Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Σύνδεσμοι-Υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά με χρήση *Matlab*

Ονοματεπώνυμο: **Νίκος Κουδούνας**

Επιβλέπων Καθηγητής: **Ιωάννης Πολυράκης**

29 Απριλίου 2015

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει βασιστεί στην έρευνα του Καθηγητή Ιωάννη Πολυράκη πάνω στους συνδέσμους-υπόχωρους σε χώρους συναρτήσεων. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι εάν ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος ενός γραμμικού συνδέσμου είναι και αυτός γραμμικός σύνδεσμος. Αν δεν είναι θα παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε στο $Matlab$ έναν ελάχιστο(ή ελαχιστικό) γραμμικό σύνδεσμο που να περιέχει τον υπόχωρο αυτόν. Στο πρώτο κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς για την πιο εύκολη κατανόηση της μελέτης των μερικά διατεταγμένων διανυσματικών χώρων και θα εισάγουμε την έννοια της θετικής βάσης. Σύμφωνα με το θεώρημα $Choquet-Kendall$ ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν έχει θετική βάση.Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την θετική βάση,αν υπάρχει. Έτσι γνωρίζοντας τη θετική βάση που παράγει τον υπόχωρο μπορούμε να προσδιορίσουμε όλα του τα στοιχεία ως άθροισμα γραμμικών συνδυασμών στοιχείων της θετικής βάσης. Στο δεύτερο κεφάλαιο που αποτελεί και το κύριο μέρος αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε με την περίπτωση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $C(\Omega)$ όπου το Ω είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος $Hausdorf$.Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το Ω είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και άρα $C(\Omega) = \mathbb{R}^n$. Αν γνωρίζουμε τα στοιχεία από τα οποία παράγεται ένας υπόχωρος X του $\mathbb{R}^n$ ο οποίος όμως δεν είναι γραμμικός σύνδεσμος με τη βοήθεια των θεωρημάτων από τα $[2], [3], [4]$ θα προσπαθήσουμε να υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο για τον προσδιορισμό ενός γραμμικού συνδέσμου ο οποίος περιέχει τον υπόχωρο X καθώς και μία θετική βάση του με χρήση του υπολογιστικού προγράμματος $Matlab$. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια της βασικής συνάρτησης β η οποία χρησιμοποιείται στα παραπάνω θεωρήματα.Στο τρίτο και τελευταίο μέρος θα δώσουμε μία εφαρμογή όλων των παραπάνω στα χρηματοοικονομικά. Πιο συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με το αν μία αγορά που αποτελείται από πεπερασμένους στον αριθμό τίτλους είναι πλήρης ή όχι. Στην περίπτωση που δεν είναι πάλι με τη βοήθεια του $Matlab$ θα κατασκευάσουμε μία πλήρη αγορά η οποία θα περιλαμβάνει την αρχική. Φτάνοντας στο τέλος της εισαγωγής θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή μου Ιωάννη Πολυράκη για την όλη βοήθειά του και για τον χρόνο που αφιέρωσε για την εκπλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Σύνδεσμοι-υπόχωροι Διατεταγμένων χώρων

1.1 Διατεταγμένοι χώροι

Ένα σύνολο εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αποκτά αλγεβρική δομή(Διανυσματικός χώρος) και με την σχέση '$\geqslant$' δομή διάταξης(Διατεταγμένο σύνολο).Ένα διατεταγμένο σύνολο μπορεί να είναι είτε ολικά διατεταγμένο αν κάθε δύο του στοιχεία συγκρίνονται είτε μερικά διατεταγμένο αν δεν συγκρίνονται όλα μεταξύ τους. Ο χώρος όλων των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα ολικά διατεταγμένου συνόλου ενώ για $n \in \mathbb{N}$ ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο.Εφοδιάζοντας ένα σύνολο και με τις δύο παραπάνω δομές έχουμε ένα μερικά διατεταγμένο διανυσματικό χώρο.

Πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος ονομάζεται μία τριάδα όπου X είναι ένα σύνολο,+: $X \otimes X \to X$ μία εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και $*$: $X \otimes X \to X$ μία εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες 8 ιδιότητες :

- (i) (x + y) + z = x +(y + z) για κάθε x, y, z $\in$X
- (ii) x + y = y +x για κάθε $x, y \in$ X
- (iii) $\exists$ ένα 0 του X, που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε x + 0 = x για κάθε x $\in$ X
- (iv) Για κάθε x $\in$ X υπάρχει ένα στοιχείο –x του X, που ονομάζεται αντίθετο του x ώστε $x + (-x) = (-x) + x = 0$
- (v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ για κάθε x, y$\in$ X και $\lambda \in \mathbb{R}$

- (vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ για κάθε x∈X και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ για κάθε x ∈ X και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- (viii) $1x = x$ για κάθε x ∈ X

Ένα σύνολο Υ υποσύνολο του X καλείται **διανυσματικός (ή γραμμικός) υπόχωρος** του X αν για κάθε x,y ∈ Υ ισχύει ότι :

- (i) x + y ∈ Y
- (ii) μy ∈ Υ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι αν ο Υ είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X, τότε με τον περιορισμό των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στον Υ η τριάδα (Υ,+,∗) είναι διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το μηδέν στον X.

Ορισμός 1.1.1 *Έστω X διανυσματικός χώρος.Εφοδιάζουμε τον X με μία σχέση μερικής διάταξης '⩾' που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :*

- *(i) Για κάθε $x \in X$ $x \geq x$ (ανακλαστική)*
- *(ii) Για κάθε$x, y \in X$ με $x \geq y$ και $y \geq x \Rightarrow x = y$ (αντισυμμετρική)*
- *(iii) Για κάθε$x, y, z \in X$ με $x \geq y$ και $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (μεταβατική)*

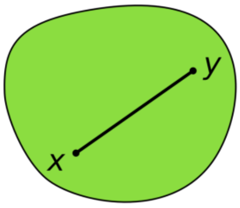
Αν η '⩾' είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή του X με την έννοια ότι ικανοποιείται η έξης τέταρτη ιδιότητα :

- *(iv) Για κάθε $x, y, z \in X$ και $\mu \geq 0 \Rightarrow x + z \geq y + z$ και $\mu x \geq \mu y$*

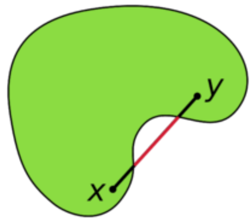
*Τότε λέμε ότι το ζευγάρι (X,⩾) είναι ένας **μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος**.*

Έστω τώρα X,Υ διανυσματικοί χώροι.Μία απεικόνιση $T : X \to Y$ ονομάζεται **γραμμικός τελεστής** αν και μόνο αν $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και$a, b \in \mathbb{R}$.Ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ συμβολίζεται με $\mathcal{L}(X, Y)$ και είναι διανυσματικός χώρος αφού για κάθε $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda T + S)(x) = (\lambda T)(x) + S(x) = \lambda T(x) + S(x) = T(\lambda x) + S(x)$ και άρα ο $(\lambda T + S) : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής $\Rightarrow \lambda T + S \in \mathcal{L}(X, Y)$.Ακόμα όπως θα δούμε παρακάτω ο $\mathcal{L}(X, Y)$ είναι μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος.

Ένα υποσύνολο K ενός διανυσματικού χώρου X καλείται κυρτό αν για κάθε δύο στοιχεία του K το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει ανήκει στο K, δηλαδή για κάθε $x, y \in$ K και κάθε $\lambda \in [0,1]$ έπεται ότι το $\lambda x + (1-\lambda)y \in$ K.



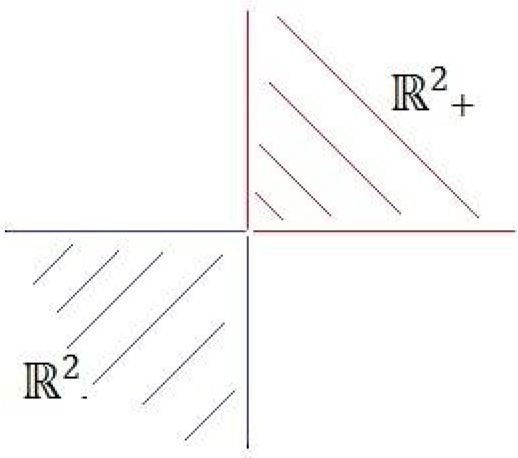
(α′) Κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$



(β′) Μη-κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός 1.1.2 *Ένα κυρτό υποσύνολο P ενός διανυσματικού χώρου X θα λέγεται **κώνος** αν για κάθε $x \in X$ το $\lambda x \in P$ για κάθε $\lambda \geq 0$. Από τον ορισμό έπεται ότι το $0 \in P$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $P \cap (-P) = \{0\}$ τότε ο P είναι οξύς κώνος του X.*

Έστω X μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και $x, y \in$ X. Θα λέμε ότι **το x είναι μεγαλύτερο από το y** αν $x \geq y$ και $x \neq y$.Το σύνολο των σημείων που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν συμβολίζεται με X_+. Το σύνολο $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ καλείται ο **θετικός κώνος** του X και είναι οξύς. Αν τώρα ο X είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα ώστε να ισχύει ότι $0 \leq x \leq y$ και υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $\|x\| \leq c\|y\|$,τότε ο X_+ ονομάζεται **κανονικός(normal)**. Ένα γνωστό παράδειγμα είναι ο θετικός κώνος $\mathbb{R}^2_+$ του $\mathbb{R}^2$ ο οποίος είναι οξύς αφού $\mathbb{R}^2_+ \cap -(\mathbb{R}^2_+) = \{0\}$



Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι $P \subseteq X$ και P οξύς κώνος του X,τότε μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση μερικής διάταξης $\geqslant$ στον X ως εξής:

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in P.$$

Παρατηρούμε ότι $P = \{x \in X : x \geq 0\} = X_+$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται και οι 4 ιδιότητες του ορισμού και άρα ο $(X, \geqslant)$ είναι διανυσματικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P.Αν ο P είναι κώνος αλλά όχι οξύς,τότε ο P ορίζει μία σχέση μερικής διάταξης η οποία όμως δεν είναι αντισυμμετρική. Γενικά αν $P \subseteq X$ και P κώνος του X το σύνολο $P - P$ είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τον P και μάλιστα αν $P - P = X$ λέμε ότι ο κώνος P παράγει τον X.

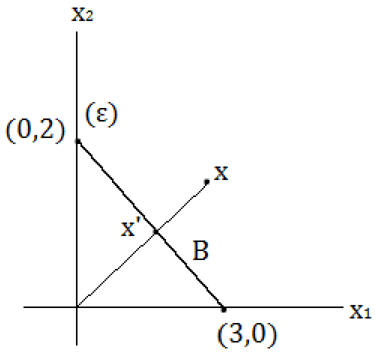
Έστω τώρα $w \in X$ και $D \subseteq$ X.Το w καλείται **άνω φράγμα** του D αν για κάθε $d \in D$ ισχύει ότι $w \geq d$ (αντίστοιχα αν $w \leq d$ για κάθε $d \in D$ το w ονομάζεται **κάτω φράγμα**).Αν τώρα για κάθε άνω φράγμα $z \in$ X του D ισχύει ότι $z \geq w$ τότε το w καλείται το **ελάχιστο άνω φράγμα (supremum)** του D και συμβολίζεται με $w = sup(D)$.Αντίστοιχα ορίζεται το μέγιστο **κάτω φράγμα (infimum)** του D και συμβολίζεται με $inf(D)$.Τα $supremum$ και το $infimum$ δύο στοιχείων $x, y \in D$, αν υπάρχουν, συμβολίζονται με $sup(x, y) = x \vee y$ και $inf(x, y) = x \wedge y$.

Ορισμός 1.1.3 *Έστω X διανυσματικός χώρος και P κώνος που παράγει τον X με $P \neq \{0\}$. Ένα $B \subseteq P$ καλείται βάση του κώνου $P(simplex)$ αν το B είναι κυρτό και για κάθε $x \in P$ με $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x \geq 0$ που εξαρτάται από το x και ισχύει ότι $\lambda_x x \in B$.Από τον ορισμό έπεται ότι το 0 δεν ανήκει στη βάση B.*

Παράδειγμα1.1.1:Στο σχήμα βλέπουμε τον θετικό κώνο του $\mathbb{R}^2$ με βάση το σύνολο

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1\}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^2_+$ η τομή της ευθείας ε με την ευθεία που περνάει από το 0 και το x είναι το σημείο $\acute{x} = \lambda_x x$,όπου το λ_x είναι μοναδικό.



1.2 Γραμμικοί σύνδεσμοι, υποσύνδεσμοι και σύνδεσμοι-υπόχωροι

Ορισμός 1.2.1 ***Γραμμικός σύνδεσμος(ή χώρος Riesz ή lattice)*** *ονομάζεται ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος X με την ιδιότητα ότι για κάθε ζεύγος $x, y \in X$ υπάρχει το supremum και το $infimum$ του $\{x, y\}$,δηλαδή*

$$x \vee y = w \in X, x \wedge y = u \in X.$$

Παραδείγματα:Αν $k \in \mathbb{N}$ τότε ο $\mathbb{R}^k$ με τη σημειακή διάταξη είναι γραμμικός σύνδεσμος.Με την έννοια σημειακή διάταξη εννοούμε ότι για $x, y \in \mathbb{R}^k$ το x είναι μεγαλύτερο από το y αν και μόνο αν $x_i \geq y_i$, για κάθε $i \in \{1, \ldots k\}$.Επίσης για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$ υπάρχουν $z, w \in \mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $z_i = x_i \vee y_i$ και $w_i = x_i \wedge y_i$,για κάθε $i \in \{1, \ldots k\}$ και άρα ο $\mathbb{R}^k$ είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Γενικά κλασσικά παραδείγματα γραμμικών συνδέσμων είναι διάφοροι χώροι συναρτήσεων.Με τον όρο χώρος συναρτήσεων εννοούμε έναν διανυσματικό χώρο

X που περιέχει ως στοιχεία του πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο σύνολο Ω ($f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$).Έτσι για κάθε $f, g \in$ X ορίζουμε την σημειακή διάταξη σύμφωνα με την οποία $f \leq g$ αν και μόνο αν f(ω)$\leq g$(ω) για κάθε ω $\in \Omega$. Αφού f και g έχουν τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών οι συναρτήσεις $[f \vee g]$(ω)$:= max\{f(\omega), g(\omega)\}$ και $[f \wedge g]$(ω)$:= min\{f(\omega), g(\omega)\}$ υπάρχουν και ανήκουν στον X. Στην συνέχεια ακολουθούν κάποια παραδείγματα :

- Ο $\mathbb{R}^{\Omega}$,ως ο χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο Ω
- $C\big[\Omega\big]$,ως ο χώρος όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένες σε έναν τοπολογικό χώρο Ω
- Ο ℓ_p με $p \in \big[1, \infty\big)$ ως ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big|a_i^p\big| < \infty$ και
- ο $\ell_\infty = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid sup|a_n| < \infty : n \in \ \mathbb{N}\}$ ως χώρος όλων των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών
- c_0 ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών με $lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- Ο χώρος $L_p(\Omega)$ με $1 \leq p < \infty$ ως ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\int_\Omega |f|^p \, d\omega < \infty$ και (Ω, F, p) χώρος μέτρου
- Ο $\mathcal{L}(X, Y)$ ως ο χώρος όλων των γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ με την εξής διάταξη: αν $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ τότε $T \geq S$ αν και μόνο αν $T(x) \geq S(x)$ για κάθε $x \in X_+$.

