ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

Αριθμητικές Μέθοδοι της Στοχαστικής Ανάλυσης στη Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

Γαβριέλη Βασιλεία

Επιβλέποντας
Αθανάσιος Γιαννακόπουλος
(Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών)

Μέλη Επιτροπής
Ιωάννης Σπηλιώτης
(Τμήμα Ε.Μ.Φ.Ε, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο)
Βασίλειος Παπανικολάου
(Τμήμα Ε.Μ.Φ.Ε, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο)

Αθήνα,2011

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου κ. Αθανάσιο Γιαννακόπουλο για την άριστη συνεργασία, την καθοδήγηση του και την πολύτιμη βοήθεια του στην υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Σπηλίωτη για όλα όσα με δίδαξε και την παρότρυνση του να ασχοληθώ με σύγχρονα ζητήματα των χρηματοοικονομικών. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βασίλειο Παπανικολάου για τη μετάδοση των γνώσεων του που ήταν καθοριστικής σημασίας στην υλοποίηση της εργασίας αυτής.

Πρόλογος

Η θεωρία βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου είναι ένας από τους τομείς των χρηματοοικονομικών που γνωρίζουν ιδιαίτερη άνθιση στις μέρες μας και παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής πλευράς όσο και σε επίπεδο πρακτικών εφαρμογών. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύονται αριθμητικές μέθοδοι της στοχαστικής ανάλυσης και εφαρμόζονται άμεσα σε προβλήματα διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Οι μέθοδοι και τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν είναι κυρίως κατασκευαστικές και μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν προγραμματιστικά. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Αρχικά θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας κάποιες εισαγωγικές στοχαστικές έννοιες όπως τι είναι η κίνηση *Brown*, πως κατασκευάζεται καθώς επίσης και αριθμητικές μεθόδους επίλυσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων η λύση των οποίων περιγράφει την εξέλιξη χρηματοοικονομικών τίτλων που συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο στη διάρκεια του χρόνου. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε συγκεκριμένα μοντέλα της αγοράς και θα περιγράψουμε πως η επιλογή του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί σαν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ένα πιθανό κριτήριο επιλογής του επενδυτικού χαρτοφυλακίου είναι η επιλογή του χαρτοφυλακίου αυτού που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη τιμή της ωφελιμότητας της τελικής του θέσης.
Τέλος, θα παραθέσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου και θα υλοποιήσουμε το πρόβλημα αυτό σε κώδικα MATLAB (version: 7.11.0.584 (R2010b)) χρησιμοποιώντας μεθόδους τύπου Monte-Carlo. Το περιβάλλον MATLAB είναι εύκολο στην εκμάθηση και φιλικό προς το χρήστη, ιδανικό για προβλήματα τέτοιου είδους παρέχοντας στο χρήστη τη δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης των αποτελεσμάτων του.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Επίλυση Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων

Εισαγωγή

Κίνηση *Brown* είναι το όνομα που δόθηκε προς τιμήν του βοτανολόγου *Robert Brown* το 1928 για να περιγράψει την ακανόνιστη κίνηση μορίων γύρης μέσα στο νερό. Η τυχαία αυτή κίνηση αποδίδεται σήμερα στις αλλεπάλληλες συγκρούσεις των κόκκων γύρης με τα μόρια του νερού με αποτέλεσμα το διασκορπισμό και την εξάπλωση τους μέσα στο νερό.
Η κίνηση *Brown* αποτελεί σήμερα μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες που παρουσιάζουν ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής απόψεως, όσο και από πλευράς εφαρμογών. Στις μέρες μας, η κλίμακα των εφαρμογών της κίνησης *Brown* δεν περιορίζεται στο πλαίσιο της μελέτης μικροσκοπικών σωματιδίων αλλά επεκτείνεται σε πολλούς άλλους τομείς όπως αυτών των χρηματοοικονομικών, των μαθηματικών, της φυσικής, της βιολογίας και του management. (βλέπε [1],[2])
Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα ορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο της κίνησης *Brown* όπως ορίστηκε από τον *Norbert Wiener* καθώς επίσης και το πώς αυτό κατασκευάζεται και στη συνέχεια αφού αναλύσουμε εν συντομία τα στοχαστικά ολοκληρώματα θα αναφερθούμε στη μέθοδο *Euler-Maruyama* ως αριθμητική προσέγγιση της λύσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Μαθηματικό μοντέλο της κίνησης Brown

Από μαθηματικής άποψης η κίνηση *Brown* είναι ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο που περιγράφει και αναλύει την κίνηση-τροχιά μεγεθών για κάποιο χρονικό διάστημα $[0,s]$. Το πείραμα θεωρείται πείραμα τύχης με την έννοια ότι δύο μεγέθη διαγράφουν διαφορετικές τροχιές το χρονικό διάστημα $[0,s]$ παρά το γεγονός ότι (μακροσκοπικά τουλάχιστον) βρίσκονται στις ίδιες συνθήκες.

Ορισμός 1.1 Μονοδιάστατη κίνηση Brown: Τυπική μονοδιάστατη κίνηση *Brown* ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη (σ.α) $\{W_t, t \in [0,\infty]\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (χ.π) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ εφοδιασμένο με μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

i) Για κάθε $t\geq 0$ η W_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.
ii) Η σ.α $\{W_t, t\geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.
iii) $W_0=0$ P-σ.β.
iv) Όταν $0\leq s<t$ τότε η τ.μ $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$
v) Όταν $0\leq s<t$ τότε η τ.μ $W_t - W_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,t-s)$ (βλέπε [4]) ή ισοδύναμα $W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$

Η κίνηση *Brown* μπορεί επίσης να αναπτυχθεί για οποιονδήποτε αριθμό διαστάσεων.

Ορισμός 1.2 Κίνηση Brown σε πολλές διαστάσεις: Τυπική n-διάστατη κίνηση *Brown* ονομάζεται μια σ.α με τιμές στο $\mathbb{R}^n$,$\{W_t=(W_t^1,\ldots, W_t^n)$, $t\geq 0\}$, ορισμένη σε ένα χ.π $(\Omega,\mathcal{F},P)$ εφοδιασμένο με μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t,\ t\geq 0\}$ εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

i) Η W_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη $\forall\ t\geq 0$ ($\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη).

ii) Η σ.α $\{W_t,\ t\geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.

iii) $W_0=0$ P-σ.β.

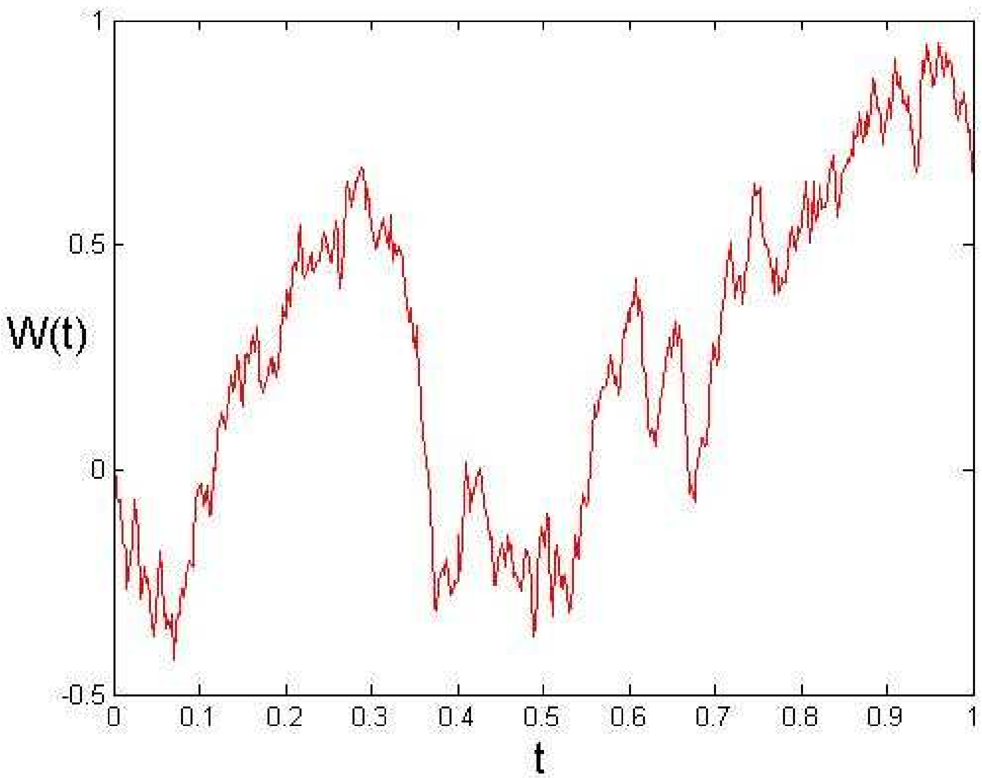
iv) Όταν $0\leq s<t$ τότε η τ.μ $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_s$.

v) Όταν $0\leq s<t$ η τ.μ $W_t - W_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,(t\text{-}s)I_n)$. (βλέπε [4])

Από δω και στο υπόλοιπο θα θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{F},P)$ εφοδιασμένο με μία διήθηση $\mathcal{F}_t$.

1.2 Κατασκευή της κίνησης Brown

Οι μέθοδοι κατασκευής της κίνησης *Brown* που θα παρουσιαστούν παρακάτω είναι κατασκευαστικές και συνεπώς είναι χρήσιμες στην αριθμητική κατασκευή τροχιών της κίνησης *Brown* και στην παραγωγή αριθμητικών αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων. Θα δώσουμε τρεις διαφορετικές κατασκευές τις κίνησης *Brown*, μια που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό, μία που βασίζεται στην αναπαράσταση της χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις βάσης και μια κατασκευή της σαν το κατάλληλο όριο ενός τυχαίου περιπάτου.



Σχήμα 1.2: τροχιά κίνησης Brown
(βλέπε παράρτημα Α'.1)

1.2.1 Προσέγγιση κίνησης Brown μέσω του ορισμού

Έστω κίνηση *Brown* W_t με τιμές στο διάστημα $[0,T]$. Θεωρούμε διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ που αποτελείται από σημεία t_i τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$. Τα σημεία της διαμέρισης θεωρούμε ότι ισαπέχουν, δηλαδή η απόσταση μεταξύ τους είναι σταθερή και ίση με $dt = T/N$ για κάποιο θετικό ακέραιο N. Για κάθε σημείο t_j ισχύει $t_j = j \cdot dt$.
Σύμφωνα με την απαίτηση iii του ορισμού 1.1 ισχύει ότι $W_0=0$ (με πιθανότητα 1) ενώ σύμφωνα με τα απαιτήσεις iv,v έχουμε ότι

$$W_j = W_{j-1} + dW_j \qquad j = 1, 2, ..., N$$

όπου $\{dW_j\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές της μορφής $\sqrt{\delta t}N(0,1)$.
(βλέπε [7])
Στο σχήμα 1.2.1 παρουσιάζεται μια τροχιά της κίνησης *Brown* στο χρονικό διάστημα [0,1] και για N=500.

1.2.2 Προσέγγιση κίνησης Brown μέσω συναρτήσεων βάσης

Ορίζουμε τις

$$\Psi_{ij}(t) = \int_0^t \Phi_{ij}(s) ds$$

όπου $\Phi_{ij}(t)$ είναι συναρτήσεις Haar[1] και θεωρούμε μία ακολουθία από ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές Y_{ij} με $E[Y_{ij}]$=0 και $E[Y_{ij}^2] = 1$.
Κατασκευάζουμε τα αθροίσματα

$$V_0(t) = Y_{00}\Psi_{00}(t)$$

---

[1] Οι συναρτήσεις $\Phi_{ij}(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζονται με βάση τον παρακάτω τύπο

$$\Phi_{ij}(t) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2}, & \dfrac{2j-2}{2^i} \le t < \dfrac{2j-2}{2^i} \\ -2^{(i-1)/2}, & \dfrac{2j-1}{2^i} \le t < \dfrac{2j}{2^i} \\ 0, & \text{για κάθε άλλο } t \end{cases}$$

για $i = 1, 2, ...$ και $j = 1, 2, ..., 2^{i-1}$ ονομάζονται συναρτήσεις Haar.
Οι συναρτήσεις Haar έχουν μερικές πολύ χρήσιμες ιδιότητες

1) Είναι ορθογώνιες στο [0,1] ως προς το εσωτερικό γινόμενο $< f, g >= \int_0^1 \bar{g} f dt$

2) Αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύστημα στον χώρο $L^2[0,1] = \{f :< f, f >< \infty\}$

3) Οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Haar είναι πυκνοί στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια, εφόσον το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L^2[0,1]$, οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Haar θα είναι πυκνοί στο χώρο $L^2[0,1]$.

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij} \Psi_{ij}(t) \ , \ i \geq 1$$

Το άθροισμα

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij} \Psi_{ij}(t) \ , \ i \geq 0$$

Είναι μια προσέγγιση της κίνησης Brown στο διάστημα [0,1]
Το ότι η παραπάνω κατασκευή είναι καλά ορισμένη και το ότι προσεγγίζει την κίνηση *Brown* μπορεί να εκφραστεί με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.2: Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο t (σ.β). Αν $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ τότε η X_t είναι μια κίνηση *Brown* για την οποία ισχύει $X_0 = 0$.

Η αναπαράσταση της κίνησης *Brown* χρησιμοποιώντας ως βάση τις συναρτήσεις Haar δεν είναι η μόνη δυνατή τέτοια αναπαράσταση. Μια αρκετά δημοφιλής αναπαράσταση της κίνησης *Brown* είναι σαν μια σειρά Fourier με τυχαίους συντελεστές. Σύμφωνα με την αναπαράσταση αυτή το άθροισμα

$$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega) \Phi_n(t) \ , \ 0 \leq t \leq T$$

όπου $\Phi_n(t) = \dfrac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \sin(\dfrac{(2n+1)\pi t}{2T}) \ , \ n = 0,1,...$

και οι $\{Z_i\}, i = 0,1,...$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με Ε(Z_i)=0 και $E(Z_i^2) = 1$, συγκλίνει κατά L^2 σε μια κίνηση *Brown* στο [0,*T*].

1.2.3 Προσέγγιση κίνησης Brown χρησιμοποιώντας τον τυχαίο περίπατο

Για την προσέγγιση χρησιμοποιώντας τον τυχαίο περίπατο θα αναφερθούμε πρώτα σε 2 θεωρήματα.

Θεώρημα 1.2.3 (Skorokhod, Strassen): Έστω ξ_i ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E(\xi_i) = 0$ και $E(\xi_i^2) = 1$. Ας γράψουμε $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Τότε, υπάρχει μια κίνηση *Brown* τέτοια ώστε

$$\frac{1}{t^{1/2}} \sup_{r \leq t} | S_{[r]} - W_r | \to 0 \ , \ t \to \infty$$

όπου με [*r*] συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του *r* και το όριο θεωρείται ως σύγκλιση σε πιθανότητα.

