



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή

**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»**

**Μετάπτωση του περιηλίου**

**του Ερμή**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του Χαλλουμή Κωνσταντίνου**

Επιβλέπων: Κουτσούμπας Γεώργιος

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2015





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή

**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»**

**Μετάπτωση του περιηλίου**

**του Ερμή**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του Χαλλουμή Κωνσταντίνου**

Επιβλέπων: Κουτσούμπας Γεώργιος

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή την.....

**Γ. Κουτσούμπας**

**Ε. Παπαντωνόπουλος**

**Κ. Παρασκευαΐδης**

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....

.....

.....

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2015



**Ευχαριστίες**

**Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο κατά το ακαδημαϊκό έτος 2014. Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτα τον καθηγητή μου Κουτσούμπα Γεώργιο για τη σημαντική καθοδήγηση του σε αυτήν την εργασία. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Παρασκευαΐδη Κωστή ως συντονιστή για την αρτιότητα του προγράμματος, όπως και όλα τα μέλη ΔΕΠ της ομάδας θεωρητικής φυσικής του τομέα Φυσικής.**

### **Abstract**

**In this thesis showing Newtonian theory, Special, General Relativity, geodesics and Schwarzschild geometry using the necessary mathematical tools. Also, I tried to included proofs of the equations that used for the theorems, according to the needs of establishing for Mercury's trajectory.**

### **Περίληψη**

**Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν, η Νευτώνεια θεωρία, η Ειδική, η Γενική θεωρία της σχετικότητας, γεωδαισία και γεωμετρία Schwarzschild παρουσιάζοντας ταυτόχρονα και τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία, με σκοπό τη μελέτη της τροχιακής πορείας του Ερμή.**



**Περιεχόμενα**

<b>Ενότητα 1</b>	<b>σελίδα 11</b>
1.1 Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και Νευτώνεια φυσική	σελίδα 12
1.2 Χωροχρόνος και χωροχρονικά διαγράμματα	σελίδα 14
1.3 Κώνοι φωτός	σελίδα 20
1.4 Διαστολή του χρόνου και παράδοξο των διδύμων	σελίδα 23
1.5 Επιβεβαίωση από την ενίσχυση των μετασχηματισμών Lorentz	σελίδα 27
1.6 Η σχετικότητα του ταυτοχρόνου	σελίδα 31
1.7 Συστολή του Lorentz	σελίδα 33
1.8 Η ταχύτητα του φωτός σε όλα τα συστήματα	σελίδα 34
<b>Ενότητα 2</b>	<b>σελίδα 37</b>
2.1 Βαρυτική και αδρανειακή μάζα - Καμπύλος χωροχρόνος	σελίδα 38
2.2 Η αρχή της ισοδυναμίας	σελίδα 41
2.3 Ο καμπύλος χωροχρόνος	σελίδα 49
2.4 Νευτώνεια βαρύτητα σε χωροχρονικούς όρους	σελίδα 53
<b>Ενότητα 3</b>	<b>σελίδα 59</b>
3.1 Συντεταγμένες στο χωροχρόνο και διαστολή του χρόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες	σελίδα 60
3.2 Μετρική και η σύμβαση άθροισης	σελίδα 63
3.3 Τοπικά αδρανειακά συστήματα	σελίδα 65
3.4 Κώνοι φωτός και κοσμικές γραμμές	σελίδα 70
3.5 Απόσταση, εμβαδό, όγκος, τεσσάρων τιμών όγκος, και διαγωνοποιημένη μετρική	σελίδα 77
3.6 Ενσωματωμένα διαγράμματα και χωροχρονικές σκουληκότρυπες	σελίδα 80
<b>Ενότητα 4</b>	<b>σελίδα 86</b>
4.1 Γεωδαισία και γεωδαιτικές εξισώσεις	σελίδα 87
4.2 Γενικές γεωδαιτικές εξισώσεις	σελίδα 103
4.3 Νόμοι διατήρησης και συμμετρίες στη γεωδαισία	σελίδα 107



<b>4.4 Μηδενική γεωδαισία</b>	<b>σελίδα 116</b>
<b>4.5 Τοπικά αδρανειακά και ελεύθερης πτώσης συστήματα</b>	<b>σελίδα 117</b>
<b>Ενότητα 5</b>	<b>σελίδα 122</b>
<b>5.1 Γεωμετρία Schwarzschild και Νευτώνεια βαρύτητα</b>	<b>σελίδα 123</b>
<b>5.2 Μετάπτωση του περιηλίου και τροχιές σωματιδίων, με έμφαση στην περίπτωση του Ερμή</b>	<b>σελίδα 130</b>
<b>5.3 Ακτινικές βουτιές στις τροχιές των πλανητικών σωμάτων</b>	<b>σελίδα 147</b>
<b>5.4 Ταχύτητα διαφυγής, σταθερές τροχιές και τροχιακή μετάπτωση του Ερμή</b>	<b>σελίδα 153</b>
<b>5.5 Γενική θεωρία της σχετικότητας στη θεωρία περιηλίου και τροχιακή πορεία του φωτός στο ηλιακό σύστημα</b>	<b>σελίδα 172</b>
<b>5.6 Καμπυλώσεις του χωροχρόνου και η εξίσωση του Einstein</b>	<b>σελίδα 187</b>
<b>Παράρτημα Α</b>	<b>σελίδα 212</b>
<b>Α.1 Βαρυτική κατάρρευση και μαύρες τρύπες, τι ισχύει στην περίπτωση του Ήλιου και κατ' επέκταση του Ερμή</b>	<b>σελίδα 213</b>
<b>Παράρτημα Β</b>	<b>σελίδα 218</b>
<b>Β.1 Πίνακας τιμών μεταπτώσεων</b>	<b>σελίδα 219</b>
<b>Παράρτημα Γ</b>	<b>σελίδα 220</b>
<b>Γ.1 Πίνακας τιμών μεταπτώσεων</b>	<b>σελίδα 221</b>
<b>Παράρτημα Δ</b>	<b>σελίδα 225</b>
<b>Δ.1 Υπολογισμοί μεταπτώσεων</b>	<b>σελίδα 226</b>

**Αναφορές**

**σελίδα 228**

Μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή

## Ενότητα 1

## Ενότητα 1

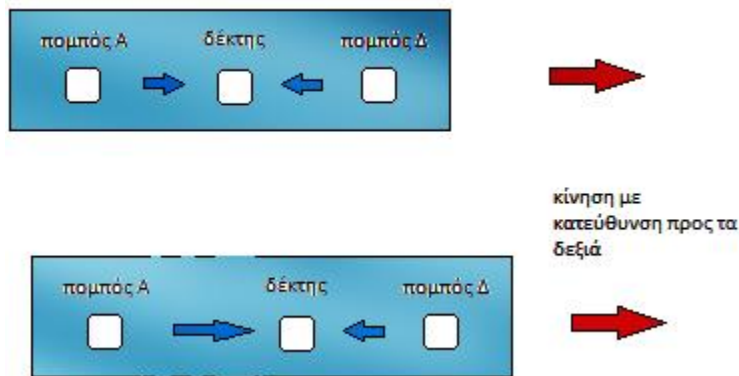
### 1.1 Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και Νευτώνεια φυσική

Ο Einstein το 1905 προέβη σε μια τροποποίηση της Νευτώνειας θεωρίας με εξαιρετικά επιτυχή τρόπο και αυτό φαίνεται από την εισαγωγή μιας καινοτόμας θεωρίας, που είναι η λεγόμενη ειδική θεωρία της σχετικότητας, που ήρθε να εξηγήσει φαινόμενα που με βάση την κλασική φυσική δεν ήταν εφικτό να εξηγηθούν πλήρως. Η βασική ιδέα της Νευτώνειας θεωρίας στηρίζεται στην παραδοχή ότι δύο γεγονότα μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα εντός ενός αδρανειακού πλαισίου, τότε μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα και σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό πλαίσιο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παράδειγμα με το διαστημόπλοιο όπου εντός αυτού βρίσκονται τρία άτομα και δύο εξ αυτών εκπέμπουν από ένα σήμα έκαστος στον δέκτη που βρίσκεται στη μέση. Όταν το διαστημόπλοιο είναι ακίνητο τότε το σήμα φτάνει ισόχρονα στον δέκτη από τους δύο πομπούς, όπου ο ένας εξ' αυτών βρίσκεται αριστερά του και ο άλλος δεξιά του.



σχήμα 1.1.1: σύστημα σε αδράνεια

Στην περίπτωση όμως που το διαστημόπλοιο είναι εν κινήσει τότε αυτός που βρίσκεται αριστερά του και αυτός που βρίσκεται δεξιά του εκπέμπουν το σήμα τους, τότε αν το διαστημόπλοιο κινείται σύμφωνα με τον πομπό που βρίσκεται δεξιά, το σήμα απ' αυτόν θα φτάσει πρώτο γιατί το διαστημόπλοιο πορεύεται με κατεύθυνση προς αυτόν και το σήμα του αριστερού πομπού θα φτάσει καθυστερημένα στο δέκτη.



σχήμα 1.1.2: κίνηση του διαστημόπλοιου προς τα δεξιά

Όταν το υποθετικό διαστημόπλοιο κινείται προς τη κατεύθυνση του αριστερού πομπού, τότε λόγω της μικρότερης απόστασης που έχει να διανύσει το σήμα από αυτόν τον πομπό, λαμβάνεται πιο γρήγορα από το δέκτη, σε σχέση με το σήμα που έρχεται από τον δεξιό πομπό, που σ' αυτήν την περίπτωση έρχεται καθυστερημένο. Έτσι, δεν μπορεί να ισχύει το ταυτόχρονο δύο γεγονότων σε ένα αδρανειακό σύστημα που βρίσκεται εν κινήσει. Γι' αυτό η Νευτώνεια θεωρία δεν πρέπει να εφαρμόζεται σε τέτοιου είδους ζητήματα.



σχήμα 1.1.3: κίνηση του διαστημόπλοιου προς τα αριστερά

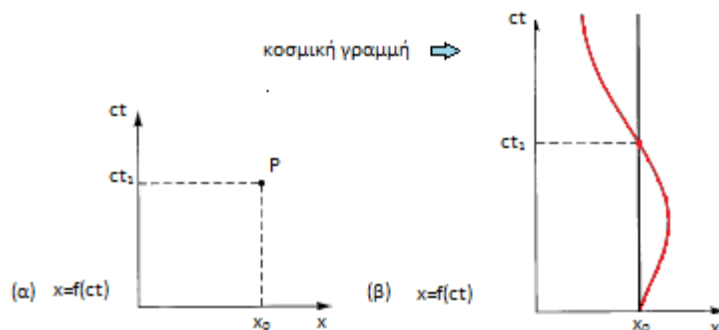
Με την ίδια λογική επιλύονται ζητήματα σχετικά με την έννοια του ταυτοχρόνου στηριζόμενοι στην ειδική θεωρία της σχετικότητας σε πιο πολύπλοκα συστήματα, όπου με κατάλληλα επεξεργασία διαφαίνεται ότι καταλήγουμε στην ίδια λύση.

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δύο γεγονότα που είναι ταυτόχρονα σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε αδράνεια, δεν είναι εφικτό να είναι ταυτόχρονα και ένα σύστημα εν κινήσει. Βέβαια, πρέπει να αναφερθεί ότι στο παραπάνω παράδειγμα με τη δεξιά κατεύθυνση του διαστημόπλοιου, να μην έχει να διανύσει περισσότερη απόσταση το σήμα που εκπέμπεται από τον δεξιό πομπό, αλλά το σήμα που εκπέμπεται από τον αριστερό πομπό έχει διανύσει μικρότερη απόσταση, και όχι ίδια σε σχέση με την αδρανειακή κατάσταση του συστήματος. Επίσης, όσο αφορά τη κίνηση του διαστημόπλοιου με την αριστερή κατεύθυνση το σήμα που εκπέμπεται από τον αριστερό πομπό, έχει να διανύσει μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με την αδρανειακή κατάσταση του συστήματος, αλλά και σε σχέση με το σήμα του δεξιού πομπού. Το σήμα του δεξιού πομπού διανύει μικρότερη απόσταση σε σχέση με την αδρανειακή κατάσταση, και σε σχέση με το σήμα του αριστερόστροφου πομπού. Άρα, όλα τα σήματα εν κινήσει έχουν μεταβληθεί και έχουν γίνει μικρότερα και μεγαλύτερα ανάλογα με την περίπτωση που έχουμε κάθε φορά, όπως φαίνεται και από τα προαναφερθέντα.

## 1.2 Χωροχρόνος και χωροχρονικά διαγράμματα

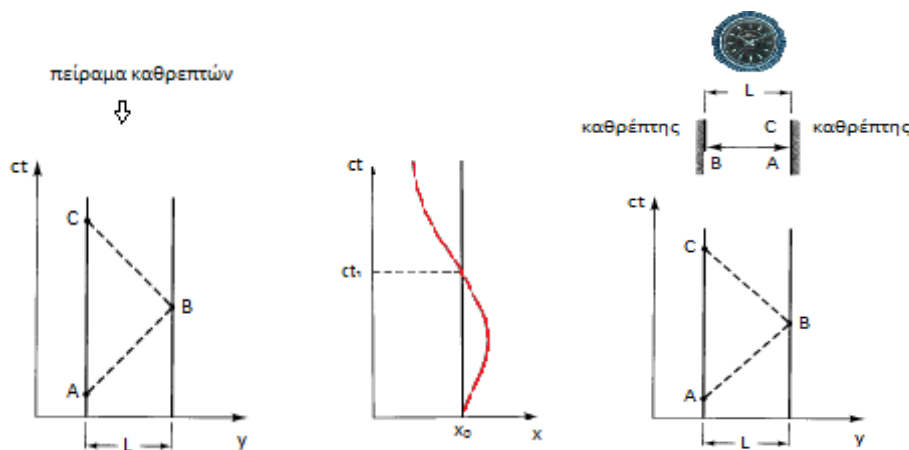
Στηριζόμενοι στην ιδέα του Einstein για την αντίληψη του χρόνου μπορεί να γίνει δεκτή και η έννοια των τετραδιανυσμάτων για το χωροχρόνο, σ' αντίθεση με τη Νευτώνεια φυσική που δέχεται ότι είναι εφικτή η έννοια του ταυτοχρόνου σε οποιοδήποτε σύστημα, μ' αποτέλεσμα να μη χρειάζεται η χρησιμοποίηση των τετραδιανυσμάτων. Ο λόγος είναι ότι είναι ότι μεταβάλλεται ο χρόνος, μ' αποτέλεσμα να πρέπει στις Καρτεσιανές συντεταγμένες να προστεθεί ένας επιπλέον όρος, αυτός

του  $t$ , και έτσι έχουμε  $(t',x',y',z')$ , αντί για  $(x,y,z)$  που εφαρμοζόταν σε κάθε περίπτωση, και αυτό οφείλεται σύμφωνα και με το παράδειγμα της υποενότητας 1.1. στο γεγονός ότι δεν ισχύει η έννοια του ταυτοχρόνου ενός αδρανειακού συστήματος, σε ένα εν κινήσει σύστημα. Βάσει αυτής της παραδοχής είναι δεκτή και η έννοια του χωροχρόνου, κατά τη θεωρία του Einstein, αλλιώς δεν θα μπορούσε να περιγραφεί με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του Newton. Έτσι, η έννοια του χώρου και του χρόνου δεν αποτελούν δύο ξεχωριστές έννοιες, αλλά μια έννοια αυτήν του χωροχρόνου. Αποτέλεσμα αυτής της μεταβολής είναι να διαχωρίζεται ο χωροχρόνος σε διαφορετικούς χώρους ανά χρονική στιγμή, με αποτέλεσμα να είναι εφικτή η διαφοροποίηση του χώρου σύμφωνα με το χρόνο  $t$ , κάτι το οποίο μπορεί να φανεί μόνο από το τετραδιάνυσμα, και την ειδική θεωρία της σχετικότητας του Einstein. Έτσι, έχουμε τριών διαστάσεων χώρο και μιας διάστασης χρόνο. Με βάση αυτά είναι εφικτή και η κατανόηση της έννοιας των χωροχρονικών διαγραμμάτων. Ένα χωροχρονικό διάγραμμα αποτελείται από δύο άξονες ενός αδρανειακού συστήματος, που αναπαριστούν τέσσερις διευθύνσεις ενός τετραδιανύσματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι στον ένα άξονα δεν χρησιμοποιούμε το χρόνο  $t$ , αλλά το  $ct$ , ώστε να έχουμε τα ίδια μεγέθη, και στους δύο άξονες.



σχήμα 1.2.1: κοσμικής γραμμής

Μια κεντρική υπόθεση για τη κοσμική γραμμή στηρίζεται στην παραδοχή του Newton ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα σε δύο σημεία που δίνει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων και αρχικά προσδιορίστηκε από την ρήψη ενός αντικειμένου από το έδαφος της γης μέχρι την επιστροφή του. Έτσι, έχουμε την παρακάτω γραμμή γνωστή και ως κοσμική γραμμή. Η κλίση της κοσμικής γραμμής δίνει (την αναλογία) πηλίκο  $c/V^x$ , αφού  $dy/dx = d(ct)/dx = c dt/dx = c / V^x$ , αφού,  $dx = V^x$ . Για μηδενική ταχύτητα αντιστοιχεί άπειρη κλίση. Ενώ, για ταχύτητα  $c$  αντιστοιχεί σε κλίση ίση με  $45^\circ$ . Μέσω του πειράματος των καθρεπτών μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε αυτή τη γραμμή, που δείχνει ότι η θεωρία του Einstein για τη ταχύτητα του φωτός είναι  $c$  για όλα τα αδρανειακά συστήματα. Σύμφωνα με αυτό το πείραμα δύο παράλληλοι καθρέπτες που χωρίζονται με απόσταση  $L$  μεταξύ τους περιγράφονται από τις συντεταγμένες  $(t, x, y, z)$ . Θεωρούμε την απόσταση  $y$  ως τη κάθετη απόσταση μεταξύ των καθρεπτών, και  $x$  την οριζόντια απόσταση μεταξύ των καθρεπτών. Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:

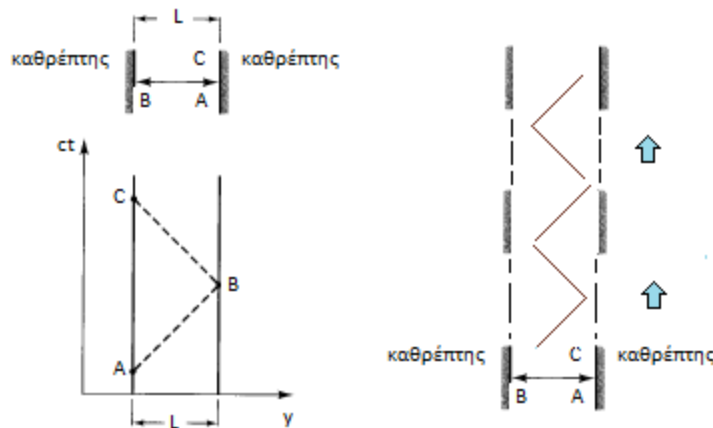


σχήμα 1.2.2: πείραμα καθρεπτών

Από τα παραπάνω διαγράμματα καταλαβαίνουμε πως σχηματίζεται η κοσμική γραμμή. Στη κοσμική γραμμή παρατηρούμε ότι η ευθεία γραμμή αναπαριστά τη



κατάσταση ηρεμίας στο σημείο  $x_0$ , και τη μεταβολή αυτού όπως φαίνεται από έναν παρατηρητή εκτός της κατάστασης ηρεμίας του συστήματος με μέγιστη επιτάχυνση στο σημείο  $ct_1/2$  γιατί στο σημείο αυτό έχουμε ταχύτητα  $c$ , και άρα γωνία  $45^\circ$ , όπως προαναφέραμε, και πλήρη επιβράδυνση για τη χρονική στιγμή  $ct_1$ , επιστροφή στη κατάσταση ηρεμίας του αδρανειακού συστήματος. Το ρολόι μετράει τη διαφορά ανάμεσα στο σημείο αναχώρησης του σήματος φώτος και το σημείο επιστροφής στο σήμα φώτος. Το σημείο A είναι το σημείο αναχώρησης, και το σημείο C αποτελεί το σημείο επιστροφής. Αυτό το οποίο υπολογίζεται είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στο σημείο A και το σημείο C, το οποίο δίνεται από τη βασική σχέση  $u = x/t \Rightarrow t = x/u \rightarrow \Delta t = \Delta x''/u = 2L/c \Rightarrow \Delta t = 2L/c$ , ενώ θεωρούμε ότι δεν υπάρχει γωνία απόκλισης επομένως το σημείο A και το σημείο C ταυτίζονται, και συνέπεια αυτού αποτελεί ότι  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ . Ο λόγος που το  $\Delta x$  είναι  $2L$  οφείλεται στο ότι λαμβάνουμε υπόψη και την επιστροφή του σήματος. Επίσης, πρέπει να συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με την περίπτωση που έχουμε ένα καθρέπτη που μετακινείται. Άρα, σ' αυτήν την εκδοχή θα έχουμε ότι  $\Delta x' = u \Delta t'$ .



σχήμα 1.2.3: πείραμα μετακινούμενων καθρεπτών

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι η μεταβαλλόμενη απόσταση είναι  $\Delta x'/2$ , γιατί έχουμε ότι  $\Delta x' = \Delta x_{CA}$ , και άρα για το ορθογώνιο τρίγωνο που είναι

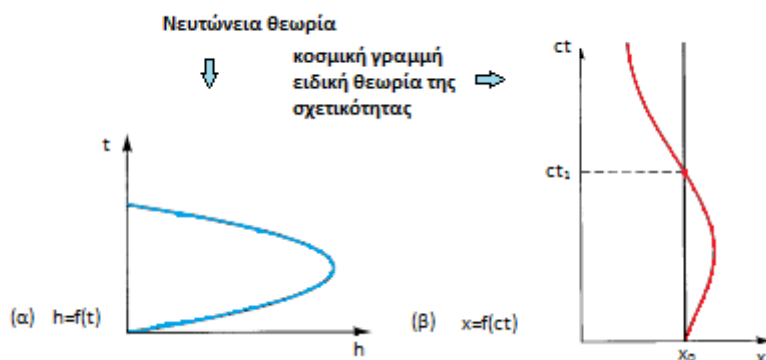
το μισό έχει απόσταση  $\Delta x'/2$ , και το  $L$  παραμένει αμετάβλητο αφού είναι το ύψος και έχουμε ότι η υποτεινόμενη που είναι η διανυόμενη απόσταση είναι η της μορφής  $[(\Delta x'/2)^2 + L^2]^{1/2}$  και επειδή λαμβάνουμε υπόψη και την επιστροφή είναι επί 2. Έτσι, για τη διανυόμενη απόσταση έχουμε ότι  $\Delta x' = 2 * [(\Delta x/2)^2 + L^2]^{1/2}$ . Κατόπιν τούτου υπολογίζουμε το χρόνο που είναι ο εξής,  $\Delta t' = 2 * [(\Delta x/2)^2 + L^2]^{1/2} / u$ , όπου  $u = c$ , και έτσι έχουμε ότι  $\Delta t' = 2 * [(\Delta x/2)^2 + L^2]^{1/2} / c$ . Έτσι, έχουμε ότι ο χρόνος στην περίπτωση που οι καθρέπτες κινούνται η διαφορά ανάμεσα τους στο χωροχρόνο είναι  $-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -\{c 2 * [(\Delta x/2)^2 + L^2]^{1/2} / c\}^2 + L^2 = -2^2 * [(\Delta x/2)^2 + L^2]^{(1/2)*2} + \Delta x^2 = -4(\Delta^2 x/4) - 4L^2 + L^2 = -\Delta^2 x' - 4L^2 + \Delta x' = -4L^2$ , όπου  $\Delta t = 2L/c \Rightarrow 4L^2 = c\Delta t$  (προσδιορίστηκε το  $\Delta x$  για την περίπτωση που οι καθρέπτες είναι ακίνητοι), οπότε έχουμε  $-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -(c\Delta t)$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι ισχύουν και οι σχέσεις  $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ . Επομένως έχουμε ότι:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad \text{σχέση(1.2.1)}$$

Επομένως κατ' επέκταση από τη σχέση (1.21) έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση(1.2.2)}$$

Άρα, αυτό το οποίο επιτυγχάνεται με αυτό το πείραμα των καθρεπτών είναι ότι είτε σε κινούμενους καθρέπτες είτε σε ακίνητους καθρέπτες, η κοσμική γραμμή μένει αμετάβλητη, και έτσι έχουμε την ίδια γραμμή σε όλες τις περιπτώσεις όσο αφορά τον προσδιορισμό της απόστασης, μ' αποτέλεσμα να υπάρξει ένα θεμέλιο για τη μελέτη όλων των αδρανειακών συστημάτων, όπου κάτι αντίστοιχο έχουμε και στη Νευτώνεια θεωρία. Έτσι, αυτό το είδος διαγράμματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη φυσικών φαινομένων που αφορούν την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Κατ' αυτόν τον τρόπο παρατίθενται δύο βασικά διαγράμματα που είναι βασικά για τη μελέτη της βαρύτητας, ανάλογα με την υπό εξέταση περίπτωση, και έχουμε ότι:



σχήμα 1.2.4: Νευτώνεια θεωρία και ειδική θεωρία της σχετικότητας

Η σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο γραφικές παραστάσεις είναι ότι στη θεωρία του Einstein για τη γενική θεωρία της σχετικότητας, που παρατίθεται στην επόμενη ενότητα, όλα τα σώματα ακολουθούν μια ευθεία γραμμή σε ένα κοίλο χωροχρόνο. Η εξίσωση (1.2.2) θεωρείται μη Ευκλείδεια διότι έχουμε ένα μείον “-”, κάτι το οποίο δεν είναι επιτρεπτό σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Η γεωμετρία που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό του χωροχρόνου είναι γνωστός και ως επίπεδος χωροχρόνος, ή, Minkowski χώρος, απ’ όπου πήρε και το όνομα του.

Με βάση τα παραπάνω είναι εφικτό να παρατηρήσουμε ότι ο λόγος που δεν εφαρμόζεται η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η εξυπηρέτηση της αλγεβρικής μορφής, που θα δίνει το αμετάβλητο της ταχύτητας του φωτός,  $c$ , αλλιώς σε διαφορετική περίπτωση θα έπρεπε να τρέξει το αδρανειακό σύστημα με αρνητική ταχύτητα του φωτός. Κάτι παρόμοιο όμως δεχόμαστε στις εξισώσεις Klein Gordon για σωματίδια με αρνητική ενέργεια, αλλά εν προκειμένω επιλύεται μέσω της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Επίσης, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι για παράδειγμα σε ένα τρίγωνο η υποτεινούσα να είναι μικρότερη από τη μια βάση του τριγώνου. Επιπροσθέτως, με την εν λόγω γεωμετρία έχουμε *petitio principie*, δηλαδή, ενώ στην επίλυση του προβλήματος δεν χρησιμοποιείται η γεωμετρία Minkowski, από ένα σημείο και μετά

εφαρμόζεται, αλλά δεν εφαρμόζεται σε όλες τις πράξεις εξ αρχής. Ακόμα, από άλλη οπτική γωνία δεχόμαστε ότι ο χρόνος έχει αντίστροφη φορά και μέσω της ταχύτητας του φωτός, μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο P. Για να γίνει κάτι τέτοιο δεκτό πρέπει να δώσουμε την ερμηνεία ότι η ταχύτητα του φωτός κινείται αντίστροφα στο χρόνο, οπότε σ' αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει καμία επιπλοκή, κάτι το οποίο ίσως να είναι εφικτό γιατί αυτό που αλλάζει είναι ότι αντιστρέφονται οι δύο κώνοι μεταξύ τους, όπως φαίνεται και από την παρακάτω υποενότητα 1.3. Έτσι, εξηγείται η θεωρία του Einstein από τη γεωμετρία Minkowski. Όμως, κατά τη κλασική φυσική η παραδοχή που έχει γίνει είναι ότι θα έπρεπε να υπάρξουν αρνητικά πεδία για την ανάπτυξη τέτοιων ταχυτήτων, κάτι το οποίο δεν στοιχειοθετείται από τη κλασική μηχανική, όπως φαίνεται από τη μετρική γεωδαισία πολικών συντεταγμένων. Όμως έτσι έμμεσα γίνεται παραδεκτό ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, όπως φαίνεται και από τη μετρική γεωδαισία πολικών συντεταγμένων, που αναπτύσσεται στην υποενότητα 1.4.1, με τη σχέση (4.1.31) και τη σχέση (4.1.34), με τη χωροχρονική φούσκα, που επιβάλλει ταχύτητες μικρότερες του φωτός εντός αυτής. Λόγω του ταξιδιού εντός των κώνων φωτός, που αναπτύσσονται αμέσως παρακάτω, έχοντας ως αποτέλεσμα τη χρονική διάσπαση και όχι τη μηδενική διάσπαση, ή, τη χωρική διάσπαση.

### 1.3 Κώνοι φωτός

Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τον όρο  $(c\Delta t)^2$  αφορά την περίπτωση διάσπασης του χωροχρόνου, όπως και το θετικό πρόσημο, άλλωστε αυτό διαφαίνεται από το διάγραμμα 1.2.2, από την απόκλιση της κοσμικής γραμμής για ένα σώμα που κινείται

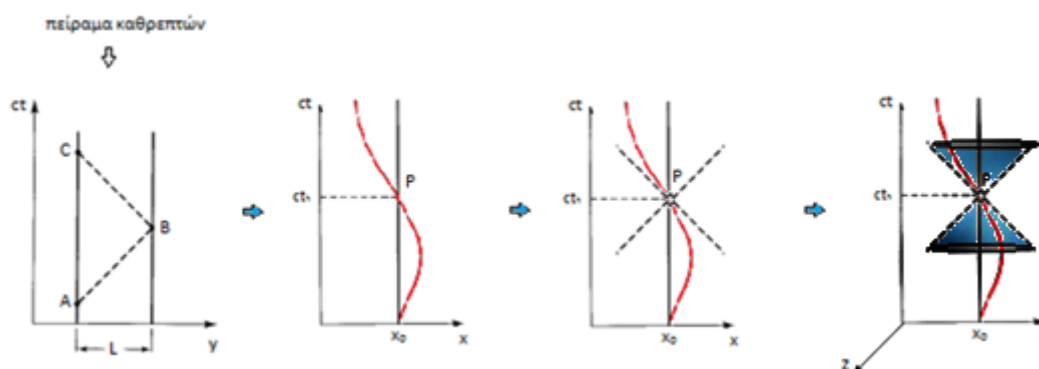
σε σχέση με τη κάθετη γραμμή για ένα σώμα που βρίσκεται σε αδράνεια. Έτσι, για την περίπτωση που  $(\Delta s)^2 = 0$ , έχουμε μη διάσπαση των σημείων. Αυτό με βάση την προαναφερθείσα εξίσωση μπορεί να συμβεί όταν ένας εκ των όρων  $d^2x$ , ή,  $d^2y$ , ή,  $d^2z$ , ή, ισούται με  $(c\Delta t)^2$ , οπότε έχουμε άθροισμα μηδέν. Όταν έχουμε  $(\Delta s)^2 < 0$ , τότε υπάρχει χρονικός διαχωρισμός. Αυτό μπορεί να συμβεί για παράδειγμα όταν δύο σημεία βρίσκονται στην ίδια θέση, αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, όπου  $dx = dy = dz = 0$ , οπότε έχουμε ότι  $(ds)^2 = -(c\Delta t)^2 + d^2x + d^2y + d^2z = -(c\Delta t)^2 + 0 + 0 + 0 = -(c\Delta t)^2 < 0$ . Έτσι, οι ιδιότητες της χωροχρονικής γεωμετρίας λαμβάνοντας υπόψη τη καμπυλότητα του χωροχρόνου, λόγω της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι οι εξής:

$$ds < 0, \text{ για χρονική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.1)}$$

$$ds = 0, \text{ για μηδενική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.2)}$$

$$ds > 0, \text{ για χωρική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.3)}$$

Όσο αφορά την περίπτωση που ένας εκ των όρων  $d^2x$ , ή,  $d^2y$ , ή,  $d^2z$ , ή, ισούται με  $(c\Delta t)^2$ , σημαίνει ότι χρειαζόμαστε την ταχύτητα του φωτός για να φτάσουμε σε μηδενικό διαχωρισμό των σημείων. Για να υπάρχει χωρική ταύτιση πρέπει το σήμα να έχει την ταχύτητα του φωτός. Λόγω αυτού του φαινομένου χαρακτηρίζουμε τα μηδενικά χωρικά διασπώμενα σημεία και ως διασπώμενα σημεία με τη ταχύτητα του φωτός, που σημαίνει ότι όταν τα σήματα τρέχουν με την ταχύτητα του φωτός υπάρχει χωρική ταύτιση, αυτό φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 1.3.1: κώνοι φωτός

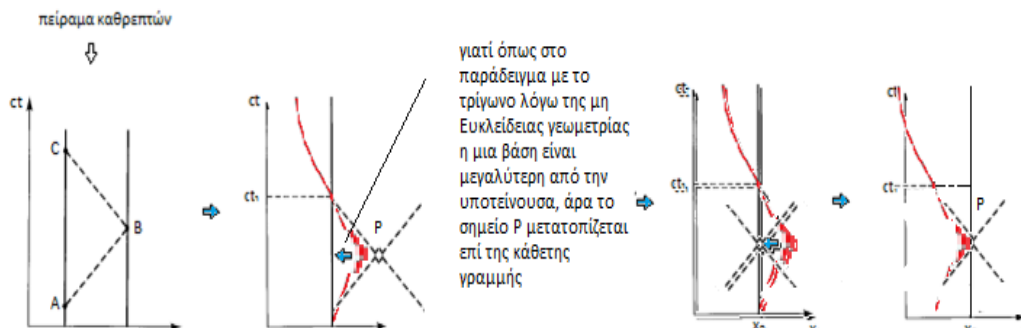
Έτσι, με βάση τα προαναφερθέντα, και τα παραπάνω διαγράμματα και σύμφωνα με τη θεωρία για τα τετραδιανύσματα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2.1α για γωνία  $45^\circ$  έχουμε την ταχύτητα του φωτός αφού ο λόγος της κλίσης δίνει μονάδα, προκύπτει ότι σ' αυτό το σημείο P, ότι έχουμε μηδενική διάσπαση του χώρου. Στο επάνω τμήμα του κώνου θεωρούμε ότι έχουμε το μελλοντικό κώνο φωτός, και στο κάτω τμήμα θεωρούμε ότι υπάρχει το παρελθόν τμήμα του κώνου φωτός (μάλλον αντεστραμμένοι οι κώνοι, αλλιώς προκύπτουν τα προαναφερθέντα προβλήματα). Σε κάθε αδρανειακό σύστημα υπάρχει για κάθε σημείο P ένας κώνος φωτός, άλλωστε αυτό αποτελεί μια βασική αρχή για το χωροχρόνο. Σημεία εντός του κώνου και εκτός του κώνου αποτελούν χρονικά διασπασμένα σημεία από το P. Πρέπει να είναι σημεία εφαπτόμενα των  $45^\circ$  για να έχουν μηδενική διάσπαση, και άρα διάσπασης της ταχύτητας του φωτός. Όσο αφορά την κοσμική γραμμή ισχύει ότι βρίσκεται εντός των κώνων φωτός, άρα  $d^2s < 0$ , και προκύπτει ότι:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow d^2\tau = -d^2s/c^2 \Rightarrow$$

$$d^2\tau = -d^2s/c^2 \tag{σχέση (1.3.1)}$$

Βέβαια, το ερώτημα που προκύπτει είναι γιατί η κοσμική γραμμή να μην έχει κλίση  $45^\circ$  εφαπτόμενη του κώνου φωτός. Άλλωστε το διάγραμμα ίσως έπρεπε λαμβάνοντας

και τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία να είναι μετατοπισμένο στο κοίλο επί της  $x_0$ , ώστε να συμπίπτει με τη θεωρία, κάτι που δεν λαμβάνεται υπόψη, γιατί όπως στο παράδειγμα με το τρίγωνο λόγω της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας η μια βάση είναι μεγαλύτερη από την υποτεινούσα, άρα το σημείο P μετατοπίζεται επί της κάθετης γραμμής, επομένως γεννιέται μια σειρά ερωτημάτων, όπως φαίνονται και από τα παρακάτω διαγράμματα, κώνων φωτός. Άρα το ερώτημα που εκπορεύεται αφορά το κατά πόσο είναι εφικτή μια χωροχρονική ταύτιση, σε σχέση με τη χρονική διάσπαση.



σχήμα 1.3.2: κώνοι φωτός

#### 1.4 Διαστολή του χρόνου και παράδοξο των διδύμων

Από τη γεωμετρία του χωροχρόνου ανακύπτουν ορισμένα ερωτήματα που αφορούν την θεωρία της ειδικής σχετικότητας και από την οποία ανακύπτουν ορισμένες συνέπειες. Η πρώτη συνέπεια είναι το φαινόμενο της χρονικής διαστολής. Επομένως, ως προς αυτό το φαινόμενο, αν έχουμε δύο σημεία A και B, τότε ο κατάλληλος χρόνος γι' αυτή την περίπτωση είναι  $\tau_{AB}$ , και υπολογίζεται βάση της σχέσης που προέκυψε από το πείραμα των καθρεπτών, δηλαδή τη σχέση (1.2.2), και τη σχέση (1.3.1). Με βάση αυτές τις δύο σχέσεις που αφορούν τη κοσμική γραμμή έχουμε ότι:

$$(\Delta s)^2 = -(cdt)^2 + d^2x + d^2y + d^2z$$

και

$$d^2\tau = -\frac{d^2s}{c^2}$$

Επιλύοντας, τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$d^2\tau = -[ -(cdst)^2 + d^2x + d^2y + d^2z ] \frac{1}{c^2} = \frac{(c\Delta t)^2}{c^2} - [ d^2x + d^2y + d^2z ] \frac{1}{c^2} \Rightarrow$$

$$d^2\tau = (dt)^2 - \frac{d^2x + d^2y + d^2z}{c^2} \quad \text{σχέση (1.4.1)}$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας μπορούμε να προσδιορίσουμε το χρόνο που απαιτείται για τη μεταφορά ενός σωματιδίου με τη ταχύτητα του φωτός, από το σημείο Α στο σημείο Β, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4.1). Άρα, έχουμε ότι:

$$\tau_{AB} = \int d\tau = \int [(dt)^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.4.2)}$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.4.2) είναι ορισμένο για τα σημεία Α και Β. Επομένως, προκύπτει να έχουμε ότι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B [(dt)^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.4.3)}$$

Έτσι, από τη σχέση (1.4.3) λαμβάνουμε το ολοκλήρωμα που είναι το εξής:

$$\tau_{AB} = \int_A^B \left\{ (dt)^2 \left[ 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(dt)^2 * c^2} \right] \right\}^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt \left[ 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(dt)^2 * c^2} \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.4.4)}$$

Παρατηρούμε ότι παίρνουμε την ταχύτητα για τον άξονα x, τον άξονα y, και τον άξονα z, ενώ έχουμε και το dt, δηλαδή παραμένουμε στο τετραδιάνυσμα, και άρα στα πλαίσια της κοσμικής γραμμής. Ενώ, πλέον έχουμε και το διάνυσμα της ταχύτητας διότι  $d^2x/d^2t = u_x$ ,  $d^2y/d^2t = u_y$ ,  $d^2z/d^2t = u_z$ . άρα προκύπτει το διάνυσμα της ταχύτητας,  $\vec{u}$ . Επομένως, η σχέση (1.4.4), λαμβάνει τη μορφή που είναι η εξής:

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt' \left[ 1 - \frac{u(t')^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.4.5)}$$



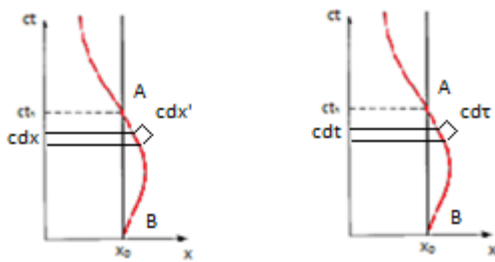
Επομένως, όταν ο χρόνος είναι μικρότερος στο διάστημα  $\tau_{AB}$  σε σχέση με το διάστημα  $t_{AB}$ , και αυτό φαίνεται άμεσα από τον παρακάτω τύπο, εφόσον τρέψουμε τη σχέση σε παραγώγους, που είναι ο εξής:

$$d\tau_{AB} = dt' \left[ 1 - \frac{u(t')^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Επομένως, επομένως το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου, σύμφωνα με το οποίο κάνει τα ρολόγια να κινούνται αργά, παίρνει την τελική του μορφή που είναι η εξής:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} \quad \text{σχέση (1.4.6)}$$

Η διαστολή του χρόνου μπορεί να φανεί και από το παρακάτω σχήμα σύμφωνα με τη σχέση που προέκυψε και έχουμε ότι:



σχήμα 1.4.1: σχηματική αναπαράσταση της διαστολής του χρόνου

Παρατηρούμε χρησιμοποιώντας τη κοσμική γραμμή ότι διαστέλλεται ο χρόνος επί της κοσμικής γραμμής. Έτσι, στην περίπτωση που υπήρχε ένα ρολόι στο σωματίδιο που κινείται ευθύγραμμα, στην ευθεία  $x_0$ , και ένα ρολόι στο σωματίδιο που κινείται στην τροχιά της κοσμικής γραμμής, τότε το τελευταίο σωματίδιο θα κατέγραφε λιγότερο χρόνο, που δίνεται από τη σχέση (1.4.6). Προφανώς σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, γιατί η υποτεινούσα είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε βάση, όμως εδώ επειδή εφαρμόζεται μη Ευκλείδεια γεωμετρία κάτι τέτοιο είναι εφικτό. Ο λόγος που είναι μικρότερος είναι επειδή  $(\Delta s)^2$

$= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ , σχέση (1.4.7) παραλείποντας τους όρους  $\Delta y$ , και  $\Delta z$ , εν προκειμένω, θεωρώντας τους μηδέν.

Όσο αφορά το παράδοξο των διδύμων, αφορά την περίπτωση που στη μια γραμμή βρίσκεται ο ένας εκ των δύο δίδυμων αδερφών και στην άλλη γραμμή ο άλλος. Αυτός που κινείται στη κοσμική γραμμή, και ξεκινά από το  $x_0$ , για να καταλήξει πάλι στο  $x_0$ , αν ταξιδέψει για παράδειγμα με ταχύτητα  $(3/5)c$ , τότε αν γι' αυτόν που βρίσκεται επί της ευθείας χρειάζονται 30 χρόνια, τότε στον άλλον που τρέχει με τα  $3/5$  της ταχύτητας του φωτός ο χρόνος  $dt$  σύμφωνα με τη σχέση (1.4.6) είναι ο εξής:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} = dt' \sqrt{1 - \frac{(\frac{3}{5}c)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 4/5$$

Επομένως, ο χρόνος θα είναι μικρότερος σ' αυτό το διάστημα ο ένας εκ των δύο δίδυμων αδερφών θα είναι 30 ετών και ο άλλος θα είναι 24 χρονών. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από το παραπάνω διάγραμμα του σχήματος 1.4.1. Το παράδοξο των δίδυμων περιγράφει μια ιδιότητα της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας στον επίπεδο χωροχρόνο μεταξύ των σημείων A και B. Παρατηρούμε ότι η ευθεία απόσταση ανάμεσα στα σημεία A και B δεν είναι η βέλτιστη δυνατή, αλλά υπάρχουν άλλες αποστάσεις καμπυλωμένες που είναι πιο κοντινές ανάμεσα στα σημεία A και B. Η ευθεία γραμμή στην πραγματικότητα είναι η κοσμική γραμμή, λόγω της Ευκλείδειας γεωμετρίας, κάτι το οποίο πρέπει να ληφθεί υπόψη και στη κίνηση των πλανητών μέσω των βαρυτικών δυνάμεων. Οποιαδήποτε ταχύτητα ενός συστήματος αναπτύσσεται και κινείται με καμπύλης με οποιαδήποτε συντελεστή αναλογίας επί της  $c$ , είναι πιο κοντά μεταξύ των σημείων A και B, με πιο μακρινή απόσταση να αποτελεί αυτής της ευθείας γραμμής. Αυτό άλλωστε επιβεβαιώνεται και από το παραπάνω παράδειγμα. Στο συνηθισμένο τρισδιάστατο σύστημα η ευθεία γραμμή

αποτελεί την κοντινότερη απόσταση, αλλά στο σύστημα του επίπεδου χωροχρόνου, λόγω της καμπυλότητας της κοσμικής γραμμής, και της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, αυτή η απόσταση είναι η μεγαλύτερη.

### 1.5 Επιβεβαίωση από την ενίσχυση των μετασχηματισμών Lorentz

Έχει βρεθεί ότι χρησιμοποιώντας τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις μένει αμετάβλητη η συνάρτηση της σχέσης (1.3.1). Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις<sup>1</sup> είναι οι εξής:

$$ct' = (\cosh\theta) (ct) - (\sinh\theta) x \quad \text{σχέση (1.5.1)}$$

$$x' = (-\sinh\theta) (ct) + (\cosh\theta) x \quad \text{σχέση (1.5.2)}$$

$$y' = y \quad \text{σχέση (1.5.3)}$$

$$z' = z \quad \text{σχέση (1.5.4)}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους μετασχηματισμούς μέσω των παρακάτω πράξεων, φαίνεται ότι παραμένει αμετάβλητη η εξίσωση (1.3.1), και έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= - (cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = - [ (\cosh\theta) (cdt) - (\sinh\theta) dx ]^2 + [ (-\sinh\theta) (cdt) + (\cosh\theta) dx ]^2 + y^2 + z^2 = \\ &= - [ (\cosh\theta)^2 (cdt)^2 - 2 [ (\cosh\theta) (cdt) (\sinh\theta) dx ] + [ (\sinh\theta)^2 dx^2 ] + [ (-\sinh\theta)^2 (cdt)^2 + 2 [ (-\sinh\theta) (cdt) (\cosh\theta) dx ] + [ (\cosh\theta)^2 dx^2 ] + (d^2y) + (d^2z) = \\ &= - (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>  $\sinh x = (e^x - e^{-x}) / 2 = -i \sin ix$

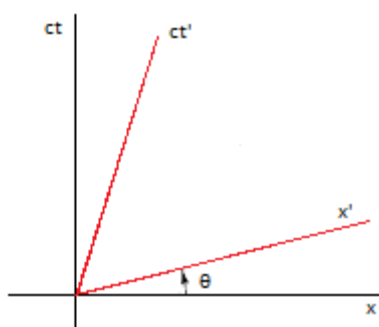
και

$$\cosh x = (e^x + e^{-x}) / 2 = \cos ix$$

$$(ds)^2 = - (cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = - (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

σχέση (1.5.5)

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι βάσει αυτών των μετασχηματισμών των υπερβολικών τριγωνομετρικών αριθμών, παραμένει αμετάβλητη η σχέση (1.3.1), όπως φάνηκε παραπάνω. Έτσι, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η περιστροφή της γωνίας  $\theta$ .



σχήμα 1.5.1: χρήση των μετασχηματισμών Lorentz

Η γωνία  $\theta$  αφορά τη μεταβολή του  $(ct, x)$  στο  $(ct', x')$ . Επομένως, έχουμε ότι η γωνία  $\theta$  μετρά την ταχύτητα μεταξύ των δύο συστημάτων. Οι συντεταγμένες  $(ct, x)$ , δεν αφορούν ένα ορθοκανονικό σύστημα σύμφωνα με την Ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά κατά τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία πρόκειται για ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, γι' αυτό και η διαφορά ανάμεσα στα δύο συστήματα εκφράζει αυτή τη μεταφορά ανάμεσα στις δύο συντεταγμένες, ως τη διαφορά ταχύτητας, ανάμεσα τους. Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα  $u$  μέσω της εξίσωσης (1.5.2), θεωρώντας  $x' = 0$ , και έχουμε ότι:

$$x' = (-\sinh\theta)(ct) + (\cosh\theta)x \Rightarrow 0 = (-\sinh\theta)(ct) + (\cosh\theta)x \Rightarrow (\sinh\theta)(ct) = (\cosh\theta)x = 0 \Rightarrow x/(ct) = (\sinh\theta)/(\cosh\theta) \Rightarrow u/c = (\sinh\theta)/(\cosh\theta) \Rightarrow$$

$$u = c * [(\sinh\theta)/(\cosh\theta)] \Rightarrow u * \cosh\theta = c * \sinh\theta \Rightarrow$$

$$u = c * \tanh\theta$$

σχέση (1.5.6)

Πρέπει να αναφερθεί ότι το σωματίδιο που βρίσκεται στο σύστημα συντεταγμένων  $(ct', x')$  αν κινείται στον άξονα  $x$  με ταχύτητα  $u$ , τότε πρέπει να κινείται και στον άξονα  $x'$  με ταχύτητα  $u'$ . Αυτές οι ιδιότητες συνιστούν τους μετασχηματισμούς Lorentz.

Κατόπιν ορισμένων πράξεων χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $(\cosh\theta)^2 - (\sinh\theta)^2 = 1$ , παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα, που είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}(\cosh\theta)^2 - (\sinh\theta)^2 = 1 &\Rightarrow (\cosh\theta)^2 - [u^2 (\cosh\theta)^2 / c^2] = (\cosh\theta)^2 [1 - u^2 / c^2] \Rightarrow \\(\cosh\theta)^2 [1 - u^2 / c^2] &= 1 \Rightarrow \\(\cosh\theta)^2 &= 1 / [1 - u^2 / c^2] \Rightarrow \\(\cosh\theta) &= 1 / [1 - u^2 / c^2]^{1/2} \Rightarrow \\ \gamma = (\cosh\theta) &= [1 - u^2 / c^2]^{-1/2} \qquad \text{σχέση (1.5.7)}\end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1.5.1), τη σχέση (1.5.7) και τη σχέση (1.5.6) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}ct' = (\cosh\theta) (ct) - (\sinh\theta) x &\Rightarrow ct' = (\cosh\theta) (ct) - u (\cosh\theta) x/c \Rightarrow \\t' &= [(\cosh\theta) (ct)/c] - [u (\cosh\theta) x/c^2] \Rightarrow \\t' &= [(\cosh\theta) t] - [u (\cosh\theta) x/c^2] \Rightarrow \\t' &= (\gamma t) - (u \gamma x/c^2) \Rightarrow \\t' &= \gamma (t - u x/c^2) \qquad \text{σχέση (1.5.8)}\end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, από τη σχέση (1.5.2), και τη σχέση (1.5.7) και τη σχέση (1.5.6) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}x' = (-\sinh\theta) (ct) + (\cosh\theta) x &= (-u \cosh\theta/c) (ct) + (\cosh\theta) x = (-u \gamma/c) (ct) + \gamma x = \\-u \gamma t + \gamma x &= \gamma (x - ut) \Rightarrow \\x' &= \gamma (x - ut) \qquad \text{σχέση (1.5.9)}\end{aligned}$$

Επομένως, λαμβάνουμε με βάση τα παραπάνω ότι:

$$t' = \gamma (t - u x/c^2) \quad \text{σχέση (1.5.8)}$$

$$x' = \gamma (x - ut) \quad \text{σχέση (1.5.9)}$$

$$y' = y \quad \text{σχέση (1.5.10)}$$

$$z' = z \quad \text{σχέση (1.5.11)}$$

Από τη σχέση (1.5.7), τη σχέση (1.5.9), και τη σχέση (1.5.7) παρατηρούμε ότι για ταχύτητες πολύ μικρότερες της ταχύτητας του φωτός οι σχέσεις λαμβάνουν τη μορφή εξισώσεων της Νευτώνειας μηχανικής.

