



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΣΥΝΕΧΩΣ
ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΕΣ ΕΠΑΦΕΣ**

Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία

Παναγιώτης Η. Σωτηρόπουλος
Πολιτικός Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2010

Πρόλογος

Η Διπλωματική Μεταπτυχιακή αυτή εργασία εκπονήθηκε από εμένα, τον Παναγιώτη Σωτηρόπουλο του Ηλία και της Στρατηγούλας, Διπλωματούχο Πολιτικό Μηχανικό Ε.Μ.Π. από τον Αύγουστο του 2009 έως και το Φεβρουάριο του 2010.

Το αντικείμενο μελέτης της εργασίας μου είναι η κίνηση σωμάτων με συνεχώς μεταβαλλόμενο, περιφερειακό σημείο επαφής.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου Α. Μαυραγάνη, Καθηγητή Ε.Μ.Π. (επιβλέποντα), Δ. Παναγιωτουνάκο Καθηγητή Ε.Μ.Π., Κ. Πάγκαλο, Επικ. Καθηγητή Ε.Μ.Π. υπό την καθοδήγηση και τη βοήθεια των οποίων διεκπεραιώθηκε η όλη προσπάθειά μου και βέβαια την οικογένειά μου για την αμέριστη ηθική και υλική υποστήριξη που μου παρέχει.

Π.Σ.

Εισαγωγή

Το πρόβλημα ενός συμμετρικού σώματος εκ περιστροφής που κυλίνεται ελεύθερα σε επίπεδη επιφάνεια είχε αρχικά διατυπωθεί από τον Routh (1868). Έκτοτε ένας σημαντικός αριθμός εργασιών έχουν αφιερωθεί στο εν λόγω θέμα, με τις περισσότερες να εστιάζονται στην ειδική περίπτωση της κίνησης του κυκλικού δίσκου πάνω σε ανοικτό δρόμο. Η ανάλυση αυτής της κίνησης έχει παρουσιαστεί σε πολλά βιβλία της Δυναμικής [(Routh, 1905), (Webster, 1925), (Appell, 1931), MacMillan, 19360] συνιστώντας ένα τυπικό παράδειγμα μη ολόνομης κίνησης. Με αφετηρία την εργασία του Appell (1900) (βλ. Επίσης (Korteweg, 1900)) και του Gallor (1904), όπου το πρόβλημα της κίνησης του κυκλικού δίσκου επιλύεται αναλυτικά με τη χρήση υπεργεωμετρικών συναρτήσεων Gauss και πολυώνυμα Legendre, μεταβαίνουμε στο σύνολο των εργασιών της πρόσφατης δεκαετίας. Οι εργασίες των O' Reilly (1996), Kuleshov (2001), Paris & Zhang (2002), Kessler & O'Reilly (2002), Borisov et al. (2003), Le Saux (2005) μας παρέχουν μία ολοκληρωμένη προσέγγιση της δυναμικής συμπεριφοράς του κυκλικού δίσκου. Οι ανωτέρω εργασίες επεκτείνονται και στην περίπτωση κυλινδρικών σωμάτων με τις εργασίες των Koh & Mustafa (1990) και Batista (2006)a, (2006)b, (2008), στις οποίες εξάγονται και ολοκληρώνονται αριθμητικά οι εξισώσεις της κίνησης του κυλινδρικού σώματος.

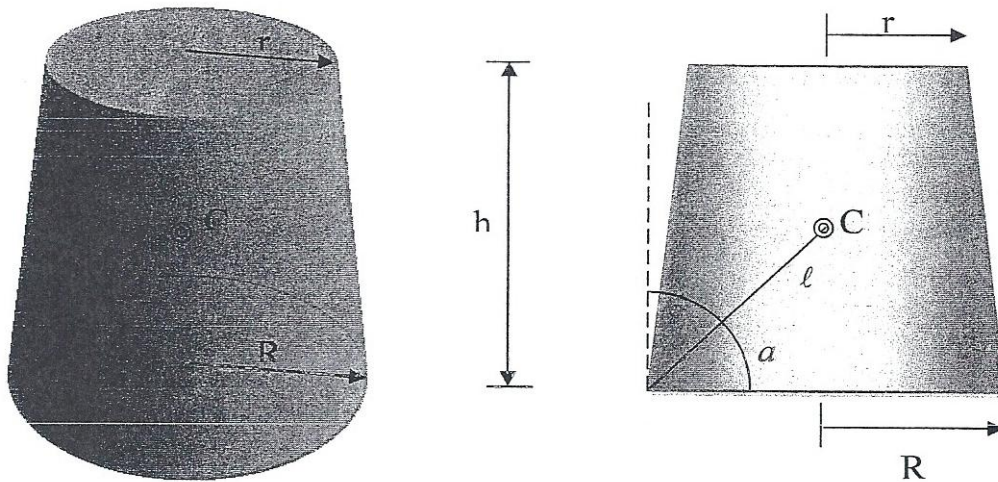
Μέρος της εργασίας επικεντρώθηκε στη μελέτη της κίνησης του κόλουρου κώνου σε οριζόντιο επίπεδο. Το οριζόντιο αυτό επίπεδο θεωρήθηκε απολύτως τραχύ χωρίς να θέσουμε περιορισμούς στην τροχιά του σημείου επαφής, όπως στις ακόλουθες φάσεις της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας. Η περιγραφή της κίνησης βασίστηκε στο φορμαλισμό Lagrange και οι εξισώσεις της κίνησης που προέκυψαν δύνανται να περιγράψουν τόσο το λικνισμό (wobbling) όσο και τον κλυδωνισμό του σώματος (rocking). Τα δύο αυτά συστατικά της κίνησης σχολιάζονται εκτενώς στις ακόλουθες παραγράφους, ενώ η ανάλυση ευστάθειας της κίνησης του κλυδωνισμού αποκαλύπτει ότι αυτή είναι ασταθής, επιβεβαιώνοντας, κατά αυτόν τον τρόπο, τον αμιγώς τρισδιάστατο χαρακτήρα του προβλήματος. Η αναλυτική επίλυση του προβλήματος κατέστη δυνατή για μικρές γωνίες κλόνισης, παρέχοντας χρήσιμες προσεγγιστικές εκφράσεις για τις γωνιακές ταχύτητες του σώματος.

1.1 Εξισώσεις κινήσεως

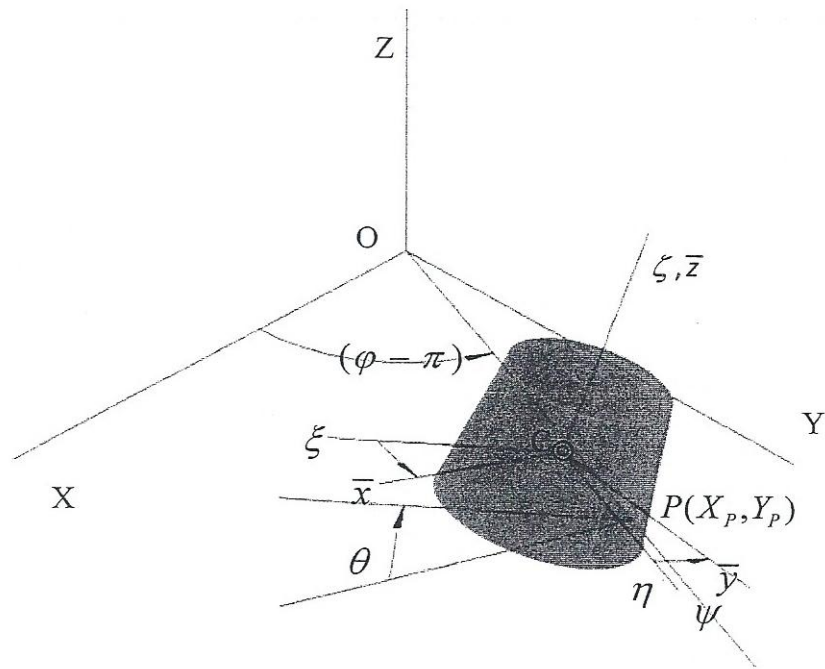
Η διατύπωση του προβλήματος βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές:

- i. Το σώμα είναι ένας ομογενής, απολύτως στερεός κώλυρος κώνος (Εικόνα I-1)
- ii. Η επαφή με το οριζόντιο επίπεδο είναι σημειακή.
- iii. Σε κάθε χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο.

Η θέση του σώματος στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O(XYZ)$ καθορίζεται από τις συντεταγμένες του σημείου επαφής $P(X_p, Y_p)$, και την τριάδα των γωνιών Euler angles $(\varphi, \vartheta, \psi)$, όπου φ είναι η γωνία μετάπτωσης, ϑ η γωνία κλόνισης (κλίσης) και ψ η γωνία περιστροφής περί τον ζ-άξονα (Εικόνα I-2). Για $\vartheta = 0$ η κάτω έδρα του σώματος βρίσκεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ για $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ το σώμα έχει ανατραπεί. Συνεπώς, η κίνηση περιορίζεται στο διάστημα $\vartheta \in (0, \pi/2)$.



Εικόνα I-1. Ο κώλυρος κώνος: Τρισδιάστατη (3Δ) και Δισδιάστατη (2Δ) απεικόνιση



Εικόνα 1-2. Συστήματα συντεταγμένων και γωνίες Euler. $O(X, Y, Z)$ είναι το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, $P(X_p, Y_p)$, το σημείο επαφής με το οριζόντιο επίπεδο, θ η γωνία κλίσης, φ η γωνία μετάπτωσης και ψ η γωνία περιστροφής περί τον άξονα ζ .

Εάν το σώμα κυλιέται χωρίς ολίσθηση, τότε η ταχύτητα του σημείου επαφής $P(X_p, Y_p)$ είναι:

$$V_p = -R\dot{\psi}$$

όπου R είναι η ακτίνα της κάτω έδρας του σώματος (σπονδύλου). Εφαρμόζοντας το ολοκληρωτικό κριτήριο Frobenius, αποδεικνύεται εύκολα ότι ο συνδυασμός (1.1) είναι μη ολόνομος.

Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του σώματος εκπεφρασμένες στο σύστημα $C(\xi \eta \zeta)$ είναι:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta} \\ \omega_\eta &= \dot{\varphi} \sin \theta \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{1.2}$$

ενώ το σύστημα $C(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ είναι:

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{x}} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_{\bar{y}} &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_{\bar{z}} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Προφανώς οι γωνιακές ταχύτητες $\omega_{\bar{z}}$ και ω_{ζ} και ω ταυτίζονται, καθώς $\bar{z} = \zeta$. Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του σώματος στο σύστημα συντεταγμένων $O(X,Y,Z)$ εκφράζονται συναρτήσει του σημείου επαφής $P(X_p, Y_p)$, μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} X_c &= X_p - \ell \cos(a + \theta) \sin \varphi \\ Y_c &= Y_p + \ell \cos(a + \theta) \cos \varphi \\ Z_c &= \ell \sin(a + \theta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\text{Όπου } \ell = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4} k_1^2 h^2}, \tan a = \frac{k_1 h}{2R}, k_1 = 2 \frac{\bar{z}_{cm}}{h}, \bar{z}_{cm} = \frac{3\beta^2 + 2\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} \frac{h}{4}, \beta = \frac{r}{R},$$

r και R είναι αντίστοιχα οι ακτίνες της άνω και κάτω έδρας του κολουρου κώνου και h το ύψος του (Εικόνα 1-1).

Η ταχύτητα V_c του κέντρου μάζας του κώνου δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= \dot{X}_p + \ell \dot{\theta} \sin(a + \theta) \sin \varphi - \ell \dot{\varphi} \cos(a + \theta) \cos \varphi \\ \dot{Y}_c &= \dot{Y}_p - \ell \dot{\theta} \sin(a + \theta) \cos \varphi - \ell \dot{\varphi} \cos(a + \theta) \sin \varphi \\ \dot{Z}_c &= \ell \dot{\theta} \cos(a + \theta) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \omega^T I_C \omega \\ V &= mg z_c \end{aligned} \quad (1.6)$$

όπου I_c είναι ο ταυιστής του σώματος εκπεφρασμένος στο σύστημα αξόνων $C(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$:

$$I_C = I_P - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} k_1 h^2 + mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} k_1 h^2 + mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}, \quad I_P = \begin{pmatrix} I_{\bar{x}}^P & 0 & 0 \\ 0 & I_{\bar{y}}^P & 0 \\ 0 & 0 & I_{\bar{z}}^P \end{pmatrix},$$

$$I_{\bar{z}}^P = \frac{1}{2} (k_3 + 2) mR^2, I_x^P = I_y^P = \frac{1}{4} (k_3 + 4) mR^2 + \frac{1}{12} (k_2 + 3k_1^2) mh^2,$$

$$k_2 = \frac{9}{20} \frac{\beta^4 + 4\beta^3 + 10\beta^2 + 4\beta + 1}{(\beta^2 + \beta + 1)^2} \text{ and } k_3 = \frac{3}{5} \frac{\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1}$$

Ο τανυστής αδρανείας I_p εκφράζει τις ροπές αδρανείας του σώματος ως προς το σημείο επαφής P . Για κυλινδρικά σώματα ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = \beta = 1$.

Εισάγοντας τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1 = \varphi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \psi$, $q_4 = X_p$ και $q_5 = Y_p$ η γενική μορφή των εξισώσεων Lagrange για μη ολόνομα συστήματα είναι:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[\frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} \right] - \sum_{j=1}^2 \lambda_j B_{ji} = 0 \quad (1.7)$$

Με λ_j συμβολίζουμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange, ενώ:

$$B_{ji} = \frac{\partial \{ \text{non-holonomic constraint equation } j \}}{\partial \dot{q}_i}, \text{ ή: } \{ B_{ji} \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} .$$

Ιδιαίτερα βολική είναι η εισαγωγή των ακόλουθων ποσοτήτων:

$$\hat{h} = \frac{h}{R}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \hat{X} = \frac{X_p}{R}, \quad \hat{Y} = \frac{Y_p}{R}, \quad \hat{u}_{gr} = \frac{u_{gr}}{R}, \quad (\cdot)' \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}, \quad (1.8)$$

$$\hat{I}_k = \frac{I_k}{mR^2}, \quad \hat{\omega}_k = \hat{\omega}_k \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad \hat{T} = \frac{T}{mgR}, \quad \hat{V} = \frac{V}{mgR}, \quad \hat{E} = \frac{E}{mgR}$$

όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και E η συνολική ενέργεια του συστήματος.

Βάσει της εξίσωσης (1.7), οι εξισώσεις της κίνησης μπορούν να γραφτούν σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{B} \quad (1.9)$$

όπου \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = \{ \varphi'', \theta'', \psi'', \lambda_1, \lambda_2, \hat{x}'', \hat{y}'' \} \text{ και } \mathbf{A}, \mathbf{B}:$$

$$A = \begin{pmatrix} \hat{I}_z^P \cos^2 \theta + \sin \theta (\hat{I}_y^P \sin \theta - \sin \theta - \cos \theta \hat{h} k_1) & 0 & \cos \theta (\hat{I}_z^P - 1) & 0 & 0 & \frac{1}{2} f \cos \varphi & \frac{1}{2} f \sin \varphi \\ 0 & \hat{I}_y^P & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} e \sin \varphi & -\frac{1}{2} e \cos \varphi \\ \cos \theta (\hat{I}_z^P - 1) & 0 & \hat{I}_z^P - 1 & -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} f \cos \varphi & \frac{1}{2} e \sin \varphi & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} f \sin \varphi & -\frac{1}{2} e \cos \varphi & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -(\hat{I}_y^P - \bar{\hat{I}}_z^P - 1) \sin 2\theta \theta' \varphi' + \hat{h} k_1 \cos 2\theta \theta' \varphi' + \sin \theta (\hat{I}_{z1}^P - 1) \theta' \psi' \\ \frac{1}{2} (\sin 2\theta (\hat{I}_y^P - \hat{I}_z^P - 1) \varphi'^2 - \hat{h} k_1 \cos 2\theta \varphi'^2 - 2 \sin \theta (\hat{I}_z^P - 1) \psi' \varphi' + f) \\ \sin \theta (\hat{I}_z^P - 1) \theta' \varphi' \\ \frac{1}{2} (f \theta'^2 \sin \varphi - 2e \varphi' \theta' \cos \varphi + f \varphi'^2 \sin \varphi) \\ -\frac{1}{2} f \theta'^2 \cos \varphi - e \varphi' \theta' \sin \varphi - \frac{1}{2} f \varphi'^2 \cos \varphi \\ a_1^{gr} \hat{u}_{gr}'' + \varphi' \psi' \sin \varphi \\ a_2^{gr} \hat{u}_{gr}'' - \varphi' \psi' \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$e = 2 \sin \theta + \hat{h} k_1 \cos \theta \quad \text{and} \quad f = \frac{de}{d\theta} = \hat{h} k_1 \sin \theta - 2 \cos \theta.$$

Η ορίζουσα του πίνακα **A** γράφεται:

$$\det(A) = \frac{1}{4} \hat{I}_y^P \left[4 (\hat{I}_y^P - 1) \hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2 \right] \sin^2 \theta \tag{I.10}$$

$$\frac{1}{288} \left[(3k_1^2 + k_2) \hat{h}^2 + 3(k_3 + 4) \right] \left[3k_3 k_1^2 + k_2 (k_3 + 2) \right] \hat{h}^2 + 3(k_3 + 2) \sin^2 \theta > 0$$

για $\theta > 0$.

Για $\theta > 0$, $\det(A) = 0$ και το σύστημα των Εξ. (I.9) είναι ιδιόμορφο. Στο όριο $\theta \rightarrow 0^+$, ο σπόνδυλος προσκρούει στο οριζόντιο επίπεδο. Η μελέτη αυτής της κρούσης δεν είναι τετριμμένη, υπό την έννοια ότι πραγματοποιείται μεταξύ δύο κινούμενων επιφανειών στον τρισδιάστατο χώρο και περιλαμβάνει, πέραν από την ανάπτυξη κρουστικών δυνάμεων και την ανάπτυξη ροπών στρεπτικών ή μη. Η παραδοχή που συνήθως γίνεται για το σημείο επαφής κατά την κρούση [(O'Reilly, 1996), (Batista, 2006), (Batista, 2008)] σε συνδυασμό με την αρχή διατήρησης της στροφορμής, επιτρέπει την περιγραφή της κίνησης του συστήματος αμέσως μετά την κρούση και τον υπολογισμό του συντελεστού αποκαταστάσεως. Εντούτοις, η ανωτέρω παραδοχή-υπόθεση δεν είναι προφανής λόγω της περιστροφής του σώματος κατά την κρούση, η οποία επηρεάζει άρδην τη δυναμική.

