ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΟΝΟΤΟΝΟΥ ΤΥΠΟΥ ΚΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διπλωματική Εργασία

Εύας Καλλίτση

για την απόκτηση του Μ.Δ.Ε. στις "*Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες*"

Επιβλέπων: Γ.Σμυρλής, Επίκ.Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμώς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γ. Σμυρλή για τη σχολαστική ενασχόλησή του με την περίπτωσή μου και για την αδιάκοπη βοήθεια, καθοδήγηση, στήριξη και συμπαράστασή του κατά τη συγγραφή της, αφού διαφορετικά θα ήταν κυριολεκτικά αδύνατη η διεκπεραίωσή της.
Επίσης ευχαριστώ πάρα πολύ τον καθηγητή μου Δ. Κραββαρίτη για τη μετάδοση των πολύτιμων μαθημάτων του τα οποία με έσπρωξαν στην κατεύθυνση των μαθηματικών, για τις συμβουλές του σχετικά με την εργασία και για τη βοήθεια που προσέφερε στην προετοιμασία μου, καθώς και για την καταλυτική συνδρομή του προς εμένα όλα τα χρόνια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά στην παρουσίαση των κυριότερων θεωρημάτων σταθερού σημείου και ορισμένων βασικών σημείων της θεωρίας μονότονων και ψευδομονότονων τελεστών και διαρθρώνεται σε τρία κεφάλαια:
Στο 1ο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια προπαρασκευαστικά θεωρητικά στοιχεία αναφορικά με τους χώρους Sobolev. Αρχικά δίνεται ο ορισμός των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και των χώρων L^p. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στο Μεταβολικό Λήμμα και στην έννοια της γενικευμένης παραγώγου συναρτήσεων, με την παράθεση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Ακολούθως δίνονται οι ορισμοί των χώρων Sobolev $W^{1,p}$ και $W_0^{1,p}$ σε ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^N$. Παρουσιάζεται η ανισότητα Poincaré και η απόδειξή της, καθώς και το βασικό θεώρημα ενσφήνωσης του Sobolev. Τέλος, δίνονται κάποια θεωρητικά στοιχεία σχετικά με την 1η ιδιοτιμή της p-λαπλασιανής, τα οποία χρησιμοποιούνται σε μία εφαρμογή του 3ου κεφαλαίου.

Στο 2ο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση ορισμένων θεωρημάτων σταθερού σημείου τα οποία βρίσκουν ευρεία χρήση στις εφαρμογές. Αρχικά διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, το οποίο αναφέρεται σε συστολικές απεικονίσεις σε χώρους Banach, καθώς και το θεώρημα Browder-Göhde-Kirk σχετικό με non-expansive απεικονίσεις ορισμένες πάνω σε χώρους Hilbert. Στη συνέχεια διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα σταθερού σημείου του Brower, το οποίο αναφέρεται σε συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^N$, καθώς και τέσσερα πορίσματα-επεκτάσεις του θεωρήματος αυτού. Κατόπιν διατυπώνονται και αποδεικνύονται το θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder, το οποίο αφορά σε συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε κυρτά και συμπαγή σύνολα χώρων Banach, και η αρχή των Leray-Schauder. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού δίνεται μία εφαρμογή του θεωρήματος σταθερού σημείου του Schauder σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Στο 3ο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός της μονοτονίας σε μονότιμους τελεστές με παράθεση συγκεκριμένων παραδειγμάτων, όπως η προβολική απεικόνιση, η Gateaux παράγωγος κυρτής συνάρτησης και η αρνητική p-λαπλασιανή. Ορίζεται επίσης η μονοτονία σε πλειονότιμους τελεστές και δίνονται παραδείγματα τέτοιων τελεστών, όπως το υποδιαφορικό και η δυϊκή απεικόνιση. Ακολούθως διατυπώνονται και αποδεικνύονται ορισμένες προτάσεις σχετικές με τους μονότονους τελεστές, δίνεται ο ορισμός των μεγιστικά μονότονων τελεστών, αποδεικνύονται ορισμένες βασικές ιδιότητες της δυϊκής απεικόνισης κι επιπλέον, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα Hille-Yosida. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την έννοια του ψευδομονότονου τελεστή που εισήγαγε ο H. Brezis και επισημαίνουμε τη διαφορά της από την έννοια του μονότονου τελεστή. Μετά από την απόδειξη μίας σειράς προτάσεων οι οποίες συσχετίζουν την έννοια της ψευδο-μονοτονίας με διάφορες έννοιες συνέχειας των τελεστών, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα «επί» για ψευδομονότονους, φραγμένους και πιεστικούς τελεστές σε διαχωρίσιμους χώρους Banach και παρουσιάζονται ορισμένα πορίσματα του θεωρήματους αυτού. Το κεφάλαιο κλείνει με μία εφαρμογή της θεωρίας των ψευδομονότονων τελεστών σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών στο οποίο υπεισέρχεται η p-λαπλασιανή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ SOBOLEV

1.1 Συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό. Με $|\cdot|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue πάνω στο Ω. Ορίζουμε το σύνολο $C(\Omega)$:

$C(\Omega)$=$\{u : \Omega \to \mathbb{R}/u$ συνεχής$\}$

και έστω $u \in C(\Omega)$. **Φορέας** της u είναι το σύνολο:

$supp(u)$=$\overline{\{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}} \subset \bar{\Omega}$.

Εν συνεχεία ορίζονται τα παρακάτω σύνολα:

$C_c(\Omega)$=$\{u \in C(\Omega)$: $supp(u)$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega\}$,

$C^k(\Omega)$=$\{u \in C(\Omega)$: όλες οι μερικές παράγωγοι της u μέχρι k τάξης για $1 \leq k < \infty$ είναι συνεχείς$\}$,

$C_c^k(\Omega)$= $C_c(\Omega) \cap$ $C^k(\Omega)$, $\quad k \geq 1$.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω Ω=$(-1,1)$ και $0<\varepsilon<1$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$u(x)=\begin{cases} exp\left(\frac{1}{x^2-\varepsilon^2}\right) & ,\text{για } |x| < \varepsilon \\ 0 & ,\ \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τότε $supp(u)$=$[-\varepsilon,\varepsilon]$ και $u \in C_c^\infty$(-1,1).

<u>Πρόταση 1</u>

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Είναι γνωστό ότι $\bar{\Omega}$=$\Omega \cup \partial\Omega$.
Θεωρούμε μία συνάρτηση $u \in C_c(\Omega)$ και τη συνάρτηση $\bar{u}$: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, με

$$\bar{u}(\mathrm{x})=\begin{cases} u(x) & ,x \in \Omega \\ 0 & ,x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Τότε $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_0 \in \bar{\Omega}$.
Αν $x_0 \in \Omega$, $\bar{u}(x_0)$=$u\,(x_0)$ και άρα η $\bar{u}$ είναι συνεχής στο x_0.

Αν $x_0 \in \partial\Omega$, επιλέγουμε δ τέτοιο ώστε $0 < \delta < d(K, \partial\Omega)$, όπου K=$suppu$ και εξετάζουμε το σύνολο τιμών της $\bar{u}(x)$ για $x \in B(x_0, \delta) \cap \bar{\Omega}$.
Αν $x \in \partial\Omega$, $\bar{u}(x) = 0$.
Αν $x \in B(x_0, \delta) \cap \Omega$, τότε επειδή $\delta < d(K, \partial\Omega)$, έχουμε $x \notin K$ και άρα $\bar{u}(x) = 0$.
Συνεπώς $\bar{u}(x) = 0$ για $x \in B(x_0, \delta) \cap \bar{\Omega}$ και άρα η $\bar{u}$ είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \bar{\Omega}$.
Άρα $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$. □

Ταυτίζουμε κάθε $u \in C_c(\Omega)$ με την επέκτασή της $\bar{u}$ στο $\bar{\Omega}$, η οποία μηδενίζεται στο $\partial\Omega$. Ισχύει επίσης ότι

$$\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty} \subset C(\Omega).$$

1.2 Οι χώροι $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό.

Α) Οι χώροι $L^p(\Omega)$
Για $p \in [1, +\infty)$ ορίζεται ο χώρος $L^p(\Omega)$ ως εξής:

$$L^p(\Omega) = \{u: \Omega \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη ώστε } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

με τη νόρμα:

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Ο $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

Β) Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$
Μία συνάρτηση $u: \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ουσιωδώς φραγμένη**, αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, ώστε $|u(x)| \leq \alpha$, σχεδόν $\forall\, x \in \Omega$.
Ορίζεται ο χώρος:

$$L^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη, ουσιωδώς φραγμένη}\}$$

με τη νόρμα:

$$\|u\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : \alpha \text{ ουσιώδες φράγμα της } u\}.$$

Ο $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

<u>Πρόταση 2</u>
Ισχύει $C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, για $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη
Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leq p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ είναι άμεση).
Έστω $u \in C_c(\Omega)$ και $K = supp u$. Είναι
$\int_{\Omega} |u|^p \leq |K| sup_{x \in K} |u(x)|^p < \infty$.
Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή το K είναι συμπαγές και άρα $|K| < \infty$. □

Σχόλιο:
Η προϋπόθεση να έχει η u συμπαγή φορέα μέσα στο Ω είναι απαραίτητη. Π.χ. αν $u(x) = \frac{1}{x}$ με $x \in (0,1)$, τότε u συνεχής στο $(0,1)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ αποκλίνει. Άρα $u \notin L^1(\Omega)$.

Θεώρημα 1 (Lusin)
Αν $1 \leq p < \infty$, τότε ο χώρος $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ ως προς την L^p −νόρμα.
Για μια απόδειξη του Θ.1 βλ. [1, Θ.IV.12, σελ. 87].

Το Θεώρημα 1 δεν ισχύει για $p = \infty$ (βλ. Παράδειγμα 2).

Θεώρημα 2
Αν $1 \leq p < \infty$, τότε ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ ως προς την L^p −νόρμα.
Για μια απόδειξη του Θ.2 βλ. [1, Πόρισμα IV.23, σελ. 101].

Παράδειγμα 2
Θα βρούμε συνάρτηση $u \in L^\infty(\Omega)$ που δεν ταυτίζεται σχεδόν παντού με μία συνεχή συνάρτηση, και άρα δεν ανήκει στο $\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$.
Θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $\Omega = (-1,1)$ και τη συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (-1,0]. \end{cases}$$

Έστω ότι υπάρχει $g \in C(-1,1)$ έτσι ώστε

$$|E| = 0, \text{ όπου } E = \{x : u(x) \neq g(x)\}. \tag{1}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$V = \{x \in (-1,1) : g(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 1\}.$$

Επειδή η g είναι συνεχής, το σύνολο V είναι ανοικτό. Ισχύει

$$V \subset E \Rightarrow |V| = 0 \Rightarrow V = \emptyset.$$

Άρα

$$g\big((-1,1)\big) \subset \{0,1\} \Rightarrow g \equiv 0 \text{ ή } g \equiv 1 \; \sigma\tau o \; (-1,1).$$

Όμως λόγω της (1) οι u και g είναι σχεδόν παντού ίσες. Συμπεραίνουμε ότι $u = 0$ ή $u = 1$ σχεδόν παντού, άτοπο, διότι η u λαμβάνει και τις δύο τιμές σε διαστήματα μη μηδενικού μέτρου.

1.3 Μεταβολικό Λήμμα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ ανοικτό και u συνάρτηση Lebesgue ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, δηλαδή $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι:

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \,.$$

Τότε $u(x) = 0$ σχεδόν παντού.

1.4 Η έννοια της γενικευμένης παραγώγου

Αρχικά παραθέτουμε ένα κίνητρο για την αναζήτηση της γενικευμένης παραγώγου μιας συνάρτησης.
Αναζητούμε συνάρτηση u που να ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών, για μια δεδομένη $f \in C[0,1]$:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & ,x \in [0,1] \\ \qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Έστω $u \in C^2([0,1])$ μία κλασική λύση του παραπάνω προβλήματος.
Τότε, για κάθε $\varphi \in C_c^1(0,1)$ (με $\varphi \; = \bar{\varphi}$ και άρα $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$) ισχύει:

$$-u''(x)\varphi(x) + u(x)\varphi(x) = f(x)\varphi(x), \qquad x \in [0,1]$$
$$\Rightarrow -\int_0^1 u''(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx \tag{2}$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση η (2) δίνει:

$$-[u'\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx. \tag{3}$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται λόγω συμπαγούς φορέα της φ μέσα στο (0,1) και άρα η (3) γίνεται:

$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega).$ (4)

Μία συνάρτηση u με $u \in L^1([0,1])$ και $u' \in L^1([0,1])$ που ικανοποιεί την (4) ονομάζεται **ασθενής λύση** του παραπάνω προβλήματος συνοριακών τιμών.

Ορισμός 1

Έστω ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $u \in L^1_{loc}(I)$, δηλαδή η u είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του I. Η συνάρτηση $g \in L^1_{loc}(I)$ ονομάζεται **γενικευμένη παράγωγος** της u, αν $\forall \varphi \in C_c^1(I)$ ισχύει:

$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi$. (5)

Πρόταση 3

Έστω $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(I)$ που ικανοποιούν την (5). Τότε $g_1(x) = g_2(x)$ σχεδόν παντού στο I.

Απόδειξη

Από την υπόθεση, $\forall \varphi \in C_c^1(I)$ ισχύει:

$\int_I u\varphi' = -\int_I g_1\varphi$ (6)

και

$\int_I u\varphi' = -\int_I g_2\varphi$. (7)

Αν αφαιρέσουμε τις (6), (7) κατά μέλη προκύπτει:

$\int_I (g_1 - g_2)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \ \Rightarrow g_1 - g_2 = 0$ σχεδόν παντού (Μεταβολικό Λήμμα). □

Άρα, εάν η $u \in L^1_{loc}(I)$ έχει γενικευμένη παράγωγο, τότε αυτή είναι μοναδική σχεδόν παντού και συμβολίζεται με u'.

Παράδειγμα 3

Έστω συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε **κάθε** $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$. Τότε η u' είναι και γενικευμένη παράγωγος της u.

Απόδειξη

Θεωρούμε διάστημα $I = (\alpha, b)$ με $-\infty < \alpha < b < \infty$ και συνάρτηση u παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in I$ με $u' \in L^1(I)$. Έστω $\varphi \in C_c^1(I)$. Τότε η συνάρτηση $u\varphi$ είναι παραγωγίσιμη, $\varphi(\alpha) = \varphi(b) = 0$ και λόγω του **γενικευμένου Θεωρήματος του Διαφορικού Λογισμού** (βλ. [3, Theorem 7.21, p.149]) ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(u\varphi)' = (u\varphi)(b) - (u\varphi)(\alpha) = 0 - 0 = 0.$$

Επομένως

$$\int_{\alpha}^{b}(u'\varphi + u\varphi') = 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{b} u\varphi' = -\int_{\alpha}^{b} u'\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1\,(I).$$

Συνεπώς η u' είναι γενικευμένη παράγωγος της u. □

<u>Παράδειγμα 4</u>

Έστω η συνάρτηση $u(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $I = (-1,1)$. Τότε η γενικευμένη παράγωγος της u είναι η

$$g(x) = \begin{cases} -1, x \in (-1,0] \\ \ 1, x \in (0,1). \end{cases}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varphi \in C_c^1(-1,1)$. Τότε $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ και

$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = \int_{0}^{1} x\varphi'(x) - \int_{-1}^{0} x\varphi'(x) = [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_{-1}^{0} +$ $\int_{-1}^{0} \varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx - \int_{-1}^{0} g(x)\varphi(x)dx =$ $-\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx.$ □

<u>Παράδειγμα 5</u>

Η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} \ 1, x \in (0,1) \\ -1, x \in (-1,0] \end{cases}$$

δεν έχει γενικευμένη παράγωγο.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η u έχει γενικευμένη παράγωγο $u' \in L_{loc}^1(-1,1)$. Τότε για κάθε $\varphi \in C_c^1((-1,1))$ ισχύει:

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Έστω πραγματικός αριθμός $\varepsilon \in (0,1)$. Επιλέγουμε συνάρτηση $\varphi_\varepsilon \in C_c^1((-1,1))$ τέτοια ώστε να ισχύουν

$$supp(\varphi_\varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \ \ \varphi_\varepsilon(x) \in [0,1], \ \ \forall x \in [0,1] \ \text{ και } \ \varphi_\varepsilon(0) = 1.$$

[Για την κατασκευή της φ_ε εργαζόμαστε κάνοντας χρήση *ομαλοποίησης με συνέλιξη* ως εξής: θεωρούμε τη συνάρτηση $J: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με

$$J(t) = \begin{cases} exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right), & |t| < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι $J \in C^\infty(\mathbb{R})$, ενώ προφανώς $supp(J) = [-1, 1]$.
Στη συνέχεια θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ και

$$J_\varepsilon(t) = \frac{1}{\delta \int_{-1}^{1} J(z)dz} J\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, $J_\varepsilon \in {C_c}^\infty(\mathbb{R})$, $supp(J_\varepsilon) = [-\delta, \delta] \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ και $\int_{-\delta}^{\delta} J_\varepsilon(t)dt = 1$.
Τέλος, θέτουμε

$$\varphi_\varepsilon(x) = [J_\varepsilon * X_{(-\delta,\delta)}](x) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t)\, X_{(-\delta,\delta)}(x - t)dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} J_\varepsilon(t)dt\,, x \in (-1,1).$$

Είναι $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(-1,1)$,

$$supp(\varphi_\varepsilon) \subset supp(J_\varepsilon) + suppX_{(-\delta,\delta)} \subset (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \varphi_\varepsilon(0) = \int_{-\delta}^{\delta} J_\varepsilon(t)dt = 1$$

και $\forall\, x \in (-1, 1)$,

$$0 \le \varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t)\, X_{(-\delta,\delta)}(x - t)dt \le \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t)\, dt = 1\,.$$

Είναι

$$\int_{-1}^{1} u(x){\varphi_\varepsilon}'(x)dx = -\int_{-1}^{1} u'(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx.$$

Άρα

$$-\int_{-1}^{0} {\varphi_\varepsilon}'(x)dx + \int_{0}^{1} {\varphi_\varepsilon}'(x)dx = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$$
$$\Rightarrow -\varphi_\varepsilon(0) + \varphi_\varepsilon(-1) + \varphi_\varepsilon(1) - \varphi_\varepsilon(0) = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\varphi_\varepsilon(x)dx.$$

Αλλά $\varphi_\varepsilon(-1) = \varphi_\varepsilon(1) = 0$. Επομένως

$$2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\varphi_\varepsilon(x)dx = \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u'(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right| \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)||\varphi_\varepsilon(x)|\, dx \le \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u'(x)|.$$

Επειδή η u' είναι ολοκληρώσιμη, το τελευταίο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 καθώς $\varepsilon \to 0$. Άρα καταλήξαμε σε άτοπο. □

<u>Ορισμός 2</u>
Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ με στοιχεία $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.
Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Η u έχει **γενικευμένη μερική παράγωγο** ως προς τη μεταβλητή x_j, $1 \leq j \leq N$, αν υπάρχει συνάρτηση $g_j \in L^1_{loc}(\Omega)$, έτσι ώστε $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ισχύει

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int g_j(x) \varphi(x) dx.$$

Συμβολίζουμε: $g_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Η g_j, αν υπάρχει, είναι μοναδική σχεδόν παντού λόγω του Μεταβολικού Λήμματος.

1.5 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ ορίζεται ως εξής:

$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I)$: η u έχει γενικευμένη παράγωγο $u' \in L^p(I)\}$.

Για $p = 2$, θέτουμε $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.
Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ για $1 \leq p < \infty$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

Εναλλακτικά εφοδιάζεται με την ισοδύναμη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p{}^p + \|u'\|_p{}^p)^{1/p}.$$

Ο χώρος $W^{1,\infty}$ για $p = \infty$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

Ο χώρος $W^{1,2}(I) = H(I)$ είναι χώρος Hilbert και εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2} \text{ , με } u,v \in H^1.$$

Η αντίστοιχη νόρμα του H^1 είναι η

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2{}^2 + \|u'\|_2{}^2\right)^{1/2}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές βασικές ιδιότητες των χώρων $W^{1,p}(I)$.

α) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι χώρος Banach για $1 \leq p \leq \infty$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω (u_n) ακολουθία Cauchy στον $W^{1,p}(I)$. Τότε, οι (u_n) και (u_n') είναι ακολουθίες Cauchy στον L^p. Άρα υπάρχουν συναρτήσεις $u, g \in L^p$ τέτοιες ώστε $u_n \to u$ και $u_n{}' \to g$ στον L^p.

Επιλέγουμε $\varphi \in C_c^1(I)$. Είναι:

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u_n{}' \varphi. \tag{8}$$

Επειδή

$$\left|\int_I u_n\varphi' - \int_I u\varphi'\right| \leq \int_I |u_n - u||\varphi'| = \int_{supp\varphi'} |u_n - u||\varphi'| \leq_{Hölder}$$

$$\leq \|u_n - u\|_p \left(\int_{supp\varphi'} |\varphi'|^q\right)^{1/q} \to 0\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

είναι

$$\int_I u_n \varphi' \to \int_I u\varphi'. \tag{9}$$

Ομοίως

$$\int_I u_n{}' \varphi \to \int_I g\varphi. \tag{10}$$

Οι (8), (9) και (10) δίνουν:

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad , \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Άρα $g = u'$ οπότε $u \in W^{1,p}(I)$ και $\|u_n - u\|_{1,p} \to 0$. □

β) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

<u>Απόδειξη</u>

Ο χώρος γινομένου $E = L^p(I) \times L^p(I)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\left\|(u, v)\right\| = \left(\|u\|_p{}^p + \|v\|_p{}^p\right)^{1/p}$$

είναι ανακλαστικός. Ο τελεστής $T: W^{1,p}(I) \to E$ που ορίζεται με $T(u) = (u, u')$ είναι ισομετρία από το χώρο Banach $W^{1,p}(I)$ στον E. Άρα ο $T\,(W^{1,p}(I))$ είναι κλειστός υπόχωρος του E, οπότε ο $T(W^{1,p}(I))$ είναι ανακλαστικός και συνεπώς ο $W^{1,p}(I)$ είναι ανακλαστικός. □

γ) Ο $W^{1,p}(I)$ είναι διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$.

<u>**Απόδειξη**</u>

Ο χώρος γινομένου $E = L^p(I) \times L^p(I)$ είναι διαχωρίσιμος. Άρα ο $T(W^{1,p})$ είναι διαχωρίσιμος και συνεπώς ο $W^{1,p}$ είναι διαχωρίσιμος. □

<u>**Θεώρημα 3**</u>

Έστω συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ τέτοια ώστε $u = \tilde{u}$, σχεδόν παντού.

Για μια απόδειξη του Θ.3 βλ. [1, Θ. VIII.2, σελ. 169].

Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει σε ανώτερη διάσταση (βλ. Παράδειγμα 6 παρακάτω).

1.6 Χώροι Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Σε ό,τι ακολουθεί, με $(\cdot\,,\cdot)_{\mathbb{R}^N}$ συμβολίζουμε το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο και $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) :$ η u έχει γενικευμένες μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x_j}$,
$1 \leq j \leq N$, που ανήκουν στον $L^p(\Omega)\}$.

Ισοδύναμα ορίζεται ως εξής:

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) :\ \exists g_1, g_2, \dots g_N \in L^p(\Omega)$ με $\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\,\varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,
$i = 1,2,\dots,N\}$.

Ο $W^{1,p}\,(\Omega)$ είναι γραμμικός χώρος. Για $p = 2$, γράφουμε $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
Για $u \in W^{1,p}(\Omega)$ γράφουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ και } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = gradu.$$

Έστω $1 \leq p < \infty$ και $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα:

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p{}^p + \|\nabla u\|_p{}^p\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \;+\; \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} .$$

Ειδικότερα, ο χώρος $H^1(\Omega)$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v >_{1,2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx, \quad u, v \in H^1(\Omega)$$

και με την αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \;+\; \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{1/2} .$$

Για $p = \infty$, ο $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με τη νόρμα

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty.$$

<u>Πρόταση 4</u>

Ο $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ είναι χώρος Banach, διαχωρίσιμος για $1 \le p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. Ειδικότερα, ο $\left(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}\right)$ είναι χώρος Hilbert.

Ακολούθως δίνεται ο ορισμός του λείου συνόρου, ή του συνόρου κλάσης C^1.

<u>Ορισμός 3</u>

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω είναι **κλάσης C^1**, εάν τοπικά και ως προς κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, το $\partial\Omega$ είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $\varphi : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$. Επιπλέον απαιτείται το Ω να κείται «προς τη μία πλευρά» του $\partial\Omega$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = B(0,2) \backslash \partial B(0,1)$, το σύνορό του $\partial\, \Omega$ δεν είναι λείο διότι το Ω κείται «και προς τις δύο πλευρές» του $\partial\Omega$.

Ένας αυστηρότερος ορισμός του λείου συνόρου δίνεται ακολούθως:

Το $\partial\Omega$ ονομάζεται **κλάσης C^1**, αν για κάθε $z \in \partial\Omega$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_z, W_z \subseteq \mathbb{R}^N$ με $z \in V_z$, $h_z\colon V_z \to W_z$ αμφιδιαφόριση και $\eta_z \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$ ώστε

$$h_z(V_z \cap \partial\Omega) = \{(y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : y_N = \eta_z(y_1, y_2, \dots y_{N-1})\} \cap W_z$$

και

$$h_z(V_z \cap \Omega) = \{(y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : y_N > \eta_z(y_1, y_2, \dots y_{N-1})\} \cap W_z.$$

<u>Πρόταση 5</u>

Αν $u \in C^1(\Omega)$, $\partial_i u \in L^p(\Omega)$, $0 \leq i \leq N$ και το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^1, τότε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και οι γενικευμένες παράγωγοι ταυτίζονται με τις κλασικές μερικές παραγώγους.

<u>Απόδειξη</u>

Για $1 \leq i \leq N$ και $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, από τον τύπο απόκλισης προκύπτει ότι

$$\int_\Omega u\partial_i\varphi = -\int_\Omega (\partial_i u)\varphi + \int_{\partial\Omega} u\varphi v_i \, d\sigma = -\int_\Omega (\partial_i u)\varphi,$$

όπου $v = (v_i)_{i=1}^N$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο $\partial\Omega$ και $d\sigma$ το επιφανειακό μέτρο Hausdorff πάνω στο $\partial\Omega$. □

Ειδικότερα, αν το Ω είναι φραγμένο, τότε $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Πράγματι, αν $u \in C^1(\bar{\Omega})$, τότε για $i = 1, \ldots, N$, $u \in C(\bar{\Omega}), \partial_i u \in C(\bar{\Omega})$ και $C(\bar{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$. Άρα $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

<u>Παρατήρηση για τη σύγκλιση σε χώρους Sobolev</u>

Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{1,p}} u \Leftrightarrow [\|u_n - u\|_p \to 0$ και $\|\nabla u_n - \nabla u\|_p \to 0]$

β) $u_n \overset{w}{\to} u$ στον $W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u_n \overset{w}{\to} u$ στον $L^p(\Omega)$ και $\nabla u_n \overset{w}{\to} \nabla u$ στον $L^p(\Omega, R^N)$.

<u>Σχόλιο</u>

Εάν το Ω είναι διάστασης μεγαλύτερης από 1, οι συναρτήσεις των χώρων Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ **εν γένει δεν ταυτίζονται σ.π. με συνεχείς συναρτήσεις** (βλ. και Θ.3, παραγρ. 1.5). Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω

<u>Παράδειγμα 6</u>

Έστω $\gamma \in (0,1)$ και το σύνολο $\Omega = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\gamma}, & x \in \Omega \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η u δεν ταυτίζεται σχεδόν παντού με καμμία συνεχή συνάρτηση στο Ω.

Ισχύει

$$u|_{\Omega\setminus\{0\}} \in C^\infty(\Omega\setminus\{0\})$$

και για $x \in \Omega\backslash\{0\}$ και $\forall i = 1,2,\dots N$,

$$\partial_i u(x) = -\gamma \frac{x_i}{|x|^{\gamma+2}} \ .$$

Θέτουμε

$$g_i(x) = \begin{cases} \partial_i u(x), & x \in \Omega\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Για $N > 1 + \gamma$, θα δείξουμε ότι η g_i είναι γενικευμένη μερική παράγωγος της u στο Ω.
Θεωρούμε το σύνολο

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon < |x| < 1\}$$

και το σύνορό του

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(0,\varepsilon),$$

όπου $\partial B(0,\varepsilon) = \{x: {x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_N}^2 = \varepsilon^2\}$.

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (επομένως $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$). Από τον τύπο της απόκλισης προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u\partial_i\varphi = -\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_i u\varphi + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\varphi\nu_i d\sigma \ , \tag{11}$$

όπου $\nu = (\nu_i)_{i=1}^N$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο $\partial\Omega_\varepsilon$ και $d\sigma$ το επιφανειακό μέτρο Hausdorff πάνω στο $\partial\Omega_\varepsilon$. Έχουμε

$$\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\varphi\nu_i d\sigma\right| = \left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_i d\sigma + \int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_i d\sigma\right| \le \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |u|\,|\varphi||\nu_i| d\sigma \le$$
$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |u|\,|\varphi| d\sigma \le \frac{\|\varphi\|_\infty}{\varepsilon^\gamma}\sigma_N \varepsilon^{N-1} \le \|\varphi\|_\infty \sigma_N \varepsilon^{N-1-\gamma} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+, N>1+\gamma} 0.$$

Στην παραπάνω σχέση, $\sigma_N \varepsilon^{N-1}$ είναι το μέτρο Hausdorff του $\partial B(0,\varepsilon)$, όπου σ_N η επιφάνεια της μοναδιαίας $N -$ μπάλας.
Παρατηρούμε ότι

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} X_{\Omega-\{0\}}(x), \ \forall\, x \in \Omega.$$

[Πράγματι, αν $x \in \Omega\backslash\{0\}$, τότε $\forall \varepsilon \in (0,|x|)$ είναι

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) = 1 = X_{\Omega\backslash\{0\}}(x).$$

Αν $x = 0$, τότε

$$X_{\Omega_\varepsilon}(x) = 0 = X_{\Omega\setminus\{0\}}(x).]$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u\partial_i \varphi \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega\setminus\{0\}} u\partial_i\varphi = \int_\Omega u\partial_i \varphi$$

και

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_i u\varphi \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega\setminus\{0\}} \partial_i u\varphi = \int_\Omega g_i\varphi.$$

Επομένως η (11) δίνει

$$\int_\Omega u\partial_i \varphi = -\int_\Omega g_i\varphi, \ \ \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \qquad N > 1+\gamma, \qquad 1\le i\le N.$$

Για κατάλληλο p, ισχύει $g_i \in L^p(\Omega)$. Πράγματι

$$\int_\Omega |g_i|^p = \gamma\int_\Omega \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}}\right)^p \le \gamma\int_\Omega \frac{dx}{|x|^{p(\gamma+1)}}. \tag{12}$$

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση για $N = 2$ και θέτοντας $r = |x|$, $x_1 = r cos\varphi$ και $x_2 = r sin\varphi$, το β' μέλος της (12) γίνεται

$$\gamma\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{rdrd\varphi}{r^{p(\gamma+1)}} = 2\pi\gamma\int_0^1 \frac{dr}{r^{p(\gamma+1)-1}} < \infty,$$

για

$$p(\gamma+1)-1 < 1 \Leftrightarrow p(\gamma+1) < 2 \Leftrightarrow p < \frac{2}{\gamma+1}.$$

Γενικά, το β' μέλος της (12) γράφεται

$$\gamma\sigma_N\int_0^1 \frac{r^{N-1}dr}{r^{p(\gamma+1)}} = \gamma\sigma_N\int_0^1 \frac{dr}{r^{p(\gamma+1)-N+1}} < \infty,$$

για $p(\gamma+1) < N \Leftrightarrow p < \frac{N}{\gamma+1}$.

Συνοψίζοντας, αν $1 < p < \frac{N}{\gamma+1}$, τότε $u \in W^{1,p}(\Omega) \backslash C(\Omega)$. □

1.7 Ο χώρος Sobolev $\boldsymbol{W_0^{1,p}(\Omega)}$, $\boldsymbol{\Omega \subseteq \mathbb{R}^N}$, $\boldsymbol{1 \leq p \leq \infty}$.

Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστότητα του χώρου $C_c^1(\Omega)$ στον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$. Δηλαδή,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι επίσης πυκνός στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Άρα ισοδύναμα:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}.$$

Δηλαδή, για μία συνάρτηση u που ανήκει στον $W^{1,p}(\Omega)$ ισχύει:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\Leftrightarrow\; \exists\, (u_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega) : \; u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{1,p}} u.$$

Ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $W^{1,p}(\Omega)$. Εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_{1,p}$ είναι χώρος Banach, διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.
Για $p = 2$, ο $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v >_{1,2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx .$$

Με δεδομένο ότι μία συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται σχεδόν παντού, οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι χονδρικά συναρτήσεις που μηδενίζονται στο σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ (βλ. και Θ.4 παρακάτω).

<u>Σχόλιο</u>
Όταν $\Omega = \mathbb{R}^N$, αποδεικνύεται ότι $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Όταν το Ω είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, οι χώροι $W_0^{1,p}(\Omega)$ και $W^{1,p}(\Omega)$ δεν ταυτίζονται εν γένει.

Παράδειγμα 7

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1. Επιλέγουμε $\xi = (\xi_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ με $|\xi| = 1$. Θέτουμε

$$u(x) = exp\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i x_i\right).$$

Τότε, $u \in C^{\infty}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ και $\Delta u = u$. Από τον τύπο του Green,

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi = -\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla\varphi), \ \ \forall\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} u\varphi + \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla\varphi) = 0 \Rightarrow$$
$$< u, \varphi >_{1,2} = 0, \quad \forall\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \ \ \Rightarrow \ u \notin W_0^{1,p}(\Omega).$$

Θεώρημα 4

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως C^1. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ με $1 \leq p < \infty$. Ισχύει το ακόλουθο:

$$u = 0 \ \text{ στο } \ \Gamma = \partial\Omega \ \ \Leftrightarrow \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Για μια απόδειξη του Θ.4 βλ. [1, Θ.IX.17, σελ. 234].

1.8 Η ανισότητα Poincaré

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό, φραγμένο και $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από τα Ω και p, τέτοια ώστε:

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την ανισότητα αρχικά στην περίπτωση που το Ω είναι ανοικτό τετράγωνο, δηλαδή $\Omega = (-\alpha, \alpha)^N$, με $\alpha > 0$ και $N \geq 1$.

- Για $N = 1$, $\Omega = (-\alpha, \alpha)$. Θεωρώ συνάρτηση $u \in C_c^{\infty}(-a, a)$. Για κάθε $x \in (-a, a)$ ισχύει:

$$u(x) - u(-a) = \int_{-a}^{x} u'(t)\, dt.$$

Επειδή $u \in C_c^{\infty}(-a, a)$, $u(-a) = 0$. Άρα

$$|u(x)| = \left|\int_{-a}^{x} u'(t)\, dt\right| \leq \int_{-a}^{x} |u'(t)| dt \leq^{(x<a)} \int_{-a}^{a} |u'(t)| dt = \int_{-a}^{a} |u'(t)| \cdot 1 dt \leq$$

$\leq \left(\int_{-a}^{a}|u'(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_{-a}^{a} 1^q\,dt\right)^{1/q} = \|u'\|_p (2a)^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$

Άρα

$$|u(x)|^p \leq 2a^{p/q}\|u'\|_p{}^p \Rightarrow \int_{-a}^{a}|u(x)|^p dx \leq (2a)^{p/q+1}\|u'\|_p{}^p = (2a)^p\|u'\|_p{}^p$$
$$\Leftrightarrow \|u\|_p \leq 2a\|u'\|_p, \quad \forall u \in C_c^\infty(-a,a).$$

- Για $N=2$, $\Omega=(-\alpha,\alpha)\times(-\alpha,\alpha)$. Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε $\forall (x_1,x_2)\in\Omega$ ισχύει:

$$u(x_1,x_2)-u(-\alpha,x_2)=u(x_1,x_2)=\int_{-a}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(x_1,x_2)| \leq \int_{-\alpha}^{x_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)\right|dt = \int_{-\alpha}^{x_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)\right|\cdot 1dt \leq$$
$$\leq \left(\int_{-a}^{x_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)\right|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_{-a}^{x_1}1^q\,dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_{-a}^{x_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)\right|^p dt\right)^{1/p}\cdot(x_1+a)^{1/q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(x_1,x_2|^p \leq \int_{-a}^{x_1}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)|^p dt(2a)^{p/q} \leq \int_{-a}^{a}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)|^p dt(2a)^{p/q}.$$

Με ολοκλήρωση ως προς x_1 προκύπτει:

$$\int_{-\alpha}^{x_1}|u(x_1,x_2)|^p dx_1 \leq (2a)^{p/q+1}\int_{-a}^{a}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)|^p dt = (2a)^p\int_{-a}^{a}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)|^p dt. \tag{13}$$

Εν συνεχεία με ολοκλήρωση ως προς x_2 η (13) δίνει:

$$\int_\Omega |u|^P\,dx_1dx_2 \leq (2a)^p\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2)\right|^p \leq (2a)^p\|\nabla u\|_p{}^p \Rightarrow \|u\|_p \leq 2a\|\nabla u\|_p.$$

- Για $N\geq 2$, $\Omega=(-\alpha,\alpha)^N$.

Τα στοιχεία του Ω είναι της μορφής (x_1,x'), $|x_1|<a$, $x'\in(-a,a)^{N-1}$.
Για κάθε ζεύγος $(x_1,x')\in\Omega$, το $(-\alpha,x')\in\partial\Omega \Rightarrow u(-a,x')=0$. Επομένως

$$u(x_1,x')=u(x_1,x')-u(-a,x')=\int_{-a}^{x_1}\partial_1 u(t,x')dt \Rightarrow |u(x_1,x')| \leq$$
$$\left(\int_{-a}^{x_1}|\partial_1 u(t,x')|^p dt\right)^{1/p}\cdot(x_1+a)^{1/q} \leq \left(\int_{-a}^{a}|\partial_1 u(t,x')|^p dt\right)^{1/p}\cdot(2a)^{1/q} \Rightarrow |u(x_1,x')|^p \leq$$
$$\left(\int_{-a}^{a}|\partial_1 u(t,x')|^p dt\right)\cdot(2a)^{p/q}. \tag{14}$$

Ολοκληρώνοντας την (14) ως προς x_1 προκύπτει:

$\int_{-\alpha}^{\alpha}|u(x_1,x')|^p dx_1 \leq \int_{-a}^{a}|\partial_1 u(t,x')|^p dt \cdot (2a)^{p/q+1} = (2a)^p \int_{-a}^{a}|\partial_1 u(t,x')|^p dt.$

Εν συνεχεία ολοκληρώνοντας ως προς x' έχουμε ότι:

$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq (2a)^p \int_{(-a,a)^{N-1}}\left(\int_{-a}^{a}|\partial_1 u(t,x')|^p dt\right)dx' = (2a)^p \int_{\Omega} |\partial_1 u(x)|^p dx \leq (2a)^p \|\nabla u\|_p{}^p \Rightarrow \|u\|_p \leq 2a\|\nabla u\|_p, \qquad \forall u \in C_c^\infty((-a,a)^N).$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ τυχαίο ανοικτό, φραγμένο σύνολο και $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Επιλέγουμε ανοικτό τετράγωνο $T = (-\alpha,\alpha)^N$, με $\alpha > 0$, ώστε $\bar{\Omega} \subset T$. Θεωρούμε τη φυσιολογική επέκταση

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), x \in \Omega \\ 0, x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}.$$

Αποδεικνύεται ότι $\bar{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ και

$$\nabla\bar{u}(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Τότε,

$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx = \int_{T} |\bar{u}(x)|^P dx \leq (2a)^p \int_{T} |\nabla\bar{u}(x)|^p dx = (2a)^p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \Rightarrow \|u\|_p \leq (2a)\|\nabla u\|_p$.

