ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με Ισχυρές Ιδιομορφίες

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Π. ΤΡΑΧΑΝΑΣ

Διπλωματούχος της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Ιούνιος 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μελέτη Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με Ισχυρές Ιδιομορφίες

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Π. ΤΡΑΧΑΝΑΣ

Διπλωματούχος της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Συμβουλευτική Επιτροπή: Νικόλαος Γιαννακάκης
Νικόλαος Ζωγραφόπουλος
Νικόλαος Σταυρακάκης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την $9^{η}$ Ιουνίου 2015.

...	...	...
Ν. Γιαννακάκης	Ν. Ζωγραφόπουλος	Ν. Καραχάλιος
Επίκουρος Καθηγητής	Αναπληρωτής Καθηγητής	Καθηγητής
Ε.Μ.Π.	Σ.Σ.Ε.	Παν. Αιγαίου
...	...	...
Γ. Μπαρμπάτης	Β.-Γ. Παπανικολάου	Ν. Σταυρακάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής
Ε.Κ.Π.Α.	Ε.Μ.Π.	Ε.Μ.Π.
	...	
	Ι. Τσινιάς	
	Καθηγητής	
	Ε.Μ.Π.	

ΑΘΗΝΑ, Ιούνιος 2015

Στους γονείς μου,
Παναγιώτη και Παναγιώτα.

Περίληψη

Η παρούσα διατριβή εντάσσεται στην ευρύτερη περιοχή των *Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων*. Κύριος στόχος είναι η ανάδειξη των ισχυρών δεσμών ανάμεσα σε εξισώσεις που περιλαμβάνουν κρίσιμες ιδιομορφίες και στις ανισότητες τύπου Hardy και Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Στο πρώτο μέρος, διερευνάται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης θερμότητας σε όλο τον χώρο, η οποία σχετίζεται με την κρίσιμη περίπτωση της ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Στο δεύτερο μέρος, αναλύεται το απειροδιάστατο δυναμικό σύστημα που ορίζεται από το σχεδόν γραμμικό πρόβλημα σε ένα φραγμένο χωρίο, ενώ παράλληλα έχει διαταραχθεί από έναν γραμμικό όρο που περιέχει πραγματική παράμετρο. Αποδεικνύεται ότι το σύστημα οδηγεί στην ύπαρξη διακλάδωσης τύπου υπερκρίσιμης τρίαινας (pitchfork). Τέλος, στο τρίτο μέρος, θεμελιώνεται η τροχιακή ευστάθεια για τον τελεστή Schrödinger, ο οποίος έχει εφοδιασθεί με το δυναμικό Hardy, συμπεριλαμβανομένης της κρίσιμης σταθεράς, και την ομογενή πολυωνυμική μη γραμμικότητα, ενώ έχει τοποθετηθεί σε όλο τον χώρο. Παράλληλα, στο πνεύμα των J.L. Vázquez και N.B. Ζωγραφόπουλου, διερευνάται το φαινόμενο της ύπαρξης της λεγόμενης *ενέργειας Hardy στην ιδιομορφία* (Hardy singularity energy).

Abstract

The present dissertation lies in the general field of *Partial Differential Equations*. The main purpose is to highlight the strong links between the equations including critical singularities and the inequalities of Hardy and Caffarelli-Kohn-Nirenberg type. The first part concerns the asymptotic analysis of the solutions for the linear heat equation on all of space, related to the critical case of the classical Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality. In the second part, it is analyzed the infinite dimensional dynamical system, defined by the semilinear problem for the critical operator in the case above, while it is perturbated by a linear term including real parameter. The system leads to a bifurcation of supercritical pitchfork type for the stationary states. Finally, in the third part, it is established the orbital stability for the Schrödinger operator, equipped with the Hardy potential, including the critical constant, and the pure power nonlinearity, while it is posed on the whole space. Also, in the spirit of J.L. Vázquez and N.B. Zographopoulos, it is examined the phenomenon of the presence of the so-called *Hardy Singularity Energy.*

Ευχαριστίες

Κλείνοντας αυτόν τον κύκλο, θέλω να ευχαριστήσω μια σειρά από ανθρώπους που συνέτειναν καθοριστικά σε αυτήν την προσπάθεια.