Οι εξισώσεις (I.9) που αφορούν στην κίνηση του σώματος είναι λίαν μη γραμμικές και για $\theta \neq 0$ λαμβάνουν την πλήρη μορφή:

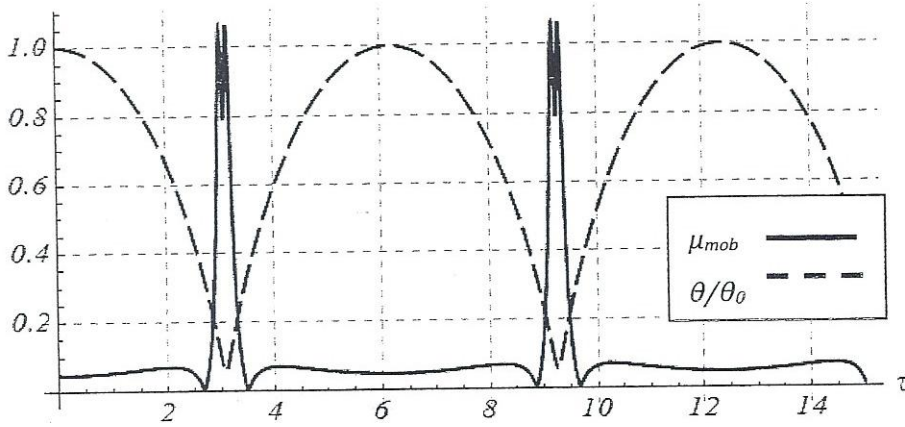
$$\begin{aligned}
\varphi'' &= [g_{11}(\theta)\varphi' + g_{13}(\theta)\psi']\theta'_{gr} \\
\theta'' &= [g_{21}(\theta)\varphi' + g_{23}(\theta)\psi']\theta' \\
\psi'' &= [g_{31}(\theta)\varphi' + g_{33}(\theta)\psi']\theta' \\
\hat{X}'' &= \varphi'\psi' \sin \varphi - \psi'' \cos \varphi \\
\hat{Y}'' &= -\varphi'\psi' \cos \varphi - \psi'' \sin \varphi
\end{aligned} \tag{I.11}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \frac{2(\hat{I}_z^P - 1)(2 \cot \theta \hat{I}_z^P - \hat{h}k_1)}{4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2} - 2 \cot \theta; g_{13} = \frac{4 \csc \theta (\hat{I}_z^P - 1)\hat{I}_z^P}{4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2} \\
g_{21} &= \frac{(\hat{I}_y^P - \hat{I}_z^P - 1)\sin 2\theta - \hat{h}k_1 \cos 2\theta}{2\hat{I}_y^P}; g_{22} = \frac{\hat{h}k_1 \sin \theta - 2 \cos \theta}{2\hat{I}_y^P}, g_{23} = -\frac{2(\hat{I}_z^P + 1)\sin \theta + \hat{h}k_1 \cos \theta}{2\hat{I}_y^P} \\
g_{31} &= \frac{[4\hat{h}k_1 \cos \theta - 4(\hat{I}_y^P - \hat{I}_z^P - 1)\sin \theta](\hat{I}_z^P - 1) + 2(4\hat{I}_y^P \hat{I}_z^P - 2\hat{I}_z^{P2} - 2\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2) \csc \theta}{4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2}; \\
g_{33} &= -\frac{2(\hat{I}_z^P - 1)(2\hat{I}_z^P \cot \theta - \hat{h}k_1)}{4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι $\cot \theta$ και $\csc \theta$ που εμπεριέχουν οι Εξ. (I.11) τις καθιστούν ιδιόμορφες ως προς τις γωνιακές επιταχύνσεις φ'' και ψ'' , η οποία ιδιομορφία μεταφέρεται τελικά στη γωνιακή επιτάχυνση θ'' . Ο πλασματικός απειρισμός των γωνιακών ταχυτήτων που προκύπτει στο παρόν μοντέλο για $\theta \rightarrow 0^+$ αμφισβητεί την αρχική υπόθεση περί μη ολίσθησης του σημείου επαφής, αφού πολλές υψηλές γωνιακές ταχύτητες οδηγούν σε ισχυρές εφαπτομενικές αντιδράσεις στο σημείο επαφής, οι οποίες αντιδράσεις δύνανται να παραβιάσουν πρακτικά το σύνδεσμο της κύλισης. Στην Εικόνα I-3 παρουσιάζουμε α) τη γωνία κλόνισης θ και β) τον ενεργό συντελεστή τριβής συναρτήσει του χρόνου. Με τον όρο ενεργό συντελεστή τριβής εκφράζουμε το λόγο του μέτρου των εφαπτομενικών δυνάμεων (αντιδράσεων) προς την κάθετη στο επίπεδο (κατακόρυφη) δύναμη επαφής. Από αυτό το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι στην πραγματικότητα το σημείο επαφής του σώματος ολισθαίνει για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, με αποτέλεσμα την απώλεια ενέργειας απο το σύστημα και τη σταδιακή ακινητοποίηση του. Αυτή η ενέργεια που χάνεται σε αυτά τα μικρής διάρκειας χρονικά διαστήματα οδηγεί σε ένα υψίσυχνο stick&slip μηχανισμό¹ που εξαρτάται από το νόμο τριβής του σώματος με το οριζόντιο επίπεδο (Rice & Tse, 1986).

¹ Στο παράδειγμα του «λίκνισμού» ενός νομίσματος σε ένα τραπέζι, αυτός ο μηχανισμός γίνεται αντιληπτός μέσω ενός υψίσυχνου ήχου που παράγεται στα τελευταία στάδια της κίνησης του νομίσματος.



Εικόνα 1-3. Ενεργός συντελεστής τριβής μονολιθικού κίονα (Εικόνα 1-4). Στην πραγματικότητα η ενέργεια αποσβάζεται στα μικρά χρονικά διαστήματα της αύξησης του ενεργού συντελεστή τριβής, πράγμα το οποίο θα οδηγήσει σταδιακά το σύστημα σε ακινησία.

Στο αυτόνομο σύστημα που περιγράφουμε το ολοκλήρωμα Jacobi υπάρχει και εκφράζει κατ'ουσίαν τη διατήρηση της ενέργειας του συστήματος (Rosenberg, 1977):

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \frac{1}{2} \hat{I}_y^P \theta'^2 + \frac{1}{2} \left[\hat{I}_z^P \cos^2 \theta + \sin \theta \left[(\hat{I}_y^P - 1) \sin \theta - \hat{h}k_1 \cos \theta \right] \right] \varphi'^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_z^P \psi'^2 \\ &+ \left(\hat{I}_z^P \cos \theta - \frac{1}{2} \hat{h}k_1 \sin \theta \right) \varphi' \psi' + \frac{1}{2} e \\ &= \frac{1}{2} \hat{I}_y^P \omega_\xi^2 + \frac{1}{2} (\hat{I}_y^P - 1) \omega_n^2 + \frac{1}{2} \hat{I}_z^P \omega_\zeta^2 - \frac{1}{2} \hat{h}k_1 \omega_n \omega_\zeta + \frac{1}{2} e \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.2 Τρισδιάστατος χαρακτήρας της κίνησης

Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν την τροχιά του κούρου κώνου στο οριζόντιο επίπεδο. Ανάλογα, λοιπόν, με τις αρχικές συνθήκες, η τροχιά αυτή μπορεί να είναι κυκλική, ευθεία ή ακόμη και ένα σημείο (ακινησία σημείου επαφής). Στην τελευταία περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που το σημείο επαφής ακινητεί ($\psi'_0 = \varphi'_0 = 0$), η κίνηση εκφυλίζεται σε μία δισδιάστατη κίνηση στο κατακόρυφο επίπεδο, η οποία περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\theta'' = \frac{\hat{h}k_1 \sin \theta - 2 \cos \theta}{2 \hat{I}_y^P} \quad (1.13)$$

Ο κλυδωνισμός (rocking) περιγράφεται από την Εξ. (1.13) με την επιπλέον παραδοχή που θέλει, όταν το σώμα επανέρχεται στην κατακόρυφη θέση του ($\theta = 0$), να προσκρούει στο οριζόντιο επίπεδο, το σημείο επαφής να αλλάζει και να παίρνει θέση αντιδιαμετρικά της κάτω έδρας του σώματος και η κίνηση να συνεχίζει με το νέο σημείο επαφής. Βάσει των ανωτέρων, ο κλυδωνισμός μπορεί να παρουσιαστεί ως ειδική περίπτωση της γενικότερης τρισδιάστατης κίνησης που μελετάται στο παρόν κείμενο Εξ. (1.13), στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο πλήρων επαφών με το οριζόντιο επίπεδο. Αυτή η θεώρηση καθιστά χρήσιμη την ανάλυση ευστάθειας του κλυδωνισμού.

Εισάγοντας στο σύστημα τις ακόλουθες διαταραχές:

$$\varphi \rightarrow \varphi_0 + \tilde{\varphi}(\tau), \quad \theta \rightarrow \theta(\tau) + \tilde{\theta}(\tau), \quad \psi \rightarrow \psi_0 + \tilde{\psi}(\tau) \quad (I.14)$$

και γραμμικοποιώντας τις Εξ. (I.11), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'' &= [g_{11}\tilde{\varphi}' + g_{13}\tilde{\psi}']\theta' \\ \tilde{\theta}'' &= g_{22}\tilde{\theta} \\ \tilde{\psi}'' &= [g_{31}\tilde{\varphi}' + g_{33}\tilde{\psi}']\theta' \end{aligned} \quad (I.15)$$

Θέτοντας $\varphi' = x_1$ και $\psi' = x_3$ οι εξισώσεις (I.15)α και (I.15)γ γράφονται σε μητρική μορφή:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_3' \end{pmatrix} = \theta' \begin{pmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (I.16)$$

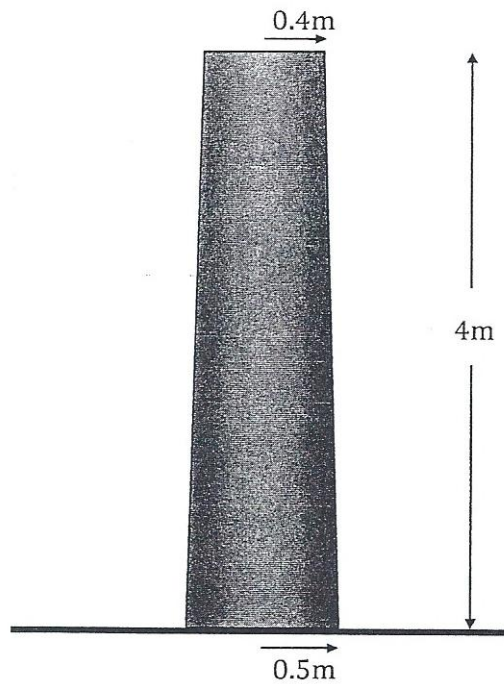
Έστω $\rho_{1,2}$ οι ιδιοτιμές του συστήματος (I.16). Τότε:

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{4(\hat{I}_z^P - 1)(\hat{h}k_1 \cot \theta + \hat{I}_z^P + 1)}{4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2} \theta'^2 = - \frac{6k_3(2\hat{h}k_1 \cot \theta + k_3 + 4)}{[3k_3k_1^2 + k_2(k_3 + 2)]\hat{h}^2 + 3k_3(k_3 + 2)} \theta'^2 < 0 \quad (I.17)$$

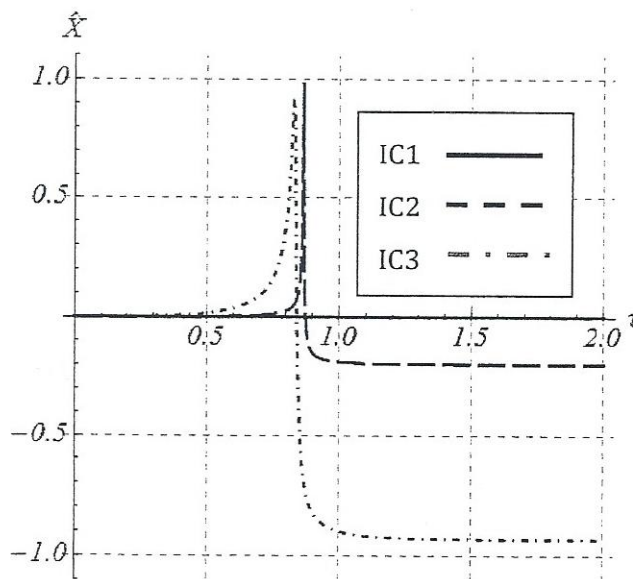
Συνεπώς, το σύστημα έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές, η μία εκ των οποίων είναι θετική, πράγμα που σημαίνει ότι μεταξύ δύο πλήρων επαφών του σώματος με το οριζόντιο επίπεδο (κλυδωνισμός), οποιαδήποτε μικρή, εκτός επιπέδου διαταραχή της κίνησης αυξάνει εκθετικά με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι ο κλυδωνισμός είναι μία ασταθής κίνηση ανεξαρτήτως των διαστάσεων του σώματος, \hat{h} , και της κωνικότητάς του, β . Κατ'επέκταση, ο τρισδιάστατος χαρακτήρας της κίνησης επικρατεί. Άλλωστε, αυτό το αποτέλεσμα αναμενόταν, αφού η όλη κίνηση του σώματος μπορεί να παρομοιαστεί με την κίνηση ενός ανάστροφου εκκρεμούς. Όπως είναι γνωστό, η κίνηση του ανάστροφου εκκρεμούς είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε εκτός επιπέδου διαταραχές. Ένα αριθμητικό παράδειγμα επιβεβαιώνει τα ανωτέρω αποτελέσματα από την ανάλυση ευστάθειας. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το μονολιθικό κίονα στην Εικόνα I-4. Ο κίονας είναι κολουρωνικός με $h = 4m$, $r = 0.4m$, $R = 0.5m$, $\beta = 0.8$, και $\mathbf{h} = 8$. Οι εξισώσεις της κίνησης ολοκληρώνονται αριθμητικά για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις αρχικών συνθηκών:

- IC1: $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 1^\circ$, $\psi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0$, $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0$
- IC2: $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 1^\circ$, $\psi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0.01$, $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0$
- IC3: $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 1^\circ$, $\psi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0.1$, $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0$

Η αρχική συνθήκη IC1 παραπέμπει στον κλυδωνισμό. Παρατηρούμε ότι ακόμη και για μικρές αρχικές τιμές φ'_0 (IC2 και IC3) το σημείο επαφής κινείται εκτός του κατακόρυφου επιπέδου που εξελίσσεται η δισδιάστατη κίνηση του κλυδωνισμού, όπου ισχύει $\hat{X}(t) = 0$ (IC1).



Εικόνα I-4. Παράδειγμα μονολιθικού κίονα.



Εικόνα I-5. Συντεταγμένη, \hat{X} , του σημείου επαφής για τις αρχικές συνθήκες IC1, IC2 και IC3. Στον κλυδωνισμό (IC1), η συντεταγμένη X_p του σημείου επαφής του μονολιθικού κίονα παραμένει σταθερή (μηδέν), πράγμα που δεν συμβαίνει για τις αρχικές συνθήκες IC2 και IC3. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του σημείου επαφής εξελίσσεται εκτός του κατακόρυφου επιπέδου που θα λάμβανε χώρα η δισδιάστατη κίνηση του κλυδωνισμού.

I-3. Λικνισμός

Η γραφική αναπαράσταση της ανωτέρω τρισδιάστατης κίνησης αποκαλύπτει ένα ενδιαφέρον είδος κίνησης που συντελείται για μικρές γωνίες κλόνισης. Σε αυτή την παράγραφο διακρίνουμε αυτή την ιδιαίτερη τρισδιάστατη κίνηση του σώματος, το οποίο φαίνεται να «λικνίζεται» υπό μικρές γωνίες $0 < \theta \ll$

1 και την αποκαλούμε «λικνισμό». Ένα επιπρόσθετο παράδειγμα αυτής της κίνησης είναι ο λικνισμός ενός νομίσματος σε ένα τραπέζι. Η ουσιαστική διαφορά του λικνισμού από τον κλυδωνισμό είναι ότι στο λικνισμό ο πόλος περιστροφής του σώματος δεν διατηρείται σταθερός στο χρόνο και ότι η περιγραφή της κίνησης απαιτεί τρεις γωνίες, δηλαδή μία τριάδα Euler. Υπό την παραδοχή μικρών γωνιών, $\theta \ll 1$, οι εξισώσεις της κίνησης (I.11) γραμμικοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \varphi'' &= [f_{11}(\theta)\varphi' + f_{13}(\theta)\psi']\theta' + O(\theta) \\
 \theta'' &= [f_{21}(\theta)\varphi' + f_{23}(\theta)\psi']\theta' + f_{22}(\theta) + O(\theta^2) \\
 \psi'' &= [f_{31}(\theta)\varphi' + f_{33}(\theta)\psi']\theta' + O(\theta) \\
 \hat{X}'' &= \varphi'\psi' \sin \varphi - \psi'' \cos \varphi \\
 \hat{Y}'' &= -\varphi'\psi' \cos \varphi - \psi'' \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{I.18}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= -\frac{1}{\theta} \left[\frac{4(\hat{I}_z^P - 1)\hat{I}_z^P}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P} + 2 \right] + \frac{2\hat{h}k_1(\hat{I}_z^P - 1)}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P}; f_{13} = -\frac{1}{\theta} \frac{4\hat{I}_z^P(\hat{I}_z^P - 1)}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P} \\
 f_{21} &= \frac{2\theta(\hat{I}_y^P - \hat{I}_z^P - 1) - \hat{h}k_1}{2\hat{I}_y^P}; f_{22} = \theta \frac{\hat{h}k_1}{2\hat{I}_y^P} - \frac{1}{\hat{I}_y^P}; f_{23} = -\frac{2\theta\hat{I}_z^P + \hat{h}k_1}{2\hat{I}_y^P} \\
 f_{31} &= 2\frac{1}{\theta} \frac{2(-2\hat{I}_y^P + \hat{I}_z^P + 1)\hat{I}_z^P + \hat{h}^2 k_1^2}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P} - \frac{4\hat{h}k_1(\hat{I}_z^P - 1)}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P}; \\
 f_{33} &= \frac{1}{\theta} \frac{4\hat{I}_z^P(\hat{I}_z^P - 1)}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P} - \frac{2\hat{h}k_1(\hat{I}_z^P - 1)}{\hat{h}^2 k_1^2 - 4(\hat{I}_y^P - 1)\hat{I}_z^P}
 \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η γραμμικοποίηση περιλαμβάνει τους όρους πρώτης τάξεως στη δεύτερη εξίσωση των εξισώσεων (I.18), καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, το σημείο ισορροπίας χάνεται. Το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (I.18) μπορεί να λυθεί αναλυτικά (Stefanou et al, 2009) συνδέοντας τις γωνιακές ταχύτητες φ', ψ' με τη γωνία θ :

$$\begin{aligned}
 \varphi' &= -c_1 \frac{1}{p} e^{\frac{1}{\theta}} \left[\frac{1}{\theta} - \frac{s}{2} \frac{1}{\theta^2} \right] - c_2 e^{-\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\theta^2} \\
 \psi' &= c_1 \frac{1}{p} e^{\frac{1}{\theta}} \left[-p + \frac{1}{\theta} - \frac{s}{2} \frac{1}{\theta^2} \right] + c_2 e^{-\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\theta^2}
 \end{aligned} \tag{I.19}$$

όπου $p = \frac{2\hat{h}k_1}{\hat{I}_z^P}, s = \frac{4(\hat{I}_z^P - 1)\hat{I}_z^P - \hat{h}^2 k_1^2}{2\hat{h}k_1(\hat{I}_z^P - 1)}$ και c_1, c_2 σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές

συνθήκες ως εξής:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -e^{-\frac{\theta_0}{s}} (\varphi'_0 + \psi'_0) \\
c_2 &= e^{\frac{\theta_0}{s}} \left[\frac{2\theta_0 - s}{p} (\varphi'_0 + \psi'_0) - \varphi'_0 \theta_0^2 \right]
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (1.20) λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\varphi' + \psi' = (\varphi'_0 + \psi'_0) e^{\frac{\theta - \theta_0}{s}} \tag{1.21}$$

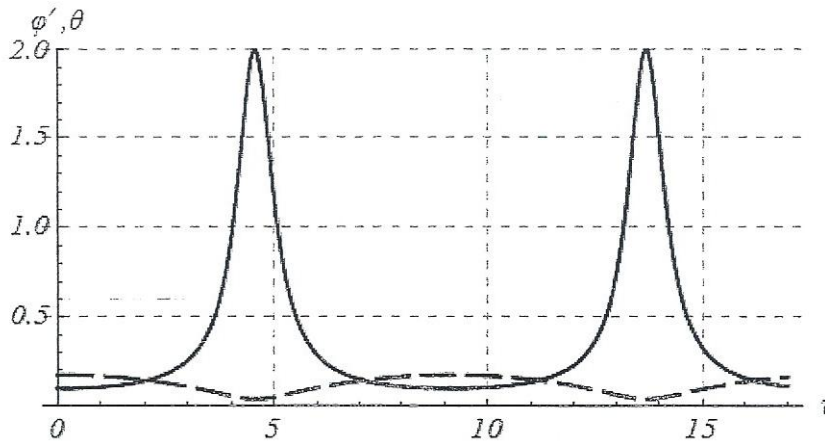
Η περαιτέρω προσέγγιση της κίνησης του σώματος για μικρές γωνίες είναι δυνατή αναπτύσσοντας τις εξισώσεις (1.19) σε σειρές. Αγνοώντας τους όρους $O\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = O(\varepsilon^{1/2})$ και

$$O\left(\frac{\theta_0^3}{\theta^2}\right) = O(\varepsilon^{1/2}) \text{ με } \theta_0 = O(\varepsilon^{3/2}), \theta = O(\varepsilon^2) \text{ και } 0 < \varepsilon \ll 1, \text{ λαμβάνουμε}$$

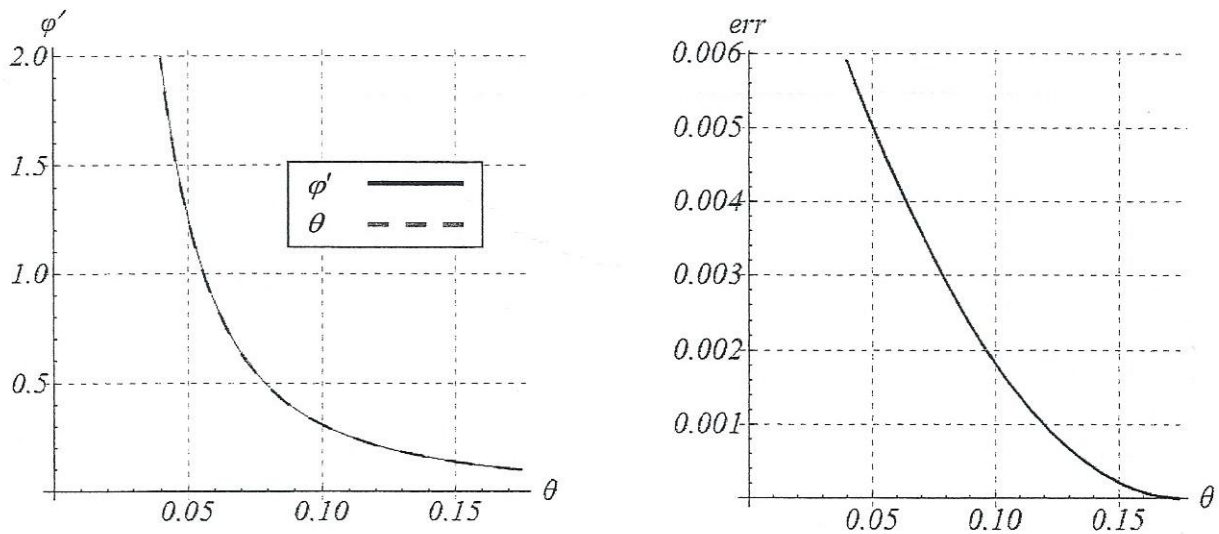
$$\begin{aligned}
\varphi' &\approx -\frac{2}{ps} (\varphi'_0 + \psi'_0) + \frac{(ps + 2)\varphi'_0 + 2\psi'_0}{ps} \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2 = O(\varepsilon^{-1}) \\
\psi' &\approx \frac{ps + 2}{ps} (\varphi'_0 + \psi'_0) - \frac{(ps + 2)\varphi'_0 + 2\psi'_0}{ps} \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2 = O(\varepsilon^{-1})
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Κυρίαρχος όρος στις εξισώσεις (1.22) είναι ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος. Ο όρος αυτός είναι της $O(\varepsilon^{-1})$, ενώ ο πρώτος όρος είναι ανεξάρτητος του ε . Οι εξισώσεις (1.22) λαμβάνουν τη μορφή των προσεγγίσεων των Srinivasan & Ruina (2008) αγνοώντας τους σταθερούς όρους και θεωρώντας ότι οι αρχικές συνθήκες φ'_0 και ψ'_0 είναι μικρές ποσότητες. Αυτή η προσέγγιση είναι πράγματι ικανοποιητική για το ελάχιστο ακρότατο της γωνίας κλόνισης που λαμβάνει το σώμα κατά την κίνηση του, αλλά αποτυγχάνει να αναπαραστήσει τη γενικότερη κίνηση του σώματος. Όπως φαίνεται στα ακόλουθα διαγράμματα, η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης επαληθεύει τις ανωτέρω ασυμπτωματικές προσεγγίσεις για $\varphi'_0, \psi'_0 \neq 0$. Οι αρχικές συνθήκες ήταν $\varphi_0 = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{18} \approx 0.17, \varphi'_0 = 0.1, \theta'_0 = 0, \psi'_0 = -0.2$.

