



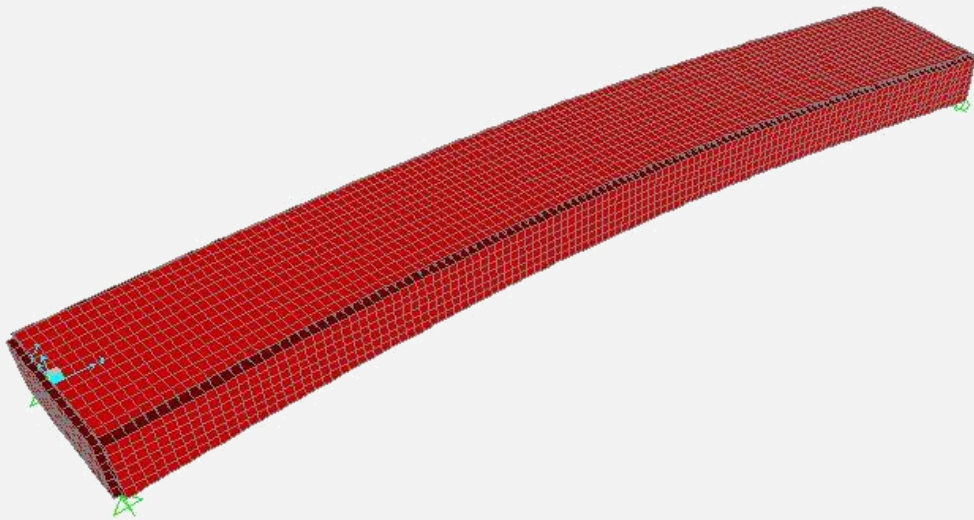
**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Πολιτικών Μηχανικών**  
**Τομέας Δομοστατικής**

## **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

“Αξιολόγηση απλοποιημένων μεθόδων  
για την ανάλυση γεφυρών κιβωτιοειδούς διατομής”

---

**ΑΝΤΩΝΙΑ Β. ΑΦΑΝΤΕΝΟΥ**



**Επιβλέπων Καθηγητής:**  
**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Β. ΣΠΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ**

**Συνεπιβλέπων Καθηγητής:**  
**ΛΕΩΝΙΔΑΣ Θ. ΣΤΑΥΡΙΔΗΣ**

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

## Πρόλογος

*Η διπλωματική εργασία έχει θέμα την αξιολόγηση απλοποιημένων μεθόδων με την οποία προσδιορίζονται οι πρόσθετες διαμήκεις καταπονήσεις στο πλαίσιο της στρεπτικής αποκρίσεως για γέφυρες κιβωτιοειδούς διατομής.*

*Το θέμα της εργασίας εμπνεύστηκε από την αρμονική συνεργασία δύο αξιόλογων καθηγητών της σχολής. Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Λεωνίδα Σταυρίδη για τη συνεχή βοήθειά του και καθοδήγησή του. Πάνω στο σύγγραμμά του Στατική των Δομικών Φορέων – Μέρος Β' στηρίχθηκε η κεντρική ιδέα της διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον κύριο Κωνσταντίνο Σπηλιόπουλο, τον υπεύθυνο καθηγητή μου που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ και να καταπιαστώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Τον ευχαριστώ πολύ για όλες τις γνώσεις που μου μετέδωσε μέσα από αυτή μας τη συνεργασία, αλλά και πολύ πριν συνεργαστούμε όταν μου πρωτοδίδαξε τις βασικές έννοιες της στατικής. Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα Ιωάννη Καπογιάννη για την πολύτιμη βοήθειά του στην εκμάθηση του προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για να υλοποιηθεί η διπλωματική εργασία αλλά και για τις χρήσιμες συμβουλές του. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου αλλά και στους φίλους και συμφοιτητές μου για τη στήριξή τους καθόλη τη διάρκεια του κύκλου των σπουδών μου.*

## **Περίληψη**

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται απλοποιημένες μέθοδοι αξιολόγησης των πρόσθετων διαμήκων καταπονήσεων που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της στρεπτικής απόκρισης τόσο για ευθύγραμμες όσο και για καμπύλες γέφυρες κιβωτιοειδούς διατομής. Στόχος της εργασίας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις απλοποιημένες μεθόδους για ευθύγραμμη και καμπύλη γέφυρα, με τα αποτελέσματα που εξάγονται από το τρισδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα ανάλυσης και σχεδιασμού γεφυρών (SAP2000/Bridge) με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Αποδεικνύεται πως οι απλοποιημένες μέθοδοι εξάγουν αποτελέσματα υπέρ της ασφάλειας και άρα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε επίπεδο προδιαστασιολόγησης.

## **Abstract**

The object of the work is the appraisal of simplified methods for the analysis of box-girder bridges. This work has two goals. Firstly to present a simplified method of evaluation of the additional longitudinal stresses that develop under the torsional response both for rectilinear and curved bridges and secondly to perform a comparison with the results deduced from a finite element program simulating the real three dimensional structure. It is proved that the simplified methods provide a safe estimation of the response and may be used for preliminary design purposes.

## Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος</b> .....	<b>3</b>
<b>1. Εισαγωγή</b> .....	<b>5</b>
<b>2. Εργαλεία Ανάλυσης Γέφυρας</b> .....	<b>6</b>
<b>2.1 Θεωρητική προσέγγιση</b> .....	<b>7</b>
2.1.1 Λεπτότοιχες δοκοί.....	7
2.1.2 Κιβωτιοειδείς δοκοί .....	11
2.1.3 Ευθύγραμμες δοκοί.....	12
2.1.4 Παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας σε ευθύγραμμη γέφυρα.....	25
2.1.5 Θεωρία καμπύλης δοκού.....	28
2.1.6 Παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας σε καμπύλη γέφυρα .....	36
<b>2.2 Ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων</b> .....	<b>39</b>
2.2.1 Επίλυση ευθύγραμμης γέφυρας με πεπερασμένα στοιχεία.....	45
2.2.2 Επίλυση καμπύλης γέφυρας με πεπερασμένα στοιχεία .....	48
<b>3. Διερεύνηση ορίων εγκυρότητας θεωρίας</b> .....	<b>50</b>
<b>3.1 Απλά παραδείγματα ευθύγραμμης και καμπύλης γέφυρας</b> .....	<b>50</b>
<b>3.2 Παραδείγματα καμπύλων γεφυρών</b> .....	<b>51</b>
3.2.1 Παραδείγματα με φορτίο το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση 8m .....	51
3.2.2 Παραδείγματα με φορτίο το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση πλάτους 3m καθόλο το μήκος της γέφυρας .....	62
<b>4. Συμπεράσματα</b> .....	<b>74</b>
<b>Βιβλιογραφία</b> .....	<b>75</b>
<b>Παράρτημα</b> .....	<b>76</b>

## 1. Εισαγωγή

Η έννοια των κιβωτιοειδών δοκών εφαρμόζεται σε μία μεγάλη ποικιλία κατασκευαστικών διαμορφώσεων που αφορούν τα έργα γεφυροποιίας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην *καλή συμπεριφορά* που αναπτύσσουν στις στρεπτικές καταπονήσεις. Για τις ευθύγραμμες γέφυρες κιβωτιοειδούς διατομής αυτό γίνεται αντιληπτό από μια έκκεντρη διάταξη του φορτίου κυκλοφορίας. Αντίθετα, στις καμπύλες γέφυρες η καταλληλότητα των κιβωτιοειδών δοκών σε έργα γεφυροποιίας διαπιστώνεται ακόμα και από τα χωρίς εκκεντρότητα φορτία, όπως είναι το ίδιο βάρος, λόγω της μόνιμης στρεπτικής καταπόνησης που προκαλείται.

Η στρεπτική καταπόνηση για τις κιβωτιοειδούς δοκούς, εφόσον εξασφαλίζεται το απαραμόρφωτο της διατομής τους – συνήθως με την ύπαρξη άκαμπτων εγκάρσιων διαφραγμάτων – αντιμετωπίζεται σύμφωνα με την κλασική τεχνική θεωρία της στρέψεως κατά Bredt. Βέβαια, στη διατμητική ροή κατά Bredt αναπτύσσεται και μία επιπρόσθετη ένταση στη δοκό η οποία καθορίζεται με τη θεμελιακή εξίσωση στρεπτική εντάσεως που αφορά τις λεπτότοιχες δοκούς.

Συχνά όμως, για κατασκευστικούς λόγους αποφεύγεται η τοποθέτηση διαφραγμάτων. Οπότε, ο φορέας θα πρέπει να αντιμετωπισθεί μέσα από την πτυχωτή του λειτουργία. Η επιπρόσθετη ένταση στην κατά Bredt διατμητική ροή προσδιορίζεται από τη γενική θεώρηση ότι ο κορμός της διατομής λειτουργεί ως δοκός επί ελαστικής βάσεως. Η θεώρηση αυτή συνιστά απλοποιημένες μεθόδους, που αναλύονται στην παρούσα εργασία, και διερευνάται η εγκυρότητά τους μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την τρισδιάστατη προσομοίωση του προβλήματος, μέσω ενός προγράμματος (SAP2000).

## 2. Εργαλεία Ανάλυσης Γέφυρας

Η γέφυρα κιβωτιοειδούς διατομής, ευθύγραμμη ή καμπύλη, εξετάζεται και αναλύεται με δύο τρόπους:

- με την εφαρμογή της θεωρίας
- με την προσομοίωση των τρισδιάστατων μοντέλων των γεφυρών στο κατάλληλο πρόγραμμα



## 2.1 Θεωρητική προσέγγιση

### 2.1.1 Λεπτότοιχες δοκοί

#### *Γενικά χαρακτηριστικά*

Οι λεπτότοιχες δοκοί έχουν ευρεία εφαρμογή σε μία μεγάλη ποικιλία κατασκευαστικών διαμορφώσεων που έγκεινται κυρίως σε έργα γεφυροποιίας. Η διατομή λεπτότοιχων δοκών μορφώνεται με χρήση λεπτών επιφανειακών στοιχείων τα οποία συνδέονται μονολιθικά μεταξύ τους σε κοινές ακμές. Έτσι, διαμορφώνονται επιμήκη μέλη ραβδωτής μορφής με αποτέλεσμα να εξοικονομείται βάρος και να παραλαμβάνονται με μεγαλύτερη ικανότητα τα φορτία, σε αντίθεση με τη συμπαγή διατομή ίδιου κατασκευαστικού ύψους.

Η διάσταση του μήκους  $L$  στις λεπτότοιχες δοκούς είναι σαφώς μεγαλύτερη της μέγιστης εγκάρσιας διάστασης  $B$  με λόγο  $L/B$  μεγαλύτερο του 5, ενώ το πάχος  $t$  των πλακοειδών στοιχείων είναι αρκετά λεπτό ώστε να ισχύει  $t/B \leq 0.1$ . Οπότε, η δοκός εμφανίζεται σαν ένας πτυχωτός φορέας και μπορεί να αναλυθεί με κατάλληλη προσομοίωση και χρήση ενός αντίστοιχου λογισμικού  $H/Y$ . Η κατασκευή αντιμετωπίζεται σαν ένα **γραμμικό στοιχείο δοκού** και γίνεται άμεσα αντιληπτή η φέρουσα λειτουργία της.

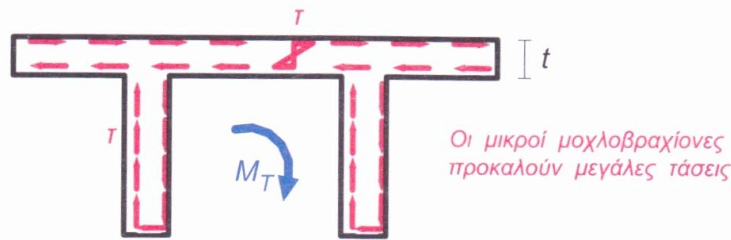
Αξίζει να σημειωθεί η βασική διαφορά της λεπτότοιχης δοκού με τη συμπαγή. Στην παραλαβή της στρέψεως πέραν των διατμητικών συνεπάγονται και διαμήκεις ορθές τάσεις, πράγμα το οποίο δεν προβλέπεται από την λεγόμενη *κλασική τεχνική θεωρία των συμπαγών δοκών*.

Η ανάπτυξη στρέψεως στις λεπτότοιχες δοκούς εμφανίζεται στις ευθύγραμμες γέφυρες λόγω έκκεντρης εφαρμογής του κινητού φορτίου ως προς τον άξονα της διατομής. Στις καμπύλες γέφυρες η στρέψη αναπτύσσεται αποκλειστικά και με την παρουσία του ιδίου βάρους.

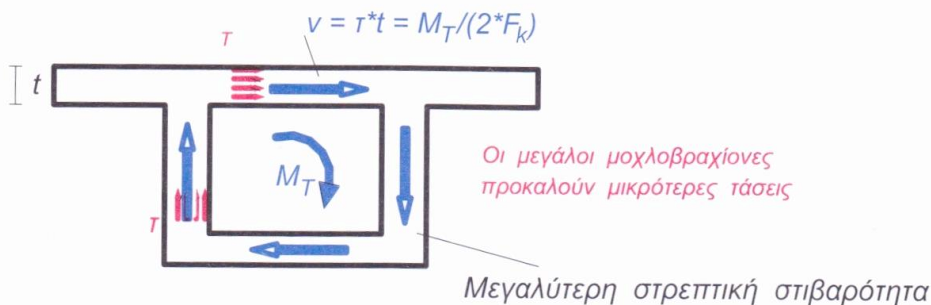
Οι λεπτότοιχες διατομές διακρίνονται σε *ανοιχτές* και *κλειστές*. Οι **κλειστές** διατομές λέγονται και **κιβωτιοειδείς** λόγω του κλειστού τους σχήματος.

Η κλειστή διατομή υπερτερεί σε σύγκριση με την ανοιχτή διατομή μορφής  $\llcorner$  σε ό,τι αφορά την αξιολόγηση της στατικής συμπεριφοράς τους.

Η σημαντικότερη διαφορά των δύο τύπων διατομών αφορά τη στρέψη. Στην ανοιχτή διατομή η παραλαβή μιας ροπής στρέψεως  $M_T$  γίνεται σύμφωνα με την κλασική τεχνική θεωρία από τα τρία ορθογωνικά επιμήκη τμήματα, με την ανάπτυξη περιρρεουσών διατμητικών τάσεων που παρουσιάζουν μέγιστη τιμή στις εξώτατες παρειές της επιμήκους πλευράς.



Η στρεπτική ροπή μοιράζεται στα επί μέρους τοιχώματα ανάλογα με την αστρεψία τους



Ευνοικότερη παραλαβή της στρέψεως από τη κλειστή διατομή

**Σχήμα 2.1** Βασική συμπεριφορά σε στρέψη ανοικτών και κλειστών διατομών

Αντίθετα, στην κλειστή διατομή δίνεται η δυνατότητα να περιτρέξουν οι διατμητικές τάσεις με σταθερή ροή όλο το προφίλ και να προσφέρουν με το ίδιο μέγεθος διατμητικής τάσεως πολύ μεγαλύτερη στρεπτική ροπή λόγω του μεγάλου σχετικά μοχλοβραχίονα που εμφανίζουν. Έτσι σε κάθε τοίχωμα αναπτύσσονται ομοιόμορφα κατανεμημένες διατμητικές τάσεις  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  και  $\tau_4$ , με την χαρακτηριστική ιδιότητα να παρουσιάζουν στο καθένα σταθερή διατμητική ροή  $(\tau \cdot t)$ , δηλαδή σταθερή διατμητική δύναμη  $v$  ανά μονάδα μήκους. Οπότε ισχύει  $v = \tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_3 \cdot t_3 = \tau_4 \cdot t_4$  και σύμφωνα με την κλασσική θεωρία του Bredt είναι:

$$v = M_T / (2 \cdot F_k)$$

όπου  $F_k$  το εμβαδό που περικλείεται από την μέση γραμμή της διατομής.

Στη συνέχεια, όλο το ενδιαφέρον εστιάζεται στις κλειστές διατομές, κιβωτιοειδείς, διότι αυτές είναι το αντικείμενο μελέτης.



### **Βασικά “σημεία” λεπτότοιχων δοκών**

Παρά το γεγονός ότι η παραδοχή της *απαραμόρφωτης διατομής* γενικώς μπορεί να ικανοποιείται, είναι ενδεχόμενο για την πραγμάτωσή της να απαιτείται και η τοποθέτηση εγκάρσιων διαφραγμάτων.

Το μέγεθος της στρεβλώσεως σε δοκούς με **κλειστή διατομή** είναι πολύ περιορισμένο. Η παραδοχή της *απαραμόρφωτης διατομής* για τις κλειστές διατομές για κατασκευαστικούς λόγους συχνά εγκαταλείπεται όπως θα διαπιστωθεί στις επόμενες παραγράφους.

Οι διατμητικές και οι ορθές τάσεις που αναπτύσσονται στις κλειστές διατομές αποτελούν ένα αυτοισορροπούμενο σύστημα τάσεων και συνεπώς δεν συμβάλλουν στην παραλαβή της στρεπτικής ροπής της διατομής. Έτσι, η προκαλούμενη διατμητική ροή κατά Bredt αποτελεί και τον μοναδικό μηχανισμό παραλαβής της ασκούμενης στρεπτικής ροπής. Εφόσον εξασφαλίζεται το *απαραμόρφωτο* της διατομής, οι επιπρόσθετες ορθές και διατμητικές τάσεις δεν τροποποιούν ιδιαίτερα την εντατική κατάσταση λόγω κάμψεως και στρέψεως, βάσει της τεχνικής θεωρίας, και μπορούν στο στάδιο της προμελέτης να παραλείπονται.



Η εν λόγω εξίσωση είναι:

$$EI \frac{dw^4}{dx^4} - H \frac{dw^2}{dx^2} = p(x)$$

Έτσι, δημιουργείται μία πλήρης αντιστοιχία ανάμεσα στα δύο προβλήματα.

Ανακεφαλαιώνοντας, όπως θα διαπιστωθεί από τη μετέπειτα ανάλυση για τις λεπτότοιχες κλειστές διατομές, η δοκός δε θα θεωρείται απαραμόρφωτη και άρα η παραπάνω εξίσωση της στρεπτικής εντάσεως δε θα εφαρμόζεται.

### 2.1.2 Κιβωτιοειδείς δοκοί

#### ***Γενικά χαρακτηριστικά***

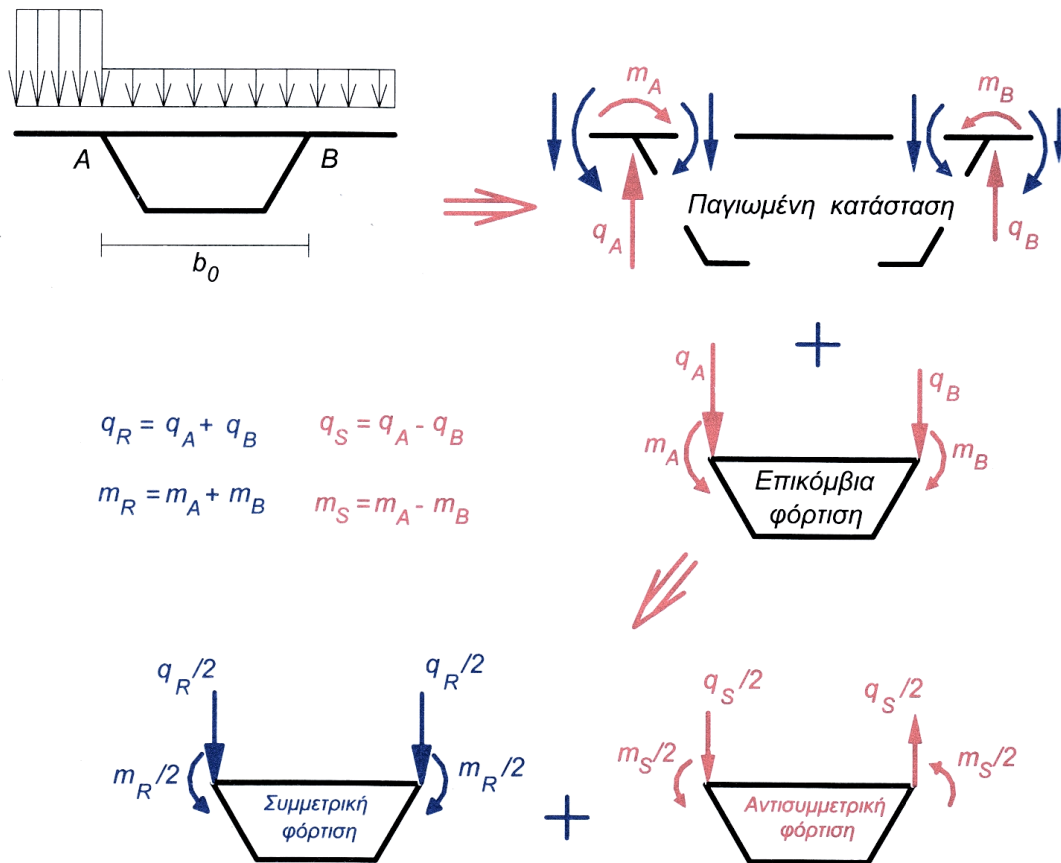
Οι κιβωτιοειδείς δοκοί είναι λεπτότοιχες δοκοί κλειστής διατομής. Βασική προϋπόθεση για να ισχύει η θεμελιώδης εξίσωση που αναπτύχθηκε για τις λεπτότοιχες δοούς και όλες οι συναφείς με αυτήν έννοιες που απορρέουν από την στρεπτική καταπόνηση είναι το απαραμόρφωτο της διατομής τους. Για μικρές σχετικά διαστάσεις της διατομής το απαραμόρφωτο εξασφαλίζεται από το πάχος των τοιχωμάτων. Για μεγαλύτερες όμως διαστάσεις απαιτείται η ύπαρξη άκαμπτων διαφραγμάτων στο επίπεδό τους τουλάχιστον πάνω από κάθε στήριξη. Ίσως να χρειάζονται και δύο ή και τρία ακόμα διαφράγματα στο άνοιγμα. Όμως, για κατασκευαστικούς λόγους συχνά αποφεύγεται η τοποθέτηση διαφραγμάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η παραλαβή των στρεπτικών φορτίων να συνεπάγεται παραμόρφωση της διατομής και επιπρόσθετη καμπτική ένταση τόσο κατά τη διαμήκη όσο και κατά την εγκάρσια έννοια.

Στις επόμενες παραγράφους θα εξεταστούν αρχικά οι ευθύγραμμες και στη συνέχεια οι καμπύλες δοκοί.

### 2.1.3 Ευθύγραμμες δοκοί

#### Γενική θεώρηση φορτίσεως

Στο παρακάτω Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται μια τυπική κιβωτιοειδής διατομή με μία έκκεντρη διάταξη του συγκοινωνιακού φορτίου.

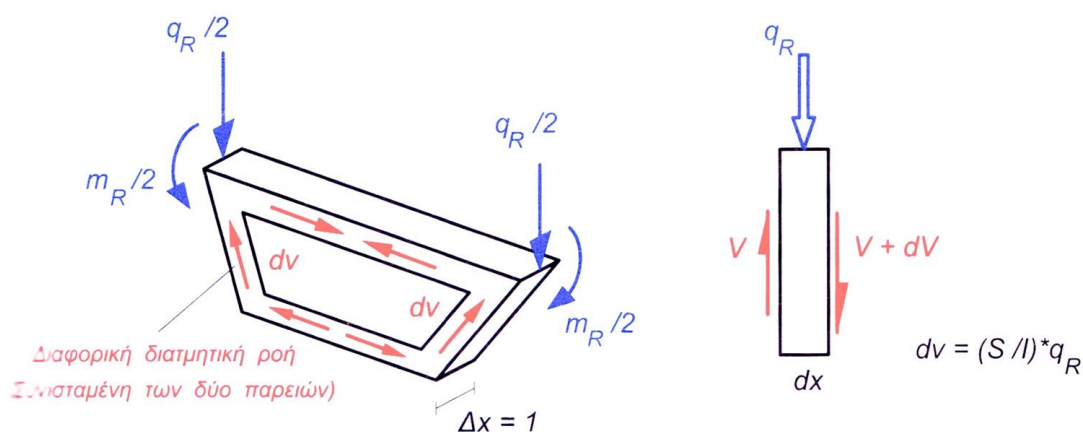


**Σχήμα 2.3** Αναγωγή έκκεντρης φόρτισης σε επικόμβια φορτία επί των ακμών της δοκού

Η εντατική κατάσταση της δοκού είναι επαλληλία της παγιομένης καταστάσεως (1) και της καταστάσεως (2), επικόμβια φόρτιση. Η παγιομένη κατάσταση περιέχει τα φορτία μαζί με τις επικόμβιες δράσεις *παγιώσεως* οι οποίες αποτελούνται από κατανεμημένα κατά μήκος κατακόρυφα φορτία  $q_A$  και  $q_B$  καθώς και κατανεμημένες κατά μήκος ροπές  $m_A$  και  $m_B$ . Η

επικόμβια φόρτιση περιλαμβάνει μόνο τις επικόμβιες δράσεις  $q_A$  και  $m_A$ , καθώς και  $q_B$  και  $m_B$ , ασκούμενες στις ακμές A και B, με αντίθετη φορά από τις δράσεις παγίωσης.

Η παγιομένη κατάσταση δεν παρουσιάζει εν προκειμένω κανένα ενδιαφέρον, οπότε εξετάζεται απ' ευθείας η επικόμβια φόρτιση. Η κατάσταση (2) εφόσον η διατομή είναι συμμετρική μπορεί να αναλυθεί σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική φόρτιση. Η συμμετρική φόρτιση απαρτίζεται από τα συμμετρικά κατανεμημένα φορτία  $q_R/2$  και τις κατανεμημένες ροπές  $m_R/2$  στα A και B. Η αντισυμμετρική φόρτιση απαρτίζεται από τα αντίθετα φορτία  $q_S/2$  και τις ομόφορες ροπές  $m_S/2$ , στις ακμές A και B.



**Σχήμα 2.4** Εγκάρσια καταπόνηση σε συμμετρική φόρτιση

Η συμμετρική φόρτιση κινητοποιεί την καμπτική στιβαρότητα της δοκού και προκαλεί τα γνωστά από την επίπεδη ένταση διαγράμματα καμπτικών ροπών και τεμνουσών δυνάμεων. Επιπλέον προκαλεί και μία εγκάρσια ένταση αν ληφθεί υπ' όψιν η ισορροπία ενός σπονδύλου μοναδιαίου μήκους. Ο σπόνδυλος δέχεται τη συνισταμένη των δύο διατμητικών ροών που ασκούνται σε κάθε παρειά του, βάσει της ασκούμενης σε αυτές τέμνουσας δύναμης αντίστοιχα (Σχήμα 2.4). Δεδομένου ότι η διατμητική ροή  $v$  εκφράζεται σαν

$$v = V * S/I,$$

$$\text{είναι, } (dv/dx) = (S/I) * (dV/dx) = (S/I) * q_R$$

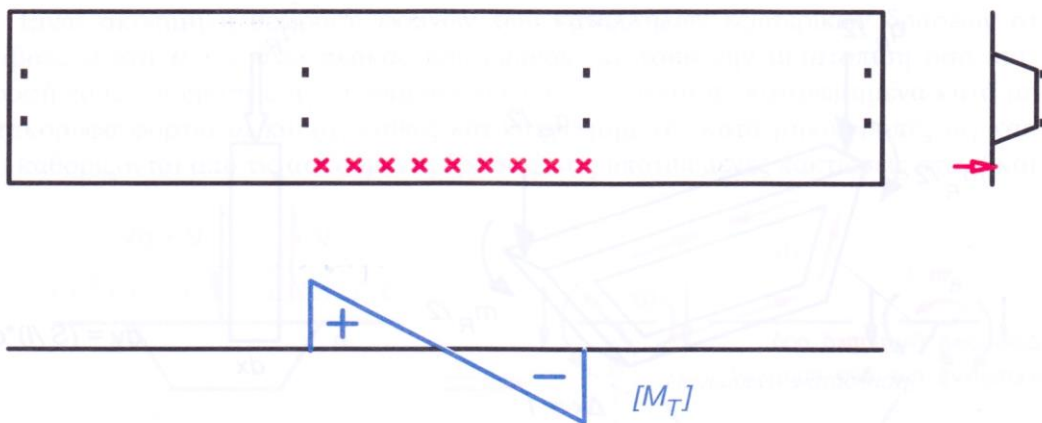
και λόγω του μοναδιαίου μήκους του σπονδύλου, η διαφορική διατμητική ροή  $dv$  που ασκείται συνολικά στα τοιχώματα της διατομής είναι

$$dv = (S/I) * q_R$$

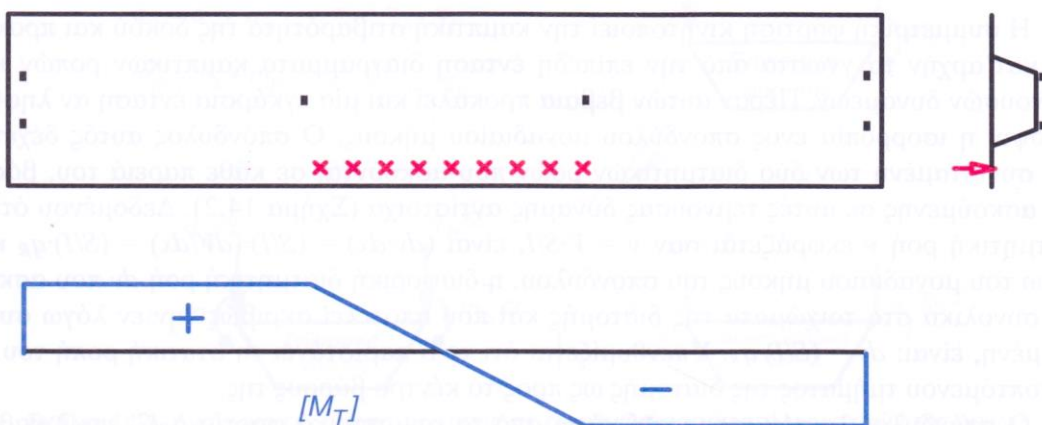
Σημειώνεται ότι το  $S$  είναι η στατική ροπή του αποκοπτόμενου τμήματος της διατομής ως προς το κέντρο βάρους της.

Όλο το ενδιαφέρον μετατοπίζεται στην αντισυμμετρική φόρτιση καθότι η συμμετρική φόρτιση δεν παρουσιάζει άλλη ιδιαιτερότητα.

Η αντισυμμετρική φόρτιση δρα στη δοκό σαν ένα κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο  $m_D = (q_S/2) \cdot b_o + m_S$  από το οποίο προκύπτει το αντίστοιχο στρεπτικό διάγραμμα. Η στρεπτική ροπή που αναπτύσσει η δοκός σε κάθε θέση παραλαμβάνεται από τη διατμητική ροή κατά Bredt. Για κάθε τοίχωμα της διατομής προκύπτει ένα συγκεκριμένο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων.



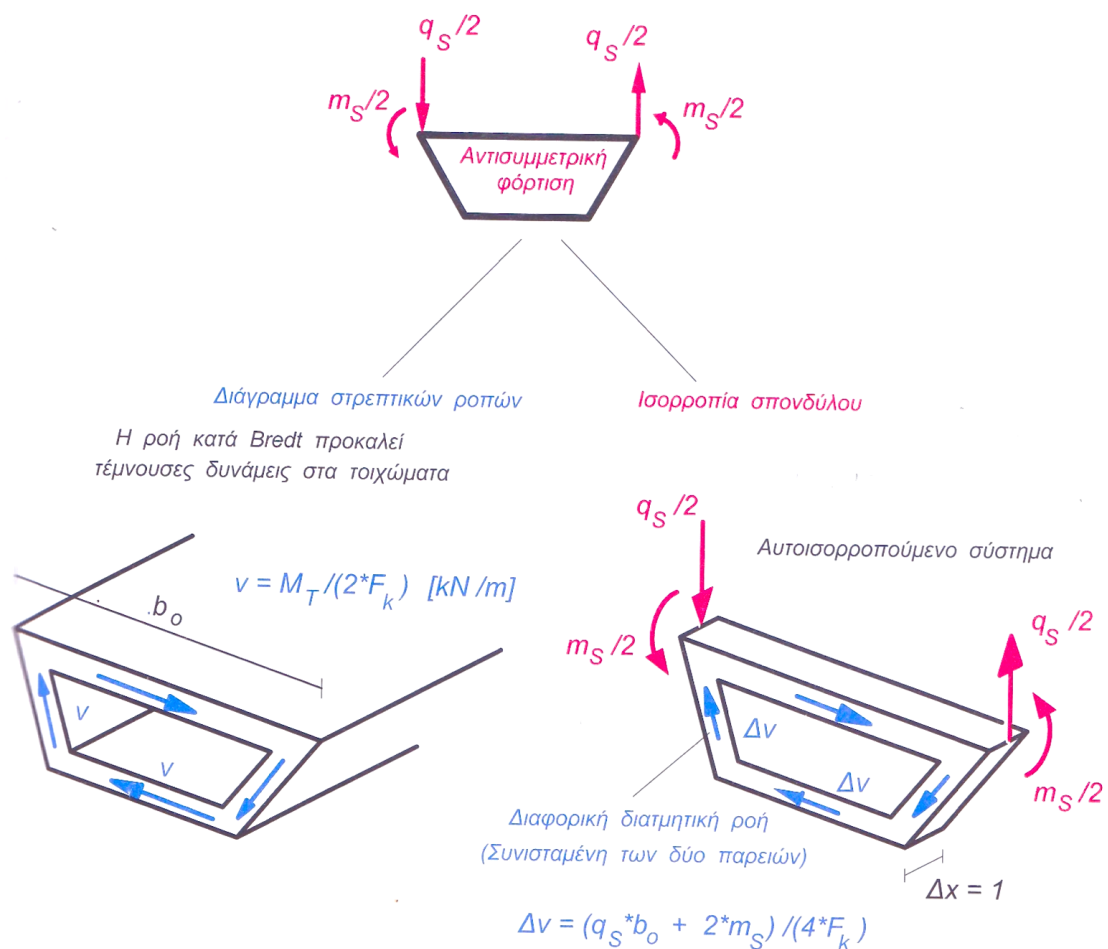
Η ένταση λόγω Bredt προκαλεί τέμνουσες δυνάμεις σε κάθε τοίχωμα της διατομής



**Σχήμα 2.5** Επιρροή τρόπου στηρίξεως της δοκού στην κατανομή της στρεπτικής εντάσεως

Εκτός από τη διατμητική ροή κατά Bredt, υπάρχει μία επιπρόσθετη ένταση στη δοκό. Η ένταση αυτή είναι μικρή εάν οι διατομές της δοκού μπορούν να θεωρηθούν απαραμόρφωτες. Όπως αναφέρθηκε στην § 2.1.2, το απαραμόρφωτο της διατομής εξασφαλίζεται με τη διάταξη εγκάρσιων διαφραγμάτων. Έτσι, η επιπρόσθετη ένταση της δοκού (διαμήκεις και διατμητικές τάσεις εκ στρεβλώσεως) επιτρέπεται να προσδιορισθεί σύμφωνα με τη θεωρία για τις λεπτότοιχες διατομές. Όμως, η παρουσία των εγκάρσιων διαφραγμάτων δεν είναι γενικά επιθυμητή για κατασκευαστικούς λόγους. Οπότε, η δοκός θα πρέπει να θεωρηθεί με παραμορφώσιμη διατομή και άρα, ο φορέας θα πρέπει να εξετασθεί μέσα από την πτυχωτή του λειτουργία.

