**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ**

**ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Διπλωματική εργασία

# ***ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ***

**Φοιτήτρια: Χατζηράπτη Αικατερίνη**

**Επιβλέπων: Ψαρράκος Παναγιώτης**

**Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015**

# ***ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ***

Το παρόν εκπόνημα αποτελεί τη διπλωματική εργασία του συγγραφέα, τελειόφοιτου της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών με θέμα «Αριθμητικό Πεδίο Πινάκων», υπό την επίβλεψη του κ. Παναγιώτη Ψαρράκου, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για την επισταμένη καθοδήγησή του καθ’ όλη τη διάρκεια της προετοιμασίας της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της οικογένειας μου για τη συμπαράσταση, την αγάπη και την υποστήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια, ιδιαιτέρως τον αδελφό μου Χατζηράπτη Ιάκωβο για τη παρότρυνση του να εισαχθώ στη σχολή αλλά και για τη βοήθεια του καθ’ όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου. Επίσης, ευχαριστώ πολύ τον φίλο και συμφοιτητή μου Τσουμπελή Ανδρέα για τη κοινή μας πορεία στη σχολή από την αρχή μέχρι το τέλος της. Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην αναφερθώ και να ευχαριστήσω τον Περπερίδη Γιάννη για την στήριξη και τη δύναμη που μου δίνει απλόχερα τον τελευταίο ενάμισι χρόνο.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελ.

# ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

## 0. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αριθμητικό πεδίο ενός $n \times n$ πίνακα $A$,

$$F(A) \equiv \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n,\ x^* x = 1\},$$

είναι ένα σύνολο μιγαδικών αριθμών, όπως το φάσμα $\sigma(A)$.

Το φάσμα και το αριθμητικό πεδίο είναι σύνολα από τα οποία αντλούμε πληροφορίες για τον πίνακα. Το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα δίνει πληροφορίες που το φάσμα δεν δύναται να δώσει. Το φάσμα είναι ένα διακριτό σημειοσύνολο ενώ το αριθμητικό πεδίο είναι πάντα ένα συμπαγές κυρτό σύνολο. Οι ιδιοτιμές των Ερμιτιανών και Κανονικών πινάκων έχουν ιδιαίτερα επιθυμητές ιδιότητες και το αριθμητικό πεδίο αποτυπώνει κάποιες πτυχές αυτής της ενδιαφέρουσας δομής για γενικούς πίνακες.

## 0.1 ΥΠΟΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ

Εάν μόνο τα φάσματα $\sigma(A)$ και $\sigma(B)$ είναι γνωστά για δύο $n \times n$ πίνακες $A$ και $B$ τότε μπορούμε να βγάλουμε λίγα συμπεράσματα για το φάσμα του αθροίσματος $\sigma(A+B)$. Φυσικά $tr(A+B) = trA + trB$ επομένως, το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του $A+B$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του $A$ συν το άθροισμα των ιδιοτιμών του $B$. Ωστόσο, για να εκφράσουμε πληροφορίες για τις ιδιοτιμές του $A+B$ πρέπει να έχουμε περαιτέρω πληροφορίες για τα $A$ και $B$.

Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές δύο $n \times n$ πινάκων $A$ και $B$ είναι σταθερές τότε η φασματική ακτίνα του $A+B$, η οποία είναι η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή μιας ιδιοτιμής του $A+B$ και συμβολίζεται με $p(A+B)$, μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Από την άλλη πλευρά, αν ο $A$ και ο $B$ είναι κανονικοί, τότε μπορούμε να ξέρουμε αρκετά για τις ιδιοτιμές του $A+B$. Για παράδειγμα, $p(A+B) \leq p(A) + p(B)$ σε αυτή την περίπτωση. Τα αθροίσματα των πινάκων προκύπτουν στην πράξη και δύο σχετικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου $F(\cdot)$ είναι οι παρακάτω:

a) Το αριθμητικό πεδίο είναι υποπροσθετικό: $F(A+B) \subset F(A)+F(B)$, όπου το σύνολο του αθροίσματος έχει το φυσικό ορισμό των αθροισμάτων όλων των πιθανών ζευγών, ένα από το καθένα και

b) Το φάσμα ενός πίνακα βρίσκεται μέσα στο αριθμητικό πεδίο του $\sigma(A) \subset F(A)$.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ιδιότητες προκύπτουν οι εξής εγκλεισμοί:

$$\sigma(A+B) \subset F(A+B) \subset F(A)+F(B).$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τα δύο αριθμητικά πεδία $F(A)$ και $F(B)$ μπορούμε να βγάλουμε μερικά συμπεράσματα για το φάσμα του αθροίσματος.

## 0.2 <u>ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ</u>

Ας υποθέσουμε ότι ο $A=[\alpha_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ικανοποιεί:

a) Ο $A$ είναι τρισδιαγώνιος ($\alpha_{ij}$=0 για $|i-j|>1$), και
b) $\alpha_{i,i+1}a_{i+1,i}<0$ για $i=1,\dots,n+1$.

Πίνακες αυτού του τύπου προκύπτουν στην αριθμητική λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων και στην ανάλυση των δυναμικών συστημάτων που προκύπτουν στην Μαθηματική Βιολογία. Και στις δύο περιπτώσεις, η γνώση για τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του $A$ είναι πολύ σημαντική. Αποδεικνύεται πως αρκετά καλές πληροφορίες για τις ιδιοτιμές τέτοιου πίνακα μπορούμε να μάθουμε εύκολα χρησιμοποιώντας το αριθμητικό πεδίο $F(\cdot)$.

### 0.2.1 <u>ΔΕΔΟΜΕΝΟ</u>: Για οποιοδήποτε ιδιοτιμή $\lambda$ ενός πίνακα $A$ του τύπου που ενδείκνυται έχουμε $\min_{1\le i\le n} a_{ii} \le Re\,\lambda \le \max_{1\le i\le n} a_{ii}$.

Η απόδειξη αυτού είναι πολύ απλή χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου που θα τις αναπτύξουμε σε παρακάτω ενότητα. Αρχικά, διαλέγουμε ένα διαγώνιο πίνακα $D$ με θετικά διαγώνια στοιχεία έτσι ώστε $D^{-1}AD \equiv \hat{A} = [\widehat{a_{\iota J}}]$ να ικανοποιεί $\widehat{\alpha_{J\iota}} = -\widehat{a_{\iota J}}$ για $j \neq i$. Ο πίνακας $D \equiv diag(d_1, \dots, d_n)$ που ορίζεται από $d_1 = 1$, και $d_i = |\frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i}}|^{1/2}\, d_{i-1}, d_i > 0, i = 2, \dots, n$ μας αρκεί. Εφόσον οι $\hat{A}$ και $A$ είναι παρόμοιοι, οι ιδιοτιμές τους είναι οι ίδιες.

Τότε θα έχουμε:

$$Re\,\sigma(A) = Re\,\sigma(\hat{A}) \subset ReF(\hat{A}) = F\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \widehat{A^T})\right) = F(diag(a_{11}, \dots a_{nn})).$$

Κυρτό περίβλημα του $\{\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}\} = [\min_i a_{ii}, \max_i a_{ii}]$.

Ο πρώτος εγκλεισμός προκύπτει από την ιδιότητα φασματικού εγκλεισμού, η επόμενη ισότητα προκύπτει από την ιδιότητα προβολής, η επόμενη ισότητα προκύπτει από την ειδική μορφή που επετεύχθη για το $\hat{A}$ και η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ιδιότητα της κανονικότητας και το δεδομένο ότι οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του. Εφόσον το πραγματικό μέρος της κάθε ιδιοτιμής $\lambda \in \sigma(A)$ είναι ενός κυρτός συνδυασμός των κύριων διαγώνιων στοιχείων $\alpha_{ii}, i = 1, \dots, n$, οι ανισότητες είναι ξεκάθαρες και η απόδειξη είναι πλήρης.

## 0.3 <u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ</u>

Σε μία ανάλυση της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας σε ένα δυναμικό σύστημα που διέπεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν το πραγματικό μέρος της κάθε ιδιοτιμής ενός συγκεκριμένου πίνακα $A$ είναι αρνητικό. Ένας τέτοιος πίνακας χαρακτηρίζεται ευσταθής. Για να μην μπερδευτούμε με αρνητικά πρόσημα, συχνά δουλεύουμε με θετικά ευσταθείς πίνακες (όλες οι ιδιοτιμές έχουν θετικά πραγματικά μέρη). Προφανώς, ο $A$ είναι θετικά ευσταθής αν και μόνο αν ο $-A$ είναι ευσταθής. Μια σημαντική και επαρκής συνθήκη για να είναι ένας πίνακας θετικά ευσταθής είναι το εξής:

**0.3.1 <u>ΔΕΔΟΜΕΝΟ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Εάν $A + A^*$ είναι θετικά ορισμένο, τότε ο $A$ είναι θετικά ευσταθής. Από την ιδιότητα του φασματικού εγκλεισμού $Re\sigma(A) \subset ReF(A)$ και από την ιδιότητα της προβολής $ReF(A) = F\left(\frac{1}{2}(A + A^*)\right)$. Όμως, εφόσον ο $A + A^*$ είναι θετικά ορισμένος, το ίδιο είναι και ο $\frac{1}{2}(A + A^*)$ κι επομένως, από την ιδιότητα της κανονικότητας το $F\left(\frac{1}{2}(A + A^*)\right)$ συγκρατείται στον θετικό πραγματικό άξονα. Συνεπώς, η κάθε ιδιοτιμή του $A$ έχει ένα θετικό πραγματικό μέρος και το $A$ είναι θετικά ευσταθής. Στην πραγματικότητα, ισχύουν κι άλλα πράγματα. Αν ο $A + A^*$ είναι θετικά ορισμένο, και αν $P \in M_n$ είναι ένας οποιοσδήποτε θετικά ορισμένος πίνακας, τότε $PA$ είναι θετικά ευσταθής επειδή

$$(P^{\frac{1}{2}})^{-1}[PA]P^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}}AP^{\frac{1}{2}} \text{ και } P^{\frac{1}{2}}AP^{\frac{1}{2}} + \left(P^{\frac{1}{2}}AP^{\frac{1}{2}}\right)^* = P^{\frac{1}{2}}(A + A^*)P^{\frac{1}{2}},$$

όπου το $P^{\frac{1}{2}}$ είναι η μονοσήμαντη (Ερμιτιανή) θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα του $P$. Από την στιγμή που η ισοτιμία διατηρεί το θετικά ορισμένο, οι ιδιοτιμές του $PA$ έχουν θετικά πραγματικά μέρη για τον ίδιο λόγο με το $A$. Το θεώρημα Lyaponov δείχνει ότι όλοι οι θετικά ευσταθείς πίνακες προκύπτουν μ' αυτό τον τρόπο.

## 0.4 <u>ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ</u>

Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα δοσμένο πίνακα $A \in M_n$ με ένα μιγαδικό πολλαπλάσιο κάποιου –το πολύ ενός βαθμού- Ερμιτιανού πίνακα, όσο πιο κοντά γίνεται στη νόρμα Frobenius $\|\cdot\|_2$. Αυτό είναι ακριβώς το πρόβλημα $min\|A - cxx^*\|_2^2$ για $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^*x = 1$ και $c \in \mathbb{C}$ (0.4.1).

Εφόσον το εσωτερικό γινόμενο $[A,B] \equiv trAB^*$ παράγει τη νόρμα Frobenius, έχουμε $\|A - cxx^*\|_2^2 = [A - cxx^*, A - cxx^*] = \|A\|_2^2 - 2Re\bar{c}[A, xx^*] + |c|^2$ , το οποίο για ένα δοσμένο κανονικοποιημένο $x$, ελαχιστοποιείται από το $c = [A, xx^*]$.

Η αντικατάσταση αυτής της τιμής στο (0.4.1) μετασχηματίζει το πρόβλημα μας σε $\min(\|A\|_2^2 - |[A, xx^*]|^2)$ για $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^*x = 1$

ή αντίστοιχα, $max|[A, xx^*]|$ για $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^*x = 1$.

Ένα διάνυσμα που επιλύει το τελευταίο πρόβλημα (και θα υπάρξει ένα τέτοιο αφού μεγιστοποιούμε μια συνεχή συνάρτηση σε ένα συμπαγές σύνολο) θα μας δώσει την πρώτου βαθμού επίλυση του πίνακα $cxx^* = [A, x_0x_0^*]x_0x_0^*$ στο αρχικό μας πρόβλημα. Ωστόσο, ένας υπολογισμός μας δείχνει ότι $[A, xx^*] = trAxx^* = x^*Ax$, έτσι ώστε το να προσδιορίσουμε το $x_0$, και να λύσουμε το πρόβλημα, είναι αντίστοιχο με το να βρούμε ένα σημείο στο αριθμητικό πεδίο του $F(A)$ το οποίο είναι στην μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή. Η απόλυτη τιμή ενός τέτοιου σημείου ονομάζεται αριθμητική ακτίνα του $A$ οπού συχνά συμβολίζεται με $r(A)$, σε αναλογία με την φασματική ακτίνα, η όποια είναι η απόλυτη τιμή ενός σημείου στο φάσμα $\sigma(A)$ το οποίο είναι στη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή.

# 1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε το αριθμητικό πεδίο και κάποια σχετικά θέματα.

**1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το αριθμητικό πεδίο του $A \in M_n$ είναι

$$F(A) \equiv \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, xx^* = 1\}.$$

Επομένως, το $F(\cdot)$ είναι μια συνάρτηση από το $M_n$ στα υποσύνολα του Μιγαδικού επιπέδου.
Η $F(A)$ είναι απλά ο κανονικοποιημένος γεωμετρικός τόπος μιας Ερμιτιανής μορφής που σχετίζεται με τον $A$. Το αριθμητικό πεδίο συχνά λέγεται και σύνολο τιμών ειδικά στο πλαίσιο του ανάλογού του για τελεστές σε άπειρους διαστατικούς χώρους.
Το αριθμητικό πεδίο του $F(A)$ μπορεί να θεωρηθεί και ως η εικόνα της επιφάνειας της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας στο $\mathbb{C}^n$ (ένα συμπαγές σύνολο) υπό συνεχή μετασχηματισμό $x \to x^*Ax$. Έτσι, το $F(A)$ είναι ένα συμπαγές (άρα και φραγμένο) σύνολο στο $\mathbb{C}$. Ένα μη φραγμένο ανάλογο του $F(\cdot)$ μας κινεί επίσης το ενδιαφέρον.

**1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το γωνιακό αριθμητικό πεδίο είναι

$$F'(A) \equiv \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\}.$$

Θα γίνει ξεκάθαρο ότι το $F'(A)$ είναι ένας γωνιακός τομέας του μιγαδικού επιπέδου που στηρίζεται στην αρχή των αξόνων. Το γωνιακό άνοιγμα αυτού του τομέα παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

**1.3 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:** Η γωνία του πεδίου $\Theta \equiv \Theta(A) \equiv \Theta(F'(A)) \equiv \Theta(F(A))$ του $A \in M_n$ ορίζεται ως εξής:

Α) Αν 0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του $F(A)$, τότε $\Theta(A) \equiv 2\pi$.

Β) Αν 0 είναι στο σύνορο του $F(A)$ και υπάρχει μια (μονοσήμαντη) εφαπτομένη στο σύνορο της $F(A)$ στο 0, τότε $\Theta(A) \equiv \pi$.

Γ) Αν το $F(A)$ συγκρατείται σε μια ευθεία μέσα από την αρχή των αξόνων,

$\Theta(A) \equiv 0$.

Δ) Αλλιώς, σκεφτείτε τις δύο διαφορετικές ευθείες υποστήριξης του $F(A)$ που περνάνε μέσα από την αρχή των αξόνων, κι ας υποθέσουμε ότι $\Theta(A)$ η γωνία που σχηματίζεται από τις δύο ευθείες στην αρχή των αξόνων. Αν $0 \notin F(A)$, αυτές οι ευθείες υποστήριξης θα είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένες˙ αν 0 είναι στο σύνορο του $F(A)$, διαλέξτε τις δύο ευθείες υποστήριξης που κάνουν τη μικρότερη γωνία. Θα δούμε ότι το $F(A)$ είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο για κάθε $A \in M_n$, άρα αυτός ο άτυπος ορισμός μιας γωνίας του αριθμητικού πεδίου βγάζει νόημα. Η γωνία του αριθμητικού πεδίου είναι απλά το γωνιακό άνοιγμα του μικρότερου γωνιακού τομέα που περιλαμβάνει το $F(A)$, δηλαδή, το γωνιακό άνοιγμα του τομέα $F'(A)$. Τέλος, το πλάτος του φραγμένου συνόλου $F(A)$ είναι αρκετά ενδιαφέρον. Μετράμε το πλάτος σε συνάρτηση με την ακτίνα του μικρότερου κύκλου με κέντρο το 0 που περικλείει το $F(A)$.

**1.4 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:** Η αριθμητική ακτίνα του $A \in M_n$, είναι

$$r(A) \equiv \max\{|z|: z \in F(A)\}.$$

Η αριθμητική ακτίνα είναι μια διανυσματική νόρμα σε πίνακες, δεν είναι όμως μια νόρμα πίνακα.

# 2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ως μια συνάρτηση από το $M_n$ στα υποσύνολα του $\mathbb{C}$, το αριθμητικό πεδίο $F(\cdot)$ έχει πολλές χρήσιμες συναρτησιακές ιδιότητες, οι περισσότερες από τις οποίες εύκολα εξακριβώνονται. Θα αναφέρω αρκετές από αυτές τις ιδιότητες για να τις μελετήσουμε και αργότερα. Στην επόμενη ενότητα θα συζητήσουμε και για τη σημαντική ιδιότητα της κυρτότητας.

Το άθροισμα ή το γινόμενο δύο υποσυνόλων του $\mathbb{C}$, ή ενός υποσυνόλου του $\mathbb{C}$ κι ενός βαθμωτού, έχει το συνηθισμένο αλγεβρικό νόημα. Για παράδειγμα, αν $S, T \subset \mathbb{C}$, τότε $S + T \equiv \{s + t : s \in S, t \in T\}$.

## 2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ

Για κάθε $A \in M_n$, το $F(A)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

**Απόδειξη:** Το σύνολο $F(A)$ είναι το αριθμητικό πεδίο της συνεχούς συνάρτησης $x \to x^*Ax$ από το πεδίο ορισμού $\{x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$, η επιφάνεια της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρα, η οποία είναι ένα συμπαγές σύνολο. Εφόσον η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγής, συνεπάγεται ότι το $F(A)$ είναι κι αυτό συμπαγές.

## 2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Για κάθε $A \in M_n$, το $F(A)$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Θα φυλάξω την επόμενη ενότητα αυτού του κεφαλαίου για την απόδειξη αυτής της θεμελιώδους αρχής, γνωστής και ως θεώρημα Toeplitz-Hausdorff. Σε αυτό το σημείο, είναι προφανές ότι το $F(A)$ πρέπει να είναι ένα συνεκτικό σύνολο αφού είναι η συνεχής εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου. Το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα αλλάζει με πολύ απλό τρόπο, προσθέτοντας δηλαδή ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού σε αυτό ή πολλαπλασιάζοντάς το με ένα βαθμωτό.

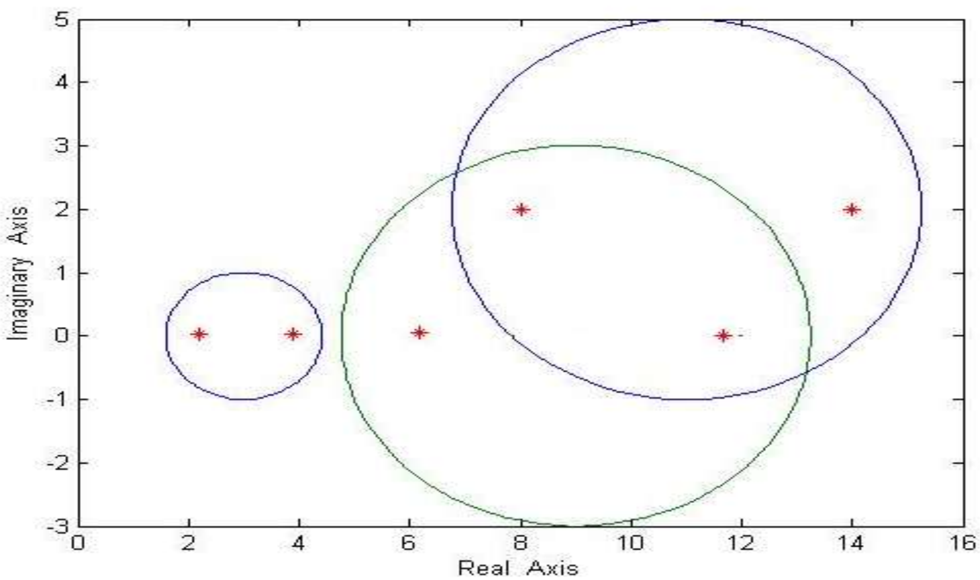
## 2.3 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ

Για κάθε $A \in M_n$ και $\alpha \in \mathbb{C}$, $F(A + aI) = F(A) + a$.

**Απόδειξη:** Έχουμε $F(A + aI) = \{x^*(A + aI)x : x^*x = 1\} = \{x^*Ax + ax^*x : x^*x = 1\} = \{x^*Ax + a : x^*x = 1\} = \{x^*Ax : x^*x = 1\} + a = F(A) + a$.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Το αριθμητικό του πεδίο θα δούμε στο παρακάτω σχήμα είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις δύο ιδιοτιμές του πίνακα $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 4$. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται τα αριθμητικά πεδία των πινάκων $3A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ και $3A + (2 + 2i)I_2 = \begin{bmatrix} 8 + i2 & 6 \\ 0 & 14 + i2 \end{bmatrix}$. Τα αριθμητικά πεδία των $F(A), F(3A)$και $F(3A + (2 + i2)I_2)$ έχουν ως εξής:




Συνεπώς $F(3A) = 3F(A)$ και $F(3A + (2 + i5) I_2) = 3F(A) + 2 + i5$.

## 2.4 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Για κάθε $A \in M_n$ και $\alpha \in \mathbb{C}$, $F(aA) = aF(A)$.

