βελτίωση της αντοχής της μήτρας.

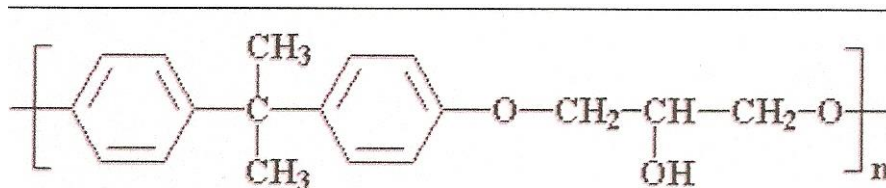
Το σημαντικότερο πρόβλημα στη χρήση κεραμικών μήτρων εντοπίζεται στη συνάφεια ινών-μήτρας και οφείλεται στη μεγάλη διαφορά των συντελεστών γραμμικής διαστολής της κεραμικής μήτρας και των συνήθων ενισχυτικών ινών.

Μεγάλη εφαρμογή βρίσκουν, επίσης, οι μήτρες άνθρακα, ενώ ειδική περίπτωση κεραμικής μήτρας αποτελεί το τσιμέντο. Είναι γνωστές οι οικοδομικές κατασκευές τσιμέντου με ενίσχυση χάλυβα (οπλισμένο σκυρόδεμα), ινών αμιάντου (ελενίτ), ινών γυαλιού, καθώς επίσης και οι κατασκευές από γύψο με ενίσχυση ινών γυαλιού ή αμιάντου.

## 1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

### 1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ

Εποξειδικό ή πολυεποξειδικό να **θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές**. Οι εποξειδικές ρητίνες αποτελούνται από αλυσίδες που έχουν τουλάχιστον δύο εποξειομάδες. Μελετώντας την δομή των εποξειδικών ρητινών με κάποιο πρόσθετο όπως σκληρυντής ή πλαστικοποιητής με την βοήθεια ηλεκτρονικών μικροσκοπίων παρατηρούμε ότι οι ρητίνες αποτελούνται από σχεδόν μικρού μεγέθους μακρομόρια, τρισδιάστατα διακλαδωμένα δίκτυα ή συσσωματώματα μετρίου μοριακού βάρους, τοποθετημένα σε ένα πλαίσιο από μόρια μικρού μοριακού βάρους. Από πλευράς σύστασης οι εποξειδικές ρητίνες χωρίζονται σε **στερεές** και **υγρές**.

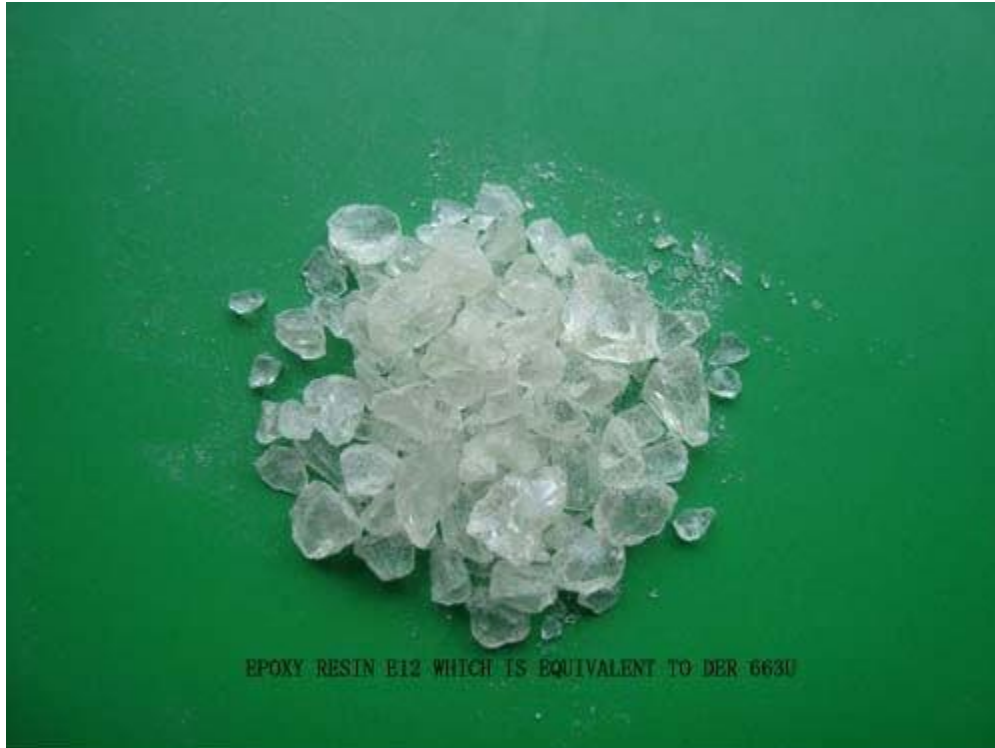


Εικόνα 12

### 1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί. Επίσης οι στερεές εποξειδικές ρητίνες πρέχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική σύσταση. Τα σημαντικότερα **πλεονεκτήματα** των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση με τις υγρές ρητίνες είναι η **εύκολη επεξεργασία** τους, η **μηχανική αντοχή**, η **υψηλή χημική αντίσταση** και το **άριστο κολλώδες**.





Εικόνα 13

### **1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ**

Οι κυριότερες ιδιότητες των υγρών εποξειδικών ρητινών είναι οι παρακάτω:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα, καλή διαστατική σταθερότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση ύδατος, οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών.
- Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες, όπως και τα μίγματά τους με πρόσθετα(πλαστικοποιητές, σκληρυντές), με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.
- Η επεξεργασία των ρητινών είναι εύκολη και γρήγορη για θερμοκρασίες από 5° C μέχρι 150° C και εξαρτάται από την εκλογή του πρόσθετου.
- Υψηλές μηχανικές ιδιότητες που μπορεί να οφείλονται στη μικρή συστολή τους, έτσι μειώνεται η παρουσία τάσεων.
- Άριστη ηλεκτρική μόνωση.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης.(Στην σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί). Αυτή η ιδιότητα αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα για πάρα πολλές εφαρμογές.

- Ποικιλία εφαρμογών. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής. (Ανάμειξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων).
- Καλή χημική αντίσταση η οποία εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται.
- Συνολικά οι εποξειδικές ρητίνες έχουν πολύ υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό και κατά την διάρκεια της επεξεργασίας τους.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξής τους και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι **αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό.** Σε πάρα πολλές περιπτώσεις δε, χρησιμοποιούνται και τελείως μόνες τους.



Εικόνα 14

### **1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ**

Τα εποξειδικά βρίσκουν αξιόλογη χρήση σε εφαρμογές όπως:

- Χρώματα και επικαλυπτικά  
Η ευρύτερη εφαρμογή των εποξειδικών ρητινών γίνεται στον τομέα των επικαλυπτικών με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες και αντοχή σε χημικά μέσα.

Περιλαμβάνονται τα επικαλυπτικά σε μορφή σκόνης για πλυντήρια στεγνωτήρια και άλλες ηλεκτρικές συσκευές κουζίνας. Τα επικαλυπτικά με βάση τα εποξειδικά σε σκόνη, που η συγκόλληση τους γίνεται με τήξη, χρησιμοποιούνται ευρέως για αντιδιαβρωτική προστασία χαλύβδινων σωλήνων και εξαρτημάτων που χρησιμοποιούνται στη βιομηχανία ελαίων και αερίων, σε σωληνώσεις (χαλύβδινες) για τη μεταφορά πόσιμου νερού, σε ράβδους οπλισμένου σκυροδέματος.

- Συγκολλητικά.

Τα εποξειδικά συγκολλητικά ανήκουν στα συγκολλητικά εκείνα που ονομάζονται «δομικά συγκολλητικά» (που περιλαμβάνουν επίσης πολυουρεθάνες, ακρυλικά, κυανοακρυλικά κ.λ.π). Τα υψηλών απαιτήσεων αυτά εποξειδικά χρησιμοποιούνται στην κατασκευή αεροσκαφών, αυτοκινήτων, ποδηλάτων, όπου απαιτούνται υψηλές αντοχές πρόσφυσης. Τα εποξειδικά συγκολλούν ξύλο, γυαλί, πέτρα και κάποια πλαστικά.

- Βιομηχανικά εργαλεία παραγωγής και σύνθετα υλικά.

Τα εποξειδικά χρησιμοποιούνται για την παραγωγή καλουπιών (τύπων), μοντέλων, αντικολλητικών φύλλων, στη χύτευση και στη βιομηχανική παραγωγή βοηθημάτων. Τα εποξειδικά χρησιμοποιούνται επίσης στην παραγωγή στοιχείων ενισχυμένων με ίνες ή από σύνθετα υλικά. Είναι ακριβότερα από τις πολυεστερικές ρητίνες και τις ρητίνες από βινυλεστέρα, αλλά γενικώς παράγουν ισχυρότερα και πιο ανθεκτικά στη θερμοκρασία σύνθετα υλικά.

- Ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά συστήματα

Οι εποξειδικές ρητίνες εφαρμόζονται στη βιομηχανία των ηλεκτρονικών, σε κινητήρες, γεννήτριες, μετασχηματιστές, στον εξοπλισμό διανομής ηλεκτρικών φορτίων, στους μονωτήρες μετασχηματιστών και στους μονωτήρες. Οι εποξειδικές ρητίνες είναι εξαιρετικοί ηλεκτρικοί μονωτές και προστατεύουν τα ηλεκτρικά στοιχεία από μικρά κυκλώματα, σκόνη και υγρασία.

- Ναυτιλιακές εφαρμογές

Τα εποξειδικά πωλούνται σε καταστήματα σιδηρικών, σε σεντ δύο συστατικών. Μπορεί όμως να πωλούνται σε καταστήματα με ναυτιλιακά είδη για θαλάσσιες εφαρμογές. Τα εποξειδικά δεν χρησιμοποιούνται ως εξωτερική στρώση ενός σκάφους γιατί επηρεάζονται από τις UV ακτίνες. Συνήθως χρησιμοποιούνται κατά την επισκευή και συναρμολόγηση σκαφών, και κατόπιν επικαλύπτονται από ένα πολυουρεθανικό χρώμα ή βερνίκι θαλάσσης που παρέχουν UV προστασία.

- Αεροδιαστημικές εφαρμογές

Στην αεροδιαστημική βιομηχανία, οι εποξειδικές ρητίνες εφαρμόζονται

ως το υλικό της δομικής μήτρας το οποίο μετά ενισχύεται με ίνες, όπως υάλου, άνθρακος, Kevlar και βορίου. Επίσης χρησιμοποιούνται ως δομική κόλλα.

### **1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ**

#### **1.7.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ**

Τα εγκλείσματα (ή ενισχυτικά υλικά) είναι **ανόργανα υλικά** που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα και επιτελούν πολλές σημαντικές λειτουργίες. Κατά κύριο λόγο, οι επιθυμητές ιδιότητες επιτυγχάνονται επιλέγοντας τον κατάλληλο τύπο και υλικό ενίσχυσης. Έχουν επιφορτισθεί με το να φέρουν εις πέρας τις αυξημένες μηχανικές απαιτήσεις που χαρακτηρίζουν τα σύνθετα υλικά, μίας και είναι εκείνες που περιλαμβάνουν τα φορτία. Για αυτό και τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται έχουν μηχανικές ιδιότητες κατά πολύ ανώτερες σε σχέση με το υλικό που αποτελεί την μήτρα, προσδίδοντας στο σύνθετο υλικό αυξημένη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται είναι πολλά και διαφέρουν ως προς το μέγεθος την γεωμετρία και τα φυσικά χαρακτηριστικά τους.

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματος τους:

- Εγκλείσματα σε μορφή **κόκκων**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **ινών**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **νιφάδων**.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «Μίκρο».

#### **1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ**

Η παρουσία των εγκλεισμάτων στις ρητίνες γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται.

Η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε εγκλείσμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- **Συστολή**

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- **Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση**

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν τη αντοχή αυτή σε υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στην στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- **Ειδική πυκνότητα**

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητά τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού.

- **Ιξώδες**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη υλικά και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

- **Συντελεστής θερμικής διαστολής**

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική.

- **Πρόσφυση**

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- **Θερμική σταθερότητα**

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- **Θερμική αγωγιμότητα**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών, αν και σε μεγάλες περιεκτικότητες αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστό αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- **Αντοχή στη συμπίεση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- **Συμπεριφορά στην κρούση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που οικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δομικής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- **Συμπεριφορά στην κάμψη**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- **Σκληρότητα επιφάνειας-αντίσταση στην τριβή**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση σε τριβή.

### **1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

α. Ινώδη Σύνθετα (Fibrous Composites): Με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας.

β. Κοκκώδη Σύνθετα (Particulate Composites): Με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό μήτρας.

γ. Στρωματικά Σύνθετα ή Πολύστρωτα (Πολυστρώματα) (Laminated Composites): Με επάλληλες στρώσεις υλικών.

Τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών μέσα στη μήτρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται σε:

α. Μονοδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση.

β. Πολυδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί άμεσα σε ταξινόμηση των πολυδιευθυντικών σύνθετων στις ακόλουθες υποομάδες:

α. Σύνθετα με ίνες τυχαίας διεύθυνσης.

β. Σύνθετα με ίνες σε πλέξη ύφανσης

γ. Σύνθετα με ίνες σε τρισσορθογώνια ύφανση.

Μία επιπλέον διάκριση των ινωδών σύνθετων στηρίζεται στο λόγο μήκους προς διάμετρο ( $l/d$ ) των ινών, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως εξής:

α. Συνεχείς ή μεγάλου μήκους ίνες (continuous fibers), όταν είναι  $l/d > 100$ .

β. Ασυνεχείς ή βραχείες (κοντές) ίνες (discontinuous fibers), όταν είναι  $l/d < 100$ .

γ. Νηματίδια ή τριχίτες (whiskers), όταν  $d < 1\mu\text{m}$  και  $l = 100\mu\text{m}$

(πρόκειται για λεπτούς μονοκρυστάλλους κεραμικού υλικού).

## **1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ**

### **1.9.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ**

Αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη κατηγορία σύνθετων υλικών, δεδομένης της ευρύτατης εξάπλωσης που αυτά γνωρίζουν σε πληθώρα εφαρμογών. Ο οπλισμός, ο οποίος είναι τοποθετημένος στη μήτρα με τη μορφή ινών, αποτελείται εναλλακτικά από γυαλί (Glass), βόριο (Boron), άνθρακα (Carbon), γραφίτη (graphite), αραμίδιο (Κέβλαρ) ή και κάποιο μέταλλο, αντίθετα η μήτρα είναι συνήθως μια εποξειδική ρητίνη ή κάποιο άλλο πολυμερές, χωρίς να απαγορεύει την κατάταξη στην ίδια κατηγορία συνθέτων υλικών με μεταλλική μήτρα (π.χ αλουμινίου) και τη χρήση οπλισμού από ένα ή περισσότερα παραπάνω υλικά.

### **1.9.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

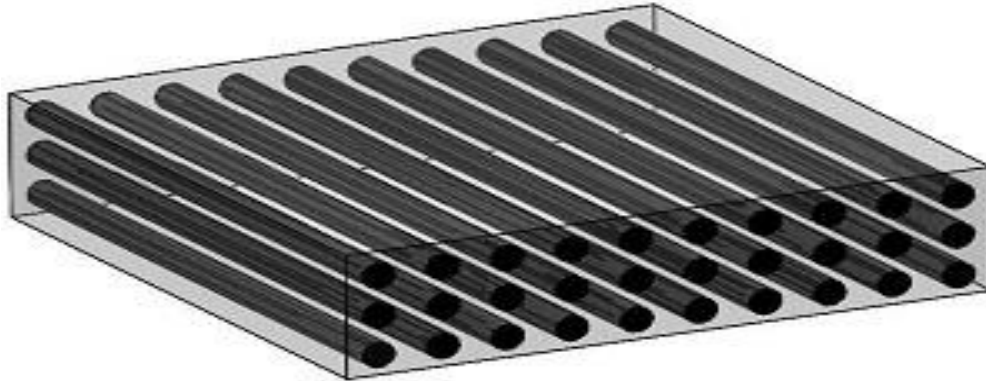
Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν γενικά πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό ειδικά κατά την περίπτωση που η διεύθυνση της τάσης ταυτίζεται με αυτή των ινών. Θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί, πως για να παρουσιάζει το σύνθετο υλικό καλύτερες ιδιότητες από τη μήτρα, χρειάζεται η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών  $U_f$  να ξεπερνά μια κρίσιμη ελάχιστη τιμή, γιατί διαφορετικά η εφαρμοζόμενη τάση αναλαμβάνεται από την όλκιμη μήτρα η οποία και παραμορφώνεται

Η αντοχή τους σε θλίψη είναι μειωμένη κάτι που οφείλεται σε φαινόμενα κύρτωσης, αναδίπλωσης και λυγισμού των ινών (buckling effect) που προκαλούνται όταν ασκούνται θλιπτικά φορτία.

Σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε κόπωση, αυτή είναι δύσκολο να προβλεφθεί, αφού δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή ο κανόνας των μειγμάτων, αλλά απαιτούνται πειραματικές πειραματικές δοκιμές για κάθε συγκεκριμένο ινώδες υλικό. Ανάλογες δοκιμές έδειξαν πως την καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση παρουσιάζουν τα ινώδη υλικά αποτελούμενα από εποξειδική μήτρα και ίνες γραφίτη.

Τέλος σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε τριβή, αυτή εξαρτάται από το μήκος, τον προσανατολισμό και τις μηχανικές ιδιότητες των ινών.



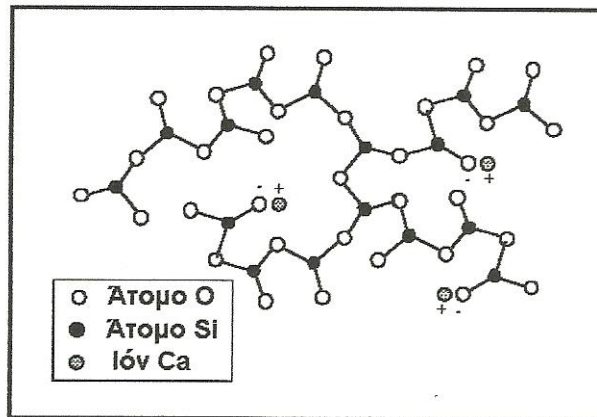


Εικόνα 15 (Ινώδες υλικό με συνεχείς ίνες)

### 1.9.3 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ

Οι ίνες γυαλιού χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα πρώτης γενιάς (1940) και η χρήση τους συνεχίζεται επιτυχώς μέχρι σήμερα. Είναι από τους πλέον διαδεδομένους τύπους ενισχυτικών ινών στα σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Η δομική τους βάση είναι τα οξείδια πυριτίου, ασβεστίου, βορίου, αλουμινίου κ.α. Θεωρούνται από τα πιο φθηνά ενισχυτικά υλικά.

Χαρακτηριστική δομή του γυαλιού παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 16

Ανάλογα με τη χημική τους σύσταση οι ίνες γυαλιού χαρακτηρίζονται τύπου E,C και S των οποίων οι κύριες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΤΥΠΟΣ			
	E	C	S	SiO <sub>2</sub> καθαρή
Χημική σύσταση (%)				
SiO <sub>2</sub>	54	60	65	>99,5
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	16	25	25	-
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	75	80	84	72
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2100-3400	2500-4400	2800-4800	3500-8800
Πυκνότητα (g/cm <sup>3</sup> )	2,54	2,50	2,48	2,20
Θερμοκρασία τήξης (°C)	900-1200	1400-1600	1400-1600	1720
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	550	650	650	750

Πίνακας Β

**E- glass (E=electrical):** Πρόκειται για τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα υαλονήματα με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, αντοχή, και δυσκαμψία, καθώς και πολύ καλή συμπεριφορά στην αλλαγή των καιρικών συνθηκών, αλλά με μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια.

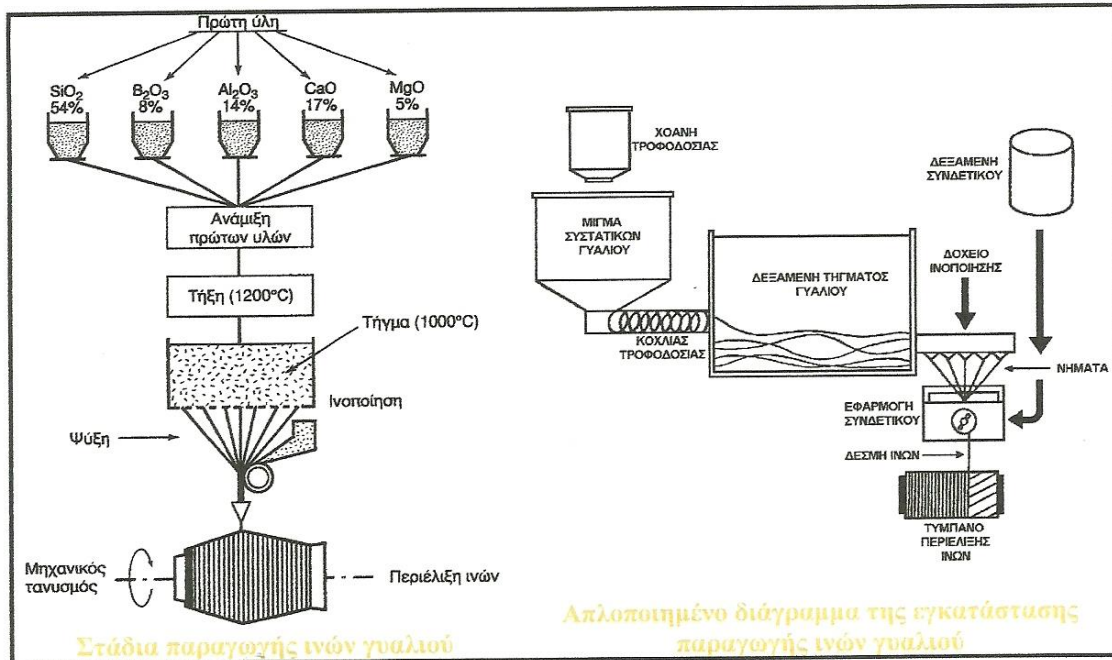
**C-glass (C=corrosion):** Υαλονήματα με υψηλή αντίσταση στη χημική διάβρωση, αλλά και με καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες από τις ίνες τύπου E, από τις οποίες όμως είναι ακριβότερες.

**S-glass (S=stiffness):** Ακριβότερο υλικό από το E-glass, αλλά με υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Χρησιμοποιείται κυρίως στην αεροπορική βιομηχανία.

Όταν περιέχονται μεγάλα ποσοστά SiO<sub>2</sub> (>99.5%) παρατηρούνται αυξημένες τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων της ίνας και της μέγιστης θερμοκρασίας χρήσης του σύνθετου. Γι' αυτό το λόγο, σε ειδικές εφαρμογές όπου απαιτούνται υψηλές μηχανικές ιδιότητες κάτω από υψηλή θερμοκρασία χρησιμοποιούνται ίνες από 100% καθαρή πυριτία.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των υαλονημάτων είναι το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα κύρια μειονεκτήματα τους εντάσσονται το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκτριβής(λύση της συνέχειας της επιφάνειας τους). Εγχαράξεις και εκδορές δημιουργούν περιοχές συγκέντρωσης τάσεων στην επιφάνεια της ίνας, με αποτέλεσμα την ταχεία υποβάθμιση των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της ικανότητας πρόσφυσης τους στη πολυμερική μήτρα.

Η παραγωγή των ινών γυαλιού γίνεται με εκβολή τήγματος γυαλιού διαμέσου μήτρας με διάτρητο πυθμένα και περιλαμβάνει τις ακόλουθες φάσεις:



Εικόνα 17

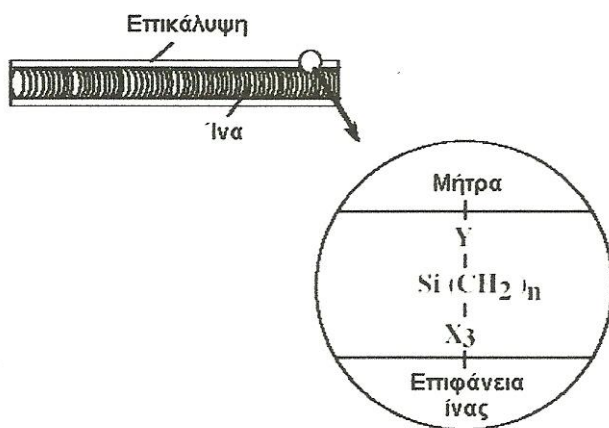
- Η πρώτη ύλη τοποθετείται σε δεξαμενή, όπου τήκεται.
  - Το τήγμα τοποθετείται σε σειρά κυλινδρικών δοχείων με διάτρητο πυθμένα (διάμετρος οπών 1-2 mm)
  - Το γυαλί ρέει μέσα από τις οπές του πυθμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας.
  - Οι παραγόμενες ίνες συγκεντρώνονται σε ένα σύνολο και τανύονται μηχανικά μέχρις ότου αποκτήσουν την κατάλληλη διάμετρο (1-15 μm) και ακολουθεί ελαφρός ψεκασμός τους με νερό (ψύξη).
  - Ακολούθως οι ίνες διέρχονται από μάντα που επιβάλλει σε αυτές προστατευτικό λιπαντικό συνδετικό υλικό (binder) ή ειδικά κολλοειδή πρόσθετα που δρουν ως προστατευτικές επικαλύψεις και συνεισφέρουν στην καλύτερη πρόσφυση ινών-μήτρας.
  - Τέλος, οι ίνες περιτυλίγονται ανά δέσμες (stand ή end) των 204 νημάτων (τυπική τιμή) γύρω από τύμπανο, που περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα (της τάξης των 50m/s).
  - Οι ρόλοι υαλονήματος υφίστανται ξήρανση πριν υποβληθούν σε οποιαδήποτε περαιτέρω διεργασία μορφής.
- Σημειώνονται τα ακόλουθα:
- Ο έλεγχος της διαμέτρου των ινών γίνεται με ρύθμιση της στάθμης τήγματος μέσα στη δεξαμενή, της πυκνότητας του, της διαμέτρου των οπών και της ταχύτητας περιστροφής του τυμπάνου.

- Κατά τη διάρκεια παραγωγής των ινών, πρέπει να αποφεύγεται η επαφή ινών μεταξύ τους, καθώς και με άλλα αντικείμενα, που μπορεί να προκαλέσουν επιφανειακές κακώσεις στην ίνα.

- Τα χημικά πρόσθετα (sizers) διακρίνονται σε προσωρινά και συμβατά. Τα προσωρινά πρόσθετα έχουν κύριο στόχο αφενός τη προστασία της ίνας έναντι μείωσης της αντοχής λόγω τριβής της με τις άλλες ίνες και αφετέρου τη σύνδεση των ινών μεταξύ τους στην περίπτωση που διαμορφωθούν σε πλέξη ύφανσης και ακόμη προσδίδουν στην ίνα αντιστατικές ιδιότητες.

Συνήθως χρησιμοποιούνται αμυλέλαια, που διευκολύνουν αποτελεσματικά την πρόσφυση ίνας και ρητίνης εμποτισμού. Τα προσωρινά πρόσθετα απομακρύνονται εύκολα με θέρμανση των ινών σε κλιματιζόμενο περιβάλλον σε θερμοκρασία > 340°C για χρονικό διάστημα 15-20h.

Τα συμβατά πρόσθετα έχουν στόχο τη βελτίωση της αρχικής πρόσφυσης ρητίνης-γυαλιού και τη μείωση των δυσάρεστων επιπτώσεων της υγρασίας ή άλλων περιβαλλοντικών επιδράσεων. Πρόκειται περί οργανοπυριτικών ενώσεων τύπου  $X_3Si(CH_2)_nY$ , όπου η Y ομάδα συμβατή προς την πολυμερική μήτρα, X υδρολυόμενη ομάδα στο πυρίτιο και n=0-3 η δράση των οποίων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα



Εικόνα 18

- Η αντοχή και η δυσκαμψία του γυαλιού προσδιορίζεται από την τρισδιάστατη δομή και διάταξη των συστατικών οξειδίων του. Λόγω αυτής της δομής τα υαλοήματα είναι ισότροπα υλικά και παρουσιάζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Η συμμετοχή και των μεταλλικών οξειδίων στη σύνθεση των ινών μπορεί να επιφέρει αλλαγές στις φυσικοχημικές τους ιδιότητες.

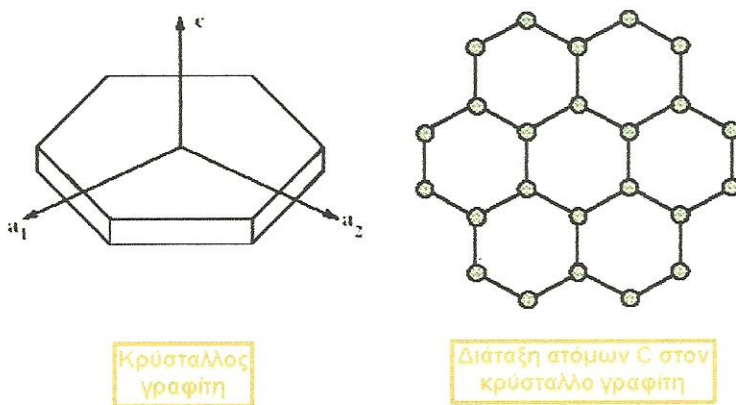
### 1.9.4 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ

Οι ίνες γραφίτη είναι η επικρατέστερη ενίσχυση υψηλής αντοχής και υψηλού μέτρου ελαστικότητας, η οποία χρησιμοποιείται για την παρασκευή υψηλών επιδόσεων σύνθετων υλικών ρητινικής μήτρας. Γενικά, όταν απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός μηχανικής συμπεριφοράς και ελάττωσης βάρους, οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι, συνήθως, ίνες άνθρακα.

Επίσης, οι ίνες άνθρακα προτιμούνται όταν η θερμική διαστολή ενός υλικού πρέπει να συγκρατηθεί σε χαμηλό επίπεδο ή όταν απαιτείται συμβατότητα των χαρακτηριστικών διαστολής δύο συνενωμένων διαφορετικών υλικών.

Η υπεροχή αυτή των ανθρακονημάτων οφείλεται στη φύση του άνθρακα (ως στοιχείου) και τους ενδοατομικούς δεσμούς που σχηματίζει με άλλα άτομα άνθρακα. Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους.

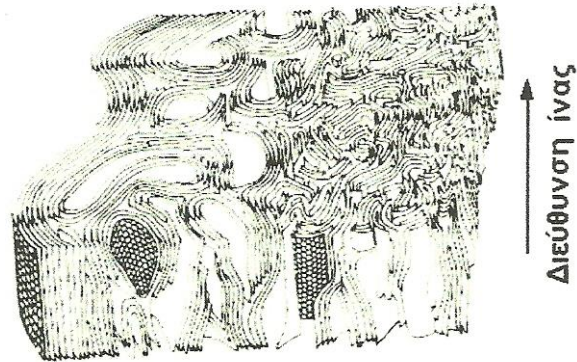
Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων είναι η υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή. Στη γραφιτική δομή τα άτομα C διατάσσονται πολύ πυκνά με τη μορφή εξαγωνικών επιπέδων όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Εικόνα 19

Ο ισχυρός δεσμός μεταξύ των ατόμων στις επίπεδες αυτές εξαγωνικές στρώσεις οδηγεί σε εξαιρετικά υψηλό μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, ο ασθενής τύπου Van Der Waals δεσμός που υφίσταται μεταξύ γειτονικών στρώσεων, έχει ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερης τιμής μέτρο ελαστικότητας σε αυτή τη διεύθυνση. Τυπική δομή του ανθρακονήματος, όπως έχει ληφθεί

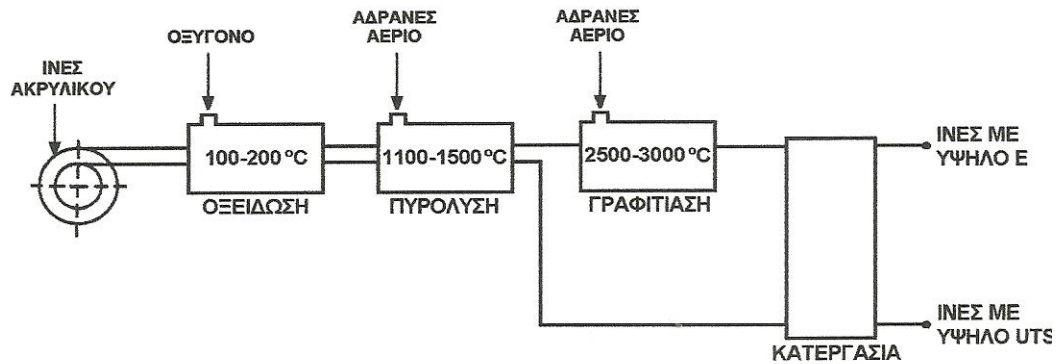
από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 20

Στην παραγωγή ανθρακονημάτων, ως πρώτη ύλη χρησιμοποιούνται ποκλυμερικές ίνες πολυακρυλονιτρίλιου (PAN), ίνες τεχνητής μέταξας (rayon) και πίσσα.

Η παραγωγή ινών γραφίτη από ίνες (PAN) πραγματοποιείται σε τρία στάδια:



Εικόνα 21

- Οξείδωση των ινών PAN στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200°C), με ταυτόχρονη εφαρμογή τάσης, η οποία είναι απαραίτητη για την ευθυγράμμιση των αλυσίδων του πολυμερούς.

- Πυρόλυση, υπό τάση, σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία 1100-1500 °C. Οι παραγόμενες ίνες στο στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλής αντοχής (high strength carbon fibers) και η αντοχή τους φτάνει τα 3000 MPa.

- Η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε υψηλές θερμοκρασίες (2500-3500 °C), οπότε πραγματοποιείται γραφίτωση, με ταυτόχρονη ανακρυστάλλωση, που οδηγεί σε ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως

ίνες υψηλού μέτρου ελαστικότητας (high module carbon fibers) και έχουν μέτρο ελαστικότητας περίπου 400GPa, η δε διάμετρος τους είναι περίπου 10μm. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ινών άνθρακα που έχουν παραχθεί σε δύο στάδια οξείδωση και πυρόλυση) και σε τρία στάδια (οξείδωση, πυρόλυση, θέρμανση σε υψηλή θερμοκρασία), αντίστοιχα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	180-230	350-420
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2500-3400	1900-2300
% περιεκτικότητα άνθρακα	95-98	99
Πυκνότητα (g/cm <sup>3</sup> )	1,8	1,9
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	2000	2500

Πίνακας C

Σημειώνεται τα ακόλουθα:

- Σε οξειδωτική ατμόσφαιρα, η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης των ανθρακονημάτων περιορίζεται στους 500 °C και για τους δύο τύπους ινών. Κατά το σχεδιασμό του συνθέτου πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη και η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης της μήτρας.

- Οι ιδιότητες των χρησιμοποιούμενων ανθρακονημάτων εξαρτώνται σημαντικά από την αρχιτεκτονική των ινών του PAN (μονοδιευθυντικές ίνες, διδιάστατο πλέγμα, τρισδιάστατο πλέγμα). Ο τρόπος διευθέτησης των ινών αυτών καθορίζει και το βαθμό ανισοτροπίας των ανθρακονημάτων που προκύπτουν και μπορεί να ποικίλλει από την πλήρη ισοτροπία ως την πλήρη ανισοτροπία.

- Η δυνατότητα επιλογής, από ένα μεγάλο εύρος τιμών της θερμοκρασίας κάθε σταδίου παραγωγής ανθρακονημάτων, δίνει την ευχέρεια παραγωγής ανθρακονημάτων διαφορετικού βαθμού γραφιτίας και διαφορετικών ιδιοτήτων (οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες, όπως η θερμική και η ηλεκτρική αγωγιμότητα, εξαρτώνται από το βαθμό γραφιτίας και το βαθμό ανισοτροπίας). Γενικά, όσο καλύτερα προσανατολισμένες είναι οι ίνες και όσο υψηλότερη περιεκτικότητα σε γραφίτη διαθέτουν τόσο καλύτερες μηχανικές ιδιότητες επιδεικνύουν.

- Τέλος το κόστος παραγωγής των ινών γραφίτη είναι δέκα φορές τουλάχιστον υψηλότερο από το κόστος παραγωγής των ινών γυαλιού.

### 1.9.5 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Οι πιο διαδεδομένες ίνες πολυμερούς είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Τα νήματα Nylon και πολυεστέρα παράγονται με φυγοκεντρική περιδίνηση τήγματος, ενώ ακρυλικά και κυτταρινικά νήματα παρασκευάζονται με φυγοκεντρική περιδίνηση διαλύματος και συνακόλουθες τεχνικές καθίζησης ιζήματος. Η αντοχή τους δεν ξεπερνά τα 10Pa, ενώ το μέτρο ελαστικότητας πλησιάζει τα 1000 Pa. Παρόλο που από μηχανικής άποψης δεν κατατάσσονται στις ίνες υψηλής απόδοσης, εντούτοις το χαμηλό κόστος παραγωγής τους τις καθιστά δημοφιλείς στην αγορά.

Η πρώτη υψηλής απόδοσης οργανική ίνα αραμιδίου κατασκευάστηκε από την DuPont και έγινε γνωστή με την εμπορική ονομασία Kevlar και παράγεται σε τρεις τύπους:

- **Kevlar-29:** Με μέτρο ελαστικότητας 60GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6GPa.

- **Kevlar-49:** Με μέτρο ελαστικότητας 120 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6 GPa.

- **Kevlar-149:** Με μέτρο ελαστικότητας 180 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,4 GPa.

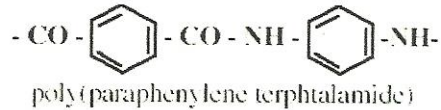
Η πυκνότητα και των τριών τύπων είναι ίδια ( $1.45 \text{ g/cm}^3$ ), ενώ η διαφορετική ελαστικότητα οφείλεται στο γεγονός της βελτιωμένης ευθυγράμμισης των μοριακών αλυσίδων, που αυξάνει την δυσκαμψία στη διεύθυνση του άξονα της ίνας. Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες των ινών Kevlar.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	Kevlar 29	Kevlar 49
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	60	130
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2700	3600
Επιμήκυνση θραύσης (%)	4.5	2
Πυκνότητα ( $\text{g/cm}^3$ )	1.45	1.45
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης ( $^{\circ}\text{C}$ )	200	200
Θερμοκρασία αστοχίας ( $^{\circ}\text{C}$ )	400	425

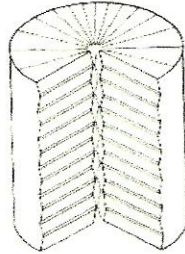
Πίνακας D

Οι υψηλές τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων του Kevlar οφείλονται στο γεγονός ότι οι πολυμερικές δομικές αλυσίδες του υλικού είναι αυτές καθ'αυτές πιο ισχυρές και συντάσσονται έτσι, ώστε να δημιουργούν ένα σταθερότερο πλέγμα, σε μορφή επίπεδης ταινίας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





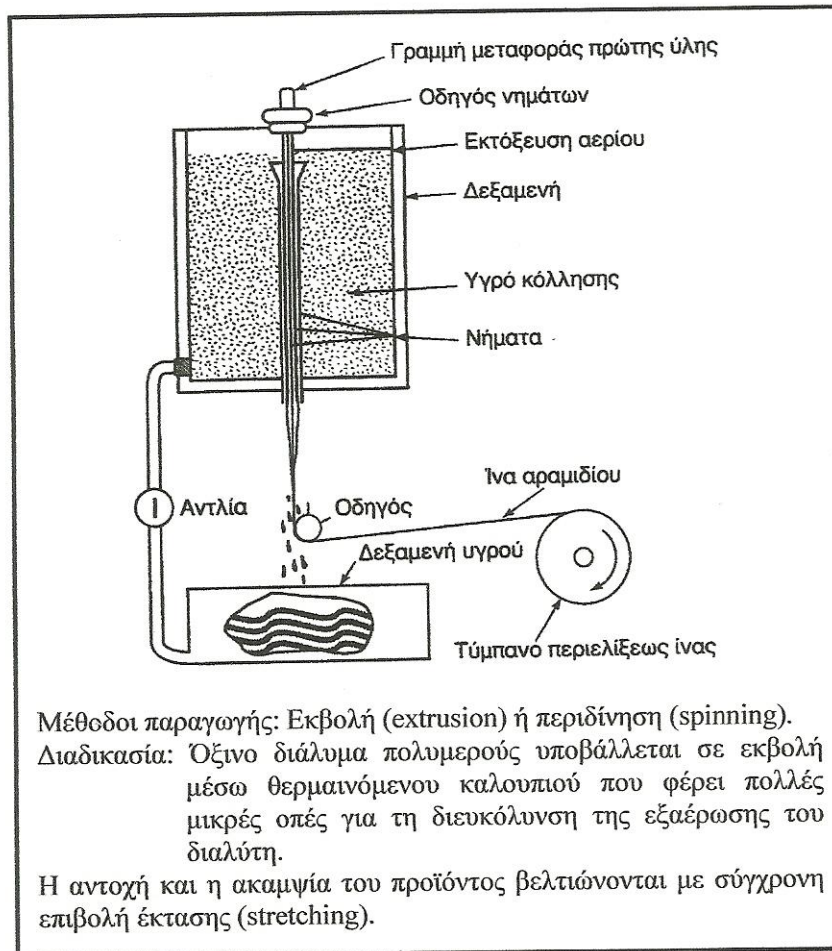
Τύπος αραμιδίου



Δομή ίνας Kevlar

Εικόνα 22

Ο κυλινδρικός φλοιός της ίνας περικλείει και συγκρατεί το υλικό του πυρήνα αποδίδοντας στο προϊόν ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις κατά την αξονική διεύθυνση, αλλά φτωχή συμπεριφορά κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Επιπλέον, ενώ στην εφελκυστική καταπόνηση το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά με παραμόρφωση έως και 2%, η μεγάλη του αδυναμία εμφανίζεται στη θλίψη, όπου σε 0,3% θλιπτική παραμόρφωση αναπτύσσεται πλαστικού τύπου αστοχία. Αξιοσημείωτο, όμως, είναι ότι η αστοχία αυτή δεν είναι καταστροφική, αλλά έχει τη μορφή πτυχώσεων (kink bands).



Εικόνα 23

## 1.9.6 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

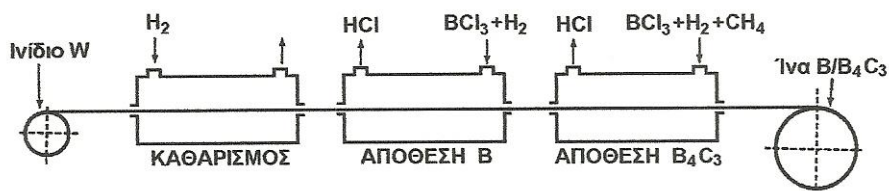
Διάφορα μέταλλα όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W) θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαιρετικά ενισχυτικά συνθέτων υλικών, αφού παρουσιάζουν υψηλή τιμή ακαμψίας σε σχέση με το ειδικό βάρος τους (ειδική ακαμψία). Το βόριο είναι το περισσότερο υποσχόμενο υλικό για την κατασκευή ινών ενίσχυση, ωστόσο οι τεχνικές παραγωγής μεταλλικών ινών ενίσχυσης εξακολουθούν να παραμένουν πολύ δαπανηρές.

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές για την παραγωγή ινών βορίου:

- Αναγωγή από αλογονίδιο του βορίου

Αλογονίδιο του βορίου (συνήθως  $\text{BCl}_3$ ) ανάγεται από υδρογόνο σε έναν κλειστό θάλαμο υψηλής θερμοκρασίας ( $1100\text{ }^\circ\text{C}$ ) και αποτίθεται σε πολύ λεπτό νήμα βολφραμίου, διαμέτρου 10-15  $\mu\text{m}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Η διάμετρος των παραγόμενων ινών με αυτήν την τεχνική

κυμαίνεται μεταξύ 100-200  $\mu\text{m}$ , ενώ οι ίνες παρουσιάζουν εξαιρετική δυσκαμψία και μηχανική αντοχή.



Εικόνα 24

- Απόθεση με τεχνική CVD

Το βόριο αποτίθεται σε νήμα άνθρακα ή βολφραμίου με την τεχνική της χημικής εναπόθεσης ατμών (CVD). Η τεχνική αυτή είναι η οικονομικότερη από την προηγούμενη, αλλά το προϊόν έχει χαμηλότερη μηχανική αντοχή.

Οι ίνες βορίου έχουν υψηλή μηχανική αντοχή ( $E=300-420$  GPa,  $UTS=3000-3700$  MPa), ενώ οι τιμές των ιδιοτήτων τους διατηρούνται σταθερές ως τους  $500$  °C. Για τη χρήση τους σε υψηλότερες θερμοκρασίες, θα πρέπει να χρησιμοποιείται προστατευτικό επίστρωμα καρβιδίου του πυριτίου (ίνες Borsic) ή νιτριδίου του βορίου. Τα επιστρώματα αυτά αποτρέπουν την αντίδραση του υλικού ενίσχυσης με αυτό της μήτρας, δεδομένου ότι σε υψηλές θερμοκρασίες, κυρίως σε σύνθετα με μεταλλική μήτρα τιτανίου ή αλουμινίου, ευνοούνται η διάχυση μέσω της διεπιφάνειας ίνας-μήτρα και οι αντιδράσεις σε στερεά κατάσταση που οδηγούν στο σχηματισμό εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων και αστοχία του συνθέτου.

### 1.9.7 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Οι κεραμικές ίνες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου και πυριτίου ( $\text{SiC}$ ) και αλουμινίου ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), ενώ σπανιότερα συναντώνται και ίνες  $\text{Si}_3\text{N}_4$ ,  $\text{BeO}$ ,  $\text{B}_4\text{C}$  και  $\text{ZrO}_2$ .

Το καρβίδιο του πυριτίου ( $\text{SiC}$ ) και αλούμινας ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως ενισχυτικό υλικό είτε με τη μορφή ινών είτε με τη μορφή φυλλιδίων. Οι ίνες  $\text{SiC}$  παρουσιάζουν υψηλές τιμές αντοχής και ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από τα φυλλίδια. Οι μέθοδοι παραγωγής των υπόψη ινών συνίστανται στις παρακάτω:

- Με χημική εναπόθεση ατμών (CVD) χλωριούχου σιλανίου σε ίνες άνθρακα. Οι παραγόμενες ίνες έχουν πυρήνα διαμέτρου 10-25  $\mu\text{m}$  και εξωτερική διάμετρο 100-150 $\mu\text{m}$ .

- Από πολυμερικές ίνες (Nicalon).

Θέρμανση σε κενό σε θερμοκρασία 850 °C μετατρέπει την πολυμερική ίνα σε ανόργανο SiC , ενώ θέρμανση σε υψηλότερη θερμοκρασία (>1000 °C) προκαλεί κρυστάλλωση σε β- SiC. Οι παραγόμενες ίνες έχουν διάμετρο 10-15μm.

- Τριχίτες SiC από φλοιό ρυζιού.

