



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Τομέας Δομοστατικής
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών
Ερευνών

«Εισαγωγή στη μη γραμμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Η περίπτωση του κριτηρίου Von Mises»

Introduction to Non Linear Finite Element Method. The Von Mises
Yield Criterion.

Αμβρόσιος Αντώνιος Σαββίδης 11021321 2ο εξάμηνο
Επιβλέπων Μ Παπαδρακάκης Καθηγητής ΕΜΠ
Αθήνα Μαΐος 2015

Περιεχόμενα

1. Στόχοι σκοποί της παρούσας εργασίας-5
2. Εισαγωγή στη μη γραμμική ανάλυση-6
3. Κεφάλαιο 1,1 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-βασικές έννοιες-8
4. Κεφάλαιο 1,2 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ορισμός παραμορφώσεων -9
5. Κεφάλαιο 1,3 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ορισμός τάσεων-12
6. Κεφάλαιο 1,4 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Διατύπωση εξισώσεων κινήσεως και μητρώων-15
7. Κεφάλαιο 1,5 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογής-υπολογισμοί μητρώων-21
8. Κεφάλαιο 2,1 Μη γραμμικότητα υλικού-Γενικά-23
9. Κεφάλαιο 2,2 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-Συνάρτηση διαρροής και νόμοι κράτυνσης-25
10. Κεφάλαιο 2,3 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-Η έννοια της ισοτροπικής και της κινηματικής κράτυνσης-28
11. Κεφάλαιο 2,4 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-οι αλγόριθμοι της ισοτροπικής και της κινηματικής κράτυνσης-31
12. Κεφάλαιο 2,5 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises-37
13. Κεφάλαιο 2,6 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Μέθοδος Ακτινικής επιστροφής-43
14. Κεφάλαιο 2,7 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Αλγόριθμος υπολογισμού εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας-52
15. Κεφάλαιο 2,8 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Διασπορά πλαστικού έργου-55
16. Κεφάλαιο 2,9 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Άλλες περιπτώσεις νόμου ροής-59
17. Κεφάλαιο 2,10 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήρια Mohr-Coulomb και Drucker-Prager-60
18. Κεφάλαιο 3,1 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Γενικά-66

19. Κεφάλαιο 3,2 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Μέθοδος Newton Raphson επιλογής δυνάμεων για στατικά προβλήματα-66
20. Κεφάλαιο 3,3 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Μέθοδος Newton Raphson επιλογής μετακινήσεων για στατικά προβλήματα-67
21. Κεφάλαιο 3,4 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Τροποποιημένη Μέθοδος Newton Raphson για στατικά προβλήματα-69
22. Κεφάλαιο 3,5 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος έρευνας γραμμής-71
23. Κεφάλαιο 3,6 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος μήκους τόξου για στατικά προβλήματα-72
24. Κεφάλαιο 3,7 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος Newmark για δυναμικά προβλήματα-78
25. Κεφάλαιο 3,8 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος Bathe για δυναμικά προβλήματα-79
26. Κεφάλαιο 3,9 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Θεωρία σύγκλισης, ακρίβειας και εφαρμογή στις μεθόδους-81
27. Κεφάλαιο 3,10 Αριθμητική Ολοκλήρωση Σημάτων-86
28. Κεφάλαιο 4 Πρακτικό μέρος της Διπλωματικής. Επίλυση προβλήματος Σεισμικής Διέγερσης με Εξαεδρικά ΠΣ για Μη Γραμμική Ανάλυση με Von Mises απολύτως πλαστικό υλικό-87
29. Ευχαριστίες-105
30. Βιβλιογραφία-107

Στόχοι- Σκοποί της παρούσας εργασίας

Η παρούσα διπλωματική αποτελεί πέρα από μια τυπική υποχρέωση για να παραλάβω τον τίτλο του κατόχου μεταπτυχιακού τίτλου ειδίκευσης «Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών» ένα πολύ ευχάριστο ταξίδι στον κόσμο της υπολογιστικής μηχανικής και της μη γραμμικής ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η συνεργασία μου όχι μόνο με τον υπεύθυνο διδάσκοντα της διπλωματικής κ Μ Παπαδρακάκη αλλά και με όλους όσους με δίδαξαν στο Πολυτεχνείο υπήρξε άριστη και στα επίπεδα που πρέπει. Το θέμα της μη γραμμικής ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιλέχθηκε επειδή συγκεντρώνει 3 βασικά χαρακτηριστικά. Αρχικά αποτελεί το ίδιο το φυσικό φαινόμενο της μη γραμμικής συμπεριφοράς των υλικών (αλλά και της γεωμετρίας) ένα θαυμαστό φυσικό φαινόμενο το οποίο αν λάβουμε υπόψιν όχι μόνο είμαστε κοντά στην πραγματικότητα κάτι που είναι ο πρωταρχικός στόχος ενός επιστήμονα αλλά και είμαστε και με πιο οικονομικό σχεδιασμό που είναι ο πρωταρχικός στόχος ενός μηχανικού. Στην συνέχεια η προσέγγιση του φαινομένου με πεπερασμένα στοιχεία που όχι μόνο αποτελεί μια μεγάλη ανακάλυψη στον τομέα των επιστημών και της μηχανικής αλλά και αποτελεί μια μεγάλη μαθηματική εξέλιξη κάτι που συμβαδίζει με την από τα μαθητικά μου χρόνια αγάπη μου για τα μαθηματικά. Τέλος το ότι το θέμα αυτό έχει πολύ μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα και μεγάλο πεδίο δράσης κάτι που συνάδει με μια ευκαιρία για μένα ερευνητική προσπάθεια στον τομέα αυτόν πάντα με την θέληση να ανακαλύψουμε καινούργια πράγματα και να βοηθήσουμε στον σχεδιασμό καλύτερων τεχνικών έργων όχι μόνο σε θέμα ασφάλειας αλλά και πιο οικονομικών έργων.

Εισαγωγή στη μη γραμμική ανάλυση.

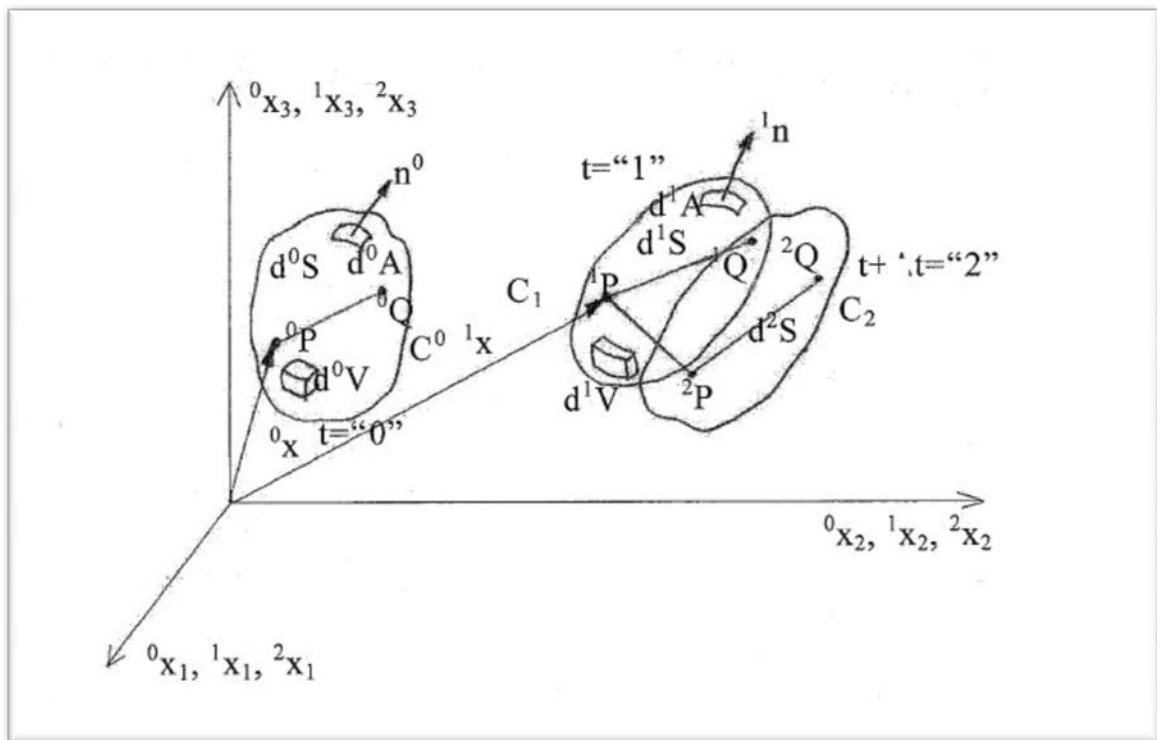
Η γραμμική ελαστική ανάλυση για μικρές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις είναι μια περίπτωση που ισχύει για κάποιες περιπτώσεις φυσικών φαινομένων όπως η ανάλυση φορέων για μικρά στατικά φορτία. Όμως υπάρχουν περιπτώσεις στη φύση που αυτή η ανάλυση δεν μπορεί να μας δώσει σωστά-ρεαλιστικά αποτελέσματα. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν σεισμικές φορτίσεις σε κτίρια μεγάλου μεγέθους, φορτίσεις σε φορείς μεγάλου μήκους και μεγάλης Ελαστικότητας όπως λάστιχο μεγάλου μήκους και ολισθήσεις πρανών υπό σεισμικές φορτίσεις. Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι γενικά η μη γραμμικότητα σαν φαινόμενο εννοιολογικά διαχωρίζεται σε 2 κατηγορίες. Η πρώτη είναι η μη γραμμικότητα λόγω γεωμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι η ισορροπία και η εξισώσεις της λαμβάνονται στην παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα κάτι που για μεγάλες μετατοπίσεις ή/και παραμορφώσεις δίνει την ακριβή κατάσταση του φορέα και τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό. Σε αυτή τη μη γραμμικότητα ορίζονται διαφορετικές παραμορφώσεις και τάσεις από αυτές που ξέρουμε από την θεωρία μικρών μετατοπίσεων ακριβώς ώστε να προσεγγιστεί ορθότερα το φαινόμενο. Με βάση αυτές τις νέες τάσεις και παραμορφώσεις με βάση την κλασική θεωρία πεπερασμένων στοιχείων μορφώνουμε το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας που αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις που προκύπτουν λόγω ακριβώς της ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση το οποίο προστίθεται στο ήδη γνωστό μητρώο στιβαρότητας ώστε να διαμορφωθεί το ολικό εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας που θα χρειαστεί για να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις σε δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτή η ανάλυση είναι πολύ χρήσιμη στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού για φαινόμενα κατάρρευσης λόγω μεγάλων μετακινήσεων όπως αστάθεια μελών-λυγισμός ή κατάρρευση δομική σε καταστάσεις οιονεί κατάρρευσης (Structural Collapse).

Η δεύτερη μη γραμμικότητα είναι η μη γραμμικότητα λόγω υλικού. Αυτή ανεξάρτητα του πού λαμβάνουμε την ισορροπία κοιτάζει την φυσική ιδιότητα του υλικού να μην έχει απείρως γραμμική συμπεριφορά στο διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Λαμβάνονται μαθηματικές σχέσεις που διέπουν όχι μόνο την μετελαστική συμπεριφορά των υλικών όπως ερπυσμός χαλάρωση κράτυνση αλλά και το τι συμβαίνει όταν το υλικό φτάνει στην οριακή του κατάσταση. Και οι 2 νόμοι αυτοί είναι ιδιαίτερα σημαντικοί και ανάλογα με το είδος του υλικού η μαθηματική σχέση θα δείξει την συμπεριφορά του υλικού κάτι που θα αντανακλαστεί στις τάσεις και τις μετατοπίσεις του φορέα για δεδομένη φόρτιση. Εν γένει στη φύση υπάρχουν 2 είδη υλικών. Τα ευσταθή υλικά που σε όλη τους την πορεία η αύξηση των μετακινησιακών μεγεθών θα δώσει αύξηση ή στασιμότητα των εντατικών μεγεθών με θετικό παραγόμενο έργο και είναι τα υλικά που ο Πολιτικός Μηχανικός σχεδιάζει για αυτά όπως το Οπλισμένο Σκυρόδεμα και ο Δομικός Χάλυβας. Επίσης υπάρχουν τα ασταθή υλικά που κάποια στιγμή αύξηση των μετακινησιακών μεγεθών θα δώσει μείωση των εντατικών μεγεθών με θετικό παραγόμενο έργο και είναι υλικά όπως το Άοπλο Σκυρόδεμα. Για τα ευσταθή υλικά εν γένει υπάρχουν 3 κύριες μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την οριακή κατάσταση των υλικών ενώ για την μετελαστική συμπεριφορά των υλικών κανείς από τη βιβλιογραφία μπορεί να βρει μια πληθώρα επιλογών για διαγράμματα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για δεδομένο είδος φόρτισης (μονοτονική-ανακυκλιζόμενη). Η πρώτη κύρια μαθηματική σχέση είναι το κριτήριο Von Mises που βρίσκει εφαρμογή κυρίως σε μέταλλα. Γραμμικοποιημένη εκδοχή του είναι και το πρίσμα του Tresca. Η δεύτερη εκδοχή είναι το κριτήριο Mohr Coulomb που είναι παραβολοειδής επιφάνεια στο χώρο αλλά τελικά γίνεται πρισματική και βρίσκει πιο έντονη εφαρμογή στα βραχώδη-αμμώδη υλικά όπως άμμος ή Οπλισμένο Σκυρόδεμα αλλά η βιβλιογραφία μας δείχνει ότι μπορεί να εφαρμοστεί και για μέταλλα. Και τέλος το κριτήριο Drucker-Prager που είναι

μια ευθειογενής επιφάνεια παρόμοια με το Mohr-Coulomb με ίδια πιστότητα εφαρμογής (και καλύτερη σε ειδικές περιπτώσεις) με το Mohr-Coulomb όμως με ένα συγκριτικό πλεονέκτημα ότι είναι υπολογιστικά καλύτερη η επίλυση με το κριτήριο Drucker-Prager. Στη παρούσα εργασία θα αναλυθεί διεξοδικά το κριτήριο Von Mises και θα παρουσιαστούν παραδείγματα με βάση το κριτήριο αυτό. Συμπληρωματικά θα αναλυθούν τα κεφάλαια της μη γραμμικής αριθμητικής ολοκλήρωσης για στατικά και δυναμικά φαινόμενα.

Κεφ 1.1 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-βασικές έννοιες.

Έστω ένα σώμα το οποίο έχει διαμόρφωση C_0 C_1 C_2 στον χρόνο $0, t, t+dt$ αντίστοιχα. Γνωρίζοντας τις διαμορφώσεις C_0 C_1 αναζητούνται για μικρές επαυξητικές μετατοπίσεις της C_2 οι μετατοπίσεις και τα εντατικά μεγέθη. Υπάρχουν 2 ειδών διατυπώσεις των εξισώσεων. Η διατύπωση Lagrange που παρακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή και προσφέρεται για την ανάλυση την μη γραμμική σε προβλήματα δομοστατικού ενδιαφέροντος και μηχανικής. Επίσης υπάρχει και η διατύπωση Euler η οποία παρακολουθεί σε ένα γεωμετρικό σημείο το πόσα υλικά σημεία περνάνε στο χρόνο. Αυτή η διατύπωση είναι ιδιαίτερα ευνοϊκή για προβλήματα ρευστομηχανικής όπου μας ενδιαφέρει σε έναν όγκο ελέγχου να παρακολουθήσουμε την κίνηση των υλικών σημείων του νερού. Η διατύπωση Lagrange έχει 2 παραλλαγές που είναι ως προς ποιόν όγκο θεωρούμε τον όγκο αναφοράς. Η προσαρμοστική διατύπωση Lagrange (Updated Lagrangian Formulation) λαμβάνει ως όγκο αναφοράς το C_1 Η ολική διατύπωση Lagrange (Total Lagrangian Formulation) λαμβάνει ως όγκο αναφοράς το C_0



Σχήμα 1 Κίνηση σώματος στο χώρο

Κεφ 1.2 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ορισμός παραμορφώσεων.

Οι παραμορφώσεις που ορίζονται στην Θεωρία της Μηχανικής συνεχούς μέσου είναι οι ακόλουθες.

1. Μηχανικές Παραμορφώσεις- Engineering Strains

$$\varepsilon = (L_{τελ} - L_{αρχ}) / L_{αρχ}$$

2. Λογαριθμικές Παραμορφώσεις-Lognormal Strains

$$\varepsilon = \int_{L_{αρχ}}^{L_{τελ}} 1/L dL = \ln \left(\frac{L_{τελ}}{L_{αρχ}} \right)$$

3. Παραμορφώσεις Green Lagrange- Green Lagrange Strains

$$\varepsilon = ((L_{τελ})^2 - (L_{αρχ})^2) / (2 * (L_{αρχ})^2)$$

4. Παραμορφώσεις Almansi- Almansi Strains

$$\varepsilon = ((L_{τελ})^2 - (L_{αρχ})^2) / (2 * (L_{τελ})^2)$$

Αυτές όλες οι σχέσεις αναφέρονται στο μονοδιάστατο πρόβλημα. Για τρισδιάστατη ελαστικότητα αν εφαρμόσουμε αυτές τις σχέσεις στον τρισδιάστατο χώρο και χρησιμοποιώντας το δέλτα του Kronecker λαμβάνουμε

για τις Παραμορφώσεις Green Lagrange που είναι οι πιο διαδεδομένες για την εφαρμογή της μη γραμμικότητας.

$$\left\{ \begin{matrix} {}_0^2 \varepsilon^G \\ {}_0^2 \varepsilon^G \\ {}_0^2 \varepsilon^G \\ {}_0^2 \gamma^G \\ {}_0^2 \gamma^G \\ {}_0^2 \gamma^G \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial^0 x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^0 y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^0 z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial^0 y} + \frac{\partial^2 v}{\partial^0 x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^0 z} + \frac{\partial^2 w}{\partial^0 y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial^0 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^0 z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^0 x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^0 x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^0 x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^0 y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^0 y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^0 y} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^0 z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^0 z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^0 z} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial^2 u \partial^2 u}{\partial^0 x \partial^0 y} + \frac{\partial^2 v \partial^2 v}{\partial^0 x \partial^0 y} + \frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial^0 x \partial^0 y} \\ \frac{\partial^2 u \partial^2 u}{\partial^0 z \partial^0 y} + \frac{\partial^2 v \partial^2 v}{\partial^0 z \partial^0 y} + \frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial^0 z \partial^0 y} \\ \frac{\partial^2 u \partial^2 u}{\partial^0 x \partial^0 z} + \frac{\partial^2 v \partial^2 v}{\partial^0 x \partial^0 z} + \frac{\partial^2 w \partial^2 w}{\partial^0 x \partial^0 z} \end{bmatrix}$$

Παραμορφώσεις Green Lagrange στο χώρο για την ολική διατόπωση Lagrange

Είναι εμφανές ότι η πρώτη συνιστώσα είναι το κομμάτι των μηχανικών παραμορφώσεων για την τρισδιάστατη ελαστικότητα που ήδη γνωρίζουμε από τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων και η δεύτερη συνιστώσα το μη γραμμικό κομμάτι λόγω ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση. Μητρικά οι Παραμορφώσεις Green Lagrange ορίζονται ως

$${}^t \varepsilon^G = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{X}^T {}^t \mathbf{X} - \mathbf{I})$$

Όπου το \mathbf{X} είναι το διάνυσμα παραμόρφωσης (Deformation Gradient) και μετασχηματίζει μετατοπίσεις από τη διαμόρφωση 0 στην 1 σύμφωνα με τη σχέση

$${}^1_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^1 x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^1 x_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^1 x_1}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^1 x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^1 x_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^1 x_2}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^1 x_3}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^1 x_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^1 x_3}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}$$

Τέλος για τις προσαυξητικές ολικές παραμορφώσεις Green Lagrange που μας χρειάζονται για την ολική διατύπωση Lagrange είναι

$${}^0\varepsilon_{ij} = {}^0e_{ij} + {}^0\eta_{ij}$$

Όπου το γραμμικό κομμάτι είναι

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right)$$

Και το μη γραμμικό

$${}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} \right)$$

Τέλος για τις προσαυξητικές προσαρμοστικές παραμορφώσεις Green Lagrange που μας χρειάζονται για την προσαρμοστική διατύπωση Lagrange είναι

$${}_1\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

$${}_1\varepsilon_{ij} = {}_1e_{ij} + {}_1\eta_{ij}$$

Όπου το γραμμικό κομμάτι είναι

$${}_1e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Και το μη γραμμικό

$${}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

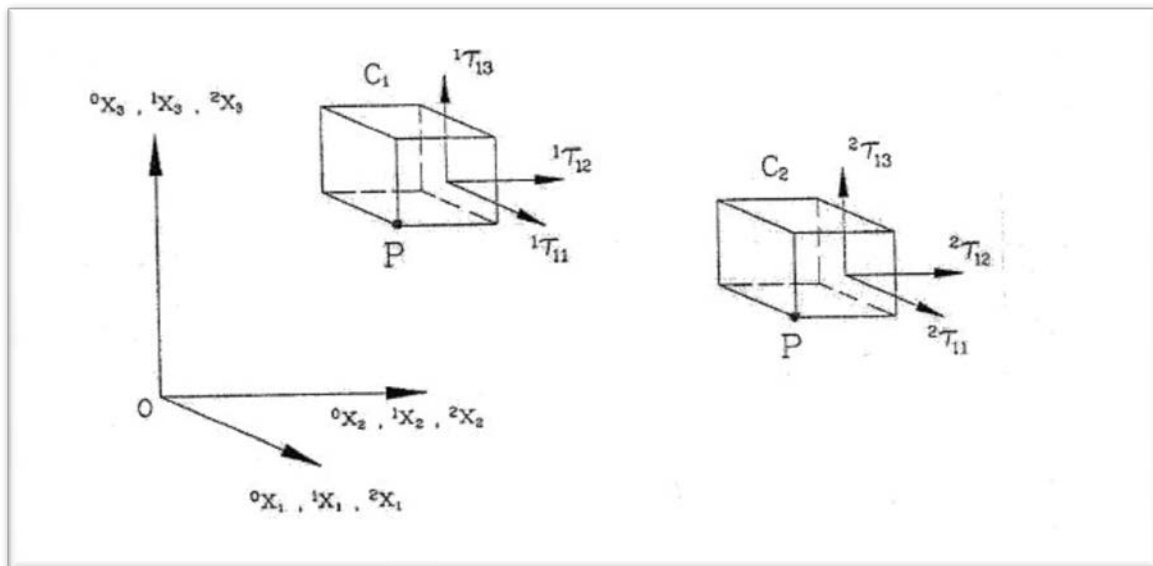
Κεφ 1.3 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ορισμός τάσεων.

Ο ορισμός των τάσεων είναι το 2^ο σημαντικό κομμάτι που θα πρέπει να οριστεί για να διατυπώσουμε τις εξισώσεις. Οι τάσεις που είναι πιο κοντά στην πραγματική-φυσική έννοια της έννοιας τάση είναι οι τάσεις κατά Cauchy ήτοι

$${}_1\mathbf{t}({}_1\mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta {}^1\mathbf{p}}{\Delta {}^1A} \quad \text{για } \Delta A \rightarrow 0$$

Όπου Δp είναι τα φορτία στη διαμόρφωση 1 που εξετάζουμε. Η φυσική σημασία των τάσεων Cauchy είναι οι τάσεις που

εφαρμόζονται στο σώμα το οποίο έχει επιφάνειες κάθετες με εφαπτομενικά διανύσματα κάθετα στα διανύσματα X_1, X_2, X_3



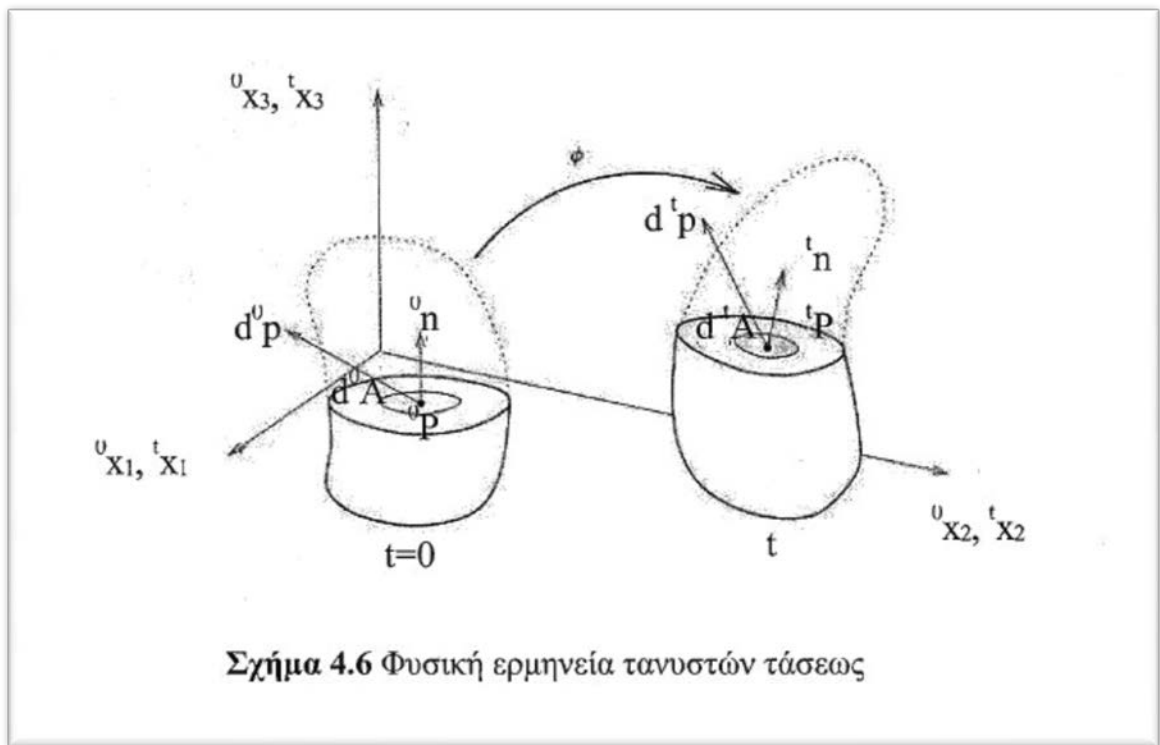
Σχήμα 2 Ορισμός τανυστή Cauchy και φυσική σημασία

Μετά ορίζουμε τον πρώτο τανυστή κατά Piola-Kirchoff ως

$${}^t_0\mathbf{P} = J {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t_0\mathbf{X}^{-T}$$

Όπου J το Ιακωβιανό μητρώο μετασχηματισμού.

Ο ορισμός αυτός προήλθε από την διατύπωση του έργου των εσωτερικών δυνάμεων στον χρόνο t . Για τον πρώτο τανυστή Piola-Kirchoff η φυσική σημασία είναι ποσότητα δύναμης ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας όπως φαίνεται και στα ακόλουθα σχήματα.



Σχήμα 3 Φυσική σημασία πρώτου τανυστή κατά Piola-Kirchoff και σύγκριση με Cauchy

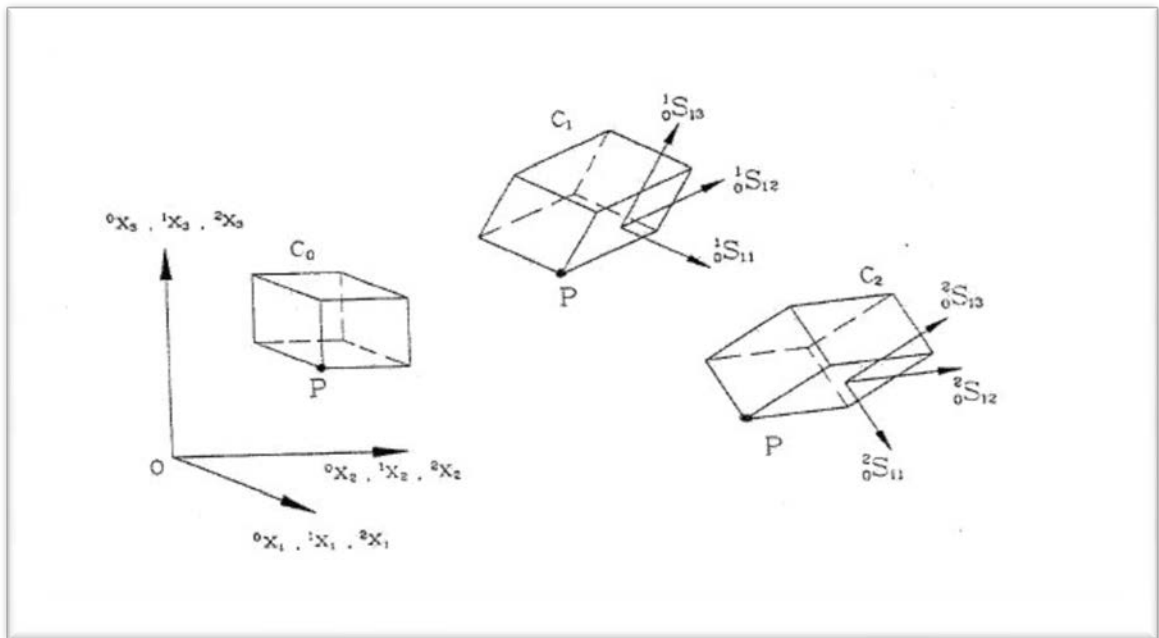
Και τέλος ορίζουμε τον 2^ο τανυστή κατά Piola-Kirchoff ως

$${}^1_0\mathbf{S} = J {}^1_0\mathbf{X}^{-1} {}^1\boldsymbol{\tau} {}^1_0\mathbf{X}^{-T}$$

Ο ορισμός αυτός προήλθε από την διατύπωση του έργου των εσωτερικών δυνάμεων στον χρόνο t συνδυάζοντας το διάνυσμα παραμόρφωσης. Για τον δεύτερο τανυστή Piola-Kirchoff ισχύει

$${}^2_0\mathbf{S}_{ij} = {}^1_0\mathbf{S}_{ij} + {}_0\mathbf{S}_{ij}$$

και η φυσική σημασία είναι οι εσωτερικές δυνάμεις ανά μονάδα επιφανείας σε διανύσματα κάθετα στην παραμορφωμένη επιφάνεια του σώματος. Με άλλα λόγια οι τάσεις δεύτερου τανυστή Piola-Kirchoff παρακολουθούνε την παραμόρφωση κατά αναλογία με το φυσικό-σωματόδετο σύστημα (corrotational system).



Σχήμα 4 Φυσική σημασία δεύτερου τανυστή κατά Piola-Kirchoff

Κεφ 1.4 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Διατύπωση εξισώσεων κινήσεως και μητρών.

Χρησιμοποιώντας την αρχή των δυνατών έργων όπου το εσωτερικό έργο ισούται με το εξωτερικό έργο και χρησιμοποιώντας ως τάσεις αυτές του δεύτερου τανυστή κατά Piola-Kirchoff και ως παραμορφώσεις τις ενεργειακά συζυγείς των τάσεων που είναι οι παραμορφώσεις Green Lagrange. Θα δείξουμε τις σχέσεις που διέπουν το πρόβλημα και τις γραμμικοποιημένες τους διαμορφώσεις για τις 2 διατυπώσεις (Ολική-Προσαρμοστική) Lagrange. Να σημειωθεί ότι κοινό σημείο τους είναι η εύρεση των προσαυξητικών τάσεων και παραμορφώσεων και ο διαχωρισμός σε γραμμικό και μη γραμμικό κομμάτι και απαλοιφή των όρων ανώτερης τάξης που δεν μας ενδιαφέρουν.