Για $A \in M_{n,}$ ο πίνακας $H(A) \equiv \frac{1}{2}(A + A^*)$ συμβολίζει το Ερμιτιανό μέρος του $A$ και ο $S(A) \equiv \frac{1}{2}(A - A^*)$ συμβολίζει το αντιερμιτιανό μέρος του $A^{\cdot}$ παρατηρήστε ότι ο $A = H(A) + S(A)$ κι ότι οι $H(A)$ και $iS(A)$ είναι και οι δύο ερμιτιανοί. Όπως το να πάρουμε το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού το προβάλλει πάνω στον πραγματικό άξονα, το να πάρουμε το Ερμιτιανό μέρος ενός πίνακα προβάλλει το αριθμητικό πεδίο του πάνω στον πραγματικό άξονα. Αυτό βοηθάει στο να εντοπίσουμε το αριθμητικό πεδίο, αφού όπως θα δούμε, είναι σχετικά εύκολο να ασχοληθούμε με το αριθμητικό πεδίο ενός Ερμιτιανού πίνακα. Για ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$, ερμηνεύουμε το $ReS$ ως $\{Res: s \in S\}$, την προβολή του $S$ πάνω στον πραγματικό άξονα.

## 2.5 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΠΡΟΒΟΛΗ

Για κάθε $A \in M_n$, $F(H(A)) = Re\, F(A)$.

**Απόδειξη:** Υπολογίζουμε $x^*H(A)x = x^*1/2(A + A^*)x = 1/2(x^*Ax + x^*A^*x) =$ $½(x^*Ax + (x^*Ax)^*) =$ $½\,(x^*Ax + \overline{x^*Ax}) = Re\, x^*Ax$. Επομένως, κάθε σημείο στο $F(H(A))$ είναι της μορφής $Rez$ για κάποιο $z \in F(A)$ και αντίστροφα. Συμβολίζουμε το ανοικτό άνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ με $UHP \equiv \{z \in \mathbb{C}\, Im\, z > 0\}$, το ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ με $LHP \equiv \{\, z \in \mathbb{C} : \; Re\, z < 0\}$, το ανοικτό δεξιό ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ με $RHP \equiv \{z \in \mathbb{C} : \; Re\, z > 0\}$ και το κλειστό δεξιό ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ με $RHP_0 \equiv \{z \in \mathbb{C} : \; Re\, z \geq 0\}$. Η ιδιότητα της προβολής μας δίνει μια απλή ένδειξη του πότε $F(A) \subset RHP$ ή $RHP_0$ στα πλαίσια του θετικά ορισμένου ή του θετικά ημιορισμένου.

## 2.5.α. ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $A \in M_n$. Τότε $F(A) \subset RHP$ αν και μόνο αν ο $A + A^*$ είναι θετικά ορισμένος.

## 2.5.β. ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΘΕΤΙΚΑ ΗΜΙΟΡΙΣΜΕΝΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $A \in M_n$. Τότε $F(A) \subset RHP_0$ αν και μόνο αν ο πίνακας $A + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος.
Το σημειοσύνολο των ιδιοτιμών του $A \in M_n$ συμβολίζεται με $\sigma(A)$, το φάσμα του $A$. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου είναι ότι συμπεριλαμβάνει τις ιδιοτιμές του $A$.

## 2.6 ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Για κάθε $A \in M_n$, ισχύει $\sigma(A) \subset F(A)$.

**Απόδειξη:** Έστω ότι $\lambda \in \sigma(A)$. Τότε υπάρχει κάποιο μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$, το οποίο μπορεί να είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει $Ax = \lambda x$ κι επομένως $\lambda = \lambda x^* x = x^*(\lambda x) = x^* A x \in F(A)$.

Η παρακάτω ιδιότητα υπόκειται στο γεγονός ότι η αριθμητική ακτίνα είναι μια διανυσματική νόρμα σε πίνακες κι ότι αποτελεί ένα σημαντικό λόγο γιατί το αριθμητικό πεδίο είναι τόσο πολύ χρήσιμο.

## 2.7 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΥΠΟΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Για κάθε $A, B \in M_n$ , $F(A + B) \subset F(A) + F(B)$.

**Απόδειξη:** $F(A + B) = \{x^*(A + B)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} = \{x^*Ax + x^*Bx : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \subset \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} + \{y^*By : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1\} = F(A) + F(B)$.
Ακόμα μία σημαντική ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου είναι η αναλλοιωσιμότητά του υπό ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας.

## 2.8 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΟΡΘΟΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΣΙΜΟΤΗΤΑ

Για κάθε $A, U \in M_n$ με $U$ ορθομοναδιαίο, $F(U^*AU) = F(A)$.

**Απόδειξη:** Αφού μια ορθομοναδιαία απεικόνιση αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας, οι μιγαδικοί αριθμοί που εμπεριέχουν τα σύνολα $F(U^*AU)$ και $F(A)$ είναι οι ίδιοι. Αν $x \in \mathbb{C}^n$ και $x^*x = 1$, έχουμε $x^*(U^*AU)x = y^*Ay \in F(A)$, όπου $y = Ux$, άρα $y^*y = x^*U^*Ux = x^*x = 1$. Συνεπώς, $F(U^*AU) \subseteq F(A)$. Επίσης, $F(A) = F(U(U^*AU)U^*) \subseteq F(U^*AU)$.

Η ιδιότητα της αναλλοιωσιμότητας ορθομοναδιαίας ομοιότητας μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το αριθμητικό πεδίο ενός κανονικού πίνακα. Θυμηθείτε ότι, για ένα σύνολο $S$ που συγκρατείται σε ένα αληθινό ή μιγαδικό διανυσματικό διάστημα, το $C_0(S)$ συμβολίζει το κυρτό περίβλημα του $S$, το οποίο είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των πεπερασμένων πολλών σημείων του $S$. Εναλλακτικά, το $C_0(S)$ μπορεί να χαρακτηριστεί ως η τομή όλων των κυρτών συνόλων που συγκρατούν το $S$, κι έτσι είναι το «μικρότερο» κλειστό κυρτό σύνολο που συγκρατεί το $S$.

## 2.9 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ

Αν ο $A \in M_n$ είναι κανονικός, τότε $F(A) = C_0\big(\sigma(A)\big)$.

**Απόδειξη:** Αν ο πίνακας $A$ είναι κανονικός, τότε $A = U^*\Lambda U$, όπου το $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ είναι διαγώνιο και ο $U$ ορθομοναδιαίος. Από την ιδιότητα της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας, $F(A) = F(\Lambda)$, εφόσον $x^*\Lambda x = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \lambda_i$, το $F(\Lambda)$ είναι απλά το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των διαγώνιων στοιχείων του $\Lambda$ (το $x^*x = 1$ υποδεικνύει ότι $\sum_i |x_i|^2 = 1$ και $|x_i|^2 \geq 0$). Αφού τα διαγώνια στοιχεία του $\Lambda$ είναι οι ιδιοτιμές του $A$, αυτό σημαίνει $F(A) = C_0(\sigma(A))$.

Οι δύο επόμενες ιδιότητες έχουν να κάνουν με τα αριθμητικά πεδία των πινάκων που φτιάχνονται ή εξάγονται από άλλους πίνακες με συγκεκριμένους τρόπους.

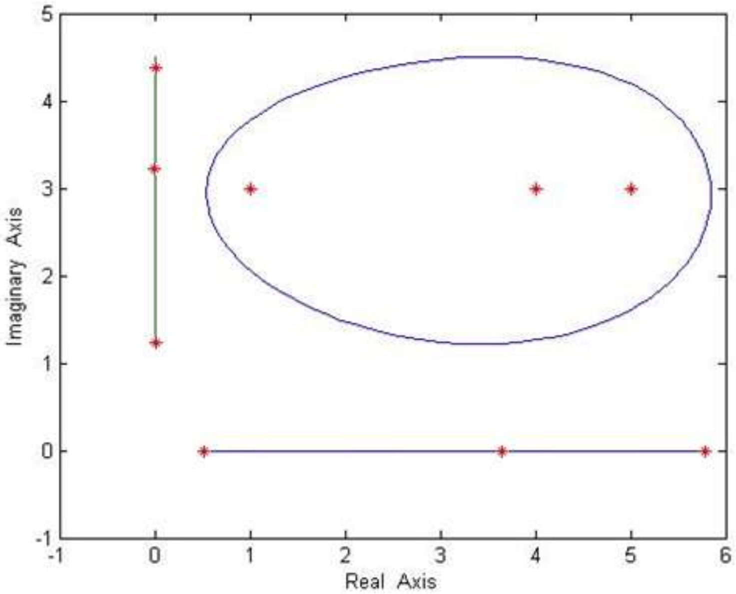
Θυμηθείτε ότι για $A \in M_{n_1}$ και $B \in M_{n_2}$, το ευθύ άθροισμα του $A$ και του $B$ είναι ο πίνακας $A \oplus B \equiv \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_{n_1+n_2}$.

Αν $J \subset \{1,2,\ldots,n\}$ είναι ένα σύνολο δεικτών και εάν $A \in M_n$ , τότε $A\,(J)$ συμβολίζει τον κύριο υποπίνακα του $A$ που συγκρατείται στις γραμμές και τις στήλες που υποδεικνύονται από το $J$.

## **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:**

Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1+i3 & -1 & 1-i2 \\ 0 & 4+i3 & 2-i \\ 0 & 0 & 5+i3 \end{bmatrix}$. Το ερμιτιανό μέρος του $A$ είναι $H(A) = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5-i \\ -0.5 & 4 & 1-i0.5 \\ 0.5+i & 1+i0.5 & 5 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0.545$, $\lambda_2 = 3.608$ και $\lambda_3 = 5.864$. Το αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα $A$ είναι

$S(A) = \begin{bmatrix} i3 & -0.5 & 0.5-i \\ 0.5 & i3 & 1-i0.5 \\ -0.5-i & -1-i0.5 & i3 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές $\rho_1 = i1.219, \rho_2 = i3.28$ και $\rho_3 = i4.5$.




Ο ωοειδής δίσκος είναι το $F(A)$. Το $F\big(H(A)\big)$ είναι η προβολή του $F(A)$ στον πραγματικό άξονα, ενώ το πεδίο $F\big(S(A)\big)$ είναι η προβολή του $F(A)$ στον φανταστικό άξονα. Ο $H(A)$ είναι ερμιτιανός πίνακας και το $F\big(H(A)\big)$ είναι το κλειστό πραγματικό διάστημα με άκρα την ελάχιστη και την μέγιστη ιδιοτιμή του. Ο πίνακας $S(A)$ απ' την άλλη είναι αντιερμιτιανός (άρα και κανονικός) με φανταστικές ιδιοτιμές και το αριθμητικό πεδίο $F\big(S(A)\big)$ ταυτίζεται με την κυρτή θήκη αυτών των ιδιοτιμών.

## 2.10 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΕΥΘΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

Για κάθε $A \in M_{n_1}$και $B \in M_{n_2}$, $F(A \oplus B) = C_0\big(F(A) \cup F(B)\big)$.

**Απόδειξη:** Λαμβάνουμε υπόψη μας ότι $A \oplus B \in M_{n_1+n_2}$. Διαμερίζουμε κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $z \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ ως $z = \binom{x}{y}$, όπου $x \in \mathbb{C}^{n_1}$ και $y \in \mathbb{C}^{n_2}$. Τότε $z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By$. Αν $y^*y = 1$, τότε $x = 0$ και $z^*(A \oplus B)z = y^*By \in F(B)$, άρα $F(A \oplus B) \supseteq F(B)$. Ομοίως, όταν $x^*x = 1$, $F(A \oplus B) \supseteq F(A)$, κι επομένως, $F(A \oplus B) \supseteq F(A) \cup F(B)$. Όμως εφόσον το $F(A \oplus B)$ είναι κυρτό, συνεπάγεται ότι $F(A \oplus B) \supseteq C_0(F(A) \cup F(B))$.

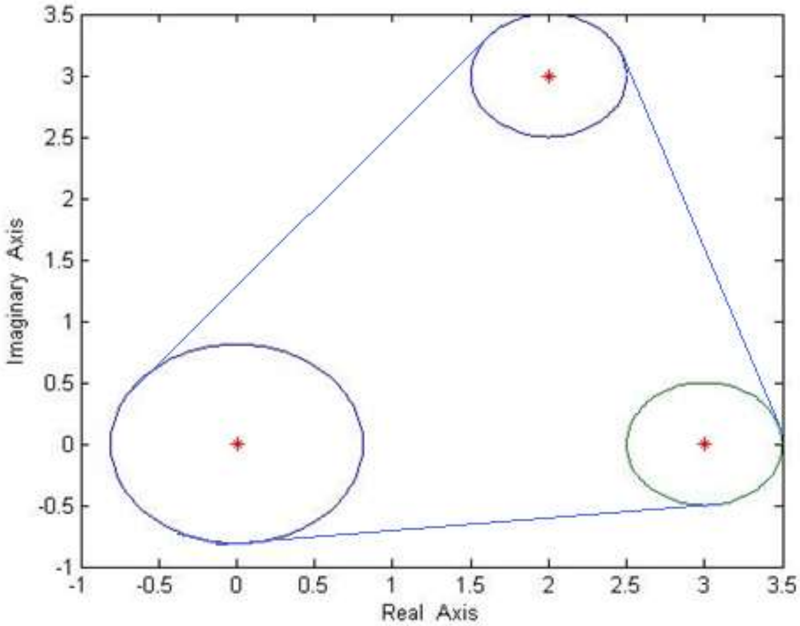
Για να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Αν $x^*x = 0$, τότε $y^*y = 1$ και $z^*(A \oplus B)z = y^*By \in F(B) \subseteq C_0(F(A) \cup F(B))$. Το επιχείρημα αυτό είναι ανάλογο αν $y^*y = 0$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι και το $x$ και το $y$ είναι μη μηδενικά και ας γράψουμε,

$$z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By = x^*x\left[\frac{x^*Ax}{x^*x}\right] + y^*y[\frac{y^*By}{y^*y}].$$

Εφόσον $x^*x + y^*y = z^*z = 1$, αυτή η τελευταία παράσταση είναι ένας κυρτός συνδυασμός του $\frac{x^*Ax}{x^*x} \in F(A)$ και $\frac{y^*By}{y^*y} \in F(B)$, κι έτσι έχουμε $F(A \oplus B) \subseteq C_0(F(A) U\, F(B))$.

## **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:**

Έστω οι πίνακες Jordan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2+i3 & 1 \\ 0 & 2+i3 \end{bmatrix}$.




Τα σύνολα $F(A), F(B)$ και $F(C)$ φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Το $F(A)$ είναι κυκλικός δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα $\alpha = \cos\frac{\pi}{5}$. Τα $F(B)$ και $F(C)$ είναι επίσης κυκλικοί δίσκοι με κέντρα τις ιδιοτιμές 3 και 2+$i$3, αντίστοιχα. Τα αριθμητικά πεδία $F(A)$ και $F(B)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το αριθμητικό πεδίο $F(A \oplus B \oplus C)$ είναι η κυρτή θήκη των $F(A), F(B)$ και $F(C)$.

## 2.11 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΣ ΥΠΟΠΙΝΑΚΑ

Για κάθε $A \in M_n$ και τα σύνολα δεικτών $J \subset \{1, \dots, n\}, F(A(J)) \subset F(A)$.

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, με $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, κι ότι $x \in \mathbb{C}^k$ ικανοποιεί $x^*x = 1$. Μπορούμε να εισάγουμε μηδενικά στοιχεία σε κατάλληλες θέσεις στο $x$ για να παράξουμε ένα διάνυσμα $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $\widehat{x_{J_\iota}} = x_i, i = 1,2, \dots, k$ και $\widehat{x_J} = 0$ για όλους τους δείκτες $j$. Ένας υπολογισμός θα μας δείξει ότι $x^*A(J)x = \widehat{x^*}A\hat{x}$ και $\widehat{x^*}\hat{x} = 1$, το οποίο επαληθεύει τον εγκλεισμό.

## 2.12 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω $A \in M_n$ κι έστω ο $C$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε $F'(C^*AC) = F'(A)$.

**Απόδειξη:** Έστω $x \in \mathbb{C}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα, έτσι ώστε $x^*A\,Cx = y^*Ay$, όπου $y \equiv Cx \neq 0$. Επομένως, $F'(C^*AC) \subseteq F'(A)$. Με τον ίδιο τρόπο, φαίνεται ότι $F'(A) \subseteq F'(C^*AC)$ εφόσον $A = (C^{-1})^*\,C^*AC\,(C^{-1})$.

## 2.13 ΙΔΙΟΤΗΤΑ: ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ

Για κάθε $A \in M_n$ και $P \in M_{n,k}$ με $k \leq n$ και $P^*P = I$, $F(P^*AP) \subseteq F(A)$, και $F(P^*AP) = F(A)$ όταν $k = n$.

# 3. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε την ιδιότητα της θεμελιώδους κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου και θα αναπτύξουμε αρκετές σημαντικές συνέπειες αυτής της κυρτότητας. Θα χρησιμοποιήσουμε πολλές βασικές ιδιότητες που έχουμε προαναφέρει.

Η απόδειξή μας περιέχει χρήσιμες παρατηρήσεις και αποτελείται από τρία μέρη:
**1)** Αναγωγή του προβλήματος στην περίπτωση 2-επί-2.
**2)** Χρήση ποικίλων βασικών ιδιοτήτων για να μετασχηματίσουμε τη γενική περίπτωση 2-επί-2 στους πίνακες 2-επί-2 ειδικής μορφής˙ και
**3)** Απόδειξη της κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου για την ειδική μορφή 2-επί-2.

## ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2-ΕΠΙ-2

Προκειμένου να δείξουμε ότι ένα γνωστό σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ είναι κυρτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha s + (1-a)t \in S$ όποτε $0 \leq \alpha \leq 1$ και $s, t \in S$. Επομένως, για ένα δοσμένο $A \in M_n$, το $F(A)$ είναι κυρτό αν $\alpha x^* A x + (1-a) y^* A y \in F(A)$ οπότε $0 \leq \alpha \leq 1$ και $x, y \in \mathbb{C}^n$ ικανοποιούν $x^* x = y^* y = 1$. Αρκεί να αποδείξουμε αυτό μόνο στην περίπτωση 2-επί-2 επειδή χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο κυρτούς συνδυασμούς που σχετίζονται με ζεύγη διανυσμάτων. Για κάθε γνωστό ζεύγος διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$, υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U$ και τα διανύσματα $u, w \in \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε $x = Uu, y = Uw$, και όλα τα στοιχεία του $u$ και του $w$ μετά από τα πρώτα δύο είναι ίσα με το 0.
Χρησιμοποιώντας αυτό το μετασχηματισμό, έχουμε $\alpha x^* A x + (1-\alpha) y^* A y = \alpha u^* U^* A\, U u + (1-\alpha) w^* U^* A U w = \alpha u^* B u + (1-\alpha) w^* B w = \alpha \xi^* B(\{1,2\}) \xi + (1-\alpha) \eta^* B(\{1,2\}) \eta$, όπου $B \equiv U^* A U, B(\{1,2\})$ είναι ο άνω αριστερός 2-επί-2 πρωτεύων υποπίνακας του $B$, και $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ αποτελούνται από τα πρώτα δύο στοιχεία του $u$ και του $w$, αντίστοιχα. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το αριθμητικό πεδίο οποιουδήποτε 2-επί-2 πίνακα είναι κυρτό. Αυτή η αναγωγή είναι δυνατή λόγω της ιδιότητας της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας του αριθμητικού πεδίου.

## ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΜΟΡΦΗ 2-ΕΠΙ-2

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι για να δείξουμε ότι το $F(A)$ είναι κυρτό για κάθε πίνακα $A \in M_2$, αρκεί να δείξουμε ότι το $F\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ είναι κυρτό για κάθε $\alpha, b \geq 0$. Η ακόλουθη παρατήρηση είναι πολύ χρήσιμη.

**3.1 ΛΗΜΜΑ:** Για κάθε $A \in M_2$ υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος $U \in M_2$ τέτοιος ώστε τα δύο κύρια διαγώνια στοιχεία του $U^*AU$ είναι ίσα.

**Απόδειξη:** Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $trA = 0$ αφού μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $A$ με $A - \left(\frac{1}{2}trA\right)I$. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με ένα πίνακα του οποίου τα διαγώνια στοιχεία ισούνται με 0. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί απλά να δείξουμε ότι υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in \mathbb{C}^2$ τέτοιο ώστε $w^*Aw = 0$. Τέτοιο διάνυσμα μπορεί να κανονικοποιηθεί και να χρησιμοποιηθεί ως η πρώτη στήλη ενός ορθομοναδιαίου πίνακα $W$, κι ένας υπολογισμός μας αποκαλύπτει ότι το στοιχείο 1,1 του $W^*AW$ είναι μηδενικό. Το στοιχείο 2,2 του $W^*AW$ πρέπει να είναι και αυτό μηδενικό, αφού το ίχνος είναι μηδενικό. Φτιάξτε το διάνυσμα $w$ ως εξής: Αφού το $A$ έχει ιδιοτιμές $\pm\alpha$ για κάποιο μιγαδικό αριθμό $\alpha$, έστω $x$ ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με το $-\alpha$ κι έστω $y$ ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που σχετίζεται με το $+\alpha$. Αν $\alpha = 0$, απλά παίρνουμε $w = x$. Αν $\alpha \neq 0, \tau\alpha\ x\ \kappa\alpha\iota\ y$ είναι ανεξάρτητα και το διάνυσμα $w = e^{i\theta}x + y$ είναι μη μηδενικό για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ . Ένας υπολογισμός μας δείχνει ότι $w^*Aw = \alpha(e^{-i\theta}x^*y - e^{i\theta}y^*x) = 2i\alpha Im(e^{-i\theta}x^*y)$. Τώρα, διαλέγουμε το $\theta$ έτσι ώστε $e^{-i\theta}x^*y$ να είναι πραγματικό.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα (3.1) μαζί με αρκετές ιδιότητες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα για να αναγάγουμε το ερώτημα της κυρτότητας στην περίπτωση 2-επί-2 στην εξέταση της συγκεκριμένης ειδικής μορφής. Αν ο $A \in M_2$ είναι γνωστός, εφαρμόστε την ιδιότητα της μεταφοράς για να καταλήξετε στο ότι το $F(A)$ είναι κυρτό αν και μόνο αν το $F(A + \alpha I)$ είναι κυρτό. Αν επιλέξουμε $\alpha = \frac{1}{2}trA$, θα υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι ο πίνακάς μας έχει ίχνος 0. Σύμφωνα με το Λήμμα και την ιδιότητα της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο κύρια διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι 0.

Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο δοσμένος πίνακας έχει τη μορφή $\begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix}$ για κάποια $c, d \in \mathbb{C}$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας κι ένα διαγώνιο ορθομοναδιαίο πίνακα για να δείξουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ce^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{bmatrix}$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Αν $c = |c|e^{i\theta_1}$ και $d = |d|e^{i\theta_2}$, κι αν επιλέξουμε $\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$, ο τελευταίος πίνακας γίνεται $e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{bmatrix}$με $\varphi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε τον πίνακα της μορφής $e^{i\varphi} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ b & 0 \end{bmatrix}$με $\varphi \in \mathbb{R}$ και $\alpha, b \geq 0$.

Τέλος, σύμφωνα με την ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο την ειδική μορφή $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, b \geq 0$. Δηλαδή, έχουμε αποδείξει ότι το αριθμητικό πεδίο κάθε 2-επί-2 μιγαδικού πίνακα είναι κυρτό αν το αριθμητικό πεδίο του κάθε πίνακα της παραπάνω ειδικής μορφής είναι κυρτό.

## ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ 2-ΕΠΙ-2

**3.3 ΛΗΜΜΑ:** Αν ο $A \in M_2$ έχει την παραπάνω ειδική μορφή, τότε το $F(A)$ είναι μια έλλειψη (με το εσωτερικό της) που έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Ο μικρός της άξονας είναι κατά μήκος του φανταστικού άξονα κι έχει μήκος $|\alpha - b|$. Ο μεγάλος της άξονας είναι κατά μήκος του πραγματικού άξονα κι έχει μήκος $\alpha + b$. Οι εστίες της είναι στο $\pm\sqrt{\alpha b}$, που είναι οι ιδιοτιμές του $A$.

**Απόδειξη**: Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε πως $\alpha \geq b \geq 0$. Εφόσον $z^*Az = (e^{i\theta}z)^*A(e^{i\theta}z)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, για να προσδιορίσουμε το $F(A)$, αρκεί να εξετάσουμε $z^*Az$ για μοναδιαία διανύσματα $z$ των οποίων η πρώτη συνιστώσα είναι πραγματική και μη αρνητική. Συνεπώς, λαμβάνουμε υπόψη το διδιανυσματικό $z = [t, e^{i\theta}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}]^T$ για $0 \leq t \leq 1$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ένας υπολογισμός μας δείχνει ότι $z^*Az = t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,[(\alpha + b)cos\,\theta + i(\alpha - b)sin\,\theta]$.

Καθώς το $\theta$ ποικίλλει από 0 έως $2\pi$, το σημείο $(\alpha+b)cos\theta + i(\alpha-b)sin\theta$ μας περιγράφει μια πιθανά εκφυλισμένη έλλειψη $E$ με το κέντρο της στην αρχή. Ο μεγάλος άξονας επεκτείνεται από το $-(\alpha+b)$ ως το $(\alpha+b)$ πάνω στον πραγματικό άξονα και ο μικρός άξονας από το $i(b-\alpha)$ ως το $i(\alpha-b)$ πάνω στο φανταστικό άξονα στο μιγαδικό επίπεδο. Καθώς το $t$ κυμαίνεται από 0 έως 1, ο παράγοντας $t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ κυμαίνεται μεταξύ 0 και $\frac{1}{2}$ και πάλι πίσω στο 0, επιβεβαιώνοντας ότι όλα τα σημεία στο εσωτερικό της έλλειψης $\frac{1}{2}E$ επιτυγχάνονται κι επαληθεύοντας ότι το $F(A)$ είναι η φερόμενη έλλειψη με το εσωτερικό της, το οποίο είναι κυρτό. Οι δύο εστίες της έλλειψης $\frac{1}{2}$ $E$ βρίσκονται πάνω στο μεγάλο άξονα σε απόσταση $[\frac{1}{4}(\alpha+b)^2 - \frac{1}{4}(\alpha-b)^2]^{1/2} = \pm\sqrt{\alpha b}$ από το κέντρο. Αυτό ολοκληρώνει τον ισχυρισμό μας να αποδείξουμε την ιδιότητα της κυρτότητας.

Υπάρχουν πολλές σημαντικές συνέπειες για την κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου. Η πιο άμεση είναι ότι το Λήμμα (3.1) ισχύει για πίνακες όλων των μεγεθών, όχι μόνο για πίνακες 2-επί-2.

**3.4 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για κάθε $A \in M_n$υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n$ τέτοιος ώστε όλα τα διαγώνια στοιχεία του $U^*AU$ να έχουν την ίδια τιμή $tr(A)/n$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $tr\,A = 0$, εφόσον μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον $A$ με $A - [tr(A)/n]I$. Συνεχίζουμε με επαγωγή για να δείξουμε ότι ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα με όλα τα κύρια διαγώνια στοιχεία του μηδενικά. Γνωρίζουμε από το Λήμμα (3.1) ότι αυτό ισχύει για $n = 2$, άρα έστω $n \geq 3$ κι υποθέτουμε ότι το επιχείρημα έχει αποδειχτεί για όλους τους πίνακες με όλες τις διατάξεις λιγότερες από $n$. Έχουμε, λοιπόν, $0 = \frac{1}{n}\ trA = \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_2 + \cdots + \frac{1}{n}\lambda_n = 0$ κι αυτό είναι ένας κυρτός συνδυασμός των ιδιοτιμών $\lambda_i$ του $A$. Αφού κάθε $\lambda_i$ είναι στο $F(A)$, κι αφού το $F(A)$ είναι κυρτό, συμπεραίνουμε ότι $0 \in F(A)$. Αν $x \in \mathbb{C}^n$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα έτσι ώστε $x^*Ax$=0, έστω $W = [x\, w_2 \dots w_n] \in M_n$ είναι ορθομοναδιαίος πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι $x$. Υπολογίζουμε ότι $W^*AW = \begin{bmatrix} 0 & 2^* \\ \mathrm{J} & \widehat{\mathrm{A}} \end{bmatrix}$, $z, J \in \mathbb{C}^{n-1}, \hat{A} \in M_{n-1}$. Αλλά $0 = trA = trW^*AW = tr\hat{A} = 0$, κι έτσι, σύμφωνα με την υπόθεση επαγωγής, υπάρχει κάποιος ορθομοναδιαίος $\widehat{\mathrm{V}} \in M_{n-1}$ έτσι ώστε τα κύρια διαγώνια στοιχεία του $\hat{V}^*\ \widehat{\mathrm{A}}\widehat{\mathrm{V}}$ είναι μηδενικά. Προσδιορίστε το μοναδιαίο ευθύ άθροισμα $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{V} \end{bmatrix} \in M_n$ και υπολογίστε $(WV)^*A(WV) = V^*W^*AWV =$ $\begin{bmatrix} 0 & z^*\hat{V} \\ \hat{V}J & \hat{V}^*\hat{A}\hat{V} \end{bmatrix}$ το οποίο έχει μία μηδενική κύρια διαγώνιο από το σχηματισμό του.

Ακόμη μια σημαντική και χρήσιμη συνέπεια της κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου είναι η ακόλουθη ιδιότητα της περιστροφής ενός πίνακα του οποίου το αριθμητικό πεδίο δεν περιέχει το 0.

**3.5 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\theta$ τέτοιος ώστε ο Ερμιτιανός πίνακας $H(e^{i\theta}A) = \frac{1}{2}[e^{i\theta}\, A \,+\, e^{-i\theta}\, A^*]$ να είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $0 \notin F(A)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν ο $H(e^{i\theta}A)$ είναι θετικά ορισμένος για κάποιον $\theta \in \mathbb{R}$, τότε $F(e^{i\theta}A) \subset RHP$, άρα $0 \notin F(e^{i\theta}A)$ κι επομένως $0 \notin F(A)$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $0 \notin F(A)$. Σύμφωνα με το θεώρημα διαχωριστικού υπερεπιπέδου, υπάρχει μια ευθεία $L$ μέσα στο επίπεδο τέτοια ώστε καθένα από τα δύο συμπαγη κυρτά σύνολα που δεν τέμνονται $\{0\}$ και η $F(A)$ βρίσκεται ακριβώς μέσα σε ένα από τα δύο ανοιχτά ημιεπίπεδα που προσδιορίζονται απ' την $L$. Οι συντεταγμένοι άξονες μπορούν τώρα να περιστραφούν έτσι ώστε η ευθεία $L$ να μεταφερθεί σε μια κάθετη ευθεία στο δεξιό ημιεπίπεδο με το $F(A)$ γνήσια στα δεξιά της, δηλαδή, για κάποιον $\theta \in \mathbb{R}, F(e^{i\theta}\, A) = e^{i\theta}F(A) \subset RHP$, άρα $H(e^{i\theta}A)$ είναι θετικά ορισμένο. Μπορούμε να λάβουμε χρήσιμες πληροφορίες αν εξετάσουμε προσεκτικά τα βήματα που ακολουθήσαμε για να μετασχηματίσουμε ένα πίνακα $A \in M_2$ στην ειδική μορφή (3.2). Το πρώτο βήμα ήταν η μεταφορά $A \to A - (\frac{1}{2}trA)I \equiv A_0$ για να επιτύχουμε $trA_0 = 0$. Το δεύτερο βήμα ήταν μια ορθομοναδιαία ομοιότητα $A_0 \to UA_0U^* \equiv A_0$ για να κάνουμε και τα δύο διαγώνια στοιχεία του$A_1$ μηδενικά. Το τρίτο βήμα ήταν άλλη μια ορθομοναδιαία ομοιότητα $A_1 \to VA_1V^* \equiv A_2$ για να βάλουμε το $A_2$ στη μορφή $A_2$=$e^{i\varphi}\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{\alpha} \\ \mathrm{b} & 0 \end{bmatrix}$ με $\alpha, b \geq 0\; \kappa\alpha\iota\; \varphi \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο βήμα ήταν μια ορθομοναδιαία περιστροφή $A_2 \to e^{i\varphi}A_2 \equiv A_3$ για να επιτύχουμε την ειδική μορφή (3.2). Εφόσον το αριθμητικό πεδίο του $A_3$ είναι μια έλλειψη (πιθανά εκφυλισμένη, δηλαδή, ένα σημείο ή ευθύγραμμο τμήμα) με το κέντρο της στην αρχή και το μεγάλο της άξονα κατά μήκος του πραγματικού άξονα και τις εστίες της στο $\pm\sqrt{\alpha b}$, οι ιδιοτιμές του $A_3$, το αριθμητικό πεδίο του $A_2$ είναι κι αυτό μια έλλειψη με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, αλλά ο μεγάλος της άξονας είναι κεκλιμένος σε μια γωνία $\varphi$ στον πραγματικό άξονα. Μια ευθεία που περνάει μέσα από τις δύο ιδιοτιμές του $A_2, \pm e^{i\varphi}\sqrt{\alpha b}$, που είναι οι εστίες της έλλειψης, συγκρατεί το μεγάλο άξονα της έλλειψης˙ αν $\alpha b = 0$, η έλλειψη είναι ένας μεγάλος άξονας. Εφόσον οι $A_1$ και $A_0$ επιτυγχάνονται από το $A_2$ κάτω από διαδοχικές ορθομοναδιαίες ομοιότητες, η κάθε μια από τις οποίες δεν αλλοιώνει τις ιδιοτιμές και το αριθμητικό πεδίο, έχουμε $F(A_0) = F(A_1) = F(A_2)$. Τέλος, $F(A) = F(A_0 + [\frac{1}{2} tr\, A]I) = F(A_0) + \frac{1}{2} trA = F(A_2) + \frac{1}{2} trA$, μια μετατόπιση που κινεί και τις δυο ιδιοτιμές κατά $\frac{1}{2} trA$, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα $A \in M_2$ είναι μια έλλειψη (πιθανά εκφυλισμένη) με κέντρο στο σημείο $\frac{1}{2} trA$. Ο μεγάλος άξονας αυτής της έλλειψης βρίσκεται στην ευθεία που περνάει μέσα από τις δύο ιδιοτιμές ταυτίζονται, η έλλειψη είναι ένας κύκλος ή ένα σημείο.

Η έλλειψη $F(A)$ είναι εκφυλισμένη αν και μόνο αν $^{o}A_3$ = $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ b & 0 \end{bmatrix}$ έχει $\alpha = b$. Παρατηρήστε ότι $A_3{}^*A_3$= $\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$ και $A_3A_3{}^*$ = $\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$, άρα $\alpha = b$ αν και μόνο αν ο $A_3$ είναι κανονικός. Αλλά ο $A$ μπορεί να ανακτηθεί από τον $A_3$ με ένα μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλασιασμό, δύο ορθομοναδιαίες ομοιότητες και μια μεταφορά, το καθένα από τα οποία διατηρεί και την κανονικότητα και τη μη κανονικότητά του. Συνεπώς, ο $A_3$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο $A$ είναι κανονικός και, συμπεραίνουμε ότι για $A \in M_2$, η έλλειψη $F(A)$ είναι εκφυλισμένη αν και μόνο αν ο $A$ είναι κανονικός.

Οι ιδιοτιμές του $A_3$ βρίσκονται στις εστίες του μεγάλου άξονα της $F(A_3)$ σε απόσταση $\sqrt{\alpha b}$ από το κέντρο, και το μήκος του ημιμεγάλου άξονα είναι $\frac{1}{2}(\alpha + b)$. Επομένως, $1/2\ (\alpha + b)$ - $\sqrt{\alpha b}$= $1/2\ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ με ισότητα αν και μόνο αν $\alpha = b$, δηλαδή, αν και μόνο αν ο $A$ είναι κανονικός. Συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός μη κανονικού $A \in M_2$ πάντα βρίσκονται στο εσωτερικό της $F(A)$. Για $A \in M_2$, οι παράμετροι της έλλειψης $F(A)$ (ακόμα κι αν είναι εκφυλισμένη) μπορούν εύκολα να υπολογιστούν, αν κάποιος παρατηρήσει ότι το α και το b είναι οι ιδιάζουσες τιμές του $A_3$=$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ b & 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή, οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $A_3{}^*A_3$, και οι ιδιάζουσες τιμές του $A_3$ είναι αναλλοίωτες μετά από πολλαπλασιασμό από τα αριστερά και τα δεξιά με οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο πίνακα. Συνεπώς, οι ιδιάζουσες τιμές $\sigma 1 \geq \sigma 2 \geq 0$ του $A_0 = A - (\frac{1}{2}\, tr\, A)I$ είναι οι ίδιες με αυτές του $A_3$. Το μήκος του μεγάλου άξονα του $F(A)$ είναι $\alpha + b = \sigma_1 + \sigma_2$, το μήκος του μικρού άξονα είναι $|\alpha - b| = \sigma_1 - \sigma_2$, και η απόσταση των εστιών από το κέντρο είναι $\frac{[(\alpha+b)^2 - (\alpha-b)^2]^{\frac{1}{2}}}{4} = \sqrt{ab} = \sqrt{\sigma_1\sigma_2} = |det\, A_3|^{\frac{1}{2}}$ =$|det\, A_0|^{\frac{1}{2}}$.

Επιπλέον, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = tr\, {A_0}^* A_0$ (το άθροισμα των τετραγώνων των απόλυτων τιμών των στοιχείων του $A_0$ άρα $\sigma_1 \pm \sigma_2 = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\sigma_1\sigma_2]^{1/2} = [tr\, {A_0}^* A_0 \pm 2|det\, A_0|]^{1/2}$. Θα συνοψίσουμε αυτές τις παρατηρήσεις στο παρακάτω θεώρημα για να μπορέσουμε να ανατρέξουμε εύκολα σε αυτές.

**3.6 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_2$ και $A_0 \equiv A - \left(\frac{1}{2} trA\right) I$. Τότε:

α) Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι μια κλειστή έλλειψη (με εσωτερικό, πιθανά εκφυλισμένη).

β) Το κέντρο της έλλειψης $F(A)$ είναι στο σημείο $\frac{1}{2} trA$ . Το μήκος το μεγάλου άξονα είναι $[trA_0^*A_0 + 2|detA_0|]^{1/2}$ το μήκος το μικρού άξονα είναι $[trA_0^*A_0 - 2|detA_0|]^{1/2}$ οι αποστάσεις των εστιών από το κέντρο είναι $|detA_0|^{1/2}$. Ο μεγάλος άξονας βρίσκεται σε μία ευθεία που περνάει μέσα από τις δύο ιδιοτιμές του $A$, που είναι οι εστίες του $F(A)$ αυτές οι δύο ιδιοτιμές συμπίπτουν αν και μόνο αν η έλλειψη είναι ένας κύκλος (πιθανά ένα σημείο).

γ) Το $F(A)$ είναι ένα τμήμα κλειστής ευθείας αν και μόνο αν ο $A$ είναι κανονικός. Είναι ένα απλό σημείο αν και μόνο αν ο A είναι ένας βαθμωτός πίνακας.

δ) Το $F(A)$ είναι μια μη εκφυλισμένη έλλειψη (με εσωτερικό) αν και μόνο αν ο $A$ είναι μη κανονικός, κι έτσι οι ιδιοτιμές του $A$ είναι εσωτερικά σημεία του $F(A)$.

## <u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Η κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου (2.2) πρώτα συζητήθηκε από τον O.Toeplitz, στο "Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer, Math.Zeit3 (1918), 187-197, και F.Hausdorf, Das Wertvorrat einer Bilinearform, Math. Zeit. 3 (1919), 314-316. Ο Toeplitz απέδειξε πως το εξωτερικό σύνορο του $F(A)$ είναι μία κυρτη καμπύλη, αλλά δεν απάντησε στο ερώτημα αν το εσωτερικό αυτής της καμπύλης είναι γεμάτο με σημεία του $F(A)$. Επίσης, απέδειξε την ανισότητα $|||A|||_2 \leq 2r(A)$ μεταξύ της φασματικής νόρμας και της αριθμητικής ακτίνας. Σε μια διατριβή 6 μήνες αργότερα από αυτή του Toeplitz (οι ημερομηνίες των διατριβών τους ήταν, αντίστοιχα, 22 Μαΐου και 28 Νοεμβρίου 1918), ο Hausdorff δέχτηκε την πρόκληση κι έδωσε μια σύντομη απόδειξη, ότι το $F(A)$ είναι όντως ένα κυρτό σύνολο. Υπάρχουν κι άλλες πολλές αποδείξεις, πέρα από τη στοιχειώδη που δίνεται σ' αυτή την ενότητα, όπως του W. Donoghue, "On the Numerical Range of a Bounded

Operator", Mich.Math.J.4 (1957), 261-263. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος (3.4) πρώτα επισημάνθηκε από τον W.V.Parker στο "Sets of Complex Numbers Associated with a Matrix", Duke Math.J.15 (1948), 711-715. Η τροποποίηση της αρχικής απόδειξης της κυρτότητας του Hausdorff έγινε από τον Donald Robinson .

Το γεγονός ότι το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού μιγαδικού πίνακα είναι κυρτό έχει άμεση επέκταση στη περίπτωση της άπειρης διάστασης. Αν Τ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert H με εσωτερικό $<\cdot,\cdot>$, τότε το αριθμητικό πεδίο είναι $F(T) \equiv \{< Tx, x >: x \in H \; και \; < x, x >= 1\}$. Μπορούμε να δείξουμε ότι το $F(T)$ είναι κυρτό με αναγωγή στην περίπτωση διδιάστατον, όπως στην απόδειξη αυτής της ενότητας.

# 4. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ

Είναι φυσικό να αναρωτιόμαστε (για πρακτικούς λόγους και λόγου αισθητικής) αν η λίστα με τις ιδιότητες του $F(A)$ που μας δόθηκε στην Ενότητα (2) είναι, κατά κάποιο τρόπο, πλήρης. Εφόσον οι ειδικές περιπτώσεις και οι επακόλουθες ιδιότητες παρουσιάζουν ενδιαφέρον, ίσως καμία πεπερασμένη λίστα να μην είναι πραγματικά πλήρης. Ωστόσο, μια μαθηματικά ακριβής εκδοχή του ερωτήματος της πληρότητας είναι εάν, ανάμεσα στις προαναφερθείσες ιδιότητες, υπάρχει ένα υποσύνολο που χαρακτηρίζει το αριθμητικό πεδίο. Αν ναι, οι περαιτέρω ιδιότητες, μερικές από τις οποίες έχουμε ήδη αναφέρει είναι φυσικό επακόλουθο σε ένα σύνολο χαρακτηριστικών ιδιοτήτων και η μαθηματική χρησιμότητα του αριθμητικού πεδίου αποτυπώνεται από αυτές τις ιδιότητες. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν είναι χρήσιμο να σημειώσουμε της ιδιότητες πέρα από ένα χαρακτηριστικό σύνολο. Μερικές, από τις πιο εφαρμόσιμες ιδιότητες προκύπτουν από άλλες.

## 4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο φασματικός εγκλεισμός (2.6) προκύπτει από τη συμπάγεια (2.1) τη μεταφορά (2.3), το βαθμωτό πολλαπλασιασμό (2.4), την ορθομοναδιαία αναλλοιωσιμότητα (2.8) και τον εγκλεισμό υποπίνακα (2.11) με τη λογική ότι οποιαδήποτε πολύτιμη συνάρτηση στο $M_n$ που έχει αυτές τις πέντε ιδιότητες ικανοποιεί και το (2.6). Αν $A \in M_n$ και αν $\beta \in \sigma$(A), τότε για κάποιον ορθομοναδιαίο $U \in M_n$ ο πίνακας $U^*AU$ είναι άνω τιγωνικός με $\beta$ στη θέση 1,1. Τότε, σύμφωνα με τα (2.8) και (2.11), αρκεί να δείξουμε ότι $\beta \in F([\beta])$, και (λόγω του (2.3)) αρκεί να δείξουμε ότι $0 \in F([0])$˙ εδώ σκεφτόμαστε τα $[\beta]$ και [0] ως μέλη του $M_1$. Ωστόσο, λόγω του (2.4), $F([0]) = aF([0])$ για οποιαδήποτε $\alpha$, και υπάρχουν μόνο δύο μη κενά υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου που κατέχουν αυτή την ιδιότητα: {0} και ολόκληρο το επίπεδο. Για το τελευταίο μας προϊδεάζει για το (2.1), κι έτσι (2.6) συνεπάγεται.