Όπως θα αναλυθεί παρακάτω στην περίπτωση αυτή, η επιπρόσθετη ένταση στη δοκό έγκειται σε μία διαμήκη κάμψη για κάθε τοίχωμα, καθώς και μία εγκάρσια καταπόνηση για τη διατομή.



### Ένταση λόγω παραμορφωσιμότητας της διατομής

Όπως ήδη αναφέρθηκε η αντισυμμετρική φόρτιση δρα στη δοκό σαν ένα κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο  $m_D = (q_S/2) \cdot b_0 + m_S$ . Το φορτίο αυτό προκαλεί μία παραμόρφωση της κλειστής διατομής ανάλογα με την καμπτική στιβαρότητά της. Η παραμόρφωση οδηγεί τα τοιχώματα της διατομής σε διαμήκη κάμψη. Οπότε, δημιουργείται μία διαμήκης ένταση που εμπλέκεται με την καμπτική λειτουργία της διατομής. Επισημαίνεται ότι η ένταση αυτή είναι επιπρόσθετη στην διατμητική ροή κατά Bredt των τοιχωμάτων της διατομής.

Εξετάζεται η ισορροπία ενός αποκοπτόμενου σπονδύλου μοναδιαίου μήκους υπό τα αντισυμμετρικά φορτία  $q_S/2$  και  $m_S/2$  στις ακμές A και B της διατομής.

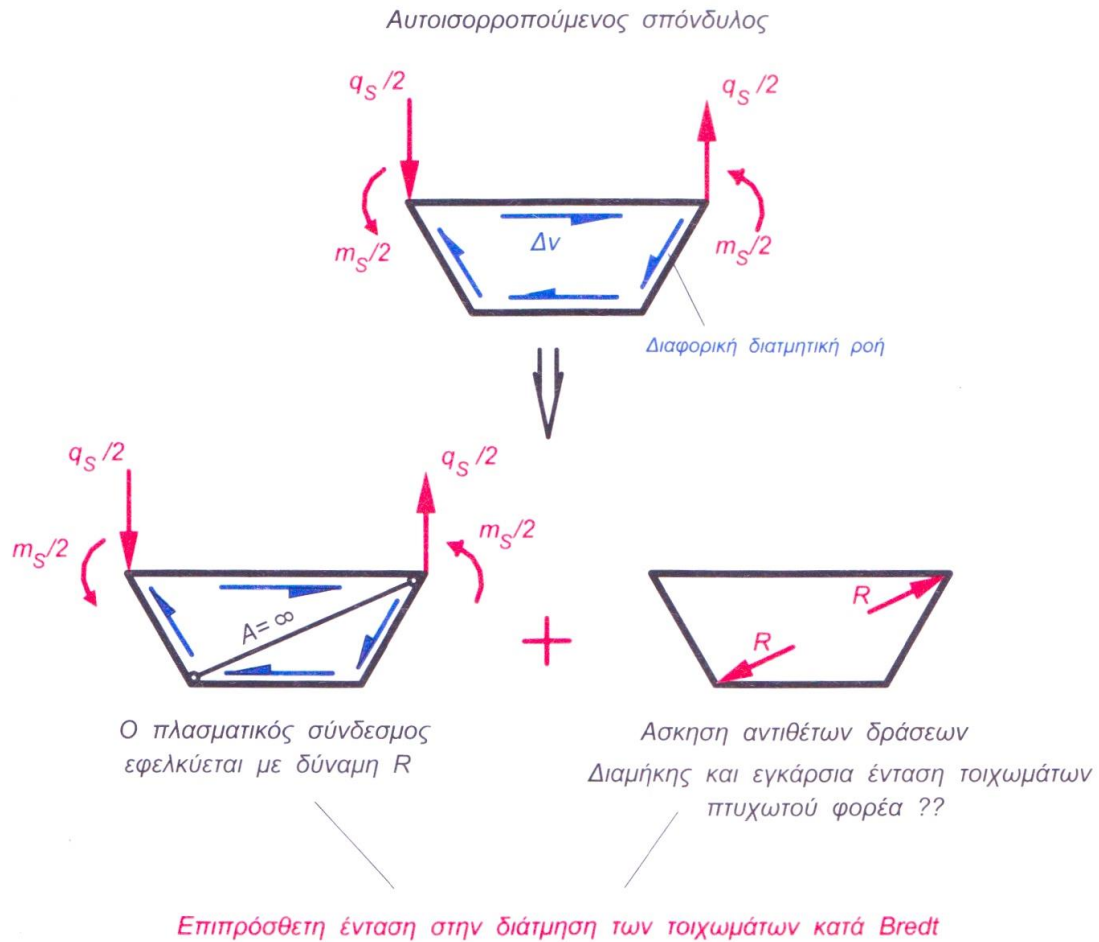
Ο σπόνδυλος ισορροπεί υποβαλλόμενος στα εξωτερικά αντισυμμετρικά φορτία και στη διαφορική διατμητική ροή  $\Delta v$ , η οποία προκύπτει ως συνισταμένη των επιβαλλόμενων ροών κατά Bredt στις δύο όψεις του σπονδύλου.

Ισχύει ότι

$$v = \frac{M_T}{2 \cdot F_k},$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta M_T}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2 \cdot F_k} = \frac{m_D}{2 \cdot F_k}$$
$$\Delta v = \frac{q_S \cdot b_0 + 2 \cdot m_S}{4 \cdot F_k}.$$

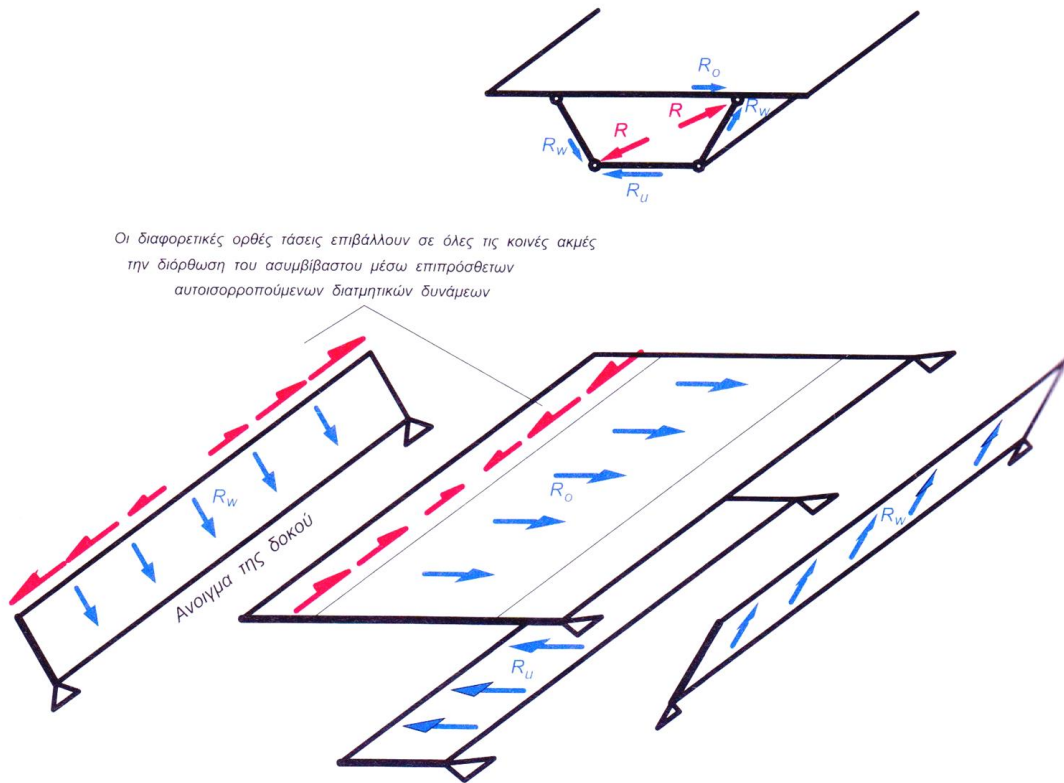
Άρα, ο εξεταζόμενος σπόνδυλος τείνει να παραμορφωθεί υπό την επήρεια των δυνάμεων  $q_S/2$ ,  $m_S/2$  και  $\Delta v$ . Η παραμόρφωση αυτή συνίσταται ουσιαστικά σε μεταβολή του μήκους των διαγωνίων του και συνεπάγεται μία επιπρόσθετη ένταση για κάθε τοίχωμα της δοκού. Για την αποφυγή αυτής της παραμόρφωσης τοποθετείται μία αμφιαρθρωτή ράβδος με άπειρη εκτατική στιβαρότητα (μη παραμορφώσιμη) κατά μήκος της επαυξανόμενης διαγωνίου του σπονδύλου. Έτσι, η δοκός δεν παραμορφώνεται και δεν εντείνεται. Εξαιρείται βέβαια η εγκάρσια καμπτική ένταση που μπορεί να προκληθεί εξαιτίας των ροών  $m_S/2$ . Η αμφιαρθρωτή ράβδος κατά μήκος της διαγωνίου αναπτύσσει εφελκυστική δύναμη  $R$ . Η δύναμη αυτή μεταβιβάζεται ίση και αντίθετη στις αντίστοιχες απέναντι ακμές της διατομής. Η ένταση που προκαλείται από τις αντίθετες δράσεις  $R$  αθροιστικά με την ένταση που προέρχεται από το *μπλοκάρισμα* του σπονδύλου οδηγεί στην επιπρόσθετη ένταση στην κατά Bredt διατμητική ροή.





**Σχήμα 2. 6** Πρόσθετη καταπόνηση της δοκού προερχόμενη από την αντισυμμετρική φόρτιση

Η επιπρόσθετη αυτή *διαγώνια* φόρτιση εξετάζεται με την παραδοχή καταρχήν ότι οι δυνάμεις  $R$  ασκούνται σε μία δοκό τα τοιχώματα της οποίας συνδέονται μεταξύ τους αρθρωτά και όχι μονολιθικά. Οι δυνάμεις  $R$  αναλύονται ισοστατικά σε κάθε τοίχωμα. Οπότε, το κάθε τοίχωμα μπορεί να θεωρηθεί σαν μία δοκός κατά την διαμήκη έννοια που αναπτύσσει συγκεκριμένες καμπτικές ροπές  $M_0$  και άρα συγκεκριμένες διαμήκεις τάσεις  $\sigma$  σύμφωνα με την κλασσική τεχνική θεωρία της κάμψεως. Όμως, οι ανηγμένες παραμορφώσεις  $\sigma/E$  στα κοινά άκρα των τοιχωμάτων με τις πλάκες δεν είναι ίδιες όπως συμβαίνει στο αρθρωτό σύστημα. Έτσι, προς αποκατάσταση του συμβιβαστού των ανηγμένων παραμορφώσεων, ασκούνται επιπρόσθετες διαμήκεις δυνάμεις κατά μήκος των ακμών. Οπότε, οι αρχικές διαμήκεις ορθές τάσεις  $\sigma$  τροποποιούνται.



**Σχήμα 2.7** Παραλαβή των διαγώνιων φορτίων από τις διαμήκειες υψίκορμες δοκούς

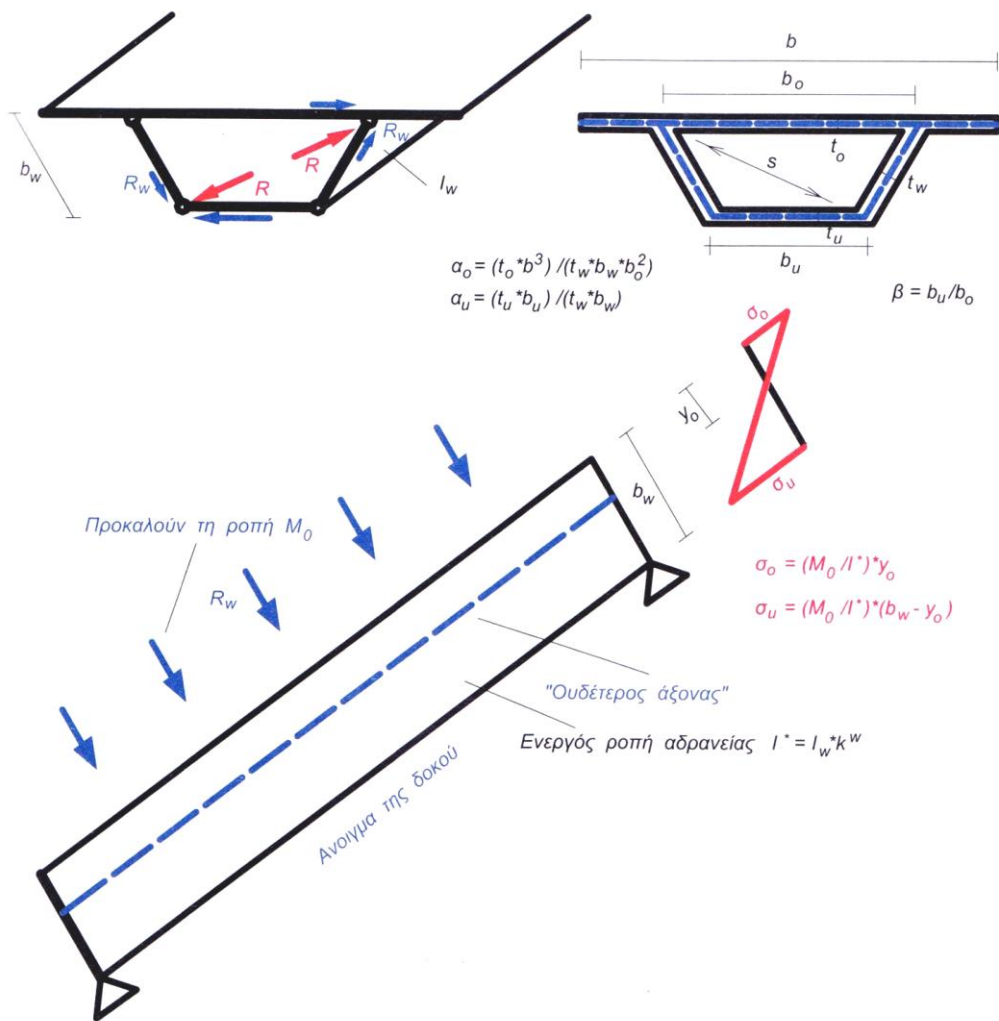
Από την παραπάνω ανάλυση καθορίζεται το διάγραμμα διαμήκων τάσεων για ένα τοίχωμα, π.χ. τον αριστερό κορμό της αρθρωτής κιβωτιοειδούς διατομής όπως στο Σχήμα 2.7, σύμφωνα με τον κλασικό τύπο της κάμψεως βάσει της ισοστατικής ροπής  $M_0$ , όπου όμως σαν ροπή αδράνειας  $I^*$  εμφανίζεται το κανονικό μέγεθος του κορμού πολλαπλασιασμένο επί ένα συντελεστή  $k^w$  όπως και η απόσταση της ουδέτερης ίνας από την άνω ίνα τροποποιείται σύμφωνα με τη γεωμετρία της διατομής.

Η ροπή  $M_0$  προκύπτει από την φόρτιση του αριστερού κορμού με την αντίστοιχη συνιστώσα  $R_w$  της  $R$ , όπου  $R_w = R \cdot b_w/s$ .

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\sigma_o = - M_0/I^* \cdot y_o \quad \text{και} \quad \sigma_u = M_0/I^* \cdot (b_w - y_o), \quad \text{όπου:}$$

$$I = I_w \cdot k^w$$



Σχήμα 2. 8 Καμπτική ένταση των διαμήκων τοιχωμάτων στο αρθρωτό πτωχυτό σύστημα

Βρίσκεται ότι,

$$k^w = \frac{2 \cdot \beta \cdot [(\alpha_o + 2) \cdot (\alpha_u + 2) - 1]}{(1 + \beta) \cdot (3 + 3 \cdot \beta + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta)} \quad \text{και} \quad y_o = \frac{1 + 2 \cdot \beta + \alpha_u \cdot \beta}{3 + 3 \cdot \beta + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta} \cdot b_w$$

Οπότε, η διαφορική εξίσωση του καμπτόμενου κατά μήκος κορμού στο αρθρωτό σύστημα γράφεται:

$$E \cdot I^* \cdot d^4 w / dx^4 = R_w$$

Υπενθυμίζεται ότι το  $R_w$  είναι η συνιστώσα της διαγώνιας φόρτισης  $R$ , η αρχική ισοστατική φόρτιση του κορμού. Το  $I^*$  είναι η *ιδεατή* ροπή αδράνειας του κορμού και το  $w$  αποτυπώνει τη μετατόπιση μέσα στο επίπεδο του κορμού, λόγω της παραμόρφωσης της διατομής.

Πλέον λαμβάνεται υπόψη η μονολιθικότητα της συνδέσεως των τοιχωμάτων της κιβωτιοειδούς διατομής.

Η διατομή όπως εξηγήθηκε παραπάνω δέχεται τις διαγώνες δυνάμεις  $R$ , με αποτέλεσμα το αρθρωτό προφίλ να παραμορφώνεται. Η παραμόρφωση αυτή εκδηλώνεται με την αύξηση  $\delta$  της διαγωνίου. Η μεταβολή όμως αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς καμμία αντίσταση, δεδομένου ότι αυτόματα κινητοποιείται η εγκάρσια στιβαρότητα  $C$  της διατομής σαν κλειστού πλαισίου. Η στιβαρότητα αυτή εκφράζεται μέσω της σχέσεως  $r = \delta \cdot c$ , η διαγώνια δηλαδή δύναμη  $r$  που απαιτείται να ασκηθεί στο πλαίσιο για να προκαλέσει την παραμόρφωση  $\delta = 1$ . Το  $C$  εξαρτάται από τα γεωμετρικά και ελαστικά δεδομένα της διατομής. Καθώς το αρθρωτό προφίλ τείνει να παραμορφωθεί κατά  $\delta$ , σαν αντίδραση ασκείται πάνω του αυτόματα η αντίσταση  $r$  που προβάλλει η μονολιθικότητα του πλαισίου. Έτσι ο κορμός εκτός από την αρχική του φόρτιση  $R_w$  δέχεται και την δύναμη  $r_w$  σαν ισοστατική συνιστώσα της  $r$ , προφανώς με αντίθετη φορά.

Ισχύει ότι:  $r_w = r \cdot (b_w / s)$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η καμπτική παραμόρφωση  $w$  του κορμού συνδέεται γραμμικά με την διαγώνια παραμόρφωση  $\delta$  μέσω της σχέσεως  $\delta = w \cdot D$ , όπου:

$$D = \frac{2 \cdot b_w \cdot (1 + \beta) \cdot (2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + \alpha_0 + \alpha_u \cdot \beta^2)}{\beta \cdot s \cdot (3 + 3 \cdot \beta + \alpha_0 + \alpha_u \cdot \beta)}$$

προκύπτει ότι η δύναμη  $r_w$  εκφράζεται επίσης γραμμικά μέσω του  $w$  από τη σχέση

$$r_w = w \cdot D \cdot C \cdot (b_w / s) = w \cdot K \quad \text{όπου} \quad K = D \cdot C \cdot (b_w / s)$$

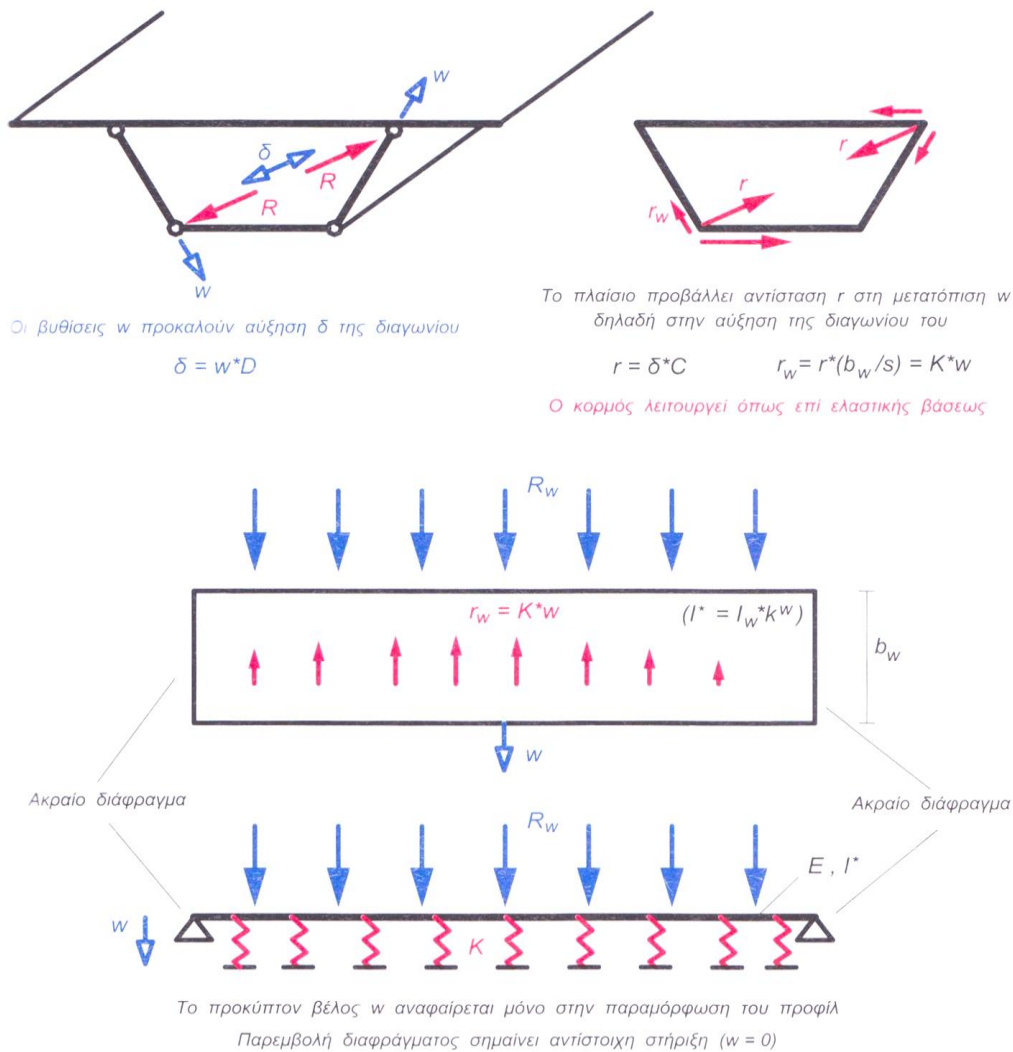
Οπότε η διαφορική εξίσωση της διαμήκουσ κάμψεως της δοκού του κορμού γίνεται:

$$E \cdot I^* \cdot d^4 w / dx^4 = (R_w - r_w) = R_w - w \cdot K$$

Τελικά,

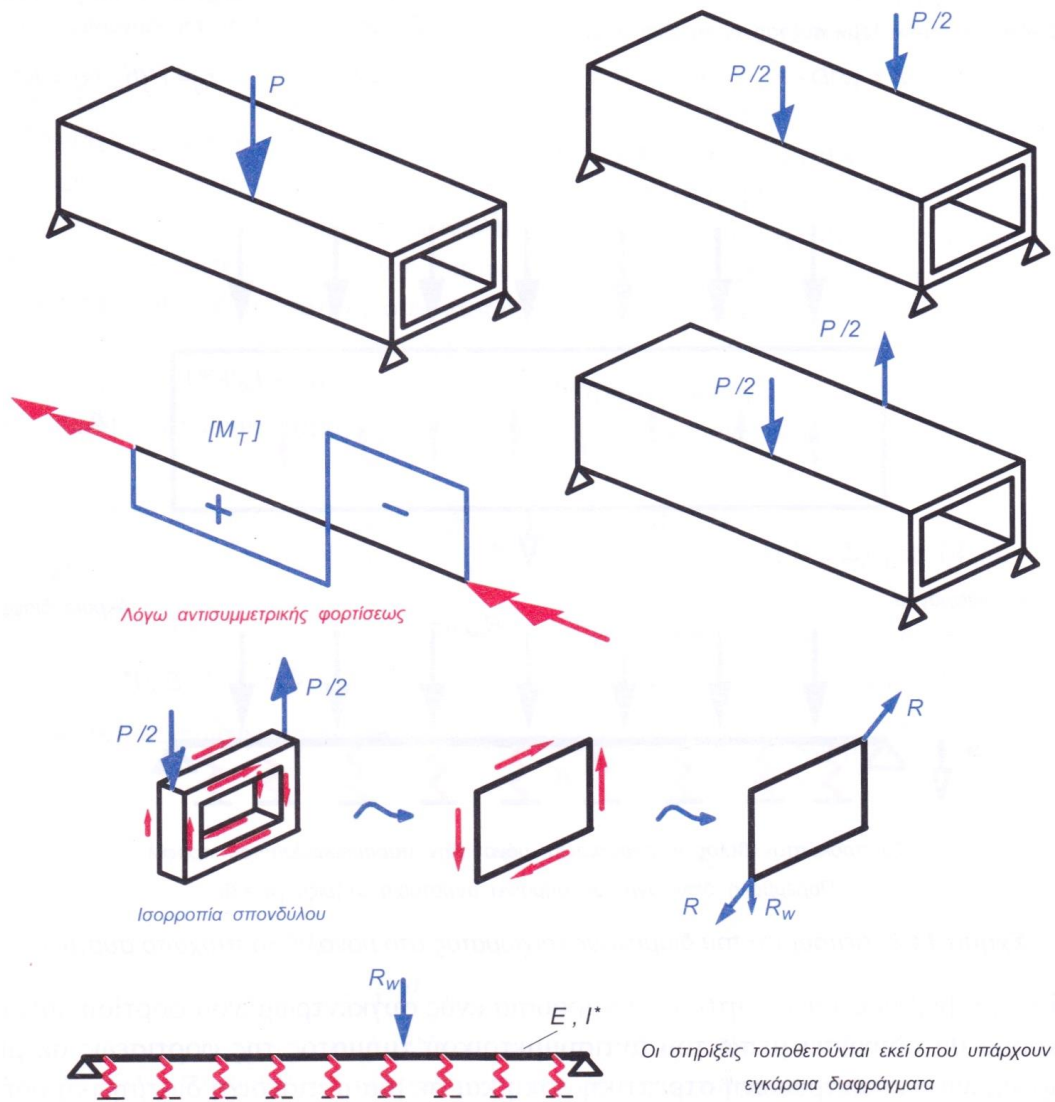
$$E \cdot I^* \cdot d^4 w / dx^4 + K \cdot w = R_w$$

Η παραπάνω εξίσωση αναγνωρίζεται ως η τυπική εξίσωση της δοκού επί ελαστικού εδάφους, με δείκτη εδάφους ίσο με  $K$ . Πράγματι, ο κορμός φέρεται από τη συνεχή *ελαστική* στήριξη που του προσφέρεται από την αντίσταση του προφίλ να υποστεί τη διαγώνια παραμόρφωση.



**Σχήμα 2.9** Λειτουργία του διαμήκους τοιχώματος στο μονολιθικό πτυχωτό σύστημα

Άρα, η παρουσία ενός συγκεντρωμένου φορτίου πάνω από τον κορμό οδηγεί μέσω του αντισυμμετρικού τμήματος της φορτίσεως σε μία εφαρμοζόμενη συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή και σε μία αντίστοιχη διατμητική ροή κατά Bredt, με αποτέλεσμα ο κορμός επί ελαστικής βάσεως να δέχεται μία συγκεντρωμένη δύναμη. Σε περίπτωση που το έκκεντρο συγκεντρωμένο φορτίο είναι το μόνο που ασκείται στο φορέα, στην παραπάνω εξίσωση το κατανεμημένο φορτίο  $R_w$  του δεξιού μέλους απαλοίφεται. Οπότε, η διαγώνια δράση  $R$  επί της κιβωτιοειδούς δοκού συνίσταται σε ένα μόνο ζεύγος ίσων και αντιθέτων δυνάμεων. Εάν στη θέση που ασκείται το ζεύγος των δυνάμεων υπάρχει εγκάρσιο διάφραγμα, οι δυνάμεις παραλαμβάνονται από αυτό και δεν καταπονούν καθόλου τη διατομή, όπως συμβαίνει με την απαραμόρφωτη διατομή. Εάν δεν υπάρχει διάφραγμα οι δυνάμεις παραλαμβάνονται από τον πτυχωτό φορέα της δοκού και εξετάζεται ως παραμορφώσιμη διατομή σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση.

