ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Παιγνίων, Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας και Παίγνια Συνεργασίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΛΙΑΡΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής : Κολέτσος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής Επιτροπή: 1. Κολέτσος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.
2. Στεφανέας Πέτρος, Λέκτορας Ε.Μ.Π.
3. Φελλούρης Ανάργυρος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο της Επιχειρησιακής Έρευνας ενώ παράλληλα οι εφαρμογές της απαντώνται σε ένα μεγάλο εύρος τόσο Οικονομικών όσο και Πολιτικών εφαρμογών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της Θεωρίας Παιγνίων όπως αυτά διατυπώνονται στη βιβλιογραφία.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας δηλώνεται το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας ενώ παράλληλα γίνεται ιστορική αναδρομή και συνοπτική αναφορά στις βασικές τεχνικές της. Στο δεύτερο κεφάλαιο αποτυπώνεται η έννοια της Θεωρίας Παιγνίων, η ιστορική εξέλιξη του συγκεκριμένου αντικειμένου και ορισμένες εφαρμογές στη σύγχρονη πραγματικότητα. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία εκτενής παρουσίαση των παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος και του τρόπου επίλυσής τους ενώ στο τέταρτο αναλύονται παίγνια μικτής στρατηγικής καθώς και η λύση τους μέσα από γραφική αναπαράσταση. Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφεται η λύση παιγνίων μικτής στρατηγικής με τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού ενώ τέλος στο έκτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στα παίγνια συνεργασίας και στον τρόπο που γίνεται ο καταμερισμός αμοιβών μεταξύ των παικτών τέτοιων παιγνίων.

ABSTRACT

Game Theory is a crucial element of the Operational Research while simultaneously this mathematical science is involved in Economic and Political sciences through its important applications.

In the first chapter of the present thesis, history, basic principles and techniques are being presented. The second chapter states the basic principles of the Game Theory and its evolution throughout years by establishing the basic applications of the science in real life. In the third chapter a presentation of two-player zero sum games is being made while in the fourth chapter games with mixed strategies and their confrontation with graphical solution is being analyzed. In the fifth chapter, the current thesis represents the solution of games with mixed strategies by using Linear Programming. In conclusion, coalitional games and the allocation of payoff to players who participate in that kind of games, are being outlined.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Κολέτσο Ιωάννη για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας που είχαμε καθώς και την οικογένεια μου αλλά και ορισμένους φίλους για την αμέριστη στήριξη που μου παρέχουν.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΣΧΗΜΑΤΑ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα μέχρι και σήμερα, και ξεκινώντας από την περίοδο της βιομηχανικής επανάστασης παρατηρείται μια «έκρηξη» τόσο στην ανάπτυξη όσο και στην πολυπλοκότητα των διαφόρων επιχειρήσεων. Κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου πολλές μικρές επιχειρήσεις ή και οικογενειακές επιχειρήσεις με περιορισμένο οικονομικό εύρος εξελίχθηκαν απορροφώντας ένα μεγάλο μέγεθος κεφαλαίων, με αποτέλεσμα τη δημιουργία προβλημάτων που αφορούσαν κυρίως τον καταμερισμό ευθυνών και εργασίας. Με την πάροδο του χρόνου στα παραπάνω προβλήματα προστέθηκαν η αύξηση της εξειδίκευσης και η κατανομή των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες των επιχειρήσεων, με αποτέλεσμα την ανάγκη για τη δημιουργία μιας νέας επιστήμης η οποία θα επίλυε όλα τα παραπάνω προβλήματα με το βέλτιστο και αποτελεσματικότερο τρόπο. Έτσι λοιπόν δημιουργείται ιστορικά η ανάγκη για την εμφάνιση, ανάπτυξη και τελικά καθιέρωση της **Επιχειρησιακής Έρευνας**.

Έτος γέννησης της επιστήμης της Επιχειρησιακής Έρευνας θεωρείται το 1940, παρ' όλα αυτά οι ρίζες της επιστήμης τοποθετούνται χρονολογικά πολύ πιο πριν. Μάλιστα ο Charles Babbage (1791-1871) ο οποίος οδήγησε στην δημιουργία του Ταχυδρομείου της Πέννας το 1840, μέσα από την ερευνά του για το κόστος μεταφοράς και ταξινόμησης της αλληλογραφίας, θεωρείται από πολλούς ως ο «πατέρας της Επιχειρησιακής Έρευνας». Ακολούθησαν και άλλοι οι οποίοι μελέτησαν προβλήματα που βοήθησαν στη θεμελίωση της επιστήμης, ωστόσο η άνθηση και ραγδαία ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας ξεκινά το 1940 και συνεχίζεται καθ' όλη τη διάρκεια του Β' παγκοσμίου πολέμου.

Παρά λοιπόν τις καταστροφικές του συνέπειες ο Β' παγκόσμιος πόλεμος αποτελεί αρωγό για την ανάπτυξη της επιστήμης καθώς για την έκβαση του πολέμου χρησιμοποιήθηκαν όλα τα δυνατά μέσα, συμπεριλαμβανομένου επιστημών όπως τα μαθηματικά, η φυσική και η στατιστική. Σε αυτό το διάστημα όπως καταλαβαίνουμε η Επιχειρησιακή Έρευνα χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση στρατιωτικής φύσεως προβλημάτων από τις συμμαχικές δυνάμεις , όπως την μελέτη της νέας τεχνολογίας των ραντάρ και την εύρεση του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών στον Ατλαντικό ωκεανό. Μάλιστα η ανάπτυξη της νέας αυτής επιστήμης και η χρησιμοποίηση της οδήγησε στην καίρια πλήξη στόχων που είχε σαν αποτέλεσμα τη θετική για τις συμμαχικές δυνάμεις έκβαση του πολέμου.

Με τη λήξη του Β' παγκοσμίου πολέμου και μετά την επιτυχή εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας για στρατιωτικούς σκοπούς, η ραγδαία βιομηχανική ανάπτυξη καθώς και η ανάγκη για την καλύτερη δυνατή απορρόφηση και αξιοποίηση των οικονομικών πόρων οδηγεί στην διεύρυνση των κλάδων της επιστήμης. Μάλιστα πολλά από τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν για τη λύση προβλημάτων κατά τη διάρκεια του πολέμου, βρήκαν εφαρμογή στη λύση επιχειρησιακών προβλημάτων, τις δεκαετίες του 50' και 60', με πρωτοπόρους τους Dantzig, Bellman, Ackoff και άλλους. Έτσι μέχρι και σήμερα, Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποτελεί έναν από τους πιο αναπτυσσόμενους κλάδους της επιστήμης, έχοντας να επιδείξει εντυπωσιακά αποτελέσματα τόσο στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας διαφόρων οργανισμών όσο και στην αύξηση της παραγωγικότητας των οικονομιών διαφόρων χωρών. Σε αυτό το σημείο ιδιαίτερη μνεία θα πρέπει να γίνει στη βελτίωση των τεχνικών της επιστήμης όπως την ανάπτυξη της μεθόδου Simplex,του γραμμικού και δυναμικού προγραμματισμού και της θεωρίας ουρών αναμονής, οι οποίες σε συνάρτηση με την εξέλιξη της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών συνέβαλαν στην άνθηση της επιστήμης.

1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΦΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι μία επιστημονική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων η οποία αναζητά το αποτελεσματικότερο και ιδανικότερο μοντέλο, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Όπως υποδηλώνει και το όνομά της, η επιχειρησιακή έρευνα ή "Operational Research" όπως αποδίδεται στα Αγγλικά ασχολείται με την «έρευνα σε επιχειρήσεις και λειτουργίες». Έτσι λοιπόν αν προσπαθούσαμε να αποδώσουμε τον αγγλικό όρο για την ονομασία αυτής της επιστήμης στα ελληνικά, η πλησιέστερη απόδοση θα ήταν «Λειτουργική Έρευνα».

Είναι εύκολα κατανοητό πως η φύση της συγκεκριμένης επιστήμης είναι ιδιαίτερα ασαφής τόσο ως προς τα όρια όσο και ως προς το περιεχόμενο της. Παρόλα αυτά η Επιχειρησιακή Έρευνα βρίσκει εφαρμογή σε πολλούς τομείς ενώ το εύρος των δυνατοτήτων που παρέχει είναι μεγάλο. Βασικά χαρακτηριστικά της αποτελούν η πολυδιάστατη φύση της, αφού χρησιμοποιεί δεδομένα από διάφορες επιστήμες προκειμένου να εξετάσει τις συνέπειες διαφόρων εγχειρημάτων, η εξεύρεση μίας από τις καλύτερες λύσεις για το οριοθετημένο πρόβλημα καθώς και η χρησιμοποίηση μαθηματικών και ποσοτικών μεθόδων για τον καθορισμό της λήψης αποφάσεων.

Πολλοί ήταν αυτοί που προσπάθησαν να δώσουν τον ορισμό της Επιχειρησιακής Έρευνας. Μάλιστα σύμφωνα με τον Charles Kittel (1916-1978) η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι “η επιστημονική μέθοδος για την προμήθεια ανωτάτων κλάδων με ποσοτικά αποτελέσματα, για τη λήψη αποφάσεων. Αντικείμενό της αποτελεί η εύρεση τρόπων βελτίωσης στην εκτέλεση μελλοντικών εγχειρημάτων, χρησιμοποιώντας όμως πρώτα την ανάλυση από προγενέστερα αντίστοιχα εγχειρήματα”.

1.3 ΦΑΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα βασικά στάδια ανάπτυξης της επιστήμης της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα ακόλουθα:

- Καθορισμός του προβλήματος
- Συγκέντρωση σχετικών πληροφοριών
- Κατασκευή μαθηματικού μοντέλου
- Επαλήθευση μαθηματικού μοντέλου και επίλυση
- Επιλογή της καταλληλότερης λύσης
- Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων
- Εφαρμογή και αξιολόγηση της λύσης

Στην **πρώτη φάση** ο ερευνητής καθορίζει το προς μελέτη πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή εμπεριέχει τόσο τη μελέτη του συστήματος όσο και την ανάπτυξη συγκεκριμένων και καλά καθορισμένων γνώσεων γύρω από το πρόβλημα. Αυτό με τη σειρά του προϋποθέτει τη διατύπωση των στόχων που θέλει να πετύχει η επιχείρηση, των περιορισμών του προβλήματος, των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του αντικειμένου μελέτης και άλλων τομέων της επιχείρησης καθώς και πιθανών εναλλακτικών τρόπων για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Έτσι λοιπόν ο ορισμός του προβλήματος αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα στάδια ανάπτυξης της επιχειρησιακής έρευνας, αφού η διαδικασία αυτή καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το πόσο επιτυχή ή όχι θα είναι τα αποτελέσματα της έρευνάς μας.

Στη συνέχεια και περνώντας στη **δεύτερη φάση,** ο ερευνητής συλλέγει όλα εκείνα τα δεδομένα που θα τον βοηθήσουν να εκτιμήσει το βαθμό επιρροής των διαφόρων παραμέτρων ως προς το πρόβλημα που ερευνά. Αυτές οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται κυρίως για την κατασκευή και επαλήθευση του μαθηματικού μοντέλου του προβλήματος, δύο πολύ σημαντικά ως προς την έκβαση της έρευνας στάδια.

Ακολούθως ο ερευνητής στην **τρίτη φάση** ανάπτυξης της επιχειρησιακής έρευνας προχωρά στη μετατροπή του ορισμού του προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις, προσπαθώντας να αναπαραστήσει κατά προσέγγιση το πρόβλημα της επιχείρησης. Η κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου προϋποθέτει την ανάπτυξη ποσοτικών σχέσεων σε υπολογιστή , που έχουν άρρηκτη σχέση με την οριοθέτηση του προβλήματος τόσο ως προς τους στόχους όσο και ως προς τους περιορισμούς που έχουν διατυπωθεί.

Στην **τέταρτη φάση** ανάπτυξης της επιχειρησιακής έρευνας ο ερευνητής ασχολείται με την επαλήθευση του μαθηματικού μοντέλου που έχει κατασκευαστεί στο τρίτο στάδιο καθώς επίσης και με την επίλυση του προβλήματος. Με άλλα λόγια προσπαθεί να εξακριβώσει αν το μαθηματικό μοντέλο αποτελεί μία ακριβή προσέγγιση της πραγματικότητας. Για να προχωρήσει σε αυτή τη διαπίστωση προχωρά σε δοκιμαστική χρήση του μαθηματικού μοντέλου σε ένα “απλό” πρόβλημα, εξετάζοντας έτσι την ακρίβεια των υποθέσεων που έχουν προηγηθεί, σε συνάρτηση με τις ποσοτικές εντολές που αναπτύχθηκαν στην τρίτη φάση. Μάλιστα προκύπτει η ανάγκη επανάληψης της πρώτης φάσης σε περίπτωση που τα αποτελέσματα αυτής της δοκιμαστικής χρήσης δεν είναι ικανοποιητικά.

Κατά την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου για τη βελτιστοποίηση του προβλήματος, χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι οι οποίες βασίζονται κατά κύριο λόγο σε Ανώτερα μαθηματικά, στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων αλλά και σε μεθόδους και θεωρίες της επιχειρησιακής έρευνας. Τεχνικές όπως ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming), ο δυναμικός προγραμματισμός (dynamic programming) και η θεωρία παιγνίων (game theory) αποτελούν κάποια από τα εργαλεία της Επιχειρησιακής έρευνας, η επιλογή των οποίων βασίζεται στον τύπο και στην πολυπλοκότητα του εκάστοτε μαθηματικού μοντέλου.

Στην **πέμπτη φάση** και δεδομένου τόσο του μαθηματικού μοντέλου όσο και των διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων, ο ερευνητής καλείται να διαλέξει εκείνη τη δυνατή λύση που ικανοποιεί κατά τον πλέον ιδανικό τρόπο ,τους στόχους της επιχείρησης. Συνεχίζοντας στην **έκτη φάση,** παρουσιάζει το μοντέλο μαζί με την ιδανικότερη λύση στον τομέα της επιχείρησης που είναι υπεύθυνος για τη λήψη αποφάσεων. Μάλιστα σε αυτή τη φάση ο ερευνητής μπορεί να παρουσιάσει όλες τις εναλλακτικές λύσεις που προκύπτουν από την επίλυση του μαθηματικού μοντέλου, αφήνοντας έτσι το τμήμα λήψης αποφάσεων να κρίνει ποια από αυτές ανταποκρίνεται καλύτερα στις ανάγκες της επιχείρησης. Σε περίπτωση που η πρόταση του ερευνητή δεν εγκριθεί, τότε είναι αναγκασμένος να επαναλάβει την έρευνα επιστρέφοντας στις φάσεις 1,2,3 και 4. Επιλογικά, στην **έβδομη φάση** ο ερευνητής καλείται να βοηθήσει στην εφαρμογή των προτάσεών του, αν τελικά αυτές γίνουν αποδεκτές. Επιπρόσθετα, στη φάση αυτή ο ερευνητής καλείται να παρακολουθεί το σύστημα και ενημερώνει το μοντέλο ανάλογα με τις αλλαγές στο περιβάλλον, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι οι προτάσεις του επιτρέπουν στην επιχείρηση να πετύχει τους στόχους της σε κάθε χρονική στιγμή.

ΣΧΗΜΑ 1.3 – Φάσεις Ανάπτυξης της Επιχειρησιακής Έρευνας

1.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Όπως έχει προαναφερθεί, ο κατάλογος με τις τεχνικές καθώς και τα εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Η επιλογή των κατάλληλων τεχνικών και εργαλείων για την επίλυση ενός μαθηματικού μοντέλου είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με τη φύση και την πολυπλοκότητά του. Παρακάτω ακολουθεί μία σύντομη αναφορά και ανάλυση ορισμένων από τις πιο σημαντικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming): χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψει το πρόβλημα που ερευνάται. Όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις αυτού του μοντέλου θα πρέπει να είναι γραμμικές. Περιλαμβάνει τον προγραμματισμό όλων εκείνων των δραστηριοτήτων που θα μας οδηγήσει στο βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή σε εκείνο το αποτέλεσμα που θα ικανοποιεί ιδανικότερα τους διατυπωμένους στόχους και τις προσδοκίες, σύμφωνα με τους στόχους και τους περιορισμούς του μαθηματικού μοντέλου. Επιπλέον για τη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού υπάρχει μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος η οποία και ονομάζεται μέθοδος Simplex. Αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές και διαδεδομένες τεχνικές για την εφαρμογή της επιχειρησιακής Έρευνας.

Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation Problem): αποτελεί μια ειδική κατηγορία προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού, το όνομα της οποίας προέρχεται από το γεγονός ότι πολλές από τις εφαρμογές του αφορούν τον καθορισμό του βέλτιστου τρόπου μεταφοράς αγαθών, από διαφορετικά σημεία παραγωγής ή αποθήκευσης σε κέντρα διανομής. Ωστόσο ορισμένες από τις εφαρμογές του Προβλήματος Μεταφοράς δεν σχετίζονται με μεταφορές.

Πρόβλημα Ανάθεσης (Assignment Problem): ή αντιστοίχισης ή εκχώρησης αποτελεί μια ειδική κατηγορία προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Περιλαμβάνει εφαρμογές όπως την ανάθεση ανθρώπων σε εργασίες ή γενικότερα την αντιστοίχιση πόρων σε δραστηριότητες, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Μπορεί να θεωρηθεί ως ένα απλοϊκής μορφής Πρόβλημα Μεταφοράς, παρ' όλο που οι εφαρμογές των δύο αυτών προβλημάτων φαίνεται να είναι εντελώς διαφορετικές.

Δίκτυα (Networks): η γραφική απεικόνιση σε μορφή δικτύων έχει διευκολύνει την επίλυση αρκετών επιχειρησιακών προβλημάτων. Αποτελούν μία από τις πιο ενδιαφέρουσες εξελίξεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα. Τα τελευταία χρόνια η πρόοδος τόσο στη μεθοδολογία όσο και στην εφαρμογή μοντέλων δικτυακής βελτιστοποίησης ,ήταν ραγδαία. Στη γενική τους μορφή τα διαγράμματα δικτύων αποτελούνται από κόμβους οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με κλάδους. Πολλά από τα μοντέλα δικτυακής βελτιστοποίησης αποτελούν στην πραγματικότητα μία ειδική κατηγορία προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού.

Θεωρία Ουρών Αναμονής (Queuing Theory): Η ενασχόληση με τις ουρές αναμονής εμπεριέχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών σε προβλήματα της καθημερινότητας. Οι ουρές αναμονής δημιουργούνται ουσιαστικά όταν η ζήτηση για την παροχή συγκεκριμένων υπηρεσιών ξεπερνά τη δυναμικότητα του συστήματος που σχετίζεται με την παροχή των υπηρεσιών αυτών. Η σωστή λειτουργία και διαχείριση των ουρών αναμονής επηρεάζει καθοριστικά πολλές δραστηριότητες επιχειρησιακής φύσης τόσο στον ιδιωτικό όσο και στο δημόσιο τομέα.

Ανάλυση Αποφάσεων (Decision Analysis): αποτελεί βασικό στοιχείο της Επιχειρησιακής Έρευνας στην οποία ο λήπτης της απόφασης εξετάζει ένα εύρος εφικτών εναλλακτικών λύσεων και επιλέγει εκείνη που επιλύει ένα πρόβλημα με το βέλτιστο τρόπο. Χωρίζεται στην Ανάλυση Αποφάσεων χωρίς πειραματισμούς και στην Ανάλυση Αποφάσεων με πειραματισμούς ενώ σημαντικό εργαλείο για τη ανάλυση και τη λήψη αποφάσεων αποτελούν τα "Δέντρα Αποφάσεων". Συνήθως η λήψη αποφάσεων βασίζεται σε περισσότερα από ένα κριτήρια τα οποία κατά κύριο λόγο είναι οικονομικά, ποιοτικά, τεχνικά αλλά και κοινωνικά.

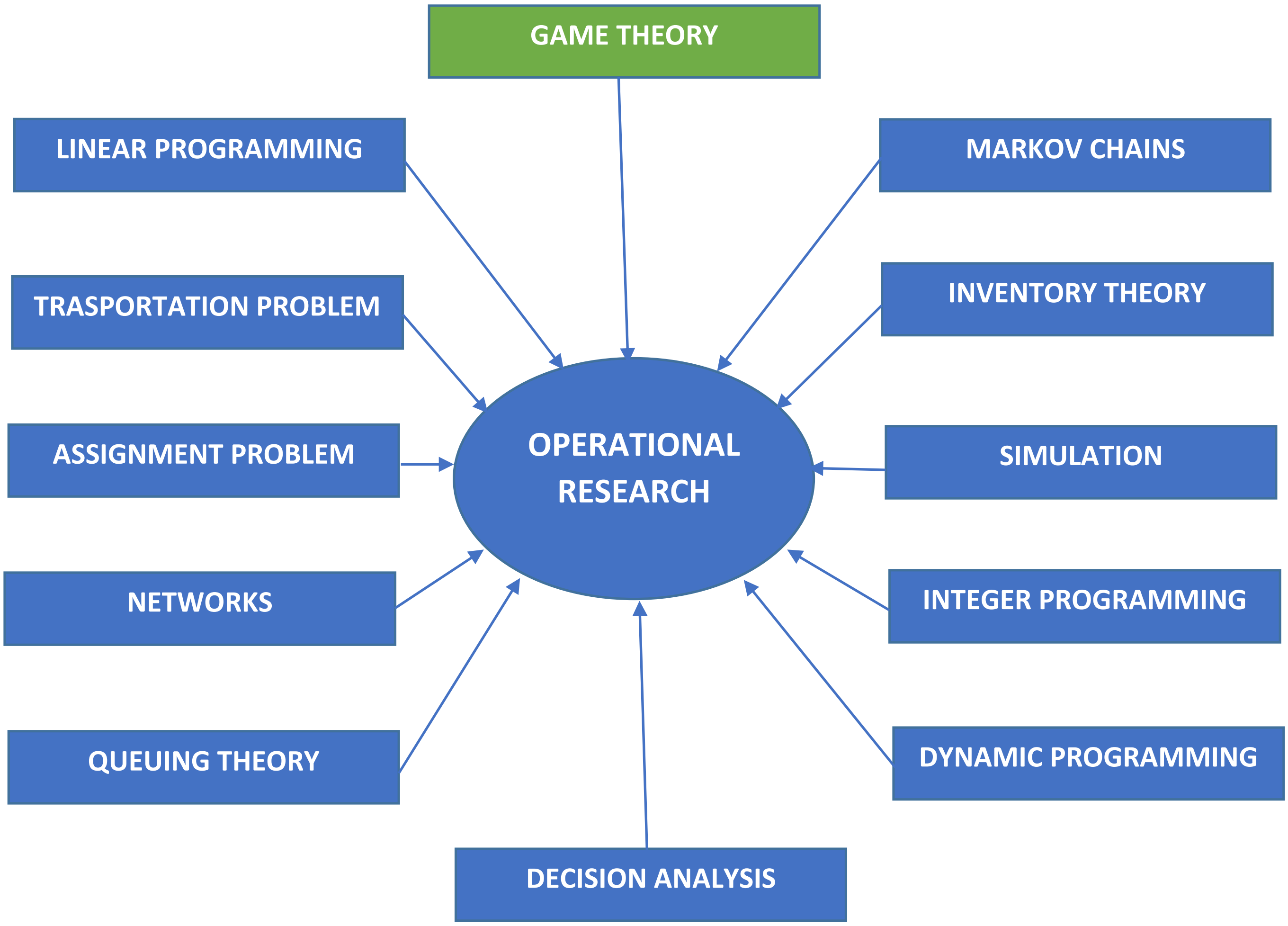
Αλυσίδες Markov (Markov Chains): πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για τον τρόπο που αλλάζει μία τυχαία μεταβλητή με την πάροδο του χρόνου. Μία τέτοια μελέτη προϋποθέτει τη χρήση στοχαστικών διαδικασιών, ένα είδος των οποίων αποτελούν και οι Αλυσίδες Markov, οι οποίες μας επιτρέπουν να υποθέτουμε εξάρτηση (από προηγούμενες συμπεριφορές της μεταβλητής) με τέτοιο τρόπο ώστε να καταλήγουμε σε χειροπιαστά αποτελέσματα, χωρίς παράλληλα να χάνεται η ρεαλιστική φύση του προβλήματος. Οι Αλυσίδες Markov έχουν μέχρι και σήμερα εφαρμοστεί σε πολλούς τομείς όπως στην εκπαίδευση, το μάρκετινγκ, τα οικονομικά, τη λογιστική και την παραγωγή.

Θεωρία Αποθεμάτων (Inventory Theory): αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες για τη σωστή λειτουργία και τελικά την επιτυχία μιας επιχείρησης. Απόθεμα αποτελεί ένα προϊόν το οποίο μένει προσωρινά αχρησιμοποίητο έτσι ώστε να ικανοποιήσει τη ζήτησή του σε χρονικές περιόδους όπου η ζήτηση του συγκεκριμένου προϊόντος ξεπερνάει την προσφορά του. Η συγκεκριμένη θεωρία αποσκοπεί στη διασφάλιση της διαθεσιμότητας, οποτεδήποτε υπάρχει ζήτηση ενώ παράλληλα στόχος της είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

Προσομοίωση (Simulation): η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός μοντέλου με σκοπό την αναπαράσταση ενός πραγματικού συστήματος και τη διεξαγωγή πειραμάτων με στόχο την κατανόηση και την εξαγωγή συμπερασμάτων για το σύστημα που μελετάται. Στην περίπτωση των επιχειρησιακών συστημάτων το μοντέλο προσομοίωσης είναι ένα μαθηματικό μοντέλο, όπου ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διάφορων παραμέτρων του συστήματος που προσομοιώνεται. Η τεχνική αυτή προϋποθέτει τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming): αποτελεί την καταλληλότερη τεχνική της Επιχειρησιακής Έρευνας για την εύρεση της βέλτιστης λύσης όταν μία ή και περισσότερες μεταβλητές του προβλήματος λαμβάνουν μόνο ακέραια (integer) τιμή.