Θεώρημα 1.2.4 Συναρτησιακό κεντρικό οριακό θεώρημα: Έστω ξ_i ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E(\xi_i)=0$ και $E(\xi_i^2)=1$. Ας ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \le nt} \xi_k \ , \ t \in [0,1] \ , \ n = 1,2,...$$

Έστω επίσης *W* είναι μία κίνηση *Brown* στο [0,1] και ας ορίσουμε σαν *D* [0,1] το χώρο των συναρτήσεων στο [0,1] που είναι δεξιά συνεχής και έχουν αριστερά όρια. Έστω f μια απεικόνιση $f : D[0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και σ.β συνεχής στην τροχιά της *W*. Τότε,

$$f(X^n) \to f(W)$$

και η σύγκλιση είναι σύγκλιση σε κατανομή.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τροχιές της κίνησης *Brown* ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία

- Παράγουμε ακολουθίες τυχαίων αριθμών ξ_i οι οποίες είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες, π.χ τέτοιες ώστε $P(\xi=1)=P(\xi=-1)=\frac{1}{2}$
- Υπολογίζουμε τα αθροίσματα

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \le nt} \xi_k \ , \ t \in [0,1] \ , \ n = 1,2,...$$

  Τα X_t^n για αρκετά μεγάλο n είναι προσεγγίσεις της τροχιάς της κίνησης *Brown* W_t. Η προσέγγιση εννοείται κατά την έννοια που περιγράφει το θεώρημα 1.2.4

Για την επέκταση της διαδικασίας κατασκευής έξω από το διάστημα [0,1] και για τις τρεις προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι αν W_t είναι κίνηση *Brown* τότε και η $\hat{W}_t = tW_{1/t}$ είναι και αυτή κίνηση *Brown*. (βλέπε [2])

1.3 Στοχαστικά ολοκληρώματα

Δοθείσας μίας συνάρτησης *h*, το ολοκλήρωμα $\int_0^T h(t)dt$ μπορεί να προσεγγιστεί από το άθροισμα *Riemann* ως εξής

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(t_{j+1}-t_j) \qquad (1.3.1)$$

όπου τα σημεία διαμέρισης $t_j = j \cdot dt$ έχουν εισαχθεί στην ενότητα 1.2.1. Στην πραγματικότητα το ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί παίρνοντας το όριο της (1.3.1) καθώς $\delta t \to 0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ένα άθροισμα της μορφής

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \qquad (1.3.2)$$

όπου αναλογικά με την (1.3.1) μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση του στοχαστικού ολοκληρώματος $\int_0^T h(t)dW(t)$. Εδώ, ολοκληρώνουμε την *h* αναφορικά με την κίνηση *Brown*.
Μια εναλλακτική μορφή της (1.3.1) δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{j=0}^{N-1} h\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(t_{j+1} - t_j) \qquad (1.3.3)$$

που είναι επίσης ένα άθροισμα *Riemann* που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^T h(t)dt$.
Αντίστοιχα, για τη σχέση (1.3.2) έχουμε:

$$\sum_{j=0}^{N-1} h\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \qquad (1.3.4)$$

Στην περίπτωση όπου $h(t) \equiv W(t)$, για το άθροισμα (1.3.4) χρειάζεται να υπολογίσουμε το $W(t)$ στο σημείο $t = (t_j + t_{j+1})/2$. Αποδεικνύεται ότι υπολογίζοντας το $(W(t_j) + W(t_{j+1}))/2$ και προσθέτοντας μια ανεξάρτητη προσαύξηση $N(0, \Delta t/4)$, το $(W(t_j) + W(t_{j+1}))/2$ παίρνει τέτοια τιμή έτσι ώστε να διατηρεί τις ιδιότητες του ορισμού της κίνησης *Brown*. Σημειώνεται ότι τα ‘δύο στοχαστικά ολοκληρώματα *Riemann’* (1.3.2) και (1.3.4) δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Επαναλαμβάνοντας τη μέθοδο αυτή για μικρότερα δt γίνεται εμφανές ότι η διαφορά αυτή δεν εξαλείφεται καθώς $\delta t \to 0$. Αυτό αναδεικνύει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην ντετερμινιστική και τη στοχαστική ολοκλήρωση. Ορίζοντας ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα ως το όριο του αθροίσματος *Riemann* πρέπει να είμαστε ακριβείς ως προς το πώς αυτό ορίζεται. Το άθροισμα (1.3.2) αποτελεί αυτό που ξέρουμε ως ολοκλήρωμα *Ito* ενώ το άθροισμα (1.3.4) αποτελεί το ολοκλήρωμα *Stratonovich*..
Μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς πως προσεγγίζονται τα στοχαστικά ολοκληρώματα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το ολοκλήρωμα *Ito* είναι το όριο του αθροίσματος *Riemann*

$$\sum_{j=0}^{N-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1})^2 - W(t_j)^2 - (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2)$$
$$= \frac{1}{2}(W(T)^2 - W(0)^2 - \sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2). \quad (1.3.5)$$

Ο όρος $\sum_{j=0}^{N-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2$ αποδεικνύεται ότι έχει αναμενόμενη τιμή *T* και διακύμανση $O(\delta t)$. Επομένως, για μικρό δt αναμένουμε ότι η τυχαία αυτή μεταβλητή θα παίρνει τιμή κοντά στη σταθερά *T*. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να γίνει ακριβής καταλήγοντας στη σχέση

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2 - \frac{1}{2}T \qquad (1.3.6)$$

για το ολοκλήρωμα *Ito*.
Το ολοκλήρωμα *Stratonovich* είναι το όριο του

$$\sum_{j=0}^{N-1} W\left(\frac{W(t_j)+W(t_{j+1})}{2} + \Delta Z_j\right)(W(t_{j+1})-W(t_j))$$

όπου κάθε ΔZ_j είναι ανεξάρτητη $N(0,\Delta t/4)$. Το άθροισμα αυτό καταλήγει στο

$$\frac{1}{2}(W(T)^2 - W(0)^2) + \sum_{j=0}^{N-1}\Delta Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))$$

όπου ο όρος $\sum_{j=0}^{N-1}\Delta Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))$ έχει αναμενόμενη τιμή 0 και διακύμανση $O(\delta t)$. Συνεπώς, στην περίπτωση της (1.3.6) έχουμε

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2$$

(βλέπε [7])

1.4 Μέθοδος Euler –Maruyama

Μια από τις πιο απλές προσεγγίσεις διακριτού χρόνου μιας διαδικασίας *Ito* είναι η προσέγγιση *Euler* ή *Euler-Maruyama* όπως συχνά αποκαλείται. Θεωρούμε μια διαδικασία *Ito* $X = \{X_t, t_0 \le t \le T\}$ που ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

στο $t_0 \le t \le T$ με αρχική τιμή

$$X_{t_0} = X_0$$

Για μια διαμέριση $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots < \tau_N = T$ του χρονικού διαστήματος $[t_0, T]$, η προσέγγιση *Euler* είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $Y = \{Y_t, t_0 \le t \le T\}$ που ικανοποιεί το επαναληπτικό σχήμα

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) \qquad (1.4.1)$$

για $n = 0,1,2,...,N-1$ με αρχική τιμή

$$Y_0 = X_0$$

όπου $Y_n = Y(\tau_n)$ η τιμή της προσέγγισης τη στιγμή τ_n. Θα γράφουμε επίσης

$$\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$$

για τη n-οστή χρονική προσαύξηση και

$$\delta = \max_n \Delta_n$$

για το μεγαλύτερο χρονικό βήμα. Για το υπόλοιπο της ενότητας θα θεωρούμε ισαπέχοντες χρόνους $\tau_n = t_0 + n\delta$
με $\delta = \Delta_n \equiv \Delta = (T - t_0)/N$ για κάποιο ακέραιο N αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\delta \in (0,1)$.
Όταν $b \equiv 0$ το στοχαστικό επαναληπτικό σχήμα (1.4.1) καταλήγει στο ντετερμινιστικό σχήμα *Euler* $Y_{n+1} = Y_n + a(t_n, y_n)\Delta_n$ για τη συνήθη δ.ε

$$\frac{dx}{dt} = a(t,x)$$

Η ακολουθία $\{Y_n, n = 0,1,...,N\}$ των τιμών της προσέγγισης *Euler* (1.4.1) σε κάθε $(\tau)_\delta = \{\tau_n, n = 0,1,...,N\}$ μπορεί να υπολογιστεί με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της ντετερμινιστικής περίπτωσης. Η κύρια διαφορά είναι ότι τώρα χρειάζεται να δημιουργήσουμε τις τυχαίες προσαυξήσεις

$$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n} \qquad (1.4.2)$$

για $n = 0,1,2,...,N-1$ της *Wiener* διαδικασίας $W = \{W_t, t \geq 0\}$. Οι προσαυξήσεις αυτές σύμφωνα με τον ορισμό 1.1 της κίνησης *Brown* είναι ανεξάρτητες τ.μ που ακολουθούν κανονική κατανομή
με μέση τιμή

$$E(\Delta W_n) = 0$$

και διακύμανση

$$E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$$

Για τις προσαυξήσεις (1.4.2) της *Wiener* διαδικασίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ψευδο-τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την κανονική κατανομή και έχουν παραχθεί από ένα γεννήτορα τυχαίων αριθμών.
Για χάριν απλούστευσης θα γράφουμε

$$f = f(\tau_n, Y_n)$$

για κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε $\Re^{+} \times \Re^{d}$ και $n = 0,1,2,...,N-1$.Μπορούμε έτσι να γράψουμε το σχήμα *Euler* (1.4.1) στη συντετμημένη μορφή

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n$$

(βλέπε [8])

Κεφάλαιο 2
Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε αριθμητικές μεθόδους που μπορούν να μας βοηθήσουν τόσο στην επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων ή συστημάτων εξισώσεων όσο και σε προβλήματα βελτιστοποίησης όπου μη γραμμικές εξισώσεις μπορεί να εμφανίζονται σαν συνθήκες πρώτης τάξης. Οι μέθοδοι που θα περιγράψουμε παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα χρηματοοικονομικά και βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή σε προβλήματα οικονομικών όπως για παράδειγμα βελτιστοποίησης και διαχείρισης χαρτοφυλακίου ή σε προβλήματα επιλογής αποφάσεων μεταξύ διαφορετικών εναλλακτικών.

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από το είδος του προβλήματος όπως επίσης και από το γεγονός αν αυτό απαιτεί την ικανοποίηση συγκεκριμένων περιορισμών ή όχι. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε αναλυτικά δύο από τις πιο γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες αριθμητικές μεθόδους; Τις μεθόδους βαθμίδας που βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς και τις μεθόδους ποινής που αφορούν προβλήματα υπό περιορισμούς. (βλέπε [5],[6])

2.1 Μέθοδοι βαθμίδας

Έστω $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε. Μία γενική κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς είναι οι μέθοδοι καθόδου (descent methods). Σύμφωνα με τις μεθόδους αυτές

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k s_k$$

όπου η επιλογή του νέου σημείου $x^{(k+1)}$ γίνεται κατά τρόπο ώστε να αυξηθεί η τιμή $f(x^{(k+1)})$ (αν θέλουμε να λύσουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης) ή να μειωθεί η τιμή $f(x^{(k+1)})$ (αν θέλουμε να λύσουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης). Η επιλογή του νέου σημείου γίνεται κάνοντας ένα βήμα μήκους a_k στην διεύθυνση $s_k \in \mathbb{R}^n$. Η διεύθυνση s_k επιλέγεται κατά τρόπο ώστε να αντιστοιχεί σε διεύθυνση κατά την οποία αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή της συνάρτησης αντίστοιχα.

Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση γνωρίζουμε ότι

η s_k είναι διεύθυνση αύξησης αν $s_k \cdot \nabla f(x_k) > 0$ και

η s_k είναι διεύθυνση μείωσης αν $s_k \cdot \nabla f(x_k) < 0$.

Μία σίγουρη διεύθυνση αύξησης είναι η διεύθυνση ∇f, η οποία μάλιστα είναι και η διεύθυνση της πιο γρήγορης αύξησης. Ενώ αντίστοιχα, μία σίγουρη διεύθυνση μείωσης είναι η διεύθυνση $-\nabla f$ η οποία είναι και η διεύθυνση της πιο γρήγορης μείωσης.

Πιο αναλυτικά, θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι θέλουμε να λύσουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης και συνεχίζουμε ως ακολούθως.

Έστω $x^{(0)}$ αρχικό σημείο που επιλέγεται τυχαία και $x^{(1)} = x^{(0)} - a_0 \nabla f(x^{(0)})$. Από το θεώρημα Taylor παίρνουμε

$$f(x^{(0)} - a\nabla f(x^{(0)})) = f(x^{(0)}) - a \| \nabla f(x^{(0)}) \|^2 + o(a)$$

Επομένως, αν $\nabla f(x^{(0)}) \neq 0$, για αρκετά μικρό a έχουμε

$$f(x^{(0)} - a_0 \nabla f(x^{(0)})) < f(x^{(0)}).$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $x^{(0)} - a\nabla f(x^{(0)})$ είναι πιο βέλτιστο από το $x^{(0)}$ στην περίπτωση που ψάχνουμε για το ελάχιστο μιας συνάρτησης.
Γενικότερα, για να βρούμε το επόμενο σημείο $x^{(k+1)}$, ξεκινάμε από το $x^{(k)}$ και κινούμαστε κατά ένα ποσό $-a_k \nabla f(x^{(k)})$, όπου a_k θετική ποσότητα που ονομάζεται μέγεθος του βήματος. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στον ακόλουθο επαναληπτικό αλγόριθμο:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k \nabla f(x^{(k)}).$$

Θα αναφερόμαστε στον αλγόριθμο αυτό ως αλγόριθμο βαθμίδας ή καθόδου (gradient descent algorithm). Η τιμή της βαθμίδας εναλλάσσεται όσο η διαδικασία προχωράει και τείνει στο μηδέν καθώς προσεγγίζουμε το ελάχιστο μιας συνάρτησης. Αν x^* είναι το βέλτιστο σημείο που προκύπτει από τον αλγόριθμο, τότε γι αυτό το σημείο ισχύει ότι $\nabla f(x^*) = 0$ (συνθήκη πρώτης τάξης).
Μεταξύ πολλών διαφορετικών μεθόδων που χρησιμοποιούν την ίδια φιλοσοφία, η πιο δημοφιλής είναι η μέθοδος της πιο γρήγορης καθόδου (steepest gradient method)

2.1.1 Υπολογισμός του μεγέθους του βήματος

Στην περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση ενός προβλήματος το βήμα μήκους a_k επιλέγεται έτσι ώστε σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου να πετυχαίνεται το μεγαλύτερο ποσοστό μείωσης της συνάρτησης που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Πιο συγκεκριμένα, το a_k επιλέγεται ώστε να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $\Phi_k(a) \triangleq f(x^{(k)} - a\nabla f(x^{(k)}))$. Με άλλα λόγια,

$$a_k = \arg\min_{a \geq 0} f(x^{(k)} - a\nabla f(x^{(k)})).$$

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω αν $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, τότε $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$.
Αν για κάποιο k, $\nabla f(x^{(k)}) = 0$,τότε το σημείο $x^{(k)}$ ικανοποιεί τη συνθήκη πρώτης τάξης που σε αυτή την περίπτωση είναι $x^{(k+1)} = x^{(k)}$.Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω σαν βάση για ένα κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου.
Η συνθήκη $\nabla f(x^{(k+1)}) = 0$,ωστόσο, δεν είναι κατάλληλη σαν κριτήριο τερματισμού καθώς ο αριθμητικός υπολογισμός της βαθμίδας σπάνια γίνεται ίσος με το μηδέν. Ένα πρακτικό κριτήριο τερματισμού θα ήταν να ελέγξουμε αν η νόρμα $\| \nabla f(x^{(k)}) \|$

είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη ακρίβεια όπου στην περίπτωση αυτή σταματάμε. Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόλυτη διαφορά $|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})|$ και αν η διαφορά αυτή είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη ακρίβεια, τότε σταματάμε. Σταματάμε δηλαδή όταν

$$|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})|<\varepsilon,$$

όπου $\varepsilon>0$ η προκαθορισμένη ακρίβεια. Μία ακόμα εναλλακτική είναι να υπολογίσουμε τη νόρμα της διαφοράς μεταξύ δύο επαναλήψεων $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|$ και να σταματήσουμε όταν η νόρμα είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη ακρίβεια:

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|<\varepsilon.$$

Επίσης, μπορούμε να ελέγξουμε σχετικές τιμές των παραπάνω ποσοτήτων όπως για παράδειγμα

$$\frac{|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})|}{|f(x^{(k)})|}<\varepsilon,$$

ή

$$\frac{\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|}<\varepsilon.$$

Τα παραπάνω δύο (σχετικά) κριτήρια τερματισμού είναι προτιμότερα από τα προηγούμενα (απόλυτα) κριτήρια γιατί τα πρώτα είναι ανεξάρτητα μεταβολών. Μεταβάλλοντας για παράδειγμα, την αντικειμενική συνάρτηση δεν αλλάζει η ικανοποίηση του κριτηρίου $|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})|/|f(x^{(k)})|<\varepsilon$. Όμοια, μεταβάλλοντας τη μεταβλητή απόφασης δεν αλλάζει η ικανοποίηση του κριτηρίου $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|/\|x^{(k)}\|<\varepsilon$. Για να αποφύγουμε πολύ μικρά νούμερα, μπορούμε να τροποποιήσουμε τα κριτήρια τερματισμού ως εξής:

$$\frac{|f(x^{(k+1)})-f(x^{(k)})|}{\max(1,|f(x^{(k)})|)}<\varepsilon,$$

ή

$$\frac{\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|}{\max(1,\|x^{(k)}\|)}<\varepsilon.$$