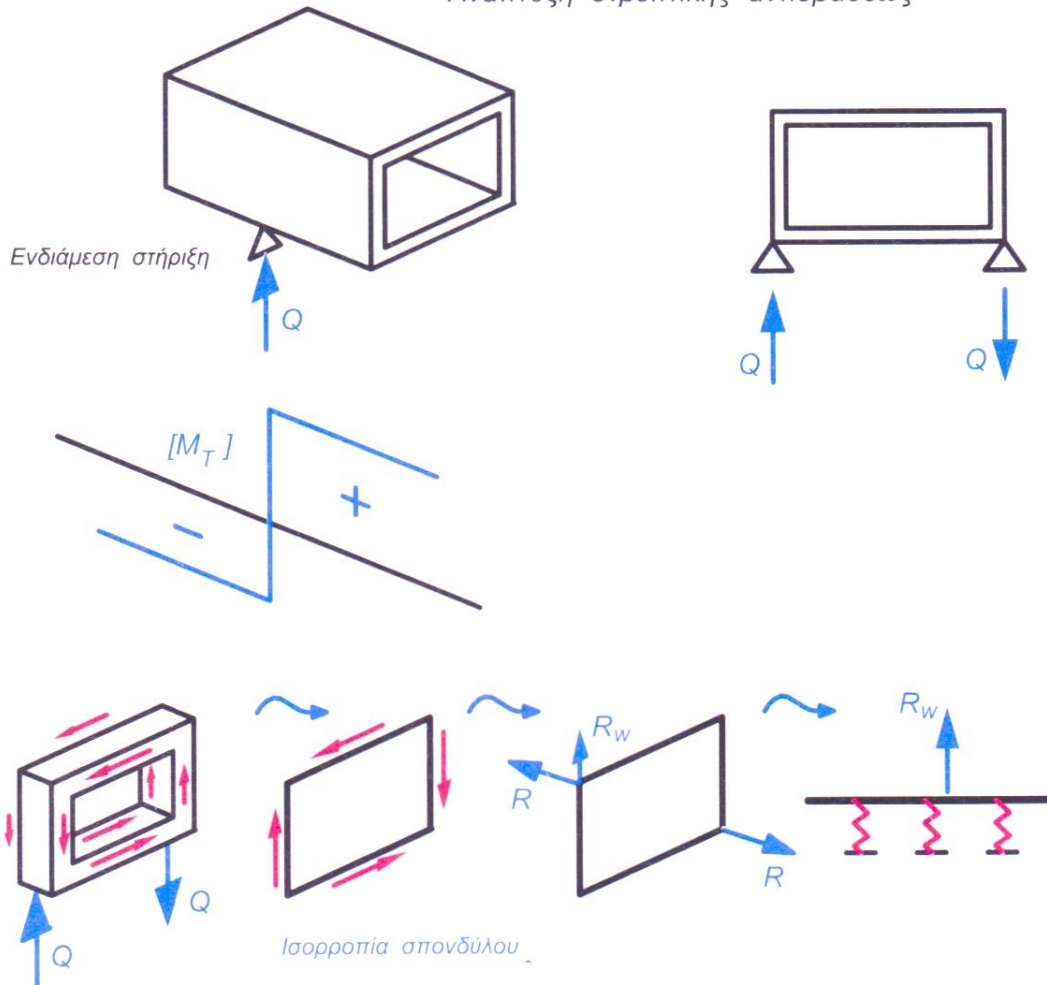


Σχήμα 2. 10 Συμπεριφορά κιβωτιοειδούς δοκού κάτω από έκκεντρο συγκεντρωμένο φορτίο

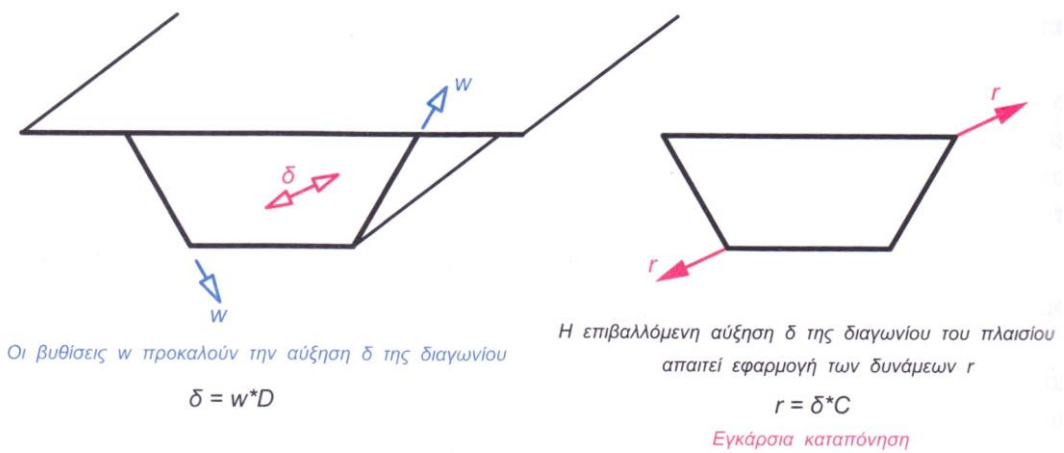
## Επισημάνσεις – Παρατηρήσεις

- ◆ Η συνιστώσα  $R_w$  της διαγώνιας φόρτισης  $R$  ασκείται στον κορμό και τον παραμορφώνει. Αυτό έχει αποτέλεσμα την κινητοποίηση της εγκάρσιας στιβαρότητας  $C$  του κλειστού πλαισίου. Το  $C$  εκδηλώνεται με μία ασκούμενη δύναμη  $r_w$  αντίθετης φοράς πάνω στον κορμό, η οποία συνδέεται γραμμικά με το βέλος του κορμού όπως διαπιστώνεται από την έκφραση  $r_w = K * w$ . Έτσι ο κορμός μπορεί να προσομοιωθεί ως δοκός επί ελαστικής βάσεως (Σχήμα 2.10).
- ◆ Το βέλος  $w$  αναφέρεται στην παραμόρφωση του προφίλ και όχι στο συνολικό βέλος του κορμού. Στο συνολικό βέλος συμβάλλει και η στρεπτική στροφή της διατομής του στερεού. Έτσι, εάν υπάρχει εγκάρσιο διάφραγμα σε κάποια θέση, η διατομή παραμένει απαραμόρφωτη και ισχύει η συνθήκη  $w = 0$ . Δηλαδή, στη θέση αυτή πρέπει να παρεμβάλλεται μία στήριξη στο μοντέλο της δοκού επί ελαστικής βάσεως (Σχήμα 2.11).
- ◆ Εάν δεν υπάρχει εγκάρσιο διάφραγμα σε κάποια θέση αναπτύσσονται αντιδράσεις λόγω στρεπτικής καταπόνησης. Στη θέση αυτή δεν πρέπει να παρεμβάλλεται στήριξη στο μοντέλο δοκός επί ελαστικής βάσεως. Οι κατακόρυφες αντιδράσεις πρέπει να θεωρούνται σαν αντισυμμετρικά φορτία που προσφέρουν μία συγκεντρωμένη στρεπτική ροπή, η οποία οδηγεί σε μία συγκεντρωμένη δύναμη στον ελαστικά εδραζόμενο κορμό (Σχήμα 2.12).
- ◆ Η διατομή πέρα από τη διαμήκη ένταση δέχεται και εγκάρσια καταπόνηση. Από την παραμόρφωση  $w$  του κορμού συνεπάγεται η διαγώνια φόρτιση  $r$  του κλειστού πλαισίου. Η φόρτιση αυτή οδηγεί στην αντίστοιχη ένταση του κλειστού πλαισίου η οποία εκφράζεται ως:  $r = w * k * s / b_w$  (Σχήμα 2.13).

Ανάπτυξη στρεπτικής αντιδράσεως



Σχήμα 2.11 Συμπεριφορά στην εσωτερική στήριξη με απουσία εγκάρσιου διαφράγματος



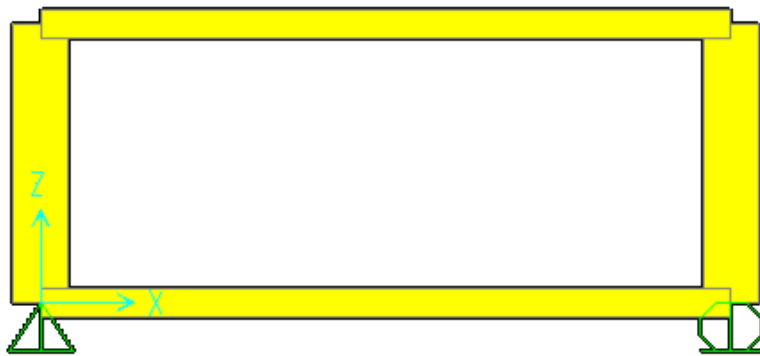
Σχήμα 2.12 Εγκάρσια ένταση λόγω παραμόρφωσης του προφίλ



### 2.1.4 Παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας σε ευθύγραμμη γέφυρα

Σε ευθύγραμμη γέφυρα μήκους 40 μέτρων εφαρμόζεται η θεωρία που αναπτύχθηκε παραπάνω για τις ευθύγραμμες δοκούς.

Εξετάζεται ο κορμός της γέφυρας ως αμφιέριστη δοκός μήκους προφανώς ίσου με 40 μέτρα. Η διατομή της γέφυρας είναι ορθογωνική κιβωτιοειδής διατομή όπου  $b_u = 6,2\text{m}$  και  $h = b_w = 2,5\text{m}$ , πάχος άνω και κάτω πέλματος 0,25m, και πάχος τοιχωμάτων 0,50m όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.14.



Σχήμα 2. 13 Κιβωτιοειδής διατομή

Η δοκός (κορμός της γέφυρας) δέχεται το φορτίο κυκλοφορίας το οποίο αντιστοιχεί σε φορτηγό το οποίο εκτείνεται σε 8m στο μέσο των 40m κατά μήκος της γέφυρας και ισούται με 35,63 kN/m.

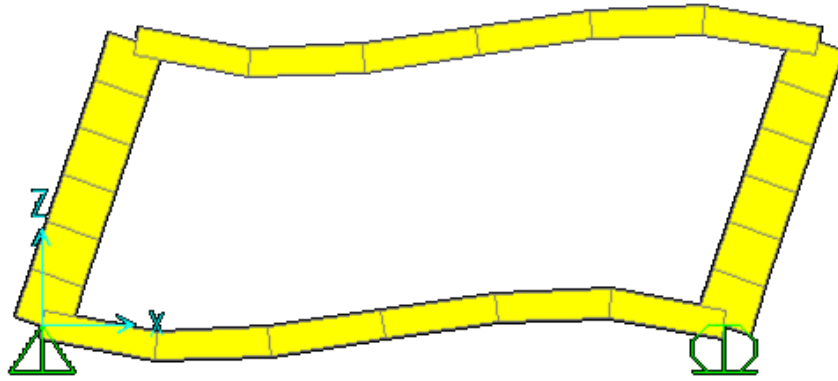
Βάσει των παραπάνω σχέσεων από την §2.1.3, υπολογίζονται τα αντίστοιχα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής:

$$\beta = 1, a_0 = 1,24, \alpha_u = 1,24, k^w = 1,12, y_o = 1,25, D = 1,495, s = 6,69 \text{ m}$$

$$\text{καθώς και } I_w = [ 2,5 - (0,25+0,25/2) ]^3 * 0,5 / 12 = 0,4746 \text{ m}^4,$$

$$\text{οπότε } I^* = 0,4746 * 1,12 = 0,5316 \text{ m}^4$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η στιβαρότητα (ακαμψία)  $C$  (kN/m<sup>2</sup>) του σπονδύλου μοναδιαίου μήκους για σχετική απομάκρυνση των διαγωνίως απέναντι γωνιών του κατά 1.0 m.



Σχήμα 2. 14 Παραμόρφωση διατομής υπό τη μοναδιαία φόρτιση

Εφαρμόζοντας συνισταμένη δύναμη ίση με τη μονάδα κατά μήκος της διαγωνίου του σπονδύλου προκύπτει οριζόντια μετατόπιση  $u_x = 6,102 \cdot 10^{-5}$ . Η προβολή της  $u_x$  πάνω στη διαγώνιο προκύπτει  $u = 5,67 \cdot 10^{-5}$ .

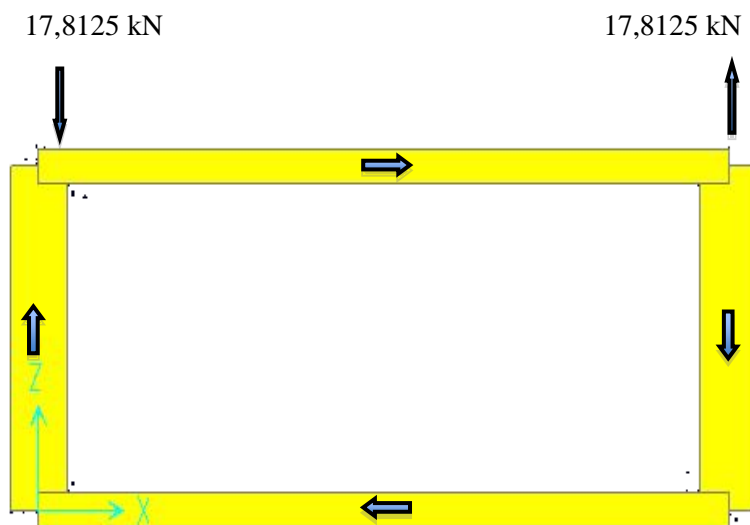
Οπότε η στιβαρότητα ισούται με  $C = 1/u = 17678,6 \text{ kN/m}^2$  και ο δείκτης ακαμψίας ισούται με  $K = D \cdot C \cdot b_w / s = 9877 \text{ kN/m}^2$ .

Προς επιβεβαίωση του παραπάνω δείκτη δυσκαμψίας έγιναν συμπληρωματικές επιλύσεις όπως αναγράφονται στις αντίστοιχες πηγές.

Η επίλυση κατά *Menn* έδωσε  $K = 9973,37 \text{ kN/m}^2$  και η επίλυση κατά *Schlaich* έδωσε  $K = 9990 \text{ kN/m}^2$ .

Επομένως, ο δείκτης δυσκαμψίας όπως υπολογίστηκε παραπάνω συμφωνεί με τις συμπληρωματικές επιλύσεις με απόκλιση μικρότερη του 1%.

Ακολουθώντας τη θεωρία, ο σπόνδυλος ισορροπεί κάτω από το αντισυμμετρικό ζεύγος δυνάμεων και την περιρρέουσα διαφορική διατμητική ροή  $v$ .



Διαφορική ροή  $7,125 \text{ kN/m}$

Σχήμα 2. 15 Ισορροπία σπονδύλου

Εφαρμόζοντας τις εκφράσεις της §2.1.3 υπολογίζεται η διαφορική διατμητική ροή:

$$\Delta v = (q_s * b_0 + 2 * m_s) / (4F_k) = 35,63 * 6,2 * 2 / (4 * 15,5) = 7,125 \text{ kN/m}$$

$$\text{όπου } F_k = d * (b_0 + b_u) / 2 = 2,5 * (6,2 + 6,2) / 2 = 15,5 \text{ m}^2$$

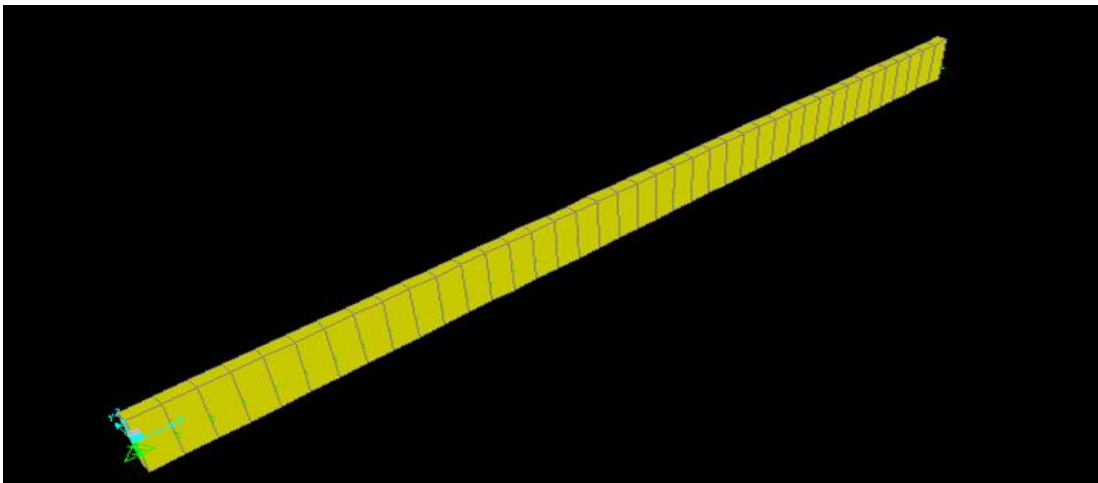
$$v * h = 7,125 \text{ kN/m} * 2,5 \text{ m} = 17,8125 \text{ kN}$$

Οπότε, ο αριστερός κορμός δέχεται δύναμη →

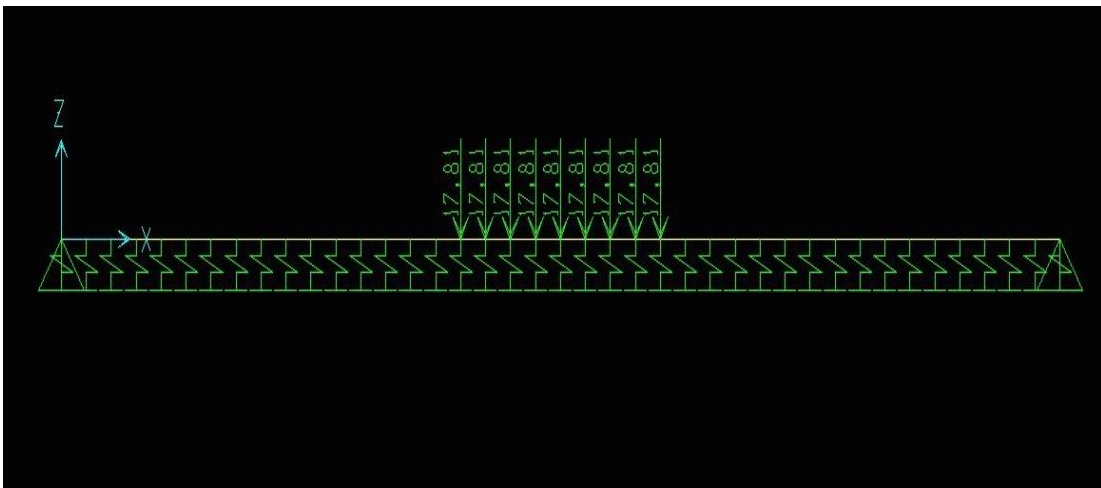
$$R_w = q_s / 2 - v * h = 35,63 - 17,8125 = 17,8125 \text{ kN}$$

Όπως αναλύθηκε παραπάνω, ο κορμός λειτουργεί σαν δοκός εδραζόμενη σε ελαστική βάση με δείκτη ακαμψίας  $K = 9877 \text{ kN/m}^2$ .

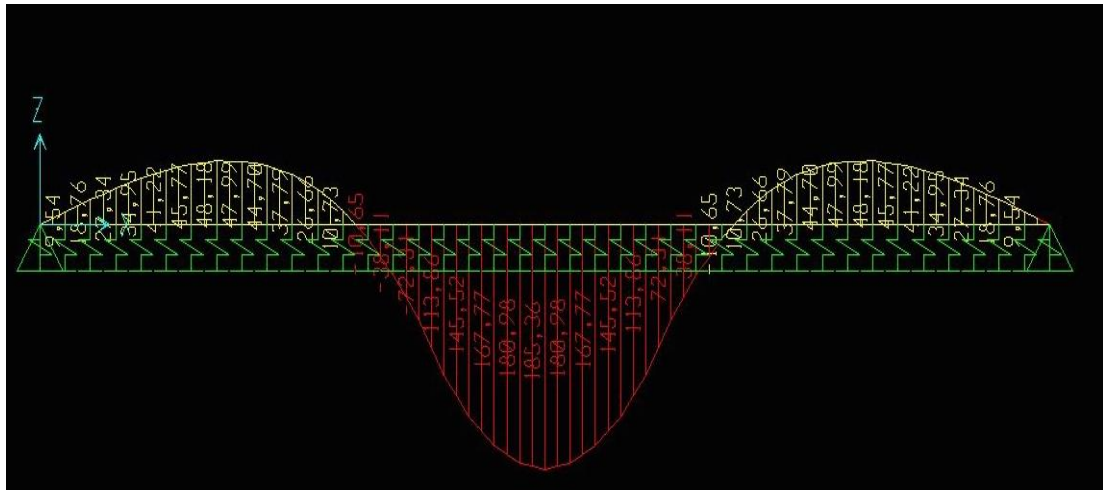
Προσομοιώνεται λοιπόν ο αριστερός κορμός ως δοκός επί ελαστικής βάσεως και φορτίζεται με τη δύναμη  $R_w = 17,8125 \text{ kN}$  σε έκταση 8 μέτρα στο μέσο των 40 μέτρων όπως εξηγήθηκε και στην αρχή της §2.1.4.



Σχήμα 2. 16 Διατομή-κορμός ευθείας δοκού επί ελαστικής βάσεως



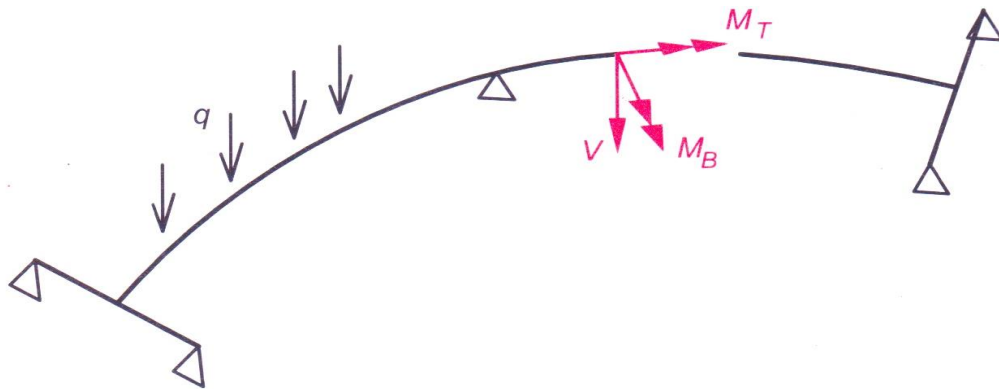
Σχήμα 2. 17 Φόρτιση δοκού επί ελαστικής βάσεως



## 2.1.5 Θεωρία καμπύλης δοκού

### Γενικά

Η κιβωτιοειδής διατομή είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για τις καμπύλες σε κάτοψη δοκοειδείς γέφυρες, λόγω της μόνιμης στρεπτικής καταπόνησης που προκαλείται ακόμα και από τα χωρίς εκκεντρότητα φορτία, όπως είναι το ίδιο βάρος.



Σχήμα 2. 19 Μοντέλο καμπύλης δοκού με τα εντατικά της μεγέθη

Ο προσομοιωμένος ραβδωτός φορέας είναι τύπου εσχάρας (επίπεδος με εγκάρσια φόρτιση) και αναπτύσσει σε κάθε σημείο του τρία εντατικά μεγέθη:

κατακόρυφη τέμνουσα δύναμη  $V$

καμπτική ροπή  $M_B$  που κάμπτει σε κατακόρυφο επίπεδο

στρεπτική ροπή  $M_T$

Θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι υπάρχει αλληλεξάρτηση των καμπτικών και στρεπτικών ροπών της δοκού. Άρα, οποιαδήποτε ανακατανομή του διαγράμματος καμπτικών ροπών συνοδεύεται από την κατάλληλη τροποποίηση του διαγράμματος στρεπτικών ροπών.

### **Καθορισμός της έντασης του ραβδωτού φορέα**

Η καμπύλη δοκός θεωρείται ότι έχει σταθερή κατά μήκος ακτίνα καμπυλότητας ίση με  $R$ , προς διευκόλυνση του σχεδιασμού.

Η φόρτιση απαρτίζεται από ένα κατακόρυφο φορτίο  $q$  που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της διατομής και μία κατανεμημένη στρεπτική ροπή  $m_D$ . Ο ραβδωτός φορέας όπως προαναφέρθηκε είναι τύπου εσχάρας, οπότε κάθε τμήμα της δοκού πρέπει να ικανοποιεί τρεις συνθήκες ισορροπίας και συγκεκριμένα: ισορροπία των κατακορύφων δυνάμεων, ισορροπία των προβολών των διανυσμάτων των ασκούμενων ροπών πάνω σε δύο αυθαίρετους άξονες του επιπέδου της.

Για ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $ds$  με σχηματιζόμενη γωνία  $d\varphi$  ( $1/R = d\varphi/ds$ ) οι εξισώσεις ισορροπίας αναγράφονται με τη μορφή:

$$dV/ds = -q, \text{ ισορροπία κατακορύφων δυνάμεων}$$

$$dM_T/ds = -m_D - M_B/R, \text{ ισορροπία διανυσματικών ροπών, εφαπτομενικά του άξονα}$$

$$dM_B/ds = V + M_T/R, \text{ ισορροπία διανυσματικών ροπών, κάθετα προς τον άξονα}$$

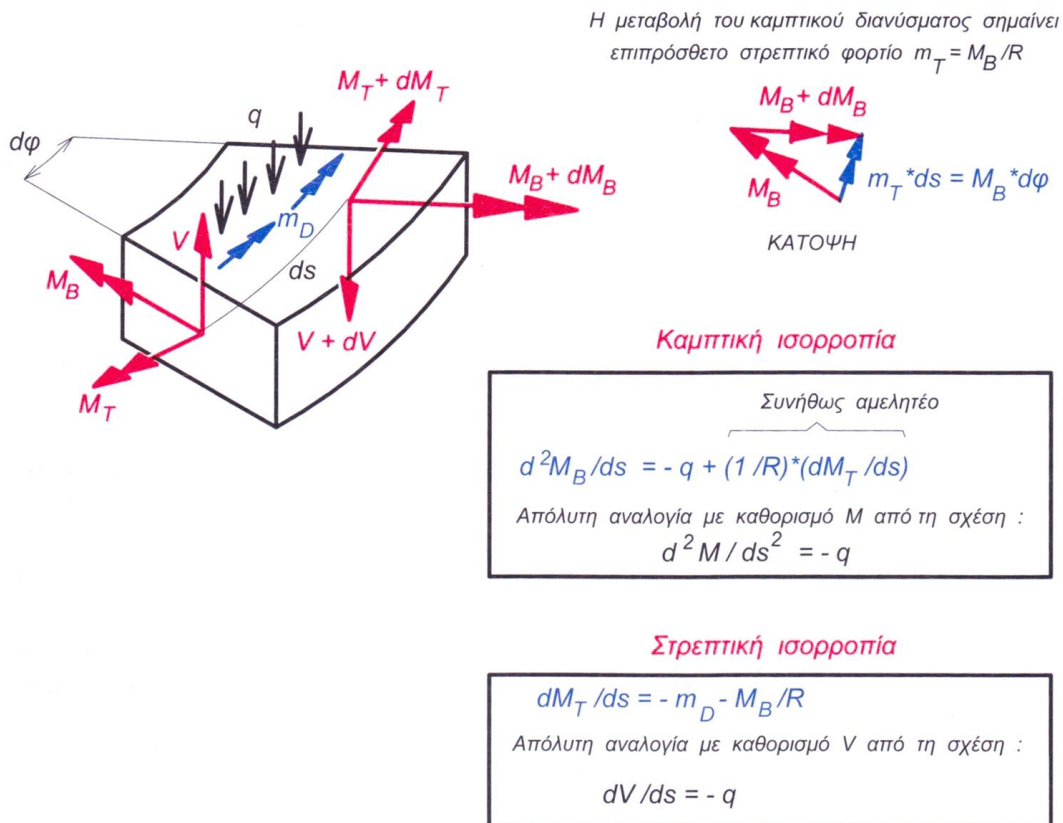
Μπορεί να διαπιστωθεί από τις εξισώσεις αλλά και από το σχήμα ότι η διανυσματική μεταβολή της καμπτικής ροπής μεταξύ δύο γειτονικών διατομών ισοδυναμεί με την άσκηση ενός κατανεμημένου στρεπτικού φορτίου, όπως υποδηλώνει και ο όρος  $(M_B/R)$  στο δεύτερο μέλος της δεύτερης εξίσωσης. Δηλαδή, η εμφάνιση μίας καμπτικής ροπής  $M_B$  σε δύο παρειές της καμπύλης δοκού, συνεπάγεται την άσκηση μιας επιπρόσθετης κατανεμημένης στρεπτικής ροπής  $M_B/R$  πέραν της  $m_D$ . Παρομοίως γίνεται αντιληπτό ότι η διανυσματική μεταβολή της στρεπτικής ροπής  $M_T$  συνδέεται με την ανάπτυξη κάμψεως, όπως φαίνεται στην τρίτη εξίσωση.

Απαλοίφοντας την τέμνουσα  $V$  από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν οι δύο τελικές εξισώσεις που αποδεικνύουν την αλληλεξάρτηση των καμπτικών και στρεπτικών ροπών της δοκού:

$$1. \quad d^2 M_B / ds^2 = - ( q - 1/R * dM_T/ds )$$

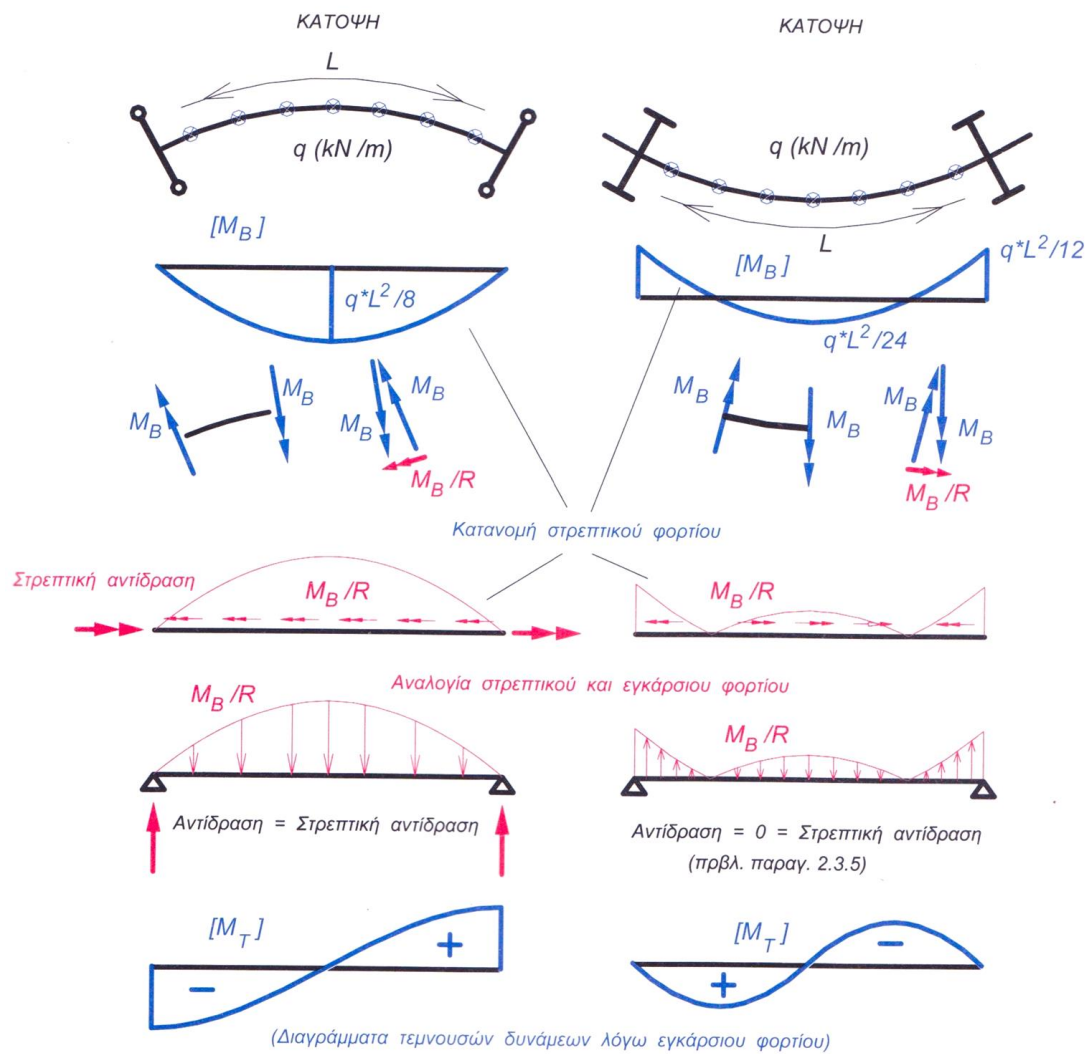
$$2. \quad dM_T/ds = - ( M_B/R + m_D )$$

Αν το άνοιγμα  $L$  είναι μικρό σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας  $R$  και επί πλέον η κατανεμημένη στρεπτική ροπή  $m_D$  είναι μικρότερη από το  $(q \cdot R)$ , γίνεται αντιληπτό ότι ο όρος  $-(1/R) \cdot (dM_T/ds)$  στο δεύτερο μέλος της πρώτης εξίσωσης είναι πολύ μικρότερος του  $q$ . Έτσι, η πρώτη εξίσωση ισορροπίας απλοποιείται και γράφεται:  $d^2M_B/ds^2 = -q$



Σχήμα 2. 20 Αξιολόγηση των εξισώσεων ισορροπίας

Η εξίσωση αυτή θυμίζει τη σχέση ισορροπίας της ευθύγραμμης δοκού μεταξύ καμπτικών ροπών και φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι, υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, **οι καμπτικές ροπές του καμπύλου φορέα μπορούν να προσεγγισθούν από τις καμπτικές ροπές ενός ευθύγραμμου φορέα με μήκος  $L$  όσο και το μήκος του τόξου.**



Σχήμα 2.21 Πρακτικός καθορισμός καμπτικής και στρεπτικής καταπόνησης καμπύλης δοκού



### ***Η καταπόνηση των τοιχωμάτων της διατομής***

Η ανάπτυξη της στρεπτικής εντάσεως που αναφέρεται στο ραβδωτό προσομοίωμα του φορέα, συνεπάγεται, πέραν της διατμητικής ροής κατά Bredt, μία επιπρόσθετη ένταση για τα τοιχώματα της κιβωτιοειδούς διατομής. Η επιπρόσθετη αυτή ένταση προκύπτει από τον τρόπο εισαγωγής των φορτίων βαρύτητας στη δοκό.