**4.2 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Οι ιδιότητες (2.1-4 και 5β) χαρακτηρίζουν το αριθμητικό πεδίο. Δηλαδή, το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο $F(\cdot)$ είναι η μιγαδική πολυτιμική συνάρτηση στο $M_n$ έτσι ώστε:

α) Το $F(A)$ είναι συμπαγές (2.1) και κυρτό (2.2) για κάθε $A \in M_n$.

β) $F(A + aI) = F(A) + a$ (2.3) και $F(aA) = aF(A)$ (2.4) για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$ και κάθε $A \in M_n$.

γ) Το $F(A)$ είναι ένα υποσύνολο το κλειστού δεξιού ημιεπιπέδου αν και μόνο αν ο $A + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος (2.5β).

**<u>Απόδειξη</u>:** Ας υποθέσουμε $F_1(\cdot)$ και $F_2(\cdot)$ είναι δύο γνωστές μιγαδικές πολυτιμικές συναρτήσεις στο $M_n$ που ικανοποιούν τις 5 προαναφερθείσες ιδιότητες συναρτήσεων. Έστω $A \in M_n$. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι $F_1(A) \subset F_2(A)$. Υποθέστε, αντιθέτως, ότι $\beta \in F_1(\mathrm{A})$ και $\beta \notin F_2(\mathrm{A})$ για κάποιο μιγαδικό αριθμό $\beta$. Τότε, λόγω των (2.1) και (2.2), υπάρχει μια ευθεία γραμμή L στο μιγαδικό επίπεδο που έχει το σημείο $\beta$ αυστηρά στη μία πλευρά του και το σύνολο $F_2(\mathrm{A})$ στην άλλη πλευρά (σύμφωνα με το θεώρημα του διαχωριστικού υπερεπιπέδου για κυρτά σύνολα). Το επίπεδο μπορεί να περιστρέφεται και να μεταφέρεται έτσι ώστε ο φανταστικός άξονας να συμπίπτει με την L και ο $\beta$ να βρίσκεται στο άνω αριστερό ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι εκεί υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $\alpha_1 \neq 0$ και $\alpha_2$ τέτοιοι ώστε $Re(\alpha_1\beta + \alpha_2) < 0$ ενώ $\alpha_1 F_2(\mathrm{A}) + \alpha_2$ ανήκει στο κλειστό δεξιό ημιεπίπεδο. Ωστόσο, $\alpha_1 F_2(\mathrm{A}) + \alpha_2 = F_2(\alpha_1 A + \alpha_2 I)$ χάρη στα (2.3) και (2.4), επομένως, $Re\beta' < 0$ ενώ το $F_2{}'(A)$ βρίσκεται στο κλειστό δεξιό ημιεπίπεδο, όπου $A' \equiv \alpha_1 A + \alpha_2 I$ και $\beta' \equiv \alpha_1\beta + \alpha_2 \in F_1(A')$. Έπειτα, σύμφωνα με το (2.5β), ο $A' + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος. Αυτό, ωστόσο, έρχεται σε αντίθεση με το δεδομένο ότι $F_1(\mathrm{A}')$ δεν ανήκει στο κλειστό δεξιό ημιεπίπεδο, και συμπεραίνουμε ότι $F_1(A) \subseteq F_2(A)$.

Αν αντιστρέψουμε τους ρόλους των $F_1(\cdot)$ και $F_2(\cdot)$ θα δούμε ότι ισχύει και $F_2(A) \subseteq F_1(A)$. Συνεπώς $F_1(A) = F_2(A)$ για κάθε $A \in M_n$. Εφόσον το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο $F(\cdot)$ ικανοποιεί και τις πέντε προαναφερθείσες ιδιότητες (2.1-4 και 2.5β), φτάνουμε στο πολυπόθητο συμπέρασμα παίρνοντας $F_1(A) \equiv F(A)$.

## ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αυτή η ενότητα βασίζεται στον C.R.Johnson, “Functional characterization of the field of values and the Convex Hull of the Spectrum”, Proc. Amer.Math.Soc.61 (1976), 201-204.

## 5. ΘΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΤΙΜΩΝ

Μέχρι τώρα δεν έχουμε πει πολλά για το που βρίσκεται το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ στο μιγαδικό επίπεδο, αν και είναι ξεκάθαρο ότι η γνώση της θέσης του θα ήταν χρήσιμη για πολλές εφαρμογές σαν αυτές που αναφέραμε στο (0.2-4). Σε τούτη την ενότητα θα δώσουμε ένα τύπο Gershgorin τόπο εγκλεισμού για το $F(A)$ και μερικές παρατηρήσεις που διευκολύνουν τον αριθμητικό προσδιορισμό του.

Λόγω του ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα εξαρτώνται συνεχώς από τα στοιχεία του κι επειδή οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία, δε μας προκαλεί έκπληξη ότι υπάρχει ένα φασματικό αποτέλεσμα θέσης όπως το θεώρημα Gershgorin. Επικαλούμεθα την αναλογία ότι επειδή το σύνολο $F(A)$ εξαρτάται συνεχώς από τα στοιχεία του $A$ κι επειδή το αριθμητικό πεδίο ενός διαγωνίου πίνακα είναι το κυρτό περίβλημα των διαγώνιων στοιχείων, πρέπει να υπάρχει κάποιου είδους τόπος εγκλεισμού για το $F(A)$ που, όπως οι δίσκοι Gershgorin, εξαρτάται με έναν απλό τρόπο από τα στοιχεία του. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσω έναν τέτοιο τόπο εγκλεισμού.

**5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έχουμε $A = [a_{ij}] \in M_n$, κι έστω η διαγραμμένη απόλυτη γραμμή και τα αθροίσματα στήλης του $A$ συμβολίζονται με $R_i'(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, \dots, n$ και $C_j'(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $j = 1, \dots, n$, αντίστοιχα κι έστω $g_i(A) = \frac{1}{2}[R_i'(A) + C_i'(A)], i = 1, \dots, n$ ο μέσος όρος $i$ η διαγραμμένη σειρά και τα αθροίσματα στήλης του $A$. Να ορίσετε τη μιγαδική πολυτιμική συνάρτηση $G'_F(\cdot)$ στο $M_n$ ως $G_F(A) \equiv C_0[\bigcup_{i=1}^{n}\{z: |z - a_{ij}| \leq g_i(A)\}]$.

Θυμηθείτε το θεώρημα Gershgorin σχετικά με το φάσμα $\sigma(A)$ του $A \in M_n$, το οποίο λέει ότι $\sigma(A) \subset G(A) \equiv \bigcup_{i=1}^{n}\{z: |z - a_{ij}| \leq R'_i(A)$ και ότι $\sigma(A) \subset G(A^T) \equiv \bigcup_{j=1}^{n}\{z: |z - a_{ij}| \leq C'_j(A)\}$.

Να επισημάνουμε ότι οι τόποι Gershgorin $G(A)$ και $G(A^T)$ είναι οι ενώσεις των κυκλικών δίσκων με κέντρα στα διαγώνια στοιχεία του $A$, ενώ η συνάρτηση συνόλου $G_F(A)$ είναι το κυρτό περίβλημα κάποιων κυκλικών δίσκων με τα ίδια κέντρα, αλλά με ακτίνες που είναι οι μέσοι (όροι) των ακτινών που οδηγούν στο $G(A)$ και $G(A^T)$, αντίστοιχα. Οι τόποι Gershgorin $G(A)$ και $G(A^T)$ δε χρειάζεται να είναι κυρτοί, αλλά ο $G_F(A)$ είναι κυρτός εξ' ορισμού.

**5.2 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για οποιαδήποτε $A \in M_n$, $F(A) \subset G_F(A)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Ακολουθούμε τρία βήματα. Έστω $RHP$ συμβολίζει το ανοικτό δεξιό ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C}: Re\, z > 0\}$. Πρώτα δείχνουμε ότι εάν $G_F(A) \subset RHP$, τότε $F(A) \subset \mathrm{RHP}$. Αν $G_F(A) \subset \mathrm{RHP}$ τότε $Re\, \alpha_{\iota\iota} > g_\iota(A)$. Έστω $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \equiv B \equiv [b_{ij}]$. Εφόσον, $R'_i(A) = \mathrm{C}'_i(A)$ και $\mathrm{R}'_\mathrm{i}(B) \leq g_i(A)$ συνεπάγεται ότι $b_{ij} = Re\, \alpha_{\iota\iota} > g_\iota(A) \geq \mathrm{R}'_i(B)$. Πιο συγκεκριμένα $G(B) \subset RHP$. Αφού $\sigma(B) \subset G(B)$ σύμφωνα με το θεώρημα Gershgorin, έχουμε $\sigma(B) \subset RHP$. Αλλά εφόσον ο $B$ είναι Ερμιτιανός $F\big(H(A)\big) = F(B) = C_0(\sigma(B)) \subset \mathrm{RHP}$ κι έτσι $F(A) \subset \mathrm{RHP}$, σύμφωνα με το (2.5).

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αν $0 \notin G_F(A)$ τότε $0 \notin F(A)$. Υποθέτουμε ότι $0 \notin G_F(A)$. Εφόσον $G_F(A)$ είναι κυρτό, υπάρχει κάποιο $\theta \in (0,2\pi)$ τέτοιο ώστε $G_F(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}G_F(A) \subset RHP$. Όπως δείξαμε στο πρώτο βήμα, αυτό σημαίνει ότι $F(e^{i\theta}A) \subset RHP$, κι επομένως, $F(A) = e^{-i\theta}\ F(e^{i\theta}A)$, συνεπάγεται ότι $0 \notin F(A)$. Τέλος, αν $\alpha \notin G_F(A)$, τότε $0 \notin G_F(A - \alpha I)$, αφού η συνάρτηση συνόλου $G_F(\cdot)$ ικανοποιεί την ιδιότητα της μεταφοράς. Από αυτά που έχουμε δείξει, συνεπάγεται ότι $0 \notin F(A - \alpha I)$ κι έτσι $\alpha \notin$ F(A), άρα $F(A) \subset G_F(A)$.

Ένα απλό φράγμα για την αριθμητική ακτίνα $r(A)$ προκύπτει από το θεώρημα (5.2).

## 5.3 ΠΟΡΙΣΜΑ

Για κάθε $A \in M_n$, $r(A) \leq max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}| + |a_i|$. Από το (5.3) συνεπάγεται ότι $r(A) \leq \frac{1}{2}\ [max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}| + max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|]$ και ότι η δεξιά πλευρά αυτής της ανισότητας είναι απλά ο μέσος όρος της ανώτερης απόλυτης σειράς και των νορμών πίνακα με άθροισμα στήλης $\left|||A||\right|_1$ και $\left|||A||\right|_\infty$ .

## 5.4 ΠΟΡΙΣΜΑ

Για κάθε πίνακα $A \in M_n$, ισχύει $r(A) \leq \frac{1}{2}\left(\left|||A||\right|_1 \text{ και } \left|||A||\right|_\infty\right)$.

Μία νόρμα πάνω σε πίνακες ονομάζεται φασματικά κυρίαρχη εάν, για κάθε $A \in M_n$, είναι ένα άνω φράγμα για τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$. Είναι φανερό από την ιδιότητα του φασματικού εγκλεισμού ότι η αριθμητική ακτίνα $r(\cdot)$ είναι φασματικά κυρίαρχη.

## 5.5 ΠΟΡΙΣΜΑ

Για κάθε $A \in M_n$, ισχύει $\rho(A) \leq r(A) \leq \frac{1}{2}\left(\left|||A||\right|_1 \text{ και } \left|||A||\right|_\infty\right)$.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τη διαδικασία του πως προσδιορίζουμε και σχεδιάζουμε το $F(A)$ αριθμητικά. Επειδή το σύνολο $F(A)$ είναι κυρτό και συμπαγές, αρκεί να προσδιορίσουμε το σύνορο του $F(A)$, το οποίο συμβολίζουμε $\partial F(A)$. Η στρατηγική μας είναι να υπολογίσουμε πολλά καλά τοποθετημένα σημεία στο $\partial F(A)$ και ευθείες υποστήριξης του $F(A)$ στα σημεία αυτά. Το κυρτό περίβλημα αυτών των συνοριακών σημείων είναι τότε μια κυρτή πολυγωνική προσέγγιση στο $F(A)$ που συγκρατείται στο $F(A)$, ενώ η τομή των ημιεπιπέδων που προσδιορίζεται από τις ευθείες υποστήριξης είναι μια κυρτή πολυγωνική προσέγγιση στο $F(A)$ που περιέχει το $F(A)$. Η περιοχή του τόπου μεταξύ αυτών των δύο κυρτών πολυγωνικών προσεγγίσεων μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο του πόσο καλά είτε η μία είτε η άλλη

προσεγγίζει το $F(A)$. Επιπλέον, αν τα συνοριακά σημεία και οι ευθείες υποστήριξης παράγονται επί του $\partial F(A)$ προς μία κατεύθυνση, είναι εύκολο να σχεδιάσουμε αυτά τα δύο προσεγγιστικά πολύγωνα.
Τα σημεία $q_i$ είναι στις τομές των διαδοχικών ευθειών υποστήριξης και επομένως, είναι οι κορυφές του εξωτερικού προσεγγιστικού πολυγώνου.

Ο σκοπός των επόμενων παρατηρήσεων είναι να δείξουν πώς να κατασκευάσουμε συνοριακά σημεία και ευθείες υποστήριξης γύρω από το $\partial F(A)$. Από το (2.4) προκύπτει ότι:
$e^{-i\theta}F\left(e^{i\theta}A\right) = F(A)$ για κάθε $A \in M_n$, και κάθε $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Επιπλέον έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

**5.7 <u>ΛΗΜΜΑ</u>:** Αν $x \in C^n$, $x^*x = 1$, και $A \in M_n$, οι τρεις ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
α) $Re\, x^*Ax = max\,\{Re\, \alpha : \alpha \in F(A)\}$.
β) $x^*\, H(A)x = max\,\{r : r \in F(H(A))\}$.
γ) $H(A)x = \lambda_{max}\big(H(A)\big)x$, όπου $\lambda_{max}\,(B)$ συμβολίζει την αλγεβρικά μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Ερμιτιανού πίνακα $B$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Η ισοδυναμία του (α) και του (β) προκύπτει από τον υπολογισμό $Rex^*Ax = \frac{1}{2}\,(x^*Ax + x^*A^*x) = x^*\,H(A)x$ και την ιδιότητα της προβολής. Αν $\{y_i, \dots y_n\}$, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του Ερμιτιανού πίνακα $H(A)$ και εάν $H(A)\,y_i = \lambda_i\, y_i$, τότε το $x$ μπορεί να γραφτεί και ως $x = \sum_{j=1}^{n} c_j\, y_j$, με $\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\, c_j = 1$, αφού $x^*x = 1$. Επομένως, $x^*\, H(A)x = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\, c_j\lambda_j$, από το οποίο συμπεραίνεται η ισοδυναμία (β) και (γ).

Από το λήμμα προκύπτει ότι:

$$max\,\{Re\, \alpha : \alpha \in F(A)\} = max\,\{r : r \in F(H(A))\} = \lambda_{max}(H(A)).$$

Αυτό σημαίνει ότι το πιο μακρινό σημείο από τα δεξιά στο $F(H(A))$ είναι το πραγματικό μέρος του πιο μακρινού σημείου από τα δεξιά στο $F(A)$, το οποίο είναι

$\lambda_{max}$ $(H(A))$. Ένα μοναδιαίο διάνυσμα που βγάζει οποιαδήποτε από αυτές τις τιμές βγάζει και τις άλλες.

Το Λήμμα (5.7) μας δείχνει ότι, αν υπολογίσουμε το $\lambda_{max}(H(A))$ κι ένα συσχετισμένο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $x$, παίρνουμε ένα συνοριακό σημείο $x^*Ax$ του $F(A)$ και μια ευθεία υποστήριξης $\{\lambda_{max}(H(A) + t_i : t \in R\}$ του κυρτού συνόλου $F(A)$ σε αυτό το συνοριακό σημείο.

Ωστόσο χρησιμοποιώντας το (5.6), μπορούμε να βρούμε όσα συνοριακά σημεία και ευθείες υποστήριξης θέλουμε περιστρέφοντας το $F(A)$ και υπολογίζοντας την επιθυμητή σχέση ιδιοτιμής – ιδιοδιανύσματος. Για γωνία $\vartheta \in$ [0, 2π), ορίζουμε $\lambda_\theta \equiv \lambda_{max}$ $(H(e^{i\theta}A))$, θεωρούμε $x_\theta \in C^n$ ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα:

$$H(e^{i\theta}\mathrm{A})\, x_\theta = \lambda_\theta x_\theta,\ x_\theta^*\, x_\theta = 1, \quad (5.10)$$

ορίζουμε την ευθεία

$$L_\theta \equiv \{e^{-i\theta}\, (\lambda_\theta + t_i) : t \in \mathbb{R}\}$$

και συμβολίζουμε το ημιεπίπεδο προσδιορισμένο από την ευθεία $L_\theta$ με

$$H_\theta \equiv \text{ το ημιεπίπεδο } e^{-i\theta}\, \{z + Re\, z \leq \lambda_\theta\}.$$

**5.11 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για κάθε $A \in M_n$ και κάθε $\theta \in$ [0,2π), ο μιγαδικός αριθμός $p_\Theta \equiv x_\theta^*\, Ax_\theta$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $F(A)$. Η ευθεία $L_\theta$ είναι μια ευθεία υποστήριξης για το $F(A)$, με $p_\Theta \in L_\theta \cap F(A)$ και $F(A) \subset H_\Theta$ για κάθε $\theta \in$ [0,2π).

Επειδή το $F(A)$ είναι κυρτό, είναι γεωμετρικά ξεκάθαρο ότι κάθε ακρότατο σημείο του $F(A)$ προκύπτει ως ένας $p_\Theta$ και ότι για οποιοδήποτε $\alpha \notin F(A)$ υπάρχει μια $L_\theta$ που διαχωρίζει το $F(A)$ από το $\alpha$, δηλαδή $\alpha \notin H_\Theta$. Επομένως μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $F(A)$ ως εξής:

**5.12 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για κάθε $A \in M_n$,

$$F(A) = C_0(\{p_\Theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}) = \cap_{0\leq\theta\leq2\pi} H_\Theta.$$

Εφόσον δεν είναι δυνατό να υπολογίσουμε αόριστα πολλά σημεία $p_\Theta$ και ευθείες $L_\theta$, πρέπει να αρκεστούμε με ισότητες που έχουν αντικατασταθεί από εγκλεισμούς συνόλου. Έστω $\Theta$ συμβολίζει ένα σύνολο σημείων γωνιακού πλέγματος, $\Theta=\{\theta_{1,}\theta_{2,}\dots\theta_\kappa\}$, όπου $0 \leq \theta_1 < \theta_2 <\dots< \theta_\kappa < 2\pi$.

**5.13 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:** Μας δίνεται $A \in M_n$, έστω ένα περιορισμένο σύνολο σημείων γωνιακού πλέγματος $\Theta = \{0 \leq \theta_1 < \theta_2 <\dots< \theta_\kappa < 2\pi\}$ μας δίνεται, έστω $\{p_{\theta i}\}$ το συσχετισμένο σύνολο των συνοριακών σημείων του $F(A)$ και έστω $\{H_{\theta i}\}$ οι ημιχώροι που συσχετίζονται με τις ευθείες υποστήριξης $L_{\theta i}$ για τον $F(A)$ στα σημεία $p_{\Theta i}$.
Ορίζουμε: $F_{In}(A,\Theta) \equiv C_0(\{P_{\theta i}, \dots P_{\theta i}\})$ και $F_{out}(A,\Theta) \equiv H_{\theta i} \cap \dots \cap H_{\theta i}$.
Αυτά είναι τα κατασκευαστικά εσωτερικά και εξωτερικά προσεγγιστικά σύνολα για τον $F(A)$.

**5.14 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για κάθε $A \in M_n$ και κάθε γωνιακό πλέγμα $\Theta$,

$$F_{In}(A,\Theta) \subset F(A) \subset F_{out}(A,\Theta).$$

Το σύνολο $F_{out}(A,\Theta)$ είναι πολύ χρήσιμο ως μια εξωτερική εκτίμηση αν τα σημεία γωνιακού πλέγματος $\theta_j$ είναι επαρκώς πολυάριθμα και καλά τοποθετημένα έτσι ώστε το σύνολο $\cap \{H_{\Theta i} : 1 \leq i \leq k\}$ να είναι φραγμένο (το οποίο υποθέτουμε και στη συνέχεια). Σε αυτή την περίπτωση, εύκολα προσδιορίζεται επίσης. Έστω $q_{\Theta i}$ συμβολίζει το σημείο (πεπερασμένης) τομής της $L_{\theta i}$ και $L_{\theta i+1}$, όπου $i = 1, \dots, k$ και $i = k + 1$ ταυτοποιείται με $i = 1$. Η ύπαρξη αυτών των σημείων τομής είναι ισοδύναμη με το συμπέρασμα ότι το $F_{out}(A,\Theta)$ είναι φραγμένο και σε τούτη την περίπτωση έχουμε την εξής απλή εναλλακτική αναπαράσταση του $F_{out}$ $(A, \Theta)$:

$$F_{out}\ (A, \Theta) = \cap_{1 \le i \le k} H_{\Theta i} = \mathrm{C}_0\ (\{q_{\theta i}, \ldots\ldots\ldots q_{\theta k}\})\ .$$

Λόγω της διάταξης των στοιχείων $\theta_j$ γωνιακού πλέγματος, τα σημεία $p_{\Theta j}$ και $q_{\Theta j}$ προκύπτουν διαδοχικά γύρω από το $\partial F(A)$ για $j = 1, \ldots, k$ και $\partial F_{in}(A, \Theta)$ είναι απλά η ένωση των k ευθύγραμμων τμημάτων $[p_{\theta_1}, p_{\theta_2}]$, … ,$[p_{\theta_{\kappa-1,}}\ p_{\theta_k}]$, $[p_{\theta_k}, p_{\theta_1}]$ ενώ το $\partial F_{out}(A, \Theta)$ αποτελείται από τα k ευθύγραμμα τμήματα $[q_{\theta 1}, q_{\theta 2}]$, … , $[q_{\theta_{\kappa-1,}}$ $q_{\theta_k}]$, $[q_{\theta_k}, q_{\theta_1}]$. Επομένως, κάθε προσεγγιστικό σύνολο σχεδιάζεται εύκολα, και η διαφορά των περιοχών τους (ή κάποιο άλλο μέτρο της διαφοράς συνόλου τους), που υπολογίζεται εύκολα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο της εγγύτητας της προσέγγισης. Αν η προσέγγιση δεν είναι αρκούντως κοντά, ένα πυκνότερο γωνιακό πλέγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Τέτοιες προσεγγίσεις μπορούν να φτιαχτούν αυθαίρετα κοντά στο $F(A)$. Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι το $F(A)$ (το οποίο συγκρατεί $\sigma(A)$ για κάθε $A \in M_n$), μπορεί να προσεγγιστεί αυθαίρετα κοντά με μόνο μια σειρά Ερμιτιανών ιδιοτιμής – ιδιοδιανύσματος υπολογισμών.
Αυτές οι διαδικασίες μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε και την αριθμητική ακτίνα $r(A)$.

