Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Η Μεθοδος των Πεπερασμενων Στοιχειων για την επιλυση παραβολικων και στοχαστικων μερικων διαφορικων εξισωσεων

Φοιτήτρια:
Πιερρου
Χριστινα

Καθηγητής:
Χρυσαφινος
Κωνσταντινος

Αθήνα, Οκτώβρης 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Sobolev

1.1 Χώροι Banach

Ορισμός 1.1. *Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 1.2. *Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. (Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του X.)*

1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.3. *Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον V είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

τέτοια ώστε για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ να ισχύουν:

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *και αν* $\langle x, x\rangle = 0$ *τότε* $x = 0$.

Ένας διανυσματικός χώρος V μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *λέγεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*

Cauchy-Schwarz. Έστω $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x, y \in V$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle$$

Πόρισμα 1.1. *Έστω* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε η συνάρτηση*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+,\ \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

ορίζει μια νόρμα στον V, ισοδύναμα για κάθε $x, y \in V$ *και για κάθε* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ισχύει:*

(i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Ορισμός 1.4. *Ένας διανυσματικός χώρος* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα (μετρική) που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Ορισμός 1.5. *Έστω H ένας χώρος Hilbert και S γραμμικό υποσύνολο του H τέτοιο ώστε το S να είναι κλειστό στον H. Τότε, το S ονομάζεται υπόχωρος του H.*

Ορισμός 1.6. *Έστω* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ένας χώρος Hilbert και* $M \subset H$ *ένα υποσύνολό του. Ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του M ως το σύνολο*

$$M^{\perp} := \{v \in H : \langle v, x\rangle = 0, \forall x \in M\}.$$

Θεώρημα 1.1. *Έστω* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ένας χώρος Hilbert και* $M \subset H$ *ένα υποσύνολό του. Τότε, το σύνολο* $M^{\perp}$ *είναι υπόχωρος του Hilbert.*

Απόδειξη. Έστω $v_1, v_2 \in M^{\perp}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) $\langle 0, x\rangle = 0,\ \forall x \in M.$

(ii) $\langle v_1 + v_2, x\rangle = \langle v_1, x\rangle + \langle v_2, x\rangle = 0 + 0 = 0,\ \forall x \in M.$

(iii) $\langle \lambda v_1, x\rangle = \lambda\langle v_1, x\rangle = \lambda \cdot 0 = 0,\ \forall x \in M.$

Άρα ο $M^{\perp}$ είναι υπόχωρος του H.

□

Πόρισμα 1.2. *Έστω H χώρος Hilbert.*

(i) *Για κάθε υποσύνολα $M, N \subset H, M \subset N \Longrightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$*

(ii) *Για κάθε υποσύνολο M του H το οποίο περιέχει το 0 ισχύει ότι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.*

(iii) $\{0\}^{\perp} = H.$

(iv) $H^{\perp} = \{0\}.$

Απόδειξη.

(i) Έστω $v \in N^{\perp}$. Τότε, $\langle v, x\rangle = 0,\ \forall x \in N \Longrightarrow \langle v, x\rangle = 0,\ \forall x \in M \Longrightarrow v \in M^{\perp}$.

(ii) Έστω $v \in M \cap M^{\perp}$. Τότε, $v \in M$ και $v \in M^{\perp}$. Άρα, $\langle v, x\rangle = 0,\ \forall x \in M \Longrightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Longrightarrow v = 0$.

(iii) Ισχύει ότι $\langle 0, x\rangle = 0, \forall x \in H$. Άρα, από τον ορισμό ισχύει ότι $\{0\}^{\perp} = H$.

(iv) Αφού ισχύει ότι $H^{\perp} \subset H$, και έχουμε ότι $H^{\perp} \cup H = \{0\}$, συνεπάγεται ότι $H^{\perp} = \{0\}$.

□

Θεώρημα 1.2. *Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $u, v \in H$ έχουμε*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Απόδειξη.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

□

Θεώρημα 1.3. *Έστω M υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Έστω $v \epsilon H\backslash M$ και ορίζουμε $\delta := inf\{\|v-w\| : w \epsilon M\}$. Τότε, υπάρχει $w_o \epsilon M$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\|v - w_o\| = \delta$.

(ii) $v - w_o \epsilon M^{\perp}$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $\{w_n\}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} \|v-w_n\| = \delta$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{w_n\}$ είναι ακολουθία $Cauchy$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι

$$\|(w_n - v) + (w_m - v)\|^2 + \|(w_n - v) - (w_m - v)\|^2 = 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2).$$

Ισχύει ότι

$$0 \leq \|w_n - w_m\|^2 = 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(w_n - w_m) - v\|^2.$$

Αφού ο M είναι υπόχωρος, ισχύει ότι $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \epsilon M$, έχουμε

$$\|\frac{1}{2}(w_n + w_m - v)\| \geq \delta.$$

Άρα,

$$0 \leq \|w_n - w_m\|^2 \leq 2(\|w_n - v\|^2 + \|w_m - v\|^2) - 4\delta^2.$$

Για $m, n \to \infty$ έχουμε ότι

$$2\|w_n - v\|^2 + 2\|w_m - v\|^2 - 4\delta \to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Συνεπώς, $\|w_n - w_m\| \to 0$, και έτσι η $\{w_n\}$ είναι Cauchy. Άρα, υπάρχει $w_o \epsilon \bar{M} = M$ τέτοιο ώστε $w_n \to w_o$. Λόγω συνέχειας της νόρμας έχουμε ότι $\|w_o - v\| = \delta$.

(ii) Έστω $z = w_o - v$, με $\|z\| = \delta$. Θα αποδείξουμε ότι $z \perp M$. Έστω $w \in M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, $w_o + \lambda w \in M$ και η ποσότητα

$$\|z - \lambda w\|^2 = \|v - (w_o + \lambda w)\|^2$$

έχει ελάχιστο για $\lambda = 0$. Άρα,

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\|z - \lambda w\|^2 \mid_{\lambda=0} = -2\langle z, w\rangle.$$

Άρα, για κάθε $w \in M$ ισχύει ότι

$$\langle v - w_o, w\rangle = \langle z, w\rangle = 0.$$

που σημαίνει ότι το $v - w_o \perp M$ ή $v - w_o \in M^{\perp}$.

□

Θεώρημα 1.4. *Έστω M υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H και $v \in H$. Τότε, ισχύει ότι*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in H$. Αν y είναι το μοναδικό σημείο του που είναι το πιο κοντινό στο x, τότε έχουμε ότι $y' = x - y \in M^{\perp}$. Άρα, $x = y + y'$, όπου $y \in M$ και $y' \in M^{\perp}$. Επιπλέον, έχει δειχθεί ότι $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο.

□

Ορισμός 1.7. *Ένας τελεστής P πάνω σε ένα γραμμικό χώρο V ονομάζεται προβολή αν $P^2 = P$.*

Παρατήρηση 1.1. *Παρατηρούμε ότι αν H χώρος Hilbert και M ένας υπόχωρός του, τότε υπάρχει $P : H \to M$ με $Px = y$, για κάθε $x \in H$, όπου $x = y+y'$ με $y \in M$ και $y' \in M^{\perp}$.(Συμβολίζουμε την προβολή αυτή με P_M)*

Θεώρημα 1.5. *Έστω H χώρος Hilbert και $u \in H$. Θεωρούμε την απεικόνιση $L_u : H \to \mathbb{R}$ με $L_u(v) = \langle u, v\rangle$. Τότε, η L_u είναι γραμμική και συνεχής.*

Απόδειξη. Λόγω της γραμμικότητας και συνέχειας του εσωτερικού γινομένου, ισχύει ότι η L_u είναι γραμμική και συνεχής.

□

Θεώρημα 1.6. *Θεώρημα αναπάραστασης του Riesz. Κάθε συνέχης γραμμική συνάρτηση L σε ένα χώρο Hilbert H μπορεί να αναπαρασταθεί μοναδικά ως*

$$L(v) = \langle u, v\rangle$$

για κάποιο $u \in H$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\|L_u\|_H = \|u\|_H.$$

Απόδειξη. Έστω $M := \langle v \in H : L(v) = 0\rangle$. Παρατηρούμε ότι το M είναι υπόχωρος του H λόγω της γραμμικότητας και της συνέχειας της L. Συνεπώς, $H = M \oplus M^{\perp}$.

(i) Αν $M^{\perp} = \{0\}$ τότε $M = H$ και αυτό συνεπάγεται ότι $L \equiv 0$, συνεπώς ισχύει για $u = 0$.

(ii) Αν $M \neq \{0\}$ συνεπώς ένα $z \in M^{\perp}$, με $z \neq 0$. Τότε, $L(z) \neq 0$, διότι αν $L(z) = 0$ $z \in M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Για $v \in H$ και $\beta \in L(v)/L(z)$ έχουμε ότι

$$L(v - \beta z) = L(v) - \beta L(z) = 0.$$

Άρα, $v - \beta z \in M$, δηλαδή $v - \beta z = P_M v$ και συνεπώς $\beta z = P_{M^{\perp}} v$. Συγκεκριμένα, αν $v \in M^{\perp}$, τότε $v - \beta z = 0$ ή $v = \beta z$ το οποίο έπεται ότι ο $M^{\perp}$ είναι μονοδιάστατος. Επιλέγουμε

$$u := \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z.$$

Παρατηρούμε ότι $u \in M^{\perp}$. Όποτε, έχουμε

$$\langle u, v\rangle = \langle u, (v - \beta z) + \beta z\rangle$$

$$= \langle u, v - \beta z\rangle + \langle u, \beta z\rangle$$

$$= \langle u, \beta z\rangle = \beta \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} \langle z, z\rangle$$

$$= \beta L(z) = L(v).$$

Για την μοναδικότητα, έστω u_1, u_2 δύο στοιχεία τέτοια. Τότε,

$$0 = L(u_1 - u_2) - L(u_1 - u_2) = \langle u_1, u_1 - u_2\rangle - \langle u_2 - u_1 - u_2\rangle = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $u_1 = u_2$.

Τέλος, απομένει να αποδειχθεί ότι $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\|u\|_H = \frac{L(z)}{\|z\|_H}.$$

Από τον ορισμό της δυικής νόρμας συνεπάγεται ότι

$$\|L\|_{H^\perp} = \sup_{0 \neq v \,\epsilon\, H} \frac{\|L(v)\|}{\|v\|_H}$$

$$= \sup_{0 \neq v \,\epsilon\, H} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|_H} \leq \|u\|_H$$

$$= \frac{L(z)}{\|z\|_H} \leq \|L\|_{H'}.$$

Συνεπώς, $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$.

□

1.3 Χώροι Hölder

Θεωρούμε $U \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\gamma \,\epsilon\, (0, 1]$.

Ορισμός 1.8. *Οι συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$ για κάποιο $\gamma \,\epsilon\, (0, 1]$ λέγονται Hölder συνεχείς με εκθέτη γ.*

Ορισμός 1.9.

i) Εάν η συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής, η νόρμα στο $C(\overline{U})$ είναι $\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup_{x \,\epsilon\, U} |u(x)|$.

ii) Η γ^{th}- Hölder ημινόρμα της $u : U \to \mathbb{R}$ είναι η

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} := \sup_{x,y \,\epsilon\, U, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

iii) Ο Hölder χώρος $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \,\epsilon\, C^k(\overline{U})$ με την νόρμα να είναι πεπερασμένη και ορισμένη ως εξής

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} := \sum_{|a| \leq k} \|D^a u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|a| = k} [D^a u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

Επομένως ο χώρος $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ αποτελείται από αυτές τις συναρτήσεις u που είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και των οποίων η k^{th} -μερική παράγωγος είναι φραγμένη και Hölder συνεχής με εκθέτη γ.

Παρατήρηση 1.2. *Οι Hölder χώροι δεν είναι συχνά κατάλληλοι για την στοιχείωση και την μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων, διότι δεν ξέρουμε πάντα αν οι λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων ανήκουν στον Hölder χώρο. Απεναντίας χρειαζόμαστε χώρους που έχουν λιγότερες λείες συναρτήσεις. Μια περίπτωση αυτών των χώρων είναι οι χώροι Sobolev.*

Θεώρημα 1.7. *Ο χώρος των συναρτήσεων $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ είναι χώρος Banach.*

1.4 Χώροι Sobolev

1.4.1 Ασθενής παράγωγος

Ορισμός 1.10. *Έστω ο $C_c^{\infty}(U)$ ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων σναρτήσεων $\phi : U \to \mathbb{R}$ των οποίων το στήριγμα είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Το στήριγμα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι το σύνολο (ή η κλειστότητα αυτού) πάνω στο οποίο η συνάρτηση δεν μηδενίζεται. Μια συνάρτηση ϕ που ανήκει στο $C_c^{\infty}(U)$ συνήθως καλείται συνήθως δοκιμαστική συνάρτηση.*

Ορισμός 1.11. *Έστω $u, v \in L^1_{loc}(U)$ και α είναι ένα διάνυσμα. Λέμε ότι το v είναι η α^{th} ασθενής μερική παράγωγος της u, και συμβολίζουμε με $D^\alpha u = v$, αν ισχύει*

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U v\phi dx$$

για όλες τις δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^{oo}(U)$.

Θεώρημα 1.8. *Η α-ασθενής μερική παράγωγος της u, αν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σχεδόν παντού στο $L^1_{loc}(U)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις $v, \overline{v} \in L^1_{loc}(U)$ τέτοιες ώστε

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|a|} \int_U v\phi dx = (-1)^{|a|} \int_U \overline{v}\phi dx \; \forall \phi \in C_c^{oo}(U).$$

Συνεπώς $v = \overline{v}$ σχεδόν παντού στο $L^1_{loc}(U)$.

$\square$

Ορισμός 1.12. *Ο χώρος Sobolev* $W^{k,p}(U)$, *με* $k \in N \cup \{0\}$ *και* $1 \leq p \leq \infty$ *απαρτίζεται από όλες τις τοπικά αθροίσιμες συναρτήσεις* $u : U \to \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε για κάθε διάνυσμα* α *με* $|\alpha| \leq k$, *υπάρχει η* α*-ασθενής μερική παράγωγος* $D^a u$ *και ανήκει στον* $L^p(U)$.

Παρατήρηση 1.3. *Στον παραπάνω ορισμό, αν* $p = 2$ *τότε γράφουμε* $H^k(U) = W^{k,2}(U)$. *Αν επιπλέον* $k = 0$, *τότε* $H^o(U) = L^2(U)$.

Ορισμός 1.13. *Αν* $u \in W^{k,p}(U)$, *ορίζουμε τη νόρμα*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^a u|^p dx \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \sum\limits_{|\alpha| \leq k} ess\ sup_U |D^a u| & , p = \infty \end{cases}$$

Ορισμός 1.14. *Εστω και δύο χώροι Banach με νόρμες* $\| \cdot \|_X$, $\| \cdot \|_Y$ *και* $X \subset Y$. *Θα λέμε ότι ο είναι συμπαγώς ενσωματωμένος στον* $(X \subset\subset Y)$, *αν*

- $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$ *για κάποια σταθερά* C, *και*
- *κάθε ακολουθία σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του έχει υπακολουθία που είναι Cauchy ως προς τη νόρμα* $\| \cdot \|_Y$.

Ορισμός 1.15.

- *Έστω* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ *και* $u \in W^{k,p}(U)$. *Θα λέμε ότι η* u_m *συγκλίνει στο* u *στο* $W^{k,p}(U)$ *και γράφουμε* $u_m \longrightarrow u$ *στο* $W^{k,p}(U)$, *αν*

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

- *Γράφουμε* $u_m \to u$ *στο* $W^{k,p}_{loc}(U)$, *αν* $u_m \to u$ *στο* $W^{k,p}(V)$ *για κάθε* $V \subset\subset U$.

Ορισμός 1.16. *Συμβολίζουμε με* $W^{k,p}_o(U)$ *την πλήρωση (κλειστότητα) του* $C_c^{\infty}(U)$ *ως προς η νόρμα* $\| \cdot \|_{W^{k,p}(U)}$.

Σημείωση 1.1. *Γράφουμε* $H^k_o(U) = W^{k,2}_o(U)$.

Θεώρημα 1.9. *Ασθενής Παράγωγος. Έστω $u, v \epsilon W^{k,p}(U)$ $|a| \leq k$. Τότε*

(i) $D^a u \epsilon W^{K-|a|,p}(U)$ *και* $D^{\beta(D^\alpha u)} = D^\alpha(D^{\beta u}) = D^{\alpha+\beta}u$ *για κάθε διάνυσμα* α *και* β *με* $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) *Για κάθε* $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$, $\lambda u+\mu v \epsilon W^{k,p}(U)$ *και* $D^\alpha(\lambda u+\mu v) = \lambda D^\alpha u+\mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

(iii) *Αν* V *είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του* U, *τότε* $u \epsilon W^{k,p}(V)$.

(iv) *Αν* $\zeta \epsilon C_c^\infty(U)$, *τότε* $\zeta u \epsilon W^{k,p}(U)$ *και*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^b \zeta D^{\alpha-\beta} u \ \ (Leibniz' formula)$$

όπου $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $\phi \epsilon C_c^\infty(U)$. Τότε $D^\beta \phi \epsilon C_c^\infty(U)$, και συνεπώς

$$\int_U D^\alpha u D^\beta \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int u D^{\alpha+\beta} \phi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx = (-1)^{|\beta|} \int_U D^{\alpha+\beta} u \phi dx.$$

Άρα $D^\beta(D^\alpha u) = (D^{\alpha+\beta})u$ υπό ασθενή έννοια.

(ii), **(iii)** Οι αποδείξεις των (ii),(iii) είναι απλές εφαρμογές των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος Lebesque.

(iv) Θα δουλέψουμε με επαγωγή ως προς το $\|\alpha\|$. Για $\|\alpha\| = 1$ έχουμε

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi dx = \int u D^\alpha(\zeta\phi) dx - \int u \phi D^\alpha \zeta dx = -\int_U (\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta)\phi dx.$$

Επιπλέον,

$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta$$

άρα ισχύει. Έστω $l < k$ και ότι ισχύει για όλα τα $\alpha \leq l$ και όλες τις συναρτήσεις ζ. Τότε για $|\alpha| = l + 1$, υπάρχουν διανύσματα

β, γ τέτοια ώστε $\alpha = \beta + \gamma$, $|\beta| = l$ και $\gamma = 1$. Τότε, για κάποιο $\phi \, \epsilon \, C_c^\infty(U)$ έχουμε

$$\int_U \zeta u D^\alpha \phi dx = \int_U \zeta u D^\beta (D^\gamma \phi) dx$$

$$= (-1)^{|\beta|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta} \binom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\beta - \sigma} u D^\gamma \phi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \sum_{\sigma \le \beta, \rho = \sigma + \gamma} \binom{\beta}{\sigma} [D^\rho \zeta D^{\alpha - \rho} u + D^\sigma \zeta D^{\alpha - \sigma} u] \phi dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U \left[\sum_{\sigma \leqslant \alpha} \tbinom{\alpha}{\sigma} D^\sigma \zeta D^{\alpha - \sigma} u \right] \phi dx,$$

αφού

$$= \binom{\beta}{\sigma - \gamma} + \binom{\beta}{\sigma} = \binom{\alpha}{\sigma}.$$

□

Θεώρημα 1.10. ***Οι χώροι*** *Sobolev* ***ως χώροι συναρτήσεων.*** *Για κάθε $k = 1, 2, ...$ και $1 \le p \le \infty$, οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(U)$ είναι χώροι Banach.*

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|_{W^{k,p}(U)}$ είναι νόρμα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

και ότι

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Έστω $u, v \, \epsilon \, W^{k,p}(U)$. Τότε αν $1 \le p < \infty$ από την ανισότητα *Minkowski* έχουμε ότι

$$\|u + v\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}\right)^p \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} (\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} (\|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}$$

$$= \|u\|_{W_{k,p}(U)} + \|v\|_{W_{k,p}(U)}.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι ο $W^{k,p}(U)$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\| \cdot \|_{W_{k,p}(U)}$. Έστω $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία *Cauchy* στον $W^{k,p}(U)$. Τότε, για κάθε $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι *Cauchy* ακολουθία στον $L^p(U)$. Αφού ο $L^p(U)$ είναι πλήρης, υπάρχουν συναρτήσεις $u_\alpha \epsilon L^p(U)$ τέτοιες ώστε

$$D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha \text{ στον } L^p(U)$$

για κάθε

$$|\alpha| \leq k.$$

Συγκεκριμένα,

$$u_n \longrightarrow u_{(0,0,\ldots,0)} := u \text{ στον } L^p(U).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $u \epsilon W^{k,p}(U)$ και $D^\alpha u = u_\alpha$ όπου $|\alpha| \leq k$. Πράγματι, έστω $\phi \epsilon C_c^\infty(U)$. Τότε

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m D^\alpha \phi dx$$

$$= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi dx$$

$$= (-1)^\alpha \int_U u_\alpha \phi dx$$

Ο ισχυρισμός που έγινε επαληθεύτηκε και άρα αφού $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ στον $L^p(U)$ για κάθε $|\alpha| \leq k$, συνεπάγεται ότι $u_m \to u$ στον $W^{k,p}(U)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

□

1.5 Προσεγγίσεις σε χώρους Sobolev

Σημείωση 1.2. $U_\varepsilon := \{x \epsilon U : dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Ορισμός 1.17.

(i) Ορίζουμε $\eta \epsilon C^\infty(R^n)$ *με*

$$\eta(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

με $C > 0$ *σταθερά τέτοια ώστε* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$, *ορίζουμε τη συνάρτηση Standard* $Mollifier$ *ως*

$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. *Η συνάρτηση* η_ε *είναι* $C^\infty(U_\varepsilon)$ *και ισχύει*

$\int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon dx = 1,\ supp(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$.

Ορισμός 1.18. *Αν η συνάρτηση* $f : U \to \mathbb{R}$ *είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση* $Mollifier$ *της* f *ως*

$$f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f,\ \text{στο } U_\varepsilon$$

με τύπο

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy,$$

για $x \epsilon U_\varepsilon$.

Θεώρημα 1.11. *Ιδιότητες συναρτήσεων* $mollifier$

(i) $f^\varepsilon \epsilon C^\infty(U_\varepsilon)$

(ii) $f^\varepsilon \to f$ *σχεδόν παντού, καθώς* $\varepsilon \to 0$

(iii) Αν $f \epsilon C(U)$, *τότε* $f^\varepsilon \to f$ *ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του* U.

(iv) Αν $1 \leq p < \infty$ *και* $f \epsilon L^p_{loc}(U)$, *τότε* $f^\varepsilon \to f$ *στο* $L^p_{loc}(U)$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $x \in U_\varepsilon$, $i \in \{1, ..., n\}$, και h αρκετά μικρό ώστε $x + he_i \in U_\varepsilon$. Τότε

$$\frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\ \eta(\tfrac{x+he_i-y}{\varepsilon}) - \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon})\ \right] f(y)dy$$

$$= \frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\ \eta(\tfrac{x+he_i-y}{\varepsilon}) - \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon})\ \right] f(y)dy$$

για κάποιο ανοιχτό σύνολο $V \subset\subset U$. Αφού

$$= \frac{1}{h} \left[\ \eta(\tfrac{x+he_i-y}{\varepsilon}) - \eta(\tfrac{x-y}{\varepsilon})\ \right] \to \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(\frac{x-y}{\varepsilon})$$

ομοιόμορφα στο V, το $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)dy.$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι το $D^\alpha f^\varepsilon(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)dy, \text{ με } x \in U_\varepsilon,$$

για κάθε διάνυσμα α.

(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue, αφού η f είναι τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\lim_{r\to 0} \int_{B(x,r)} \mid f(y) - f(x) \mid dy = 0$$

σχεδόν παντού στο U. Έστω $x \in U$. Τότε

$$|f^\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)[f(y) - f(x)]dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta(\frac{x-y}{\varepsilon}) |f(y) - f(x)| dy$$

$$\leq C \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy \to 0, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0$$

(iii) Έστω ότι $f \in C(u)$. Δοθέντος $V \subset\subset U$ επιλέγουμε $V \subset\subset W \subset\subset U$ και παρατηρούμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο W . Επιπλέον, $f^\varepsilon \to f$ ισχύει ομοιόμορφα για κάθε $x \in V$, άρα $f^\varepsilon \to f$ ομοιόμορφα στο V.

