



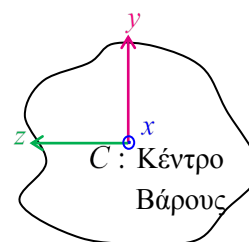
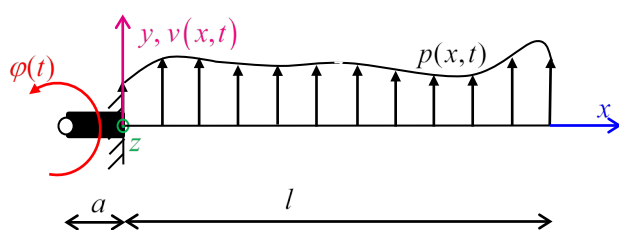
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΩΝ ΥΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΓΥΡΙΔΗ ΑΜΑΛΙΑΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :**

ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Ε. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2014



## Εισαγωγή

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αναλύονται δοκοί υπό περιστροφή με στόχο την εύρεση ενός κατάλληλου προσομοιώματος για φορείς όπως τα πτερύγια ανεμογεννητριών. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτό κρίθηκε απαραίτητο η εργασία αυτή να έχει την εξής δομή:

- Κεφάλαιο 1: Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας. Επεξηγείται η θεωρία ελαστικότητας στον βαθμό που είναι αναγκαίο προκειμένου στη συνέχεια να αναπτυχθούν τα επόμενα Κεφάλαια.
- Κεφάλαιο 2: Δοκός Euler-Bernoulli υπό περιστροφή. Περιγράφεται η θεωρία δοκών υπό περιστροφή με τις παραδοχές της θεωρίας Euler-Bernoulli.
- Κεφάλαιο 3: Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος. Αναπτύσσονται συνοπτικά οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα.
- Κεφάλαιο 4: Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που έγιναν και αφορούν τον υπολογισμό των ιδιομορφών και των ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης για διαφορετικές ταχύτητες περιστροφής με ή χωρίς την παρουσία στερεού κόμβου στο δεσμευμένο άκρο της δοκού.
- Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Β. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα του υπολογισμού της χρονοϊστορίας των κινηματικών μεγεθών δοκών που υποβάλλονται σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Εξετάζονται ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση.

Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Σαπουντζάκη Ευάγγελο (Καθηγητή ΕΜΠ) για τη συνεχή βοήθεια, καθοδήγηση και επίλυση αποριών καθ' όλο το χρονικό διάστημα που διήρκησε η εργασία αυτή. Επίσης κατά κύριο λόγο θα ήθελα να ευχαριστήσω το **Ίδρυμα Παιδείας και Ευρωπαϊκού Πολιτισμού** όπως και το **Ίδρυμα Α.Γ. Λεβέντη** για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχαν κατά τον 2<sup>ο</sup> χρόνο των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών» η οποία αποτέλεσε μεγάλο στήριγμα για την ολοκλήρωση αυτών των σπουδών.

Αθήνα, Οκτώβριος 2014





## Περιεχόμενα

1	Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας.....	1
1.1	Βασικοί Ορισμοί .....	1
1.2	Τρισδιάστατη ελαστικότητα.....	2
1.2.1	Τάσεις .....	2
1.2.2	Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις .....	5
1.2.3	Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας.....	8
1.2.4	Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας.....	10
2	Δοκός υπό περιστροφή.....	15
2.1	Παραδοχές.....	15
2.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	15
2.2.1	Μετατοπίσεις .....	15
2.2.2	Παραμορφώσεις.....	16
2.2.3	Τάσεις .....	16
2.3	Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	16
2.3.1	Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές και αρχικές συνθήκες .....	17
3	Αριθμητική επίλυση.....	21
4	Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α΄ - Ιδιομορφική Ανάλυση .....	23
4.1	Εισαγωγή.....	23
4.2	1 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	23
4.2.1	Χωρίς rigid hub.....	24
4.2.2	Με rigid hub.....	27
4.2.3	Συμπεράσματα .....	27
4.3	2 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	31
4.3.1	Χωρίς rigid hub.....	31
4.3.2	Με rigid hub.....	35
4.3.3	Συμπεράσματα .....	35
5	Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Β΄ - Εν χρόνω ανάλυση.....	41
5.1	Εισαγωγή.....	41
5.2	1 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	41
5.2.1	Χωρίς rigid hub.....	41
5.2.2	Με rigid hub.....	43
5.2.3	Συμπεράσματα .....	43
5.3	2 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	45
5.3.1	Χωρίς rigid hub.....	45
5.3.2	Με rigid hub.....	47
5.3.3	Συμπεράσματα .....	47
5.4	3 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	49
5.4.1	Συμπεράσματα .....	49
	Συμπεράσματα .....	53
	Α μέρος.....	53

## Περιεχόμενα

---

Έβ μέρος .....	53
Βιβλιογραφία .....	55

# 1 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας

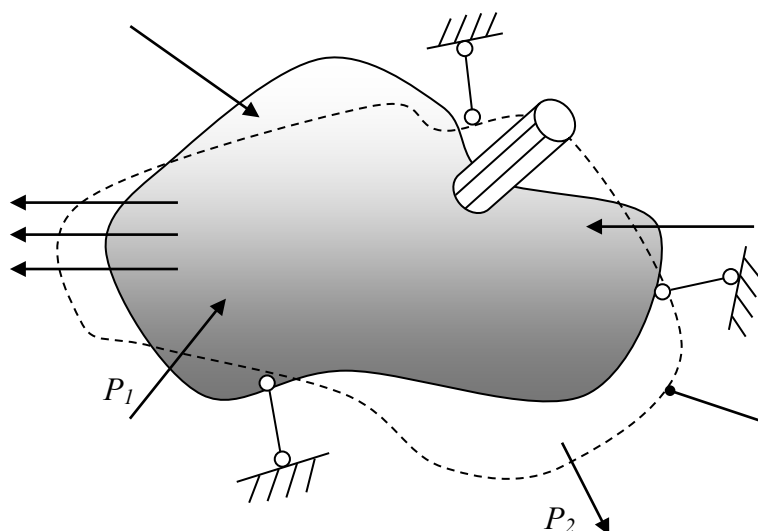
## 1.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε το στερεό παραμορφώσιμο σώμα, με δομή χωρίς ασυνέχειες του Σχήματος 1.1.1, επί του οποίου επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις (καθολικές – επιφανειακές). Αποκόπτοντας και απομονώνοντας το αριστερό τμήμα (Σχήμα 1.1.1 Σχήμα 1.1.2), εμφανίζεται στην επιφάνεια της επίπεδης τομής μια συνισταμένη εσωτερική δύναμη  $\Delta F$ , η οποία είναι ισοπολική των δυνάμεων του δεξιού τμήματος. Συμβολίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας τομής ως  $A$ , ορίζουμε ως τάση  $\sigma$  το όριο του λόγου

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1.1)$$

όπου

$\Delta A$  : ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας που τείνει να μηδενιστεί



**Σχήμα 1.1.1** Ελαστικό σώμα υπό την ενέργεια εξωτερικών δυνάμεων

Στη γενική περίπτωση, όπου η δύναμη  $\Delta P$  έχει τυχαία διεύθυνση, ορίζουμε το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{n}$ , οπότε αναλύοντας το διάνυσμα της δύναμης σε μια συνιστώσα παράλληλη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_n$ ) και μια συνιστώσα κάθετη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_t$ ) και άρα συνεπίπεδη στην επιφάνεια  $A$ , εξάγουμε τους παρακάτω ορισμούς :

Ορθή Τάση :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \quad (1.1.2)$$

Διατμητική Τάση :

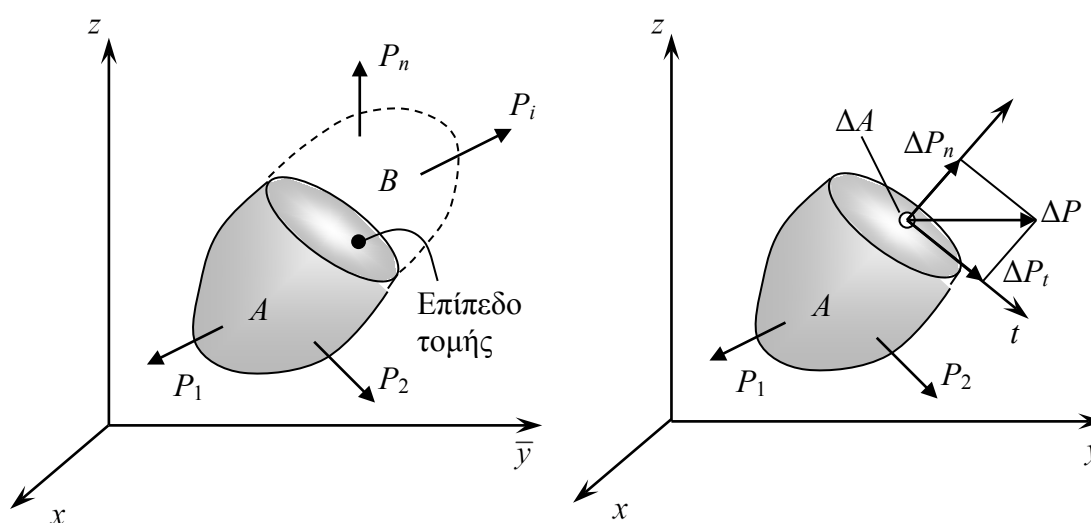
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \quad (1.1.3)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τη διάτμηση ως εξής :

**Διάτμηση είναι το εντατικό αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις σε συνδυασμό με τις ορθές τάσεις**

αποκαθιστούν την ισορροπία για κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός στερεού σώματος, ενώ ταυτόχρονα είναι υπαίτιες για εσωτερικές παραμορφώσεις, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα μηχανισμό μεταβίβασης της εξωτερικής καταπόνησης του σώματος (καθολικές – επιφανειακές δυνάμεις) στο εσωτερικό του.

Είναι λοιπόν προφανές ότι κατά τον σχεδιασμό των έργων πολιτικού μηχανικού είναι απαραίτητος ο ακριβέστερος, όσο το δυνατόν, υπολογισμός των εσωτερικών εντατικών μεγεθών (ορθές και διατμητικές τάσεις), καθώς και των προκαλούμενων παραμορφώσεων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η **Θεωρία της Ελαστικότητας**. Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις όποιες παραδοχές κάνει για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία, την εξωτερική φόρτιση και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων σε κάθε σημείο του.



Σχήμα 1.1.2 Επίπεδη τομή σε ελαστικό σώμα

## 1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα

Στη γενικότερη περίπτωση κάθε πρόβλημα πολιτικού μηχανικού αντιμετωπίζεται από τη Θεωρία Ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο. Όπως προαναφέρθηκε, η εσωτερική απόκριση ενός σώματος σε εξωτερική καταπόνηση περιγράφεται από τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις.

### 1.2.1 Τάσεις

Για τον καθορισμό της έννοιας της τάσεως στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, μορφής κύβου με απειροστές διαστάσεις ( $dx, dy, dz$ ), οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$  (Σχήμα 1.2.1). Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκούνται δυνάμεις οι οποίες εάν διαιρεθούν με την επιφάνεια και αναλυθούν σε συνιστώσες παράλληλες στους άξονες  $x, y, z$  προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες των τάσεων σε μητρική μορφή

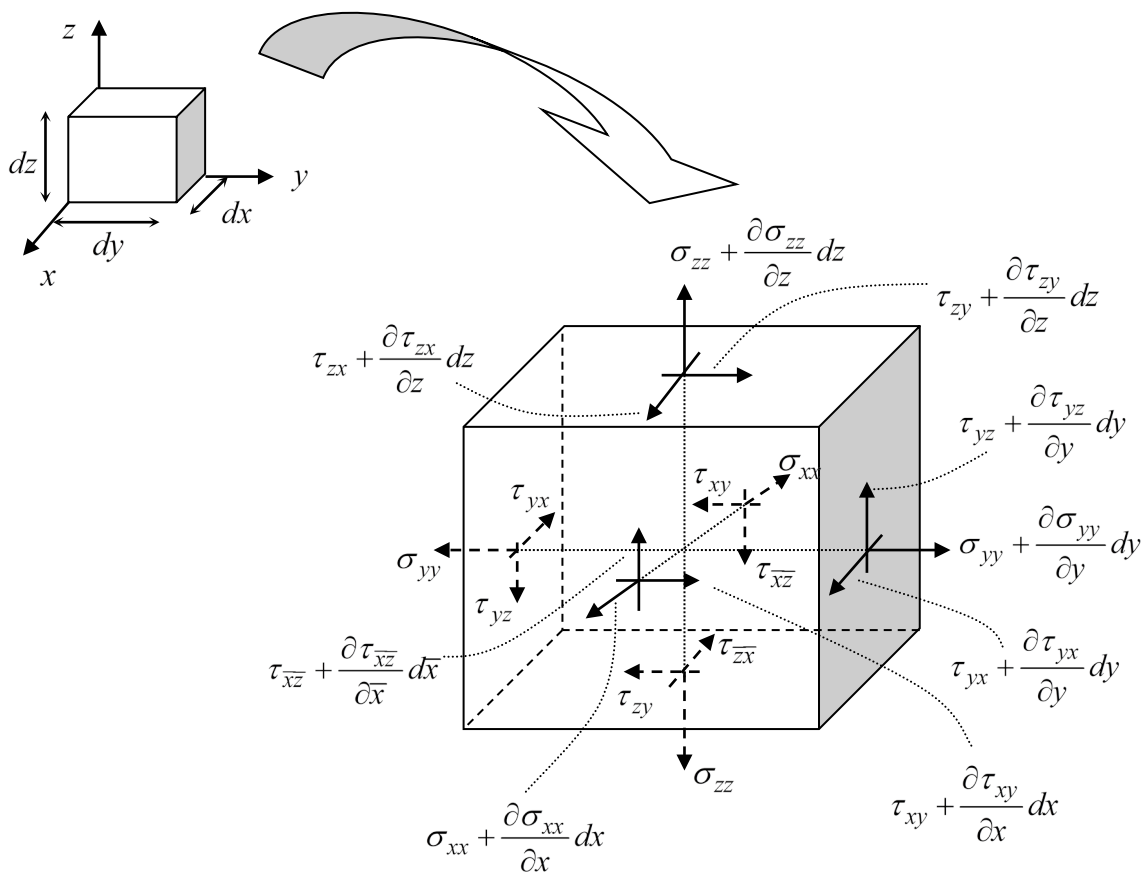
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

όπου

$\sigma_{ii} (i=x, y, z)$  : οι ορθές τάσεις

$\tau_{ij} (i, j=x, y, z)$  : οι διατμητικές τάσεις

Όπως είναι γνωστό το παραπάνω μητρώο αποτελεί έναν συμμετρικό τανυστή 2<sup>ης</sup> τάξης. Οι συνιστώσες των τάσεων αποτελούν συναρτήσεις της θέσης του σημείου στο ελαστικό σώμα. Επομένως μεταβάλλονται κατά την μετακίνηση του επιπέδου αναφοράς κατά  $dx, dy, dz$ . Τη μεταβολή αυτή την εκφράζουμε με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor, διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους (Σχήμα 1.2.1).



**Σχήμα 1.2.1** Συνιστώσες τάσεων σε στοιχειώδη κύβο διαστάσεων  $dx, dy, dz$

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο τα εξής :

- Οι δείκτες  $i, j$  στον συμβολισμό  $\tau_{ij}$  δηλώνουν αντίστοιχα τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο και τη διεύθυνση του διανύσματος της συνιστώσας των τάσεων.
- Ορίζουμε ως θετικές ορθές τάσεις τις εφελκυστικές και ως αρνητικές τις θλιπτικές. Όσον αφορά τις διατμητικές, θεωρούμε ότι αυτές είναι θετικές εάν έχουν την φορά των

θετικών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος, εφόσον η αντίστοιχη θετική ορθή τάση έχει κι αυτή φορά θετικού άξονα. Αντίστοιχα εάν η ορθή τάση έχει φορά αντίθετη του θετικού άξονα, οι θετικές φορές των διατμητικών αντιστρέφονται.

Εφαρμόζοντας στον στοιχειώδη κύβο (Σχήμα 1.2.1) τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τις τρεις διευθύνσεις  $x, y, z$  προκύπτουν (εφαρμόζοντας απλή άλγεβρα) οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Διεύθυνση } x : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\text{Διεύθυνση } y : \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_y = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\text{Διεύθυνση } z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + p_z = 0 \quad (1.2.4)$$

όπου

$p_x, p_y, p_z$  : οι συνιστώσες του διανύσματος της δύναμης πεδίου ανά μονάδα όγκου

Σημειώνουμε ότι οι τρεις εξισώσεις ροπών έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των σχέσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.2.5)$$

Τέλος είναι χρήσιμο για την περαιτέρω ανάλυση που θα ακολουθήσει να παραθέσουμε τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών του ταυνοστή των τάσεων που δρουν σε ένα σημείο  $O$  και του διανύσματος τάσης  $\sigma_n$  που δρα σε επίπεδο τυχούσας διεύθυνσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα  $\bar{n}$  που διέρχεται από το  $O$ . Θεωρούμε το στοιχειώδες τετράεδρο (Σχήμα 1.2.2). Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας για τη διεύθυνση  $\bar{x}$  θα έχουμε

$$\tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS_x - \tau_{yx} \cdot dS_y - \tau_{zx} \cdot dS_z - f_x \cdot dV = 0 \quad (1.2.6)$$

όπου

$dS_x, dS_y, dS_z, dS, dV$  : το εμβαδόν των πλευρών  $OAC, OAB, OBC, ABC$  και ο όγκος του τετραπλεύρου αντίστοιχα

Ισχύει ότι

$$dS_x = dS \cdot \lambda_{nx} \quad (1.2.7)$$

$$dS_y = dS \cdot \lambda_{ny} \quad (1.2.8)$$

$$dS_z = dS \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.9)$$

$$dV = dS \cdot h \quad (1.2.10)$$

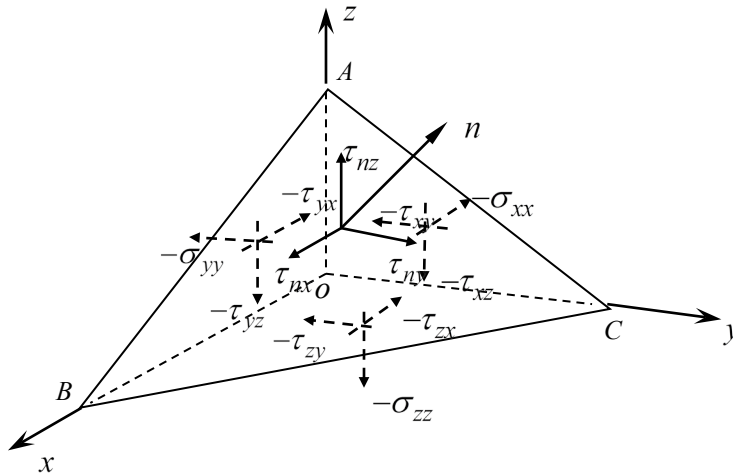
όπου

$h$  : η απόσταση της πλευράς  $ABC$  από το  $O$  και  $\lambda_{ni} (i = x, y, z)$  τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα  $\bar{n}$  με τους άξονες  $x, y, z$

Αντικαθιστώντας τις (1.2.7)-(1.2.10) στην εξίσωση ισορροπίας (1.2.6) προκύπτει

$$\begin{aligned} \tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot dS \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot dS \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot dS \cdot h = 0 \rightarrow \\ \tau_{nx} - \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot h = 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Ομοίως και για τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ .



Σχήμα 1.2.2 Συνιστώσες των τάσεων επιπέδου τυχούσης διεύθυνσης  $\vec{n}$

Για τετράεδρο με απειροελάχιστες διαστάσεις ( $h \rightarrow 0$ ) και με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy προκύπτουν τελικά οι παρακάτω σχέσεις

$$\tau_{xn} = \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.12)$$

$$\tau_{yn} = \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.13)$$

$$\tau_{zn} = \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.14)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε παρακάτω χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τις συνοριακές συνθήκες στα προβλήματα Τρισδιάστατης Ελαστικότητας.

## 1.2.2 Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό σώμα στηρίζεται έτσι ώστε να εμποδίζονται οι μετακινήσεις στερεού σώματος, κάτω από την επενέργεια εξωτερικών φορτίσεων το σώμα παραμορφώνεται και επομένως κάθε υλικό σημείο του θα υφίσταται μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις αυτές περιγράφονται από το λεγόμενο **πεδίο μετατοπίσεων**, δηλαδή συναρτήσεις της θέσης του σημείου  $(x, y, z)$  που εκφράζουν τις μετατοπίσεις κατά τις τρεις διευθύνσεις  $x, y$  και  $z$

$$\text{Μετατόπιση κατά } x : \quad u = u(x, y, z) \quad (1.2.15)$$

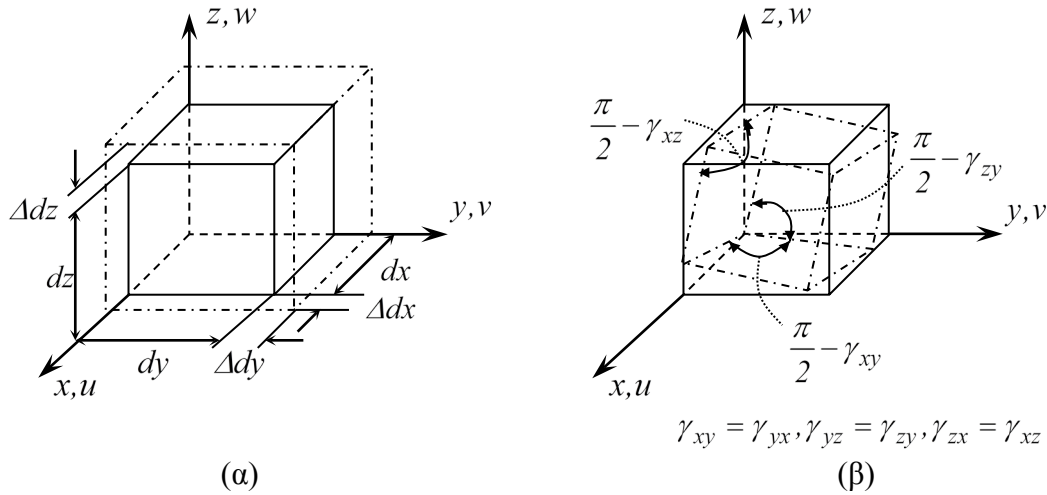
$$\text{Μετατόπιση κατά } y : \quad v = v(x, y, z) \quad (1.2.16)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } z : \quad w = w(x, y, z) \quad (1.2.17)$$

Για να συσχετίσουμε τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις θεωρούμε πάλι τον στοιχειώδη κύβο, διαστάσεων  $dx, dy, dz$  (Σχήμα 1.2.3 α,β). Επισημαίνουμε ότι στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας υιοθετούμε την **παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων**. Έτσι

ορίζουμε τις ορθές παραμορφώσεις ως τον λόγο μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος. Π.χ. κατά τη διεύθυνση  $x$  θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.2.18)$$



**Σχήμα 1.2.3** Παραμόρφωση στοιχειώδους κύβου:  
ορθές παραμορφώσεις(α), διατμητικές παραμορφώσεις (β).

Όπως και με τις συνιστώσες των τάσεων, έτσι κι εδώ εκφράζουμε τη μεταβολή των τιμών των μετατοπίσεων από σημείο σε σημείο με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor  $\left( \Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$ . Άρα τελικά προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.19)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.21)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την στροφή των αρχικά κάθετων εδρών του κύβου. Εξετάζοντας την προβολή της έδρας στο Καρτεσιανό επίπεδο  $xOy$  (Σχήμα 1.2.4), ορίζουμε τη διατμητική παραμόρφωση

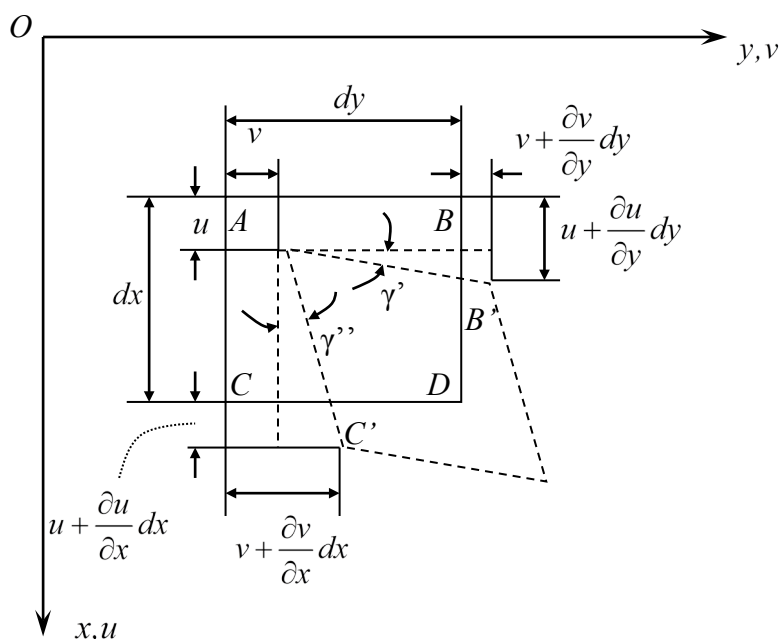
$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{yx} \quad (1.2.22)$$

Ομοίως ορίζονται οι διατμητικές παραμορφώσεις στα επίπεδα  $yz$  και  $zx$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad (1.2.23)$$



$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} \quad (1.2.24)$$



Σχήμα 1.2.4 Διαμητικές παραμορφώσεις στοιχειώδους κύβου στο επίπεδο  $xOy$

Όμοια λοιπόν με τις τάσεις, ορίζεται ο συμμετρικός τανυστής 2<sup>ης</sup> τάξης, ο οποίος καθορίζει πλήρως την παραμόρφωση που υφίσταται το σώμα σ' ένα υλικό του σημείο με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ .

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

Όπως παρατηρούμε από τις εξισώσεις (1.2.19)-(1.2.24) οι συνιστώσες της παραμόρφωσης  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  ( $i, j = x, y, z$ ) εκφράζονται μονοσήμαντα σαν συναρτήσεις των  $u$ ,  $v$  και  $w$ . Ας θεωρήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι οι  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  είναι γνωστές συναρτήσεις και θέλουμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες  $u$ ,  $v$ ,  $w$  συναρτήσει αυτών. Παρατηρούμε ότι έχουμε έξι εξισώσεις για τρεις αγνώστους. Χρησιμοποιώντας τις τρεις από αυτές και λύνοντας ως προς  $u$ ,  $v$  και  $w$ , θα προκύψουν τιμές οι οποίες, εν γένει, δεν θα ικανοποιούν τις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις. Επομένως οι συναρτήσεις  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  δεν μπορεί να είναι αυθαίρετες, αλλά θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις συμβιβαστού**. Οι εξισώσεις συμβιβαστού αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση της συνθήκης συνέχειας του παραμορφώσιμου σώματος. Δηλαδή θέτουν περιορισμούς στη μορφή των εξισώσεων  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ , έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η σύνδεση των παραμορφωμένων κύβων και να μην

λύεται η συνέχεια του υλικού. Οι εξισώσεις συμβιβαστού προκύπτουν από τις σχέσεις (1.2.19)-(1.2.24) με απαλοιφή των συνιστωσών των μετατοπίσεων και ύστερα από διαδοχικές παραγωγίσεις. Έτσι καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.31)$$

### 1.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας

Με όσα έχουν αναφερθεί συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης ελαστικότητας προσδιορίζεται από 15 αγνώστους :

Έξι συνιστώσες τάσεων

Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων

Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων

Όμως μέχρι τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο 9 εξισώσεις :

Τρεις εξισώσεις ισορροπίας

Έξι εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις συμβιβαστού δεν αποτελούν πρόσθετες (ανεξάρτητες) εξισώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση. Απλά εκφράζουν τους περιορισμούς για την μορφή των συναρτήσεων  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ , ώστε να μην καταλύεται η συνέχεια του υλικού.

Επομένως το πρόβλημα είναι 6 φορές αόριστο. Στη θεωρία της ελαστικότητας αίρεται αυτή η αοριστία με την εισαγωγή σχέσεων που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις**. Στην ουσία εισάγουν τις μηχανικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό. Οι μηχανικές ιδιότητες βασίζονται σε κάποιες παραδοχές που γίνονται στα πλαίσια της Ελαστικής Θεωρίας (νόμος του Hooke). Στο εξής θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές :

➤ Το υλικό είναι **ομοιογενές**. Επομένως οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε σημείο του υλικού.

- Το υλικό είναι **ισότροπο**. Δηλαδή οι ιδιότητες ενός σημείου του υλικού παραμένουν ίδιες, ανεξαρτήτως της διεύθυνσης την οποία εξετάζουμε.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό**. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα των τάσεων είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών των παραμορφώσεων. Επίσης με τον μηδενισμό των επιβαλλόμενων τάσεων το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.2.32)$$

όπου ισχύει η σύμβαση πρόσθεσης των δεικτών

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι καταστατικές εξισώσεις σε μητρική μορφή γράφονται

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.33)$$

Για να βρούμε τις σταθερές  $k_{11}$  και  $k_{12}$  (ελαστικές σταθερές) εκτελούμε πειράματα απλού εφελκυσμού  $\left( \varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \varepsilon_{εγκαρσια} = -\nu \cdot \frac{\sigma}{E} \right)$  και απλής διάτμησης  $(\tau = G \cdot \gamma)$ . Οπότε προκύπτουν

$$k_{11} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad k_{12} = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad (k_{11} - k_{12}) = 2 \cdot G \quad (1.2.34)$$

όπου

$E$  : μέτρο ελαστικότητας

$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$  : μέτρο διάτμησης

$\nu$  : λόγος Poisson ( $0 < \nu < 0,5$ )

Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{xx} + \nu \cdot (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.2.35)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{yy} + \nu \cdot (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \right] \quad (1.2.36)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{zz} + \nu \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \quad (1.2.37)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (1.2.38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{yz} \quad (1.2.39)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{zx} \quad (1.2.40)$$

ή

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (1.2.41)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \nu \cdot (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad (1.2.42)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{zz} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (1.2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (1.2.44)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{yz} \quad (1.2.45)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{zx} \quad (1.2.46)$$

#### 1.2.4 Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι το μαθηματικό πρόβλημα της ελαστικότητας έγκειται στον υπολογισμό 15 αγνώστων

**Έξι συνιστώσες τάσεων**

**Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων**

**Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων**

Επίσης έχουμε ένα σύστημα 15 διαφορικών εξισώσεων

**Τρεις εξισώσεις ισορροπίας**

**Έξι εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων**

**Έξι εξισώσεις τάσεων – παραμορφώσεων**

Επομένως το πρόβλημα επιδέχεται λύση (που όπως αποδεικνύεται είναι μοναδική). Η επίλυση όμως των διαφορικών εξισώσεων οδηγεί σε γενική λύση. Για να βρούμε την ειδική λύση του προβλήματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την ταυτόχρονη ικανοποίηση επιπρόσθετων συνθηκών στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος, τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες**. Έτσι λοιπόν ανάλογα με τη φύση των συνοριακών συνθηκών προκύπτουν τα τρία θεμελιώδη προβλήματα.

##### A) Πρόβλημα Neumann

Στο πρόβλημα αυτό οι συνοριακές συνθήκες αφορούν την εντατική κατάσταση στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος. Εάν  $\Gamma$  είναι το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν το σύνορο, τότε με βάση τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{xn} \\ \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{yn} \\ \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{zn} \end{aligned} \quad , \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.47)$$

## Β) Πρόβλημα Dirichlet

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν τις μετατοπίσεις των σημείων του συνόλου  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u \\ v(x, y, z) &= v \quad , \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \\ w(x, y, z) &= w \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

## Γ) Μικτό Πρόβλημα

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι τάσεις για τα σημεία  $(x, y, z)$  του συνόρου  $\Gamma_u$  και οι μετατοπίσεις των σημείων του συνόρου  $\Gamma_v$  , όπου  $\Gamma_u \cup \Gamma_v = \Gamma$  .

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στα πλαίσια της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνονται υπόψη για τη γεωμετρία του φορέα που αντιστοιχεί στην **απαραμόρφωτη** κατάσταση που είναι δεδομένη και όχι στην παραμορφωμένη που συνιστά ζητούμενο του προβλήματος. Λόγω των μικρών μετακινήσεων η διαφορά της παραμορφωμένης από την απαραμόρφωτη κατάσταση είναι επουσιώδης και αμελείται.

Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, μπορούμε απαλείφοντας κάποιους αγνώστους να μειώσουμε το συνολικό αριθμό των διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση που επιλέγονται ως βασικοί άγνωστοι οι 6 συνιστώσες των τάσεων χρησιμοποιούμε τις 6 εξισώσεις συμβιβαστού [σχέσεις (1.2.26)-(1.2.31)] (στις οποίες ήδη έχει γίνει η απαλοιφή των  $u, v, w$ ), όπου εκφράζουμε με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.41)-(1.2.46)) τις συνιστώσες  $\varepsilon_{ij}$  συναρτήσει των  $\tau_{ij}$ . Καταλήγουμε έτσι σε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ )

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2.49)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.50)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.51)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.2.52)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.2.53)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0 \quad (1.2.54)$$

όπου

$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  : η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  : ο τελεστής Laplace

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις Beltrami – Michel**. Έτσι η περίπτωση του προβλήματος Neumann ανάγεται στον υπολογισμό των συναρτήσεων  $\tau_{ij}(x, y, z)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Beltrami – Michel (1.2.49)-(1.2.54) και οι συνοριακές συνθήκες με τη μορφή των σχέσεων (1.2.12)-(1.2.14).

Το πρόβλημα της ελαστικότητας θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί από ένα σύστημα τριών εξισώσεων που θα έχουν ως αγνώστους τις συνιστώσες των μετατοπίσεων  $u, v, w$ . Για τον σκοπό αυτό στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας (1.2.2)-(1.2.4) αντικαθιστούμε τις συνιστώσες  $\tau_{ij}$  συναρτήσει των  $\varepsilon_{ij}$  με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (1.2.19)-(1.2.24) εκφράζουμε τις συνιστώσες των παραμορφώσεων συναρτήσει των  $u, v, w$  οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις, γνωστές ως εξισώσεις Lamé

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P_x}{G} = 0 \quad (1.2.55)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{P_y}{G} = 0 \quad (1.2.56)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{P_z}{G} = 0 \quad (1.2.57)$$

όπου

$$\Psi = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad : \quad \text{η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των}$$

παραμορφώσεων

Για το μεν πρόβλημα Dirichlet η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών

$$u(x, y, z) = u \quad (1.2.58)$$

$$v(x, y, z) = v \quad , \text{για κάθε σημείο } (x, y, z) \text{ στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.59)$$

$$w(x, y, z) = w \quad (1.2.60)$$

Ενώ για το πρόβλημα Neumann η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με συνοριακές συνθήκες

$$\tau_{xn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nx} + G \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \lambda_{nx} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \lambda_{ny} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \lambda_{nz} \right] \quad (1.2.61)$$

$$\tau_{yn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{ny} + G \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \lambda_{ny} + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \lambda_{nz} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \lambda_{nx} \right] \quad (1.2.62)$$

$$\tau_{zn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nz} + G \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial z} \lambda_{nz} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lambda_{nx} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \lambda_{ny} \right] \quad (1.2.63)$$

όπου

$$\lambda = \frac{G \cdot (2 \cdot G - E)}{E - 3 \cdot G} \quad : \quad \text{σταθερά η οποία εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές } E \text{ και } G$$

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) στις οποίες εκφράσαμε τις συνιστώσες  $\tau_{ij}$  συναρτήσει των  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) μέσω των σχέσεων (1.2.35)-(1.2.40) και στη συνέχεια συναρτήσει των  $u, v, w$  με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.19)-(1.2.24).

Τέλος για το μικτό πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες απαρτίζονται από τις σχέσεις (1.2.61)-(1.2.63) για το σύνολο  $\Gamma_u$  και από τις σχέσεις (1.2.58)-(1.2.60) για το σύνολο  $\Gamma_v$ .

Συνεπώς τρία θεμελιώδη προβλήματα, θεωρητικά, προσδιορίζουν με ακρίβεια την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση οποιουδήποτε σώματος με τυχούσα γεωμετρία και εξωτερική φόρτιση και προφανώς δίνουν μια ακριβή λύση και στο πρόβλημα των καμπτόμενων δοκών με διάτμηση, έχοντας ως μόνες παραδοχές :

- **Τις μικρές παραμορφώσεις του σώματος**
- **Την ομοιομορφία και την ισοτροπία του υλικού**
- **Την ελαστική (γραμμική) φύση του υλικού**

Οι παραπάνω παραδοχές δεν δημιουργούν μεγάλες ανακρίβειες. Σε ορισμένες περιπτώσεις βρίσκονται πολύ κοντά στην πραγματικότητα, όπως π.χ σε προεντεταμένους φορείς (γέφυρες) και σε φορείς όπου η μέγιστη τάση δεν ξεπερνά το όριο αναλογίας του υλικού. Παρόλα αυτά η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του τρισδιάστατου ελαστικού προβλήματος παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες. Υπάρχει εν τούτοις μια κατηγορία προβλημάτων στα οποία τόσο η φύση του σώματος όσο και ο τρόπος επιβολής της φόρτισης επιβάλλουν ορισμένες απλοποιήσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις με την εισαγωγή ορισμένων πρόσθετων παραδοχών μεταπίπτουμε στο πρόβλημα της **διδιάστατης ελαστικότητας** ή αλλιώς στο **επίπεδο εντατικό πρόβλημα**.





## 2 Δοκός υπό περιστροφή

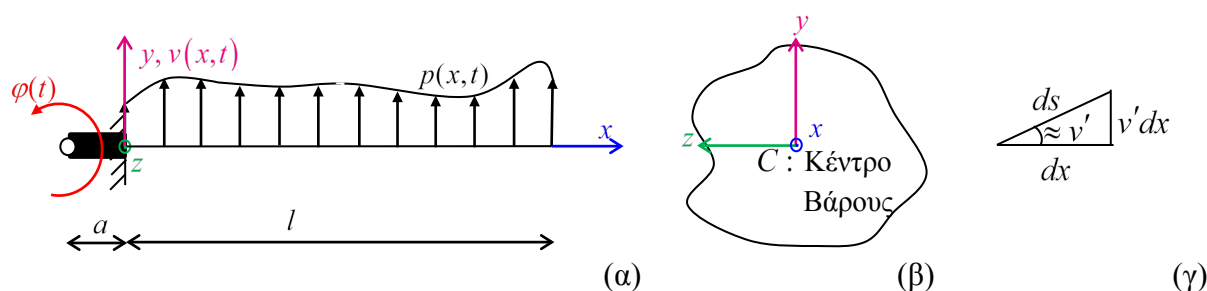
### 2.1 Παραδοχές

Οι παραδοχές της θεωρίας δοκού υπό περιστροφή ταυτίζονται με εκείνες της θεωρίας Euler - Bernoulli και είναι οι ακόλουθες:

- 1) Η δοκός είναι ευθύγραμμη.
- 2) Το υλικό της δοκού είναι γραμμικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο.
- 3) Οι διατομές του δοκού παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον άξονα της δοκού ακόμα και μετά την παραμόρφωση.
- 4) Αμελείται η απόσβεση.

### 2.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε την πρισματική δοκό μήκους  $l$  (βλέπε Σχήμα 2.1α), τυχούσας, σταθερής διατομής εμβαδού  $A$  (βλέπε Σχήμα 2.1β). Ο όγκος της δοκού συμβολίζεται με  $V$ . Η δοκός είναι πακτωμένη σε στερεό κόμβο (από εδώ και πέρα θα αποκαλείται rigid hub) μήκους  $a$  οποίος στο άλλο άκρο του είναι αρθρωμένος στο έδαφος (βλέπε Σχήμα 2.1α). Το υλικό της δοκού είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και πυκνότητα  $\rho$  ενώ το rigid hub έχει πυκνότητα  $\rho_R$  και εμβαδόν  $A_R$ . Ο διαμήκης άξονας της δοκού είναι ο άξονας  $x$  ενώ η διατομή της βρίσκεται πάνω στο επίπεδο  $y, z$  (βλέπε Σχήμα 2.1α, β). Η δοκός υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη χρονικά μεταβαλλόμενη καμπτική φόρτιση  $p = p(x, t)$  στη διεύθυνση του άξονα  $z$ . Στην παρούσα εργασία εξετάζεται μόνο η εντός επιπέδου περιστροφής κάμψη και η περιστροφή της δοκού. Διευκρινίζεται ότι το σύστημα συντεταγμένων  $Cxyz$  αποτελεί τοπικό σύστημα συντεταγμένων της δοκού και συνεπώς ακολουθεί την περιστροφική της κίνηση.



Σχήμα 2.1 Δοκός, φόρτιση, συνθήκες στήριξης και σύστημα συντεταγμένων (α) διατομή δοκού και σύστημα συντεταγμένων (β), μεταβολή μήκους άξονα δοκού εξ αιτίας του βέλους (γ).

#### 2.2.1 Μετατοπίσεις

Με βάση τα ανωτέρω το πεδίο μετατοπίσεων κατά τους άξονες  $x, y, z$  συναρτήσει του χρόνου  $t$  ορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\bar{u}(x, y, z, t) = -yv'(x, t) \quad (2.1.1)$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = v(x, t) \quad (2.1.2)$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = 0 \quad (2.1.3)$$

όπου  $\bar{u}(x, y, z, t)$ ,  $\bar{v}(x, y, z, t)$  και  $\bar{w}(x, y, z, t)$  είναι η αξονική, και οι εγκάρσιες μετατοπίσεις για τυχαίο σημείο της δοκού (συντεταγμένες στο σύστημα συντεταγμένων  $Cxyz$ ) συναρτήσεων του χρόνου  $t$ . Με  $v(x, t)$  παριστάνεται η βύθιση του κέντρου βάρους  $C$ .

Επίσης εκτός από το ανωτέρω πεδίο μετατοπίσεων ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $Cxyz$  υπάρχει και η γωνία περιστροφής  $\varphi(t)$  που αποτελεί μετατόπιση της δοκού ως προς την άρθρωση του rigid hub (περιστροφική κίνηση στερεού σώματος).

## 2.2.2 Παραμορφώσεις

Με τη βοήθεια των εκφράσεων των μετατοπίσεων που δίνονται από τις σχέσεις (2.1.1)-(2.1.3) και εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων (1.2.19)-(1.2.24) της θεωρίας ελαστικότητας (στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων), λαμβάνουμε τις συνιστώσες τους ταυστή παραμορφώσεως ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -yv'' \quad (2.1.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.1.9)$$

## 2.2.3 Τάσεις

Με τη βοήθεια του πεδίου παραμορφώσεων που δίνεται από τις σχέσεις (2.1.4)-(2.1.9) και εφαρμόζοντας τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων (1.2.35)-(1.2.40) της θεωρίας ελαστικότητας (στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων), λαμβάνουμε τις συνιστώσες του ταυστή των τάσεων ως

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Eyv'' \quad (2.1.10)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.1.11)$$

## 2.3 Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, αρχικές και συνοριακές συνθήκες

### 2.3.1 Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Η Αρχή του Hamilton [1] διατυπώνεται ως

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt \quad (2.1.12)$$

όπου

- $U$  είναι η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού.
- $K$  είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος που οφείλεται στην κινητική ενέργεια της καμπτικής ταλάντωσης και στην κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφικής κίνησης (κίνηση στερεού σώματος).
- $W_{ext}$  είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων.
- $t_1, t_2$  είναι δύο χρονικές στιγμές.

Στις παραπάνω εξισώσεις με  $\delta(\ )$  δηλώνονται οι δυνατές ποσότητες ενώ στα επόμενα με  $(\dot{\ })$  δηλώνεται η παραγωγή ως προς το χρόνο  $t$  και  $(\prime)$  η παραγωγή ως προς τη διαμήκη συντεταγμένη  $x$ .

#### Δυναμική ενέργεια

Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη

A) Λόγω φυγόκεντρου

$$U_{centr} = \int_0^l \frac{1}{2} F_{centr.} (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{\phi}^2 \left[ \frac{1}{2} (l^2 - x^2) + a(l - x) \right] v'^2 dx \quad (2.1.13)$$

όπου η φυγόκεντρος δύναμη δίνεται από την έκφραση [2]

$$F_{centr} = \int_x^l \rho A (r + a) \dot{\phi}^2 dr = \rho A \dot{\phi}^2 \left[ \frac{1}{2} (l^2 - x^2) + a(l - x) \right] \quad (2.1.14)$$

ενώ η μεταβολή του μήκους του άξονα της δοκού από την ποσότητα  $(ds - dx) = \left( dx^2 + (v'dx)^2 \right)^{1/2} - dx \approx \frac{1}{2} (v')^2 dx$  η οποία επεξηγείται στο Σχήμα 2.1γ (επειδή θεωρούμε μικρές μετατοπίσεις η καμπτική στροφή της δοκού μπορεί να ληφθεί ίση με την εφαπτομένη της ελαστικής γραμμής δηλαδή την πρώτη παράγωγο του καμπτικού βέλους).

B) Λοιπή ενέργεια παραμόρφωσης (ενέργεια παραμόρφωσης μη περιστρεφόμενης δοκού)

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (2.1.15)$$

η οποία με αντικατάσταση των σχέσεων (2.1.10)-(2.1.11) λαμβάνει τη μορφή

$$U_0 = \frac{I}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dV \quad (2.1.16)$$

$$U_0 = \int_0^l \frac{I}{2} EI_{zz} v''^2 dx \quad (2.1.17)$$

Άρα η συνολική δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης είναι

$$U = U_{centr} + U_0 \quad (2.1.18)$$

όπου με αντικατάσταση των σχέσεων (2.1.13), (2.1.17) προκύπτει

$$U = \frac{I}{2} \int_0^l \rho A \dot{\phi}^2 \left[ \frac{I}{2} (l^2 - x^2) + a(l-x) \right] v'^2 dx + \int_0^l \frac{I}{2} EI_{zz} v''^2 dx \quad (2.1.19)$$

### Κινητική ενέργεια

Η κινητική ενέργεια αποτελείται από δύο μέρη:

A) Λόγω της καμπτόμενης δοκού

Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του πεδίου ταχύτητας της δοκού λαμβάνοντας υπόψη την συνεισφορά των ταχυτήτων της ταλάντωσης αλλά και της ταχύτητας περιστροφής της δοκού.