Ορισμός 1.2.2 *Αν τώρα ο* X *είναι γραμμικός σύνδεσμος για κάθε* $x \in X$ *ορίζουμε τους παρακάτω τελεστές με πεδίο ορισμού τον* X *και πεδίο τιμών τον θετικό κώνο* X_+*:*

- *Θετικό μέρος του* $x^+ = x \vee 0$
- *Αρνητικό μέρος του* $x : x^- = (-x) \vee 0$
- *Απόλυτη τιμή του* $x : |x| = x \vee (-x)$

Γενικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διατεταγμένοι υπόχωροι ενός μερικά διατεταγμένου διανυσματικού χώρου X. Έστω E υπόχωρος του X.Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο E είναι διατεταγμένος χώρος με την επαγόμενη διάταξη που συμβολίζεται με $\geqslant_E$ και έχουμε ότι για κάθε $x, y \in E : x \geqslant_E y \Leftrightarrow x \geq y$.Για λόγους απλότητας θα συμβολίζουμε την $\geqslant_E$ με $\geqslant$.Ο θετικός κώνος του E ορίζεται ως $E_+ = E \cap X_+$.
Κάθε γραμμικός υπόχωρος του X που είναι διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη καλείται **διατεταγμένος υπόχωρος** του X.Επίσης αν ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος και για κάθε $x, y \in E$ το $x \vee y \in E$ και το $x \wedge y \in E$ τότε λέμε ότι ο E είναι **γραμμικός υποσύνδεσμος (linear sublattice)** του X.

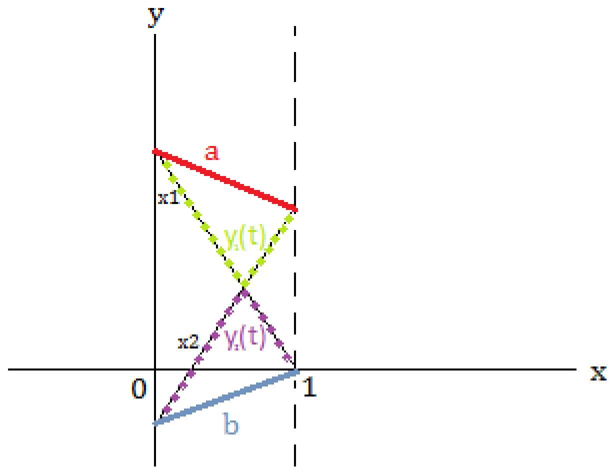
Παρατήρηση:Αν ο X είναι μερικά διατεταγμένος χώρος και E διατεταγμένος υπόχωρος του X με $x, y \in$ E,τότε η έννοια του $sup(\{x, y\})$ στον X και η έννοια του $sup(\{x, y\})$ στον E διαφέρουν (αντίστοιχα και το $inf(\{x, y\})$). Το $sup(\{x, y\})$ στον E θα συμβολίζετε με $sup_E(\{x, y\})$ και το $inf(\{x, y\})$ στον E με $inf_E(\{x, y\})$. Η διαφορά είναι ότι υπάρχει περίπτωση το $sup_E(\{x, y\})$ και το $inf_E(\{x, y\})$ να μην υπάρχουν,ακόμα και αν ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος. Αν υπάρχουν, τότε ο E ονομάζεται **σύνδεσμος-υπόχωρος (lattice-subspace)** του X και ισχύει ότι

$$sup_E(\{x, y\}) \geq sup(\{x, y\}) \geq inf(\{x, y\}) \geq inf_E(\{x, y\})$$

Στην περίπτωση τώρα που ισχύει ότι $sup_E(\{x, y\}) = sup(\{x, y\})$ και $inf_E(\{x, y\}) = inf(\{x, y\})$ ο E είναι υποσύνδεσμος του X. Γενικά κάθε υποσύνδεσμος E του X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος,αφού τα $x \vee y, x \wedge y \in E$,ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα1.2.1:Έστω ότι ο X είναι ο χώρος όλων των πολυωνύμων πρώτου βαθμού στο $[0, 1]$,δηλαδή $X = \{x(t) = at + b \mid a, b \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$.Ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $C[0, 1]$.

Όπως βλέπουμε στο σχήμα αν $x_1, x_2 \in$ X τότε $sup_X(x_1, x_2) = a(t) \in$ X και $inf_X(x_1, x_2) = b(t) \in$ X και άρα ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος. Αλλά ο X δεν είναι υποσύνδεσμος αφού $a(t) = sup_X(x_1, x_2) \neq sup(x_1, x_2) = y_1(t) \in C[0, 1]$ και $b(t) = inf_X(x_1, x_2) \neq inf(x_1, x_2) = y_2(t) \in C[0, 1]$.



1.3 Θετικές Βάσεις

Υποθέτουμε πάλι ότι ο X είναι διανυσματικός χώρος.Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $x_1, x_2, .., x_n$ του X λέγεται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ να έπεται αναγκαστικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.Γενικά για να είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητο πρέπει κάθε πεπερασμένο υποσυνολό του να είναι γραμμικά ανεξάρτητο,διαφορετικά το σύνολο αυτό λέγεται γραμμικά εξαρτημένο. Έστω $G = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq X$.Το G ονομάζεται **βάση Hammel** του X αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο και τα στοιχεία του παράγουν όλο τον X και συμβολίζουμε ως εξής:

$$X = \Big\langle \{g_1, \ldots, g_n\} \Big\rangle$$

Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου X ορίζεται να είναι η πληθικότητα μιας *Hammel* βάσης του και συμβολίζεται με $dim(X)$.Ένα στοιχείο του x του X μπορεί να γραφτεί ως πεπερασμένο άθροισμα γραμμικών συνδυασμών στοιχείων της *Hammel* βάσης. Αν τώρα κάθε x του X μπορεί να γραφτεί ως άπειρο άθροισμα γραμμικών συνδυασμών της βάσης τότε η βάση ονομάζεται βάση *Schauder*.Οι *Schauder* βάσεις είναι καταλληλότερες για την περιγραφή απειροδιάστατων διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 1.3.1 *Ένα σύνολο* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\} \subseteq X$ *καλείται θετική βάση του* X *αν:*

(i) *είναι βάση Hammel (ή Shauder)*

(ii) *για κάθε* $x \in X_+$ *ισχύει ότι* $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$,*όπου* $\lambda_i \geq 0$ *για κάθε* $i = \{1, 2, ..., n\}$

Αν ισχύουν τα παραπάνω η θετική βάση αυτή είναι μοναδική με την έννοια ότι αν $B = \{b_n\}$ είναι και αυτή βάση του X τότε κάθε στοιχείο b_i είναι θετικό πολλαπλάσιο κάποιου e_j, όπου $j = \{1, 2, \dots\}$.

Παράδειγμα1.3.1:Αν $X = c_0$ με τη σημειακή διάταξη τότε η ακολουθία $\{e_n\}$(όπου στην i-θέση έχουμε 1 και αλλού 0)είναι θετική βάση του X και άρα ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος. Πράγματι έστω $x = \frac{1}{n}$ τότε $x = 1e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \dots + \frac{1}{n}e_n + \dots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}e_i$ όπου $\lambda_i > 0$ για κάθε $i = \{1, 2, .., n\}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα $Choquet - Kendall$ στο $[5]$ αν ο θετικός κώνος X_+ είναι κανονικός και παράγει τον X $(dimX = n)$ τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν μια βάση B του X_+ είναι ένα $(n-1)$-διάστατο $simplex$. Σε αυτήν την περίπτωση τα στοιχεία $\{b_1, \dots, b_n\}$ της B αποτελούν κορυφές ενός κυρτού πολυγώνου και ορίζουν μία θετική βάση για τον X_+.

Πρόταση 1.3.2 *(Choquet−Kendall):Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος που παράγεται από τον κλειστό κώνο* X_+*,τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν έχει θετική βάση.*

Αν για παράδειγμα ο E είναι διάστασης 2 και ο E_+ είναι κλειστός και παράγει τον E τότε ο E είναι γραμμικός σύνδεσμος.Πράγματι κάθε βάση B για τον E_+ είναι ένα κλειστό ευθύγραμμο τμήμα(όπως στο Παράδειγμα1.1.1),συνεπώς η B είναι $1 - simplex$.

Ορισμός 1.3.3 *Έστω τώρα Υ ένας υπόχωρος του C(Ω) με βάση* $B = \{b_n\}$*.Για δεδομένο* $t \in \Omega$ *και* $m \in \mathbb{N}$ *αν* $b_m(t) \neq 0$ *και* $b_n(t) = 0$ *για κάθε* $n \neq m$ *τότε λέμε ότι το σημείο t είναι m-κόμβος(ή πιο απλα κόμβος) της βάσης B.Αν τώρα για κάθε n υπάρχει ένας n-κόμβος* t_n *της B,τότε λέμε ότι η B είναι βάση του Υ με κόμβους και ότι η* $\{t_n\}$ *είναι ακολουθία κόμβων της* $\{b_n\}$

Κεφάλαιο 2

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $C(\Omega)$

2.1 Σύνδεσμοι-υπόχωροι του $C(\Omega)$ και θετικές βάσεις

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $C(\Omega)$,ορισμένες σε έναν συμπαγές τοπολογικό χώρο Ω. Ουσιαστικά ενα στοιχείο $f \in C(\Omega)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Ω και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.Ο $C(\Omega)$ με την διάταξη που ορίσαμε παραπάνω είναι γραμμικός σύνδεσμος και άρα για κάθε $f, g \in C(\Omega)$ υπάρχει και το $supremum$ και το $infimum$. Μία θετική βάση του $C(\Omega)$ αποτελείται απο συνεχείς πραγματικές και γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού πάλι το Ω και κάθε $f \in C(\Omega)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών.

Θεώρημα 2.1.1 *(2.1 στο [2]):Έστω Υ διατεταγμένος κλειστός υπόχωρος του $C(\Omega)$ και $\{bn\}_{n\in\mathbb{N}}$ βάση του Υ που αποτελείται από θετικές συναρτήσεις. Τότε αν*

1. *Η $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι θετική βάση του Υ έχουμε ότι*
   - (i) *Για κάθε m υπάρχει ακολουθία $\{\omega_n\} \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε $lim_{n\to\infty}\frac{b_i(\omega_n)}{b_m(\omega_n)} = 0$ για κάθε $i \neq m$ και*
   - (ii) *$\exists$ ακολουθία $\{t_n\} \subseteq \Omega$ ώστε $t_n \in suppb_n$ και $b_m(t_n) = 0$ για $m \neq n$*
2. *Αν $\{t_n\}$ ακολουθία κόμβων της $\{b_n\}$,τότε η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση του Υ και για κάθε $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \in \Upsilon$ έχουμε ότι $\lambda_i = \frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$ για κάθε i.*

Απόδειξη:

(1) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$.θέτουμε $z_k = -\frac{1}{k}b_m + \sum\limits_{i=1, i\neq m}^{k} b_i$.Αφού η $\{b_m\}$ είναι θετική βάση το $z_k \notin Y_+$ και άρα υπάρχει ακολουθία στοιχειών του Ω,$\{\omega_n\}$ που εξαρτάται από το m τέτοια ώστε $z_k(\omega_k) < 0$ για κάθε k.Έστω $m = 1 \Rightarrow 0 \leq \sum\limits_{i=1}^{k} b_i < \frac{1}{k}b_1(\omega_n)$ και επειδή για κάθε n,$b_1(\omega_n) > 0$ έπεται ότι $0 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i(\omega_k)}{b_1(\omega_k)} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leq \frac{b_i(\omega_k)}{b_1(\omega_k)} \leq \frac{1}{k}$για κάθε $i \neq 1$ άρα $\exists\{\omega_n\}$ τ.ω. $lim_{n\to\infty}\frac{b_i(\omega_k)}{b_1(\omega_k)} = 0, \forall i \neq 1$.Ομοίως για κάθε m συνεπάγεται ότι $\exists\{\omega_n\} \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε $lim_{n\to\infty}\frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} = 0$ για κάθε $i \neq m$. Επίσης αν t_1 οριακό σημείο της $\{\omega_n\}$ με $t_1 = lim_{l\to\infty}\{\omega_{ln}\}$ τότε $lim_{n\to\infty}\frac{b_i(\omega_k)}{b_1(\omega_k)} = 0$ και αφού $b_i(\omega_{ln}) \to b_i(t_1)$ και $b_1(\omega_{ln}) \to b_1(t_1)$ έχουμε ότι $b_i(t_1) = 0$ για κάθε $i \neq 1$. Ομοίως για κάθε t_m ισχύει ότι $b_i(t_m) = 0$ για $i \neq m$.

(2) Έστω t_n ακολουθία κόμβων της $\{b_n\}$ τότε για κάθε $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \in Y$ συνεπάγεται ότι $\lambda_i = \frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$ αφού $b_i(t_n) = 0$ για κάθε $i \neq n$ και άρα κάθε $\lambda_i \geq 0$ οπότε η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση.