(iv) Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f \in L^p_{loc}(U)$. Επιλέγουμε ένα ανοιχτό υποσύνολο $V \subset\subset U$ και ένα ανοιχτό σύνολο W τέτοιο ώστε $V \subset\subset W \subset\subset U$. Ισχυριζόμαστε ότι για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}.$$

Πράγματι, αν $1 < p < \infty$ και $x \in V$,

$$|f^\varepsilon(x)| = \left|\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy\right|$$

$$\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\eta^{\frac{1}{p}}(x-y) \mid f(y) \mid dy$$

$$\leq \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Όμως, $\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)dy = 1$, άρα έχουμε

$$\int_V |f^\varepsilon|^p dx \ \leq \ \int_V \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) \mid f(y) \mid^p dy\right)$$

$$\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)dx\right) dy$$

$$= \int_W |f(y)|^p dy,$$

δοθέντος $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε $g \in C(W)$ τέτοιο ώστε

$$\|f-g\|_{L^p(W)} < \delta$$

Τότε

$$\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g-f\|_{L^p(V)}$$

$$\leq 2|g-f|_{L^p(W)} + |g^\varepsilon - g|_{L^p(V)}$$

$$\leq 2\delta + |g^\varepsilon - g|_{L^p(V)}$$

Όμως, ισχύει $g^\varepsilon \to g$ ομοιόμορφα στο V, άρα έχουμε ότι

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta.$$

Θεώρημα 1.12. Τοπική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις.

Έστω $u \in W^{k,p}(U)$ *για κάποιο* $1 \leq p < \infty, k > 0$ *και θέτουμε* $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ *στο* U_ε*. Τότε:*

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$*, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και*

(ii) $u^\varepsilon \to u$ *στο* $W^{k,p}_{loc}(U)$*, καθώς* $\varepsilon \to 0$

Απόδειξη.

i Η απόδειξη της (i) έχει γίνει στο θεώρημα (1.11)

ii Ισχυριζόμαστε ότι $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ στο U_ε με $|\alpha| \leq k$. Πράγματι, έστω $x \in U_\varepsilon$. Τότε

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = D^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

$$= \int_U D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

$$= (-1)^{|a|} \int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)dy$$

Για σταθερό $x \in U_\epsilon$ η συνάρτηση $\phi(y) := \eta_\epsilon(x-y)$ ανήκει στο $C^\infty_c(U)$. Συνεπώς, από τον ορισμό της ασθενής παραγώγου, έχουμε ότι

$$\int_U D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = (-1)^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy.$$

Άρα

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy$$

$$=[\eta_\varepsilon * D^\alpha u](x).$$

Επιλέγουμε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset\subset U$. Από το θεώρημα (1.11) έχουμε ότι $D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u$ στο $L^p(V)$ καθώς $\varepsilon \to 0$, για κάθε $|\alpha| \leq k$. Συνεπώς

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^{L^p(V)}} \to 0$$

καθώς $\varepsilon \to 0$. Αυτό αποδεικνύει το (ii)

Θεώρημα 1.13. Ολική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις.

Έστω U είναι φραγμένο και έστω ότι $u \epsilon W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \epsilon C^{\infty}(U) \cap W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $U = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, όπου

$$U_i := \{x \epsilon U | dist(x, \partial U) > \frac{1}{i}\}$$

για $i = 1, 2, ...$ και ορίζουμε

$$V_i := U_{i+3} - \bar{U}_{i+1}.$$

Επιλέγουμε κάποιο ανοιχτό σύνολο $V_o \subset\subset U$ τέτοιο ώστε $U = \cup_{i=0}^{\infty} V_i$. Έστω τώρα είναι οικογένεια ομαλών διαμερίσεων της μονάδος $\{\zeta\}_{i=0}^{\infty}$ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \zeta_i \epsilon C_c^{\infty}(V_i) \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1, & \text{στο } U \end{cases}$$

Έστω $u \epsilon W^{k,p}(U)$. Τότε, ισχύει ότι $\zeta_i u \epsilon W^{k,p}(U)$ και $supp(\zeta_i u) \subset V_i$. Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{cases} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} & \text{για } i = 0, 1, ... \\ supp(u^i) \subset W_i & \text{για } i = 1, ... \end{cases}$$

με $W_i := U_{i+4} - \bar{U}_i \supset V_i$, $i = 1, ...$

Ορίζουμε $v := \sum\limits_{i=0}^{\infty} u^i$. Η συνάρτηση αυτή είναι $C^{\infty}(U)$, αφού για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset\subset U$ το άθροισμα έχει το πολύ αριθμήσιμες το πολύ μη αρνητικές τιμές. Αφού $u = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$, έχουμε ότι για κάθε $V \subset\subset U$

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)}$$

$$\leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta$$

Παίρνοντας το supremum στα σύνολα $V \subset\subset U$ καταλήγουμε ότι

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta$$

$\square$

Θεώρημα 1.14. ***Ολική προσέγγιση μέσω ομαλών συναρτήσεων μέχρι το σύνορο.*** *Έστω U φραγμένο σύνολο και ∂U είναι C^1. Αν $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq p < \infty$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ τέτοιες ώστε*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Απόδειξη. Έστω $x^0 \in \partial U$. Αφού το σύνορο ∂U είναι C^1, υπάρχει μια ακτίνα $r > 0$ και μια C^1 συνάρτηση $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$U \cap B(x^o, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

Ορίζουμε

$$V := U \cap B(x^o, \frac{r}{2}).$$

Επιπλέον, ορίζουμε το μετατοπισμένο σημείο $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$ με $x \in V$ και $\varepsilon, \lambda > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάποιο $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο, η μπάλα $B(x^\varepsilon, \varepsilon)$ ανήκει στο $U \cap B(x^o, r)$ για όλα τα $x \in V$ και όλα τα μικρά $\varepsilon > 0$.
Επιπλέον, ορίζουμε $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon), x \in V$ και $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Προφανώς, ισχύει ότι $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$. Ισχυριζόμαστε ότι $u^\varepsilon \to u$ στο $W^{k,p}(V)$. Πράγματι, έστω α ένα οποιοδήποτε διάνυσμα με $| \alpha | \leq k$

$$\|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \to 0$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$. Αφού το ∂U είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία $x_i^o \in \partial U$, ακτίνες $r_i > 0$, σύνολα $V_i = U \cap B(x_i^o, \frac{r_i}{2})$ και συναρτήσεις $v_i \in C^\infty(\bar{V}_i)$, $i = 0, 1, ...N$, τέτοια ώστε

$$U \subset \cup_{i=1}^N B^o(x_i^o, \frac{r_i}{2})$$

και

$$\|v_o - v\|_{W^{k,p}(V_o)} \leq \delta$$

Έστω $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ μια οικογένεια από ομαλές διαμερίσεις της μονάδας που ορίζονται στα ανοιχτά σύνολα $\{V_i\}_{i=0}^N$ του U. Ορίζουμε $v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$. Τότε προφανώς $v \in C^\infty(\bar{U})$ και για κάθε $|\alpha| \leq k$ ισχύει

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} \leq \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)}$$

$$\leq C\sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} = CN\delta$$

□

1.6 Επέκταση

Θεώρημα 1.15. ***Θεώρημα Επέκτασης***
Έστω U ένα φραγμένο σύνολο και ∂U είναι C^1 . Επιλέγουμε ένα ανοιχτό φραγμένο σύνολο V τέτοιο ώστε $V \subset\subset U$. Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

όπου $1 \leq p \leq \infty$, τέτοιος ώστε για κάθε $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$ να ισχύει:

(i) *$Eu = u$ σχεδόν παντού στο U*

(ii) *$supp(Eu) \subset V$*

(iii) *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ με σταθερά C η οποία εξαρτάται από τα p, U και V.*

Θεώρημα 1.16. *Η συνάρτηση Eu καλείται επέκταση της u στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \,\epsilon\, \partial U$ και υποθέτουμε ότι το ∂U είναι επίπεδο $\{x_n = 0\}$. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ανοιχτή μπάλα B, με κέντρο x_0 και ακτίνα r, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

Προσωρινά υποθέτουμε ότι $C^\infty(\bar{U})$. Ορίζουμε

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x\epsilon B^+ \\ -3u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, ..., x_{n-1}, \frac{-x_n}{2}) & x\epsilon B^- \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται η ανώτερης τάξης αντανάκλαση του u από την B^+ στην B^-. Ισχυριζόμαστε ότι $\bar{u} \,\epsilon\, C^1(B)$. Για να δείξουμε αυτό, ορίζουμε $u^- := u|_{B^-}, u^+ := u|B^+$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $u^-_{x_n} = u^+_{x_n}$ στο $\{x_n = 0\}$. Πράγματι

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,..,x_{n-1},-x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,..,x_{n-1},\frac{-x_n}{2})$$

και έτσι

$$u^-_{x_n}|_{\{x_n=0\}} = u^+_{x_n}|_{\{x_n=0\}}.$$

Τώρα, αφού $u^+ = u^-$ στο $\{x_n = 0\}$, εύκολα βλέπουμε ότι

$$u^-_{x_i}|_{\{x_n=0\}} = u^+_{x_i}|_{\{x_n=0\}}$$

για $i = 1,..,n-1$. Άρα και

$$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$$

για κάθε $|\alpha| \leq 1$ και έτσι έχουμε ότι $u \,\epsilon\, C^1(B)$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\|\bar{u}_{W^{1,p}(B)}\| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

με C σταθερά ανεξάρτητη από το u.

Θεωρούμε τώρα ότι το ∂U δεν είναι κατανάγκη επίπεδο κοντά στο x_o. Τότε μπορούμε να βρούμε μια C^1 απεικόνιση Φ , με αντίστροφη Ψ , τέτοια ώστε η Φ να μετατρέπει σε επίπεδο το ∂U κοντά στο x_o. Γράφουμε $y = \Phi(x)$, $x = \Psi(y)u'(y) := u(\Psi(y))$. Επιλέγουμε μια μικρή μπάλα B όπως πριν. Τότε λειτουργώντας όπως πριν επεκτείνουμε την συνάρτηση u' από το B^+ σε μια συνάρτηση $\bar{u}'$ που ορίζεται σε όλο το B, τέτοια ώστε $\bar{u}' = C^1$ και έχουμε την εκτίμηση

$$\|\bar{u}'\|_{W_{1,p}(B)} \leq C\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

θέτουμε $W := \Psi(B)$. Τότε μετατρέποντας ξανά σε x-συντεταγμένες, παίρνουμε την επέκταση $\bar{u}$ του u στο W, με

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Αφού το ∂U είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $x_i^0 \,\epsilon\, \partial U$, ανοιχτά σύνολα W_i και επεκτάσεις $\bar{u}_i$ του u στο W_i, τέτοια ώστε $\Gamma \subset \cup_{i=1}^N W_i$. Επιλέγουμε $W_0 \subset\subset U$ τέτοιο ώστε $U \subset \cup_{i=1}^N W_i$ και έστω $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ μια διαμέριση της μονάδας. Γράφουμε $\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i$, όπου $\bar{u}_o = u$. Τότε έχουμε την ανισότητα

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Με C σταθερά που είναι ανεξάρτητη από το u. Επιπλέον, μπορούμε το υποστήριγμα του $\bar{u}$ να το κανονίσουμε να βρίσκεται εντός του $V \supset\supset U$.

Ορίζουμε $Eu := \bar{u}$ και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $u \mapsto Eu$ είναι γραμμική. Υποθέτουμε τώρα ότι $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$ και επιλέγουμε $u_m \,\epsilon\, C^\infty(\bar{U})$ ώστε να συγκλίνουν στο u στο $W^{1,p}(U)$. Άρα έχουμε ότι

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Συνεπώς, $\{Eu_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy και έτσι συγκλίνει στο $\bar{u} := Eu$. Αυτή η επέκταση, η οποία δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας των προσεγγιστικών συναρτήσεων $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, είναι η ζητούμενη.

□

Παρατηρήσεις

(i) Έστω ότι το ∂U είναι C^2. Τότε ο τελεστής επέκτασης που κατασκευάστηκε παραπάνω είναι επίσης φραγμένος γραμμικός τελεστής από το $W^{2,p}(U)$ στο $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Για την απόδειξή του παρατηρούμε ότι μπορεί το $\bar{u}$ να μην ανήκει γενικότερα στο C^2 αλλά ανήκει στο $W^{2,p}(B)$. Επίσης, έχουμε την ανισότητα

$$\|\bar{u}\|_{W^{2,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(B^+)}$$

και όπως πριν έχουμε την εκτίμηση

$$\|Eu\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(U)},$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα U, V, n και p.

(ii) Η παραπάνω κατασκευή δεν μας δίνει την επέκταση για χώρους *Sobolev* $W^{k,p}$, αν $k > 2$.

1.7 Ίχνος

Θεώρημα 1.17. ***Θεώρημα ίχνους.*** *Έστω U είναι ένα φραγμένο σύνολο με ∂U να είναι C^1. Τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

με $1 \leq p < \infty$, τέτοιος ώστε:

(i) $Tu = u|_{\partial U}$, *αν* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ *και*

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ *για κάθε* $u \in W^{1,p}(U)$, *με σταθερό C που εξαρτάται μόνο από τα p και U.*

Θεώρημα 1.18. *Η συνάρτηση Tu καλείται το ίχνος της u στο ∂U.*

Απόδειξη. Έστω ότι $u \in C^1(\bar{U})$. Υποθέτουμε ότι $x^0 \in \partial U$ είναι επίπεδο κοντά στο x^0 και βρίσκεται στο επίπεδο $\{x_n = 0\}$. Επιλέγουμε μια ανοιχτή μπάλα B όπως στην προηγούμενη απόδειξη και έστω ότι με $\widehat{B}$ συμβολίζουμε την ομόκεντρη μπάλα με ακτίνα $r/2$. Επιλέγουμε $\zeta \in C_c^\infty(B)$, με $\zeta \leq 0$ στην B, $\zeta = 1$ στην $\widehat{B}$. Συμβολίζουμε με γ το κομμάτι του ∂U που ανήκει στην $\widehat{B}$. Θέτουμε $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \{x_n = 0\}$. Τότε

$$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx'$$

$$= -\int_{B^+} (\zeta|u|^p)_{x_n} dx$$

$$-\int_{B^+} |u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1}(sgn(u))u_{x_n}\zeta dx$$

$$\leq C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p dx.$$

Αν $x_0 \in \partial U$ δεν είναι επίπεδο κοντά στο x_0 ,λειτουργώντας ανάλογα με την παραπάνω απόδειξη κάνουμε επίπεδο το σύνορο κοντά στο x_0 για να πάρουμε το παραπάνω αποτέλεσμα. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα και με αλλαγή μεταβλητών, παίρνουμε την ανισότητα

$$\int_\Gamma |u|^p ds \leq C \int_U |u|^p + |Du|^p dx,$$

όπου Γ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του ∂U που περιέχει το x^0. Αφού το ∂U είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $x_i^0 \in \partial U$ και ανοικτά υποσύνολα $\Gamma_i \in \partial U, i = 1, ..., N$ τέτοια ώστε $\partial U = \cup_{i=1}^N \Gamma_i$ και

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \ , \ i = 1, ..., N$$

Συνεπώς γράφουμε $Tu := u|_{\partial U}$, τότε

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_W^{1,p}(U)$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά C ανεξάρτητη από το u.
Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για $u \in C^1(\bar{U})$. Έστω ότι $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ που να συγκλίνουν στο u στον $W^{1,p}(U)$. Τότε ισχύει

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)},$$

και έτσι η $\{Tu_m\}_{m=1}^\infty$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον $L^p(\partial U)$. Ορίζουμε

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m, \text{ πάνω στο } \partial U.$$

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή των ομαλών συναρτήσεων που προσεγγίζουν την u. Οπότε, αν $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ τότε οι συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο u στο $\bar{U}$. Συνεπώς, $Tu = u|_{\partial U}$.

□

Θεώρημα 1.19. *Συναρτήσεις μηδενικού ίχνους στον $W^{1,p}(U)$. Έστω U ένα φραγμένο σύνολο με σύνορο ∂U να είναι C^1. Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε*

$$u \in W_o^{1,p}(U) \text{ αν και μόνο αν } Tu = 0 \text{ στο } \partial U.$$

Απόδειξη. Έστω $u \in W_o^{1,p}(U)$. Τότε, εξ'ορισμού υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{1,p}(U)$$

Αφού $Tu_m = 0$ στο ∂U , $m = 1, ..., n$ και $T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, συνεπάγεται ότι $Tu = 0$ στο ∂U .
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $Tu = 0$ στο ∂U. Χρησιμοποιώντας διαμερίσεις της μονάδας και κάνοντας επίπεδο το ∂U όπως πριν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), & \text{το } u \text{ έχει συμπαγές υποστήριγμα στο } \bar{\mathbb{R}}^n_+ \\ Tu = 0 & \text{στο } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Τότε, αφού $Tu = 0$ στο $\mathbb{R}^{n-1}$, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

και

$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ στον } L^P(\mathbb{R}^{n-1})$$

Αν $x' \epsilon \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \geq 0$, έχουμε

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)dt|.$$

Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx'$$

$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)^p dx'| + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)^p| dx' dt' \right).$$

Για $m \to \infty$ η παραπάνω ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx\ dt.$$

για σχεδόν όλα τα $x_n > 0$.
Έστω τώρα ότι $\zeta \epsilon C^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\zeta = 1 \text{ στο } [0,1],\ \zeta = 0 \text{ στο } \mathbb{R} - [0,2],\ 0 \leq \zeta \leq 1,$$

και γράφουμε

$$\begin{cases} m(x) := \zeta(m x_n), & x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+ \\ w_m := u(x)(1 - \zeta_m). \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{cases} w_{m,x_n} = u_{x_n}(1 - \zeta_m) - mu\zeta' \\ D_{x'} w_m = D_{x'} u (1 - \zeta_m). \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p dx' dt := A + B$$

Όμως,

$$A \to 0 \text{ καθώς } m \to \infty,$$

αφού $\zeta_m \neq 0$ αν $0 \leq x_n \leq \frac{2}{m}$. Για τον υπολογισμό του έχουμε

$$B \leq C m^p \left(\int_0^{\frac{2}{m}} t^{p-1} dt \right) \left(\int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \right)$$

$$\leq \int_0^{\frac{2}{m}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \to 0 \text{ καθώς } m \to \infty$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι $Du_m \to Du$ στον $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Και αφού φανερά ισχύει ότι $w_m \to u$ στον $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, καταλήγουμε στο ότι

$$u_m \to u \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Όμως, $w_m = 0$ αν $0 < x_n < \frac{1}{m}$. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση μαλάκωσης στην w_m για να παράγουμε συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ τέτοιες ώστε $u_m \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Άρα $u \in W_o^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

□

1.8 Βασικές Ανισότητες

Θεώρημα 1.20. *Ανισότητα Cauchy. Για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Απόδειξη.
$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

□

Θεώρημα 1.21. *Ανισότητα $Cauchy$ με ε. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ και $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $\alpha\beta = ((2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\alpha)(\frac{\beta}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}})$ και εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα $Cauchy$.

□

Θεώρημα 1.22. *Ανισότητα $Young$. Έστω $1 < p$, $q < \infty$ με p να είναι το συζυγές του q. Τότε, για $\alpha, \beta > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto e^x$ είναι κυρτή, και συνεπώς έχουμε

$$\alpha\beta = e^{log\alpha + log\beta}$$

$$= e^{\frac{1}{p}log\alpha^p + \frac{1}{q}log\beta^q}$$

$$\leq \frac{1}{p} e^{log\alpha^p} + \frac{1}{q} e^{log\beta^q}$$

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

□

Θεώρημα 1.23. *Ανισότητα Young με ε. Έστω $1 < p, q < \infty$ με p συζυγές του q. Τότε, για $\alpha, \beta > 0$ και για $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^p + C(\varepsilon)\beta^q,$$

όπου $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$.

Απόδειξη. Γράφουμε $\alpha\beta = (\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}\alpha)(\frac{\beta}{\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}})$ και εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα .

□

Θεώρημα 1.24. *Ανισότητα Hölder. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p,\ q \leq \infty$, με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε, αν $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U)$, έχουμε ότι*

$$\int_U |u \cdot v| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u\|_{L^p(U)} = \|v\|_{L^q(U)} = 1$. Τότε, για $1 < p$, $q < \infty$ η ανισότητα Young συνεπάγεται ότι

$$\int_U |u \cdot v| dx \leq \frac{1}{p} \int_U |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_U |v|^q dx$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|u\|_{L^p(U)} = \|v\|_{L^q(U)}$$

□

Θεώρημα 1.25. *Ανισότητα Minkowski. Υποθέτουμε ότι $1 \leq p \leq \infty$ και $u, v \in L^p(U)$. Τότε*

$$\|u + v\|_{L^p(U)} \leq \|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)}.$$

Απόδειξη.

$$\|u + v\|^p_{L^p(U)} = \int_U |u + v|^p dx$$

$$\leq \int_U |u + v|^{p-1}(|u| + |v|) dx$$

$$\leq \left(\int_U |u + v|^p dx)^{\frac{p-1}{p}} \right) \left((|u|^p)^{\frac{1}{p}} + (|v|^p)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$= \|u+v\|^{p-1}_{L^p(U)}(\|u\|_{L^p(U)}\|v\|_{L^p(U)})$$

□

Θεώρημα 1.26. *Γενικευμένη Ανισότητα Hölder. Έστω* $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$ *με* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$ *, και έστω ότι* $u_k \in L^{p_k}(U)$ *για* $k = 1, ..., n$*. Τότε*

$$\int_U \mid u_1 \cdot \ldots \cdot u_m \mid dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_k}(U)}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή από την ανισότητα Hölder έπεται το ζητούμενο του θεωρήματος αυτού.

□

Θεώρημα 1.27. *Ανισότητα παρεμβολής για* L^p*-νόρμες. Υποθέτουμε ότι* $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ *και*

$$\tfrac{1}{r} = \tfrac{\theta}{s} + \tfrac{1-\theta}{t}.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$*. Τότε,* $u \in L^r(U)$*, και*

$$\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(U)}\|u\|^{1-\theta}_{L^t(U)}.$$

Απόδειξη.

$$\int_U |u|^r dx = \int_U |u|^{\theta r}|u|^{(1-\theta)r} dx$$

$$\leq \left(\int_U |u|^{\theta r \frac{s}{r\theta}} dx\right)^{\frac{r\theta}{s}} \left(|u|^{(1-\theta)r\frac{t}{(1-\theta)r}} dx\right)^{(1-\theta)\frac{r}{t}}.$$

Εδώ έγινε χρήση της ανισότητας Hölder, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί αφού

$$\tfrac{\theta r}{s} + \tfrac{r(1-\theta)}{t} = 1.$$

□

1.9 Ανισότητες Sobolev

Ορισμός 1.19. *Αν* $1 \leq p < n$*, τότε ο Sobolev συζυγής του* p *είναι*

$$p* := \tfrac{np}{n-p}.$$

Ισοδύναμα, ισχύει ότι $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *, με* $p* > p$.

1.9.1 Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Θεώρημα 1.28. *Ανισότητα Gagliardo – Nirenberg – Sobolev. 'Εστω $1 \leq p < n$. Τότε, υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται από το p και το n τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

για όλες τις $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη.
Θεωρούμε πρώτα ότι $p = 1$. Αφού το u έχει συμπαγές υποστήριγμα, για κάθε $i = 1, ..., n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, .., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)dy_i$$

και έτσι

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, .., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|dy_i$$

με $i = 1, ..., n$. Συνεπώς

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, .., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x_1, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Ολοκληρώνουμε τώρα ως προς x_2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u^{\frac{n}{n-1}}| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

όπου $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du|dy_1$, και $I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du|dx_1 dy_i, i = 3, ..., n$.
Με εφαρμογή της γενικευμένης ανισότητας Hölder, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2$$

$$\leq$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\,Du|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|dx\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Τώρα για $1<p<n$ εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση για $|u|^{\gamma}$ με κατάλληλο $\gamma>1$. Τότε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\leq\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^{\gamma}dx\right)$$

$$=\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|Du|dx$$

$$\leq\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Επιλέγουμε το γ έτσι ώστε

$$\frac{n\gamma}{n-1}=(\gamma-1)\frac{p}{p-1}.$$

Λύνοντας, βρίσκουμε

$$\gamma=\frac{p(n-1)}{n-p}>1$$

για το οποίο έχουμε ότι

$$\frac{\gamma n}{n-1}=(\gamma-1)\frac{p}{p-1}=\frac{np}{n-p}=p*.$$

Συνεπώς, έχουμε από την παραπάνω σχέση με αντικατάσταση ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p*}dx\right)^{\frac{1}{p*}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Θεώρημα 1.29. *Εκτίμηση στον $W^{1,p}(U), 1\leq p<n$. Εστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω ότι το σύνορο ∂U είναι C^1. Έστω $1\leq p<n$ και $u\,\epsilon\,W^{1,p}(U)$. Τότε $u\,\epsilon\,L^{p*}(U)$ με την εκτίμηση*

$$|u|_{L^{p*}(U)}\leq C|u|_{W^{1,p}(U)},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα p,n και U.