Το συνολικό πεδίο ταχύτητας της δοκού με την βοήθεια των σχέσεων (2.1.1)-(2.1.3) υπολογίζεται ως εξής [3]

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{tot} \\ \dot{v}_{tot} \\ \dot{w}_{tot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + a + \bar{u} \\ y + \bar{v} \\ z + \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\dot{v}' - \dot{\phi}(y+v) \\ \dot{v} + \dot{\phi}(x + a - yv') \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.20)$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια η οποία ορίζεται ως

$$K_0 = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{tot}^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{v}_{tot}^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{w}_{tot}^2 \right) dV \quad (2.1.21)$$

με τη βοήθεια της σχέσης (2.1.20) λαμβάνει τη μορφή

$$K_0 = \int_V \frac{1}{2} \rho (-y\dot{v}' - \dot{\phi}(y+v))^2 + \frac{1}{2} \rho (\dot{v} + \dot{\phi}(x + a - yv'))^2 dV \quad (2.1.22)$$

ενώ μετά από μερικές πράξεις γίνεται

$$K_0 = \int_0^l \left( \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{v}'^2 + \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{\phi}^2 + \rho I_{zz} \dot{\phi} \dot{v}' + \frac{1}{2} \rho A \dot{\phi}' v^2 + \frac{1}{2} \rho A v'^2 + \frac{1}{2} \rho A \dot{\phi}^2 (x+a)^2 + \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{\phi}^2 v'^2 + \rho A \dot{\phi} (x+a) \dot{v} \right) dx \quad (2.1.23)$$

όπου  $I_{zz} = \int_A y^2 dA$  είναι η ροπή αδράνειας της δοκού περί τον άξονα  $z$ .

B) Λόγω του rigid hub

$$K_R = \frac{I}{2} \left( \rho_R A_R \int_0^a x^2 dx \right) \dot{\phi}^2 \quad (2.1.24)$$

Άρα η συνολική κινητική ενέργεια είναι

$$K = K_0 + K_R \quad (2.1.25)$$

η οποία με αντικατάσταση των σχέσεων (2.1.23),(2.1.24) γίνεται

$$K_0 = \int_0^l \left( \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{v}'^2 + \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{\phi}^2 + \rho I_{zz} \dot{\phi} \dot{v}' + \frac{1}{2} \rho A \dot{\phi}' v^2 + \frac{1}{2} \rho A v'^2 + \frac{1}{2} \rho A \dot{\phi}^2 (x+a)^2 + \frac{1}{2} \rho I_{zz} \dot{\phi}^2 v'^2 + \rho A \dot{\phi} (x+a) \dot{v} \right) dx + \frac{I}{2} \left( \rho_R A_R \int_0^a x^2 dx \right) \dot{\phi}^2 \quad (2.1.26)$$

### Έργο εξωτερικών δυνάμεων

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων προκύπτει από το έργο της εξωτερικής φόρτισης ως

$$W_{ext} = \int_0^l p v dx + \int_0^l p x \phi dx \quad (2.1.27)$$

Έτσι μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η εξίσωση κάμψης της δοκού

$$EI_{zz} v'''' + \rho A \left\{ \ddot{v} + \ddot{\phi} (x+a) + \dot{\phi}^2 v' (x+a) - \dot{\phi}^2 v - \frac{I}{2} \dot{\phi}^2 v'' [l^2 - x^2 + a(l-x)] \right\} + \rho I_{zz} (-\ddot{v}'' + \dot{\phi}^2 v'') = p \quad (2.1.28)$$

και η εξίσωση περιστροφής της δοκού

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(J + J_R) + \rho A \int_0^l \left\{ \ddot{v}(x+a) - \left( \frac{1}{2} \ddot{\varphi} v'^2 + \dot{\varphi} v' \dot{v}' \right) [l^2 - x^2 + 2a(l-x)] + \ddot{\varphi} v^2 + 2\dot{\varphi} v \dot{v}' \right\} dx \\ + \rho I_{zz} \int_0^l (\ddot{v}' + \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} v'^2 + 2\dot{\varphi} v' \dot{v}') dx = \int_0^l p x dx \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

όπου  $J = \rho A \int_0^l (x+a)^2 dx$ ,  $J_R = \rho_R A_R \int_0^a x^2 dx$  είναι οι στροφική ροπή αδράνειας της καμπτόμενης δοκού και του rigid hub ως προς το σημείο που πραγματοποιείται η περιστροφή.

Οι συνοριακές συνθήκες για  $x = 0, l$  είναι

$$\alpha_1 \theta_z + \alpha_2 M_z = \alpha_3 \quad (2.1.30)$$

$$\beta_1 v + \beta_2 V_y = \beta_3 \quad (2.1.31)$$

όπου  $\theta_z = v'$  είναι η καμπτική στροφή ενώ  $M_z$  και  $V_y$  είναι η καμπτική ροπή και η τέμνουσα δύναμη στα άκρα της δοκού που εκφράζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_z = EI_{zz} v'' \quad (2.1.32)$$

$$V_y = -EI_{zz} v''' + \rho A \dot{\varphi}^2 v' \left[ \frac{1}{2} (l^2 - x^2) + a(l-x) - \frac{I_{zz}}{A} \right] \quad (2.1.33)$$

και αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = \bar{v}_0(x) \quad (2.1.34)$$

$$\dot{v}(x, 0) = \dot{\bar{v}}_0(x) \quad (2.1.35)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad (2.1.36)$$

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \quad (2.1.37)$$

Στις σχέσεις (2.1.30), (2.1.31)  $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ,  $\beta_i = \beta_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι χρονικές συναρτήσεις που καθορίζονται κατάλληλα ώστε να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση που περιγράφεται στο παρόν Κεφάλαιο τα  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  λαμβάνουν τιμές

$$\begin{array}{ll} \text{για } x = 0 & \text{για } x = l \\ \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 & \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \alpha_{3l}(t) \end{array} \quad (2.1.38)(\alpha\text{-στ})$$

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0 & \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = \beta_{3l}(t) \end{array} \quad (2.1.39)(\alpha\text{-στ})$$

όπου  $\alpha_{3l}(t)$ ,  $\beta_{3l}(t)$  είναι ενδεχόμενη συγκεντρωμένη ροπή η τέμνουσα, αντίστοιχα, στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

### 3 Αριθμητική επίλυση

Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών των εξ. ((2.2.24)-(2.2.33))

$$EI_{zz}v'''' + \rho A \left\{ \ddot{v} + \ddot{\phi}(x+a) + \dot{\phi}^2 v'(x+a) - \dot{\phi}^2 v - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 v'' [l^2 - x^2 + a(l-x)] \right\} + \rho I_{zz} (-\ddot{v}'' + \dot{\phi}^2 v'') = p \quad (3.1.1)$$

$$\rho A \int_0^l \left\{ \ddot{\phi} \left[ (x+a)^2 + \frac{a^3}{3} \right] + \ddot{v}(x+a) - \left( \frac{1}{2} \ddot{\phi} v'^2 + \dot{\phi} v' \dot{v}' \right) [l^2 - x^2 + 2a(l-x)] + \ddot{\phi} v^2 + 2\dot{\phi} v \dot{v}' \right\} dx + \rho I_{zz} \int_0^l (\ddot{v}'' + \ddot{\phi} + \ddot{\phi} v'^2 + 2\dot{\phi} v' \dot{v}') dx = \int_0^l p x dx \quad (3.1.2)$$

$$\alpha_1 \theta_z + \alpha_2 M_z = \alpha_3 \quad (3.1.3)$$

$$\beta_1 v + \beta_2 V_y = \beta_3 \quad (3.1.4)$$

$$v(x, 0) = \bar{v}_0(x) \quad (3.1.5)$$

$$\dot{v}(x, 0) = \dot{\bar{v}}_0(x) \quad (3.1.6)$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad (3.1.7)$$

$$\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0 \quad (3.1.8)$$

επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο της Αναλογικής Εξίσωσης (Analog Equation Method - AEM) [4, 5], η οποία αποτελεί μια αριθμητική μέθοδο που βασίζεται στα συνοριακά στοιχεία, αμελώντας τους όρους της περιστροφικής αδράνειας  $\rho I_{zz}$ . Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής οδηγεί στη μετατροπή των εξ. (3.1.1)-(3.1.4) σε ένα σύστημα συνήθων χρονικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\{f(\ddot{q}, q)\} = \{p(t)\} \quad (3.1.9)$$

το οποίο υπόκειται στις αρχικές συνθήκες

$$\{q\} = \{q_0\} \quad (3.1.10)$$

$$\{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\} \quad (3.1.11)$$

που προκύπτουν από τις εξ.(3.1.5)-(3.1.8). Στη σχ. (3.1.9)  $f$  είναι η συνάρτηση που συνδέει τα μεγέθη  $\ddot{q}, q$  με τα γενικευμένα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας, αντίστοιχα ενώ τα  $\{q\}$ ,  $\{p(t)\}$  αποτελούν γενικευμένα διανύσματα άγνωστων κινηματικών μεγεθών και γνωστών εξωτερικών δυνάμεων διέγερσης, αντίστοιχα. Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών επιλύεται αριθμητικά με κατάλληλη μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης.

Επιπλέον, για την ειδική περίπτωση ελεύθερων ταλαντώσεων, ισχύει  $\{p(t)\} = \{0\}$ .  
Θέτοντας

$$\{q\} = \{Q\} e^{-i\omega t} \quad (3.1.12)$$

μορφώνεται τυπικό γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής

$$\left( [K] - \omega_i^2 [M] \right) \{Q_i\} = \{0\} \quad (3.1.13)$$

όπου  $\omega_i$  και  $\{Q_i\}$  είναι οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές της δοκού, αντίστοιχα. Το πρόβλημα αυτό στη συνέχεια επιλύεται αριθμητικά με κατάλληλη αριθμητική τεχνική και υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες  $f_i = \omega_i/2\pi$  και οι ιδιομορφές της δοκού.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα του Β μέρους των αριθμητικών παραδειγμάτων (βλ. Κεφάλαιο 5) ελήφθησαν με αριθμητική επίλυση της σχ.(3.1.9) (εν χρόνω ανάλυση) ενώ τα αποτελέσματα του Α μέρους (βλ. Κεφάλαιο 4) με αριθμητική επίλυση της σχ.(3.1.13) (ιδιομορφική ανάλυση).



## 4 Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α' - Ιδιομορφική Ανάλυση

### 4.1 Εισαγωγή

Στο 1<sup>ο</sup> μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων πραγματοποιείται ιδιομορφική ανάλυση δύο δοκών υπό περιστροφή χωρίς ή με την παρουσία rigid hub μήκους  $a$  (βλέπε Σχήμα 4.2.1). Οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές που υπολογίζονται αφορούν την κάμψη εντός του επιπέδου περιστροφής.

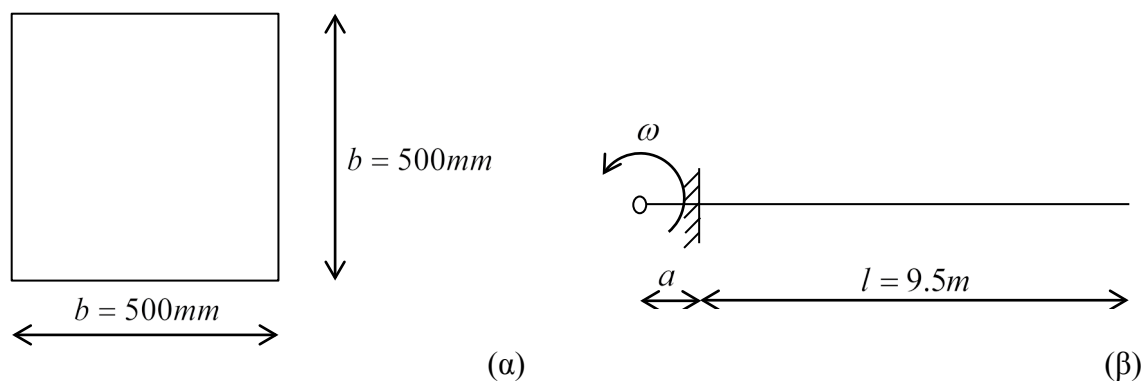
Η ανάλυση υλοποιείται με δύο μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος αφορά τη χρήση κώδικα που συντάχθηκε στο περιβάλλον προγραμματισμού MATLAB από την μεταπτυχιακή φοιτήτρια κ. Α. Αργυρίδη, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Ε. Σαπουντζάκη, βασίστηκε στη θεωρία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 και επιλύει το πρόβλημα με χρήση της μεθόδου της αναλογικής εξίσωσης (θα αναφέρεται ως AEM, Κεφάλαιο 3). Η δεύτερη μέθοδος αφορά την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της AEM που πραγματοποιείται με τη χρήση του λογισμικού BModes [6] που διατίθεται ελεύθερα από το National Wind Technology Center (NWTC) του National Renewable Energy Laboratory (NREL) που χρησιμοποιεί ραβδωτά πεπερασμένα στοιχεία (θα αναφέρεται ως BModes).

Διευκρινιστικά αναφέρεται ότι η διαδικασία υπολογισμού ιδιοσυχνοτήτων μιας δοκού υπό περιστροφή περιλαμβάνει την υπόθεση μιας συγκεκριμένης ταχύτητας περιστροφής  $\omega$  (βλέπε Σχήμα 4.2.1) και στη συνέχεια των υπολογισμών των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της δοκού λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της ανωτέρω ταχύτητας.

Τέλος ως πιο δόκιμος τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων των ιδιοσυχνοτήτων κρίθηκε η απεικόνισή τους μέσω διαγραμμάτων Campbell που αποτελούν διαγράμματα ιδιοσυχνοτήτων συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

### 4.2 1<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

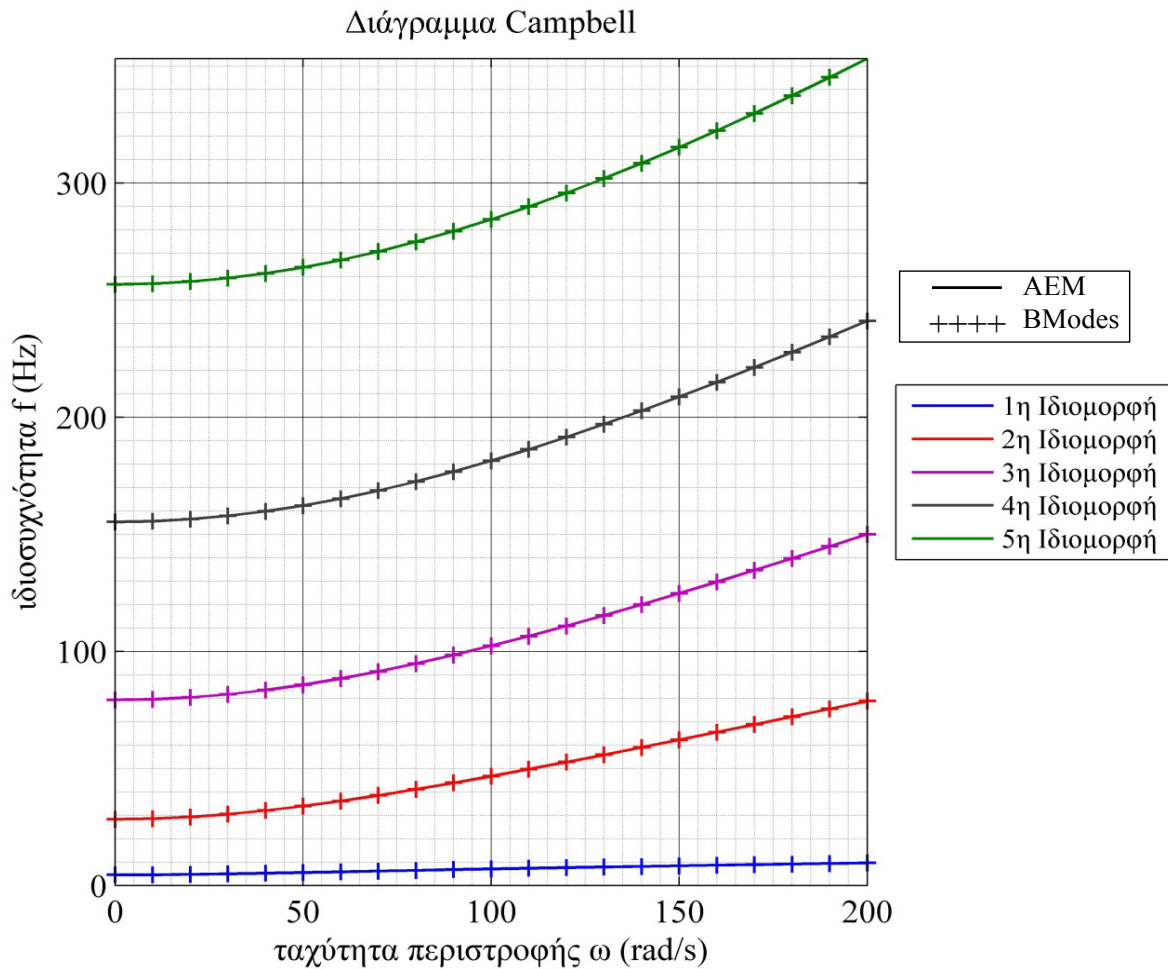
Στο πρώτο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται δοκός τετραγωνικής διατομής με διάσταση  $b = 500\text{mm}$  (βλέπε Σχήμα 4.2.1α), για μήκος  $l = 9.5\text{m}$  και για δύο τιμές του μήκους  $a$  του rigid hub (βλέπε Σχήμα 4.2.1β). Το υλικό της δοκού έχει μέτρο ελαστικότητας  $E = 200\text{GPa}$  και πυκνότητα  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ .



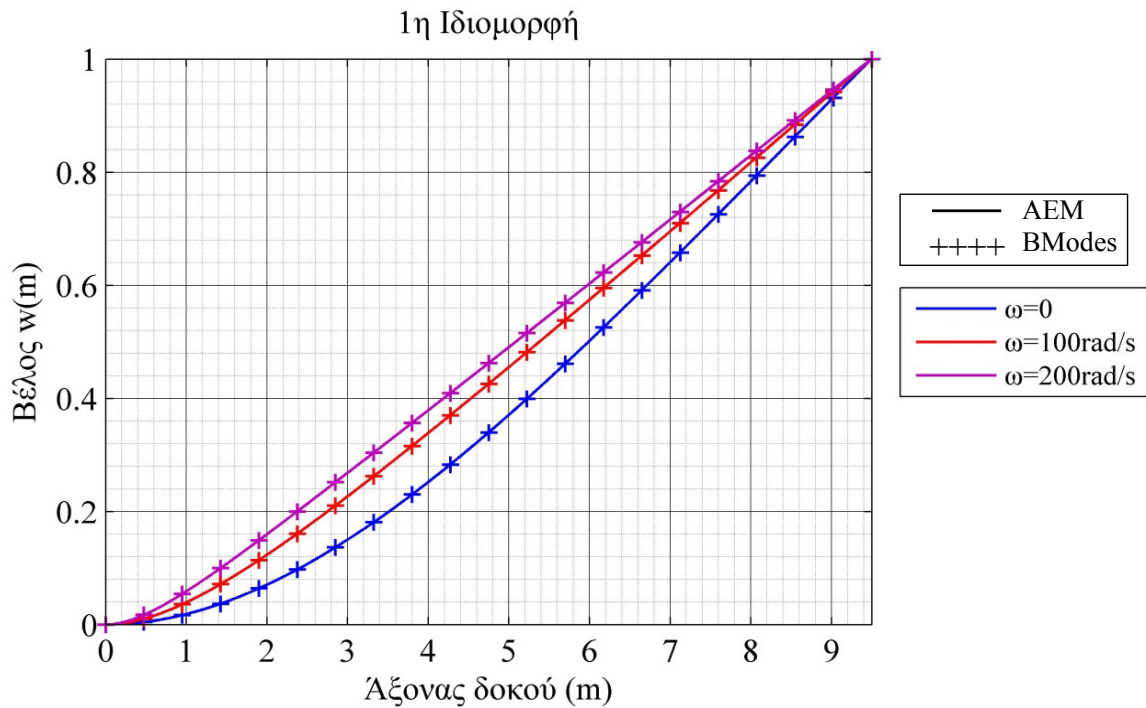
Σχήμα 4.2.1 Διατομή 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος (α), στατικό σύστημα (β).

### 4.2.1 Χωρίς rigid hub

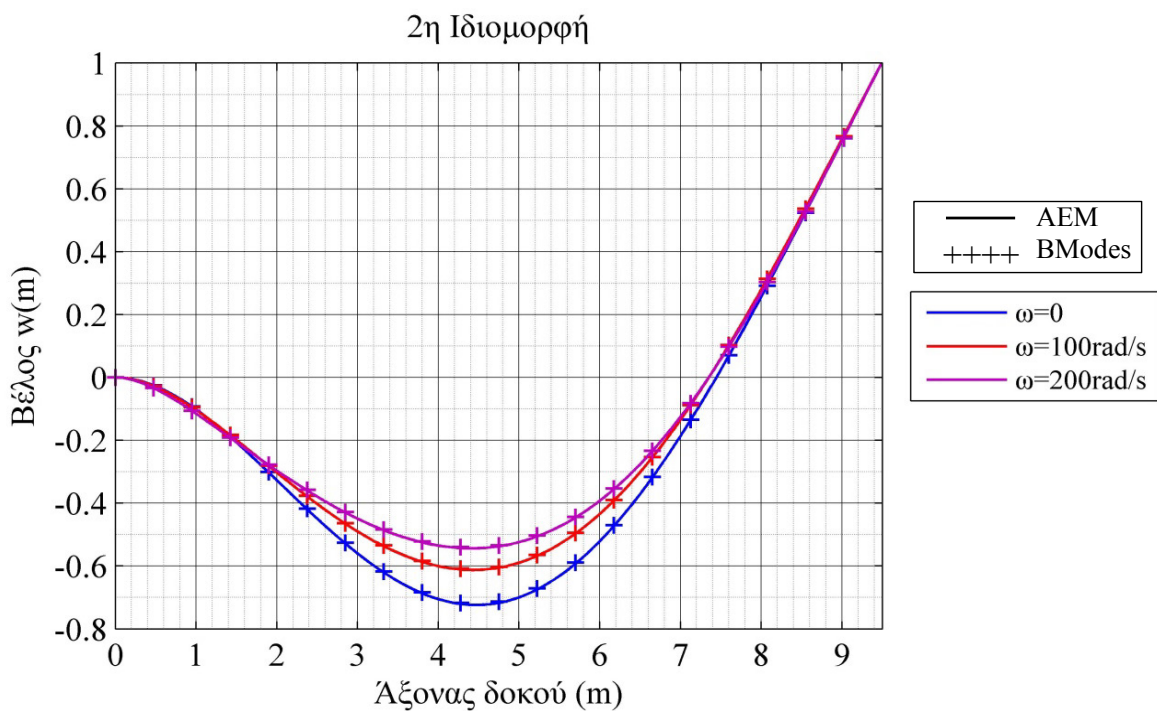
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, BModes) στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει rigid hub ( $a = 0$ ). Στο Σχήμα 4.2.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα Campbell για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες ενώ στα Σχήματα 4.2.3-4.2.7 παρουσιάζονται οι 5 πρώτες ιδιομορφές.