Επίσης, όσο αφορά τον προσδιορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού προκύπτει αντιστρέφοντας το πρόσημο της ταχύτητας  $u$  σε  $-u$ , όπως προκύπτει από τις παρακάτω πράξεις . Επομένως, έχουμε ότι:

$$t' = \gamma (t - u x/c^2) \Rightarrow t'/\gamma = t - u x/c^2 \Rightarrow (t'/\gamma) + (u x/c^2) = t \quad \text{σχέση (1.5.12)}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5.12) έχουμε ότι:

$$x' = \gamma (x - ut) \Rightarrow x' = \gamma x - ut\gamma \Rightarrow x = (1/\gamma) * (x' + ut\gamma) \Rightarrow x = x'/\gamma + ut \quad \text{σχέση (1.5.13)}$$

Επομένως, από τη σχέση (1.5.12) και τη σχέση (1.5.13) προκύπτει ότι:

$$x = x'/\gamma + ut \Rightarrow x = x'/\gamma + u [(t'/\gamma) + (ux/c^2)] \Rightarrow x = x'/\gamma + u [(t'/\gamma) + (ux/c^2)] \Rightarrow$$

$$x = x'/\gamma + u (t'/\gamma) + u^2 x/c^2 \Rightarrow (1 - u^2/c^2) x = [1/(1 - u^2/c^2)^{-1/2}] (x' + ut') \Rightarrow$$

$$x = [(1 - u^2/c^2)^{1/2} / (1 - u^2/c^2)] (x' + ut') \Rightarrow x = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} (x' + ut') \Rightarrow$$

$$x = \gamma (x' + ut') \quad \text{σχέση (1.5.14)}$$

Επιπροσθέτως, με βάση τη σχέση (1.5.12) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5.14) έχουμε ότι:

$$t = (t'/\gamma) + (u x/c^2) \Rightarrow t = (t'/\gamma) + u \gamma (x' + ut') / c^2 \Rightarrow t = (t'/\gamma) + (u \gamma x' + u^2 \gamma t') / c^2$$

$$\Rightarrow t = [(t'/\gamma) + u^2 \gamma t'] / c^2 + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow t = t' [1/\gamma + u^2 \gamma / c^2] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 + u^2 \gamma^2) / c^2 \gamma] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 + u^2 (1 - u^2/c^2)^{-1} / c^2 \gamma] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 (1 - u^2/c^2) + u^2 / (1 - u^2/c^2) c^2 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 (1 - u^2/c^2) + u^2 / c^2 (1 - u^2/c^2)^{1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 - u^2) + u^2 / c^2 (1 - u^2/c^2)^{1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(c^2 / c^2 (1 - u^2/c^2)^{1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(1 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' [(1 - u^2/c^2)^{-1/2}] + (u \gamma x') / c^2 \Rightarrow$$

$$t = t' \gamma + \frac{u \gamma x'}{c^2} \quad \text{σχέση (1.5.15)}$$

Επομένως, με βάση την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι έχουμε πράγματι αντιστροφή όταν στην ταχύτητα μεταβάλλουμε το πρόσημο της, και προκύπτουν τα εξής:

$$x = \gamma (x' + ut') \quad \text{σχέση (1.5.14)}$$

$$t = t' \gamma + \frac{u \gamma x'}{c^2} \quad \text{σχέση (1.5.15)}$$

$$y = y' \quad \text{σχέση (1.5.16)}$$

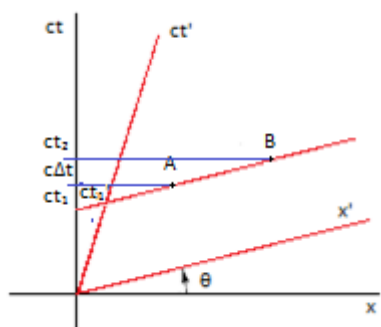
$$z = z' \quad \text{σχέση (1.5.17)}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω αποδείξεις έχουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz, που δείχνουν ότι για διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων υπάρχει σύνδεση μεταξύ τους, μέσω των ανωτέρω σχέσεων, διατηρώντας αμετάβλητη τη σχέση (1.2.2).

## 1.6 Η σχετικότητα του ταυτοχρόνου

Η θεωρία των μετασχηματισμών του Lorentz βρίσκει εφαρμογή στη σχετικότητα του ταυτοχρόνου. Για παράδειγμα όταν πρόκειται για ένα συμβάν στο Α και στο Β, τότε

πρέπει να θεωρήσουμε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5.6) ότι, η ταχύτητα  $u$  είναι αυτή που διαχωρίζει τα δύο συστήματα. Έτσι, μεταξύ δύο γεγονότα αυτά των σημείων A και B, μπορεί να θεωρήσουμε ότι συμβαίνουν ταυτόχρονα στο σύστημα συντεταγμένων  $(ct', x')$ , αλλά, δεν συμβαίνουν στο σύστημα συντεταγμένων  $(ct, x)$ . Αυτό φαίνεται από το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 1.6.1: σχετικότητα του ταυτοχρόνου

Παρατηρούμε από το παραπάνω διάγραμμα ότι η σχετικότητα του ταυτοχρόνου εξαρτάται από το σύστημα αξόνων, αφού για το σύστημα αξόνων  $(ct', x')$ , τα σημεία A και B δείχνουν ότι αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν συγχρόνως και για το σύστημα  $(ct, x)$  δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Αυτό το διαπιστώνουμε απ' ότι η ευθεία των σημείων A και B είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$ . Έτσι, τα σημεία αυτά τέμνουν τον άξονα  $ct'$  στο σημείο  $ct_1'$ . Ενώ, στον άξονα  $ct$ , τέμνουν τον άξονα στο σημείο  $ct_1$ , και στο σημείο  $ct_2$ , σχηματίζοντας μια διαφορά χρόνου γι' αυτόν τον άξονα, ίση με  $\Delta t$ . Ενώ, για να έχουμε τις ίδιες μονάδες με τον οριζόντιο άξονα, θεωρούμε το  $c\Delta t$ . Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.5.15), για το σύστημα συντεταγμένων  $(x, ct)$  έχουμε ότι:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t' \gamma + u \gamma x_2' / c^2 - (t' \gamma + u \gamma x_1' / c^2) \Rightarrow$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = u \gamma x_2' / c^2 - u \gamma x_1' / c^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (u \gamma / c^2) (x_2' - x_1') \Rightarrow$$



$$\Delta t = t_2 - t_1 = (u \gamma / c^2) (\Delta x') \Rightarrow$$

$$\Delta t = \gamma (u / c^2) (\Delta x') \quad \text{σχέση (1.6.1)}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο λόγος που στο  $t_1$ , και στο  $t_2$ , χρησιμοποιήσαμε το ίδιο  $t'$ , είναι διότι στο σύστημα συντεταγμένων  $(x', ct')$  αντιστοιχεί το ίδιο σημείο τομής με τον άξονα  $ct'$ .

### 1.7 Συστολή του Lorentz

Από τη σχέση (1.4.7) έχουμε ότι  $(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ , και προκύπτει ότι για ένα σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $u$ , το ταυτόχρονο είναι διαφορετικό για διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων, όπως προκύπτει και από την προηγούμενη υποενότητα. Εφαρμόζοντας τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, για το σημείο, όπου  $t' = 0$ , και μέσω της σχέσης (1.5.8) έχουμε ότι:

$$t' = \gamma (t - u x / c^2) \Rightarrow \gamma t = u \gamma x' / c^2 \Rightarrow t = (u / c^2) x' \Rightarrow \Delta t = (u / c^2) \Delta x' \quad \text{σχέση (1.7.1)}$$

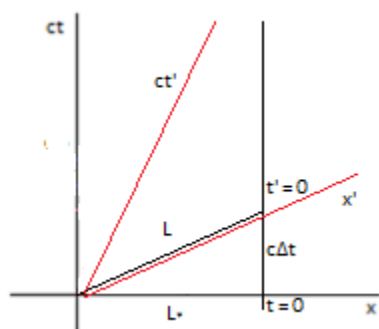
Επομένως από τη κλίση προκύπτει ότι:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \Rightarrow L^2 = L^{*2} - (c\Delta t)^2 \quad \text{σχέση (1.7.2)}$$

Επομένως, από τη σχέση (1.7.1), και τη σχέση (1.7.2), προκύπτει ότι:

$$L = [L^{*2} - (c\Delta t)^2]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.7.3)}$$

Έτσι, έχουμε και διαφορετικές αποστάσεις, που διανύονται ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων, όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, που είναι το εξής:



σχήμα 1.7.1: συστολή του Lorentz

Η απόσταση  $L$  που σχηματίζεται στο σύστημα συντεταγμένων  $(x', ct')$  είναι μικρότερη, απ' αυτή του συστήματος συντεταγμένων  $(x, ct)$  λόγω της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, μ' αποτέλεσμα η υποτείνουσα να μην είναι μεγαλύτερη από τη μια βάση. Γι' αυτό ανάμεσα στα δύο συστήματα υπάρχει διαστολή της απόστασης, για το σύστημα συντεταγμένων  $(x, ct)$ , σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων  $(x', ct')$ .

### 1.8 Η ταχύτητα του φωτός σε όλα τα συστήματα

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.5.8), (1.5.9), (1.5.10), και (1.5.11) είναι εφικτό να προσδιορίσουμε την ταχύτητα, εφόσον γνωρίζουμε την απόσταση, και το χρόνο.

Επομένως, από τη σχέση (1.5.8), και (1.5.9), έχουμε ότι:

$$u_x' = \frac{dx'}{dt} = d[\gamma(x - ut)] / d[\gamma(t - ux/c^2)] = \gamma(dx - udt) / \gamma(dt - udx/c^2) \Rightarrow$$

$$u_x' = (dx - udt) / (dt - udx/c^2) \Rightarrow$$

$$u_x' = (dx/dt - udt/dt) / (dt/dt - udx/dt c^2) \Rightarrow$$

$$u_x' = (dx/dt - u) / (1 - udx/dt c^2) \Rightarrow$$

$$u_x' = (u^x - u) / (1 - uu^x/c^2) \tag{σχέση (1.8.1)}$$

Επίσης, από τη σχέση (1.5.8), (1.5.10), και (1.7.3) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 u_y' &= dy'/dt' = d[\gamma y] / d[\gamma (t - u x/c^2)] = \gamma dy / \gamma (dt - u dx / c^2) \Rightarrow \\
 u_y' &= d[y* (1-u^2/c^2)^{1/2}] / (dt - u dx / c^2) \Rightarrow \\
 u_y' &= (dy*/dt) (1-u^2/c^2)^{1/2} / (dt/dt - u dx/dt / c^2) \Rightarrow \\
 u_y' &= u_y (1-u^2/c^2)^{1/2} / (1-uu^x / c^2) \qquad \text{σχέση (1.8.2)}
 \end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, από τη σχέση (1.5.8), (1.5.11), και (1.7.3) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 u_z' &= dz'/dt' = d[\gamma z] / d[\gamma (t - u x/c^2)] = \gamma dz / \gamma (dt - u dx / c^2) \Rightarrow \\
 u_z' &= d[z* (1-u^2/c^2)^{1/2}] / (dt - u dx / c^2) \Rightarrow \\
 u_z' &= (dz*/dt) (1-u^2/c^2)^{1/2} / (dt/dt - u dx/dt / c^2) \Rightarrow \\
 u_x' &= \frac{u_x(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{uu^x}{c^2}} \qquad \text{σχέση (1.8.3)}
 \end{aligned}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (1.8.1) προκύπτει ότι εφόσον έχουμε ένα σύστημα που κινείται στον άξονα x με ταχύτητα c, τότε η ταχύτητα του αν θεωρήσουμε ένα άλλο σύστημα με διαφορά ταχύτητας u, σύμφωνα με τη σχέση (1.5.6), προκύπτει ότι σ' αυτό το σύστημα θα έχει επίσης ταχύτητα c, όπως φαίνεται παρακάτω χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.8.1), και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 u_x' &= (u^x - u) / (1 - uu^x/c^2) \Rightarrow \\
 u_x' &= (c - u) / (1 - uc/c^2) \Rightarrow \\
 u_x' &= (c - u) / (1 - u/c) \Rightarrow \\
 u_x' &= (c - u) / [(c - u)/c] \Rightarrow \\
 u_x' &= c (c - u) / (c - u) \Rightarrow \\
 u_x' &= c
 \end{aligned}$$

Το  $u^x$ , αφορά το σύστημα αξόνων  $(x, ct)$ , και το  $u^{x'}$ , αφορά το σύστημα αξόνων  $(x', ct')$ , και θεωρήσαμε ότι  $u^x = c$ , μ' αποτέλεσμα να προκύπτει ότι  $u^{x'} = c$ , δηλαδή, σ' όλα τα συστήματα η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια.

## Ενότητα 2

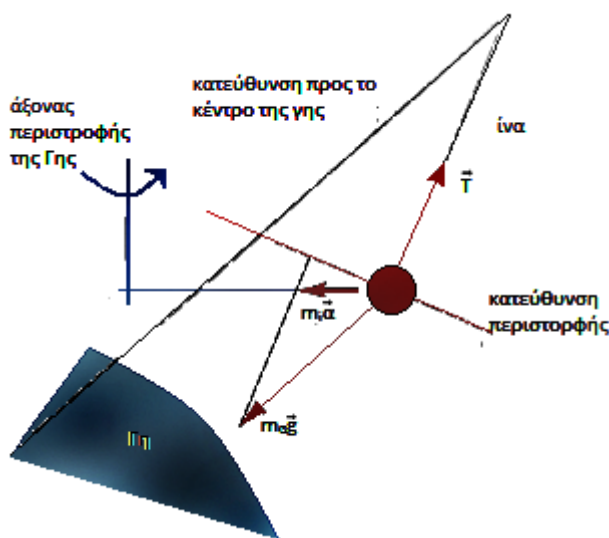
## Ενότητα 2

### 2.1 Βαρυτική και αδρανειακή μάζα - Καμπύλος χωροχρόνος

Σύμφωνα με τη Νευτώνεια θεωρία μελετάμε την επίδραση της βαρύτητας λαμβάνοντας υπόψη δυνάμεις, σ' αντίθεση με τη θεωρία του Einstein, που αφορά τη θεωρία της γενικής σχετικότητας, που χρησιμοποιεί την καμπυλότητα του χώρου. Σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική μελετάται η επίδραση των δυνάμεων, λαμβάνοντας υπόψη τις μάζες, και τις θέσεις των σωμάτων, στον ίδιο χρόνο, όπως φαίνεται από την εξίσωση που είναι της μορφής:

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2} \quad \text{σχέση (2.1.1)}$$

Η θεωρία του Einstein βασίζεται σε καμπυλώσεις του χωροχρόνου, χρησιμοποιώντας τετραδιανύσματα, δηλαδή, στον τεσσάρων διαστάσεων χωροχρόνο, χωρίς να έχει σχέση με την επίδραση δυνάμεων, και πεδίων, σ' αντιδιαστολή με τη Νευτώνεια θεωρία. Ένα πείραμα με βάση το οποίο προσδιορίζεται η βαρυτική και αδρανειακή μάζα είναι αυτό του εκκρεμούς του Eotvos, με το οποίο προσδιορίζεται η στρέψη του εκκρεμούς. Μέσω μιας ίνας κρέμεται μια σφαίρα, που προσδιορίζει τη στρέψη του εκκρεμούς, κατά την περιστροφή της Γης. Επειδή η συσκευή του εργαστηρίου στρέφεται και αυτή, το εκκρεμές δεν είναι πλήρως ευθυγραμμισμένο με τη βαρυτική δύναμη της Γης. Έτσι, παρατηρούμε δύο δυνάμεις που αναπτύσσονται στην ίνα και τη σφαίρα, και είναι η επίδραση της βαρύτητας, και της περιστροφής της Γης που δημιουργεί μια κεντρομόλο επιτάχυνση. Έτσι, έχουμε ότι το παρακάτω σχήμα που δείχνει τις δυνάμεις που επιδρούν στο εκκρεμές, και είναι το εξής:



σχήμα 2.1.1: πείραμα του εκκρεμούς

Οι δύο μάζες, της ίνας και της σφαίρας είναι ελεύθερες να κινηθούν ελεύθερα σύμφωνα με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης. Οποιαδήποτε απόκλιση, προκαλεί τη συστολή προς την κατεύθυνση περιστροφής. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο μάζες ως προς την επιτάχυνση τους, προκαλεί στο εκκρεμές την περιστροφή. Η δύναμη  $m_G \vec{g}$ , πρέπει να είναι ίση με τη δύναμη  $m_I \vec{a}$ , διότι έτσι κανένα σώμα δεν συστρέφεται. Αυτό ισχύει όσο αφορά και το εκκρεμές, όπου έχουμε δύο σώματα, και τότε ο λόγος  $m_I/m_G$ , πρέπει να είναι ίδιος και για την ίνα και για τη σφαίρα. Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, όλα τα σώματα τα οποία βρίσκονται στη Γη έχουν μια αδρανειακή μάζα, που αφορά την περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονα της, και τη δημιουργία μιας κεντρομόλου δύναμης, που βρίσκονται σ' αυτή. Ενώ, έχουν και την βαρυτική μάζα που αφορά την επίδραση της βαρύτητας, με κατεύθυνση το κέντρο της Γης. Ή δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ερμηνευόμενων μαζών του σώματος πρέπει να είναι ίσες, ώστε το σώμα να μην υφίσταται συστολή οποιοδήποτε σώμα στην επιφάνεια της Γης. Επομένως, ο λόγος αυτών των δυνάμεων πρέπει να ισούται με τη μονάδα. Όταν στο πείραμα του

εκκρεμούς παρατηρούμε ότι υπάρχει απόκλιση στο λόγο των δυνάμεων, μεταξύ των δύο μαζών, της ίνας, και της σφαίρας, μ' αποτέλεσμα να προκαλείται η περιστροφή του συστήματος μαζών του εκκρεμούς. Επομένως, συμβολίζοντας το  $\vec{g}$ , με  $\vec{g}'$ , και τις επιταχύνσεις  $\vec{a}$ , με  $\vec{a}'$ , προκύπτει ότι:

$$m_{GA}\vec{g}_A' = m_{IA}\vec{a}_A' \text{ και } m_{GB}\vec{g}_B' = m_{IB}\vec{a}_B' \quad \text{σχέση (2.1.2)}$$

Επομένως, με βάση τα παραπάνω, εφόσον ο λόγος της βαρυτική και της αδρανειακής μάζας είναι ίδια για όλα τα σώματα, τότε οποιαδήποτε μεταβολή στις επιταχύνσεις των σωμάτων της ίνας, και της σφαίρας, θα εκφράζεται ως απόκλιση, που δίνεται από τον παρακάτω τύπο που είναι ο εξής:

$$n = \frac{a_A' - a_B'}{\frac{1}{2}(a_A' + a_B')} = \frac{\frac{m_{AG}}{m_{AI}} - \frac{m_{BG}}{m_{BI}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{m_{AG}}{m_{AI}} + \frac{m_{BG}}{m_{BI}}\right)} \quad \text{σχέση (2.1.3)}$$

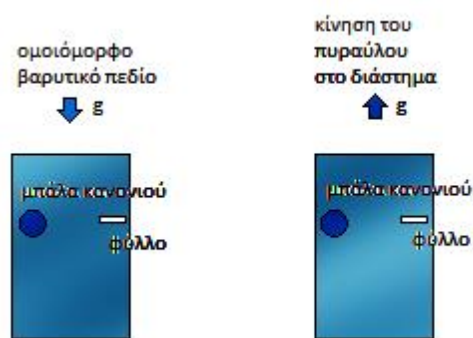
Επίσης, υπάρχει και το εκκρεμές του Su στο οποίο έγιναν προσθήκες, για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας στον προσδιορισμό της απόκλισης των επιταχύνσεων των δύο μαζών, της ίνας, όπου εν προκειμένω είναι βολφραμίου, και των τεσσάρων κυλίνδρων, που υποκαθιστούν τη σφαίρα. Οι δύο από τους κυλίνδρους αποτελούνται από χαλκό, και οι άλλοι δύο από βηρύλλιο με τοποθέτηση καθρεπτών, που ως στόχο έχουν να εντοπίσουν τις περιστροφές του εκκρεμούς. Πρέπει να σημειωθεί ότι το εκκρεμές αυτό είναι τοποθετημένο σε κενό. Βέβαια, μεγάλη ακρίβεια μπορεί να επιτευχθεί στο πείραμα, όταν το εκκρεμές περιστρέφεται αργά με γνωστή περίοδο. Η περίοδος περιστροφής, και η απόκλιση ανάμεσα στη μάζα ηρεμίας, και τη βαρυτική μάζα, εφαρμόζονται αρμονικά μεταξύ τους, μ' αποτέλεσμα να καταγράφεται κάθε απόκλιση ανάμεσα στις επιταχύνσεις των μαζών των κυλίνδρων. Έτσι, το πείραμα του Su, έδειξε ότι το  $n = (-0.2 \pm 2.8) * 10^{-12}$ . Τα πειράματα αυτά αποτελούν από τα πιο έγκυρα ελεγμένες αρχές σε όλη τη φυσική.



Πρέπει να σημειωθεί ότι στον προσδιορισμό του  $n$  λαμβάνεται υπόψη η διαφορά ανάμεσα στις επιταχύνσεις των δύο μαζών του εκκρεμούς, προς τη μέση των επιταχύνσεων των δύο μαζών, της ίνας, και της σφαίρας, ως ένα σύστημα, δηλαδή, αυτό του εκκρεμούς.

## 2.2 Η αρχή της ισοδυναμίας

Η αρχή της ισοδυναμίας στηρίζεται στη ρήση ότι εφόσον κάποιος πέσει από την οροφή του σπιτιού του, τότε γι' αυτόν δεν υφίσταται η βαρύτητα, ερμηνεύοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Εννοώντας, ότι για τον ίδιο δεν υφίσταται κάποια μεταβολή, σ' αντίθεση με κάποιον εξωτερικό παρατηρητή. Έτσι, αν το ίδιο άτομο ρίξει από την οροφή του σπιτιού του κάποιους άλλους τότε γι' αυτόν παραμένει μια ομοιόμορφη κίνηση, ανεξάρτητα από τη βιοχημική του κατάσταση. Αυτή η ερμηνεία, αποτέλεσε την πηγή της αρχής της ισοδυναμίας, του Einstein, που αργότερα τον οδήγησε στη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η αρχή της ισοδυναμίας στηρίζεται στην ιδέα ότι είναι αδύνατη η διάκριση ανάμεσα σε μια ομαλή επιτάχυνση, και ένα ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο, σύμφωνα με τον Einstein. Χαρακτηριστικό παράδειγμα για την επιβεβαίωση αυτού αποτελεί το πείραμα, σύμφωνα με το οποίο αν έχουμε έναν πύραυλο στη Γη, και ένας παρατηρητής ρίξει μια μπάλα κανονιού και ένα φτερό τότε και τα δύο θα φτάσουν στην άλλη πλευρά του πυραύλου με επιτάχυνση  $g$ . Όταν ο παρατηρητής ρίξει τη μπάλα κανονιού και το φτερό στο διάστημα όταν ο πύραυλος κινείται με επιτάχυνση  $g$ , τότε θα φτάσουν και τα δύο στην άλλη πλευρά του πυραύλου, με επιτάχυνση  $g$ . Αυτό φαίνεται από το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:

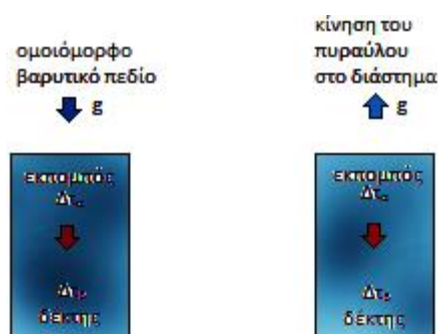


σχήμα 2.2.1: αρχή της ισοδυναμίας

Αυτό το παράδειγμα επιβεβαιώνει τη ρήση της θεωρίας του Einstein, για την αρχή της ισοδυναμίας, σύμφωνα με την οποία, δεν μπορεί να γίνει διάκριση, ανάμεσα στο ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο, και την ομαλή επιτάχυνση, διότι ο παρατηρητής και στις δύο περιπτώσεις δεν μπορεί να διακρίνει τη διαφορά, ανάμεσα στα δύο μεγέθη. Η αντίκρουση βέβαια μπορεί να στηρίζεται στο γεγονός ότι το φως δεν υπόκειται στην αρχή της ισοδυναμίας. Πράγματι, αλλά κάτι τέτοιο δεν στηρίζεται στην Νευτώνεια μηχανική, με τον υπολογισμό δυνάμεων και την επιτάχυνση της βαρύτητας. Από αυτήν την ιδιομορφία σε σχέση με την αρχή της ισοδυναμίας προέκυψε ότι το φως δεν μπορεί να λειτουργεί σε συνθήκες Νευτώνειας θεωρίας, αλλά το φως λειτουργεί με βάση το γεγονός ότι εισέρχεται σε ένα βαρυτικό πεδίο. Το φως για παράδειγμα σε έναν πύραυλο που κινείται σε ευθύγραμμη πορεία, με επιτάχυνση  $g$  εισέρχεται και εξέρχεται σε ευθύγραμμη πορεία, το ίδιο μπορούμε να θεωρήσουμε και για τον τρόπο λειτουργίας σε ένα βαρυτικό πεδίο. Δηλαδή, και στο βαρυτικό πεδίο εισέρχεται σε ευθύγραμμη πορεία σε σχέση με την επιτάχυνση της βαρύτητας,  $g$ .

Στην περίπτωση που επιδρά ένα βαρυτικό πεδίο, και στον πύραυλο εκπέμπονται σήματα σε ίσα τακτά χρονικά διαστήματα, αυτό που στέλνει ο παρατηρητής στην κορυφή του πυραύλου, τα λαμβάνει ο παρατηρητής στον πυθμένα του πυραύλου σε τακτικά διαστήματα, που είναι πιο γρήγορα από τα εκπεμπόμενα. Αυτό οφείλεται

στην επίδραση των βαρυτικών πεδίων, μ' αποτέλεσμα η τακτικότητα λήψης σημάτων να είναι πιο γρήγορη από την εκπεμπόμενη, λόγω της επιτάχυνσης της βαρύτητας,  $g$ . Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που ο πύραυλος δεν βρίσκεται ακινητοποιημένος στο έδαφος, αλλά κινείται, και έχει επιτάχυνση,  $g$ . Τότε πάλι θα παρατηρήσουμε τα σήματα που λαμβάνει να είναι σε πιο γρήγορα τακτά χρονικά διαστήματα απ' αυτά που εκπέμπονται.



σχήμα 2.2.2: εκπομπή σήματος

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ναι μεν στην επιτάχυνση  $g$ , το σήμα κινείται με αντίθετη κατεύθυνση, αλλά και ο δέκτης κινείται προς τη κατεύθυνση του  $g$ . Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και στην πρώτη περίπτωση με τη διαφορά ότι το σήμα εκπέμπεται προς τη κατεύθυνση του  $g$ , και ο δέκτης βρίσκεται ακίνητος. Έτσι, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε την ίδια επίδραση της επιτάχυνσης  $g$ , λόγω της ανάλυσης των κατευθύνσεων, που προαναφέρθηκε, είτε στον ακινητοποιημένο πύραυλο στη Γη, είτε στον εν κινήσει πύραυλο στο διάστημα. Έτσι, επαληθεύεται η αρχή της ισοδυναμίας, αφού κατά την αρχή αυτή του Einstein, η επίδραση του βαρυτικού πεδίου δεν πρέπει να διακρίνεται από την ομαλή επιτάχυνση, γι' αυτό αποτελούν και ισοδύναμα μεγέθη. Έτσι, με βάση τα προαναφερθέντα μπορούμε να δείξουμε, και μαθηματικώς αυτό, και έχουμε ότι:

$$d_B(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{σχέση (2.2.1)}$$

και

$$d_A(t) = h + \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{σχέση (2.2.2)}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι ο χρόνος εκπομπής του πρώτου σήματος είναι στο  $t = 0$ , και η λήψη του σήματος γίνεται στο  $t = t_1$ , και  $t = \Delta\tau_A$  είναι ο χρόνος εκπομπής του δεύτερου σήματος, ενώ ο χρόνος λήψης του είναι  $t = \Delta\tau_B$ , τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση  $u = \Delta x / \Delta t$ , η απόσταση που διανύθηκε στο πρώτο σήμα, είναι η εξής:

$$d_A(0) - d_B(t_1) = ct_1 \quad \text{σχέση (2.2.3)}$$

Όσο αφορά τον δεύτερο παλμό η απόσταση που διανύθηκε είναι η εξής:

$$d_A(\Delta\tau_A) - d_B(t_1 + \Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \quad \text{σχέση (2.2.4)}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.2.2) και (2.2.3) στις σχέσεις (2.2.3) και (2.2.4), προκύπτει ότι:

$$d_A(0) - d_B(t_1) = ct_1 \Rightarrow h + \frac{1}{2}g0^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \Rightarrow$$

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \quad \text{σχέση (2.2.5)}$$

και

$$d_A(\Delta\tau_A) - d_B(t_1 + \Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \Rightarrow h + \frac{1}{2}g\Delta\tau_A^2 - \frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_B)^2 = c(t_1 + \Delta\tau_B -$$

$$\Delta\tau_A) \Rightarrow h + \frac{1}{2}g\Delta\tau_A^2 - \frac{1}{2}g(t_1^2 + \Delta\tau_B^2 + 2t_1\Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \quad \text{σχέση (2.2.6)}$$

Επομένως, επειδή το  $\Delta\tau_A$ , και το  $\Delta\tau_B$  είναι πολύ μικρά τότε η σχέση (2.2.6), παίρνει τη μορφή που είναι η εξής:

$$h - \frac{1}{2}g(t_1^2 + 2t_1\Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \quad \text{σχέση (2.2.7)}$$

Επομένως, με αντικατάσταση από τη σχέση (2.2.7), με τη σχέση (2.2.5), έχουμε ότι:

$$h - \frac{1}{2}g(t_1^2 + 2t_1\Delta\tau_B) - c(\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) = h - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \Rightarrow$$

$$-g t_1 \Delta\tau_B - c (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) = 0 \Rightarrow$$

$$-g (h/c) \Delta\tau_B - c (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) = 0 \Rightarrow$$

$$-g (h) \Delta\tau_B = c^2 (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \Rightarrow$$

$$1 = -(c^2/gh) (1 - \Delta\tau_A / \Delta\tau_B) \Rightarrow$$

$$-(gh / c^2) = 1 - \Delta\tau_A / \Delta\tau_B \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_A / \Delta\tau_B = 1 + (gh/c^2) \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_A = \Delta\tau_B [ 1 + (gh/c^2) ]$$

Επίσης, για επαλήθευση, με αφαίρεση κατά μέλη, από τη σχέση (2.2.7), με τη σχέση (2.2.5), έχουμε ότι:

$$h - \frac{1}{2}g (t_1^2 + 2 t_1 \Delta\tau_B) - (h - \frac{1}{2}gt_1^2) = c (t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) - ct_1 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}g (2 t_1 \Delta\tau_B) = c (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}g (2 h \Delta\tau_B/c - 2 \frac{1}{2}gt_1^2 \Delta\tau_B/c) = c (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}g (2 h \Delta\tau_B/c - gt_1^2 \Delta\tau_B/c) = c (\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \Rightarrow$$

$$-g h \Delta\tau_B/c + \frac{1}{2}g^2 t_1^2 \Delta\tau_B/c = c \Delta\tau_B - c \Delta\tau_A \quad \text{σχέση (2.2.8)}$$

Θεωρώντας ότι  $(gh/c^2)^2$  είναι αμελητέο, και  $t_1 = h/c$ , η σχέση (2.2.8) διαμορφώνεται ως εξής:

$$-g h \Delta\tau_B/c + \frac{1}{2}g^2 t_1^2 \Delta\tau_B/c = c \Delta\tau_B - c \Delta\tau_A \Rightarrow$$

$$-g h \Delta\tau_B/c + \frac{1}{2}g^2 (h/c)^2 \Delta\tau_B/c = c \Delta\tau_B - c \Delta\tau_A \Rightarrow$$

$$-g h \Delta\tau_B/c + \frac{1}{2} (gh/c)^2 \Delta\tau_B/c = c \Delta\tau_B - c \Delta\tau_A \Rightarrow$$

$$-g h \Delta\tau_B/c = c \Delta\tau_B - c \Delta\tau_A \Rightarrow$$

$$1 = c \Delta\tau_B / (-g h \Delta\tau_B/c) - c \Delta\tau_A / (-g h \Delta\tau_B/c) \Rightarrow$$

$$1 = c^2 / (-g h) + c^2 \Delta\tau_A / (g h \Delta\tau_B) \Rightarrow$$

$$1 = -c^2 / (g h) (1 - \Delta\tau_A / \Delta\tau_B) \Rightarrow$$

$$-(g h) / c^2 = (1 + \Delta\tau_A / \Delta\tau_B) \Rightarrow$$

$$-(g h) / c^2 - 1 = \Delta\tau_A / \Delta\tau_B \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_A = \Delta\tau_B [1 + (g h) / c^2] \quad \text{σχέση (2.2.9)}$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι μεγαλύτερο ο χρονικό διάστημα εκπομπής στο σήμα του πομπού, δηλαδή γίνεται η λήψη σημάτων φωτός σε πιο τακτά χρονικά διαστήματα, και έτσι μπορούμε με άλλη διατύπωση να πούμε ότι  $\Delta\tau_B = \Delta\tau_A [1 - (g h) / c^2]$ , δηλαδή, με άλλα λόγια ότι μικραίνει το σήμα του δέκτη. Επομένως, παρατηρούμε ότι τα σήματα που εκπέμπονται είναι μεγαλύτερα κατά ένα συντελεστή  $[1 + (g h) / c^2]$ , που συνάδει και με τη την αρχή της ισοτιμίας, διότι η επίδραση του  $g$ , είναι τέτοια που να διαμορφώνει το σήμα στο δέκτη να έχει πιο γρήγορο χρόνο λήψης ανά τακτά χρονικά διαστήματα, χωρίς να διακρίνεται αυτό ανάμεσα στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, και της περίπτωσης της ομαλής επιτάχυνσης. Άρα, έχουμε μια σχέση που περιγράφει το σήμα του πομπού και το δέκτη, και τον πομπό να εκπέμπει σε μεγαλύτερα τακτά χρονικά, σε σχέση με το δέκτη που λαμβάνει με μικρότερο  $\Delta\tau$ , συνεπώς μικρότερα τακτά χρονικά διαστήματα, επομένως με πιο γρήγορο ρυθμό. Αυτή η ερμηνεία μαθηματικώς φαίνεται εφόσον εφαρμόσουμε την ταυτοτική σχέση  $(1+x)^a \approx (1+ax)$ , μ' αποτέλεσμα να λαμβάνουμε την ακόλουθη μορφή, που είναι η εξής:

$$\Delta\tau_A = \Delta\tau_B [1 + (g h) / c^2] \Rightarrow \Delta\tau_B = \Delta\tau_A [1 + (g h) / c^2]^{-1} = \Delta\tau_A [1 - (g h) / c^2] \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A [1 - (g h) / c^2] \quad \text{σχέση (2.2.10)}$$

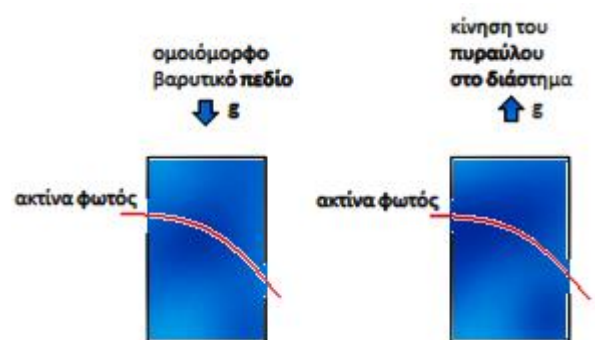
Η επίδραση του συντελεστή  $g$ , στο εκπεμπόμενο, και στο προσλαμβανόμενο σήμα εν γένει περιγράφεται σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, από τη σχέση που είναι η εξής:

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} (1 + \Delta\Phi / c^2), \quad \text{όπου } \Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = gh \quad \text{σχέση (2.2.11)}$$

Ενώ από τη σχέση (2.2.10), λαμβάνουμε την παρακάτω διαμορφωμένη μορφή που είναι η εξής:

$$\Delta\tau_{\text{δέκτη}} = \Delta\tau_{\text{πομπού}} (1 - \Delta\Phi/c^2), \text{ όπου } \Delta\Phi = \Phi_B - \Phi_A = gh \quad \text{σχέση (2.2.12)}$$

Το ίδιο παρατηρούμε και στην περίπτωση που έχουμε έναν πύραυλο που κινείται, με επιτάχυνση  $g$  και δέχεται κάθετα μια ακτίνα φωτός, τότε το αποτέλεσμα είναι να εξέλθει αυτή η ακτίνα φωτός όχι σε μια θέση που είναι στην ίδια ευθεία αλλά σε μια χαμηλότερη θέση. Το ίδιο θα συμβεί και σε ένα ακινητοποιημένο πύραυλο στην επιφάνεια της Γης που δέχεται μια ακτίνα φωτός κεκλιμένη λόγω της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο σχήμα που ακολουθεί και είναι το εξής:



σχήμα 2.2.3: ακτίνα φωτός που τέμνει τη διεύθυνση της  $g$

Δηλαδή, σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα έχουμε επίδραση της ευθύγραμμης ομαλής επιτάχυνσης, και του βαρυτικού πεδίου, στην ακτίνα φωτός, που εισέρχεται με κατεύθυνση κάθετα σ' αυτά, επαληθεύοντας της αρχή της ισοδυναμίας. Η ανίχνευση του βαρυτικού πεδίου από ένα δορυφόρο γίνεται με τη χρήση του πειράματος σε ένα διαστημικό σταθμό, όπου είναι εφικτό να ανιχνευτεί το βαρυτικό πεδίο της Γης με τη χρήση δύο μπαλών ring pong όπου στιγμιαία ρίχνονται δύο μπάλες με συνθήκες διαστήματος, τότε δεν θα παρατηρηθεί καμία μεταβολή στη θέση τους, αφού στην προκειμένη περίπτωση υπάρχουν ιδανικές συνθήκες με την επίδραση της αντίστασης

του αέρα να είναι μηδενική. Οποσδήποτε, στη Γήινη ατμόσφαιρα η επίδραση θα είναι διαφορετική, λόγω του βαρυτικού πεδίου. Έτσι, όταν η μια μπάλα βρίσκεται κοντά στην επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης, θα αναπτύσσει κάποια επιτάχυνση, με κατεύθυνση το κέντρο της Γης. Επομένως, στην περίπτωση αυτή θα σημειωθεί μεταβολή ανάμεσα στις αποστάσεις των δύο μπαλών του ring pong. Η μια μπάλα απέχει από την άλλη απόσταση  $s$ , και λόγω της βαρύτητας η μία μπάλα αναπτύσσει επιτάχυνση που ισούται με τα εξής:

$$F = m a = m g \Rightarrow g = F / m = G m_1 m_2 / [m_2 (r_1^2 - r_2^2)] \Rightarrow g = G m_1 / (r_1^2) \Rightarrow$$

$$g = GM/R^2 \quad \text{σχέση (2.2.13)}$$

Επομένως έχουμε ότι για τη μπάλα του ring pong που είναι πιο απομακρυσμένη τα εξής:

$$a = GM/(R+s)^2 \quad \text{σχέση (2.2.14)}$$

Η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση με την ταχύτητα είναι η  $u = x/t$  [m/s], και  $a = u/t$  [m/s<sup>2</sup>], άρα  $a = x/(t*t) = x/t^2$ , συνεπώς προκύπτει ότι  $a = u/t = u^2/R$  [m/s<sup>2</sup>]. Επομένως, μια γενική σχέση είναι η εξής:

$$g = GM/R^2 = u^2/R \quad \text{σχέση (2.2.15)}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.2.14) και τη σχέση (2.2.15), βλέπουμε ότι υπάρχει σημαντική διαφορά ανάμεσα στην απόσταση που θα έχουν οι δύο μπάλες μεταξύ τους, διότι η απόσταση αυτή μεταβάλλεται, λόγω της διαφοράς που έχουν σε σχέση με τη Γη οι λόγοι των αποστάσεων τους, αφού στη μια περίπτωση έχουμε  $R$  και στην άλλη περίπτωση  $R+s$ .

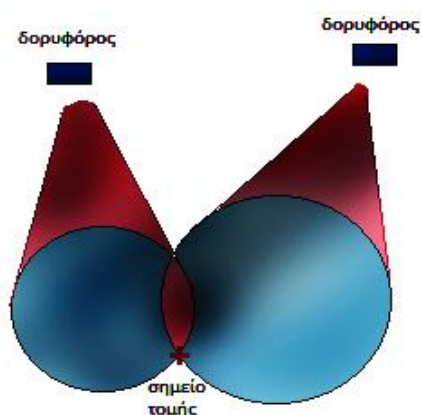


### 2.3 Ο καμπύλος χωροχρόνος

Η καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι αυτή που επηρεάζει τον λόγο του εκπεμπόμενου σήματος προς το προσλαμβανόμενο. Αυτό μπορεί να εξεταστεί αν λάβουμε υπόψη μας δύο διαφορετικά βαρυτικά πεδία. Τα βαρυτικά πεδία επηρεάζουν τις τιμές του χρόνου εκπομπής και λήψης ενός σήματος, όπως αναλύθηκε παραπάνω, στην υποενότητα 2.2, ενώ επίσης στην ίδια υποενότητα προαναφέρθηκε ότι η απουσία βαρυτικού πεδίου δεν επηρεάζει το χρόνο εκπομπής και λήψης ενός σήματος. Επομένως στη περίπτωση που έχουμε έναν πομπό και ένα δέκτη το σήμα που εκπέμπεται επηρεάζεται από το βαρυτικό πεδίο σύμφωνα με τον συντελεστή που δίνεται από τη σχέση (2.2.11), δηλαδή, διέπεται από τη συμβολή του συντελεστή  $(1+\Phi/c^2)$ . Η επίδραση του εν λόγω συντελεστή δείχνει τη διαφορά ανάμεσα στην εκπομπή σήματος στο κενό, σε σχέση με την ύπαρξη ενός βαρυτικού πεδίου. Τα ρολόγια δείχνουν λιγότερο χρόνο λήψης σημάτων ανά τακτά χρονικά διαστήματα, όταν το  $\Phi$  είναι θετικό γιατί τότε η διαφορά χρόνου του πομπού είναι μεγαλύτερη απ' αυτή του δέκτη, άρα ο δέκτης λαμβάνει σήματα σε πιο γρήγορα χρονικά διαστήματα, αφού το  $\Delta t$  του είναι μικρότερο. Ενώ, όταν το  $\Phi$  είναι αρνητικό ο συντελεστής ο πομπός έχει μικρότερη τιμή στο  $\Delta t$  του, άρα πιο γρήγορα εκπέμπει σήματα στα τακτά χρονικά σημεία εκπομπής, σε σχέση πάντα με το δέκτη που τα δέχεται σε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Έτσι, μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια ερμηνεία σύμφωνα με την οποία αν τα ρολόγια τα ταυτίσουμε με το δέκτη του σήματος, τότε αυτό που θα συμβεί είναι να φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι τα ρολόγια είναι ταχύτερα υπό την έννοια ότι μετράνε σήματα με μεγαλύτερη συχνότητα αφού το  $\Delta t$  είναι μικρότερο και έτσι μπορούμε να τα θεωρήσουμε ταχύτερα, και αυτό προκύπτει σύμφωνα με τη

σχέση (2.2.11), όταν το  $\Phi$  είναι θετικό. Ενώ όταν το  $\Phi$  είναι αρνητικό τότε τα ρολόγια μετρώνε σε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα τα εισερχόμενα σήματα, μ' αποτέλεσμα η τιμή στο  $\Delta t$  να είναι μεγαλύτερη, και έτσι η συχνότητα λήψης σημάτων να είναι μικρότερη, μ' αποτέλεσμα να μπορούμε να πούμε ότι τα ρολόγια μετρώνε πιο αργά, εννοώντας τη χαμηλότερη συχνότητα λήψης εισερχόμενων σημάτων. Το GPS (Global Positioning System), αποτελεί το Παγκόσμιο Σύστημα Εντοπισμού Θέσης, σύμφωνα με το οποίο ο προσδιορισμός της θέσης γίνεται με 24 δορυφόρους, και στηρίζεται η λειτουργία του στα προαναφερθέντα. Συνολικά υπάρχουν έξι δορυφορικές τροχιές, σύμφωνα με την οποία πρέπει να καλύπτεται από τέσσερεις δορυφόρους κάθε τροχιά. Έτσι, στη λήψη δεδομένων από τους δορυφόρους πρέπει να ληφθεί υπόψη η διαστολή του χρόνου που αναλύθηκε στην υποενότητα 1.4, και η επίδραση των βαρυτικών πεδίων που αναλύθηκε στην προηγούμενη υποενότητα 2.2 για την επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων, στη λήψη των δεδομένων. Άρα, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τους δύο παράγοντες, στους υπολογισμούς της λήψης δεδομένων από το σύστημα GPS. Οι δορυφόροι φέρουν ατομικά ρολόγια τα οποία βρίσκονται σε επικοινωνία με το έδαφος. Έτσι, σε περιπτώσεις απωλειών ακρίβειας είναι δυνατόν να τροφοδοτηθούν με διορθώσεις, από το έδαφος. Ο τρόπος λειτουργίας του GPS δορυφόρου, στηρίζεται στην αποστολή δεδομένων, σύμφωνα με το οποίο εκπέμπει σήματα κωδικοποιημένα που φέρουν το χρόνο αποστολής του σήματος,  $t_e$  και τη θέση του δορυφόρου. Ο δέκτης όταν λαμβάνει τα σήμα του δορυφόρου γνωρίζει ότι η λήψη των δεδομένων έγινε σε χρόνο  $t_i$  και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε γνωρίζοντας τη διαφορά του χρόνου, και μέσω της διαφοράς του χρόνου, μπορούμε να προσδώσουμε μια ακτίνα στην οποία βρισκόμαστε, και άρα βρισκόμαστε μέσα σε μια σφαίρα που δημιουργείται απ' αυτή τη διαφορά.

Ακολουθώντας, μέσω της σχέσης  $u=x/t$  [m/s]  $\Rightarrow x = ut$  [(m/s)\*s]  $\Rightarrow dx = c\Delta t$  σχέση(2.3.1), και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σφαίρα χώρου εντός της οποίας βρισκόμαστε. Όμως, για να προσδιορίσουμε την ακριβή θέση δεν αρκεί ένας δορυφόρος γιατί τότε πρέπει να αρκεστούμε στο περίπου για τη θέση που βρισκόμαστε, αφού μόνο μια σφαίρα χώρου μπορούμε να γνωρίζουμε. Έτσι, για να φτάσουμε στον προσδιορισμό της ακριβούς θέσης στο έδαφος, πρέπει να έχουμε ένα σημείο στη σφαίρα που να το προσδιορίζουμε με κάποιο τρόπο, αυτό μπορεί να επιτευχθεί μαθηματικώς με ένα σημείο τομής, και αυτό είναι εφικτό μέσω ενός δεύτερου δορυφόρου. Δηλαδή, πρέπει να σχηματίζεται ένα σημείο τομής μεταξύ των δύο σφαιρών που σχηματίζουν οι δύο δορυφόροι. Έτσι, με το σημείο τομής είναι εφικτός ο προσδιορισμός της θέσης. Απ' αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι για ένα έχουμε έναν προσδιορισμό της θέσης απαιτούνται τουλάχιστον δύο δορυφόροι, ενώ, με ένα δορυφόρο μπορούμε να προσδιορίσουμε μια ακτίνα εντοπισμού της θέσης.