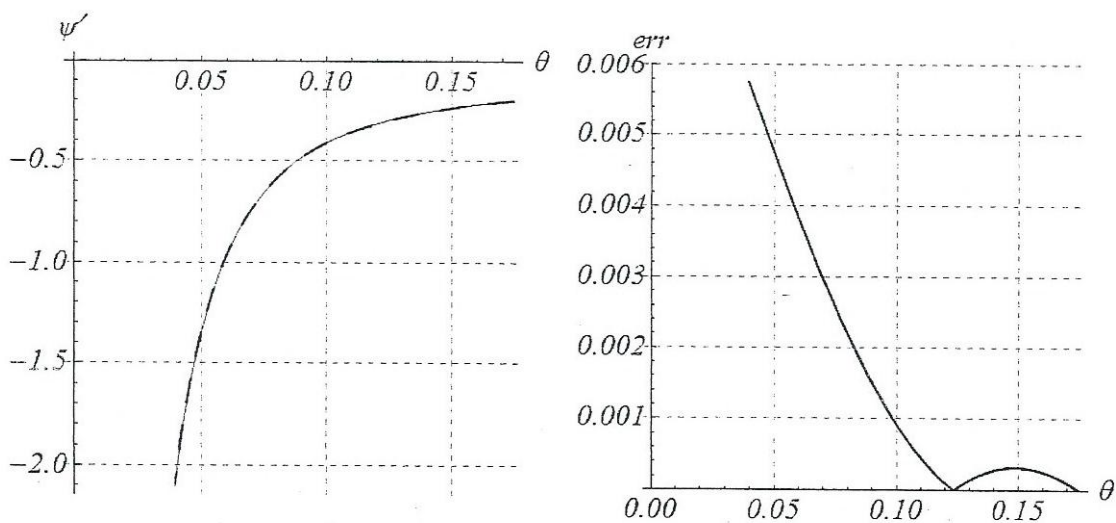
Σημειώνουμε ότι οι τιμές της γωνίας ϑ βρίσκονται εντός των ορίων της παρούσας προσέγγισης.



Εικόνα I-6. Γωνιακή ταχύτητα φ' και γωνία θ συναρτήσει του χρόνου t . Η γωνιακή ταχύτητα φ' λαμβάνει μεγάλες τιμές για μικρές γωνίες θ .



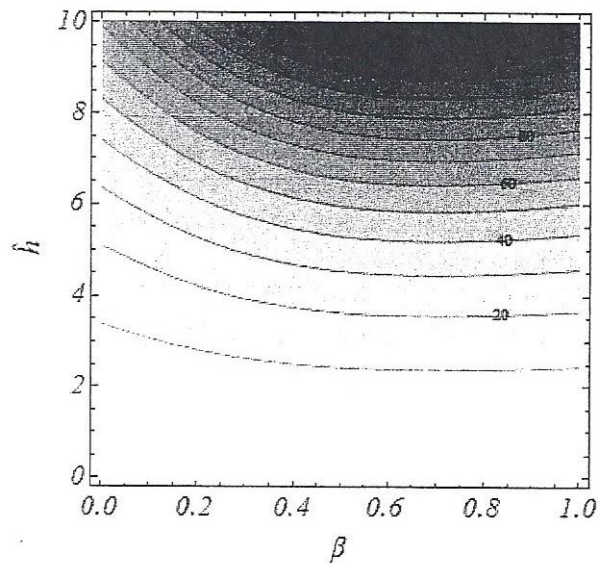
Εικόνα I-7. Αριστερά παρουσιάζουμε τη γωνιακή ταχύτητα φ' συναρτήσει της γωνίας θ που προκύπτει από α) την αριθμητική επίλυση (συνεχής γραμμή) και β) την προσεγγιστική λύση (διακεκομμένη γραμμή). Δεξιά παρουσιάζουμε το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης, το οποίο είναι μικρότερο 6%



Εικόνα I-8. Αριστερά παρουσιάζουμε τη γωνιακή ταχύτητα ψ' συναρτήσει της γωνίας θ που προκύπτει από α) την αριθμητική επίλυση (συνεχής γραμμή) και β) την προσεγγιστική λύση (διακεκομμένη γραμμή). Δεξιά παρουσιάζουμε το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης, το οποίο είναι μικρότερο από 6%

Αμφότερες οι γωνιακές ταχύτητες φ' , ψ' εξαρτώνται από τις διαστάσεις \hat{h} και την κωνικότητα β του σπονδύλου λόγω της ύπαρξης του όρου βs^{-1} στις Εξ. (I.22). Στην εικόνα I-9 παρουσιάζουμε το διάγραμμα ισοϋψών της ποσότητας $\rho s(\hat{h}, \beta)$. Από τις ισοϋψεις καμπύλες παρατηρούμε ότι ο όρος βs^{-1} , και κατ' επέκταση οι γωνιακές ταχύτητες φ' και ψ' , αυξάνουν μειωμένου του \hat{h} και αυξανόμενης της κωνικότητας

β για $\beta < 0.5$. Για $\beta > 0.5$, ο όρος ps^{-1} πρακτικά δεν επηρεάζεται από την κωνικότητα β . Αυτή η διαπίστωση θα επέτρεπε την προσέγγιση ενός τυπικού κωνικού σπονδύλου αρχαίου ναού με $\beta \approx 0.8$ με ένα κύλινδρο.

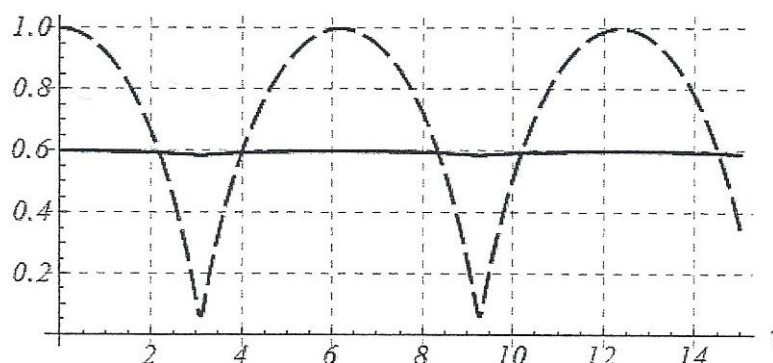


Εικόνα I-9. Διάγραμμα ισοϋψών της ποσότητας $ps(\hat{h}, \beta)$ συναρτήσει των διαστάσεων \hat{h} και της κωνικότητας β του κόλουρου κώνου.

Οι εξισώσεις (I.22) δείχνουν ότι οι γωνιακές ταχύτητες φ' και ψ' εξαρτώνται τετραγωνικά από το λόγο $\frac{\theta_0}{\theta}$. Παρ' όλα αυτά όμως το άθροισμά τους είναι πρακτικά σταθερό [βλ. Εξ. (I.21)]. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (I.2) και (I.21), η περιστροφή του σώματος προσεγγίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\omega_z \approx \varphi' + \psi' \approx \varphi'_0 + \psi'_0 \quad (I.23)$$

Από την ανωτέρω προσέγγιση συμπεραίνουμε ότι για μικρές γωνίες κλόνισης η περιστροφή του σώματος ω_z εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, είναι ανεξάρτητη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος και είναι πρακτικά σταθερή στο χρόνο. Στην εικόνα Εικόνα I.10 παρουσιάζουμε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega_z(\tau)$ για τις εξής αρχικές συνθήκες: $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{18}$, $\psi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0.1$, $\theta'_0 = 0$, $\psi'_0 = 0.5$.



Εικόνα I-10. Περιστροφή ω_z του σώματος (συνεχής γραμμή). Ισχύει $\omega_z \approx \varphi'_0 + \psi'_0$.

1.4 Πρόσκρουση με το οριζόντιο επίπεδο

Στην παράγραφο αυτή εξάγουμε τη συνθήκη κάτω από την οποία μπορεί το σώμα να συγκρουστεί με το οριζόντιο επίπεδο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κατά τη σύγκρουση του, το σώμα με το οριζόντιο επίπεδο, αυτό περιστρέφεται καθιστώντας τη μελέτη της κρούσης ιδιαίτερα δύσκολη καθώς αυτή περιλαμβάνει, πέρα των κεντρικών δυνάμεων, έκκεντρες δυνάμεις και ροπές συμπεριλαμβανομένων των στρεπτικών.

Οι εξισώσεις (1.19) δείχνουν ότι οι γωνιακές ταχύτητες φ' και ψ' απειρίζονται καθώς $\theta \rightarrow \theta^+$. Εισάγοντας τις εξισώσεις (1.19) στην ολική ενέργεια του συστήματος, Εξ. (1.12), λαμβάνουμε:

$$\hat{E} = \frac{(I_y^P - 1)}{2p^2} \left(\frac{sc_1 - pc_2}{\theta} \right)^2 + O\left(\frac{sc_1 - pc_2}{\theta} \right) \quad (1.24)$$

Εντούτοις, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι πεπερασμένη ποσότητα και ως εκ τούτου στο όριο $\theta \rightarrow \theta^+$, η ακόλουθη σχέση πρέπει να ισχύει:

$$sc_1 = pc_2 \quad (1.25)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ.(1.20), η αναγκαία συνθήκη για κρούση με το οριζόντιο επίπεδο γίνεται:

$$\left(\frac{\psi'_0}{\varphi'_0} \right)_{imp} = \frac{p\theta_0^2}{\left(e^{\frac{2\theta_0}{s}} - 1 \right)s + 2\theta_0} - 1 = \frac{ps}{2} - 1 + \frac{p}{3}\theta_0 + \frac{p}{18s}\theta_0^2 + O(\theta_0^3) \quad (1.26)$$

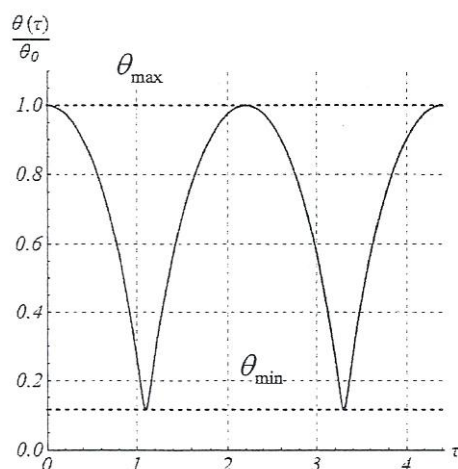
Παρατηρούμε ότι η αρχική γωνία κλόνισης θ_0 δεν επηρεάζει σημαντικά το κριτήριο για την πρόσκρουση του σώματος με το οριζόντιο επίπεδο. Βασει των εξισώσεων (1.23) και (1.26), συμπεραίνουμε ότι η σύγκρουση με το οριζόντιο επίπεδο λαμβάνει χώρα όταν η περιστροφή του σώματος περί τον άξονα ζ αποκτήσει την πρακτικά σταθερή τιμή:

$$\omega_z \approx \frac{ps}{2} \varphi'_0 \quad (1.27)$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για $\beta > 0.5$, η ανωτέρω αναγκαία συνθήκη δεν επηρεάζεται απο την κωνικότητα του σώματος (Εικόνα 1-9). Εάν οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν ακριβώς τη συνθήκη πρόσκρουσης, Εξ. (1.25), τότε από την εξίσωση (1.12) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα κλόνισης τη στιγμή της κρούσης είναι μη μηδενική:

$$\theta'_{imp} = -\sqrt{\frac{2\hat{E}_0 - \hat{I}_z^P c_1^2 + \hat{h}k_1}{\hat{I}_y^P}} \neq 0 \quad (1.28)$$

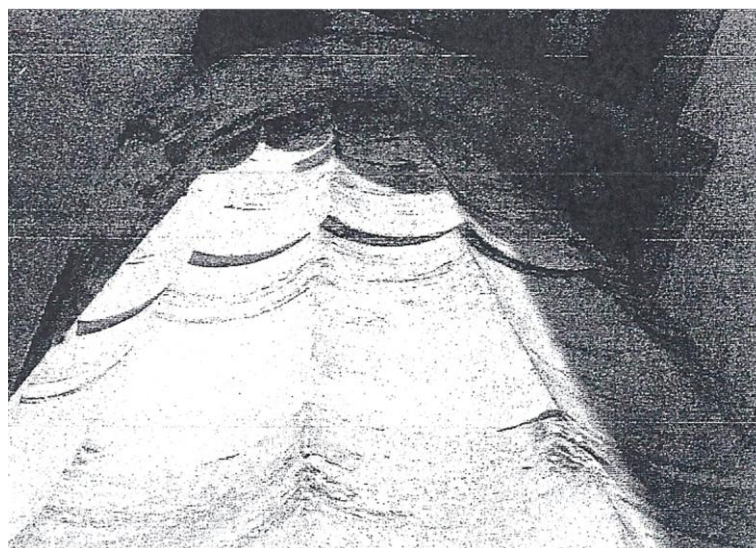
Αντίθετα, για αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε το σώμα να μην ανατρέπεται και η συνθήκη πρόσκρουσης να μην ικανοποιείται, το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ μίας ελάχιστης, θ_{min} , και μίας μέγιστης γωνίας κλόνισης, θ_{max} (Εικόνα 1-11). Η τιμή της γωνίας θ_{max} προσδιορίζεται εισάγοντας τις εξισώσεις (1.19) στη συνολική ενέργεια του συστήματος (1.12) και λύνοντας ως προς θ . Οι λύσεις που προκύπτουν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες αλγεβρικά και για αυτό το λόγο δεν παρουσιάζονται.



Εικόνα I-11. Ταλάντωση του κόλουρου κώνου μεταξύ των γωνιών $\theta_{max} = \theta_0 = \frac{\pi}{18}$ και $\theta_{min}, \theta'_0 = 0$.

1.5 Ποιοτικά συμπεράσματα για την κίνηση σπονδύλων επί οριζοντίου επιπέδου σε ελεύθερη τροχιά.

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι κλασικοί ναοί της αρχαιότητας έχουν την ικανότητα να υφίστανται ιδιαίτερα έντονες σεισμικές δράσεις. Ένα ιδιαίτερο στοιχείο αυτών των μνημείων είναι οι πολυσπόνδυλοι κίονες. Κάθε κίονας αποτελείται από τους σπονδύλους οι οποίοι απλώς εδράζονται ο ένας επί του άλλου σε τέλεια εφαρμογή. (Korres et al., 1999). Από μηχανικής άποψης, η δυναμική απόκριση των κλασικών κίωνων είναι λίαν μη γραμμική και περιλαμβάνει τον κλυδωνισμό, την ολίσθηση και τον λικνισμό των σπονδύλων που τους συνιστούν (Εικόνα I-12). Η εν λόγω δυναμική απόκριση διαφέρει άρδην από τη δυναμική απόκριση των μοντέρνων κατασκευών, η ευστάθεια των οποίων προϋποθέτει την ανάπτυξη εσωτερικών εφελκυστικών εντατικών μεγεθών. Η θεμελιώδης αυτή διαφορά καθιστά μη εφαρμόσιμες τις περισσότερες διαθέσιμες θεωρίες δομικής ανάλυσης και τα σχετικά υπολογιστικά εργαλεία.

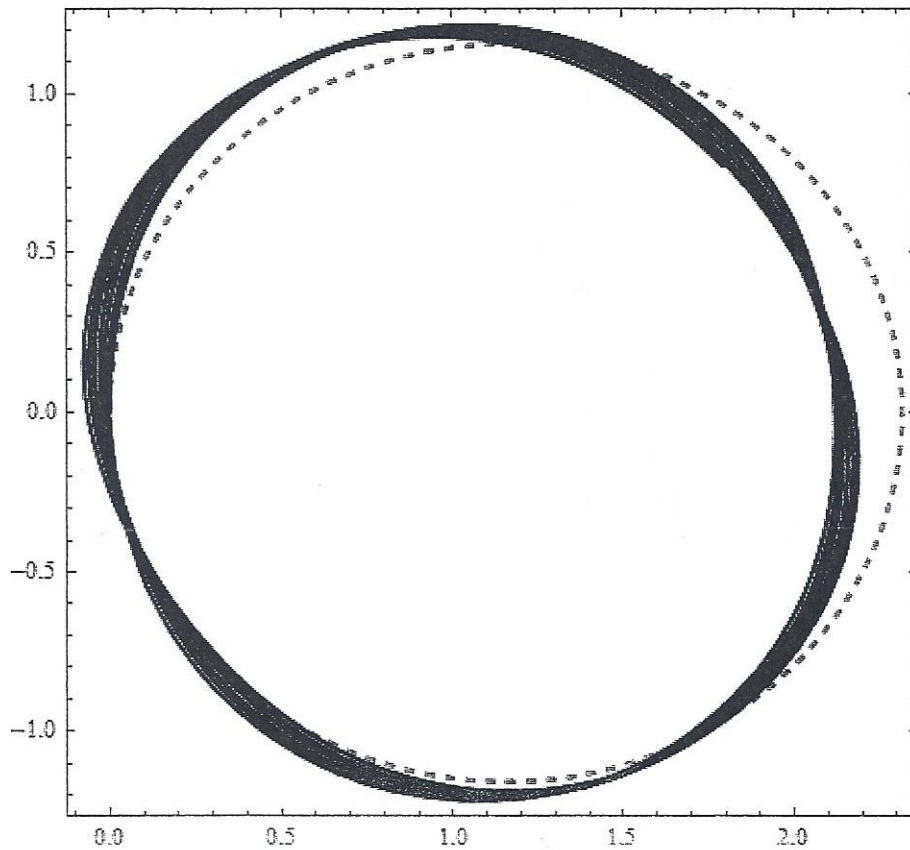


Εικόνα I-12. Σχετική στροφή και μετατόπιση των σπονδύλων ενός κίονα του Παρθενώνα (Bouras et al., 2002), που επαληθεύει τον λικνισμό των σπονδύλων και την εν γένει τρισδιάστατη συμπεριφορά των κατασκευών αυτών.