Για την ολική διατύπωση Lagrange

Από την διατήρηση της μάζας και τους μετασχηματισμούς των προσαυξητικών μετατοπίσεων αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\mathcal{V}} \tau_{ij} \delta_2 \mathbf{e}_{ij} d^2 V = \int_{\mathcal{V}} \mathbb{S}_{ij} \delta_0^2 \varepsilon_{ij} d^0 V$$

Σχέση που δείχνει την αντιστοιχία τάσεων Cauchy και δεύτερου τανυστή Piola-Kirchoff. Στη συνέχεια δημιουργούμε μια προσαυξητική σχέση για την ολική διατύπωση. Με τη θεωρία των μεταβολών οι σχέσεις που δείχνουν τη μεταβολή των παραμορφώσεων έχουν γραμμικό και μη γραμμικό κομμάτι αντίστοιχα.

$$\delta_0 \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial x_j} \right)$$

$$\delta_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right)$$

Κατά συνέπεια από την αρχή των δυνατών έργων καταλήγουμε στις εξής σχέσεις. Να σημειωθεί ότι η γραμμικοποίηση των εξισώσεων έγινε με την απαλοιφή του συνόλου των μη γραμμικών παραμορφώσεων και όχι με μια εξίσωση του τύπου $\sin(u) \approx u$ για μικρά u και ότι οι προσαυξητικές τάσεις είναι γραμμική σχέση των προσαυξητικών παραμορφώσεων κρατώντας μόνο το γραμμικό κομμάτι. Τότε ισχύουν τα εξής

1. Εξίσωση κινήσεως τη χρονική στιγμή $t+\Delta t="2"$

$$\int_{^0V} {}^2S_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} d^0V = \delta {}^2_0W$$

$$\text{όπου } {}^2S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^2\rho} {}^0x_{i,m} {}^2\tau_{mn} {}^0x_{j,n}, \quad \delta {}^2_0\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}^2u_{i,j} + {}^2u_{j,i} + {}^2u_{k,i} {}^2u_{k,j}) \quad 2.$$

Προσαυξητικές σχέσεις

$$(\alpha) \text{ Τάσεις } {}^2S_{ij} = {}^1_0S_{ij} + {}^0S_{ij}$$

$$(\beta) \text{ Τροπές } {}^2\varepsilon_{ij} = {}^1_0\varepsilon_{ij} + {}^0\varepsilon_{ij}, \quad {}^0\varepsilon_{ij} = {}^0e_{ij} + {}^0\eta_{ij}$$

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^0u_{i,j} + {}^0u_{j,i} + {}^1u_{k,i} {}^0u_{k,j} + {}^0u_{k,i} {}^1u_{k,j}), \quad {}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^0u_{k,i} {}^0u_{k,j}$$

3. Εξισώσεις κινήσεως με προσαυξητικές σχέσεις ($\delta {}^2_0\varepsilon_{ij} = \delta {}^0\varepsilon_{ij}$)

$$\int_{^0V} {}^0S_{ij} \delta {}^0\varepsilon_{ij} d^0V + \int_{^0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V = \delta {}^2_0W - \int_{^0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V$$

4. Γραμμικοποιημένη εξίσωση κινήσεως

$$\text{Προσεγγιστικές σχέσεις } {}^0S_{ij} = {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs}, \quad \delta {}^0\varepsilon_{ij} = \delta {}^0e_{ij}$$

Προσεγγιστική εξίσωση κινήσεως

$$\int_{^0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} d^0V + \int_{^0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V = \delta {}^2_0W - \int_{^0V} {}^1_0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V$$

Για την προσαρμοστική διατύπωση Lagrange

Από την διατήρηση της μάζας και τους μετασχηματισμούς των προσαυξητικών μετατοπίσεων αποδεικνύεται ότι

$$\int_{^2V} {}^2\tau_{ij} \delta {}^2e_{ij} d^2V = \int_{^1V} {}^2S_{ij} \delta {}^1\varepsilon_{ij} d^1V$$

Σχέση που δείχνει την αντιστοιχία τάσεων Cauchy και δεύτερου τανυστή Piola-Kirchoff. Στη συνέχεια δημιουργούμε μια προσαυξητική σχέση για την ολική διατύπωση. Με τη θεωρία των μεταβολών οι σχέσεις που δείχνουν τη μεταβολή των παραμορφώσεων έχουν γραμμικό και μη γραμμικό κομμάτι αντίστοιχα.

$$\delta_1 e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial^1 x_i} \right)$$

$$\delta_1 \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial^1 x_j} \right)$$

Κατά συνέπεια από την αρχή των δυνατών έργων καταλήγουμε στις εξής σχέσεις. Να σημειωθεί ότι η γραμμικοποίηση των εξισώσεων έγινε με την απαλοιφή του συνόλου των μη γραμμικών παραμορφώσεων και όχι με μια εξίσωση του τύπου $\sin(u) \approx u$ για μικρά u και ότι οι προσαναζητικές τάσεις είναι γραμμική σχέση των προσαναζητικών παραμορφώσεων κρατώντας μόνο το γραμμικό κομμάτι. Μια σαφή διαφορά με την ολική διατύπωση Lagrange εδώ είναι ότι οι προσαναζητικές σχέσεις των τάσεων μπορούν εναλλακτικά να γραφούν ως άθροισμα συνιστώσας Cauchy και προσαναζητικής τάσης δεύτερου τανυστή Piola-Kirchhoff. Αυτό χρησιμεύει για πιθανό ευκολότερο υπολογισμό συνιστώσας των τάσεων μέσω τάσεων Cauchy. Τότε ενδέχεται το υπολογιστικό κόστος να είναι σαφώς μικρότερο. Και οι 2 διατυπώσεις έχουν ως κύρια συνιστώσα του υπολογιστικού κόστους τον υπολογισμό του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας το οποίο θα αναλύσουμε στη συνέχεια, ο υπολογισμός των τάσεων δεύτερου τανυστή Piola-Kirchhoff και των παραμορφώσεων Green Lagrange όπως και πολύ σημαντικό ρόλο θα παίζει η αντιστροφή του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας που είναι κοινό στοιχείο για τις 2 διατυπώσεις. Άρα για την προσαρμοστική διατύπωση Lagrange ισχύουν τα εξής

1. Εξίσωση κινήσεως τη χρονική στιγμή $t+\Delta t = "2"$

$$\int_V {}^2S_{ij} \delta {}^2\varepsilon_{ij} d^1V = \delta {}^2W$$

$$\text{όπου } {}^2S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho} {}^2x_{i,m} {}^2\tau_{mn} {}^2x_{j,n}, \quad \delta {}^2\varepsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i} + {}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j})$$

Προσαυξητικές σχέσεις

$$(\alpha) \text{ Τάσεις } {}^2S_{ij} = {}^1\tau_{ij} + {}_1S_{ij}, \quad \mu\epsilon \quad {}^1S_{ij} = {}^1\tau_{ij}$$

$${}^2\varepsilon_{ij} = {}^1\varepsilon_{ij} \quad {}_1\varepsilon_{ij} = {}^1e_{ij} + {}_1\eta_{ij}$$

$$(\beta) \text{ Τροπές } {}^1e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i}), \quad {}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j}$$

3. Εξίσωση κινήσεως με προσαυξητικές σχέσεις

$$\int_V {}^1S_{ij} \delta {}^1\varepsilon_{ij} d^1V + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}_1\eta_{ij} d^1V = \delta {}^2W - \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} d^1V$$

Προσεγγιστικές σχέσεις

$${}^1S_{ij} = {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs}, \quad \delta {}^1\varepsilon_{ij} = \delta {}^1e_{ij}$$

Προσεγγιστική εξίσωση κινήσεως

$$\int_V {}^1C_{ijrs} {}^1e_{rs} \delta {}^1e_{ij} d^1V + \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}_1\eta_{ij} d^1V = \delta {}^2W - \int_V {}^1\tau_{ij} \delta {}^1e_{ij} d^1V$$

Τέλος το αναμενόμενο σφάλμα στις 2 διατυπώσεις είναι ως εξής

Για την Ολική Διατύπωση Lagrange:

$$\text{Σφάλμα} = \delta {}^2_0W - \int_{0V} {}^2S_{ij}^{(1)} \delta {}^2_0\varepsilon_{ij}^{(1)} d^0V$$

Για την Προσαρμοστική Διατύπωση Lagrange:

$$\text{Σφάλμα} = \delta {}^2_1W - \int_{2V^{(1)}} {}^2\tau_{ij}^{(1)} \delta {}^2_1e_{ij}^{(1)} d^2V$$

Στη συνέχεια τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα οι οποίες είναι διατυπωμένες για συνεχή συστήματα διακριτοποιούνται με την κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ώστε να διατυπωθούν μητρωικές σχέσεις και η μη γραμμική εξίσωση κινήσεως σε διακριτοποιημένη μορφή. Άρα αν θέσουμε τις συναρτήσεις σχήματος και αφού θεωρήσουμε το μη γραμμικό

μητρώο παραμορφώσεως B_{NL} ως το συνδετικό μητρώο μεταξύ της μεταβολής των μη γραμμικών παραμορφώσεων και των προσαυξητικών μετατοπίσεων λαμβάνουμε συγκεντρωτικά τα εξής.

ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ

$$M^2 \ddot{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} {}^0\rho N^T N d^0V \right)^2 \ddot{\mathbf{u}}$$

$$\delta_0^2 W = \int_{^0A} {}^2 t_i \delta u_i d^0A \quad {}^2 \mathbf{R} = \int_{^0A} N_A^T {}^2 \mathbf{t} d^0A$$

$$+ \int_{^0V} {}^2 f_i \delta u_i d^0V + \int_{^0V} N^T {}^2 \mathbf{f} d^0V$$

Μόνο μη γραμμικότητα του υλικού	$\int_V C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} dV$ $\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV$	${}^1 \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^1 \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV$
Ολική διατύπωση Lagrange	$\int_{^0V} C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V$ $\int_{^0V} {}^1 S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V$ $\int_{^0V} {}^1 S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V$	${}^1_0 \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} \mathbf{B}_L^T {}^1_0 \mathbf{C} {}^1_0 \mathbf{B}_L d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^1_0 \mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^0V} \mathbf{B}_{NL}^T {}^1_0 \mathbf{S} {}^1_0 \mathbf{B}_{NL} d^0V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^1_0 \mathbf{F} = \int_{^0V} \mathbf{B}_L^T {}^1_0 \hat{\mathbf{S}} d^0V$
Προσαρμοστική διατύπωση Lagrange	$\int_{^1V} C_{ijrs} e_{rs} \delta_1 e_{ij} d^1V$ $\int_{^1V} \tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} d^1V$ $\int_{^1V} \tau_{ij} \delta_1 e_{ij} d^1V$	${}^1_1 \mathbf{K}_L \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^1V} \mathbf{B}_L^T {}^1_1 \mathbf{C} {}^1_1 \mathbf{B}_L d^1V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^1_1 \mathbf{K}_{NL} \hat{\mathbf{u}} = \left(\int_{^1V} \mathbf{B}_{NL}^T {}^1_1 \boldsymbol{\tau} {}^1_1 \mathbf{B}_{NL} d^1V \right) \hat{\mathbf{u}}$ ${}^1_1 \mathbf{F} = \int_{^1V} \mathbf{B}_L^T {}^1_1 \hat{\boldsymbol{\tau}} d^1V$

Όπου

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_L =$ Μητρώο Στιβαρότητας για μη γραμμικότητα υλικού και για μικρές παραμορφώσεις δηλαδή για γραμμικότητα γεωμετρίας

K_{NL} =Μητρώο Στιβαρότητας για μεγάλες παραμορφώσεις δηλαδή για μη γραμμικότητα γεωμετρίας

C =Τανυστής Ελαστικότητας

S =Τάσεις δεύτερου τανυστή Piola-Kirchoff

B_L =Μητρώο παραμόρφωσης για μικρές παραμορφώσεις που συνδέει γραμμικές παραμορφώσεις με προσαυξητικές μετατοπίσεις.

B_{NL} = Μητρώο παραμόρφωσης για μεγάλες παραμορφώσεις που συνδέει μη γραμμικές παραμορφώσεις (μεταβολή) με προσαυξητικές μετατοπίσεις.

F =Διάνυσμα εσωτερικών δράσεων εντός του στοιχείου.

σ = Γενικά οποιαδήποτε συνιστώσα τάσης (εκεί που χρησιμοποιείται προτιμάται να χρησιμοποιούνται τάσεις Cauchy)

N, N_A =Συναρτήσεις σχήματος για το στοιχείο και για την επιφάνεια αντίστοιχα και συνδέει τις ολικές μετατοπίσεις εντός του στοιχείου με τις επικόμβιες μετατοπίσεις.

τ = Τάσεις Cauchy

u =Διάνυσμα προσαυξητικών μετατοπίσεων

de =Μεταβολή γραμμικού τμήματος της παραμόρφωσης (προσαυξητικά)

dn =Μεταβολή μη γραμμικού τμήματος της παραμόρφωσης (προσαυξητικά)

Κεφ 1.5 Μη γραμμικότητα γεωμετρίας-Ενδεικτικά παραδείγματα εφαρμογής-υπολογισμοί μητρώων.

1. Στοιχείο δικτυώματος ολική διατύπωση Lagrange

Το μη γραμμικό μητρώο παραμόρφωσης είναι

$${}^t_0 \mathbf{B}_{NL} = \frac{1}{{}^0L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας

$${}^t_0 \mathbf{k} = {}_0 C_{1111} \frac{({}^0L + \Delta L)^2}{{}^0L^3} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ (\text{συμμετρικό}) & & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{{}^t \mathbf{P}}{{}^0L + \Delta L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπου το πρώτο τμήμα είναι το γραμμικό μητρώο και το δεύτερο το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας ενώ το διάνυσμα

$${}^t_0 \mathbf{F} = {}^t \mathbf{P} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

εσωτερικών δράσεων είναι

Παρόμοιες μητρικές σχέσεις συνάγονται και για την προσαρμοστική διατύπωση Lagrange. Επίσης για τα στοιχεία δοκού ανάλογες μητρικές σχέσεις ισχύουν που επαληθεύουν την εναλλακτική ανάλυση στο φυσικό-σωματόδετο σύστημα. Στη συνέχεια τελείως ενδεικτικά παρατίθενται για τα στοιχεία δισδιάστατης ελαστικότητας και για τα στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας τα μη γραμμικά μητρώα παραμόρφωσης τα οποία χρησιμεύουν για τον υπολογισμό του γεωμετρικού μητρώου στιβαρότητας.

2. Στοιχείο δισδιάστατης ελαστικότητας

$${}^t_0 \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,1} & 0 & \dots & {}_0N_{q,1} & 0 \\ {}_0N_{1,2} & 0 & {}_0N_{2,2} & 0 & \dots & {}_0N_{q,2} & 0 \\ 0 & {}_0N_{1,1} & 0 & {}_0N_{2,1} \dots & 0 & {}_0N_{q,1} \\ 0 & {}_0N_{1,2} & 0 & {}_0N_{2,2} \dots & 0 & {}_0N_{q,2} \end{bmatrix}$$

3. Στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας

$${}^t_0 \mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} {}_0N_{1,1} & 0 & 0 & \dots & {}_0N_{q,1} & 0 & 0 \\ 0 & {}_0N_{1,2} & 0 & \dots & 0 & {}_0N_{q,2} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0N_{1,3} & \dots & 0 & 0 & {}_0N_{q,3} \\ {}_0N_{1,2} & {}_0N_{1,1} & 0 & \dots & {}_0N_{q,2} & {}_0N_{q,1} & 0 \\ 0 & {}_0N_{1,3} & {}_0N_{1,2} & \dots & 0 & {}_0N_{q,3} & {}_0N_{q,2} \\ {}_0N_{1,3} & 0 & {}_0N_{1,1} & \dots & {}_0N_{q,3} & 0 & {}_0N_{q,1} \end{bmatrix}$$

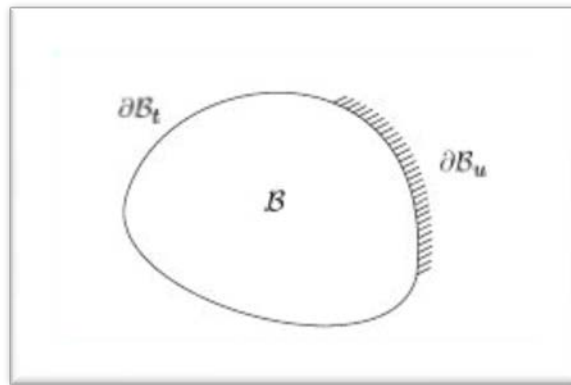
Κεφ 2.1 Μη γραμμικότητα υλικού-Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο θα συζητήσουμε την μη γραμμικότητα λόγω υλικού άρα θεωρία μικρών μετατοπίσεων και παραμορφώσεων. Δηλαδή θα διατυπώσουμε το πρόβλημα από την αρχή θεωρώντας τάσεις Cauchy που ενδείκνυνται για προβλήματα μη γραμμικότητας υλικού. Ως γνωστόν το γενικευμένο πρόβλημα ισορροπίας για συνεχή συστήματα διέπεται από τη μερική διαφορική εξίσωση που έχει τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες αλλά και τις εξισώσεις-καταστατικές σχέσεις υλικών.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \partial\mathcal{B}_u$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on } \partial\mathcal{B}_t,$$



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}} \nabla),$$

Παρατηρούμε ότι οι καταστατικές σχέσεις των υλικών εκφράζονται με ρυθμούς μεταβολής τάσεων και παραμορφώσεων κάτι που θα φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια. Οι παραμορφώσεις εδώ ακολουθούν τις γραμμικές σχέσεις που ήδη γνωρίζουμε για μικρές μετατοπίσεις πχ $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Αυτό όμως είναι η διατύπωση για συνεχές σύστημα. Με την κλασική θεωρία πεπερασμένων στοιχείων και την Αρχή των Δυνατών Έργων δημιουργούμε τις σχέσεις που δείξαμε στη σελίδα 18 στο τμήμα που έχει τίτλο μόνο μη γραμμικότητα υλικού ήτοι

$${}^1\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \left(\int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L dV \right) \hat{\mathbf{u}}$$

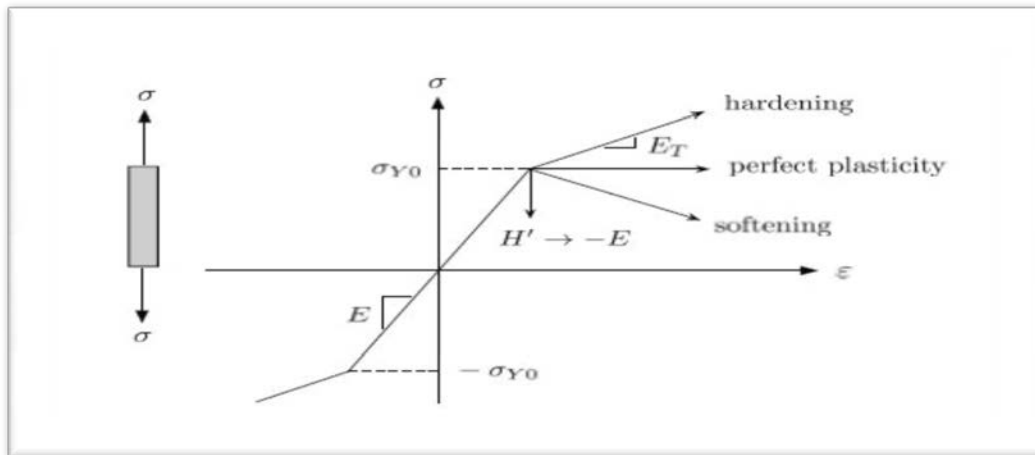
$${}^1\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}_L^T {}^1\boldsymbol{\sigma} dV$$

Η μη γραμμικότητα του υλικού επηρεάζει από αυτές τις σχέσεις τις τάσεις και άρα μετά τις εσωτερικές δράσεις και το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το μονοδιάστατο πρόβλημα και έπειτα θα

παρουσιάσουμε ενδεικτικά τα 3 βασικά κριτήρια αστοχίας κλείνοντας την ενότητα.

Κεφ 2.2 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-Συνάρτηση διαρροής και νόμοι κράτυνσης

Έστω ένα ραβδί που εντείνεται μονοαξονικά και έχει διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων όπως στο σχήμα



Σχήμα 5 Μονοδιάστατο πρόβλημα

Για την ανάλυσή μας θα φτιάξουμε την σχέση ρυθμού μεταβολής τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων που είναι άμα κανείς διαχωρίσει το ελαστικό και το πλαστικό κομμάτι της παραμόρφωσης η οποία είναι

$$\dot{\sigma} = E * \dot{\epsilon}_e = E * (\dot{\epsilon}_{tot} - \dot{\epsilon}_p) = E_t * \dot{\epsilon}$$

Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση διαρροής που είναι κυρτή. Για κοινή αρχική τάση διαρροής σε θλίψη και εφελκυσμό έχουμε

$$f(\sigma, \sigma_{Y0}) = |\sigma| - \sigma_{Y0} \leq 0 \text{ όπου } \sigma_{Y0} \text{ η αρχική τάση διαρροής}$$

Και αν θεωρήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης ως $\dot{\lambda} \geq 0$ τότε

$$\dot{\epsilon}^p = \begin{cases} +\dot{\lambda}, & \text{if } \sigma > 0, \\ -\dot{\lambda}, & \text{if } \sigma < 0. \end{cases}$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma).$$

Με την τελευταία να λέγεται σχέση ροής-ερπυσμού (flow rule). Έστω τώρα ότι η τάση διαρροής γίνεται μια τυχαία σ_Y μετά την 1^η διαρροή. Η νέα συνάρτηση διαρροής που παραμένει κυρτή.

$f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y \leq 0$ όπου σ_Y η τάση διαρροής σε μια χρονική στιγμή

Άρα πρέπει να ξέρουμε πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η τάση διαρροής. Συνεπώς εισάγουμε σχέση που συνδέει το ρυθμό μεταβολής της σ_Y με το ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης. Αυτό ονομάζεται συνάρτηση κράτυνσης (hardening law) και είναι η εξής

$$\dot{\sigma}_Y = H' |\dot{\epsilon}^p| = H' \dot{\lambda},$$

Όπου H είναι το πλαστικό μέτρο κατά Young. Κατά συνέπεια το μέτρο του H καθορίζει την μεταβολή (αύξηση ή μείωση) του ορίου διαρροής. Αν το μέτρο είναι σταθερό έχουμε γραμμική κράτυνση (Linear Hardening) αλλιώς είναι μη γραμμική. Αν για οποιαδήποτε θέση $H < 0$ μιλάμε για μαλάκωμα του υλικού (softening) ενώ όταν $H = 0$ για κάθε χρονική στιγμή μιλάμε για απολύτως πλαστικό υλικό (Perfectly Plastic). Παρατηρούμε ότι για το $\dot{\lambda}$ και την συνάρτηση f ισχύουν δύο πιθανά σενάρια. $\dot{\lambda} > 0$ και $f = 0$ ή $\dot{\lambda} = 0$ και $f < 0$ που αντιστοιχούν σε αύξηση πλαστικών παραμορφώσεων άρα κίνηση στην

επιφάνεια διαρροής ή κίνηση επί της ελαστικής περιοχής και μη αύξηση πλαστικών παραμορφώσεων αντίστοιχα. Άρα ικανοποιούν τη συμπληρωματικότητα και αποτελούν συνθήκες Karush Kuhn Tucker δηλαδή

$$\dot{\lambda} * f = 0$$

Που αν παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο

$$\dot{\lambda} * \dot{f} = 0$$

Δηλαδή

$$\dot{f} = 0$$

Στην βιβλιογραφία η τελευταία σχέση λέγεται συνθήκη συνεκτικότητας και είναι θεμελιώδης για την πλαστικότητα. Χρησιμεύει πρακτικά στην αριθμητική ολοκλήρωση όπως θα φανεί αργότερα. Ειδικά στη μη γραμμική κράτυνση θα διακριτοποιηθεί ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί στο χρόνο.

Η συνθήκη συνεκτικότητας για το μονοδιάστατο πρόβλημα είναι

$$\dot{f}(\sigma, \sigma_Y) = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_Y = 0.$$

Και συνδυάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις και τον νόμο κράτυνσης βγάζουμε

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma) E \dot{\epsilon}}{E + H'} \implies \dot{\epsilon}^P = \frac{E}{E + H'} \dot{\epsilon}.$$

Όπου λόγω περιορισμού προσήμου και παρονομαστή διάφορου του μηδενός

$H > -E$

Και εισάγοντας στη σχέση

$$\dot{\sigma} = E * \dot{\epsilon}_l = E * (\dot{\epsilon}_{tot} - \dot{\epsilon}_p) = E_T * \dot{\epsilon}$$

Έχουμε

$$\dot{\sigma} = E \left[\dot{\epsilon} - \left(\frac{E}{E + H'} \right) \dot{\epsilon} \right] = \left(E - \frac{E^2}{E + H'} \right) \dot{\epsilon}.$$

Άρα

$$E_T = \frac{H'}{1 + H'/E} \iff H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E}.$$

Και προφανώς όταν H' τείνει στο άπειρο το E_T τείνει στο E

Κεφ 2.3 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-Η έννοια της ισοτροπικής και της κινηματικής κράτυνσης

Στη συνέχεια αναλύουμε την έννοια της κράτυνσης. Ως γνωστόν η κράτυνση χωρίζεται εννοιολογικά σε 2 τμήματα. Η ισοτροπική κράτυνση είναι το πόσο αλλάζει το σ_Y ανάλογα με το χρόνο και επηρεάζεται από τον νόμο κράτυνσης. Γεωμετρικά αυτό εκφράζεται από το πόσο «φουσκώνει» ή «ξεφουσκώνει» η επιφάνεια διαρροής. Αντίθετα η κινηματική κράτυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής των παραμενουσών τάσεων μετά το τέλος της βηματικής φόρτισης. Γεωμετρικά αυτό εκφράζεται από το πόσο μετακινείται και προς τα πού το κέντρο της επιφάνειας διαρροής με το ελαστικό μέρος του (όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια διαρροής) να είναι σταθερό. Για την κινηματική κράτυνση εισάγεται ο όρος τάσεις προηγούμενου βήματος (back stress) με σύμβολο το « α » που ορίζεται ως η μέση τιμή των αλγεβρικών τιμών του ορίου θλίψης και εφελκυσμού στο βήμα που είναι γνωστό ζητώντας να πάμε στο επόμενο βήμα. Η

κινηματική κράτυνση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για ανακυκλιζόμενες φορτίσεις. Η ισοτροπική κράτυνση εκφράζεται μαθηματικώς πλήρως από τον νόμο κράτυνσης (hardening law). Για την κινηματική κράτυνση η f γίνεται

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_Y) = |\sigma - \alpha| - \sigma_Y \leq 0$$

Και αν εφαρμόσουμε την σχέση συνεκτικότητας και λόγω του ότι με το χρόνο το σ_Y είναι σταθερό προκύπτει

$$\dot{\sigma} = \dot{\alpha}$$

Κάτι που πολύ απλά σημαίνει ότι οι τάσεις προηγούμενου βήματος έλκονται από τις τάσεις στο χρονικό βήμα που εξετάζουμε και αυτές καθορίζουν τις τάσεις α .

Συνεπώς θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν $\dot{\gamma} > 0$ τότε

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma},$$

Όπου ο δεύτερος παράγοντας είναι το πρόσημο του $(\sigma - \alpha)$ και δείχνει το αν υπάρχει αύξηση ή μείωση του α με το χρόνο με θετικό α τον εφελκυσμό. Και αφού θεωρήσουμε ότι η ράβδος διαρρέει τότε $|\sigma| = |\sigma_Y|$ όπου σ_Y η τάση διαρροής σε κάποια χρονική στιγμή. Με βάση τον νόμο κράτυνσης έχω

$$\text{sign}(\sigma - \alpha) \dot{\sigma} = H' |\dot{\epsilon}^p| = H' \dot{\lambda},$$

Αν συνδυαστούν οι 3 προηγούμενες σχέσεις τότε

$$\dot{\gamma} = H' \dot{\lambda} > 0,$$

Και τίθεται στη σχέση που θεωρήσαμε για το α άρα

$$\dot{\alpha} = H' \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha).$$

Και αν αυτό χρησιμοποιηθεί μαζί με την σχέση

$$\dot{\sigma} = E * \dot{\epsilon}^e = E * (\dot{\epsilon}^t - \dot{\epsilon}^p) = E t * \dot{\epsilon}$$

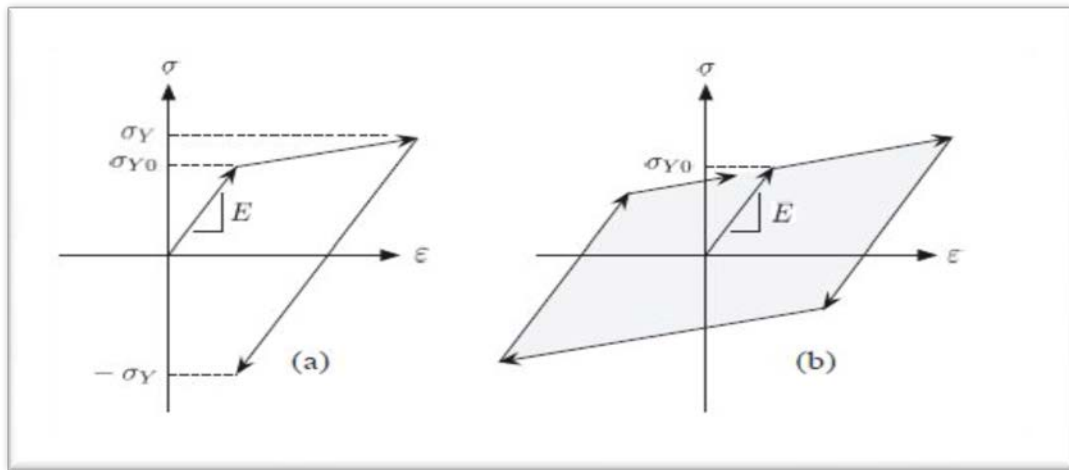
Και με την συνθήκη συνεκτικότητας αποδεικνύεται ότι

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma - \alpha) E \dot{\epsilon}}{E + H'} \implies \dot{\epsilon}^p = \frac{E}{E + H'} \dot{\epsilon}.$$

Βλέπουμε ότι και στην κινηματική κράτυνση η σχέση που διέπει το ρυθμό μεταβολής πλαστικών παραμορφώσεων και συνολικών παραμορφώσεων είναι η ίδια. Κάτι που πολύ απλά σημαίνει ότι είτε ισοτροπική είτε κινηματική η κράτυνση δεν αλλάζει ο ρυθμός μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων και άρα η παραμορφωσιακή κατάσταση για το ίδιο τασικό πεδίο αλλά διαφοροποιείται το όριο διαρροής άρα διαφοροποιείται το κριτήριο βάσει του οποίου κρίνουμε αν η τάση αυτή είναι ελαστική ή όχι. Αν κρίνεται ανελαστική με βάση οποιοδήποτε από τα 2 κριτήρια κράτυνσης τότε η εύρεση των παραμορφώσεων είναι μεθοδολογικά η ίδια. Τέλος για γραμμική κράτυνση που έχει θεωρηθεί εδώ ότι ισχύει μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμικό συνδυασμό της ισοτροπικής και της κινηματικής κράτυνσης. Μια τέτοια λογική εκφράζεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\dot{r} = \beta H' \dot{\lambda}, \quad \dot{\alpha} = (1 - \beta) H' \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha), \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Όπου η πρώτη σχέση με το β δείχνει ότι θα έχουμε β ποσοστιαία συμμετοχή ισοτροπικής κράτυνσης και $1-\beta$ ποσοστιαία συμμετοχή κινηματικής κράτυνσης.



Σχήμα 6 Ισοτροπική (αριστερά) και κινηματική (δεξιά) κράτνυση

Κεφ 2.4 Μη γραμμικότητα υλικού-Μονοδιάστατο πρόβλημα-οι αλγόριθμοι της ισοτροπικής και της κινηματικής κράτνυσης

Αλγοριθμικά θα δείξουμε τις τρεις περιπτώσεις κράτνυσης που μπορεί να υπάρξουν

1. Γραμμική- Ισοτροπική Κράτνυση
2. Γραμμική- Κινηματική Κράτνυση
3. Μη Γραμμική Κράτνυση

1 Γραμμική Ισοτροπική Κράτνυση

Έστω ότι έχουμε τις σχέσεις που δηλώνουν ισοτροπική κράτνυση ήτοι

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p), \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma), \quad \dot{\sigma}_Y = H' \dot{\lambda}.$$

Άρα ζητάμε με γνωστή την τάση σ και την τάση διαρροής σ_Y στον χρόνο n να μάθουμε την τάση σ και την τάση διαρροής σ_Y στον χρόνο $n+1$. Αυτό για γνωστή διακριτή επαυξητική παραμόρφωση $\Delta\epsilon$ εκφράζεται ως

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tr}} - E\Delta\varepsilon^{\text{p}}, \quad \sigma_{n+1}^{\text{tr}} := \sigma_n + E\Delta\varepsilon.$$

Όπου ο άνω δείκτης tr αναφέρεται στον όρο δοκιμαστική-ελαστική τάση (trial). Δηλαδή κάνουμε ελαστική δοκιμή ή ελαστική πρόλεξη όπως λέγεται στην βιβλιογραφία και μετά κάνουμε πλαστική διόρθωση μέσω του υπολογισμού της μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης ως διακριτή επαυξητική τιμή. Η μέθοδος λέγεται μέθοδος εμπρός-πίσω κίνησης (Return Map) και διατυπώθηκε από τους Simo and Hughes το 1998. Στη συνέχεια διακριτοποιούμε την 2^η σχέση και την 3^η σχέση αλλά και την συνθήκη συνεκτικότητας και έχω

$$\Delta\varepsilon^{\text{p}} = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{tr}}),$$

$$\sigma_{Y,n+1} = \sigma_{Y,n} + H'\Delta\lambda.$$

$$f(\sigma_{n+1}, \sigma_{Y,n+1}) = |\sigma_{n+1}| - \sigma_{Y,n+1} = 0$$

Αν αυτές συνδυαστούνε όλες μαζί δίνουν την έκφραση για την διακριτοποιημένη τιμή του ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\lambda$ ως

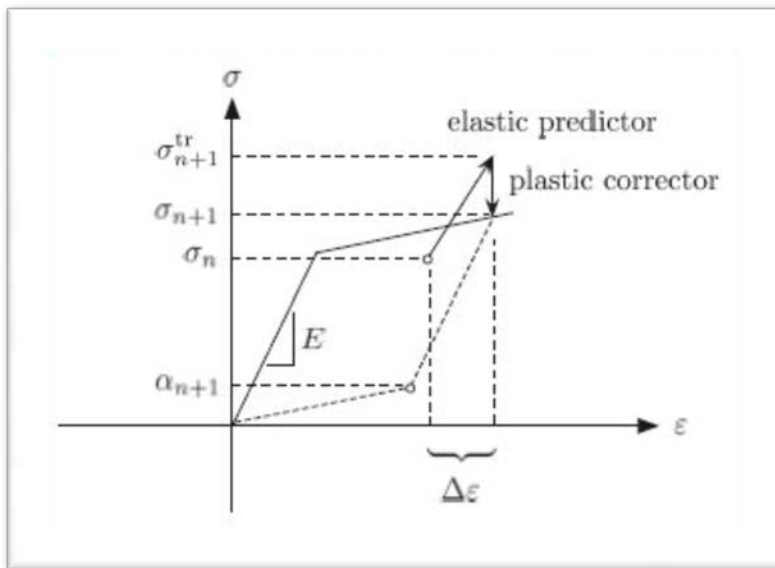
$$\Delta\lambda = \frac{|\sigma_{n+1}^{\text{tr}}| - \sigma_{Y,n}}{E + H'} > 0.$$

Άρα προφανώς λόγω του περιορισμού προσήμου

$$|\sigma(\text{tr})_{n+1}| > \sigma_{Y,n}$$

Άρα αλγοριθμικά η ισοτροπική κράτυνση εκφράζεται ως εξής

1 Υπολογισμός δοκιμαστικής τάσης $\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + E \cdot \Delta \varepsilon$
2 Ερώτημα $ \sigma_{n+1}^{tr} - \sigma_Y , n > 0$
3 Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow θέσε όπου $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}$ και $\sigma_{Y_{n+1}} = \sigma_{Y_n}$ και έξοδος
4 Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Υπολόγισε το $\Delta \lambda = (\sigma_{n+1}^{tr} - \sigma_Y - \sigma_Y) / (E + H)$
5 Θέσε τα εξής $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - E \cdot \Delta \lambda$ * πρόσημο(σ_{n+1}^{tr})
$\sigma_{Y_{n+1}} = \sigma_{Y_n} + H \cdot \Delta \lambda$ και έξοδος



Σχήμα 7 Ελαστική πρόλεξη και πλαστική διόρθωση

2 Γραμμική Κινηματική Κράτνυση

Έστω ότι έχουμε τις σχέσεις που δηλώνουν Κινηματική κράτνυση ήτοι

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^P), \quad \dot{\varepsilon}^P = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha), \quad \dot{\alpha} = H' \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha),$$

Άρα ζητάμε με γνωστή την τάση σ και την τάση διαρροής σ_Y στον χρόνο n να μάθουμε την τάση σ και την τάση διαρροής σ_Y στον χρόνο $n+1$. Αυτό για γνωστή διακριτή επαυξητική παραμόρφωση $\Delta \varepsilon$ εκφράζεται ως

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tr}} - E\Delta\varepsilon^{\text{p}}, \quad \sigma_{n+1}^{\text{tr}} := \sigma_n + E\Delta\varepsilon$$

Στη συνέχεια διακριτοποιούμε την 2^η σχέση και την 3^η σχέση αλλά και την συνθήκη συνεκτικότητας και έχω κατά αναλογία με την ισοτροπική κράτυνση τις εξής σχέσεις

$$\Delta\varepsilon^{\text{p}} = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}) = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_n)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + H' \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}) = \alpha_n + H' \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_n)$$

Αυτές οι 2 τελευταίες σχέσεις έχουν φτιαχτεί θεωρώντας την ακόλουθη ισότητα

$$\text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}) \equiv \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_n),$$