Ο φλοιός του ρυζιού περιέχει ~15% κ.β SiO<sub>2</sub>

Θέρμανση σε θερμοκρασία 700-900 °C οδηγεί σε υπόλειμμα SiO<sub>2</sub> και ελεύθερο άνθρακα.

Θέρμανση του υπολλείματος σε θερμοκρασία ~1500 °C και σε περιβάλλον αζώτου ή αμμωνίας οδηγεί στο σχηματισμό SiC.

Οι παραγόμενοι τριχίτες έχουν διάμετρο ~0,1-1μm και μήκος ~50μm.

Παρακάτω παρουσιάζεται συγκριτικός πίνακας των ιδιοτήτων των ινών από κάθε μέθοδο.

Γενικά οι μέθοδοι παρασκευής των κεραμικών ινών είναι ιδιαίτερα δαπανηρές.

Μέθοδος	CVD	Nicalon	Τριχίτες
<b>Ιδιότητα</b>			
Πυκνότητα , ρ (g/cm <sup>3</sup> )	3.3	2.6	-
Αντοχή, UTS (MPa)	3500	2000	7000
Μέτρο ελαστικότητας, E (GPa)	430	180	480
Διάμετρος ίνας, d (μm)	140	15	<1

Πίνακας Ε

Το SiC παρουσιάζει σταθερή μηχανική αντοχή ως τους 1400 °C, ωστόσο η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρήσης του, περιορίζεται στους 900 °C, λόγω της σημαντικής δραστηριότητας του πάνω από τη θερμοκρασία αυτή.

Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) διαμέτρου 250μm έχουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες. Λόγω της ισχυρής φύσεως των χημικών δεσμών, η σταθερότητα των μηχανικών τους ιδιοτήτων διατηρείται ως τους 800 °C. Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας είναι εξαιρετικά ευαίσθητες έναντι επιφανειακής φθοράς που οδηγεί ταχύτατα σε αστοχία.

### 1.9.8 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS)

Οι τριχίτες είναι νηματικοί μονοκρύσταλλοι που παράγονται με αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα, κάτω από αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας. Η διάμετρος τους είναι της τάξης του

1 $\mu\text{m}$ , ενώ το μήκος τους μπορεί να φτάσει τα μερικά χιλιοστά και παρουσιάζουν τις μηχανικές ιδιότητες ενός τέλει κρυστάλλου. Οι εξωτερικές τους επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.

Οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες είναι από αλουμίνα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρύλλια και νιτρίδιο του πυριτίου. Η παραγωγή τριχιτών σε βιομηχανική κλίμακα είναι δύσκολη. Στο πίνακα γίνεται σύγκριση των ιδιοτήτων ινών τριχιτών από SiC και Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	SiC <sub>INA</sub>	SiC <sub>ΤΡΙΧΙΤΗΣ</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <sub>INA</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <sub>ΤΡΙΧΙΤΗΣ</sub>
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	480	840	500	755
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2300	21000	2000	19500
Πυκνότητα (g/cm <sup>3</sup> )	3,2	3,2	4,0	4,0
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	900	1600	800	1300

Πίνακας F

### 1.9.9 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

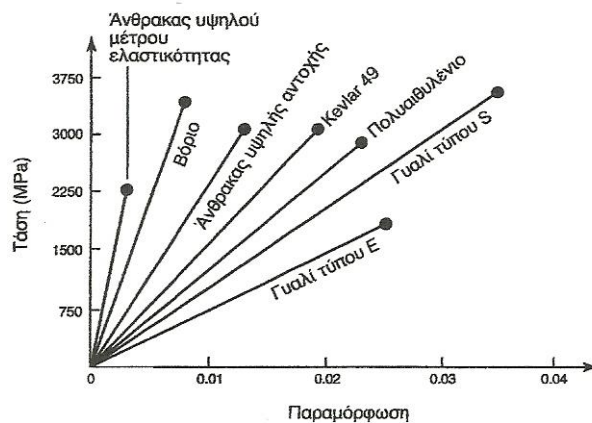
Αρκετά ορυκτά που βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν φθινό ενισχυτικό υλικό, αλλά χαμηλών προδιαγραφών. Ευρύτερα χρησιμοποιούμενα τέτοια ορυκτά είναι ο αμίαντος και η μαρμαρυγία (mica).

Οι ίνες αμιάντου αποτελούνται από 500 περίπου στοιχειώση ινίδια, διαμέτρου ~10nm, και έχουν διάμετρο ~2010 $\mu\text{m}$  και μήκος αρκετά cm. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι θερμοκρασία 500 °C, οπότε η μηχανική αντοχή του υλικού μειώνεται σημαντικά. Το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι της τάξης των 160GPa, ενώ η μηχανική αντοχή μπορεί να φθάσει μέχρι 5500GPa. Ο αμίαντος λόγω του χαμηλού του κόστους χρησιμοποιείται ευρύτατα.

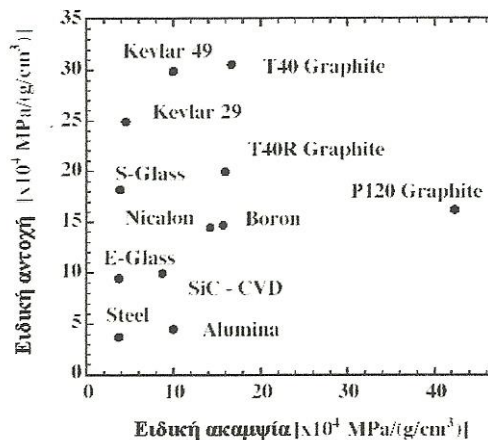
Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών, χαρακτηρίζονται από τέλει σχισμό και αποχωρίζονται εύκολα από το πέτρωμα με μορφή φυλλιδίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ως συστατικό ενίσχυσης του σύνθετου υλικού. Η αντοχή σε εφελκυσμό μπορεί να φθάσει μέχρι 2500 MPa (τέλεια φυλλίδια), ενώ λόγω ατελειών στις άκρες των φυλλιδίων, οι συνήθεις τιμές της αντοχής κυμαίνονται στην περιοχή 700-900MPa. Το μέτρο ελαστικότητας των μαρμαρυγιών είναι περίπου 250 GPa και η πυκνότητα τους 2,8 g/cm<sup>3</sup>

### 1.9.10 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ

- Ως προς την ειδική αντοχή και ειδική ακαμψία



Εικόνα 25



Εικόνα 26

- Ως προς την θερμική ευστάθεια

Υα	T <sub>max</sub> (°C)
Spectra	150
Kevlar	250
Glass	800
SiC	1000
Alumina	1370
Carbon	2000*

\* Παρουσία οξυγόνου: T<sub>max</sub>=500 °C

Πίνακας G

- Ως προς την παραμόρφωση θραύσης

Υα	Παραμόρφωση θραύσης (%)
Kevlar	3-4
Glass	2
Carbon	1
Ceramic	<1

Πίνακας Η

## 1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από πολύ μικρά σωματίδια σε σχήμα κόκκου, κάποιου ισχυρού και ανθεκτικού υλικού, τα οποία είναι διεσπαρμένα μέσα στη μήτρα η οποία είναι από διαφορετικό υλικό. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή μη, όπως επίσης και η μήτρα. Τα κοκκώδη υλικά έχουν υποδεέστερες μηχανικές ιδιότητες σε σχέση με τα ινώδη, μιας και η συνεισφορά των σωματιδίων στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου είναι μικρότερη από αυτή των ινών. Ένα σημαντικό γνώρισμα των κοκκωδών σύνθετων υλικών είναι η χαμηλή συνήθως πυκνότητα σε σωματίδια, πράγμα που προσδίδει αρκετές καλές ιδιότητες σε αυτά τα υλικά. Ως πρώτη ύλη στα κοκκώδη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια φυσικά ορυκτά όπως ο τάλκης, ενώ η διαδικασία μορφοποίησης αυτών των υλικών είναι σχετικά απλή και αυτοματοποιημένη, γεγονός που επιτρέπει την μαζική παραγωγή προϊόντων. Κοκκώδη υλικά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μη υψηλών απαιτήσεων όπως αντικείμενα καθημερινής χρήσης, εξαρτήματα αυτοκινήτων, και άλλα. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής υφής ή μη και δύναται να συνδυασθούν με διάφορων τύπων μήτρες. Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

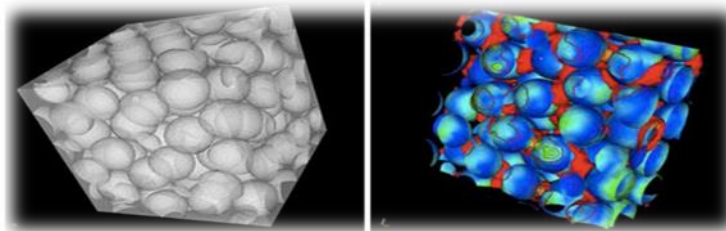
### 1. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να

αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

2. **Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας**

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από το μέταλλο αυτό, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες(αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.



Εικόνα 27

3. **Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Ένα παράδειγμα υλικού αυτής της κατηγορίας είναι τα κράματα χαλκού ή χάλυβα που περιέχουν κόκκους μόλυβδου, η ύπαρξη των οποίων καθιστά τα παραπάνω υλικά κατεργάσιμα στις εργαλειομηχανές. Επίσης πολλά μέταλλα που έχουν πολύτιμες ιδιότητες αλλά είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όλκιμο στη θερμοκρασία αυτή και διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

4. **Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται **κεραμομέταλλα**. Τα κεραμομέταλλα



μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι **κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το δεύτερο είδος είναι τα **κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά δύναται να ταξινομηθούν και με κριτήριο το μέγεθος των κόκκων ως εξής:

1. Σύνθετα με ενίσχυση σωματιδίων μεγάλου μεγέθους.

Τα σωματίδια έχουν διάμετρο λίγων  $\mu\text{m}$  και περιέχονται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 25%. Η συνήθης κατ' όγκο περιεκτικότητα κυμαίνεται ανάμεσα 60-90%.

2. Σύνθετα με ενίσχυση μικρών σωματιδίων σε διασπορά.

Τα εγκλείσματα, που συνήθως πρόκειται για οξείδια, περιέχονται στο σύνθετο σε συγκεντρώσεις μικρότερες του 15% κατ' όγκο. Η διάμετρος των σωματιδίων ποικίλει μεταξύ 0,01-0,1  $\mu\text{m}$ . Η ισχυροποίηση της μήτρας επιτυγχάνεται με την παρεμπόδιση της μετάδοσης των διαταραχών εξαιτίας της ύπαρξης σωματιδίων.

## 1.11 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα πολύστρωτα(laminate) ή στρωματικά σύνθετα υλικά είναι μια κατηγορία σύνθετων υλικών στην οποία τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να συνδυασθούν ή και να αποτελέσουν τις στρώσεις (στρώματα ή φύλλα(ply)) που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση και στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

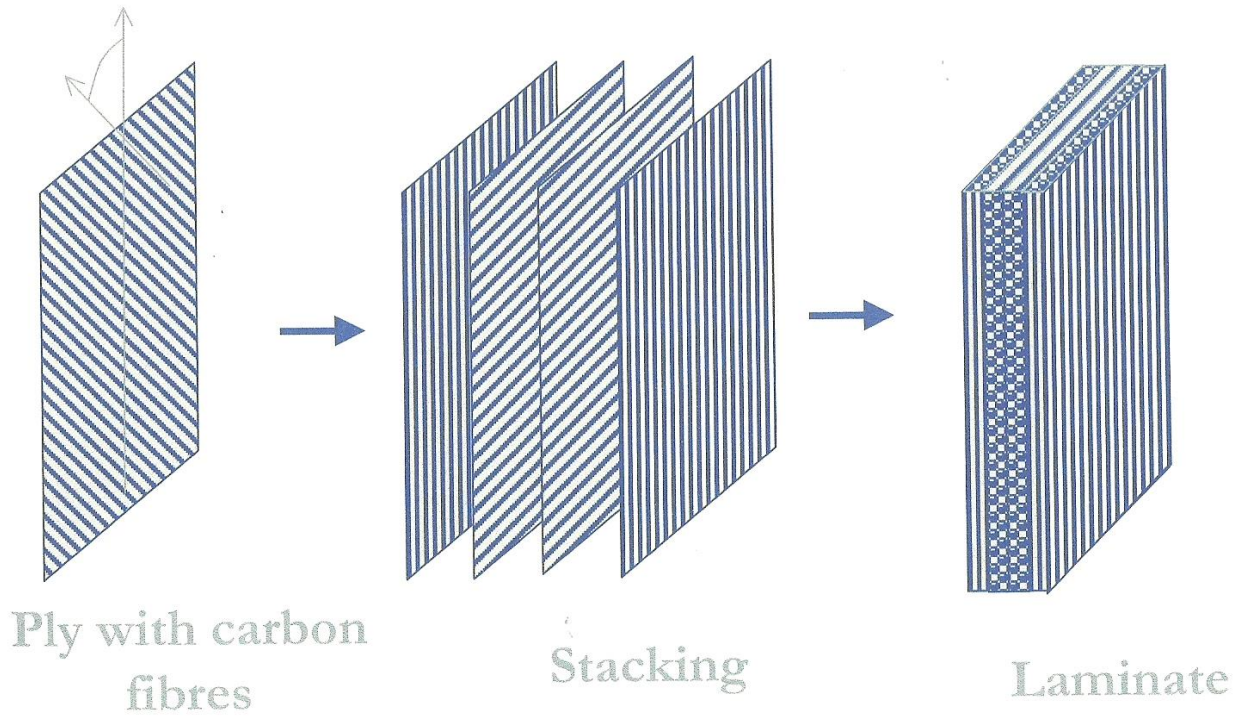
Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από ίνες υψηλής αντοχής και υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας, «δεμένες» με ένα πολυμερές, μεταλλικό

ή κεραμεικό συνδετικό υλικό. Να πούμε εδώ ότι οι ίνες των στρώσεων μπορούν να είναι και διαφορετικά προσανατολισμένες(Εικ.25), πράγμα το οποίο βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού σε πολλές διευθύνσεις. Ίνες που χρησιμοποιούνται συνήθως, περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου. Μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικές ρητίνες, οι πολυϊμίδες, το αλουμίνιο, το τιτάνιο και η αλουμίνα. Επίσης οι επιμέρους στρώσεις γενικά είναι ορθότροπες (δηλαδή, με κύριες ιδιότητες σε ορθογώνιες κατευθύνσεις) ή εγκαρσίως ισότροπες (με ισότροπες ιδιότητες στο εγκάρσιο επίπεδο). Ωστόσο οι επιμέρους στρώσεις μπορούν να παρουσιάζουν και ανισότροπες (με μεταβλητή κατεύθυνση των κύριων ιδιοτήτων), ορθότροπες, ή ημι-ισότροπες ιδιότητες. Τα ημι-ισοτροπικά ελάσματα εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητη από την κατεύθυνση) απόκριση εντός του επιπέδου αλλά δεν περιορίζονται σε ισοτροπική (καμπτική) απόκριση εκτός αυτού.

Τα κυριότερα είδη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών είναι:

- 1. τα διμέταλλα*
- 2. τα επιμεταλλωμένα μέταλλα*
- 3. η ύαλος ασφαλείας*
- 4. τα υλικά με επίστρωση πλαστικού*

# Carbon epoxy laminated composites

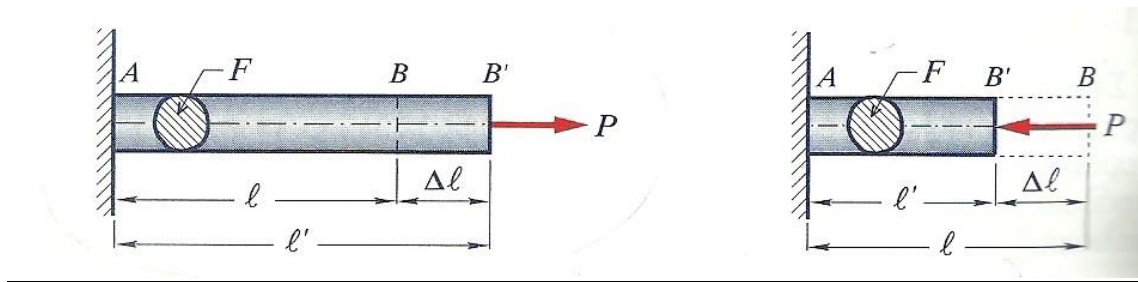


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

### 2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

#### 2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

##### Νόμος του Hooke:



Εικόνα 29 (α)

Ο Robert Hooke (1678) απέδειξε πειραματικά ότι υπάρχει σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης η οποία διατυπώνεται παρακάτω.

Έστω η πρισματική αβαρής ράβδος  $AB$ , η οποία καταπονείται από αξονική εφελκυστική δύναμη  $P$  που ασκείται στο κέντρο βάρους  $B$  της διατομής της Εικόνας (29 α). Έστω επίσης  $F$  το εμβαδό της διατομής, το οποίο θεωρείται σταθερό σε ολόκληρο το μήκος  $l$  της ράβδου.

Με την επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης  $P$  η ράβδος θα επιμηκυνθεί κατά  $\Delta l$  και τελικά το σημείο  $B$  εφαρμογής της δύναμης, θα μετατοπιστεί δεξιότερα στη θέση  $B'$ , οπότε το τελικό μήκος της ράβδου, θα γίνει  $l'$ .

Ο Hooke πειραματιζόμενος με τέτοιες πρισματικές ράβδους ποικίλων υλικών, υποβαλλόμενες σε μονοαξονικό εφελκυσμό εντός της περιοχής της ελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, παρατήρησε ότι η επιμήκυνση  $\Delta l$  της ράβδου ήταν ανάλογη τόσο προς την εφελκύουσα δύναμη  $P$ , όσο και προς το αρχικό της μήκος  $l$  και αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού  $F$  της διατομής.

Η πλήρης μαθηματική δαιτύπωση του νόμου του Hooke είναι η παρακάτω:

$$\Delta l = \frac{P l}{E F} \quad (2.1.1)$$

Όπου  $\Delta\ell = \ell' - \ell = (BB')$  είναι η παραμόρφωση της ράβδου που για τον εφελκυσμό καλείται επιμήκυνση ή μήκυνση ενώ για τη θλίψη επιβράχυνση ή βράχυνση, (σε m, cm, mm κλπ).

$P$ , είναι το αξονικό φορτίο (δύναμη) εφελκυσμού (σε N, t, κλπ).

$F$ , είναι το εμβαδό της κάθετης διατομής στον άξονα της ράβδου (σε  $m^2, cm^2$ , κλπ).

$E$ , είναι ο συντελεστής αναλογίας, που είναι η ελαστική σταθερά η οποία εξαρτάται από το είδος του υλικού. Η σταθερά αυτή ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young (σε  $N/m^2$ , at, κλπ).

Ο νόμος αυτός επιβεβαιώθηκε στη συνέχεια από πολλούς ερευνητές, οι οποίοι πειραματίστηκαν σε μεγάλο πλήθος δοκιμίων και από διάφορα υλικά. Διαπιστώθηκε δε ότι αυτός ισχύει όχι μόνο για δοκίμια υποβαλλόμενα σε εφελκυσμό αλλά και θλίψη.

Με την παραδοχή ότι οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις σε μία τυχαία διατομή της ράβδου κατανέμονται ομοιόμορφα σε αυτήν (όπως συμβαίνει περίπου και στην πράξη) και αν αμελήσουμε το ίδιο βάρος της, η ορθή τάση  $\sigma$  είναι  $\sigma = P/F$ , η δε ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon$  από τη σχέση ορισμού της είναι  $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$ .

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, ο νόμος του Hooke γράφεται και με την εξής απλούστερη μορφή:

$$\sigma = \varepsilon E \quad (2.1.2)$$

Η ανωτέρω εξίσωση εκφρασμένη με λόγια, διατυπώνει συνοπτικά το νόμο του Hooke με τη παρακάτω φράση:

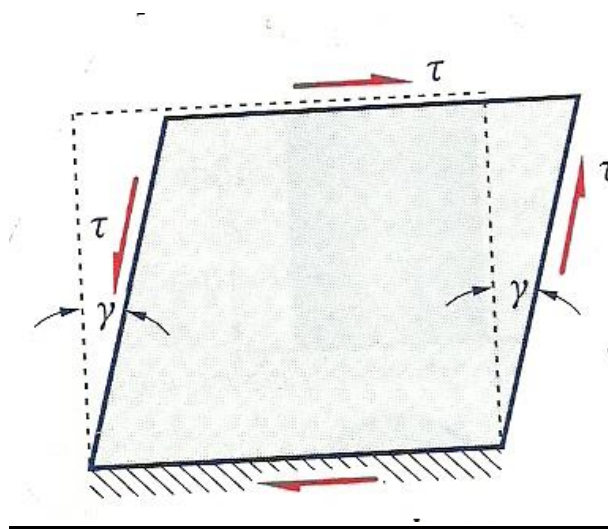
« Η τάση είναι ανάλογη προς την ανηγμένη παραμόρφωση ».

Το μέτρο ελαστικότητας  $E$  είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της τάσης και της ανηγμένης παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από την ανωτέρω εξίσωση. Λύνοντας τη δε ως προς  $E$  έχουμε :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.1.3)$$

Επειδή η ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon$  είναι αδιάστατο μέγεθος, το μέτρο ελαστικότητας  $E$  έχει μονάδες τάσης. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το  $E$  αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη  $\sigma$ , η οποία θα προκαλούσε ανηγμένη παραμόρφωση  $\varepsilon = 1$ , δηλαδή  $\Delta\ell = \ell$  ή διαφορετικά, αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη η οποία θα διπλασίαζε το αρχικό μήκος μιας ράβδου.

**Μέτρο Διάτμησης:**



Εικόνα 29 (β)

Διαπιστώσαμε ότι ο νόμος του Hooke συνδέει τις ορθές τάσεις με την ανηγμένη παραμόρφωση στην ελαστική περιοχή, με την γραμμική σχέση  $\sigma = \varepsilon E$ . Αντίστοιχα ο νόμος του Hooke συνδέει τις διατμητικές τάσεις  $\tau$  με τη γωνιακή παραμόρφωση  $\gamma$  με την ανάλογη γραμμική σχέση.

$$\tau = G\gamma \text{ όπου } \gamma \text{ σε rad.} \quad (2.1.4)$$

Το  $G$  είναι σταθερή ποσότητα που έχει διαστάσεις τάσης, όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση και χαρακτηρίζει τις μηχανικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών. Είναι δε κάτι ανάλογο του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και ονομάζεται μέτρο διάτμησης.

**Λόγος Poisson:**

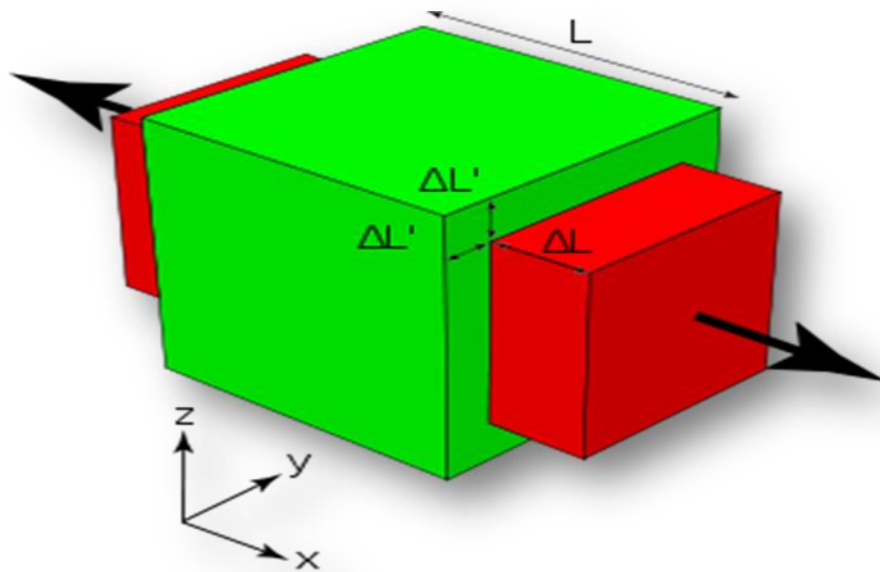
Όπως είναι γνωστό μία πρισματική ράβδος μήκους  $\ell$ , με την επενέργεια εφελκυστικής δύναμης  $P$  παρουσιάζει μεταβολή και συγκεκριμένα αύξηση του ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων  $\varepsilon_y$  και  $\varepsilon_z$  κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  αντίστοιχα, προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό  $\nu$ , σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **λόγος του Poisson** ή **συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης**.

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (2.1.5)$$

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί, το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.1.5), δικαιολογείται. Ο λόγος Poisson είναι «καθαρός» αριθμός, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος ή ίσος από 0.5 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τα μέταλλα για παράδειγμα ισχύει ότι

$0.25 \leq \nu \leq 0.35$ . Ο λόγος Poisson παίρνει την μεγαλύτερή του τιμή για κάποιο υλικό, στο όριο ανάμεσα στην «ελαστική» και «πλαστική» περιοχή, όπου και σταματά να ισχύει ο νόμος του Hooke.

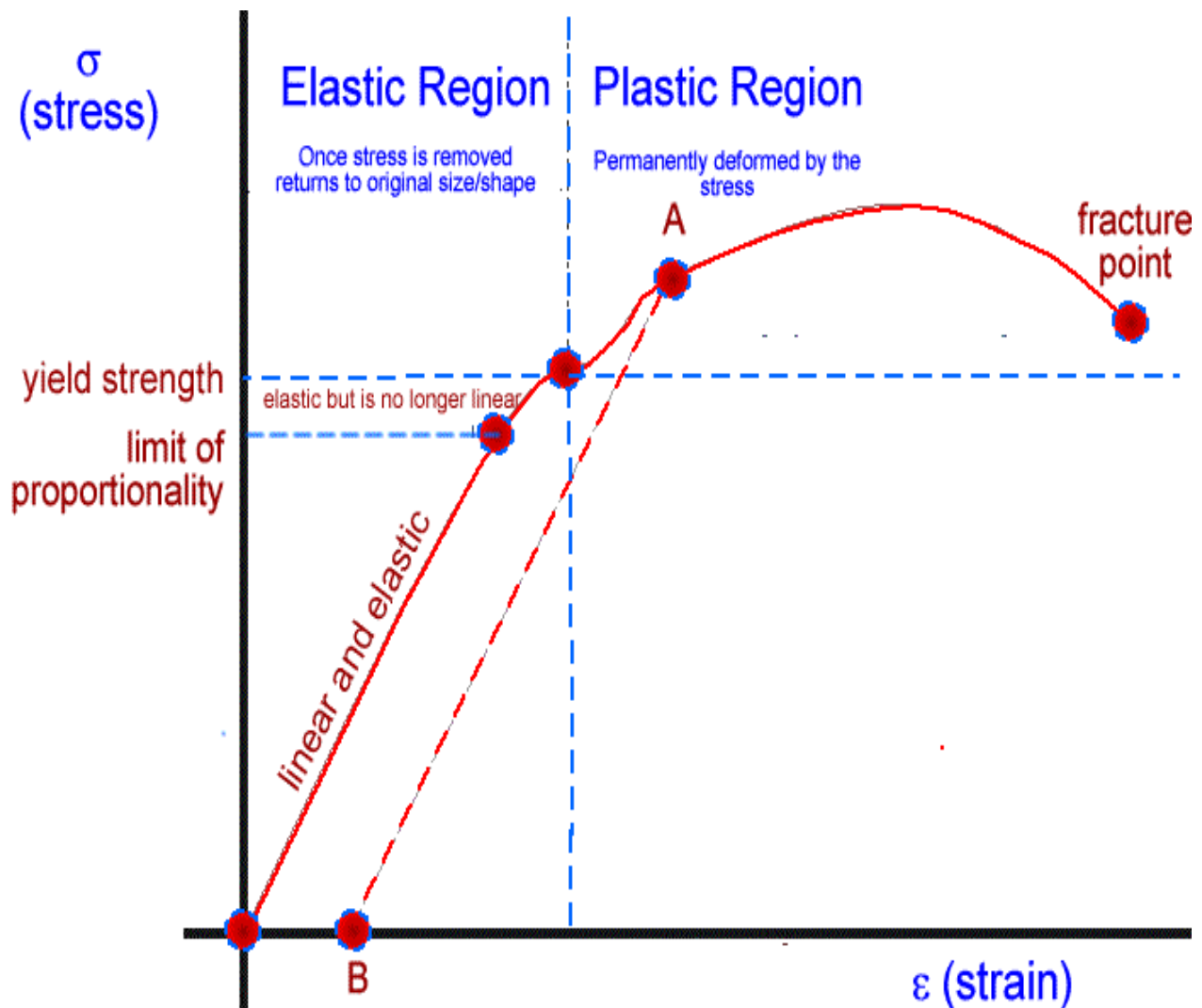


Εικόνα 30

**Ομοιογενές υλικό:** ονομάζεται εκείνο το υλικό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Διαφορετικά λέγεται **ανομοιογενές**.

**«Τελείως ελαστικό» σώμα:** ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και όγκο μετά την αποφόρτιση. Οι δε, προκαλούμενες παραμορφώσεις, ονομάζονται τότε «ελαστικές».

**«Τελείως πλαστικό» σώμα:** χαρακτηρίζεται το σώμα εκείνο, το οποίο παραμένει απολύτως στη παραμορφωμένη κατάσταση που έφτασε και μετά την αποφόρτιση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα έχει υποστεί μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση.



Εικόνα 31(Διάγραμμα σ-ε)

**Ανηγμένη διόγκωση:**

Κατά την καταπόνηση μιας ράβδου σε εφελκυσμό πριν από την επιβολή του εξωτερικού φορτίου, η ράβδος είχε μήκος  $\ell$  (Εικόνα 29), εμβαδό διατομής  $F$  ανάλογο του τετραγώνου της διάστασης  $b$ , δηλαδή  $F = \lambda b^2$  και όγκο  $V = \ell F = \lambda \ell b^2$ , όπου το  $\lambda$  είναι καθαρός αριθμός χαρακτηριστικός του είδους της διατομής.

Μετά την επιβολή του εφελκυστικού φορτίου και την επέλθουσα παραμόρφωση, το τελικό μήκος έστω  $\ell'$  της ράβδου γίνεται:

$$\ell' = \ell + \Delta\ell = \ell(1 + \varepsilon) \tag{2.1.6}$$



Η τελική διάσταση της εγκάρσιας πλευράς  $b'$  της ράβδου, προκύπτει από τη σχέση ορισμού του λόγου Poisson  $\nu$  και είναι:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = -\frac{b' - b}{\varepsilon b} \Rightarrow b' = b(1 - \nu\varepsilon) \quad (2.1.7)$$

Το τελικό εμβαδό  $F'$  της διατομής μετά την παραμόρφωση είναι:

$$V' = F'\ell' = \lambda\ell b^2(1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 = \lambda\ell b^2(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon^2 + \varepsilon^2) \quad (2.1.8)$$

Επειδή το  $\varepsilon$  στην ελαστική περιοχή είναι πολύ μικρός αριθμός, χωρίς σημαντικό σφάλμα, μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους που περιεχουν  $\varepsilon^2$  και  $\varepsilon^3$  στην πιο πάνω εξίσωση, οπότε ο νέος όγκος είναι περίπου:

$$V' \sim \lambda\ell b^2(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) \quad (2.1.9)$$

Ονομάζουμε ανηγμένη μεταβολή όγκου  $\Theta$  (ή ανηγμένη διόγκωση) της ράβδου το πηλίκο:

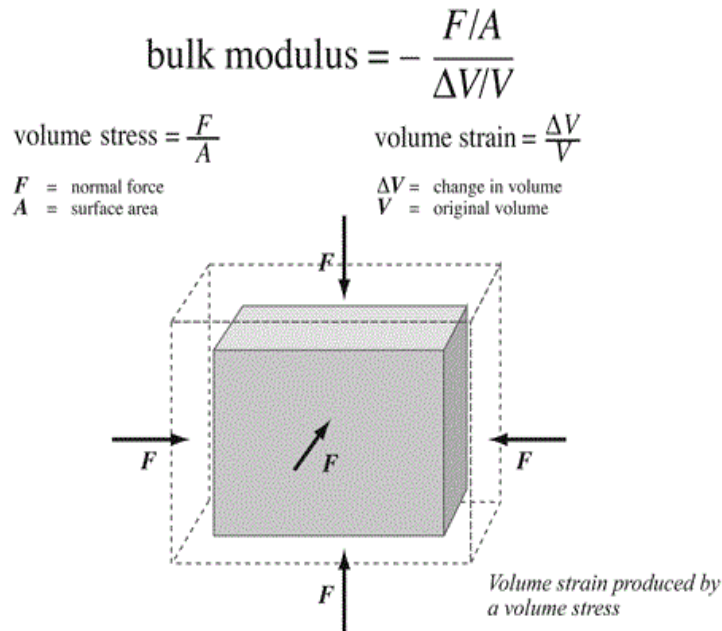
$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) \quad (2.1.10)$$

### **Μέτρο διόγκωσης:**

Ονομάζουμε μέτρο διόγκωσης  $K$  ενός υλικού, το λόγο:

$$K = \frac{\sigma}{\Theta} = \frac{p}{\Delta V/V} \quad (2.1.11)$$

Το  $K$  από τη σχέση ορισμού του προκύπτει ότι έχει μονάδες τάσης  $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$ . Είναι δηλαδή και αυτό μία ελαστική σταθερά, όπως το  $E$  και το  $G$ .



Εικόνα 32

### 2.1.3 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους.

**Η αλλαγή του όγκου** ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις των ακμών του.

**Η αλλαγή σχήματος** ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

a) Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).

b) Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεών του, οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Αυτό βεβαία σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή του σχήματός του επιτυγχάνεται και από ορθές και από διατμητικές παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που επιτυγχάνεται από την επιβολή φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως **ενέργεια παραμόρφωσης**, η οποία αποτελείται από δυο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται **ενέργεια μεταβολής όγκου** και έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή σχήματος ή αλλιώς στρέβλωση του υλικού και καλείται **στροφική ενέργεια**. Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύθηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ-ε και τον άξονα των παραμορφώσεων (Εικ.31) παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που έχει αποθηκευθεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φόρτισης του μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ(τυχαίο) και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε(τυχαίο). Όταν το ζεύγος (σ,ε) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσης θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης καλείται **στερρότητα** του υλικού και αποτελεί μέτρο τα απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

### **2.1.2 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ**

**Ανισότροπο τρικλινές μέσο:** το μέσο το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρίες και έχει 21 ελαστικές σταθερές ανεξάρτητες.

**Μονοκλινές μέσο:** το μέσο αυτό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθε διεύθυνση έχει ίδιες ιδιότητες με την συμμετρική της ως προς το επίπεδο αυτό. Αποδεικνύεται ότι το μέσο αυτό έχει 13 ελαστικές σταθερές.

**Ορθότροπο μέσο:** όταν το υλικό παρουσιάζει συνολικά δύο κάθετα επίπεδα συμμετρίας τότε λέγεται ορθότροπο. Το μέσο αυτό έχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

**Εγκαρσίως ισότροπο μέσο:** μια ακόμα ανώτερη τάξη ελαστικής συμμετρίας από αυτή του ορθότροπου μέσου. Το μέσο σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει έναν άξονα συμμετρίας ως προς τον οποίο όλες οι κάθετες διευθύνσεις είναι συμμετρικές ως προς τις μηχανικές ιδιότητες. Οι

ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 5.

**Ισότροπο μέσο:** τα μέσα στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αρκούν μόνο 2 ελαστικές σταθερές για την περιγραφή του μέσου (το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και ο λόγος Poisson  $\nu$ ).

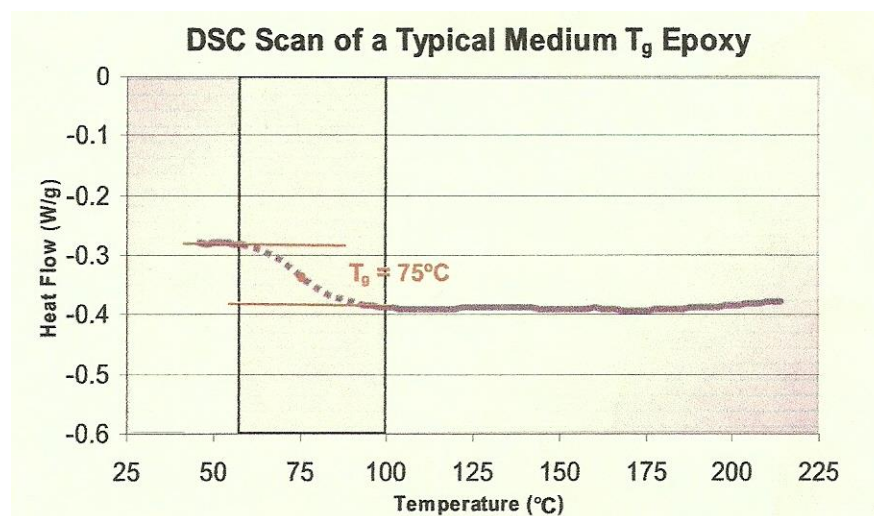
## 2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

### 2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ $T_g$

Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης ( $T_g$ ) είναι ένα εύρος θερμοκρασιών όπου ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές μεταβαίνει από την σκληρή, στέρεα και υαλώδη κατάσταση σε μία περισσότερο εύκαμπτη, μαλακή, ελαστική.

Στην πραγματικότητα το ( $T_g$ ) δεν είναι μία ξεκάθαρη θερμοδυναμική μετάβαση, αλλά ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο αυξάνεται σημαντικά η κινητικότητα των πολυμερικών αλυσίδων. Η μέγιστη τιμή ( $T_g$ ) καθορίζεται από τη χημική δομή της εποξειδικής ρητίνης, τον τύπο του σκληρυντή και το βαθμό της θερμικής κατεργασίας.

Δεδομένου ότι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης ( $T_g$ ), είναι ένα εύρος θερμοκρασιών και όχι μία συγκεκριμένη θερμοκρασία, είναι βολικό να ορίζουμε μία μέση τιμή της περιοχής που οριοθετείται από τις εφαπτομένες στις δύο επίπεδες περιοχές της καμπύλης ροής της θερμότητας όπου στη περίπτωση του εποξειδικού της παρακάτω καμπύλης είναι οι 75°C.



Εικόνα 33

Επίσης τονίζεται ότι η  $T_g$  μετριέται χρησιμοποιώντας το θερμικό αναλυτή Differential Scanning Calorimetry (DSC).

### **2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με πολυμερική μήτρα, είναι:

- α. η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των εγκλεισμάτων.
- β. η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος.

Η προσρόφηση των πολυμερικών μακρομορίων από το έγκλεισμα, είναι η κύρια αιτία για την διαφορετική διαμόρφωση των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα σε σχέση με τη διαμόρφωση τους στην μήτρα γενικότερα. Η αλλαγή της κατάστασης των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα, προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι, καταλήγουμε ότι η παρουσία εγκλείσματος μέσα στην πολυμερική μήτρα δημιουργεί μια ατέλεια στο πολυμερικό δομικό δίκτυο της.

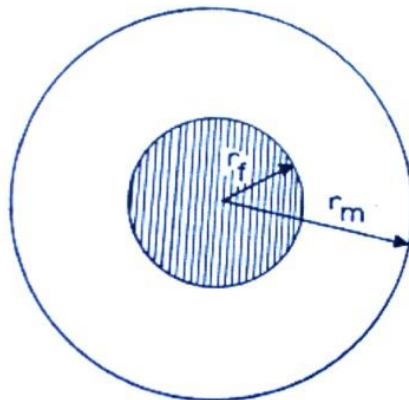
Είναι γνωστό ότι οι ιδιότητες των πολυμερικών σύνθετων υλικών κατά την χαλάρωση, επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης [7]-[13]. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων υλικών [1]-[5] και η συλλογή πληροφοριών για την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδραση της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος μας.

Ωστόσο, η δομή και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, σε σημαντικό βαθμό, από την **μεθοδολογία** που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Ως συνέπεια των παραπάνω, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους προσδιορισμού της ενδιάμεσης φάσης είναι συχνά διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο προσδιορισμός της ενδιάμεσης φάσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$ . Ωστόσο, ενώ υπάρχουν αρκετές πειραματικές μέθοδοι για την εύρεση τιμών για την  $T_g$ , όπως η θερμιδομετρία, η διαστολομετρία, οι δυναμικές μετρήσεις κ.α., αυτές εξάγουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους [14],[15].

Λόγω της παραπάνω δυσκολίας, δημιουργήθηκε ένα χάσμα ανάμεσα

στα ευρήματα διαφόρων ερευνητών για την επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος  $U_f$ , στην υαλώδη μεταβατική θερμοκρασία  $T_g$  [16]. Για παράδειγμα, αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα ενός σύνθετου υλικού, αυξάνεται και η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$  και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι ερευνητές βρήκαν ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως  $T_g$  δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος [17],[18],[19]. Τέλος υπήρχαν και ερευνητές που βρήκαν ότι οι τιμές της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας  $T_g$  εξαρτώνται πολύ από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η  $T_g$  ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα [20].

Στην περίπτωση μετρήσεων με την μέθοδο της θερμιδομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στον προσδιορισμό των υαλωδών μεταβατικών θερμοκρασιών  $T_g$ , είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μάζα ή αλλιώς ειδική θερμότητα. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε D.S.C μετρήσεις που έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή, η εξάρτηση της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας από την ειδική θερμότητα  $H_r$ , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των  $15^\circ\text{C}$  να μπορούν να παρατηρηθούν για διαφορετικούς ρυθμούς θέρμανσης [21],[22],[23].

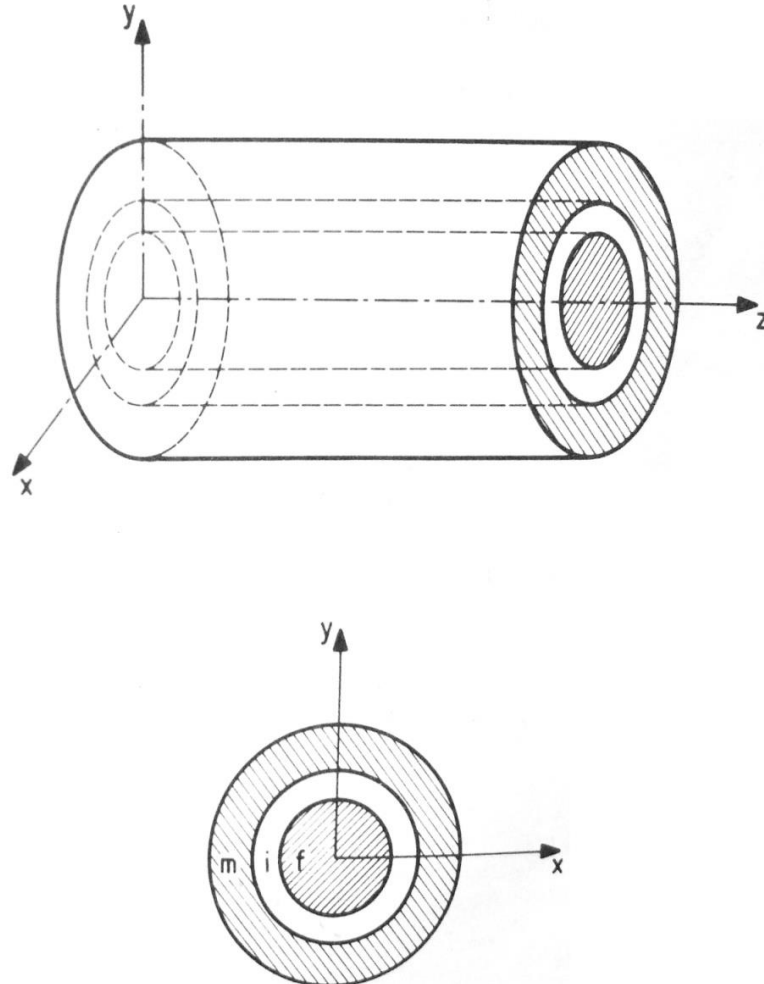


Εικόνα 34(Διφασικό μοντέλο)

### 2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου(Εικ. 35), το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο(Εικ.34) με την προσθήκη της

ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα.



Εικόνα 35(Τριφασικό μοντέλο)

Αν ορίσουμε ως  $r_f$ ,  $r_i$ , και  $r_m$  τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες  $f$ ,  $i$ ,  $m$  να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντίστοιχως, τότε οι αντίστοιχες κατ' όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}, U_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, U_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2} \quad (2.2.1)$$

Και επίσης θα ισχύει:

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \quad (2.2.2)$$

Καθώς η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης **αυξάνεται**. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα το οποίο υπάρχει στην αναφορά [25] ότι δηλαδή υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο  $\Delta C_p$  το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα ινώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο [5],[26]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^2} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.3)$$

Όπου  $\Delta r$  εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος  $\mu$  δίνεται βάσει της αναφοράς [25] από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (2.2.4)$$

Όπου  $\Delta C_p^f$  είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ  $\Delta C_p^0$  είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες τους.

Η σχέση (2.2.3), αφού  $r_f + \Delta r$  ισούται ουσιαστικά με  $r_i$  με την βοήθεια των σχέσεων (2.2.1), μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.5)$$

Η σχέση (2.2.5) μαζί με την (2.2.1) και την (2.2.2) εξάγουν την εξής σχέση:



$$cnt = \frac{r_f^2}{r_i^2} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1 - \mu)} \quad (2.2.6)$$

Τέλος υπολογίζοντας με την βοήθεια των DSC(differential scanning calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας  $\Delta C_p$  στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς του, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του σύνθετου υλικού, **μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα  $\mu$**  και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης αφού μας είναι γνωστή η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

#### **2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ**

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ινών γυαλιού. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [28],[29],[30] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα(Permaglass XE5/1, Permalit Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο  $1,2 \times 10^{-5} \text{m}$  και η κατ' όγκο περιεκτικότητά τους ήταν 0.65.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ινώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79.6% (+/- 0.28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού ( $\rho_g = 2.55 \text{gr/cm}^3$ ) και της εποξειδικής μήτρας( $\rho_e = 1.20 \text{gr/cm}^3$ ), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0.65.

Από την άλλη μεριά, δοκίμια με διάμετρο 0.004m και πάχους που ποικίλει από 0.001m μέχρι 0.0015m, φτιαγμένα είτε από ινώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ' όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι

τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

Οι τιμές του παράγοντα  $\mu$  (σχέση 2.2.4) εξήχθησαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμότητων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των  $\Delta C_p^f$  και  $\Delta C_p^0$  αντίστοιχα, που υπολογίστηκαν από τα  $\Delta C_p = f(T)$  διαγράμματα σύμφωνα με το διάγραμμα της **Εικόνας 36**. Οι τιμές του  $\mu$  που προσδιορίστηκαν από τα DSC τεστ, επέτρεψαν και την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό (για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα).