Στη βάση ενός απλοποιημένου μηχανικού μοντέλου, οι μονολιθικοί κίονες μπορούν να θεωρηθούν ως απολύτως στερεά κολουροκωνικά σώματα με ελαφρώς διαφορετικές ακτίνες. Οι κατακόρυφες αυλακώσεις (γλυφές) που είθισται να λαξεύονται στην παράπλευρη επιφάνεια των κίωνων είναι γεωμετρικά μικρές και σε πρώτη προσέγγιση μπορούν να αγνοηθούν. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις και παραδοχές, τα αποτελέσματα που εκτίθενται στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ποιοτική κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς κλασικών κίωνων. Έτσι, λοιπόν, αναμένεται η θεμελιώδης κίνηση των σπονδύλων να είναι ο λικνισμός και όχι ο κλυδωνισμός. Κατ' επέκταση οι δισδιάστατες αναλύσεις που συχνά αναφέρονται στη βιβλιογραφία [(Psycharis et al., 2000), (Konstantinidis & Makris, 2005), (Yagoda & Hatzor, 2007), (Komodromos et al., 2008)] υστερούν στο να αναπαραστήσουν με ακρίβεια τη δυναμική απόκριση αυτών των πολυσπόνδυλων συστημάτων. Αποτυγχάνουν, επίσης, να προσομοιώσουν την απώλεια της ενέργειας κατά το λικνισμό, η οποία πρέπει να αποδοθεί στις κρούσεις που λαμβάνουν χώρα στους αρμούς των κίωνων αλλά και στις δυνάμεις τριβής που δύνανται να αναπτυχθούν κατά τη διάρκεια της stick & slip κίνησης των σπονδύλων τους. Η Εικόνα I-12 επιβεβαιώνει στην πράξη τα ανωτέρω επιχειρήματα, παρουσιάζοντας τις σχετικές στροφές των σπονδύλων ενός κίονα του Παρθενώνα.

Στην ειδική περίπτωση των μονολιθικών κίωνων, η παρούσα ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατ' ευθείαν για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς τους. Εντούτοις, άλλες μέθοδοι, όπως για παράδειγμα η μέθοδος των Διακριτών Στοιχείων, είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθούν. Η εν λόγω αριθμητική μέθοδος έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στην προσομοίωση πολυσπόνδυλων συστημάτων με αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ενδεικτικά παραπέμπουμε στην εργασία του Parantonoopoulos et al. (2002). Οι θεμελιώδεις, όμως, θεωρητικές παραδοχές των μεθόδων αυτών, που αφορούν στους νόμους επαφής, την ανίχνευση των επαφών και την ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης, κλονίζουν την αξιοπιστία και κυρίως την ακρίβεια τους για την προσομοίωση αυτών των συστημάτων.

Τα ανωτέρω ποιοτικά χαρακτηριστικά της κίνησης του κολουρου κώνου προέκυψαν από τη μελέτη των εξισώσεων της κίνησης του συστήματος μέσω ασυμπτωματικής ανάλυσης. Η ασυμπτωματική εξέταση του συστήματος ήταν επιβεβλημένη, καθώς το πλήρες σύστημα των εξισώσεων της κίνησης είναι λίαν μη γραμμικό και ιδιαίτερα σύνθετο. Ένα επιπλέον συμπέρασμα της ανωτέρω ασυμπτωματικής ανάλυσης είναι ότι για τις συνήθεις διαστάσεις των σπονδύλων των κίωνων, η αντικατάσταση του κολουρου κώνου με έναν κύλινδρο δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα. Παράλληλα, από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της κίνησης παρατηρούμε ότι η τροχιά του σημείου επαφής είναι στις περισσότερες περιπτώσεις οιονεί κυκλική (Εικόνα I-13). Συνεπώς, η μελέτη της κίνησης ενός ομογενούς κυλίνδρου με συνεχώς μεταβαλλόμενη επαφή επί περιφέρειας κύκλου, που παρατίθεται στην επόμενη ενότητα, είναι μία λογική επέκταση του παρόντος προβλήματος της κίνησης ενός κολουρου κώνου σε ανοιχτό δρόμο.



Εικόνα I-13. Οιονεί κυκλική τροχιά του κόλουρου κώνου (συνεχής γραμμή) και προσέγγιση της από κυκλική (διακεκομμένη).

II ΚΙΝΗΣΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΜΕ ΣΥΝΕΧΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΕΠΑΦΗ ΕΠΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

Θεωρούμε ομογενή, απολύτως στερεό κύλινδρο μάζας m , ακτίνας R και ύψους $2h$, τον οποίον εφεξής θα καλούμε σώμα (b). Ο κύλινδρος στηριζόμενος κατακόρυφα, με τη βάση του επί σταθερού οριζοντίου επιπέδου, παριστά μονολιθικό αρχαιολογικό κίονα, κατάλοιπο μαζί με άλλα δομικά υλικά και κίονες, επίσης κατακόρυφους, λείψανα θλιβερά ενός αρχαίου κτίσματος (ναού ή κατοικίας), που γεφυρώνουν το παρελθόν του με το παρόν. Δεχόμενος ο κύλινδρος στην περιοχή της βάσης του, το μικρής διάρκειας πλήγμα (ώση ή ώθηση) μιας δύναμης, κλίνει λόγω αδράνειας ως προς το επίπεδο που εδράζεται, και αρχίζει να κινείται κατά τρόπον ώστε η περιφέρεια της βάσης του να βρίσκεται σε συνεχώς μετατοπιζόμενη σημειακή επαφή με περιφέρεια οριζόντιου κύκλου ακτίνας ρ . Η εικόνα του κινούμενου κυλίνδρου αποδίδει με ικανοποιητική πιστότητα την κινηματική συμπεριφορά του κίονα μετά από μία σεισμική δόνηση, η οποία με την μικρής διάρκειας εκδήλωσή της θέτει σε κίνηση όλο το σώμα του (Εικόνα II-1). Εύλογα τίθεται εδώ το ερώτημα αν η ως άνω κίνηση του (b) και κατ' επέκταση η εξομοιούμενη από αυτήν κίνηση του κίονα είναι μοναδική. Η απάντηση είναι πως όχι, δεν είναι μοναδική, αφού η εν λόγω κίνηση εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του πλήγματος (σημείο εφαρμογής, μέτρο, διεύθυνση και φορά), ήτοι από το πώς ενεργεί επί του κίονα το σεισμικό πλήγμα. Σε εφαρμογή του π.χ. κατά διεύθυνση που βρίσκεται μέσα στο κεντρικό κατακόρυφο επίπεδο της βάσης του κίονα, το πιθανότερο είναι ο κίονας,

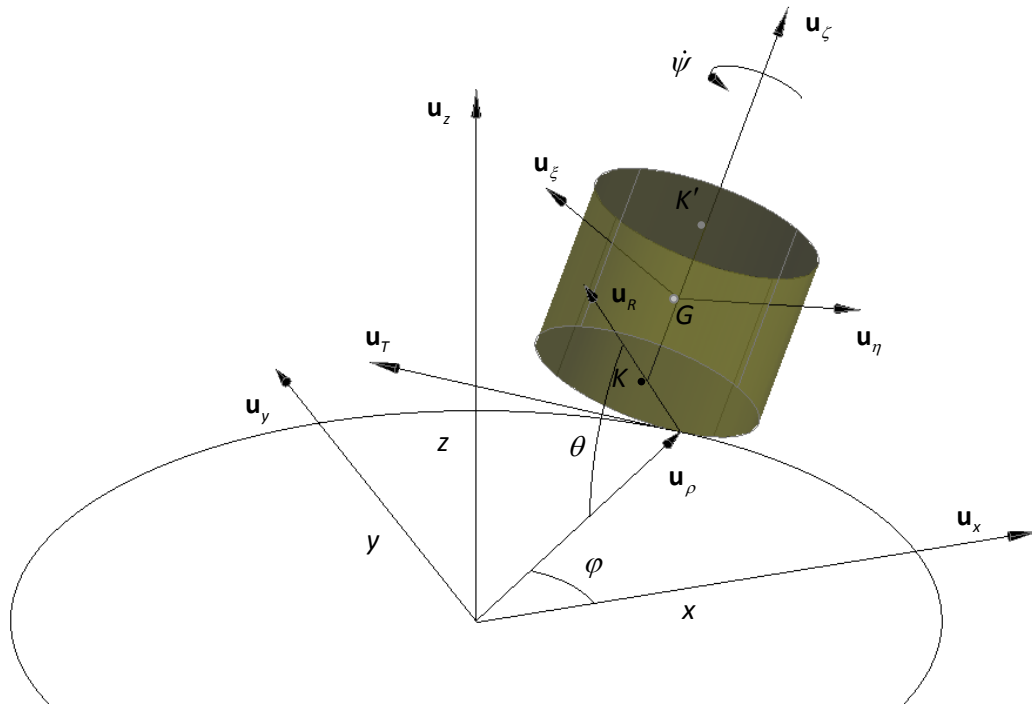
συνεπώς και το σώμα (b), να αρχίσει να κινείται, είτε μεταφορικά με τη βάση του να ολισθαίνει επί του εδάφους, αν η εν λόγω διεύθυνση είναι παράλληλη στο οριζόντιο επίπεδο, είτε να περιστραφεί περί την εφαπτόμενη της βάσης, στο περιφερειακό της σημείο από το οποίο διέρχεται το ως άνω κατακόρυφο επίπεδο, αν η διεύθυνση του πλήγματος δεν είναι παράλληλη προς το έδαφος, σχηματίζει δε γωνία με την τοπική κατακόρυφο. Με διεύθυνση πλήγματος διάφορη των δύο προηγούμενων, η κίνηση του (b), άρα και του κίονα, αναμένεται να είναι γενικά όπως αυτή που αναφέρεται στην αρχή, ήτοι μία κίνηση με αυξομειούμενη κλίση ως προς το έδαφος, άρα μία ακολουθία διαδοχικών περιστροφών περί άξονα δια του σημείου επαφής με ταυτόχρονη συνεχή μετατόπιση του σημείου επαφής τόσο κατά μήκος της περιφέρειας της βάσης του κυλίνδρου όσο και κατά μήκος κυκλικού δρόμου.

Η κύλιση του κυλίνδρου με σημειακή επαφή, όπως έχει λεχθεί ότι χαρακτηρίζεται η ως άνω κίνηση (Μυλωνάς, 1984), είναι πραγματοποιήσιμη με την επιβολή συνδέσμων, ανάλογων προς εκείνους που περιορίζουν την ελευθερία κινήσεως του στην περίπτωση του ανοικτού δρόμο, όχι τους ίδιους ακριβώς, αφού στην προκειμένη περίπτωση η κίνηση της επαφής επί του εδάφους είναι προκαθορισμένη (κυκλική). Η διαφοροποίηση αυτή επιβάλλει την εξ αρχής αναζήτηση των συνδέσμων και τον ιδιαίτερο σχολιασμό των εξισώσεων που τους περιγράφουν, ώστε η μελέτη της κίνησης να είναι όσο το δυνατόν πιο διεισδυτική. Το ίδιο πρέπει να γίνει και για την τριβή που αναπτύσσεται στην περιοχή του σημείου επαφής με το έδαφος, η ανάπτυξη της οποίας είναι απολύτως αναγκαία για την κύλισή του.



Στυλοβάτης

Εικόνα II-1. Κιονοστοιχία που έχει καταρρεύσει στο ναό της Σουσσίτα στο Ισραήλ (Yagoda & Hatzor, 2007).



Εικόνα II-2. Κύλινδρος με συνεχώς μεταβαλλόμενη σημειακή περιφερειακή επαφή επί περιφέρειας κύκλου.

II.1 Σύνδεσμοι

Εφόσον η κίνηση του σημείου επαφής E θέλουμε να εκτελείται επί κυκλικού δρόμου ακτίνας ρ (Εικόνα II-2), θα έχουμε, εισάγοντας το τρισσορθόγωνιο αδρανειακό σύστημα $Oxyz$, δύο πρώτους σύνδεσμούς με εξισώσεις:

$$\sigma_1(x_E, y_E, z_E, \rho) = x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 - \rho^2 = 0 \quad (II.1)$$

$$\sigma_2(x_E, y_E, z_E, \rho) = z_E = 0 \quad (II.2)$$

Ο πρώτος εξ αυτών δεσμεύει το σημείο επαφής να βρίσκεται σε σταθερή απόσταση από το O , ο δε δεύτερος επιβάλλει στο σημείο αυτό να μετατοπίζεται επί της τομής της σφαιρικής επιφάνειας την οποία παριστά η (II.1) με το οριζόντιο επίπεδο $z = 0$. Συνδυάζοντας μεταξύ τους τις δύο εξισώσεις, παίρνουμε την εξίσωση του κυκλικού δρόμου

$$\sigma^*(x_E, y_E, \rho) = x_E^2 + y_E^2 - \rho^2 = 0 \quad (II.3)$$

τον οποίο υποχρεούται να ακολουθεί η επαφή E κατά την κύλιση του κυλίνδρου. Με το σύνδεσμο αυτόν, που προφανώς είναι ολόνομος, καταγράφεται η πρώτη διαφορά της υπό εξέταση κύλισης (b) από την κύλιση του επί ανοικτού, μη καθορισμένου δρόμου, που εξετάστηκε στην περίπτωση I, όπου δεν διατυπώνεται εκτός από την εξίσωση

$$z = 0$$

άλλη δεσμική εξίσωση της μορφής

$$\sigma(x_E, y_E, z_E, \alpha) = 0$$

(α: αυθαίρετη σταθερά). Έτσι, μία διαφορά μεταξύ των επί μέρους προβλημάτων I και II προκύπτει από το ότι στο I υπάρχει ένας μόνο ολόνομος σύνδεσμος, ενώ στο II υπάρχει ζεύγος τέτοιων συνδέσμων, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι τελικά και αυτοί ανάγονται σε έναν. Πρέπει να επισημανθεί εδώ ο καθαρά μαθηματικός χαρακτήρας του συνδέσμου (II.3), πράγμα που σημαίνει ότι κανένα από τα οποία μηχανικά χαρακτηριστικά του συστήματος (δυναμικά-κινηματικά) δεν απορρέει από την εξίσωση αυτή. Η αντίδραση του επομένως θα είναι κάθετη στην εφαπτόμενη του κυκλικού δρόμου σε κάθε σημείο του. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινισθεί ότι η εν λόγω αντίδραση δεν κείται μέσα στο επίπεδο Oxy, αλλά κλίνει ως προς αυτό όπως και ως προς τον κάθετο άξονα Oz. Και τούτο διότι εφόσον ουσιαστικά είναι δύο οι σύνδεσμοι που δεσμεύουν το σημείο E σε κυκλική κίνηση επί του οριζοντίου επιπέδου, θα υπάρχουν δύο δεσμικές αντιδράσεις με διευθύνσεις

$$\hat{\eta}_1 = \frac{\nabla \sigma_1}{\|\nabla \sigma_1\|} = \frac{x_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2}} \hat{x} + \frac{y_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2}} \hat{y} + \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2}} \hat{z} \quad (II.4)$$

$$\hat{\eta}_2 = \frac{\nabla \sigma_2}{\|\nabla \sigma_2\|} = \hat{z} \quad (II.5)$$

και συνισταμένη μη κείμενη, προφανώς, στο επίπεδο Oxy και μη συγγραμμική με τον άξονα Oz.

Η συνεχής μετατόπιση του σημείου E, τόσο επί της περιφέρειας (O, ρ) όσο και επί της περιφέρειας (K, R) της βάσης του κυλίνδρου που είναι σε επαφή με το έδαφος σημαίνει ότι κατά την κύλιση του (b), διαφορετικά σημεία $E^{(b)}$ της περιφέρειας (K, R) θα έρχονται να συμπέσουν στιγμιαία με διαδοχικά σημεία E^{Oxy} του κυκλικού δρόμου και να αποχωρισθούν αμέσως από αυτά, παραχωρώντας τη θέση τους σε άλλα. Αυτό προφανώς οφείλεται στο γεγονός ότι ο κύλινδρος κυλιέται λόγω της περιστροφή που εκτελεί (δεν είναι η μοναδική) περί το διαμήκη άξονα του \hat{u}_z . Συμβολίζοντας με v_s τη σχετική ταχύτητα των σημείων $E^{(b)}$ και E^{Oxy} , θα έχουμε για την κίνηση τους την ακόλουθη κινηματική συνθήκη

$$\underline{V}_E^{(b)} = \underline{V}_E^{Oxy} + \underline{V}_s \quad (II.6)$$

η οποία εισάγεται ως ένας επιπλέον σύνδεσμος. Εφόσον η μετατόπιση του E γίνεται συνεχώς κατά μήκος του κυκλικού δρόμου (O, ρ), επόμενο είναι ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας \hat{v} κατά τη διεύθυνση \hat{u}_p και \hat{u}_z είναι μηδενικές, ήτοι $V_{s,p} = \underline{V}_s \cdot \hat{u}_p = 0$ και $V_{s,z} = \underline{V}_s \cdot \hat{u}_z = 0$. Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή ήταν $V_p \neq 0$, η επαφή E, εκτρεπόμενη από την περιφέρεια (O, ρ) θα έπαυε να κινείται επ' αυτής. Αν ήταν δε $V_z \neq 0$, θα εκτρεπόταν από το επίπεδο Oxy, είτε λόγω διείδυσης σε αυτό, αν $V_z < 0$, είτε λόγω διακοπής της αν $V_z > 0$. Υπολογίζοντας τις ταχύτητες $\underline{V}_E^{(b)}$ και \underline{V}_E^{Oxy}

$$\underline{V}_E^{(b)} = \dot{\phi} \hat{u}_z \times \rho \hat{u}_p = \rho \dot{\phi} \hat{u}_T$$

$$\underline{V}_E^{Oxy} = (\dot{\phi} \hat{u}_z - \dot{\psi} \hat{u}_z) \times (-R \hat{u}_R - h \hat{u}_z) = [(R \cos \theta - h \sin \theta) \dot{\phi} - R \dot{\psi}] \hat{u}_T$$

παίρνουμε αμέσως από την (II.6) επειδή $\underline{V}_s = V_s \hat{u}_T$ την εξίσωση

$$(\rho - \alpha) \dot{\phi} + R \dot{\psi} = v_s \quad (II.7)$$

όπου

$$\alpha = R \cos \theta - h \sin \theta$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό της $V_{\underline{E}}^{(b)}$ δεν ελήφθη υπόψη η περιστροφή του (b) περί τη στιγμιαία διεύθυνση της εφαπτόμενης \hat{u}_T , καθ' όσον η περιστροφή αυτή δεν επηρεάζει την κυκλική κίνηση του σημείου $E^{(b)}$ περί άξονα \hat{u}_z . Η ταχύτητα ολισθήσεως $\underline{V}_s = V_s \hat{u}_T$ εξαρτάται από την πίεση που ασκείται στην περιοχή επαφής από τις δυνάμεις που εφαρμόζονται ή αναπτύσσονται στον κύλινδρο κατά την κίνησή του (βάρος, τριβής, κτλ) καθώς και από το υλικό του κυλίνδρου και τη φύση του εδάφους. Εάν καμία πληροφορία δεν δίνεται για το νόμο που διέπει την εκδήλωση και ανάπτυξή της, μπορούμε να θεωρήσουμε το μέτρο της ανάλογο προς το μέτρο της $V_{\underline{E}}^{Oxy}$ (speed), ήτοι

$$V_s \approx \gamma V_E^{Oxy} = \gamma \rho \dot{\phi} \quad (II.8)$$

όπου γ μικρός αριθμός. Με δεδομένη τη φορά της κίνησης του E^{Oxy} , είναι φανερό ότι ο συντελεστής γ πρέπει να λαμβάνεται μικρότερος της μονάδας και διάφορος του μηδενός. Αν $d\ell_s$ είναι το αντίστοιχο απειροστό μήκος τόξου της περιφέρειας (O, ρ) το οποίο συνδέεται με την \underline{V}_s και $d\ell$ είναι το αντίστοιχο απειροστό μήκος τόξου που διανύεται από το E^{Oxy} , θα έχουμε

$$dt = V_s^{-1} d\ell_s = (\rho \dot{\phi})^{-1} d\ell$$

οπότε

$$V_s = \frac{d\ell_s}{d\ell} \rho \dot{\phi} \quad (II.9)$$

Σύγκριση της (II.8) και (II.9) οδηγεί στη σχέση

$$\gamma = \frac{d\ell_s}{d\ell} \quad (II.10)$$

από την οποία δικαιολογείται η τιμή του γ να βρίσκεται μέσα στο διάστημα $0 \leq \gamma < 1$.

Εύκολα μέσω του κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας του Frobenius (Rosenberg, 1977) αποδεικνύεται ότι ο σύνδεσμος (II.7) είναι μη ολόνομος. Υπό την έκφραση (II.8) για την ταχύτητα ολισθήσεως, ο σύνδεσμος καθίσταται καταστατικός εφόσον η εξίσωση του παίρνει τη μορφή

$$[(1-\gamma)\rho - \alpha] \dot{\phi} + R \dot{\psi} = 0 \quad (II.11)$$

Όπως θα δούμε σε προσεχές κεφάλαιο, ο συγκεκριμένος αυτός χαρακτήρας του συνδέσμου καλύπτει τη μία από τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται για την ύπαρξη του ενεργειακού ολοκληρώματος του Jacobi.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της κύλισης του κυλίνδρου υπό σταθερή γωνία κλίσεως θ ως προς το επίπεδο Oxy. Ο σύνδεσμος τότε για $\theta(t) = \theta^* = \text{σταθ.}$ θα μεταπίπτει από μη ολόνομος σε ολόνομο με εξίσωση το ολοκλήρωμα της (II.11)

$$[(1-\gamma)\rho - R \cos \theta^* + h \sin \theta^*] \phi + R \psi = \text{σταθ.} \quad (II.12)$$

Η μελέτη όμως μιας τέτοιας κίνησης έχει θεωρητική μόνον αξία, αφού πρακτικά ο κίονας δεν φαίνεται να μπορεί από τις συνθήκες του προβλήματος να κινείται συνεχώς με σταθερή τη γωνία θ .