Απόδειξη. Αφού το ∂U είναι C^1 ,υπάρχει μια επέκταση $Eu = \bar{u} \epsilon W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ στο } U, \text{ το } \bar{u} \text{ έχει συμπαγές υποστήριγμα, και} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Αφού το $\bar{u}$ έχει συμπαγές υποστήριγμα, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \epsilon C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $m = 1, 2, ..$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to u \text{ στο } W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ισχύει ότι

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq C\|Du_m - Du_l\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \text{ για όλα τα } l, m \leq 1.$$

Συνεπώς,

$$u_m \to \bar{u} \text{ στον } L^{p*}(\mathbb{R}^n).$$

Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι

$$\|u_m\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

άρα έχουμε και για το όριο ότι

$$\|\bar{u}\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}_m\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)}$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την (1.1) έχουμε το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 1.30. *Εκτίμηση στον $W_0^{1,p}(U), 1 \leq p < n$. Έστω U ένα φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $u\epsilon W_0^{1,p}(U)$ για κάποιο $1 \leq < n$. Τότε έχουμε την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε $q \epsilon [1, p*]$, με σταθερά C που εξαρτάται από τα p, q, n και U.

Απόδειξη. Αφού το $u \epsilon W_0^{1,p}(U)$, υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \epsilon C_c^\infty(U)$, $m = 1, 2, ..$ που συγκλίνουν στο u στον $W^{1,p}(U)$. Επεκτείνουμε κάθε συνάρτηση u_m έτσι ώστε να είναι 0 στο $\mathbb{R}^n - U$ και με εφαρμογή προηγούμενου θεωρήματος εκτίμησης, έχουμε ότι

$$\|u\|_{L^{p*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Αφού το $|U| < \infty$, έχουμε ότι

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^{p*}(U)}$$

για $1 \leq q \leq p*$.

□

1.9.2 Ανισότητα Morrey

Θεώρημα 1.31. *Ανισότητα Morrey. Έστω υπάρχει μια σταθερά C που εξαρτάται από τα p και n, τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{C^{o,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

για όλες τις $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, όπου $\gamma := 1 - \frac{n}{p}$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια μπάλα $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από το n, τέτοια ώστε

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy.$$

Πράγματι, έστω $w \in \partial B(x,r)$. Τότε, αν $0 < s < r$,

$$|u(x+sw) - u(x)| = |\int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)dt|$$

$$|\int_0^s Du(x+tw)wdt|$$

$$\leq |Du(x+tw)dt| \ .$$

Ως εκ τούτου,

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|dS \leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)|dSdt$$

$$= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dSdt.$$

Έστω $y = x + tw$, έτσι ώστε $t = |x-y|$. Τότε μετασχηματίζοντας από πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)|dS \leq \int_{B(x,s)} \frac{|du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

$$\leq \int_{\partial B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Πολλαπλασιάζοντας με s^{n-1} και ολοκληρώνοντας από το 0 ως r ως προς το s έχουμε

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$|u(x)| \leq \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)|dy + \int_{B(x,1)} |u(y)|dy$$

$$\leq C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy + C\|u\|_{L^p(B(x,1))}$$

$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}} + C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού το $p > n$ συνεπάγεται ότι $(n-1)\frac{p}{p-1} < n$. Έτσι,

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|v^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dy < \infty.$$

Αφού το $x \epsilon \mathbb{R}^n$ είναι τυχαίο, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2}$$

Επιλέγουμε δύο σημεία $x, y \ \epsilon \ \mathbb{R}^n$ και γράφουμε $r := |x-y|$. Έστω $W := B(x,r) \cap B(y,r)$. Τότε

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_W |u(x) - u(z)| dz + \int_W |u(y) - u(z)| dz.$$

Όμως έχουμε και την εκτίμηση

$$\int_W |u(x) - u(z)| dz \leq C \int_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| dz$$

$$\leq C \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{dz}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$= Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ομοίως,

$$\int_W |u(y) - u(z)| dz \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Συνεπώς,

$$[u]_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \right\}$$

$$\leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Η παραπάνω ανισότητα μαζί με την (1.2) ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παρατήρηση 1.4. *Με μια μικρή διαφοροποίηση του παραπάνω θεωρήματος έχουμε την ανισότητα*

$$|u(y) - u(x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,2r)} |Du(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

για όλες τις $u \in C^1(B(x,2r)), y \in B(x,r)$ και $n < p < \infty$. Με μια προσέγγιση, η ίδια ανίσωση ισχύει και για $u \in W^{1,p}(B(x,2r))$, $n < p < \infty$.

Ορισμός 1.20. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση u^* είναι μια έκδοση μιας συνάρτησης u αν ισχύει*

$$u = u^*, \text{ σχεδόν παντού.}$$

Θεώρημα 1.32. *Εκτίμηση στον $W^{1,p}, n < p \leq \infty$. Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και έστω ότι το σύνορο $\partial U \in C^1$. Έστω $n < p \leq \infty$ και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε η u έχει μια έκδοση $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$, για $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ με εκτίμηση*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

όπου C σταθερά που εξαρτάται από τα p, n και U.

Απόδειξη. Αφού το ∂U είναι C^1 έχουμε ότι υπάρχει μια επέκταση $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ στο U}, \\ \bar{u} \text{ έχει συμπαγές υποστήριγμα, και} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Αφού το $\bar{u}$ έχει συμπαγές υποστήριγμα, έχουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοιες ώστε

$$u_m \to \bar{u} \text{ στο } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

για όλα τα $l, m \geq 1$. Συνεπώς, υπάρχει μια συνάρτηση $u^* \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$u_m \to u^* \text{ στο } C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$$

Άρα παρατηρούμε ότι $u^* = u$ σχεδόν παντού στο U και έτσι η u^* αποτελεί εκδοχή της u. Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και την (1.3) αποδεικνύεται το ζητούμενο.

□

1.9.3 Γενικές ανισότητες Sobolev

Θεώρημα 1.33. *Γενικές ανισότητες Sobolev. Έστω U ένα φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο $\partial U \in C^1$ και $u \in W^{k,p}(U)$.*

(i) *Αν $k < \frac{n}{p}$, τότε $u \in L^q(U)$, όπου $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

με σταθερά C που εξαρτάται από τα k, p, n και U.

(ii) *Αν $k > \frac{n}{p}$, τότε $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1}(\bar{U})$, όπου*

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{αν } \frac{n}{p} \text{ δεν είναι ακέραιος} \\ \text{οποιοσδήποτε θετικός αριθμός} < 1 & \text{αν } \frac{n}{p} \text{ είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

με σταθερό C που εξαρτάται από τα k, p, n, γ και U.

Απόδειξη.

(i) Έστω $k < \frac{n}{p}$. Τότε, αφού $D^\alpha u \in L^p(U)$ για όλα τα $|\alpha| = k$, η ανισότητα $Sobolev - Nirenberg - Gagliardo$ συνεπάγεται ότι

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

αν $|\beta| = k-1$ και έτσι $u \in W^{k-1,p^*(U)}$. Ομοίως, βρίσκουμε ότι

$$u \in W^{k-2,p^{**}(U)}, \text{ όπου } \tfrac{1}{p^{**}} = \tfrac{1}{p^*} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{2}{n}.$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε ότι μετά από k βήματα $u \in W^{0,q}(U)$, για $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Συνεπώς

$$\|D^\beta u\|_{L^q(U)} = \|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)},$$

αφού $|\beta| = 0$.

(ii) Έστω $k > \frac{n}{p}$ και $\frac{n}{p}$ δεν είναι ακέραιος. Τότε, όπως παραπάνω έχουμε

$$u \in W^{k-l,r}(U) \text{ για } \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{l}{n},$$

με $lp < n$. Επιλέγουμε ακέραιο l τέτοιο ώστε $l < \frac{n}{p}\, l+1$. Αυτός είναι ο $l = [\frac{n}{p}]$. Συνεπώς, $r = \frac{pn}{n-pl}$. Άρα, από την ανισότητα Morrey έχουμε ότι

$$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{r}(\bar{U})} \text{ για όλα τα } |\alpha| \leq k-l-1.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$1 - \tfrac{n}{r} = 1 - \tfrac{n}{p} + l - \tfrac{n}{p}.$$

Συνεπώς, $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,[\frac{n}{p}]+1-\frac{n}{p}}(\bar{U})$ και ακολούθως ισχύει η εκτίμηση. Τέλος, υποθέτουμε ότι $k > \frac{n}{p}$ και $\frac{n}{p}$ είναι ακέραιος. Θέτουμε

$$l = [\tfrac{n}{p}] - 1 = \tfrac{n}{p} - 1.$$

Συνεπώς, όπως παραπάνω έχουμε

$$u \in W^{k-1,r}(U) \text{ για } r = \tfrac{pn}{n-pl} = n.$$

Συνεπώς, η ανισότητα $Sobolev - Nirenberg - Gagliardo$ δίνει ότι

$$D^\alpha u \in L^q(U) \text{ για όλα τα}$$

$n \leq q < \infty$ και όλα τα $|\alpha| \leq k-l-1 = k - [\frac{n}{p}]$.

Επιπλέον, από την ανισότητα $Morrey$ συνεπάγεται ότι

$D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{U})$ για όλα τα $n < q < \infty$ και όλα τα $|\alpha| \leq k - [\frac{n}{p}] - 1$.

Συνεπώς, $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$ για κάθε $0 < \gamma < 1$. Ακολούθως, όπως πριν, ισχύει η εκτίμηση.

$\square$

1.10 Συμπάγεια

Θεώρημα 1.34. *Θεώρημα συμπάγειας $Rellich - Kondrachov$. Έστω U ένα φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂U να είναι C^1. Έστω επίσης $1 \leq p < n$. Τότε*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

για κάθε $1 \leq p < p^*$.

Απόδειξη. Έστω $1 \leq p < n$. Αφού το U είναι φραγμένο έχουμε ότι

$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \;\; \|u\|_{L^q(U)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον $W^{1,p}(U)$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στον $L^q(U)$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $U = \mathbb{R}^n$ και ότι οι συναρτήσεις $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ έχουν συμπαγές υποστήριγμα σε κάποιο φραγμένο ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$. (Λόγω του θεωρήματος Επέκτασης). Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty.$$

Αρχικά θα δούμε τις ομαλές συναρτήσεις

$$u_m^{\varepsilon} := \eta_{\varepsilon} * u_m, \;\; \varepsilon > 0, \; m = 1, 2, ...$$

όπου με η_{ε} συμβολίζουμε την συνάρτηση $Standard\ Mollifier$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $\{u_m^{\varepsilon}\}_{m=1}^{\infty}$ έχουν υποστήριγμα στο V. Ισχυριζόμαστε ότι

$$u_m^{\varepsilon} \to u_m \text{ στον } L^q(V), \text{ καθώς } \varepsilon \to 0 \text{ ομοιόμορφα για } m.$$

Αν η u_m είναι ομαλή, τότε

$$u_m^{\varepsilon}(x) - u_m(x) = \int_{B(0,1)} \eta(y)(u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x))dy$$

$$= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \tfrac{d}{dt}(u_m(x - \varepsilon t y))dtdy$$

$$= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x - \varepsilon t y) y dtdy.$$

Συνεπώς

$$\int_V |u_m^{\varepsilon}(x) - u_m(x)|dx \leq \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x - \varepsilon t y)|dxdydt$$

$$\leq \varepsilon \int_V |Du_m(z)|dz.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει και για $u_m \in W^{1,p}(V)$ όπου θα γίνει η προσέγγισή τους από ομαλές συναρτήσεις. Άρα

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1} \leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)},$$

αφού το V είναι φραγμένο. Συνεπώς, από την παραπάνω ανισότητα και την σχέση $\sup\limits_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty$ έχουμε ότι

$$u_m^\varepsilon \to u_m \text{ στον } L^1(V) \text{ ομοιόμορφα για } m.$$

Αλλά τότε, αφού $1 \leq q < p^*$ με χρήση της ανισότητας παρεμβολής για L^p-νόρμες έχουμε ότι

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1}^\theta \; \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}$$

όπου $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$ $0 < \theta < 1$. Συνεπώς, από την ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, έχουμε

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta.$$

Έπειτα ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, η ακολουθία $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|dy$$

$$\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \; \|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\frac{C}{\varepsilon^n} < \infty$$

για $m = 1, 2, ..$. Ομοίως

$$|Du_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |\eta_\varepsilon(x-y)| \cdot |u_m(y)|dy$$

$$\leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty$$

για m=1,2,... . Ο ισχυρισμός έπεται από τις δύο παραπάνω ανισότητες. Έστω τώρα $\delta > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια υπακολουθία $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ μικρό τέτοιο ώστε

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \tfrac{\delta}{2}$$

για $m = 1, 2, \dots$.

Παρατηρούμε ότι αφου οι συναρτήσεις $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ και συνεπώς και οι $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$, έχουν υποστήριγμα σε κάποιο φραγμένο σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$, από το κριτήριο συμπάγειας Arzela-Ascoli μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\{u_{m_j}^\varepsilon\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ που να συγκλίνει ομοιόμορφα στο V. Πιο συγκεκριμένα, να ισχύει

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0.$$

Ομοίως, η παραπάνω συνεπάγεται ότι

$$\limsup_{j,k\to\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω ανισότητας για $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ και χρησιμοποιώντας το διαγώνιο επιχείρημα εξάγουμε μια υπακολουθία $\{u_{m_l}\}_{m=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ που να ικανοποιεί την

$$\limsup_{l,k\to\infty} \|u_{m_l} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0.$$

$\square$

Παρατήρηση 1.5. *Παρατηρούμε ότι $p^* > p$ και $p^* \to \infty$ καθώς $p \to n$, έχουμε ότι*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

για όλα τα $1 \leq p \leq \infty$. (Παρατηρούμε ότι αν $n < p \leq \infty$, αυτό έπεται από την ανισότητα Morrey και το κριτήριο συμπάγειας Arzela-Ascoli.) Επίσης,

$$W_o^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

ακόμα και αν δεν θεωρήσουμε ότι το ∂U είναι C^1.

1.11 Περισσότερες Ανισότητες

Σημείωση 1.3. *Ορίζουμε ως $(u)_U = \int_U u dy$ τη μέση τιμή του u στο U.*

Ανισότητα Poincare

Θεώρημα 1.35. *Ανισότητα Poincare. Έστω U ένα φραγμένο, συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με C^1 σύνορο ∂U. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε, υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα n, p και U, τέτοια ώστε*

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$.

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι υπάρχει για κάθε ακέραιο $k = 1, 2, ...$ μια συνάρτηση $u_k \in W^{1,p}(U)$ τέτοια ώστε

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k\|Du_k\|_{L^p(U)}.$$

Ορίζουμε

$$u_k := \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)\|_{L^p(U)}} \text{ για } k = 1, 2, ...$$

Τότε

$$(u_k)_U = 0, \ \|u_k\|_{L^p(U)} = 1 \text{ και } \|Du_k\|_{L^p(U)} < \tfrac{1}{k}.$$

Άρα οι συναρτήσεις $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι φραγμένες στον $W^{1,p}(U)$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει υπακολουθία $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ και μια συνάρτηση $v \in L^p(U)$ τέτοια ώστε

$$u_{k_j} \to u \text{ στον } L^p(U).$$

Επίσης, για την u ισχύει ότι

$$(u)_U = 0, \ \ \|u\|_{L^p(U)} = 1.$$

Από την άλλη έχουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, ..., n$ και $\phi \in C_c^{\infty}(U)$ ότι

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = \lim_{k_j \to \infty} u_{k_j}\phi_{x_i} dx = -\lim_{k_j \to \infty} \int_U u_{k_j, m_i}\phi dx = 0.$$

Συνεπώς, $u \in W^{1,p}(U)$ με $Du = 0$ σχεδόν παντού. Συνεπώς η u είναι σταθερή, αφού το U είναι συνεκτικό. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι αφού η u είναι σταθερή και $(u)_U = 0$, πρέπει να ισχύει ότι $u = 0$, το οποίο αντιτίθεται στο ότι $\|u\|_{L^p(U)} = 1$.

□

Σημείωση 1.4. *Ορίζουμε ως $(u)_{x,r} = \int_{B(x,r)} udy$ τη μέση τιμή της u στην μπάλα $B(x,r)$.*

Θεώρημα 1.36. *Ανισότητα Poincare σε μπάλα. Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται από τα n και p, τέτοια ώστε*

$$\|u-(u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr\|Du\|_{L^p((B(x,r))}$$

για κάθε μπάλα $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ και κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(B^o(x,r))$.

Απόδειξη. Σε περίπτωση που $U = B^O(x,r)$ ισχύει από το προηγούμενο θεώρημα. Γενικα, αν $u \in W^{1,p}(B^o(0,1))$ και έχουμε ότι

$$\|u-(u)_U\|_{L^p(B(0,1))} \leq C\|Du\|_{L^p(B(0,1))}.$$

Με αλλαγή μεταβλητών καταλήγουμε στο ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.6. *Έστω $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, και έστω $B(x,r)$ μια μπάλα. Τότε το προηγούμενο θεώρημα για $p=1$ συνεπάγεται ότι*

$$\int_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|dy \leq Cr \int_{B(x,r)} |Du|dy$$

$$\leq Cr\left(\int_{B(x,r)} |Du|^n\right)^{1/n}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n dy\right)^{1/n}.$$

Συνεπώς $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$, τον χώρο των συναρτήσεων φραγμένης μέσης κύμανσης στον $\mathbb{R}^n$, με την ημινόρμα

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r)\subset\mathbb{R}^n} \left\{\int_{B(x,r)} |u-(u)_{x,r}|dy\right\}.$$

1.12 Υπόλοιπα Διαφορών

Ορισμός 1.21. *Έστω $u : U \to \mathbb{R}$ μια τοπικά αθροιστική συνάρτηση και $V \subset\subset U$.*

(i) *Το i-οστό υπόλοιπο διαφορών μεγέθους h είναι*

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}, i = 1,..,n$$

για $x \in V$ και $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < dist(V, \partial U)$.

(ii) $D^h u := (D_1^h u, ..., D_n^h(u))$.

Θεώρημα 1.37. *Υπόλοιπα διαφορών και ασθενείς παράγωγοι. Έστω $u : U \to \mathbb{R}$ μια τοπικά αθροιστική συνάρτηση και $V \subset\subset U$. Τότε*

(i) *Έστω $1 \leq p < \infty$ και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε για κάθε $V \subset\subset U$ έχουμε*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάποια σταθερά C και για όλα τα $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial U)$.

(ii) *Έστω $1 < p < \infty, u \in L^p(V)$, και υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C$$

για όλα τα $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial U)$. Τότε

$$u \in W^{1,p}(V), \text{ με } \|Du\|_{L^p(V)} \leq C.$$

Παρατήρηση 1.7. *Η υπόθεση (ii) του θεωρήματος δεν ισχύει για $p = 1$.*

Απόδειξη.

(i) Έστω $1 \leq p < \infty$ και προσωρινά υποθέτουμε ότι η u είναι ομαλή. Τότε για κάθε $x \in V$, $i = 1, ..., n$ και $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial U)$ έχουμε

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 u_{x_i}(x + the_i)dt \cdot he_i$$

και έτσι

$$|u(x + he_i) - u(x)| \leq h \int_0^1 |Du(x + the_i)|dt.$$

Συνεπώς

$$\int_V |D^h u|^p dx \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_V \int_0^1 |Du(x + the_i)|^p dtdx$$

$$= C \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_V |Du(x + the_i)|^p dxdt.$$

Έτσι

$$\int_V |D^h u|^p dx \leq C \int_U |Du|^p dx.$$

Η εκτίμηση αυτή ισχύει για ομαλές συναρτήσεις και συνεπώς και για τυχαίες $u \,\epsilon\, W^{1,p}(U)$ με προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις.

(ii) Έστω ότι ισχύει

$$\|D^h u\|_{L^p(U)} \leq C$$

για όλα τα $0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial U)$ και κάποια σταθερά C. Επιλέγουμε $i = 1, ..., n \quad \phi \,\epsilon\, C_c^\infty(V)$ και παρατηρούμε ότι για αρκετά μικρό h έχουμε

$$\int_V \left[\frac{\phi(x+he_i)-\phi(x)}{h}\right] dx = -\int_V \left[\frac{u(x)-u(x-he_i)}{h}\right] \phi(x)dx$$

το οποίο δίνει τη σχέση

$$\int_V u(D_i^h \phi)dx = -\int_V (D_i^{-h} u)\phi dx$$

Από υπόθεση έχουμε

$$\sup_h \|D_i^{-h} u\|_{L^p(V)} < \infty.$$

και συνεπώς, αφού $1 < p < \infty$, υπάρχει μια συνάρτηση $u_i \epsilon L^p(V)$ και μια υπακολουθία $h_k \to 0$ τέτοια ώστε

$$D_i^{-h_k} u \to u_i \text{ ασθενώς στον } L^P(V).$$

Όμως, τότε

$$\int_V u\phi_{x_i} dx = \int_U u\phi_{x_i} dx$$

$$= \lim_{h_k \to 0} \int_U u D_i^{h_k} \phi dx$$

$$= -\lim_{h_k \to 0} \int_V D_i^{-h_k} u\phi dx$$

$$= -\int_V v_i \phi dx$$

$$= -\int_U v_i \phi dx.$$

Συνεπώς, $v_i = u_{x_i}$ υπό ασθενή έννοια, $i = 1, .., n$ και έτσι $Du \in L^p(V)$. Τέλος, αφού $u \in L^p(V)$ καταλήγουμε στο ότι $u \in W^{1,p}(V)$.

□

Παρατήρηση 1.8. *Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να ισχύει ακόμα και αν δεν έχουμε την υπόθεση οτι $V \subset\subset U$. Για παράδειγμα, αν το U είναι η ανοιχτή ημιμπάλα*

$$B^o(0,1) \cap \{x_n > 0\},\ V = B^o(0, \tfrac{1}{2}) \cap \{x_n > 0\},$$

έχουμε την ανισότητα

$$\textstyle\int_V |D_i^h u|^p dx \leq \int_U |u_{x_i}|^p dx$$

για $i = 1, ..., n-1$. Η απόδειξή του είναι παρόμοια με αυτή του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.38. *Χαρακτηρισμός του $W^{1,\infty}$. Έστω U ένα ανοικτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂U στο C^1. Τότε $u : U \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν $u \in W^{1,\infty}(U)$.*

Απόδειξη. (Αντίστροφο) Υποθέτουμε ότι $U = \mathbb{R}^n$ και η u έχει συμπαγές υποστήριγμα. Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, όπου η_ε είναι η συνάρτηση standard mollifier, είναι ομαλή και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} u_\varepsilon \to u \text{ ομοιόμορφα καθώς } \varepsilon \to 0, \\ \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{cases}$$

Έστω δύο σημεία $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $x \neq y$. Έχουμε

$$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \textstyle\int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (1-t)y)dt$$

$$= \textstyle\int_0^1 Du^\varepsilon(tx + (1-t)y)dt \cdot (x - y),$$

και έτσι

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y|$$

$$\leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y|.$$

Για $\varepsilon \to 0$, έχουμε ότι

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \mid x - y \mid,$$

και συνεπώς η u είναι Lipschitz συνεχής.
(Ευθύ) Έστω τώρα ότι η u είναι Lipschitz συνεχής. Θα δείξουμε ότι η u έχει φραγμένη ασθενή πρώτη παράγωγο. Από τη στιγμή που η u είναι Lipschitz συνεχής, βλέπουμε ότι

$$\|D_i^{-h}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Lip(u)$$

και συνεπώς υπάρχει μια συνάρτηση $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και μια υπακολουθία $h_k \to 0$ τέτοια ώστε

$$D_i^{-h_k}u \to v_i, \text{ ασθενώς στον } L^2_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\phi_{x_i}dx = \lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} uD_i^{-h_k}\phi dx$$

$$= -\lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k}u\phi dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} v_i\phi dx.$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για όλα τα $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, και έτσι $v_i = u_{x_i}$ υπό ασθενή έννοια , $i = 1, ..., n$. Συνεπώς, $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Στην γενική περίπτωση που το U είναι φραγμένο, με ∂U κλάσης C^1, επεκτείνουμε την u στην $Eu = \bar{u}$ και εφαρμόζουμε το παραπάνω επιχείρημα.