Πρόταση 2.1.2 (2.2 *στο* [2])*Έστω X σύνδεσμος-υπόχωρος του C(Ω) και* $\{b_n\}$ *θετική βάση. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο X είναι υποσύνδεσμος του C(Ω)*

(ii) *αν* $b_m(t) > 0$ *για κάποιο t και m, τότε το t είναι ένας m-κόμβος της βάσης* $\{bn\}$

Απόδειξη:

- $(i) \to (ii)$Έστω X είναι υποσύνδεσμος του $C(\Omega)$ και για κάποιο m και t ισχύει ότι $b_m(t) > 0$. Θα δείξουμε ότι το t είναι ένας m-κόμβος της βάσης $\{b_n\}$,δηλαδή ότι για $i \neq m$ ισχύει ότι $b_i(t) = 0$. Έστω $n \neq m$. Παρατηρούμε ότι $b_m \wedge b_n = inf_Y\{b_m, b_n\} = 0$ και άρα για το t έχουμε ότι $b_m(t) \wedge b_n(t) = 0$. Όμως $b_m(t) > 0$ και άρα $b_n(t) = 0$ για κάθε $n \neq m$, δηλαδή το t είναι m-κόμβος της βάσης $\{b_n\}$.

- $(ii) \rightarrow (i)$Θα δείξουμε ότι ο X είναι υποσύνδεσμος του $C(\Omega)$.Έστω $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i, y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i \in X$. Θα δείξουμε ότι $x \vee y = sup_Y(\{x, y\})$.Έστω $t \in \Omega$.Επειδή η $\{b_n\}$ είναι θετική έπεται ότι $b_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \Omega, n \in \mathbb{N}$. 1η Περίπτωση: Αν $b_i(t) = 0$ για κάθε $i \Rightarrow x(t) = 0 = y(t) \Rightarrow x \vee y(t) = x(t) \vee y(t) = 0 = sup_Y(\{x(t), y(t)\})$ και άρα ο Ξ είναι υποσύνδεσμος. 2η Περίπτωση: Έστω ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $b_m(t) > 0$. Τότε το t είναι m-κόμβος της βάσης $\{b_n\}$ και άρα $b_n(t) = 0$ για κάθε $n \neq m$.Οπότε έχουμε ότι

$$sup_Y(\{x, y\})(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \vee \mu_i) b_i(t) =$$

$$(\lambda_m \vee \mu_m) b_m(t) = \frac{x(t)}{b_m(t)} b_m(t) \vee \frac{y(t)}{bm(t)} b_m(t) =$$
$$x(t) \vee y(t) = x \vee y(t)$$

Ομοίως $inf_Y(\{x, y\}) = x \wedge y$ και άρα ο X είναι υποσύνδεσμος.

Πρόταση 2.1.3 (2.3 στο [2])*Αν Υ είναι υπόχωρος του $C(\Omega)$ διάστασης n και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ανήκουν στον Y_+. Τότε το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ είναι θετική βάση του Υ αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq m \leq n$ υπάρχει ακολουθία $\{\omega_n\}$ στο Ω ώστε $lim_{n\to\infty} \frac{b_i(\omega_n)}{b_m(\omega_n)} = 0$ για κάθε $i \neq m$*

Απόδειξη:Στο θεώρημα2.1.1 δείξαμε ότι ισχύει το ευθύ.Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο στην περίπτωση όπου $dimU = n$.Έστω ότι τα $b_1, b_2, ..., b_n$ ικανοποιούν την ιδιότητα παραπάνω.Θα δείξουμε ότι η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση.Αν $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \in Y_+$ τότε $0 \leq \frac{x(\omega_n)}{b_m(\omega_n)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i(\omega_n)}{b_m(\omega_n)} \rightarrow \lambda_m$ και άρα $\lambda_m \geq 0$ για κάθε m.Ακόμα αν $x = 0 \Rightarrow \lambda_m = 0$ για κάθε m και άρα η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση.

Πρόταση 2.1.4 (2.4 στο [2])*Έστω $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ είναι θετική βάση ενός σύνδεσμου-υπόχωρου Υ του $C(\Omega)$ με $dimY = n$. Τότε για κάθε συνάρτηση x της μορφής $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \in \Upsilon$ έχουμε ότι*

(i) αν κάποιο t_i είναι i-κόμβος της βάσης, τότε $\lambda_i = \frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$

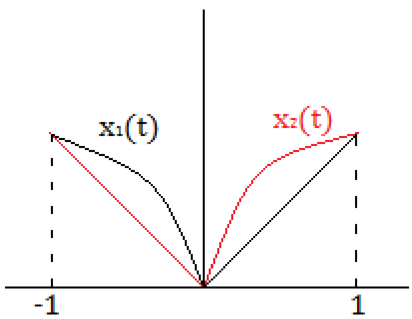
(ii) *αν* $\{\omega_n\} \subseteq \Omega$ *ώστε να ισχύει ότι* $lim_{n\to\infty}\frac{b_i(w_n)}{b_j(w_n)} = 0$ *για* $j \neq i$, *τότε έχουμε ότι* $\lambda_i = lim_{n\to\infty}\frac{x(w_n)}{b_i(w_n)}$

Απόδειξη:Αν το t_i είναι i-κόμβος τότε $x(t_i) = \lambda_i b_i(t_i)$ άρα $\lambda_i = \frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$.Επίσης έχουμε ότι $lim_{n\to\infty}\frac{x(\omega_n)}{b_i(\omega_n)} = lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{b_j(\omega_n)}{b_i(\omega_n)} = \lambda_i$.

Παράδειγμα:Έστω Ω= $[-1,1]$ και X ο χώρος που παράγεται από τις θετικές συνεχείς συναρτήσεις x_1, x_2 έτσι ώστε:

$$x_1(t) = \begin{cases} t| & t \geq 0 \\ \sqrt{-t}| & t < 0 \end{cases} \qquad\qquad x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{t}| & t \geq 0 \\ -t| & t < 0 \end{cases}$$

Ο X σαν 2-διάστατος υπόχωρος του $C[-1,1]$ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος. Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι η βάση $\{x_1, x_2\}$ είναι θετική. Έστω $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X_+$ δηλαδή $x(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [-1,1]$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Έχουμε ότι $\frac{x(t)}{x_2(t)} = \lambda_1\frac{x_1(t)}{x_2(t)} + \lambda_2$ για κάθε $t \neq 0$ και για $t_n = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{t_n}{\sqrt{t_n}} = \sqrt{t_n} = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ άρα $0 \leq \frac{x(t)}{x_2(t)} = \lambda_1\frac{x_1(t)}{x_2(t)} + \lambda_2 \to \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0$. Ομοίως το $\lambda_1 \geq 0$ και άρα η $\{x_1, x_2\}$ είναι θετική βάση. Ο X όμως δεν είναι υποσύνδεσμος αφού για $t = 0$ το t είναι κόμβος της $x_1(t)$ και της $x_2(t)$



2.2 Η βασική συνάρτηση β

Έστω n γραμμικώς ανεξάρτητες θετικές συναρτήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_n$ του $C(\Omega)$. Θέτουμε X τον μερικά διατεταγμένο υπόχωρο του $C(\Omega)$ που παράγεται από τις $x_1, x_2, \ldots, x_n$ δηλαδή:

$$X =< \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} >$$

Παρατηρούμε ότι ο θετικός κώνος X_+ παράγει τον X και είναι κανονικός. Θέτουμε $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ και β την συνάρτηση $\beta : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε:

$$\beta(t) = \frac{r(t)}{\left\|r(t)\right\|_1}$$

με $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με$\left\|r(t)\right\|_1 = \left|x_1(t)\right| + .. + \left|x_n(t)\right| = x_1(t) + .. + x_n(t)$ για κάθε $t \in \Omega$. Έτσι τώρα η β ορίζει μία καμπύλη στη βάση $B = \{y \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{\infty} y_i = 1\}$ του θετικού κώνου $\mathbb{R}^n_+$ και ονομάζεται βασική συνάρτηση.Ακόμα έχουμε ότι $\beta(t) \in \Delta_{n-1}$, όπου Δ_{n-1} το $(n-1)-simplex$ του $\mathbb{R}^n_+$.Ουσιαστικά κανονικοποιώντας την $r(t)$, η βασική καμπύλη $\beta(t)$ απεικονίζεται ως η προβολή της $r(t)$ πάνω στο $simplex$ του $\mathbb{R}^n_+$.Το **πεδίο τιμών** της βασικής συνάρτησης θα συμβολίζεται με $R(\beta)$ και το **πεδίο ορισμού** με $D(\beta)$. Ας υποθέσουμε ότι το $R(\beta)$ έχει n στο πλήθος στοιχεία.Τότε με $K = co(R(\beta))$ θα συμβολίζουμε την κυρτή θήκη του $R(\beta) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ δηλαδή το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το $R(\beta)$.

Αν τώρα ο X δεν είναι υποσύνδεσμος τότε υπάρχουν κάποιοι υποσύνδεσμοι του $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X. Αν $S(X)$ είναι η τομή όλων των υποσυνδέσμων του $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X, τότε ο $S(X)$ είναι πάλι υποσύνδεσμος (και μάλιστα μοναδικός αφού είναι σύνολο που προκύπτει απο τομή συνόλων άρα και ο ελάχιστος) και ισχύει ότι $S(X) = \cap\{G \mid X \subseteq G, G$ υποσύνδεσμος του $C(\Omega)\}$. Στην περίπτωση τώρα όπου ο X δεν είναι ούτε σύνδεσμος-υπόχωρος τότε πάλι υπάρχουν σύνδεσμοι-υπόχωροι του $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X. Θέτουμε F το σύνολο όλων των συνδέσμων-υποχώρων του $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X. Τότε αν $Z \in F$ και για κάθε $Y \in F$ ισχύει ότι: αν $Y \subseteq Z \Rightarrow Y = Z$,τότε ο Z ονομάζεται **ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος (minimal lattice-subspace)** που περιέχει τον X. Για να προσδιορίσουμε τον υποσύνδεσμο $S(X)$ και τον ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Z του $C(\Omega)$ που περιέχουν τον X θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω θεώρηματα.

Θεώρημα 2.2.1 *(3.6 στο [2])Αν X υπόχωρος του $C(\Omega)$ που παράγεται από τις θετικές γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $C(\Omega)$*

(ii) *Υπαρχουν n στο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \bar{R}(\beta)$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in D(\beta)$ το $\beta(t)$ να είναι κυρτός συνδυασμός τους*

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $C(\Omega)$ αν και μόνο αν το $K = \bar{co}(R(\beta))$ είναι κυρτό πολύτοπο με κορυφές τα $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Αν ισχύει η (ii) τότε έχουμε, $P_i = lim_{\nu\to\infty}\beta(\omega_{\iota\nu})$ για κάθε i και μία θετική βάση $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ δίνεται από τον τύπο:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T = A^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \tag{1}$$

Όπου A είναι $n \times n$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $P_1, P_2, \ldots, P_n$
Έτσι τώρα ο X έχει τις εξής ιδιότητες:

(a) *Το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ είναι θετική βάση του X. Ακόμα αν t_i είναι οριακό σημείο της $\{\omega_{\iota\nu}\} : \nu = 1, 2\ldots, m\}$ τότε $t_i \in suppb_i$ και $b_k(t_k) = 0$ για κάθε $k \neq i$.*

(b) *Το $K = co(R(\beta))$ είναι κυρτό πολύτοπο με κορυφές τα $P_1, P_2, \ldots, P_n$*

(c) *Αν $P_k = \beta(t_k)$,τότε το t_k είναι k-κόμβος της $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$*

(d) *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m, P_k = \beta(t_k)$ για κάποιο εσωτερικό σημείο του t_k του Ω και οι x_i είναι C^2 συναρτήσεις σε μία γειτονία του t_k,τότε $D_j\beta(t_k) = 0$ για $j = 1, 2, \ldots, m$ όπου D_j ορίζεται να είναι ο τελεστής της j-μερικής παραγώγου.*

Απόδειξη: $'\Leftarrow'$ Υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii) και άρα και οι a, b, c, d.Επειδή η $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ είναι βάση του X άρα είναι και η $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.Έστω

$$P_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), i = 1, 2, ..., n$$

Αφού κάθε P_i είναι διάνυσμα της βάσης $\acute{B} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{r=1}^{\infty} y_r = 1\}$,συνεπάγεται ότι $\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ για κάθε i. Άρα έχουμε ότι

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Έστω $\beta(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i(t) P_i$ το ανάπτυγμα του διανύσματος $\beta(t)$ στη βάση $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Τότε

$$\frac{1}{z(t)}(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T = A(\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t))^T$$

και από (1) έχουμε ότι

$$(\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t))^T = \frac{1}{z(t)}(b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t))^T.$$

Επειδή τώρα η $\beta(t)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $P_1, P_2, ..., P_n$ έχουμε ότι $\xi_i(t) \in \mathbb{R}^n_+$ και άρα $b_i(t) \in \mathbb{R}^n_+$ για κάθε i. Ως εκ τούτου $b_i \in X_+$ για κάθε i.Από την (1) έχουμε ότι

$$(\beta(t))^T = A(\frac{b_1(t)}{z(t)}, \frac{b_2(t)}{z(t)}, ..., \frac{b_n(t)}{z(t)})^T.$$

Αντικαθιστώντας το t με ω_ν και παίρνοντας όρια, έχουμε ότι

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})^T = A(h_{i1}, h_{i2}, ..., h_{in})^T \tag{2}$$

όπου $h_{ij} = lim_{\nu\to\infty} \frac{b_j(\omega_{in})}{z(\omega_{in})}$. Αφού η λύση του συστήματος (2) είναι μοναδική έχουμε ότι $h_{ii} = 1$ και $h_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$.Αφού $z(\omega_{i\nu}) > 0$ για κάθε ν και $h_{ii} = 1$,έχουμε ότι $b_i(\omega_{i\nu}) > 0$ για κάθε ν.
Οπότε

$$lim_{\nu\to\infty}(\frac{b_i}{z})(\omega_{i\nu}) = lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{(1 + (\sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{b_j}{b_i})(\omega_{i\nu})} = 1$$

και άρα

$$lim_{\nu\to\infty}(\frac{b_j}{b_i})(\omega_{i\nu}) = 0, \tag{3}$$

για κάθε $j \neq i$ και σύμφωνα με Πρόταση2.1.2 το σύνολο $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ είναι θετική βάση του X και άρα ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος.

Έστω τώρα ότι το t_i είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $\{\omega_{i\nu} \mid \nu = 1, 2, ...\}$.Έχουμε δείξει ότι $b_i(\omega_{i\nu}) > 0$ για κάθε ν και άρα $t_i \in suppb_i$.Ακόμα από την (3) έχουμε ότι $b_j(t_i) = 0$ για κάθε $i \neq j$ και άρα η (a) είναι αληθής.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας $R(\beta) \subseteq co\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ και άρα $\overline{co}((R(\beta)) \subseteq \overline{co}(\{P_1, P_2, ..., P_n\}) = co\{P_1, P_2, ..., P_n\}$.Επειδή $P_i \in \overline{R(\beta)} \subseteq \overline{co}(R(\beta)$ έχουμε ότι $co\{P_1, P_2, ..., P_n\} \subseteq \overline{co}(R(\beta))$και άρα η (b) είναι αληθής.

