

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

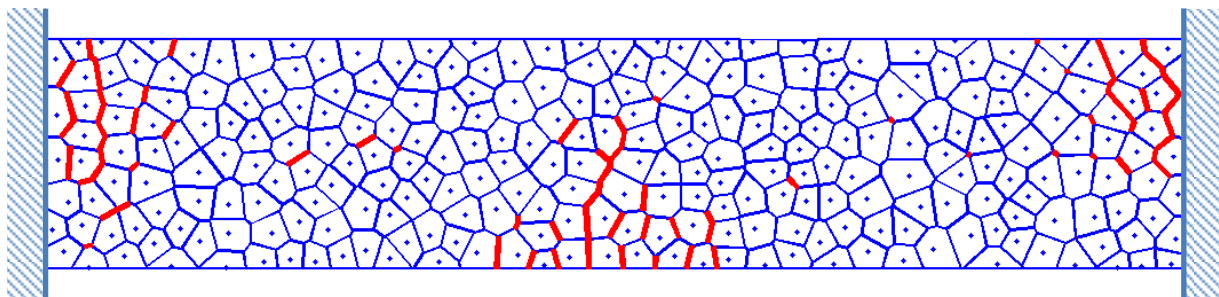
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΔΠΜΣ "Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών"

## ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σοφιανός Χρήστος

ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ  
ΜΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ  
ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ



ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Κουμούσης Βλάσης, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα | Οκτώβριος 2014



---

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την βαθιά μου εκτίμηση στον καθηγητή μου κ. Κουμούση Βλάση για την πολύτιμη καθοδήγησή του και τις απαραίτητες συμβουλές που μου έδινε ακούραστα και συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας. Θερμά τον ευχαριστώ.

---

---

---

---

## Περίληψη

### Θραυστομηχανική ανάλυση κατασκευών με σύστημα στερεών σωμάτων και ελαστοπλαστικών ελατηρίων.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενό της τη μελέτη των μοντέλων στερεών σωμάτων και ελατηρίων για τη θραυστομηχανική ανάλυση των κατασκευών και την ενσωμάτωση υστερητικών προσομοιωμάτων σε αυτά. Αρχικά γίνεται μία ιστορική αναδρομή στα διάφορα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί στην επιστήμη της Θραυστομηχανικής τα οποία μπορούν να διακριθούν σε συνεχή και διακριτά. Στην κατηγορία των διακριτών μοντέλων μπορεί να ενταχθεί και το δίκτυο Στερεών Σωμάτων και Ελατηρίων (Rigid Body Spring network). Αυτό βασίζεται στην έρευνα του Kawai (1978) και αποτελείται από δισδιάστατα ή τρισδιάστατα στερεά σώματα που συνδέονται μεταξύ τους στις διεπιφάνειές τους με μηδενικού μήκους ελατήρια. Αφού τα στερεά σώματα είναι απαραμόρφωτα η συνολική παραμόρφωση του μοντέλου προέρχεται μόνο από τις παραμορφώσεις των ενδιάμεσων ελατηρίων. Για τη διακριτοποίηση του χωρίου σε στερεά σώματα χρησιμοποιείται η τεχνική του διαγράμματος Voronoi όπως εφαρμόσθηκε από τον Bolander (1998). Για την προσομοίωση των ρωγμών χρησιμοποιείται ένα κριτήριο τύπου Mohr-Coulomb για τις ορθές και διατμητικές τάσεις σε κάθε διεπιφάνεια. Σε κάθε βήμα ελέγχονται όλα τα ζεύγη τάσεων με το κριτήριο θραύσης και επιτρέπεται μία μόνο θραύση ανά υπολογιστικό κύκλο μηδενίζοντας τις δυσκαμψίες των ελατηρίων στη διεπιφάνεια που έσπασε. Στη συνέχεια το μοντέλο στερεών σωμάτων και ελατηρίων επιλύεται για δυναμικά προβλήματα με ελαστικά ελατήρια. Τέλος το μοντέλο εμπλουτίζεται με ελαστοπλαστικά ελατήρια σύμφωνα με το προσομοίωμα Bouc-Wen, το οποίο είναι κατάλληλο για τη μελέτη της υστερητικής ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς του υλικού. Για όλες τις παραπάνω κατηγορίες παρουσιάζονται παραδείγματα και εφαρμογές που καταδεικνύουν την εγκυρότητα των μοντέλων που αναπτύχθηκαν.

---

---

---

# Abstract

## Fracture analysis using rigid body spring models and elastoplastic springs.

This postgraduate thesis is focusing on rigid body spring models in fracture mechanics and the incorporation of hysteretic models in their behavior. At first a brief historic reference concerning the models that have been developed over the years for fracture mechanics is presented. These are divided in continuous and discrete models. The Rigid Body Spring network constitutes a discrete model developed firstly by Kawai (1978). It consists of 2d or 3d rigid bodies that are connected with zero size spring elements in their interfaces. Since the bodies are rigid the models deformation comes only from the deformation of the springs. Voronoi diagrams are used for the spatial discretization as in Bolander (1998). Cracks are modelled using a Mohr-Coulomb type of criterion for normal and tangential stresses along the interfaces. In each load increment only one fracture is allowed and this is enforced by setting the stiffness of the broken springs equal to zero. In addition the formulation and solution of the dynamic problem of the Rigid Body Spring model is presented. Finally the model is extended to account for hysteretic elastoplastic behavior following smooth hysteretic models and more specifically the Bouc-Wen model which efficiently incorporates classical plasticity with no direct reference to the yield surface. Several examples are presented demonstrating the validity and effectiveness of all the proposed models.

---

---



---

# Περιεχόμενα

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή</b>	<b>10</b>
1.1 Γενικά	11
1.2 Διάφοροι τύποι βλαβών	13
1.3 Προσομοιώματα – Υπολογιστικές μέθοδοι για την ανάλυση των ρωγμών	15
1.3.1 Mesh-free μέθοδος	19
1.3.2 X-FEM	22
1.3.3 Discrete Element Method – DEM	23
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Μοντέλα Πλέγματος και Δίκτυα Στερεών Σωμάτων-Ελατηρίων</b>	<b>26</b>
2.1 Κλασικά Μοντέλα Πλέγματος	28
2.2 Rigid Body Spring Network model (RBSN) – Δίκτυα Απαραμόρφωτων Σωμάτων και Ελατηρίων (ΔΑΣΕ)	30
2.2.1 Διαγράμματα Voronoi	31
2.2.2 Μητρώο ακαμψίας για δισδιάστατα στοιχεία των RBSN	35
2.2.3 Αναπαράσταση των ρωγμών στα RBSN	40
2.2.4 Βασικές σχέσεις επίλυσης	43
2.2.5 Ελαστοπλαστικά ελατήρια Bouc-Wen	45
2.2.6 Εφαρμογή Bouc – Wen στα RBSN	48
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εφαρμογές</b>	<b>52</b>
3.1 Στατικά προβλήματα	53
3.1.1 Αμφιέριστη δοκός	54
3.1.2 Πρόβολος	55
3.1.3 Αμφίπακτη δοκός	56
3.1.4 Διερεύνηση στην επιβολή του φορτίου	57
3.1.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων για διαφορετικές διακριτοποιήσεις	59
3.2 Στατικά προβλήματα με δημιουργία ρωγμών	65
3.2.1 Αμφιέριστη δοκός	67
3.2.2 Μονόπακτη δοκός	70
3.2.3 Αμφίπακτη δοκός	73
3.3 Δυναμικά προβλήματα	76
3.4 Δυναμικά προβλήματα με ελαστοπλαστικά ελατήρια	78
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Συμπεράσματα – Μελλοντική έρευνα</b>	<b>86</b>

---

---

---

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Γενικά

Τα τελευταία 50 χρόνια η θραυστομηχανική έχει εξελιχθεί σε έναν αυτόνομο επιστημονικό κλάδο που τοποθετείται ανάμεσα στη Μηχανική, την Επιστήμη των υλικών και τη Φυσική των στερεών σωμάτων. Κύριο αντικείμενό της είναι η μελέτη της διάνοιξης και της διάδοσης ρωγμών σε διάφορα υλικά. Στο πλαίσιο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες και προσομοιώματα για τη μελέτη, τη συμπεριφορά και τη διάδοση ρωγμών στα διάφορα υλικά υπό στατικές, δυναμικές ή κυκλικές φορτίσεις.

Στη σύγχρονη εποχή η αποφυγή και η αποτίμηση των ρωγμών και της ζημιάς γενικότερα παίζουν σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό και τη διαστασιολόγηση κατασκευών, μηχανολογικού εξοπλισμού ή εγκαταστάσεων με σκοπό την ασφάλεια την αντοχή και την αξιοπιστία τους. Κατά το σχεδιασμό σε πολλά υλικά μπορεί να προϋπάρχουν διάφορα ελαττώματα σε μικροσκοπικό ή μακροσκοπικό επίπεδο τα οποία οφείλεται να ληφθούν υπόψη.

Ο όρος θραύση περιγράφει τη τοπική αποκόλληση του υλικού σε ένα στερεό σώμα. Περιγράφει γενικότερα τις διαδικασίες που ή διακόπτουν μερικώς τη συνέχεια του στερεού ή το καταστρέφουν ολοκληρωτικά. Στη μικροκλίμακα η διαδικασία της θραύσης προέρχεται από τη φύση και τις ιδιότητες της μικροδομής. Αντίθετα η γενική μορφή της θραύσης στο μακροσκοπικό επίπεδο περιλαμβάνει τη δημιουργία και διάδοση μίας ή περισσότερων εμφανών ρωγμών στο στερεό. Στην παρακάτω Εικόνα (1.1) φαίνονται παραδείγματα ρωγμών σε μικροσκοπικό και μακροσκοπικό επίπεδο [1].



*Εικόνα 1.1. Αριστερά: Μικρορωγμή σε πλάστιμο σίδηρο. Δεξιά: Μακρορωγμή σε κομμάτι πάγου[1].*

Η ασφάλεια των κατασκευών του μηχανικού αποτελεί το πιο σημαντικό μέρος ενός σχεδιασμού. Η ξαφνική και καταστροφική θραύση είναι από τους πιο επικίνδυνους τύπους αστοχίας και έχει οδηγήσει στο παρελθόν σε σημαντικές αστοχίες. Επίσης στις περισσότερες περιπτώσεις αστοχιών οι λόγοι είναι μη ανιχνεύσιμα προϋπάρχοντα ελαττώματα, ανεπαρκής διαστασιολόγηση ή εφαρμογή υλικών με ελλιπή αντοχή. Σήμερα μεγάλες κτιριακές εγκαταστάσεις από σκυρόδεμα και χάλυβα, αεροπλάνα και τρένα υψηλής ταχύτητας από καινούργια υψηλής τεχνολογίας υλικά είναι μερικά από τα έργα μηχανικού που καταγράφουν τη τεχνική πρόοδο σε αυτό το τομέα.

---

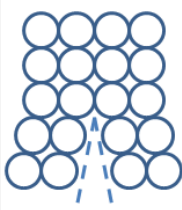

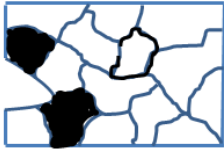
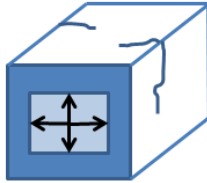
## 1.2 Διάφοροι τύποι βλαβών

Οι κατασκευές και τα μέλη τους υποβάλλονται σε διάφορους τύπους φορτίων όπως δυνάμεις, παραμορφώσεις, επιθετικά περιβάλλοντα και εναλλαγές θερμοκρασιών. Αυτές οι φορτίσεις μπορεί να είναι μόνιμες ή χρονικά/χωρικά μεταβαλλόμενες και προκαλούν ζημιές στην κατασκευή που σταδιακά μπορεί να οδηγήσουν στην καταστροφή των μελών της ή και την κατάρρευσή της.

Είναι αρκετά σημαντικό για το Μηχανικό να είναι σε θέση να μπορεί να προβλέψει τη δημιουργία βλαβών καθώς και την εξάπλωσή τους και να κατανοήσει το μηχανισμό τους. Βλάβες γενικά προϋπάρχουν στις κατασκευές σε μορφή ελαττωμάτων στη μικροκλίμακα και στη μεσοκλίμακα και μπορεί να εξαπλώνονται σε όλο τον όγκο του υλικού ή μόνο στην επιφάνειά του με ανομοιόμορφη κατανομή και διαφορές ως προς τον προσανατολισμό και το μέγεθος. Τα ελαττώματα αυτά έχουν τη μορφή επιφανειών, ρωγμών ή κοιλοτήτων που μπορούν να εξαπλώνονται και να συγχωνεύονται. Η ταχύτητα διάδοσης των ρωγμών ποικίλει από αρκετά αργή μέχρι απότομη και καταστροφική. Είναι φανερό ότι η γνώση όλων των αναφερθέντων μηχανισμών καθώς και η δυνατότητα μελέτης και πρόβλεψης της θραύσης είναι πολύ σημαντική για το μηχανικό.

Η πρώτη φάση και ίσως η πιο σημαντική είναι η έναρξη της ρωγμής. Για να συμβεί πρέπει να σπάσουν οι δεσμοί μεταξύ των ατόμων του υλικού διαδικασία η οποία απαιτεί συγκέντρωση μεγάλων τοπικών τάσεων που εντοπίζονται στις άκρες τους. Η διάδοσή τους ή μη εξαρτάται άμεσα από αυτές τις συγκεντρωμένες τάσεις και ο υπολογισμός του κρίσιμου μεγέθους της ρωγμής που θα οδηγήσει σε αστοχία είναι από τους κύριους υπολογισμούς της Θραυστομηχανικής.

Ανάλογα με τη κλίμακα που εξετάζεται ένα υλικό οι ρωγμές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν και να εξεταστούν από διάφορους επιστημονικούς κλάδους [1]. Στην Εικόνα (1.2) φαίνεται μια τέτοια κατηγοριοποίηση.

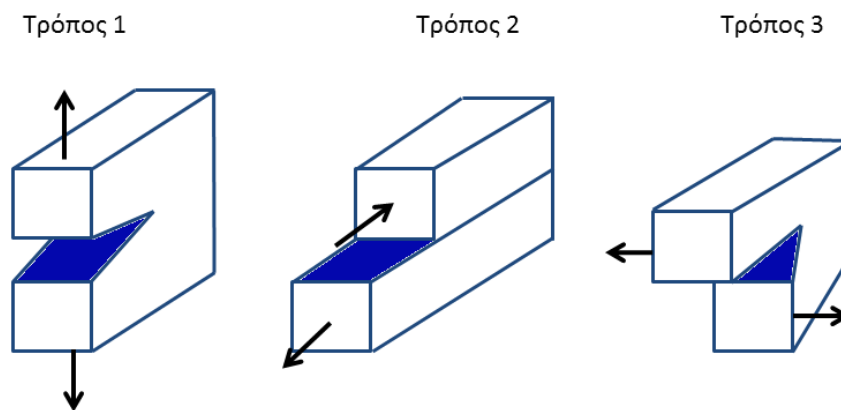
<u>Φυσική</u>	<u>Επιστήμη Υλικών - Θραυστομηχανική</u>		<u>Μηχανική Στερεών Σωμάτων</u>
Νάνο-κλίμακα	Μίκρο-κλίμακα	Μέσο-κλίμακα	Μάκρο-κλίμακα
			
$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$ μέτρα
Ατομικοί δεσμοί	Μικρο-απομακρύνσεις	Ελαττώματα	Ρωγμές

Εικόνα 1.2. Κατηγοριοποίηση ρωγμών ανάλογα με τη κλίμακα.

Υπάρχουν τρεις τρόποι εφαρμογής της δύναμης σε μία ρωγή που την οδηγούν στο να μεγαλώσει και να διαδοθεί [2]. Αυτοί είναι:

- Τρόπος 1: Άνοιγμα (Opening mode). Σε αυτό τον τόπο έχουμε εφελκυστικές τάσεις κάθετες στο επίπεδο της ρωγμής.
- Τρόπος 2: Ολίσθηση (Sliding mode). Εδώ έχουμε διατμητικές τάσεις παράλληλες στο επίπεδο της ρωγμής και κάθετες στο μέτωπο της ρωγμής.
- Τρόπος 3. Σχίσιμο (Tearing mode). Σε αυτή τη περίπτωση οι διατμητικές τάσεις είναι παράλληλες στο επίπεδο της ρωγμής και παράλληλες στο μέτωπο της ρωγμής.

Οι τρεις αυτοί τρόποι ανοίγματος και διάδοσης ρωγμών φαίνονται σχηματικά στην παρακάτω Εικόνα (1.3).



Εικόνα 1.3. Οι 3 τρόποι ανοίγματος ρωγμής

### 1.3 Προσομοιώματα – Υπολογιστικές μέθοδοι για την ανάλυση των ρωγμών

Σε αυτή την ενότητα θα επιχειρηθεί να γίνει μία αναδρομή στις διάφορες υπολογιστικές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια για την προσομοίωση και ανάλυση των ρωγμών [1]. Από ιστορικής πλευράς οι εξελίξεις στη Θραυστομηχανική ακολουθούν στενά τις αναλυτικές και αριθμητικές τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί στη Μηχανική του συνεχούς μέσου.

Στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα η θεωρία της ελαστικότητας ήταν αρκετά ώριμη και μπορούσε ήδη να αντιμετωπίσει προβλήματα πλακών με οπές για ομογενή και γραμμικά ελαστικά υλικά (Kirsch, Inglis) [3], [4]. Το 1909 ο Kolosov [5] ανέπτυξε σύνθετες συναρτήσεις τάσεων οι οποίες επεκτάθηκαν αργότερα και από άλλους ερευνητές όπως Muskhelishvili [6] και Westergaard [7] μεταξύ άλλων. Η πρώτη λύση για ρωγμές σε προβλήματα επίπεδης έντασης ήρθε από τον Inglis το 1913 και αποτέλεσε τη βάση για τη έννοια του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας (energy release rate) που παρουσιάστηκε από τον Griffith το 1921 [8]. Αργότερα το 1946 ο Sneddon [9] κατάφερε να βρει λύση σε προβλήματα ελλειπτικών και κυκλικών ρωγμών με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού (method of integral transformation). Το 1957 ο Williams [10] υπολόγισε τις κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις (series of eigenfunctions) για την κατανομή των τάσεων στην άκρη των οπών σε



---

επίπεδα προβλήματα. Τέλος ο Irwin [11] θεμελίωσε την έννοια των πολλαπλασιαστών τάσης (intension stress factors) μια έννοια που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα στη Θραυστομηχανική.

Η έρευνα του Griffith είναι ίσως η πιο σημαντική έρευνα στο τομέα της Θραυστομηχανικής και αποτέλεσε το έναυσμα για τη περαιτέρω μελέτη σε αυτό το πεδίο. Ο Griffith ήταν μηχανικός αεροναυπηγός και ανέπτυξε τη θεωρία του κατά τη διάρκεια του πρώτου παγκοσμίου πολέμου. Αφορμή για τη μελέτη του ήταν η διαπίστωση δύο αντιφατικών δεδομένων:

- Η τάση που χρειάζεται για να σπάσει ένα γυαλί είναι γύρω στα 100 MPa (15.000 Psi).
- Η θεωρητική τάση που χρειάζεται για να σπάσουν οι ατομικοί δεσμοί του είναι περίπου 10.000 MPa (1.500.000 Psi).

Ο Griffith υπέθεσε ότι η μειωμένη τάση που χρειάζεται για να σπάσει ένα κομμάτι γυαλί μακροσκοπικά σε σχέση με την τάση που απαιτείται για το σπάσιμο των ατομικών δεσμών του οφείλεται στην ύπαρξη μικροσκοπικών ελαττωμάτων στο υλικό.

Για να επιβεβαιώσει την υπόθεσή του για την ύπαρξη ελαττωμάτων πραγματοποίησε πειράματα όπου δημιούργησε τεχνητά μακροσκοπικά ελαττώματα στο γυαλί με τη μορφή επιφανειακών ρωγμών πολύ μεγαλύτερων από όποιες μικροσκοπικές ρωγμές. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων του ήταν ότι το γινόμενο της ρίζας του μήκους της ρωγμής με την τάση στη ρωγμή ήταν σχεδόν σταθερό:

$$\sigma_f \sqrt{a} \approx C \quad (1)$$

Όμως το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη θεωρία ελαστικότητας η οποία προβλέπει ότι οι τάσεις στην άκρη της ρωγμής απειρίζονται. Συνεπώς ο Griffith ακολούθησε μία θερμοδυναμική προσέγγιση για να εξηγήσει τα αποτελέσματά του.

Αρχικά υπολόγισε την δυναμική ενέργεια (potential energy) που αποθηκεύεται στο υλικό υπό μονοαξονική ένταση. Ύστερα δέσμευσε τα σύνορα έτσι ώστε το φορτίο να

---

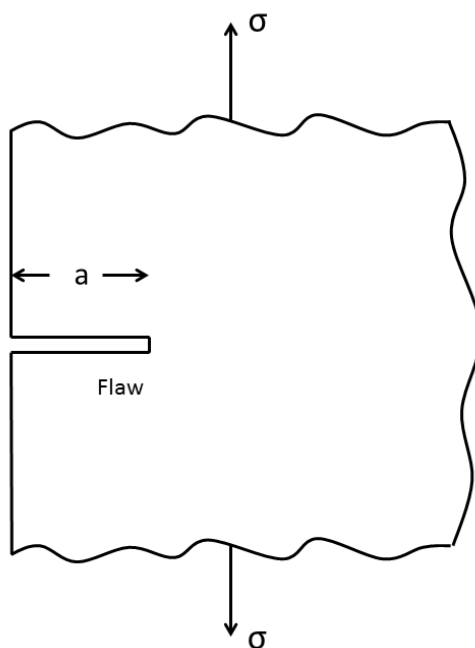
μην παράγει έργο και εισήγαγε μία ρωγμή στο δείγμα η οποία χαλαρώνει τις τάσεις και άρα ελαττώνει την ελαστική ενέργεια (elastic energy) αλλά αυξάνει την επιφανειακή ενέργεια (surface energy) του δείγματος. Η διαφορά της επιφανειακής ενέργειας μείον την ελαστική ενέργεια είναι η αλλαγή στην ελεύθερη ενέργεια (free energy) και την υπολόγισε συναρτήσει του μήκους της ρωγμής  $a$ . Τελικά κατέληξε ότι:

$$C = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi}} \quad (2)$$

Όπου:

- $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.
- $\gamma$  είναι η πυκνότητα επιφανειακής ενέργειας του υλικού.

Η ταύτιση με τα πειραματικά μετρούμενα αποτελέσματα ήταν πλήρως ικανοποιητική.



Εικόνα1.4.. Τεχνητή ρωγμή μήκους  $a$  στα πειράματα του Griffith.

Παρότι που η θεωρία του Griffith έδινε σωστά αποτελέσματα για εύθραυστα υλικά όπως το γυαλί, σε πλαστικά υλικά όπως ο χάλυβας δεν είναι ρεαλιστική. Για τα πλαστικά υλικά η επιφανειακή ενέργεια ( $\gamma$ ) που προβλέπει η θεωρία του Griffith είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερη από την πραγματική.

---

Στα όλκιμα υλικά αναπτύσσεται μία πλαστική ζώνη στην άκρη της ρωγμής και όσο αυξάνει το επιβαλλόμενο φορτίο μεγαλώνει και το μέγεθος αυτής της πλαστικής ζώνης. Αυτό οδηγεί το υλικό που βρίσκεται πίσω από τη ρωγμή να αποφορτίζεται. Οι κύκλοι αυτοί φόρτισης και επαναφόρτισης οδηγούν στην έκλυση ενέργειας με τη μορφή θερμότητας. Αυτό παρατήρησε ο G.R.Irwin και πρόσθεσε ένα όρο στην ενεργειακή σχέση του Griffith. Η συνολική ενέργεια που εκλύεται είναι το άθροισμα δύο όρων:

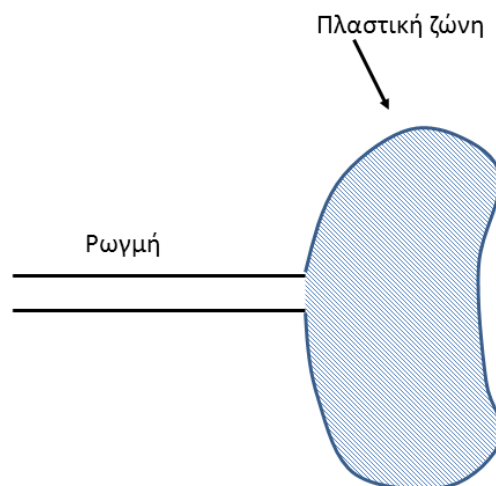
$$G = 2\gamma + G_p \quad (3)$$

Όπου:

- $\gamma$  είναι η επιφανειακή ενέργεια.
- $G_p$  είναι η πλαστική ενέργεια που εκλύεται.

Η ενεργειακή σχέση του Griffith μετά τη διόρθωση του Irwin γίνεται:

$$\sigma_f \sqrt{a} = \sqrt{\frac{EG}{\pi}} \quad (1)$$



Εικόνα 1.5. Δημιουργία πλαστικής ζώνης στο άκρο ρωγμής.

Οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής, όπως είναι η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (finite difference method) ή ο μετασχηματισμός Fourier, δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά μέχρι την εξέλιξη των υπολογιστών τη δεκαετία του 1960. Αυτές χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για την

---

αντιμετώπιση των προβλημάτων των ρωγμών αλλά σύντομα αντικαταστάθηκαν από τη πιο αποτελεσματική μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (finite element method, FEM). Πρωτοπόροι στην ανάπτυξη των πεπερασμένων στοιχείων ήταν οι Argyris και μετέπειτα οι Belytschko, Hughes, Wilson και Bathe μεταξύ άλλων. Ακολούθησε η ανάπτυξη της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (BEM) η οποία και εφαρμόστηκε σε προβλήματα ρωγμών από τους Cruse και Brebbia. Αποτέλεσμα των νέων αυτών μεθόδων ήταν η μεγάλη πρόοδος στην επιστήμη της Θραυστομηχανικής ειδικά για όγκιμα υλικά και η δυνατότητα ανάλυσης πολύπλοκων ρωγμών σε σύνθετες κατασκευές με μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού.

Τα τελευταία χρόνια νέες αριθμητικές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί όπως οι mesh-free FEM ή BEM, η μέθοδος διακριτών στοιχείων (discrete element method DEM), μέθοδοι σωματιδίων (particle methods) καθώς και η μέθοδος των X-FEM που θα παρουσιαστούν συνοπτικά στη συνέχεια.

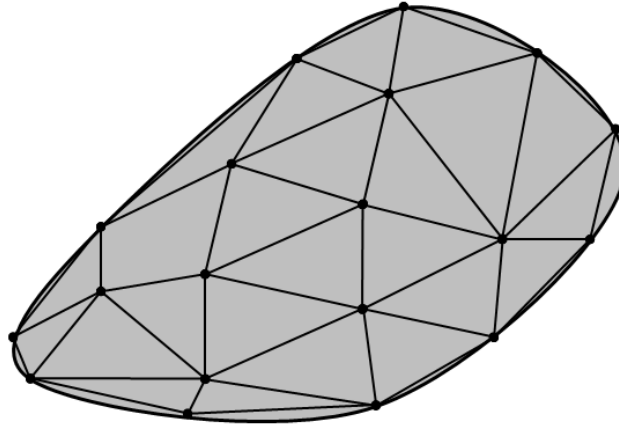
### 1.3.1 Mesh-free μέθοδος

Όταν το υλικό που θέλουμε να προσομοιώσουμε μπορεί να κινηθεί, όπως στη ρευστοδυναμική ή αναμένουμε μεγάλες παραμορφώσεις, η συνδεσμολογία των κόμβων του δικτύου είναι δύσκολο να παραμείνει ανεπηρέαστη χωρίς να εισαχθούν λάθη στους υπολογισμούς. Επίσης στην περίπτωση των ρωγμών κόμβοι μπορεί να καταστρέφονται ή να δημιουργούνται κατά τη διάρκεια ανοίγματος και διάδοσης μιας ρωγμής. Στις περιπτώσεις των πεπερασμένων στοιχείων ή των συνοριακών στοιχείων χρησιμοποιείται δίκτυο κόμβων που συνδέονται μεταξύ τους με στοιχεία με ένα προκαθορισμένο τρόπο όπως φαίνεται στην Εικόνα και αποτελεί το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων (grid).