Σημειώνεται ότι οι δρώσες θλιπτικές δυνάμεις  $D$  στο άνω πέλμα της διατομής και οι δρώσες εφελκυστικές δυνάμεις  $Z$  στο κάτω πέλμα λόγω κάμψεως, προκαλούν κατανεμημένες δυνάμεις εκτροπής  $q$ , οι οποίες αποτυπώνονται με τη σχέση:

Κατανεμημένη δύναμη εκτροπής = Αξονική δράση / Ακτίνα καμπυλότητας

Είναι φανερό από το Σχήμα 2.23 ότι οι εγκάρσιες κατανεμημένες δυνάμεις  $q_D$  και  $q_Z$  (ίσες και αντίθετες) που υποχρεώνεται να παραλάβει το άνω και το κάτω πέλμα αντίστοιχα, δημιουργούν ένα στρεπτικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, που δεν είναι άλλο από εκείνο που προέκυψε προηγουμένως από τη διανυσματική μεταβολή των καμπτικών ροπών. Προκύπτει:

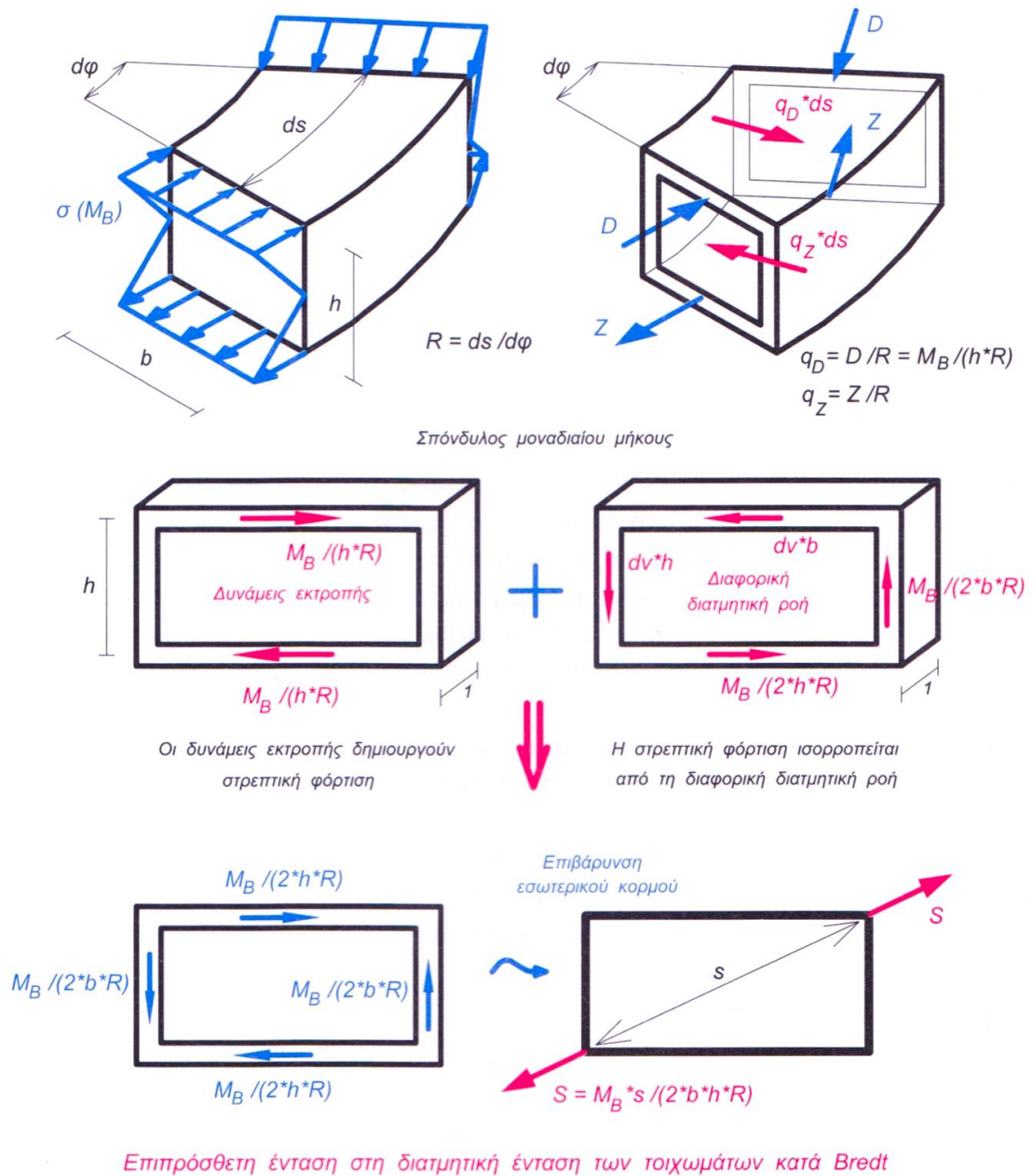
$$q_D = D/R = M_B/(h \cdot R) \quad q_Z = Z/R = M_B/(h \cdot R)$$

Και δεδομένου ότι  $D = Z$ , είναι

$$q_D \cdot h = M_B/R$$

Γίνεται σαφές λοιπόν, πως ακόμα και χωρίς καμία εξωτερικά επιβεβλημένη κατανεμημένη στρεπτική ροπή  $m_D$ , η παρουσία και μόνο κάμψεως πάνω σε καμπύλο άξονα συνεπάγεται την επιβολή ενός κατανεμημένου στρεπτικού φορτίου ( $M_B/R$ ), που προκαλεί φυσικά στρεπτική ένταση σύμφωνα με την εξίσωση:

$$dM_T/ds = - M_B/R$$



Σχήμα 2.22 Εισαγωγή της στρεπτικής έντασης στα τοιχώματα της κιβωτιοειδούς δοκού

Σύμφωνα με το Σχήμα 2.23, ο αποκοπτόμενος σπόνδυλος μοναδιαίου μήκους δέχεται στο άνω και κάτω πέλαμα αντίστοιχα τα φορτία  $q_D$  και  $q_Z$  και βρίσκεται σε ισορροπία μαζί με τις ασκούμενες διαμητικές ροές κατά Bredt στις δύο όψεις του. Η συνισταμένη των ροών αυτών αποτελεί τη λεγόμενη διαφορική δράση  $dv$  ανά μονάδα εγκάρσιου μήκους. Έτσι προκύπτει σύμφωνα με τον τύπο του Bredt:

$$dv/ds = dM_T/ds \cdot 1/(2bh) = - M_B/(2bhR)$$

Ο σπόνδυλος λοιπόν ισορροπεί σαν ένας επίπεδος φορέας κάτω από τα φορτία  $q_D$ ,  $q_Z$  και  $dv$ . Προκύπτει έτσι η αυτοισορροπούμενη διαγώνια καταπόνηση της διατομής που διακρίνεται στο Σχήμα 2.23 και ισούται με:

$$S = M_B / (2 \bullet R) * \sqrt{1/\square^2 + 1/H^2}$$

Η διαγώνια αυτή καταπόνηση, όπως και στην ευθύγραμμη δοκό, προκαλεί διαμήκη κάμψη των τοιχωμάτων και εγκάρσια κάμψη της διατομής.

Παρόλο που η αναλογία δεν είναι απόλυτα ακριβής, για τις ανάγκες της προδιαστασιολογήσεως και για περιορισμένες καμπυλότητες μπορεί να θεωρηθεί ότι ο αριστερός κορμός (εσωτερικά της καμπύλης) δέχεται το ομοιόμορφο φορτίο  $S_w = M_B / (2 \cdot R \cdot b)$  προς τα κάτω και λειτουργεί σαν δοκός επί ελαστικής βάσεως με <<δείκτη εδάφους>>  $K$ , καθοριζόμενο όπως και στην ευθύγραμμη δοκό.

#### Επισημάνσεις – Παρατηρήσεις

- ◆ Οι παραπάνω εξισώσεις αφορούν μόνο την ισορροπία και, μη λαμβάνοντας υπόψιν το συμβιβαστό των παραμορφώσεων σε περίπτωση υπερστατικής στηρίξεως, δεν οδηγούν στην ακριβή λύση παρά μόνον όταν ο λόγος θεωρηθεί ίσος με μηδέν. Εν τούτοις η χρήση των εξισώσεων για σκοπούς προδιαστασιολόγησης είναι επαρκής.
- ◆ Για μία καμπύλη αμφιέριστη δοκό και για λόγο  $L / R \leq 0.3$ , οι διαφορές από την ακριβή λύση είναι μικρότερες του 1%. Η εν λόγω σχέση του  $L$  προς το  $R$  σημαίνει μία επίκεντρη γωνία όχι μεγαλύτερη των  $20^\circ$  περίπου.
- ◆ Η επιβολή μιας κατανεμημένης ροπής στρέψεως τόσο σε ευθύγραμμη όσο και σε καμπύλη δοκό με αρκετά μικρό  $L/R$ , προκαλεί μόνο στρέψη και μία ασήμαντη, πρακτικά μηδενική, κάμψη. Ενώ για την ευθύγραμμη δοκό αυτό είναι προφανές, για την καμπύλη δοκό αυτό προκύπτει από τις τελικές εξισώσεις (1) και (2).

## 2.1.6 Παράδειγμα εφαρμογής της θεωρίας σε καμπύλη γέφυρα

Σε καμπύλη γέφυρα μήκους 40 μέτρων και ακτίνας καμπυλότητας  $R = 114,5$  εφαρμόζουμε τη θεωρία που αναπτύχθηκε για τις καμπύλες δοκούς. Η ακτίνα καμπυλότητας αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $20^\circ$ . Η διατομή της καμπύλης γέφυρας είναι όμοια με τη διατομή της ευθύγραμμης γέφυρας.



Σχήμα 2. 23 Κιβωτιοειδής διατομή

Η ροπή αδράνειας της κιβωτιοειδούς διατομής υπολογίζεται:

$$I = 1/12 * 6,2 * 2,5^3 - 5,2 * 2^3 / 12 = 4,61 \text{m}^4$$

Εξετάζονται ως αμφιέριστες δοκοί η μέση γραμμή κατά μήκος του άξονα της γέφυρας καθώς και ο κορμός της γέφυρας.

Η γέφυρα φορτίζεται μόνο με το ίδιο βάρος της το οποίο υπολογίζεται →

$$g = \gamma_b * A_c = 25 \text{kN/m}^3 * (6,2 \text{m} * 2,5 \text{m} - 5,2 \text{m} * 2 \text{m})$$

$$g = 127,5 \text{ kN/m}$$

Η μέση γραμμή της γέφυρας (αμφιέριστη δοκός κιβωτιοειδούς διατομής) λόγω του ίδιου βάρους καταπονείται με ροπή κάμψεως στο μέσο →

$$M_m = g * l^2 / 8 = 127,5 * 40^2 / 8 = 25500 \text{ kNm}$$

Οι καμπτικές ροπές του καμπύλου φορέα σύμφωνα με τη θεωρία μπορούν να προσεγγισθούν από τις καμπτικές ροπές ενός ευθύγραμμου φορέα με μήκος  $L$  όσο και το μήκος του τόξου.

Η καμπτική ροπή προκαλεί τάση ίση με →

$$\sigma = M_m * y_0 / I = 25500 * 1,25 / 4,61 = 6914,32 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{\text{κάμψης}} = \mathbf{6914,32 \text{ kN/m}^2}$$

Όμοια με την ευθύγραμμη δοκό, ο κορμός της καμπύλης γέφυρας προσομοιώνεται ως δοκός εδραζόμενη σε ελαστική βάση με δείκτη ακαμψίας  $K = 9877 \text{ kN/m}^2$ .

Από την ισορροπία του σπονδύλου μοναδιαίου μήκους προκύπτει η αυτοισορροπούμενη διαγώνια καταπόνηση  $S = M_B * s / (2bhR)$ , η οποία όπως εξηγήθηκε στη θεωρία προκαλεί επιπρόσθετη ένταση στη διατμητική ένταση των τοιχωμάτων κατά Bredt .

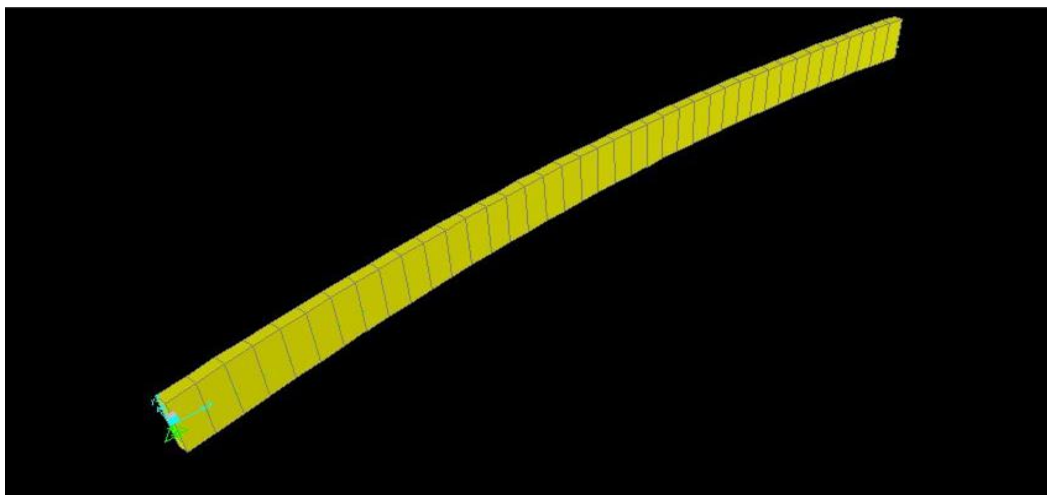
Όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό, στην παραπάνω σχέση όλοι οι όροι είναι σταθεροί εκτός από την ροπή κάμψεως  $M_B$  η οποία κατά μήκος της γέφυρας έχει παραβολική μορφή.

Άρα, για την εύρεση του φορτίου  $S_w = S * \sin \alpha = S * 0,374$ , κατακόρυφη συνιστώσα του  $S$ , πρέπει να προσδιοριστούν οι τιμές του καμπτικού διαγράμματος ροπών  $M_B$ .

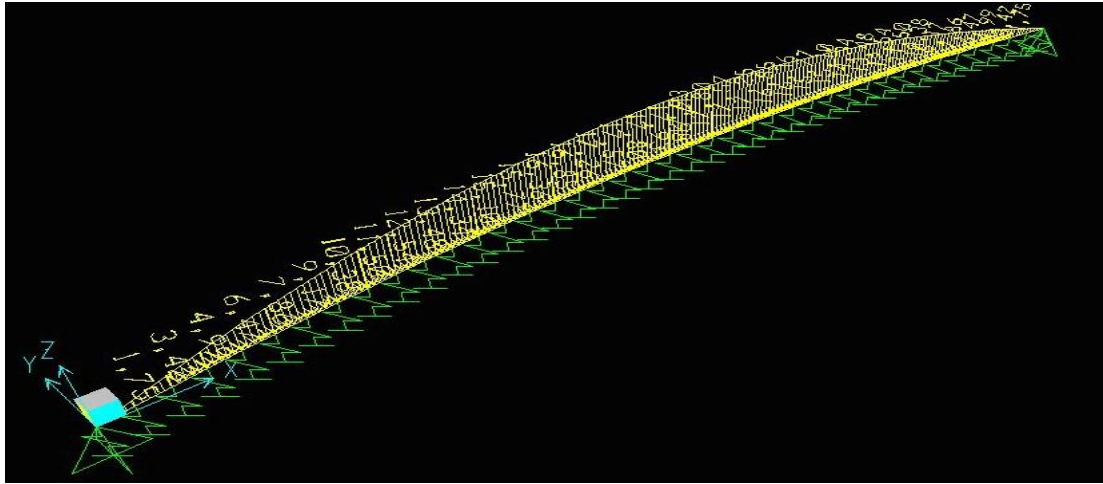
Από μια απλή στατική επίλυση προσδιορίζεται το  $M_B$  ανά 1m.

Χρησιμοποιώντας φύλλο εργασίας στο Excel προκύπτει ο πίνακας με όλες τις τιμές του  $S$  ανά 1m ο οποίος επισυνάπτεται στο Παράρτημα.

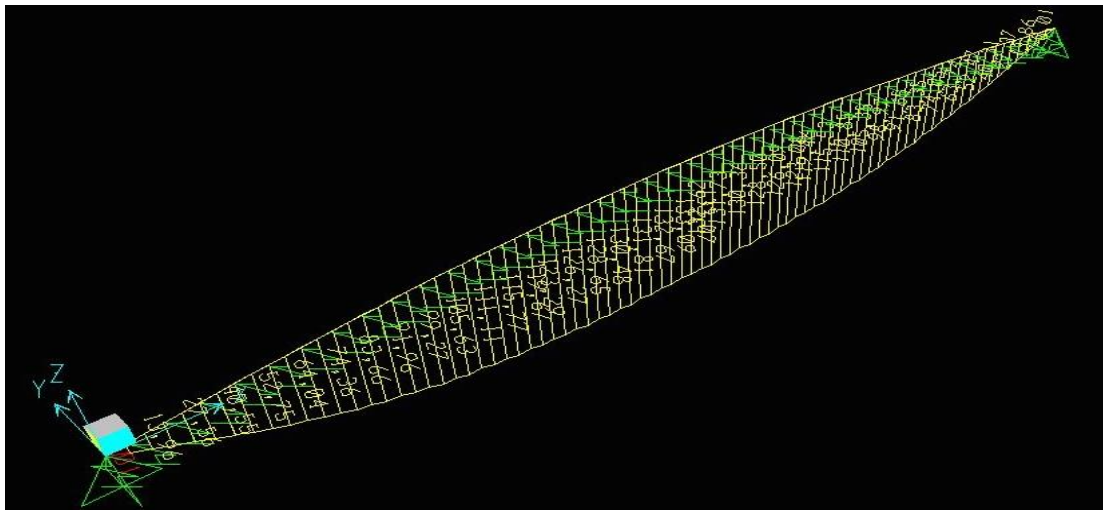
Έχοντας το φορτίο  $S_w$  ανά 1m έχει προσδιορισθεί η επιβάρυνση του εσωτερικού κορμού. Οπότε, φορτίζω τη δοκό επί ελαστικής βάσεως και λαμβάνω τη καμπτική ροπή στο μέσο της δοκού – κορμού  $M_m = 130,92 \text{ kNm}$ .



**Σχήμα 2. 24** Διατομή-κορμός καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως



Σχήμα 2. 25 Φόρτιση καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως



Σχήμα 2. 26 Διάγραμμα καμπτικών ροπών

Η ροπή κάμψεως προκαλεί τάση στο μέσο του κορμού στην άνω και κάτω ίνα

$$\sigma^{Sw} = M_m * y_0 / I^* = 130,92 * 1,25 / 0,5316 = 307,84 \text{ kN/m}^2.$$

Τελικώς, η συνολική τάση στο μέσο του κορμού ισούται με το άθροισμα της τάσεως που προκαλείται από την κάμψη του ίδιου βάρους στον άξονα της γέφυρας και της τάσεως που προκαλείται από την ισορροπία του σπονδύλου λόγω της δύναμης S.

$$\text{Άρα, } \sigma = 6914,32 + 307,84 = 7222,16 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma = 7222,16 \text{ kN/m}^2$$

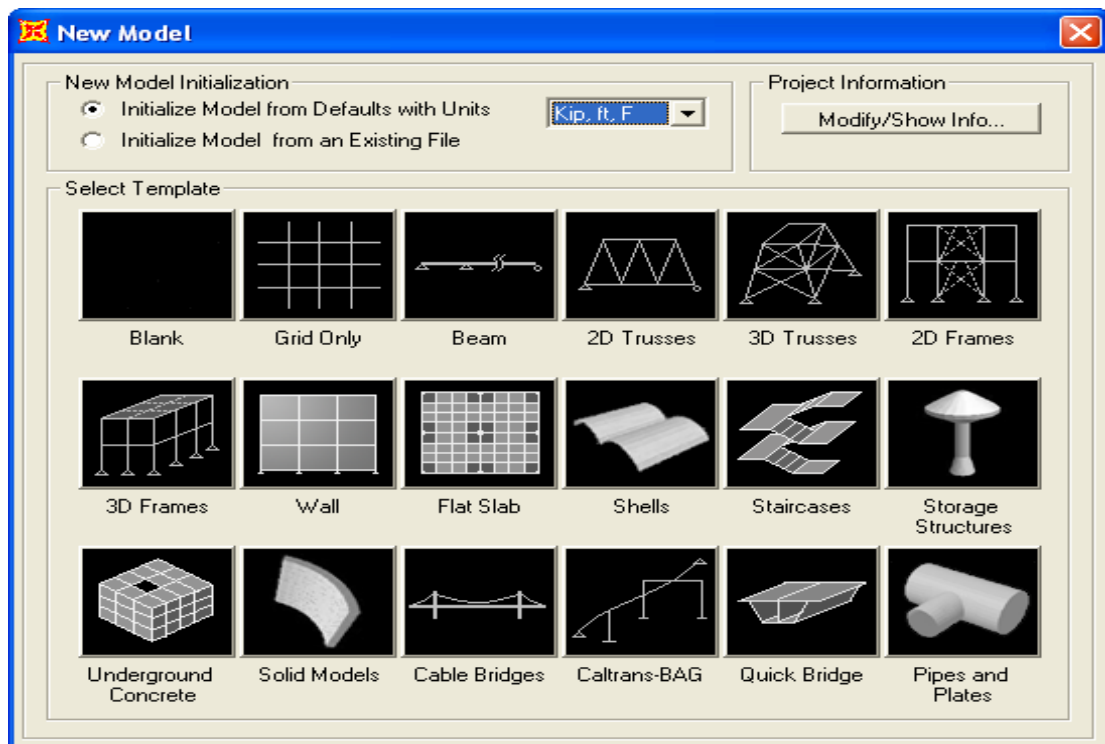
Σημείωση: Η επίλυση για την εύρεση της ροπή κάμψης στη δοκό επί ελαστικής βάσεως έγινε με χρήση του προγράμματος SAP2000.

## 2.2 Ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Η τρισδιάστατη προσομοίωση των γεφυρών γίνεται με τη βοήθεια του προγράμματος SAP2000. Το SAP2000/Bridge είναι ένα πρόγραμμα ανάλυσης και σχεδιασμού γεφυρών. Αποτελείται από χρήσιμα “εργαλεία” με τα οποία απλοποιείται η διαδικασία στησίματος – μοντελοποίησης της γέφυρας.

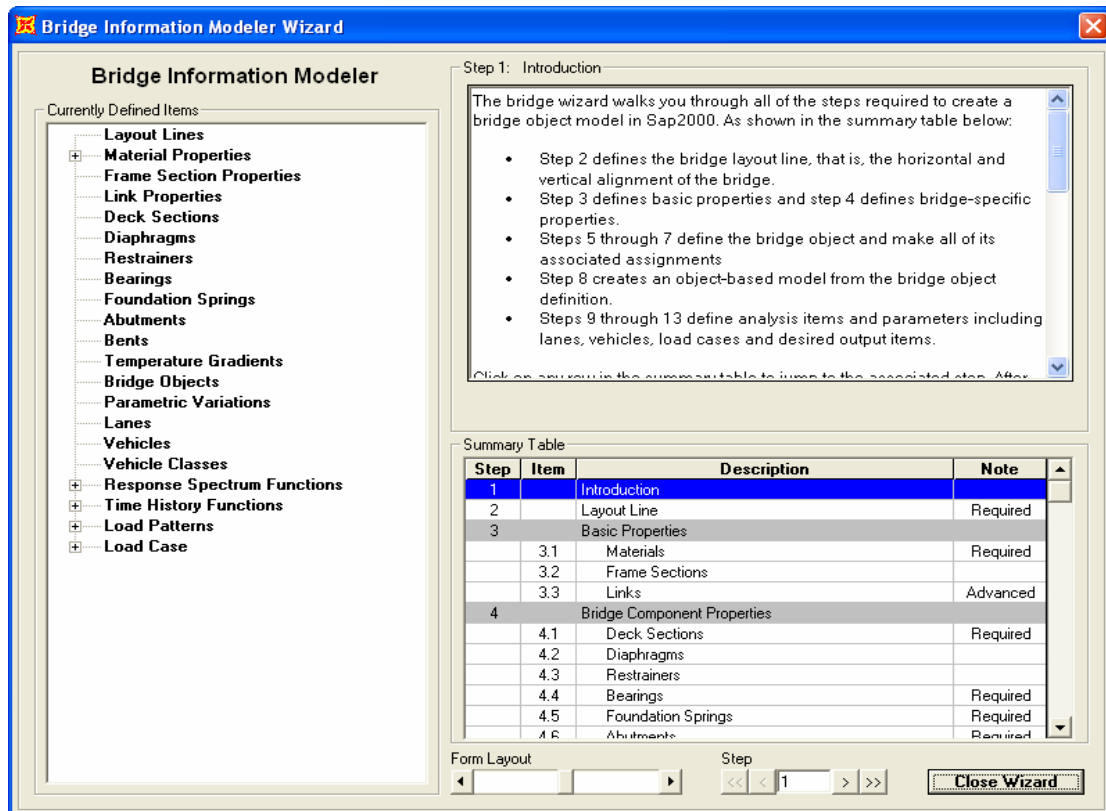
Ενδεικτικά παρουσιάζονται οι δυνατότητες και οι <<ευκολίες>> που παρέχει το Bridge μέσα από το μενού του SAP2000.

- Από το File menu → New Model εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο με πολλές επιλογές για το είδος του φορέα που πρόκειται να στηθεί. Με την επιλογή Quick Bridge στήνεται ένας τυποποιημένος φορέας γέφυρας και ενεργοποιείται το Bridge Menu.



Σχήμα 2. 27 New model form

- Από το Bridge menu → Wizard εμφανίζεται το Bridge Wizard το οποίο διαθέτει τα βασικά χαρακτηριστικά για το σχεδιασμό της γέφυρας και παρέχει τη δυνατότητα επιλογής – τροποποίησής τους.



Σχήμα 2. 28 SAP2000/Bridge Wizard

Όπως διακρίνεται από το παράθυρο με το Bridge Wizard μπορεί να επιλεγεί η βασική γεωμετρία της γέφυρας και οι συνθήκες στηρίξεως της. Παρέχονται επιλογές σχετικά με τη διατομή του καταστρώματος, τα ενδεχόμενα διαφράγματα, τα στοιχεία θεμελίωσης, τα ακρόβαθρα κ.ά.

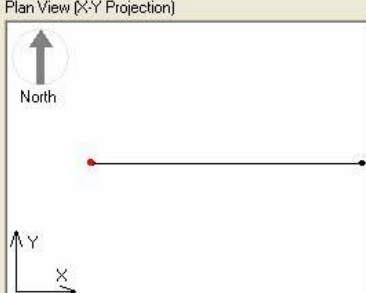
- Με την επιλογή του Layout Line από το παραπάνω μενού μπορεί να ορισθεί το μήκος της γέφυρας. Από το Quick Start Define στο Horizontal Layout Data επιλέγεται αν η γέφυρα θα είναι ευθύγραμμη ή καμπύλη. Από το Bridge Layout Line Data για την καμπύλη γέφυρα ορίζεται η επιθυμητή ακτίνα καμπυλότητας.



**Bridge Layout Line Data**

Bridge Layout Line Name:  Coordinate System:  Shift Layout Line:  Units:

Plan View (X-Y Projection)



Station:  Bearing:  E Radius:  Grade:

X:  Y:  Z:

Coordinates of Initial Station

Global X:  Global Y:  Global Z:

Initial and End Station Data

Initial Station (ft):  Initial Bearing:  Initial Grade in Percent:  End Station (ft):




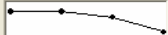
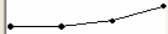
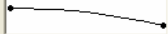
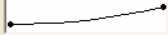




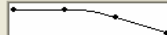

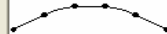



Horizontal Layout Data

Define Layout Data

Σχήμα 2. 29 Specify layout line data

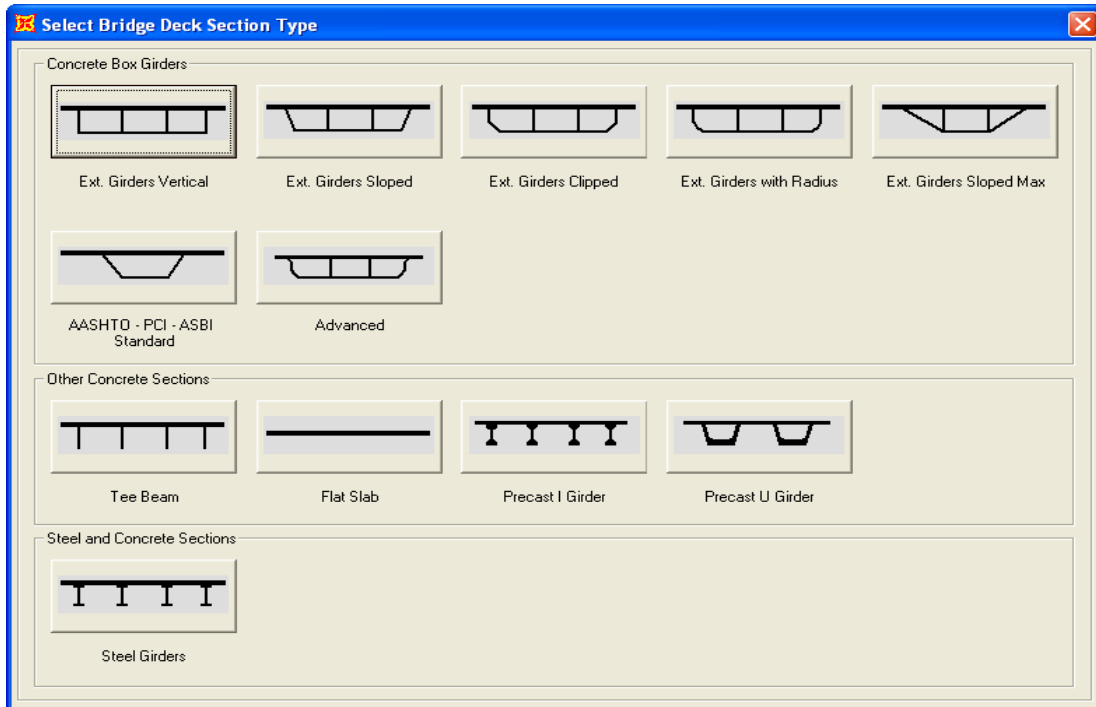
**Horizontal Layout Line Data - Quick Start**

Select a Quick Start Option

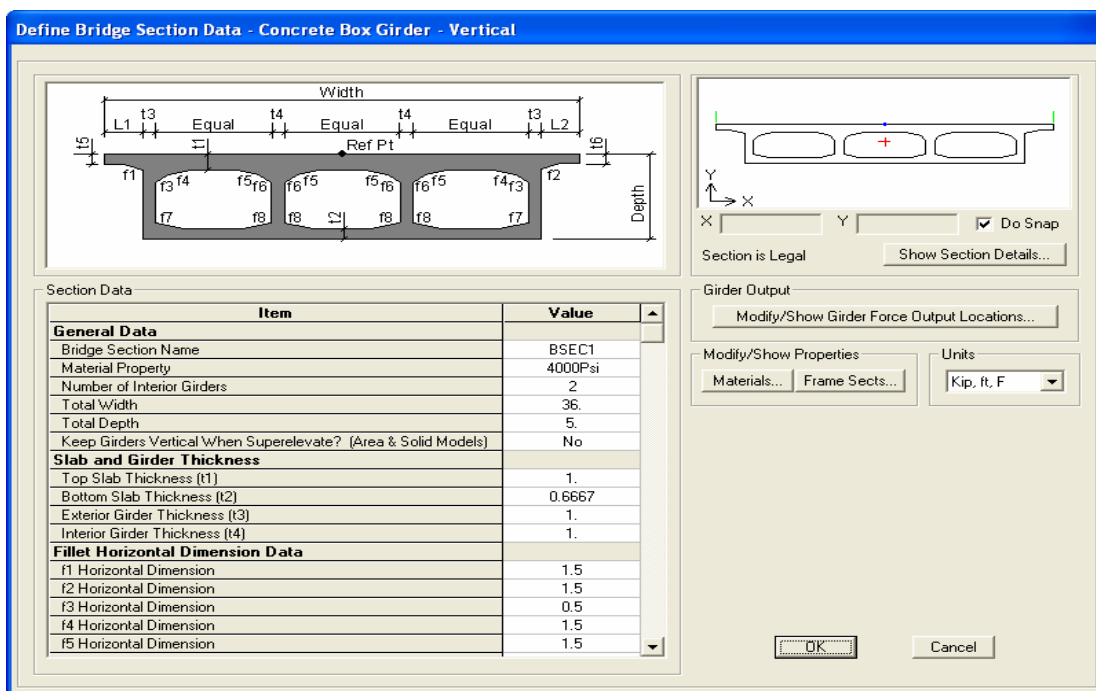
- Straight 
- Straight - Bend Right 
- Straight - Bend Left 
- Straight - Bend Right - Bend Right 
- Straight - Bend Left - Bend Left 
- Curve Right 
- Curve Left 
- Straight - Curve Right 
- Straight - Curve Left 
- Curve Right - Straight 
- Curve Left - Straight 
- Straight - Curve Right - Straight 
- Straight - Curve Left - Straight 
- Straight - Curve Right - Straight - Curve Right - Straight 
- Straight - Curve Left - Straight - Curve Left - Straight 
- Straight - Curve Right - Straight - Curve Left - Straight 
- Straight - Curve Left - Straight - Curve Right - Straight 

Σχήμα 2. 30 Quick Start form to specify layout line horizontal data

- Από το Bridge menu → Deck section παρέχεται η δυνατότητα επιλογής του τύπου διατομής του καταστρώματος. Με την επιλογή Concrete Box Girders ή Ext. Girders Vertical εμφανίζεται το παράθυρο με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής τα οποία σαφώς μπορούν να τροποποιηθούν κατάλληλα.