Για την (c) τώρα έστω $P_k = \beta(t_k)$.Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega_{k\nu} = t_k$ για κάθε ν και έτσι $b_k(t_k) > 0$.Επίσης από την (a) έχουμε ότι $b_j(t_k) = 0$ για κάθε $i \neq j$ οπότε το t_k είναι k-κόμβος της $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ και άρα η (c) είναι αληθής.

Τέλος υποθέτουμε ότι ισχύει η υπόθεση της (d). Τότε το t_k είναι k-κόμβος και άρα $b_l(t_k) = 0$ για κάθε $l \neq k$.Αφού το t_k είναι εσωτερικό σημείο του Ω για κάθε $l \neq k$ η b_l λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο t_k.Αυτό συνεπάγεται ότι $D_j b_l(t_k) = 0$ για κάθε j και $l \neq k$.Έστω τώρα $x = \sum_{i=1}^{n} c_{li} b_i$,τότε $x_l(t_k) = c_{lk} b_k(t_k)$ και $D_j x_l(t_k) = c_{lk} D_j b_k(t_k)$.Άρα

$$z(t_k) D_j x_l(t_k) - x_l(t_k) D_j z(t_k) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rk} b_k(t_k) c_{lk} D_j b_k(t_k) - c_{lk} b_k(t_k) (\sum_{r=}^{n} c_{rk} D_j b_k(t_k)) = 0$$

οπότε συνεπάγεται η (d)

$'\Rightarrow'$

Έστω ότι ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $C(\Omega)$ με θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Τότε σύμφωνα με Πρόταση2.1.3 για κάθε i υπάρχει ακολουθία $\{\omega_{i\nu}\}$ τέτοια ώστε $lim_{\nu \to \infty} \frac{b_j}{b_i}(\omega_{i\nu}) = 0$ για κάθε $j \neq i$.Θέτουμε $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} b_j$

(4) Αφού η $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ είναι θετική βάση, έχουμε ότι $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}_+$ για κάθε i και j.Επιπροσθέτως έχουμε ότι $z = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i b_i$,όπου $\sigma_i = \sum_{(j=1}^{n} \lambda_{ji}$ και άρα $lim_{\nu \to \infty} \frac{x_j}{z})(\omega_{i\nu}) = lim_{\nu \to \infty} (\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} \frac{b_k}{b_i}}{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{b_k}{b_i}})(\omega_{i\nu}) = \frac{\lambda_{ji}}{\sigma_i}$. Από αυτό έχουμε ότι $lim_{\nu \to \infty} \beta(\omega_{i\nu}) = (\frac{\lambda_{1i}}{\sigma_i}, \frac{\lambda_{2i}}{\sigma_i}, ..., \frac{\lambda_{ni}}{\sigma_i}) = P_i$. Θέτουμε τώρα A $n \times n$ πίνακα με στήλες τα διανύσματα $P_1, P_2, ..., P_n$.Από την (4) έχουμε ότι

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^T = A(\sigma_1 b_1, \sigma_2 b_2, ..., \sigma_n b_n)^T \ (5)$$

οπότε τα $P_1, P_2, ..., P_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού οι $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ και $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ είναι βάσεις του X.Έστω $\beta(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i$ το ανάπτυγμα του $\beta(t)$ ως προς τη βάση την $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$,τότε

$$(\beta(t))^T = A(\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t))^T$$

Από την (5) έχουμε ότι

$$(\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t))^T = \frac{1}{z(t)}(\sigma_1 b_1, \sigma_2 b_2, ..., \sigma_n b_n)^T$$

άρα $\xi_i(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε i και $\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = 1$, οπότε η απόδειξη έχει τελειώσει.

Πρόταση 2.2.2 *(2.2 στο [2])Έστω X σύνδεσμος-υπόχωρος του $C(\Omega)$ με θετική βάση $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.Σύμφωνα με Πρόταση2.1.2 ο X είναι υποσύνδεσμος αν και μόνο αν $b_j^{-1}(0, +\infty) \cap b_i^{-1}(0, +\infty) = \emptyset$ για κάθε $j \neq i$, όπου $b_i^{-1}(0, +\infty) = \{t \in \Omega \mid b_i(t) > 0\}$.*

Θεώρημα 2.2.3 *(3.6 στο [3])Αν X υπόχωρος του $C(\Omega)$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ θετικές γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις που παράγουν τον X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) O X είναι υποσύνδεσμος

(ii) $R(\beta) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$

Απόδειξη:Έστω X ο υπόσύνδεσμος του $C(\Omega)$ και $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ μία θετική βάση του X. Έστω $x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} b_i$.Τότε $z = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ με $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$.Τα σύνολα

$$I_i = b_i^{-1}(0, +\infty)$$

με $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανά δύο ξένα από την Πρόταση2.2.2.Άρα για κάθε $t \in I_k$ έχουμε ότι $x_i(t) = \lambda_{ik} b_k(t)$ και $x(t) = \lambda_k b_k(t)$.Οπότε η βασική συνάρτηση είναι η εξής:

$$\beta(t) = \frac{1}{\lambda_k}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \ldots, \lambda_{nk}) = P_k$$

Ακόμα έχουμε ότι $D(\beta) = \cup_{i=1}^{n} I_i$,επειδή το $t \in D(\beta)$ ανν $z(t) > 0$ και ανν $b_i(t) > 0$ για τουλάχιστον κάποιο i.Άρα παίρνουμε ότι $R(\beta) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Ο αλγόριθμος

Έστω τώρα X να είναι υπόχωρος του $C(\Omega)$ που παράγεται από τις $x_1, x_2, .., x_n$ και $S(X)$ ο ελάχιστος υποσύνδεσμος που περιέχει τον X.Η διάσταση του υποσυνδέσμου S(X) του $C(\Omega)$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{x_n\}$ είναι ίση με τον πληθάριθμο του $R(\beta)$ από το παραπάνω θεώρημα, δηλαδή $dimS(X) = m \Leftrightarrow R(\beta) = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$.

Πιο συγκεκριμένα, αν $R(\beta) = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$ ο υποσύνδεσμος S(X) που περιέχει τον X κατασκευάζεται ακολουθώντας τα βήματα του παρακάτω αλγορίθμου(7 στο [4]).

- **Βήμα1**:Απαριθμούμε το $R(\beta)$ ούτως ώστε τα πρώτα ν διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει πάντα τέτοια απαρίθμηση (Λήμμα5 του [4]).Ξαναγράφουμε τη νέα απαρίθμηση ως $P_i, i = 1, 2, ..., m$ και θέτουμε $I_i = \beta^{-1}(P_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

- **Βήμα2:**Ορίζουμε τα διανύσματα $x_{n+k}, k = 1, 2, ..., m - n$, ως εξής:
$$x_{n+k}(t) = \mathscr{X}_{I_{n+k}} \parallel r(t) \parallel_1$$
,
όπου $\mathscr{X}_{I_{n+k}}$η χαρακτηριστική συνάρτηση του I_{n+k}.

- **Βήμα3:**$S(X) =< \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\} >$

- **Βήμα4:**Μία θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ του S(X) κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε μια βασική συνάρτηση γ των $x_1, x_2, ..., x_m$ και υποθέτουμε ότι $\{P_1^{'} P_2^{'}, ..., P_m^{'}\}$ είναι το πεδίο τιμών της γ (το πεδίο τιμών της γ έχει ακριβώς m σημεία). Τότε
$$(b_1, b_2, ..., b_m)^T = D^{-1}(z_1, z_2, ..., z_m)^T,$$
όπου D είναι ο $m \times m$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\{P_1^{'} P_2^{'}, ..., P_m^{'}\}$

Όμοια με πριν θα δείξουμε πως κατασκευάζουμε έναν ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Z που περιέχει τον X.Έστω X υπόχωρος του $C(\Omega)$ που παράγεται από τις $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Αφού πρώτα υπολογίσουμε το $R(\beta)$ της βασικής συνάρτησης του X ακολουθούμε τα βήματα του παρακάτω αλγορίθμου(9 στο [4]):

- **Βήμα1**:Αν $K = co(\bar{R}(\beta))$ είναι κυρτό πολύτοπο με κορυφές τα $P_1, P_2, .., P_m$ απαριθμούμε το $R(\beta)$ έτσι ώστε τα πρώτα n διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- **Βήμα2**:Έστω τώρα $\xi_i \in$ με $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ θετικές πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο $D(\beta)$ τέτοιες ώστε $\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i(t) = 1$ και $b(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i(t) P_i$ για κάθε $t \in D(\beta)$.Θέτουμε $z(t) = x_1(t) + .. + x_n(t) = \parallel r(t) \parallel_1$ και x_{n+i} με $i = 1, 2, \ldots m - n$ τις συναρτήσεις:

$$x_{n+i}(t) = \begin{cases} \xi_{n+i}(t) z(t) | & \forall t \in D(\beta) \\ 0 | & \forall t \notin D(\beta) \end{cases}$$

- **Βήμα3**:$Z =< \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\} >$.Έτσι έχουμε κατασκευάσει έναν ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Ζ που περιέχει τον Χ.

- **Βήμα4**:Μία θετική βάση $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$ του Ζ κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε μια βασική συνάρτηση γ των $x_1, x_2, ..., x_m$ και υποθέτουμε ότι $\{P_1' P_2', ..., P_m'\}$ είναι το πεδίο τιμών της γ (το πεδίο τιμών της γ έχει ακριβώς m σημεία). Τότε

$$(b_1, b_2, ..., b_m)^T = D^{-1}(x_1, x_2, ..., x_m)^T,$$

όπου D είναι ο $m \times m$ πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\{P_1' P_2', ..., P_m'\}$

2.3 Η περίπτωση όπου $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$

2.3.1 Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^m$

Υποθέτουμε ότι $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$.Τότε ο $C(\Omega)$ είναι ο $\mathbb{R}^m$ και θέτουμε Χ να είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα θετικά και γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_i = (x_i(1), x_i(2), \ldots, x_i(m)) \in \mathbb{R}^m$ με $i = 1, 2.., n$.Και άρα η διάσταση του Χ είναι ίση με n.Σε αυτήν την περίπτωση η βασική συνάρτηση β κατασκευάζεται όπως παραπάνω,η οποία τώρα είναι μία καμπύλη του $\mathbb{R}^m$ και ισχύει $R(\beta) = cl(R(\beta))$ εφόσον το $R(\beta)$ είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα 1:Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots 8\}$ και $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C(\Omega) = \mathbb{R}^8$ τέτοια ώστε

$$x_1 = (1, 2, 2, 4, 1, 2, 0, 1)$$
$$x_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 1)$$
$$x_3 = (3, 0, 6, 6, 2, 2, 2, 1)$$
$$x_4 = (1, 0, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$$

και έστω Χ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^8$ που παράγεται από τις x_1, x_2, x_3, x_4.Έστω r και β η καμπύλη και η βασική καμπύλη των $x_i, i = 1, 2, 3, 4$. Τότε

$$r(1) = (1, 0, 3, 1), r(2) = (2, 1, 0, 0)$$
$$r(3) = (2, 0, 6, 2), r(4) = (4, 1, 6, 2)$$
$$r(5) = (1, 0, 2, 1), r(6) = (2, 2, 2, 2)$$
$$r(7) = (0, 1, 2, 1), r(8) = (1, 1, 1, 1)$$

και

$$\beta(1) = \frac{1}{5}(1, 0, 3, 1), \beta(2) = \frac{1}{3}(2, 1, 0, 0)$$
$$\beta(3) = \frac{1}{10}(2, 0, 6, 2), \beta(4) = \frac{1}{13}(4, 1, 6, 2)$$
$$\beta(5) = \frac{1}{4}(1, 0, 2, 1), \beta(6) = \frac{1}{8}(2, 2, 2, 2)$$
$$\beta(7) = \frac{1}{4}(0, 1, 2, 1), \beta(8) = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1).$$

Αφού $m \neq n$ ο Χ σύμφωνα με το θεώρημα2.1.1 δεν είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^8$.Πρώτα απαριθμούμε το $R(\beta)$ έτσι ώστε τα πρώτα 4 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- Τα διανύσματα $P_1 = \beta(1), P_2 = \beta(2), P_3 = \beta(4)$ και $P_4 = \beta(7)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παρατηρούμε ότι $\beta(1) = \beta(3), \beta(6) = \beta(8)$
- Θέτουμε $P_5 = \beta(5)$ και $P_6 = \beta(6)$ και $I_5 = \beta^{-1}(P_5) = \{5\}$ και $I_6 = \beta^{-1}(P_6) = \{6, 8\}$.

Τώρα βρίσκουμε τα x_5, x_6 σύμφωνα με τον αλγόριθμο:

$$x_5 = \left\|r(5)\right\|_1 e_5 = 4e_5 = (0,0,0,0,4,0,0,0)$$

και

$$x_6 = \left\|r(6)\right\|_1 e_6 + \left\|r(8)\right\|_1 e_8 = 8e_6 + 4e_8 = (0,0,0,0,0,8,0,4).$$

Οπότε σύμφωνα με τον αλγόριθμο ο $S(X) =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} >$ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^8$ που περιέχει τον Χ.

Παράδειγμα2:Έστω $\Omega = \{1, 2, ..., 7\}$ και $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C(\Omega) = \mathbb{R}^7$ τέτοια ώστε

$$x_1 = (1,2,1,0,1,1,4)$$
$$x_2 = (0,1,1,1,1,0,2)$$
$$x_3 = (2,1,0,1,1,1,2)$$
$$x_4 = (1,0,1,1,1,0,0)$$

και έστω $X =< \{x_1, x_2, x_3, x_4\} >$.Αν r και β η καμπύλη και η βασική καμπύλη των x_i. Τότε

$$r(1) = (1,0,2,1), r(2) = (2,1,1,0)$$
$$r(3) = (1,1,0,1), r(4) = (0,1,1,1)$$
$$r(5) = (1,1,1,1), r(6) = (1,0,1,0)$$
$$r(7) = (4,2,2,0)$$

και

$$\beta(1) = \frac{1}{4}(1,0,2,1), \beta(2) = \beta(7) = \frac{1}{4}(2,1,1,0), \beta(3) = \frac{1}{3}(1,1,0,1)$$

,

$$\beta(4) = \frac{1}{3}(0,1,1,1), \beta(5) = \frac{1}{4}(1,1,1,1), \beta(6) = \frac{1}{2}(1,0,1,0).$$

Προκειμένου να απαριθμήσουμε το $R(\beta)$ (όπως στο Θεώρημα3.19 $[3]$) επισημαίνουμε τα ακόλουθα:

(i) Τα διανύσματα $P_1 = \beta(4), P_2 = \beta(1), P_3 = \beta(6)$ και $P_4 = \beta(3)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Έστω $\beta(2) = P_5$.Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε γνήσιο υποσύνολο A του $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ έχουμε ότι $co(A) \neq co\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\} = K$.Ως εκ τούτου τα P_i για $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι κορυφές του κυρτού πολύτοπου K.