Η οποία προκύπτει από τη γεωμετρική ερμηνεία του αλγορίθμου. Δηλαδή αυτό σημαίνει ότι οι τάσεις προηγούμενου βήματος έχουν υπολογιστεί από την ελαστική πρόλεξη και μετά ακολουθεί την πραγματική τάση κατά την πλαστική διόρθωση. Για αυτό και η μέθοδος λέγεται μέθοδος της προσαρμογής των τάσεων προηγούμενου βήματος (Catching Up Method) που διατυπώθηκε από τον Moreau (1977). Τώρα διακριτοποιούμε την συνθήκη συνεκτικότητας

$$f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, \sigma_{Y0}) = |\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}| - \sigma_{Y0} = 0,$$

Αν αυτές συνδυαστούνε όλες μαζί δίνουν την έκφραση για την διακριτοποιημένη τιμή του ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης $\Delta\lambda$ ως

$$\Delta\lambda = \frac{|\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n| - \sigma_{Y0}}{E + H'} > 0,$$

Άρα προφανώς λόγω του περιορισμού προσήμου

$$|\sigma(tr)n + 1 - \alpha_n| > \sigma_{Y0}$$

Κατά συνέπεια αλγοριθμικά η κινηματική κράτυνση εκφράζεται ως εξής

1 Υπολογισμός δοκιμαστικής τάσης $\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + E * \Delta\epsilon$
2 Ερώτημα $ \sigma(tr)n + 1 - \alpha_n - \sigma_{Y0} > 0$
3 Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow θέσε όπου $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ και έξοδος
4 Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Υπολόγισε το $\Delta\lambda = (\sigma(tr)n + 1 - \alpha_n - \sigma_{Y0}) / (E + H)$
5 Θέσε τα εξής $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - E * \Delta\lambda$ * πρόσημο($\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n$)
$\alpha_{n+1} = \alpha_n + H * \Delta\lambda$ * πρόσημο($\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n$) και έξοδος

3 Μη Γραμμική Κράτυνση

Έστω $H=f(\xi)$ όπου ξ έχει διαστάσεις παραμόρφωσης και εκφράζει ποιοτικά την μεταβολή της παραμόρφωσης με έναν διαφορετικό τρόπο. Ειδικά δε για το μονοδιάστατο πρόβλημα ταυτίζεται με τον ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης άρα $\xi = \dot{\lambda}$. Αφού η μεταβλητή αυτή εμπλέκει, και ειδικά στο μονοδιάστατο πρόβλημα είναι ο ίδιος ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης τότε συνάγεται ότι θα χρειαστούμε μια επαναληπτική διαδικασία για να υπολογιστεί το $\Delta\lambda$. Για παράδειγμα αν έχω ιστροπική κράτυνση και πάρω τη διακριτοποιημένη σχέση του νόμου κράτυνσης

$$\sigma_{Y,n+1} = \sigma_{Y,n} + H'_{n+1} \Delta\lambda, \quad H'_{n+1} = H' |_{\xi_{n+1}}.$$

Αν αυτή αντικατασταθεί στη σχέση της επιφάνειας διαρροής

$$f(\Delta\lambda) = |\sigma_{n+1}^{tr}| - \sigma_{Y,n} - E\Delta\lambda - H'_{n+1} \Delta\lambda.$$

Δηλαδή έχω μια μη γραμμική σχέση $f(\Delta\lambda)=0$ όπου χρησιμοποιώ επαναληπτική διαδικασία Newton Raphson

$$f'(\Delta\lambda) = -E - H'_{n+1} - \Delta\lambda \left. \frac{dH'}{d\xi} \right|_{n+1}.$$

Με βάση αυτή την επαναληπτική διαδικασία όταν το $\Delta\lambda$ συγκλίνει ακολουθούμε ό,τι και πριν συνεπώς η αλγοριθμική διαδικασία είναι

1 Υπολογισμός δοκιμαστικής τάσης $\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + E \cdot \Delta\epsilon$
2 Ερώτημα $ \sigma^{tr}(n+1) - \sigma_{Y,n} > 0$
3 Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow θέσε όπου $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}$ και $\sigma_{Y_{n+1}} = \sigma_{Y_n}$ και έξοδος
4 Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Υπολόγισε το $\Delta\lambda$ μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας Newton Raphson
5 Θέσε τα εξής $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - E \cdot \Delta\lambda$ * πρόσημο(σ_{n+1}^{tr})
$\sigma_{Y_{n+1}} = \sigma_{Y_n} + H \cdot \Delta\lambda$ και έξοδος

Παρόμοια αποτελέσματα μπορεί να διατυπωθούν για κινηματική κράτυνση αλλά και για την περίπτωση συνδυασμένης ιστροπικής και κινηματικής κράτυνσης μέσω της σταθεράς β που είναι η ποσοστιαία συμμετοχή της κάθε τύπου κράτυνσης στη συνολική. Πάλι κάθε υπολογισμός του $\Delta\lambda$ θα γίνεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας και όλα τα υπόλοιπα σημεία δεν αλλάζουν. Στη συνδυασμένη βέβαια κράτυνση θα πρέπει να διατυπωθεί ανάλογη σχέση για την επιφάνεια διαρροής που θα συνδυάζει και τα 2 φαινόμενα. Συμπερασματικά αποδεικνύεται ότι πάρα πολύ σημαντικός

παράγοντας για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων είναι η κράτυνση και ειδικά σε υστερητικά ανακυκλιζόμενα φαινόμενα η επιλογή του τύπου και των σταθερών της κράτυνσης είναι καθοριστική για την συμπεριφορά του υλικού.

Κεφ 2.5 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises

Το κριτήριο Von Mises ξεκίνησε αρχικά σαν ιδέα από τον Tresca (1864). Ο Tresca διετύπωσε ότι για μεταλλικά υλικά ισχύει ότι $(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max} = Y$ όπου Y η τάση διαρροής. Αυτό σημαίνει ότι σε 2 και τρεις διαστάσεις η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου είναι το εξάγωνο ή το εξαγωνικό πρίσμα αντίστοιχα του Tresca. Ο Von Mises το 1913 επέκτεινε το κριτήριο αυτό θέτοντας μια σχέση που είναι της μορφής $0,5 * ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2) < \sigma Y$. Κάτι που σημαίνει ότι σε 2 και τρεις διαστάσεις η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου είναι η έλλειψη και ο κύλινδρος του Von Mises. Στη συνέχεια αναπτύσσεται όλη η θεωρία του κριτηρίου από την οποία θα εξάγουμε τις σχέσεις που αφορούν την κλασική θεωρία πεπερασμένων στοιχείων.

Έστω ο συμμετρικός τανυστής Cauchy τάσεων που στο παρόν κεφάλαιο ορίζεται ως $\sigma = \sigma_{ij}$ Αυτός χωρίζεται σε 2 τανυστές τον υδροστατικό και τον αποκλίνοντα τανυστή ήτοι.

$$\sigma = p1 + s,$$

Όπου $p = \text{trace}(\sigma)/3$ η υδροστατική συνιστώσα p όπου $\text{trace}(\sigma)$ είναι το άθροισμα των διαγωνίων όρων του τανυστή και s η αποκλίνουσα συνιστώσα. Και το 1 είναι μητρώο με στοιχεία δ_{ij} από το δέλτα του Kronecker. Παρόμοια για τις παραμορφώσεις ισχύει.

$$\epsilon = \frac{1}{3} \epsilon_v \mathbf{1} + e,$$

Όπου $\epsilon_v = \text{trace}(\epsilon)$ η υδροστατική συνιστώσα της παραμόρφωσης και e η αποκλίνουσα συνιστώσα της παραμόρφωσης. Για ισοτροπικά ελαστικά υλικά οι καταστατικές σχέσεις είναι οι εξής.

$$p = K \epsilon_v, \quad s = 2\mu e,$$

Όπου K το μέτρο που συνδέει ογκομετρική παραμόρφωση και υδροστατική πίεση και μ το μέτρο διατμήσεως. Κατά συνέπεια

$$\sigma = K \epsilon_v \mathbf{1} + 2\mu e = c^e : \epsilon,$$

$$c^e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$$

Όπου c^e είναι ο ελαστικός τανυστής 4^{ης} τάξεως που είναι συνάρτηση των σταθερών του υλικού. Το σύμβολο με τον κύκλο και το X συμβολίζει μια πράξη της μορφής $@$ σύμφωνα με την οποία $(A@B)(ijkl) = A_{ij} * B_{kl}$ ενώ για το σύμβολο $:$ ισχύει $(c^e : \epsilon)(ij) = c^e (ijkl) * \epsilon(ij)$ και τέλος για το I ισχύει $I(ijkl) = (\delta(ik) * \delta(jl) + \delta(il) * \delta(jk)) / 2$

Στη συνέχεια ορίζουμε το J_2 ως

$$J_2 = \frac{1}{2} s : s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}.$$

Η σε επίπεδο κύριων τάσεων

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2].$$

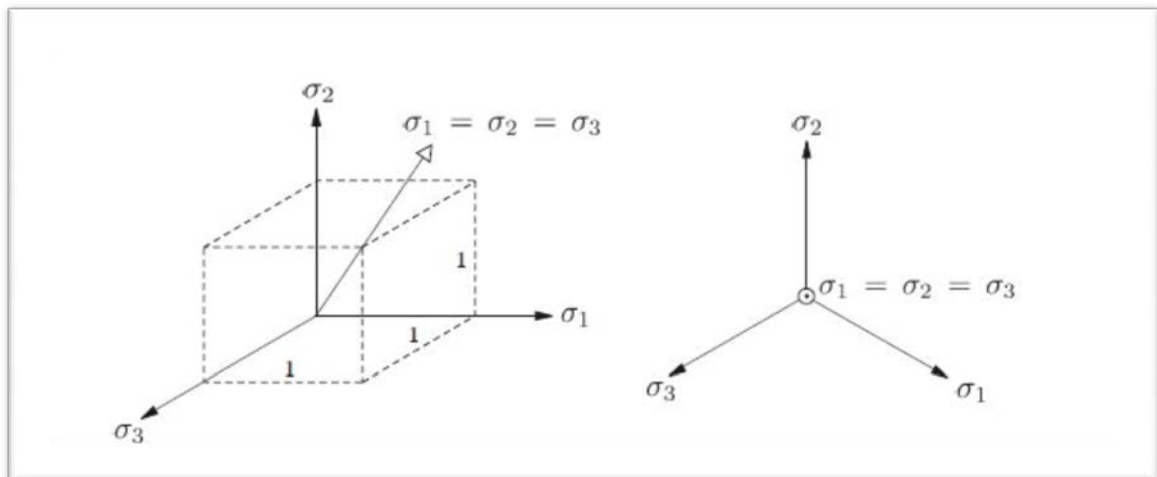
Με βάση λοιπόν τη σχέση αυτή θεωρούμε την εξής επιφάνεια διαρροής

$$f(\sigma, \kappa) = \sqrt{2J_2} - \kappa \leq 0,$$

Ή σε επίπεδο κύριων τάσεων

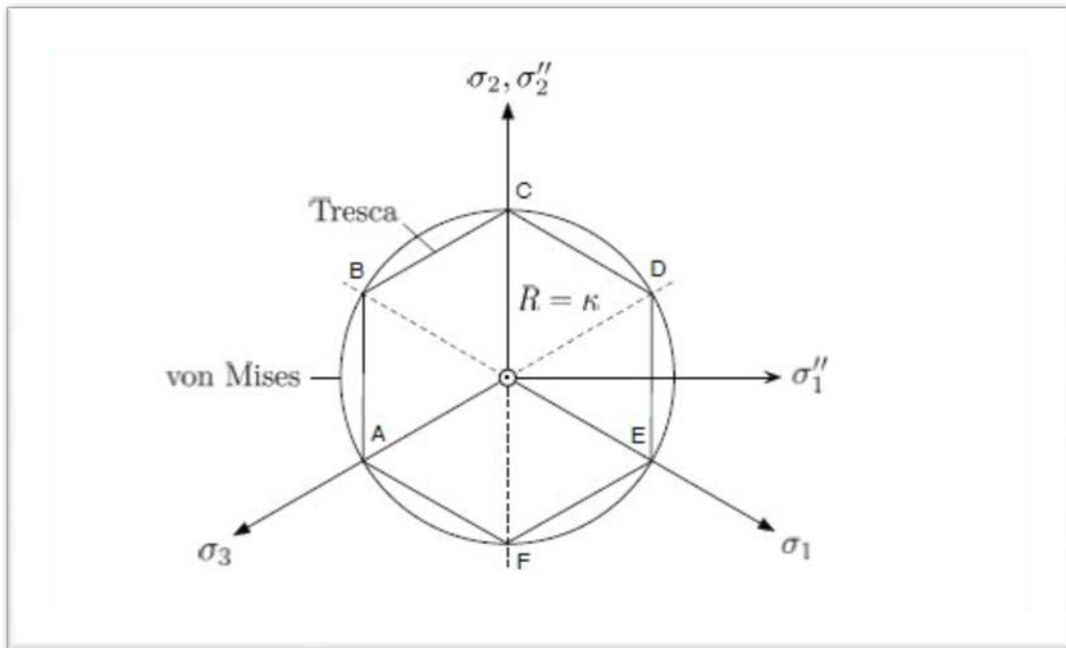
$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} - \kappa \leq 0$$

Από την σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα ότι οποιοδήποτε σημείο με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ικανοποιεί την ανισότητα άρα κείται εντός της ελαστικής περιοχής. Δηλαδή μαθηματικά κάθε ισότροπη φόρτιση είναι απείρως ελαστική κάτι που φυσικά επαληθεύεται σε μεγάλο ποσοστό.

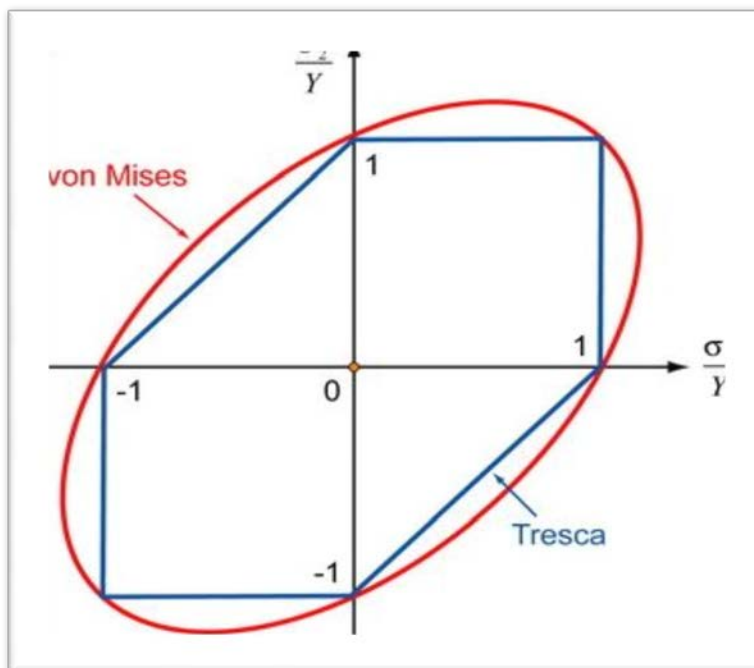


Σχήμα 8 Κύριο επίπεδο και άξονας ισότροπης φόρτισης

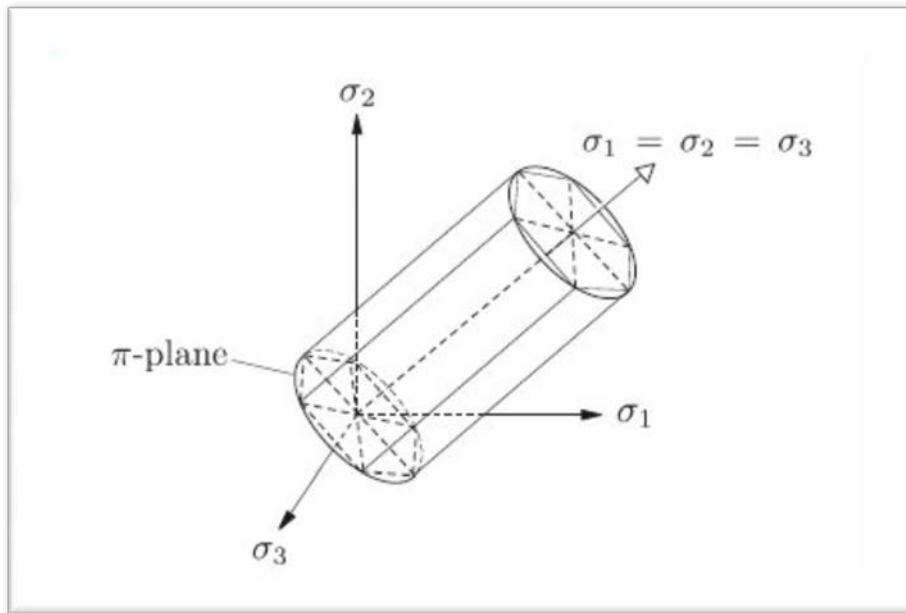
Η πρόταση ότι η ισότροπη φόρτιση είναι απείρως ελαστική εμφανίζεται όχι μόνο στο κριτήριο Mises αλλά και το κριτήριο Tresca.



Σχήμα 9 Κριτήρια Tresca και Mises για τομή επιπέδου κάθετο στον άξονα $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$



Σχήμα 10 Κριτήρια Tresca και Mises για τυχαία τομή επιπέδου



Σχήμα 11 Κριτήρια Tresca και Mises για τρισδιάστατη απεικόνιση

Για συντομία στη συνέχεια το επίπεδο $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ θα λέγεται επίπεδο- π . Με αυτά έχουμε καθορίσει το κριτήριο για την ελαστική περιοχή. Μένει να διατυπώσουμε σχέσεις αναλόγως του τρόπου κράτυνσης που έχουμε επιλέξει. Αρχικά θα υπολογίσουμε τις σχέσεις για πλήρη πλαστικότητα μια περίπτωση που για ιδιαίτερα όλκιμα μέταλλα είναι ιδιαίτερα συχνά εμφανιζόμενη στην καθημερινότητα. Μετά διατυπώνονται οι σχέσεις για ισοτροπική και κινηματική κράτυνση.

Για την περίπτωση πλήρους πλαστικού υλικού.

Αρχικά παρόμοια με το μονοδιάστατο πρόβλημα διαχωρίζουμε το ελαστικό και το πλαστικό κομμάτι της παραμόρφωσης ήτοι

$$\epsilon_{ολ} = \epsilon_{ελ} + \epsilon_{πλαστικό}$$

Άρα οι καταστατικές εξισώσεις σε τανυστική θεώρηση και η εξίσωση ελαστικής περιοχής του Von Mises είναι οι εξής

$$\sigma = c^e : \epsilon^e = c^e : (\epsilon - \epsilon^p),$$

$$f(\sigma, \kappa) = \sqrt{2J_2} - \kappa = \|s\| - \kappa = 0.$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο ροής-ερπυσμού ο οποίος θα χρησιμοποιήσει την συνάρτηση διαρροής όπως και πριν. Αλλά αυτή τη φορά η συνάρτηση f είναι συνάρτηση πλαστικού δυναμικού και τότε ισχύει το εξής

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \hat{n}, \quad \hat{n} = s/\|s\| = s/\kappa.$$

Όπου \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που εδώ πάρθηκε από τον αποκλίνοντα τανυστή επειδή αυτός δημιουργεί προυποθέσεις διαρροής όπως αποδείξαμε προηγούμενα. Αυτή η σχέση είναι η σχέση ροής των Prandtl-Reuss-Hill και είναι ιδιαίτερα θεμελιώδης για την πλαστικότητα. Ισχύει για κάποια υλικά και τα περισσότερα ευσταθή και εν γένει αποτελεί μια πρώτη υπόθεση της πλαστικότητας στα προβλήματα μας που πειραματικά έχει διερευνηθεί σε πολύ μεγάλο εύρος από διάφορους ερευνητές. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι για το τρισδιάστατο πρόβλημα η σχέση των Prandtl-Reuss-Hill ισχύει

$$\text{tr}(\dot{\epsilon}^p) = \dot{\lambda} * \text{tr}(\hat{n}) = 0$$

Δηλαδή η παραμόρφωση του αποκλίνοντος τανυστή είναι ισόχωρη άρα δεν υπάρχει πλαστική παραμόρφωση αλλαγής όγκου κάτι που επαληθεύεται από τον ίδιο τον ορισμό των 2 τανυστών.

Και εδώ ισχύει η συμπληρωματικότητα κατά Karush Kuhn Tucker και η συνθήκη συνεκτικότητας. Κατά συνέπεια ισχύει

$$\dot{f}(\sigma, \kappa) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} = \hat{n} : \dot{\sigma} = \hat{n} : \dot{s} = 0.$$

Και εάν θεωρήσουμε ως e τον αποκλίνοντα τανυστή της παραμόρφωσης παίρνω από την καταστατική εξίσωση της διάτμησης

$$\dot{s} = 2\mu\dot{e} = 2\mu(\dot{e} - \dot{e}^p) = 2\mu(\dot{e} - \dot{\lambda}\hat{n}),$$

Και το αντικαθιστώ στην συνθήκη συνεκτικότητας μαζί με την σχέση $tr(\hat{n})=0$ και έχω

$$\dot{\lambda} = \hat{n} : \dot{e} = \hat{n} : \dot{e} \quad \Rightarrow \quad \dot{e}^p = \dot{\lambda}\hat{n} = (\hat{n} \otimes \hat{n}) : \dot{e}.$$

Και αν αντικαταστήσω στην καταστατική εξίσωση την γενική έχω

$$\dot{\sigma} = c^e : (\dot{e} - \dot{e}^p) = c^{ep} : \dot{e},$$

Όπου C_{ep}

$$c^{ep} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\left(I - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{n} \otimes \hat{n}\right).$$

Ο ελαστοπλαστικός τανυστής 4^{ης} τάξης όπου η πλαστικότητα φαίνεται στο τελευταίο κομμάτι της εξίσωσης με το διάνυσμα \hat{n} που δέχεται την πράξη τύπου @ με τον εαυτό του.

Κεφ 2.6 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Μέθοδος Ακτινικής επιστροφής

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την αριθμητική ολοκλήρωση των σχέσεων ρυθμών πλαστικής παραμόρφωσης και της σχέσης Prandtl-Reuss-Hill για την περίπτωση της πλήρους πλαστικότητας. Η μέθοδος είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως

μέθοδος ακτινικής επιστροφής (Radial Return Algorithm) και είναι η εξής.

Έστω ότι έχω τις εξισώσεις

$$\dot{\sigma} = c^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p), \quad \dot{\epsilon}^p = \lambda \hat{n},$$

Αν γράψουμε τη διακριτή σχέση μεταξύ των τάσεων σε μορφή ελαστικής πρόλεξης-πλαστικής διόρθωσης ήτοι

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - c^e : \Delta \epsilon^p, \quad \sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + c^e : \Delta \epsilon.$$

Και την δεύτερη διακριτή σχέση ως

$$\Delta \epsilon^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda \hat{n} dt \approx \Delta \lambda \hat{n}_{n+1}, \quad \hat{n}_{n+1} = s_{n+1} / \|s_{n+1}\|,$$

Ενώ η συνθήκη συνεκτικότητας αν διακριτοποιηθεί και θεωρήσουμε ότι στο βήμα n είμαστε πάνω στην επιφάνεια διαρροής δηλαδή $f_n=0$ τότε $f_{n+1}=0$ δηλαδή

$$f_{n+1} = \|s_{n+1}\| - \kappa = 0,$$

Κάτι που σημαίνει ότι σύμφωνα με τη συνθήκη συνεκτικότητας αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος αν χρησιμοποιηθεί διασφαλίζει ότι το σημείο που κινείται πάνω στην επιφάνεια διαρροής δεν πρόκειται να την ξεπεράσει κάτι που θα ήταν λάθος ως μη εφικτή πιθανή τιμή τάσης. Αν στη σχέση ελαστικής πρόλεξης-πλαστικής διόρθωσης βάλω κατά μέλη την πράξη trace τότε παίρνω τη σχέση

$p_{n+1} = p_{n+1}(tr)$ δηλαδή ότι η ελαστική πρόλεξη του υδροστατικού τάνυστή πάντα θα είναι η σωστή κάτι που συμβαδίζει με τις

προηγούμενες μας διαπιστώσεις. Αν κάνω το ίδιο για τον αποκλίνοντα τανυστή μαζί με την τελευταία σχέση για το $f_{n+1}=0$ τότε προκύπτει.

$$s_{n+1} = s_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\lambda s_{n+1}/\kappa.$$

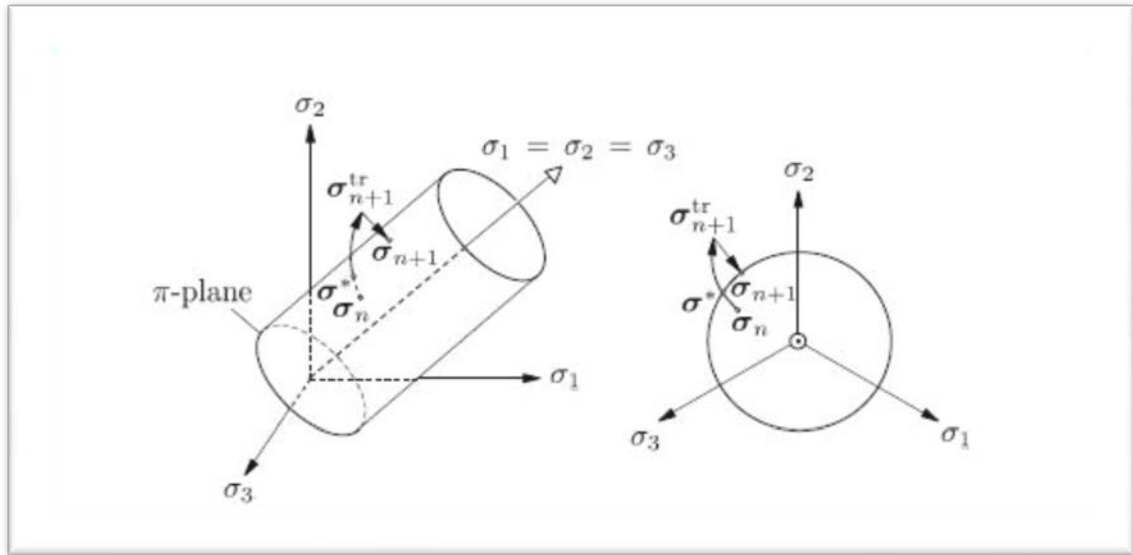
Και βέβαια για το διάνυσμα \hat{n} προκύπτει

$$\hat{n}_{n+1} = s_{n+1}/\kappa = s_{n+1}^{tr}/\|s_{n+1}^{tr}\| \implies s_{n+1} = (\kappa/a) s_{n+1}^{tr},$$

Όπου εδώ το $a = \|s_{n+1}(tr)\|$

Αυτή η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το διάνυσμα $s_{n+1}(tr)$ οφείλει να ναι συγγραμικό με το s_{n+1} αλλά μειωμένο το μέτρο του κατά τον λόγο της ακτίνας της διαρροής δια το μέτρο της $s_{n+1}(tr)$. Αυτό γεωμετρικά εξηγεί τον όρο μέθοδος ακτινικής επιστροφής. Και βέβαια τέλος αν συνθέσω τα 2 κομμάτια των τανυστών παίρνω τις συνολικές τάσεις Cauchy. Τέλος παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο για πλήρη πλαστικότητα και κριτήριο Von Mises.

1	Υπολογισμός δοκιμαστικής τάσης $\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + C_e : \Delta \epsilon$ $p = 1/3 * tr(\sigma_{n+1}^{tr})$ $s_{n+1}^{tr} = \sigma_{n+1}^{tr} - p * 1$
2	Ερώτημα $a = \ s_{n+1}(tr)\ > \kappa$ (ακτίνα)
3	Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow θέσε όπου $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}$ και έξοδος
4	Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow θέσε όπου $\sigma_{n+1} = p * 1 + (\kappa/a) * s_{n+1}^{tr}$ και έξοδος



Σχήμα 12 Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου ακτινικής επιστροφής για πλήρη πλαστικότητα

Τώρα θα δούμε τι συμβαίνει για συνδυασμό ισοτροπικής και κινηματικής κράτυνσης στο κριτήριο Von Mises. Πρώτα όμως θα πρέπει να ορίσουμε κάποια εισαγωγικά θεωρητικά σημεία σχετικά με την ενεργειακή αντιμετώπιση του ζητήματος. Έστω ότι η κ (ακτίνα του κύκλου) είναι συνάρτηση του πλαστικού έργου που ορίζεται ως

$$W^P = \int_t \sigma : \dot{\epsilon}^P dt > 0$$

Αυτή είναι η γενική μορφή της συνάρτησης κ . Όμως επειδή αυτό είναι πάρα πολύ δύσκολο να εξαχθεί μια τέτοια σχέση ακόμα και πειραματικά έχει προτιμηθεί να είναι συνάρτηση του λ που και πιο πριν έχει χρησιμοποιηθεί και λέγεται και αλλιώς στη βιβλιογραφία ως πλαστικός πολλαπλασιαστής (Plastic Multiplier) ήτοι

$$\lambda = \int_t \dot{\lambda} dt, \quad \dot{\lambda} = \|\dot{\epsilon}^P\|.$$

Με αυτή τη διατύπωση πειραματικά εύκολα εξάγουμε σχέσεις.

Αν χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη συνεκτικότητας τότε για κ μη σταθερό έχουμε

$$f(\sigma, \kappa) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0,$$

Όπου

$$\dot{\kappa}/\dot{\lambda} = \begin{cases} \kappa \kappa' (Wp) & \text{Αν κρατύνεται το έργο} \\ \kappa' (\lambda) & \text{Αν κρατύνεται η παραμόρφωση} \end{cases}$$

Συνεπώς

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - H \dot{\lambda} = 0, \quad H = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} (\dot{\kappa}/\dot{\lambda}),$$

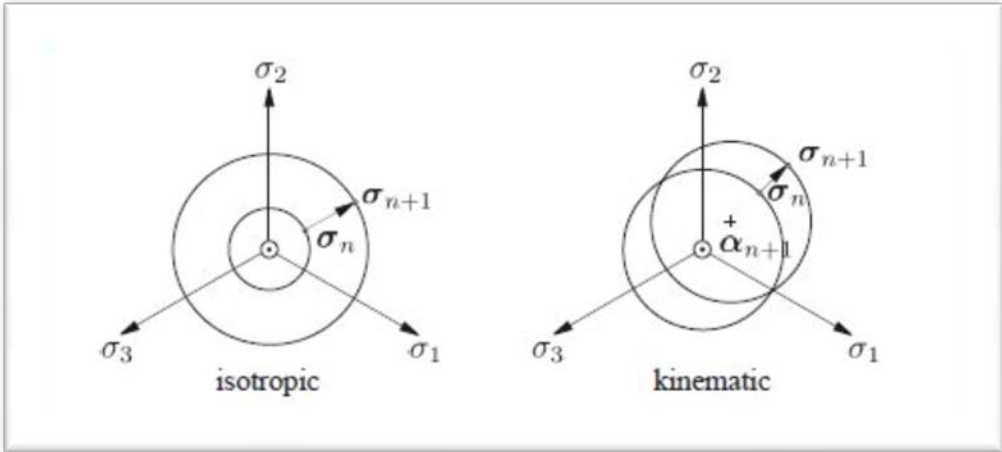
Όπου H είναι το γενικευμένο πλαστικό μέτρο κατά Young. Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι το H δεν ταυτίζεται με το πλαστικό μέτρο \dot{H} που είχαμε δείξει στο μονοδιάστατο πρόβλημα αν και αυτά τα 2 συνδέονται με την σχέση που προκύπτει ως εξής. Για τον αποκλίνοντα τανυστή σε μια μονοαξονική φόρτιση έχω $s = \sqrt{2/3} * \sigma$ άρα $\dot{\kappa} = \sqrt{2/3} * \dot{\sigma}_Y$, $\dot{\lambda} = e(\dot{p}) = \sqrt{3/2} * \dot{\varepsilon}(\dot{p})$ όπου τα αριστερά μέλη αναφέρονται στα αποκλίνοντα στοιχεία τάσης και παραμόρφωσης και τα δεξιά στο αντίστοιχο μονοαξονικό. Άρα αν λάβω υπόψιν μου τον νόμο κράτυνσης ως προς τα αποκλίνοντα στοιχεία και την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\sigma}_Y = H \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}^P \implies H = \frac{2}{3} H'$$

Και για σταθερό \dot{H} τότε η συνάρτηση $\kappa(\lambda)$ είναι με κ_0 το αρχικό κ

$$\kappa = \frac{2}{3}H'\lambda + \kappa_0,$$

Τώρα θα γράψουμε τις σχέσεις για συνδυασμένη ιστροπική και κινηματική κράτυνση που περιγράφηκαν πρώτες από τον Bauschinger ο οποίος παρατήρησε το φαινόμενο ότι όταν ένα δοκίμιο έφτανε στην πρώτη διαρροή (πχ εφελκυστική) τότε αυτή η διαρροή σαν όριο μεγάλωνε όταν επαναφόρτιζε κανείς και μίκραινε το άλλο όριο (πχ θλιπτική διαρροή). Επίσης η καμπύλη η πειραματική στην ανακυκλιζόμενη φόρτιση «έγερνε» σε κάθε νέο κύκλο. Το συνολικό φαινόμενο πήρε το όνομά του προς τιμήν του (Bauschinger effect).