Η διάσταση του τετραγώνου εξαρτάται από το $diam\Omega$.
Λόγω πυκνότητας του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W_0^{1,p}(\Omega)$, περνώντας σε όρια συμπεραίνουμε ότι σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ και για κάθε συνάρτηση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει η ανισότητα Poincaré. □

Ως συνέπεια της ανισότητας Poincaré προκύπτει ότι $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p{}^p + \|\nabla u\|_p{}^p\right)^{1/p} \leq (C^p + 1)^{1/p}\|\nabla u\|_p. \tag{15}$$

Ταυτόχρονα, από τον ορισμό της $\|u\|_{1,p}$,

$$\|u\|_{1,p} \geq \|\nabla u\|_p. \tag{16}$$

Οι (15) και (16) δείχνουν ότι οι νόρμες $\|u\|_{1,p}$ και $\|\nabla u\|_p$ είναι ισοδύναμες στον $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Ειδικότερα, αν $p = 2$, ένα ισοδύναμο εσωτερικό γινόμενο στον $W_0^{1,2}(\Omega)$ είναι το εξής:

$$< u, v >= \int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx.$$

1.9 Βασικό Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev

Έστω σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο κλάσεως C^1. Τότε ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται στο χώρο $L^r(\Omega)$

- Συνεχώς, αν $1 < r \leq p^*$, όπου:

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{αν } N > p \\ +\infty, & \text{αν } N \leq p \end{cases}$$

- Συμπαγώς, αν $1 < r < p^*$.

Ειδικότερα, ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται στο χώρο $L^p(\Omega)$ συμπαγώς.
Με τον ίδιο τρόπο ενσφηνώνεται ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ στο χώρο $L^r(\Omega)$, όμως στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται ομαλότητα στο σύνορο του Ω.

Για μια αναλυτική παρουσίαση των θεωρημάτων ενσφήνωσης του Sobolev βλ. [1, § IX].

1.10 1η ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$, $1 < p < \infty$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό, φραγμένο σύνολο με σύνορο κλάσης C^1.
Θεωρούμε το διαφορικό τελεστή ***p*-Λαπλασιανή**

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

<u>Ορισμός 4</u>

Ένας πραγματικός αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή της $-\Delta_p$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες,** ή **ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$**, αν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = \lambda |u(x)|^{p-2} u(x), & \sigma.\pi.\ \sigma\tau o\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

έχει μία τουλάχιστον ασθενή λύση $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $u \neq 0$.
Εάν λ ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$ και $u \neq 0$ μία ασθενής λύση του παραπάνω προβλήματος, τότε η u λέγεται **λ-ιδιοσυνάρτηση** της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$.

Σχόλιο

Εάν λ ιδιοτιμή και u λ-ιδιοσυνάρτηση της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$, τότε $\forall h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει:

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \big(\nabla u(x), \nabla h(x)\big) dx = \lambda \int_\Omega |u(x)|^{p-2} u(x) h(x) dx.$$

Ειδικότερα, αν θέσουμε $h = u$, παίρνουμε

$$\|\nabla u\|_p^p = \lambda \|u\|_p^p \Rightarrow \lambda = \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p}. \tag{17}$$

Άρα οι ιδιοτιμές της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$ περιέχονται στο σύνολο

$$\left\{\frac{\|\nabla u\|_p{}^p}{\|u\|_p{}^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}\right\} \subseteq (0, +\infty).$$

Ενδιαφερόμαστε για τη μικρότερη ιδιοτιμή. Με βάση το προηγούμενο σχόλιο, φυσιολογικά εισάγουμε τον αριθμό

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_p{}^p}{\|u\|_p{}^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}\right\} = \inf\left\{\|\nabla u\|_p{}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1\right\}. \tag{18}$$

Λόγω της ανισότητας Poincaré, ισχύει $\lambda_1 > 0$.

Πρόταση 6

Στην (18), το infimum είναι ελάχιστο.

Απόδειξη

Επιλέγουμε ακολουθία $(u_n) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε $\|\nabla u_n\|_p{}^p \to \lambda_1, \|u_n\|_p{}^p = 1, n \geq 1.$ Τότε, η (u_n) είναι φραγμένη στον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Επειδή ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός, περνώντας σε υπακολουθίες και αξιοποιώντας το θεώρημα του Sobolev περί συμπαγούς ενσφήνωσης του $W_0^{1,p}(\Omega)$ στον $L^p(\Omega)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n \xrightarrow{w} u, \text{ στον } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ και } u_n \to u, \text{ στον } L^p(\Omega).$$

Τότε

$$\|u\|_p = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_p = 1$$

και

$$\lambda_1 = \|\nabla u\|_p{}^p \leq \liminf \|\nabla u_n\|_p{}^p \leq \limsup \|\nabla u_n\|_p{}^p = \lambda_1 \Leftrightarrow$$

$\lambda_1 = \|\nabla u\|_p{}^p, \quad \|u\|_p = 1.$

Συνεπώς

$$\lambda_1 = \min\left\{\frac{\|\nabla u\|_p{}^p}{\|u\|_p{}^p} : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}\right\} = \min\{\|\nabla u\|_p{}^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_p = 1\}.$$

□

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται **πηλίκο του Rayleigh**.

<u>Πρόταση 7</u>

α) Το λ_1 είναι η μικρότερη ιδιοτιμή της $(-\Delta_p, W_0^{1,p})$.

β) Εάν $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$w \ \lambda_1\text{-ιδιοσυνάρτηση} \iff \lambda_1 = \frac{\|\nabla w\|_p{}^p}{\|w\|_p{}^p} .$$

<u>Απόδειξη</u>

α) Έστω λ_1 ιδιοτιμή και w λ_1-ιδιοσυνάρτηση. Τότε, σύμφωνα και με την Πρόταση 1,

$$\lambda = \frac{\|\nabla w\|_p{}^p}{\|w\|_p{}^p} \geq \lambda_1.$$

Θα δείξουμε ότι το λ_1 είναι ιδιοτιμή. Πράγματι, θέτουμε

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p{}^p - \frac{\lambda_1}{p}\|u\|_p{}^p, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{19}$$

Επιλέγουμε $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$ ώστε

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u_0\|_p{}^p}{\|u_0\|_p{}^p}.$$

Τότε $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ισχύει

$$\varphi(u) \geq 0 = \varphi(u_0).$$

Άρα, το u_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου του φ , οπότε $\varphi'(u_0) = 0$.
Μετά από παραγώγιση της (19) και αντικατάσταση (βλ. Παράρτημα, § 4, συνέπεια (β) Πρότασης 3) προκύπτει:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2} (\nabla u_0, \nabla h) = \lambda \int_{\Omega} |u_0|^{p-2} u_0\, h, \qquad \forall h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Άρα η u_0 είναι λ_1-ιδιοσυνάρτηση.

β) Έστω w λ_1-ιδιοσυνάρτηση. Λόγω της (17), ισχύει

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla w\|_p{}^p}{\|w\|_p{}^p}.$$

Αντίστροφα, έστω $w \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$ ώστε $\frac{\|\nabla w\|_p{}^p}{\|w\|_p{}^p} = \lambda_1$. Θεωρούμε πάλι το συναρτησιακό $\varphi(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p{}^p - \frac{\lambda_1}{p}\|u\|_p{}^p$ και εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του (α) για να καταλήξουμε στο ότι η w είναι λ_1-ιδιοσυνάρτηση. □

Για μια αναλυτική παρουσίαση των ιδιοτήτων του φάσματος της p-Λαπλασιανής βλ. [2, § 9.2].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

2.1 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος, όπου d μετρική . Έστω επίσης $F: X \to X$ μία απεικόνιση που είναι **συστολή**, δηλαδή υπάρχει $k \in [0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Τότε η F έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $\bar{x} \in X$ ώστε $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω x_0 τυχαίο σημείο του X. Θεωρούμε την ακολουθία x_n με $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0,1,2, \ldots$.

Είναι

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(F(x_{n-1}), F(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή η F είναι συστολή. Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, παίρνουμε

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq k^3 d(x_{n-3}, x_{n-2}).$$

Επομένως επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία n φορές παίρνουμε :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1). \tag{1}$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας, αν θέσουμε στην (1) διαδοχικά όπου n: $n+1, \ldots, n+m-1$ προκύπτει

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots\ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq$
$k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots\ldots + k^{n+m-1} d(x_0, x_1) = k^n(1 + k + \cdots k^{m-1}) d(x_0, x_1) \leq$
$\frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1),$
(2)

αφού το άθροισμα $1 + k + \ldots\ldots + k^{m-1}$ είναι άρθοισμα των $m-1$ πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο $k \in [0,1)$ και άρα:

$$1 + k + \ldots\ldots + k^{m-1} = \frac{k^{m-1} - 1}{k-1} = \frac{1 - k^{m-1}}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}.$$

Από την (2) παρατηρούμε ότι $d(x_n, x_{n+m}) \to 0$ για $n, m \to \infty$. Επομένως η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα, αφού ο X είναι πλήρης χώρος, η (x_n) συγκλίνει, δηλαδή υπάρχει $\bar{x} \in X$ ώστε

$$\lim x_n = \bar{x}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα:

$d(\bar{x}, F(\bar{x}) \leq d(\bar{x}, x_n) + d(x_n, F(\bar{x}) = d(\bar{x}, x_n) + d(F(x_{n-1}), F(\bar{x})) \leq$
$d(\bar{x}, x_n) + kd(x_{n-1}, \bar{x})$.
(3)

Το β' μέλος της (3) τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$, οπότε

$$d\big(\bar{x}, F(\bar{x})\big) = 0 \Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Δηλαδή βρήκαμε ένα σταθερό σημείο της F. Τώρα θα αποδείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο. Έστω ότι υπάρχει ένα δεύτερο σταθερό σημείο $\bar{y}$, δηλαδή $\bar{y} = F(\bar{y})$. Τότε:

$$0 \leq d(\bar{x}, \bar{y}) = d\big(F(\bar{x}), F(\bar{y})\big) \leq kd(\bar{x}, \bar{y}).$$

Επομένως

$$0 \leq (1-k)d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0$$

και επειδή $k < 1$, παίρνουμε $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$.
Δηλαδή το $\bar{x}$ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της F. □

Σχόλιο: Το παραπάνω θεώρημα **δεν αληθεύει** γενικά για $k = 1$. Πράγματι, θεωρούμε το χώρο Banach c_0 των μηδενικών ακολουθιών με νόρμα

$$\big||x|\big| = \sup\{|x(i)| : i \geq 1\}.$$

Η απεικόνιση $T: c_0 \to c_0$ με $T(x) = (1 - \big||x|\big|,\ x(1),\ x(2),\ x(3), \ldots.)$ ικανοποιεί

$$\big||T(x) - T(y)|\big| \leq \big||x - y|\big|, \quad \forall\, x, y \in c_0\,,$$

αλλά δεν έχει σταθερό σημείο.

Παρ'όλ'αυτά ισχύει το παρακάτω

2.2 Θεώρημα (Browder-Göhde-Kirk)

Έστω $(H, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος Hilbert και $F: K \to K$, με K κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του H. Υποθέτουμε ότι $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in K$, δηλαδή η F είναι **non-expansive**. Τότε, η F έχει σταθερό σημείο.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_0 \in K$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ορίζουμε την απεικόνιση $F_n: K \to K$ με

$$F_n(x) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x).$$

Είναι

$$\|F_n(x) - F_n(y)\| = \|\frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x) - \frac{1}{n}x_0 - (1 - \frac{1}{n})F(y)\|$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|F(x) - F(y)\| \leq (1 - \frac{1}{n})\|x - y\|,$$

αφού η F είναι non-expansive. Άρα η F_n είναι συστολή. Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach υπάρχει $x_n \in K$ ώστε

$$x_n = F_n(x_n) = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x_n).$$

Επομένως,

$$\|x_n - F(x_n)\| = \frac{1}{n}\|x_0 - F(x_n)\| \leq \frac{1}{n}(\|x_0\| + \|F(x_n)\| \leq \frac{1}{n}(3M + \|F(x_0)\|),$$

όπου $sup_{x\in K}\|x\| = M$.

Έτσι, για $n \to \infty$, $\|x_n - F(x_n)\| \to 0$.

Επειδή το K είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο, θα είναι και ασθενώς συμπαγές. Επομένως, υπάρχει υπακολουθία της (x_n), η οποία για λόγους ευκολίας θα συμβολιστεί επίσης με (x_n), τέτοια ώστε να συγκλίνει ασθενώς σε ένα σημείο $\bar{x}$ του K, δηλ.

$$x_n \xrightarrow{w} \bar{x}, \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty.$$

Για $t \in [0,1]$, θέτουμε

$$x_t = (1 - t)\bar{x} + tF(\bar{x}).$$

Έχουμε

$$(x_t - F(x_t) - (x_n - F(x_n), x_t - x_n) = \|x_t - x_n\|^2 - (F(x_t) - F(x_n), x_t - x_n) \geq$$
$$\geq \|x_t - x_n\|^2 - \|F(x_t) - F(x_n)\|\|x_t - x_n\| \geq^{F non\, exp} \|x_t - x_n\|^2 - \|x_t - x_n\|^2 = 0. \quad (4)$$

Για $n \to \infty$,

$$(x_t - F(x_t) - (x_n - F(x_n),\ x_t - x_n) \to (x_t - F(x_t),\ x_t - \bar{x}), \tag{5}$$

αφού $\|x_n - F(x_n)\| \to 0$ και $x_n \xrightarrow{w} \bar{x}$. Λόγω των (4), (5), $\forall t \in (0,1]$,

$$\big((1-t)\bar{x} + tF(\bar{x}) - F[(1-t)\bar{x} + tF(\bar{x})],\ F(\bar{x}) - \bar{x}\big) \geq 0\,. \tag{6}$$

Η F είναι συνάρτηση non-expansive, άρα συνεχής. Επομένως στο όριο για $t \to 0$ η (6) δίνει:

$$(\bar{x} - F(\bar{x}),\ F(\bar{x}) - \bar{x}) \geq 0 \ \Rightarrow\ \|\bar{x} - F(\bar{x})\|^2 \leq 0.$$

Συνεπώς $\overline{x} = F(\bar{x})$, δηλαδή το $\bar{x}$ είναι σταθερό σημείο της F. □

2.3 Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower

Έστω F: $\bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου $\bar{B}(0,1)$ η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Τότε η F έχει σταθερό σημείο.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε εισαγωγικά την έννοια της περιστολής.

Ορισμός 1

Έστω $(X, \|.\|)$ χώρος με νόρμα και $M \subseteq X$. Μία απεικόνιση $r : X \to M$ ονομάζεται **περιστολή (retraction)** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η r είναι συνεχής.

(ii) $r(x) = x,\ \forall x \in M$.

Ένα παράδειγμα περιστολής είναι η δίκλαδη συνάρτηση $r : X \to \bar{B}(0, R)$ $(R > 0)$ με

$$r(x) = \begin{cases} x, & \|x\| \leq R \\ \dfrac{Rx}{\|x\|}, & \|x\| > R, \end{cases}$$

όπου $\bar{B}(0, R) = \{x \in X\colon \| x \| \leq R\}$.

Θεώρημα περιστολής

Εάν $(X, \|.\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, τότε δεν υπάρχει περιστολή $r\colon \bar{B}(0,1) \to \partial\bar{B}(0,1)$.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι αλγεβροτοπολογικής φύσεως (βλ. π.χ. [8,].)

Απόδειξη Θεωρήματος Brower

Ας υποθέσουμε ότι η F δεν έχει σταθερό σημείο, άρα $x - F(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{B}(0,1)$. Για κάθε $x \in \bar{B}(0,1)$, φέρνουμε την ημιευθεία από το $F(x)$ στο x, η οποία τέμνει το σύνορο της $\bar{B}(0,1)$ στο $r(x)$. Άρα,

$$r(x) = F(x) + \lambda(x)\big(x - F(x)\big), \quad x \in \bar{B}(0,1),$$

όπου $r: \bar{B}(0,1) \to \partial B(0,1)$, $\|r(x)\| = 1$ και $0 \leq \lambda(x) \leq 1$. Επομένως,

$$\|F(x) + \lambda(x)(x - F(x)\|^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|F(x)\|^2 + 2\lambda(x) < F(x), x - F(x) > +\lambda^2(x)\|x - F(x)\|^2 = 1.$$

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση (σημ. ότι $x \neq F(x), \forall x \in \bar{B}(0,1)$) δίνει:

$$\lambda(x) = \\ = \frac{-< F(x), x - F(x) > \pm\sqrt{< F(x), x - F(x) >^2 + (1 - \|F(x)\|^2)\|x - F(x)\|^2}}{\|x - F(x)\|^2}.$$

Επειδή $\lambda(x) \geq 0$, κρατάμε μόνο τη θετική λύση:

$$\lambda(x) = \\ = \frac{-< F(x), x - F(x) > +\sqrt{< F(x), x - F(x) >^2 + (1 - \|F(x)\|^2)\|x - F(x)\|^2}}{\|x - F(x)\|^2}$$

Από τη μορφή της λύσης φαίνεται ότι η $\lambda(\cdot)$ είναι συνεχής, οπότε και η r είναι συνεχής. Επίσης $r(x) = x$, $\forall x \in \bar{B}(0,1)$, εξαιτίας της κατασκευής της r. Αλλά αυτό είναι άτοπο λόγω του θεωρήματος περιστολής. Επομένως η F έχει σταθερό σημείο. □

Πορίσματα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brower

1) Αν $F: \bar{B}(0,R) \subset \mathbb{R}^N \to \bar{B}(0,R) (R > 0)$ συνεχής, τότε η F έχει σταθερό σημείο.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \frac{F(Rx)}{R}$, $x \in \bar{B}(0,1)$. Παρατηρούμε ότι $G: \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$.

Από το θεώρημα Brower, η G έχει σταθερό σημείο, δηλαδή

$\exists x_0 \in \bar{B}(0,1)$: $G(x_0) = x_0$ ή $\frac{F(Rx_0)}{R} = x_0$ ή $F(Rx_0) = R(x_0)$.

Άρα το Rx_0 είναι σταθερό σημείο για την F. □

2) Έστω $K \subset \mathbb{R}^N$ κυρτό και συμπαγές και $F: K \to K$ μία συνεχής απεικόνιση. Τότε η F έχει σταθερό σημείο.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την έννοια της προβολής.

Έστω K ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$, υπάρχει μοναδικό $P_K(x) \in K$ έτσι ώστε

$$\|x - P_K(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in K\}.$$

Απόδειξη

Έστω $P_K : \mathbb{R}^N \to K$.

Επειδή το K είναι συμπαγές και άρα φραγμένο, υπάρχει $R > 0$ έτσι ώστε $K \subset \bar{B}(0,R)$. Θεωρούμε την απεικόνιση: $\bar{F}: \bar{B}(0,R) \to \bar{B}(0,R)$, με $\bar{F}(x) = F(P_K(x))$, $x \in \bar{B}(0,R)$. Η $\bar{F}$ είναι συνεχής και λόγω του Πορίσματος 1, έχει σταθερό σημείο $x_0 \in \bar{B}(0,R)$, δηλ.

$\bar{F}(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(P_K(x_0) = x_0 \in K$, αφού $F : K \to K$.
(7)

Από τον ορισμό της προβολής έχουμε ότι $P_K(x_0) = x_0$ και συνεπώς η (7) δίνει $F(x_0) = x_0$, δηλαδή η F έχει σταθερό σημείο. □

3) Έστω $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε

$$< F(x), x > \geq 0 \quad \forall x \text{ με } \|x\| = R > 0.$$

Τότε υπάρχει $x_0 \in \bar{B}(0,R)$ τέτοιο ώστε $F(x_0) = 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι $F(x) \neq 0, \forall x \in \bar{B}(0,R)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$G(x) = -\frac{R}{\|F(x)\|} F(x).$$

Προφανώς $G: \bar{B}(0,R) \to \partial\bar{B}(0,R)$.

Από το Πόρισμα 1 προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in \bar{B}(0,R)$ τέτοιο ώστε

$$G(x_0) = x_0 \;\Rightarrow\; \|x_0\| = \|G(x_0)\| = R.$$

Άρα

$$0 < R^2 = \|x_0\|^2 \; = < x_0, -\frac{R}{\|F(x_0)\|} F(x_0) >= -\frac{R}{\|F(x_0)\|} < x_0, F(x_0) > \leq 0.$$

Επομένως καταλήξαμε σε άτοπο. □

Στην ιδιότητα αυτή θα στηριχθεί το παρακάτω Πόρισμα:

4) Έστω συνάρτηση $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ συνεχής και πιεστική (βλ. Παράρτημα 1, §1). Τότε η F είναι επί.