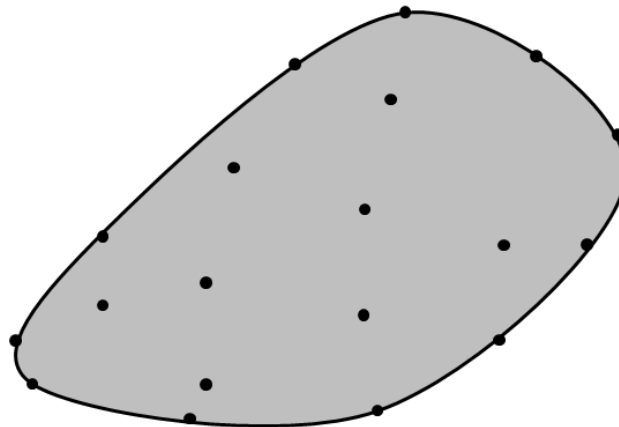
Οι mesh-free μέθοδοι χρησιμοποιούν ένα σύνολο κόμβων διασκορπισμένων μέσα στο χωρίο καθώς και στα σύνορά του, με σκοπό να το αναπαραστήσουν και όχι να

---

το διακριτοποιήσουν Εικόνα (1.7). Επίσης η μη ύπαρξη δικτύου σημαίνει ότι δεν χρειάζεται καμία πληροφορία ή σχέση μεταξύ των κόμβων.



Εικόνα 1.6. Διακριτοποίηση χωρίου με κόμβους και στοιχεία



Εικόνα 1.7. Mesh-free μέθοδος

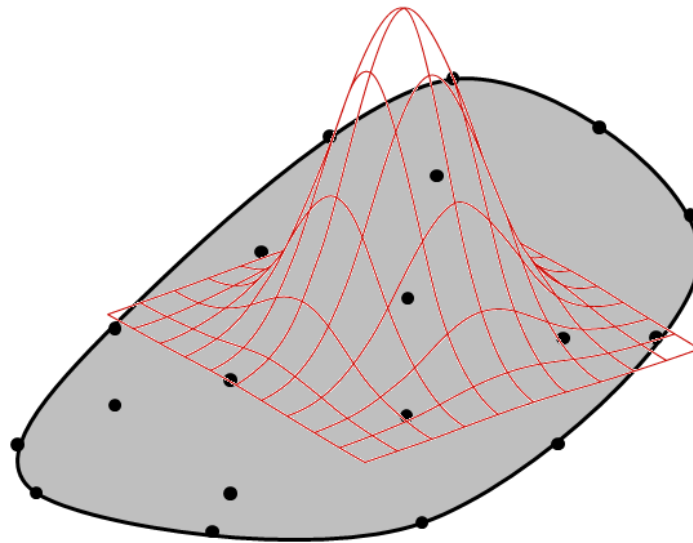
Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούνται επίσης συναρτήσεις σχήματος και κόμβοι αλλά διαφέρουν ως προς τα Πεπερασμένα Στοιχεία στην κατασκευή τους. Χρησιμοποιείται επιπρόσθετα ένα υποστηρικτικό δίκτυο (support domain) όπου για κάθε σημείο  $x$  ορίζεται μία σφαίρα συγκεκριμένης διαμέτρου που καθορίζει τον αριθμό των κόμβων που θα χρησιμοποιηθούν για να προσεγγίσουν τη τιμή της συνάρτησης στο σημείο  $x$ . Οι τιμές των μεταβλητών παρεμβάλλονται

---

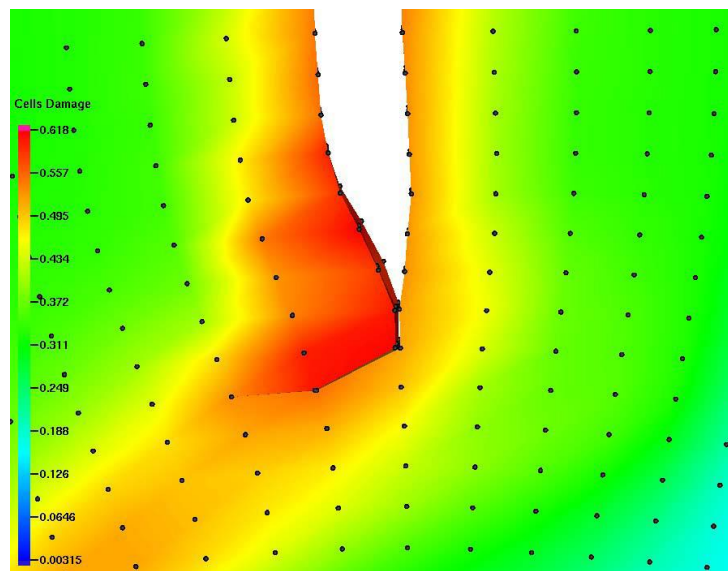
χρησιμοποιώντας τιμές από τους κόμβους που βρίσκονται εντός του υποστηρικτικού δικτύου. Μαθηματικά η πιο πάνω διατύπωση έχει ως εξής:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) u_j \quad (2)$$

Στις επόμενες εικόνες παρουσιάζονται ένα παράδειγμα του υποστηρικτικού δικτύου καθώς και ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου που αφορά ανάπτυξη ρωγμής σε κύλινδρο υπό πίεση με mesh free μέθοδο.



Εικόνα 1.8. Παράδειγμα υποστηρικτικού δικτύου για συγκεκριμένο κόμβο (support domain)



Εικόνα 1.9. Παράδειγμα ανάλυσης ρωγμής με Mesh-free μέθοδο [12].

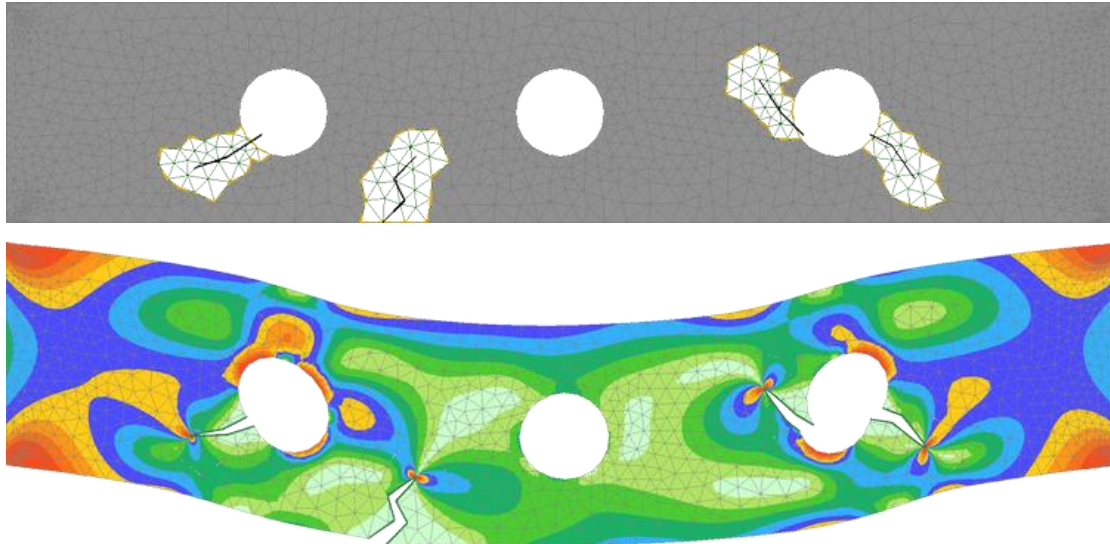
---

### 1.3.2 X-FEM

Η Διευρυμένη Μέθοδος Πεπερασμένων στοιχείων (extended finite element method XFEM) είναι μία αριθμητική μέθοδος που ενισχύει την κλασική μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων εμπλουτίζοντας το χώρο των λύσεων με ασυνεχείς συναρτήσεις για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Παρουσιάστηκε από τον Ted Belytschko το 1999 για την επίλυση προβλημάτων με τοπικά χαρακτηριστικά, που δεν μπορούν εύκολα να λυθούν με τεχνικές βελτίωσης του δικτύου (mesh refinement).

Η προσομοίωση και μελέτη των ρωγμών ήταν από τις πρώτες εφαρμογές που μελετήθηκαν με αυτή τη μέθοδο. Στη βασική της διατύπωση οι ασυνεχείς συναρτήσεις σχήματος (discontinuous basis functions) προστίθενται στις κλασικές πολυωνυμικές συναρτήσεις για τα στοιχεία τα οποία διασταυρώνονται με τη ρωγμή για να συμπεριλάβουν τις μετακινήσεις του ανοίγματος. Με αυτό το τρόπο το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων παραμένει αμετάβλητο και δεν χρειάζεται να ανανεωθεί για να ακολουθήσει τη διάδοση της ρωγμής.

Μεταγενέστερες έρευνες αποδείξαν ότι η μέθοδος μπορεί να γενικευτεί για προβλήματα που περιλαμβάνουν μοναδικότητες (singularities), σε διεπιφάνειες υλικών και σε υλικά με κενά. Η μέθοδος αυτή έχει περιληφθεί και σε εμπορικούς κώδικες όπως το Abaqus [13]. Στην Εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου XFEM σε ένα δοκάρι με κενά όπως προκύπτει από την ανάλυση με το πρόγραμμα GetFEM++ [14]. Ας παρατηρηθεί ότι η ρωγμές διαπερνούν τα στοιχεία και δεν χρειάζεται να ακολουθούν μια προκαθορισμένη πορεία.



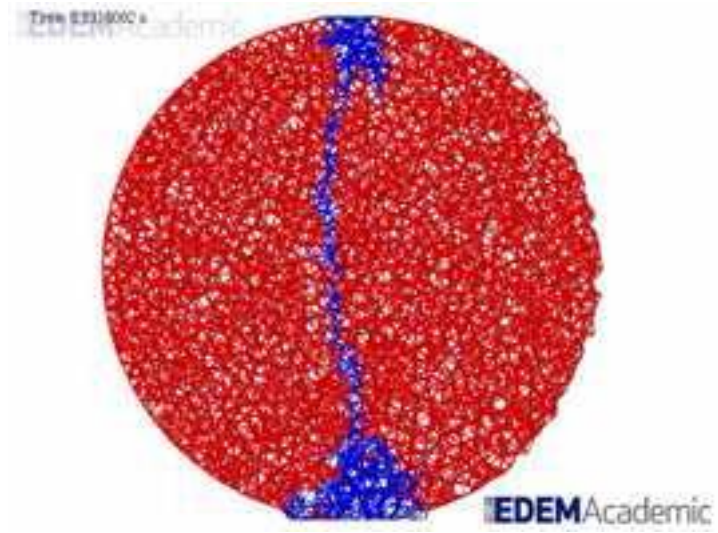
Εικόνα 1.10. Εφαρμογή XFEM για ρωγμές σε δοκό.

### 1.3.3 Discrete Element Method - DEM

Η μέθοδος αυτή των Διακριτών Στοιχείων (Discrete Element Method - DEM) περιλαμβάνει όλες εκείνες τις αριθμητικές μεθόδους που ασχολούνται με την επίλυση της κίνησης και της αλληλεπίδρασης μεγάλου αριθμού σωματιδίων. Τα διακριτά στοιχεία μπορούν να αποτελούνται από περίπλοκες γεωμετρίες (όπως πολύεδρα). Είναι προφανές ότι σε μοντέλα με εκατομμύρια στοιχεία οι υπολογισμοί γίνονται χρονοβόροι καθώς πρέπει να ελέγχονται πέρα από τη μετάδοση δυνάμεων τις παραμορφώσεις και οι επαφές μεταξύ των στοιχείων.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι για τη γρήγορη ταξινόμηση των κοντινότερων γειτόνων ενός στοιχείου (nearest neighbor sorting) έτσι ώστε να χρειάζεται να ελέγχεται η επαφή του με αυτά σε κάθε υπολογιστικό βήμα και όχι με όλα τα στοιχεία του μοντέλου.





*Εικόνα 1.11. Εφαρμογή DEM σε κύλινδρο από σκυρόδεμα υπό εφελκυστική δύναμη [15].*

---

---

---

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

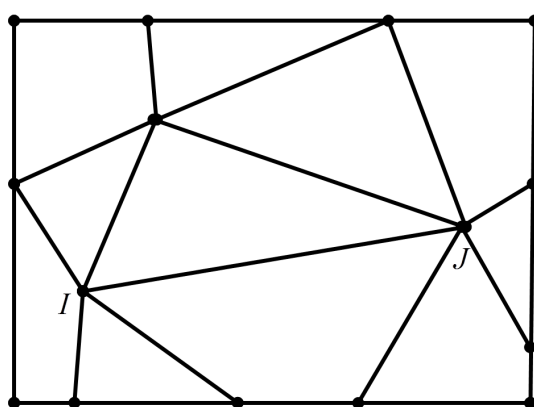
Μοντέλα πλέγματος και Δίκτυα Στερεών  
Σωμάτων - Ελατηρίων

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Lattice models και Rigid-Body-Spring Networks

Τα μοντέλα πλέγματος (lattice models) έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους ως εργαλεία για αριθμητική προσομοίωση. Από τη Φυσική και την προσομοίωση ύλης σε ατομικό επίπεδο [16], τη Ρευστοδυναμική και τη μέθοδο πλέγματος Boltzmann (lattice Boltzmann method ) [17], μέχρι την επιστήμη των υλικών [18], [19]. Ειδικότερα, στη Μηχανική χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ρωγμών σε διάφορα υλικά (όπως το σκυρόδεμα), σε προβλήματα διάχυσης (θερμότητας ή υγρασίας για παράδειγμα) καθώς και στη μελέτη διάδοσης ελαστικών κυμάτων μεταξύ άλλων.

Ένα μοντέλο πλέγματος αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους, οι οποίοι μπορεί να είναι τοποθετημένοι στο χώρο δομημένα ή τυχαία και έτσι δημιουργούν χωρικά δίκτυα. Η βασική ιδέα πίσω από τη δημιουργία τους προέρχεται από την παρατήρηση της ύλης στη μικροκλίμακα, όπου τα σωματίδια είναι σε ισορροπία με τις δυνάμεις αλληλεπίδρασής τους. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι προσομοιώνουν το χωρίο με διακριτά στοιχεία και γενικεύουν αυτή τη μικροσκοπική παρατήρηση του υλικού στην κλίμακα του μηχανικού.



Εικόνα 2.1. Μοντέλο πλέγματος και ένα μέλος του  $ij$

Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία ενός μοντέλου πλέγματος είναι η διακριτοποίηση του χωρίου με ένα σύνολο σημείων. Αυτά αποτελούν τους κόμβους του δικτύου και ανάλογα με τη διασπορά τους διακρίνουν το δίκτυο σε κανονικό (regular lattice) ή

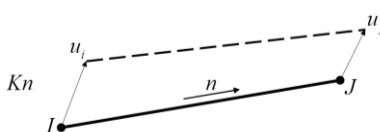
---

ακανόνιστο (irregular lattice). Οι κόμβοι με τη σειρά τους συνδέονται μεταξύ τους με μονοδιάστατα στοιχεία όπως δικτυώματα (trusses) ή δοκούς (beams). Στην περίπτωση των δικτυωμάτων οι βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο είναι δύο, οι δύο μετατοπίσεις του κόμβου και οι μόνες δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι οι αξονικές δυνάμεις στα μέλη. Στην περίπτωση που έχουμε στοιχεία δοκού οι βαθμοί ελευθερίας ανά κόμβο είναι τρεις, οι δύο μετατοπίσεις και η στροφή του κόμβου και αναπτύσσονται αξονικές διατμητικές δυνάμεις καθώς και ροπές. Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί η παρουσίαση των κυριότερων μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί και η παρουσίαση των διαφορών τους.

## 2.1 Κλασικά Μοντέλα Πλέγματος

### Central Force Interaction Model (CFIM) – Μοντέλο κεντρικής δύναμης.

Είναι το απλούστερο μοντέλο πλέγματος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Σε αυτό κάθε στοιχείο είναι ένα απλό στοιχείο δικτυώματος ή αλλιώς ένα ελατήριο που μπορεί να μεταφέρει μόνο αξονικές δυνάμεις με ακαμψία  $k_n$  (normal). Το μειονέκτημά του έγκειται στην απλότητά του ότι δηλαδή δεν λαμβάνει υπόψη άλλες δυνάμεις πλην των αξονικών.

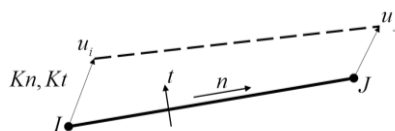


Εικόνα 2.2. Στοιχείο CFIM μοντέλου.

### Born model (BM).

Σε αυτό το μοντέλο το στοιχείο μπορεί να μεταφέρει αξονικές αλλά και τέμνουσες δυνάμεις. Για αυτό το λόγο εισάγεται και δεύτερη παράμετρος η ακαμψία στην κάθετη διεύθυνση  $k_t$  (tangential). Παρόλο που είναι βελτιωμένο σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι στροφικά αμετάβλητο,

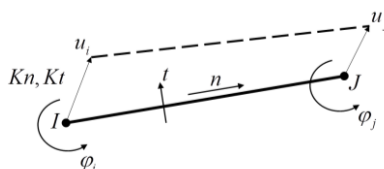
δηλαδή ότι μία απειροελάχιστη στροφή στερεού σώματος του δικτύου παράγει ενέργεια παραμόρφωσης που αποθηκεύεται στα στοιχεία.



Εικόνα 2.3. Στοιχείο του μοντέλου Born.

### Granular or Beam model (GBM).

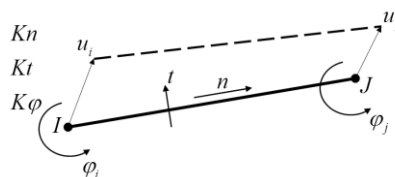
Αποτελεί εξέλιξη του προηγούμενου μοντέλου καθώς εισάγει και ένα τρίτο βαθμό ελευθερίας ανά κόμβο, τη στροφή του. Ο όρος μοντέλο δοκού που συχνά χρησιμοποιείται δεν είναι απόλυτα σωστός με την έννοια ότι οι ροπές και οι καμπυλότητες δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο. Παρόλα αυτά το μοντέλο είναι στροφικά αμετάβλητο καθώς μία μικρή στροφή του στοιχείου δεν παράγει ενέργεια παραμόρφωσης.



Εικόνα 2.4. Στοιχείο του μοντέλου GBM.

### Bernoulli-Euler beam model (BEBM).

Όπως είναι προφανές σε αυτό το μοντέλο τα στοιχεία που ενώνουν τους κόμβους του δικτύου είναι δοκοί Euler-Bernoulli. Τα στοιχεία πλέον μεταφέρουν αξονικές, τέμνουσες αλλά και ροπές. Για αυτό το λόγο εισάγεται και τρίτη σταθερά ελατηρίου, η  $k_\varphi$ .



Εικόνα 2.5. Στοιχείο της θεωρίας Euler-Bernoulli.

---

## 2.2 Rigid Body Spring Network model (RBSN) - Δίκτυα Απαραμόρφωτων Σωμάτων και Ελατηρίων (ΔΑΣΕ).

Ένας ειδικός τύπος μοντέλου πλέγματος αποτελούν τα Δίκτυα Απαραμόρφωτων Σωμάτων και Ελατηρίων (ΔΑΣΕ) ή Rigid Body Spring Network και βασίζονται στη μέθοδο που παρουσιάστηκε αρχικά από τον Kawai [20]. Ο Kawai προσπάθησε να δημιουργήσει ένα φυσικό μοντέλο και όχι τόσο μαθηματικό, στο οποίο να περιλαμβάνονται τα βασικά χαρακτηριστικά του παραμορφώσιμου σώματος χωρίς τους σύνθετους μαθηματικούς υπολογισμούς. Σε αυτά, το χωρίο αναπαρίσταται από ένα σύνολο απαραμόρφωτων σωμάτων που συνδέονται μεταξύ τους μέσω ελατηρίων μηδενικού μήκους στις διεπιφάνειες. Αφού τα κελιά είναι απαραμόρφωτα η συνολική παραμόρφωση του μοντέλου προέρχεται μόνο από τις παραμορφώσεις των ενδιάμεσων ελατηρίων τα οποία και μεταφέρουν τις δυνάμεις. επιτρέπει να υπάρχει διαχωρισμός ή επικάλυψη των κελιών ανάλογα με το φορτίο και τη φορά του.

Σε αυτά τα διακριτά συστήματα οι μετακινήσεις κάθε στοιχείου μπορούν να περιγραφούν από την κίνηση στερεού σώματος του αντίστοιχου κεντροειδούς, που γενικά έχει έξι βαθμούς ελευθερίας στο χώρο. Κατά συνέπεια το μέγεθος του μητρώου ακαμψίας στοιχείου δεν ξεπερνάει το 6x6 ανεξάρτητα αν πρόκειται για στοιχεία δοκού (beam), πλάκας (plate ή κελυφών (shell). Επιπρόσθετα οι σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των στοιχείων μπορούν εύκολα να παρασταθούν καθώς και τα φαινόμενα ολίσθησης που είναι σημαντικά στην πλαστικότητα. Τέλος μπορούν να συμπεριληφθούν στο μοντέλο προβλήματα επαφής μεταξύ των στοιχείων.

Αυτό αποτελεί και ένα πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ότι δηλαδή οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος που προκύπτουν είναι γενικά λιγότεροι με τη χρήση RBSN σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των συστημάτων μαζών-ελατηρίων και των πεπερασμένων στοιχείων για κάποια βασικά κριτήρια.

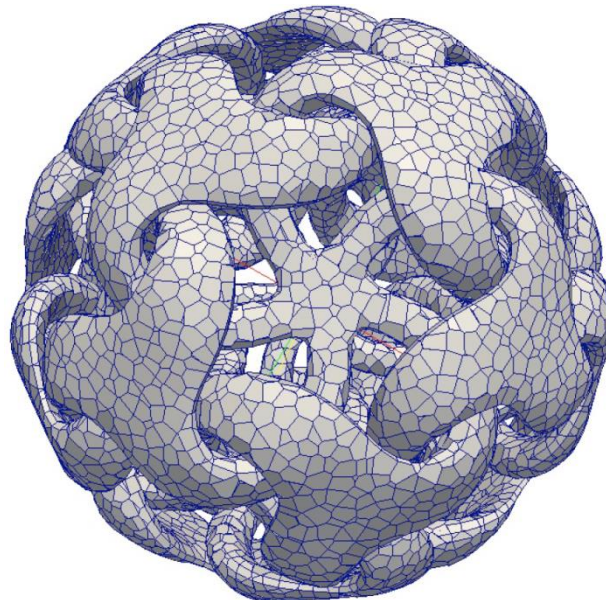
	Σύστημα μαζών-ελατηρίων	Πεπερασμένα στοιχεία
Ταχύτητα	★★	★
Ρεαλισμός	★	★★★★
Εφαρμογή	★★★	★

Πίνακας 1. Σύγκριση [21].

Για τη διακριτοποίηση του χωρίου χρησιμοποιείται η τεχνική Voronoi όπου οι κόμβοι του μοντέλου είναι και τα γενεσιουργά σημεία του διαγράμματος Voronoi το οποίο χωρίζει το χωρίο σε περιοχές. Περισσότερα για τα διαγράμματα Voronoi θα αναπτυχθούν στην επόμενη παράγραφο.

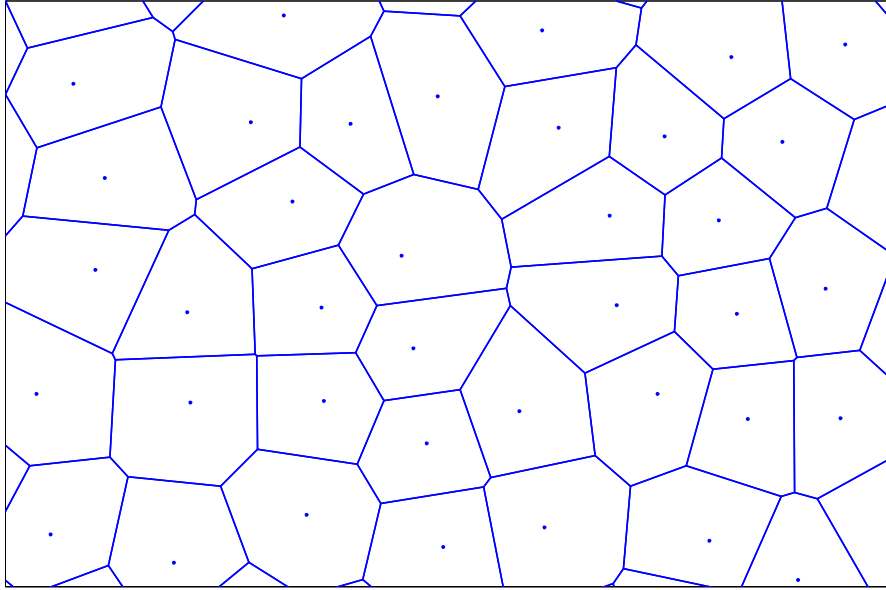
### 2.2.1 Διαγράμματα Voronoi

Η διακριτοποίηση ενός χωρίου με διαγράμματα Voronoi αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για τη δημιουργία του κανάβου και αποτελεί σημαντικό μέρος της διατύπωσης των RBSN. Η τεχνική αυτή έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε δισδιάστατα και τρισδιάστατα χωρία μεγάλης πολυπλοκότητας όπως φαίνεται και στις παρακάτω εικόνες.



Εικόνα 2.6. Διάγραμμα Voronoi πολύπλοκου χωρίου [22].



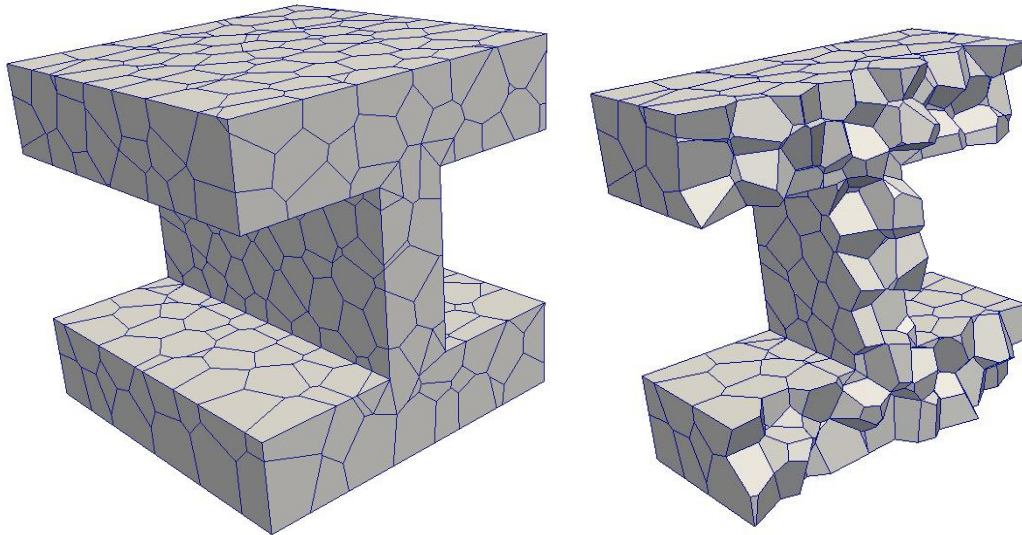


Εικόνα 2.7. Διάγραμμα Voronoi ορθογωνίου χωρίου (Matlab).