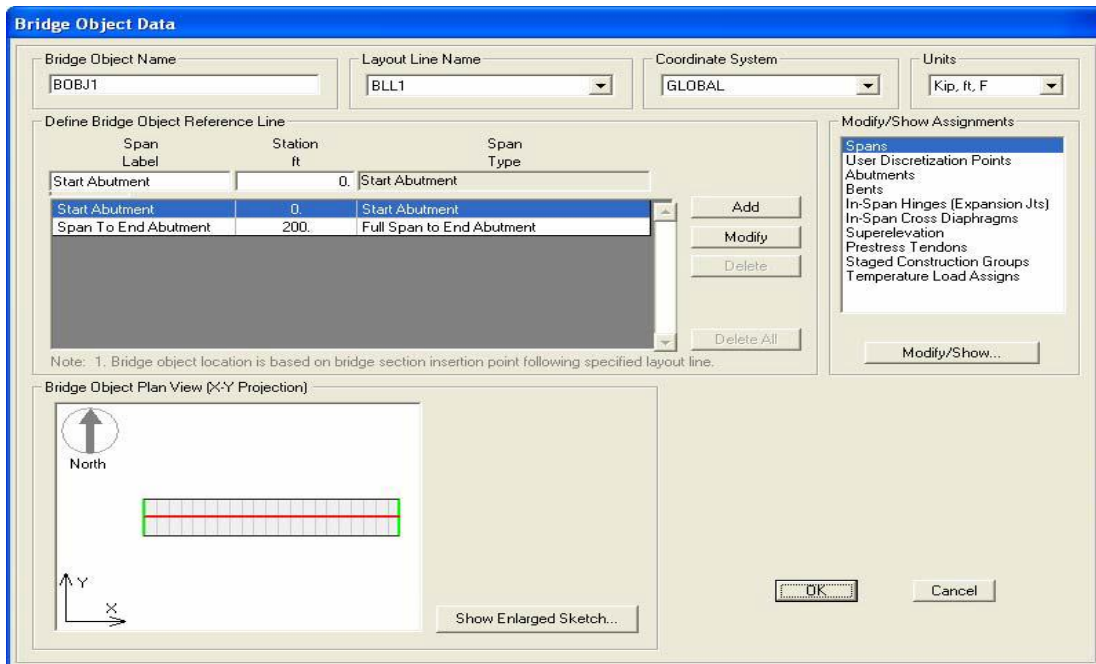


Σχήμα 2. 31 Select a bridge deck section

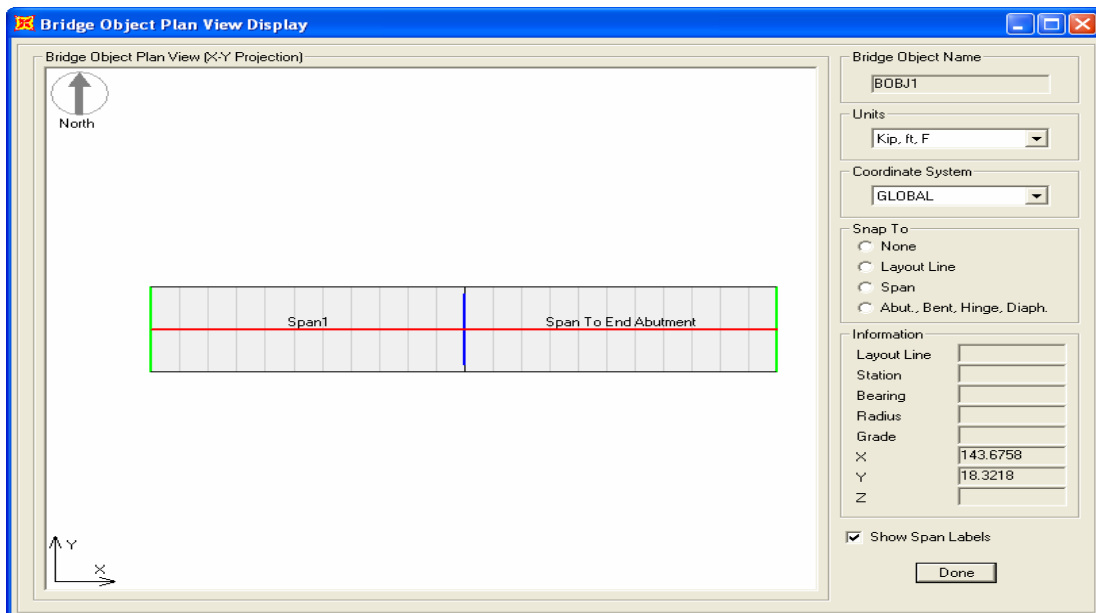


Σχήμα 2. 32 Specify deck section properties

- Από το Bridge menu → Bridge Object μπορούν να αφαιρεθούν – τροποποιηθούν τα βασικά δεδομένα που αφορούν τις συνθήκες στηρίξεως της γέφυρας. Για παράδειγμα τα ακρόβαθρα αφαιρούνται από το παρακάτω μενού.

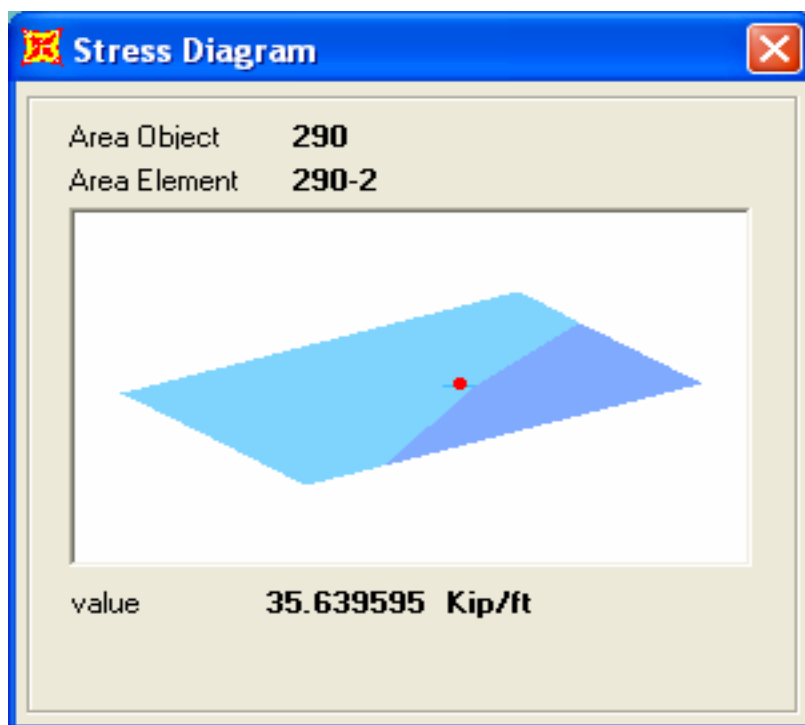


Σχήμα 2. 33 Specify Bridge Object data



Σχήμα 2. 34 Plan view of the Bridge Object

- Κάνοντας τις απαραίτητες τροποποιήσεις στο φορέα της γέφυρας εμφανίζεται το μοντέλο της γέφυρας.
- Βασικό σημείο στο σχεδιασμό – τρισδιάστατη προσομοίωση αποτελεί η διακριτοποίηση του φορέα με **πεπερασμένα στοιχεία**. Από το μενού Edit Areas → Divide Areas επιλέγεται η συχνότητα και ο προσανατολισμός των πεπερασμένων στοιχείων που θα “κομματιάσουν” το φορέα. Η “σωστή” διακριτοποίηση καθιστά το φορέα πιο “εύχρηστο” και τα αποτελέσματα της ανάλυσης πιο αξιόπιστα.
- Τρέχοντας την ανάλυση προκύπτουν τα αποτελέσματα που αφορούν την εντατική κατάσταση της γέφυρας Δυνάμεις / Τάσεις.



Σχήμα 2. 35 Shell Element Force Results

## 2.2.1 Επίλυση ευθύγραμμης γέφυρας με πεπερασμένα στοιχεία

Η ευθύγραμμη γέφυρα η οποία αναλύθηκε θεωρητικά στην §2.1.4 θα προσομοιωθεί ως τρισδιάστατο μοντέλο στο SAP2000.

Η γέφυρα κατασκευάζεται από σκυρόδεμα. Τα χαρακτηριστικά του υλικού διακρίνονται στον παρακάτω πίνακα.

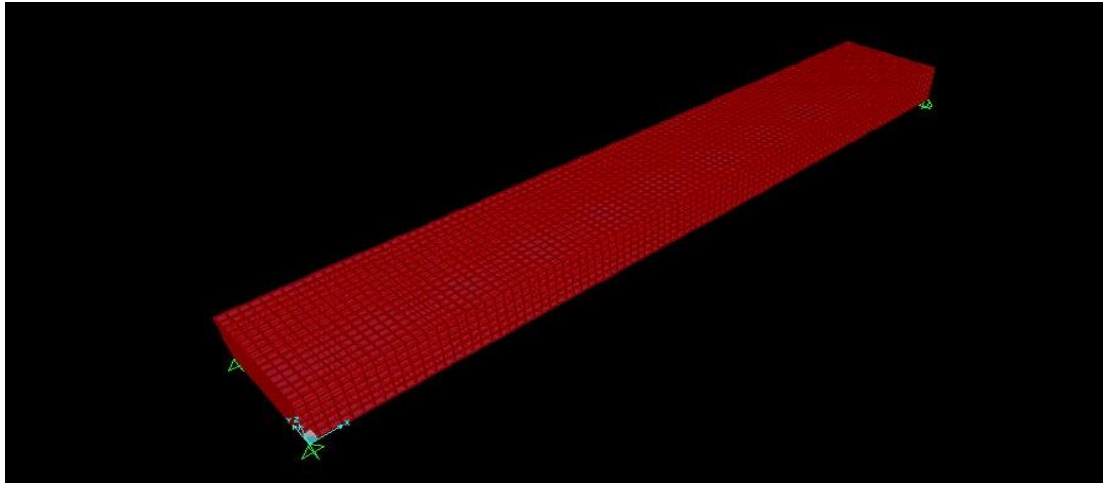
Μέτρο ελαστικότητας  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

The screenshot shows the 'Material Property Data' dialog box in SAP2000. The dialog is organized into several sections:

- General Data:** Material Name and Display Color: 4000Psi; Material Type: Concrete; Material Notes: Modify/Show Notes...
- Weight and Mass:** Weight per Unit Volume: 0.; Mass per Unit Volume: 0.; Units: KN, m, C
- Isotropic Property Data:** Modulus of Elasticity, E: 20000000; Poisson's Ratio, U: 0.2; Coefficient of Thermal Expansion, A: 9.900E-06; Shear Modulus, G: 8333333.
- Other Properties for Concrete Materials:** Specified Concrete Compressive Strength, f'c: 27579.032; Lightweight Concrete: ; Shear Strength Reduction Factor: [empty field]

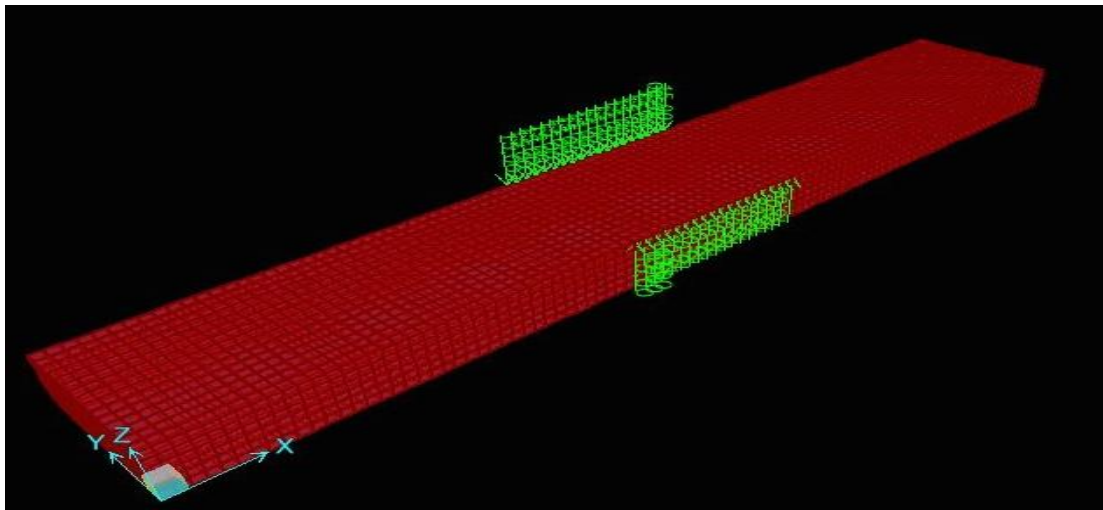
At the bottom, there is a checkbox for 'Switch To Advanced Property Display' and 'OK' and 'Cancel' buttons.

Χρησιμοποιήθηκαν 4466 επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία για να αποτυπώσουν τη δοκό. Τοποθετήθηκαν εγκάρσια διαφράγματα πάχους 0,50cm στην αρχή και στο τέλος της γέφυρας. Η γέφυρα στηρίζεται στα τέσσερα άκρα της με δύο αρθρώσεις αριστερά και δύο δεξιά.



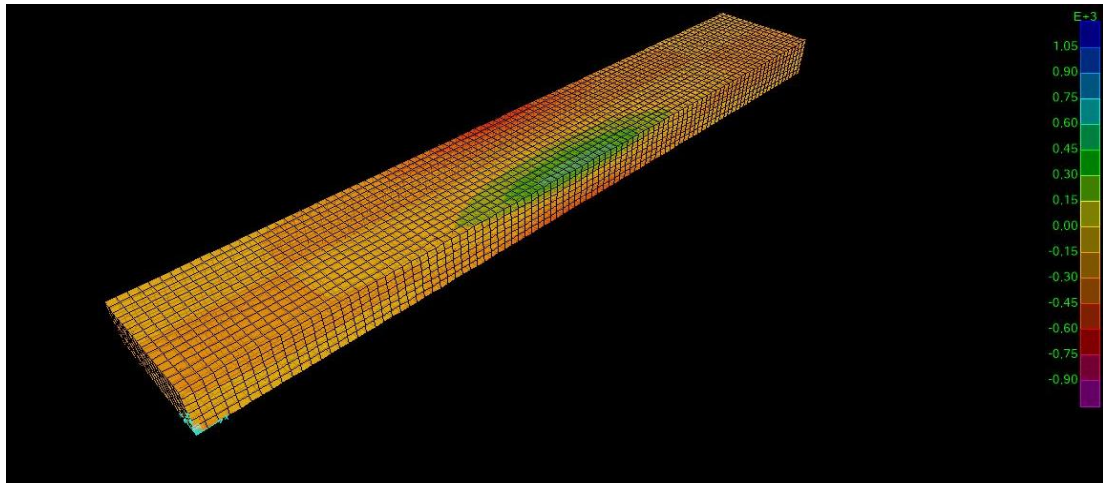
**Σχήμα 2. 36** Τρισδιάστατο μοντέλο ευθύγραμμης γέφυρας

Το φορτίο της γέφυρας απαρτίζεται από το αντισυμμετρικό ζεύγος φορτίσεως το οποίο εκτείνεται σε 8m στο μέσο των 40m. Το φορτίο αντιστοιχεί στο φορτίο κυκλοφορίας-φορτηγό και ισούται με 35,63 kN/m. Το κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει οριζόντια διάσταση 0,533m, άρα σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί συγκεντρωμένη δύναμη 15 kN όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.



**Σχήμα 2. 37** Αντισυμμετρική φόρτιση ευθύγραμμης γέφυρας

Έχοντας στήσει και προσδιορίσει πλήρως το τρισδιάστατο μοντέλο η ανάλυση δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα τάσεων.



**Σχήμα 2. 38** Τάσεις ευθύγραμμης γέφυρας

Στο μέσο του αριστερού κορμού στην πάνω και κάτω ίνα οι τάσεις είναι:

$$\sigma_o = -343,25 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_u = 343,25 \text{ kN/m}^2$$

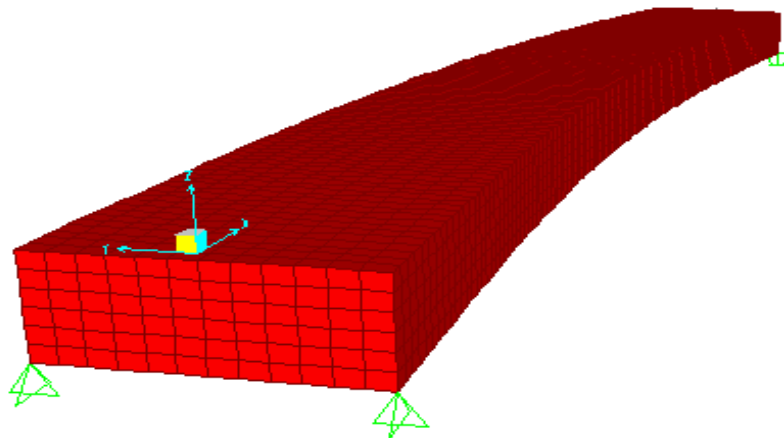
Άρα, προσδιορίστηκαν οι τάσεις που προκύπτουν στο μέσο του αριστερού κορμού στην άνω και κάτω ίνα απο την επίλυση στο SAP2000.

$$\sigma = 343,25 \text{ kN/m}^2$$

### 2.2.2 Επίλυση καμπύλης γέφυρας με πεπερασμένα στοιχεία

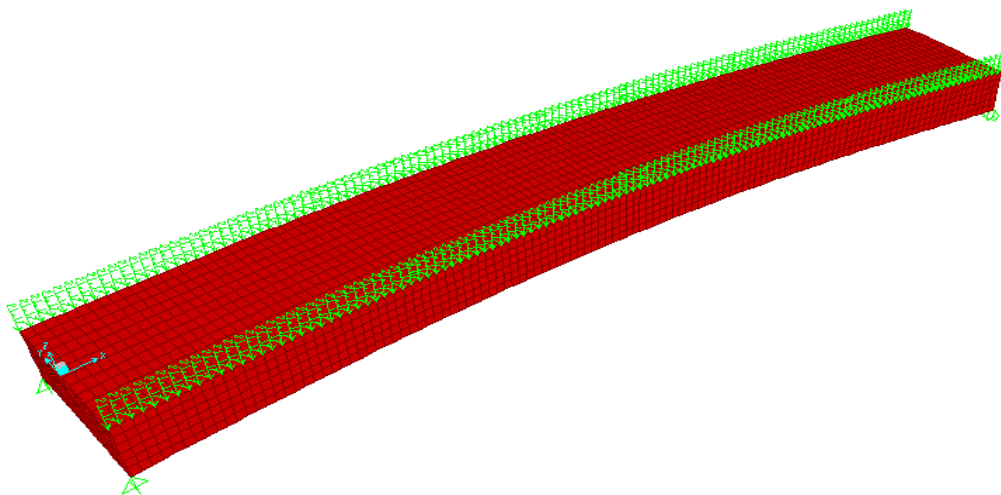
Η ευθύγραμμη γέφυρα η οποία αναλύθηκε θεωρητικά στην §2.1.6 θα προσομοιωθεί ως τρισδιάστατο μοντέλο στο SAP2000.

Ο φορέας στήθηκε χρησιμοποιώντας 4466 επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Τοποθετήθηκαν εγκάρσια διαφράγματα πάχους 0,50 cm στην αρχή και στο τέλος της γέφυρας. Η γέφυρα στηρίζεται με τέσσερις απλές στηρίξεις στα άκρα της.



Σχήμα 2. 39 Τρισδιάστατο μοντέλο καμπύλης γέφυρας

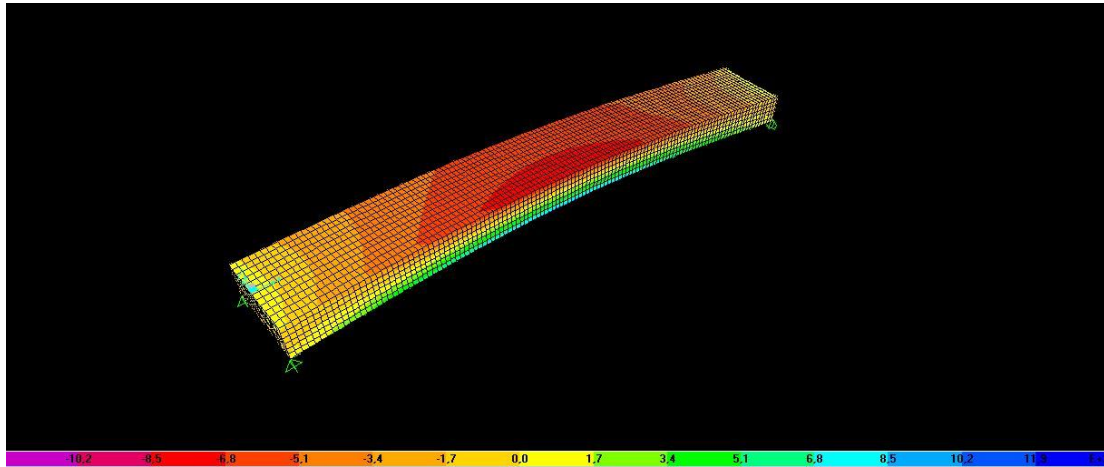
Η γέφυρα φορτίζεται μόνο με το ίδιο βάρος της, το οποίο θεωρείται ότι κατανέμεται δεξιά και αριστερά στους κορμούς της γέφυρας όπως μπορεί να διαπιστωθεί στο Σχήμα 2.41.



Σχήμα 2. 40 Φόρτιση καμπύλης γέφυρας



Έχοντας στήσει και προσδιορίσει πλήρως την καμπύλη γέφυρα η ανάλυση δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα τάσεων.



**Σχήμα 2. 41** Τάσεις καμπύλης γέφυρας

Ο εσωτερικός κορμός στο μέσο έχει τάση  $\sigma = - 6713,09 \text{ kN/m}^2$ .

$$\sigma = - 6713,09 \text{ kN/m}^2$$

### 3. Διερεύνηση ορίων εγκυρότητας θεωρίας

#### 3.1 Απλά παραδείγματα ευθύγραμμης και καμπύλης γέφυρας

Από τις επιλύσεις που έγιναν παραπάνω στην §2.1.5, §2.2.1 για την ευθύγραμμη γέφυρα προκύπτει ο παρακάτω συγκριτικός πίνακας ανάμεσα στα αποτελέσματα της θεωρίας και τα αποτελέσματα του SAP2000.

Θεωρία	SAP2000	Απόκλιση
435,88 kN/m <sup>2</sup>	343,25 kN/m <sup>2</sup>	21,25 %

**Πίνακας 1** Σύγκριση αποτελεσμάτων θεωρίας-SAP2000 ευθύγραμμης γέφυρας

Ομοίως για την καμπύλη γέφυρα που επιλύθηκε στην §2.1.6 θεωρητικά και στην §2.2.2 με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων προκύπτει ο αντίστοιχος συγκριτικός πίνακας.

Θεωρία	SAP2000	Απόκλιση
7222,16 kN/m <sup>2</sup>	6713,09 kN/m <sup>2</sup>	7,05 %

**Πίνακας 2** Σύγκριση αποτελεσμάτων θεωρίας-SAP2000 ευθύγραμμης γέφυρας

Σχόλια

- ⇒ Από τους παραπάνω πίνακες μπορεί να διαπιστωθεί ότι η θεωρία για τα δύο απλά παραδείγματα που αναλύθηκαν τόσο για την ευθύγραμμη όσο και για την καμπύλη γέφυρα δίνει ασφαλή αποτελέσματα και αποκλίνει από την επίλυση στο πρόγραμμα με σχετικά μικρή διαφορά.
- ⇒ Στο συγκριτικό πίνακα παρουσιάζονται οι τάσεις με τις απόλυτες τιμές τους. Η άνω ίνα του κορμού θλίβεται. Σε όλα τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν στην επόμενη παράγραφο εξετάζεται η άνω ίνα (θλιβόμενη).

## 3.2 Παραδείγματα καμπύλων γεφυρών

Σημειώνεται ότι για μια καμπύλη αμφιέριστη δοκό και για λόγο  $L/R \leq 0.3$ , οι διαφορές από την <<ακριβή λύση>> είναι μικρότερες του 1%. Ο λόγος  $L/R \leq 0.3$  σημαίνει μία επίκεντρη γωνία όχι μεγαλύτερη των  $20^\circ$  περίπου.

Έχει προηγηθεί ήδη η επίλυση καμπύλης γέφυρας η οποία έχει ακτίνα καμπυλότητας  $R = 114,5$  (αντιστοιχεί σε γωνία  $20^\circ$ ) και μήκος  $L = 40\text{m}$ . Η γέφυρα είχε μοναδική φόρτιση το ίδιο βάρος της.

Διερευνώντας τα όρια εγκυρότητας της θεωρίας με το SAP2000 για τις καμπύλες δοκούς εξετάζονται εναλλακτικές φορτίσεις και διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας γεφυρών.

### 3.2.1 Παραδείγματα με φορτίο το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση 8m

Η φόρτιση απαρτίζεται από το φορτίο κυκλοφορίας (φορτηγό) το οποίο εκτείνεται σε 8 m στο μέσο των 40 m κατά μήκος της γέφυρας και αντιστοιχεί σε 36,1 kN/m. [Η φόρτιση είναι ακριβώς ίδια με τη φόρτιση της ευθύγραμμης γέφυρας που εξετάστηκε]

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των καμπύλων γεφυρών που θα επιλυθούν προκειμένου να διαπιστωθεί εάν η θεωρία έχει ισχύ.

R	L/R	$\Phi$
134,2	0,3	$17^\circ$
114,5	0,35	$20^\circ$
100	0,4	$23^\circ$
80	0,5	$28^\circ$

**Πίνακας 3** Αντιστοιχία R - L/R -  $\phi$

Οι καμπύλες γέφυρες που θα επιλυθούν έχουν ακριβώς την ίδια ορθογωνική κιβωτιοειδή διατομή με τα απλά παραδείγματα που αναλύθηκαν παραπάνω καθώς και το ίδιο μήκος  $L = 40\text{m}$ .

**Σημειώνεται ότι** από τα σχήματα της αναλύσεως στο SAP2000 παρουσιάζονται μόνο αυτά για την ακτίνα καμπυλότητας  $R = 134,2$ .

### Θεωρητική Επίλυση

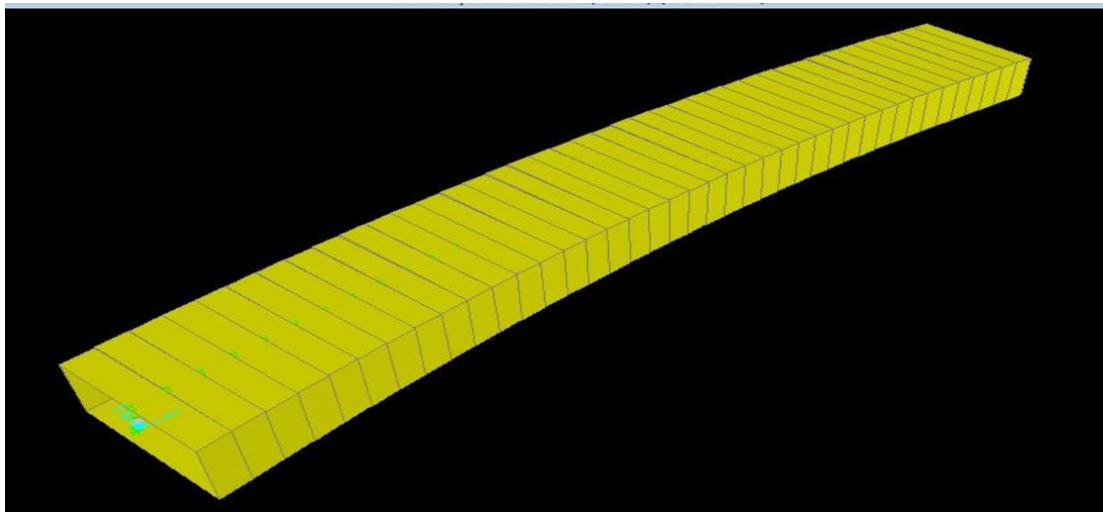
Για να προσδιορισθούν οι τάσεις που ανακύπτουν από τη θεωρία εφαρμόστηκαν τα παρακάτω βήματα:

- Το κατακόρυφο φορτίο που αντιστοιχεί σε 36,1 kN/m και εκτείνεται στα 8m εφαρμόζεται στην μέση γραμμή της γέφυρας – αμφιέριστη δοκός με κιβωτιοειδή διατομή.

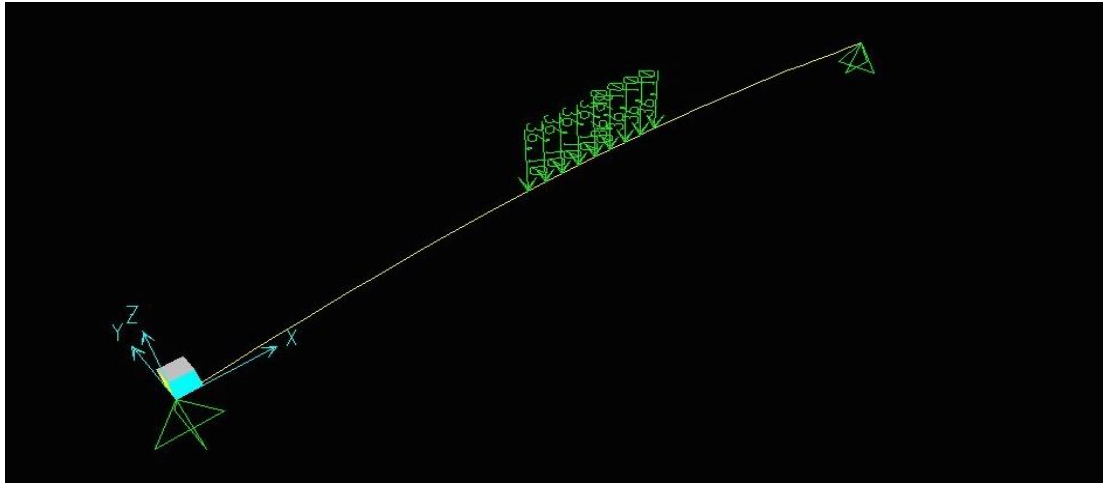
Η φόρτιση αυτή δίνει το διάγραμμα καμπτικών ροπών. Από τη ροπή που προκύπτει στο μέσο της δοκού υπολογίζεται η τάση που καταπονεί τη διατομή εξαιτίας του κατακόρυφου φορτίου εφαρμόζοντας τη γνωστή σχέση της θεωρίας:

$$\sigma = M_m * y_0 / I$$

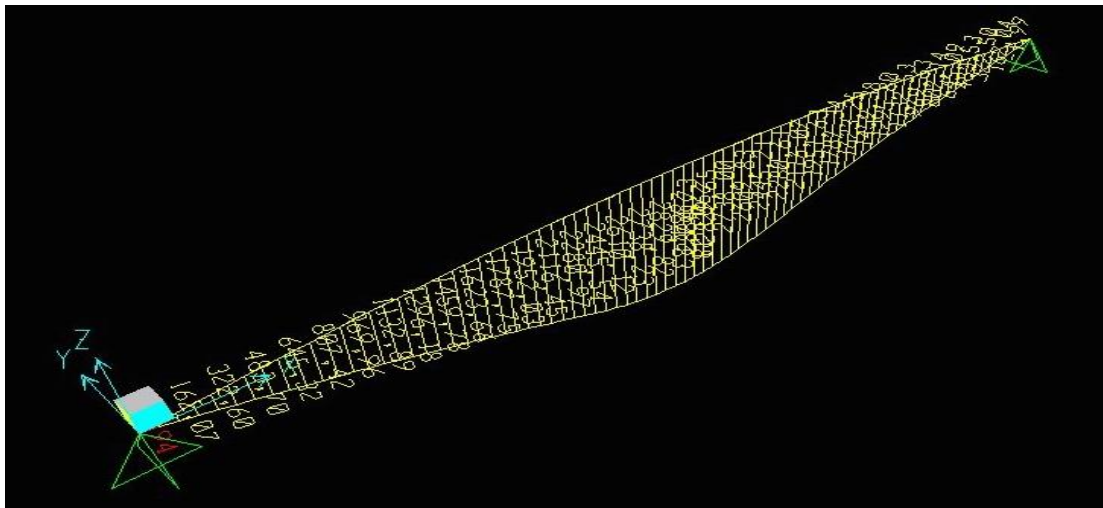
Για να υπολογιστούν τα διαγράμματα ροπών κάμψης χρησιμοποιήθηκε το SAP2000. Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η κιβωτιοειδής δοκός, το κατακόρυφο φορτίο και το αντίστοιχο διάγραμμα ροπών κάμψης για την ακτίνα καμπλότητας  $R = 134,2$ .



**Σχήμα 3. 1** Κιβωτιοειδής διατομή καμπύλης δοκού



Σχήμα 3. 2 Κατακόρυφο φορτίο καμπύλης δοκού με  $R=134,2$



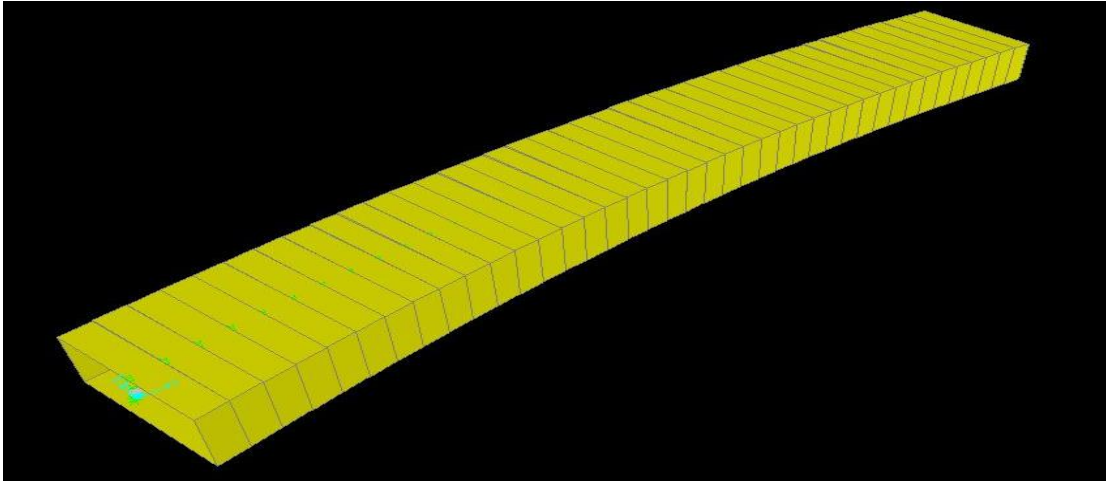
Σχήμα 3. 3 Διάγραμμα καμπτικών ροπών καμπύλης δοκού με  $R=134,2$

R	$M_m$ (kNm)	$\sigma$ (kPa)
134,2	2903,2	787,2
114,5	2888	783
100	2904,6	787,6
80	2900,6	786,5

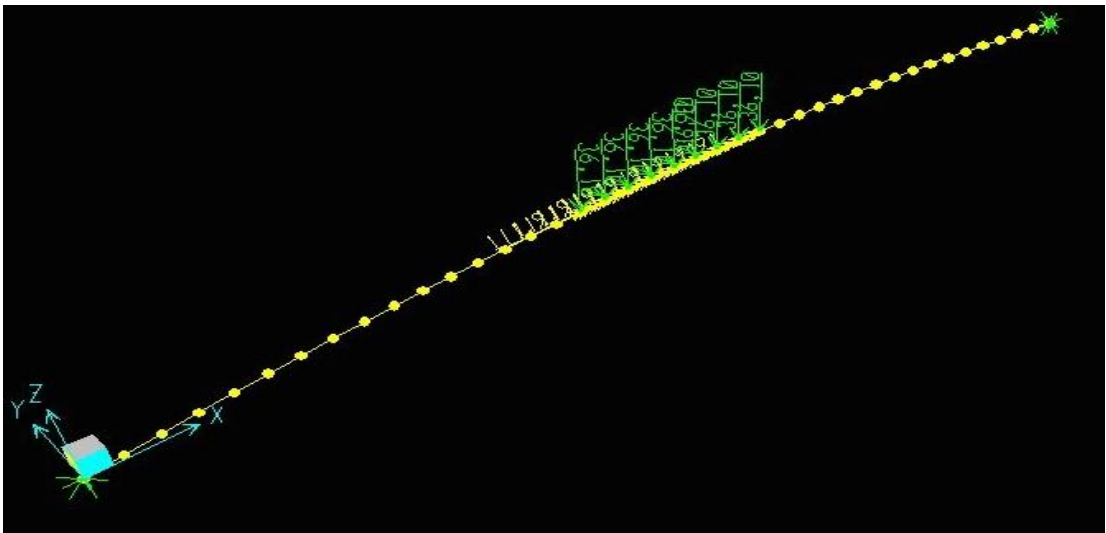
Πίνακας 4 Αποτελέσματα τάσεων λόγω κατακόρυφου φορτίου

- Πέρα από το κατακόρυφο φορτίο έχουμε και στρεπτικό φορτίο το οποίο ισούται με:  
 $36,1 \text{ kN} * 6,2\text{m} / 2 = 111,91 \text{ kN/m}$  και εκτείνεται στα 8m.