Δυναμικός προγραμματισμός (Dynamic Programming): αποτελεί την καταλληλότερη τεχνική βελτιστοποίησης των επιχειρησιακών προβλημάτων όταν αυτά χαρακτηρίζονται από μία αλληλουχία λήψεων αποφάσεων με αποτελέσματα τα οποία αλληλεξαρτώνται το ένα από το άλλο. Σε αντίθεση με τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού, στα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού όπου οι αποφάσεις λαμβάνονται σε σειρά δεν υπάρχει καθορισμένη μαθηματική διατύπωση.



ΣΧΗΜΑ 1.4 – Τεχνικές εφαρμογής της Επιχειρησιακής Έρευνας

2.ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Η επικρατέστερη άποψη για το τι είναι ένα "παίγνιο", είναι αυτή με την οποία οι περισσότεροι άνθρωποι είναι εξοικειωμένοι στα πλαίσια των επιτραπέζιων παιχνιδιών. Ξεκινώντας από ένα συγκεκριμένο σημείο στο παιχνίδι, ακολουθεί μία αλληλουχία κινήσεων για τον κάθε παίχτη ο οποίος για κάθε κίνηση του επιλέγει ανάμεσα από μια πληθώρα διαθέσιμων επιλογών. Τέτοια παίγνια άλλοτε βασίζονται ολοκληρωτικά στην τύχη, όπως η ρουλέτα των casino, άλλοτε καθόλου, όπως το σκάκι, ενώ πολλά από αυτά, όπως το τάβλι, προϋποθέτουν τόσο την ύπαρξη τύχης όσο και την ύπαρξη ικανότητας από την πλευρά του παίχτη. Σε πολλά από αυτά τα παίγνια ο παίχτης είναι σε θέση να γνωρίζει την κάθε κίνηση που έχει πραγματοποιηθεί (όπως στο σκάκι), ενώ σε άλλα δεν έχει αυτή τη δυνατότητα και άρα δε μπορεί να γνωρίζει ποιες από τις διάφορες πιθανές κινήσεις μπορεί να έχουν γίνει από τον αντίπαλο παίχτη. Επομένως πρακτικά ο παίχτης δε μπορεί να γνωρίζει με ακρίβεια τη θέση στην οποία βρίσκεται το παιχνίδι και έτσι πρέπει να κινηθεί λαμβάνοντας υπόψη όλες τις πιθανές θέσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το συγκεκριμένο παίγνιο. Στο τέλος κάθε τέτοιου παιγνίου συνήθως υπάρχει μία απόδοση κέρδους για τους παίχτες (με τη μορφή χρημάτων, γοήτρου, ικανοποίησης κ.α.) η οποία εξαρτάται από την πρόοδο του παιγνίου.

Η **Θεωρία Παιγνίων** αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι και βασικό στοιχείο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Είναι μία μαθηματική έννοια η οποία έχει σαν κύριο αντικείμενο την διαμόρφωση της σωστής στρατηγικής, η οποία θα επιτρέψει σε ένα άτομο, δηλαδή στον παίχτη, να αντιμετωπίσει με επιτυχία μία περίπλοκη πρόκληση ή ένα πρόβλημα με το οποίο έρχεται αντιμέτωπος. Ασχολείται με τα χαρακτηριστικά ανταγωνιστικών καταστάσεων κάτι το οποίο οδηγεί στον χαρακτηρισμό της ως μια μελέτη της "δια δραστικής" λήψης αποφάσεων, αφού ο λήπτης της απόφασης επηρεάζεται τόσο από τις δικές του επιλογές, όσο και από τις αποφάσεις των άλλων «παιχτών».

Αυτή η μελέτη, όπως χαρακτηρίστηκε παραπάνω, διακατέχεται από δύο βασικές αρχές:

- Οι επιλογές των παιχτών ενός παιγνίου επηρεάζονται από πάγια καθορισμένες και σταθερές ως προς τη διαμόρφωσή τους προτιμήσεις οι οποίες έχουν προέλθει από τα αποτελέσματα προγενέστερων, δικών τους αποφάσεων.

- Οι παίχτες δρουν στρατηγικά. Όταν ο παίχτης λαμβάνει μία απόφαση, τότε λαμβάνει υπόψη εκτός από την σχέση και την αλληλεξάρτηση των δικών του επιλογών, τις αποφάσεις και των υπόλοιπων παιχτών.

2.1 ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ & ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

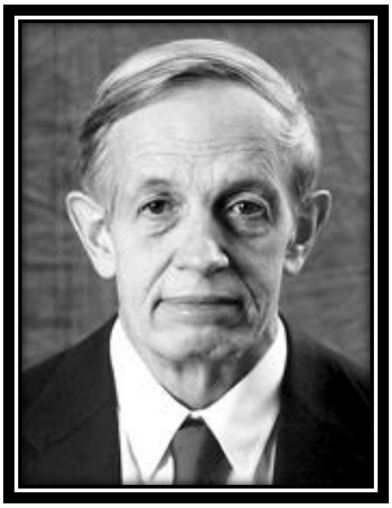
Μία πρώτη καταγραφή προβλήματος που εντάσσεται στο πλαίσιο των προβλημάτων της Θεωρίας Παιγνίων θα μπορούσε να θεωρηθεί η λύση που έδωσε ο James Waldegrave το 1973 για ένα παίγνιο δύο παιχτών με τράπουλα. Ακολούθησε ο Augustin Cournot, ο οποίος ασχολήθηκε με μία ειδική περίπτωση του ολιγοπωλίου χρησιμοποιώντας μία περιορισμένη έκδοση της ισορροπίας του Nash. Το πρώτο θεώρημα της Θεωρίας Παιγνίων, χωρίς αυτή όμως ακόμα να υφίσταται, διατυπώθηκε από τον Ernst Zermelo το 1913 και ισχυριζόταν πως στο σκάκι ή ο παίχτης με τα λευκά πιόνια μπορεί να πετύχει μία νίκη, ή ο παίχτης με τα μαύρα πιόνια μπορεί να πετύχει μία νίκη ή και οι δύο παίχτες μπορούν να προκαλέσουν την ισοπαλία. Απέδειξε με άλλα λόγια ότι το σκάκι είναι ένα καλά ορισμένο παιχνίδι. Από το 1921 μέχρι και το 1927 ο Emile Borel δημοσίευσε τέσσερις σημειώσεις σχετικά με παίγνια στρατηγικής, ορίζοντας έτσι την πρώτη σύγχρονη διαμόρφωση μιας μικτής στρατηγικής και θέτοντας στην επιστημονική κοινότητα ανάλογα προβλήματα. Το 1928, ο John Von Neumann, ο οποίος μαζί με τον Emile Borel θεωρούνται από πολλούς ως “Πατέρες” της Θεωρίας Παιγνίων, απέδειξε το θεώρημα Minimax. Το συγκεκριμένο θεώρημα αναφέρει πως κάθε παίγνιο δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος, με πεπερασμένο πλήθος καθαρών στρατηγικών

Augustin Cournot (1801-1877)

είναι καθορισμένο, δηλαδή: όταν σε ένα παίγνιο εισάγονται μικτές στρατηγικές, τότε το συγκεκριμένο παίγνιο δεν έχει ένα ορθολογικό τρόπο αποπληρωμής των παιχτών μετά την ολοκλήρωσή του. Μάλιστα ο ίδιος μαζί με τον Oscar Morgestern δημοσιεύουν το βιβλίο "Theory of Games and Economic Behavior" στο οποίο θεμελιώνεται και επίσημα πλέον η Θεωρία Παιγνίων και παράλληλα διατυπώνονται κάποιες σημαντικές οικονομικές έννοιες.

John Von Neumann (1903-1957)

Επιπρόσθετα, το 1950 εκδίδεται από τους Harold W. Kuhn και Albert W. Tucker το βιβλίο "Contributions of the Theory of Games I", ενώ την ίδια χρονιά οι Melvin Dresher και Merrill Flood διενεργούν, στο Rand Corporation , το πείραμα από το οποίο και προήλθε το πιο γνωστό μέχρι και σήμερα παίγνιο, το "Δίλημμα του Φυλακισμένου". Παράλληλα το ίδιο έτος ο John McDonald's δημοσιεύει το πρώτο βιβλίο που αποτελεί εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων και δεν αφορά μόνο την επιστημονική κοινότητα αλλά και το ευρύ κοινό, με τίτλο "Strategy in Poker, Business and War". Από το 1950 μέχρι και το 1953 ο John Nash δίνει το δικό του στίγμα στη Θεωρία Παιγνίων πραγματοποιώντας μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα τέσσερις δημοσιεύσεις, σε μία εκ' των οποίων ορίζει και την ισορροπία σε ένα παίγνιο και η οποία φέρει και το όνομά του (Nash Equilibrium). Το 1965 ο Reinhard Selten δημοσιεύει ένα άρθρο στο οποίο και παρουσιάζει, ως μια σειρά βελτιώσεων στην ισορροπία του Nash, την έννοια της ισορροπίας στα υποπαίγνια (Sub-game Perfect Equilibrium). Μάλιστα ο ίδιος το 1975 εισήγαγε την ισορροπία του τρεμάμενου χεριού (Trembling Hand Equilibrium) σε μία δημοσίευσή του που αφορούσε τα σημεία ισορροπίας σε εκτεταμένα παίγνια και αποτέλεσε τον "καταλύτη" στις προσπάθειες για βελτίωση της ισορροπίας του Nash. Είχε προηγηθεί τις χρονιές 1967 και 1968 η παρουσίαση τριών εγγράφων από τον John



John Forbes Nash

Harsanyi (Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, Parts I, II and III) στα οποία ουσιαστικά κατασκεύασε τη Θεωρία Παιγνίων “ελλιπούς” πληροφόρησης γενικεύοντας πολλές από τις ιδέες του Nash. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε πως οι τρεις αυτοί μελετητές της Θεωρίας Παιγνίων, τιμήθηκαν για το έργο τους με το βραβείο Nobel των οικονομικών το 1995.

2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Η Θεωρία Παιγνίων έχει μέχρι και σήμερα αποκτήσει ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών, ανάμεσα στις οποίες συγκαταλέγονται ο κλάδος των οικονομικών, της πολιτικής, των τηλεπικοινωνιών ,των επιχειρήσεων, της βιολογίας αλλά και της φυσικής. Σε ότι αφορά τον τομέα των οικονομικών, πολλές από τις αλληλεπιδράσεις στον κόσμο των επιχειρήσεων, μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της Θεωρίας Παιγνίων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της παραδοχής αποτελεί η ομοιότητα μεταξύ του καθορισμού των τιμών των ολιγοπωλίων και του “διλλήματος του φυλακισμένου”. Παρ’ όλα αυτά, το “δίλημμα του φυλακισμένου” δεν είναι το μόνο μοντέλο της Θεωρίας Παιγνίων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση οικονομικών προβλημάτων. Σημαντική θεωρείται και η συμβολή της Θεωρίας Παιγνίων στον τομέα της Βιολογίας. Εκτός από τη μοντελοποίηση του λόγου συνύπαρξης πολλών διαφορετικών ειδών στη φύση, η Θεωρία Παιγνίων χρησιμοποιήθηκε αρχικά για την εξήγηση της σταθερότητας της αναλογίας “ένα προς ένα” στα φύλα. Αξιοσημείωτος αποτελεί και ο ρόλος της Θεωρίας Παιγνίων τόσο στη διπλωματία όσο και στην κατασκευή πολεμικών και στρατιωτικών στρατηγικών, που πολλές φορές κρίνουν το μέλλον χωρών και επομένως και των ανθρώπων που τις απαρτίζουν. Παράλληλα, δε θα μπορούσε να μην αναφερθεί και η εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στην Πολιτική Οικονομία και ειδικότερα η θεωρία συλλογικής δράσης η οποία εξηγεί ενδεχόμενα συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Αυτό βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με τον ρόλο του κράτους και των θεσμών σε θέματα συνεργασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η παροχή δημόσιων αγαθών και η φορολογία. Επιλογικά, αξίζει να επισημάνουμε πως πολλοί τομείς της καθημερινότητας επηρεάζονται από εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων. Μάλιστα πολλές φορές οι άνθρωποι χρησιμοποιούν ασυνείδητα αυτή την επιστήμη σε διάφορες επιλογές που πραγματοποιούν μέσα στα πλαίσια της καθημερινότητάς τους.

3.ΠΑΙΓΝΙΑ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΩΝ

3.1 ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΩΝ, ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Ένα από τα απλούστερα προβλήματα της Θεωρίας Παιγνίων είναι τα παίγνια δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος. Όπως υποδεικνύει και το όνομα τους, τα παίγνια δύο παικτών αποτελούνται από δύο αντίπαλους παίκτες, οι οποίοι μπορεί να είναι και ομάδες, εταιρείες, στρατοί κλπ. Στα παίγνια δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος, το κέρδος του ενός παίκτη είναι ίσο με τις απώλειες του άλλου παίκτη του παιγνίου. Με άλλα λόγια, στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, το άθροισμα των αποδόσεων όλων των παικτών του παιγνίου είναι μηδενικό. Παιχνίδια όπως το σκάκι, το πόκερ, και τα περισσότερα από τα αθλητικά παιχνίδια όπως το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ είναι παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Στο πόκερ για παράδειγμα, σε παιχνίδι δύο παικτών (heads up), αν ο ένας από τους παίκτες κερδίσει 100 ευρώ, ο άλλος παίκτης θα έχει απώλεια ίσου ποσού. Το ίδιο συμβαίνει και στο σκάκι, όπου αν ο ένας παίκτης κερδίσει, τότε ο αντίπαλός του θα χάσει. Παρ' όλα αυτά, τα περισσότερα παίγνια στην πραγματική ζωή και στον κόσμο των επενδύσεων δεν είναι παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος όλοι οι παίκτες μπορούν είτε να κερδίσουν ή και να χάσουν ταυτόχρονα. Έτσι, ενώ στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες δεν έχουν κάποιο κοινό συμφέρον, σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος παρατηρείται τόσο η ύπαρξη κοινού όσο και αντικρουόμενου συμφέροντος από την πλευρά των παικτών.

Σε γενικές γραμμές, ένα παίγνιο δύο παικτών αποτελείται από:

1. τις στρατηγικές του πρώτου παίκτη
2. τις στρατηγικές του δεύτερου παίκτη
3. τον πίνακα πληρωμών

Πριν ξεκινήσει το παιχνίδι κάθε παίκτης γνωρίζει τις διαθέσιμες στρατηγικές του, τις διαθέσιμες στρατηγικές του αντιπάλου του και τον πίνακα των πληρωμών. Το παιχνίδι ξεκινά με την ταυτόχρονη επιλογή, από την πλευρά των παικτών της στρατηγικής που θα ακολουθήσουν, χωρίς να γνωρίζουν τη στρατηγική που έχει επιλέξει ο αντίπαλός τους.

Μια στρατηγική σε τέτοιου είδους παίγνια περιλαμβάνει μία απλή ενέργεια, σε αντίθεση με πιο πολύπλοκα παίγνια όπου και απαιτείται μία σειρά ενεργειών/κινήσεων, μία στρατηγική δηλαδή από την πλευρά του παίκτη. Η στρατηγική ενός παίκτη για ένα παίγνιο είναι ουσιαστικά ένας προκαθορισμένος κανόνας ο οποίος και καθορίζει τον τρόπο αντίδρασής του σε κάθε πιθανή περίπτωση που μπορεί να παρουσιαστεί σε οποιοδήποτε στάδιο του παιγνίου. Για παράδειγμα, μια στρατηγική ενός παίκτη στο σκάκι θα υποδείκνυε το πως μπορεί να γίνει η επόμενη κίνηση για κάθε πιθανή θέση στη σκακιέρα και έτσι ο συνολικός αριθμός των πιθανών στρατηγικών θα έφτανε σε αστρονομικά νούμερα. Παρ' όλα αυτά οι εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων περιλαμβάνουν συνήθως λιγότερο πολύπλοκες ανταγωνιστικές καταστάσεις από αυτές που παρουσιάζονται στο σκάκι, αν και πολλές φορές οι στρατηγικές αυτών των εφαρμογών μπορούν να είναι σύνθετες. Σε ότι αφορά τη σημασία του πίνακα πληρωμών, αυτή έγκειται στο πλαίσιο της πληροφόρησης των παικτών σχετικά με τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουν σε κάθε περίπτωση. Σε παίγνιο δύο παικτών ο πίνακας πληρωμών για τον παίκτη 1 δείχνει τα κέρδη ή τις απώλειες που απορρέουν από τον συνδυασμό των στρατηγικών των δύο παικτών. Ανάλογα ο πίνακας πληρωμών για τον παίκτη 2 θα είναι ο αρνητικός πίνακας πληρωμών του παίκτη 1, κάτι που οφείλεται στο ότι το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος.

Συνοψίζοντας ως προς τη φύση και τη δομή των παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος έχουμε ότι:

- Το παίγνιο αποτελείται από δύο παίκτες, τον **παίκτη 1** και τον **παίκτη 2**.
- Το παίγνιο παρίσταται από των πίνακα πληρωμών του παίκτη 1
- Ο παίκτης 1 έχει n διαθέσιμες στρατηγικές ενώ ο παίκτης 2 m διαθέσιμες στρατηγικές

- Ο πίνακας πληρωμών για τον παίκτη 1 έχει την παρακάτω μορφή:

		ΠΑΙΚΤΗΣ 2			
	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	1	2	...	n
	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	.	.	.		.
	.	.	.		.
	.	.	.		.
	M	a_{m1}	a_{2m}	...	a_{mn}

Πίνακας 3.1-Πίνακας πληρωμών παίκτη 1 για παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος

- Αν ο παίχτης 1 επιλέξει τη στρατηγική i και ο παίκτης 2 επιλέξει τη στρατηγική j, ο παίκτης 1 θα έχει κέρδη a_{ij} και ο παίκτης 2 θα έχει απώλειες a_{ij} .

3.2 ΠΑΙΓΝΙΟ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

Δύο πολιτικοί κατεβαίνουν αντίπαλοι στις δημοτικές εκλογές διεκδικώντας τη δημαρχεία του Δήμου Βόλου. Οι δύο διεκδικητές πρέπει να καταστρώσουν τα σχέδιά τους για τις δύο τελευταίες μέρες της πολιτικής τους εκστρατείας, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως ιδιαίτερα σημαντικές εξαιτίας της χρονικής τους απόστασης από τη μέρα διεξαγωγής των εκλογών. Βασισμένοι σε αυτό το σκεπτικό, οι δύο πολιτικοί θέλουν να περάσουν τις δύο αυτές μέρες σε περιοχές “κλειδιά” ως προς το εκλογικό αποτέλεσμα, τη Νέα Ιωνία και την πόλη του Βόλου. Λόγω της κρισιμότητας αλλά και των μεγάλων αναγκών των περιοχών, ο κάθε πολιτικός θα πρέπει ή να ξοδέψει και τις δύο ημέρες σε μία από τις δύο περιοχές ή να περιοδεύσει την πρώτη ημέρα στη μία περιοχή και τη δεύτερη στην άλλη. Ωστόσο, δεδομένου ότι αυτός ο προγραμματισμός πρέπει να γίνει εκ των προτέρων, κανένας από τους δύο πολιτικούς δε μπορεί να γνωρίζει τα πλάνα περιοδείας του αντιπάλου του πριν ολοκληρώσει τον δικό του σχεδιασμό. Κάτω από τις συγκεκριμένες συνθήκες, ο κάθε πολιτικός ζήτησε από το επιτελείο του να αξιολογήσει το πιθανό αποτέλεσμα (σε αριθμούς ψήφων) που θα επέφερε κάθε δυνατός συνδυασμός από τις ημέρες παρουσίας τόσο του ίδιου όσο και του αντιπάλου του σε καθεμία από τις δύο περιοχές. Αυτή η αξιολόγηση στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί από τον κάθε υποψήφιο προκειμένου να επιλέξει την καλύτερη στρατηγική για το πως θα πρέπει να αξιοποιηθούν οι δύο αυτές μέρες.

Μελετώντας το πρόβλημα όπως διατυπώθηκε παραπάνω, κάθε παίκτης-πολιτικός μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε τρεις στρατηγικές:

- Στρατηγική 1: να περιοδεύσει από μία μέρα σε κάθε περιοχή
- Στρατηγική 2: να περιοδεύσει και τις δύο ημέρες στην περιοχή της Νέας Ιωνίας
- Στρατηγική 3: να περιοδεύσει και τις δύο ημέρες στην πόλη του Βόλου

Οι στρατηγικές αυτές θα ήταν περισσότερο περίπλοκες σε μία κατάσταση όπου ο κάθε πολιτικός θα ήξερε που θα περιοδεύσει ο αντίπαλός του την πρώτη μέρα, χωρίς να έχει καθορίσει την περιοχή που θα περιοδεύσει ο ίδιος τη δεύτερη μέρα. Η σχετική αποτελεσματικότητα (αύξηση στον αριθμό των ψήφων από τον πολιτικό Α ως προς το ποσοστό των συνολικών ψήφων) που θα προκύψει ύστερα από την πάροδο των δύο τελευταίων ημερών της εκστρατείας εξαρτάται από τους συνδυασμούς των ημερών και δίνεται στον παρακάτω πίνακα πληρωμών για τον πολιτικό Α. Κάθε μονάδα στις καταχωρήσεις του πίνακα πληρωμών αντιστοιχεί σε αριθμό ψήφων ίσο με το 1000.

	ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β			
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	**ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ**	**B_1**	**B_2**	**B_3**
	A_1	1	2	4
	A_2	1	0	5
	A_3	0	1	-1

Πίνακας 3.2.1-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών

Δεδομένου ότι ο παραπάνω πίνακας αποτελεί των πίνακα πληρωμών του πολιτικού Α, και σύμφωνα με τις συγκεκριμένες καταχωρήσεις ο μόνος τρόπος για να απαντηθεί το ερώτημα ως προς ποια στρατηγική πρέπει να επιλέξει ο κάθε υποψήφιος, είναι η εφαρμογή της έννοιας των κυρίαρχων στρατηγικών και ως κατ' επέκταση η απαλοιφή των υποδεέστερων στρατηγικών.

▪ *Μία στρατηγική είναι υποδεέστερη (dominated) μίας άλλης (που ονομάζεται υπερέχουσα ή κυρίαρχη) όταν η κυρίαρχη στρατηγική είναι τουλάχιστον τόσο «καλή» όσο και η υποδεέστερη* ▪

Κατ' αρχάς ο πίνακας 3.2.1 δεν περιλαμβάνει κυρίαρχες στρατηγικές για τον πολιτικό Β. Ωστόσο για τον πολιτικό Α η στρατηγική A_1 κυριαρχεί έναντι της στρατηγικής A_3 επειδή επιφέρει για τον πολιτικό Α μεγαλύτερες απολαβές (1>0, 2>1, 4>-1) ανεξάρτητα από τις ενέργειες του πολιτικού Β. Έτσι, η απαλοιφή της υποδεέστερης στρατηγικής A_3 μας δίνει τον παρακάτω πίνακα πληρωμών:

	ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β			
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	B_1	B_2	B_3
	A_1	1	2	4
	A_2	1	0	5

Πίνακας 3.2.2-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών με απαλοιφή της στρατηγικής A_3

Επειδή θεωρούμε ότι και οι δύο παίκτες-πολιτικοί σκέφτονται ορθολογικά, ο πολιτικός Β μπορεί και αυτός να συμπεράνει πως ο αντίπαλός του έχει να επιλέξει μόνο ανάμεσα στις στρατηγικές A_1 και A_2. Επομένως, κάτω από αυτό το σκεπτικό, ο πολιτικός Β έχει και αυτός υποδεέστερη στρατηγική, την στρατηγική B_3, η οποία κυριαρχείται αντίστοιχα από τις στρατηγικές B_1 και B_2 λόγω του ότι οι δύο τελευταίες στρατηγικές του επιφέρουν λιγότερες απώλειες (άρα κέρδη για τον πολιτικό Α) σε σχέση με τη στρατηγική B_3, στον νέο πίνακα πληρωμών 3.2.2 (για τη στρατηγική B_1: 1<4, 1<5 και για τη στρατηγική B_2: 2<4, 0<5). Απαλείφοντας με αυτόν τον τρόπο και τη στρατηγική B_3 ο νέος πίνακας πληρωμών που προκύπτει είναι ο παρακάτω:

ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β			
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	B_1	B_2
	A_1	1	2
	A_2	1	0

Πίνακας 3.2.3-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών με απαλοιφή και της στρατηγικής B_3

Σε αυτό το στάδιο και σύμφωνα με τον νέο πίνακα πληρωμών 3.2.3, η στρατηγική A_1 κυριαρχεί έναντι της στρατηγικής A_2 γιατί η στρατηγική A_1 αποδίδει καλύτερα για τον πολιτικό Α στη δεύτερη στήλη του πίνακα 3.2.3 (2>0) , ενώ στην πρώτη στήλη και οι δύο στρατηγικές αποδίδουν το ίδιο (1=1). Προχωρώντας λοιπόν στην απαλοιφή της υποδεέστερης σε αυτό το στάδιο στρατηγικής A_2, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β			
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	B_1	B_2
	A_1	1	2

Πίνακας 3.2.4-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών με απαλοιφή και της στρατηγικής B_3

Στον πίνακα 3.2.4 η στρατηγική B_2 κυριαρχείται από τη στρατηγική B_1 (1<2) και έτσι οδηγούμαστε στην απαλοιφή της στρατηγικής B_2.