□

Παρατήρηση 1.9. *Από το παραπάνω θεώρημα εξάγεται εύκολα ότι σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο $U, u \in W^{1,p}_{loc}(U)$ αν και μόνο αν η u είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο U. Όμως, δεν υπάρχει αντίστοιχος χαρακτηρισμός για τους χώρους $W^{1,p}$ για $1 \leq p < \infty$. Αν $n < p < \infty$, τότε κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}$ ανήκει στον $C^{0,1-\frac{n}{p}}$, αλλά από την άλλη μια συνάρτηση Hölder συνεχής με εκθέτη μικρότερο της μονάδας δεν ανήκει απαραίτητα σε κάποιο χώρο Sobolev $W^{1,p}$.*

1.13 Διαφορισιμότητα - Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 1.22. *Μια συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in U$ αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$u(y) = u(x) + \alpha(y - x) + o(|\, y - x\,|), \text{ καθώς } y \to x.$$

Με άλλα λόγια

$$\lim_{y\to x} \frac{u(y)-u(x)-\alpha(y-x)}{|y-x|} = 0.$$

Σημείωση 1.5. *Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν το α υπάρχει, τότε είναι και μοναδικό. Οπότε γράφουμε $grad(u(x))$ αντί για α και ονομάζουμε το $grad(u(x))$ ως η κλήση (gradient) της u.*

Θεώρημα 1.39. *Διαφορισιμότητα σχεδόν παντού. Έστω $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$ για κάποιο $n < p \leq \infty$. Τότε η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο U και η κλήση της είναι ίση με την ασθενή παράγωγο σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Έστω $n < p < \infty$. Από την ανισότητα $Morrey$ έχουμε ότι

$$| v(y) - v(x) | \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,2r)} | Dv(z) |^p \, dz \right), \text{ όπου } y \in B(x,r),$$

που ισχύει για κάθε C^1 συνάρτηση, επομένως και για $v \in W^{1,p}$, με προσέγγιση. Επιλέγουμε $u \in W^{1,p}_{loc}(U)$. Τώρα, σχεδόν για όλα τα $x \in U$, μια εκδοχή του διαφορικού θεωρήματος του Lebesque συνεπάγεται ότι

$$\int_{B(x,r)} | Du(x) - Du(z) |^p \, dz \to 0$$

καθώς $r \to 0$. Έστω $x \in U$ και θέτουμε

$$v(y) := u(y) - u(x) - grad(u(x))(y - x)$$

στην ανισότητα $Morrey$, όπου $r = |x - y|$. Τότε έχουμε

$$|u(y) - u(x) - grad(u(x))(y - x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,2r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \right)$$

$$\leq Cr \left(\int_{B(x,2r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \right)^{1/n} = o(r) = o(|x - y|).$$

Συνεπώς, η u είναι διαφορίσιμη στο x και η κλίση της είναι ίση με την ασθενή παράγωγο στο x. Στην περίπτωση που $p = \infty$, έχουμε ότι $W^{1,\infty}_{loc}(U) \subset W^{1,p}_{loc}(U)$ για όλα τα $1 \leq p < \infty$ και εφαρμόζουμε το ως άνω εγχείρημα.

□

Θεώρημα 1.40. ***Θεώρημα Rademacher.*** *Έστω u μια τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση στο U. Τότε η u είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο U.*

Απόδειξη. Αποτελεί άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος.

□

Θεώρημα 1.41. ***Χαρακτηρισμός του*** H^k ***με τον μετασχηματισμό Fourier.*** *Έστω* k *ένας μη αρνητικός ακέραιος.*

(i) *Μια συνάρτηση* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *ανήκει στον* $H^k(\mathbb{R}^n)$ *αν και μόνο αν*

$$(1 + |y|^k)\, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(ii) *Επιπλέον, υπάρχει μια θετική σταθερά* C *τέτοια ώστε*

$$\tfrac{1}{C}\|u\|_{H^k(R^n)} \leq \|(1 + |y|^k)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Τότε για κάθε διάνυσμα $|\alpha| \leq k$, έχουμε ότι $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n.)$ Αν $u \in C^k$ έχει συμπαγές υποστήριγμα, έχουμε ότι

$$\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \widehat{u}.$$

Με προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις εξάγουμε την παραπάνω ισότητα για $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Συνεπώς, $(iy)^\alpha \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $\mid \alpha \mid \leq k$. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγοντας $\alpha = (k, 0, ..., 0), (0, k, ..., 0), ..., (0, ..., k)$, εξάγουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mid y \mid^{2k} \mid \widehat{u} \mid^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mid D^k u \mid^2 dx < \infty.$$

Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \mid y \mid^k)^2 \mid \widehat{u} \mid^2 dy \leq C\|u\|_{K^k(\mathbb{R}^n)},$$

και έτσι

$$(1 + \mid y \mid^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

(Αντίστροφο.) Υποθέτουμε ότι $(1 + \mid y \mid^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και $|\alpha| \leq k$. Τότε

$$\|(iy)^\alpha \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2|\alpha|} |\widehat{u}|^2 dy \;\leq\; C \; \|(1 + |y \mid^k)\widehat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Θέτουμε

$$u_\alpha := ((iy)^\alpha \widehat{u})^v.$$

Τότε για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \phi) \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{D^\alpha \phi}) \bar{\widehat{u}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} (iy)^\alpha \widehat{\phi} \bar{\widehat{u}}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \phi \bar{u}_\alpha dx.$$

Έτσι $u_\alpha = D^\alpha u$ στην ασθενή μορφή και $D^\alpha u \,\epsilon\, L^2(\mathbb{R}^n)$. Άρα $u \,\epsilon\, H^k(U)$, όπως ζητήθηκε.

$\square$

Ορισμός 1.23. *Υποθέτουμε ότι* $0 < s < \infty$ *και* $u \,\epsilon\, L^2(\mathbb{R}^n)$*. Τότε,* $u \,\epsilon\, H^s(\mathbb{R}^n)$*, αν*

$$(1+|y|^s)\widehat{u} \,\epsilon\, L^2(\mathbb{R}^n).$$

Για μη ακέραια s*, θέτουμε*

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} := \|(1+|y|^s)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

1.14 Λοιποί χώροι συναρτήσεων

Ο χώρος H^{-1}

Ορισμός 1.24. *Έστω* $u, v \,\epsilon\, H_0^1(U)$*. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως*

$$(u,v) := \int_U DuDv + uvdx.$$

Ορισμός 1.25. *Γράφουμε ως*$H^{-1}(U)$ *τον δυικό χώρο του* H_0^1*. Δηλαδή* $H^{-1}(U) := \{f : H_0^1 \to \mathbb{R}$ *με* f *συνεχή, φραγμένη*$\}$

Σημείωση 1.6. *Με* $\langle \cdot,\cdot \rangle : H^{-1}(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$ *συμβολίζουμε το δυικό γινόμενο μεταξύ των* H^{-1} *και* H_0^1*.*

Ορισμός 1.26. *Αν* $f \,\epsilon\, H^{-1}(U)$*, ορίζουμε τη νόρμα*

$$\|f\|_H^{-1}(U) := sup\{\langle f,u\rangle : u \,\epsilon\, H_0^1(U), \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Θεώρημα 1.42. *Χαρακτηρισμός του* $H^{-1}(U)$*.*

(i) *Έστω* $f \,\epsilon\, H^{-1}(U)$*. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις* $f^0, f^1, ..., f^n \,\epsilon\, L^2(U)$ *τέτοιες ώστε*

$$\langle f,v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} dx, v \,\epsilon\, H_0^1(U). \tag{1.4}$$

(ii) *Επιπλέον,*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = inf\{(\int_U \sum_{i=0}^n \mid f^i \mid^2 dx)^{1/2} : f \text{ ικανοποιεί την (1.4) για } f^0, ..., f^n \epsilon L^2(U)\}.$$

Σημείωση 1.7. *Γράφουμε ως* $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i}$, *όταν ισχύει η (1.4).*

Απόδειξη. Έστω $f \in H^{-1}(U)$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in H^1_o(U)$ τέτοια ώστε να ισχύει $B[u,v] = \langle f, v\rangle$ για όλες τις $v \in H^1_o(U)$. Δηλαδη,

$$\int_U DuDv + uvdx = \langle f, v\rangle$$

για κάθε $v \in H^1_o(U)$. Άρα, η (1.4) ισχύει για

$$\begin{cases} f^o = u, \\ f^i = u_{u_{x_i}}, i = 1, ..., n \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι $f \in H^{-1}(U)$,

$$\langle f, v\rangle = \int_U g^o v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx$$

για $g^o, ..., g^n \in L^2(U)$. Θέτοντας $v = u$ έχουμε ότι

$$\int_U |Du|^2 + |u|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Συνεπώς,

$$\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx.$$

Από την (1.4) έχουμε ότι

$$|\langle f, v\rangle| \leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\right)^{1/2}$$

αν $\|v\|_{H^1_o(U)} \leq 1$. Συνεπώς,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Θέτοντας $v = \frac{u}{\|u\|_{H^1_o(U)}}$, συνεπάγεται ότι

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Η σχέση (ii) επάγεται άμεσα από το ότι

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |f^i|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_U \sum_{i=0}^{n} |g^i|^2 dx \right)^{1/2}$$

για $g^o, ..., g^n \in L^2(U)$ με $\langle f, v \rangle = \int_U g^o v + \sum_{i=1}^{n} g^i v_{x_i} dx.$

□

Χώροι που περιλαμβάνουν τη μεταβλητή του χρόνου.

Ορισμός 1.27. *Ο χώρος $L^p(0,T;X)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

για $1 \leq p < \infty$, και

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := ess \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Ορισμός 1.28. *Ο χώρος $(C([0,T];X)$ αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty$$

Ορισμός 1.29. *Έστω $u \in L^1(0,T,X)$. Θα λέμε ότι η $v \in L^1(0,T,X)$ είναι η ασθενής παράγωγος της u, και θα γράφουμε $u' = v$, αν*

$$\int_0^T \phi'(t) u(t) dt = - \int_0^T \phi(t) v(t) dt$$

για όλες τις βαθμωτές δοκιμαστικές συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty$

Ορισμός 1.30. (i) *Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}([0,T];X)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $u \in L^p(0,T;X)$ τέτοιες ώστε να υπάρχει η u' υπό ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(0,T;X)$. Επιπλέον,*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\| + \|u'(t)\|) & p = \infty \end{cases}$$

(ii) *Γράφουμε $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.*

Θεώρημα 1.43. *Έστω $u \epsilon W^{1,p}(0,T;X)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$. Τότε:*

(i) *$u \epsilon C([0,T];X)$ (αφού πιθανώς επαναπροσδιοριστεί σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.)*

(ii) *Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

με σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το T.

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την u να είναι 0 στο διάστημα $(-\infty,0)$ και (t,∞)και θέτουμε $u^{\varepsilon} := \eta_{\varepsilon} * u$, όπου η_{ε} η συνάρτηση $standardmollifier$ στον $\mathbb{R}^1$. Παρατηρούμε ότι

$$u^{\varepsilon\prime} = \eta_{\varepsilon} * u' \text{ στο } (\varepsilon, T-\varepsilon).$$

Τότε καθώς $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{cases} u^{\varepsilon} \to u, & \text{στον } L^p(0,T;X) \\ (u^{\varepsilon})' \to u', & \text{στον } L^p(0,T;X). \end{cases}$$

Για $0 < s < t < T$, υπολογίζουμε

$$u^{\varepsilon}(t) = u^{\varepsilon}(s) - \int_s^t u^{\varepsilon}(\tau)d\tau.$$

Συνεπώς,

$$u(t) = u(s) - \int_s^t u(\tau)d\tau$$

για σχεδόν όλα τα $0 < s < t < T$. Αφού η απεικόνιση $t \longmapsto \int_0^t u'(\tau)d\tau$ είναι συνεχής , οι σχέσεις (i) και (ii) επάγονται. Για την (iii) έχουμε ότι

$$T\int_0^T (u(t))^p dt \leq \int_0^T \int_0^T ((u(s))^p + \int_s^t (u'(\ tau))^p d\tau) ds dt$$

$$\leq \int_0^T (\|u\|^p + \|u'\|^p) dt.$$

Άρα

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}.$$

□

Θεώρημα 1.44. *Έστω $u \epsilon L^2(0,T;H_0^1(U))$, με $u' \epsilon L^2(0,T;H^{-1}(U))$.*

(i) *Τότε $u \in C([0,T]; L^2(U))$ εφόσον επαναπροσδιορισθεί σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.*

(ii) *Η απεικόνιση $t \longmapsto \|u(t)\|^2_{L^2(U)}$ είναι απολύτως συνεχής, με*

$$\tfrac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

για σχεδόν όλα τα t με $0 \leq t \leq T$.

(iii) *Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{L^2(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^1_0(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T,H^{-1}(U))}),$$

με σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το T.

Απόδειξη. Επεκτείνουμε το u στο μέγιστο διάστημα $[-\sigma, T+\sigma]$ για $\sigma > 0$, και ορίζουμε τις ομαλές συναρτήσεις $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$όπως και στην προηγούμενη απόδειξη. Τότε για $\varepsilon, \delta > 0$,

$$\tfrac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L^2(U)} = 2(u^{\varepsilon'}(t) - u^{\delta'}(t), u^\varepsilon(t) - u^\delta(t))_{L^2(U)}.$$

Συνεπώς,

$$|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)|^2_{L^2(U)} = |u^\varepsilon(s) - u^\delta(s)|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon'}(\tau) - u^{\delta'}(\tau), u^\varepsilon(\tau)u^\delta(\tau)\rangle d\tau$$

για όλα τα $0 \leq s, t \leq T$. Διατηρούμε κάποιο s σταθερό για το οποίο ισχύει

$$u^\varepsilon(s) \to u(s)L^2(U)$$

Συνεπώς,

$$\limsup_{\varepsilon,\delta\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L^2(U)}$$

$$\lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \int_0^T \|u^{\varepsilon'}(\tau) - u^{\tau'}(\tau)\|^2_{H^{-1}(U)} + \|u^{\varepsilon'}(\tau) - u^{\delta'}\|)^2_{H^{-1}(U)} + \|u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\|^2_{H^1_0(U)} d\tau = 0.$$

Συνεπώς, οι ομαλές συναρτήσεις $\{u^\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ συγκλίνουν στον $C([0,T]; L^2(U))$ σε κάποια $v \in C([0,T]; L^2(U))$. Όμως, γνωρίζουμε ότι $u^\varepsilon(t) \to u(t)$ σχεδόν

για όλα τα t, συμπεραίνουμε ότι $u = v$ σχεδόν παντού.
Ομοίως, έχουμε

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(U)} = \|u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u^{\varepsilon'}(\tau), u^\varepsilon(\tau)\rangle d\tau$$

και έτσι έχουμε

$$\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = \|u(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle d\tau$$

για όλα τα $0 \leq s, t \leq T$.
Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα ως προς s και κάνοντας χρήση της ανισότητας $\|\langle u', u\rangle\| \leq \|u'\|_{H^{-1}(U)}\|u\|_{H^1_0(U)}$, καταλήγουμε στην εκτίμηση (iii).

□

Θεώρημα 1.45. *Απεικονίσεις σε καλύτερους χώρους. Έστω ότι το U είναι ανοικτό και φραγμένο, με ομαλό σύνορο ∂U. Έστω m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι $u \in L^2(0,T; H^{m+2}(U))$, με $u' \in L^2(0,T; H^m(U))$. Τότε:*

(i) $u \in C([0,T]; H^{m+1}(U))$, *αφού πιθανώς επαναπροσδιοριστεί σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.*

(ii) *Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^m(U))}),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα T, U και m.

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι $m = 0$. Τότε

$$u \in L^2(0,T; H^2(U)), u' \in L^2(0,T; L^2(U)).$$

Επιλέγουμε ένα ανοικτό φραγμένο σύνολο $U \subset\subset V$, και κατασκευάζουμε μια αντιπροσωπευτική επέκταση $\overline{u} = Eu$. Με χρήση του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε ότι

$$\overline{u} \in L^2(0,T; H^2(V))$$

και

$$\|\overline{u}\|_{L^2(0,T;H^2(V))} \leq C\|u\|L^2(0,T; H^2(U)).$$

Η προηγούμενη ανισότητα έπεται με χρήση των υπολοίπων διαφορών ως προς την μεταβλητή t, λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο γραμμικός τελεστής είναι φραγμένος από τον $L^2(U)$ στον $L^2(V)$.
Υποθέτουμε προσωρινά ότι η $\overline{u}$ είναι ομαλή. Τότε υπολογίζουμε

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\int_V |D\overline{u}\|^2 dx\right)\right| = 2\left|\int_V D\overline{u}D\overline{u}' dx\right|$$

$$= 2\left|\int_V \Delta\overline{u}\cdot\overline{u}' dx\right|$$

$$\leq C(\|\overline{u}^2\|_{H^2(V)} + \|u'\|^2_{L^2(V)}).$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει όρος στο σύνορο ∂V όταν ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, διότι η επέκταση $\overline{u} = Eu$ έχει συμπαγές υποστήριγμα εντός του V. Οπότε, ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_{H^1(U)} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|u'\|_{L^2(U)}).$$

Η ίδια εκτίμηση εξάγεται ακόμη και αν η u δεν είναι ομαλή, προσεγγίζοντάς την με ομαλές συναρτήσεις $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$. Όπως στις προηγούμενες αποδείξεις, έπεται ότι $u \in C([0,T]; H^1(U))$.
Στην γενική περίπτωση που $m \leq 1$, θεωρούμε α ένα διάνυσμα με $|\alpha| \leq m$, και θέτουμε $v := D^\alpha u$.
Τότε

$$v \in L^2(0,T;H^2(U)), v' \in L^2(0,T;L^2(U)).$$

Εφαρμόζοντας την εκτίμηση για $m = 0$, αντικαθιστώντας το u με το v, και αθροίζοντας σε όλα τα $|\alpha| \leq m$, εξάγουμε τη γενική εκτίμηση (iii).

□

Κεφάλαιο 2

Παραβολικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Τα παραβολικά προβλήματα είναι εξελικτικές εξισώσεις, αφού περιλαμβάνουν και μεταβλητή χρόνου. Αποτελούν γενίκευση της εξίσωσης θερμότητας.

2.1 Ορισμοί

2.1.1 Παραβολικές Εξισώσεις

Για αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι το U είναι ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και θέτουμε $U_T = U \times (0, T]$ για σταθερό > 0.
Θα μελετήσουμε αρχικά το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.1}$$

όπου δίνονται οι $f : U_T \to \mathbb{R}$ και η $g : U \to \mathbb{R}$ και η $u : \bar{U_T} \to \mathbb{R}$ είναι η άγνωστη $u = u(x, t)$. Το L συμβολίζει για κάθε χρόνο t έναν τελεστή μερικής παραγώγισης δεύτερης τάξης που έχει είτε τη μορφή απόκλισης

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{i,j}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u \tag{2.2}$$

η τη μορφή μη-απόκλισης

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u \tag{2.3}$$

για δοσμένους συντελεστές $\alpha^{ij}, b^i, c(i,j=1,...,n)$.

Ορισμός 2.1. *Λέμε ότι ένας παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t}+L$ είναι (ομοιόμορφα) παραβολικός αν υπάρχει σταθερά $\theta>0$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{2.4}$$

για όλα τα $(x,t)\epsilon U_T, \xi\epsilon\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 2.1. *Παρατηρούμε ότι για σταθερό $0\leq t\leq T$ ο τελεστής L είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής ως προς τη χωρική μεταβλητή x.*

2.1.2 Ασθενείς Λύσεις

Όπως και με τους ελλειπτικούς τελεστές, θεωρούμε τον L στη μορφή απόκλισης (2.2) και προσπαθούμε να ορίσουμε την ασθενή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών. Υποθέτουμε ότι

$$\alpha^{ij}, b^i \epsilon L^{\infty}(U_T)(i,j=1,...,n) \tag{2.5}$$

$$f \; \epsilon \; L^2(U_T) \tag{2.6}$$

και

$$g \; \epsilon \; L^2(U). \tag{2.7}$$

Υποθέτουμε επίσης πάντα ότι $\alpha^{ij}=\alpha^{ji}(i,j=1,...,n)$.
Ορίζουμε τώρα τη χρόνο-εξαρτώμενη διγραμμική μορφή

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot,t)u_{x_i}v + c(\cdot,t)uvdx \tag{2.8}$$

για $u,v \; \epsilon \; H_0^1(U)$ και για σχεδόν όλα τα $0\leq t\leq T$.

Παρατήρηση 2.2. *(Κίνητρο για τον ορισμό της ασθενούς λύσης.) Για να είναι εφικτός ο επόμενος ορισμός της ασθενούς λύσης, υποθέτουμε αρχικά ότι η $u=u(x,t)$ είναι μια ομαλή λύση του παραβολικού προβλήματος (2.1). Αλλάζουμε ότι οπτική, συνδέοντας τη u με μια απεικόνιση*

$$u:[0,T]\rightarrow H_0^1(U) \tag{2.9}$$

που ορίζεται ως

$$[u(t)](x) := u(x,t) \quad (x \epsilon U, 0 \leq t \leq T). \tag{2.10}$$

Με άλλα λόγια δε θα θεωρούμε τη u ως συνάρτηση του x και του t μαζί, αλλά ως απεικόνιση u και t στο χώρου $H_0^1(U)$ των συναρτήσεων του x.
Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (2.1), ορίζουμε ομοίως την

$$f : [0,T] \to L^2(U)$$

ως

$$[f(t)](x) := f(x,t) \quad (x \epsilon U, 0 \leq t \leq T).$$

Τώρα, αν σταθεροποιήσουμε μία συνάρτηση $v \epsilon H_0^1(U)$, μπορούμε πολλαπλασιάζοντας τη ΜΔΕ $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ με v και ολοκληρώνοντας κατά μέλη, να βρούμε

$$(\boldsymbol{u}', v) + B[\boldsymbol{u}, v; t] = (\boldsymbol{f}, v)(\prime = \frac{d}{dt}) \tag{2.11}$$

για κάθε $0 \leq t \leq T$, όπου το (,) είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$.
Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j_{x_j} U_T$$

για $g^0 := f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$ και $g^j := \sum_{i=1}^{n} \alpha^{ij} u_{x_i} \quad (j = 1, ..., n)$. Συνεπώς, η (2.10) και οι ορισμοί στην ενότητα 1.14 με τον χώρο H^{-1} συνεπάγονται ότι το δεξί μέλος της (2.10) βρίσκεται στο χώρο Sobolev $H^{-1}(U)$ με

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \|g^j\|^2_{L^2(U)} \right)^{1/2} \leq C(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)}.)$$

Αυτή η εκτίμηση υποδηλώνει ότι ίσως είναι λογικό να ψάξουμε για κάποια ασθενή λύση με $\boldsymbol{u}' \epsilon H^{-1}(U)$ για σχεδόν όλους τους χρόνους $0 \leq t \leq T$. Σε αυτή την περίπτωση ο πρώτος όρος της (2.9) μπορεί να εκφραστεί ως $\langle \boldsymbol{u}', v \rangle$, όπου το $\langle , \rangle$ είναι το ταίριασμα του $H^{-1}(U)$ με τον $H_0^1(U)$.
Όλα αυτά οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2. *Λέμε ότι μία συνάρτηση*

$$u \,\epsilon\, L^2(0,T;H_0^1(U)), \quad \boldsymbol{u}' \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

είναι ασθενής λύση του παραβολικού προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (2.1) αν

$$\textbf{(i)}\ \langle \boldsymbol{u}', v\rangle + B[\boldsymbol{u}, v; t] = (\boldsymbol{f}, v)$$

για κάθε $v \,\epsilon\, H_0^1(U)$ και σχεδόν για όλους τους χρόνους $0 \leq t \leq T$ και

$$\textbf{(ii)}\ \boldsymbol{u}(0) = g.$$

Παρατήρηση 2.3. *Με βάση το θεώρημα 1.42 βλέπουμε ότι $u \,\epsilon\, C([0,T];L^2(U))$ και άρα η (ii) έχει νόημα.*

2.2 Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων

2.2.1 Προσεγγίσεις Galerkin

Θα κατασκευάσουμε μία ασθενή λύση στο παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.12}$$

κατασκευάζοντας πρώτα λύσεις συγκεκριμένων προσεγγίσεων του (2.12) πεπερασμένης διάστασης και περνώντας σε όρια. Αυτό ονομάζεται **μέθοδος Galerkin**.
Πιο συγκεκριμένων, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $w_k = w_k(x)$ $(k = 1, ..., n)$ είναι ομαλές,

$$\text{η} \quad \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθογώνια βάση του } \quad H_0^1(U), \tag{2.13}$$

και

$$\text{η} \quad \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθοκανονική βάση του } \quad L^2(U). \tag{2.14}$$

θα μπορούσαμε να πάρουμε ως $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ το πλήρες σετ των κατάλληλα κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων του $L = -\Delta H_0^1(U)$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα θετικό ακέραιο m. Θα ψάξουμε για μία συνάρτηση $u_m := [0,T] \to H_0^1(U)$ της μορφής

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k \tag{2.15}$$

όπου θέλουμε να διαλέξουμε συντελεστές $d_m^k(t)$ $(0 \leq t \leq T, \quad k = 1,..,m)$ τέτοιες ώστε

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \quad (k = 1, ..., m) \tag{2.16}$$

και

$$(\mathbf{u}_m', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \quad (0 \leq t \leq T, \quad k = 1, ..., m). \tag{2.17}$$

Άρα ψάχνουμε μια συνάρτηση $\mathbf{u}_m$ της μορφής (2.15) που να ικανοποιεί την προβολή (2.17) του προβλήματος (2.12) στον χώρο πεπερασμένης διάστασης που παράγεται από την $\{w_k\}_{k=1}^m$.