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία προβλημάτων ελαχιστοποίησης είναι τα προβλήματα ελαχιστοποίησης τετραγωνικών συναρτήσεων της μορφής

$$f(x)=\frac{1}{2}x^TQx-b^Tx,$$

όπου $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας ,$b\in\mathbb{R}^n$ και $x\in\mathbb{R}^n$. Το ελάχιστο της f μπορεί να βρεθεί θέτοντας τη βαθμίδα της f με μηδέν όπου

$$\nabla f(x) = Qx - b,$$

γιατί $D(x^T Qx) = x^T (Q + Q^T) = 2x^T Q$ και $D(b^T x) = b^T$. Σημειώνεται ότι δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας θεωρώντας τον Q συμμετρικό. Δεδομένης μίας τετραγωνικής μορφής $x^T Ax$ και $A \neq A^T$, επειδή το ανάστροφο ενός βαθμωτού είναι ο εαυτός του, παρατηρούμε ότι

$$(x^T Ax)^T = x^T A^T x = x^T Ax.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \frac{1}{2} x^T Ax + \frac{1}{2} x^T A^T x \\ &= \frac{1}{2} x^T (A + A^T) x \\ &\triangleq \frac{1}{2} x^T Qx. \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι

$$(A + A^T)^T = Q^T = A + A^T = Q.$$

Ο Hessian της f είναι $F(x) = Q = Q^T > 0$ Για να απλοποιήσουμε την παράσταση γράφουμε $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$. Κατόπιν, ο αλγόριθμος βαθμίδας για μια δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k g^{(k)},$$

όπου

$$\begin{aligned} a_k &= \arg\min_{a \geq 0} f(x^{(k)} - ag^{(k)}) \\ &= \arg\min_{a \geq 0} \left(\frac{1}{2}(x^{(k)} - ag^{(k)})^T Q(x^{(k)} - ag^{(k)}) - (x^{(k)} - ag^{(k)})^T b\right). \end{aligned}$$

Για την εξίσωση τετραγωνικής μορφής μπορούμε να βρούμε μια ευθεία φόρμουλα για το a_k. Θεωρούμε $g^{(k)} \neq 0$ (αν $g^{(k)} = 0$ τότε $x^{(k)} = x^*$ και ο αλγόριθμος σταματάει). Επειδή $a_k \geq 0$ είναι το ελάχιστο της $\Phi_k(a) = f(x^{(k)} - a_k g^{(k)})$, εφαρμόζουμε τη συνθήκη πρώτης τάξης στην $\Phi_k(a)$ και παίρνουμε

$$\Phi'_k(a) = (x^{(k)} - ag^{(k)})^T Q(-g^{(k)}) - b^T(-g^{(k)}).$$

Συνεπώς, $\Phi'_k(a) = 0$ αν $ag^{(k)T} Qg^{(k)} = (x^{(k)T} Q - b^T) g^{(k)}$. Αλλά

$$x^{(k)T} Q - b^T = g^{(k)T}.$$

Επομένως,

$$a_k = \frac{g^{(k)T} g^{(k)}}{g^{(k)T} Qg^{(k)}}.$$

Συνοψίζοντας, η μέθοδος βαθμίδας για τη δευτεροβάθμια περίπτωση παίρνει τη μορφή

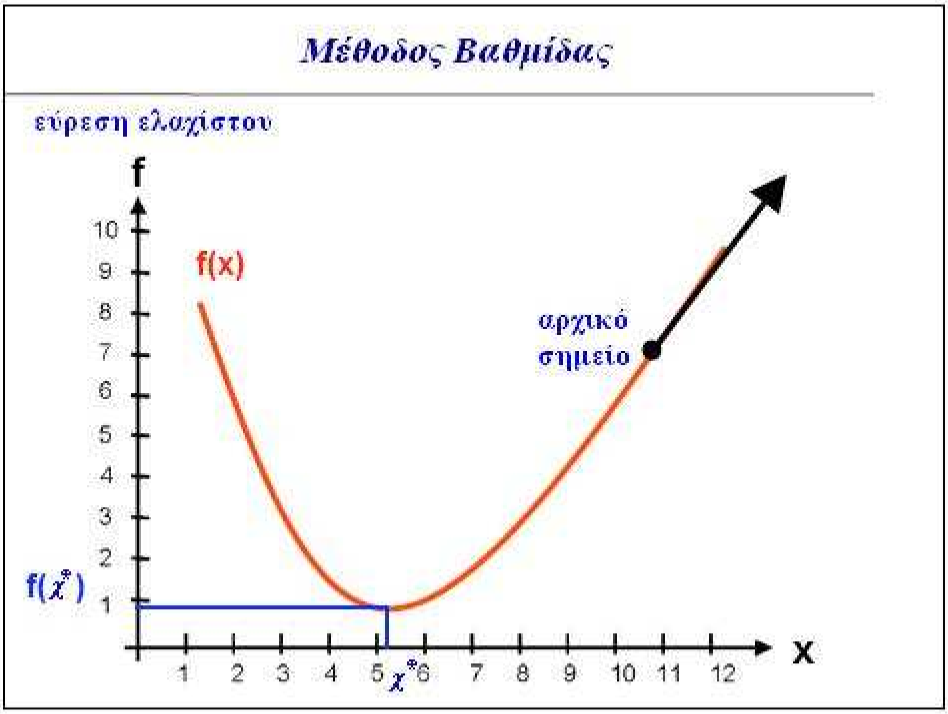
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (\frac{g^{(k)T} g^{(k)}}{g^{(k)T} Q g^{(k)}}) g^{(k)},$$

όπου

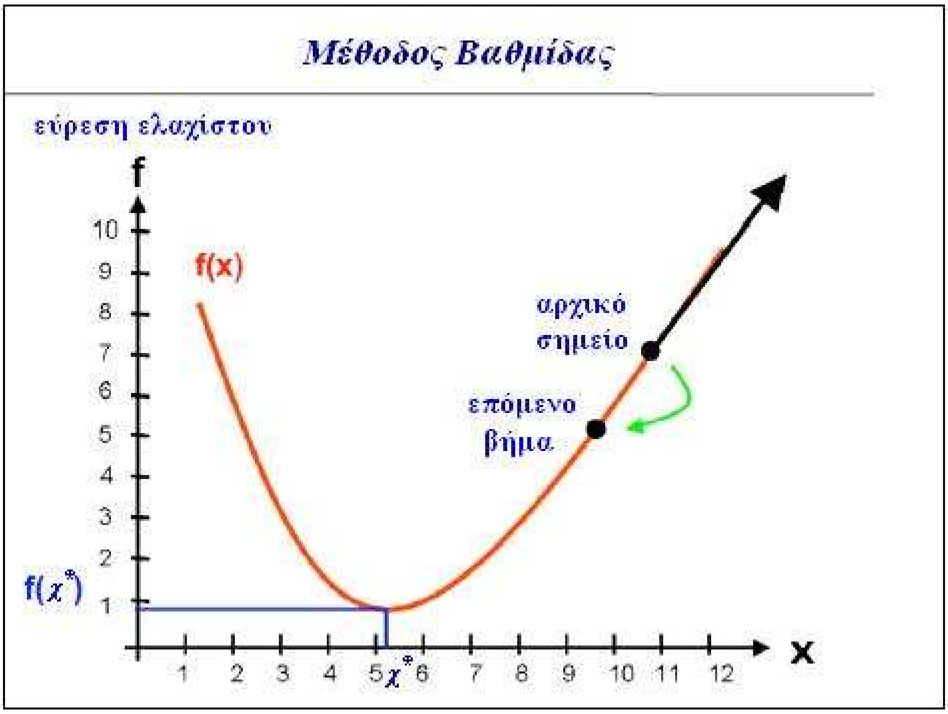
$$g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = Q x^{(k)} - b.$$

(βλέπε [6],[9])

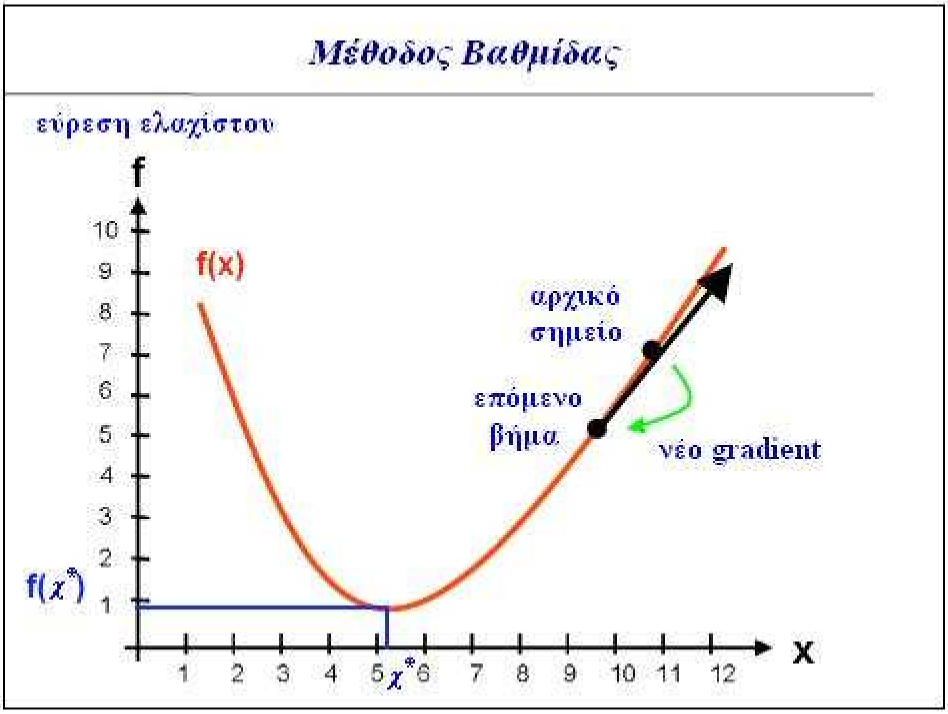
Στο σχήμα 2.1 (α)-(ε) παρουσιάζεται διαγραμματικά η μέθοδος καθόδου βήμα προς βήμα όπως περιγράφτηκε παραπάνω. (βλέπε [10])



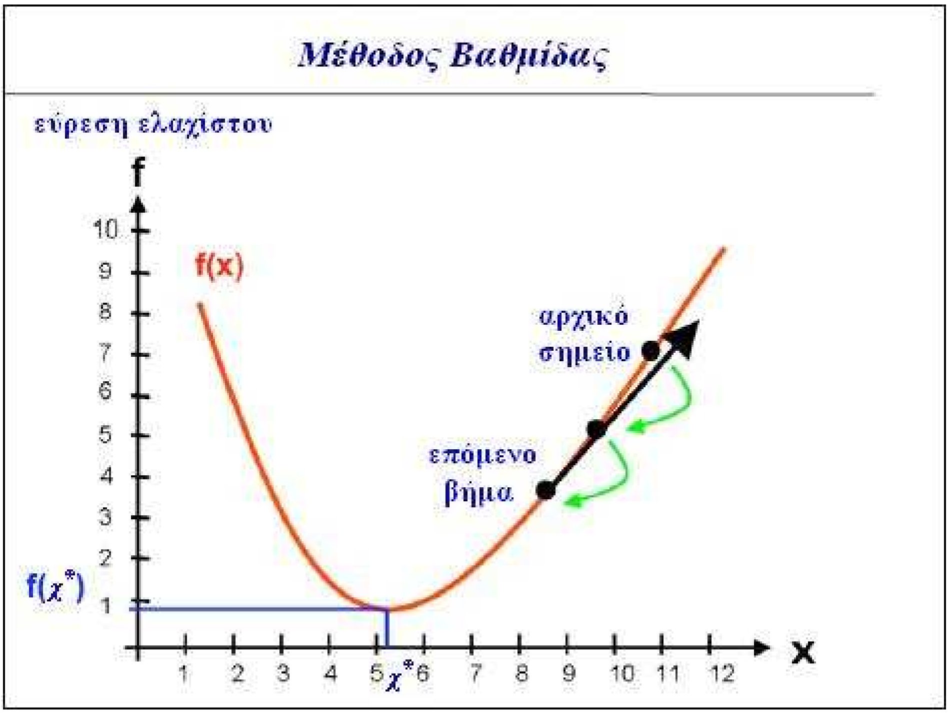
Σχήμα 2.1 (α)



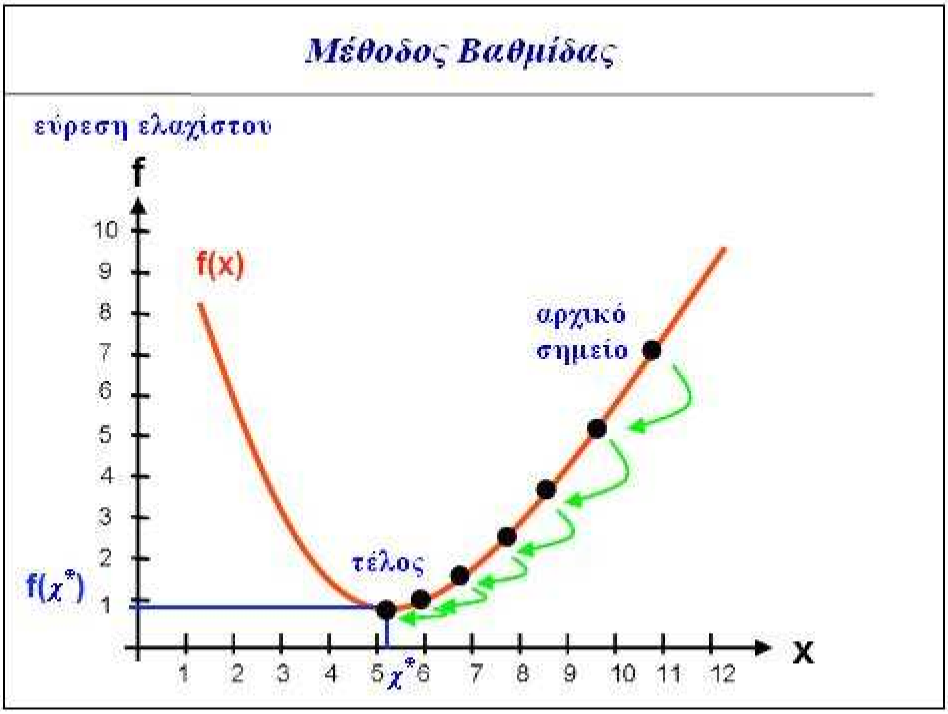
Σχήμα 2.1 (β)



Σχήμα 2.1 (γ)



Σχήμα 2.1 (δ)



Σχήμα 2.1 (ε)

2.2 Μέθοδοι ποινής

Μια γενική κατηγορία μεθόδων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς είναι οι μέθοδοι ποινής. Οι μέθοδοι αυτοί μετατρέπουν το αρχικό πρόβλημα υπό περιορισμούς σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς το οποίο όμως έχει συμπληρωθεί με μία συνάρτηση ποινής η οποία παίρνει ακραίες τιμές όταν δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Με τον τρόπο αυτό υποχρεώνουμε το σύστημα να οδηγηθεί σε μία λύση η οποία ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς της μορφής

$$\begin{aligned} &\text{Ελαχιστοποίηση της } f(x) \\ &\text{Υπό τους περιορισμούς } \begin{array}{r} g_1(x) \le 0 \\ g_2(x) \le 0 \\ \dots \\ g_p(x) \le 0, \end{array} \end{aligned}$$

όπου $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,p.$ Το γεγονός ότι θεωρήσαμε περιορισμούς ανισότητας δεν επηρεάζει το πρόβλημα καθώς ένας περιορισμός ισότητας της μορφής $h(x) = 0$ είναι ισοδύναμος με τον περιορισμό ανισότητας $\| h(x) \|^2 \le 0$. Θα εξετάσουμε τώρα μια μέθοδο για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα, θα προσεγγίσουμε το παραπάνω πρόβλημα με ένα ισοδύναμο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς της μορφής

$$\text{ελαχιστοποίηση } f(x) + \gamma P(x),$$

όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ μια θετική σταθερά και $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνάρτηση. Στη συνέχεια θα λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς και θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση του σαν μια προσέγγιση του ελαχίστου του αρχικού προβλήματος. Η σταθερά γ ονομάζεται παράμετρος ποινής (penalty parameter) και η συνάρτηση P συνάρτηση ποινής (penalty function). Η συνάρτηση ποινής μπορεί να οριστεί ως εξής:

Ορισμός 2.2: Μια συνάρτηση $P:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνάρτηση ποινής για το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς αν ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

1) είναι συνεχής
2) $P(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
3) $P(x) = 0$ αν και μόνο αν για το x είναι εφικτό ότι $g_1(x) \le 0, \dots, g_p(x) \le 0.$

Είναι φανερό ότι για να αποτελέσει το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς μια καλή προσέγγιση του αρχικού προβλήματος η συνάρτηση P πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα. Ο ρόλος της συνάρτησης ποινής είναι να 'ποινικοποιήσει' σημεία που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς. Κατά συνέπεια, είναι φυσικό ότι η συνάρτηση ποινής καθορίζεται σε σχέση με τις συναρτήσεις περιορισμού $g_1,\ldots,g_{p.}$ Μια πιθανή επιλογή για τη συνάρτηση P είναι

$$P(x)=\sum_{i=1}^{p} g_i^+(x),$$

όπου

$$g_i^+(x)=\max(0,g_i(x))=\begin{cases}0 & \alpha\nu \;\; g_i(x)\le 0\\ g_i(x) & \alpha\nu \;\; g_i(x)\succ 0.\end{cases}$$

Θα αναφερόμαστε στην παραπάνω συνάρτηση ποινής ως απόλυτη τιμή της συνάρτησης ποινής καθώς είναι ίση με $\sum |\, g_i(x)\,|$, όπου το άθροισμα υπολογίζεται σε όλους τους περιορισμούς που παραβιάζονται στο σημείο x

Η απόλυτη τιμή της συνάρτησης ποινής μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη σε κάποια σημεία x όπου $g_i(x)=0$. Κατά συνέπεια, σε τέτοιες περιπτώσεις δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε τεχνικές βελτιστοποίησης που περιλαμβάνουν παραγώγους. Μια συνάρτηση ποινής που εγγυάται ότι είναι παραγωγίσιμη είναι η συνάρτηση ποινής *Courant-Beltrami* που δίνεται από τον τύπο

$$P(x)=\sum_{i=1}^{p}(g_i^+(x))^2.$$

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου δεν θα θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης ποινής. Θεωρούμε μόνο ότι η P ικανοποιεί τις συνθήκες 1-3 του ορισμού 2.2.

Η μέθοδος ποινής για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς περιλαμβάνει την κατασκευή και επίλυση ενός ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς και χρησιμοποιεί τη λύση του προβλήματος αυτού σαν λύση του αρχικού προβλήματος. Φυσικά η λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς (προσεγγιστική λύση) μπορεί να μην είναι ακριβώς ίδια με τη λύση του προβλήματος υπό περιορισμούς (ακριβή λύση). Το αν η λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς θα αποτελεί μια καλή προσέγγιση της λύσης του αρχικού προβλήματος εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου γ και της συνάρτηση ποινής P. Θα περιμέναμε ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της παραμέτρου γ τόσο πιο καλά η λύση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς θα προσέγγιζε την ακριβή λύση καθώς τα σημεία που παραβιάζουν τους περιορισμούς ποινικοποιούνται πιο αυστηρά. Ιδανικά, υπολογίζοντας το όριο καθώς $\gamma\to\infty$ η μέθοδος ποινής θα πρέπει να δίνει την ακριβή λύση στο πρόβλημα υπό περιορισμούς.

Για την ανάλυση της μεθόδου ποινής θεωρούμε ότι το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς είναι το εξής

$$\begin{array}{rl} & \text{Ελαχιστοποίηση της } f(x)\\ \text{Υπό τους περιορισμούς} & g_1(x)\le 0\\ & g_2(x)\le 0\\ & \ldots\\ & g_p(x)\le 0,\end{array}$$

Με x^* συμβολίζουμε τη λύση (ολικό ελάχιστο) στο παραπάνω πρόβλημα. Έστω P η συνάρτηση ποινής για το πρόβλημα. Για κάθε $k = 1, 2, ...,$ $\gamma_k \in \mathbb{R}$ είναι μια θετική σταθερά. Ορίζουμε μια αντίστοιχη συνάρτηση $q(\gamma_k, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(\gamma_k, x) = f(x) + \gamma_k P(x)$$

Για κάθε k, μπορούμε να θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

$$\text{Ελαχιστοποίηση } q(\gamma_k, x).$$

Συμβολίζουμε με $x^{(k)}$ το ελάχιστο της $q(\gamma_k, x)$. Το λήμμα που ακολουθεί περιγράφει χρήσιμες σχέσεις μεταξύ του προβλήματος υπό περιορισμούς και του αντίστοιχου προβλήματος χωρίς περιορισμούς.

Λήμμα 2.2: Υποθέτουμε ότι $\{\gamma_k\}$ είναι μια μη φθίνουσα ακολουθία όπου για κάθε k ισχύει $\gamma_k \le \gamma_{k+1}$. Τότε για κάθε k έχουμε:

1. $q(\gamma_{k+1}, x^{(k+1)}) \ge q(\gamma_k, x^{(k)})$
2. $P(x^{(k+1)}) \le P(x^{(k)})$
3. $f(x^{(k+1)}) \ge f(x^{(k)})$
4. $f(x^*) \ge q(\gamma_k, x^{(k)}) \ge f(x^{(k)})$.

Θεώρημα 2.2: Υποθέτουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση f είναι συνεχής και $\gamma_k \to \infty$ καθώς $k \to \infty$.Τότε, το όριο κάθε συγκλίνουσας υποακολουθίας της ακολουθίας $\{x^{(k)}\}$ είναι μια λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.

Εκτελώντας έναν μη πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου με παράμετρο ποινής $\gamma \to \infty$ τότε το προηγούμενο θεώρημα μας βεβαιώνει ότι το όριο κάθε συγκλίνουσας υποακολουθίας είναι το ελάχιστο x^* του αρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Το επιθυμητό όμως είναι να βρούμε την ακριβή λύση του αρχικού προβλήματος λύνοντας το αντίστοιχο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς (ελαχιστοποίηση του $f(x) + \gamma P(x)$) για πεπερασμένο $\gamma > 0$. Αποδεικνύεται ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι ακριβής.

Η παρακάτω πρόταση επισημαίνει την αναγκαιότητα της μη-διαφορισιμότητας των ακριβών συναρτήσεων ποινής για μια ειδική τάξη προβλημάτων.

Πρόταση 2.2: Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{gathered}\text{ελαχιστοποίηση } f(x) \\ \text{υπό τον περιορισμό } x \in \Omega\end{gathered}$$

με $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό. Υποθέτουμε ότι το ελάχιστο x^* βρίσκεται πάνω στο σύνορο του Ω και υπάρχει διεύθυνση d τέτοια ώστε $d^T \nabla f(x^*) > 0$. Αν η P είναι μια ακριβή συνάρτηση ποινής, τότε η P είναι μη διαφορίσιμη στο x^*.

Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα της παραπάνω πρότασης δεν ισχύουν αν δεν λάβουμε υπόψη τον ισχυρισμό $d^T \nabla f(x^*) > 0$. Αντίθετα, χρησιμοποιούμε ένα κυρτό πρόβλημα όπου $\nabla f(x^*) = 0$. Επιλέγουμε P να είναι διαφορίσιμη. Σε αυτή την περίπτωση, είναι φανερό ότι $\nabla g(x^*) = \nabla f(x^*) + \gamma \nabla P(x^*) = 0$. Η συνάρτηση P είναι συνεπώς μια ακριβής συνάρτηση ποινής παρά το γεγονός ότι είναι διαφορίσιμη.

(βλέπε [6],[9])

Κεφάλαιο 3
Αγορές τίτλων

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στη δομή τίτλων τόσο σε διακριτό, όσο και σε συνεχή χρόνο και θα εξετάσουμε από μαθηματικής σκοπιάς τις εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη βέβαιων και αβέβαιων υποκείμενων τίτλων (πχ ομόλογα, μετοχές κλπ) στο χρόνο. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την ακριβή και προσεγγιστική λύση των μοντέλων μας κάνοντας άμεση εφαρμογή των αριθμητικών εννοιών και μεθόδων που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 1. Τα προβλήματα αυτά είναι ασφαλώς μεγάλου ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά αλλά ακόμα μεγαλύτερου για την πρακτική χρηματοοικονομική δραστηριότητα από την οποία προέρχονται. Στο τέλος του κεφαλαίου θα αναφερθούμε σε στατιστικά τεστ που ελέγχουν κατά πόσο τα δεδομένα μας ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη κατανομή.

3.1 Αγορές με διακριτό σύνολο καταστάσεων.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια οικονομία η οποία λειτουργεί κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας. Θεωρούμε επίσης ότι όλες οι πιθανές καταστάσεις της οικονομίας αυτής αποτελούν ένα διακριτό σύνολο από S καταστάσεις$\{1,2,\ldots,s\}$. Κάθε φορά, μια από τις καταστάσεις αυτές μπορεί να πραγματοποιηθεί και κάθε φορά μια οικονομική μονάδα (agent, συναλλασσόμενος) δεν γνωρίζει με σιγουριά ποια από όλες τις καταστάσεις θα είναι.

Ορισμός 3.1.1: Ένα περιουσιακό στοιχείο ή χρεόγραφο είναι ένας τίτλος (ή συμβόλαιο) για να λάβουμε ένα ποσό r_i τη χρονική στιγμή t=1, αν η κατάσταση της οικονομίας *i* πραγματοποιηθεί. Έχουμε λοιπόν ένα διάνυσμα $(r_1, r_2, \ldots, r_s) \in \mathbb{R}^s$ το οποίο είναι το διάνυσμα απόδοσης του τίτλου.

Στην περίπτωση αυτή, οι τίτλοι ονομάζονται χρηματοοικονομικοί τίτλοι γιατί αντιστοιχούν σε χρηματικά ποσά. Ένας τίτλος μπορεί κάλλιστα να αντιστοιχεί σε ένα αγαθό (π.χ. πετρέλαιο, σιτάρι κλπ.) και στην περίπτωση αυτή ονομάζονται πραγματικοί τίτλοι (real assets). Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με χρηματοοικονομικούς τίτλους, αλλά οι μέθοδοι που αναπτύσσονται έχουν γενικότερη ισχύ και μπορεί να εφαρμοστούν εξίσου καλά και σε πραγματικούς τίτλους. Ένας συναλλασσόμενος μπορεί να έχει παραπάνω από ένα τίτλο στην κατοχή του.

Ορισμός 3.1.2: Μία δομή τίτλων ονομάζεται αγορά.

Ορισμός 3.1.3: Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε ένα δεδομένο σύνολο τίτλων, με τους οποίους μπορούμε να συναλλασσόμαστε ελεύθερα τη χρονική στιγμή t=0. Ο κάθε τίτλος *k* χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα απόδοσης $r_k \in \mathbb{R}^s$. Ο συνολικός αριθμός τίτλων είναι *K*. Ο αριθμός κάθε είδους τίτλου που έχουμε στην κατοχή μας δίνεται από το διάνυσμα $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^K$ το οποίο αποκαλείται χαρτοφυλάκιο (ο συμβολισμός αυτός σημαίνει ότι έχουμε z_1 μονάδες του τίτλου 1 κλπ). Είναι

σημαντικό να σημειωθεί ότι το z_i δεν είναι απαραίτητα θετικό, και αυτό σημαίνει ότι ένας συναλλασσόμενος μπορεί να είναι short σε κάποιο τίτλο.
Η απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μία $S \times K$ μήτρα. Το r_{ik} $1 \le i \le S$, $1 \le k \le K$ στοιχείο της μήτρας αντιστοιχεί στην απόδοση του *k* τίτλου αν πραγματοποιηθεί η *i* κατάσταση της οικονομίας.

Ορισμός 3.1.4: Μια δομή τίτλων με $S \times K$ μήτρα αποδόσεων *P* ονομάζεται πλήρης αν $rankR = S$.

Από τη γραμμική άλγεβρα, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα υποσύνολο από *S* τίτλους με γραμμικά ανεξάρτητες αποδόσεις. Συνεπώς, οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στο $\mathbb{R}^S$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων απόδοσης αυτών των *S* τίτλων. Συνεπώς, σε αυτό το πλαίσιο μπορούμε να συνθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που θα αποτελείται από αυτούς τους *S* τίτλους η αξία του οποίου μπορεί να αναπαράγει την αξία οποιουδήποτε τίτλου.

3.2 Αγορές σε συνεχή χρόνο.

Θα θεωρήσουμε ότι οι καταστάσεις της οικονομίας δεν αποτελούν πλέον ένα διακριτό σύνολο. Επιπλέον, η τυχαιότητα στην επιλογή της τελικής κατάστασης της οικονομίας η οποία και θα πραγματοποιηθεί 'προβάλλεται' επάνω στην απόδοση των τίτλων σαν μια κίνηση *Brown* που δίνει μια διακύμανση επάνω σε μια ντετερμινιστική μεταβολή της τιμής. Θα θεωρήσουμε λοιπόν πως έχουμε μια συλλογή από *n*+1 τίτλους που μπορεί να είναι οτιδήποτε (μετοχές, ομόλογα, παράγωγα κλπ.). Οι τιμές των τίτλων αυτών παρουσιάζουν διακυμάνσεις οι οποίες μπορεί να μοντελοποιηθούν σαν διαχύσεις κατά *Ito*.

3.2.1 Μοντέλα Αγοράς

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε *n*+1 τίτλους οι αποδόσεις των οποίων τη χρονική στιγμή *t* θα συμβολίζονται με το διάνυσμα $S(t,\omega) = (S_0(t,\omega), S_1(t,\omega), \ldots, S_n(t,\omega))$. Το διάνυσμα αυτό αποτελείται από μια συλλογή στοχαστικών διαδικασιών, παραμετρισμένων με το $t \in I \subset \mathbb{R}^+$ δηλαδή το χρόνο. Με *I* συμβολίζουμε ένα διάστημα, υποσύνολο, της πραγματικής ευθείας.

Θεωρούμε μοντέλο όπου οι τιμές των τίτλων είναι στοχαστικές διαδικασίες της μορφής

$$\begin{aligned} dS_0 &= r(t,\omega)S_0 dt \\ dS_i &= \mu(t,\omega,S_i)dt + \sigma(t,\omega,S_i)dW(t) \end{aligned} \qquad (3.2.1)$$

Η εξίσωση $dS_0(t) = rS_0 dt$ περιγράφει την εξέλιξη του βέβαιου τίτλου , όπου *r* είναι η απόδοση του βέβαιου τίτλου και θεωρούμε ότι παραμένει σταθερή. Η σχέση αυτή είναι ουσιαστικά μια συνήθης διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας μας δίνει την τιμή του βέβαιου τίτλου κάθε χρονική στιγμή. Είναι φανερό ότι

$$S_0(t) = S_0(0)e^{rt}$$

Η εξέλιξη του αβέβαιου τίτλου (μίας μετοχής) δίνεται από τη διαδικασία *Ito*

$$dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW_t$$

δηλαδή θεωρούμε ότι η απόδοση της μετοχής είναι ανάλογη της τιμής της και οι διακυμάνσεις της μετοχής είναι επίσης ανάλογες της τιμής της πολλαπλασιασμένες με την μεταβολή της κίνησης *Brown*. Ο συντελεστής αναλογίας σ ονομάζεται μεταβλητότητα της μετοχής (*volatility*). Το μοντέλο αυτό το αναγνωρίζουμε σαν τη γεωμετρική κίνηση *Brown* και μια απλή εφαρμογή του τύπου του *Ito* στη συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ για $x = S_1(t)$ μας δίνει ότι

$$S_1(t) = S_1(0)\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$$

Η παραπάνω εξίσωση εισάγει ένα τυπικό μοντέλο των χρηματοοικονομικών, το μοντέλο *Black – Scholes*.