Επιλογικά, καταλήγουμε στο ότι και οι δύο παίκτες-πολιτικοί θα πρέπει να επιλέξουν τη στρατηγική 1 (A_1, B_1). Ύστερα από αυτή την επιλογή ο πολιτικός Α θα έχει κέρδος μία μονάδα (η οποία στο πρόβλημά μας αντιστοιχεί σε 1000 ψήφους) έναντι του πολιτικού του αντιπάλου. Το κέρδος αυτό του πολιτικού Α, όταν και οι δύο παίκτες-πολιτικοί δρουν με το βέλτιστο τρόπο ονομάζεται "αξία του παιγνίου" (value of the game). Ένα παίγνιο με αξία ίση με το μηδέν ονομάζεται "δίκαιο παιχνίδι" (fair game) και δεδομένου ότι το παίγνιο που αναλύθηκε παραπάνω έχει "αξία" ίση με τη μονάδα, το παίγνιο αυτό δεν είναι "δίκαιο". Η έννοια της υποδεέστερης στρατηγικής είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη μείωση των καταχωρήσεων σε ένα πίνακα πληρωμών που πρέπει οι παίκτες να λαμβάνουν υπόψιν και μάλιστα, σε ασυνήθιστες περιπτώσεις όπως στο παραπάνω παίγνιο, οδηγεί στον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης. Ωστόσο τα περισσότερα παίγνια απαιτούν διαφορετική προσέγγιση για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης τους, κάτι το οποίο θα αναλυθεί εκτενέστερα σε επόμενα κεφάλαια.

3.3 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΩΝ, ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Όπως έχει προαναφερθεί, παίγνιο δύο παικτών είναι μία κατάσταση στην οποία συμμετέχουν δύο παίκτες οι οποίοι ονομάζονται **παίκτης 1** και **παίκτης 2** ώστε:

- Ο παίκτης 1 έχει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών με n στοιχεία τα οποία και αποτελούν τις δυνατές επιλογές του παίκτη. Το σύνολο αυτό είναι το :

  $$S_1 = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

  Αντίστοιχα ο παίκτης 2 έχει και αυτός πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών με m στοιχεία που αποτελούν τις δυνατές στρατηγικές του, το:

  $$S_2 = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$$

- Οι πραγματικές συναρτήσεις (utility functions) $u_1\ (k_i, l_j)$ και $u_2\ (k_i, l_j)$ είναι οι αποδόσεις των παικτών όταν ο παίκτης 1 χρησιμοποιήσει τη στρατηγική k_i και ο παίκτης 2 χρησιμοποιήσει τη στρατηγική l_j, όπου $i = \{\ 1, 2, \dots, n\ \}$ και $j = \{\ 1, 2, \dots, m\ \}$.

Το παίγνιο ξεκινά με τον ακόλουθο τρόπο: Σε μία δεδομένη χρονική στιγμή ο παίκτης 1 επιλέγει μια στρατηγική $k_i \in S_1$ ενώ την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή ο παίκτης 2 επιλέγει μία στρατηγική $l_j \in S_2$. Έτσι ο παίκτης 1 έχει απόδοση $u_1\ (k_i, l_j)$ και ο παίκτης 2 έχει απόδοση $u_2\ (k_i, l_j)$. Επιπρόσθετα, σε παίγνια δύο παικτών οι συναρτήσεις χρησιμότητας των παικτών παριστάνονται με τη μορφή πινάκων (π.χ. A και B). Έτσι, θέτοντας $a_{ij} = u_1\ (k_i, l_j)$ και $b_{ij} = u_2\ (k_i, l_j)$, ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι οι αποδόσεις του παίκτη 1 ενώ ο πίνακας $B = [b_{ij}]$ οι αποδόσεις του παίκτη 2. Συνήθως τέτοια παίγνια μπορούν να παρασταθούν γραφικά με ένα ορθογώνιο πίνακα δύο εισόδων που στις δύο πλευρές φαίνονται οι στρατηγικές των παικτών και σε κάθε τετράγωνο- συντεταγμένη γράφεται το διατεταγμένο ζεύγος όπου το πρώτο στοιχείο του είναι η απόδοση του πρώτου παίκτη και το δεύτερο του δευτέρου που αντιστοιχεί στο προφίλ του τετραγώνου, όπως φαίνεται και στον πίνακα που ακολουθεί.

	ΠΑΙΚΤΗΣ 2				
	Στρατηγική	k_1	k_2	...	k_m
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	l_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1m}, b_{1m})
	l_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2m}, b_{2m})
	...	...	...	...	...
	l_n	(a_{n1}, b_{n1})	(a_{n2}, b_{n2})	...	(a_{nm}, b_{nm})

Πίνακας 3.3-Πίνακας πληρωμών για παίγνιο δύο παικτών, μη μηδενικού αθροίσματος

3.4 ΤΟ ΔΙΛΛΗΜΑ ΤΟΥ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ

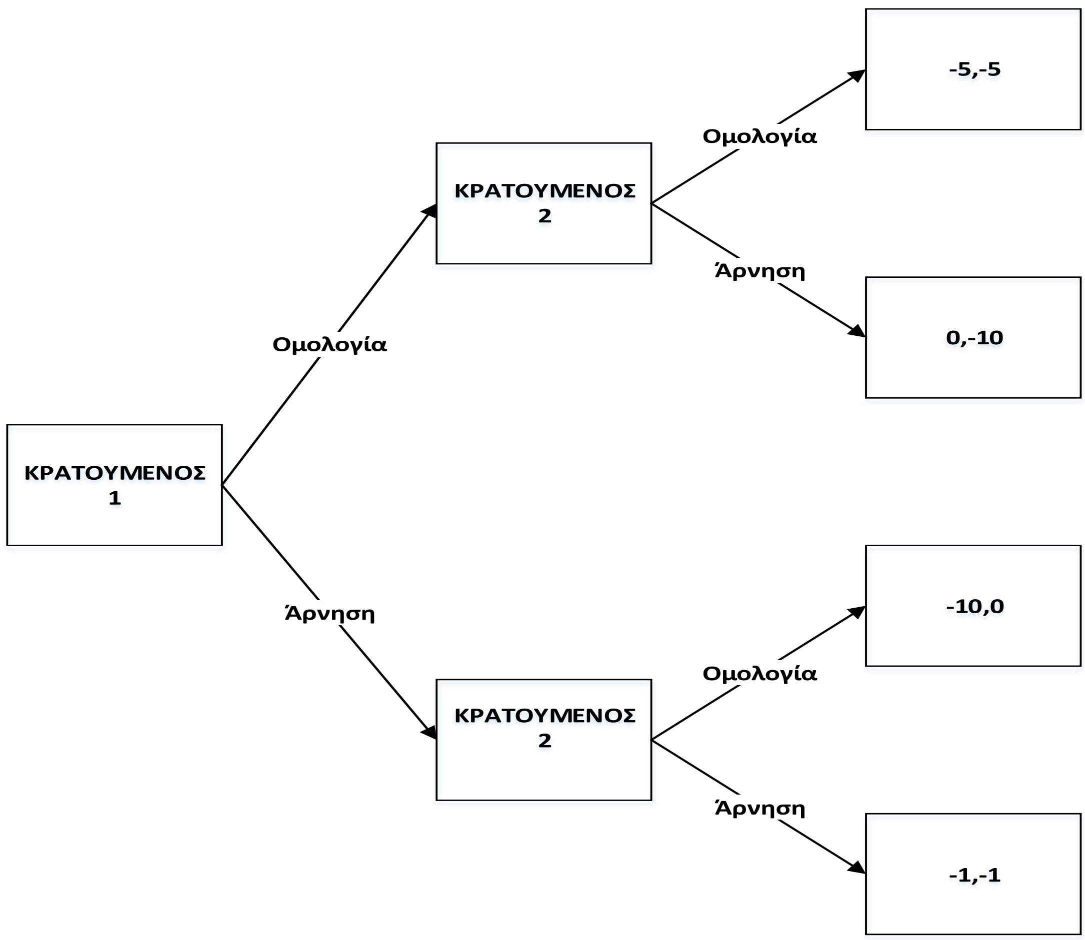
Το **Δίλλημα Του Φυλακισμένου** είναι το πιο διάσημο παίγνιο δύο παικτών το οποίο περιγράφει μία κατάσταση στην οποία οι παίκτες θα ήταν καλύτερο να συνεργαστούν, αλλά όπως φαίνεται, θα κάνουν το αντίθετο. Σε αυτό το παίγνιο οι δύο παίκτες, **κρατούμενος 1** και **κρατούμενος 2**, έχουν συλληφθεί με την υποψία της διάπραξης κάποιου εγκλήματος. Η αστυνομία έχει τοποθετήσει τους κρατούμενους σε διαφορετικό χώρο. Έτσι κάθε κρατούμενος θα πρέπει ανεξάρτητα να λάβει την απόφαση για το αν θα πρέπει να ομολογήσει ή όχι για το έγκλημά του, χωρίς να γνωρίζει το τί σκοπεύει να κάνει ο συνεργός του. Οι δικαστές προσφέρουν στους κρατούμενους την ακόλουθη συμφωνία: αν ο ένας από τους κρατούμενος αρνηθεί το έγκλημά του και παραμείνει ήρεμος, ενώ ταυτόχρονα ο άλλος ομολογήσει, τότε το δικαστήριο θα ανταμείψει τον ομολογητή αφήνοντάς τον ελεύθερο ενώ παράλληλα θα καταδικάσει τον κρατούμενο που αρνήθηκε να ομολογήσει σε φυλάκιση 10 ετών. Αν και οι δύο κρατούμενοι ομολογήσουν το έγκλημά τους τότε το δικαστήριο θα αποφανθεί τη φυλάκιση και των δύο για διάστημα 5 ετών. Τέλος αν και οι δύο κρατούμενοι δηλώσουν ταυτόχρονα άρνηση, τότε το δικαστήριο δε θα έχει αρκετά στοιχεία για να διαλευκάνει την υπόθεση και έτσι θα καταδικάσει τους κρατούμενους με μικρή ποινή φυλάκισης ενός έτους για τον καθένα.

Στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων** φαίνονται οι παίκτες (κρατούμενοι) και οι στρατηγικές (επιλογές) τους που είναι άρνηση και ομολογία. Τα ζεύγη (a, b) είναι οι αποδόσεις των παικτών a του πρώτου και b του δεύτερου παίκτη. Οι κρατούμενοι 1 και 2 έχουν το ίδιο σύνολο δράσεων {άρνηση, ομολογία}.

		Κρατούμενος 2	
Κρατούμενος 1	Στρατηγική	Ομολογία	Άρνηση
	Ομολογία	(-5,-5)	(0,-10)
	Άρνηση	(-10,0)	(-1,-1)

Πίνακας 3.4 - Πίνακας Πληρωμών: ΤΟ ΔΙΛΛΗΜΑ ΤΟΥ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ

Προχωρώντας στην ανάλυση του παιγνίου, κάθε παίκτης-κρατούμενος έχει δύο στρατηγικές: Ομολογία και Άρνηση. Σε αυτό το παίγνιο οι παίκτες-κρατούμενοι μπορούν να συνεργαστούν μεταξύ τους δηλώνοντας άρνηση ή να αποκλίνουν δηλώνοντας ο ένας άρνηση και ο άλλος ομολογία. Έτσι αν ο κρατούμενος 1 συνεργαστεί και ομολογήσει το έγκλημά του τότε θα βρεθεί στη φυλακή για ένα μόνο χρόνο αν και ο κατηγορούμενος 2 κάνει το ίδιο, ενώ από την άλλη θα φυλακιστεί για 10 χρόνια αν ο κατηγορούμενος 2 δηλώσει άρνηση. Από την άλλη πλευρά, αν ο κρατούμενος 1 ομολογήσει την ώρα που ο κρατούμενος 2 δηλώσει άρνηση, τότε αφήνεται ελεύθερος. Αν πάλι ομολογήσει για το έγκλημά του μαζί με τον κρατούμενο 2, τότε βρίσκεται σε πλεονεκτικότερη θέση από το αν συνεργαζόταν και ομολογούσε ενώ ο κρατούμενος 2 δήλωνε άρνηση. Το ίδιο σκεπτικό ισχύει και για τον κρατούμενο 2. Παρακάτω ακολουθεί ένα διάγραμμα δέντρου για το Δίλλημα του Φυλακισμένου. Σε αυτό το σημείο αξίζει να επισημανθεί ότι το Δίλλημα του Φυλακισμένου είναι ένα παίγνιο ταυτόχρονης “κίνησης” από την πλευρά των παικτών, παρόλο που οι κινήσεις στο παίγνιο μοιάζουν να γίνονται διαδοχικά.



Σχήμα 3.4- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΕΝΤΡΟΥ: ΔΙΛΛΗΜΑ ΤΟΥ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ (ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΣ 1)

3.5 ΚΥΡΙΑΡΧΕΣ, ΥΠΟΔΕΕΣΤΕΡΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΚΑΤΑ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΩΝ

Το δίλλημα του Φυλακισμένου, όπως είδαμε και παραπάνω, είναι ένα παίγνιο όπου ο κάθε παίκτης αποκλείει στρατηγικές με γνώμονα καθαρά την απόδοση των στρατηγικών του. Οι αρχές της κυριαρχίας και της αυστηρής κυριαρχίας, στις οποίες και βασίζεται η απαλοιφή στρατηγικών στο δίλλημα του Φυλακισμένου είναι πολύ γενικές και μάλιστα σε παίγνια δύο παικτών ορίζονται ως εξής: λέμε ότι για τη στρατηγική k_i του παίκτη 1

- κυριαρχεί της στρατηγικής του k_j αν $u_1(k_i, l) \geq u_1(k_j, l)$, για οποιαδήποτε στρατηγική l του παίκτη 2,

- κυριαρχεί αυστηρά της στρατηγικής του k_j αν $u_1(k_i, l) > u_1(k_j, l)$, για οποιαδήποτε στρατηγική l του παίκτη 2.

Ο τρόπος που ορίζονται οι κυρίαρχες και αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές για τον παίκτη 2 είναι ανάλογος. Με αυτόν τον τρόπο αν μία στρατηγική ενός παίκτη αποδίδει καλύτερα από μία άλλη του ίδιου παίκτη για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο αντίπαλος του τότε λέμε ότι η στρατηγική αυτή κυριαρχεί αυστηρά έναντι της άλλης. Αυτό το σκεπτικό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η υποδεέστερη στρατηγική δεν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί από τον συγκεκριμένο παίκτη, κάτι που μας επιτρέπει να απαλείψουμε την υποδεέστερη στρατηγική από τον πίνακα πληρωμών του. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι γνωστή και ως μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο μάλιστα οδηγηθήκαμε στη λύση του παιγνίου για την περιοδεία των δύο πολιτικών που εξετάστηκε στο κεφάλαιο 3.2 .

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε λύση του παιγνίου που προκύπτει με τη μέθοδο της απαλοιφής των υποδεέστερων στρατηγικών, ονομάζεται λύση ή “αξία” του παιγνίου (value of the game). Λύση του παιγνίου όμως δεν ονομάζονται μόνο οι σπάνιες καταστάσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο της απαλοιφής των κυριαρχημένων στρατηγικών, αλλά και λύσεις που προκύπτουν όταν έχουμε ένα σημείο ισορροπίας σε ένα παίγνιο. Γενικά στη θεωρία παιγνίων ισορροπία ορίζεται ως ένα σταθερό αποτέλεσμα (stable outcome) το οποίο βασίζεται στις απολαβές που λαμβάνουν οι παίκτες μετά την ολοκλήρωση του παιγνίου. Το αποτέλεσμα αυτό καλείται σταθερό διότι αν οι παίκτες φτάσουν σε ένα σημείο ισορροπίας ως προς τις απολαβές που ενδέχεται να λάβουν, τότε κανένας τους δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μέσα από κάποια άλλη στρατηγική από αυτό το σημείο. Έτσι λοιπόν προκύπτει μία σημαντική κατηγορία λύσεων, οι οποίες φέρουν το όνομα “ισορροπία κατά Nash”.

Ορισμός 3.5 - Για παίγνια δύο παικτών τέτοιου είδους λύσεις ορίζονται ως εξής:

Αν u_1 συνάρτηση χρησιμότητας (utility function) του παίκτη 1, u_2 η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη 2 και $S_1 = \{k_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ το πεπερασμένο σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 και $S_2 = \{l_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$ το πεπερασμένο σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 2 τότε το ζεύγος στρατηγικών (διάνυσμα στρατηγικής) (k_i^*, l_j^*), για συγκεκριμένο i και j, είναι ισορροπία κατά Nash αν:

i. $u_1(k_i^*, l_j^*) \geq u_1(k, l_j^*)$ για κάθε $k \in S_1$ και

ii. $u_2(k_i^*, l_j^*) \geq u_2(k_i^*, l)$ για κάθε $l \in S_2$.

Με άλλα λόγια, ισορροπία κατά Nash είναι ένα διάνυσμα στρατηγικής το οποίο κανένας παίκτης από τους δύο που συμμετέχουν στο παίγνιο δεν έχει σκοπό να εγκαταλείψει δεδομένου ότι ο αντίπαλός του έχει ακολουθήσει τη συγκεκριμένη στρατηγική.

Έχοντας ορίσει τις έννοιες κυρίαρχη και αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και ισορροπία κατά Nash, επανεξετάζουμε το παίγνιο της προηγούμενης ενότητας (3.4) δηλαδή του διλλήματος του φυλακισμένου.

	Κρατούμενος 2		
	Στρατηγική	**Ομολογία**	**Άρνηση**
Κρατούμενος 1	**Ομολογία**	(-5,-5)	(0,-10)
	Άρνηση	(-10,0)	(-1,-1)

Πίνακας 3.4 - Πίνακας Πληρωμών: ΤΟ ΔΙΛΛΗΜΑ ΤΟΥ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΟΥ

Σύμφωνα με τους ορισμούς που διατυπώθηκαν παραπάνω, παρατηρείται ότι η στρατηγική "ομολογία" είναι αυστηρά κυρίαρχη για κάθε έναν από τους δύο παίκτες-κρατούμενους. Πράγματι, όταν ο κρατούμενος 2 επιλέξει να ομολογήσει για το έγκλημά του στο δικαστήριο, τότε ο κρατούμενος 1 έχει όφελος -5 αν ομολογήσει και αυτός (δηλαδή ποινή φυλάκισης πέντε χρόνων), ενώ αν ο κρατούμενος 1 δηλώσει άρνηση τότε έχει όφελος -10, δηλαδή θα έρθει αντιμέτωπος με ποινή φυλάκισης δέκα ετών. Επίσης αν ο κρατούμενος 2 δηλώσει άρνηση, τότε ο κρατούμενος 1 έχει όφελος 0 (αφήνεται ελεύθερος) αν προβεί σε ομολογία και -1 (ένα χρόνο φυλάκισης) αν επιλέξει τη στρατηγική "άρνηση". Επομένως η στρατηγική **"ομολογία"** όπως υποδηλώνεται και από τα παραπάνω είναι **αυστηρά κυρίαρχη** για τον κρατούμενο 1. Ομοίως για τον κρατούμενο 2, αλλάζοντας τους ρόλους στον παραπάνω πίνακα πληρωμών και λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει ο πίνακας, αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και για αυτόν είναι η στρατηγική "ομολογία".

Επιπρόσθετα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι δύο κρατούμενοι δεν έχουν την δυνατότητα επικοινωνίας και συνεννόησης και ότι και οι δύο πρέπει να επιλέξουν τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν ταυτόχρονα, η ορθολογική σκέψη για τη βέλτιστη επιλογή στρατηγικής θα οδηγήσει και τους δύο κρατούμενους στην επιλογή της αυστηρά κυρίαρχης στρατηγικής τους, δηλαδή και οι δύο να προβούν σε ομολογία ενώπιον του δικαστηρίου. Συνεπώς, και οι δύο κρατούμενοι θα ομολογήσουν το έγκλημά τους και αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα τη φυλάκιση αμφότερων από πέντε χρόνια, αντί να δηλώσουν “άρνηση” και να καταδικαστούν και οι δύο σε μονοετή κάθειρξη. Αυτή είναι και η μοναδική **ισορροπία κατά Nash** του παιγνίου και το ζεύγος (-5,-5) δεν αντιστοιχεί σε ισορροπία κατά Nash στον πίνακα πληρωμών του Διλλήματος του Φυλακισμένου.

3.6 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ MAXIMIN ΚΑΙ MINIMAX ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 3.2)

Για να εξετάσουμε και να αναλύσουμε τις στρατηγικές **maximin** και **minimax** θα χρησιμοποιήσουμε μία παραλλαγή του παιγνίου με τις περιοδείες των δύο πολιτικών, το οποίο εξετάστηκε στην ενότητα 3.2 . Έστω ότι οι καταχωρήσεις στον πίνακα πληρωμών για το παίγνιο ήταν οι παρακάτω:

		ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β		
	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	**B_1**	**B_2**	**B_3**
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	**A_1**	-3	-2	6
	A_2	2	0	2
	A_3	5	-2	-4

Πίνακας 3.6.1-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών (παραλλαγή καταχωρήσεων για κριτήριο minimax)

Βλέποντας τον πίνακα πληρωμών γίνεται εύκολα προφανές πως στο παραπάνω παίγνιο δεν υπάρχουν κυρίαρχες στρατηγικές, και έτσι δεν είναι προφανές για τον κάθε παίκτη-πολιτικό τι πρέπει να κάνει, ως προς την επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής. Ας ξεκινήσουμε εξετάζοντας το παίγνιο από την πλευρά του παίκτη-πολιτικού Α. Ο πολιτικός Α επιλέγοντας την στρατηγική A_1 θα μπορούσε να κερδίσει μέχρι 6 και να χάσει μέχρι 3. Ωστόσο επειδή ο πολιτικός Β σκέφτεται ορθολογικά, θα επιλέξει μία στρατηγική βάσει της οποίας θα προστατεύει τον εαυτό του από μεγάλες απώλειες και άρα απολαβές για τον πολιτικό Α, για αυτό και θα επιλέξει την στρατηγική του B_1 η οποία φαίνεται πιθανό ότι μπορεί να προκαλέσει απώλειες στον αντίπαλο του. Με το ίδιο σκεπτικό, αν ο πολιτικός Α επιλέξει τη στρατηγική A_3 τότε αυτή μπορεί να του επιφέρει κέρδη μέχρι και 4 μονάδες, παράλληλα όμως ο αντίπαλος του ορθολογικά σκεπτόμενος θα επιλέξει μια στρατηγική που θα επιφέρει στον πολιτικό Α απώλειες μέχρι και 4 μονάδες (B_3).

Από την άλλη πλευρά, αν ο πολιτικός Α επιλέξει τη στρατηγική A_2, τότε είναι σίγουρος ότι δεν πρόκειται να έχει κάποιας μορφής απώλεια από τον αντίπαλο του, ενώ μάλιστα θα μπορούσε να έχει και κάποιο κέρδος (2 μονάδων). Επομένως, επειδή η στρατηγική A_2 αποτελεί για τον πολιτικό Α την πιο εγγυημένη επιλογή, άρα θα πρέπει να καταλήξει σε αυτή, ενάντια σε οποιαδήποτε "λογική" επιλογή του αντιπάλου του. Ο συλλογισμός που προηγήθηκε υποθέτει ότι και οι δύο παίκτες-πολιτικοί είναι αντίθετοι στο να ρισκάρουν να έχουν μεγαλύτερες απώλειες από τις απαραίτητες, σε αντίθεση με άλλους παίκτες παιγνίων που για να έχουν μεγαλύτερες απολαβές ρισκάρουν παίζοντας μεγαλύτερες αποδόσεις (odds).

Ας εξετάσουμε τώρα το παίγνιο από την πλευρά του πολιτικού Β. Θα μπορούσε να χάσει μέχρι και 5 ή 6 μονάδες επιλέγοντας την στρατηγική B_1 και B_3 αντίστοιχα ενώ παράλληλα και για αυτόν η εγγυημένη επιλογή αποτελεί η στρατηγική B_2. Αν και οι δύο παίκτες-πολιτικοί επιλέξουν τη δεύτερη στρατηγική τους (A_2, B_2) τότε και οι δύο θα βρεθούν σε ένα σημείο που ονομάζεται **"break-even point"** και είναι το σημείο ανάμεσα στο να έχει κάποιος παίκτης κέρδη ή απώλειες. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση κανένας από τους δύο παίκτες δε βελτιώνει την καλύτερη επιλογή του αλλά τουλάχιστον τόσο ο ένας όσο και ο άλλος ωθούν τον αντίπαλο τους στην ίδια θέση. Ακόμα και αν κάποιος παίκτης συμπεράνει τη στρατηγική του αντιπάλου, αυτή την πληροφορία δεν μπορεί να τη χρησιμοποιήσει για να βελτιώσει τη θέση του. Επομένως οδηγούμαστε σε αδιέξοδο.

	ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β					
	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	B_1	B_2	B_3	Minimum	
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	A_1	-3	-2	6	-3	
	A_2	2	0	2	**0**	Maximin
	A_3	5	-2	-4	-2	
	Maximum	5	**0**	6		
			Minimax			

Πίνακας 3.6.2-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών με maximum και minimum τιμές για σειρές και στήλες

Αυτό που προκύπτει από τον παραπάνω τρόπο σκέψης είναι ότι κάθε παίκτης-πολιτικός θα πρέπει να επιλέξει τη στρατηγική του με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιούνται οι μέγιστες απώλειές του. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται **κριτήριο minimax**, και είναι ένα πρότυπο κριτήριο το οποίο χρησιμοποιείται στη Θεωρία Παιγνίων για την επιλογή μιας στρατηγικής. Στην πραγματικότητα, το κριτήριο αυτό μας προτρέπει να επιλέξουμε μία στρατηγική η οποία θα συνέχιζε να είναι η ιδανικότερη ακόμα και αν ο αντίπαλος μας ήξερε ποια στρατηγική θα επιλέξουμε, πριν αυτός πραγματοποιήσει τη δικιά του επιλογή. Όσων αφορά τον πίνακα πληρωμών, η παραπάνω θέση υπονοεί ότι ο πολιτικός Α επιλέγει, εκείνη τη στρατηγική που θα του δώσει το μεγαλύτερο από τα ελάχιστα των σειρών (maximin τιμή) και ο πολιτικός Β επιλέγει εκείνη τη στρατηγική που θα του δώσει το ελάχιστο από τα μέγιστα των στηλών (minimax τιμή). Μάλιστα από τη στιγμή που στο συγκεκριμένο παίγνιο οι προκύπτουσες minimax και maximin τιμές ισούνται και οι δύο με μηδέν, τότε λέμε ότι το παίγνιο είναι δίκαιο. Η maximin τιμή ονομάζεται κατώτερη και η minimax ανώτερη τιμή του παιγνίου. Όταν οι δύο αυτές τιμές ταυτίζονται, όπως στο παράδειγμά μας, τότε το παίγνιο έχει λύση με αμιγείς στρατηγικές (κατάσταση στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις διαθέσιμες στρατηγικές του με πιθανότητα ίση με τη μονάδα) και η λύση είναι σταθερή (stable), δηλαδή υπάρχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας που δίνει την τιμή του παιγνίου.