## 5.16 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Για κάθε $A \in M_n$ και κάθε γωνιακό πλέγμα $\Theta$,

$$max_{1 \le k \le k}|p_{\theta_i}| \le r(A) \le max_{1 \le i \le k}\ |q_{\theta_i}|.$$

Έχουμε ότι $F[A(i')] \subseteq F(A)$ για $i = 1, \ldots, n$, όπου $A(i')$ συμβολίζει τον κύριο υποπίνακα του $A \in M_n$, σχηματισμένο διαγράφοντας σειρά και στήλη $i$. Άρα $\mathrm{C}_0\ [U_{i=1}^{n}\ F[A(i')]] \subseteq F(A)$.
Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε: Πόσο από την αριστερή πλευρά γεμίζει η δεξιά πλευρά; Η απάντηση είναι: όλο από αυτήν στο όριο, καθώς η διάσταση αγγίζει το άπειρο. Για να περιγράψουμε καλύτερα αυτό το δεδομένο, ορίζουμε περιοχή $(S)$

για ένα κυρτό υποσύνολο $S$ του μιγαδικού επιπέδου ως η κατά συνθήκη περιοχή εκτός κι αν $S$ είναι ευθύγραμμο τμήμα (πιθανά ένα σημείο), που σε περίπτωση η Περιοχή $(S)$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (πιθανά μηδενικό). Επιπροσθέτως, στον παρακάτω λόγο περιοχής θεωρούμε ότι 0/0 είναι 1.

**5.17 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Για $A \in M_n$ με $n \geq 2$, έστω $A(i') \in M_{n-1}$ συμβολίζει τον κύριο υποπίνακα του $A$ που πήραμε διαγράφοντας σειρά και στήλη $i$ από τον $A$. Υπάρχει μία ακολουθία σταθερών $c_2, c_3, \ldots \in [0,1]$ έτσι ώστε για οποιοδήποτε $A \in M_n, \frac{\text{Περιοχή}[Co\,[\cup_{i=1}^{n} F[A(i')]]}{\text{Περιοχή}\,[F(A)]} \geq c_n,\ n = 2, 3, \ldots$ και $lim\ c_n$=1 καθώς $n \to \infty$.
Οι σταθερές $C_n \equiv \frac{n-2}{7n-2-6[n(n-2)]^{1/2}}$ ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες και το ίδιο κάνουν και οι σταθερές $c_n \equiv \frac{2n-5}{2n+7}$ .

## <u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ενότητας βασίζεται στο «A. Gershgorin», Inclusion Set for the Field of Values of a Finite Matrix, <u>Proc. Amer. Math.</u> Soc. 41(1973), 57-60, και «Numerical Determination of the Field of Values of a General Complex Matrix, SIAM J. <u>Numer. Anal.</u> 15 (1978), 595-602, και τα δύο του C.R. Johnson. Δείτε επίσης του C.R. Johnson, “An Inclusion Region for the field of values of a Doubly Stochastic Matrix based on its Graph”, <u>Alynationes Mathematicae</u> 17(1978), 305-310.
Για την απόδειξη του θεωρήματος (5.17), δείτε C.R. Johnson “Numerical Ranges of Principal Sub Matrices”, <u>Linear Algebra Appl.</u> 37(1981), 11-12˙ η καλύτερη πιθανή τιμή για το κάτω φράγμα $c_n$ σε κάθε διάσταση $n$ δεν είναι ακόμα γνωστή. Για έρευνα των αποτελεσμάτων σχετικά με την αριθμητική ακτίνα και το αριθμητικό πεδίο, γενικεύσεις κι εφαρμογές στις μεθόδους πεπερασμένης διαφοράς για υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, και μία εκτενέστερη βιβλιογραφία, δείτε M. Goldberg, “On Certain Finite Dimensional Numerical Ranges and Numerical Radij”, <u>Linear Multilinear Algebra</u> 7(1979), 329-342, καθώς και M. Goldberg και E. Tadmar, “On the Numerical Radius and its Applications”, <u>Linear Algebra Appl.</u>

42(1982), 263-284. Οι αναπαραστάσεις (5.20,21) για τη νόρμα μοναδιαίας μπάλας στο $M_n$ βρίσκονται στον T. Ando, “Structures of Operators with Numerical Radius One” Acta. Sci Math. (Szeged) 34(1973), 11-15.

# 6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στην ενότητα (3) είδαμε ότι εάν $A \in M_2$, τότε αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι μια (πιθανά εκφυλισμένη) έλλειψη με εσωτερικό και ότι η έλλειψη μπορεί να προσδιοριστεί με αρκετούς τρόπους από παραμέτρους που σχετίζονται με τα στοιχεία του πίνακα $A$.

Ωστόσο, σε ανώτερες διαστάσεις, μια ιδιαίτερα πλουσιότερη ποικιλία σχημάτων είναι πιθανή για το αριθμητικό πεδίο. Κάθε κυρτό πολύγωνο είναι αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα αρκούντως ανώτερης διάστασης˙ σύμφωνα με το (2.9), μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ένα κανονικό πίνακα του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι κορυφές του πολυγώνου. Συνεπώς, οποιοδήποτε φραγμένο κυρτό σύνολο μπορεί να προσεγγιστεί, όσο πιο κοντά θέλουμε, από το αριθμητικό πεδίο κάποιου πίνακα, αλλά η διάσταση του πίνακα ίσως να πρέπει να είναι μεγάλη. Περαιτέρω κι ενδιαφέροντα σχήματα μπορούν να συνδυαστούν χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του ευθέος αθροίσματος (2.10)˙ αν προκύψουν δύο σύνολα, το ίδιο προκύπτει και το κυρτό τους περίβλημα, αλλά ένα ευθύ άθροισμα ανώτερης διάστασης μπορεί να χρειαστεί για να το πραγματοποιήσουμε. Εκτός από $n = 1$ και 2, δε γνωρίζουμε ποια συμπαγή κυρτά σύνολα στο $\mathbb{C}$ εμφανίζονται ως αριθμητικά πεδία για πίνακες σταθερής πεπερασμένης διάστασης $n$. Ο στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να παρουσιάσουμε μερικά βασικά δεδομένα για το σχήμα του $F(A)$ και τη σχέση του με την $\sigma(A)$. Αυτά τα αποτελέσματα επεξηγούνται πάνω σε μερικές βασικές ιδιότητες στο (2).

Το σχετικό εσωτερικό ενός συνόλου στο $\mathbb{C}$ είναι απλά το εσωτερικό σχετικό του ως προς το μικρότερο διαστατικό χώρο στο οποίο βρίσκεται. Ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο είτε είναι ένα σημείο (χωρίς σχετικό εσωτερικό), είτε ένα μη τετριμμένο κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το σχετικό εσωτερικό είναι ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα, είτε ένα σύνολο με διδιάστατο εσωτερικό με τη συνηθισμένη σημασία του. Τι μπορεί να ειπωθεί για τα εσωτερικά σημεία του $F(A)$; Αν $A \in M_n$, το σημείο $\frac{1}{n} tr\, A$ πάντα βρίσκεται στο $F(A)$ αφού είναι ένας κυρτός συνδυασμός σημείων στο $F(A)$ (οι ιδιοτιμές καθώς και τα κύρια διαγώνια στοιχεία του $A$), αλλά δε μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω.

Η σημαντικότερη παρατήρηση είναι ότι εάν ένα κυρτό σύνολο $C$ συγκρατείται στο κλειστό άνω ημιεπίπεδο κι αν ένας γνήσιος κυρτός συνδυασμός των δοσμένων σημείων στο $C$ είναι πραγματικός, τότε όλα αυτά τα σημεία πρέπει να είναι αληθινά.

**6.1 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A = [\, a_{ij} \,] \in M_n$, μας δίνεται, έστω $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ συμβολίζει τις ιδιοτιμές του $A$, κι έστω $\mu_1,\ldots, \mu_n$ δοσμένοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Ο $A$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της ταυτοτικού πίνακα.

β) $\mu_1\alpha_{11} + \ldots + \mu_n\alpha_{nn}$ είναι στο σχετικό εσωτερικό του $F(A)$.

γ) $\mu_1\lambda_1 + \ldots + \mu_n\lambda_n$ είναι στο σχετικό εσωτερικό του $F(A)$.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την εξής διχοτομία: Είτε ο $A$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, είτε το σημείο $\frac{1}{n} tr\, A$ βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(A)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν ο $A$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, τότε το $F(A)$ δεν έχει σχετικό εσωτερικό, άρα το (β) και το (γ) οδηγούν στο (α). Έστω $J \equiv \mu_1\alpha_{11} + \ldots + \mu_n\alpha_{nn}$, παρατηρήστε ότι $J \in F(A)$, και υποθέτουμε ότι το $J$ δε βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(A)$. Έστω $B = [b_{ij}] \equiv A - JI$ και παρατηρούμε ότι $\mu_1 b_{11} + \ldots + \mu_n b_{nn} = 0$, $0 \in F(B)$, και το 0 δε βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(B)$.

Εφόσον το $F(B)$ είναι κυρτό, μπορεί να περιστραφεί γύρω από το συνοριακό σημείο 0 έτσι ώστε, για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$, το αριθμητικό πεδίο του $C = [c_{ij}] \equiv e^{i\theta}B$ να βρίσκεται στο κλειστό άνω ημιεπίπεδο $UHP \equiv \{z \in \mathbb{C}: Im\ z \geq 0\}$. Τότε $0 \in F(C) \subset UHP$, το 0 δε βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(C)$, και $\mu_1 c_{11} + \ldots + \mu_n c_{nn} = 0$. Αφού κάθε $c_{ii} \in F(C)$, $Im\ c_{ii} \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Αλλά $\mu_1 Imc_{11}$ + … + $\mu_n\, Im\, c_{nn}$ = 0 και κάθε $\mu_i > 0$, οπότε όλα τα κύρια διαγώνια στοιχεία του $C$ είναι πραγματικά. Για κάθε δοσμένους δείκτες $i, j \in \{1, \dots, n\}$, έστω $\Gamma_{ij}$ συμβολίζει τον 2 επί 2 κύριο υποπίνακα του $C$ που πήραμε ως τομές των σειρών και των στηλών $i$ και $j$, κι έστω $\lambda_1, \lambda_2$ συμβολίζουν τις ιδιοτιμές του. Εφόσον $F(\Gamma_{ij}) \subset UHP$, έχουμε $\lambda_1, \lambda_2 \in UHP$.

Αλλά $\mathrm{Im}\ (\lambda_1)$ + $\mathrm{Im}\ (\lambda_2)$ = $\mathrm{Im}\ (\lambda_1 + \lambda_2)$ + $\mathrm{Im}$ (tr $\Gamma_{ij}$) = 0, άρα οι $\lambda_1$και $\lambda_2$ είναι και οι δυο πραγματικές και καμία τους δεν είναι εσωτερικό σημείο του $F(\Gamma_{ij}) \subset UHP$. Από το θεώρημα (3.6β) συνεπάγεται ότι $\Gamma_{ij}$ είναι κανονικός· στην ουσία, είναι Ερμιτιανός εφόσον οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Εφόσον $i$ και $j$ είναι αυθαίρετοι δείκτες, συνεπάγεται ότι $C$ είναι Ερμιτιανός, κι επομένως, το $F(C)$ είναι πραγματικό διάστημα, το οποίο πρέπει να έχει 0 ως άκρο του αφού 0 δεν βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(C)$.

Συνεπώς, κάθε σημείο στο $F(C)$, και συγκεκριμένα, κάθε $c_{ii}$ και $\lambda_i$, έχει το ίδιο πρόσημο. Αλλά $\mu_1 c_{11}$ + … + $\mu_n c_{nn}$ = 0 και όλα τα $\mu_i > 0$, άρα όλα τα $c_{ii}$ = 0.

Εφόσον $\lambda_1$ + … + $\lambda_n$ = $c_{11}$ + … + $c_{nn}$, συνεπάγεται επίσης ότι κάθε $\lambda_i$ = 0, και άρα $C = 0$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $A = JI$ κι έτσι το (α) υποδεικνύει το (β).

Για να δείξουμε ότι το (α) υποδεικνύει το (γ), υποθέτουμε ότι $J \equiv \mu_1\lambda_1$ + … + $\mu_n\lambda_n$ δε βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του $F(A)$. Επιλέγουμε έναν ορθομοναδιαίο $U \in M_n$, έτσι ώστε ο $\boldsymbol{A} \equiv UAU^*$ να είναι άνω τριγωνικός και να έχει κύρια διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Τότε $F(A) = F(\boldsymbol{A})$, και ένας γνήσιος κυρτός συνδυασμός των κύριων διαγώνιων στοιχείων του $\boldsymbol{A}$ δε βρίσκεται στο σχετικό εσωτερικό του αριθμητικού του πεδίου. Με την ισοδυναμία του (α) και του (β), συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{A} = JI$ και επομένως $A = U^*\boldsymbol{A}U = JI$.

Στη συνέχεια θα ερευνήσουμε τη λειότητα του συνόρου του αριθμητικού πεδίου $\partial\, \mathrm{F(A)}$ και τη σχέση του με τη $\sigma(A)$. Ενστικτωδώς ένα «γωνιακό σημείο» ενός κυρτού συνόλου $S$ είναι ένα ακρότατο σημείο στο οποίο το σύνορο «στρίβει απότομα», ένα συνοριακό σημείο όπου υπάρχουν μη μονοσήμαντες εφαπτομένες, ή μια «γωνιά».

**6.2 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Ένα σημείο α ∈ $\partial F(A)$ λέγεται γωνιακό σημείο του $F(A)$ αν υπάρχουν γωνίες $\theta_1$ και $\theta_2$ με $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ για τις οποίες $Re\, e^{i\theta}\alpha$ = $max\,\{Re\,\beta: \beta \in F(e^{i\theta}A)\}$ για όλες τις $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

**6.3 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Αν α είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$, τότε α είναι ιδιοτιμή του Α.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν το α είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$, ξέρουμε από το (5.7) ότι υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $x^*\, H(e^{i\theta}A)x = \lambda_{max}\,(H(e^{i\theta}A))$ για όλες τις $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ από το οποίο προκύπτει $\lambda_\theta \equiv \lambda_{\max}H(e^{i\theta}A)$.
$H(e^{i\theta}A)x = \lambda_\theta x$ για όλες τις $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ (1).
Το διάνυσμα $x$ είναι ανεξάρτητο από την $\theta$. Η παραγώγιση του $H(e^{i\theta}A)x = \lambda_\theta x$ σε σχέση με τη $\theta$ μας δίνει $H(ie^{i\theta}A)x = \lambda'_\theta x$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $S(e^{i\theta}A)x = -\lambda'_\theta x$ (2).
Προσθέτοντας τα (1) και (2), έχουμε $e^{i\theta}Ax = (\lambda_\theta - i\lambda'_\theta)x$, ή $Ax = e^{-i\theta}\,(\lambda_{\theta -}\, i\lambda'_\theta)x$ .
Ερμηνεύοντας μία εκτίμηση σε οποιαδήποτε $\theta$ στο ενδεδειγμένο διάστημα, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $\alpha = x^*\,Ax = e^{-i\theta}\;(\lambda_\theta - i\lambda'_\theta)$ είναι ιδιοτιμή του $A$.

Αφού κάθε $A \in M_n$ έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ιδιοτήτων, το θεώρημα (6.3) συνεπάγεται ότι αν ένα σύνολο είναι το αριθμητικό πεδίο ενός πεπερασμένου πίνακα, μπορεί να έχει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό γωνιακών σημείων. Επιπρόσθετα, αν τα μόνα ακρότατα σημεία του $F(A)$ είναι γωνιακά σημεία, τότε το $F(A)$ είναι το κυρτό περίβλημα κάποιων ιδιοτιμών του $A$.

## 6.4 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Έστω $A \in M_n$. Τότε το $F(A)$ έχει το πολύ $n$ γωνιακά σημεία, και το $F(A)$ είναι ένα κυρτό πολύγωνο αν και μόνο αν $F(A) = C_0(\sigma(A))$.

Παρόλο που κάθε γωνιακό σημείο στο σύνορο του $F(A)$ είναι ιδιοτιμή, δεν είναι η κάθε ιδιοτιμή στο σύνορο του $F(A)$ ένα γωνιακό σημείο. Ωστόσο, κάθε τέτοιο σημείο έχει ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό.

**6.5 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:** Ένα σημείο $\lambda \in \sigma(A)$ είναι μια κανονική ιδιοτιμή για τον πίνακα $A \in M_n$ εάν:

α) κάθε ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί στο $\lambda$ είναι ορθογώνιο σε κάθε ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή διαφορετική από το $\lambda$ και

β) η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda$ (η διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου του $A$) ισούται με την αλγεβρική πολλαπλότητα του $\lambda$ (ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A$).

Η κύρια παρατήρησή μας εδώ είναι ότι όλες οι ιδιοτιμές στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου είναι κανονικές ιδιοτιμές.

**6.6 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Αν $A \in M_n$ κι αν $\alpha \in \partial\, F(A) \cap \sigma(A)$, τότε το $\alpha$ είναι κανονική ιδιοτιμή του $A$. Αν $m$ είναι η πολλαπλότητα του $\alpha$, τότε ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με το $\alpha I \oplus B$, με $I \in M_m$, $B \in M_{n-m}$, και $\alpha \notin \sigma(B)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα του $\alpha$ είναι $m$, τότε ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με ένα άνω τριγωνικό πίνακα $T$ του οποίου τα πρώτα $m$ κύρια διαγώνια στοιχεία ισούνται με $\alpha$, και του οποίου τα υπόλοιπα διαγώνια στοιχεία (όλα διαφορετικά από $\alpha$) είναι οι άλλες ιδιοτιμές του $A$. Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε ένα μη μηδενικό στοιχείο εκτός κύριας διαγωνίου σε μία από τις πρώτες $m$ σειρές του $T$. Τότε ο $T$ θα είχε ένα 2 επί 2 κύριο υποπίνακα $T_O$ της μορφής

$T_O = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \gamma \neq 0.$

Εφόσον το $F(T_O)$ είναι ένας κυκλικός δίσκος γύρω από το $\alpha$ με ακτίνα ½|γ| είτε μια μη εκφυλισμένη έλλειψη (με εσωτερικό) με εστίες στα $\alpha$ και $\beta$, το σημείο $\alpha$ πρέπει να είναι στο εσωτερικό του $F(T_O)$. Αλλά $F(T_O) \subset F(T) = F(A)$, σύμφωνα με τα

(2.8) και (2.11), το οποίο σημαίνει ότι το $\alpha$ είναι στο εσωτερικό του $F(A)$. Αυτή η αντίφαση μας δείχνει ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικά εκτός διαγωνίου στοιχεία στις πρώτες $m$ σειρές του $T$, κι επομένως, $T\alpha = \alpha I \oplus B$ με $I \in M_m$ και $B \in M_{n-m}$.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι το αντίστροφο της ιδιότητας της κανονικότητας (2.9) δεν ισχύει, αλλά τώρα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε πλήρως τη σχέση μεταξύ των δύο συνθηκών στα $A \in M_n$: ο $A$ είναι κανονικός, και $F(A) = C_0(\sigma(A))$.

## 6.7 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Αν $\sigma(A) \subset \partial F(A)$, τότε ο πίνακας $A$ είναι κανονικός.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι κανονικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση των ιδιοδιανυσμάτων του $A$, επομένως, ο $A$ είναι κανονικός.

**6.8 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Τότε $F(A) = C_0(\sigma(A))$ αν και μόνο αν, είτε ο $A$ είναι κανονικός είτε ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, όπου ο $A_1$ είναι κανονικός και $\mathrm{F}(A_2) \subset \mathrm{F}(A_1)$.

## 6.9 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Αν $A \in M_n$ και n $\leq$ 4, τότε ο $A$ κανονικός αν και μόνο αν $F(A) = C_0(\sigma(A))$ .

Αν μας δίνεται $A \in M_n$ και εάν $B = \begin{bmatrix} A & * \\ * & * \end{bmatrix}$ ένας μεγαλύτερος πίνακας που συγκρατεί τον $A$ στην άνω αριστερή γωνία του, λέμε ότι ο $B$ είναι διαστολή του $A$˙ σύμφωνα με την ιδιότητα εγκλεισμού υποπίνακα, $F(A) \subset F(B)$ οπότε $B \in M_n$ είναι διαστολή του $A \in M_n$. Μπορούμε πάντα να βρούμε μία $2n$ επί $2n$ κανονική διαστολή του $A$, για παράδειγμα, ο πίνακας B ορίζεται από το $B \equiv \begin{bmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{bmatrix}$, που σε αυτή την περίπτωση $F(B) = C_0(\sigma(B))$. Είναι ξεκάθαρο ότι το $F(A)$ συγκρατείται στην τομή των πεδίων τιμών όλων των κανονικών διαστολών του $A$, και το ευχάριστο είναι ότι αυτή η τομή είναι ακριβώς το $F(A)$.