Για τη δημιουργία των διαγραμμάτων Voronoi αρχικά πραγματοποιείται η γέννηση των σημείων-κόμβων του καννάβου. Τα σημεία αυτά μπορεί να είναι κανονικά τοποθετημένα με δομή ή και εντελώς τυχαία. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί και μία υπό-περιοχή που ονομάζεται κελί του διαγράμματος Voronoi. Το κελί  $i$  ορίζεται ως η περιοχή που περιλαμβάνει το σύνολο των σημείων που είναι πιο κοντά στον κόμβο  $i$  από οποιοδήποτε άλλο κόμβο του κανάβου. Αυτή είναι μία βασική ιδιότητα των διαγραμμάτων Voronoi και έχει ως συνέπεια το χωρίο να χωρίζεται σε ένα σύνολο από κυρτά πολύγωνα. Το κελί που αντιστοιχεί στον κόμβο  $i$  είναι:

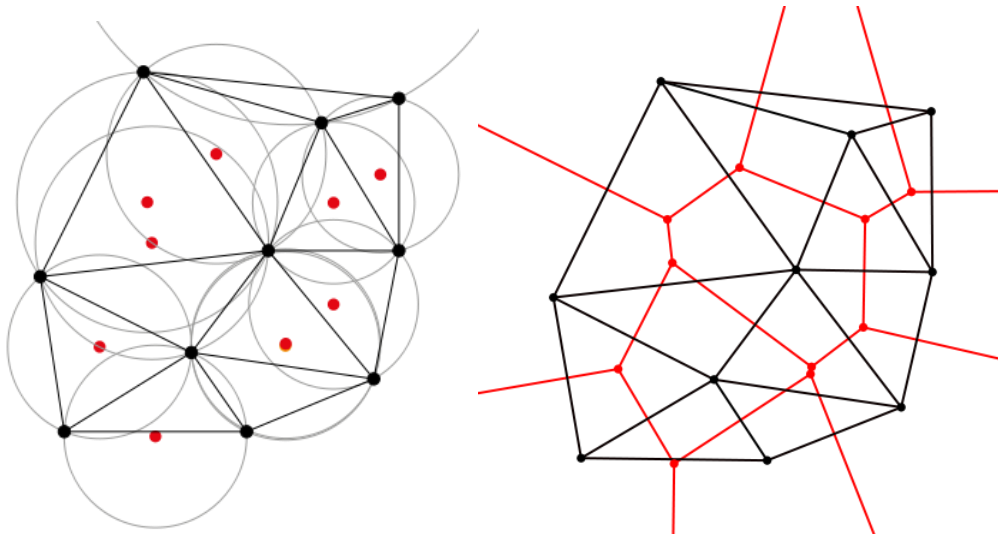
$$V(X_i) = \bigcap_{j \neq i} \{X \mid d(X_i, X) \leq d(X_j, X)\} \quad (3)$$

όπου  $X_i$  είναι οι συντεταγμένες του κόμβου  $i$ ,  $d(X_i, X)$  είναι η απόσταση μεταξύ του  $X_i$  και της θέσης  $X$  και η τομή αναφέρεται στο σύνολο των σημείων για  $j=1, \dots, n$  εκτός της περίπτωσης  $j=i$ . Η προηγούμενη εξίσωση ορίζει ότι κάθε σημείο που ανήκει σε ένα κελί του διαγράμματος Voronoi είναι πιο κοντά στον κόμβο του κελιού αυτού από οποιοδήποτε άλλο κόμβο.



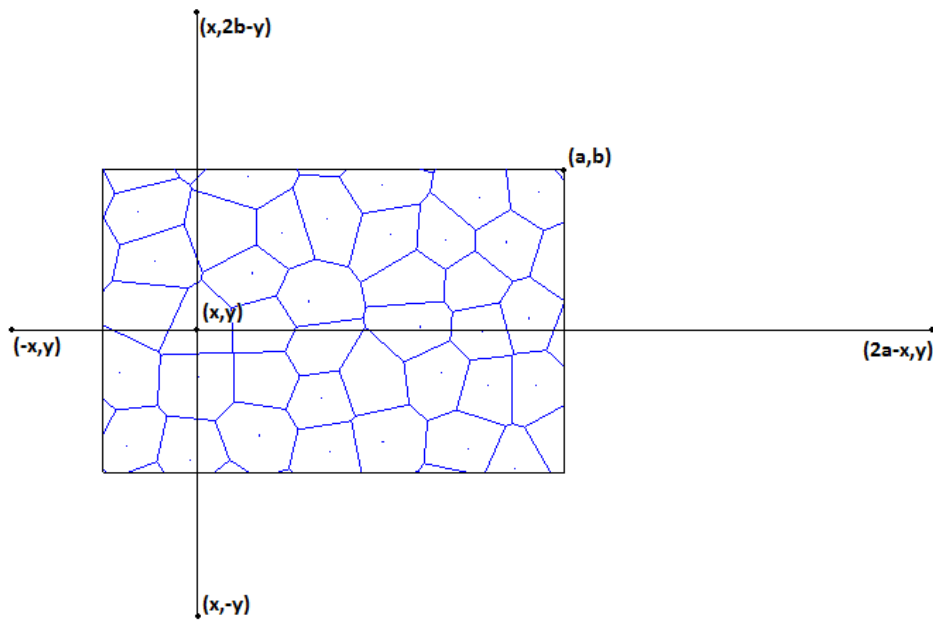
Εικόνα 2.8. Εφαρμογή Voronoι σε τρισδιάστατο χωρίο και τομή [22].

Τα διαγράμματα Voronoι είναι το δυαδικό γράφημα της τριγωνοποίησης Delaunay. Η τριγωνοποίηση Delaunay για ένα σύνολο σημείων  $P$  στο επίπεδο είναι η τριγωνοποίηση αυτή  $DT(P)$  κατά την οποία κανένα σημείο του συνόλου  $P$  δεν βρίσκεται εντός του περιγεγραμμένου κύκλου κάθε τριγώνου  $DT(P)$ .



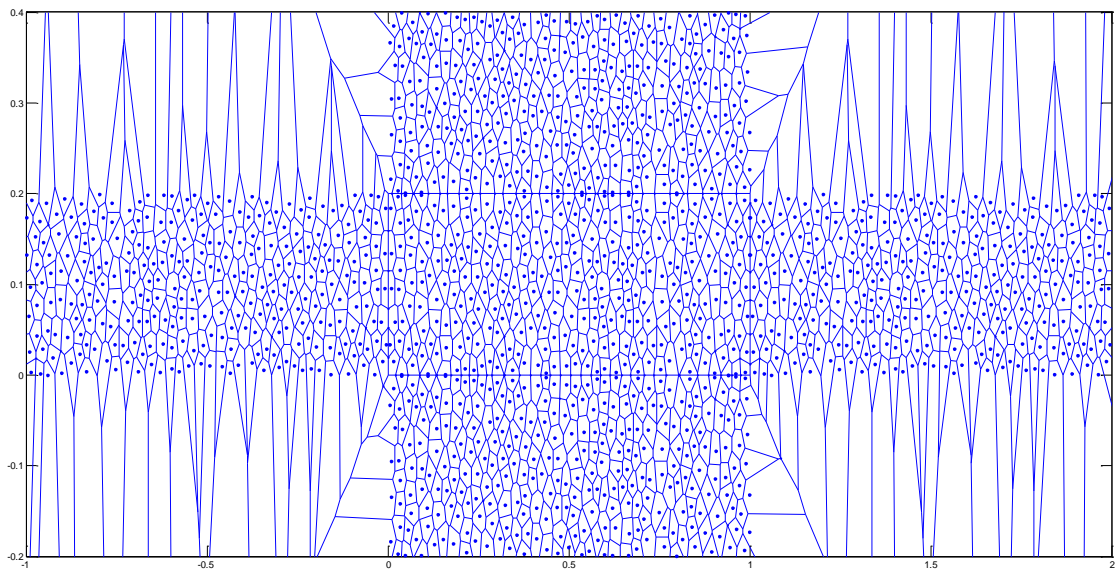
Εικόνα 2.9. Τριγωνοποίηση Delaunay και διάγραμμα Voronoι [23].

Έχουν αναπτυχθεί διάφοροι αλγόριθμοι που εφαρμόζουν τη τεχνική του Voronoι και αυτοματοποιούν τη διαδικασία για πολύπλοκα χωρία ή για ομοιόμορφες ή μη κατανομές σημείων. Για ορθογωνικά χωρία η δημιουργία των συνόρων επιτυγχάνεται με τη χρήση 4 βοηθητικών σημείων για κάθε κόμβο τα οποία βρίσκονται εκτός των συνόρων όπως φαίνεται στην εικόνα (2.10).



Εικόνα 2.10. Εσωτερικό σημείο και τα 4 βοηθητικά του για την δημιουργία των συνόρων του χωρίου.

Η εφαρμογή του διαγράμματος Voronoi γίνεται για όλα τα σημεία, τα αρχικά καθώς και τις τετράδες των βοηθητικών σημείων τους όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Με αυτή τη διαδικασία τα όρια του ορθογωνικού χωρίου προκύπτουν αυτόματα όπως φαίνεται και το παρακάτω διάγραμμα Voronoi για ένα ορθογωνικό χωρίο διαστάσεων 1x0.2m.

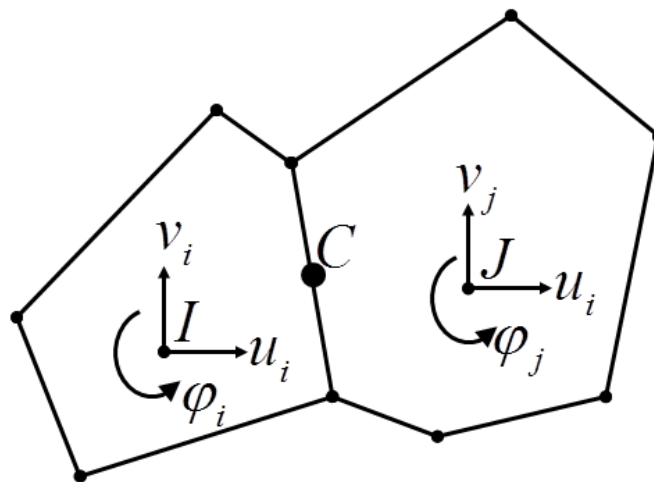


Εικόνα 2.11. Τελικό αποτέλεσμα μετά την εφαρμογή Voronoi σε όλα τα σημεία.

---

## 2.2.2 Μητρώο ακαμψίας για δισδιάστατα στοιχεία των RBSN

Για την μόρφωση του μητρώου δυσκαμψίας στοιχείου για προβλήματα δισδιάστατης ελαστικότητας θεωρούμε δύο γειτονικά κελιά Voronoi. Τα κελιά θεωρούνται απαραμόρφωτα και συνδέονται σε ένα σημείο μόνο στο μέσο της διεπιφάνειάς τους (C) με τρία μηδενικού μεγέθους (zero size) ελατήρια, δύο μεταφορικά και ένα στροφικό. Οι υπολογιστικοί βαθμοί ελευθερίας μπορεί να είναι είτε τα κεντροειδή των κελιών Voronoi ή τα γενεσιουργά σημεία των κελιών Voronoi. Σε αυτή την εργασία έχουν χρησιμοποιηθεί τα γενεσιουργά σημεία ως υπολογιστικοί κόμβοι.



Εικόνα 2.12. Στοιχείο των RBSN.

Τα δύο κελιά και η διεπιφάνειά τους ορίζουν το βασικό στοιχείο όπως φαίνεται στο σχήμα (2.12). Οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι δύο μετακινήσεις και η στροφή σε κάθε κόμβο οπότε το στοιχείο έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Θεωρούμε ότι  $(x_1, y_1)$  είναι οι συντεταγμένες του κόμβου που ορίζει το πρώτο κελί,  $(x_2, y_2)$  οι συντεταγμένες του δεύτερου και  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$  οι συντεταγμένες των ακραίων σημείων της διεπιφάνειας. Επίσης στα ελατήρια μηδενικού μεγέθους της διεπιφάνειας ορίζονται οι δυσκαμψίες τους ως  $k_n$ ,  $k_t$  και  $k_\phi$  κατά την ορθή (normal), την εφαπτομενική (tangential) και τη στροφική (rotational) έννοια ως προς το τοπικό σύστημα της διεπιφάνειας.

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις ένα τυχαίο σημείο  $(x,y)$  που βρίσκεται στο απαραμόρφωτο κελί 1 θα μετατοπιστεί ως προς το γενεσιουργό κόμβο:

$$\begin{aligned} u &= u_1 - (y - y_1)\theta_1 \\ v &= v_1 - (x - x_1)\theta_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Όπου  $u_1$ ,  $v_1$  και  $\theta_1$  είναι οι δύο μετατοπίσεις και η στροφή του υπολογιστικού κόμβου του κελιού 1. Οι σχετικές γενικευμένες μετατοπίσεις μεταξύ του μέσου της διεπιφάνειας και των υπολογιστικών κόμβων συνδέονται μέσω του μητρώου [B]:

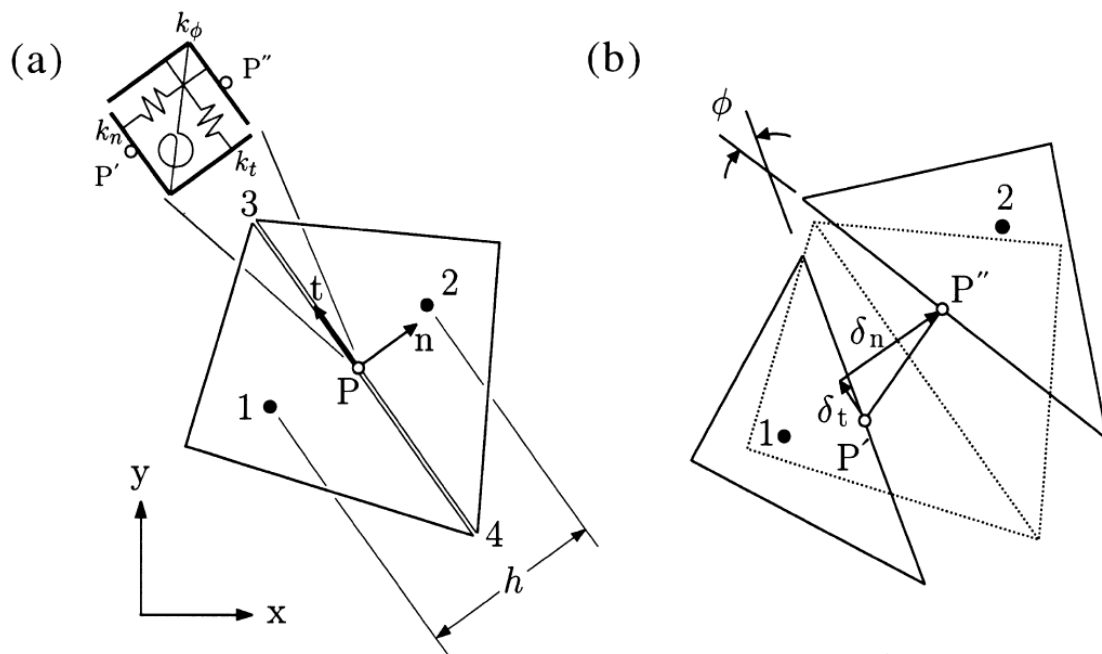
$$\{d\} = [B]\{u_e\} \quad (5)$$

Όπου:

$$\{d\}^T = [\delta_n \quad \delta_t \quad \phi] \quad (6)$$

Και:

$$\{u_e\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (7)$$



Εικόνα 2.13. Τοπικές μετατοπίσεις  $\delta_n$ ,  $\delta_t$  και  $\phi$  [24].

Στις προηγούμενες σχέσεις  $\delta_n$ ,  $\delta_t$  και  $\delta_\phi$  είναι οι σχετικές μετατοπίσεις στην ορθή, εφαπτομενική και στροφική έννοια των ελατηρίων του μέσου της διεπιφάνειας. Το

τοπικό αυτό σύστημα αφορά τον απαραμόρφωτο φορέα και παρουσιάζεται στην Εικόνα (2.13).

Το μητρώο [B] είναι ένα μητρώο 3x6 και προκύπτει από τη γεωμετρία [24] όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (2.13).

$$B = \frac{1}{l_{43}} \begin{bmatrix} y_{43} & -x_{43} & (-x_{43}x_{P1} - y_{43}y_{P1}) & -y_{43} & x_{43} & (x_{43}x_{P2} + y_{43}y_{P2}) \\ x_{43} & y_{43} & (y_{43}x_{P1} - x_{43}y_{P1}) & -x_{43} & -y_{43} & (-y_{43}x_{P2} + x_{43}y_{P2}) \\ 0 & 0 & -l_{43} & 0 & 0 & l_{43} \end{bmatrix} \quad (8)$$

P είναι το μέσο σημείο της διεπιφάνειας,  $l_{ij}$  είναι η απόσταση των σημείων i και j και:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_i - x_j \\ y_{ij} &= y_i - y_j \\ x_{Pi} &= (x_{4i} + x_{3i}) / 2 \\ y_{Pi} &= (y_{4i} + y_{3i}) / 2 \end{aligned} \quad (9)$$

Αν θεωρήσουμε το διαγώνιο μητρώο με τις δυσκαμψίες των ελατηρίων D:

$$D = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_\phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

Τότε οι εσωτερικές δυνάμεις των ελατηρίων δίνονται από:

$$\{q\} = [D]\{d\} \quad (11)$$

Όπου:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q_n \\ q_t \\ q_\phi \end{bmatrix} \quad (12)$$

Οι τοπικές δυσκαμψίες των ελατηρίων δίνονται από τους παρακάτω τύπους [24] ώστε να προσομοιώνουν τις ελαστικές ιδιότητες για δισδιάστατη ελαστικότητα:

$$\begin{aligned} k_n &= E'tl_{43} / h \\ k_t &= E''tl_{43} / h \\ k_\phi &= k_n l_{43}^2 / 12 \end{aligned} \quad (13)$$

Όπου:

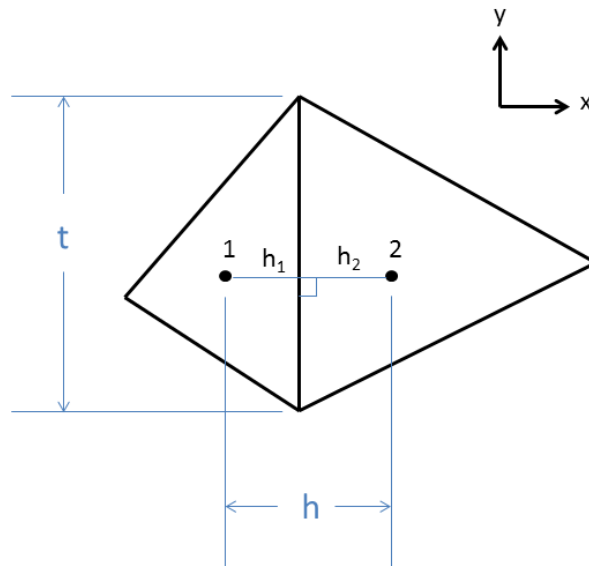
$$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

$$E'' = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
(14)

Τελικά εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου [24]:

$$[K_e] = [B]^T [D][B]$$
(15)

Το μητρώο δυσκαμψίας που προκύπτει αναφέρεται ήδη στο καθολικό σύστημα και δεν χρειάζεται να πολλαπλασιαστεί με το μητρώο μετασχηματισμού.



Εικόνα 2.14. Σύστημα 2 κελιών ευθυγραμμισμένο με τους τοπικούς άξονες .

Για το σύστημα των δύο κελιών που φαίνεται στην Εικόνα , οι κόμβοι του είναι ευθυγραμμισμένοι με τον καθολικό άξονα x και η διεπιφάνεια είναι παράλληλη με τον καθολικό άξονα y. Άρα από τη γεωμετρία είναι:

$$y_{p1} = y_{p2} = x_{43} = 0$$

$$y_{43} = l_{43}$$
(16)

Ακολουθώντας τη διαδικασία που αναφέρθηκε πιο πάνω προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{E'tl}{h} & 0 & 0 & -\frac{E'tl}{h} & 0 & 0 \\ \frac{E''tl}{h} & \frac{E''tlh_1}{h} & 0 & -\frac{E''tl}{h} & \frac{E''tlh_2}{h} & 0 \\ \left(\frac{E''tlh_1^2}{h} + \frac{E'tl^3}{12h}\right) & 0 & 0 & -\frac{E''tlh_1}{h} & \left(\frac{E''tlh_1h_2}{h} - \frac{E'tl^3}{12h}\right) & 0 \\ \frac{E'tl}{h} & 0 & 0 & \frac{E''tl}{h} & -\frac{E''tlh_2}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E''tlh_2}{h} & \left(\frac{E''tlh_2^2}{h} + \frac{E'tl^3}{12h}\right) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Όπου:

- $t$  είναι το πάχος του δισδιάστατου στοιχείου.
- $l_{43}$  δίνεται για χάρη απλότητας ως  $l$ .

Αν θέσουμε:

$$\begin{aligned} A &= tl \\ I &= \frac{tl^3}{12} \\ \nu &= 0 \\ h &= l \\ h_1 &= h_2 = \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Η σχέση  $h_1=h_2=h/2$  δηλώνει ότι το πλέγμα είναι τετράγωνο. Με βάση τα παραπάνω το μητρώο δυσκαμψίας που προκύπτει είναι το κλασικό μητρώο δυσκαμψίας δοκού:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (19)$$



---

Συνεπώς το δίκτυο απαραμόρφωτων σωμάτων και ελατηρίων και τα στοιχεία δοκού μπορούν να δώσουν ίδια μητρώα και αναπαραστάσεις για ένα κανονικό τετραγωνικό δίκτυο.

Το μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου των RBSN αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα και δίνεται από τη σχέση (15). Τα μητρώα όλων των στοιχείων συνδυάζονται για να σχηματισθεί το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής όπως και στη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας [29]. Η βασική σχέση επίλυσης για το στατικό πρόβλημα είναι η ακόλουθη:

$$[K_s]\{u\} = \{f\} \quad (20)$$

Όπου:

- $[K_s]$  είναι το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής.
- $\{u\}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών μετακινήσεων.
- $\{f\}$  είναι το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων.

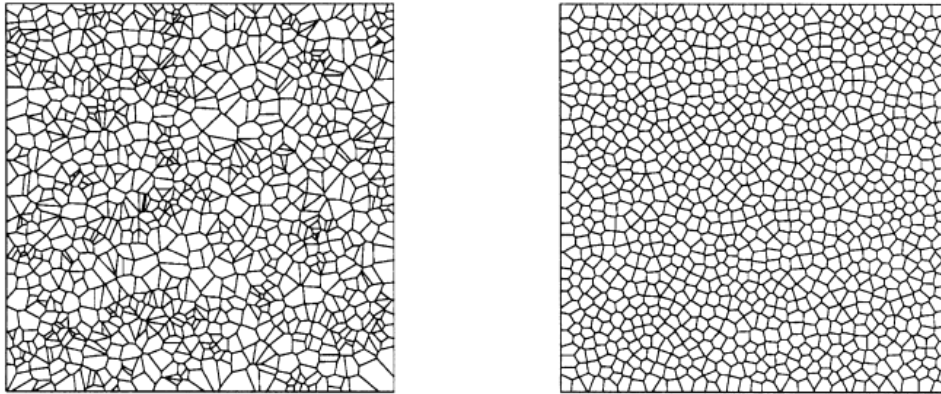
### 2.2.3 Αναπαράσταση των ρωγμών στα RBSN

Τα RBSN ανήκουν στην κατηγορία των διακριτών συστημάτων. Άρα και η αναπαράσταση των ρωγμών θα είναι διακριτή και όχι συνεχής. Συγκεκριμένα οι ρωγμές αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες μεταξύ των κελιών και κατά συνέπεια επηρεάζονται άμεσα από τη διαμόρφωση του δικτύου. Γενικά μία δομημένη διακριτοποίηση δεν είναι αντικειμενική ως προς την κατεύθυνση που θα ακολουθήσει η ρωγμή [25]. Για αυτό το λόγο έχει χρησιμοποιηθεί η τεχνική της προσαρμοστικής επαναδιακριτοποίησης (adaptive remeshing) στην περιοχή του άκρου της ρωγμής τόσο στα πεπερασμένα στοιχεία [26] όσο και στα συνοριακά στοιχεία [27]. Για την αποφυγή μεθόδων επαναδιακριτοποίησης μία τακτική που ακολουθείται είναι ο σχεδιασμός τυχαίων και όχι δομημένων καννάβων που ελαχιστοποιεί την προτίμηση σε συγκεκριμένες τροχιές ρωγμών.

Σύμφωνα με τους Bolander και Saito [24] ο μέγιστος αριθμός κόμβων που μπορούν να τοποθετηθούν χρησιμοποιώντας μία ομοιόμορφη τυχαία κατανομή σε ένα ορθογώνιο διαστάσεων  $a$  και  $b$  είναι:

$$\hat{n} = 0.68 \frac{ab}{d_m^2} \quad (21)$$

Όπου  $d_m$  είναι η ελάχιστη επιτρεπόμενη απόσταση μεταξύ των κόμβων των κελιών του διαγράμματος Voronoi. Αυτή η τιμή είναι περίπου το 60% του μέγιστου αριθμού κόμβων που μπορούν να τοποθετηθούν αν επιλεγεί η βέλτιστη εξαγωνική διάταξη [24].



Εικόνα 2.15. Χωρίο διακριτοποιημένο χωρίς και με ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κόμβων [24].

Η ομοιομορφία του πλέγματος ελέγχεται επιλέγοντας την ελάχιστη απόσταση  $d_m$  μεταξύ των σημείων έτσι ώστε να προσεγγίζουν τον αριθμό  $n$ . Στο σχήμα (2.15) φαίνεται η επίδραση αυτή για σημεία τοποθετημένα τυχαία χωρίς ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους και με ελάχιστη απόσταση.

Για την δημιουργία και την εξάπλωση των ρωγμών χρησιμοποιείται ένα απλό κριτήριο τύπου Mohr – Coulomb. Το φορτίο επιβάλλεται σταδιακά με μικρές προσαυξήσεις και σε κάθε βήμα υπολογίζονται οι τάσεις στις διεπιφάνειες ως:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{q_n}{(l_{ij}t)} \\ s_t &= \frac{q_t}{(l_{ij}t)} \end{aligned} \quad (22)$$

Όπου  $s_n$  είναι η ορθή τάση που αναπτύσσεται στην διεπιφάνεια ενώ  $s_t$  είναι η εφαπτομενική τάση.

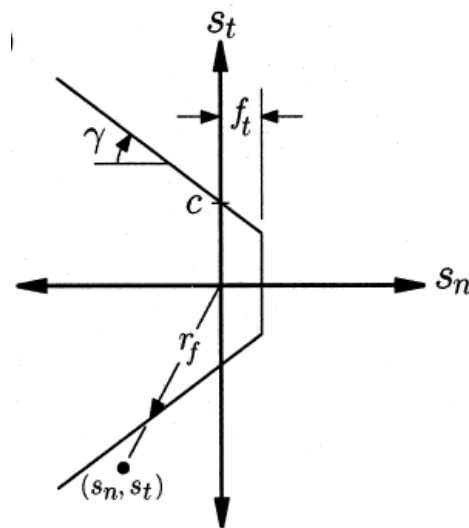
Οι τάσεις αυτές συγκρίνονται με το κριτήριο θραύσης το οποίο είναι:

$$R = \frac{r}{r_f} > 1 \quad (23)$$

Όπου:

$$r = \sqrt{(s_n^2 + s_t^2)} \quad (24)$$

και  $r_f$  είναι η απόσταση του σημείου που τέμνει η ευθεία από την αρχή των αξόνων το κριτήριο θραύσης στο επίπεδο των τάσεων για την τρέχουσα τασική κατάσταση όπως φαίνεται και στο σχήμα (2.16).