Στην περίπτωση όπου μ, σ είναι σταθερές, τότε μπορούμε εύκολα να γράψουμε αναλυτικά τη λύση της εξίσωσης αυτής. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει εν γένει οπότε θα πρέπει να προσεγγίσουμε τις τροχιές της διαδικασίας αυτής με κάποιο αριθμητικό τρόπο.
Ας γράψουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση στη γενική μορφή

$$dS_i = \mu(t, \omega, S_i)dt + \sigma(t, \omega, S_i)dW(t)$$

Ας θεωρήσουμε τη μεταβολή της τιμής των μετοχών σε ένα χρονικό διάστημα Δt το οποίο θεωρείται μικρό. Λαμβάνοντας υπόψη το ότι ο στοχαστικός όρος θεωρείται σαν ένα ολοκλήρωμα κατά *Ito* και αν θυμηθούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος *Ito* (βλέπε ενότητα 1.3) μπορούμε να γράψουμε (προσεγγιστικά)

$$S_i(t + \Delta t) = S_i(t) + \mu(t, S_i(t))\Delta t + \sigma(t, S_i(t))(W(t + \Delta t) - W(t))$$

Από τον ορισμό της κίνησης *Brown* γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της κίνησης *Brown* μεταξύ των χρονικών στιγμών t και Δt, $W(t + \Delta t) - W(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι κανονικά κατανεμημένη με

$$E(W(t + \Delta t) - W(t)) = 0$$

και

$$Var(W(t + \Delta t) - W(t)) = \Delta t$$

δηλαδή $W(t + \Delta t) - W(t) \sim \sqrt{\Delta t} Z$ όπου $Z \sim N(0,1)$.

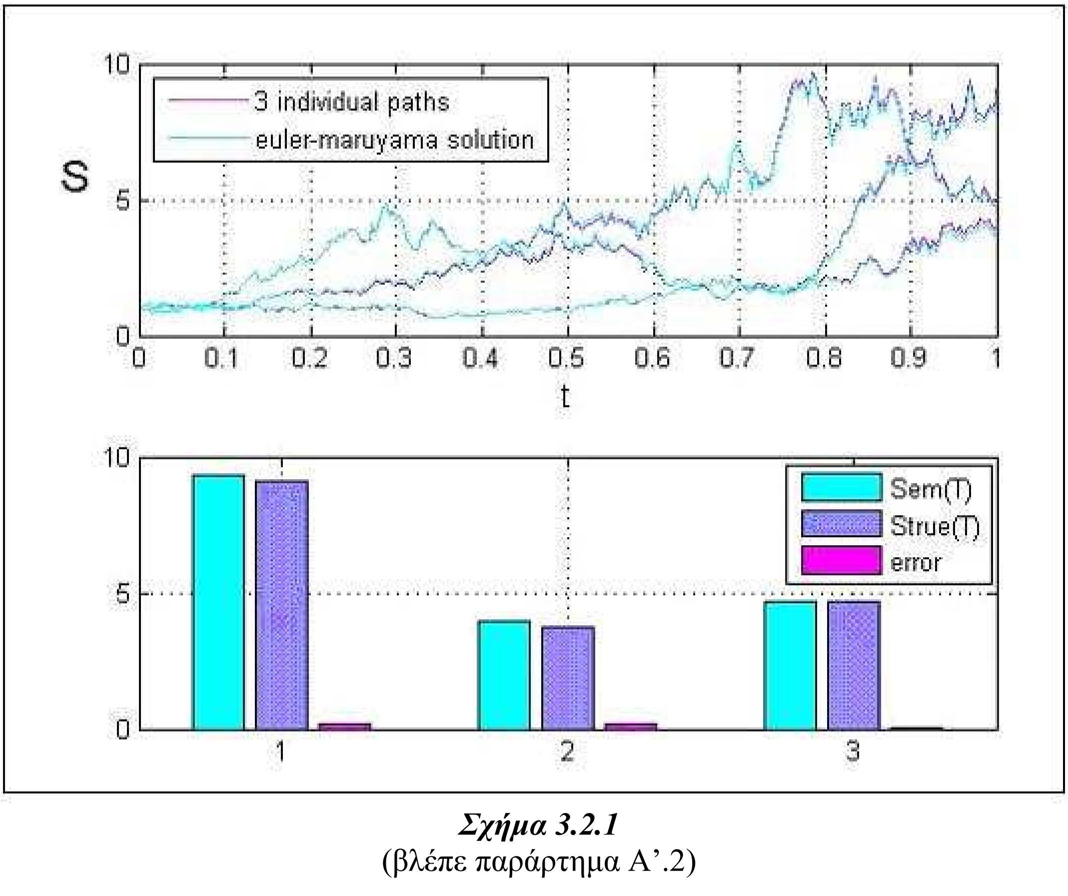
Την προσεγγιστική αυτή διαδικασία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι επαναλαμβάνουμε για όσες φορές χρειάζεται έτσι ώστε να βρούμε το $S(t + n\Delta t)$ για κάποιο n τέτοιο ώστε $t + n\Delta t = T$. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι παίρνουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ η οποία αποτελείται από τα σημεία t_i, τέτοια ώστε $t_0 = 0$ και $t_N = T$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σημεία της διαμέρισης ισαπέχουν, δηλαδή η απόσταση μεταξύ τους είναι $h := \Delta t = \frac{T}{N}$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε το επαναληπτικό σχήμα *Euler-Maruyama* όπως περιγράφτηκε στην ενότητα 1.4 για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (ή αλλιώς μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο) y_i:

$$y_{i+1} = y_i + \mu(t_j, y_i)\Delta t + \sigma(t_j, y_i)\Delta W_j$$
$$y_0 = x_0$$

όπου $\Delta W_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$. Από τα ιδιότητες της κίνησης *Brown* γνωρίζουμε ότι $\Delta W_j \sim \sqrt{\Delta t} Z$ όπου $Z \sim N(0,1)$.

Παρατηρούμε ότι η χρήση του σχήματος *Euler-Maruyama* προϋποθέτει την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών *Z* που είναι κανονικά κατανεμημένες. (βλέπε [3])

Στο σχήμα 3.2.1(α) παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας $dS_1(t) = \mu S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW_t$ για μ=2 , σ=1 και $S_1(0)$=1. Στο σχήμα 3.2.1(β) παρουσιάζεται διαγραμματικά το μέγεθος του σφάλματος τη χρονική στιγμή *T*=1 που προκύπτει από την εφαρμογή του σχήματος *Euler-Maruyama*.



Σχήμα 3.2.1
(βλέπε παράρτημα Α'.2)

Οι τιμές των τίτλων στα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε από δω και στη συνέχεια θεωρούμε ότι είναι στοχαστικές διαδικασίες *Ito* της μορφής

$$dS_0 = r(t,\omega)S_0dt$$
$$dS_i = \mu_i(t,\omega,S_i)dt + \sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t,\omega,S_i)dW_j(t) = \mu_i(t,\omega,S_i)dt + \sigma dW(t) \qquad (3.2.2)$$

Σημειώνεται ότι παραπάνω από μια κινήσεις *Brown* εμφανίζονται στην εξίσωση. Αυτό μοντελοποιεί την ύπαρξη περισσοτέρων της μίας και ανεξάρτητων πηγών τυχαιότητας.
Στην περίπτωση αυτή όπου η αβεβαιότητα της μετοχής εισάγεται από μία m-διάστατη κίνηση *Brown* η εξέλιξη για έναν αβέβαιο τίτλο δίνεται από την πολυδιάστατη διαδικασία *Ito*

$$dS_1 = \mu_1 S_1 dt + (\sum_{j=1}^{m}\sigma_{1j}dW_j)S_1 .$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε και προηγουμένως εφαρμόζουμε τον τύπο του *Ito*[2] αυτή τη φορά στην περίπτωση των περισσοτέρων της μιας διάστασης στη συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ για $x = S_1(t)$ έχουμε διαδοχικά:

$$\ln(S_1(t)) = \ln(S_1(0)) +$$
$$+\int_0^t [\mu_1 S_1(s)\frac{1}{S_1(s)} + \frac{1}{2}(\sigma_{11}{}^2 S_1{}^2(s)(-\frac{1}{S_1{}^2(s)}) + \ldots + \sigma_{1m}{}^2 S_1{}^2(s)(-\frac{1}{S_1{}^2(s)}))]ds$$
$$+\int_0^t \sigma_{11}S_1(s)\frac{1}{S_1(s)}dW_1 + \ldots + \int_0^t \sigma_{1m}S_1(s)\frac{1}{S_1(s)}dW_m$$
$$= \ln(S_1(0)) + \int_0^t [\mu_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}{}^2 + \ldots + \sigma_{1m}{}^2)]ds + \int_0^t \sigma_{11}dW_1 + \ldots + \int_0^t \sigma_{1m}dW_m$$

Επομένως,

$$S_1(t) = S_1(0)\exp((\mu_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}{}^2 + \ldots + \sigma_{1m}{}^2))t + \sigma_{11}W_1(t) + \ldots + \sigma_{1m}W_m(t))$$

---

[2] Έστω $f = f(t,x) = f(t,x_1,\ldots,x_m)$ με $f \in C^{1,2}([0,\infty)\times \mathbb{R}^m)$ και η ανέλιξη Ito $\{X_t = (X_t^1,\ldots,X_t^m), t \ge 0\}$ της $X_t = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW_s, t \ge 0$ όπου $a(s) = (a_1(s),\ldots,a_m(s))$ και $\beta(s) = [\beta_{ij}(s)] \begin{pmatrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{pmatrix}, s \ge 0$

Τότε ισχύει:

$$f(t,X_t) = f(0,\xi) +$$
$$\int_0^t [\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \sum_{i=1}^{m} a_i(s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m}\beta_{ij}(s)\beta_{kj}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s,X_s)]ds +$$
$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^t [\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}(s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)]dW_s^j$$

(βλέπε [4])

Το επαναληπτικό σχήμα του *Euler* στην πολυδιάστατη περίπτωση αυτή παίρνει τη μορφή

$$S_i(t+\Delta t) - S_i(t) = \mu_i(t, S_i(t))\Delta t + \sum_{j=i}^{m} \sigma_{ij}(t, S_i(t))(W_j(t+\Delta t) - W_j(t))$$

ή ισοδύναμα,

$$S_i(t+\Delta t) = S_i(t)(1 + \mu_i \Delta t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} \Delta W_j(t))$$

3.3 Έλεγχος κανονικότητας

Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα *Ito* καθώς επίσης και τη μέθοδο *Euler-Maruyama* τόσο στο μονοδιάστατο (3.2.1) όσο και στο πολυδιάστατο μοντέλο (3.2.2) συμπεραίνουμε ότι το $\ln(S_i)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με

$$E[\ln(S_i)] = \mu_i t$$

και

$$E[(\ln(S_i))^2] = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}{}^2 t$$

Η κανονικότητα των μοντέλων αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας στατιστικά μοντέλα άριστης εξομάλυνσης καμπύλης (goodness of fit tests) τα οποία μετρούν τη συμβατότητα ενός τυχαίου δείγματος με μια πιθανοθεωρητική συνάρτηση κατανομής. Με άλλα λόγια, ελέγχουν κατά πόσο η κατανομή που διαλέξαμε ταιριάζει με τα δεδομένα μας.
Παρακάτω θα αναφερθούμε εν συντομία στο *Kolmogorov-Smirnov* και *Jarque-Bera* τεστ.

3.3.1 Kolmogorov-Smirnov test (K-S test)

Το τεστ αυτό χρησιμοποιείται για να αποφασίσει αν ένα δείγμα προέρχεται από μία υποθετική συνεχή κατανομή και βασίζεται σε μία εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (empirical cumulative distribution function-ECDF). Θεωρούμε ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $x_1,...,x_n$ από κάποια συνεχή κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) , $F(x)$.Η ECDF ορίζεται ως εξής:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}[Number\ of\ observations \le x]$$

Το *Kolmogorov-Smirnov* τεστ (*D*) βασίζεται στη μεγαλύτερη κάθετη διαφορά μεταξύ της $F(x)$ και της $F_n(x)$ ως:

$$D_n = \sup | F_n(x) - F(x) |$$

H_0 : Τα δεδομένα ακολουθούν τη συγκεκριμένη κατανομή

H_1 : Τα δεδομένα δεν ακολουθούν τη συγκεκριμένη κατανομή

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας (alpha), αν το στατιστικό τεστ *D* είναι μεγαλύτερο από την κριτική τιμή που καθορίζεται από συγκεκριμένους πίνακες. (βλέπε [11],[12])

3.3.2 Jarque-Bera test

Το *Jarque-Bera* τεστ χρησιμοποιείται για να ελέγξει την υπόθεση αν ένα δείγμα x_s είναι δείγμα μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής με άγνωστη μέση τιμή και διασπορά. Το στατιστικό αυτό τεστ βασίζεται στο γεγονός ότι η skewness και η κύρτωση της κανονικής κατανομής είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, η απόλυτη τιμή των παραμέτρων αυτών θα μπορούσε να είναι ένα μέτρο απόκλισης της κατανομής του δείγματος που ελέγχουμε από την κανονική κατανομή.
Το κριτήριο ελέγχου που χρησιμοποιούμε ορίζεται ως εξής:

$$JB = \frac{n}{6}\left((Skew\, x_s)^2 + \frac{(Kurt\, x_s)^2}{4} \right)$$

όπου *n* είναι το μέγεθος του δείγματος.

H_0: Τα δεδομένα είναι δείγμα κανονικής τυχαίας μεταβλητής με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση.
H_1: Τα δεδομένα δεν αποτελούν δείγμα κανονικής τυχαίας μεταβλητής .

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας (alpha), αν το στατιστικό τεστ *JB* είναι μεγαλύτερο από την κριτική τιμή που καθορίζεται από συγκεκριμένους πίνακες. Σημειώνεται ότι όσο το μέθοδος του δείγματος μεγαλώνει, τόσο το στατιστικό τεστ *JB* συγκλίνει στην κατανομή chi-square με δύο βαθμούς ελευθερίας. (βλέπε [12])

Τα στατιστικά τεστ που περιγράφτηκαν παραπάνω μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να ελέγξουμε αν μία τροχιά της κίνησης *Brown* ακολουθεί κατανομή με

$$E[W(\Delta t \cdot j)] = 0$$

και

$$E[W(\Delta t \cdot j) \cdot W(\Delta t \cdot j)] = \Delta t \cdot j$$

Κεφάλαιο 4
Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου

Εισαγωγή

Η διαδικασία βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου συνίσταται στη σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου, όπου ο συνδυασμός του ποσοστού επένδυσης κάθε περιουσιακού τίτλου που το απαρτίζει είναι βέλτιστος και μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του επενδυτή. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος και των δεδομένων που έχει στη διάθεση του ο επενδυτής. Στη διάρκεια του περασμένου αιώνα έγιναν αρκετές προσπάθειες προσέγγισης τέτοιων μεθόδων και προτάθηκαν μοντέλα βελτιστοποίησης από διαφορετικούς ερευνητές. Ο επιστημονικός κλάδος της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου παρουσιάζει σήμερα τεράστιο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής , όσο και πρακτικής απόψεως και έχει προσελκύσει μεγάλη μερίδα επιστημόνων τα τελευταία χρόνια εξαιτίας της ραγδαίας προόδου της τεχνολογίας των υπολογιστών και της διαθεσιμότητας των φιλικών προς χρήση λογισμικών που επιτρέπουν την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων βελτιστοποίησης.
Τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας χαρτοφυλακίου τέθηκαν το 1952 από τον αμερικανό οικονομολόγο *Harry Markowitz* που πρότεινε το μοντέλο μέσης τιμής – διακύμανσης και ανέπτυξε τη θεωρία αποτελεσματικού χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ένα χαρτοφυλάκιο θεωρείται βέλτιστο όταν μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για δεδομένο επίπεδο κινδύνου ή ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο για δεδομένο ποσοστό αναμενόμενης απόδοσης. Ωστόσο, το μοντέλο του *Markowitz* είναι στατικό και θεωρεί αγορά χωρίς τριβές όπου οι αποφάσεις παίρνονται σε βάθος χρόνου μίας περιόδου με αποτέλεσμα να μην μπορεί να μοντελοποιήσει τον πραγματικό κόσμο της οικονομίας που αλλάζει δυναμικά στη διάρκεια του χρόνου. Λίγα χρόνια αργότερα ο *James Tobin* επέκτεινε το μοντέλο του *Markowitz* αναπτύσσοντας τη γραμμή κεφαλαιαγοράς σύμφωνα με την οποία ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει τόσο σε κάποια μετοχή όσο και σε ακίνδυνο χρεόγραφο. Στη συνέχεια, τη δεκαετία του '60 ο *William F.Sharpe* χώρισε τον κίνδυνο της αγοράς σε συστηματικό και μη-συστηματικό και εισήγαγε το *CAPM* μοντέλο. Αξιοσημείωτη την ίδια δεκαετία ήταν και η προσφορά του *Merton* όπου προσέγγισε το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου από τη στοχαστική πλευρά και θεώρησε ότι η εξέλιξη του αβέβαιου τίτλου μοντελοποιείται από μια γεωμετρική κίνηση *Brown* όπου είναι μια διαδικασία *Markov.* (βλέπε [9],[14])
Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με στοχαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης και θα χρησιμοποιήσουμε μεθόδους προσομοίωσης τύπου *Monte Carlo* για την επίλυση τους. Θα εισάγουμε αρχικά κάποιες βασικές έννοιες και στη συνέχεια θα παραθέσουμε το πρόβλημα του *Markowitz* καθώς επίσης και τα πλεονεκτήματα των στατικών στρατηγικών.