**6.10 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_n$. Τότε:

$$F(A) = \cap \{ F(B): B = \begin{bmatrix} A & * \\ * & * \end{bmatrix} \in M_{2n} \text{ είναι κανονικός}\}.$$

**<u>Απόδειξη</u>:** Εφόσον έχουμε ήδη επισημάνει ότι το $F(A)$ είναι υποσύνολο της δοσμένης τομής, χρειάζεται μόνο να αποδείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Επειδή το $F(A)$ είναι κλειστό και κυρτό, είναι η τομή όλων των κλειστών ημιεπιπέδων που το συγκρατούν, δεδομένο που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα για να αναπτύξουμε ένα αριθμητικό αλγόριθμο για να υπολογίσουμε το $F(A)$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε κλειστό ημιεπίπεδο που συγκρατεί το $F(A)$, υπάρχει κάποιος κανονικός πίνακας $B = \begin{bmatrix} A & * \\ * & * \end{bmatrix} \in M_{2n}$ τέτοιος ώστε το $F(B)$ συγκρατείται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Από τις ιδιότητες της μεταφοράς και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το δοσμένο ημιεπίπεδο είναι το κλειστό δεξιό ημιεπίπεδο $RHP_0$. Συνεπώς, θα είναι αρκετό να δείξουμε ότι όποτε ο $A + A^*$ είναι θετικά ημιορισμένος, δηλαδή, $F(A) \subset RHP_0$, τότε ο $A$ έχει μια κανονική διαστολή $B \in M_{2n}$ τέτοια ώστε ο $B + B^*$ να είναι θετικά ημιορισμένος, δηλαδή $F(B) \subset RHP_0$. Θεωρούμε τον πίνακα $B \equiv \begin{bmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι διαστολή του $A$ και

$$B^*B = \begin{bmatrix} A^*A + AA^* & A^{*2} + A^2 \\ A^2 + A^{*2} & AA^* + A^*A \end{bmatrix} = BB^*.$$

Άρα ο $B$ είναι κανονικός, ανεξαρτήτως του $F(A)$. Επιπλέον αν ο $A + A^*$είναι θετικά ημιορισμένος, τότε ο

$$B + B^* = \begin{bmatrix} A+A^* & A+A^* \\ A+A^* & A+A^* \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημιορισμένος, εφόσον $y, z \in \mathbb{C}^n$ και $x \equiv [\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}] \in \mathbb{C}^{2n}$, τότε $x^*(B + B^*)x = (y+z)^*(A + A^*)(y+z) \geq 0$. Εφόσον το αριθμητικό πεδίο ενός κανονικού πίνακα πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι κυρτό και η τομή των κυρτών συνόλων είναι κυρτή το θεώρημα αυτό προτείνει μια καθαρά εννοιολογική απόδειξη της ιδιότητας της κυρτότητας του αριθμητικού πεδίου. Δυστυχώς, η κυρτότητα του $F(A)$ χρησιμοποιείται με καίριο τρόπο στην απόδειξη του θεωρήματος˙ επομένως, θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να έχουμε μια διαφορετική απόδειξη που δεν βασίζεται στο θεώρημα Toeplitz-Hausdorff.

Ο πίνακας που ορίζεται από τον $B \equiv \begin{bmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{bmatrix}$ δίνει μια $2n$ επί $2n$ κανονική διαστολή οποιουδήποτε δοσμένου πίνακα $A \in M_n$. Είναι χρήσιμο κάποιες φορές να ξέρουμε ότι μπορούμε να βρούμε διαστολές με ακόμη περισσότερη δομή.

## ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η απόδειξη που δόθηκε για το θεώρημα (5.1) οφείλεται στον Onn Chan. Το θεώρημα (6.3) μπορούμε να το βρούμε στην Ενότητα I του R. Kippenhahn, “Uber den Wertevorrat einer Matrix” Math. Nachr, 6 (1951), 193-228 όπου υπάρχει μια απόδειξη διαφορετική από τις 3 που δόθηκαν εδώ, καθώς και πολλά επιπλέον γεωμετρικά αποτελέσματα για το αριθμητικό πεδίο. Τα θεωρήματα (6.6) και (6.8) είναι από τον C.R. Johnson, “Normality and the Numerical Range”, Linear Algebra Appl. 15(1976), 89-94, όπου μπορείτε να βρείτε επιπλέον σχετικές αναφορές.

Μια άλλη έκδοση του (6.1) και σχετικές ιδέες συζητιούνται στον O. Taussky, “Matrices with Trace Zero”, Amer. Math Monthly, 69(1962), 40-42. Το θεώρημα (1.6.10) και η απόδειξή του βρίσκονται στον P.R. Halmos, “Numerical Ranges and Normal Dilations”, Acta Sci Math (Szeged) 25(1964), 1-5. Οι κατασκευές μοναδιαίων διαστολών μιας δοσμένης συστολής που δόθηκε στα (6.13) και (6.16) βρίσκονται στον E. Egervary, “On thw Contractive Linear Transformations of n-Dimensional Vector Space”, Acta Sci Math (Szeged) 15(1953), 178-182. Οι κατασκευές για (6.15-17) όπως και τα φράγματα στο μέγεθος μοναδιαίων και μιγαδικών ορθογωνίων διαστολών με τις ιδιότητες της δύναμης μας δίνονται από τους C.R. Johnson και C.-C.T. Kuo, “Doubly Stochastic, Unitary, Unimodular, and Complex Orthogonal Power Embeddings”, Acta Sci Math (Szeged) 44(1982), 345-357.

# 7. ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Εδώ θα ερευνήσουμε ένα μεγάλο εύρος δεδομένων που συνδέουν τα γινόμενα πινάκων με το αριθμητικό πεδίο. Υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες:

(α) Αντιπαραδείγματα της μη υποπολλαπλασιαστικότητας του $F(\cdot)$.

(β) Αποτελέσματα για το συνηθισμένο γινόμενο όταν το μηδέν δεν ανήκει στο αριθμητικό πεδίο ενός από τους παράγοντες.

(γ) Συζήτηση για ταυτόχρονη διαγωνοποίηση με ομοιότητα.

(δ) Μία σύντομη έρευνα για το αριθμητικό πεδίο ενός γινομένου Hadamard.

## ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΗ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Δυστυχώς, ακόμα και ασθενή πολλαπλασιαστικά ανάλογα της ιδιότητας της υποπροσθετικότητας δεν ισχύουν. Θα ξεκινήσουμε σημειώνοντας κάποια παραδείγματα που μας δείχνουν τι δεν ισχύει, και θα δούμε τα λίγα στοιχεία που ξέρουμε για τα γινόμενα.

Ο εγκλεισμός $F(AB) \subseteq F(A)\,F(B)$, $A, B \in M_n$ αποτυγχάνει να ισχύσει και ως προς τη γωνία και ως προς το μέγεθος.

## 7.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε $F(A) = F(B) = F(A)\,F(B) =$ ο μοναδιαίος δίσκος, ενώ το $F(AB)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 και το 4. συνεπώς, το $F(AB)$ συγκρατεί σημεία πολύ μακριά (4 φορές μακριά) από την αρχή απ' ότι το $F(A)\,F(B)$, άρα αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η αριθμητική ακτίνα $r(\cdot)$ δεν είναι μια νόρμα πίνακα. Ωστόσο, $4r(\cdot)$ είναι νόρμα πίνακα.

## 7.3 <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Τότε $F(A) = F(B) = F(A)\,F(B)$ = το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει -1 και 1, ενώ το $F(AB)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει $-i$ και $i$. Επίσης, $F'(A) = F'(B) = F'(A)F'(B) =$ η πραγματική ευθεία, ενώ $F'(AB) =$ ο φανταστικός άξονας. Λαμβάνουμε υπόψη ότι $r(AB) \leq r(A)r(B)$ σε αυτή την περίπτωση, αλλά το $F(AB) \subseteq F(A)F(B),\ A, B \in M_n$ εξακολουθεί να αποτυγχάνει – λόγω γωνίας· το $F'(AB)$ δεν συγκρατείται στο $F'(A)\,F'(B)$.

## 7.4 <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>:

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. Τότε το $F(A)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει 1 και i, ενώ το $F(A^2)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει -1 και 1. Συνεπώς, το $F(A^2)$ δε συγκρατείται στο $F(A)^2$, εφόσον $0 \in F(A^2)$ και $0 \notin F(A)$. Ωστόσο, $C_0\,(F(A)^2) = C_0\{-1, i, 1\}$, άρα $F(A^2) \subset C_0\,(F(A)^2)$.

Ένας λόγος για τον οποίο δε μας προκαλεί έκπληξη ότι το $F(AB) \subset F(A)F(B)$ δεν ισχύει γενικά είναι το ότι $F(A)F(B)$ δεν είναι γενικά κυρτό σύνολο, ενώ το $F(AB)$ είναι πάντα κυρτό. Όμως εφόσον $F(A)F(B)$ είναι κυρτό και για τα δύο παραδείγματα (7.2) (7.3), ο εγκλεισμός $F(AB) \subset C_0(F(A)\,F(B))\ A, B \in M_n$ αποτυγχάνει και αυτός να ισχύσει γενικά. Τα παραδείγματα (7.2) και (7.3) μας δείχνουν ότι ένας άλλος ασθενέστερος ισχυρισμός $\sigma(AB) \subset F(A)F(B)$ αποτυγχάνει και αυτός να ισχύσει.

## <u>ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΟΤΑΝ ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΔΕΝ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΣΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΕΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ</u>

Με δεδομένο ότι τα διαθέσιμα αποτελέσματα πρέπει να είναι περιορισμένα, θα εξετάσουμε τώρα τι μπορούμε να πούμε για το αριθμητικό πεδίο και τα γινόμενα πινάκων. Η σπουδαιότητα της συνθήκης για να μην είναι το μηδέν στο αριθμητικό πεδίο ενός από τους παράγοντες πρέπει να τονιστεί εξ αρχής. Αυτό σημαίνει ότι, για παράδειγμα, το αριθμητικό πεδίο μπορεί να περιστραφεί στο δεξιό ημιεπίπεδο, και ότι συνδέει πολλά από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται.

**7.5 <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>**: Αν $A \in M_n$ αντιστρέψιμος, τότε $F'(A^{-1}) = F'(A)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ομοιότητας, έχουμε

$$F'(A^{-1}) = F'(AA^{-1}A^*) = F'(A^*) = \overline{F'(A)}\,.$$

Παρόλο που το $\sigma(AB) \subset F(A)F(B)$ αποτυγχάνει να ισχύσει, λίγα μπορούμε να πούμε για τη σχέση του φάσματος ενός γινομένου και το γινόμενο του αριθμητικού πεδίου.

**7.6 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A, B \in M_n$ και υποθέτουμε ότι $0 \notin F(B)$. Τότε $\sigma(AB^{-1}) \subset F(A)/F(B)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Εφόσον $0 \notin F(B)$, γνωρίζουμε από την ιδιότητα φασματικού εγκλεισμού ότι ο $B$ είναι αντιστρέψιμος. Ο λόγος σημείου $F(A)/F(B)$ (ο οποίος έχει τη συνηθισμένη αλγεβρική ερμηνεία) βγάζει νόημα και είναι φραγμένος.
Αν $\lambda \in \sigma(AB^{-1})$, τότε υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $x^*AB^{-1} = \lambda x^*$. Τότε $x^*A = \lambda x^*B$, $x^*Ax = \lambda x^*Bx$ , και $x^*Bx \neq 0$ συνεπώς, $\lambda = x^*Ax/\, x^*Bx \in$ F(A)/F(B).

## 7.7 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Έστω $A, B \in M_n$. Αν ο $B$ είναι θετικά ημιορισμένος, τότε $\sigma(AB) \subseteq F(A)\,F(B)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Πρώτα υποθέτουμε ότι ο $B$ είναι αντιστρέψιμος και σημείο $B = C^{-1}$. Αν $\lambda \in \sigma(AB) = \sigma(AC^{-1})$, τότε σύμφωνα με το (7.6) πρέπει να έχουμε $\lambda = \alpha/c$ για κάποιο $\alpha \in F(A)$ και κάποιο $c \in F(C)$. Αν $\beta_{min}$ και $\beta_{max}$ είναι οι μικρότερες και οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές του $B$, τότε $\beta_{min}^{-1}$ και $\beta_{max}^{-1}$ οι μεγαλύτερες και οι μικρότερες ιδιοτιμές του θετικά ορισμένου πίνακα $C$, και το $F(C)$ είναι το διάστημα $[\beta_{max}^{-1}\ , \beta_{min}^{-1}\ ]$. Επομένως, $C^{-1} \in [\beta_{min}\ , \beta_{max}] = F(B)$ και $\lambda = \alpha c^{-1} \in \mathrm{F(A)/F(B)}$. Η περίπτωση στην οποία ο $B$ είναι μη αντιστρέψιμος μπορεί να ανοιχθεί σε περίπτωση αντιστρέψιμου αντικαθιστώντας $B$ με $B + \varepsilon I$, ε $>$ 0, και μετά έστω ε → 0.

## 7.8 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $A, B \in M_n$ και υποθέτουμε ότι 0 $\notin F(B)$. Τότε $\sigma(AB) \subset F'(A)F'(B)$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αφού 0 $\notin F(B)$, ο $B$ αντιστρέψιμος, και μπορούμε να γράψουμε $B$= $C^{-1}$. Σύμφωνα με το (7.6), για κάθε $\lambda \in \sigma(AB) = \sigma(AC^{-1})$ έχουμε $\lambda = \alpha/c$ για κάποιο $\alpha \in F(A) \subset F'(A)$. Για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ έχουμε $c = x^*Cx = C(x)^*B^*\,C(x) = y^*B^*y \in F'(B^*) = \overline{F'(B)}$, όπου έχουμε σύνολο $y \equiv Cx$. Τότε $\bar{c} \in F'(B), c \neq 0$, και $c^{-1}$ = $\bar{c}$ / $|c|^2$ $\in F'(B)$. Επομένως, $\lambda = \alpha c^{-1}$ $\in F'(A)F'(B)$.

**7.9 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A \in M_n$ και μας δίνεται $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq 0$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $\lambda \in F'(A)$,

(β) $\lambda \in \sigma(HA)$ για κάποιο θετικά ορισμένο $H \in M_n$ και

(γ) $\lambda \in \sigma(C^*AC)$ για κάποιο αντιστρέψιμο $C \in M_n$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Εφόσον ο $H$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $H = CC^*$ για κάποιο αντιστρέψιμο $C \in M_n$ κι εφόσον $\sigma(CC^*A) = \sigma(C^*AC)$, είναι ξεκάθαρο ότι το (β) και το (γ) είναι ισοδύναμα.

Για να δείξουμε ότι το (γ) ισοδυναμεί με το (α), υποθέτουμε ότι $\lambda \in \sigma(C^*AC)$ με ένα συσχετισμένο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $y$.

Τότε $\lambda = y^*C^*A\,Cy = (Cy)^*\,A(Cy) = x^*\,Ax$ για $x \equiv Cy \neq 0$, κι επομένως $\lambda \in F'(A)$. Αντίστροφα, υποθέστε ότι $\lambda = x^*\,Ax$. Τότε $x \neq 0$ εφόσον $\lambda \neq 0$ κι έστω $C_1 \in M_n$ οποιοσδήποτε αντιστρέψιμος πίνακας του οποίου η πρώτη στήλη είναι $x$. Το στοιχείο 1,1 του $C_1^*AC_1$ είναι $\lambda$. Έστω $\upsilon^\intercal$ το διάνυσμα σειράς του $C_1^*AC_1$ που σχηματίζεται από τα εναπομείναντα $n-1$ στοιχεία της πρώτης σειράς $C_1^*AC_1$ κι έστω $z^\intercal = -\upsilon^{\intercal/\lambda}$. Τότε $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & z^\intercal \\ 0 & I \end{bmatrix} \in M_n$ αντιστρέψιμος, και $C_2^*(C_1^*AC_1)\,C_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$. Συνεπώς, $\lambda \in \sigma(C^*AC)$, όπου $C = C_1C_2$ είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα πλέον μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τους $H$ –ευσταθείς πίνακες, δηλαδή, αυτούς τους $A \in M_n$ έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $HA$ να έχουν θετικό πραγματικό μέρος για όλους τους θετικά ορισμένους πίνακες $H$.

## 7.10 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Έστω $A \in M_n$. Τότε $\sigma(HA) \subset RHP$ για όλους τους θετικά ορισμένους $H \in M_n$ αν και μόνο αν $F(A) \subset RHP \cup \{0\}$ και ο $A$ αντιστρέψιμος.

Έχουμε ήδη δει το σημαντικό ρόλο που έχουν παίξει πίνακες για τους οποίους το μηδέν είναι έξω από το αριθμητικό πεδίο. Ένα ακόμη παράδειγμα της ιδιαιτερότητας αυτών των πινάκων είναι το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο οδηγεί σε ένα χαρακτηρισμό.

**7.11 ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $A \in M_n$ αντιστρέψιμος. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $A^{-1}A^*$ = $B^{-1}B^*$ για κάποιο $B \in M_n$ με 0 $\notin$ F(B).

(β) O $A$ είναι *όμοιος με ένα κανονικό πίνακα.

(β΄) O $A$ είναι *όμοιος με ένα κανονικό πίνακα μέσα από μια θετικά ορισμένη ομοιότητα.

(γ) O $A^{-1}A^*$ είναι όμοιος με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα.

**Απόδειξη:** Εφόσον $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίο αν και μόνο αν $(A^{-1}A^*)^{-1} = (A^{-1}A^*)^*$, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν οι $A^*A$=$AA^*$, βλέπουμε ότι $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίο αν και μόνο αν ο $A$ είναι κανονικός. Η ισοδυναμία του (β) και (γ) συνεπάγεται από τον υπολογισμό $S^{-1}A^{-1}\ A^*S = S^{-1}A^{-1}(S^*)^{-1}\ S^*A^*S$ = $(S^*AS)^{-1}$ $(S^*AS)^*$. αν $S^{-1}A^{-1}\ A^*S$ ορθομοναδιαίο, τότε $S^*AS$ (μία *ομοιότητα του $A$) πρέπει να είναι κανονικά και αντίστροφα.

Για να επαληθευτούμε ότι το (γ) οδηγεί στο (α), υποθέτουμε ότι $U \equiv S^{-1}A^{-1}\ A^*S$ ορθομοναδιαίος, κι έστω $U^{1/2}$ μια από τις (πολλές) μοναδιαίες τετραγωνικές ρίζες του $U$ τέτοια ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $U^{1/2}$ να βρίσκονται πάνω σε ένα τόξο του μοναδιαίου κύκλου μήκους λιγότερο από π. Σύμφωνα με το (2.9), 0 $\notin F(U^{1/2})$ και σύμφωνα με τα (2.12) και (7.5), 0 $\notin F((S^{-1})^*\ U^{-1/2}\ S^{-1})$, όπου $U^{-1/2} \equiv (U^{-1/2})^{-1}$. Τώρα υπολογίστε $A^{-1}A^* = SUS^{-1} = S(U^{-1/2})^{-1}(U^{-1/2})^*\ S^{-1} = S(U^{-1/2})^{-1}$ $S^*(S^{-1})^*(U^{-1/2})^*S^{-1} = B^{-1}B^*$, με $B \equiv (S^{-1})^*\ U^{-1/2}S^{-1}$ και 0 $\notin$ $F(B)$ όπως ισχυριζόμαστε στο (α). Αν λάβουμε υπόψη μας το (α), υποθέτουμε ότι 0 $\notin F(A)$ και ότι, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ο $H(A)$ είναι θετικά ορισμένος. Τώρα θα δείξουμε ότι το (α) ισοδυναμεί με το (β΄) γράφοντας $A = H\ +\ S$, όπου $H \equiv H(A) = \frac{1}{2}\ (A + A^*)$ είναι θετικά ορισμένος και $S\ \equiv\ S(A)\ \frac{1}{2}\ (A - A^*)$. Αν $H^{-1/2}$ είναι το αντίστροφο της μοναδικής θετικά ορισμένης τετραγωνικής ρίζας του $H$, έχουμε $(H^{-1/2})^*AH^{-1/2} = H^{-\frac{1}{2}}(H + S)H^{-\frac{1}{2}} = I + H^{-1/2}SH^{-1/2}$, το οποίο αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι κανονικό. Συνεπώς, ο $A$ είναι όμοιος με έναν κανονικό πίνακα μέσα από την θετικά ορισμένη ομοιότητα $H(A)^{-1/2}$. Τέλος, το (β΄) ισοδυναμεί τετριμμένα με το (β).

Στη συνέχεια, θα συνδέσουμε πληροφορίες γωνίας σχετικά με το φάσμα του $A$ με το γωνιακό αριθμητικό πεδίο των θετικά ορισμένων πολλαπλάσιων του $A$.

**7.12 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω Γ ένας ανοικτός γωνιακός τομέας του $\mathbb{C}$ που στηρίζεται στην αρχή, με γωνία όχι μεγαλύτερη από π, κι έστω $A \in M_n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) σ$(A) \subset \Gamma$,

(β) $F'(HA) \subset \Gamma$ για κάποιο ορισμένο $H \in M_n$.

**<u>Απόδειξη</u>:** Υπάρχει για κάθε ε $> 0$ ένας αντιστρέψιμος $S_\varepsilon \in M_n$ τέτοιος ώστε $S_\varepsilon^{-1}AS_\varepsilon$ να βρίσκεται σε τροποποιημένη κανονική μορφή Jordan: Στη θέση του κάθε εκτός διαγωνίου 1 που προκύπτει στην κανονική μορφή Jordan του $A$ υπάρχει το ε. Τότε, για τα αρκούντως μικρά ε, $F(S_\varepsilon AS_\varepsilon^{-1}) \subset F$ αν $\sigma(A) \subset \Gamma$. Όμως, σύμφωνα με το (1.2.12), έχουμε $F'(S_\varepsilon^* S_\varepsilon AS_\varepsilon^{-1}S_\varepsilon)$ = $F'(S_\varepsilon AS_\varepsilon^{-1}) \subset$ Γ.

Έστω $H$ = $S_\varepsilon^* S_\varepsilon$ μας δείχνει ότι το (α) ισοδυναμεί με το (β).