σχήμα 2.3.1: σημείο τομής από δύο δορυφόρους

Ακολουθώντας, πέρα από αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς η διαστολή του χρόνου, και το βαρυτικό πεδίο. Άρα, μπορούμε με αυτά να προχωρήσουμε στην εξέταση της διαστολής του χρόνου σε ένα σύστημα GPS. Σε ένα επίπεδο χωροχρονικό διάγραμμα έχουμε την παγκόσμια γραμμή, για τη μελέτη της

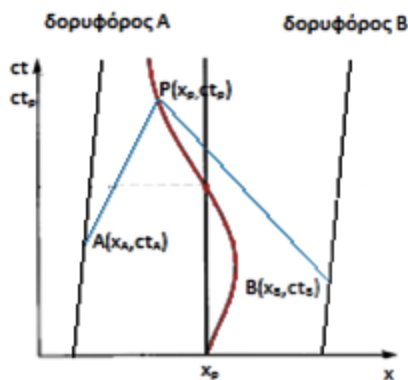
διαστολής του χρόνου, όπως αναλύθηκε στην ανάλυση χωροχρονικών διαγραμμάτων στην υποενότητα 1.2. Έχουμε τον δορυφόρο A και τον δορυφόρο B που στέλνουν σήματα, και έτσι λαμβάνουμε δύο ευθείες γραμμές που αναπαριστούν τους πομπούς, και στο σημείο P που βρίσκεται η παγκόσμια γραμμή φαίνεται για το αδρανειακό σύστημα που είναι ο δέκτης το σημείο που λαμβάνεται το σήμα, και αυτό μπορεί να είναι μόνον επί της ευθείας των 45° του κάθε δορυφόρου, γιατί σ' αυτό αντιστοιχεί η ταχύτητα του φωτός. Έτσι, λόγω των 45° έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, και έτσι το σημείο P προσδιορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις, που είναι οι εξής:

$$ct_P = \frac{1}{2}[c(t_A + t_B) + (x_B - x_A)] \quad \text{σχέση (2.3.2)}$$

και

$$x_P = \frac{1}{2}[c(t_B - t_A) + (x_B + x_A)] \quad \text{σχέση (2.3.3)}$$

Έτσι, είναι εφικτός ο προσδιορισμός του σημείου  $(x_P, ct_P)$ , και προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα που είναι το εξής:



σχήμα 2.3.2: κοσμική γραμμή και προσδιορισμός του σημείου τομής

Το σήμα του πομπού επηρεάζεται από τη διαστολή του χρόνου σύμφωνα με την υποενότητα 1.4 και τη σχέση (1.4.6), και από το βαρυτικό πεδίο σύμφωνα με την υποενότητα 2.3, με αποτέλεσμα να λαμβάνει τα σήματα σε χρονικά διαστήματα με  $\Delta t$  μικρότερο, άρα πιο τακτά χρονικά διαστήματα. Έτσι, αρχικά χρησιμοποιούμε τη

Νευτώνεια μηχανική για τον προσδιορισμό του σήματος, σύμφωνα με τη σχέση (2.2.15), και ακολούθως προχωράμε με βάση το συντελεστή του  $\Phi$ , στην υποενότητα 2.2, και ο όρος που διαμορφώνει αυτή τη διόρθωση είναι το κλάσμα  $1/c^2$ , και έτσι έχουμε τις παρακάτω σχέσεις, που είναι οι εξής:

$$\text{διόρθωση για τη διαστολή του χρόνου} = \frac{1}{2} \left( \frac{V}{c} \right)^2$$

$$\text{διόρθωση για το βαρυτικό πεδίο} = GM/c^2 R^2$$

Ενώ, η σχέση  $GM/R^2 = u^2/R$ , αποτελεί τη Νευτώνεια εξίσωση με βάση την οποία γίνονται οι διορθώσεις από τη διαστολή του χρόνου της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, και της επίδρασης των βαρυτικών δυνάμεων, από την αρχή της ισοτιμίας του Einstein, και κατ' επέκταση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Με βάση τις θεωρήσεις από τα GPS, μπορούμε να εξάγουμε πιο εύκολα συμπεράσματα για το θέμα της καμπυλότητας του χωροχρόνου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέτρηση της απόστασης ανάμεσα στο Παρίσι και το Μόντρεαλ, σε σχέση με την απόσταση Λάγος και Μπογκοτά, ενώ μετρώντας τα σε επίπεδη επιφάνεια, όπως σε ένα χάρτη με ένα χάρακα προκύπτει ότι η απόσταση τους είναι ίδια, όμως παρατηρήθηκε ότι το ταξίδι με αεροπλάνο έδειξε ότι η απόσταση Παρίσι Μόντρεαλ είναι μικρότερη, δεχόμενοι την καμπυλότητα της Γης, ενώ το ίδιο συμβαίνει εν γένει με τη καμπυλότητα του χώρου. Αυτή η θεώρηση αποτελεί και την κεντρική ιδέα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

#### 2.4 Νευτώνεια βαρύτητα σε χωροχρονικούς όρους

Η γεωμετρία που αναπτύσσεται στον κοίλο χωροχρόνο είναι συνάρτηση της σχέσης (1.5.5), της σχέσης (2.2.11), και της σχέσης (2.2.12), που είναι οι εξής:

$$(ds)^2 = -(cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

και

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} (1 + \Phi/c^2) \quad \text{και} \quad \Delta\tau_{\text{δέκτη}} = (\Delta\tau_{\text{πομπού}} - \Phi/c^2)$$

Έτσι, από το συνδυασμό των δύο αυτών σχέσεων έχουμε ότι:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 (cdt)^2 + \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad \text{σχέση (2.4.1)}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.4.1) χρησιμοποιώντας την μαθηματική ταυτότητα  $(1+x)^a \approx (1+ax)$ , προκύπτει ότι:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad \text{σχέση (2.4.2)}$$

Εν προκειμένω, δηλαδή, έχουμε έναν συνδυασμό, σύμφωνα με τον οποίο συμπεριλαμβάνεται η επίδραση του βαρυτικού πεδίου, και η διαστολή του χρόνου. Στο χρόνο επειδή έχουμε αρνητικό πρόσημο, θεωρούμε ότι λειτουργεί ως πομπός, ενώ οι τρεις διαστάσεις ως δέκτης, αυτό φαίνεται από το πρόσημο του  $\Phi$ , και τον τρόπο που επιδρά ο βαρυτικός συντελεστής στη διαστολή του χρόνου, σ' αυτή τη γεωμετρική σχέση. Η σχέση (2.4.2) καλείται ως αδύναμο μετρικό πεδίο, και παρατηρείται μέσω αυτής ο γεωμετρικός επηρεασμός του χωροχρόνου, λόγω της διαστολής του χρόνου, και του βαρυτικού πεδίου. Την ονομασία αδύναμο μετρικό πεδίο την πήρε επειδή κυρίως προβλέπεται στη γενική θεωρία της σχετικότητας, όπου, περιγράφει μικρές καμπυλότητες. Αυτός είναι ο λόγος που καλείται στατικό και αδύναμο πεδίο, γιατί περιγράφει αυτή τη καμπυλότητα, και βρίσκει εξαιρετική εφαρμογή στον καμπύλο χωροχρόνο του Ήλιου, αλλά και της τροχιακής πορείας των πλανητών, με χαρακτηριστική περίπτωση να αποτελεί αυτή του Ερμή. Έτσι, με βάση αυτά μπορούμε να προσδιορίσουμε τιμές εκπομπής και λήψης σημάτων. Η διαφορά μεταξύ των τιμών των σημάτων που εκπέμπονται και λαμβάνονται μπορεί να

εξηγηθεί από την εξίσωση της σχέσης (2.4.2). Επίσης, από τη σχέση (1.3.1) έχουμε

ότι  $d^2\tau = -d^2s/c^2$ , και από τη σχέση (1.4.6) έχουμε ότι  $d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}$ , και

επομένως, θεωρώντας ότι  $dx = dy = dz = 0$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.2)

προκύπτει ότι:

$$d^2\tau = -d^2s/c^2 = - \{ - (1+2\Phi/c^2) (cdt)^2 / c^2 + (1-2\Phi/c^2) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] / c^2 \} \Rightarrow$$

$$(d\tau)^2 = (1+2\Phi/c^2) (cdt)^2/c^2 \Rightarrow (d\tau)^2 = (1+2\Phi/c^2) (dt)^2 \Rightarrow$$

$$d\tau = (1+2\Phi/c^2)^{1/2} dt \Rightarrow d\tau = (1+2\Phi/2c^2) dt \Rightarrow$$

$$d\tau = (1+\Phi/c^2) dt \quad \text{σχέση (2.4.3)}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$d\tau_A = (1+\Phi_A/c^2) dt \quad \text{σχέση (2.4.4)}$$

και

$$d\tau_B = (1+\Phi_B/c^2) dt \quad \text{σχέση (2.4.5)}$$

Άρα, από τις σχέσεις (2.4.4) και (2.4.5), προκύπτει ότι:

$$d\tau_A = (1+\Phi_A/c^2) d\tau_B / (1+\Phi_B/c^2) \Rightarrow d\tau_A(1+\Phi_B/c^2) = (1+\Phi_A/c^2) d\tau_B \Rightarrow$$

$$d\tau_A / d\tau_B = (1+\Phi_A/c^2) / (1+\Phi_B/c^2) \Rightarrow d\tau_A / d\tau_B = (1+\Phi_A/c^2) * (1+\Phi_B/c^2)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\tau_A / d\tau_B = (1+\Phi_A/c^2) * (1+\Phi_B/c^2)^{-1} \Rightarrow d\tau_A / d\tau_B = (1+\Phi_A/c^2) * (1-\Phi_B/c^2)^{-1} \Rightarrow$$

$$d\tau_A / d\tau_B = 1 + \Phi_A/c^2 - \Phi_B/c^2 - (\Phi_A/c^2) (\Phi_B/c^2) \Rightarrow$$

$$d\tau_A / d\tau_B = 1 + (\Phi_A/c^2) - (\Phi_B/c^2), \text{ όπου, } \Phi_A\Phi_B/c^4 \approx 0$$

Επομένως, με βάση τον τύπο του μετρικού αδύναμου πεδίου, καταλήγουμε στη μορφή, που είναι η εξής:

$$d\tau_A = [1 + (\Phi_A - \Phi_B)/c^2] d\tau_B \quad \text{σχέση (2.4.6)}$$

Επίσης, από τη σχέση (2.4.6), χρησιμοποιώντας την ταυτοτική σχέση  $(1+x)^a = (1+ax)$ , έχουμε ότι:

$$d\tau_A / d\tau_B = [1 + (\Phi_A - \Phi_B)/c^2] \Rightarrow d\tau_B / d\tau_A = 1 / [1 + (\Phi_A - \Phi_B)/c^2] \Rightarrow$$

$$d\tau_B / d\tau_A = [1 + (\Phi_A - \Phi_B)/c^2]^{-1} \Rightarrow$$

$$d\tau_B / d\tau_A = 1 - (\Phi_A - \Phi_B)/c^2 \Rightarrow$$

$$d\tau_B / d\tau_A = 1 + (\Phi_B - \Phi_A)/c^2 \Rightarrow$$

$$d\tau_B = [1 + (\Phi_B - \Phi_A)/c^2] d\tau_A \quad \text{σχέση (2.4.7)}$$

Οι διορθώσεις με βάση τη μετρική αδύναμου πεδίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 2.4.1: επίδραση του μετρικού αδύναμου πεδίου

Πρέπει να σημειωθεί ότι στο παραπάνω διάγραμμα θεωρήσαμε το  $c = 1$ . Έτσι με βάση τα προαναφερθέντα μπορούμε να προβούμε σε εξήγηση της Νευτώνειας κίνησης με χωροχρονικούς όρους. Έτσι, ενώ στη σχέση (1.4.2) δείξαμε τον κατάλληλο χρόνο  $\Delta\tau$ , αντί του  $\Delta t$ , με βάση το οποίο σχηματίζεται η κοσμική γραμμή, που διαμορφώνει τον επίπεδο χωροχρόνο, έτσι και εδώ πρέπει να δείξουμε ότι η καμπυλότητα του χώρου υφίσταται μέσω του προσδιορισμού του  $\Delta\tau$ , για την περίπτωση όχι της διαστολής του χρόνου με βάση την ειδική θεωρία της σχετικότητας, αλλά με βάση την επίδραση του ασθενούς (αδύνατου) μετρικού πεδίου. Έτσι, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.2), αντί της σχέσης (1.4.1), και της σχέσης (1.3.1), προκύπτει ότι:



$$d^2\tau = -ds^2/c^2 \Rightarrow \tau^2 = \int (-\frac{ds^2}{c^2}) \Rightarrow \tau = \int (-\frac{ds^2}{c^2})^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \right\}^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \right\}^{1/2}$$

σχέση (2.4.8)

Το άθροισμα  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ , αποτελεί την ταχύτητα, λαμβάνοντας υπόψη και τις τρεις διαστάσεις, σύμφωνα με τη σχέση  $u = x/t$  [m/s]  $\Rightarrow du = dx / dt$ , και έτσι έχουμε ότι  $\vec{u} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ . Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \vec{u} \right\}^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \vec{u} + \frac{2\Phi}{c^4} \vec{u} \right\}^{1/2}, \text{ όπου } \frac{2\Phi}{c^4} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left[ \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \vec{u} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{1}{c^2} \vec{u}\right)^{1/2} \quad \text{σχέση (2.4.9)}$$

Εφαρμόζοντας την ταυτοτική σχέση  $(1+x)^a = (1+ax)$ , στην εξίσωση (2.4.9), προκύπτει ότι ο κατάλληλος χρόνος ανάμεσα στα σημεία Α και Β είναι ο εξής

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left[1 - \frac{1}{c^2} (\vec{u} - 2\Phi)\right]^{1/2}$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left[1 - \frac{1}{2c^2} (\vec{u} - 2\Phi)\right] \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{u}}{2} - 2\frac{\Phi}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B dt \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{u}}{2} - \Phi\right)\right] \quad \text{σχέση (2.4.10)}$$

Επίσης, η εξίσωση της σχέσης (2.4.10) μπορεί να πάρει και τη μορφή που είναι η εξής:

$$d\tau_{AB} = dt \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{u}}{2} - \Phi\right)\right] \quad \text{σχέση (2.4.11)}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.4.10) είναι εφικτή η κατασκευή της γραμμής για την περίπτωση των μετρικά ασθενών πεδίων, στα οποία λαμβάνεται υπόψη η διαστολή του χρόνου και το βαρυτικό πεδίο, γιατί αφορά την εξέταση της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου στα συγκεκριμένα ζητήματα και όχι αποκλειστικά το ζήτημα της διαστολής του χρόνου στην ταχύτητα του φωτός, όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 1.4. Έτσι, παρακάτω μπορούμε να παραθέσουμε τη σχέση για τη κοσμική γραμμή και του ασθενούς μετρικού πεδίου, και είναι οι εξής:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} - \text{κοσμική γραμμή διαστολής του χρόνου} \quad \text{σχέση (1.4.6)}$$

και

$$d\tau_{AB} = dt \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\vec{u}}{2} - \Phi \right) \right] - \text{ασθενές μετρικό πεδίο} \quad \text{σχέση (2.4.11)}$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε καμπύλωση του χωροχρόνου, στην εξίσωση που περιγράφεται από τη σχέση (1.4.6) αυτό που συμβαίνει είναι η καμπύλωση του χωροχρόνου, λόγω της διαστολής του χρόνου, μέσω της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein, και στη δεύτερη εξίσωση αυτό που περιγράφεται είναι η επίδραση του βαρυτικού πεδίου και της διαστολής του χρόνου. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η καμπύλωση του χωροχρόνου είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης του φωτός, αλλά και των βαρυτικών πεδίων.

### Ενότητα 3

### Ενότητα 3

#### 3.1 Συντεταγμένες στο χωροχρόνο και διαστολή του χρόνου σε σφαιρικές συντεταγμένες

Οι συντεταγμένες στο χωροχρόνο είναι κατά κόρον πιο εύκολο να προσδιορισθούν μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις είναι πιο εύκολο να προσδιορισθούν μέσω άλλων συντεταγμένων, όπως για παράδειγμα σφαιρικών συντεταγμένων. Έτσι, στην περίπτωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, από τη σχέση (1.2.2), έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + d^2x + d^2y + d^2z \quad \text{σχέση (1.2.2)}$$

Επίσης, έχουμε τις σχέσεις που αφορούν τη μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων σε σφαιρικές, και είναι οι εξής:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \quad \text{σχέση (3.1.1)}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \quad \text{σχέση (3.1.2)}$$

$$z = r \cos\theta \quad \text{σχέση (3.1.3)}$$

Επομένως, με βάση τις σχέσεις (1.2.2), (3.1.1), και (3.1.3) προκύπτει η μετατροπή που είναι η εξής:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \Rightarrow dx = dr \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta d\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi d\varphi \quad \text{σχέση (3.1.4)}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \Rightarrow dy = dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi d\varphi \quad \text{σχέση (3.1.5)}$$

$$z = r \cos\theta \Rightarrow dz = dr \cos\theta - r \sin\theta d\theta \quad \text{σχέση (3.1.6)}$$

Άρα, προκύπτει από τις σχέσεις (3.1.4), (3.1.5), και (3.1.6) ότι:

$$dx^2 = [(dr \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta d\theta \cos\varphi) - r \sin\theta \sin\varphi d\varphi]^2 \Rightarrow$$

$$dx^2 = (dr \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta d\theta \cos\varphi)^2 + (r \sin\theta \sin\varphi d\varphi)^2 - 2 (dr \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta d\theta \cos\varphi) r \sin\theta \sin\varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$dx^2 = (dr \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta d\theta \cos\varphi)^2 + (r \sin\theta \sin\varphi d\varphi)^2 - 2 (r dr \sin\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi d\varphi) \Rightarrow$$

$$dx^2 = (dr \sin\theta \cos\varphi)^2 + (r \cos\theta d\theta \cos\varphi)^2 + 2 dr \sin\theta \cos\varphi r \cos\theta d\theta \cos\varphi + (r \sin\theta \sin\varphi d\varphi)^2 - 2 (r dr \sin\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi d\varphi) \Rightarrow$$

$$dx^2 = (dr \sin\theta \cos\varphi)^2 + (r \cos\theta d\theta \cos\varphi)^2 + 2 r dr \sin\theta \cos\varphi^2 \cos\theta d\theta + (r \sin\theta \sin\varphi d\varphi)^2 - 2 (r dr \sin\theta^2 \cos\varphi \sin\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi d\varphi) \quad \text{σχέση (3.1.7)}$$

$$dy^2 = [(dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi) + r \sin\theta \cos\varphi d\varphi]^2 \Rightarrow$$

$$dy^2 = (dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi)^2 + (r \sin\theta \cos\varphi d\varphi)^2 \Rightarrow$$

$$dy^2 = (dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi)^2 + (r \sin\theta \cos\varphi d\varphi)^2 + 2(dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi) (r \sin\theta \cos\varphi d\varphi) \Rightarrow$$

$$dy^2 = (dr \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi)^2 + (r \sin\theta \cos\varphi d\varphi)^2 + 2 (dr \sin\theta \sin\varphi r \sin\theta \cos\varphi d\varphi + r \cos\theta d\theta \sin\varphi r \sin\theta \cos\varphi d\varphi) \Rightarrow$$

$$dy^2 = (dr \sin\theta \sin\varphi)^2 + (r \cos\theta d\theta \sin\varphi)^2 + 2 dr \sin\theta \sin\varphi r \cos\theta d\theta \sin\varphi + 2 (r dr \sin\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi d\varphi) \Rightarrow$$

$$dy^2 = (dr \sin\theta \sin\varphi)^2 + (r \cos\theta d\theta \sin\varphi)^2 + 2 r dr \sin\theta \sin\varphi^2 \cos\theta d\theta + (r \sin\theta \cos\varphi d\varphi)^2 + 2 (r dr \sin\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi d\varphi) \quad \text{σχέση (3.1.8)}$$

$$dz^2 = (dr \cos\theta - r \sin\theta d\theta)^2 \Rightarrow$$

$$dz^2 = (dr \cos\theta)^2 + (r \sin\theta d\theta)^2 - 2 r dr \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \text{σχέση (3.1.9)}$$

Επομένως, από το άθροισμα κατά μέλη της εξίσωσης (3.1.7) και (3.1.8) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 &= (dr \sin\theta)^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) + (r \cos\theta d\theta)^2 (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) + 2 r dr \sin\theta \cos\theta \\
 & d\theta (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) + (r \sin\theta d\varphi)^2 (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) + 2 [(r dr \sin\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + r^2 \\
 & \cos\theta d\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi d\varphi) - (r dr \sin\theta^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + r^2 \cos\theta d\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\varphi d\varphi)] \\
 \Rightarrow dx^2 + dy^2 &= (dr \sin\theta)^2 * 1 + (r \cos\theta d\theta)^2 * 1 + 2 r dr \sin\theta \cos\theta d\theta * 1 + (r \sin\theta d\varphi)^2 \\
 & * 1 + 2 * 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$dx^2 + dy^2 = (dr \sin\theta)^2 + (r \cos\theta d\theta)^2 + 2 r dr \sin\theta \cos\theta d\theta + (r \sin\theta d\varphi)^2$$

σχέση (3.1.10)

Επομένως, από τη σχέση (3.1.9) και τη σχέση (3.1.10), προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (dr \sin\theta)^2 + (r \cos\theta d\theta)^2 + 2 r dr \sin\theta \cos\theta d\theta + (r \sin\theta d\varphi)^2 + (dr \\
 & \cos\theta)^2 + (r \sin\theta d\theta)^2 - 2 r dr \cos\theta \sin\theta d\theta \Rightarrow \\
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2 d\theta^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2 r dr \sin\theta \cos\theta d\theta - 2 r dr \\
 & \sin\theta \cos\theta d\theta + (r \sin\theta d\varphi)^2 \Rightarrow \\
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 * 1 + r^2 d\theta^2 * 1 + (r \sin\theta d\varphi)^2 \Rightarrow \\
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin\theta d\varphi)^2
 \end{aligned}$$

σχέση (3.1.11)

Έτσι, με βάση τη σχέση (1.2.2), όπως προέκυψε από την υποενότητα 1.2, και τη σχέση (3.1.11), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= -(cdt)^2 + d^2x + d^2y + d^2z \Rightarrow \\
 (ds)^2 &= -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin\theta d\varphi)^2
 \end{aligned}$$

σχέση (3.1.12)

Επομένως, καταλήγουμε στη μορφή της γεωμετρίας του χωροχρόνου να λαμβάνει την παραπάνω μορφή, όσο αφορά τις σφαιρικές συντεταγμένες.

### 3.2 Μετρική και η σύμβαση άθροισης

Για να περιγράψουμε ένα σύστημα με βάση τη γενική γεωμετρία του χωροχρόνου πρέπει να συμπεριλάβουμε τέσσερεις συντεταγμένες  $x^a$ , ώστε να είναι εφικτό να προσδιορίσουμε τα σημεία, και να προσδώσουμε τη θέση της γραμμής, δίνοντας την με την απόσταση  $ds^2$ , η οποία βρίσκεται μεταξύ ξεχωριστών σημείων από διαστάσεις συντεταγμένων  $dx^a$ . Έτσι, η απόσταση αυτή δίνεται από τη σχέση που είναι η εξής:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Όσο αφορά την περίπτωση των πολικών συντεταγμένων το  $g_{\alpha\beta}$  εκφράζει τις πολικές συντεταγμένες σε μια μετρική που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης επί ενός συστήματος συντεταγμένων ενός χωροχρονικού συστήματος, όπως για παράδειγμα το σχήμα 1.2.1, της υποενότητας 1.2. Στην περίπτωση της σχέσης (3.1.12) που έχουμε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων, η  $g_{\alpha\beta}$ , που καλείται και μετρική χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων μέσω ενός πίνακα, που εν προκειμένω είναι ο εξής:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2(\sin\theta)^2 \end{pmatrix} \quad \text{πίνακας (3.2.1)}$$

Η μετρική  $g_{\alpha\beta}$ , αποτελεί τα στοιχεία εκείνα της εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (3.1.12), που είναι η εξής:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin\theta d\phi)^2 \quad \text{σχέση (3.1.12)}$$

Έτσι, μέσω του μετρικού μπορεί να δοθούν τα στοιχεία της γεωμετρίας του χωροχρόνου, μέσω της μορφής πίνακα. Ενώ, η μετρική μπορεί να πάρει και τη μορφή διαγωνίου, ώστε να αναπαρίσταται με πιο συμπαγή μορφή που είναι η εξής:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} [-c, 1, r^2, r^2(\sin\theta)^2] \quad \text{διαγώνιος (3.2.1)}$$

Επομένως, για έναν πίνακα 4x4, αντιστοιχούν 16 στοιχεία, και η μετρικού μεταβάλλεται ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων. Έτσι για την περίπτωση του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, ο πίνακας προσδιορισμού των συντεταγμένων του σημείου είναι διαφορετικός, σύμφωνα με τη σχέση (1.2.2) και λαμβάνει την παρακάτω μορφή που είναι η εξής:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{πίνακας (3.2.2)}$$

Η παραπάνω μετρική αφορά τον προσδιορισμό του γεωμετρικού χώρου για το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, και παρακάτω παρατίθεται μια διαφορετική μορφή, που αφορά τη διαγώνιο, και είναι πιο συμπαγής, με τη μορφή, που είναι η εξής:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} [-c, 1,1,1] \quad \text{διαγώνιος (3.2.2)}$$

Η μετρική  $g_{\alpha\beta}$ , του πίνακα (3.2.2), και της διαγωνίου (3.2.2) δίνεται από τη σχέση (1.2.2), που παρατίθεται παρακάτω, και είναι η εξής:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (1.2.2)}$$

Η άθροιση στη μετρική υπόκειται σε κάποιους κανόνες, κυρίως όσο αφορά τους δείκτες, για τη συνεπή χρήση τους. Έτσι, έχουμε τρεις βασικούς κανόνες για τους δείκτες. Ο πρώτος κανόνας αφορά την τοποθεσία των δεικτών, με τους πάνω δείκτες να αφορούν τις συντεταγμένες και τα διανύσματα, και τους κάτω δείκτες να αφορούν τη μετρική. Ενώ πρέπει να σημειωθεί ότι οι πάνω δείκτες δεν αφορούν διάνυσμα, ή, συντεταγμένες, όταν βρίσκονται ως πάνω δείκτες στον παρανομαστή. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρείται ότι λειτουργούν ως κάτω δείκτες, δηλαδή, ως μετρική.



Επαναλαμβανόμενοι δείκτες μπορούν να λειτουργήσουν ως ζευγάρια με πάνω και κάτω δείκτη, δείχνοντας ότι πρόκειται για πρόσθεση. Οι δείκτες αυτοί που βρίσκονται σε ζευγάρια, λέγονται και δείκτες ομοιώματα, γιατί δεν έχει σημασία το γράμμα του δείκτη που θα δοθεί, αρκεί να είναι το ίδιο ανά ζευγάρια. Επίσης, πρέπει να επισημανθεί ότι περισσότεροι ίδιοι δείκτες με τον ίδιο συμβολισμό, δεν συνιστούν πρόσθεση, για παράδειγμα, το  $g_{\alpha\alpha}a^{\alpha}b^{\alpha}$ , δεν αποτελεί άθροιση. Ενώ τα ζευγάρια  $g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}$ , και το ομοίωμα του που μπορεί να είναι για παράδειγμα το  $g_{\gamma\delta}a^{\gamma}b^{\delta}$ , αποτελεί άθροιση. Δείκτες που δεν προστίθονται λέγονται ελεύθεροι δείκτες, επειδή είναι ανεξάρτητοι από την πράξη της πρόσθεσης. Χρησιμοποιούνται για να προσδώσουν ισορροπία σε μια εξίσωση, για παράδειγμα  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ . Εκφράζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη συμμετρία του μετρικού. Γι' αυτό στην περίπτωση που γίνει αλλαγή ενός δείκτη στη μια πλευρά της εξίσωσης, τότε ταυτόχρονα πρέπει να γίνει αλλαγή και στην άλλη πλευρά της εξίσωσης, ώστε να υποδηλώνεται η συμμετρία, του πίνακα, και εν προκειμένω του μετρικού, όπως στον πίνακα (3.2.1), και τον πίνακα (3.2.2).

### 3.3 Τοπικά αδρανειακά συστήματα

Οι σχέσεις της ταυτοτικής ισότητας σχετίζονται με τη βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό. Οι κορυφές από το κόκκινο κύμα φωτός, μπορούν να οριστούν ως μια σειρά από εκπεμπόμενα κύματα που είναι της τάξης συχνότητας του κύματος. Σύμφωνα με τη σχέση (2.2.11) και τη σχέση (2.2.12) προκύπτει ότι μπορούν να εφαρμοστούν οι σχέσεις αυτές για το βαρυτικό πεδίο, με την καμπύλωση του χωροχρόνου και για την περίπτωση της βαρυτικής μετατόπισης προς το ερυθρό. Έτσι, εν προκειμένω η σχέση για το βαρυτικό πεδίο όσο αφορά την εκπομπή και τη λήψη σημάτων μπορεί να

εφαρμοστεί και στη συγκεκριμένη περίπτωση. Σε ένα αστέρι η εκπομπή φωτός με γωνιακή συχνότητα  $\omega_*$ , θα φτάσει στον αποδέκτη με συχνότητα  $\omega_\infty$ . Επομένως, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις, όπως αναλύθηκαν στην υποενότητα 2.2, και είναι οι εξής:

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} (1 + \Delta\Phi/c^2), \text{ όπου } \Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = gh \quad \text{σχέση (2.2.11)}$$

Και τη σχέση που είναι η εξής:

$$\Delta\tau_{\text{δέκτη}} = \Delta\tau_{\text{πομπού}} (1 + \Delta\Phi/c^2), \text{ όπου } \Delta\Phi = \Phi_B - \Phi_A = gh \quad \text{σχέση (2.2.12)}$$

Άρα, για την περίπτωση (2.2.11) έχουμε ότι:

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} (1 + \Delta\Phi/c^2) \Rightarrow \frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\omega_{\text{δέκτη}} = \Delta\omega_{\text{πομπού}} \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\omega_\infty = \omega_* \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \quad \text{σχέση (3.3.1)}$$

Έχουμε ότι το βαθμωτό δυναμικό πεδίο, σύμφωνα με τη σχέση (2.2.13) τα εξής:

$$F = m a = m g \Rightarrow g = F/m = G m_1 m_2 / [m_2 (r_1^2 - r_2^2)] \Rightarrow g = G m_1 / (r_1^2) \Rightarrow$$

$$g = GM/R^2 \quad \text{σχέση (2.2.13)}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.2.11) ή τη σχέση (2.2.12) σε συνδυασμό με τη σχέση (2.2.13) προκύπτει ότι:

$$g = GM/R^2 \Rightarrow \Delta\Phi/h = GM/R^2 \Rightarrow \Delta\Phi = hGM/R^2 \Rightarrow \Delta\Phi = RGM/R^2 \Rightarrow$$

$$\Delta\Phi = GM/R \quad \text{σχέση (2.2.14)}$$

Επομένως, από τη σχέση (2.2.14) έχουμε ότι:

$$\Phi_\infty - \Phi_{\text{πεδίου}} = GM/R \Rightarrow 0 - \Phi_{\text{πεδίου}} = GM/R \Rightarrow -\Phi_{\text{πεδίου}} = GM/R \Rightarrow \Phi_{\text{πεδίου}} = -GM/R$$

$$\Rightarrow \Phi = -GM/R \quad \text{σχέση (2.2.15)}$$

Άρα, από τη σχέση (3.3.1) και τη σχέση (2.2.15), προκύπτει ότι:

$$\omega_\infty = \omega_* \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right) \quad \text{σχέση (3.3.2)}$$

Επομένως, το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η συχνότητα του δέκτη στο άπειρο είναι μικρότερη από τη συχνότητα του πομπού στο αρχικό σημείο. Η θεωρία της μετατόπισης στο ερυθρό βρίσκει εφαρμογή, από φυσικής απόψεως στους λευκούς νάνους, λόγω του συντελεστή  $-\frac{GM}{Rc^2}$ . Επομένως, ο συγκεκριμένος τύπος βρίσκει άμεση εφαρμογή σε μικρές τιμές, όπου δεν απειρίζεται, η βαρύτητα. Η σχέση (3.3.2) περιγράφεται με βάση τη μετρική από τη σχέση που είναι η εξής:

$$g_{\alpha\beta}(x_p) = n_{\alpha\beta} \quad \text{σχέση (3.3.3)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (3.3.3), και τη διαγώνιο (3.2.2) έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} = \text{diag} [-c, 1, 1, 1] \quad \text{διαγώνιος (3.3.1)}$$

Για την περίπτωση κανονικοποίησης, θεωρείται ότι το  $c = 1$ . Επομένως, προκύπτει η διαγώνιος (3.3.2) και έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} [-1, 1, 1, 1] \quad \text{διαγώνιος (3.3.2)}$$

Έτσι, με βάση τη διαγώνιο (3.3.2) και τη σχέση (3.3.3) είναι εφικτό να προσδιοριστεί στον επίπεδο χωροχρόνο η χωροχρονική γεωμετρία με συντεταγμένες  $x_p^{\alpha'}$ , όπου είναι οι συντεταγμένες για το σημείο P. Έτσι, για το σημείο P αντιστοιχούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες, σύμφωνα με τη σχέση (1.2.2), που περιγράφει τη χωροχρονική γεωμετρία του χώρου. Επομένως, έχουμε ότι η μετρική  $g_{\alpha\beta}$ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστούν νέες συντεταγμένες χρησιμοποιώντας η μετρική και να έχουμε έναν συμμετρικό πίνακα 4x4, ο οποίος μπορεί να είναι πάντοτε διαγωνοποιημένος. Οι συντεταγμένες μπορούν να τροποποιηθούν με βάση τη κανονικοποιημένη μετρική, δηλαδή για  $c = 1$ . Έτσι, έχουμε ότι για κάθε χωροχρονική γεωμετρία όσο αφορά τη σχέση (1.2.2) και τη σχέση (3.3.3) προκύπτει μια γεωμετρία που περιγράφει τη καμπυλότητα του χώρου, που αποτυπώνει τη σχέση των εκπεμπόμενων και ληφθέντων σημάτων, έχοντας ως άξονα τη καμπυλότητα του χώρου. Έτσι, προκύπτει

ότι για να μπορέσουμε να περιγράψουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του χωροχρόνου με βάση το τετραδιάνυσμα, στη μετρική πρέπει να υπάρχει ένα σημείο που να αναπαριστά. Για να γίνει εφικτός ο προσδιορισμός ενός σημείου στη μετρική με προϋποθέσεις χωροχρονικής γεωμετρίας, πρέπει να βρεθεί ένα σημείο που να το επιτρέπει, και έτσι έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta}(x_p) = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{σχέση (3.3.3)}$$

και

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = 0 \quad \text{σχέση (3.3.5)}$$

Επομένως, προκύπτει ότι όταν η παράγωγος για ένα σημείο είναι μηδέν τότε το σημείο αυτό είναι που μπορεί να ταυτιστεί ο επίπεδος χωροχρόνος για ένα μόνο σημείο, το σημείο P. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο επίπεδος χωροχρόνος, δηλαδή για το σύστημα που χρησιμοποιείται το τετραδιάνυσμα, προκύπτει ότι η σχέση που το προσδιορίζει ορίζεται από ένα σημείο, γι' αυτό και καλείται τοπικό αδρανειακό σύστημα στο σημείο P, και όχι εν γένει όπως φαίνεται από τη σχέση (1.2.2), που αφορά κάθε σημείο. Το σύστημα αυτό των εξισώσεων, που περιγράφονται από τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.5) είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί και για άλλα σημεία με τη διαφορά ότι κάθε φορά πρέπει να χρησιμοποιείται ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, πρέπει να αφορά άλλο σημείο μηδενισμού της παραγώγου, που δίνεται από τη σχέση (3.3.5).

Μια μετρική προσδιορισμού είναι αυτό που δίνεται από τις εξισώσεις που αφορούν την περίπτωση του Βόρειου πόλου και έχουμε ότι:

$$x = a\theta \cos\varphi \Rightarrow dx = -a\theta \sin\varphi d\varphi + a d\theta \cos\varphi \quad \text{σχέση (3.3.6)}$$

$$y = a\theta \sin\varphi \Rightarrow dy = a\theta \cos\varphi d\varphi + a d\theta \sin\varphi \quad \text{σχέση (3.3.7)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.3.6) και τη σχέση (3.3.7) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = dx^2 + dy^2 &\Rightarrow (-\alpha\theta \sin\varphi \, d\varphi + \alpha \, d\theta \cos\varphi)^2 + (\alpha\theta \cos\varphi \, d\varphi + \alpha \, d\theta \sin\varphi)^2 = \\
 &(\alpha\theta \sin\varphi \, d\varphi)^2 + (\alpha \, d\theta \cos\varphi)^2 - 2 \alpha^2\theta \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \cos\varphi + (\alpha\theta \cos\varphi \, d\varphi)^2 + (\alpha \, d\theta \sin\varphi)^2 + \\
 &2\alpha^2\theta \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta \sin\varphi = (\alpha\theta \, d\varphi)^2 + (\alpha\theta \, d\theta)^2
 \end{aligned}$$

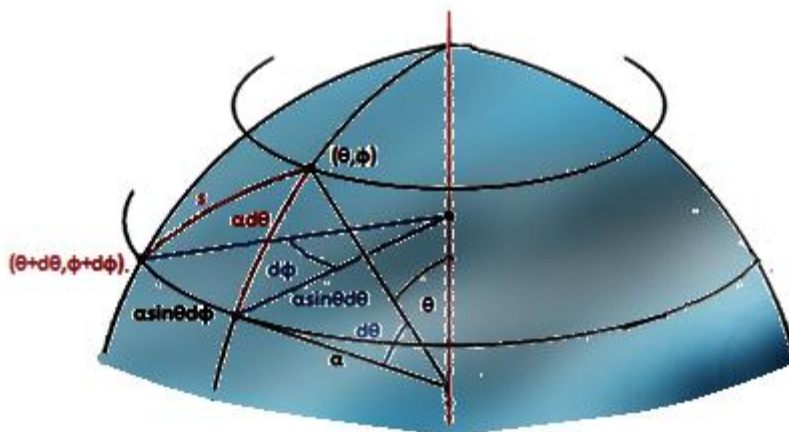
σχέση (3.3.8)

Όμως, όσο αφορά την απόσταση ανάμεσα στο σημείο  $(\theta, \varphi)$  και  $(\theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ , έχουμε την παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (\alpha d\theta)^2 + (\alpha \sin\theta d\varphi)^2 \Rightarrow \\
 ds^2 &= \alpha^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)
 \end{aligned}$$

σχέση (3.3.9)

Αυτό προκύπτει από το παρακάτω σχήμα, που είναι το εξής:



σχήμα 3.3.1: προσδιορισμός της γεωμετρίας του Βόρειου πόλου

Ο τρόπος υπολογισμού σε όλες τις περιπτώσεις γίνεται μέσω προσδιορισμού του συστήματος με βάση το οποίο μπορούμε να έχουμε το  $ds^2$ . Οι συντελεστές του αποτελούν τα στοιχεία της διαγωνίου για τη μετρική.

### 3.4 Κώνοι φωτός και κοσμικές γραμμές

Η χωροχρονική απόσταση μεταξύ ενός σημείου P στο  $x^a$  και των γειτονικών σημείων μπορεί να προσδιοριστεί μέσω ενός συστήματος, όπου δίνεται από τη σχέση (3.2.1) και έχουμε ότι, στην περίπτωση που  $ds^2 < 0$ , πραγματοποιείται χρονικός διαχωρισμός, στο  $ds^2 > 0$ , χωρικός διαχωρισμός, και στο  $ds^2 = 0$ , μηδενικός διαχωρισμός. Αυτό αναλύθηκε στην υποενότητα 1.3, μόνο που στην προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιείται η μετρική ως μια πιο συμπυκνωμένη μορφή για την αναπαράσταση των περιπτώσεων που προαναφέρθηκαν για τους κώνους φωτός. Έτσι, προκύπτει ότι η κοσμική γραμμή βάση της οποίας σχηματίζονται οι κώνοι φωτός είναι αποτέλεσμα του ολοκληρώματος γι' αυτό το διάστημα. Άρα, εν προκειμένω έχουμε ότι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B ds^2 = \int_A^B -g_{AB}(x) dx^a dx^b =$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B -g_{AB}(x) dx^a dx^b \quad \text{σχέση (3.4.1)}$$

Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη κλίση της γραμμής. Ενώ, πρέπει να αναφερθεί ότι δεν υπάρχει καμία διαφορά σε σχέση (1.4.5), που προκύπτει με βάση τη κλίση της σχέσης (1.3.1). Έτσι, στο σημείο όπου  $ds = 0$ , προκύπτει η σχέση για τη κλίση, όπως φαίνεται και από την ανάλυση στην υποενότητα 1.3. Η χρονική διάσπαση της γραμμής αφορά τα σημεία που βρίσκονται εντός του κώνου και η χωρική διάσπαση αφορά τα σημεία που βρίσκονται εκτός του κώνου. Έτσι, για να προκύψει μηδενική διάσπαση, ή, διάσπαση αναφερόμενη στη ταχύτητα του φωτός, πρέπει να διαγράφεται τροχιά που διέρχεται της επιφάνειας του κώνου. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε την ταχύτητα του φωτός. Επίσης, η σχέση (3.4.1) μπορεί να πάρει τη μορφή που είναι η εξής:

$$d\tau_{AB} = -g_{AB}(x)dx^a dx^b \quad \text{σχέση (3.4.2)}$$

Έτσι, όσο αφορά τη μορφή των κώνων φωτός περιγράφονται από τις σχέσεις που είναι οι εξής:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} \quad \text{σχέση (1.4.6)}$$

και

$$d\tau_{AB} = -g_{AB}(x)dx^a dx^b \quad \text{σχέση (3.4.2)}$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι και οι δύο παραπάνω σχέσεις περιγράφουν ακριβώς το ίδιο πράγμα με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα στην περίπτωση των κώνων φωτός μπορούμε να προσδιορίσουμε σε δύο διαστάσεις τη μορφή τους μέσω των παρακάτω σχέσεων λαμβάνοντας υπόψη και την περίπτωση της κοσμικής γραμμής. Έτσι, ας υποθέσουμε την παρακάτω μετρική, και έχουμε ότι:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = -(XdT)^2 + dX^2 \quad \text{σχέση (3.4.1)}$$

Όσο αφορά την κοσμική γραμμή, υποθέτουμε πως έχουμε ότι:

$$X(t) = A \cosh(T) \quad \text{σχέση (3.4.2)}$$

Το A αφορά μια σταθερά με διαστάσεις που αφορούν την απόσταση. Ο προσδιορισμός των κώνων φωτός γίνεται μέσω των καμπυλών με βάση την παράγωγο  $ds^2 = 0$ . Έτσι, προκύπτει ότι:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow ds^2 = -(XdT)^2 + dX^2 \Rightarrow -(XdT)^2 = dX^2 \Rightarrow dX^2/dT^2 = X \Rightarrow dX/dt = \pm X$$

$$\Rightarrow dT/dX = \pm 1/X \quad \text{σχέση (3.4.3)}$$

Επομένως, όσο αφορά το υπερβολικό συνημίτονο έχουμε ότι:

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \quad \text{σχέση (3.4.4)}$$

Άρα, για  $x = 0$ , έχουμε ότι:

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2 = (1+1)/2 = 2/2 = 1 \Rightarrow \cosh x = 1 \quad \text{σχέση (3.4.5)}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (3.4.2) και τη σχέση (3.4.5), προκύπτει ότι:

$$X(t) = A \cosh(t) \Rightarrow X(t) = A \quad \text{σχέση (3.4.6)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.4.1) και τη σχέση (3.4.6) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(XdT)^2 + dX^2 \Rightarrow ds^2 = -(AdT)^2 + dA^2 \Rightarrow ds^2 = -(AdT)^2 + dA^2 \Rightarrow \\ ds^2 &= -(AdT)^2 \quad \text{σχέση (3.4.7)} \end{aligned}$$

Επομένως, για τη κλίση σύμφωνα με τη σχέση (1.3.1) έχουμε ότι:

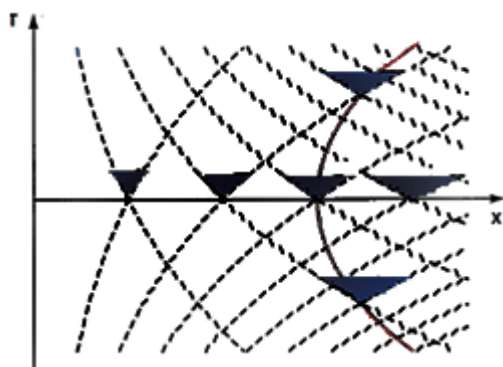
$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -ds^2/c^2, \text{ όπου } c^2=1, \text{ σύμφωνα με τη κανονικοποίηση των παραμέτρων } \Rightarrow \\ d\tau^2 &= -ds^2 \quad \text{σχέση (3.4.8)} \end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (3.4.1) και τη σχέση (3.4.8) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -ds^2 \Rightarrow d\tau^2 = -(XdT)^2 + dX^2 \Rightarrow d\tau^2 = +A^2 \cosh(T)^2 dT^2 - A^2 \sinh(T)^2 dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 [\cosh(T)^2 - \sinh(T)^2] dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 \{ [(e^x + e^{-x})/2]^2 - [(e^x - e^{-x})/2]^2 \} dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 [(e^2 + e^{-2x} + 2e^x e^{-x})/4 - (e^2 + e^{-2x} - 2e^x e^{-x})/4] dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 [(+2e^x e^{-x} + 2e^x e^{-x})/4] dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 [(4e^0)/4] dT^2 \Rightarrow \\ d\tau^2 &= A^2 dT^2 \quad \text{σχέση (3.4.9)} \end{aligned}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.4.7) και τη σχέση (3.4.9) έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα πράγμα που υποδηλώνει ότι η σχέση ανάμεσα στη μετρική και τις καρτεσιανές συντεταγμένες, της σχέσης (1.2.2) ταυτίζονται για  $x = 0$ .





σχήμα 3.4.1: γραφική παράσταση μετρικής σχέσης

Όσο αφορά τον υπολογισμό του χωροχρόνου δίνης έχουμε ότι χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες για το χωροχρόνο που είναι το τετραδιάνυσμα  $(t,x,y,z)$  και μια καμπύλη  $x = x_s(t)$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , που διέρχεται μέσα από την πηγή. Η γραμμή που προσδιορίζει τη μετρική είναι η εξής:

$$ds^2 = - dt^2 + [dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{σχέση (3.4.10)}$$

Το  $V_s(t) = dx_s(t) / dt$  και είναι η ταχύτητα που σχετίζεται με τη καμπύλη  $r_s = \{[x - x_s(t)]^2 + y^2 + z^2\}$ . Η συνάρτηση  $f(r_s)$  είναι μια απαλή θετική συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση  $f(0) = 1$ , και μειώνεται απομακρυνόμενη από την πηγή μέχρι την εξαφάνιση της για  $r_s > R$ . Όταν το  $f(r_s)$  εξαφανίζεται τότε έχουμε μια επίπεδη χωροχρονική γεωμετρία. Ενώ, όταν το  $f(r_s)$  υφίσταται τότε έχουμε μια καμπύλη.

Επομένως, προκύπτει ότι για  $ds=0$ , για  $x = 0$ , και  $y = 0$ , έχουμε ότι:

$$ds^2 = - dt^2 + [dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \Rightarrow$$

$$- dt^2 + [dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 = 0 \Rightarrow$$

$$[dx - V_s(t)f(r_s)dt]^2 = dt^2 \Rightarrow$$

$$dx = \pm dt + V_s(t)f(r_s) dt \Rightarrow$$

$$dx = [\pm 1 + V_s(t)f(r_s)] dt \Rightarrow$$

$$dx/dt = \pm 1 + V_s(t)f(r_s) \quad \text{σχέση (3.4.11)}$$

Το  $\pm$  δείχνει ότι το φως μπορεί να πορευθεί και προς τις δύο κατευθύνσεις της γεωμετρίας του χωροχρόνου. Όταν ο χωροχρόνος είναι επίπεδος τότε οι κώνοι φωτός είναι σε τροχιά  $45^\circ$ . Ενώ, στα σημεία της καμπύλης, οι κώνοι φωτός ξεπερνιούνται. Οι κώνοι φωτός χαρακτηρίζονται στην περίπτωση του χωροχρόνου δίνης, στην περίπτωση ενός διαστημοπλοίου που πορεύεται από το σταθμό Α στο σταθμό Β έχουμε ότι κατά μήκος της κοσμικής γραμμής, σε ορισμένες περιπτώσεις ταξιδεύει με ταχύτητα μεγαλύτερη απ' αυτή του φωτός, στην περίπτωση των χωροχρονικών διαγραμμάτων. Όμως, εν προκειμένω όπως φαίνεται από τη μετρική που περιγράφει η σχέση (3.4.10) προκύπτει ότι υπάρχει μια φούσκα χωροχρονική καμπύλης, που περιβάλλει το διαστημόπλοιο και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Στο εσωτερικό των κώνων φωτός υφίστανται κάποιες αιχμές, όπως περιγράφονται από την εξίσωση της σχέσης (3.4.11). Σε οποιοδήποτε σημείο η κοσμική γραμμή πορεύεται στην τροχιά του κώνου φωτός. Έτσι, το διαστημόπλοιο κινείται πάντα με ταχύτητα μικρότερη απ' αυτή του φωτός. Όμως για έναν εξωτερικό παρατηρητή, που βρίσκεται σε επίπεδη χωροχρονική γεωμετρία ταξιδεύει διαλύοντας την απόσταση μεταξύ των σταθμών της κοσμικής γραμμής σε χρόνο  $T$ , ο οποίος είναι μικρότερος από την απόσταση  $D$  μεταξύ αυτών. Όσο αφορά τους κώνους φωτός, που βρίσκονται μεταξύ των σταθμών το διαστημόπλοιο πορεύεται κατά μήκος της τροχιάς της καμπύλης  $x_s(t)$ . Η καμπύλη αυτή είναι που ενώνει τους δύο σταθμούς, μέχρι να παρέλθει χρόνος  $T < D$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που δίνει τη γραφική παράσταση του  $T$  σε σχέση με το  $D$ . Αυτό δίνει την εντύπωση ότι το διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα μεγαλύτερη απ' αυτή του φωτός. Πράγματι, η καμπυλότητα του χωροχρόνου πρέπει να έχει  $V_s(t) > 1$  σε κάποια θέση της. Έτσι όπου ο χωροχρόνος είναι επίπεδος, σ' αυτά τα σημεία το διαστημόπλοιο θα πορεύεται με ταχύτητα μεγαλύτερη απ' αυτή του

φωτός. Όμως, ο χωροχρόνος στο ενδιάμεσο δεν είναι επίπεδος. Επειδή, καμπυλότητα βρίσκεται στο εσωτερικό των κώνων φωτός, αποτέλεσμα αυτού είναι να σχηματίζονται αιχμές, που ξεπερνούν τους κώνους φωτός.

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (1.2.2) έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (1.2.2)}$$

Από τη σχέση (1.2.2) προκύπτει ότι:

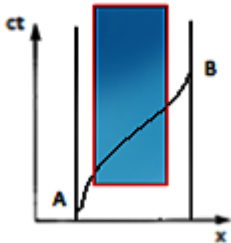
$$\begin{aligned} (ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = 0 &\Rightarrow (ds)^2 = 0 = -(cdt)^2 + (dx)^2 \Rightarrow (cdt)^2 = (dx)^2 \\ &\Rightarrow c^2 = (dx)^2 / (dt)^2, \text{ όπου με βάση τη κανονικοποίηση έχουμε ότι } c = 1 \Rightarrow \\ \pm 1 = (dx)^2 / (dt)^2 &\Rightarrow \pm 1 = dx/dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow dx/dt = \pm 1 \quad \text{σχέση (3.4.12)} \end{aligned}$$

Για τη μη κανονικοποιημένη περίπτωση από τις αμέσως προηγούμενες πράξεις φαίνεται ότι η σχέση (3.4.12), μπορεί να λάβει τη μορφή, που είναι η εξής:

$$(cdt)^2 = (dx)^2 \Rightarrow c^2(dt)^2 = (dx)^2 \Rightarrow c^2 = (dx)^2 / (dt)^2 \Rightarrow c = \pm dx / dt \quad \text{σχέση (3.4.13)}$$

Επομένως, από τη σχέση (3.4.11) και τη σχέση (3.4.12) παρατηρούμε το λόγω ύπαρξης αυτής της φούσκας στη χωροχρονική καμπυλότητα. Βλέπουμε ότι από την παράγωγο στον επίπεδο χωροχρόνο δεν υφίσταται η μεταβολή από τον όρο  $V_s(t)f(r_s)$  την σχέσης (3.4.11), πράγμα που δημιουργεί μια διακύμανση που διαμορφώνεται με βάση τις τιμές αυτού του όρου. Έτσι, από το  $\pm$ , το  $+$  υποδηλώνει ότι το φως μπορεί να διαγράψει τροχιά με πορεία προς το μέλλον και το αρνητικό πρόσημο, με πορεία προς το παρελθόν. Έτσι, έχουμε ότι όταν ο χωροχρόνος είναι επίπεδος δηλαδή ισχύει η σχέση (3.4.12), τότε οι κώνοι φωτός σχηματίζονται με βάση τις  $45^\circ$ , και έτσι είναι εφικτό το ταξίδι με την ταχύτητα του φωτός. Ενώ, από τη σχέση (3.4.11) παρατηρούμε ότι για  $V_s(t) > 1$ , έχουμε θετικές τιμές, κλίση  $dx/dt$ , μεγαλώνει μ' αποτέλεσμα να φαίνεται ότι η καμπυλότητα μεταβάλλεται και έτσι από τη σχέση

(3.4.13) και φαίνεται ότι μπορεί να λάβει τιμές μεγαλύτερες από την ταχύτητα του φωτός, γιατί λόγω αυτής της κλίσης το φως φαίνεται ότι λαμβάνει τιμές όπου το  $T < D$ , δηλαδή ελαχιστοποιείται ο χρόνος σε σχέση με την πορεία, που έχει να διανύσει.



σχήμα 3.4.2: γραφική παράσταση χωροχρονικής φούσκας

Όπως παρατηρούμε από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι σε ορισμένα σημεία της καμπύλης ξεπερνιέται η ταχύτητα του φωτός, δηλαδή,  $ds^2 > 0$ , οπότε σημειώνεται χωρική διάσπαση των σημείων, όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στην προκειμένη περίπτωση λόγω της χωροχρονικής φούσκας επειδή όμως η γραμμή δεν είναι ευθεία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ταξιδεύει με ταχύτητα μικρότερη του φωτός, επειδή εκεί υπάρχει καμπύλωση του χωροχρόνου, που είναι η χρωματισμένη περιοχή, και αυτό προκύπτει από τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, μ' αποτέλεσμα να θεωρείται ότι υπάρχει χρονική διάσπαση δηλαδή  $ds^2 < 0$ . Λόγω της σχέσης (3.4.11) και του επιπλέον όρου της σχηματίζεται μια φούσκα που μεταβάλλει τη χωροχρονική γεωμετρία που προκαλεί λόγω της καμπυλότητας της την αλλαγή των  $45^\circ$ , μ' αποτέλεσμα να μην πορεύεται πλέον με την ταχύτητα του φωτός, αλλά ούτε και με ταχύτητα μεγαλύτερη απ' αυτή, για  $T < D$ , λόγω της αλλαγής που σημειώνεται στις μοίρες της κλίσης. Η φούσκα αυτή, δηλαδή το τμήμα της γραφικής που παρουσιάζεται μια ευθεία, που βρίσκεται στο εσωτερικό των κώνων φωτός μειώνει την ταχύτητα σε τιμή μικρότερη απ' αυτήν της ταχύτητας του φωτός, όπως προαναφέρθηκε σύμφωνα και με τον όρο  $V_s(t)f(r_s)$  της σχέσης (3.4.11).