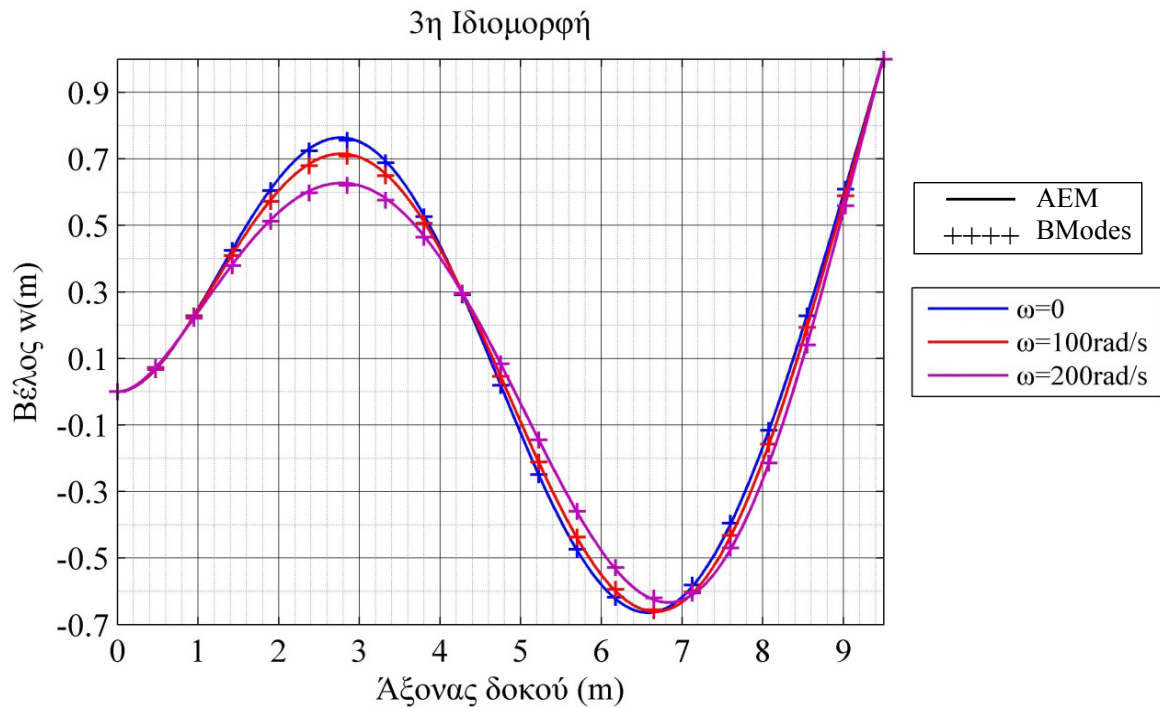
Σχήμα 4.2.2 Διάγραμμα Campbell 1<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες.



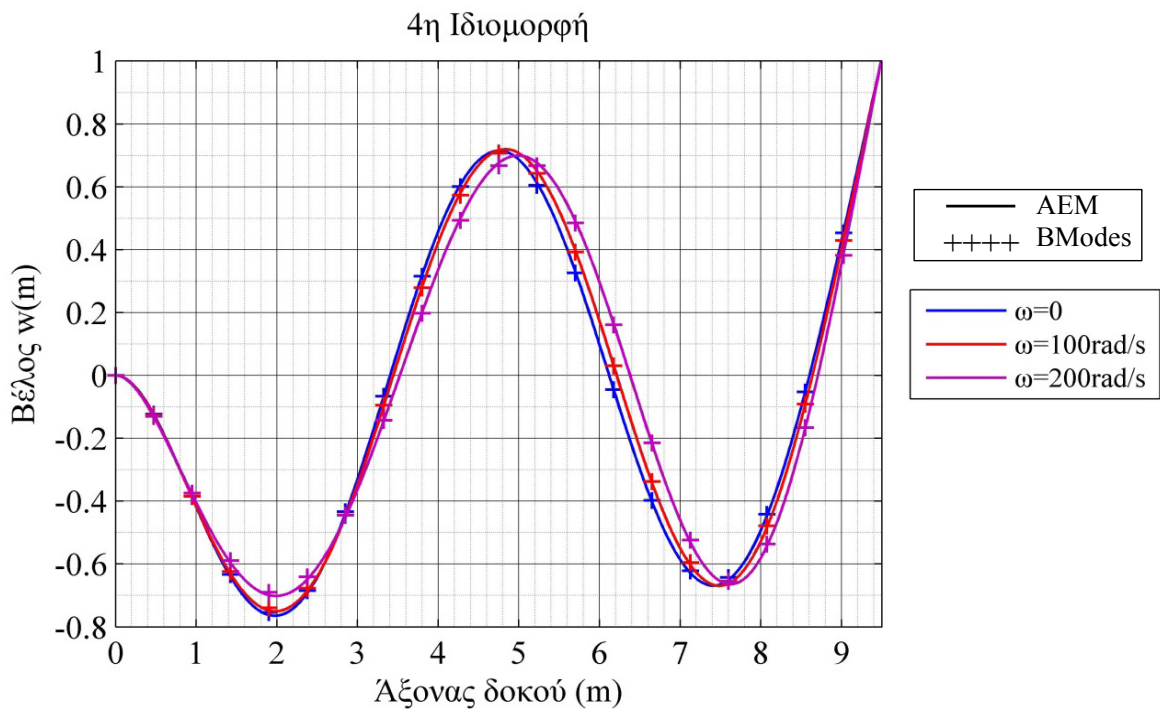
Σχήμα 4.2.3 1<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.2.4 2<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

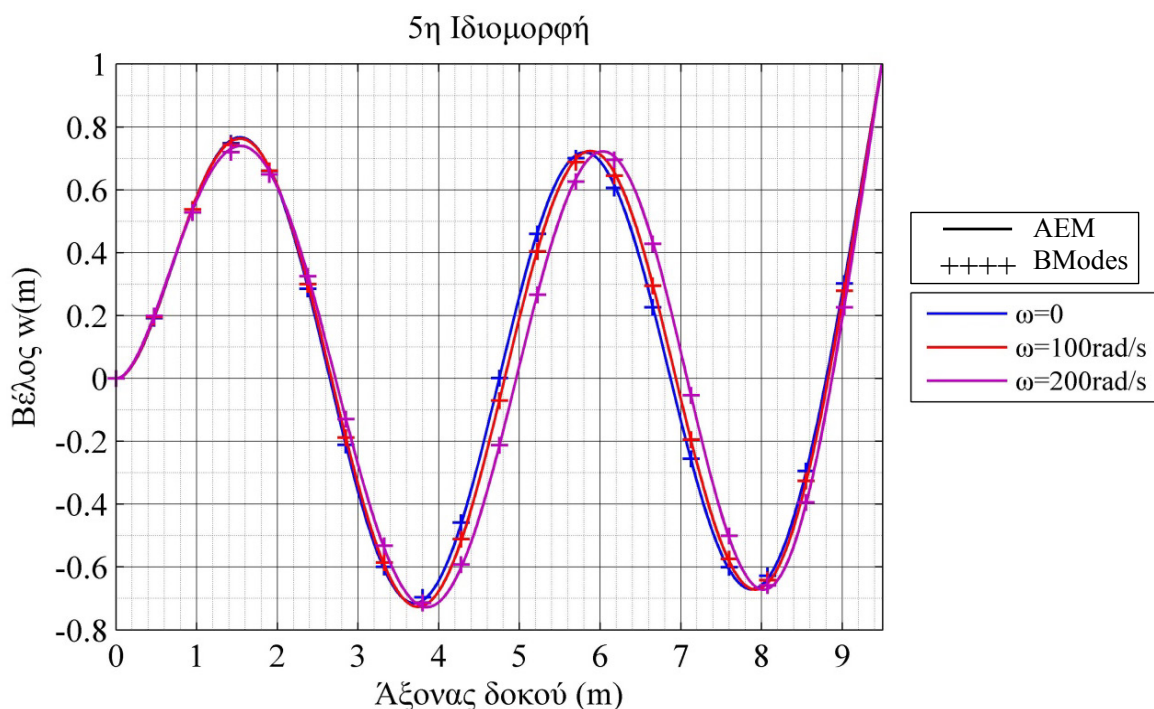


Σχήμα 4.2.5 3<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega=0$ ,  $\omega=100$  rad/s,  $\omega=200$  rad/s.



Σχήμα 4.2.6 4<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega=0$ ,  $\omega=100$  rad/s,  $\omega=200$  rad/s.





Σχήμα 4.2.7 5<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

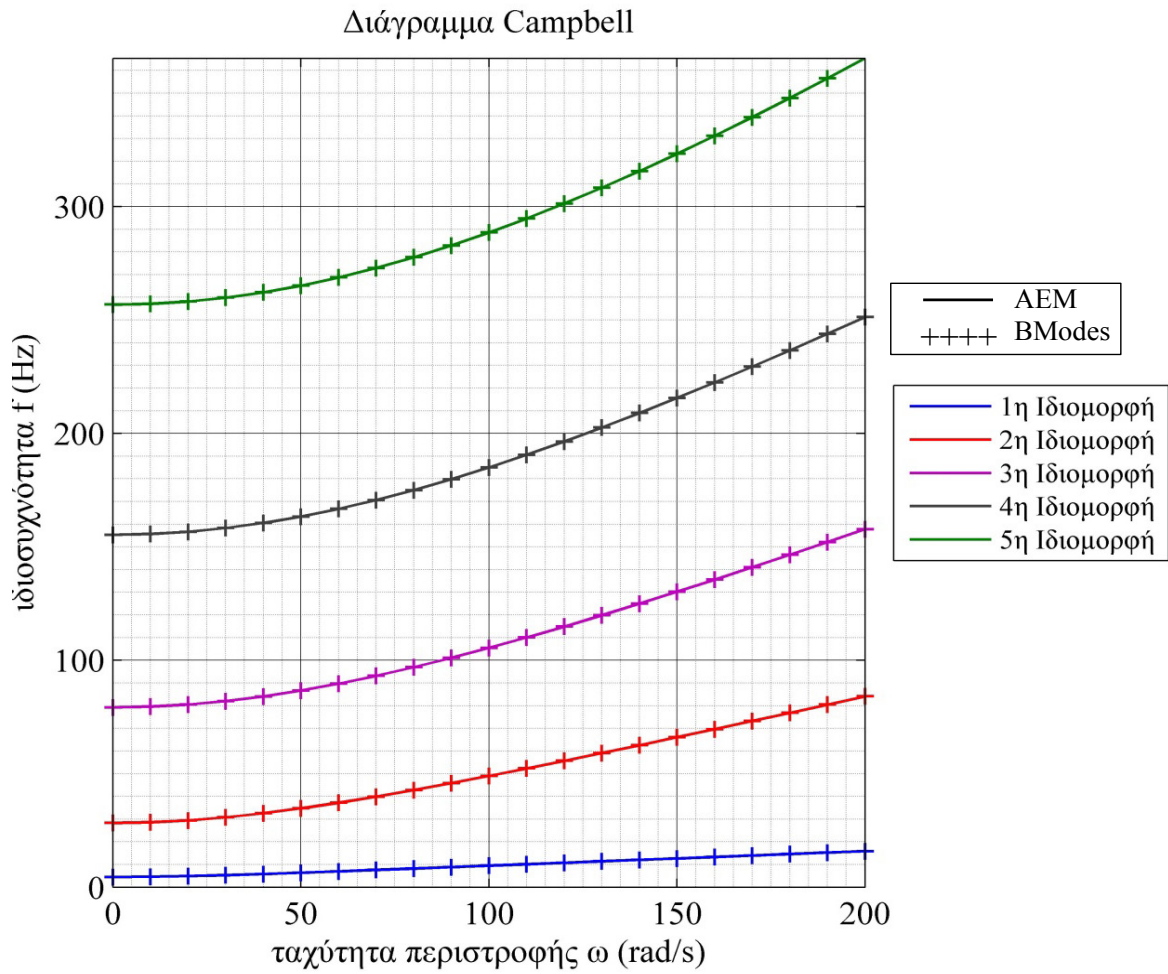
#### 4.2.2 Με rigid hub

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, BModes) στην περίπτωση όπου υπάρχει rigid hub με διάσταση  $\alpha = 1m$  (επιπλέον του μήκους των  $9.5m$ ). Η ροπή αδράνειας της μάζας του rigid hub ( $J_R$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής εκφράζεται συναρτήσει της ροπής αδράνειας της μάζας της δοκού ( $J$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής ως  $J_R = 0.5J$ . Στο Σχήμα 4.2.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα Campbell για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες ενώ στα Σχήματα 4.2.9-4.2.13 παρουσιάζονται οι 5 πρώτες ιδιομορφές.

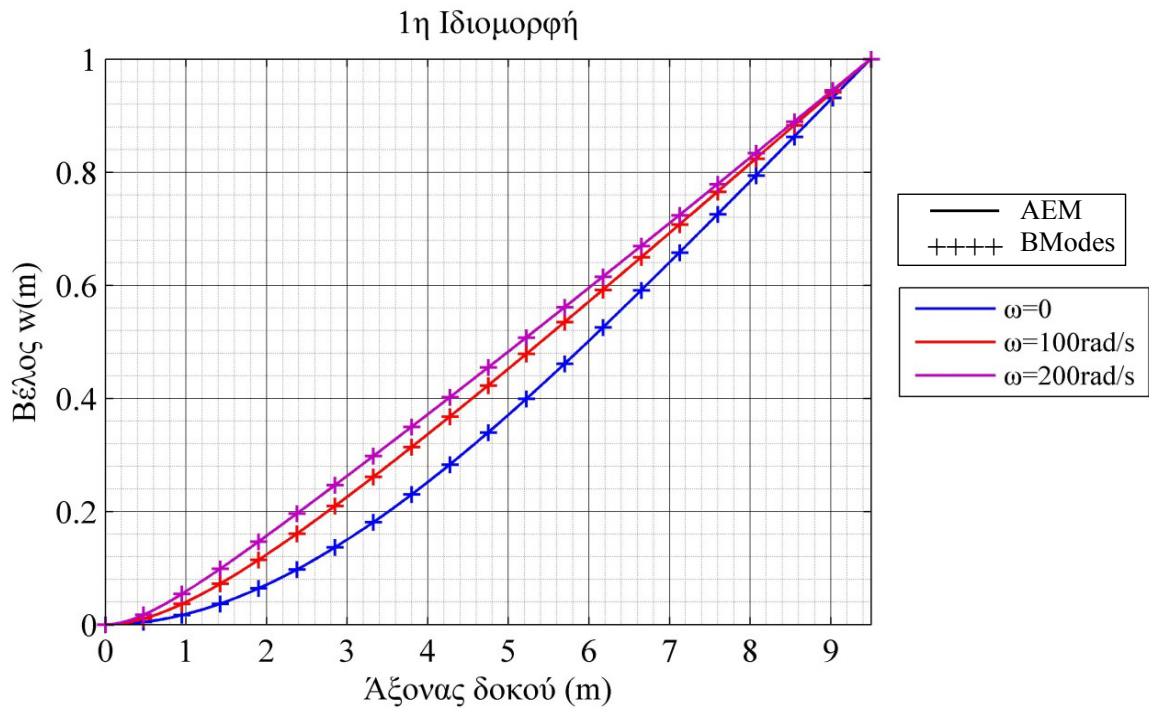
#### 4.2.3 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

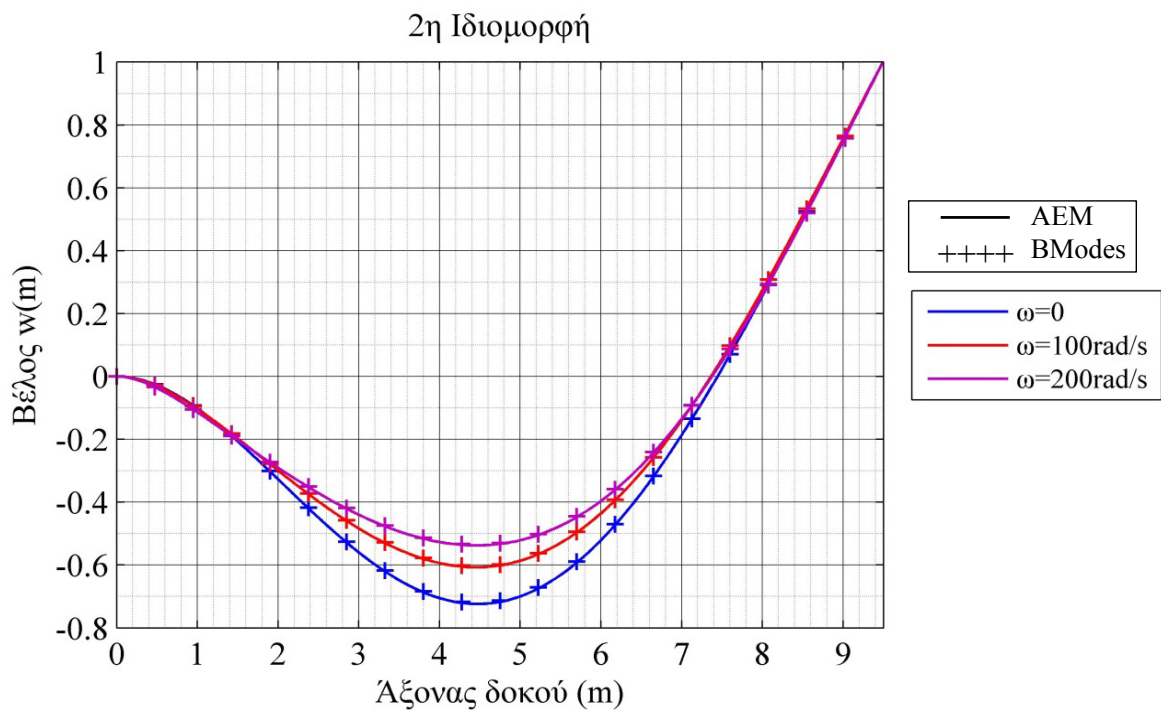
- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του BModes πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μικρότερη μεταβολή προκαλεί σε αυτή η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.
- 3) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μεγαλύτερη αύξηση προκαλεί στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.



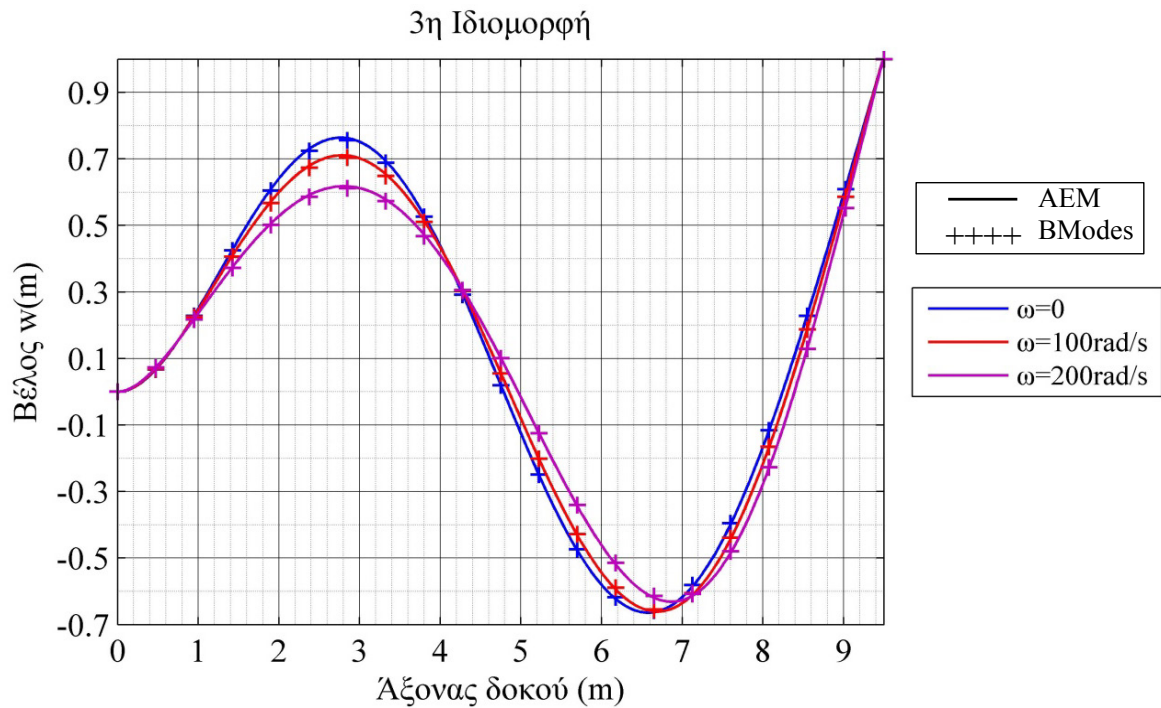
Σχήμα 4.2.8 Διάγραμμα Campbell  $I^{00}$  αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες.