Σχήμα 13 Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου ακτινικής επιστροφής για ιστροπική και κινηματική κράτυνση

Θεωρούμε τις τάσεις προηγούμενου βήματος α με $\text{tr}(\alpha)=0$ και έστω $\xi=s-\alpha$ όπου $\text{tr}(\xi)=\text{tr}(s)-\text{tr}(\alpha)=0$ τότε το κριτήριο διαρροής γίνεται για συνδυασμένη κράτυνση είναι

$$f(\sigma, \alpha, \kappa) = \|\xi\| - \kappa \leq 0, \quad \xi = s - \alpha.$$

Και ο νόμος ροής Prandtl-Reuss-Hill

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \hat{n}, \quad \hat{n} = \xi / \|\xi\|,$$

Ενώ οι συνθήκες συνεκτικότητας

$$\dot{f}(\sigma, \alpha, \kappa) = \hat{n} : (\dot{s} - \dot{\alpha}) - \dot{\kappa} = 0.$$

Έστω τώρα οι σχέσεις που διέπουν τη συνδυασμένη κράτυνση

$$\dot{\kappa} = \beta H \dot{\lambda}, \quad \dot{\alpha} = (1 - \beta) H \dot{\epsilon}^p.$$

Η 2^η σχέση λέγεται στη βιβλιογραφία ως μετασχηματισμός του Prager (1955). Από τον νόμο ροής και επειδή $\hat{n} : s = \hat{n} : \sigma$ αφού το \hat{n} είναι αποκλίνον διάνυσμα έχω από την συνθήκη συνεκτικότητας

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - H \dot{\lambda} = 0,$$

Και άρα το $\dot{\lambda}$ και το $\dot{\epsilon}^p$ είναι

$$\dot{\lambda} = \frac{\hat{n} : \dot{\epsilon}}{1 + H/2\mu}.$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\hat{n} \otimes \hat{n}}{1 + H/2\mu} : \dot{\epsilon}.$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης δεν επηρεάζεται από το β κάτι που συμβαδίζει με τα αποτελέσματα με το μονοδιάστατο πρόβλημα που δεν επηρεάζεται ο ρυθμός μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης

από τον τρόπο κράτυνσης. Κατά συνέπεια οι αρχικές εξισώσεις γίνονται.

$$\dot{\kappa} = \frac{\beta H}{1 + H/2\mu} \hat{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \dot{\alpha} = \frac{(1 - \beta)H}{1 + H/2\mu} (\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

Ενώ οι καταστατικές εξισώσεις τελικά δίνουν με αντικατάσταση των 2 τελευταίων εξισώσεων το \mathbf{c}^{ep} ως

$$\mathbf{c}^{\text{ep}} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}}{1 + H/2\mu} \right).$$

Όπου και το \mathbf{c}^{ep} είναι ανεξάρτητο του β που σημαίνει ότι η εφαπτομενική δυσκαμψία δεν εξαρτάται από το είδος της κράτυνσης.

Στη συνέχεια θα δείξουμε τον αλγόριθμο της συνδυασμένης κράτυνσης που προκύπτει από αυτές τις εξισώσεις που προτάθηκε από τους Krieg-Key (1976)

Ως γνωστόν

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} - 2\mu \Delta \lambda \boldsymbol{\xi}_{n+1} / \kappa_{n+1}.$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}(\text{tr})$$

Και από το αποκλίνον κομμάτι λαμβάνουμε

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tr}} - 2\mu \Delta \lambda \boldsymbol{\xi}_{n+1} / \kappa_{n+1}.$$

Και διακριτοποιώντας τις σχέσεις κράτυνσης με το α έχω

$$\begin{aligned}\kappa_{n+1} &= \kappa_n + \beta H \Delta \lambda \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + (1 - \beta) H \Delta \lambda \xi_{n+1} / \kappa_{n+1}.\end{aligned}$$

Άρα η διακριτή σχέση του ξ από τις 2 τελευταίες σχέσεις

$$\xi_{n+1} = s_{n+1} - \alpha_{n+1} = \xi_{n+1}^{\text{tr}} - \left[1 + (1 - \beta) \frac{H}{2\mu} \right] \frac{2\mu \Delta \lambda}{\kappa_{n+1}} \xi_{n+1},$$

Όπου $\xi_{n+1}(\text{tr}) = s_{n+1}(\text{tr}) + \alpha_n$

Αυτό σημαίνει πολύ απλά ότι τα διανύσματα $\xi_{n+1}(\text{tr})$ και ξ_{n+1} είναι συγγραμικά άρα μπορώ να πάρω τη νόρμα της τελευταίας εξίσωσης και έχω

$$\|\xi_{n+1}\| = \|\xi_{n+1}^{\text{tr}}\| - 2\mu \Delta \lambda \left[1 + (1 - \beta) \frac{H}{2\mu} \right].$$

Άρα προκύπτει το $\Delta \lambda$ ως συνδυασμός της διακριτής σχέσης για το κ και την τελευταία εξίσωση ήτοι

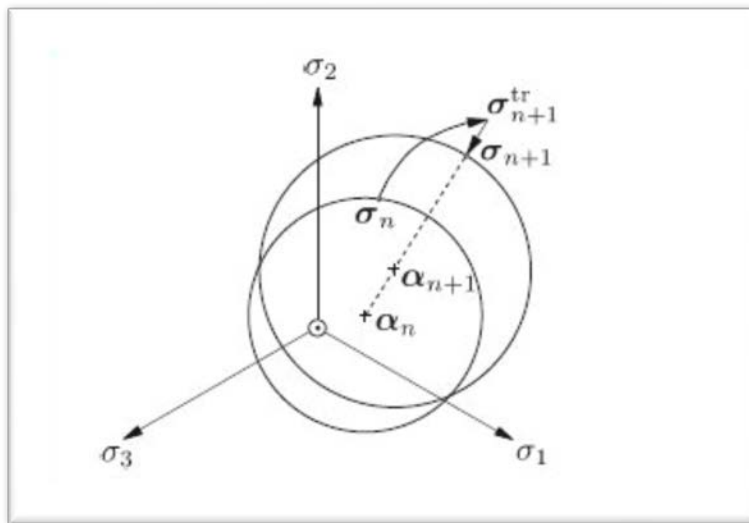
$$\Delta \lambda = \frac{\|\xi_{n+1}^{\text{tr}}\| - \kappa_n}{2\mu + H}.$$

Κατά συνέπεια ο αλγόριθμος που προκύπτει για την συνδυασμένη κράτυνση είναι ο εξής

1 Υπολογισμός δοκιμαστικής τάσης $\sigma_{n+1}^{\text{tr}} = \sigma_n + C_e \cdot \Delta \varepsilon$ $p = 1/3 * \text{tr}(\sigma_{n+1}^{\text{tr}})$ $s_{n+1}^{\text{tr}} = \sigma_{n+1}^{\text{tr}} - p * 1$ $\xi_{n+1}^{\text{tr}} = s_{n+1}^{\text{tr}} - \alpha_n$
2 Ερώτημα $\ \xi_{n+1}(\text{tr})\ > \kappa_n$
3 Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow Θέσε $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tr}}$ και έξοδος
3 Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Θέσε $\hat{n}(n+1) = \xi_{n+1}^{\text{tr}} / \ \xi_{n+1}(\text{tr})\ $
$\Delta \lambda = (\ \xi_{n+1}(\text{tr})\ - \kappa_n) / (2 * \mu + H)$
$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tr}} - 2 * \mu * \Delta \lambda * \hat{n}(n+1)$ $s_{n+1} = \sigma_{n+1} - p * 1$ $\xi_{n+1} = s_{n+1} - \alpha_{n+1}$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \beta \cdot H \cdot \Delta \lambda$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (1 - \beta) \cdot H \cdot \Delta \lambda \cdot \hat{n}(n + 1) \text{ και έξοδος}$$



Σχήμα 14 Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου ακτινικής επιστροφής για συνδυασμό ισοτροπικής και κινηματικής κράτνυσης

Κεφ 2.7 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Αλγόριθμος υπολογισμού εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την αλγοριθμική διαδικασία εύρεσης του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας το οποίο θα συνδεθεί μέσω του ελαστοπλαστικού μητρώου στιβαρότητας που υπολογίστηκε πριν και είναι άμεσα υπολογίσιμο.

Έστω η εξίσωση που περιγράφει την διαφορά μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού έργου

$$G(\eta, u) = \int_B \nabla^s \eta : \sigma \, dV - \int_B \eta \cdot \rho g \, dV - \int_{\partial B_t} \eta \cdot t \, dA = 0,$$

Ο πρώτος όρος αναφέρεται στο εσωτερικό έργο ο δεύτερος στο έργο των μαζικών δυνάμεων και ο τρίτος στο έργο των

επιφανειακών δυνάμεων που ασκείται στο σώμα. Αυτή η εξίσωση σε συνεχές σύστημα λόγω ισορροπίας είναι 0. Όμως εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την κλασική θεωρία πεπερασμένων στοιχείων οπότε διακριτοποιούμε τη σχέση συνεπώς

$$G(\eta, \mathbf{u}_{n+1}) = \int_B \nabla^s \eta : \sigma_{n+1} dV - \int_B \eta \cdot \rho \mathbf{g} dV - \int_{\partial B_t} \eta \cdot \mathbf{t}_{n+1} dA = 0.$$

Αν θεωρήσουμε ότι έχει υπολογιστεί το σ_{n+1} με γνωστό το \mathbf{u}_{n+1} θεωρούμε την επαυξητική παραμόρφωση ως

$$\Delta \epsilon = \nabla^s (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n).$$

Γραμμικοποιούμε την διακριτή εξίσωση και το τμήμα των εσωτερικών έργων μετασχηματίζεται και ορίζεται ο εφαπτομενικός τανυστής 4^{ης} τάξης ως

$$c_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}}.$$

Τονίζουμε ότι η διαφορά μεταξύ του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας και του ελαστοπλαστικού μητρώου στιβαρότητας είναι ότι το δεύτερο δεν χρησιμοποιεί μονάχα την έννοια της εφαπτομένης του διαγράμματος τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων αλλά και την ίδια την δυσκολία της πορείας του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης όπως και την μη γραμμική πορεία της συμπεριφοράς και όχι την τμηματικά γραμμική που δηλώνεται μέσω της εφαπτομένης.

Έστω ότι έχω την συνδυασμένη ισοτροπική και κινηματική κράτυνση που παρουσιάστηκε προηγουμένως. Τότε η τάση στο βήμα $n+1$

$$\sigma = \sigma^{\text{tr}} - 2\mu\Delta\lambda\hat{n},$$

$$\hat{n} = \xi/\kappa = \xi^{\text{tr}} / \|\xi^{\text{tr}}\|$$

Και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας τότε θα έχουμε

$$c_{n+1} = \frac{\partial \sigma^{\text{tr}}}{\partial \epsilon} - 2\mu\Delta\lambda \frac{\partial \hat{n}}{\partial \epsilon} - 2\mu\hat{n} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \epsilon}.$$

Ο πρώτος όρος είναι

$$\frac{\partial \sigma^{\text{tr}}}{\partial \epsilon} = c^e.$$

Τώρα η εφαπτομενική υδροστατική και αποκλίνουσα συνιστώσα $\xi=s$ -α συνιστώσα αποδεικνύεται ότι είναι

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \text{tr}(\sigma^{\text{tr}})}{\partial \epsilon} = K \frac{\partial \text{tr}(\epsilon)}{\partial \epsilon} = K\mathbf{1}.$$

$$\frac{\partial \xi^{\text{tr}}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial s^{\text{tr}}}{\partial \epsilon} = c^e - K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right).$$

Κάνοντας διαφορίση του ορισμού του \hat{n} δεδομένου ότι

$$\hat{n}:c^e = 2*\mu*\hat{n} \text{ και } \hat{n}:\mathbf{1} = 0 \text{ έχω}$$

$$\frac{\partial \|\xi^{\text{tr}}\|}{\partial \epsilon} = \hat{n} : \frac{\partial \xi^{\text{tr}}}{\partial \epsilon} = \hat{n} : (c^e - K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = 2\mu\hat{n},$$

Άρα

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial \epsilon} = \frac{2\mu}{\|\xi^{tr}\|} \left(I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{n} \otimes \hat{n} \right)$$

Και βέβαια από την διαφορίση της σχέσης που διέπει το $\Delta\lambda$ και γνωρίζοντας την εφαπτομενική σχέση για το $\|\xi^{tr}\|$ έχω

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \epsilon} = \frac{\hat{n}}{1 + H/2\mu}.$$

Και αντικαθιστώντας στην σχέση για το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας έχω

$$c_{n+1} = c^{ep} - 2\mu\gamma \left(I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{n} \otimes \hat{n} \right),$$

Με $\gamma = 2 * \mu * \Delta\lambda / \|\xi^{tr}\|$ και ο ελαστοπλαστικός τανυστής που φαίνεται στην σχέση είναι αυτός που αναφέρεται στην συνδυασμένη ισοτροπική και κινηματική κράτνυση. Οι πρόσθετοι όροι που είναι συνάρτηση του $2 * \mu * \gamma$ είναι λόγω της αλγοριθμικής διαδικασίας και αν ο αλγόριθμος ήταν πλήρως ακριβής τότε ο εφαπτομενικός τανυστής ταυτίζεται με τον ελαστοπλαστικό τανυστή και είναι προφανές μιας και το όριο της τελευταίας εξίσωσης όταν $\Delta\lambda \rightarrow 0$ είναι $c_{n+1} = c^{ep}$. Η «απόσταση» μεταξύ των 2 τανυστών επηρεάζει άμεσα την ακρίβεια και αυτό θα φανεί στη μέθοδο Newton-Raphson και θα αναλυθεί αργότερα.

Κεφ 2.8 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Διασπορά πλαστικού έργου

Από την καθαρά ενεργειακή σκοπιά θα εξάγουμε συμπεράσματα για το ίδιο πρόβλημα ώστε να δούμε το

πλαστικό έργο και πώς αυτό κατανέμεται. Έστω η συνάρτηση έργου ψ που ορίζεται ως

$$\psi(\epsilon^e, \xi) = \psi^e(\epsilon^e) + \psi^p(\xi),$$

Όπου εδώ το ξ έχει διαστάσεις παραμόρφωσης και εκφράζει ποιοτικά την μεταβολή της παραμόρφωσης με έναν διαφορετικό τρόπο. Η συνάρτηση πλαστικής διασποράς του έργου είναι από την θερμοδυναμική ως

$$D := \sigma : \dot{\epsilon} - \frac{d\psi}{dt} \geq 0.$$

Και χωρίζοντας την παραμόρφωση σε ελαστικό και πλαστικό κομμάτι έχω

$$D = \left(\sigma - \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon^e} \right) : \dot{\epsilon}^e + \sigma : \dot{\epsilon}^p - \frac{\partial \psi^p}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} \geq 0.$$

Η ανισότητα πρέπει να ισχύγει για κάθε ελαστικό κομμάτι πλαστικό κομμάτι παραμόρφωσης και ξ σε όρους ρυθμών μεταβολής άρα

$$\sigma = \frac{\partial \psi^{el}}{\partial \epsilon^{(el)}} \text{ (υπερελαστική καταστατική εξίσωση)}$$

Και η ανισότητα γίνεται

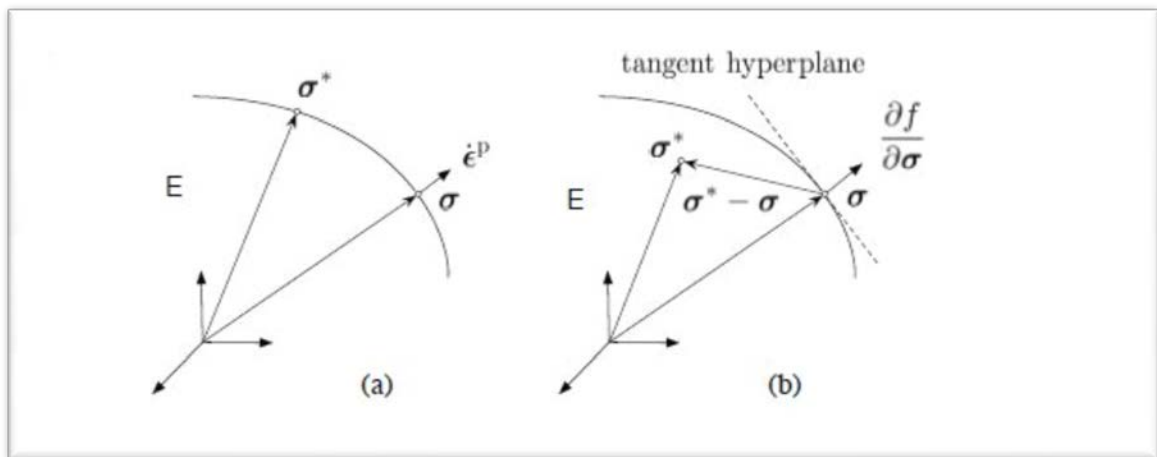
$$D^p = \sigma : \dot{\epsilon}^p + q \cdot \dot{\xi} \geq 0, \quad q = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \xi},$$

Όπου το q είναι σε όρους τάσεων και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ως προς το ξ του πλαστικού έργου. Για την Von Mises πλαστικότητα το q ισούται με την ακτίνα του κυλίνδρου

κ. Με βάση το θεμελιώδες θεώρημα της πλαστικής διασποράς που λέει ότι οι πραγματικές τάσεις και παραμορφώσεις του σώματος σε πλαστικότητα είναι εκείνες για τις οποίες η συνάρτηση πλαστικής διασποράς παίρνει τη μέγιστη τιμή από τις δοκιμαστικές τάσεις και παραμορφώσεις. Άρα για σ^* και q^* που $f(\sigma^*, q^*)=0$ έχουμε

$$\mathcal{D}_{\max}^P = \sigma : \dot{\epsilon}^P + q \cdot \dot{\xi} \geq \sigma^* : \dot{\epsilon}^P + q^* \cdot \dot{\xi}, \quad \forall (\sigma^*, q^*) \in \partial E.$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η περίπτωση της πλήρους πλαστικότητας



Σχήμα 15 α Δοκιμαστική σ^* και τελική πραγματική σ τάση β Εναλλακτική γεωμετρική ερμηνεία της κυρτότητας της επιφάνειας διαρροής

Άρα εμείς αν το δούμε αυτό σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $-\mathcal{D}_{\max}$ υπό τις συνθήκες ισότητας του κριτηρίου διαρροής τότε αυτό είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης που λύνεται είτε με τις συνθήκες Karush Kuhn Tucker ή μέσω της Χαμιλτονιανής συνάρτησης

$$\mathcal{H} = -\sigma^* : \dot{\epsilon}^P - q^* \cdot \dot{\xi} + \lambda f(\sigma^*, q^*),$$

Όπου η αρχή της στασίμου τιμής δίνει το 3X3 σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma^*} &= -\dot{\epsilon}^p + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma^*} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^*} &= -\dot{\xi} + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q^*} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\lambda}} &= f(\sigma^*, q^*) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Με λύση

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma^*} \Big|_{(\sigma, q)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad \dot{\xi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q^*} \Big|_{(\sigma, q)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Η πρώτη εξίσωση λέγεται κλασικός νόμος ροής ερπυσμού (associative flow rule) ενώ η δεύτερη κλασικός νόμος κράτυνσης (associative hardening law)

Για την περίπτωση που έχουμε σημείο που κινείται εντός της ελαστικής περιοχής δηλαδή $f(\sigma^*, q^*) < 0$ τότε το νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης λύνεται με την νέα Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H} = -\sigma^* : \dot{\epsilon}^p - q^* : \dot{\xi} + \dot{\lambda}(f(\sigma^*, q^*) + C),$$

Όπου C είναι η σταθερά για την οποία $f(\sigma^*, q^*) + C = 0$

Η λύση του συστήματος είναι παρόμοια με πριν και κατά συνέπεια αποδεικνύεται ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει για $\dot{\lambda} \geq 0$

$$\dot{\lambda} * f = 0$$

Που είναι οι συνθήκες συμπληρωματικότητας Karush Kuhn Tucker. Αφού στο σημείο (σ, q) έχουμε μεγιστοποίηση της Dp_{max}

$$(\sigma^* - \sigma) : \dot{\epsilon}^p + (q^* - q) \cdot \dot{\xi} \leq 0.$$

Και αν αντικαταστήσουμε τον κλασικό νόμο ροής ερπυσμού και κλασικό νόμο κράτυνσης στην τελευταία εξίσωση παίρνω

$$(\sigma^* - \sigma) : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (q^* - q) \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \leq 0.$$

Που μαθηματικά ισχύει για κάθε κυρτή συνάρτηση f . Αν μπορεί να ισχύει η ισότητα η f έχει σημεία που παραμένει σταθερή. Αλλιώς είναι αυστηρά κυρτή συνάρτηση.

Κεφ 2.9 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήριο Von Mises- Άλλες περιπτώσεις νόμου ροής.

Για να κλείσουμε το κεφάλαιο της πλαστικότητας Von Mises θα εξετάσουμε και την περίπτωση που ο νόμος ροής ερπυσμού των Prandtl Reuss-Hill δεν ισχύει και το διάνυσμα της πλαστικής παραμόρφωσης δεν είναι κάθετο στο διάνυσμα της κλίσης (ανάδελτα) της επιφάνειας διαρροής. Έστω λοιπόν g μια συνάρτηση πλαστικού δυναμικού που δεν ταυτίζεται με την συνάρτηση διαρροής f . Τότε ο νόμος ροής ερπυσμού (non associative flow rule) είναι

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma}.$$

Και ορίζουμε το πλαστικό μέτρο ελαστικότητας τέτοιο ώστε

$$H = -\frac{\partial f}{\partial q} \cdot (\dot{q}/\dot{\lambda}),$$

Και το θέτω στην συνθήκη συνεκτικότητας και θεωρώ την καταστατική σχέση άρα

$$\dot{f}(\sigma, \kappa) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - H\dot{\lambda} = 0.$$

$$\dot{\sigma} = c^e : \left(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right).$$

Η καταστατική σχέση τέθηκε στη συνθήκη συνεκτικότητας και τότε

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial f}{\partial \sigma} : c^e : \dot{\epsilon}, \quad \chi = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : c^e : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + H.$$

Και κάνοντας την ανάποδη διαδικασία τότε

$$\dot{\sigma} = c^{ep} : \dot{\epsilon}, \quad c^{ep} = c^e - \frac{1}{\chi} c^e : \frac{\partial g}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : c^e.$$

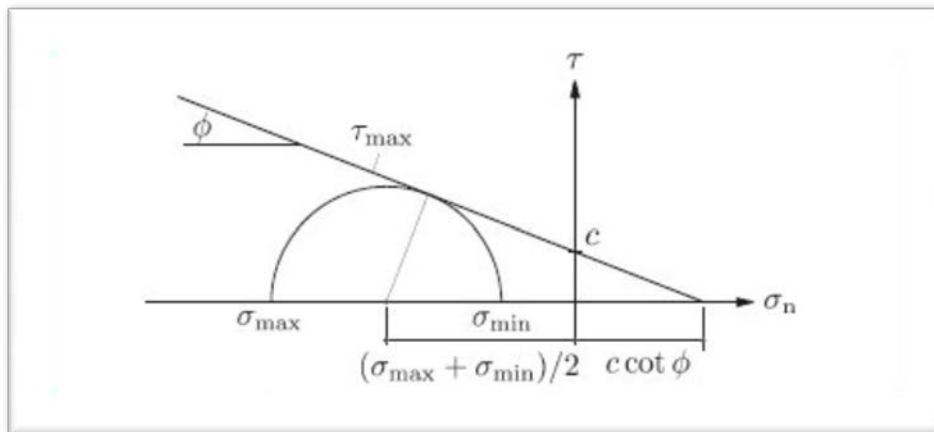
Κάτι που σημαίνει ότι βρήκαμε τον νέο ελαστοπλαστικό τανυστή 4^{ης} τάξης. Ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτό είναι ότι αν η f δεν ταυτίζεται με το g τότε η συμμετρία στο c^{ep} χάνεται. Κάτι που εν γένει ισχύει καθώς όταν η θεωρία Prandtl Reuss-Hill ισχύει πειραματικά τα υλικά είναι ευσταθή και η μαθηματική συμμετρία αποδεικνύεται πειραματικά. Αν δεν ισχύει αυτή η θεωρία πειραματικά τότε και μαθηματικά και πειραματικά η συμμετρία χάνεται (ιδιαίτερα έντονα φαίνεται πειραματικά). Συμπερασματικά το κριτήριο Von Mises με τη θεωρία Prandtl Reuss-Hill ισχύει στα μέταλλα πάρα πολύ καλά και πειραματικά και υπολογιστικά.

Κεφ 2.10 Μη γραμμικότητα υλικού-Πρόβλημα σε 3 διαστάσεις- Κριτήρια Mohr-Coulomb και Drucker-Prager

Ο Coulomb (1773) και ο Mohr (1900) μετά από πειράματα πολλά σε διάφορα υλικά διατύπωσαν ένα κριτήριο που αφορά σε όλα τα υλικά αλλά ιδιαίτερα σε αμμώδη υλικά και το μπετόν έχει ακόμα πιο ευρεία πιστότητα εν σχέσει με τα μέταλλα. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο για τις μέγιστες ορθές και διατμητικές τάσεις επί ενός επιπέδου ισχύει

$$\tau = \sigma \cdot \tan \theta + c$$

όπου θ η γωνία εσωτερικής τριβής και c η συνοχή του υλικού.



Σχήμα 16 Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου Mohr-Coulomb σε 2 διαστάσεις

Σε κύριες τάσεις ισχύει (προκύπτει και από το σχήμα)

$$-(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 2c \cos \phi - (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi,$$

Και άρα οι συναρτήσεις διαρροής (3 συνολικά) έχουν τη μορφή

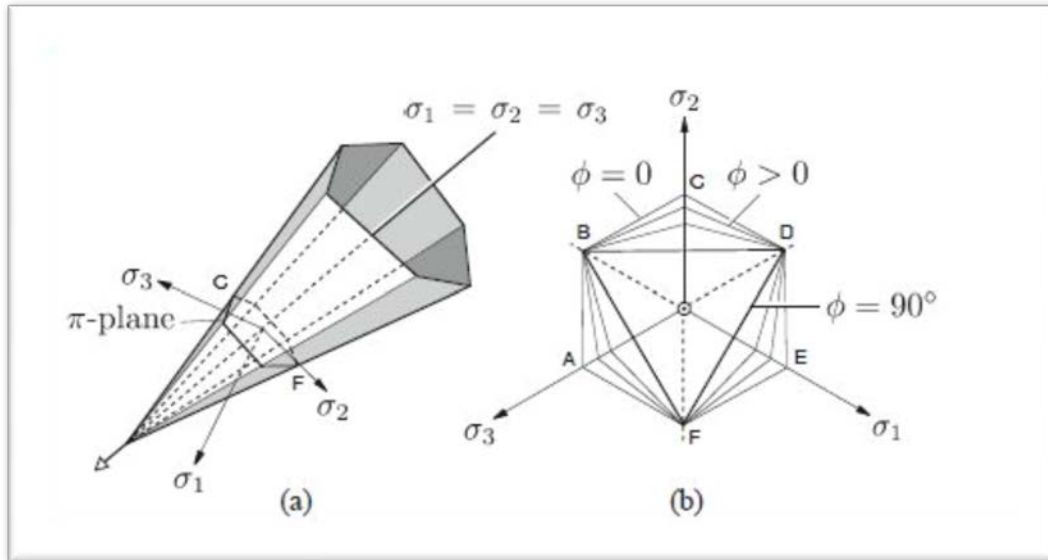
$$\hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) = |\sigma_A - \sigma_B| - \kappa \leq 0,$$

$$\kappa = 2c \cos \phi - (\sigma_A + \sigma_B) \sin \phi$$

Για $A, B = 1, 2, 3$ με A διάφορο του B

Αυτή η επιφάνεια διαρροής στο επίπεδο των κυρίων τάσεων που αναφερόμαστε είναι μια παραβολοειδής επιφάνεια (σε

πειραματικό επίπεδο η σχέση δεν είναι γραμμική) που εδώ όμως είναι τελικά μια πυραμίδα στο χώρο.



Σχήμα 17 Γεωμετρική ερμηνεία του κριτηρίου Mohr-Coulomb σε 3 διαστάσεις

Θα πρέπει να πάρουμε τώρα τις συνθήκες συνεκτικότητας και ανάλογα την κράτυνση να δημιουργήσουμε τους αντίστοιχους αλγορίθμους. Αν τεθεί όπου $\phi=0$ τότε το κριτήριο Mohr-Coulomb μεταχηματίζεται στο κριτήριο Tresca. Σε αυτό το κριτήριο είναι πιο εύκολο να γράφεται η εξίσωση διαρροής ως προς τις αναλλοίωτες του τανυστή. Για τη συνέχεια θέτουμε τις 3 αναλλοίωτες

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 * \sigma_2 + \sigma_2 * \sigma_3 + \sigma_3 * \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3$$

$$\bar{\theta} = \theta - \pi/6$$

Άρα έχουμε

$$\tilde{f} = (\bar{I}_1/3) \sin \phi + \sqrt{J_2} \cos \bar{\theta} - \sqrt{J_2/3} \sin \phi \sin \bar{\theta} - c \cos \phi \leq 0,$$

Επίσης στη βιβλιογραφία λόγω της πολύ κακής αριθμητικής του λειτουργίας το κριτήριο Mohr-Coulomb έχουν γίνει προσπάθειες να ομαλοποιηθεί από διάφορους ερευνητές. Το πιο κλασσικό και τελικά κατά την έρευνα αποδοτικό εναλλακτικό κριτήριο είναι αυτό των Drucker-Prager (1952) όπου η επιφάνεια διαρροής είναι

$$\tilde{f} = -\bar{I}_1 - (\beta \bar{I}_2)^{1/2} \leq 0.$$

Όπου για το β θα βρεθεί άμα θεωρήσουμε την συνάρτηση $f=0$ και βέβαια θέτοντας τις τάσεις στο αποκλίνον επίπεδο (2 φορές τονισμένες οι τάσεις) τότε

$$\beta = \frac{3}{1 - \eta^2/2}, \quad \eta = \frac{\sigma_2''}{\sigma_3''}, \quad \sigma_3'' \neq 0.$$

Αν του θέσουμε όμως να περνάει σαν επιφάνεια από επιλεγμένα σημεία του κριτηρίου Mohr-Coulomb

$$\beta = \frac{(3 \pm \sin \phi)^2}{3 \pm 2 \sin \phi - \sin^2 \phi},$$

Όπου το θετικό πρόσημο αναφέρεται στο να περνάει από τα σημεία του εφελκυσμού για το κριτήριο Mohr-Coulomb.

Άλλη προσπάθεια έγινε από τους Lade-Duncan (1975) όπου η επιφάνεια διαρροής είναι

$$\tilde{f} = -\bar{I}_1 + (\beta \bar{I}_3)^{1/3} \leq 0.$$

Όπου για το β θα βρεθεί άμα θεωρήσουμε την συνάρτηση $f=0$ και βέβαια θέτοντας τις τάσεις στο αποκλίνον επίπεδο (2 φορές τονισμένες οι τάσεις) τότε

$$\beta = \frac{27}{1 - \eta^2(3 - \sqrt{2}\eta)/2}, \quad \eta = \frac{\sigma_2''}{\sigma_3''}, \quad \sigma_3'' \neq 0.$$

Αν του θέσουμε όμως να περνάει σαν επιφάνεια από επιλεγμένα σημεία του κριτηρίου Mohr-Coulomb

$$\beta = \frac{(3 \pm \sin \phi)^3}{1 \pm \sin \phi - \sin^2 \phi \mp \sin^3 \phi},$$

Όπου το θετικό άνω πρόσημο σημαίνει ότι θα περάσει από τα εφελκυστικά σημεία τομής του κριτηρίου με τις κύριες τάσεις

Τέλος μια ακόμα προσπάθεια για εξομάλυνση έχει γίνει από τους Matsuoka-Nakai (1974) όπου η επιφάνεια διαρροής είναι

$$\tilde{f} = -(\bar{I}_1 \bar{I}_2)^{1/3} + (\beta \bar{I}_3)^{1/3} \leq 0.$$

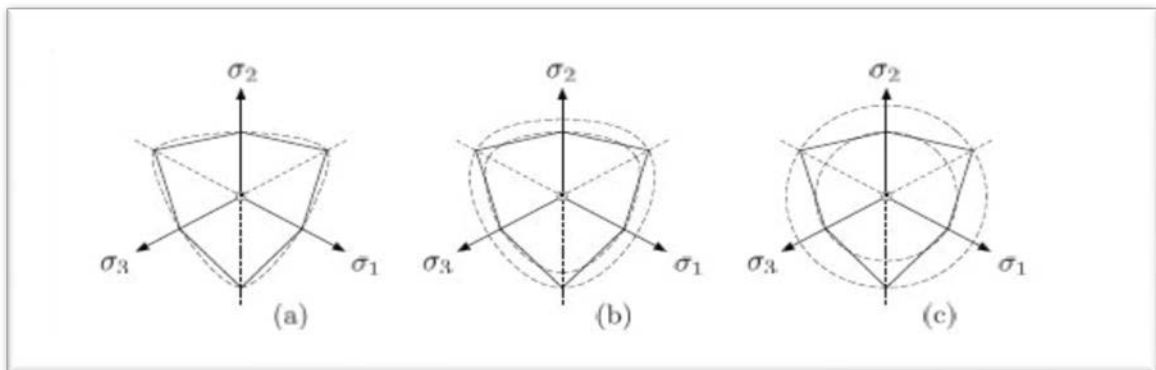
Όπου για το β θα βρεθεί άμα θεωρήσουμε την συνάρτηση $f=0$ και βέβαια θέτοντας τις τάσεις στο αποκλίνον επίπεδο (2 φορές τονισμένες οι τάσεις) τότε

$$\beta = \frac{18 - 9\eta^2}{\sqrt{2}\eta^3 - 3\eta^2 + 2} = \frac{9\sqrt{2} + 9\eta}{-\sqrt{2}\eta^2 + \eta + \sqrt{2}}.$$

Αν του θέσουμε όμως να περνάει σαν επιφάνεια από επιλεγμένα σημεία του κριτηρίου Mohr-Coulomb τότε η γενική έκφραση για το η και το β είναι

$$\eta = \frac{\sigma_2''}{\sigma_3''} = \begin{cases} -2\sqrt{2}\sin\phi/(3 + \sin\phi) & \text{for tension corner;} \\ 2\sqrt{2}\sin\phi/(3 - \sin\phi) & \text{for compression corner,} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{9 - \sin^2\phi}{1 - \sin^2\phi}.$$



Σχήμα 18 Γεωμετρικές ερμηνείες των α Matsuoka-Nakai β Lade-Duncan γ Drucker-Prager

Συνοψίζοντας θα πρέπει κανείς να επιλέξει κάποιο από τα 3 αυτά κριτήρια ή το αρχικό Mohr-Coulomb ώστε να προσομοιώσει καλύτερα τη συμπεριφορά των εδαφών. Η επιλογή έχει να λάβει υπόψη της όχι μόνο το υπολογιστικό κόστος και την ακρίβεια αλλά και τις ιδιότητες του κάθε εδάφους που ειδικά για τα αμμώδη εδάφη η έντονη μη γραμμικότητα και τα ερπυστικά φαινόμενα καθιστούνε την επιλογή του κριτηρίου ιδιαίτερα δύσκολη και επίπονη. Συνήθως προτιμάται το κριτήριο Mohr-Coulomb λόγω της μεγάλης υπολογιστικής ισχύος που υπάρχει σήμερα και λόγω ευρύτερης εφαρμογής λόγω απλότητας του κριτηρίου στην διαμόρφωση και πειραματικά.