Σε περιπτώσεις όπως στην προαναφερθείσα, η εκχώρηση στον πίνακα πληρωμών, που προκαλεί την ισότητα της maximin και minimax τιμής ονομάζεται σημείο «σέλας» ή «σάγματος» του παιγνίου (saddle point of game). Γενικά σε ένα παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος έχουμε ότι:

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} aij \leq \min_{j \leq n} \max_{i \leq m} aij.$$

Αν οι τιμές maximin και minimax είναι ίσες τότε:

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} aij = \min_{j \leq n} \max_{i \leq m} aij = V$$

Όπου V καλείται η "τιμή-αξία του παιγνίου" (value of the game).

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη σημείου "σέλας" ή "σάγματος" (saddle point) είναι η ύπαρξη εκχώρησης στον πίνακα πληρωμών του παιγνίου, η οποία είναι ταυτόχρονα η ελάχιστη εκχώρηση της γραμμής και η μέγιστη εκχώρηση της στήλης στην οποία ανήκει. Ένα παίγνιο μπορεί να παρουσιάζει στον πίνακα πληρωμών του περισσότερα από ένα saddle points, όλα όμως πρέπει να έχουν την ίδια τιμή.

Στην παρακάτω παραλλαγή του παραδείγματος της ενότητας 3.2 θα εξεταστεί ένα παίγνιο το οποίο δεν παρουσιάζει κάποιο σημείο "σέλας" στον πίνακα πληρωμών του. Σε αντίστοιχες περιπτώσεις απαιτείται μία πιο ιδιαίτερη και πολύπλοκη ανάλυση του παιγνίου. Επιστρέφοντας στο παράδειγμά μας, οι τελευταίες εξελίξεις στις πολιτικές εκστρατείες των δύο πολιτικών υποδεικνύουν τον παρακάτω πίνακα πληρωμών για τον πολιτικό Α:

	ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Β					
ΠΟΛΙΤΙΚΟΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	B_1	B_2	B_3	Minimum	
	A_1	0	-2	2	**-2**	**Maximin**
	A_2	5	4	-3	-3	
	A_3	2	3	-4	-4	
	Maximum	5	4	**2**		
				Minimax		

Πίνακας 3.6.3-Πίνακας πληρωμών πολιτικού Α για το πρόβλημα της περιοδείας δύο πολιτικών με maximum και minimum τιμές για σειρές και στήλες

Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο παίκτες-πολιτικοί προσπαθούν να εφαρμόσουν το κριτήριο minimax με παρόμοιο τρόπο όπως στην πρώτη παραλλαγή του παραδείγματος της ενότητας 3.2 . Με αυτόν τον τρόπο ο παίκτης-πολιτικός Α μπορεί να είναι βέβαιος ότι δεν θα έχει απώλειες μεγαλύτερες από 2 μονάδες επιλέγοντας την στρατηγική A_1. Ομοίως ο παίκτης-πολιτικός Β μπορεί να είναι σίγουρος ότι δε θα έχει απώλειες μεγαλύτερες των 2 μονάδων επιλέγοντας την στρατηγική B_3. Ωστόσο, παρατηρώντας τον πίνακα πληρωμών 3.6.3 βλέπουμε ότι οι τιμές maximin (-2) και minimax (2) δεν συμπίπτουν, με αποτέλεσμα να μην έχουμε σημείο “σέλας”. Το ερώτημα που προκύπτει από την παραπάνω διαπίστωση είναι το ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αν και οι δύο παίκτες-πολιτικοί σκοπεύουν να κινηθούν σύμφωνα με τις στρατηγικές που αναλύθηκαν παραπάνω.

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι ο πολιτικός Α χρησιμοποιώντας τη στρατηγική A_1 θα κερδίσει 2 μονάδες από τον αντίπαλό του, μία κατάσταση που σίγουρα θα δυσαρεστούσε τον πολιτικό Β. Επειδή ο πολιτικός Β σκέφτεται ορθολογικά και μπορεί να προβλέψει το παραπάνω αποτέλεσμα, θα καταλήξει στην επιλογή της στρατηγικής B_2 η οποία και μπορεί να του αποφέρει καλύτερο αποτέλεσμα (κέρδος 2 μονάδων αντί για απώλεια 2 μονάδων). Επειδή όμως και ο πολιτικός Α σκέφτεται και αυτός ορθολογικά, θα περιμένει αυτή την αλλαγή στρατηγικής του πολιτικού Β και έτσι με σκοπό τη βελτίωση της θέσης του από απώλειες 2 μονάδων σε κέρδος 4 μονάδων θα επιλέξει τη στρατηγική A_2. Συνειδητοποιώντας όμως αυτή την κίνηση του πολιτικού Α, ο πολιτικός Β θα εξετάσει την επιστροφή του στη στρατηγική Β3 για να μετατρέψει την πιθανή απώλεια 4 μονάδων σε κέρδος 3. Αυτή η πιθανότητα αλλαγής στρατηγικής για τον πολιτικό Β θα προκαλέσει την εκ νέου επιστροφή του πολιτικού Α στη στρατηγική A_1, κάτι το οποίο θα οδηγήσει στην επανέναρξη του κύκλου που προαναφέρθηκε.

Συμπερασματικά, παρόλο που το παίγνιό μας παίζεται μόνο μια φορά, οποιαδήποτε προσωρινή επιλογή στρατηγικής δίνει το δικαίωμα σε κάθε παίκτη-πολιτικό να επανεξετάσει αυτή την επιλογή του, είτε με κίνητρο να επωφεληθεί έναντι του αντιπάλου του είτε με σκοπό να αποτρέψει τον αντίπαλο του από το να επωφεληθεί από αυτόν. Εν ολίγοις, η αρχικά προτεινόμενη λύση, η οποία υποδείκνυε την επιλογή της στρατηγικής A_1 από τον πολιτικό Α και την επιλογή της στρατηγικής B_3 από τον πολιτικό Β, είναι μία ασταθής λύση (unstable solution), κάνοντας με αυτόν τον τρόπο αναγκαία την ανάπτυξη μιας περισσότερο ικανοποιητικής λύσης για το παίγνιο. Το ερώτημα που προκύπτει φυσικά από τα παραπάνω είναι τι είδους λύση θα ήταν ικανοποιητική σε τέτοιες περιπτώσεις.

Το σημείο “κλειδί” για την εύρεση αυτής της λύσης είναι το γεγονός ότι όταν η στρατηγική του ενός από τους δύο παίκτες του παιγνίου είναι προβλέψιμη, τότε ο αντίπαλος του μπορεί να επωφεληθεί από τη συγκεκριμένη πληροφορία και με αυτόν τον τρόπο να βελτιώσει τη θέση του. Επομένως, βασικό χαρακτηριστικό ενός ορθολογικού σχεδίου για την περάτωση ενός τέτοιου παιγνίου όπως αυτό που προαναφέρθηκε είναι το ότι κανένας από τους δύο παίκτες δε θα έπρεπε να μπορεί να συμπεράνει την στρατηγική του αντιπάλου του. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αντί να έχουμε την εφαρμογή κάποιου κριτηρίου από αυτά που προαναφέρθηκαν, το οποίο και θα καθόριζε την επιλογή μίας και μόνο στρατηγικής, η τυχαία επιλογή ανάμεσα στις διαθέσιμες εναλλακτικές στρατηγικές που μπορεί να διαθέτει ο κάθε παίκτης κρίνεται ως προτιμότερη. Με αυτόν τον τρόπο, κανένας από τους δύο παίκτες του παιγνίου δε θα μπορεί να γνωρίζει εκ των προτέρων ούτε ποια από τις διαθέσιμες στρατηγικές του μπορεί να επιλεχτεί αλλά ούτε και ποια στρατηγική θα επιλέξει ο αντίπαλός του. Ένας τέτοιος τρόπος σκέψης φαντάζει ορθολογικός για την αντιμετώπιση παιγνίων που δεν εμφανίζουν κάποιο σημείο “σέλας” (saddle point). Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα αναλυθούν εκτενέστερα οι τρόποι αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων.

4. ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΜΙΚΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Όταν ένα παίγνιο δε έχει κάποιο σαγματικό σημείο ή σημείο “σέλας”, τότε κάθε παίκτης είναι υποχρεωμένος να ορίσει ένα διάνυσμα πιθανοτήτων για το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών του. Εκφράζοντας μαθηματικά την παραπάνω πρόταση, έστω ότι:

$$x_i = \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ o\ \pi\alpha\acute{\iota}\kappa\tau\eta\varsigma\ 1\ \nu\alpha\ \chi\rho\eta\sigma\iota\mu o\pi o\iota\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \sigma\tau\rho\alpha\tau\eta\gamma\iota\kappa\acute{\eta}\ i$$

$$(i = 1, 2\ , \dots , m),$$

$$y_j = \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ o\ \pi\alpha\acute{\iota}\kappa\tau\eta\varsigma\ 2\ \nu\alpha\ \chi\rho\eta\sigma\iota\mu o\pi o\iota\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\ \tau\eta\ \sigma\tau\rho\alpha\tau\eta\gamma\iota\kappa\acute{\eta}\ j$$

$$(j = 1, 2\ , \dots , n),$$

όπου m και n είναι ο αντίστοιχος αριθμός των διαθέσιμων στρατηγικών του κάθε παίκτη. Έτσι ο παίκτης 1 θα καθορίσει τον τρόπο παιχνιδιού του αναθέτοντας τιμές στις μεταβλητές x_1, x_2,..., x_m. Επειδή όμως αυτές οι τιμές θα είναι τιμές πιθανοτήτων, θα πρέπει να είναι μη αρνητικοί αριθμοί ενώ παράλληλα το άθροισμα όλων των τιμών θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Ομοίως, ο παίκτης 2 θα καθορίσει τον τρόπο παιχνιδιού του δίνοντας τιμές στις μεταβλητές $y_1, y_2, \dots , y_n$. Αυτά τα διανύσματα πιθανοτήτων $(x_1$, x_2,..., $x_m)$ και $(y_1, y_2, \dots , y_n)$ αναφέρονται συνήθως στη θεωρία παιγνίων ως **μικτές στρατηγικές**, ενώ οι αρχικές στρατηγικές του κάθε παίκτη καλούνται ως **καθαρές στρατηγικές**. Ωστόσο, κατά την έναρξη του παιγνίου αυτή η καθαρή στρατηγική θα πρέπει να επιλεγεί με κάποιο τυχαίο τρόπο σύμφωνα με την κατανομή πιθανοτήτων που έχει ήδη ορίσει ο παίκτης (δηλαδή σύμφωνα με την πιθανότητα που έχει δηλωθεί στο διάνυσμα πιθανοτήτων για κάθε καθαρή στρατηγική). Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι μια μεικτή στρατηγική $(x_1$, x_2,..., $x_m)$ με κάποιο $x_i = 1$ υποδεικνύει ότι εφαρμόζεται η καθαρή στρατηγική i με πιθανότητα ίση με τη μονάδα.

4.2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ MINIMAX ΓΙΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Όταν η αντιμετώπιση ενός παιγνίου υποδεικνύει τη χρήση μικτών στρατηγικών, τότε σύμφωνα με το κριτήριο minimax κάθε παίκτης του παιγνίου διαθέτει μία βέλτιστη μικτή στρατηγική, η οποία και οδηγεί το παίγνιο σε κάποιο σημείο ισορροπίας (σημείο σάγματος ή σημείο "σέλας"), από το οποίο και κανένας παίκτης του παιγνίου δε θέλει να μετακινηθεί, καθώς δεν μπορεί να βελτιώσει περισσότερο τη θέση του. Αν $V(παίκτης\ 1)$ το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη 1 και $V(παίκτης\ 2)$ η αναμενόμενη ζημιά του παίκτη 2, τότε $V(παίκτης\ 1) = V(παίκτης\ 2) = V$ το σημείο ισορροπίας για τις βέλτιστες μεικτές στρατηγικές και :

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j \text{ η αναμενόμενη τιμή του παιγνίου,}$$

όπου p_{ij} η απόδοση του παιγνίου αν ο παίκτης 1 χρησιμοποιήσει την καθαρή στρατηγική i και ο παίκτης 2 χρησιμοποιήσει αντίστοιχα την καθαρή στρατηγική j.

Για την καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω, δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα ενός παιγνίου που παίζεται από τους παίκτες Α και Β, με $\{L, R\}$ το σύνολο στρατηγικών του παίκτη Α και $\{U, D\}$ το σύνολο στρατηγικών του παίκτη Β. Ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου είναι ο ακόλουθος:

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β			
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	**Στρατηγική**	**U**	**D**	**MIN**
	L	-1	7	-1
	R	6	2	2
	MAX	6	7	2≠6

Πίνακας 4.2 - Πίνακας Πληρωμών παραδείγματος για εντοπισμό μικτής στρατηγικής

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί από τον παραπάνω πίνακα πληρωμών, δεν υπάρχει κάποιο σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές. Στην συνέχεια προχωράμε στον ορισμό των πιθανοτήτων χρήσης της κάθε στρατηγικής από τον αντίστοιχο παίκτη:

- α η πιθανότητα ο παίκτης A να ακολουθήσει τη στρατηγική L
- $(1-\alpha)$ η πιθανότητα ο παίκτης A να ακολουθήσει τη στρατηγική R
- β η πιθανότητα ο παίκτης B να ακολουθήσει τη στρατηγική U
- $(1-\beta)$ η πιθανότητα ο παίκτης B να ακολουθήσει τη στρατηγική D

Ο εντοπισμός της βέλτιστης μεικτής στρατηγικής για τον παίκτη A γίνεται ως εξής: πρώτα γίνεται ο υπολογισμός των αναμενόμενων πληρωμών για τον παίκτη A, $V(A,U)$ και $V(A,D)$ όταν ο παίκτης B εφαρμόζει οποιαδήποτε από τις δύο διαθέσιμες καθαρές στρατηγικές του U και D. Στη συνέχεια προχωρούμε στην εξίσωση των αναμενόμενων πληρωμών του παίκτη A($V(A,U) = V(A,D)$), αφού ο ίδιος επιθυμεί το προσδοκώμενο κέρδος του να είναι ανεξάρτητο από την στρατηγική που θα επιλέξει ο αντίπαλος του. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε την πιθανότητα α (άρα και την $(1-\alpha)$).

$$V(A,U) = -1\alpha + 6(1-\alpha)$$

$$V(A,D) = 7\alpha + 2(1-\alpha)$$

$$V(A,U) = V(A,D) \Rightarrow -1\alpha + 6(1-\alpha) = 7\alpha + 2(1-\alpha) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\ \kappa\alpha\iota\ (1-\alpha) = \frac{2}{3}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο παίκτης A θα πρέπει να ακολουθήσει τη στρατηγική L με πιθανότητα $\alpha = 1/3$ και τη στρατηγική R με πιθανότητα $(1-\alpha) = 2/3$. Το προσδοκώμενο κέρδος για τον παίκτη A είναι ίσο με $V(A)$ =--1·1/3+6·2/3=7·1/3+2·2/3=11/3 , κάτι το οποίο προκύπτει από την αντικατάσταση των α και $(1-\alpha)$ στην $V(A,U)$ ή στην $V(A,D)$. Το προσδοκώμενο αυτό κέρδος είναι ανεξάρτητο από την μεικτή στρατηγική που θα επιλέξει ο παίκτης B. Αν για παράδειγμα ο παίκτης B επιλέξει να ακολουθήσει την τυχαία μεικτή στρατηγική με $\beta = 1/4$ και $(1-\beta) = 4/5$ για τις καθαρές στρατηγικές του U και D αντίστοιχα τότε το προσδοκώμενο κέρδος για τον παίκτη A θα είναι πάλι

$$V(A) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(-1 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5}(7 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}) = 11/3$$

Για τον εντοπισμό της βέλτιστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Β ακολουθούμε παρόμοια τακτική: πρώτα και εδώ γίνεται ο υπολογισμός των αναμενόμενων πληρωμών για τον παίκτη Β, $V(L,B)$ και $V(R,B)$ όταν ο παίκτης Α εφαρμόζει οποιαδήποτε από τις δύο διαθέσιμες καθαρές στρατηγικές του L και R. Στη συνέχεια προχωρούμε στην εξίσωση των αναμενόμενων πληρωμών του παίκτη Β ($V(L,B) = V(R,B)$) με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την επικείμενη ζημιά. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε την πιθανότητα β (άρα και την $(1-\beta)$).

$$V(L,B) = -1\beta + 7(1-\beta)$$

$$V(R,B) = 6\beta + 2(1-\beta)$$

$$V(L,B) = V(R,B) \Rightarrow -1\beta + 7(1-\beta) = 6\beta + 2(1-\beta) \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{5}{12} \; \kappa\alpha\iota \; (1-\beta) = \frac{7}{12}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο παίκτης Β θα πρέπει να ακολουθήσει τη στρατηγική U με πιθανότητα $\beta = 5/12$ και τη στρατηγική D με πιθανότητα $(1-\beta) = 7/12$. Η αναμενόμενη ζημιά για τον παίκτη Β είναι ίση με $V(B)$ =-1·5/12+7·7/12=6·5/12+2·7/12=11/3 , κάτι το οποίο προκύπτει από την αντικατάσταση των β και $(1-\beta)$ στην $V(L,B)$ ή στην $V(R,B)$. Η προσδοκώμενη αυτή ζημιά είναι ανεξάρτητη της μεικτής στρατηγικής που θα χρησιμοποιήσει ο παίκτης Α.

Συνοψίζοντας, μακροπρόθεσμα αν το παίγνιο επαναληφθεί πολλές φορές, τότε κάθε 12 επαναλήψεις του παιγνίου ο παίκτης Α θα χρησιμοποιήσει 4 φορές τη στρατηγική L και 8 φορές τη στρατηγική R. Αντίστοιχα για τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων του παιγνίου ο παίκτης Β θα επιλέξει τη στρατηγική U 5 φορές και τη στρατηγική D 7 φορές. Η τιμή V του παιγνίου δε συνεπάγεται ότι κάθε φορά που θα παίζεται το παίγνιο ο παίκτης Α θα έχει κέρδος 11/3 ενώ ο παίκτης Β απώλειες 11/3. Όπως αναφέρθηκε και στα παραπάνω η τιμή αυτή αφορά μια μακροπρόθεσμη πρόβλεψη σχετικά με τα κέρδη και τις απώλειες των παικτών του παιγνίου ύστερα από μία σειρά επαναλήψεων του.

4.3 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ ΜΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Ο πίνακας πληρωμών 4.3 μας παρουσιάζει ένα παίγνιο "πρόνοιας" το οποίο και πρόκειται να μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα. Η κατάσταση "Άνεργος" αντιπροσωπεύει έναν άπορο πολίτη που προσπαθεί να βρει δουλειά, ενώ η κατάσταση "Άεργος" έναν άπορο πολίτη που δεν προσπαθεί να βρει κάποια δουλειά. Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα πληρωμών του παιγνίου, κανένας από τους δύο παίκτες του παιγνίου δε διαθέτει κάποια κυρίαρχη στρατηγική ενώ παράλληλα με μία σύντομη εξέταση του πίνακα μπορεί κάποιος εύκολα να συμπεράνει ότι δεν παρουσιάζεται κάποια ισορροπία κατά Nash ανάμεσα στις καθαρές στρατηγικές των δύο πλευρών.

	ΑΠΟΡΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ		
ΚΥΒΕΡΝΗΣΗ	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	Άνεργος $(\boldsymbol{b})$	Άεργος $(\mathbf{1}-\boldsymbol{b})$
	Παροχές $(\boldsymbol{a})$	(3,2)	(-1,3)
	Καμία Παροχή $(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})$	(-1,1)	(0,0)

Πίνακας 4.3 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου "Πρόνοιας"

Κάθε στρατηγικό προφίλ πρέπει να εξεταστεί προσεκτικά για τυχόν ύπαρξη ισορροπίας κατά Nash:

1. Το προφίλ στρατηγικής (Παροχές, Άνεργος) δεν είναι ισορροπία κατά Nash, επειδή ο Άπορος πολίτης θα κατέφευγε στη στρατηγική "Άεργος" αν η Κυβέρνηση έκανε Παροχές.
2. Το προφίλ στρατηγικής (Παροχές, Άεργος) δεν είναι ισορροπία κατά Nash αφού η κυβέρνηση θα κατέφευγε στη στρατηγική της "Καμίας Παροχής".
3. Το προφίλ στρατηγικής (Καμία Παροχή, Άεργος) δεν είναι ισορροπία κατά Nash, αφού ο Άπορος Πολίτης μπορεί να στραφεί στην στρατηγική "Άνεργος".
4. Το προφίλ στρατηγικής (Καμία Παροχή, Άνεργος) δεν είναι ισορροπία κατά Nash, αφού η Κυβέρνηση θα κατέφευγε στη στρατηγική "Παροχές" και έτσι θα επιστρέφαμε πάλι στην κατάσταση 1.

Το συγκεκριμένο παίγνιο δε διαθέτει κάποια μικτής στρατηγικής ισορροπία κατά Nash έτσι ώστε να μπορούμε να την υπολογίσουμε. Τα κέρδη των παικτών του παιγνίου είναι οι αναμενόμενες πληρωμές(ή απώλειες) που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα πληρωμών. Αν η Κυβέρνηση επιλέξει τη στρατηγική των παροχών με πιθανότητα ίση με a την ώρα που ο Άπορος Πολίτης διαλέγει αυτή του ανέργου με πιθανότητα ίση με b, τότε το αναμενόμενο κέρδος της Κυβέρνησης είναι:

$$\begin{aligned} V_{Κυβέρνησης} &= a[3b + (-1)(1-b)] + [1-a][-1b + 0(1-b)] \\ &= a[3b - 1 + b] - b + ab \\ &= a[5b - 1] - b. \end{aligned}$$

Δεδομένης της στρατηγικής ισορροπίας του "Άπορου Πολίτη", η "Κυβέρνηση" είναι αδιάφορη μεταξύ του να χρησιμοποιήσει οποιαδήποτε από τις δύο διαθέσιμες στρατηγικές της ("Παροχές" ,"Καμία Παροχή"). Δηλαδή:

$$V(Κυβέρνησης, Άνεργος) = V(Κυβέρνησης, Άεργος)$$

Η παραπάνω ισότητα μας δίνει δύο εξισώσεις με έναν άγνωστο (το b), και αυτό που θα βρούμε θα είναι η κατανομή πιθανότητας για τον "Άπορο Πολίτη".

$$3b + (-1)(1-b) = -1b + 0(1-b) \Rightarrow$$
$$b = \frac{1}{5} = 0.2$$

Έτσι βρήκαμε ότι ο "Άπορος Πολίτης" θα δηλώσει "Άνεργος" με πιθανότητα ίση με $b = 0.2$ και "Άεργος" με πιθανότητα ίση με $(1-b) = 0.8$. Για να βρούμε την πιθανότητα η "Κυβέρνηση" να προχωρήσει στην πολιτική των παροχών θα πρέπει να στραφούμε στη συνάρτηση κέρδους για τον "Άπορο Πολίτη" και εκ νέου να εφαρμόσουμε την Αρχή της εξίσωσης των κερδών, σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία.

$$V_{Άπορος\ Πολίτης} = b[2a + (1-a)] + (1-b)[3a + 0(1-a)] \Rightarrow$$
$$= b(2a - a + 1) + (1-b)3a \Rightarrow$$
$$= b(1-2a) + 3a$$

$\underline{Αρχή\ της\ εξίσωσης\ των\ κερδών}$:

$$V(Παροχές, Άπορος\ Πολίτης) = V(Καμία\ Παροχή, Άπορος\ Πολίτης)$$
$$2a + (1-a) = 3a + 0(1-a) \Rightarrow$$
$$a = \frac{1}{2} = 0.5$$

Έτσι υπολογίσαμε ότι η πιθανότητα η Κυβέρνηση να ακολουθήσει τη στρατηγική παροχές είναι 50%, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι στρατηγικές "Παροχές" και "Καμία Παροχή" είναι ισοπίθανες ($a = 0.5, 1-a = 0.5$). Επομένως τα αναμενόμενα κέρδη/απώλειες για την "Κυβέρνηση" και τον "Άπορο Πολίτη", που προκύπτουν από την αντικατάσταση των a και b στις αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους $V_{Κυβέρνησης}$ και $V_{Άπορος\ Πολίτης}$ είναι:

$$V_{Κυβέρνησης} = a[5b-1]-b = 0.5(5\cdot 0.2-1)-0.2 = -0.2$$
$$και$$
$$V_{Άπορος\ Πολίτης} = b(1-2a)+3a = 0.2(1-2\cdot 0.5)+3\cdot 0.5 = 1.5$$

4.4 ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Η χρήση μικτών στρατηγικών δεν είναι τόσο ευκολονόητη όσο αυτή των καθαρών στρατηγικών, γι' αυτό το λόγο και πολλοί μαθηματικοί προτιμούν να περιορίζονται στη χρήση ισορροπίας καθαρών στρατηγικών. Ένα από τα μειονεκτήματα των μικτών στρατηγικών είναι ότι στην πραγματική ζωή, οι άνθρωποι τις περισσότερες φορές δεν αποφασίζουν ή λειτουργούν με γνώμονα την τύχη. Παρόλα αυτά, η παραπάνω θέση δεν αποτελεί αναγκαστικά μειονέκτημα της χρήσης ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές, αφού ουσιαστικά ένα αντιπροσωπευτικό μοντέλο με μεικτές στρατηγικές, προϋποθέτει οι διάφορες ενέργειες να εμφανίζονται τυχαία στους παρατηρητές, ακόμα και όταν ο ίδιος ο παίκτης είναι βέβαιος για τη στρατηγική που πρόκειται να ακολουθήσει.