II.2 Η δύναμη τριβής

Η αντίδραση του επιπέδου Οxy προς το (b), η οποία αναπτύσσεται στην περιοχή της επαφής E συνίσταται γενικά σε μία δύναμη \underline{F} και ένα ζεύγος δυνάμεων $(\underline{F}^*, -\underline{F}^*)$, με ροπή \underline{M} . Υποθέτοντας ότι η περιοχή αναπτύξης της αντίδρασης είναι τόσο μικρή, ώστε μακροσκοπικά να εκφυλίζεται σε σημείο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη συγκεντρωμένη ακριβώς στο σημείο επαφής και το μοχλοβραχίονα του ζεύγους (απόσταση των δυνάμεων) μηδενικής τάξης, ώστε να μηδενίσει τη ροπή \underline{M} του ζεύγους. Ο κύλινδρος έτσι κινείται χωρίς να στρέφεται περί τον εαυτό του, ήτοι περί τον άξονα δια του εκάστοτε σημείου επαφής, κάθετο στο Οxy και χωρίς να παραμορφώνεται κοντά στο E. Ας αναλύσουμε την αντίδραση \underline{F} κατά τους στιγμιαίους άξονες \hat{u}_ρ, \hat{u}_T και την κατακόρυφη \hat{u}_z , ήτοι

$$\underline{F} = \underline{F}_\rho + \underline{F}_z + \underline{F}_T = (F \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + (F \cdot \hat{u}_z) \hat{u}_z + (F \cdot \hat{u}_T) \hat{u}_T \quad (II.13)$$

και ας αναγάγουμε τις δύο πρώτες συνιστώσες στο κέντρο μάζας G του κυλίνδρου. Θα έχουμε τότε, εκτός από τις δυνάμεις \underline{F}'_ρ και \underline{F}'_z με $\underline{F}'_\rho = \underline{F}_\rho$ και $\underline{F}'_z = F_z$ και τα ζεύγη $(\underline{F}_\rho, \underline{F}'_\rho)$ και $(\underline{F}_z, \underline{F}'_z)$. Θα είναι τότε

$$\underline{F}'_\rho = \underline{F} = m(\underline{a}_G \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho \quad (II.14)$$

Και

$$\underline{F}'_z - mg\hat{u}_z = \underline{F}_z - mg\hat{u}_z = m(\underline{a}_G \cdot \hat{u}_z) \hat{u}_z \quad (II.15)$$

όπου \underline{a}_G είναι η επιτάχυνση του G

$$\begin{aligned} \underline{a}_G = \dot{\underline{V}}_G &= [\underline{V}_E^{(b)} + \underline{\omega} \times \underline{EG}] = [\underline{V}_E^{(Oxy)} + \underline{V}_s + \underline{\omega} \times \underline{EG}] \\ &= (1 - \gamma) \dot{\underline{V}}_E^{Oxy} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{EG} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{EG}) \end{aligned} \quad (II.16)$$

όπου $\underline{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου. Τα ζεύγη

$(\underline{F}_\rho, \underline{F}'_\rho)$ και $(\underline{F}_z, \underline{F}'_z)$ με τις ροπές του $\underline{M}_\rho = \underline{GE} \times \underline{F}_\rho$ και $\underline{M}_z = \underline{GE} \times \underline{F}_z$, τείνουν να περιστρέφουν τον κύλινδρο εντός του κατακόρυφου επιπέδου που σχηματίζεται από τους άξονες \hat{u}_ρ και \hat{u}_z , ήτοι περί τον άξονα \hat{u}_T που είναι κάθετος σε αυτό. Προκαλούν συνεπώς τη μεταβολή της γωνίας κλίσης θ και κατ' επέκταση τη μεταβολή (αύξηση – μείωση) της απόστασης G από το επίπεδο Οxy.

Η τρίτη συνιστώσα \underline{F}_T της αντίδρασης F με διεύθυνση \hat{u}_T και φορά αντίθετη της κίνησης του E συνδέεται με τις μηχανικές ιδιότητες του Οxy, ήτοι με χαρακτηριστικά της επιφάνειας του εδάφους στο οποίο εδράζεται ο κίονας. Το μέτρο της εξαρτάται από το μέτρο της συνολικής κάθετης αντίδρασης $\underline{F}_\rho + \underline{F}_z$ και εν γένει από το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης, δηλαδή

$$F_T = f(\|\underline{F}_\rho + \underline{F}_z\|, v_s) \quad (II.17)$$

Είναι η εν λόγω δύναμη, η γνωστή δύναμη τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ δύο εν επαφή σωμάτων στο σημείο (περιοχή ουσιαστικά) όπου η επιφάνεια του ενός ακουμπά στην επιφάνεια του άλλου. Η φύση των δύο επιφανειών είναι καθοριστική, όπως προελέχθη, για την ανάπτυξή της. Συνεπώς η ξηρότητά τους, οι μικροσκοπικές (μη ορατές με γυμνό μάτι) ανωμαλίες τους στην περιοχή επαφής, η λεπτομερής λείανσή τους, η λίπανσή τους και εν γένει το περισσότερο ή λιγότερο ύγρο περιβάλλον του σημείου E, παίζουν αποφασιστικό ρόλο στην ένταση με την οποία εμφανίζεται και επηρεάζει την κίνηση του (b). Υπολογίζοντας τη ροπή της ως προς το κέντρο K της κάτω βάσης του κυλίνδρου βρίσκουμε

$$M_K = \underline{K}E \times \underline{F}_T = -R\hat{u}_R \times (-F_T)\hat{u}_T = F_T R \hat{u}_R \times \hat{u}_T = -F_T R \hat{u}_z \quad (II.18)$$

όπου

$$\hat{u}_R = -\cos \theta \hat{u}_\rho + \sin \theta \hat{u}_z = -\cos \varphi \cos \theta \hat{u}_x - \sin \varphi \cos \theta \hat{u}_y + \sin \theta \hat{u}_z$$

$$\hat{u}_T = -\sin \varphi \hat{u}_x + \cos \varphi \hat{u}_y$$

$$\hat{u}_z = \sin \theta \hat{u}_\rho + \cos \theta \hat{u}_z = \cos \varphi \sin \theta \hat{u}_x + \sin \varphi \sin \theta \hat{u}_y + \cos \theta \hat{u}_z$$

Παρατηρούμε ότι η \underline{M}_K αναγκάζει τον κύλινδρο σε περιστροφή περί το διαμήκη άξονα του \hat{u}_z , επομένως είναι η αιτία που τον μετατοπίζει, καθώς το σημείο E κινούμενο επί της περιφέρειας (K, R) είναι υποχρεωμένο να διαγράφει συνάμα την περιφέρεια (O, ρ), ενώ ταυτοχρόνως η γωνία θ μεταβάλλεται λόγω της περιστροφής του (b) μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_z)$. Μηδενική τιμή για το μέτρο F_T συνεπάγεται την ακινησία του E, πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος παύει να κυλιέται, με αποτέλεσμα να εκτελεί μόνο την περιστροφή περί τον άξονα \hat{u}_T , η οποία οδηγεί στην πτώση του επί του Oxy (επομένως και του κίονα επί του εδάφους).

Η κύλιση του κυλίνδρου με την ανάπτυξη στο σημείο E της τριβής \underline{F}_T , συνοδεύεται από απώλεια μέρους της μηχανικής του ενέργειας, όταν η κίνηση γίνεται με ολίσθηση. Πράγματι, αν υπολογίσουμε το έργο της \underline{F} κατά την ολίσθηση ως το χρονικό ολοκλήρωμα της ισχύος, θα έχουμε

$$W = \int \underline{F} \cdot \underline{v}_s dt = \int \underline{F}_\rho \cdot \underline{v}_s dt + \int \underline{F}_z \cdot \underline{v}_s dt + \int \underline{F}_T \cdot \underline{v}_s dt \quad (II.19)$$

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα είναι ίσα προς το μηδέν λόγω της καθετότητας των \underline{F}_ρ και \underline{F}_z προς την ταχύτητα \underline{v}_s . Το τρίτο είναι μη μηδενικό αν $\underline{v}_s \neq 0$, με αρνητική τιμή, καθ' όσον η τριβή αντίτιθεται στην κίνηση, άρα $\underline{F}_T \cdot \underline{v}_s < 0$. Συνεπάγεται επομένως ότι η ολίσθηση του κυλίνδρου κατά την κύλισή του συνοδεύεται από απώλεια της μηχανικής του ενέργειας. Το μέρος της κατά το οποίο αυτή μειώνεται μετατρέπεται σε θερμότητα και στην παραμόρφωση του (b) στην περιοχή του E. Πρέπει να διευκρινισθεί εδώ ότι η προαναφερόμενη παραμόρφωση δεν αντίτιθεται στην παραδοχή της στερεότητας του κυλίνδρου και της μη ενδοτικότητας του Oxy, αφού στην πραγματικότητα απόλυτη στερεότητα δεν υπάρχει και το φυσικό έδαφος δεν μπορεί να μην υποχωρεί έστω και κατ' ελάχιστον όσο σκληρό και αν είναι. Συνάγεται από αυτό ότι η πραγματική κίνηση του κίονα, όσο χρόνο διαρκεί, ακολουθείται με

απώλεια της μηχανικής του ενέργειας. Τη στιγμή της κρούσης του κατά την πτώση του στο έδαφος, το μέρος της ενέργειας που απομένει είναι η κρουστική ενέργεια που αποδίδεται πλήρως στο έδαφος, αν η κρούση είναι πλαστική, οπότε δεν παρατηρείται αναπήδησή του, ή αποδίδεται μερικώς για την αναπήδησή του και μερικώς για την παραμόρφωση τόσο αυτού όσο και του εφάδους, καθ' όλη την έκταση της επαφής τους, αν η κρούση είναι ελαστική.

Ο ακριβής τύπος της τριβής εξαρτάται, ως γνωστόν, από την πίεση που ασκεί επί του Οxy ο κύλινδρος με το βάρος του και τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κίνηση, και από τη φύση των δύο εν επαφή επιφανειών (βιβλιογραφία). Για ξηρό περιβάλλον, όπως αυτό στην περιοχή της έδρασης του κίονα και για μικρές τιμές του v_s , η τριβή θα ακολουθεί τους σχετικούς νόμους Coulomb (Papastavridis, 2002), οπότε θα είναι

$$F_T = \mu \|F_\rho + F_z\| \quad (II.20)$$

όπου μ είναι μη αρνητική σταθερά με τιμή που υπολογίζεται πειραματικά. Διακρίνοντας την τριβή σε στατική και δυναμική, και συμβολίζοντας το συντελεστή τριβής με μ_S και μ_K αντίστοιχα, έχουμε

$$\mu_K(F_\rho, F_z, V_s) \leq \mu_S(F_\rho, F_z, V_s) \quad (II.21)$$

για κάθε $V_s \geq 0$, οπότε

$$\mu_K(F_\rho, F_z, V_s \neq 0) < \mu_{K,0}(F_\rho, F_z, V_s = 0) \leq \mu_S \quad (II.22)$$

Από το συνδυασμό των (II.14)-(II.16) με την (II.20) προκύπτει για την F_T , στην περίπτωση τριβής Coulomb, η έκφραση

$$\begin{aligned} F_T &= \mu \sqrt{F_\rho^2 + F_z^2} = \mu m \sqrt{(\underline{a}_G \cdot \hat{u}_\rho)^2 + (\underline{a}_G \cdot \hat{u}_z + g)^2} = \\ &= \mu \left\{ \left[(1 + \gamma) \dot{V}_E^{Oxy} \cdot \hat{u}_\rho + (\underline{\omega} \times \underline{EG}) \cdot \hat{u}_\rho + (\underline{\omega} \cdot \underline{EG}) \underline{\omega} \cdot \hat{u}_\rho - \omega^2 \underline{EG} \cdot \hat{u}_\rho \right]^2 + \right. \\ &= \left. \left[(1 + \gamma) \dot{V}_E^{Oxy} \cdot \hat{u}_z + (\underline{\omega} \times \underline{EG}) \cdot \hat{u}_z + (\underline{\omega} \cdot \underline{EG}) \underline{\omega} \cdot \hat{u}_z - \omega^2 \underline{EG} \cdot \hat{u}_z + g \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (II.23)$$

Κλείνοντας την παραγράφο, κρίνουμε αναγκαίο να σημειώσουμε ότι κύλιση του κυλίνδρου σε απολύτως λείο επίπεδο ($\mu=0$) με μηδενική ολίσθηση ($V_s=0$) δεν είναι δυνατή αφού τέτοιες συνθήκες είναι αδύνατο να συνυπάρχουν. Μηδενική τριβή σημαίνει μηδενική ροπή \underline{M}_k , επομένως αδυναμία του κυλίνδρου, καθώς περιστρέφεται περί τον άξονα \hat{u}_z , να μετατοπίζεται με το σημείο E να διαγράφει την περιφέρεια (O,ρ). Στην περίπτωση αυτή, η κίνηση του (b) περιορίζεται μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_z)$ που διέρχεται από το ακίνητο σημείο επαφής E^{Oxy} , πράγμα που σημαίνει ότι ο κύλινδρος θα περιστρέφεται περί το διαμήκη άξονα του, με τη βάση του (K, R) να ολισθαίνει συνεχώς στο σταθερό σημείο E^{Oxy} .

II.3 Κινητική ενέργεια

Για τον προσδιορισμό της κινητικής ενέργειας του (b), απαραίτητης για τη διατύπωση της Αρχής D'Alembert και την εξαγωγή από αυτή των εξισώσεων Lagrange, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου και τις συνιστώσες της κατά τον άξονα \hat{u}_z και κατά δύο εγκάρσιες προς αυτόν

διευθύνσεις \hat{u}_ξ και \hat{u}_η κάθετες μεταξύ τους στο G (κεντρικοί κύριοι άξονες αδράνειας). Παρατηρώντας τον κύλινδρο κατά την κίνηση του και υποθέτοντας ότι τη δεδομένη στιγμή, το κέντρο μάζας του περιστρέφεται στο επίπεδο $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_z)$ δεξιόστροφα περί τη διεύθυνση της εφαπτόμενης \hat{u}_T , θα έχουμε

$$\underline{\omega} = \dot{\phi}\hat{u}_z + \dot{\theta}\hat{u}_T - \dot{\psi}\hat{u}_z = \dots = -\dot{\psi} \sin \theta \hat{u}_\rho + \dot{\theta}\hat{u}_T + (\dot{\phi} - \dot{\psi} \cos \theta)\hat{u}_z \quad (II.24)$$

Από την έκφραση αυτή παίρνουμε

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \\ \omega_\xi &= \underline{\omega} \cdot \underline{u}_\xi = \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} \end{aligned} \quad (II.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_\xi^2 &= \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \\ \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 &= \omega^2 - \omega_\xi^2 = \dots = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (II.26)$$

Για την ταχύτητα του G έχουμε την έκφραση

$$\underline{V}_G = (\underline{OG}) = (\underline{OE} + \underline{EG}) = \dots = (\rho - a)\dot{\phi}\hat{u}_T + \beta\dot{\theta}\hat{u}_\rho + a\dot{\theta}\hat{u}_z \quad (II.27)$$

από την οποία βρίσκουμε

$$V_G^2 = (\rho - a)^2 \dot{\phi}^2 + (R^2 + h^2)\dot{\theta}^2 \quad (II.28)$$

Εισάγοντας τις (II.25), (II.26) και (II.28) στη γενική έκφραση της κινητικής ενέργειας κυλίνδρου

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} A (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{1}{2} C \omega_\xi^2$$

όπου A και C είναι οι ροπές αδράνειας ως προς \hat{u}_ξ και \hat{u}_z αντίστοιχα, παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [m(\rho - a)^2 + A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] \dot{\phi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} [m(R^2 + h^2) + A] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \dot{\psi}^2 - C \dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (II.29)$$

Στην ανωτέρω έκφραση δεν εμφανίζεται το μέτρο της ταχύτητας \underline{V}_s , επομένως αυτή αφορά την περίπτωση της καθαρής κύλισης. Το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε αν ο υπολογισμός της \underline{V}_G βασιζόταν στην έκφραση της ταχύτητας του G ως σημείου του (b), μέσω της ταχύτητας ενός άλλου σημείου και εν προκειμένου του E, ήτοι

$$\underline{V}_G = \underline{V}_E^{(b)} + \underline{\omega} \times \underline{EG}$$

η οποία, λόγω της καθαρής κύλισης $\underline{V}_s = 0$, γράφεται

$$\underline{V}_G = \underline{V}_E^{Oxy} + \underline{\omega} \times \underline{EG} \quad (II.30)$$

Αν όμως είναι $\underline{V}_s \neq 0$, τότε θα πρέπει η έκφραση της \underline{V}_G να εισαχθεί και η ταχύτητα ολίσθησης, ήτοι

$$\underline{V}_G = \underline{V}_E^{(b)} + \underline{\omega} \times \underline{E}^{(b)} \underline{G} = \underline{V}_E^{Oxy} + \underline{V}_S + \underline{\omega} \times \underline{E}^{(b)} \underline{G} \quad (II.31)$$

ή εναλλακτικά να προσδιοριστεί η \underline{V}_G με παραγωγή του ακριβούς διανύσματος, που στην περίπτωση αυτή θ δίνεται από το άθροισμα

$$\underline{OG} = \underline{OE}^{Oxy} + \underline{E}^{Oxy} \underline{E}^{(b)} + \underline{E}^{(b)} \underline{G} \quad (II.32)$$

Για την απλούστευση του όλου έργου αφ' ενός και για το λόγο ότι στο μικρό χρόνο που διαρκεί η πραγματική κίνηση του κίονα μετά από μία σεισμική δόνηση αφ' ετέρου, εάν φυσικά η δόνηση είναι τέτοια ώστε να προκληθεί η κίνησή του, η ολίσθηση δεν φαίνεται να είναι ιδιαίτερα σημαντική, παραλείπουμε στον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας τη συμβολή των πολύ μικρών όρων που εισάγει η παρουσία της \underline{V}_S στην έκφραση της \underline{V}_G . Η παρουσία της \underline{v}_S στην έκφραση της T και κατ' επέκταση στις εξισώσεις της κίνησης, επιβάλλει την ακριβή γνώση της και όχι την προσεγγιστική (II.8), η οποία μετατρέπει όπως είδαμε τον ανολόνομο σύνδεσμο από μη καταστατικό σε καταστατικό, πράγμα που καλύπτει μία από τις προϋποθέσεις για την ύπαρξη του ολοκληρώματος Jacobi. Και η ύπαρξη του ολοκληρώματος αυτού με την εν λόγω προσέγγιση του \underline{v}_S αντιφάσκει προς ό,τι πραγματικά συμβαίνει, δηλαδή με τη μη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, όταν ο κύλινδρος ολισθαίνει. Η αντιμετώπιση του προβλήματος $\underline{V}_S \neq 0$ μπορεί να γίνει με εφαρμογή μιας τεχνικής διαταραχών (perturbation technique) ad hoc διαμορφούμενης, ή οποία όμως και πάλι δεν οδηγεί σε απολύτως ακριβείς λύσεις λόγω των σειρών που εισάγει μία τέτοια τεχνική.