(iii) Επίσης έχουμε ότι το $\beta(5)$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των P_i

$$\beta(5) = \frac{3(1-\theta)}{8}P_1 + \theta P_2 + \frac{1-5\theta}{4}P_3 + \frac{3(1-\theta)}{8}P_4 + \theta P_5.$$

Συνεπώς,για οποιοδήποτε $\theta \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$ το διάνυσμα $P_6 = \beta(5)$ είναι κυρτός συνδυασμός των P_i,με $i = 1, 2, 3, 4, 5$ και άρα το $P_6 \in K$.Δηλαδή,$R(\beta) = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ και επειδή $n < d$, ο X δεν είναι σύνδεσμος υπόχωρος και άρα δεν είναι ούτε υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^7$.Έστω Z ο υποσύνδεσμος που παράγεται απ' τα x_1, x_2, x_3, x_4.Προκειμένου να προσδιορίσουμε τον Z ορίζουμε τα σύνολα

$$I_5 = \beta^{-1}(P_5) = \{2, 7\}, I_6 = \beta^{-1}(P_6) = \{5\}$$

και κατασκευάσουμε τα διανύσματα σύμφωνα με τον αλγόριθμο

$$x_5 = \left\|r(2)\right\|_1 e_2 + \left\|r(7)\right\|_1 e_7 = 4e_2 + 8e_7$$

και

$$x_6 = \left\|r(5)\right\|_1 e_5 = 4e_5.$$

Τότε έχουμε τον υποσύνδεσμο του $\mathbb{R}^7$ που περιέχει τον X

$$S(X) =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} > .$$

Επίσης μία θετική βάση $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ του $S(X)$ θα δίνεται απ' τον τύπο:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)^T = A^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T,$$

όπου A ο 6×6 πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\gamma(i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ όπου γ η βασική καμπύλη των x_i.Κάνοντας τους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι $b_1 = 4e_1, b_2 = 8e_2 + 16e7, b_3 = 3e_3, b_4 = 3e_4, b_5 = 8e_5$ και $b_6 = 2e_6$.

Για να προσδιορίσουμε τον ελάχιστο σύνδεσμο-υπόχωρο ορίζουμε τα διανύσματα ξ_i για $i = 1, ..., 5$ του $\mathbb{R}^7$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(i) = 1$ και $\beta(j) = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(j)P_i$, για κάθε $j = 1, 2, ..., 7$.

$\beta(1) = P_2 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(1)Pi \Rightarrow \xi_2(1) = 1$ και$\xi_k(1) = 0$ για κάθε $k \neq 2$.
$\beta(2) = P_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(2)P_i \Rightarrow \xi_5(2) = 1$ και $\xi_k(2) = 0$ για κάθε $k \neq 5$.
$\beta(3) = P_4 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(3)P_i \Rightarrow \xi_4(3) = 1$ και $\xi_k(3) = 0$ για κάθε $k \neq 4$.
$\beta(4) = P_1 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(4)P_i \Rightarrow \xi_1(4) = 1$ και $\xi_k(4) = 0$ για κάθε $k \neq 1$.
$\beta(5) = P_6 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(5)P_i \Rightarrow \xi_1(5) = \xi_4(5) = (3(1-\theta))/8, \xi_2(5) = \xi_5(5) = \theta, \xi_3(5) = (1-5\theta)/4$.
$\beta(6) = P_3 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(6)P_i \Rightarrow \xi_3(6) = 1$ και $\xi_k(6) = 0$ για κάθε $k \neq 3$.
$\beta(7) = P_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i(7)P_i \Rightarrow \xi_5(7) = 1$ και $\xi_k(7) = 0$ για κάθε $k \neq 5$.
Επίσης ορίζουμε το διάνυσμα

$$y_5 = \sum_{j=1}^{7} \xi_5(j)\big\|r(j)\big\|_1 e_j = \big\|r(2)\big\|_1 e_2 + \theta\big\|r(5)\big\|_1 e_5 + \big\|r(7)\big\|_1 e_7 = 4e_2 + 4\theta e_5 + 8e_7, \theta \in \big[0, \frac{1}{5}\big]$$

Υποθέτουμε ότι $\theta > 0$ για το y_5 και ότι το $\acute{y}_5$ αντιστοιχεί στο $\theta = 0$, δηλαδή $\acute{y}_5 = 4e_2$. Τότε οι υπόχωροι $Y =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_5\} >$ και $\acute{Y} =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, \acute{y}_5\} >$ είναι οι ελαχιστικοί σύνδεσμοι-υπόχωροι που περιέχουν τα διανύσματα x_i.Επειδή τα $x_1, x_2, x_3, x_4, y_5, \acute{y}_5$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έχουμε ότι $Y \neq \acute{Y}$. Επίσης, ο $X = Y \cup \acute{Y}$ δεν είναι σύνδεσμος υπόχωρος.

2.3.2 Εφαρμογές στο *Matlab*

Υποσύνδεσμοι

Αν X ο χώρος του Παραδείγματος1 τότε μπορούμε να απεικονίσουμε τον X με τον ακόλουθο πίνακα όπου σαν γραμμές έχει τα αντίστοιχα x_i με $i = 1, 2, 3, 4$.Ο πίνακας X είναι διάστασης 4×8 και απεικονίζει τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^8$ που παράγεται από 4 στο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^8$.

```
>> X=[1,2,2,4,1,2,0,1;0,1,0,1,0,2,1,1;3,0,6,6,2,2,2,1;1,0,2,2,1,2,1,1]

X =

     1     2     2     4     1     2     0     1
     0     1     0     1     0     2     1     1
     3     0     6     6     2     2     2     1
     1     0     2     2     1     2     1     1
```

Η συνάρτηση $SubLattice()$ κατασκευάστηκε σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο και παίρνει ως όρισμα έναν πίνακα X. Η συνάρτηση αυτή δίνει έναν πίνακα $Sublattice$, όπου σαν γραμμές έχει τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^8$ που παράγουν τον υποσύνδεσμο $S(\mathrm{X})$ που περιέχει τον X, έναν πίνακα $PositiveBase$ που οι γραμμές του μας δίνουν τα διανύσματα που αποτελούν μία θετική βάση του $S(\mathrm{X})$ και τέλος τον πίνακα G του οποίου οι στήλες είναι η εικόνα της βασικής συνάρτησης γ του $S(\mathrm{X})$.Η συνάρτηση $SubLattice()$δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου.Ο βαθμός ενός πίνακα και συνεπώς το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^8$που απεικονίζει ο πίνακας δίνεται από την συνάρτηση $rank()$ του $Matlab$.

Ο $S(\mathrm{X})$, μία θετική βάση του και η εικόνα της βασικής συνάρτησης γ:

```
>> [Sublattice,PositiveBase,G]=SubLattice(X)

Sublattice =

     1     2     2     4     1     2     0     1
     0     1     0     1     0     2     1     1
     3     0     6     6     2     2     2     1
     1     0     2     2     1     2     1     1
     0     0     0    13     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     4     0


PositiveBase =

     0     0     0     0     0     0     8     0
     0     0     0    26     0     0     0     0
     5     0    10     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     4     0     0     0
     0     0     0     0     0     8     0     4
     0     3     0     0     0     0     0     0
```

```
>> rank(Sublattice)

ans =

     6
```

Παρατηρούμε ότι η διάσταση του $S(\mathrm{X})$ είναι 6 και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα1 ο $S(\mathrm{X})$ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $\mathbb{R}^8$ αφού η εικόνα της βασικής συνάρτησης γ έχει 6 διαφορετικά στοιχεία (όσες δηλαδή οι στήλες του πίνακα G).

Με τη βοήθεια του *Matlab* για το Παράδειγμα2 παίρνουμε τον υποσύνδεσμο του $\mathbb{R}^7$ περιέχει τον χώρο X.O X δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

```
>> X=[1,2,1,0,1,1,4;0,1,1,1,1,0,2;2,1,0,1,1,1,2;1,0,1,1,1,0,0]

X =

     1     2     1     0     1     1     4
     0     1     1     1     1     0     2
     2     1     0     1     1     1     2
     1     0     1     1     1     0     0
```

O $S(\mathrm{X})$, μία θετική βάση του και η εικόνα της βασικής συνάρτησης γ

```
>> [Sublattice,PositiveBase,G]=SubLattice(X)

Sublattice =

     1     2     1     0     1     1     4
     0     1     1     1     1     0     2
     2     1     0     1     1     1     2
     1     0     1     1     1     0     0
     0     0     0     0     4     0     0
     0     0     0     0     0     2     0


PositiveBase =

      0      0      0      3      0      0      0
      0      0      0      0      8      0      0
      0      0      0      0      0      4      0
      4      0      0      0      0      0      0
      0      0      3      0      0      0      0
      0      4      0      0      0      0      8
```

```
G =

         0    0.1250    0.2500    0.2500    0.3333    0.5000
    0.3333    0.1250         0         0    0.3333    0.2500
    0.3333    0.1250    0.2500    0.5000         0    0.2500
    0.3333    0.1250         0    0.2500    0.3333         0
         0    0.5000         0         0         0         0
         0         0    0.5000         0         0         0

>> rank(Sublattice)

ans =

     6
```

Όπως βλέπουμε η εικόνα της συνάρτησης γ αποτελείται από 6 στοιχεία όσο και η διάσταση του $S(\mathrm{X})$

Ελαχιστικοί σύνδεσμοι-υπόχωροι

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $MinimalLat()$ που κατασκευάστηκε στο $Matlab$ σύμφωνα με τον δεύτερο αλγόριθμο και υπάρχει στο τέλος στο παράρτημα.Αν X είναι ο πίνακας του οποίου τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα-γραμμές παράγουν τον υπόχωρο X του $\mathbb{R}^m$ και Z ο ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος που περιέχει τον X, τότε η συνάρτηση $MinimalLat()$:

- (i) παίρνει ως όρισμα έναν πίνακα X
- (ii) μας δίνει τον ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο Z του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει τον X (στη μορφή ενός πίνακα , που έχει ως γραμμές τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν τον Z)
- (iii) Με την βοήθεια της συνάρτησης $PoseBase2()$ μας δίνει μία θετική βάση του Z (πάλι στη μορφή ενός πίνακα με γραμμές τα στοιχεία της βάσης

Τέλος με την συνάρτηση $convextest()$, η οποία παίρνει ως όρισμα τον πίνακα που απεικονίζει τον Z και μας δίνει έναν πίνακα που απεικονίζει ως γραμμές τα στοιχεία της βασική συνάρτηση γ του Z και έναν πίνακα με στήλες τις κορυφές του κυρτού πολυτόπου που σχηματίζεται από τα στοιχεία του πεδίου τιμών της γ.

Συνεχίζοντας στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε ότι αν

```
X =

     1     2     2     4     1     2     0     1
     0     1     0     1     0     2     1     1
     3     0     6     6     2     2     2     1
     1     0     2     2     1     2     1     1
```

ο ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος Ζ,που περιέχει τον Χ,καθώς και μία θετική βάση του (που δίνονται με την εντολή $MinimalLat(X)$) απεικονίζονται από τους παρακάτω πίνακες.Οι στήλες του κάθε πίνακα απεικονίζουν τα διανύσματα x_i που παράγουν τον Ζ και τα b_i που αποτελούν την θετική βάση του αντίστοιχα.

```
>> [MinimalLat,PosBase]=MinimalLat(X)
Optimization terminated.

MinimalLat =

     1     2     2     4     1     2     0     1
     0     1     0     1     0     2     1     1
     3     0     6     6     2     2     2     1
     1     0     2     2     1     2     1     1
     0     3     0     3     0     0     0     0


PosBase =

     0     0     0     0     0     0     4     0
     5     0    10    10     0     0     0     0
     0     0     0     0     4     0     0     0
     0     0     0     0     0     8     0     4
     0     6     0     6     0     0     0     0
```

Και κάνοντας χρήση της εντολής $[G, K] = convextest(Z)$ παίρνουμε τα εξής:

```
>> [G,K]=convextest(MinimalLat)

G =

         0    0.2000    0.2500    0.2500    0.2500    0.3333
    0.2500         0    0.0625         0    0.2500    0.1667
    0.5000    0.6000    0.3750    0.5000    0.2500         0
    0.2500    0.2000    0.1250    0.2500    0.2500         0
         0         0    0.1875         0         0    0.5000


K =

         0    0.2000    0.2500    0.2500    0.3333
    0.2500         0         0    0.2500    0.1667
    0.5000    0.6000    0.5000    0.2500         0
    0.2500    0.2000    0.2500    0.2500         0
         0         0         0         0    0.5000
```

Όπως παρατηρούμε το K αποτελείται από 5 κορυφές (διανύσματα στήλες) όσα δηλαδή και η διάσταση του Z

```
>> rank(MinimalLat)

ans =

     5
```

Για το Παράδειγμα2 αν ο X απεικονίζεται από τον παρακάτω πίνακα

```
X =

     1     2     1     0     1     1     4
     0     1     1     1     1     0     2
     2     1     0     1     1     1     2
     1     0     1     1     1     0     0
```

Τότε ο ελαχιστικός σύνδεσμος-υπόχωρος που περιέχει τον X καθώς και μία θετική βάση του δίνονται παρακάτω.

```
>> [MinimalLat,PosBase]=MinimalLat(X)
Optimization terminated.

MinimalLat =

    1.0000    2.0000    1.0000         0    1.0000    1.0000    4.0000
         0    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000         0    2.0000
    2.0000    1.0000         0    1.0000    1.0000    1.0000    2.0000
    1.0000         0    1.0000    1.0000    1.0000         0         0
         0    4.0000         0         0    0.6179         0    8.0000


PosBase =

         0         0         0    3.0000    1.2683         0         0
    4.0000         0         0         0    0.6179         0         0
         0    8.0000         0         0    1.2358         0   16.0000
         0         0    3.0000         0    1.2683         0         0
         0         0         0         0    0.2276    2.0000         0
```

Σημείωση:Στο Παράδειγμα2 αναφέρεται ότι για $\theta \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$ βρίσκουμε διαφορετικό ελαχιστικό σύνδεσμο-υπόχωρο. Σε αυτήν την περίπτωση βρήκαμε έναν για $\theta = 0.154$ που ανήκει στο $\left[0, \frac{1}{5}\right]$.