Ένας πιο ανησυχητικός προβληματισμός πάνω στο συγκεκριμένο ζήτημα είναι το ότι ο παίκτης που επιλέγει να χρησιμοποιήσει μία μικτή στρατηγική είναι πάντα αδιάφορος ανάμεσα σε δύο αμιγείς ή καθαρές στρατηγικές. Στο παίγνιο της "Πρόνοιας" που περιγράψαμε στην παραπάνω ενότητα, ο "Άπορος Πολίτης" είναι αδιάφορος τόσο ανάμεσα στις δύο καθαρές στρατηγικές του ("Άνεργος", "Άεργος"), όσο και ανάμεσα σε μία σειρά μικτών στρατηγικών δεδομένης της μικτής στρατηγικής που ακολουθεί η "Κυβέρνηση". Αν ο Άπορος Πολίτης αποφάσιζε να μην ακολουθήσει τη μικτή στρατηγική που υπολογίσαμε παραπάνω ($b = 0.2$), η ισορροπία μικτών στρατηγικών του παιγνίου μας θα κατέρρεε, αφού και η "Κυβέρνηση" αντίστοιχα θα προσάρμοζε τις ενέργειές της ως προς τη στρατηγική που θα ακολουθούσε σύμφωνα με τα νέα δεδομένα. Ακόμα και μίας μικρής τάξης απόκλιση από την κατανομή πιθανοτήτων που έχει υπολογιστεί για τον "Άπορο Πολίτη", η οποία παρόλα αυτά δε θα ανέτρεπε τα αναμενόμενα κέρδη του αν η "Κυβέρνηση" δεν ανταποκρινόταν, καταστρέφει την ισορροπία μικτών στρατηγικών, αφού είναι βέβαιο ότι η "Κυβέρνηση" θα απαντήσει σε μία τέτοιου είδους ενέργεια.

Ένας τρόπος λοιπόν να ερμηνεύσουμε το παίγνιο της Πρόνοιας είναι να φανταστούμε πως αντί για έναν "Άπορο Πολίτη" στο παίγνιο μας υπάρχουν πολλοί περισσότεροι με πανομοιότυπες επιλογές και συναρτήσεις κέρδους, οι οποίοι και θα πρέπει να αντιμετωπιστούν από την "Κυβέρνηση" με τον ίδιο τρόπο. Σε ισορροπία μικτών στρατηγικών κάτω από τις προαναφερθείσες συνθήκες, κάθε "Άπορος Πολίτης" επιλέγει τη στρατηγική "Άνεργος" με πιθανότητα ίση με 0.2, όπως ακριβώς θα γίνεται και στο παίγνιο όπου η "Κυβέρνηση" αντιμετωπίζει έναν "Άπορο Πολίτη". Έτσι το παίγνιο με τους περισσότερους από έναν "Άπορους Πολίτες" παρουσιάζει μία ισορροπία καθαρών στρατηγικών: το 20% των "Άπορων Πολιτών" θα επιλέξει τη στρατηγική της δήλωσης "Άνεργος" ενώ το 80% τη στρατηγική της δήλωσης "Άεργος". Το πρόβλημα παραμένει να έγκειται στο πώς ένας μεμονωμένος "Άπορος Πολίτης", ο οποίος είναι αδιάφορος ανάμεσα στις καθαρές στρατηγικές του, επιλέγει τη μία ή την άλλη κάτι το οποίο όμως μπορεί να εξηγηθεί αν κανείς αναλογιστεί ότι τα ατομικά χαρακτηριστικά του κάθε "Άπορου Πολίτη" (τα οποία και δεν συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο μας) θα μπορούσαν να καθορίσουν ποιες ενέργειες επιλέγονται και από ποιους "Άπορους Πολίτες".

Ο αριθμός των παικτών που χρειάζονται έτσι ώστε οι μικτές στρατηγικές ενός παιγνίου να μπορούν να ερμηνευθούν κατά αυτόν τον τρόπο εξαρτάται από την κατανομή της πιθανότητας b από τη στιγμή που δε μπορούμε να μιλάμε για τη διαίρεση ενός παίκτη σε πολλά μέρη. Στο παίγνιο της Πρόνοιας, ο αριθμός των παικτών θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 5, αν θέλουμε να χρησιμοποιησουμε την παραπάνω ερμηνεία, αφού η μικτή στρατηγική για τον "Άπορο Πολίτη" είναι πολλαπλάσιο του $1/5$. Έτσι λοιπόν, για την εφαρμογή αυτής της ερμηνείας, ανεξάρτητα από το πόσο τροποποιούμε τις παραμέτρους ενός παιγνίου θα χρειαζόμασταν ένα πλήθος παικτών.

Τέλος, μία διαφορετική ερμηνεία που θα μπορούσε να δοθεί πάνω στις μικτές στρατηγικές (η οποία και ισχύει ακόμα και στο παίγνιο της "Πρόνοιας" για έναν "Άπορο Πολίτη") είναι αυτή του ότι ο "Άπορος Πολίτης" επιλέγεται από ένα πλήθος "Άπορων Πολιτών" χωρίς η "Κυβέρνηση" να γνωρίζει τα ατομικά χαρακτηριστικά του. Η γνώση της "Κυβέρνησης" περιορίζεται στο γεγονός ότι μέσα σε αυτό το πλήθος "Άπορων Πολιτών" υπάρχουν δύο "τύποι" , με αναλογία $(0.2,0.8)$: αυτοί που θα επιλέξουν να δηλώσουν άνεργοι όταν η "Κυβέρνηση" θα επιλέξει της στρατηγική των "Παροχών", και αυτοί που θα δηλώσουν άεργοι. Ένας Άπορος πολίτης που έχει επιλεγεί από αυτό το πλήθος μπορεί να ανήκει σε οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο τύπους Άπορων Πολιτών.

4.5 ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΙΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ($\boldsymbol{2 \times n}$, $\boldsymbol{m \times 2}$)

4.5.1 ΚΥΡΙΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα εξεταστεί η λύση παιγνίων στα οποία ο ένας από τους δύο παίκτες μόνο, έχει δύο διαθέσιμες στρατηγικές. Αν για παράδειγμα έχουμε ένα παίγνιο στο οποίο λαμβάνουν μέρος οι παίκτες Α και Β, όπου ο παίκτης Α είναι ο παίκτης που κερδίζει στο παίγνιο ενώ ο παίκτης Β είναι ο παίκτης που χάνει, τότε: όταν ο παίκτης Α έχει μόνο 2 διαθέσιμες στρατηγικές για να επιλέξει και ο παίκτης Β έχει n, προφανώς ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου και κατ' επέκταση και το ίδιο το παίγνιο θα πρέπει να είναι της τάξης $2 \times n$, ενώ στην περίπτωση που ο παίκτης Β έχει μόνο 2 στρατηγικές στη διάθεση του και ο παίκτης Α m στρατηγικές, τότε το παίγνιο πρέπει να είναι της τάξης $m \times 2$.

Ένα μαθηματικό πρόβλημα τέτοιου είδους μπορεί είτε να είναι από την αρχή ένα $2 \times n$ ή $m \times 2$ παίγνιο είτε να αποτελεί ένα παίγνιο που έχει φτάσει σε αυτήν την μορφή ύστερα από την εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών απαλοιφών των αυστηρά κυριαρχημένων στρατηγικών. Σε καθεμία από τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις μπορεί να γίνει χρήση της γραφικής μεθόδου για την επίλυση του παιγνίου. Αυτή η γραφική προσέγγιση του παιγνίου έχει ουσιαστικά ως στόχο τη μείωση ενός $2 \times n$ ή $m \times 2$ παιγνίου σε παίγνιο της τάξης 2×2, κάτι που προκύπτει ύστερα από τον εντοπισμό και την απαλοιφή των κυριαρχούμενων/υποδεέστερων στρατηγικών και μας οδηγεί με αυτόν τον τρόπο σε ένα παίγνιο με γνωστό τρόπο αντιμετώπισης και επίλυσης. Η προκύπτουσα αυτή λύση είναι και λύση του αρχικού $2 \times n$ ή $m \times 2$ προβλήματος. Παρόλο που η τιμή του παιγνίου και η βέλτιστη στρατηγική για τον κάθε παίκτη μπορούν να υπολογιστούν από το αντίστοιχο γράφημα, όταν το παίγνιο έρχεται στη μορφή ενός παιγνίου τάξης 2×2 χρησιμοποιείται για την επίλυση του η μέθοδος που αναπτύχθηκε σε προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου 4. Για την καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω ακολουθούν παραδείγματα που καλύπτουν παίγνια με πίνακες πληρωμών $2 \times n$ ή $m \times 2$.

4.5.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $\mathbf{2} \times \boldsymbol{n}$

Έστω το παίγνιο 2×5 με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών για τους παίκτες Α και Β:

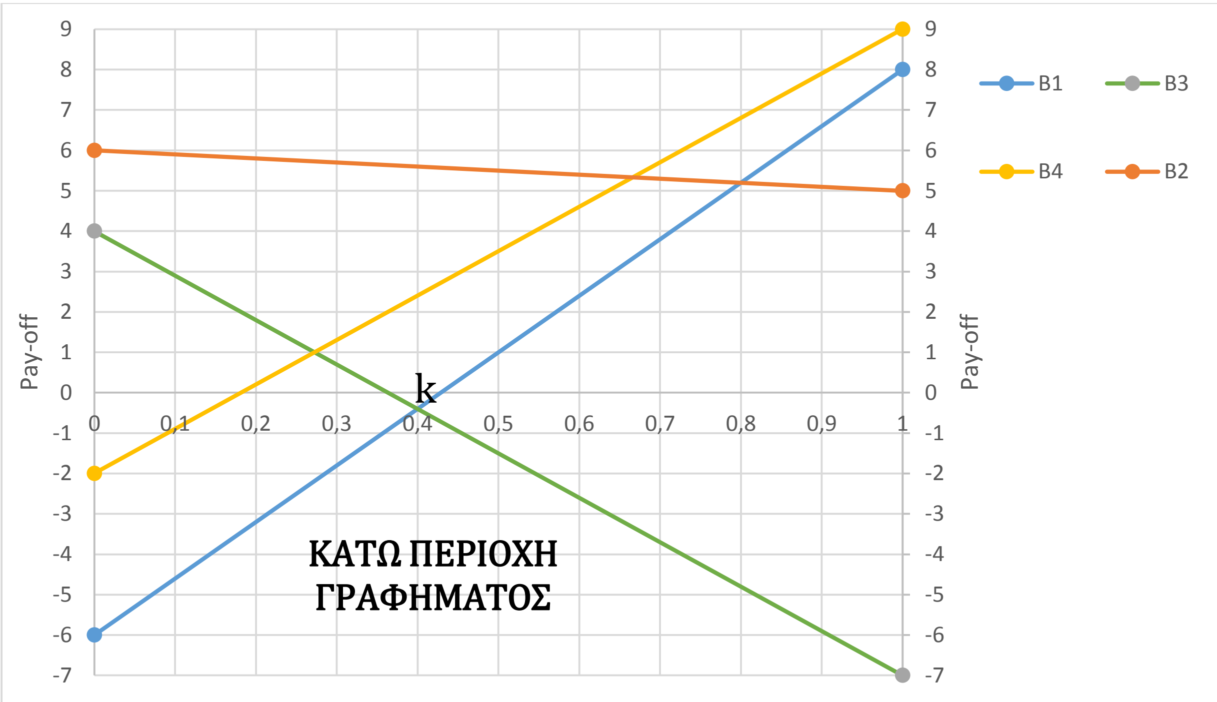
	ΠΑΙΚΤΗΣ Β				
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	8	5	-7	9
	A_2	-6	6	4	-2

Πίνακας 4.5.2.1 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×4

Σε αυτό το παίγνιο ο παίκτης Α έχει δύο στρατηγικές, την A_1 και την A_2. Έστω ότι ο παίκτης Α επιλέγει τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα ίση με p_1 και τη στρατηγική A_2 με πιθανότητα ίση με $1 - p_1$. Όταν ο παίκτης Β επιλέγει να κινηθεί σύμφωνα με τη στρατηγική B_1, το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη Α είναι:

$$8p_1 + (-6)(1 - p_1) = 14p_1 - 6$$

Ομοίως, το αναμενόμενο κέρδος για τον παίκτη Α σε σχέση με τις στρατηγικές B_2, B_3 και B_4 του παίκτη Β είναι αντίστοιχα $6 - p_1$, $4 - 11p_1$ και $11p_1 - 2$. Αυτές τις τιμές του αναμενόμενου κέρδους του παίκτη Α ανάλογα με το ποια στρατηγική θα επιλέξει ο αντίπαλος του μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως συναρτήσεις με μεταβλητή την p_1, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



Γράφημα 4.5.2 –Διάγραμμα συναρτήσεων κέρδους παίκτη Α παιγνίου 2×4

Οι γραμμές του γραφήματος είναι σημειωμένες ως B_1, B_2, B_3 και B_4 και αντιπροσωπεύουν τις αντίστοιχες στρατηγικές. Για κάθε τιμή της πιθανότητας p_1, το ύψος των γραμμών σε αυτό το σημείο υποδεικνύει τα πιθανά κέρδη κάθε στρατηγικής του παίκτη Β σε σχέση με την μικτή στρατηγική $(p_1, 1-p_1)$ του παίκτη Α. Ο παίκτης Α ανησυχεί για το ελάχιστο κέρδος που μπορεί να έχει επιλέγοντας μια συγκεκριμένη στρατηγική, κάτι το οποίο στο γράφημα μας αντιπροσωπεύεται από την χαμηλότερη σε ύψος τιμών από τις τέσσερις γραμμή, και επιλέγει την πιθανότητα p_1 με σκοπό να μεγιστοποιήσει αυτό το ελάχιστο κέρδος (maximize minimum). Αυτό παριστάνεται στο διάγραμμα εκεί που βρίσκεται το σημείο k $(maximin\, value)$, το υψηλότερο σημείο της περιοχής που αναφέρεται στο γράφημα ως "Κάτω Περιοχή Γραφήματος" και αποτελεί το σημείο τομής των γραμμών B_1 και B_3. Η ελάχιστη απόσταση του σημείου k από τον οριζόντιο άξονα του διαγράμματος είναι ίση με -0.4 (ή $-2/5$) και αντιπροσωπεύει την τιμή του παιγνίου V, ενώ αν l το σημείο του οριζόντιου άξονα για το οποίο έχουμε την ελάχιστη απόσταση του k από τον $x'x$, τότε η τιμή της πιθανότητας p_1 ισούται με την απόσταση του σημείου l από το σημείο $(0{,}0)$, δηλαδή $p_1 = Ol = 0.4$ ή $2/5$,η οποία και είναι η βέλτιστη στρατηγική για τον παίκτη Α.

Έτσι εναλλακτικά το αρχικό μας παίγνιο που ήταν της μορφής $2 \times n$ μπορεί τώρα να γραφεί ως ένα παίγνιο 2×2, όπως φαίνεται και παρακάτω, με τις στρατηγικές A_1 και A_2 για τον παίκτη Α και B_1 και B_3 για τον παίκτη Β.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β			
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	B_1	B_3
	A_1	8	-7
	A_2	-6	4

Πίνακας 4.5.2.2 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×2 μετά τη χρήση γραφικής μεθόδου για μείωση της διάστασης αρχικού πίνακα

Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε ότι ο παίκτης B χρησιμοποιεί την στρατηγική B1 με πιθανότητα q_1 και αντίστοιχα επιλέγει να πορευθεί συμφωνά με την στρατηγική του B3 με πιθανότητα ίση με $(1-q_1)$.

Έτσι σύμφωνα με τη τον τρόπο λύσης για παίγνια 2×2 με μικτές στρατηγικές, έχουμε ότι:

$$V(A, B_1) = 8p_1 - 6(1-p_1)$$

$$V(A, B_3) = -7p_1 + 4(1-p_1)$$

$$V(A, B_1) = V(A, B_3) \Longrightarrow 14p_1 - 6 = 4 - 11p_1 \Longrightarrow$$

$$p_1 = \frac{2}{5} = 0.4 \; \kappa\alpha\iota \; (1-p_1) = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$V(B, A_1) = 8q_1 - 7(1-q_1)$$

$$V(B, A_2) = -6q_1 + 4(1-q_1)$$

$$V(B, A_1) = V(B, A_2) \Longrightarrow 15q_1 - 7 = -10q_1 + 4 \Longrightarrow$$

$$q_1 = \frac{11}{25} = 0.44 \; \kappa\alpha\iota \; (1-q_1) = \frac{14}{25} = 0.56$$

Και για την αναμενόμενη τιμή του παιγνίου:

$$V = 14 \times 0.4 - 6 = 5.6 - 6 = -0.4$$

Επομένως οι μικτές στρατηγικές για των κάθε παίκτη είναι:

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

και

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 11/25 & 0 & 14/25 & 0 \end{bmatrix}$$

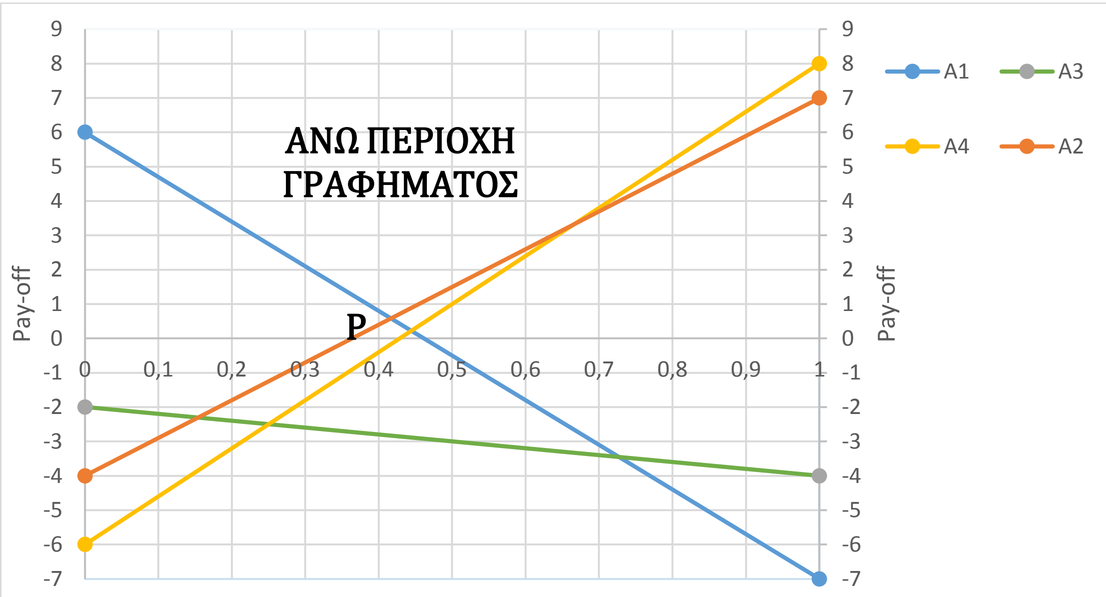
4.5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $m \times 2$

Έστω το παίγνιο με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών διάστασης 4×2 :

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β		
	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	B_1	B_2
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	A_1	-7	6
	A_2	7	-4
	A_3	-4	-2
	A_4	8	-6

Πίνακας 4.5.3.1 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 4×2

Έστω ότι ο παίκτης Β επιλέγει τις στρατηγικές B_1 και B_2 με πιθανότητες q_1 και $(1 - q_1)$ αντίστοιχα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη Β , όταν ο παίκτης Α επιλέγει να παίξει τη στρατηγική A_1 θα είναι $-7q_1 + 6(1 - q_1) = -13q_1 + 6$. Ομοίως υπολογίζονται και τα υπόλοιπα αναμενόμενα κέρδη του παίκτη Β, ανάλογα με τη στρατηγική που επιλέγει να παίξει ο αντίπαλός του. Όλα τα παραπάνω αναπαρίστανται στο παρακάτω διάγραμμα:



Γράφημα 4.5.3 –Διάγραμμα συναρτήσεων κέρδους παίκτη Β παιγνίου 4×2

Σε αυτή την περίπτωση παιγνίου, στο παραπάνω γράφημα, μας ενδιαφέρει η "Άνω Περιοχή Γραφήματος", η οποία και δημιουργείται από τις γραμμές που αντιπροσωπεύουν τις στρατηγικές A_1, A_2 και A_4. Η τιμή του σημείου P $(minimax\ value)$ που αποτελεί το χαμηλότερο σημείο της "Άνω Περιοχής Γραφήματος", καθορίζει και την τιμή του παιγνίου. Εφόσον το σημείο P αποτελεί το σημείο τομής των ευθειών που αντιπροσωπεύουν τις στρατηγικές A_1 και A_2 του παίκτη Α, αυτές οι δύο στρατηγικές θα έχουν μη μηδενικές πιθανότητες σε ότι αφορά τη λύση του παιγνίου. Έτσι, συμπεριλαμβάνοντας τις στρατηγικές B_1 και B_2 του παίκτη Β μαζί με τις μη μηδενικής πιθανότητας A_1 και A_2 του αντιπάλου του, ο πίνακας πληρωμών που προκύπτει έχει την παρακάτω μορφή:

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β		
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	B_1	B_3
	A_1	-7	6
	A_2	7	-4

Πίνακας 4.5.3.2 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×2 μετά τη χρήση γραφικής μεθόδου για μείωση της διάστασης αρχικού πίνακα

Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε ότι ο παίκτης Α χρησιμοποιεί την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p_1 και αντίστοιχα επιλέγει να πορευθεί συμφωνά με την στρατηγική του A_2 με πιθανότητα ίση με $(1-p_1)$.

Έτσι σύμφωνα με τη τον τρόπο λύσης για παίγνια 2×2 με μικτές στρατηγικές, έχουμε ότι:

$$V(A, B_1) = -7p_1 + 7(1-p_1)$$

$$V(A, B_3) = 6p_1 - 4(1-p_1)$$

$$V(A, B_1) = V(A, B_3) \Longrightarrow -14p_1 + 7 = -4 + 10p_1 \Longrightarrow$$

$$p_1 = \frac{11}{24} \approx 0.46 \; και \; (1 - p_1) = \frac{13}{24} \approx 0.54$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$V(B, A_1) = -7q_1 + 6(1 - q_1)$$

$$V(B, A_2) = 7q_1 - 4(1 - q_1)$$

$$V(B, A_1) = V(B, A_2) \Longrightarrow -13q_1 + 6 = 11q_1 - 4 \Longrightarrow$$

$$q_1 = \frac{5}{12} \approx 0.42 \; και \; (1 - q_1) = \frac{7}{12} = 0.58$$

Και για την αναμενόμενη τιμή του παιγνίου:

$$V = -13 \times \frac{5}{12} + 6 = \frac{7}{12}$$

Επομένως οι μικτές στρατηγικές για των κάθε παίκτη είναι:

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 11/24 & 13/24 \end{bmatrix}$$

και

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 5/12 & 0 & 7/12 & 0 \end{bmatrix}$$

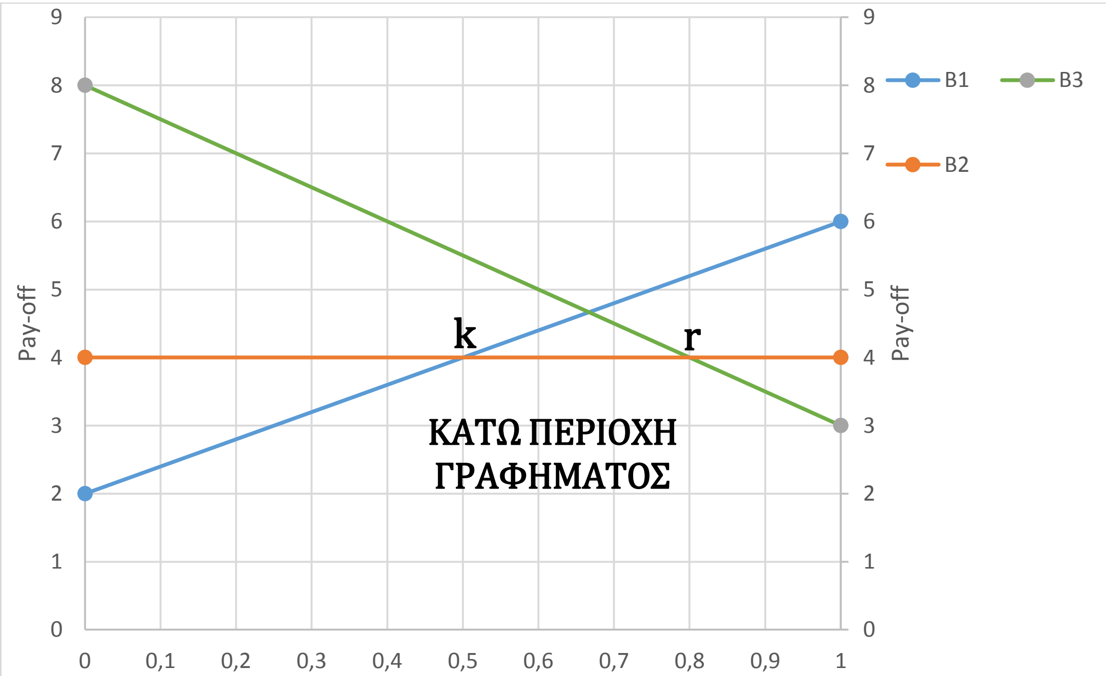
4.5.4 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $\mathbf{2} \times \boldsymbol{n}$

Σε αυτή την υπό-ενότητα θα αντιμετωπιστεί ένα παίγνιο το οποίο παρουσιάζει μία ιδιαιτερότητα ως προς τη γραφική του αναπαράσταση. Έστω λοιπόν το παίγνιο με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών διάστασης 2×3 :

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β			
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ	B_1	B_2	B_3
	A_1	6	4	3
	A_2	2	4	8

Πίνακας 4.5.4.1 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×3

Κατασκευάζουμε το γράφημα του παιγνίου όπως ακριβώς και στο παράδειγμα της ενότητας 4.5.2.