Θεώρημα 2.1. *Κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων. Για κάθε ακέραιο $m = 1, 2, ...$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση u_m της μορφής (2.15) που ικανοποιεί τις (2.16) και (2.17).*

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι η u_m έχει τη μορφή (2.15), παρατηρούμε πρώτα από την (2.14) ότι

$$(\mathbf{u}_m'(t), w_k) = d_m^{k'}(t). \tag{2.18}$$

Επιπλέον,

$$B[\mathbf{m}, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) \tag{2.19}$$

για $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t] \quad k, l = 1, ..., m$. Γράφουμε ακόμη $f^k := (\mathbf{f}(t), w_k) \quad k = 1, ..., m$. Τότε, η (2.17) μετατρέπεται στο γραμμικό σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

$$d_m^{k'}(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad k = 1, ..., m \tag{2.20}$$

με τις αρχικές συνθήκες (2.16). Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ύπαρξης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχει μοναδική, απολύτως συνεχής συνάρτηση $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ που ικανοποιεί τις (2.16) και (2.10) για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$. Τότε, $\mathbf{u}_m$ που ορίζεται στην (2.15) λύνει την (2.17) για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$.

□

2.2.2 Ενεργειακές Εκτιμήσεις

Σκοπεύουμε τώρα να στείλουμε το m στο άπειρο και να δείξουμε ότι μία υπακολουθία των λύσεών μας u_m των προσεγγιστικών προβλημάτων (2.16) και (2.17) συγκλίνει σε μία ασθενή λύση του (2.12). Για να το κάνουμε αυτό, χρειαζόμαστε κάποιες ομοιόμορφες εκτιμήσεις.
Πρώτα, όμως, αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, τις δύο μορφές της *Ανισότητας Gronwall*.

Πόρισμα 2.1. *Διαφορική Μορφή Ανισότητας Gronwall. Έστω $\eta(\cdot)$ μία μη αρνητική απολύτως συνεχής συνάρτηση στο $[0,T]$ που σχεδόν για κάθε t ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

όπου οι $\phi(t)$ και $\psi(t)$ είναι μη-αρνητικές, αθροίσιμες συναρτήσεις στο $[0,]$. Τότε

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

για όλα τα $0 \leq t \leq T$.
Ειδικότερα, αν

$$\eta' \leq \phi\ \eta \text{ στο } [0,T] \text{ και } \eta(0) = 0,$$

τότε

$$\eta \equiv 0 \text{ στο } [0,T].$$

Πόρισμα 2.2. *Ολοκληρωτική Μορφή Ανισότητας Gronwall. Έστω $\xi(t)$ μια μη-αρνητική αθροίσιμη συνάρτηση στο $[0,T]$ που ικανοποιεί για σχεδόν όλα τα t την ολοκληρωτική ανισότητα*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C^2$$

για σταθερές $C_1, C_2 \geq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$ για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$.
Ειδικότερα, αν

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)ds$$

για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$, τότε

$$\xi(t) = 0 \text{ σχεδόν παντού}$$

Επιστρέφομαι τώρα στο βασικό θεώρημα της υποενότητας.

Θεώρημα 2.2. *Ενεργειακές Εκτιμήσεις. Υπάρχει μία σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα U και και από τους συντελεστές του L τέτοια ώστε*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\boldsymbol{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(u))} + \|g\|_{L^2(U)}) \tag{2.21}$$

για $m = 1, 2, ...$

Απόδειξη.

1. Πολλαπλασιάζουμε την (2.17) με $d_m^k(t)$ αθροίζουμε για $k = 1, ..., m$ και χρησιμοποιούμε την (2.15) για να βρούμε

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{m}'; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{m}) \tag{2.22}$$

για σχεδόν όλα τα $\leq t \leq T$. Υπάρχουν σταθερές $\beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε

$$\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] + \gamma\|u_m\|_{L^2(U)^2} \tag{2.23}$$

για όλα τα $0 \leq t \leq T, \quad m = 1, ...$ Επιπλέον,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}$$

και

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)})$$

για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$. Συνεπώς, η (2.22) δίνει την ανισότητα

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\right) + 2\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq C_1\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} + C_2\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} \tag{2.24}$$

για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$ και κατάλληλες σταθερές C_1 και C_2.

2. Γράφουμε τώρα

$$\eta(t) := \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \tag{2.25}$$

και

$$\xi(t) := \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(U)} \tag{2.26}$$

Τότε, η (2.24) συνεπάγεται ότι

$$\eta'(t) \leq C_1\eta(t) + C_2\xi(t) \tag{2.27}$$

για σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$. Έτσι, η διαφορική μορφή της Ανισότητας Gronwall δίνει την εκτίμηση

$$\eta(t) \leq e^{C_1(t)}\left(\eta(0) + C_2\int_0^t \xi(s)ds\right) \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.28}$$

Επειδή από την (2.16) $\eta(0) = \|\mathbf{u}_m(\mathbf{0})\|^2_{L^2(U)} \leq \|g\|^2_{L^2(U)}$, έχουμε από τις (2.25) μέχρι (2.27) την εκτίμηση

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).$$

3. Επιστρέφουμε για άλλη μια φορά στην (2.24), ολοκληρώνουμε από 0 μέχρι T και χρησιμοποιούμε την παραπάνω ανισότητα για να βρούμε

$$\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} = \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}dt$$

$$\leq C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).$$

4. Σταθεροποιούμε οποιαδήποτε $v \,\epsilon\, H_0^1(U)$ με $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ και γράφουμε $v = v^1 + v^2$, όπου $v^1 \,\epsilon\, span\{w_k\}_{k=1}^m$ και$(v^2, w_k) = 0$ $k = 1, ..., m$. Επειδή οι συναρτήσεις $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ είναι ορθογώνιες στον $H_0^1(U), \|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq \|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την (2.17), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $0 \leq t \leq T$

$$(\mathbf{u}'_m, v^1) + B[\mathbf{u}_m, v^1; t] = (\mathbf{f}, v^1).$$

Τότε, η (2.15) συνεπάγεται ότι

$$\langle \mathbf{u}'_m, v\rangle = (\mathbf{u}'_m, v) = (\mathbf{u}'_m, v^1) = (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t].$$

Συνεπώς,

$$|\langle \mathbf{u}'_m, v\rangle| \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)$$

αφού $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Έτσι,

$$\|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)$$

και άρα

$$\int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|^2_{H^{-1}(U}dt \leq C\int_0^T \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1}dt$$

$$\leq C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).$$

□

2.2.3 Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Στη συνέχεια, περνάμε σε όρια καθώς $m \to \infty$, για να φτιάξουμε μία ασθενή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (2.12).

Θεώρημα 2.3. *Ύπαρξη ασθενούς λύσης. Υπάρχει ασθενής λύση του (2.12).*

Απόδειξη.

(i) Σύμφωνα με την ενεργειακή εκτίμηση (2.21), βλέπουμε ότι η ακολουθία $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ είναι φραγμένη στον $L^2(0,T;H_0^1(U))$ και η $\{\mathbf{u}_m'\}_{m=1}^\infty$ είναι φραγμένη στον $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ και μία συνάρτηση $u \,\epsilon\, L^2(0,T;H_0^1(U))$ με $\mathbf{u}' \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{-1}(U))$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \to \mathbf{u} & \text{ασθενώς στον } L^2([0,T];H_0^1(U)) \\ \mathbf{u}_{m_l}' \to \mathbf{u}' & \text{ασθενώς στον } L^2([0,T];H^{-1}(U)). \end{cases} \tag{2.29}$$

(ii) Στη συνέχεια σταθεροποιούμε έναν ακέραιο και διαλέγουμε μία συνάρτηση $\mathbf{v} \,\epsilon\, C^1([0,T];H_0^1(U))$ που έχει την μορφή

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t)w_k \tag{2.30}$$

όπου οι $\{d^k\}_{k=1}^N$ είναι δοσμένες ομαλές συναρτήσεις. Διαλέγουμε $m \geq N$, πολλαπλασιάζουμε την (2.17) με $d^k(t)$, αθροίζουμε για $k = 1, ..., N$ και μετά ολοκληρώνουμε ως προς t για να βρούμε

$$\int_0^T \langle u_m', \mathbf{v}\rangle + B[u_m, \mathbf{v}; t]dt = \int_0^T (f, \mathbf{v})dt. \tag{2.31}$$

Θέτουμε $m = m_l$ και χρησιμοποιούμε την (2.28) για να βρούμε περνώντας σε ασθενή όρια ότι

$$\int_0^T \langle u', \mathbf{v}\rangle + B[u, \mathbf{v}; t]dt = \int_0^T (f, \mathbf{v})dt. \tag{2.32}$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει τότε για όλες τις συναρτήσεις $\mathbf{v} \,\epsilon\, L^2(0, T; H_0^1(U))$, αφού οι συναρτήσεις της μορφής (2.29) είναι πυκνές σε αυτόν τον χώρο. Έτσι,

$$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \tag{2.33}$$

για κάθε $v \,\epsilon\, H_0^1(U)$ και σχεδόν όλα τα $0 \leq t \leq T$. Από το θεώρημα 1.42 βλέπουμε ακόμη ότι $u \,\epsilon\, C([0, T]; L^2(U))$.

(iii) Για να δείξουμε ότι $u(0) = g$, παρατηρούμε πρώτα από την (2.32) ότι

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', u\rangle + B[u, \mathbf{v}; t]dt = \int_0^T (f, \mathbf{v})dt + (u(0) + \mathbf{v}(0)) \tag{2.34}$$

για κάθε $\mathbf{v} \,\epsilon\, C^1([0, T]; H_0^1(U))$ με $\mathbf{v}(T) = 0$. Όμοια, από την (2.31) εξάγουμε ότι

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', u_m\rangle + B[u_m, \mathbf{v}; t]dt = \int_0^T (f, \mathbf{v})dt + (u_m(0), \mathbf{v}(0)). \tag{2.35}$$

Θέτουμε $m = m_l$ και ξαναχρησιμοποιούμε την (2.28) για να βρούμε

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', u\rangle + B[u, \mathbf{v}; t]dt = \int_0^T (f, \mathbf{v})dt + (g, \mathbf{v}(0)) \tag{2.36}$$

αφού $u_{m_l}(0) \to g$ στον $L^2(U)$. Επειδή το $\mathbf{v}(0)$ είναι αυθαίρετο, συγκρίνοντας τις (2.34) και (2.36), συμπεραίνουμε ότι $u(0) = g$.

□

Θεώρημα 2.4. *Μοναδικότητα της ασθενούς λύσης. Μια ασθενής λύση του (2.12) είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η μόνη ασθενής λύση του (2.12) με $f \equiv g \equiv 0$ είναι η

$$u \equiv 0 \tag{2.37}$$

Για να το δείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι θέτοντας $\mathbf{v} = u$ στην ταυτότητα (2.33) (για $f \equiv 0$), συμπεραίνουμε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (1.42), ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(U)}\right) + B[\mathbf{u},\mathbf{u};t] = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u},\mathbf{u};t] = 0. \tag{2.38}$$

Επειδή

$$B[\mathbf{u},\mathbf{u};t] \geq \beta\|u\|^2_{H^1_0(U)} - \gamma\|u\|^2_{L^2(U)} \geq -\gamma\|u\|^2_{L^2(U)}, \tag{2.39}$$

η ανισότητα Gronwall και η (2.38) συνεπάγονται την (2.37).

□

2.2.4 Ομαλότητα

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε την κανονικότητα της ασθενούς λύσης u του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών δεύτερης τάξης παραβολικής εξίσωσης. Ο σκοπός είναι να αποδείξουμε ότι η u είναι ομαλή αν οι συντελεστές της ΜΔΕ, το σύνορο του χωρίου κλπ είναι ομαλά.

Παρατήρηση 2.4. *Κίνητρο: Τυπική εξαγωγή εκτιμήσεων.*

1. *Για να δούμε τι υποθέσεις κανονικότητας θα μπορούσαν να ισχύουν, υποθέτουμε αρχικά ότι η $u = u(x,t)$ είναι ομαλή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \textit{στο} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u = g & \textit{στο} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.40}$$

και υποθέτουμε ακόμη ότι η u πάει στο μηδέν καθώς $|x| \to \infty$ αρκετά γρήγορα, ώστε να δικαιολογούνται οι παρακάτω υπολογισμοί. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε για $0 \leq t \leq T$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u u_t + (\Delta u)^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + 2Du \cdot Du_t + (\Delta u)^2 dx \tag{2.41}$$

Από $\quad 2Du \cdot Du_t = \frac{d}{dt}(|Du|^2)$ *έχουμε ότι*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 2Du \cdot Du_t ds = \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx|_{s=0}^{s=t}.$$

Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx.$$

Εισάγουμε τις δύο αυτές ανισότητες στην (2.41) και ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο, για να πάρουμε

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2 u|^2 dx dt \le C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 dx \right) \tag{2.42}$$

Επομένως, βλέπουμε ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε τις L^2 - *νόρμες των* u_t *και* $D^2 u$ *στο* $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ *ως προς την* L^2- *νόρμα της* f *στο* $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ *και την* L^2- *νόρμα του* Dg *στον* $\mathbb{R}^n$*.*

2. *Στην συνέχεια παραγωγίζουμε τη ΜΔΕ ως προς* t *και θέτουμε* $\tilde{u} := u_t$*. Τότε*

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \textit{στο} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \textit{στο} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.43}$$

για $\tilde{f} := f_t, \quad \tilde{g} := u_t(\cdot,0) = f(\cdot,0) + \Delta g$*. Πολλαπλασιάζοντας με* $\tilde{u}$*, ολοκληρώνοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την Ανισότητα Gronwall, προκύπτει οτι*

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u_t|^2 dx dt \le C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + f(\cdot,0)^2 dx \right) \tag{2.44}$$

Αλλά

$$\max_{0 \le t \le T} \|f(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^\varkappa \times (0,T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \tag{2.45}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα (1.41) (iii). Επιπλέον, γράφοντας $-\Delta u = f - u_t$, *βρίσκουμε, ότι*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_t^2 dx. \tag{2.46}$$

Συνδυάζοντας τις ((2.44)-(2.46)), οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |D^2u|^2 dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dxdt \leq C \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 dx \right) \tag{2.47}$$

για κάποια σταθερά C.

Προφανώς τα παραπάνω δεν αποτελούν κάποιου είδους απόδειξη, γιατί η ασθενής λύση που κατασκευάσαμε προηγουμένως δεν είναι αρκετά ομαλή ώστε να διακιολογήσει αυτούς τους υπολογισμούς. Για τους υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγίσεις Galerkin. Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία, θα υποθέτουμε στο εξής ότι $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ *είναι η πλήρης συλλογή των ιδιοσυναρτήσεων της* -Δ *στον* H_0^1 *και ότι το* U *είναι φραγμένο, ανοιχτό με ομαλό* ∂U. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

$$\begin{cases} \text{οι συντελεστές } \alpha^{ij}, b^i, c (i,j = 1,...,n) \text{ είναι ομαλοί στο} \\ \bar{U} \text{ και δεν εξαρτώνται από το } t. \end{cases} \tag{2.48}$$

Θεώρημα 2.5. *Βελτιωμένη Κανονικότητα.*

(i) *Έστω*

$$g \,\epsilon\, H_0^1(U),\ \boldsymbol{f} \,\epsilon\, L^2(0,T;L^2(U)).$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι η $\boldsymbol{u} \,\epsilon\, L^2(0,T;H_0^1(U))$ *με* $\boldsymbol{u}' \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{-1}(U))$ *είναι η ασθενής λύση του*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \textbf{στο } U_T \\ u = 0 & \textbf{στο } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \textbf{στο } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Τότε στην πραγματικότητα

$$\boldsymbol{u} \epsilon L^2(0,T;H^2(U)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(U)), \boldsymbol{u}' \,\epsilon\, L^2(0,T;H^2(U))$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$ess \sup_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}$$

$$\leq C\left(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)}\right) \tag{2.49}$$

όπου η σταθερά C εξάρτάται μόνο από τα U και T και τους συντελεστές του L.

(ii) *Αν επιπλέον*

$$g\epsilon H^2(U), \boldsymbol{f} \,\epsilon\, L^2(0,T;L^2(U)),$$

τότε

$$\boldsymbol{u}\epsilon L^\infty(0,T;H^2(U)), \boldsymbol{u}' \,\epsilon\, L^\infty(0,T;L^2(U)) \cap L^2(0,T;H_0^1(U))$$

$$\boldsymbol{u}'' \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

με την εκτίμηση

$$ess \sup_{0\leq t\leq T} (\|u(t)\|_{H^2(U)} + \|\boldsymbol{u}'(t)\|_{L^2(U)}) + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \tag{2.50}$$

$$+\|\boldsymbol{u}''\|_{L^2(0,T;H^{-1}))} \leq C(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))}) + \|g\|_{H^2(U)}.) \tag{2.51}$$

Θεώρημα 2.6. *Μεγάλη κανονικότητα. Έστω*

$$g\epsilon H^{2m+1}(U), \quad \frac{d^k\boldsymbol{f}}{dt^k} \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{2m-2k}(U)) \quad k = 0, ..., m.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη συμβατότητας μ-τάξης:

$$\begin{cases} g_0 := g\epsilon H_0^1(U), \quad g_1 := f(0) - L_{g_0} \,\epsilon\, H_0^1(U), \\ ..., g_m := \frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}(0) - Lg_{m-1} \,\epsilon\, H_0^1(U). \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{d^k\boldsymbol{u}}{dt^k} \,\epsilon\, L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U)) \quad k = 0, ..., m+1$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \boldsymbol{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k \boldsymbol{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right) \tag{2.52}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα m, U, T και τους συντελεστές του L.

Τέλος, εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για $m = 0, 1, ...$ προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7. *Άπειρη παραγωγισιμότητα. Έστω*

$$g \in C^\infty(\bar{U}), f \in C^\infty(\bar{U}_T)$$

και οι συνθήκες συμβατότητας m-τάξης ισχύουν για $m = 0, 1, ..$ Τότε, το παραβολικό πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών (2.12) έχει μοναδική λύση

$$u \in C^\infty(\bar{U}_T).$$

2.3 Θεωρία Ημιομάδων

Η θεωρία ημιομάδων είναι η αφηρημένη μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με τιμές σε χώρους Banach, που εκφράζονται μέσω γραμμικών τελεστών που ίσως να μην είναι φραγμένοι.

Ορισμοί και Βασικές Ιδιοτητες

Έστω ένας πραγματικός χώρος Banach και η συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) & t \geq 0 \\ \mathbf{u}(0) = u \end{cases} \tag{2.53}$$

όπου $' = \frac{d}{dt}$, $\quad u \in X$ δοσμένο και A ένας γραμμικός τελεστής. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το $D(A)$, το πεδίο ορισμού του A, είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του X και έχουμε έναν πιθανώς μη-φραγμένο τελεστή

$$A : D(A) \to X \tag{2.54}$$

Εξετάζουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα μιας λύσης

$$\mathbf{u} : [0, \infty) \to X$$

της (2.53). Το βασικό μας πρόβλημα είναι να εξασφαλίσουμε λογικές συνθήκες για τον τελεστή A ώστε (i) η ΣΔΕ να έχει μοναδική λύση $\mathbf{u}$ για κάθε αρχικό σημείο $u \epsilon X$ και (ii) πολλές ενδιαφέρουσες ΜΔΕ να μπορούν να εκφραστούν στην αφηρημένη μορφή (2.53).

Ημιομάδες

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι η $\mathbf{u} : [0, \infty) \to X$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.53) και ότι στην πραγματικότητα η (2.53) έχει μοναδική λύση για κάθε αρχικό σημείο $u \, \epsilon \, X$.

Παρατήρηση 2.5. *Συμβολισμός. Θα γράφουμε*

$$\boldsymbol{u}(t) := S(t)u \quad t \geq 0 \tag{2.55}$$

για να δείξουμε καθαρά την εξάρτηση του $\boldsymbol{u}(t)$ από την αρχική συνθήκη $u \epsilon X$. Για κάθε χρόνο $t \geq 0$ μπορούμε ως εκ τούτου να θεωρήσουμε το $S(t)$ ως μια απεικόνιση από τον στον .
Όσον αφορά τις ιδιότητες του S, είναι σίγουρα γραμμικός και επιπλέον:

$$S(0)u = u, u \, \epsilon \, X \tag{2.56}$$

και

$$S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(t)S(s)u \quad t, s \geq 0, \quad u \, \epsilon \, X. \tag{2.57}$$

Η συνθήκη (2.57) εξασφαλίζει την υπόθεσή μας ότι η ΣΔΕ (2.53) έχει μοναδική λύση για κάθε αρχική τιμή. Τέλος, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι για κάθε $u \, \epsilon \, X$

η απεικόνιση $t \mapsto S(t)u$ είναι συνεχής από το $[0, \infty)$ στον X. (2.58)

Ορισμοί 2.1. (i) *Μια οικογένεια $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών που απεικονίζουν τον X στον X καλείται ημιομάδα αν ικανοποιούνται οι συνθήκες ((2.56)-(2.58)).*

(ii) *Λέμε ότι η $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ είναι συστολική ημιομάδα αν επιπλέον*

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad t \geq 0 \tag{2.59}$$

όπου εδώ η $\| \cdot \|$ συμβολίζει τη νόρμα του τελεστή. Έτσι,

$$\|S(t)u\| \leq \|u\| \quad t \geq 0, \quad u \, \epsilon \, X.$$

Ορισμός 2.3. ***(Mild Solution-Λύση με την έννοια της υποομάδας.)*** *Έστω η εξίσωση*

$$\frac{d}{dt}f = F$$

όπου $F : (0,T) \to X$ *(για κάποιο* $0 < T \leq \infty$*). Η* $f : (0,T) \to X$ *είναι λύση αυτής της εξίσωσης με την έννοια της υποομάδας εάν η* f *είναι συνεχής με την τοπολογική νόρμα και*

$$f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(s)ds \text{ για κάθε } t_1, t_2 \,\epsilon\, (0,T).$$

Στοιχειώδεις Ιδιότητες και Γεννήτορες

Το ζητούμενο τώρα είναι να βρούμε ποιοί τελεστές A αποτελούν γεννήτορες συστολικών ημιομάδων. Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι η $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ είναι μία συστολική ημιομάδα στον X.

Ορισμοί 2.2. *Γράφουμε*

$$D(A) := \left\{ u\epsilon X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ υπάρχει στον } X \right\} \tag{2.60}$$

και

$$Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad u\epsilon D(A). \tag{2.61}$$

Καλούμε τον $A : D(A) \to X$ *τον απειροστό γεννήτορα της ημιομάδας* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *όπου* $D(A)$ *είναι το πεδίο ορισμού του .*

Θεώρημα 2.8. *Διαφορικές Ιδιότητες των Ημιομάδων. Υποθέτουμε ότι* $u \,\epsilon\, D(A)$*. Τότε*

(i) $S(t)u \,\epsilon\, D(A)$ *για κάθε* $t \geq 0$,

(ii) $AS(t)u = S(t)\, Au$ *για κάθε* $t > 0$,

(iii) *η απεικόνιση* $t \mapsto S(t)u$ *είναι διαφορίσιμη για κάθε* $t > 0$ *και*

(iv) $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u \quad t > 0.$

Παρατήρηση 2.6. *Επειδή η* $t \mapsto AS(t)u = S(t)Au$ *είναι συνεχής, η απεικόνηση* $t \mapsto S(t)u$ *είναι* C^1 *στο* $(0, \infty)$, *αν* $u \,\epsilon\, D(A)$.

Θεώρημα 2.9. *Ιδιότητες των γεννητόρων.*

(i) *Το πεδίο ορισμού* $D(A)$ *είναι πυκνό στο* X *και*

(ii) *Ο* A *είναι κλειστός τελεστής. Λέγοντας ότι ένας τελεστής είναι κλειστός, εννοούμε ότι οποτεδήποτε* $u_k \,\epsilon\, D(A) \quad k = 1, \ldots$ *και* $u_k \to u, \quad Au_k \to v$ *καθώς* $k \to \infty$, *τότε*

$$u \,\epsilon\, D(A), \quad v = Au.$$

Κεφάλαιο 3

Η κλασική μέθοδος Galerkin

Η κλασική μέθοδος Galerkin με εφαρμογές στα παραβολικά προβλήματα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η κλασική μέθοδος Galerkin για πεπερασμένα στοιχεία για την επίλυση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ στο } \Omega \text{ για } t > 0 \\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \text{ για } t > 0 \text{ με } u(\cdot, 0) = v \text{ στο } \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου το Ω είναι πεδίο του $\mathbb{R}^d$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και όπου $u = u(t, x)$.