### 3.5 Απόσταση, εμβαδό, όγκος, τετραδιάστατος όγκος, και διαγωνοποιημένη μετρική

Για την περίπτωση που έχουμε μια μετρική, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις των καμπυλών, τα εμβαδά, τους όγκους τριών τιμών και τους όγκους τεσσάρων τιμών. Όσο αφορά το τις αποστάσεις των καμπυλών ήδη γνωρίζουμε πώς να τις προσδιορίσουμε μέσω του ολοκληρώματος του  $ds$ , σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1) για τη μετρική, όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 3.2. Όσο αφορά τις υπόλοιπες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την εξίσωση που δίνεται παρακάτω και είναι η εξής:

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2 \quad \text{σχέση (3.5.1)}$$

Χρησιμοποιείται κυρίως τη διαγωνοποιημένη μετρική, στο οποίο όλες οι συντεταγμένες είναι ορθογώνιες. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σταθερά το  $x_0$  και το  $x^3$ , ενώ το εμβαδόν ορίζεται από μήκη που σχηματίζουν οι συντεταγμένες, για το  $dx_1$ , και το  $dx_2$ . Οι αποστάσεις για τα δύο τμήματα είναι οι εξής:

$$dl^1 = \sqrt{g_{11}} dx^1 \quad \text{σχέση (3.5.2)}$$

και

$$dl^2 = \sqrt{g_{22}} dx^2 \quad \text{σχέση (3.5.3)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.5.2) και τη σχέση (3.5.3) είναι εφικτό να προσδιορίσουμε την απόσταση και τον όγκο εκμεταλλευόμενοι την ορθοκανονικότητα του συστήματος, οπότε έχουμε ότι:

$$dA = dl^1 dl^2 = \sqrt{g_{11}} dx^1 \sqrt{g_{22}} dx^2 = \sqrt{g_{11} g_{22}} dx^1 dx^2 =$$

$$dA = \sqrt{g_{11} g_{22}} dx^1 dx^2 \quad \text{σχέση (3.5.4)}$$

Επίσης, όσο αφορά τον προσδιορισμό του όγκου τριών τιμών, σύμφωνα με τη σχέση (3.5.2), και τη σχέση (3.5.3), έχουμε ότι:

$$dV = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{σχέση (3.5.5)}$$

Όσο αφορά τον προσδιορισμό του όγκου τεσσάρων τιμών, σύμφωνα με τη σχέση (3.5.2), και τη σχέση (3.5.3), προκύπτει ότι:

$$dV' = \sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad \text{σχέση (3.5.6)}$$

Στο τετραδιάνυσμα έχουμε ένα διάνυσμα  $\gamma$ , ώστε να προσδιορίζεται η επίπεδη χωροχρονική γεωμετρία, που με τη κοσμική γραμμή αναπαριστά τη καμπυλότητα στο χωροχρόνο. Το  $g_{\alpha\beta}$ , αναπαριστά τη μετρική, που αφορά έναν πίνακα τιμών, διαγωνοποιημένο. Για τον όγκο τεσσάρων στοιχείων μπορούμε να προσδιορίσουμε και με άλλον τρόπο τη σχέση (3.5.6), αλλά για την περίπτωση που δεν πρόκειται για διαγωνοποιημένο πίνακα, που είναι η εξής:

$$dV' = \sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}g_{44}} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \sqrt{-g} d^4x \Rightarrow$$

$$dV' = \sqrt{-g} d^4x \quad \text{σχέση (3.5.7)}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για παράδειγμα στην περίπτωση της σφαίρας, η επιφάνεια, ο όγκος, προσδιορίζονται εφόσον γνωρίζουμε τη σχέση για τον επίπεδο χωροχρόνο σε πολικές συντεταγμένες, όπως προκύπτει από τη σχέση (3.3.9), και το σχήμα (3.3.1), και έχουμε ότι:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (3.3.9)}$$

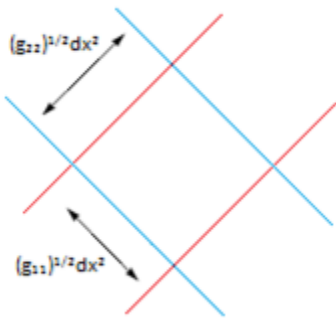
Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (3.3.9) και τη σχέση (3.5.4), προκύπτει ότι:

$$dA = \sqrt{r^2} d\theta \sqrt{\sin^2\theta} d\phi \Rightarrow$$

$$dA = \sqrt{r^2 \sin^2\theta} d\theta d\phi \Rightarrow$$

$$dA = r \sin\theta d\theta d\phi \quad \text{σχέση (3.3.10)}$$

Ο υπολογισμός των αποστάσεων στη μετρική φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου επειδή γίνεται με τη χρήση δύο διαστάσεων οι άλλες δύο παράμετροι χρησιμοποιούνται ως σταθερές, γιατί εν προκειμένω στην σχέση (3.3.10) έγινε προσδιορισμός του εμβαδού, άρα χρειάζονται δύο διαστάσεις. Έτσι έχουμε σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 3.5.: προσδιορισμός επιφάνειας στη μετρική.

Όσο αφορά τον προσδιορισμό του όγκου τριών τιμών, με βάση τη σχέση (3.5.6) και τη σχέση (3.3.9), έχουμε ότι:

$$dV = \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \, dr \, d\theta \, d\phi \Rightarrow$$

$$dV = r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad \text{σχέση (3.3.11)}$$

Όσο αφορά ένα παράδειγμα προσδιορισμού της απόστασης στη μετρική, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα του αστεριού που έχει σφαιρικό σχήμα, οπότε έχουμε ότι:

$$ds^2 = \left\{ \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \right\} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$s = \int ds = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} = a \sin^{-1}(R/a) \Rightarrow$$

$$s = a \sin^{-1}(R/a) \quad \text{σχέση (3.3.12)}$$

Έτσι, ο υπολογισμός της απόστασης μπορεί να γίνει με βάση το ολοκλήρωμα, όπως και στο καρτεσιανό σύστημα, έτσι και στη μετρική.

### 3.6 Ενσωματωμένα διαγράμματα και χωροχρονικές σκουληκότρυπες

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο στη μετρική είναι εφικτό να προσδιοριστεί ένα ενσωματωμένο κομμάτι μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω τύπο που είναι ο εξής:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Το  $b$  αποτελεί μια σταθερά με διαστάσεις απόστασης. Η μετρική δεν αναπαριστά ένα φυσικό χωροχρονικό σύστημα, αλλά αποτελεί μια μορφή που επιτρέπει την εισαγωγή ενσωματωμένων διαγραμμάτων. Η σχέση (3.6.1) είναι όμοιο με τη μετρική ενός συστήματος επίπεδης χωροχρονικής γεωμετρίας, γραμμένο σε πολικές συντεταγμένες, διαθέτοντας ιδιότητες της επίπεδης αυτής χωροχρονικής γεωμετρίας. Ενώ, πρέπει να σημειωθεί ότι είναι ανεξάρτητο του χρόνου  $t$ . Παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία επειδή η επιφάνεια που σχηματίζεται μέσω μιας σταθεράς  $r$  και  $t$  έχει τη γεωμετρία μιας σφαίρας. Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (3.1.12) έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin\theta d\phi)^2 \quad \text{σχέση (3.1.12)}$$

Επομένως, τροποποιώντας λίγο τη σχέση (3.1.12) και χρησιμοποιώντας κάποιες παραμέτρους ως σταθερές έχουμε τη σχέση (3.6.1). Η σχέση (3.6.1) αποτελεί μια τομή της επιφάνειας με γεωμετρία που προσδιορίζεται, χρησιμοποιώντας το χρόνο  $t$ , ως σταθερά. Έτσι, για την περίπτωση που το  $t$  θεωρείται ως σταθερά ότι, επειδή τη μετρική είναι ανεξάρτητο του χρόνου, η χωρική μετρική είναι σφαιρικά συμμετρικό, και αποτέλεσμα αυτού είναι να μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας δύο φέτες δυοδιάστατες με μια σταθερή γωνία. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η γωνία αυτή είναι  $\theta = \pi/2$ , η ισοδύναμη φέτα έχει γεωμετρία που είναι η εξής:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \Rightarrow$$



$$ds^2 = -0 + dr^2 + (b^2 + r^2) [d(\pi/2)^2 + \sin^2(\pi/2)d\phi^2] \Rightarrow$$

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2) [0 + 1*d\phi^2] \Rightarrow$$

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2) d\phi^2 \quad \text{σχέση (3.6.2)}$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω παρατηρείται ότι κάθε σφαιρική συμμετρία μπορεί να εισαγάγει την ιδιότητα ότι κάθε σταθερή γωνία φέτας έχει την ίδια γεωμετρία. Η γεωμετρία αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με δύο διαστάσεων επιφάνεια ενσωματωμένη σε τριών διαστάσεων επίπεδη επιφάνεια. Η μετρική της σχέσης (3.1.13) αποτελεί δύο διαστάσεων φέτας  $r$ - $\phi$ , που έχει κληρονομήσει την περιστροφική συμμετρία από τη σφαιρική συμμετρία του χωροχρόνου που δίνεται από τη σχέση (3.1.12). Μπορεί να εισαχθεί η φέτα σε ένα σύστημα που αφορά επιφάνεια συμμετρικών αξόνων που είναι τριών διαστάσεων επίπεδου χώρου. Όχι χωροχρόνου γιατί το χρόνο τον λάβαμε ως σταθερά στη μετρική. Κάτι τέτοιο, μπορεί να γίνει εισάγοντας ένα σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι  $(\rho, \psi, z)$  βασισμένες στον άξονα  $z$ . Η συντεταγμένη  $\rho$  είναι η απόσταση από τον άξονα  $\psi$ , που αφορά την πολική γωνία γύρω από τον άξονα  $z$ . Το  $z$  αποτελεί την απόσταση κατά μήκος του άξονα. Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα τη μετρική σε ένα επίπεδο χώρο σ' αυτές τις συντεταγμένες είναι ο εξής:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 \quad \text{σχέση (3.6.3)}$$

Επομένως, η επιφάνεια στον επίπεδο χώρο μπορεί να προσδιοριστεί δίνοντας της ύψος πάνω από το επίπεδο  $z = 0$ , για κάθε σημείο σ' αυτό που συνδέεται με τη σχέση  $z(r, \phi)$ . Για να γίνει εφικτή η εισαγωγή των συντεταγμένων της  $(\rho, \psi)$ , πρέπει να μπορεί προσδιοριστεί η σύνδεση αυτών με το σημείο  $(r, \phi)$ , ώστε να είναι εφικτή η

μετατροπή. Έτσι, έχουμε τις παρακάτω σχέσεις που δείχνουν τη σχέση εξάρτησης ανάμεσα στη μετρική και τις κυλινδρικές συντεταγμένες, και είναι οι εξής:

$$z = f(r, \varphi) \quad \text{σχέση (3.6.4)}$$

$$\rho = f(r, \varphi) \quad \text{σχέση (3.6.5)}$$

και

$$\psi = f(r, \varphi) \quad \text{σχέση (3.6.6)}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (3.6.4), (3.6.5), και (3.6.6), προκύπτει ότι μπορούν να απλοποιηθούν και τελούν σε σχέση εξάρτησης μόνο με μια παράμετρο γιατί στην συμμετρική επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $\psi = \varphi$ , μ' αποτέλεσμα το  $z$  και το  $\rho$  να καθίστανται ανεξάρτητα από αυτές τις γωνίες. Έτσι, έχουμε ότι:

$$z = f(r) \quad \text{σχέση (3.6.7)}$$

$$\rho = f(r) \quad \text{σχέση (3.6.8)}$$

και

$$\psi = \varphi \quad \text{σχέση (3.6.9)}$$

Αποτέλεσμα αυτών είναι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6.7), (3.6.8), και (3.6.9), σε συνδυασμό με τη σχέση (3.6.3), ότι:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\psi^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = [(d\rho/dr)^2 + (d\rho/dz)^2] dr^2 + \rho^2 d\psi^2 \quad \text{σχέση (3.6.10)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.6.2) και τη σχέση (3.6.10), προκύπτει ότι:

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2) d\varphi^2 \quad \text{σχέση (3.6.2)}$$

και

$$ds^2 = [(d\rho/dr)^2 + (d\rho/dz)^2] dr^2 + \rho^2 d\psi^2 \quad \text{σχέση (3.6.10)}$$

Έτσι, με βάση τις δύο παραπάνω σχέσεις συγκρίνοντας τις παρατηρούμε ότι για να φτάσουμε στην ίδια μορφή, ώστε να ταυτίζονται μεταξύ τους πρέπει να κάνουμε τις παραδοχές που είναι οι εξής:

$$(dz/dr)^2 + (dp/dr)^2 = 1 \quad \text{σχέση (3.6.11)}$$

και

$$\rho^2 = b^2 + r^2 \quad \text{σχέση (3.6.12)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.6.11) και τη σχέση (3.6.12) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} (dz/dr)^2 + (dp/dr)^2 &= 1 \Rightarrow \\ dz^2 / dr^2 + d(b^2 + r^2)^2 / dr^2 &= 1 \Rightarrow \\ dz^2 / dr^2 &= 1 - d(b^2 + r^2)^2 / dr^2 \end{aligned} \quad \text{σχέση (3.6.13)}$$

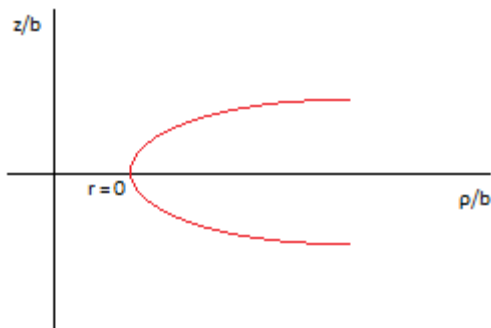
Στη συγκεκριμένη εξίσωση της σχέσης (3.6.13), επειδή είναι ελλειψοειδής μορφής αντιστοιχούν τα εξής:

$$\rho(z) = b \cosh(z/b) \quad \text{σχέση (3.6.14)}$$

και

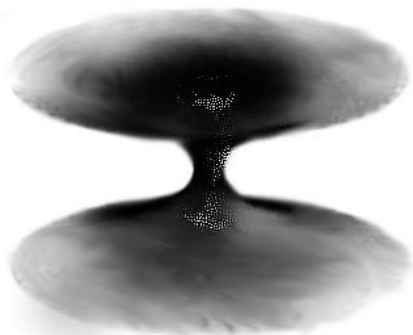
$$z(r) = b \sin^{-1}(r/b) \quad \text{σχέση (3.6.15)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (3.6.14) και τη σχέση (3.6.15), προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα, και έχουμε ότι:



σχήμα 3.6.1: ελλειψοειδής μορφή για τη χωροχρονική σκουληκότρυπα

Με βάση το παραπάνω σχήμα για την αναπαράσταση σε τριών διαστάσεων χώρο, μιας δύο διαστάσεων επιφάνειας, μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας πλήρους περιστροφής το παρακάτω σχήμα, που είναι το εξής:



σχήμα 3.6.2: χωροχρονική σκουληκότρυπα

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω φαίνεται η μετατροπή αυτή της εισαγωγής του μετρικού συστήματος των δύο διαστάσεων σε τρεις διαστάσεις επίπεδου χώρου. Ο χωροχρόνος στις σκουληκότρυπες περιγράφεται από τη γεωμετρία του σχήματος 3.6.2 και την εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (3.6.1). Περιγράφει δύο διαφορετικές ασυμπτωτικές επίπεδες περιοχές του χωροχρόνου και μπορεί να περιγραφεί ως δύο σύμπαντα. Επίσης εικάζεται ότι μια σκουληκότρυπα είναι εφικτό να συνδέει δύο περιοχές στο δική μας ασυμπτωτική περιοχή του χωροχρόνου και μια τέτοια περιοχή είναι εφικτό να περιγραφεί με ένα ενσωματωμένο διάγραμμα δύο φετών χωροχρόνου. Τα δύο άκρα της χωροχρονικής σκουληκότρυπας, που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα, δηλαδή στο σχήμα (3.6.2), δείχνουν τη σχέση ανάμεσα σ' αυτό το σχήμα της σκουληκότρυπας και των σφαιρικών περιοχών στο χωροχρόνο. Η σκουληκότρυπα αποτελείται από δύο στόμια και ένα χωροχρονικό λαιμό, που συνδέει αυτά τα δύο στόμια μεταξύ τους. Η απόσταση αυτή λόγω των δυνάμεων που αναπτύσσονται μπορεί να θεωρηθεί εξαιρετικά μικρή σε σχέση με την έννοια της απόστασης στα στόμια της χωροχρονικής σκουληκότρυπας. Έτσι, για παράδειγμα μπορεί να

αναπτυχθεί μια χωροχρονική συγκυρία στην οποία δύο διαφορετικές χωροχρονικές φέτες να μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους, κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μετάβαση από τη μία στην άλλη να είναι αστραπιαία. Έτσι, μπορεί να αναπτυχθεί μια τέτοια σχέση που συνδέει γεγονότα που σημειώνονται στο χωροχρόνο, ώστε να μπορεί θεωρηθεί ότι υφίσταται μικρότερη τιμή του χρόνου σε κάποιον που βρίσκεται στη σκουληκότρυπα σε σχέση με κάποιον που πάει να μπει σ' αυτήν. Επομένως, στην περίπτωση που ο χρόνος είναι εξαιρετικά πιο σύντομος τότε για παράδειγμα μπορεί κάποιος να πάει πίσω και να συναντήσει τον εαυτό του στην είσοδο. Εδώ, βασίστηκε και η ιδέα σύμφωνα με την οποία κάποιος μπορεί να πάει πίσω στο χρόνο και να συναντήσει τον εαυτό του. Όμως, η προστριβή σε μια τέτοια θεώρηση είναι ότι για να καταστεί κάτι τέτοιο εφικτό πρέπει να αναπτυχθούν αρνητικές διευθύνσεις ενέργειας, και σύμφωνα με τη κλασική φυσική όλες οι ενέργειες που αναπτύσσονται είναι θετικές, από τα κλασσικά πεδία. Επικαλούμενοι και τη κβαντική μηχανική προκύπτει ότι κάτι τέτοιο καθίσταται δύσκολο.

## Ενότητα 4

## Ενότητα 4

### 4.1 Γεωδαισία και γεωδαιτικές εξισώσεις

Πειραματικά και θεωρητικά ο καμπύλος χωροχρόνος μπορεί να προσδιοριστεί μέσω των στοιχειωδών σωματιδίων και των ακτίνων φωτός που διέρχονται αυτών. Ένα ελεγχόμενο σώμα μπορεί να έχει μάζα τόσο μικρή που παράγει απειροελάχιστη καμπυλότητα στο χώρο ώστε να είναι εφικτή η παρατήρηση του. Αλλά, υφίσταται επηρεασμός, από καμπυλότητες του χωροχρόνου που προέρχονται από άλλα σώματα. Για παράδειγμα στην περίπτωση ενός δορυφόρου που διαγράφει τροχιά γύρω από τη Γη, προκαλεί το ίδιο κάποια καμπύλωση του χωροχρόνου, αλλά είναι πάρα πολλή μικρή, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, σε σχέση με τη καμπύλωση του χωροχρόνου που προκαλεί η Γη. Γι' αυτό σ' αυτήν την περίπτωση δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η επίδραση της καμπύλωσης του χωροχρόνου από το δορυφόρο, διότι βρίσκεται σε σύγκριση μ' αυτήν της Γης, και δεν την παίρνουμε ως στοιχείο αλληλεπίδρασης μ' αυτήν της Γης, γι' αυτό άλλωστε και η μάζα του δορυφόρου θεωρείται ελεγχόμενη μάζα. Στη μελέτη της γεωδαισίας λαμβάνονται υπόψη μόνο στοιχειώδη σωματίδια που είναι ανεξάρτητα από την επίδραση άλλων μεγεθών, όπως για παράδειγμα της επίδρασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τα σωματίδια αυτά στη θεωρία της γενικής σχετικότητας ονομάζονται σωματίδια ελεύθερης πτώσης. Έτσι, ο όρος ελεύθερα υπονοεί τα σωματίδια ελεύθερης πτώσης, στη γενική θεωρία της σχετικότητας, γι' αυτό όταν χρησιμοποιείται ο όρος ελεύθερα εννοεί αυτό. Ο όρος αυτός λήφθηκε από τη Νευτώνεια μηχανική, όπου σύμφωνα με τη Νευτώνεια θεωρία δεν υπάρχει εστίαση στην έννοια του επηρεασμού των σωματιδίων από

οποιαδήποτε επίδραση, ακόμα και από τη βαρυτική γι' αυτό αυτός ο όρος υιοθετήθηκε από τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η διαφορά που σημειώνεται στην έννοια της γενικής θεωρίας της σχετικότητας σε σχέση με τη Νευτώνεια θεωρία, είναι ότι στη θεωρία του Einstein λαμβάνεται υπόψη η καμπυλότητα του χωροχρόνου, ενώ στη Νευτώνεια μηχανική αναφέροντας την έννοια ελεύθερο σημαίνει ότι δεν επηρεάζεται από κανένα πεδίο, ακόμα και το βαρυτικό. Έτσι, και στις δύο περιπτώσεις ο μόνος παράγοντας που λαμβάνεται υπόψη είναι αυτός του χωροχρόνου. Γι' αυτό θεωρείται ότι στη γενική θεωρία της σχετικότητας τα ελεύθερα σωματίδια στο καμπύλο χωροχρόνο λειτουργούν με ακριβώς τον ίδιο τρόπο στον επίπεδο χωροχρόνο. Η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου σωματιδίου μεταξύ δύο χρονοδιασπόμενων σημείων που κάποιο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός κώνου φωτός δείχνει τον χρόνο μεταξύ αυτών, όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 1.3. Υπάρχουν μόνο δύο διαφορές ανάμεσα στα ελεύθερα σωματίδια για τον επίπεδο χώρο, σε σχέση με τον επίπεδο χώρο, που αναπτύχθηκε στην υποενότητα 1.2. Έτσι, ο κοσμικός έλεγχος εισάγεται στα ελεύθερα σωματίδια και αφορά τα ελεύθερα σωματίδια υποδηλώνοντας ότι δεν αποτελούν τα ίδια σώματα που προκαλούν σημαντική χωροχρονική καμπύλωση του χωροχρόνου. Ο κατάλληλος χρόνος προσδιορίζεται από τη σχέση (3.4.1). Οι κοσμικές γραμμές για τα ελεύθερα σωματίδια καλούνται γεωδαιτικές γραμμές. Η αρχή της μεταβολής για ένα ελεύθερο σωματίδιο σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας μπορεί να περιληφθεί σε μια όμοια θεωρία, αυτήν της αρχής της μεταβολής για τη κίνηση ελεύθερων σωματιδίων. Αυτό φαίνεται και από την περίπτωση του δίδυμου παράδοξου που αναπτύχθηκε στην υποενότητα 1.4. Οι ευθείες γραμμές, κατά μήκος των οποίων πορεύονται τα ελεύθερα σωματίδια αποτελούν τις μέγιστες αποστάσεις σύμφωνα με τη μη Ευκλείδεια θεωρία. Η αρχή



της μεταβολής ορίζει ότι η κίνηση των σωματιδίων είναι τέτοια που δείχνει ότι ο κατάλληλος χρόνος μεταξύ δύο σημείων ορίζεται από τη κοσμική γραμμή. Έτσι, για την περίπτωση που υφίστανται δύο χρονοδιασπόμενα σημεία, δηλαδή σημεία όπου το  $ds^2 < 0$ , όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 1.3, προκύπτει ότι όλες οι χρονοδιασπόμενες κοσμικές γραμμές διέρχονται μεταξύ αυτών. Έτσι, κάθε καμπύλη θα περιγράφεται από τη σχέση (1.5.5), και με βάση αυτή θα προκύπτει ο κατάλληλος χρόνος. Έτσι, από τη σχέση (1.5.5), προκύπτει ότι:

$$(ds)^2 = - (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (1.5.5)}$$

Επίσης, έχουμε τη σχέση (1.3.1) που είναι η εξής:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow d^2\tau = - d^2s/c^2 \quad \text{σχέση (1.3.1)}$$

Επομένως από τη σχέση (1.3.1), τη σχέση (1.5.5), και κανονικοποιώντας για  $c = 1$  προκύπτει ότι:

$$d^2\tau = - d^2s/c^2 \Rightarrow d^2\tau = - d^2s \Rightarrow d\tau = (- d^2s)^{1/2} \Rightarrow$$

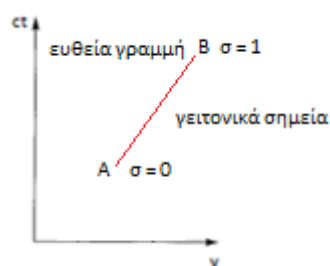
$$d\tau = (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.1)}$$

Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (1.3.2) για να μπορεί να παραμετροποιηθεί, χρησιμοποιώντας εν προκειμένω την παράμετρο  $\sigma$ , η οποία δείχνει ότι κάτι τέτοιο επιτρέπει να πάρει τιμή  $\sigma = 0$ , στο σημείο A, και τιμή  $\sigma = 1$ , στο σημείο B, για όλες τις καμπύλες των κοσμικών γραμμών που θέλουμε να συμπεριληφθούν στη συγκεκριμένη περίπτωση. Με τη χρησιμοποίηση αυτής της παραμέτρου η παραμετροποίηση της εξίσωσης μπορεί να επιτευχθεί σύμφωνα με τη σχέση που δίνεται παρακάτω, και είναι η εξής:

$$\tau_{AB} = \int_0^1 d\sigma \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.2)}$$

Με βάση αυτή τη σχέση παίρνουμε το παρακάτω σχήμα, που είναι το εξής:



σχήμα 4.1.1: ελεύθερα σωματίδια

Έτσι, παίρνουμε την εξίσωση (1.3.3) σύμφωνα με την οποία μια ευθεία γραμμή μεταξύ δύο σημείων είναι το αποτέλεσμα των σημείων σύγκρισης ανάμεσα σε γειτονικά σημεία που συνδέουν τα δύο σημεία. Από τη Νευτώνεια μηχανική έχουμε ότι η ο χώρος περιγράφεται από ένα τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων, που είναι σύμφωνα με τη κλασική φυσική το εξής:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{σχέση (4.1.3)}$$

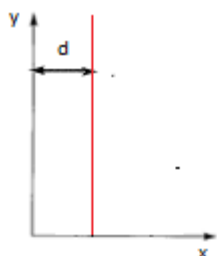
Η σχέση (4.1.2) δίνει τη μορφή για την απόσταση μεταξύ σημείων που σχηματίζουν αυτές τις αποστάσεις, δηλαδή το  $dx$ , το  $dy$ , και το  $dz$ . Αυτή η παραδοχή αποτελεί μια φυσική επέκταση ενός επίπεδου συστήματος δύο αξόνων. Εν προκειμένω έχουμε για δύο διαστάσεις το επίπεδο σχέδιο, και για τρεις διαστάσεις τον επίπεδο χώρο. Έτσι επίπεδη γεωμετρία καλείται η Ευκλείδεια γεωμετρία, που έρχεται σε αντιδιαστολή με τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, που χαρακτηρίζεται από τη καμπυλότητα, που όπως αναλύθηκε ιδιαίτερα στην υποενότητα 1.2 αποτελεί έναν τρόπο περιγραφής του τετραδιανύσματος, γι' αυτό και δεν θεωρείται επίπεδη. Έτσι, για τον ορισμό της απόστασης στο  $x$  άξονα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας μια απόσταση  $d$ , και με βάση αυτή έχουμε ότι:

$$x' = x - d \quad \text{σχέση (4.1.4)}$$

$$y' = y \quad \text{σχέση (4.1.5)}$$

$$z' = z \tag{σχέση (4.1.6)}$$

Έτσι, επειδή σημειώνεται κάποια μεταβολή στο  $x$  άξονα χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια γεωμετρία προκύπτει ότι το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



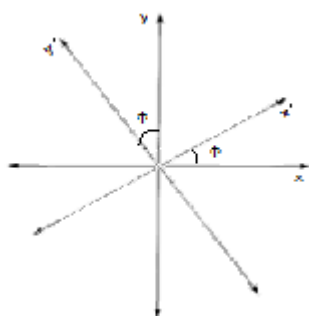
σχήμα 4.1.2: προσδιορισμός της θέσης στη Νευτώνεια μηχανική

Επίσης, όσο αφορά την περίπτωση περιστροφής έχουμε μια στροφή υπό κάποια γωνία του συστήματος συντεταγμένων σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων που αποτελεί το σύστημα αναφοράς. Το  $z$  το κρατάμε σταθερό, και η περιστροφή γίνεται στο σύστημα αξόνων  $x$  και  $y$ . Έτσι, οι εξισώσεις στην περιστροφή κατά μια γωνία  $\varphi$  είναι οι εξής:

$$x' = x(\cos\varphi) + y(\sin\varphi) \tag{σχέση (4.1.7)}$$

$$y' = x(-\sin\varphi) + y(\cos\varphi) \tag{σχέση (4.1.8)}$$

$$z' = z \tag{σχέση (4.1.9)}$$



σχήμα 4.1.3: περιστροφή κατά γωνία  $\varphi$

Έτσι, όσο αφορά τον προσδιορισμό μιας ομοιόμορφης κίνησης για την ταχύτητα, η σχέση (4.1.4), με τις άλλες δύο εξισώσεις να παραμένουν αμετάβλητες, έχουμε ότι:

$$x' = x - ut \quad \text{σχέση (4.1.10)}$$

$$y' = y \quad \text{σχέση (4.1.11)}$$

$$z' = z \quad \text{σχέση (4.1.12)}$$

Έτσι, έχουμε με βάση τη σχέση (4.1.10) ότι ενώ στην Ευκλείδεια γεωμετρία η βέλτιστη απόσταση είναι αυτή της ευθείας, στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία ισχύει ακριβώς το αντίθετο. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange σύμφωνα με την οποία, υφίσταται ο μαθηματικός τύπος που δίνει την παρακάτω ισότητα που είναι η εξής:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.13)}$$

Έτσι, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή για τη κοσμική γραμμή σύμφωνα με την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε το χρόνο για τον οποίο μια μικρή διαταραχή προκαλεί εξαφάνιση της μεταβλητής στο μειωμένο χρόνο. Σύμφωνα με τη σχέση (4.1.12) και τη σχέση (4.1.13), θεωρώντας ότι το  $x^a$ , αποτελεί τη δυναμική μεταβλητή και το  $\sigma$ , παίρνει τη θέση του χρόνου, λαμβάνουμε την παρακάτω μορφή που είναι η εξής:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^a}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^a} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.14)}$$

και

$$L = \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.15)}$$

Από τη σχέση (3.2.1) έχουμε ότι, όπως προέκυψε στην υποενότητα 3.2, είναι η εξής:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (4.1.15) και τη σχέση (3.2.1), προκύπτει ότι:

$$L = [ (\frac{dt}{d\sigma})^2 - (\frac{dx}{d\sigma})^2 - (\frac{dy}{d\sigma})^2 - (\frac{dz}{d\sigma})^2 ]^{1/2} = [ - n_{\alpha\beta} (dx^\alpha/d\sigma) (dx^\beta/d\sigma) ]^{1/2}$$

$$L = [ - n_{\alpha\beta} (dx^\alpha/d\sigma) (dx^\beta/d\sigma) ]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.16)}$$

Έτσι, γράφοντας την εξίσωση για την  $s(t)$  και τη  $\delta f$  προκύπτει ότι:

$$\delta f = \sum_{a=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^a} \delta x^a = 0 \quad \text{σχέση (4.1.17)}$$

και

$$x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t) \quad \text{σχέση (4.1.18)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (4.1.17) και τη σχέση (4.1.18) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta s[x(t)] &= \int_{t_A}^{t_B} dt L[\dot{x}(t), x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt [ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \delta \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial x(t)} \delta x(t) ] = \\ &= \delta s[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L[\dot{x}(t), x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt [ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \delta \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial x(t)} \delta x(t) ] = \end{aligned}$$

$$\delta s[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt [ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \delta \dot{x}(t) + \frac{\partial L}{\partial x(t)} \delta x(t) ] \quad \text{σχέση (4.1.19)}$$

Από τη σχέση (4.1.18), σημειώνεται επέκταση του όρου  $x(t)$  σε  $x(t) + \delta x(t)$  και από τη σχέση (4.1.19) έχουμε ότι

$$\delta s[x(t)] = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) \Big|_{t_A}^{t_B} + \int_{t_A}^{t_B} dt [ - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial x(t)} \delta x(t) ] \quad \text{σχέση (4.1.20)}$$

Ο πρώτος όρος εξαφανίζεται διότι οι τιμές στην τροχιά που συνδέει το  $x_A$  και το  $x_B$ , στο τέλος και την αρχή αυτής της πορείας εξαφανίζονται διότι  $\delta(t_B) = \delta(t_A) = 0$ .

Επομένως ο πρώτος όρος εξαφανίζεται. Επίσης, όσο αφορά τον δεύτερο όρο πρέπει και αυτός να εξαφανίζεται γιατί σύμφωνα με την εξίσωση (4.1.17) έχουμε ότι ισούται με το μηδέν, επομένως το  $\delta s[x(t)] = 0$ , γι' αυτό πρέπει να θεωρήσουμε ότι και ο δεύτερος όρος ισούται με το μηδέν. Άρα, από τη σχέση (4.1.20) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} [ - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} + \frac{\partial L}{\partial x(t)} ] \delta x(t) &= 0 \Rightarrow \\ - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)} + \frac{\partial L}{\partial x(t)} &= 0 \quad \text{σχέση (4.1.21)} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί την πορεία εκείνη που κινείται μεταξύ ενός σημείου στο χώρο σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και σε ένα άλλο σημείο στο χώρο σε διαφορετική χρονική στιγμή, επιτρέποντας να προσδιορίσουμε σε ποια σημεία η πρώτη παράγωγος εξαφανίζει τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα. Έτσι, για κάθε μικρή μεταβολή προσδιορίζεται ως το σημείο που μηδενίζεται η μεταβολή αυτή, δημιουργώντας ουσιαστικά μια ευθεία για τον τρόπο σύνδεσης δύο σημείων εξαφανίζοντας, οποιαδήποτε απόκλιση στην τροχιά αυτή, κατά τέτοιο τρόπο ώστε θεωρητικά να σχηματίζεται μια τέλεια ευθεία. Αυτή η λύση αφορά τη Νευτώνεια μηχανική, αλλά όπως φαίνεται παρακάτω επεκτείνεται και στην ειδική θεωρία της σχετικότητας για τον επίπεδο όμως χωροχρόνο, δηλαδή λόγω της εξάρτησης, του χρόνου σε καμπύλες. Έτσι, από την εξίσωση (4.1.14) για  $x = x^1$ , έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^a}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^a} \right) &= 0 = -\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} * 2 * \frac{dx}{d\sigma} \right\} + 0 \\
 \Rightarrow -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^a}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^a} \right) &= -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{2} * 2 * \frac{1}{L} * \frac{dx}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dx}{d\sigma} \right) &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{σχέση (4.1.22)}
 \end{aligned}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (4.1.22) και τη σχέση (4.1.16) έχουμε ότι:

$$L = \left[ -n_{\alpha\beta} \left( \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) \left( \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{d\tau}{d\sigma} \qquad \text{σχέση (4.1.23)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (4.1.22) και τη σχέση (4.1.23) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{dx}{d\sigma} \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{dx}{d\tau} \right) &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{σχέση (4.1.24)}
 \end{aligned}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας πάλι την εξίσωση (4.1.23), και τη σχέση (4.1.24) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.25)}$$

Επομένως, για να είναι εφικτός και ο προσδιορισμός των άλλων συντεταγμένων έχουμε ότι:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.26)}$$

Απ' αυτή τη σχέση διέπονται οι εξισώσεις της γεωδαισίας. Αυτή η εξίσωση που εκφράζεται μέσα από τη σχέση (4.1.26) που αφορά τη κίνηση του ελεύθερου σωματίδιου, και αφορά τη μετακίνηση πάνω σε ευθεία γραμμή για επίπεδο χωροχρόνο, που αποτελεί μια καμπύλωση του χωροχρόνου που, μεταφράζεται στη κοσμική γραμμή και τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία. Οι εξισώσεις της γεωδαισίας περιλαμβάνουν στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων για  $\theta = \pi/2$ , προκύπτει από τη σχέση (3.6.2) ότι:

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2) d\varphi^2 \quad \text{σχέση (3.6.2)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3.6.2) και για αυτήν την περίπτωση θεωρήσουμε ότι το  $b = 0$ , προκύπτει ότι:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad \text{σχέση (4.1.27)}$$

Από την εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (3.6.2), όσο αφορά την απόσταση μεταξύ δύο σημείων A και B, θεωρώντας ότι εφόσον παραμετροποιήσουμε ότι  $\sigma = 0$  για το αρχικό σημείο A και  $\sigma = 1$  για το τελικό σημείο B, σύμφωνα και με την παραπάνω ανάλυση, όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.6.1, έχουμε ότι:

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B (dr^2 + r^2 d\varphi^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B d\sigma \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.28)}$$

Επομένως, κατά τη σχέση (4.1.22), και τη σχέση (4.1.22) έχουμε ότι:

$$L = L\left(\frac{dr}{d\sigma} \cdot \frac{d\varphi}{d\sigma}, r\right) = \left[\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$L = \left[\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2\right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.29)}$$

Από τη σχέση (4.1.29), και τη σχέση (4.1.14) προκύπτει ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dr}{d\sigma}}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2 \frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right] + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} 2r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} 2 \frac{dr}{d\sigma}\right) + \frac{1}{L} 2r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma}\right) + \frac{1}{L} r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma}\right) + \frac{1}{L} r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma}\right) = \frac{1}{L} r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.30)}$$

Έτσι, από τη σχέση (4.1.28) προκύπτει ότι:

$$\frac{ds}{d\sigma} = L \quad \text{σχέση (4.1.31)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.1.30) και τη σχέση (4.1.31) έχουμε ότι:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{dr}{d\sigma}\right) = \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \frac{dr}{d\sigma}\right) = \frac{d\sigma}{ds} r \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d\sigma}{ds} r \left(L \frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d\sigma}{ds} r \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr}{ds}\right) \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \frac{ds}{d\sigma} = r \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr}{ds}\right) \frac{d\sigma}{ds} = r \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \Rightarrow$$



$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dr}{ds} \right) = r \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.32)}$$

Επίσης, όσο αφορά το  $L = L\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)$ , από τη σχέση (4.1.29) και τη σχέση (4.1.14),

έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d\varphi}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2 r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} 2 r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.33)}$$

Έτσι, από τη σχέση (4.1.30) προκύπτει ότι:

$$\frac{ds}{d\sigma} = L \quad \text{σχέση (4.1.34)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.1.30) και τη σχέση (4.1.31) έχουμε ότι:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d\sigma}{ds} r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$L \frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.35)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.1.32) και τη σχέση (4.1.35), προκύπτουν οι λύσεις των γεωδαιτικών εξισώσεων για τη μετρική, στην περίπτωση της σφαίρας. Έτσι, έχουμε την αντιστοίχιση ανάμεσα στις καρτεσιανές και τις πολικές συντεταγμένες για τη μετρική.

Επομένως, για τον προσδιορισμό χρονοδιάσπασης στη γεωδαισία, δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη μόνο την επίδραση της χωροχρονικής καμπύλωσης, προκύπτει ότι ο προσδιορισμός συντεταγμένων στη γεωδαισία δεν αποτελεί τίποτα άλλο από γενίκευση της θεωρίας από τη σχέση (4.1.25), σύμφωνα με την οποία γίνεται ο προσδιορισμός του χωροχρόνου για τη βέλτιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία στον επίπεδο χωροχρόνο, με τη διαφορά ότι για τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία και την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Έτσι, κατά τη μετρική, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.1), οπότε έχουμε τα εξής:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Όσο αφορά τον κατάλληλο χρόνο έχουμε ότι:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [-g(x)_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B \left[ -d\sigma^2 g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\sigma \left[ -g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.36)}$$

Από τη σχέση (4.1.13), όπως προσδιορίστηκε στα προαναφερθέντα στην ίδια υποενότητα έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.13)}$$

Επομένως από τη σχέση (4.1.13), τη σχέση (4.1.36), και την εξίσωση Lagrange που χρησιμοποιείται για την επίλυση τέτοιας μορφής προβλημάτων έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_\alpha}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \sigma} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.37)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.1.36) και τη σχέση (4.1.37), προκύπτει χρησιμοποιώντας τη Lagrange ότι:

$$L \left( \frac{dx_\alpha}{d\sigma}, x^a \right) = [g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{d\sigma} \frac{dx_\beta}{d\sigma}]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.38)}$$

Από τη σχέση (4.1.38) περιγράφονται οι γεωδαιτικές εξισώσεις με μετρική  $g_{\alpha\beta}$ . Η χωροχρονική γεωμετρία για μια σκουληκότρυπα δίνεται από τη σχέση (3.6.1) οπότε έχουμε ότι:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση Lagrange για τη χωροχρονική γεωμετρία, δηλαδή την εξίσωση (4.1.38), σε συνδυασμό με τη σχέση (3.6.1) έχουμε ότι:

$$L \left( \frac{dx^a}{d\sigma}, x^a \right) = \left\{ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.39)}$$

Η σχέση (4.1.39) αποτελεί μια σχέση βάση της οποίας μπορεί να προσδιοριστεί η γραμμή για χωροχρονική γεωμετρία της σκουληκότρυπας.

Με βάση τη σχέση (4.1.14), έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^a}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^a} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.14)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (4.1.39) και τη σχέση (4.1.14), οπότε έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right]^{-\frac{1}{2}} 2 \frac{dt}{d\sigma} \right\} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{2L} 2 \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.40)}$$

Από τη σχέση (4.1.23) και τη σχέση (4.1.40) προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{\frac{dr}{d\sigma}} \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d\sigma}{dr} \frac{dt}{d\sigma} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{dt}{dr} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$L \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dt}{dr} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dt}{dr} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.41)}$$

Επίσης, με βάση τη σχέση (4.1.39) και τη σχέση (4.1.14), έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dr}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2 \frac{dr}{d\sigma} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} 2r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{L} 2 \frac{dr}{d\sigma} \right) + \left\{ \frac{1}{2L} 2r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma} \right) + \left\{ \frac{1}{L} r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma} \right) = -\frac{1}{L} r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma} \right) = \frac{1}{L} r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{σχέση (4.1.42)}$$

Από τη σχέση (4.1.42) και τη σχέση (4.1.23), προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{L} \frac{dr}{d\sigma} \right) = \frac{1}{L} r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$L \frac{d}{d\tau} \frac{1}{L} \left( L \frac{dr}{d\tau} \right) = \frac{1}{L} L^2 r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$L \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) = L r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) = r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) = r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{σχέση (4.1.43)}$$

Επίσης, σύμφωνα με τη σχέση (4.1.33) και τη σχέση (4.1.14), έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d\varphi}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} 2 (b^2 +$$

$$r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right\} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{L} 2 (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] = 0 \Rightarrow \quad \text{σχέση (4.1.44)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (4.1.23) και τη σχέση (4.1.43), προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{L} L (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L} \frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = 0 \quad \text{σχέση (4.1.45)}$$

Επιπροσθέτως, έχουμε με βάση τη σχέση (4.1.39) και τη σχέση (4.1.14), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d\theta}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \Rightarrow \\ & -\frac{d}{d\sigma} \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right]^{-\frac{1}{2}} 2 (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\sigma} \right\} - \\ & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[ \left( \frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right]^{-\frac{1}{2}} 2 (b^2 + \\ & r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 = 0 \Rightarrow \\ & + \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{L} 2 (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\sigma} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{L} 2 (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 = 0 \Rightarrow \\ & + \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\sigma} \right] - \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 = 0 \Rightarrow \\ & \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\sigma} \right] = \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.46)} \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (4.1.45), και τη σχέση (4.1.23), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{d\tau} \left[ L \frac{1}{L} (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] &= \frac{1}{L} L^2 (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \\ L \frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] &= L (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] &= (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.47)} \end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με τις παραπάνω πράξεις που προσδιορίζουν τη γεωμετρία στη μετρική μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας, είναι η σχέση (4.1.41), η σχέση (4.1.43), η σχέση (4.1.45), και η σχέση (4.1.47), που παρατίθενται συγκεντρωτικά παρακάτω και είναι οι εξής:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.41)}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \quad \text{σχέση (4.1.43)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = 0 \quad \text{σχέση (4.1.45)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] = (b^2 + r^2) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.47)}$$

Οι παραπάνω σχέσεις περιγράφουν στη μετρική τη γεωμετρία μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας.

## 4.2 Γενικές γεωδαιτικές εξισώσεις

ε βάση αυτή τη μετρική και τις εξισώσεις Lagrange είναι εφικτό χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της υποενότητας 4.1 να προσδιοριστούν οι γενικές γεωδαιτικές εξισώσεις και οι μηδενικές γεωδαιτικές εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της γεωδαισίας, που προέκυψαν σύμφωνα με τις παραπάνω πράξεις έχουμε ότι η γενικευμένη μορφή στη μετρική του γενικευμένου καμπύλου χωροχρόνου μπορεί να έχει τη μορφή, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (4.1.41), (4.1.43), (4.1.45) (4.1.47) και τη σχέση (3.2.1), που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad \text{σχέση (4.2.1)}$$

Αυτή η σχέση αφορά τη μορφή της γεωδαιτικής εξίσωσης χρησιμοποιεί τους συμβολισμούς του Christoffel, και σύμφωνα με αυτούς που δίνονται από το συντελεστή  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , και αποτελούν τα πρώτα παράγωγα, τα οποία προήρθαν από τη μετρική, ενώ το  $\alpha$ , αυτού του συμβολισμού παίρνει τιμές για τις τέσσερις

δυνατές εξισώσεις όπως προσδιορίστηκαν στο τέλος της υποενότητας 4.1, δηλαδή τις σχέσεις (4.1.41), (4.1.43), (4.1.45) και (4.1.47), που όμως είναι πιο ειδικές γιατί αφορούν τη μετρική γεωμετρία μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας, ενώ γενικεύοντας αυτές για κάθε μορφή χωροχρονικής γεωμετρίας λαμβάνουμε με βάση αυτές τη μορφή (4.2.1). Έτσι, η σχέση (4.2.1) αποτελεί τη γεωδαιτική εξίσωση. Αυτή η γεωδαιτική γεωμετρία αποτελεί τη μορφή αυτή που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε τη κίνηση των σωματιδίων στον καμπύλο χωροχρόνο. Επίσης, με βάση τη σχέση για τη βαρύτητα της κλασικής φυσικής έχουμε ότι ισούται με  $u = x/t \Rightarrow u^\alpha = dx^\alpha / dt$ . Επομένως, η σχέση (4.2.1) λαμβάνει τη μορφή που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \quad \text{σχέση (4.2.2)}$$

Επομένως, έχουμε ότι η εξίσωση (4.2.2) δίνει τη μορφή της σχέσης της χρονικής γεωδαισίας. Οι συμβολισμοί του Christoffel, μπορεί να είναι συμμετρικοί στους χαμηλότερους δύο δείκτες συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \quad \text{σχέση (4.2.3)}$$

Έτσι, όσο αφορά τον προσδιορισμό των συμβόλων του Christoffel, με βάση τη γεωδαιτική εξίσωση της σχέσης (4.2.1), και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1.32) και (4.1.35), στο πολικό σύστημα συντεταγμένων της σχέσης (4.1.27), έχουμε ότι:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad \text{σχέση (4.1.27)}$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.32)}$$

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.35)}$$

Επομένως, από τη σχέση (4.1.32) προκύπτει ότι:



$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{d^2r}{ds^2} / \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = -r \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 / \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -r \Rightarrow$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \quad \text{σχέση (4.2.4)}$$

Όσο αφορά και τη δεύτερη περίπτωση, συγκρίνοντας τους όρους μεταξύ τους προκύπτει ότι οι όροι μεταξύ τους έχουν το με βάση τη σχέση (4.1.32), έχουμε ότι:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = 1/r \quad \text{σχέση (4.2.5)}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.41)}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = r \left[ \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \quad \text{σχέση (4.1.43)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = 0 \quad \text{σχέση (4.1.45)}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ (b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] = (b^2 + r^2) \cos\theta \sin\theta \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \quad \text{σχέση (4.1.47)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.1.43) βλέπουμε ότι ο συντελεστής είναι αυτός του  $\left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2$  και επομένως είναι το  $r$ , οπότε έχουμε ότι:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad \text{σχέση (4.2.6)}$$

Για την πρώτη εξίσωση πρέπει να σημειωθεί ακόμα μια σχέση που είναι η εξής:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2\theta \quad \text{σχέση (4.2.7)}$$

Από τη σχέση (4.1.47) βλέπουμε το συντελεστή του  $\left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$ , οπότε προκύπτει ότι:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\cos\theta \sin\theta \quad \text{σχέση (4.2.8)}$$

Ακόμα, έχουμε ότι:

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \text{σχέση (4.2.9)}$$

ο αφορά το συντελεστή του  $\Gamma_{r\varphi}^{\varphi}$ , έχουμε ότι ο συντελεστής του  $\frac{d^2r}{d\tau^2}$  είναι από τη σχέση (4.1.43) το  $r$  και για το  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  είναι το  $(b^2 + r^2)$ , και έτσι έχουμε ότι:

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \text{σχέση (4.2.10)}$$

Εν τέλει, από τους συμβολισμούς Christoffel, για τη σχέση του  $d\varphi/d\tau$ , συνδυάζονται οι εξισώσεις (4.1.45) και (4.1.47) και προκύπτει ότι:

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = (b^2 + r^2) \sin\theta \cos\theta / \left[ (b^2 + r^2) \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right] = \cot\theta \quad \text{σχέση (4.2.11)}$$

Επομένως, συνοψίζοντας οι σχέσεις Christoffel είναι οι εξής:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad \text{σχέση (4.2.6)}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2\theta \quad \text{σχέση (4.2.7)}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\cos\theta \sin\theta \quad \text{σχέση (4.2.8)}$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \text{σχέση (4.2.9)}$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{r}{r^2 + b^2} \quad \text{σχέση (4.2.10)}$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \cot\theta \quad \text{σχέση (4.2.11)}$$

Από τη σχέση (4.1.38) έχουμε ότι:

$$L \left( \frac{dx_a}{d\sigma}, x^a \right) = \left[ g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx_a}{d\sigma} \frac{dx_\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.38)}$$

Παρατίθεται και η σχέση, που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad \text{σχέση (4.2.1)}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.2.6) έως τη σχέση (4.2.11) τη σχέση (4.1.38), και τη σχέση (4.2.1), σχέση η οποία προκύπτει γενικεύοντας καθένα απ' αυτά τα αποτελέσματα είναι η εξής:

$$g_{rr} \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) \quad \text{σχέση (4.2.12)}$$

Έτσι, από τη σχέση (4.1.27), έχουμε ότι:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad \text{σχέση (4.1.27)}$$

Έτσι, προκύπτει η διαγώνιος της μετρικής, που είναι η εξής:

$$g_{AB} = [1, r^2] \quad \text{σχέση (4.2.13)}$$

Άρα, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου, από τη σχέση (4.2.12) και τη σχέση (4.2.13) έχουμε ότι:

$$g_{rr} \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{1}{2} \left( 0 + 0 - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} (-2r) = -r \Rightarrow$$

$$g_{rr} \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \quad \text{σχέση (4.2.14)}$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της σχέσης (4.2.6) και της σχέσης (4.2.14), κατ' επαλήθευση είναι το ίδιο. Πέρα, από τη σχέση αυτή για την προκειμένη περίπτωση σύμφωνα και με τα προηγούμενα, η γενικευμένη μορφή είναι η εξής:

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad \text{σχέση (4.2.15)}$$

Η σχέση (4.2.15) χρησιμοποιείται ως η γενική εξίσωση για τον προσδιορισμό των μετρικών σχέσεων για τις γεωδαιτικές εξισώσεις.