Κεφ 3,1 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο δείχνουμε τη μη γραμμική εξίσωση και την επίλυση της για στατικά και δυναμικά προβλήματα. Αρχικά θα θεωρήσουμε το στατικό πρόβλημα και θα δείξουμε την μέθοδο επίλυσης με επαναλήψεις Newton-Raphson (Incremental-Iterative) για τις 3 πιο διαδεδομένες χρήσεις της μεθόδου ήτοι την επιλογή δυνάμεων (load control) την επιλογή μετακινήσεων (displacement control) την έρευνα γραμμής που συμπληρώνει τις 2 πρώτες μεθόδους (line search) και τη μέθοδο μήκους τόξου (arc length). Θα δειχθούνε και θα εξηγηθούνε οι μέθοδοι με παρουσίαση πλεονεκτημάτων μειονεκτημάτων. Τέλος θα παρουσιαστεί η επίλυση του δυναμικού προβλήματος μέσω των μεθόδων Newmark και Bathe και θα παρουσιαστούν και θέματα σύγκλισης και ακρίβειας των μεθόδων ώστε να κλείσει το παρόν κεφάλαιο. Για μη γραμμικές εξισώσεις υπάρχουν και άλλες μη δημοφιλείς μέθοδοι στη βιβλιογραφία όπως η μέθοδος της διχοτόμησης ή της Γενικής Επαναληπτικής Μεθόδου.

Κεφ 3,2 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Μέθοδος Newton Raphson επιλογής δυνάμεων για στατικά προβλήματα

Έστω η εξίσωση μη γραμμική

$$\mathbf{R}=\mathbf{K}(\mathbf{U})*\mathbf{U}$$

Αυτή η εξίσωση θα λυθεί με κάθε μια από τις 3 προαναφερθείσες μεθόδους.

Η λύση της με την μέθοδο της επιλογής δυνάμεων (load control) περιγράφεται ως εξής Έστω ότι γνωρίζουμε τις εσωτερικές

δυνάμεις και τις μετατοπίσεις στο βήμα n ($\mathbf{U}_n \mathbf{F}_n$) και ζητάμε τα αυτά μεγέθη στο βήμα $n+1$ ($\mathbf{U}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}$). Αυτή η διαδικασία λέγεται βήμα προς το επόμενο σημείο ισορροπίας. Θεωρούμε ότι οι υπολογισθείσες εσωτερικές δράσεις ταυτίζονται με τις εξωτερικές δράσεις κάτι που εξαρτάται όπως θα φανεί στην συνέχεια από τις επαναλήψεις και την ευστάθεια του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας. Θεωρούμε τις δυνάμεις \mathbf{P}_n οι οποίες καθορίζονται από τον χρήστη (load control). Θεωρούμε τις επαυξητικές μετατοπίσεις $\Delta \mathbf{U}_n$ οι οποίες τελικά θα προκύψουν μέσα από επαναλήψεις. Στο ακόλουθο σχήμα δείχνουμε τον αλγόριθμο σύγκλισης για την επανάληψη i . Ζητούμενο για σύγκλιση και άρα κριτήριο είναι οι εσωτερικές δράσεις να ισούνται με τις εξωτερικές στον φορέα.

1	Υπολογισμός $\Delta \mathbf{U}_{n(i)} = \mathbf{Kt}_n^{-1} (\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{F}_{n(i-1)})$ και $\Delta \mathbf{U}_n = \sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{U}_n(j)$ και $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_n$	και
2	Υπολογισμός Παραμορφώσεων Τάσεων και εσωτερικών δράσεων $\mathbf{F}_{n(i)}$ ανάλογα τη μη γραμμικότητα τον αλγόριθμο που προκύπτει από το κριτήριο διαρροής και την επιλεγόμενη κράτυνση	
3	Ερώτηση $\frac{\ \mathbf{F}_{n(i)} - \mathbf{P}_{n+1}\ }{\ \mathbf{P}_{n+1}\ } < \varepsilon$ όπου ε δεδομένη ανοχή	
4	Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow Υπολογίζω το $\mathbf{Kt}_n(i)$ και επιστροφή στο βήμα 1 θέτοντας $i \rightarrow i+1$	
5	Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Θέτω $\Delta \mathbf{U}_n \text{ final} = \sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{U}_n(j)$ $\mathbf{U}_{n+1} \text{ final} = \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_n \text{ final}$ $\mathbf{F}_{n(i)} = \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}$ και τέλος επαναλήψεων.	
	Όταν $i=1$ ισχύουν $\mathbf{Kt}_n(i) = \mathbf{Kt}_n = \mathbf{Kt}_{n-1}(k)$ όπου k ο αριθμός επαναλήψεων για σύγκλιση στο προηγούμενο βήμα $\mathbf{F}_{n(i-1)} = \mathbf{P}_n$	

Κεφ 3,3 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Μέθοδος Newton Raphson επιλογής μετακινήσεων για στατικά προβλήματα

Η λύση της αρχικής μη γραμμικής εξίσωσης με την μέθοδο της επιλογής μετακινήσεων (displacement control) περιγράφεται ως

εξής Έστω ότι γνωρίζουμε τις εσωτερικές δυνάμεις και τις μετατοπίσεις στο βήμα n ($\mathbf{U}_n \mathbf{F}_n$) και ζητάμε τα αυτά μεγέθη στο βήμα $n+1$ ($\mathbf{U}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}$). Αυτή η διαδικασία λέγεται βήμα προς το επόμενο σημείο ισορροπίας. Θεωρούμε ότι οι υπολογισθείσες εσωτερικές δράσεις ταυτίζονται με τις εξωτερικές δράσεις κάτι που εξαρτάται όπως θα φανεί στην συνέχεια από τις επαναλήψεις και την ευστάθεια του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας. Θεωρούμε τις δυνάμεις \mathbf{U}_n οι οποίες καθορίζονται από τον χρήστη (displacement control). Θεωρούμε τις επαυξητικές μετατοπίσεις $\Delta \mathbf{P}_n$ οι οποίες τελικά θα προκύψουν μέσα από επαναλήψεις. Στο ακόλουθο σχήμα δείχνουμε τον αλγόριθμο σύγκλισης για την επανάληψη i . Ζητούμενο για σύγκλιση και άρα κριτήριο είναι οι εσωτερικές δράσεις να ισούνται με τις εξωτερικές στον φορέα.

1	Υπολογισμός $\Delta \mathbf{P}_{n(i)} = \mathbf{K} \mathbf{t}_n(i-1) * (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n)$ και $\Delta \mathbf{P}_n = \sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{P}_n(j)$ και $\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n$
2	Υπολογισμός Παραμορφώσεων Τάσεων και εσωτερικών δράσεων \mathbf{F}_n ανάλογα τη μη γραμμικότητα τον αλγόριθμο που προκύπτει από το κριτήριο διαρροής και την επιλεγόμενη κράτυνση (μια φορά ανά βήμα σε νέο σημείο ισορροπίας)
3	Ερώτηση $\frac{\ \mathbf{F}_n - \mathbf{P}_{n+1}\ }{\ \mathbf{P}_{n+1}\ } < \varepsilon$ όπου ε δεδομένη ανοχή
4	Απάντηση ΟΧΙ \rightarrow Υπολογίζω το $\mathbf{K} \mathbf{t}_n(i)$ και επιστροφή στο βήμα 1 θέτοντας $i \rightarrow i+1$
5	Απάντηση ΝΑΙ \rightarrow Θέτω $\Delta \mathbf{P}_{n \text{ final}} = \sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{P}_n(j)$ $\mathbf{P}_{n+1 \text{ final}} = \mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_{n \text{ final}}$ $\mathbf{F}_{n(i)} = \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}$ και τέλος επαναλήψεων.
	Όταν $i=1$ ισχύουν $\mathbf{K} \mathbf{t}_n(i) = \mathbf{K} \mathbf{t}_n = \mathbf{K} \mathbf{t}_{n-1}(\mathbf{k})$ όπου k ο αριθμός επαναλήψεων για σύγκλιση στο προηγούμενο βήμα $\mathbf{F}_{n(i-1)} = \mathbf{P}_n$

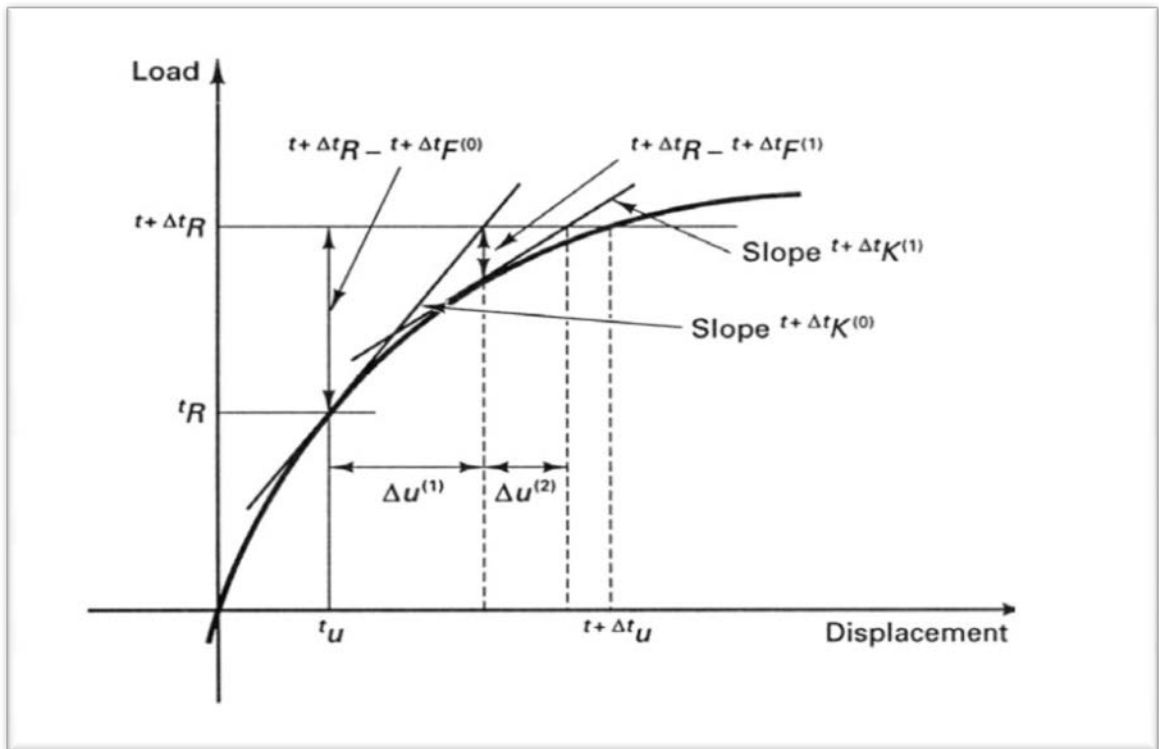
Να σημειωθεί εδώ ότι ο υπολογισμός του $\mathbf{K} \mathbf{t}_n(i)$ συνίσταται στον υπολογισμό του μητρώου ενδοσιμότητας στην δεδομένη επανάληψη και αντιστροφή του μητρώου. Άρα και εδώ τίθεται θέμα για το ποια από τις 2 μεθόδους δίνει το μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος επιλογής δυνάμεων έχει αριθμητική αστάθεια όταν το σύστημα φυσικά τείνει να γίνει μηχανισμός άρα το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας τείνει

να γίνει ιδιάζον (οριζόντια εφαπτομένη σε διάγραμμα P-U) ενώ για την μέθοδο επιλογής μετατοπίσεων αυτό τείνει να συμβεί όταν το εφαπτομενικό μητρώο ενδοσιμότητας τείνει να γίνει ιδιάζον (κατακόρυφη εφαπτομένη σε διάγραμμα P-U). Η δεύτερη περίπτωση τείνει να γίνει συχνά σε προβλήματα έντονης μη γραμμικότητας της γεωμετρίας όπως το τόξο Williams (φαινόμενο Snapthrough-Snapback). Αυτό αντιμετωπίζεται μέσω της μεθόδου μήκους τόξου που θα αναλυθεί στα επόμενα.

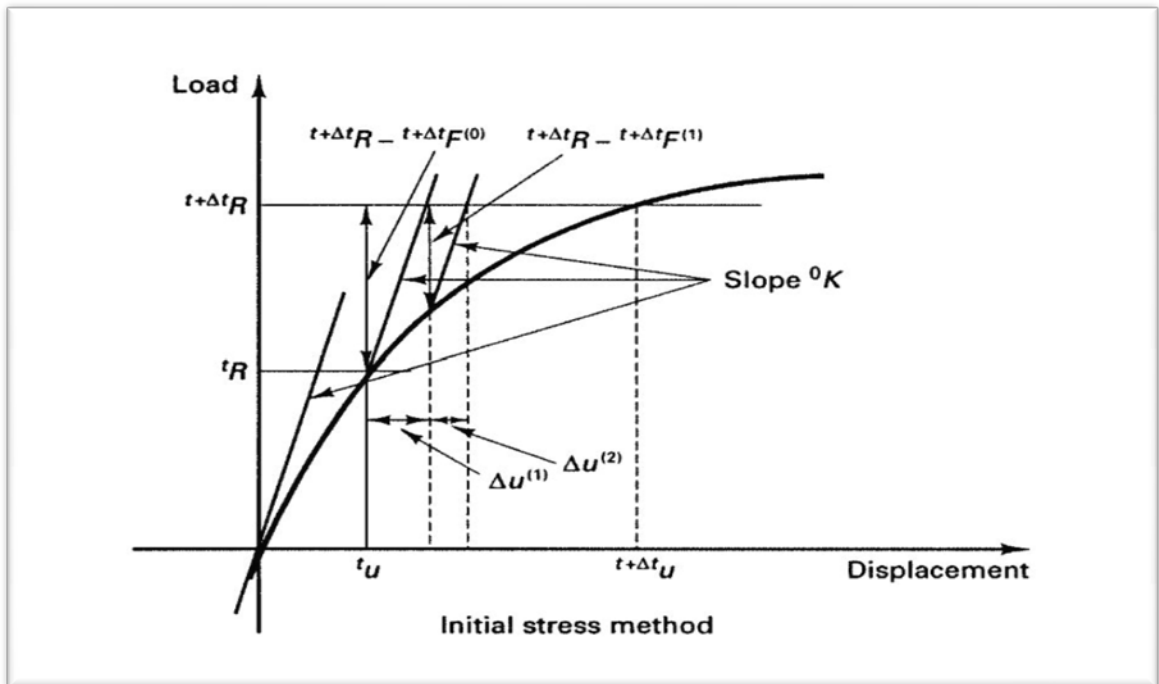
Κεφ 3,4 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Τροποποιημένη Μέθοδος Newton Raphson για στατικά προβλήματα

Στα προηγούμενα είδαμε την πλήρη μέθοδο επίλυσης Newton-Raphson ανεξάρτητα του αν επιλέγω μέθοδο επιλογής δυνάμεων ή μέθοδο επιλογής μετακινήσεων. Η τροποποιημένη μέθοδος επίλυσης Newton-Raphson συνίσταται στην διατήρηση του γραμμικού μητρώου στιβαρότητας για όλες τις επιλύσεις που βρίσκουν επαυξητικές μετατοπίσεις και η υπόλοιπη διαδικασία παραμένει η ίδια. Η πλήρης μέθοδος έχει μικρότερο αριθμό απαιτούμενων επαναλήψεων για σύγκλιση και αυξημένο υπολογιστικό κόστος που απορρέει από την εύρεση αλλά και την αντιστροφή του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας. Από την άλλη η τροποποιημένη μέθοδος έχει μεγαλύτερο αριθμό απαιτούμενων επαναλήψεων για σύγκλιση και μειωμένο υπολογιστικό κόστος που απορρέει από την εύρεση αλλά και την αντιστροφή του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας καθώς εδώ είναι ένα μόνο το προς αντιστροφή εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας. Παραλλαγή της τροποποιημένης μεθόδου που απαντάται στη βιβλιογραφία είναι να αλλάζει το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας μόλις τελειώνει η σύγκλιση των επαναλήψεων και να μένει ίδιο εντός του

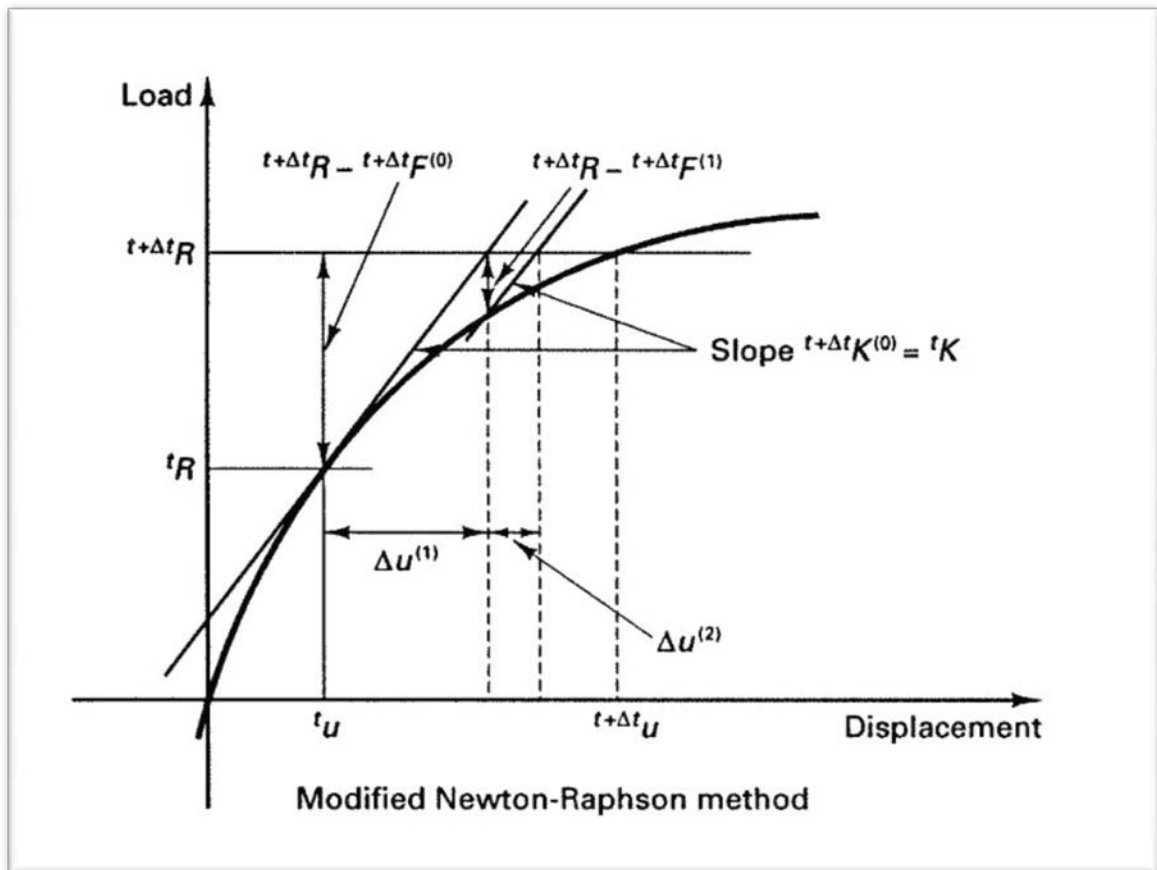
βήματος από το σημείο ισορροπίας n στο σημείο ισορροπίας $n+1$.



Σχήμα 19 Full Newton-Raphson Load Control με εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας σε κάθε επανάληψη



Σχήμα 20 Full Newton-Raphson Load Control με εφαπτομενικό μητρώο το αρχικό μητρώο στιβαρότητας



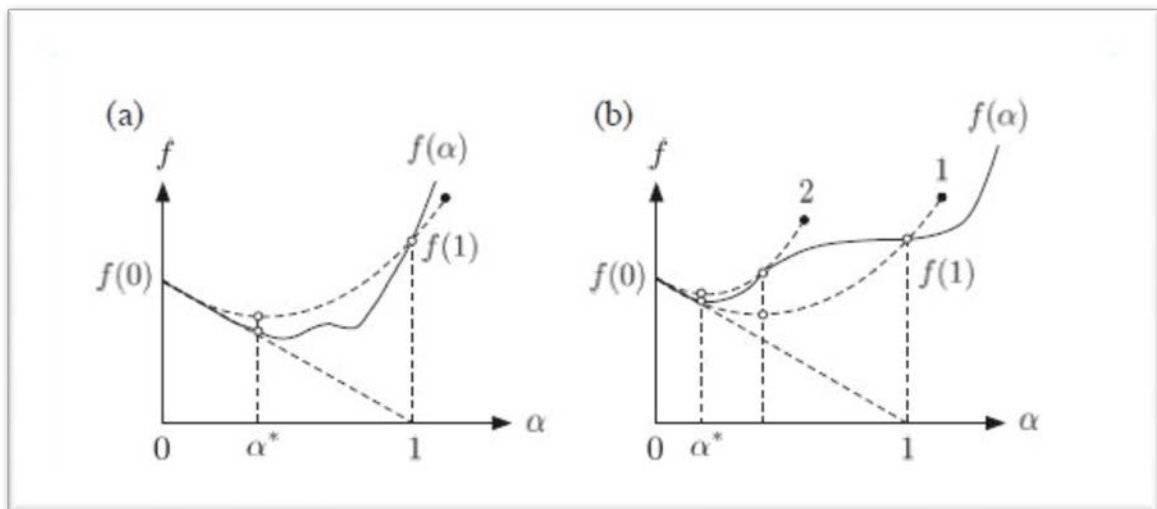
Σχήμα 21 Full Newton-Raphson Load Control με εφαπτομενικό μητρώο που είναι σταθερό εντός των επαναλήψεων και αλλάζει από σημείο ισορροπίας σε σημείο ισορροπίας

Κεφ 3,5 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος έρευνας γραμμής

Η μέθοδος έρευνας γραμμής είναι μια μέθοδος που συμπληρώνει τους προηγούμενους αλγορίθμους ώστε να επιτευχθεί γρηγορότερη και ακριβέστερη σύγκλιση. Η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση της σταθεράς α ώστε πολλαπλασιασμένη με τον κλασικά υπολογισμένο επαυξητικό μέγεθος (συνήθως μετακίνηση) να δίνει την ολική μετακίνηση ώστε να συγκλίνει η μέθοδος γρηγορότερα. Η μέθοδος της έρευνας γραμμής για να προσδιορίσει αυτό το α χρησιμοποιεί μια καμπύλη που λέγεται καμπύλη βελτιστοποίησης η οποία

προσπαθεί να προσεγγίσει την ζητούμενη καμπύλη μεταξύ 2 διαδοχικών σημείων ισορροπίας. Αν αυτό γίνει με δευτεροβάθμιο πολυώνυμο για καμπύλη βελτιστοποίησης τότε η μέθοδος έρευνας γραμμής συνοψίζεται στο ακόλουθο σχήμα

- | |
|--|
| 1 Θέτουμε $f_1 = \ r(d)\ $ $f_2 = \ r(d + \Delta d)\ $ $\alpha = 1$ όπου r το διάνυσμα των παραμενουσών δυνάμεων |
| 2 Αν $f_2 < f_1$ τέλος |
| 3 Αν $f_2 > f_1$ θέσε όπου $\alpha \rightarrow \alpha^2 * f_1 / (2 * (f_2 + (\alpha - 1) * f_1))$ |
| 4 Θέσε όπου $f_2 = \ r(d + \alpha * \Delta d)\ $ και τέλος |

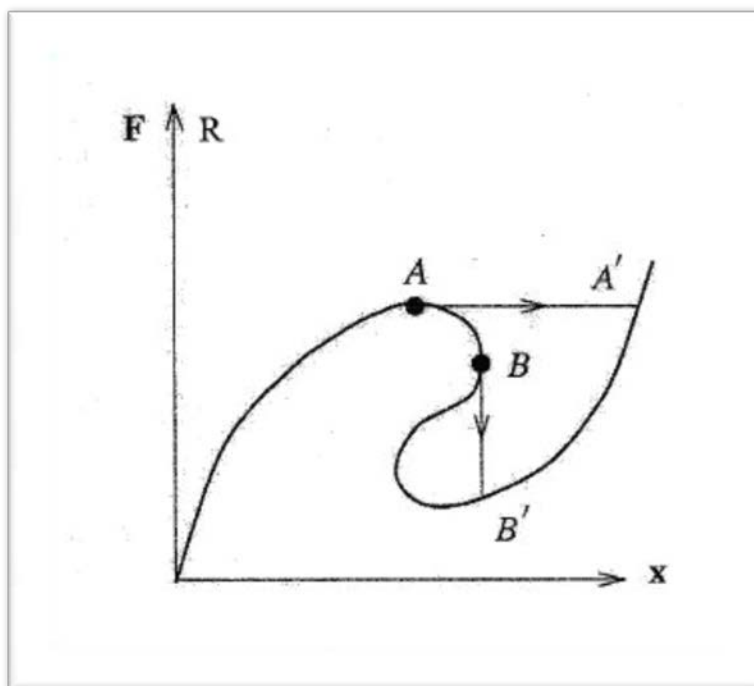


Σχήμα 22 Μέθοδος έρευνας γραμμής για δοκιμαστική καμπύλη βελτιστοποίησης με μια προσπάθεια (αριστερά) και με 2 προσπάθειες (δεξιά)

Κεφ 3,6 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος μήκους τόξου για στατικά προβλήματα

Τέλος παρουσιάζουμε την μέθοδο μήκους τόξου η οποία είναι πλήρως ευσταθής χωρίς αριθμητικές ανωμαλίες για κάθε είδους προβλήματα όπως οριζοντίωση εφαπτομένης ή κατακόρυφωση εφαπτομένης αλλά και οριακά σημεία στις 2 αυτές περιοχές. Η πρώτη περίπτωση αναφέρεται σε Snapthrough οριακό σημείο και η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται σε Snapback οριακό

σημείο. Η μέθοδος μήκους τόξου με απλά λόγια είναι μια συνθετική μέθοδος επιλογής φορτίου και επιλογής μετακίνησης κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ανήκουν εντός του κυκλικού τόξου μιας δεδομένης ακτίνας που εμείς επιλέγουμε ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε να πετύχουμε στο πρόβλημά μας ή υπολογίζουμε από την εξίσωση του κύκλου. Τέλος να πούμε ότι η σύγκλιση της μεθόδου είναι τετραγωνική άρα και ταχύτατη και συνεπώς η μέθοδος είναι πολύ προτιμητέα σε λυγισμικά φαινόμενα και εντόνως μη γραμμικά φαινόμενα.



Σχήμα 23 Σημεία *Snapthrough* (A) και *Snapback* (B)

Έστω λοιπόν η γενικευμένη εξίσωση

$$r(x, \lambda) = F(x) - \lambda \bar{R} = 0$$

Η σχέση δείχνει την ισότητα εσωτερικών εξωτερικών δράσεων για κάθε επαυξητικό βήμα. Αυτό εκφράζεται με την σταθερά λ επί ένα φορτίο εξωτερικών δυνάμεων που παραμένει σταθερό και λέγεται διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων βάσης. Άρα συνεπώς η αναλογική προσαυξητική φόρτιση και η αντίστοιχη

αύξηση της μετατόπισης που εκφράζεται από το διάνυσμα \mathbf{X} είναι

$$\Delta \mathbf{R} = \Delta \lambda \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \Delta \lambda = \lambda^{-i} \lambda$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{-i} \mathbf{x}$$

Η εξίσωση του κύκλου που χαράσσεται από το τελευταίο γνωστό σημείο ισοροπίας είναι

$$\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = s^2$$

Όπου $\psi=0$ ή $\psi=1$ γενικά από τον χρήστη αν και μπορεί κανείς να βάλει και άλλες τιμές και s η ακτίνα του κύκλου ή αλλιώς το μέγεθος του γενικευμένου διανύσματος

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \psi \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}$$

Η ακτίνα του κύκλου που επιλέγεται δεσμεύει την κίνηση της προσαυξητικής φόρτισης αλλά και τις αντίστοιχες μετακινήσεις που θα υπολογιστούν. Η μέθοδος λοιπόν ορίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_{k+1} = -\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \lambda_{k+1})$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \lambda_{k+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - (\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) + \gamma_k \bar{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1} \quad , \quad \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1}$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \gamma_k \quad , \quad \Delta \lambda_{k+1} = \Delta \lambda_k + \gamma_k$$

Με $\Delta \lambda_0 = \Delta \mathbf{x}_0 = 0$ Αν συνδυαστούνε οι 2 πρώτες εξισώσεις προκύπτει η σχέση των \mathbf{u}_{k+1} γ_k

$$\mathbf{u}'_{k+1} = -(\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_k))^{-1} (\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k))$$

$$\mathbf{u}''_k = (\mathbf{K}_T(\mathbf{x}_k))^{-1} \bar{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}'_{k+1} + \gamma_k \mathbf{u}''_{k+1}$$

Όμως τα \mathbf{u}_{k+1} γ_k πρέπει να ικανοποιούνε την εξίσωση του κύκλου στο επόμενο βήμα ήτοι

$$(\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1})^T (\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1}) + (\Delta \lambda_k + \gamma_k)^2 \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = s^2$$

Άρα αν αφαιρεθούν κατά μέλη οι 2 εξισώσεις του κύκλου προκύπτει δευτεροβάθμιο σύστημα ως προς το γ_k

$$\alpha_1 \gamma_k^2 + \alpha_2 \gamma_k + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = (\mathbf{u}'_{k+1})^T \mathbf{u}'_{k+1} + \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}$$

$$\alpha_2 = 2(\mathbf{u}''_k)^T (\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}'_{k+1}) + 2\Delta \lambda_k \psi^2 \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}$$

$$\alpha_3 = (\mathbf{u}''_{k+1})^T (2\Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}''_{k+1})$$

Αυτή η εξίσωση έχει πάντα 2 ρίζες διακριτές. Για να επιλεγεί το σωστό γ_k κάνουμε τα εξής.

Φτιάχνουμε τις γωνίες που κάνουν τα διανύσματα του προηγούμενου βήματος και του επομένου βήματος σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\cos \theta^{(j)} = \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_{k+1}^{(j)}}{s^2}$$

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \lambda_k \psi \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}, \mathbf{s}_{k+1}^{(j)} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_{k+1}^{(j)} \\ (\Delta \lambda_k + \gamma_k^{(j)}) \psi \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2$$

Και επιλέγουμε την ελάχιστη γωνία. Άρα αλγοριθμικά εντός του προσαυξητικού βήματος για εύρεση νέου σημείου ισορροπίας (σημείο n+1) κάνουμε τα εξής

1 Υπολογίζουμε $\mathbf{U}_{k+1} = (-1) * \mathbf{K}t^{-1}(\mathbf{X}_k) * (\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{X}_k) - \gamma_k * \mathbf{R})$ \mathbf{R} διάνυσμα βάσεως
2 Υπολογίζουμε $\mathbf{U}_{k+1}' = (-1) * \mathbf{K}t^{-1}(\mathbf{X}_k) * (\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{X}_k))$ $\mathbf{U}_{k+1}'' = \mathbf{K}t^{-1}(\mathbf{X}_k) * \mathbf{R}$
3 Λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha_1 * \gamma_k^2 + \alpha_2 * \gamma_k + \alpha_3 = 0$ Με $\alpha_1 = (\mathbf{U}_{k+1}')^T * (\mathbf{U}_{k+1}') + \psi^2 * \mathbf{R}^T * \mathbf{R}$ $\alpha_2 = 2(\mathbf{U}_{k+1}'')^T * (\Delta \mathbf{X}_k + \mathbf{U}_{k+1}') + 2\Delta \lambda_k * \psi^2 * \mathbf{R}^T * \mathbf{R}$

Κεφ 3,7 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος Newmark για δυναμικά προβλήματα

Τώρα θα δείξουμε την αριθμητική ολοκλήρωση στο δυναμικό πρόβλημα. Η εξίσωση έχει τη γενική μορφή.

$$[M] \cdot \{\ddot{U}(t + \Delta t)\} + [C] \cdot \{\dot{U}(t + \Delta t)\} + [K(\{U(t + \Delta t)\})] \cdot \{U(t + \Delta t)\} = \{P(t + \Delta t)\}$$

Και για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε αριθμητικά την εξίσωση επειδή το μητρώο στιβαρότητας κυρίως αλλάζει (αν θέλαμε να είμαστε εντελώς τυπικοί αλλάζει και το μητρώο απόσβεσης) πρέπει σε κάθε χρονικό βήμα να βρούμε το σημείο ισορροπίας. Σημείο ισορροπίας ορίζουμε αυτό για το οποίο οι ισοδύναμες εσωτερικές δράσεις εξισορροπούνται από τις εξωτερικές δράσεις. Συνεπώς εντός του χρονικού βήματος πραγματοποιείται μια επαναληπτική διαδικασία κατά Newton-Raphson ως ότου φτάσουμε στο σημείο ισορροπίας. Συνεπώς σε κάθε επανάληψη ισχύει για τη μέθοδο Newmark

Επανάληψη "l" Newton-Raphson εντός του βήματος φόρτισης "m"

$$[\hat{K}_{m-1}^{(l-1)}] \cdot \{\delta U_m^{(l)}\} = \{\hat{P}_m\} - \{F_m^{(l-1)}\}$$

Και μετά την σύγκλιση υπολογίζω τις μετακινήσεις στο επόμενο χρονικό βήμα μέσω της σχέσης

$$[\hat{K}(\{U(t + \Delta t)\})] \{U(t + \Delta t)\} = \{\hat{P}(t + \Delta t)\}$$

Εάν βάλουμε όπου $m=t+\Delta t$ και αναλύσουμε την δεύτερη εξίσωση έχουμε με δεδομένο ότι

$$\left\{ \hat{F}_{t+\Delta t}^{(l-1)} \right\} = \left[\hat{K}_t^{(l-1)} \right] \cdot \left\{ U_{t+\Delta t}^{(l-1)} \right\} \quad 1$$

Και όπου για την μέθοδο Newmark

$$\left[\hat{K}_t^{l-1} \right] = \left[K_t^{l-1} \right] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] \quad 2$$

Αν κάνουμε ανάπτυγμα των εξισώσεων 1 και 2 και με το γεγονός ότι η σχέση 1 ισχύει και χωρίς το καπέλο (δηλαδή ισχύει και για τις κανονικές εσωτερικές δράσεις αλλά και για τις ισοδύναμες δυναμικές) τότε τελικά έχουμε (με άγνωστες τις επαυξητικές μετακινήσεις στην επανάληψη 1 στο χρόνο $t+\Delta t$)

$$\left[\hat{K}_t^{(l-1)} \right] \cdot \left\{ \delta U_{t+\Delta t}^{(l)} \right\} = \left\{ \hat{P}_{t+\Delta t} \right\} - \left\{ F_{t+\Delta t}^{(l-1)} \right\} - \left(\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \cdot \left\{ U_{t+\Delta t}^{(l-1)} \right\}$$

Όπου: $\left\{ \Delta U_{t+\Delta t}^{(l)} \right\} = \left\{ \Delta U_{t+\Delta t}^{(l-1)} \right\} + \left\{ \delta U_{t+\Delta t}^{(l)} \right\}, \quad \left\{ U_{t+\Delta t}^{(l)} \right\} = \left\{ U_t \right\} + \left\{ \Delta U_{t+\Delta t}^{(l)} \right\}$

Μετά τη σύγκλιση της Newton-Raphson εντός του βήματος $t+\Delta t$ και τον υπολογισμό του $\left\{ U_{t+\Delta t} \right\}$ υπολογίζονται

$$\left\{ \ddot{U}_{t+\Delta t} \right\} = \frac{4}{\Delta t^2} \left[\left\{ U_{t+\Delta t} \right\} - \left\{ U_t \right\} \right] - \frac{2}{\Delta t} \left\{ \dot{U}_t \right\} - \left\{ \ddot{U}_t \right\}, \quad \left\{ \dot{U}_{t+\Delta t} \right\} = \left\{ \dot{U}_t \right\} + \frac{\Delta t}{\Delta t} \left(\left\{ \ddot{U}_{t+\Delta t} \right\} + \left\{ \ddot{U}_t \right\} \right)$$

Κεφ 3,8 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα- Μέθοδος Bathe για δυναμικά προβλήματα

Για την μέθοδο Bathe και το ίδιο πρόβλημα η λογική που αναπτύχθηκε είναι η εξής. Αρχικά στο υπό - βήμα $t+\Delta t/2$ η εξίσωση είναι η εξής

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t/2} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{F}$$

Αντίστοιχη είναι η εξίσωση για το υπό - βήμα $t+\Delta t$. Το σχήμα Newton Raphson (με άγνωστες τις επαυξητικές μετακινήσεις στην επανάληψη i στο χρόνο $t+\Delta t/2$)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{16}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{K}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ & = {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{F}^{(i-1)} \\ & \quad - \mathbf{M} \left(\frac{16}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{U}) - \frac{8}{\Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}} - {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right) \\ & \quad - \mathbf{C} \left(\frac{4}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{U}) - {}^t \dot{\mathbf{U}} \right) \end{aligned}$$

where

$${}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}$$

Και μόλις επέλθει σύγκλιση βρίσκουμε ταχύτητες και επιταχύνσεις με βάση τις 2 πρώτες σχέσεις

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}} &= {}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t \underline{\ddot{\mathbf{U}}} + {}^{t+\Delta t/2} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}) \\ {}^{t+\Delta t/2} \underline{\mathbf{U}} &= {}^t \underline{\mathbf{U}} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} + {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}}) \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{U}}} &= \frac{1}{\Delta t} {}^t \underline{\mathbf{U}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\mathbf{U}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{U}} \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\ddot{\mathbf{U}}} &= \frac{1}{\Delta t} {}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{U}}} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια το σχήμα Newton Raphson (με άγνωστες τις επαυξητικές μετακινήσεις στην επανάληψη i στο χρόνο t+Δt)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{9}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ & = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \\ & - \mathbf{M} \left(\frac{9}{\Delta t^2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} - \frac{12}{\Delta t^2} {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U} + \frac{3}{\Delta t^2} {}^t \mathbf{U} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{\Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}} \right) \\ & - \mathbf{C} \left(\frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U} + \frac{1}{\Delta t} {}^t \mathbf{U} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

and

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (11)$$

Και μόλις επέλθει σύγκλιση βρίσκουμε ταχύτητες και επιταχύνσεις με βάση τις 2 τελευταίες σχέσεις

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}} &= {}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t \underline{\ddot{\mathbf{U}}} + {}^{t+\Delta t/2} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}) \\ {}^{t+\Delta t/2} \underline{\mathbf{U}} &= {}^t \underline{\mathbf{U}} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} + {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}}) \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{U}}} &= \frac{1}{\Delta t} {}^t \underline{\mathbf{U}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\mathbf{U}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{U}} \\ {}^{t+\Delta t} \underline{\ddot{\mathbf{U}}} &= \frac{1}{\Delta t} {}^t \underline{\dot{\mathbf{U}}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{\dot{\mathbf{U}}} \end{aligned}$$

Αυτή η μέθοδος έχει όπως και η γραμμική μέθοδος Bathe αριθμητική απόσβεση και η συνεισφορά της στην επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων είναι αρκετά μεγάλη ήδη. Και εδώ η ακρίβεια επιτυγχάνεται για $\Delta t/T < 0,05$ με αποδεκτά ποσοστά και σε επιμήκυνση περιόδου και σε πτώση πλάτους και για τις 2 μεθόδους.