4.1 Χαρτοφυλάκιο-διαδικασία κερδών

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι μία $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη διαδικασία

$$\theta(t,\omega) = (\theta_0(t,\omega),\dots,\theta_n(t,\omega)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Το $\theta_i(t,\omega)$ αντιστοιχεί στα κομμάτια του τίτλου *i* που έχει ο επενδυτής στη διάθεση του τη χρονική στιγμή *t*. Η ιδιότητα του ότι το χαρτοφυλάκιο είναι προσαρμοσμένη διαδικασία σημαίνει ότι ένας συναλλασσόμενος παίρνει την απόφαση του πως θα αναπροσαρμόσει το χαρτοφυλάκιο του τη χρονική στιγμή *t* έχοντας πληροφορία για τις καταστάσεις που έλαβε η οικονομία μέχρι τη χρονική στιγμή αυτή. Δεν επιτρέπεται με άλλα λόγια να ρίχνουμε κλεφτές ματιές στο μέλλον! Σημειώνουμε ότι τα $\theta_i,\ i=0,...,n$ μπορεί να παίρνουν και αρνητικές τιμές, δηλαδή ένας επενδυτής μπορεί να έχει και ανοιχτή θέση σε κάποιους τίτλους.
Η αξία του χαρτοφυλακίου $\theta(t,\omega)$ τη χρονική στιγμή *t* δίνεται από τη σχέση

$$V^{\theta}(t,\omega) := \sum_{i=0}^{n} \theta_i(t,\omega) S_i(t,\omega)$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι και αυτή μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$. Για τον καθορισμό της αξίας του χαρτοφυλακίου είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο της αγοράς, βάσει του οποίου θα μπορέσουμε να κάνουμε προβλέψεις σχετικά με τις μελλοντικές τιμές των διάφορων τίτλων. Η κατάλληλη επιλογή μοντέλου είναι ιδιαίτερα σημαντικό σημείο για την επενδυτική πολιτική που θα ακολουθήσει ο επενδυτής.
Μπορούμε περαιτέρω να ορίσουμε τη διαδικασία κερδών (gain process) ενός τίτλου και σαν γενίκευση του τη διαδικασία κερδών ενός χαρτοφυλακίου. Ας θεωρήσουμε μια διαμέριση (0,*t*) και ότι ο αριθμός των τίτλων i, θ_i που έχουμε στην κατοχή μας παραμένει σταθερός στο διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ στο επίπεδο $\theta_i(t_{k-1})$. Στο διάστημα αυτό η απόδοση του τίτλου *i* μεταβλήθηκε κατά $S_i(t_k) - S_i(t_{k-1})$. Το συνολικό κέρδος (θετικό ή αρνητικό) του συναλλασσόμενου λόγω της μεταβολής της τιμής του τίτλου αυτού κατά το διάστημα αυτό είναι $\theta_i(t_{k-1})[S_i(t_k) - S_i(t_{k-1})]$. Αθροίζοντας τις συνεισφορές αυτές επάνω σε όλα τα διαστήματα της διαμέρισης και παίρνοντας το όριο της πολύ λεπτής διαμέρισης $\Delta t \to 0$ παίρνουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t \theta_i(t) dS_i(t)$ το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο από το στοχαστικό ολοκλήρωμα της προβολής της διαδικασίας χαρτοφυλακίου στον τίτλο *i,* επάνω στη στοχαστική διαδικασία που δίνει την τιμή του τίτλου αυτού. Στα πλαίσια του μοντέλου για την αγορά το οποίο αναπτύξαμε, αυτό είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα της στοχαστικής διαδικασίας θ_i επάνω στη διάχυση $Ito\, S_i$.Αν θέλουμε να βρούμε τη διαδικασία κερδών για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο δεν χρειάζεται παρά να αθροίσουμε τις διαδικασίες κερδών για τον κάθε τίτλο που απαρτίζει το χαρτοφυλάκιο.

$$G(t) = \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \theta_i dS_i$$

Βλέπουμε συνεπώς πως στοχαστικά ολοκληρώματα επάνω σε κινήσεις *Brown* ή γενικότερα επάνω σε διαδικασίες *Ito* εμφανίζονται με πολύ φυσικό τρόπο στην χρηματοοικονομική.
Μια ακόμα σημαντική έννοια είναι αυτή του αυτό-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου.

Ορισμός 4.1: Ένα χαρτοφυλάκιο ονομάζεται αυτό-χρηματοδοτούμενο αν η αξία του μπορεί να προσδιοριστεί αποκλειστικά από τα κέρδη που προέρχονται από τους τίτλους που το απαρτίζουν.

$$V^{\theta}(t) = V^{\theta}(0) + \int_0^t \theta(t')dS(t')$$

Σε διαφορική μορφή η σχέση αυτή γίνεται

$$dV^{\theta} = \theta \cdot dS$$

Σε ένα αυτό-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο μπορούμε να επενδύσουμε ξανά μόνο τα κέρδη του χωρίς να προσθέσουμε καθόλου εξωτερικά ποσά. Με άλλα λόγια μεταβολές στα ποσά που έχουμε στα ομόλογα μπορούν να γίνουν λόγω μεταβολών στα ποσά που έχουμε τοποθετημένα στις μετοχές, δεν υπάρχει εισροή ή εκροή κεφαλαίων. Με μία απλή εφαρμογή του τύπου του *Ito* βλέπουμε πως για ένα αυτό-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ισχύει $\theta \cdot dS = 0$

Σημείωση: Τα χαρτοφυλάκια τα οποία θα μελετήσουμε ικανοποιούν τη συνθήκη $V^{\theta}(t,\omega) \geq -K$ σ.β. Η συνθήκη αυτή σημαίνει ότι το χρέος που μπορεί να επιτραπεί είναι πεπερασμένο. (βλέπε [3])

4.2 Στατικές στρατηγικές

Ορισμός 4.2: Στατικό χαρτοφυλάκιο ονομάζεται το χαρτοφυλάκιο τα βάρη του οποίου παραμένουν σταθερά και δεν μεταβάλλονται στη διάρκεια του χρόνου. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\theta_i = \theta_i(t) = constant \ \forall t$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με στατικές στρατηγικές βελτιστοποίησης και όχι με δυναμικές στις οποίες το επενδυτικό χαρτοφυλάκιο αναδιαρθρώνεται με συνεχή τρόπο κατά τη διάρκεια του επενδυτικού ορίζοντα. Οι στατικές στρατηγικές (είτε ισορροπημένες, είτε επιθετικές) προτιμούνται από πολλούς επενδυτές καθώς επίσης και από ασφαλιστικά ταμεία καθώς

- εμπεριέχουν μικρότερο κίνδυνο από άλλες στρατηγικές οι οποίες χρησιμοποιούνται στην πράξη και τους επιτρέπουν να προστατεύονται στην περίπτωση ιδιαίτερα δυσμενών συνθηκών στις χρηματαγορές.
- τους επιτρέπουν να επιτύχουν αποδόσεις συγκρίσιμες με τις αντίστοιχες των δυναμικών χαρτοφυλακίων

(βλέπε [16])

4.3 Συνάρτηση ωφελιμότητας

Μια συνάρτηση ωφελιμότητας είναι μία διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση $U(w), w > 0$ που έχει τις ιδιότητες του μη κορεσμού (η πρώτη παράγωγος $U'(w) > 0$) και της αποστροφής κινδύνου (η δεύτερη παράγωγος $U''(w) < 0$).

Η συνάρτηση ωφελιμότητας μετράει τη σχετική προτίμηση ενός επενδυτή για διαφορετικά επίπεδα του ολικού πλούτου.
Η ιδιότητα του μη κορεσμού δηλώνει ότι η ωφελιμότητα αυξάνεται με τον πλούτο και ότι ο επενδυτής δεν είναι ποτέ ικανοποιημένος με το επίπεδο πλούτου που έχει στην κατοχή του.
Η ιδιότητα της αποστροφής κινδύνου δηλώνει ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι κοίλη ή με άλλα λόγια ότι η οριακή ωφελιμότητα του πλούτου μειώνεται καθώς ο πλούτος αυξάνεται. Γενικότερα, η αύξηση της ωφελιμότητας που προκαλείται από την απόκτηση μίας επιπλέον χρηματικής μονάδας μειώνεται καθώς ο πλούτος αυξάνει.
Η αρχή της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης ωφελιμότητας δηλώνει ότι ένας επενδυτής που λειτουργεί ορθολογικά όταν έρθει αντιμέτωπος με ένα σύνολο εφικτών εναλλακτικών επενδύσεων, επιλέγει την επένδυση που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα του πλούτου του.
Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι F είναι το σύνολο των εφικτών εναλλακτικών επενδύσεων για κάθε επένδυση $I \in F$ θεωρούμε ότι $X(I)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που δίνει την τελική αξία της επένδυσης στο τέλος της περιόδου. Ο ορθολογικός επενδυτής με συνάρτηση ωφελιμότητας U έρχεται αντιμέτωπος με το πρόβλημα εύρεσης μίας επένδυσης $I_{opt} \in F$ για την οποία ισχύει

$$E(U(X(I_{opt}))) = \max_{I \in F} E(U(X(I)))$$

(βλέπε [13])

4.4 Το πρόβλημα του Markowitz

Θεωρούμε ότι υπάρχει ποσότητα w που μπορεί να επενδυθεί σε n διαφορετικούς τίτλους. Αν a είναι το ποσό που έχει επενδυθεί στον τίτλο i $(i = 1,...,n)$ τότε, ύστερα από μία περίοδο, η επένδυση θα αποφέρει aX_i, όπου X_i είναι μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή. Με άλλα λόγια, αν R_i είναι η απόδοση από την επένδυση i ,τότε

$$a = \frac{aX_i}{1 + R_i} \;\; ή \;\; R_i = X_i - 1$$

Αν w_i είναι το ποσοστό που επενδύεται σε κάθε τίτλο $i = 1,...,n$ τότε ο πλούτος στο τέλος της περιόδου είναι

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i X_i$$

Το διάνυσμα $w_1,...,w_n$ ονομάζεται χαρτοφυλάκιο. Το πρόβλημα εύρεσης του χαρτοφυλακίου που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα στο τέλος της περιόδου μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικό τρόπο ως εξής:

Επιλογή των $w_1,...,w_n$ για τη
μεγιστοποίηση της $E[U(W)]$

υπό τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{n} w_i = w \quad i = 1,...,n$

όπου U η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή.
Θεωρούμε επίσης ότι ο πλούτος W στο τέλος της περιόδου είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή. Η προϋπόθεση ότι ο επενδυτής επενδύει σε πολλούς τίτλους οι οποίοι δεν είναι υψηλά συσχετισμένοι μεταξύ τους είναι σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα μια λογική προσέγγιση. (Θα ήταν επίσης αληθές αν η X_i, $i = 1,...,n$ είχε πολυμεταβλητή κανονική κατανομή)
Υποθέτουμε ότι ο επενδυτής έχει μια εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας

$$U(x) = 1 - e^{-bx}, \quad b > 0$$

όπου U είναι κοίλη.

Σημείωση 4.4: Όσο μεγαλώνει η τιμή του b, τόσο μεγαλώνει η διαφορά

$$U(E[W]) - E[U(W)]$$

με αποτέλεσμα να μειώνεται και ο κίνδυνος που αναλαμβάνει και ο επενδυτής.

Αν Z είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή, τότε e^Z είναι λογαριθμικοκανονική και έχει αναμενόμενη τιμή

$$E[e^Z] = \exp\{E[Z] + Var(Z)/2\}$$

Συνεπώς, καθώς $-bW$ είναι κανονική με μέσο $-bE[W]$ και διακύμανση $b^2Var(W)$ έχουμε ότι

$$E[U(W)] = 1 - E[e^{-bW}] = 1 - \exp\{-bE[W] + b^2Var(W)/2\}$$

Κατά συνέπεια, η αναμενόμενη ωφέλεια του επενδυτή θα μεγιστοποιηθεί επιλέγοντας το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί την

$$E[W] - bVar(W)/2$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι αν 2 χαρτοφυλάκια στο τέλος της περιόδου έχουν τελική αξία W_1 και W_2 αντίστοιχα και η W_1 έχει μεγαλύτερο μέσο και μικρότερη διακύμανση από την W_2, τότε το πρώτο χαρτοφυλάκιο έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφελιμότητα από το δεύτερο. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} &E[W_1] \geq E[W_2] \ \& \ Var(W_1) \leq Var(W_2) \\ &\Rightarrow E[U(W_1)] \geq E[U(W_2)] \end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

Στην πραγματικότητα, με την προϋπόθεση ότι ο πλούτος στο τέλος της περιόδου είναι κανονική τυχαία μεταβλητή, η (4.4.1) παραμένει έγκυρη ακόμα και όταν η συνάρτηση ωφελιμότητας δεν είναι εκθετική αλλά διατηρεί την ιδιότητα να είναι αύξουσα και κοίλη. Κατά συνέπεια, αν μια επένδυση σε ένα χαρτοφυλάκιο προσφέρει σε έναν επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο μια αναμενόμενη απόδοση που είναι τουλάχιστον ίδια με αυτήν που προσφέρεται από μια δεύτερη επένδυση και έχει διακύμανση που δεν είναι μεγαλύτερη από αυτή στο δεύτερο χαρτοφυλάκιο, τότε ο επενδυτής θα προτιμήσει το πρώτο χαρτοφυλάκιο.

Θα δούμε τώρα πως υπολογίζεται η μέση τιμή και η διακύμανση του πλούτου W για ένα χαρτοφυλάκιο.
Θεωρούμε $R_i = X_i - 1$ την απόδοση του i τίτλου και έστω

$$r_i = E[R_i] \quad , \quad v_i^2 = Var(R_i)$$

τότε, επειδή

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_i(1+R_i) = w + \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \,,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[W] &= w + \sum_{i=1}^{n} E[w_i R_i] \\ &= w + \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(W) &= Var(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(w_i R_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} Cov(w_i R_i, w_j R_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i^2 v_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} w_i w_j c(i,j) \end{aligned}$$

όπου $c(i,j) = Cov(R_i, R_j)$ (βλέπε [14],[15])

4.5 Σύνθεση χαρτοφυλακίου

Υποθέτουμε χάριν απλότητας ότι οι κλάσεις των περιουσιακών στοιχείων στις οποίες μπορεί να επενδύσει ένας επενδυτής είναι

- Ένας βέβαιος τίτλος η τιμή του οποίου τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $S_0(t,\omega)$ (ο τίτλος αυτός καταχρηστικά θα ονομάζεται ομόλογο).
- Ένας αβέβαιος τίτλος (μετοχή) η τιμή του οποίου τη χρονική στιγμή t, είναι μία τυχαία μεταβλητή που συμβολίζεται με $S_i(t,\omega)$ για i=1,2,…

(βλέπε [16])

4.6 Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου μέσω μεθόδων τύπου Monte-Carlo

Η βελτιστοποίηση της αναμενόμενης αξίας του χαρτοφυλακίου μέσω της μεθόδου *Monte-Carlo* βασίζεται στην προσέγγιση της μέσης τιμής σαν ένα άθροισμα επάνω σε μία σειρά πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής της αξίας του χαρτοφυλακίου. Φυσικά για να γίνει αυτό θα πρέπει να έχουμε πρώτα μια σειρά πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής $S_i(t,\omega)$, $i=1,2,...$ δηλαδή να παράγουμε μια σειρά τροχιών της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών καθώς επίσης και μία σειράς πραγματοποιήσεων της αξίας $S_0(t,\omega)$ του βέβαιου τίτλου. Συνεπώς έχουμε το παρακάτω σχήμα:

1. Κάνουμε N πραγματοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας $S_i(t)$ και $S_0(t)$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $S_i(T,\omega_m)$, $S_0(T,\omega_m)$, $m=1,...,N$.

2. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση της αξίας του χαρτοφυλακίου στις τιμές αυτές

3. Θέτουμε

$$E[U(V(T)]=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}U(V(T,\omega_m))$$

ποσότητα την οποία λαμβάνουμε ως προσέγγιση της μέσης τιμής.
(βλέπε [3])

Εφαρμογή

Πρόβλημα

Θεωρούμε στατικό χαρτοφυλάκιο $\theta(\omega) = (\theta_0(\omega), \theta_1(\omega), \theta_2(\omega))$ που αποτελείται από ένα βέβαιο τίτλο (ομόλογο) αξίας $S_0(t)$ και δύο αβέβαιους τίτλους (μετοχές) αξίας $S_i(t)$, $i = 1, 2$. Η εξέλιξη του βέβαιου τίτλου δίνεται από την εξίσωση

$$dS_0(t) = 0.02 \cdot S_0(t)dt$$

όπου 0.02 είναι η απόδοση του βέβαιου τίτλου και θεωρείται σταθερή.
Η εξέλιξη της κάθε μετοχής χαρακτηρίζεται από μια διαδικασία *Ito* ως εξής:

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= 0.4S_1(t)dt + (2 \cdot dW_1 + 1 \cdot dW_2 + 1 \cdot dW_3)S_1 \\ dS_2(t) &= 0.5S_2(t)dt + (1 \cdot dW_1 + 2 \cdot dW_2 + 1 \cdot dW_3)S_2 \end{aligned}$$

με $S_1(0) = 2,\ S_2(0) = 1$.
Ψάχνουμε $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ τέτοια ώστε να μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμότητα της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Για υπολογιστικούς λόγους θεωρούμε διαμέριση του διαστήματος $[0,T]$ που αποτελείται από σημεία t_i τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Τα σημεία της διαμέρισης θεωρούμε ότι ισαπέχουν, δηλαδή η απόσταση μεταξύ τους είναι σταθερή και ίση με $dt = T/N$ για κάποιο θετικό ακέραιο N . Για κάθε σημείο t_j ισχύει $t_j = j \cdot dt$.

$T \leftarrow 1$

$N \leftarrow 2^8$

$dt \leftarrow T / N$

$r \leftarrow 0.02$

$$S_i(0) \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ \mu_i \leftarrow \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} \ , \sigma_{ij} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Η αξία του βέβαιου τίτλου κάθε χρονική στιγμή προκύπτει από τη λύση της συνήθης διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την εξέλιξη του.

repeat for $j = 1$ *to* N
  $S(j) \leftarrow \exp(r \cdot t_j)$
end for

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την κίνηση *Brown* με βάση τον ακόλουθο επαναληπτικό αλγόριθμο. Από τις ιδιότητες της κίνησης *Brown* γνωρίζουμε ότι $W_0 = 0$ (με πιθανότητα 1)

repeat for $i = 1 to 2$
  $dW_i(1) \leftarrow \sqrt{dt} \cdot randg$
  $W_i(1) \leftarrow dW_i(1)$
    repeat for $j = 2 \ to \ N$
      $dW_i(j) \leftarrow \sqrt{dt} \cdot randg$
      $W_i(j) \leftarrow W_i(j-1) + dW_i(j)$
    end for
end for

Για την αξία των μετοχών κάθε χρονική στιγμή υπολογίζουμε την ακριβή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την εξέλιξη τους στο χρόνο. Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιούμε την ίδια διαμέριση που χρησιμοποιήσαμε και για τον υπολογισμό της αξίας του ομολόγου.

repeat for $i = 1 to 2$
  repeat for $j = 1 \ to \ N$
$$Strue(i,j) \leftarrow S_i(0) \cdot \exp((\mu_i - \frac{1}{2}(\sum_{m=1}^{3} \sigma_{im}{}^2))t_j + \sum_{m=1}^{3} \sigma_{im} W_m)$$
  end for
end for

Παρακάτω εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler-Maruyama* (EM) στη στοχαστική διαδικασία *Ito* που περιγράφει την εξέλιξη κάθε μετοχής

repeat for $i = 1 to 2$
  $Stemp \leftarrow S_i(0)$
    repeat for $j = 1 \ to \ N$
$$Stemp \leftarrow Stemp + dt \cdot \mu_i \cdot Stemp + \sum_{m=1}^{3} (\sigma_{im} \cdot dW_m(j)) \cdot Stemp$$
      $Sem_i(j) \leftarrow Stemp$
    end for
end for

Η αξία του χαρτοφυλακίου κάθε χρονική στιγμή δίνεται

$$V(t,\omega) \leftarrow \sum_{i=0}^{2} \theta_i \cdot S_i(t)$$

Για τον υπολογισμό της αναμενόμενης ωφελιμότητας της αξίας του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή T=1 εφαρμόζουμε τη μέθοδο *Monte-Carlo* σε ένα δείγμα w=20.000 παρατηρήσεων. Υπολογίζουμε δηλαδή για κάθε μια παρατήρηση χωριστά την τιμή του τίτλου $S_i(T,\omega_m)$ και την αναμενόμενη αξία του χαρτοφυλακίου $V(T,\omega_m)$, $m=1,...,w$ για τη συγκεκριμένη παρατήρηση και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή της αξίας του χαρτοφυλακίου. Η συνάρτηση ωφελιμότητας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εκθετική $U(V)=1-e^{-bV}$, $b>0$.

repeat for *m*=1 to *w*

$$U(V(T,\omega_m)) \leftarrow 1-\exp(-b\cdot\sum_{i=0}^{2}\theta_i\cdot S_i(T,\omega_m))$$

end for

$$E[U(V(T))] \leftarrow \sum_{m=1}^{w}(1-\exp(-b\cdot\sum_{i=0}^{2}\theta_i\cdot S_i(T,\omega_m)))/w$$

Τελειώνοντας, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο βαθμίδας στο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\textbf{max} \quad E[U(V(T))]+\gamma I \quad ,\gamma>0$$

$$\textbf{υπό τους περιορισμούς} \quad \sum_{i=0}^{2}\theta_i=1$$

όπου $I:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση ποινής που χρησιμοποιείται για την ικανοποίηση των περιορισμών και βρίσκουμε $(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφελιμότητα της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Αλγόριθμος Βαθμίδας

set θ_0 ,ε

for n = 0 ***to*** maxiter ***do***

set $a_n \leftarrow \arg\min \Phi(a)=\dfrac{s_n^T(b-A\theta_n)}{s_n^T A s_n}$

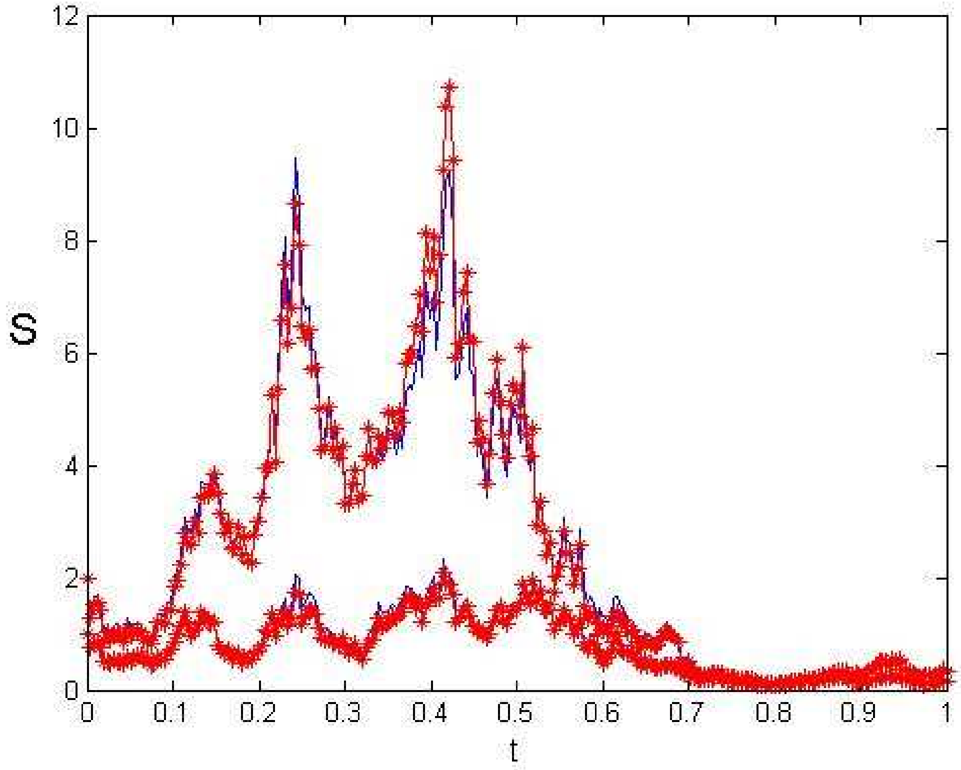
$\theta_{n+1}\leftarrow\theta_n+a_n\cdot s_n$

if $\dfrac{\|\theta_{n+1}-\theta_n\|}{\|\theta_n\|}<\varepsilon$ ***then stop***

end if

end for

Στο σχήμα 1 (βλέπε παράρτημα Α’.3) παρουσιάζεται η ακριβή και προσεγγιστική λύση της εξέλιξης των δύο αβέβαιων τίτλων στο χρονικό διάστημα [0,1] ύστερα από υλοποίηση σε matlab του ψευδο-κώδικα που περιγράφηκε παραπάνω.

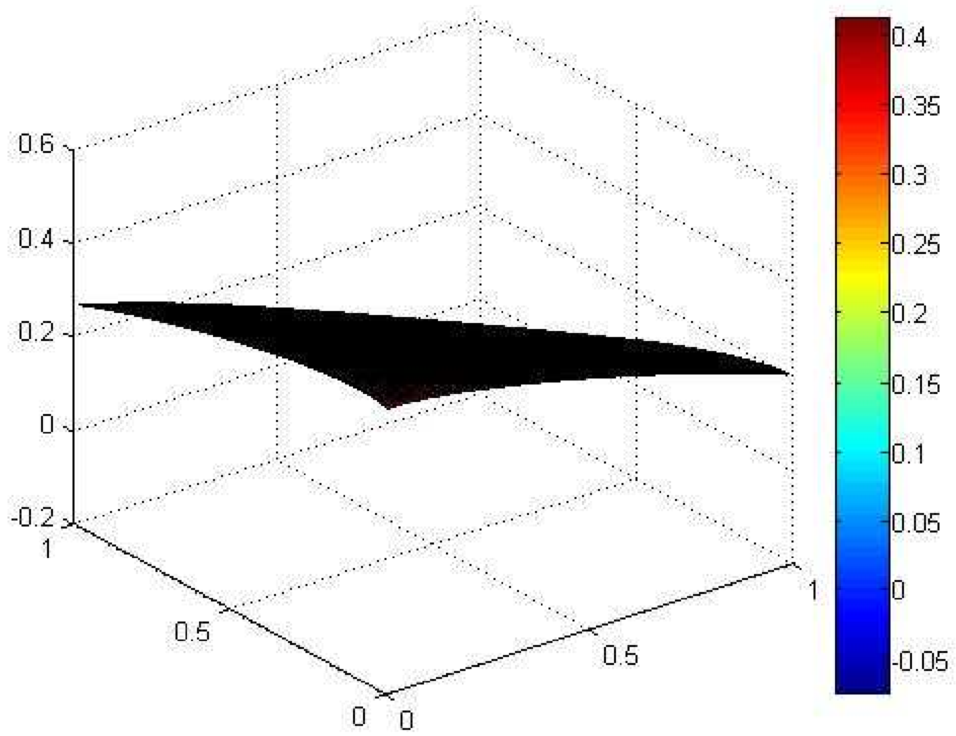


Σχήμα 1

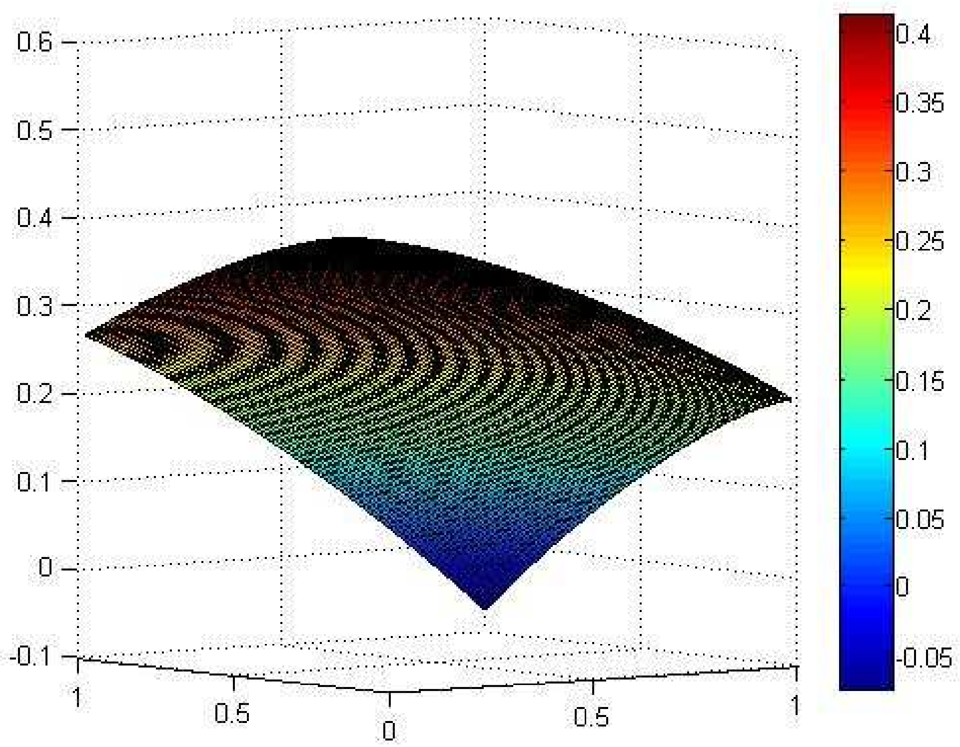
Τα διαγράμματα 2-4 (βλέπε παράρτημα Α’.6) παρουσιάζουν τρεις διαφορετικές οπτικές γωνίες της γραφικής παράστασης της αναμενόμενης ωφελιμότητας του χαρτοφυλακίου για τις διάφορες τιμές των θ_i όπου $0 < \theta_i < 1$. Η συνάρτηση ποινής που χρησιμοποιήσαμε είναι της μορφής

$$I = \ln(\theta_0) + \ln(\theta_1) + \ln(\theta_2) + \ln(1-\theta_0) + \ln(1-\theta_1) + \ln(1-\theta_2)$$

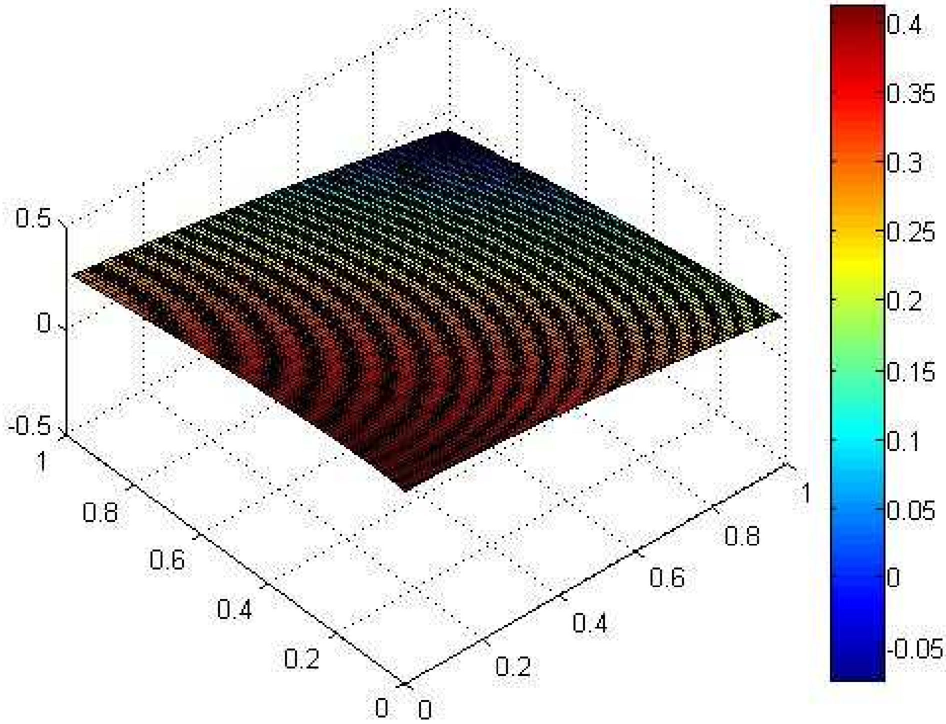
και επιλέχτηκε με βάση τα δεδομένα του προβλήματος και με τρόπο έτσι ώστε να παίρνει ακραίες τιμές στην περίπτωση που δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Η παράμετρος γ επιλέγεται κι αυτή έτσι ώστε πολλαπλασιασμένη με τη συνάρτηση ποινής να μην μεταβάλλει την τιμή της συνάρτησης ωφελιμότητας όταν τηρούνται οι περιορισμοί. Πρέπει δηλαδή στην περίπτωση που δεν παραβιάζονται οι περιορισμοί του προβλήματος να ισχύει ότι $\gamma I \to 0$.