### 4.3 Νόμοι διατήρησης και συμμετρίες στη γεωδαισία

Η σχέση που μπορεί να δείξει σύμφωνα με τη σχέση (4.2.1), τον κατάλληλο χρόνο προσδιορισμού για το τετραδιάνυσμα των ταχυτήτων στο χώρο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η περίπτωση του ταξιδιού εντός μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας για τον προσδιορισμό του χωροχρόνου. Έστω, ότι ένα σώμα βρίσκεται στο ένα άκρο της χωροχρονικής σκουληκότρυπας, μ' αποτέλεσμα να πρέπει να προσδιοριστεί ο χρόνος που χρειάζεται για να ταξιδέψει αυτό το σώμα διερχόμενο απ' αυτή τη χωροχρονική δίοδο. Κατ' αρχήν η γεωμετρία μιας χωροχρονικής σκουληκότρυπας δίνεται από τη σχέση (3.6.1), που είναι η εξής:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Επομένως, θεωρώντας ότι η ταχύτητα  $u^r = V$  τότε έχουμε ότι:

$$u^a = [(1 + V^2)^{1/2}, V, 0, 0] \quad \text{σχέση (4.3.1)}$$

Βάσει της σχέσης (4.3.1) και της σχέσης (4.1.4) έχουμε ότι:

$$d^2r/d\tau^2 = 0 \Rightarrow$$

$$du^a/d\tau = 0 \quad \text{σχέση (4.3.2)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.3.2) η ταχύτητα  $u^a$  είναι σταθερή κατά μήκος της κοσμικής γραμμής με αποτέλεσμα να θεωρείται ότι είναι ίση με την αρχική της τιμή  $V$ , και έτσι έχουμε ότι:

$$u^r = dr/d\tau = V \quad \text{σχέση (4.3.3)}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.3) καταλήγουμε στη μορφή, που είναι η εξής:

$$r(\tau) = V \tau \quad \text{σχέση (4.3.4)}$$

Επομένως, ο κατάλληλος χρόνος είναι ο εξής:

$$\Delta\tau = 2R/V \quad \text{σχέση (4.3.5)}$$

Το  $2R$  στο ότι λαμβάνουμε ως ακτίνα στο ένα στόμιο της χωροχρονικής σκουληκότρυπας την απόσταση  $+R$ . Ενώ, στο στόμιο που βρίσκεται στην έξοδο θεωρούμε την απόσταση  $-R$ . Συνεπώς η απόσταση που προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη και τα δύο στόμια είναι η συνολική απόσταση, που προκύπτει ως  $2R$ . Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ακολουθώντας τη σχέση (3.2.1) έχουμε ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Από τη σχέση (1.3.1) έχουμε τα εξής:

$$d^2\tau = -d^2s/c^2 = d^2\tau = -d^2s \quad (\text{κανονικοποιώντας για } c = 1) \quad \text{σχέση (1.3.1)}$$

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, με βάση τη σχέση (1.3.1), τη σχέση (3.2.1) και τη σχέση έχουμε ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha}dx^{\beta} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = -1$$

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = -1$$

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = -1 = u u \quad \text{σχέση (4.3.6)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, κατά τη σχέση (4.3.6), προκύπτει η σχέση συμμετρίας σύμφωνα με την οποία είναι εφικτό να προσδιοριστεί η συμμετρία που χρειάζεται ο καμπύλος χωροχρόνος. Το ερώτημα είναι πως μπορεί να προσδιοριστεί η συμμετρία σε ένα χωροχρονικό σύστημα. Όπως, είναι γνωστό από τα μαθηματικά και τη κλασική μηχανική πρέπει να υπάρχει μια σχέση, που όπως φαίνεται από την (4.3.6), πρέπει να είναι ανεξάρτητη της οποιασδήποτε μεταβολής, και να δίνει μια σταθερά. Έτσι, στη μετρική, έχουμε ότι:

$$\xi^{\alpha} = (0,1,0,0) \quad \text{σχέση (4.3.7)}$$

Το  $\xi^{\alpha}$ , που είναι γνωστό και ως διάνυσμα Killing, αφήνοντας μόνο τους συντελεστές που χρειάζονται απαλείφοντας τους υπόλοιπους, ενώ παραμένει αμετάβλητο το σύστημα κατ' αυτόν τον τρόπο, και έτσι θεωρούμε ότι μέσω αυτού του διανύσματος μπορεί να είναι εφικτή η ύπαρξη ενός συμμετρικού συστήματος εξεταζόμενο υπό την έννοια του καμπύλου χωροχρόνου. Έτσι, για την περίπτωση της σχέσης (1.2.2) ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (1.2.2)}$$

Κανονικοποιώντας έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (4.3.8)}$$

Στη μετρική η σχέση (4.3.8) αντιστοιχεί στην παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad \text{σχέση (4.3.9)}$$

Τα διανύσματα Killing, σύμφωνα με τη σχέση (4.3.9) είναι τα εξής:

$$(1,0,0), \text{ για την περίπτωση του } x \quad \text{σχέση (4.3.10)}$$

$$(0,1,0), \text{ για την περίπτωση του } y \quad \text{σχέση (4.3.11)}$$

$$(0,0,1), \text{ για την περίπτωση του } z \quad \text{σχέση (4.3.12)}$$

Οι σχέσεις (4.3.10), (4.3.11), και (4.3.12), αντιστοιχούν στα διανύσματα Killing, που δίνουν τη συμμετρία στον επίπεδο χωροχρόνο. Επίσης, όσο αφορά την περίπτωση των πολικών συντεταγμένων σύμφωνα με σχέση (3.1.12), έχουμε ότι:

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin\theta d\phi)^2 \quad \text{σχέση (3.1.13)}$$

Επίσης, από την υποενότητα 3.1 έχουμε ότι:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad \text{σχέση (3.1.1)}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \quad \text{σχέση (3.1.2)}$$

$$z = r \cos\theta \quad \text{σχέση (3.1.3)}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (3.1.1), τη σχέση (3.1.2), και τη (3.1.3) προκύπτει ότι ο  $z$  είναι ανεξάρτητη από τη γωνία  $\phi$  και άρα όσο αφορά το διάνυσμα Killing είναι το εξής:

$$(0,0,1), \text{ για τις πολικές συντεταγμένες} \quad \text{σχέση (4.3.13)}$$

$$(-y, x, 0), \text{ για τις καρτεσιανές συντεταγμένες} \quad \text{σχέση (4.3.14)}$$

Προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα Killing είναι διαφορετικά για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες διότι αλλάζουν οι σχέσεις που τις συνδέουν γιατί τη μετρική είναι ανεξάρτητο της γωνίας  $\phi$ . Οι Καρτεσιανές προκύπτουν από την ολοκλήρωση των σχέσεων (3.1.1) και (3.1.2).

Δηλαδή, χαρακτηριστικό των διανυσμάτων Killing είναι ότι κατόπιν ολοκλήρωσης αφήνουν αμετάβλητο, έναν συντελεστή, όπως προκύπτει μέσω της ολοκλήρωσης και μεταφραζόμενο είναι το εξής:

$$x^1 \rightarrow x^1 + \text{σταθερά} \quad \text{σχέση (4.3.15)}$$

Από τη σχέση (4.1.28) έχουμε ότι:

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B d\sigma \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.28)}$$

Επομένως, από τη σχέση (4.1.14), έχουμε ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.14)}$$

Άρα, όσο αφορά την προκειμένη περίπτωση χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1.14), και επειδή το L στη συμμετρία είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $x^1$ , όπου  $\alpha = 1$ ,

τότε  $\frac{\partial L}{\partial x^1} = 0$ , και προκύπτει ότι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial x^1} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.3.16)}$$

Επίσης, από τη σχέση (4.1.38) έχουμε ότι:

$$L \left( \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, x^\alpha \right) = \left[ g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (4.1.18)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.3.16) για να δίνει η παράγωγος μηδέν σημαίνει ότι πρόκειται για μια σταθερά, αυτή του διανύσματος Killing, δηλαδή του  $\xi$  εν προκειμένω. Άρα,

με βάση τη σχέση (4.3.16), και τη σχέση (4.3.18) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = -\frac{1}{2} \left[ g(x)_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{\frac{1}{2}-1} g(x)_{\alpha\beta} 2 \frac{dx^\beta}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - \left[ g(x)_{1\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{-\frac{1}{2}} g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = -\frac{1}{L} g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - \frac{1}{L} g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \quad \text{σχέση (4.3.17)}$$

Από τη σχέση (4.1.28), προκύπτει ότι:

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B d\sigma \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B d\sigma \left[ \left( \frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$s_{AB} = \int L d\sigma \Rightarrow$$

$$d\tau = L d\sigma \quad \text{σχέση (4.3.18)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (4.3.17) και τη σχέση (4.3.18) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{1\beta} \frac{1}{L} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad \text{σχέση (4.3.19)}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$g(x)_{1\beta} = g(x)_{\alpha\beta} * \xi^\alpha \quad \text{σχέση (4.3.20)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (4.3.19) και τη σχέση (4.3.20) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - g(x)_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta \quad \text{σχέση (4.3.21)}$$

Επίσης, εκφράζοντας τη σχέση

$$\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^1}{d\sigma}} = - \xi u \quad \text{σχέση (4.3.22)}$$



Όπου, στην προκειμένη περίπτωση όπως φαίνεται έχουμε μια ποσότητα διατήρησης σε ένα σύστημα συντεταγμένων, που όπως προκύπτει από τη σχέση (4.3.22) είναι η εξής:

$$\xi * u = \text{σταθερά} \quad \text{σχέση (4.3.23)}$$

Στη σχέση (4.3.23) το  $\xi$  αποτελεί το διάνυσμα Killing και δείχνει τη διατήρηση της συγκεκριμένης ποσότητας που δίνεται από αυτή τη σχέση. Από τη σχέση (3.6.2) και για  $b = 0$ , έχουμε ότι:

$$ds^2 = dr^2 + (b^2 + r^2) d\varphi^2 \quad \text{σχέση (3.6.2)}$$

Άρα, διαιρώντας και τα δύο μέλη με το  $ds^2$ , προκύπτει ότι:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \Rightarrow$$

$$\frac{ds^2}{ds^2} = \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \quad \text{σχέση (4.3.24)}$$

Επομένως, η σχέση από την οποία έχουμε ότι το διάνυσμα Killing εφαρμοζόμενη στη σχέση (3.6.2), χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι η σχέση είναι ανεξάρτητη του  $\varphi$ , που σημαίνει ότι διατηρείται αυτή η ποσότητα αναλλοίωτη, μας δίνει τα εξής:

$$\xi' = 0 \quad \text{σχέση (4.3.25)}$$

$$\xi^\varphi = 1 \quad \text{σχέση (4.3.26)}$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.21), τη σχέση (4.3.23), τη σχέση (4.3.25), και τη σχέση (4.3.26), προκύπτει ότι:

$$\kappa = \vec{\xi} * \vec{u} = g(x)_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta = r^2 \frac{d\varphi}{ds} \Rightarrow$$

$$\kappa = r^2 \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{σχέση (4.3.27)}$$

Αυτό προκύπτει από τη σχέση (4.1.35), όπως έχουμε προσδιορίσει στην υποενότητα 4.1 τη σχέση αυτή που είναι η εξής:

$$\frac{d}{ds} \left( r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad \text{σχέση (4.1.35)}$$

Επομένως, επιλύοντας την εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (4.3.27), και τη σχέση (4.1.35), έχουμε ότι:

$$1 = \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{dr^2}{ds^2} + r^2 \frac{k^2}{r^4} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{dr^2}{ds^2} + \frac{k^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{k^2}{r^2} = \frac{dr^2}{ds^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{ds} = \left( 1 - \frac{k^2}{r^2} \right)^{1/2} \quad \text{σχέση (4.3.28)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (4.3.27) και τη (4.3.28) διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{dr}{ds}} = \frac{\frac{\kappa}{r^2}}{\left( 1 - \frac{k^2}{r^2} \right)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\kappa}{r^2} * \left( 1 - \frac{k^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad \text{σχέση (4.3.29)}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.3.29) προκύπτει ότι:

$$\int d\varphi = \int \frac{\kappa}{r^2} * \left( 1 - \frac{k^2}{r^2} \right)^{-1/2} dr \Rightarrow$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{\kappa}{r^2}}{\left( 1 - \frac{k^2}{r^2} \right)^{1/2}} dr \Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi' + \cos^{-1} \left( \frac{\kappa}{r} \right) \quad \text{σχέση (4.3.30)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (4.3.30) έχουμε ότι:

$$\varphi - \varphi' = \cos^{-1} \left( \frac{\kappa}{r} \right) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{\kappa}{r} \Rightarrow$$

$$r * \cos (\varphi - \varphi') = \kappa \quad \text{σχέση (4.3.31)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (4.3.31), προκύπτει ότι:

$$r * \cos (\varphi - \varphi') = \kappa \Rightarrow$$

$$r * (\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi') = \kappa \Rightarrow$$

$$r \cos\varphi \cos\varphi' + r \sin\varphi \sin\varphi' = \kappa \quad \text{σχέση (4.3.32)}$$

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις που είναι οι εξής:

$$x = r \cos\varphi \quad \text{σχέση (4.3.33)}$$

$$y = r \sin\varphi \quad \text{σχέση (4.3.34)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (4.3.32), τη σχέση (4.3.33), και τη σχέση (4.3.34)

προκύπτει ότι:

$$x \cos\varphi' + y \sin\varphi' = \kappa \quad \text{σχέση (4.3.35)}$$

Η σχέση (4.3.35) αποτελεί τη γενική μορφή για τις ευθείες στη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, σε επίπεδο σχέδιο για τη καμπύλη χωροχρονική γεωμετρία.

#### 4.4 Μηδενική γεωδαισία

Όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 1.3 για σημεία που βρίσκονται εντός των κώνων φωτός, υπάρχει η λεγόμενη χρονική διάσπαση του χωροχρόνου. Όπως, προέκυψε μέσω πράξεων καταλήξαμε στη σχέση (3.2.1), και τη σχέση (4.3.6), που περιγράφουν τη χωροχρονική γεωμετρία, για την περίπτωση του καμπύλου χωροχρόνου, επικεντρώνοντας την προσοχή στις περισσότερες περιπτώσεις στη χρονοδιασπόμενη γεωμετρία όχι όμως συνήθως για την περίπτωση που το φως κινείται επί του περιγράμματος ενός κώνου φωτός. Αυτή η περίπτωση εξειδικεύεται όταν έχουμε μηδενική χρονοδιάσπαση δηλαδή όταν το  $ds^2 = 0$ . Έτσι, είχαμε ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha}dx^{\beta} \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = -1 = u_{\alpha} u^{\alpha} \quad \text{σχέση (4.3.6)}$$

Όμως, εν προκειμένω έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = u_{\alpha} u^{\alpha} = 0 \quad \text{σχέση (4.4.1)}$$

Από τη σχέση (4.1.26) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.1.26)}$$

Επομένως, η λύση σ' αυτή την περίπτωση κατ' αντιστοιχία με την ανάλυση που έγινε στην υποενότητα 4.1 και πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1.26), προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2 x_{\alpha}}{d\lambda^2} = 0 \quad \text{σχέση (4.4.2)}$$

Το  $\lambda$  αναπαριστά την παράμετρο εκείνη που δίνει τη κίνηση πάνω στην επιφάνεια εφαπτόμενα στον κώνο φωτός. Όσο αφορά τη γενικευμένη εξίσωση για τον καμπύλο χωροχρόνο δίνεται από τη σχέση (4.2.1), που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad \text{σχέση (4.2.1)}$$

Όσο, αφορά την προκειμένη περίπτωση, που το  $ds^2 = 0$ , έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \quad \text{σχέση (4.4.3)}$$

Έτσι, οι καλούμενες μηδενικές καμπύλες διέπονται από τη σχέση (4.4.3), που αποτελούν τις περιπτώσεις της μηδενικής γεωδαισίας. Πρέπει να σημειωθεί ότι το  $\lambda$  αποτελεί απλά μια παράμετρο που αναπροσαρμόζει τις σχέσεις (4.1.26) και (4.4.2), στις σχέσεις (4.4.2) και (4.4.3) αντίστοιχα, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην αλλάζουν οι εξισώσεις παρά μόνο αυτή η παράμετρος. Έτσι, το  $\lambda$  δεν έχει σχέση με τη χωροχρονική απόσταση, σ' αντίθεση με το  $\tau$  που αποτελεί τον κατάλληλο χρόνο στη χωροχρονική γεωμετρία. Το  $\lambda$  εφόσον δεν συμβολίζει τη χωροχρονική απόσταση κατ' επέκταση πρέπει να αναφερθεί ότι η χωροχρονική απόσταση μιας ακτίνας φωτός είναι μηδενική.

#### 4.5 Τοπικά αδρανειακά και ελεύθερης πτώσης συστήματα

Η περιγραφή των Καρτεσιανών συντεταγμένων στο χωροχρόνο είναι εφικτή με βάση το τετραδιάνυσμα, που λαμβάνει υπόψη του και τον παράγοντα του χρόνου, που οδηγεί στη καμπύλωση του χωροχρόνου. Όμως, όπως αναλύθηκε στα αδρανειακά συστήματα που η περιγραφή γίνεται με βάση τη μετρική, εκεί σημειώνεται μια διαφοροποίηση, που αφορά την αναπαράσταση του συστήματος από τη διαγώνιο, όπως προέκυψε στην υποενότητα 3.3, και πιο συγκεκριμένα προσδιορίστηκε από τη σχέση (3.3.3), που αφορά ένα σημείο P, με προϋποθέσεις χωροχρονικής γεωμετρίας.

Αυτή η γεωμετρία στο χωροχρόνο μέσω του μετρικού, για ένα σημείο που χρησιμοποιείται ως άξονας δίνεται από τη διαγώνιο (3.3.1), που είναι η εξής:

$$g_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} = \text{diag} [-c, 1, 1, 1] \quad \text{διαγώνιος (3.3.1)}$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι οι συντελεστές Christoffel στο σημείο P, επιδρούν με τον ίδιο τρόπο όπως και στη σχέση (4.4.2), συνεπώς και εδώ η μορφή που έχει η γεωδαιτική εξίσωση είναι η εξής:

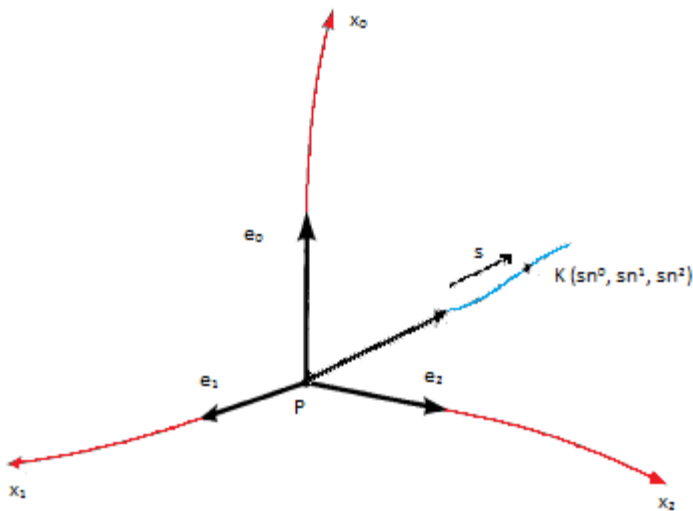
$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \Big|_P = 0 \quad \text{σχέση (4.4.2)}$$

Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι πλέον η γεωδαιτική εξίσωση αφορά το συγκεκριμένο σημείο P, γι' αυτό άλλωστε αποτελεί τη μορφή της λύσης για το τοπικό αδρανειακό σύστημα. Οι συντεταγμένες Riemann αφορούν συστήματα συντεταγμένων πολύ κοντά στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν κινήσεις σωματιδίων πολύ κοντά σε αδρανειακά συστήματα, που ορίζονται από τυχαία σημεία, και εν προκειμένω αυτό του σημείου P, που χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς. Έτσι, αυτοί οι άξονες συντεταγμένων βρίσκονται πολύ κοντά στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με σημαντικό όριο να αποτελεί το γεγονός ότι αφορούν γεωδαιτικές γραμμές που δεν έχουν κλείσει τη καμπυλότητα τους, μ' αποτέλεσμα να τέμνονται. Γι' αυτό λέγεται ότι αυτές οι γραμμές που σχηματίζονται από τις συντεταγμένες Riemann είναι σχεδόν ευθείας, και προσδιορίζονται από τη σχέση που είναι η εξής:

$$x^\alpha = sn^\alpha \quad \text{σχέση (4.4.3)}$$

Το  $n^\alpha$  αφορά τα στοιχεία του n στηριζόμενη στη βάση του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων του  $e_\alpha$ . Αυτό μπορεί να βρεθεί για διάφορες κατευθύνσεις του n χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο χρόνο  $\tau$  αντί του s στην περίπτωση της χρονοδιάσπασης. Το αποτέλεσμα είναι να προκύψουν μια σειρά από

μοναδικά σημεία τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά στο σημείο από τα οποία διέρχεται το ορθοκανονικό σύστημα και κατ' αυτόν τον τρόπο να προκύψει μια γεωδαισία στην οποία δεν διασταυρώνονται οι γεωδαιτικές γραμμές. Αυτές οι συντεταγμένες με αυτά τα χαρακτηριστικά καλούνται Riemann συντεταγμένες, και βασίζονται σε τοπικά αδρανειακά συστήματα τα οποία προσδιορίζονται μέσω σημείων στη χωροχρονική γεωμετρία, και εν προκειμένω αυτή του σημείου P. Έτσι, για τις συντεταγμένες Riemann παίρνουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 4.4.1: συντεταγμένες Riemann

Τα  $e_a$  συμβολίζουν τις συντεταγμένες του ορθοκανονικού συστήματος με βάση το σημείο P, και έτσι χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς για τις συντεταγμένες Riemann, μ' αποτέλεσμα να πρέπει να σημειωθεί ότι για κάθε αδρανειακό σύστημα υπάρχει ένας πίνακας που ισοδυναμεί μ' αυτόν του μετρικού και σύμφωνα με αυτόν προκύπτει ότι ισχύει η διαγώνιος (3.3.1). Πρέπει να αναφερθεί ότι εν προκειμένω ισχύει η σχέση (4.2.1), που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \tag{σχέση (4.2.1)}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (4.4.3) και τη σχέση (4.2.1) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha s^2 n^\alpha n^\beta \quad \text{σχέση (4.4.4)}$$

Από τη σχέση (4.4.2) και τη σχέση (4.4.4) προκύπτει ότι:

$$\left. \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \right|_P = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha s^2 n^\alpha n^\beta = 0 \Rightarrow$$

$$-\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha |_P s^2 n^\alpha n^\beta = 0 \Rightarrow$$

$$-\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha |_P n^\alpha n^\beta = 0 \quad \text{σχέση (4.4.5)}$$

Από την εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (4.4.5), πρέπει να διατηρούνται όλες οι συντεταγμένες Riemann, συνεπώς έχουμε το εξής:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha |_P = 0 \quad \text{σχέση (4.4.6)}$$

Από τη σχέση (4.2.15) έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad \text{σχέση (4.2.15)}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (4.2.15) όλα τα σύμβολα Christoffel, μπορούν να εξαφανιστούν όπως φαίνεται απ' αυτή τη σχέση μόνο αν όλοι οι παράγωγοι εξαφανιστούν, με τις συντεταγμένες Riemann να ορίζουν αυτήν την περίπτωση για ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα που ορίζεται σε ένα σημείο P. Έτσι, η σχέση (4.2.15) διαμορφώνεται ως έχει:

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha |_P = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad \text{σχέση (4.4.7)}$$

Στην περίπτωση προσδιορισμού των συντεταγμένων Riemann στο βόρειο πόλο του ημισφαιρίου της Γης, με βάση τη γενική σχέση (3.6.1) είναι η εξής:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Όμως στην προκειμένη περίπτωση, επειδή πρόκειται για σφαίρα, με βάση το μετρική, η εξίσωση μεταβάλλεται μη λαμβάνοντας υπόψη το dt λόγω του



μετρικού συστήματος, και του  $dr$ , αφού δεν εξετάζεται ένα μεμονωμένο κομμάτι αλλά το τμήμα αυτό της σφαίρας, ενώ το  $b = 0$ , που αποτελεί μια σταθερά που λαμβάνεται υπόψη κυρίως στην εκδοχή της χωροχρονικής σκουληκότρυπας, οπότε έχουμε ότι:

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \Rightarrow$$

$$ds^2 = \alpha^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{σχέση (4.4.8)}$$

Επομένως, έχουμε ως παραμέτρους το  $(\theta, \varphi)$  και το ορθοκανονικό σύστημα προσδιορίζεται μέσω των συντεταγμένων  $\vec{e}_1$  και  $\vec{e}_2$ , οπότε έχουμε ότι η γωνία  $\varphi$  στο ορθοκανονικό σύστημα δείχνει το  $\varphi = 0$  και το  $\varphi = \pi/2$ . Έτσι, προκύπτει ότι το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{n}$  έχει συντεταγμένες που είναι οι εξής:

$$n^A = (sn^1, sn^2) = (\alpha\theta \cos\varphi, \alpha\theta \sin\varphi) \Rightarrow$$

$$n^A = (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \text{σχέση (4.4.9)}$$

Το σημείο που βρίσκεται απομακρυσμένο από το ορθοκανονικό σύστημα επί της επιφάνειας της σφαίρας με συντεταγμένες  $(\theta, \varphi)$  προσδιορίζεται ως εξής:

$$s = \alpha\theta \quad \text{σχέση (4.4.10)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (4.4.9) και τη σχέση (4.4.10) έχουμε ότι:

$$x^A = (sn^1, sn^2) = (\alpha\theta \cos\varphi, \alpha\theta \sin\varphi) \Rightarrow$$

$$x^A = (\alpha\theta \cos\varphi, \alpha\theta \sin\varphi) \quad \text{σχέση (4.4.11)}$$

Η σχέση (4.4.11) προσδιορίζει τις συντεταγμένες Riemann, για την περίπτωση της σφαίρας.

## Ενότητα 5

## Ενότητα 5

### 5.1 Γεωμετρία Schwarzschild και Νευτώνεια βαρύτητα

Όσο αφορά τη κλασική φυσική έχουμε ότι η Νευτώνεια βαρύτητα στηρίζεται στην ύπαρξη βαρυτικών δυνάμεων και όχι σε χωροχρονικές καμπυλότητες, χωρίς να γίνεται διάκριση ανάμεσα στις μεταβολές του χρόνου, όπως στη θεωρία της σχετικότητας, αφού εν προκειμένω λαμβάνεται υπόψη ως απόλυτο μέγεθος. Έτσι, σ' ένα σώμα μάζας A και ένα σώμα μάζας B, αναπτύσσεται μια δύναμη εκατέρωθεν των σωμάτων αυτών. Αυτή η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης, και κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε την παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = - \frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{σχέση (5.1.1)}$$

Στη σχέση (5.1.1) το G αφορά τη βαρυτική σταθερά που είναι ίση με  $6.67 * 10^{-8}$  dyn cm<sup>2</sup>/g<sup>2</sup>. Αυτή η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα B μπορεί να γραφτεί υπό μορφή βαρυτικού πεδίου Φ, απ' όπου έχουμε ότι:

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = - \frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = - m * \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = -m * \left[ - \frac{\partial(GM)}{\partial r} \right] \vec{e}_r \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = -m * \left[ \vec{\nabla} \left( - \frac{GM}{r} \right) \right], \text{όπου } \Phi = - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = -m * (\vec{\nabla} \Phi) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{βαρυτική}} = -m * \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \quad \text{σχέση (5.1.2)}$$

Από τη σχέση (3.6.1) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Αυτή η σχέση αφορά τη κανονικοποιημένη μορφή, όσο αφορά τη μη κανονικοποιημένη μορφή έχουμε ότι:

$$ds^2 = - (cdt)^2 + dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.3)}$$

Από τη σχέση (2.2.11) έχουμε ότι:

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} (1 + \Delta\Phi/c^2), \text{ όπου } \Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = gh \quad \text{σχέση (2.2.11)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (2.2.11), για την περίπτωση της μετατόπισης προς το ερυθρό έχουμε ότι:

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} \left(1 + \frac{\Phi_A - \Phi_B}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\tau_{\text{πομπού}} = \Delta\tau_{\text{δέκτη}} \left(1 - \frac{\Phi_B - \Phi_A}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{\Phi_B - \Phi_A}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{\Phi_B - (-\Phi_B)}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{\Phi - (-\Phi)}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{\Phi + \Phi}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\text{πομπού}}} = \frac{1}{\Delta\omega_{\text{δέκτη}}} \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta\omega_{\text{δέκτη}} = \Delta\omega_{\text{πομπού}} \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \Rightarrow$$

$$\omega_{\infty} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \omega_* \quad \text{σχέση (5.1.4)}$$

Από τη σχέση (5.1.4) έχουμε ότι:

$$\tau_{\infty} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \tau_* \quad \text{σχέση (5.1.5)}$$

Ενώ από τη σχέση (2.2.10), λαμβάνουμε την παρακάτω διαμορφωμένη μορφή που είναι η εξής:

$$\Delta\tau_{\text{δέκτη}} = \Delta\tau_{\text{πομπού}} (1 - \Delta\Phi/c^2), \quad \text{όπου } \Delta\Phi = \Phi_B - \Phi_A = gh \quad \text{σχέση (2.2.12)}$$

Επομένως έχουμε ότι η γεωμετρία Schwarzschild, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.1.2) τη σχέση (5.1.3), (5.1.4) και (5.1.5), είναι η εξής:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + (b^2 + r^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.6)}$$

Παρατηρούμε ότι στην προκειμένη περίπτωση λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση του  $c^2$  στη διαμόρφωση του βαρυτικού πεδίου. Επίσης, για  $b=0$  η σχέση αυτή μπορεί να λάβει τη μορφή που είναι η εξής:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.7)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (5.1.4) και τη σχέση (5.1.6), κανονικοποιώντας έχουμε το εξής:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.8)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.1.7) λαμβάνουμε τη μετρική  $g_{\alpha\beta}$  και έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad \text{πίνακας (5.1.1)}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στη κανονικοποίηση λάβαμε το  $c = G = 1$ . Η γεωμετρία Schwarzschild βρίσκει ιδιαίτερες εφαρμογές στην περίπτωση εξεταζόμενων σωματιδίων, και ακτίνων φωτός. Έχουν γίνει αρκετές παρατηρήσεις για την τροχιά των πλανητών και τις διευθύνσεις των ακτίνων φωτός κατά την επίδραση τους με

βαρυτικά πεδία, ιδιαίτερα στο ηλιακό μας σύστημα. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της βαρυτικής μετατόπισης προς το ερυθρό. Έτσι, έχουμε ότι η βαρυτική μετατόπιση εκπορεύεται από τη σχέση (5.1.4), που είναι η εξής:

$$\omega_{\infty} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \omega_* \quad \text{σχέση (5.1.4)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.1.4) συμπεραίνουμε ότι για συχνότητα στο άπειρο, όπου βρίσκεται ένας υποθετικός παρατηρητής, όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση έχει μειωθεί σε ορισμένο βαθμό. Αυτή η μεταβολή στη συχνότητα μεταφράζεται στο άπειρο και ως μεταβολή της ενέργειας, συνεπώς αυτό έχει ως αποτέλεσμα να θεωρούμε ότι  $E = \hbar\omega$  και να προσπαθούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της ενέργειας λαμβάνοντας υπόψη την αμετάβλητη ποσότητα του χρόνου της κλασσικής μηχανικής. Από τη σχέση (4.3.23), φαίνεται ότι πρέπει να υπάρχει και μια ποσότητα διατήρησης  $\xi^*r$  σύμφωνα με την οποία αναπαρίσταται η συμμετρία της αμετάβλητης ποσότητας  $t$  και έτσι έχουμε ότι:

$$\xi^* u = \text{σταθερά} \quad \text{σχέση (4.3.23)}$$

Επίσης, όπως προαναφέρθηκε για την ενέργεια έχουμε την παρακάτω ποσότητα που είναι η εξής:

$$E = \hbar\omega \quad \text{σχέση (5.1.9)}$$

Έτσι, όσο αφορά την ενέργεια τα φωτόνια έχουν τετραδιάνυσμα ταχύτητας σύμφωνα με το οποίο έχουμε ότι:

$$E = -\rho u_{\text{obs}} \quad \text{σχέση (5.1.10)}$$

Από τη σχέση (5.1.9) και τη σχέση (5.1.10), έχουμε τα εξής:

$$\hbar\omega = -\rho u_{\text{obs}} \quad \text{σχέση (5.1.11)}$$

Επίσης, από τη σχέση (4.3.6), προκύπτει ότι:

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = -1 = u^\alpha u_\alpha \quad \text{σχέση (4.3.6)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (4.3.6) λαμβάνουμε τα εξής:

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = -1 = u^\alpha u_\alpha \Rightarrow$$

$$g_{\alpha\beta}(x) u_{obs}^a u_{obs}^a = -1 = u_{obs}^\alpha u_{obs\alpha} \Rightarrow$$

$$g_{\alpha\beta}(x) u_{obs}^i u_{obs}^i = -1 = u_{obs}^\alpha u_{obs\alpha} \Rightarrow$$

$$g_{\alpha\beta}(x) (u_{obs}^i)^2 = -1 \quad \text{σχέση (5.1.12)}$$

Όσο αφορά το στοιχείο του χρόνου από τον πίνακα (5.1.1) έχουμε ότι:

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u_{obs}^i)^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u_{obs}^i)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$(u_{obs}^i)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$u_{obs}^i = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \quad \text{σχέση (5.1.13)}$$

Έτσι, όσο αφορά το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας έχουμε ότι:

$$u_{obs}^\alpha = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right] \quad \text{σχέση (5.1.14)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (5.1.14) προκύπτει η ποσότητα διατήρησης του διανύσματος Killing. Έτσι, έχουμε ότι:

$$u_{obs}^\alpha = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \xi^\alpha \Rightarrow$$

$$u_{obs}^\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \xi^\alpha \quad \text{σχέση (5.1.15)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.1.11) και τη σχέση (5.1.15) προκύπτει ότι:

$$\hbar\omega = -\rho u_{obs} \Rightarrow$$

$$\hbar\omega = -\rho \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \xi^\alpha \quad \text{σχέση (5.1.16)}$$

Συνεπώς, όσο αφορά το αρχικό σημείο του πομπού, από τη σχέση (5.1.16) έχουμε ότι:

$$\hbar\omega_* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} (-\xi * \rho)_R \quad \text{σχέση (5.1.17)}$$

Ενώ, όσο αφορά το σημείο στο δέκτη που βρίσκεται στο άπειρο έχουμε ότι:

$$\hbar\omega_\infty = (-\xi * \rho)_\infty \quad \text{σχέση (5.1.18)}$$

Από τη σχέση (5.1.18) φαίνεται ότι η ποσότητα  $\xi * \rho$  μένει αναλλοίωτη, ως όρος διατήρησης της γεωδαισίας του φωτονίου. Από τη σχέση (5.1.17) και τη σχέση (5.1.18) διαιρώντας τις κατά μέλη, προκύπτει ότι:

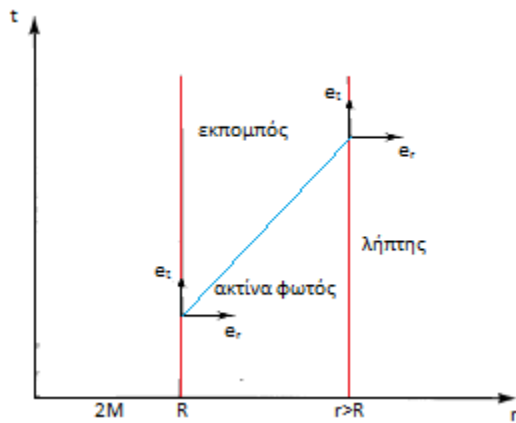
$$\begin{aligned} \frac{\omega_\infty}{\omega_*} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \\ \frac{\omega_\infty}{\omega_*} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \omega_\infty &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_* \quad \text{σχέση (5.1.19)} \end{aligned}$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι στο άπειρο υπάρχει μια μείωση της συχνότητας και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μειώνεται και η ενέργεια. Ενώ, παρατηρούμε ότι πράγματι ταυτίζονται τα αποτελέσματα από τη σχέση (5.1.4), εφόσον κανονικοποιηθεί και τη σχέση (5.1.19), δηλαδή έχουμε ότι:

$$\omega_\infty = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) \omega_* \quad \text{σχέση (5.1.4)}$$

Αυτή η βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό που πήρε το όνομα της και στην περίπτωση της βαρύτητας πέρα από την περίπτωση της θεωρίας της σχετικότητας στο φώς, λόγω της παρόμοιας συμπεριφοράς που εμφανίζει, δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα που είναι το εξής:





σχήμα 5.1.1: αναπαράσταση της ακτίνας φωτός για δέκτη στο άπειρο

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι ο το διάνυσμα Killing για το χρόνο όσο αφορά τη γεωμετρία Schwarzschild, της σχέσης (5.1.7) είναι η εξής:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.6)}$$

και

$$\xi^a = (1,0,0,0) \quad \text{σχέση (5.1.20)}$$

Επίσης, όσο αφορά το διάνυσμα Killing σε σχέση με τη συμμετρία της σφαίρας δίνεται από τη σχέση (4.4.8), που είναι η εξής:

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (4.4.8)}$$

και

$$n^a = (0,0,0,1) \quad \text{σχέση (5.1.21)}$$

Η (5.1.21) φαίνεται αν δείξουμε και τους τρεις πρώτους όρους της εξίσωσης (4.4.8) που δεν φαίνονται σ' αυτή τη σχέση αλλά εμφανίζονται στην προαναφερθείσα σχέση (5.1.6).

## 5.2 Μετάπτωση του περιηλίου και τροχιές σωματιδίων, με έμφαση στην περίπτωση του Ερμή

Η τροχιά των σωματιδίων και χρονική γεωδαισία όσο αφορά κυρίως τη μετάπτωση του περιηλίου στη γεωμετρία Schwarzschild για τα ελεγχόμενα σωματίδια που μπορεί κατ' ακρίβεια να μην αποτελούν μόνο σωματίδια αλλά μέχρι και πλανητικά σώματα, προκύπτει ότι με βάση τη μετρική ότι τα ποσά τα οποία είναι ανεξάρτητα είναι αυτά της του χρόνου,  $t$  και της γωνίας,  $\varphi$ , μ' αποτέλεσμα οι ποσότητες  $\xi$   $u$  και  $n$   $u$  να αποτελούν τους όρους διατήρησης, όπου  $u$  είναι το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας. Το  $\xi$  και το  $n$  δίνονται από τη σχέση (1.5.20) και τη σχέση (1.5.21), οπότε είναι δυνατός ο προσδιορισμός μέσω των διανυσμάτων Killing. Οι σταθερές ποσότητες  $\xi$   $u$  και  $n$   $u$  λόγω της σημαντικότητας τους έχουν καθιερωθεί με ορισμένα σύμβολα, και μέσω του πίνακα (5.1.1) έχουμε ότι:

$$- \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) = \xi \quad \text{σχέση (5.2.1)}$$

Επίσης, μέσω της σχέσης (4.3.23) έχουμε ότι:

$$\xi * u = \text{σταθερά} \quad \text{σχέση (4.3.23)}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (5.2.1) και τη σχέση (4.3.23) προκύπτει ότι:

$$e = - \xi u = - \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right] u \Rightarrow$$

$$e = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{dt} \quad \text{σχέση (5.2.2)}$$

Η σχέση (5.2.2) περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας για ανά μονάδα μάζα ηρεμίας. Στη σχέση (5.2.2) η ταχύτητα προσδιορίζεται μέσω της κλίσης σε ένα επίπεδο χωροχρονικό μη Ευκλείδειας γεωμετρίας διάγραμμα. Επιπροσθέτως, πρέπει να

σημειωθεί ότι για την περίπτωση της σχέσης (5.1.21) και της σχέσης (4.4.8) απ' όπου εκπορεύεται, προκύπτει ότι:

$$n = r \sin\theta \quad \text{σχέση (5.2.3)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.2.3) έχουμε ότι:

$$l = nu = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$l = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.4)}$$

Η σχέση (5.2.4) περιγράφει τη διατήρηση της γωνίας της ορμής ανά μονάδα μάζας ηρεμίας. Η διατήρηση της γωνιακής ροπής σημαίνει ότι η τροχιά σε ένα σχέδιο όπως αυτό που διαγράφεται στη Νευτώνεια μηχανική σημαίνει ότι για την περίπτωση ενός σώματος ή σωματιδίου που διαγράφει τροχιά με βάση το μεσημβρινό, τότε για να παραμείνει σ' αυτή την πορεία πρέπει να η μετατόπιση της γωνίας να είναι μηδενική, και αυτό εκφράζεται μέσω της παραγώγου, μ' αποτέλεσμα να θεωρούμε ότι η πορεία αυτή είναι αποτέλεσμα του  $\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ , και έτσι το  $l = 0$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο το σωματίδιο ή το σώμα παραμένει αμετάβλητο στη γωνία του στην ίδια τροχιά. Ακολούθως θέλουμε να προσδιορίσουμε την ισημερινή του πορεία, και θεωρούμε ότι για  $\theta = \pi/2$  και  $u^\theta = 0$ . Αποτέλεσμα αυτού είναι με βάση τη σχέση (4.3.6) ότι έχουμε τα εξής:

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 = u^\alpha u_\alpha \quad \text{σχέση (4.3.6)}$$

Άρα, από τη σχέση (4.3.6) προκύπτει ότι:

$$g_{\alpha\beta}(x) u^\alpha u^\beta = u^\alpha u_\alpha = -1 \quad \text{σχέση (5.1.6)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.1.6) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = -1 \quad \text{σχέση (5.1.7)}$$

Κανονικοποιώντας για το  $c = G = 1$ , έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = -1 \quad \text{σχέση (5.2.5)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.1.6) και τη σχέση (5.1.7), κατόπιν κανονικοποίησης για  $c=G=1$ , ή, αλλιώς τη σχέση (5.2.5) προκύπτει ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \Rightarrow$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \left(\frac{d\theta^2}{d\tau^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right) \quad \text{σχέση (5.2.6)}$$

Από τη σχέση (1.3.1) και τη σχέση (4.3.6) έχουμε ότι:

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \left(0 + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right) \Rightarrow$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 [0 + \sin^2\theta (u^\varphi)^2] \Rightarrow$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) (u^\varphi)^2\right] \Rightarrow$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\varphi)^2 \quad \text{σχέση (5.2.7)}$$

Από τη σχέση (5.2.2) έχουμε ότι:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow$$

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t \Rightarrow$$

$$u^t = \frac{e}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad \text{σχέση (5.2.8)}$$

και

$$(u^t)^2 = \frac{e^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \Rightarrow$$

$$(u^t)^2 = e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \quad \text{σχέση (5.2.9)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.2.4) προκύπτει ότι:

$$l = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$l = r^2 \sin^2\theta u^\varphi \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{\sin^2\theta r^2} \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{\sin^2(\frac{\pi}{2}) r^2} \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{r^2} \quad \text{σχέση (5.2.10)}$$

και

$$(u^\varphi)^2 = \frac{l^2}{r^4} \quad \text{σχέση (5.2.11)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.2.7), (5.2.9) και τη σχέση (5.2.11) έχουμε τα εξής:

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\varphi)^2 \Rightarrow$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{l^2}{r^4} \Rightarrow$$

$$-1 = - e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{l^2}{r^2} \quad \text{σχέση (5.2.12)}$$

Επίσης, η σχέση (5.2.12) τροποποιώντας την μπορεί να πάρει τη μορφή που είναι η εξής:

$$-1 = -e^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{l^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -e^2 + \frac{dr^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -e^2 + \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = e^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) = e^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} = e^2 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} - 1 = e^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{(e^2-1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.13)}$$

Έτσι, με βάση τον πρώτο όρο της εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (5.2.13),

θέτουμε την ενέργεια και έτσι έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{(e^2-1)}{2} \quad \text{σχέση (5.2.14)}$$

Συνεπώς, με βάση τη σχέση (5.2.13) και τη σχέση (5.2.14) προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.15)}$$

Άρα, έχουμε την ενέργεια και το δυναμικό, όπου το δυναμικό δίνεται από το

δεύτερο όρο της εξίσωσης και έχουμε ότι:

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.16)}$$

Αναδιαμορφώνοντας τη σχέση (5.2.16) έχουμε ότι:

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{l^2}{r^2} + 1 - \frac{2M}{r} \frac{l^2}{r^2} - \frac{2M}{r}\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 - \frac{2Ml^2}{r^3} - \frac{2M}{r} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{r^2} - \frac{2Ml^2}{r^3} - \frac{2M}{r} \right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{2Ml^2}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{2M}{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} - \frac{M}{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad \text{σχέση (5.2.17)}$$

Εν τέλει με βάση τη σχέση (5.2.15), τη σχέση (5.2.17), και τη σχέση (5.2.18),

έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

Μέσω αυτής της ενέργειας που προσδιορίζεται από τη γεωμετρία Schwarzschild, για να φτάσουμε σε μια μορφή αυτή της σχέσης (5.2.18) που είναι πιο κοντά στη Νευτώνεια θεωρία, δηλαδή έχει μη σχετικιστική έκφραση, και αυτό οφείλεται στη κανονικοποίηση που χρησιμοποιήθηκε μέσω της σχέσης (5.2.5). Στην περίπτωση που δεν ληφθεί υπόψη η κανονικοποίηση, τότε διαθέτουμε μια σχέση που υπακούει καλύτερα στους νόμους της σχετικότητας, και έτσι με βάση τη σχέση (5.1.7), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\
 -1 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \left(0 + \sin^2\theta \frac{d\phi^2}{d\tau^2}\right) \Rightarrow \\
 -1 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 [0 + \sin^2\theta (u^\phi)^2] \Rightarrow \\
 -1 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) (u^\phi)^2\right] \Rightarrow \\
 -1 &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\phi)^2 \qquad \text{σχέση (5.2.19)}
 \end{aligned}$$

Αναλύοντας επί μέρους τους όρους της σχέσης (5.2.19), και από τη σχέση (5.2.2) στη μη κανονικοποιημένη της μορφή, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 e &= c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \\
 e &= c^2 \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) u^t \Rightarrow \\
 u^t &= \frac{e}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \qquad \text{σχέση (5.2.20)}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 (u^t)^2 &= \frac{e^2}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2} \Rightarrow \\
 (u^t)^2 &= e^2 \left[ c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \right]^{-2} \qquad \text{σχέση (5.2.21)}
 \end{aligned}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.2.4), στη κανονικοποιημένη της μορφή, το αποτέλεσμα δεν είναι το ίδιο, διότι δεν αφορά ούτε το  $G$ , αλλά αφορά το  $c$ , και έτσι προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{c} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c} = r^2 \sin^2 \theta u^\varphi \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{c \sin^2 \theta r^2} \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{c \sin^2(\frac{\pi}{2}) r^2} \Rightarrow$$

$$u^\varphi = \frac{l}{c r^2} \quad \text{σχέση (5.2.22)}$$

και

$$(u^\varphi)^2 = \frac{l^2}{c^2 r^4} \quad \text{σχέση (5.2.23)}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$u^r = \frac{dr}{cd\tau} \Rightarrow$$

$$(u^r)^2 = \frac{dr^2}{(cd\tau)^2} \quad \text{σχέση (5.2.24)}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (5.2.11), τη σχέση (5.2.19) τη σχέση (5.2.21) και τη σχέση (5.2.24) έχουμε ότι:

$$-1 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\varphi)^2 \Rightarrow$$

$$-1 = -e^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{l^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = -e^2 + \frac{dr^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{l^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$-\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{l^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = -e^2 + \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{l^2}{r^2} + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) = e^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) = e^2 - \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$



$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} = e^2 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} - 1 = e^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + \frac{dr^2}{d\tau^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{(e^2 - 1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.25)}$$

Επομένως, η ενέργεια της σχέσης (5.2.24) παραμένει ίδια μ' αυτήν της σχέσης (5.2.13). Συνεπώς, παραμένει ως έχει και η σχέση (5.2.18), αλλά η σχέση (5.2.16), και (5.2.17) μεταβάλλεται, και εν προκειμένω έχουμε ότι:

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{c^2 r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.26)}$$

Τροποποιώντας τη μορφή της σχέσης (5.2.26) έχουμε ότι:

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{l^2}{c^2 r^2} + 1\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{l^2}{c^2 r^2} + 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \frac{l^2}{c^2 r^2} - \frac{2GM}{r}\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{c^2 r^2} + 1 - \frac{2MGl^2}{c^2 c^2 r^3} - \frac{2GM}{r} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{c^2} \left( \frac{l^2}{2r^2} - \frac{2MGl^2}{c^2 r^3} - \frac{2GM}{r} \right) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{1}{2c^2} \frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{2MGl^2}{c^4 r^3} - \frac{1}{2} \frac{2GM}{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{l^2}{2c^2 r^2} - \frac{MGl^2}{c^4 r^3} - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2c^2 r^2} - \frac{MGl^2}{c^4 r^3}, \text{ ή, } V(r) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{MGl^2}{c^2 r^3} \right) \quad \text{σχέση (5.2.27)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα από τη σχέση (5.2.17) και τη σχέση (5.2.27) έχουμε ότι:

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad \text{σχέση (5.2.17)}$$

$$V(r) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} \right) \quad \text{σχέση (5.2.27)}$$

Ορίζοντας τη ενέργεια ίση με την παρακάτω εξίσωση έχουμε ότι:

$$e^2 \equiv \frac{mc^2 + E_{Newton}}{mc^2} \quad \text{σχέση (5.2.28)}$$

Από τη σχέση (5.2.27) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{mc^2 + E_{Newton}}{mc^2} \Rightarrow \\ e^2 mc^2 &= mc^2 + E_{Newton} \Rightarrow \\ E_{Newton} &= e^2 mc^2 - mc^2 \Rightarrow \\ E_{Newton} &= mc^2(e^2 - 1) \quad \text{σχέση (5.2.29)} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.2.25), με αντικατάσταση στη σχέση (5.2.27), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{(e^2 - 1)}{2} &= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 \right) - 1 \right] \Rightarrow \\ e^2 - 1 &= \frac{dr^2}{d\tau^2} + \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 \right) - 1 \right] \Rightarrow \\ e^2 - 1 &= \frac{dr^2}{d\tau^2} + \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2c^2 r^2} - \frac{GML^2}{c^4 r^3} \right) \Rightarrow \\ e^2 - 1 &= \frac{dr^2}{c^2 d\tau^2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2c^2 m^2 r^2} - \frac{GML^2}{c^4 m^2 r^3}, \text{ όπου, } L = ml \Rightarrow \\ \frac{E_{Newton}}{mc^2} &= \frac{dr^2}{c^2 d\tau^2} + \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2} - \frac{GML^2}{c^2 m^2 r^3} \right) \Rightarrow \\ \frac{E_{Newton}}{m} &= \frac{dr^2}{d\tau^2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2m r^2} - \frac{GML^2}{c^2 m r^3} \\ E_{Newton} &= m \frac{dr^2}{d\tau^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2 mr^3} \quad \text{σχέση (5.2.30)} \end{aligned}$$

Η ενέργεια αυτή είναι ίδια με την ενέργεια στη Νευτώνεια βαρύτητα με τη διαφορά ότι στην εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (5.2.30) υπάρχει ένας επιπλέον όρος, αυτός της σχετικότητας, που εν προκειμένω στοιχειοθετεί τη

σχετικιστική διόρθωση. Επομένως, για την περίπτωση που το  $r$  τείνει να πάει στο άπειρο, σύμφωνα και με τη σχέση (5.2.27), έχουμε ότι:

$$V(r) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right) \quad \text{σχέση (5.2.27)}$$

Οπότε προκύπτει ότι:

$$V(\infty) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right) \Rightarrow$$

$$V(\infty) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} \right) \quad \text{σχέση (5.2.31)}$$

Ο λόγος που απομένει μόνο ο πρώτος όρος είναι διότι δεν μειώνεται υπό τετραγώνου ή κυβικά, αλλά σημειώνεται πολύ μικρότερη μείωση του, μ' αποτέλεσμα όταν τείνει στο άπειρο, να θεωρούμε ότι οι δύο τελευταίοι όροι μειώνεται αισθητά περισσότερο. Ο λόγος που δεν μηδενίζεται ο πρώτος όρος είναι γιατί θεωρούμε ότι τείνει στο άπειρο και δεν ισούται με την απόσταση στο άπειρο αλλιώς θα μηδενιζόταν και αυτός. Από τη σχέση (5.2.31) κανονικοποιώντας, για  $c = G = 1$ , έχουμε ότι:

$$V(\infty) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} \right) \Rightarrow$$

$$V(\infty) = -\frac{M}{r} \quad \text{σχέση (5.2.32)}$$

Όσο αφορά την περίπτωση που το  $r = 2M$ , κανονικοποιώντας πάλι για  $c = G = 1$  έχουμε ότι:

$$V(2M) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right) \Rightarrow$$

$$V(2M) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{2M} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right) \Rightarrow$$