Εικόνα 2.16. Κριτήριο θραύσης [24].

Σε αυτή την περίπτωση η σχέση επίλυσης παραμένει η ίδια όπως στη σχέση (20) αλλά αυτή τη φορά ο φορέας πρέπει να επιλυθεί επαυξητικά. Αυτό συμβαίνει γιατί με την επιβολή του επαυξητικού φορτίου σε κάθε βήμα γίνεται ο έλεγχος με το κριτήριο θραύσης και σε κάθε υπολογιστικό βήμα επιτρέπεται μία θραύση μόνο. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής:

- Αρχικά με την επιβολή του φορτίου υπολογίζονται οι ορθές και διατμητικές τάσεις σε κάθε διεπιφάνεια.
- Οι τάσεις αυτές συγκρίνονται με το κριτήριο θραύσης.
- Αν υπάρχει θραύση σε περισσότερες από μία διεπιφάνειες σε κάποιο βήμα η διεπιφάνεια με το μεγαλύτερο  $R > 1$  είναι αυτή που σπάει.

- Η θραύση θεωρείται ψαθυρή κάτι το οποίο σημαίνει ότι οι δυνάμεις των ελατηρίων  $q_n, q_t$  και  $q_\varphi$  απελευθερώνονται και οι αντίστοιχες δυσκαμψίες  $k_n, k_t$  και  $k_\varphi$  μηδενίζονται. Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται υπολογισμός του νέου μητρώου δυσκαμψίας που προκύπτει.
- Το φορτίο αυξάνεται μόνο όταν ικανοποιείται η ισορροπία και όλες οι τάσεις είναι εντός του κριτηρίου θραύσης.

#### 2.2.4 Επίλυση δυναμικού προβλήματος

Για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος πρέπει εκτός από τα μητρώα ακαμψίας να μορφωθούν και τα μητρώα μάζας και απόσβεσης. Το μητρώο μάζας της κατασκευής είναι ένα διαγώνιο μητρώο που μορφώνεται για κάθε κόμβο του φορέα ως εξής:

$$M_n = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (25)$$

Όπου:

- $m$  είναι η μάζα του αντίστοιχου κελιού Voronoi που ισούται με το εμβαδό του κελιού επί το πάχος του επί την πυκνότητα του υλικού.
- $I$  είναι η ροπή αδρανείας του κελιού ως προς το γενεσιουργό του κόμβο.

Το μητρώο μάζας της κατασκευής από τα μητρώα μάζας για κάθε κόμβο με απλή μεταφορά των τιμών στους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας. Το τελικό μητρώο που προκύπτει είναι διαστάσεων  $(3 \cdot n, 3 \cdot n)$  όπου  $n$  είναι οι κόμβοι του φορέα.

Για τη μόρφωση του μητρώου απόσβεσης της κατασκευής χρησιμοποιούνται τα μητρώα ακαμψίας και απόσβεσης και μορφώνεται και είναι της μορφής μητρώου απόσβεσης Rayleigh [28].

Η δυναμική εξίσωση κίνησης ενός πολυβαθμίου συστήματος είναι:

$$[M]_s \{\ddot{u}\} + [C]_s \{\dot{u}\} + [K]_s \{u\} = \{P(t)\} \quad (26)$$

Όπου  $\{P(t)\}$  είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων με  $(3*n,1)$  στοιχεία όσα έχει και το διάνυσμα των  $\{u\}$ .

Για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος το σύστημα των εξισώσεων διατυπώνεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space formulation). Στη διατύπωση αυτή οι άγνωστοι ορίζουν την κατάσταση του συστήματος. Για ένα σύστημα με  $3*n$  βαθμούς ελευθερίας ( $n$  είναι οι κόμβοι του φορέα) οι άγνωστοι είναι οι ταχύτητες και οι μετατοπίσεις για κάθε βαθμό ελευθερίας, συνολικά δηλαδή είναι  $2*3*n$  μεταβλητές. Από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης δευτέρας τάξης έχουμε  $3*n$  εξισώσεις που περιλαμβάνουν τις ταχύτητες και τις μετατοπίσεις. Οι υπόλοιπες εξισώσεις προέρχονται από την απλή σχέση:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad (27)$$

Συνθέτοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε σε ένα σύστημα  $2*3*n$  διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως εξής:

$$\{\dot{x}\} = G(\{x\}) + \{F(t)\} \quad (28)$$

Το διάνυσμα  $\{x\}$  όπως προαναφέρθηκε έχει διαστάσεις  $2*3*n$  περιλαμβάνει τις μετατοπίσεις και τις ταχύτητες και καθορίζει πλήρως την κατάσταση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Ορίζεται ως:

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Και:

$$G(\{x\}) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (30)$$

Τέλος το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων στην πιο πάνω διατύπωση (28) είναι και αυτό πολλαπλασιασμένο με το αντίστροφο του μητρώου μάζας:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} P_{ext}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

### 2.2.5 Ελαστοπλαστικά ελατήρια Bouc-Wen

Σε αυτή τη παράγραφο περιγράφεται το προσομοίωμα Bouc –Wen. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε αρχικά από τον Bouc, το 1971 και ύστερα γενικεύτηκε από τον Wen [30]. Το μοντέλο είναι γνωστό από τότε ως Bouc-Wen. Αποτελείται από μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και από διάφορες παραμέτρους που ελέγχουν τη συμπεριφορά και έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για να περιγράψει συστήματα με υστερητική συμπεριφορά.

Η διατύπωση του προσομοιώματος παρουσιάζεται ως εξής:

$$\begin{cases} m\dot{u} + w = p \\ w = c\dot{u} + \alpha K_0 u + z \\ \dot{z} = K\dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn}(du)) = (A - a) K_0 [1 - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(zdu))] \end{cases} \quad (32)$$

όπου το  $a$  ορίζεται ως:

$$a = \frac{K_{pl}}{K_{el}} \quad (33)$$

είναι δηλαδή το πηλίκο της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία.

Παρατηρούμε την εισαγωγή στην εξίσωση κίνησης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης  $\dot{z} = K\dot{u}$ . Η  $z$  είναι η υστερητική παράμετρος και  $\dot{z}$  είναι η παράγωγος της  $z$  ως προς το χρόνο η οποία σχετίζεται με τη παράγωγο των μετατοπίσεων ως προς το χρόνο με ένα μη γραμμικό συντελεστή. Οι παράμετροι  $A$  και  $K_0$  αποτελούν πλεονασμό, όπως παρουσιάστηκε από τους Ma et al [31] και τίθενται ίσοι με τη μονάδα.

Αν θεωρήσουμε ένα μονοβάθμιο σύστημα η δύναμη επαναφοράς του είναι:

$$F(t) = a \frac{F_y}{u_y} u(t) + (1-a) F_y z(t) \quad (34)$$

όπου:

- $F_y$  , η δύναμη διαρροής του συστήματος
- $u_y$  , η παραμόρφωση διαρροής
- $z(t)$  , η υστερητική παράμετρος
- $\alpha$  ο λόγος της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία

Παρατηρούμε ότι η δύναμη επαναφοράς είναι το άθροισμα μίας ελαστικής και μίας υστερητικής δύναμης αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} F^{el}(t) &= \alpha \frac{F_y}{u_y} u(t) \\ F^h(t) &= (1-\alpha) F_y z(t) \end{aligned} \quad (35)$$

Το σύστημα επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αναπαρίσταται από δύο ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα με αρχικές δυσκαμψίες:

- $\alpha k_{el} = \alpha \frac{F_y}{u_y}$  , για το γραμμικώς ελαστικό ελατήριο
- $(1-\alpha) k_{el}$  για το υστερητικό ελατήριο

Η υστερητική παράμετρος  $z$  πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση γνωστή και ως διαφορική εξίσωση Bouc-Wen:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{u_y} \left[ 1 - |z(t)|^n \left( \beta \operatorname{sgn} \left( \dot{u}(t) z(t) \right) + \gamma \right) \right] \dot{u}(t) \quad (36)$$

όπου:

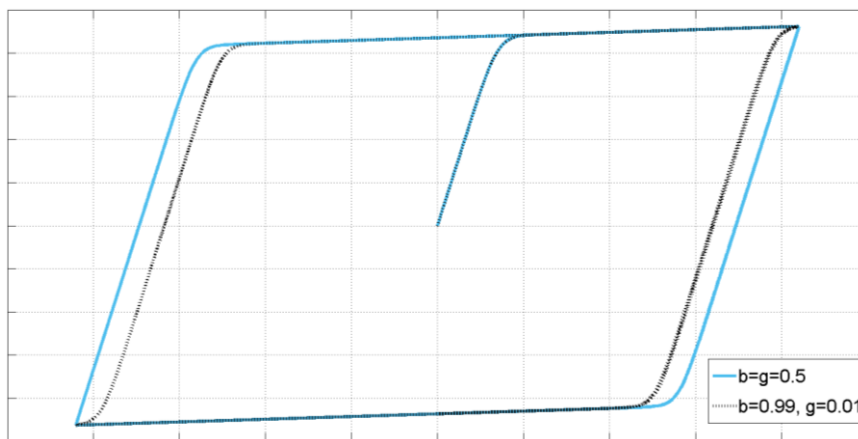
- $\beta, \gamma$  παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή και το μέγεθος του βρόχου υστέρησης,
- $u_y$  , η παραμόρφωση διαρροής,
- $u(t)$  η παραμόρφωση,

- $n$  παράμετρος που καθορίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο,
- $F_y$  , η δύναμη διαρροής του συστήματος
- $sgn$  (signum function) είναι συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x = 0, \\ 1 & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  επηρεάζουν τη μορφή του βρόχου. Στην ειδική περίπτωση που  $\beta = \gamma = 0.5$  τότε οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές. Από θερμοδυναμική θεώρηση έχει αποδειχθεί ότι για τις παραμέτρους  $\beta, \gamma$  πρέπει να ισχύει:  $\beta + \gamma = 1$ .

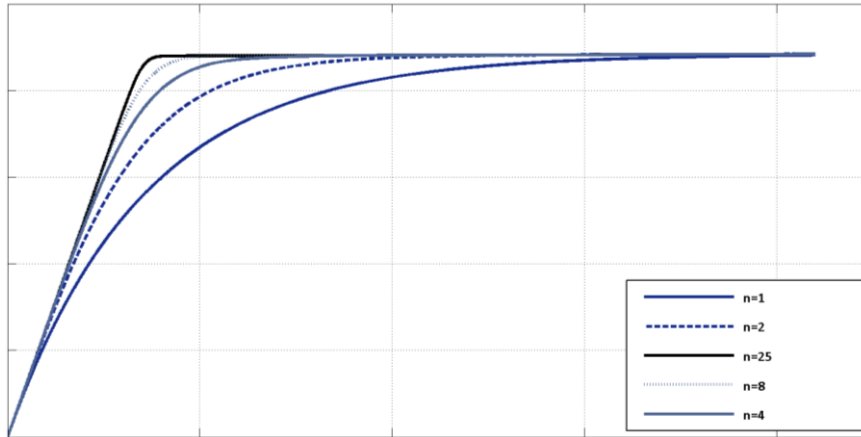
Η επιρροή των συντελεστών  $\beta$  και  $\gamma$  στη μορφή των υστερητικών βρόχων φαίνεται στο επόμενο σχήμα (Σχ. 2.4):



Εικόνα 2.17. Επιρροή των συντελεστών  $\beta$  και  $\gamma$  στην απόκριση.

Ο συντελεστής  $n$  καθορίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του τόσο η απόκριση πλησιάζει τη διγραμμική συμπεριφορά:





Εικόνα 2.18. Επιρροή του συντελεστή  $n$  στην τελική απόκριση.

### 2.2.6 Εφαρμογή Βouc – Wen στα RBSN.

Θεωρούμε δύο γειτονικά κελιά του διαγράμματος Voronoi. Αυτά συνδέονται μεταξύ τους με 3 ελατήρια μηδενικού μήκους στο μέσο της διεπιφάνειας. Όπως αναφέρθηκε και στη παράγραφο 2.2.2 το μητρώο  $[B]$  είναι ένα μητρώο που προκύπτει από τη γεωμετρία και συσχετίζει τις σχετικές μετακινήσεις στη διεπιφάνεια με τις μετακινήσεις των κόμβων των κελιών. Ισχύει δηλαδή:

$$\{d\} = [B]\{u\} \quad (37)$$

Όπου:

- $\{d\}$  είναι το διάνυσμα των εσωτερικών σχετικών μετακινήσεων με διαστάσεις  $(3 \times 1)$ .
- $\{u\}$  είναι το διάνυσμα των κομβικών μετακινήσεων με διαστάσεις  $(6 \times 1)$ .
- $[B]$  είναι το μητρώο συσχετισμού με διαστάσεις  $(3 \times 6)$ .

Με τη βοήθεια των σχημάτων (2.12) και (2.13) μπορούν να οριστούν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [B]^T \begin{Bmatrix} F_n \\ F_t \\ M \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Οι εσωτερικές δυνάμεις των ελατηρίων όμως ακολουθώντας τη διατύπωση του Bouc-Wen δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned} F_n &= \alpha k_n d_n + F_1^p \\ F_t &= \alpha k_t d_t + F_2^p \\ F_\theta &= \alpha k_\theta d_\theta + M^p \end{aligned} \quad (39)$$

Σε μητρική μορφή μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{Bmatrix} F_n \\ F_t \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha k_n & 0 & 0 \\ 0 & \alpha k_t & 0 \\ 0 & 0 & \alpha k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_n \\ d_t \\ d_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^p \\ F_2^p \\ M^p \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Οι δείκτες ακαμψίας έχουν τις ακόλουθες τιμές όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.2.2:

$$\begin{aligned} k_n &= E' t l_{43} / h \\ k_t &= E'' t l_{43} / h \\ k_\theta &= k_n l_{43}^2 / 12 \end{aligned} \quad (41)$$

Με:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ E'' &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας την (40) στην (38) και με τη βοήθεια της (37) προκύπτει η ακόλουθη διατύπωση:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [B]^T \begin{bmatrix} \alpha k_n & 0 & 0 \\ 0 & \alpha k_t & 0 \\ 0 & 0 & \alpha k_\theta \end{bmatrix} [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + [B]^T \begin{Bmatrix} F_1^p \\ F_2^p \\ M^p \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Από το πρώτο μέρος του αθροίσματος προκύπτει το μητρώο ακαμψίας όπως και στην παράγραφο 2.2.2. Αν θεωρήσουμε ότι η υστερητική δύναμη ακολουθεί τη διαφορική εξίσωση του Bouc-Wen όπως αυτή παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο:

$$\dot{F}^p = (1-a)k \left( 1 - \left| \frac{F^p}{F_y} \right|^n \left( \beta + \gamma \operatorname{sgn}(F^p \dot{u}) \right) \right) \dot{u} \quad (44)$$

Είναι φανερό ότι το υστερητικό μητρώο που προκύπτει από το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (43) και τις υστερητικές διαφορικές εξισώσεις είναι το εξής:

$$[K_h] = [B]^T \begin{bmatrix} (1-\alpha)k_n & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)k_t & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)k_\theta \end{bmatrix} \quad (45)$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης έχει πλέον την ακόλουθη μορφή:

$$[M]_s \{\ddot{u}\} + [C]_s \{\dot{u}\} + [K]_s \{u\} + [K_h]_s \{z\} = \{P(t)\} \quad (46)$$

Το υστερητικό μητρώο της κατασκευής είναι ορθογωνικό διαστάσεων  $(3*n, 3nel)$  όπου  $nel$  είναι το πλήθος των στοιχείων του φορέα. Η υστερητική παράμετρος  $z$  αντιπροσωπεύει το υστερητικό μέρος των μετατοπίσεων ή της καμπυλότητας και ακολουθεί τη διαφορική εξίσωση του Bouc-Wen. Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση κίνησης μαζί με τις διαφορικές εξισώσεις Bouc-Wen για κάθε στοιχείο πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα. Για το σκοπό αυτό ακολουθείται πάλι η διαδικασία μετατροπής του συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης.

Εισάγεται ως επιπλέον άγνωστο το διάνυσμα των επικόμβιων ταχυτήτων και η δυναμική εξίσωση κίνησης λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\ddot{u}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K_h] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{P(t)\} \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνδέονται με τις μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις της μορφής:

$$\{\dot{z}\} = f(\{\dot{u}\}, \{z\}) \quad (48)$$

Στο επίπεδο μικρών μετατοπίσεων οι παραπάνω εξισώσεις περιέχουν τα καθολικά μητρώα της κατασκευής τα οποία ορίζονται μία φορά στην αρχή της ανάλυσης και

παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της επίλυσης. Το παραπάνω σύστημα γράφεται σαν μια ομάδα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης επαυξάνοντας την εξίσωση (47) ως εξής:

$$\{\dot{x}\} = G(\{x\}) + \{F(t)\} \quad (49)$$

Όπου το διάνυσμα  $\{x\}$  ορίζεται ως:

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \\ \{z\} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Και το μητρώο  $[G]$  είναι:

$$G(\{x\}) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K_h] \\ 0 & Y(\{\dot{u}\}, \{z\}) & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Στον παραπάνω τύπο το  $Y$  εμπεριέχει τις υστερητικές εξισώσεις για κάθε στοιχείο.

Με αυτό τον τρόπο το σύστημα των εξισώσεων για δοσμένο δυναμικό φορτίο και έχοντας τις αρχικές συνθήκες μπορεί να επιλυθεί με τον αλγόριθμο Runge-Kutta ή τον αλγόριθμο Livermore.

Όλα τα παραπάνω προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab. Κατά την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε η εντολή της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, ode15s. Μέσω αυτής της εντολής υλοποιούνται όσα αναφέρθηκαν και υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού του εύρους σύγκλισης και με τον τρόπο αυτό να βελτιώνεται περαιτέρω η ακρίβεια της επίλυσης.

---

# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

Εφαρμογές

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Εφαρμογές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν ορισμένες εφαρμογές της θεωρίας που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για στατικές φορτίσεις, για στατικές φορτίσεις με ρωγμές καθώς και για δυναμικά προβλήματα με ελαστικά ελατήρια και υστερητικά ελατήρια Bouc-Wen. Οι παραπάνω μέθοδοι του 2<sup>ου</sup> Κεφαλαίου προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab και τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 3.1 Στατικά προβλήματα

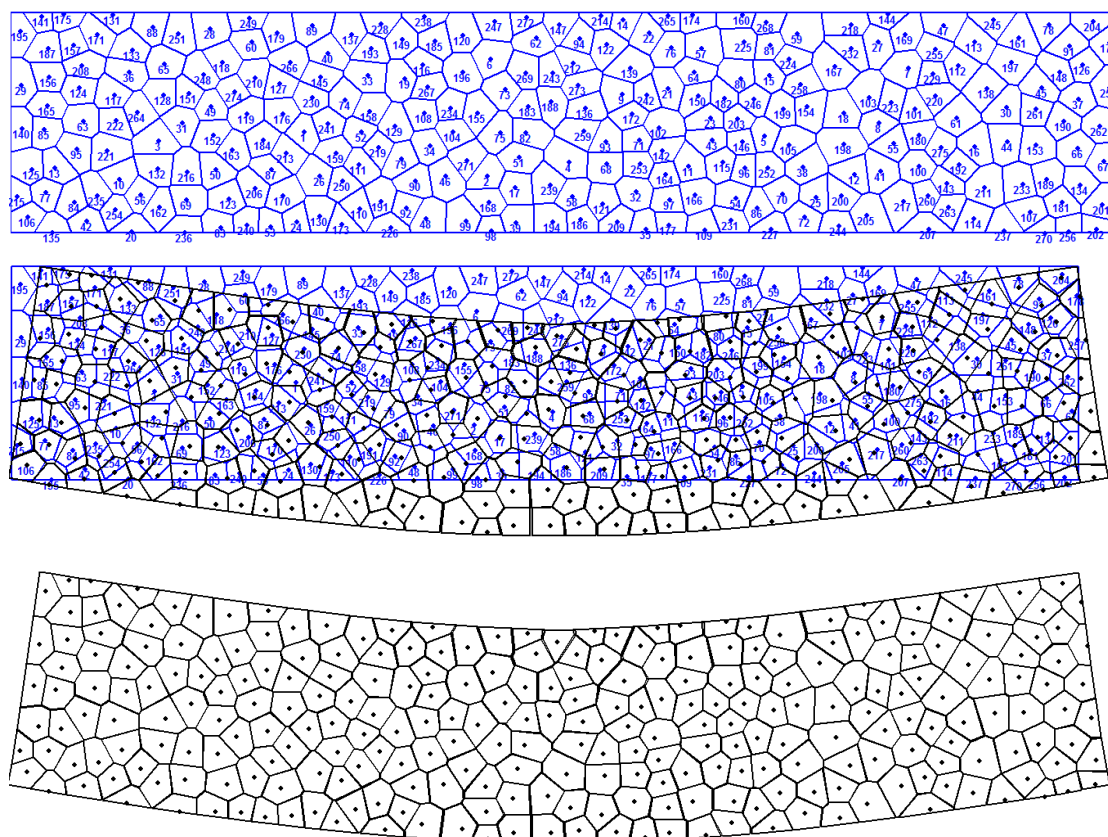
Αρχικά ας δούμε ορισμένες εφαρμογές σε απλούς φορείς υπό στατική φόρτιση. Ακολουθούν παραδείγματα για αμφιέρειστη δοκό για αμφιέρειστη δοκό, πρόβολο καθώς και για αμφίπακτη δοκό.

### 3.1.1 Αμφιέριστη δοκός

Αρχικά θα μελετήσουμε τη δυνατότητα του μοντέλου στην στατική επίλυση απλών ελαστικών φορέων. Θεωρούμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 1m και ύψους 0.2m. Το πάχος είναι  $t=0.2m$  και το μέτρο ελαστικότητας  $E=30000\text{ KPa}$  ενώ ο λόγος Poisson είναι  $\nu=0.3$ . Με βάση αυτά τα δεδομένα εφαρμόζουμε μία κάθετη δύναμη 10 kN στο μέσο του ανοίγματος της δοκού. Από τη θεωρία της ελαστικότητας έχουμε για τη βύθιση στο μέσο:

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} = 0.0521m \quad (52)$$

Για την ανάλυση με τα RBSN θεωρήσαμε 275 κόμβους στη δοκό από τους οποίους δημιουργήθηκε το διάγραμμα Voronoi που φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 3.1. Αρχική και τελική κατάσταση της αμφιέριστης δοκού.

Η βύθιση στο μέσο της δοκού στον μεσαίο κόμβο προέκυψε **0.0522m**.

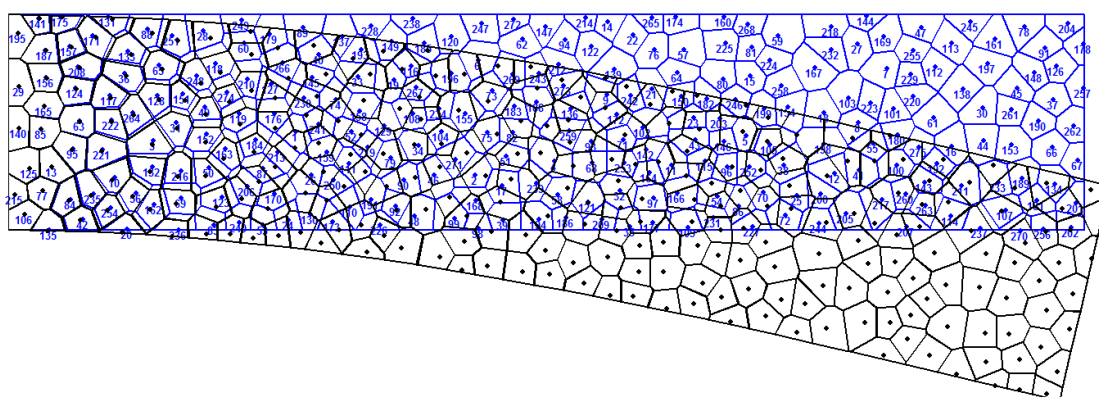
---

### 3.1.2 Πρόβολος

Για τον πρόβολο του σχήματος (3.2) με τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά με την αμφιέριστη και τις ίδιες ιδιότητες υλικού και φορτίο 2 kN στο άκρο προκύπτει από τη θεωρία δοκού:

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = 0.167m \quad (53)$$

Η διακριτοποίηση του φορέα έγινε πάλι χρησιμοποιώντας 275 γενεσιουργά σημεία.



Εικόνα 3.2. Αρχική και τελική κατάσταση του προβόλου.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει με τη χρήση RBSN είναι **0.156m**.



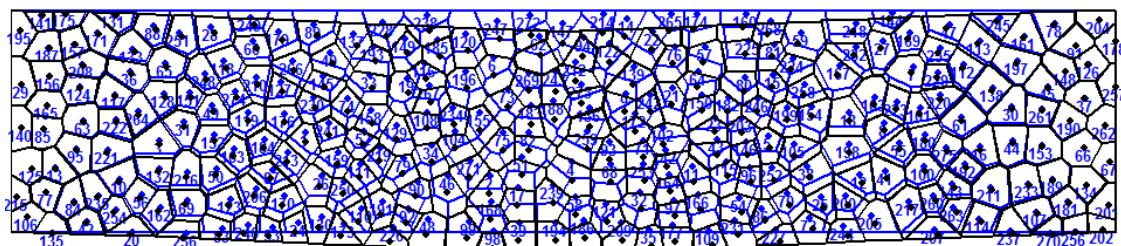
---

### 3.1.3 Αμφίπακτη δοκός

Η ίδια δοκός αυτή τη φορά θεωρείται αμφίπακτη. Το φορτίο στο μέσο είναι 10 kN.

Το αποτέλεσμα που έχουμε από τη θεωρία δοκού είναι για τη βύθιση στο μέσο:

$$\delta = \frac{Pl^3}{192EI} = 0.013m \quad (54)$$



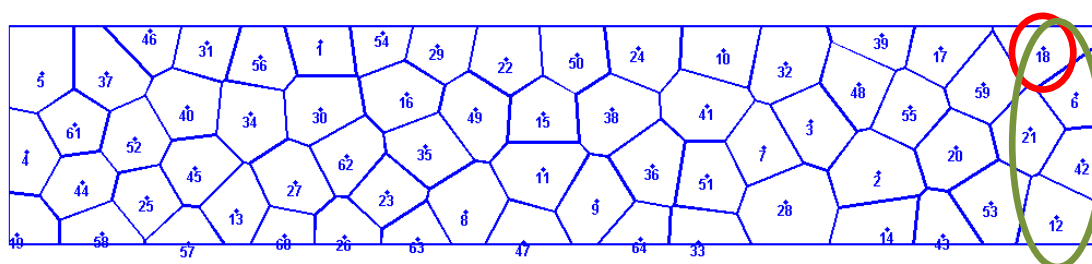
Εικόνα 3.3. Αρχική και τελική κατάσταση της αμφίπακτης δοκού.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει με τη χρήση RBSN είναι **0.016m**.