Ορισμός 3.1. **i)** *Το $\mathcal{T}_h$ είναι η τριγωνοποίηση του Ω. Στην περίπτωση που είναι σχεδόν-ομοιόμορφα φραγμένη, η επιφάνεια κάθε τριγώνου της τριγωνοποίησης είναι κάτω φραγμένη από το ch^2 για c θετική σταθερά ανεξάρτητη του h.*

ii) *Ο S_h είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $\overline{\Omega}$ που είναι γραμμικές σε κάθε τρίγωνο της $\mathcal{T}_h$ και που μηδενίζονται έξω από το πολυγωνικό χωρίο Ω_h που δημιουργείται από την ένωση των τριγώνων της $\mathcal{T}_h$.*

iii) *Με $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ ονομάζουμε τις εσωτερικές κορυφές της $\mathcal{T}_h$ και με $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ τις συναρτήσεις πυραμίδας που αποτελούν βάση του S_h.*

Ο τελεστής παρεμβολής μιας ομαλής $v \in \Omega$ που μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ είναι ο

$$\mathcal{I}_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j)\Phi_j(x). \tag{3.2}$$

Συμβολισμοί 3.1. *Συμβολίζουμε με*

$$\|v\| = \|v\|_{L^2} \text{ και } \|v\|_r = \|v\|_{H^r}$$

και για τις συναρτήσεις στο H_0^1 ισχύει η ισοδυναμία νορμών

$$c\|v\|_1 \leq \|\nabla v\| \leq \|v\|_1, \ \forall\, v \in H_0^1 \text{ με } c > 0 \tag{3.3}$$

Η εκτίμηση σφάλματος για την παρεμβολή για $v \in H^2 \cap H_0^1$ είναι

$$\|\mathcal{I}_h v - v\| \leq Ch^2\|v\|_2 \text{ και } \|\nabla(\mathcal{I}_h v - v)\| \leq Ch\|v\|_2. \tag{3.4}$$

Επίσης, για την γενική περίπτωση ενός $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ με οικογένεια $\{S_h\}_{j=1}^{N_h}$ υποχώρων του H_0^1 πεπερασμένης διάστασης, ισχύει ότι για κάποιο $r \geq 2$ και μικρό h

$$\inf_{x \in S_h} \{\|v - x\| + h\|\nabla(v - x)\|\} \leq Ch^s\|v\|_s, \text{ για } 1 \leq s \leq r \text{ και } v \in H^s \cap H_0^1. \tag{3.5}$$

Ομοίως, για τον τελεστή παρεμβολής $\mathcal{I}_h : H^r \cap H_0^1 \to S_h$ η αντίστοιχη εκτίμηση είναι

$$\|\mathcal{I}v - v\| + h\|\nabla(\mathcal{I}_h v - v)\| \leq Ch^s\|v\|_s, \text{για } 1 \leq s \leq r. \tag{3.6}$$

Σημείωση 3.1. *Εάν η $\{S_h\}$ βασίζεται σε σχεδόν-ομοιόμορφες τριγωνοποιήσεις και αποτελείται από κατα τμήματα πολυώνυμα βαθμού το πολύ $r-1$, τότε έχουμε την αντίστροφη ανισότητα*

$$\|\nabla x\| \leq Ch^{-1}\|x\|, \ \forall\, x \in S_h \tag{3.7}$$

Στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αναζητείται συνάρτηση $u_h \in S_h$ τέτοια ώστε

$$(\nabla u_h, \nabla x) = (f, x), \ \forall\, x \in S_h. \tag{3.8}$$

για την λύση της οποίας και τη λύση του προβλήματος ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας

$$(\nabla(u_h - u), \nabla x) = 0, \ \forall\, x \in S_h \tag{3.9}$$

Με βάση τα παραπάνω, ακολουθεί το θεωρήμα

Θεώρημα 3.1. *Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (3.5) και έστω u_h και u είναι οι λύσεις των (3.1) και (3.8) αντίστοιχα. Τότε για $1 \leq s \leq r$*

$$\|u_h - u\| \leq Ch^s \|u\|_s \text{ και } \|\nabla u_h - \nabla u\| \leq Ch^{s-1}\|u\|_s. \tag{3.10}$$

Αρχικά, γίνεται προσέγγιση της $u(x,t)$ μέσω μιας συνάρτησης $u_h(x,t)$ που για κάθε σταθερό t ανήκει σε έναν γραμμικό χώρο S_h πεπερασμένης διάστασης ο οποίος αποτελείται από συναρτήσεις του x. Η συνάρτηση $u_h(x,t)$ είναι λύση ενός h-εξαρτώμενου πεπερασμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο και αναφέρεται ως χωρικά διακριτή ή ημιδιακριτή λύση. Το χωρικά διακριτό πρόβλημα βασίζεται σε μια μεταβολική μορφή του (3.1).

3.1 Διακριτοποίηση

Προχωράμε στην διακριτοποίηση του συστήματος (3.1) ως προς την μεταβλητή του χρόνου, για να παράγουμε ένα πλήρως διακριτό χρονοβηματικό σχέδιο για την προσεγγιστική λύση του (3.1). Για να γίνει η διακριτοποίηση στο χρόνο χρησιμοποιείται προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς για την χρονική παράγωγο.
Για να οριστεί μια χωρικά ημιδιακριτή προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών, γράφουμε το πρόβλημα σε ασθενή μορφή πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση θερμότητας με μια ομαλή συνάρτηση ϕ με $\phi = 0$ στο $\partial\Omega$, ολοκληρώνουμε στο Ω, εφαρμόζουμε τον τύπο του Green και προκύπτει

$$(u_t, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \; \forall \; \phi \in H_0^1, \; t > 0.$$

Στη συνέχεια θέτουμε όπου u το $u_h(t) = u_h(\cdot, t), \; u_h \in S_h$ και έχουμε το προσεγγιστικό πρόβλημα

$$(u_{h,t}, x) + (\nabla u_h, \nabla x) = (f, x) \; \forall \; x \in S_h, \; t > 0, \; u_h(0) = v_h \tag{3.11}$$

όπου v_h είναι κάποια προσέγγιση της v στον S_h.
Ως προς τη βάση $\{\Phi_j\}_1^{N_h}$ του S_h το ημιδιακριτό πρόβλημα γίνεται:
Να βρεθούν οι συντελεστές $\alpha_j(t)$ στην $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\Phi_j(x)$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j'(t)(\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{N_j} \alpha_j(t)(\nabla\Phi_j, \nabla\Phi_k) = (f, \Phi_k), \; k = 1, 2..., N_h$$

και με γ_j τα συστατικά της δοθείσης αρχικής προσέγγισης v_h, $\alpha_j(0) = \gamma_j$ για $1, ..., N_h$. Με συμβολισμό πινάκων αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$A\alpha'(t) + B\alpha(t) = \overline{f}(t) \text{ με } \alpha(0) = \gamma$$

όπου $A = (\alpha_{jk})$ είναι ο πίνακας μάζας με στοιχεία $\alpha_{jk} = (\Phi_j, \Phi_k)$, $B = (b_{jk})$ ο πίνακας ακαμψίας με $b_{jk} = (\nabla\phi_j, \nabla\Phi_k)$, $\overline{f} = (f_k)$ το διάνυσμα με στοιχεία $f_k = (f, \Phi_k)$, $\alpha(t)$ το διάνυσμα των αγνώστων α_j και $\gamma = (\gamma_k)$. Η διάσταση όλων αυτών είναι N_h, η διάσταση του S_h. Επειδή όπως και στον πίνακα ακαμψίας B ο πίνακας μάζας A είναι πίνακας Gram και άρα θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος, το παραπάνω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί

$$\alpha'(t) + A^{-1}B\alpha(t) = A^{-1}\overline{f}(t), \text{ για } t > 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma$$

και άρα έχει μοναδική λύση για t θετικό. Πρώτα αποδεικνύεται η παρακάτω εκτίμηση στον L^2 για το σφάλμα μεταξύ των λύσεων του ημιδιακριτού και του συνεχούς προβλήματος.

Θεώρημα 3.2. *Έστω u_h και u οι λύσεις των (3.11) και (3.1). Τότε*

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds), \text{ για } t \geq 0.$$

Παρατήρηση 3.1. *Όπως και προηγουμένως, απαιτούμε η λύση του συνεχούς προβλήματος να έχει την ομαλότητα που υπονοείται από τις νόρμες στο δεξί μέλος και η v να εξαφανίζεται στο $\partial\Omega$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν ισχύει η (3.6) και $v_h = I_h v$, τότε ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος κυριαρχείται από τον δεύτερο. Το ίδιο ισχύει και αν $v_h = P_h v$, όπου P_h είναι η ορθογώνια προβολή της v στον S_h ως προς το εσωτερικό γινόμενο του L^2, αφού αυτή είναι η βέλτιστη προσέγγιση της v στον S_h ως προς την L^2-νόρμα. Μια άλλη βέλτιστη προσέγγιση επιτυγχάνεται αν ορίσουμε την ελλειπτική ή Ritz προβολή R_h στον S_h ως την ορθογώνια προβολή ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\nabla v, \nabla w)$ τέτοια ώστε*

$$(\nabla R_h v, \nabla x) = (\nabla v, \nabla x) \; \forall \, x \in S_h, \text{ για } v \in H_0^1. \tag{3.12}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (3.2) χρησιμοποιείται το εξής Λήμμα.

Λήμμα 3.1. *Έστω ότι ισχύει η (3.5). Τότε για R_h όπως παραπάνω έχουμε*

$$\|R_h v - v\| + h\|\nabla(R_h v - v)\| \leq Ch^s\|v\|_s, \text{ για } v \in H^s \cap H_0^1, \; 1 \leq s \leq r.$$

Απόδειξη. (Θεωρήματος). Όπως θα κάνουμε συχνά στο εξής, γράφουμε

$$u_h - u = \theta + \rho \text{ όπου } \theta = u_h - R_h u,\ \rho = R_h u - u. \tag{3.13}$$

Ο δεύτερος όρος φράσσεται εύκολα από το Λήμμα (3.1) και οι προφανείς εκτιμήσεις είναι

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds). \tag{3.14}$$

Για να εκτιμήσουμε το θ, παρατηρούμε από τους ορισμούς ότι

$$(\theta_t, x) + (\nabla\theta, \nabla x)$$

$$= (u_{h,t} x) + (\nabla u_h, \nabla x) - (R_h u_t, x) - (\nabla R_h u, \nabla x)$$

$$= (f, x) - (R_h u_t, x) - (\nabla u, \nabla x)$$

$$= (u_t - R_h u_t, x) \tag{3.15}$$

ή

$$(\theta_t, x) + (\nabla\theta, \nabla x) = -(\rho_t, x)\ \forall x \,\epsilon\, S_h,\ t > 0. \tag{3.16}$$

Δεδομένου ότι το θ ανήκει στον S_h, μπορούμε να διαλέξουμε $x = \theta$ στην (3.16) και να καταλήξουμε ότι

$$(\theta_t, \theta) + \|\nabla\theta\|^2 = (-\rho_t, \theta). \tag{3.17}$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με $\frac{1}{2}(d/dt)\|\theta\|^2$ και ο δεύτερος είναι μη αρνητικός. Επειδή το $\|\theta\|$ μπορεί να μην παραγωγίζεται όταν $\theta = 0$, προσθέτουμε ε^2 για να πάρουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\theta\|^2 + \varepsilon^2) \leq \|\rho_t\|\|\theta\| \text{ με } \varepsilon > 0$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \frac{d}{dt}((\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \leq \|\rho_t\|\|\theta\|$$

και επειδή $\|\theta\| \leq (\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$,ολοκληρώνοντας και παίρνοντας $\varepsilon \to 0$.

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds. \tag{3.18}$$

Εδω

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - R_h v\| \leq \|v_h - v\| + \|R_h v - v\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \|v\|_r$$

και

$$\|\rho_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^r \|u_t\|_r$$

οπότε προκύπτει το επιθυμητό φράγμα για το $\|\theta(t)\|$.

□

Παρατήρηση 3.2. *Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε στην (3.17) το γεγονός ότι το $\|\nabla\theta\|^2$ είναι μη αρνητικό. Χρησιμοποιώντας διαφορετικά αυτόν τον όρο, αποδεικνύεται ότι η επίδραση της αρχικής συνθήκης στο σφάλμα τείνει στο μηδέν εκθετικά καθώς το t μεγαλώνει. Πράγματι, για λ_1 τη μικρότερη ιδιοτιμή του $-\Delta$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες έχουμε*

$$\|\nabla v\|^2 \geq \lambda_1 \|v\|^2, \ \forall v \in H_0^1 \tag{3.19}$$

και άρα η (3.17) δίνει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\| \|\theta\|$$

ή $(d/dt)\|\theta\| + \lambda_1\|\theta\| \leq \|\rho_t\|$ και άρα, χρησιμοποιώντας $\varepsilon > 0$ όπως παραπάνω,

$$\|\theta(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|\rho_t(s)\| ds$$

$$\leq e^{-\lambda_1 t}\|v_h - v\| + Ch^r(e^{-\lambda_1 t}\|v\|_r + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)}\|u_h(s)\|_r ds).$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της (3.14) και με κατάλληλη επιλεγμένη v_h ισχύει

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r(e^{-\lambda_1 t}\|v\|_r + \|u(t)\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)}\|u_t(s)\|_r ds).$$

Παρακάτω θα αναλυθεί μια άλλη προσέγγιση της απόδειξης του Θεωρήματος (3.2), στην οποία δουλεύουμε την εξίσωση για θ, σε μορφή τελεστών.

Σημείωση 3.2. *Σύμφωνα με την Αρχή του Duhamel η λύση του (3.1) είναι η*

$$u(t) = E(t)v + \int_0^t E(t-s)f(s)ds. \tag{3.20}$$

Ο (t) *είναι ο επιλύων τελεστής της ομογενούς εξίσωσης* ($f \equiv 0$ *στο (3.1)), δηλαδή ο τελεστής που παίρνει της αρχικές τιμές* $u(0) = v$ *στη λύση* $u(t)$ *σε χρόνο* t.

Αυτός ο τελεστής επίσης μπορεί να θεωρηθεί ως ημιομάδα $e^{\Delta t}$ στον L^2 που δημιουργείται από τον Λαπλασιανό τελεστή ορισμένο στο $\mathcal{D}(\Delta) = H^2 \cap H_0^1$. Εισάγουμε τώρα έναν διακριτό *Λαπλασιανό τελεστή* $\Delta_h : S_h \to S_h$ μέσω της

$$(\Delta_h \psi, x) = -(\nabla\psi, \nabla x) \; \forall \; \psi, x \in S_h \tag{3.21}$$

Το ανάλογο του τύπου του Green ορίζει το $\Delta_h \psi = \sum_{j=1}^{N_h} d_j \Phi_j$ μέσω της

$$\sum_{j=1}^{N_h} d_j(\Phi_j, \Phi_k) = -(\nabla\psi, \nabla\Phi_k) \text{ για } k = 1, ..., N_h$$

αφού ο πίνακας του συστήματος είναι ο θετικά ορισμένος πίνακας μάζας που συναντήσαμε παραπάνω. Ο τελεστής $-\Delta_h$ εύκολα φαίνεται ότι είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος στον S_h ως προς το $(\cdot,\cdot)$. Παρατηρούμε ότι ο ,Δ_h συνδέεται με τους άλλους τελεστές που αναφέρθηκαν μέσω της

$$\Delta_h R_h = P_h \Delta \tag{3.22}$$

αφού

$$(\Delta_h R_h v, x) = -(\nabla R_h v, \nabla x) = -(\nabla v, \nabla x) = (\Delta v, x) = (P_h \Delta v, x) \; \forall \; x \in S_h.$$

Με αυτούς τους συμβολισμούς η ημιδιακριτή εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(u_{h,t}, x) - (\Delta_h u_h, x) = (P_h f, x) \; \forall \; x \in S_h, \; t > 0$$

ή, επειδή όλοι οι παράγοντες στα αριστερά είναι στον S_h, $u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_h f$. Χρησιμοποιώντας την (3.22) προκύπτει για το θ ότι

$$\theta_t - \Delta_h \theta = (u_{h,t} - \Delta_h u_h) - (R_h u_t - \Delta_h R_h u)$$

$$= P_h f + (P_h - R_h)u_t - P_h(u_t - \Delta u)$$

$$= P_h(I - R_h)u_t$$

$$= -P_h \rho_t$$

ή

$$\theta_t - \Delta_h \theta = -P_h \rho_t, \text{ για } t > 0. \tag{3.23}$$

Συμβολίζουμε με $E_h(t)$ το διακριτό ανάλογο του τελεστή $E(t)$, δηλαδή τον επιλύοντα τελεστή του ομογενούς ημιδιακριτού προβλήματος

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = 0, \text{ για } t > 0, \text{ με } u_h(0) = v_h.$$

Ένα ανάλογο της (3.20) μας λέει ότι η (3.22) συνεπάγεται ότι

$$\theta(t) = E_h(t)\theta(0) - \int_0^t E_h(t-s) P_h \rho_t(s) ds. \tag{3.24}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο E_h είναι ευσταθής στον L^2 ή ακριβέστερα

$$\|E_h(t)v_h\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|v_h\| \leq \|v_h\| \text{ για } v_h \in S_h, \ t \geq 0. \tag{3.25}$$

Διαλέγοντας $x = u_h$ στην ομογενή μορφή της (3.11) και χρησιμοποιώντας την (3.19) έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|^2 + \lambda_1 \|u_h\|^2 \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|^2 + \|\nabla u_h\|^2 = 0, \text{ για } t > 0$$

που εύκολα δείχνει την (3.25). Επειδή ο P_h έχει μοναδιαία νόρμα στον L^2 , η (3.24) συνεπάγεται την (3.18) από την οποία προκύπτει το Θεώρημα όπως παραπάνω. Η ζητούμενη εκτίμηση για το θ είναι έτσι συνέπεια της εκτίμησης ευστάθειας για τον $E_h(t)$.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα για την εκτίμηση σφάλματος της απόκλισης.

Θεώρημα 3.3. *Σύμφωνα με τις υποθέσεις του Θεωρήματος (3.2) έχουμε*

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq C\|\nabla u_h - \nabla v\| + Ch^{r-1}\left(\|v\|_r + \|u(t)\|_r + \left(\int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds\right)^{1/2}\right), \text{ για } t$$

Απόδειξη. Όπως πριν, το σφάλμα γράφεται στη μορφή

$$u_h - u = \theta + \rho, \text{ όπου } \theta = u_h - R_h u, \ \rho = R_h u - u.$$

Τότε από το Λήμμα (3.1) έχουμε ότι

$$\|\nabla \rho(t)\| = \|\nabla (R_h u(t) - u(t))\| \leq C h^{r-1} \|u(t)\|_r.$$

Για την εκτίμηση του $\nabla\theta$, χρησιμοποιείται πάλι η (3.16) με $x = \theta_t$ αυτή τη φορά. Παίρνουμε

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|^2 = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2}\|\rho_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_t\|^2$$

και άρα $(d/dt)\|\nabla\theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2$ ή

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leq \|\nabla\theta(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds \tag{3.26}$$

$$\leq (\|\nabla(v_h - v)\| + \|\nabla(R_h v - v)\|)^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds.$$

Έτσι από το Λήμμα (3.1)

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leq 2\|\nabla(v_h - v)\|^2 + C h^{2r-2}(\|v\|_r^2 + \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds) \tag{3.27}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παρατήρηση 3.3. *Στην περίπτωση μιας σχεδόν ομοιόμορφης οικογένειας τριγωνοποιήσεων $\mathcal{T}_h$ ενός επίπεδου χωρίου ή γενικότερα όταν ισχύει η αντίστροφη εκτίμηση (3.7), μια εκτίμηση για το σφάλμα στην απόκλιση μπορεί να εξαχθεί απευθείας από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος (3.2). Πράγματι, έχουμε σε εκείνη την περίπτωση για αυθαίρετο x στον S_h*

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq \|\nabla(u_h(t) - x)\| + \|\nabla x - \nabla u(t)\| \tag{3.28}$$

$$\leq C h^{-1}\|u_h(t) - x\| + \|\nabla x - \nabla u(t)\|$$

$$\leq C h^{-1}\|u_h(t) - u(t)\| + C h^{-1}(\|x - u(t)\| + h\|\nabla x - \nabla u(t)\|).$$

Εδώ από την (3.5) για κατάλληλο $x \,\epsilon\, S_h$

$$\|x - u(t)\| + h\|\nabla x - \nabla u(t)\| \leq Ch^r\|u(t)\|_r$$

και από το Θεώρημα (3.2) για κατάλληλη επιλογή v_h

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq Ch^{r-1}(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t(s)\|_r ds).$$

Κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση σχετικά με τον όρο $\theta = u_h - R_h u$ *στην (3.13). Υποθέτουμε ότι έχουμε διαλέξει* $v_h = R_h$ *ώστε* $\theta(0) = 0$. *Τότε, εκτός από την (3.27) έχουμε από την (3.26)*

$$\|\nabla\theta(t)\| \leq C\left(\int_0^t \|\rho_t\|^2 ds\right)^{1/2} \leq Ch^r\left(\int_0^t \|u_t\|_r^2 ds\right)^{1/2}. \qquad (3.29)$$

Έτσι η απόκλιση του θ *είναι τάξης* $O(h^r)$, *ενώ η κλίση του ολικού σφάλματος μπορεί να είναι μόνο* $O(h^{r-1})$ *για μικρό* h. *Έτσι, η* ∇u_h *είναι καλύτερη προσέγγιση του* $\nabla R_h u$ *από ότι μπορεί να είναι για το* ∇u. *Αυτό είναι ένα παράδειγμα του φαινομένου που ονομάζεται υπερσύγκλιση.*

3.2 Άλλοι τρόποι διακριτοποίησης ως προς τη μεταβλητή του χρόνου.

3.2.1 Euler-Galerkin Μέθοδος

Ξεκινάμε με την προς τα πίσω Euler-Galerkin μέθοδο. Έχοντας ως k το βήμα για το χρόνο και U^n την προσέγγιση της $u(t)$ στον S^h για $t = t_n = nk$, η μέθοδος αυτή ορίζεται αντικαθιστώντας την παράγωγο ως προς τον χρόνο σστην (3.11) με ένα πηλίκο προς τα πίσω διαφοράς, οπότε για $\overline{\partial} U^n = (U^n - U^{n-1})/k$ γίνεται

$$(\overline{\partial} U^n, x) + (\nabla U^n, \nabla x) = (f(t_n), x)\ \forall\ x \,\epsilon\, S_h,\ n \geq 1,\ U^0 = v_h. \qquad (3.30)$$

Για δοσμένο U^{n-1} αυτό ορίζει τη U^n πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης

$$(U^n, x) + k(\nabla U^n, \nabla x) = (U^{n-1}, kf(t_n), x)\ \forall\ x \,\epsilon\, S_h$$

που είναι ο φορμαλισμός πεπερασμένων στοιχείων για μια ελλειπτική εξίσωση της μορφής $(I - k\Delta)u = g$. Με συμβολισμό όπως στην ημιδιακριτή περίπτωση , αυτό μπορεί να γραφεί

$$(A + kB)\alpha^n = A\alpha^{n-1} + k\overline{f}(t_n)$$

όπου ο $A + kB$ είναι θετικά ορισμένος και άρα εδώ και αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 3.4. *Για U^n και u τις λύσεις των (3.30) και (3.1) αντίστοιχα έχουμε ότι αν $\|v_h - v\| \le Ch^r \|v\|_r$,*

$$\|U^n - u(t_n)\| \le Ch^r(\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + k\int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \text{ για } n \ge 0.$$

Απόδειξη. Κατά αναλογία με την (3.13) γράφουμε

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n$$

και το $\rho^n = \rho(t_n)$ είναι φραγμένο όπως στην (3.14). Αυτή τη φορά ένας υπολογισμός που αντιστοιχεί στην (3.15) δίνει

$$(\overline{\partial}\theta^n, x) + (\nabla\theta^n, \nabla x) = -(\omega^n, x) \ \forall\ x \,\epsilon\, S_h,\ n \ge 1 \tag{3.31}$$

όπου

$$\omega^n = R_n\overline{\partial}u(t_n) - u_t(t_n) = (R_h - I)\overline{\partial}u(t_n) + (\overline{\partial}u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

Διαλέγοντας $x = \theta^n$, έχουμε $(\overline{\partial}\theta^n, \theta^n) \le \|\omega^n\|\|\theta^n\|$ ή

$$\|\theta^n\|^2 - (\theta^{n-1}, \theta^n) \le k\|\omega^n\|\|\theta^n\|$$

ώστε

$$\|\theta^n\| \le \|\theta^{n-1}\| + k\|\omega^n\| \tag{3.32}$$

και με διαδοχικές εφαρμογές

$$\|\theta^n\| \le \|\theta^0\| + k\sum_{j=1}^n \|\omega^j\| \le \|\theta^0\| + k\sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + k\sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|. \tag{3.33}$$

Εδώ, όπως πριν, το $\theta^0 = \theta(0)$ είναι φραγμένο όπως επιθυμούμε. Γράφουμε

$$\omega_1^j = (R_h - I)k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)u_t ds$$

και παίρνουμε

$$k\sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \le \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^r \|u_t\|_r ds = Ch^r \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds.$$

Επιπλέον

$$k\omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_j) = -\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \tag{3.34}$$

έτσι ώστε

$$k \sum_{j=1}^{n} \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \leq k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Μαζί οι εκτιμήσεις μας ολοκληρώνουν την απόδειξη.