Απόδειξη

Η F είναι πιεστική, επομένως $\forall M > 0$, $\exists R > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^N$ με $\|x\| \geq R$, ισχύει

$$< F(x), x >\geq M\|x\|.$$

Έστω $y \in \mathbb{R}^N$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\bar{F}(x) = F(x) - y.$$

Τότε,

$$< \bar{F}(x),\ x >=< F(x) - y,\ x >=< F(x),\ x > - < y,\ x >\geq < F(x), x > -\|y\|\|x\|.$$

Επιλέγουμε $M = 1 + \|y\|$. Τότε, $\exists R > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^N$ με $\|x\| \geq R$, ισχύει

$$< F(x), x > \ \geq \ (1 + \|y\|)\|x\| \quad \Rightarrow \quad < \bar{F}(x), x >\geq \ \|x\| \geq R > 0 \ .$$

Επομένως, από το Πόρισμα 3, υπάρχει $x_0 \in B(0, R)$ τέτοιο ώστε $\bar{F}(x_0) = 0 \Rightarrow F(x_0) = y$. □

2.4 Θεώρημα Σταθερού Σημείου Schauder

Έστω K κυρτό και συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach X και $F : K \to K$ συνεχής. Τότε η F έχει σταθερό σημείο.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος κάνουμε χρήση της παρακάτω Πρότασης:

Πρόταση 1

Έστω X χώρος Banach και $K \subset X$ συμπαγές σύνολο. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένης διαστάσεως γραμμικός υπόχωρος $X_\varepsilon \subset X$ και συνεχής απεικόνιση $P_\varepsilon : K \to X_\varepsilon$, έτσι ώστε:

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon, \qquad \forall x \in K.$$

Αν επιπλέον το K είναι κυρτό, τότε $P_\varepsilon : K \to K$.

Απόδειξη

Επειδή το K είναι συμπαγές, $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχουν $x_1, x_2, \dots x_n \in K$ (όπου ο αριθμός n εξαρτάται από το ε που επιλέγουμε κάθε φορά), έτσι ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2)$. Θεωρούμε το γραμμικό υπόχωρο

$$X_\varepsilon = span\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \varepsilon/2 - \|x - x_i\|, & x \in B(x_i, \varepsilon/2),\ i = 1,2,\dots,n,\ x \in K \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
(8)

Θεωρούμε στη συνέχεια την απεικόνιση $P_\varepsilon : K \to X_\varepsilon$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$P_\varepsilon(x) = \frac{\mu_1(x)x_1 + \mu_2(x)x_2 + \dots + \mu_n(x)x_n}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots + \mu_n(x)}, \qquad x \in K.$$

Στον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος ένας τουλάχιστον όρος του αθροίσματος είναι διάφορος του μηδενός, επειδή λόγω κατασκευής το x θα ανήκει σε μία τουλάχιστον μπάλα από τις $B(x_i, \varepsilon)$, $1 \le i \le n$. Επίσης, $\mu_i(x) \ge 0$ για κάθε $i = 1,2,\dots,n$, $x \in K$.
Το κλάσμα είναι κυρτός συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_n$, άρα ανήκει στον υπόχωρο X_ε.
Η απεικόνιση P_ε είναι συνεχής, αφού εκ κατασκευής όλες οι μ_i, $1 \le i \le n$, είναι συνεχείς.
Έχουμε, $\forall x \in K$,

$$\|P_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \frac{\mu_1(x)x_1 + \mu_2(x)x_2 + \dots + \mu_n(x)x_n}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots + \mu_n(x)} - x \right\|$$

$$= \left\| \frac{\mu_1(x)(x_1 - x) + \mu_2(x)(x_2 - x) + \dots + \mu_n(x)(x_n - x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots + \mu_n(x)} \right\| \le$$

$$\frac{\mu_1(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots + \mu_n(x)} \|x_1 - x\| + \dots + \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \dots + \mu_n(x)} \|x_n - x\|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

αφού
$\frac{\mu_i(x)}{\mu_1(x) + \dots + \mu_n(x)} \|x_i - x\| \le \frac{\mu_i(x)}{\mu_1(x) + \dots + \mu_n(x)} \varepsilon/2$, $1 \le i \le n$ (βλ. (8)). □

<u>Απόδειξη θεωρήματος Schauder</u>
Για $\varepsilon > 0$, έστω X_ε και P_ε όπως ορίστηκαν στην Πρόταση 1. Εφ'όσον το K είναι κυρτό, η P_ε παίρνει τιμές στο K.
Έστω $K_\varepsilon = conv\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, δηλαδή το σύνολο των κυρτών συνδυασμών των $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Είναι $K_\varepsilon \subset X_\varepsilon$ και $K_\varepsilon \subset K$ (αφού K κυρτό), επομένως K_ε συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο του K.

Ορίζουμε την απεικόνιση $F_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(F(x))$. Η F_ε είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών απεικονίσεων P_ε και F.
Επίσης $F_\varepsilon: K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ και K_ε κυρτό και συμπαγές σύνολο, επομένως η F_ε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 2 του Θεωρήματος Brower, άρα έχει σταθερό σημείο.
Δηλαδή $\exists x_\varepsilon \in K_\varepsilon \subset K: x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Το K είναι συμπαγές, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$x_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} x \in K. \tag{9}$$

Έχουμε:

$$\|x_\varepsilon - F(x)\| = \|F_\varepsilon(x_\varepsilon) - F(x)\| = \|P_\varepsilon(F(x_\varepsilon)) - F(x)\| \le \left\|P_\varepsilon\big(F(x_\varepsilon)\big) - F(x_\varepsilon)\right\| +$$
$$+\|F(x_\varepsilon) - F(x)\| < \varepsilon + \|F(x_\varepsilon) - F(x)\| \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 \text{ (βλ. Πρόταση 1 και (9)).}$$

Άρα, $F(x) = x$, πάλι λόγω της (9). □

<u>Πόρισμα</u>
Αν X χώρος Banach, $K \subset X$ κυρτό, κλειστό και φραγμένο και $F: K \to K$ συμπαγής απεικόνιση, τότε η F έχει σταθερό σημείο.
<u>Απόδειξη</u>
Θεωρούμε το σύνολο $K_1 = \overline{convF(K)}$.
Η F είναι συμπαγής, άρα το $\overline{F(K)} \subset K$ είναι συμπαγές (σημ. ότι K κλειστό).
Από το Θεώρημα Mazur γνωρίζουμε ότι αν ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι σχετικά συμπαγές, τότε το κυρτό περίβλημά του είναι επίσης σχετικά συμπαγές. Συνεπώς, K_1 συμπαγές.
Το $K_1 = \overline{convF(K)}$ είναι υποσύνολο του K, αφού $\overline{F(K)} \subset K$ και το K είναι κλειστό και κυρτό.
Θεωρούμε τον περιορισμό της F στο υποσύνολο K_1 του K, $F: K_1 \to K_1$. Η F είναι συνεχής ως συμπαγής. Επομένως, αφού το K_1 είναι κυρτό και συμπαγές, από το Θ. Schauder, $\exists x_0 \in K_1 \subset K$, ώστε $x_0 = F(x_0)$. □

2.5 Αρχή των Leray-Schauder
Έστω X χώρος Banach και $F: X \to X$ μία συμπαγής απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1] \Rightarrow [\|x\| < R].$$

Τότε η F έχει σταθερό σημείο.

<u>Απόδειξη</u>
Θεωρούμε τον τελεστή $A: X \to X$ που ορίζεται ως εξής:

$$A(x) = \begin{cases} x, & \|x\| \leq R \\ \dfrac{Rx}{\|x\|}, & \|x\| > R. \end{cases}$$

(Σημειώνεται ότι η σταθερά R είναι ακριβώς η σταθερά R στη διατύπωση του θεωρήματος.)
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο A είναι συνεχής.
Ορίζουμε τον τελεστή $A'(x) = A(F(x))$.
Η F είναι συμπαγής απεικόνιση, άρα η $A': B(0,R) \to B(0,R)$ είναι συμπαγής. Αφού το $B(0,R)$ είναι κυρτό, κλειστό και φραγμένο σύνολο, από το προηγούμενο Πόρισμα προκύπτει ότι ο A' έχει σταθερό σημείο, έστω x_0. Δηλαδή,

$$x_0 = A'(x_0) = A\big(F(x_0)\big).$$

Αν $\|F(x_0)\| > R$,

$$x_0 = A\big(F(x_0)\big) = \frac{RF(x_0)}{\|F(x_0)\|} = \lambda F(x_0), \qquad \lambda = \frac{R}{\|F(x_0)\|} \in (0,1).$$

Επομένως, από την υπόθεση του θεωρήματος, $\|x_0\| < R$. Το τελευταίο είναι άτοπο, αφού

$$\|x_0\| = \left\| \frac{RF(x_0)}{\|F(x_0)\|} \right\| = R.$$

Άρα $\|F(x_0)\| \leq R$ και $x_0 = A\big(F(x_0)\big) = F(x_0)$.
Επομένως, το x_0 είναι σταθερό σημείο της F. □

2.6 Εφαρμογή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1 και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Μελετάμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f\big(u(x)\big), & \text{σχεδόν παντού } \sigma\tau o\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

<u>Ορισμός 1</u>

Ασθενής λύση του παραπάνω προβλήματος είναι μία συνάρτηση $u \in W_0^{1,2}(\Omega) = H$ τέτοια ώστε

$$\int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}\, dx = \int_\Omega f\big(u(x)\big)v(x)dx,\ \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{11}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

i) Ο Ορισμός 1 έχει νόημα μόνο όταν ισχύει

$$\int_\Omega |f(u)|\,|v| < \infty, \qquad \forall u, v \in H.$$

Ειδικότερα, ισχύει αν $\forall u \in H,\ \ f(u(\cdot)) \in L^2(\Omega)$.

ii) Εάν $u \in C^2(\bar{\Omega})$ μια κλασική λύση του προβλήματος (10), τότε η u ικανοποιεί την (11) (τύπος του Green).

Το Θεώρημα που ακολουθεί εξασφαλίζει την ύπαρξη ασθενών λύσεων για το πρόβλημα (10) για μία ευρεία κλάση συνεχών συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta \geq 0$ τέτοιοι ώστε $0 \leq \alpha < \lambda_1$,
όπου λ_1 η 1η ιδιοτιμή της $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ και

$$|f(u)| \leq a|u| + \beta, \qquad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Τότε το πρόβλημα (10) έχει μία τουλάχιστον ασθενή λύση.

<u>Απόδειξη</u>

$\forall g \in L^2(\Omega)$, το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = g(x), \ \ \text{σ.π. στο } \Omega \\ \qquad\quad w_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική ασθενή λύση $w = B(g) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz).

$\forall g \in L^2(\Omega)$, αν $w = B(g)$, ισχύει:

$$\|\nabla w\|_{L^2}^2 = \int_\Omega g(x)w(x)dx \leq \|g\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}\|w\|_H \ .$$

Λόγω της ανισότητας Poincaré, $\exists c_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|w\|_H \leq c_1\|g\|_{L^2} .$$

Άρα ο τελεστής $B\colon L^2 \to H$ είναι γραμμικός και φραγμένος.

Για κάθε $u \in L^2(\Omega)$, θέτουμε

$w = T(u) = B(f(u(\cdot)) \in H,$

όπου w είναι η ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta w = f\big(u(\cdot)\big), & \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \\ \qquad\qquad w_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{10α}$$

Δηλαδή $T = B^\circ N_f,\ N_f(u) = f(u(\cdot)),\ u \in L^2(\Omega).$

Εάν το $u \in H$ είναι σταθερό σημείο του T, τότε αποτελεί ασθενή λύση του προβλήματος (10).
Ο τελεστής $T: L^2(\Omega) \to H = W_0^{1,2}(\Omega)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών τελεστών N_f και B (βλ. Παράρτημα, §4). Από την άλλη, επειδή ο χώρος H ενσφηνώνεται συμπαγώς στο χώρο L^2, ο τελεστής $j : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ με $j(u) = u$ είναι συμπαγής, επομένως και ο τελεστής $\widetilde{T} = j \circ T: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι συμπαγής.
Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Schauder στον τελεστή $\tilde{T}$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός $R > 0$ τέτοιος ώστε:

$$\tilde{T}(B_{L^2}[0,R]) \subseteq B_{L^2}[0,R]. \tag{12}$$

Έστω $R > 0$ και $\|u\|_{L^2} \leq R$. Θέτουμε

$$w = \tilde{T}u.$$

Η w είναι η ασθενής λύση του προβλήματος (10α). Ως test function παίρνουμε την w και έχουμε

$\|\nabla w\|_{L^2}{}^2 = \int_\Omega f\big(u(x)\big)w(x)dx \leq \int_\Omega |f(u(x)|\,|w(x)|dx \leq a\int_\Omega |u||w|\,dx + \beta\int_\Omega |w|dx \leq (a\|u\|_{L^2} + \beta|\Omega|^{1/2})\|w\|_{L^2}.$

Αλλά από την ανισότητα του Rayleigh γνωρίζουμε ότι

$$\lambda_1\|w\|_{L^2}{}^2 \leq \|\nabla w\|_{L^2}{}^2 \Rightarrow \|w\|_{L^2} \leq \frac{aR + \beta|\Omega|^{1/2}}{\lambda_1}.$$

Θέλουμε να ισχύει

$\frac{aR+\beta|\Omega|^{1/2}}{\lambda_1} < R \Leftrightarrow aR + \beta|\Omega|^{1/2} < \lambda_1 R \Leftrightarrow (\lambda_1 - a)R > \beta|\Omega|^{1/2} \Leftrightarrow R > \frac{\beta|\Omega|^{1/2}}{\lambda_1 - a},$

αφού $\lambda_1 - a > 0$. Συνεπώς, για $R > \frac{\beta|\Omega|^{1/2}}{\lambda_1 - \alpha}$, η (12) ισχύει.

Επομένως, από το Θεώρημα του Schauder υπάρχει $u \in B_{L^2}[0, R]$ ώστε $u = \tilde{T}u$. Δηλαδή η u είναι ασθενής λύση του (10). □

<u>Παράδειγμα 1</u>
Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz-συνεχής με σταθερά Lipschitz $M < \lambda_1$, τότε το Θεώρημα ικανοποιείται και επομένως το Πρόβλημα (10) έχει ασθενή λύση.

<u>Παράδειγμα 2</u>
Έστω $f(u) = \sqrt{|u|}$.
Τότε

$$\sqrt{|u|} = \frac{\sqrt{\lambda_1 |u|}}{\sqrt{\lambda_1}} \leq \frac{1}{2}\left(\lambda_1 |u| + \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{\lambda_1}{2}|u| + \frac{1}{2\lambda_1}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Επομένως και σε αυτήν την περίπτωση ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος για ύπαρξη ασθενούς λύσεως του (10).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΘΕΩΡΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ-ΨΕΥΔΟΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

3.1 Μονοτονία σε Μονότιμους Τελεστές

Έστω X χώρος Banach. Εάν $x^* \in X, x \in X$, γράφουμε $< x^*, x >$ αντί $x^*(x)$.
Ένας τελεστής $T: D(T) \subseteq X \to X^*$ καλείται **μονότονος** αν:

$$< T(x) - T(y), x - y > \geq 0, \ \forall x, y \in D(T) . \tag{1}$$

Αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert και $T : D(T) \subseteq H \to H$, κάνοντας την ταύτιση $H \equiv H^*$ λόγω του θεωρήματος του Riesz, γράφουμε:

$$< T(x) - T(y), x - y > \geq 0, \ \forall x, y \in D(T) ,$$

όπου $<\cdot,\cdot>$ το εσωτερικό γινόμενο του H.

Αν ο T είναι γραμμικός τελεστής ορισμένος σε έναν γραμμικό υπόχωρο $D(T)$, θέτοντας στην (1) $y = 0$ προκύπτει:

$$< T(x) - T(0), x - 0 > = < T(x), x > \geq 0, \ \forall x \in D(T). \tag{2}$$

Η (2) δηλώνει ότι η γωνία που σχηματίζουν τα x και $T(x)$ είναι οξεία για κάθε x στο πεδίο ορισμού του T.

<u>Παράδειγμα</u> 1

Έστω H χώρος Hilbert και $K \subseteq H$ κλειστό και κυρτό σύνολο. Τότε η προβολή $P_K: H \to K$ είναι μονότονος τελεστής.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x, y \in K$. Από τον ορισμό της προβολής ισχύει:

$$< x - P_K(x), z - P_K(x) > \leq 0, \ \forall z \in K. \tag{3}$$

Ομοίως,

$$< y - P_K(y), \ z - P_K(y) > \leq 0, \ \forall z \in K. \tag{4}$$

Θέτοντας στις (3) και (4) όπου z τα $P_K(y)$ και $P_K(x)$ αντίστοιχα προκύπτει:

$$< x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x) > \leq 0, \ \forall z \in K, \tag{5}$$

$$< y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y) > \leq 0, \ \forall z \in K. \tag{6}$$

Αφαιρώντας από την (6) την (5) προκύπτει:

$$< y - x + P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y) > \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow < y - x,\ P_K(x) - P_K(y) > + \|P_K(x), P_K(y)\|^2 \leq 0.$$

Άρα,

$$< P_K(x), P_K(y), x - y > \geq \ \|P_K(x), P_K(y)\|^2 \geq 0.$$

Συνεπώς ο P_K είναι μονότονος.

<u>Πρόταση 1</u>

Έστω H χώρος Hilbert και $T : D(T) \subseteq H \to H$ ένας τελεστής. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) Ο T είναι μονότονος
2) $\|x - y\| \leq \|(I + \lambda T)(x) - (I + \lambda T)(y)\|,\ \forall x, y \in D(T),\ \forall \lambda > 0.$

<u>Απόδειξη 1⇒ 2:</u>

Το (2) ισοδυναμεί με την:

$\|x - y\|^2 \leq \|(I + \lambda T)(x) - (I + \lambda T)(y)\|^2.$

Αλλά

$\|(I + \lambda T)(x) - (I + \lambda T)(y)\|^2 =$
$\|x - y\|^2 + \lambda^2\|T(x) - T(y)\|^2 + 2\lambda < T(x) - T(y), x - y > \geq \|x - y\|^2,$

αφού ο T είναι μονότονος.

<u>Απόδειξη 2⇒ 1:</u>

Έχουμε $\forall x, y \in D(T),\ \forall \lambda > 0,$

$\lambda^2\|T(x) - T(y)\|^2 + 2\lambda < x - y, T(x) - T(y) \geq 0 \Rightarrow$
$\lambda\|T(x) - T(y)\|^2 + 2 < T(x) - T(y), x - y > \geq 0$

Για $\lambda \to 0,$

$< T(x) - T(y), x - y > \geq 0.$

Συνεπώς ο τελεστής T είναι μονότονος. □

Η πρόταση αυτή δηλώνει ότι αν ο $T: D(T) \subseteq H \to H$ είναι μονότονος, τότε ο $I + \lambda T$ είναι 1-1 και επί του $R(I + \lambda T)$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι ο $(I + \lambda T)^{-1}$ είναι Lipschitz-συνεχής με σταθερά 1.

<u>Πρόταση 2</u>

Έστω $f :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το $\vec{\nabla} f :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ είναι μονότονος τελεστής.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 3.

Επεκτείνουμε την παραπάνω Πρόταση για την περίπτωση που η f ορίζεται σε χώρο Banach X δίνοντας τον ορισμό της Gateaux παραγώγου.
Έστω X χώρος Banach και $f : X \to \mathbb{R}$. Η f είναι **Gateaux διαφορίσιμη** στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ty) - f(x_0)}{t} =< x^*, y >, \quad \forall y \in X.$$

Συμβολίζουμε $f'(x_0) = x^*$. Η f λέγεται Gateaux διαφορίσιμη στον X αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x_0 \in X$.
Η Gateaux παράγωγος συνάρτησης ορισμένης στον X είναι γενίκευση της κατευθυνόμενης παραγώγου συνάρτησης ορισμένης στον $\mathbb{R}^N$.