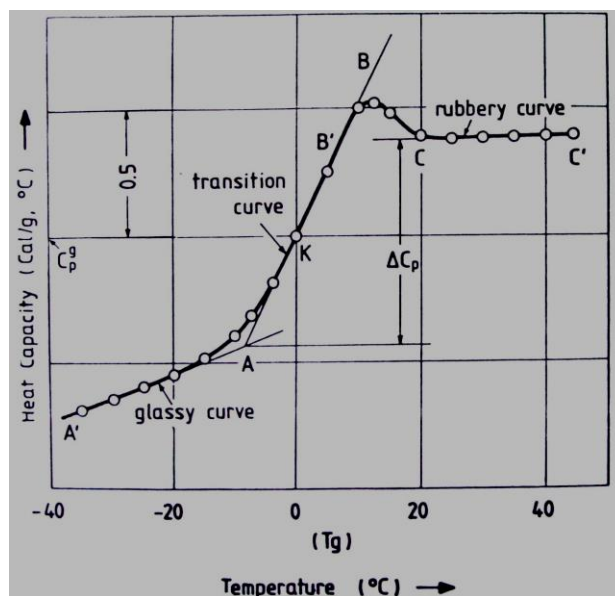
Έχει δειχθεί [26] ότι για της μιας κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι η εξής:

$$U_i = CU_f^2 \quad (2.2.7)$$

Όπου με  $U_i$  και  $U_f$  συμβολίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.

Η σταθερά  $C$  στην περίπτωση μας είναι ίση με 0.123 [40].



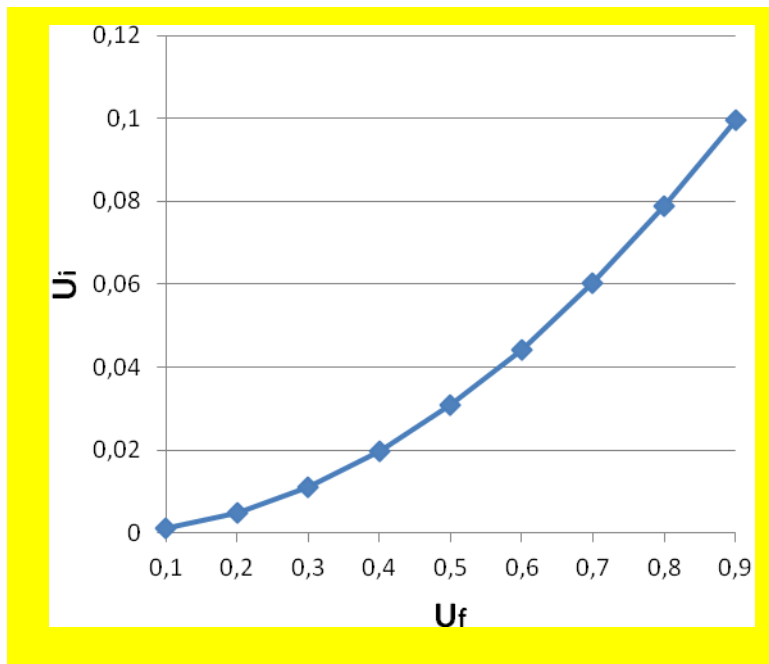
Εικόνα 36

*Να σημειώσουμε εδώ* ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης (2.2.7) και με την βοήθεια της σχέσης (2.2.3) εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα ότι η μεταβολή της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης

φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

$U_f$	$U_i$	$r_{i(\mu m)}$
0.10	0.0012	6.036
0.20	0.00492	6.073
0.30	0.01107	6.110
0.40	0.01968	6.146
0.50	0.03075	6.182
0.60	0.04428	6.217
0.65	0.052	6.235
0.70	0.06027	6.254
0.80	0.07872	6.288
0.90	0.09963	6.323

Πίνακας I



Εικόνα 37

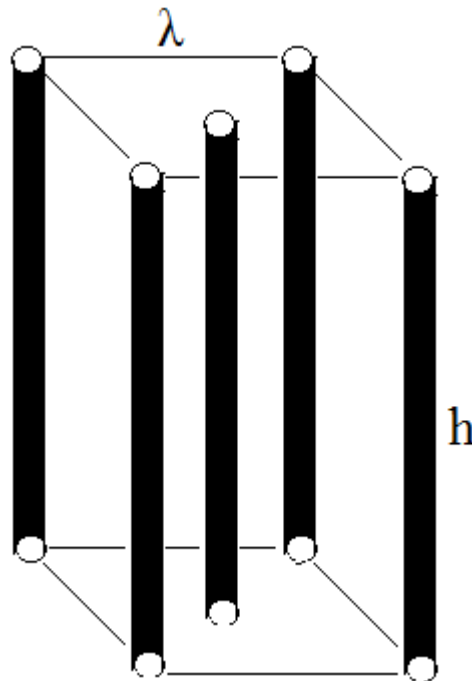
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

---

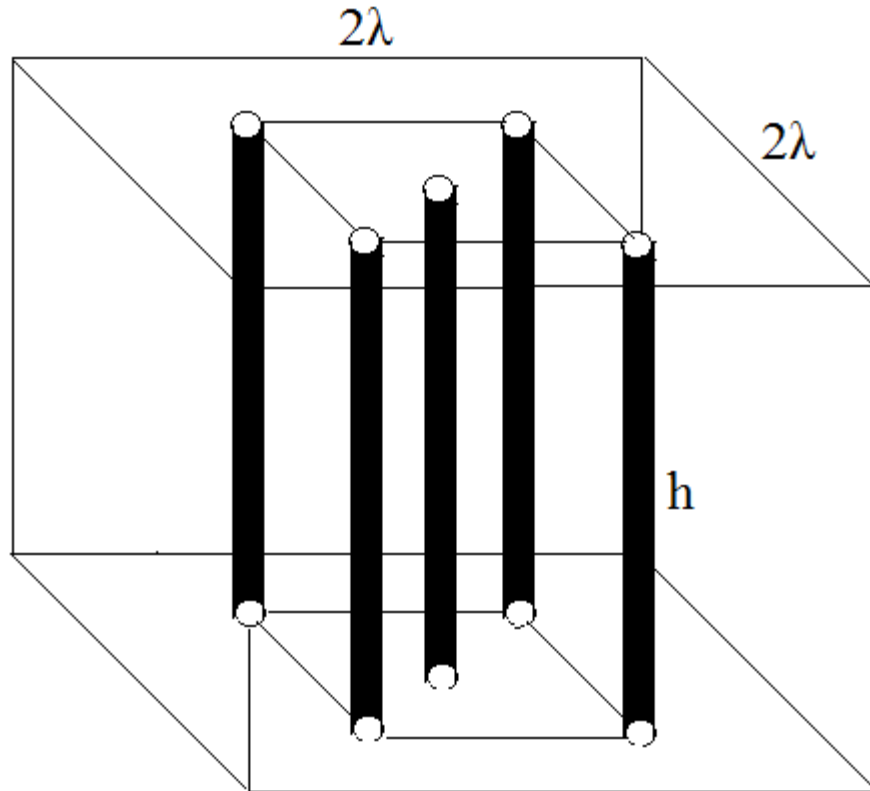
### 3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΕΤΡΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

#### 3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ

Σε αυτήν την υποενότητα, θα θεωρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι ίνες γυαλιού(ινώδη εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας ενός ινώδους σύνθετου υλικού έτσι ώστε να μπορέσουμε ύστερα να προσδιορίσουμε τις ακτίνες του κυλινδρικού μοντέλου που θα προκύψει μέσα από αυτήν την μελέτη.



Εικόνα 38



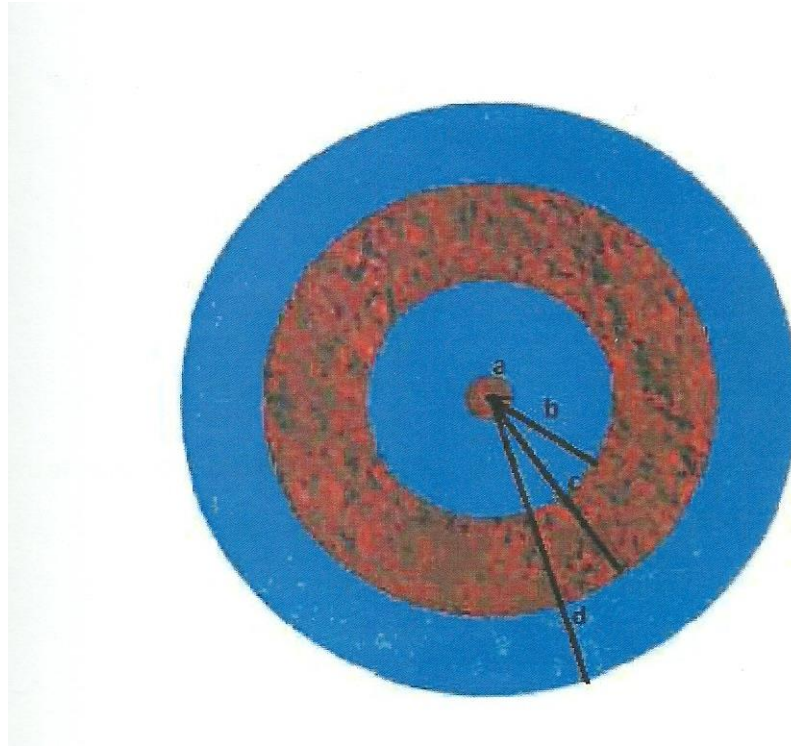
Εικόνα 39

Θεωρούμε λοιπόν ότι 4 ίνες καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός τυχαίου τετραγωνικού πρίσματος ακμής  $\lambda$  και πεπερασμένου μήκους  $h$  και 1 ίνα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους του. Το υπόψη πρίσμα περικλείεται σε ένα δεύτερο τετραγωνικό πρίσμα ακμής  $2\lambda$  και ίδιου μήκους (Εικ.38, Εικ.39). Το πρίσμα αυτό επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη την μάζα του σύνθετου υλικού και το ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό «κύτταρο» του υλικού. Το τμήμα μεταξύ των ινών αλλά και το τμήμα ανάμεσα στο αρχικό τετραγωνικό πρίσμα και το δομικό «κύτταρο» του υλικού, αντιπροσωπεύει την μήτρα του σύνθετου υλικού.

Το πρίσμα ακμής  $2\lambda$  θα το αναγάγουμε τώρα, σε ένα «ισοδύναμο» κυλινδρικό μοντέλο με ίδιο μήκος  $h$  για να εκμεταλλευθούμε έτσι την κυλινδρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτήν, σε ένα τετραφασικό μοντέλο.

Το τετραφασικό μοντέλο μας, θα αποτελείται από τέσσερις ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας  $a, b, c, d$  ( $a < b < c < d$ ) (Εικ.40). Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση (μπλε), που τις αποτελούν ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική  $b$ , και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $c$  και εξωτερική ακτίνα  $d$ , αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας και θα τα συμβολίζουμε με  $m$ . Ο κύλινδρος με ακτίνα  $a$  καθώς και ο

κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $b$  και εξωτερική ακτίνα  $c$ , πρώτη και τρίτη φάση (κόκκινο), αντιπροσωπεύουν το σύνολο των ινών του δομικού μας «κυττάρου» και τα συμβολίζουμε με  $f$ .



Εικόνα 40

Για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, ξέρουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών του  $U_f$ , όπως επίσης και την ακτίνα των ινών του  $r_f$ . Για το πρίσμα ακμής  $2\lambda$  η  $U_f$  θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των πέντε ινών του, προς τον όγκο ολόκληρου του πρίσματος, δηλαδή:

$$U_f = \frac{5\pi r_f^2 h}{(2\lambda)^2 h} = \frac{5\pi r_f^2}{4\lambda^2} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt{\frac{5\pi}{4U_f}} \quad (3.1.1)$$

Επίσης ο όγκος του πρίσματος με ακμή  $2\lambda$  αντιπροσωπεύεται από τον όγκο του κυλίνδρου ακτίνας  $d$  στο κυλινδρικό μοντέλο. Έτσι θα έχουμε:

$$(2\lambda)^2 h = \pi d^2 h \Rightarrow d = 2\lambda \sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad (3.1.2)$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από την κυλινδρική ίνα που βρίσκεται στο

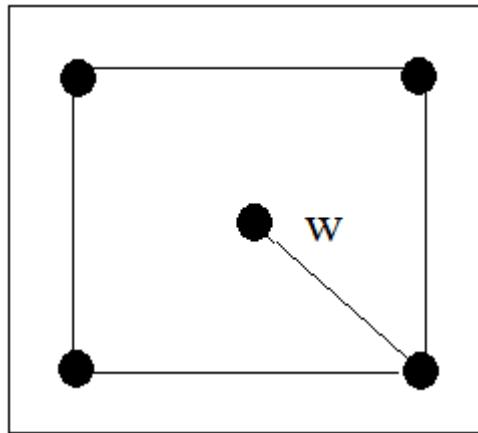
κέντρο βάρους του πρίσματος. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \quad (3.1.3)$$

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών  $b, c$ .

Θεωρούμε το τετραγωνικό πρίσμα ακμής  $\lambda$  όπως πριν. Η απόσταση από τον κεντρικό άξονα του, έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρικών υπολογισμών, έχει μήκος  $\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$ . Αν ονομάσουμε αυτήν την απόσταση  $w$ , το  $w$  θα αντιπροσωπεύει την απόσταση του άξονα του πρίσματος από τα κέντρα των ινών και ισχύει ότι (Εικ. 41):

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda \quad (3.1.4)$$



Εικόνα 41

Θεωρούμε επίσης ότι ο κυλινδρικός φλοιός με ακτίνες  $b, c$  κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της κυλινδρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα  $w$ , προσαρμοσμένη στο τετραφασικό μοντέλο. Θα ισχύει λοιπόν:

$$\pi(c^2 - w^2)h = \pi(w^2 - b^2)h \Rightarrow 2w^2 = b^2 + c^2 \quad (3.1.5)$$

Ο όγκος της τρίτης φάσης ισούται όμως με τον όγκο των τεσσάρων ινών και άρα θα πρέπει:

$$\pi(c^2 - b^2)h = 4\pi r_f^2 h \Rightarrow c^2 - b^2 = 4r_f^2 \quad (3.1.6)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.1.5), (3.1.6) προκύπτουν οι εκφράσεις των

$c, b$  ως εξής:

$$b = \sqrt{w^2 - 2r_f^2} \quad (3.1.7)$$

$$c = \sqrt{w^2 + 2r_f^2} \quad (3.1.8)$$

Και άρα από τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.3) θα έχουμε:

$$a = r_f \quad (3.1.9)$$

$$b = \sqrt{\frac{5\pi r_f^2}{8U_f} - 2r_f^2} \quad (3.1.10)$$

$$c = \sqrt{\frac{5\pi r_f^2}{8U_f} + 2r_f^2} \quad (3.1.11)$$

$$d = 2r_f \sqrt{\frac{5}{4U_f}} \quad (3.1.12)$$

Καταφέραμε έτσι λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες  $a, b, c, d$  συναρτήσει των γνωστών μεγεθών  $U_f$  και  $r_f$

### 3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν για το κυλινδρικό τετραφασικό μοντέλο μας χωρίς ενδιάμεση φάση, βάσει της κατανομής των ιών γυαλιού που έχουμε θεωρήσει. Να σημειώσουμε εδώ ότι η θεώρηση ύπαρξης ενδιάμεσης φάσης στο συγκεκριμένο μοντέλο, δεν επηρεάζει τις σχέσεις των γεωμετρικών περιορισμών και αυτό διότι η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και συνεπώς είναι μέρος της μήτρας. Άρα θα έχουμε:

$$b > 0 \Rightarrow \sqrt{r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} - 2r_f^2} > 0 \Rightarrow r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} - 2r_f^2 > 0 \Rightarrow U_f < \frac{5\pi}{16} \Rightarrow U_f < 0.98125 \quad (3.1.13)$$



$$a < b \Rightarrow r_f < \sqrt{w^2 - 2r_f^2} \Rightarrow 3r_f^2 < w^2 \Rightarrow 3r_f^2 < \frac{1}{2}r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} \Rightarrow U_f < \frac{5\pi}{24} \Rightarrow U_f < 0.65416$$

(3.1.14)

$$c < d \Rightarrow \sqrt{2r_f^2 + w^2} < 2\lambda \sqrt{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow 2r_f^2 + \frac{\lambda^2}{2} < \frac{4\lambda^2}{\pi} \Rightarrow 2r_f^2 < 0,773r_f^2 \frac{5\pi}{4U_f} \Rightarrow$$

(3.1.15)

$$U_f < 1.51$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι βάσει αυτού το μοντέλου η **μέγιστη επιτρεπτή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες εγκλείσμα** θα είναι  $U_f < 0,65416$

### 3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Για να αναπτύξουμε το *επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο* το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης στο τετραφασικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Η ενδιάμεση φάση σχηματίζει τρεις κυλινδρικούς φλοιούς γύρω από τις φάσεις των εγκλεισμάτων στο τετραφασικό μοντέλο και άρα προσθέτονται τρεις ακόμα φάσεις σε αυτό(Εικ.42). Άρα το νέο κυλινδρικό μας μοντέλο θα έχει επτά φάσεις. Η πρώτη φάση, από μέσα προς τα έξω, με ακτίνα  $r_1$  αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή του εγκλείσματος. Η δεύτερη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_1$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_2$  και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η τρίτη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_2$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_3$  και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της μήτρας. Η τέταρτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_3$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_4$  και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η πέμπτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την  $r_4$  και εξωτερική ακτίνα την  $r_5$  και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή του εγκλείσματος. Η έκτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $r_5$  και εξωτερική ακτίνα  $r_6$  και αντιπροσωπεύει τη τρίτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η έβδομη και τελευταία φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $r_6$  και εξωτερική ακτίνα  $r_7$  και αντιπροσωπεύει τη δεύτερη περιοχή της μήτρας.



Εικόνα 42

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τις ακτίνες στις περιοχές της ενδιάμεσης φάσης, την  $r_2$ ,  $r_4$  και  $r_6$  (Εικ. 42), καθώς και την κατ' όγκο περιεκτικότητά της, σε κάθε περιοχή ξεχωριστά.

Οι κατ' όγκο περιεκτικότητες στο επαφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζονται ως εξής:

1.  $U_1$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής του εγκλείσματος (της πρώτης φάσης).
2.  $U_2$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της δεύτερης φάσης).
3.  $U_3$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της μήτρας (της τρίτης φάσης) .
4.  $U_4$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της τέταρτης φάσης).
5.  $U_5$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής του εγκλείσματος (της πέμπτης φάσης).
6.  $U_6$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της τρίτης περιοχής της ενδιάμεσης

φάσης (της έκτης φάσης).

7.  $U_7$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της μήτρας (της έβδομης φάσης).

Θεωρούμε επίσης τα κάτωθι:

1.  $U_m = U_3 + U_7$ , όπου  $U_m$  είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας στο μοντέλο μας, επίσης

2.  $U_i = U_2 + U_4 + U_6$ , όπου  $U_i$  είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και

3.  $U_f = U_1 + U_5$  όπου  $U_f$  είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ίνας.

Επίσης συμβολίζουμε ως εξής:

1.  $U_1 = U_{f,1}$

2.  $U_2 = U_{i,1}$

3.  $U_3 = U_{m,1}$

4.  $U_4 = U_{i,2}$

5.  $U_5 = U_{f,2}$

6.  $U_6 = U_{i,3}$

7.  $U_7 = U_{m,2}$

Κάνοντας την παραδοχή τώρα, ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3}}{U_{m,1} + U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = k \quad (3.2.1)$$

Γνωρίζοντας βέβαια ότι γενικά ισχύει:

$$U_m = 1 - U_f - U_i \quad (3.2.2)$$

Άρα από τις σχέσεις (3.2.1), (3.2.2) θεωρώντας ότι  $U_{i,1} = U_{i,2}$  ότο προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = k \Rightarrow U_{i,1} = kU_{m,1} &\Rightarrow \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi d^2 h} \Rightarrow (r_2^2 - r_1^2) = k(r_3^2 - r_2^2) \Rightarrow \\ (k+1)r_2^2 = kr_3^2 + r_1^2 &\Rightarrow r_2^2 = \frac{kr_3^2 + r_1^2}{k+1} \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{kr_3^2 + r_1^2}{k+1}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} U_{i,2} = kU_{m,1} &\Rightarrow \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi d^2 h} \Rightarrow (r_4^2 - r_3^2) = k(r_3^2 - r_2^2) \Rightarrow \\ r_4^2 = (k+1)r_3^2 - kr_2^2 &\Rightarrow r_4 = \sqrt{(k+1)r_3^2 - kr_2^2} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} U_{i,3} = kU_{m,2} &\Rightarrow \frac{\pi(r_6^2 - r_5^2)h}{\pi d^2 h} = k \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi d^2 h} \Rightarrow (r_6^2 - r_5^2) = k(r_7^2 - r_6^2) \Rightarrow \\ (k+1)r_6^2 = kr_7^2 + r_5^2 &\Rightarrow r_6^2 = \frac{kr_7^2 + r_5^2}{(k+1)} \Rightarrow r_6 = \sqrt{\frac{kr_7^2 + r_5^2}{(k+1)}} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Σε αυτό το σημείο **να σημειώσουμε** ότι οι σχέσεις των ακτινών του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, που συμβολίζονταν στη προηγούμενη ενότητα (βλ. Εικ.40) με  $a, b, c, d$  χρησιμοποιούνται και στην θεωρητική ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση. Για την ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου οι ακτίνες  $a, b, c, d$  του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, απλώς μετονομάζονται σε  $r_1, r_3, r_5, r_7$  αντίστοιχα και ορίζουν τις εξωτερικές ακτίνες των περιοχών της 1<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup>, 5<sup>ης</sup> και 7<sup>ης</sup> φάσης του επταφασικού μας μοντέλου. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και άρα δεν υπάρχει προσθήκη άλλου υλικού στο μοντέλο μας. Αυτό έχει ως συνέπεια, πρώτον, να μην αλλάξει η εξωτερική ακτίνα του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, κατά την θεώρηση της εισαγωγής της ενδιάμεσης φάσης γύρω από το

έγκλεισμα και άρα την ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου μας και δεύτερον, να παραμείνει όμοια και η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα της φάσης του εγκλείσματος από το τετραφασικό μοντέλο χωρίς ενδιάμεση φάση, στο επταφασικό μας μοντέλο. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί ουσιαστικά η θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης δεν επηρεάζει την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, παρά μόνο την κατ' όγκο περιεκτικότητα σε μήτρα.

Από προηγούμενη μελέτη (βλέπε Κεφ.2), για κάθε τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ενδιάμεση φάση. Τα ζευγάρια των τιμών των παραπάνω περιεκτικότητων παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ε**.

$U_f$	$U_i$
0.10	0.0012
0.20	0.00492
0.30	0.01107
0.40	0.01968
0.50	0.03075
0.60	0.04428
0.65	0.052
0.70	0.06027
0.80	0.07872
0.90	0.09963

Πίνακας J

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) για κάθε ζεύγος τιμών ( $U_f$ ,  $U_i$ ) του **Πίνακα J**, υπολογίζονται οι ακτίνες για όλες τις φάσεις του επταφασικού μας μοντέλου και παρουσιάζονται αναλυτικά στο **Πίνακα K**. Εδώ να αναφέρουμε ότι η διάμετρος των εγκλεισμάτων θεωρείται γνωστή, και έχει τιμή 12 $\mu\text{m}$ . Άρα και η ακτίνα τους,  $r_f$  θα είναι ίση με 6 $\mu\text{m}$ .

$U_f$	$U_i$	r1(μm)	r2(μm)	r3(μm)	r4(μm)	r5(μm)	r6(μm)	r7(μm)
<b>0,10</b>	0,0012	6	6,066	25,19	25,21	27,9	27,926	42,426
<b>0,20</b>	0,00492	6	6,124	16,77	16,82	20,62	20,692	30
<b>0,30</b>	0,01107	6	6,166	12,79	12,87	17,54	17,667	24,495
<b>0,40</b>	0,01968	6	6,185	10,23	10,34	15,77	15,976	21,213
<b>0,50</b>	0,03075	6	6,168	8,325	8,447	14,6	14,91	18,974
<b>0,60</b>	0,04428	6	6,089	6,764	6,843	13,77	14,211	17,321
<b>0,65</b>	0,052	6	6,009	6,057	6,066	13,44	13,964	16,641

Πίνακας Κ

Έχοντας υπολογίσει τις ακτίνες του επαφασικού κυλινδρικού μας μοντέλου θα είναι εύκολος και ο υπολογισμός των κατ' όγκο περιεκτικότητων των επτά φάσεων. Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες και των επτά φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = U_{f,1} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_7^2 h} = \frac{r_1^2}{r_7^2}$$

$$U_2 = U_{i,1} = \frac{\pi (r_2^2 - r_1^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2}$$

$$U_3 = U_{m,1} = \frac{\pi (r_3^2 - r_2^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2}$$

$$U_4 = U_{i,2} = \frac{\pi (r_4^2 - r_3^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$$

$$U_5 = U_{f,2} = \frac{\pi (r_5^2 - r_4^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$$

$$U_6 = U_{i,3} = \frac{\pi (r_6^2 - r_5^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$$

$$U_7 = U_{m,2} = \frac{\pi (r_7^2 - r_6^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$$

Παρακάτω παραθέτουμε τον **Πίνακα L** με συγκεντρωμένες τις τιμές των κατ' όγκο περιεκτικότητων των επτά φάσεων για διάφορες τιμές της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα. Επίσης στους **Πίνακες K** και **L** έχουμε

λάβει υπόψιν και τους γεωμετρικούς περιορισμούς που μελετήθηκαν στην υποενότητα 3.1.2.

U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7
0,02	0,00044	0,33206	0,00044	0,07956	0,00076	0,56674
0,04	0,00168	0,27082	0,00168	0,15832	0,00324	0,52426
0,06	0,00336	0,20914	0,00336	0,23664	0,00771	0,47979
0,08	0,00500	0,14750	0,00500	0,31500	0,01468	0,43282
0,10	0,00569	0,08681	0,00569	0,39431	0,02506	0,38244
0,12	0,00360	0,02890	0,00360	0,47640	0,04068	0,32682
0,13	0,00037	0,00213	0,00037	0,51963	0,05163	0,29587

Πίνακας L

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

---

## 4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδραση τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του.

Γενικώς το μέτρο ελαστικότητας  $E_i$ , το μέτρο διάτμησης  $G_i$  και ο λόγος Poisson  $\nu_i$  της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού με μεταβλητή ακτίνα  $r$ .

Δηλαδή:

$$E_i(r) = f(r), G_i(r) = h(r) \text{ και } \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots, G_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots, \text{ και}$$

$$\nu_i(r) = A''r^n + B''r^{n-1} + C''r^{n-2} + \dots$$

όπου

$$r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}, r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2} \text{ και } r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3} \text{ για κάθε ενδιάμεση φάση.}$$

Στη μελέτη αυτή για λόγους απλούστευσης, λαμβάνουμε υπ'οψιν τη γραμμική, την υπερβολική και την παραβολική μεταβολή των  $E_i$ ,  $G_i$ ,  $\nu_i$ .

Θεωρούμε ότι  $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$ ,  $G_m \leq G_i(r) \leq G_f$  και  $\nu_f \leq \nu_i \leq \nu_m$  όταν

$r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}$ ,  $r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2}$  και  $r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$  για κάθε ενδιάμεση φάση. Επειδή στο επταφασικό μοντέλο έχουμε 3 ενδιάμεσες φάσεις, οι οριακές συνθήκες θα είναι οι παρακάτω:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 2 στην Εικ. 42)

Στο  $r = r_{f,1}$  :  $E_i(r) = nE_f$ ,  $G_i(r) = nG_f$  και  $\nu_i(r) = n\nu_f$

Στο  $r = r_{i,1}$  :  $E_i(r) = E_m$ ,  $G_i(r) = G_m$  και  $\nu_i(r) = \nu_m$



- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση (περιοχή 4 στην Εικ. 42)

Στο  $r = r_{m,1}$  :  $E_i(r) = E_m$  ,  $G_i(r) = G_m$  και  $\nu_i(r) = \nu_m$

Στο  $r = r_{i,2}$  :  $E_i(r) = nE_f$  ,  $G_i(r) = nG_f$  και  $\nu_i(r) = n\nu_f$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 6 στην Εικ. 42)

Στο  $r = r_{f,2}$  :  $E_i(r) = nE_f$  ,  $G_i(r) = nG_f$  και  $\nu_i(r) = n\nu_f$

Στο  $r = r_{i,3}$  :  $E_i(r) = E_m$  ,  $G_i(r) = G_m$  και  $\nu_i(r) = \nu_m$

Με  $i, m, f$  θα συμβολίζουμε την ενδιάμεση φάση, την μήτρα και το έγκλεισμα αντίστοιχα.

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα  $E_i(r), G_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με τη μήτρα είναι ίσα με  $E_m, G_m$  και  $\nu_m$  αντιστοίχως, αφού θεωρήσαμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας. Επίσης ,στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι τμήμα των  $E_f, G_f$  και  $\nu_f$  αντιστοίχως που εκφράζεται με τον συντελεστή  $n$ . Όμως για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα  $E_i(r), G_i(r), \nu_i(r)$  στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με  $E_f, G_f$  και  $\nu_f$  αντιστοίχως, δηλαδή ότι  $n=1$ .

**Να σημειώσουμε ότι** οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για τις παρακάτω υποενότητες έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29] και παρουσιάζονται στον **Πίνακα Μ**.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson $\nu$	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	72	0.20	30

Πίνακας Μ

#### 4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα  $E_i(r), G_i(r), \nu_i(r)$  μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br, \quad G_i(r) = A' + B'r \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = A'' + B''r \quad \text{με} \quad r_{f,i} \leq r \leq r_{i,1}, r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2} \quad \text{και}$$

$r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$  για κάθε ενδιάμεση φάση.

Εφαρμόζοντας τώρα και τις οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, υπολογίζουμε τις σταθερές  $A, B, A', B', A'', B''$ . Έτσι προκύπτει ότι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} r_{f,1} \quad B = \frac{nE_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} r_{f,1} \quad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

$$A'' = nV_f - \frac{nV_f - V_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} r_{f,1} \quad B'' = \frac{nV_f - V_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} r_{i,2} \quad B = \frac{nE_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} r_{i,2} \quad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

$$A'' = nV_f - \frac{nV_f - V_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} r_{i,2} \quad B'' = \frac{nV_f - V_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} r_{f,2} \quad B = \frac{nE_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} r_{f,2} \quad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

$$A'' = nV_f - \frac{nV_f - V_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} r_{f,2} \quad B'' = \frac{nV_f - V_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διάτμησης και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A + Br) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A' + B'r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \nu_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A'' + B''r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A + Br) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A' + B'r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \nu_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A'' + B''r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A + Br) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A' + B'r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \nu_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A'' + B''r) 2h\pi r dr = \frac{1}{V} 2h\pi \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

Όπου  $V = h\pi r^2$  και άρα  $dV = 2\pi r h dr$

Επομένως προκύπτει:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A'}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B'}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A''}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B''}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right]\end{aligned}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A'}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B'}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A''}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B''}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right]\end{aligned}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A'}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B'}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2h\pi}{V} \left[ \frac{A''}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B''}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right]\end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, στην γραμμική μεταβολή για διάφορες τιμές του n.

<b>ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	8,94	16,13	23,31	30,50	37,69
<b>0,20</b>	8,93	16,11	23,28	30,46	37,63
<b>0,30</b>	8,93	16,09	23,26	30,43	37,59
<b>0,40</b>	8,92	16,09	23,25	30,41	37,58
<b>0,50</b>	8,92	16,09	23,26	30,43	37,59
<b>0,60</b>	8,94	16,12	23,30	30,48	37,67
<b>0,65</b>	8,95	16,15	23,35	30,54	37,74

Πίνακας N

<b>ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0.2</b>	<b>n=0.4</b>	<b>n=0.6</b>	<b>n=0.8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	3,641	6,635	9,630	12,624	15,619
<b>0,20</b>	3,637	6,627	9,616	12,606	15,596
<b>0,30</b>	3,634	6,621	9,607	12,593	15,580
<b>0,40</b>	3,633	6,618	9,603	12,588	15,572
<b>0,50</b>	3,634	6,620	9,606	12,593	15,579
<b>0,60</b>	3,639	6,632	9,624	12,617	15,610
<b>0,65</b>	3,644	6,644	9,643	12,642	15,642

Πίνακας O

<b>ΛΟΓΟΣ POISSON (ν)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0.2</b>	<b>n=0.4</b>	<b>n=0.6</b>	<b>n=0.8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	0,1953	0,2152	0,2352	0,2552	0,2751
<b>0,20</b>	0,1955	0,2155	0,2354	0,2553	0,2753
<b>0,30</b>	0,1957	0,2156	0,2355	0,2554	0,2753
<b>0,40</b>	0,1958	0,2157	0,2356	0,2555	0,2754
<b>0,50</b>	0,1957	0,2156	0,2355	0,2554	0,2753
<b>0,60</b>	0,1954	0,2153	0,2353	0,2552	0,2752
<b>0,65</b>	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750

Πίνακας P

### 4.1.2 ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα  $E_i(r)$ ,  $G_i(r)$ ,  $v_i(r)$  μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r}, \quad G_i(r) = A' + \frac{B'}{r} \quad \text{και} \quad v_i(r) = A'' + \frac{B''}{r} \quad \text{με} \quad r_{f,i} \leq r \leq r_{i,1}, r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2} \quad \text{και} \\ r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3} \quad \text{για κάθε ενδιάμεση φάση.}$$

Εφαρμόζοντας τώρα και τις οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, υπολογίζουμε τις σταθερές  $A, B, A', B', A'', B''$ . Έτσι προκύπτει ότι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = nE_f - \frac{r_{i,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nE_f - E_m) \quad B = \frac{r_{i,1}r_{f,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nE_f - E_m)$$

$$A' = nG_f - \frac{r_{i,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nG_f - G_m) \quad B' = \frac{r_{i,1}r_{f,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nG_f - G_m)$$

$$A'' = nv_f - \frac{r_{i,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nv_f - v_m) \quad B'' = \frac{r_{i,1}r_{f,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}} (nv_f - v_m)$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = nE_f - \frac{r_{m,1}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nE_f - E_m) \quad B = \frac{r_{m,1}r_{i,2}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nE_f - E_m)$$

$$A' = nG_f - \frac{r_{m,1}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nG_f - G_m) \quad B' = \frac{r_{m,1}r_{i,2}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nG_f - G_m)$$

$$A'' = nv_f - \frac{r_{m,1}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nv_f - v_m) \quad B'' = \frac{r_{m,1}r_{i,2}}{r_{m,1} - r_{i,2}} (nv_f - v_m)$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = nE_f - \frac{r_{i,3}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (nE_f - E_m) \quad B = \frac{r_{i,3}r_{f,2}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (nE_f - E_m)$$

$$A' = nG_f - \frac{r_{i,3}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (nG_f - G_m) \quad B' = \frac{r_{i,3}r_{f,2}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (nG_f - G_m)$$

$$A'' = n\nu_f - \frac{r_{i,3}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (n\nu_f - \nu_m) \quad B'' = \frac{r_{i,3}r_{f,2}}{r_{i,3} - r_{f,2}} (n\nu_f - \nu_m)$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διάτμησης και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \left( A + \frac{B}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^2}{2} + B r \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \\ \bar{G}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \left( A' + \frac{B'}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' r \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \\ \bar{\nu}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \nu_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \left( A'' + \frac{B''}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' r \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \end{aligned}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \left( A + \frac{B}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^2}{2} + B r \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \\ \bar{G}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \left( A' + \frac{B'}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' r \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \\ \bar{\nu}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \nu_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \left( A'' + \frac{B''}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' r \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \end{aligned}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\begin{aligned}\overline{E}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \left( A + \frac{B}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^2}{2} + B r \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \\ \overline{G}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \left( A' + \frac{B'}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^2}{2} + B' r \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \\ \overline{v}_i &= \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} v_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \left( A'' + \frac{B''}{r} \right) 2\pi h r dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^2}{2} + B'' r \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει :

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\overline{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + B (r_{i,1} - r_{f,1}) \right] \\ \overline{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + B' (r_{i,1} - r_{f,1}) \right] \\ \overline{v}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + B'' (r_{i,1} - r_{f,1}) \right]\end{aligned}$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\overline{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + B (r_{i,2} - r_{m,1}) \right] \\ \overline{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + B' (r_{i,2} - r_{m,1}) \right] \\ \overline{v}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + B'' (r_{i,2} - r_{m,1}) \right]\end{aligned}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\overline{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + B (r_{i,3} - r_{f,2}) \right] \\ \overline{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + B' (r_{i,3} - r_{f,2}) \right] \\ \overline{v}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + B'' (r_{i,3} - r_{f,2}) \right]\end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των



ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, στην υπερβολική μεταβολή για διάφορες τιμές του n.

<b>ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	8,92	16,08	23,24	30,40	37,56
<b>0,20</b>	8,89	16,02	23,15	30,27	37,40
<b>0,30</b>	8,88	15,98	23,08	30,18	37,28
<b>0,40</b>	8,87	15,96	23,05	30,14	37,23
<b>0,50</b>	8,87	15,98	23,08	30,18	37,28
<b>0,60</b>	8,91	16,06	23,20	30,35	37,50
<b>0,65</b>	8,95	16,14	23,34	30,53	37,73

Πίνακας Q

<b>ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	3,63	6,62	9,60	12,58	15,57
<b>0,20</b>	3,62	6,59	9,56	12,53	15,50
<b>0,30</b>	3,61	6,57	9,53	12,49	15,45
<b>0,40</b>	3,61	6,56	9,52	12,47	15,43
<b>0,50</b>	3,61	6,57	9,53	12,49	15,45
<b>0,60</b>	3,63	6,61	9,58	12,56	15,54
<b>0,65</b>	3,64	6,64	9,64	12,64	15,63

Πίνακας R

<b>ΛΟΓΟΣ POISSON ν</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	0,1958	0,2157	0,2356	0,2555	0,2555
<b>0,20</b>	0,1966	0,2164	0,2362	0,2560	0,2560
<b>0,30</b>	0,1971	0,2168	0,2366	0,2563	0,2563
<b>0,40</b>	0,1973	0,2170	0,2367	0,2564	0,2564
<b>0,50</b>	0,1971	0,2169	0,2366	0,2563	0,2563
<b>0,60</b>	0,1961	0,2160	0,2358	0,2557	0,2557
<b>0,65</b>	0,1951	0,2151	0,2351	0,2551	0,2551

Πίνακας S

### 4.1.3 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα  $E_i(r)$ ,  $G_i(r)$ ,  $v_i(r)$  μεταβάλλονται ως εξής:

$E_i(r) = Ar^2 + Br + C$ ,  $G_i(r) = A'r^2 + B'r + C'$  και  $v_i(r) = A''r^2 + B''r + C''$  με  $r_{f,i} \leq r \leq r_{i,1}$ ,  $r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2}$  και  $r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$  για κάθε ενδιάμεση φάση.

Για τον υπολογισμό των  $A, B, C, A', B', C'$  και  $A'', B'', C''$ , εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η  $E_i(r)$ ,  $G_i(r)$  και  $v_i(r)$  παρουσιάζουν μέγιστο για τις θέσεις  $r = r_{i,1}$ ,  $r = r_{m,1}$  και  $r = r_{i,3}$ . Δηλαδή:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση στο  $r = r_{i,1}$  έχουμε:

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση στο  $r = r_{m,1}$  έχουμε:

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση στο  $r = r_{i,3}$  έχουμε:

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0 \text{ και}$$

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \text{ με } \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = \frac{(nE_f - E_m)}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2} \quad B = -\frac{2r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}(nE_f - E_m)$$

$$C = \frac{nE_f r_{i,1}^2 + E_m r_{f,1}^2 - 2E_m r_{f,1} r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}$$

$$A' = \frac{(nG_f - G_m)}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2} \quad B' = -\frac{2r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}(nG_f - G_m)$$

$$C' = \frac{nG_f r_{i,1}^2 + G_m r_{f,1}^2 - 2G_m r_{f,1} r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}$$

$$A'' = \frac{(nv_f - v_m)}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2} \quad B'' = -\frac{2r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}(nv_f - v_m)$$

$$C'' = \frac{nv_f r_{i,1}^2 + v_m r_{f,1}^2 - 2v_m r_{f,1} r_{i,1}}{(r_{f,1} - r_{i,1})^2}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = \frac{(nE_f - E_m)}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2} \quad B = -\frac{2r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2}(nE_f - E_m)$$

$$C = \frac{nE_f r_{m,1}^2 + E_m r_{i,2}^2 - 2E_m r_{i,2} r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2}$$

$$A' = \frac{(nG_f - G_m)}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2} \quad B' = -\frac{2r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2} (nG_f - G_m)$$

$$C' = \frac{nG_f r_{m,1}^2 + G_m r_{i,2}^2 - 2G_m r_{i,2} r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2}$$

$$A'' = \frac{(n\nu_f - \nu_m)}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2} \quad B'' = -\frac{2r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2} (n\nu_f - \nu_m)$$

$$C'' = \frac{n\nu_f r_{m,1}^2 + \nu_m r_{i,2}^2 - 2\nu_m r_{i,2} r_{m,1}}{(r_{i,2} - r_{m,1})^2}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = \frac{(nE_f - E_m)}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} \quad B = -\frac{2r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} (nE_f - E_m)$$

$$C = \frac{nE_f r_{i,3}^2 + E_m r_{f,2}^2 - 2E_m r_{f,2} r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2}$$

$$A' = \frac{(nG_f - G_m)}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} \quad B' = -\frac{2r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} (nG_f - G_m)$$

$$C' = \frac{nG_f r_{i,3}^2 + G_m r_{f,2}^2 - 2G_m r_{f,2} r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2}$$

$$A'' = \frac{(n\nu_f - \nu_m)}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} \quad B'' = -\frac{2r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2} (n\nu_f - \nu_m)$$

$$C'' = \frac{n\nu_f r_{i,3}^2 + \nu_m r_{f,2}^2 - 2\nu_m r_{f,2} r_{i,3}}{(r_{f,2} - r_{i,3})^2}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διάτμησης και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (Ar^2 + Br + C) 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^4}{4} + B \frac{r^3}{3} + C \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A'r^2 + B'r + C') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^4}{4} + B' \frac{r^3}{3} + C' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} v_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A''r^2 + B''r + C'') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^4}{4} + B'' \frac{r^3}{3} + C'' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (Ar^2 + Br + C) 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^4}{4} + B \frac{r^3}{3} + C \frac{r^2}{2} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A'r^2 + B'r + C') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^4}{4} + B' \frac{r^3}{3} + C' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} v_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A''r^2 + B''r + C'') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^4}{4} + B'' \frac{r^3}{3} + C'' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (Ar^2 + Br + C) 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A \frac{r^4}{4} + B \frac{r^3}{3} + C \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} G_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A'r^2 + B'r + C') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A' \frac{r^4}{4} + B' \frac{r^3}{3} + C' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} v_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A''r^2 + B''r + C'') 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \left[ A'' \frac{r^4}{4} + B'' \frac{r^3}{3} + C'' \frac{r^2}{2} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

Επομένως προκύπτει :

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{4}(r_{i,1}^4 - r_{f,1}^4) + \frac{B}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) + \frac{C}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{4}(r_{i,1}^4 - r_{f,1}^4) + \frac{B'}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) + \frac{C'}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{4}(r_{i,1}^4 - r_{f,1}^4) + \frac{B''}{3}(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) + \frac{C''}{2}(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) \right]\end{aligned}$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{4}(r_{i,2}^4 - r_{m,1}^4) + \frac{B}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) + \frac{C}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{4}(r_{i,2}^4 - r_{m,1}^4) + \frac{B'}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) + \frac{C'}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{4}(r_{i,2}^4 - r_{m,1}^4) + \frac{B''}{3}(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) + \frac{C''}{2}(r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) \right]\end{aligned}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\begin{aligned}\bar{E}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A}{4}(r_{i,3}^4 - r_{f,2}^4) + \frac{B}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) + \frac{C}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) \right] \\ \bar{G}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A'}{4}(r_{i,3}^4 - r_{f,2}^4) + \frac{B'}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) + \frac{C'}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) \right] \\ \bar{\nu}_i &= \frac{2\pi h}{V} \left[ \frac{A''}{4}(r_{i,3}^4 - r_{f,2}^4) + \frac{B''}{3}(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) + \frac{C''}{2}(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) \right]\end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, στην παραβολική μεταβολή για διάφορες τιμές του n.

<b>ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	7,32	12,31	17,30	22,28	27,27
<b>0,20</b>	7,31	12,29	17,26	22,24	27,21
<b>0,30</b>	7,31	12,27	17,24	22,21	27,17
<b>0,40</b>	7,30	12,27	17,23	22,19	27,15
<b>0,50</b>	7,31	12,27	17,24	22,20	27,17
<b>0,60</b>	7,32	12,30	17,28	22,26	27,25
<b>0,65</b>	7,33	12,33	17,33	22,33	27,32

Πίνακας T

<b>ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)</b>					
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	2,86	4,85	6,84	22,28	27,27
<b>0,20</b>	2,85	4,84	6,83	22,24	27,21
<b>0,30</b>	2,85	4,84	6,82	22,21	27,17
<b>0,40</b>	2,85	4,83	6,82	22,19	27,15
<b>0,50</b>	2,85	4,84	6,82	22,20	27,17
<b>0,60</b>	2,85	4,85	6,84	22,26	27,25
<b>0,65</b>	2,86	4,86	6,86	22,33	27,32

Πίνακας U

**ΛΟΓΟΣ POISSON  $\nu$**

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
<b>0,10</b>	0,2469	0,2602	0,2735	0,2868	0,3001
<b>0,20</b>	0,2472	0,2605	0,2737	0,2870	0,3003
<b>0,30</b>	0,2474	0,2606	0,2739	0,2871	0,3003
<b>0,40</b>	0,2474	0,2607	0,2739	0,2871	0,3004
<b>0,50</b>	0,2474	0,2606	0,2739	0,2871	0,3003
<b>0,60</b>	0,2470	0,2603	0,2736	0,2869	0,3002
<b>0,65</b>	0,2467	0,2600	0,2734	0,2867	0,3000

Πίνακας V

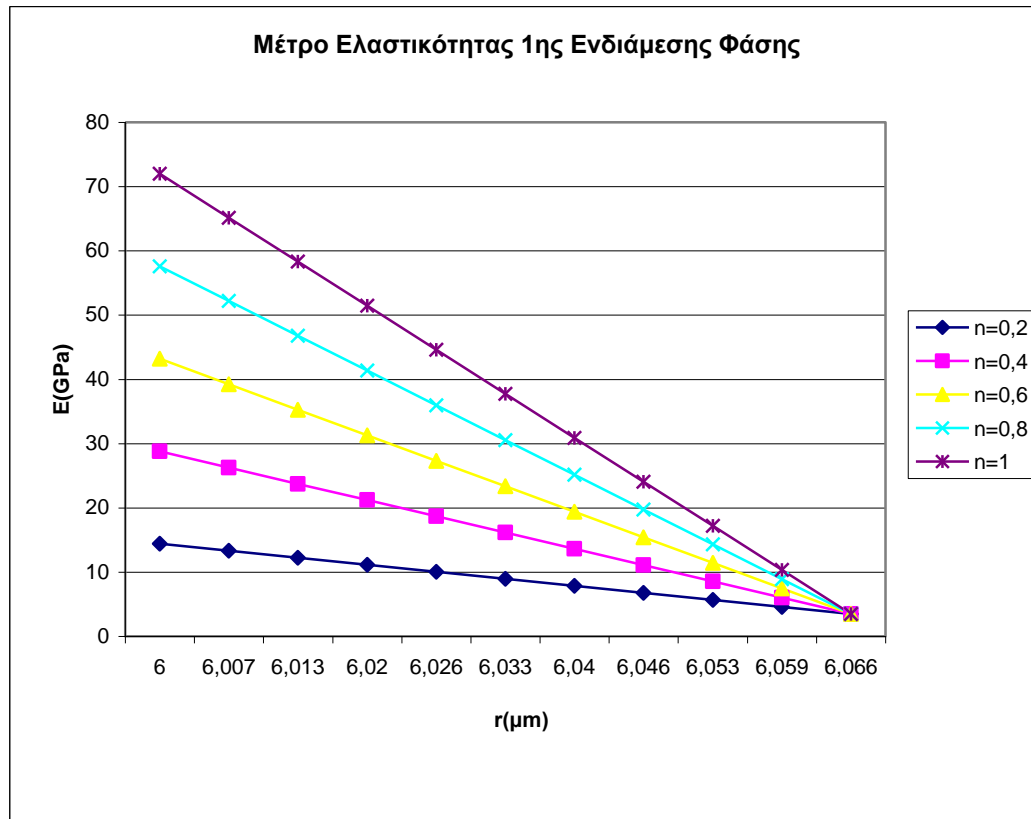
## 4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson για μια συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, για κάθε μία από τις τρεις ενδιάμεσες φάσεις του επταφασικού μοντέλου και κάθε από τις μεταβολές που μελετήσαμε, δηλαδή την γραμμική, την υπερβολική και την παραβολική. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα που επιλέχθηκε είναι η  $U_f = 0.10$ .