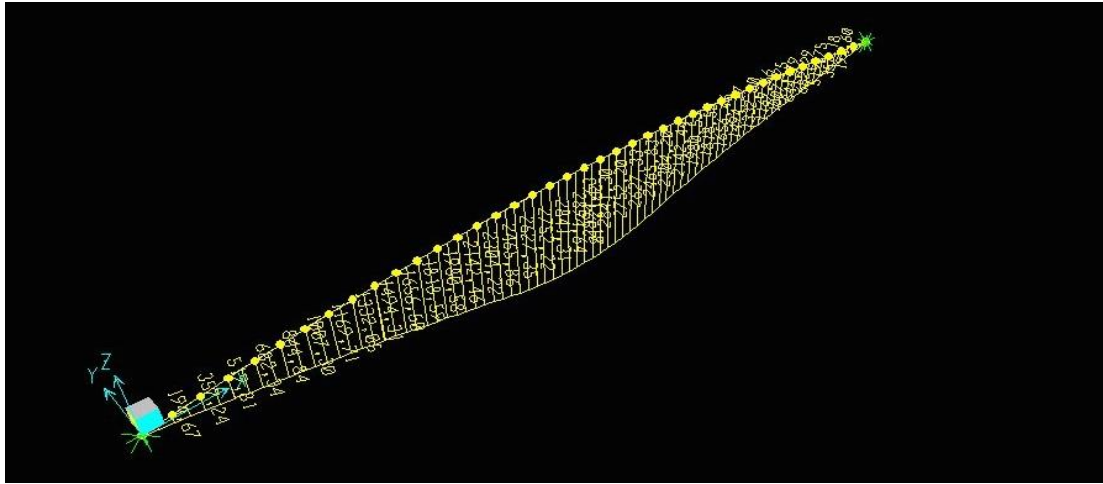
Η μέση γραμμή της γέφυρας δηλαδή, φορτίζεται εκτός από το κατακόρυφο φορτίο και με στρεπτικό φορτίο το οποίο έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα της καμπύλης. Η σύνθετη αυτή φόρτιση έχει ως αποτέλεσμα ένα διάγραμμα καμπτικών ροπών  $M_B$  και ένα διάγραμμα στρέψεως  $M_T$ .



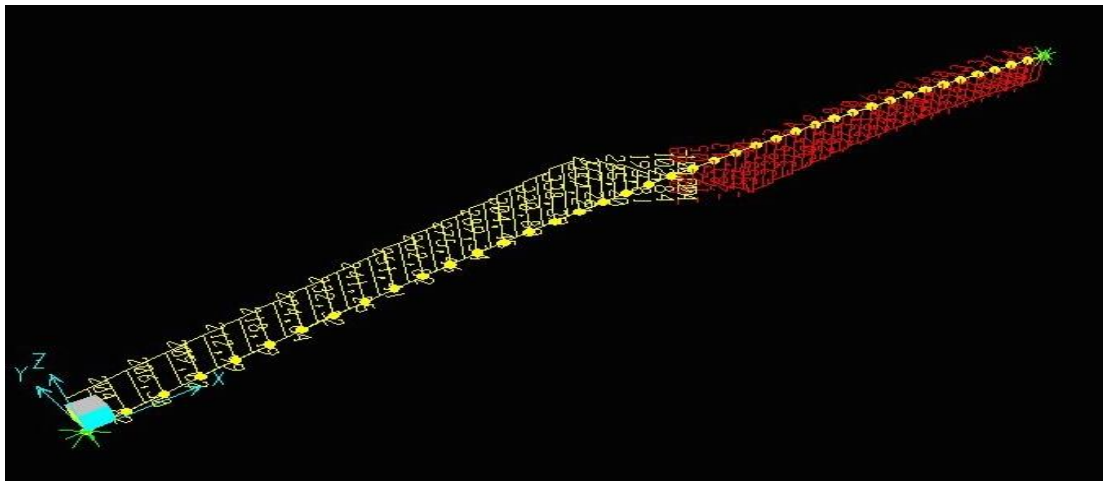
Σχήμα 3. 4 Κιβωτιοειδής διατομή καμπύλης δοκού  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 5 Κατακόρυφο και στρεπτικό φορτίο καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 6 Διάγραμμα καμπτικών ροπών  $M_B$  καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 7 Διάγραμμα στρέψεως  $M_T$  καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$

- Έχοντας προσδιορίσει τις τιμές  $M_B$ ,  $M_T$  από τα παραπάνω διαγράμματα εφαρμόζονται οι σχέσεις της θεωρίας οι οποίες από την ισορροπία του σπονδύλου μοναδιαίου μήκους καταλήγουν στην αυτοισορροπούμενη διαγώνια καταπόνηση.

Πιο αναλυτικά, ανά 1m υπολογίζονται οι εκφράσεις:

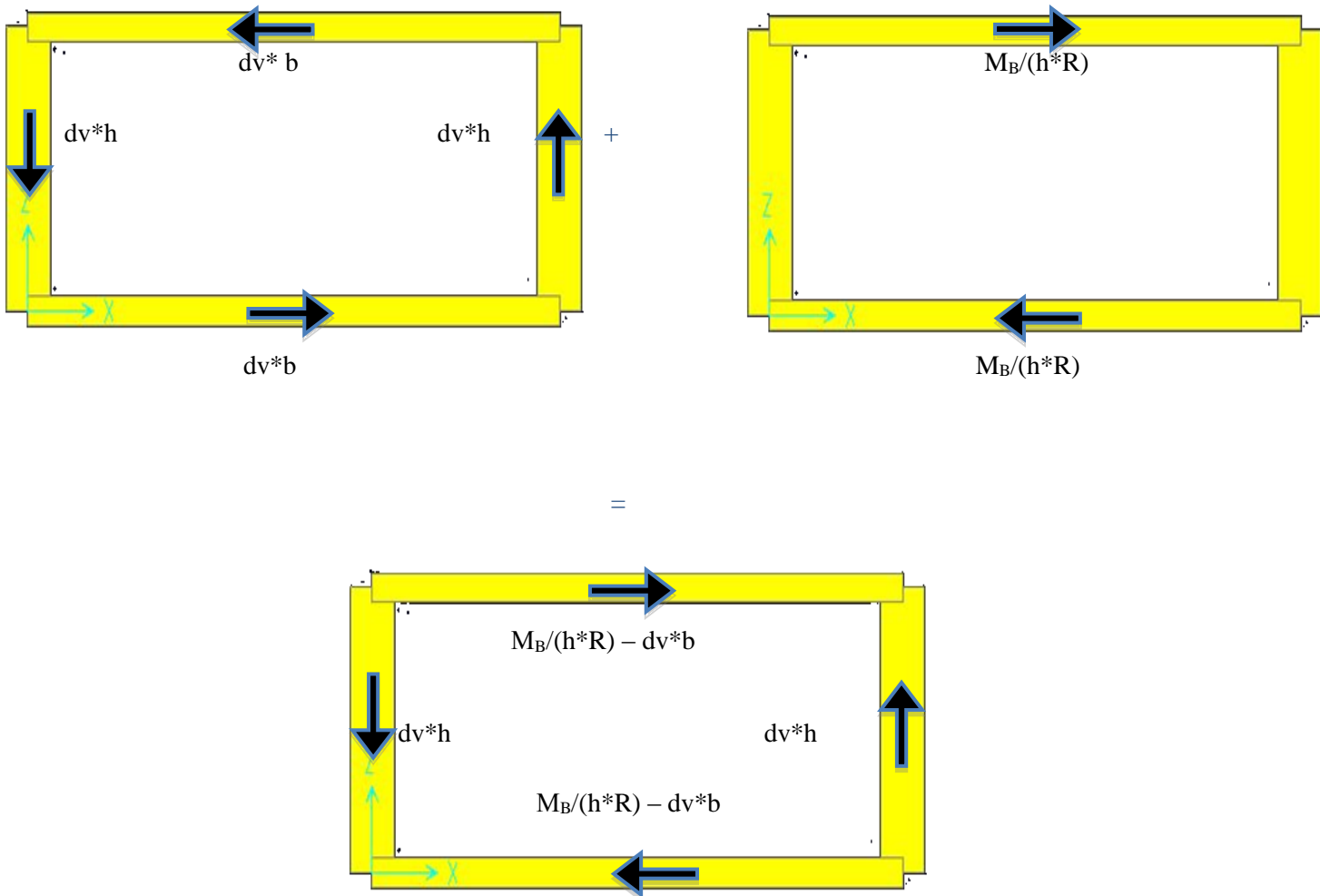
$M_B/(h \cdot R)$  Δυνάμεις εκτροπής

$dv \cdot h, dv \cdot b$  Διαφορική διατμητική ροή

$M_B/(h \cdot R) - dv \cdot b$

$$S = \sqrt{(dv \cdot h)^2 + \frac{MB}{h \cdot R}}$$

$$S_w = S \cdot \sin \alpha = S \cdot 0,374$$

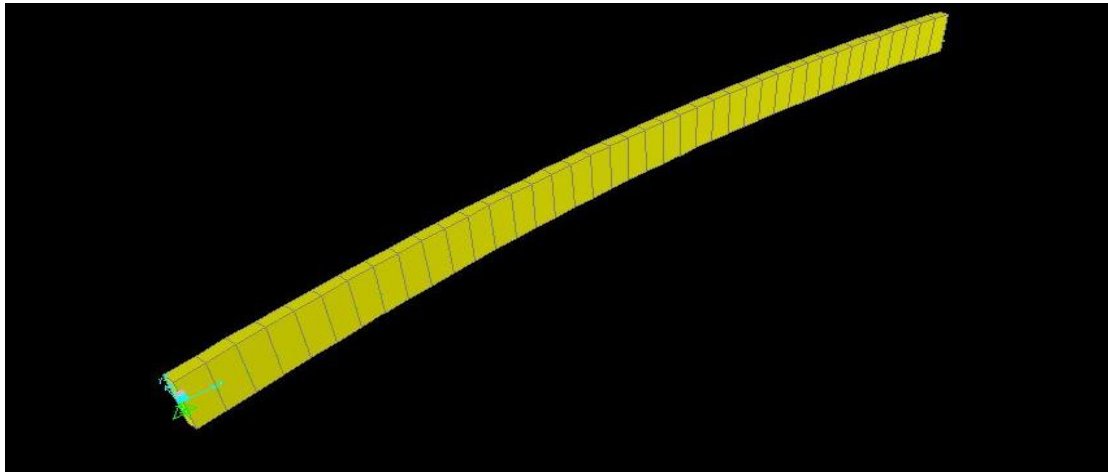


Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται ανά 1m και για κάθε ακτίνα καμπυλότητας. Προς διευκόλυνση των πράξεων χρησιμοποιήθηκε φύλλο εργασίας στο Excel. Στο παράρτημα επισυνάπτονται τα φύλλα Excel με τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

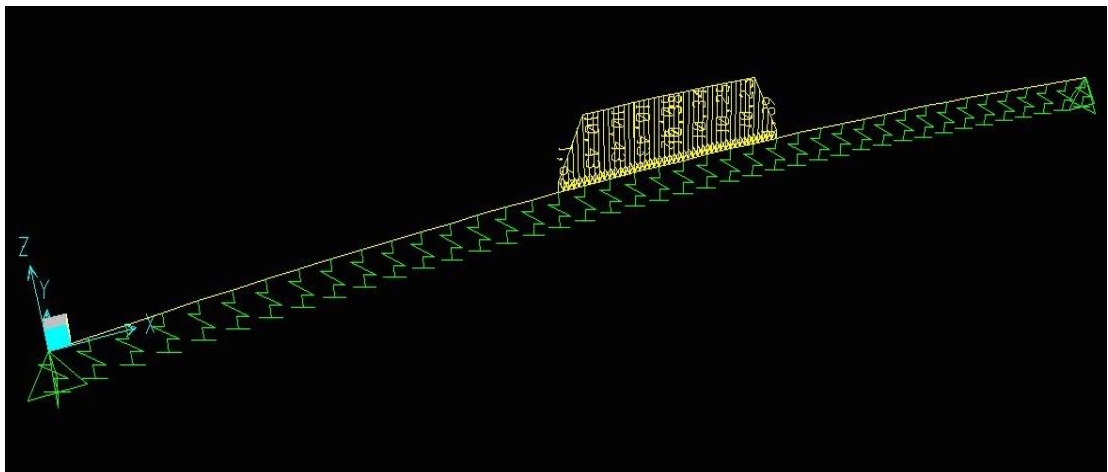


Οπότε, έχοντας υπολογίσει τη δύναμη  $S_w$  ανά 1m, το μόνο που μένει είναι να φορτιστεί η αμφιέριστη δοκός (κορμός γέφυρας) επί ελαστικής βάσεως. Σαφώς, η σταθερά του ελατηρίου παραμένει σταθερή και ίση με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στα παραπάνω απλά παραδείγματα αφού η διατομή είναι ακριβώς η ίδια.

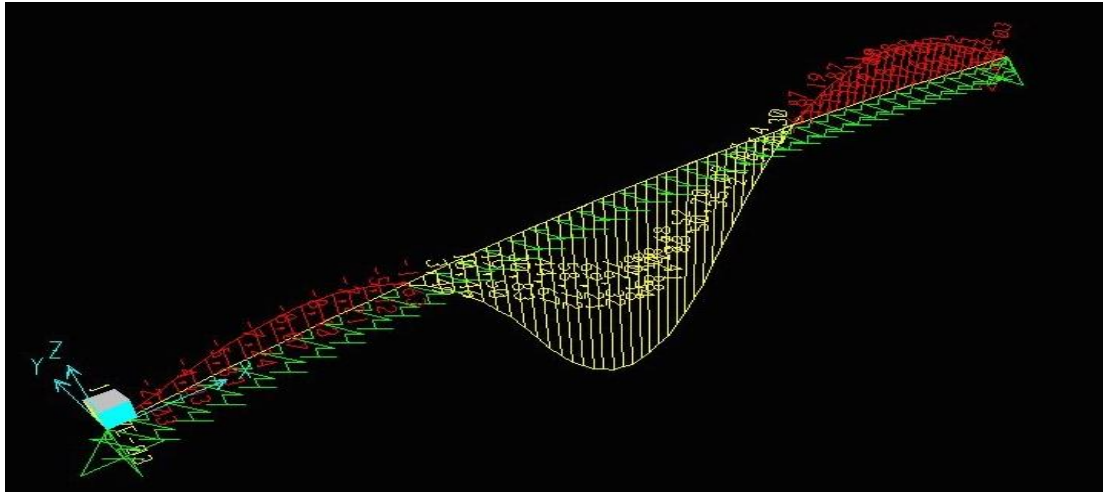
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται η φόρτιση για την καμπύλη δοκό επί ελαστικής βάσεως και το αντίστοιχο διάγραμμα καμπτικών ροπών.



**Σχήμα 3. 8** Διατομή-κορμός καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως



**Σχήμα 3. 9** Φόρτιση καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως με  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 10 Διάγραμμα καμπτικών ροπών  $R = 134,2$

$M_m = 102,8 \text{ kNm}$

- Για κάθε γέφυρα έχει προσδιορισθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών που προκύπτει από τη φόρτιση της αμφιέριστης δοκού (κορμός) επί ελαστικής βάσεως. Οπότε μπορεί να υπολογισθεί για το μέσο του κορμού η επιπρόσθετη ένταση  $\sigma^{Sw} = M_m * y_0 / I^*$ , η οποία έρχεται να προσθεθεί στην ήδη υπολογισθείσα τάση εξαιτίας του κατακόρυφου φορτίου.

R	M (kNm)	$\sigma^{Sw}$ (kPa)
134,2	102,8	241,72
114,5	100	235,14
100	93,4	219,62
80	107,8	253,48

+

R	$M_m$ (kNm)	$\sigma$ (kPa)
134,2	2903,2	787,2
114,5	2888	783
100	2904,6	787,6
80	2900,6	786,5

=

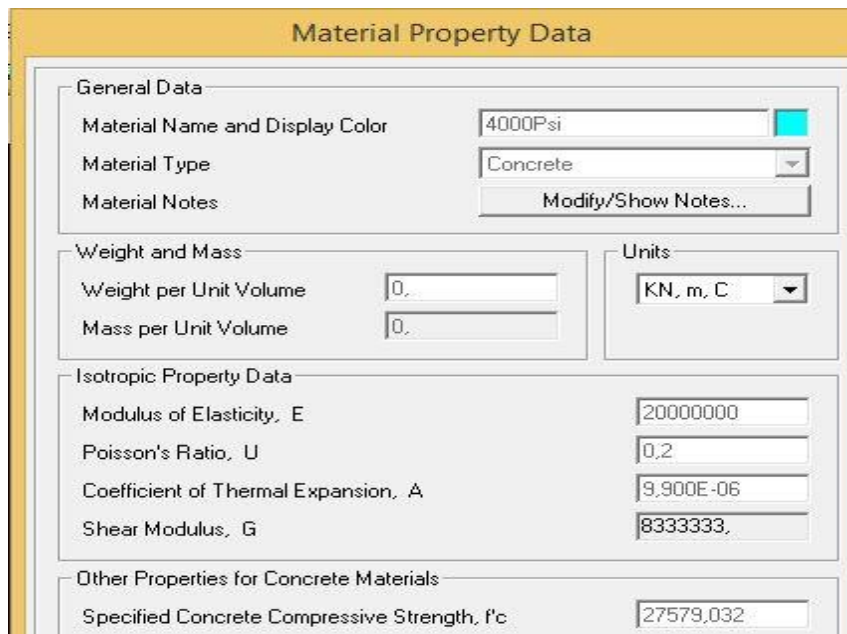
R	$\sigma$ (kPa)
134,2	1028,92
114,5	1018,14
100	1007,22
80	1039,98

**Πίνακας 5** Αθροιστικός πίνακας τάσεων

### **Επίλυση SAP2000**

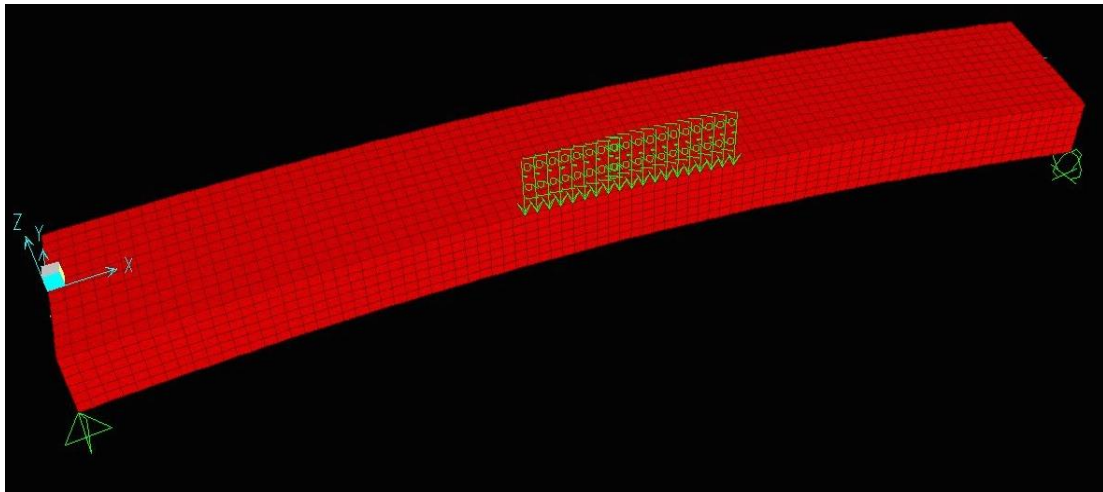
Τα μοντέλα των γεφυρών στήθηκαν με τη χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων. Οι γέφυρες είναι κατασκευασμένες από μπετό. Παρακάτω δίνονται τα χαρακτηριστικά του υλικού.

Το μέτρο ελαστικότητας είναι  $E = 2 \cdot 10^7$  kN/m



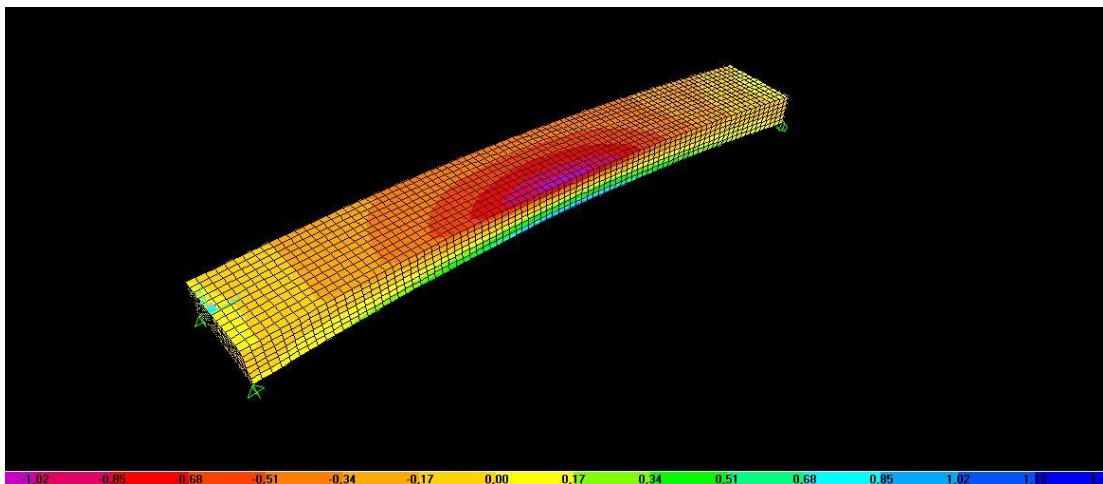
**Πίνακας 6** Ιδιότητες σκυροδέματος

Η φόρτιση κάθε γέφυρας αποτελείται από το φορτίο κυκλοφορίας το οποίο ισούται με 36,1 kN/m, εκτείνεται σε 8m και “πατάει” στον εσωτερικό κορμό της καμπύλης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 3. 11** Φόρτιση καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$

Τρέχοντας την ανάλυση στο πρόγραμμα προκύπτει το καθεστώς τάσεων για τη γέφυρα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 3. 12** Τάσεις SAP2000 καμπύλης γέφυρας με  $R = 134,2$

Για κάθε γέφυρα έχει προσδιορισθεί η τάση στο μέσο του αριστερού κορμού για την άνω ίνα. Η αντίστοιχη δηλαδή τάση που υπολογίστηκε και στη θεωρία. Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τα αποτελέσματα του προγράμματος και ο συγκεντρωτικός πίνακας με τα αποτελέσματα θεωρίας και SAP2000. Επιπλέον, υπενθυμίζεται ο Πίνακας 3 με την αντιστοιχία  $R - L/R - \phi$ .

R	$\sigma^{SAP2000}$ (kPa)
134,2	-902,3
114,5	-894
100	-708,5
80	-778,5

**Πίνακας 7** Αποτελέσματα SAP2000

R	$\sigma_{\text{θεωρίας}}$ (kPa)	$\sigma^{SAP2000}$ (kPa)	Απόκλιση
134,2	1028,92	902,3	12,3%
114,5	1018,14	894	12,2%
100	1007,22	708,5	29,7%
80	1039,98	778,5	25,1%

**Πίνακας 8** Σύγκριση αποτελεσμάτων θεωρίας – SAP2000

R	L/R	$\varphi$
134,2	0,3	17°
114,5	0,35	20°
100	0,4	23°
80	0,5	28°

**Πίνακας 3** Αντιστοιχία R - L/R –  $\varphi$

Παρατηρήσεις:

1. Διαπιστώνεται από τον πίνακα ότι οι τάσεις της θεωρίας έχουν σαφές προβάδισμα από τις τάσεις του προγράμματος.

2. Οι μικρότερες ακτίνες καμπυλότητας  $R = 100$  και  $R = 80$ , οι οποίες συνεπάγονται μεγαλύτερο λόγο  $L/R$  και μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία, παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση της τάξεως του 27,4% (μέσο όρο) σε σχέση με τις ακτίνες  $R = 114,5$  και  $R = 134,2$  που παρουσιάζουν απόκλιση 12,3%.

Η διαπίστωση αυτή εξηγείται από τη θεωρία η οποία υποστηρίζει ότι για επίκεντρη γωνία όχι μεγαλύτερη των  $20^\circ$  τα αποτελέσματα πλησιάζουν την *ακριβή λύση*. Άρα, όσο απομακρυνόμαστε από τις  $20^\circ$  αυξάνει η απόκλιση.

### 3.2.2 Παραδείγματα με φορτίο το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση πλάτους 3m καθόλο το μήκος της γέφυρας

Επιλύονται ακριβώς οι ίδιες γέφυρες που επιλύθηκαν στην §3.2.1 με διαφορετική φόρτιση. Η φόρτιση αντιστοιχεί σε  $9 \text{ kN/m}^2$  και εκτείνεται σε όλο το μήκος της γέφυρας και κατά πλάτος σε 3m, όσο το πλάτος της συμβατικής λωρίδας κυκλοφορίας.

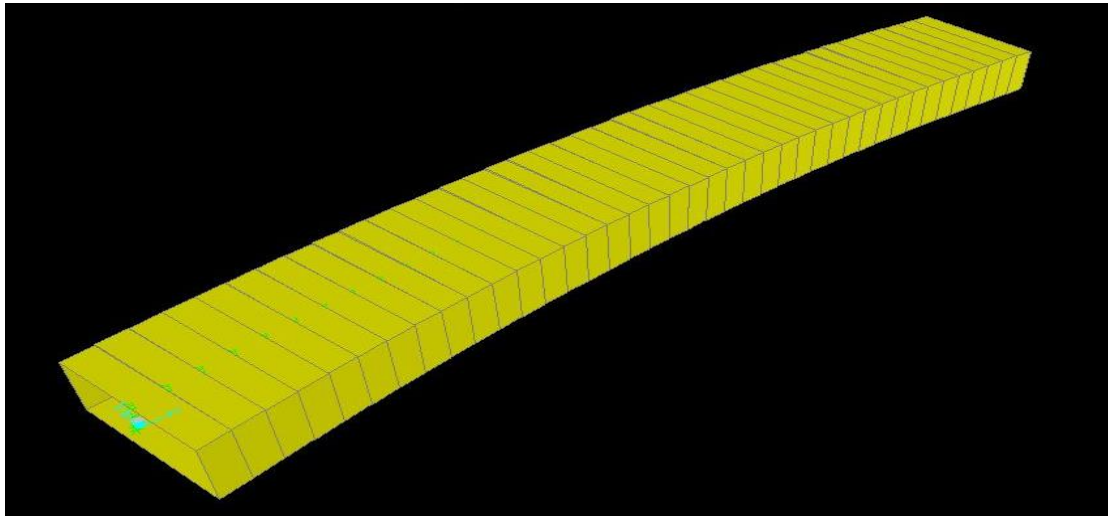
#### **Θεωρητική Επίλυση**

Η αμφιέριστη δοκός (μέση γραμμή της γέφυρας) δέχεται κατακόρυφο φορτίο:  $9 \text{ kN/m}^2 * 3 \text{ m} = 27 \text{ kN/m}$   
και στρεπτικό φορτίο:  $27 \text{ kN/m} * 1,5 \text{ m} = 40,5 \text{ kNm/m}$

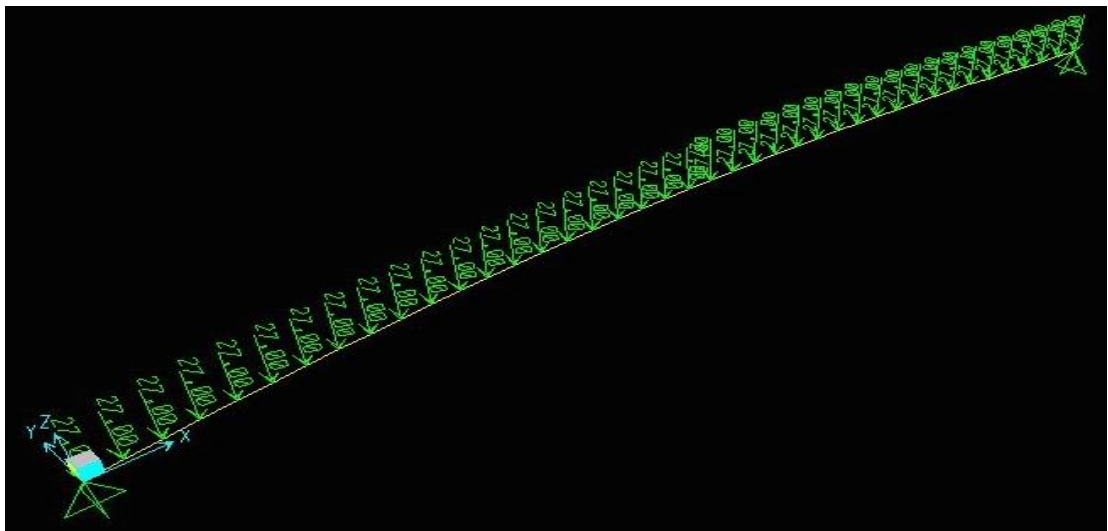
Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα που εφαρμόστηκαν στη θεωρητική επίλυση της §3.2.1 προσδιορίζονται οι τάσεις από τη νέα φόρτιση για το μέσο του κορμού της γέφυρας στην άνω ίνα.