<u>Πρόταση 3</u>
Έστω χώρος Banach X και συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ Gateaux διαφορίσιμη. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:
1) Η f είναι κυρτή.
2) Η f' είναι μονότονος τελεστής.

<u>Απόδειξη 1⇒ 2</u>
Έστω ότι η f είναι κυρτή. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$\varphi(t) = f\big(x + t(y - x)\big), t \in [0,1],\ x, y \in X.$

Η φ είναι κυρτή επειδή η f είναι κυρτή. Είναι

$\varphi'(t) =< f'(x + t(y - x), y - x) >,\ t \in [0,1].$

Αφού η φ είναι κυρτή, η φ' είναι αύξουσα. Άρα

$\varphi'(1) \geq \varphi'(0) \Rightarrow (f'(y), y - x) \geq (f'(x), y - x) \Rightarrow (f'(y) - f'(x), y - x) \geq 0,\ \forall x, y \in X.$

Επομένως η f' είναι μονότονη.

<u>Απόδειξη 2⇒ 1</u>
Έστω ότι η f' είναι μονότονη. Για $s < t$ στο $[0,1]$ ισχύει:

$\varphi'(s) - \varphi'(t) =< f'(x + s(y - x), y - x > -< f'(x + t(y - x), y - x >.$

Όμως,

$x + s(y - x) - [x + t(y - x)] = (s - t)(y - x).$

Αφού η f' είναι μονότονη, ισχύει

$$< f'(x + s(y - x) - f'\big(x + t(y - x)\big), (s - t)(y - x) > \geq 0.$$

Άρα

$$\varphi'(s) - \varphi'(t) = \frac{1}{s-t} < f'(x + s(y - x) - f'\big(x + t(y - x)\big), (s - t)(y - x) > \leq 0.$$

Αφού η φ' είναι αύξουσα, η φ είναι κυρτή. Συνεπώς και η f είναι κυρτή. □

3.2 Μονοτονία σε Πλειονότιμους Τελεστές

Ένας τελεστής $T : X \to X^*$ ονομάζεται πλειονότιμος, συμβολικά $T : X \to 2^{X^*}$, αν για κάθε $x \in X$, το $T(x)$ είναι υποσύνολο του X^*.

Ένας πλειονότιμος τελεστής $T : X \to X^*$ καλείται **μονότονος** αν:

$$< x^* - y^*, x - y > \geq 0,\ \forall x, y \in D(T),\ \forall x^* \in T(x),\ \forall y^* \in T(y).$$

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και κυρτή. Χρησιμοποιώντας το Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach [1,Θ.Ι,σελ.7], αποδεικνύεται ότι $\exists x^* \in X$ ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) + < x^*, x - x_0 >, \qquad \forall x \in X.$$

Το υποδιαφορικό $\partial f(x_0)$ της f στο x_0 είναι το σύνολο

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + < x^*, x - x_0 >, \forall x \in X\}.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής και κυρτή. Τότε ο $\partial f: X \to X^*$ είναι μονότονος τελεστής.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1{}^* \in \partial f(x_1)$, $x_2{}^* \in \partial f(x_2)$. Επομένως,

$$f(x) \geq f(x_1) + (x_1{}^*, x - x_1),\ \forall x \in X, \tag{7}$$

$$f(x) \geq f(x_2) + (x_2{}^*, x - x_2),\ \forall x \in X. \tag{8}$$

Θέτουμε στην (7) $x = x_2$ και στην (8) $x = x_1$ και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$f(x_2) + f(x_1) \geq f(x_1) + f(x_2) + (x_1{}^*, x_2 - x_1) + (x_2{}^*, x_1 - x_2),\ \forall x \in X \Rightarrow (x_2{}^* - x_1{}^*, x_2 - x_1 \geq 0.$$

Άρα ο ∂f είναι μονότονος. □

<u>Παράδειγμα 3</u>

Έστω ο πλειονότιμος τελεστής $J: X \to 2^{X^*}$ με

$J(x) = \{x^* \in X^*: < x^*, x >= \|x^*\|\|x\| \text{ και } \|x\| = \|x^*\|\}$.

Ο τελεστής αυτός ονομάζεται **δυϊκή απεικόνιση**.

Ο J είναι μονότονος.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1{}^* \in J(x_1)$, $x_2{}^* \in J(x_2)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
< x_1{}^* - x_2{}^*, x_1 - x_2 > &= x_1{}^*(x_1) - x_1{}^*(x_2) - x_2{}^*(x_1) + x_2{}^*(x_2) \\
&= \|x_1{}^*\|\|x_1\| - x_1{}^*(x_2) - x_2{}^*(x_1) + \|x_2{}^*\|\|x_2\| \\
&= \|x_1{}^*\|^2 - x_1{}^*(x_2) - x_2{}^*(x_1) + \|x_2{}^*\|^2 \\
&\geq \|x_1{}^*\|^2 - \|x_1{}^*\|\|x_2\| - \|x_2{}^*\|\|x_1\| + \|x_2{}^*\|^2 =
\end{aligned}
$$

$\|x_1{}^*\|^2 - \|x_1{}^*\|\|x_2{}^*\| - \|x_2{}^*\|\|x_1{}^*\| + \|x_2{}^*\|^2 = (\|x_1{}^*\| - \|x_2{}^*\|^2 \geq 0.$ □

<u>Παράδειγμα 4</u>

Θεωρούμε το μη γραμμικό τελεστή A ορισμένο στον χώρο $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ με

$Au = \sum_{i=1}^n |D_i u|^{p-2} D_i u, \qquad p \geq 2,$

όπου $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται ***p* -ψευδολαπλασιανή**. Για $u, v \in X$ είναι:

$$< Au, v >= \sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx. \tag{9}$$

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα ορίζεται επειδή η παράσταση $|D_i u|^{p-2} D_i u$ ανήκει στον L^q, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q + p = pq$. Πράγματι,

$$\int_\Omega ||D_i u|^{p-2} D_i u|^q dx = \int_\Omega (|D_i u|^{p-1})^q dx = \int_\Omega |D_i u|^{pq-q} dx = \int_\Omega |D_i u|^p dx < \infty,$$

επειδή $D_i u \in L^p$. Λόγω της ανισότητας Poincaré στον $W_0^{1,P}(\Omega)$ μπορούμε να θέσουμε:

$$\|u\|_{1,p} = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_p^p\right)^{1/p} .$$

Θέτοντας στην (9) $v = u$ προκύπτει

$$< Au, u >= \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_p^p = \|u\|_{1,p}^p. \tag{10}$$

Ομοίως

$$< Av, v >= \|v\|_{1,p}^p. \tag{11}$$

Είναι

$\int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx \leq \left(\int_\Omega \left(|D_i u|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |D_i v|^p\right)^{1/p} = \left(|D_i u|^p\right)^{1/q} \|D_i v\|_{L_p} = \|D_i u\|_p{}^{p/q} \|D_i v\|_p = \|D_i u\|_p^{p-1} \|D_i v\|_p.$

Άρα

$$< Au, v >= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v dx \leq \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_p^{p-1} \|D_i v\|_p \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\|D_i u\|_p^{p-1}\right)^q\right]^{1/q} \left[\sum_{i=1}^{n} \|D_i v\|_p^p\right]^{1/p} = \left[\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_p^p\right]^{1/q} \|v\|_{1,p} = \|u\|_{1.p}{}^{p/q} \|v\|_{1,p} = \|u\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p}. \tag{12}$$

Με απλή αντιμετάθεση των u και v προκύπτει:

$$< Av, u >= \|v\|_{1,p}^{p-1} \|u\|_{1,p}. \tag{13}$$

Από τις (10), (11), (12) και (13) συμπεραίνουμε ότι:

$< Au - Av, u - v > \geq < Au, u > - < Au, v > - < Av, u > + < Av, v > \geq \|u\|_{1,p}{}^p - \|u\|_{1,p}^{p-1} \|v\|_{1,p} - \|v\|_p^{p-1} \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}{}^p = \|u\|_{1,p}^{p-1}(\|u\|_{1,p} - \|v\|_{1,p}) + \|v\|_{1,p}^{p-1}\left(\|v\|_{1,p} - \|u\|_{1,p}\right) = (\|u\|_{1,p}{}^{p-1} - \|v\|_{1,p}{}^{p-1})(\|u\|_{1,p} - \|v\|_{1,p}) \geq 0.$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή η συνάρτηση x^{p-1} είναι αύξουσα για $p \geq 2$. Επομένως, η p –ψευδολαπλασιανή είναι μονότονος τελεστής.

<u>Ορισμός 1</u>

Έστω τελεστής $A : D(A) \subset X \to X^*$. Ο τελεστής A ονομάζεται **τοπικά φραγμένος** στο $x \in D(A)$, αν υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε το $\bigcup_{x \in D(A) \cap U} A(x)$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του X^*.

<u>Θεώρημα 1</u>
Έστω X χώρος Banach και τελεστής $A: X \to X^*$ μονότονος. Τότε ισχύουν τα εξής:
α) Για κάθε ακολουθία $u_n \subseteq X$ με $u_n \to u \in X$, $sup\|Au_n\| < \infty$.
β) Ο A είναι τοπικά φραγμένος.
<u>Απόδειξη</u>
α)
i) Έστω ότι $u = 0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\alpha_n = \frac{1}{1 + \|u_n\|\|Au_n\|} \leq 1, \qquad n \geq 1.$$

Επιπλέον, $\alpha_n\|u_n\|\|Au_n\| \leq 1$, $\forall n \geq 1$.
Λόγω της μονοτονίας του A ισχύει, $\forall z \in X$:

$< \alpha_n Au_n, z >= \alpha_n < Au_n, z >\leq \alpha_n(< Au_n, u_n > -< Az, u_n - z >) \leq \alpha_n(\|Au_n\|\|u_n\| + \|Az\|(\|u_n\| + \|z\|) \leq 1 + \|Az\|(sup_k\|u_k\| + \|z\|) = M_z$.

Από το Θεώρημα του Ομοιομόρφου Φράγματος, υπάρχει σταθερά M έτσι ώστε

$supa_n\|Au_n\| = M \Rightarrow \|Au_n\| \leq \frac{M}{a_n} = M + M\|u_n\|\|Au_n\|$, $\forall n \geq 1$.

Αφού $u_n \to 0$, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$, $M\|u_n\| < \frac{1}{2}$. Άρα,

$\|Au_n\| < M + \frac{1}{2}\|Au_n\| \Rightarrow \|Au_n\| < 2M$, $\forall n \geq n_0$,

δηλαδή $sup\|Au_n\| < \infty$.

ii) Έστω ότι $u_n \to u \neq 0$. Θέτουμε

$\tilde{A}(x) = A(x + u)$, $x \in X$.

Ο $\tilde{A}$ είναι μονότονος επειδή ο A είναι μονότονος. Επομένως, από το (i) είναι

$\sup_n\left\|\tilde{A}(u_n - u)\right\| < \infty \Leftrightarrow \sup\|A(u_n)\| < \infty$.
β) Έστω ότι ο A δεν είναι τοπικά φραγμένος. Τότε, $\forall n \geq 1$, $\exists u_n \in B\left(u, \frac{1}{n}\right)$: $\|Au_n\| > n$. Τότε, $u_n \to u$ και $\sup\|A(u_n)\| \to \infty$. Αυτό είναι άτοπο λόγω του (α). □

<u>Ορισμός 2</u>

Έστω X χώρος Banach και τελεστής $A: X \to X^*$. O A είναι **demicontinuous** στο x αν για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; A(x_n) \xrightarrow{w} A(x).$$

O A είναι **hemicontinuous** στο x αν $\forall y \in X$ και για κάθε ακολουθία $(t_n) \subseteq (0, +\infty)$ με $t_n \to 0$ ισχύει

$$A(x + t_n y) \xrightarrow{w} A(x).$$

H hemicontinuity ισοδυναμεί με συνέχεια κατά μήκος ευθειών. Αν ο A είναι demicontinuous, τότε είναι και hemicontinuous.

<u>Πρόταση 4</u>

Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach και $A : X \to X^*$ μονότονος τελεστής. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) O A είναι demicontinuous.

2) O A είναι hemicontinuous.

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη 1)⇒2) είναι προφανής.

2)⇒1): Έστω $x \in X$ και $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $A(x_n) \xrightarrow{w} A(x)$.

O A είναι μονότονος και επομένως τοπικά φραγμένος στο X (βλ. Θεώρημα 1). Επομένως η ακολουθία (Ax_n) είναι φραγμένη στον X^*. Αφού ο X είναι ανακλαστικός, ο X^* είναι επίσης ανακλαστικός. Άρα υπάρχει x^* στον X^* και υπακολουθία $\left(Ax_{n_k}\right)$ τέτοια ώστε:

$$Ax_{n_k} \xrightarrow{w} x^*.$$

O A είναι μονότονος, άρα

$$< A\left(x_{n_k}\right) - A(y), x_{n_k} - y > \geq 0, \qquad \forall y \in X, \qquad k \geq 1.$$

Αφού $x_n \to x$, $x_{n_k} \to x$. Άρα, με δεδομένο ότι $Ax_{n_k} \xrightarrow{w} x^*$, ισχύει:

$$< A\left(x_{n_k}\right) - A(y), x_{n_k} - y > \to < x^* - A(y), x - y > \Rightarrow$$
$$< x^* - A(y), x - y \geq 0\,, \;\forall y \in X. \tag{14}$$

Έστω $z \in X$. Επιλέγουμε $y = x + t_n z$, $z \in X$, $t_n > 0$ με $t_n \to 0$. Τότε η (14) δίνει:

$$< x^* - A(x + t_n z),\; -t_n z > \geq 0 \;\Rightarrow < x^* - A(x + t_n z), z > \;\leq\; 0,\; \forall z \in X.$$

Για $n \to \infty$ παίρνουμε

$$< x^* - A(x),\; z > \leq 0,\; \forall z \in X. \tag{15}$$

Θέτοντας στην (15) όπου z το $-z$ προκύπτει:

$$< x^* - A(x),\ -z > \leq 0 \ \Rightarrow\ < x^* - A(x),\ z > \geq 0,\ \forall z \in X. \qquad (16)$$

Οι (15) και (16) δίνουν:

$$< x^* - A(x), z >= 0, \qquad \forall z \in X \ \Rightarrow x^* = A(x).$$

Επομένως, $A(x_{n_k}) \xrightarrow{w} A(x)$.

Τα παραπάνω εξακολουθούν να ισχύουν αν αντικαταστήσουμε την ακολουθία (x_n) με μια τυχαία υπακολουθία της. Συνεπώς, $A(x_n) \xrightarrow{w} A(x)$ στον X^* (βλ. Παράρτημα, §2, Λήμμα). Άρα, ο τελεστής A είναι demicontinuous.
□

3.3 Μεγιστικά Μονότονοι Τελεστές

<u>Ορισμός 3</u>
Έστω $A: X \to X^*$ μονότονος τελεστής (X χώρος Banach). Καλούμε τον A **μεγιστικά μονότονο**, αν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[< A(z) - x^*, z - u >\geq 0, \forall z \in X] \ \Rightarrow\ x^* = A(u).$$

<u>Πρόταση 5</u>
Έστω $A: X \to X^*$ maximal μονότονος τελεστής (X ανακλαστικός χώρος Banach). Τότε ο A είναι demicontinuous.
<u>Απόδειξη</u>
Έστω ακολουθία (u_n) με $u_n \to u$. Από το Θεώρημα 1 ισχύει

$$\sup_n \|Au_n\| < \infty.$$

Περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$Au_n \xrightarrow{w} x^* \in X^*.$$

Λόγω μονοτονίας του A, $\forall z \in X$ και $\forall n \geq 1$ ισχύει

$$< Au_n - Az, \qquad u_n - z > \geq 0.$$

Για $n \to \infty$ λαμβάνουμε

$$< x^* - Az, u - z > \geq\ 0, \qquad \forall z \in X.$$

Αφού ο A είναι maximal μονότονος, προκύπτει τελικά ότι

$$x^* = Au.$$

Άρα, ο A είναι demicontinuous (βλ. Παράρτημα, §2, Λήμμα).
□

<u>Ορισμός 4</u>
Ένας ανακλαστικός χώρος Banach X ονομάζεται **γνήσια κυρτός** αν $\forall x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ και $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ ισχύει $\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| < 1$.
Ισοδύναμα, αν $x_1, x_2 \in X$ με $\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\| = \|x_1\| = \|x_2\| = 1$, τότε $x_1 = x_2$.

<u>Θεώρημα 2</u>
Έστω X ανακλαστικός χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι ο X^* είναι γνήσια κυρτός. Τότε, η δυϊκή απεικόνιση J είναι μονότιμη, μονότονη, φραγμένη και demicontinuous.
<u>Απόδειξη</u>
Έστω $x_1{}^*, x_2{}^* \in J(x)$. Τότε

$$\|x_1{}^*\| = \|x_2{}^*\| = \|x\| = \rho$$

και

$$< x_1{}^*, x >=< x_2{}^*, x >= \rho^2.$$

Έχουμε

$$\|x\|\|x_1{}^* + x_2{}^*\| \geq< x_1{}^* + x_2{}^*, x >= 2\rho^2 \Rightarrow \|x_1{}^* + x_2{}^*\| \geq 2\rho.$$

Επομένως ,

$$1 \geq \left\|\frac{\frac{x_1{}^*}{\rho} + \frac{x_2{}^*}{\rho}}{2}\right\| \geq 1 = \left\|\frac{x_1{}^*}{\rho}\right\| + \left\|\frac{x_2{}^*}{\rho}\right\|.$$

Αφού ο X^* είναι γνήσια κυρτός, παίρνουμε $x_1{}^* = x_2{}^*$, άρα ο J είναι μονότιμος.
$\forall x \in J$, είναι

$$\|Jx\|^2 = \|x\|^2 =< Jx, x >.$$

$\forall x_1, x_2 \in X$ ισχύει

$< Jx_1 - Jx_2, x_1 - x_2 >= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - < Jx_2, x_1 > - < Jx_1, x_2 >\geq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \|Jx_2\|\|x_1\| - \|Jx_1\|\|x_2\| = (\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \geq 0,$

επομένως ο J είναι μονότονος.
Επειδή $\|Jx\| = \|x\|$, ο J είναι προφανώς φραγμένος.

Τέλος, έστω $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \to x$. Επειδή ο J είναι φραγμένος και ο X^* είναι ανακλαστικός, περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$Jx_n \overset{w}{\to} x^*.$$

Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$< Jx_n, x_n >= \|x_n\|^2.$$

Επομένως για $n \to \infty$ ισχύει

$$< x^*, x >= \|x\|^2 \Rightarrow \|x^*\| \geq \|x\|.$$

Επίσης, από την κάτω ημισυνέχεια της νόρμας ως προς την ασθενή τοπολογία ισχύει

$$\|x^*\| \leq \text{liminf}\|Jx_n\| = \text{liminf}\|x_n\| = \|x\|.$$

Επομένως

$$\|x^*\| = \|x\|.$$

Συνεπώς

$$x^* \in Jx \;\Rightarrow\; x^* = Jx.$$

Άρα ο J είναι demicontinuous (βλ. Παράρτημα, §2, Λήμμα).
□

<u>Πρόταση 6</u>
Αν ένας τελεστής $A: X \to X^*$ είναι μονότονος και hemicontinuous, τότε είναι μεγιστικά μονότονος.
<u>Απόδειξη</u>
Έστω $< A(x) - x^*, x - y > \geq 0, \; \forall x \in X.$ (18)

Θα δείξουμε ότι $x^* = A(y)$.
Έστω $t > 0$, $z \in X$. Η (18) ισχύει και για $x = y + tz$. Άρα:

$< A(y + tz) - x^*, z > \geq 0, \; \forall z \in X, \; \forall t \geq 0.$ (19)

Αν επιλέξουμε για t μία ακολουθία $t_n \to 0$, επειδή ο A είναι hemicontinuous ισχύει:

$A(y + t_n z) \overset{w}{\to} A(y) \Rightarrow < A(y + t_n z) - x^*, z > \to < A(y) - x^*, z >, \; \forall z \in X.$

Λόγω της (19) προκύπτει

$< A(y) - x^*, z > \geq 0, \; \forall z \in X.$

Αν θέσουμε όπου z το $-z$, παίρνουμε

$< A(y) - x^*, z > \leq 0,\ \forall z \in X \ \Rightarrow < A(y) - x^*, z > = 0,\ \forall z \in X.$

Έπεται ότι $x^* = A(y)$.