Στη παρουσίαση που ακολουθεί έχουμε ενεργήσει ως εξής: Για την παραπάνω κατ' όγκο περιεκτικότητα γνωρίζουμε την ακτίνα  $r$  της ενδιάμεσης φάσης που αντιστοιχεί σε αυτήν, στο επταφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29]. Αυτήν την ακτίνα την χωρίζουμε σε 10 ίσα διαστήματα. Σε αυτά τα διαστήματα, δηλαδή στη περιοχή της ενδιάμεση φάσης για κατ' όγκο περιεκτικότητα 0.10, υπολογίζουμε τις ελαστικές σταθερές μας και το λόγο Poisson για διάφορα  $n$  που όπως είπαμε και προηγούμενα δηλώνουν την επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Τέλος να σημειωθεί ότι για κάθε πίνακα παρακάτω ακολουθεί και ένα διάγραμμα ενώ πραγματοποιείται και σύγκριση των μοντέλων για την οριακή συνθήκη  $n=1$ .



### Μέτρο Ελαστικότητας 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

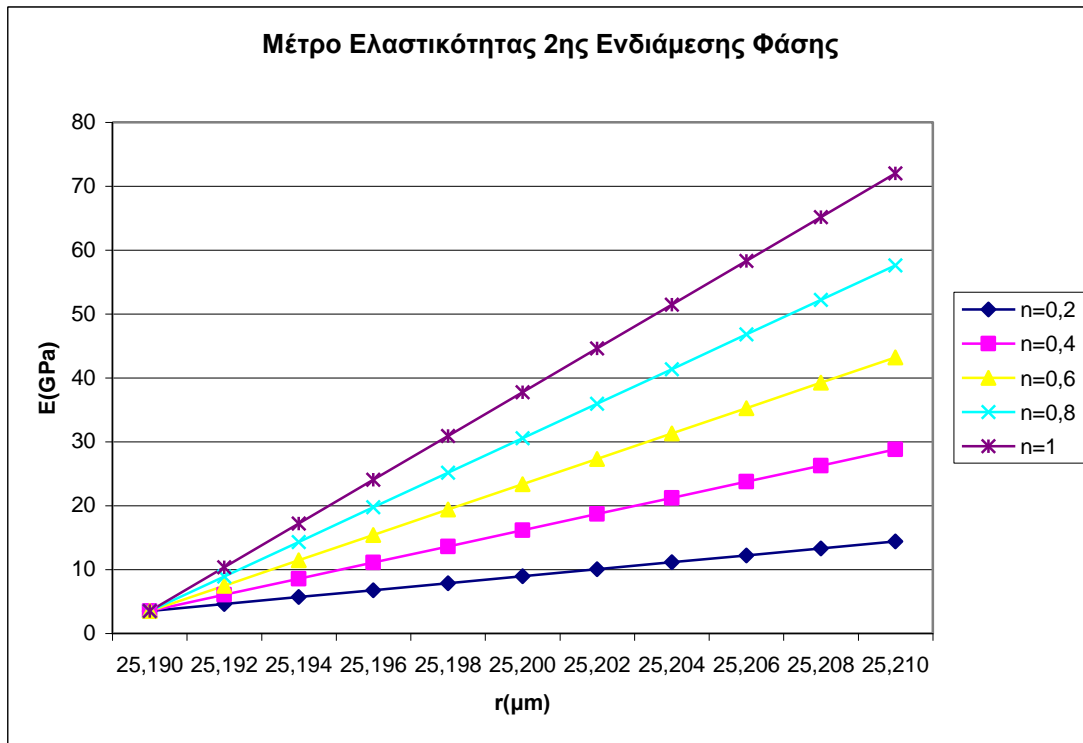


Διάγραμμα 1

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	14,40	28,80	43,20	57,60	72,00
6,0066	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
6,0132	12,22	23,74	35,26	46,78	58,30
6,0198	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
6,0264	10,04	18,68	27,32	35,96	44,60
6,033	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
6,0396	7,86	13,62	19,38	25,14	30,90
6,0462	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
6,0528	5,68	8,56	11,44	14,32	17,20
6,0594	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
6,066	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας W

**Μέτρο Ελαστικότητας 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο**



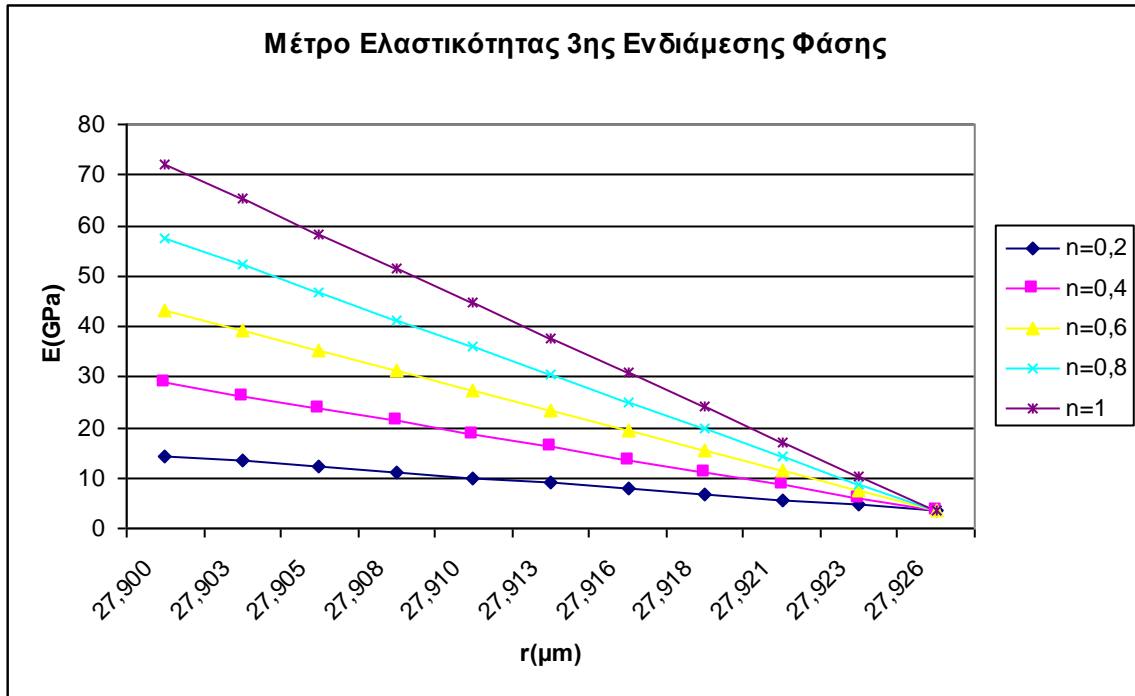
Διάγραμμα 2

**Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
25,192	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
25,194	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
25,196	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
25,198	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
25,2	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
25,202	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
25,204	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
25,206	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
25,208	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
25,21	14,4	28,8	43,2	57,6	72

Πίνακας X

**Μέτρο Ελαστικότητας 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο**



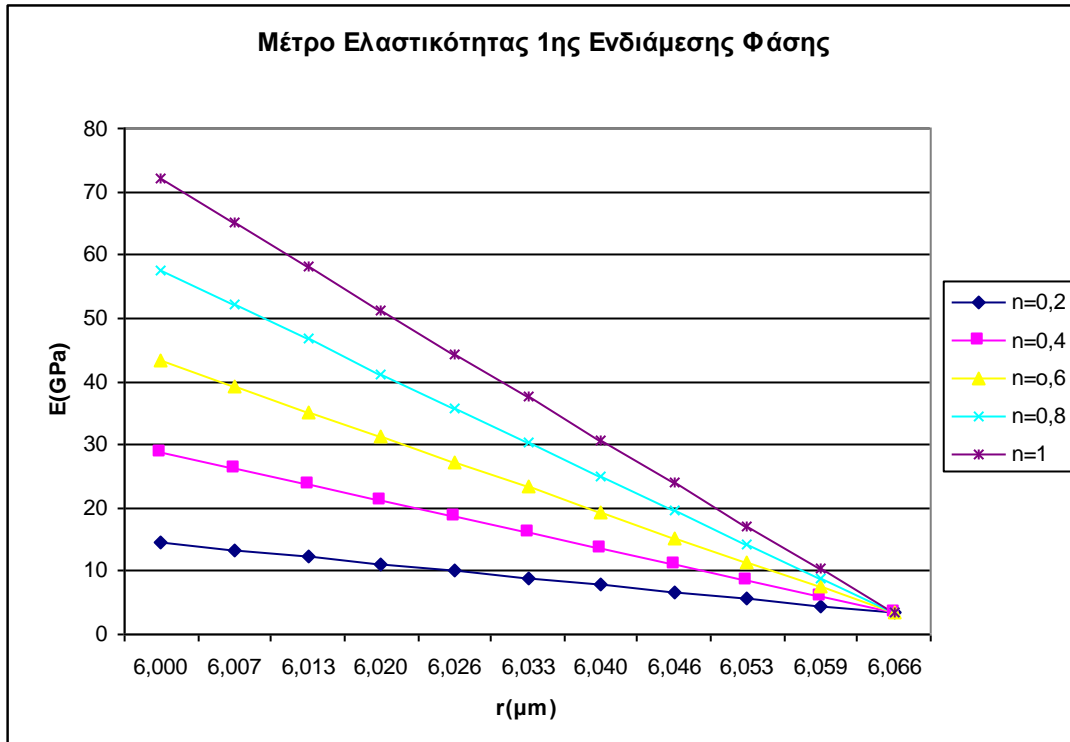
Διάγραμμα 3

**Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	14,4	28,8	43,2	57,6	72
27,903	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
27,905	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
27,908	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
27,91	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
27,913	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
27,916	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
27,918	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
27,921	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
27,923	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
27,926	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας Υ

**Μέτρο Ελαστικότητας 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



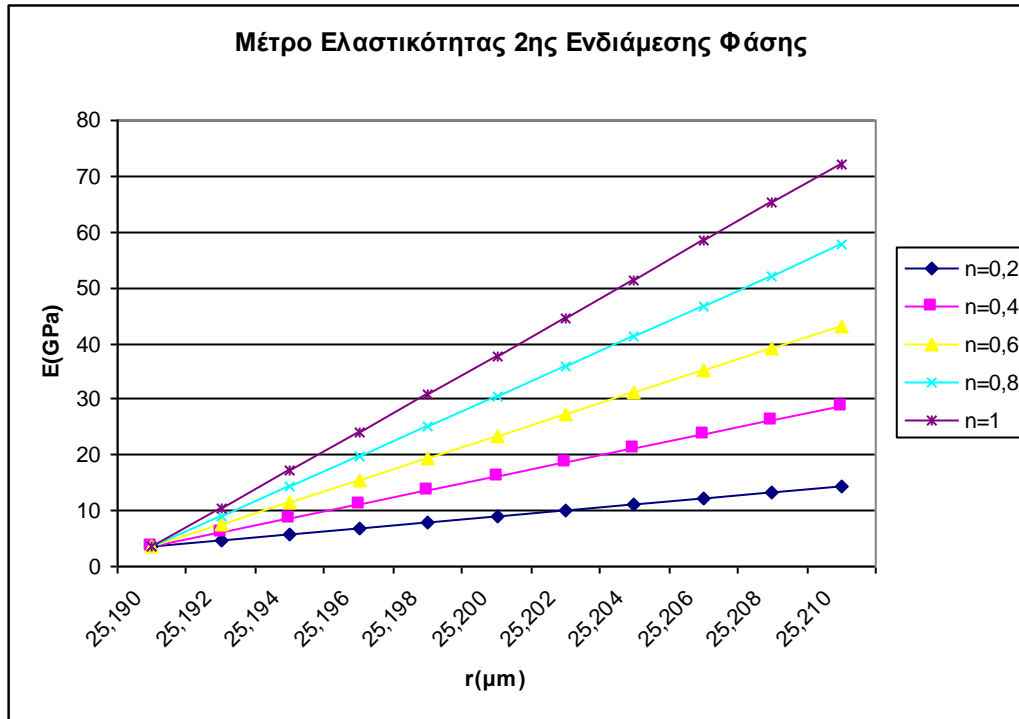
Διάγραμμα 4

**Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	14,4	28,8	43,2	57,6	72
6,0066	13,30	26,24	39,19	52,14	65,08
6,0132	12,20	23,70	35,19	46,68	58,18
6,0198	11,10	21,15	31,20	41,25	51,29
6,0264	10,01	18,61	27,22	35,82	44,42
6,033	8,92	16,08	23,24	30,40	37,56
6,0396	7,83	13,55	19,28	25,00	30,72
6,0462	6,75	11,03	15,32	19,61	23,89
6,0528	5,66	8,52	11,37	14,23	17,08
6,0594	4,58	6,01	7,43	8,86	10,28
6,066	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας Z

**Μέτρο Ελαστικότητας 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



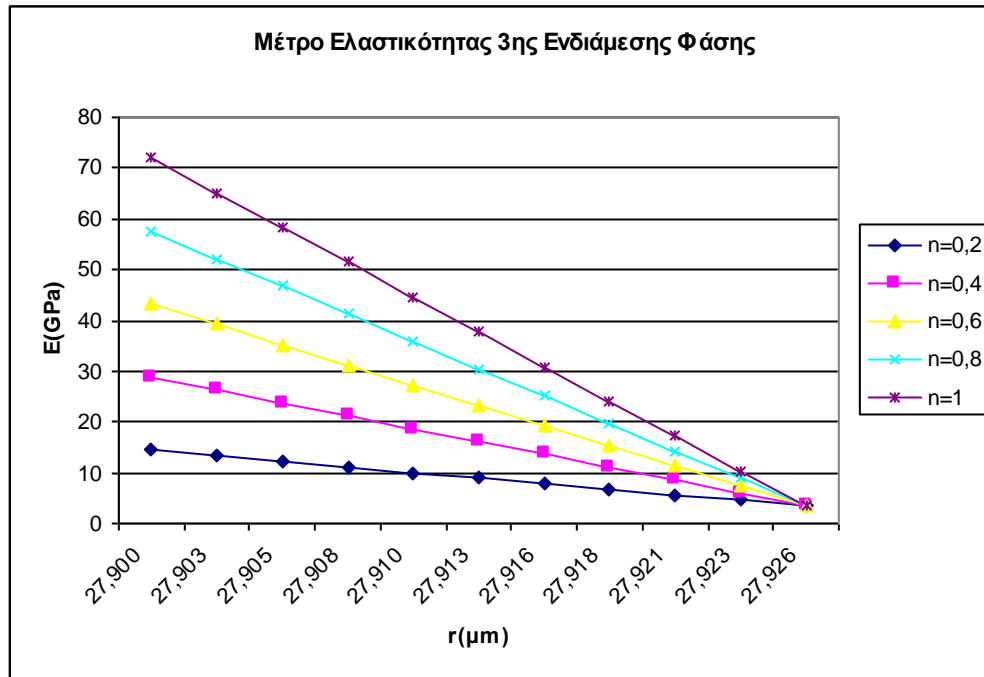
Διάγραμμα 5

**Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
25,192	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
25,194	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
25,196	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
25,198	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
25,2	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
25,202	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
25,204	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
25,206	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
25,208	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
25,21	14,4	28,8	43,2	57,6	72

Πίνακας A1

**Μέτρο Ελαστικότητας 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



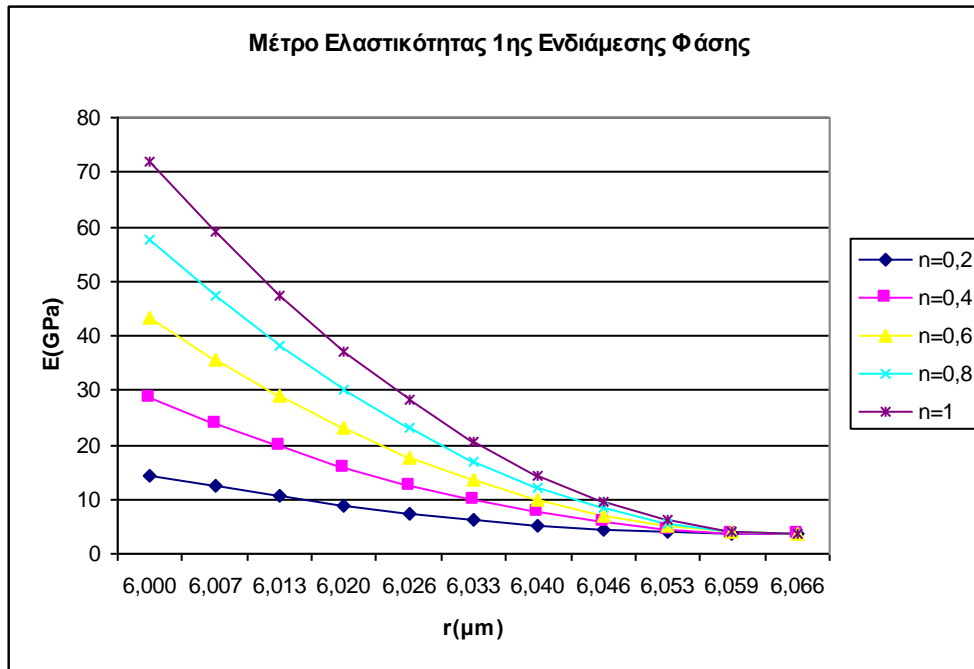
Διάγραμμα 6

**Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	14,40	28,80	43,20	57,60	72,00
27,9026	13,31	26,27	39,23	52,19	65,14
27,9052	12,22	23,74	35,25	46,77	58,29
27,9078	11,13	21,21	31,28	41,36	51,44
27,9104	10,04	18,67	27,31	35,95	44,58
27,913	8,95	16,14	23,34	30,54	37,73
27,9156	7,86	13,61	19,37	25,13	30,88
27,9182	6,77	11,09	15,40	19,72	24,04
27,9208	5,68	8,56	11,43	14,31	17,19
27,9234	4,59	6,03	7,47	8,91	10,34
27,926	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας B1

### Μέτρο Ελαστικότητας 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο



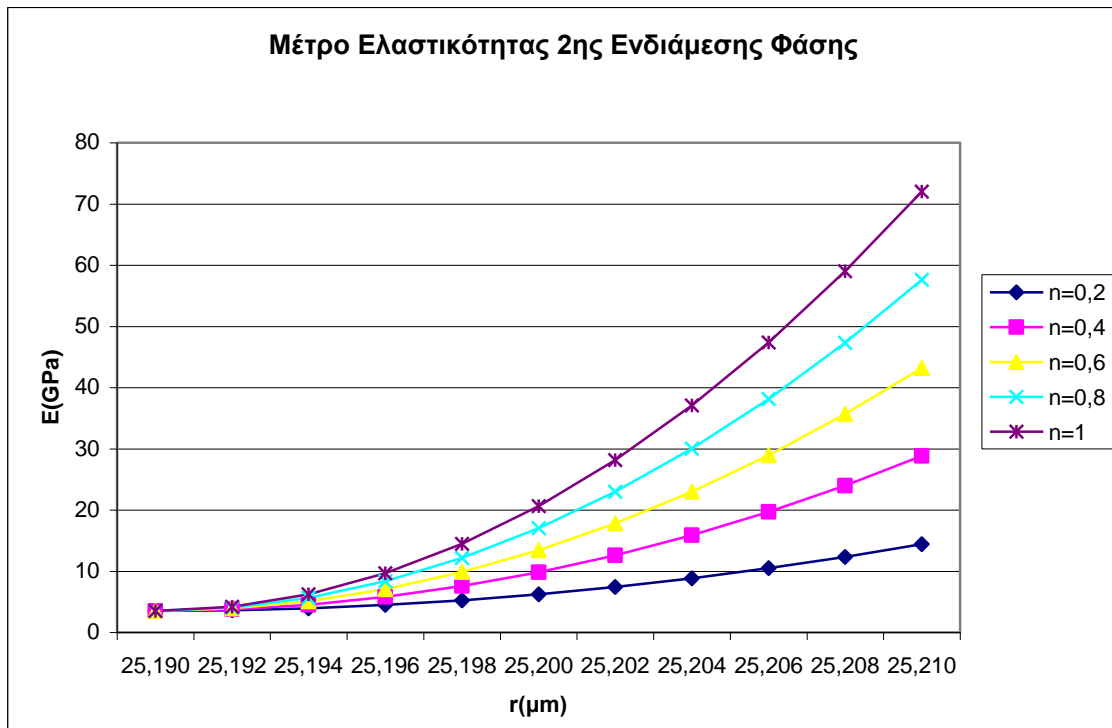
Διάγραμμα 7

### Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	14,4	28,8	43,2	57,6	72
6,0066	12,329	23,993	35,657	47,321	58,985
6,0132	10,476	19,692	28,908	38,124	47,34
6,0198	8,841	15,897	22,953	30,009	37,065
6,0264	7,424	12,608	17,792	22,976	28,16
6,033	6,225	9,825	13,425	17,025	20,625
6,0396	5,244	7,548	9,852	12,156	14,46
6,0462	4,481	5,777	7,073	8,369	9,665
6,0528	3,936	4,512	5,088	5,664	6,24
6,0594	3,609	3,753	3,897	4,041	4,185
6,066	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας C1

## Μέτρο Ελαστικότητας 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο



Διάγραμμα 8

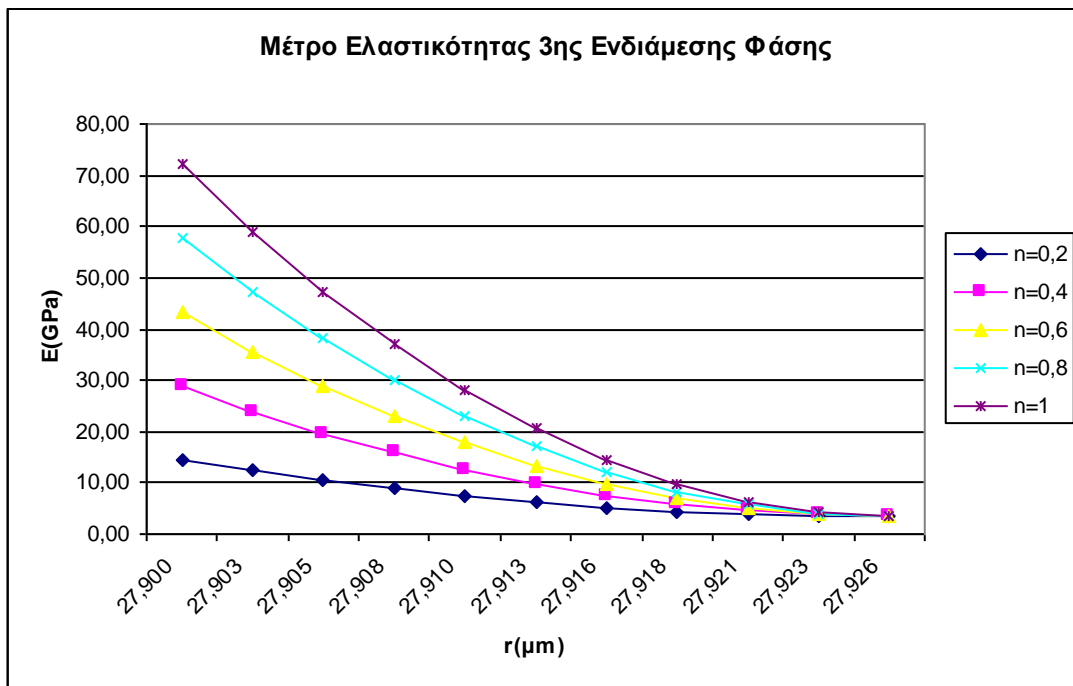
### Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E(Gpa)

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	3,5	3,5	3,5	3,50	3,50
25,192	3,61	3,75	3,90	4,04	4,19
25,194	3,94	4,51	5,09	5,66	6,24
25,196	4,48	5,78	7,07	8,37	9,66
25,198	5,24	7,55	9,85	12,16	14,46
25,2	6,22	9,83	13,42	17,02	20,62
25,202	7,42	12,61	17,79	22,98	28,16
25,204	8,84	15,90	22,95	30,01	37,06
25,206	10,48	19,69	28,91	38,12	47,34
25,208	12,33	23,99	35,66	47,32	58,98
25,21	14,4	28,8	43,2	57,6	72

Πίνακας D1



### Μέτρο Ελαστικότητας 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο



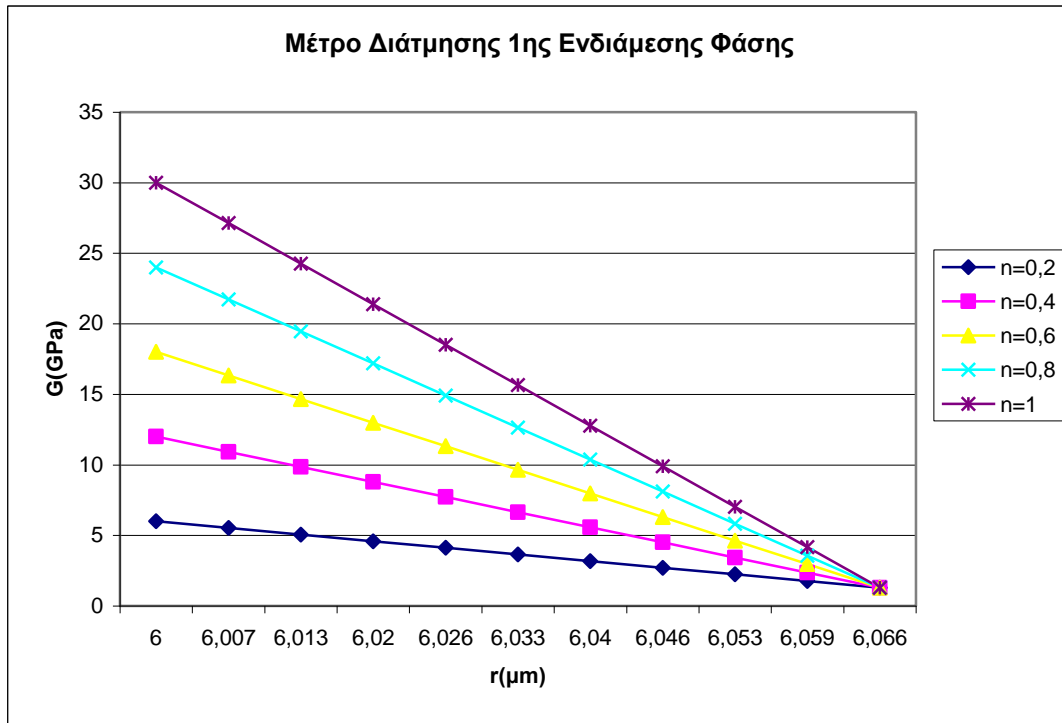
Διάγραμμα 9

### Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	14,40	28,80	43,20	57,60	72,00
27,903	12,33	23,99	35,66	47,32	58,99
27,905	10,48	19,69	28,91	38,12	47,34
27,908	8,84	15,90	22,95	30,01	37,06
27,91	7,42	12,61	17,79	22,98	28,16
27,913	6,22	9,83	13,43	17,02	20,63
27,916	5,24	7,55	9,85	12,16	14,46
27,918	4,48	5,78	7,07	8,37	9,66
27,921	3,94	4,51	5,09	5,66	6,24
27,923	3,61	3,75	3,90	4,04	4,19
27,926	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας E1

**Μέτρο Διάτμησης 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο**



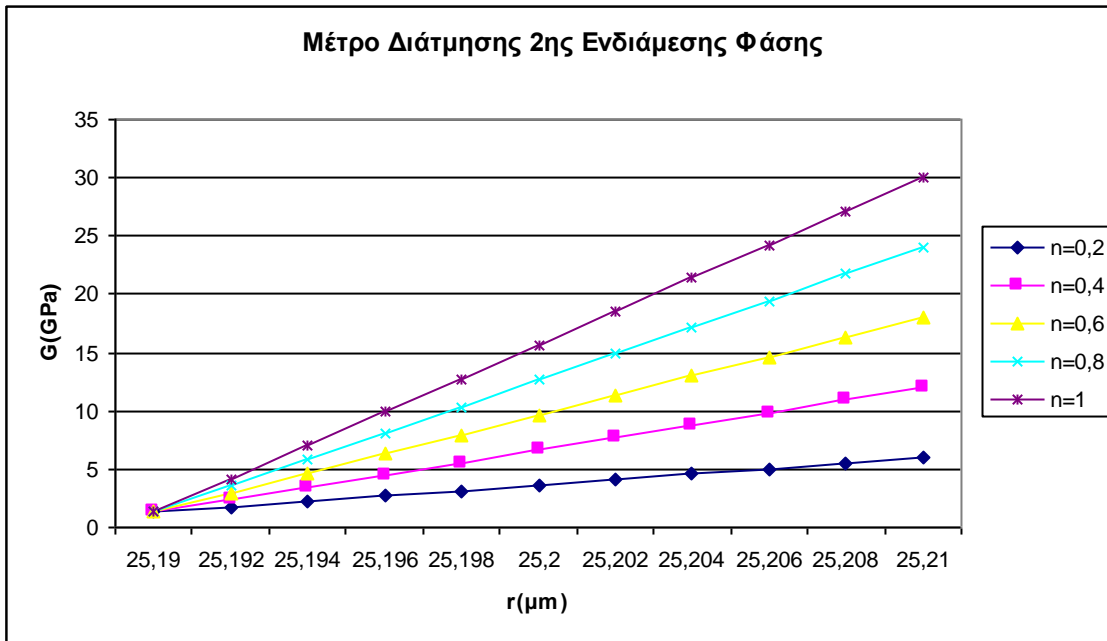
Διάγραμμα 10

**Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00
6,0066	5,53	10,93	16,33	21,73	27,13
6,0132	5,06	9,86	14,66	19,46	24,26
6,0198	4,59	8,79	12,99	17,19	21,39
6,0264	4,12	7,72	11,32	14,92	18,52
6,033	3,65	6,65	9,65	12,65	15,65
6,0396	3,17	5,57	7,97	10,37	12,77
6,0462	2,70	4,50	6,30	8,10	9,90
6,0528	2,23	3,43	4,63	5,83	7,03
6,0594	1,76	2,36	2,96	3,56	4,16
6,066	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας F1

**Μέτρο Διάτμησης 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο**



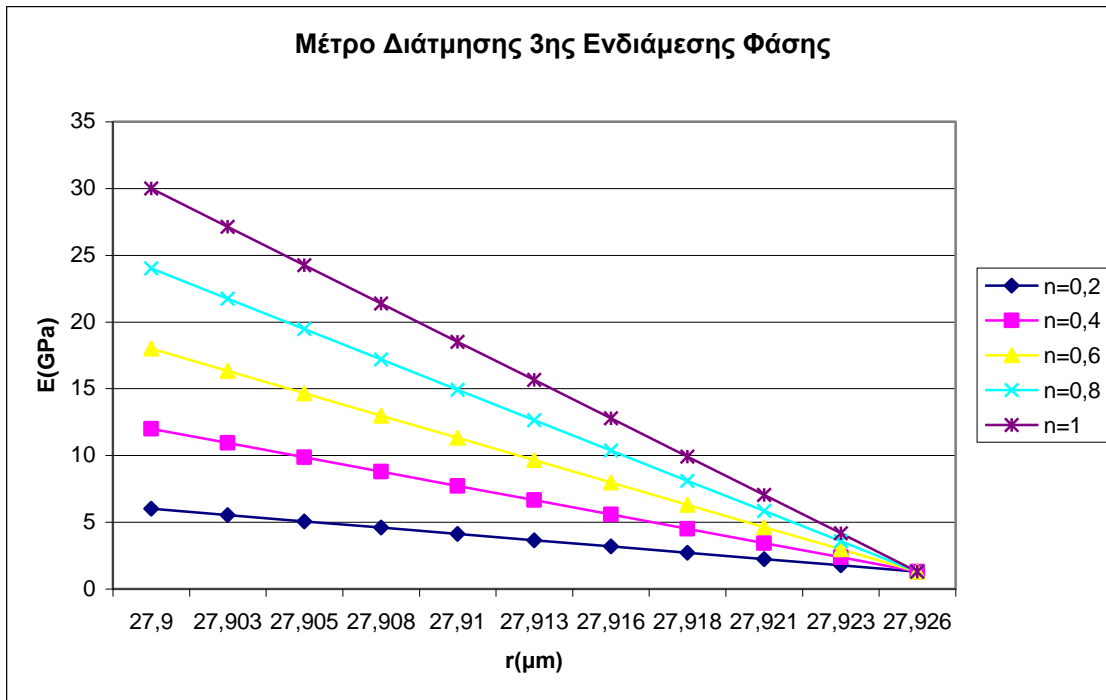
Διάγραμμα 11

**Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης  $G$ (GPa)**

$r$	$n=0,2$	$n=0,4$	$n=0,6$	$n=0,8$	$n=1$
25,19	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
25,192	1,761	2,361	2,961	3,561	4,161
25,194	2,232	3,432	4,632	5,832	7,032
25,196	2,703	4,503	6,303	8,103	9,903
25,198	3,174	5,574	7,974	10,374	12,774
25,2	3,645	6,645	9,645	12,645	15,645
25,202	4,116	7,716	11,316	14,916	18,516
25,204	4,587	8,787	12,987	17,187	21,387
25,206	5,058	9,858	14,658	19,458	24,258
25,208	5,529	10,929	16,329	21,729	27,129
25,21	6	12	18	24	30

Πίνακας G1

**Μέτρο Διάτμησης 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο**



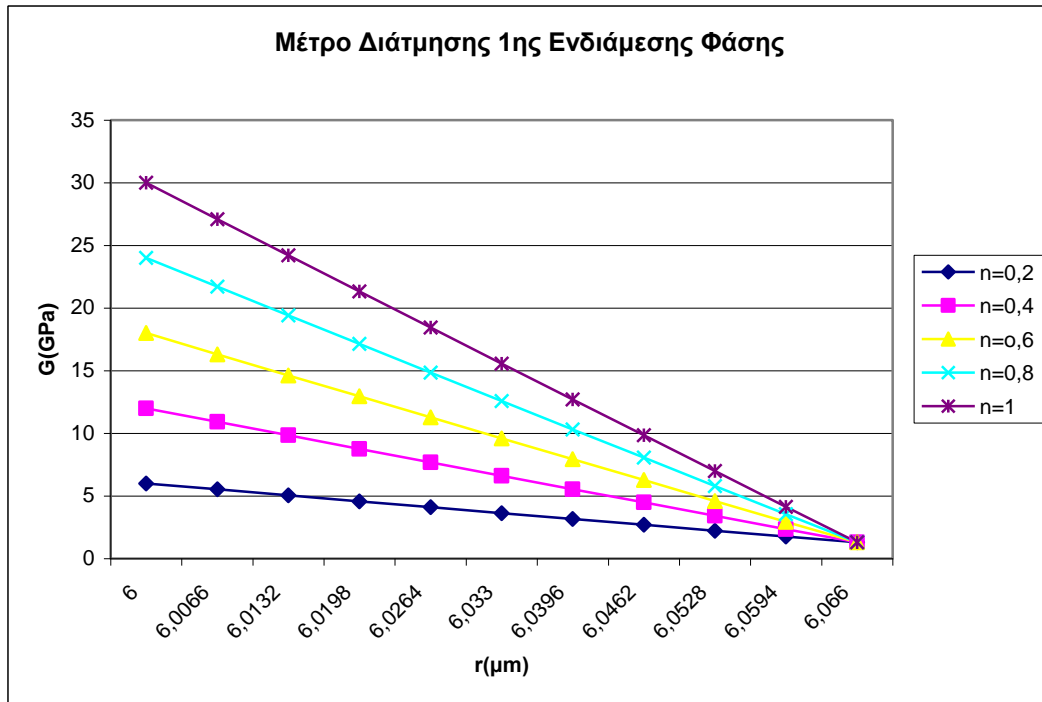
Διάγραμμα 12

**Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gpa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	6	12	18	24	30
27,903	5,529	10,929	16,329	21,729	27,129
27,905	5,058	9,858	14,658	19,458	24,258
27,908	4,587	8,787	12,987	17,187	21,387
27,91	4,116	7,716	11,316	14,916	18,516
27,913	3,645	6,645	9,645	12,645	15,645
27,916	3,174	5,574	7,974	10,374	12,774
27,918	2,703	4,503	6,303	8,103	9,903
27,921	2,232	3,432	4,632	5,832	7,032
27,923	1,761	2,361	2,961	3,561	4,161
27,926	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Η1

### Μέτρο Διάτμησης 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο



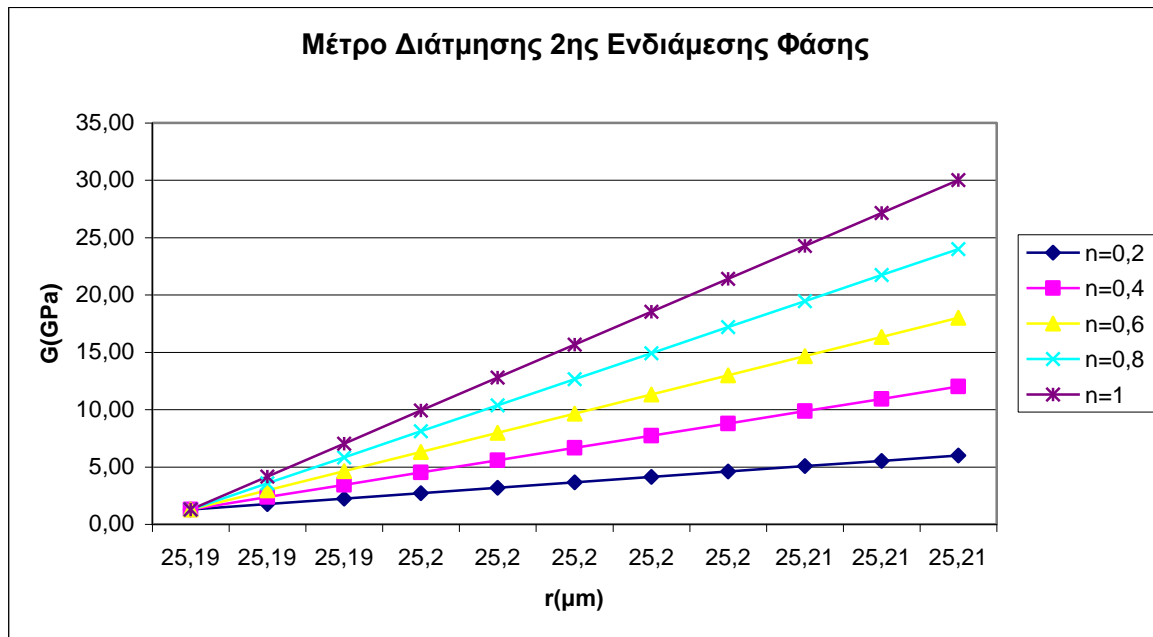
Διάγραμμα 13

### Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	6	12	18	24	30
6,0066	5,52	10,92	16,31	21,71	27,10
6,0132	5,05	9,84	14,63	19,42	24,21
6,0198	4,58	8,76	12,95	17,13	21,32
6,0264	4,10	7,69	11,27	14,86	18,44
6,033	3,63	6,62	9,60	12,58	15,57
6,0396	3,16	5,55	7,93	10,31	12,70
6,0462	2,69	4,48	6,26	8,05	9,84
6,0528	2,22	3,41	4,60	5,79	6,98
6,0594	1,76	2,35	2,94	3,54	4,13
6,066	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας ΙΙ

**Μέτρο Διάτμησης 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



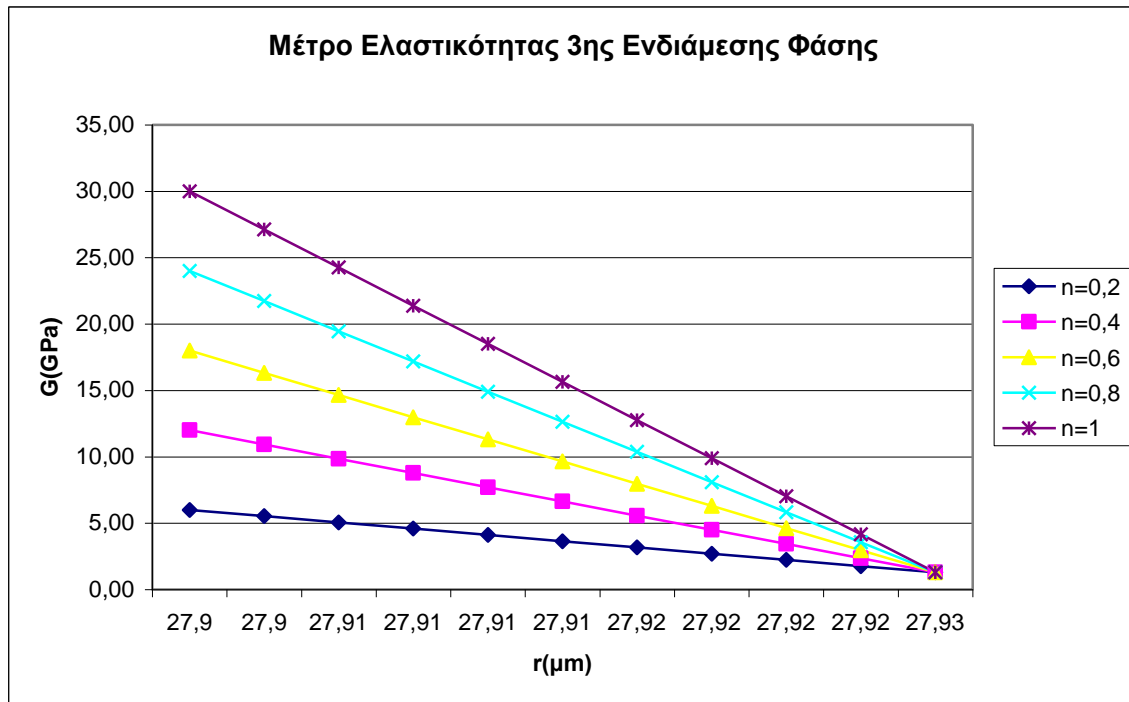
Διάγραμμα 14

**Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gra)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
25,192	1,76	2,36	2,96	3,56	4,16
25,194	2,23	3,43	4,63	5,83	7,04
25,196	2,70	4,50	6,31	8,11	9,91
25,198	3,17	5,58	7,98	10,38	12,78
25,2	3,65	6,65	9,65	12,65	15,65
25,202	4,12	7,72	11,32	14,92	18,52
25,204	4,59	8,79	12,99	17,19	21,39
25,206	5,06	9,86	14,66	19,46	24,26
25,208	5,53	10,93	16,33	21,73	27,13
25,21	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00

Πίνακας J1

**Μέτρο Διάτμησης 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



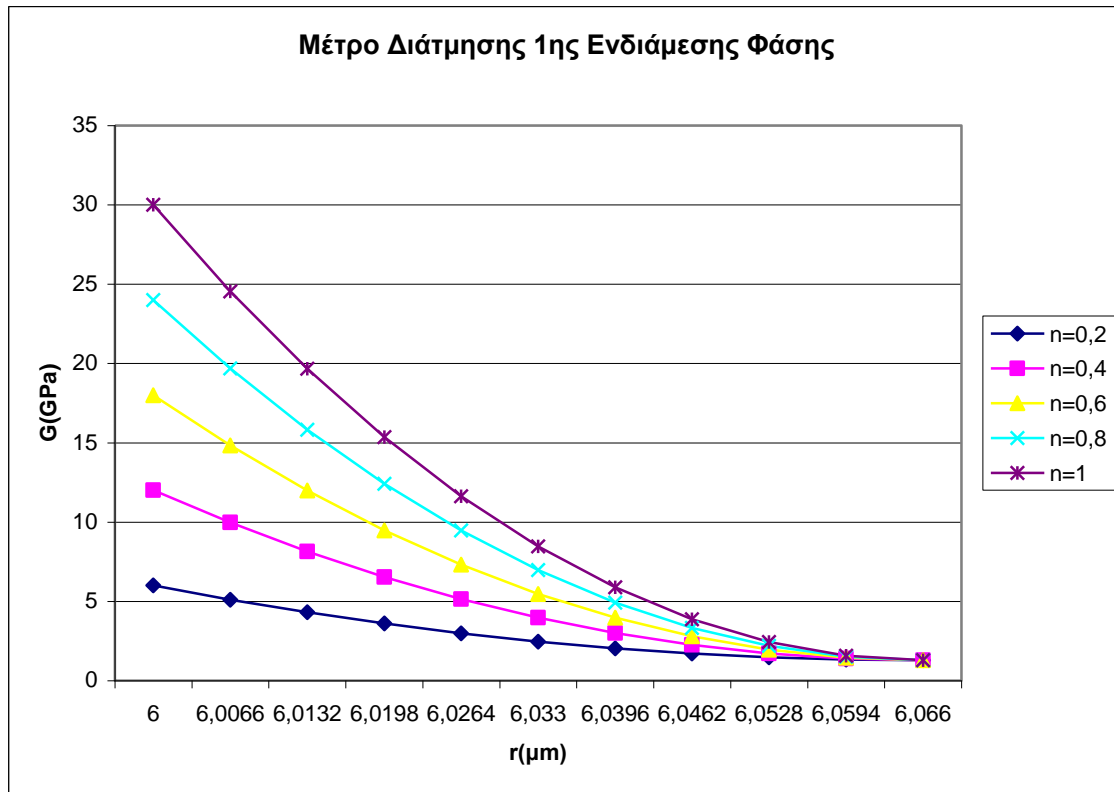
Διάγραμμα 15

**Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης G(Gpa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00
27,903	5,53	10,93	16,33	21,73	27,13
27,905	5,06	9,86	14,66	19,45	24,25
27,908	4,59	8,78	12,98	17,18	21,38
27,91	4,11	7,71	11,31	14,91	18,51
27,913	3,64	6,64	9,64	12,64	15,64
27,916	3,17	5,57	7,97	10,37	12,77
27,918	2,70	4,50	6,30	8,10	9,90
27,921	2,23	3,43	4,63	5,83	7,03
27,923	1,76	2,36	2,96	3,56	4,16
27,926	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Κ1