Ακόμα παίρνουμε την βασική συνάρτηση γ και το κυρτό πολύτοπο K που σχηματίζεται από τα στοιχεία της (στήλες του G):

```
G =

         0    0.2165    0.2500    0.2500    0.3333    0.5000
    0.3333    0.2165         0    0.1250    0.3333         0
    0.3333    0.2165    0.5000    0.1250         0    0.5000
    0.3333    0.2165    0.2500         0    0.3333         0
         0    0.1338         0    0.5000         0         0


K =

         0    0.2500    0.2500    0.3333    0.5000
    0.3333         0    0.1250    0.3333         0
    0.3333    0.5000    0.1250         0    0.5000
    0.3333    0.2500         0    0.3333         0
         0         0    0.5000         0         0
```

Παρατηρούμε όπως και πριν ότι το K έχει 5 κορυφές όσο δηλαδή και η διάσταση του Z

```
>> rank(MinimalLat)

ans =

     5
```

Τέλος θα βασιστούμε στο Παράδειγμα2 για να αναφέρουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο υποσύνδεσμος $S(\mathrm{X})$ που περιέχει τον X είναι ο ελάχιστος και άρα είναι μοναδικός. Επειδή στο Παράδειγμα2 πήραμε ως γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα β(i) τα β(1),β(3),β(4),β(6) και στο παράδειγμα με το $Matlab$ πήραμε τα β(1),β(2),β(3),β(4) έχουμε διαφορετικό σύνδεσμο-υπόχωρο σε κάθε περίπτωση. Ποιο συγκεκριμένα έχουμε ότι στο Παράδειγμα2 ο $S(\mathrm{X})$ είναι ο ακόλουθος :

```
SX1 =

     1     2     1     0     1     1     4
     0     1     1     1     1     0     2
     2     1     0     1     1     1     2
     1     0     1     1     1     0     0
     0     4     0     0     0     0     8
     0     0     0     0     5     0     0

>> rank(SX1)

ans =

     6
```

Ενώ αυτός που βρήκαμε με τη βοήθεια του $Matlab$ είναι

```
SX2 =

     1     2     1     0     1     1     4
     0     1     1     1     1     0     2
     2     1     0     1     1     1     2
     1     0     1     1     1     0     0
     0     0     0     0     4     0     0
     0     0     0     0     0     2     0

>> rank(SX2)

ans =

     6
```

Το αξιοσημείωτο είναι ότι ουσιαστικά ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα στήλες και του SX1 και του SX2 είναι ο ίδιος χώρος. Αυτό φαίνεται αν κατασκευάσουμε έναν πίνακα $S = SX1 \cup SX2$. Με την εντολή $S = unique([SX1; SX2],' rows')$ παίρνουμε τις μοναδικές γραμμές του πίνακα $[SX1; SX2] = SX1 \cup SX2$, αφού τα πρώτα 4 διανύσματα είναι τα ίδια και για τους δύο πίνακες.

```
>> S=unique([SX1;SX2],'rows')

S =

     0     0     0     0     0     2     0
     0     0     0     0     4     0     0
     0     0     0     0     5     0     0
     0     1     1     1     1     0     2
     0     4     0     0     0     0     8
     1     0     1     1     1     0     0
     1     2     1     0     1     1     4
     2     1     0     1     1     1     2
```

```
>> rank(S)

ans =

     6
```

Αν $S1(X) =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} >$ ο σύνδεσμος-υπόχωρος που βρήκαμε στο Παραδείγμα2, $S2(X) =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, \acute{x}_5, \acute{x}_6\} >$ ο σύνδεσμος-υπόχωρος που βρήκαμε με τη βοήθεια του $Matlab$ και $S = S1(X) \cup S2(X)$. Όπως βλέπουμε παραπάνω ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα του S έχει διάσταση 6, όσο και η διάσταση των αντίστοιχων χώρων που παράγονται από τα διανύσματα του $SX1$ και του $SX2$,δηλαδή $dim(S) = dim(S1) = dim(S2)$. Οπότε έχουμε $S1(X) =< \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} >=< \{x_1, x_2, x_3, x_4, \acute{x}_5, \acute{x}_6\} >= S2(X)$ και άρα ο υποσύνδεσμος S(X) είναι μοναδικός.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά

3.1 Μία σύντομη εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία αγορά που αποτελείται από **πρωταρχικούς ή βασικούς τίτλους (primitive securities)** των οποίων οι αποδόσεις δίνονται από κάποια διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. **Παράγωγοι τίτλοι(derivative securities)** ονομάζονται οι τίτλοι των οποίων οι αποδόσεις εξαρτώνται από τις αποδόσεις κάποιων από τους βασικούς τίτλους που απαρτίζουν την αγορά. Ως πρωταρχικοί τίτλοι θεωρούνται κυρίως διάφοροι χρηματοπιστωτικοί τίτλοι, όπως μετοχές (*stocks*), ομόλογα (*bonds*), συνάλλαγμα,επιτόκια, ενεργειακά προϊόντα κ.α. Η πιο γνωστή κατηγορία παράγωγων τίτλων είναι τα **δικαιώματα προαίρεσης (options)** και διακρίνονται σε **δικαιώματα αγοράς (call option)** και **δικαιώματα πώλησης (put option)**. Ένα δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο σε κάποια στιγμή στο μέλλον,σε προκαθορισμένη όμως τιμή η οποία είναι γνωστή ως **τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (strike price)**. Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι **Ευρωπαϊκού τύπου (European option)** αν ο κάτοχός του μπορεί να το εξασκήσει μόνο κατά την ημερομηνία λήξης ενώ αν μπορεί να το εξασκήσει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης τότε ονομάζεται **Αμερικάνικου τύπου (American option)**. Η απόδοση ενός παράγωγου τίτλου εξαρτάται και από ένα διάνυσμα το οποίο ονομάζεται **διάνυσμα εξάσκησης (strike vector)** και στη συγκεκριμένη περίπτωση για τα δικαιώματα προαίρεσης είναι το σταθερό διάνυσμα $\overrightarrow{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ του $\mathbb{R}_m$.

Ακόμα μία κατηγορία παραγώγων με πλέον σύνθετες αποδόσεις είναι τα **εξωτικά δικαιώματα (exotic options)**.Η διαφορά τους από τα δικαιώματα προαίρεσης είναι ότι:

(i) Το διάνυσμα εξάσκησης δεν είναι το σταθερό διάνυσμα 1(riskless vector)αλλά ένα διάνυσμα που εμπεριέχει κίνδυνο (risky vector)

(ii) Το διάνυσμα εξάσκησης εξαρτάται από τις αποδόσεις του χρηματοοικονομικού συμβολαίου σε κάποια ή σε κάποιες από τις ενδιάμεσες χρονικές περιόδους που εμφανίζονται από την ημερομηνία εγγραφής έως την ημερομηνία λήξης

Παράδειγμα:Έστω ότι έχουμε μία στοχαστική οικονομία με πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα $\mathbf{T} = \{1, 2, \ldots, T\}$ και πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbf{\Omega} = \{1, 2, .., m\}$. Ας υποθέσουμε ότι δ είναι μία οικογένεια διαμερίσεων του Ω τ.ω. $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_T\}$ με τα στοιχεία της δ αναπαριστούν όλη την διαθέσιμη πληροφορία μεταξύ των διαφορετικών ημερομηνιών, όπου $\Delta_0 = \Omega$ και $\Delta_T = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{m\}\}$. Η διαμέριση Δ_t είναι πάντα λεπτότερη από την Δ_{t-1} για κάθε $t = 1, 2, \ldots, T$. Ένα **ασφάλιστρο(τίτλος της αγοράς)** είναι ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο που εκδίδεται την ημερομηνία $t = 0$ και η απόδοσή του δίνεται από το διάνυσμα $x = (x^1, x^2, .., x^t)$ όπου $x^t \in \mathbb{R}^m$ είναι η απόδοση του x την χρονική στιγμή t. Εφόσον το x είναι προσαρμοσμένο στην δ για κάθε t το αντίστοιχο x_t του x είναι σταθερό στα στοιχεία του Δ_t.Οπότε αν υποθέσουμε ότι $\Delta_t = \{\sigma_1^t, ..., \sigma_{kt}^t\}$ μία τυχαία διαμέριση την χρονική στιγμή t συνεπάγεται ότι $x_t(j) = a_i^t \in \mathbb{R}^m$ για κάθε $j \in \sigma_i^t$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω για τα δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου η ημερομηνία λήξης είναι στο τέλος του χρονικού ορίζοντα και άρα η απόδοση του x είναι η απόδοσή του x^T. Με αυτόν τον τρόπο επειδή οι ενδιάμεσες καταστάσεις δεν επηρεάζουν την απόδοση του δικαιώματος μπορούμε να δούμε την οικονομία ως ένα μοντέλο δύο περιόδων (2-period model) με $T = \{0, 1\}$.Στην περίπτωση των εξωτικών δικαιωμάτων τα διανύσματα εξάσκησης εξαρτώνται από τις αποδόσεις κάποιον ασφαλίστρων από τις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.

3.2 Ο χώρος των αποδόσεων ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία στοχαστική οικονομία (αγορά ασφαλίστρων) δύο χρονικών περιόδων με $T = \{0, 1\}$ με ένα πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$την χρονική στιγμή $t = 1$. Έστω ακόμα ότι αγορά απαρτίζεται από πεπερασμένους στο πλήθος βασικούς τίτλους με αποδόσεις που δίνονται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, ..., x_n$ του $\mathbb{R}_m$.Ένα χαρτοφυλάκιο($portfolio$) είναι ένα διάνυσμα $\theta = (\theta_1, .., \theta_n)$ του $\mathbb{R}^n$,όπου κάθε θ_i αντιστοιχεί στον αριθμό των μονάδων του κάθε x_i.Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμικός τελεστής,τότε με $T(\theta)$ συμβολίζουμε την απόδοση του κάθε ϑ με $T(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in \mathbb{R}^m$.Επειδή ο T είναι 1-1 απεικονίζει κάθε θ στην αντίστοιχη απόδοση του $T(\theta)$. Έστω τώρα X ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα $x_1, x_2, .., x_n$.Δηλαδή

$$X =< \{x_1, x_2, .., x_n\} >$$

Ο $\mathbb{R}^m$ ταυτίζεται με τον χώρο όλων των αποδόσεων και ο X θα αναφέρεται ως **ο χώρος των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων(space of marketed securites)**.Επίσης υποθέτουμε ότι το σταθερό διάνυσμα $\overrightarrow{1} \in X$. Γενικά ένα διάνυσμα x του $\mathbb{R}^m$ λέμε ότι μπορεί να **αντιγραφεί ή αναπαραχθεί (replicated)** αν το x είναι απόδοση κάποιου χαρτοφυλακίου ϑ ή ισοδύναμα αν $x \in X$. Αν το $x \neq \overrightarrow{1}$ και $x \neq \overrightarrow{0}$ και ισχύει ότι το $x(i) = 0$ ή $x(i) = 1$ για κάθε i τότε το x καλείται **διωνυμικό διάνυσμα (binary vector)**.Στην απλή περίπτωση των δικαιωμάτων προαίρεσης το δικαίωμα αγοράς που εγγράφεται πάνω στο διάνυσμα x του X, με τιμή εξάσκησης k έχει απόδοση που δίνεται από το διάνυσμα $c(x, k)$ με τύπο:

$$c(x, k) = (x - k1)^+ \in \mathbb{R}^m$$

Αντίστοιχα το δικαίωμα πώλησης που εγγράφεται πάνω στο διάνυσμα x του X με τιμή εξάσκησης k έχει απόδοση που δίνεται από το διάνυσμα $p(x, k)$ με τύπο:

$$p(x, k) = (k1 - x)^+ \in \mathbb{R}^m$$

Αν ισχύει ότι $c(x, k) > 0$ και $p(x, k) > 0$ τότε λέμε ότι τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης είναι **μη-τετριμμένα** και το k είναι μία μη τετριμμένη τιμή εξάσκησης και με K_x συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μη τετριμμένων τιμών εξάσκησης.

Στην πιο γενική περίπτωση που περιλαμβάνει και τα εξωτικά δικαιώματα, το δικαίωμα πώλησης και το δικαίωμα αγοράς δίνεται από τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα

$$c_u(x,k) = (x - ku)^+$$
$$p_u(x,k) = (ku - x)^+$$

όπου το διάνυσμα εξάσκησης u ανήκει σε κάποιον υπόχωρο U του $\mathbb{R}^m$,ο οποίος καλείται **υπόχωρος εξάσκησης (strike subspace)**.