Δηλαδή, υπολογίζονται:

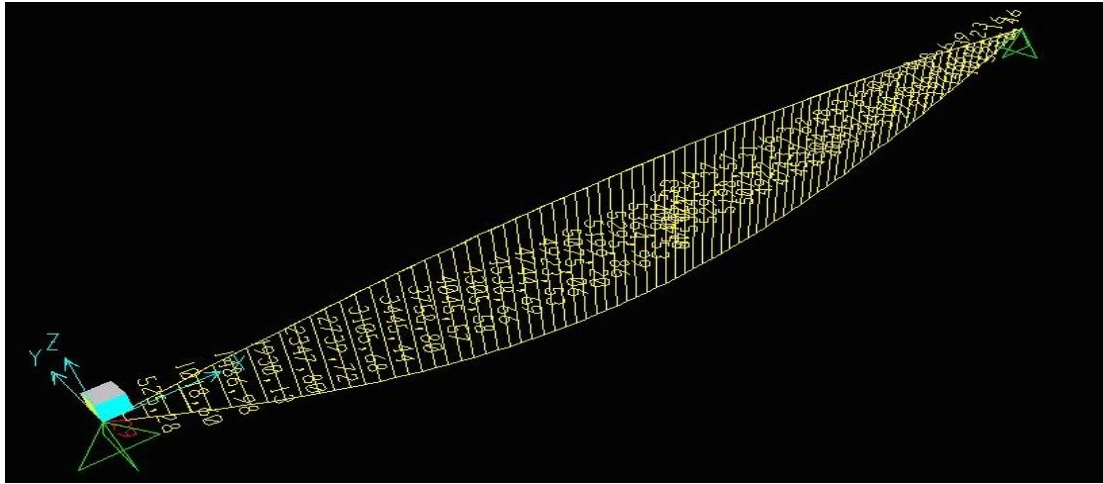
- οι τάσεις εξαιτίας της κατακόρυφης φόρτισης στην καμπύλη δοκό (*διατομή κιβωτίου*)
- οι τιμές  $M_B$ ,  $M_T$  ανά 1m της σύνθετης φόρτισης: κατακόρυφο + στρεπτικό φορτίο και άρα οι τιμές του  $S_w$  ανά 1m (*διατομή κιβωτίου*)
- οι τάσεις εξαιτίας της κατακόρυφης φόρτισης  $S_w$  στη δοκό επί ελαστικής βάσεως (*διατομή κορμού*)



**Σχήμα 3. 13** Κιβωτισειδής διατομή καμπύλης δοκού



**Σχήμα 3. 14** Κατακόρυφο φορτίο καμπύλης δοκού με  $R=134,2$



**Σχήμα 3. 15** Διάγραμμα καμπτικών ροπών καμπύλης δοκού με  $R=134,2$

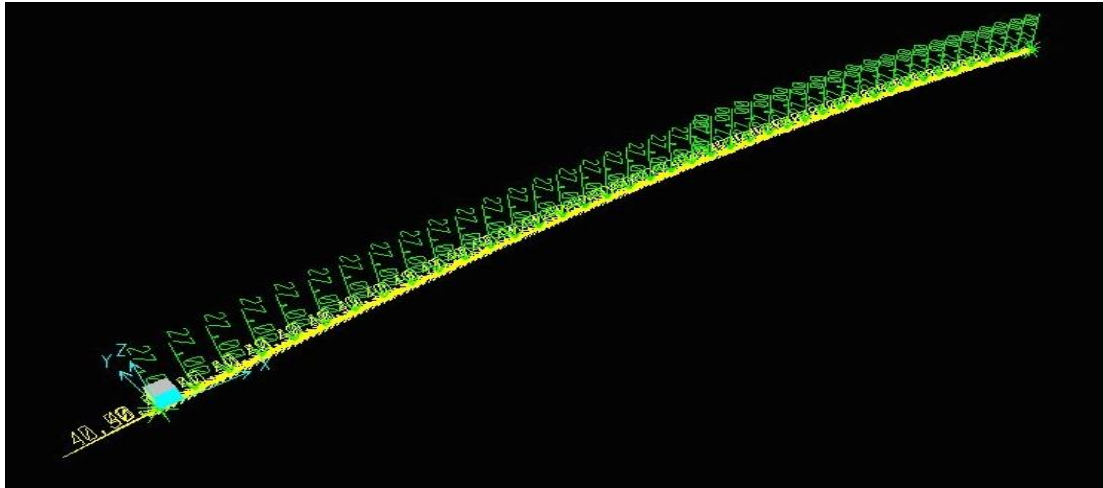
Έτσι για κάθε καμπύλη δοκό με βάση τα αποτελέσματα της αναλύσεως στο SAP2000 υπολογίζεται στο μέσο του κορμού (άνω ίνα) η αντίστοιχη τάση οφειλόμενη στο κατακόρυφο φορτίο.

R	$M_m$ (kNm)	$\sigma$ (kPa)
134,2	5420,45	1469,75
114,5	5389,71	1461,42
100	5443,63	1476,04
80	5400,68	1464,39

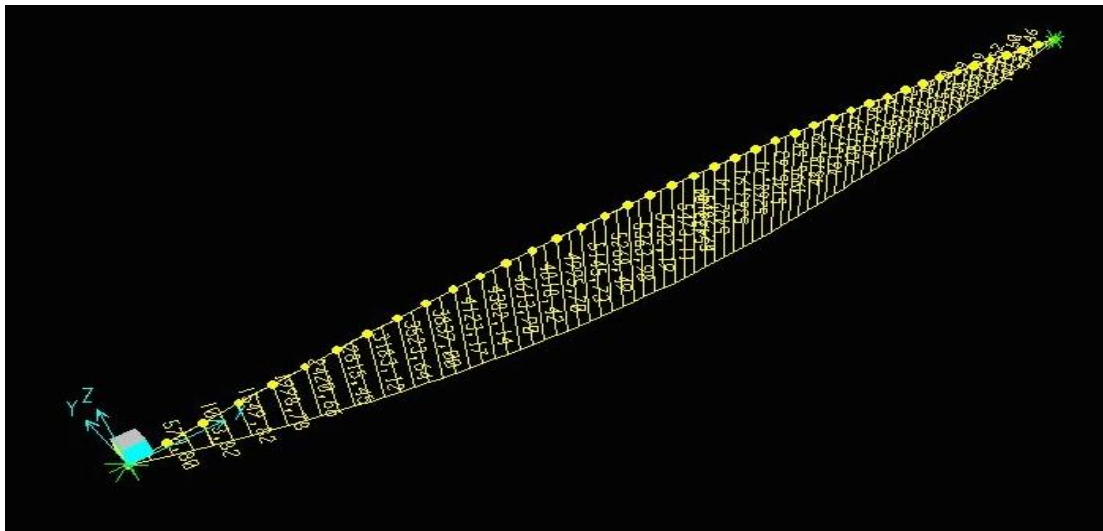
**Πίνακας 9** Αποτελέσματα τάσεων λόγω κατακόρυφου φορτίου

Η φόρτιση της καμπύλης δοκού με το κατακόρυφο και στρεπτικό φορτίο καθώς και τα διαγράμματα  $M_B$  και  $M_T$  παρουσιάζονται παρακάτω όπως αναλύθηκαν στο πρόγραμμα SAP2000.

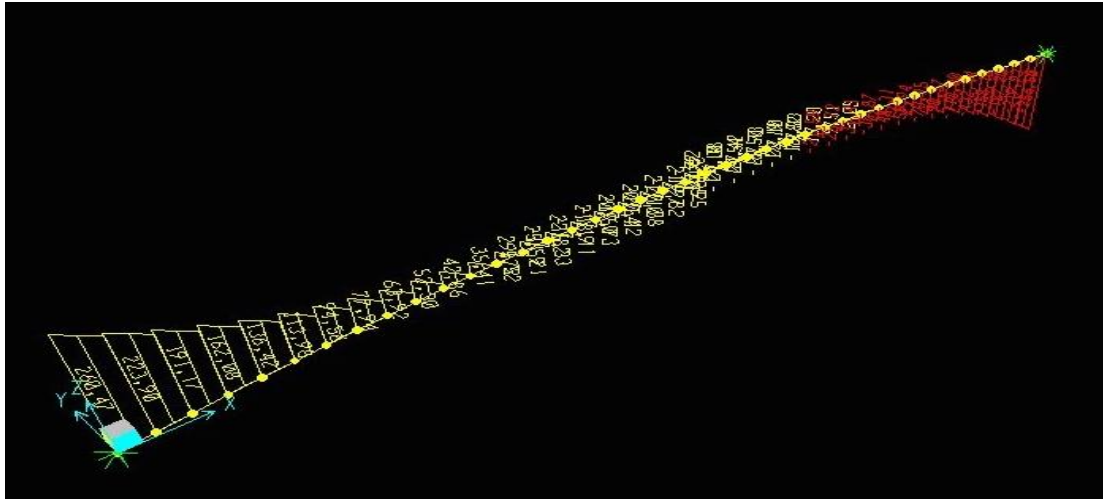




Σχήμα 3. 16 Κατακόρυφο και στρεπτικό φορτίο καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$



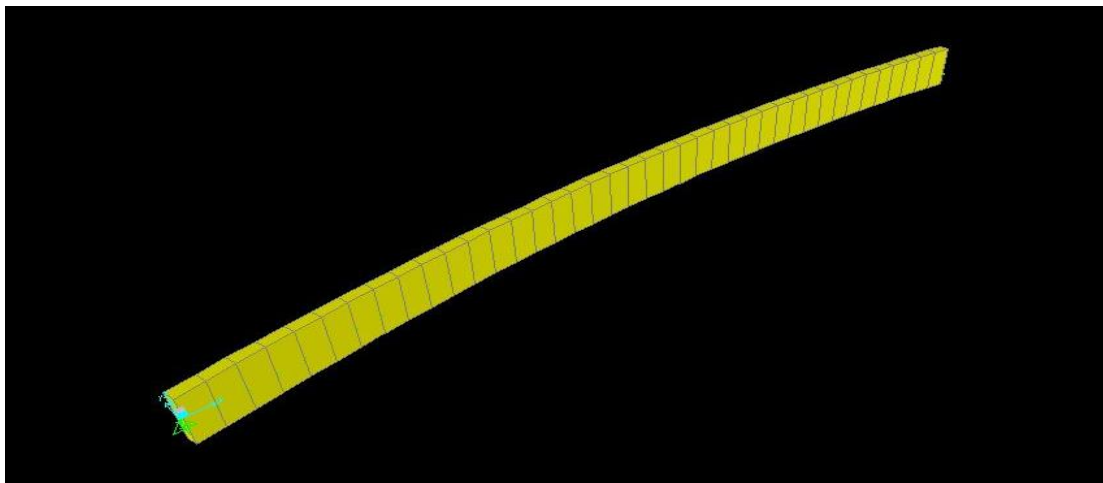
Σχήμα 3. 17 Διάγραμμα καμπτικών ροπών  $M_B$  καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$



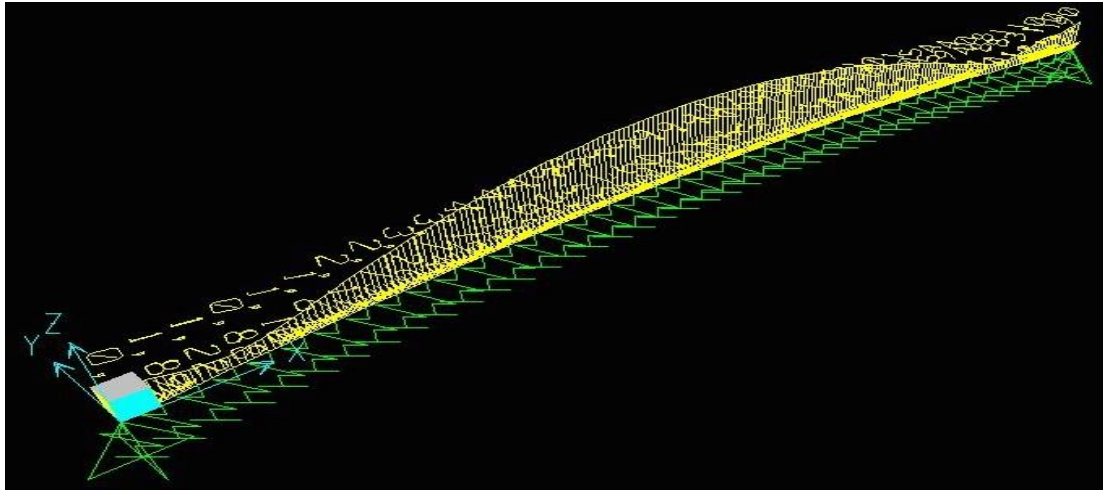
**Σχήμα 3. 18** Διάγραμμα στρέψεως  $M_T$  καμπύλης δοκού με  $R = 134,2$

Με γνωστά τα  $M_B$  και  $M_T$  εφαρμόζεται η θεωρία και με τη βοήθεια του Excel προσδιορίζονται οι τιμές του  $S_w$ . Οπότε φορτίζω την καμπύλη δοκό επί ελαστικής βάσεως για κάθε ακτίνα καμπυλότητας.

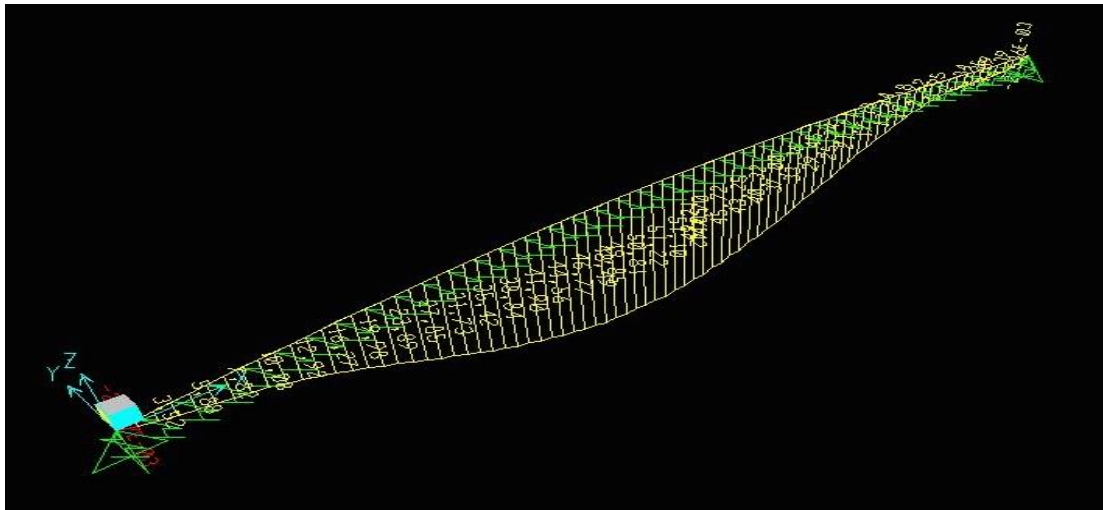
Η διατομή της καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως είναι η διατομή του κορμού.



**Σχήμα 3. 19** Διατομή-κορμός καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως



Σχήμα 3. 20 Φόρτιση καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως με  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 21 Διάγραμμα καμπτικών ροπών  $R = 134,2$

Από την τιμή της ροπής κάμψεως στο μέσο της καμπύλης δοκού εξάγεται η τιμή της τάσεως για το μέσο του κορμού στην άνω ίνα. Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

R	M (kNm)	$\sigma^{sw}$ (kPa)
134,2	50,1	117,8
114,5	60,7	142,7
100	74,7	175,7
80	99	232,8

+

R	$M_m$ (kNm)	$\sigma$ (kPa)
134,2	5420,5	1469,7
114,5	5389,7	1461,4
100	5443,6	1476
80	5400,7	1464,4

=

R	$\sigma_{\text{θεωρίας}}$ (kPa)
134,2	1587,5
114,5	1604,1
100	1651,7
80	1697,2

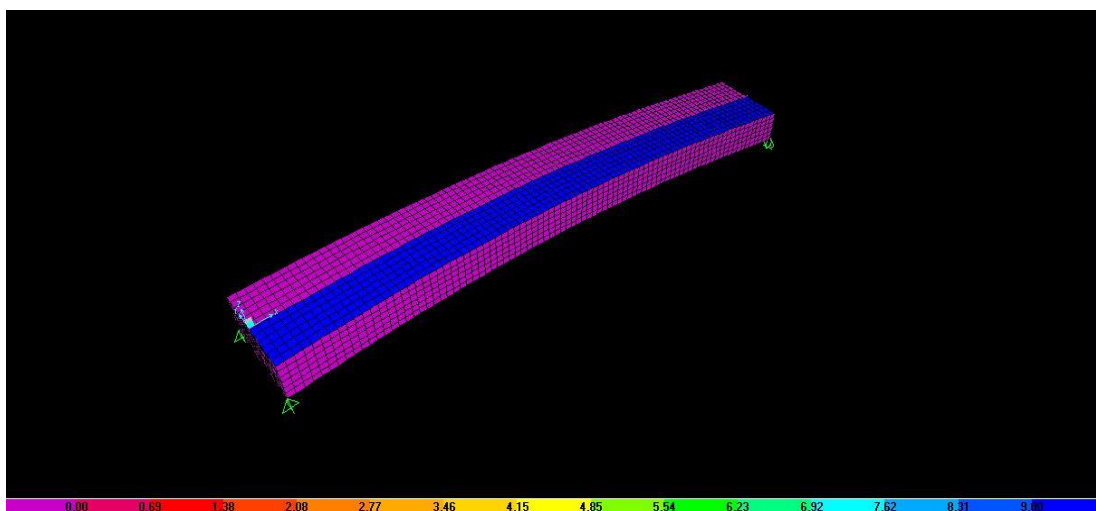
**Πίνακας 10** Αθροιστικός πίνακας τάσεων θεωρίας

## Επίλυση SAP2000

Οι επιλύσεις στο SAP2000 έγιναν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω.

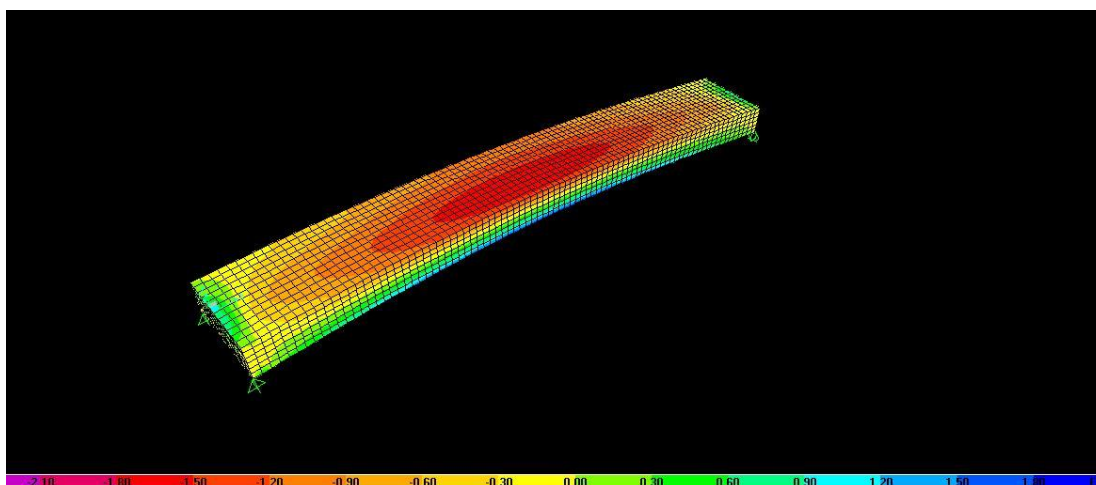
Οι γέφυρες είναι ήδη στημένες ως τρισδιάστατα μοντέλα.

Τροποποιείται η φόρτιση σε  $9\text{kN/m}^2$ . Το φορτίο αυτό εφαρμόζει σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Η φόρτιση όπως ήδη αναφέρθηκε εκτείνεται σε όλο το μήκος της γέφυρας και σε  $3\text{m}$  πλάτους όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για τη γέφυρα με ακτίνα καμπυλότητας  $R = 134,2$ .



Σχήμα 3. 22 Φόρτιση καμπύλης γέφυρας με  $R = 134,2$

Με βάση την παραπάνω φόρτιση προκύπτει το καθεστώς των τάσεων.



Σχήμα 3. 23 Τάσεις SAP2000 καμπύλης γέφυρας με  $R = 134,2$

Για το μέσο του κορμού (άνω ίνα) εσωτερικά της καμπύλης οι τάσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$R$	$\sigma^{SAP2000}$ (kPa)
134,2	-1430,6
114,5	-1400,3
100	-1458,17
80	-1228,9

**Πίνακας 11** Αποτελέσματα τάσεων SAP2000

$R$	$\sigma^{θεωρίας}$ (kPa)	$\sigma^{SAP2000}$ (kPa)	Απόκλιση
134,2	1587,5	1430,6	10%
114,5	1604,1	1400,53	12,7%
100	1651,7	1458,17	11,7%
80	1697,2	1228,9	27,6%

**Πίνακας 12** Συγκριτικός πίνακας τάσεων θεωρίας – SAP2000

### Απλουστευμένη θεωρητική επίλυση

Η θεωρητική επίλυση όπως διαπιστώθηκε δίνει αποτελέσματα υπέρ της ασφαλείας αποκλίνοντας από τα αποτελέσματα της τρισδιάστατης προσομοίωσης με σχετικά μικρές διαφορές.

Όμως, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί “χρονοβόρα” στο σημείο της αποτύπωσης των μεγεθών  $M_B$ ,  $M_T$  ανά 1m προκειμένου να προσδιορισθεί η πλήρης εικόνα της κατακόρυφης φόρτισης  $S_w$  στη δοκό επί ελαστικής βάσεως.

Παρατηρώντας ότι η καμπτική ροπή λόγω του κατακόρυφου φορτίου στο μέσο της αμφιέρειστης καμπύλης δοκού για τα διάφορα  $R$  δε διαφέρει πολύ από την αντίστοιχη τιμή της αμφιέρειστης ευθύγραμμης δοκού δοκιμάζεται να προσεγγισθεί απλουστευμένα η θεωρητική επίλυση.

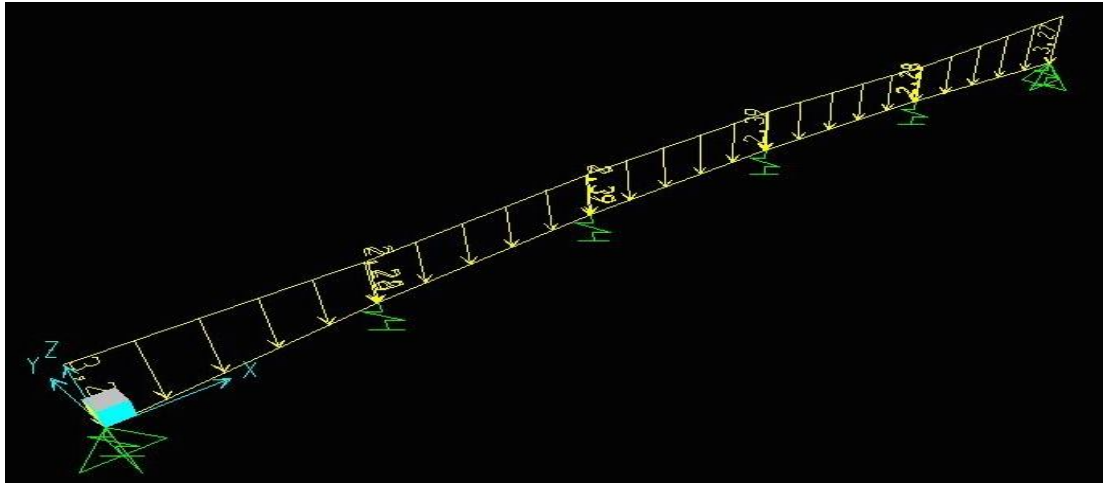
R	M <sub>m</sub> (kNm)
134,2	5420,5
114,5	5389,7
100	5443,6
80	5400,7

**Πίνακας 13** Ροπή κάμψεως λόγω κατακόρυφου φορτίου

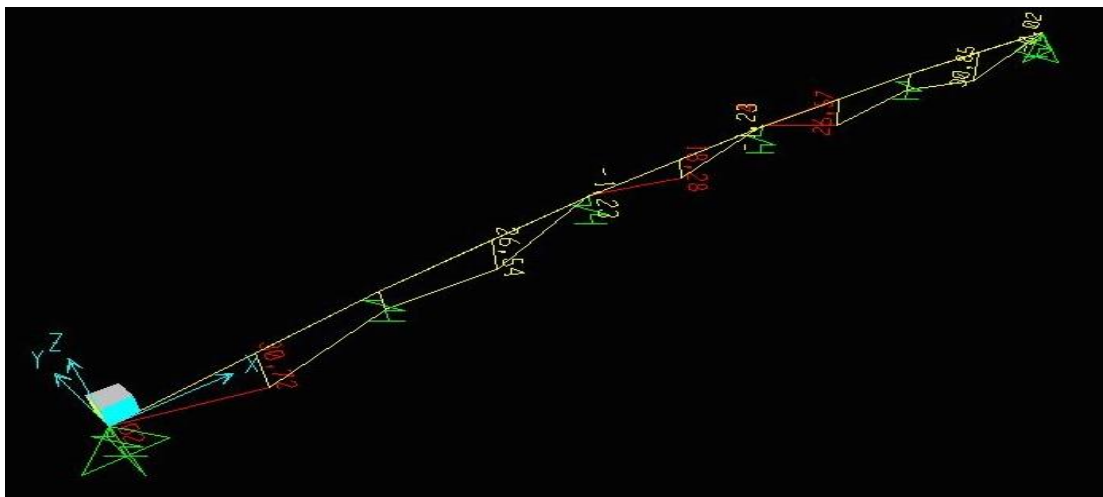
$$M_{\text{μεθυγράμμησ αμφίεριστης δοκού}} = ql^2/8 = 3\text{m} * 9\text{kN/m}^2 * (40\text{m})^2/8 = 5400 \text{ kNm}$$

Τα βήματα της απλουστευμένης θεωρητικής επίλυσης:

- Διασπάται η ευθύγραμμη πλέον αμφιέριστη δοκός σε 5 κομμάτια ανά 8m (έναντι των 40 κομματιών ανά 1m).
- Ανά 8m προσδιορίζεται η τιμή του διαγράμματος των καμπτικών ροπών για φόρτιση το ομοιόμορφο κατακόρυφο φορτίο  
 $q = 3\text{m} * 9\text{kN/m}^2 = 27 \text{ kN/m}$
- Ανά 8m υπολογίζεται η συνθήκη στρεπτικής ισορροπίας  
 $dM_T/ds = - (M_B/R + m_D)$
- Με γνωστά τα  $M_B$  και  $M_T$  ανά 8m ακολουθείται η ίδια διαδικασία υπολογισμού του φορτίου  $S_w$  όπως έχει περιγραφεί αναλυτικά στην §3.2.1.
- Φορτίζεται η δοκός επί ελαστικής βάσεως με το  $S_w$  ανά 8m με ίδια σταθερά ακαμψίας  $K$  μόνο που τροποποιείται ισοδύναμα γιατί το ελατήριο τοποθετείται πλέον ανά 8m.  
 $K' = 9877 \text{ kN/m} * 8\text{m} = 79016\text{kN/m}$
- Από το καμπτικό διάγραμμα ροπών υπολογίζεται η ζητούμενη τάση.
- $\sigma^{\text{θεωρίας}} = \sigma_{\text{κατακόρυφης φόρτισης άνευ στρεπτικού φορτίου}} + \sigma^{S_w}$ , όπου  
 $\sigma_{\text{κατακόρυφης φόρτισης άνευ στρεπτικού φορτίου}} = 5400 * 1,25/4,61 = 1464,2 \text{ kPa}$  για κάθε ακτίνα καμπυλότητας  $R$ .



Σχήμα 3. 24 Φόρτιση καμπύλης δοκού επί ελαστικής βάσεως με  $R = 134,2$



Σχήμα 3. 25 Διάγραμμα καμπτικών ροπών  $R = 134,2$

R	$M_m$ (kNm)	$\sigma$ (kPa)
134,2	18,3	40,3
114,5	21,3	50,1
100	24,6	57,8
80	33,8	79,5

+



R	M <sub>m</sub> (kNm)	σ (kPa)
134,2	5400	1464,2
114,5	5400	1464,2
100	5400	1464,2
80	5400	1464,2

=

R	σ <sup>θεωρίας</sup> (kPa)
134,2	1504,5
114,5	1514,3
100	1522
80	1543,7

**Πίνακας 14** Νέα αποτελέσματα απλοποιημένης θεωρητικής επίλυσης

R	σ <sup>θεωρίας</sup> (kPa)	σ <sup>SAP2000</sup> (kPa)	Απόκλιση
134,2	1504,5	1430,6	4,9%
114,5	1514,3	1400,5	7,5%
100	1522	1458,2	4,2%
80	1543,7	1228,9	20,4%

**Πίνακας 15** Συγκριτικός πίνακας τάσεων θεωρίας – SAP2000

Παρατηρείται ότι, παρόλο την απλοποιημένη επίλυση η θεωρία εξακολουθεί να βρίσκεται στην ασφαλή πλευρά με εξομαλυμένες τις ποσοστιαίες διαφορές.

## 4. Συμπεράσματα

- ◆ Οι κλειστές λεπτότοιχες διατομές – κιβωτιοειδείς παρουσιάζουν μεγάλη στρεπτική στιβαρότητα και εμφανίζουν μικρότερες στρεπτικές παραμορφώσεις σε σχέση με τις ανοιχτές. Γι' αυτό το λόγο, έχουν ευρεία εφαρμογή σε έργα γεφυροποιίας.
- ◆ Οι κιβωτιοειδείς δοκοί με *παραμορφώσιμη διατομή* αναπτύσσουν μια επιπρόσθετη καμπτική ένταση στην ήδη υπάρχουσα διατμητική ροή κατά Bredt. Δηλαδή, η κλασική θεωρία της στρέψεως κατά Bredt δεν αποτυπώνει το σύνολο της στρεπτικής αποκρίσεως.
- ◆ Η παραμορφωσιμότητα της διατομής, λόγω της στρεπτικής φόρτισης, εξετάζοντας την ισορροπία ενός αποκοπτόμενου σπονδύλου μοναδιαίου μήκους, συνεπάγεται αύξηση του μήκους της διαγωνίου του. Για την παρεμπόδιση της παραμορφώσεως τοποθετείται αμφιαρθρωτή ράβδος με άπειρη εκτατική στιβαρότητα στη διαγώνιο. Ο πλασματικός αυτός σύνδεσμος, με τις διαγώνιες δυνάμεις που συνεπάγεται και τις κατακόρυφες συνιστώσες του, οδηγεί στη γενική θεώρηση ότι ο κορμός λειτουργεί ως δοκός επί ελαστικής βάσεως. Έτσι, προσδιορίζεται η επιπρόσθετη ένταση στην διάτμηση των τοιχωμάτων κατά Bredt.
- ◆ Η απλοποιημένη μέθοδος προσδιορισμού της στρεπτικής αποκρίσεως που μόλις εξηγήθηκε, εν συντομία, εφαρμόζεται τόσο για ευθύγραμμες όσο και για καμπύλες γέφυρες. Οι αναλύσεις που προηγήθηκαν σε θεωρητικό, αλλά και σε πρακτικό επίπεδο (πρόγραμμα SAP2000) αποδεικνύουν ότι η θεωρία είναι αξιόπιστη με αποτελέσματα υπέρ της ασφάλειας και συγκρίσιμα με αυτά της τρισδιάστατης προσομοίωσης.
- ◆ Απλοποιώντας τη θεωρητική επίλυση με την εφαρμογή της συνθήκης της στρεπτικής ισορροπίας διαπιστώνεται ότι η θεωρία εξακολουθεί να δίνει ασφαλή αποτελέσματα.
- ◆ Άρα, η αξιολόγηση της μελέτης – έρευνας γύρω από τις απλοποιημένες μεθόδους είναι ότι με “απλούς” σχετικά υπολογισμούς μπορούν να προσδιορισθούν οι καταπονήσεις μιας γέφυρας κιβωτιοειδούς διατομής, χωρίς να απαιτείται η τρισδιάστατη προσομοίωσή της. Με λίγα λόγια, οι απλοποιημένες μέθοδοι καθίστανται κατάλληλες και αξιόπιστες για σκοπούς προμελέτης.

## Βιβλιογραφία

- (1) Stavridis, L.T., Structural systems: behavior and designs, Thomas Telford, 2010.
- (2) Stavridis, L.T., Spiliopoulos, K.V., Afantenou, A.V., Kapogiannis, I.A.,  
“ Appraisal of simplified methods for the analysis of box – girder bridges” in  
International Congress on Bridges, Proceedings IBSBI 2014.
- (3) Menn, C. Prestressed Concrete Bridges, Birkhauser Verlag, Basel 1996.
- (4) Schlaich J., Scheef H, Concrete Box – Girder Bridges, Zurich: IABSE Structural  
Engineering Documents, 1982.
- (5) SAP 2000, User’s manual, 2012.

## Παράρτημα

Για την εύρεση των αποτελεσμάτων της θεωρίας, συγκεκριμένα για τον προσδιορισμό της φορτίσεως επί ελαστικής βάσεως, έγινε χρήση του προγράμματος Excel. Παρακάτω επισυνάπτονται όλα τα φύλλα εργασίας στο Excel για κάθε περίπτωση.