**Μέτρο Διάτμησης 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο**



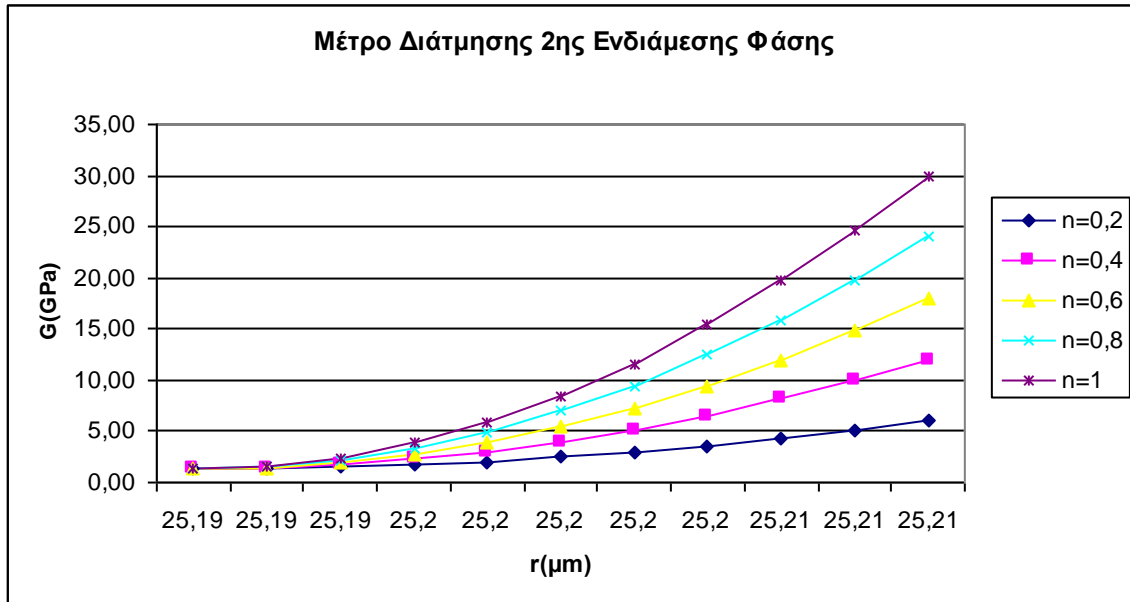
Διάγραμμα 16

<b>Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G (GPa)</b>					
<b>r</b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
6	6	12	18	24	30
6,0066	5,1051	9,9651	14,825	19,6851	24,5451
6,0132	4,3044	8,1444	11,984	15,8244	19,6644
6,0198	3,5979	6,5379	9,4779	12,4179	15,3579
6,0264	2,9856	5,1456	7,3056	9,4656	11,6256
6,033	2,4675	3,9675	5,4675	6,9675	8,4675
6,0396	2,0436	3,0036	3,9636	4,9236	5,8836
6,0462	1,7139	2,2539	2,7939	3,3339	3,8739
6,0528	1,4784	1,7184	1,9584	2,1984	2,4384
6,0594	1,3371	1,3971	1,4571	1,5171	1,5771
6,066	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας L1



**Μέτρο Διάτμησης 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο**



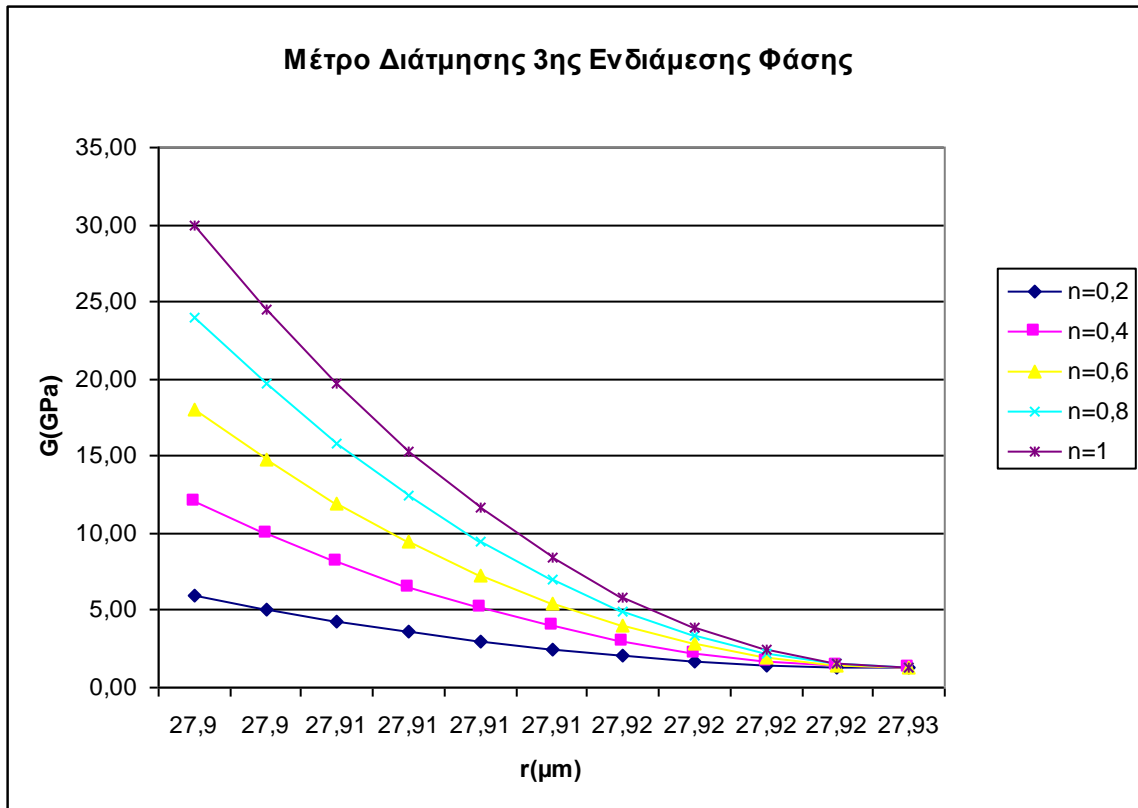
Διάγραμμα 17

**ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ 2ης Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
25,192	1,34	1,40	1,46	1,52	1,58
25,194	1,48	1,72	1,96	2,20	2,44
25,196	1,71	2,25	2,79	3,33	3,87
25,198	2,04	3,00	3,96	4,92	5,88
25,2	2,47	3,97	5,47	6,97	8,47
25,202	2,99	5,15	7,31	9,47	11,63
25,204	3,60	6,54	9,48	12,42	15,36
25,206	4,30	8,14	11,98	15,82	19,66
25,208	5,11	9,97	14,83	19,69	24,55
25,21	6,00	12	18	24	30

Πίνακας Μ1

**Μέτρο Διάτμησης 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο**



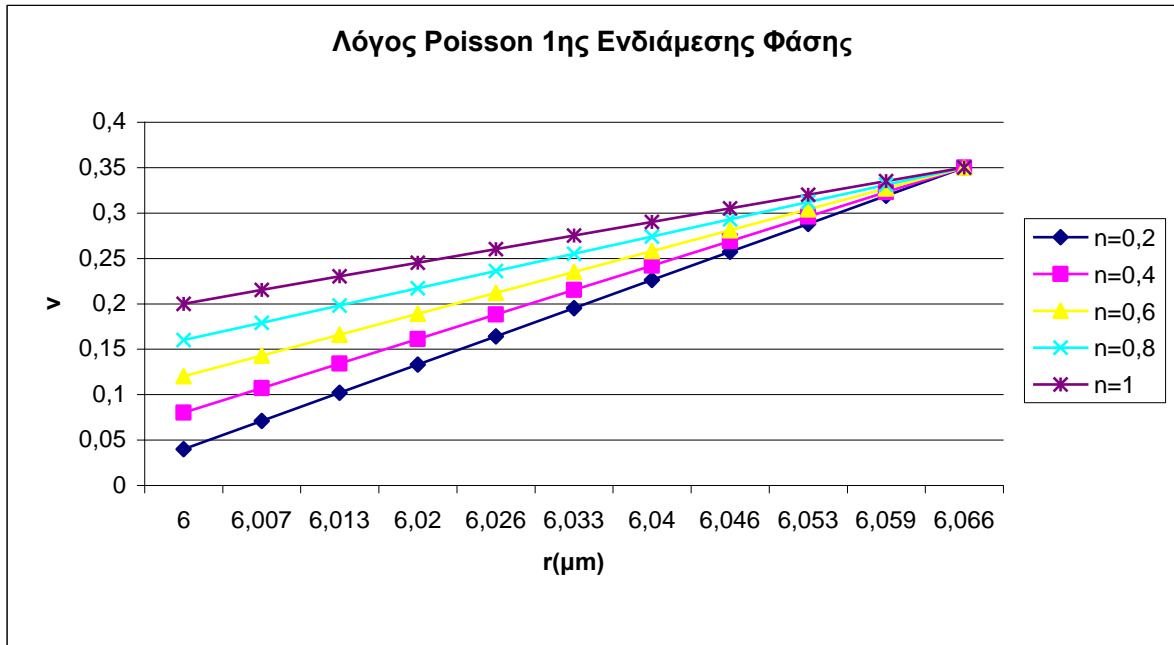
Διάγραμμα 18

**Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	6,00	12,00	18,00	24,00	30,00
27,903	5,11	9,97	14,83	19,69	24,55
27,905	4,30	8,14	11,98	15,82	19,66
27,908	3,60	6,54	9,48	12,42	15,36
27,91	2,99	5,15	7,31	9,47	11,63
27,913	2,47	3,97	5,47	6,97	8,47
27,916	2,04	3,00	3,96	4,92	5,88
27,918	1,71	2,25	2,79	3,33	3,87
27,921	1,48	1,72	1,96	2,20	2,44
27,923	1,34	1,40	1,46	1,52	1,58
27,926	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας N1

Λόγος Poisson 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

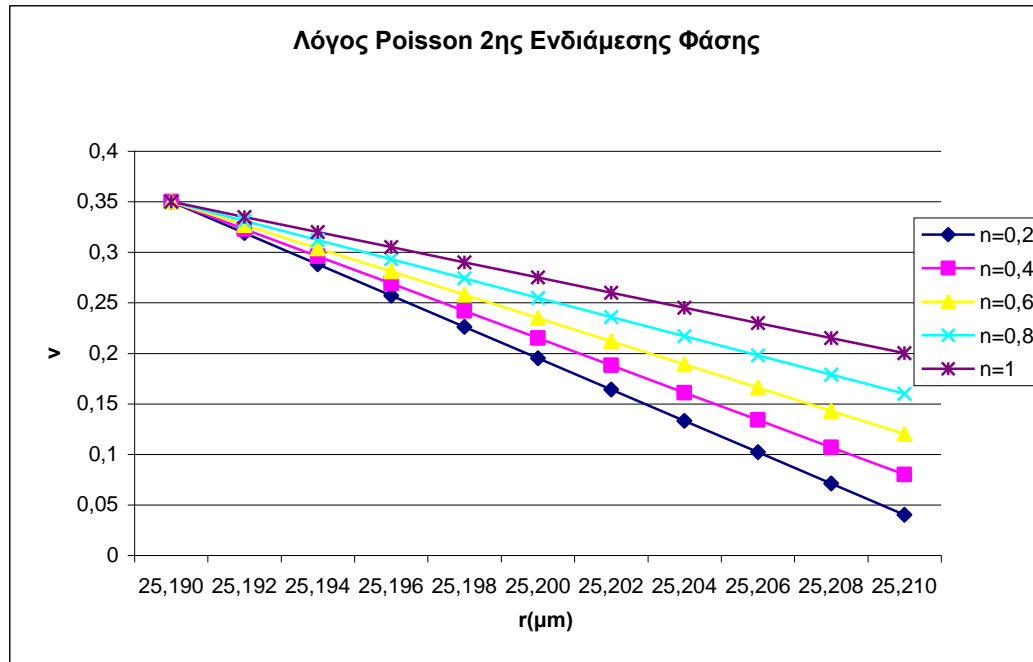


Διάγραμμα 19

Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
6,0066	0,071	0,107	0,143	0,179	0,215
6,0132	0,102	0,134	0,166	0,198	0,23
6,0198	0,133	0,161	0,189	0,217	0,245
6,0264	0,164	0,188	0,212	0,236	0,26
6,033	0,195	0,215	0,235	0,255	0,275
6,0396	0,226	0,242	0,258	0,274	0,29
6,0462	0,257	0,269	0,281	0,293	0,305
6,0528	0,288	0,296	0,304	0,312	0,32
6,0594	0,319	0,323	0,327	0,331	0,335
6,066	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας Ο1

Λόγος Poisson 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

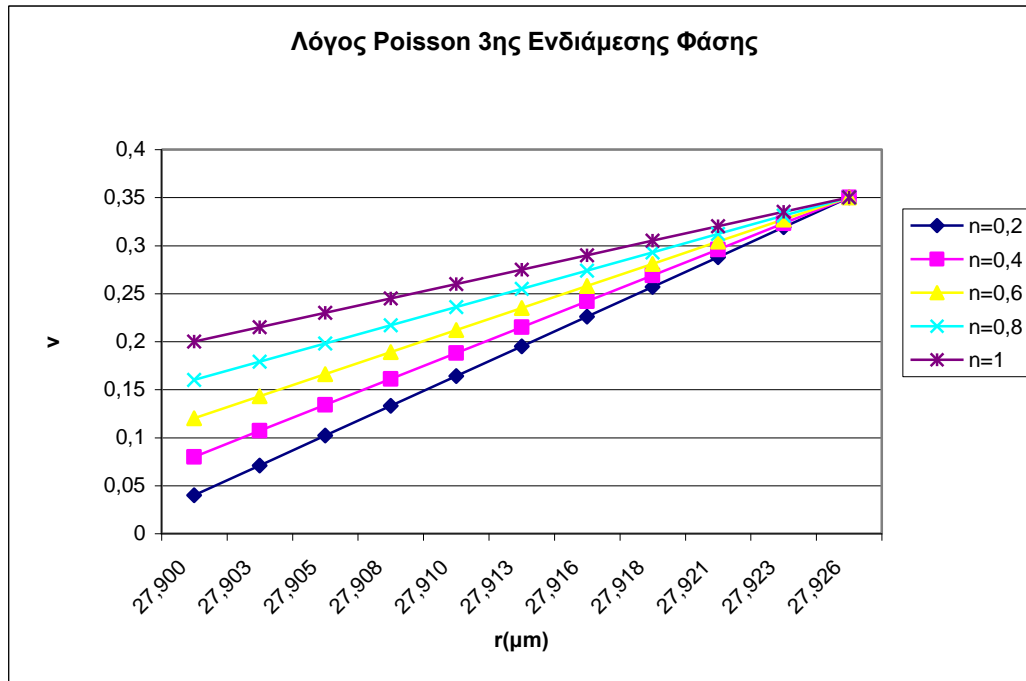


Διάγραμμα 20

Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
25,192	0,319	0,323	0,33	0,33	0,335
25,194	0,288	0,296	0,3	0,31	0,32
25,196	0,257	0,269	0,28	0,29	0,305
25,198	0,226	0,242	0,26	0,27	0,29
25,2	0,195	0,215	0,24	0,26	0,275
25,202	0,164	0,188	0,21	0,24	0,26
25,204	0,133	0,161	0,19	0,22	0,245
25,206	0,102	0,134	0,17	0,2	0,23
25,208	0,071	0,107	0,14	0,18	0,215
25,21	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Πίνακας P1

Λόγος Poisson 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

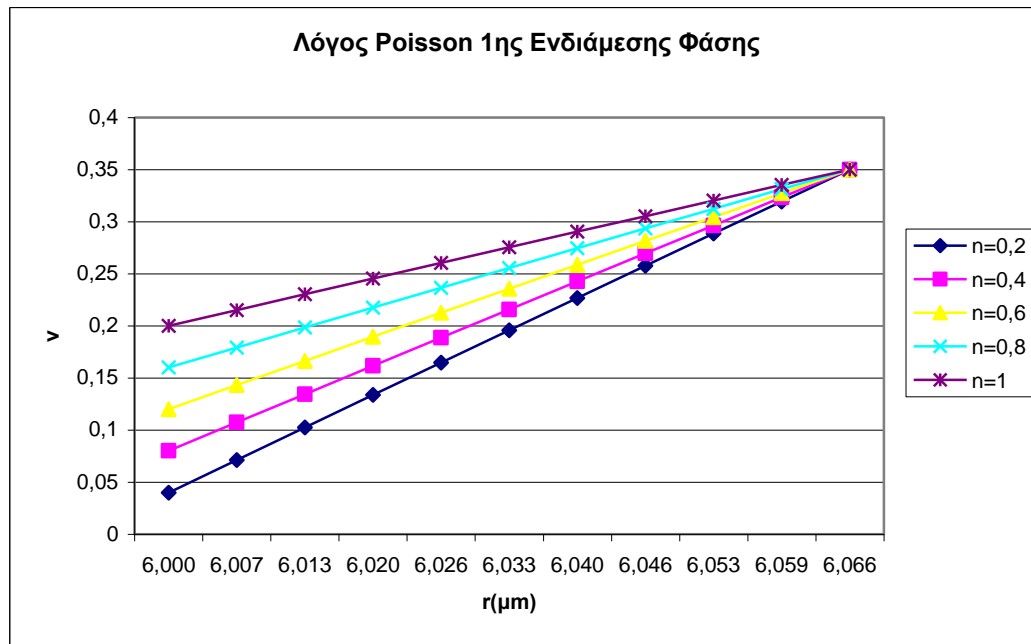


Διάγραμμα 21

Λόγος Poisson ( $\nu$ ) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20
27,9026	0,07	0,11	0,143	0,179	0,22
27,9052	0,1	0,13	0,166	0,198	0,23
27,9078	0,13	0,16	0,189	0,217	0,25
27,9104	0,16	0,19	0,212	0,236	0,26
27,913	0,2	0,22	0,235	0,255	0,28
27,9156	0,23	0,24	0,258	0,274	0,29
27,9182	0,26	0,27	0,281	0,293	0,31
27,9208	0,29	0,3	0,304	0,312	0,32
27,9234	0,32	0,32	0,327	0,331	0,34
27,926	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας Q1

**Λόγος Poisson 1ης Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**

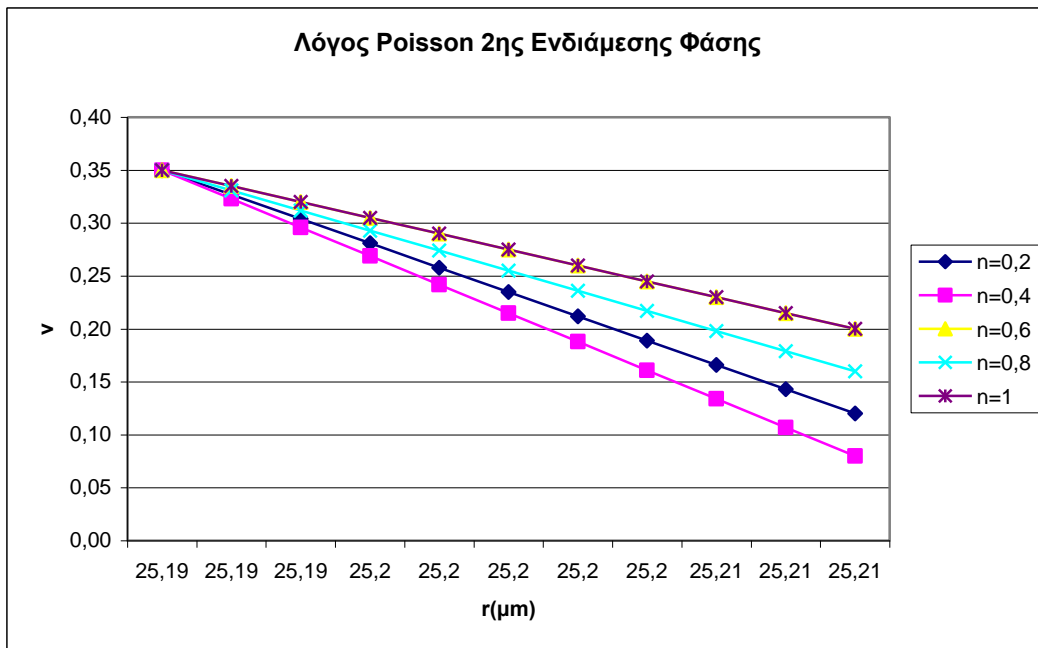


Διάγραμμα 22

<b>Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης</b>					
<b>r</b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>	<b>n=1</b>
6	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
6,0066	0,07	0,11	0,1432	0,179	0,22
6,0132	0,1	0,13	0,1664	0,198	0,23
6,0198	0,13	0,16	0,1895	0,217	0,25
6,0264	0,16	0,19	0,2126	0,236	0,26
6,033	0,2	0,22	0,2356	0,256	0,28
6,0396	0,23	0,24	0,2586	0,274	0,29
6,0462	0,26	0,27	0,2815	0,293	0,31
6,0528	0,29	0,3	0,3044	0,312	0,32
6,0594	0,32	0,32	0,3272	0,331	0,34
6,066	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας R1

**Λόγος Poisson 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**

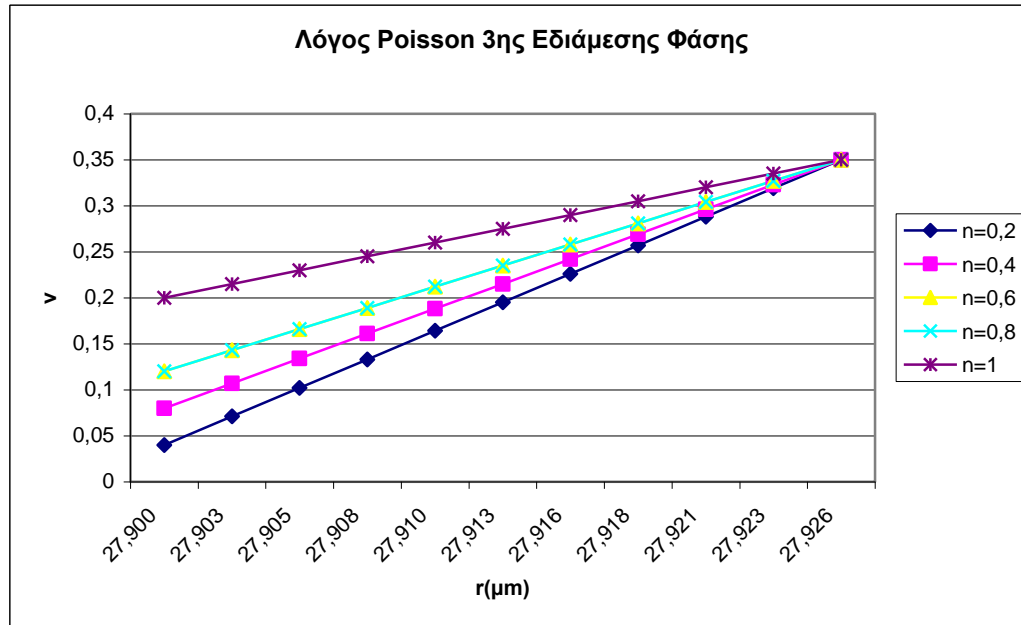


Διάγραμμα 23

Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
25,192	0,33	0,32	0,33	0,33	0,33
25,194	0,30	0,30	0,32	0,31	0,32
25,196	0,28	0,27	0,30	0,29	0,30
25,198	0,26	0,24	0,29	0,27	0,29
25,2	0,23	0,21	0,27	0,25	0,27
25,202	0,21	0,19	0,26	0,24	0,26
25,204	0,19	0,16	0,24	0,22	0,24
25,206	0,17	0,13	0,23	0,20	0,23
25,208	0,14	0,11	0,21	0,18	0,21
25,21	0,12	0,08	0,2	0,16	0,2

Πίνακας S1

**Λόγος Poisson 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Υπερβολικό Μοντέλο**



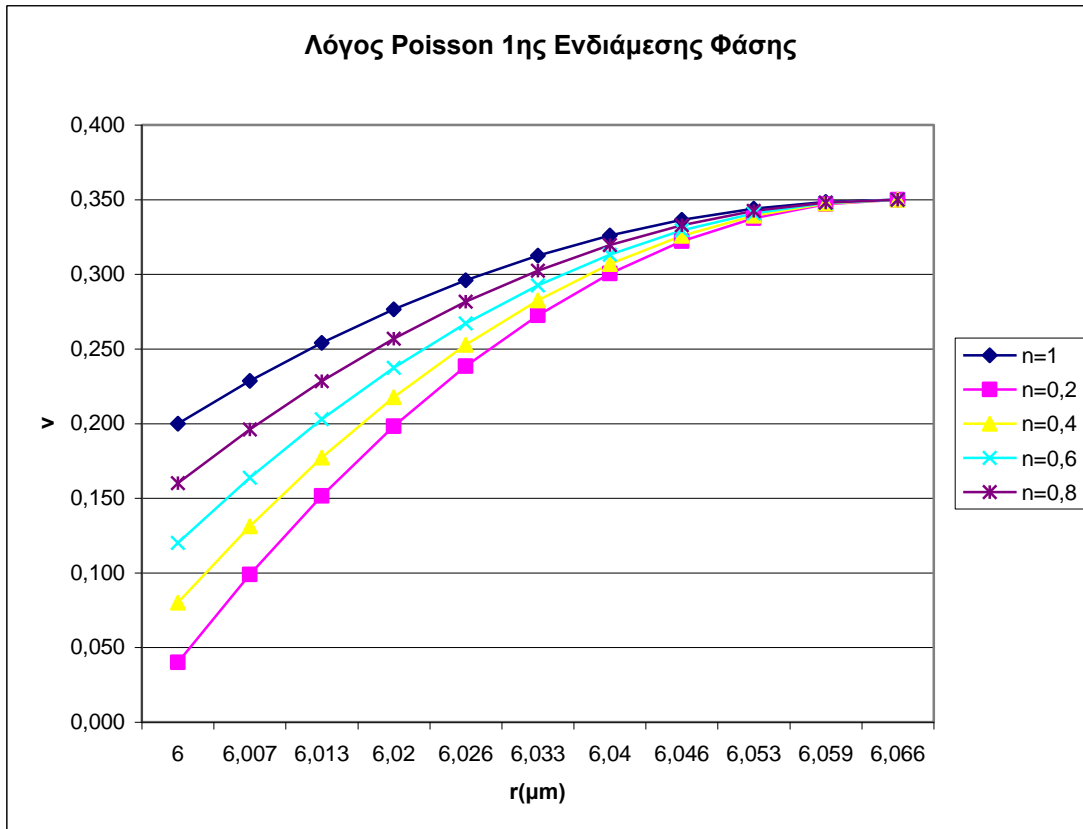
Διάγραμμα 24

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
27,9	0,04	0,08	0,12	0,12	0,2
27,9026	0,07	0,11	0,14	0,14	0,22
27,9052	0,10	0,13	0,17	0,17	0,23
27,9078	0,13	0,16	0,19	0,19	0,25
27,9104	0,16	0,19	0,21	0,21	0,26
27,913	0,20	0,22	0,24	0,24	0,28
27,9156	0,23	0,24	0,26	0,26	0,29
27,9182	0,26	0,27	0,28	0,28	0,31
27,9208	0,29	0,30	0,30	0,30	0,32
27,9234	0,32	0,32	0,33	0,33	0,34
27,926	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας T1



### Λόγος Poisson 1<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο



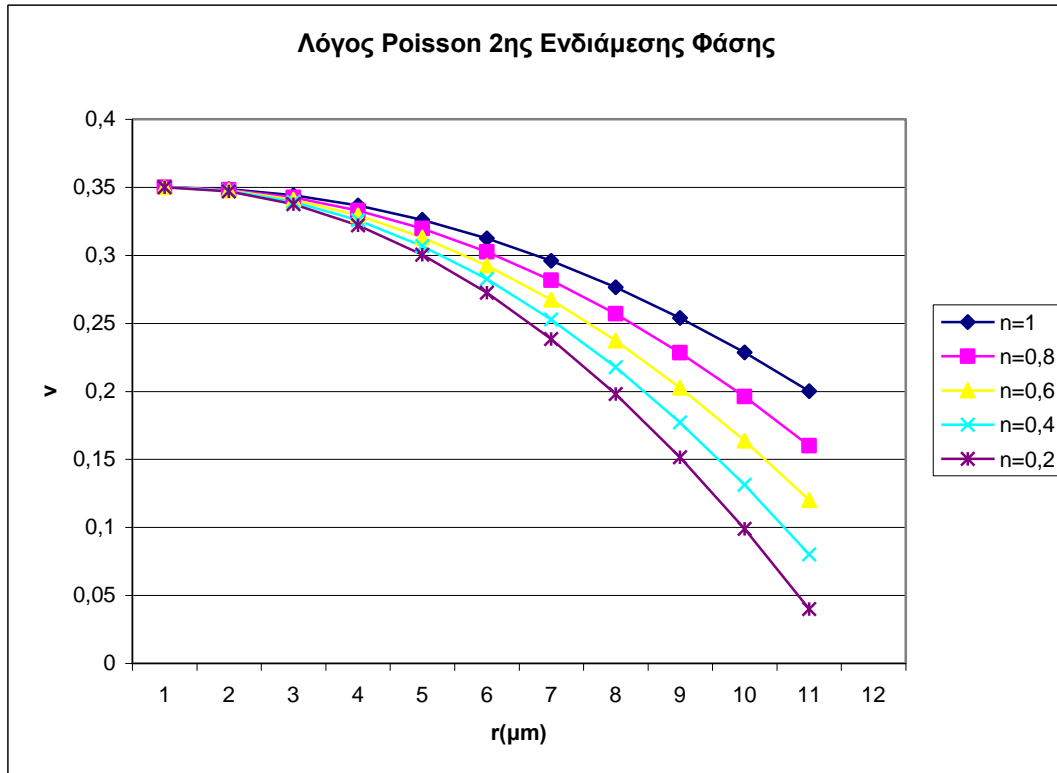
Διάγραμμα 25

### Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6	0,040	0,080	0,120	0,160	0,200
6,0066	0,099	0,131	0,164	0,196	0,228
6,0132	0,152	0,177	0,203	0,228	0,254
6,0198	0,198	0,218	0,237	0,257	0,276
6,0264	0,238	0,253	0,267	0,282	0,296
6,033	0,272	0,282	0,292	0,303	0,313
6,0396	0,300	0,307	0,313	0,320	0,326
6,0462	0,322	0,326	0,329	0,333	0,336
6,0528	0,338	0,339	0,341	0,342	0,344
6,0594	0,347	0,347	0,348	0,348	0,348
6,066	0,350	0,350	0,350	0,350	0,350

Πίνακας U1

**Λόγος Poisson 2<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο**



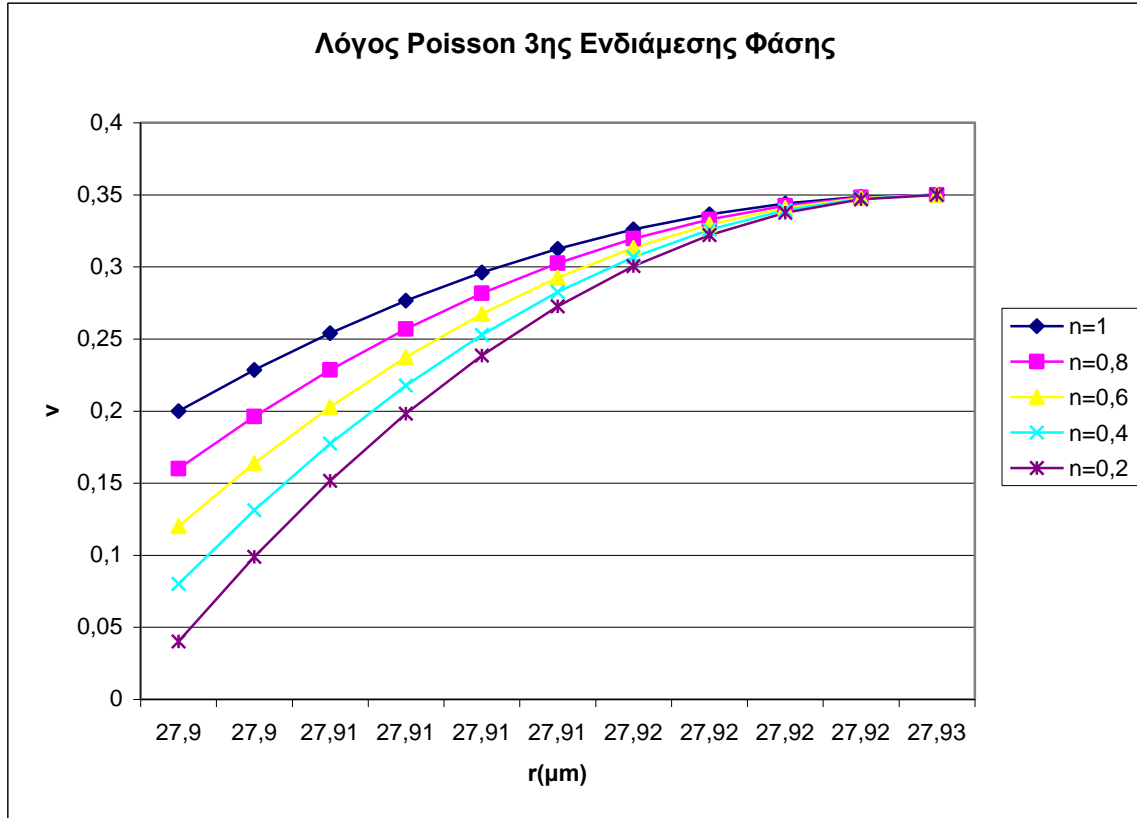
Διάγραμμα 26

**Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης**

r	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
25,19	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
25,192	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
25,194	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
25,196	0,32	0,33	0,33	0,33	0,34
25,198	0,30	0,31	0,31	0,32	0,33
25,2	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31
25,202	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30
25,204	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
25,206	0,15	0,18	0,20	0,23	0,25
25,208	0,10	0,13	0,16	0,20	0,23
25,21	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Πίνακας V1

**Λόγος Poisson 3<sup>ης</sup> Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο**

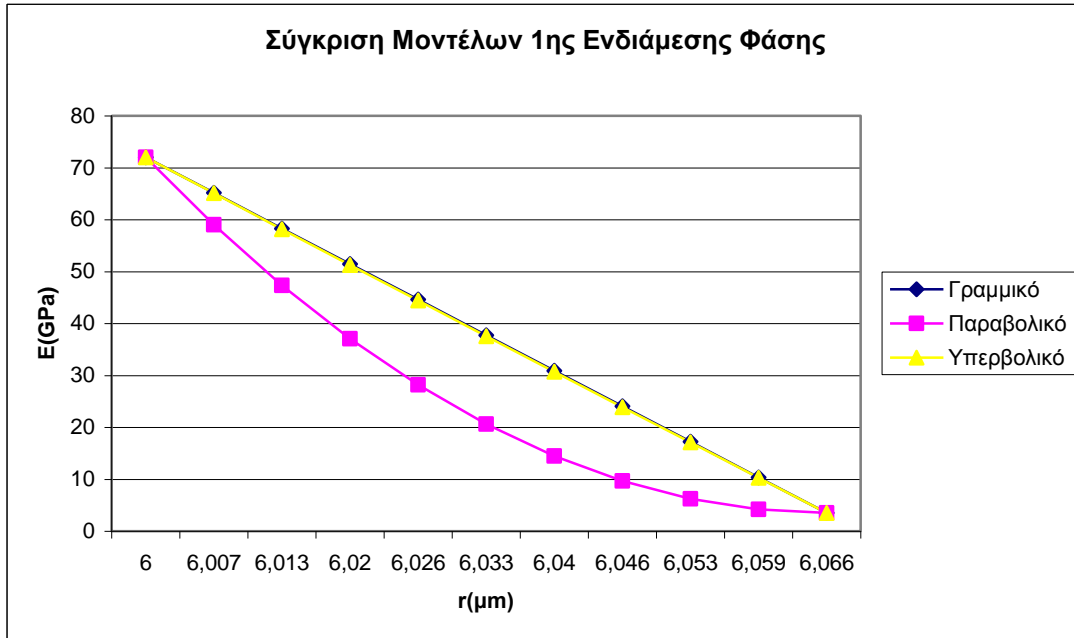


Διάγραμμα 27

<b>Λόγος Poisson (ν) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης</b>					
<b>r</b>	<b>n=1</b>	<b>n=0,2</b>	<b>n=0,4</b>	<b>n=0,6</b>	<b>n=0,8</b>
27,9	0,2	0,04	0,08	0,12	0,16
27,9026	0,23	0,0989	0,1313	0,1637	0,1961
27,9052	0,25	0,1516	0,1772	0,2028	0,2284
27,9078	0,28	0,1981	0,2177	0,2373	0,2569
27,9104	0,30	0,2384	0,2528	0,2672	0,2816
27,913	0,31	0,2725	0,2825	0,2925	0,3025
27,9156	0,33	0,3004	0,3068	0,3132	0,3196
27,9182	0,34	0,3221	0,3257	0,3293	0,3329
27,9208	0,34	0,3376	0,3392	0,3408	0,3424
27,9234	0,35	0,3469	0,3473	0,3477	0,3481
27,926	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας W1

**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 1<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

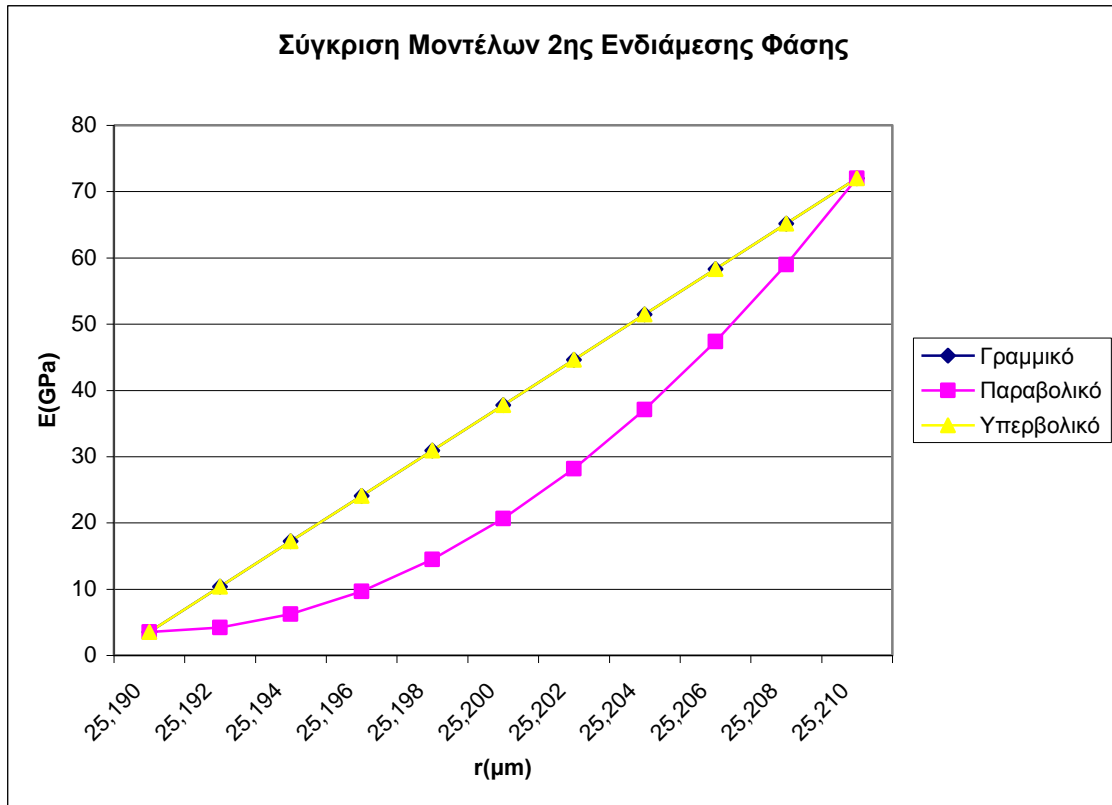


Διάγραμμα 28

r(μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
6	72	72	72
6,0066	65,1500	58,9850	65,0823
6,0132	58,3000	47,3400	58,1797
6,0198	51,4500	37,0650	51,2923
6,0264	44,6000	28,1600	44,4200
6,033	37,7500	20,6250	37,5627
6,0396	30,9000	14,4600	30,7203
6,0462	24,0500	9,6650	23,8930
6,0528	17,2000	6,2400	17,0805
6,0594	10,3500	4,1850	10,2828
6,066	3,5	3,5	3,5

Πίνακας X1

**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 2<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

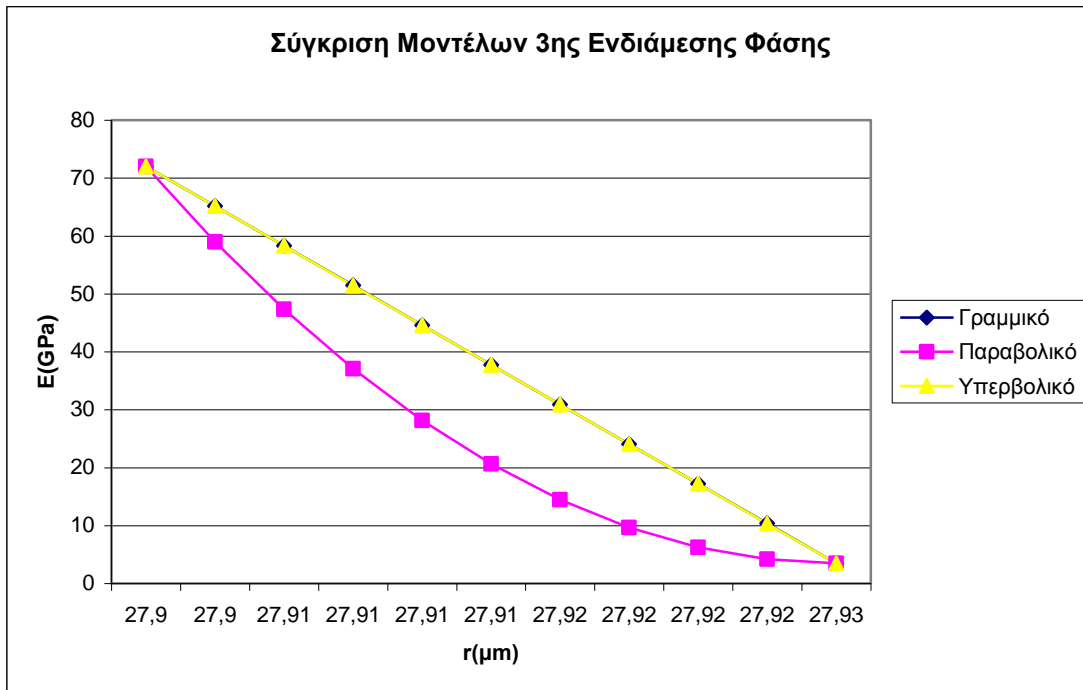


Διάγραμμα 29

r(μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
25,19	3,5	3,50	3,5
25,192	10,3500	4,1850	10,3549
25,194	17,2000	6,2400	17,2087
25,196	24,0500	9,6650	24,0614
25,198	30,9000	14,4600	30,9130
25,2	37,7500	20,6250	37,7636
25,202	44,6000	28,1600	44,6130
25,204	51,4500	37,0650	51,4614
25,206	58,3000	47,3400	58,3087
25,208	65,1500	58,9850	65,1549
25,21	72	72,00	72

Πίνακας Υ1

**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 3<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

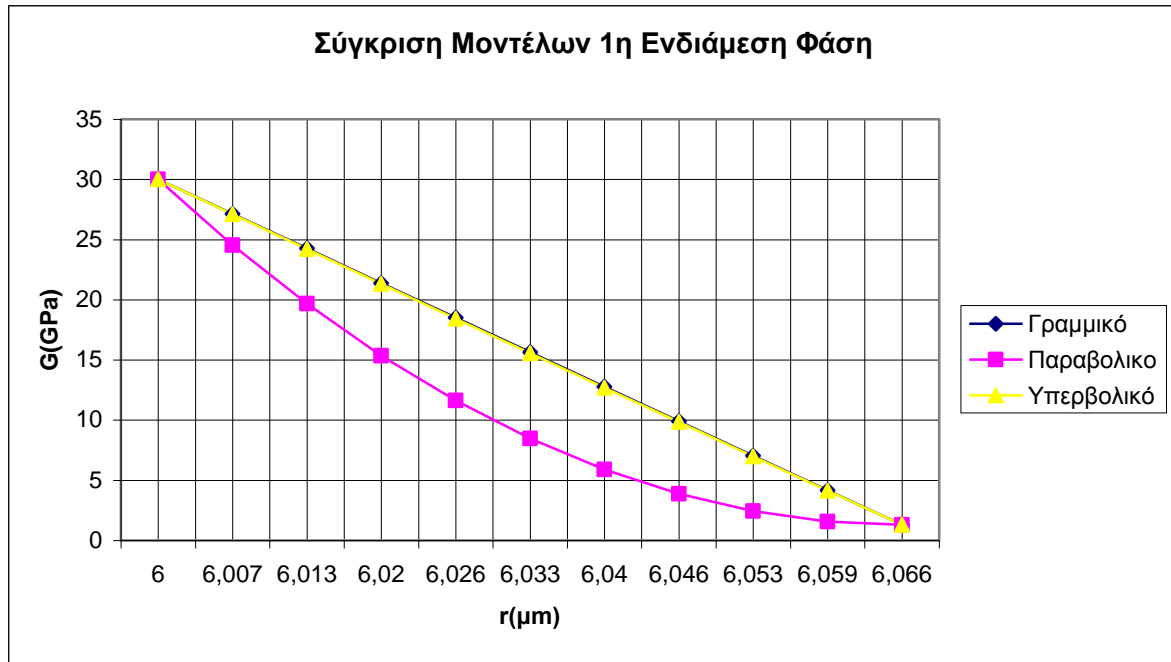


Διάγραμμα 30

r(μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gra)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
27,9	72	72	72
27,903	65,15	58,99	65,1443
27,905	58,3	47,34	58,2898
27,908	51,45	37,06	51,4366
27,91	44,6	28,16	44,5847
27,913	37,75	20,63	37,7340
27,916	30,9	14,46	30,8847
27,918	24,05	9,66	24,0366
27,921	17,2	6,24	17,1898
27,923	10,35	4,19	10,3443
27,926	3,5	3,50	3,5