Δηλαδή ο A είναι μεγιστικά μονότονος. □

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Hille-Yosida για γραμμικούς, μεγιστικά μονότονους τελεστές πάνω από χώρους Hilbert. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε τα παρακάτω προπαρασκευαστικά αποτελέσματα. Σε ό,τι ακολουθεί, ο H είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$.

<u>Θεώρημα 3</u>
Έστω $A: D(A) \subseteq H \to H$ γραμμικός, μεγιστικά μονότονος τελεστής. Τότε, $R(I + A) = H$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής. Δηλαδή για κάθε $f \in H$, υπάρχει $u \in D(A) : u + A(u) = f$.
(Μία απόδειξη για H διαχωρίσιμο και $D(A) = H$, αναπτύσσεται στην §3.4, Πόρισμα του Θ.5.)

<u>Πρόταση 7</u>
Έστω $A: D(A) \subseteq H \to H$ γραμμικός και μεγιστικά μονότονος τελεστής. Τότε
α) $\overline{D(A)} = H$.
β) Το γράφημα $\mathrm{Graph}(A)$ του A είναι κλειστό υποσύνολο του $D(A) \times H$.
γ) Για κάθε $\lambda > 0$, ο $I + \lambda A : D(A) \to H$ είναι 1-1 και επί και ο $(I + \lambda A)^{-1} : H \to D(A)$ είναι φραγμένος με $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$.
<u>Απόδειξη</u>
α) Έστω $f \in H^* \equiv H$ ώστε

$$< f, v > = 0, \qquad \forall v \in D(A).$$

Αν αποδείξουμε ότι $f = 0$, λόγω του Θεωρήματος Hahn-Banach, θα έχουμε δείξει ότι ο $D(A)$ είναι πυκνός στο χώρο $H^* \equiv H$.
Ο A είναι μεγιστικά μονότονος και άρα $R(I + A) = H$ (βλ. Θ. 3). Επομένως, υπάρχει $u_0 \in D(A)$ ώστε

$$u_0 + A(u_0) = f \ \Rightarrow < u_0, u_0 > + < A(u_0), u_0 > = < f, u_0 > \Rightarrow$$
$$\|u_0\|^2 + < A(u_0), u_0 > = 0. \qquad (20)$$

Ο A είναι γραμμικός και μονότονος, άρα $< A(u_0), u_0 > \geq 0$. Επιπλέον, $\|u_0\|^2 \geq 0$. Άρα η (20) δίνει ότι $\|u_0\|^2 = 0$ και $< A(u_0), u_0 > = 0$. Συνεπώς,

$$u_0 = 0 \ \Rightarrow \ A(u_0) = 0 \ \Rightarrow \ f = u_0 + A(u_0) = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\overline{D(A)} = H$.

β) Ισχυρισμός 1: Για κάθε $f \in H$, η εξίσωση

$$u + A(u) = f \tag{21}$$

έχει μοναδική λύση .
Πράγματι, η ύπαρξη λύσης εξασφαλίζεται από το Θ.3. Για τη μοναδικότητα, έστω u' επίσης λύση της (21), δηλαδή

$$u' + A(u') = f. \tag{22}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (21) και (22) προκύπτει

$$u - u' + A(u - u') = 0 \Rightarrow < u - u', u - u' > + < A(u - u'), u - u' \geq 0$$
$$\Rightarrow \|u - u'\|^2 = 0 \Rightarrow u = u',$$

αφού $\|u - u'\|^2 \geq 0$ και $< A(u - u'), u - u' > \geq 0$ λόγω γραμμικότητας και μονοτονίας του A.

Λόγω του ισχυρισμού, ο τελεστής $I + A : D(A) \to H$ είναι 1-1 και επί και συνεπώς ορίζεται ο $(I + A)^{-1} : H \to D(A) \subseteq H$.
Εάν $f \in H$ και $u = (I + A)^{-1}(f) \in D(A)$, έχουμε

$$< u + A(u), u > = < f, u > \; \Rightarrow \; \|u\|^2 + < A(u), u > \; = < f, u >$$
$$\xRightarrow{<A(u),u>\geq 0} \|u\|^2 \; \leq \; < f, u > \; \leq \; \|f\|\|u\| \; \Rightarrow \; \|u\| \; \leq \; \|f\|.$$

Έπεται ότι ο $(I + A)^{-1}$ είναι φραγμένος με $\|(I + A)^{-1}\| \leq 1$.

Έστω $(u_n) \subseteq D(A)$ με $u_n \to u$ και $A(u_n) \to f$. Για να δείξω ότι το Graph(A) είναι κλειστό αρκεί να δείξω ότι $u \in D(A)$ και $f = A(u)$. Είναι

$$u_n + A(u_n) \to u + f \Rightarrow (I + A)(u_n) \to u + f.$$

Ο τελεστής $(I + A)^{-1}$ είναι γραμμικός, φραγμένος, δηλαδή συνεχής. Άρα,

$$(I + A)^{-1}(I + A)u_n \to (I + A)^{-1}(u + f) \Rightarrow u_n \to (I + A)^{-1}(u + f)$$

και συνεπώς,

$$u = (I + A)^{-1}(u + f). \tag{23}$$

Η (23) δίνει ότι $u \in D(A)$ και

$$u + A(u) = u + f \Rightarrow f = A(u).$$

γ) Αρκεί να δείξουμε μόνο ότι
$$R(I + \lambda A) = H, \qquad \forall \lambda > 0$$
(τα υπόλοιπα προκύπτουν όπως στο **β)**).

Ισχυρισμός 2: Εάν $R(I+\lambda_0 A)=H$ για κάποιο $\lambda_0>0$, τότε

$$R(I+\lambda A)=H, \qquad \forall\,\lambda>\tfrac{\lambda_0}{2}.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Όπως στο **β)**, αποδεικνύεται ότι ορίζεται ο $T=(I+\lambda_0 A)^{-1}: H \to D(A)$ και ότι είναι φραγμένος με $\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\|\leq 1$.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda>\frac{\lambda_0}{2}$ η εξίσωση $u+\lambda A(u)=f$ έχει λύση. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε $u\in D(A)$ ώστε:

$$u+\lambda_0 A(u)=\frac{\lambda_0}{\lambda}f+\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u \Leftrightarrow u=(I+\lambda_0 A)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda}f+\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u\right]=T(u).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο. Αυτό θα επιτευχθεί αν αποδείξουμε ότι ο T είναι συστολή. Έστω $u_1,u_2\in H$. Έχουμε

$$\|T(u_1)-T(u_2)\|=\left\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(u_1-u_2)\right\|\leq\left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right|\|u_1-u_2\|.$$

Για να είναι ο T συστολή, πρέπει

$$\left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right|<1\Leftrightarrow -1<1-\frac{\lambda_0}{\lambda}<1\Leftrightarrow 0<\frac{\lambda_0}{\lambda}<2\Leftrightarrow \lambda>\frac{\lambda_0}{2}\ \text{(ισχύει)}.$$

Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής T έχει μοναδικό σταθερό σημείο κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Ισχυρισμού 2.

Εφαρμόζοντας τώρα τον Ισχυρισμό 2 για $\lambda_0=1$ (βλ. και Θ. 3), προκύπτει ότι

$$R(I+\lambda A)=H, \qquad \forall\,\lambda>\tfrac{1}{2}.$$

Έστω τώρα $\lambda>\frac{1}{4}$. Επιλέγουμε μ ώστε $\lambda>\mu>\frac{1}{4}$, οπότε $2\mu>\frac{1}{2}$ και λόγω του παραπάνω,

$$R(I+2\mu A)=H.$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον Ισχυρισμό 2 για $\lambda_0=2\mu$, παίρνουμε $R(I+\lambda A)=H$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$R(I+\lambda A)=H, \qquad \forall\,\lambda>\tfrac{1}{4}.$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι $\forall\, n\in\mathbb{N}$ και $\forall\,\lambda>\frac{1}{2^n}$,

$$R(I+\lambda A)=H.$$

Έπεται ότι

$R(I+\lambda A)=H, \qquad \forall\,\lambda>0.$ □

<u>Ορισμός 6</u>
α) Ο **επιλύων τελεστής** J_λ του A ορίζεται ως εξής:

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} : H \to D(A), \quad \lambda > 0.$$

β) Η **προσέγγιση Yosida** A_λ του A είναι ο τελεστής

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} : H \to D(A), \quad \lambda > 0.$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
1) $A_\lambda(v) = A\big(J_\lambda(v)\big), \ \forall v \in H$ και $\forall \lambda > 0$
2) $A_\lambda(v) = J_\lambda\big(A(v)\big), \ \forall v \in D(A)$ και $\forall \lambda > 0$
3) $\|A_\lambda(v)\| \leq \|A(v)\|, \ \forall v \in D(A)$ και $\forall \lambda > 0$
4) $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda(v) = v, \ \forall v \in H$
5) $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda(v) = A(v), \ \forall v \in D(A)$
6) $<A_\lambda(v), v> \geq 0, \ \forall v \in H, \ \forall \lambda > 0$
7) $\|A_\lambda(v)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|, \forall v \in H, \ \forall \lambda > 0$

<u>Θεώρημα 3 (Hille-Yosida)</u>
Έστω $A: D(A) \subseteq H \to H$ γραμμικός και μεγιστικά μονότονος τελεστής. Τότε για κάθε $u_0 \in D(A)$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση u που ανήκει στο χώρο $C^1([0,+\infty), H) \cap C([0,+\infty), D(A))$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + A\big(u(t)\big) = 0 \\ \quad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{24}$$

Επίσης
$$\|u(t)\| \leq \|u_o\| \ , \quad \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| \leq \|A(u_0)\|, \quad \forall t \geq 0.$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>
Μία συνάρτηση u ανήκει στον χώρο $C([0,+\infty), D(A))$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$t_n \xrightarrow{|\cdot|} t_0 \ \Rightarrow \ u(t_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{D(A)}} u(t_0), \ \forall t_0 \geq 0,$$

όπου

$$\|v\|_{D(A)} = \|v\|_H + \|A(v)\|_H, \ v \in D(A).$$

<u>Απόδειξη</u> Σε ό,τι ακολουθεί, με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και με $|\cdot|$ την αντίστοιχη νόρμα του χώρου *H.*

<u>1ο βήμα</u>
Θα αποδείξουμε πρώτα τη **μοναδικότητα** της συνάρτησης u.
Έστω ότι υπάρχει μία δεύτερη συνάρτηση $\bar{u}$ που ικανοποιεί την (24), δηλαδή:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}(t)}{dt} + A\big(\bar{u}(t)\big) = 0 \\ \quad \bar{u}(0) = u_0. \end{cases} \tag{25}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (24) και (25) προκύπτει ότι:

$\frac{d}{dt}\big(u(t) - \bar{u}(t)\big) + A\big(u(t) - \bar{u}(t)\big) = 0 \ \Rightarrow < \frac{d}{dt}(u(t) - \bar{u}(t), u(t) - \bar{u}(t) >$
$+A(u(t) - \bar{u}(t), u(t) - \bar{u}(t) >= 0.$

Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος είναι μη αρνητικός, επειδή ο A είναι μονότονος τελεστής. Επομένως

$$< \frac{d}{dt}(u(t) - \bar{u}(t)), u(t) - \bar{u}(t) > \leq 0$$

και άρα

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u(t) - \bar{u}(t)|^2) \leq 0 \Rightarrow |u(t) - \bar{u}(t)| \leq |u(0) - \bar{u}(0)| = 0, \ \forall t \geq 0,$

δηλαδή $u(t) = \bar{u}(t), \forall t \geq 0.$

Για να δείξουμε την **ύπαρξη** της u, αντικαθιστούμε τον A με τον ομαλοποιημένο Yosida A_λ, αποδεικνύουμε διάφορες εκτιμήσεις ανεξάρτητες του λ και περνούμε στο όριο όταν $\lambda \to 0$.
Έστω u_λ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \ \text{ στο } [0, +\infty) \\ \quad u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Η u_λ υπάρχει λόγω του Θεωρήματος Cauchy-Lipschitz-Picard (βλ. Παράρτημα, §5) που εφαρμόζεται για την απεικόνιση $F = -A_\lambda$ (βλ. ιδιότητα 7 παραπάνω).

<u>2ο βήμα</u>
Έχουμε την εκτίμηση

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |A_\lambda u_0| \ \leq |Au_0| \ , \ \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0. \tag{26}$$

Η ανισότητα αυτή προκύπτει ως άμεση συνέπεια από το παρακάτω Λήμμα:

<u>Λήμμα 1</u>
Έστω $w \in C^1([0, \infty), H)$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \ \text{ στο } [0, +\infty). \tag{27}$$

Τότε οι συναρτήσεις $t \to |w(t)|$ και $t \to \left|\frac{dw}{dt}(t)\right| = |A_\lambda w(t)|$ είναι φθίνουσες στο $[0,+\infty)$.

<u>Απόδειξη Λήμματος 1</u>

Έχουμε $\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0$. Επιπλέον, $(A_\lambda w, w) \geq 0$ (βλ. ιδιότητα 6) κι επομένως $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0$. Εξάλλου, επειδή ο A_λ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμπεραίνουμε από την (27) ότι $w \in C^\infty$ και ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0.$$

Εφαρμόζουμε τότε τα παραπάνω στη $\frac{dw}{dt}$. □

<u>3ο βήμα</u>

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $t \geq 0$, η $u_\lambda(t)$ συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$, σε ένα όριο, έστω $u(t)$. Επιπλέον, η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,T]$.

Πράγματι, έστω $\lambda, \mu > 0$. Έχουμε

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\lambda u_\mu = 0$$

και επομένως

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 + \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\right) = 0. \tag{28}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}&\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\right) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) = \\ &(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \geq \\ &\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right).\end{aligned} \tag{29}$$

Συμπεραίνουμε τότε από τις (26), (28), (29) ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2$$

και με ολοκλήρωση

$$\left|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\right|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2,$$

Δηλαδή

$$\left|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\right| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}\,|Au_0|. \tag{30}$$

Προκύπτει ότι, για κάθε $t \geq 0$, η $(u_\lambda(t))$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$ σε ένα όριο, έστω $u(t)$. Παίρνοντας το όριο στην (30) όταν $\mu \to 0$, βρίσκουμε

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

Επομένως, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0, T]$ και $u \in C([0, \infty), H)$.

4ο βήμα

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι ισχύει $u_0 \in D(A^2)$, δηλαδή $u_0 \in D(A)$ και $Au_0 \in D(A)$. Τότε η $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ συγκλίνει όταν $\lambda \to 0$, για κάθε $t \geq 0$ ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0, T]$. Πράγματι, θέτοντας $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, προκύπτει ότι $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.
Ακολουθώντας το 3ο βήμα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq \left(|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|\right)\left(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|\right). \tag{31}$$

Αλλά από το Λήμμα 1 έχουμε

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|, \tag{32}$$

και ομοίως,

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|. \tag{33}$$

Τέλος, επειδή $Au_0 \in D(A)$, προκύπτει από τις ιδιότητες 1, 2 ότι

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

και άρα

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0| \tag{34}$$

(σημ. ότι $\left|\| J_\lambda \|\right| \leq 1$).

Συνδυάζοντας τις (31), (32), (33) και (34) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2.$$

Συμπεραίνουμε, όπως στο 3ο βήμα, ότι η $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ συγκλίνει, όταν $\lambda \to 0$, για κάθε $t \geq 0$ και ομοιόμορφα ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα.

5ο βήμα

Υπάρχει μια λύση της (24), αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $u_0 \in D(A^2)$. Πράγματι, από τα παραπάνω, γνωρίζουμε ότι για κάθε $T < \infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t), \text{ όταν } \lambda \to 0, \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T], \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \text{ συγκλίνει, όταν } \lambda \to 0, \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T]. \end{cases}$$

Προκύπτει ότι $u \in C^1([0,\infty), H)$ και ότι $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t)$, όταν $\lambda \to 0$, ομοιόμορφα στο $[0,T]$. Γράφουμε την (24) στη μορφή

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A\big(J_\lambda u_\lambda(t)\big) = 0. \tag{35}$$

Σημειώνουμε ότι $J_\lambda u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda\to 0} u(t)$ διότι

$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \le |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \le$
$|u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \xrightarrow{\lambda\to 0} 0$
(βλ. ιδιότητα 4 και σημ. ότι $\big\|\, J_\lambda \,\big\| \le 1$).

Επειδή το γράφημα του A είναι κλειστό, έπεται από την (35) ότι $u(t) \in D(A)$, $\forall t \ge 0$ και ότι

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

Τέλος, επειδή $u \in C^1([0,\infty), H)$, η συνάρτηση $t \to Au(t)$ είναι συνεχής από το $[0,+\infty)$ στο H και άρα $u \in C\big([0,\infty), D(A)\big)$.
Επομένως, έχουμε μία λύση της (24) που ικανοποιεί τις $|u(t)| \le |u_0|$, $\forall t \ge 0$ και $\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \le |Au_0|$, $\forall t \ge 0$.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα:

<u>Λήμμα 2</u>
Έστω $u_0 \in D(A)$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{u}_0 \in D(A^2)$ τέτοιο ώστε $|u_0 - \bar{u}_0| < \varepsilon$ και $|Au_0 - A\bar{u}_0| < \varepsilon$.
Δηλαδή ο $D(A^2)$ είναι πυκνός στον $D(A)$ για τη νόρμα του γραφήματος.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$, οπότε ισχύει $\bar{u}_0 \in D(A)$ και $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0$. Άρα $A\bar{u}_0 \in D(A)$, δηλαδή $\bar{u}_0 \in D(A^2)$.
Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι

$$A\bar{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$$

και

$$\lim_{\lambda\to 0}|J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \qquad \lim_{\lambda\to 0}|J_\lambda A u_0 - Au_0| = 0.$$

Επιλέγουμε τότε το $\lambda > 0$ αρκετά μικρό και παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

6^o βήμα: Συμπέρασμα
Έστω $u_0 \in D(A)$. Βάσει του προηγούμενου Λήμματος, υπάρχει ακολουθία $(u_{0n}) \in D(A^2)$ τέτοια ώστε $u_{0n} \to u_0$ και $Au_{0n} \to Au_0$. Από το 5^o βήμα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια λύση u_n του προβλήματος

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0, \text{ στο } [0,\infty) \\ \quad u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{36}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$|u_n(t) - u_m(t)| \le |u_{0n} - u_{0m}| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \le |Au_{0n} - Au_{0m}| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Επομένως,

$$u_n(t) \to u(t) \text{ ομοιόμορφα στο } [0,\infty)$$

και

$$\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t) \text{ ομοιόμορφα στο } [0,\infty),$$

με $u \in C^1([0,\infty), H)$. Παίρνοντας το όριο στην (36), επειδή το γράφημα του A είναι κλειστό, βλέπουμε ότι $u \in C([0,\infty), D(A))$ και ότι η u ικανοποιεί την (24).
□

3.4 Ψευδομονότονοι Τελεστές

Ορισμός 7
Έστω τελεστής $A: X \to X^*$. Ο A ονομάζεται **ισχυρά συνεχής**, αν για κάθε ακολουθία (x_n) ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Ax_n \to Ax.$$

Ορισμός 8
Έστω τελεστής $A: X \to X^*$. Ο A ονομάζεται **ψευδομονότονος**, αν για κάθε ακολουθία (x_n) με

$$x_n \xrightarrow{w} x_0, \qquad Ax_n \xrightarrow{w} y_0, \qquad \limsup < Ax_n,\ x_n - x_0 > \le 0,$$

ισχύει

$$y_0 = A(x_0)\,, \qquad < Ax_n,\, x_n > \to < y_0,\, x_0 > .$$

<u>Σχόλιο 1</u>
Υπάρχουν περιπτώσεις τελεστών που είναι ψευδομονότονοι αλλά όχι μονότονοι. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον τελεστή $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to [W_0^{1,2}(\Omega)]^*$ με

$< Au, v >= -\int_\Omega \; u(x)v(x)dx.$

Ο A είναι ψευδομονότονος, αλλά δεν είναι μονότονος.
Πράγματι, έστω $u_n \xrightarrow{w} u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega)$ και $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Τότε $\forall n \geq 1$ είναι

$$|< Au_n - Au, v >| \leq \int_\Omega |u_n - u||v|dx \leq \|u_n - u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|u_n - u\|_{L^2}\|v\|_{1,2}\,,$$
$$\Rightarrow \quad \|Au_n - Au\|_{(W_0^{1,2})^*} \leq \|u_n - u\|_{L^2}.$$

Από το θεώρημα ενσφήνωσης Sobolev παίρνουμε $\|u_n - u\|_{L^2} \to 0$, επομένως $\|Au_n - Au\|_{(W_0^{1,2})^*} \to 0.$

Δηλαδή ο A είναι ισχυρά συνεχής και άρα ψευδομονότονος.
Δεν είναι μονότονος, αφού αν επιλέξουμε $u \in W_0^{1,2}(\Omega), u \neq 0$, λαμβάνουμε

$< Au - A(0), u - 0 >= -{\|u\|_{L^2}}^2 < 0.$ □

<u>Σχόλιο 2</u>
Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις τελεστών που είναι μονότονοι αλλά όχι ψευδομονότονοι. Για παράδειγμα, θεωρούμε την αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

Θεωρούμε επίσης την ακολουθία $u_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$$f(u_n)(u_n - 0) = (-1)\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0, \qquad u_n \to 0,$$

ενώ $f(u_n) = -1$ και $f(0) = 1 \neq 0.$
Επομένως η f δεν είναι ψευδομονότονη. □

Πρόταση 8
Έστω $A: X \to X^*$ μεγιστικά μονότονος τελεστής. Τότε, ο A είναι ψευδομονότονος.
Απόδειξη
Έστω $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $\limsup < Ax_n, x_n - x_0 > \leq 0$, $Ax_n \xrightarrow{w} y_0$.
Αφού ο A είναι μονότονος, $\forall\, y \in X$ ισχύει:

$$< A(x_n) - A(y), x_n - y > \ \geq\ 0 \Rightarrow$$

$$< A(x_n),\ x_n > \ \geq < A(y),\ x_n > + < A(x_n),\ y > - < A(y),\ y >. \qquad (37)$$

Από την υπόθεση

$$\limsup < A(x_n),\ x_n > \ \leq\ \limsup\ < A(x_n),\ x_0 > = < y_0,\ x_0 > .$$

Παίρνοντας το limsup στην (37) προκύπτει

$$< y_0,\ x_0 > \ \geq\ < A(y),\ x_0 > + < y_0,\ y > - < A(y), y > \Rightarrow$$

$$< y_0 - A(y),\ x_0 > - < y_0 - A(y),\ y > \ \geq 0 \ \Rightarrow\ < A(y) - y_0, y - x_0 > \geq 0,$$
$\forall y \in X$.