- Καμπύλη δοκός με  $R = 114,5$  και φόρτιση μόνο το ίδιο βάρος

x	$M_B$	S	$S_w$
1	2486.25	4.686015636	1.752569848
2	4845	9.131722778	3.415264319
3	7076.25	13.33712143	4.988083413
4	9180	17.30221158	6.471027131
5	11156.25	21.02699324	7.864095471
6	13005	24.5114664	9.167288435
7	14726.25	27.75563107	10.38060602
8	16320	30.75948725	11.50404823
9	17786.25	33.52303493	12.53761507
10	19125	36.04627412	13.48130652
11	20336.25	38.32920482	14.3351226
12	21420	40.37182702	15.0990633
13	22376.25	42.17414072	15.77312863
14	23205	43.73614594	16.35731858
15	23906.25	45.05784265	16.85163315

16	24480	46.13923088	17.25607235
17	24926.25	46.98031061	17.57063617
18	25245	47.58108184	17.79532461
19	25436.25	47.94154458	17.93013767
20	25500	48.06169883	17.97507536
21	25436.25	47.94154458	17.93013767
22	25245	47.58108184	17.79532461
23	24926.25	46.98031061	17.57063617
24	24480	46.13923088	17.25607235
25	23906.25	45.05784265	16.85163315
26	23205	43.73614594	16.35731858
27	22376.25	42.17414072	15.77312863
28	21420	40.37182702	15.0990633
29	20336.25	38.32920482	14.3351226
30	19125	36.04627412	13.48130652
31	17786.25	33.52303493	12.53761507
32	16320	30.75948725	11.50404823
33	14726.25	27.75563107	10.38060602
34	13005	24.5114664	9.167288435
35	11156.25	21.02699324	7.864095471
36	9180	17.30221158	6.471027131
37	7076.25	13.33712143	4.988083413
38	4845	9.131722778	3.415264319

39	2486.25	4.686015636	1.752569848
40	0	0	0

- Καμπύλη δοκός με  $R = 134,2$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση  $8m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	$dV$	$dv^*h$	$dv^*b$	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	30.52	204.82							
1	194.7	204.82	0	0	0	0	0.58	0.58	0.22
2	357.24	206.30	1.48	0.05	0.12	0.30	1.06	0.78	0.29
3	519.81	209.00	2.70	0.09	0.22	0.54	1.55	1.03	0.39
4	682.34	213.00	4.00	0.13	0.32	0.80	2.03	1.28	0.48
5	844.85	218.20	5.20	0.17	0.42	1.04	2.52	1.54	0.57
6	1007.3	224.60	6.40	0.21	0.52	1.28	3.00	1.80	0.67
7	1169.71	232.30	7.70	0.25	0.62	1.54	3.49	2.04	0.76
8	1332.05	241.25	8.95	0.29	0.72	1.79	3.97	2.30	0.86
9	1494.31	251.41	10.16	0.33	0.82	2.03	4.45	2.56	0.96
10	1656.5	262.82	11.41	0.37	0.92	2.28	4.94	2.81	1.05
11	1818.59	275.50	12.68	0.41	1.02	2.54	5.42	3.06	1.14
12	1980.58	289.34	13.84	0.45	1.12	2.77	5.90	3.33	1.24
13	2142.46	304.50	15.16	0.49	1.22	3.03	6.39	3.57	1.34
14	2304.22	320.80	16.30	0.53	1.31	3.26	6.87	3.84	1.44
15	2465.86	338.40	17.60	0.57	1.42	3.52	7.35	4.08	1.53

16	2627.35	357.20	18.80	0.61	1.52	3.76	7.83	4.34	1.62
17	2752.22	264.00	-93.20	-3.01	-7.52	-18.64	8.20	27.88	10.43
18	2841.31	172.00	-92.00	-2.97	-7.42	-18.40	8.47	27.87	10.43
19	2894.64	80.70	-91.30	-2.95	-7.36	-18.26	8.63	27.88	10.43
20	2912.18	-10.24	-90.94	-2.93	-7.33	-18.19	8.68	27.85	10.42
21	2893.94	- 101.00	-90.76	-2.93	-7.32	-18.15	8.63	27.76	10.38
22	2839.92	- 192.00	-91.00	-2.94	-7.34	-18.20	8.46	27.66	10.34
23	2750.12	- 283.00	-91.00	-2.94	-7.34	-18.20	8.20	27.40	10.25
24	2624.54	- 375.50	-92.50	-2.98	-7.46	-18.50	7.82	27.36	10.23
25	2463.19	- 355.45	20.05	0.65	1.62	4.01	7.34	3.70	1.39
26	2301.7	- 336.60	18.85	0.61	1.52	3.77	6.86	3.44	1.29
27	2140.06	- 319.00	17.60	0.57	1.42	3.52	6.38	3.19	1.19
28	1978.3	- 302.70	16.30	0.53	1.31	3.26	5.90	2.95	1.10
29	1816.41	- 287.60	15.10	0.49	1.22	3.02	5.41	2.69	1.00
30	1654.42	- 273.70	13.90	0.45	1.12	2.78	4.93	2.43	0.91
31	1492.3	- 261.00	12.70	0.41	1.02	2.54	4.45	2.17	0.81

32	1330.14	- 250.00	11.00	0.35	0.89	2.20	3.96	1.98	0.74
33	1167.9	- 239.50	10.50	0.34	0.85	2.10	3.48	1.62	0.61
34	1005.52	- 230.60	8.90	0.29	0.72	1.78	3.00	1.41	0.53
35	843.12	- 222.80	7.80	0.25	0.63	1.56	2.51	1.14	0.43
36	680.66	- 216.00	6.80	0.22	0.55	1.36	2.03	0.86	0.32
37	518.15	- 211.00	5.00	0.16	0.40	1.00	1.54	0.68	0.25
38	355.6	- 207.00	4.00	0.13	0.32	0.80	1.06	0.41	0.15
39	193.05	- 204.50	2.50	0.08	0.20	0.50	0.58	0.22	0.08
40	30.46	- 203.00	1.50	0.05	0.12	0.30	0.09	0.24	0.09

- Καμπύλη δοκός με  $R = 114,5$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση  $8m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv^*h$	$dv^*b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	29.39	178.4										
1	192.7	178.4	0	2,5	6,2	0	0	0	114,5	0.7	0.7	0.3



2	354.5	180	1.6			0.05	0.13	0.32		1.2	0.9	0.3
3	516.3	183	3			0.10	0.24	0.6		1.8	1.2	0.5
4	678	187	4			0.13	0.32	0.8		2.4	1.6	0.6
5	840	193	6			0.19	0.48	1.2		2.9	1.8	0.7
6	1001	200	7			0.23	0.56	1.4		3.5	2.2	0.8
7	1163	209	9			0.29	0.73	1.8		4.1	2.4	0.9
8	1324	218	9			0.29	0.73	1.8		4.6	2.9	1.1
9	1486	229	11			0.35	0.89	2.2		5.2	3.1	1.2
10	1647	242	13			0.00	0.00	0		5.8	5.8	2.2
11	1808	256	14			0.45	1.13	2.8		6.3	3.7	1.4
12	1969	271	15			0.48	1.21	3		6.9	4.1	1.5
13	2130	288	17			0.55	1.37	3.4		7.4	4.3	1.6
14	2291	306	18			0.58	1.45	3.6		8.0	4.6	1.7
15	2452	325	19			0.61	1.53	3.8		8.6	5.0	1.9
16	2612	346	21			0.68	1.69	4.2		9.1	5.2	1.9
17	2736	255	-91			-2.94	-7.34	-18.2		9.6	28.7	10.7
18	2825	166	-89			-2.87	-7.18	-17.8		9.9	28.6	10.7
19	2878	77	-89			-2.87	-7.18	-17.8		10.1	28.8	10.8
20	2895	-11.3	-88.3			-2.85	-7.12	-17.66		10.1	28.7	10.7
21	2877	-99.4	-88.1			-2.84	-7.10	-17.62		10.1	28.6	10.7
22	2823	-188	-88.6			-2.86	-7.15	-17.72		9.9	28.5	10.7
23	2734	-276.4	-88.4			-2.85	-7.13	-17.68		9.6	28.1	10.5
24	2609	-366	-89.6			-2.89	-7.23	-17.92		9.1	28.0	10.5

25	2449	-344	22			0.71	1.77	4.4		8.6	4.5	1.7
26	2288.5	-323	21			0.68	1.69	4.2		8.0	4.2	1.6
27	2128	-304	19			0.61	1.53	3.8		7.4	3.9	1.5
28	1967	-286	18			0.58	1.45	3.6		6.9	3.6	1.3
29	1806	-269	17			0.55	1.37	3.4		6.3	3.2	1.2
30	1645	-254	15			0.48	1.21	3		5.7	3.0	1.1
31	1483	-240	14			0.45	1.13	2.8		5.2	2.6	1.0
32	1322	-228	12			0.39	0.97	2.4		4.6	2.4	0.9
33	1161	-217	11			0.35	0.89	2.2		4.1	2.1	0.8
34	1000	-206.8	10.2			0.33	0.82	2.04		3.5	1.7	0.6
35	838	-198.3	8.5			0.27	0.69	1.7		2.9	1.4	0.5
36	676	-191.3	7			0.23	0.56	1.4		2.4	1.1	0.4
37	515	-185.6	5.7			0.18	0.46	1.14		1.8	0.8	0.3
38	353	-181.2	4.4			0.14	0.35	0.88		1.2	0.5	0.2
39	191	-178.2	3			0.10	0.24	0.6		0.7	0.3	0.1
40	29.3	-176.6	1.6			0.05	0.13	0.32		0.1	0.3	0.1

- Καμπύλη δοκός με  $R = 100$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση  $8m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv^*h$	$dv^*b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
1	24.45	121.35		2,5	6,2	0.00	0.00	0.00	100	0.10	0.10	0.04
2	188	121.35	0			0.00	0.00	0.00		0.75	0.75	0.28
3	351	123.3	1.95			0.06	0.16	0.39		1.40	1.03	0.38

4	515	126.9	3.6			0.12	0.29	0.72		2.06	1.37	0.51
5	678	132.17	5.27			0.17	0.42	1.05		2.71	1.71	0.64
6	842	139.12	6.95			0.22	0.56	1.39		3.37	2.06	0.77
7	1006	147.75	8.63			0.28	0.70	1.73		4.02	2.40	0.90
8	1168.8	158	10.25			0.33	0.83	2.05		4.68	2.75	1.03
9	1331.75	170	12			0.39	0.97	2.40		5.33	3.08	1.15
10	1494.6	183.65	13.65			0.44	1.10	2.73		5.98	3.43	1.28
11	1657.3	198.96	15.31			0.49	1.23	3.06		6.63	3.77	1.41
12	1819.9	215.93	16.97			0.55	1.37	3.39		7.28	4.12	1.54
13	1982.2	234.57	18.64			0.60	1.50	3.73		7.93	4.46	1.67
14	2144.3	254.87	20.3			0.65	1.64	4.06		8.58	4.80	1.80
15	2306.3	276.83	21.96			0.71	1.77	4.39		9.23	5.15	1.93
16	2468	300.45	23.62			0.76	1.90	4.72		9.87	5.49	2.05
17	2629.4	325.73	25.28			0.82	2.04	5.06		10.52	5.83	2.18
18	2754	352.66	26.93			0.87	2.17	5.39		11.02	6.03	2.26
19	2896.1	239.23	-113.43			-3.66	-9.15	-22.69		11.58	35.47	13.27
20	2913.48	154	-85.23			-2.75	-6.87	-17.05		11.65	29.51	11.04
21	2895.18	69.7	-84.3			-2.72	-6.80	-16.86		11.58	29.24	10.94
22	2841.15	-14.1	-83.8			-2.70	-6.76	-16.76		11.36	28.93	10.82
23	2751.4	-97.6	-83.5			-2.69	-6.73	-16.70		11.01	28.51	10.66
24	2625.9	-181.4	-83.8			-2.70	-6.76	-16.76		10.50	28.09	10.51
25	2464.7	-265.7	-84.3			-2.72	-6.80	-16.86		9.86	27.57	10.31
26	2303.25	-350.9	-85.2			-2.75	-6.87	-17.04		9.21	27.14	10.15

27	2141.5	-324	26.9			0.87	2.17	5.38		8.57	3.85	1.44
28	1979.6	-299	25			0.81	2.02	5.00		7.92	3.55	1.33
29	1817.4	-275.1	23.9			0.77	1.93	4.78		7.27	3.15	1.18
30	1655	-253.11	21.99			0.71	1.77	4.40		6.62	2.84	1.06
31	1492.5	-232.82	20.29			0.65	1.64	4.06		5.97	2.52	0.94
32	1329.8	-214.18	18.64			0.60	1.50	3.73		5.32	2.19	0.82
33	1167	-197.21	16.97			0.55	1.37	3.39		4.67	1.87	0.70
34	1004	-181.9	15.31			0.49	1.23	3.06		4.02	1.56	0.58
35	840.9	-168.27	13.63			0.44	1.10	2.73		3.36	1.27	0.48
36	677.7	-156.3	11.97			0.39	0.97	2.39		2.71	1.02	0.38
37	514	-146	10.3			0.33	0.83	2.06		2.06	0.83	0.31
38	351	-137	9			0.29	0.73	1.80		1.40	0.83	0.31
39	187.6	-125	12			0.39	0.97	2.40		0.75	1.91	0.72
40	24.23	-121.5	3.5			0.11	0.28	0.70		0.10	0.67	0.25

- Καμπύλη δοκός με  $R = 80$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε έκταση  $\delta m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	$S_w$
0	3.5	39.7										
1	169	39.7	0	2,5	6,2	0.00	0.00	0.00	80	0.85	0.85	0.32

2	334	41.89	2.19			0.07	0.18	0.44		1.67	1.24	0.47
3	498	46.19	4.3			0.14	0.35	0.86		2.49	1.67	0.62
4	663	52.61	6.42			0.21	0.52	1.28		3.32	2.10	0.78
5	828	61.15	8.54			0.28	0.69	1.71		4.14	2.53	0.95
6	992	71.82	10.67			0.34	0.86	2.13		4.96	2.95	1.10
7	1156	84.61	12.79			0.41	1.03	2.56		5.78	3.38	1.27
8	1321	99.51	14.9			0.48	1.20	2.98		6.61	3.82	1.43
9	1485	116.53	17.02			0.55	1.37	3.40		7.43	4.25	1.59
10	1648	135.67	19.14			0.62	1.54	3.83		8.24	4.67	1.75
11	1812	156.91	21.24			0.69	1.71	4.25		9.06	5.11	1.91
12	1975	180.26	23.35			0.75	1.88	4.67		9.88	5.54	2.07
13	2138	205.71	25.45			0.82	2.05	5.09		10.69	5.96	2.23
14	2300	233.25	27.54			0.89	2.22	5.51		11.50	6.39	2.39
15	2462	262.89	29.64			0.96	2.39	5.93		12.31	6.81	2.55
16	2624	294.62	31.73			1.02	2.56	6.35		13.12	7.24	2.71
17	2749	214.54	-80.08			-2.58	-6.46	-16.02		13.75	30.45	11.39
18	2838	136.07	-78.47			-2.53	-6.33	-15.69		14.19	30.55	11.42
19	2891	58.75	-77.32			-2.49	-6.24	-15.46		14.46	30.56	11.43
20	2908	-17.88	-76.63			-2.47	-6.18	-15.33		14.54	30.50	11.41
21	2890	-94.27	-76.39			-2.46	-6.16	-15.28		14.45	30.36	11.35
22	2836	-170.9	-76.63			-2.47	-6.18	-15.33		14.18	30.15	11.27
23	2746	-248.22	-77.32			-2.49	-6.24	-15.46		13.73	29.85	11.16
24	2620	-326.69	-78.47			-2.53	-6.33	-15.69		13.10	29.48	11.03

25	2459	-292.88	33.81			1.09	2.73	6.76		12.30	6.17	2.31
26	2296	-261.15	31.73			1.02	2.56	6.35		11.48	5.74	2.15
27	2135	-231.51	29.64			0.96	2.39	5.93		10.68	5.31	1.99
28	1972	-203.97	27.54			0.89	2.22	5.51		9.86	4.89	1.83
29	1809	-178.52	25.45			0.82	2.05	5.09		9.05	4.46	1.67
30	1646	-155.17	23.35			0.75	1.88	4.67		8.23	4.03	1.51
31	1483	-133.93	21.24			0.69	1.71	4.25		7.42	3.60	1.35
32	1319	-114.8	19.13			0.62	1.54	3.83		6.60	3.17	1.19
33	1155	-97.79	17.01			0.55	1.37	3.40		5.78	2.74	1.03
34	991	-82.88	14.91			0.48	1.20	2.98		4.96	2.31	0.86
35	827	-70.1	12.78			0.41	1.03	2.56		4.14	1.89	0.71
36	662	-59.44	10.66			0.34	0.86	2.13		3.31	1.46	0.55
37	497	-50.89	8.55			0.28	0.69	1.71		2.49	1.04	0.39
38	333	-44.48	6.41			0.21	0.52	1.28		1.67	0.64	0.24
39	168	-40.18	4.3			0.14	0.35	0.86		0.84	0.35	0.13
40	3	-38	2.18			0.07	0.18	0.44		0.02	0.46	0.17

- Καμπύλη δοκός με  $R = 134,2$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε όλο το μήκος της γέφυρας και σε πλάτος 3m (συμβατική λωρίδα κυκλοφορίας)

x	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	dV	$dv^*h$	$dv^*b$	R	$M_B/(hR)$	S	$S_w$
---	-------	-------	-----------	----	---------	---------	---	------------	---	-------

(m)										
0	38.81	260.47								
1	570.8	219.55	40.92	0.00	0.00	0.00	134.2	1.70	1.70	0.64
2	1073.82	182.98	36.57	1.18	2.95	7.31		3.20	5.06	1.89
3	1549.82	150.25	32.73	1.06	2.64	6.55		4.62	3.27	1.22
4	1998.78	121.16	29.09	0.94	2.35	5.82		5.96	2.35	0.88
5	2420.66	95.5	25.66	0.83	2.07	5.13		7.22	2.94	1.10
6	2815.45	73.1	22.4	0.72	1.81	4.48		8.39	4.31	1.61
7	3183.12	53.63	19.47	0.63	1.57	3.89		9.49	5.81	2.17
8	3523.64	37	16.63	0.54	1.34	3.33		10.50	7.30	2.73
9	3837	23	14	0.45	1.13	2.80		11.44	8.71	3.26
10	4123	11.38	11.62	0.37	0.94	2.32		12.29	10.01	3.74
11	4382	1.94	9.44	0.30	0.76	1.89		13.06	11.20	4.19
12	4614	-5.52	7.46	0.24	0.60	1.49		13.75	12.28	4.59
13	4818	-11.2	5.68	0.18	0.46	1.14		14.36	13.23	4.95
14	4996	-15.33	4.13	0.13	0.33	0.83		14.89	14.07	5.26
15	5146	-18.1	2.77	0.09	0.22	0.55		15.34	14.79	5.53
16	5268.5	-19.73	1.63	0.05	0.13	0.33		15.70	15.38	5.75
17	5364	-20.42	0.69	0.02	0.06	0.14		15.99	15.85	5.93
18	5432	-20.4	-0.02	0.00	0.00	0.00		16.19	16.19	6.06
19	5473	-19.82	-0.58	-0.02	-0.05	-0.12		16.31	16.43	6.14
20	5487	-19	-0.82	-0.03	-0.07	-0.16		16.35	16.52	6.18
21	5473	-18	-1	-0.03	-0.08	-0.20		16.31	16.51	6.18

22	5432	-17.1	-0.9	-0.03	-0.07	-0.18		16.19	16.37	6.12
23	5364	-16.54	-0.56	-0.02	-0.05	-0.11		15.99	16.10	6.02
24	5268	-16.5	-0.04	0.00	0.00	-0.01		15.70	15.71	5.88
25	5146	-17	0.5	0.02	0.04	0.10		15.34	15.24	5.70
26	4996	-19	2	0.06	0.16	0.40		14.89	14.49	5.42
27	4818	-22	3	0.10	0.24	0.60		14.36	13.76	5.15
28	4614	-26	4	0.13	0.32	0.80		13.75	12.96	4.85
29	4382	-31	5	0.16	0.40	1.00		13.06	12.07	4.51
30	4123	-39	8	0.26	0.65	1.60		12.29	10.71	4.01
31	3837	-48	9	0.29	0.73	1.80		11.44	9.66	3.61
32	3523	-60	12	0.39	0.97	2.40		10.50	8.16	3.05
33	3182	-74	14	0.45	1.13	2.80		9.48	6.78	2.54
34	2815	-91	17	0.55	1.37	3.40		8.39	5.18	1.94
35	2420	-110	19	0.61	1.53	3.80		7.21	3.74	1.40
36	1998	-132	22	0.71	1.77	4.40		5.96	2.36	0.88
37	1548	-158	26	0.84	2.10	5.20		4.61	2.18	0.81
38	1072	-187	29	0.94	2.34	5.80		3.20	3.50	1.31
39	569	-220	33	1.06	2.66	6.60		1.70	5.58	2.09
40	38.48	-256.5	36.5	1.18	2.94	7.30		0.11	7.76	2.90

- Καμπύλη δοκός με  $R = 114,5$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε όλο το μήκος της γέφυρας και σε πλάτος 3m



x (m)	M <sub>B</sub>	M <sub>T</sub>	dM <sub>T</sub> /ds	dV	dv*h	dv*b	R	M <sub>B</sub> /(hR)	S	Sw
0	-6.25	-37.94								
1	115.88	-37.94	0	0.00	0.00	0.00	114,5	0.40	0.40	0.15
2	238.33	-36.97	0.97	0.03	0.08	0.19		0.83	0.64	0.24
3	360.77	-34.96	2.01	0.06	0.16	0.40		1.26	0.87	0.33
4	483.18	-31.91	3.05	0.10	0.25	0.61		1.69	1.11	0.41
5	605.57	-27.84	4.07	0.13	0.33	0.81		2.12	1.34	0.50
6	727.91	-22.74	5.1	0.16	0.41	1.02		2.54	1.58	0.59
7	850.21	-16.6	6.14	0.20	0.50	1.23		2.97	1.81	0.68
8	972.45	-9.44	7.16	0.23	0.58	1.43		3.40	2.05	0.77
9	1094.63	-1.24	8.2	0.26	0.66	1.64		3.82	2.28	0.85
10	1216.74	7.98	9.22	0.30	0.74	1.84		4.25	2.52	0.94
11	1338.76	18.23	10.25	0.33	0.83	2.05		4.68	2.75	1.03
12	1460.69	29.52	11.29	0.36	0.91	2.26		5.10	2.99	1.12
13	1582.52	41.82	12.3	0.40	0.99	2.46		5.53	3.22	1.21
14	1704.25	55.16	13.34	0.43	1.08	2.67		5.95	3.46	1.29
15	1825.86	69.52	14.36	0.46	1.16	2.87		6.38	3.69	1.38
16	1947.34	84.9	15.38	0.50	1.24	3.08		6.80	3.93	1.47
17	2041.55	60.6	-24.3	-0.78	-1.96	-4.86		7.13	12.15	4.54
18	2108.81	37.09	-23.51	-0.76	-1.90	-4.70		7.37	12.22	4.57
19	2149.14	14.14	-22.95	-0.74	-1.85	-4.59		7.51	12.24	4.58
20	2162.51	-8.46	-22.6	-0.73	-1.82	-4.52		7.55	12.21	4.57

21	2148.93	-30.95	-22.49	-0.73	-1.81	-4.50		7.51	12.14	4.54
22	2108.41	-53.55	-22.6	-0.73	-1.82	-4.52		7.37	12.02	4.50
23	2040.93	-76.49	-22.94	-0.74	-1.85	-4.59		7.13	11.86	4.44
24	1946.51	-100	-23.51	-0.76	-1.90	-4.70		6.80	11.66	4.36
25	1825.15	-83.59	16.41	0.53	1.32	3.28		6.38	3.37	1.26
26	1703.65	-68.21	15.38	0.50	1.24	3.08		5.95	3.13	1.17
27	1582.03	-53.85	14.36	0.46	1.16	2.87		5.53	2.90	1.08
28	1460.29	-40.52	13.33	0.43	1.08	2.67		5.10	2.66	1.00
29	1338.44	-28.21	12.31	0.40	0.99	2.46		4.68	2.43	0.91
30	1216.5	-16.93	11.28	0.36	0.91	2.26		4.25	2.19	0.82
31	1094.47	-6.68	10.25	0.33	0.83	2.05		3.82	1.96	0.73
32	972.35	2.54	9.22	0.30	0.74	1.84		3.40	1.72	0.64
33	850.16	10.74	8.2	0.26	0.66	1.64		2.97	1.49	0.56
34	727.9	17.9	7.16	0.23	0.58	1.43		2.54	1.25	0.47
35	605.59	24.04	6.14	0.20	0.50	1.23		2.12	1.02	0.38
36	483.23	29.14	5.1	0.16	0.41	1.02		1.69	0.78	0.29
37	360.83	33.2	4.06	0.13	0.33	0.81		1.26	0.56	0.21
38	238.41	36.25	3.05	0.10	0.25	0.61		0.83	0.33	0.12
39	115.96	38.26	2.01	0.06	0.16	0.40		0.41	0.16	0.06
40	-6.51	39.23	0.97	0.03	0.08	0.19		-0.02	0.23	0.09

- Καμπύλη δοκός με  $R = 100$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε όλο το μήκος της γέφυρας και σε πλάτος  $3m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	$S_w$
0	14.42	71.54		2,5	6,2	0.00	0.00	0.00	100	0.06	0.06	0.02
1	548.07	30.49	41.05			1.32	3.31	8.21		2.19	6.87	2.57
2	1054	-4.95	35.44			1.14	2.86	7.09		4.22	4.05	1.52
3	1532.92	-35.19	30.24			0.98	2.44	6.05		6.13	2.44	0.91
4	1985.27	-60.53	25.34			0.82	2.04	5.07		7.94	3.53	1.32
5	2409.45	-81.24	20.71			0.67	1.67	4.14		9.64	5.74	2.15
6	2807	-97.6	16.36			0.53	1.32	3.27		11.23	8.06	3.02
7	3177.28	-109.9	12.3			0.40	0.99	2.46		12.71	10.30	3.85
8	3520.32	-	8.46			0.27	0.68	1.69		14.08	12.41	4.64
9	3836.07	-	4.96			0.16	0.40	0.99		15.34	14.36	5.37
10	4124.48	-125	1.68			0.05	0.14	0.34		16.50	16.16	6.04
11	4385.53	-123.8	-1.2			-	0.04	-0.10		17.54	17.78	6.65
12	4619.19	-119.9	-3.9			-	0.13	-0.31		18.48	19.26	7.20
13	4825.43	-	-6.26			-	0.20	-0.50		19.30	20.56	7.69
14	5004.22	-	-8.41			-	-	-0.68		20.02	21.71	8.12

		105.23				0.27		1.68					
15	5155.56	-95	-10.23			-	0.33	-0.83	2.05		20.62	22.68	8.48
16	5279.41	-83.21	-11.79			-	0.38	-0.95	2.36		21.12	23.49	8.79
17	5375.77	-70.15	-13.06			-	0.42	-1.05	2.61		21.50	24.14	9.03
18	5444.63	-56	-14.15			-	0.46	-1.14	2.83		21.78	24.63	9.21
19	5486	-41.36	-14.64			-	0.47	-1.18	2.93		21.94	24.90	9.31
20	5499.8	-26.18	-15.18			-	0.49	-1.22	3.04		22.00	25.07	9.37
21	5486	-10.87	-15.31			-	0.49	-1.23	3.06		21.94	25.04	9.36
22	5444.86	4.3	-15.17			-	0.49	-1.22	3.03		21.78	24.84	9.29
23	5376.12	19.05	-14.75			-	0.48	-1.19	2.95		21.50	24.48	9.16
24	5279.06	33.09	-14.04			-	0.45	-1.13	2.81		21.12	23.95	8.96
25	5156.1	46.15	-13.06			-	0.42	-1.05	2.61		20.62	23.26	8.70
26	5004.83	57.93	-11.78			-	0.38	-0.95	2.36		20.02	22.40	8.38
27	4826.1	68.17	-10.24			-	0.33	-0.83	2.05		19.30	21.37	7.99
28	4619.9	76.57	-8.4			-	-	-0.68	-		18.48	20.17	7.54

						0.27		1.68					
29	4386.26	82.86	-6.29			-	-	-			17.55	18.81	7.03
						0.20	-0.51	1.26					
30	4125.2	86.76	-3.9			-	-	-			16.50	17.28	6.46
						0.13	-0.31	0.78					
31	3836.7	87.98	-1.22			-	-	-			15.35	15.59	5.83
						0.04	-0.10	0.24					
32	3520.93	86.24	1.74			0.06	0.14	0.35			14.08	13.74	5.14
33	3177.78	81.27	4.97			0.16	0.40	0.99			12.71	11.72	4.38
34	2807.33	72.78	8.49			0.27	0.68	1.70			11.23	9.56	3.57
35	2409.62	60.5	12.28			0.40	0.99	2.46			9.64	7.25	2.71
36	1984.7	44.14	16.36			0.53	1.32	3.27			7.94	4.85	1.81
37	1532.6	23.43	20.71			0.67	1.67	4.14			6.13	2.60	0.97
38	1053.36	-1.92	25.35			0.82	2.04	5.07			4.21	2.22	0.83
39	547.04	-32.17	30.25			0.98	2.44	6.05			2.19	4.57	1.71
40	13.7	-67.62	35.45			1.14	2.86	7.09			0.05	7.59	2.84

- Καμπύλη δοκός με  $R = 80$  και φόρτιση το φορτίο κυκλοφορίας σε όλο το μήκος της γέφυρας και σε πλάτος  $3m$

x (m)	$M_B$	$M_T$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	-29.93	-117										
1	505.9	158.23	41.23	2,5	6,2	0.00	0.00	0.00	80	2.53	2.53	0.95

2	1016.26	192.91	34.68			1.12	2.80	6.94		5.08	3.36	1.26
3	1499.54	-221	28.09			0.91	2.27	5.62		7.50	2.94	1.10
4	1955.66	242.87	21.87			0.71	1.76	4.37		9.78	5.68	2.13
5	2384.55	258.85	15.98			0.52	1.29	3.20		11.92	8.82	3.30
6	2786.13	-269.3	10.45			0.34	0.84	2.09		13.93	11.87	4.44
7	3160.34	274.57	5.27			0.17	0.42	1.05		15.80	14.75	5.52
8	3507.1	-275	0.43			0.01	0.03	0.09		17.54	17.45	6.53
9	3826.36	270.99	-4.01			0.13	-0.32	-0.80		19.13	19.94	7.46
10	4118.1	262.85	-8.14			0.26	-0.66	-1.63		20.59	22.23	8.31
11	4382.15	250.94	-11.91			0.38	-0.96	-2.38		21.91	24.31	9.09
12	4618.6	235.64	-15.3			0.49	-1.23	-3.06		23.09	26.18	9.79
13	4827.33	217.28	-18.36			0.59	-1.48	-3.67		24.14	27.85	10.42
14	5008.34	196.24	-21.04			0.68	-1.70	-4.21		25.04	29.30	10.96
15	5161.59	172.86	-23.38			0.75	-1.89	-4.68		25.81	30.54	11.42
16	5287.04	147.51	-25.35			0.82	-2.04	-5.07		26.44	31.57	11.81

17	5384.68	120.54	-26.97			-	0.87	-2.18	-5.39		26.92	32.39	12.11
18	5454.48	-92.32	-28.22			-	0.91	-2.28	-5.64		27.27	32.99	12.34
19	5496.43	-63.2	-29.12			-	0.94	-2.35	-5.82		27.48	33.39	12.49
20	5510.52	-33.54	-29.66			-	0.96	-2.39	-5.93		27.55	33.57	12.56
21	5496.76	-3.7	-29.84			-	0.96	-2.41	-5.97		27.48	33.54	12.54
22	5455.13	25.96	-29.66			-	0.96	-2.39	-5.93		27.28	33.29	12.45
23	5385.64	55.08	-29.12			-	0.94	-2.35	-5.82		26.93	32.84	12.28
24	5288.3	83.3	-28.22			-	0.91	-2.28	-5.64		26.44	32.17	12.03
25	5163.13	110.27	-26.97			-	0.87	-2.18	-5.39		25.82	31.29	11.70
26	5010.14	135.61	-25.34			-	0.82	-2.04	-5.07		25.05	30.19	11.29
27	4829.36	158.99	-23.38			-	0.75	-1.89	-4.68		24.15	28.88	10.80
28	4620.81	180.03	-21.04			-	0.68	-1.70	-4.21		23.10	27.36	10.23
29	4384.53	198.38	-18.35			-	0.59	-1.48	-3.67		21.92	25.64	9.59
30	4120.56	213.68	-15.3			-	0.49	-1.23	-3.06		20.60	23.69	8.86

31	3828.93	225.57	-11.89			-	0.38	-0.96	-2.38		19.14	21.54	8.06
32	3509.69	233.71	-8.14			-	0.26	-0.66	-1.63		17.55	19.19	7.18
33	3162.9	237.72	-4.01			-	0.13	-0.32	-0.80		15.81	16.62	6.22
34	2788.6	237.3	0.42			-	0.01	0.03	0.08		13.94	13.86	5.18
35	2386.86	231.99	5.31			-	0.17	0.43	1.06		11.93	10.88	4.07
36	1957.74	221.53	10.46			-	0.34	0.84	2.09		9.79	7.74	2.90
37	1501.32	205.54	15.99			-	0.52	1.29	3.20		7.51	4.50	1.68
38	1017.66	183.66	21.88			-	0.71	1.76	4.38		5.09	1.90	0.71
39	506.85	155.55	28.11			-	0.91	2.27	5.62		2.53	3.83	1.43
40	-31.04	120.85	34.7			-	1.12	2.80	6.94		-0.16	7.63	2.85

- Απλουστευμένη θεωρητική επίλυση  $R = 134,2$

x (m)	$M_B$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv^*h$	$dv^*b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27
8	3456	66.25	2,5	6,2	2.14	5.34	13.25	134.20	10.30	6.10	2.28
16	5184	79.13			2.55	6.38	15.83		15.45	6.39	2.39
24	5184	79.13			2.55	6.38	15.83		15.45	6.39	2.39
32	3456	66.25			2.14	5.34	13.25		10.30	6.10	2.28
40	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27



- Απλουστευμένη θεωρητική επίλυση  $R = 114,5$

x (m)	$M_B$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27
8	3456	70.68	2,5	6,2	2.28	5.70	14.14	114.50	12.07	6.06	2.27
16	5184	85.78			2.77	6.92	17.16		18.11	6.98	2.61
24	5184	85.78			2.77	6.92	17.16		18.11	6.98	2.61
32	3456	70.68			2.28	5.70	14.14		12.07	6.06	2.27
40	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27

- Απλουστευμένη θεωρητική επίλυση  $R = 100$

x (m)	$M_B$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	Sw
0	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27
8	3456	75.06	2,5	6,2	2.42	6.05	15.01	100	13.82	6.17	2.31
16	5184	92.34			2.98	7.45	18.47		20.74	7.78	2.91
24	5184	92.34			2.98	7.45	18.47		20.74	7.78	2.91
32	3456	75.06			2.42	6.05	15.01		13.82	6.17	2.31
40	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27

- Απλουστευμένη θεωρητική επίλυση  $R = 80$

x (m)	$M_B$	$dM_T/ds$	h	b	dV	$dv \cdot h$	$dv \cdot b$	R	$M_B/(hR)$	S	$S_w$
0	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27
8	3456	83.7	2,5	6,2	2.70	6.75	16.74	80	17.28	6.77	2.53
16	5184	105.3			3.40	8.49	21.06		25.92	9.78	3.66
24	5184	105.3			3.40	8.49	21.06		25.92	9.78	3.66
32	3456	83.7			2.70	6.75	16.74		17.28	6.77	2.53
40	0	40.5			1.31	3.27	8.10		0.00	8.73	3.27