Κεφάλαιο 3,9 Αριθμητική ολοκλήρωση μη γραμμικών εξισώσεων κινήσεως σε στατικά και δυναμικά προβλήματα-Θεωρία σύγκλισης, ακρίβειας και εφαρμογή στις μεθόδους

Έστω μια μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία εκφράζεται ως εξής.

$$\mathbf{X}(v+1)=\mathbf{A}*\mathbf{X}(v)+\mathbf{\Lambda}*\mathbf{P}(v+1)$$

\mathbf{X} διάνυσμα ζητούμενων

\mathbf{A} μητρώο που εξαρτάται από γνωστές παραμέτρους (σταθερές)

$\mathbf{\Lambda}$ μητρώο που εξαρτάται από γνωστές παραμέτρους (σταθερές)

\mathbf{P} μητρώο φορτίου

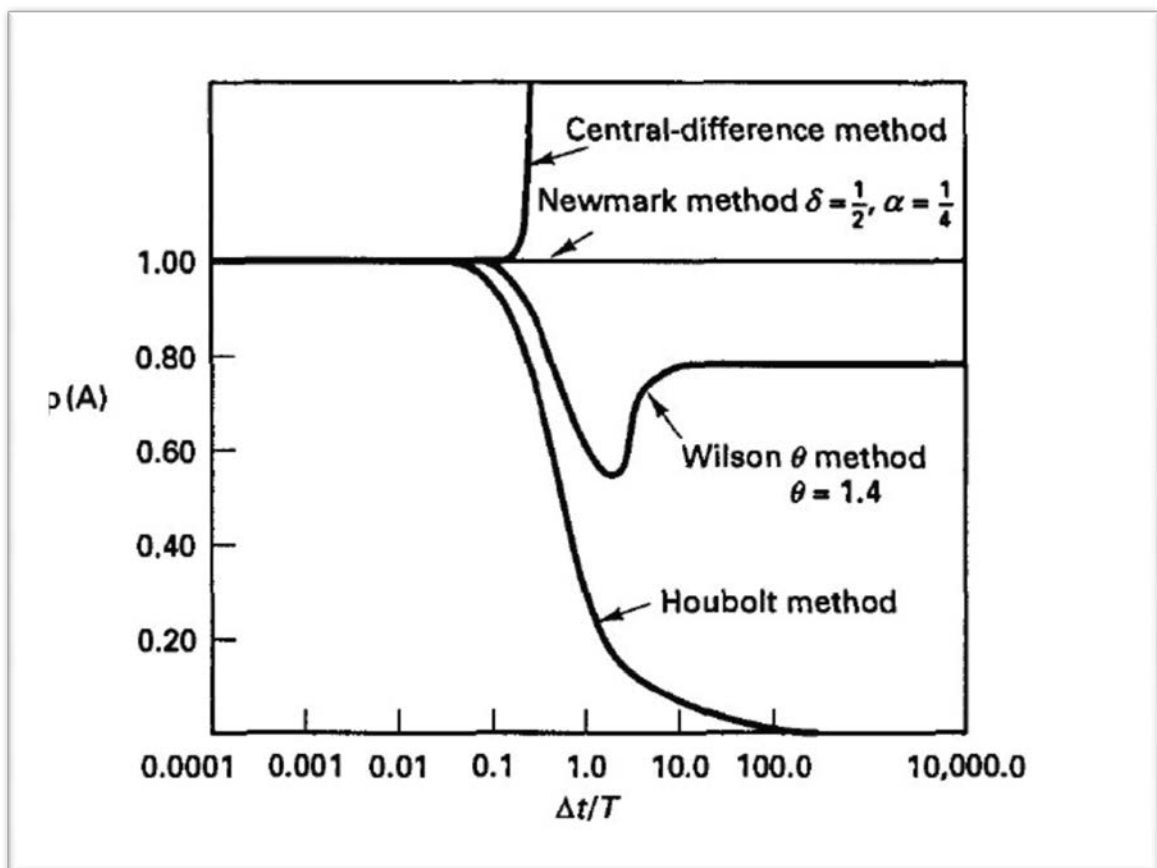
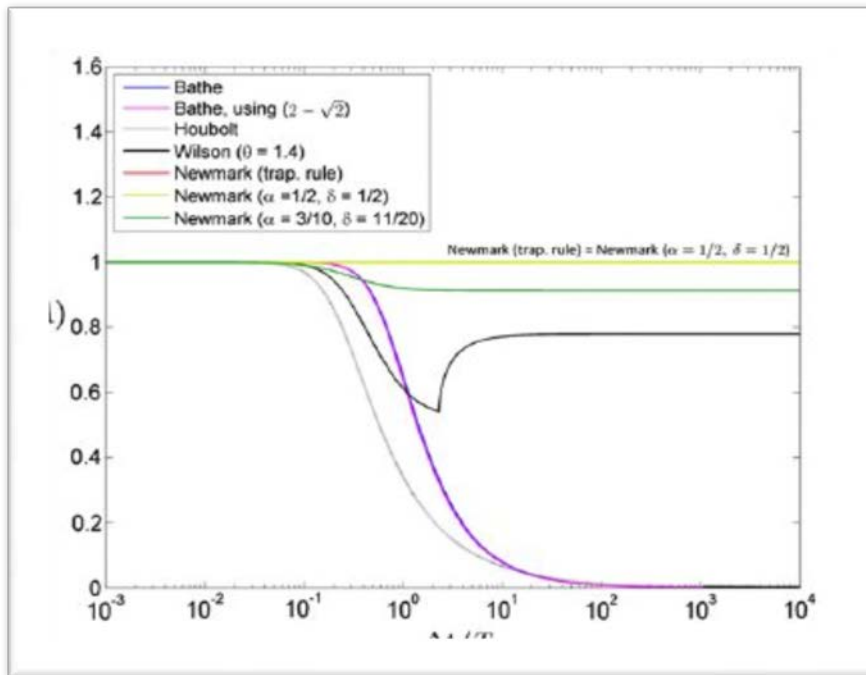
Τότε

Ορίζουμε ως φασματική ακτίνα του πίνακα \mathbf{A} την μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα \mathbf{A} (εάν αυτή είναι μιγαδική ιδιοτιμή τότε υπολογίζουμε το μέτρο αυτής)

Σύγκλιση επέρχεται στην μέθοδο όταν

1. Έχουμε διακριτές όλες τις ιδιοτιμές και η φασματική ακτίνα είναι μικρότερη ή ίση του 1
2. Έχουμε πολλαπλότητα των ιδιοτιμών και η φασματική ακτίνα είναι αυστηρά μικρότερη του 1

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα διαγράμματα φασματικής ακτίνας λόγου $\Delta\tau/T$ που δείχνουν την περιοχή σύγκλισης των προς ανάλυση μεθόδων



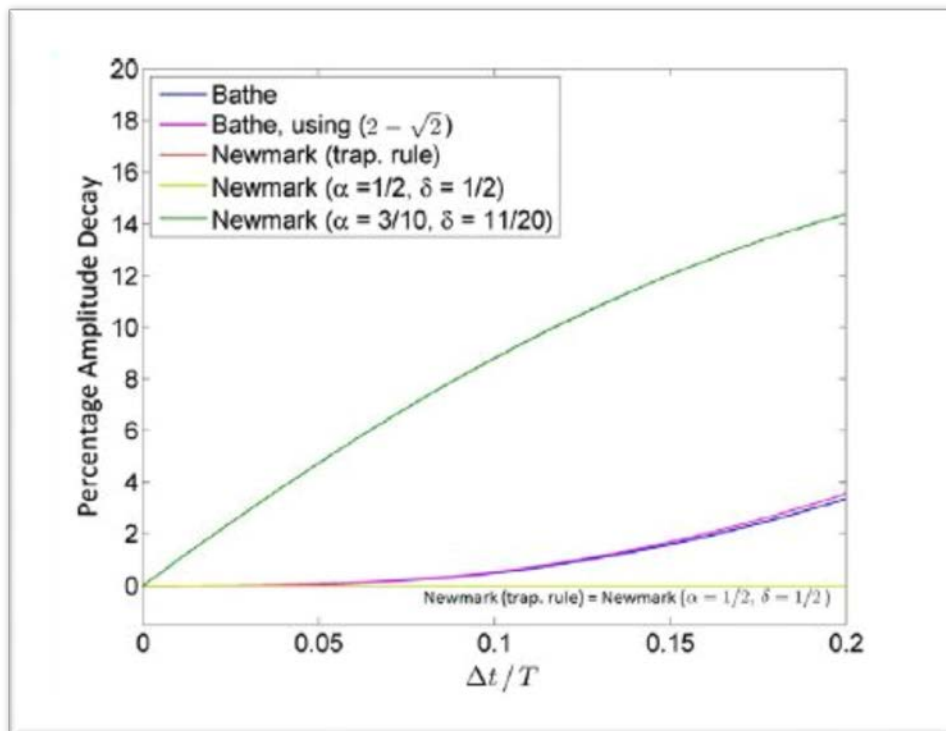
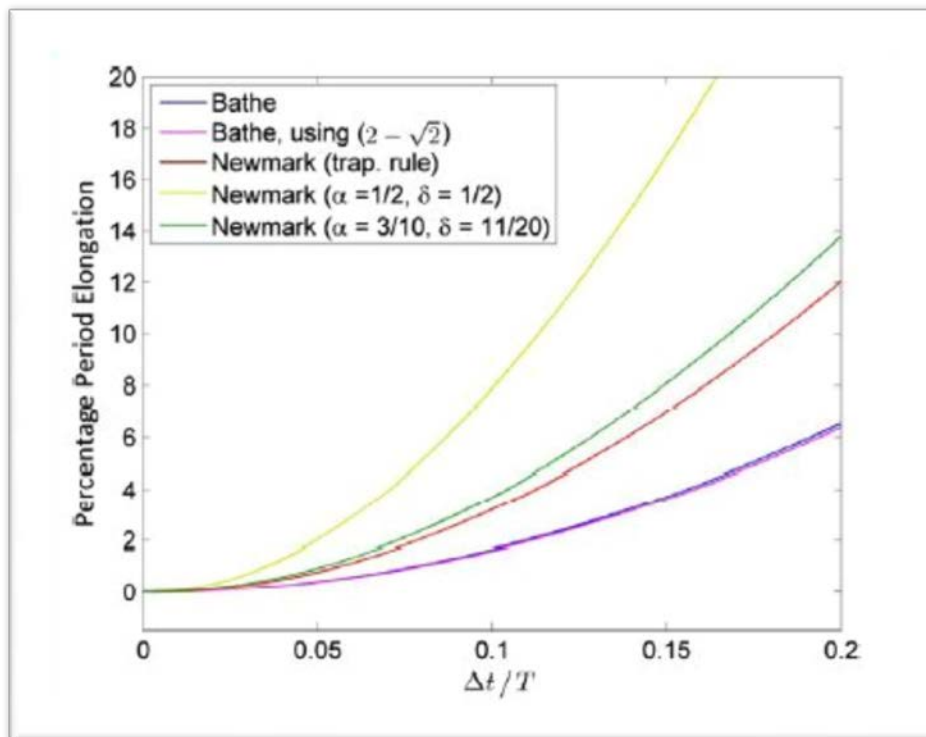
Η θεωρία ακρίβειας κατά κύριο λόγο συγκρίνει τις αριθμητικές μεθόδους εν σχέσει με τις αναλυτικές μεθόδους προκειμένου να διαπιστωθεί αν βγάζουν τα ίδια αποτελέσματα. Στις περιπτώσεις

βέβαια που αναλυτική λύση δεν υφίσταται τότε για να γίνει μια κάποια ποιοτική σύγκριση χρησιμοποιείται το μέσο ενεργειακό σφάλμα που ορίζεται από την σχέση

$$E = \int [\Delta \varepsilon]^T * [\Delta \sigma] dv$$

Όπου για τα σφάλματα των τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων χρησιμοποιούνται επιλεγμένες εκτιμήτριες με στόχο το E να είναι ελάχιστο.

Στην παρούσα διπλωματική παρουσιάζονται οι προαναφερθέντες μέθοδοι που έχουν συγκριθεί με αναλυτικές μεθόδους. Εν γένει οι αριθμητικές μέθοδοι παρουσιάζουν 2 ειδών αποκλίσεις. Η μια είναι στην περίοδο των κυματισμών η οποία εν γένει παρουσιάζεται μεγαλύτερη από την αναλυτικώς υπολογισθείσα (Period Elongation) και η άλλη είναι στην διαφοροποίηση του πλάτους εν σχέσει με το αναλυτικώς υπολογισθέν και εν γένει είναι μικρότερο στην αριθμητική επίλυση (Amplitude Decay). Αυτά στην μη γραμμική επίλυση εμφανίζονται ακόμα πιο έντονα αφού επηρεάζουν και την σύγκλιση άρα και την ακρίβεια. Στα επόμενα γραφήματα φαίνεται η επιμήκυνση της περιόδου και η μείωση του πλάτους για διάφορες μεθόδους σε γραμμική ανάλυση αν και στη μη γραμμική διαφέρουν κυρίως ποσοτικά οι μέθοδοι και όχι τόσο ποιοτικά.



Στο διάγραμμα φαίνεται και η μέθοδος bathe αν αντί για $dt/2$ βάλουμε $dt \cdot (2 - \sqrt{2})$

Άρα το γενικό συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι για $\Delta t/T \leq 0.05$ η ακρίβεια κινείται για όλες τις μεθόδους γύρω στο 3-4% που είναι ικανοποιητική για τα προβλήματα που διερευνούμε. Η Bathe πάντως λόγω της αριθμητικής της απόσβεσης δείχνει μια καλύτερη συμπεριφορά ιδιαίτερα σε

προβλήματα που υπάρχει μεγάλη διαφορά στην δυσκαμψία μεταξύ 2 σωμάτων σε δυναμική ανάλυση είτε γραμμική είτε μη γραμμική.

Κεφάλαιο 3,10 Αριθμητική ολοκλήρωση σημάτων

Για ένα δεδομένο επιταχυνσιογράφημα που λάβαμε σε μια σεισμική δόνηση πρέπει να κάνουμε την αριθμητική του ολοκλήρωση (συνήθως κατά Newmark Trapezoidal Rule) ώστε να λάβουμε το ταχυτητογράφημα και το μετακνησιογράφημα. Πριν όμως πρέπει να εξομαλύνουμε το διάγραμμα και αν θέλουμε και να του βάλουμε κάποιο φίλτρο. Εδώ πολύ συνοπτικά θα αναπτύξουμε την μέθοδο εξομάλυνσης και φίλτρου.

Μέθοδος εξομάλυνσης

1. Ορισμός συνάρτησης βάσης $f(t)$ συνήθως πολυώνυμα ως βαθμού 4 και έχω άγνωστες a_i
2. Δημιουργία του αθροίσματος των τετραγώνων $(X-X_0)^2$ όπου X η τιμή που κατέγραψε ο σειсмоγράφος και X_0 η τιμή της συνάρτησης στον χρόνο που δίνεται
3. Επιβολή των συνθηκών ελαχίστου $\frac{\partial S}{\partial a_i}=0$ και επίλυση του γραμμικού συστήματος ώστε να προσδιοριστούν τα a_i
4. Αφαίρεση από το επιταχυνσιογράφημα την συνάρτηση βάσης. Δηλαδή νέα τιμή $a(t)=$ παλιά τιμή $a(t)-f(t)$

Μέθοδος φίλτρου

Η μέθοδος αυτή εξουδετερώνει τις συχνότητες που δεν επιθυμούμε μέσω είτε αυτόματου απότομου αποκλεισμού ή μέσω εκθετικής μείωσης (δηλαδή οι συχνότητες που απέχουν λίγο από το όριο συμμετέχουν και όσο απομακρυνόμαστε η συμμετοχή τους μειώνεται εκθετικά)

Η κατηγοριοποίηση των φίλτρων είναι με βάση την μέθοδο αποκοπής (Butterworth, Chebyshev, Bessel) και με βάση του

πώς αποκόπτουμε πέρα από τα όρια (Lowpass, Highpass, Bandpass, Bandstop).

Κεφ 4 Πρακτικό μέρος της Διπλωματικής. **Επίλυση προβλήματος Σεισμικής Διέγερσης με** **Εξαεδρικά ΠΣ για Μη Γραμμική Ανάλυση με** **Von Mises απολύτως πλαστικό υλικό.**

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται το πρακτικό κομμάτι της παρούσας διπλωματικής. Αυτό συνίσταται στον προγραμματισμό προγραμμάτων μέσω του προγράμματος Matlab της γραμμικής δυναμικής μεθόδου Newmark (Trapezoidal Rule) για τις περιπτώσεις του πεδίου με κτίριο που προσομοιάζεται με εξαεδρικά ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία τόσο το έδαφος όσο και το κτίριο. Αυτή είναι η αδρομερής προσομοίωση κτιρίων που παρουσιάζουν κυρίως διατμητική συμπεριφορά ή αλλιώς συμπεριφορά διατμητικού προβόλου και συγκεντρώνονται οι παραμορφώσεις στη βάση του κτιρίου αλλά εδώ η προσομοίωση έγινε λόγω της θέλησης να διερευνήσουμε αδρομερώς την αλληλεπίδραση εδάφους κατασκευής σε μη γραμμικά πεπερασμένα στοιχεία και το πώς επηρεάζεται η μετατόπιση στην κορυφή του κτιρίου από την αλληλεπίδραση εδάφους κατασκευής. Η εξίσωση που επιλύουμε είναι η εξής

$$M_{ff} \ddot{u}_f + C_{ff} \dot{u}_f + F_{int} = -(M_{fs} \ddot{u}_s + C_{fs} \dot{u}_s)$$

Που αναφέρεται στην κλασική μη γραμμική μέθοδο διέγερσης στηρίξεων. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι ο υπολογισμός του F_{int} λαμβάνει υπόψιν του και τα u_f και τα u_s δηλαδή αν είναι γραμμική ελαστική η ανάλυση τότε $F_{int} = K_{ff} u_f + K_{fs} u_s$. Όμως η διαδικασία που λύνουμε το πρόβλημα όταν χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο επίλυσης (πχ με μέθοδο Newmark) λαμβάνει υπόψιν της μονάχα τα u_f και αγνοεί τις έξτρα εσωτερικές δυνάμεις που προκύπτουν από τις γνωστές μετατοπίσεις. Κατά

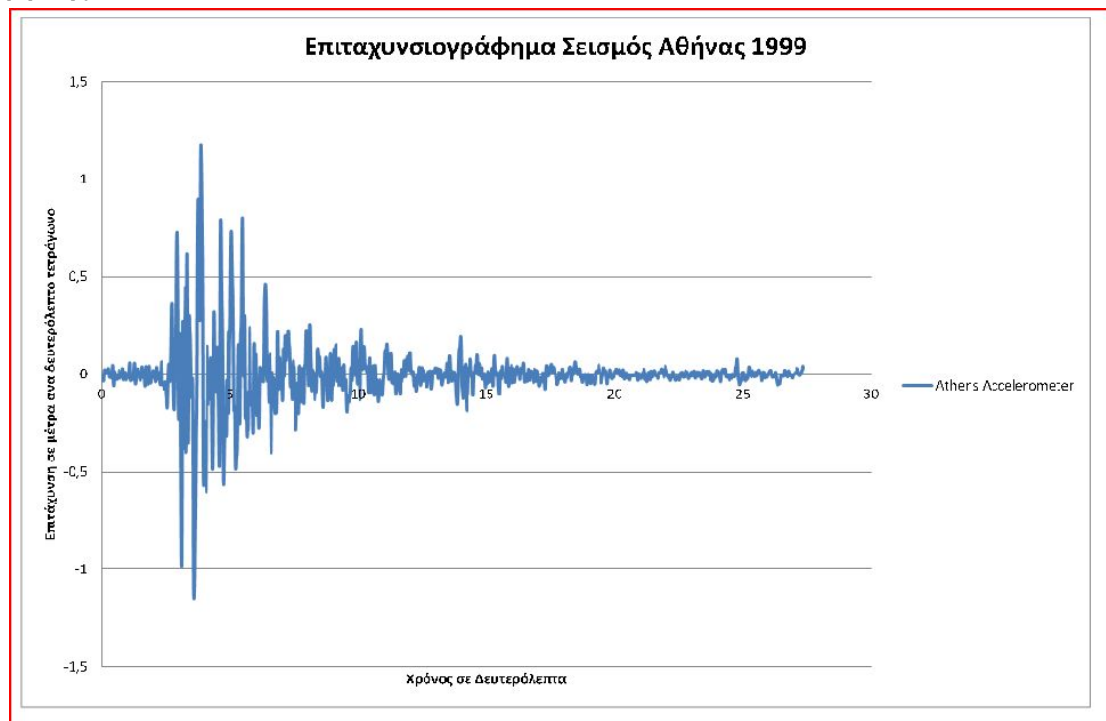
συνέπεια θα απαιτηθούν περισσότερες επαναλήψεις από το κλασικό πρόβλημα δυναμικής ανάλυσης για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα. Ενδεικτικά σε γραμμική δυναμική ανάλυση n βημάτων όταν στο κάθε βήμα στην πρώτη επανάληψη θα υπολογίσουμε το ισοζύγιο δυνάμεων $\hat{p}-\hat{F}$ θα περισσεύει δύναμη $Kfs*us$ η οποία θα κατανεμηθεί στα uf ώστε να υπολογιστούν οι σωστές μετακινήσεις και συνολικά θα έχω $2*n$ επαναλήψεις. Σε μη γραμμική ανάλυση θα απαιτηθούν ακόμα περισσότερες επαναλήψεις που ο αριθμός τους εξαρτάται από την κατανομή των $Kfs*us$ ανά μη γραμμική επανάληψη.

Η φόρτιση είναι ίδια σε μια διάσταση και έχει επιταχυνσιογράφημα διέγερσης τον σεισμό της Αθήνας του 1999 από την καταγραφή που έγινε στον σταθμό Μετρό Μοναστηράκι. Η επίλυση ελευθέρου πεδίου έχει τα εξής στοιχεία. Προσομοιώνεται ένα έδαφος με κτίριο που έχει $E=1$ Gra (αυτό το μέτρο ελαστικότητας θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε μια αρκετά στιφρή άργιλο που αντιστοιχεί σε βραχώδεις ιδιότητες πχ Μάργα αλλά επιλέχθηκε ίδιο μέτρο ελαστικότητας και για τα εξαεδρικά του κτιρίου προκειμένου να δούμε αδρομερώς την αλληλεπίδραση χωρίς να ενδιαφερόμαστε για ποσοτικά αποτελέσματα αλλά για ποιοτική συμπεριφορά του σημείου κορυφής) $\sigma_y=50$ Kra και απολύτως πλαστικό υλικό δηλαδή $H=0$ με 3 διαφορετικές διακριτοποιήσεις. Η μόρφωση του K και M ακολουθούν την κλασική μέθοδο των ΠΣ για δημιουργία συμπαγούς μητρώου μάζας. Το μητρώο απόσβεσης Rayleigh επιλέχτηκε με βάση τις 2 πρώτες ιδιοσυχνότητες του θεωρητικός απείρου ημιχώρου που υπόκειται σε κυματισμό μιας διεύθυνσης κυμάτων S ήτοι $f1=Vs/(4*H)$ $f2=3*f1$ όπου Vs η διατμητική ταχύτητα των κυμάτων H το πάχος της στρώσης. Οι διακριτοποιήσεις φαίνονται στον κάτωθι πίνακα ενώ τα ΠΣ είναι κύβοι ακμής 10 μέτρων. Στην 1^η στήλη είναι η διακριτοποίηση του εδάφους και στην 2^η οι 3 διαθέσιμες «κατασκευές».

210-30-10	10	3 συνδυασμοί
210-30-20	20	3 συνδυασμοί
210-30-50	50	3 συνδυασμοί

Διακριτοποιήσεις του προβλήματος

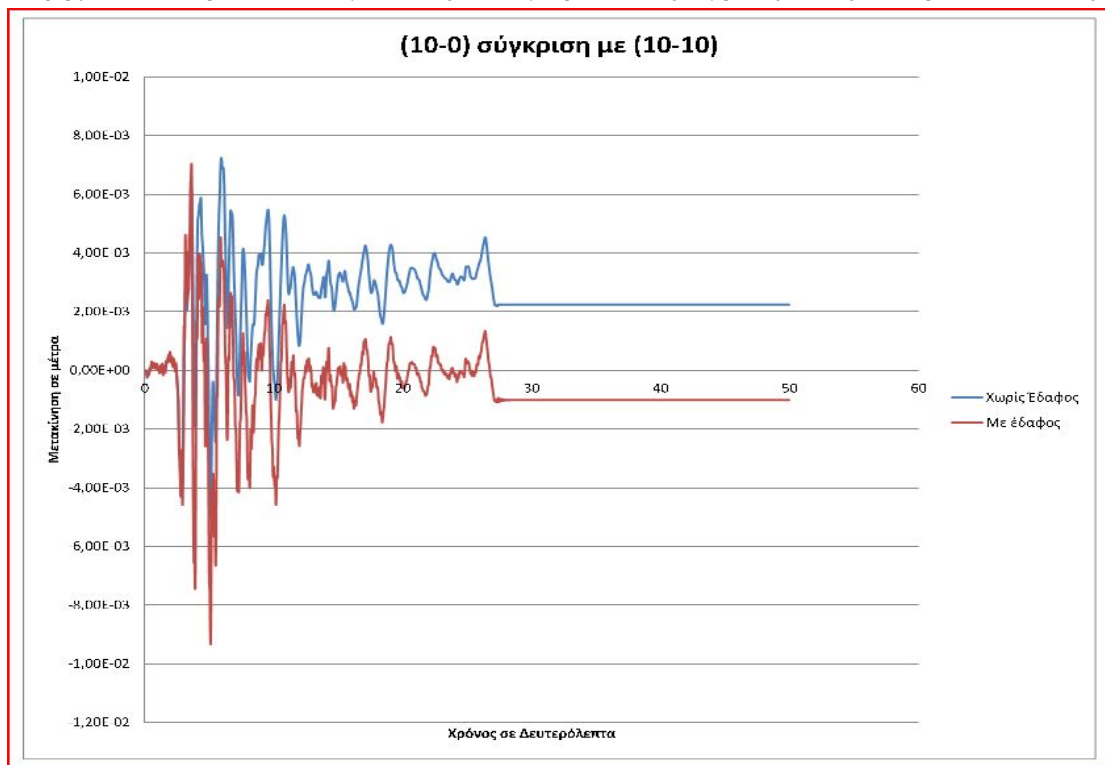
Ο λόγος που υπάρχει στην διεύθυνση X το 210 είναι για να υπάρχει συμμετρία στο πρόβλημα αλλά και να μην παρατηρούνται ανακλάσεις των κυματισμών που αλλοιώνει τα αποτελέσματα των ολικών μετακινήσεων. Τέλος για το σήμα της Αθήνας να σημειωθεί ότι εν σχέσει με την αρχική καταγραφή έγινε εξομάλυνση του επιταχυνσιογραφήματος και φίλτρο Butterworth 4^{ης} τάξης bandpass ($f=0,39$ HZ). Για την πληρότητα να αναφέρουμε ότι θεωρούμε ότι όλη η βάση έχει ίδιο επιταχυνσιογράφημα στο έδαφος (σύγχρονη κίνηση στηρίξεων) και κάναμε την παραδοχή ότι αυτό είναι επιταχυνσιογράφημα φύσει ή θέση βράχου κάτι που δεν ισχύει καθώς το σημείο εκείνο είναι εδαφικό (Αθηναϊκός Σχιστόλιθος) γεγονός που θα έπρεπε να μας οδηγήσει σε αντίστροφη ανάλυση Fourier ώστε να λάβουμε το σήμα σε φύσει η θέση βράχο.



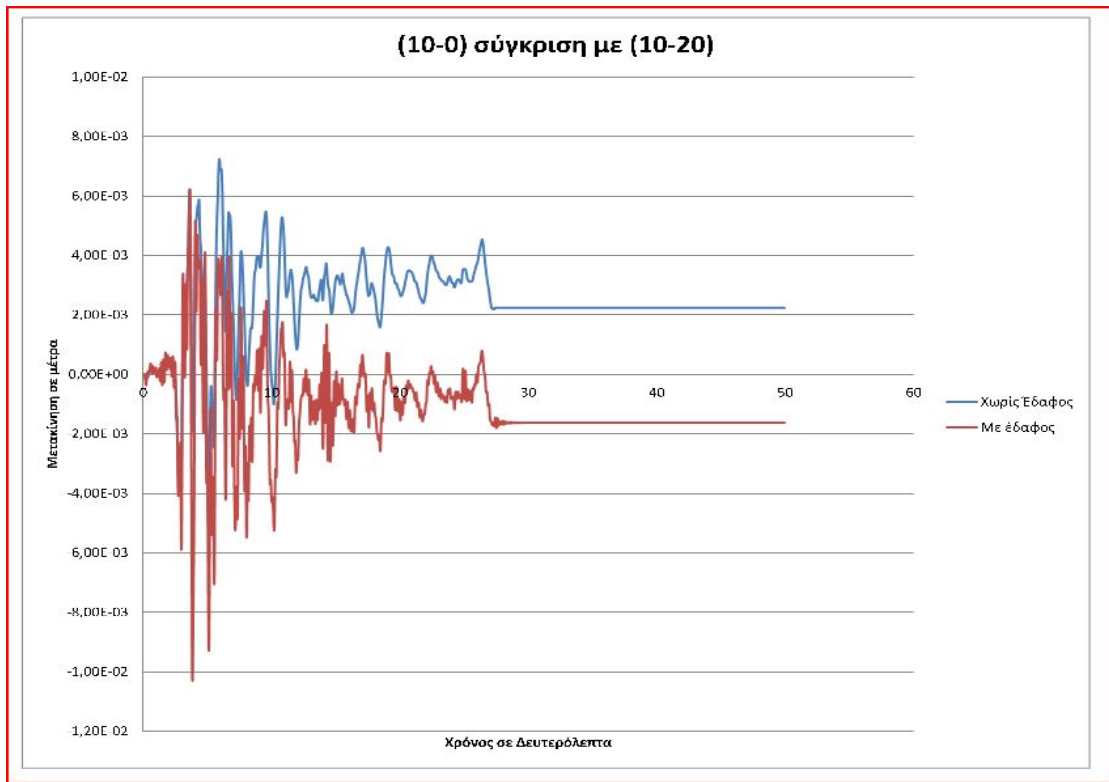
Τα αποτελέσματα που παραθέτουμε είναι τα εξής: Συγκριτικά γραφήματα των επιλύσεων που συγκρίνουν τα κτίρια χωρίς έδαφος με τα κτίρια με εδαφικές στρώσεις σε ολικές

μετακινήσεις και ολικές επιταχύνσεις (συνολικά 18 γραφήματα) και παρουσίαση των ολισθητικών μετακινήσεων σε όλες τις επιλύσεις, των μεγίστων ολικών μετακινήσεων (προσημασμένα), του λόγου μέγιστων/ολισθητικών μετακινήσεων και τέλος των μέγιστων επιταχύνσεων σε όλες τις επιλύσεις. Επιλέχθηκαν οι συγκρίσεις αυτές διότι όπως ισχύει από τη βιβλιογραφία αυτές καταδεικνύουν εντονότερα και καθαρότερα τη σημασία της Αλληλεπίδρασης Εδάφους Κατασκευής η οποία παρόμοια είχε διερευνηθεί και στην προπτυχιακή Διπλωματική μου εργασία αλλά αποτελεί και αντικείμενο ενδιαφέροντος στη Διδακτορική μου Διατριβή η οποία πρόσφατα ξεκίνησε και θα εστιάσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια στη συνέχεια.