Αφού ο A είναι μεγιστικά μονότονος, από την τελευταία παίρνουμε

$$y_0 = A(x_0).$$

Θέτοντας τώρα στην (37) $y = x_0$ προκύπτει:

$$< A(x_n),\ x_n > \ \geq\ < y_0,\ x_n > \ + < A(x_n),\ x_0 > - < y_0,\ x_0 > ,\ \ n \geq 1,$$

$$\Rightarrow \liminf\ < A(x_n),\ x_n > \ \geq < y_0,\ x_0 >. \qquad (38)$$

Επίσης

$$\limsup < A(x_n),\ x_n > \leq < y_0,\ x_0 > . \qquad (39)$$

Οι (38) και (39) δίνουν:

$$\limsup < A(x_n),\ x_n > = \liminf\ < A(x_n),\ x_n > = < y_0, x_0 > . \qquad \square$$

Πρόταση 9
Έστω X ανακλαστικός χώρος και τελεστές $A, B: X \to X^*$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:
α) Αν ο A είναι ισχυρά συνεχής, τότε είναι ψευδομονότονος.

β) Αν ο A είναι μεγιστικά μονότονος, τότε είναι ψευδομονότονος.
γ) Αν ο A είναι ψευδομονότονος και τοπικά φραγμένος, τότε είναι demicontinuous.
δ) Αν ο A είναι ψευδομονότονος και ο B ισχυρά συνεχής, τότε ο τελεστής $T = A + B$ είναι ψευδομονότονος.
ε) Αν οι A και B είναι ψευδομονότονοι και ο ένας από αυτούς είναι φραγμένος, τότε ο τελεστής $T = A + B$ είναι ψευδομονότονος.

Απόδειξη

Η απόδειξη του (α) είναι άμεση και του (β) έγινε προηγουμένως.

γ) Έστω ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ και $x_0 \in X$ έτσι ώστε $x_n \to x_0$.
Αφού ο A είναι τοπικά φραγμένος, η ακολουθία $A(x_n)$ είναι φραγμένη κι επομένως υπάρχουν υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και $x^* \in X^*$ έτσι ώστε

$$A(x_{n_k}) \overset{w}{\to} x^* \in X. \tag{40}$$

Τότε,

$$x_{n_k} \to x_0 \;\; \Rightarrow \;\; \limsup < Ax_{n_k}, x_{n_k} - x_0 >= 0.$$

Αφού ο A είναι ψευδομονότονος, ισχύει

$$x^* = A(x_0) \;\; \overset{(40)}{\Longrightarrow} \;\; A(x_{n_k}) \overset{w}{\to} A(x_0).$$

Άρα ο A είναι demicontinuous (βλ. Παράρτημα, §2, Λήμμα).

δ) Έστω

$$x_n \overset{w}{\to} x_0\,, \quad T(x_n) \overset{w}{\to} x^* \;\text{ και }\; \limsup < T(x_n), x_n - x_0 >\leq 0.$$

Θα δείξουμε ότι $x^* = T(x_0)$ και $< T(x_n), x_n > \xrightarrow{n\to\infty} < x^*, x_0 >$.

Ο τελεστής B είναι ισχυρά συνεχής, οπότε $B(x_n) \to B(x_0)$. Συνεπώς έχουμε

$$A(x_n) = T(x_n) - B(x_n) \overset{w}{\to} x^* - B(x_0)$$

και

$$\limsup < Ax_n, x_n - x_0 >\leq \limsup < Tx_n, x_n - x_0 > +$$
$$+ \limsup(-< Bx_n, x_n - x_0 >) \leq 0.$$

Αφού ο A είναι ψευδομονότονος, ισχύει:

$$x^* - B(x_0) = A(x_0) \Rightarrow x^* = T(x_0)$$

και

$$< A(x_n), x_n > \ \to < A(x_0), x_0 >.$$

Επίσης

$$< B(x_n), x_n > \to < B(x_0), x_0 >.$$

Άρα,

$$< T(x_n), x_n > \to < T(x_0), x_0 >.$$

Δηλαδή ο τελεστής T είναι ψευδομονότονος.

ε) Υποθέτουμε ότι ο A είναι φραγμένος.
Έστω

$$u_n \overset{w}{\to} u, \quad Tu_n \overset{w}{\to} y^*, \quad \limsup < Tu_n, u_n - u > \leq 0.$$

Αφού ο A είναι φραγμένος, περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$Au_n \overset{w}{\to} z^*, \text{ για κάποιο } z^* \in X^*.$$

Ισχυρισμός:
$\limsup < Au_n, u_n - u > \leq 0.$ (41)
Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό διά της εις άτοπον απαγωγής. Έστω ότι η (41) δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $l > 0$ ώστε περνώντας σε υπακολουθίες, να ισχύει

$$\lim < Au_n, u_n - u > = l > 0.$$

Είναι

$\limsup < Bu_n, u_n - u > = \limsup(< Tu_n, u_n - u > - < Au_n, u_n - u >) \leq$
$\limsup < Tu_n, u_n - u > + \limsup(- < Au_n, u_n - u > \leq \ 0 - l < 0$

και

$$Bu_n = Tu_n - Au_n \ \overset{w}{\to} \ y^* - z^*.$$

Επειδή ο B είναι ψευδομονότονος, προκύπτει ότι

$Bu = y^* - z^*$, $< Bu_n, u_n - u > \to 0.$ (42)

Άρα

$l = \lim < Au_n, u_n - u > = \ \lim (< Tu_n, \ u_n - u > - < Bu_n, \ u_n - u >) \ \leq$
$\leq \ \limsup \ < Tu_n, \ u_n - u > \leq 0,$

άτοπο, επομένως αληθεύει ο ισχυρισμός.

Επειδή ο A είναι ψευδομονότονος, ισχύει

$$z^* = Au \tag{43}$$

και

$$< Au_n, u_n - u > \to 0. \tag{44}$$

Επομένως

$\limsup < Bu_n,\ u_n - u >= \limsup(< Tu_n,\ u_n - u > - < Au_n,\ u_n - u >) \leq$
$\limsup < Tu_n,\ u_n - u > -0 \leq 0.$

Επειδή ο B είναι ψευδομονότονος, προκύπτει ότι

$$< Bu_n, u_n - u > \to 0. \tag{45}$$

Από τις (44) και (45) προκύπτει ότι

$$< Tu_n, u_n - u > \to 0$$

και από τις (42) και (43):

$$y^* = Tu.$$

Επομένως ο T είναι ψευδομονότονος (βλ. και Παράρτημα, §2, Λήμμα)
. □

<u>Σχόλιο 3</u>
Από το (β) της Πρότασης αυτής και από την Πρόταση 6 προκύπτει ότι ένας τελεστής μονότονος και hemicontinuous είναι και ψευδομονότονος.

<u>Θεώρημα 4</u>
Έστω X ένας διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach και $A: X \to X^*$ τελεστής ψευδομονότονος, φραγμένος και πιεστικός. Τότε ο A είναι επί, δηλαδή $R(A) = X^*$.
<u>Απόδειξη</u>
Αρχικά σημειώνουμε ότι ο A είναι και demicontinuous (βλ. Πρόταση 9(γ)). Στη συνέχεια, επιλέγουμε ακολουθία (x_n) με $\overline{(x_n)} = X$. Θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία γραμμικών υποχώρων του X ορισμένη ως εξής:

$$F_1 = span\{x_1\},\ F_2 = span\{x_1, x_2\},\ \dots, F_n = span\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \dots\ .$$

Για την ακολουθία αυτή ισχύει

$$\dim F_n < \infty\ \ \forall n \geq 1 \quad \text{και} \quad \overline{\bigcup_{n\geq 1} F_n} = X.$$

Σταθεροποιούμε ένα $n \geq 1$.
Ορίζουμε τη γραμμική συνεχή ενσφήνωση $j_n: F_n \to X$ με τύπο

$$j_n x = x, \qquad \forall x \in F_n.$$

Ορίζουμε επίσης το συζυγή τελεστή $j_n^*: X^* \to {F_n}^*$ με τύπο

$${j_n}^*(y^*)(x) = y^*\big(j_n(x)\big) = y^*(x), \quad \forall\, y^* \in X^*, \qquad \forall x \in F_n,$$

καθώς και τον τελεστή $T_n: F_n \to {F_n}^*$ με $T_n = {j_n}^* \circ A \circ j_n$.

Ο T_n είναι πιεστικός, αφού $\forall x \in F_n$ ισχύει

$$\frac{< T_n x, \ x >}{\|x\|} = \frac{< {j_n}^* A j_n x, \ x >}{\|x\|} = \frac{< A j_n x, \, j_n x >}{\|x\|} = \frac{< Ax, x >}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty$$

(σημ. ότι ο A είναι πιεστικός).
Επίσης, ο T_n είναι συνεχής τελεστής ως σύνθεση δύο συνεχών τελεστών και ενός demicontinuous, αφού σε πεπερασμένη διάσταση η ασθενής σύγκλιση ισοδυναμεί με την ισχυρή.
Επομένως, από το 4ο Πόρισμα του Θ. Σταθερού Σημείου του Brower, το οποίο αναφέρθηκε στο 2ο Κεφάλαιο, ο T_n είναι επί. Δηλαδή, για τυχαίο $x^* \in X^*$, $\exists u_n \in F_n$ ώστε

$$T_n u_n = {j_n}^* x^* \Rightarrow \ A u_{n|F_n} = {x^*}_{|F_n}, \ \forall n \geq 1.$$

Επομένως, $\forall n \geq 1$, λαμβάνουμε

$$\frac{< A u_n, u_n >}{\|u_n\|} = \frac{< x^*, u_n >}{\|u_n\|} \ \leq \ \frac{\|x^*\| \|u_n\|}{\|u_n\|} = \|x^*\|.$$

Επειδή ο A είναι πιεστικός, η (u_n) είναι φραγμένη. [Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία (u_n) δεν είναι φραγμένη, περνώντας σε υπακολουθίες, θα έχουμε $\|u_n\| \to \infty$ και άρα $\frac{<Au_n, u_n>}{\|u_n\|} \to \infty$, άτοπο.]

Υπάρχει υπακολουθία (τη συμβολίζουμε επίσης με (u_n)) που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $u \in X$. Θα δείξουμε ότι

$$x^* = Au.$$

Έστω $z \in \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Τότε, $\exists n_0: z \in F_{n_0}$ κι επειδή η ακολουθία των F_n είναι αύξουσα, $F_{n_0} \subseteq F_{n,} \ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ z \in F_{n,} \ \forall n \geq n_0$. Άρα,

$$< Au_n, z > = < x^*, z >, \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \lim < Au_n, z > = < x^*, z >, \quad \forall\, z \in \bigcup_{n \geq 1} F_n.$$

Αλλά $\overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n} = X$ κι επειδή X ανακλαστικός και A **φραγμένος** , προκύπτει ότι

$$Au_n \xrightarrow{w} x^*.$$

Επιπλέον,

$\limsup < Au_n, u_n - u > \leq \limsup < Au_n, u_n > -\lim < Au_n, u >=$
$= \lim < x^*, u_n > -< x^*, u >= 0$

και αφού ο A είναι ψευδομονότονος, $x^* = Au$. □

<u>Θεώρημα 5 (Minty-Browder)</u>
Έστω X ένας διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach και $A: X \to X^*$ τελεστής μονότονος, hemicontinuous και πιεστικός. Τότε ο A είναι επί.
<u>Απόδειξη</u>
Αφού ο A είναι μονότονος και hemicontinuous, είναι maximal μονότονος και demicontinuous (βλ. Προτάσεις 4, 6) . Έστω τώρα $x^* \in X^*$. Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία του Θ.4, κατασκευάζουμε μια αύξουσα ακολουθία (F_n) γραμμικών υποχώρων του X και μια ακολουθία (u_n) διανυσμάτων του X έτσι ώστε:

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} F_n} = X, \qquad Au_{n|F_n} = {x^*}_{|F_n}, \ \forall n \geq 1, \quad u_n \xrightarrow{w} u.$$

Έστω $z \in \bigcup_{k\geq 1} F_k$. Τότε,

$\exists n_0$: $z \in F_{n,}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow < Au_n, \ z - u_n >=< x^*, \ z - u_n >, \quad \forall n \geq n_0$.

Λαμβάνοντας υπόψη και τη μονοτονία του A παίρνουμε

$$0 \ \leq \ < Az - Au_n, \ z - u_n >=< Az - x^*, \ z - u_n >, \quad \forall n \geq n_0$$

και στο όριο καθώς $n \to \infty$,

$$0 \ \leq \ < Az - x^*, \ z - u >.$$

Η τελευταία ισχύει $\forall\, z \in \bigcup_{k\geq 1} F_k$. Επειδή $\overline{\bigcup_{k\geq 1} F_k} = X$ και A demicontinuous, έπεται ότι

$$0 \ \leq \ < Az - x^*, \ z - u >, \qquad \forall\, z \in X.$$

Επειδή ο A είναι maximal μονότονος, παίρνουμε ότι $x^* = Au$. □

<u>Σχόλιο 4</u> Στο Θ.4, η υπόθεση ότι ο A είναι φραγμένος **είναι απαραίτητη.** Αντίθετα, στο Θ.5 αυτή η υπόθεση δεν είναι απαραίτητη. Εναλλακτικά, στην απόδειξη χρησιμοποιείται ουσιωδώς ότι ο A είναι maximal μονότονος και demicontinuous.

Πόρισμα
Εάν X διαχωρίσιμος ανακλαστικός χώρος Banach και $A: X \to X^*$ maximal μονότονος τελεστής, τότε ο τελεστής $A + J$ είναι επί, όπου J η δυϊκή απεικόνιση.
Απόδειξη
Με βάση το *renorming Θεώρημα του Troyanskii* [4], μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι X και X^* είναι γνήσια κυρτοί χώροι. Επομένως, η δυϊκή απεικόνιση J είναι μονότιμη, μονότονη, demicontinuous και φραγμένη. Επιπλέον, αφού ο A είναι maximal μονότονος, είναι και demicontinuous (βλ. Πρόταση 5) . Έπεται ότι ο τελεστής $A + J$ είναι μονότονος και demicontinuous.
Επιπλέον, $\forall x \in X$ ισχύει:

$$< Ax + Jx, x \geq < Ax, x > + \|x\|^2 \geq^{A \text{ μονότονος}} < A(0), x > + \|x\|^2$$
$$\geq \|x\|^2 - \|A(0)\| \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{< Ax + Jx, x >}{\|x\|} \geq \|x\| - \|A(0)\| \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty.$$

Επομένως, ο τελεστής $A + J$ είναι και πιεστικός και με βάση το Θεώρημα 5, είναι επί. □

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια εφαρμογή του Θ.4 σε ένα μη γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Εφαρμογή

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό, φραγμένο σύνολο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f\big(u(x)\big), \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega, \\ \qquad u_{|\partial\Omega=} = 0, \end{cases} \tag{46}$$

όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $p > 1$.
Υποθέτουμε ότι

$$|f(t)| \leq c_1 |t|^{p-1} + c_2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ c_1 > 0, c_2 > 0 \tag{47}$$

και

$$\text{limsup}_{|t| \to \infty} \frac{f(t)}{t|t|^{p-2}} < \lambda_1, \tag{48}$$

όπου λ_1 η 1η ιδιοτιμή της (-Δ_p, $W_0^{1,p}$ (Ω)) (βλ. Κεφ.1 1.10).

Τότε, το πρόβλημα (46) έχει μία τουλάχιστον ασθενή λύση. Δηλαδή, υπάρχει $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx = \int_\Omega f\big(u(x)\big) v(x) dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τους τελεστές $A: W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ και $N_f: W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$με

$$< Au, v >= \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{R^N} dx$$

και

$$< N_f u, v >= \int_\Omega f\big(u(x)\big) v(x) dx.$$

Δηλαδή ο N_f είναι ο τελεστής Nemytskii που αντιστοιχεί στην f.
Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής A είναι μονότονος (βλ.Παράδειγμα 4) και συνεχής (βλ. Παράρτημα, § 3). Επίσης, ο N_f είναι ισχυρά συνεχής (βλ. Παράρτημα, §4).

Θέτουμε $T = A - N_f$. Ο T είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών. Ο A ως συνεχής είναι και hemicontinuous επομένως από την Πρόταση 5 είναι και ψευδομονότονος. Από το (δ) της Πρότασης 9 συμπεραίνουμε ότι ο T είναι επίσης ψευδομονότονος.

Ισχυρισμός 1: Ο T είναι πιεστικός.
Πράγματι, από την (48) προκύπτει ότι $\exists \mu > 0$ ώστε

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t|t|^{p-2}} < \mu < \lambda_1.$$

Έστω $\varepsilon \in (0, \lambda_1 - \mu)$. Υπάρχει $R = R(\varepsilon)$ ώστε $\forall t$ με $|t| > R$ να ισχύει

$$\frac{f(t)}{t|t|^{p-2}} < \mu + \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{tf(t)}{|t|^p} < \mu + \varepsilon \;\Rightarrow\; tf(t) < (\mu + \varepsilon)|t|^p.$$

Επομένως, $\forall t$ με $|t| \le R$, η (47) δίνει:

$$|tf(t)| \le c_1|t|^p + c_2|t| \le c_1 R^p + c_2 R = C_\varepsilon.$$

Επομένως $\forall t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$tf(t) \le (\mu + \varepsilon)|t|^p + C_\varepsilon. \tag{49}$$

$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε

$< Tu, u > = < Au, u > - < N_f u, u > = \|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega f\big(u(x)\big)u(x)dx \geq^{(49)} \|\nabla u\|_p^p - (\mu + \varepsilon)\|u\|_p^p - C_\varepsilon|\Omega| \geq^{Rayleigh} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\mu+\varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla u\|_p^p - C_\varepsilon|\Omega|.$

Αφού $0 < \varepsilon < \lambda_1 - \mu$, ισχύει

$$\frac{< Tu, u >}{\|\nabla u\|_p} \geq \frac{\lambda_1 - \mu - \varepsilon}{\lambda_1}\|\nabla u\|_p{}^{p-1} - \frac{C_\varepsilon|\Omega|}{\|\nabla u\|_p} \to \infty, \qquad \text{για } \|\nabla u\|_p \to \infty, \qquad p > 1.$$

Επομένως ο T είναι πιεστικός.