Παράδειγμα(1 στο [6]):Έστω ότι σε μία οικονομία έχουμε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1,2,3,..,10\}$ και πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα με $T = \{0,1,2,3\}$. Επίσης θέτουμε $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ μία διαμέριση του Ω με $\Delta_0 = \Omega, \Delta_1 = \{\{1,2,4,6,8\},\{3,5,7,9,10\}\}, \Delta_2 = \{\{1,2,4\},\{6,8\},\{3,5\},\{7,9,10\}\}$ και $\Delta_3 = \{\{1\},\{2\},.....,\{10\}\}$. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία αγορά με τρία χρηματοοικονομικά συμβόλαια x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε

$$x_1^0 = \frac{13}{10}(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), x_1^1 = \frac{1}{5}(7,7,6,7,6,7,6,7,6,6)$$

$$x_1^2 = \frac{1}{3}(7,7,6,7,6,0,2,0,2,2), x_1^3 = (2,2,4,3,0,0,0,0,1,1)$$

οι αποδόσεις του x_1 στις τέσσερις χρονικές περιόδους και

$$x_2^0 = \frac{19}{10}(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), x_2^1 = \frac{1}{5}(7,7,12,7,12,7,12,7,12,12)$$

$$x_2^2 = 1/6(2,2,9,2,9,18,18,18,18,18), x_2^3 = (0,0,1,1,2,3,1,3,4,4)$$

οι αποδόσεις του x_2 και τέλος οι αποδόσεις του x_3,

$$x_3^0 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), x_3^1 = \frac{1}{5}(6,6,4,6,4,6,4,6,4,4)$$

$$x_3^2 = (2,2,0,2,0,0,4/3,0,4/3,4/3), x_3^3 = (3,3,0,0,0,0,4,0,0,0)$$

Αν έχουμε ένα Ευρωπαϊκού τύπου $forward - start$ δικαίωμα προαίρεσης με ημερομηνία λήξης $t = 3$ και ημερομηνία εξάρτησης $t = 1$,τότε τα διανύσματα x_1^3, x_2^3, x_3^3 είναι οι αποδόσεις των χρηματοοικονομικών συμβολαίων και ο υπόχωρος $X =< \{x_1^3, x_2^3, x_3^3\} >$ του $\mathbb{R}^{10}$ είναι ο χώρος των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων.Το $forward - start$ δικαίωμα πώλησης του x_1 (και πιο συγκεκριμένα του x_1^3) με ημερομηνία εξάρτησης $t = 1$, ως προς το διάνυσμα εξάσκησης $u = x_1^1 = \frac{7}{5}u_1 + \frac{6}{5}u_2$ έχει απόδοση

$$cu(x_1^3, 1) = (x_1^3 - u)^+ = \frac{1}{5}(3, 3, 14, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Τα $u_1^1 = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$ και $u_2^1 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ είναι τα χαρακτηριστικά διανύσματα των στοιχείων του Δ_1.Το διάνυσμα εξάσκησης $x_1^1 \in U = U^1 \subseteq \mathbb{R}^{10}$,όπου ο υπόχωρος U_1 παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα u_1, u_2. Αντίστοιχα τα διανύσματα εξάσκησης για τα x_2, x_3 είναι τα $x_2^1, x_3^1 \in U$.Κάθε ασφάλιστρο της μορφής $x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 \in X$ έχει απόδοση την ημερομηνία $t = 1, x^1 = \theta_1 x_1^1 + \theta_2 x_2^1 + \theta_3 x_3^1$ και άρα το διάνυσμα εξάσκησης x_1 είναι στοιχείο του U.Τέλος έχουμε ότι από το Θεώρημα2.1.1 ο U είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^{10}$ επειδή τα $supp(u_1) \cap supp(u_2) = \varnothing$.

3.3 Η πλήρωση των αγορών

Η πλήρωση της αγοράς είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που συμβολίζεται με $F_U(X)$ και προκύπτει επαγωγικά συμπληρώνοντας στην αγορά κάθε φορά τα δικαιώματα πώλησης και αγοράς των ήδη υπάρχων στοιχειών της αγοράς. Ποιο συγκεκριμένα

- X_1 είναι ο χωρος που παράγεται από το O_1,όπου $O_1 = \{c_u(x, k) \mid x \in X, u \in U, k \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που είναι γραμμένα πάνω σε στοιχεία του X.
- X_n είναι ο χωρος που παράγεται από το O_n ,όπου $O_n = \{c_u(x, k) \mid x \in X_{n-1}, u \in U, k \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που είναι γραμμένα πάνω σε στοιχεία του X_{n-1}.
- Από τον ορισμό έχουμε ότι $X_n \subseteq X_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,επειδή $x = x_+ - x_- = c_u(x, 0) - c_u(-x, 0) \in X_{n+1}$ για κάθε $x \in X_n$.Τέλος θέτουμε $F_U(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$

Ορισμός 3.3.1 *Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$,$F_U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι η* ***πλήρωση του χώρου των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων X*** *ως προς των υπόχωρο εξάσκησης U.*

Θέτουμε Υ τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον $X \cup U$,δηλαδή $Y = \{\lambda x + au \mid x \in X, u \in U, \lambda, a \in \mathbb{R}\}$ και έτσι σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα μπορούμε να πούμε ότι ο $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον υπόχωρο Υ,δηλαδή $S(Y) = F_U(X)$. Επίσης ορίζουμε ως $S_2 = \{x \vee y \mid x, y \in Y\}$ και ως $S_n = \{x \vee y \mid x \in S_{n-1}, y \in Y\}$. Επειδή τώρα ο $S(Y)$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων *supremum* των στοιχείων του Υ,έχουμε ότι $S(Y) = \bigcup_{n=2}^{\infty} S_n$.Στην κλασσική περίπτωση όπου ο U είναι μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα u και πιο συγκεκριμένα αν $u = \overrightarrow{1}$,η πλήρωση του X ως προς u συμβολίζεται με $F_1(X)$. Παρακάτω θα δείξουμε ότι ο $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον Υ και αν $\overrightarrow{1} \in X$ τότε ο $F_1(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται απο τον X.

Θεώρημα 3.3.2 *(3 στο [6])Έχουμε ότι:*

- $Y = X \cup U \subseteq X_1$
- *$F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος $S(Y)$ του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον Υ και*
- *Αν $U \subseteq X$ τότε ο $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον X*

Απόδειξη:

(i) Για κάθε $y = x + au \in Y$ έχουμε ότι $y = (x + au)^+ - (-x - au)^+ = c_u(x, a) - c_u(-x, a) \in X_1$ και άρα $U \subseteq X_1$.

(ii) Θα δείξουμε πρώτα ότι $F_U(X) \subseteq S(Y)$.Αρκεί δηλαδή να δείξουμε ότι $Xn \subseteq S(Y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Για κάθε $y \in O_1$ έχουμε ότι $y = c_u(x, a) = (x - au)^+ = x - au \vee 0$ για κάποιο $x \in X, u \in U$ και $a \in \mathbb{R}$ και άρα από τον παραπάνω ορισμό των S_n το $y \in S_2 \subseteq S(Y)$.Άρα το O_1 συνεπώς και το X_1 περιέχονται στο $S(Y)$.Υποθέτουμε τώρα ότι $X_n \subseteq S(Y)$ και θα δείξουμε ότι $X_{n+1} \subseteq S(Y)$.Για κάθε $z \in O_{n+1}$ έχουμε ότι $z = x - au \vee 0$ για κάποιο $x \in X_n, u \in U$ και $a \in \mathbb{R}$. Επειδή το $Xn \subseteq S(Y)$ έχουμε ότι $x \in S_k$ για κάποιο k.Αν λάβουμε υπ' όψιν $z = -au + (x \vee u)$ το $x \vee au = s \in S_{k+1}$ και έχουμε ότι $z \in Y + S_{k+1} \subseteq S(Y) + S(U) = S(Y)$ και άρα $z \in S(Y)$. Έτσι δείξαμε ότι $O_{n+1} \subseteq S(Y)$ και συνεπώς

$X_{n+1} \subseteq S(Y)$ και άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = F_U(X) \subseteq S(Y)$.Απομένει να δείξουμε ότι $S(Y) \subseteq F_U(X)$.Αν υποθέσουμε ότι $y \in S_2$,τότε $y = z \vee x$ με $z, x \in Y$.Επίσης $y = (z_1 + a_1 u_1) \vee (z_2 + a_2 u_2)$ με $z_1, z_2 \in X, u_1, u_2 \in U$ και $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.Άρα $y = (z_2 + a_2 u_2) + (z_1 - z_2) - (a_2 u_2 - a_1 u_1) \vee 0 \in Y + X_1$ και επειδή $U \subseteq X_1$ συνεπάγεται ότι $y \in X_1 + X_1 = X_1$ και άρα $S_2 \subseteq F_U(X)$.Υποθέτουμε $S_n \subseteq F_U(X)$ και θα δείξουμε ότι $S_{n+1} \subseteq F_U(X)$.Για κάθε $z \in S_{n+1}$ έχουμε ότι $z = x \vee y$ με $x \in S_n$ και $y \in Y$.Επειδή $S_n \subseteq F_U(X)$ συνεπάγεται ότι $x \in X_k$ για κάποιο k.Αφού τώρα $U \subseteq X_k$ έχουμε ότι $x - y \in X_k$,αλλά $z = y + (x - y) \vee 0 = y + c_u(x - y, 0) \in Y + X_{k+1} = X_{k+1} + X_{k+1} = X_{k+1}$ και άρα $z \in X_{k+1}$,οπότε $S_{n+1} \subseteq F_U(X)$.Τέλος επειδή $S_n \subseteq F_U(X)$ για κάθε $n > 1$ συνεπάγεται ότι $\bigcup_{n=2}^{\infty} S_n = S(Y) \subseteq F_U(X)$ και άρα $S(Y) = F_U(X)$.

(iii) Αν $U \subseteq X$ τότε $X = Y$ και άρα $F_U(X) = S(X)$

Όταν τα $x_1, x_2, .., x_n$ δεν είναι κατ' ανάγκη θετικά για να προσδιορίσουμε την πλήρωση της αγοράς,δηλαδή τον υποσύνδεσμο $F_U(X)$ και πιο συγκεκριμένα μία θετική βάση του, πρέπει να καθορίσουμε ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$,με $y_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, .., r$ έτσι ώστε ο υποσύνδεσμος που παράγεται από αυτό να είναι ο $F_U(X)$.Κάθε τέτοιο σύνολο ονομάζεται σύμφωνα με το [6] βασικό σύνολο της αγοράς.

Ορισμός 3.3.3 *Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο* $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\} \subseteq \mathbb{R}^m$,*με* $y_i > 0$ *για κάθε* $i = \{1, 2, .., r\}$ *ονομάζεται* ***βασικό σύνολο*** *της αγοράς αν παράγει τον υποσύνδεσο* $F_U(X)$.

Θέτουμε A *το υποσύνολο του* $\mathbb{R}^m$ *που ορίζεται ως εξής:*

$$A = \{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, \ldots, x_n^+, x_n^-\} \text{ αν } U \subset X$$

Και

$$A = \{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, \ldots, x_n^+, x_n^-, u_1^+, u_1^-, \ldots, u_d^+, u_d^-\} \text{ αν } UX$$

όπου $\{u_1^+, u_1^-, \ldots, u_d^+, u_d^-\}$ *μία βάση του* U.*Κάθε υποσύνολο του* A *το οποίο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και δεν είναι υποσύνολο κάποιου άλλου γραμμικώς ανεξάρτητου υποσυνόλου του* A,*ονομάζεται μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο υποσύνολο του* A.

Θεώρημα 3.3.4 *(11 στο [6])Κάθε μεγιστικό υποσύνολο $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ του A, που αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς.*

Απόδειξη:Αφού το $W = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο που αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του A, τότε το A και το W παράγουν τον ίδιο υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ και άρα και τον ίδιο υποσύνδεσμο.Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο υποσύνδεσμος $S(A)$ είναι ο $F_U(X)$. Για κάθε $x \in X \cup U$ έχουμε ότι αν $x^+, x^- \in A \Rightarrow x^+, x^- \in F_U(X)$ και άρα $A \subseteq F_U(X) \Rightarrow S(A) \subseteq F_U(X)$. Ακόμα έχουμε ότι $x_i = x_i^+ - x_i^- \in S(A)$ και $u_i = u_i^+ - u_i^- \in S(A)$ για κάθε i και άρα το $S(A)$ περιέχει το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, ..., u_d\}$. Επειδή τώρα από τον παραπάνω ορισμό ο υποσύνδεσμος $F_U(X)$ είναι ο ελάχιστος υποσύνδεσμος που περιέχει το $\{x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_d\}$ και ο $S(A)$ είναι υποσύνδεμος που το περιέχει, συνεπάγεται ότι $F_U(X) \subseteq S(A)$ και άρα επειδή $S(A) = F_U(X)$ ο υποσύνδεσμος που παράγεται από το A και συνεπώς και το W είναι η πλήρωση της αγοράς.

Αν τώρα το $W = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς θέτουμε τη βασική σύνάρτηση του W σύμφωνα με το Κεφάλαιο2:

$$\beta(i) = \left(\frac{y_1(i)}{\|y(i)\|_1}, \frac{y_2(i)}{\|y(i)\|_1}, ..., \frac{y_r(i)}{\|y(i)\|_1}\right)$$

για κάθε $i = 1, 2, .., m$ και με $\|y(i)\|_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$.

Ορισμός 3.3.5 *Ο χώρος των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων X είναι πλήρης ως προς τον υπόχωρο U αν $X = F_U(X)$.Αν δηλαδή ο X είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ διάστασης n.*

Θεώρημα 3.3.6 *(14 στο [6])Η διάσταση του $F_U(X)$ είναι ίση με τον πληθάριθμο του $R(\beta)$ και άρα έχουμε ότι $F_U(X) = \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $card(R(\beta)) = m$*

Απόδειξη:Αν ο X είναι πλήρης ως προς τον υπόχωρο U τότε $F_U(X) = X$ και επειδή $Y = X \cup U \subseteq F_U(X)$ αναγκαστικά συνεπάγεται ότι $Y = X$ και άρα $U \subseteq X$.Αφού ο $X = < \{x_1, x_2, .., x_n\} >$ είναι υποσύνδεμος από το βασικό μας θεώρημα η εικόνα της β έχει ακριβώς n στοιχεία. Αν υποθέσουμε ότι $U \subseteq X$ και $card(R(\beta)) = n$ πάλι από το βασικό μας θεώρημα ο X είναι υποσύνδεσμος και άρα σύμφωνα με το θεώρημα3.3.1 $F_U(X) = X$.

Θεώρημα 3.3.7 *(13 στο [6])Ο χώρος των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων X είναι πλήρης ως προς τον υπόχωρο U αν και μόνο αν $U \subseteq X$ και $card(R(\beta)) = n$*

Απόδειξη: Όμοια με το παραπάνω.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε το $forward - start$ δικαίωμα προαίρεσης του Παραδείγματος1.4.1 με ημερομηνία λήξης $t = 3$ και ημερομηνία εξάρτησης $t = 1$.Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε την πλήρωση του χώρου των χαρτοφυλακίων X που παράγεται από τα διανύσματα

$$x_1^3 = (2, 2, 4, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 1), x_2^3 = (0, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 3, 4, 4)$$

$$x_3^3 = (3, 3, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0)$$

ως προς τον υπόχωρο U που παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), u_2 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία για να προσδιορίσουμε μία θετική βάση του $F_U(X)$,πρέπει πρώτα να βρούμε ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του

$$A = \{(x_1^3)^+, (x_1^3)^-, (x_2^3)^+, (x_2^3)^-, (x_3^3)^+, (x_3^3)^-, u_1^+, u_2^+\} = \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, u_1, u_2\}$$

ώστε αυτό να είναι το βασικό σύνολο που παράγει τον $F_U(X)$.