### 3.1.4 Διερεύνηση στην επιβολή του φορτίου

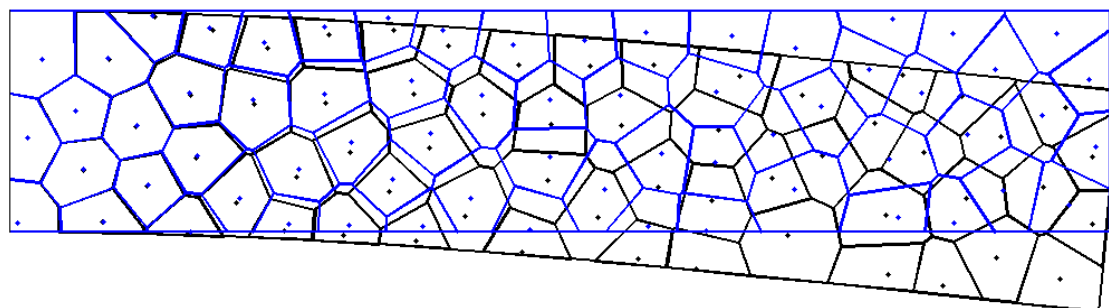
Σε αυτή τη παράγραφο θα εξετάσουμε τη συμβολή που έχει η επιβολή της εξωτερικής δύναμης σε έναν ή περισσότερους κόμβους του φορέα.

Αρχικά θεωρούμε ένα πρόβολο μήκους 1m, ύψους και πάχους 0.2m με μέτρο ελαστικότητας  $E=30.000 \text{ KPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$  διακριτοποίηση της οποίας γίνεται με **64** σημεία. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 3.4. Αρχική διακριτοποίηση του φορέα με 64 γενεσιουργά σημεία.

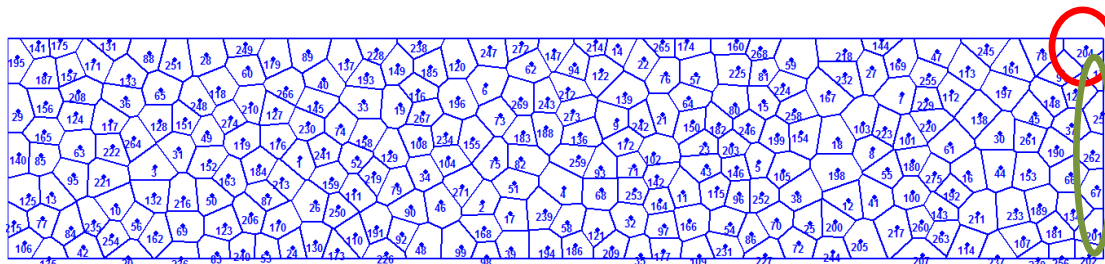
Οι κόμβοι 4, 5 και 19 είναι πακτωμένοι και αρχικά επιβλήθηκε φορτίο 1kN στο κόμβο 18 (επισημασμένο με κόκκινο χρώμα στην Εικόνα (3.4)). Η επίλυση έδωσε βύθιση **0.085m** για το άκρο του προβόλου. Στη συνέχεια το φορτίο μοιράστηκε στους 4 ακραίους κόμβους καθύψος της δοκού δηλαδή στους κόμβους 18, 6, 42 και 12 από 0.25kN στον καθένα (φαίνονται με πράσινο χρώμα στην Εικόνα (3.4)). Το αποτέλεσμα που προέκυψε από αυτή την ανάλυση ήταν **0.082m** για την άκρη του προβόλου. Η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.5. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.

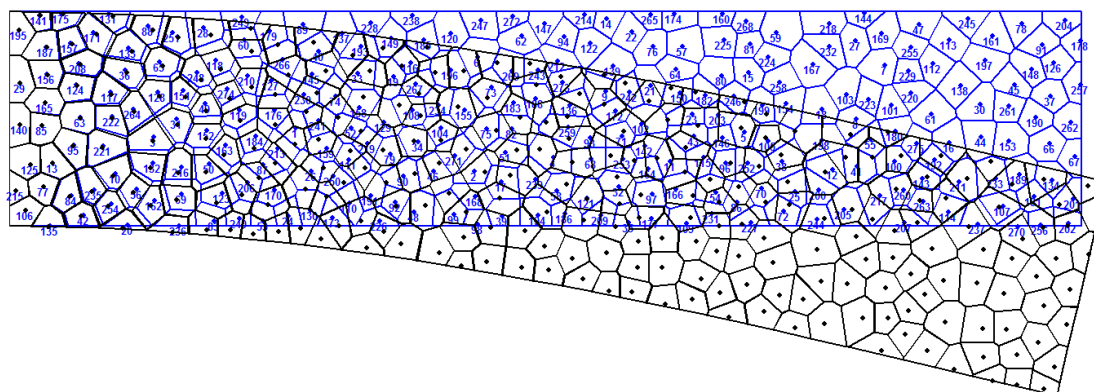
Όπως είναι φανερό οι διαφορετικοί τρόποι επιβολής του φορτίου για αυτή τη διακριτοποίηση δεν επηρεάζουν σημαντικά το αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια εξετάστηκε ο ίδιος πρόβλος αυτή τη φορά διακριτοποιημένος με 275 κόμβους. Οι ιδιότητες του υλικού είναι οι ίδιες.



Εικόνα 3.6. Αρχική διακριτοποίηση του φορέα με 275 γενεσιουργά σημεία.

Αρχικά επιβλήθηκε φορτίο 2kN στο κόμβο 204 (επισημασμένο με κόκκινο χρώμα στην Εικόνα (3.5)). Η επίλυση έδωσε βύθιση **0.1568m** για το άκρο του προβόλου. Στη συνέχεια το φορτίο μοιράστηκε στους 5 ακραίους κόμβους καθύψος της δοκού από 0.4kN στον καθένα (φαίνονται με πράσινο χρώμα στην Εικόνα (3.5)). Το αποτέλεσμα που προέκυψε από αυτή την ανάλυση ήταν **0.1572m** για την άκρη του προβόλου. Η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.7. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.

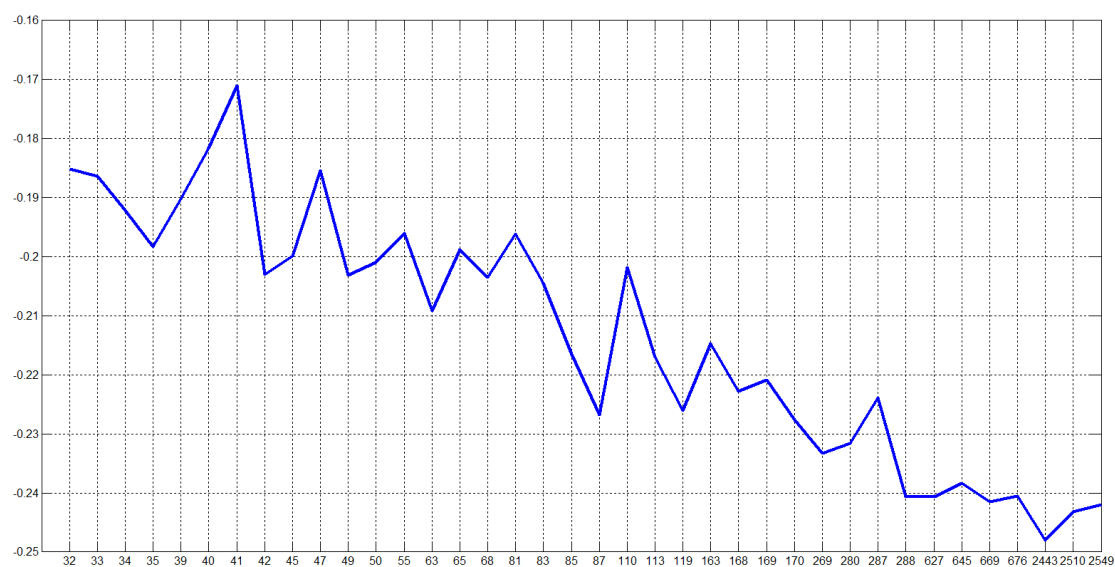
Και σε αυτή τη περίπτωση οι διαφορετικοί τρόποι επιβολής του φορτίου δεν επηρεάζουν σημαντικά το αποτέλεσμα.

### 3.1.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων για διαφορετικές διακριτοποιήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε πως η διακριτοποίηση του φορέα και ο αριθμός των γενεσιουργών κόμβων του διαγράμματος Vononoi και συνεπώς και ο αριθμός των στερεών σωμάτων επηρεάζουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε στατικές φορτίσεις.

Αρχικά θεωρούμε μία αμφιέριστη δοκό μήκους 2m, ύψους και πάχους 0.2m με μέτρο ελαστικότητας  $E=30.000 \text{ KPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.3$ .

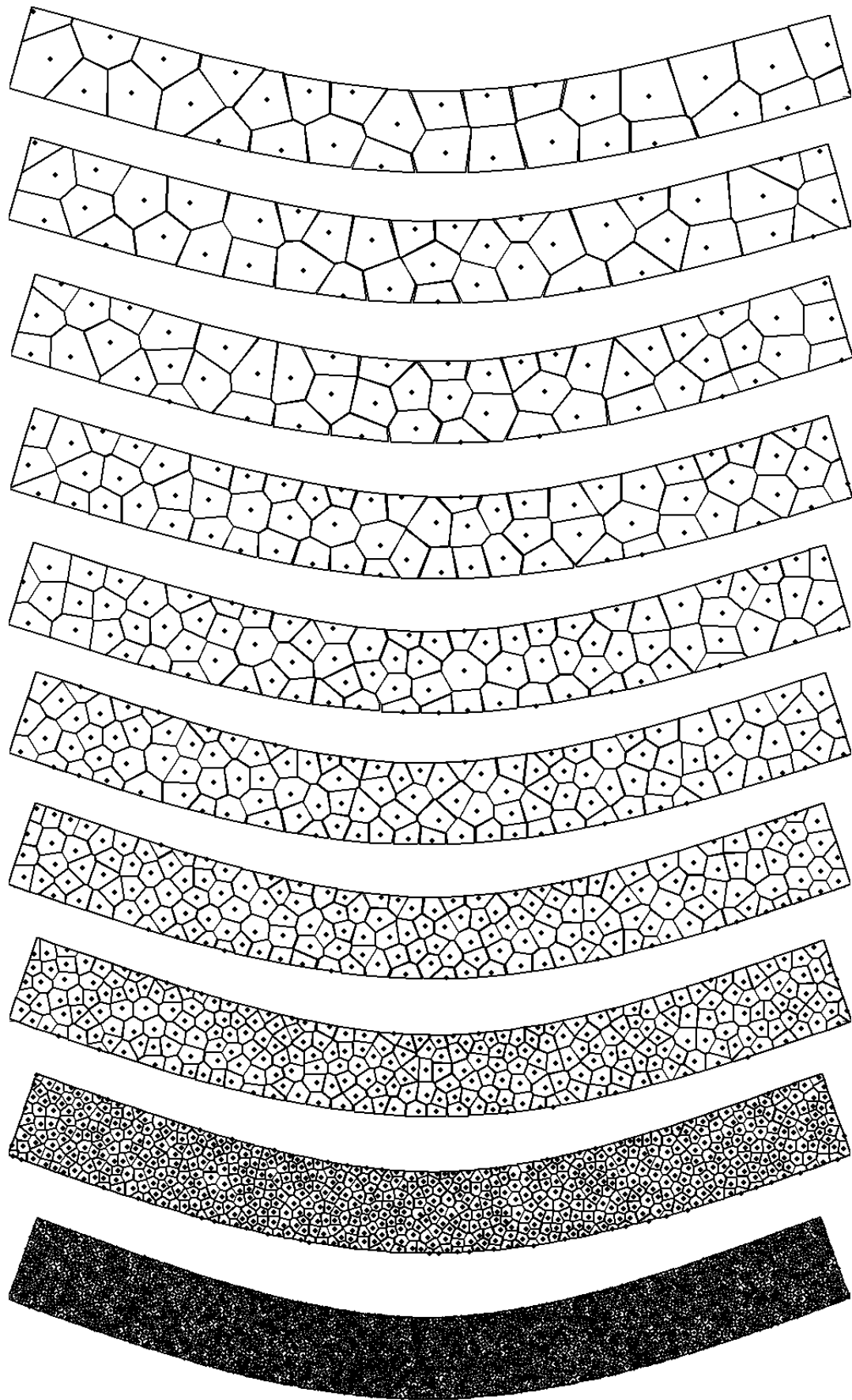
Συνολικά έγιναν 38 αναλύσεις με φορτίο 5kN στο κέντρο της αμφιέριστης δοκού και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο επόμενο γράφημα (3.8) και αφορούν τη βύθιση στο κέντρο της δοκού. Επίσης στην Εικόνα (3.9) παρουσιάζονται οι παραμορφωμένοι φορείς για δέκα ενδεικτικές διακριτοποιήσεις.



Εικόνα 3.8. Αποτελέσματα για διαφορετικές διακριτοποιήσεις για αμφιέριστη δοκό.

Από τη θεωρία ελαστικότητας έχουμε:

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} = 0.208m \quad (55)$$

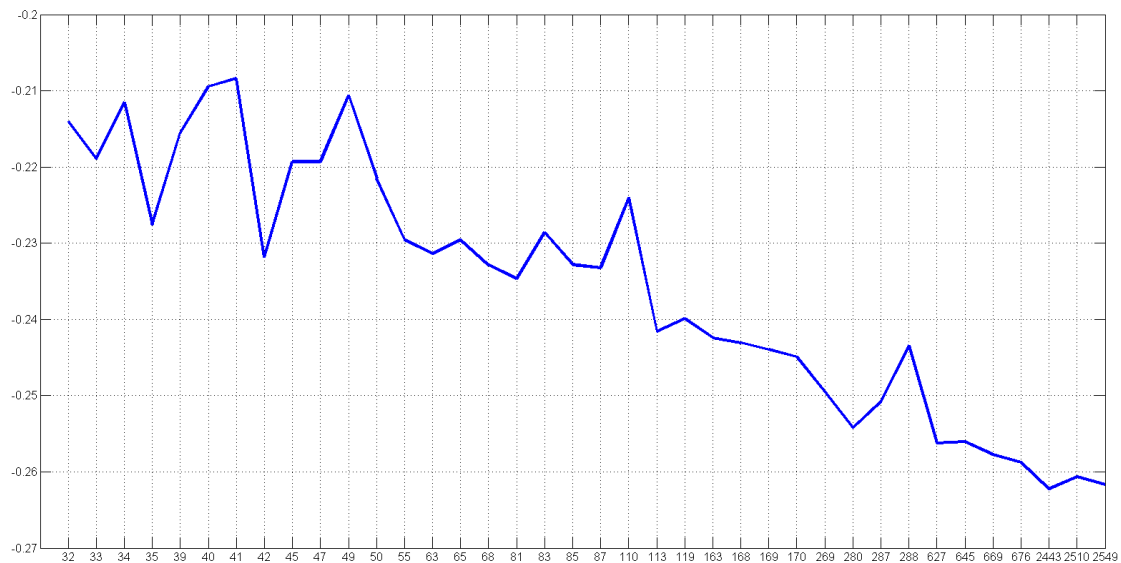


*Εικόνα 3.9. Παραμορφωμένοι φορείς για διαφορετικές διακριτοποιήσεις - περίπτωση αμφιέριστης δοκού.*

---

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα πρόβολο ίδιων διαστάσεων και ιδιοτήτων με την προηγούμενη αμφιέρειστη δοκό.

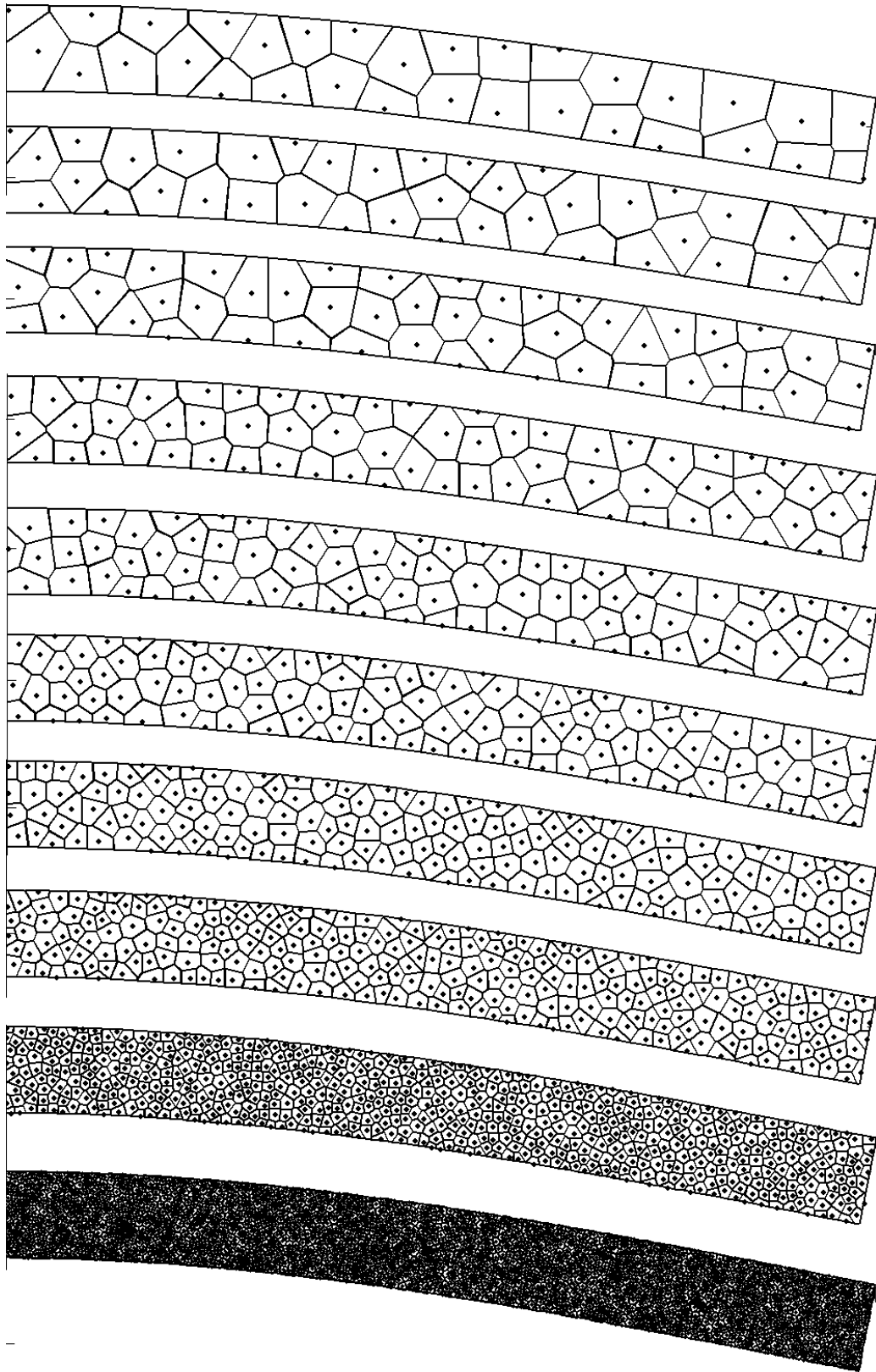
Έγιναν πάλι 38 αναλύσεις με φορτίο 0.4kN στο ελεύθερο άκρο του προβόλου και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο επόμενο γράφημα (3.10) και αφορούν τη βύθιση στο άκρο. Επίσης στην Εικόνα (3.11) παρουσιάζονται οι παραμορφωμένοι φορείς για δέκα ενδεικτικές διακριτοποιήσεις.



Εικόνα 3.10. Αποτελέσματα για διαφορετικές διακριτοποιήσεις για πρόβολο.

Από τη θεωρία ελαστικότητας έχουμε:

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = 0.266m \quad (56)$$

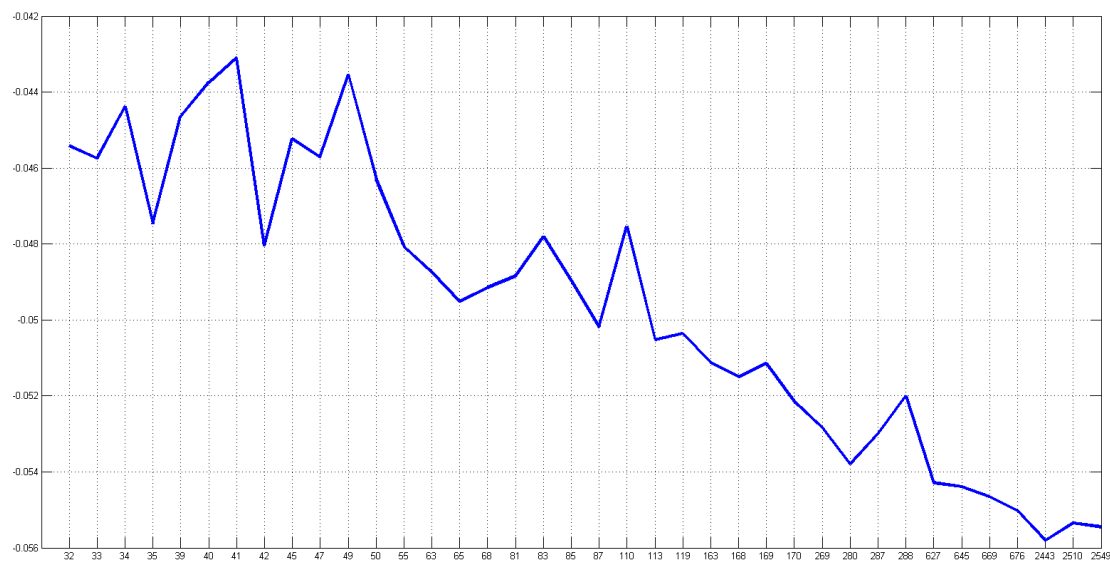


Εικόνα 3.11. Παραμορφωμένοι φορείς για διαφορετικές διακριτοποιήσεις - περίπτωση προβόλου.

---

Στη συνέχεια θεωρούμε μία αμφίπακτη δοκό ίδιων διαστάσεων και ιδιοτήτων με τις προηγούμενες δοκούς.

Συνολικά έγιναν 38 αναλύσεις με φορτίο 5kN στο μέσο της δοκού και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο επόμενο γράφημα (3.12) και αφορούν τη βύθιση στο μέσο. Επίσης στην Εικόνα (3.13) παρουσιάζονται οι παραμορφωμένοι φορείς για δέκα ενδεικτικές διακριτοποιήσεις.

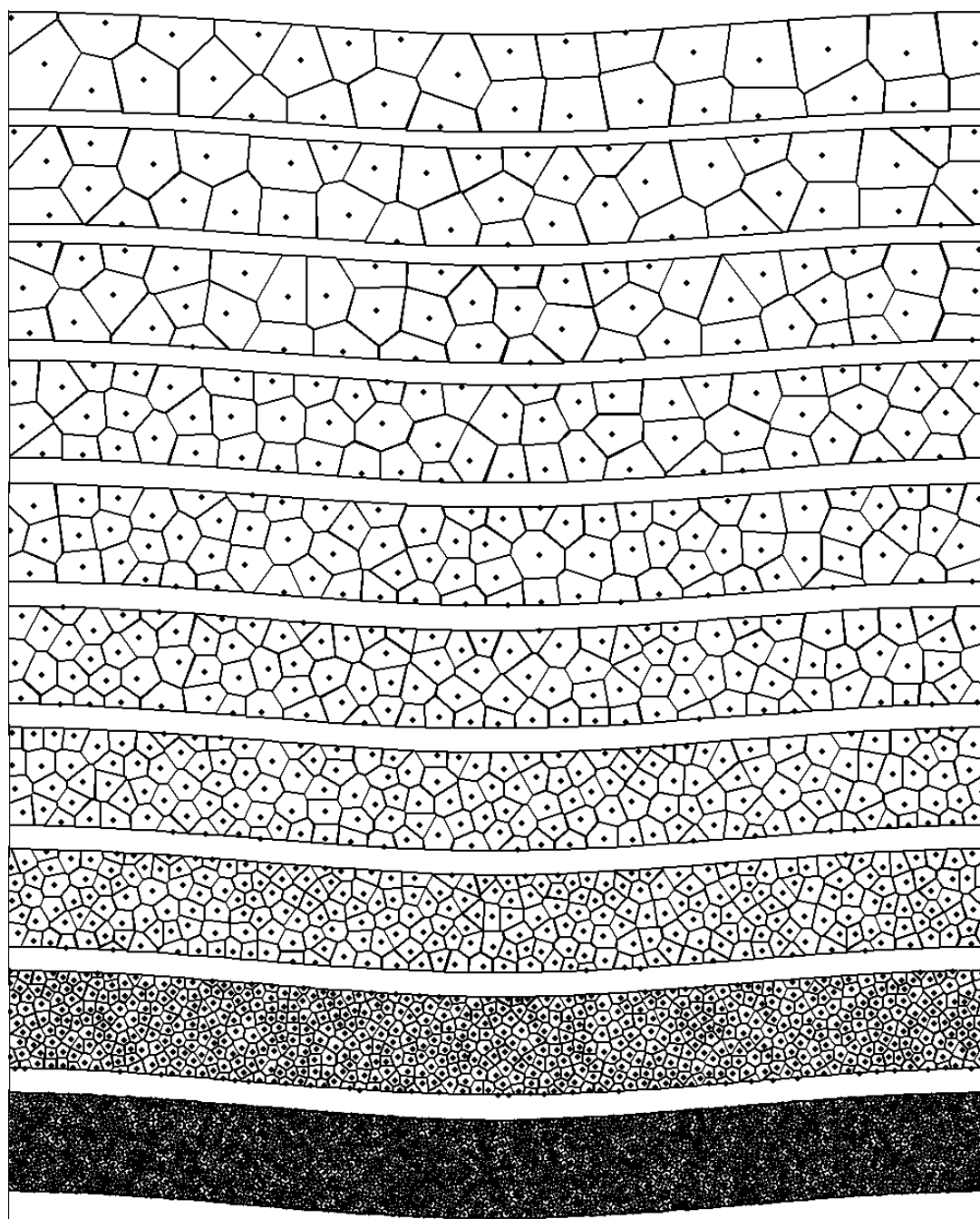


Εικόνα 3.12. Αποτελέσματα για διαφορετικές διακριτοποιήσεις για αμφίπακτη δοκό.

Από τη θεωρία ελαστικότητας έχουμε:

$$\delta = \frac{Pl^3}{192EI} = 0.052m \quad (57)$$





*Εικόνα 3.13. Παραμορφωμένοι φορείς για διαφορετικές διακριτοποιήσεις - περίπτωση αμφίπακτης δοκού.*

---

### 3.2 Στατικά προβλήματα με δημιουργία ρωγμών

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιαστούν ορισμένα παραδείγματα εφαρμογών του μοντέλου με δυνατότητα ανάπτυξης ρωγμών. Το χωρίο είναι μία δοκός με διαστάσεις 1m x 0.2m που διακριτοποιήθηκε για τρεις περιπτώσεις με **64**, **275** και **689** σημεία. Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν για τρία διαφορετικά είδη στηρίξεων, μια απλή αμφιέριστη, έναν πρόβολο και μια αμφίπακτη δοκό. Το υλικό θεωρήθηκε ότι είναι σκυρόδεμα έτσι ώστε οι ρωγμές να εμφανιστούν για μικρές παραμορφώσεις του φορέα. Οι ιδιότητες του υλικού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

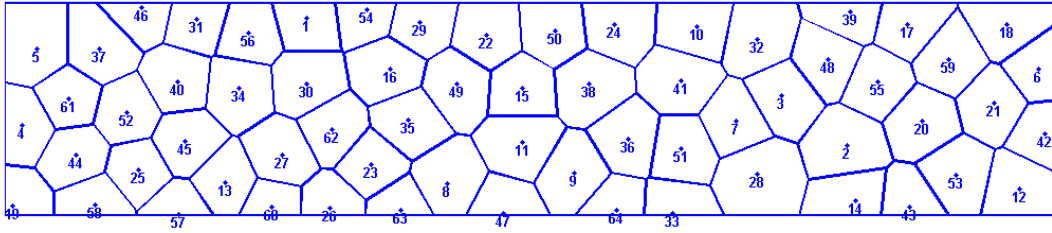
Ποιότητα σκυροδέματος	C20/25
Μέτρο Ελαστικότητας $E_{cm}$ (Gpa)	29
Εφελκυστική αντοχή (Mpa)	2.5
Λόγος Poisson (-)	0.2
Πάχος δοκού (m)	0.2

Πίνακας 1. Ιδιότητες σκυροδέματος για την ανάλυση.

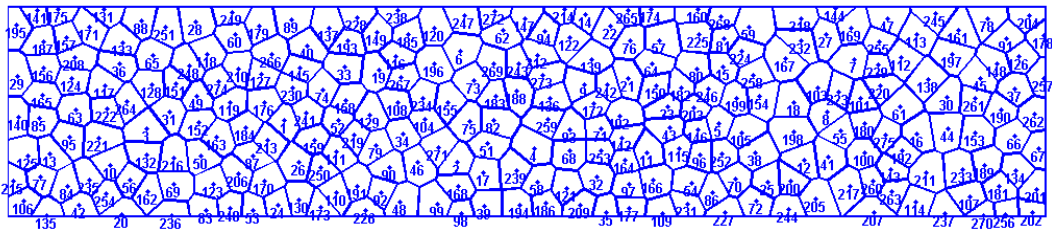
Στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού εφαρμόσθηκε δύναμη στο μέσο της ίση με **50kN** ενώ για το πρόβολο η δύναμη στο άκρο ήταν **10kN** και για την αμφίπακτη **200kN**. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια με κόκκινες γραμμές είναι επισημασμένη η διεπιφάνεια που άνοιξε η ρωγμή και παρουσιάζεται για χάρη εποπτείας στον αρχικό απαραμόρφωτο φορέα. Παρουσιάζονται επίσης οι παραμορφωμένοι φορείς με κατάλληλους συντελεστές μεγέθυνσης ώστε να είναι αντιληπτές οι ρωγμές.

Αρχικά φαίνονται οι διακριτοποιήσεις του φορέα για 64, 275 και 689 σημεία (Εικόνες (3.14), (3.15), (3.16) αντίστοιχα) και ύστερα παρουσιάζονται οι αναπτυσσόμενες ρωγμές για κάθε διακριτοποίηση και για τους δύο τύπους στηρίξεων. Για τη διακριτοποίηση με 64 σημεία η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κόμβων ήταν **0.05m** για τα 275 ήταν **0.02m** και για τα 689 σημεία ήταν **0.01m**.

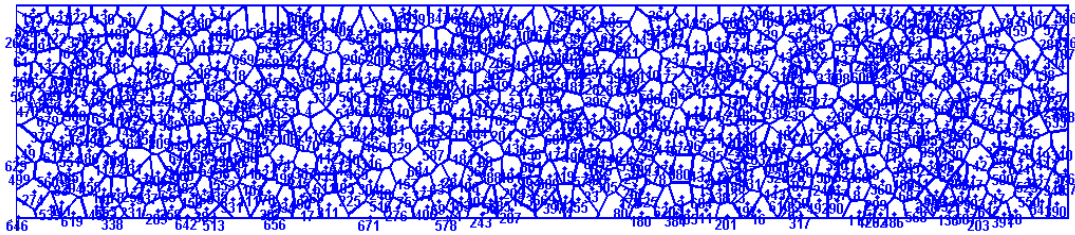
Οι διαφορετικές διακριτοποιήσεις του φορέα φαίνονται στις παρακάτω Εικόνες (3.14), (3.15) και (3.16).



Εικόνα 3.14. Διακριτοποίηση του φορέα με 64 σημεία, στηρίξεις και φορτία.



Εικόνα 3.15. Διακριτοποίηση του φορέα με 275 σημεία, στηρίξεις και φορτία.



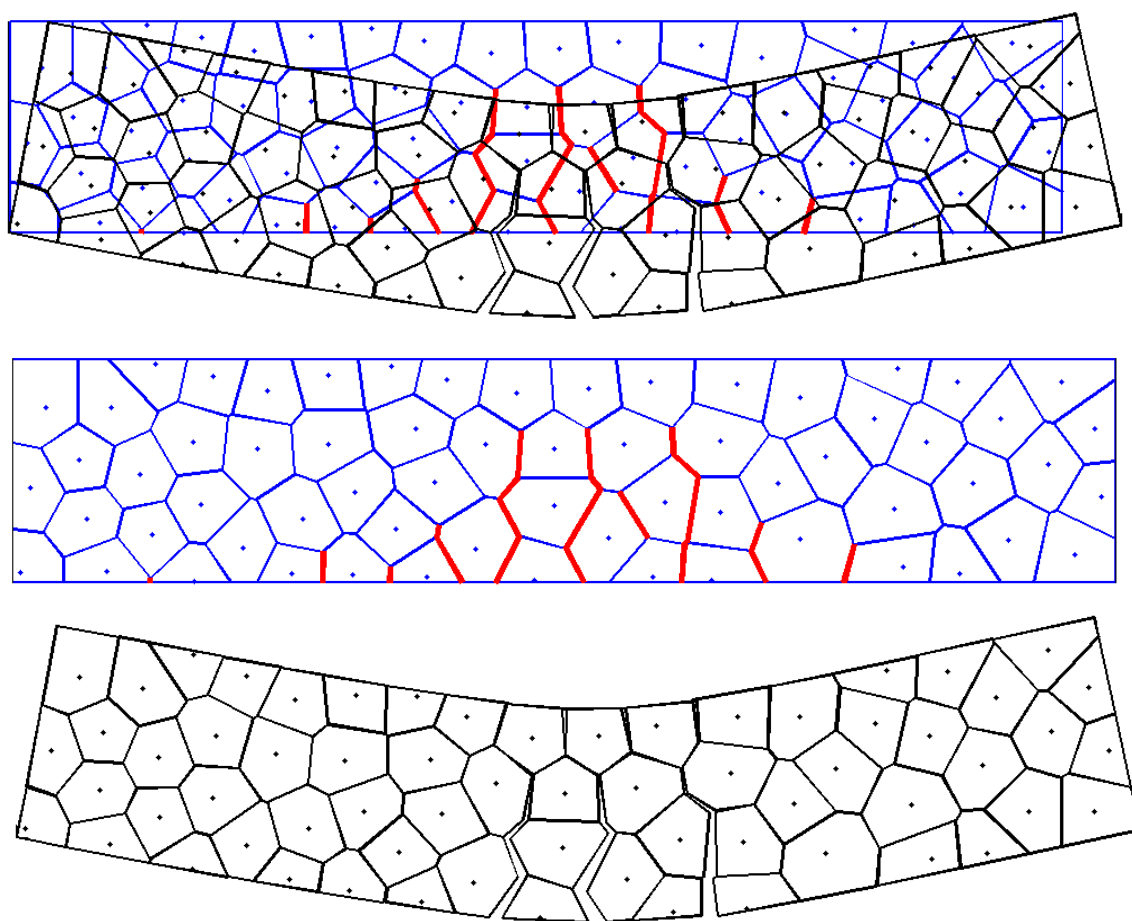
Εικόνα 3.16. Διακριτοποίηση του φορέα με 689 σημεία, στηρίξεις και φορτία.

Τα αποτελέσματα μετά τις αναλύσεις παρουσιάζονται στη συνέχεια.

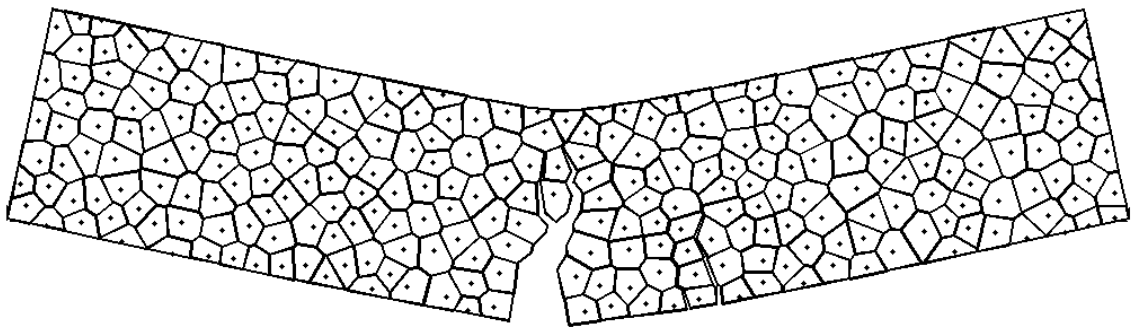
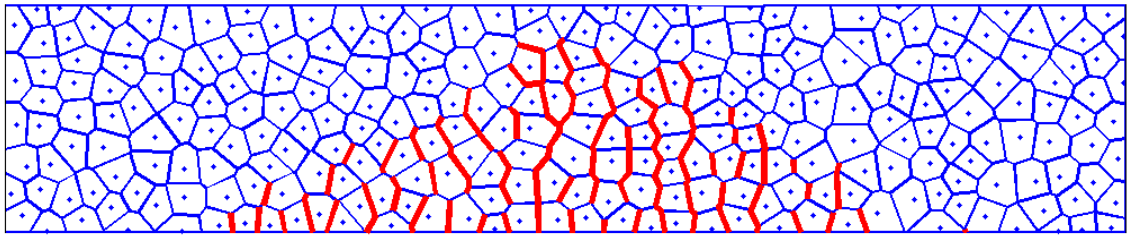
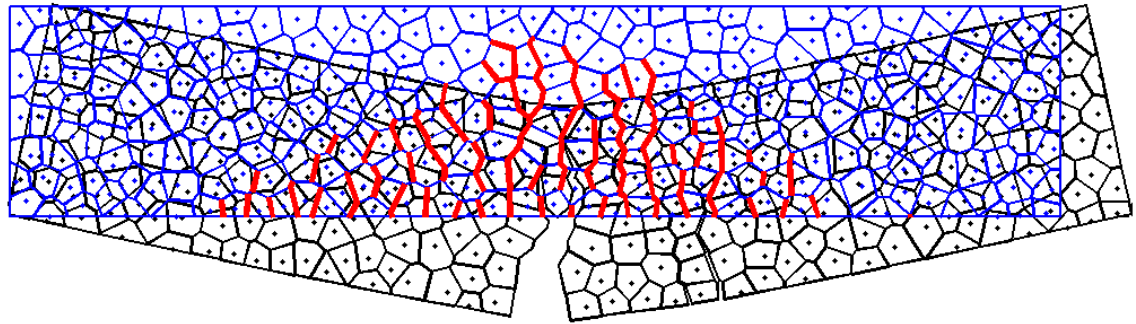
---

### 3.2.1 Αμφιέριστη δοκός

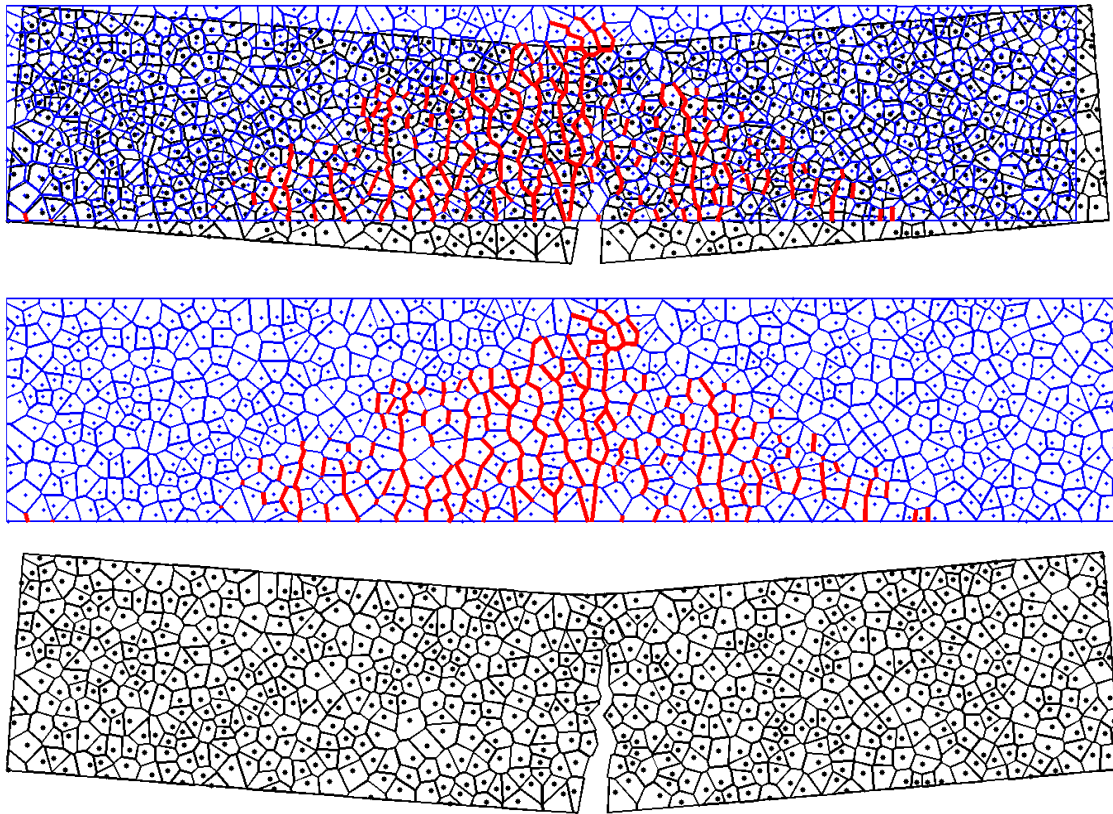
Στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού οι αναπτυσσόμενες ρωγμές για τη διακριτοποίηση των 64 σημείων παρουσιάζονται στην Εικόνα (3.17) για τη διακριτοποίηση με 275 σημεία στην Εικόνα (3.18) και για τη διακριτοποίηση με 689 σημεία στην Εικόνα (3.19). Φαίνονται επίσης και οι ρωγμές μεγεθυμένες σε κάθε περίπτωση με αντίστοιχο συντελεστή για να είναι καλύτερη η εποπτεία τους.



Εικόνα 3.17. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση της αμφιέριστης (64 σημεία).



*Εικόνα 3.18 Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση της αμφιέριστης (275 σημεία).*

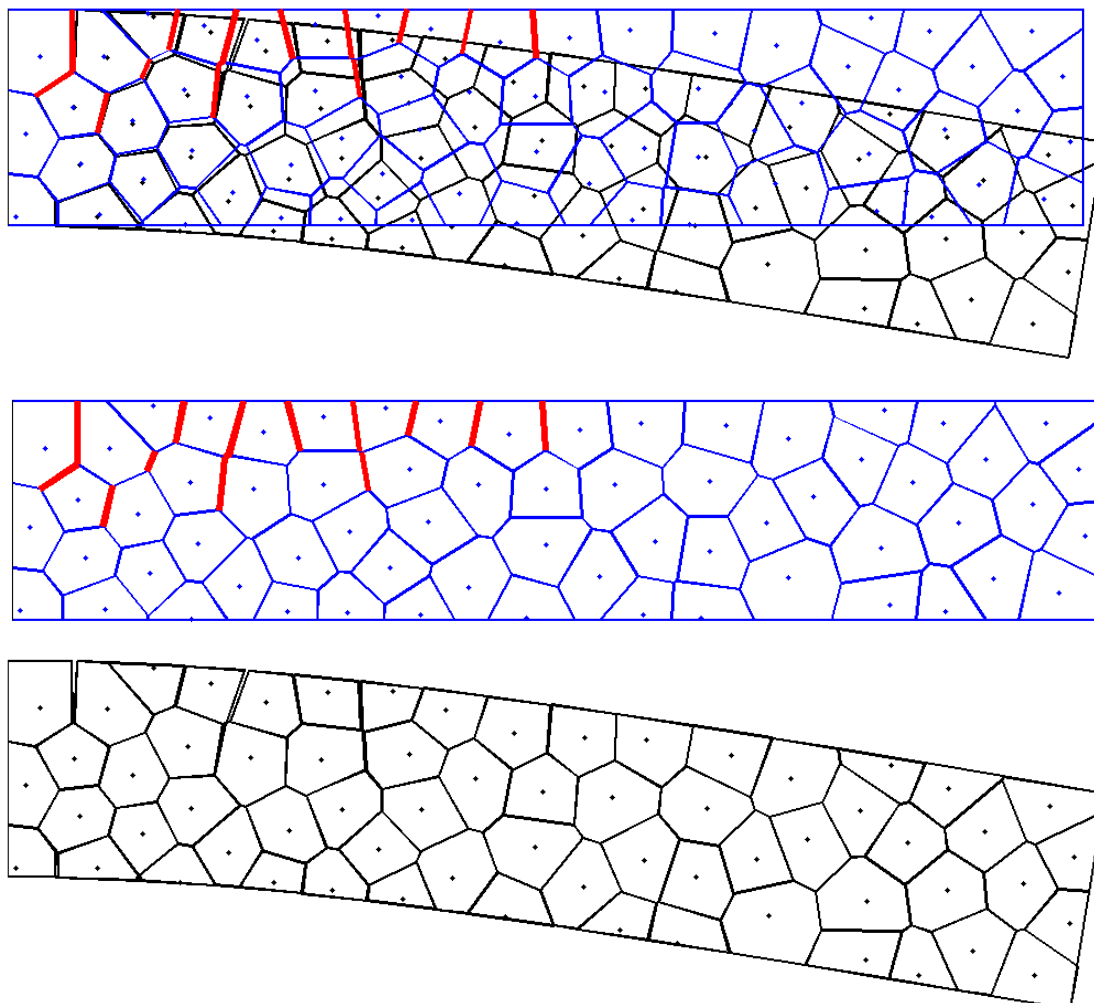


Εικόνα 3.19 Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση της αμφιέριστης (689 σημεία).

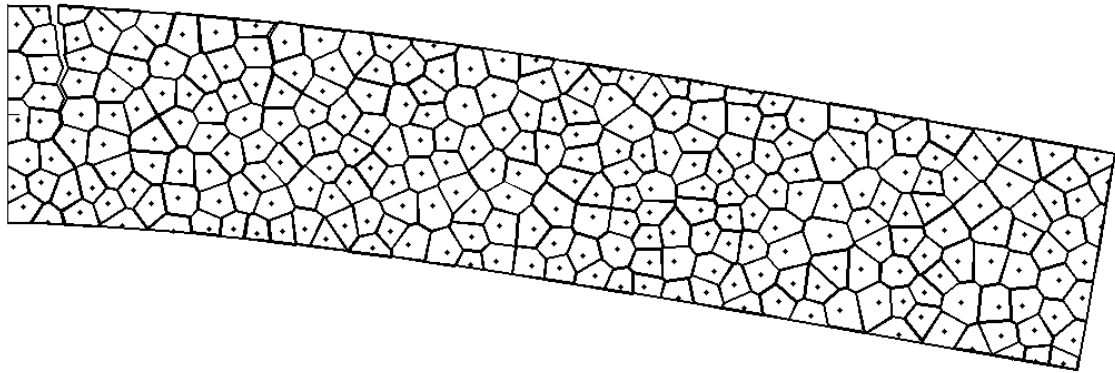
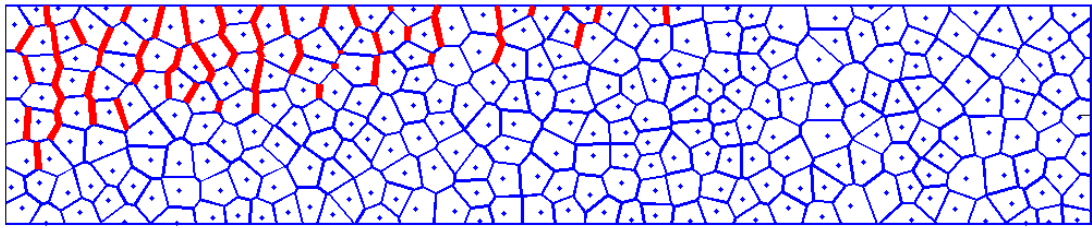
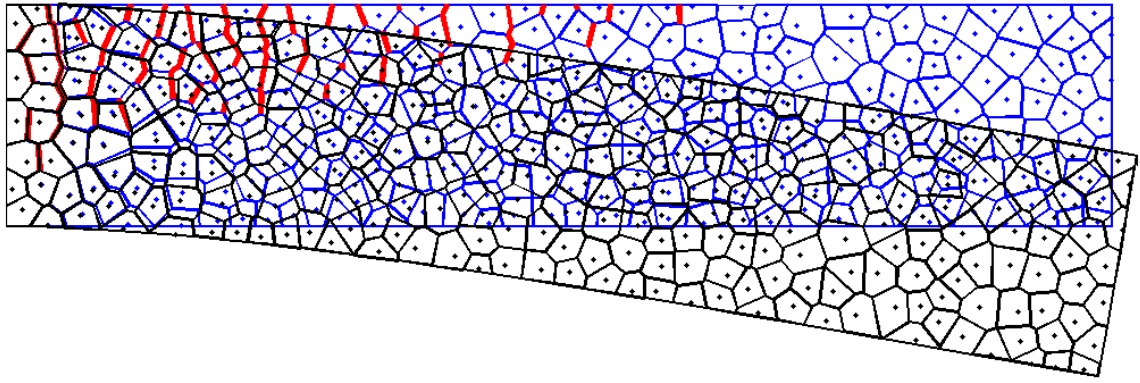
---

### 3.2.2 Πρόβολος

Στην περίπτωση του προβόλου οι αναπτυσσόμενες ρωγμές για τη διακριτοποίηση των 64 σημείων παρουσιάζονται στην Εικόνα (3.20) για τη διακριτοποίηση με 275 σημεία στην Εικόνα (3.21) και για τη διακριτοποίηση με 689 σημεία στην Εικόνα (3.22).

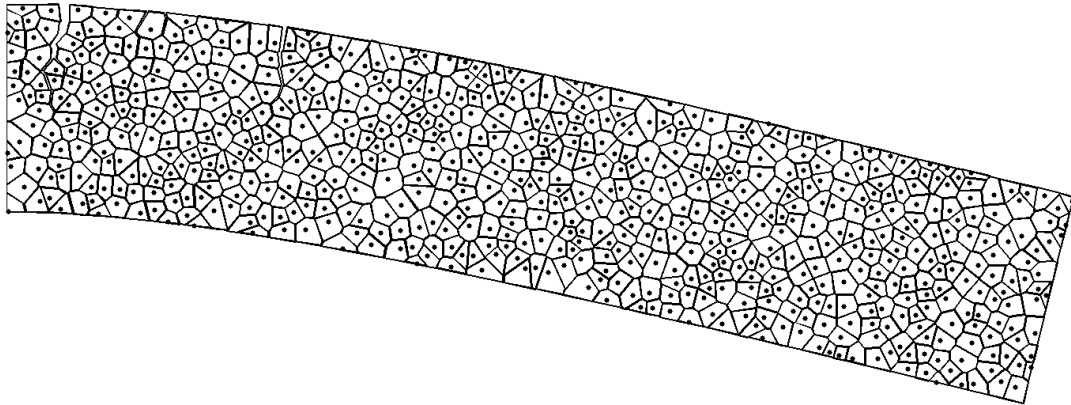
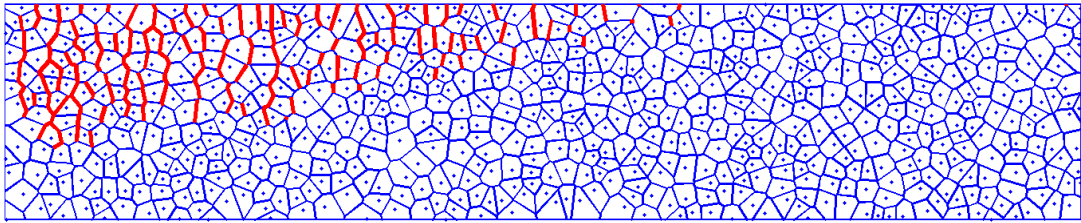
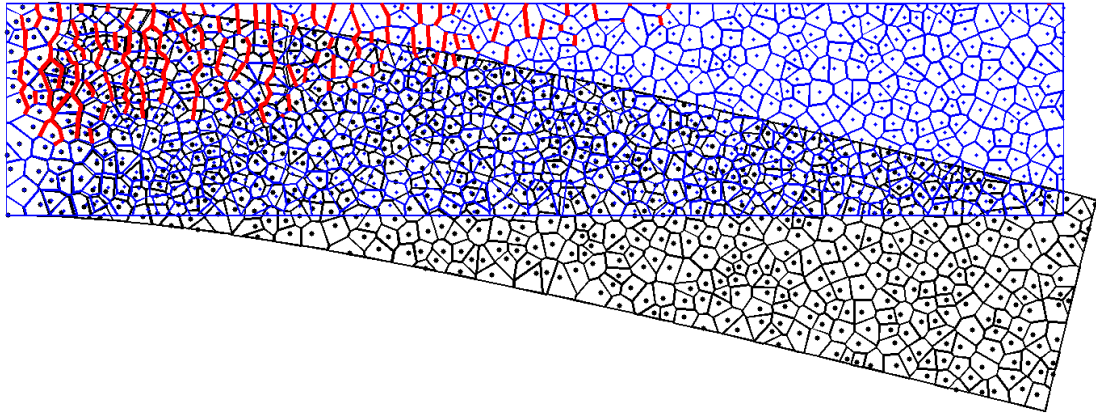


*Εικόνα 3.20. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση του προβόλου (64 σημεία).*



Εικόνα 3.21. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση του προβόλου (275 σημεία).

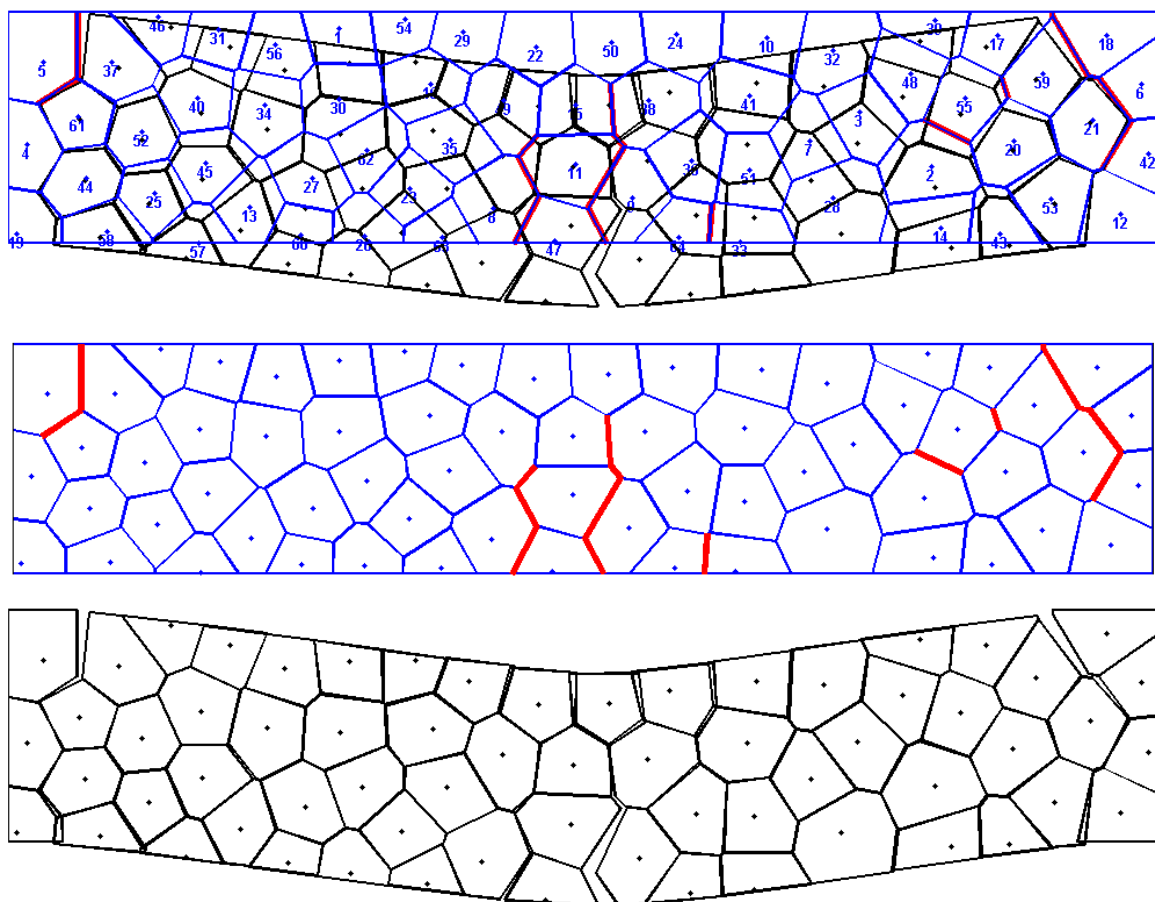




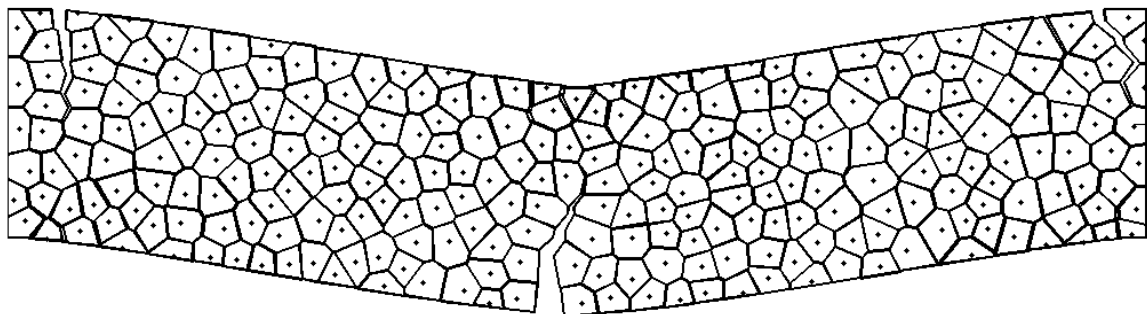
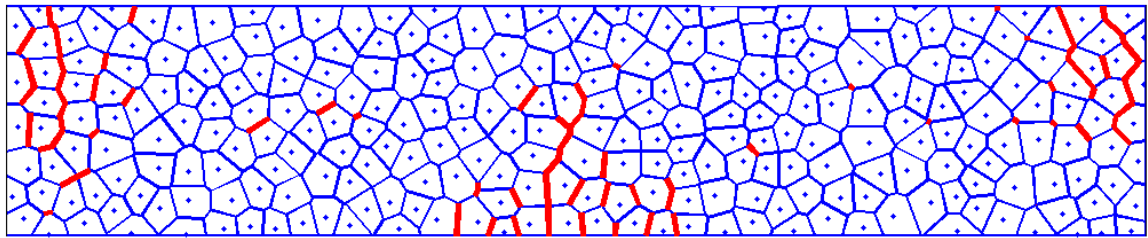
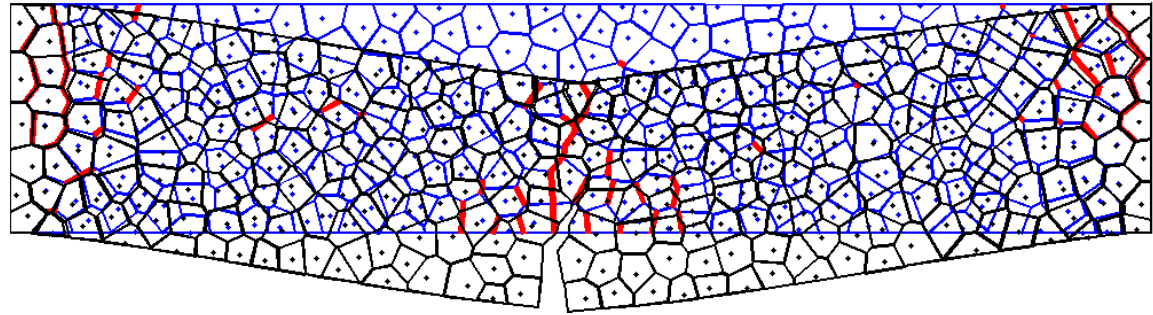
Εικόνα 3.22. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση του προβόλου (689 σημεία).

### 3.2.3 Αμφίπακτη δοκός

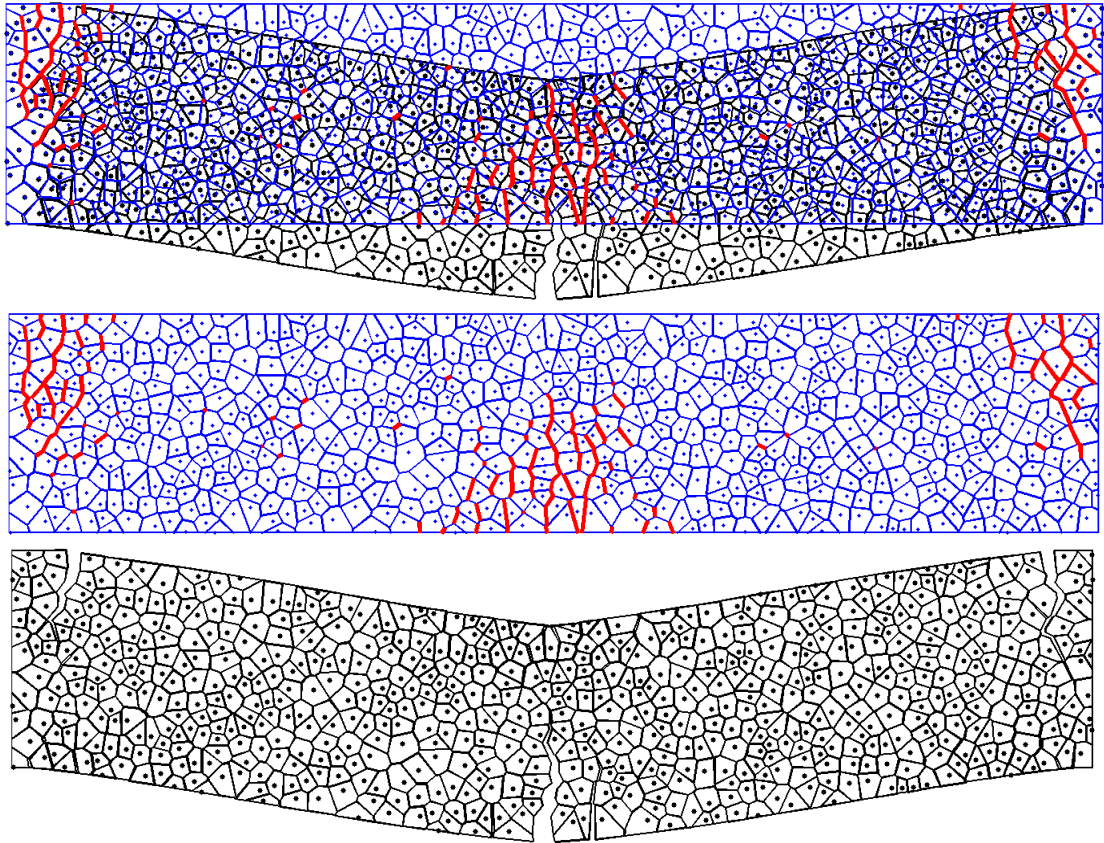
Στην περίπτωση της αμφίπακτης δοκού οι αναπτυσσόμενες ρωγμές για τη διακριτοποίηση των 64 σημείων παρουσιάζονται στην Εικόνα (3.23) για τη διακριτοποίηση με 275 σημεία στην Εικόνα (3.24) και για τη διακριτοποίηση με 689 σημεία στην Εικόνα (3.25).



Εικόνα 3.23. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση αμφίπακτης (64 σημεία).



Εικόνα 3.24. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση αμφίπακτης (275 σημεία).

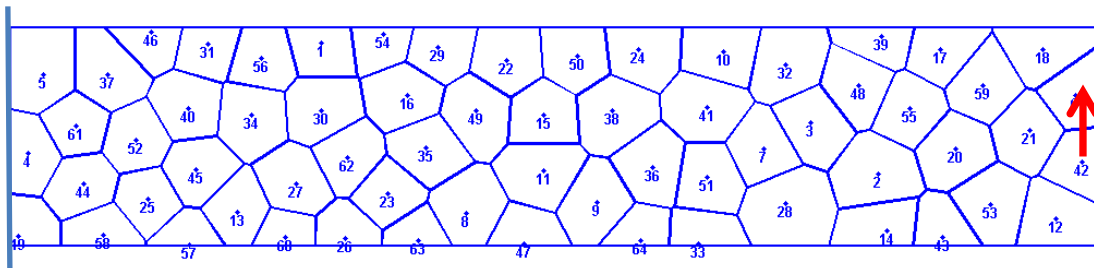


*Εικόνα 3.25. Αναπτυσσόμενες ρωγμές - περίπτωση αμφίπακτης (689 σημεία).*

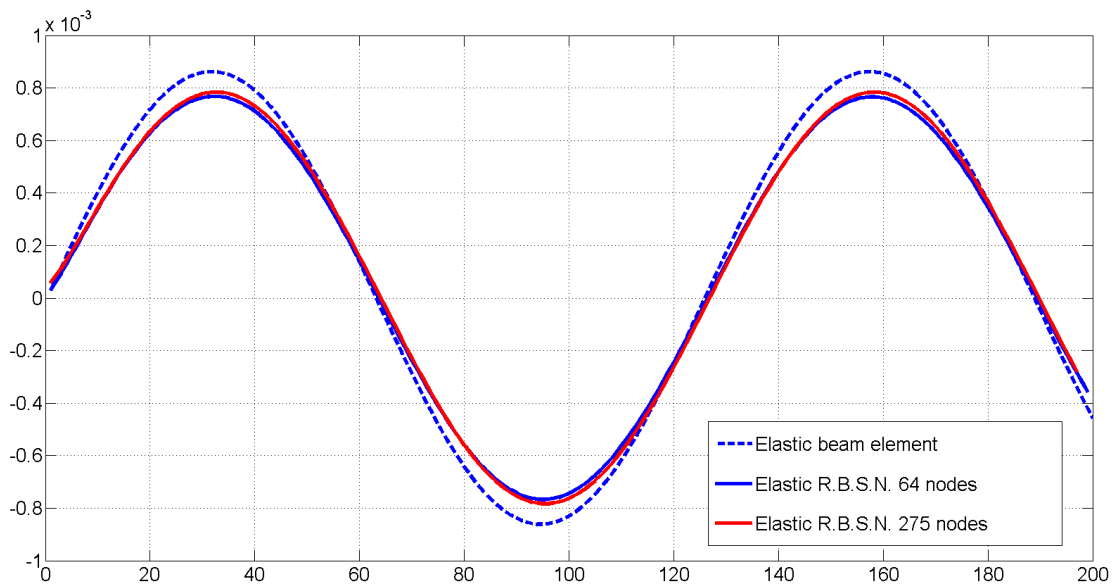
Με βάση τα παραπάνω με τη δημιουργία ρωγμών και τα στατικά προβλήματα προκύπτει το συμπέρασμα ότι ο βέλτιστος αριθμός κόμβων για την αναπαράσταση των ρωγμών στο σκυρόδεμα είναι αυτός που προκύπτει για διακριτοποίηση του χωρίου με την ελάχιστη απόσταση να είναι ίση με το μέγεθος του αδρανούς (2-3cm).

### 3.3 Δυναμικά προβλήματα

Σε αυτή τη παράγραφο θα παρουσιαστεί η σύγκριση του μοντέλου των Στερεών Σωμάτων και Ελατηρίων (R.B.S.N.) με στοιχεία δοκού για το δυναμικό πρόβλημα. Ο πρόβλος που εξετάστηκε έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με τις προηγούμενες και το φορτίο είναι ημιτονοειδές με μέγιστη τιμή τα 10 kN. Στην Εικόνα (3.26) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης.



Εικόνα 3.26. Πρόβλος διακριτοποιημένος με RBSN (64 σημεία) με ημιτονοειδή φόρτιση στον κόμβο 42.



Εικόνα 3.27. Σύγκριση αποτελεσμάτων RBSN (64 και 275 σημεία) με ένα στοιχείο δοκού για ημιτονοειδή δυναμική φόρτιση.

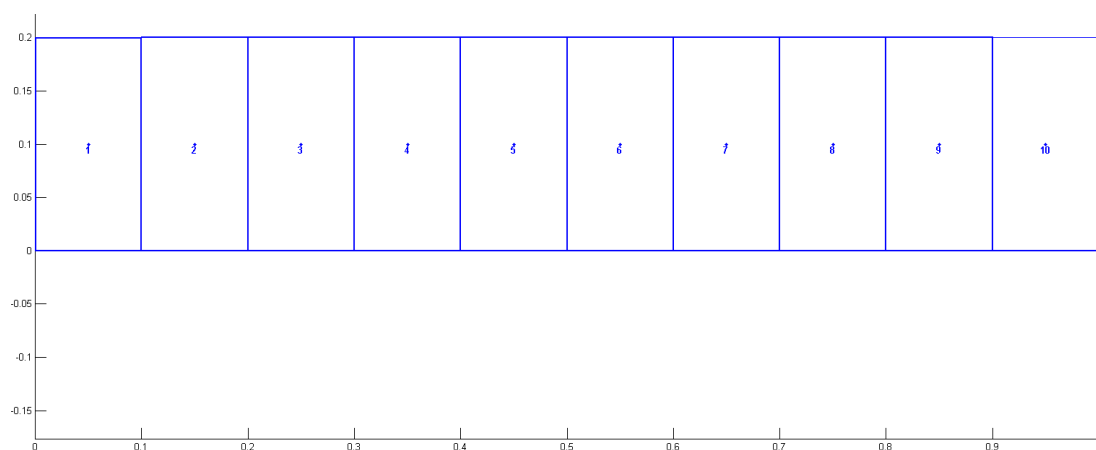
---

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η σύγκλιση των αποτελεσμάτων είναι αρκετά ικανοποιητική αν λάβουμε υπόψη τις διαφορές που περιμέναμε έτσι κι αλλιώς με βάση και τη σύγκριση στα στατικά προβλήματα εξαιτίας της διακριτοποίησης.

Οι χρόνοι επίλυσης για το δυναμικό αυτό πρόβλημα με το ίδιο χρονικό βήμα ήταν 1 sec για το στοιχείο δοκού, 7 sec για το RBSN με 64 κόμβους και 26 sec για το RBSN με 275 κόμβους.

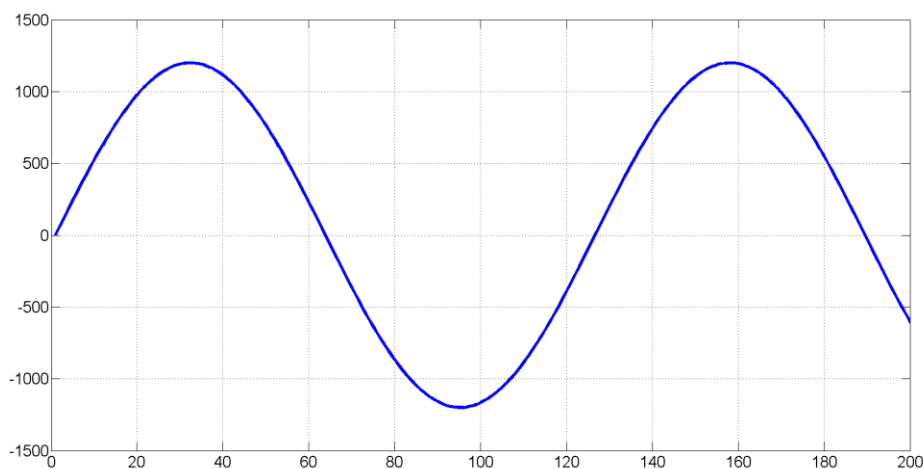
### 3.4 Δυναμικά προβλήματα με ελαστοπλαστικά ελατήρια

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα παραδείγματα με τη χρήση του μοντέλου Στερεών Σωμάτων και Ελατηρίων (R.B.S.N.) με ελαστοπλαστικά ελατήρια Βouc - Wen. Αρχικά θεωρήθηκε ένας πρόβολος διαστάσεων  $1 \times 0.2\text{m}$  όπως φαίνεται στο σχήμα (3.28). Ο πρόβολος διακριτοποιήθηκε με 10 γενεσιουργούς κόμβους τοποθετημένους στο μέσο ύψος της δοκού ( $0.10\text{m}$ ) έτσι ώστε μετά την εφαρμογή του διαγράμματος Νομοποι να προκύψουν ορθογωνικά κελιά. Επίσης με αυτή τη διακριτοποίηση και φορτίο κατά τον άξονα  $x$  ενεργοποιούνται μόνο τα ελατήρια τα κάθετα στις διεπιφάνειες και συνεπώς είναι ευκολότερος ο έλεγχος του μοντέλου.



Εικόνα 3.28. Πρόβολος  $1 \times 0.2\text{m}$  με 10 κόμβους και 9 στοιχεία.

Το φορτίο είναι ημιτονοειδές με μέγιστη τιμή τα  $1200\text{ kN}$  όπως φαίνεται στη παρακάτω Εικόνα (3.29).



Εικόνα 3.29. Ημιτονοειδής φόρτιση με μέγιστη τιμή  $1200\text{ kN}$ .

Τα στοιχεία του υλικού είναι τα εξής:

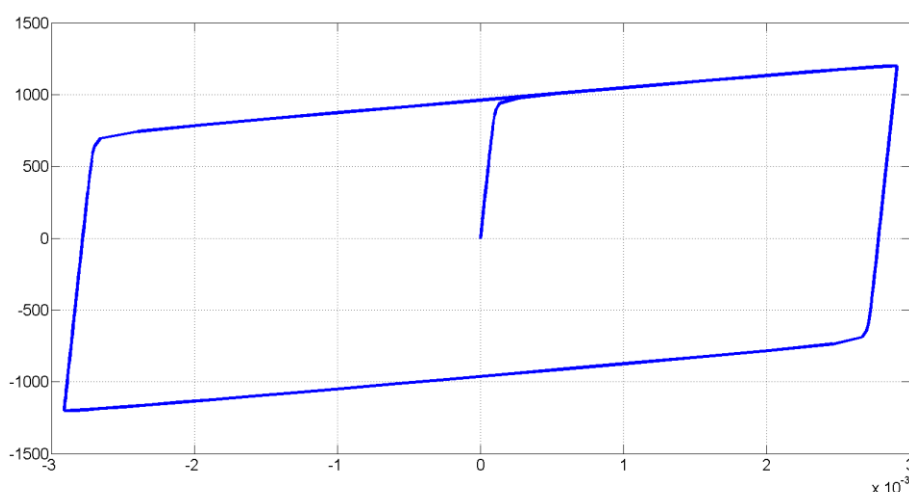
<b>Ποιότητα Χάλυβα</b>	S235
<b>Μέτρο Ελαστικότητας E (Gpa)</b>	210
<b>Τάση διαρροής (Mpa)</b>	235
<b>Λόγος Poisson (-)</b>	0.3
<b>Πάχος δοκού (m)</b>	0.02

Πίνακας 2. Στοιχεία υλικού χάλυβα.

Η αξονική δύναμη διαρροής για ανωτέρω πρόβολο είναι:

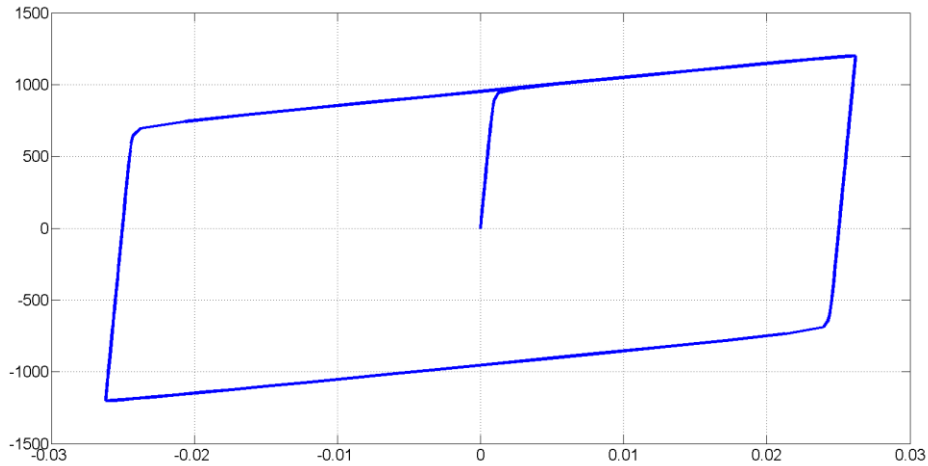
$$N_y = A\sigma_y = 0.02 * 0.2 * 235000 = 940kN \quad (58)$$

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαρροή συμβαίνει στα 940 kN και οι και οι βρόγχοι που προκύπτουν είναι συμμετρικοί. Στην Εικόνα (3.30) φαίνονται τα αποτελέσματα για κάθε εσωτερικό ελατήριο που είναι τα ίδια αφού η δύναμη είναι κοινή και τα χαρακτηριστικά τους τα ίδια. Επίσης στην Εικόνα (3.31) παρουσιάζεται το τελικό αποτέλεσμα που αφορούν τη μετακίνηση του κόμβου 10 και την εξωτερική δύναμη. Το αποτέλεσμα είναι το άθροισμα όλων των παραμορφώσεων των εσωτερικών ελατηρίων όπως και αναμέναμε.



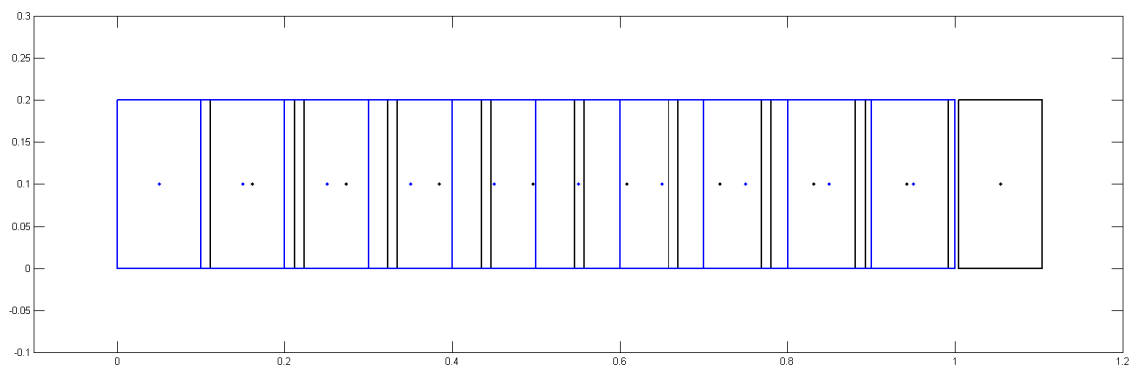
Εικόνα 3.30. Διάγραμμα Δύναμης - Παραμόρφωσης για τα εσωτερικά ελατήρια.



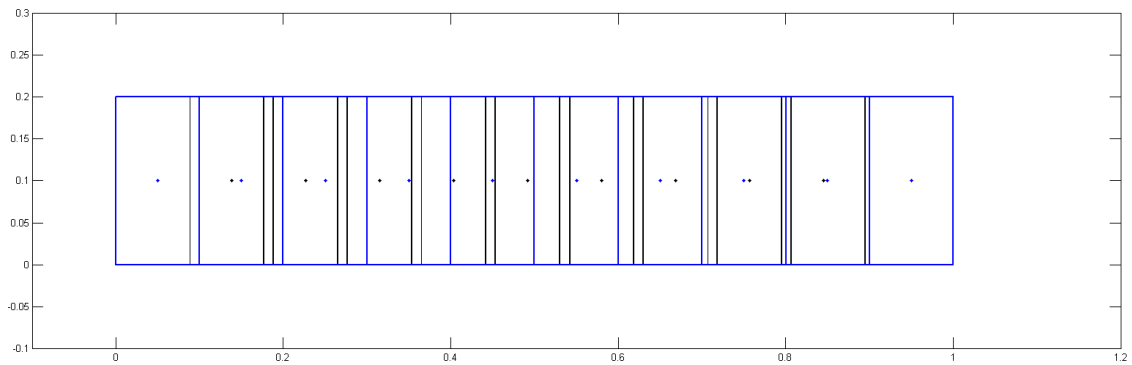


Εικόνα 3.31. Διάγραμμα Δύναμης -Μετακίνησης του ακραίου κόμβου 10 του προβόλου

Παρουσιάζεται επίσης η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στη μέγιστη μετακίνηση πολλαπλασιασμένη με επαυξητικό συντελεστή 4 (Εικόνα (3.32)) καθώς και στην επαναφόρτιση για θλιπτική δύναμη (Εικόνα (3.33)). Με μαύρο φαίνεται η τελική θέση του φορέα ενώ με μπλε η αρχική απαραμόρφωτη κατάστασή του. Μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτό που έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα ότι επιτρέπεται η επικάλυψη των κελιών με την εφαρμογή θλιπτικής δύναμης αφού δεν έχει οριστεί κάποιος έλεγχος επαφής μεταξύ των κελιών όπως γίνεται για παράδειγμα στη μέθοδο D.E.M..

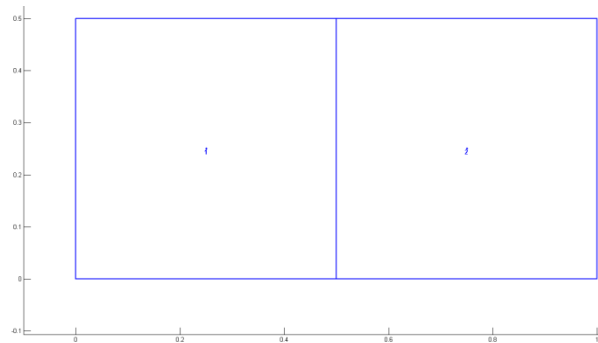


Εικόνα 3.32. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στη μέγιστη θετική μετακίνηση.

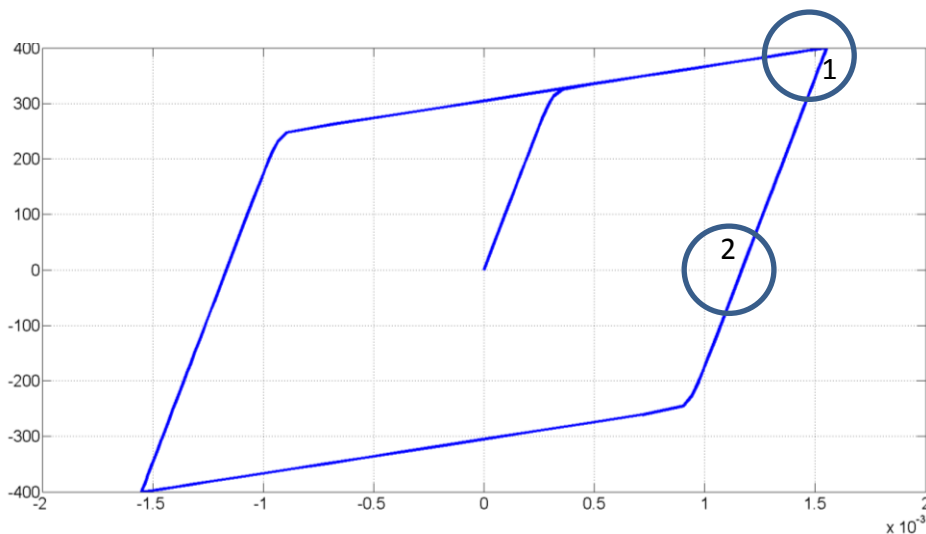


Εικόνα 3.33. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στη μέγιστη αρνητική μετακίνηση.

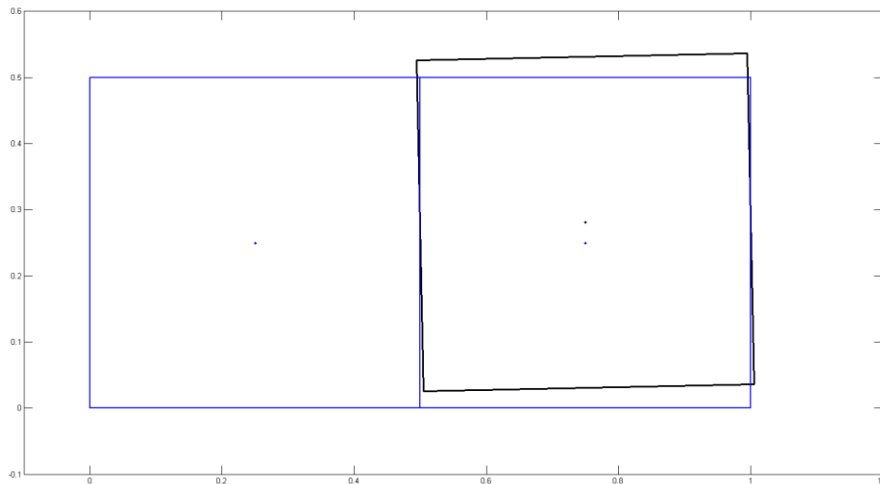
Στη συνέχεια θεωρήθηκε ένα χωρίο  $1 \times 0.5\text{m}$  το οποίο διακριτοποιήθηκε με 2 κόμβους και ένα στοιχείο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (3.34). Το χωρίο θεωρήθηκε πακτωμένο στο αριστερό κόμβο και επιβλήθηκε μία ημιτονοειδή δύναμη στο δεξί κόμβο κατά τον άξονα  $y$  με μέγιστη τιμή τα  $400 \text{ kN}$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στις Εικόνες (3.35), (3.36) και (3.37).



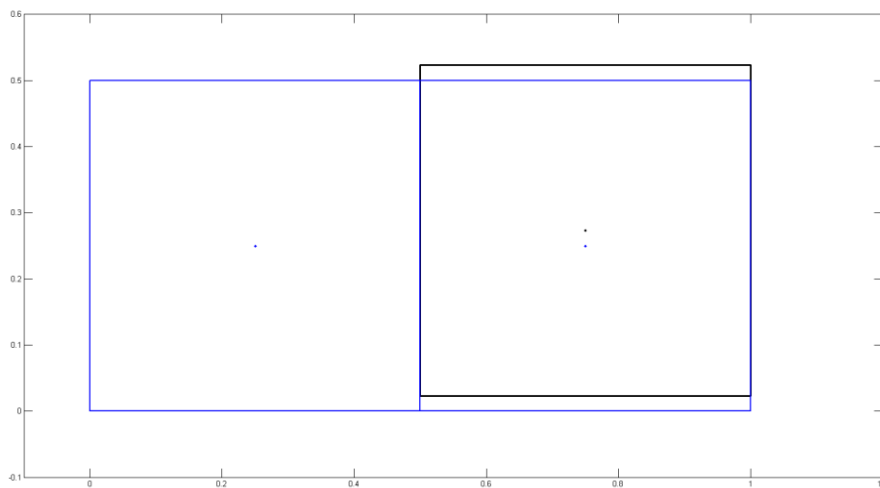
Εικόνα 3.34. Φορέας διακριτοποιημένος με 2 κόμβους.



Εικόνα 3.35. Διάγραμμα Δύναμης -Μετακίνησης του κόμβου 2 κατά  $y$ .



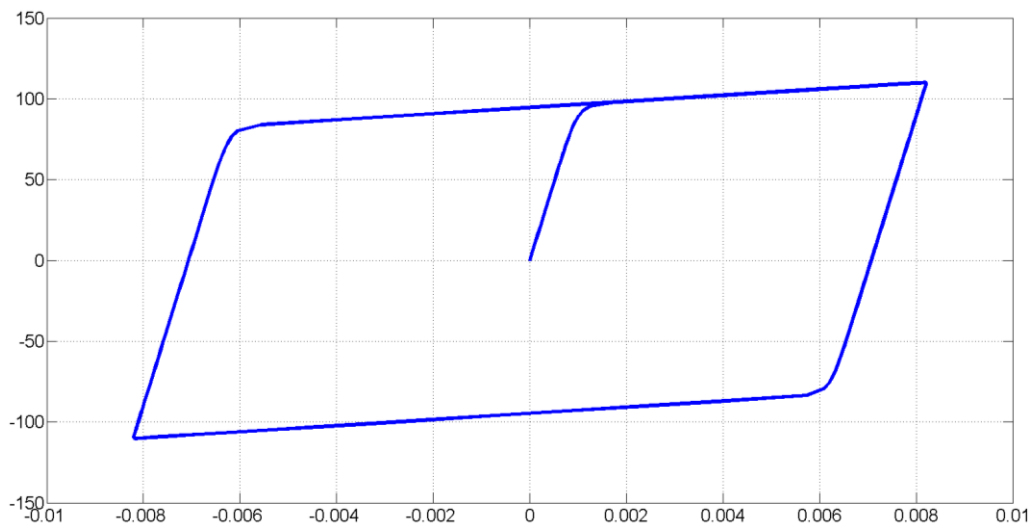
Εικόνα 3.36. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στην μέγιστη δύναμη.



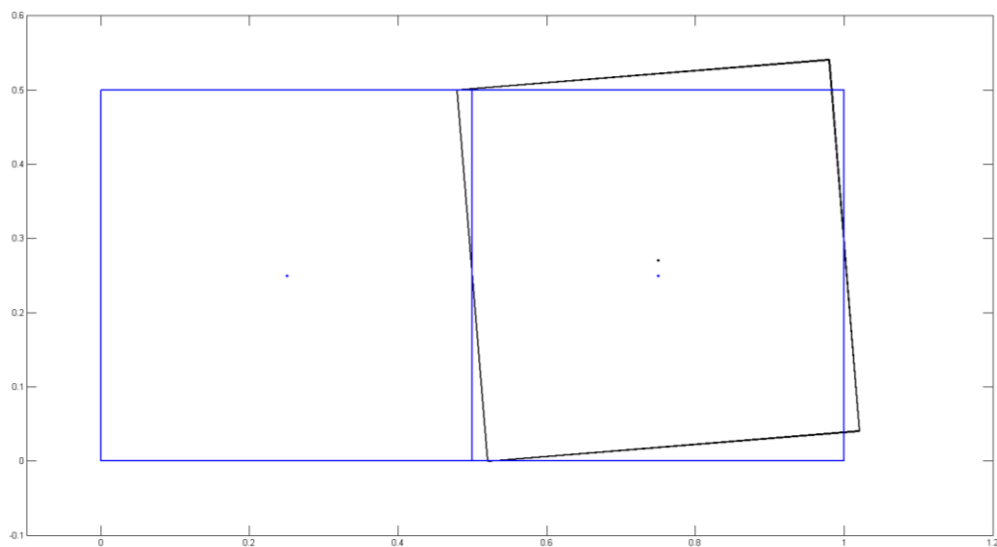
Εικόνα 3.37. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα για μηδενική δύναμη στην αποφόρτιση.

Στην Εικόνα (3.36) φαίνεται η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα για μέγιστη τιμή της δύναμης (σημείο 1) ενώ στην Εικόνα (3.37) η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης για μηδενική δύναμη (σημείο 2). Είναι εμφανής η παραμένουσα μετακίνηση εξαιτίας της διαρροής. Τέλος παρουσιάζεται και η χρονοιστορία μετακίνησης του κόμβου 2 κατά  $y$  στην Εικόνα (3.38).

Τέλος παρουσιάζονται τα διαγράμματα για φόρτιση μόνο με ροπή στην Εικόνα (3.38) και η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα τη στιγμή εφαρμογής της μέγιστης δύναμης στην Εικόνα (3.39).



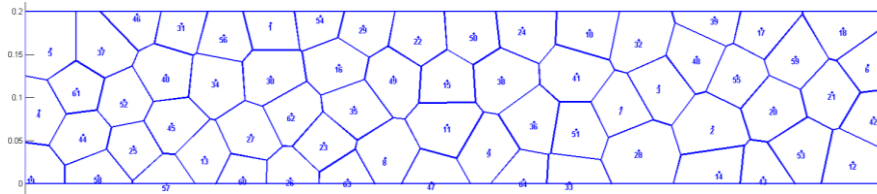
Εικόνα 3.38. Διάγραμμα Ροπής -Στροφής του εσωτερικού ελατηρίου.



Εικόνα 3.39. Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα στη μέγιστη δύναμη.

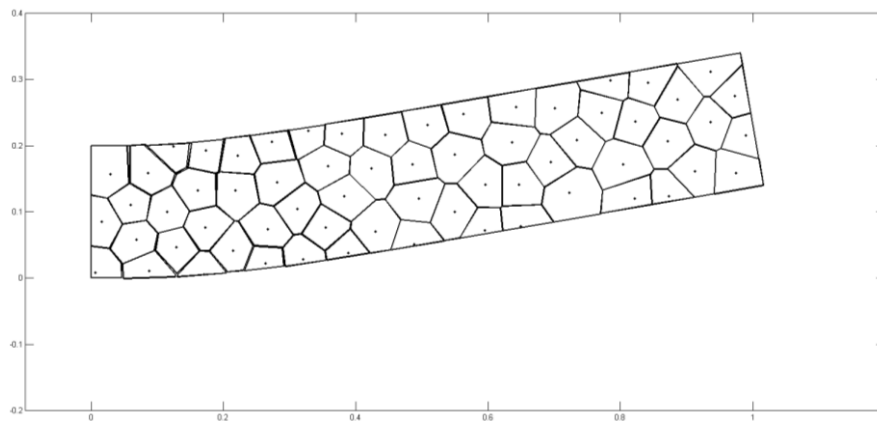
Όπως είναι φανερό στην περίπτωση αυτών των απλών φορέων η εφαρμογή των υστερητικών ελατηρίων Bouc-Wen έδωσε αποτελέσματα με ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση ενός πιο σύνθετου φορέα.

Ο φορέας που εξετάστηκε είναι ένας πρόβολος με διαστάσεις 1x0.2m ο οποίος και διακριτοποιήθηκε με 64 σημεία όπως και στο δυναμικό ελαστικό πρόβλημα της παραγράφου 3.3.

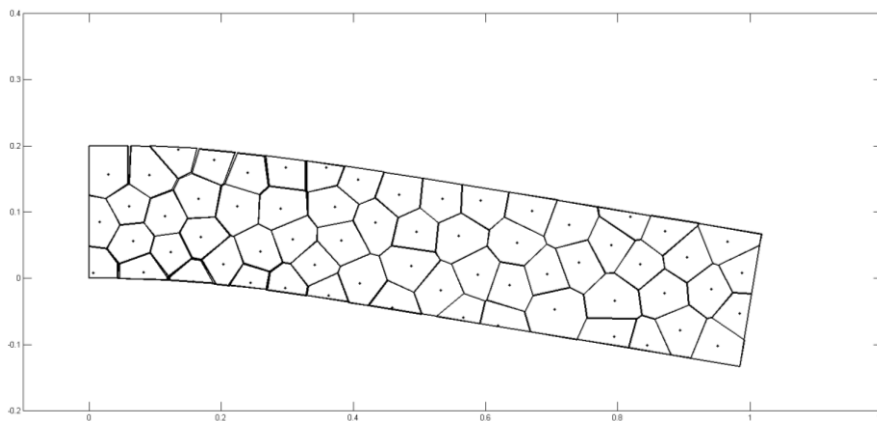


Εικόνα 3.40.Φορέας υπό εξέταση.

Ο φορέας υποβλήθηκε σε ημιτονοειδή επιτάχυνση στη βάση του. Στις Εικόνες (3.41) και (3.42) παρουσιάζεται η παραμορφωμένη κατάσταση του για τις ακραίες μετακινήσεις.



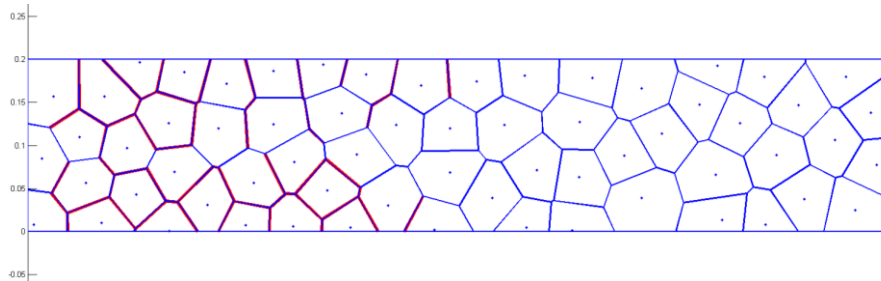
Εικόνα 3.41.Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα για μέγιστη θετική μετακίνηση.



Εικόνα 3.42.Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα για μέγιστη αρνητική μετακίνηση.

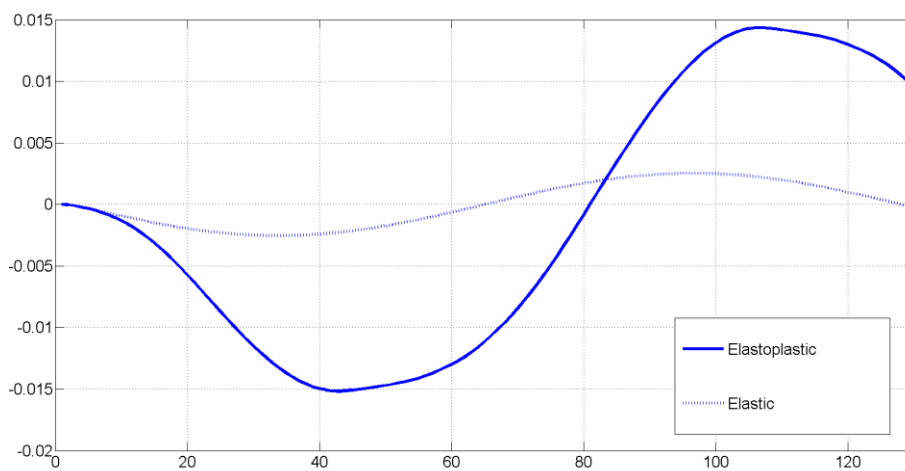
---

Στην Εικόνα (3.43) παρουσιάζονται οι διατομές που πλαστικοποιήθηκαν. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε συγκεντρώνονται κοντά στη βάση του προβόλου και από τις δύο μεριές.



Εικόνα 3.43. Διατομές που πλαστικοποιήθηκαν.

Τέλος στην Εικόνα (3.44) παρουσιάζονται η μετακίνηση του άκρου του προβόλου για την επίλυση με τα ελαστοπλαστικά ελατήρια Bouc-Wen και η σύγκρισή τους με τα αποτελέσματα για το ελαστικό μοντέλο.



Εικόνα 3.44. Σύγκριση αποκρίσεων μεταξύ ελαστικού και ελαστοπλαστικού μοντέλου (βύθιση στο άκρο (m) με το χρόνο(sec)).

---

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

Συμπεράσματα – Μελλοντική έρευνα

---

Στη παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία αρχικά επιχειρήθηκε μία ιστορική αναδρομή στις σημαντικότερες θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί στην Επιστήμη της Θραυστομηχανικής. Τα μοντέλα αυτά μπορούν να χωριστούν σε μοντέλα συνεχών συστημάτων (X-FEM, Mesh free method) και σε μοντέλα διακριτών συστημάτων (D.E.M., Lattice models). Το μοντέλο το οποίο αποτέλεσε το κύριο μέρος της εργασίας ήταν τον Σύστημα Στερεών Σωμάτων και ελατηρίων. Αυτό επιλέχθηκε εξαιτίας της απλότητας του και της ικανότητάς του να προσομοιώσει το υλικό και τις ρωγμές στην κλίμακα του Μηχανικού. Οι μέθοδοι και οι σχέσεις που παρουσιάστηκαν προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής. Αρχικά στο χωρίο διασκορπίζονται σημεία τα οποία αποτελούν και τους κόμβους του δικτύου. Τα σημεία αυτά δεν επιλέγονται τυχαία μέσα στο χωρίο αλλά πρέπει οι αποστάσεις μεταξύ 2 γειτονικών σημείων να είναι μεγαλύτερες από ένα όριο. Αυτό επιλέγεται διότι σε τυχαία διασπορά σημείων δεν υπάρχει ελαστική ομοιομορφία στο δίκτυο.

Στη συνέχεια με βάση τα σημεία αυτά εφαρμόζεται η τεχνική Voronoi. Αυτή έχει ως αποτέλεσμα το χωρισμό του χωρίου σε κυρτά πολύγωνα τα οποία και θα αποτελέσουν τα στερεά σώματα του προσομοιώματος. Με βάση το διάγραμμα Voronoi τα πολύγωνα που δημιουργούνται χωρίζουν έτσι το χωρίο ώστε το σύνολο των σημείων που βρίσκονται εντός ενός πολυγώνου να είναι πιο κοντά στο κόμβο από τον οποίο προέκυψε το πολύγωνο παρά σε οποιονδήποτε άλλο κόμβο.

Έχοντας μορφώσει τα στερεά σώματα από τα οποία θα αποτελείται το μοντέλο στη συνέχεια θεωρούμε ότι στο μέσο της κάθε διεπιφάνειας υπάρχουν 3 ελατήρια μηδενικού μήκους, ένα κάθετο στη διεπιφάνεια, ένα εφαπτομενικό και ένα στροφικό. Οι δυσκαμψίες τους είναι τέτοιες ώστε να προσομοιώνουν τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού για δισδιάστατα προβλήματα.

Το στοιχείο του μοντέλου αποτελείται από 2 στερεά σώματα, τη διεπιφάνειά τους και τα 3 ελατήρια. Το μητρώο [B] συσχετίζει τις σχετικές μετατοπίσεις των 3 ελατηρίων της διεπιφάνειας με τις μετατοπίσεις των κόμβων και αντίστροφα. Αν



---

Θεωρήσουμε το διαγώνιο μητρώο με τις δυσκαμψίες των 3 ελατηρίων τότε με βάση την αρχή των δυνατών έργων προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου  $K_e=[B]^T[D][B]$ . Από τα μητρώα δυσκαμψίας των μελών προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής ακολουθώντας τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας.

Αρχικά μελετήθηκε το απλό ελαστικό μοντέλο για στατική φόρτιση. Με γνωστό το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής και το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων προκύπτουν οι μετατοπίσεις των κόμβων του φορέα με βάση τη γνωστή σχέση  $[K]\{u\}=\{f\}$ . Παρουσιάστηκαν παραδείγματα που συγκρίνουν το μοντέλο με τις σχέσεις από τη θεωρία της ελαστικότητας. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η απόκριση εξαρτάται από τη διακριτοποίηση του φορέα και πιο συγκεκριμένα από το συνολικό αριθμό των σημείων που επιλέχθηκαν. Μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη διακριτοποίηση για ένα υλικό όπως το σκυρόδεμα είναι αυτή που η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κόμβων είναι στα επίπεδα του μεγέθους των αδρανών του σκυροδέματος. Επίσης για το στατικό πρόβλημα έγινε η σύγκριση στην επιβολή του φορτίου σε έναν κόμβο ή σε περισσότερους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ο τρόπος επιβολής του φορτίου δεν επηρεάζει σημαντικά το αποτέλεσμα.

Στη συνέχεια αναπτύχθηκε η θεωρία για την επίλυση του στατικού προβλήματος με τη δημιουργία ρωγμών. Η θραύση προκύπτει με απλό και εποπτικό τρόπο ελέγχοντας τις τάσεις σε κάθε υπολογιστικό βήμα σε κάθε διεπιφάνεια και μηδενίζοντας τις δυστένιες των ελατηρίων της διεπιφάνειας που ικανοποιούν το κριτήριο θραύσης. Στην παρούσα εργασία ως κριτήριο θραύσης επιλέχθηκε ένα απλό κριτήριο τύπου Mohr-Coulomb για τις ορθές και διατμητικές τάσεις. Παρουσιάζονται παραδείγματα που αναδεικνύουν την ικανότητα του μοντέλου να προσομοιώσει ρωγμές σε διάφορους απλούς φορείς.

Περνώντας στο δυναμικό πρόβλημα απαιτείται η μόρφωση του μητρώου μάζας της κατασκευής. Αυτό προκύπτει για κάθε κόμβο από τη μάζα κάθε στερεού σώματος. Το μητρώο απόσβεσης που προκύπτει στη συνέχεια είναι τύπου Reyleigh και προκύπτει από το μητρώο μάζας και το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής. Για

---

την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης του φορέα το σύστημα των εξισώσεων μετατρέπεται σε μορφή χώρου κατάστασης. Για τα παραπάνω παρουσιάστηκαν παραδείγματα για δυναμική φόρτιση.

Τέλος στο μοντέλο των Στερεών Σωμάτων και Ελατηρίων εφαρμόστηκε το προσομοίωμα του Bouc-Wen. Αυτό είναι ένα υστερητικό προσομοίωμα και χρησιμοποιείται στην ελαστοπλαστική ανάλυση. Στις διεπιφάνειες τα ελατήρια θεωρήθηκε πλέον ότι συμπεριφέρονται ελαστοπλαστικά και ότι οι μετατοπίσεις χωρίζονται σε ένα ελαστικό και ένα υστερητικό μέρος. Το υστερητικό μέρος των μετατοπίσεων ακολουθεί τη διαφορική εξίσωση του Bouc-Wen. Η μέθοδος παρουσιάζεται θεωρητικά και ακολουθούν και παραδείγματα σε απλούς φορείς που επιβεβαιώνουν την εφαρμογή της.

Ορισμένα σημεία που θα μπορούσαν να διερευνηθούν περαιτέρω με έναυσμα την παρούσα διπλωματική εργασία είναι τα ακόλουθα:

- Επέκταση του μοντέλου στις 3 διαστάσεις για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν (στατικό ελαστικό – στατικό με ρωγμές – δυναμικό ελαστικό – δυναμικό υστερητικό).
- Ενσωμάτωση κριτηρίων θραύσης που βασίζονται στην κρίσιμη ενέργεια ή τη κρίσιμη τάση όπως προτείνεται από τους Jagota και Bennison [32].
- Εφαρμογή της μεθόδου σε πιο σύνθετους φορείς.
- Ενσωμάτωση των μοντέλων Bouc – Wen με απομειώσεις ακαμψίας αντοχής και στένωσης.
- Εφαρμογή μεθόδων παράλληλου προγραμματισμού για τη βελτίωση των χρόνων επίλυσης σύνθετων μοντέλων.

---

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Meinhard Kuna, *“Finite Element in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications”*, Springer, *Solid Mechanics and its Applications*.
2. Dominique Francois, Andre Pineau, Andre Zaoui, *“Mechanical Behaviour of Materials. Volume II: Fracture Mechanics and Damage”*, Springer, *Solid Mechanics and its Applications. Volume 191*.2013.
3. Kirsh,G,(1898), *V.D.I.*, 42, 797-807.
4. Inglis, C.E., (1913), *“Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners”*, *Transactions of the Royal Institute of Naval Architects*, 60, 219-241.
5. Kolosoff, G.V., *“On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematical theory of elasticity”*, *Yuriev*, 1909.
6. Muskhelishvili N.I., *“Some basic problems of the mathematical theory of elasticity” in English 1953*, Noordhoff-Groningen.
7. Westergaard, *“Bearing pressures and cracks”*, *J. Applied Mechanics*,1937, 6, A49-53.
8. A.A. Griffith ,*“The phenomena of Rupture and Flow in Solids”*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A Vol.221(1921)*, 163-198
9. Sneddon, I.N. *“The Distribution of Stress in the Neighborhood of a crack in an elastic solid”*, 1946, *Proceedings of Royal Society of London. Vol 187*, pp.229-260.
10. Williams M.L., *“On the stress distribution at the base of a stationary crack”*, *J. Applied Mechanics*, 24, 109-114.
11. Irwin, G. R. (1957). *"Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate."* *Journal of Applied Mechanics* 24: 361-364.
12. Simkins D.C., Collier N.O., *“Meshfree methods for physics-based crack modelling”*, *ICCM-17*, 2009.
13. ABAQUS (2011) *‘ABAQUS Documentation’*, Dassault Systèmes, Providence, RI, USA

- 
14. <http://download.gna.org/getfem/html/homepage/screenshots/shots.html#>.
  15. Brown N.J., "Discrete Element Modelling of Cementitious Materials", Phd thesis, 2013.
  16. Ludlam, JJ, Stafelmann, T.O., Tarskin S.N. and Elliot S.R. "Numerical analysis of the vibrational eigenmodes of a 2D disordered lattice", *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol1, pp. 293-295, 2001.
  17. Luo, L.S., "Theory of the lattice Boltzmann method: lattice models for non ideal gases", *Physical Review E*, vol. 62, no. 4A, pp. 4982-4996, 2000.
  18. Ostoja-Starzewski, M. and Wang, C., "Linear elasticity of planar Delaunay networks: random field characterization of effective moduli". *Acta Mechanica*, vol. 80, pp. 61-80, 1989.
  19. Jagota, A. and Bennison, S.J., "Spring-network and finite-element models for elasticity and fracture". *Non-linearity and Breakdown in Soft Condensed Matter*, Springer Lecture Notes in Physics, vol. 437, pp 187-201, 1994.
  20. Kawai T., "New discrete models and their application to seismic response analysis of structures", *Nuclear Engng. Design* 1978, 48:207-209.
  21. Laugier C, Mendoza C., Sunadaraj Kenneth, "Towards a realistic Medical Simulator using Virtual Environments and Haptic Interaction", *Springer Tracts in Advanced Robotics*, V6, 2003, pp.289-306.
  22. Ebeida, M.s., Mitchell S.A., "Uniform Random Voronoi Meshes", *Proceedings of the 20<sup>th</sup> International Meshing Roundtable*. 2012, pp 273-290.
  23. ([http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay\\_triangulation](http://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation)).
  24. Bolander, J.E. and Saito, S., "Fracture analysis using spring networks with random geometry". *Engineering Fracture Mechanics*, vol 61, no. 5-6 pp591,1998.
  25. Schlangen E. *Computational aspects of fracture simulations with lattice models*. In: Wittmann FH, editor. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Aedificatio, Freiburg, Germany, 1995. 913.
  26. Bolander JE, Shiraishi T, Isogawa Y. *An adaptive procedure for fracture simulation in extensive lattice networks*. *Engrg. Fracture Mech.* 1996;54 (3):325±34.
  27. Vervuurt A, Van Vliet MRA, Van Mier JGM, Schlangen E. *Simulations of tensile fracture in concrete*. In:Wittmann FH, editor. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Aedificatio, Freiburg, Germany, 1995. 353.
  28. Chopra A., "Dynamics of Structures", 2006, Prentice Hall, New York.
  29. Bathe K.J., 2007, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall Engineering, Science, Mathematics, New York.

- 
30. Wen, Y. -K (1980) "Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation", *Journal of Applied Mechanics* 47:150-154
  31. Ma, F. , Zhang, H. , Bockstedte, A. Foliente, G. C, paevere, P. "Parameter analysis of the differential model of hysteresis", *Journal of Applied Mechanics* 71:342-349
  32. Jagota A, Bennison SJ. Element breaking rules in computational models for brittle fracture. *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.* 1995;3:485±501.