Γράφημα 4.5.3 –Διάγραμμα συναρτήσεων κέρδους παίκτη Α παιγνίου 2×3

Όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, έστω ότι ο παίκτης Α επιλέγει τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα ίση με p_1 και τη στρατηγική A_2 με πιθανότητα ίση με $(1-p_1)$. Σε αυτή την περίπτωση η "Κάτω Περιοχή Γραφήματος" αναπαριστά την περιοχή του γραφήματος που βρίσκεται στο εξάγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες B_1, B_2 και B_3. Παρατηρώντας το γράφημα βλέπουμε ότι εδώ δεν έχουμε ένα minimax σημείο (σημείο με την υψηλότερη τιμή για την "Κάτω Περιοχή Γραφήματος") αλλά δύο, το k και το r. Από το παραπάνω γράφημα μπορούμε επίσης άμεσα να συμπεράνουμε ότι η τιμή του παιγνίου είναι ίση με 4. Μάλιστα άλλο ένα συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε από το παραπάνω γράφημα, και διαφοροποιεί το συγκεκριμένο παράδειγμα από αυτά των προηγούμενων ενοτήτων είναι ότι κάθε τιμή ανάμεσα στα σημεία k και r είναι και η βέλτιστη μικτή στρατηγική για τον παίκτη Α, δηλαδή $k \leq p_1 \leq r.$ Για να εντοπίσουμε τις ακραίες τιμές ανάμεσα στις οποίες κυμαίνεται η τιμή της πιθανότητας p_1, αρκεί να υπολογίσουμε την απόσταση του ίχνους των σημείων k και r από την αρχή των αξόνων. Έτσι έχουμε ότι για $minimax\,value = k$, $p_1 = 0.5$ και για $minimax\,value = r, p_1$=0.8 . Επομένως για τον παίκτη Α βέλτιστη μικτή στρατηγική αποτελεί το ζεύγος $(p_1, 1-p_1)$ όπου η τιμή της p_1 κυμαίνεται από 0.5 έως 0.8 $(0.5 \leq p_1 \leq 0.8)$.

5. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

5.1 ΛΥΣΗ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΜΙΚΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Κάθε παίγνιο με μικτές στρατηγικές μπορεί να λυθεί ύστερα από τη μετατροπή του σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Όπως θα δούμε και παρακάτω, αυτή η μετατροπή δεν συμπεριλαμβάνει μόνο την εφαρμογή του κριτηρίου minimax και τη χρήση των τιμών maximin και minimax.

Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 4 πως μπορούμε για ένα παίγνιο δύο παικτών (παίκτης 1, παίκτης 2) να βρούμε τη βέλτιστη μικτή στρατηγική για τον παίκτη 1. Όπως έχει αναφερθεί:

$$Αναμενόμενο\ κέρδος\ για\ παίκτη\ 1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_iy_j$$

και η στρατηγική $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ είναι η βέλτιστη (μικτή στρατηγική) αν:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_iy_j \geq Τιμή\ minimax = αναμενόμενη\ τιμή\ του\ παιγνίου\ V$$

για όλες τις στρατηγικές του αντιπάλου του $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Επομένως, η παραπάνω ανισότητα θα πρέπει να ισχύει για κάθε μία από τις καθαρές στρατηγικές του παίκτη 2, δηλαδή για κάθε στρατηγική που η αντίστοιχη τιμή της πιθανότητας στο διάνυσμα πιθανοτήτων $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ θα είναι ίση με τη μονάδα ($y_j = 1$ και οι υπόλοιπες τιμές του διανύσματος ίσες με μηδέν). Αντικαθιστώντας την τιμή $y_j = 1$ στην παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i \geq V \quad για\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Με αυτόν τον τρόπο από την αρχική ανισότητα προκύπτουν n ανισότητες. Επιπλέον, από αυτήν την ομάδα n ανισοτήτων προκύπτει με συνεπαγωγή η αρχική ανισότητα, όπως φαίνεται και παρακάτω:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\, x_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j\, V = V$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Επειδή η παραπάνω συνεπαγωγή είναι διπλή, προκύπτει ότι η ομάδα αυτών των n γραμμικών ανισώσεων είναι ισοδύναμη με τη χρήση της αρχικής ανισότητας για όλες τις στρατηγικές $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ του παίκτη 2. Όμως αυτές οι n ανισότητες είναι γνήσιοι περιορισμοί για ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, όπως και οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$x_i \geq 0, \quad \gamma\iota\alpha\ i = 1, 2, \dots, m$$

οι οποίοι και είναι απαραίτητοι στη διαδικασία μας, προκειμένου να δηλώνεται πως οι μεταβλητές x_i είναι πιθανότητες. Επομένως κάθε λύση της μορφής $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, η οποία και ικανοποιεί τους παραπάνω περιορισμούς, αποτελεί τη βέλτιστη μικτή στρατηγική που προσπαθούμε να υπολογίσουμε.

Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης μικτής στρατηγικής γίνεται πλέον ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο και μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση διαφόρων προγραμμάτων, όπως ο solver του excel, το Lindo κ.α. Οι μόνες δυσκολίες που έχουν απομείνει είναι πρώτον ότι η αναμενόμενη τιμή του παιγνίου V είναι άγνωστη, και ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που έχει προκύψει δεν έχει κάποια αντικειμενική συνάρτηση. Παρόλα αυτά, και οι δύο αυτές δυσκολίες μπορούν να ξεπεραστούν με μία μόνο αλλαγή, αντικαθιστώντας την αναμενόμενη τιμή του παιγνίου V με τη μεταβλητή x_{m+1}. Στη συνέχεια μεγιστοποιούμε (maximize) τη μεταβλητή x_{m+1}, έτσι ώστε αυτή να πάρει τελικά την τιμή V στη βέλτιστη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού που αντιμετωπίζουμε. Η διαδικασία που αναφέρθηκε συνοψίζεται ως εξής:

$$Μεγιστοποίηση\ της\ μεταβλητής : x_{m+1},$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$

$$p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \cdots + p_{m1}x_m - x_{m+1} \geq 0$$

$$p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{m2}x_m - x_{m+1} \geq 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \cdots + p_{mn}x_m - x_{m+1} \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0,\ \ για\ i = 1, 2, \dots, m$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονίσουμε ότι η μεταβλητή x_{m+1} μπορεί να είναι και αρνητική, κάτι το οποίο διαφοροποιεί τη συγκεκριμένη μέθοδο από αυτή της Simplex, όπου για να εφαρμοστεί η μέθοδος θα πρέπει πρώτα όλες οι μεταβλητές του προβλήματος να έχουν μη αρνητικούς περιορισμούς, κάτι το οποίο θα δούμε παρακάτω.

Σε ότι αφορά τον παίκτη 2, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη βέλτιστη μικτή στρατηγική του ξαναγράφοντας τον πίνακα πληρωμών ως πίνακα κερδών για τον παίκτη 2 από τη μορφή όπου αποτελούσε πίνακα κερδών για τον παίκτη 1, και εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως αναλύθηκε παραπάνω. Έτσι προχωρώντας σε μία διαδικασία απολύτως ανάλογη με αυτή που προαναφέρθηκε για τον παίκτη 1, ο παίκτης 2 θα έχει ως βέλτιστη μικτή στρατηγική τη βέλτιστη λύση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

$$Ελαχιστοποίηση\ της\ μεταβλητής: y_{m+1},$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$

$$p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n - y_{n+1} \leq 0$$

$$p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n - y_{n+1} \leq 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{mn}y_n - y_{n+1} \leq 0$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0,\ \ για\ j = 1, 2, \ldots, n$$

5.2 ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΔΥΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές έννοιες για τη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Αν $\bar{x}$ ένα διάνυσμα πιθανοτήτων που ικανοποιεί τους περιορισμούς του παραπάνω προβλήματος μεγιστοποίησης, τότε το διάνυσμα $\bar{x}$ ονομάζεται **εφικτό διάνυσμα** του προβλήματος. Αν $\bar{x}$ ένα εφικτό διάνυσμα του προβλήματος μεγιστοποίησης και επιπλέον $f(x)$ η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, τότε το $\bar{x}$ καλείται **βέλτιστο διάνυσμα** του προβλήματος μεγιστοποίησης αν και μόνο αν ικανοποιείται η ανισότητα $f(\bar{x}) \geq f(x)$. Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, στην περίπτωση παιγνίου αυτή η πραγματική τιμή $f(\bar{x})$ αποτελεί την **τιμή του παιγνίου** (η αντίστοιχα του προβλήματος που αντιμετωπίζουμε χρησιμοποιώντας γραμμικό προγραμματισμό). Αν υπάρχει ένα τουλάχιστον βέλτιστο διάνυσμα $\bar{x}$, τότε το πρόβλημά μας ονομάζεται **επιλύσιμο**, διαφορετικά, αν δεν υπάρχει κανένα βέλτιστο διάνυσμα τότε το πρόβλημά μας ονομάζεται μη επιλύσιμο.

Πριν δοθεί ο ορισμός της αρχής του δυισμού, αξίζει να αναφέρουμε ότι κάθε πρόβλημα μεγίστου έστω Π, συνδέεται με ένα πρόβλημα ελαχίστου που συμβολίζεται με Π^* και ονομάζεται **δυικό** του Π. Έτσι αν Π το πρόβλημα μεγιστοποίησης της μεταβλητής x_{m+1} που αναφέρθηκε παραπάνω, τότε το αντίστοιχο δυικό του Π^*, είναι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μεταβλητής y_{n+1}.

Ορισμός 5.1 (Αρχή του Δυισμού) : Αν ένα τουλάχιστον από τα προβλήματα Π και Π^* είναι επιλύσιμο, τότε είναι και το άλλο και μάλιστα τα δύο προβλήματα έχουν την ίδια τιμή. Αν και τα δύο προβλήματα Π και Π^* είναι εφικτά, τότε είναι και επιλύσιμα.

Όπως επισημάνθηκε και παραπάνω είναι εύκολο να δείξουμε ότι το πρότυπο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που αναλύθηκε παραπάνω για τον παίκτη 1 και το αντίστοιχο για τον παίκτη 2 είναι δυικά μεταξύ τους, σύμφωνα με τον ορισμό και τις έννοιες που δόθηκαν. Το συγκεκριμένο γεγονός δημιουργεί δύο αρκετά σημαντικές συνέπειες. Η πρώτη από αυτές τις δύο συνέπειες είναι ότι οι βέλτιστες μικτές στρατηγικές και για τους δύο παίκτες ενός παιγνίου μπορούν να βρεθούν από την επίλυση μόνο ενός από των δύο προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν, αφού η βέλτιστη δυική λύση είναι ουσιαστικά ένα αυτοματοποιημένο αποτέλεσμα που προκύπτει από τους υπολογισμούς που πραγματοποιούνται με τη μέθοδο Simplex κατά την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Η δεύτερη συνέπεια είναι η άρρηκτη σύνδεση μεταξύ της θεωρίας του δυισμού και της ανάλυσης παιγνίων, αφού η θεωρία παιγνίων, όπως φάνηκε και από τις προηγούμενες αναφορές αποτελεί μία από τις πιο πρακτικές και εκλεπτυσμένες εφαρμογές της θεωρίας του δυισμού.

Μία σχετική επίπτωση της παραπάνω σύνδεσης είναι ότι αυτή αποτελεί μία απλή απόδειξη του θεωρήματος minimax. Έστω ότι x^*_{m+1} η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης x_{m+1}και y^*_{n+1} η ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης y_{n+1} σύμφωνα με τη βέλτιστη λύση των αντίστοιχων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Από την αρχή του ισχυρού δυισμού (strong duality) αν $-x^*_{m+1} = -y^*_{n+1}$, τότε αυτό συνεπάγεται ότι $x^*_{m+1} = y^*_{n+1}$. Όπως όμως είναι προφανές από την ερμηνεία των τιμών maximin και minimax ισχύει ότι:

$$(minimax\ value) = \ y_{n+1}^{*}\ και\ (maximin\ value) = \ x_{m+1}^{*},$$
$$και\ επομένως$$
$$(minimax\ value) = (maximin\ value)$$

όπως δηλαδή μας υποδεικνύει το θεώρημα minimax.

Ύστερα και από την παραπάνω απόδειξη σύνδεσης της αρχής του δυισμού με τη θεωρία παιγνίων, το μόνο κομμάτι που χρήζει εξέτασης και προσοχής είναι αυτό της μη ύπαρξης περιορισμού ως προς το πρόσημο για τις μεταβλητές (αντικειμενικές συναρτήσεις) x_{m+1} και y_{n+1}. Αν είναι ξεκάθαρο ότι η τιμή του παιγνίου V είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, κάτι που σημαίνει ότι και οι βέλτιστες τιμές των x_{m+1} και y_{n+1} θα είναι μη αρνητικές, τότε θα μπορούσε εύκολα να εισαχθεί ένας μη-αρνητικός περιορισμός για τις δύο αυτές μεταβλητές, πριν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex προκειμένου να υπολογίσουμε τη βέλτιστη λύση. Παρόλα αυτά αν $V < 0$, τότε προφανώς θα πρέπει να γίνει κάποιου είδους ειδική μετατροπή. Ένας τρόπος για να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο θα ήταν η αντικατάσταση της μεταβλητής που δεν έχει κάποιο περιορισμό μη-αρνητικότητας με τη διαφορά δύο μη-αρνητικών αριθμών. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν η αντιστροφή του πίνακα πληρωμών για τους παίκτες 1 και 2, έτσι ώστε τώρα ο πίνακας πληρωμών να είναι πίνακας κερδών για τον παίκτη 2, κάτι το οποίο θα μετέτρεπε την επικείμενη τιμή του παιγνίου V σε θετικό αριθμό. Ένας τρίτος τρόπος αντιμετώπισης της επικείμενης αρνητικότητας της τιμής του παιγνίου, ο οποίος είναι και ο πιο εύχρηστος από αυτούς που αναφέρθηκαν, είναι η πρόσθεση μιας αρκετά μεγάλης προκαθορισμένης σταθεράς (constant number) σε όλες τις εκχωρήσεις του πίνακα πληρωμών έτσι ώστε η “νέα” τιμή του παιγνίου V να είναι θετική. Αυτή η σταθερά θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι ίση με την απόλυτη τιμή της μεγαλύτερης εκχώρησης αρνητικού αριθμού στον πίνακα πληρωμών. Μάλιστα, επειδή αυτή η σταθερά προστίθεται σε κάθε εκχώρηση του πίνακα, η μετατροπή αυτή δεν επηρεάζει τις βέλτιστες μικτές στρατηγικές. Η επικείμενη τιμή του παιγνίου V όμως θα είναι αυξημένη κατά την τιμή της σταθεράς που προστέθηκε, παρόλα αυτά όμως αυτή η τιμή μπορεί να προσαρμοστεί ύστερα από τη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Κλείνοντας την εισαγωγή του κεφαλαίου, σε αυτό το σημείο αξίζει να τονιστεί ότι πρακτικά η χρήση γραμμικού προγραμματισμού μας επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε παίγνια με πίνακες πληρωμών διάστασης μεγαλύτερης από 2×2. Παρόλο που ακολουθούν παραδείγματα λύσης παιγνίων με τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού, τόσο η μέθοδος υπολογισμού της βέλτιστης τιμής των παιγνίων Simplex όσο και ο η προγραμματιστική διαδικασία για την εύρεση των αποτελεσμάτων με τη χρήση του Solver από το Microsoft Excel δεν θα αναλυθούν παραπάνω. Ωστόσο, η επεξήγηση των δυσκολιών που μπορεί να αντιμετωπίσει κάποιος στην προσπάθεια μετατροπής ενός παιγνίου μικτής στρατηγικής σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αναλύθηκαν και αναφέρθηκαν με σκοπό τη γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στα δύο αυτά μοντέλα αντιμετώπισης προβλημάτων, κάτι το οποίο γίνεται ακόμα πιο ξεκάθαρο στα παραδείγματα που ακολουθούν.

5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ & ΛΥΣΗΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΜΙΚΤΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

5.3.1 ΑΠΛΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $\mathbf{2 \times 3}$

Έστω παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα πληρωμών 2×3:

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β			
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	Στρατηγική	B_1	B_2	B_3
	A_1	4	1	3
	A_2	2	3	4

Πίνακας 5.3.1.1 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×3

Έστω ότι:

- V η αναμενόμενη τιμή του παιγνίου

- p_1 και p_2 οι πιθανότητες να ακολουθήσει ο παίκτης Α τις αντίστοιχες στρατηγικές A_1 και A_2
- q_1, q_2 και q_3 οι πιθανότητες να ακολουθήσει ο παίκτης Β τις αντίστοιχες στρατηγικές B_1, B_2 και B_3.

	ΠΑΙΚΤΗΣ Β				
ΠΑΙΚΤΗΣ Α	Στρατηγική	B_1	B_2	B_3	Πιθανότητα
	A_1	4	1	3	p_1
	A_2	2	3	4	p_2
	Πιθανότητα	q_1	q_2	q_3	

Πίνακας 5.3.1.2 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 2×3 με πιθανότητες

Η μοντελοποίηση γραμμικού προγραμματισμού για τον παίκτη Β του παιγνίου με τον παραπάνω πίνακα πληρωμών είναι η εξής:

$$\textit{Ελαχιστοποίηση της μεταβλητής} : V$$

$$\textit{υπό τους περιορισμούς}:$$

$$4q_1 + 1q_2 + 3q_3 \leq V$$

$$2q_1 + 3q_2 + 4q_3 \leq V$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$\textit{και} \quad q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

Διαιρώντας τους παραπάνω περιορισμούς με τη μεταβλητή V, οι περιορισμοί παίρνουν την παρακάτω μορφή.

$$4q_1/V + 1q_2/V + 3q_3/V \leq 1$$

$$2q_1/V + 3q_2/V + 4q_3/V \leq 1$$

$$q_1/V + q_2/V + q_3/V = 1/V$$

Για να απλοποιήσουμε και εδώ το παραπάνω πρόβλημα, θέτουμε:

- $q_1/_V = y_1$
- $q_2/_V = y_2$
- $q_3/_V = y_3$

Έτσι προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τις αναμενόμενες απώλειες του παίκτη Β ($minimize\ V$) μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε το λόγο $1/V$.

$$Μεγιστοποίηση\ της\ μεταβλητής : 1/V = y_1 + y_2 + y_3$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$

$$4y_1 + 1y_2 + 3y_3 \leq 1$$

$$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 1$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1/V$$

$$και \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

5.3.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $\mathbf{3 \times 3}$

Δύο εταιρείες παράγουν το ίδιο προϊόν. Προκειμένου να αυξήσουν τις πωλήσεις του προϊόντος που παράγουν, οι δύο αυτές ανταγωνιστικές εταιρίες αποφασίζουν να ακολουθήσουν κάποιες συγκεκριμένες στρατηγικές. Έτσι η εταιρία Α προκειμένου να αυξήσει τις πωλήσεις του προϊόντος της έναντι της αντίπαλης εταιρίας θα ακολουθήσει τις παρακάτω στρατηγικές:

- **Στρατηγική A_1**: έκδοση εκπτωτικών κουπονιών για τους καταναλωτές
- **Στρατηγική A_2**: δημιουργία υπηρεσίας διανομής του προϊόντος κατ' οίκων για τους καταναλωτές
- **Στρατηγική A_3**: κλήρωση δώρων για όσους καταναλωτές αγοράσουν το προϊόν

Με στόχο την αύξηση των πωλήσεων του προϊόντος της η εταιρία Β σκοπεύει να κάνει χρήση των ακόλουθων στρατηγικών, ακολουθώντας την πολιτική των διαφημίσεων:

- **Στρατηγική B_1**: διαφήμιση του προϊόντος μέσω του Internet
- **Στρατηγική B_2**: διαφήμιση του προϊόντος σε εφημερίδες
- **Στρατηγική B_3**: διαφήμιση του προϊόντος σε περιοδικά

Έτσι ο πίνακας πληρωμών που προκύπτει για το παίγνιο που αναφέρθηκε είναι ο παρακάτω 3×3 πίνακας:

	Εταιρία Β			
	Στρατηγική	B_1	B_2	B_3
Εταιρία Α	A_1	3	-4	2
	A_2	1	-7	-3
	A_3	-2	4	7

Πίνακας 5.3.2.1 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 3×3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι αυτό το παίγνιο δεν παρουσιάζει κάποιο σημείο σάγματος ή "σέλας"

	Εταιρία Β				
Εταιρία Α	**Στρατηγική**	B_1	B_2	B_3	Ελάχιστο Γραμμών (Minimum)
	A_1	3	-4	2	-4
	A_2	1	-7	-3	-7
	A_3	-2	4	7	**-2**
	Μέγιστο Στηλών (Maximum)	**3**	4	7	**-2≠3**

Πίνακας 5.3.2.2 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 3×3 με στοιχεία $maximin$ και $minimax$

$$τιμή\ maximin = -2$$

$$τιμή\ minimax = 3$$

$$τιμή\ minimax \neq τιμή\ maximin,$$

$$επομένως\ δεν\ υπάρχει\ σημείο\ σάγματος$$

Είδαμε ότι το συγκεκριμένο παίγνιο δεν έχει κάποιο σαγματικό σημείο ή σημείο "σέλας". Επομένως η τιμή του παιγνίου V βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $minimax$ και $maximin$ $(-2 \leq V \leq 3)$ και άρα μπορεί να είναι αρνητική ή και ίση με το 0. Όπως είδαμε και στην ενότητα 5.2 όπου και αναλύθηκαν οι αντικειμενικές δυσκολίες παιγνίων με τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού, θα προσθέσουμε μία θετική σταθερά σε

κάθε εκχώρηση του πίνακα πληρωμών. Έστω ότι αυτή η σταθερά είναι ο αριθμός 3, τότε ο πίνακας πληρωμών θα πάρει την παρακάτω μορφή.

Εταιρία Β				
	Στρατηγική	B_1	B_2	B_3
Εταιρία Α	A_1	6	-1	5
	A_2	4	-4	0
	A_3	1	7	10

Πίνακας 5.3.2.3 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 3×3 ύστερα από την προσθήκη της θετικής σταθεράς 3

Έστω τώρα ότι:

- p_1, p_2και p_3 οι πιθανότητες να ακολουθήσει η εταιρία Α τις αντίστοιχες στρατηγικές A_1, A_2 και A_3
- q_1, q_2 και q_3 οι πιθανότητες να ακολουθήσει η εταιρία Β τις αντίστοιχες στρατηγικές B_1, B_2 και B_3.

Εταιρία Β					
	Στρατηγική	B_1	B_2	B_3	Πιθανότητα
Εταιρία Α	A_1	6	-1	5	p_1
	A_2	4	-4	0	p_2
	A_3	1	7	10	p_3
	Πιθανότητα	q_1	q_2	q_3	

Πίνακας 5.3.2.4 - Πίνακας Πληρωμών παιγνίου 3×3 ύστερα από την προσθήκη της θετικής σταθεράς 3 με πιθανότητες

Σκοπός της εταιρίας Α είναι να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος της, κάτι το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί μέσω γραμμικού προγραμματισμού μέσα από τη μεγιστοποίηση της μεταβλητής V. Μάλιστα η εταιρία Α μπορεί να κερδίσει περισσότερα από την αναμενόμενη τιμή του παιγνίου V αν η ανταγωνίστρια εταιρία επιλέξει να ακολουθήσει μία ανίσχυρη στρατηγική. Επομένως το αναμενόμενο κέρδος για την εταιρία Α δίνεται από τις σχέσεις γραμμικού προγραμματισμού που ακολουθούν.

$$6p_1 + 4p_2 + p_3 \geq V$$
$$-1p_1 - 4p_2 + 7p_3 \geq V$$
$$5p_1 + 0p_2 + 10p_3 \geq V$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$\kappa\alpha\iota \qquad p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Διαιρώντας τους παραπάνω περιορισμούς με τη μεταβλητή V, οι περιορισμοί παίρνουν την παρακάτω μορφή.

$$6p_1/V + 4p_2/V + p_3/V \geq 1$$
$$-1p_1/V - 4p_2/V + 7p_3/V \geq 1$$
$$5p_1/V + 0p_2/V + 10p_3/V \geq 1$$
$$p_1/V + p_2/V + p_3/V = 1/V$$

Για να απλοποιήσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θέτουμε:

- $p_1/_V = x_1$
- $p_2/_V = x_2$
- $p_3/_V = x_3$

Έτσι προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος της η εταιρίας Α ($maximize\ V$) μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το λόγο $1/V$.

$$Ελαχιστοποίηση\ της\ μεταβλητής : 1/V = x_1 + x_2 + x_3$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1$$

$$-1x_1 - 4x_2 + 7x_3 \geq 1$$

$$5x_1 + 0x_2 + 10x_3 \geq 1$$

$$και \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Σε ότι αφορά την εταιρία Β, σκοπός τις είναι να μειώσει όσο το δυνατόν περισσότερο τις αναμενόμενες απώλειές της, σύμφωνα με τη μορφή που έχει ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί ελαχιστοποιώντας την τιμή του παιγνίου V. Μάλιστα η εταιρία Β μπορεί να ελαχιστοποιήσει ακόμα περισσότερα τις πιθανές απώλειές της, αν η εταιρία Α επιλέξει να ακολουθήσει μία πιο αδύναμη ως προς τα κέρδη της στρατηγική. Επομένως οι αναμενόμενες απώλειες για την εταιρία Β δίνονται από τις σχέσεις γραμμικού προγραμματισμού που ακολουθούν.

$$6q_1 - q_2 + 5q_3 \leq V$$

$$4q_1 - 4q_2 + 0q_3 \leq V$$

$$q_1 + 7q_2 + 10q_3 \leq V$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$και \quad q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

Διαιρώντας τους παραπάνω περιορισμούς με τη μεταβλητή V, οι περιορισμοί παίρνουν την παρακάτω μορφή.

$$6q_1/V - q_2/V + 5q_3/V \leq 1$$
$$4q_1/V - 4q_2/V + 0q_3/V \leq 1$$
$$q_1/V + 7q_2/V + 10q_3/V \leq 1$$
$$q_1/V + q_2/V + q_3/V = 1/V$$

Για να απλοποιήσουμε και εδώ το παραπάνω πρόβλημα, θέτουμε:

- ${}^{q_1}/_{V} = y_1$
- ${}^{q_2}/_{V} = y_2$
- ${}^{q_3}/_{V} = y_3$

Έτσι προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τις αναμενόμενες απώλειες της εταιρίας Β ($minimize\ V$) μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε το λόγο $1/V$.

$$Μεγιστοποίηση\ της\ μεταβλητής : 1/V = y_1 + y_2 + y_3$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$
$$6y_1 - y_2 + 5y_3 \leq 1$$
$$4y_1 - 4y_2 + 0y_3 \leq 1$$
$$y_1 + 7y_2 + 10y_3 \leq 1$$
$$και \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Συμπερασματικά, όπως αναλύθηκε και στην ενότητα 5.2 όπου και παρουσιάστηκε η αρχή του δυισμού, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού της εταιρίας Β είναι το δυικό του προβλήματος για την εταιρία Α. Μάλιστα το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού καλείται και **πρωτεύων** πρόβλημα.