Η απόδειξη ότι το (β) ισοδυναμεί με το (α) είναι παρόμοια. Αν $F'(HA) \subset \Gamma$, τότε $F'(H^{1/2}AH^{-1/2}) = F'\left(H^{-\frac{1}{2}}HAH^{-\frac{1}{2}}\right) \subset$ Γ, χρησιμοποιώντας ξανά το (1.2.12), όπου $H^{1/2}$ είναι η θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα του $H$ και ο $H^{-\frac{1}{2}}$ είναι το αντίστροφό του. Αλλά $\sigma(A) = \sigma(H^{1/2}AH^{-1/2}) \subset F(H^{1/2}AH^{-1/2}) \subset \Gamma$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

## ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Τώρα θα επανέλθουμε στην έννοια της ταυτόχρονης διαγωνοποίησης των πινάκων με ομοιότητα.

Μία έννοια που προκύπτει στη μελέτη της ταυτόχρονης διαγωνοποίησης με ομοιότητα και που τη συνδέει με το αριθμητικό πεδίο, ειδικά εκείνα τα θέματα που μελετήσαμε σε αυτή την ενότητα, είναι εκείνη των μηδενικών της Ερμιτιανής μορφής $x^*Ax$.

**7.14 ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ λέγεται ότι είναι ισότροπο διάνυσμα για ένα δοσμένο πίνακα $A \in M_n$ αν $x^*Ax = 0$, και το $x$ επίσης ονομάζεται κοινό ισότροπο διάνυσμα για $A_{1,\dots,}\ A_m \in M_n$ αν $x^*\ A_i x$ = 0, $i = 1, \dots, m$.

Δύο παρατηρήσεις θα μας φανούν πολύ χρήσιμες

## 7.15 ΛΗΜΜΑ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗΣ

Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ και $A_1, \dots, A_m \in M_n$ μας δίνονται. Οι πίνακες $A_1, \dots, A_m$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα αν και μόνο αν οι πίνακες $\sum_{i=1}^n a_i\, A_{i,} A_{2,} A_3, \dots, A_{m,}\ a_1 \neq 0$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

Αν m = 2 κι αν $A_1\ A_2 \in M_n$ είναι Ερμιτιανοί, συνήθως μελετάμε $A$ = $A_1 + iA_2$ για να προσδιορίσουμε αν οι $A_1$ $\textit{και}\ A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα. Σημειώνουμε ότι $A_1$ = $H(A)$ και $iA_2$ = $S(A)$.

**7.16 <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>:** Αν είναι $A_1$ $A_2 \in M_n$ είναι Ερμιτιανοί. Τότε $A_1$και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα αν και μόνο αν °$A$ = $A_1 + iA_2$ είναι όμοιος με κανονικό πίνακα.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν $A_1$ και $A_2$ ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα μέσα από $C \in M_n$, τότε $C^*AC = C^*A_1C + iC^*A_2C = D_1 + iD_2$, όπου $D_1$ και $D_2$ είναι πραγματικοί διαγώνιοι πίνακες. Ο πίνακας $C^*AC$ είναι τότε διαγώνιος και επομένως είναι κανονικός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ένας δοσμένος αντιστρέψιμος πίνακας $B \in M_n$ είναι τέτοιος ώστε $B^*AB$ κανονικός. Τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n$ τέτοιος ώστε $U^*B^*ABU = D$ και είναι διαγώνιος. Τώρα θέτουμε $C = BU$ και παρατηρούμε ότι $H(D) = H\,(C^*AC) = C^*H(A)C = C^*A_1C$ είναι διαγώνιος και ότι $-iS(D) = -iS(C^*AC) = -iSC^*(A)C = C^*A_2C$ είναι διαγώνιος.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το (7.11) για να πάρουμε μία κλασική επαρκή συνθήκη για να είναι δύο Ερμιτιανοί πίνακες ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

**7.17 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Αν $A_1$ $A_2 \in M_n$ είναι Ερμιτιανοί και δεν έχουν κανένα κοινό ισότροπο διάνυσμα, τότε $A_1$ και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

**<u>Απόδειξη</u>:** Αν $A_1$και $A_2$ δεν έχουν κανένα κοινό ισότροπο διάνυσμα, τότε $0 \neq F(A)$, όπου $A \equiv A_1 + iA_2$. Επιλέγοντας $B = A$ στο (7.11α), συμπεραίνουμε από την ισοδυναμία των (7.11α) και (7.11β) ότι ο $A$ είναι όμοιος με κανονικό πίνακα. Τότε, σύμφωνα με το (7.16), οι $A_1$ και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

Άλλες κλασικές επαρκείς συνθήκες για να είναι ζεύγη Ερμιτιανών πινάκων ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα προκύπτουν άμεσα από το (7.17).

## 7.18 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Αν $A_1 \in M_n$ θετικά ορισμένος κι αν $A_2 \in M_n$ Ερμιτιανός, τότε $A_1$ και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

## 7.19 <u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>

Αν $A_{1,}A_2 \in M_n$ Ερμιτιανοί κι αν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός του $A_1$ και $A_2$ που είναι θετικά ορισμένος, τότε $A_1$ και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

**7.21 <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>:** Έστω $A_1, A_2 \in M_n$ Ερμιτιανοί κι ας υποθέσουμε ότι οι $A_1$ και $A \equiv A_1 + iA_2$ είναι αντιστρέψιμοι. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Οι $A_1$ και $A_2$ είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με ομοιότητα.

(β) Ο $A$ είναι διαγωνιοποιήσιμος με ομοιότητα.

(γ) Ο $A$ είναι όμοιος με ένα κανονικό πίνακα.

(δ) $A^{-1}A^*$ είναι όμοιος με ένα ορθομοναδιαίο πίνακα.

(ε) Υπάρχει κάποιος $\hat{A} \in M_n$ με $0 \neq F(\hat{A})$ έτσι ώστε $A^{-1}A^* = \hat{A}^{-1}\hat{A}^*$, και

(στ) $A_1^{-1}A_2$ είναι όμοιος με ένα πραγματικό διαγώνιο πίνακα.

## ΓΙΝΟΜΕΝΑ HADAMARD

Θυμηθείτε ότι το γινόμενο Hadamard A∘B είναι απλά στοιχείο με στοιχείο γινόμενο δύο πινάκων με ίδιο μέγεθος. Για να κάνουμε σύγκριση, θα δώσουμε, χωρίς κάποια απόδειξη, κάποια αποτελέσματα που συνδέουν το $F(\cdot)$ με το γινόμενο Hadamard.

**7.22 ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν $A, N \in M_n$, και αν $N$ είναι κανονικός, τότε $F(N \circ A) \subset C_0(F(N)F(A))$.

### 7.23 ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $A, H \in M_n$, κι αν ο $H$ είναι θετικά ημιορισμένος τότε $F(H \circ A) \subset F(H)\, F(A)$.

### 7.24 ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $A, B \in M_n$, κι εάν είτε ο $A$ είτε ο $B$ είναι κανονικός, τότε $r(A \circ B) \leq r(A)r(B)$.

### 7.25 ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν $A, B \in M_n$, τότε $r(A \circ B) \leq 2r(A)r(B)$.

**7.26 ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν $A, H \in M_n$, κι αν $H$ είναι θετικά ορισμένος, τότε $F'(H \circ A) \subset F'(A)$.

**7.27 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Το παράδειγμα $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δείχνει ότι η σταθερά 2 είναι η καλύτερη δυνατή στο (7.25) και ότι το (7.22) δε μπορεί να κανονικοποιηθεί στους αυθαίρετους $A, N \in M_n$.

**7.28 <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>**: Το απλό παράδειγμα $A = N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ δείχνει ότι το «$C_0$» μπορεί να παραληφθεί στο (7.22), ακόμα και όταν και ο $A$ και ο $N$ είναι κανονικοί.

## <u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Τα αποτελέσματα (1.76-8) βασίζονται στον H. Wielandt, “On the Eigenvalues of $A + B$ and $AB$”, <u>J. Research N.B.S. 77B</u> (1973), 61-63, το οποίο αναδιατυπώθηκε από τον Wielandt’s <u>National Bureau</u> of Standard Report #1367, 27 Δεκεμβρίου, 1951, από τον C.R.Johnson. Το θεώρημα (7.9) είναι από τον C.R.Johnson, “The field of Values and Spectra of Positive Definite Multiplies”, <u>J. Research N.B.S. 78B</u> (1974), 197-198, και το (7.10) αποδείχθηκε πρώτα από τον D. Carlson στο “A New Critirion for H-Stability of Complex Matrices”, <u>Lineas Algebra Appl. 1</u> (1968), 59-64. Το θεώρημα (7.11) είναι από τον C.R. DePrima και τον C.R.Johnson, “The Range of $A^{-1}A^*$ in GL(n, ℂ)”, <u>Lineas Algebra Appl. 9</u> (1974), 209-222, και το (7.12) είναι από τον C.R.Johnson, “A Lyaponov Theorem for Angular Cones”, <u>J. Research National Bureau</u> <u>Standards 78B</u> (1974), 7-10. Η μελέτη της ταυτόχρονης διαγωνοποίησης με ομοιότητα είναι κάτι το καινούργιο που εστιάζει στο αριθμητικό πεδίο, το οποίο περιλαμβάνει κάποια κλασικά αποτελέσματα όπως το (7.17).

# 8. ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΤΙΜΩΝ

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία γενικεύσεων των πεδίων των τιμών, μερικές από τις οποίες έχουν μελετηθεί εις βάθος. Αυτές οι γενικεύσεις δίνουν έμφαση σε διάφορες αλγεβρικές, αναλυτικές και αξιωματικές πλευρές του αριθμητικού πεδίου, κάνοντάς το την πιο γενικευμένη έννοια στα μαθηματικά. Χωρίς να προσπαθήσουμε να είμαστε πλήρεις, θα αναφέρουμε, με περιστασιακά σχόλια, κάποιες εξέχουσες και φυσικές γενικεύσεις˙ υπάρχουν και πολλές άλλες. Μια εύλογη ερώτηση που κάνουμε για οποιοδήποτε αριθμητικό πεδίο είναι αν αυτό είναι πάντα κυρτό ή όχι. Για κάποιες γενικεύσεις είναι, για κάποιες δεν είναι. Αυτό μας δίνει επιπλέον πληροφορίες για την κυρτότητα (2.2) του συνηθισμένου αριθμητικού πεδίου, μια από τις πιο «διακριτικές» του ιδιότητες.
Η πρώτη γενίκευση περιλαμβάνει μια φυσική τροποποίηση του εσωτερικού γινόμενου που χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε κάθε σημείο του πεδίου.

**8.1 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ:** Έστω $H \in M_n$ ένας δοσμένος θετικά ορισμένος πίνακας. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F_H(A) \equiv \{x^*HAx : x \in \mathbb{C}^n, x^*Hx = 1\}.$$

**8.1α ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**: Εφόσον ο $H$ είναι θετικά ορισμένος, μπορεί να γραφεί και ως $H = S^*S$ με $S \in M_n$ αντιστρέψιμος. Τότε $F_H(A) = F(SAS^{-1})$, άρα $F_H(A)$ είναι απλά το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο μιας ομοιότητας του $A$, με ένα σταθερής ομοιότητας πίνακα.

**Απόδειξη:** $F_H(A) = \{x^*S^*SAS^{-1}\ Sx : x \in \mathbb{C}^n, x^*S^*\ Sx = 1\} = \{y^*SAS^{-1}y : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1\} = F(SAS^{-1})$.

Άλλη μία γενίκευση του αριθμητικού πεδίου προκύπτει από το δεδομένο ότι $x^*Ax \in M_1$ όταν $x \in \mathbb{C}^n$, άρα το συνηθισμένο πεδίο είναι απλό το σύνολο των οριζουσών όλων αυτών των πινάκων για κανονικοποιημένο $x$.

## 8.2 <u>ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΜΟΝΑΔΙΑΙΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ</u>

Για οποιοδήποτε $m \leq n$ και οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F_m(A) \equiv \{\det(X^*AX) : X \in M_{n,m}, X^*X = I \in \mathrm{M}_m\}.$$

Το λεγόμενο $k$-αριθμητικό πεδίο είναι μια άλλη γενίκευση, η οποία βασίζεται στην τοποθέτηση ενός απλού κανονικοποιημένου διανύσματος $x$ με ένα ορθοκανονικό σύνολο. Σχετίζεται περισσότερο με το ίχνος παρά με την ορίζουσα.

## 8.3 <u>ΤΟ $k$-ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ</u>

Έστω k ένας δοσμένος θετικός ακέραιος. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F^k(A) \equiv \{\tfrac{1}{k}(x^*Ax_1 + \cdots + x_k^*Ax_k) : X = [x_1 \dots x_k] \in M_{n,k} \text{ και } X^*X = I\}$$

Το σύνολο $F^k(A)$ είναι πάντα κυρτό, και αυτό το δεδομένο είναι μια ειδική περίπτωση μίας περαιτέρω γενίκευσης που ακολουθεί.

Μια περαιτέρω γενίκευση του $k$-αριθμητικού πεδίου (8.3) είναι το $c$-αριθμητικό πεδίο στο οποίο οι ίσοι θετικοί συντελεστές $\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}$ αντικαθίστανται από αυθαίρετους μιγαδικούς αριθμούς.

## 8.4 ΤΟ $c$-ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω $c = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{C}^n$ ένα δοσμένο διάνυσμα. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F^c(A) \equiv \{c_1 x_1^* A x_1 + \dots + c_n x_n^* A x_n : X = [x_1 \dots . x_n] \in M_n \text{ και } X^*X = I\}.$$

Δυστυχώς, το $c$- αριθμητικό πεδίο $F^c(A)$ δεν είναι πάντα κυρτό για όλα τα $c \in \mathbb{C}^n$, αλλά είναι πάντα κυρτό όταν το $c$ είναι ένα πραγματικό διάνυσμα. Πιο γενικά, αν μας δίνεται $c \in \mathbb{C}^n$, το $F^c(A)$ είναι κυρτό για όλους τους $A \in M_n$, αν και μόνο τα στοιχεία $c$ είναι συνευθειακά ως σημεία στο μιγαδικό επίπεδο. Αν τα στοιχεία του $c$ δεν είναι συνευθειακά, υπάρχει ένας κανονικός $A \in M_n$ έτσι ώστε $F^c(A)$ να μην είναι κυρτό.

Όταν n $\geq 5$, το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο του $A \in M_n$ μπορεί να είναι ένα κυρτό πολύγωνο χωρίς ο $A$ να είναι κανονικός, αλλά ξέρουμε ότι ο $A$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $c \in \mathbb{R}^n$ με διακεκριμένα στοιχεία τέτοια ώστε $F^c(A)$ να είναι ένα κυρτό πολύγωνο.

Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται ότι είναι αστερόμορφο σε σχέση με ένα δοσμένο σημείο $z_o \in S$ αν για όλα τα $z \in S_o$ όλο το ευθύγραμμο τμήμα $\{\alpha z + (1-\alpha) z_o : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ βρίσκεται στο $S$˙ ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ είναι κυρτό αν και μόνο αν είναι αστερόμορφο σε σχέση με κάθε σημείο στο $S$. Παρόλο που κάποια $c$-αριθμητικά πεδία αποτυγχάνουν να είναι κυρτά, ξέρουμε ότι το $F^c(A)$ είναι πάντα αστερόμορφο σε σχέση με το σημείο $\frac{1}{n}(tr\, A)\,(c_1 + \dots + c_n)$.

Η c-αριθμητική ακτίνα σχετίζεται φυσικά με το c- αριθμητικό πεδίο

$r_c(A) \equiv \max\{|z| : z \in F^c(A)\}$ = $\max\{|tr(U^*AU| : U \in M_n$ είναι ορθομοναδιαίος$\}$,

όπου $c$ = $[c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{C}^n$ και $C \equiv diag(c_1, \dots, c_n)$.

Όταν $n \geq 2$, η συνάρτηση $r_c(\cdot)$ είναι μια νόρμα στον $M_n$ αν και μόνο αν $c_1 + \dots + c_n \neq 0$ και τα βαθμωτά $c_i$ δεν είναι όλα ίσα˙ η συνθήκη αυτή προφανώς ισχύει για $c = e_1 = [1,0, \dots, 0]^T$, που σε αυτή την περίπτωση, η $r_c(\cdot)$ είναι η συνηθισμένη αριθμητική ακτίνα r(·). Γνωρίζουμε ότι εάν οι $A, B \in M_n$ είναι Ερμιτιανοί, τότε $r_c(A)$

= $r_c(B)$ για όλα τα $c \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν ο $A$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον $\pm B$.

Μία γενίκευση του (8.4) είναι το $C$- αριθμητικό πεδίο.

## 8.5 ΤΟ $C$-ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω μας δίνεται $C \in M_n$. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$ ορίζουμε

$$F^c(A) \equiv \{tr(CU^*AU) \colon U \in M_n \text{ ορθομοναδιαίος}\}.$$

Γνωρίζουμε ιδιότητες του $c$-αριθμητικό πεδίο που καλύπτουν το θέμα της κυρτότητας των $C$-πεδίων τιμών για κανονικούς $C$, αλλά δε γνωρίζουμε ποια ζεύγη πινάκων $C, A \in M_n$ παράγουν ένα κυρτό $F^c(A)$ και για ποιους $C$ το σύνολο $F^c(A)$ είναι κυρτό για όλους τους $A \in M_n$.

Συσχετισμένες με το $C$-αριθμητικό πεδίο είναι φυσικές γενικεύσεις της αριθμητικής ακτίνας, της φασματικής νόρμας και της φασματικής ακτίνας:

$$\left|||A|\right|\Big|_C \equiv max\,\{|tr(CUAV| : U, V \in M_n \text{ είναι ορθομοναδιαίοι}\},$$

$$r_C(A) \equiv max\,\{|tr(UAU^*)| \colon U \in M_n \text{ ορθομοναδιαίος}\},$$

$$\rho_C(A) \equiv max\,\{\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_\iota\,(A)\lambda_{\pi(i)}(C)\right| : \text{ είναι μια μετάθεση του } 1, \dots, n\},$$

όπου οι ιδιοτιμές του $A$ και του $C$ είναι $\{\lambda_\iota(A)\}$ και $\{\lambda_\iota(C)\}$, αντίστοιχα. Για οποιουσδήποτε $A, C \in M_n$, αυτές οι τρεις ποσότητες ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\rho_C(A) \leq\ r_C(A) \leq \left|||A|\right|\Big|_C.$$

Μια διαφορετική γενίκευση είναι μια οικογένεια αντικειμένων που συχνά ονομάζουμε Bauer αριθμητικό πεδίο. Γενικεύουν το δεδομένο ότι το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο σχετίζεται με την $l_2$ διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|_2$. Υπάρχει ένα από αυτά τα γενικευμένα αριθμητικά πεδία για κάθε διανυσματική νόρμα στο $\mathbb{C}^n$. Αν

$\|\cdot\|$ είναι μια δοσμένη διανυσματική νόρμα στο $\mathbb{C}^n$, έστω $\|\cdot\|^{D}$ συμβολίζει τη διανυσματική νόρμα που είναι δυϊκή στη $\|\cdot\|$.

## 8.6 ΤΟ BAUER ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΝΟΡΜΑ $\|\cdot\|$ $\boldsymbol{ΣΤΟ}$ $\mathbb{C}^n$

Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F_{\|\cdot\|}(A) \equiv \{y^*Ax: x, y \in \mathbb{C}^n \text{ και } \|y\|^{D} = \|x\| = y^*x = 1\}$$

Παρατηρήστε ότι το $F_{\|\cdot\|}(A)$ είναι απλά το σύνολο τιμών της 1 και μισό γραμμικής μορφής $y^*Ax$ από εκείνα τα κανονικοποιημένα διατεταγμένα ζεύγη διανυσμάτων $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ που είναι δυϊκά ζεύγη σε σχέση με τη διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$. Το σύνολο $F_{\|\cdot\|}(A)$ δεν είναι πάντα κυρτό, αλλά πάντα συγκρατεί το φάσμα $\sigma(A)$. Υπάρχουν κι άλλες - σχετικές με τι νόρμες- γενικεύσεις του αριθμητικού πεδίου που δεν αναφέρονται εδώ, αλλά ένα παράδειγμα άλλης γενίκευσης από αυτές, μια πιο φυσική, είναι η συνάρτηση συνόλου $G_F(A)$ που ορίζεται στο (5.1).

Για $A \in M_n(\mathbb{R})$, ίσως φαίνεται αφύσικο να μελετήσουμε το $F(A)$, το οποίο ορίζεται σε σχέση με τα διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$. Τα κίνητρά μας θα πρέπει να είναι ξεκάθαρα από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα σε τούτο το κεφάλαιο.
Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$, υπάρχει ένα γνήσια πραγματικό αντικείμενο που αντιστοιχεί στο $F(A)$ που έχει ήδη μελετηθεί.

## 8.7 ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Για οποιονδήποτε $A \in M_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε

$$FR(A) = \{x^T A x : x \in R^n \text{ και } x^T x = 1\}$$

Παρατηρήστε ότι $FR(A) = FR([A + A^T]/2)$, άρα κατά τη μελέτη του πραγματικού αριθμητικού πεδίου αρκεί να εξετάσουμε μόνο πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες.

Αν $x, y \in \mathbb{C}^n$, $y^* y = 1$, και $x^* x$ = 1, τότε $y^* x$ = 1 δείχνει ότι $y = x$ (αυτό είναι μια περίπτωση ισότητας στην ισότητα Cauchy-Schwarz). Αυτό μας δίνει άλλη μια γενίκευση του αριθμητικού πεδίου στο οποίο η Ερμιτιανή μορφή $x^* A x$ αντικαθιστάται από τη 1 και μισό γραμμική μορφή $y^* A x$, υποκείμενο στη σχέση μεταξύ $y$ και του $x$.

## 8.8 ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ $q$- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Έστω μας δίνεται $q \in [0, 1]$. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$F_q(A) \equiv \{y^* A x : x, y \in \mathbb{C}^n, y^* y = x^* x = 1 \text{ , και } y^* x = q\}.$$

Αν 0 $\leq q < 1$, η $F_q(\cdot)$ ορίζεται μόνο από $n \geq 2$.

Ο N.K. Tsing έχει αποδείξει ότι η $F_q(A)$ είναι κυρτή για όλα τα $q \in [0, 1]$, και όλους τους $A \in M_n$, $n \geq 2$.