Πίνακας Ζ1

**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Διάτμησης 1<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

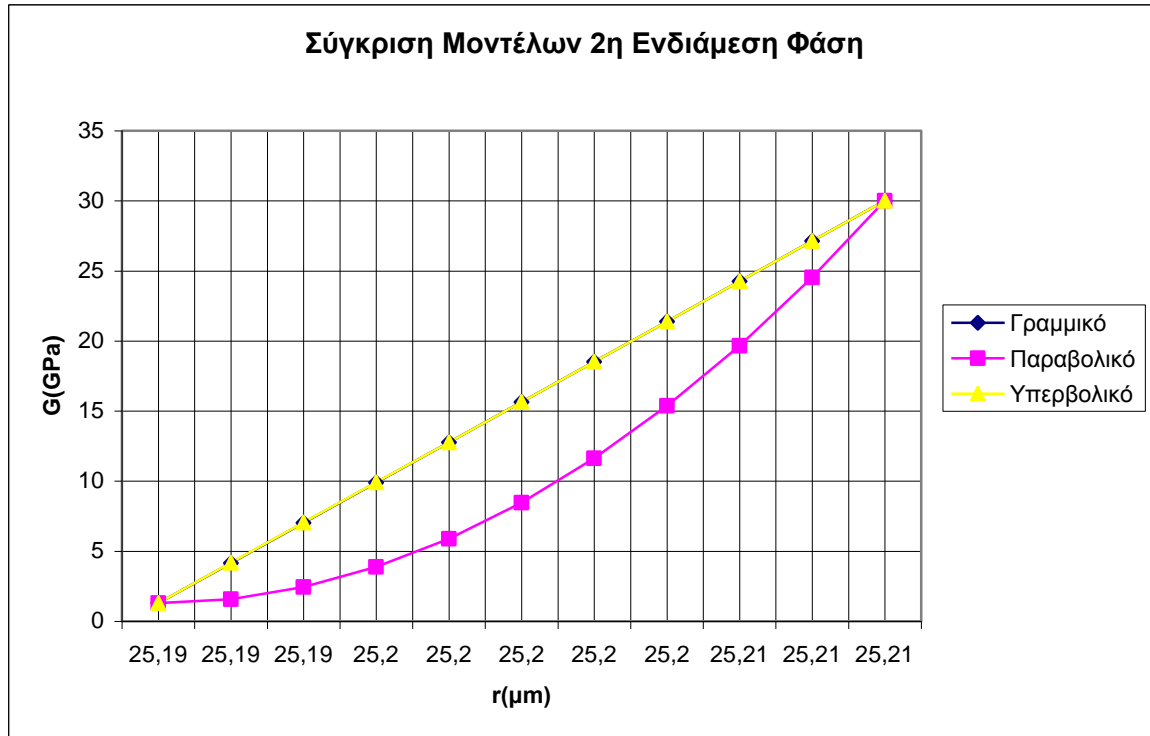


Διάγραμμα 31

r(μm)	Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (GPa)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
6	30	30	30
6,0066	27,13	24,55	27,10
6,0132	24,26	19,66	24,21
6,0198	21,39	15,36	21,32
6,0264	18,52	11,63	18,44
6,033	15,65	8,47	15,57
6,0396	12,77	5,88	12,70
6,0462	9,90	3,87	9,84
6,0528	7,03	2,44	6,98
6,0594	4,16	1,58	4,13
6,066	1,29	1,29	1,29

Πίνακας A2

**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Διάτμησης 2<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**



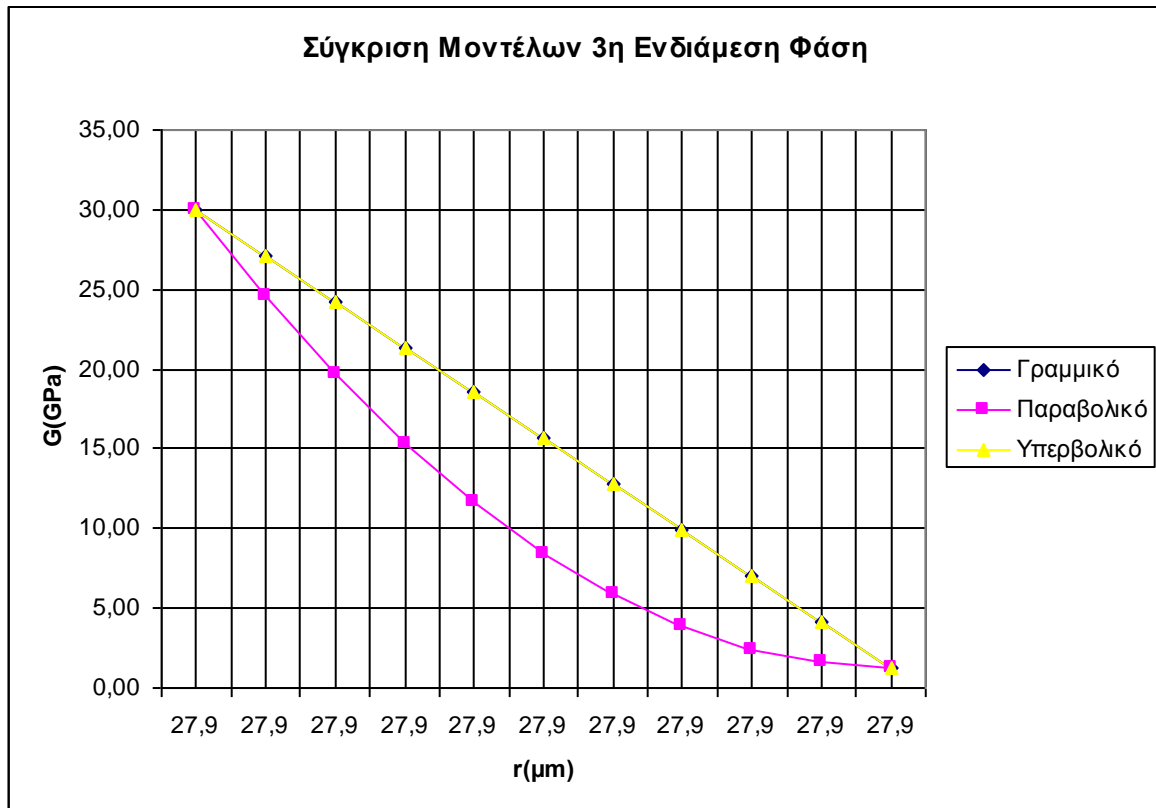
Διάγραμμα 32

r(μm)	Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gra)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
25,19	1,29	1,29	1,29
25,192	4,16	1,58	4,16
25,194	7,03	2,44	7,04
25,196	9,90	3,87	9,91
25,198	12,77	5,88	12,78
25,2	15,65	8,47	15,65
25,202	18,52	11,63	18,52
25,204	21,39	15,36	21,39
25,206	24,26	19,66	24,26
25,208	27,13	24,55	27,13
25,21	30,00	30,00	30,00

Πίνακας Β2



**Σύγκριση μοντέλων για το Μέτρο Διάτμησης 3<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

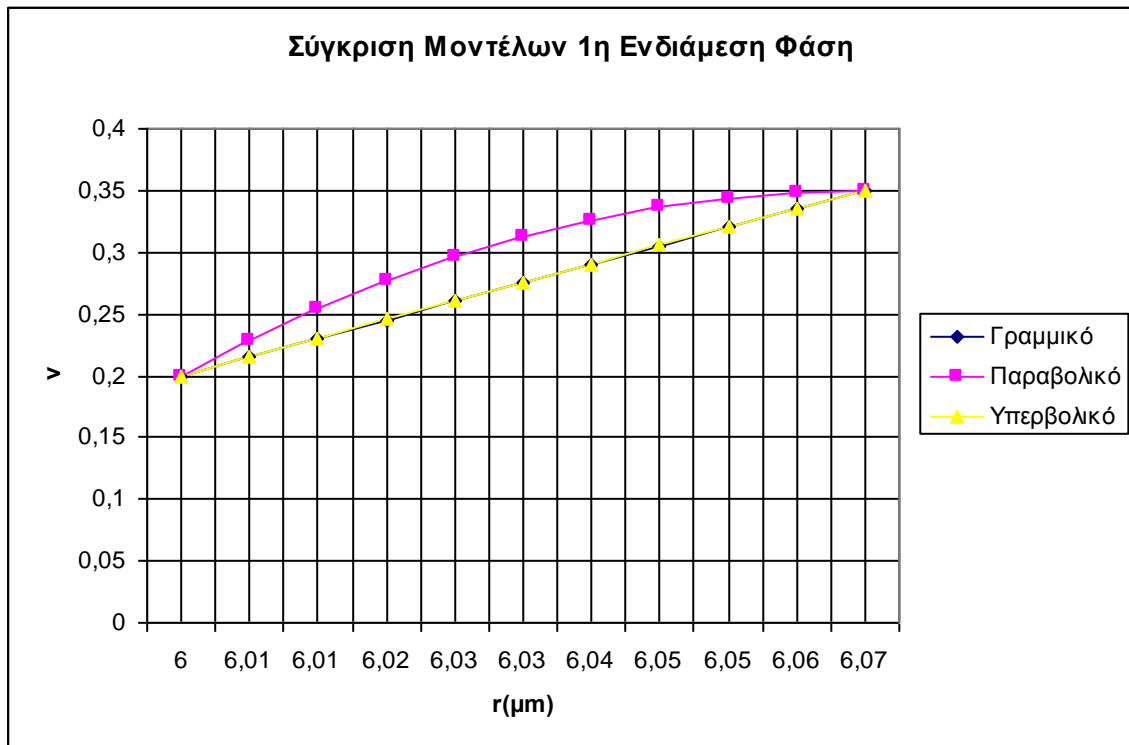


Διάγραμμα 33

r(μm)	Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gra)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
27,9	30,00	30,00	30,00
27,903	27,13	24,55	27,13
27,905	24,26	19,66	24,25
27,908	21,39	15,36	21,38
27,91	18,52	11,63	18,51
27,913	15,65	8,47	15,64
27,916	12,77	5,88	12,77
27,918	9,90	3,87	9,90
27,921	7,03	2,44	7,03
27,923	4,16	1,58	4,16
27,926	1,29	1,29	1,29

Πίνακας C2

**Σύγκριση μοντέλων για το Λόγο Poisson 1<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

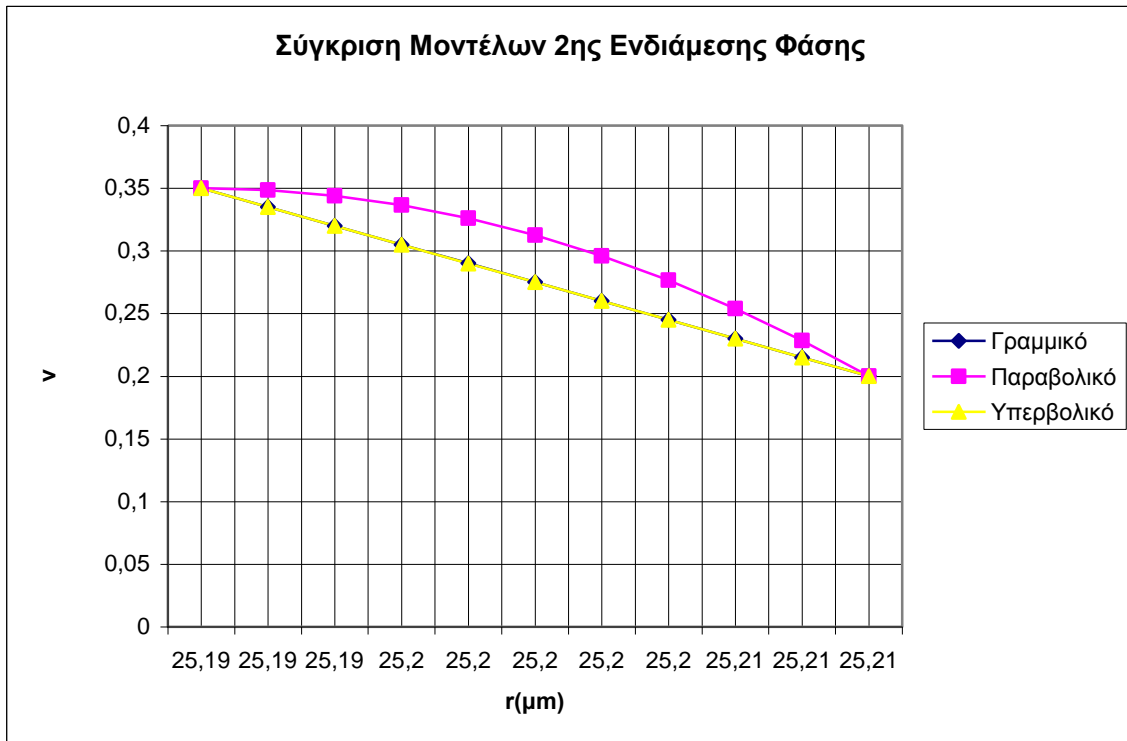


Διάγραμμα 34

Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης n=1			
r	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
6	0,2	0,2	0,2
6,0066	0,21	0,23	0,22
6,0132	0,23	0,25	0,23
6,0198	0,24	0,28	0,25
6,0264	0,26	0,30	0,26
6,033	0,27	0,31	0,28
6,0396	0,29	0,33	0,29
6,0462	0,30	0,34	0,31
6,0528	0,32	0,34	0,32
6,0594	0,33	0,35	0,34
6,066	0,35	0,35	0,35

Πίνακας D2

**Σύγκριση μοντέλων για το Λόγο Poisson 2<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1**

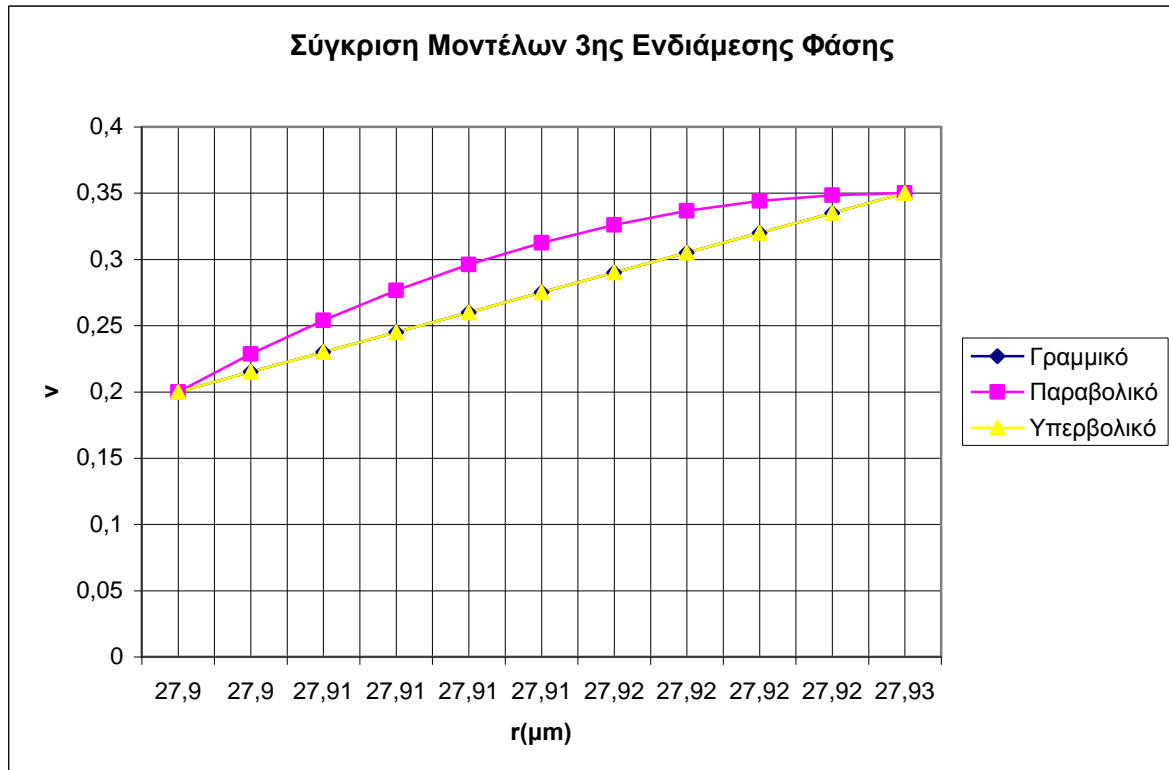


Διάγραμμα 35

Λόγος Poisson (ν) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης n=1			
r	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
25,19	0,35	0,35	0,35
25,192	0,34	0,35	0,33
25,194	0,32	0,34	0,32
25,196	0,31	0,34	0,30
25,198	0,29	0,33	0,29
25,2	0,28	0,31	0,27
25,202	0,26	0,30	0,26
25,204	0,25	0,28	0,24
25,206	0,23	0,25	0,23
25,208	0,22	0,23	0,21
25,21	0,2	0,2	0,2

Πίνακας Ε2

Σύγκριση μοντέλων για το Λόγο Poisson 3<sup>η</sup> Ενδιάμεση Φάση οριακή συνθήκη n=1



Διάγραμμα 36

Λόγος Poisson ( $\nu$ ) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης n=1			
$r$	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
27,9	0,2	0,2	0,2
27,903	0,22	0,23	0,22
27,905	0,23	0,25	0,23
27,908	0,25	0,28	0,25
27,91	0,26	0,30	0,26
27,913	0,28	0,31	0,28
27,916	0,29	0,33	0,29
27,918	0,31	0,34	0,31
27,921	0,32	0,34	0,32
27,923	0,34	0,35	0,34
27,926	0,35	0,35	0,35

Πίνακας F2

**Συμπεράσματα**

Τα γενικά συμπεράσματα είναι τα εξής:

Σε ότι αφορά την 1<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και για τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μικρότερο μέτρο διάτμησης. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του  $n$  οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις αρχικές τιμές του  $r$  ενώ όσο αυξάνεται το  $r$  τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το  $n$  είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το  $n$  τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την 2<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από τη μήτρα και πλησιάζουμε το έγκλεισμα το οποίο έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας και μέτρο διάτμησης.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του  $n$  οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις τελικές τιμές του  $r$  ενώ όσο μειώνεται το  $r$  τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το  $n$  είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το  $n$  τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την 3<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μέτρο διάτμησης.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του  $n$  οι καμπύλες τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει διότι όσο

βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το  $n$  είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το  $n$  τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά, έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την 1<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson.

Σε ότι αφορά την 2<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από τη μήτρα και πλησιάζουμε το έγκλεισμα το οποίο έχει μικρότερο λόγο Poisson.

την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την 3<sup>η</sup> ενδιάμεση φάση και τα τρία μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας  $r$  κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson.

Τέλος από τη σύγκριση των μοντέλων παρατηρούμε ότι το γραμμικό και το παραβολικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει διότι το πάχος και των τριών ενδιάμεσων φάσεων είναι πολύ μικρό.

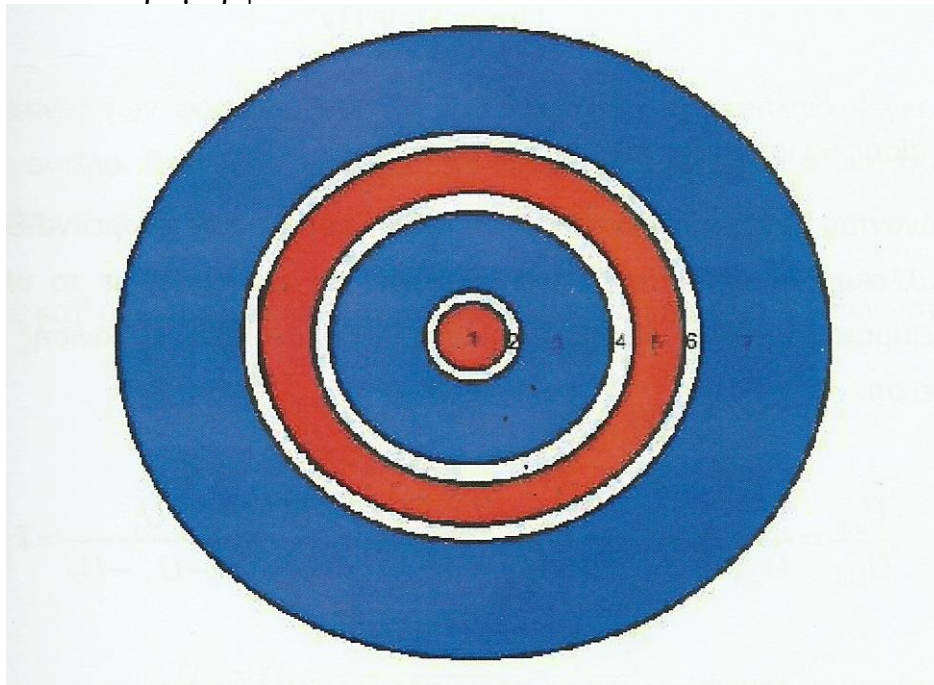
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

---

## 5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η θεωρητική ανάπτυξη του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε για την παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Το έγκλεισμα αποτελείται από ίνες που έχουν τέλειο κυλινδρικό σχήμα
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων



Εικόνα 43 (Εγκάρσια τομή κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου)

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι:

- $Q_{f,1} = Q_1$  το «1» συμβολίζει την 1<sup>η</sup> φάση (περιοχή με έγκλεισμα)
- $Q_{i,1} = Q_2$  το «2» συμβολίζει την 2<sup>η</sup> φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)
- $Q_{m,1} = Q_3$  το «3» συμβολίζει την 3<sup>η</sup> φάση (περιοχή με μήτρα)
- $Q_{i,2} = Q_4$  το «4» συμβολίζει την 4<sup>η</sup> φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)
- $Q_{f,2} = Q_5$  το «5» συμβολίζει την 5<sup>η</sup> φάση (περιοχή με έγκλεισμα)
- $Q_{i,3} = Q_6$  το «6» συμβολίζει την 6<sup>η</sup> φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)
- $Q_{m,3} = Q_7$  το «7» συμβολίζει την 7<sup>η</sup> φάση (περιοχή με μήτρα)

Όπου  $Q$  μπορεί να συμβολίζει είτε το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , είτε το λόγο Poisson  $\nu$ , είτε το μέτρο διατμήσεως  $G$ .

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν, θα εξάγουμε θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό, του διαμήκους και του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, του διαμήκους και εγκάρσιου λόγου Poisson, του διαμήκους μέτρου διατμήσεως, του σύνθετου υλικού με βάση το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο και με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και τον λόγο Poisson ενός σύνθετου υλικού που δέχεται φόρτιση υπό γωνία σε συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

## 5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην *ενότητα 5.1*. Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω τώρα ότι ασκούμε εξωτερικά μια σταθερή αξονική παραμόρφωση  $\varepsilon$ , η οποία βέβαια είναι η ίδια και για τις επτά φάσεις του υλικού (Εικ.43). Η ανάλυση έχει ως εξής:



### ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε την τασική συνάρτηση  $\Phi$  που περιγράφει το πρόβλημά μας εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η γενική μορφή της τασικής συνάρτησης είναι:

$$\nabla^4\Phi = \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} \quad (5.2.1)$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \quad (5.2.2)$$

Όπου  $J_1, J_2, J_3$  και  $J_4$  είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις επτά φάσεις έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.2.3)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.2.4)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.2.5)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.2.6)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.2.7)$$

$$\Phi_6 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \quad (5.2.8)$$

$$\Phi_7 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \quad (5.2.9)$$

### ΤΑΣΕΙΣ

Αρχικά υπολογίζουμε τις τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$  με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων και από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \text{ και } \sigma_\theta = \frac{d^2\phi}{dr^2}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 1) + 2A_3 \quad (5.2.10)$$

$$\sigma_{\theta,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 1) + 2A_3 \quad (5.2.11)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 1) + 2B_3 \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 3) + 2B_3 \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 1) + 2C_3 \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 3) + 2C_3 \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 1) + 2D_3 \quad (5.2.16)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 3) + 2D_3 \quad (5.2.17)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 1) + 2F_3 \quad (5.2.18)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 3) + 2F_3 \quad (5.2.19)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 1) + 2K_3 \quad (5.2.20)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 3) + 2K_3 \quad (5.2.21)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 1) + 2H_3 \quad (5.2.22)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 3) + 2H_3 \quad (5.2.23)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση  $r = 0$  θα πρέπει οι σταθερές  $A_1$  και  $A_2$  να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή  $A_1=A_2=0$ . Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> φάση, για την 3<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> φάση, για την 4<sup>η</sup> και 5<sup>η</sup> φάση, για την 5<sup>η</sup> και 6<sup>η</sup> και για την 6<sup>η</sup> και 7<sup>η</sup>, ότι  $B_2=C_2=D_2=F_2=K_2=H_2=0$ . Οι σχέσεις (5.2.10)- (5.2.23) μετασχηματίζονται σε:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.2.24)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.2.25)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.26)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.27)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.28)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.29)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.30)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.31)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.32)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.33)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.2.34)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.2.35)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.2.36)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.2.37)$$

Οι αξονικές τάσεις  $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}$  θα υπολογισθούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και την συνθήκη  $\varepsilon_{z,1}, \varepsilon_{z,2}, \varepsilon_{z,3}, \varepsilon_{z,4}, \varepsilon_{z,5}, \varepsilon_{z,6}, \varepsilon_{z,7} = \varepsilon$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1 (\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = \varepsilon \quad (5.2.38)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2 (\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = \varepsilon \quad (5.2.39)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3 (\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = \varepsilon \quad (5.2.40)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4 (\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = \varepsilon \quad (5.2.41)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5} [\sigma_{z,5} - \nu_5 (\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})] = \varepsilon \quad (5.2.42)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6} [\sigma_{z,6} - \nu_6 (\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})] = \varepsilon \quad (5.2.43)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7} [\sigma_{z,7} - \nu_7 (\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})] = \varepsilon \quad (5.2.44)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.2.38)-(5.2.44) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (5.2.24)-(5.2.37) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = \varepsilon E_1 + 4\nu_1 A_3 \quad (5.2.45)$$

$$\sigma_{z,2} = \varepsilon E_2 + 4\nu_2 B_3 \quad (5.2.46)$$

$$\sigma_{z,3} = \varepsilon E_3 + 4\nu_3 C_3 \quad (5.2.47)$$

$$\sigma_{z,4} = \varepsilon E_4 + 4\nu_4 D_3 \quad (5.2.48)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

$$\sigma_{z,5} = \varepsilon E_5 + 4\nu_5 F_3 \quad (5.2.49)$$

$$\sigma_{z,6} = \varepsilon E_6 + 4\nu_6 K_3 \quad (5.2.50)$$

$$\sigma_{z,7} = \varepsilon E_7 + 4\nu_6 H_3 \quad (5.2.51)$$

### **ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ**

Οι ακτινικές μετατοπίσεις δίνονται από τις εξισώσεις:

$$u_{r,1} = \frac{r}{E_1} \left[ 2A_3 (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - E_1 \nu_1 \varepsilon \right] \quad (5.2.52)$$

$$u_{r,2} = \frac{r}{E_2} \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - E_2 \nu_2 \varepsilon \right] \quad (5.2.53)$$

$$u_{r,3} = \frac{r}{E_3} \left[ -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 (1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - E_3 \nu_3 \varepsilon \right] \quad (5.2.54)$$

$$u_{r,4} = \frac{r}{E_4} \left[ -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 (1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - E_4 \nu_4 \varepsilon \right] \quad (5.2.55)$$

$$u_{r,5} = \frac{r}{E_5} \left[ -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 (1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - E_5 \nu_5 \varepsilon \right] \quad (5.2.56)$$

$$u_{r,6} = \frac{r}{E_6} \left[ -(1 + \nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 (1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) - E_6 \nu_6 \varepsilon \right] \quad (5.2.57)$$

$$u_{r,7} = \frac{r}{E_7} \left[ -(1 + \nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 (1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) - E_7 \nu_7 \varepsilon \right] \quad (5.2.58)$$

### **ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

Οι εκφράσεις για τις παραμορφώσεις  $\varepsilon_r$  και  $\varepsilon_\theta$  των επτά φάσεων προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.52)-(5.2.58) και τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{και} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{\left[ 2A_3(1-\nu_1 - 2\nu_1^2) - \varepsilon E_1 \nu_1 \right]}{E_1} \quad (5.2.59)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\left[ 2A_3(1-\nu_1 - 2\nu_1^2) - \varepsilon E_1 \nu_1 \right]}{E_1} \quad (5.2.60)$$

$$\varepsilon_{z,1} = \varepsilon \quad (5.2.61)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[ (1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2 - 2\nu_2^2) - \varepsilon E_2 \nu_2 \right]}{E_2} \quad (5.2.62)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[ -(1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2 - 2\nu_2^2) - \varepsilon E_2 \nu_2 \right]}{E_2} \quad (5.2.63)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \varepsilon \quad (5.2.64)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[ (1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3 - 2\nu_3^2) - \varepsilon E_3 \nu_3 \right]}{E_3} \quad (5.2.65)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3 - 2\nu_3^2) - \varepsilon E_3 \nu_3 \right]}{E_3} \quad (5.2.66)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \varepsilon \quad (5.2.67)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[ (1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - \varepsilon E_4 \nu_4 \right]}{E_4} \quad (5.2.68)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - \varepsilon E_4 \nu_4 \right]}{E_4} \quad (5.2.69)$$

$$\varepsilon_{Z,4} = \varepsilon \quad (5.2.70)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[ (1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - \varepsilon E_5 \nu_5 \right]}{E_5} \quad (5.2.71)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - \varepsilon E_5 \nu_5 \right]}{E_5} \quad (5.2.72)$$

$$\varepsilon_{Z,5} = \varepsilon \quad (5.2.73)$$

$$\varepsilon_{r,6} = \frac{\left[ (1+\nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) - \varepsilon E_6 \nu_6 \right]}{E_6} \quad (5.2.74)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[ -(1+\nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) - \varepsilon E_6 \nu_6 \right]}{E_6} \quad (5.2.75)$$

$$\varepsilon_{Z,6} = \varepsilon \quad (5.2.76)$$

$$\varepsilon_{r,7} = \frac{\left[ (1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) - \varepsilon E_7 \nu_7 \right]}{E_7} \quad (5.2.77)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[ -(1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) - \varepsilon E_7 \nu_7 \right]}{E_7} \quad (5.2.78)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \varepsilon \quad (5.2.79)$$

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

$$\text{Για } r = r_1 : \sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} \text{ και άρα } 2A_3 = \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3 \quad (5.2.80)$$

$$\text{Για } r = r_2 : \sigma_{r,2} = \sigma_{r,3} \text{ και άρα } \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3 \quad (5.2.81)$$

$$\text{Για } r = r_3 : \sigma_{r,3} = \sigma_{r,4} \text{ και άρα } \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 \quad (5.2.82)$$

$$\text{Για } r = r_4 : \sigma_{r,4} = \sigma_{r,5} \text{ και άρα } \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3 \quad (5.2.83)$$

$$\text{Για } r = r_5 : \sigma_{r,5} = \sigma_{r,6} \text{ και άρα } \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = \frac{K_1}{r_5^2} + 2K_3 \quad (5.2.84)$$

$$\text{Για } r = r_6 : \sigma_{r,6} = \sigma_{r,7} \text{ και άρα } \frac{K_1}{r_6^2} + 2K_3 = \frac{H_1}{r_6^2} + 2H_3 \quad (5.2.85)$$

$$\text{Για } r = r_7 : \sigma_{r,7} = 0 \text{ και άρα } \frac{H_1}{r_7^2} + 2H_3 = 0 \quad (5.2.86)$$

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.52), (5.2.53) θα έχουμε

$$E_2 \left[ 2A_3 (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - E_1 \nu_1 \varepsilon \right] = E_1 \left[ -(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - E_2 \nu_2 \varepsilon \right] \quad (5.2.87)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.53), (5.2.54) θα έχουμε



$$E_3 \left[ -(1+\nu_2) \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2) - E_2\nu_2\varepsilon \right] = E_2 \left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) - E_3\nu_3\varepsilon \right] \quad (5.2.88)$$

Για  $r = r_3$  :  $u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.54) , (5.2.55) θα έχουμε

$$E_4 \left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) - E_3\nu_3\varepsilon \right] = E_3 \left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - E_3\nu_4\varepsilon \right] \quad (5.2.89)$$

Για  $r = r_4$  :  $u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.55) , (5.2.56) θα έχουμε

$$E_5 \left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) - E_4\nu_4\varepsilon \right] = E_4 \left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - E_5\nu_5\varepsilon \right] \quad (5.2.90)$$

Για  $r = r_5$  :  $u_{r,5} = u_{r,6}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.56) , (5.2.57) θα έχουμε

$$E_6 \left[ -(1+\nu_5) \frac{D_1}{r_5^2} + 2D_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) - E_5\nu_5\varepsilon \right] = E_5 \left[ -(1+\nu_6) \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) - E_6\nu_6\varepsilon \right] \quad (5.2.91)$$

Για  $r = r_6$  :  $u_{r,6} = u_{r,7}$  και άρα από τις σχέσεις (5.2.57) , (5.2.58) θα έχουμε

$$E_7 \left[ -(1+\nu_6) \frac{D_1}{r_6^2} + 2D_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) - E_6\nu_6\varepsilon \right] = E_6 \left[ -(1+\nu_7) \frac{F_1}{r_6^2} + 2F_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) - E_7\nu_7\varepsilon \right] \quad (5.2.92)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι  $n = 1$  και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1 : E_1 = E_2 \text{ και } \nu_1 = \nu_2 \quad (5.2.93)$$

$$\text{Για } r = r_2 : E_2 = E_3 \text{ και } \nu_2 = \nu_3 \quad (5.2.94)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

$$\text{Για } r = r_3 : E_3 = E_4 \text{ και } v_3 = v_4 \quad (5.2.95)$$

$$\text{Για } r = r_4 : E_4 = E_5 \text{ και } v_4 = v_5 \quad (5.2.96)$$

$$\text{Για } r = r_5 : E_5 = E_6 \text{ και } v_5 = v_6 \quad (5.2.97)$$

$$\text{Για } r = r_5 : E_5 = E_6 \text{ και } v_5 = v_6 \quad (5.2.98)$$

$$\text{Για } r = r_6 : E_6 = E_7 \text{ και } v_6 = v_7 \quad (5.2.99)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.2.87)-(5.2.92) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.93)-(5.2.99) θα έχουμε ότι:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_1) \frac{B_1}{r_1^2} = 2(B_3 - A_3)(1-v_1 - 2v_1^2) \quad (5.2.100)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3) \frac{(B_1 - C_1)}{r_2^2} = 2(B_3 - C_3)(1-v_3 - 2v_3^2) \quad (5.2.101)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3) \frac{(C_1 - D_1)}{r_3^2} = 2(C_3 - D_3)(1-v_3 - 2v_3^2) \quad (5.2.102)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3) \frac{(B_1 - C_1)}{r_2^2} = 2(B_3 - C_3)(1-v_3 - 2v_3^2) \quad (5.2.103)$$

Για  $r = r_5 : u_{r,5} = u_{r,6}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_5) \frac{(F_1 - K_1)}{r_5^2} = 2(F_3 - K_3)(1-v_5 - 2v_5^2) \quad (5.2.104)$$

Για  $r = r_6 : u_{r,6} = u_{r,7}$  και άρα θα έχουμε:

$$(1 + \nu_7) \frac{(K_1 - H_1)}{r_6^2} = 2(K_3 - H_3)(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \quad (5.2.105)$$

Οι εξισώσεις (5.2.80)-(5.2.86) και (5.2.100)-(5.2.105) αποτελούν ένα **σύστημα 13 εξισώσεων με 13 αγνώστους**. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$ .

Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:

$$A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_3 = D_1 = D_3 = F_1 = F_3 = K_1 = K_3 = H_1 = H_3 = 0.$$

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  και του διαμήκους λόγου Poisson  $\nu_{LT}$  ενώ παράλληλα ,όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο, οι τιμές που θα βρούμε για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  του σύνθετου υλικού , θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{V_C} E_L \varepsilon^2 dV_C \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) dV_6 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) dV_7
 \end{aligned}$$

(5.2.106)

Όπου  $dV = 2\pi r h dr$

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{V_C} E_L \varepsilon^2 dV_C \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_5}^{r_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_6}^{r_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) 2\pi r h dr
 \end{aligned}
 \tag{5.2.107}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.2.107) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.2.24)-(5.2.37) και (5.2.45)-(5.2.51) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.2.59)-(5.2.79) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$  που εξαγάγαμε από την λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$E_L \int_0^{r_7} r dr = E_1 \int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 \int_{r_2}^{r_3} r dr + \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 \int_{r_4}^{r_5} r dr + \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_7 \int_{r_6}^{r_7} r dr
 \tag{5.2.108}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_7^2}$

Θα έχουμε ότι:

$$E_L = E_1 U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_7 U_7 \quad (5.2.109)$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις  $E_2(r)$ ,  $E_4(r)$  και  $E_6(r)$  ακολουθούν την παραβολική μεταβολή γιατί έχει αποδειχθεί ότι η μεταβολή αυτή είναι καλύτερη και πιο ρεαλιστική από την γραμμική και την υπερβολική μεταβολή δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα [27].

Άρα εκτελώντας τις ολοκληρώσεις κάνοντας χρήση της παραβολικής μεταβολής θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & E_L \\
 &= E_1 U_1 + \frac{(E_1 - E_3)(r_2 + r_1)(r_2^2 + r_1^2)}{2(r_2 - r_1)} \\
 &\quad - \frac{4r_2(E_1 - E_3)(r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2)}{3r_7^2(r_2 - r_1)} \\
 &\quad + \frac{(E_1 r_2^2 + E_3 r_1^2 - 2E_3 r_1 r_2)(r_2 + r_1)}{r_7^2(r_2 - r_1)} + E_3 U_3 \\
 &\quad + \frac{(E_5 - E_3)(r_4 + r_3)(r_4^2 + r_3^2)}{2r_7^2(r_4 - r_3)} \\
 &\quad - \frac{4r_3(E_5 - E_3)(r_4^2 + r_3^2 + r_4 r_3)}{3r_7^2(r_4 - r_3)} \\
 &\quad + \frac{(E_5 r_3^2 + E_3 r_4^2 - 2E_3 r_3 r_4)(r_4 + r_3)}{r_7^2(r_4 - r_3)} + E_5 U_5 \\
 &\quad + \frac{(E_5 - E_7)(r_6 + r_5)(r_6^2 + r_5^2)}{2r_7^2(r_6 - r_5)} \\
 &\quad - \frac{4r_6(E_5 - E_7)(r_6^2 + r_5^2 + r_6 r_5)}{3r_7^2(r_6 - r_5)} \\
 &\quad + \frac{(E_5 r_6^2 + E_7 r_5^2 - 2E_7 r_6 r_5)(r_6 + r_5)}{r_7^2(r_6 - r_5)} + E_7 U_7
 \end{aligned}$$

(5.2.110)

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρα, του εγκλείσματος και της ενδιάμεσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό τύπο για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

$$\begin{aligned}
 & E_L \\
 &= E_1 U_1 + \frac{(E_1 - E_3)(\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})(2U_1 + U_2)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & - \frac{4\sqrt{U_1 + U_2}(E_1 - E_3)(2U_1 + U_2 + \sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1})}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & + \frac{[E_1(U_1 + U_2) + E_3 U_1 - 2E_3\sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1}](\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})}{(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + E_3 U_3 \\
 & + \frac{(E_5 - E_3)(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4)}{2(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & - \frac{4\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}(E_5 - E_3)(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4 + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & + \frac{[E_5(U_1 + U_2 + U_3) + E_3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) - 2E_3\sqrt{(U_1 + U_2 + U_3)(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)}](\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} \\
 & + E_5 U_5 + \frac{(E_5 - E_7)(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_6 - U_7})(2 - 2U_7 - U_6)}{2(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} \\
 & - \frac{4\sqrt{1 - U_7}(E_5 - E_7)(2 - 2U_7 - U_6 + \sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_6 - U_7})}{3(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} \\
 & + \frac{(E_5(1 - U_7) + E_7(1 - U_7 - U_6) - 2E_7\sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_7 - U_6})(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_7 - U_6})}{(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_7 - U_6})} \\
 & + E_7 U_7
 \end{aligned} \tag{5.2.111}$$

### 5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{LT}$

Ο διαμήκης λόγος Poisson του σύνθετου υλικού με βάση το επαφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζεται ως:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} \tag{5.3.1}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να γραφτεί στην παρακάτω μορφή:



$$v_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon V_c} \int_{V_c} \varepsilon_r dV_c = -\frac{1}{\varepsilon V_c} \left[ \int_{V_1} \varepsilon_{r,1} dV_1 + \int_{V_2} \varepsilon_{r,2} dV_2 + \int_{V_3} \varepsilon_{r,3} dV_3 + \int_{V_4} \varepsilon_{r,4} dV_4 + \int_{V_5} \varepsilon_{r,5} dV_5 + \int_{V_6} \varepsilon_{r,6} dV_6 + \int_{V_7} \varepsilon_{r,7} dV_7 \right] \quad (5.3.2)$$

Όπου  $V = \pi r^2 h$  και άρα  $dV = 2\pi r h$  και άρα θα έχουμε:

$$v_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon \pi h r_7^2} \left[ \int_0^{r_1} 2\pi r h \varepsilon_{r,1} dr + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r h \varepsilon_{r,2} dr + \int_{r_2}^{r_3} 2\pi r h \varepsilon_{r,3} dr + \int_{r_3}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,4} dr + \int_{r_4}^{r_5} 2\pi r h \varepsilon_{r,5} dr + \int_{r_5}^{r_6} 2\pi r h \varepsilon_{r,6} dr + \int_{r_6}^{r_7} 2\pi r h \varepsilon_{r,7} dr \right] \quad (5.3.3)$$

Αν στην εξίσωση (5.3.3) αντικαταστήσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις με τις σχέσεις (5.2.59), (5.2.62), (5.2.65), (5.2.68), (5.2.71), (5.2.74), (5.2.77), και λάβουμε υπόψη τη λύση του συστήματος (σελ. 141), κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις και εκτελέσουμε τις ολοκληρώσεις γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_7^2}$

Θα έχουμε ότι:

$$v_{LT} = v_1 U_1 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) dr + v_5 U_5 + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} v_6(r) dr + v_7 U_7 \quad (5.3.4)$$

Θεωρούμε τώρα , όπως και πριν στον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $\nu_{LT}$  , ότι οι συναρτήσεις  $\nu_2(r)$ ,  $\nu_4(r)$ ,  $\nu_6(r)$ , ακολουθούν την παραβολική μεταβολή. Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις εφαρμόζοντας τους τύπους της παραβολικής μεταβολής (βλέπε Κεφ.4) θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 & \nu_L \\
 &= \nu_1 U_1 + \frac{(\nu_1 - \nu_3)(r_2 + r_1)(r_2^2 + r_1^2)}{2r_7^2(r_2 - r_1)} \\
 & \quad - \frac{4r_2(\nu_1 - \nu_3)(r_2^2 + r_1^2 + r_1 r_2)}{3r_7^2(r_2 - r_1)} \\
 & \quad + \frac{(\nu_1 r_2^2 + \nu_3 r_1^2 - 2\nu_3 r_1 r_2)(r_2 + r_1)}{r_7^2(r_2 - r_1)} + \nu_3 U_3 \\
 & \quad + \frac{(\nu_5 - \nu_3)(r_4 + r_3)(r_4^2 + r_3^2)}{2r_7^2(r_4 - r_3)} \\
 & \quad - \frac{4r_3(\nu_5 - \nu_3)(r_4^2 + r_3^2 + r_4 r_3)}{3r_7^2(r_4 - r_3)} \\
 & \quad + \frac{(\nu_5 r_3^2 + \nu_3 r_4^2 - 2\nu_3 r_3 r_4)(r_4 + r_3)}{r_7^2(r_4 - r_3)} + \nu_5 U_5 \\
 & \quad + \frac{(\nu_5 - \nu_7)(r_6 + r_5)(r_6^2 + r_5^2)}{2r_7^2(r_6 - r_5)} \\
 & \quad - \frac{4r_6(\nu_5 - \nu_7)(r_6^2 + r_5^2 + r_6 r_5)}{3r_7^2(r_6 - r_5)} \\
 & \quad + \frac{(\nu_5 r_6^2 + \nu_7 r_5^2 - 2\nu_7 r_6 r_5)(r_6 + r_5)}{r_7^2(r_6 - r_5)} + \nu_7 U_7
 \end{aligned}
 \tag{5.3.5}$$

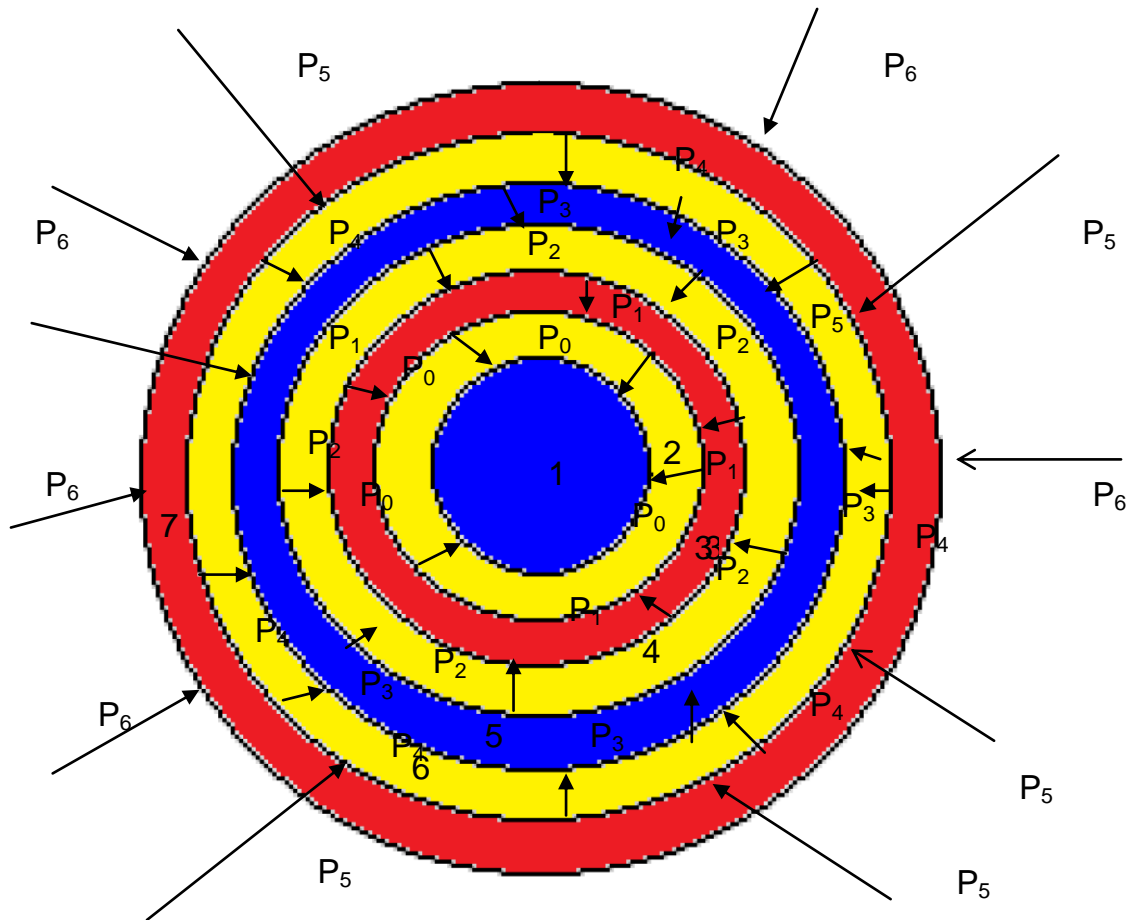
Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρα, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό θεωρητικό τύπο για τον διαμήκη λόγο Poisson:

$$\begin{aligned}
 & \nu_L \\
 & = \nu_1 U_1 + \frac{(\nu_1 - \nu_3)(\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})(2U_1 + U_2)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & - \frac{4\sqrt{U_1 + U_2}(\nu_1 - \nu_3)(2U_1 + U_2 + \sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1})}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} \\
 & + \frac{[E_1(U_1 + U_2) + E_3 U_1 - 2E_3 \sqrt{U_1 + U_2} \sqrt{U_1}](\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})}{(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + \nu_3 U_3 \\
 & + \frac{(\nu_5 - \nu_3)(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4)}{2(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & - \frac{4\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}(\nu_5 - \nu_3)(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4 + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} \\
 & + \frac{[\nu_5(U_1 + U_2 + U_3) + \nu_3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) - 2\nu_3 \sqrt{(U_1 + U_2 + U_3)(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)}](\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} \\
 & + \nu_5 U_5 + \frac{(\nu_5 - \nu_7)(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_6 - U_7})(2 - 2U_7 - U_6)}{2(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} \\
 & - \frac{4\sqrt{1 - U_7}(\nu_5 - \nu_7)(2 - 2U_7 - U_6 + \sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_6 - U_7})}{3(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} \\
 & + \frac{(\nu_5(1 - U_7) + \nu_7(1 - U_7 - U_6) - 2\nu_7 \sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_7 - U_6})(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_7 - U_6})}{(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_7 - U_6})} \\
 & + \nu_7 U_7
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

## 5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ Ε<sub>T</sub>

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην *ενότητα 5.1*. Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας  $r_7$  ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση  $P_6$ . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 6<sup>ης</sup> και 7<sup>ης</sup> φάσης στα σύνορά τους, θα ασκείται τώρα μια πίεση  $P_5$ . Αντίστοιχα στα σύνορα της 5<sup>ης</sup> και 6<sup>ης</sup> φάσης, 4<sup>ης</sup> και 5<sup>ης</sup> φάσης, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> φάσης, 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> φάσης, 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> θα ασκούνται πιέσεις  $P_4, P_3, P_2, P_1, P_0$  αντίστοιχα (Εικ.44).