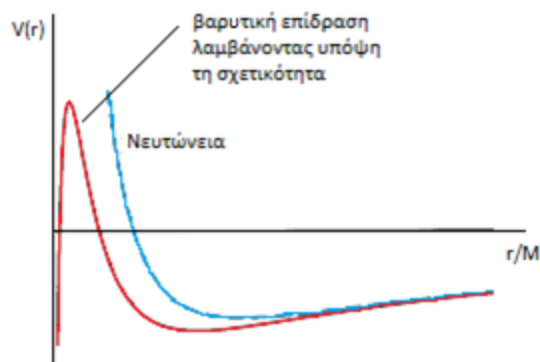
$$V(2M) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{2M} + \frac{l^2}{(2M)^2} - \frac{GMl^2}{c^2 (2M)^3} \right) \Rightarrow$$

$$V(2M) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{2M} \right) \Rightarrow$$

$$V(2M) = -\frac{M}{2M} \Rightarrow$$

$$V(2M) = -\frac{1}{2} \quad \text{σχέση (5.2.33)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (5.2.30), τη σχέση (5.2.32) και τη σχέση (5.2.33) έχουμε ότι:



σχήμα 5.2.1: το διάγραμμα της σχετικότητας και της Νευτώνειας θεωρίας

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται η επίδραση του σχετικιστικού παράγοντα, όπως περιγράφεται από τη σχέση (5.2.27) και σχετίζεται με το περιήλιο του Ερμή δείχνοντας αυτή τη διακύμανση στην πλανητική τροχιά του Ερμή στο ηλιακό μας σύστημα. Έτσι ενώ στη Νευτώνεια γραμμή το πεδίο βαρύτητας ασκείται ασυμπτωτικά με το επίδραση του δυναμικού πεδίου, στη γεωμετρία Schwarzschild, στη μη κανονικοποιημένη της μορφή φαίνεται η επίδραση του παράγοντα της σχετικότητας την οποία είχε προβλέψει ο Einstein, δείχνοντας το λόγο αυτής της διακύμανσης στην τροχιακή πορεία ορισμένων πλανητών που βρίσκονται πολύ κοντά στην επίδραση σωμάτων με μεγάλα βαρυτικά πεδία. Επίσης, από τη σχέση (5.2.17) έχουμε ότι:

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad \text{σχέση (5.2.17)}$$

Άρα, για την εύρεση των τοπικών μέγιστων και ελάχιστων έχουμε ότι:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dr} = -\left(-\frac{M}{r^2}\right) + \left(-2\frac{l^2}{2r^3}\right) - \left(-3\frac{Ml^2}{r^4}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + 3\frac{Ml^2}{r^4} \Rightarrow$$

$$0 = \frac{M}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + 3\frac{Ml^2}{r^4} \Rightarrow$$

$$0 = M - \frac{l^2}{r} + 3\frac{Ml^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$0 = \frac{Mr^2 - l^2r + 3Ml^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$0 = Mr^2 - l^2r + 3Ml^2 \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{-(-l^2) \pm \sqrt{l^4 - 4M3Ml^2}}{2M} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 12l^2 M^2}}{2M} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 \left(1 - 12\frac{M^2}{l^2}\right)}}{2M} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{l^2 \pm l^2 \sqrt{\left(1 - 12\frac{M^2}{l^2}\right)}}{2M} \Rightarrow$$

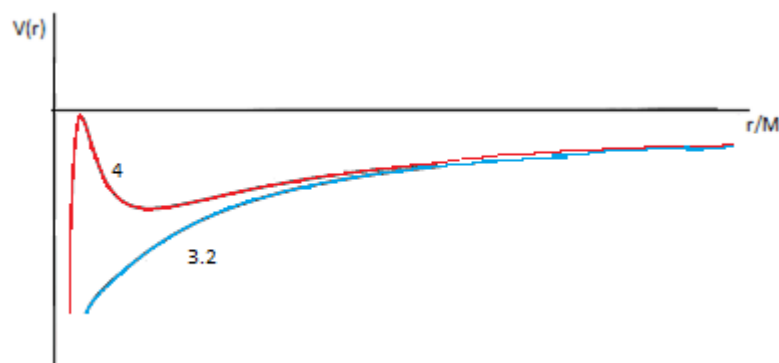
$$r_{1,2} = l^2 \frac{1 \pm \sqrt{\left(1 - 12\frac{M^2}{l^2}\right)}}{2M} \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12\frac{M^2}{l^2}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$r_{min}^{max} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12\frac{M^2}{l^2}\right)} \right] \quad \text{σχέση (5.2.34)}$$

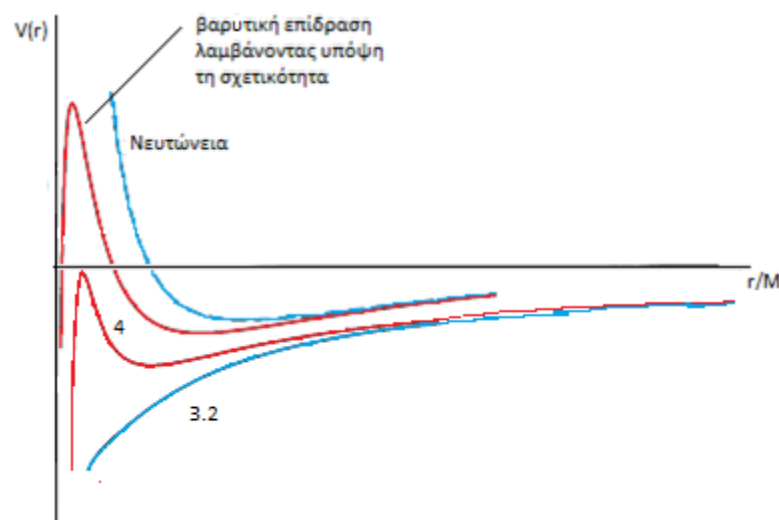
Η σχέση αυτή αφορά τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια ενός σώματος και στην μέγιστη δυνατή απόσταση αυτή δηλαδή που τείνει στο άπειρο. Έτσι, με βάση τη σχέση (5.2.34) προκύπτει ότι στην περίπτωση που λάβουμε ότι  $\frac{l}{M} < \sqrt{12} = 3.46$  τότε παρατηρούμε ότι δεν

υπάρχει κανένα ακρότατο σ' αντίθεση με την περίπτωση που το  $\frac{l}{M} > 4$ , οπότε έχουμε ότι υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο και ελάχιστο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.2.2: τοπικά μέγιστα και ελάχιστα

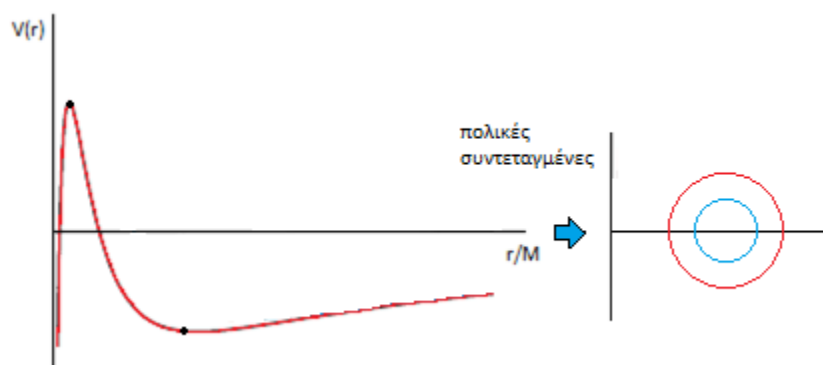
Επομένως, σύμφωνα με τι σχήμα 5.2.1 και το σχήμα 5.2.2 έχουμε το παρακάτω διάγραμμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.2.3! σύγκριση Νευτώνειας βαρύτητας και βαρύτητας στην οποία έχει ληφθεί υπόψη η θεωρία της σχετικότητας

Σύμφωνα με την παραπάνω γραφική παράσταση του σχήματος 5.2.3, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη τη θεωρία της σχετικότητας για τιμές όπου το  $r$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 4 η βαρυτική

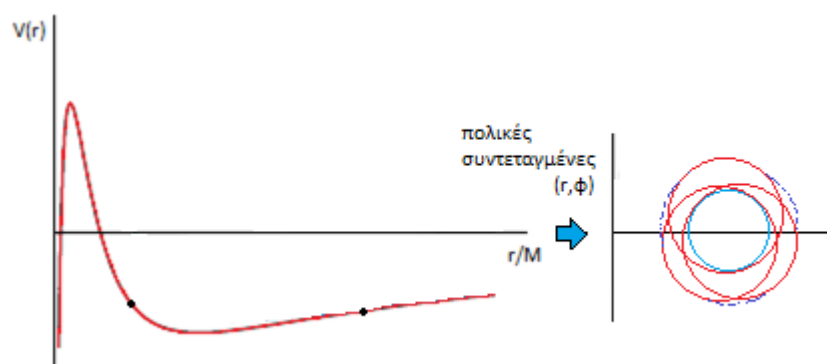
επίδραση τελείται υπό τον περιορισμό ενός φράγματος δυναμικού με βάση τη φυγόκεντρο δύναμη που αναπτύσσεται και κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υφίσταται ένα φυγόκεντρο φράγμα. Η διαφορά της Νευτώνειας θεωρίας, χωρίς την επίδραση της θεωρίας της σχετικότητας, εστιάζεται σε αυτό το σημείο, όπου το φυγόκεντρο φράγμα κατά τη Νευτώνεια μηχανική είναι άπειρο, όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.2.3, σ' αντίθεση με την περίπτωση που το φράγμα δυναμικού είναι πεπερασμένο, όπως στην περίπτωση που  $\frac{l}{m} > 4$ . Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 5.2.1 έχουμε ότι το



σχήμα 5.2.4: μέγιστο και ελάχιστο στη γεωμετρία Schwarzschild

Παρατηρούμε με βάση το σχήμα 5.2.4 και σύμφωνα με τη σχέση (5.2.18) ότι στο τοπικό μέγιστο που φαίνεται στην αριστερή εικόνα για τη γραφική παράσταση της γεωμετρίας Schwarzschild, που λαμβάνει υπόψη τη σχετικιστική επίδραση κατά τη θεωρία της σχετικότητας μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες, προκύπτει ο εξωτερικός κύκλος που δείχνει την τροχιά του πλανητικού σώματος. Με βάση το τοπικό μέγιστο είναι εφικτό να προσδιορισθεί η τροχιακή πορεία του σώματος που διαγράφει αυτή την τροχιά. Στο τοπικό ελάχιστο αντιστοιχεί η περίπτωση που το  $r < 2M$  και αφορά στις πολικές συντεταγμένες τον εσωτερικό κύκλο, που δείχνει την τροχιακή πορεία του πλανητικού σώματος σ' αυτή την εκδοχή. Ο εξωτερικός κύκλος

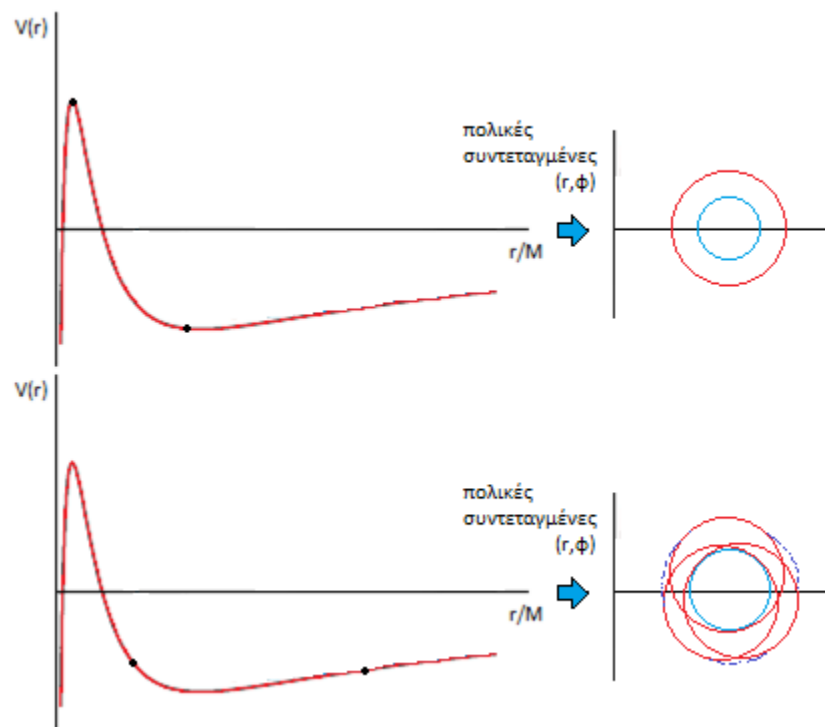
είναι σταθερός σ' αντίθεση με τον εσωτερικό κύκλο που είναι ασταθής. Επίσης, αν εξεταστεί στην γεωμετρία Schwarzschild τα σημεία καμπής, έχουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.2.5: σημεία καμπής στη γεωμετρία Schwarzschild

Ο μπλε εσωτερικός κύκλος αντιστοιχεί στην περίπτωση που το  $r < 2M$  είναι ασταθής και αφορά στην περίπτωση του ηλιακού μας συστήματος την περίπτωση του Ερμή. Όσο αφορά τους κόκκινους εξωτερικούς κύκλους τα απομακρυσμένα σημεία αφορούν το αφήλιο και τα πιο κοντινά σημεία αντιστοιχούν στο περιήλιο, που εμπίπτει πάλι στην τροχιακή πορεία του Ερμή και εξηγούν με βάση τη σχέση (5.2.18) την τροχιακή του πορεία. Έτσι, συνοψίζοντας έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα που είναι τα εξής:





σχήμα 5.2.6: γεωμετρία Schwarzschild

Από τη σχέση (5.2.18) έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

Στη κανονικοποιημένη της μορφή έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{c^2 d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.35)}$$

Οι σχέσεις που χρειαζόμαστε εν προκειμένω είναι οι εξής:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.35)}$$

$$\frac{(e^2 - 1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 \right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.25)}$$

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2c^2 r^2} - \frac{GMl^2}{c^4 r^3}, \quad \text{ή, } V(r) = \frac{1}{c^2} \left( -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right) \quad \text{σχέση (5.2.27)}$$

$$r_{\min}^{\max} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left( 1 - 12 \frac{M^2}{l^2} \right)} \right] \quad \text{σχέση (5.2.34)}$$

Τα σημεία καμπής προκαλούνται σε μια ακτίνα  $r_{tp}$ , όπου αυτή η ακτίνα αντιστοιχεί στην περίπτωση που το  $\mathcal{E} = V(r)$  και τις σχέσεις (5.2.35), (5.2.25), (5.2.27) και (5.2.34), προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{(e^2-1)}{2} = -\frac{GM}{r_{pt}} + \frac{l^2}{2c^2 r_{pt}^2} - \frac{GMl^2}{c^4 r_{pt}^3} \quad \text{σχέση (5.2.36)}$$

Επομένως, όταν το  $\frac{l}{M} < \sqrt{12} = 3.2$ , τότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής και το  $\mathcal{E}$  παίρνει μόνο θετικές τιμές όπως άλλωστε φαίνεται και από το σχήμα 5.2.2. Ενώ για τη γραφική παράσταση της τιμής 3.2 δεν υπάρχει σημείο καμπής μ' αποτέλεσμα ένα σωματίδιο που θα ακολουθήσει αυτή την πορεία να μην ανακλαστεί σ' αντίθεση με τη Νευτώνεια θεωρία, όπου θα ανακλαστεί από το φράγμα δυναμικού. Οι τροχιές με  $\frac{l}{M} > \sqrt{12} = 3.2$  τοπικό μέγιστο έχουν τιμές για το  $r_{pt}$  μεγάλες, μ' αποτέλεσμα, επειδή σε σχέση με το  $\mathcal{E}$ , είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά, το  $\mathcal{E}$  να σημειώνει μικρότερη αύξηση το  $\mathcal{E}$ , και συνέπεια αυτού είναι να ξεφεύγει στο άπειρο ή να συνθλίβεται στο  $r=0$ . Αποτέλεσμα είναι να εκτελεί το πλανητικό σώμα μια τροχιά, εμφανίζοντας κάποιες διακυμάνσεις σε ορισμένα τροχιακά τμήματα, όπως και στην περίπτωση του περιηλίου, για τον Ερμή, όσο αφορά το ηλιακό μας σύστημα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.5, η τροχιά στο τοπικό ελάχιστο είναι σταθερή. Αυτό οφείλεται στο ότι το  $\mathcal{E} < 0$ , όπως προκύπτει από το σχήμα (5.2.36) αφού όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.5 τοποθετείται στον αρνητικό άξονα και σημειώνει ταλαντώσεις μεταξύ των δύο σημείων καμπής. Αυτές οι τροχιές καλούνται κλειστές τροχιές διότι το σώμα εκτελεί τροχιακή πορεία σε καθορισμένη διεύθυνση, χωρίς να ξεφεύγει θεωρητικά στο άπειρο ή να συνθλίβεται στο  $r = 0$ , όπως φαίνεται στην γραφική παράσταση του σχήματος 5.2.1. Στο ηλιακό μας σύστημα σημειώνονται στους περισσότερους πλανήτες κλειστές τροχιές, με το περιήλιο όμως του Ερμή να δείχνει ότι λόγω της

αυξημένης ενέργειας του εκτελεί πορεία καθοριζόμενη από τη θεωρία της σχετικότητας.

### 5.3 Ακτινικές βουτιές στις τροχιές των πλανητικών σωμάτων

Οι τροχιακές βουτιές συνιστούν τις τροχιακές διακυμάνσεις που παρουσιάζουν ορισμένα πλανητικά σώματα τα οποία εκτελούν ελεύθερη πτώση από το άπειρο, δηλαδή, σύμφωνα με τη σχέση (5.2.17) και τη σχέση (5.2.34), εκτελούν πτώσεις που είναι της μορφής που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις που είναι οι εξής:

$$V(r) = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad \text{σχέση (5.2.17)}$$

$$r_{\min}^{max} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12 \frac{M^2}{l^2}\right)} \right] \quad \text{σχέση (5.2.34)}$$

Άρα, έχουμε ότι για  $l = 0$  το  $r = 0$  σύμφωνα με τη σχέση (5.2.34). Ακολουθώντας χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.2.17), θεωρώντας ότι τείνει στο άπειρο και όχι ότι βρίσκεται πράγματι στο άπειρο έχει ως αποτέλεσμα το  $V(r)$  να ισούται με  $-\frac{M}{r}$ , όπως φαίνεται και από την παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$V(\infty) = -\frac{M}{r} \quad \text{σχέση (5.2.32)}$$

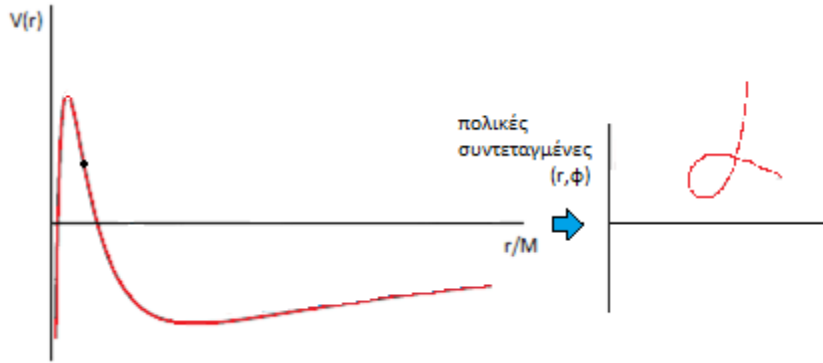
Συνεπώς, το σώμα που διαγράφει αυτή την τροχιά, μ' αυτές τις μαθηματικές παραμέτρους και σημειώνει διακυμάνσεις στη κινητική του ενέργεια, ανάλογα με τις τιμές του  $\mathcal{E}$ , απ' όπου φαίνεται ότι λαμβάνει τιμές που καθορίζουν αυτές τις μεταβολές.

Σύμφωνα με τη σχέση (5.2. 2) έχουμε ότι:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.2)}$$

$$\mathcal{E} = \frac{(e^2 - 1)}{2} = -\frac{GM}{r_{pt}} + \frac{l^2}{2c^2 r_{pt}^2} - \frac{GMl^2}{c^4 r_{pt}^3} \quad \text{σχέση (5.2.36)}$$

Ακολουθώντας το σώμα για  $e = 1$ , που αντιστοιχεί στο  $\mathcal{E} = 0$ , έχουμε ότι:



σχήμα 5.3.1: σκεδαζόμενη τροχιά

Το σώμα ερχόμενο από το άπειρο εκτελεί λόγω της έλξης μια τροχιά γύρω από το σώμα που το έλκει και ακολούθως επανέρχεται σε μια τροχιακή πορεία προς το άπειρο. Η διαφορά με τη Νευτώνεια θεωρία είναι επειδή το σώμα σχετίζεται μόνο με τον παράγοντα  $1/r$ , αποτέλεσμα είναι να μην μπορεί να περιγράψει αυτή την τροχιακή βουτιά προς την έλξη που τους ασκείται και ακολούθως να επιστρέψει στην πορεία του προς το άπειρο. Έτσι, υπάρχει σημαντική διαφοροποίηση ανάμεσα στη Νευτώνεια μηχανική και τη σχετική περιγραφή που δίνεται από τη γεωμετρία της θεωρίας Schwarzschild, που λαμβάνει υπόψη και τη θεωρία της σχετικότητας.

Από τη σχέση (5.2.18) έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, τη σχέση και τη σχέση (5.2.18), προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = 0 = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} = V(r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(u^r)^2 = -\frac{M}{r} \Rightarrow$$

$$-(u^r)^2 = 2\frac{M}{r} \Rightarrow$$

$$u^r = -(2\frac{M}{r})^{1/2} \quad \text{σχέση (5.3.1)}$$

Από τη σχέση (5.2.2) έχουμε ότι:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.2)}$$

Άρα, προκύπτει ότι:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow$$

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t \Rightarrow$$

$$u^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{σχέση (5.3.2)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.3.1) και της σχέση (5.3.2), προκύπτει το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας που είναι το εξής:

$$u^\alpha = \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, -(2\frac{M}{r})^{1/2}, 0, 0\right] \quad \text{σχέση (5.3.3)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.3.1) μπορούμε ολοκληρώνοντας να πάρουμε τη σχέση για το  $r$  και το  $\tau$ , οπότε έχουμε ότι:

$$u^r = -(2\frac{M}{r})^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -(2\frac{M}{r})^{1/2} \Rightarrow$$

$$r^{1/2} dr = -(2M)^{1/2} d\tau \Rightarrow$$

$$\int r^{1/2} dr = \int_{\tau_*}^{\tau} -(2M)^{1/2} d\tau \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} r^{1+\frac{1}{2}} = -(2M)^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau_*) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} r^{\frac{3}{2}} = +(2M)^{\frac{1}{2}} (\tau_* - \tau) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}r^{\frac{3}{2}} = (2M)^{\frac{1}{2}}(\tau_* - \tau) \Rightarrow$$

$$r^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(2M)^{\frac{1}{2}}(\tau_* - \tau) \Rightarrow$$

$$r = \left[ \frac{2}{3}(2M)^{\frac{1}{2}}(\tau_* - \tau) \right]^{2/3} \Rightarrow$$

$$r = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}(2M)^{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}(\tau_* - \tau)^{2/3} \Rightarrow$$

$$r = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}(2M)^{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}}(\tau_* - \tau)^{2/3} \Rightarrow$$

$$r(\tau) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}(2M)^{\frac{1}{3}}(\tau_* - \tau)^{2/3} \quad \text{σχέση (5.3.4)}$$

Στη σχέση (5.3.4) εμφανίζεται ο όρος  $\tau_*$ , που υποδηλώνει τη διόρθωση του χρόνου για τον κατάλληλο χρόνο όταν το  $r = 0$ .

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (5.3.1) έχουμε ότι:

$$u^r = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{1/2} \quad \text{σχέση(5.3.5)}$$

Και από τη σχέση (5.3.2) έχουμε ότι:

$$u^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{σχέση (5.3.6)}$$

Ακολουθώντας, διαιρώντας τη σχέση (5.3.5) και τη σχέση (5.3.6) κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\frac{\frac{dr}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{-\left(2\frac{M}{r}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{dr} = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{σχέση (5.3.7)}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.3.7) και ολοκληρώνοντας τη έχουμε ότι:

$$\frac{dt}{dr} = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$dt = -\left(2\frac{M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow$$

$$\int_{t_*}^t dt = \int -\left(2\frac{M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow$$

$$t = t_* + \int -\left(2\frac{M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \Rightarrow$$

$$t = t_* + 2M\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \log\left|\frac{\frac{r}{2M}^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{r}{2M}^{\frac{1}{2}}-1}\right|\right] \quad \text{σχέση (5.3.8)}$$

Συνεπώς, για να πρόκειται για μια σχέση σύμφωνα με την οποία είναι εφικτό να διορθωθεί ο κατάλληλος χρόνος όταν το  $r=0$ . Παρατηρούμε ότι αντικαθιστώντας την τιμή που μας ενδιαφέρει εξ αρχής και δεν είναι άλλη από το άπειρο για το  $r$ , διότι εκεί παρατηρείται η διαφοροποίηση όπως φάνηκε στο σχήμα 5.2.1 ανάμεσα στη Νευτώνεια θεωρία και τη θεωρία της γεωμετρίας Schwarzschild που λαμβάνει υπόψη και τον παράγοντα της σχετικότητας, το  $t$  δίνει μείον άπειρο. Αυτό φαίνεται παρακάτω όπου για  $r = \infty$  έχουμε ότι:

$$t = t_* + 2M\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \log\left|\frac{\frac{r}{2M}^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{r}{2M}^{\frac{1}{2}}-1}\right|\right] \Rightarrow$$

$$t = t_* + 2M\left[-\frac{2}{3}\infty - 2\infty + \log\left|\frac{\frac{\infty}{2M}^{\frac{1}{2}}+1}{\frac{\infty}{2M}^{\frac{1}{2}}-1}\right|\right] \Rightarrow$$

$$t = -\infty, \text{ για } r = +\infty \quad \text{σχέση (5.3.9)}$$

Επομένως, για χρόνο που αφορά το  $-\infty$  σε  $r$  που ισούται με άπειρο, σημαίνει ερμηνευμένο ότι το σώμα πέφτει προς τα μέσα στο σώμα από το οποίο

προέρχεται η έλξη, ενώ προέρχεται από το άπειρο. Επίσης, στην περίπτωση που το  $r = 2M$ , τότε προκύπτει ότι:

$$t = t_* + 2M \left[ -\frac{2}{3} \left(\frac{2M}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{2M}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \log \left| \frac{\frac{2M^{\frac{1}{2}}+1}{2M} - 1}{\frac{2M^{\frac{1}{2}}-1}{2M}} \right| \right] \Rightarrow$$

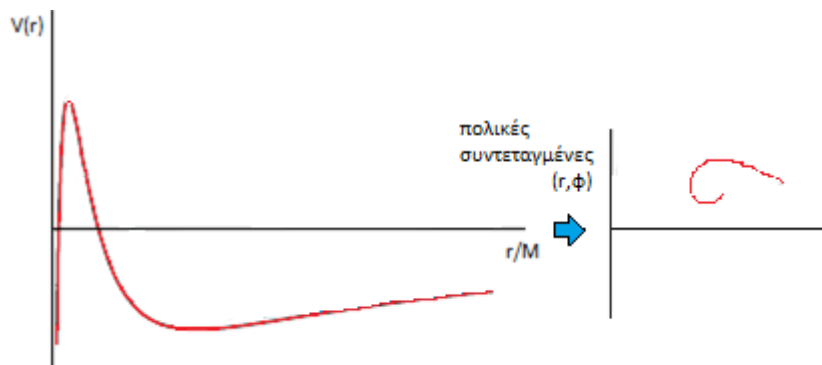
$$t = t_* + 2M \left( -\frac{2}{3} - 2 + \log 1 \right) \Rightarrow$$

$$t = t_* + 2M \left( -\frac{2}{3} - \frac{6}{3} + 0 \right) \Rightarrow$$

$$t = t_* + 2M \left( \frac{8}{3} \right) \Rightarrow$$

$$t = t_* + M \left( \frac{16}{3} \right) \qquad \text{σχέση (5.3.10)}$$

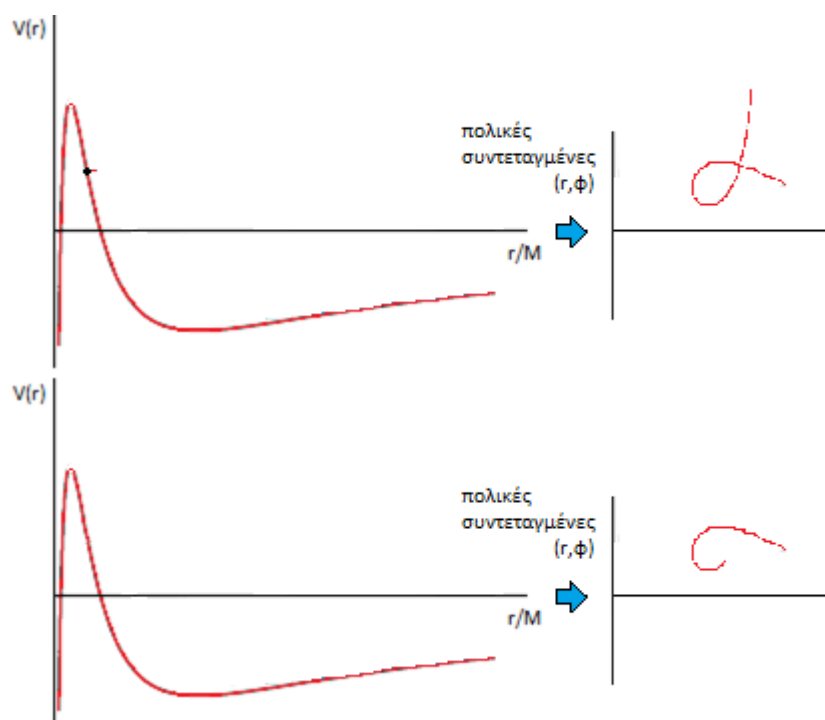
Επίσης, πρέπει πέρα από τη σκεδαζόμενη τροχιά του σχήματος 5.3.1 να παρατεθεί και η τροχιά του παρακάτω σχήματος που φαίνεται η περίπτωση να πέσει ένα σώμα στο κέντρο έλξης, αντί να σκεδαστεί, και είναι το εξής:



σχήμα 5.3.2: προσπίπτουσα τροχιά

Έτσι, στο παραπάνω σχήμα, είναι εμφανές από τη σχέση στις πολικές συντεταγμένες ότι μπορεί ένα σώμα για μηδενική ενέργεια να προσπέσει στο σώμα έλξης προερχόμενο από το άπειρο. Άρα, σώμα που προέρχεται από το άπειρο ισχύουν συνοψίζοντας από το διάγραμμα 5.3.1 και το διάγραμμα 5.3.2, το εξής:





σχήμα 5.3.3: ελεύθερη πτώση σώματος από το άπειρο

Πρέπει να σημειωθεί ότι με βάση τη σχέση (5.2.17) και τη σχέση (5.2.34) άπειρο θεωρείται το δυναμικό πεδίο που το  $l = 0$ .

#### 5.4 Ταχύτητα διαφυγής, σταθερές τροχιές και τροχιακή μετάπτωση του Ερμή

Ένας παρατηρητής διατηρεί μια θέση συντεταγμένων Schwarzschild και ακτίνας  $R$ , ενώ εκτοξεύει ένα βλήμα το οποίο ακολουθεί τροχιά ακτινικά προς τα έξω με ταχύτητα  $V$ , όπως μετράται με βάση το δικό του αδρανειακό πλαίσιο ακολουθώντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη θεωρία της σχετικότητας. Η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα διαφυγής. Η ακτινικά προς τα έξω εκτόξευση ακολουθεί την ακτινική γεωδαισία στην οποία δεν επιδρούν δυνάμεις. Στο άπειρο μια εκτόξευση σε ηρεμία έχει  $e = 1$  και έτσι, ο παρατηρητής πρέπει να εκτοξεύσει με την ελάχιστη τιμή που αντιστοιχεί στο  $e = 1$ .

Αυτό απαιτεί τετραδιάνυσμα ταχύτητας  $u$  το οποίο είναι το ίδιο με το  $u^r$ , με τη διαφορά στο πρόσημο, που δίνεται από τη σχέση (5.3.2), οπότε έχουμε ότι:

$$u^r = -(2\frac{M}{r})^{1/2} \quad \text{σχέση (5.3.2)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (5.3.2) προκύπτει ότι:

$$u = -u^r = (2\frac{M}{r})^{1/2} \quad \text{σχέση (5.4.1)}$$

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα  $V$  σ' αυτό το πλαίσιο, μ αποτέλεσμα να τέμνει τη κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου. Το σωματίδιο κινείται με ενέργεια που είναι η εξής:

$$E = m\gamma \quad \text{σχέση (5.4.2)}$$

Ακόμα γνωρίζουμε ότι η ενέργεια ισούται με:

$$E = -\rho u_{\text{obs}} \quad \text{σχέση (5.4.3)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.4.2) και τη σχέση (5.4.3) προκύπτει ότι:

$$m\gamma = -\rho u_{\text{obs}} \quad \text{σχέση (5.4.4)}$$

Επιπροσθέτως, όσο αφορά τα βαθμωτά πεδία με την ορθοκανονική βάση του παρατηρητή, η ορμή του παρατηρητή όπως προκύπτει από τη σχέση (5.4.4), έχει τετραδιάνυσμα που είναι το εξής:

$$\rho = (m, 0, 0, 0) \quad \text{σχέση (5.4.5)}$$

Ακολουθώντας, όσο αφορά το διάνυσμα της ταχύτητας έχουμε ότι:

$$x = \gamma (x' + ut') \quad \text{σχέση (1.5.14)}$$

$$t = t' \gamma + \frac{u \gamma x'}{c^2} \quad \text{σχέση (1.5.15)}$$

$$y = y' \quad \text{σχέση (1.5.16)}$$

$$z = z' \quad \text{σχέση (1.5.17)}$$

Επίσης, από τη συστολή Lorentz, και τη σχέση (1.5.7) έχουμε ότι:

$$L = [L_*^2 - (c\Delta t)^2]^{1/2} \quad \text{σχέση (1.7.3)}$$

Άρα, από τη σχέση (1.5.14), για  $t' = 0$  έχουμε ότι:

$$t = t' \gamma + \frac{u \gamma x'}{c^2} = \gamma \left( t' + \frac{u x'}{c^2} \right) \Rightarrow$$

$$t = \gamma \left( \frac{u x'}{c^2} \right) \Rightarrow$$

$$t = \gamma u \left( \frac{x'}{c^2} \right) \Rightarrow$$

$$t = V \left( \frac{x'}{c^2} \right) \Rightarrow$$

$$t = \left( \frac{V}{c^2} \right) x' \quad \text{σχέση (5.4.6)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.4.6) έχουμε ότι:

$$t = \left( \frac{V}{c^2} \right) x' \Rightarrow$$

$$\Delta t = \left( \frac{V}{c^2} \right) L_* \quad \text{σχέση (5.4.7)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1.7.3), τη σχέση (5.4.7) έχουμε ότι:

$$L = [L_*^2 - (c\Delta t)^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$L = [L_*^2 - \left( c \frac{V}{c^2} L_* \right)^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$L = [L_*^2 - \left( \frac{V}{c} L_* \right)^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$L = [L_*^2 \left( 1 - \left( \frac{V}{c} \right)^2 \right)]^{1/2} \Rightarrow$$

$$L = L_* \left[ \left( 1 - \left( \frac{V}{c} \right)^2 \right) \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (5.4.8)}$$

Άρα, κανονικοποιώντας τη σχέση (5.4.8) έχουμε ότι:

$$L = L_* \left[ \left( 1 - V^2 \right) \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (5.4.9)}$$

Επίσης, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε από τη κοσμική γραμμή διαστολής του χρόνου, σύμφωνα με τη σχέση (1.4.6), και έχουμε ότι:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} - \text{κοσμική γραμμή διαστολής του χρόνου} \quad \text{σχέση (1.4.6)}$$

Άρα, από τη σχέση (1.4.6), έχουμε ότι:

$$d\tau_{AB} = dt' \sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$dt' = d\tau_{AB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{dt'}{d\tau_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$u^{t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \quad \text{σχέση (5.4.10)}$$

Επομένως, κανονικοποιώντας τη σχέση (5.4.10) προκύπτει ότι:

$$u^{t'} = u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \Rightarrow$$

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \quad \text{σχέση (5.4.11)}$$

Επίσης, όσο αφορά τη το  $u^x$ , έχουμε ότι:

$$u^x = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = V^x \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \Rightarrow$$

$$u^x = \frac{v^x}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \quad \text{σχέση (5.4.12)}$$

Από τη σχέση (1.5.7) έχουμε ότι:

$$\gamma = (\cosh\theta) = [1 - u^2 / c^2]^{-1/2} \quad \text{σχέση (1.5.7)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1.5.7), και τη σχέση (5.4.11) προκύπτει ότι:

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \Rightarrow$$

$$u^t = \gamma \quad \text{σχέση (5.4.13)}$$

Επιπροσθέτως, από τη σχέση (1.5.7) και τη σχέση (5.4.12) έχουμε ότι:

$$u^x = \frac{V^x}{\sqrt{1-V^2}} \Rightarrow$$

$$u^x = V^x \gamma \quad \text{σχέση (5.4.14)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.4.13) και τη σχέση (5.4.14), έχουμε ότι:

$$u^\alpha = (\gamma, V^x \gamma) \quad \text{σχέση(5.4.15)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (5.4.15), το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας είναι το εξής:

$$u_{obs} = u^\alpha = (\gamma, V^x \gamma) \Rightarrow$$

$$u_{obs} = (\gamma, V^x \gamma, 0, 0) \quad \text{σχέση (5.4.16)}$$

Από τη κλασσική φυσική ισχύει για την ορμή ότι:

$$\rho = m u \quad \text{σχέση (5.4.17)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.4.3), τη σχέση (5.4.4) και τη σχέση (5.4.17) έχουμε ότι:

$$E = -\rho u_{obs} \Rightarrow$$

$$E = -m u u_{obs} \Rightarrow$$

$$E = -m u u_{obs} \quad \text{σχέση (5.4.18)}$$

Από τη σχέση (3.2.1) έχουμε ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Μεταβάλλοντας τη μορφή της σχέσης (3.2.1), έχουμε ότι:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta}(x) u^\alpha u^\beta \Rightarrow$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta}(x) u^\alpha u_{obs}^\beta \quad \text{σχέση (5.4.19)}$$

Από τη σχέση (4.3.6) έχουμε ότι:

$$g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 = u u \quad \text{σχέση (4.3.6)}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.6), τη σχέση (5.4.18), και τη σχέση (5.4.19) προκύπτει ότι:

$$E = -mu u_{obs} \Rightarrow$$

$$E = -mg_{\alpha\beta}(x) u^\alpha u_{obs}^\beta \Rightarrow$$

$$E = -mg_{tt}(x) u^t u_{obs}^t \quad \text{σχέση (5.4.20)}$$

Ακόμα, από τη σχέση (5.1.15) έχουμε το εξής:

$$u_{obs}^\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \xi^\alpha \quad \text{σχέση (5.1.15)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.3.6) και τη σχέση (5.4.20) προκύπτει ότι:

$$E = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.21)}$$

Επιπροσθέτως όσο αφορά την ορμή, από τη σχέση (5.4.17) και τη σχέση (4.3.6) έχουμε ότι:

$$\rho^2 = \rho * \rho = mu * mu = m^2 u * u = m^2 (-1) \Rightarrow$$

$$\rho^2 = -m^2 \quad \text{σχέση (5.4.22)}$$

Από τη σχέση (5.4.10) έχουμε ότι:

$$u^{t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^{t'}}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\rho^{t'} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u(t')^2}{c^2}}} \quad \text{σχέση (5.4.23)}$$

Κανονικοποιώντας τη σχέση (5.4.23), για  $c = 1$ , έχουμε ότι:

$$\vec{\rho}^{t'} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \quad \text{σχέση (5.4.24)}$$

και

$$\vec{\rho}^{t'} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = m\gamma \Rightarrow$$

$$\vec{\rho}^{t'} = m\gamma \quad \text{σχέση (5.4.25)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.4.12) έχουμε ότι:

$$u^x = \frac{v^x}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho^x}{m} = \frac{v^x}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \Rightarrow$$

$$\rho^x = \frac{mV^x}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = mV^x\gamma \quad \text{σχέση (5.4.26)}$$

και

$$\rho^x = mV^x\gamma \quad \text{σχέση (5.4.27)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.4.24) και τη σχέση (5.4.25), προκύπτει ότι:

$$\rho^\alpha = (E, \rho) = (m\gamma, mV^x\gamma) \Rightarrow$$

$$\rho^\alpha = (m\gamma, mV^x\gamma) \quad \text{σχέση (5.4.28)}$$

Από τη σχέση (5.4.26) για μικρές ταχύτητες έχουμε ότι:

$$\rho^x = \frac{mV^x}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = m\vec{V}^x\gamma \Rightarrow$$

$$\rho^x = \frac{mV^x}{1} = m\vec{V}^x * 1 \Rightarrow$$

$$\rho^x = m\vec{V}^x, \text{ για } V \leq 1 \quad \text{σχέση (5.4.29)}$$

Από τη σχέση (5.4.4), τη σχέση (5.4.22), τη σχέση (5.4.27) και τη σχέση (5.4.29)

έχουμε ότι:

$$E = m\gamma = -\rho u_{\text{obs}} \Rightarrow$$

$$E = m\gamma = m\vec{V}^x\gamma \Rightarrow$$

$$\vec{V}^x\gamma = 1 \Rightarrow$$

$$\vec{V}^x = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\vec{V}^x = (1 - \vec{V}^{x2})^{1/2} \Rightarrow$$

$$mV^x = m [1 - (\vec{V}^x)^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$mV^x = [m^2 - m^2 \vec{V}^x]^2]^{1/2} \Rightarrow$$

$$mV^x = (m^2 + \vec{\rho}^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\vec{\rho}^x = (m^2 + \vec{\rho}^2)^{1/2}, \text{ όπου, } E^x \equiv \rho^x \Rightarrow$$

$$E = E^x = (m^2 + \vec{\rho}^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$E = (m^2 + \vec{\rho}^2)^{1/2} \quad \text{σχέση (5.4.30)}$$

Η σχέση (5.4.30) αναπαριστά την περίπτωση που αναπτύσσονται ταχύτητες μικρές, ώστε να μην λαμβάνεται υπόψη η επίδραση του παράγοντα  $c$ . Στη συνέχεια, με βάση τις σχέσεις (1.5.7), (5.4.2), και (5.4.21), έχουμε ότι:

$$\gamma = (\cosh\theta) = [1 - u^2 / c^2]^{-1/2} \quad \text{σχέση (1.5.7)}$$

$$E = m\gamma \quad \text{σχέση (5.4.2)}$$

$$E = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.21)}$$

Ακολουθώντας, όσο αφορά την ταχύτητα που χρειάζεται για τη διαφυγή του σώματος, σύμφωνα με τη σχέση (1.5.7), τη σχέση (5.4.2) και τη σχέση (5.4.21), έχουμε ότι:

$$E = m\gamma \Rightarrow$$

$$E = \frac{m}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{1/2}} \Rightarrow$$

$$m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{m}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$



$$1 - \frac{2M}{r} = 1 - \frac{u^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2M}{r} = \frac{u^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$u^2 = c^2 \frac{2M}{r} \Rightarrow$$

$$u = c \left(\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$u_{\text{διαφυγής}} = c \left(\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.22)}$$

Κανονικοποιώντας τη σχέση (5.4.22), για  $c = 1$ , έχουμε ότι:

$$u_{\text{διαφυγής}} = \left(\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ όπου } r = R \Rightarrow$$

$$u_{\text{διαφυγής}} = \left(\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.23)}$$

Όσο αφορά τις σταθερές τροχιές, πρέπει να σημειωθεί ότι αφορούν την περίπτωση του τοπικού ακρότατου, που συγκεκριμένα είναι το τοπικό ελάχιστο.

Έτσι, με βάση τη σχέση (5.2.34) έχουμε ότι:

$$r_{\min}^{max} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12 \frac{M^2}{l^2}\right)} \right] \quad \text{σχέση (5.2.34)}$$

Από τη σχέση (5.2.34), σταθερότητα στην τροχιά υπάρχει για  $r = r_{\min}$ , όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.2.2, της υποενότητας 5.2, μ' αποτέλεσμα να

στοιχειοθετείται ότι για τιμή ίση με  $\frac{l}{M} = \sqrt{12} = 3.2$  σημειώνεται σταθερή

εσωτερική κυκλική τροχιά. Έτσι, με βάση τη σχέση (5.2.34) έχουμε ότι:

$$r_{\min}^{max} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12 \frac{M^2}{l^2}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12 \frac{1}{(\sqrt{12})^2}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 - 12 \frac{1}{12}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} \left[ 1 + \sqrt{(1-1)} \right] \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} (1 + 0) \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M} * \frac{M}{M} \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{l^2}{2M^2} * M \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{(\sqrt{12})^2}{2} * M \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = \frac{12}{2} * M \Rightarrow$$

$$r_{ISCO} = 6 * M \tag{σχέση (5.4.24)}$$

Από τη σχέση (5.2.2) και τη σχέση (5.4.4) έχουμε ότι:

$$e = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \tag{σχέση (5.2.2)}$$

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \tag{σχέση (5.2.4)}$$

Επομένως, η σταθερή τροχιακή πορεία ενός σώματος διαγράφεται για ακτίνα ίση με 6M. Όσο, αφορά τον προσδιορισμό της γωνιακής ταχύτητας στη γεωμετρία Schwarzschild είναι ο εξής:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} \tag{σχέση (5.4.25)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.2.2) έχουμε ότι:

$$e = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} \tag{σχέση (5.4.26)}$$

Και από τη σχέση (5.2.4), για  $\theta = \frac{\pi}{2}$  προκύπτει ότι:

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2 \sin^2(\frac{\pi}{2})} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2 * 1} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \quad \text{σχέση (5.4.27)}$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (5.4.25), τη σχέση (5.4.26) και τη σχέση (5.4.27),

έχουμε το εξής:

$$\Omega = \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{\frac{1}{r^2}}{\left(\frac{1 - \frac{2M}{r}}{e}\right)} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{e} \quad \text{σχέση (5.4.28)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.4.28) περιγράφεται η γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί τροχιακή κίνηση που είναι κυκλική. Συνεπώς, οι κυκλικές τροχιές περιγράφονται, μέσω της σχέσης (5.4.28), στη μορφή που είναι η εξής:

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = \frac{\Omega}{\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{l}{e} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^2 \Omega \quad \text{σχέση (5.4.29)}$$

Από τη σχέση (5.2.13) έχουμε ότι:

$$\frac{(e^2 - 1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.13)}$$

Αναλύοντας, τη σχέση (5.2.13) προκύπτει ότι:

$$\frac{(e^2-1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$e^2 = 0 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right), \text{ για } r = r_{\min} \Rightarrow$$

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) \quad \text{σχέση (5.4.30)}$$

Από τη σχέση αυτή αντικαθιστώντας για  $r = 6M$ , έχουμε ότι:

$$e^2 = \left(1 - \frac{2M}{6M}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{l^2}{(6M)^2} + 1\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{12})^2}{36} + 1\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{12}{36} + 1\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$$

$$e^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{σχέση (5.4.31)}$$

Η τιμή που προκύπτει για τη σχέση (5.4.31) αφορά το αποτέλεσμα για την διατήρηση της ενέργεια ανά μονάδα μάζας ηρεμίας σε σταθερή κυκλική τροχιά.