□

Παρατήρηση 3.4. *Για να βρούμε κάποια εκτίμηση για το $\nabla\theta$, μπορούμε να διαλέξουμε $x = \bar{\partial}\theta^n$ στην (3.31) για να πάρουμε $\bar{\partial}\|\nabla\theta^n\|^2 \leq \|\omega^n\|^2$ ή, αν $\nabla\theta(0) = 0$,*

$$\|\nabla\theta^n\|^2 \leq k \sum_{j=1}^{n} \|\omega^j\|^2 \leq Ch^{2s} \int_0^{t_n} \|u_t\|_s^2 dt + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 dt \tag{3.35}$$

για $1 \leq s \leq r$. Μαζί με την στάνταρ εκτίμηση για το $\nabla\rho$, αυτό δείχνει για $s = r - 1$ ότι $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + k)$.
Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (3.4) μαζί με την αντίστροφη ανισότητα (3.7) παίρνει κανείς την ασθενέστερη εκτίμηση $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + kh^{-1})$. Παρατηρούμε ακόμα ότι για $s = r$ στην (3.35) μπορεί κανείς να εξάγει την εκτίμηση μέγιστης νόρμας $\|U^n - u(t_n)\|_{L^\infty} \leq C(h)\ell_h(h^r + k)$, όπου $\ell_h = log\frac{1}{h}$.

Παρατηρούμε, τέλος, ότι λόγω της μη-συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στο χρόνο, η προς τα πίσω Euler-Galerkin μέθοδος είναι μόνο πρώτης τάξης ως προς το k.

Κεφάλαιο 4

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

4.1 Εισαγωγή

Α.Κίνητρο

Έστω ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(x(t)) \ (t > 0) \\ \mathbf{x}(0) = x_o, \end{cases}$$

όπου το $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα δοσμένο, λείο διανυσματικό πεδίο και η λύση της συνήθης διαφορικής εξίσωσης είναι η τροχιά $x(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$.

Παρόλα αυτά, σε πολλές εφαρμογές το αποτέλεσμα μια ντετερμινιστικής εξίσωσης που περιγράφει ένα φυσικό φαινόμενο δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα εξαιτίας της τυχαιότητας που διέπει ένα πείραμα.
Έτσι τροποποιήθηκε η συνήθης διαφορική εξίσωση με τέτοιον τρόπο ώστε να περιλαμβάνεται ο παράγοντας της τύχης με τον παρακάτω τρόπο

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\ \boldsymbol{\xi}(t) \ \ (t > 0) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_o, \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n \times m}$ (= ο χώρος πινάκων διάστασης $n \times m$) και

$$\boldsymbol{\xi}(\cdot) := m - \text{διαστάσεων ''λευκός θόρυβος''}.$$

4.2 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 4.1. *Έστω $T \neq \emptyset$ ένα σύνολο δεικτών.* ***Στοχαστική ανέλιξη στο*** T ***με τιμές στο*** $\mathbb{R}^m$ *ονομάζεται μια οικογένεια τ.μ. $\{X_t, t \in T\}$ ορισμένων σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Όταν $T = \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ ή $T = \mathbb{Z} = (\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ ομιλούμε για στοχαστική ανέλιξη* ***διακριτού χρόνου*** *ενώ αν T είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ λέγεται στοχαστική ανέλιξη* ***συνεχούς χρόνου***. *Για τυχόν αλλά δοσμένο $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $X_t(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ονομάζεται* ***τροχιά*** *ή* ***πραγματοποίηση*** *της σ.α. $\{X_t, t \in T\}$.*

Ορισμός 4.2. *Ορίζουμε για έκαστο $t \in T$ την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$, δηλαδή $\mathcal{F}_x^T \equiv \sigma(\{X_s^{-1}(A) : s \in [0, t], A \in \mathbb{B}^m\})$.*

Από την άποψη της ερμηνείας μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_t^X$ μπορεί να ειπωθεί ότι: ένα ενδεχόμενο E ανήκει στην $\mathcal{F}_t^X$ όταν ο παρατηρητής του συστήματος $\{X_t, t \in T\}$ μπορεί κατά την χρονική στιγμή t να γνωρίζει αν το E έχει πραγματοποιηθεί ή όχι.

Ορισμός 4.3. *Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ λέγεται ότι είναι εφοδιασμένος με μια* ***διύλιση*** *$\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ όταν για έκαστο $t \in T$ η $\mathcal{F}_t$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω με $\mathbb{F}_t \subset \mathcal{F}$ και επιπλέον $t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.*

Ορισμός 4.4. *Έστω σ.α. $X = \{X_t, t \in T\}$ ορισμένη στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ που είναι εφοδιασμένο με μία διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Η σ.α. X λέγεται* ***προσαρμοσμένη*** *στην διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ όταν για κάθε $t \in T$ η τ.μ. X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.*

Ορισμός 4.5. *Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$ εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Μια τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ λέγεται* ***χρόνος διακοπής*** *της $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ όταν ισχύει:*

$$\{\tau \leq t\} \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Η κλάση ενδεχομένων $\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in T\}$

Ορισμός 4.6. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \in T\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, ορισμένη στον $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ λέγεται ότι είναι ένα $\mathcal{F}_t -$* ***submartingale*** *(αντίστοιχα $\mathcal{F}_t -$* ***supermartingale****), με $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ μια διύλιση του χώρου $(\Omega, \mathcal{F})$, όταν και μόνο όταν ισχύουν*

(i) *η τ.μ. $_t$ είναι $\mathcal{F}_t-$ μετρήσιμη $\forall t \in T$*

(ii) $E(|X_t|) < \infty \; \forall t \in T$

(iii) $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ *(αντίστοιχα* $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$ *) P-σ.β.*

για οποιαδήποτε $s, t \in T$ *με* $s < t$. *Θα λέγεται ότι η* $\{X_t, t \in T\}$ *είναι ένα* $\mathcal{F}_t -$ ***martingale*** *όταν είναι συγχρόνως submartingale και supermartingale.*

4.3 Η στοχαστική ανέλιξη της Κίνησης Brown

Ορισμός 4.7. *Μια τυπική στοχαστική διαδικασία* $W(\cdot)$ *ονομάζεται κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener εάν*

(i) $W(0) = 0$ *P-σ.β.*

(ii) *Όταν* $0 \leq s < t$ *τότε η τ.μ.* $W_t - W_s$ *ακολουθεί κανονική κατανομή* $N(0, t-s)$.

(iii) *Για όλους τους χρόνους* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *οι τυχαίες μεταβλητές* $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t)_n - W(t_{n-1})$ *είναι ανεξάρτητες.*

Πρόταση 4.1. *Έστω* $\{W_t,\ t \leq 0\}$ *μια* $\mathcal{F}_t$ *διαδικασία Wiener.*

(i) *Αν* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *τότε οι "προσαυξήσεις"* $\{W_{t_j} - W_{t_{j-1}}\}$, $j = 1, 2, ..., n$ *είναι ανεξάρτητες.*

(ii) *Η σ.α.* $\{W_t,\ t \leq 0\}$ *είναι* $\mathcal{F}_t$ *martingale.*

(iii) *Η σ.α.* $\{W_t^2 - t,\ t \leq 0\}$ $\mathcal{F}_t$ *martingale.*

iv) *Για οποιαδήποτε* $s, t \leq 0$, $Cov(W_s, W_t) = min\{s, t\}$.

(v) *Αν* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *τότε το τ.δ.* $(W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_n})$ *ακολουθεί Κανονική Κατανομή* $N(0, \Gamma)$ *όπου* $\Gamma = [min\{t_i, t_j\}]_{1 \geq i,j \geq n}$.

Απόδειξη 4.1. **(i)** *Από τον ορισμό της διαδικασίας Wiener η τ.μ.* $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας* $F^W_{t_{n-1}}$ *άρα ανεξάρτητη των τ.μ.* $W_{t_o}, W_{t_1}, ..., W_{t_{n-1}}$ *και συνεπώς και των τ.μ.* $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}$. *Όμοια η τ.μ.* $W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}$ *είναι ανεξάρτητη των* $W_{t_1} - W_t, ..., W_{t_{n-2}} - W_{t_{n-3}}$ *κ.ο.κ.*

(ii) *Έστω* $0 \leq s < t$. *Αφού* $W_t - W_s$ *ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας* $\mathcal{F}_s$, *θα είναι* $E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s) = 0$ *P-σ.β. και άρα* $E(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s$ *P-σ.β. αφού η τ.μ.* W_s *είναι* $\mathcal{F}_s -$*μετρήσιμη.*

(iii) *Για $0 \leq s < t$ έχουμε διαδοχικά και P-σ.β.*

$$E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = E(W_t^2|\mathcal{F}_s) - 2E(W_sW_t|\mathcal{F}_s) + E(W_s^2|\mathcal{F}_s) =$$

$$= E(W_t^2|\mathcal{F}_s) - 2W_sE(W_t|\mathcal{F}_s) + W_s^2 \text{ και λόγω του } (ii)$$

$$E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = E(W_t^2|\mathcal{F}_s) - 2W_s^2W_s^2 = E(W_t^2|\mathcal{F}_s) - W_s^2.$$

Εξάλλου η τ.μ. $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}^s$ και άρα

$$E[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = E(W_t - W_s)^2 = V(W_t - W_s) = t - s.$$

Εύκολα τώρα συμπεραίνουμε ότι $E(W_t^2 - t|\mathbb{F}_s) = W_s^2 - s$

(iv) *Έστω $s, t \geq 0$ με $s < t$. Τότε*

$$Cov(W_s, W_t) = E(W_sW_t) = E((W_t - W_s + W_s)W_s) = E((W_t - W_s)W_s) + E(W_s^2)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $W_t - W_s, W_s$ είναι ανεξάρτητες βρίσκουμε ότι $Cov(W_s, W_t) = E(W_t - W_s)E(W_s) + E(W_s^2)$ και από τον ορισμό της κίνησης Brown καταλήγουμε στο $Cov(W_s, W_t) = s$. Όμοια, αν $s > t$ βρίσκουμε ότι $Cov(W_s, W_t) = t$.

(v) *Έστω $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Με $t_o = 0$, γνωρίζουμε ότι οι τ.μ. $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ $j = 1, 2, ..., n$ ακολουθούν Κανονικές κατανομές $(0, t_j - t_{j-1})$ και ότι είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς το τ.δ. $(W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, B)$ όπου B-διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με $b_{ii} = t_i - t_{i-1}$.*
Όμως

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{bmatrix}$$

και συνεπώς το τ.δ. $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ ακολουθεί Κανονική κατανομή $N(0, \Gamma)$ με $\Gamma = [Cov(B_{t_i}, B_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$. Αρκεί τώρα να επικαλεσθούμε το (iv).

White Noise

Ο λευκός θόρυβος 1-διάστασης ορίζεται ως εξής:

$$\dot{W}(t) = \frac{dW(T)}{dt} = \xi(t)$$

Ο ορισμός που μόλις δόθηκε έχει χαρακτήρα συμβολισμού μόνο. Στην πραγματικότητα οι τροχιές για $t \,\epsilon\, [0,\infty) \ \to W_t(\omega) \,\epsilon\, \mathbb{R}$ είναι μη παραγωγίσιμες οπουδήποτε στο $[0,\infty)$ για $\omega \,\epsilon\, \Omega \setminus N$ με $P(N) = 0$.

Έχουμε τον τύπο,

$$E(\xi(t)\xi(s)) = \delta_o(s-t) \tag{4.2}$$

όπου το δ_o είναι το στοιχειώδες τμήμα στο 0.

Απόδειξη Έστω $h > 0$ και σταθερό $t > 0$. Θέτουμε

$$\phi_h(s) := E\left(\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)\left(\frac{W(s+h)-W(s)}{h}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}[E(W(t+h)W(s+h)) - E(W(t+h)W(s)) - E(W(t)W(s+h)) + E(W(t)W(s))]$$

$$= \frac{1}{h^2}[((t+h)\wedge(s+h)) - ((t+h)\wedge s) - (t\wedge(s+h)) + (t\wedge s)].$$

Τότε $\phi_h(s) \to 0$ καθώς $h \to 0,\ t \neq s$. Όμως $\int \phi_h(s)ds = 1$, και τότε υποθετικά $\phi_h(s) \to \delta_o(s-t)$ καθώς $h \to 0$. Επιπρόσθετα, $\phi_h(s) \to E(\xi(t)\xi(s))$.

$\square$

Σημείωση 4.1. *Γιατί η σχέση $\xi(\cdot) = \dot{W}(\cdot)$ ονομάζεται λευκός θόρυβος. Εάν $X(\cdot)$ είναι μια οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές και $E(X^2(t)) < \infty\ \forall t \leq 0$, τότε ορίζουμε*

$$r(t,s) := E(X(t)X(s))\ (t,s \leq 0),$$

την συνάρτηση συνδιακύμανσης της $X(\cdot)$. Εάν $r(t,s) = c(t-s)$ για κάποια συνάρτηση $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $E(X(t)) = E(X(s))\ \forall t,s \leq 0$, η $X(\cdot)$ ονομάζεται στάσιμη σ.α. με την ευρεία έννοια. Ο λευκός θόρυβος $\xi(\cdot)$ είναι Γκαουσιανή διαδικασία λόγω του ορισμού του, με $c(\cdot) = \delta_o$.

Ορισμός 4.8. *Ορίζουμε:*

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t)dt \ (\lambda \,\epsilon\, \mathbb{R})$$

να είναι η φασματική πυκνότητα της σ.α. $X(\cdot)$*. Για τον λευκό θόρυβο, έχουμε*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{infty} e^{-i\lambda t}\delta_o dt = \frac{1}{2\pi}\ \forall\lambda.$$

Έτσι, η φασματική ακτίνα του $\xi(\cdot)$ *είναι επίπεδη: αυτό σημαίνει πως όλες οι ''συχνότητες'' συνεισφέρουν ισάξια στην συνδιακύμανση της συνάρτησης. Αυτό είναι ανάλογο με τα χρώματα που συνεισφέρουν όλα μαζί για να φτιάξουν το λευκό.*

□

Τυχαίες σειρές Fourier

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι πλήρης και ορθοκανονική βάση του $L^2(0,1)$, όπου οι συναρτήσεις $\psi_n = \psi_n(t)$ είναι ορισμένες στο πεδίο ορισμού $0 \leq t \leq 1$.
Η ορθοκανονικότητα σημαίνει

$$\int_0^1 \psi_n(s)\psi_m ds = \delta_{mn}\ \forall m,n.$$

Γράφουμε

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\psi_n(t)\ \ (0 \leq t \leq 1). \tag{4.3}$$

Οι συντελεστές A_n υπολογίζονται από την σχέση:

$$A_n = \int_0^1 \xi\psi_n(t)dt.$$

Περιμένουμε ότι οι συντελεστές A_n θα είναι ανεξάρτητες και ότι ακολουθούν κανονική κατανομή με $E(A_n) = 0$. Για $m \neq n$ έχουμε

$$0 = E(A_n)E(A_m) = E(A_nA_m) = \int_0^1\int_0^1 E(\xi(t)\xi(s))\psi_n(t)\psi_m(s)dtds$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \delta_o(s-t)\psi_n(t)\psi_m(s)dtds \quad \text{από την σχέση 3.2}$$

$$= \int_0^1 \psi_n(s)\psi_m ds.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι τα ψ_n είναι ορθοκανονικά. Οπότε,

$$E(A_n^2) = \int_0^1 \psi_n^2(s)ds = 1.$$

Συνεπώς εάν τα A_n είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν Κανονική κατανομή, είναι λογικό να ισχύει η σχέση 4.3 . Συνεπώς η κίνηση Brown $W(\cdot)$ πρέπει να δίνεται από την σχέση

$$W(t) := \int_0^t \xi(s)ds = \sum_{n=0}^{t} \psi_n(s)ds. \tag{4.4}$$

Αυτό φαίνεται να είναι λογικό για κάθε ορθοκανονική βάση και θα το αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα.

LEVY-CIESIELSKI ΚΑΤΑΣΚΕΥΉ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Ορισμός 4.9. *Η οικογένεια $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ των συναρτήσεων Haar είναι ορισμένες για $0 \le t \le 1$ και είναι οι ακόλουθες*

$$h_o(t) := 1 \ \text{για} \ 0 \le t \le 1.$$

$$h_1 := \begin{cases} 1 & \text{για} \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1 & \text{για} \ \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Εάν $2^n \le k < 2^{n+1}$, $n = 1, 2, ...,$ έχουμε

$$h_k(t) := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{για} \ \frac{k-2^n}{2^n} \le t \le \frac{k-2^n+1/2}{2^n} \\ -2^{n/2} & \text{για} \ \frac{k-2^n+1/2}{2^n} < t \le \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Λήμμα 4.1. *Οι συναρτήσεις $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $L^2(0,1)$ χώρου.*

Απόδειξη

(i) $\int_0^1 h_k^2 dt = 2^n(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}) = 1$. Σημειώνουμε ότι για όλα τα $l > k$, είτε $h_k h_l = 0$ για όλα τα t είτε h_k είναι σταθερό στο στήριγμα του h_l. Στην δεύτερη περίπτωση

$$\int_0^1 h_l h_k dt = \pm 2^{n/2} \int_0^1 h_l dt = 0.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι $f \epsilon L^2(0,1)$

$$\int_0^1 f h_k dt = 0 \text{ για όλα τα } k = 0, 1, ...$$

Θα αποδείξουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Εάν $n = 0$, έχουμε $\int_0^1 f dt = 0$. Έστω ότι n=1. Τότε $\int_0^{1/2} f dt = \int_{1/2}^1 f dt$: και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα με μηδέν, αφού

$$0 = \int_0^{1/2} f dt + \int_{1/2}^1 f dt = \int_0^1 f dt.$$

Συνεχίζοντας με αυτή την λογική, συμπεραίνουμε $\int_{\frac{k}{2^{n+1}}}^{\frac{k+1}{2^{n+1}}} f dt = 0$ για όλα τα $0 \leq k < 2^{n+1}$. Έτσι $\int_s^t f dt = 0$ για όλα τα $0 \leq s \leq r \leq 1$. Αλλά

$$f(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r f(t) dt = 0$$

□

4.4 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Ito

Κίνητρο

Στην προηγούμενη ενότητα, στην εισαγωγή, είδαμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_o \end{cases}$$

της οποίας την λύση θα εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα. Η λύση είναι της μορφής

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_o + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s)s\mathbf{W} \tag{4.5}$$

για όλους τους χρόνους $t \geq 0$.
Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito

$$\int_0^T \mathbf{G}d\mathbf{W}$$

για κάποια ευρεία κλάση σ.α. **G** ..

Ορισμός 4.10. *Για αριθμούς $a < b$ στο $[0, \infty)$ λέγεται ότι η στοχαστική ανέλιξη $f : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $L(a, b)$όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:*

(i) *Η f είναι $B_{[a,b]} \otimes \mathbb{F}-$μετρήσιμη.*

(ii) *Για έκαστο $t \in [a, b]$ η τ.μ. $f(t, \cdot)$ είναι $\mathbb{F}_t-$μετρήσιμη, δηλαδή η σ.α. f είναι $\mathbb{F}_t-$προσαρμοσμένη.*

(iii) $\int_a^b E[f^2(t, \cdot)]dt < \infty$.

Ιδιαίτερα αν για μια $f \epsilon L[a, b]$ υπάρχει διαμέριση $a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b$ και $\mathbb{F}_{t_i}-$μετρήσιμες τ.μ. f_i, $i = 0, 1, ..., n-1$ ώστε να ισχύει:

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) I_{[t_i, t_{i+1})}(t) + f_{n-1}(\omega) I_{\{b\}}(t) \tag{4.6}$$

τότε η f λέγεται στοιχειώδης σ.α. και θα γράφουμε $f \epsilon L^o(a, b)$.

Πρόταση 4.2. *Έστω $f \epsilon L(a, b)$. Τότε υπάρχει ακολουθία στοιχειωδών σ.α. $\{f_n,\ n \epsilon \mathbb{N}\} \subset L^o(a, b)$ εις τρόπον ώστε να ισχύει*

$$\lim_n E[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt] = 0.$$

Ορισμός 4.11. *Έστω $f \epsilon L(a, b)$. Το **ολοκλήρωμα Ito** της f στο [α,b] ορίζεται από την σχέση*

$$\int_a^b f(t)dW_t = \lim_n \int_a^b f_n(t)dW_t \text{ με την } L^2-\text{έννοια}$$

όπου $\{f_n \ : \ n \,\epsilon \mathbb{N}\}$ *ακολουθία σ.α. από την* $L^0[a,b]$ *τέτοιο ώστε*

$$\lim_n E[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt] = 0$$

και με $\int_a^b f_n(t)dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$

Πρόταση 4.3. *Έστω ότι* $f, g\epsilon L(a,b)$, $\{f_n, \ n \ \epsilon \ \mathbb{N}\}$, $c \ \epsilon \ (a,b)$ *και* $\lambda, \mu \ \epsilon \mathbb{R}$. *Αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:*

(i) $E[\int_a^b f(t)dW_t] = 0$

(ii) $E|\int_a^b f(t)dW_t|^2 = E\int_a^b f^2(t)dt$

(iii) $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dW_t = \lambda \int_a^b f(t)dW_t + \mu \int_a^b g(t)dW_t$

(iv) $\int_a^b f(t)dW_t = \int_a^c f(t)dW_t + \int_c^b f(t)dW_t$

(v) *Η τ.μ.* $I = \int_a^b f(t)dW_t$ *είναι* $\mathbb{F}_b-$*μετρήσιμη.*

(vi) *Αν* $\lim\limits_n E[\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt] = 0$ *τότε* $\lim\limits_n \int_a^b f_n(t)dW_t = \int_a^b f(t)dW_t$ *με την* L^2 *-έννοια.*

Πρόταση 4.4. *Έστω* $T > 0$ *και σ.α.* $f \ \epsilon \ L(0,T)$. *Τότε υπάρχει σ.α.* $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ *με συνεχείς τροχιές εις τρόπον ώστε για έκαστο* $t\epsilon[0,T]$ *να ισχύει:*

$$X_t = \int_0^t f(s)dW_t \ P - \sigma.\beta.$$

Πρόταση 4.5. *Έστω* $f \ \epsilon \ L$ *και* $X_t = \int_0^t f(r)dW_r \geq 0$. *Έστω ακόμη* $0 \leq s < t$ *και* τ *ένας* $\mathcal{F}_t$ *χρόνος διακοπής. Τότε*

a. $E[\int_s^t f(r)dW_r \mid \mathcal{F}_s] = 0.$

b. $E[(\int_s^t f(r)dW_r)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[\int_s^t f^2(r)dr \mid \mathcal{F}_t]$

4.5 Στοχαστικές Ανελίξεις Ito

Ορισμός 4.12. ***Στοχαστική ανέλιξη Ito*** *στο* $[0,\infty)$ *με τιμές στο* $\mathbb{R}^m$, *ονομάζεται μια συνεχής σ.α.* $\{X_t, t \geq 0\}$ *για την οποία ισχύει:*

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW_s \ \ P\text{-}\sigma.\beta.$$

όπου $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ *τυχαίο διάνυσμα* $\mathcal{F}_0-$ *μετρήσιμο,* $\beta \;\epsilon P^{m\times n}$ *και η σ.α.* $a(s) = (a_1(s), ..., a_m(s)),\ s \geq 0$ *είναι* $\mathbb{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{F}$*-μετρήσιμη,* $\mathcal{F}_s$*-προσαρμοσμένη και ικανοποιεί την απαίτηση*

$$P(\sum_{j=1}^{m} \int_0^r |a_j(s)|ds < \infty) = 1\ \forall r \geq 0.$$

Πρόταση 4.6. ***Formula του Ito***, $m = n = 1$
Έστω $X_t = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW_s$ *ανέλιξη Ito και* $f \;\epsilon\; C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}$.
Τότε για όλα τα $t > 0$ *ισχύει:*

$$f(t, X_t) - f(0, \xi) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \alpha(s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}\beta^2(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\right] ds + \int_0^t \beta(s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dW_s$$

Πρόταση 4.7. ***Formula του Ito***, $m, n \;\epsilon\; \mathbb{N}$
Έστω $f = f(t, x) = f(t, x_1, ..., x_m)$ *με* $f \;\epsilon\; C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^m)$ *και η ανέλιξη Ito* $X_t = X_t^1, ..., X_t^m$ *με* $X_t = \xi + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW_x$.
Τότε ισχύει:

$$f(t, X_t) = f(t, X_t^1, ..., X_t^m) = f(0, \xi) +$$

$$\int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m} \beta_{ij}(s)\beta_{kj}(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s, X_s)\right] ds +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}(s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s)\right] dW_s^j$$

Πρόταση 4.8. *Υποθέτουμε ότι* $\{W_t, t \geq 0\}$ *είναι η μονοδιάστατη κίνηση Brown.*
Έστω οι σ.α. Ito

$$X_t^1 = \xi_1 + \int_0^t \alpha_1(s)ds + \int_0^t \beta_1(s)dW_s,\ t \leq 0$$

$$X_t^2 = \xi_2 + \int_0^t \alpha_2(s)ds + \int_0^t \beta_2(s)dW_s,\ t \leq 0.$$

Τότε

$$\begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) \end{bmatrix} ds + \int_0^t \begin{bmatrix} \beta_1(s) \\ \beta_2(s) \end{bmatrix} dW_s, \ \ t \geq 0$$

και εφαρμόζοντας την formula του Ito (m=2,n=1) για την συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ *έχουμε*

$$X_t^1 X_t^2 = \xi_1 \xi_2 + \int_0^t \left[\alpha_1(s) X_s^2 + \alpha_2(s) X_s^1 + \beta_1(s)\beta_2(s)\right] ds +$$

$$\int_0^t \left[\beta_1(s) X_s^2 + \beta_2(s) X_s^1\right] dW_s.$$

Σημείωση 4.2. *Έστω τώρα η σ.α.* $X = \{X_t = x + W_t, \ t \geq 0\}$ *όπου* $x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ *και* $\{W_t, t \geq 0\}$ *μια n-διάστατη* $\mathcal{F}_t-$*κίνηση Brown. Όπως είναι εύλογο η σ.α. ονομάζεται* ***n-διάστατη κίνηση Brown με έναρξη το*** x *και προφανώς είναι ανέλιξη Ito αφού γράφεται*

$$X_t = x + \int_0^t \boldsymbol{O} dt + \int_0^t I dW_t, \ t \geq 0$$

όπου $= [\delta_{ij}] \begin{pmatrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$ *και* $\boldsymbol{O} = (0, ..., 0)$

Πρόταση 4.9. *Έστω* $X = \{X_t = x + W_t, \ t \geq 0\}$ *n-διάσταση* $\mathcal{F}_t-$*Κίνηση Brown με έναρξη το* x *και* $f \,\epsilon\, C^2(\mathbb{R}^n)$. *Τότε ισχύει*

$$f(X_t) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^t [\Delta f(X_s)] ds + \int_0^t [\nabla f(X_s)] dW_s.$$

4.6 Στοχαστική διαφορική εξίσωση

Το αντικείμενο της ενότητας αυτής είναι η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) της μορφής

$$X_t = \xi + \int_0^t \alpha(s, X_s) ds + \int_0^t \beta(s, X_s) dW_s$$

όπου α, β συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0, T] \times \mathbb{R}^m$.