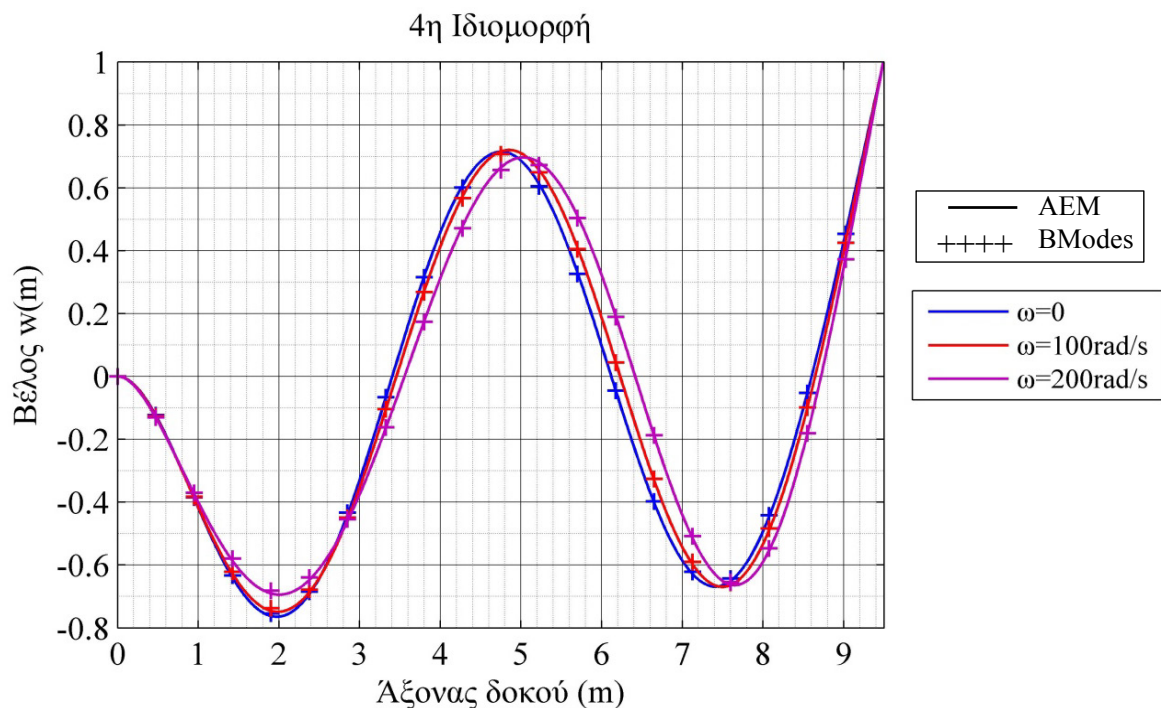
Σχήμα 4.2.9 1<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.2.10 2<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ov</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

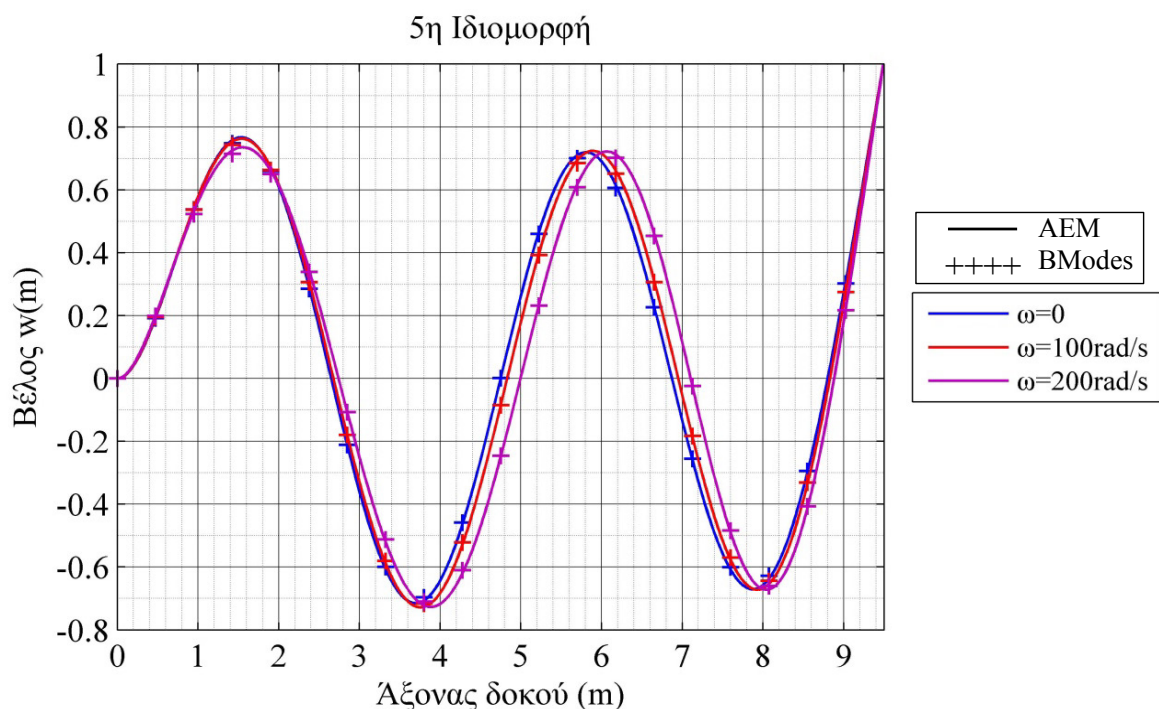


Σχήμα 4.2.11 3<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.2.12 4<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

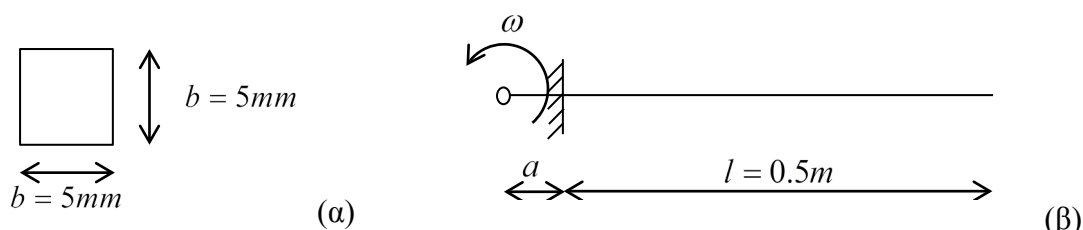




Σχήμα 4.2.13 5<sup>η</sup> ιδιομορφή 1<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

### 4.3 2<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

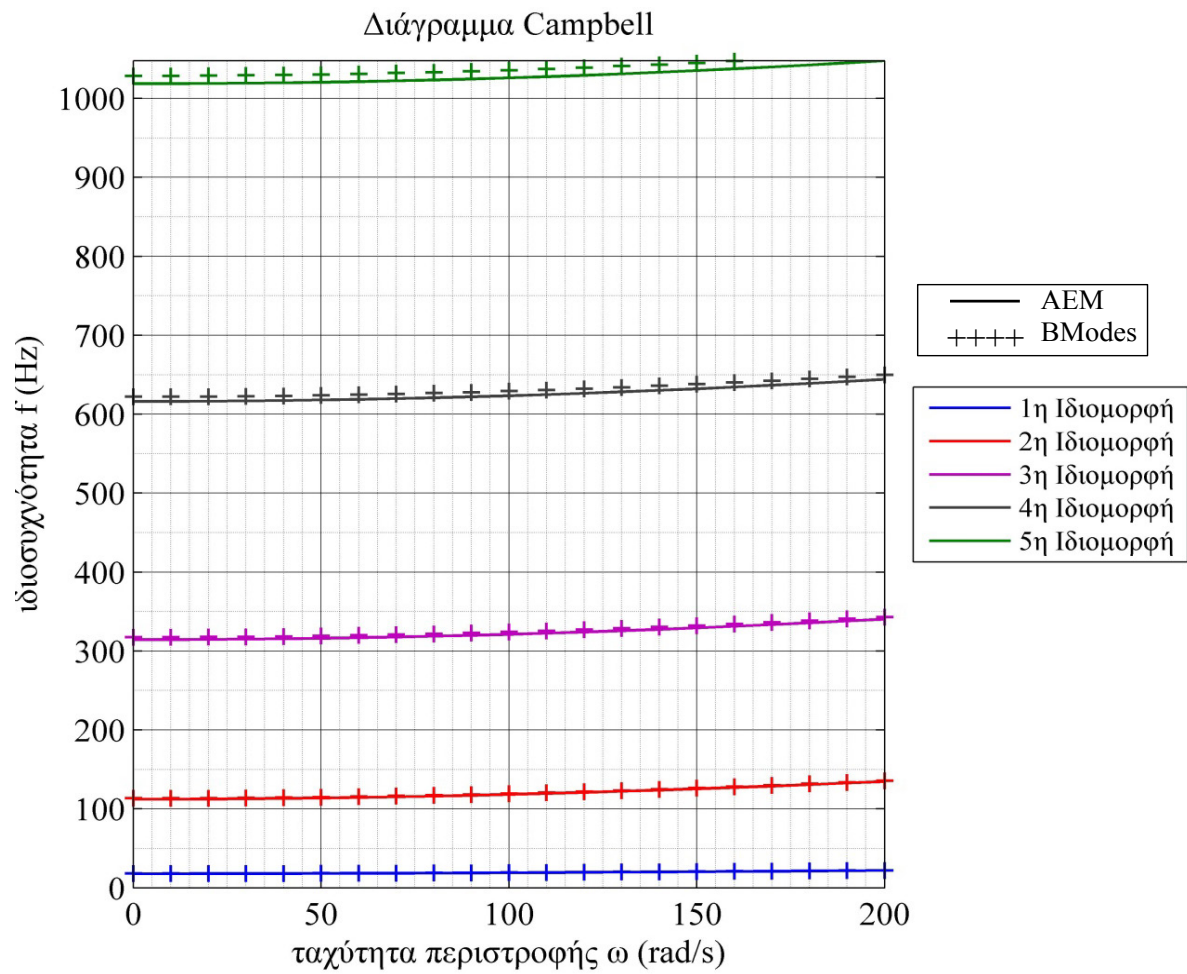
Στο δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται δοκός τετραγωνικής διατομής με διάσταση  $b = 5 \text{ mm}$  (βλέπε Σχήμα 4.2.1α), για μήκος  $l = 0.5 \text{ m}$  και για δύο τιμές του μήκους  $a$  του rigid hub (βλέπε Σχήμα 4.2.1β). Το υλικό της δοκού έχει μέτρο ελαστικότητας  $E = 105.6 \text{ GPa}$  και πυκνότητα  $\rho = 3432 \text{ kg/m}^3$ .



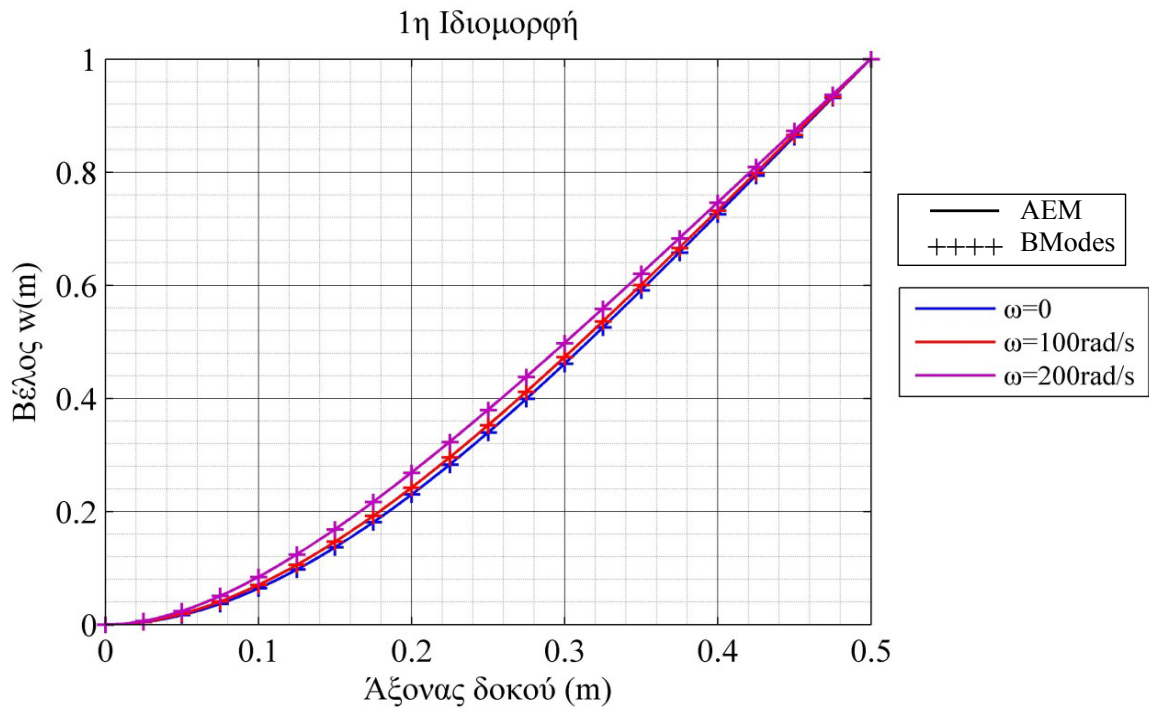
Σχήμα 4.3.1 Διατομή 2<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος (α), στατικό σύστημα (β).

#### 4.3.1 Χωρίς rigid hub

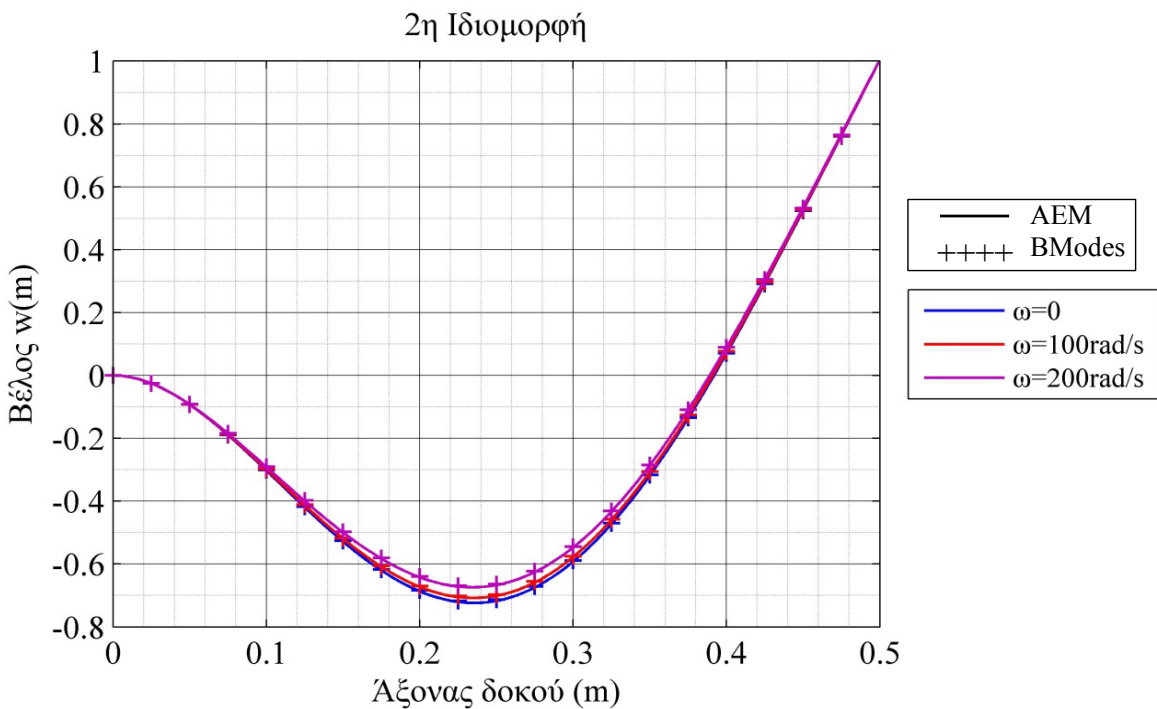
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, BModes) στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει rigid hub. Στο Σχήμα 4.3.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα Campbell για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες ενώ στα Σχήματα 4.3.3-4.3.7 παρουσιάζονται οι 5 πρώτες ιδιομορφές.



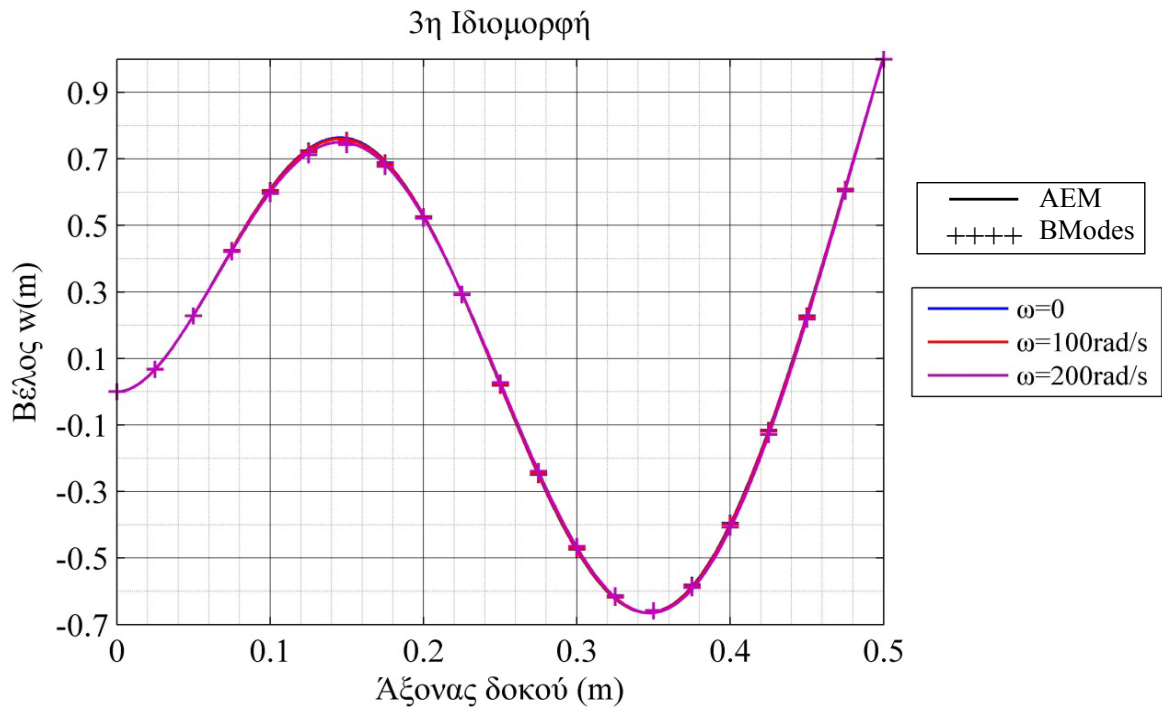
Σχήμα 4.3.2 Διάγραμμα Campbell 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες.



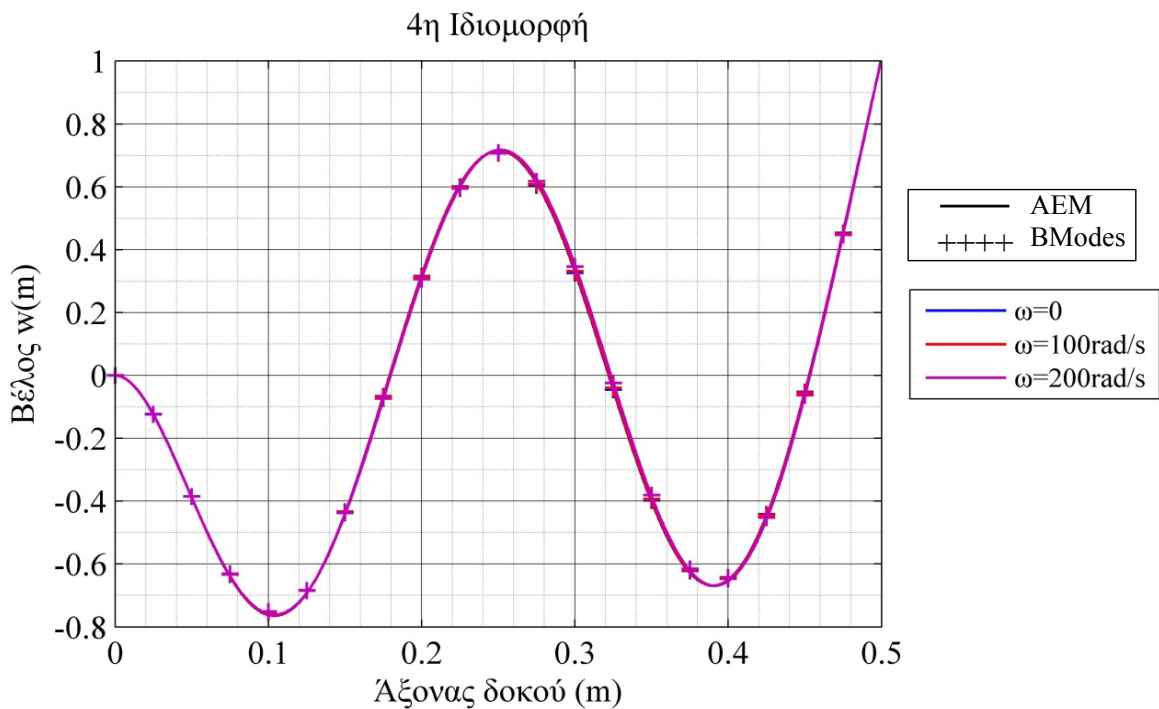
Σχήμα 4.3.3 1<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega=0$ ,  $\omega=100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega=200 \text{ rad/s}$ .



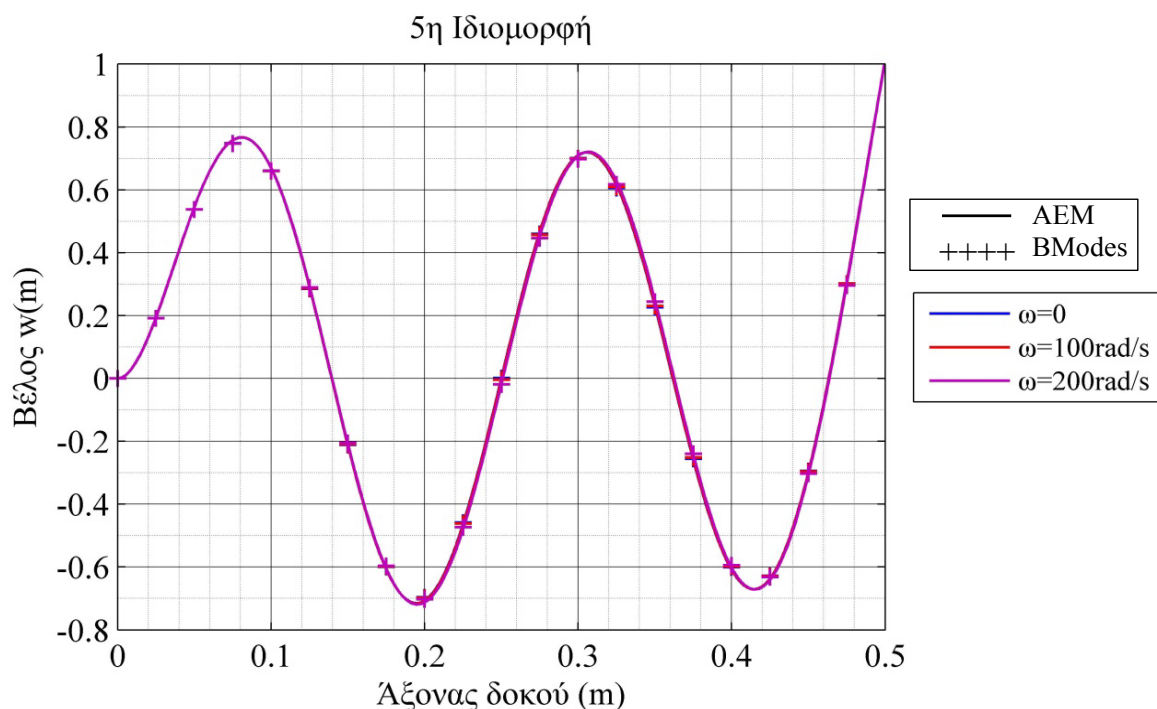
Σχήμα 4.3.4 2<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega=0$ ,  $\omega=100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega=200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.3.5 3<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.3.6 4<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.3.7 5<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

#### 4.3.2 Με rigid hub

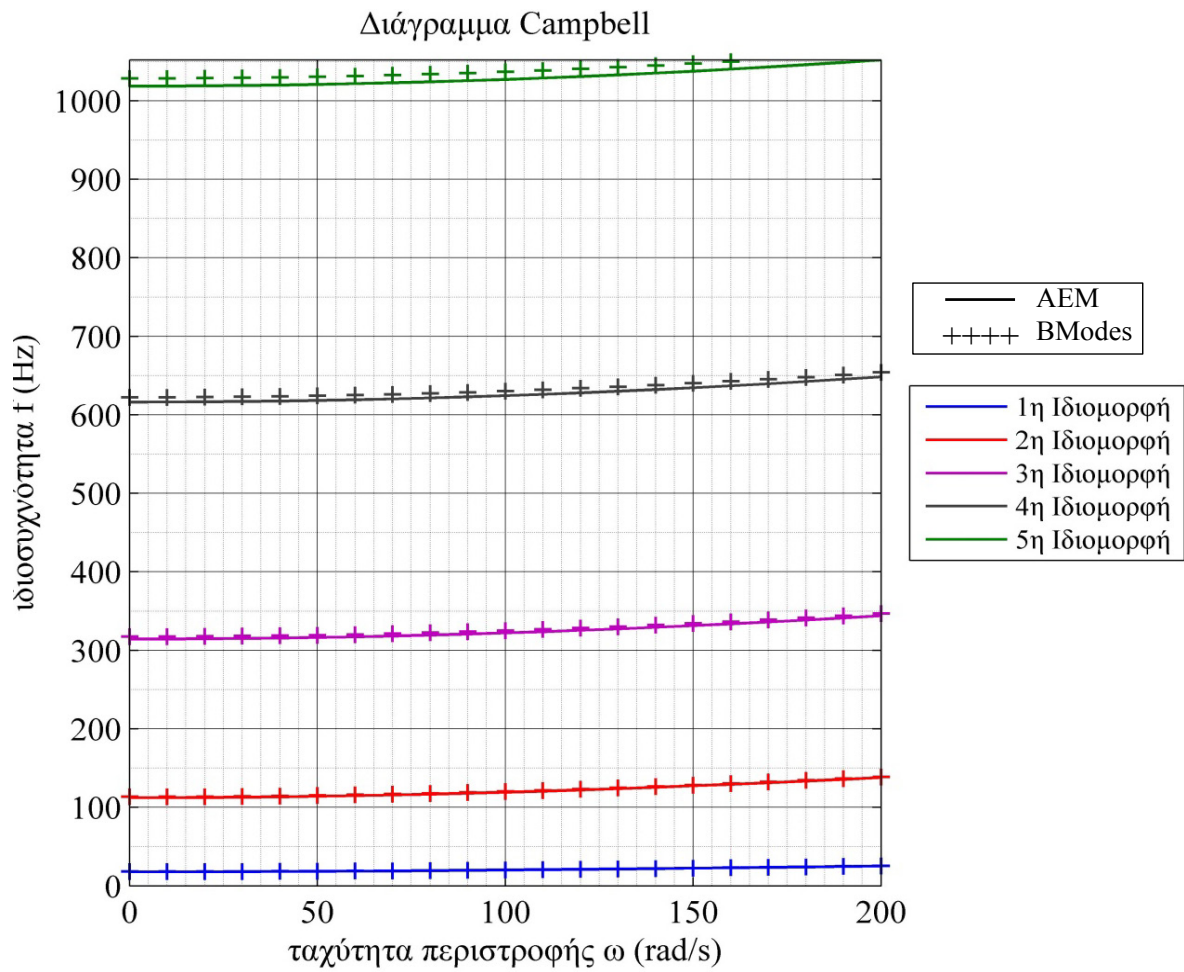
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, BModes) στην περίπτωση όπου υπάρχει rigid hub με διάσταση  $\alpha = 0.05m$  (επιπλέον του μήκους των  $0.5m$ ). Η ροπή αδράνειας της μάζας του rigid hub ως προς τον άξονα περιστροφής ( $J_R$ ) εκφράζεται συναρτήσει της ροπής αδράνειας της μάζας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής ( $J$ ) ως  $J_R = 0.5J$ . Στο Σχήμα 4.3.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα Campbell για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες ενώ στα Σχήματα 4.2.9-4.2.13 παρουσιάζονται οι 5 πρώτες ιδιομορφές.