5.3.3 ΛΥΣΗ ΠΑΙΓΝΙΟΥ $\mathbf{3 \times 3}$ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ SIMPLEX

Σε αυτήν την υποενότητα θα παρουσιαστεί η λύση του παιγνίου 3×3 που μετατράπηκε σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στην προηγούμενη υποενότητα, κάνοντας χρήση του αλγορίθμου της μεθόδου Simplex. Εφόσον αυτό το κομμάτι έχει ολοκληρωθεί, επόμενη κίνηση είναι το να φέρουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή, δηλαδή:

1. Να είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης. Επιλέγουμε το δυικό του πρωτεύοντος προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ($maximize\ 1/V$).
2. Όλοι οι περιορισμοί πρέπει να είναι εξισώσεις. Γι' αυτό το λόγο στις ανισώσεις της μορφής $\leq$ προσθέτουμε τις **βοηθητικές μεταβλητές** (slack variables) s_1, s_2 και s_3, με σκοπό να τις μετατρέψουμε σε εξισώσεις.
3. Όλοι οι σταθεροί όροι πρέπει να είναι θετικοί και όλες οι μεταβλητές μη αρνητικές.

Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\underline{\boldsymbol{ΚΑΝΟΝΙΚΗ\ ΜΟΡΦΗ\ Π.Γ.Π.}}$$

$$Μεγιστοποίηση : 1/V = y_1 + y_2 + y_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$υπό\ τους\ περιορισμούς:$$

$$6y_1 - y_2 + 5y_3 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 1$$

$$4y_1 - 4y_2 + 0y_3 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 1$$

$$y_1 + 7y_2 + 10y_3 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \quad και \quad s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$\Gamma\iota\alpha\ y_1 = 0, y_2 = 0\ \kappa\alpha\iota\ y_3 = 0\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ s_1 = 1, s_2 = 1\ \kappa\alpha\iota\ s_3 = 1$$

Επομένως η Αρχική Βασική Εφικτή Λύση είναι η (0, 0, 0, 1, 1, 1)

		Συντελεστές Αντικειμενικής Συνάρτησης							Συντελεστές στην Αντικειμενική Συνάρτηση
		1	1	1	0	0	0		
		y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3		
Βασικές Μεταβλητές	s_1	6	-1	5	1	0	0	1	0
	s_2	4	-4	0	0	1	0	1	0
	s_3	1	7	10	0	0	1	1	0
		-1	-1	-1	0	0	0		1/V

Πίνακας 5.3.3.1 – Αρχικό Tableau Simplex

$$\Sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta\ o\delta\eta\gamma\acute{o}\varsigma = \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta\ y_1, \mathrm{E}\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o = 1/6$$

$$\Gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ o\delta\eta\gamma\acute{o}\varsigma = \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ s_1$$

$$\mathrm{E}\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ \eta\ s_1\ \varphi\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\iota\sigma\acute{\varepsilon}\rho\chi\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ y_1.$$

		Συντελεστές Αντικειμενικής Συνάρτησης							Συντελεστές στην Αντικειμενική Συνάρτηση
		1	1	1	0	0	0		
		y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3		
Βασικές Μεταβλητές	y_1	1	-1/6	5/6	1/6	0	0	1/6	1
	s_2	0	-10/3	-10/3	-2/3	1	0	1/3	0
	s_3	0	43/6	55/6	-1/6	0	1	5/6	0
		0	-7/6	-1/6	1/6	0	0		1/V

Πίνακας 5.3.3.2 – Δεύτερο Tableau Simplex

$$\Sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta\ o\delta\eta\gamma\acute{o}\varsigma = \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta\ y_2, E\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o = 5/43$$

$$\Gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ o\delta\eta\gamma\acute{o}\varsigma = \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\ s_3$$

$$E\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ \eta\ s_3\ \varphi\varepsilon\acute{\upsilon}\gamma\varepsilon\iota\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \varepsilon\iota\sigma\acute{\varepsilon}\rho\chi\varepsilon\tau\alpha\iota\ \eta\ y_2.$$

		Συντελεστές Αντικειμενικής Συνάρτησης							
		1	1	1	0	0	0		Συντελεστές στην Αντικειμενική Συνάρτηση
		y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3		
Βασικές Μεταβλητές	y_1	1	0	45/43	7/43	0	1/43	8/43	1
	s_2	0	0	40/43	-32/43	1	20/43	31/43	0
	y_2	0	1	55/43	-1/43	0	6/43	5/43	1
		0	0	57/43	6/43	0	7/43	≥0	1/V

Πίνακας 5.3.3.3 – Τελικό Tableau Simplex

Εφόσον στην τελευταία γραμμή του πίνακα που αντιπροσωπεύει την εφικτή λύση δεν υπάρχει αρνητική εκχώρηση, η διαδικασία της μεθόδου Simplex τερματίζεται. Οι τιμές των μεταβλητών y_1, y_2 και y_3 είναι $8/43$, $5/43$ και 0 αντίστοιχα.

Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$1/V = y_1 + y_2 + y_3 = 8/43 + 5/43 + 0 = 13/43$$

ή

$$V = 43/13$$

Οι βέλτιστη μικτή στρατηγική για την εταιρία Β είναι:

$$q_1 = V \times y_1 = \frac{43}{13} \times \frac{8}{43} = \frac{8}{13}$$

$$q_2 = V \times y_2 = \frac{43}{13} \times \frac{5}{43} = \frac{5}{13}$$

$$q_3 = V \times y_3 = \frac{43}{13} \times 0 = 0$$

Επομένως, η βέλτιστη μικτή στρατηγική για την εταιρία Β είναι το διάνυσμα $(8/13, 5/13, 0)$.

Η βέλτιστη μικτή στρατηγική για την εταιρία Α μπορεί να εξαχθεί και αυτή από το τελικό tableau Simplex. Οι τιμές x_1, x_2 και x_3 είναι όπως μας υποδεικνύει ο παραπάνω πίνακας $6/43$, 0 και $7/43$ αντίστοιχα.

Οι βέλτιστη μικτή στρατηγική για την εταιρία Β είναι:

$$p_1 = V \times x_1 = \frac{43}{13} \times \frac{6}{43} = \frac{6}{13}$$

$$p_2 = V \times x_2 = \frac{43}{13} \times 0 = 0$$

$$p_3 = V \times x_3 = \frac{43}{13} \times \frac{7}{43} = \frac{7}{13}$$

Επομένως, η βέλτιστη μικτή στρατηγική για την εταιρία Β είναι το διάνυσμα $(6/13, 0, 7/13)$.

6. ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ (COALITIONAL GAMES)

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΑΙΓΝΙΑ $\boldsymbol{n}$ - ΠΑΙΚΤΩΝ

… in a world with multiple interests, sometimes in conflict and sometimes in cooperation with one another, all the facts and quantifications by themselves do not necessarily point unambiguously to a “correct” decision, or to a “fair” allocation of resources. Indeed, the fundamental meaning of the words “correct” and “fair” is a matter of judgment in a multipolar world. That this is the case is made particularly clear by the theory of n-person games. …

L.S Sharpley

Αν n ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών ($n \in \mathbb{N}$), τότε τα παίγνια n-παικτών ορίζονται ως παίγνια στα οποία συμμετέχουν περισσότεροι από δύο παίκτες, μέχρι και n, αρκεί ο αριθμός των παικτών να είναι πεπερασμένος. Έτσι λοιπόν σε ένα τέτοιο παίγνιο, αν $i = 1, 2, \dots, n$ τότε ο i-παίκτης διαθέτει το S_i σύνολο στρατηγικής όπου $S_i = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, ενώ όλοι οι παίκτες του παιγνίου επιλέγουν ταυτόχρονα ένα στοιχείο από το διάνυσμα στρατηγικής τους, με αποτέλεσμα το διάνυσμα $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ να είναι το διάνυσμα στρατηγικής που επιλέχτηκε ταυτόχρονα από τους n - παίκτες του παιγνίου. Το γινόμενο $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ αποτελεί το σύνολο όλων των στρατηγικών συνδυασμών, ανάλογα με την ταυτόχρονη επιλογή των παικτών. Όπως και στην περίπτωση του παιγνίου δύο παικτών σε κάθε παίκτη i αντιστοιχεί μία συνάρτηση απόδοσης $u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$, και έτσι ο αριθμός $u_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}$ είναι η απόδοση του διανύσματος στρατηγικής $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ για τον i-παίκτη.

Σε τέτοια παίγνια, σε ότι αφορά την **ισορροπία κατά Nash** θα λέμε ότι το διάνυσμα στρατηγικής $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ είναι ισορροπία κατά Nash αν:

$$u_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \geq u_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n),$$

$$\forall i \; \kappa\alpha\iota \; \forall \sigma_i \in S_i$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ένα διάνυσμα στρατηγικής είναι ισορροπία κατά Nash, αν κανένας παίκτης δε μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας στρατηγική, τη στιγμή που οι αντίπαλοί του παραμένουν σταθεροί ως προς την επιλογή της στρατηγικής τους.

6.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΙΓΝΙΟΥ 3 - ΠΑΙΚΤΩΝ

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, όταν οι παίκτες ενός παιγνίου είναι περισσότεροι από δύο προκύπτουν κάποιες ουσιώδεις διαφορές. Για παράδειγμα στην περίπτωση παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, το θεώρημα που λέει ότι όλες οι λύσεις ισορροπίας έχουν τα ίδια κέρδη, δε μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση ενός παιγνίου με τρεις παίκτες. Έτσι σε μια τέτοια περίπτωση όπου οι παίκτες του παιγνίου είναι περισσότεροι από δύο, σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος οι λύσεις ισορροπίας δεν έχουν την ίδια απόδοση. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό στο παράδειγμα που ακολουθεί και αφορά το συγκριτικό πλεονέκτημα τριών εταιριών.

Κάθε εταιρία έχει την επιλογή του να υιοθετήσει ή όχι μία νέα τεχνολογική καινοτομία. Αν καμία από τις τρεις εταιρίες δεν υιοθετήσει τη νέα αυτή τεχνολογία δεν δημιουργείται συγκριτικό πλεονέκτημα και η εκχώρηση στον πίνακα πληρωμών είναι το διάνυσμα $(0, 0, 0)$. Αν μόνο μία από τις εταιρίες υιοθετήσει την καινοτομία, τότε η συγκεκριμένη εταιρία αποκτά συγκριτικό πλεονέκτημα και κέρδη ίσα με α ενώ παράλληλα οι αντίπαλες εταιρίες βρίσκονται σε θέση συγκριτικού μειονεκτήματος και έχουν απώλειες $\alpha/2$. Επομένως αν η εταιρία Α υιοθετήσει την τεχνολογική καινοτομία το διάνυσμα απόδοσης είναι το

$(\alpha, \alpha/2, \alpha/2)$. Μπορούμε να ταυτίσουμε την παραπάνω κατάσταση με μία αντίστοιχη όπου η εταιρία Α παίρνει μερίδιο της αγοράς τόσο από την εταιρία Β όσο και από την εταιρία Γ. Αν τώρα δύο από τις εταιρίες υιοθετήσουν την τεχνολογική καινοτομία, τότε οι δύο αυτές εταιρίες μοιράζονται το συγκριτικό πλεονέκτημα, κερδίζοντας από $\alpha/2$ η καθεμία ενώ την ίδια στιγμή η εταιρία με συγκριτικό μειονέκτημα έχει απώλειες ίσες με α. Τέλος αν και οι τρεις εταιρίες προχωρήσουν στην αξιοποίηση της νέας τεχνολογίας, δεν παρουσιάζεται κάποιο συγκριτικό πλεονέκτημα και έτσι η τιμή της συνάρτησης απόδοσης είναι το διάνυσμα $(0, 0, 0)$. Οι παραπάνω καταστάσεις αποτυπώνονται και στον πίνακα πληρωμών που ακολουθεί

Εταιρία Γ : New Tech.			
		Εταιρία B	
		New Tech.	Old Tech.
Εταιρία A	New Tech.	(α/2, -α, α/2) → see below	

Εταιρία Γ : New Tech.			
		Εταιρία B	
		New Tech.	Old Tech.
Εταιρία A	New Tech.	(0, 0, 0)	(α/2, -α, α/2)
	Old Tech.	(-α, α/2, α/2)	(-α/2, -α/2, α)

Εταιρία Γ : Old Tech.		
	Εταιρία B	
	New Tech.	Old Tech.
New Tech.	(α/2, α/2, -α)	(α, -α/2, -α/2)
Old Tech.	(-α/2, α, -α/2)	(0, 0, 0)

Πίνακας 6.2.1 – Πίνακας Πληρωμών Παραδείγματος Παιγνίου Τριών Παικτών

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα πληρωμών, καθεμιά από τις τρεις εταιρίες έχει κυρίαρχη στρατηγική την υιοθέτηση της νέας τεχνολογίας (New Tech.). Επομένως η **μοναδική ισορροπία** που παρουσιάζεται στο συγκεκριμένο παίγνιο είναι η κατάσταση κατά την οποία και οι τρεις εταιρίες προχωρούν στην υιοθέτηση της νέα τεχνολογίας (New Tech.). Το ίδιο ακριβώς θα συνέβαινε αν στο παραπάνω παίγνιο συγκριτικού πλεονεκτήματος συμμετείχαν δύο αντί για τρεις εταιρίες. Καμία εταιρία δε μπορεί να μείνει πίσω σε σύγκριση με τις αντίπαλές της στην υιοθέτηση την τεχνολογικής καινοτομίας. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση n εταιριών, δηλαδή ότι ακριβώς και στις περιπτώσεις με δύο ή και τρεις εταιρίες.

Μια σημαντική πλευρά της εκδοχής των παιγνίων με n – παίκτες είναι ότι τα "υποσύνολα" των παικτών που παρουσιάζονται σε τέτοιες καταστάσεις μπορούν να δημιουργήσουν συνεργασίες (coalitional games). Μια χρήσιμη ιδέα σε αυτές τις περιπτώσεις παιγνίων αποτελεί ο "πυρήνας" του παιγνίου (the core of the game). Τέλος μία εξίσου σημαντική πτυχή της θεωρίας παιγνίων είναι αυτό της ύπαρξης αμεροληψίας και "δικαιοσύνης". Σε αυτή την περίπτωση σημαντικές απαντήσεις μας παρέχει η "θεωρία της τιμής" του Sharpley (the Sharpley Value theory). Όλα τα παραπάνω παρουσιάζονται αναλυτικότερα στις ενότητες που ακολουθούν.

6.3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ (COALITIONAL GAMES)

Σε κάποιες καταστάσεις στείρου ανταγωνισμού, οι παίκτες ενός παιγνίου μπορούν να είναι περισσότεροι από δύο, όπως είδαμε και στις παραπάνω ενότητες. Μία τέτοια κατάσταση μπορεί να αποτυπωθεί από τα παίγνια συνεργασίας, στα οποία οι παίκτες μπορούν να συντονίσουν τις στρατηγικές τους αρχικά και αφετέρου να μοιραστούν τις πληρωμές. Συγκεκριμένα, αν n ο αριθμός των παικτών ενός παιγνίου, ο οποίος και είναι πεπερασμένος, τότε μία συνεργασία παικτών δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα υποσύνολο του συνόλου των παικτών, έστω p. Οι παίκτες που λαμβάνουν μέρος σε μια τέτοια συνεργασία μπορούν να επισυνάψουν κάποιες δεσμευτικές συμφωνίες για κοινές στρατηγικές, να ενώσουν τις επιμέρους στρατηγικές τους και στο τέλος να αναδιανείμουν τις πληρωμές ισόποσα. Όπως γίνεται εύκολα κατανοητό, στα παίγνια συνεργασίας επικεντρωνόμαστε στο τι μπορεί να πετύχει μία ομάδα παικτών και όχι στο τι μπορεί να πετύχει ο κάθε παίκτης ατομικά. Επομένως ένα παίγνιο συνεργασίας περιγράφει το πόσο επικερδής μπορεί να είναι μία συνεργασία ενώ ταυτόχρονα δεν ασχολείται με τις ατομικές επιλογές στρατηγικών ή με το πόσο καλά συνεργάζονται τα μέλη ενός τέτοιου συνασπισμού. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η θεωρία των συνεργατικών παιγνίων ισχύει τόσο για παίγνια μηδενικού όσο και μη μηδενικού αθροίσματος. Σε όλα τα παραπάνω αναφέρετε η ακόλουθη υπόθεση , που ονομάζεται και **υπόθεση μεταφερόμενης χρησιμότητας** (transferable utility assumption):

- Τα κέρδη μιας συνεργασίας μπορούν να αναδιανεμηθούν στους παίκτες που τη συγκροτούν
- Οι παίκτες που συγκροτούν μία συνεργασία είναι ικανοποιημένοι μόνο όταν οι πληρωμές διανέμονται ισόποσα
- Σε κάθε συνεργασία μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία και μόνο τιμή, η οποία και αντιπροσωπεύει τις πληρωμές της

Ορισμός 6.3 (Παίγνια συνεργασίας με μεταφερόμενη χρησιμότητα): Ένα παίγνιο συνεργασίας με μεταφερόμενη χρησιμότητα είναι ένα ζεύγος (n, u), όπου:

I. $\boldsymbol{n}$ είναι ένα πεπερασμένο πλήθος παικτών, και
II. $\boldsymbol{u} : \boldsymbol{n} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης που σχετίζεται με κάθε συνεργασία $p \subseteq n$ και $u(p)$ η πληρωμή την οποία τα μέλη που συγκροτούν αυτή τη συνεργασία μπορούν να αναδιανείμουν μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι $u(\emptyset) = 0$.

Συνεχίζοντας με την εξέταση της θεωρίας των συνεργατικών παιγνίων, προκύπτουν δύο θεμελιώδη ερωτήματα : 1) ποιες συνεργασίες πρέπει βάση λογικής να συγκροτηθούν και 2) με ποιο τρόπο θα έπρεπε μία συνεργασία να διανείμει τις πληρωμές της ανάμεσα στα μέλη της. Σε ότι αφορά το πρώτο ερώτημα, στις περισσότερες περιπτώσεις θα αντιμετωπίσουμε μία κατάσταση στην οποία θα έχουμε μία “μεγάλη συνεργασία” (grand coalition), δηλαδή μία συνεργασία στην οποία και θα συμμετέχουν όλοι οι παίκτες του παιγνίου. Επομένως θα αντιμετωπιστεί μια κατάσταση στην οποία όλοι οι παίκτες του παιγνίου θα συμφωνήσουν στη συγκρότηση μιας συνεργασίας. Παρόλα αυτά, ορισμένες φορές προκειμένου να εξασφαλιστεί η παραπάνω κατάσταση (δηλαδή μια κατάσταση “μεγάλης συνεργασίας”), θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σχετικά με τον τρόπο που θα μπορέσει μια τέτοια συνεργασία να “μοιράσει” την πληρωμή της στα μέλη που τη συγκροτούν.

Συνεχίζοντας με την απάντηση του πρώτου από τα δύο ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω, ακολουθεί ένα είδος παιγνίου το οποίο και καλείται υπερ-προσθετικό παίγνιο (Super additive game).

Ορισμός 6.3.2 (Υπερ-προσθετικό παίγνιο) : Ένα παίγνιο $\mathrm{G} = (\mathrm{n}, \mathrm{u})$ ονομάζεται υπερ-προσθετικό παίγνιο αν $\forall \mathrm{p}, \mathrm{t} \subseteq \mathrm{n}$ με $\mathrm{p} \cap \mathrm{t} = \emptyset$ ισχύει ότι $\mathrm{u}(\mathrm{p} \cup \mathrm{t}) \geq \mathrm{u}(\mathrm{p}) + \mathrm{u}(\mathrm{t})$.

Η παραπάνω θεωρία των υπερ-προσθετικών παιγνίων ισχύει μόνο αν υποθέσουμε ότι τα υποσύνολα των παικτών p και t δεν αναμειγνύονται μεταξύ τους. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι:

- Η απόδοση και των δύο αυτών συνεργασιών είναι το άθροισμα των επιμέρους αποδόσεων των συνεργασιών p και t
- Η "μεγάλη συνεργασία" θα έχει τη μεγαλύτερη πληρωμή

Επομένως έχοντας απαντήσει στο ερώτημα για το ποιες συνεργασίες γίνεται να συγκροτηθούν λογικά, μέσα από τη θεωρία της "μεγάλης συνεργασίας" (grand coalition theory) και των υπερ-προσθετικών παιγνίων (super additive games theory), το ερώτημα που μένει προς απάντηση είναι το πώς μπορεί μία συνεργασία να μοιράσει τις πληρωμές της με δίκαιο και σταθερό τρόπο. Στην απάντηση αυτού του θεμελιώδους ερωτήματος θα μας βοηθήσουν οι ενότητες που ακολουθούν και αφορούν την "τιμή του Sharpley" (The Sharpley Value) και τον "πυρήνα" του παιγνίου (The Core of the game).

6.4 Η "ΤΙΜΗ" ΤΟΥ SHARPLEY (THE SHARPLEY VALUE)

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την "τιμή του Sharpley" (The Sharpley Value), η οποία είναι μία από τις πιο γνωστές μεθόδους εύρεσης του πως θα πρέπει διανεμηθούν τα κέρδη ή οι πληρωμές μιας συνεργασίας ή ενός συνασπισμού, στα μέλη που τη συγκροτούν. Η βασική ιδέα, σε παίγνια συνεργασίας σε σχέση με τον καταμερισμό των κερδών είναι η εύρεση ενός τρόπου για τη δίκαιη διανομή των πληρωμών. Αυτή η δήλωση συνδέεται άρρηκτα με το τί μπορεί να θεωρείται δίκαιο σε μια συνεργασία, κάτι στο οποίο δίνουν απάντηση ορισμένα αξιώματα που ακολουθούν, τα οποία και εκφράζουν τα χαρακτηριστικά ενός δίκαιου καταμερισμού των κερδών.

Η "Τιμή του Sharpley" βασίζεται σε μια ιδέα του Lloyd Sharpley σύμφωνα με την οποία τα μέλη μιας συνεργασίας θα πρέπει να λαμβάνουν τις αντίστοιχες πληρωμές ή το μερίδιο τους ανάλογα με την ελάχιστη συνεισφορά τους σε αυτή τη συνεργασία. Ουσιαστικά λοιπόν σύμφωνα με το σκεπτικό του Sharpley αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το τι παραπάνω προσφέρει ένα μέλος σε μια συνεργασία, όταν προστεθεί στη συνεργασία αυτή.

Το πρώτο από τα αξιώματα που θα αναφερθεί είναι αυτό που αφορά τη συμμετρία. Έστω i και j δύο διαφορετικοί παίκτες από το σύνολο των παικτών n ενός παιγνίου. Αν οι δύο αυτοί παίκτες προσφέρουν το ίδιο σε κάθε πιθανή συνεργασία που μπορούν να λάβουν μέρος στα πλαίσια του παιγνίου, τότε λέμε ότι οι παίκτες i και j είναι εντελώς "ανταλλάξιμοι", δηλαδή ο ένας μπορεί να αντικαταστήσει τον άλλο σε οποιαδήποτε δυνατή συνεργασία, χωρίς να αλλάξει η απόδοση της συνεργασίας αυτής. Έτσι αν p ένα υποσύνολο του συνόλου των παικτών ενός παιγνίου, το οποίο δεν περιέχει ούτε τον i αλλά ούτε και τον j παίκτη, τότε:

$$u(p \cup \{i\}) = u(p \cup \{j\})$$

Αξίωμα 6.4.1 (Συμμετρία): Για οποιαδήποτε συνάρτηση απόδοσης u, αν i και j "ανταλλάξιμοι" παίκτες ενός παιγνίου, τότε $\psi_i(n,u) = \psi_j(n,u)$, όπου ψ_i και ψ_j οι αντίστοιχοι καταμερισμοί της απόδοσης ενός συνεργατικού παιγνίου για τους παίκτες i και j.

Το παραπάνω αξίωμα δεν μας υποδεικνύει τίποτα περισσότερο από το γεγονός ότι αν δύο παίκτες ενός παιγνίου είναι απόλυτα ισοδύναμοι ως προς την απόδοση που προσφέρουν σε μία συνεργασία, τότε και οι επιμέρους πληρωμές, που ενδείκνυται να τους αποφέρει μία τέτοια πιθανή συνεργασία θα είναι ίσες.