Από τη σχέση (5.2.18), έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

Επιλύοντας, της εξίσωση τη σχέσης (5.2.18) ως προς  $dr/dt$ , προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \Rightarrow$$

$$2(\mathcal{E} - V) = \frac{dr^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm [2(\mathcal{E} - V)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.32)}$$

Από τη σχέση (5.4.27) και τη σχέση (5.4.32) διαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dr}{d\tau}} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{[2(\mathcal{E}-V)]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{[2(\mathcal{E}-V)]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{σχέση (5.4.33)}$$

Από τη σχέση (5.2.13), τη σχέση (5.2.14) και τη σχέση (5.2.15), έχουμε ότι:

$$\frac{(e^2-1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.13)}$$

$$\mathcal{E} \equiv \frac{(e^2-1)}{2} \quad \text{σχέση (5.2.14)}$$

$$V(r) = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \quad \text{σχέση (5.2.16)}$$

Άρα, από τις σχέσεις (5.2.33), (5.2.13), (5.2.14) και (5.2.16) έχουμε ότι:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{[2(\mathcal{E}-V)]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left\{ 2 \left[ \frac{(e^2-1)}{2} - \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) - 1 \right] \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left[ 2 \frac{(e^2-1)}{2} - 2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + 2 \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left[ e^2 - 1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + 2 \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left[ e^2 - 1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

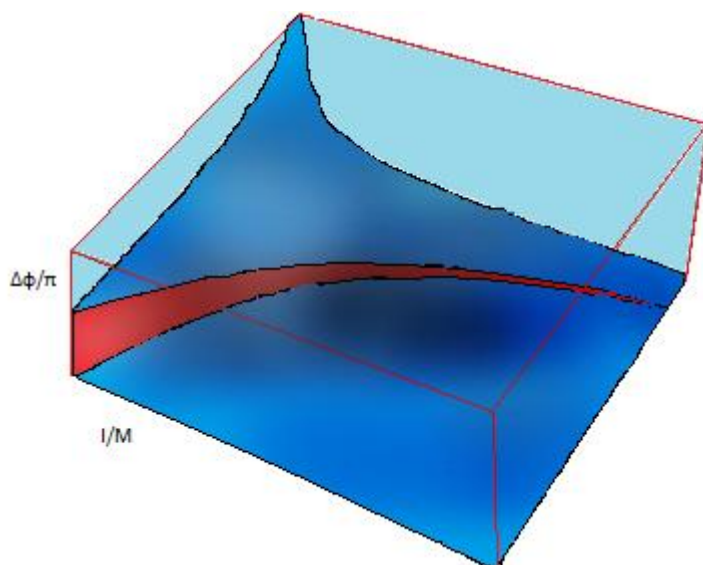
$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \frac{1}{\left[ e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l^2}{r^2} + 1\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ e^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.34)}$$

Η σχέση (5.4.34) υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο σε μια κατεύθυνση με γωνία  $\gamma$  το σώμα κινείται με αυξανόμενο  $r$ . Η γωνία μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της ακτίνας  $r$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι η τροχιά ενός πλανητικού σώματος αποτελούν τα συνεχόμενα σημεία από τα οποία διέρχεται το σώμα, με αυτόν τον προσδιορισμό των σημείων να μπορεί να επιτευχθεί με δύο εξωτερικά σημεία στροφής απ' όπου διέρχεται η τροχιακή πορεία του σώματος. Για να είναι κλειστή η τροχιά πρέπει η γωνιακή ροπή να είναι τέτοια που να εκτελεί κίνηση με  $\Delta\varphi$  ίσο με  $2\pi$ , αλλιώς, σ' αντίθετη περίπτωση τα εσωτερικά σημεία μεταπίπτουν, εννοώντας ότι υπάρχει τροχιακή μετάπτωση όπως στην περίπτωση του Ερμή, και αυτή η απόκλιση δίνεται από τη σχέση, που είναι η εξής:

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = \Delta\varphi - 2\pi \quad \text{σχέση (5.4.35)}$$

Η μετάπτωση του περιηλίου προσδιορίζεται από τη σχέση (5.4.35) στη γεωμετρία Schwarzschild για συγκεκριμένες τροχιές που χαρακτηρίζονται από τις παραμέτρους των σχέσεων (5.2.14) και (5.2.4). Έτσι, μέσω του  $\mathcal{E}$  και του  $l$  είναι εφικτός ο προσδιορισμός της μετάπτωσης του περιηλίου. Η συγκεκριμένη δέσμευση της τροχιάς δεν αφορά τιμές που το  $\Delta\varphi$  είναι μηδέν αλλά τις περιπτώσεις που υπάρχει καμπύλωση που δίνεται από το  $l$ ,  $\mathcal{E}$ , και κατ' επέκταση το  $e$ . Έτσι, λαμβάνουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.4.1: μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή στη γεωμετρία Schwarzschild

Από τη σχέση (5.4.34), επειδή πρόκειται για διαδοχικά εσωτερικά σημεία, από τα οποία διέρχεται το  $\Delta\phi$ , στο  $r_1$  και στο  $r_2$  διπλασιάζεται η γωνία σάρωσης και έχουμε ότι:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} [e^2 - (1 - \frac{2M}{r}) (\frac{l^2}{r^2} + 1)]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$d\phi = 2l \frac{1}{r^2} [e^2 - (1 - \frac{2M}{r}) (\frac{l^2}{r^2} + 1)]^{-\frac{1}{2}} dr \Rightarrow$$

$$\int d\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} [e^2 - (1 - \frac{2M}{r}) (\frac{l^2}{r^2} + 1)]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} [e^2 - (1 - \frac{2M}{r}) (\frac{l^2}{r^2} + 1)]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} [e^2 - (1 - \frac{2M}{r}) (\frac{l^2}{r^2} + 1)]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.36)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (5.4.36) και το σχήμα 5.4.1 στην ενδιάμεση κόκκινη περιοχή φαίνονται τα σημεία όπου το  $dr/dt$  εξαφανίζεται σ' αυτό το τροχιακό τμήμα. Από τη σχέση (5.2.30) έχουμε ότι:

$$E_{Newton} = m \frac{dr^2}{dt^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2 mr^3} \quad \text{σχέση (5.2.30)}$$

Αναλύοντας τη σχέση (5.2.30) έχουμε ότι:

$$E_{Newton} = m \frac{dr^2}{dt^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2mr^3} \Rightarrow$$

$$E_{Newton} = 0 - \frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{c^2mr^3} \Rightarrow$$

$$E_{Newton} = -\frac{GmM}{r} + \frac{(ml)^2}{2mr^2} - \frac{GM(ml)^2}{c^2mr^3} \Rightarrow$$

$$E_{Newton} = -\frac{GmM}{r} + \frac{m(l)^2}{2r^2} - \frac{GMm(l)^2}{c^2r^3}, \text{ για } m = 2 \Rightarrow$$

$$E_{Newton} = -\frac{G2M}{r} + \frac{2(l)^2}{2r^2} - \frac{GM2(l)^2}{c^2r^3} \Rightarrow$$

$$E_{Newton} = -\frac{G2M}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \quad \text{σχέση (5.4.37)}$$

Έτσι, η εύρεση του  $\Delta\phi$  που αντιστοιχεί στο τμήμα αυτό, γίνεται μέσω της σχέσης (5.4.36) και της σχέσης (5.2.37), λαμβάνοντας υπόψη και την επίδραση της σχετικότητας στον παράγοντα του  $e^2$  οπότε έχουμε ότι:

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2(e^2 - 1) - \left( -\frac{G2M}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2(e^2 - 1) + \frac{G2M}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.38)}$$

Ακολουθώντας, σύμφωνα με τη σχέση (5.4.38), μετασχηματίζοντας για  $u=1/r$ , και άρα  $du = -(1/r^2)dr$ , οπότε έχουμε ότι:

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2(e^2 - 1) + \frac{G2M}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{1/u_1}^{1/u_2} \frac{dr}{r^2} \left[ G2Mu - u^2l^2 + \frac{GMu^32l^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.39)}$$

Μπορούμε να παραλείψουμε τον τελευταίο όρο για την περίπτωση που η τροχιακή πορεία του σώματος κλείνει, ενώ πρέπει να αναφερθεί ότι δίνει τη σχετικιστική διόρθωση. Έτσι, έχουμε ότι:

$$\Delta\phi = 2l \int_{1/u_1}^{1/u_2} \frac{dr}{r^2} \left[ G2Mu - u^2l^2 + \frac{GMu^32l^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.4.40)}$$



Ακολουθώντας θεωρούμε ότι αυτή η συνάρτηση, μπορεί να πάρει τη μαθηματική μορφή, που εισάγει δύο καινούργιες παραμέτρους, το  $u_1=1/r_1$  και το  $u_2=1/r_2$ , που είναι η εξής:

$$\Delta\phi = 2 \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{[(u_1-u)(u-u_2)]^{1/2}} \quad \text{σχέση (5.4.41)}$$

Πρέπει να αναφερθεί ότι η σχέση (5.4.41) αποτελεί την τετραγωνική μορφή της σχέσης (5.4.40). Από τη σχέση (5.4.39), πολλαπλασιάζοντας με τον όρο  $(1-2GM/c^2r)$  έχουμε ότι:

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2(e^2 - 1) + \frac{G2M}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2e^2 - c^2 + \frac{G2M}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2e^2 - c^2 + \frac{G2M}{r} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2e^2 - c^2 - \frac{l^2}{r^2} + \frac{G2M}{r} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[ c^2e^2 + \frac{G2M}{r} + \frac{GM2l^2}{c^2r^3} - \left( c^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right)^{-1/2} \left[ c^2e^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right)^{-1} - \left( c^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = \left[ 1 + 2 \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 \right] 2 \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{[(u_1-u)(u-u_2)]^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{GM}{c^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{[(u_1-u)(u-u_2)]^{1/2}} + \left( \begin{array}{c} \text{ανώτερης} \\ \text{τάξης} \\ \text{όρος στο } \frac{1}{c^2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \left[ 1 + 2 \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 \right] 2\pi + 2\pi \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta\phi = 2\pi + 6\pi \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 \quad \text{σχέση (5.4.42)}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (5.4.42) και τη σχέση (5.4.35) έχουμε ότι:

$$\delta\phi_{\text{μετάπτωσης}} = \Delta\phi - 2\pi \Rightarrow$$

$$\delta\phi_{\text{μετάπτωσης}} = 2\pi + 6\pi \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 - 2\pi \Rightarrow$$

$$\delta\phi_{\text{μετάπτωσης}} = 6\pi \left( \frac{GM}{c^2l} \right)^2 \quad \text{σχέση (5.4.43)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.4.27) έχουμε ότι:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = l \Rightarrow$$

$$(r^2 \frac{d\varphi}{d\tau})^2 = l^2 \quad \text{σχέση (5.4.44)}$$

Επιπροσθέτως, πρέπει να σημειωθεί ότι από τη Νευτώνεια μηχανική έχουμε ότι:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$(r^2 \frac{d\varphi}{dt})^2 = GMa(1 - \varepsilon^2) \quad \text{σχέση (5.4.45)}$$

Αναλύοντας τη σχέση (5.4.45) έχουμε ότι:

$$(r^2 \frac{d\varphi}{dt})^2 = GMa(1 - \varepsilon^2) \approx GMr \Rightarrow$$

$$(r^2 \frac{d\varphi}{dt})^2 = GMr, \text{ όπου, κανονικοποιώντας } G=1 \Rightarrow$$

$$(r^2 \frac{d\varphi}{dt})^2 = Mr \quad \text{σχέση (5.4.46)}$$

Από τη σχέση (5.2.2), τη σχέση (5.4.44), και τη σχέση (5.4.46) έχουμε ότι:

$$\frac{e}{l} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (Mr)^{1/2} \quad \text{σχέση (5.4.47)}$$

Η σχέση (5.4.46) αποτελεί τη κυκλική τροχιά την οποία ακολουθούν τα πλανητικά

σώματα. Επίσης, αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4.47) στη σχέση (5.4.28) έχουμε ότι:

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{e} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (Mr)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{(Mr)^{1/2}}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{M^{1/2} r^{1/2}}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Omega^2 = \frac{M^{2/2} r^{2/2}}{(r^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Omega^2 = \frac{Mr}{r^4} \Rightarrow$$

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3} \tag{σχέση (5.4.48)}$$

Η σχέση (5.4.48) δείχνει τη γωνιακή ταχύτητα σε σταθερή κυκλική κίνηση.

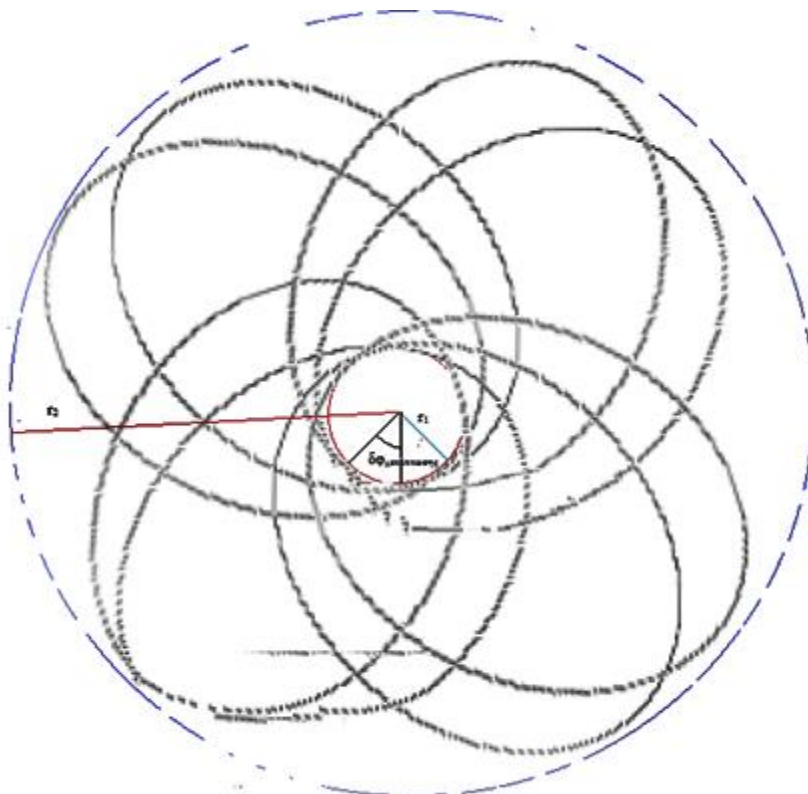
Ακολουθώντας, με βάση τη σχέση (5.4.43) και τη σχέση (5.4.45) έχουμε ότι:

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = 6\pi \left(\frac{GM}{c^2 l}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = 6\pi \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{GMa(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = 6\pi \frac{G}{c^2} \frac{M}{a(1-\varepsilon^2)} \tag{σχέση (5.4.49)}$$

Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.4.2: δφμετάπτωσης

Από τη σχέση (5.4.49) φαίνεται ο λόγος μετάπτωσης του Ερμή. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ένας πλανήτης στον Ήλιο τόσο μικρότερο είναι το  $a$  και αποτέλεσμα αυτού είναι να μεγαλώνει το  $\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}}$  και έτσι μεγαλώνει ο λόγος με συνέπεια να γίνονται πιο εμφανή τα αποτελέσματα της μετάπτωσης, στηριζόμενοι ότι το  $\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}}$  είναι αντιστρόφως ανάλογο ποσό του  $a$ . Το εσωτερικό σημείο στροφής, δηλαδή το περιήλιο, προκαλεί την τροχιακή μετάπτωση του πλανητικού σώματος. Συνεπώς σε κάθε τροχιακή ολοκλήρωση της πορείας ενός πλανητικού σώματος σημειώνεται μετάπτωση, και είναι ισχυρότερη για τον Ερμή, επειδή το εσωτερικό σημείο στροφής είναι πολύ κοντά στον Ήλιο<sup>2</sup>. Έτσι, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα ο Ερμής ως ο κοντινότερος πλανήτης στον Ήλιο έχει τη μεγαλύτερη μετάπτωση του περιηλίου του<sup>3</sup>.

### 5.5 Γενική θεωρία της σχετικότητας στη θεωρία περιηλίου και τροχιακή πορεία του φωτός στο ηλιακό σύστημα

Όσο αφορά τη σφαιρική γεωμετρία του Ήλιου κατά τη γεωμετρία Schwarzschild και την πρόβλεψη της θεωρία του Einstein προκύπτει, από τη σχέση (5.1.7) ότι είναι η εξής:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{σχέση (5.1.7)}$$

Τροποποιώντας τη σχέση αυτή έχουμε ότι:

$$ds^2 = - A(r) (cdt)^2 + dr^2 + B(r) + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \Rightarrow$$

$$ds^2 = - A(r) (cdt)^2 + dr^2 + B(r) + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \Rightarrow$$

<sup>2</sup> Παράρτημα Β ανάλυση της εκκεντρότητας

<sup>3</sup> Παράρτημα Γ αποτελέσματα της σχέσης (5.4.49)

$$ds^2 = - A(r) (cdt)^2 + dr^2 + B(r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.5.1)}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (5.1.7) και τη σχέση (5.51) φαίνονται οι γενικευμένοι όροι που έχουν αντικαταστήσει αυτούς της γεωμετρίας Schwarzschild, και δεν είναι άλλοι από το  $A(r)$  και  $B(r)$ . Έτσι κατόπιν αυτής της γενίκευσης είναι εφικτό να επαναπροσδιοριστεί τη μετρική χρησιμοποιώντας νέα στοιχεία για τη γεωμετρία του Ήλιου, και κατ' επέκταση για την ακρίβεια του περιηλίου. Κατ' αυτόν τον τρόπο είναι εφικτό να λάβουμε υπόψη αντίστροφες δυνάμεις του  $c$ . Θεωρώντας ως βασική παράμετρο για το σχήμα του άστρου τη μάζα του  $M$ , η οποία προσδιορίζει τη σφαιρικότητα του έχει ως αποτέλεσμα η σφαιρικότητα της γεωμετρίας έξω από το άστρο να καθορίζεται από δυνάμεις του  $\frac{GM}{c^2 r}$ , οπότε για το  $A(r)$  έχουμε ότι:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \dots \quad \text{σχέση (5.5.2)}$$

Όσο αφορά το  $B(r)$ , προκύπτει ότι:

$$B(r) = 1 + \dots \quad \text{σχέση (5.5.3)}$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί η σχέση του αδύναμου μετρικού πεδίου που είναι η εξής:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad \text{σχέση (2.4.2)}$$

Η σχέση (2.4.2) που αποτελεί το αδύναμο μετρικό πεδίο συνιστά προέκταση της Νευτώνειας βαρύτητας με τη χρήση σχετικιστικών όρων που επιτρέπουν τη διεξαγωγή πορισμάτων μόνο για μεγάλες ταχύτητες και κατ' αυτόν τον τρόπο μέσω της συγκεκριμένης σχέσης δεν μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για μικρές ταχύτητες. Άρα, απαιτείται ο επαναπροσδιορισμός των γενικευμένων όρων  $A(r)$  και  $B(r)$ . Επομένως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα η σχέση αυτή για το  $A(r)$  παίρνει τη μορφή που αφορά τη μετά Νευτώνεια προσέγγιση που είναι η εξής:

$$A(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \dots \quad \text{σχέση (5.5.4)}$$

Επίσης, το  $B(r)$ , παίρνει την μορφή που είναι η εξής:

$$B(r) = 1 + 2\gamma \left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 + \dots \quad \text{σχέση (5.5.5)}$$

Δηλαδή, παρατηρούμε ότι αναδιαμορφώνεται η σχέση προσθέτοντας κάποιους όρους υπό μορφή σειράς, προσθέτοντας κάποιους γενικούς συντελεστές ώστε να είναι εφικτός ο επαναπροσδιορισμός των σχέσεων αυξάνοντας την υπολογιστική ακρίβεια.

Με βάση τη γενική θεωρία της σχετικότητας οι συντελεστές αυτοί παίρνουν τις τιμές που είναι οι εξής:

$$\beta = 1 \quad \text{σχέση (5.5.6)}$$

και

$$\gamma = 1 \quad \text{σχέση (5.5.7)}$$

Έτσι, κατ' αυτό τον τρόπο έχουμε αναπροσαρμογή της σχέσης του περιηλίου από τη σχέση (5.4.49), εφόσον ολοκληρώσουμε τους επιπρόσθετους όρους με το αποτέλεσμα να είναι το εξής:

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) 6\pi \frac{G}{c^2} \frac{M}{a(1-\varepsilon^2)} \quad \text{σχέση (5.5.8)}$$

Επομένως, έχουμε όσο αφορά τη μετάπτωση δύο σχέσεις που είναι οι εξής:

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = 6\pi \frac{G}{c^2} \frac{M}{a(1-\varepsilon^2)} \quad \text{σχέση (5.4.49)}$$

και

$$\delta\varphi_{\text{μετάπτωσης}} = \frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) 6\pi \frac{G}{c^2} \frac{M}{a(1-\varepsilon^2)} \quad \text{σχέση (5.5.8)}$$

Επιπροσθέτως πρέπει να αναφερθούν για λόγους πληρότητας κάποια στοιχεία σύμφωνα με τα οποία φαίνεται η τροχιακή πορεία του φωτός, στη γεωμετρία Schwarzschild, και έτσι όσο αφορά το  $\varepsilon$ , που είναι ο συντελεστής διατήρησης της ενέργειας ανά μονάδα μάζας αδρανείας και το  $l$ , που είναι ο συντελεστής διατήρησης

της γωνιακής ορμής ανά μονάδα μάζας αδρανείας, έχουμε κάποια διαφοροποίηση σε σχέση μ' αυτήν της τροχιακής κίνησης ενός σωματιδίου ή ενός σώματος. Έτσι, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, από τη σχέση (5.2.2) και τη σχέση (5.2.4) έχουμε ότι:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.2)}$$

$$l = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.4)}$$

Όσο αφορά το φως αυτό που μεταβάλλεται είναι ο παράγοντας  $\lambda$ , που παίρνει τη θέση του  $\tau$ , οπότε έχουμε ότι:

$$e = -\xi u = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{σχέση (5.5.9)}$$

και

$$l = n u = r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad \text{σχέση (5.5.10)}$$

Η σημαντική διαφορά ανάμεσα σε μια ακτίνα φωτός και σε ένα πλανητικό σώμα είναι ότι δίνει διάνυσμα η εφαπτομένη ίση με μηδέν, σ' αντίθεση με την περίπτωση ενός σωματιδίου που δίνει κλίση εφαπτομένης ίση με μείον ένα, όπως προκύπτει με βάση τη σχέση (1.3.1) και την ιδιότητα (1.3.1), στην οποία εμπίπτουν τα σώματα που βρίσκονται στην εκδοχή της χρονικής διάσπασης, σύμφωνα με την ιδιότητα (1.3.1). Παρακάτω παρατίθενται οι τρεις ιδιότητες, όπως προέκυψαν από την υποενότητα 1.3, και είναι οι εξής:

$$ds < 0, \text{ για χρονική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.1)}$$

$$ds = 0, \text{ για μηδενική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.2)}$$

$$ds > 0, \text{ για χωρική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.3)}$$

Από τη σχέση (3.2.1) έχουμε για τη μετρική ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \quad \text{σχέση (3.2.1)}$$

Επομένως, φαίνεται ότι τα πλανητικά σώματα που μελετήθηκαν εμπίπτουν στην ιδιότητα (1.3.1) και στην περίπτωση του φωτός υπάρχει μηδενική διάσπαση. Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (3.2.1) και την ιδιότητα (1.3.2), για μια ακτίνα φωτός, έχουμε ότι:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \Rightarrow$$

$$\frac{(ds)^2}{(d\tau)^2} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{ds}{d\tau} \frac{ds}{d\tau} = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Rightarrow$$

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad \text{σχέση (5.5.11)}$$

και

$$\frac{(ds)^2}{(d\lambda)^2} = 0 \quad \text{σχέση (5.5.12)}$$

Από τη σχέση (5.1.8) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.8)}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (5.1.8) και τη σχέση (5.5.12) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(ds)^2}{(d\lambda)^2} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = 0 \quad \text{σχέση (5.5.13)}$$

Από τη σχέση (5.5.9), τη σχέση (5.5.10) και τη σχέση (5.5.13) έχουμε ότι:

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = 0 \Rightarrow$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{(dt)^2}{(d\lambda)^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + r^2 \left( \frac{d\theta^2}{(d\lambda)^2} + \sin^2\theta \frac{d\phi^2}{(d\lambda)^2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{e^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{l^2}{r^4} = 0 \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
 & - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + r^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{l^2}{r^4} = 0 \Rightarrow \\
 & - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + \frac{l^2}{r^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.5.14}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.5.14) και πολλαπλασιάζοντας με το  $\frac{(1-\frac{2M}{r})}{l^2}$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(1-\frac{2M}{r})}{l^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \frac{(1-\frac{2M}{r})}{l^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + \frac{(1-\frac{2M}{r})}{l^2} \frac{l^2}{r^2} = 0 \Rightarrow \\
 & - \frac{e^2}{l^2} + \frac{1}{l^2} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + \frac{(1-\frac{2M}{r})}{r^2} \Rightarrow \\
 & \frac{e^2}{l^2} = \frac{1}{l^2} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + \frac{(1-\frac{2M}{r})}{r^2}
 \end{aligned}
 \tag{5.5.15}$$

Επίσης, έχουμε την παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$b^2 \equiv \frac{l^2}{e^2}
 \tag{5.5.16}$$

Από τη σχέση (5.5.15) και τη σχέση (5.5.16) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^2}{l^2} = \frac{1}{l^2} \frac{(dr)^2}{(d\lambda)^2} + \frac{(1-\frac{2M}{r})}{r^2} \Rightarrow \\
 & \frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)
 \end{aligned}
 \tag{5.5.17}$$

Ο τρίτος όρος της εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (5.5.17) αποτελεί το  $W(r)$  οπότε προκύπτει ότι:

$$W(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)
 \tag{5.5.18}$$

Συνεπώς από τη σχέση (5.5.17) και τη σχέση (5.5.18) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Rightarrow \\
 & \frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W(r)
 \end{aligned}
 \tag{5.5.19}$$

Η σχέση (5.5.19) χρησιμοποιείται για την ανάλυση της κατεύθυνσης των ακτίνων φωτός και ομοιάζει εξαιρετικά με την ανάλυση της τροχιάς των πλανητικών σωμάτων. Ακολουθώντας από τη σχέση (5.2.18) έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

Έτσι, συνοψίζοντας από τη σχέση (5.2.18) και τη σχέση (5.5.19) έχουμε ότι:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau^2} + V(r) \quad \text{σχέση (5.2.18)}$$

και

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + W(r) \quad \text{σχέση (5.5.19)}$$

Έτσι, από τις δύο παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι το  $\frac{1}{b^2}$  του φωτός αντιστοιχεί στην ενέργεια  $\mathcal{E}$  και το  $W(r)$  με τη σειρά του αποτελεί δυναμικό της τροχιάς των φωτονίων που είναι το αντίστοιχο δυναμικό της ακτινικής κίνησης των πλανητικών σωμάτων, το  $V(r)$ . Πρέπει να αναφερθεί ότι ενώ στα πλανητικά σώματα που περιγράφονται από τη σχέση (5.2.18) φαίνεται ότι καθορίζουν την τροχιακή κίνηση των σωμάτων κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό να γίνει εκτός και να προσδιοριστεί μόνο από το λόγο  $l/e$ , οπότε φαίνεται και ο λόγος ύπαρξης μιας γενικής μεταβλητής αυτή του  $\lambda$ , αντί του  $\tau$ . Έτσι, λόγω του παράγοντα  $\lambda$ , διαφαίνεται ότι εφόσον πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά  $K$ , τότε συνεχίζει να ισχύει η γεωδαιτική εξίσωση της σχέσης (4.2.1), που είναι η εξής:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad \text{σχέση (4.2.1)}$$

Επίσης λόγω του γενικευμένου παράγοντα  $\lambda$  ισχύει η σχέση (5.5.11). Έτσι, υποθέτοντας την περίπτωση του άπειρου για τον προσδιορισμό του  $b$ , έχουμε ότι:

$$x = r \cos\varphi \quad \text{σχέση (5.5.20)}$$

και

$$y = r \sin\theta \tag{5.5.21}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (5.5.9) και τη σχέση (5.5.10), διαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$\frac{1}{e} = \frac{r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\lambda}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}} \tag{5.5.22}$$

Λόγω της υπόθεσης ότι κινείται προς το άπειρο ισχύει ότι το  $r \gg 2M$ , και θεωρούμε ότι το  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , οπότε σύμφωνα με τη σχέση (5.5.22) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{e} = \frac{r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{d\lambda}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = \frac{r^2 \sin^2\frac{\pi}{2} \frac{d\varphi}{d\lambda}}{\left(1 - \frac{2M}{\infty}\right) \frac{dt}{d\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = \frac{r^2 * 1 * \frac{d\varphi}{d\lambda}}{(1-0) \frac{dt}{d\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = r^2 \frac{\frac{d\varphi}{d\lambda}}{\frac{dt}{d\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$b = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \tag{5.5.23}$$

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι για κάθε μεγάλο  $\varphi \approx d/r$  και  $dr/dt \approx -1$ , οπότε το  $\frac{d\varphi}{dt}$

αναλύεται ως εξής:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{r^2} \tag{5.5.24}$$

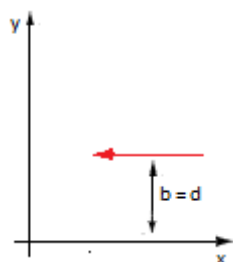
Επομένως, από τη σχέση (5.5.23) και τη σχέση (5.5.24) έχουμε ότι:

$$b = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$b = r^2 \frac{d}{r^2} \Rightarrow$$

$$b = d \quad \text{σχέση (5.5.25)}$$

Επομένως, προκύπτει με βάση τη σχέση (5.5.20), τη σχέση (5.5.21) και τη σχέση (5.5.25), προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.5.1: κίνηση ακτίνας φωτός μακριά από την επίδραση βαρυτικού πεδίου

Στο σχήμα 5.5.1 παρατηρούμε σε ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων τη κίνηση μιας ακτίνας φωτός αρκετά απομακρυσμένη από τη βαρυτική έλξη και έτσι κατευθύνεται σε ευθεία γραμμή με ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός αλλά στην προκειμένη περίπτωση έχει κανονικοποιηθεί το  $c = 1$ . Η ευθεία αυτή γραμμή στο τμήμα αυτό της τροχιάς πραγματοποιείται σε απόσταση  $d$  από τον  $x$  άξονα. Έτσι, το  $W(r)$  έχει μέγιστο στο  $3M$ , ενώ εξαφανίζεται για τιμές που το  $r$  τείνει στο άπειρο. Το μέγιστο εμφανίζεται στο  $r = 3M$ , οπότε σ' αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με τη σχέση (5.5.18) έχουμε ότι:

$$W(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Rightarrow$$

$$W(r) = \frac{1}{(3M)^2} \left(1 - \frac{2M}{3M}\right) \Rightarrow$$

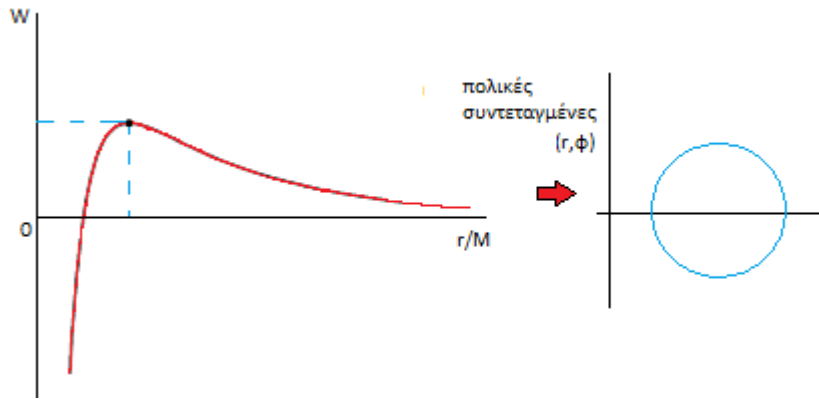
$$W(r) = \frac{1}{9M^2} \left(\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$W(r) = \frac{1}{9M^2} \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$W(r) = \frac{1}{27M^2} = W(r_{\max})$$

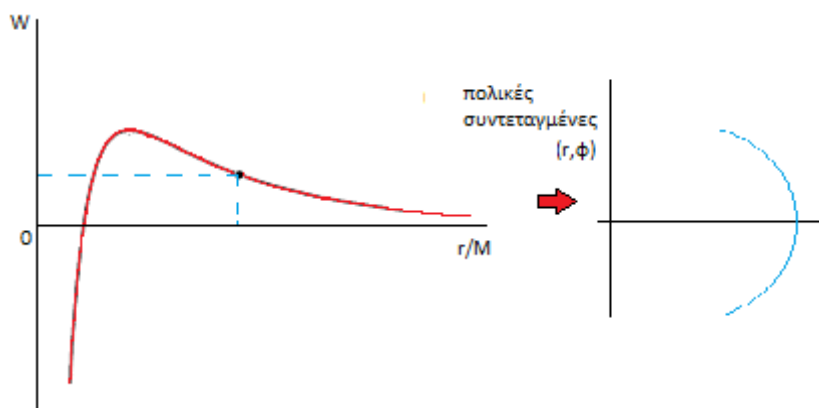
$$W(r_{\max}) = \frac{1}{27M^2} \quad \text{σχέση (5.5.26)}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια σειρά διαγραμμάτων, ενώ στο επόμενο φαίνεται η περίπτωση έχουμε τοπικό μέγιστο και είναι το εξής:



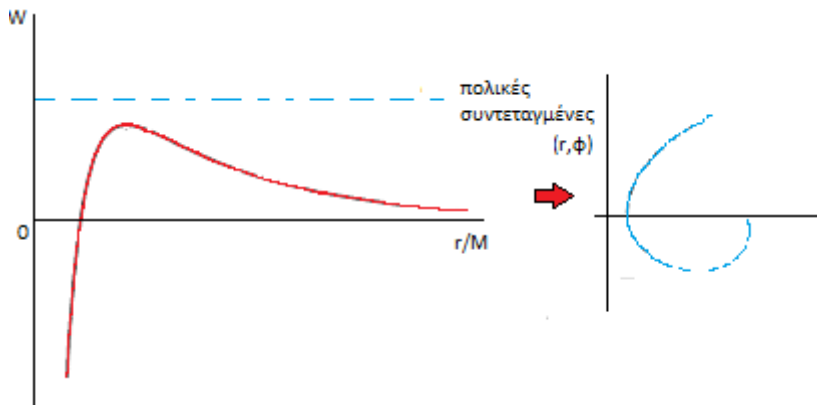
σχήμα 5.5.2: γεωμετρία Schwarzschild στο τοπικό μέγιστο γραφικής  $W(r/M)$

Παρατηρείται σ' αυτή τη γραφική παράσταση η περίπτωση που δείχνει η σχέση (5.5.26) και αφορά τη κυκλική τροχιά της ακτίνας φωτός. Ακολούθως, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται τι συμβαίνει για στην εκδοχή της σκεδαζόμενης τροχιάς που είναι η εξής:



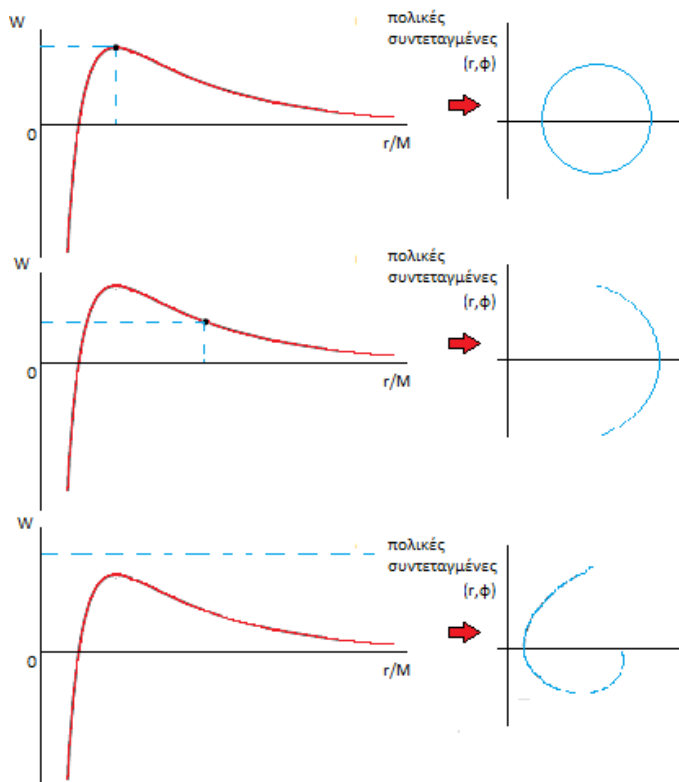
σχήμα 5.5.3: γεωμετρία Schwarzschild για ενδιάμεσες τιμές της γραφικής  $W(r/M)$

Σ' αυτή τη γραφική παράσταση φαίνεται η περίπτωση που πραγματοποιείται μια σκεδαζόμενη τροχιά. Ενώ, πρέπει να επισημανθεί και η περίπτωση της τροχιακής βουτιάς που δείχνεται στο παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.5.4: γεωμετρία Schwarzschild για τιμές πέρα της γραφικής  $W(r/M)$

Στο σχήμα 5.5.4 φαίνεται η περίπτωση που εκτελείται τροχιακή βουτιά και αφορά τιμές που είναι υψηλότερες από αυτήν του τοπικού μέγιστου της γραφικής παράστασης. Έτσι, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα συνοψίζοντας λαμβάνουμε για την τροχιακή πορεία του φωτός κατά περίπτωση στη γεωμετρία Schwarzschild, τα εξής:



σχήμα 5.5.4: γεωμετρία Schwarzschild της γραφικής  $W(r/M)$

Επομένως στο σχήμα 5.5.4 αναπαρίστανται και οι τρεις δυνατές περιπτώσεις για την τροχιακή πορεία του φωτός οι οποίες καθορίζονται από τη σχέση (5.5.19) και τη σχέση (5.5.26). Επίσης, πρέπει να επισημανθεί και η περίπτωση ανάκλασης του φωτός που βοηθάει στην καλύτερη αντίληψη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, που όπως προαναφέρθηκε επηρεάζει την τροχιακή πορεία του Ερμή. Συνεπώς, με βάση τη σχέση (5.5.10), έχουμε ότι:

$$l = n u = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad \text{σχέση (5.5.10)}$$

Άρα, προκύπτει ότι:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2 \sin^2 \theta} \quad \text{σχέση (5.5.27)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.5.19) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + W(r) \quad \text{σχέση (5.5.19)}$$

Αναλύοντας έχουμε ότι:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + W(r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{l^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - W(r) \Rightarrow$$

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = l^2 \left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right] \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm l \left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right]^{1/2} \quad \text{σχέση (5.5.28)}$$

Έτσι, διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.5.19) και (5.5.28), και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\theta = \pi/2$  έχουμε ότι:

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\lambda}}{\frac{dr}{d\lambda}} = \pm \frac{\frac{l}{r^2 \sin^2(\frac{\pi}{2})}}{l \left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\frac{1}{r^2 * 1}}{\left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.5.29)}$$

Από τη σχέση (5.5.29) προκύπτει ότι:

$$W(r) = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \quad \text{σχέση (5.5.18)}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στη σχέση (5.5.29) τη σχέση (5.5.18) έχουμε το εξής:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - W(r) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.5.30)}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.5.30) προκύπτει ότι:

$$\int d\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\int d\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.5.31)}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$r = \frac{b}{w} \quad \text{σχέση (5.5.32)}$$

και

$$dr = -b \frac{1}{w^2} dw \quad \text{σχέση (5.5.33)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.5.31), τη σχέση (5.5.32) και τη σχέση (5.5.33) προκύπτει ότι:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{1}{b^2} - \frac{w^2}{b^2} \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{b^{-1}} \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$



$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} b \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{b^2} w^2 b \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{b} w^2 \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_{w_1}^0 -dw \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \left[ 1 - w^2 \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.5.34)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.5.34) προκύπτει ότι:

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \left\{ \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right) \left[ \frac{1}{\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)} - w^2 \frac{\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)}{\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)} - w^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)^{-1} - w^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{σχέση (5.5.35)}$$

Επίσης, στο ανάπτυγμα που ακολουθεί κρατώντας μόνο το γραμμικό τμήμα έχουμε ότι:

$$\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)^{-1} = 1 - (1)w \frac{2M}{b} = 1 + w \frac{2M}{b} \Rightarrow$$

$$\left( 1 - w \frac{2M}{b} \right)^{-1} = 1 + w \frac{2M}{b} \quad \text{σχέση (5.5.36)}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τη σχέση (5.5.36) στη σχέση (5.5.35) έχουμε το εξής:

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \left( 1 + w \frac{2M}{b} \right) \left[ \left( 1 + w \frac{2M}{b} \right) - w^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{w_1} dw \frac{\left( 1 + w \frac{2M}{b} \right)}{\left[ \left( 1 + w \frac{2M}{b} \right) - w^2 \right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \pi + 4 \frac{M}{b} \quad \text{σχέση (5.5.37)}$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι στην ανάκλαση του φωτός η απόκλιση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από  $\pi$ , και έτσι έχουμε ότι:

$$\delta\varphi_{\text{ανάκλασης}} = \Delta\varphi - \pi \tag{5.5.38}$$



σχήμα 5.5.5: δφ<sub>ανάκλασης</sub>

Άρα, από τη σχέση (5.5.37) και τη σχέση (5.5.38) έχουμε το εξής:

$$\delta\varphi_{\text{ανάκλασης}} = \pi + 4\frac{M}{b} - \pi \Rightarrow$$

$$\delta\varphi_{\text{ανάκλασης}} = 4\frac{M}{b} \tag{5.5.39}$$

Από τη σχέση (5.1.7) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5.1.7}$$

Επιπροσθέτως, επειδή λάβαμε τη σχέση (5.1.8) και όχι τη σχέση (5.1.7), είναι εμφανές ότι λείπει ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας που είναι το  $G$  και ένας παράγοντας στον παρανομαστή που είναι το  $c^2$ , και έτσι η σχέση (5.5.39) μπορεί να γραφτεί και στη μη κανονικοποιημένη της μορφή που είναι η εξής:

$$\delta\varphi_{\text{ανάκλασης}} = 4\frac{GM}{c^2 b} \tag{5.5.40}$$

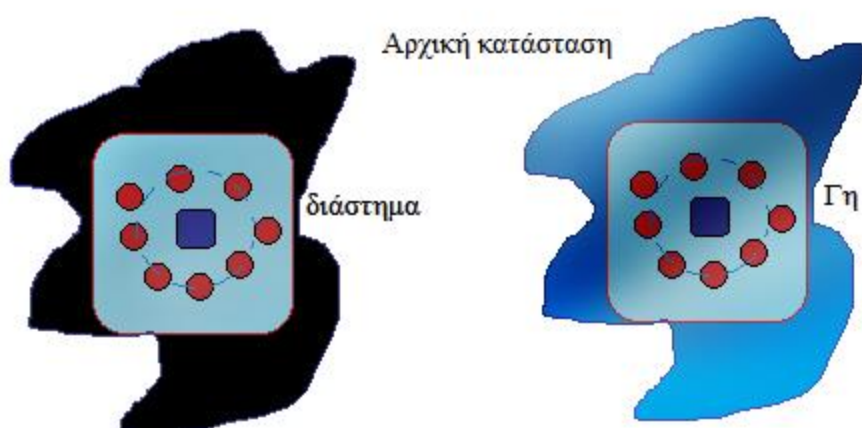
## 5.6 Καμπυλώσεις του χωροχρόνου και η εξίσωση του Einstein

Για τη καμπύλωση του χωροχρόνου που προκύπτει από τη γενική θεωρία της σχετικότητας περιγράφεται η τροχιακή κίνηση των σωματιδίων, των πλανητικών σωμάτων και αυτήν των ακτίνων φωτός. Πρέπει όμως να αναφερθεί πέρα από τη καμπύλωση του χωροχρόνου ότι υπάρχει και η άλλη οπτική γωνία, που εμπίπτει στην περίπτωση της ενέργειας, και σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας η σύνδεση που γίνεται αφορά τη καμπύλωση του χωροχρόνου σε σχέση με διάφορες τιμές της ενέργειας. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε την παρακάτω εξίσωση που είναι η εξής:

$$\left( \begin{array}{c} \text{τοπική καμπύλωση} \\ \text{του χωροχρόνου} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{ενεργεια} \\ \text{ορμη} \end{array} \right) \quad \text{σχέση (5.6.1)}$$

Αυτός ο συσχετισμός της εξίσωσης του Einstein που δίνεται από τη σχέση (5.6.1) αφορά ένα πεδίο εξισώσεων της γενικής θεωρίας της σχετικότητας που αντιστοιχεί στις σχέσεις του Maxwell στο πεδίο του ηλεκτρομαγνητισμού. Οι εξισώσεις του Einstein συνδέουν τη καμπύλωση του χωροχρόνου με το θέμα της ενέργειας, ενώ οι σχέσεις του Maxwell, συνδέουν την πηγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με θέματα φορτίου και ρευμάτων. Επίσης, οι σχέσεις του Einstein αποκρυσταλλώνονται μέσω δέκα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης για τη μετρική  $g_{\alpha\beta}(x)$ . Οι σχέσεις του Maxwell είναι οκτώ διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού ηλεκτρομαγνητισμού. Επιπροσθέτως, οι σχέσεις του Einstein είναι μη γραμμικές ενώ οι σχέσεις του Maxwell είναι γραμμικές. Η κίνηση ενός μόνο σωματιδίου δίνει κάποιες πληροφορίες για τη καμπύλωση του χωροχρόνου, αλλά η κίνηση ενός πλαισίου που πέφτει ελεύθερα με ένα σωματίδιο μπορεί να μας δώσει κάποιες απαντήσεις γι' αυτήν την

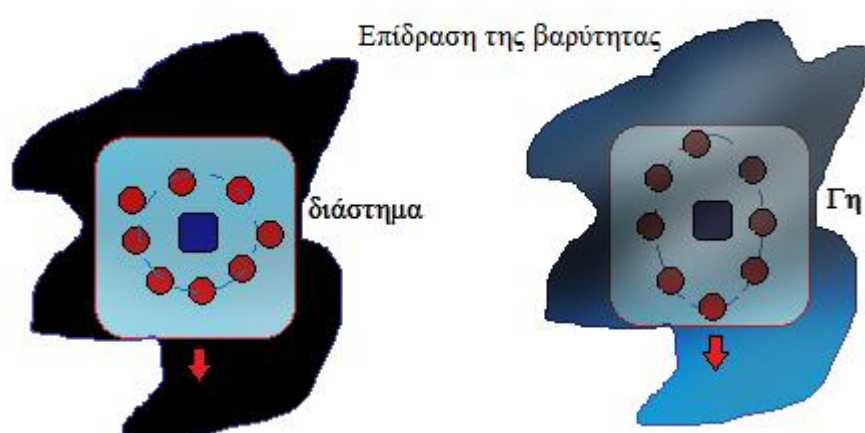
καμπυλότητα. Η κίνηση δύο σωματιδίων ελέγχου χρειάζεται για την εξακρίβωση της καμπύλωσης του χωροχρόνου και έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα δυο αστροναυτών που ακλουθούν τη κίνηση δύο μπαλών του ring-pong. Κατανοώντας τη σχετικότητα της κίνησης των δύο μπαλών του ring-pong, όπως παρεμφερή ζητήματα προέκυψαν στην ανάλυση της υποενότητας 2.2, και ανέδειξαν τα ζητήματα της σχετικότητας και έτσι είναι εφικτό να ανιχνευτεί η καμπύλωση του χωροχρόνου, όπως προκαλείται από τη Γη. Παρατηρείται ότι θεωρώντας για παράδειγμα όταν έχουμε κάποιες μπάλες του ring-pong όταν κινούνται στη Γη εκτελούν τελειώς διαφορετική κίνηση σε σχέση με αυτήν του διαστήματος και έτσι κατ' αυτόν τον τρόπο είναι εφικτό να προσδιοριστεί η καμπύλωση του χωροχρόνου. Αυτό φαίνεται από το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.6.1: καμπύλωση του χωροχρόνου

Στο σχήμα 5.6.1 φαίνεται ότι στην αρχική κατάσταση δεν υπάρχει καμία μεταβολή ανάμεσα στην μπάλες και το σώμα αναφοράς που βρίσκεται στο κέντρο. Έτσι, ενώ αρχικά δεν υπάρχει καμία μεταβολή κατά την τοποθέτηση των μπαλών στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται ότι με βάση το σώμα αναφοράς που βρίσκεται στο κέντρο δεν υπάρχει καμία μεταβολή στο σχηματισμό των μπαλών, όταν βρίσκονται υπό την

επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γης τότε αποκτούν μια ελλειψοειδή μορφή που οφείλεται στη βαρυτική επίδραση. Η επίδραση της βαρύτητας γίνεται με κατεύθυνση το κέντρο της Γης και έτσι αναπτύσσεται αυτή ελλειψοειδής μορφή στο σχήμα του συσχετισμού των μπαλών, φανερώνοντας τη καμπυλότητα του χωροχρόνου λόγω της άσκησης του βαρυτικού πεδίου της Γης. Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε το παρακάτω σχήμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.6.2: σχετικότητα της κίνησης

Κατ' αυτόν τον τρόπο παρατηρείται ότι ενώ στη Νευτώνεια μηχανική η επίδραση της βαρύτητας σε ένα σώμα θα έχει ως αποτέλεσμα το σώμα να επιταχύνεται περισσότερο, σε μακρινότερη απόσταση από το κέντρο της Γης αυτή η επίδραση θα είναι μικρότερη. Αυτό προκύπτει από τη μεταβολή του σχηματισμού των μπαλών, όπου όταν ενώ αρχικά τηρούν κυκλικό σχηματισμό στην πορεία μετασχηματίζεται σε σχηματισμό ελλειψοειδούς μορφής. Ακολούθως, αυτό το οποίο γίνεται είναι να συνεχίζει να μένει αμετάβλητη η κίνηση των μπαλών στο διάστημα σε σχέση με τη Γη, που παρατηρείται αυτή η μεταβολή και έτσι λαμβάνοντας ως σώμα αναφοράς το σώμα στο κέντρο μπορούμε να διακρίνουμε αυτούς τους δύο σχηματισμούς. Ακολούθως, με βάση το σώμα αναφοράς και το σχηματισμό των μπαλών είναι εφικτό

να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μια σχετικιστική κίνηση, λόγω της μεταβολής του σχήματος τους. Από τη Νευτώνεια θεωρία, σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στην υποενότητα 5.2 χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.1.2) έχουμε ότι:

$$\vec{F}_{\beta\alpha\rho\nu\tau\iota\kappa\eta} = -m * \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \quad \text{σχέση (5.1.2)}$$

Επίσης, σύμφωνα με τη κλασσική μηχανική έχουμε το εξής:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = m\left(\frac{dx}{dt}\right)' \Rightarrow$$

$$\vec{F} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = m \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}_{\beta\alpha\rho\nu\tau\iota\kappa\eta} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\beta\alpha\rho\nu\tau\iota\kappa\eta} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{σχέση (5.6.2)}$$

Έτσι, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, από τη σχέση (5.1.2) και τη σχέση (5.6.2) έχουμε ότι:

$$\vec{F}_{\beta\alpha\rho\nu\tau\iota\kappa\eta} = -m * \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \Rightarrow$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m * \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \quad \text{σχέση (5.6.3)}$$

και

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \quad \text{σχέση (5.6.4)}$$

Επομένως, από τη σχέση (5.6.3) προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}_B) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k)}{\partial x^j} \quad \text{σχέση (5.6.5)}$$

Ακολουθώντας, σύμφωνα με τη σχέση (5.6.5) πρέπει να προσδιοριστεί η μεταβολή της θέσης ενός σώματος κατόπιν επίδρασης του βαρυτικού πεδίου της Γης, σε σχέση με κάποιο άλλο σώμα, που εν προκειμένω στο παράδειγμα αυτό αποτελεί η μπάλα. Συνεπώς, αυτό το οποίο συμβαίνει να έχουμε έναν επιπλέον όρο στην απόσταση ώστε να απεικονιστεί η μεταβολή της θέσης. Έτσι, προκύπτει ένας επιπλέον όρος, αυτός του  $\chi^k$ , και κατ' αυτόν τον τρόπο από τη σχέση (5.6.5) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 x^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k)}{\partial x^j} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2(x^l + \chi^l)}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k + \chi^k)}{\partial x^j} \quad \text{σχέση (5.6.6)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.6.6) προκύπτει αναπτύσσοντας κατά τη σειρά Taylor, ότι έχουμε το εξής:

$$\frac{d^2(x^l + \chi^l)}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k + \chi^k)}{\partial x^j} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2(x^l + \chi^l)}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k)}{\partial x^j} - \delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^k)}{\partial x^j} \chi^k + \dots \quad \text{σχέση (5.6.7)}$$

Στη συνέχεια αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (5.6.5), και τη σχέση (5.6.7) προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2(x^l + \chi^l)}{dt^2} - \frac{d^2 x^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} - \delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} \chi^k + \dots - [-\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j}] \Rightarrow$$

$$\frac{d^2(x^l + \chi^l)}{dt^2} - \frac{d^2 x^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} - \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} \chi^k + \dots + \delta^{ij} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \chi^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi(x^l)}{\partial x^j} \chi^k \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \chi^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \chi^k \quad \text{σχέση (5.6.8)}$$

Η σχέση (5.6.8) περιγράφει τη Νευτώνεια απόκλιση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μετρήσεις που το  $\chi$  παραμένει μικρό και έτσι είναι εφικτό να προσδιοριστούν οι επιταχύνσεις μεταξύ κοντινών σωμάτων και κατ' αυτόν τον

τρόπο προσδιορίζει και τις δυνάμεις που τείνουν να φέρουν τα σώματα πιο κοντά ή πιο μακριά. Τέτοιες δυνάμεις καλούνται παλιρροϊκές βαρυτικές δυνάμεις. Ο λόγος που καλούνται έτσι αυτές οι δυνάμεις οφείλεται στο ότι οι παλίρροιες προκαλούνται από αυτές τις δυνάμεις. Από τη σχέση (5.1.1) και τη σχέση (5.1.2), όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 5.1 έχουμε ότι:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad \text{σχέση (5.6.9)}$$

Έτσι, με βάση τη σχέση (5.6.9) όσο αφορά τις βαρυτικές δυνάμεις που τραβούν τη σελήνη παράγονται καθημερινά παλίρροιες, οι οποίες μπορούν με βάση την αμέσως προηγούμενη σχέση να περιγραφούν από την παρακάτω εξίσωση που είναι η εξής:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\Phi_{\text{σελήνης}} = -\frac{GM_{\text{σελήνης}}}{r_{\text{σελήνης}}} \Rightarrow$$

$$\Phi_{\text{σελήνης}} = -\frac{GM_{\text{σελήνης}}}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}} \quad \text{σχέση (5.6.10)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.6.10) και τη σχέση (5.6.8) προκύπτει ότι:

$$\Phi_{\text{σελήνης}} = -\frac{GM_{\text{σελήνης}}}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}} \quad \text{σχέση (5.6.11)}$$

Ακολουθώς πρέπει να προσδιορίσουμε τις γενικές συντεταγμένες έξω από ένα σφαιρικό σώμα, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.6.9), υπό κανονικοποιημένη μορφή έχουμε το εξής:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\Phi = -\frac{M}{r} \quad \text{σχέση (5.6.12)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (5.6.12) η απόσταση της σφαιρικής μάζας προσδιορίζεται μέσω του  $r$ , και έτσι έχουμε ότι:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{σχέση (5.6.13)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.6.8), τη σχέση (5.6.12) και τη σχέση (5.6.13) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= -\delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \Rightarrow \\ \alpha_{ij} &= -\left(\delta^{ij} - 3 \frac{x^i x^j}{r} \frac{1}{r^3}\right) \Rightarrow \\ \alpha_{ij} &= -\left(\delta^{ij} - 3n_i n_j\right) \frac{1}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.14)} \end{aligned}$$

Αναλύοντας ακολούθως σε πολικές συντεταγμένες για τη σχέση που είναι η εξής:

$$\alpha_{rr} = \frac{d^2 x^r}{dt^2} = \frac{2M}{r} \quad \text{σχέση (5.6.15)}$$

Όσο αφορά το τους άλλους δύο όρους έχουμε ότι:

$$\alpha_{\theta\theta} = \frac{d^2 x^\theta}{dt^2} - \frac{M}{r^3} \quad \text{και} \quad \alpha_{\phi\phi} = \frac{d^2 x^\phi}{dt^2} - \frac{M}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.16)}$$