Μέχρι εδώ, το κλασικό αριθμητικό πεδίο και όλες οι γενικεύσεις του που έχουμε αναφέρει είναι αντικείμενα που βρίσκονται σε δύο πραγματικές διαστάσεις, εκτός από το πραγματικό αριθμητικό πεδίο (8.7), που βρίσκεται σε μια πραγματική διάσταση. Μία άλλη γενίκευση, που μερικές φορές τη λέμε «κέλυφος», βρίσκεται σε τρεις πραγματικές διαστάσεις σε μια προσπάθεια να αποτυπώσουμε περισσότερες πληροφορίες για τους πίνακες.

## 8.9 ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ ΚΕΛΥΦΟΣ DAVIS – WIELANDT

Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, ορίζουμε

$$DW(A) \equiv \{[Re\, x^*Ax, Im\, x^*Ax, x^*(A^*A)x]^T = x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}.$$

Ένα από τα κίνητρά μας να ορίσουμε το κέλυφος Davis – Wielandt είναι ότι το αντίστροφο του επιχειρήματος στην προηγούμενη άσκηση όντως ισχύει. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση του κλασικού αριθμητικού πεδίου, για το οποίο το απλό αντίστροφο στην ιδιότητα αναλόγου (2.9) δεν ισχύει, όπως συζητήθηκε στην Ενότητα (6).

Υπάρχουν και άλλες πολλές χρήσιμες πολυδιάστατες γενικεύσεις του αριθμητικού πεδίου που περιλαμβάνουν περισσότερους από ένα πίνακες. Η πρώτη μας δίνεται φυσικά θεωρώντας το συνηθισμένο αριθμητικό πεδίο ως ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε δύο πραγματικές διαστάσεις. Για οποιονδήποτε $A \in M_n$, γράφουμε $A = A_1 + iA_2$, όπου $A_1 = H(A) = (A + A^*)/2$ και $A_2 = -iS(A) = -i(A - A^*)/2$ είναι και οι δύο Ερμιτιανοί.

Τότε, $F(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} = \{x^*A_1x + ix^*A_2x : x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$, το οποίο (εφόσον $x^*A_1x \text{ και } x^*A_2x$ είναι και τα δύο πραγματικά) περιγράφει το ίδιο σύνολο στο επίπεδο με $\{(x^*A_1x,\ x^*A_2x) : x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\}$. Συνεπώς, το θεώρημα Toeplitz – Hausdorff (2.2) μας λέει ότι στο τελευταίο σύνολο στο $\mathbb{R}^2$ είναι κυρτό για δύο οποιουσδήποτε Ερμιτιανούς πίνακες $A_1, A_2 \in M_n$, και οδηγούμαστε στις παρακάτω γενικεύσεις των $F(A)$ και $FR(A)$.

## 8.10 ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ $k$-ΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ $k$-ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω $k \geq 1$ ένας δοσμένος ακέραιος. Για οποιονδήποτε $A_1, \dots, A_k \in M_n$, ορίζουμε

$$FC_k(A_1, \dots, A_k) = \{[x^*A_1x, \dots, x^*A_kx]^T : x \in \mathbb{C}^n,\ x^*x = 1\} \subset \mathbb{C}^k.$$

Ομοίως, αν $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε

$$FR_k(A_1, \dots, A_k) \equiv \{[x^TA_1x, \dots, x^TA_kx]^T : x \in \mathbb{R}^n, x^Tx = 1\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Παρατηρήστε ότι όταν $k = 1$, $FC_1(A) = F(A)$ και $FR_1(A) = FR(A)$.

Για $k = 2$, η $FC_2([A + A^*]/2, -i[A - A^*]/2)$ περιγράφει ένα σύνολο σε ένα πραγματικό διδιάστατο υποχώρο του $\mathbb{C}^2$ που είναι το ίδιο με $F(A)$. Αν οι πίνακες $A_1, \dots, A_k$ είναι όλοι Ερμιτιανοί, τότε $FC_k(A_1, \dots, A_k) \subset \mathbb{R}^k \subset \mathbb{C}^k$. Υπολογίζοντας το $FC_k$, η περίπτωση στην οποία όλοι οι $k$ πίνακες είναι Ερμιτιανοί είναι αρκετά διαφορετική από τη γενική περίπτωση στην οποία οι πίνακες είναι αυθαίρετοι, όμως, κατά τη μελέτη που $FR_k$, είναι βολικό να γνωρίζουμε ότι πάντα έχουμε

$$FR_k(A_1, \dots, A_k) = FR_k([A_1 + A_1^*]/2, \dots, [A_k + A_k^*]/2).$$

## ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $FR_k$

Για $n = 1$, το $FR_k(A_1, \dots, A_k)$ είναι ένα απλό σημείο, και επομένως, είναι κυρτή για όλους τους $A_1, \dots, A_k \in M_1(\mathbb{R})$ και όλα τα $k \geq 1$.

Για $n = 2$, το $FR_1(A)$ είναι κυρτό για κάθε $A \in M_2(\mathbb{R})$, αλλά για κάθε $k \geq 2$ υπάρχουν πίνακες $A_1, \dots, A_k \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $FR_k(A_1, \dots, A_k)$ δεν είναι κυρτό. Για $n \geq 3$, το $FR_1(A_1)$ και $FR_2(A_1, A_2)$ είναι κυρτά για όλους τους $A_1$, $A_2 \in M_n(\mathbb{R})$, αλλά για κάθε $k \geq 3$ υπάρχουν πίνακες $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε το $FR_k(A_1, \dots, A_k)$ δεν είναι κυρτό.

## ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΗΣ $FC_k$ ΓΙΑ ΕΡΜΙΤΙΑΝΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Για $n = 1$, το $FC_k\ (A_1, \dots, A_k)$ είναι ένα απλό σημείο, και επομένως, είναι κυρτό για όλους τους $A_1, \dots, A_k \in M_1(\mathbb{R})$ και όλα τα $k \geq 1$.
Για $n = 2$, τα $FC_1\ (A_1)$ και $FC_2\ (A_1, A_2)$ είναι κυρτά για όλους τους Ερμιτιανούς $A_1, A_2 \in M_2$, όμως για κάθε $k \geq 3$ υπάρχουν Ερμιτιανοί πίνακες $A_1, \dots, A_k \in M_2$ τέτοιοι ώστε το $FC_k\ (A_1, \dots, A_k)$ να μην είναι κυρτό. Για $n \geq 3$, τα $FC_1(A_1)$, $FC_2(A_1, A_2)$ και $FC_3(A_1, A_2, A_3)$ είναι κυρτά για όλους τους Ερμιτιανούς $A_1, A_2, A_3 \in M_n$, αλλά για κάθε $k \geq 4$ υπάρχουν Ερμιτιανοί πίνακες $A_1, \dots, A_k \in M_n$ τέτοιοι ώστε το $FR_k\ (A_1, \dots, A_k)$ δεν είναι κυρτό.

Ο ορισμός (1.1) για το αριθμητικό πεδίο μεταφέρεται χωρίς αλλαγή στους πίνακες και στα διανύσματα με στοιχεία τετράδας, όμως υπάρχουν κάποιες αναπάντεχες καινούργιες αναπτύξεις σε αυτή την περίπτωση. Όπως ακριβώς ένας μιγαδικός αριθμός γράφεται ως $z = \alpha_1 + i\alpha_2$ με $\alpha_1 + \alpha_2 \in (\mathbb{R})$ και $i^2 = -1$, μια τετράδα μπορεί να γραφτεί ως $J = \alpha_1 + i\alpha_2 + j\alpha_3 + k\alpha_4$ με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, και $ki = -ik = j$. Το συζυγές μιας τετράδας $J = \alpha_1 + i\alpha_2 + j\alpha_3 + k\alpha_4$ είναι $\bar{J} \equiv \alpha_1 - i\alpha_2 - j\alpha_3 - k\alpha_4$˙ η απόλυτη τιμή της είναι $|J| \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)^{1/2}$ το πραγματικό της μέρος είναι $Re\, J \equiv \alpha_1$. Το σύνολο των τετράδων, που συμβολίζεται με $Q$, είναι ένας αλγεβρικά κλειστός διαιρετικός δακτύλιος (μη αντιμεταθετικό πεδίο) στον οποίο το αντίστροφο μιας μη μηδενικής τετράδας $J$ μας δίνεται από $J^{-1} \equiv \bar{J}\ /\ |J|^2$. Οι τετράδες θεωρούνται ότι βρίσκονται σε τέσσερεις πραγματικές διαστάσεις, και τα πραγματικά και τα μιγαδικά επίπεδα θεωρούνται ως υποεπίπεδα του $Q$ με φυσικό τρόπο.

Συμβολίζουμε $M_n(\mathrm{Q})$ το σύνολο $n$ - επί - $n$ πινάκων με στοιχεία τετράδας και γράφουμε $Q^n$ για το σύνολο των $n$ - διανυσμάτων με στοιχεία τετράδας˙ για $x \in Q^n$, $x^*$ συμβολίζει το ανάστροφο του στοιχείου –με- στοιχείου συζυγή του $x$.

## 8.11 <u>ΟΡΙΣΜΟΣ: ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΤΕΤΡΑΔΑΣ</u>

Για οποιονδήποτε $A \in M_n(\mathrm{Q})$, ορίζουμε $FQ(A) \equiv \{x^*Ax : \mathrm{x} \in Q^n$ και $x^*\mathrm{x} = 1\}$ Παρόλο που το αριθμητικό πεδίο της τετράδας $FQ(A)$ μοιράζεται πολλές ιδιότητες με το μιγαδικό αριθμητικό πεδίο, δε χρειάζεται να είναι κυρτό ακόμα και όταν ο $A$ είναι κανονικός μιγαδικός πίνακας.

Αν θέσουμε

$$A_1 \equiv \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } A_2 \equiv \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε το $FQ(A_1)$ δεν είναι κυρτό, αλλά το $FQ(A_2)$ είναι κυρτό˙ στην κλασική περίπτωση, τα $F(A_1)$ και $F(A_2)$ είναι ταυτιζόμενα.

Γνωρίζουμε ότι, για ένα δεδομένο $A \in M_n(\mathrm{Q})$ το $FQ(A)$ είναι κυρτό αν και μόνο αν $\{Re\, J : J \in FQ(A)\} = \{J : J \in FQ(A)$ και $J = Re\, J\}$, δηλαδή, αν και μόνο αν η προβολή του $FQ(A)$ πάνω στον πραγματικό άξονα είναι η ίδια με την τομή του $FQ(A)$ με τον πραγματικό άξονα.

## <u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

Οι γενικεύσεις του αριθμητικού πεδίου που αναφέραμε σε αυτή την ενότητα είναι μία επιλογή μόνο λίγων από πολλές πιθανότητες. Αρκετές άλλες γενικεύσεις του αριθμητικού πεδίου μνημονεύονται με αναφορές στο [Hal, 67]. Η γενίκευση (8.1) μελετήθηκε από τον W. Givens στο “Fields of Values of a Matrix”, <u>Proc. Amer. Math. Soc. 3</u> (1952), 206-209. Κάποιες από τις γενικεύσεις του αριθμητικού πεδίου που αναφέραμε μελετώνται και τώρα από ερευνητές όπως ο M. Markus και οι μαθητές του. Τα αποτελέσματα κυρτότητας στο (8.4) στον R. Westwick, “A Theorem on Numerical Range”, <u>Linear Multilinear Algebra 2</u>, (1975), 311-315, και στον Y. Poon, “Another Proof of a Result of Westwick” <u>Linear Multilinear Algebra 9</u>, (1980), 35-37. Το αντίστροφο είναι στους Y. H. Au. Yeung και N.K. Tsing, “A Conjecture of Marcus

on the Generalised Numerical Range", Linear Multilinear Algebra 14, (1983), 235-239. Το δεδομένο ότι το c- αριθμητικό πεδίο είναι αστερόμορφο βρίσκεται στον N.K. Tsing, "On the Shape of the Generalised Numerical Ranges", Linear Multilinear Algebra 10, (1981), 173-182. Για μια έρευνα των αποτελεσμάτων σχετικά με το ότι το $c$-αριθμητικό πεδίο και τη c-αριθμητική ακτίνα, με μια πλούσια βιβλιογραφία, δείτε C.K. Li και N.K. Tsing, "Linear Operators that Preserve the $c$-Numerical Range or Radius of Matrices" Linear Multilinear Algebra 23, (1988), 27-46. Για τη συζήτηση της γενικευμένης φασματικής νόρμας, της γενικευμένης αριθμητικής ακτίνας και της γενικευμένης φασματικής ακτίνας που είδαμε στην Ενότητα (1.8.5), δείτε C.K. Li, T.Y. Tam και N.K. Tsing, "The Generalized Spectral Radius, Numerical Radius and Spectral Norm" Linear Multilinear Algebra 16, (1984), 215-237. Η κυρτότητα του $F_q(A)$ που αναφέρθηκε στο (8.8) βρίσκεται στον N.K. Tsing, "The Constrained Bilinear Form and the C-Numerical Range", Linear Algebra Appl. 56, (1984), 195-206.
Η γενίκευση του κέλυφους (8.9) εξετάστηκε ανεξάρτητα και σε εναλλακτικές μορφές στον C. Davis, "The Shell of a Hilbert Space Operator" Acta Sci Math. (Szeged) 29 (1968), 69-86 και στον H. Wielandt, "Inclusion Theorems for Eigenvalues" U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 29 (1953), 75-78. Για περισσότερες πληροφορίες για τη $FR_k\ (A_1, \dots, A_k)$ δείτε L. Brickman, "On the field of Values of a Matrix", Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 61-66. Για μια απόδειξη ότι το $FC_3\ (A_1,\ A_2,\ A_3)$ είναι κυρτό όταν οι $A_1,\ A_2,\ A_3 \in M_n$ είναι Ερμιτιανοί και $n\ \geq\ 3$, και για πολλά σχετικά αποτελέσματα, δείτε P. Binding, "Hermitian Forms and the Fibration of Spheres", Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 581-584. Επίσης, δείτε Y. H. Au. Yeung και N.K. Tsing, "An Extent on of the Housdorff-Toeplitz Theorem on the Numerical Range", Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 215-218. Για αναφορές στη λογοτεχνία (ή θεωρία) και τις αποδείξεις των ισχυρισμών για το αριθμητικό πεδίο τετράδας $FQ(A)$, δείτε Y. H. Au. Yeung, "On the Convexity of Numerical Range in Quarter-nionic Hilbert Spaces" Linear Multilinear Algebra 16, (1984), 93-100. Υπάρχει επίσης μια συζήτηση για το αριθμητικό πεδίο τετράδας στην Ενότητα II στο δοκίμιο (ή διατριβή) του R. Kippenhahn το 1951 που παρατίθεται στο τέλος της Ενότητας (6), αλλά πρέπει να προειδοποιήσω τον

αναγνώστη ότι το βασικό θεώρημα Kippenhahn είναι λάθος: το αριθμητικό πεδίο τετράδας δεν είναι πάντα κυρτό.

Το αριθμητικό πεδίο συνδέεται στενά με το Θεώρημα Lyaponov (2.2).

Μερικά επιπλέον αναγνώσματα για το Κεφάλαιο 1 είναι: C. S. Ballantine, "Numerical Range of a Matrix: Some Effective Criteria", Linear Algebra Appl. 19, (1978), 117-188, C. R. Johnson, "Computation of the field of Values of a 2·by·2 Matrix", J. Research National Bureau Standards 78B (1974), 105-107, C. R. Johnson, "Numerical Location of the Field of Values" Linear Multilinear Algebra 3, (1975), 9-14, C. R. Johnson, "Numerical Ranges of Principal Submatrices", Linear Algebra Appl. 37, (1981), 23-34, F. Murnagham, "On the Field of Values of a Square Matrix", Proc. National Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 246-248, B. Saunders and H. Schneider, "A Symmetric Numerical Range for Matrices" Numer. Math 26 (1976), 99-105, O. Tausky, "A Remark Concerning the Similarity of a Finite Matrix A and A", Math Z. 117 (1970), 180-190, C. Zenger, "Minimal Subadditive Inclusion Domains for the Eigenvalues of Matrices", Linear Algebra Appl. 17, (1977), 233-268.

# ***<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>***


T. Ando - "Structures of Operators with Numerical Radius One" <u>Acta. Sci Math. (Szeged)</u> 34(1973), 11-15.

C. S. Ballantine - "Numerical Range of a Matrix: Some Effective Criteria", Linear Algebra Appl. 19, (1978), 117-188.

P. Binding - "Hermitian Forms and the Fibration of Spheres", <u>Proc. Amer. Math. Soc.</u> 94 (1985), 581-584.

D. Carlson - "A New Critirion for H-Stability of Complex Matrices", <u>Lineas Algebra Appl. 1</u> (1968), 59-64.

C. Davis - "The Shell of a Hilbert Space Operator" Acta Sci Math. (Szeged) 29 (1968), 69-86.

C.R. DePrima και τον C.R.Johnson - "The Range of $A^{-1}A^{*}$ in GL(n, ℂ)", Lineas Algebra Appl. 9 (1974), 209-222.

W. Donoghue - "On the Numerical Range of a Bounded Operator", Mich.Math.J.4 (1957), 261-263.

E. Egervary – "On thw Contractive Linear Transformations of n-Dimensional Vector Space", <u>Acta Sci Math</u> (Szeged) 15(1953), 178-182.

W. Givens - "Fields of Values of a Matrix", <u>Proc. Amer. Math. Soc. 3</u> (1952), 206-209.

M. Goldberg – "On Certain Finite Dimensional Numerical Ranges and Numerical Radij", <u>Linear Multilinear Algebra</u> 7(1979), 329-342.

M. Goldberg και E. Tadmar - "On the Numerical Radius and its Applications", <u>Linear Algebra Appl.</u> 42(1982), 263-284.

P.R. Halmos - "Numerical Ranges and Normal Dilations", <u>Acta Sci Math</u> (Szeged) 25(1964), 1-5.

F. Hausdorf - Das Wertvorrat einer Bilinearform, Math. Zeit. 3 (1919), 314-316.

C.R. Johnson - «A. Gershgorin», Inclusion Set for the Field of Values of a Finite Matrix, <u>Proc. Amer. Math. </u>Soc. 41(1973), 57-60.

C.R. Johnson - "A Lyaponov Theorem for Angular Cones", J. Research National Bureau Standards 78B (1974), 7-10.

C.R. Johnson - "An Inclusion Region for the field of values of a Doubly Stochastic Matrix based on its Graph", Alynationes Mathematicae 17(1978), 305-310.

C. R. Johnson - "Computation of the field of Values of a 2·by·2 Matrix", J. Research National Bureau Standards 78B (1974), 105-107.

C.R. Johnson - "Functional characterization of the field of values and the Convex Hull of the Spectrum", Proc. Amer.Math.Soc.61 (1976), 201-204.

C.R. Johnson - "Normality and the Numerical Range", Linear Algebra Appl. 15(1976), 89-94.

C.R. Johnson - «Numerical Determination of the Field of Values of a General Complex Matrix, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 595-602.

C. R. Johnson - "Numerical Location of the Field of Values" Linear Multilinear Algebra 3, (1975), 9-14.

C. R. Johnson - "Numerical Ranges of Principal Sub matrices", Linear Algebra Appl. 37, (1981), 11-12, 23-34.

C.R. Johnson - "The field of Values and Spectra of Positive Definite Multiplies", J. Research N.B.S. 78B (1974), 197-198.

C.R. Johnson και C.-C.T. Kuo - "Doubly Stochastic, Unitary, Unimodular, and Complex Orthogonal Power Embeddings", Acta Sci Math (Szeged) 44(1982), 345-357.

C.R. Johnson - Wielandt's National Bureau of Standard Report 1367, 27 Δεκεμβρίου, 1951

R. Kippenhahn - "Uber den Wertevorrat einer Matrix" Math. Nachr, 6 (1951), 193-228.

C.K. Li και N.K. Tsing - "Linear Operators that Preserve the c-Numerical Range or Radius of Matrices" Linear Multilinear Algebra 23, (1988), 27-46.

C.K. Li, T.Y. Tam και N.K. Tsing - "The Generalized Spectral Radius, Numerical Radius and Spectral Norm" Linear Multilinear Algebra 16, (1984), 215-237.

F. Murnagham - "On the Field of Values of a Square Matrix", Proc. National Acad. Sci. U.S.A. 18 (1932), 246-248.

W.V. Parker - "Sets of Complex Numbers Associated with a Matrix ", Duke Math.J.15 (1948), 711-715.

Y. Poon - “Another Proof of a Result of Westwick” Linear Multilinear Algebra 9, (1980), 35-37.

B. Saunders and H. Schneider - “A Symmetric Numerical Range for Matrices” Numer. Math 26 (1976), 99-105.

O. Tausky - “A Remark Concerning the Similarity of a Finite Matrix A and A”, Math Z. 117 (1970), 180-190.

O. Taussky - “Matrices with Trace Zero”, Amer. Math Monthly, 69(1962), 40-42.

O. Toeplitz - “Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer, Math.Zeit3 (1918), 187-197.

N.K. Tsing - “The Constrained Bilinear Form and the C-Numerical Range”, Linear Algebra Appl. 56, (1984), 195-206.

N.K. Tsing - “On the Shape of the Generalised Numerical Ranges”, Linear Multilinear Algebra 10, (1981), 173-182.

R. Westwick - “A Theorem on Numerical Range”, Linear Multilinear Algebra 2, (1975), 311-315.

H. Wielandt - “Inclusion Theorems for Eigenvalues” U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 29 (1953), 75-78.

H. Wielandt - “On the Eigenvalues of $A+B$ and $AB$”, J. Research N.B.S. 77B (1973), 61-63.

Y. H. Au. Yeung - “On the Convexity of Numerical Range in Quarter-nionic Hilbert Spaces” Linear Multilinear Algebra 16, (1984), 93-100.

Y. H. Au. Yeung και N.K. Tsing - “A Conjecture of Marcus on the Generalised L. Brickman - “On the field of Values of a Matrix”, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 61-66.

Y. H. Au. Yeung και N.K. Tsing, “A Conjecture of Marcus on the Generalised Numerical Range”, Linear Multilinear Algebra 14, (1983), 235-239.

Y. H. Au. Yeung και N.K. Tsing - “An Extent on of the Housdorff-Toeplitz Theorem on the Numerical Range”, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 215-218.

C. Zenger - “Minimal Subadditive Inclusion Domains for the Eigenvalues of Matrices”, Linear Algebra Appl. 17, (1977), 233-268.