#### 4.3.3 Συμπεράσματα

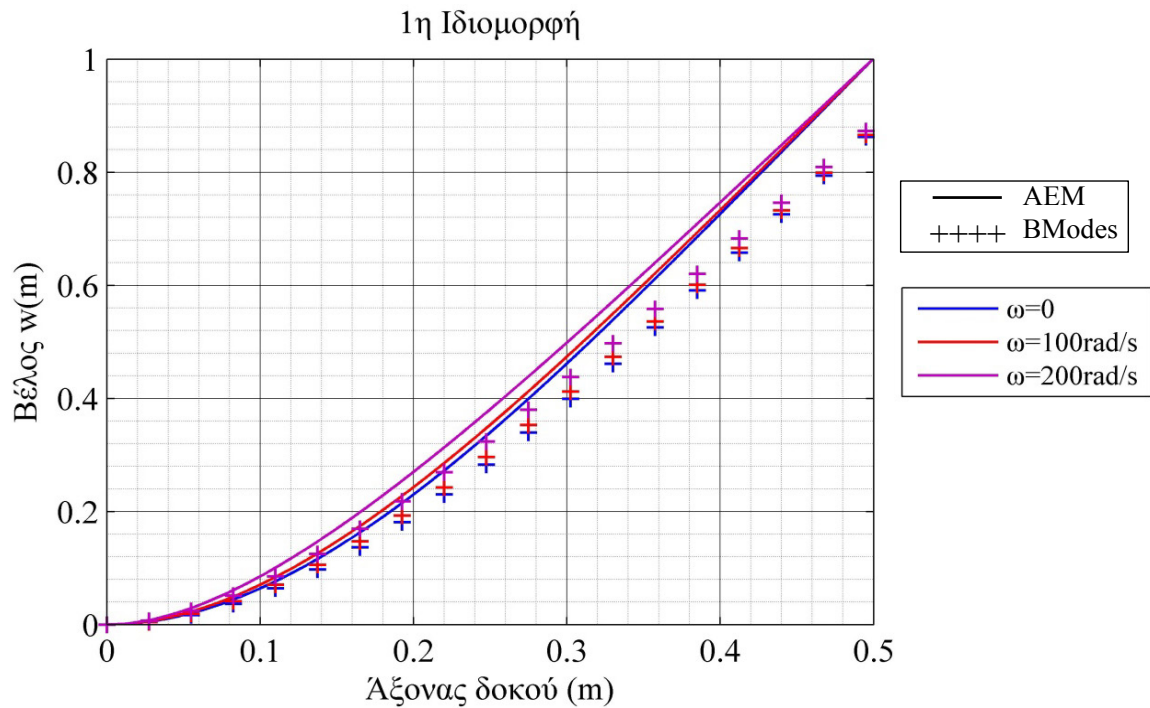
Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του BModes πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μικρότερη μεταβολή προκαλεί σε αυτή η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.
- 3) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μεγαλύτερη μεταβολή αύξηση στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

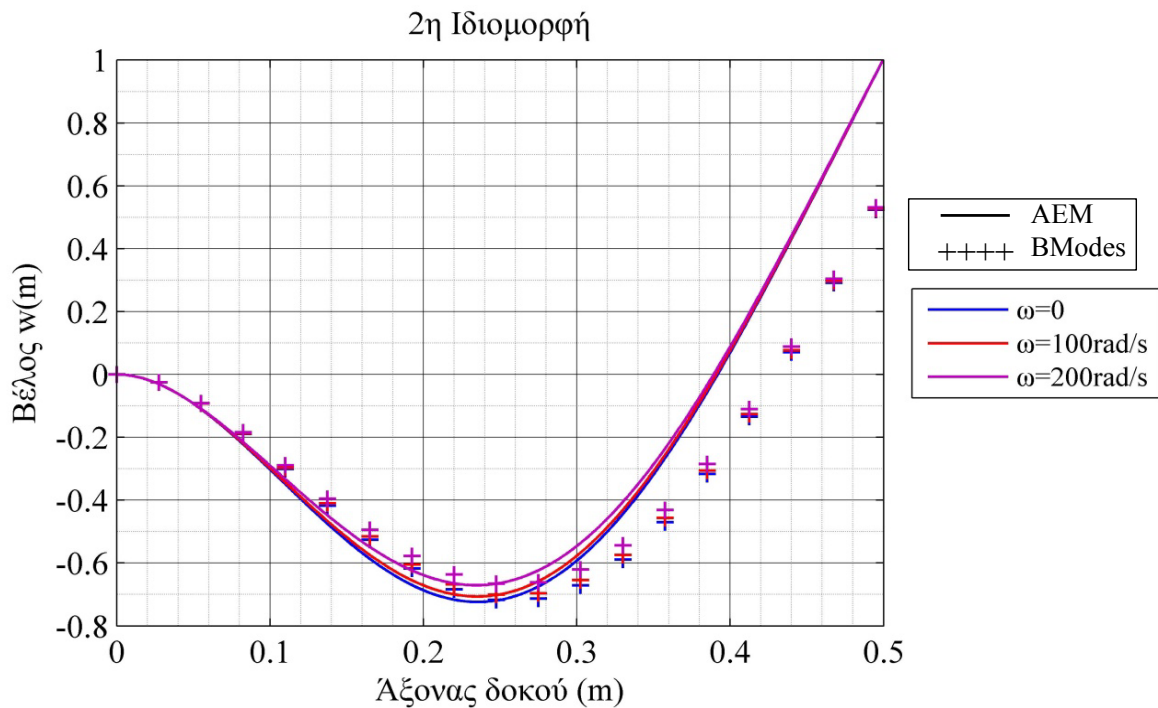




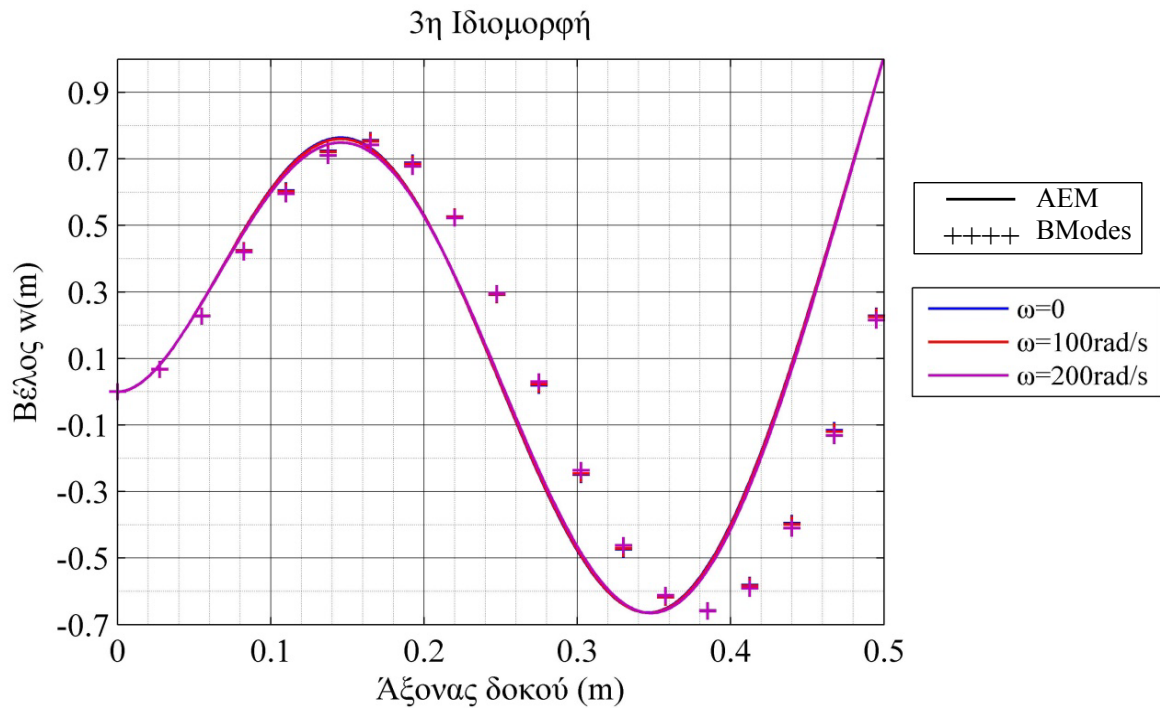
Σχήμα 4.3.8 Διάγραμμα Campbell 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τις 5 πρώτες ιδιοσυχνότητες.



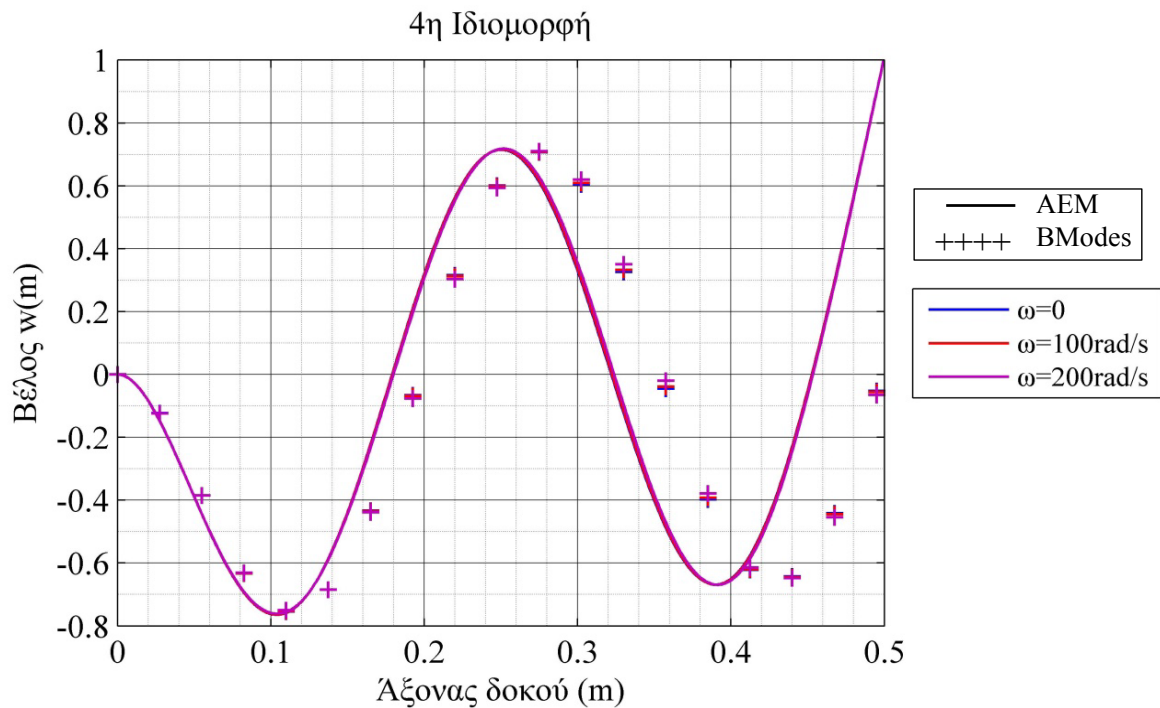
Σχήμα 4.3.9 1<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.3.10 2<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

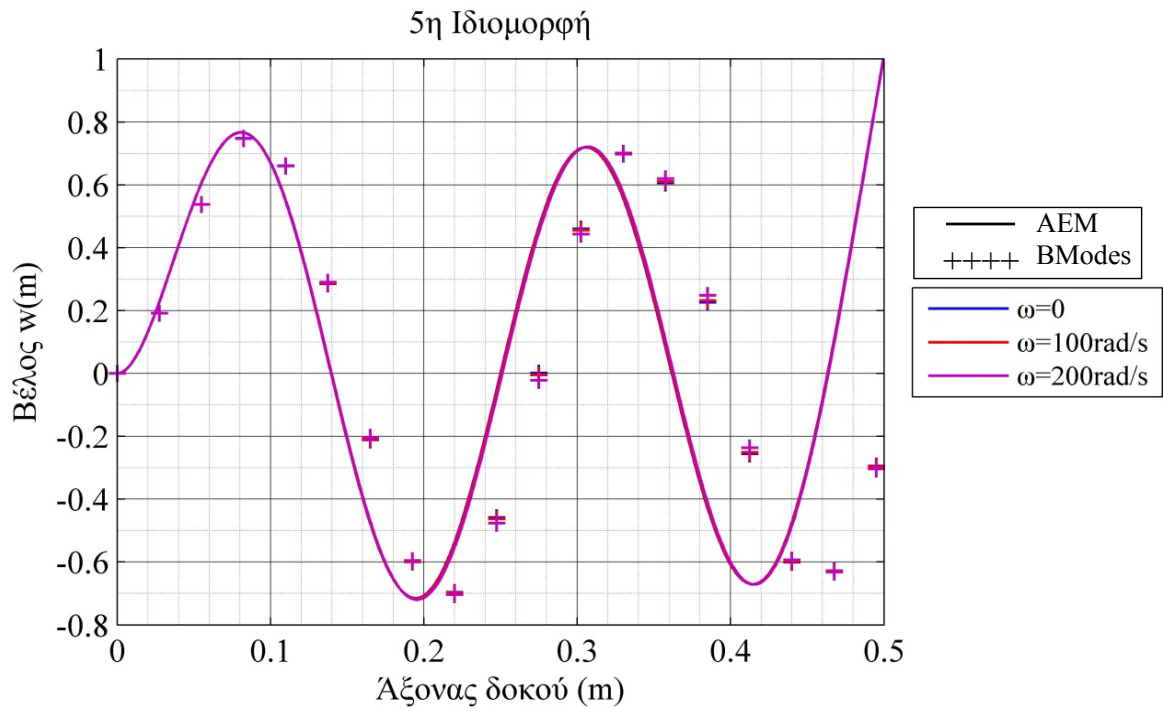


Σχήμα 4.3.11 3<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



Σχήμα 4.3.12 4<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .





Σχήμα 4.3.13 5<sup>η</sup> ιδιομορφή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και BModes για τιμές γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\omega = 0$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .



## 5 Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Β' - Εν χρόνω ανάλυση

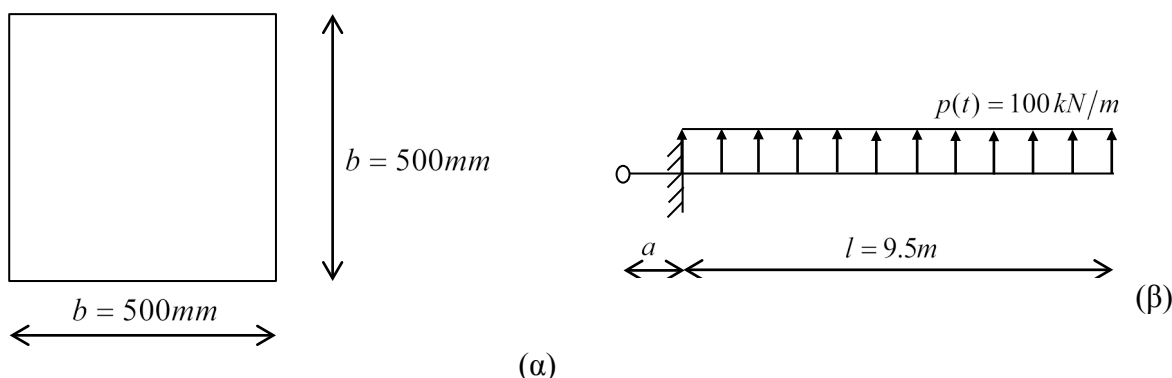
### 5.1 Εισαγωγή

Στο 2<sup>ο</sup> μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες των εντατικών και κινηματικών μεγεθών των δοκών που εξετάστηκαν στο Κεφάλαιο 4 για καμπτική φόρτιση εντός του επιπέδου περιστροφής τους.

Η ανάλυση υλοποιείται με δύο μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος αφορά τη χρήση κώδικα που συντάχθηκε στο περιβάλλον προγραμματισμού MATLAB από την μεταπτυχιακή φοιτήτρια κ. Α. Αργυρίδη, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Ε. Σαπουντζάκη, βασίστηκε στη θεωρία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 και επιλύει το πρόβλημα με χρήση της μεθόδου της αναλογικής εξίσωσης (θα αναφέρεται ως AEM). Η δεύτερη μέθοδος αφορά την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της AEM που πραγματοποιείται μέσω του λογισμικού Ansys [7] κάνοντας χρήση τρισδιάστατων εξαεδρικών (θα αναφέρονται ως Ansys 3d βεδρικά) ή ραβδωτών πεπερασμένων στοιχείων (θα αναφέρονται ως Ansys beam).

### 5.2 1<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

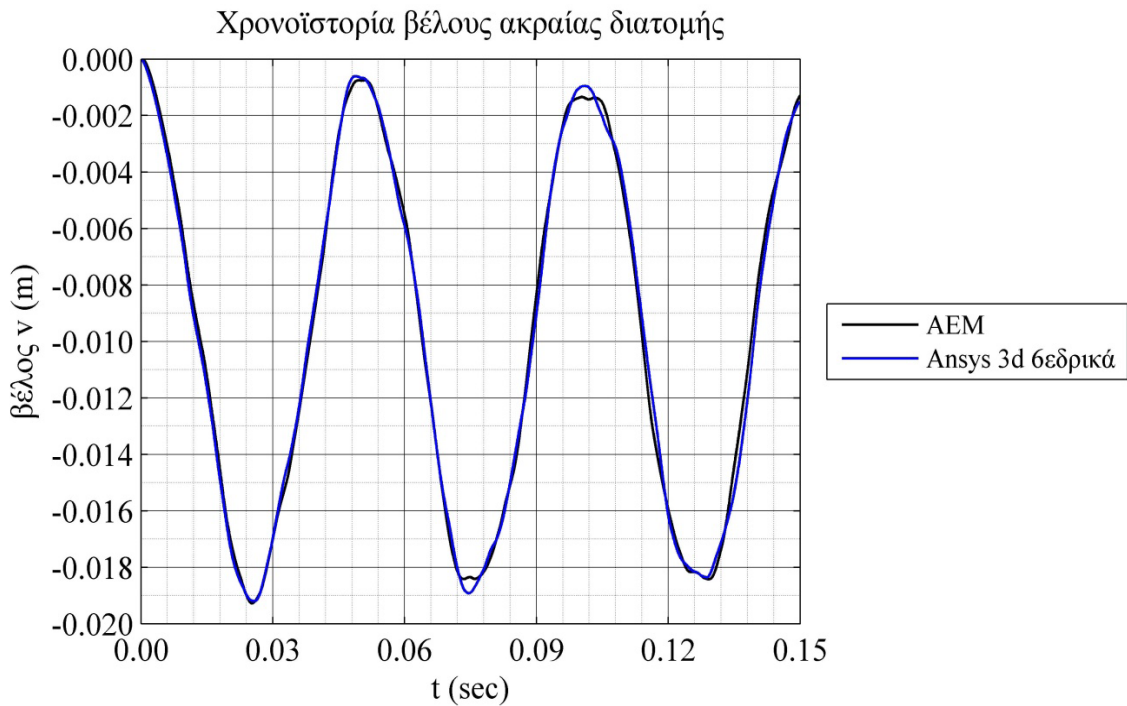
Στο πρώτο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται δοκός τετραγωνικής διατομής με διάσταση  $b = 500\text{mm}$  (βλέπε Σχήμα 5.2.1α), για μήκος  $l = 9.5\text{m}$  και για δύο τιμές του μήκους  $a$  του rigid hub (βλέπε Σχήμα 5.2.1β). Το υλικό της δοκού έχει μέτρο ελαστικότητας  $E = 200\text{GPa}$  και πυκνότητα  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$  (δοκός 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, Κεφάλαιο 5.2). Στη δοκό ασκείται καταναμημένο καμπτικό φορτίο εντός του επιπέδου περιστροφής της  $p(t) = 100\text{kN/m}$  (βλέπε Σχήμα 5.2.1β).