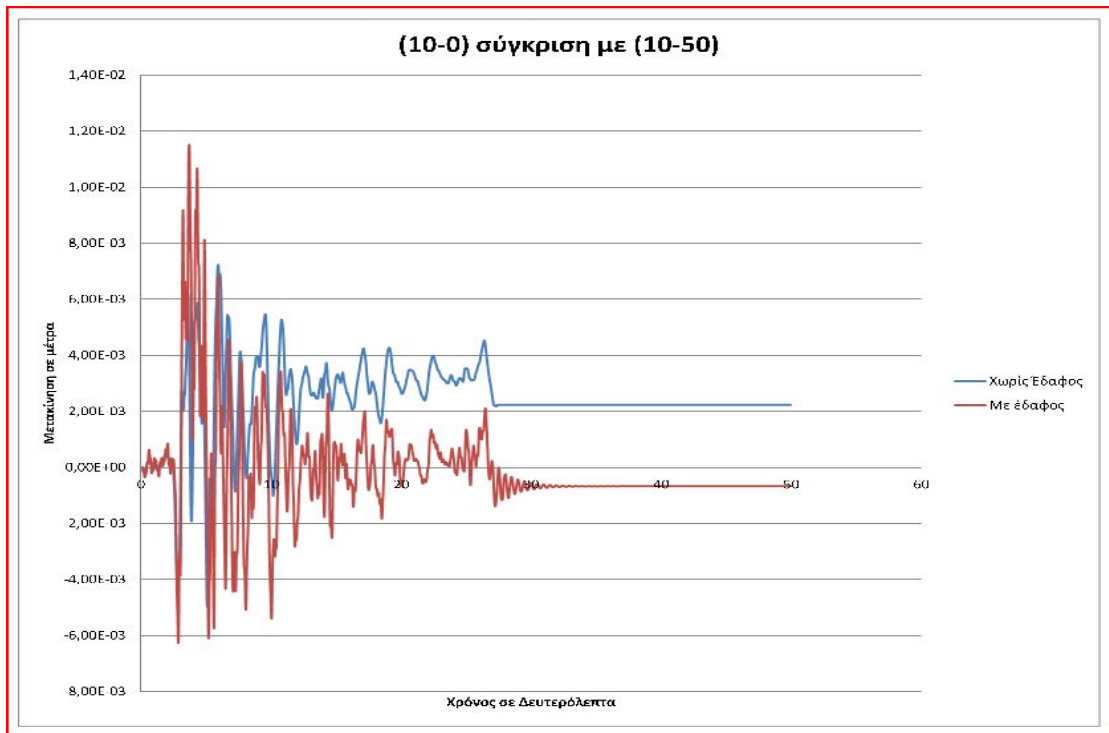
Αρχικά παραθέτουμε τις συγκριτικές γραφικές παραστάσεις.



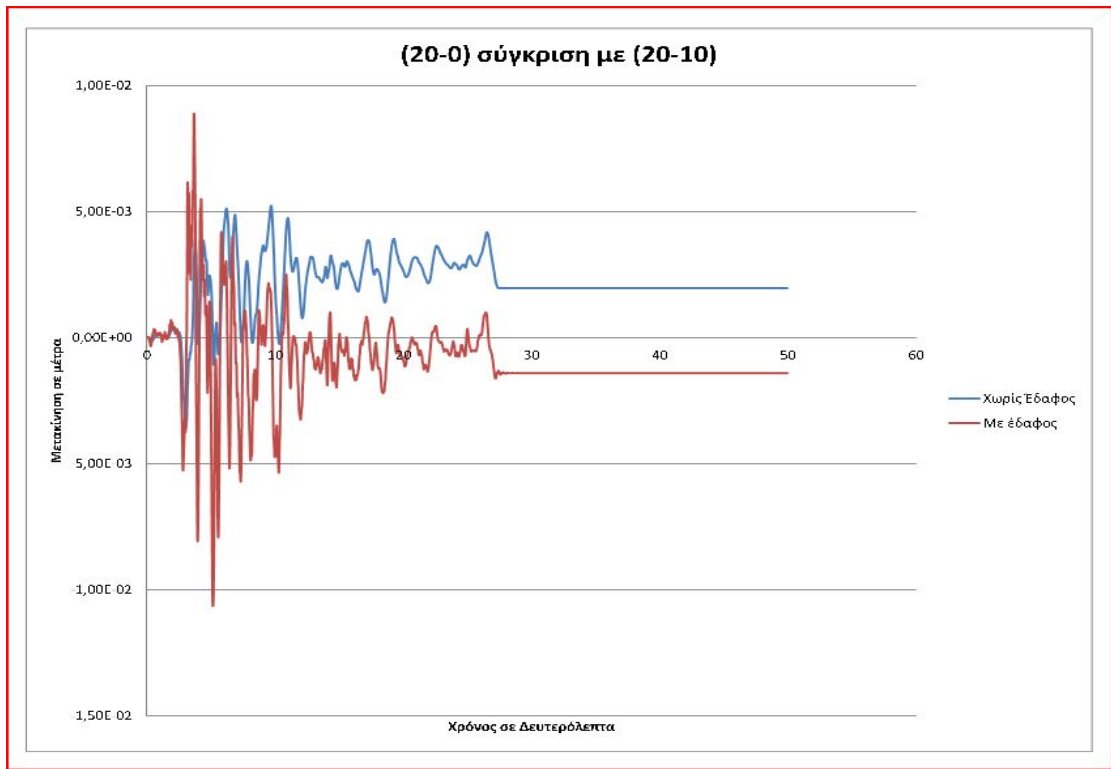
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 10 μέτρων



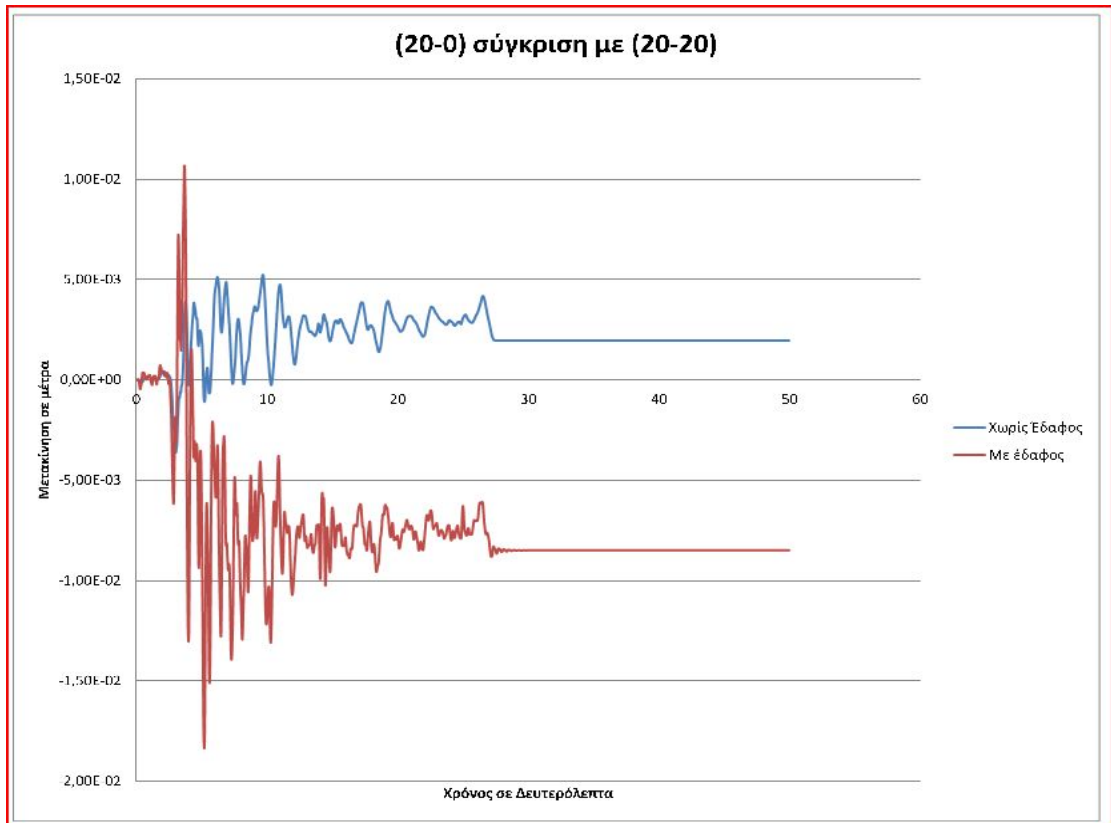
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 20



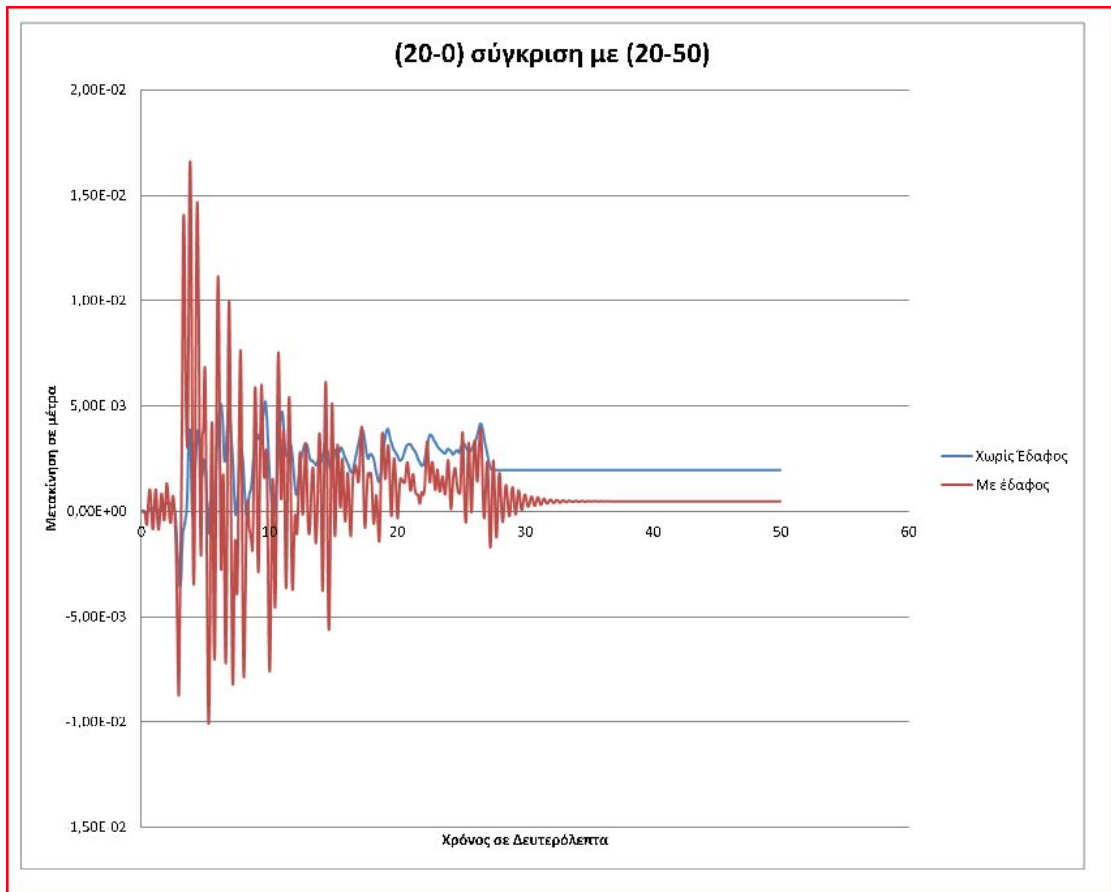
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 50



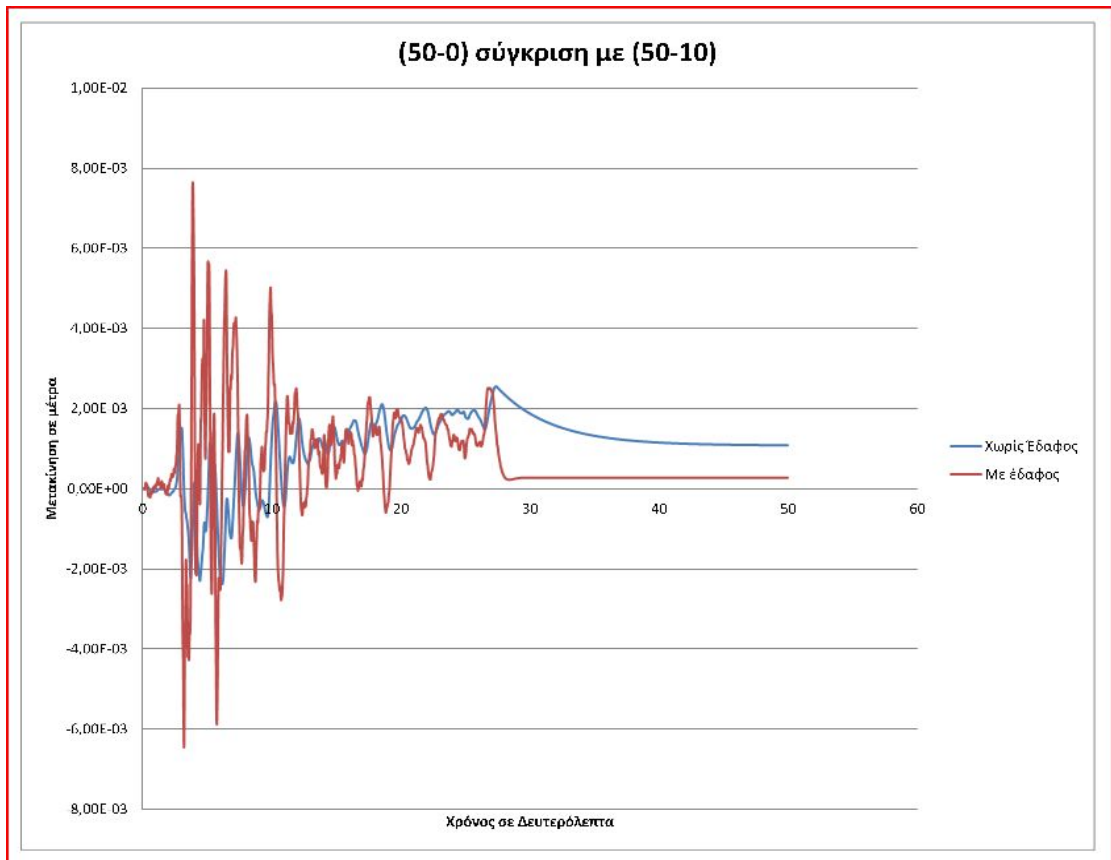
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 10



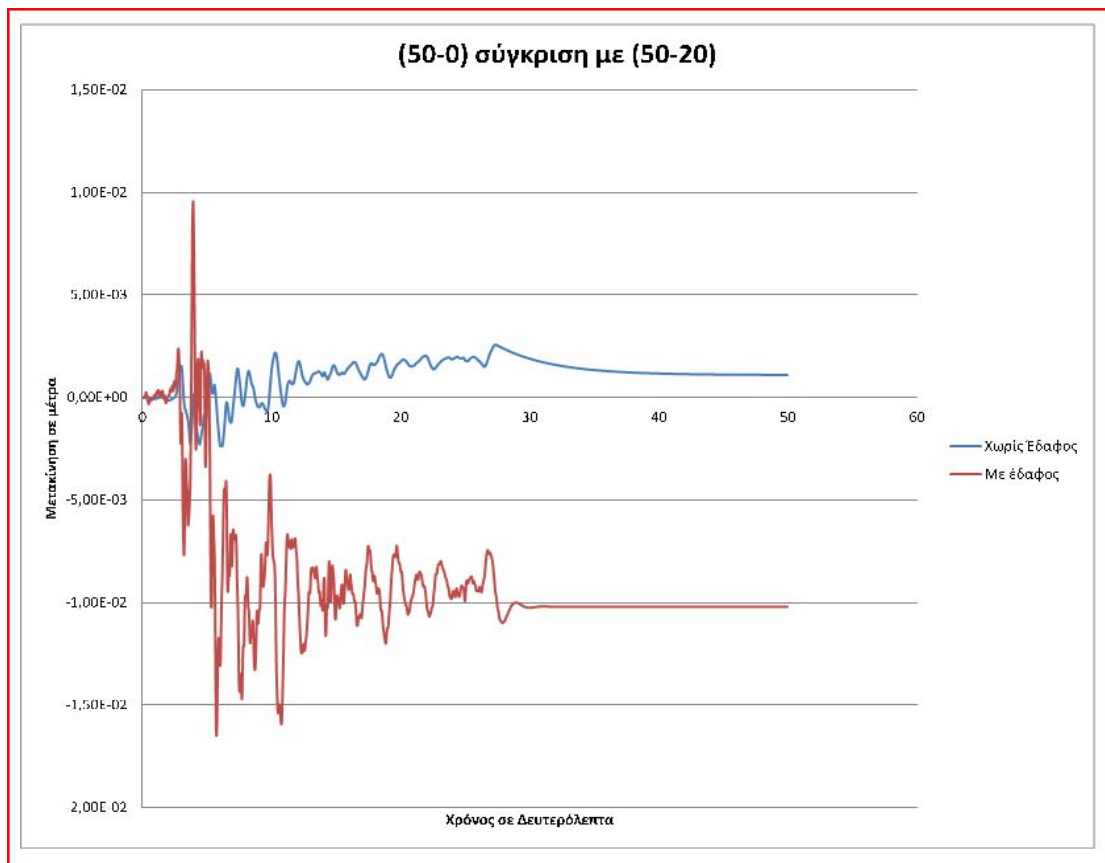
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 20



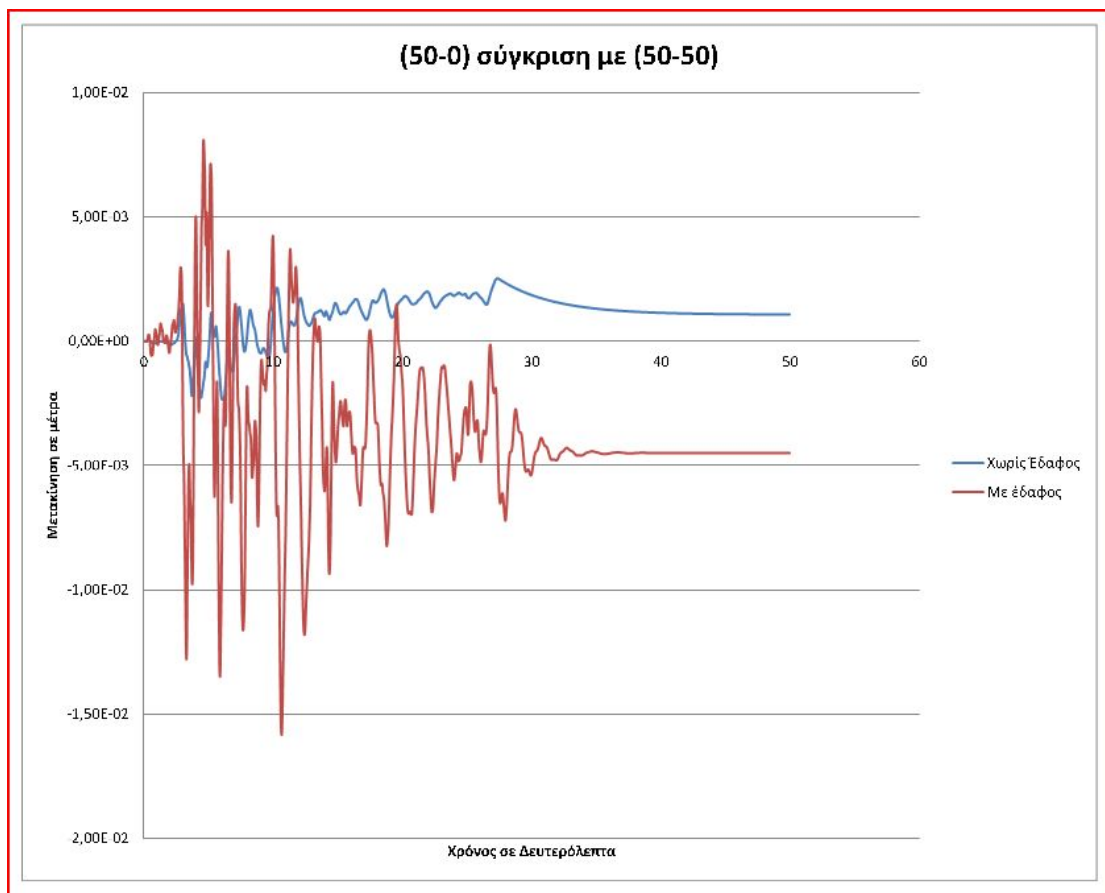
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 50



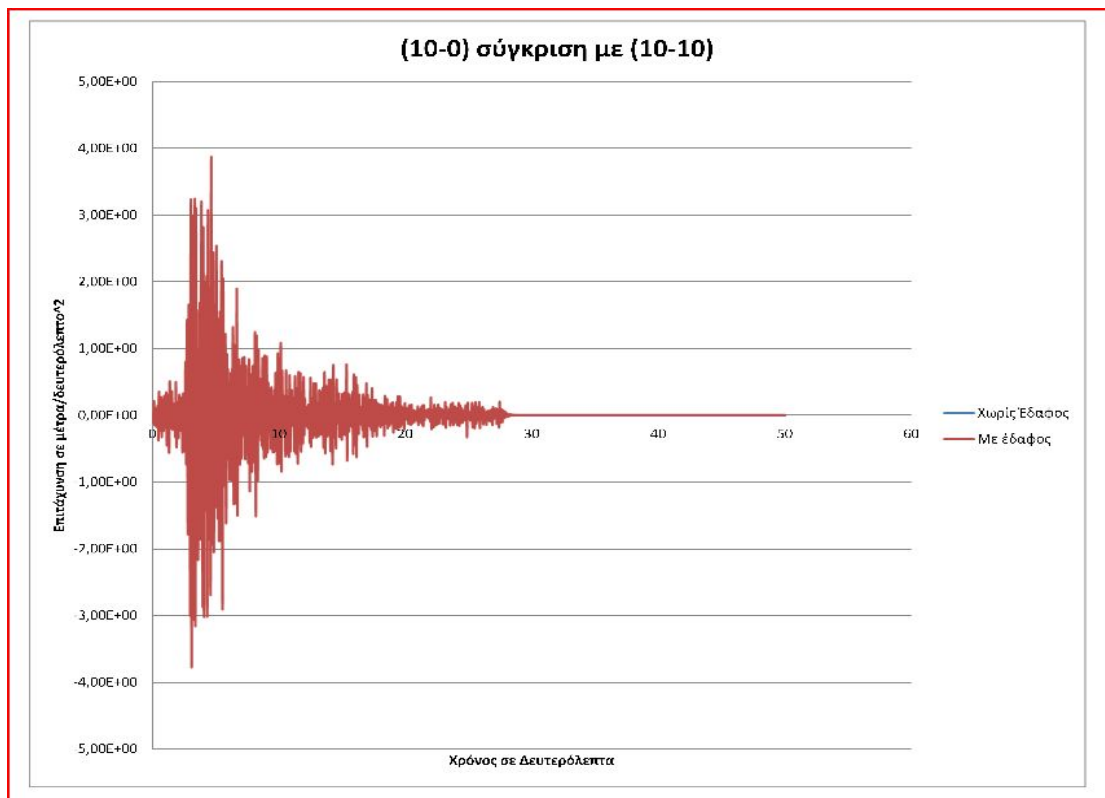
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 10



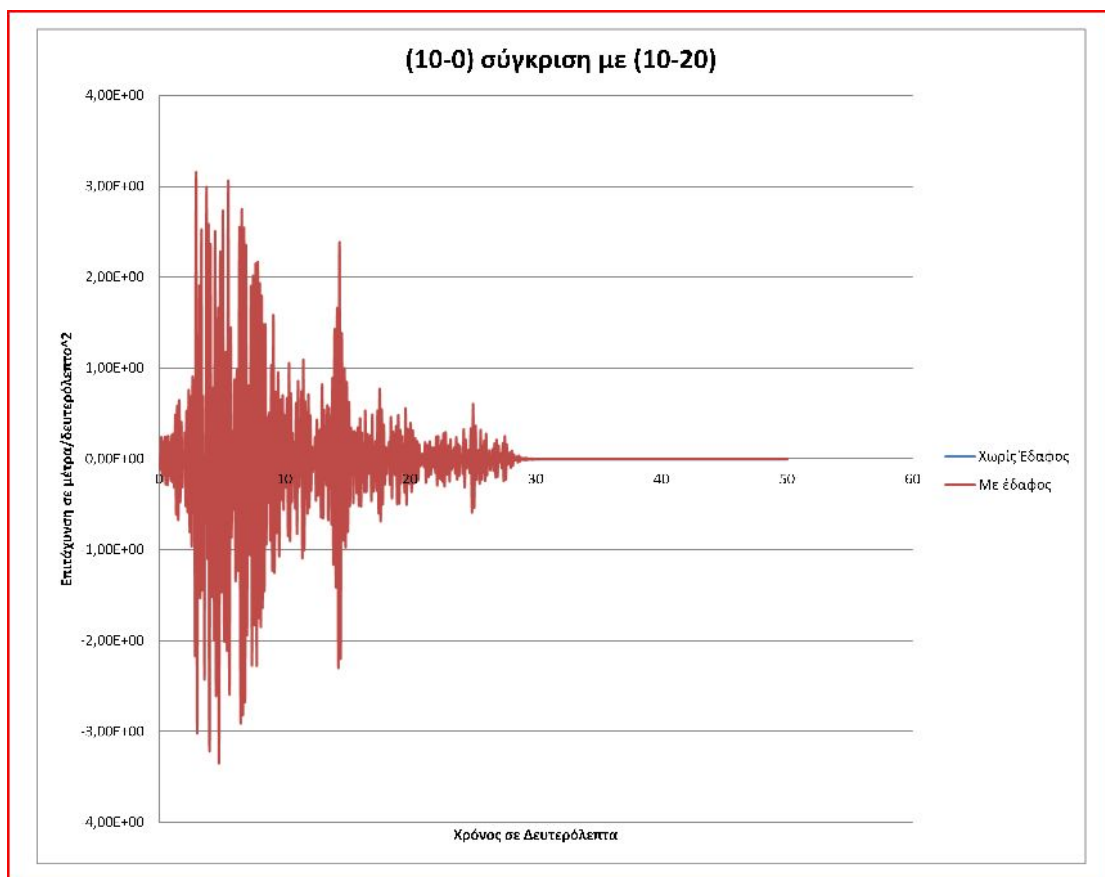
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 20



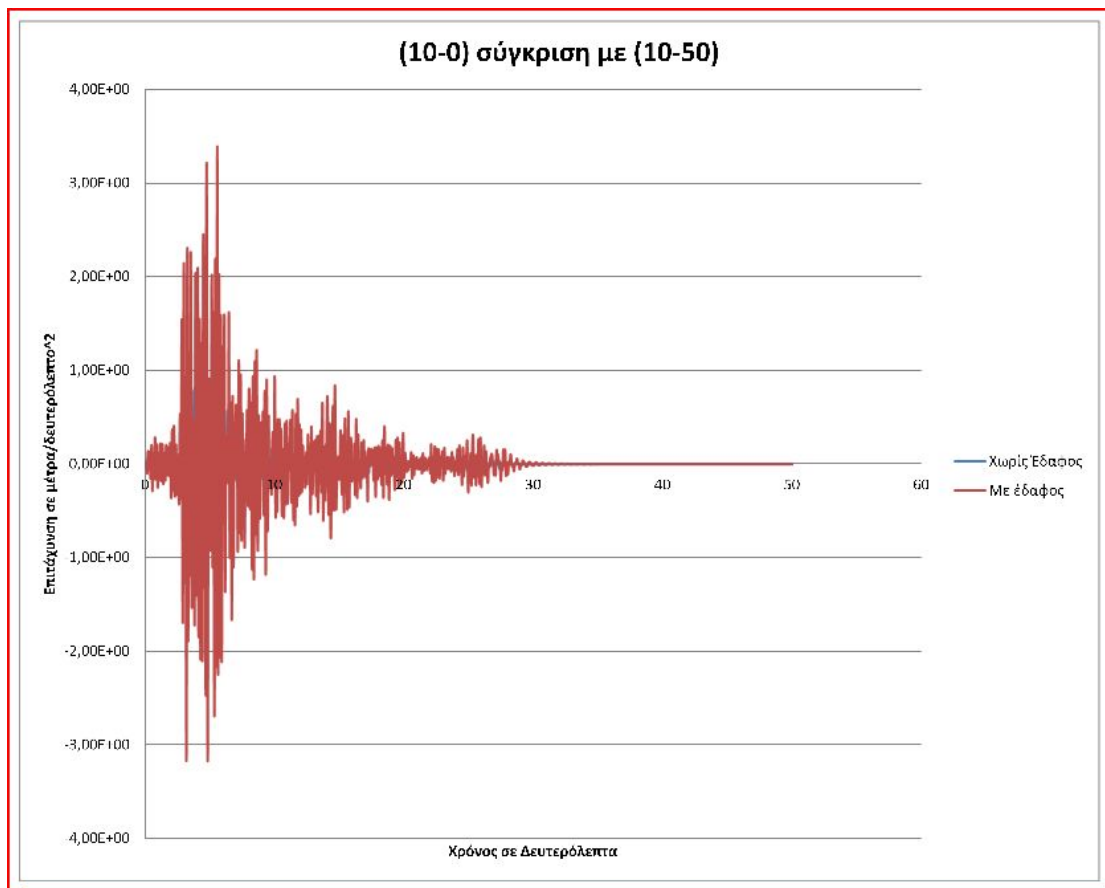
Συγκριτικό Γράφημα μετακίνησης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 50



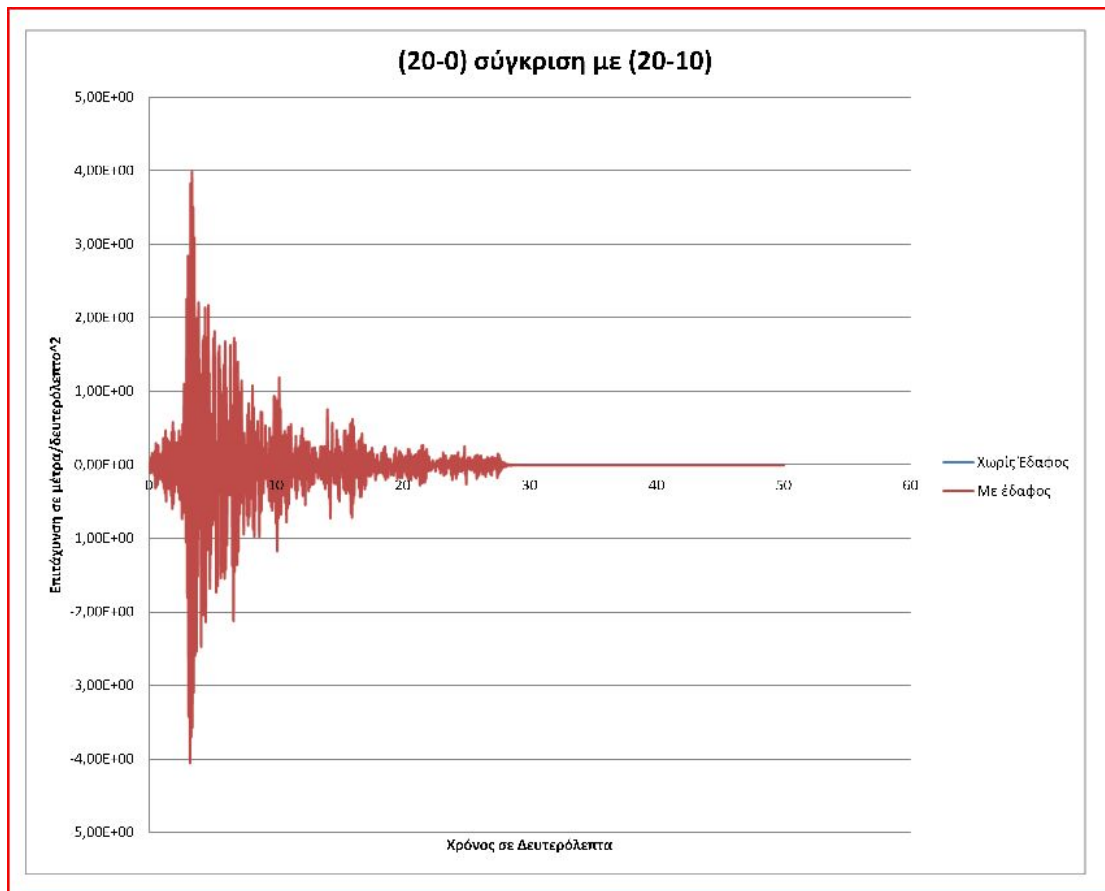
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 10



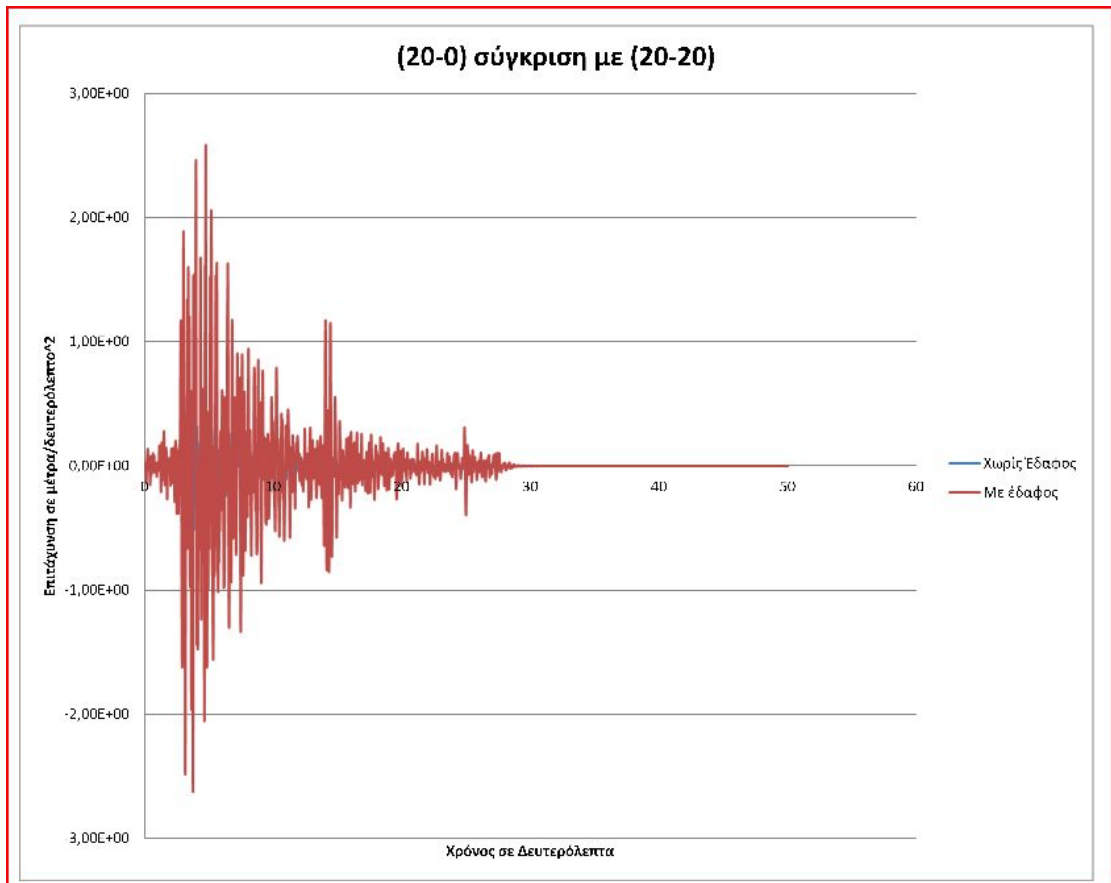
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 20