II.4 Εξισώσεις κίνησης

Για τη διατύπωση των εξισώσεων της κίνησης κατά Lagrange, παίρνουμε ως αφετηρία την Αρχή D'Alembert (Rosenberg, 1977), διατυπωμένη στο σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων q_k

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k + \sum_\ell \lambda_\ell B_{Ck} \right] \delta q_k = 0 \quad (II.33)$$

και συνδυαζόμενη με τις εξισώσεις των L συνδέσμων

$$B_{\ell k} \dot{q}_k + B_\ell = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, L$$

όπου λ_ℓ είναι οι πολλαπλασιαστές **Lagrange**. Ανάλογα με το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων που επιλέγεται, η (II.33) οδηγεί σε διάφορες μορφές εξισώσεων που όλες τους χαρακτηρίζονται ως εξισώσεις Lagrange. Η κινητική ενέργεια στην εξίσωση (II.33) εισάγεται υπό τη μορφή

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2} A (\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{1}{2} C \omega_\xi^2$$

Οι ποσότητες Q_k είναι οι γενικευμένες δυνάμεις οριζόμενες από τη σχέση

$$Q_k = \sum_s \underline{F}_s \cdot \frac{\partial \underline{r}_s}{\partial q_k} \quad (II.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
x_G &= x_E - a \cos \varphi = (\rho - a) \cos \varphi \\
y_G &= y_E - a \sin \varphi = (\rho - a) \sin \varphi \\
z_G &= z_E + \beta = \beta
\end{aligned}
\tag{II.35}$$

Όπου

$$\beta = R \sin \theta + h \cos \theta$$

σε συνδυασμό με τις (II.25) και (II.26), εισάγοντας δηλαδή ως γενικευμένες συντεταγμένες φ , θ , ψ , παίρνουμε από την (II.33)

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} - Q_\varphi + \lambda B_\varphi \right] \delta \varphi + \\
&+ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} - Q_\theta + \lambda B_\theta \right] \delta \theta + \\
&+ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} - Q_\psi + \lambda B_\psi \right] \delta \psi = 0
\end{aligned}
\tag{II.36}$$

όπου η T έχει την έκφραση (II.29)

$$Q_\varphi = -F_T \rho$$

$$Q_\theta = -mga = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$Q_\psi = 0$$

$$B_\varphi = \rho - a$$

$$B_\theta = 0$$

$$B_\psi = R$$

και

$$V = mg \underline{OG} \cdot \hat{u}_z = mg [(\rho - a) \hat{u}_\rho = \beta \hat{u}_z] \cdot \hat{u}_z = mg\beta
\tag{II.37}$$

(δυναμική ενέργεια). Είναι προφανές ότι με τις σχέσεις μετασχηματισμού (II.35), όλα τα ανωτέρω όπως και όλα όσα θα ακολουθήσουν αφορούν την περίπτωση της καθαρής κύλισης. Γράφοντας την Αρχή D'Alambert υπό τη μορφή (II.36), εισάγουμε τον ανολόνομο σύνδεσμο μέσω του πολλαπλασιαστή λ , ο προσδιορισμός του οποίου, ως πρόσθετης μεταβλητής, επιβάλλει όπως προελέχθη, την επισύναψη και της εξίσωσης (II.7). Δεδομένου τώρα ότι

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

θα έχουμε για τις εξισώσεις Lagrange που περιγράφουν την κίνηση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}} \right) + F_T \rho + \lambda(\rho - a) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + mga &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} \right) + \lambda R &= 0 \end{aligned} \quad (II.38)$$

στις οποίες επισυνάπτουμε και την εξίσωση του συνδέσμου (II.7). Εφόσον τα πραγματικά χαρακτηριστικά των αντιδράσεων των ολόνομων συνδέσμων δεν αναδεικνύονται από τις εξισώσεις τους, όπως συμβαίνει με τους ολόνομους, δεν είναι δυνατή η μόρφωση κάποιας ρητής σχέσης μεταξύ του λ και της (II.7). Γενικά, οι πολλαπλασιαστές Lagrange θεωρούνται ως τα μέτρα των δεσμικών αντιδράσεων, των οποίων όμως οι διευθύνσεις (ως δυνάμεις) είναι εντελώς άγνωστες.

Εναλλακτική μορφή των εξισώσεων κίνησης είναι αυτή που προκύπτει με την ενσωμάτωση του συνδέσμου (II.7) στην εξίσωση (II.36), μία τεχνική η οποία μηδενίζει την ανάγκη εισαγωγής των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ως πρώτο βήμα για την εφαρμογή της παρατηρούμε ότι παρόλο που οι μεταβλητές ϕ , θ , ψ , με την απαλοιφή των δύο ολόνομων συνδέσμων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, οι δυνατές μεταβολές τους, όπως άλλωστε και οι πραγματικές, καθώς επίσης και οι ρυθμοί μεταβολής τους ως προς το χρόνο, δεν είναι, αφού σύμφωνα με την (II.7) συνδέονται με τη σχέση

$$(\rho - a)\delta\phi + R\delta\psi = 0 \quad (II.39)$$

Αν γράψουμε τώρα την Αρχή D' Alambert χωρίς να επισυνάψουμε μέσω του πολλαπλασιαστή λ , το σύνδεσμο (II.7), έχουμε

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}} \right) + F_T \rho \right] \delta\phi + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + mga \right] \delta\theta + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} \right) \cdot \delta\psi = 0$$

(οι μηδενικοί όροι δεν έχουν παραλειφθεί). Απαλείφοντας από την εξίσωση αυτή και την (II.39), τη μεταβολή $\delta\psi$, παίρνουμε

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\rho - a}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} \right) + F_T \rho \right] \delta\phi + \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + mga \right] \delta\theta = 0 \quad (II.40)$$

Οι δύο απομένουσες μεταβολές $\delta\phi$ και $\delta\theta$ είναι προφανώς ανεξάρτητες μεταξύ τους, οπότε η ανωτέρω εξίσωση αληθεύει, όταν οι συντελεστές των μεταβολών αυτών είναι ίσοι προς μηδέν. Προκύπτουν κατόπιν αυτού οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\rho - a}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} \right) + F_T \rho &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + mga &= 0 \end{aligned} \quad (II.41)$$

οι οποίες αποτελούν την εναλλακτική μορφή των εξισώσεων Lagrange με ενσωμάτωση του συνδέσμου (II.39). Εννοείται φυσικά ότι στο αποτέλεσμα των σημειούμενων παραγωγίσεων, ο ρυθμός μεταβολής $\dot{\psi}$, όπου εμφανίζεται, πρέπει να απαλειφθεί μέσω της σχέσης

$$\dot{\psi} = -\frac{\rho - a}{R} \dot{\phi} \quad (\text{II.42})$$

Με την τεχνική της ενσωμάτωσης του συνδέσμου, προέκυψαν δύο ακριβώς εξισώσεις, χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτές ο πολλαπλασιαστής λ . Το πλεονέκτημα αυτός της μείωσης του αριθμού των εξισώσεων μετριάζεται από το γεγονός ότι οι δύο εξισώσεις (II.41) είναι ισχυρά συζευγμένες, γεγονός που δυσχεραίνει αρκετά την επεξεργασία τους, ιδιαίτερα την υπολογιστική. Δεν παύει όμως ως πλεονέκτημα να έχει την αξία του, ιδιαίτερα όταν απαιτείται η εύρεσή της, θεωρούμενης ως δεσμικής αντίδρασης, ποσότητας $\lambda = \lambda(t)$. Σε ανάλογη μορφή των εξισώσεων της κίνησης θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε την ίδια διαδικασία, έχοντας όμως προηγουμένως επιλύσει την (II.39) όχι ως προς $\delta\psi$ αλλά ως προς $\delta\phi$. Οι μεταβλητές τότε ως προς τις οποίες θα διατυπώνονταν οι εξισώσεις κινήσεως θα ήσαν οι ψ και θ . Αυτό σημαίνει ότι με την τεχνική της ενσωμάτωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως χώρο των φάσεων οποιονδήποτε από τους χώρους $(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$ και $(\psi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\theta})$. Περιττό είναι να τονισθεί εδώ ότι σε όποιον από τους χώρους αυτούς και αν γίνεται η διερεύνηση του προβλήματος, είναι αναγκαία η επίλυση της εξίσωσης (II.7) για την εύρεση της λύσης που αντιστοιχεί στην εκτός του χώρου μεταβλητή. Σημειώνεται τέλος ότι τόσο το σύστημα των εξισώσεων (II.38), όσο και το σύστημα (II.41) είναι αυτόνομα, πράγμα που απαλλάσσει τη διερεύνηση των λύσεων από την αναζήτηση αρχικών συνθηκών εξαρτωμένων από τον αρχικό χρόνο, αφού στα συστήματα αυτού του είδους κάθε χρονική στιγμή μπορεί να ληφθεί ως αρχικός χρόνος.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι λύσεις του προβλήματος για μικρές τιμές της γωνίας θ . Αυτό διότι σε πραγματικούς κίονες, οι οποίοι εξακολουθούν να διατηρούνται κατακόρυφοι παρά τα τόσα και τόσα σεισμικά γεγονότα που έχουν επισυμβεί μέσα στη μακραίωνη ιστορία τους, οι αποκλίσεις της γωνίας θ από τη μηδενική της τιμή (κατακόρυφη θέση) δεν μπορεί παρά να ήταν γενικά πολύ μικρές.

Τέλος, ένα ερώτημα που συνδέεται με τις λύσεις του συστήματος είναι αυτό της ευστάθειας των λύσεων. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι οι καταστάσεις ισορροπίας του κυλίνδρου με σημειακή του στήριξη είναι δύσκολο να επιτευχθούν. Μπορούν βέβαια να υπάρχουν όταν η κατακόρυφος δια του κέντρου μάζα (διεύθυνση του βάρους) διέρχεται από το σημείο επαφής, αλλά μία τέτοια λύση δεν έχει πρακτική αξία αφού στο πραγματικό ισοδύναμο του κυλίνδρου, τον κίονα, μία τέτοια κατάσταση δεν φαίνεται να είναι δυνατή, ούτε έχει βρεθεί, εξ' όσων γνωρίζουμε, κίονας που να ακινητεί με τα χαρακτηριστικά αυτά (ασταθής ισορροπία). Έτσι, το ερώτημα για την ευστάθεια εστιάζεται σε λύσεις των εξισώσεων κίνησης που αντικατοπτρίζουν πραγματική συμπεριφορά ενός κίονα. Περιοριζόμενοι στις εξισώσεις (II.41), παίρνουμε μετά τη γραμμικοποίησή τους περί την υπό εξέταση αδιατάρακτη λύση $(\phi'', \theta'', \dot{\phi}'', \dot{\theta}'')$

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial F_T}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\rho - a}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) \right] \Delta \theta + \\
& + \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\rho - a}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) + F_T \rho \right] \Delta \phi + \\
& + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\rho - a}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) + F_T \rho \right] \Delta \dot{\theta} = 0 \tag{II.43} \\
& \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + mga \right] \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + mga \right] \Delta \dot{\phi} + \\
& + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + mga \right] \Delta \dot{\theta} = 0
\end{aligned}$$

Όλοι οι συντελεστές των $\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \dot{\phi}, \Delta \dot{\theta}$ υπολογίζονται κάθε χρονική στιγμή στην αδιατάρακτη λύση. Επομένως, η επίλυση των ανωτέρω εξισώσεων για τον έλεγχο της ευστάθειας της εν λόγω λύσης απαιτεί συγχρόνως την επίλυση των εξισώσεων (II.41).

II. 5 Αντιδράσεις των ολόνομων συνδέσμων

Πρακτικό ενδιαφέρον για την αναστύλωση και κυρίως για τη συντήρηση ενός κίονα έχει η γνώση των αντιδράσεων των συνδέσμων, οι οποίοι μεταβάλλουν σε αυτόν, άρα και στον κύλινδρο που αποτελεί το μηχανικό του μοντέλο, να κινείται όταν αυτό καταστεί αναπόφευκτο μετά από μία σεισμική δόνηση επί κυκλικού δρόμου. Και αυτό διότι συνδέονται οι αντιδράσεις αυτές με το υλικό τόσο της βάσης στήριξης του κίονα, άρα και του κυλίνδρου, όσο και του χώτου υποδοχής του (έδρασης) όπου βρίσκεται ο κύκλος κίνησης του Ε (στυλοβάτης). Για την εξέταση του ζητήματος αυτού θεωρούμε ως γενικευμένες συντεταγμένες, τις συντεταγμένες (x_E, y_E, z_E) του σημείου Ε μαζί με της γωνίας ϕ, θ και ψ που καθορίζουν τον προσανατολισμό του (b). Εισάγοντας τους συνδέσμους, ολόνομους και μη, μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ θα έχουμε για την περιγραφή της κίνησης της εξίσωσης

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_E} - Q_{x_E} + \Lambda_1 x_E = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_E} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_E} - Q_{y_E} + \Lambda_1 y_E = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_E} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_E} - Q_{z_E} + \Lambda_1 z_E + \Lambda_2 = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} - Q_\phi + \Lambda_3 (\rho - a) = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} - Q_\theta = 0 \\
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} - Q_\psi + \Lambda_3 R = 0
\end{aligned} \tag{II.44}$$

στις οποίες επισυνάπτονται και οι κινηματικές εξισώσεις των συνδέσμων

$$\begin{aligned}x_E \dot{x}_E + y_E \dot{y}_E + z_E \dot{z}_E &= 0 \\ \dot{z}_E &= 0 \\ (\rho - a)\dot{\varphi} + D\dot{\psi} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{x_E} &= F_T \sin \varphi \\ Q_{y_E} &= -F_T \cos \varphi \\ Q_{z_E} &= -mg \\ Q_{\varphi} &= 0 \\ Q_{\theta} &= -mga = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ Q_{\psi} &= 0\end{aligned}$$

Η κινητική ενέργεια στις εξισώσεις (II.44) υπό των μορφών

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m [\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2 + \dot{z}_E^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + (R^2 + h^2) \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\varphi}(\dot{x}_E \sin \varphi - y_E \cos \varphi) + \\ & 2\beta \dot{\theta}(\dot{x}_E \cos \varphi + \dot{y}_E \sin \varphi) + 2a\dot{z}_E \dot{\theta}] \end{aligned} \quad (II.45)$$

οπότε $\partial T / \partial \psi = 0$. Από τη σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης του συστήματος (II.44) με τη δεύτερη από τις (II.38) προκύπτει αμέσως ότι $\Lambda_3 = \lambda$, επομένως κάθε σχόλιο για την αντίδραση του ολόνομου συνδέσμου, όπως αυτή προκύπτει από τις ανωτέρω εξισώσεις, είναι περιττό. Για την εύρεση των Λ_1 και Λ_2 αντικαθίστανται από γενικευμένες δυνάμεις $Q_{x_E}^*$, $Q_{y_E}^*$ και $Q_{z_E}^*$ οι οποίες θα προκύπτουν σύμφωνα με τον ορισμό (II.34) από τις ανωτέρω πραγματικές δυνάμεις που αντικατέστησαν τους συνδέσμους. Αν συμβολίσουμε τις δυνάμεις αυτές με \underline{F}_1 για τον σ_1 και \underline{F}_2 για τον σ_2 , θα έχουμε προφανώς

$$\begin{aligned}\Lambda_1 x_E = Q_{x_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial x_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial x_E} \\ \Lambda_1 y_E = Q_{y_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial y_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial y_E} \\ \Lambda_1 z_E + \Lambda_2 = Q_{z_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial z_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial z_E}\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας

$$\begin{aligned}\Lambda_1 x_E = Q_{x_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial x_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial x_E} \\ \Lambda_1 y_E = Q_{y_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial y_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial y_E} \\ \Lambda_1 z_E + \Lambda_2 = Q_{z_E}^* &= \underline{F}_1 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial z_E} + \underline{F}_2 \frac{\partial \underline{r}_E}{\partial z_E}\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω με τις εκφράσεις (II.4) και (II.5) των μοναδιαίων διανυσμάτων $\underline{\eta}_1$ και $\underline{\eta}_2$, εύκολα παίρνουμε τις πλήρεις διανυσματικές εκφράσεις των \underline{F}_1 και \underline{F}_2 , ήτοι τις ακριβείς εκφράσεις των αντιδράσεων και συνδέσμων σ_1 και σ_2 .

II.6 Τα ολοκληρώματα Jacobi

Είναι γνωστό (Papastavridis, 2002) ότι οι Lagrangian εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός συστήματος, ό,τι και αν είναι αυτό, ολόνομο ή μη ολόνομο, διέπονται από ένα αναλυτικό πρώτο ολοκλήρωμα, γνωστό με το όνομα ολοκλήρωμα του Jacobi, όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις: α) οι κινηματικοί σύνδεσμοι να είναι καταστατικοί, β) η κινητική ενέργεια να μην περιέχει ρητά το χρόνο, ήτοι $\partial T / \partial t = 0$, και γ) οι γενικευμένες δυνάμεις να απορρέουν από δυναμική συνάρτηση V , ή να είναι γυροσκοπικές, ήτοι η ισχύς τους ως συνάρτηση του χρόνου να ισούτε προς μηδέν. Η πρώτη προϋπόθεση ικανοποιείται όπως φαίνεται αμέσως από την εξίσωση (II.7).

Το ίδιο και η δεύτερη, είτε η κινητική ενέργεια δίνεται υπό τη μορφή (II.45), είτε υπό τη μορφή που προκύπτει από αυτήν μετά την αντικατάσταση (II.42), ήτοι

$$T = \frac{1}{2} \left[m(\rho - a)^2 + A \sin^2 \theta + C \left(\cos \theta + \frac{\rho - a}{R} \right)^2 \right] \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} [m(R^2 + h^2) + A] \dot{\theta}^2 \quad (II.46)$$

Παρατηρώντας τέλος τη σχέση μεταξύ Q_θ και V , και ανατρέχοντας στα όσα ελέχθησαν για το έργο και κατ' επέκταση την ισχύ της τριβής όταν $V_s = 0$, διαπιστώνουμε ότι και η τρίτη προϋπόθεση ικανοποιείται. Συνάγεται από αυτό ότι το ολοκλήρωμα Jacobi του οποίου η γενική έκφραση είναι

$$\sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \dot{q}_k \right) - T + V = C(\text{σταθερό})$$

όπου με Q_k συμβολίζονται οι γενικευμένες δυνάμεις που απορρέουν από τη δυναμική συνάρτηση V κατά το σχήμα $Q_k = -\partial V / \partial q_k$, υπάρχει και έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[m(\rho - a)^2 + A \sin^2 \theta + C \left(\cos \theta + \frac{\rho - a}{R} \right)^2 \right] \dot{\phi}^2 + \\ & + \frac{1}{2} [m(R^2 + h^2) + A] \dot{\theta}^2 + mg\beta = c(\text{σταθ.}) \end{aligned} \quad (II.47)$$

Το ολοκλήρωμα Jacobi είναι εν γένει μία ενεργειακή ποσότητα σχετιζόμενη με το χώρο των φάσεων. Ανάγεται δε στη μηχανική ενέργεια (άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας) όταν το υπό εξέταση σύστημα είναι καθαρά μηχανικό όπως αυτό του χωρίς ολίσθηση κυλινδρικού.

II. 7 Περιοχές της κίνησης

Το ολοκλήρωμα Jacobi, όπως και κάθε ολοκλήρωμα ενός δυναμικού συστήματος – όταν υπάρχει – παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου της ακρίβειας των αριθμητικών ολοκληρώσεων και γενικότερα των υπολογιστικών διαδικασιών κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Ακόμη δε επιτρέπει την ποιοτική μελέτη του χώρου των φάσεων, δίνοντας χρήσιμες πληροφορίες για τη δυναμική και κινηματική συμπεριφορά του υπό εξέταση συστήματος. Για το πρόβλημα της κίνησης του κυλίνδρου, η μορφή του ολοκληρώματος

Jacobi που χρησιμοποιούμε προκειμένου να διεισδύσουμε στα ποιοτικά χαρακτηριστικά της κίνησης είναι η (II.47), η οποία διέπει τις εξισώσεις (II.41). Η επιλογή αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα των πορισμάτων, αφού ο χώρος των φάσεων στον οποίο εξελίσσεται η κίνηση είναι και για τις δύο μορφές των εξισώσεων κίνησης ο ίδιος.