Το δεύτερο αξίωμα που θα αναφερθεί σε αυτή την ενότητα αφορά τους “μη-ωφέλιμους” παίκτες (dummy players). Έστω i ένας μη-ωφέλιμος, τότε το ποσό που προσφέρει ένας τέτοιου είδους παίκτης σε κάθε πιθανή συνεργασία είναι μηδενικό. Δηλαδή, αν p ένα υποσύνολο του συνόλου των παικτών ενός παιγνίου τότε αν u η συνάρτηση απόδοσης, ισχύει ότι $u(p \cup \{i\}) = u(p)$. Επομένως αν προστεθεί ένας “μη-ωφέλιμος” παίκτης σε μία συνεργασία παικτών, δεν προσφέρει απολύτως τίποτα στην απόδοση της συνεργασίας.

Αξίωμα 6.4.2 (Μη-ωφέλιμοι παίκτες): Για οποιαδήποτε συνάρτηση απόδοσης u, αν i ένας μη-ωφέλιμος παίκτης τότε $\psi_i(n, u) = 0$, όπου ψ_i ο αντίστοιχος καταμερισμός της απόδοσης ενός συνεργατικού παιγνίου για τον παίκτη i.

Το τρίτο από τα αξιώματα του Sharpley είναι αυτό που αφορά την προσθεσιμότητα (additivity). Έστω u συνάρτηση απόδοσης ενός παιγνίου συνεργασίας το οποίο μπορεί να χωριστεί σε δύο παίγνια συνεργασίας ως εξής: $u = u_1 + u_2$, όπου u_1 και u_2 οι συναρτήσεις απόδοσης δύο διαφορετικών μεταξύ τους παιγνίων συνεργασίας. Τότε μπορούμε να μπορούμε να χωρίσουμε την πληρωμή του παιγνίου με αντικειμενική συνάρτηση τη u σύμφωνα με το αξίωμα που ακολουθεί.

Αξίωμα 6.4.3 (Προσθεσιμότητα): Για κάθε u_1 και u_2, όπου u_1 και u_2 συναρτήσεις απόδοσης δύο διαφορετικών μεταξύ τους παιγνίων συνεργασίας, $\psi_i(n, u_1 + u_2) = \psi_i(n, u_1) + \psi_i(n, u_2)$, όπου το παίγνιο $G = (n, u_1 + u_2)$ ορίζεται ως $(u_1 + u_2)(p) = u_1(p) + u_2(p)$ για κάθε συνεργασία $p \subseteq n$.

Αυτό λοιπόν που προκύπτει άμεσα από τα τρία παραπάνω αξιώματα είναι η “Τιμή του Sharpley”. Έστω το παίγνιο συνεργασίας $G = (n, u)$, τότε η “Τιμή του Sharpley” διανέμει τις επιμέρους πληρωμές των μελών μιας συνεργασίας p σύμφωνα με τον παρακάτω μαθηματικό τύπο:

$$\Phi_i = \frac{1}{p!} \sum_{p \subseteq n/\{i\}} |p|!\,(|n| - |p| - 1)!\,[u(p \cup \{i\}) - u(p)]$$

$$για\ κάθε\ παίκτη\ i.$$

Θεώρημα 6.4 : Έστω $G = (n, u)$ παίγνιο συνεργασίας. Τότε υπάρχει μία μοναδική διαίρεση πληρωμών $x(u) = \Phi(n, u)$ η οποία και διαιρεί την πληρωμή της “μεγάλης συνεργασίας” και ικανοποιεί τα αξιώματα της συμμετρίας, του μη-ωφέλιμου παίκτη και της προσθεσιμότητας. Αυτός ο καταμερισμός των πληρωμών γίνεται μέσα από την εξίσωση της “τιμής του Sharpley”.

6.5 Ο “ΠΥΡΗΝΑΣ” ΤΟΥ ΠΑΙΓΝΙΟΥ (THE CORE OF THE GAME)

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η “τιμή” του Sharpley μας βοηθάει στη θεωρία των συνεργατικών παιγνίων, σε ότι αφορά τον καταμερισμό της πληρωμής της “μεγάλης συνεργασίας” (grand coalition), μεταξύ των μελών που την απαρτίζουν. Παρόλα αυτά, στην παραπάνω ανάλυση δεν αποσαφηνίστηκε το πόσο σταθερή μπορεί να είναι μία τέτοια μεγάλη συμμαχία παικτών. Επομένως το ερώτημα που προκύπτει είναι το αν οι παίκτες είναι διατεθειμένοι να σχηματίσουν μία τέτοια “μεγάλη συνεργασία”, δεδομένου του τρόπου διαμοιρασμού της πληρωμής αυτής της συνεργασίας, ή αν θα προτιμούσαν να συγκροτήσουν κάποιες μικρότερες σε αριθμό μελών συνεργασίες. Έτσι, όπως θα δούμε και παρακάτω, πολλές φορές οι παίκτες ενός συνεργατικού παιγνίου προτιμούν να συγκροτούν μικρότερες συμμαχίες (ως προς τον αριθμό των παικτών που τις απαρτίζουν), με στόχο τη συγκομιδή μεγαλύτερων ατομικών αποδόσεων, ακόμα και αν η συνολική απόδοση μιας τέτοιας συνεργασίας είναι μικρότερη από την αντίστοιχη μιας “μεγάλης συνεργασίας”.

Ένα ακόμα εύλογο ερώτημα που προκύπτει σε τέτοιες καταστάσεις, είναι το κάτω από ποιες συνθήκες διαμοιρασμού των πληρωμών, είναι διατεθειμένοι οι παίκτες ενός παιγνίου να σχηματίσουν μία "μεγάλη συνεργασία". Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από τη συγκεκριμένη θεματική ενότητα, αφού οι παίκτες ενός παιγνίου συνεργασίας προτίθενται να προσχωρήσουν σε μια "μεγάλη συνεργασία" αν και μόνο αν το "προφίλ" των πληρωμών τους ατομικά προέρχεται από σύνολο που ονομάζεται "πυρήνας" (core).

Ορισμός 6.5.1 ("Πυρήνας" παιγνίου) : Ένα διάνυσμα πληρωμών $\boldsymbol{x}$ βρίσκεται στον "πυρήνα" ενός παιγνίου συνεργασίας $G = (n, u)$ αν και μόνο αν

$$\forall p \subseteq n, \quad \sum_{i \in p} x_i \geq u(p)$$

όπου $\boldsymbol{x}$ μία εκχώρηση των πληρωμών για τους διάφορους παίκτες-μέλη μιας συνεργασίας.

Ουσιαστικά αυτό που επάγεται από τον παραπάνω ορισμό είναι ότι για υποσύνολο παικτών p, το άθροισμα των επιμέρους απολαβών του θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή τουλάχιστον ίσο με την ολική απόδοση αυτού του υποσυνόλου (συνεργασία) των παικτών. Πριν αναλύσουμε περισσότερο την έννοια του "πυρήνα" ενός παιγνίου όμως, θα προχωρήσουμε στον ορισμό ενός "απλού" παιγνίου (simple game) συνεργασίας και του παίκτη-βέτο (veto player).

Ορισμός 6.5.2 ("Απλό" παίγνιο συνεργασίας) : Ένα παίγνιο $G = (n, u)$ ονομάζεται "απλό" παίγνιο (simple game) αν για κάθε $p \subseteq n,\ u(p) \in \{0,1\}$.

Ορισμός 6.5.3 (Veto player) : Ένας παίκτης i ονομάζεται παίκτης-βέτο (veto player) αν $u(p\backslash\{i\}) = 0.$ Δηλαδή με άλλα λόγια η συμμετοχή ενός παίκτη-βέτο σε μια συνεργασία είναι ιδιαίτερα σημαντική, αν η συνεργασία αυτή θέλει να έχει κάποιο κέρδος.

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω ορισμούς, προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.5 : Σε ένα "απλό" παίγνιο συνεργασίας, ο "πυρήνας" του παιγνίου είναι κενός αν και μόνο αν δεν υπάρχει κάποιος παίκτης-βέτο. Αν σε ένα παίγνιο συνεργασίας υπάρχουν παίκτες-βέτο, τότε ο "πυρήνας" του παιγνίου αποτελείται από όλα εκείνα τα διανύσματα πληρωμών $\boldsymbol{x}$ για τα οποία οι παίκτες που δεν είναι παίκτες-βέτο (non-veto players) έχουν μηδενικό κέρδος.

Στις ενότητες που ακολουθούν θα παρουσιαστούν παραδείγματα εφαρμογής τόσο της "τιμής του Sharpley (The Sharpley Value) όσο και του "πυρήνα" του παιγνίου (The Core of the game). Μάλιστα θα γίνει και σύγκριση ανάμεσα στις δύο προαναφερθείσες μεθόδους ως προς τον καταμερισμό των πληρωμών στους παίκτες-μέλη ενός παιγνίου συνεργασίας.

6.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΔΙΑΜΟΙΡΑΣΜΟΥ ΤΩΝ ΚΕΡΔΩΝ

6.6.1 ΤΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΗΣ ΠΡΟΩΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΦΑΡΜΑΚΟΥ

Ένας ερευνητής φαρμάκων έχει ανακαλύψει μέσα από πειράματα ένα νέο φάρμακο. Παρόλα αυτά ο ερευνητής αυτός δε μπορεί να προχωρήσει στη μαζική παραγωγή του φαρμάκου του, λόγω κόστους και προτίθεται να πουλήσει τη συνταγή για την παρασκευή του φαρμάκου σε φαρμακευτική εταιρία προκειμένου να ικανοποιηθούν οι ανάγκες των ατόμων που πάσχουν από μια συγκεκριμένη ασθένεια. Οι φαρμακευτικές εταιρίες που ενδιαφέρθηκαν για την αγορά της συνταγής είναι δύο: η φαρμακευτική εταιρία Α και η φαρμακευτική εταιρία Β. Οποιαδήποτε από τις δύο υποψήφιες εταιρίες καταφέρει να αγοράσει τη "φόρμουλα" του ερευνητή, θα μοιραστεί μαζί του κέρδη ίσα με 1.000.000 €.

Πρώτη κίνηση για τη λύση του παιγνίου αποτελεί η εύρεση της χαρακτηριστικής συνάρτησης (συνάρτηση απόδοσης) του παιγνίου. Έστω ότι στο παίγνιο που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, ο ερευνητής φαρμάκων είναι ο παίκτης 1, η φαρμακευτική εταιρία Α ο παίκτης 2 και η φαρμακευτική εταιρία Β ο παίκτης 3, τότε η αντικειμενική συνάρτηση του παιγνίου είναι:

$$u(\{\ \}) = u(\{1\}) = u(\{2\}) = u(\{3\}) = u(\{2,3\}) = 0$$
$$u(\{1,2\}) = u(\{1,3\}) = u(\{1,2,3\}) = 1.000.000€$$

Στη συνέχεια προχωρούμε στην εύρεση του "πυρήνα" του παιγνίου (core of the game) για την προώθηση του φαρμάκου. Έτσι για το συγκεκριμένο παίγνιο το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ θα είναι το διάνυσμα απόδοσης του παιγνίου, αν και μόνο αν:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$\kappa\alpha\iota\ \ x_1 +\ x_2 + x_3 = 1.000.000€$$

Από τον ορισμό 6.5.1 (ορισμός "πυρήνα" παιγνίου) έχουμε ότι το διάνυσμα απόδοσης $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ θα βρίσκεται στον "πυρήνα" του παιγνίου αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παραπάνω ανισότητες και επιπλέον ισχύουν οι ανισότητες που ακολουθούν.

$$x_1 +\ x_2 \geq 1.000.000 \qquad\qquad (1)$$
$$x_1 +\ x_3 \geq 1.000.000 \qquad\qquad (2)$$

$$x_2 + x_3 \geq 0 \qquad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1.000.000$$

Για να βρούμε τον “πυρήνα” του παιγνίου αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν το διάνυσμα πληρωμών $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ βρίσκεται στον “πυρήνα” τότε οι τιμές x_1, x_2 και x_3 θα πρέπει να ικανοποιούν την ανισότητα που προκύπτει από την πρόσθεση των ανισοτήτων $(1) - (3)$. Προσθέτοντας τις ανισότητες $(1) - (3)$ προκύπτει η ανισότητα $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 2.000.000 \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 1.000.000$

Από την ισότητα $x_1 + x_2 + x_3 = 1.000.000$, που δηλώθηκε παραπάνω έχουμε ότι περιορισμοί $(1), (2)$ και (3) είναι “δεσμευτικοί” περιορισμοί (binding constraints). Λύνοντας επομένως ταυτόχρονα ως ισότητες τις ανισότητες $(1), (2)$ και (3) προκύπτει ότι $x_1 = 1.000.000€$, $x_2 = 0€$ και $x_3 = 0€$. Ένας γρήγορος έλεγχος θα μας βοηθούσε στο να διαπιστώσουμε ότι το διάνυσμα πληρωμών $(1.000.000, 0, 0)$ ικανοποιεί όλους τους προαναφερθέντες περιορισμούς. Συμπερασματικά, αυτό που μπορούμε να πούμε είναι ότι ο “πυρήνας” αυτού του παιγνίου είναι το διάνυσμα $(1.000.000, 0, 0)$, κάτι που μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι ο “πυρήνας” του παιγνίου υπερτονίζει τη σημαντικότητα του παίκτη 1 (ερευνητής φαρμάκων).

Στη συνέχεια του παραδείγματός μας θα προχωρήσουμε στην εύρεση της “τιμής του Sharpley”. Για να υπολογίσουμε την τιμή x_1, δηλαδή την πληρωμή του παίκτη 1, καταγράφουμε όλες τις πιθανές συνεργασίες p στις οποίες και ο παίκτης 1 δε μπορεί να συμμετέχει. Για καθεμιά από αυτές τις συνεργασίες, υπολογίζουμε την τιμή $u(p \cup \{1\}) - u(\{p\})$ καθώς και την τιμή $q_3(p) = [|p|!\,(3 - |p| - 1)!]/3!$ (πίνακας 6.6.1.1). Επειδή ο παίκτης ένα προσθέτει στο σύνολο της πληρωμής της συνεργασίας:

$$\left(\frac{2}{6}\right)(0) + \left(\frac{1}{6}\right)(1.000.000) + \left(\frac{2}{6}\right)(1.000.000) + \left(\frac{1}{6}\right)(1.000.000)$$
$$= \frac{4.000.000}{6} \text{ €}$$

Η θεωρία της "τιμής του Sharpley" μας υποδεικνύει ότι ο παίκτης 1 θα πρέπει να λάβει αμοιβή ίση με 4.000.000/6 €.

Για να υπολογίσουμε την "τιμή του Sharpley" για τον παίκτη 2, χρησιμοποιούμε τα δεδομένα του πίνακα 6.6.1.2. Η "τιμή του Sharpley" για τον παίκτη 2 υποδεικνύει αμοιβή ίση με:

$$\left(\frac{1}{6}\right)(1.000.000) = \frac{1.000.000}{6} \text{€}$$

για τον παίκτη 2. Τελειώνοντας με τους υπολογισμούς, η "τιμή του Sharpley" θα πρέπει να καταχωρήσει ένα ποσό $u(\{1,2,3\}) = 1.000.000$€ στους παίκτες του παιγνίου, κάτι το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τιμή για τον παίκτη 3 θα είναι ίση με $1.000.000 - x_1 - x_2 = 1.000.000/6$€ .

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q_3(p)}$	$\boldsymbol{u(p \cup \{1\}) - u(\{p\})}$
$\{\,\}$	$2/6$	0€
$\{2\}$	$1/6$	$1.000.000$€
$\{2,3\}$	$2/6$	$1.000.000$€
$\{3\}$	$1/6$	$1.000.000$€

Πίνακας 6.6.1.1-Πίνακας για τον υπολογισμό της "τιμής του Sharpley" (Sharpley's Value) για τον παίκτη 1

p	$q_3(p)$	$u(p \cup \{2\}) - u(\{p\})$
$\{\}$	$2/6$	0€
$\{1\}$	$1/6$	$1.000.000$€
$\{3\}$	$1/6$	0€
$\{1, 3\}$	$2/6$	0€

Πίνακας 6.6.1.2-Πίνακας για τον υπολογισμό της “τιμής του Sharpley” (Sharpley’s Value) για τον παίκτη 2

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι ο “πυρήνας” του παιγνίου μας έδωσε αμοιβή 1.000.000€ για τον παίκτη 1 και μηδενική αμοιβή για τους παίκτες 2 και 3. Επομένως, κρίνοντας από το παράδειγμά μας, η “τιμή του Sharpley” αντιμετωπίζει τους παίκτες 2 και 3 του παιγνίου μας με πιο δίκαιο τρόπο. Σε γενικές γραμμές η μέθοδος της “τιμής του Sharpley” δίνει πιο ακριβοδίκαια αποτελέσματα από τη μέθοδο του “πυρήνα” του παιγνίου.

6.6.2 ΤΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΤΗΣ ΣΥΝΤΗΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΕΡΟΛΙΜΕΝΑ (ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ “ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ SHARPLEY”)

Υποθέτουμε ότι τρεις τύποι επιβατικών αεροσκαφών (Airbus A300, MS-21 και Boeing 737) χρησιμοποιούν το αεροδρόμιο για το οποίο γίνεται αναφορά στο παίγνιό μας. Τα αεροσκάφη τύπου Airbus A300 χρειάζονται για την απογείωση και προσγείωσή τους 400 μέτρα αερολιμένα, τα ρωσικά MS-21 450 μέτρα αεροδιαδρόμου ενώ τα επιβατικά Boeing 737 600 μέτρα. Έστω ότι το κόστος συντήρησης ενός αεροδιαδρόμου για ένα έτος είναι ανάλογο με το μήκος του αεροδιαδρόμου. Επειδή το αεροδρόμιο χρησιμοποιείται από αεροπλάνα τύπου Boeing 737, το αεροδρόμιο θα πρέπει να διαθέτει αεροδιάδρομο μήκους 600 μέτρων. Για την απλούστευση του προβλήματος, υποθέτουμε ότι μόνο ένα από κάθε έναν από τους τρεις τύπους αεροπλάνων προσγειώνεται στο αεροδρόμιο. Αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε είναι το ποσό χρέωσης του κάθε αεροπλάνου για τη συντήρηση του αερολιμένα, όταν η ετήσια συντήρηση κοστίζει 600€.

Για λόγους διευκόλυνσης, έστω ότι ο παίκτης 1 είναι το αεροπλάνο τύπου Airbus A300, ο παίκτης 2 το αεροπλάνο τύπου MS-21 και ο παίκτης 3 το αεροσκάφος τύπου Boeing 737. Μπορούμε τώρα λοιπόν να ορίσουμε ένα παίγνιο τριών παικτών, στο οποίο η απόδοση μιας συνεργασίας είναι το κόστος που σχετίζεται με το μήκος του αεροδιαδρόμου που απαιτείται για να προσγειωθεί και να απογειωθεί το αεροσκάφος με της μεγαλύτερες απαιτήσεις μήκους αεροδιαδρόμου. Επομένως, η χαρακτηριστική συνάρτηση για αυτό το παίγνιο (το κόστος καταγράφεται ως αρνητική πληρωμή) θα είναι :

$$u(\{\,\}) = 0, u(\{1\}) = -400€, u(\{1,2\}) = u(\{2\}) = -450€$$
$$u(\{3\}) = u(\{2,3\}) = u(\{1,3\}) = u(\{1,2,3\}) = -600€$$

Για να βρούμε την “τιμή του Sharpley” για κάθε παίκτη του παιγνίου, υποθέτουμε ότι τα τρία επιβατικά αεροσκάφη προσγειώνονται κατά τυχαία σειρά, και έτσι καθορίζουμε το κόστος που προσθέτει κάθε αεροπλάνο που προσγειώνεται στο κόστος που ήδη έχει δημιουργηθεί από τα αεροπλάνα που έχουν ήδη προσγειωθεί στο αεροδρόμιο (πίνακας 6.6.2.1). Η “τιμή του Sharpley” για κάθε παίκτη καταγράφεται παρακάτω ενώ ο πίνακας που ακολουθεί αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού των “τιμών του Sharpley”:

- $Κόστος\ παίκτη\ 1 = \left(\frac{1}{6}\right)(400 + 400) = \frac{\mathbf{800}}{\mathbf{6}}\ €$
- $Κόστος\ παίκτη\ 2 = \left(\frac{1}{6}\right)(50 + 450 + 450) = \frac{\mathbf{950}}{\mathbf{6}}\ €$
- $Κόστος\ παίκτη\ 3 = \left(\frac{1}{6}\right)(150 + 200 + 150 + 150 + 600 + 600)$

$$= \frac{\mathbf{1850}}{\mathbf{6}}\ €$$

Σειρά Προσγείωσης	Πιθανότητα Σειράς Προσγείωσης	Κόστος που προστίθεται κατά την άφιξη ενός παίκτη (αεροσκάφος) (€)		
		Παίκτης 1	Παίκτης 2	Παίκτης 3
1, 2, 3	1/6	400	50	150
1, 3, 2	1/6	400	0	200
2, 1, 3	1/6	0	450	150
2, 3, 1	1/6	0	450	150
3, 1, 2	1/6	0	0	600
3, 2, 1	1/6	0	0	600

Πίνακας 6.6.2.1 – Πίνακας για τον εναλλακτικό υπολογισμό των "τιμών του Sharpley"

Επομένως, η θεωρία της "τιμής του Sharpley" υποδεικνύει ότι το αεροπλάνο τύπου Airbus A300 θα πρέπει να πληρώσει 133.33€, το επιβατικό αεροσκάφος τύπου MS-21 158.33€ και το αεροπλάνο τύπου Boeing 737 308,33€.

Σε γενικές γραμμές, ακόμα και αν περισσότερα από ένα αεροπλάνα για κάθε τύπο αεροπλάνου προσγειώνονταν στο αεροδρόμιο, μέσα από τη χρήση της θεωρίας της "τιμής του Sharpley" για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η κοστολόγηση χρήσης του αεροδιαδρόμου γίνεται ως εξής: όλα τα αεροπλάνα που χρησιμοποιούν ένα μέρος του αεροδιαδρόμου θα πρέπει να μοιραστούν ισάξια το κόστος συντήρησης αυτού του κομματιού του αεροδιαδρόμου. Δηλαδή όλα τα αεροσκάφη θα πρέπει να καλύψουν τη συντήρηση των 400 πρώτων μέτρων του αεροδιαδρόμου, το αεροσκάφος τύπου MS-21 και το αεροσκάφος τύπου Boeing 737 θα πρέπει να πληρώσουν για τα επόμενα $450 - 400 = 50$ μέτρα του αεροδιαδρόμου και τέλος το αεροσκάφος τύπου Boeing 737 θα πρέπει να πληρώσει μόνο του τη συντήρηση των τελευταίων $600 - 450 = 150$ μέτρων του αερολιμένα. Αν στο αεροδρόμιο προσγειώνονταν 10 αεροσκάφη τύπου Airbus A300, 5 αεροπλάνα τύπου MS-21 και 2 τύπου Boeing 737, τότε σύμφωνα με τη θεωρία του Sharpley κάθε αεροσκάφος τύπου Airbus A300 θα έπρεπε να χρεωθεί με ποσό ίσο με $400/(10+5+2) \approx 23.53€$, κάθε αεροπλάνο τύπου MS-21 με ποσό ίσο με $23.53€ + (450-400)/(5+2) \approx 30.67€$ και κάθε αεροπλάνο τύπου Boeing 737 με ποσό ίσο με $23.53€ + 30.67€ + (600-450)/2 \approx 129.2€$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ., Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Κεφάλαια 1 & 7
2. Πολυράκης Ι., Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Κεφάλαιο 12
3. HILLIER McGraw-Hill, Introduction to Operations Research, 7th Edition, Κεφάλαιο 14
4. Wayne L. Winston, Operations Research - Applications and Algorithms, 4th Edition, Κεφάλαιο 14
5. Herbert Gintis, Game Theory Evolving, 2nd Edition, A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction
6. Ilhan Kubilay Geckil, Patrick L. Anderson, Applied Game Theory and Strategic Behavior, Κεφάλαιο 3
7. Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs, Models in Cooperative Game Theory, 2nd Edition, Κεφάλαιο 1
8. Hamdy A. Taha, Operations Research – An Introduction, 8th Edition, Κεφάλαιο 1
9. Paul Walker, A Chronology of Game Theory, http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm
10. Janet Chen, Su-I Lu, Dan Vekhter, Applications of Game Theory, http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1998-99/game-theory/applications.html
11. Ανδρέας Κ. Γεωργίου, Νικόλαος Τσάντας, Θεωρία Παιγνίων, http://www.math.upatras.gr/~tsantas/DownLoadFiles/OR_GameTheory.pdf
12. Management Course 28, Graphical Method In Game Theory, http://businessmanagementcourses.org/Lesson28GraphicalMethodInGameTheory.pdf
13. Lecture 21, Game Theory - Games with Mixed Strategies (analytic and graphic methods), http://www.uobabylon.edu.iq/eprints/publication_5_13656_31.pdf

14. Lecture 22, Game Theory – Simplex Method, http://www.uobabylon.edu.iq/eprints/publication_9_23116_31.pdf
15. Vinay Chhabra, Linear Programming: Game theory, http://www.universalteacherpublications.com/univ/ebooks/or/Ch9/gamelp.htm
16. Michael A. Trick, N-Person Games, http://mat.gsia.cmu.edu/classes/QUANT/NOTES/chap10/node6.html
17. John C.S. Lui, Introduction to Game Theory: Cooperative Games, http://www.cse.cuhk.edu.hk/~cslui/CSC6480/cooperative_game.pdf
18. L.S. Sharpley, N-Person Game Theory, https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2008/P3752.pdf
19. Εμμανουήλ Πετράκης, Σημειώσεις Θεωρίας Παιγνίων, http://mathbooksgr.files.wordpress.com/2011/08/gt_simiwseis.pdf
20. Matthew O. Jackson, Kevin Leyton-Brown, Yoav Shoham, Game Theory I: An Introduction, Coalitional Games, https://www.youtube.com/playlist?list=PLeY-lFPWgBTif4PmLSN8eJsfOhFv_QUPl