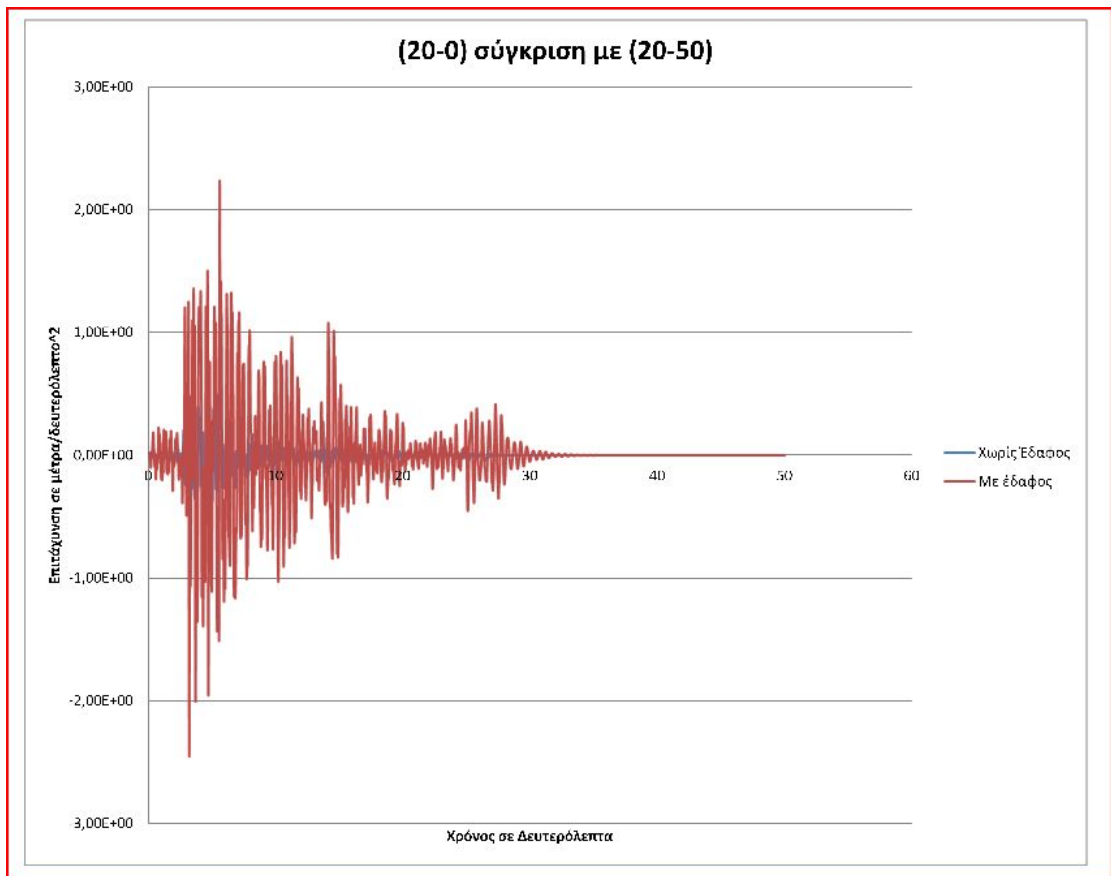
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 10 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 10 μέτρων με έδαφος 50



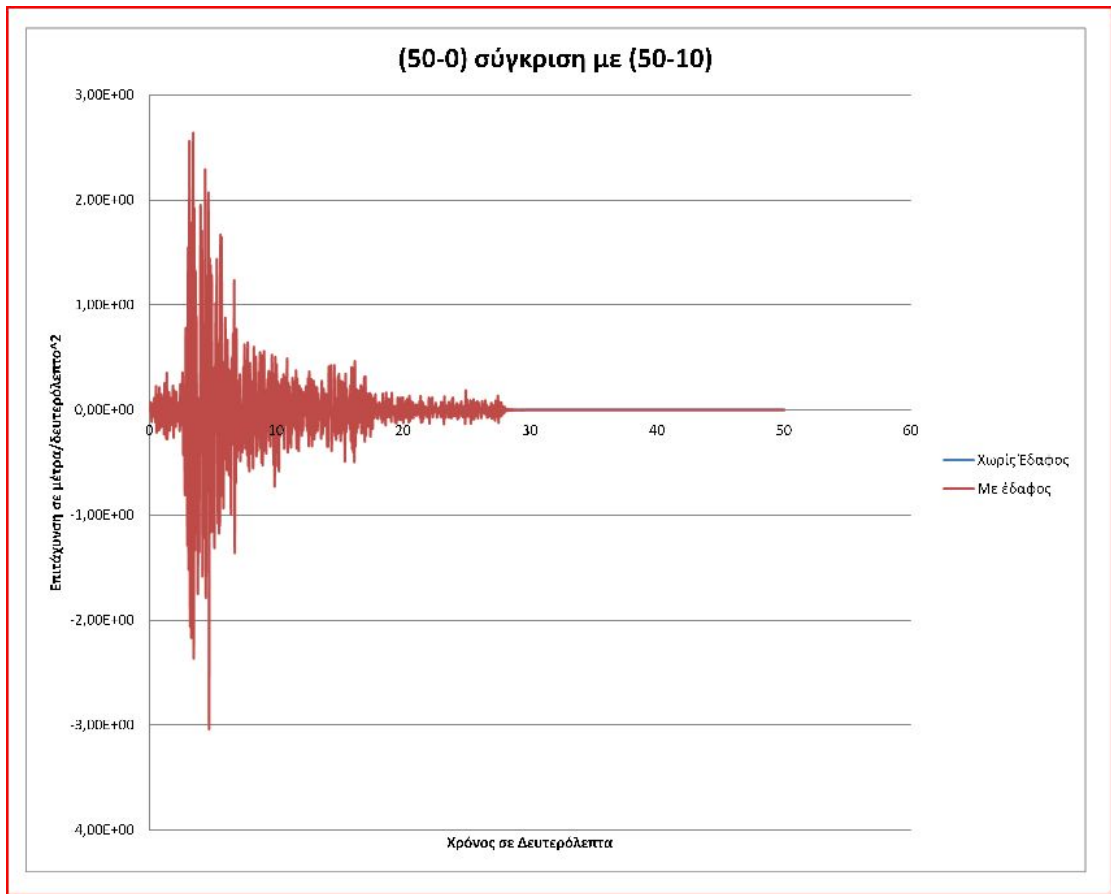
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 10



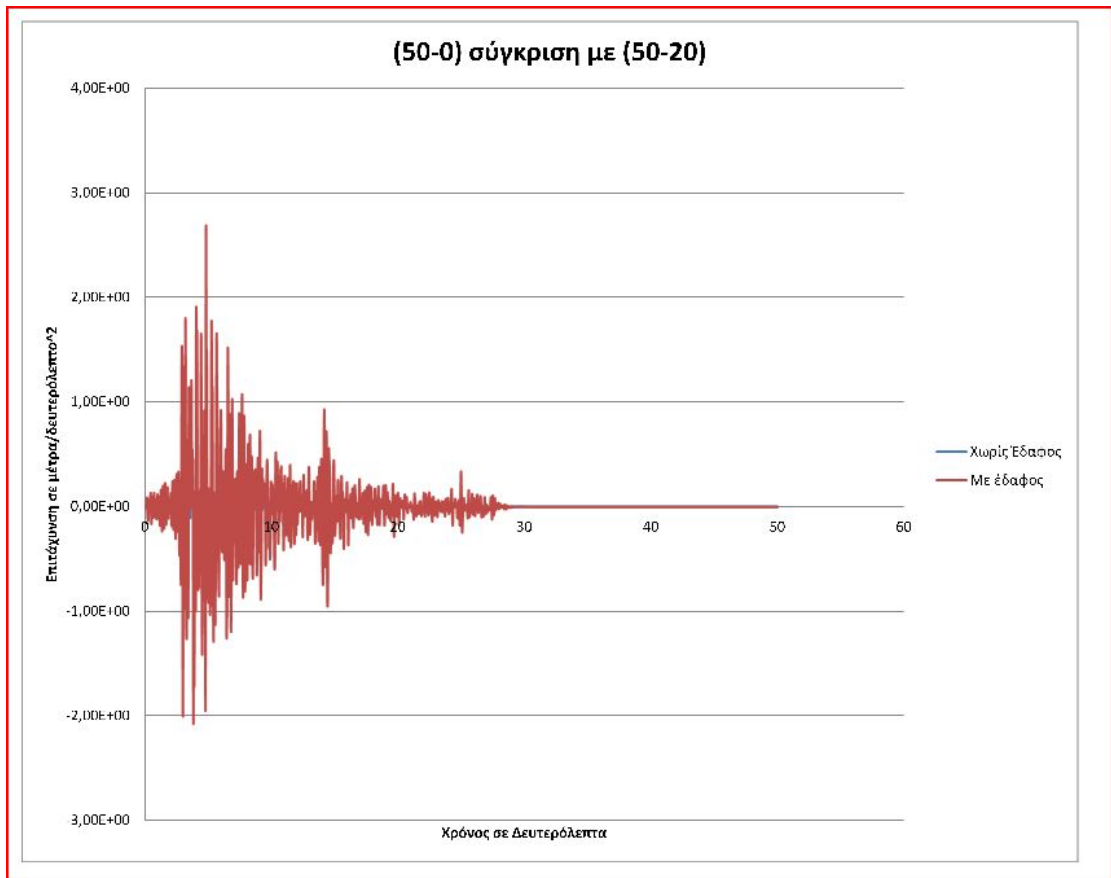
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 20



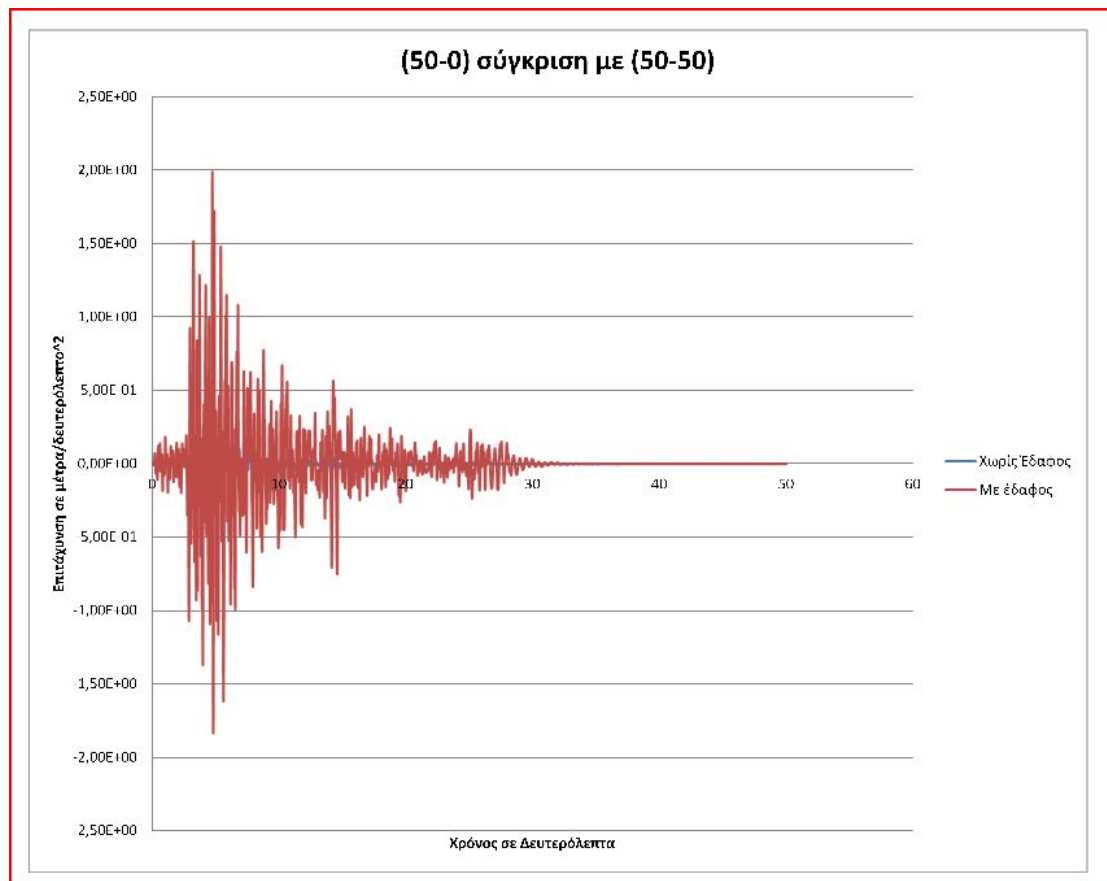
Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 20 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 20 μέτρων με έδαφος 50



Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 10



Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 20



Συγκριτικό Γράφημα επιτάχυνσης κορυφής κτιρίου για κτίριο 50 μέτρων άνευ εδάφους και κτίριο 50 μέτρων με έδαφος 50

Στη συνέχεια στον κάτωθι πίνακα έχουμε τις ολισθητικές μετακινήσεις τις μέγιστες μετακινήσεις και τον λόγο Μέγιστη/Ολισθητική μετακίνηση αλλά και τις μέγιστες επιταχύνσεις.

Επίλυση	Ολισθητική Μετακίνηση	Μέγιστη Μετακίνηση	Μέγιστη Επιτάχυνση	Λόγος
(10-0)	0,0022418	0,0072561	-1,264554	3,236708
(20-0)	0,0019625	5,23E-03	-0,551726	2,663064
(50-0)	0,0010899	2,56E-03	3,45E-01	2,345714
(10-10)	-0,001002	-0,009332	3,85E+00	9,315873
(10-20)	-0,001623	-0,010296	-3,355651	6,342928
(10-50)	-0,00067	0,0115193	3,392154	17,20247
(20-10)	-0,001397	-0,010636	-4,037155	7,612752
(20-20)	-0,008477	-0,018339	-2,614563	2,163258
(20-50)	0,000483	0,0166004	-2,453256	34,36943
(50-10)	0,0002723	0,0076481	-3,0356	28,0902
(50-20)	-0,010217	0,0095741	2,683422	0,937034
(50-50)	-0,004496	-1,58E-02	1,992206	3,522135

Τα συμπεράσματα από τις αναλύσεις και τα γραφήματα συνοψίζονται στα ακόλουθα σημεία

1. Για τις ολισθητικές ολικές μετακινήσεις έχουμε ότι στα κτίρια των 10 μέτρων η μέγιστη μετακίνηση είναι στο κτίριο άνευ εδάφους και μάλιστα για τα 50 μέτρα πάχος στρώσης η απόσταση διαφέρει περίπου 2 τάξεις μεγέθους. Στα κτίρια των 20 μέτρων η μέγιστη μετακίνηση είναι στο έδαφος πάχους 20 μέτρων ενώ αμέσως μετά ακολουθεί η επίλυση άνευ εδάφους. Τέλος στα κτίρια των 50 μέτρων η μέγιστη μετακίνηση είναι στο πάχος 20 μέτρων. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει μια ένδειξη ότι στην επίλυση με 20 μέτρα πάχος εδάφους η εδαφική στρώση ενδεχόμενα συντονίζεται και το ότι δεν φαίνεται στο κτίριο 10 μέτρων ενδεχομένως να οφείλεται στην αδρομέρεια του παραδείγματος λόγω του κτιρίου που προσομοιώνεται με ένα μονάχα ΠΣ κάτι που δίνει υπερεκτίμηση της δυσκαμψίας.
2. Σε όλες τις περιπτώσεις για τις μέγιστες ολικές μετακινήσεις αλλά και στη χρονοϊστορία τους φαίνεται ότι η τιμές που λαμβάνουμε όταν έχουμε έδαφος είναι μεγαλύτερες από όταν αγνοούμε το έδαφος. Αυτό είναι μια θεμελιώδης ιδιότητα της Αλληλεπίδρασης Εδάφους Κατασκευής διότι τότε η κατασκευή μας καθίσταται πιο εύκαμπτη από το να αγνοούμε την επιρροή του εδάφους και της διάδοσης που υφίσταται αυτό. Εδώ αυτό φαίνεται παρά την αδρομέρεια του μοντέλου
3. Για τον λόγο Μέγιστες/Ολισθητικές ολικές μετακινήσεις έχουμε ότι στα κτίρια των 10 μέτρων ο ελάχιστος λόγος είναι στο κτίριο άνευ εδάφους Στα κτίρια των 20 μέτρων ο ελάχιστος λόγος είναι στο έδαφος πάχους 20 μέτρων ενώ αμέσως μετά ακολουθεί η επίλυση άνευ εδάφους. Τέλος στα κτίρια των 50 μέτρων ο ελάχιστος λόγος είναι στο πάχος 20 μέτρων. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει μια

ακόμα ένδειξη ότι στην επίλυση με 20 μέτρα πάχος εδάφους η εδαφική στρώση ενδεχόμενα συντονίζεται και το ότι δεν φαίνεται στο κτίριο 10 μέτρων ενδεχομένως να οφείλεται στην αδρομέρεια του παραδείγματος λόγω του κτιρίου που προσομοιώνεται με ένα μονάχα ΠΣ κάτι που δίνει υπερεκτίμηση της δυσκαμψίας.

4. Σε όλες τις περιπτώσεις για τις μέγιστες ολικές επιταχύνσεις αλλά και στη χρονοϊστορία τους φαίνεται ότι η τιμές που λαμβάνουμε όταν έχουμε έδαφος είναι μεγαλύτερες από όταν αγνοούμε το έδαφος. Αυτό αντιτίθεται στην άλλη θεμελιώδη ιδιότητα της Αλληλεπίδρασης Εδάφους Κατασκευής η οποία είναι ότι όταν λαμβάνουμε την εδαφική στρώση ως πιο εύκαμπτο συνολικά σύστημα αναμένουμε μικρότερες επιταχύνσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μοντέλο μας είναι ιδιαίτερα αδρομερές ως προς τη διακριτοποίηση, από το γεγονός ότι έχουμε ένα υλικό κοινό για το κτίριο και το έδαφος αλλά και το γεγονός ότι έχουμε δώσει μέτρο Ελαστικότητας πιο κοντά σε έδαφος παρά μια μέση τιμή αναμενόμενης Ελαστικότητας των υλικών κτιρίου και Έδαφος.
5. Όσο αυξάνει το ύψος της εδαφικής στρώσης όταν έχουμε έδαφος και όσο αυξάνει το ύψος του κτιρίου όταν αγνοούμε το έδαφος η μέγιστη επιτάχυνση μειώνεται. Αυτό είναι λογικό μιας και όσο πιο εύκαμπτη είναι η κατασκευή (λόγω αύξησης πάχους εδάφους ή κτιρίου) τότε η μέγιστη επιτάχυνση αναμένεται μικρότερη.
6. Οι επιταχύνσεις σαν γραφήματα είτε λάβουμε υπ' όψιν το έδαφος είτε όχι ακολουθούν την ίδια κίνηση εν γένει απλά υπάρχει μια μεγέθυνση των τιμών όταν έχουμε το έδαφος. Αυτό δείχνει ότι τα κρίσιμα χρονικά σημεία που η κατασκευή καταπονείται άρα και ο χρόνος πρώτης διαρροής για τον συγκεκριμένο σεισμό είναι ανεξάρτητος του αν ληφθεί η Αλληλεπίδραση Εδάφους Κατασκευής ή όχι.

7. Οι μετακινήσεις σαν γραφήματα για το κτίριο 10 μέτρων ακολουθούν περίπου την ίδια κίνηση εν γένει όμως για το κτίριο 20 μέτρων υπάρχει μια ξεκάθαρη διαφορά στο σύμπλεγμα 20 μέτρων κτίριο και 20 μέτρων έδαφος ενώ για το κτίριο 50 μέτρων υπάρχει ξεκάθαρη διαφορά στα συμπλέγματα 50 μέτρων κτίριο και 20 μέτρων έδαφος και 50 μέτρων κτίριο και 50 μέτρων έδαφος. Αυτό αν συνδυαστεί με το συμπέρασμα 1 δείχνει ότι η κατασκευή αν λειτουργούσε ελαστικά θα συντονιζόταν αλλά διέρρευσε και άλλαξε αρκετά η δυσκαμψία τόσο που άλλαξε ακόμα και η φορά της μετακίνησης.
8. Η απόσβεση στην Ελεύθερη Ταλάντωση σχεδόν παντού είναι άμεση και απότομη και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι λάβαμε ως απόσβεση την απόσβεση του «άπειρου» χώρου και αυτά τα χωρία όπως έχει αποδειχτεί στο προπτυχιακό δεν έχουν ανακλάσεις κυμάτων οπότε λειτουργούν σαν «άπειρος» χώρος και επειδή η προσέγγιση είναι για το κτίριο αδρή άρα η δυσκαμψία του μοντέλου είναι πιο μεγάλη από την πραγματική είναι λογικό το να υπάρχει σχεδόν άμεση απόσβεση στην κίνηση ίσως όμως η πραγματική απόσβεση να ναι ελάχιστα μικρότερη.
9. Οι παλμοί που έχουν οι επιταχύνσεις είναι σχετικά υψίσυχνοι οι περίοδοι ποιοτικά κινούνται μεταξύ 0,4-0,8 δευτερόλεπτα που είναι η συχνοτική περιοχή δύσκαμπτων- μέτριων κατασκευών. Αν λάβουμε τον προσεγγιστικό τύπο υπολογισμού της 1^{ης} ιδιομορφής $T_1=0,075*(20)^{(3/4)}=0,709$ δευτερόλεπτα είναι εντός της περιοχής που εξετάζουμε τότε συνδυάζοντας το 1 και το 7 οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η επίλυση 20 μέτρα πάχος εδάφους και 20 μέτρα κτίριο έχει συντονιστεί και πιθανώς να έχουμε διπλό συντονισμό. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί με ανάλυση Fourier για το έδαφος και το κτίριο.
10. Τέλος παρατηρούμε ότι όπως έχουμε ήδη τονίσει ο υπολογιστικός φόρτος σε σχέση με το ελαστικό πρόβλημα

έχει αυξηθεί κατά τουλάχιστον 100% μιας και για n βήματα μη γραμμικού προβλήματος ένα στον κανονικό γραμμικό αλγόριθμο θέλουμε n επιλύσεις άμα δεν αστοχήσει θέλουμε $2n$ επιλύσεις και βέβαια σε περίπτωση αστοχίας οι επιλύσεις αυξάνονται γρήγορα. Ενδεικτικά για ένα υπολογιστικό χωρίο 1500 βαθμών ελευθερίας περίπου στον γραμμικό κώδικα χρειάστηκαν περίπου 45 λεπτά στον αντίστοιχο μη γραμμικό κώδικα όπου η κατασκευή αστόχησε χρειάστηκαν περίπου 2 ώρες. Αυτό καταδεικνύει την ανάγκη για βελτίωση του κώδικα όπως επί παραδείγματι την διατήρηση του Ελαστικού Ισοδύναμου Δυναμικού μητρώου στιβαρότητας για αυτόματη χρήση του όταν η κατασκευή συμπεριφέρεται Ελαστικά.

Και για το τέλος παρατίθενται προτάσεις για μελλοντική έρευνα- βελτίωση της εφαρμογής.

1. Στο προσομοίωμα του κτιρίου θα πρέπει να υπάρξει μεγαλύτερη ακρίβεια ώστε να μην υπερισχύει η διατμητική συμπεριφορά που επιτυγχάνεται είτε με την χρησιμοποίηση ΠΣ δοκών με κατανεμημένη πλαστικότητα ή με την χρησιμοποίηση εξαεδρικών ΠΣ με μεγάλη πυκνότητα του δικτύου.
2. Στην προσομοίωση του εδάφους θα πρέπει να υπάρξουν διαφορετικά Υλικά (μέτρα E, H, ν) για το έδαφος και την κατασκευή και μάλιστα για μεν το κτίριο να έχουμε κριτήριο Von Mises αλλά για το έδαφος είτε να κρατήσουμε το Von Mises είτε σε περίπτωση μέγιστης ακρίβειας να χρησιμοποιήσουμε ακριβέστερο κριτήριο διαρροής ανάλογα με τις απαιτήσεις μας. Τέτοιες μπορεί να ναι η ιξώδης ελαστικότητα η μη γραμμική συμπεριφορά σε μεγάλες παραμορφώσεις η μικροδομή του εδάφους κλπ.
3. Είναι σημαντικό να βελτιστοποιηθεί ο κώδικας για ακόμα καλύτερα αποτελέσματα στο πεδίο του υπολογιστικού

κόστους. Όπως η χρησιμοποίηση ευρεστικών αλγορίθμων για μητρώα αραιά (sparse) εκτός του έτοιμου πακέτου της Matlab. Ακόμα χρήσιμη θα είναι η διατήρηση του Ελαστικού Ισοδύναμου Δυναμικού μητρώου στιβαρότητας για αυτόματη χρήση του όταν η κατασκευή συμπεριφέρεται Ελαστικά.

4. Είναι ακόμα σημαντικό να γίνει αντίστροφη ανάλυση Fourier ώστε να μεταφέρει το σήμα σε φύσει η θέση βράχο και να βγάλει παρόμοια αποτελέσματα και να συγκρίνει την επιρροή της αλλοίωσης του σήματος λόγω κυματικής διάδοσης
5. Μια ακόμα χρήσιμη σύγκριση είναι αυτή που προκύπτει από το διάγραμμα του διατμητικού προβόλου. Συγκεκριμένα μπορούμε σε μια πιο ακριβή ανάλυση να υπολογίσουμε την διατμητική παραμόρφωση της στρώσης και να βρούμε το G από το γράφημα για την ισοδύναμη ελαστική ανάλυση και να το συγκρίνουμε με τα στοιχεία του εφαπτομενικού συνεκτικού μητρώου (consistent tangent matrix) να δούμε τις διαφορές όπως και να συγκρίνουμε τις ιδιομορφικές αποσβέσεις με αυτές που λαμβάνουμε από το γράφημα για την ισοδύναμη ελαστική ανάλυση.

Ευχαριστίες (ή αλλιώς Τιμώντας τον Δάσκαλο)

Ομνυμι ηγήσασθαι τον διδάξαντά με την τέχνην ταύτην ίσα γενέτησιν ομοίσιν

Ορκίζομαι να συμπεριφέρομαι στον άνθρωπο που με δίδαξε την τέχνη αυτή ίσα και όμοια με τους γονείς μου.

Από τον όρκο του Ιπποκράτη

Θα ήθελα να ευχαριστήσω στο σημείο αυτό

1. Τον καθηγητή κ Μ. Παπαδρακάκη ο οποίος πρώτα από όλα ως τώρα αποτελεί για μένα ένας σεβαστός και άξιος Δάσκαλος που με δίδαξε την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων με έναν τρόπο που αποδεικνύει όχι μόνο τις γνώσεις του πέρα από το αντικείμενο αλλά και το ήθος που πρέπει να έχει ένας σωστός Δάσκαλος (υπομονή, μεθοδικότητα και κυρίως έμφαση στην επικοινωνία με τους φοιτητές). Στη συνέχεια και στο πλαίσιο αυτής της εργασίας (και ευχόμενος αυτό να συνεχιστεί στο μέλλον με μένα) ήταν ο ορισμός του τέλειου συνεργάτη (το γεγονός ότι πάντοτε σε οποιαδήποτε στιγμή μπορούσα να λύσω μια απορία εν τη γενέσει της είναι για μένα ό, τι καλύτερο μπορεί να έχει κάποιος νέος από τον Δάσκαλο αλλά και επιστημονικό συνεργάτη του). Τέλος θα ήθελα να τον ευχαριστήσω και για την τιμή που μου έδωσε ώστε να συμμετάσχω ως σύνεδρος και μέλος της οργάνωσης στο συνέδριο COMPDYN 2013 στην Κω όπου έμαθα πολλά πράγματα στην επιστήμη της υπολογιστικής μηχανικής αλλά και απέκτησα σημαντικές εμπειρίες για το μέλλον. Με την ίδια ανυπομονησία περιμένω να συλλέξω σημαντικές εμπειρίες στην επόμενη μεγάλη διοργάνωση του COMPDYN 2015 στην Κρήτη. Ακόμα η αναγόρευσή μου ως Υποψηφίου Διδάκτορα υπό την επίβλεψή του αποτελεί ιδιαίτερη τιμή για εμένα και ένα από τα

«παράσημα» στην ακαδημαϊκή μου πορεία το οποίο είναι το έναυσμα και το κίνητρο για να προχωρήσω στις ακαδημαϊκές ατραπούς της γνώσης με περισσότερη χαρά και σθένος.

2. Όλους τους καθηγητές μου σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης για την συνεισφορά τους σε αυτό που λέγεται διαμόρφωση προσωπικότητας, εκπαίδευση αλλά και παιδεία, μόρφωση.
3. Τους γονείς μου και την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράσταση και για την βοήθεια τους κάθε στιγμή όποτε και αν αυτό χρειάστηκε.

Βιβλιογραφία

1. Σημειώσεις Μη Γραμμικών Πεπερασμένων Στοιχείων
Μ Παπαδρακάκη
2. Plasticity Modeling And Computation Rolando Borja
Springer Publications 2013
3. Computational Methods For Plasticity Theory And
Applications EA De Souza Neto D Peric DRJ Owen
Wiley Publications 2008
4. Continuum Mechanics AJM Spencer Dover
Publications Mineola New York
5. Dynamics of Structures Clough-Penzien Berkley
Publications 1995
6. Plasticity Theory Jacob Lubliner Berkley Publications
1990 and 2006
7. Σημειώσεις Υπολογιστικής Δυναμικής Μιχάλη
Φραγκιαδάκη Μεταπτυχιακό ΔΠΜΣ Δομοστατικός
Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών ΕΜΠ 2015
8. Σημειώσεις Αλληλεπίδρασης Εδάφους Κατασκευής
Γεώργιος Γκαζέτας εκδόσεις ΕΜΠ 2010
9. Σημειώσεις Εδαφοδυναμικής Γεώργιος Γκαζέτας
εκδόσεις ΕΜΠ 2007
10. Σημειώσεις Αριθμητικής Ολοκλήρωσης Δυναμικής
Μ Παπαδρακάκη
11. Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των Πεπερασμένων
Στοιχείων Μανόλης Παπαδρακάκης εκδόσεις
Παπασωτηρίου 2001
12. Δυναμική των κατασκευών τόμοι 1 και 2 Ι. Θ.
Κατσικαδέλης εκδόσεις Συμμετρία 2007
13. Δυναμική των κατασκευών Anil K Chopra εκδόσεις
Γκιούρδας 2007
14. Συνοριακά Στοιχεία Ι. Θ. Κατσικαδέλης εκδόσεις
Συμμετρία 2007

15. Klaus Jurgen Bathe Finite Element Procedures
Prentice Hall Editions 1996
16. Edward Wilson Static and Dynamic Analysis of
Structures chapter 16 από τον δικτυακό τόπο του
καθηγητή <http://www.edwilson.org/Book/book.htm>
17. Performance of an implicit time integration scheme
in the analysis of wave propagations. Gunwoo Noh,
Seounghyun Ham, Klaus-Jurgen Bathe Accepted 14
February 2013 Elsevier Computers and Structures
Journal
18. Insight into an implicit time integration scheme for
structural dynamics Klaus-Jurgen Bathe, Gunwoo Noh
Accepted 23 January 2012 Elsevier Computers and
Structures Journal
19. On the effective seismic input for non linear Soil
Structure Interaction Systems Jacobo Bielak Paul
Christiano Revised 3 August 1983 Earthquake
Engineering and Structural Dynamics Journal
20. Implementation of the effective seismic input for
Soil Structure Interaction Systems Marco Cremonini
Jacobo Bielak Paul Christiano Revised 30 October 1987
Earthquake Engineering and Structural Dynamics
Journal
21. Treatment of seismic input and boundary conditions
in non linear analysis of a bridge ground system. Yuyi
Zhang Zhaohui Yang Jacobo Bielak Joel P. Conte
Ahmed Elgamal presented at 16th ASCE Engineering
Mechanics Conference July 16-18 University of
Washington Seattle
22. Dynamic wave–soil–structure interaction analysis in
the time domain J.L. Wegner M.M. Yao X. Zhang
accepted 25 April 2005 Elsevier Computers and
Structures Journal
23. From Wilson- to quasi-Wilson- and returning back
A. Soroushian, J. Farjoodi, K. Bargi, A.Y. Reziakolaei,

- A. Saaed, M.M. Sharifpour, M. Rajabi, M.Arghavani,
A. Sabzei Manuscript Number CAS-D-13-00217 Elsevier
Computers and Structures Journal
24. A simplified 3D model for soil-structure interaction with radiation damping and free field input V. Saouma · F. Miura · G. Lebon · Y. Yagome Published online: 2 April 2011 Springer Publications
 25. A simple approach to integration of acceleration data for dynamic soil–structure interaction analysis J. Yanga,_, J.B. Lib, G. Lin Accepted 20 December 2005 Elsevier Soil Dynamics and Earthquake Engineering Journal
 26. Three-dimensional dynamic soil structure interaction analysis in the time domain Xiong Zhang J. L. Wenger J. B. Haddow Earthquake Engineering and Structural Dynamics Journal
 27. Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics A simple implicit time integration scheme Klaus Jurgen Bathe Available online 17 November 2006 Elsevier Computers and Structures Journal
 28. Self-adapting absorbing boundary conditions for the wave equation I. Shevchenko B. Wohlmuth Available online 10 January 2012 Elsevier Wave Motion Journal
 29. Sergei M Aleynikov Spatial Contact Problems in Geotechnics with Boundary Element Method Springer Publications
 30. Investigation of the NonLinear Time Dependent Soil Behavior Alexandros N Kalos. PhD Dessertation NTUA 2014