Διαχωρίζοντας τους κινηματικούς όρους στην (II.47), θα έχουμε

$$\frac{1}{2} [m(R^2 - h^2) + A] \dot{\theta}^2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left[m(\rho - a)^2 + A \sin^2 \theta + C \left(\cos \theta + \frac{\rho - a}{R} \right)^2 \right] \dot{\phi}^2 - mg(R \sin \theta + h \cos \theta) \geq 0 \quad (II.48)$$

Η ανισότητα καθορίζει την περιοχή στην οποία είναι δυνατόν να κινείται ο κύλινδρος κατά την κύλισή του, ήτοι την περιοχή εντός της οποίας μπορούν να μεταβάλλεται τόσο η γωνία κλίσης του θ όσο και ο ρυθμός μεταβολής $\dot{\phi}$. Το σύνολο της περιοχής αυτής δίνεται από την ισότητα, ήτοι από την εξίσωση

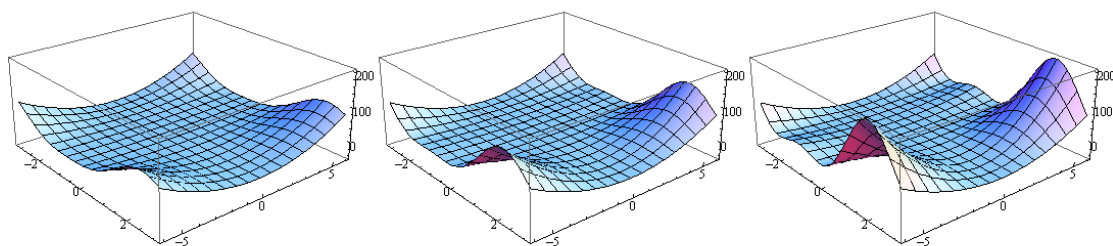
$$f(\theta, \dot{\phi}, c) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left[m(\rho - a)^2 + A \sin^2 \theta + C \left(\cos \theta + \frac{\rho - a}{A} \right)^2 \right] \dot{\phi}^2 - mg(R \sin \theta + h \cos \theta) = 0 \quad (II.49)$$

Οι καμπύλες που προκύπτουν από την ανωτέρω εξίσωση για διάφορα c , τομείς της επιφάνειας

$$\frac{1}{2} [m(R^2 + h^2) + A] \dot{\theta}^2 - f(\theta, \dot{\phi}, c) = 0 \quad (II.50)$$

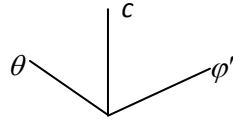
από το επίπεδο $\dot{\theta} = 0$, παρέχουν τις θέσεις στις οποίες ο κύλινδρος αναστρέφει την κίνηση μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο, καθώς αυτό περιστρέφεται περί τον άξονα Oz με ρυθμό $\dot{\phi}$, ήτοι τα ζεύγη $(\theta_{\max, \min}, \dot{\phi}, c)$. Στην εικόνα II-3 δίνονται αντιπροσωπευτικά δείγματα των επιφανειών (II.50) για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων $\rho (> R, = R)$ και $h (> R, = R, < R)$, ενώ στην Εικόνα II-4 δίνονται οι ισοϋψείς καμπύλες (I.49) για διάφορες τιμές του c . Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι για προφανείς λόγους, οι τιμές του θ δεν μπορούν να είναι μικρότερες του μηδενός ή μεγαλύτερες 90° . Ο αυτόνομος χαρακτήρας των εξισώσεων (II.41) μας επιτρέπει, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, να χρησιμοποιούμε τα σημεία μιας τέτοιας καμπύλης ως αρχικές συνθήκες για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης, ήτοι να χρησιμοποιούμε τετράδες της μορφής $[\varphi^* = \varphi(t = t_0), \theta^* = \theta(t = t_0) = \theta_{\max, \min} = \theta(t = t_0), \varphi(t = t_0), \dot{\theta}^* = \dot{\theta}(t = t_0) = 0]$. Για τον ακριβή προσδιορισμό της θ^* , αρκεί να επιλύσουμε την εξίσωση (II.49) ως προς θ για δεδομένα $\dot{\phi}^*$ και c .



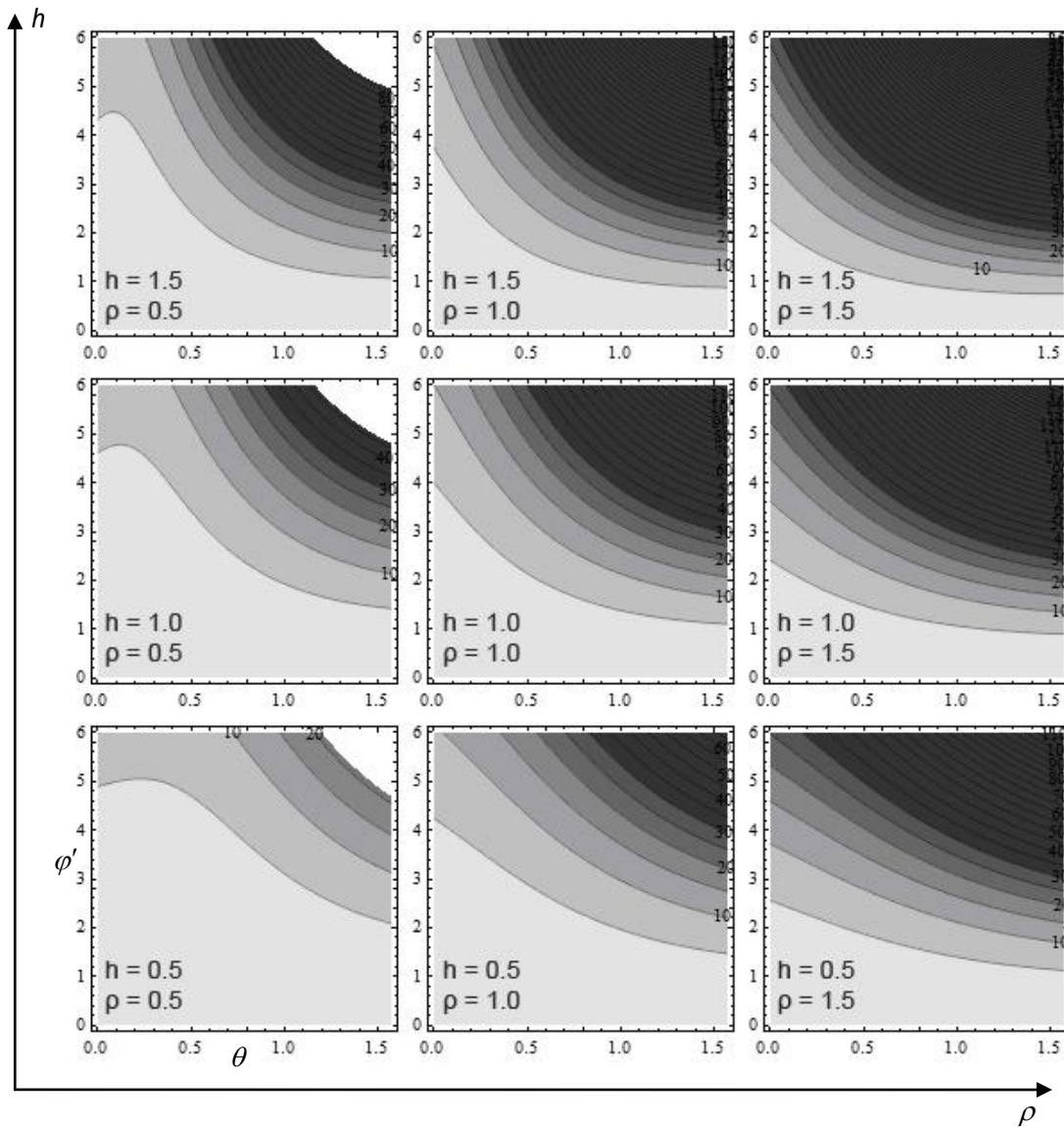
(α)

(β)

(γ)



Εικόνα II-3. Επιφάνεια (II.50) για (a): $h=0.5, \rho=1$; (b): $h=1, \rho=1$; (c): $h=1.5, \rho=1$.



Εικόνα II-4. Περιοχές κίνησης (ϕ', θ) για χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων h, ρ . Οι υσοΰσιες καμπύλες διαφέρουν κατά $\Delta c = 5$.

Ένα ερώτημα που εγείρεται στο σημείο αυτό είναι αν είναι δυνατή η αναστροφή της μεταβολής της γωνίας θ , συγχρόνως με το μηδενισμό του ρυθμού μεταβολής $\dot{\phi}$, ήτοι με ταυτόχρονη αναστροφή της κίνησης του σημείου επαφής E. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει στην έκφραση (II.48) του ολοκληρώματος

Jacobi να περάσει στο αριστερό μέλος της πρώτης ισότητας και ο δεύτερος κινηματικός όρος, αυτός δηλαδή που περιέχει το ρυθμό $\dot{\phi}$. Θα έχουμε τότε από την (II.49)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{20 - 2mg(R\sin\theta + h\cos\theta)}{m(\rho - a)^2 + A\sin^2\theta + C\left(\cos\theta + \frac{\rho - a}{R}\right)^2} \geq 0 \quad (II.51)$$

Σημειώνοντας ότι ο παρανομαστής στην ανωτέρω είναι διάφορος του μηδενός για κάθε $0 < \theta < \pi/2$, παίρνουμε από την ανωτέρω

$$R\sin\theta + h\cos\theta = \frac{c}{mg} \quad (II.52)$$

Γράφοντας τώρα την εξίσωση αυτή

$$\sin(\theta + \varepsilon) = \frac{c\cos\varepsilon}{mg} \leq 1$$

όπου $\tan\varepsilon = h/R$ παίρνουμε δύο τιμές για τη ζητούμενη γωνία, τις

$$\theta_1 = \theta(\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0; 0) = \sin^{-1}\left(\frac{c\cos\varepsilon}{mg}\right) - \varepsilon \quad (II.53)$$

$$\theta_2 = \theta(\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0; 0) = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{c\cos\varepsilon}{mg}\right) - \varepsilon$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$0 \leq c < \frac{mg}{\cos\varepsilon} = mg\sqrt{R^2 + h^2} \quad (II.54)$$

Προφανώς για να είναι δεκτές οι ρίζες αυτές της (II.52) πρέπει να κείνται στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε η αναστροφή των μεταβολών των γωνιών ϕ και θ συγχρόνως δεν είναι προφανώς δυνατή. Πρέπει όμως να εξετασθεί αν μετά το μηδενισμό των ϕ και θ συγχρόνως, μπορεί ο κύλινδρος να αρχίσει και πάλι την κίνηση του αναστρέφοντας την τελείως ή όχι. Μηδενίζοντας στις ανεπτυγμένες μορφές των εξισώσεων (II.41), τους όρους που περιέχουν τους δύο ρυθμούς $\dot{\phi}$ και $\dot{\theta}$, παίρνουμε τελικά

$$\left[m(\rho - R\cos\theta_{av} + h\sin\theta_{av})^2 + A\sin^2\theta_{av} + C\left(\cos\theta_{av} + \frac{\rho - R\cos\theta_{av} + h\sin\theta_{av}}{R}\right)^2 \right] \dot{\phi} + F_T(\theta_{av})\rho = 0 \quad (II.55)$$

$$(R^2 + h^2 + A)\ddot{\theta} + R\sin\theta_{av} + h\cos\theta_{av} = 0$$

Όπου θ_{av} είναι η τιμή της γωνίας κλίσης θ για την οποία γίνεται αναστροφή της κίνησης (αν υπάρχει σύμφωνα με τις ανωτέρω συνθήκες). Ο συνδυασμός της δεύτερης των σχέσεων (II.55) με την (II.52) δίνει το ρυθμό μεταβολής του $\dot{\theta}$ την τιμή

$$\dot{\theta}|_{\theta_{av}} = -\frac{c}{mg(R^2 + h^2 + A)} \quad (II.56)$$

Υπενθυμίζοντας ότι το ολοκλήρωμα Jacobi παριστάνει στο υπό μελέτη πρόβλημα τη μηχανική ενέργεια του (b), η οποία προφανώς για κίνηση μέσα στο διάστημα $0, \pi/2$ είναι δεκτή, άρα $0 > 0$, συνάγουμε αμέσως ότι $\ddot{\theta} \neq 0$. Με μη μηδενικό το ρυθμό $\dot{\theta}$, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου περί τον άξονα \hat{u}_T αρχίζει αμέσως να «απομακρύνεται» από τη μηδενική της τιμή στη γωνία θ_{op} . Στην έκφραση (II.17) της δύναμης τριβής με $v_s = 0$, οι όροι των \underline{F}_ρ και \underline{F}_T που περιέχουν τους ρυθμούς $\dot{\varphi}$ και $\dot{\theta}$ μηδενίζονται. Απομένουν όμως οι όροι που περιέχουν $\ddot{\varphi}$ και $\ddot{\theta}$ καθώς επίσης και ο όρος $mg\hat{u}_z$. Επομένως η δύναμη τριβής θα είναι προφανώς μηδενική. Συνδυάζοντας το πόρισμα αυτό με την πρώτη των εξισώσεων (II.55), συνάγουμε τελικά ότι $\ddot{\varphi}|_{\theta_{av}} \neq 0$. Έτσι η μη μηδενική αυτή τιμή της $\ddot{\varphi}|_{\theta_{av}}$ που θα προκύψει από την πρώτη των εξισώσεων (II.55) μετά την εισαγωγή των $\ddot{\theta}|_{\theta_{av}}$ και $\ddot{\varphi}|_{\theta_{av}}$ στην έκφραση (II.23) της \underline{F}_T και επίλυση ως προς τον εν λόγω ρυθμό, θα αναγκάσει την $\dot{\varphi}$ να «απομακρυνθεί» όπως και η $\dot{\theta}$, από το μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση του σημείου E δεν θα σταματήσει οριστικά, αλλά θα συνεχισθεί με αντίθετη προφανώς φορά. Τα ανωτέρω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι αν υπάρχει γωνία $\theta = \theta_{av}$ εντός του διαστήματος $(0, \pi/2)$, τότε η κίνηση του κυλίνδρου θα αλλάξει πλήρως φορά.

II.8 Αριθμητική ολοκλήρωση

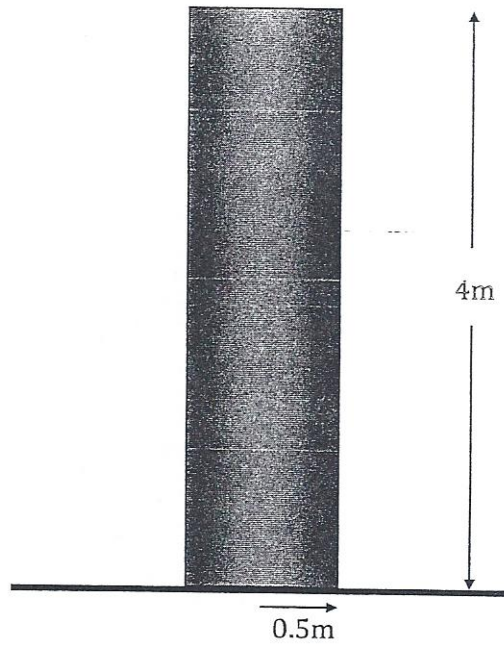
Για την εφαρμογή των όσων εξετάθησαν μέχρι τώρα, έγινε η αδιαστατοποίηση όλων των μεγεθών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις κινήσεως και το ολοκλήρωμα Jacobi μέσω του μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} \tilde{\ell} &= \frac{\ell}{R} \\ \tilde{m} &= \frac{m}{m} = 1 \\ d\tilde{t} &= \sqrt{\frac{g}{R}} dt \end{aligned} \tag{II.57}$$

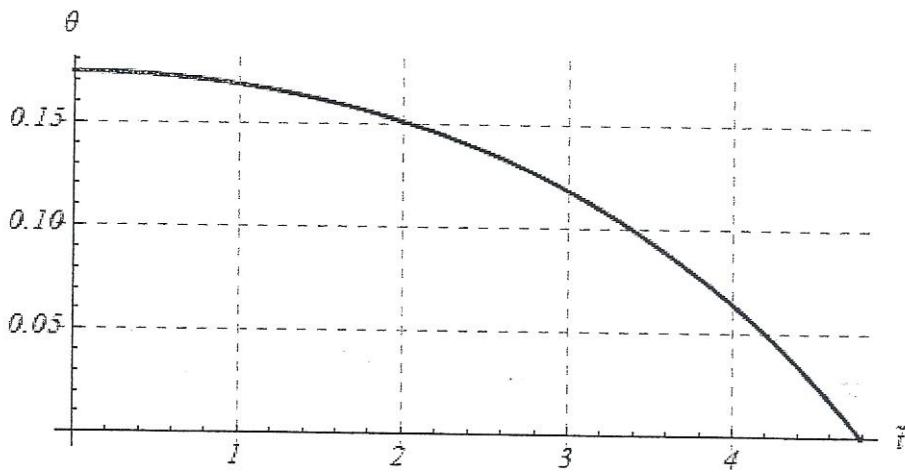
όπου το ℓ παριστάνει κάθε πραγματικό μήκος. Εύκολα προκύπτουν με τις σχέσεις (II.55) οι αδιάστατοι ρυθμοί μεταβολής των φ και θ καθώς και οι ροπές αδράνειας του κυλίνδρου, ήτοι

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{R}{g}} \dot{u}, & u &= \varphi, \theta \\ u'' &= \frac{d^2u}{d\tilde{t}^2} = \frac{R}{g} \ddot{u} \\ \tilde{D} &= \frac{D}{mR^2}, & D &= A, C \end{aligned}$$

Για το παράδειγμα του μονολιθικού κίονα που απεικονίζεται στην Εικόνα II-5, για $\tilde{\rho} = 1.1$ και λαμβάνοντας ως αρχικές συνθήκες $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{18} \approx 0.17$, $\psi_0 = 0$, $\theta'_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0.1$ οι εξισώσεις ολοκληρώνονται αριθμητικά δίνοντας τις λύσεις $\theta(\tilde{t})$, $\varphi(\tilde{t})$ και $\psi(\tilde{t})$ (βλ. Εικόνα II-6, Εικόνα II-7, και Εικόνα II-8). Από την εξίσωση (II.42) και τις ανωτέρω αρχικές συνθήκες και γεωμετρικά χαρακτηριστικά προκύπτει ότι $\psi'_0 \cong -0.08$.

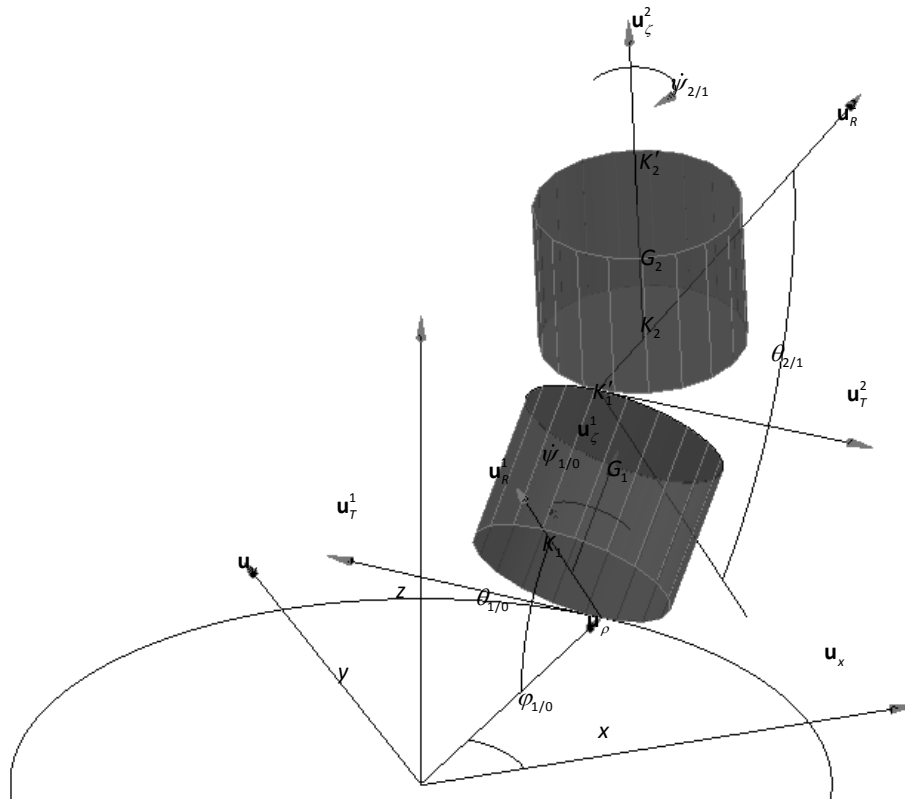


Εικόνα II-5. Παράδειγμα μονολιθικού κίονα.



Εικόν II-6. Γωνία θ συναρτήσεως του χρόνου \tilde{t} .

επίσης και τις δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται τόσο μεταξύ των δύο σωμάτων όσο και μεταξύ του (b_1) και του εδάφους.



Εικόνα II-1. Σύστημα ζεύγους κυλίνδρων με συνεχώς μεταβαλλόμενη σημειακή περιφερειακή επαφή και σημειακή κύλιση του κατωτέρου επί κυκλικού οδηγού.

III.1 Σύνδεσμοι

Το ζήτημα των συνδέσμων που περιορίζουν την ελευθερία κίνησης ενός κυλίνδρου έχει εξετασθεί λεπτομερώς στο προηγούμενο πρόβλημα. Ανατρέχοντας σε όσα έχουν αναφερθεί σχετικά, μπορούμε να γράψουμε για τους συνδέσμους του κυλίνδρου (b_1) τις εξισώσεις

$$\sigma_1 = x_{E1}^2 + y_{E1}^2 + z_{E1}^2 - \rho = 0 \quad (III.1)$$

$$\sigma_2 = z_{E1} = 0 \quad (III.2)$$

$$\sigma_3 = (\rho - a_1)\dot{\varphi}_{1/0} + R\dot{\psi}_{1/0} - \underline{V}_{1S} \cdot \hat{u}_T^1 = 0 \quad (III.3)$$

Όπου \underline{V}_{1S} είναι η ταχύτητα ολίσθησης του σώματος και

$$a_1 = R \cos \varphi_{1/0} - h \sin \varphi_{1/0}$$

Από το συνδυασμό μεταξύ τους, των δύο πρώτων εξισώσεων, παίρνουμε τη νέα εξίσωση

$$\sigma_1^* = x_{E1}^2 + y_{E1}^2 - \rho^2 = 0 \quad (III.4)$$

Ο περιορισμός για την κίνηση του σημείου επαφής τον οποίο εισάγει η ανωτέρω εξίσωση επιβάλλει να συμπληρώσουμε την περιγραφή του μη ολόνομου συνδέσμου $\sigma_3 = 0$ (η μη ολονόμια αποδεικνύεται μέσω

του κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας του Frobenius (Rosenberg, 1977)) με τις προφανείς συνθήκες $\underline{V}_{1s} \cdot \hat{u}_\rho = \underline{V}_{1s} \cdot \hat{u}_z = 0$.