A =

2	2	4	3	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	2	3	1	3	4	4
3	3	0	0	0	0	4	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $MaximalLin()$ παίρνουμε ένα μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο του A.Η συνάρτηση αυτή παίρνει ως όρισμα έναν πίνακα του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα του A.Σε αυτήν την περίπτωση τα διανύσματα του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και όλα θετικά και άρα αφού $A = W$ προκύπτει ο ίδιος πίνακας.

```
>> Y=maximalLin(A')

Y =

     2     2     4     3     0     0     0     0     1     1
     0     0     1     1     2     3     1     3     4     4
     3     3     0     0     0     0     4     0     0     0
     1     1     0     1     0     1     0     1     0     0
     0     0     1     0     1     0     1     0     1     1
```

Στην συνέχεια με την $SubLattice()$ θα προσδιορίσουμε την πλήρωση του χώρου των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων X ως προς τον υπόχωρο εξάσκησης U δηλαδή τον υποσύνδεσμο του $\mathbb{R}^{10}$, $F_U(X)$ καθώς και μία θετική βάση του

```
>> [F,P,G]=SubLattice(Y)

F =

     2     2     4     3     0     0     0     0     1     1
     0     0     1     1     2     3     1     3     4     4
     3     3     0     0     0     0     4     0     0     0
     1     1     0     1     0     1     0     1     0     0
     0     0     1     0     1     0     1     0     1     1
     0     0     0     0     0     0     6     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     6     6
```

```
P =

     0     0     0     0     0     0    12     0     0     0
     0     0     0     0     3     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     4     0     4     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0    12    12
     6     6     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     5     0     0     0     0     0     0
     0     0     6     0     0     0     0     0     0     0


G =

          0          0          0     0.0833     0.3333     0.6000     0.6667
     0.0833     0.6667     0.7500     0.3333          0     0.2000     0.1667
     0.3333          0          0          0     0.5000          0          0
          0          0     0.2500          0     0.1667     0.2000          0
     0.0833     0.3333          0     0.0833          0          0     0.1667
     0.5000          0          0          0          0          0          0
          0          0          0     0.5000          0          0          0
```

Παρατηρούμε ότι ισχύει το θεώρημα αφού η εικόνα της συνάρτησης γ έχει ακριβώς 7 σημεία και η διάσταση του $F_U(X)$ είναι 7 αφού

```
>> rank(F)

ans =

     7
```

Παράδειγμα2: Υποθέτουμε ότι έχουμε μία αγορά όπου ο χώρος των αποδόσεων είναι ο $\mathbb{R}^{12}$ και οι βασικοί τίτλοι είναι τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^{12}$ που ακολουθούν:

$$x_1 = (1, 2, 2, -1, 1, -2, -1, -3, 0, 0, 0, 0)$$

$$x_2 = (0, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 3, -1, -1, -1, -2)$$

$$x_3 = (1, 2, 2, 0, 1, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -2)$$

Επίσης ο μονοδιάστατος υπόχωρος εξάσκησης U παράγεται από το

$$u = (1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 3, -1, -1, -1, -2)$$

Παιρνάμε πρώτα τα δεδομένα στο $Matlab$.

```
>> X

X =

     1     2     2    -1     1    -2    -1    -3     0     0     0     0
     0     2     0     0     1     2     0     3    -1    -1    -1    -2
     1     2     2     0     1     0     0     0    -1    -1    -1    -2

>> u

u =

     1     2     2     1     1     2     1     3    -1    -1    -1    -2
```

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε τον υπόχωρο $Y = X \cup \{u\}$

```
>> Y=[X;u]

Y =

     1     2     2    -1     1    -2    -1    -3     0     0     0     0
     0     2     0     0     1     2     0     3    -1    -1    -1    -2
     1     2     2     0     1     0     0     0    -1    -1    -1    -2
     1     2     2     1     1     2     1     3    -1    -1    -1    -2
```

.

Με την εντολή $A = \left[max(X, zeros(size(X))); max(-X, zeros(size(X)))\right]$ υπολογίζουμε το A και με την εντολή $W = maximalLin(A')$ παίρνουμε ένα μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολό του A

```
>> A=[max(X,zeros(size(X)));max(-X,zeros(size(X)))]

A =

     1     2     2     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     2     0     0     1     2     0     3     0     0     0     0
     1     2     2     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     2     1     3     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1     2
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1     2

>> W=maximalLin(A')

W =

     1     2     2     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     2     0     0     1     2     0     3     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     2     1     3     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1     2
```

Επειδή έχουμε $x_2^- = x_3^-, x_1^+ = x_3^+$ και $u^+ = x_1^+ + x_1^-, u^- = x_2^-$ παίρνουμε ότι το $W = \{x_1^+, x_2^+, x_1^-, x_2^-\}$ είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο υποσύνολο του A και άρα ένα βασικό σύνολο της αγοράς.

Ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^{12}, F_U(X)$ που παράγεται από το W δίνεται παρακάτω.

```
>> [F,P,G]=SubLattice(W)

F =

     1     2     2     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     2     0     0     1     2     0     3     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     2     1     3     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1     2
     0     0     0     0     0     4     0     6     0     0     0     0
```

Ουσιαστικά προσθέσαμε στην αγορά το $x_5 = (0,0,0,0,0,4,0,6,0,0,0,0)$.Ο υποσύνδεσμος που παράγεται απο το $W \cup \{x_5\}$ είναι ο $F_U(X)$.Μία θετική βάση του $F_U(X)$ και η βασική συνάρτηση γ δίνονται στην επόμενη σελίδα :

```
P =

     0     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1     2
     0     0     0     1     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     8     0    12     0     0     0     0
     0     4     0     0     2     0     0     0     0     0     0     0
     1     0     2     0     0     0     0     0     0     0     0     0


G =

         0         0         0    0.5000    1.0000
         0         0    0.2500    0.5000         0
         0    1.0000    0.2500         0         0
    1.0000         0         0         0         0
         0         0    0.5000         0         0
```

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση γ έχει ακριβώς 5 σημεία όσο και η διάσταση του $F_U(X)$

```
>> rank(F)

ans =

     5
```

Οπότε ο χώρος που κατασκευάσαμε είναι ο ελάχιστος υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^{12}$, $F_U(X)$ και σύμφωνα με το Θεώρημα3.3.2 είναι η πλήρωση του χώρου των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων X ως προς τον υπόχωρο εξάσκησης U.

Παράρτημα

Η συνάρτηση SubLattice()

```
function [Sublattice,PositiveBase,G] = SubLattice( x )
%SubLattice(x) provides the vector sublattice generated
%by a given
%finite collection of positive, linearly independent
%vectors of Rm
%x denotes the matrix whose n-rows are the given vector
[N,M]=size(x);
%STEP 1
%a for-loop for the construction of the range of beta
%function in order to numerize its vectors
for i=1:M,
    if norm(x(:,i),1)~=0,
        C(:,i)=1/norm(x(:,i),1)*x(:,i);
    end

end
if length(unique(C','rows'))==N
    disp('matrix is a sublattice');
    D=unique(C','rows');
    Sublattice=x;
    G=D';
    PositiveBase=G\x;
else
    D=C(:,1);
    j=2;
        k=2;
index=ones(1,N);
%a while-loop for extracting the n-linearly indepentent
```

```
%vectors from x
    while j<=N
        D=[D C(:,k)];
        if rank(D)~=j,
            D(:,j) = [];
        else
            index(1,j)=k;
            j=j+1;
        end
        k=k+1;
    end
    Nindex=1:M;
    index2=setdiff(Nindex,index);
 %STEP 2
 %checking the indentical vectors of R(beta)
    for i=index
        for j=index2
            if C(:,i)==C(:,j)
                    index2=index2(index2~=j);

            end

        end
    end
    S=x;
  %Define the x_n+k vectors of R^m
    for i=1:M
          z=zeros(1,M);
        for j =index2
            if i==j,
                for k=index2

                    if C(:,i)==C(:,k)
                     z(1,i)=norm(x(:,i),1);
                     z(1,k)=norm(x(:,k),1);
                     index2=index2(index2~=k);

                    else
                    z(1,i)=norm(x(:,i),1);

                    end
```

```
                    end
                end
            end
            S=[S;z];
        end
        S(all(S==0,2),:)=[];
  %STEP 3
  %the Sublattice generated by x
        Sublattice=S;
%STEP 4
%Its positive base
      [PositiveBase,G]=PosBase(S);
end
end
```

H συνάρτηση Posbase()

```
function [P,G] = PosBase(x)
%the PosBase function provides a positive base
%of a given matrix, whose rows are a given
%finite collection of positive,linearly
%independnet vectors of Rm
[N,M]=size(x);
%a for-loop for the construction of the unique
%vectors of the range of the basic function
%? of x
for i=1:M,
      if norm(x(:,i),1)~=0,
         C(:,i)=1/norm(x(:,i),1)*x(:,i);
      end

end
D=unique(C','rows');
G=D';
A=inv(G);
%According to the algorithm
P=G\x;
end
```

Η συνάρτηση MinimalLat()

```
function [S,P,A] = MinimalLat(x)
%MinimalLat(x) provides the minimal lattice-subspace
%generated by a given
%finite collection of positive, linearly independent
%vectors of R^m
%x denotes the matrix whose n-rows are the given vectors
[N,M]=size(x);
%STEP 1
%a for-loop for the construction of the range of beta
%function of x in order to numerize its vectors
for i=1:M,
    if norm(x(:,i),1)~=0,
        C(:,i)=1/norm(x(:,i),1)*x(:,i);
    end

end
%and then we compute the convex hull of R(beta)
c=C';
[cc,Kindex,~]=unique(c,'rows');
lengthC=Kindex;
utrans=bsxfun(@minus,cc,cc(1,:));
rot=orth(utrans');
uproj=utrans*rot;
K=convhulln(uproj);
m=unique(K(:));
K1=cc(m,:)';
%Identify the vertices of the convex hull of R(beta)
[~,mm]=size(cc');
Q=1:mm;
Q1=setdiff(Q,m);
for i=Q1,
    Kindex(i)=[];
end
if length(Kindex)==N
    disp('matrix is a lattice-subspace')
    S=x;
    [P,A]=PosBase2(K1,Kindex,S);
else
```

```
    Nindex=1:M;
    index=setdiff(Nindex,Kindex);
%Step2 we first compute the convex combination of all
%non-vertex vectors
%of R(beta) in order to determine the xi_i vectors and then
%define the x_n+k vectors of R^m
if rank(K1)<N,
        disp('minimal lattice-subspace does not exist')
else
        h=zeros(length(Kindex),M);
        s=1;
        index2=Kindex';
        for i=index2,
            h(s,i)=1;
            for j=index
                if C(:,i)==C(:,j)
                    h(s,j)=1;
                    index=index(index~=j);
                end
            end
            s=s+1;
        end
        Aeq=K1;
        Aeq( :, all(~Aeq,1) ) = [];
        Aeq=[Aeq;ones(1,length(index2))];
        f=zeros(length(index2),1);
        lb=f;
        for j=index
            beq=[C(:,j);1];
            l =linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb,[]);
            h(:,j)=l;
        end
        S=x;
        y=zeros(1,M);
        %STEP 3
        %the minimal Lattice-Subspace generated by x
        %is given by the matrix S
        for i=N+1:length(index2)
            for j=1:M,
                y(1,j)=h(i,j)*norm(x(:,j),1);
            end
```

```
        S=[S;y];
    end
    %STEP 4
    %Its positive base
    if rank(S)==length(lengthC)
        disp('vector sublattice')
        P=PosBase(S);
    else
    [P A]=PosBase2(K1,Kindex,S);
    end




end
end
```

Η συνάρτηση Posbase2()

```
function [P,D]= PosBase2(K,Kindex,S)
%%the PosBase2 function provides a positive base
%of a given matrix S and a convex polytope K define
%by rows of S which  are a given finite collection of
%positive,linearly independnet vectors of R^m
k=K;
[N,M]=size(k);
for i=1:length(Kindex),
    k=K;
    x=k(:,length(Kindex)+1-i);
    k(:,length(Kindex)+1-i)=[];
    if rank(k)==N
        break
    end
end
k=[k;zeros(1,N)];
x=[x;1];
k=[k x];
%a for-loop for the construction of the unique vectors
%of the range of the basic function gamma of x
```

```
for i=1:length(Kindex)
    if norm(k(:,i),1)~=0,
        C(:,i)=1/norm(k(:,i),1)*k(:,i);
    end
end
D=unique(C','rows');
D2=D';
%According to the algorithm P=inverse(D2)*S
P=D2\S;
```

Η συνάρτηση maximalLin()

```
function [g] = maximalLin(x)
%The maximalLin function provides one maximal
%linear subset of the rows of x
[N,M]=size(x);
D=x(:,1);
j=2;
k=2;
index=ones(1,N);
%a while-loop for extracting the n-linearly
%indepentent vectors from x
while j<=M
    if k > M
        break
    end
    D=[D x(:,k)];
    if rank(D)~=j,
        D(:,j) = [];
    else
        index(1,j)=k;
        j=j+1;
    end
    k=k+1;
end
g=D';
end
```

Η συνάρτηση convextest()

```
function [C2,K1] = convextest(x)
%The convextest function provides the gamma
%function of x and the convex hull of its
%elements
[N,M]=size(x);
%Range(beta)
for i=1:M,
    if norm(x(:,i),1)~=0,
        C(:,i)=1/norm(x(:,i),1)*x(:,i);
    end

end
%convex hull of R(beta)
c=C';
[cc,Kindex,~]=unique(c,'rows');
utrans=bsxfun(@minus,cc,cc(1,:));
rot=orth(utrans');
uproj=utrans*rot;
K=convhulln(uproj);
m=unique(K(:));
K1=cc(m,:)';
[~,mm]=size(cc');
Q=1:mm;
Q1=setdiff(Q,m);
for i=Q1,
    Kindex(i)=[];
end
C2=cc';

end
```

Βιβλιογραφία

[1] I.A. Πολυράκης, Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία (2010)

[2] I. A. Polyrakis, Finite-Dimensional lattice-subspace of $C(\Omega)$ and curves of $\mathbb{R}^n$, Transactions of the american mathematical society, Vol. 346,Num. 7,July 1996

[3]I.A. Polyrakis, Minimal lattice-Subspaces, Transactions of the AMS, Vol. 351, Num 10, pp. 4183-4203(1999)

[4]I.A. Polyrakis, Lattice-Subspaces and Positive Bases in Function Spaces, Positivity 7:267-284, 2003.

[5]V. Katsikis, I.A. Polyrakis, Computation of vector sublattices and minimal lattice-subspaces of $\mathbb{R}^k$: Applications in finance, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6860–6873.

[6]C. Kountzakis, I.A. Polyrakis The completion in Security Markets, DEF 29, 1-21(2006)