Σχήμα 2

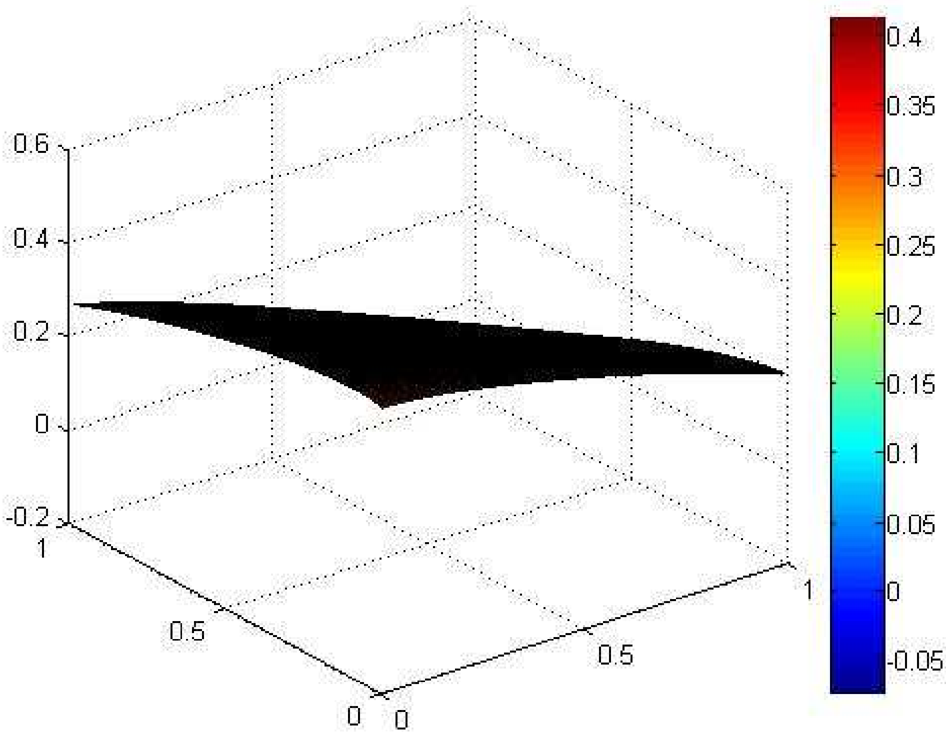


Σχήμα 3



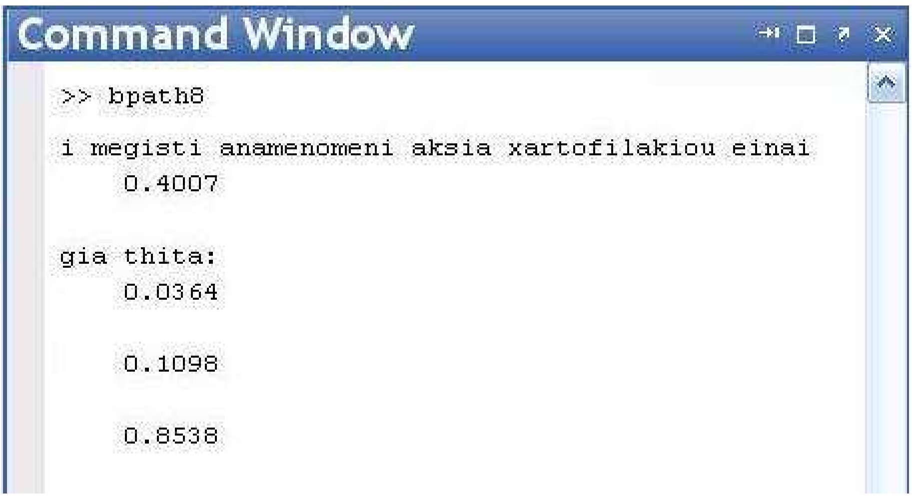
Σχήμα 4

Το γεγονός ότι η συνάρτηση ποινής δεν μεταβάλλει την τιμή της αναμενόμενης ωφελιμότητας του χαρτοφυλακίου μπορούμε εύκολα να το διαπιστώσουμε συγκρίνοντας το σχήμα 2 με το σχήμα 5 (βλέπε παράρτημα Α'.5) όπου παρουσιάζεται η συνάρτηση της αναμενόμενης ωφελιμότητας για τις διάφορες τιμές των θ_i στην οποία δεν έχει προστεθεί κάποια συνάρτηση ποινής



Σχήμα 5

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα του αλγόριθμου βαθμίδας για μια τυχαία εκτέλεση του προγράμματος.



Παράρτημα Α’

Α’.1: Κώδικας τροχιάς Brown-σχήμα 1.2

```
randn('state',100)
T=1; N=500; dt=T/N;
dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
W=cumsum(dW);
plot([0:dt:T],[0,W],'r-')
xlabel('t','FontSize',16)
ylabel('W(t)','FontSize',16,'Rotation',0)
```

Α’.2: exact and Euler-Maryuama solutions-σχήμα 1.3.2

```
lambda=2; mu=1; Xzero=1;
T=1; N=2^8; dt=T/N;
M=3;
sfalma=zeros(3,3);
for s=1:M
    dW=sqrt(dt)*randn(1,N);
    W=cumsum(dW);
    Xtrue=Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)*([dt:dt:T])+mu*W);
    subplot(2,1,1),plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'m-'), hold on

    Xem=zeros(1,N);
    Xtemp=Xzero;
    for j=1:N
        Winc=dW(j);
        Xtemp=Xtemp+dt*lambda*Xtemp+mu*Xtemp*Winc;
        Xem(j)=Xtemp;
    end
    subplot(2,1,1),plot([0:dt:T],[Xzero,Xem],'c-'),hold on
    xlabel('t','FontSize',12)
    ylabel('S','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment',
    'right')
    legend('3 individual paths','euler-maruyama solution',2)
    grid on

    sfalma(s,1)=Xtrue(N);
    sfalma(s,2)=Xem(N);
    sfalma(s,3)=Xtrue(N)-Xem(N);
    subplot(2,1,2),bar(sfalma)
    legend('Sem(T)','Strue(T)','error')
    colormap cool
    grid on
end
```

Α’.3: portfolio optimization

```
vita=[0.4 0.5];
sigma=[2 1 1; 1 2 1]; %pinakas 2x3
xzero=[2 1];
sigma_tet=sigma.^2;

T=1; N=2^8; dt=T/N;
ar=0.02; %epitokio
```

```
w=20000;
Xemar=zeros(1,N);
f=zeros(w,1); %pinakas pou tha periexei tin timi tis metoxis1 ti
stigmi T gia kathe w
g=zeros(w,1); %pinakas pou tha periexei tin timi tis metoxis2 ti
stigmi T gia kathe w
r=zeros(w,1); %pinakas pou tha periexei tin timi tou omologou ti
stigmi T gia kathe w

dW=zeros(3,N);
W=zeros(3,N);

akrivi_lisi=zeros(2,N);
liseis=zeros(2,N);

% upologismos kinisis brown
for m=1:w

 for i=1:2
  dW(i,1)=sqrt(dt)*randn;
  W(i,1)=dW(i,1);

    for j=2:N
     dW(i,j)=sqrt(dt)*randn;
     W(i,j)=W(i,j-1)+dW(i,j);
    end

 end

%akrivi lisi tis eksisosis tou omologou
Xemar=exp(ar*[dt:dt:T]);
r(m,1)=Xemar(1,N);

%upologismos akrivis liseis
for i=1:2
Xtrue=xzero(i)*exp((vita(i)-
0.5*(sum(sigma_tet(i,:))))*([dt:dt:T])+(sigma(i,1)*W(1,:)+sigma(i,2)*
W(2,:)+sigma(i,3)*W(3,:)));
akrivi_lisi(i,:)=Xtrue;
  if m==1
   plot([0:dt:T],[xzero(i),Xtrue],'b-'),hold on
  end

end

%upologismos lisis me ti methodo euler-maruyama
for i=1:2
  Xem=zeros(1,N);
  Xtemp=xzero(i);
   for j=1:N
    Winc=dW(1,j);
    Winc2=dW(2,j);
    Winc3=dW(3,j);

Xtemp=Xtemp+dt*vita(i)*Xtemp+(sigma(i,1)*Winc+sigma(i,2)*Winc2+sigma(
i,3)*Winc3)*Xtemp;
    Xem(j)=Xtemp;
    liseis(i,j)=Xem(j);
   end
```

```
   if m==1
     plot([0:dt:T],[xzero(i),Xem],'r-*'),hold on
   end
end

f(m,1)=liseis(1,N);
g(m,1)=liseis(2,N);

end

xlabel('t','FontSize',12)
ylabel('S','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

xmin=0;
ymin=0;
dx=0.01;
dy=0.01;
x=zeros(99,1);
y=zeros(99,1);
U=zeros(99,99);
Y=zeros(99,99);
for i=1:99
    for j=1:99
      x(i)=xmin+dx*i;
      y(j)=ymin+dy*j;
      z=1-x(i)-y(j);

      U(i,j)=maxG(x(i),y(j),z,f,g,r);
      Y(i,j)=maxGpoini(x(i),y(j),z,f,g,r);
     end
 end

figure
surf(x,y,U)
colorbar

figure
surf(x,y,Y)
colorbar

x=0.32;
y=0.02;
z=0.66;

% algorithmos vathmidas
precision=0.00001;

Xold1=0.01;
Xold2=0.01;
Xold3=0;

Xnew1=x;
Xnew2=y;
Xnew3=1-Xnew1-Xnew2;


yui=maxGpoini(Xnew1,Xnew2,Xnew3,f,g,r)
```

```
while(abs(maxGpoini(Xnew1,Xnew2,Xnew3,f,g,r)-
maxGpoini(Xold1,Xold2,Xold3,f,g,r))/abs(maxGpoini(Xold1,Xold2,Xold3,f
,g,r)))>precision

    Xold1=Xnew1;
    Xold2=Xnew3;
    Xold3=1-Xold1-Xold2;

    grd=gradientG(Xold1,Xold2,Xold3,f,g,r);

    Xnew1=Xold1-0.001*up(1);
    Xnew2=Xold2-0.001*up(2);
    Xnew3=1-Xnew1-Xnew2;

end
xfinal1=Xnew1;
xfinal2=Xnew2;
xfinal3=Xnew3;
aksia=maxGpoini(xfinal1,xfinal2,xfinal3,f,g,r);

disp('i megisti anamenomeni aksia xartofilakiou einai')

disp(aksia)
disp('gia thita:')

disp(xfinal1)
disp(xfinal2)
disp(xfinal3)
```

Α'.4: υπορουτίνα-υπολογισμός gradient

```
function [grandG] = gradientG(w1,w2,w3,fw,gw,rw)
% upologismos gradient
grandG=zeros(1,3);
w=max(size(fw));
t1=zeros(w,1);
t2=zeros(w,1);
t3=zeros(w,1);

for m=1:w
 t1(m,1)=0.4*fw(m,1)*exp(-0.4*(fw(m,1)*w1+gw(m,1)*w2+rw(m,1)*w3));
end
grandG(1)=sum(t1)/w;

for m=1:w
   t2(m,1)=0.4*gw(m,1)*exp(-0.4*(fw(m,1)*w1+gw(m,1)*w2+rw(m,1)*w3));
end
grandG(2)=sum(t2)/w;

for m=1:w
   t3(m,1)=0.4*rw(m,1)*exp(-0.4*(fw(m,1)*w1+gw(m,1)*w2+rw(m,1)*w3));
end
grandG(3)=sum(t3)/w;

end
```

Α’.5: υπορουτίνα-υπολογισμός αναμενόμενης ωφελιμότητας

```
% anamenomeni timi sinartisis ofelimotitas xartofilakiou
function mtuV = maxG(w1,w2,w3,fw,gw,rw)

w= max(size(fw));
axiaV=zeros(w,1);
utilityV=zeros(w,1);

for m=1:w
   axiaV(m)= w1*fw(m)+w2*gw(m)+w3*hw(m);
   utilityV(m)=1-exp(-0.4*axiaV(m));
end

mtuV=sum(utilityV)/w;

end
```

Α’.6: υπορουτίνα-υπολογισμός αναμενόμενης ωφελιμότητας (με ποινή)

```
% anamenomeni timi sinartisis ofelimotitas xartofilakiou me sinartisi
% poinis
function mtuVP = maxGpoini(w1,w2,w3,fw,gw,rw)

w= max(size(fw));
axiaVP=zeros(w,1);
utilityVP=zeros(w,1);

poini=log(w1)+log(w2)+log(1-w1)+log(1-w2);
for m=1:w
   axiaVP(m)= w1*fw(m)+w2*gw(m)+w3*rw(m);
   utilityVP(m)=1-exp(-0.4*axiaVP(m));
end

mtuVP=(sum(utilityVP)/w)+0.0001*poini;

end
```

Βιβλιογραφία

[1] Graduate Texts in Mathematics, Ioannis Karatzas & Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, second edition ,Springer

[2] Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι: Εισαγωγή στη στοχαστική Ανάλυση, Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2 Φεβρουαρίου 2003

[3] Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Τόμος ΙΙ: Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, πανεπιστήμιο Αιγαίου, 30 Ιανουαρίου 2004

[4] Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά, ΙΩ. Σπηλιώτης, εκδόσεις Συμεών

[5] Numerical Methods in Finance, A MATLAB-based Introduction, Paolo Brandimarte, Second edition

[6] Nonlinear Equations and Optimization Methods, A. N. Yannacopoulos (AUEB), November 11 ,2008

[7] An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations, Desmond J. Higham, Siam Review

[8] Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations, Peter E. Kloeden & Eckhard Platen, Springer

[9] An Introduction to Optimization, Edwin K. P. Chong & Stanislaw H. Zak, second edition

[10] Bayen Steepest Descent Lecture.pdf

[11] Applied Probability and Stochastic Processes, Richard M. Feldman & Ciriaco Valdez-Flores, second edition, Springer

[12] Advanced Statistics from an Elementary Point of View, Michael J. Panik

[13] An Introduction to Utility Theory, John Norstad, March 29, 1999

[14] An Introduction to Portfolio Theory, John Norstad, April 10, 1999

[15] An Elementary Introduction To Mathematical Finance, S.Ross

[16] Χρήση Δικαιωμάτων Προαίρεσης στη Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων Συνταξιοδοτικών Ταμείων, Ν.Φράγκος, Α.Γιαννακόπουλος, Σ.Βρόντος.

[17] Application of Modern Control Theory in Portfolio Optimization, Chang Hwan Sung, December 2006