Η εξέταση του άνω κυλίνδρου αποκαλύπτει την ύπαρξη συνδέσμων

$$\|k'_1 E_2\| - R = 0 \quad (III.5)$$

$$k'_1 E_2 \cdot \hat{u}_z^1 = 0 \quad (III.6)$$

$$\underline{V}_{E2}^{b1} = \underline{V}_{E2}^{b2} + \underline{V}_{2s} \quad (III.7)$$

όπου \underline{V}_{2s} είναι η ταχύτητα ολίσθησης του (b_2) επί της άνω βάσης του (b_1) , \underline{V}_{E1}^{b1} και \underline{V}_{E2}^{b2} είναι η ταχύτητα του σημείου επαφής θεωρουμένου ως σημείου του (b_1) , ήτοι $E_1 = E_1^{b1}$ και ως σημείου του (b_2) αντίστοιχα, ήτοι $E_2 \equiv E_2^{b2}$. Είναι δηλαδή οι ταχύτητες με τις οποίες τα δύο σημεία E_1^{b1} και E_2^{b2} (ΚΑΝΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΑΥΤΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ) κινούνται τη στιγμή κατά την οποία συμπίπτουν, ώστε να αποτελέσουν το σημείο επαφής των δύο κυλίνδρων. Αναλύοντας τα διανύσματα στις συνιστώσες τους, παίρνουμε για τους ανωτέρω συνδέσμους τις εξισώσεις

$$\sigma_4 = (x_{E2} - x_{E1} + 2a_1 \cos \varphi_{1/0})^2 + (y_{E2} - y_{E1} + 2a_1 \sin \varphi_{1/0})^2 + (z_{E2} - z_{E1} - 2\beta_1)^2 - R = 0 \quad (III.8)$$

$$\sigma_5 = [(x_{E2} - x_{E1}) \cos \varphi_{1/0} + (y_{E2} - y_{E1}) \sin \varphi_{1/0} + 2a_1] \sin \theta_{1/0} + (z_{E2} - z_{E1} - 2\beta_1) \cos \theta_{1/0} = 0 \quad (III.9)$$

Και

$$\begin{aligned} \underline{V}_{G1} + [-\dot{\psi} \sin \theta_{1/0} \hat{u}_\rho + \dot{\theta}_{1/0} \hat{u}_T^1 + (\dot{\varphi}_{1/0} - \dot{\psi}_1 \cos \theta_{1/0}) \hat{u}_z] x (-a_1 \hat{u}_\rho + \beta_1 \hat{u}_z) = \\ \underline{V}_{G2} + \{ [-\dot{\psi}_{1/0} \sin \theta_{1/0} + \dot{\varphi}_{2/1} \sin \theta_{1/0} + \dot{\psi}_{2/1} \sin(\theta_{2/1} - \theta_{1/0})] \hat{u}_\rho - (\dot{\theta}_{2/1} - \dot{\theta}_{1/0}) \hat{u}_T + \\ [\dot{\varphi}_{1/0} - \dot{\psi}_{1/0} \cos \theta_{1/0} + \dot{\varphi}_{2/1} \cos \theta_{1/0} - \dot{\psi}_{2/1} \cos(\theta_{2/1} - \theta_{1/0})] \hat{u}_z \} \\ x [-(a_2 \cos \theta_{1/0} + \beta_2 \sin \theta_{1/0}) \hat{u}_\rho + (a_2 \sin \theta_{1/0} - \beta_2 \cos \theta_{1/0}) \hat{u}_z] + \underline{V}_{2s}, \end{aligned}$$

Όπου

$$\beta_1 = R \sin \theta_{1/0} + h \cos \theta_{1/0}$$

$$a_2 = R \cos \theta_{2/1} - h \sin \theta_{2/1}$$

$$\beta_2 = R \sin \theta_{2/1} + h \cos \theta_{2/1}$$

Αντικαθιστώντας τις ταχύτητες \underline{V}_{G1} και \underline{V}_{G2} με τις εκφράσεις τους

$$\begin{aligned} \underline{V}_{G1} = (\underline{OG}_1) = (\rho \hat{u}_\rho + R \hat{u}_R^1 + h \hat{u}_z^1) = \dots = \beta_1 \dot{\theta}_{1/0} \hat{u}_\rho + (\rho - a_1) \dot{\varphi}_{1/0} \hat{u}_T^1 + a_1 \theta_{1/0} \hat{u}_z \\ \underline{V}_{G2} = (\underline{OG}_2) = (\rho \hat{u}_\rho + 2E_1 G_1 + E_2 G_2) = \dots = [2\beta_1 \dot{\theta}_{1/0} + (a_2 \sin \theta_{1/0} - \beta_2 \cos \theta_{1/0}) (\dot{\theta}_{2/1} - \dot{\theta}_{1/0})] \hat{u}_\rho + \\ (\rho - 2a_1 - a_2 \cos \theta_{1/0} - \beta_2 \sin \theta_{1/0}) \dot{\varphi}_{1/0} \hat{u}_T^1 + [2a_1 \dot{\theta}_{1/0} + (a_2 \cos \theta_{1/0} - \beta_2 \sin \theta_{1/0}) (\dot{\theta}_{2/1} - \dot{\theta}_{1/0})] \hat{u}_z \end{aligned}$$

Και σημειώνοντας, για προφανείς λόγους, ότι $\underline{V}_{2s} \cdot \hat{u}_\rho = \underline{V}_{2s} \cdot \hat{u}_z = 0$, οδηγούμεθα τελικά στην εξίσωση

$$(R - 2a) \dot{\psi}_{1/0} - R \dot{\psi}_{2/1} - \underline{V}_{2s} \cdot \hat{u}_T^1 = 0$$

η οποία λόγω της (III.3) γράφεται

$$\sigma_6 = (\rho - a_1)\dot{\varphi}_{1/0} + 2a_2\dot{\psi}_{1/0} + R\dot{\psi}_{2/1} + (\underline{v}_{2s} - \underline{v}_{1s})\hat{u}_T^1 = 0 \quad (\text{III.10})$$

Οι σύνδεσμοι (III.8) και (III.9) είναι προφανώς ολόνομοι, ενώ ο σύνδεσμος (III.10) που εκφράζει κινηματική δέσμευση για την κίνησή του είναι όπως και ο $\sigma_3 = 0$ μη ολόνομος. Παρατηρούμε ότι η κίνηση της επαφής E_2 δεν επηρεάζεται από τους ρυθμούς $\dot{\theta}_{1/0}$ και $\dot{\theta}_{2/1}$ ανόδου και καθόδου των κυλίνδρων μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο, όπως αντίστοιχα συμβαίνει και για την κίνηση του (b_1). Αυτό βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τον αναγκαίο μηδενισμό των $V_{2\rho} = \underline{V}_{2s} \cdot \hat{u}_\rho$ και $V_{2z} = \underline{V}_{2s} \cdot \hat{u}_z$, αφού μη μηδενική τιμή για μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές συνιστώσες θα επέφερε τη διακοπή της επαφής των δύο κυλίνδρων.

Η ύπαρξη των τεσσάρων ολόνομων συνδέσμων, μαζί με την προφανή ισότητα $\dot{\varphi}_{2/1} = -\dot{\psi}_{1/0}$ (αλλιώς το σύστημα θα κατέρρεε, αφού τα κέντρα μάζα G_1 και G_2 δε θα βρίσκονταν συγχρόνως στο κατακόρυφο επίπεδο $(\hat{u}_\rho, \hat{u}_z)$), δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες των γωνιών $\varphi_{1/0}$, $\theta_{1/0}$, $\psi_{1/0}$, $\theta_{2/1}$ και $\psi_{2/1}$. Μέσω αυτών παίρνουμε για τις συντεταγμένες των G_1 και G_2 τις ακόλουθες εκφράσεις

$$\begin{aligned} x_{G_1} &= (\rho - a_1)\cos\varphi_{1/0} \\ y_{G_1} &= (\rho - a_1)\sin\varphi_{1/0} \\ z_{G_1} &= \beta_1 \\ x_{G_2} &= (\rho - 2a_1 + a_2\cos\theta_{1/0} + \beta_2\sin\theta_{1/0})\cos\varphi_{1/0} \\ y_{G_2} &= (\rho - 2a_1 + a_2\cos\theta_{1/0} + \beta_2\sin\theta_{1/0})\sin\varphi_{1/0} \\ z_{G_2} &= 2\beta_1 - a_2\sin\theta_{1/0} + \beta_2\cos\theta_{1/0} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

μέσω των οποίων εύκολα λαμβάνονται από τις διανυσματικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \underline{OG}_1 &= \underline{OE}_1 + \underline{E}_1G_1 \\ \underline{OG}_2 &= \underline{OE}_1 + \underline{E}_1E_2 + \underline{E}_2G_2 \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

οι συντεταγμένες $x_{E_1}, y_{E_1}, z_{E_1}, x_{E_2}, y_{E_2}, z_{E_2}$ που υπεισέρχονται στις (III.8) και (III.9).

Πρέπει εδώ να επισημανθεί ότι μολονότι οι προαναφερόμενες ως γενικευμένες συντεταγμένες $\varphi_{1/0}, \dots, \psi_{2/1}$ είναι, με τον τρόπο που εισάγονται, ανεξάρτητες μεταξύ τους, οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής τους δεν είναι ανεξάρτητοι αφού συνδέονται μεταξύ τους (όχι όλοι) με τις εξισώσεις των δύο μη ολόνομων συνδέσμων (III.3) και (III.10).

Η κίνηση κάθε κυλίνδρου, όπως έχει περιγραφεί στα προηγούμενα, έχει τα χαρακτηριστικά της κύλισης ενός σώματος με σημειακή επαφή. Για το είδος αυτό της κίνησης ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος της δύναμης τριβής που αναπτύσσεται στο σημείο επαφής. Στην πραγματικότητα αναπτύσσεται μία κατανομή τέτοιων δυνάμεων στην περιοχή του σημείου επαφής. Μακροσκοπικά η περιοχή αυτή εμφανίζεται αρκετά μικρή, με έκταση η οποία αυξάνει με την πίεση που ασκείται στην επιφάνεια κύλισης από το σώμα, χωρίς όμως η μορφολογία του να την επηρεάζει. Για ένα «απολύτως» στερεό σώμα, και επιφάνεια κύλισης «απολύτως» ανυποχώρητη, η εν λόγω περιοχή είναι τόσο μικρή ώστε χωρίς σημαντικό σφάλμα

εκφυλίζεται σε σημείο. Η αντίδραση τότε της επιφάνειας κύλισης προς το σώμα, αναγόμενη στην περιοχή αυτή, θα δίνεται γενικά από μία δύναμη \underline{F} και μία ροπή ζεύγους \underline{N} . Η σμικρότητα της περιοχής επαφής συνεπάγεται για το μοχλοβραχίονα του ζεύγους (διανυσματική απόσταση των δυνάμεων που το συνιστούν) μικρό μήκος, και μάλιστα τόσο μικρό ώστε η εκφυλιζόμενη σε σημείο περιοχή να τείνει στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η ροπή \underline{N}_1 μπορεί να παραλειφθεί, οπότε ως μόνη αντίδραση θα μείνει η δύναμη \underline{F} . Κάνοντας για τους δύο κυλίνδρους ανάλογες παραδοχές και υποθέσεις, θεωρούμε ότι οι αντιδράσεις στα σημεία \underline{E}_1 και \underline{E}_2 είναι αντίστοιχα οι δυνάμεις \underline{F}^1 και \underline{F}^2 , με

$$\underline{F}^i = \underline{F}_{R_i}^i + \underline{F}_{\zeta_i}^i + \underline{F}_{T_i}^i = \underline{F}_{R_i}^i \hat{u}_R^i + \underline{F}_{\zeta_i}^i \hat{u}_{\zeta_i}^i + \underline{F}_{T_i}^i \hat{u}_T^i, \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.13})$$

Όπου

$$F_{R_i}^i = \underline{F}^i \cdot \hat{u}_R^i > 0, \quad F_{\zeta_i}^i = \underline{F}^i \cdot \hat{u}_{\zeta_i}^i > 0, \quad F_{T_i}^i = \underline{F}^i \cdot \hat{u}_T^i > 0$$

Οι δύο πρώτες συνιστώσες αποδίδουν το μαθηματικό χαρακτήρα των επιφανειών στις οποίες κινούνται οι δύο κύλινδροι. Η τρίτη απορρέει από τη φύση των επιφανειών αυτών, ήτοι εξαρτάται από τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού κατασκευής τόσο των κυλίνδρων όσο και του επιπέδου κύλισης του (\underline{b}_1). Υποθέτοντας ξηρό το περιβάλλον στις περιοχές \underline{E}_1 και \underline{E}_2 , ώστε να ισχύουν οι νόμοι Coulomb για την τριβή, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{F}_{T_2}^2 &= -\mu_2 \left\| \underline{F}_{nor}^2 \right\| \hat{u}_T^2 = -\mu^2 \left\| (F^2 \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + (F^2 \cdot \hat{u}_z) \hat{u}_z \right\| \hat{u}_T^2 = \\ &- \mu_2 m_2 \left\| (\underline{V}_{G_2} \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + (\underline{V}_{G_2} \cdot g \hat{u}_z) \hat{u}_z \right\| \hat{u}_T^2 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

με

$$\underline{V}_{G_2} = \underline{V}_{E_2}^{b2} + \underline{\omega}_2 \times \underline{E}_2 G_2 = \underline{V}_{E_2}^{b1} - \underline{V}_{2s} + \underline{\omega}_2 \times \underline{E}_2 G_2$$

και

$$\begin{aligned} \underline{F}_{T_1}^1 &= -\mu_1 \left\| \underline{F}_{nor}^1 \right\| \hat{u}_T^1 = -\mu_1 \left\| (F^1 \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + (F^1 \cdot \hat{u}_z) \hat{u}_z \right\| \hat{u}_T^1 = \\ &- \mu_1 \left\| m_1 (\dot{\underline{V}}_{G_1} \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + m_1 [(\dot{\underline{V}}_{G_1} + g \hat{u}_z) \hat{u}_z] \hat{u}_z + (F_{nor}^2 \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + (F_{nor}^2 \cdot \hat{u}_z) \hat{u}_z \right\| \hat{u}_T^1 = \dots = \\ &- \mu_1 \left\| (m_1 \dot{\underline{V}}_{G_1} \cdot \hat{u}_\rho + m_2 \dot{\underline{V}}_{G_2} \cdot \hat{u}_\rho) \hat{u}_\rho + [m_1 (\dot{\underline{V}}_{G_1} + g \hat{u}_z) \cdot \hat{u}_z + m_2 (\dot{\underline{V}}_{G_2} + g \hat{u}_z) \hat{u}_z] \hat{u}_z \right\| \hat{u}_T^1 \end{aligned}$$

όπου μ_1 και μ_2 (μη αρνητικές σταθερές) και

$$\underline{V}_{G_1} = \underline{V}_{E_1}^{b1} + \underline{\omega}_1 \times \underline{E}_1 G_1 = \underline{V}_{E_1}^{Oxy} - \underline{V}_{1s} + \underline{\omega}_1 \times \underline{E}_1 G_1$$

Ο πραγματικός ρόλος των $\underline{F}_{T_1}^1$ και $\underline{F}_{T_2}^2$ στη δυναμική του συστήματος είναι η περιστροφή των (\underline{b}_1) και (\underline{b}_2) περί τους άξονες $\hat{u}_{\zeta_1}^1$ και $\hat{u}_{\zeta_2}^2$ αντίστοιχα. Πράγματι, υπολογίζοντας τις ροπές των δυνάμεων αυτών ως προς τα σημεία \underline{K}_1 και \underline{K}_2 , βρίσκουμε

$$\underline{M}^1(k_1) = K_1 E_1 \times \underline{F}_{T_1}^1 = \dots = \mu_1 \left\| \underline{F}_{nor}^1 \right\| R \hat{u}_\zeta^1 \quad (\text{III.16})$$

Και

$$\underline{M}^2(k_2) = K_2 E_2 \times \underline{F}_{T_2}^2 = \dots = \mu_2 \left\| \underline{F}_{nor}^2 \right\| R \hat{u}_\zeta^2 \quad (\text{III.17})$$

Βλέπουμε ότι οι δύο δυνάμεις τριβής είναι οι αιτίες που προκαλούν την περιστροφή των (b_1) και (b_2) περί τους διαμήκεις άξονές τους, αναγκάζοντας τους έτσι να κυλινδρουν στο επίπεδο Οxy ο πρώτος, και στην άνω βάση αυτού ο δεύτερος. Λαμβανομένου τώρα υπ' όψιν ότι $\hat{u}_T^1 = -\hat{u}_T^2$, εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\underline{F}_{T_1}^1 \times \underline{F}_{T_2}^2 = \underline{0} \text{ και } \underline{F}_{T_1}^1 \cdot \underline{F}_{T_2}^2 = -\mu_1 \mu_2 \left\| \underline{F}_{nor}^1 \right\| \cdot \left\| \underline{F}_{nor}^2 \right\| < 0 \quad (\text{III.18})$$

Είναι φανερό ότι η ανάπτυξη F_T^2 μειώνει το ρόλο της F_T^1 στην κύλιση του (b_1) . Πράγματι, υπολογίζοντας της ροπή της $-F_{-T}^2$ [αντίδραση κατά την \hat{u}_T^2 του (b_2) επί του (b_1)] ως προς το σημείο K_1' , βρίσκουμε

$$\underline{\tilde{M}}^2(K_1') = -K_1' E_2 \times \underline{F}_{-T_2}^2 = \dots = \mu_2 \left\| \underline{F}_{nor}^2 \right\| R \hat{u}_\zeta^1 \quad (\text{III.19})$$

Αν αθροίσουμε τη ροπή αυτή με την $\underline{M}^1(K_1)$, θα έχουμε

$$\underline{M}_{total} = \underline{M}^1(K_1) + \underline{\tilde{M}}^2(K_1') = \dots = \left[-\mu_1 \left\| \underline{F}_{nor}^1 \right\| + \mu_2 \left\| \underline{F}_{nor}^2 \right\| \right] R \hat{u}_\zeta^1 = (F_{T_2}^2 - F_{T_1}^1) R \hat{u}_\zeta^1 \quad (\text{III.20})$$

Απο την ανωτέρω έκφραση, προκύπτει ότι αν στιγμιαία συμβεί να γίνει ίση η $F_{T_2}^2$ προς την $F_{T_1}^1$, τότε ο (b_1) , μη υποκειμένος πλέον στην ροπή \underline{M}_{total} , θα παύσει να κυλίεται, σε αντίθεση προς τον (b_2) θα συνεχίσει την κίνησή του με αποτέλεσμα την κατάρρευση του συστήματος.

Ένα σχόλιο πρέπει να γίνει εδώ για το έργο των δυνάμεων τριβής (οι άλλες αντιδράσεις προφανώς δεν παράγουν έργο ως κάθετες προς τις διευθύνσεις \hat{u}_T^1 και \hat{u}_T^2). Εκφράζοντας το έργο αυτό μέσω του χρονικού ολοκληρώματος της ισχύος, θα έχουμε

$$W_i(\underline{F}_{T_i}^i) = \int \underline{F}_{T_i}^i \cdot \underline{v}_{is} dt = - \int \mu_i \left\| \underline{F}_{nor}^i \right\| \hat{u}_T^i \cdot \underline{v}_{is} \hat{u}_T^i = -\mu_i \int \left\| \underline{F}_{nor}^i \right\| v_{is} dt \quad (\text{III.21})$$

$i = 1, 2$. Αμέσως φαίνεται από την ανωτέρω ότι η κύλιση των κυλίνδρων με ολίσθηση, έστω μόνο του ενός, εκτελείται με απώλεια μέρους της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, πράγμα που δεν συμβαίνει όταν αμφότεροι οι κύλινδροι κυλινδρουν χωρίς να ολισθαίνουν. Από αυτά συνάγουμε ότι η κίνηση των κυλίνδρων χωρίς ολίσθηση σε απολύτως λείους δρόμους είναι αδύνατη (Goodman & Warner, 1964). Αν συνέβαινε το αντίθετο, αν δηλαδή ήταν $F_{T_i}^i = v_{is} = 0$ για μία τιμή τουλάχιστον του δείκτη $i = 1, 2$, τότε προφανώς το σώμα (ή τα σώματα αν αυτό ίσχυε και για τα δύο) θα έπαυε να κινείται, με αποτέλεσμα την πτώση του υπό την επίδραση του βάρους του. Θα κλείσουμε σημειώνοντας ότι το μέρος της ενέργειας που χάνεται μετατρέπεται γενικά σε θερμική ενέργεια και ενέργεια παραμόρφωσης στις περιοχές των σημείων E_1 και E_2 .