Επομένως, με βάση τη σχέση (5.6.11), τη σχέση (5.6.15) και τη σχέση έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{σελήνης}} &= -\frac{GM_{\text{σελήνης}}}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{1/2}} \Rightarrow \\ \Phi_{\text{σελήνης}} &= \frac{GM_{\text{σελήνης}}}{d^3} \text{ διαγώνιος}(1,1,-2) \quad \text{σχέση (5.6.17)} \end{aligned}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (5.6.17) περιγράφεται ο λόγος που αναπτύσσονται παλιρροϊκά κύματα, λόγω της βαρυτικής επίδρασης της Γης στη σελήνη. Επίσης, πρέπει να επισημανθεί ότι από τη σχέση (5.6.9) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{GM}{r} \Rightarrow \\ \Phi &= -\sum_A \frac{GM}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Rightarrow \\ \Phi &= -\int d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Phi = - \int d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Rightarrow$$

$$\Phi = - \int d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad \text{σχέση (5.6.18)}$$

Η σχέση (5.6.18) αποτελεί τη σχέση του βαθμωτού βαρυτικού πεδίου στο οποίο υπάρχει πυκνότητα μάζας  $\mu(\vec{x})$  μέσω της οποίας έχουμε το ολοκλήρωμα για το  $d^3x$ , προσδιορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τον όγκο και έτσι από τη σχέση (5.6.18) έχουμε ότι:

$$\Phi(\vec{x}) = - \int d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad \text{σχέση (5.6.19)}$$

Επίσης, όσο αφορά τον ηλεκτρομαγνητισμό υπάρχει εξαιρετική ομοιότητα με βάση τη σχέση (5.6.19), της σχέσης  $\Phi(\vec{x}) = - \int d^3x \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$  και έτσι χάριν ομοιότητας μπορούμε να υιοθετήσουμε ανάλογη μορφή εισάγοντας τον όρο  $\vec{g}(\vec{x})$ , οπότε έχουμε ότι:

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \quad \text{σχέση (5.6.20)}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο από τη σχέση (5.6.19) έχουμε ότι:

$$\Phi(\vec{x}) = - \int d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Rightarrow$$

$$d\Phi(\vec{x}) = d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) = d^3x \frac{G\mu(\vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{x}) = d^3x \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} G\mu(\vec{x}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\mu(\vec{x}) \quad \text{σχέση (5.6.21)}$$

Επίσης, η σχέση (5.6.21) τροποποιημένη δείχνει ότι:

$$\vec{\nabla} \vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\mu(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$-\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = -4\pi G\mu(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G\mu(\vec{x}) \quad \text{σχέση (5.6.22)}$$

Από τη σχέση (5.6.8) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 \chi^l}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \chi^k \quad \text{σχέση (5.6.8)}$$

Αναλύοντας τη σχέση (5.6.8) προκύπτει ότι:

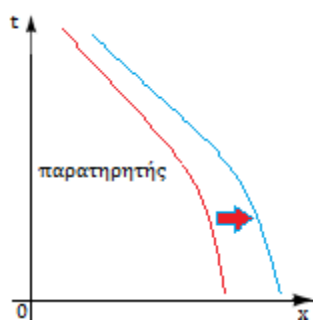
$$\nabla^2 \Phi = \delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \quad \text{σχέση (5.6.23)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.6.21) και τη σχέση (5.6.23) έχουμε το εξής:

$$\nabla^2 \Phi = \delta^{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} = 4\pi G\mu \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\mu \quad \text{σχέση (5.6.24)}$$

Η γεωδαιτική εξίσωση της απόκλισης προέρχεται από τη σχέση (5.6.8) της Νευτώνειας απόκλισης η οποία δίνει τη μορφή αυτή για το τετραδιάνυσμα του χωροχρόνου που καλείται σχέση γεωδαιτικής απόκλισης. Αυτό είναι εφικτό χρησιμοποιώντας το σχήμα 5.6.1 και το σχήμα 5.6.2 απ' όπου στηριζόμενοι σ' αυτά έπεται το παρακάτω διάγραμμα που είναι το εξής:



σχήμα 5.6.3: γεωδαιτική απόκλιση

Έτσι, σύμφωνα με το σχήμα 5.6.3 για τη καμπύλωση του χωροχρόνου έχουμε τιμές που δίνονται από τη σχέση (5.6.8) μέσω ενός τετραδιανύσματος για τη γεωδαιτική απόκλιση. Το τετραδιάνυσμα αυτό πρέπει να δίνεται από το τετραδιάνυσμα  $\chi$  το οποίο δίνει την απειροελάχιστη απόκλιση μεταξύ δύο γειτονικών γεωδαιτικών

σημείων. Στο σχήμα 21.3 συνδέονται γεγονότα στον ίδιο κατάλληλο χωροχρόνο ανάμεσα στις γεωδαισίες. Ο κατάλληλος χρόνος σε γειτονικά γεωδαιτικά σημεία είναι γενικός και κατ' αυτόν τον τρόπο υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις με τους οποίους μπορεί να οριστούν αυτά τα διανύσματα. Θεωρώντας ότι σε ένα αρχικό χρονικό σημείο ικανοποιείται η σχέση  $\chi \cdot u = 0$ . Έτσι, πρέπει να βρεθεί μια σχέση που να συνδέει το διάνυσμα  $\chi$  με τη γενική θεωρία της σχετικότητας και να έχει ανάλογη μορφή με τη σχέση (5.6.8). Η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x)$  υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη και τον κατάλληλο χρόνο της κοσμικής γραμμής  $x^\alpha(\tau)$  και δίνεται από τη σχέση που είναι η εξής:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} u^\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} u^\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\tau} = \nabla_u f, u^\alpha, \text{ όπου } \frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha \quad \text{σχέση (5.6.25)}$$

Από τη σχέση (5.6.25), εξάγεται μια σχέση που αφορά το συντελεστή απόκλισης, για το  $\chi$ , και έτσι έχουμε ότι:

$$v \equiv \nabla_u \chi \quad \text{σχέση (5.6.26)}$$

Έτσι, με βάση και τη κλασική φυσική μια δεύτερη παράγωγος είναι αυτή που προσδιορίζει την επιτάχυνση και έχουμε ότι:

$$w \equiv \nabla_u v \quad \text{σχέση (5.6.27)}$$

Και η σχέση (5.6.27) δίνει τη μορφή που είναι η εξής:

$$w \equiv \nabla_u \nabla_u \chi \quad \text{σχέση (5.6.28)}$$

Ακολουθώντας, με βάση τη σχέση (5.6.27) πρέπει να εξαχθεί μια σχέση ανάλογη με αυτήν της σχέσης (5.6.8). Στη συνέχεια γενικεύοντας προσδιορίζεται μια σχέση για το  $\nabla_u \chi$ , από τη σχέση (5.6.26), όπου έχουμε το εξής:

$$v \equiv \nabla_u \chi \Rightarrow$$

$$u^\alpha = (\nabla_u \chi)^\alpha \Rightarrow$$

$$u^\alpha = u^\alpha \nabla_\beta \chi^\alpha \Rightarrow$$

$$u^\alpha = u^\beta \frac{d\chi^\alpha}{dx^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma \Rightarrow$$

$$u^\alpha = \frac{d\chi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.29)}$$

Ακολουθώντας, γενικεύοντας προσδιορίζεται η επόμενη σχέση για το  $\nabla_u v$ , σύμφωνα με την οποία, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.6.27) έχουμε ότι:

$$w \equiv \nabla_u v \Rightarrow$$

$$w^\alpha = (\nabla_u v)^\alpha \Rightarrow$$

$$w^\alpha = u^\delta \nabla_\delta v^\alpha \Rightarrow$$

$$w^\alpha = u^\delta \nabla_\delta v^\alpha \Rightarrow$$

$$w^\alpha = u^\delta \frac{d^2 \chi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w^\alpha = u^\delta \frac{dv^\alpha}{dx^\delta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.30)}$$

Επομένως, από τη σχέση (5.6.29) και τη σχέση (5.6.30) αντικαθιστώντας προκύπτει ότι:

$$w^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w^\alpha = \frac{d\left(\frac{d\chi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma\right)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w(x)^\alpha = \frac{d^2 \chi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.31)}$$

Επίσης, στη σχέση (5.6.31) στην περίπτωση που επεκτείνουμε τη γεωδαιτική εξίσωση, και μεταβάλλουμε το  $x^a$ , σε  $x^\alpha + \chi^\alpha$ , τότε έχουμε ότι:

$$w^\alpha = \frac{d^2(\chi^\alpha + x^\alpha)}{d\tau^2} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.32)}$$

Επίσης η σχέση (5.6.23) μπορεί να λάβει τη μορφή που είναι η εξής:

$$w(x)^\alpha = \frac{d^2(\chi^\alpha + x^\alpha)}{d\tau^2} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w(x)^\alpha = \frac{d(v^\alpha + u^\alpha)}{d\tau} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.33)}$$

Συνεπώς, αναπτύσσοντας τη σχέση (5.6.33) κατά τη σειρά Taylor προκύπτει ότι:

$$w^\alpha = \frac{d(v^\alpha + u^\alpha)}{d\tau} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \Rightarrow$$

$$w(\chi, x)^\alpha = \frac{d(u^\alpha)}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^j} \right) v^k + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \quad \text{σχέση (5.6.34)}$$

Στη συνέχεια αφαιρώντας τη σχέση (5.6.31) από τη σχέση (5.6.34) έχουμε το εξής:

$$w(\chi, x)^\alpha - w(x)^\alpha = \frac{d(u^\alpha)}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^j} \right) v^k + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma - \left[ \frac{d^2 \chi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta \chi^\gamma)}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\delta v^\gamma \right] \Rightarrow$$

$$w(\chi)^\alpha = \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^j} \right) v^k \Rightarrow$$

$$w(\chi)^\alpha = \frac{\partial}{\partial u^k} \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^j} \right) v^k, \quad \text{όπου, } v^\gamma = v^k, u^k = u^\beta \text{ και } u^j = u^\delta$$

$$(\nabla_u \nabla_u \chi)^\alpha = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta \chi^\gamma u^\delta \quad \text{σχέση (5.6.35)}$$

Η σχέση (5.6.35) αποτελεί την εξίσωση της γεωδαιτικής απόκλισης και με βάση αυτήν προσδιορίζεται η παλιρροϊκές βαρυτικές επιταχύνσεις στη χωροχρονική γεωμετρία καμπύλωσης του χωροχρόνου. Από τη σχέση (5.6.35) και από το σχήμα

(5.6.3) φαίνεται απόκλιση αυτή μέσω της κοσμικής γραμμής. Τα σωματίδια και εν γένει τα σώματα κινούνται κατά μήκος της κοσμικής γραμμής και έτσι τα σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο κατά τη διάρκεια της κίνησης λόγω της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου. Έτσι, πραγματοποιείται μια τροχιακή κίνηση που συνίσταται στις γεωδαιτικές γραμμές. Το τετραδιάνυσμα του  $\chi$  περιγράφει αυτήν την απειροελάχιστη μετατόπιση και έτσι προσδιορίζεται η κίνηση των σωμάτων αυτών αποκαλούμενο το τετραδιάνυσμα αυτό ως διάνυσμα διαχωρισμού, λόγω της απόκλισης που προκαλείται. Η επιτάχυνση αυτή του διανύσματος διαχωρισμού κατά μήκος της κοσμικής γραμμής αποτελεί μια ποσοτική μέτρηση της χωροχρονικής καμπυλότητας. Από τη σχέση (5.6.35) έχουμε το συντελεστή  $R^a_{\beta\gamma\delta}$ , που αποτελεί το συντελεστή Riemann και περιγράφεται από την παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$R^a_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^a_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^a_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^a_{\gamma\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_{\beta\delta} - \Gamma^a_{\delta\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_{\beta\gamma} \quad \text{σχέση (5.6.36)}$$

Η σχέση (5.6.36) δίνει τις συντεταγμένες της γεωδαιτικής απόκλισης της σχέσης (5.6.35). Η σχέση της γεωδαιτικής απόκλισης μπορεί αν λάβει και άλλη μορφή εφόσον ληφθεί υπόψη η περίπτωση ενός ελεύθερης πτώσης πλαισίου εκφραζόμενο για το διάνυσμα  $u$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας το  $e_{\hat{a}}$  και το  $e^{\hat{a}}$  ως διανύσματα αναφοράς σεβόμενοι την παραδοχή της ελεύθερης πτώσης πλαισίου προκύπτει ότι:

$$\nabla e_{\hat{a}} = 0 \quad \text{σχέση (5.6.37)}$$

και

$$\nabla e^{\hat{a}} = 0 \quad \text{σχέση (5.6.38)}$$

Από τη σχέση (5.6.35) έχουμε ότι:

$$(\nabla_u \nabla_u \chi)^\alpha (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} = -R^a_{\beta\gamma\delta} u^\beta \chi^\gamma u^\delta (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} \quad \text{σχέση (5.6.39)}$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι ισχύει ο μετασχηματισμός που είναι ο εξής:

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} g_{\gamma\delta}(x) \quad \text{σχέση (5.6.40)}$$

Ενώ, μπορεί να λάβει και τη μορφή που είναι η εξής:

$$t'^\alpha_{\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} t^\gamma_{\delta} \quad \text{σχέση (5.6.41)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.6.37), τη σχέση (5.6.38), τη σχέση (5.6.39) και τη σχέση (5.6.41) έχουμε ότι:

$$(e^{\hat{a}})_{\hat{a}} (\nabla_u \chi)^\alpha = e^{\hat{a}} \nabla_u \chi = \nabla_u (e^{\hat{a}} \chi) = \frac{d\chi^{\hat{a}}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$(e^{\hat{a}})_{\hat{a}} (\nabla_u \chi)^\alpha = \frac{d\chi^{\hat{a}}}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.6.42)}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση (5.6.39) και τη σχέση (5.6.42) έχουμε ότι:

$$(e^{\hat{a}})_{\hat{a}} (\nabla_u \chi)^\alpha = \frac{d\chi^{\hat{a}}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\nabla (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} (\nabla_u \chi)^\alpha = \frac{d^2 \chi^{\hat{a}}}{d\tau^2} \quad \text{σχέση (5.6.43)}$$

Άρα, με βάση τη σχέση (5.6.39) και τη σχέση (5.6.43) έχουμε ότι:

$$(\nabla_u \nabla_u \chi)^\alpha (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} = -R^a_{\beta\gamma\delta} u^\beta \chi^\gamma u^\delta (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \chi^{\hat{a}}}{d\tau^2} = -R^a_{\beta\gamma\delta} u^\beta \chi^\gamma u^\delta (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \chi^{\hat{a}}}{d\tau^2} = -R^{\hat{a}}_{\hat{\tau}\hat{\gamma}\hat{\tau}} u^{\hat{\tau}} \chi^{\hat{\gamma}} u^{\hat{\tau}} (e^{\hat{a}})_{\hat{a}} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 \chi^{\hat{a}}}{d\tau^2} = -R^a_{\hat{\tau}\beta\hat{\tau}} \chi^\beta \quad \text{σχέση (5.6.44)}$$

Η σχέση (5.6.44) δίνει τη μορφή για την ελεύθερη πτώση πλαισίου, με το  $R^{\hat{a}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$  να ισούται με το εξής:

$$R^{\hat{a}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = R^a_{\beta\gamma\delta} (e^{\hat{a}})_a (e_{\hat{\beta}})^\beta (e_{\hat{\gamma}})^\gamma (e_{\hat{\delta}})^\delta \quad \text{σχέση (5.6.45)}$$

Από τη σχέση (2.4.2), προκύπτει το αδύναμο μετρικό πεδίο, οπότε έχουμε ότι:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad \text{σχέση (2.4.2)}$$



Έτσι, από τη σχέση (2.4.2) κανονικοποιώντας προκύπτει ότι:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)(cdt)^2 + (1 - 2\Phi)[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] \quad \text{σχέση (5.6.46)}$$

Συνεπώς, για τη σχέση (5.6.44) και τη σχέση (5.6.46) μπορούμε να ληφθεί η μορφή που είναι η εξής:

$$\frac{d^2\chi^l}{dt^2} = -R^l_{tjt}\chi^j \quad \text{σχέση (5.6.47)}$$

Από τη σχέση (5.6.8) γίνεται φανερό ότι για να ισχύουν οι προαναφερθέντες εξισώσεις πρέπει να ισχύει η μορφή που είναι η εξής:

$$\frac{d^2\chi^l}{dt^2} = -R^l_{tjt}\chi^j = -\delta^{ij} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j \partial x^k} \chi^k, \text{ όπου, } \chi^j = \chi^k \Rightarrow$$

$$-R^l_{tjt}\chi^k = -\delta^{ij} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j \partial x^k} \chi^k \Rightarrow$$

$$R^l_{tjt} = \delta^{ij} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j \partial x^k} \quad \text{σχέση (5.6.48)}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (5.6.36) και τη σχέση (5.6.48) προκύπτει ότι:

$$R^a_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^a_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^a_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^a \Gamma_{\beta\delta}^\varepsilon - \Gamma_{\delta\varepsilon}^a \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon \Rightarrow$$

$$R^l_{tjt} = \frac{\partial \Gamma^l_{tt}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{tj}}{\partial x^t} + \Gamma_{j\varepsilon}^l \Gamma_{tt}^\varepsilon - \Gamma_{t\varepsilon}^l \Gamma_{tj}^\varepsilon \Rightarrow$$

$$R^l_{tjt} = \frac{\partial \Gamma^l_{tt}}{\partial x^j} \quad \text{σχέση (5.6.49)}$$

Στη σχέση (5.6.49) οι δύο τελευταίοι όροι είναι αμελητέοι σε σχέση με τους δύο πρώτους και ο δεύτερος όρος δεν λαμβάνεται υπόψη επειδή το  $\Phi$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου, ενώ εκεί υπάρχει σχέση που το δείχνει ως εξαρτημένη μεταβλητή.

Πρέπει να αναφερθεί ότι το  $\Gamma^l_{tt}$  δείχνει τη μεταβολή στις βάσεις των συντεταγμένων.

Από τη σχέση (5.6.49) και τη σχέση (5.6.49) προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2\chi^l}{dt^2} = -\frac{\partial \Gamma^l_{tt}}{\partial x^j} \chi^j \quad \text{σχέση (5.6.50)}$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί και η μαθηματική σχέση που είναι η εξής:

$$t_{\alpha\beta\gamma} = g_{\gamma\delta} t_{\alpha\beta}^{\delta} \quad \text{σχέση (5.6.51)}$$

Επιπροσθέτως, η γενική σχέση για τις γεωδαιτικές εξισώσεις όπως προσδιορίστηκε στην υποενότητα 4.2 και από τη σχέση (4.2.15) προκύπτει ότι:

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad \text{σχέση (4.2.15)}$$

Έτσι, από τη σχέση (4.2.15) και τη σχέση (5.6.51) έχουμε το εξής:

$$k_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad \text{σχέση (5.6.52)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.6.36) επεκτείνοντας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} - \Gamma_{\delta\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} \Rightarrow \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \Rightarrow \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right) \end{aligned} \quad \text{σχέση (5.6.53)}$$

Η σχέση (5.6.53) αποτελεί τη καμπύλωση Riemann για ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα και συγκρίνοντας με τη σχέση (5.6.52) παρατηρούμε την ομοιότητα με τη γενική γεωδαιτική εξίσωση. Κατόπιν τούτων είναι εφικτό χρησιμοποιώντας κατ' αναλογία τις σχέσεις (5.6.15) και (5.6.16) να προσδιορίσουμε τα εξής:

$$\hat{R}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -\frac{2M}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.54)}$$

$$\hat{R}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = +\frac{2M}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.55)}$$

$$\hat{R}_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = \hat{R}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.56)}$$

$$\hat{R}_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = \hat{R}_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3} \quad \text{σχέση (5.6.57)}$$

Επομένως, από τη σχέση (5.6.21) και τις σχέσεις (5.6.54), (5.6.55), (5.6.56) και (5.6.57) έχουμε ότι:

$$\frac{d^2 x^{\hat{r}}}{d\tau^2} = +\frac{2M}{r^3} x^{\hat{r}} \quad \text{σχέση (5.6.58)}$$

$$\frac{d^2 x^{\hat{\theta}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3} x^{\hat{\theta}} \quad \text{σχέση (5.6.59)}$$

$$\frac{d^2 x^{\hat{\phi}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3} x^{\hat{\phi}} \quad \text{σχέση (5.6.60)}$$

Οι εφτά προαναφερθέντες σχέσεις αποτελούν τη καμπύλωση της γεωμετρίας Schwarzschild για την περίπτωση ενός ελεύθερης πτώσης συστήματος. Έτσι, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα είναι εφικτό να προσδιοριστεί η εξίσωση του Einstein στο κενό χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Ricci. Επομένως, έχουμε ότι:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{σχέση (5.6.61)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.6.36) και τη σχέση (5.6.61) έχουμε ότι:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\epsilon} \Gamma^{\epsilon}_{\beta\gamma} \Rightarrow$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \quad \text{σχέση (5.6.62)}$$

Η σχέση (5.6.62) αποτελεί τη χωροχρονική καμπύλωση του Ricci. Άρα, από τη σχέση (5.6.62) και σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας ισχύει  $\nabla^2 \Phi = 0$  και έτσι προκύπτει ότι:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{σχέση (5.6.63)}$$

Η σχέση (5.6.63) αποτελεί την εξίσωση του Einstein στο κενό σύμφωνα με την οποία είναι εφικτό να προσδιοριστεί η γεωμετρία Schwarzschild στο κενό. Έτσι χρησιμοποιώντας τη σφαιρική γεωμετρία όπως αυτής του Ήλιου για τον προσδιορισμό της μετάπτωσης στην τροχιακή πορεία του Ερμή, από τη σχέση (3.6.1) έχουμε ότι:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (3.6.1)}$$

Για την περίπτωση του Ήλιου, λόγω της σφαιρικής του μορφής εξειδικεύοντας, το  $b = 0$ , έχουμε το εξής:

$$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.6.64)}$$

Όμως, εν προκειμένω πέρα από τη συνήθη μορφή της σφαίρας χρειάζεται η πιο γενικευμένη μορφή της που είναι η εξής:

$$ds^2 = - A(r) (cdt)^2 + dr^2 + B(r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.5.1)}$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$ds^2 = - e^{\nu(r)}(cdt)^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + B(r) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.6.65)}$$

Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι ισχύει η παρακάτω σχέση που είναι η εξής:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{2}\right)g_{\alpha\beta}R \quad \text{σχέση (5.6.66)}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-\lambda(r)}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{σχέση (5.6.67)}$$

και

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = e^{-\lambda(r)}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{σχέση (5.6.68)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.6.67) έχουμε ότι:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-\lambda(r)}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} = -e^{\lambda(r)}\frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda'}{r} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{\lambda(r)}) \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{1}{r}(1 - e^{\lambda(r)}) \quad \text{σχέση (5.6.69)}$$

Απ' αυτή τη σχέση μπορούμε να λάβουμε τη διαφορική εξίσωση που είναι η εξής:

$$\frac{d}{dx}(re^{-\lambda(r)}) = 1 \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{A}{r} \quad \text{σχέση (5.6.70)}$$

Επίσης, από τη σχέση (5.6.67) και τη σχέση (5.6.68) προκύπτει ότι:

$$e^{-\lambda(r)}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) = -e^{-\lambda(r)}\left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda'}{r} = -\frac{v'}{r} \Rightarrow$$

$$\lambda' = -v' \quad \text{σχέση (5.6.71)}$$

Έτσι, από τη σχέση (5.6.71) προκύπτει ότι:

$$\lambda' = -v' \Rightarrow$$

$$v' = -\lambda' \Rightarrow$$

$$v = -\lambda + B \Rightarrow$$

$$e^v = e^{\lambda+B} \Rightarrow$$

$$e^v = e^\lambda e^B \quad \text{σχέση (5.6.72)}$$

Συνεπώς από τη σχέση (5.6.70) και τη σχέση (5.6.72) προκύπτει ότι:

$$e^v = e^B \left(1 + \frac{A}{r}\right) \quad \text{σχέση (5.6.73)}$$

Από τη σχέση (5.1.8) έχουμε ότι:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.8)}$$

Οι λύσεις αυτές του μετρικού της γεωμετρίας Schwarzschild στο κενό συνιστούν τον προσδιορισμό αυτό για  $A = -2M$  επαληθεύεται η θεωρία του μετρικού Schwarzschild.

Άρα, παρατηρούμε ότι πράγματι το αποτέλεσμα (5.6.73) εμπίπτει στην εξίσωση που δίνεται από τη σχέση (5.1.8), η οποία αποτελεί κρίσιμο στοιχείο για τον προσδιορισμό της μετάπτωσης της πορείας του Ερμή.

Σύμφωνα με τον Einstein και όπως έχουμε προσδιορίσει και σε προηγούμενες αναλύσεις προκύπτει ότι εξετάζοντας την ακτινική κίνηση των πλανητών στην τραχειακή τους πορεία προκύπτει ότι πολλαπλασιάζοντας με το  $\frac{1}{2}$  τότε λαμβάνεται η παρακάτω εξίσωση που είναι της μορφής:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ 1 + \frac{\left( \frac{L}{m} \right)^2}{r^2} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \frac{U}{m} \Rightarrow$$

$$e = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.2)}$$

και

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.2.4)}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$l = \frac{L}{m} \quad \text{σχέση (5.6.75)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.2.4) και τη σχέση (5.6.75) έχουμε ότι:

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.6.76)}$$

Επιπροσθέτως, έχουμε το εξής:

$$e = \frac{E}{m} \quad \text{σχέση (5.6.77)}$$

Άρα, από τη σχέση (5.2.2) και τη σχέση (5.6.76) έχουμε ότι:

$$\frac{E}{m} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.6.78)}$$

Όσο αφορά τη σχέση (5.6.76), για  $\theta = \pi/2$ , προκύπτει ότι:

$$\frac{L}{m} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \text{σχέση (5.6.79)}$$

Επιλύοντας τη σχέση (5.6.79) ως προς  $d\varphi$  προκύπτει ότι:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \Rightarrow$$

$$d\tau \frac{L}{m} = r^2 d\varphi \Rightarrow$$

$$d\tau \frac{L}{r^2} = d\varphi \Rightarrow$$

$$d\varphi = \frac{L}{r^2} d\tau \quad \text{σχέση (5.6.80)}$$

Από τη σχέση (5.1.8) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad \text{σχέση (5.1.8)}$$

Συνεπώς, από τη σχέση (5.1.8), αναλύοντας για  $\theta = \pi/2$  προκύπτει ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) d\varphi^2] \Rightarrow$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \left(0 + 1 * \frac{d\varphi^2}{d\tau^2}\right) \Rightarrow$$

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \quad \text{σχέση (5.6.81)}$$

Από τη σχέση (5.6.80) και τη σχέση (5.6.81) έχουμε ότι:

$$-1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} - r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} = -1 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$- \frac{dr^2}{d\tau^2} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$- \frac{dr^2}{d\tau^2} = - \frac{E}{m} \frac{d\tau}{dt} + \left(\frac{E}{m}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} \Rightarrow$$

$$- \frac{dr^2}{d\tau^2} = - \frac{E}{m} \frac{d\tau}{dt} + \left(\frac{E}{m}\right)^2 + r^2 \frac{1}{r^4} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$- \frac{dr^2}{d\tau^2} = - \frac{E}{m} \frac{d\tau}{dt} + \left(\frac{E}{m}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \frac{E}{m} \frac{d\tau}{dt} - \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \quad \text{σχέση (5.6.82)}$$

Από τη σχέση (5.6.9) έχουμε ότι:

$$\Phi = - \frac{GM}{r} \quad \text{σχέση (5.6.9)}$$

Ακολουθώντας, η σχέση (5.6.82), μπορεί να λάβει διαφορετική μορφή εφόσον χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για τη Νευτώνεια ενέργεια που είναι η εξής:

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + m\Phi \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + m\left(-\frac{GM}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{GM}{r} \quad \text{σχέση (5.6.83)}$$

Επίσης, από τη κλασική μηχανική γνωρίζουμε ότι:

$$u = \frac{dr}{dt} \Rightarrow$$

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad \text{σχέση (5.6.84)}$$

Η σχέση (5.6.84) αφορά κίνηση που δεν συμπεριλαμβάνει τη γωνία, οπότε εν προκειμένω λαμβάνοντας υπόψη και την αύξηση της γωνίας  $\varphi$  στην τροχιακή πορεία των πλανητών και πιο συγκεκριμένα του Ερμή έχουμε ότι:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \text{σχέση (5.6.85)}$$

Από τη σχέση (5.6.85) και τη σχέση (5.6.80) παίρνουμε το εξής:

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{\left(\frac{L}{m}\right)}{r^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad \text{σχέση (5.6.86)}$$

Επομένως, από τη σχέση (5.6.83) και τη σχέση (5.6.86) έχουμε ότι:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right] - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$



$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \quad \text{σχέση (5.6.87)}$$

Επιλύοντας τη σχέση (5.6.87) ως προς  $\frac{dr}{dt}$  έχουμε ότι:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{E}{m} + \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \quad \text{σχέση (5.6.88)}$$

και

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \frac{V}{m}, \text{ όπου } \frac{V}{m} \equiv -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad \text{σχέση (5.6.89)}$$

Άρα, για το περίπτωση αυτή έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \Rightarrow$$

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2 \frac{E}{m} - 2 \left( -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \Rightarrow$$

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2 \frac{E}{m} - \left( -2 \frac{GM}{r} + 2 \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \Rightarrow$$

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 2 \frac{E}{m} - \left( -2 \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) \quad \text{σχέση (5.6.90)}$$

Από τη σχέση (5.6.78) και τη σχέση (5.6.82) έχουμε ότι:

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \frac{E}{m} \frac{d\tau}{dt} - \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{L}{m} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{L}{m} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) - \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{L}{m} \right)^2 \Rightarrow$$

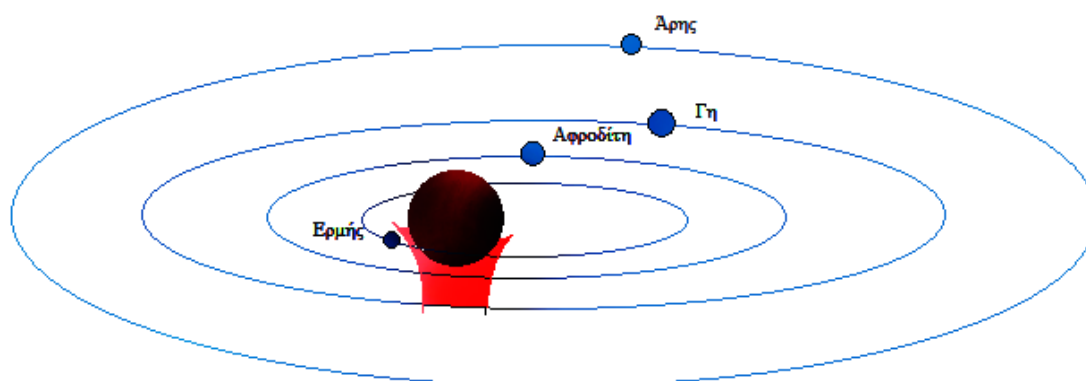
$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = + \left( \frac{E}{m} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{L}{m} \right)^2 \right] \quad \text{σχέση (5.6.91)}$$

### 5.7 Μετάπτωση του Ερμή σε σχέση με τους άλλους πλανήτες

Χρησιμοποιώντας τα προαναφερθέντα δεδομένα έχουμε ότι η μετάπτωση της πορείας του Ερμή<sup>4</sup> είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τους άλλους εσωτερικούς πλανήτες που εκτελούν την τροχιακή τους πορεία πολύ κοντά στη καμπύλωση του χωροχρόνου κατά τη γενική θεωρία της σχετικότητας όσο αφορά τον Ήλιο που αποτελεί την εστιακή βάση αυτών των υπολογισμών. Η σχέση που συνδέει αυτήν την απόκλιση είναι μια εκθετική σχέση, οπότε έχουμε ότι:

$$s.d. = A_1 e^{-\frac{p}{t_1}} + s.d._0 \quad \text{σχέση (δ.1.1)}$$

Όπου s.d. η ηλιακή απόσταση του κάθε πλανητικού σώματος, το p είναι η μετάπτωση, το  $A_1$  και το  $t_1$  αποτελούν συντελεστές αναλογίας. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα φαίνεται η διάταξη των πλανητών που είναι η εξής:



σχήμα 5.7.1: μεταπτώσεις των εσωτερικών πλανητικών σωμάτων

Από τη σχέση (δ.1.1) και το σχήμα 5.7.1 παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η απόσταση ενός πλανήτη τόσο μειώνει η μετάπτωση του, που προσδιορίζεται από τη σχέση

<sup>4</sup> Παράστημα Δ

(5.4.49). Με βάση τη σχέση (δ.1.1) φαίνεται ο ρυθμός μείωσης αυτής της μετάπτωσης συναρτήσει της ηλιακής απόστασης.

## Παράρτημα Α

## Παράρτημα Α

### Α.1 Βαρυτική κατάρρευση και μαύρες τρύπες, τι ισχύει στην περίπτωση του Ήλιου και κατ' επέκταση του Ερμή

Όσο αφορά τον τρόπο λειτουργίας ενός αστεριού σχετίζεται με τις βαρυτικές επιδράσεις και δυνάμεις από στοιχεία που αλληλεπιδρούν με τους πυρήνες ατόμων και έτσι προκαλούν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Ένα αστέρι ξεκινά τις διεργασίες του με βαρυτική κατάρρευση ενός διαστρικού σύννεφου αερίων που αποτελούνται κυρίως από υδρογόνο και ήλιο που στιγμιαία είναι πιο ψυχρό, πυκνότερο και χαμηλότερης κινητικής ενέργειας απ' αυτά που περιβάλλεται. Η αύξηση της θερμότητας προκαλεί στον πυρήνα θερμοκρασία που έχει αισθητά υψηλότερη τιμή ώστε να είναι ικανή να προκαλέσει ανάφλεξη για τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που καίνε το υδρογόνο δίνοντας ήλιο, και κατ' αυτόν τον τρόπο απελευθερώνεται ενέργεια. Το άστρο φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση που του επιτρέπει να απελευθερώνει ενέργεια τόση όση παράγεται από τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις καίγοντας το υδρογόνο. Αυτή κιόλας είναι η κατάσταση του Ήλιου. Τελικά ωστόσο όταν περιορίζονται οι ποσότητες ηλίου τότε ο πυρήνας του αστεριού δεν μπορεί να παράξει μέσω της θερμοπυρηνικής σύντηξης αρκετή ενέργεια ώστε να επέλθει αυτή η ισορροπία. Τότε επικρατεί η βαρυτική επίδραση του άστρου και τότε η αυξημένη θερμότητα αυξάνει τη θερμοκρασία και μέχρι οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που καίνε το ήλιο να αρχίσουν να καίνε άλλα στοιχεία. Το άστρο λόγω αυτής της μεταβολής γίνεται φωτεινότερο και η θερμοκρασία της επιφάνειας αλλάζει. Τελικά όταν φτάσει στην καύση του σιδήρου  $^{56}\text{Fe}$  που έχει την υψηλότερη ενέργεια δεσμού

ανά άτομο τότε δεν μπορεί να προκαλέσει την καύση που προκαλούσαν οι προκάτοχοι του μ' αποτέλεσμα να μην παράγεται η ενέργεια που παραγόταν προηγουμένως. Έτσι, κατ' αυτόν τον τρόπο με τη μη ύπαρξη αρκετής ενέργειας το άστρο μπορεί να καταλήξει σε ένα μη θερμικής πηγής πίεσης άστρο που έχει πάλι επέλθει σε ισορροπία. Επίσης υπάρχει και ακόμα μία περίπτωση αυτής της κατάρρευσης του άστρου που προκαλείται λόγω της βαρύτητας. Έτσι, όσο αφορά τη γεωμετρία μιας μαύρης τρύπας μπορεί να προσδιοριστεί από τη γεωμετρία Schwarzschild. Ένα σώμα που βρίσκεται υπό κατάρρευση στην ιδανική περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί ότι διαθέτει σφαιρική συμμετρία όσο αφορά τη χωροχρονική συμμετρία έξω από αυτό. Από την ανάλυση της σχέσης (5.1.2), όπως προέκυψε στην υποενότητα 5.1 έχουμε ότι:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad \text{σχέση (π.α.1)}$$

Άρα, προκύπτει από τη Νευτώνεια μηχανική η επίδραση του βαρυτικού πεδίου  $\Phi$  ότι είναι έξω από ένα σφαιρικό σώμα αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας και ανεξάρτητη του χρόνου, επειδή η μάζα του διατηρείται. Στη γεωμετρία Schwarzschild σύμφωνα και με τη γενική θεωρία της σχετικότητας μολονότι η μάζα τελεί σε σχέση εξάρτησης με το χρόνο κατά τη κίνηση της τροχιακής πορείας, στην περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας θεωρείται ότι αποτελεί ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως φαίνεται και από τη σχέση (3.6.2) που είναι η εξής:

$$ds^2 = dt^2 + (b^2 + r^2) d\phi^2 \quad \text{σχέση (3.6.2)}$$

Όταν πραγματοποιείται η κατάρρευση τότε σύμφωνα με τη μετρική του Schwarzschild, αλλάζουν τα πρόσημα των μετρικών στο  $g_{rr}$  και στο  $g_{tt}$  κυρίως όσο αφορά το  $r = 2M$ , προκαλώντας μια μοναδικότητα στις συντεταγμένες Schwarzschild. Από τη σχέση (5.1.8) έχουμε ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (5.1.8)}$$

Ο Eddington-Finkelstein εισήγαγαν τις συντεταγμένες  $(t, r, \theta, \phi)$  σύμφωνα με τις οποίες η μετρική της σχέσης (5.1.8) δίνει για το χρόνο  $t$  το εξής:

$$t = u - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad \text{σχέση (π.α.2)}$$

Η σχέση (π.α.2) αποτελεί τη γεωμετρία Schwarzschild για συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Ακολουθώντας αυτό το οποίο γίνεται είναι να επαληθεύεται η γεωμετρία Schwarzschild, για  $r < 2M$  ή για  $r > 2M$ , χρησιμοποιώντας αντί για το χρόνο  $t$  το  $u$ , σύμφωνα με τη σχέση (5.1.8) και τη σχέση (π.α.2) το αποτέλεσμα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\ ds^2 &\approx - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dr)^2 + 2 du dr + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ \Rightarrow ds^2 &\approx - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (π.α.3)} \end{aligned}$$

Η σχέση (π.α.3) αποτελεί τη γεωμετρία Schwarzschild, με συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Από την τελευταία σχέση γίνεται φανερό ότι ένας παρατηρητής που βρίσκεται σε ακτίνα  $r = 2M$ , θα υπόκειται στην εξίσωση που είναι η εξής:

$$\begin{aligned} ds^2 &\approx - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\ ds^2 &\approx - \left(1 - \frac{2M}{2M}\right) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\ ds^2 &\approx - (1 - 1) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\ ds^2 &\approx 0 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \\ ds^2 &= 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \text{σχέση (π.α.4)} \end{aligned}$$

Από τη σχέση (π.α.4) φαίνεται ότι ένας παρατηρητής που βρίσκεται σ' αυτή την απόσταση δεν θα παρατηρεί κάτι άλλο εκτός από τη σφαιρική συμμετρία. Συνεπώς πρέπει να βρίσκονται σε τέτοιες ακτινικές αποστάσεις, ώστε είναι εφικτή η

παρατήρηση μιας βαρυτικής κατάρρευσης. Για μεγάλη τιμή του  $r$  παρατηρείται τη μετρική του επίπεδου σχεδίου της χωροχρονικής γεωμετρίας. Στο  $r = 0$  κάποιος παρατηρητής εφόσον δεν συνθλιβεί θα παρατηρήσει μια φυσική μοναδικότητα. Το κλειδί για τις μαύρες τρύπες αποτελούν οι κώνοι φωτός όπου κατά μήκος των οποίων ισχύει η ιδιότητα της μηδενικής χωροχρονικής διάσπασης, όπως αναλύθηκε στην υποενότητα 1.3 και την ιδιότητα (1.3.2) που είναι η εξής:

$$ds = 0, \text{ για μηδενική διάσπαση} \quad \text{ιδιότητα (1.3.2)}$$

Έτσι, από την ιδιότητα (1.3.2) και τη σχέση (π.α.3), όπου  $d\theta = d\phi = 0$ , προκύπτει ότι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow$$

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr + r^2 (0 + \sin^2\theta * 0) \Rightarrow$$

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr \quad \text{σχέση (π.α.5)}$$

Από τη σχέση (π.α.5) γίνεται εμφανές ότι εφόσον το  $u$  είναι σταθερό τότε έχουμε ότι όταν το  $t$  αυξάνεται πρέπει το  $r$  να μειώνεται για να παραμένει το  $u$  σταθερό όπως δείχνει η σχέση (π.α.2).

Από τη σχέση (π.α.5) αναλύοντας έχουμε ότι:

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (du)^2 + 2 du dr \Rightarrow$$

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du + 2 dr \Rightarrow$$

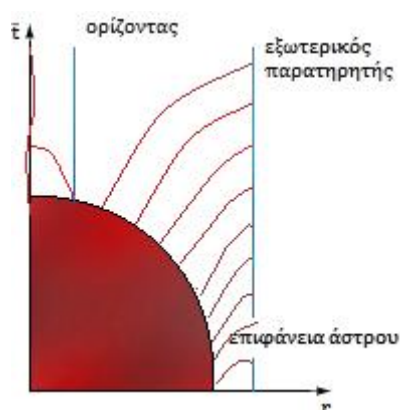
$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du = 2 dr \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Rightarrow$$

$$\int du = \int \frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr \Rightarrow$$

$$u = -2 \left( r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) = \text{σταθερά} \quad \text{σχέση (π.α.6)}$$





σχήμα π.α.1: ορίζοντας

Η σχέση (π.α.6) αφορά εξερχόμενες ακτίνες φωτός για  $r > 2M$  και εισερχόμενες ακτίνες φωτός για  $r < 2M$ . Ο ορίζοντας για  $r = 2M$  δεν επηρεάζει τις ακτίνες φωτός, και αποτελεί τον ορίζοντα του σώματος. Ο ορίζοντας αυτός είναι ο ίδιος για το σώμα είτε αυτό δεν βρίσκεται υπό κατάρρευση είτε όταν δεν βρίσκεται υπό κατάρρευση όπως την περίπτωση του Ήλιου, συνεπώς εν προκειμένω δεν επηρεάζεται και η περίπτωση της τροχιακής πορείας του Ερμή.

## Παράρτημα Β

## Παράρτημα Β

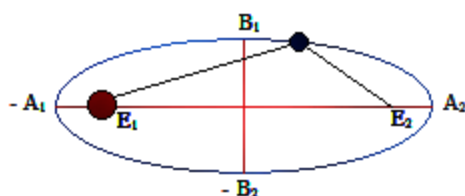
### Β.1 Εκκεντρότητα και κωνικές τομές

Με βάση τις κωνικές τομές μπορούμε να προσδιορίσουμε τις δυνατές γεωμετρικές περιπτώσεις εστιάζοντας στην περίπτωση της έλλειψης. Ονομάζονται κωνικές τομές διότι είναι εφικτό να προκύψουν διάφορα γεωμετρικά σχήματα όπως αυτά που παρατίθενται παρακάτω και είναι τα εξής:



σχήμα β.1.1: κωνικές τομές

Σύμφωνα με τον παραπάνω κώνο παρατηρούμε την περίπτωση του κύκλου, της έλλειψης, της παραβολής, και της υπερβολής. Όσο αφορά την ελλειψοειδή κίνηση των πλανητών έχουμε ότι:



σχήμα β.1.2: ελλειψοειδής κίνηση

Από το σχήμα β.1.2 έχουμε την απόσταση  $A_1A_2 = 2a$  και την απόσταση  $B_1B_2 = 2b$ . Η απόσταση  $A_1A_2$  αποτελεί το μεγάλο άξονα και η απόσταση  $B_1B_2$  αποτελεί τον μικρό

άξονα. Όσο αφορά την απόσταση  $E_1E_2 = 2\gamma$  συνιστά την εστιακή απόσταση. Χαρακτηριστικό μέγεθος της έλλειψης αποτελεί η εκκεντρότητα. Η εκκεντρότητα χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει τη σύγκλιση του κύκλου στην έλλειψη. Η σχέση που προσδιορίζει την εκκεντρότητα είναι η εξής:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{σχέση (}\beta.1.1\text{)}$$

Από τη σχέση (β.1.1) και το σχήμα β.1.2 προσδιορίζεται η μορφή της σχέσης για το περιήλιο που αποτελεί το πλησιέστερο σημείο, το  $A_1$  και βάσει αυτού είναι εφικτό να προσδιοριστεί το  $A_1E_1$ . Το πιο απομακρυσμένο σημείο από τον Ήλιο είναι το  $A_2$ , και αφορά το αφήλιο που προσδιορίζεται από τη σχέση  $A_2E_1$ . Οι απόσταση ενδιαφέρει για τη μετάπτωση του Ερμή, όπως προκύπτει από την ανάλυση της σχέσης (5.4.49) είναι η εξής:

$$A_1E_1 = \alpha - \gamma = \alpha - \alpha\varepsilon = \alpha(1-\varepsilon) \Rightarrow$$

$$A_1E_1 = \alpha(1-\varepsilon) \quad \text{σχέση (}\beta.1.2\text{)}$$

Όσο αφορά την πιο απομακρυσμένη περιοχή, το αφήλιο δίνεται από τη σχέση που είναι η εξής:

$$A_2E_1 = \alpha + \gamma = \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1+\varepsilon) \Rightarrow$$

$$A_2E_1 = \alpha(1+\varepsilon) \quad \text{σχέση (}\beta.1.3\text{)}$$

Παρακάτω παρατίθενται κάποιες σχέσεις για τη μορφή των κωνικών τομών όπως φαίνονται από το σχήμα β.1.1, οπότε έχουμε ότι:

$$y = ax^2 + b, \text{ παραβολή} \quad \text{σχέση (}\beta.1.4\text{)}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ κύκλος} \quad \text{σχέση (}\beta.1.5\text{)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ έλλειψη} \quad \text{σχέση (}\beta.1.6\text{)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ υπερβολή} \quad \text{σχέση (}\beta.1.7\text{)}$$

Στο ηλιακό σύστημα οι τροχιακές πορείες είναι ελλειπτικές, συνεπώς η σχέση (β.1.6) ενδιαφέρει και ιδιαίτερα στην περίπτωση της τροχιακής πορείας του Ερμή.

## Παράρτημα Γ

## Παράρτημα Γ

### Γ.1 Πίνακας τιμών μεταπτώσεων

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθεται ένας ενδεικτικός πίνακας τιμών από τη μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή καθώς και άλλων πλανητών, όπως της Αφροδίτης, της Γης και του Άρη, που αποτελούν τέσσερεις πλανήτες που βρίσκονται στο εσωτερικό του Ηλιακού συστήματος και επηρεάζεται ιδιαίτερα η τροχιακή τους πορεία λόγω των μεταπτώσεων, όπως φαίνεται και από τη σχέση (5.4.49), οπότε έχουμε τον πίνακα που είναι ο εξής:

Πλανήτης	Μετάπτωση ανά αιώνα (sec)
Ερμής	$42.98 \pm 0.001$
Αφροδίτη	$8.618 \pm 0.041$
Γη	$3.846 \pm 0.012$
Άρης	$1.351 \pm 0.001$

Τη μεγαλύτερη μετάπτωση παρουσιάζει ο Ερμής

---

Πίνακας γ.1.1

---

Σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα τιμών φαίνεται ότι όσο πιο κοντά βρίσκεται ένα πλανητικό σώμα στον Ήλιο τόσο μεγαλύτερη είναι η επίδραση στη μετάπτωση της τροχιακή πορεία.

## Παράρτημα Δ



## Παράρτημα Δ

### Δ.1 Υπολογισμοί μεταπτώσεων

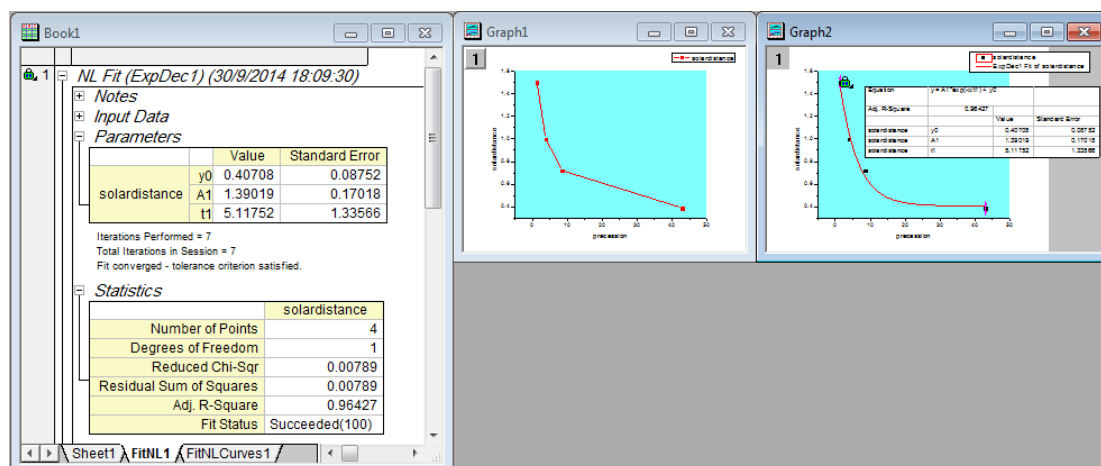
Σύμφωνα με τον πίνακα γ.1.1 μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα δ.1.1, οπότε έχουμε ότι:

Πλανήτης	Μετάπτωση ανά αιώνα (sec)	Απόσταση από τον Ήλιο σε Α.Υ.
Ερμής	$43.084 \pm 0.001$	0.39
Αφροδίτη	$8.618 \pm 0.041$	0.72
Γη	$3.846 \pm 0.012$	1
Άρης	$1.351 \pm 0.001$	1.5

Πίνακας δ.1.1

Όπου η μονάδα μέτρησης Α.Υ. ισούται με  $1 \text{ A.U.} = 150.000.000 \text{ Km}$

Οπότε χρησιμοποιώντας υπολογιστικό πρόγραμμα λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα που είναι τα εξής:



σχήμα δ.1.1: σχέση απόστασης και μετάπτωσης των εσωτερικών τροχιών των πλανητών

Από το σχήμα δ.1.1 φαίνεται ότι η απόκλιση για της μετάπτωσης όσο αφορά τα πλανητικά σώματα δεν είναι μια γραμμική σχέση αλλά μια εκθετική σχέση. Όσο αυξάνεται η απόσταση ενός πλανήτη τόσο μειώνεται με εκθετικό ρυθμό η μετάπτωση του. Η σχέση που το προσδιορίζει αυτό είναι η εξής:

$$s.d. = A_1 e^{-\frac{p}{t_1}} + s.d._0 \quad \text{σχέση (δ.1.1)}$$

Όπου, s.d. (solar distance) είναι η ηλιακή απόσταση και όπου, p (precession) είναι η μετάπτωση, το και το  $A_1$  και το  $t_1$  αποτελούν συντελεστές αναλογίας. Από τη σχέση αυτή φαίνεται η εκθετική σχέση μεταξύ της ηλιακής απόστασης και της μετάπτωσης.

## Αναφορές

- [1] James B. Hartle, GRAVITY, An Introduction to Einstein's General Relativity
- [2] Edwin F. Taylor, John Archibald Wheeler, EXPLORING BLACK HOLES, Introduction to General Relativity
- [3] Sean Carroll, University of Chicago, SPACETIME AND GEOMETRY, An Introduction to General Relativity
- [4] Carlos A. Bertulani, PRINCETON UNIVERSITY PRESS – PRINCETON AND OXFORD, Nuclear Physics in a Nutshell
- [5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Volume 1 Third Edition, Mechanics
- [6] L.D. Landau, E.M.Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Volume 3 Third Edition, Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)
- [7] D.J Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Second Edition