Εικόνα 44

### ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy που περιγράφει το πρόβλημα καθώς και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, δηλαδή θα έχουμε:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} \quad (5.4.1)$$

Η ως άνω συνάρτηση είναι εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες και είναι διαφορική εξίσωση τύπου Euler και άρα θα έχει γενική λύση:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \quad (5.4.2)$$

Όπου  $J_1, J_2, J_3$  και  $J_4$  είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις επτά φάσεις όπως και στην ενότητα 5.2, έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.4.3)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.4.4)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.4.5)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.4.6)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.4.7)$$

$$\Phi_6 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \quad (5.4.8)$$

$$\Phi_7 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \quad (5.4.9)$$

### ΤΑΣΕΙΣ

Επειδή η τασική συνάρτηση παραμένει η ίδια με την ενότητα 5.2, έπεται πως και οι τάσεις  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  θα προκύπτουν οι ίδιες και για λόγους πληρότητας θα παρατεθούν ξανά:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.4.10)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.4.11)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.12)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.13)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.14)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.15)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.16)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.17)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.18)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.19)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.4.20)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.4.21)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.4.22)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.4.23)$$

Οι αξονικές τάσεις  $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}$  θα υπολογισθούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δηλαδή μέσω των σχέσεων:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1 (\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = 0 \quad (5.4.24)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2 (\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = 0 \quad (5.4.25)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3 (\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = 0 \quad (5.4.26)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4 (\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = 0 \quad (5.4.27)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5} [\sigma_{z,5} - \nu_5 (\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})] = 0 \quad (5.4.28)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6} \left[ \sigma_{z,6} - \nu_6 (\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6}) \right] = 0 \quad (5.4.29)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7} \left[ \sigma_{z,7} - \nu_7 (\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7}) \right] = 0 \quad (5.4.30)$$

Οι παραπάνω αξονικές παραμορφώσεις θεωρούμε ότι ισούνται με το μηδέν διότι το μήκος του κυλινδρικού μοντέλου είναι αναλογικά απείρως μεγαλύτερο σε σχέση με την επιμήκυνση που δέχεται ο άξονάς του.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.4.24)-(5.4.30) και κάνοντας χρήση και των εξισώσεων (5.4.10)-(5.4.23) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4\nu_1 A_3 \quad (5.4.31)$$

$$\sigma_{z,2} = 4\nu_2 B_3 \quad (5.4.32)$$

$$\sigma_{z,3} = 4\nu_3 C_3 \quad (5.4.33)$$

$$\sigma_{z,4} = 4\nu_4 D_3 \quad (5.4.34)$$

$$\sigma_{z,5} = 4\nu_5 F_3 \quad (5.4.35)$$

$$\sigma_{z,6} = 4\nu_6 K_3 \quad (5.4.36)$$

$$\sigma_{z,7} = 4\nu_7 H_3 \quad (5.4.37)$$

### **ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ**

Γνωρίζουμε γενικά ότι ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \quad (5.4.38)$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση  $u_{\theta}$  δεν εξαρτάται από το  $\theta$  και άρα θα ισχύει:

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_{\theta} \quad (5.4.39)$$

Άρα ξεχωριστά για τις επτά φάσεις θα έχουμε:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \quad (5.4.40)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \quad (5.4.41)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \quad (5.4.42)$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \quad (5.4.43)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \quad (5.4.44)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \quad (5.4.45)$$

$$u_{r,6} = r\varepsilon_{\theta,6} \quad (5.4.46)$$

$$u_{r,7} = r\varepsilon_{\theta,7} \quad (5.4.47)$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \quad (5.4.48)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \quad (5.4.49)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \quad (5.4.50)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \quad (5.4.51)$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - \nu_5 (\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \quad (5.4.52)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\sigma_{\theta,6} - \nu_6 (\sigma_{r,6} + \sigma_{z,6})}{E_6} \quad (5.4.53)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\sigma_{\theta,7} - \nu_7 (\sigma_{r,7} + \sigma_{z,7})}{E_7} \quad (5.4.54)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.48)-(5.4.54), τις σχέσεις των τάσεων (5.4.10)-( 5.4.23) και (5.4.31)-( 5.4.37) θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.55)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[ -(1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2) \right]}{E_2} \quad (5.4.56)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) \right]}{E_3} \quad (5.4.57)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) \right]}{E_4} \quad (5.4.58)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) \right]}{E_5} \quad (5.4.59)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[ -(1+\nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) \right]}{E_6} \quad (5.4.60)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[ -(1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) \right]}{E_7} \quad (5.4.61)$$

Και άρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.4.55)-(5.4.61) στις σχέσεις (5.4.40)-( 5.4.47) των μετατοπίσεων οι ακτινικές μετατοπίσεις θα γίνουν:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)r}{E_1} \quad (5.4.62)$$

$$u_{r,2} = \frac{\left[ -(1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2) \right] r}{E_2} \quad (5.4.63)$$

$$u_{r,3} = \frac{\left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) \right] r}{E_3} \quad (5.4.64)$$

$$u_{r,4} = \frac{\left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) \right] r}{E_4} \quad (5.4.65)$$

$$u_{r,5} = \frac{\left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) \right] r}{E_5} \quad (5.4.66)$$

$$u_{r,6} = \frac{\left[ -(1+\nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) \right] r}{E_6} \quad (5.4.67)$$

$$u_{r,7} = \frac{\left[ -(1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) \right] r}{E_7} \quad (5.4.68)$$

### **ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις και

ύστερα θα παρουσιάσουμε και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις συγκεντρωτικά.

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από τον γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.69)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[ (1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2) \right]}{E_2} \quad (5.4.70)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[ (1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) \right]}{E_3} \quad (5.4.71)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[ (1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) \right]}{E_4} \quad (5.4.72)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[ (1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5-2\nu_5^2) \right]}{E_5} \quad (5.4.73)$$

$$\varepsilon_{r,6} = \frac{\left[ (1+\nu_6) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-\nu_6-2\nu_6^2) \right]}{E_6} \quad (5.4.74)$$

$$\varepsilon_{r,7} = \frac{\left[ (1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7-2\nu_7^2) \right]}{E_7} \quad (5.4.75)$$

Επίσης υπολογισμένες από πριν οι αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις θα είναι:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1 (\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = 0 \quad (5.4.76)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2 (\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = 0 \quad (5.4.77)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3 (\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = 0 \quad (5.4.78)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4 (\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = 0 \quad (5.4.79)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5} [\sigma_{z,5} - \nu_5 (\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})] = 0 \quad (5.4.80)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6} [\sigma_{z,6} - \nu_6 (\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})] = 0 \quad (5.4.81)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7} [\sigma_{z,7} - \nu_7 (\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})] = 0 \quad (5.4.82)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.83)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[ -(1+\nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-\nu_2-2\nu_2^2) \right]}{E_2} \quad (5.4.84)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[ -(1+\nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-\nu_3-2\nu_3^2) \right]}{E_3} \quad (5.4.85)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[ -(1+\nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-\nu_4-2\nu_4^2) \right]}{E_4} \quad (5.4.86)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[ -(1+\nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-\nu_5 - 2\nu_5^2) \right]}{E_5} \quad (5.4.87)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[ -(1+\nu_7) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-\nu_7 - 2\nu_7^2) \right]}{E_7} \quad (5.4.88)$$

### **ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ**

Για  $r = r_1$ :  $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$  και άρα  $A_3 = \frac{B_1}{2r_1^2} + B_3$  (5.4.89)

Για  $r = r_2$ :  $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$  και άρα  $\frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3$  (5.4.90)

Για  $r = r_3$ :  $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$  και άρα  $\frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3$  (5.4.91)

Για  $r = r_4$ :  $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$  και άρα  $\frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3$  (5.4.92)

Για  $r = r_5$ :  $\sigma_{r,5} = \sigma_{r,6}$  και άρα  $\frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = \frac{K_1}{r_5^2} + 2K_3$  (5.4.93)

Για  $r = r_6$ :  $\sigma_{r,6} = \sigma_{r,7}$  και άρα  $\frac{K_1}{r_6^2} + 2K_3 = \frac{H_1}{r_6^2} + 2H_3$  (5.4.94)

Για  $r = r_7$ :  $\sigma_{r,7} = P_5$  και άρα  $H_3 = -\frac{H_1}{2r_7^2} - \frac{P_5}{2}$  (5.4.95)

### **ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ**

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για  $r = r_1$ :  $u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα από (5.4.62), (5.4.63) θα έχουμε

$$E_2 \left[ 2A_3 (1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) \right] = E_1 \left[ -(\nu_2 + 1) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] \quad (5.4.96)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα από (5.4.63) , (5.4.64) θα έχουμε

$$E_3 \left[ -(\nu_2 + 1) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] = E_2 \left[ -(\nu_3 + 1) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 (1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \right] \quad (5.4.97)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα από (5.4.64) , (5.4.65) θα έχουμε

$$E_4 \left[ -(\nu_3 + 1) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 (1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \right] = E_3 \left[ -(\nu_4 + 1) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 (1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \right] \quad (5.4.98)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα από (5.4.65) , (5.4.66) θα έχουμε

$$E_5 \left[ -(\nu_4 + 1) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 (1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \right] = E_4 \left[ -(\nu_5 + 1) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 (1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \right] \quad (5.4.99)$$

Για  $r = r_5 : u_{r,5} = u_{r,6}$  και άρα από (5.4.66) , (5.4.67) θα έχουμε

$$E_6 \left[ -(\nu_5 + 1) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 (1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \right] = E_5 \left[ -(\nu_6 + 1) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 (1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \right] \quad (5.4.100)$$

Για  $r = r_6 : u_{r,6} = u_{r,7}$  και άρα από (5.4.67) , (5.4.68) θα έχουμε

$$E_7 \left[ -(\nu_6 + 1) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 (1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \right] = E_6 \left[ -(\nu_7 + 1) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 (1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \right] \quad (5.4.101)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι  $n = 1$  και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1 : E_1 = E_2 \text{ και } \nu_1 = \nu_2 \quad (5.4.102)$$

$$\text{Για } r = r_2 : E_2 = E_3 \text{ και } \nu_2 = \nu_3 \quad (5.4.103)$$

$$\text{Για } r = r_3 : E_3 = E_4 \text{ και } \nu_3 = \nu_4 \quad (5.4.104)$$

$$\text{Για } r = r_4 : E_4 = E_5 \text{ και } \nu_4 = \nu_5 \quad (5.4.105)$$

$$\text{Για } r = r_5 : E_5 = E_6 \text{ και } \nu_5 = \nu_6 \quad (5.4.106)$$

$$\text{Για } r = r_5 : E_5 = E_6 \text{ και } \nu_5 = \nu_6 \quad (5.4.107)$$

$$\text{Για } r = r_6 : E_6 = E_7 \text{ και } \nu_6 = \nu_7 \quad (5.4.108)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.4.96)-(5.4.101) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4.102)-(5.4.108) θα έχουμε:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)(B_3 - A_3) = (\nu_2 + 1) \frac{B_1}{r_1^2} \quad (5.4.109)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(B_3 - C_3) = (\nu_3 + 1) \frac{(B_1 - C_1)}{r_2^2} \quad (5.4.110)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)(C_3 - D_3) = (\nu_3 + 1) \frac{(C_1 - D_1)}{r_3^2} \quad (5.4.111)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)(D_3 - F_3) = (\nu_5 + 1) \frac{(D_1 - F_1)}{r_4^2} \quad (5.4.112)$$

Για  $r = r_5 : u_{r,5} = u_{r,6}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1-\nu_5 - 2\nu_5^2)(F_3 - K_3) = (\nu_5 + 1) \frac{(F_1 - K_1)}{r_5^2} \quad (5.4.113)$$

Για  $r = r_6 : u_{r,6} = u_{r,7}$  και άρα θα έχουμε

$$2(1-\nu_7 - 2\nu_7^2)(K_3 - H_3) = (\nu_7 + 1) \frac{(K_1 - H_1)}{r_6^2} \quad (5.4.114)$$

Οι εξισώσεις (5.4.89)-(5.4.95) και (5.4.109)-(5.4.114) αποτελούν ένα σύστημα 13 εξισώσεων με 13 αγνώστους. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$

Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:

$$A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = K_3 = H_3 = \left(-\frac{1}{2} P_6\right) \text{ και } B_1 = C_1 = D_1 = F_1 = K_1 = H_1 = 0 .$$

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  και του εγκάρσιου λόγου Poisson  $\nu_{TT}$  ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο, οι τιμές που θα βρούμε για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{V_C} \frac{P_6^2}{K_C} dV_C \\
 &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) dV_6 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) dV_7
 \end{aligned}$$

(5.4.115)

Όπου  $dV=2\pi r h dr$  και  $K_C$  το μέτρο διόγκωσης

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{P_4^2}{K_C v_c} \int 2\pi r h dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_5}^{r_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) 2\pi r h dr \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{r_6}^{r_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) 2\pi r h dr
 \end{aligned}
 \tag{5.4.116}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.4.116) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.4.10)-(5.4.23) και (5.4.31)-(5.4.37) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.4.69)-(5.4.88) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών  $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$  που εξαγάγαμε από την λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2K_C} \int_0^{r_7} r dr &= \frac{2(2-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} \int_0^{r_1} r dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-\nu_2(r)-(2\nu_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{1(2-\nu_3-2\nu_3^2)}{E_3} \int_{r_2}^{r_3} r dr + 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-\nu_4(r)-(2\nu_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr \\
 &+ \frac{1(2-\nu_5-2\nu_5^2)}{E_5} \int_{r_4}^{r_5} r dr + 2 \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-\nu_6(r)-(2\nu_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \frac{1(2-\nu_7-2\nu_7^2)}{E_7} \int_{r_6}^{r_7} r dr
 \end{aligned}
 \tag{5.4.117}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$

- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_7^2}$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K_C} = & \frac{U_1(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-\nu_2(r)-2(\nu_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1-\nu_3-2\nu_3^2)}{E_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-\nu_4(r)-2(\nu_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr \\ & + \frac{U_5(1-\nu_5-2\nu_5^2)}{E_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-\nu_6(r)-2(\nu_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \frac{U_7(1-\nu_7-2\nu_7^2)}{E_7} \end{aligned} \quad (5.4.118)$$

Το μέτρο διόγκωσης για το σύνθετο υλικό μας γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με [28]:

$$K_C = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{2 \left[ \frac{1-\nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \right]} \quad (5.4.119)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (5.4.86) , η σχέση (5.4.85) θα γίνει:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} = & \frac{U_1(1-\nu_1-2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1-\nu_2(r)-2(\nu_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1-\nu_3-2\nu_3^2)}{E_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1-\nu_4(r)-2(\nu_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr \\ & + \frac{U_5(1-\nu_5-2\nu_5^2)}{E_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1-\nu_6(r)-2(\nu_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr + \frac{U_7(1-\nu_7-2\nu_7^2)}{E_7} \end{aligned} \quad (5.4.120)$$

Η σχέση (5.4.120) μας δίνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$ . Οι συναρτήσεις  $v_2(r)$ ,  $v_4(r)$ ,  $v_6(r)$ ,  $E_2(r)$ ,  $E_4(r)$  και  $E_6(r)$  θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή που έχει βρεθεί ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την υπερβολική και την γραμμική μεταβολή [28]. Οι θεωρητικοί τύποι του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$  και του διαμήκους λόγου Poisson  $\nu_{LT}$  έχουν υπολογιστεί στις προηγούμενες ενότητες ενώ ο εγκάρσιος λόγος Poisson θα υπολογιστεί στην επόμενη ενότητα.

## 5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON $\nu_{TT}$

Τον εγκάρσιο λόγο Poisson  $\nu_{TT}$  του σύνθετου υλικού θα τον υπολογίσουμε από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων με την χρήση του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση, από την σχέση:

$$\frac{1}{\nu_{TT}} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{U_6}{\nu_6(r)} + \frac{U_7}{\nu_7} \quad (5.5.1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2}$

Η σχέση (5.5.1) μπορεί να γραφτεί τώρα ως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2} \frac{1}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2} \frac{1}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2} \frac{1}{\nu_6(r)} + \frac{U_7}{\nu_7} \\ \Rightarrow \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{\nu_2(r)} dr + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{\nu_4(r)} dr + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{1}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{\nu_6(r)} dr + \frac{U_7}{\nu_7} \\ \Rightarrow \frac{1}{\nu_{TT}} &= \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\nu_2(r)} dr + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{\nu_4(r)} dr + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{\nu_6(r)} dr + \frac{U_7}{\nu_7} \end{aligned}$$

Και άρα θα έχουμε τελικά:

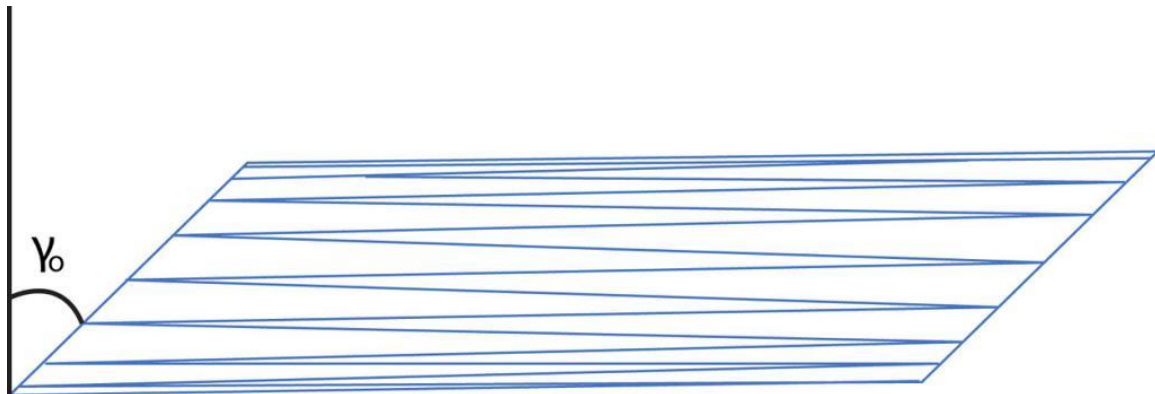
$$\frac{1}{v_{TT}} = \frac{U_1}{v_1} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{2}{r_7^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \quad (5.5.2)$$

Οι συναρτήσεις  $v_2(r)$ ,  $v_4(r)$  και  $v_6(r)$  όπως και στις προηγούμενες ενότητες, θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή.

## 5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας με ενδιάμεση φάση και έστω ότι ασκούμε μια διάτμηση  $\gamma_0$  (Εικ.45).

Από τη θεωρία ελαστικότητας, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις για το κυλινδρικό μοντέλο μας όταν υφίσταται διάτμηση  $\gamma_0$  θα είναι [29]:



Εικόνα 45

### ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ

$$u_{z,1} = \left( A_1 r + \frac{A_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.1)$$

$$u_{r,1} = A_3 z \cos \theta \quad (5.6.2)$$

$$u_{\theta,1} = -A_3 z \sin \theta \quad (5.6.3)$$

$$u_{z,2} = \left( B_1 r + \frac{B_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.4)$$

$$u_{r,2} = B_3 z \cos \theta \quad (5.6.5)$$

$$u_{\theta,2} = -B_3 z \sin \theta \quad (5.6.6)$$

$$u_{z,3} = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.7)$$

$$u_{r,3} = C_3 z \cos \theta \quad (5.6.8)$$

$$u_{\theta,3} = -C_3 z \sin \theta \quad (5.6.9)$$

$$u_{z,4} = \left( D_1 r + \frac{D_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.10)$$

$$u_{r,4} = D_3 z \cos \theta \quad (5.6.11)$$

$$u_{\theta,4} = -D_3 z \sin \theta \quad (5.6.12)$$

$$u_{z,5} = \left( F_1 r + \frac{F_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.13)$$

$$u_{r,5} = F_3 z \cos \theta \quad (5.6.14)$$

$$u_{\theta,5} = -F_3 z \sin \theta \quad (5.6.15)$$

$$u_{z,6} = \left( K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.16)$$

$$u_{r,6} = K_3 z \cos \theta \quad (5.6.17)$$

$$u_{\theta,6} = -K_3 z \sin \theta \quad (5.6.18)$$

$$u_{z,7} = \left( H_1 r + \frac{H_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.19)$$

$$u_{r,7} = H_3 z \cos \theta \quad (5.6.20)$$

$$u_{\theta,7} = -H_3 z \sin \theta \quad (5.6.21)$$

### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right],$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right], \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]$$

Άρα θα έχουμε:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{r\theta,1} = 0, \quad \varepsilon_{rz,1} = \frac{1}{2} \left[ A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,1} = -\frac{1}{2} \left[ A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.22a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{z,2} = \varepsilon_{r\theta,2} = 0, \quad \varepsilon_{rz,2} = \frac{1}{2} \left[ B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,2} = -\frac{1}{2} \left[ B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.23a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{z,3} = \varepsilon_{r\theta,3} = 0, \quad \varepsilon_{rz,3} = \frac{1}{2} \left[ C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,3} = -\frac{1}{2} \left[ C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.24a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{z,4} = \varepsilon_{r\theta,4} = 0, \quad \varepsilon_{rz,4} = \frac{1}{2} \left[ D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,4} = -\frac{1}{2} \left[ D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.25a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{z,5} = \varepsilon_{r\theta,5} = 0, \quad \varepsilon_{rz,5} = \frac{1}{2} \left[ F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,5} = -\frac{1}{2} \left[ F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.26a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,6} = \varepsilon_{\theta,6} = \varepsilon_{z,6} = \varepsilon_{r\theta,6} = 0, \quad \varepsilon_{rz,6} = \frac{1}{2} \left[ K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,6} = -\frac{1}{2} \left[ K_1 + K_3 + \frac{K_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.27a,b,c)$$

$$\varepsilon_{r,7} = \varepsilon_{\theta,7} = \varepsilon_{z,7} = \varepsilon_{r\theta,7} = 0, \quad \varepsilon_{rz,7} = \frac{1}{2} \left[ H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2} \right] \cos \theta$$

$$\varepsilon_{\theta z,7} = -\frac{1}{2} \left[ H_1 + H_3 + \frac{H_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.28a,b,c)$$

### **ΤΑΣΕΙΣ**

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \quad \sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \quad \sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}$$

$$\sigma_{rz,1} = G_1 \left( A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.29)$$

$$\sigma_{\theta z,1} = -G_1 \left( A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.30)$$

$$\sigma_{rz,2} = G_2 \left( B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.31)$$

$$\sigma_{\theta z,2} = -G_2 \left( B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.32)$$



$$\sigma_{r_z,3} = G_3 \left( C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.33)$$

$$\sigma_{\theta_z,3} = -G_3 \left( C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.34)$$

$$\sigma_{r_z,4} = G_4 \left( D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.35)$$

$$\sigma_{\theta_z,4} = -G_4 \left( D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.36)$$

$$\sigma_{r_z,5} = G_5 \left( F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.37)$$

$$\sigma_{\theta_z,5} = -G_5 \left( F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.38)$$

$$\sigma_{r_z,6} = G_6 \left( K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.39)$$

$$\sigma_{\theta_z,6} = -G_6 \left( K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.40)$$

$$\sigma_{r_z,7} = G_7 \left( H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.41)$$

$$\sigma_{\theta_z,7} = -G_7 \left( H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.42)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\sigma_{rr,i} = \sigma_{\theta\theta,i} = \sigma_{zz,i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (5.6.43)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση  $r=0$  θα πρέπει η σταθερά  $A_2$  να είναι ίση με το μηδέν δηλαδή  $A_2 = 0$ . Επίσης στο σύνορο της έβδομης φάσης, εκεί δηλαδή που επιδρά η διάτμηση  $\gamma_0$ , η

ακτινική μετατόπιση ισούται με  $\gamma_0 z \cos \theta$ . Άρα από την σχέση (5.6.20) προκύπτει ότι:

$$H_3 z \cos \theta = \gamma_0 z \cos \theta \Rightarrow H_3 = \gamma_0 \quad (5.6.44)$$

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις είναι:

Για  $r = r_1$  :  $\sigma_{rz,1} = \sigma_{rz,2}$  και άρα θα έχουμε

$$G_1(A_1 + A_3) = G_2\left(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_1^2}\right) \quad (5.6.45)$$

Για  $r = r_2$  :  $\sigma_{rz,2} = \sigma_{rz,3}$  και άρα θα έχουμε

$$G_2\left(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_2^2}\right) = G_3\left(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_2^2}\right) \quad (5.6.46)$$

Για  $r = r_3$  :  $\sigma_{rz,3} = \sigma_{rz,4}$  και άρα θα έχουμε

$$G_3\left(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_3^2}\right) = G_4\left(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_3^2}\right) \quad (5.6.47)$$

Για  $r = r_4$  :  $\sigma_{rz,4} = \sigma_{rz,5}$  και άρα θα έχουμε

$$G_4\left(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_4^2}\right) = G_5\left(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_4^2}\right) \quad (5.6.48)$$

Για  $r = r_5$  :  $\sigma_{rz,5} = \sigma_{rz,6}$  και άρα θα έχουμε

$$G_5\left(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_5^2}\right) = G_6\left(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_5^2}\right) \quad (5.6.49)$$

Για  $r = r_6$  :  $\sigma_{rz,6} = \sigma_{rz,7}$  και άρα θα έχουμε

$$G_6 \left( K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_6^2} \right) = G_7 \left( H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r_6^2} \right) \quad (5.6.50)$$

Όπου  $G_2, G_4, G_6$  θεωρούμε τους μέσους όρους των συναρτήσεων  $G_2(r), G_4(r), G_6(r)$  αντίστοιχα, θεωρώντας ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή με την μέγιστη επίδραση της μήτρα και του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για  $r = r_1 : u_{r,1} = u_{r,2}$  και  $u_{z,1} = u_{z,2}$  θα έχουμε

$$A_3 = B_3 \quad (5.6.51)$$

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{r_1^2} \quad (5.6.52)$$

Για  $r = r_2 : u_{r,2} = u_{r,3}$  και  $u_{z,2} = u_{z,3}$  θα έχουμε

$$B_3 = C_3 \quad (5.6.53)$$

$$B_1 + \frac{B_2}{r_2^2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} \quad (5.6.54)$$

Για  $r = r_3 : u_{r,3} = u_{r,4}$  και  $u_{z,3} = u_{z,4}$  θα έχουμε

$$C_3 = D_3 \quad (5.6.55)$$

$$C_1 + \frac{C_2}{r_3^2} = D_1 + \frac{D_2}{r_3^2} \quad (5.6.56)$$

Για  $r = r_4 : u_{r,4} = u_{r,5}$  και  $u_{z,4} = u_{z,5}$  θα έχουμε

$$D_3 = F_3 \quad (5.6.57)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

$$D_1 + \frac{D_2}{r_4^2} = F_1 + \frac{F_2}{r_4^2} \quad (5.6.58)$$

Για  $r = r_5 : u_{r,5} = u_{r,6}$  και  $u_{z,5} = u_{z,6}$  άρα θα έχουμε

$$K_3 = F_3 \quad (5.6.59)$$

$$F_1 + \frac{F_2}{r_5^2} = K_1 + \frac{K_2}{r_5^2} \quad (5.6.60)$$

Για  $r = r_6 : u_{r,6} = u_{r,7}$  και  $u_{z,6} = u_{z,7}$  άρα θα έχουμε

$$K_3 = H_3 \quad (5.6.61)$$

$$K_1 + \frac{K_2}{r_6^2} = H_1 + \frac{H_2}{r_6^2} \quad (5.6.62)$$

Για  $r = r_7 : u_{r,6} = u_{r,7}$  και  $u_{z,6} = u_{z,7}$  άρα θα έχουμε

$$H_3 = \gamma_0 \quad (5.6.63)$$

$$H_1 + \frac{H_2}{r_7^2} = 0 \quad (5.6.64)$$

Οι εξισώσεις (5.6.45)-( 5.6.64) αποτελούν ένα σύστημα 20 εξισώσεων με 20 αγνώστους του οποίου η λύση δίνει τις τιμές των σταθερών  $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3$ . Οι τιμές αυτές θα προκύψουν ως συνάρτηση των σταθερών μεγεθών  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, \gamma_0$  και των ακτινών  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ . Επειδή όμως με την αλλαγή της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος αλλάζουν και οι τιμές των ακτίνων αλλά και των μέσων όρων των συναρτήσεων  $G_2(r), G_4(r)$  και  $G_6(r)$  έπεται ότι και οι σταθερές  $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3$  θα αλλάζουν επίσης.

Αρχικά, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι  $A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = K_3 = H_3 = \gamma_0$ .

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου διατμήσεως  $G_{LT}$  του

σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης και των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (5.6.43) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{V_C} G_{LT} \gamma_0^2 dV_C &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1} +) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2} +) dV_2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3} +) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4} +) dV_4 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5} +) dV_5 + \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{rz,6} \gamma_{rz,6} + \sigma_{\theta z,6} \gamma_{\theta z,6} +) dV_6 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{rz,7} \gamma_{rz,7} + \sigma_{\theta z,7} \gamma_{\theta z,7} +) dV_7
 \end{aligned} \tag{5.6.65}$$

Όπου  $dV = 2\pi r h d r d\theta$

Η παραπάνω σχέση (5.6.65) μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_5} G_{LT} \gamma_0^2 2\pi r h d r d\theta \\
 &\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1}) 2\pi r h d r d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2}) 2\pi r h d r d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3}) 2\pi r h d r d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4}) 2\pi r h d r d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5}) 2\pi r h d r d\theta. \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_5}^{r_6} (\sigma_{rz,6} \gamma_{rz,6} + \sigma_{\theta z,6} \gamma_{\theta z,6}) 2\pi r h d r d\theta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_6}^{r_7} (\sigma_{rz,7} \gamma_{rz,7} + \sigma_{\theta z,7} \gamma_{\theta z,7}) 2\pi r h d r d\theta
 \end{aligned} \tag{5.6.66}$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι  $\gamma = \sigma/G$  και αντικαθιστώντας στην σχέση (5.6.63) τις εκφράσεις των τάσεων  $\sigma_{rz}$  και  $\sigma_{\theta z}$  από τις σχέσεις (5.6.29)-(5.6.42) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{r_5} G_{LT} \gamma_0^2 r dr d\theta = \\
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \left[ G_1 (A_1 + \gamma_0)^2 (\cos \theta)^2 + G_2 (A_1 + \gamma_0)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[ G_2 \left( B_1 + \gamma_0 - \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_2 \left( B_1 + \gamma_0 + \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} \left[ G_3 \left( C_1 + \gamma_0 - \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_3 \left( C_1 + \gamma_0 + \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_3}^{r_4} \left[ G_4 \left( D_1 + \gamma_0 - \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_4 \left( D_1 + \gamma_0 + \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_4}^{r_5} \left[ G_5 \left( F_1 + \gamma_0 - \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_5 \left( F_1 + \gamma_0 + \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_5}^{r_6} \left[ G_6 \left( K_1 + \gamma_0 - \frac{K_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_6 \left( K_1 + \gamma_0 + \frac{K_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
 & + \int_0^{2\pi} \int_{r_6}^{r_7} \left[ G_7 \left( H_1 + \gamma_0 - \frac{H_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_7 \left( H_1 + \gamma_0 + \frac{H_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta
 \end{aligned} \tag{5.6.67}$$

Εκτελώντας τις διπλές ολοκληρώσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 G_{LT}\gamma_0 r_5^2 = & \\
 G_1 r_1^2 (A_1 + \gamma_0)^2 + G_2 (r_2^2 - r_1^2) & \left[ (B_1 + \gamma_0)^2 + \frac{B_2^2}{r_1 r_2} \right] \\
 + G_3 (r_3^2 - r_2^2) & \left[ (C_1 + \gamma_0)^2 + \frac{C_2^2}{r_2 r_3} \right] \\
 + G_4 (r_4^2 - r_3^2) & \left[ (D_1 + \gamma_0)^2 + \frac{D_2^2}{r_4 r_3} \right] \\
 + G_5 (r_5^2 - r_4^2) & \left[ (F_1 + \gamma_0)^2 + \frac{F_2^2}{r_5 r_4} \right] \\
 + G_6 (r_6^2 - r_5^2) & \left[ (K_1 + \gamma_0)^2 + \frac{K_2^2}{r_6 r_5} \right] \\
 + G_7 (r_7^2 - r_6^2) & \left[ (H_1 + \gamma_0)^2 + \frac{H_2^2}{r_7 r_6} \right]
 \end{aligned} \tag{5.6.68}$$

Διαιρούμε τέλος και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με  $r_5^2$  και  $\gamma_0$  (το  $\gamma_0$  απλοποιείται από όλες τις σταθερές  $A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, F_1, F_2, K_1, K_2, H_1, H_2$  και προκύπτει η τελική έκφραση για το  $G_{LT}$  ως εξής:

$$\begin{aligned}
 G_{LT} = & \\
 & G_1 U_1 (A_1 + 1)^2 + G_2 U_2 \left[ (B_1 + 1)^2 + \frac{B_2^2}{r_1 r_2} \right] + G_3 U_3 \left[ (C_1 + 1)^2 + \frac{C_2^2}{r_2 r_3} \right] \\
 & + G_4 U_4 \left[ (D_1 + 1)^2 + \frac{D_2^2}{r_4 r_3} \right] + G_5 U_5 \left[ (F_1 + 1)^2 + \frac{F_2^2}{r_5 r_4} \right] + G_6 U_6 \left[ (K_1 + 1)^2 + \frac{K_2^2}{r_6 r_5} \right] \\
 & + G_7 U_7 \left[ (H_1 + 1)^2 + \frac{H_2^2}{r_7 r_6} \right]
 \end{aligned} \tag{5.6.69}$$

Όπου:

- $U_1 = \frac{r_1^2}{r_7^2}$
- $U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_7^2}$
- $U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_7^2}$
- $U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_7^2}$
- $U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_7^2}$
- $U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_7^2}$
- $U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_7^2}$



## 5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E_\theta$ , $\nu_\theta$ & $G_\theta$ .

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διατμήσεως και το λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης  $\theta$ . Η γωνία  $\theta$ , είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με την διεύθυνση των ινών. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες [30]:

Για το μέτρο ελαστικότητας  $E_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_L} (\cos \theta)^4 + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{E_T} (\sin \theta)^4 \quad (5.7.1)$$

Για το μέτρο διατμήσεως  $G_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\frac{1}{G_\theta} = 2 \left( \frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{G_{LT}} [(\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4] \quad (5.7.2)$$

Για τον λόγο Poisson  $\nu_\theta$  υπό γωνία φόρτισης  $\theta$  θα έχουμε:

$$\nu_\theta = E_\theta \left[ \frac{\nu_{LT}}{E_L} [(\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4] - \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 \right] \quad (5.7.3)$$

Στο επόμενο κεφάλαιο η εφαρμογή των εκφράσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τα  $E_\theta$ ,  $\nu_\theta$  και  $G_\theta$  θα γίνει για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 0.65 [6] και άρα και τα μεγέθη  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  θα είναι υπολογισμένα στην συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

## 5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας  $E_L$ , του διαμήκη λόγου Poisson  $\nu_L$ , του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$  και του διαμήκους μέτρου διάτμησης  $G_{LT}$ . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης  $f$  δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης  $m$  δηλώνει την μήτρα (matrix).

### 5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

#### Εξίσωση Θεογάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου[27]:

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στην μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό τριφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχθηκε να είναι η παραβολική.

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{3(E_f + E_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \frac{8(E_f - E_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} + \frac{6 \left\{ E_f(1 - U_m) + E_m U_f - 2E_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]}$$

(5.8.1)

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Νόμος των φάσεων(mixture law):**

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m \quad (5.8.2)$$

**Εξίσωση Ekvall [31]:**

$$E_L = E_f U_f + E_{m'} U_m \quad (5.8.3)$$

Όπου:  $E_{m'} = \frac{E_m}{(1-2\nu_m^2)}$

**5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON  $\nu_{LT}$**

**Εξίσωση Θεογάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:**

Θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, οι παραπάνω ερευνητές δείξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \nu_{LT} = \nu_f U_f + \nu_m U_m + & \frac{3(\nu_f + \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ & + \frac{8(\nu_f - \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ & + \frac{6 \left\{ \nu_f(1 - U_m) + \nu_m U_f - 2\nu_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[ (1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Νόμος των φάσεων(mixture law):**

$$v_{LT} = v_f U_f + v_m U_m \quad (5.8.5)$$

**Εξίσωση Rosen [32]:**

$$v_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 v_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \quad (5.8.6)$$

Όπου:

$$L_1 = 2v_f(1 - v_m^2)U_f + v_m(1 + v_m)U_m$$

$$L_2 = U_f(1 - v_f - 2v_f^2)$$

$$L_3 = 2(1 - v_m^2)U_f + (1 + v_m)U_m$$

**5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_T$**

**Εξίσωση Σιδερίδη [28]:**

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο και έστω ότι  $E_i(r)$  και  $v_i(r)$  οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου  $E_T$  θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} &= \frac{1}{E_f}(1 - v_f - 2v_f^2)U_f + \frac{1}{E_m}(1 - v_m - 2v_m^2)U_m \\ &+ \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b \frac{(1 - v_i(r) - 2v_i^2(r))}{E_i(r)} r dr \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Όπου τα  $E_L$  και τα  $v_{LT}$  δίνονται από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.4). Και εδώ

πάλι λόγω της ενδιάμεσης φάσης θα ισχύει ότι  $U_m = 1 - U_f - U_i$

**Εξίσωση Paul [33]:**

Η εξίσωση του Paul αποτελεί ένα ελάχιστο όριο για το  $E_T$  και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (5.8.8)$$

**Εξίσωση Whitney-Riley [34]:**

$$E_T = \frac{2K_c(1-v_T)E_L}{E_L + 4K_c v_L^2} \quad (5.8.9)$$

Όπου  $K_c$  το μέτρο διογκώσεως του σύνθετου και ισχύει η σχέση:

$$K_c = \frac{(k_f + G_m)k_m - (k_f - k_m)G_m U_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m)U_f}$$

με

$$k_f = \frac{E_f}{(1 - v_f - 2v_f^2)} \quad , \quad k_m = \frac{E_m}{(1 - v_m - 2v_m^2)}$$

**Εξίσωση Ekvall [35]:**

$$E_T = \frac{E_f E_{m'}}{U_f E_{m'} + U_m E_f (1 - v_m^2)} \quad (5.8.10)$$

Όπου  $E_{m'} = \frac{E_m}{1 - 2v_m^2}$

#### 5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ $G_{LT}$

##### Εξίσωση Σιδερίδη [29]:

Θεωρείται από τον ερευνητή το τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με  $G_i(r)$  συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης το οποίο περιγράφεται με την παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως  $G_{LT}$  θα είναι:

$$G_{LT}\gamma_o = G_f(A + \gamma_o)^2 U_f + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b G_i(r)(D + \gamma_o)^2 r dr + G_m \left[ (K + \gamma_o)^2 + \frac{K^2}{1 - U_m} \right] U_m$$

(5.8.11)

Όπου

$$A = D = \frac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_o, \quad K = \frac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_o$$

και  $U_m = 1 - U_f - U_i$

##### Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (5.8.12)$$

**Εξίσωση Hashin-Rosen [38]:**

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για το  $G_{LT}$  και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1+U_f)G_f+G_mU_m}{(1+U_f)G_m+G_fU_m} \quad (5.8.13)$$

**Εξίσωση Hashin [39]:**

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το  $G_{LT}$ :

$$G_{LT} = G_f \frac{(1+U_m)G_m+G_fU_f}{(1+U_m)G_f+G_mU_f} \quad (5.8.14)$$

**Εξίσωση Ekvall-Greszczuk [36],[37]:**

$$G_{LT} = \frac{G_mG_f}{G_fU_m+G_mU_f} \quad (5.8.15)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

---

### 6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson, μέσω των θεωρητικών σχέσεων που εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα “*Microsoft Excel 2007*”. Στο υπολογιστικό φύλλο του “*Microsoft Excel*” δημιουργήθηκε μια κύρια γραμμή με τις επιτρεπτές κατ’ όγκο περιεκτικότητες  $U_f$  του εγκλείσματος και με βάση αυτή την γραμμή υπολογίστηκαν οι υπόλοιποι τύποι με την χρήση συναρτήσεων και την δυνατότητα συσχέτισης μεταξύ των κελιών από το πρόγραμμα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και λόγων Poisson του σύνθετου υλικού, με βάση το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, για κάθε διαφορετική περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Οι υπολογισμοί των ορισμένων ολοκληρωμάτων, της θεωρητικής σχέσης (5.4.120) για την εύρεση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας  $E_T$ , και της θεωρητικής σχέσης (5.5.2) (σελ.111) για τον προσδιορισμό του εγκάρσιου λόγου Poisson  $\nu_{TT}$ , έγιναν με το πρόγραμμα Maple.

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ’ αυτήν την μελέτη για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson από τους θεωρητικούς τύπους που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 5, είναι ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης. Τα υλικά αυτά αποτελούνται από μία εποξειδική μήτρα(Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης  $A$ , συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο  $1,2 \times 10^{-5} \text{m}$ . Οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της μήτρας αλλά και των ινών γυαλιού που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον **Πίνακα G2**.



Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας $E(\text{GPa})$	Λόγος Poisson $\nu$	Μέτρο διατμήσεως $G(\text{GPa})$
<i>Εποξ. Ρητίνη</i>	3.5	0.35	1.29
<i>Υαλος</i>	72	0.20	30

Πίνακας G2

## 6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίσθηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίσθηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων(Πίνακες K2,L2,M2,N2), όπως επίσης και πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.(Πίνακες O2,P2,Q2,R2).

Πιο συγκεκριμένα, στο **Πίνακα Η2** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών, των λόγων Poisson, των κατ' όγκο περιεκτικότητων όλων των φάσεων καθώς και των ακτίνων τους, που υπολογίσθηκαν βάσει του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου. Να σημειώσουμε εδώ ότι στο **Πίνακα Η2** παραθέτεται και το  $\lambda$  που είναι το μήκος της πλευράς του εσωτερικού τετραγωνικού πρίσματος του δομικού «κυττάρου» μας, πριν το αναγάγουμε σε κυλινδρικό.

Στο **Πίνακα Ι2** παραθέτουμε τις τιμές των σταθερών(συναρτήσεως του  $\gamma_0$ ) που υπολογίσαμε κατά την λύση του συστήματος για την εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκου μέτρου διατμήσεως  $G_L$  βάσει του επταφασικού μοντέλου μας.

Στο **Πίνακα J2** παραθέτουμε τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης  $\theta$ (από  $0^\circ$  μέχρι  $90^\circ$ ), σε 0.65 κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Οι τιμές υπολογίσθηκαν από τους θεωρητικούς τύπους στην ενότητα 5.7 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $E_L$ , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα O2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [40],[41],[42] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν, ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $\nu_{LT}$ , που περιλαμβάνονται στον

**Πίνακα P2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[43] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $E_T$ , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα Q2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[44],[45] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $G_{LT}$ , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα R2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [46],[47], της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Και τέλος τα πειραματικά αποτελέσματα για το  $E_\theta$ ,  $\nu_\theta$ ,  $G_\theta$  που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα S2** και έχουν αντληθεί από την πηγή [6] της βιβλιογραφίας, για περιεκτικότητα εγκλείσματος 65%, αναφέρονται σε αυτόν ως  $E_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,  $\nu_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,  $G_\theta$  ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας  $E_T$  και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως το  $G_{LT}$  προέκυψαν από ανάγνωση αντίστοιχων διαγραμμάτων. Επειδή δεν υπήρχαν οι πίνακες με τις ακριβείς πειραματικές τιμές, είναι πιθανή η ύπαρξη μιας μικρής απόκλισης των τιμών των Πινάκων Q2,R2 από τις πραγματικές που εξήχθησαν από τους διάφορους πειραματιστές.

<b>ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ</b>							
<b>κατ'όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος <math>U_f</math></b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>	<b>50%</b>	<b>60%</b>	<b>65%</b>
<b><math>U_1</math></b>	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,13
<b><math>U_2</math></b>	0,00044	0,00168	0,00336	0,00500	0,00569	0,0036	0,00037
<b><math>U_3</math></b>	0,33206	0,27082	0,20914	0,1475	0,08681	0,0289	0,00213
<b><math>U_4</math></b>	0,00044	0,00168	0,00336	0,005	0,00596	0,0036	0,00037
<b><math>U_5</math></b>	0,07956	0,15832	0,23664	0,315	0,39431	0,4764	0,51963
<b><math>U_6</math></b>	0,00076	0,00324	0,00771	0,011468	0,02506	0,04068	0,05163
<b><math>U_7</math></b>	0,56674	0,52426	0,47979	0,43282	0,38244	0,32682	0,29587
<b><math>\lambda(\mu\text{m})</math></b>	37,589	26,580	21,702	18,794	16,810	15,346	14,743
<b><math>r1(\mu\text{m})</math></b>	6	6	6	6	6	6	6
<b><math>r2(\mu\text{m})</math></b>	6,066	6,124	6,166	6,185	6,168	6,089	6,009
<b><math>r3(\mu\text{m})</math></b>	25,189	16,771	12,787	10,229	8,325	6,764	6,057
<b><math>r4(\mu\text{m})</math></b>	25,210	16,820	12,870	10,340	8,447	6,843	6,066
<b><math>r5(\mu\text{m})</math></b>	27,900	20,620	17,540	15,770	14,600	13,770	13,440
<b><math>r6(\mu\text{m})</math></b>	27,926	20,692	17,667	15,976	14,911	14,211	13,964
<b><math>r7(\mu\text{m})</math></b>	42,426	30,000	24,495	21,213	18,974	17,321	16,641
<b><math>E_L</math></b>	10,36	17,24	24,15	31,12	38,19	45,44	49,18
<b><math>V_{LT}</math></b>	0,335	0,319	0,304	0,289	0,274	0,258	0,249
<b><math>V_{TT}</math></b>	0,325	0,306	0,287	0,268	0,254	0,239	0,229
<b><math>E_T</math></b>	5,119	6,394	8,141	9,489	11,577	14,693	19,308
<b><math>G_{LT}</math></b>	1,74	2,04	2,32	2,64	3,02	3,65	4,25

Πίνακας Η2

<b>ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ <math>G_{LT}</math></b>							
<b>U<sub>f</sub> κατ'όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>	<b>50%</b>	<b>60%</b>	<b>65%</b>
<b>A<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,94384	-0,95146	-0,95217	-0,94723	-0,93257	-0,88304	-0,75240
<b>B<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,94103	-0,94898	-0,94968	-0,94446	0,92906	-0,87713	-0,74028
<b>B<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-1,01277E-13	-8,9545E-14	-8,96427E-14	-1E-13	-1,3E-13	-2,1E-13	-4,36295E-13
<b>C<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,31953	-0,41236	-0,42123	-0,36159	-0,18409	0,41671	1,96557
<b>C<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-2,297E-11	-2,0214E-11	-2,0181E-11	-2,2E-11	-2,8E-11	-4,8E-11	-1,00803E-10
<b>D<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,66096	-0,72656	-0,75578	-0,76775	-0,76857	-0,76008	-0,75626
<b>D<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	1,9366E-10	6,81599E-11	3,45206E-11	2,01E-11	1,2E-11	5,66E-12	-9,46795E-13
<b>F<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,66248	-0,72800	-0,75736	-0,76967	-0,77127	-0,76524	-0,76819
<b>F<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	1,94627E-10	6,85667E-11	3,47786E-11	2,03E-11	1,22E-11	5,9E-12	-5,07532E-13
<b>K<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-0,65823	-0,72264	-0,75115	-0,76265	-0,76334	-0,75607	-0,75781
<b>K<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	1,91313E-10	6,62888E-11	3,28678E-11	1,86E-11	1,05E-11	4,16E-12	-2,3827E-12
<b>H<sub>1</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	0,31566	0,51525	0,70023	0,90416	1,15618	1,51462	1,83269
<b>H<sub>2</sub>(X Y<sub>0</sub>)</b>	-5,68186E-10	-4,6373E-10	-4,2014E-10	-4,1E-10	-4,2E-10	-4,5E-10	-5,07513E-10

Πίνακας Ι2

<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ <math>E_{\theta}, v_{\theta}, G_{\theta}</math></b>			
<b>(<math>\theta^{\circ}</math>)</b>	<b><math>E_{\theta}</math></b>	<b><math>v_{\theta}</math></b>	<b><math>G_{\theta}</math></b>
<b>0</b>	49,21	0,249	4,25
<b>5</b>	46,50	0,289	4,33
<b>10</b>	40,09	0,382	4,60
<b>15</b>	33,00	0,482	5,07
<b>20</b>	26,98	0,563	5,81
<b>25</b>	22,42	0,617	6,87
<b>30</b>	19,16	0,646	8,29
<b>35</b>	16,89	0,656	9,98
<b>40</b>	15,37	0,648	11,50
<b>45</b>	14,42	0,624	12,15
<b>50</b>	13,91	0,587	11,52
<b>55</b>	13,77	0,535	9,99
<b>60</b>	13,92	0,470	8,31
<b>65</b>	14,32	0,395	6,88
<b>70</b>	14,90	0,312	5,82
<b>75</b>	15,56	0,228	5,08
<b>80</b>	16,19	0,155	4,60
<b>85</b>	16,64	0,104	4,34
<b>90</b>	16,81	0,085	4,25

**Πίνακας J2**

**ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_L$  (GPa)**

$U_f$ κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	3,50	10,38	17,31	24,3	31,35	38,45	45,6	49,13	52,81	60,08
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	3,50	10,35	17,20	24,05	30,90	37,75	44,60	48,03	51,45	58,30
EKVALL	4,64	11,37	18,11	24,85	31,59	38,32	45,05	48,42	51,79	58,53
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	3,50	10,36	17,24	24,15	31,12	38,19	45,44	49,18	-	-

Πίνακας Κ2

**ΛΟΓΟΣ POISSON  $\nu_{LT}$**

$U_f$ κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	0,350	0,335	0,320	0,304	0,289	0,273	0,258	0,250	0,242	0,226
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	0,350	0,335	0,320	0,305	0,290	0,275	0,260	0,253	0,245	0,230
ROSEN	0,350	0,331	0,314	0,297	0,281	0,266	0,252	0,245	0,238	0,225
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	0,350	0,335	0,319	0,304	0,289	0,274	0,258	0,249	-	-

Πίνακας L2

**ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_T$  (GPa)**

$U_f$ κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	3,50	5,32	6,56	7,88	9,48	11,60	14,67	-	19,64	29,22
PAUL-LOWER BOUND	3,50	3,87	4,32	4,90	5,65	6,68	8,16	-	10,48	14,65
WHITNEY-RILEY	3,50	5,13	6,08	6,98	8,02	9,31	11,04	-	13,53	17,48
EKVALL	4,64	5,12	5,70	6,45	7,41	8,74	10,57	-	13,44	18,43
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	3,50	5,11	6,39	8,14	9,48	11,57	14,69	19,31	-	-

Πίνακας Μ2

**ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ  $G_{LT}$  (GPa)**

$U_f$ κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	1,30	1,57	1,90	2,33	2,91	3,74	4,99	5,89	7,12	11,57
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	1,30	4,17	7,04	9,91	12,78	15,65	18,52	19,96	21,39	24,26
EKVALL-GRESZCZUK	1,30	1,44	1,61	1,82	2,11	2,49	3,05	3,44	3,94	5,54
HASHIN-ROSEN	1,30	1,56	1,88	2,29	2,81	3,50	4,48	5,14	5,96	8,45
HASHIN	1,30	2,87	4,61	6,54	8,71	11,14	13,90	15,42	17,06	20,7
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	1,30	1,74	2,04	2,32	2,64	3,02	3,65	4,25	-	-

Πίνακας Ν2

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ  $E_L$  (GPa)**

$U_f$ κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	3,50	10,36	17,22	26,07	30,92	37,77	44,62	48,13	51,47	58,31
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	3,45	10,41	17,38	-	-	38,11	45,12	48,62	52,15	-
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	-	-	-	-	-	-	48,14	52,15	56,16	-

Πίνακας Ο2

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ  $v_{LT}$**

$U_f$ κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	0,350	0,332	0,315	0,300	0,286	0,273	0,262	0,256	0,251	0,241
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	0,350	0,330	0,320	-	-	0,280	0,260	-	-	-

Πίνακας Ρ2

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ  $E_T$  (GPa)**

$U_f$ κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	20%	30%	40%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	4,40	7,52	–	11,60	–	15,00	–	19,60	–
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	–	–	–	–	15,80	–	17,60	–	–
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	–	–	–	–	–	15,40	–	–	20,20

Πίνακας Q2

**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ  $G_{LT}$  (GPa)**

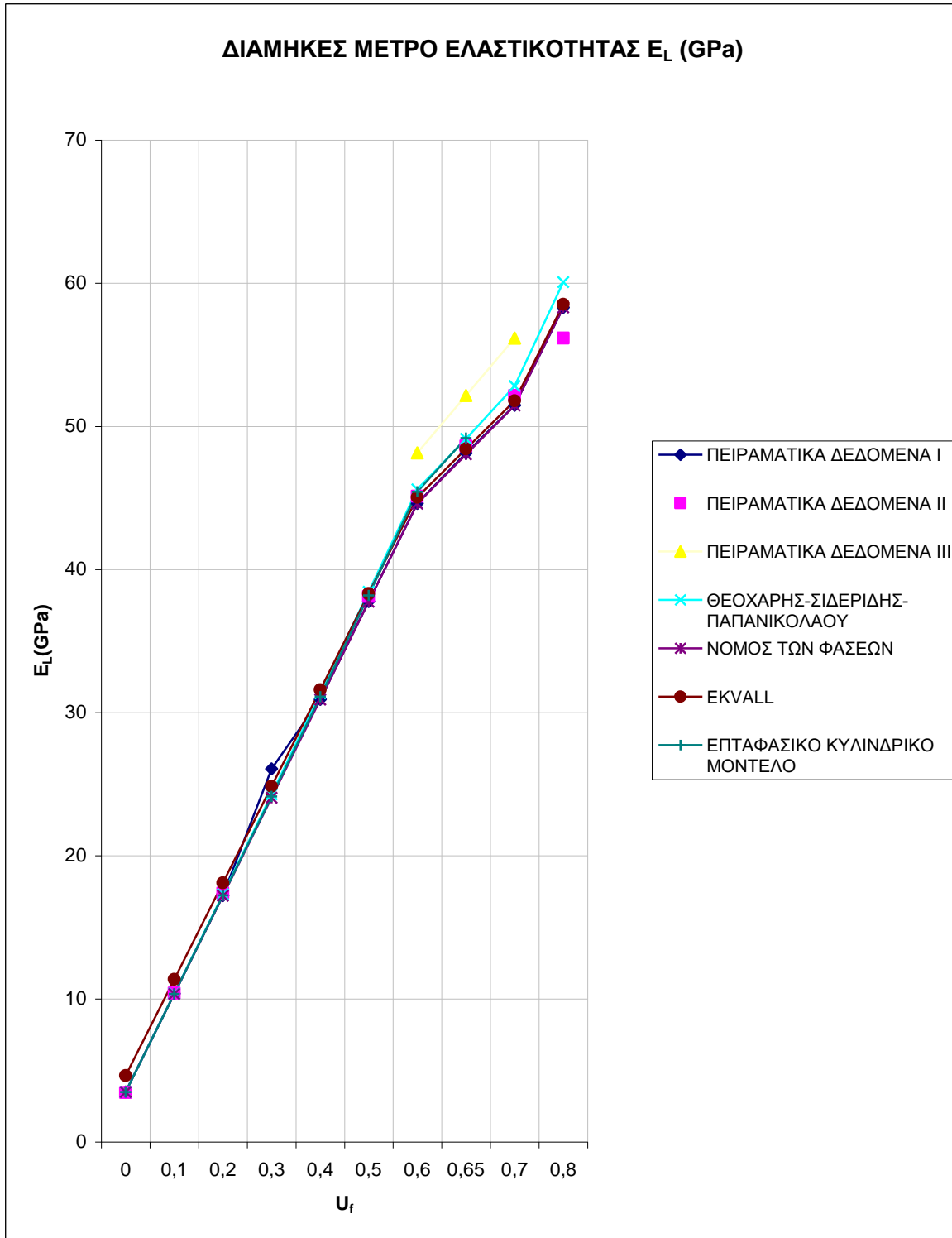
$U_f$ κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	55%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	6,41	6,88	7,50	–
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	–	6,09	6,79	7,97

Πίνακας R2

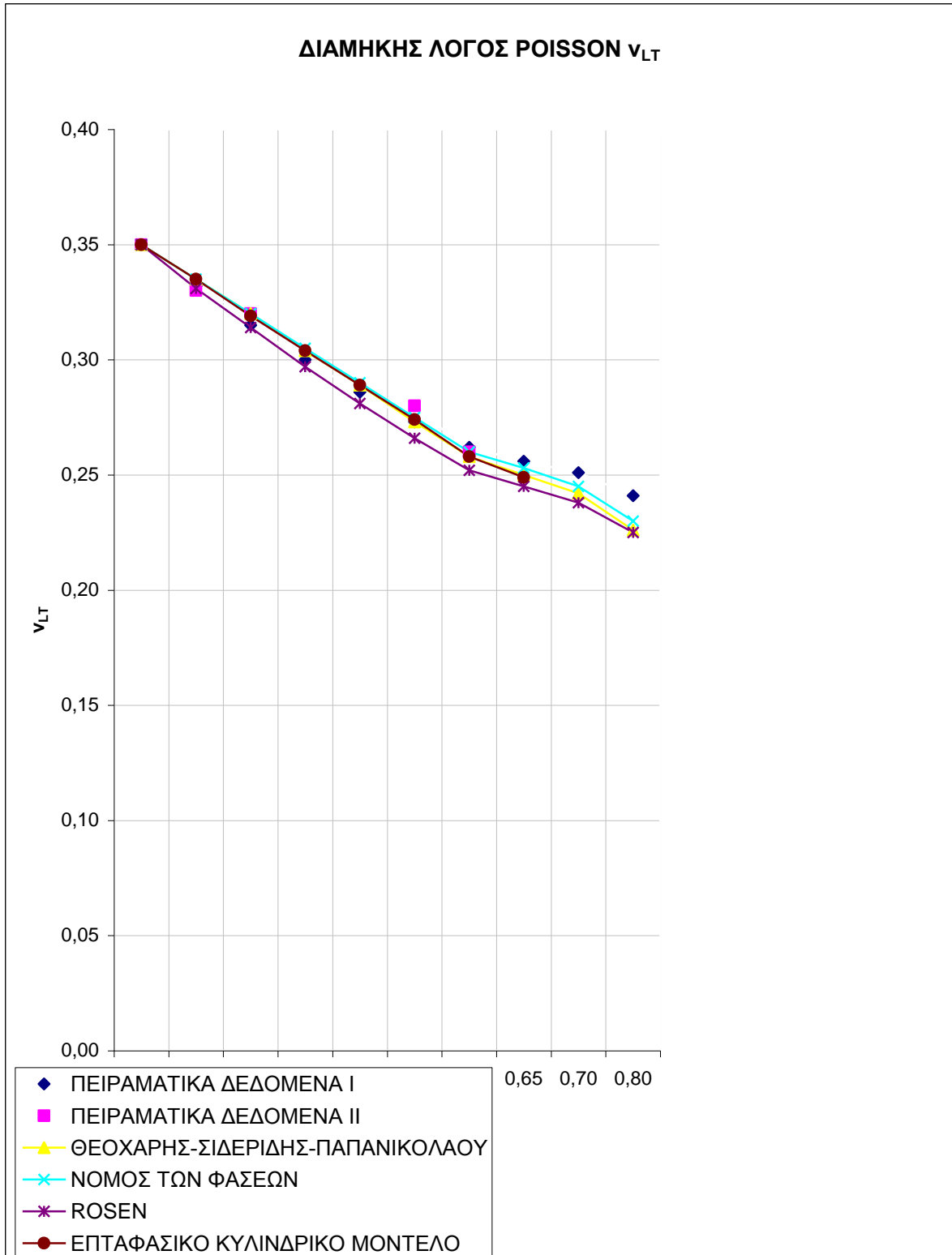
### 6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις ελαστικές σταθερές και τους λόγους Poisson. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Οι πειραματικές τιμές απεικονίζονται με σημεία (κυρίως μικρούς κύβους). Στο τέλος της ενότητας ακολουθούν, ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τις τιμές που εξήχθησαν από το επταφασικό μας μοντέλο των  $E_\theta, G_\theta, \nu_\theta$  και τις πειραματικές τιμές αυτών, και τα τρία διαγράμματα των  $E_\theta, G_\theta, \nu_\theta$  για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65%, και οι πειραματικές τιμές αυτών. Τέλος με την βοήθεια των διαγραμμάτων, η σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές θα είναι πιο εύκολη και περισσότερο κατανοητή.

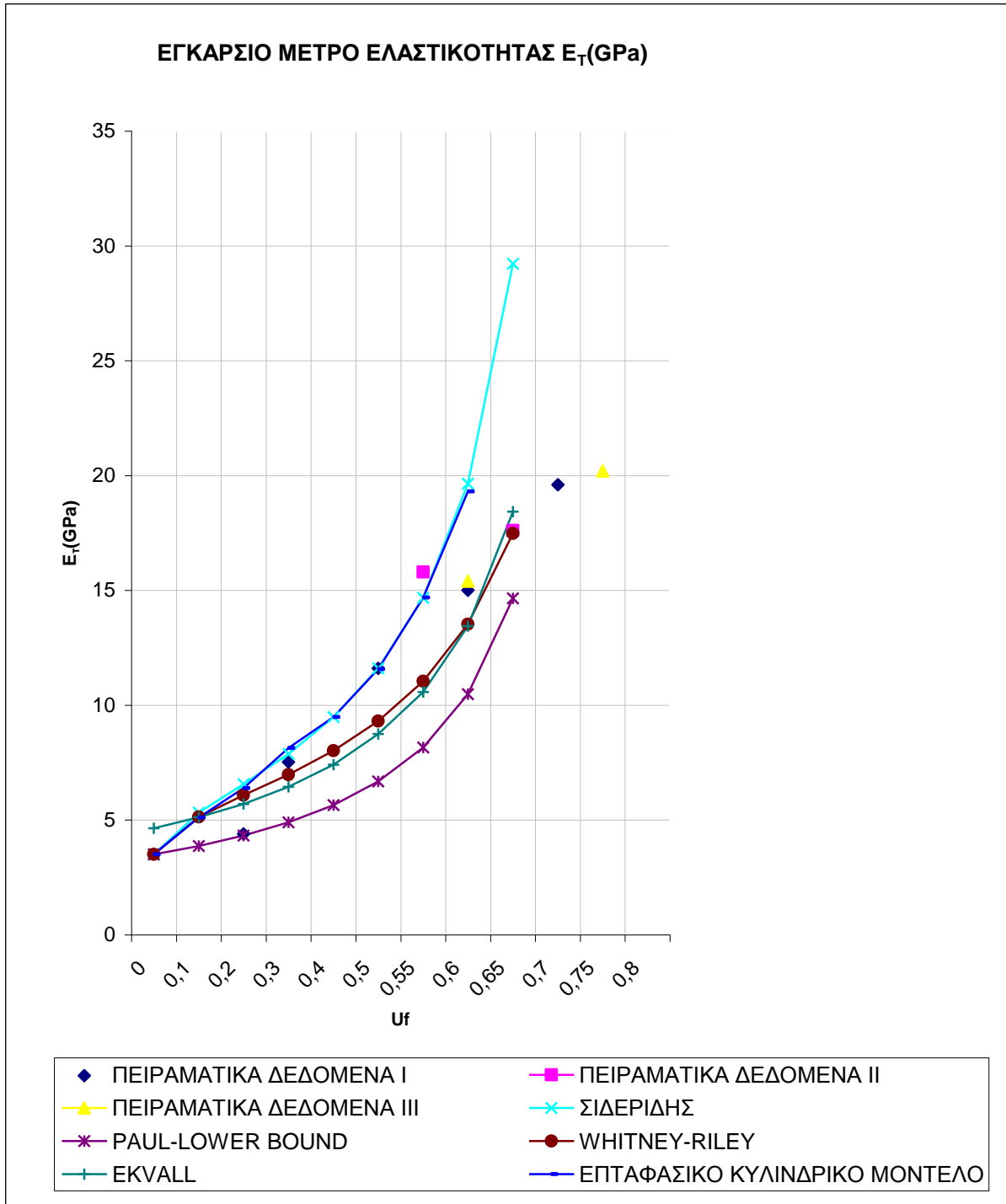




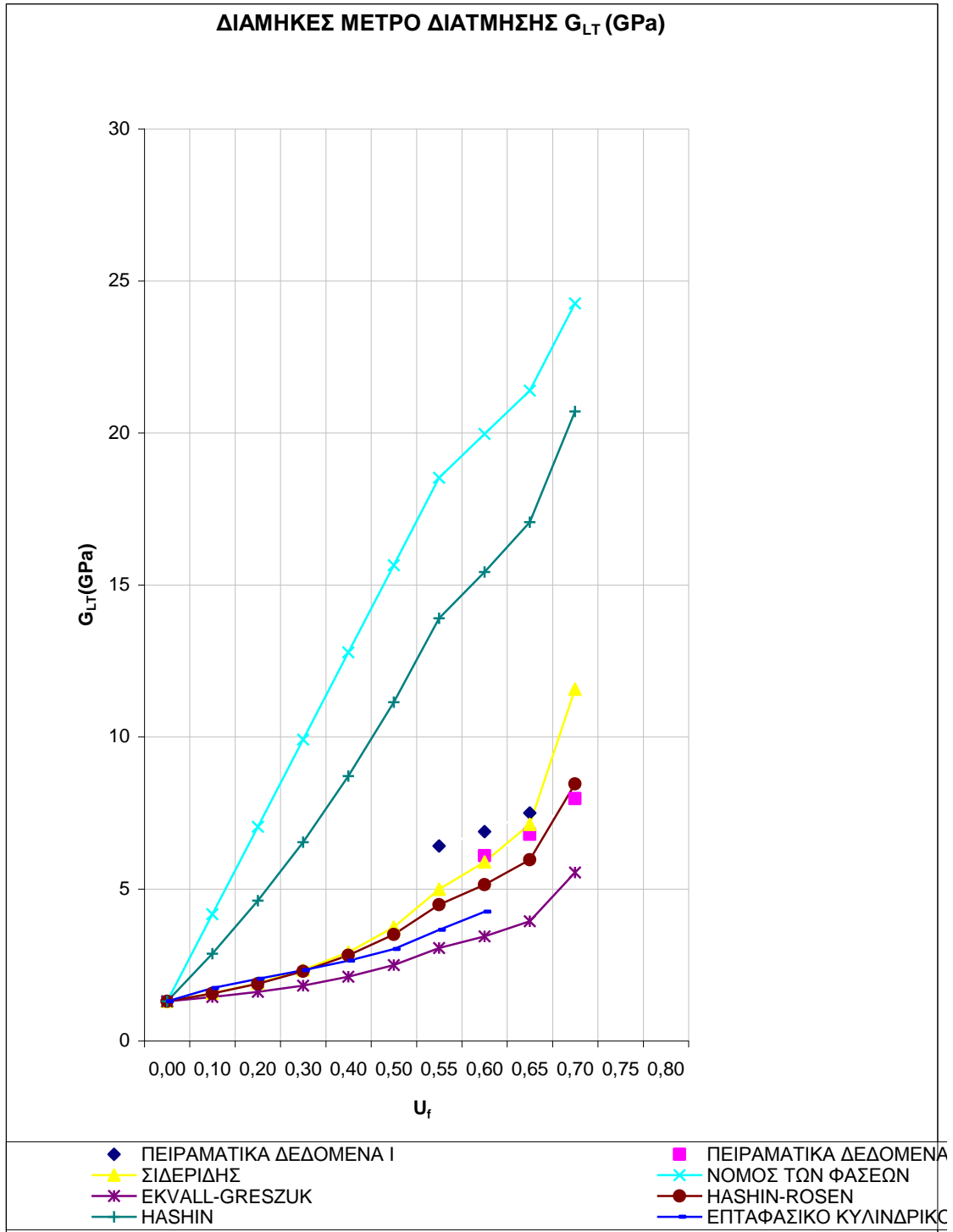
Διάγραμμα 37



Διάγραμμα 38



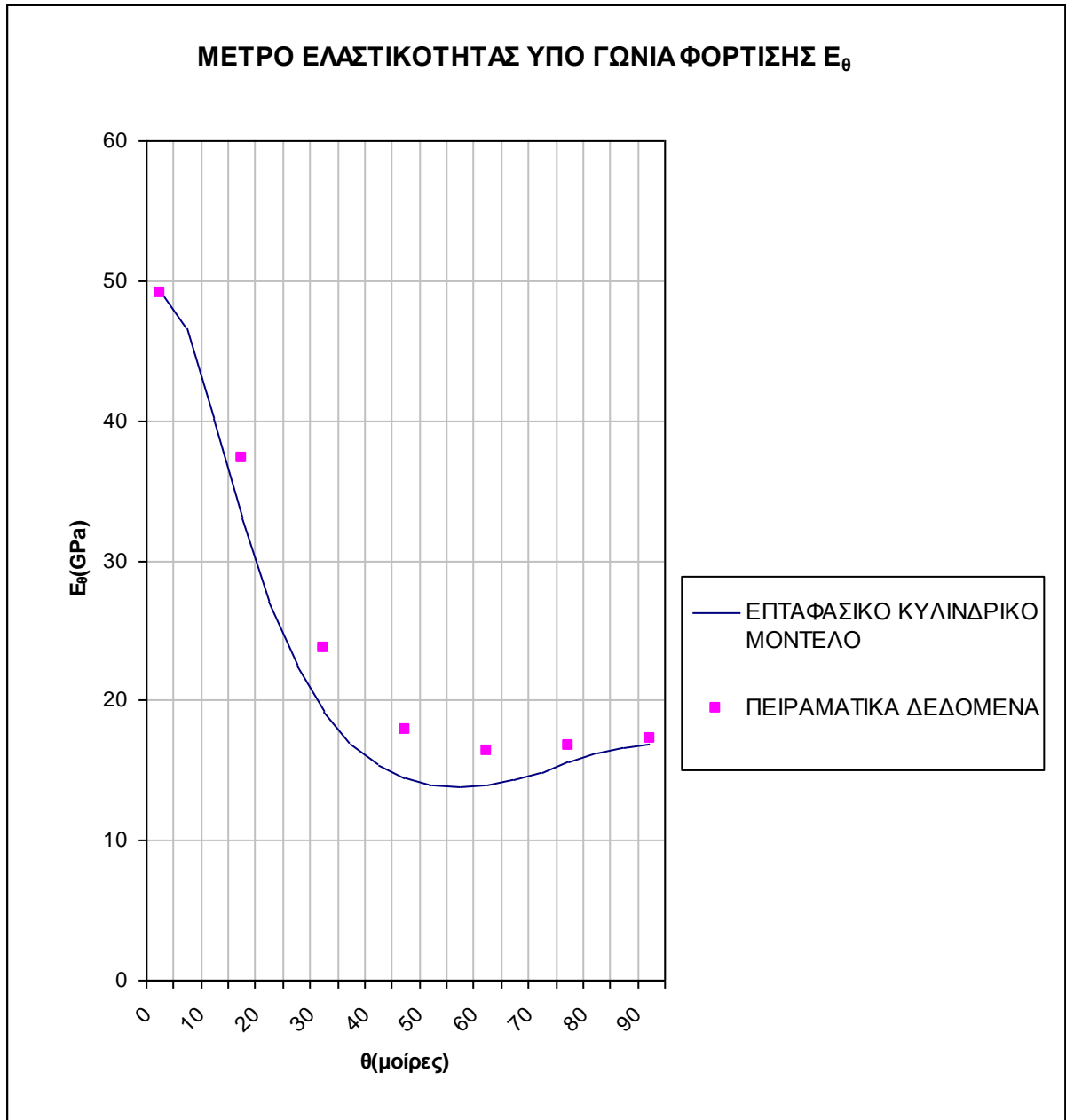
Διάγραμμα 39



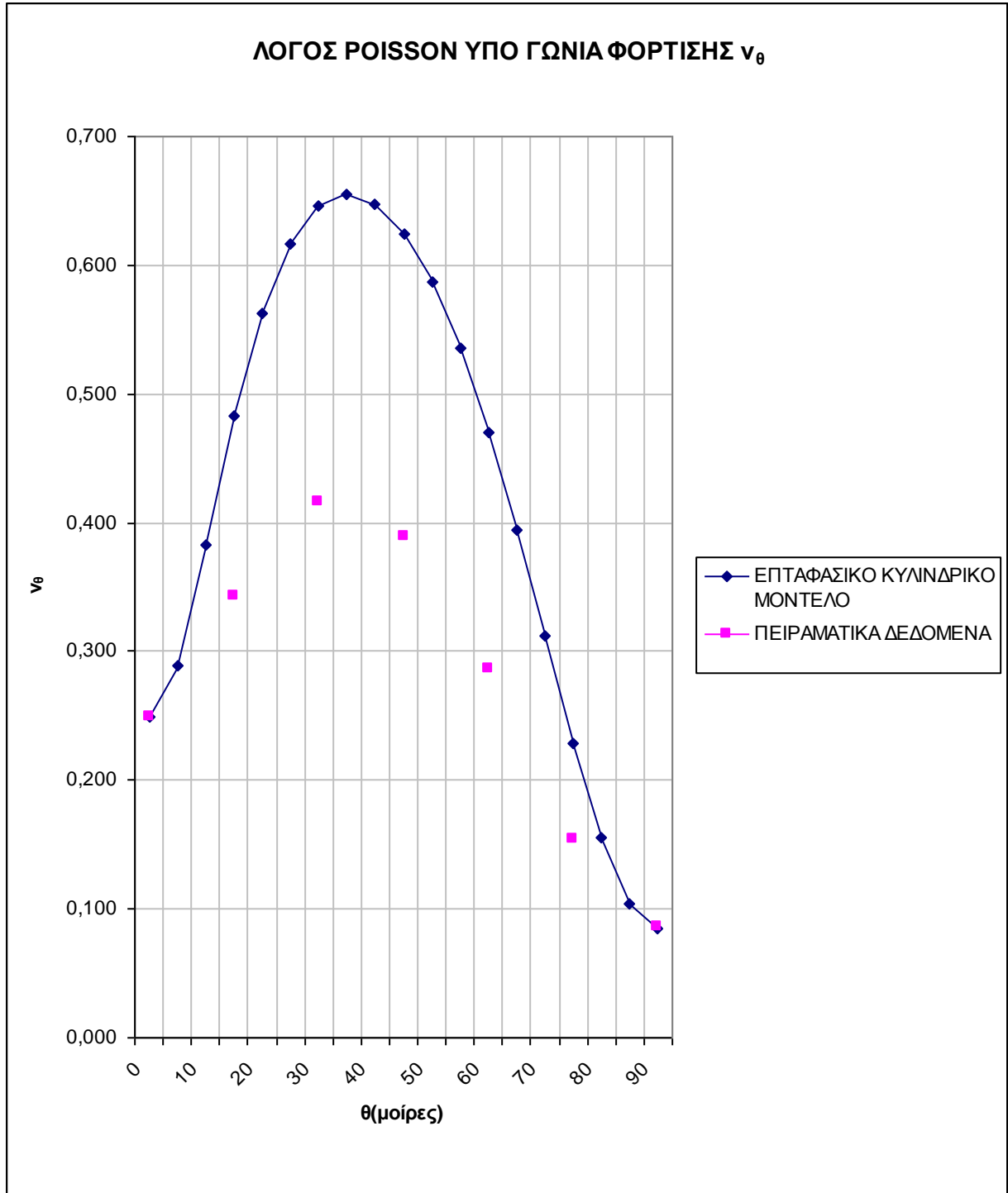
Διάγραμμα 40

<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ <math>E_\theta, \nu_\theta, G_\theta</math></b>						
<b>(<math>\theta^\circ</math>)</b>	<b><math>E_\theta</math></b>	<b><math>\nu_\theta</math></b>	<b><math>G_\theta</math></b>	<b><math>E_\theta</math> ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ</b>	<b><math>\nu_\theta</math> ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ</b>	<b><math>G_\theta</math> ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ</b>
<b>0</b>	49,21	0,249	4,25	49,130	0,2490	6,45
<b>5</b>	46,50	0,289	4,33			
<b>10</b>	40,09	0,382	4,60			
<b>15</b>	33,00	0,482	5,07	37,273	0,3423	7,229
<b>20</b>	26,98	0,563	5,81			
<b>25</b>	22,42	0,617	6,87			
<b>30</b>	19,16	0,646	8,29	23,735	0,4163	9,532
<b>35</b>	16,89	0,656	9,98			
<b>40</b>	15,37	0,648	11,50			
<b>45</b>	14,42	0,624	12,15	17,921	0,3892	11,339
<b>50</b>	13,91	0,587	11,52			
<b>55</b>	13,77	0,535	9,99			
<b>60</b>	13,92	0,470	8,31	16,363	0,2870	9,532
<b>65</b>	14,32	0,395	6,88			
<b>70</b>	14,90	0,312	5,82			
<b>75</b>	15,56	0,228	5,08	16,749	0,1538	7,229
<b>80</b>	16,19	0,155	4,60			
<b>85</b>	16,64	0,104	4,34			
<b>90</b>	16,81	0,085	4,25	17,220	0,0862	6,45

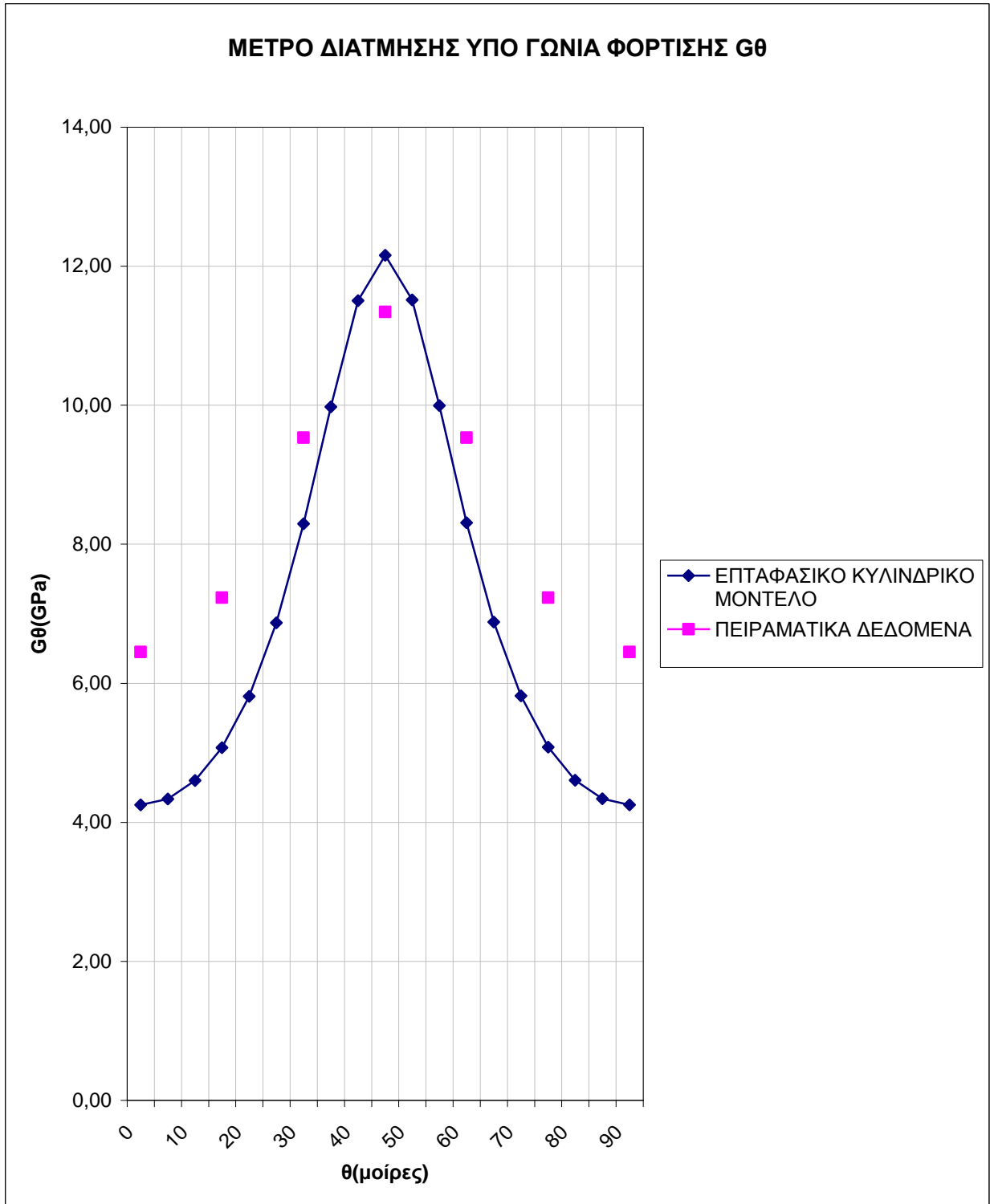
Πίνακας S2



Διάγραμμα 41



Διάγραμμα 42



Διάγραμμα 43



## 6.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φουσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ. )
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία και το μέγεθος τους διαφορετικό.
5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ιδανικά τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Πιο αναλυτικά έχουμε:

### ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $E_L$

Στο διάγραμμα (37) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας ( $E_L$ ) συναρτήσεως της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Θεοχάρης-Σιδερίδης-Παπανικολάου [27] και Ekvall [31], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.2], και από τα πειραματικά αποτελέσματα I [40], II [41], III [43].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το

διάμηκες μέτρο ελαστικότητας αυξάνει σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.2] και τον Ekvall [31] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [40],II [41],III [43] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

### **ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΛΟΓΟΣ POISSON $\nu_{LT}$**

Στο διάγραμμα (38) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson ( $\nu_{LT}$ ) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27] και Rosen [32], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.5], και από τα πειραματικά αποτελέσματα I [41],II [43].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών ο διαμήκης λόγος Poisson μειώνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.5] και τον Rosen [32] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [41],II [43] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

**ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ  $E_T$** 

Στο διάγραμμα (39) απεικονίζεται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας ( $E_T$ ) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Σιδερίδης [28], Paul-Lower Bound [33], Whitney-Rilley [34], Ekvall [35] μαζί με τα πειραματικά αποτελέσματα I [41], II [44], III [45].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [28], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύνται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Σε ότι αφορά τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη των ερευνητών Whitney-Rilley [34] και Ekvall [35] συγκλίνουν.

Οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Paul-Lower Bound [33] δεν συγκλίνουν με τις τιμές κανενός από τα προαναφερθέντα μοντέλα, συγκεκριμένα παρουσιάζονται σημαντικά μειωμένες.

**ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ  $G_{LT}$** 

Στο διάγραμμα (40) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου διάτμησης ( $G_{LT}$ ) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου διάτμησης που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Σιδερίδη [29], Ekvall-Greszczuk [36],[37] Hashin [39], Hashin-Rosen [38], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.12], και από τα πειραματικά αποτελέσματα I [46], II [47].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το διαμήκες μέτρο διάτμησης αυξάνει σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Σιδερίδη [29], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύνται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο όπως προαναφέρθη ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό

μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.12] και τον Ekvall-Greszczuk [36],[37] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [46],II [47] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

### **ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $E_{\theta}$**

Στο διάγραμμα (41) απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας  $E_{\theta}$  του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών ( $\theta$ ). Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό μειώνεται αρκετά στην αρχή και μέχρι τις  $50^{\circ}$ , εν συνεχεία σχεδόν σταθεροποιείται μέχρι τις  $70^{\circ}$  και μετά λίγο αυξάνει μέχρι τις  $90^{\circ}$  όπου εκεί λαμβάνει την τιμή του  $E_T$ . Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του  $E_{\theta}$ .

Υπάρχει αρκετά καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών αποτελεσμάτων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

### **ΛΟΓΟΣ POISSON ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $\nu_{\theta}$**

Στο διάγραμμα (42) φαίνεται η μεταβολή του λόγου Poisson  $\nu_{\theta}$  του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών( $\theta$ ). Παρατηρούμε ότι το  $\nu_{\theta}$  αυξάνει από τις  $0^{\circ}$  που είναι η τιμή του διαμήκους λόγου Poisson μέχρι τις  $40^{\circ}$  όπου υπάρχει ένα μέγιστο εν συνεχεία ελαττώνεται μέχρι τις  $90^{\circ}$ . Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη.

Γενικά υπάρχει απόκλιση μεταξύ των πειραματικών τιμών και των τιμών που προκύπτουν από το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

### **ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $G_{\theta}$**

Στο διάγραμμα (43) απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου Διάτμησης  $G_{\theta}$  συναρτήσει της γωνίας των ινών ( $\theta$ ). Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό αυξάνει από τις  $0^{\circ}$  μέχρι τις  $45^{\circ}$  όπου αποκτά μέγιστο. Εν συνέχεια ελαττώνεται μέχρι τις  $90^{\circ}$ . Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του  $G_{\theta}$ .

Σημειώνεται ότι οι αρχικές και τελικές πειραματικές τιμές είναι μεγαλύτερες.

Γενικά, υπάρχει απόκλιση στις τιμές από  $0^{\circ}$  μέχρι  $25^{\circ}$  και από  $65^{\circ}$

μέχρι  $90^0$ . Το διάγραμμα είναι συμμετρικό.

### ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τις μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών θεωρούν τις επιφάνειες των εγκλεισμάτων ως τέλειες μαθηματικές επιφάνειες. Αυτό το γεγονός εισάγει υψηλές διατμητικές παραμορφώσεις στα σύνορα, που είναι κάτι το μη ρεαλιστικό.

Για να διορθώσουμε αυτή την μη ρεαλιστική κατάσταση παρουσιάστηκε σε αυτή την μελέτη ένα νέο μοντέλο, το οποίο έχει επτά φάσεις, τρεις από τις οποίες αντιπροσωπεύουν την ενδιάμεση φάση που αναπτύσσεται ως ένα λεπτό συνοριακό στρώμα μεταξύ των φάσεων της μήτρας και της ίνας κατά την διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας. Οι ιδιότητες αυτής της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται από τις ιδιότητες των φάσεων και την ποιότητα της πρόσφυσης μεταξύ αυτών.

Αυτό το είδος της ενδιαμέσου φάσεως, έχει μεταβλητές ιδιότητες οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ των ιδιοτήτων της μήτρας και της ίνας.

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιώντας την θεωρία του Liratov, (η οποία συσχετίζει τα απότομα άλματα της ειδικής θερμότητας των σύνθετων υλικών στην περιοχή της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση με τις τιμές του μεγέθους των ενδιάμεσων στρωμάτων) υπολογίστηκε το πάχος της ενδιάμεσης φάσης.

Έχει παρατηρηθεί ότι η ενδιάμεση φάση η οποία δημιουργείται μεταξύ των ινών και της πολυμερικής μήτρας των σύνθετων υλικών ενισχυμένες με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης επηρεάζει τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Σε αυτή την μελέτη εξήχθησαν πέντε σχέσεις, για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και διατμήσεως, για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, για τον εγκάρσιο και διαμήκη λόγο Poisson.

Οι νέες αυτές σχέσεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν συγκρίνονται με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα καθώς και με άλλες θεωρητικές σχέσεις της βιβλιογραφίας. Οι θεωρητικές προβλέψεις όπως είδαμε συμφωνούν καλύτερα με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα σε σχέση με άλλες θεωρητικές τιμές οι οποίες εξήχθησαν από άλλες ερευνητικές εργασίες οι οποίες θεωρούνται «επιτυχημένες» για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης.

Τέλος ως μία πιθανή βελτίωση κυρίως του μέτρου διατμήσεως μπορούμε να αναφέρουμε την εξαγωνική κατανομή των ινών αντί της τετραγωνικής, η οποία δύναται να είναι θέμα μελλοντικής εργασίας.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Theocaris P. S., Spathis G. D., Sideridis E.P., *Fibre Sci and Technology*, Vol.17, p.169 (1982)
2. Theocaris P. S., Papanicolaou G. C. and Spathis G. D *Fibre Sci. and Technology*, Vol. 15, p.187(1981)
3. Papanicolaou G. C. Theocaris P. S. and Spathis G. D. *Colloid and Polymer Science*, Vol. 258, 11, p. 1231 (1980)
4. Papanikolaou G. C., Paipetis S. A. and Theocaris P. S. , *Colloid and Polymer Science*, Vol. 256, 7, p. 625(1978)
5. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , *Fibre Science and Technology*, Vol.12, 6, p.421(1979)
6. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, *Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation.*, *Archive of Applied Mechanics* 66 (1995) 111-125
7. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, *J. Appl. Polym. Sci.*, 18, p. 1213 (1974).
8. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, *Adsorption of Polymer*, New York, (1974).
9. Yu.S. Lipatov, *Plaste Kautschuk*, 10, p. 738 (1973).
10. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, *Vysokomol, Soedin, B10*, p. 848 (1968).
11. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, *Vysokomol, Soedin*, 8, p. 592, (1966).
12. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, *J. Appl. Polym. Sci.*, 16, p. 2131 (1972).
13. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, *J. Appl. Polymer Sci.*, 20, p. 1787 (1976).
14. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, *Colloid and Polymer Sci.*, 257, 3, p. 239 (1979).
15. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, *Colloid and Polymer Sci.*, 258, 9, pp. 1044-1051 (1980).
16. R.F. Landel and T.L. Smith, *American Rocket Society Jnl.*, p. 599 (1961).
17. S. Turner, *Appl. Mat. Res.*, p. 10, (1965).
18. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, *J. Appl. Pol. Sci.*, 9, p. 2143 (1965).
19. C.A. Kumins and J. Roteman, *J. Pol. Sci.*, 1-A, p. 527 (1963).
20. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, *J. Appl. Pol. Sci.*, 21, p. 689 (1977).
21. S. Strella and P.F. Erhardt, *J. Appl. Pol. Sci.*, 13, p. 1373 (1969).
22. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 569 (1963).
23. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 1281 (1963).
24. Αιμ. Σιδεριδής, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
25. Yu.S. Lipatov, *Physical Chemistry of Filled Polymers*, Originally published “*Khimiya*”(Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, *International Polymer Science and Technology Monograph No. 2*
26. Theocaris P. S., “The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites,” *New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State*, *Advances in Polymer Science*, H. H. Kausch & H.C. Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P. S. Theocaris, “On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites,” *Colloid and Polymer Journal* (1984).
27. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus

- and Poisson 's Ratio of Fiber Composites" Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, (October 1985)
28. E. Sideridis, "The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Journal of Applied Polymer Science, Vol. 48, 243-255 (1993)
  29. E. Sideridis, "The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" Composites Science and Technology 31(1988) 35-53.
  30. E. Sideridis, "The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fibre Composites Defined by the Concept of Interphase".
  31. Ekvall J.C. , "ASME" (1961).
  32. Rosen B.W. , "Composites" (1974).
  33. Paul, Trans. Metallurgical Soc. AIME, 21. 8, 36 (1960)
  34. J.M. Whitney and M.B. Riley, AIAA J. , 1537(1966)
  35. J.C Ekvall, "Structural Behaviour of Monofilament Composites", Proc. AIAA 6<sup>th</sup> Structures and Materials Conf. , AIAA, New York (1965)
  36. J.C. Ekvall, ASME Paper No.63-WA-223 (1963)
  37. L.B Greszczuk, "Membrane Analysis Methods for Composites Structures", Douglas Aircraft Co. Inc. , SM-41543 (1962)
  38. Z. Hashin and B.W. Rosen, J. Appl. Mech. , Trans. Asme, 86 (1964), 223.
  39. Z. Hashin, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1965), 119.
  40. Theocaris P.S. , "The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites", Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
  41. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badaliane R. , Schenberger P.S and Villareal G. , "Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , pp. 98-132 (1973).
  42. Clements L.L and Moore R.L. , Composites, 1, p.93 (1978).
  43. Whitney J.M. and Riley M.B. , AIAA Journal, 4(9), p.1537 (1966).
  44. L.B. Gteszczuk, "Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites", SPI 21<sup>st</sup> Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966).
  45. S.W. Tsai, NASA CR-71 (1964)
  46. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, J. Strain Analysis, 6 (1971), 226.
  47. Z. Hashin, Int. J. Solids Structures, 6 (1970), 797.
  50. Π. Α. Βουθούνης, «Τεχνική Μηχανική», Αθήνα (1993)
  51. [www.epotec.gr](http://www.epotec.gr) (Tg-Glass Transition Temperature for Epoxies)