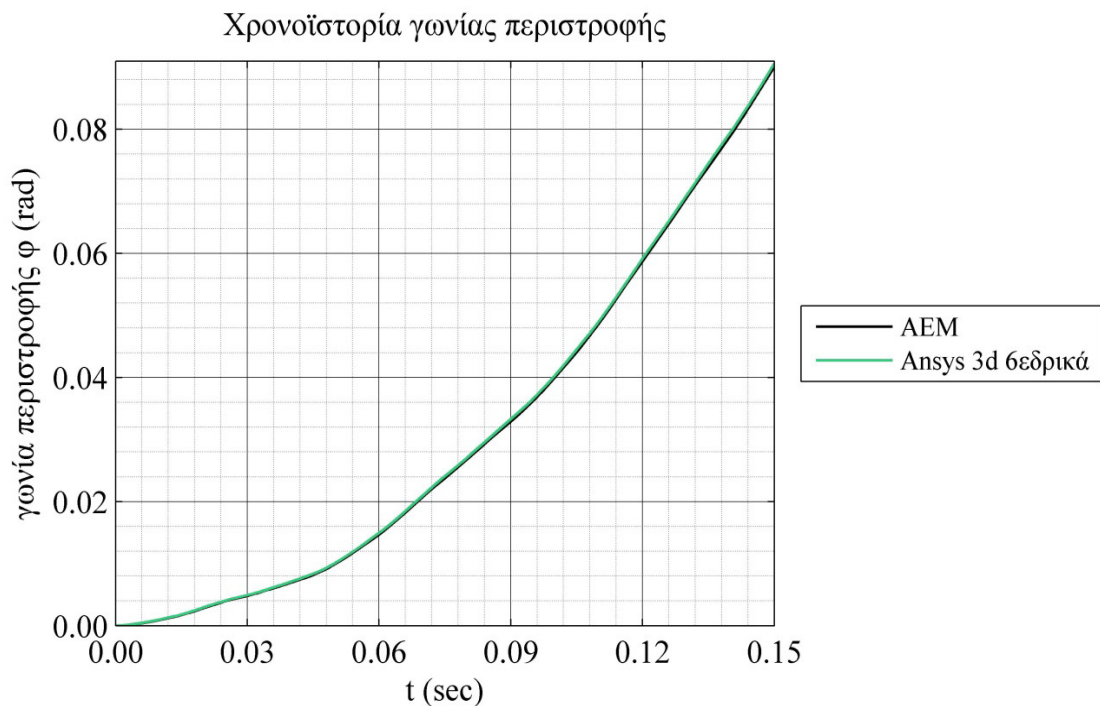
Σχήμα 5.2.1 Διατομή παραδείγματος 1 (α), στατικό σύστημα και φόρτιση (β).

#### 5.2.1 Χωρίς rigid hub

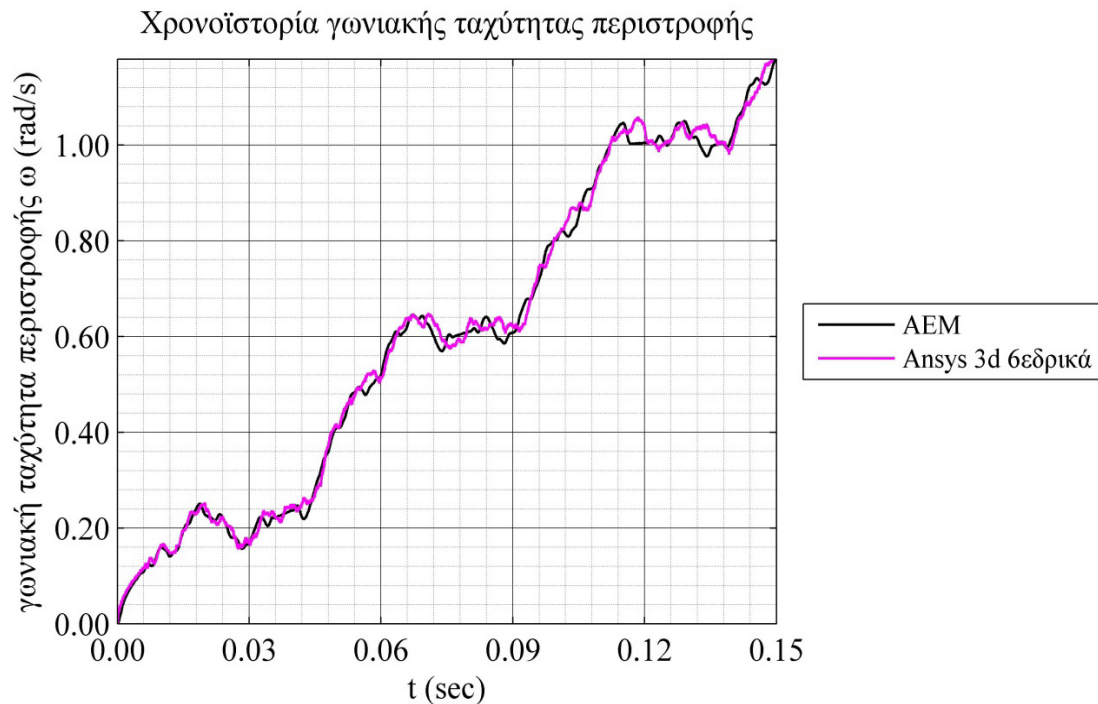
Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, Ansys) στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει rigid hub ( $a = 0$ ). Στο Σχήμα 5.2.2 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του εντός επιπέδου βέλους της ακραίας διατομής της δοκού ενώ στα Σχήματα 5.2.3 και 5.2.4 οι χρονοϊστορίες της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του φορέα, αντίστοιχα.



Σχήμα 5.2.2 Χρονοϊστορία εντός επιπέδου βέλους ακραίας διατομής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



Σχήμα 5.2.3 Χρονοϊστορία γωνίας περιστροφής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



Σχήμα 5.2.4 Χρονοϊστορία γωνιακής ταχύτητας περιστροφής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).

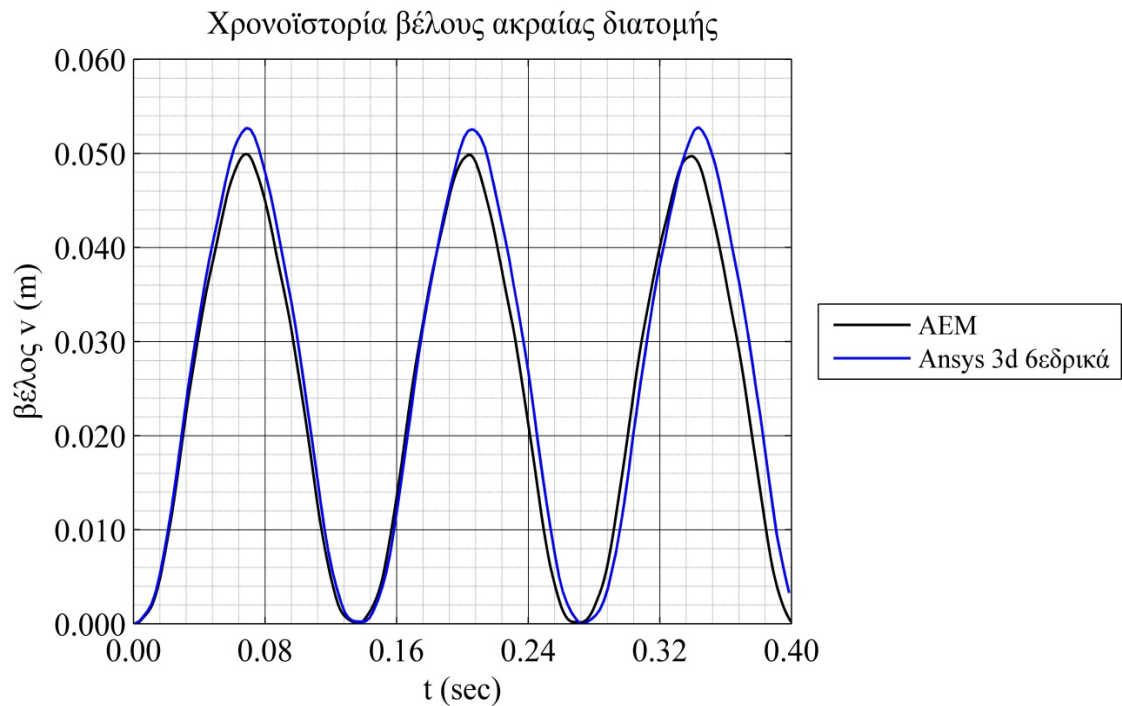
### 5.2.2 Με rigid hub

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, Ansys) στην περίπτωση όπου υπάρχει rigid hub ( $a = 1m$ ). Η ροπή αδράνειας της μάζας του rigid hub ( $J_R$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής εκφράζεται συναρτήσει της ροπής αδράνειας της μάζας της δοκού ( $J$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής ως  $J_R = 0.5J$ . Στο Σχήμα 5.2.5 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του εντός επιπέδου βέλους της ακραίας διατομής της δοκού ενώ στα Σχήματα 5.2.6 και 5.2.7 οι χρονοϊστορίες της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του φορέα, αντίστοιχα.

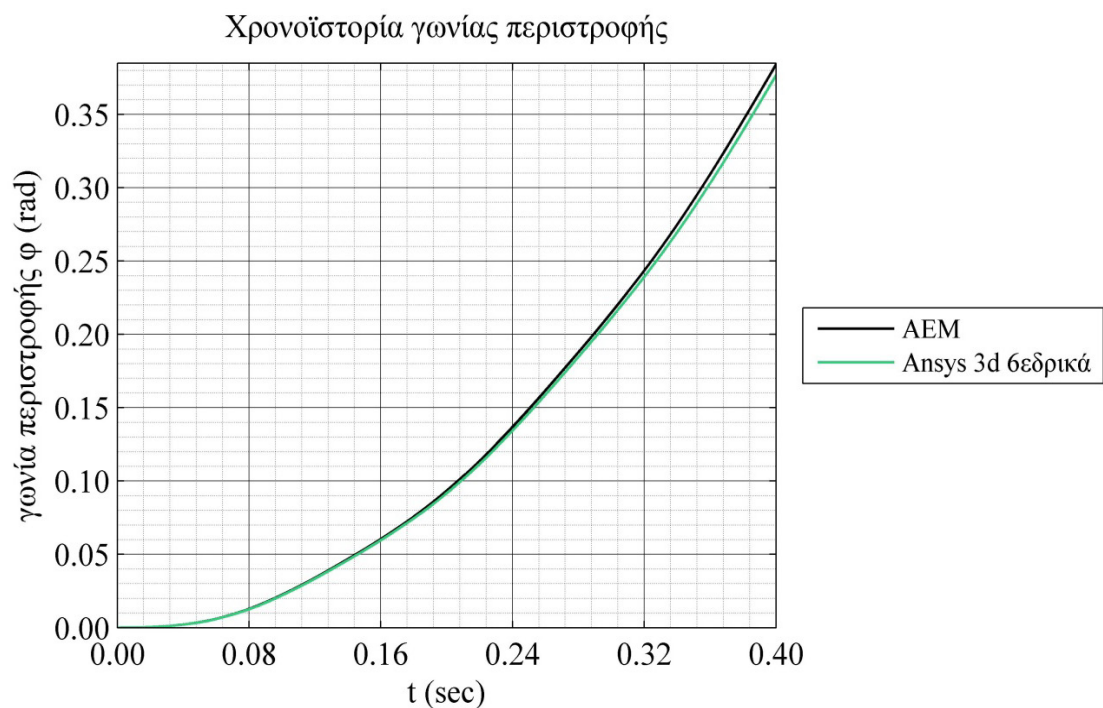
### 5.2.3 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του Ansys πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM. και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε αλλαγή του προσήμου του βέλους και αύξηση της τιμής του.
- 3) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε μείωση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

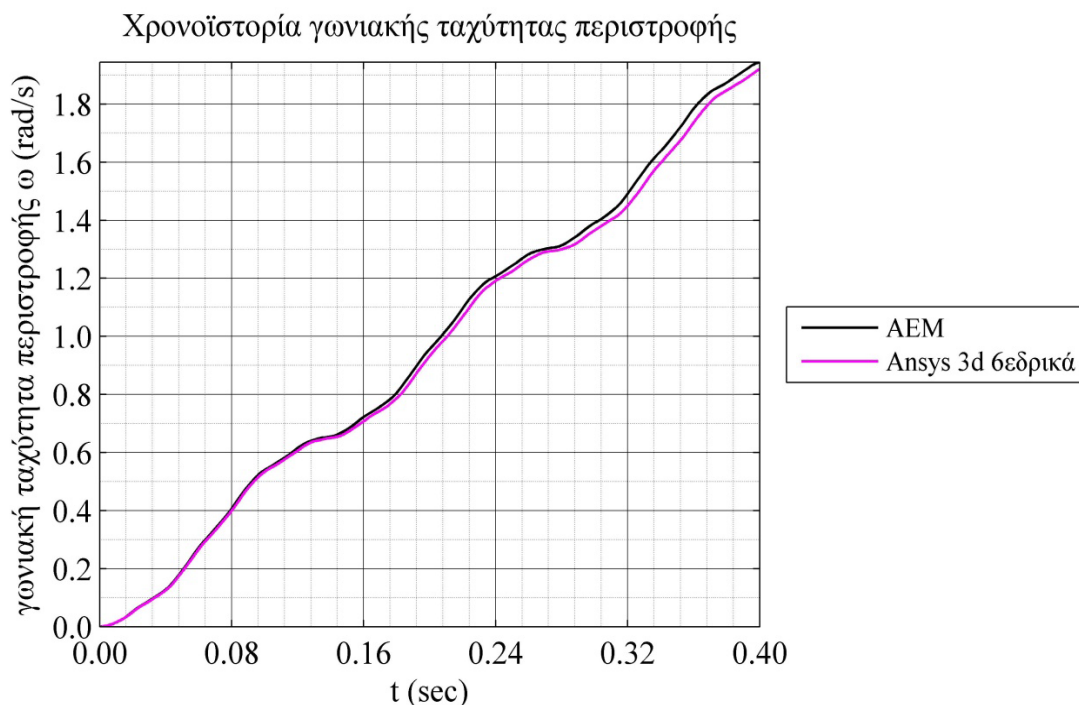


Σχήμα 5.2.5 Χρονοϊστορία εντός επιπέδου βέλους ακραίας διατομής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



Σχήμα 5.2.6 Χρονοϊστορία γωνίας περιστροφής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).

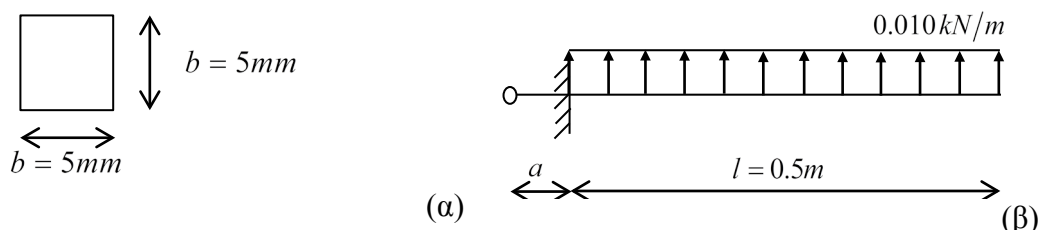




Σχήμα 5.2.7 Χρονοϊστορία γωνιακής ταχύτητας περιστροφής 1<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).

### 5.3 2<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

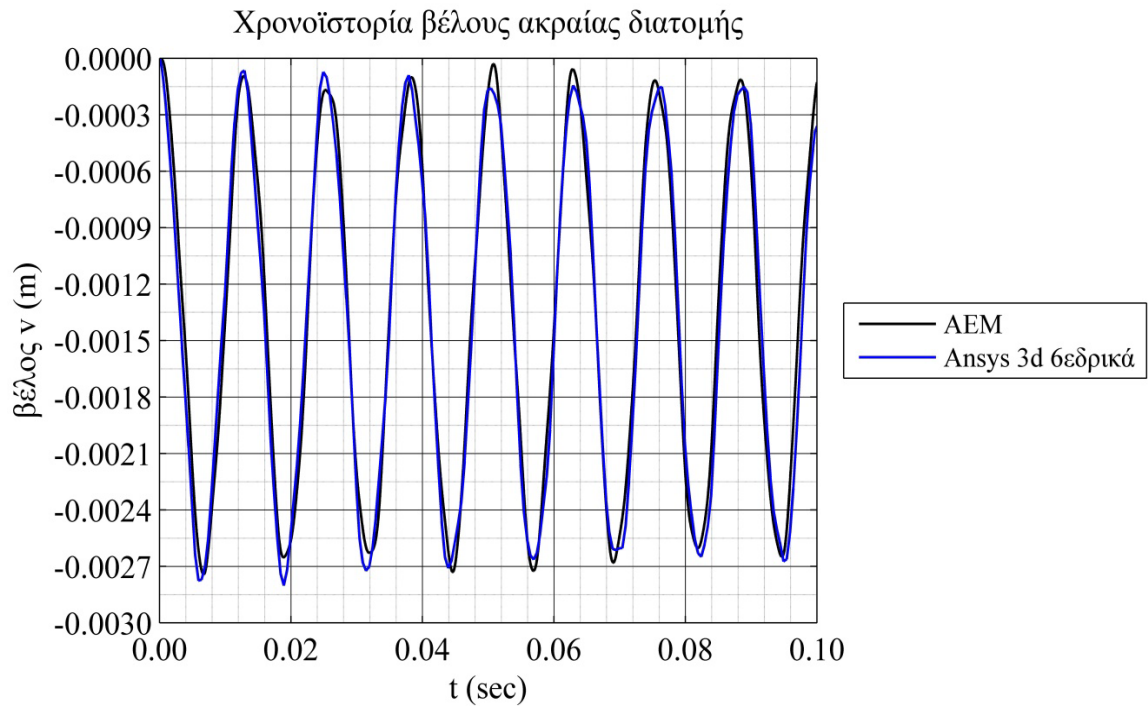
Στο δεύτερο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται δοκός τετραγωνικής διατομής με διάσταση  $b = 5\text{mm}$  (βλέπε Σχήμα 5.3.1 α), για μήκος  $l = 0.5\text{m}$  και για δύο τιμές του μήκους  $a$  του rigid hub (βλέπε Σχήμα 5.3.1β). Το υλικό της δοκού έχει μέτρο ελαστικότητας  $E = 105.6\text{GPa}$  και πυκνότητα  $\rho = 3432\text{kg/m}^3$  (δοκός 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, Κεφάλαιο 5.3). Στη δοκό ασκείται καταναμημένο καμπτικό φορτίο εντός του επιπέδου περιστροφής της  $p(t) = 0.010\text{kN/m}$  (βλέπε Σχήμα 5.3.1β).



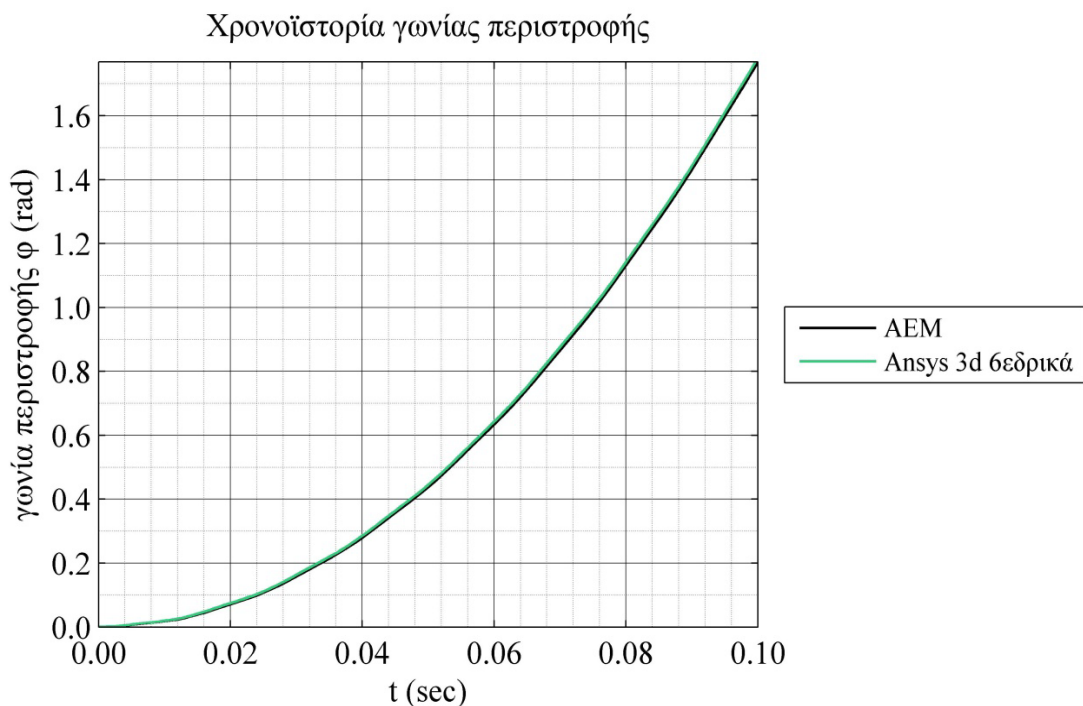
Σχήμα 5.3.1 Διατομή 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος (α), στατικό σύστημα και φόρτιση (β).

#### 5.3.1 Χωρίς rigid hub

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, Ansys) στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει rigid hub ( $a = 0$ ). Στο Σχήμα 5.3.2 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του εντός επιπέδου βέλους της ακραίας διατομής της δοκού ενώ στα Σχήματα 5.3.3 και 5.3.4 οι χρονοϊστορίες της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του φορέα, αντίστοιχα.

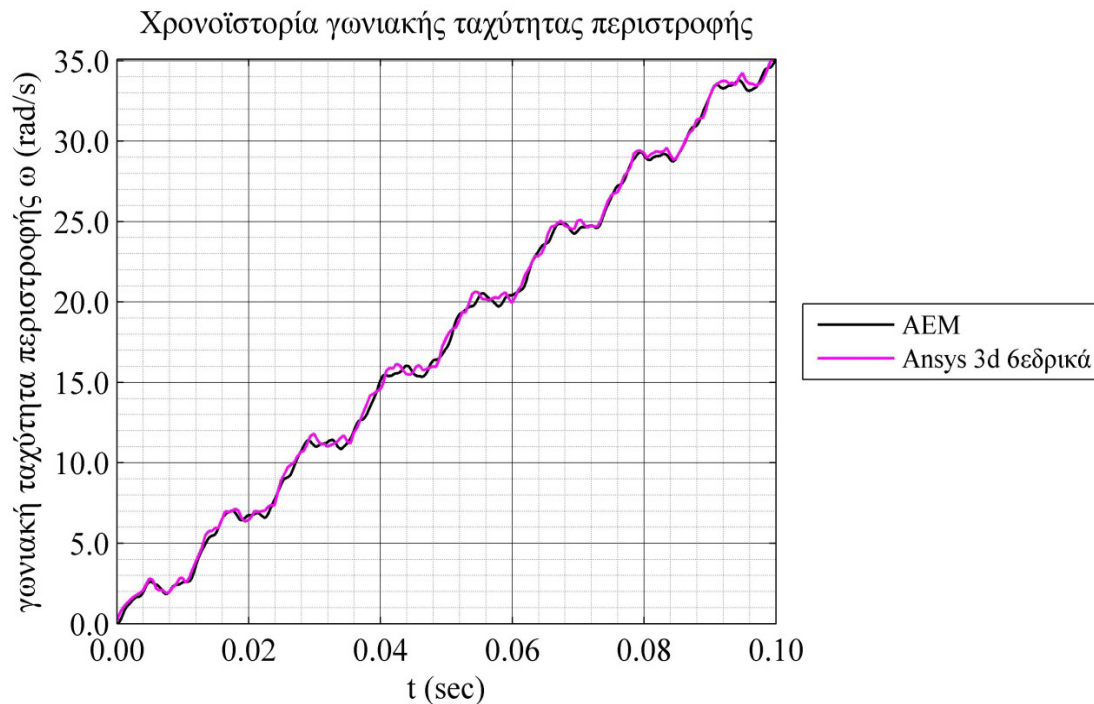


Σχήμα 5.3.2 Χρονοϊστορία εντός επιπέδου βέλους ακραίας διατομής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d δεδρικά).