Αρχικά, ευχαριστώ τον επιβλέποντά μου κ. Νικόλαο Β. Ζωγραφόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή της Στρατιωτικής Σχολής Ευελπίδων, για την άψογη συνεργασία μας καθ΄ όλη τη διάρκεια της διδακτορικής διατριβής. Η συνεχής ενθάρρυνσή του και ο εποικοδομητικός εποπτικός ρόλος του, δημιούργησαν τις καλύτερες προϋποθέσεις για την προσέγγιση σύγχρονων ερευνητικών θεμάτων στην ευρύτερη περιοχή των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, όπως είναι αυτά που μου πρότεινε. Επίσης, τον ευχαριστώ για την ατέρμονα και ευγενική προθυμία του να με καθοδηγεί, ανεξαρτήτως χρόνου.

Θέλω, βεβαίως, να ευχαριστήσω τον κ. Νικόλαο Μ. Σταυρακάκη, Καθηγητή Μαθηματικών στο Ε.Μ.Π., για την πολύχρονη και γόνιμη συνεργασία μας στη Σχολή Ε.Μ.Φ.Ε.. Οι πολύτιμες συμβουλές του με συνόδευαν ήδη από τις προπτυχιακές μου σπουδές, εν συνεχεία στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα "Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία" και τελικά στη διδακτορική διατριβή.

Ευχαριστώ τον κ. Νικόλαο Γιαννακάκη, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. και μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για την άριστη και συνεπή συνεργασία μας.

Ευχαριστώ τους κ.κ. Νικόλαο Καραχάλιο, Καθηγητή Παν. Αιγαίου, Γεράσιμο Μπαρμπάτη, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Κ.Π.Α., Βασίλειο-Γεώργιο Παπανικολάου, Καθηγητή Ε.Μ.Π., και Ιωάννη Τσινιά, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για τη συμμετοχή τους στην επταμελή εξεταστική επιτροπή και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Ευχαριστώ τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) και την επιτροπή του Ειδικού Λογαριασμού Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε.) του Ε.Μ.Π. για τη χορήγηση υποτροφίας, η οποία μου επέτρεψε να εστιάσω αποκλειστικά στην έρευνα. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας.

Ευχαριστώ τη Χριστίνα Αναστασοπούλου από την Κεντρική Βιβλιοθήκη του Ε.Μ.Π. για την πολύτιμη βοήθειά της στην ανεύρεση άρθρων και μονογραφιών μέσω της Υπηρεσίας Διαδανεισμού, καθώς και για τις συμβουλές της στη συγγραφή άρθρων στην αγγλική γλώσσα.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου Παναγιώτη και Παναγιώτα για ό,τι έχουν κάνει για τα παιδιά τους.

Γεώργιος Π. Τραχανάς,

Ιούνιος 2015.

Δημοσιεύσεις:

- G. P. Trachanas and N. B. Zographopoulos, *A strongly singular parabolic problem on an unbounded domain*, **Comm. Pure Appl. Anal. 13** (2014), 789-809.
- G. P. Trachanas and N. B. Zographopoulos, *On the dynamics of a strongly singular parabolic equation*, **J. Math. Anal. Appl. 421** (2015), 21-37.
- G. P. Trachanas and N. B. Zographopoulos, *Orbital stability for the Schrödinger operator involving inverse square potential*, **J. Differential Equations**, pp. 24, to appear.

Λέξεις κλειδιά: Εξίσωση Schrödinger, Τροχιακή Ευστάθεια, Στάσιμα Κύματα, Λύσεις Εντοπισμού, Ανισότητα Hardy, Δυναμικό Αντίστροφου Τετραγώνου, Ανισότητα Caffarelli-Kohn-Nirenberg, Ιδιομορφία, Ενέργεια Hardy στην Ιδιομορφία, Κρυμμένη Ενέργεια, Μη Φραγμένο Χωρίο, Ασυμπτωτική Συμπεριφορά, Ολική Ύπαρξη, Σχεδόν Γραμμικό Πρόβλημα, Διακλάδωση, Ολικός Ελκυστής, Μεταβολική Μέθοδος.
Schrödinger Equation, Orbital Stability, Standing Waves, Localized Solutions, Hardy Inequality, Inverse Square Potential, Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequality, Singularity, Hardy Singularity Energy, