Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Δ.Π.Μ.Σ. Μαθηματικη Προτυποποιηση στις Συγχρονες Τεχνολογιες
Και Την Οικονομια
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων Και Φυσικων Επιστημων

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διατεταγμένες Άλγεβρες

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεωργίου Κ. Κωβαίου

Επιβλέπων: Ιωάννης Α. Πολυράκης,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διατεταγμένες Άλγεβρες

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεωργίου Κ. Κωβαίου

Επιβλέπων: Ιωάννης Α. Πολυράκης,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 29η Μαρτίου 2011.

....	....	....
Ι. Πολυράκης	Α. Αρβανιτάκης	Σ. Καρανάσιος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2011

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των διατεταγμένων αλγεβρών, δηλαδή διατεταγμένων χώρων εφοδιασμένων με μία αλγεβρική δομή.
Στο **πρώτο κεφάλαιο** εισάγουμε την έννοια του διατεταγμένου χώρου και βασικές ιδιότητες της διάταξης. Στη συνέχεια μελετάμε μία ειδική κατηγορία διατεταγμένων χώρων, τους γραμμικούς συνδέσμους. Ορίζουμε ειδικές κατηγορίες υποχώρων ενός γραμμικού συνδέσμου όπως τους σύνδεσμους-υπόχωρους, τους υποσύνδεσμους, το ιδεώδες και την δέσμη ενώ αναφερόμαστε και στην έννοια της καθετότητας σε γραμμικούς συνδέσμους. Στην τρίτη παράγραφο, μελετάμε τοπολογίες που ορίζονται βάση της διάταξης. Εξετάζουμε δύο έννοιες σύγκλισης· την διατακτική σύγκλιση και την ομοιόμορφα διατακτική σύγκλιση βάση των οποίων περιγράφουμε, αντίστοιχα, τα στοιχεία της διατακτικής και ομοιόμορφα διατακτικής τοπολογίας. Επίσης, ορίζουμε την έννοια της πληρότητας στις διατακτικές τοπολογίες. Στην τέταρτη παράγραφο, εισάγεται η έννοια του τελεστή μεταξύ διατεταγμένων χώρων και της συνέχειας τελεστή στις διατακτικές τοπολογίες. Επίσης, μελετάμε στους διατακτικούς ομοιομορφισμούς και εξετάζουμε πότε δύο χώροι είναι διατακτικά ισομορφικοί. Επιπλέον, αναφερόμαστε σε μία ειδική κατηγορία ομοιομορφισμών, με ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη των διατεταγμένων αλγεβρών, τους ορθομορφισμούς.
Στο **δεύτερο κεφάλαιο** παραθέτουμε βασικές αλγεβρικές έννοιες και ορίζουμε τις διατεταγμένες άλγεβρες ως γραμμικούς συνδέσμους με αλγεβρική δομή. Διακρίνουμε τις βασικότερες κλάσεις διατεταγμένων αλγεβρών και περιγράφουμε λεπτομερειακά τις ιδιότητες κάθε κλάσης. Επίσης, εξετάζουμε τον τρόπο που σχετίζονται οι κλάσεις και διαπιστώνουμε ότι σε ειδικές περιπτώσεις διατεταγμένων αλγεβρών όλες οι κλάσεις τελικά ταυτίζονται. Επιπλέον, μελετάμε σύνολα με ιδιαίτερες αλγεβρικές ιδιότητες όπως το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων.
Στο πρώτο μέρος του **τρίτου κεφαλαίου**, παρουσιάζουμε αποτελέσματα σχετικά με την επέκταση του πολλαπλασιασμού μίας διατεταγμένης άλγεβρας στην ομοιόμορφη και κατά Dedekind πλήρωση της άλγεβρας. Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζουμε αποτελέσματα που συσχετίζουν την διατακτική και την αλγεβρική δομή δύο διατεταγμένων αλγεβρών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τους διατακτικούς και αλγεβρικούς ομοιομορφισμούς.

Abstract

The scope of this thesis is the study of lattice ordered algebras, that is ordered vector spaces in which a multiplication is introduced such that the induced algebraic structure is compatible with the ordered structure.
In the **first chapter**, we introduce the concept of ordered vector spaces. We define linear lattices and present certain ordered subspaces such as lattice-subspaces, sublattices, ideals and bands. Moreover, we introduce the concept of the order topology. We deal with two kinds of convergence: order convergence and uniform convergence and we describe the resulting topologies, namely the order and uniform topology. Also, we define completeness to the case of order topologies. The last paragraph of this chapter is devoted to the study of positive operators. In particular, we focus on ordered homomorphisms and examine whether two spaces are order isomorphic. Finally, we turn our attention to orthomorphisms.
In the **second chapter**, we present basic algebraic notions and structures and we introduce the concept of lattice ordered algebras. We distinguish certain classes of lattice ordered algebras and study, in detail, the specific properties of each class. To be more precise, we study the classes of $f-$algebras, almost $f-$algebras and $d-$algebras. As we shall see, almost $f-$algebras and $d-$algebras are actually distortions of $f-$algebras. Also, we are interested in the connection between the classes. It is of great importance that if the lattice ordered algebra under consideration is semiprime or has multiplicative identity then all classes are finally reduced to the class of $f-$algebras. Moreover, we study subspaces with special algebraic properties, as the set of nilpotent elements.
In the **third chapter**, we consider the problem of extension of the multiplication to the uniform and Dedekind completion of a lattice ordered algebra. As far as the uniform completion problem is concerned, the existence and uniqueness of such an extended multiplication has been proved to the general case of an $\ell-$algebra. As for the Dedekind completion, we present results concerning the existence of such an extension for $f-$algebras, almost $f-$algebras and $d-$algebras. Finally, we study the connection between the mappings that preserve the order structure, the order homomorphisms, and those which preserve the algebraic structure, the algebra homomorphisms.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ιωάννη Πολυράκη τόσο για το ενδιαφέρον και σύγχρονο θέμα στο οποίο μου πρότεινε να εργαστώ όσο και για τη συνεχή βοήθεια και καθοδήγηση του.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένοι Χώροι - Θετικοί Τελεστές

1.1 Διατεταγμένοι Χώροι

1.1.1 Γενικοί Ορισμοί.

Έστω E γραμμικός χώρος. Μία σχέση $\geq$ στον E θα καλείται **σχέση μερικής διάταξης** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $x \geq x$ για κάθε $x \in E$ (ανακλαστική),
2. αν $x \geq y$ και $y \geq z$ τότε $x \geq z$ (μεταβατική),
3. αν $x \geq y$ και $y \geq x$ τότε $y = x$ (αντισυμμετρική).

Αν για οποιαδήποτε στοιχεία $x, y \in E$ έχουμε είτε $x \geq y$ είτε $y \geq x$ τότε η σχέση μερικής διάταξης καλείται **ολική**.

Θα λέμε ότι η σχέση μερικής διάταξης $\geq$ είναι **συμβατή με την γραμμική δομή** του χώρου αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. αν $x, y \in E$ και $x \geq y$ τότε $x + z \geq y + z$ για κάθε $z \in E$.
2. αν $x, y \in E$ και $x \geq y$ τότε $\lambda x \geq \lambda y$ για κάθε $\lambda \geq 0$.

Ορισμός 1.1. Ένας γραμμικός χώρος E εφοδιασμένος με μία σχέση μερικής διάταξης $\geq$ που είναι συμβατή με την γραμμική δομή του χώρου καλείται **διατεταγμένος γραμμικός χώρος**.

Το σύνολο $E^+ = \{x \in E \mid x \geq 0\}$ καλείται **θετικός κώνος** του E. Ο θετικός κώνος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $E^+ + E^+ \subset E^+$, όπου $E^+ + E^+ = \{x + y \mid x, y \in E^+\}$.
2. $\lambda E^+ \subset E^+$ για κάθε $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda E^+ = \{\lambda x \mid x \in E^+\}$.
3. $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$, όπου $-E^+ = \{-x \mid x \in E^+\}$.

Κάθε υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου E που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται **κώνος** του E. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κώνος ενός γραμμικού χώρου E ορίζει μία σχέση μερικής διάταξης $\geq$ στον E, θέτοντας $x \geq y$ όταν $x - y \in E^+$.

Αν οποιοδήποτε στοιχείο ενός διατεταγμένου χώρου E μπορεί να γραφεί ως διαφορά στοιχείων του θετικού κώνου, δηλαδή έχουμε ότι $E = E^+ - E^+$, τότε λέμε ότι ο θετικός κώνος είναι **γεννήτορας.**

Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός διατεταγμένου χώρου E λέμε ότι έχει **supremum** (ή ελάχιστο άνω φράγμα) αν υπάρχει $u \in E$ τέτοιο ώστε $u \geq a$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $v \in E$ τέτοιο ώστε $v \geq a$ για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $v \geq u$.
Όμοια, ένα μη κενό υποσύνολο A ενός διατεταγμένου χώρου E λέμε ότι έχει **infimum** (ή μέγιστο κάτω φράγμα) αν υπάρχει $w \in E$ τέτοιο ώστε $a \geq w$ για κάθε $a \in A$ και για κάθε $v \in E$ τέτοιο, ώστε $a \geq v$ για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $w \geq v$.
Στη περίπτωση πεπερασμένου συνόλου $\{x_1, \cdots, x_n\}$ συμβολίζουμε:

$$sup\{x_1, \cdots, x_n\} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \quad \text{και} \quad inf\{x_1, \cdots, x_n\} = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i.$$

Μία ειδική κατηγορία διατεταγμένων χώρων είναι οι Αρχιμήδειοι χώροι.

Ορισμός 1.2. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος E λέμε ότι είναι **Αρχιμήδειος** αν για κάθε $x, y \in E$ με $nx \leq y \ \forall n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι $x \leq 0$.

Παράδειγμα 1.3. *Έστω ο γραμμικός χώρος $E = \mathbb{R}^2$ διατεταγμένος με την λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή $x = (x_1, x_2) \geq y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1$ ή $x_1 = y_1$ και $x_2 \geq y_2$. Τότε ο διατεταγμένος χώρος E **δεν** είναι αρχιμήδειος. Πράγματι, έχουμε $n(0,2) \leq (1,1) \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $(0,2) > (0,0)$.*

1.2 Χώροι Riesz

Ορισμός 1.4. Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος E λέμε ότι είναι χώρος **Riesz** ή **γραμμικός σύνδεσμος** (linear lattice) αν κάθε μη κενό, πεπερασμένο υποσύνολο του E έχει supremum και infimum.

Παράδειγμα 1.5. *Ο χώρος* $\mathbb{R}^n \quad (n \geq 2)$ *διατεταγμένος με την σημειακή διάταξη είναι χώρος Riesz. Πράγματι, για κάθε* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *έχουμε* $x \vee y = (\max(x_1, y_1), \ldots, \max(x_n, y_n))$ *και* $x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \ldots, \min(x_n, y_n))$.

Παράδειγμα 1.6. *Έστω* $X = C([0,1])$ *ο γραμμικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $[0,1]$. *Τότε ο* E *εφοδιασμένος με τον θετικό κώνο* $E^+ = \{f \in E \mid f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X\}$ *είναι χώρος Riesz. Για κάθε* $x, y \in E$ *έχουμε ότι* $x \vee y = \max\{x(t), y(t)\}, x \wedge y = \min\{x(t), y(t)\} \quad t \in [0,1]$.

Παράδειγμα 1.7. *Ο χώρος* $X = C^{(1)}[0,1]$ *των πραγματικών συναρτήσεων με συνεχή πρώτη παράγωγο* ***δεν*** *είναι γραμμικός σύνδεσμος. Πράγματι, έστω* $x(t) = \frac{1}{2} - t, y(t) = t - \frac{1}{2}$. *Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι* $z = x \vee y$ *με* $z \in X$.
Αν $z(\frac{1}{2}) = 0$, *τότε* $\lim_{t \to \frac{1}{2}^-} \frac{z(t) - z(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} \leq \lim_{t \to \frac{1}{2}^-} \frac{x(t) - 0}{t - \frac{1}{2}} = -1$ *και* $\lim_{t \to \frac{1}{2}^+} \frac{z(t) - z(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} \geq \lim_{t \to \frac{1}{2}^+} \frac{y(t) - 0}{t - \frac{1}{2}} = 1$, *Άτοπο. Άρα πρέπει* $z\left(\frac{1}{2}\right) = a > 0$.
Ορίζουμε συνάρτηση $w_p, p > 0$ *ως* $w(t) = \frac{a}{2} + p\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$. *Τότε* $w_p \geq \{x(t), y(t)\}$ $\forall t \in [0,1]$. *Όμως,* $w_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} < z(\frac{1}{2})$. *Άτοπο, διότι από υπόθεση το* z *είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Άρα, δεν υπάρχει το* $x \vee y$ *και ο χώρος δεν είναι γραμμικός σύνδεσμος.*

Ισοδύναμα, ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος E είναι γραμμικός σύνδεσμος αν για κάθε ζεύγος στοιχείων του χώρου υπάρχει το supremum και το infimum.

Λήμμα 1.8. *Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος* E *είναι χώρος Riesz αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος στοιχείων* $x, y \in E$ *υπάρχει το* $x \wedge y$. *Επίσης, αν* x, y *στοιχεία χώρου Riesz τότε*

$$x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \quad \text{και} \quad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)].$$

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε ζεύγος $x, y \in E$ έχει infimum. Θέτουμε $z = (-x) \wedge (-y)$. Θα δείξουμε ότι $x \vee y = -z$. Έχουμε, $z \leq -x$ και $z \leq -y$ ή ισοδύναμα $x \leq -z$ και $y \leq z$. Επομένως, $-z$ άνω φράγμα του συνόλου $\{x, y\}$. Για να δείξουμε ότι $-z$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου επιλέγουμε $t \in E$ τέτοιο ώστε $x \leq t$ και $y \leq t$. Τότε $-t \leq -x$ και $-t \leq -y$, επομένως $-t \leq (-x) \wedge (-y) = z$, άρα $t \geq -z$. Όμοια, αποδεικνύουμαι και το αντίστροφο. ■

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει έναν γεωμετρικό χαρακτηρισμό των χώρων Riesz.

Θεώρημα 1.9. *Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος E είναι χώρος Riesz αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in E$ υπάρχει $z \in E$ τέτοιο ώστε*

$$\big(x + E^+\big) \cap \big(y + E^+\big) = z + E^+,$$

στη περίπτωση αυτή έχουμε ότι $z = x \vee y$.

Σε κάθε στοιχείο $u \in E$ ενός χώρου Riesz ορίζουμε ως **θετικό μέρος** του u το στοιχείο $u^+ = u \vee 0$, ως **αρνητικό μέρος** το $u^- = (-u) \vee 0$, και την **απόλυτη τιμή** ως $|u| = u \vee (-u)$.

Στο παρακάτω θεώρημα παρουσιάζονται μερικές σημαντικές ταυτότητες που ισχύουν σε χώρους Riesz.

Θεώρημα 1.10. *Για οποιαδήποτε στοιχεία x, y, z ενός χώρου Riesz έχουμε:*

1. $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$ *και* $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$,
2. $x - y \wedge z = (x - y) \vee (x - z)$ *και* $x - y \vee z = (x - y) \wedge (x - z)$,
3. $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$,
4. $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$ *και* $\lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$ *όπου* $\lambda \geq 0$,
5. $|\lambda x| = |\lambda|\, |x|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$,
6. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *και* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
7. $x + y = x \vee y + x \wedge y$,
8. $x = x^+ - x^-$ *και* $x^+ \wedge x^- = 0$,
9. $|x| = x^+ + x^-$ *(επομένως* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*)*,
10. $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$,
11. $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$,
12. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ *και* $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\, \big||x + y| - |x - y|\big|$.

Απόδειξη. 1. Έστω $t = y \vee z$ και κάποιο x. Τότε $x + y \leq x + t$ και $x + z \leq x + t$. Υποθέτουμε ότι $x + y \leq s$ και $x + z \leq s$. Ισοδύναμα, έχουμε $y \leq s - x$ και $z \leq s - x$, άρα $t = y \vee z \leq s - x$ ή $x + t \leq s$. Επομένως, το $x + t$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{x + y, x + z\}$. Άρα τελικά, $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$. Όμοια, αποδεικνύεται και η δεύτερη ταυτότητα.

2. Από τις προηγούμενες ταυτότητες και το λήμμα 1.8 έχουμε:

$$x - y \wedge z = x + (-y) \vee (-z) = (x - y) \vee (x - z)$$

Όμοια, για την δεύτερη ταυτότητα έχουμε:

$$x - y \vee z = x + (-y) \wedge (-z) = (x - y) \wedge (x - z)$$

3. Έχουμε ότι

$$(x - y)^+ + y = (x - y) \vee 0 + y = [(x - y) + y] \vee (0 + y) = x \vee y.$$

4. Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Από τις $x \leq x \vee y$ και $y \leq x \vee y$, έχουμε ότι $\lambda x \leq \lambda(x \vee y)$ και $\lambda y \leq \lambda(x \vee y)$. Έστω $\lambda x \leq z$ και $\lambda y \leq z$. Τότε $x \leq \frac{1}{\lambda}z$ και $y \leq \frac{1}{\lambda}z$, επομένως $x \vee y \leq \frac{1}{\lambda}z$. Άρα $\lambda(x \vee y) \leq z$, δηλαδή $(\lambda x) \vee (\lambda y) = \lambda(x \vee y)$.

5. Αν $\lambda \geq 0$, τότε $|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = \lambda\,[x \vee (-x)] = |\lambda|\,|x|$. Αν $\lambda < 0$, τότε έχουμε $|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = [(-\lambda)(-x)] \vee (-\lambda x) = (-\lambda)\,[(-x) \vee x] = |\lambda|\,|x|$.

6. Για την πρώτη ταυτότητα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}\,[x + y + (x - y) \vee (y - x)] = \frac{1}{2}\,[(2x) \vee (2y)] = x \vee y.$$

7. Η ταυτότητα προκύπτει άμεσα με την πρόσθεση των δύο ταυτοτήτων της (6).

8. Θέτοντας $y = 0$ στην (7) έχουμε ότι:

$$x = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - (-x) \vee 0 = x^+ - x^-.$$

Για την δεύτερη ταυτότητα, έχουμε ότι:

$$x^+ \wedge x^- = \left(x^+ - x^-\right) \wedge 0 + x^- = x \wedge 0 + x^- = -\,[(-x) \vee 0] + x^- = -x^- + x^- = 0.$$

9. Έχουμε ότι

$$|x| = x \vee (-x) = (2x) \vee 0 - x = 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-.$$

10. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό της απόλυτης τιμής και τις ταυτότητες (1) και (7) έχουμε ότι:

$$|x - y| = (x-y) \vee (y-x) = (2x) \vee (2y) - (x+y) = 2(x \vee y) - (x \vee y + x \wedge y) = x \vee y - x \wedge y.$$

11. Έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned} |x+y| \vee |x-y| &= [(x+y) \vee (-x-y)] \vee [(x-y) \vee (y-x)] \\ &= [(x+y) \vee (x-y)] \vee [(-x-y) \vee (y-x)] \\ &= [x+y \vee (-y)] \vee [-x+(-y) \vee y] \\ &= [x+|y|] \vee [-x+|y|] = [x \vee (-x)] + |y| = |x| + |y| \,. \end{aligned}$$

12. Για την πρώτη ταυτότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[|x+y| + |x-y|\right] &= \frac{1}{2}\left[(x+y) \vee (-x-y) + |x-y|\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x+y+|x-y|) \vee (-x-y+|x-y|)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left([2(x \vee y)] \vee [2\{(-x) \vee (-y)\}]\right) \\ &= x \vee y \vee (-x) \vee (-y) \\ &= [x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)] = |x| + |y| \,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (10), (7), (11) και την προηγούμενη ταυτότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x+y| - |x-y|| &= |x+y| \vee |x-y| - |x+y| \wedge |x-y| \\ &= |x+y| \vee |x-y| - (|x+y| + |x-y| - |x+y| \vee |x-y|) \\ &= 2(|x+y| \vee |x-y|) - (|x+y| + |x-y|) \\ &= 2(|x| + |y|) - 2(|x| \vee |y|) = 2(|x| \wedge |y|). \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 1.11. *Από την ταυτότητα (8) συμπεραίνουμε ότι αν $y \wedge z = 0$ και $x = y - z$ τότε $y = x^+$ και $z = x^-$. Πράγματι, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $x^+ = (y-z) \vee 0 = y \vee z - z = (y + z - y \wedge z) - z = y$ και όμοια προκύπτει ότι $x^- = z$.*
Επίσης, από την ταυτότητα (8) προκύπτει ότι ο θετικός κώνος ενός γραμμικού συνδέσμου E είναι γεννήτορας, δηλαδή $E = E^+ - E^+$.

1.2.1 Διατεταγμένοι Υπόχωροι

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια του διατεταγμένου γραμμικού υπόχωρου ενός χώρου Riesz. Οι υπόχωροι ενός διατεταγμένου χώρου (E, E^+) είναι επίσης διατεταγμένοι χώροι εφοδιασμένοι με την επαγόμενη διάταξη από τον

E. Δηλαδή, αν $X \subset E$ γραμμικός υπόχωρος, τότε ο X με τον θετικό κώνο $X^+ = X \cap E^+$ καλείται **διατεταγμένος γραμμικός υπόχωρος** του E.
Αν $x, y \in X \subset E$ διατεταγμένος υπόχωρος του E τότε συμβολίζουμε με $\sup_X \{x, y\}$ το **επαγόμενο** supremum των x, y στον υπόχωρο X. Δηλαδή, $z = \sup_X \{x, y\}$ αν και μόνο αν $z \in X, z \geq \{x, y\}$ και για κάθε $w \in X$ με $w \geq \{x, y\}$ έπεται ότι $w \geq z$. Ανάλογα, έχουμε $\inf_X \{x, y\} = z$ αν και μόνο αν $z \in X,\ z \leq \{x, y\}$ και για κάθε $w \in X$ με $w \leq \{x, y\}$ έπεται ότι $w \leq z$.
Συνεχίζουμε με τον χαρακτηρισμό διατεταγμένων υποχώρων ενός χώρου Riesz.

Ορισμός 1.12. Έστω E χώρος Riesz και $X \subset E$ γραμμικός υπόχωρος.
Λέμε ότι ο X είναι **σύνδεσμος - υπόχωρος** (lattice - subspace) του E, αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν τα $\sup_X \{x, y\}$ και $\inf_X \{x, y\}$.
Ο X ονομάζεται **υποσύνδεσμος** (sublattice) του E, αν ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος και ισχύει ότι $\sup_X \{x, y\} = x \vee y$ και $\inf_X \{x, y\} = x \wedge y$.

Παράδειγμα 1.13. *Έστω ο χώρος Riesz $E = C[0, 1]$ διατεταγμένος με την κατά σημείο διάταξη, τότε ο γραμμικός υπόχωρος $X = \{\alpha t + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset E$ εφοδιασμένος με την επαγόμενη διάταξη είναι διατεταγμένος υπόχωρος. Ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος, αλλά δεν είναι υποσύνδεσμος. Πράγματι, έστω $x = -2t + 1,\ y = 2t - 1$ στοιχεία του X. Έχουμε ότι, $\sup_X \{x, y\} = 0t + 1$ και $\inf_X \{x, y\} = 0t - 1$ ενώ $x \vee y = \max\{x, y\} \notin X$ και $x \wedge y = \min\{x, y\} \notin X$.*

Παρατήρηση. Αν $X \subset E$ σύνδεσμος-υπόχωρος και $x, y \in X$ τότε γενικά ισχύει ότι
$$\sup_X \{x, y\} \geq x \vee y \geq x \wedge y \geq \inf_X \{x, y\}.$$
Στον επόμενο ορισμό παρουσιάζουμαι ειδικές κατηγορίες υποσυνδέσμων.

Ορισμός 1.14. Έστω E χώρος Riesz και $X \subset E$ γραμμικός υπόχωρος.
Λέμε ότι ο X είναι **ιδεώδες** (ideal) αν για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι
$$[-|x|, |x|] = \{y \in X \mid -|x| \leq y \leq |x|\} \subset X.$$
Ο X ονομάζεται **δέσμη** (band) αν είναι ιδεώδες και για κάθε $A \subset X$, για το οποίο υπάρχει το $\sup(A)$, έχουμε ότι $\sup(A) \in X$.

Από την ταυτότητα (3) του θεωρήματος 1.10 συμπεραίνουμε ότι ένας διατεταγμένος υπόχωρος $X \subset E$ χώρου Riesz είναι υποσύνδεσμος αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $x^+ \in X$. Επομένως, επειδή $0 \leq x^+ \leq |x|$, έπεται ότι κάθε ιδεώδες είναι υποσύνδεσμος. Ωστόσο, δεν ισχύει το αντίστροφο όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.15. *Έστω ο χώρος $E = \mathbb{R}^2$ διατεταγμένος με την κατά σημείο διάταξη. Θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{x = (x_1, x_2) \in E \mid x_1 = x_2\}$ εφοδιασμένο με την επαγόμενη διάταξη. Τότε ο X είναι υποσύνδεσμος αλλά δεν είναι ιδεώδες.*

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν οι ακόλουθοι εγκλεισμοί στον γενικό χώρο των διατεταγμένων υποχώρων:

$$Bands \subset Ideals \subset Sublattices \subset LatticeSubspaces.$$

Η τομή ιδεωδών είναι ιδεώδες όπως και η τομή δεσμών είναι δέσμη. Επίσης, ο ίδιος ο χώρος $E \subset E$ είναι δέσμη. Επομένως, σε κάθε υποσύνολο $A \subset E$ ενός χώρου Riesz μπορούμε να αντιστοιχήσουμε το σύνολο $L(A)$, που ορίζουμε ως το μικρότερο ιδεώδες που περιέχει το A, και το σύνολο $B(A)$ που ορίζουμε ως τη μικρότερη δέσμη που περιέχει το A. Θα αναφερόμαστε στα παραπάνω σύνολα ως το ιδεώδες (αντ. η δέσμη) που παράγεται από το σύνολο A.
Μπορούμε να περιγράψουμε το σύνολο $L(A)$ ως εξής:

$$L(A) = \left\{ v \in E \mid \exists u_1, \ldots, u_n \in A \text{ και } \lambda \geq 0 \text{ με } |v| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |u_i| \right\}$$

Ένα στοιχείο $e > 0$ του γραμμικού συνδέσμου E καλείται **διατακτική μονάδα** αν το ιδεώδες που παράγεται από το μονοσύνολο $\{e\}$ είναι ο χώρος E. Δηλαδή, αν για κάθε $u \in E$ υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $|u| \leq \lambda e$.

1.2.2 Ορθογωνιότητα σε Χώρους Riesz

Ορισμός 1.16. Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου Riesz E καλούνται ορθογώνια αν $|x| \wedge |y| = 0$. Συμβολίζουμε, $x \perp y$.
Δύο μη κενά υποσύνολα A, B του E λέμε ότι είναι ορθογώνια αν $a \perp b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. Συμβολίζουμε $A \perp B$.
Θα λέμε ότι το στοιχείο $x \in E$ είναι κάθετο στο $A \subset E$ αν $x \perp a$ για κάθε $a \in A$.

Έστω $A \subset E$ υποσύνολο του χώρου Riesz E. Συμβολίζουμε με A^d το σύνολο όλων των στοιχείων του E που είναι κάθετα στο σύνολο A. Δηλαδή,

$$A^d = \{u \in E \mid u \perp v \ \forall v \in A\}.$$

Αναφερόμαστε στο σύνολο A^d με τον όρο **ορθογώνιο συμπλήρωμα** (disjoint complement) του συνόλου A. Θα συμβολίζουμε με $\{A\}^{dd}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του A^d. Έχουμε ότι $A \subset A^{dd}$ γιατί $x \in A \Rightarrow x \perp A^d \Rightarrow x \in A^{dd}$. Επίσης, αν $A \subset B$ τότε $B^d \subset A^d$.

Ορισμός 1.17. Ένα υποσύνολο $D \subset E$ του χώρου E καλείται **διατακτικά πυκνό** αν $D^d = \{0\}$ ή, ισοδύναμα $D^{dd} = E$.

Πρόταση 1.18.

1. Αν $u \perp v$ και $|w| \leq |u|$, τότε $w \perp v$.
2. Αν σε έναν γραμμικό σύνδεσμο ισχύει ότι $u \perp v$ και $v \perp w$, τότε $u \perp (\lambda v + \mu w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Δύο στοιχεία v, u ενός γραμμικού συνδέσμου είναι κάθετα αν και μόνο αν $|u+v| = |u-v|$.
4. Αν σε έναν γραμμικό σύνδεσμο ισχύει ότι $u \perp v$, τότε
$$|u+v| = |u-v| = |u| + |v| = ||u| - |v|| = |u| \vee |v|.$$
5. Κάθε υποσύνολο ενός γραμμικού συνδέσμου που αποτελείται από ανά δύο ορθογώνια, μη μηδενικά στοιχεία, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη.

1. Έχουμε ότι
$$0 \leq |w| \wedge |v| \leq |u| \wedge |v| = 0,$$
άρα $w \perp u$.
2. Υποθέτουμε ότι $u \perp v, u \perp w$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε
$0 \leq |u| \wedge |\lambda u + \mu v| \leq |u| \wedge (|\lambda u| + |\mu v|) =$
$= |u| \wedge (|\lambda| |v| + |\mu| |w|) \leq |u| \wedge (|\lambda| |v|) + |u| \wedge (|\mu| |w|) \leq$
$\leq (1 + |\lambda|) |u| \wedge (1 + |\lambda| |v|) + (1 + |\mu|) |u| \wedge (1 + |\mu|) |w| =$
$= (1 + |\lambda|) [|u| \wedge |v|] + (1 + |\mu|) [|u| \wedge |v|] =$
$= (1 + |\lambda|) 0 + (1 + |\mu|) 0 = 0,$
άρα $|u| \wedge |\lambda u + \mu v| = 0$, δηλαδή $u \perp (\lambda v + \mu w)$.
3. Από την ταυτότητα (12) του θεωρήματος 1.10 έχουμε ότι:
$$|u| \wedge |v| = \frac{1}{2} ||u+v| - |u-v||.$$
Άρα, $u \perp v \Leftrightarrow |u| \wedge |v| = 0$ αν και μόνο αν $|u+v| = |u-v|$.
4. Έστω ότι $u \perp v$, τότε $|u+v| = |u-v|$. Επομένως, για $|u| \perp |v|$ έχουμε ότι
$$||u| - |v|| = ||u| + |v|| = |u| + |v| = |u| \vee |v|.$$
Η παραπάνω σε συνδυασμό με την ταυτότητα (11) του θεωρήματος 1.10 μας δίνει ότι $|u+v| = |u-v| = |u+v| \vee |u-v| = |u| + |v|$.

5. Υποθέτουμε ότι τα μη μηδενικά στοιχεία $u_1, \ldots, u_n$ ανήκουν σε γραμμικό σύνδεσμο και είναι ανά δύο ορθογώνια. Επίσης, υποθέτουμε ότι ικανοποιούν την συνθήκη $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$. Τότε, από (1) και (3) έχουμε ότι

$$0 = |a_1u_1 + \ldots + a_nu_n| = |a_1u_1| + \ldots |a_nu_n| .$$

Επομένως, $|a_i|\,|u_i| = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Επειδή $|u_i| > 0$ για κάθε i, έχουμε ότι $a_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Άρα τελικά, τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

■

1.3 Διατακτικές Τοπολογίες

Ορισμός 1.19. Μία ακολουθία $\{x_n\}$ ενός διατεταγμένου γραμμικού χώρου E καλείται **αύξουσα** αν ισχύει ότι $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots$ και **φθίνουσα** αν ισχύει ότι $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \ldots$. Συμβολίζουμε, $x_n \uparrow$ και $x_n \downarrow$ αντίστοιχα. Επίσης, αν $x_n \uparrow$ και υπάρχει το $x = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, γράφουμε $x_n \uparrow x$. Αντίστοιχα, αν $x_n \downarrow$ και υπάρχει το $x = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, γράφουμε $x_n \downarrow x$.

Μία αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία καλείται **μονότονη**. Οι μονότονες ακολουθίες είναι ειδική περίπτωση των κατευθυνόμενων συνόλων.

Ορισμός 1.20. Ένα υποσύνολο $D \subset E$ του διατεταγμένου χώρου E καλείται **άνω κατευθυνόμενο**, αν για κάθε $u, v \in D$ υπάρχει $w \in D$ τέτοιο ώστε $w \geq u$ και $w \geq v$. Συμβολίζουμε, $D \uparrow$. Αν υπάρχει το $u = \sup(D)$ και $D \uparrow$ γράφουμε $D \uparrow u$. Όμοια, ορίζουμε τα κάτω κατευθυνόμενα σύνολα και χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους συμβολισμούς $D \downarrow$ και $D \downarrow u$.

Στη συνέχεια χαρακτηρίζουμε τους Αρχιμήδειους χώρους με όρους μονότονων ακολουθιών.

Λήμμα 1.21. *Ένας γραμμικός σύνδεσμος E είναι Αρχιμήδειος αν και μόνο αν για κάθε $u \in E^+$ έχουμε ότι $\frac{1}{n}u \downarrow 0, \quad n = 1, 2, \ldots$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή $0 \leq nv \leq u, \quad n = 1, 2, \ldots \Rightarrow v = 0$. Έστω $u_0 \in E^+$ και η ακολουθία $(n^{-1}u_0 \mid n = 1, 2, \ldots)$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε κάτω φράγμα w της ακολουθίας ικανοποιεί $w \leq 0$, οπότε θα έχουμε ότι το 0 είναι το infimum της ακολουθίας. Παρατηρούμε ότι αν w κάτω φράγμα τότε και το $v = \sup(w, 0)$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας, άρα έχουμε ότι $0 \leq nv \leq u_0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως, $v = 0$ άρα $\sup(w, 0) = 0$ δηλαδή $w \leq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $u \in E^+$ έχουμε $\frac{1}{n}u \downarrow 0, \quad n = 1, 2, \ldots$. Τότε αν $0 \leq nv \leq u$ ισχύει για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, έχουμε $0 \leq v \leq n^{-1}u \downarrow 0$, επομένως $v = 0$. ∎

Ορισμός 1.22. Μία ακολουθία $\{u_n\}$ στον γραμμικό σύνδεσμο E λέμε ότι είναι **διατακτικά συγκλίνουσα** (order convergent), αν υπάρχει $u \in E$ και ακολουθία $\{v_n\} \subset E$ με $v_n \downarrow 0$ τέτοια ώστε

$$|u_n - u| \leq v_n \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Το στοιχείο u καλείται **διατακτικό όριο** (order limit) της ακολουθίας. Συμβολίζουμε, $u_n \xrightarrow{o} u$.

Λήμμα 1.23. *Μία ακολουθία σε γραμμικό σύνδεσμο μπορεί να έχει το πολύ ένα διατακτικό όριο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $u_n \xrightarrow{o} u$ και $u_n \xrightarrow{o} w$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{v_n\}$ και $\{x_n\}$ ώστε $|u_n - u| \leq v_n \downarrow 0$ και $|u_n - w| \leq x_n \downarrow 0$. Όμως τότε, έχουμε ότι:

$$|u - w| \leq |u - u_n| + |u_n - w| \leq v_n + x_n.$$

Επειδή, $v_n + x_n \downarrow 0$, έχουμε $|u - w| = 0$, δηλαδή $u = w$. ∎

Ένα υποσύνολο S ενός χώρου Riesz λέμε ότι είναι **διατακτικά κλειστό** αν το όριο κάθε διατακτικά συγκλίνουσας ακολουθίας του S είναι στοιχείο του S. Το κενό σύνολο και ο ίδιος ο χώρος E είναι διατακτικά κλειστά.
Επίσης, αυθαίρετες τομές διατακτικά κλειστών συνόλων και πεπερασμένες ενώσεις διατακτικά κλειστών συνόλων είναι διατακτικά κλειστά σύνολα.

Θεώρημα 1.24. *Έστω E γραμμικός σύνδεσμος. Τότε*

1. *Τα σύνολα $\emptyset, E$ είναι διατακτικά κλειστά.*

2. *Αν $\{S_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια από διατακτικά κλειστά υποσύνολα του E τότε το $\cup_{i=1}^n S_i$ είναι επίσης διατακτικά κλειστό.*

3. *Αν $\{S_i\}_{i \in I}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια διατακτικά κλειστών συνόλων, τότε το $\cap_{i \in I} S_i$ είναι επίσης διατακτικά κλειστό.*

Απόδειξη. 1. Το ότι το E είναι διατακτικά κλειστό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της διατακτικής σύγκλισης.

2. Έστω $\{u_n\} \subset \cup_{i=1}^n S_i$ με $u_n \xrightarrow{o} u \in E$. Αρκεί να δείξουμε ότι $u \in \cup_{i=1}^n S_i$. Επειδή $\{u_n\} \subset \cup_{i=1}^n S_i$, υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ τέτοια ώστε $\{u_{n_k}\} \subset S_i$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$. Όμως, $u_n \xrightarrow{o} u$ άρα και $u_{n_k} \xrightarrow{o} u$. Επειδή S_i διατακτικά κλειστό έχουμε ότι $u \in S_i \subset \cup_{i=1}^n S_i$.

3. Έστω $\{u_n\} \subset \cap_{i=I} S_i$ με $u_n \xrightarrow{o} u \in E$. Θα δείξουμε ότι $u \in \cap_{i=1}^n S_i$. Επειδή $\{u_n\} \subset S_i$ για κάθε $i \in I$, έχουμε ότι $u \in S_i$ για κάθε i, διότι S_i διατακτικά κλειστό. Άρα τελικά, $u \in \cap_{i\in I} S_i$.

■

Επομένως, τα διατακτικά κλειστά σύνολα ενός χώρου Riesz ορίζουν μία τοπολογία, την **διατακτική τοπολογία**.

Κάθε διατακτικά κλειστό ιδεώδες είναι δέσμη. Επομένως, με βάση το παρακάτω λήμμα, μπορούμε να δώσουμε έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό μίας δέσμης.

Λήμμα 1.25. *Ένα ιδεώδες $X \subset E$ είναι διατακτικά κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ με $0 \leq x_n \uparrow x$ έπεται ότι $x \in X$.*

Απόδειξη. [$\Rightarrow$] Άμεσο από τον ορισμό του διατακτικά κλειστού συνόλου.
[$\Leftarrow$] Θα δείξουμε ότι το ιδεώδες X είναι διατακτικά κλειστό. Έστω ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ τέτοια, ώστε $x_n \xrightarrow{o} x$. Επομένως, υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ με $y_n \downarrow 0$ και $|x_n - x| \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα, έχουμε ότι $(|x| - y_n)^+ \leq |x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, X ιδεώδες άρα έχουμε ότι $(|x| - y_n)^+ \subset X$. Επίσης, $0 \leq (|x| - y_n)^+ \uparrow |x|$. Άρα τελικά, $x \in X$. ■

Επομένως, η δέσμη που παράγεται από το σύνολο $D \subset E$ είναι ο υπόχωρος

$$B_D = \{v \in E \mid \exists \{v_n\} \subset L_D \text{ τέτοια ώστε } 0 \leq v_n \uparrow |v|\},$$

όπου L_D το ιδεώδες που παράγεται από το σύνολο D.
Αν $D = \{u\}$ τότε η δέσμη που παράγεται από το μονοσύνολο είναι

$$B_u = \{v \in E \mid |v| \wedge n|u| \uparrow |v|\}.$$

Συνεχίζουμε, με τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης σε χώρους Riesz.

Ορισμός 1.26. Έστω E γραμμικός σύνδεσμος. Μία ακολουθία $\{u_n\} \subset E$ λέμε ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα** στο $u \in E$ αν υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\{\epsilon_n\}$ με $\epsilon_n \to 0$ και $v \in E^+$ ώστε

$$|u_n - u| \leq \epsilon_n v \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το u καλείται **ομοιόμορφο όριο** της ακολουθίας $\{u_n\}$. Συμβολίζουμε, $u_n \xrightarrow{u} u$.

Οι ομοιόμορφα συγκλίνουσες ακολουθίες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.

Λήμμα 1.27. *1. Αν E αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος και $x_n \xrightarrow{u} x$, τότε $x_n \xrightarrow{o} x$.*

2. Αν $x_n \xrightarrow{u} x$ και $y_n \xrightarrow{u} y$ τότε

(α') $\alpha x_n \xrightarrow{u} \alpha x \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ και

(β') $x_n + y_n \xrightarrow{u} x + y$.

Απόδειξη. 1. Πράγματι, αν $x_n \xrightarrow{u} x$ τότε υπάρχει $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ με $\epsilon_n \to 0$ και $u \in E^+$ τέτοια, ώστε $|x_n - x| \leq \epsilon_n u \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $\delta_n = \sup\{\epsilon_k \mid k \geq n\}$, άρα $\delta_n \downarrow 0$. Όμως, επειδή E αρχιμήδειος έχουμε ότι $\delta_n u \downarrow 0$. Επίσης, έχουμε ότι $|x_n - x| \leq \epsilon_n u \leq \delta_n u \downarrow 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x_n \xrightarrow{o} x$.

2. Έχουμε $x_n \xrightarrow{o} x$ και $y_n \xrightarrow{o} y$, οπότε υπάρχουν θετικές πραγματικές ακολουθίες $\{\epsilon_n\}, \left\{\epsilon_n^{'}\right\}$ με $\epsilon_n \to 0$, $\epsilon_n^{'} \to 0$ και στοιχεία $u, v \in E^+$ τέτοια ώστε:

$$|x_n - x| \leq \epsilon_n u, \quad |y_n - y| \leq \epsilon_n^{'} v \qquad (*)$$

(α') Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Έχουμε διαδοχικά, $|x_n - x| \leq \epsilon_n u \Rightarrow |\alpha| \, |x_n - x| \leq |\alpha| \, \epsilon_n u \Rightarrow |\alpha x_n - \alpha x| \leq (|\alpha| \, \epsilon_n) \, u$. Άρα τελικά, $\alpha x_n \xrightarrow{u} \alpha x$.

(β') Από τις ανισότητες (*) έχουμε ότι

$$|(x_n - x) + (y_n - y)| \leq \epsilon_n u + \epsilon_n^{'} v \leq \left(\epsilon_n + \epsilon_n^{'}\right) u + \left(\epsilon_n + \epsilon_n^{'}\right) v \leq \left(\epsilon_n + \epsilon_n^{'}\right) (u+v).$$

Άρα τελικά, $x_n + y_n \xrightarrow{u} x + y$.

■

Το όριο μίας ομοιόμορφα συγκλίνουσας ακολουθίας δεν είναι γενικά μοναδικό. Ωστόσο, αν ο χώρος είναι αρχιμήδειος τότε το ομοιόμορφο όριο είναι μοναδικό και αντίστροφα· η μοναδικότητα του ομοιόμορφου ορίου είναι ικανή συνθήκη ώστε ένας γραμμικός σύνδεσμος να είναι Αρχιμήδειος.

Θεώρημα 1.28. *Έστω E γραμμικός σύνδεσμος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. Ο E είναι Αρχιμήδειος.

2. *αν $x_n \xrightarrow{u} x$ και $x_n \xrightarrow{u} y$ τότε $x = y$. (Μοναδικότητα ομοιόμορφου ορίου).*

Απόδειξη. [$\Rightarrow$] Άμεσο από λήμμα 1.27 και λήμμα 1.23.
[$\Leftarrow$] Θα δείξουμε ότι αν το ομοιόμορφο όριο είναι μοναδικό τότε ο E είναι Αρχιμήδειος. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο χώρος E δεν είναι αρχιμήδειος. Επομένως, υπάρχουν $u, v \in E^+$ τέτοια ώστε $0 < u \leq \frac{1}{n}v \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, η ακολουθία $w_n = u, \ n = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει ομοιόμορφα τόσο στο 0 όσο και στο u. Άτοπο, διότι από υπόθεση το όριο είναι μοναδικό. Άρα τελικά, ο χώρος E είναι Αρχιμήδειος. ■

Ένα σύνολο $S \subset E$ ενός γραμμικού συνδέσμου καλείται **ομοιόμορφα κλειστό** αν τα όρια των ομοιόμορφα συγκλινουσών ακολουθιών του S ανήκουν στο S. Όπως και στην περίπτωση των διατακτικά κλειστών συνόλων, αυθαίρετες τομές ομοιόμορφα κλειστών συνόλων και πεπερασμένες ενώσεις αυτών είναι ομοιόμορφα κλειστά σύνολα. Επομένως, τα ομοιόμορφα κλειστά σύνολα ενός χώρου Riesz ορίζουν μία τοπολογία, την **ομοιόμορφη τοπολογία.**

Οι βασικές ακολουθίες στις ομοιόμορφες τοπολογίες ορίζονται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.29. Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στοιχείων ενός γραμμικού συνδέσμου E λέγεται **ομοιόμορφα Cauchy** αν υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\{\epsilon_n\}$ με $\epsilon_n \to 0$ και $u \in E^+$, τέτοια ώστε

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \epsilon_n u \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Ορισμός 1.30. Ένας Αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος θα λέμε ότι είναι **ομοιόμορφα πλήρης** (uniformly complete) αν κάθε ομοιόμορφα Cauchy ακολουθία έχει ομοιόμορφο όριο.

1.4 Θετικοί Τελεστές σε χώρους Riesz

Ορισμός 1.31. Μία γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ γραμμικών χώρων καλείται **τελεστής**.

Ένας τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ διατεταγμένων γραμμικών χώρων καλείται **θετικός**, αν για κάθε $x \in E^+$ έχουμε ότι $T(x) \geq 0$, συμβολίζουμε $T \geq 0$. Ο τελεστής T θα καλείται **αυστηρά θετικός,** αν για κάθε $0 < x \in E$ έχουμε ότι $T(x) > 0$. Επίσης, αν E διατεταγμένος χώρος θα λέμε ότι το υποσύνολο $A \subset E$ είναι άνω φραγμένο αν υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in A$ έχουμε ότι $y \leq x$. Όμοια, ορίζεται και η έννοια του κάτω φραγμένου υποσυνόλου. Ένα υποσύνολο που είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο θα

λέμε ότι είναι **διατακτικά φραγμένο**.
Μία σημαντική κατηγορία τελεστών μεταξύ γραμμικών συνδέσμων είναι οι διατακτικά φραγμένοι τελεστές.

Ορισμός 1.32. Έστω E, F χώροι Riesz και τελεστής $T : E \to F$. Θα λέμε ότι ο T είναι **διατακτικά φραγμένος** αν μεταφέρει διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του E σε διατακτικά φραγμένα υποσύνολα του F. Δηλαδή, το σύνολο $T(A) \subset F$ είναι διατακτικά φραγμένο οποτεδήποτε το $A \subset E$ είναι διατακτικά φραγμένο.

Το σύνολο των διατακτικά φραγμένων τελεστών μεταξύ γραμμικών συνδέσμων E, F είναι γραμμικός χώρος τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_b\left(E, F\right)$.
Οι θετικοί τελεστές είναι διατακτικά φραγμένοι. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι ο χώρος $\mathcal{L}_b\left(E, F\right)$ διατάσσεται από τον κώνο των θετικών τελεστών.

Κάθε χώρος Riesz είναι εφοδιασμένος με μία διατακτική τοπολογία. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της διατακτικής συνέχειας ενός τελεστή μεταξύ χώρων Riesz.

Ορισμός 1.33. Ένας τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ χώρων Riesz λέμε ότι είναι **διατακτικά συνεχής**, αν για οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων $(u_n) \subset E$ με $u_n \xrightarrow{o} 0$ έχουμε ότι $T(u_n) \xrightarrow{o} 0$ στον F.

Ισοδύναμα, ένας θετικός τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ χώρων Riesz είναι διατακτικά συνεχής αν και μόνο αν $x_n \downarrow 0$ στον E συνεπάγεται ότι $T\left(x_n\right) \downarrow 0$ στον F.

Για τελεστές μεταξύ Αρχιμήδειων χώρων Riesz μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας.

Ορισμός 1.34. Ένας τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ Αρχιμήδειων χώρων Riesz λέμε ότι είναι **ομοιόμορφα διατακτικά συνεχής**, αν για οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων $(u_n) \subset E$ με $u_n \xrightarrow{u} 0$ έχουμε ότι $T(u_n) \xrightarrow{u} 0$ στον F.

Στη συνέχεια, δίνουμε τον ορισμό των ομοιομορφισμών και των ισομορφισμών μεταξύ χώρων Riesz.

Ορισμός 1.35. Ένας τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ γραμμικών συνδέσμων καλείται:

διατακτικός ομοιομορφισμός αν για κάθε $x, y \in E$ ισχύει ότι $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$.

διατακτικός ισομορφισμός αν ο T είναι ένα προς ένα διατακτικός ομοιομορφισμός.

Οι γραμμικοί σύνδεσμοι E, F θα λέμε ότι είναι **διατακτικά ισομορφικοί** αν υπάρχει διατακτικός ισομορφισμός από τον E **επί** του F.

Κάθε διατακτικός ομοιομορφισμός είναι θετικός τελεστής. Πράγματι, για κάθε $x \in E^+$ έχουμε ότι

$$T(x) = T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = [T(x)]^+ \geq 0.$$

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες των διατακτικών ομοιομορφισμών.

Θεώρημα 1.36. *Έστω τελεστής $T : E \to F$ μεταξύ γραμμικών συνδέσμων, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *ο T είναι διατακτικός ομοιομορφισμός.*
2. $T(x^+) = (Tx)^+, \quad \forall x \in E.$
3. $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y), \quad x, y \in E.$
4. *Αν $x \wedge y = 0$ στον E, τότε $T(x) \wedge T(y) = 0$ στον F.*
5. $T(|x|) = |T(x)|, \quad \forall x \in E.$

Απόδειξη. $[1 \Rightarrow 2]$ Έχουμε ότι $T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0) = (Tx)^+$.
$[2 \Rightarrow 3]$ Έχουμε

$$T(x \wedge y) = T(x - (x-y)^+) = T(x) - T(x-y)^+ = T(x) - (Tx - Ty)^+ = T(x) \wedge T(y).$$

$[3 \Rightarrow 4]$ Αν $x \wedge y = 0$, τότε $T(x) \wedge T(y) = T(x \wedge y) = T(0) = 0$.
$[4 \Rightarrow 5]$ Έχουμε ότι $x^+ \wedge x^- = 0$, άρα
$|T(x)| = |T(x^+) - T(x^-)| = T(x^+) \vee T(x^-) - T(x^+) \wedge T(x^-) =$
$= T(x^+) \vee T(x^-) = T(x^+) + T(x^-) T(x^+ + x^-) = T(|x|)$.
$[5 \Rightarrow 1]$ Έχουμε διαδοχικά
$T(x \vee y) = T\left(\frac{1}{2}\left[x + y + |x-y|\right]\right) = \frac{1}{2}\left[T(x) + T(y) + T(|x-y|)\right] =$
$= \frac{1}{2}\left[T(x) + T(y) + (|T(x) - T(y)|)\right] = T(x) \vee T(y)$. ∎

Παρατήρηση 1.37. *Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι ο πυρήνας ενός ομοιομορφισμού είναι διατακτικό ιδεώδες. Πράγματι, αν $T : E \to F$ ομοιομορφισμός και $ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ ο πυρήνας του, τότε για κάθε $x \in ker(T)$ έχουμε*

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow |T(x)| = 0 \Leftrightarrow T(|x|) = 0$$

άρα $|x| \in ker(T)$. *Επομένως,* $ker(T)$ *υποσύνδεσμος του* E.
Για να δείξουμε ότι ο πυρήνας είναι ιδεώδες επιλέγουμε $x \in ker(T)$ *και* $y \in E$ *τέτοιο ώστε* $0 \leq |y| \leq |x|$. *Επειδή ο* T *είναι θετικός τελεστής έχουμε ότι* $0 \leq T(|y|) \leq T(|x|) = 0$. *Άρα,* $T(|y|) = 0 \Rightarrow |T(y)| = 0 \Leftrightarrow T(y) = 0$, *δηλαδή* $y \in ker(T)$. *Άρα τελικά, ο διατεταγμένος υπόχωρος* $ker(T)$ *είναι διατακτικό ιδεώδες.*

Αν επιπλέον ο ομοιομορφισμός είναι διατακτικά συνεχής τότε ο πυρήνας του είναι δέσμη.

Λήμμα 1.38. *Έστω* E, F *γραμμικοί σύνδεσμοι και* $T : E \to F$ *διατακτικά συνεχής ομοιομορφισμός. Τότε ο πυρήνας του τελεστή* T *είναι δέσμη.*

Απόδειξη. Από λήμμα 1.25 έχουμε ότι ένα ιδεώδες X είναι δέσμη αν και μόνο αν για κάθε $(u_n) \subset X$ με $0 \leq u_n \uparrow u$ έχουμε ότι $u \in X$.
Από προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι ο διατεταγμένος υπόχωρος $X = ker(T)$ είναι ιδεώδες. Έστω $(u_n) \subset X$ με $0 \leq u_n \uparrow u$. Θα δείξουμε ότι $u \in ker(T)$. Όμως ο T είναι διατακτικά συνεχής, άρα έχουμε ότι $T(u_n) \xrightarrow{o} T(u)$ στον F. Όμως, $T(u_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, $T(u) = 0 \Leftrightarrow u \in X = ker(T)$. ■

Μία ειδική κατηγορία ομοιομορφισμών είναι οι ορθομορφισμοί.

Ορισμός 1.39. Ένας διατακτικά φραγμένος τελεστής $T : E \to E$ καλείται **ορθομορφισμός** (orthomorphism) αν για κάθε $x, y \in E$ με $x \perp y$ ισχύει ότι $T(x) \perp y$.

Από την πρόταση 1.18,(2) προκύπτει ότι το σύνολο των ορθομορφισμών είναι διανυσματικός χώρος τον οποίο θα συμβολίζουμε με $Orth(E)$. Κάθε ορθομορφισμός $T : E \to E$ είναι ομοιομορφισμός Riesz καθώς αν $x, y \in E^+$ με $x \wedge y = 0$ τότε έχουμε ότι $T(x) \wedge y = 0$ άρα και $T(x) \wedge T(y) = 0$.
Οι ορθομορφισμοί που είναι ορισμένοι σε Αρχιμήδειο γραμμικό σύνδεσμο είναι διατακτικά συνεχείς.

Θεώρημα 1.40. *Κάθε ορθομορφισμός ορισμένος σε Αρχιμήδειο γραμμικό σύνδεσμο είναι διατακτικά συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $T : E \to E$ θετικός ορθομορφισμός ορισμένος στον Αρχιμήδειο γραμμικό σύνδεσμο E και $x_n \downarrow 0$ στον E. Θα δείξουμε ότι $T(x_n) \downarrow 0$. Επειδή $x_n \downarrow 0$ υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε $0 \leq x_n \leq x \ \forall n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $y \in E^+$ τέτοιο ώστε $0 \leq y \leq T(x_n) \leq T(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $(x_n - \epsilon x)^+ \wedge (x_n - \epsilon x)^- = 0$ για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα,

$$0 \leq (y - \epsilon Tx)^+ \wedge (x_n - \epsilon x)^- \leq T\left((x_n - \epsilon x)^+\right) \wedge (x_n - \epsilon x)^- = 0.$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$0 = (y - \epsilon Tx)^{+} \wedge (x_n - \epsilon x)^{-} \uparrow (y - \epsilon Tx)^{+} \wedge \epsilon x,$$

άρα $(y - \epsilon Tx)^{+} \wedge \epsilon x = 0$ για κάθε $\epsilon > 0$. Επειδή ο γραμμικός σύνδεσμος E είναι Αρχιμήδειος έχουμε ότι $y \wedge x = 0$. Άρα τελικά, $y = y \wedge T(x) = 0$ επομένως $T(x_n) \downarrow 0$.
Επειδή κάθε ορθομορφισμός είναι η διαφορά θετικών ορθομορφισμών έχουμε ότι τελικά οι ορθομορφισμοί είναι διατακτικά συνεχείς. ■

Κεφάλαιο 2

Διατεταγμένες Άλγεβρες

2.1 Γενικές Έννοιες και Ορισμοί

2.1.1 Αβελιανές Ομάδες και Δακτύλιοι

Ορισμός 2.1. Μία διμελής πράξη $*$ σε ένα σύνολο S είναι ένας κανόνας, με τον οποίο σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του S αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του S.

Επειδή στον παραπάνω ορισμό το ζεύγος στο οποίο δρα η διμελής πράξη είναι διατεταγμένο, ενδέχεται να έχουμε ότι $a * b \neq b * a$. Μία πράξη για την οποία ισχύει ότι $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in S$ καλείται αντιμεταθετική.

Ορισμός 2.2. Μία διμελής πράξη σε ένα σύνολο S λέγεται **αντιμεταθετική** αν $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in S$.

Έστω a, b, c στοιχεία του συνόλου S. Η παράσταση $a*b*c$ είναι καλά ορισμένη αν υπάρχει μοναδικό $d \in S$ τέτοιο, ώστε $a*b*c = (a*b)*c = a*(b*c) = d$. Μία διμελής πράξη $*$ επί του συνόλου S τέτοια, ώστε η παράσταση $a * b * c$ να είναι καλά ορισμένη για κάθε $a, b, c \in S$, θα λέμε ότι είναι προσεταιριστική. Ισοδύναμα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3. Μία διμελής πράξη σε ένα σύνολο S λέγεται **προσεταιριστική** αν $(a * b) * c = a * (b * c)$ για κάθε $a, b, c \in S$.

Μία αλγεβρική δομή $\langle G, * \rangle$ με προσεταιριστική πράξη καλείται ομάδα, αν το σύνολο G περιέχει το ουδέτερο στοιχείο της πράξης και κάθε $a \in G$ έχει αντίστροφο στοιχείο $a' \in G$.

Ορισμός 2.4. **Ομάδα** $\langle G, * \rangle$ είναι ένα σύνολο G, μαζί με μία διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική.

2. Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. (**Ύπαρξη Ταυτοτικού στοιχείου**).

3. Για κάθε a στο G, υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα $a' * a = a * a' = e$. (**Ύπαρξη Αντιστρόφου στοιχείου**).

Ορισμός 2.5. Μία ομάδα $\langle G, * \rangle$ λέγεται **αβελιανή** αν η διμελής της πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.

Παράδειγμα 2.6. *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ με πράξη την $+$ είναι αβελιανή ομάδα.*

Παράδειγμα 2.7. *Το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$ με πράξη την $+$ δεν είναι ομάδα γιατί δεν έχει ταυτοτικό στοιχείο.*

Παράδειγμα 2.8. *Το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πράξη την πρόσθεση συναρτήσεων, είναι αβελιανή ομάδα.*

Παράδειγμα 2.9. *Ο χώρος όλων των πραγματικών $2x2$ πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν είναι ομάδα. Πράγματι, το στοιχείο*

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν έχει αντίστροφο.

Η πιο σημαντική αλγεβρική δομή με δύο διμελείς πράξεις είναι ο δακτύλιος.

Ορισμός 2.10. Ένας **δακτύλιος** $\langle R, +, * \rangle$ είναι ένα σύνολο με δύο διμελείς πράξεις $+$ και $*$, τις οποίες αποκαλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, τέτοιες, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Η $\langle R, + \rangle$ είναι αβελιανή ομάδα.

2. Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.

3. Για κάθε $a, b, c \in R$, ισχύουν ο αριστερός επιμεριστικός νόμος,

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c),$$

και ο δεξιός επιμεριστικός νόμος,

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c).$$

Παράδειγμα 2.11. *Τα παραπάνω αξιώματα ισχύουν σε κάθε υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών που είναι ομάδα με την πρόσθεση και κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, οι δομές*

$$\langle \mathbb{Z}, +, * \rangle, \langle \mathbb{Q}, +, * \rangle, \langle \mathbb{R}, +, * \rangle, \langle \mathbb{C}, +, * \rangle$$

είναι δακτύλιοι.

Παράδειγμα 2.12. *Έστω F το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Από προηγούμενο παράδειγμα η $\langle F, + \rangle$ είναι μία αβελιανή ομάδα με την συνήθη πρόσθεση συναρτήσεων,*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό $*$ στο F ως εξής:

$$(f * g)(x) = f(x)g(x).$$

Τότε η $\langle F, +, * \rangle$ είναι δακτύλιος.

Υποδακτύλιος ενός δακτυλίου λέγεται ένα υποσύνολο του δακτυλίου, που είναι δακτύλιος ως προς τις επαγόμενες πράξεις από τον μεγάλο δακτύλιο.

Ορισμός 2.13. Ένας υποδακτύλιος N ενός δακτυλίου $\langle R, +, * \rangle$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$aN = \{a * h \mid h \in N\} \subset N \quad \text{και} \quad Nb = \{h * b \mid h \in N\} \subset N$$

για κάθε $a, b \in R$, λέγεται **αλγεβρικό ιδεώδες**.

Παράδειγμα 2.14. *Έστω R ο δακτύλιος όλων των συναρτήσεων που απεικονίζουν το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και F ο υποδακτύλιος που αποτελείται από τις σταθερές συναρτήσεις του R. Τότε, ο F **δεν** είναι ιδεώδες διότι το γινόμενο μίας συνάρτησης με μία οποιαδήποτε συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα σταθερή συνάρτηση.*

Παράδειγμα 2.15. *Έστω R ο δακτύλιος του προηγούμενου παραδείγματος και N ο υποδακτύλιος όλων των συναρτήσεων f, για τις οποίες $f(2) = 0$. Τότε ο N είναι ιδεώδες. Πράγματι, έστω $f \in N$ και $g \in R$. Τότε $(fg)(2) = f(2)g(2) = 0g(2) = 0$, επομένως $fg \in N$. Όμοια, έχουμε ότι $gf \in N$. Άρα τελικά, ο υποδακτύλιος N είναι ιδεώδες στον R.*

Στη συνέχεια ορίζουμε μία απεικόνιση που συσχετίζει την προσθετική και την πολλαπλασιαστική δομή δύο δακτυλίων.

Ορισμός 2.16. Έστω $\langle R, +, *\rangle$, $\left\langle R', +', *'\right\rangle$ δακτύλιοι. Μία απεικόνιση $\phi : R \to R'$ λέγεται **αλγεβρικός ομοιομορφισμός** αν για κάθε $a, b \in R$ ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\phi(a + b) = \phi(a) +' \phi(b)$,
2. $\phi(a * b) = \phi(a) *' \phi(b)$.

Η απεικόνιση ϕ λέμε ότι είναι **αλγεβρικός ισομορφισμός** αν είναι ένα προς ένα αλγεβρικός ομοιομορφισμός.
Οι δακτύλιοι R, R' καλούνται **αλγεβρικά ισομορφικοί** αν υπάρχει ισομορφισμός ϕ από τον R **επί** του R'.

2.1.2 Διατεταγμένες Άλγεβρες

Ορισμός 2.17. Ένας γραμμικός σύνδεσμος E, εφοδιασμένος με έναν προσεταιριστικό, εσωτερικό πολλαπλασιασμό $*$ ο οποίος είναι συμβατός με την διάταξη, δηλαδή

$$a * b \geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad a, b \geq 0$$

καλείται **διατεταγμένη άλγεβρα** (lattice-ordered algebra ή $\ell-$ άλγεβρα).

Με τον όρο **μοναδιαίο στοιχείο** θα αναφερόμαστε στο ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
Επίσης, θα συμβολίζουμε με $N(A)$ το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων μίας $\ell-$ άλγεβρας A. Δηλαδή,

$$N(A) = \{\alpha \in A \mid \alpha^n = 0 \quad \text{για κάποιο} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν ισχύει ότι $N(A) = \{0\}$ τότε θα λέμε ότι η άλγεβρα είναι **semiprime.**
Με τον όρο $\ell-$**ιδεώδες** θα αναφερόμαστε σε κάθε διατεταγμένο υπόχωρο της άλγεβρας που είναι διατακτικό και αλγεβρικό ιδεώδες.

2.2 Κλάσεις Διατεταγμένων Αλγεβρών

Με βάση τον τρόπο που σχετίζεται η αλγεβρική δομή με την δομή της διάταξης μπορούμε να ορίσουμε συγκεκριμένες κλάσεις $\ell-$αλγεβρών. Στη συνέχεια, περιγράφουμε τις σημαντικότερες.

Ορισμός 2.18. Μία $\ell-$ άλγεβρα $(E, *, \geq)$ καλείται:

1. $f-$ **άλγεβρα** αν για κάθε $a, b \in E$ με $a \wedge b = 0$, ισχύει ότι $(c * \alpha) \wedge b = (a * c) \wedge b = 0$ για κάθε $c \in E^+$.

2. **σχεδόν** $f-$**άλγεβρα** αν για κάθε $a, b \in E$ με $a \wedge b = 0$, ισχύει ότι $a * b = 0$.

3. $d-$**άλγεβρα** αν για κάθε $a, b \in E$ ισχύει ότι $c * (a \vee b) = (c * a) \vee (c * b)$ και $(a \vee b) * c = (a * c) \vee (b * c)$ για κάθε $c \in E^+$.

Στη συνέχεια μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των παραπάνω κλάσεων όπως και την μεταξύ τους σχέση.

2.2.1 $f-$άλγεβρες

Μία Αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα έχει αρκετές από τις ιδιότητες της άλγεβρας των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός σε μία αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα είναι αντιμεταθετικός και διατακτικά συνεχής. Επίσης, τα τετράγωνα των στοιχείων μίας $f-$άλγεβρας είναι θετικά.

Πρόταση 2.19. Έστω A μία $f-$άλγεβρα. Τότε

1. Ο πολλαπλασιασμός με θετικά στοιχεία είναι ομοιομορφισμός Riesz, δηλαδή για κάθε $0 \leq u \in A$ και $f, g \in A$ έχουμε ότι $u(f \wedge g) = (uf) \wedge (ug), u(f \vee g) = (uf) \vee (ug), (f \wedge g)u = (fu) \wedge (gu)$ και $(f \vee g)u = (fu) \vee (gu)$.

2. $|fg| = |f|\,|g|$ για κάθε $f, g \in A$.

3. Αν $f \perp g$, τότε $fg = 0$.

4. $ff^+ \geq 0$ και $f^2 \geq 0$ για κάθε $f \in A$.

Απόδειξη. 1. Έστω $f, g \in A$ και $u \in A^+$. Τότε, $(f - f \wedge g) \wedge (g - f \wedge g) = 0$[1] άρα $\{uf - u(f \wedge g)\} \wedge \{ug - u(f \wedge g)\} = 0$, επομένως $(uf) \wedge (ug) = u(f \wedge g)$. Από την ταυτότητα, $f \vee g = f + g - f \wedge g$ προκύπτει ότι $u(f \vee g) = uf + ug - u\,(f \wedge g) = uf + ug - (uf) \wedge (ug) = (uf) \vee (ug)$. Ανάλογα, αποδεικνύουμαι ότι και ο πολλαπλασιασμός από τα δεξιά με θετικό στοιχείο είναι ομοιομορφισμός Riesz.

[1] διότι με εφαρμογή της ιδιότητας 2 του θεωρήματος 1.10 έχουμε ότι $f - (f \wedge g) = 0 \vee (f - g)$ και $g - f \wedge g = (g - f) \vee 0$, άρα λοιπόν επειδή τα $f - g$ και $g - f$ είναι αντίθετα συμπεραίνουμε ότι $(f - f \wedge g) \wedge (g - f \wedge g) = 0$.

2. Έστω $f, g \in A$. Από τον ορισμό της $f-$ άλγεβρας και λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε $f \in A$ έχουμε ότι $f^+ \wedge f^- = 0$ και $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$, ισχύουν τα ακόλουθα: $f^+g^+ \perp f^+g^-$, $f^+g^+ \perp f^-g^-$, $f^-g^- \perp f^+g^-$, $f^-g^- \perp f^-g^+$. Άρα, $f^+g^+ + f^-g^- \perp f^+g^- + f^-g^+$. Επομένως, έχουμε ότι $fg = (f^+g^+ + f^-g^-) - (f^+g^- + f^-g^+)$ άρα $(fg)^+ = f^+g^+ + f^-g^-$ και $(fg)^- = f^+g^- + f^-g^+$. Τελικά, $|fg| = (fg)^+ + (fg)^- = (f^+ + f^-)(g^+ + g^-) = |f|\,|g|$.
3. Έστω $f, g \in A$ ώστε $f \perp g \Leftrightarrow |f| \wedge |g| = 0$. Τότε $(|f|\,|g|) \wedge |g| = 0$, άρα $(|f|\,|g|) \wedge (|f|\,|g|) = 0$. Επομένως, $|fg| = |f|\,|g| = 0$ δηλαδή $fg = 0$.
4. Για κάθε $f \in A$ έχουμε ότι $ff^+ = (f^+ - f^-)f^+ = (f^+)^2 - f^-f^+ = (f^+)^2$ και $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2 \geq 0$.

■

Παρατηρήσεις.

1. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε $f-$άλγεβρα είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα και $d-$άλγεβρα. Επίσης, τα τετράγωνα των στοιχείων μίας $f-$άλγεβρας είναι θετικά.
2. Αν η $f-$άλγεβρα είναι semiprime τότε ισχύει ότι
$$f \perp g \Leftrightarrow fg = 0.$$
Πράγματι, αν $fg = 0$, τότε $(|f| \wedge |g|)^2 \leq |f|\,|g| = |fg| = 0$ άρα $(|f| \wedge |g|)^2 = 0$. Όμως, η άλγεβρα είναι semiprime άρα έχουμε ότι $|f| \wedge |g| = 0 \Leftrightarrow f \perp g$.
3. Σε μία $f-$άλγεβρα ο τελεστής του πολλαπλασιασμού π_f[2] είναι ορθομορφισμός για κάθε $f \geq 0$, άρα από θεώρημα 1.40 προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός είναι διατακτικά συνεχής.

Μία σημαντική ιδιότητα των Αρχιμήδειων $f-$αλγεβρών είναι η αντιμεταθετικότητα τους.

Λήμμα 2.20. *Έστω E αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος και $\pi_1, \pi_2 : E \to E$ διατακτικά συνεχείς τελεστές. Αν $D \subset E$ διατακτικά πυκνό υποσύνολο και $\pi_1(x) = \pi_2(x)\ \forall x \in D$ τότε $\pi_1 = \pi_2$.*

Απόδειξη. Έστω $v \in E^+$. Επειδή D διατακτικά πυκνό υπάρχει ακολουθία $(v_n) \in D$ τέτοια ώστε $v_n \uparrow v$, άρα $v_n \xrightarrow{o} v$. Όμως, οι απεικονίσεις π_1, π_2 είναι διατακτικά συνεχείς άρα έχουμε ότι $\pi_1(v_n) \xrightarrow{o} \pi_1(v)$ και $\pi_2(v_n) \xrightarrow{o}$

[2] ορίζουμε τον τελεστή του πολλαπλασιασμού π_f ως $\pi_f : A \to A$ με $\pi_f(g) = fg \quad \forall g \in A$.

$\pi_2(v)$. Όμως, από υπόθεση έχουμε ότι $\pi_1(v_n) = \pi_2(v_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, από την μοναδικότητα του διατακτικού ορίου έχουμε ότι $\pi_1(v) = \pi_2(v)$. Άρα, $\pi_1(v) = \pi_2(v)$ για κάθε $v \in E^+$. Επειδή ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος, έχουμε ότι $E = E^+ - E^+$ άρα τελικά, $\pi_1 = \pi_2$. ■

Θεώρημα 2.21. *Κάθε Αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα A είναι αντιμεταθετική.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οποιαδήποτε θετικά στοιχεία αντιμετατίθενται[3]. Έστω $a \in A^+$. Ορίζουμε τους τελεστές

$$\pi_a^l : A \to A, \quad \text{με} \quad \pi_a^l(x) = ax \quad \forall x \in A,$$

$$\pi_a^r : A \to A, \quad \text{με} \quad \pi_a^r(x) = xa \quad \forall x \in A.$$

Από τον ορισμό της $f-$άλγεβρας προκύπτει ότι οι παραπάνω τελεστές είναι ορθομορφισμοί, άρα και διατακτικά συνεχείς. Επιπλέον, για κάθε $b \in A$ με $b \perp a$ έχουμε ότι $ab = ba = 0$. Επίσης, $\pi_a^l(a) = \pi_a^r(a) = a^2$. Άρα, για κάθε $u \in \{a\} \cup \{a\}^d$ έχουμε ότι $\pi_a^l(u) = \pi_a^r(u)$. Όμως, $\{a\} \cup \{a\}^d$ διατακτικά πυκνό στην A, επομένως από προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $\pi_a^l(u) = \pi_a^r(u)$ για κάθε $u \in A$. Άρα τελικά, για κάθε $a, b \in A^+$ έχουμε ότι $ab = ba$. ■

Παρατήρηση 2.22. 1. *Στις μη-αρχιμήδειες διατάξεις οι $f-$άλγεβρες δεν είναι απαραίτητα αντιμεταθετικές. Σχετικό είναι το ακόλουθο*

Παράδειγμα 2.23. *Έστω ο χώρος $E = \mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με την λεξικογραφική διάταξη. Ορίζουμε στον E τον πολλαπλασιασμό*

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2).$$

Η διατεταγμένη άλγεβρα $(E, *)$ είναι μη-αρχιμήδεια και μη-αντιμεταθετική $f-$άλγεβρα.

2. *Στις αρχιμήδειες $f-$άλγεβρες ισχύει επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός. Δηλαδή, στην περίπτωση αρχιμήδειων $f-$αλγεβρών η απαίτηση στον ορισμό της διατεταγμένης άλγεβρας για προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού είναι περιττή. Το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά για τις σχεδόν $f-$άλγεβρες και τις $d-$άλγεβρες.*
Η απόδειξη της προσεταιριστικότητας του πολλαπλασιασμού στις Αρχιμήδειες

[3]Πράγματι, αν οποιαδήποτε θετικά στοιχεία αντιμετατίθενται τότε για κάθε $a, b \in A$ θα έχουμε ότι $ab = \left(a^+ - a^-\right)\left(b^+ - b^-\right) = a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^- = b^+a^+ - b^-a^+ - b^+a^- + b^-a^- = \left(b^+ - b^-\right)a^+ - \left(b^+ - b^-\right)a^- = \left(b^+ - b^-\right)\left(a^+ - a^-\right) = ba.$

διατάξεις είναι όμοια με την απόδειξη της αντιμεταθετικότητας με εφαρμογή στους τελεστές

$$\pi_{ab} : A \to A, \quad \textit{με} \quad \pi_{ab}(x) = (ab)\,x \quad \forall x \in A,$$

$$\pi_a \circ \pi_b : A \to A, \quad \textit{με} \quad \pi_a \circ \pi_b(x) = a\,(bx) \quad \forall x \in A.$$

Το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων μίας αρχιμήδειας $f-$άλγεβρας αποτελείται από τα στοιχεία της άλγεβρας που έχουν μηδενικό τετράγωνο. Επίσης, κάθε αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο είναι semiprime.

Θεώρημα 2.24. *Έστω E μία αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα και*

$$N(E) = \{f \in E \mid f^n = 0 \quad \textit{για κάποιο} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων της άλγεβρας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $N(E) = \left\{f \in E \mid f^2 = 0\right\}.$
2. *Αν $f \in N(E)$ τότε $fg = 0$ για κάθε $g \in E$. Επομένως, αν η E έχει μοναδιαίο στοιχείο τότε είναι semiprime, δηλαδή $N(E) = \{0\}$.*

Απόδειξη. 1. Αρκεί να δείξουμε ότι $N(E) \subseteq \left\{f \in E \mid f^2 = 0\right\}$. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι αν $f^k = 0$ για κάποιο $k > 2$ τότε $f^{k-1} = 0$. Υποθέτουμε ότι $f \geq 0$. Έχουμε,

$$\left(nf^{k-1} - f^{k-2}\right)^+ \wedge \left(f^{k-2} - nf^{k-1}\right)^+ = 0$$

και πολλαπλασιάζοντας τον δεύτερο όρο με nf έχουμε ότι $\left(nf^{k-1} - f^{k-2}\right)^+ \wedge \left(nf^{k-1}\right) = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Όμως,

$$\left(nf^{k-1} - f^{k-2}\right)^+ \leq nf^{k-1}$$

άρα $\left(nf^{k-1} - f^{k-2}\right)^+ = 0$, επομένως $0 \leq nf^{k-1} \leq f^{k-2}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επειδή η άλγεβρα είναι αρχιμήδεια έχουμε ότι $f^{k-1} = 0$. Άρα, για οποιοδήποτε k επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα $k-2$ φορές έχουμε ότι $f^2 = 0$.

Αν $f \leq 0$ και $f^k = 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε $f^k = 0 \Rightarrow f^{2k} = 0 \Rightarrow (-f)^{2k} = 0$. Άρα, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $(-f)^2 = 0 \Rightarrow f^2 = 0$.

2. Έστω $f \in N(E)$ δηλαδή $f^2 = 0$. Ορίζουμε τον ορθομορφισμό $\pi_f : A \to A$ με $\pi_f g = fg$ για κάθε $g \in A$. Τότε, $\pi_f(f) = f^2 = 0$ και $\pi_f(g) = 0$ για κάθε $g \in \{f\}^d$. Επομένως $\pi_f(g) = 0$ για κάθε $x \in f \cup \{f\}^d$. Όμως, $f \cup \{f\}^d$ διατακτικά πυκνό στην E, άρα από λήμμα 2.20 έχουμε ότι $\pi_f(g) = fg = 0$ για κάθε $g \in E$.
   Επομένως, αν μία αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα έχει μοναδιαίο στοιχείο e, τότε $N(E) = \{0\}$. Διαφορετικά, αν $f \in N(E)$ και $f \neq 0$ θα είχαμε ότι $ef = 0 \Rightarrow e = 0$, Άτοπο.

■

Σε μία $f-$άλγεβρα ο γραμμικός χώρος $N(A)$ διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη, είναι δέσμη και αλγεβρικό ιδεώδες.

Θεώρημα 2.25. *Έστω A μία Αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα και $N(A)$ το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων της A. Τότε το σύνολο $N(A)$ είναι δέσμη και αλγεβρικό ιδεώδες.*

Απόδειξη. Το σύνολο $N(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Πράγματι, αν $f, g \in N(A)$ τότε έχουμε ότι $f^2 = g^2 = 0$. Άρα, $(f+g)^4 = \left(f^2 + fg + gf + g^2\right)^2 = 4f^2g^2 = 0$. Άρα, $f + g \in N(A)$. Επίσης, $\lambda f \in N(A)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in N(A)$.
Ο χώρος $N(A)$ είναι αλγεβρικό ιδεώδες. Πράγματι, αν $f \in N(A)$ και $g \in A$ τότε έχουμε

$$(fg)^2 = (gf)^2 = g^2 f^2 = 0,$$

επομένως $fg = gf \in N(A)$.
Για να δείξουμε ότι ο χώρος $N(A)$ είναι υποσύνδεσμος παρατηρούμε ότι $f^2 = 0 \Leftrightarrow |f|^2 = \left|f^2\right| = 0$. Άρα, $f \in N(A) \Leftrightarrow |f| \in N(A)$. Επιπλέον, έχουμε ότι αν $0 \leq v \leq u$ και $u \in N(A)$, τότε $0 \leq v^2 \leq u^2 = 0$, επομένως $v \in N(A)$, άρα ο υπόχωρος $N(A)$ είναι διατακτικό ιδεώδες.
Για να αποδείξουμε ότι ο υπόχωρος $N(A)$ είναι δέσμη θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1.25. Υποθέτουμε ότι $u_n \subset N(A)$ με $0 \leq u_n \uparrow u_0$. Θα δείξουμε ότι $u_0 \in N(A)$. Για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0$ έχουμε ότι $u_n u_{n_0} \leq u_n^2 = 0$. Επειδή $u_{n_0} \geq 0$ ο πολλαπλασιασμός με u_{n_0} είναι ορθομορφισμός, άρα και διατακτικά συνεχής. Επομένως, έχουμε ότι $u_n u_{n_0} \uparrow u_0 u_{n_0}$ άρα $u_0 u_{n_0} = 0$. Άρα, για $n_0 = 0$ έχουμε ότι $0 = u_0 u_n \uparrow u_0^2$ και $u_0^2 = 0$, δηλαδή $u_0 \in N(A)$. Άρα τελικά, το σύνολο $N(A)$ είναι δέσμη. ■

Παραδείγματα $f-$αλγεβρών.

Παράδειγμα 2.26. *Αν X τοπολογικός χώρος Hausdorff τότε, ο χώρος $C(X)$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με τις κατά σημείο πράξεις και διάταξη* *και πολλαπλασιασμό οριζόμενο κατά σημείο δηλαδή,*

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in X$$

είναι Αρχιμήδεια $f-$*άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο την συνάρτηση* $e \in C(X)$, *όπου* $e(x) = 1\ \forall x \in X$.

Παράδειγμα 2.27. *Αν* E *Αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος τότε ο χώρος* $Orth(E)$ *των ορθομορφισμών επί του συνόλου* E, *με εσωτερικό πολλαπλασιασμό την σύνθεση συναρτήσεων* $\circ$, *είναι Αρχιμήδεια* $f-$*άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο την ταυτοτική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Ο γραμμικός χώρος $Orth(E)$, διατεταγμένος από το σύνολο των θετικών ορθομορφισμών, είναι γραμμικός σύνδεσμος. Επίσης, αν π_1, π_2 θετικοί ορθομορφισμοί τότε η σύνθεση τους είναι επίσης θετικός τελεστής και ορθομορφισμός. Άρα, ο χώρος $(Orth(E), \circ)$ είναι διατεταγμένη άλγεβρα. Επιπλέον, η ταυτοτική απεικόνιση είναι το ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης, δηλαδή του πολλαπλασιασμού.
Για να δείξουμε ότι η διατεταγμένη άλγεβρα $Orth(E)$ είναι $f-$άλγεβρα, θεωρούμε $\pi, \pi_1, \pi_2 \in Orth(E)$ με $\pi_1 \wedge \pi_2 = 0$. Θα δείξουμε ότι $(\pi \circ \pi_1) \wedge \pi_2 = 0$ και $(\pi_1 \circ \pi) \wedge \pi_2 = 0$. Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι για κάθε $u \in E^+$ έχουμε ότι $\pi_1(u) \wedge \pi_2(u) = (\pi_1 \wedge \pi_2)(u) = 0$, άρα $(\pi \circ \pi_1)(u) \wedge \pi_2(u) = 0$, δηλαδή $(\pi \circ \pi_1) \wedge \pi_2 = 0$. Για την δεύτερη ισότητα έχουμε ότι

$$0 \leq (\pi_1 \circ \pi)(u) \wedge \pi_2(u) \leq \{\pi_1 (\pi(u) \vee u)\} \wedge \{\pi_2 (\pi(u) \vee u)\} = (\pi_1 \wedge \pi_2)(\pi(u) \vee u) = 0.$$

Επομένως, $(\pi_1 \circ \pi)(u) \wedge \pi_2(u) = 0$ για κάθε $u \in E^+$, δηλαδή $((\pi_1 \circ \pi_2) \wedge \pi_2)(u) = 0$ για κάθε $u \in E^+$. Άρα, επειδή ο χώρος E είναι γραμμικός σύνδεσμος, έχουμε ότι $(\pi_1 \circ \pi) \wedge \pi_2 = 0$. Άρα τελικά, η διατεταγμένη άλγεβρα $(Orth(E), \circ)$ είναι $f-$άλγεβρα. ■

2.2.2 Σχεδόν $f-$άλγεβρες

Οι σχεδόν $f-$άλγεβρες αποτελούν γενίκευση των $f-$αλγεβρών. Ως αποτέλεσμα της ασθενέστερης συνθήκης που χαρακτηρίζει τις σχεδόν $f-$άλγεβρες ο πολλαπλασιασμός δεν είναι γενικά διατακτικά συνεχής ενώ το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων είναι αλγεβρικό και διατακτικό ιδεώδες αλλά δεν είναι απαραίτητα δέσμη. Ωστόσο, η θετικότητα των τετραγώνων όπως και η αντιμεταθετικότητα στις αρχιμήδειες διατάξεις, διατηρούνται και σε αυτή την γενικότερη κλάση. Οι δύο κλάσεις είναι ισοδύναμες σε διατεταγμένες άλγεβρες που είναι semiprime ή έχουν ασθενή διατακτική μονάδα.

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς μίας σχεδόν $f-$ άλγεβρας.

Πρόταση 2.28. Έστω A μία $\ell-$άλγεβρα. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. η A είναι σχεδόν $f-$ άλγεβρα,
2. $\alpha^+\alpha^- = 0$ και $\alpha^-\alpha^+ = 0$ για κάθε $\alpha \in A$.
3. $\alpha^2 = |\alpha|^2$ για κάθε $\alpha \in A$.

Απόδειξη. $[1 \Rightarrow 2]$ Έχουμε $\alpha^+ \wedge \alpha^- = 0$ άρα $\alpha^+\alpha^- = \alpha^+\alpha^- = 0$.
$[2 \Rightarrow 3]$ Έχουμε διαδοχικά: $\alpha^2 = (\alpha^+ - \alpha^-)^2 =$
$= (\alpha^+)^2 - \alpha^+\alpha^- - \alpha^-\alpha^+ + (\alpha^-)^2 = (\alpha^+)^2 + (\alpha^-)^2 =$
$= (\alpha^+)^2 + \alpha^+\alpha^- + \alpha^-\alpha^+ + (\alpha^-)^2 = (\alpha^+ + \alpha^-)^2 = |\alpha|^2$.
$[3 \Rightarrow 1]$ Από υπόθεση έχουμε ότι $2(\alpha^+\alpha^- + \alpha^-\alpha^+) = 0$ για κάθε $\alpha \in A$. Επομένως, επειδή $\alpha^+\alpha^- \geq 0, \alpha^-\alpha^+ \geq 0$, έχουμε ότι $\alpha^+\alpha^- = \alpha^-\alpha^+ = 0$ για κάθε $\alpha \in A$. Επιλέγουμε $\alpha, \beta \in A$ τέτοια ώστε $\alpha \wedge \beta = 0$. Τότε για το $c := a - b$ έχουμε ότι $c^+ = \alpha, c^- = \beta$.[4] Άρα, $c^+c^- = 0 \Rightarrow \alpha\beta = 0$. ∎

Παρατηρήσεις.

1. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι τα τετράγωνα των στοιχείων μίας σχεδόν $f-$ άλγεβρα είναι θετικά. Άρα, αν μία σχεδόν $f-$άλγεβρα έχει μοναδιαίο στοιχείο e τότε αυτό είναι θετικό, καθώς $e = e^2 \geq 0$.
2. Σε αντίθεση με τις $f-$ άλγεβρες ο πολλαπλασιασμός δεν είναι απαραίτητα διατακτικά συνεχής, ακόμα και αν η διάταξη είναι Αρχιμήδεια, όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

[4] πράγματι αν $y \wedge z = 0$ και $x = y - z$ τότε έχουμε ότι $x^+ = (y - z) \vee 0 = y \vee z - z = (y + z - y \wedge z) - z = y$ και όμοια προκύπτει ότι $x^- = z$.

Παράδειγμα 2.29. *Έστω $A = C[0,1]$ ο γραμμικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$, εφοδιασμένος με τις κατά σημείο πράξεις και διάταξη. Για κάθε $a, b \in A$ ορίζουμε πολλαπλασιασμό $*$ ως*

$$(a * b)(x) = a(0)b(0),$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε η $(A, *)$ είναι Αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα, και ο πολλαπλασιασμός δεν είναι διατακτικά συνεχής. Πράγματι, έστω $f_n(x) = \frac{1}{(x+1)^n}$ και $e(x) = 1,$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε, $\inf\{f_n(x_0), n = 1, 2, \ldots\} = 0$ για κάθε $x_0 \in [0,1]$, άρα $f_n \downarrow 0$. Όμως, $\inf\{(e * f_n)(x_0) = f_n(0) = 1, n = 1, 2, \ldots\} = 1 \neq 0$ για κάθε $x_0 \in [0,1]$, άρα $e * f_n \downarrow e \neq 0$. Επομένως, ο πολλαπλασιασμός δεν είναι διατακτικά συνεχής[5].

Θεώρημα 2.30. *Κάθε αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα είναι αντιμεταθετική.*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος δόθηκε από τους Bernau και Huijsmans στο $([3], 1990)$. Η (εκτενής) απόδειξη που παρουσιάστηκε είναι κατασκευαστικού χαρακτήρα και βασίζεται μόνο σε ιδιότητες της άλγεβρας. Μία πιο σύντομη απόδειξη δόθηκε από τους Buskes και van Rooij στο $([7], 2000)$ μέσω της αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού από ειδική διγραμμική απεικόνιση. •

Πότε μία σχεδόν $f-$άλγεβρα είναι $f-$άλγεβρα;

Από την πρόταση 2.19 προκύπτει ότι κάθε $f-$άλγεβρα είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα. Ωστόσο, όπως προκύπτει από το ακόλουθο παράδειγμα το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2.31. *Θεωρούμε τον χώρο A των πραγματικών 3x3 πινάκων της μορφής*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

εφοδιασμένο με τις κατά σημείο πράξεις και εσωτερικό πολλαπλασιασμό $\bullet$ τον συνήθη πολλαπλασιασμό μεταξύ πινάκων. Επίσης, θεωρούμε ότι ο χώρος διατάσσεται με την κατά σημείο διάταξη, δηλαδή ένα στοιχείο είναι θετικό ανν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$. Τότε η άλγεβρα $(A, \bullet)$ είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα αλλά δεν

[5] ο πολλαπλασιασμός με θετικό στοιχείο σε μία $\ell-$άλγεβρα A είναι θετικός τελεστής, επομένως είναι διατακτικά συνεχής αν, ισοδύναμα, για οποιαδήποτε ακολουθία $(x_n) \subset A$ με $x_n \downarrow 0$ έπεται ότι $yx_n \downarrow 0 \ \forall y \in A^+$.

είναι $f-$άλγεβρα.
Πράγματι, για το τυχαίο στοιχείο

$$q = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

της άλγεβρας έχουμε ότι

$$q^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q|^2$$

άρα από προηγούμενη πρόταση η άλγεβρα $(A, \bullet)$ είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.
Όμως, δεν είναι $f-$άλγεβρα. Πράγματι, έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για τα παραπάνω στοιχεία του χώρου έχουμε ότι $A \wedge B = 0$ αλλά

$$(C \bullet A) \wedge B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$$

■

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αν μία $\ell-$άλγεβρα είναι semiprime ή έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε οι κλάσεις των σχεδόν $f-$αλγεβρών και $f-$αλγεβρών ταυτίζονται.

Για να αποδείξουμε τα παραπάνω θα δείξουμε πρώτα ότι μία $\ell-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο e στοιχείο είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα αν και μόνο αν το στοιχείο e είναι **ασθενής διατακτική μονάδα** δηλαδή,

$$\{e\}^d = \{a \in A \mid a \perp e\} = \{0\}\,.$$

Λήμμα 2.32. *Έστω A μία $\ell-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο στοιχείο e που είναι ασθενής διατακτική μονάδα.*

1. *Αν $a \in A^+$ και $(a \wedge 2e)^2 = 0$, τότε $a \leq e$.*

2. *Αν $a \in A^+$ και $a^2 = 0$, τότε $a \le e$.*

Απόδειξη. 1. Το διατακτικό ιδεώδες I_e που παράγεται από το e είναι $f-$άλγεβρα, άρα και $d-$άλγεβρα. Θέτουμε $b = a \wedge 2e$, άρα $b^2 = 0$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} 0 \le b - b \wedge e &= (b - b \wedge e) \wedge b = (b - b \wedge e) \wedge \left(b - b^2 \wedge b\right) \\ &= (b - b \wedge e) \wedge b\,(e - b \wedge e) \\ &\le (b - b \wedge e) \wedge 2\,(e - b \wedge e) = 0 \end{aligned}$$

άρα $b \le e$, (διότι το b είναι στοιχείο της $d-$άλγεβρας I_e, άρα $b^2 \wedge b = b\,(b \wedge e)$). Επομένως, $a \wedge 2e \le e$, άρα $(a-e) \wedge e \le 0$, δηλαδή $(a-e)^+ \wedge e = 0$. Όμως, το e είναι ασθενής διατακτική μονάδα, άρα $(a-e)^+ = 0$ επομένως $a \le e$.

2. Άμεσο από το προηγούμενο γιατί

$$0 \le (a \wedge 2e)^2 \le a^2 \le 0$$

■

Λήμμα 2.33. *Έστω A μία $\ell-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο στοιχείο e που είναι ασθενής διατακτική μονάδα και $a \in A^+$. Τότε*

$$(a-e)^+ (e-a)^+ \le e \quad \textit{και} \quad (e-a)^+ (a-e)^+ \le e.$$

Απόδειξη. Έστω $c = (a-e)^+ (e-a)^+ \wedge 2e$. Τότε έχουμε ότι $0 \le c \le (a-e)^+$, άρα $0 \le (e-a)^+ c \le c \le (a-e)^+$. Επίσης, έχουμε ότι $(e-a)^+ c \le 2\,(e-a)^+$. Άρα

$$0 \le c^2 \le (a-e)^+ (e-a)^+ c \le (a-e)^+ \left\{(a-e)^+ \wedge 2\,(e-a)^+\right\} = 0.$$

Επειδή, $c^2 = 0$ από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $(a-e)^+ (e-a)^+ \le e$. Όμοια, έχουμε ότι

$$(e-a)^+ (a-e)^+ \le e.$$

■

Θεώρημα 2.34. *Έστω A μία Αρχιμήδεια $\ell-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο στοιχείο e. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *η A είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα,*

2. *το e είναι ασθενής διατακτική μονάδα.*

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2). Αν $a \perp e$ τότε $a = ae = 0$, άρα $\{e\}^d = \{0\}$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Υποθέτουμε ότι $a \wedge b = 0$. Τότε, επειδή

$$0 \leq (a \wedge e)(b \wedge e) \leq a \wedge b$$

έχουμε ότι $(a \wedge e)(b \wedge e) = 0$. Άρα,

$$a(b \wedge e) = (a - a \wedge e)(b \wedge e) \quad \text{και} \quad b \wedge e = (e - a \wedge e)(b \wedge e).$$

Από λήμμα 2.33, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 \leq a(b \wedge e) &= (a - a \wedge e)(e - a \wedge e)(b \wedge e) \\ &= (a - e)^+ (e - a)^+ (b \wedge e) \leq b, \end{aligned}$$

επομένως $0 \leq a(b \wedge e) \leq a \wedge b$, άρα $a(b \wedge e) = 0$. Όμοια, έχουμε ότι $(a \wedge e) b = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} 0 \leq ab &= a(b - b \wedge e) = a(e - b \wedge e)(b - b \wedge e) \\ &= a(e - b)^+ (b - e)^+ \leq a \end{aligned}$$

λόγω του λήμματος 2.33. Όμοια, έχουμε ότι $0 \leq ab \leq b$ άρα $0 \leq ab \leq a \wedge b$, δηλαδή $ab = 0$. ∎

Πόρισμα 2.35. *Έστω A μία Αρχιμήδεια $\ell-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο στοιχείο e. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *η A είναι $f-$άλγεβρα,*
2. *το e είναι ασθενής διατακτική μονάδα.*

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Αν $a \perp e$, τότε $a = ae = 0$, άρα $\{e\}^d = \{0\}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι $a \in A^+$ και $a^2 = 0$. Τότε $(na)^2 = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$, άρα από λήμμα 2.32 έχουμε ότι $na \leq e$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως από αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε ότι $a = 0$.
Αν $a \wedge b = 0$ και $c \in A^+$, τότε $ab = 0$ καθώς από το προηγούμενο θεώρημα η A είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα. Άρα,

$$0 \leq (ca \wedge b)^2 \leq cab = 0$$

επομένως $(ca \wedge b)^2$. Τελικά, από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι $ca \wedge b = 0$. Όμοια, συμπεραίνουμε ότι $ac \wedge b = 0$. ∎

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.36. *Μία Αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο e είναι $f-$άλγεβρα.*

Απόδειξη. Άμεσο, από το θεώρημα 2.34 και το πόρισμα 2.35, γιατί σε μία σχεδόν $f-$άλγεβρα το μοναδιαίο στοιχείο είναι θετικό. ■

Σχετικό είναι και το ακόλουθο θεώρημα σύμφωνα με το οποίο σε μία semiprime $\ell-$άλγεβρα οι κλάσεις των σχεδόν $f-$αλγεβρών και $f-$αλγεβρών ταυτίζονται.

Θεώρημα 2.37. *Κάθε semiprime σχεδόν $f-$άλγεβρα είναι $f-$άλγεβρα.*

Απόδειξη. Από προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι οι semiprime $f-$άλγεβρες χαρακτηρίζονται από την ισοδυναμία:

$$a \wedge b = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \quad \text{όπου} \quad a, b \in A^+$$

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $ab = 0$ με $a, b \in A^+$ τότε $a \wedge b = 0$. Έχουμε ότι $0 \leq (a \wedge b)^2 \leq ab$, άρα $(a \wedge b)^2 = 0$. Όμως, η άλγεβρα είναι semiprime άρα τελικά $a \wedge b = 0$. ■

Ιδιότητες του συνόλου των μηδενοδύναμων στοιχείων μίας σχεδόν $f-$άλγεβρας.

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι το σύνολο των μηδενοδύναμων σ-τοιχείων μίας αντιμεταθετικής σχεδόν $f-$άλγεβρας είναι $\ell-$ιδεώδες, δηλαδή αλγεβρικό και διατακτικό ιδεώδες. Επίσης, θα δείξουμε ότι τα μηδενοδύναμα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία της άλγεβρας που έχουν μηδενικό κύβο.

Λήμμα 2.38. *Έστω A μία σχεδόν $f-$άλγεβρα. Τότε*

$$\left|a^{2n}\right| = |a|^{2n}$$

για κάθε $a \in A$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Όλοι οι μεικτοί όροι στην επέκταση $a^{2n} = \left(a^+ - a^-\right)^{2n}$ είναι μηδενικοί, άρα

$$a^{2n} = \left(a^+\right)^{2n} + \left(a^-\right)^{2n} \geq 0,$$

δηλαδή $a^{2n} = \left|a^{2n}\right|$. Άρα, έχουμε ότι $|a|^{2n} = \left(a^+ + a^-\right)^{2n} = \left(a^+\right)^{2n} + \left(a^-\right)^{2n} = a^{2n} = \left|a^{2n}\right|$. ■

Πρόταση 2.39. Έστω A αντιμεταθετική σχεδόν $f-$άλγεβρα, τότε το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων $N(A)$ είναι $\ell-$ιδεώδες.

Απόδειξη. Έστω $a, b \in N(A)$. Τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a^{n_1} = b^{n_2} = 0$. Άρα, αν $n = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $(a+b)^{2n} = a^{2n} + b^{2n} = 0$, δηλαδή $a + b \in N(A)$. Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $a \in N(A)$ έχουμε ότι $\lambda a \in N(A)$. Άρα, το σύνολο $N(A)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του A.
Για να δείξουμε ότι ο υπόχωρος $N(A)$ είναι αλγεβρικό ιδεώδες, θεωρούμε $a \in N(A)$ και $b \in A$. Τότε για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$(ab)^n = (ba)^n = b^n a^n = b^n 0 = 0,$$

άρα $ab = ba \in N(A)$.
Έστω $a \in N(A)$, τότε $a^n = 0$ για κάποιο άρτιο $n \in \mathbb{N}$, άρα από προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $|a|^n = |a^n| = 0$, επομένως $|a| \in N(A)$. Δηλαδή, ο υπόχωρος $N(A)$ είναι υποσύνδεσμος.
Ο υπόχωρος $N(A)$ είναι διατακτικό ιδεώδες. Πράγματι, έστω $0 \leq b \leq a$ όπου $a \in N(A)$. Τότε, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $0 \leq b^n \leq a^n = 0$. Άρα, $b \in N(A)$. ■

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός του συνόλου των μηδενοδύναμων στοιχείων μίας σχεδόν $f-$άλγεβρας.

Θεώρημα 2.40. *Έστω E αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα. Τότε*

$$N(E) = \left\{a \in E \mid a^3 = 0\right\}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $N(E) \subseteq \{a \in E \mid abc = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b, c \in E\}$.
Η άλγεβρα E είναι αντιμεταθετική και έχει θετικά τετράγωνα. Άρα, για κάθε $n \in Z$ και $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$0 \leq \left(2b - na^{k-1}c\right)^2 = 4b^2 - 4na^{k-1}bc + n^2a^{2k-2}c^2, \tag{2.1}$$

όπου $a^{k-1}c = c$ για $k = 1$. Αν $k \geq 2$ και $a^k bc = 0$ για κάθε $b, c \in E$, τότε

$$a^{2k-2}c^2 = a^k \left(a^{k-2}c\right) c = 0,$$

άρα από (2.1) έχουμε ότι

$$na^{k-1}bc \leq b^2 \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Από αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε $a^{k-1}bc = 0$ για κάθε $b, c \in E$.
Έστω $a \in N(E)$, τότε $a^r = 0$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}$. Επομένως, $a^r bc = 0$ για κάθε $b, c \in E$, άρα από τα παραπάνω, έχουμε ότι και $a^{r-1}bc = 0$ για κάθε $b, c \in E$. Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα $r - 2$ φορές έχουμε

τελικά , $abc = 0$ για κάθε $b, c \in E$.
Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} N(E) &\subseteq \{a \in E \mid abc = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b, c \in E\} \\ &\subseteq \left\{a \in E \mid a^2 c = 0 \quad \text{για κάθε} \quad c \in A\right\} \\ &\subseteq \left\{a \in E \mid a^3 = 0\right\} \subseteq N(E). \end{aligned}$$

■

Ο κύβος στην περιγραφή του συνόλου των μηδενοδύναμων στοιχείων είναι απαραίτητος, όπως βλέπουμε και από το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.41. *Έστω ο χώρος $A = \mathbb{R}^2$ διατεταγμένος με την κατά σημείο διάταξη και πολλαπλασιασμό $*$ που ορίζεται ως*

$$a * b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix}$$

Τότε η A είναι μία αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα, αλλά δεν είναι $f-$άλγεβρα. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$a^3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{για κάθε} \quad a \in A,$$

επομένως $N(A) = \mathbb{R}^2$. Άρα, το σύνολο

$$\left\{a \in A \mid a^2 = 0\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid a_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

είναι γνήσιο υποσύνολο του $N(A)$.

2.2.3 $d-$άλγεβρες

Συνεχίζουμε με την μελέτη των ιδιοτήτων των $d-$αλγεβρών. Από τον ορισμό, προκύπτει ότι μία $\ell-$άλγεβρα είναι $d-$άλγεβρα αν και μόνο αν ο πολλαπλασιασμός με οποιοδήποτε θετικό στοιχείο της άλγεβρας είναι διατακτικός ομοιομορφισμός. Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς μίας $d-$άλγεβρας.

Πρόταση 2.42. Έστω μία $\ell-$άλγεβρα A. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. η A είναι $d-$άλγεβρα.

2. $c\,|a| = |ca|$ και $|a|\,c = |ac|$ για κάθε $a \in A$ και $c \in A^+$.

3. $|ab| = |a|\,|b|$ για κάθε $a, b \in A$,

4. $(ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^-$ για κάθε $a, b \in A$,

5. $(ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$ για κάθε $a, b \in A$,

6. Αν $a \perp b$ τότε $ca \perp cb$ και $ac \perp bc$ για κάθε $c \in A^+$.

Απόδειξη. $[1 \Rightarrow 2]$ Έχουμε, $c\,|a| = c(a \vee (-a)) = ca \vee (-ca) = |ca|$. Όμοια, λαμβάνουμε και την δεύτερη ισότητα.
$[2 \Rightarrow 3]$ Έχουμε

$$|a|\,|b| = \left||a|\,b\right| = \left||a|\,b^+ - |a|\,b^-\right| = \left|\left|ab^+\right| - \left|ab^-\right|\right| \leq \left|ab^+ - ab^-\right| = |ab| \leq |a|\,|b|.$$

Τελικά $|a|\,|b| \leq |ab| \leq |a|\,|b|$, άρα $|ab| = |a|\,|b|$.
$[3 \Rightarrow 4, 5]$ Από την ισότητα

$$\left|a^+b^+ + a^-b^- - (a^+b^- + a^-b^+)\right| = (a^+b^+ + a^-b^-) + (a^+b^- + a^-b^+)$$

έχουμε ότι $(a^+b^+ + a^-b^-) \wedge (a^+b^- + a^-b^+) = 0$. Δηλαδή, $(ab)^+ = a^+b^+ + a^-b^-$ και $(ab)^- = a^+b^- + a^-b^+$.
$[4 \Rightarrow 6]$ Αν $|a| \wedge |b| = 0$, τότε

$$|ca| \leq |c|\,|a| = |c|\,(|a| - |b|)^+ = (|c|\,|a| - |c|\,|b|)^+.$$

Όμοια, έχουμε ότι $|cb| \leq (|c|\,|a| - |c|\,|b|)^-$, άρα $|ca| \wedge |cb| = 0$. Με τον ίδιο τρόπο, έχουμε ότι $|ac| \wedge |bc| = 0$.
$[6 \Rightarrow 1]$ Από την υπόθεση και το θεώρημα 1.36 προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός π_c είναι ομοιομορφισμός Riesz. Άρα, η $\ell-$άλγεβρα είναι $d-$άλγεβρα. ■

Παρατηρήσεις.

1. Σε αντίθεση με τις $f-$άλγεβρες και τις σχεδόν $f-$άλγεβρες τα τετράγωνα των στοιχείων μίας $d-$άλγεβρας δεν είναι απαραίτητα θετικά. Επίσης, οι αρχιμήδειες $d-$άλγεβρες δεν είναι, γενικά, αντιμεταθετικές. Σχετικό είναι το ακόλουθο παράδειγμα.

   Παράδειγμα 2.43. *Έστω A ο χώρος των δύο-επί-δύο πινάκων της μορφής*

   $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, βαθμωτού πολλαπλασιασμού και εσωτερικό πολλαπλασιασμό οριζόμενο από τον συνήθη πολλαπλασιασμό μεταξύ πινάκων. Επίσης, θεωρούμε τον χώρο διατεταγμένο με την κατά σημείο διάταξη, δηλαδή ένα στοιχείο του χώρου είναι θετικό αν $\alpha \geq 0$ *και* $\beta \geq 0$. *Η διάταξη που ορίσαμε είναι Αρχιμήδεια. Ωστόσο, η άλγεβρα δεν είναι αντιμεταθετική και τα τετράγωνα των στοιχείων της δεν είναι πάντοτε θετικά. Πράγματι, επιλέγουμε*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε $pq = q$ *και* $qp = 0$.

Επιπλέον, το τετράγωνο

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ngeq 0,$$

δεν είναι θετικό.

2. Όπως και στην περίπτωση των σχεδόν $f-$ αλγεβρών, ο πολλαπλασιασμός μίας $d-$άλγεβρας δεν είναι απαραίτητα διατακτικά συνεχής. Η άλγεβρα που ορίστηκε στο παράδειγμα 2.29 είναι και $d-$άλγεβρα.

Το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων στις $d-$άλγεβρες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 2.40, που χαρακτηρίζει το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων μίας Αρχιμήδειας σχεδόν $f-$άλγεβρας (άρα και μίας αντιμεταθετικής $d-$άλγεβρας), ισχύει και για Αρχιμήδειες μη-αντιμεταθετικές $d-$άλγεβρες.
Δηλαδή, θα δείξουμε ότι αν A αρχιμήδεια $d-$άλγεβρα τότε

$$N(A) = \left\{a \in A \mid a^3 = 0\right\} = \{a \in A \mid bac = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b, c \in A\} \tag{2.2}$$

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε μία ιδιότητα των ομοιομορφισμών επί ενός αρχιμήδειου γραμμικού συνδέσμου A.

Θεώρημα 2.44. *Έστω A αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος και $S, T : E \to E$ θετικοί τελεστές τέτοιοι, ώστε*

1. $S + ST \in Hom(A)$,[6]

[6]όπου $Hom(A)$ το σύνολο των ομοιομορφισμών που ορίζονται στο A

2. *υπάρχει* $k \geq 2$ *τέτοιο ώστε* $ST^k = 0$.

Τότε, $ST = 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $S, ST \in Hom(A)$. Θα δείξουμε ότι $ST^{k-1} = 0$. Αν $a \wedge b = 0$ στο E, τότε από (1) έχουμε ότι

$$(S(a) + ST(a)) \wedge (S(b) + ST(b)) = 0,$$

επομένως $S(a) \wedge ST(b) = 0$.
Έστω $c \in A^+$, εφαρμόζοντας το παραπάνω για

$$a = T^{k-1}(c) - T^{k-2}(c) \wedge T^{k-1}(c), \quad b = T^{k-2}(c) - T^{k-2}(c) \wedge T^{k-1}(c)$$

(όπου $T^0 = I$, η ταυτοτική απεικόνιση επί του A), έπεται ότι

$$\Big(ST^{k-1}(c) - ST^{k-2}(c) \wedge ST^{k-1}(c)\Big) \wedge \Big(ST^{k-1}(c) - ST^{k-1}(c) \wedge ST^k(c)\Big) = 0.$$

Επομένως,

$$\Big(ST^{k-1}(c) - ST^{k-2}(c) \wedge ST^{k-1}(c)\Big) \wedge ST^{k-1}(c) = 0,$$

άρα $0 \leq ST^{k-1}(c) \leq ST^{k-2}(c)$.
Η υπόθεση ισχύει και για τον τελεστή $nT \ \ (n \in \mathbb{N})$, άρα έχουμε ότι

$$0 \leq nST^{k-1}(c) \leq ST^{k-2}(c) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Από αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε ότι $ST^{k-1}(c) = 0$, όπου $c \in A^+$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο χώρος A είναι γραμμικός σύνδεσμος, έχουμε ότι $A = A^+ - A^+$, άρα τελικά $ST^{k-1} = 0$. ■

Πόρισμα 2.45.
1. *Αν* $0 \leq S, T : E \to E$ *τέτοια ώστε* $S + ST \in Hom(E)$ *και* $T^k = 0$, *τότε* $ST = 0$.

2. *Αν* $T : E \to E$ *θετικός τελεστής ώστε* $T^{k-2} + T^{k-1} \in Hom(E)$ *και* $T^k = 0$, *τότε* $T^{k-1} = 0$.

Το παραπάνω πόρισμα θα το χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη της (2.2) παρατηρώντας τα ακόλουθα.
Έστω A Αρχιμήδεια $d-$άλγεβρα. Για κάθε $a \in A^+$ θα συμβολίζουμε τον τελεστή του από αριστερά πολλαπλασιασμού με π_a, δηλαδή

$$\pi_a(c) = ac,$$

για κάθε $c \in A$. Από τον ορισμό της κλάσης των $d-$άλγεβρών έχουμε ότι ο τελεστής π_a είναι ομοιομορφισμός. Επίσης, $\pi_a \pi_b = \pi_{ab} \in Hom(A) \quad$ για κάθε $\quad a, b \in A^+$, άρα και $\pi_a^k = \pi_{a^k} \in Hom(A)$ για $k = 1, 2, \ldots$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\pi_a + \pi_b = \pi_{a+b} \in Hom(A)$$

για κάθε $a, b \in A^+$.

Λήμμα 2.46. *Αν A είναι $d-$άλγεβρα και $a \in A$, τότε*

$$\left(a^+\right)^{2n} \leq \left(a^{2n}\right)^+ \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Απόδειξη. Από πρόταση 2.42 έχουμε ότι,

$$(ab)^+ = a^+ b^+ + a^- b^- \geq a^+ b^+$$

για κάθε $a, b \in A$. Θέτωντας $a = b$ έχουμε ότι $\left(a^+\right)^2 \leq \left(a^2\right)^+$. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Υποθέτουμε ότι $\left(a^+\right)^{2n} \leq \left(a^{2n}\right)^+$. Τότε

$$\begin{aligned} \left(a^+\right)^{2n+2} &= \left(a^+\right)^{2n} \left(a^+\right)^2 \leq \left(a^{2n}\right)^+ \left(a^2\right)^+ \\ &\leq \left(a^{2n}\right)^+ \left(a^2\right)^+ + \left(a^{2n}\right)^- \left(a^2\right)^- \\ &= \left(a^{2n} a^2\right)^+ = \left(a^{2n+2}\right)^+. \end{aligned}$$

■

Θεώρημα 2.47. *Αν A αρχιμήδεια $d-$άλγεβρα, τότε*

$$N(A) = \{a \in A \mid bac = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b, c \in A\} = \left\{a \in A \mid a^3 = 0\right\}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν $a \in N(A)$ τότε $bac = 0$ για κάθε $b, c \in A$.
Από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι $a^+ \in N(A)$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \geq 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $b \in A^+$, τότε $bac = 0$ για κάθε $c \in A$.
Η A είναι $d-$άλγεβρα, άρα οι τελεστές π_b, π_a και $\pi_b + \pi_b \pi_a$ ανήκουν στον $Hom(A)$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\pi_a^k = \pi_{a^k} = 0$ για κάποιο $k > 0$, καθώς έχουμε ότι $a \in N(A)$. Από πόρισμα 2.45 (1), έχουμε ότι $\pi_b \pi_a = 0$, άρα

$$\pi_b \pi_a(c) = bac = 0$$

για κάθε $c \in A$. Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} N(A) &\subset \{a \in A \mid bac = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b, c \in A\} \\ &\subset \left\{a \in A \mid a^2 c = 0 \quad \text{για κάθε} \quad c \in A\right\} \cup \left\{a \in A \mid ba^2 = 0 \quad \text{για κάθε} \quad b \in A\right\} \\ &\subset \left\{a \in A \mid a^3 = 0\right\} \subset N(A). \end{aligned}$$

■

Η σχέση των $d-$αλγεβρών με τις υπόλοιπες κλάσεις.

Στα προηγούμενα, έχει αποδειχθεί ότι μία $f-$άλγεβρα είναι και $d-$άλγεβρα. Σε ότι αφορά τις κλάσεις των $d-$αλγεβρών και σχεδόν $f-$αλγεβρών αυτές είναι ανεξάρτητες· δηλαδή μία $d-$άλγεβρα δεν είναι απαραίτητα σχεδόν $f-$άλγεβρα και αντίστροφα. Ωστόσο, αν μία $d-$άλγεβρα είναι επιπλέον αντιμεταθετική ή έχει θετικά τετράγωνα τότε είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.
Επίσης, θα δείξουμε ότι σε μία $\ell-$άλγεβρα που είναι semiprime ή έχει θετικό μοναδιαίο στοιχείο κάθε $d-$άλγεβρα είναι $f-$άλγεβρα. Την τελευταία ιδιότητα την έχουν και οι σχεδόν $f-$άλγεβρες, οπότε στην περίπτωση μοναδιαίων και semiprime $\ell-$αλγεβρών όλες οι κλάσεις τελικά συμπίπτουν.

Στα ακόλουθα θεωρήματα παρουσιάζονται ικανές συνθήκες ώστε μία $d-$άλγεβρα να είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.

Θεώρημα 2.48. *Κάθε αντιμεταθετική $d-$άλγεβρα είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in A^+$ τέτοια ώστε $a \wedge b = 0$. Επειδή, $a, b \in A^+$ έχουμε ότι $a^2 \in A^+$ και $b^2 \in A^+$. Άρα

$$0 = (a \vee b)(a \wedge b) = \left(a^2 \vee ba\right) \wedge \left(ab \vee b^2\right) \geq ba \wedge ab = ab \geq 0,$$

άρα τελικά, $ab = 0$. ■

Θεώρημα 2.49. *Κάθε $d-$άλγεβρα με θετικά τετράγωνα είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in A^+$. Τότε

$$0 \leq ab \leq ab + ba = a^2 + b^2 - (a-b)^2 \leq a^2 + b^2.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι, $a \wedge b = 0$. Τότε

$$0 \leq ab = ab \wedge \left(a^2 + b^2\right) \leq ab \wedge a^2 + ab \wedge b^2 = a(b \wedge a) + (a \wedge b)b = 0,$$

επομένως $ab = 0$. ■

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι σε μία αντιμεταθετική $d-$άλγεβρα ισχύει η συνεπαγωγή $a \wedge b = 0 \Rightarrow ab = 0$. Σε οποιαδήποτε $d-$άλγεβρα ισχύει η ακόλουθη, γενικότερη, συνεπαγωγή.

Θεώρημα 2.50. *Αν A είναι μία $d-$άλγεβρα, τότε $a \wedge b = 0 \Rightarrow (ab)^2 = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 \leq (ab)^2 &= ab(ab) \wedge (ab)ab \leq (a+ab)\,b\,(b+ab) \wedge (a+ab)\,a\,(b+ab) \\ &= (a+ab)\,(b \wedge a)\,(b+ab) = 0. \end{aligned}$$

■

Μία $d-$άλγεβρα με θετικό μοναδιαίο στοιχείο είναι $f-$άλγεβρα. Επίσης, όπως και στην περίπτωση των σχεδόν $f-$αλγεβρών, κάθε semiprime $d-$άλγεβρα είναι $f-$άλγεβρα.

Θεώρημα 2.51. 1. *Κάθε semiprime $d-$άλγεβρα A είναι $f-$άλγεβρα.*

2. *Κάθε $d-$άλγεβρα A με θετικό μοναδιαίο στοιχείο e είναι $f-$άλγεβρα.*

Απόδειξη. Για κάθε $a, b \in A^+$ με $a \wedge b = 0$ και $c, d \in A^+$ έχουμε ότι

$$0 \leq d(ca \wedge b) = dca \wedge db \leq [(d \vee dc)a] \wedge [(d \vee dc)b] = (d \vee dc)(a \wedge b) = 0.$$

Άρα, $d(ca \wedge b) = 0$. Όμοια, έχουμε ότι $(ac \wedge b)d = 0$.

1. Για $d = ca \wedge b$ έχουμε ότι $(ca \wedge b)^2 = 0$. Όμως, η άλγεβρα A είναι semiprime, άρα $ca \wedge b = 0$. Όμοια, έχουμε ότι $ac \wedge b = 0$. Άρα, επειδή $a \wedge b = 0$ έχουμε ότι η A είναι $f-$ άλγεβρα.

2. Επιλέγοντας $d = e$ έχουμε ότι $e\,(ca \wedge b) = ca \wedge b = 0$ και $e\,(ac \wedge b) = ac \wedge b = 0$. Άρα, η A είναι $f-$ άλγεβρα.

∎

Παρατήρηση 2.52. *Από το παραπάνω θεώρημα και τα αντίστοιχα θεωρήματα για τις σχεδόν $f-$άλγεβρες, διαπιστώνουμε ότι σε* ***μία Αρχιμήδεια $\ell-$άλγεβρα που είναι semiprime ή έχει θετικό μοναδιαίο στοιχείο όλες οι κλάσεις τελικά ταυτίζονται.***

Κεφάλαιο 3

Θεωρητικές Ιδιότητες Διατεταγμένων Αλγεβρών

3.1 Πλήρωση Διατεταγμένων Αλγεβρών

Ορισμός 3.1. Έστω E γραμμικός σύνδεσμος. Λέμε ότι ο E είναι **πλήρης κατά Dedekind** αν κάθε μη κενό υποσύνολο που είναι άνω φραγμένο έχει supremum.

Κάθε Αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος E, μπορεί να εμφυτευθεί ισομορφικά σε έναν πλήρη κατά Dedekind χώρο, τον οποίο θα συμβολίζουμε με E^δ και θα ονομάζουμε **πλήρωση κατά Dedekind** του γραμμικού συνδέσμου E. Δηλαδή, λέμε ότι ο πλήρης κατά Dedekind χώρος E^δ είναι η πλήρωση κατά Dedekind του αρχιμήδειου γραμμικού συνδέσμου E αν

1. υπάρχει υποσύνδεσμος $F \subset E^\delta$ τέτοιος ώστε οι E και F να είναι διατακτικά ισομορφικοί και
2. για κάθε $u \in E^\delta$ έχουμε ότι $u = sup\{v \in F \mid v \leq u\} = inf\{v \in F \mid v \geq u\}$.

Η πλήρωση είναι μοναδική, με την έννοια ότι δύο πληρώσεις του ίδιου χώρου είναι διατακτικά ισομορφικές.
Στους αρχιμήδειους γραμμικούς συνδέσμους υπάρχει μία ακόμα έννοια πλήρωσης που σχετίζεται με την διατακτική τοπολογία. Συγκεκριμένα, αν E αρχιμήδειος γραμμικός σύνδεσμος και E^δ η πλήρωση κατά Dedekind του χώρου, τότε το κλειστό περίβλημα, ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία, του E στον χώρο E^δ είναι ομοιόμορφα πλήρης γραμμικός σύνδεσμος τον οποίο θα συμβολίζουμε με E^u. Θα αναφερόμαστε στον E^u με τον όρο **ομοιόμορφη πλήρωση** του E.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αποτελέσματα για το παρακάτω πρόβλημα

Πρόβλημα 3.2. *Έστω $(A,*)$ αρχιμήδεια $\ell-$άλγεβρα.*

- *Υπάρχει επέκταση του πολλαπλασιασμού $*^{'}$ στην ομοιόμορφη πλήρωση του A, τέτοια ώστε η $\left(A^u, *^{'}\right)$ να είναι $\ell-$άλγεβρα;*

- *Υπάρχει επέκταση του πολλαπλασιασμού $*^{'}$ στην πλήρωση κατά Dedekind του A, τέτοια ώστε η $\left(A^\delta, *^{'}\right)$ να είναι $\ell-$άλγεβρα;*

3.1.1 Επέκταση στην Ομοιόμορφη πλήρωση

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε διατακτικά φραγμένος τελεστής από τον Αρχιμήδειο γραμμικό σύνδεσμο E στον ομοιόμορφα πλήρη γραμμικό σύνδεσμο F **επεκτείνεται** μοναδικά στην ομοιόμορφη πλήρωση του E. Με βάση το παραπάνω, θα δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός σε μία Αρχιμήδεια $\ell-$άλγεβρα $(A,*)$ επεκτείνεται σε πολλαπλασιασμό $*^{'}$ στην ομοιόμορφη πλήρωση A^u με τέτοιο τρόπο ώστε η $\left(A^u, *^{'}\right)$ να είναι $\ell-$άλγεβρα.

Υποθέτουμε ότι E, F είναι Αρχιμήδειοι γραμμικοί σύνδεσμοι και επιπλέον ότι ο F είναι ομοιόμορφα πλήρης. Έστω $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F)$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις U, V από τον E^u στην F^δ ως

$$\begin{array}{l} U(x) = sup\left\{T(a) \mid a \in A, a \leq x \text{ για κάθε } x \in E^u\right\}, \\ V(x) = inf\left\{T(a) \mid a \in A, x \leq a \text{ για κάθε } x \in E^u\right\}. \end{array}$$

Στο επόμενο λήμμα παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των παραπάνω απεικονίσεων.

Λήμμα 3.3. 1. *Οι απεικονίσεις U και V είναι αύξουσες και $U(x) \leq V(x)$ για κάθε $x \in E^u$.*

2. *$U(x) = V(x) = T(x)$ για κάθε $x \in E$.*

3. *$U(x+y) \geq U(x)+U(y)$ και $V(x+y) \leq V(x)+V(y)$ για κάθε $x, y \in E^u$.*

4. *$U(\lambda x) = \lambda U(x)$ για κάθε $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ και $V(\lambda x) = \lambda V(x)$ για κάθε $\lambda < 0$.*

Στο ακόλουθο λήμμα θα δείξουμε ότι $U = V$ και ότι η απεικόνιση U είναι η θετική επέκταση του T στον E^u.

Λήμμα 3.4. *Ο τελεστής $U : E^u \to F^\delta$ είναι διατακτικά φραγμένος και είναι η μοναδική θετική επέκταση του T στον E^u.*

Απόδειξη. Επειδή ο χώρος E είναι πυκνός, ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία, στον E^u και $U(a) = V(a)$ για κάθε $a \in A$, για να δείξουμε ότι $U(x) = V(x)$ για κάθε $x \in E^u$ αρκεί να δείξουμε ότι οι τελεστές U και V είναι συνεχείς στο E^u ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία. Προς τούτο, θεωρούμε ότι η ακολουθία $\{x_n \mid n = 1, 2 \dots\} \subset E^u$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο x. Τότε, υπάρχει $v \in E^+$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|x_n - x| \leq \epsilon v \text{ για κάθε } n \geq N_\epsilon \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad x - \epsilon v \leq x_n \leq x + \epsilon v.$$

Θα δείξουμε ότι οι ακολουθίες $\{U(x_n)\}$ και $\{V(x_n)\}$ συγκλίνουν, αντίστοιχα, στα $U(x)$ και $V(x)$.
Έχουμε ότι $U(x - \epsilon v) = sup\{T(a) \mid a \in A, a \leq x - \epsilon v\}$. Θέτοντας, $b = a + \epsilon v$ έχουμε ότι $b \in A$ και $b \leq x$. Άρα,

$$\{T(a) \mid a \in A,\ a \leq x - \epsilon v\} = \{T(b - \epsilon v) \mid b \in A,\ b \leq x\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} U(x - \epsilon v) &= sup\{T(b) - \epsilon T(v) \mid b \in A,\ b \leq x\} \\ &= sup\{T(b) \mid b \in A,\ b \leq x\} - \epsilon T(v) \\ &= U(x) - \epsilon T(v). \end{aligned}$$

Όμοια, έχουμε ότι $U(x + \epsilon v) = U(x) + \epsilon T(v)$.
Από την πρώτη ιδιότητα του προηγούμενου λήμματος, έχουμε ότι

$$U(x) - \epsilon T(u) \leq U(x_n) \leq U(x) + \epsilon T(v).$$

Επομένως, η ακολουθία $\{U(x_n)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $U(x)$ άρα, ο τελεστής U είναι συνεχής στην ομοιόμορφη τοπολογία. Όμοια, δείχνουμε ότι και ο τελεστής V είναι συνεχής. Από λήμμα 2.20 έπεται ότι $U(x) = V(x)$ για κάθε $x \in E^u$.
Από το προηγούμενο λήμμα, σε συνδυασμό με τα παραπάνω, συνάγουμε ότι η απεικόνιση U είναι θετικός τελεστής και $U \in \mathcal{L}_b(E^u, F^\delta)$. Επίσης, έχουμε ότι ο U επεκτείνει τον T στον E^u.
Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα, παρατηρούμε ότι αν $W : E^u \to F^\delta$ είναι επέκταση του T στον E^u, τότε θα έχουμε ότι $W(x) = U(x)$ για κάθε $x \in E$, όπου E ομοιόμορφα πυκνό στο E^u και U ομοιόμορφα συνεχής στο E. Άρα, έχουμε ότι $U = W$. Τελικά, ο τελεστής U είναι η μοναδική θετική επέκταση του T στην ομοιόμορφη πλήρωση του E. ■

Έστω $T \in \mathcal{L}_b(E, F) \subset \mathcal{L}_b(E, F^\delta)$. Μπορούμε να γράψουμε τον T ως $T = T_1 - T_2$, όπου $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_b(E, F^\delta)$. Από το προηγούμενο λήμμα, οι

T_1 και T_2 έχουν μοναδικές θετικές επεκτάσεις $T_1^{'}, T_2^{'}$ στον E^u. Επομένως, ο $T^{'} = T_1^{'} - T_2^{'} \in \mathcal{L}_b\left(E^u, F^{\delta}\right)$ αποτελεί την μοναδική θετική επέκταση του T στον E^u. Επιπλέον, επειδή ο T είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία, έχουμε ότι το πεδίο τιμών του $T^{'}$ είναι υποσύνολο του F, καθώς το F είναι κλειστό στην F^{δ} ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία.
Τελικά, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5. *Έστω E, F αρχιμήδειοι γραμμικοί σύνδεσμοι. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο F είναι ομοιόμορφα πλήρης. Τότε, κάθε διατακτικά φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ έχει μοναδική, διατακτικά φραγμένη επέκταση $T^{'} : E^u \to F$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα για να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μίας αρχιμήδειας διατεταγμένης άλγεβρας $(A, *)$ μπορεί να επεκταθεί σε πολλαπλασιασμό $*'$ στην ομοιόμορφη πλήρωση A^u της άλγεβρας με τέτοιο τρόπο ώστε η $(A^u, *')$ να είναι διατεταγμένη άλγεβρα.
Έστω $(A, *)$ διατεταγμένη άλγεβρα και $a \in A^+$. Ορίζουμε τον τελεστή $T_a : A \to A^u$ ως $T_a(y) = a * y$, τότε από τον ορισμό της διατεταγμένης άλγεβρας, προκύπτει ότι ο τελεστής T_a είναι διατακτικά φραγμένος. Επομένως από το προηγούμενο θεώρημα, ο T_a έχει διατακτικά φραγμένη επέκταση $T^{'} : A^u \to A^u$ στην ομοιόμορφη πλήρωση του A.
Για κάποιο σταθερό $y \in (A^u)^+$ θέτουμε $a * y = T_a(y)$. Έστω $y \in (A^u)^+$, ορίζουμε τον τελεστή $R_y : A \to A^u$ ως $R_y(a) = T_a^{'}(y)$. Τότε $R_y \in \mathcal{L}_b\left(A, A^u\right)$, άρα λοιπόν ο R_y επεκτείνεται στον $R_y^{'} \in \mathcal{L}_b\left(A^u\right)$.
Για οποιαδήποτε $x, y \in (A^u)^+$ ορίζουμε στο A^u πολλαπλασιασμό $*^{'}$ ως $x *^{'} y = R_y^{'}(x)$. Τότε, ο χώρος $\left(A^u, *^{'}\right)$ είναι διατεταγμένη άλγεβρα και η $(A, *^{'})$ είναι υποάλγεβρα στην $\left(A^u, *^{'}\right)$. Επιπλέον, αν η $(A, *)$ είναι $f-$άλγεβρα (ανάλογα, σχεδόν $f-$άλγεβρα, $d-$άλγεβρα) τότε η $(A, *^{'})$ είναι $f-$άλγεβρα (αντίστοιχα, σχεδόν $f-$άλγεβρα, $d-$άλγεβρα).

Θεώρημα 3.6. *Έστω $(A, *)$ Αρχιμήδεια διατεταγμένη άλγεβρα (ανάλογα, σχεδόν $f-$άλγεβρα, $d-$άλγεβρα, $f-$άλγεβρα). Τότε, ο πολλαπλασιασμός στην A επεκτείνεται μοναδικά σε πολλαπλασιασμό $*'$ στην ομοιόμορφη πλήρωση A^u έτσι ώστε η $(A^u, *')$ να είναι ομοιόμορφα πλήρης διατεταγμένη άλγεβρα (αντίστοιχα, σχεδόν $f-$άλγεβρα, $d-$άλγεβρα, $f-$άλγεβρα).*

3.1.2 Επέκταση στην πλήρωση κατά Dedekind

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός σε μία $f-$άλγεβρα $(A, *)$ επεκτείνεται μοναδικά σε πολλαπλασιασμό $*^{'}$ στην πλήρωση κατά Dedekind της A. Επίσης, θα δείξουμε ότι η άλγεβρα $\left(A, *^{'}\right)$ είναι $f-$άλγεβρα. Χρήσιμη είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.7. Αν L είναι πλήρης κατά Dedekind γραμμικός σύνδεσμος και για τα στοιχεία $u, v \in L^{+}$ έχουμε ότι $0 \leq u \leq v$, τότε υπάρχει $0 \leq \pi \in Orth(L)$ τέτοιος, ώστε $\pi(v) = u$.

Έστω A ομοιόρφα πλήρης γραμμικός σύνδεσμος με ισχυρή διατακτική μονάδα e. Τότε, το e είναι ισχυρή διατακτική μονάδα και στην ομοιόμορφη πλήρωση A^{δ} του A. Επομένως, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι για κάθε $x \in A^{\delta}$ υπάρχει ορθομορφισμός $\pi_x \in Orth(A^{\delta})$ τέτοιος ώστε $\pi_x(e) = x$. Όμως, το $\{e\}$ είναι διατακτικά πυκνό στο A^{δ} και οι ορθομορφισμοί είναι διατακτικά συνεχείς τελεστές, άρα ο π_x είναι μοναδικός.
Ορίζουμε πολλαπλασιασμό $*$ ως εξής $x * y = \pi_x(y)$, τότε η άλγεβρα $\left(A^{\delta}, *\right)$ είναι $f-$άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο το e.
Άρα τελικά, έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 3.8. *Έστω $(A, *)$ αρχιμήδεια $f-$άλγεβρα. Τότε, ο πολλαπλασιασμός στην A επεκτείνεται μοναδικά σε πολλαπλασιασμό $*^{'}$ στην πλήρωση κατά Dedekind του A, ώστε η $\left(A^{\delta}, *^{'}\right)$ να είναι $f-$άλγεβρα. Επιπλέον, αν η $(A, *)$ είναι μοναδιαία $f-$άλγεβρα τότε και η $\left(A, *^{'}\right)$ είναι μοναδιαία $f-$άλγεβρα.*

Αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις σχεδόν $f-$άλγεβρες παρουσιάστηκε από τους Buskes και van Rooij στο $([8], 2000)$. Ωστόσο, η επέκταση δεν είναι μοναδική καθώς ο πολλαπλασιασμός στις σχεδόν $f-$άλγεβρες δεν είναι απαραίτητα διατακτικά συνεχής.

Θεώρημα 3.9. *Έστω $(A, *)$ αρχιμήδεια σχεδόν $f-$άλγεβρα. Τότε, ο πολλαπλασιασμός στην A επεκτείνεται σε πολλαπλασιασμό $*^{'}$ στην πλήρωση κατά Dedekind A^{δ} ώστε η $\left(A^{\delta}, *^{'}\right)$ να είναι σχεδόν $f-$άλγεβρα.*

Με βάση το παραπάνω οι Boulabiar και Chil στο $([6], 2002)$ απέδειξαν ότι μεταξύ των επεκτάσεων υπάρχει πολλαπλασιασμός ώστε η A^{δ} να είναι αντιμεταθετική $d-$άλγεβρα όταν η A είναι αντιμεταθετική $d-$άλγεβρα.
Ο Chil στο $([9], 2004)$ προχώρησε στην γενίκευση αυτού του αποτελέσματος για οποιαδήποτε $d-$άλγεβρα.

Θεώρημα 3.10. *Έστω $(A, *)$ αρχιμήδεια $d-$άλγεβρα. Τότε, ο πολλαπλασιασμός στην A επεκτείνεται σε πολλαπλασιασμό $*^{'}$ στην πλήρωση κατά Dedekind A^{δ} ώστε η $\left(A^{\delta}, *^{'}\right)$ να είναι $d-$άλγεβρα.*

Το πρόβλημα της επέκτασης του πολλαπλασιασμού μίας διατεταγμένης άλγεβρας στην πλήρωση κατά Dedekind της άλγεβρας δεν έχει επιλυθεί.

3.2 Η σχέση της Διατακτικής με την Αλγεβρική δομή

Σε κάθε διατεταγμένη άλγεβρα ενυπάρχουν δύο δομές, η διατακτική και η αλγεβρική. Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε την σχέση που έχουν οι τελεστές που διατηρούν την διατακτική δομή, δηλαδή οι διατακτικοί ομοιομορφισμοί, με τους τελεστές που διατηρούν την αλγεβρική δομή, δηλαδή τους αλγεβρικούς ομοιομορφισμούς.
Έστω A, B αρχιμήδειες semiprime $f-$άλγεβρες και $T : A \to B$ αλγεβρικός ομοιομορφισμός. Τότε, αν $f \perp g$ στο A τότε $T(f) \perp T(g)$ στο B. Πράγματι, επειδή η A είναι semiprime $f-$άλγεβρα ισχύει η ισοδυναμία $f \perp g \Leftrightarrow fg = 0$. Άρα, έχουμε ότι $T(fg) = T(f)T(g) = 0 \Leftrightarrow T(f) \perp T(g)$. Άρα, από την ισότητα

$$(T(|f|))^2 = T(|f|^2) = T(f^2) = (T(f))^2$$

έπεται ότι $|T(|f|)| = |T(f)|$ για κάθε $f \in A$. Επομένως, από θεώρημα 1.36 έπεται ότι ο T είναι διατακτικός ομοιομορφισμός αν και μόνο αν είναι θετικός τελεστής. Άρα τελικά, κάθε θετικός αλγεβρικός ομοιομορφισμός μεταξύ αρχιμήδειων semiprime $f-$αλγεβρών είναι διατακτικός ομοιομορφισμός.
Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι αν η άλγεβρα A είναι επιπλέον ομοιόμορφα πλήρης, τότε κάθε αλγεβρικός ομοιομορφισμός από το A στο B είναι και διατακτικός ομοιομορφισμός.

Λήμμα 3.11. *Έστω A ομοιόμορφα πλήρης semiprime $f-$άλγεβρα. Τότε, για κάθε $u, v \in A^+$ υπάρχει μοναδικό $w \in A^+$ τέτοιο ώστε, $w^2 = uv$. Συμβολίζουμε το στοιχείο w ως $\sqrt{uv}$. Αν επιπλέον η A έχει μοναδιαίο στοιχείο τότε κάθε θετικό στοιχείο έχει μοναδική θετική ρίζα.*

Θεώρημα 3.12. *Έστω A, B Αρχιμήδειες semiprime $f-$άλγεβρες με την A να είναι ομοιόμορφα πλήρης, τότε κάθε αλγεβρικός ομοιομορφισμός $T : A \to B$ είναι διατακτικός ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι θετικός τελεστής. Στην περίπτωση που η άλγεβρα A έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι για κάθε $u \in A^+$ υπάρχει μοναδικό $v \in A^+$ τέτοιο ώστε $v^2 = u$. Άρα $T(u) = (T(v))^2 \geq 0$, επομένως $T \geq 0$.
Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η A δεν έχει απαραίτητα μοναδιαίο στοιχείο. Έστω $u \in A^+$ θα δείξουμε ότι $T(u) \in A^+$. Επειδή η A είναι ομοιόμορφα πλήρης έπεται ότι η διατεταγμένη άλγεβρα $(Orth(A), \circ)$ είναι ομοιόμορφα πλήρης και επιπλέον έχει μοναδιαίο στοιχείο. Άρα, θα υπάρχει το $\sqrt{u} \in$

$Orth(A)$. Ο χώρος A είναι αλγεβρικό ιδεώδες στον $Orth(A)$,[1] επομένως έχουμε ότι $u\sqrt{u} \in A$. Άρα, υπάρχει $v \in A^+$ τέτοιο, ώστε $v^2 = u^3$. Όμως ο T είναι αλγεβρικό ιδεώδες, άρα έχουμε ότι $(T(u))^3 = (T(v))^2 \geq 0$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$(Tu)^3 = \left\{(T(u))^+ - (T(u))^-\right\}^3 = \left\{(T(u))^+\right\}^3 - \left\{(T(u))^-\right\}^3,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $T(u)^+T(u)^- = 0$. Επειδή, $\{(T(u))^+\} \perp \{(T(u))^-\}^3$, έπεται ότι η παραπάνω διάσπαση του $(T(u))^3$ σε θετικά στοιχεία είναι η ελάχιστη δυνατή, επομένως $\{(T(u))^-\}^3 = \left\{(T(u))^3\right\}^- = 0$. Όμως, η B είναι semiprime άρα έχουμε ότι $(T(u))^- = 0$, δηλαδή $T(u) \geq 0$. ■

[1] με την έννοια ότι ο A εμφυτεύεται στον $Orth(A)$, βλ. ([4], παρ. 3).

Βιβλιογραφία

[1] Aliprantis, C.D. and O. Burkinshaw: Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[2] Aliprantis, C.D. and O. Burkinshaw: Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, American Mathematical Society, 2003.

[3] Bernau, S. and C.B. Huijsmans: Almost f-algebras and d-algebras, Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. 107 (1990), 287-308.

[4] Beukers, F., C. B. Huijsmans and B. de Pagter: Unital embedding and complexification of f-algebras, Math, Z., 183 (1983), 131-144.

[5] Boulabiar, K., G. Buskes and A. Triki: Some recent trends and advances in certain lattice ordered algebras, Function spaces (Edwardsville, IL, 2002), 99-133, Contemp. Math., 328, American Mathematical Society, Providence (2003).

[6] Boulabiar, K. and E. Chil: On the structure of almost f-algebras, Demonstratio Math., 34 (2001), 749-760.

[7] Buskes, G. and A. van Rooij: Almost f-algebras: commutativity and Cauchy-Schwarz inequality, Positivity, 4 (2000), 227-231.

[8] Buskes, G. and A. van Rooij: Almost f-algebras: structure and the Dedekind completion, Positivity, 4 (2000), 233-243.

[9] Chil, E.: Structure and Dedekind completion of d-algebras, Positivity, 3 (2004), 257-267.

[10] Fraleigh, J. B.: Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003.

[11] Huijsmans, C. B. and B. de Pagter: Ideal theory in f-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 269 (1982), 225-245.

[12] Huijsmans, C. B. and B. de Pagter: Subalgebras and Riesz subspaces of an f-algebra, Proc. London, Math. Soc., 48 (1984), 161-174.

[13] Huijsmans, C. B. and B. de Pagter: Averaging operators and positive contractive projections, J. Math. Ana. Appl., 113 (1986), 163-184.

[14] Luxemburg, W. A. J. and A. C. Zaanen: Riesz spaces I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[15] Triki, A.: On algebra homomorphisms in complex almost f-algebras, Comment. Math. Univ. Carolinae, 43 (2002), 23-31.

[16] Zaanen, A. C.: Riesz Spaces II, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1983.

Ευρετήριο