Σχήμα 5.3.3 Χρονοϊστορία γωνίας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d δεδρικά).





Σχήμα 5.3.4 Χρονοϊστορία γωνιακής ταχύτητας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).

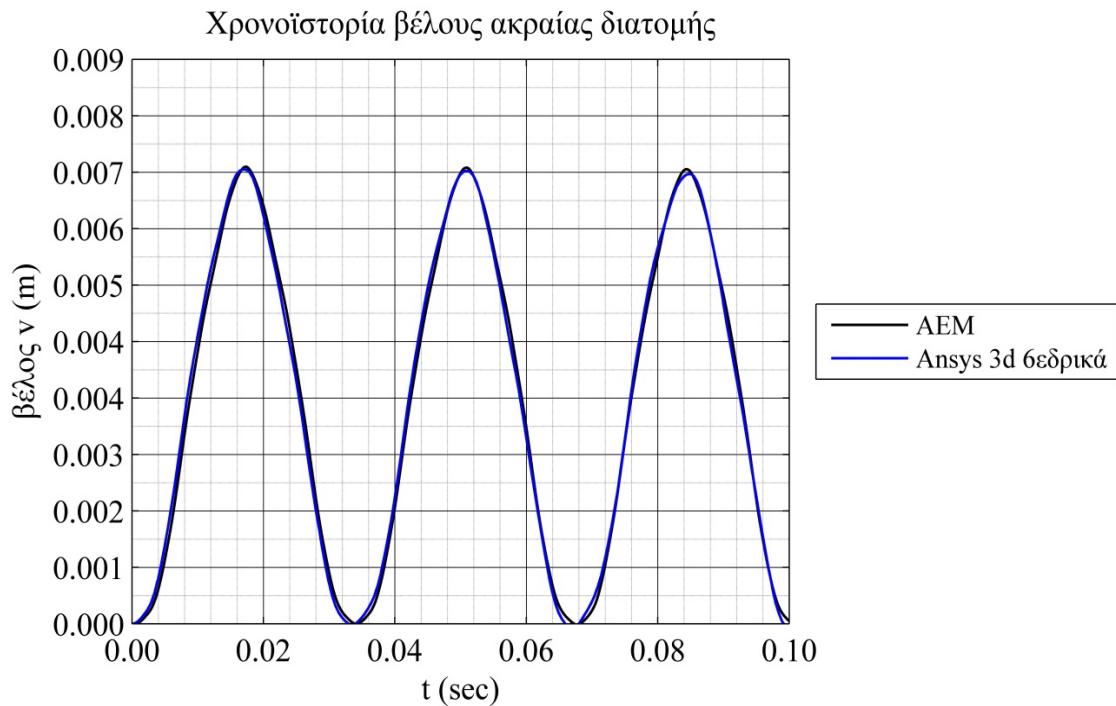
### 5.3.2 Με rigid hub

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων (AEM, Ansys) στην περίπτωση όπου υπάρχει rigid hub ( $a = 0.05m$ ). Η ροπή αδράνειας της μάζας του rigid hub ( $J_R$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής εκφράζεται συναρτήσει της ροπής αδράνειας της μάζας της δοκού ( $J$ ) ως προς τον άξονα περιστροφής ως  $J_R = 0.5J$ . Στο Σχήμα 5.3.5 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του εντός επιπέδου βέλους της ακραίας διατομής της δοκού ενώ στα Σχήματα 5.3.6 και 5.3.7 οι χρονοϊστορίες της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του φορέα, αντίστοιχα.

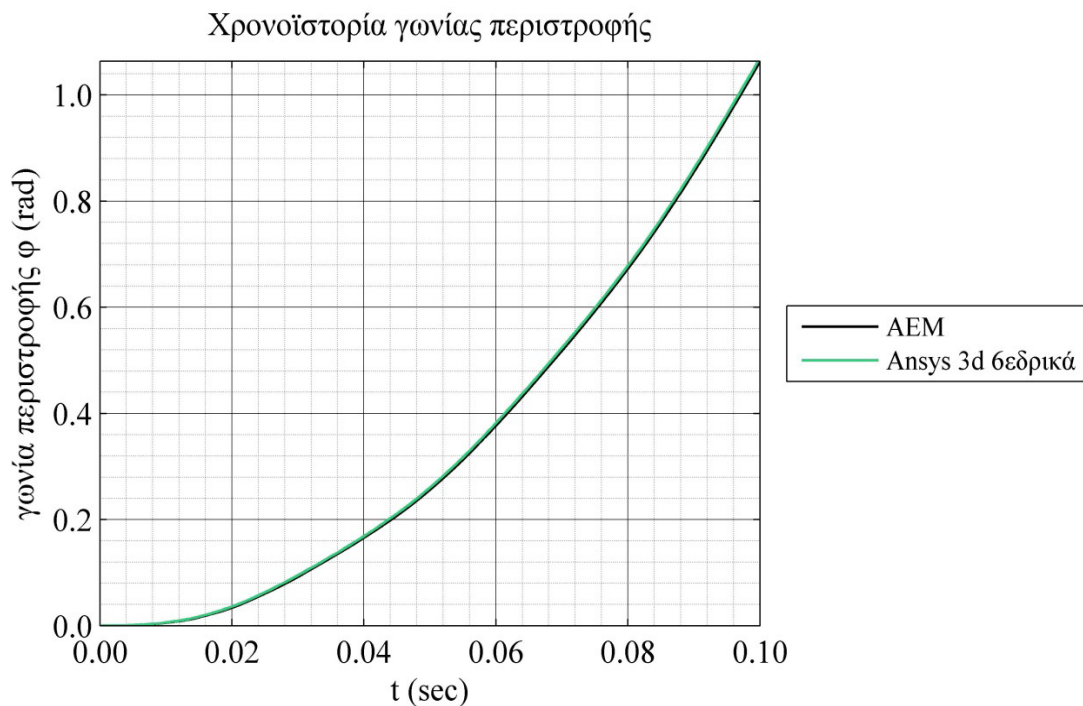
### 5.3.3 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

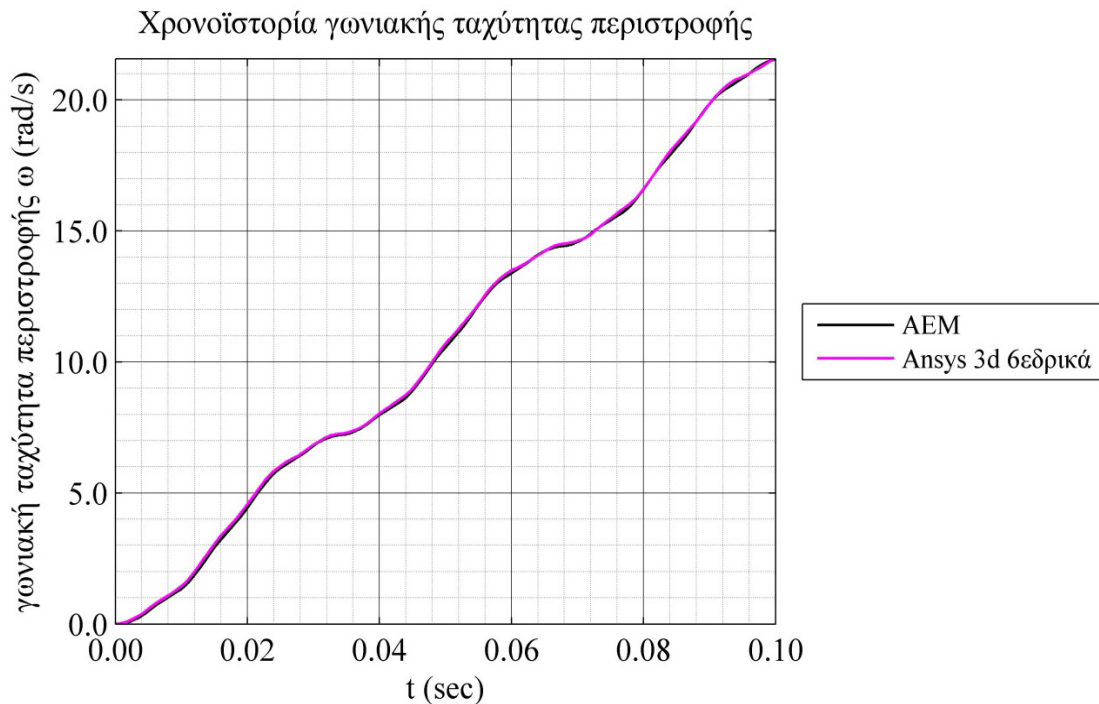
- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του Ansys πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε αλλαγή του προσήμου του βέλους και αύξηση της τιμής του.
- 3) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε μείωση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.



Σχήμα 5.3.5 Χρονοϊστορία βέλους ακραίας διατομής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



Σχήμα 5.3.6 Χρονοϊστορία γωνίας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



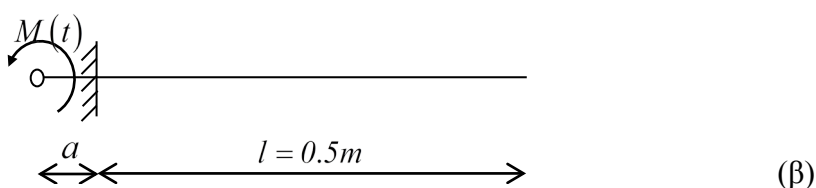
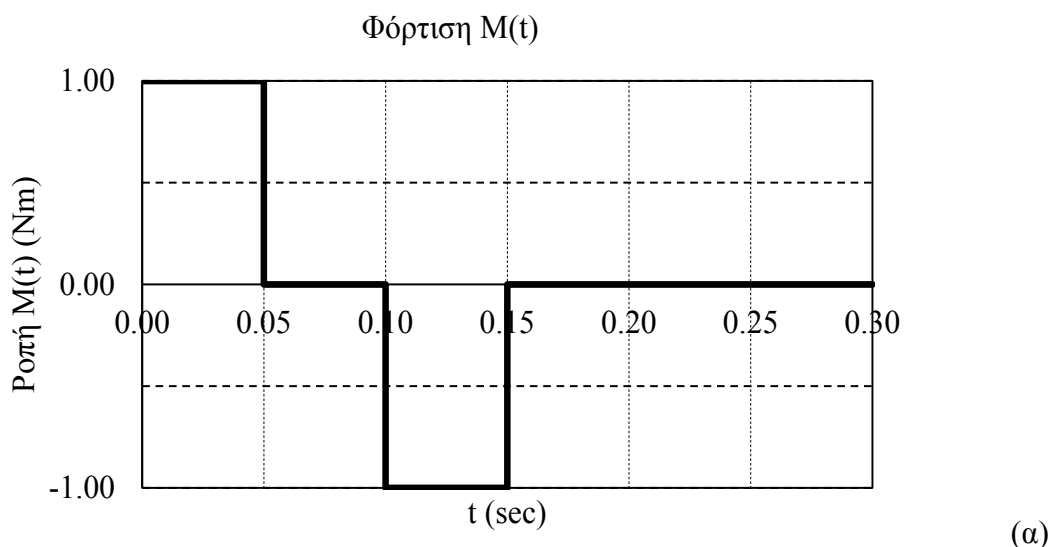
Σχήμα 5.3.7 Χρονοϊστορία γωνιακής ταχύτητας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, με rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).

## 5.4 3<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

Στο τρίτο αριθμητικό παράδειγμα αναλύεται η δοκός του 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος αυτού του κεφαλαίου για φόρτιση συγκεντρωμένη ροπής με χρονοϊστορία που παριστάνεται στο Σχήμα 5.4.1α και ασκείται στον άξονα περιστροφής του φορέα όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.β. Σε αυτό το αριθμητικό παράδειγμα εξετάστηκε μόνο η περίπτωση που υπάρχει rigid hub και είναι ίσο με  $a = 0.05m$  με  $J_R = 0.5J$ .

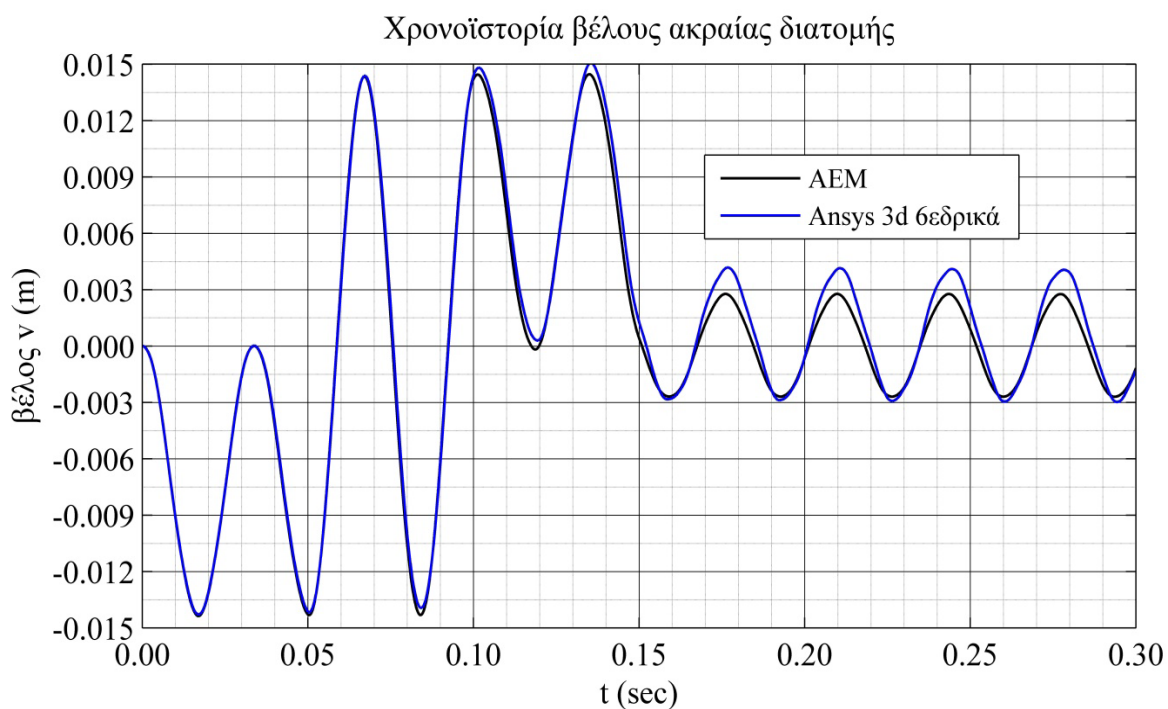
### 5.4.1 Συμπεράσματα

Το κυριότερο συμπέρασμα που προέκυψε από τις παραπάνω αναλύσεις είναι ότι παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του Ansys πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM ακόμα και σε αυτή την περίπτωση που η φόρτιση είναι πιο σύνθετη.

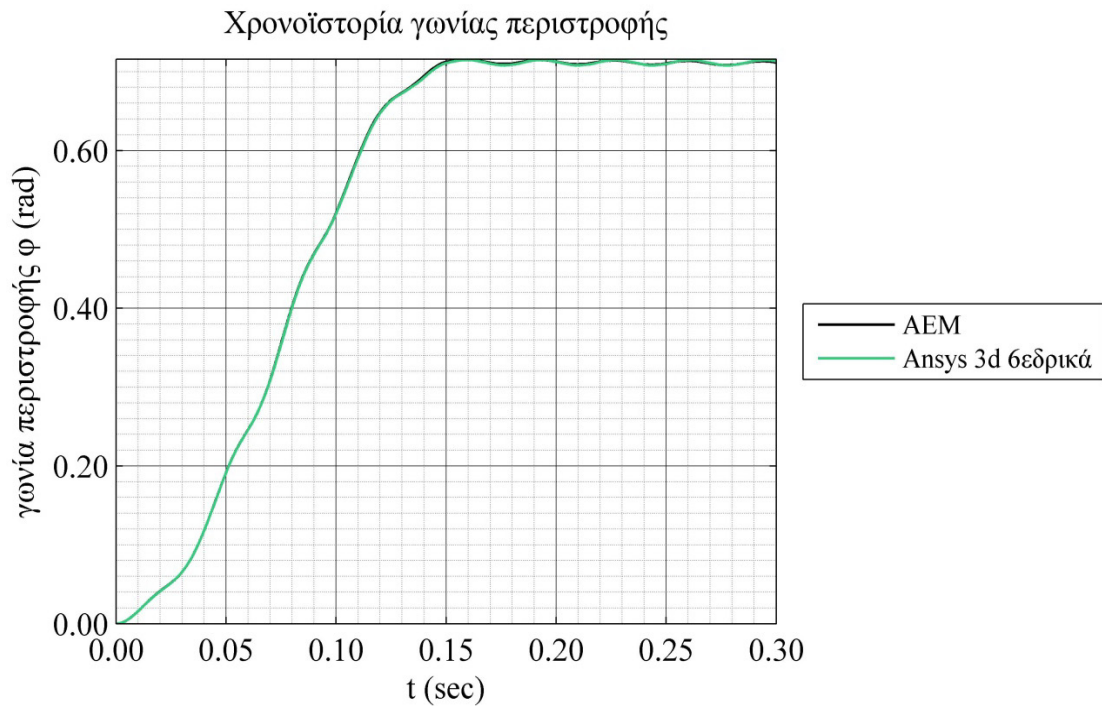


Σχήμα 5.4.1 Χρονοϊστορία φόρτισης 3<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος (α), στατικό σύστημα και φόρτιση (β).

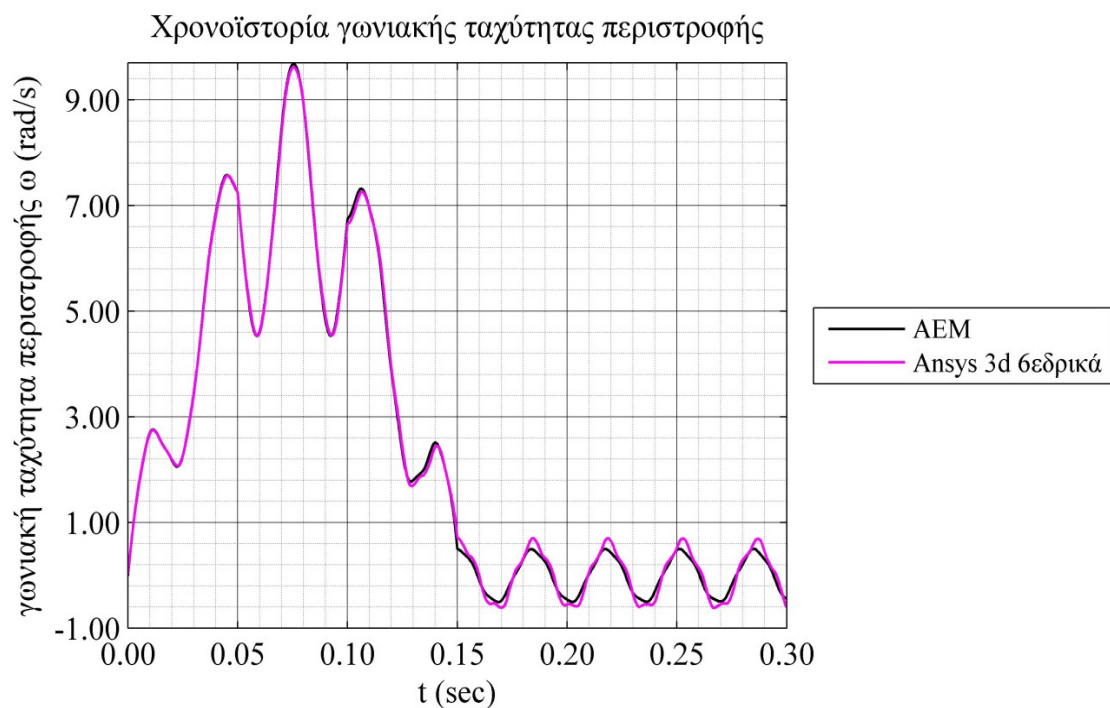
Στο Σχήμα 5.4.3 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του εντός επιπέδου βέλους της ακραίας διατομής της δοκού ενώ στα Σχήματα 5.4.3 και 5.4.4 οι χρονοϊστορίες της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του φορέα, αντίστοιχα.



Σχήμα 5.4.2 Χρονοϊστορία εντός επιπέδου βέλους ακραίας διατομής 3<sup>ου</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d δεδρικά).



Σχήμα 5.4.3 Χρονοϊστορία γωνίας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



Σχήμα 5.4.4 Χρονοϊστορία γωνιακής ταχύτητας περιστροφής 2<sup>ο</sup> αριθμητικού παραδείγματος, χωρίς rigid hub. Αποτελέσματα AEM και Ansys (3d βεδρικά).



## Συμπεράσματα

### Α μέρος

Για το Α μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων στο οποίο πραγματοποιήθηκε ιδιομορφική ανάλυση δοκών υπό περιστροφή τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του BModes πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μικρότερη μεταβολή προκαλεί σε αυτή η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.
- 3) Όσο αυξάνει ο αριθμός της ιδιομορφής τόσο μεγαλύτερη αύξηση προκαλεί στην αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα η αύξηση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.

### Β μέρος

Για το Β μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων στο οποίο πραγματοποιήθηκε εν χρόνω ανάλυση δοκών υπό περιστροφή τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα

- 1) Παρουσιάζεται ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της AEM και του Ansys πράγμα που επιβεβαιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της AEM. και για τις δύο περιπτώσεις αναλύσεων (με ή χωρίς rigid hub).
- 2) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε αλλαγή του προσήμου του βέλους και αύξηση της τιμής του.
- 3) Η προσθήκη του rigid hub οδηγεί σε μείωση της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής.





## Βιβλιογραφία

- [1] Κατσιαδέλης, Ι.Θ. (2002) Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- [2] Yigit A., Scott R.A., Ulsoy A.G. (1987) Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 2, pp. 201-210.
- [3] Tai Xing-yu, Ma Hui, Tan Zhen, Wen Bang-chun (2013) Dynamic characteristics of the continuous medium rotating beam model with rubbing fault, *Journal of Vibration and Shock*, Vol. 32, No.18, pp43-48.
- [4] Katsikadelis, J.T. (1994) The Analog Equation Method: A Powerful BEM-Based Solution Technique for Solving Linear and Non-linear Engineering Problems, *Boundary Element Method XVI*, pp.167–182.
- [5] Katsikadelis, J.T. (2002b) The Analog Equation Method: A Boundary-only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies, *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, pp.13–38.
- [6] NWTTC Design Codes (BModes by Gunjit Bir). <http://wind.nrel.gov/designcodes/preprocessors/bmodes/>. Last modified 26-June-2013; accessed 26-June-2013.
- [7] Ansys, Workbench 2.0 Framework, Version: 15.0.0.
- [8] Μώκος Β.Γ. (2007) Συμβολή στη Γενικευμένη Θεωρία Σύνθετων Ραβδωτών Φορέων με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, Ελλάδα.
- [9] Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Εφαρμοσμένη ανάλυση ραβδωτών και επιφανειακών φορέων», ΔΠΜΣ Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών, ΕΜΠ, Αθήνα.
- [10] Σημειώσεις προπτυχιακού μαθήματος «Αεροελαστικότητα – Αερακουστική», Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ, Αθήνα.