Η έννοια της λύσης μια ΣΔΕ. Ύπαρξη και μοναδικότητα

Με τον όρο **Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση** (ΣΔΕ) εννοούμε την αναζήτηση μιας σ.α. $\{X_t, t \epsilon [0,T]\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}^m$ η οποία μεταξύ άλλων ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,\ 0 \leq t \leq T$$

όπου $b = (b_1, ..., b_m)$ και $\sigma = [\sigma_{ij}] \begin{pmatrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$ έχουν $b_j : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ και $\sigma_{ij} : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις και $\{W_t, t \geq 0\}$ είναι μια n-διάστατη κίνηση Brown. Το ξ οφείλει να είναι τ.μ. της μορφής $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$. Η ΣΔΕ γράφεται αλλιώς

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,\ X_o = \xi.$$

Ορισμός 4.13. *Έστω συναρτήσεις β, σ όπως πριν. Δοθείσης μιας n-διάστατης Κίνησης Brown $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, B_t)$ και μιας τ.μ. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ που είναι $\mathcal{F}_o-$ μετρήσιμη, ονομάζεται **ισχυρή λύση** της ΣΔΕ με **αρχική συνθήκη** ξ μια σ.α. $= \{X_t, t \epsilon [0,T]\}$ ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις*

(i) *Η είναι συνεχής.*

(ii) *Η είναι $\mathcal{F}_t-$προσαρμοσμένη.*

(iii) $P(X_o = \xi) = 1$

(iv) $P(\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s))ds < \infty) = 1\ \forall\ t \epsilon [0,T]$ *για όλα τα* $1, .., m$ *και* $j = 1, ..., n$.

(v) *Ισχύει P-σ.β. η ΣΔΕ για κάθε* $t \epsilon [0,T]$.

Πρόταση 4.10. *Έστω συναρτήσεις β, σ όπως στην ΣΔΕ που ικανοποιούν τις απαιτήσεις*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L(1 + |x|^2)$$

για όλα τα $t \geq 0,\ x \epsilon \mathcal{R}^m,\ y \epsilon \mathcal{R}^m$ όπου $, L > 0$. Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, B_t)$ είναι n-διάστατη Κίνηση Brown και ξ μια $\mathbb{F}_o$-μετρήσιμη τ.μ. με $E|\xi|^2 < \infty$ τότε υπάρχει ισχυρή λύση της ΣΔΕ. Η λύση αυτή είναι μοναδική και για τυχόν $T > 0$ ισχύει

$$E(|X_t|^2) \leq N(1 + E|\xi|^2)e^{Nt},\ 0 \leq t \leq T$$

όπου $N > 0$ εξαρτώμενη από τα L, T.

Κεφάλαιο 5

Ημιδιακριτή προσέγγιση Galerkin

5.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Ito και χώροι Hilbert

Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθεί η κίνηση Brown σε χώρο Hilbert.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα μια σ.α. ορισμένης σε χώρο Hilbert

Ορισμός 5.1. *Μια τυπική στοχαστική διαδικασία $W(\cdot)$ με τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε χώρο Hilbert ονομάζεται κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener εάν*

(i) $W(0) = 0$ *P-σ.β.*

(ii) *για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto W(t, \omega)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση,*

(iii) *Για όλους τους χρόνους $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t)_n - W(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες.*

(iv) $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathcal{L}(W(t - s)),\ 0 \leq s \leq t$

Ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι η κατανομή της τ.μ. X που παίρνει τιμές στον χώρο Hilbert, δηλαδή το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται από την σχέση

$$\mathcal{L}(X)(A) = \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \in A\},\ \forall\ A \in \mathcal{B}(H),$$

όπου το $\mathcal{B}(H)$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του H (Hilbert), δηλαδή είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα κλειστά (ή ανοιχτά) σύνολα

του H.
Είναι φανερό ότι για την στοχαστική ανέλιξη W_t που είναι κίνηση Brown, το μέτρο κατανομής $\mathcal{L}(W(t))$ είναι η Κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και ο τελεστής συδιασποράς είναι ο tQ, δηλαδή

$$\mathcal{L}(W(t)) = \mathcal{N}(0, tQ)$$

όπου ο Q είναι ένας γραμμικός, αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος και φραγμένος τελεστής με πεπερασμένο ίχνος,$Tr(Q) < \infty$. Τότε μιλάμε για την σ.α. $W(t)$ που είναι η κίνηση Brown και με πεδίο τιμών τον χώρο Hilbert.
Υπάρχει κλάση τελεστών που ολοκληρώνονται στοχαστικά και συνδέονται με την κίνηση Brown.

Συμβολισμοί 5.1. **(i)** *Ο $Q^{1/2}(H)$ είναι η εικόνα του τελεστή $Q^{1/2}$ οριζόμενο στον χώρο H.*

(ii) *Ο $L(H)$ είναι ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών ορισμένοι στον H.*

(iii) *Ο $L_2^0(Q^{1/2}(H), H)$ είναι ο χώρος με τους τελεστές Hilbert-Schmidt οριζόμενοι από τον $Q^{1/2}(H)$ στον H, δηλαδή*

$$L_2^0(Q^{1/2}(H), H) = \left\{ \psi \,\epsilon\, L(Q^{1/2}(H), H) \ : \ \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi g_j\|^2 < \infty \right\}$$

όπου η ακολουθία $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $Q^{1/2}(H)$. Η νόρμα του L_2^0 είναι η

$$\|\psi\|_{L_2^0} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\psi g_j\|^2 \right)^{1/2},$$

όπου $L_2^0 = L_2^0(Q^{1/2}(H), H)$.

(iv) *Ο χώρος $L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; L_2^0)$ είναι ο διαχωρίσιμος χώρος Hilbert όλων των μετρήσιμων σ.α. x, με πεδίο τιμών το L_2^0 με νόρμα*

$$\|x\|_{L^2_{\mathcal{F}}([0,T];L_2^0)} = \left(int_0^T \boldsymbol{E} \|x(t)\|^2_{L_2^0} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Για κάθε $\psi(\cdot) \,\epsilon\, L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; L_2^0)$ ορίζεται το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^T \psi(t) dW(t) \tag{5.1}$$

με βάση την θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα και η κυλινδρική διαδικασία Wiener

Έστω ο τελεστής Q είναι γραμμικός, αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος, με φραγμένη ακολουθία θετικών ιδιοτιμών $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$ που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του H. Ο Q δεν είναι υποχρεωτικά συμπαγής, για παράδειγμα $Q = I$.

Η κυλινδρική στοχαστική διαδικασία Wiener ορίζεται από την σειρά:

$$W(t) = \int_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{1/2} e_l \beta_l(t),\ t \leq 0, \tag{5.2}$$

όπου $\{\beta_l(t)\}$ είναι μια οικογένεια ανεξάρτητων σ.α. Κίνησης Brown. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για $Q = I$, η W_t ορίζεται απο την σχέση

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} e_l \beta_l(t),\ t \geq 0. \tag{5.3}$$

Παρατηρείται πως η σειρά της σχέσης (5.2) αποκλίνει στον χώρο $L_2(\Omega; H)$ εάν το Q έχει $Tr(Q) = \infty$. Δηλαδή, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{1/2} e_l \beta_l(t)\right\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \mathbf{E} \beta_l(t)^2 = t \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l = tTr(Q) = \infty.$$

Ωστόσο, έστω ότι ο H_L είναι τυχαίος χώρος Hilbert τέτοιος ώστε η ενσωμάτωση του $Q^{1/2}(H)$ μέσα στον H_L είναι Hilbert-Schmidt. Τότε ισχύει το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 5.1. *Η κυλινδρική διαδικασία Wiener (5.2) ορίζει μία κίνηση Brown ορισμένη στον H_L χώρο με τελεστή συνδιακύμανσης Q_L.*
Για τυχαίο $h \in H$, η διαδικασία

$$\langle h, W(t)\rangle := \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l^{1/2} (h, e_l) \beta_l(t) \tag{5.4}$$

είναι μια κίνηση Brown, και

$$\boldsymbol{E}(\langle h_1, W(t)\rangle\langle h_2, W(s)\rangle) = min(t,s)(Qh_1, h_2),\ \text{για}\ \ h_1, h_2 \in H. \tag{5.5}$$

Για κάθε $\psi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T]; L^0_2)$, ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σύμφωνα με την κυλινδρική κίνηση Brown και είναι το

$$\int_0^[T]\psi(t)dW(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T \psi(t) g_l d\langle g_l, W(t)\rangle, \tag{5.6}$$

όπου η ακολουθία $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ είναι μια τυχαία ορθοκανονική βάση του $Q^{1/2}(H)$ και το στοχαστικό ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι το γνωστό ολοκλήρωμα Ito.

Σημείωση 5.1. **(i)** *Εάν $Q = I$, τότε ισχύει $g_l = e_l$ και τότε $\langle g_l, W(t)\rangle = \beta_l(t)$ από την (5.4), τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι*

$$\int_0^T \psi(t)dW(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T \psi(t) e_l d\beta_l(t).$$

(ii) *Εάν $W(t)$ είναι μια κίνηση Brown με $Tr(Q) < \infty$, τότε ο χώρος $Q^{1/2}$ είναι Hilbert-Schmidt και $H_L = H$. Σε αυτή την περίπτωση το στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίζεται από την σχέση (5.6) το οποίο βασίζεται στην θεωρία του στοχαστικού ολοκληρώματος Ito.*

(iii) *Γενικά, σε αυτό το paper γίνεται η υπόθεση ότι $\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L^0_2} < \infty$ για κάποιο $\beta \in [0,1]$,*

$$\|A^{(\beta-1)/2}\|^2_{L^0_2} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma \| \|A^{(\beta-1)/2} e_l\|^2 < \infty,$$

το οποίο σημαίνει ότι $H_L = \dot{H}^{\beta-1}$. Έτσι η σ.α. $W(t)$ είναι ορισμένη στον $\dot{H}^{-1}$, και αυτό συνεπάγεται την χρήση ενός L_2-προβολέα-τελεστή στην μέθοδο τον πεπερασμένων στοιχείων που θα δούμε στη συνέχεια.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της ισομετρίας για μια κυλινδρική στοχαστική ανέλιξη $W(t)$ ισχύει

$$\boldsymbol{E}\left\| \int_0^T \psi(t)W(t) \right\|^2 = \int_0^T \boldsymbol{E}\|\psi(t)\|^2_{L^0_2} dt. \tag{5.7}$$

5.1.1 Ημιδιακριτή προσέγγιση Galerkin για μία γραμμική στοχαστική παραβολική μερική διαφορική εξίσωση .

Σε αυτό το paper θα γίνει προσέγγιση ενός γραμμικού προβλήματος στοχαστικού και παραβολικού με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόβλημα είναι

$$du + Audt = dW, \ \forall 0 < t \leq T, \text{ με } u(0) = u_o, \tag{5.8}$$

στον χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και νόρμα $\|\cdot\|$, και η $u(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία με τιμές στον H, ο A είναι ένας γραμμικός , αυτοσυζυγής, θετικά ορισμένος, όχι απαραίτητα φραγμένος τελεστής και αντιστρέψιμος. Το $W(t)$ είναι η κίνηση Brown ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $u_o \,\epsilon\, H$.

Για λόγους απλότητας παίρνουμε την περίπτωση για A=-$\mathbf{\Delta}$ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Το $\mathbf{\Delta}$ είναι ο Λαπλασιανός τελεστής και ο H είναι ο $L^2(D)$, με D να είναι φραγμένο κυρτό σύνολο του $\mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, με λείο σύνορο $\partial\mathcal{D}$.

Έστω $E(t) = e^{-tA}, \ t \geq 0$. Τότε η σχέση (5.8) έχει μοναδική λύση με την έννοια της υποομάδας και είναι η

$$u(t) = E(t)u_o + \int_0^t E(t-s)dW(s) \ \forall \ 0 < t \leq T. \tag{5.9}$$

Η αριθμητική προσέγγιση του προβλήματος (5.8) έχει δυσκολίες λόγω του λευκού θορύβου dW. Θεωρούμε το πρόβλημα μιας διάστασης

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x) & 0 < t \leq T \\ u(0,x) = u_o(x) & 0 < x < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

όπου η δεύτερης τάξης μικτή παράγωγος $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}$ είναι η Κίνηση Brown. Ο ολοκληρωτικός τύπος της σχέσης (5.10) είναι ο

$$u(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)u_o(y)dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)dW(s,y),$$

όπου το $G_t(x,y) = 2\ \sum_{n=1}^{\infty} sin(n\pi x)sin(n\pi y)e^{-(n\pi)^2 t}$ είναι η θεμελειώδης λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t(t,x) - v_{xx}(t,x) = 0 \\ v(0,x) = \phi(x) \\ v(t,0) = v(t,1) = 0 \end{cases}$$

και

$$v(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)\phi(y)dy.$$

Έστω η διαμέριση $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_N = T$ του $[0,T]$, $t_n = nk, n = 0,1,2,...,N$, όπου k είναι το βήμα για τον χρόνο t. Έστω η διαμέριση $0 = x_o < x_1 < \cdots < x_j = 1$ του $[0,1]$, $x_j = jh$, $j = 0,1,2,...,J$ όπου το h είναι το πλάτος διαμέρισης του χώρου. Οι Allen, Novosel και Zhang υπολόγισαν τον χώρο-χρόνο λευκού θορύβου με την βοήθεια τμηματικά σταθερών συναρτήσεων για κάθε ορθογώνιο κομμάτι $[t_{n-1}, t_n] \times [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq n \leq N$, $1 \leq j \leq J$ του $[0,T] \times [0,1]$,

$$dW(t,x) \approx d\widehat{W}(t,x) = \frac{\partial^2 \widehat{W}(t,x)}{\partial t \partial x} dtdx = \frac{1}{kh}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J} \eta_{nj}\sqrt{kh}x_n(t)x_j dtdx,$$

όπου

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases} \quad x_j(x) = \begin{cases} 1, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ 0, & \text{αλλού}, \end{cases}$$

και

$$\eta_{nj} = \frac{1}{kh}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} dW(t,x) = \mathcal{N}(0,1)$$

όπου η $\mathcal{N}(0,1)$ είναι η Κανονική Κατανομή και η μεταβλητή η_{nj} είναι ανεξάρτητη και ακολουθεί Κανονική Κατανομή.

Είναι φανερό ότι η $\frac{\partial^2 \widehat{W}(t,x)}{\partial t \partial x} \epsilon L^2(0,1)$ για κάποιο σταθερό $t \epsilon [0,T]$, $\omega \epsilon \Omega$. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόζεται στην (5.10) αφού αντικατασταθεί το κλάσμα $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}$με αυτό $\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial t \partial x}$.

Ο Shardlow υπολόγισε τον θόρυβο με την μέθοδο των ιδιοτιμών. Έστω P_j ο τελεστής που ενεργεί στην f και έχουμε

$$P_J f = \sum_{j=1}^{J}(f, e_j)e_j,$$

όπου $e_j = \sqrt{2} sin(j\pi x)$, $j = 1,2,...$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του

$A = -\partial^2/\partial x^2$ σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet.

Έπειτα υπολογίζει την κίνηση Brown στο διάστημα (t_{n-1}, t_n) από την σχέση

$$dW_k(n) := \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_J dW(s),$$

η οποία είναι $L^2(0,1)$ συνάρτηση. Αυτή η αριθμητική μέθοδος υπολογίζει την συνάρτηση στα σημεία $x_j = jh,\ j = 1, 2, ..., J$ του πλέγματος.
Έστω S_h μια οικογένεια από γραμμικούς πεπερασμένους χώρους, δηλαδή η S_h αποτελείται από τα πολυώνυμα με βαθμό μικρότερο ή ίσο του ένα, τα οποία αποτελούν την τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του D. Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε επίσης ότι

$$S_h \subset H_0^1 = H_0^1(D) = \{v \,\epsilon\, L^2(D), \nabla v \,\epsilon\, L^2(D),\ v|_{\partial D} = 0\}.$$

Έστω $\dot{H}^s = \dot{H}^s(D) = D(A^{s/2})$ για κάποιο $s \,\epsilon\, \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε την νόρμα του χώρου $\dot{H}^s$ με $|\cdot| = \|A^{s/2}\cdot\|$. Έχουμε ότι ισχύει $W(t) \,\epsilon\, \dot{H}^{-1}$. Για την εισαγωγή της μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (5.8), γίνεται χρήση του τελεστή L_2-προβολέα με $P_h : \dot{H}^{-1} \to S_h$, βλ. Chrysafinos and Hou, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο

$$(P_h v, x) = \langle v, x\rangle,\ \forall x \,\epsilon S_h \subset \dot{H}^1,\ \forall v \,\epsilon\, \dot{H}^{-1}, \tag{5.11}$$

όπου το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ορίζει την σύνδεση των χώρων $\dot{H}^{-1}$ και $\dot{H}^1$.

Σημείωση 5.2. *Εύκολα παρατηρείται ότι ο τελεστής P_h είναι καλά ορισμένος όταν εισάγεται η βάση $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h}$ και από το σύστημα εξισώσεων $(\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \phi_j, \phi_i) = \langle v, \phi_i\rangle$, λύνεται το $P_h v = \sum_{j=1}^{N_j} \alpha_j \phi_j$. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν $v \,\epsilon\, L^2(D)$, τότε ο τελεστής $P_h v$ είναι ο κύριος τελεστής L^2 προβολέας, βλ. Thomee.*

Το ζητούμενο για τον πρόβλημα (5.8) είναι να βρεθεί η στοχαστική διαδικασία $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \,\epsilon\, S_h$, η οποία επαληθεύει την εξίσωση

$$du_h + A_h u_h dt = P_h dW,\ \forall\ 0 < t \leq T, \text{με } u_h(0) = P_h u_{o,} \tag{5.12}$$

όπου το A_h είναι το διακριτό ανάλογο του A=-$\mathbf{\Delta}$ και οι συνοριακές συνθήκες να ορίζονται από την σχέση

$$(A_h \psi, x) = (\nabla\psi, \nabla x),\ \forall \psi, x \,\epsilon\, S_h.$$

Με $E_h(t) = e^{-tA_h}$, $t \geq 0$, η (5.14) έχει μοναδική λύση υπό την έννοια των υποομάδων την

$$u_h(t) = E_h(t)P_h u_o + \int_0^t E_h(t-s)P_h dW(s).$$

Έστω το $\mathbf{E}$ είναι η μέση τιμή. Για κάθε χώρο Hilbert H_1 , ορίζουμε τον χώρο $L^2(\Omega, H^1)$ ως εξής

$$L^2(\Omega, H^1) = \left\{ v : \mathbf{E}\|v\|_{H_1}^2 = \int_\Omega \|v(\omega)\|_{H^1}^2 \, d\mathbf{P}(\omega) < \infty \right\}$$

με την νόρμα $\|v\|_{L^2(\Omega,H^1)} = (\mathbf{E}\|v\|_{H^1}^2)^{1/2}$.

Έστω ο χώρος αυτός $L_2^0 = HS(Q^{1/2}(H), H)$ συμβολίζει τον χώρο Hilbert-Schmidt των τελεστών που έχουν πεδίο ορισμού τον χώρο $Q^{1/2}(H)$ και πεδίο τιμών H, όπου Q είναι ο τελεστής συσχέτισης της κίνησης Brown $W(t)$.

Τα δύο κύρια αποτελέσματα αυτού του paper είναι τα δύο παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 5.1. *Έστω u_h και u είναι οι δύο λύσεις των δύο προβλημάτων (5.10) και (5.8) αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0} < \infty$ για κάποιο $\beta \, \epsilon \, [0,1]$. Τότε έχουμε, για κάθε $t \geq 0$ και $u_o \, \epsilon \, L^2(\Omega; \dot{H}^\beta)$*

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;H)} \leq Ch^\beta(\|u_o\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + \|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}). \tag{5.13}$$

Συγκεκριμένα, εάν η σ.α. $W(t)$ είναι μια κίνηση Brown με $Tr(Q) < \infty$, τότε έχουμε για $t \geq 0$, και $u_o \, \epsilon \, L_2(\Omega; \dot{H}^1)$,

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;H)} \leq Ch(\|u_o\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + Tr(Q)^{1/2}). \tag{5.14}$$

Θεώρημα 5.2. *'Εστω u_h και u οι δύο λύσεις των προβλημάτων (5.10) και (5.8) αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0} < \infty$ για κάποιο $\beta \, \epsilon \, [0,1]$. Τότε έχουμε, για κάθε $0 \leq t \leq T$ και $u_o \, \epsilon \, L^2(\Omega; \dot{H}^\beta)$, με $l_h = log(T/h^2)$,*

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^{-1})} \leq Ch^{\beta+1}(\|u_o\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^\beta)} + l_h\|A^{(\beta-1)/2}\|_{L_2^0}). \tag{5.15}$$

Συγκεκριμένα, εάν η σ.α. $W(t)$ είναι μια κίνηση Brown με $Tr(Q) < \infty$, τότε έχουμε για $0 \leq t \leq T$ και $u_o \, \epsilon \, L_2(\Omega; \dot{H}^1)$,

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega;H^{-1})} \leq Ch^2(\|u_o\|_{L_2(\Omega;\dot{H}^1)} + l_h Tr(Q)^{1/2}). \tag{5.16}$$

με πραγματι

Κεφάλαιο 6

Βιβλιογραφία

1. Σ.Αργυρός. *Σημειώσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση (Δεύτερη Έκδοση)*. Αθήνα, 2004

2. Σ.Καρανάσιος. *Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές*. Αθήνα,2009.

3. ΙΩ.Σπηλιώτης. *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*. Αθήνα, 2004.

4. Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2010.

5. Lawrence C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Version 1.2. Department of Mathematics UC Berkeley

6. Vidar Thomee. *Galerkin Finite Element Method for Parabolic Problems (Springer Series in Computational Mathematics)*. Springer, 2010.

7. Yubin Yan. *Semidiscrete Galerkin Approximation for a Linear Stochastic Parabolic Partial Differential Equation Driven by an Additive Noise*. 2004 Kluwer Academic Publisher. Printed in the Netherlands.