Άρα από το Θεώρημα 4, εφόσον ο T είναι πιεστικός, συνεχής και ψευδομονότονος, είναι επί, δηλαδή $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$Tu = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \left(\nabla u(x), \nabla v(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx = \int_\Omega f\big(u(x)\big)v(x)dx.$$

Συνεπώς η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος (46). ◻

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Πιεστικότητα

Έστω X χώρος Banach και τελεστής $A: X \to X^*$. Ο A καλείται **πιεστικός** αν

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{< Ax, x >}{\|x\|} = +\infty.$$

Για μία συνάρτηση $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{xA(x)}{|x|} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} A(x) = +\infty.$$

Η πιεστικότητα ενός τελεστή μας διευκολύνει να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις ενός προβλήματος της μορφής $Au = f,\ f \in X^*$, εφόσον υπάρχουν, βρίσκονται μέσα σε ένα φραγμένο σύνολο. Πράγματι, εάν $Au = f,\ \ f \in X^*$, τότε είναι

$$\frac{< Au, u >}{\|u\|} = \frac{< f, u >}{\|u\|} \leq \frac{\|f\|\|u\|}{\|u\|} = \|f\|.$$

Επομένως, λόγω της πιεστικότητας του τελεστή A, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $Au = f$ είναι φραγμένο.

<u>Παραδείγματα πιεστικών τελεστών</u>

α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό και φραγμένο και ο τελεστής $A: L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ με $< Au, v >= \int_\Omega \int |u|^{p-2}\, uvdx,\ p > 1$. Τότε,

$$\frac{< Au, u >}{\|u\|_p} = \frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_p} = \|u\|_p^{p-1} \xrightarrow{\|u\|_p\to\infty} \infty,$$

επομένως ο A είναι πιεστικός.

β) Έστω X χώρος Banach με X^* γνήσια κυρτό. Η δυϊκή επεικόνιση $J: X \to X^*$ είναι επίσης πιεστική, αφού

$$\frac{< Jx, x >}{\|x\|} = \frac{\|x^*\|\|x\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|\|x\|}{\|x\|} = \|x\| \xrightarrow{\|x\|\to\infty} \infty.$$

2. Λήμμα

Έστω X τοπολογικός χώρος και $(x_n) \subseteq X,\ x_0 \in X.$ Υποθέτουμε ότι για κάθε υπακολουθία της (x_n) υπάρχει περεταίρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x_0. Τότε, $x_n \to x_0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η (x_n) δεν συγκλίνει στο x_0. Τότε, υπάρχει περιοχή V του x_0 και υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με $x_{n_k} \notin V,\ \forall k \geq 1$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει περεταίρω υπακολουθία $(x_{n_{k_l}})$ της (x_n) με $x_{n_{k_l}} \to x_0$, άτοπο. □

3. Συνέχεια του τελεστή A: $\boldsymbol{W_0^{1,p}(\Omega) \to \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*}$,

$$\boldsymbol{< Au, v >= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \left(\nabla u(x), \nabla v(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx.}$$

Αρχικά θεωρούμε τον τελεστή $T: L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ με τύπο

$$< Tu, v >= \int_{\Omega} |u|^{p-2}\, uv dx.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι συνεχής.

Έστω $(u_n) \subseteq L^p(\Omega)$ με $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$. Περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$u_n(x) \to u(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{1}$$

και

$$|u_n(x)| \leq w(x),\ n \geq 1, \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

για κάποια $w \in L_+^p(\Omega)$.
Έστω $v \in L^p(\Omega)$ με $\|v\|_p = 1$. Είναι

$$|< Tu_n - Tu, v >| = \left| \int_{\Omega} (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v dx \right| \leq$$
$$\int_{\Omega} ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u||v|\, dx \leq \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|^p\right)^{1/q} \|v\|_p =$$
$$\left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u|^q\right)^{1/q},$$

όπου $1/p + 1/q = 1$.

Επομένως,

$$\|Tu_n - Tu\|_{(L^p)^*} \le \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^q\right)^{1/q}, \qquad n \ge 1.$$

Λόγω της (1) είναι

$$||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|^q \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{σχεδόν παντού}$$

και

$$||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)|^q \le 2^{q-1}[|u_n(x)|^p + |u(x)|^p] \le$$
$$2^{q-1}[|w(x)|^p + |u(x)|^p] = h(x), \quad \text{όπου } h \in L^1(\Omega).$$

[Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$|a+b|^q \le 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q), \ \forall a, b \in \mathbb{R},$$

που προκύπτει από την κυρτότητα της συνάρτησης $t \to t^q$ στο $[0,+\infty)$ για $q > 1.$]

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\left(\int_{\Omega} ||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^q\right)^{1/q} \to 0.$$

Επομένως,

$$\|Tu_n - Tu\|_{(L^p)^*} \to 0,$$

δηλαδή ο T είναι συνεχής (βλ. §2, Λήμμα).
Ομοίως αποδεικνύεται ότι ο διανυσματικός τελεστής $T: L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \left(L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)\right)^*$ με

$$< T\bar{u}, \bar{v} >= \int_{\Omega} |\bar{u}|^{p-2} \, (\bar{u}, \bar{v})_{\mathbb{R}^N},$$

είναι συνεχής, όπου

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) = \left\{\bar{u}: \Omega \to \mathbb{R}^N \,|\, \bar{u} \text{ μετρήσιμη και } \int_{\Omega} |\bar{u}(x)|^p \, dx < \infty\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = L^* \circ T \circ L$, όπου $L: W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ με

$$L(u) = \nabla u.$$

Έστω $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Τότε,

$$(L^* \circ T \circ L)(u) = L^*\big(T(\nabla u)\big) = T(\nabla u) \circ L.$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι

$$(T(\nabla u)^\circ L)(v) = T(\nabla u)(\nabla v) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx = A(u)(v).$$

Συνεπώς ο τελεστής A είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. □

4. Ο τελεστής Nemytskii

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|f(t)| \leq c_1 |t|^{p-1} + c_2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ c_1 > 0, \ c_2 > 0, \tag{2}$$

για κάποιο $p > 1$.

<u>Πρόταση 1</u>
Υπάρχουν σταθερές $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ ώστε

$$|f(t)|^q \leq C_1 |t|^p + C_2, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

όπου $1/p + 1/q = 1$.
<u>Απόδειξη</u> Άμεση από την ανισότητα
$|a+b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q), \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$ □

<u>Ορισμός 1</u>
Ο τελεστής $N_f: L^P(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ με τύπο

$$< N_f(u), h >= \int_\Omega f\big(u(x)\big) h(x) dx, \ \ u, h \in L^p(\Omega) \tag{4}$$

ονομάζεται **τελεστής Nemytskii** που αντιστοιχεί στην f. Ο τελεστής αυτός είναι καλώς ορισμένος, λόγω της (3).

<u>Πρόταση 2</u>
Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη (2). Τότε, ο τελεστής N_f είναι συνεχής και φραγμένος (απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα).

<u>Απόδειξη</u>
Από την (4) και την ανισότητα Hölder προκύπτει

$$\left\|N_f(u) - N_f(v)\right\|_{(L^p)^*} \leq \|f(u) - f(v)\|_q, \ \forall u, v \in L^p(\Omega) . \tag{5}$$

Επομένως

$$\left\|N_f(u)\right\|_{(L^p)^*} \leq \|f(u)\|_q, \ \forall u \in L^p(\Omega). \tag{6}$$

Από τις (3) και (6) προκύπτει ότι ο τελεστής N_f απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα.
Επίσης, ο N_f είναι συνεχής και μάλιστα ισχυρά συνεχής.
Πράγματι, αν θεωρήσουμε ακολουθία (u_n) στον $W_0^{1,p}$ με $u_n \xrightarrow{w} u$, από το Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev λαμβάνουμε ότι

$$u_n \to u \text{ στον } L^p(\Omega).$$

Περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$u_n(x) \to u(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{7}$$

και

$|u_n(x)| \leq w(x), n \geq 1$, σχεδόν παντού στο Ω, για κάποια $w \in L_+^p(\Omega)$.

Λόγω της (3) έχουμε

$|f(t)|^q \leq C_1|t|^p + C_2$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Άρα σχεδόν παντού στο Ω και $\forall n \geq 1$ ισχύει

$$|f(u_n(x)) - f(u(x))|^q \leq 2^{q-1}[\left|f\big(u_n(x)\big)\right|^q + \left|f\big(u(x)\big)\right|^q] \leq 2^{q-1}[C_1|u_n(x)|^p + C_2 + C_1|u(x)|^p + C_2] \leq 2^{q-1}[C_1(|w(x)|^p + |u(x)|^p + 2C_2] = h(x),\ h \in L^1(\Omega). \tag{8}$$

Λόγω της (7) και επειδή η f είναι συνεχής έπεται ότι

$$|f(u_n(x)) - f(u(x))|^q \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \text{σ.π. στο } \Omega. \tag{9}$$

Λόγω των (8) και (9), από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$\|f(u_n(\cdot)) - f(u(\cdot))\|_{L^q} \to 0.$

Έστω $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $\|v\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla v\|_{L^p} = 1$. Τότε, $\forall n \geq 1$,

$$\left|< N_f\big(u_n(x)\big) - N_f\big(u(x)\big), v >\right| \leq \int_\Omega \left|f\big(u_n(x)\big) - f\big(u(x)\big)\right||v(x)|dx \leq^{Hölder}$$
$$\left\|f\big(u_n(\cdot)\big) - f\big(u(\cdot)\big)\right\|_{L^q}\|v\|_{L^p} \leq^{Rayleigh} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{1/p} \left\|f\big(u_n(\cdot)\big) - f\big(u(\cdot)\big)\right\|_{L^q}\|\nabla v\|_{L^p}$$
$$= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{1/p} \left\|f\big(u_n(\cdot)\big) - f\big(u(\cdot)\big)\right\|_{L^q}\|v\|_{W_0^{1,p}} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{1/p} \|f(u_n(x)) - f(u(x))\|_{L^q}. \tag{10}$$

Από τον ορισμό της νόρμας στο χώρο $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ προκύπτει ότι

$$\left\|N_f(u_n(x)) - N_f(u(x))\right\|_{(W_0^{1,p})^*} \to 0,$$

επομένως ο N_f είναι ισχυρά συνεχής (βλ. §2, Λήμμα).
□

Ο τελεστής Nemytskii ορίζεται και για διανυσματικές συναρτήσεις κι έχει ανάλογες ιδιότητες.

<u>Ορισμός 2</u>
Έστω $\bar{f}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, με $N \geq 1$, η οποία ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\left|\bar{f}(\xi)\right| \leq c_1|\xi|^{p-1} + c_2,\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ c_1 > 0,\ c_2 > 0. \tag{11}$$

Θεωρούμε το χώρο

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) = \left\{\bar{u}: \Omega \to \mathbb{R}^N \,|\, \bar{u} \text{ μετρήσιμη και } \int_\Omega |\bar{u}(x)|^p\, dx < \infty\right\}.$$

Ορίζεται ο **τελεστής Nemytskii** $N_{\bar{f}}: L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \left(L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)\right)^*$ με τύπο

$$< N_{\bar{f}}\bar{u}, \bar{h} >= \int_\Omega \left(\bar{f}(\bar{u}(x), \bar{h}(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx, \qquad \forall \bar{u}, \bar{h} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

<u>Πρόταση 3</u>
Έστω $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $\nabla F = \bar{f}$ να ικανοποιεί την (11). Θεωρούμε το συναρτησιακό $\varphi: L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(\bar{u}) = \int_\Omega F(\bar{u}\,(x))dx, \qquad \forall \bar{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Τότε, $\varphi \in C^1(L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ και

$$< \varphi'(\bar{u}), \bar{h} >= \int_\Omega \left(\bar{f}(\bar{u}(x), \bar{h}(x)\right)_{\mathbb{R}^N} dx,\ \ u, h \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

δηλαδή $\varphi' = N_{\bar{f}}$.

<u>Απόδειξη</u>
Λόγω του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, $\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$F(\xi) - F(\eta) = \int_0^1 \left(\nabla F\left(\eta + t(\xi - \eta)\right), \xi - \eta\right)_{\mathbb{R}^N} dt. \tag{12}$$

Επίσης είναι

$$F(\xi) = \int_0^1 \left(\nabla F\left(t(\xi)\right), \xi\right)_{\mathbb{R}^N} dt + F(0).$$

Λόγω της (12) προκύπτει ότι

$$|F(\xi)| \le \int_0^1 (c_1 t^{p-1}|\xi|^{p-1} + c_2)|\xi| dt + |F(0)| = \frac{c_1}{p}|\xi|^p + c_2|\xi| + |F(0)|.$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι $\forall u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $F(\bar{u}(\cdot)) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Επομένως το συναρτησιακό φ είναι καλώς ορισμένο.

Έστω $\bar{u}_0, \bar{h} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Λόγω της (12) έχουμε ότι

$$\varphi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \varphi(\bar{u}_0) = \int_\Omega \Big[\int_0^1 (\nabla F(\bar{u}_0(x) + t\bar{h}(x)), \bar{h}(x))_{\mathbb{R}^N} dt\Big] dx.$$

Τότε

$$\varphi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \varphi(\bar{u}_0) - < N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} > = \int_\Omega \Big[\int_0^1 G(x,t) dt\Big] dx, \qquad (13)$$

όπου

$$G(x,t) = (\nabla F\left(\bar{u}_0(x) + t\bar{h}(x)\right) - \nabla F\big(\bar{u}_0(x)\big), \bar{h}(x))_{\mathbb{R}^N}, \qquad x \in \Omega, \qquad t \in [0,1].$$

Ισχυρισμός: Η G ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Fubini-Tonelli. Πράγματι, $\forall t \in [0,1]$ είναι

$$\int_\Omega |G(x,t)|\, dx \le \left\|\nabla F\left(\bar{u}_0(\cdot) + t\bar{h}(\cdot)\right) - \nabla F(\bar{u}_0(\cdot))\right\|_q \cdot \left\|\bar{h}\right\|_p < \infty$$

και η απεικόνιση

$$[0,1] \ni t \to \int_\Omega G(x,t) dx = < N_{\nabla \mathrm{F}}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla \mathrm{F}}(\bar{u}_0), \bar{h} >$$

είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη (η $\nabla F = \bar{f}$ ικανοποιεί την (12), άρα $\bar{u} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\bar{f}\big(\bar{u}(\cdot)\big) \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^N)$ και ο $N_{\bar{f}}$ είναι συνεχής και φραγμένος.)

Η (13) δίνει

$$\varphi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \varphi(\bar{u}_0) - < N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} > = \int_0^1 < N_{\nabla \mathrm{F}}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla \mathrm{F}}(\bar{u}_0), \bar{h} > dt,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\frac{|\varphi(\bar{u}_0 + \bar{h}) - \varphi(\bar{u}_0) - < N_{\nabla F}(\bar{u}_0), \bar{h} >|}{\|h\|_p} \le \int_0^1 S_{\bar{h}}(t) dt, \qquad (14)$$

όπου

$$S_{\bar{h}}(t) = \left\| N_{\nabla F}(\bar{u}_0 + t\bar{h}) - N_{\nabla F}(\bar{u}_0) \right\|_*, \qquad t \in [0,1].$$

Επειδή ο $N_{\bar{f}}$ είναι συνεχής και φραγμένος, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\|h\|_p \to 0} S_{\bar{h}}(t) = 0, \ \ \forall t \in [0,1]$$

και

$$\sup\left\{ S_{\bar{h}}(t) : \left\| \bar{h} \right\|_p \leq 1, \qquad t \in [0,1] \right\} < \infty.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\lim_{\|h\|_p \to 0} \int_0^1 S_{\bar{h}}(t) dt = 0,$$

επομένως από την (14) προκύπτει το ζητούμενο. □

<u>Συνέπειες της Πρότασης 3</u>

α) Θεωρούμε το συναρτησιακό $\varphi: L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$\varphi(\bar{u}) = \frac{1}{p} \|u\|_p^p = \frac{1}{p} \int_\Omega |\bar{u}(x)|^p \, dx.$

Τότε $\varphi \in C^1(L^p(\Omega, \mathbb{R}^N))$ και

$< \varphi'(u), h) >= \int_\Omega |\bar{u}(x)|^{p-2} \big(\bar{u}(x), \bar{h}(x)\big)_{\mathbb{R}^N} \, dx, \ \forall \bar{u}, \bar{h} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N).$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N, \qquad p > 1.$$

Τότε $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$ και

$$\nabla F(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

αφού

$$\partial_j |\xi|^p = p|\xi|^{p-1} \frac{\xi_j}{|\xi|} = p|\xi|^{p-2} \xi_j, \qquad \forall j = 1, \dots, N.$$

Λόγω της Πρότασης 3, $\forall \bar{u}, \ \bar{h} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ισχύει

$\varphi(\bar{u})=\frac{1}{p}\int_{\Omega} F(\bar{u}(x))dx \Rightarrow <\varphi'(\bar{u}),\bar{h}>=\int_{\Omega}(\nabla F(\bar{u}(x)),\bar{h}(x))_{\mathbb{R}^N}dx =$
$\int_{\Omega}|\bar{u}(x)|^{p-2}(\bar{u}(x)),\bar{h}(x))_{\mathbb{R}^N}dx$. (15)

β) Θεωρούμε το συναρτησιακό $\varphi: W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx.$$

Τότε
$<\varphi'(u), h>=\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2}(\nabla u(x), \nabla h(x))_{\mathbb{R}^N}\, dx,\ \forall u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

__**Απόδειξη**__
Το συναρτησιακό φ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση του τελεστή $L: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ με τύπο $Lu = \nabla u$ και του συναρτησιακού $\varphi: L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(\bar{u}) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\bar{u}(x)|^p\, dx$, δηλαδή

$$\varphi = \bar{\varphi} \circ L.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$\varphi'(u) = \bar{\varphi}'(L(u))\circ L'(u) = \bar{\varphi}'(\nabla u)\circ L, \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

αφού ο τελεστής L είναι γραμμικός.
Επομένως, λόγω της (15) καταλήγουμε στο ότι για $h \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\varphi'(u)(h) = \bar{\varphi}'(\nabla u)(L(h)) = \bar{\varphi}'(\nabla u)(\nabla h) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla h)_{\mathbb{R}^N}. \qquad \square$$

5. Θεώρημα Cauchy – Lipschitz -Picard

Έστω E ένας χώρος Banach και $F : E \to E$ μία απεικόνιση **Lipschitz**, δηλ. $\exists\, L \geq 0$ τέτοια ώστε $\forall u, v \in E$,

$$\|Fu - Fv\| \leq L\|u - v\|.$$

Τότε $\forall u_0 \in E$, $\exists$ μοναδική $u \in C^1([0,\infty), E)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u(t)) \text{ στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

Για μια απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. [1, VII.2, σελ. 145].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] H.Brezis (μετάφραση Δ.Κραββαρίτη-Ι.Χρυσοβέργη), ‘‘Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία κι Εφαρμογές’’, Παν/κές Εκδόσεις ΕΜΠ, 1997.

[2] D.Motreanu- V.V.Motreanu-N.S.Papageorgiou, ‘‘Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems’’, Springer (2014).

[3] W.Rudin, ‘‘Real & Complex Analysis’’, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS(3d edition), 1987.

[4] S.L.Troyanski, ‘‘On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces’’, *Studia Math.* **37**, 173–180 (1971).

[5] L.Evans, “Partial Differential Equations”, 2nd Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, Amer.Math.Soc., 2010.

[6] D.Pascali & S. Sburlan, Sythoff+Noorhoff Publishers, Netherlands, 1978.

[7] E.Zeidler, “Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B-Nonlinear Monotone Operators”, Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[8] S.Kesavan, Topics in Functional Analysis and Applications, New Age International Ltd., Publishers, 2003.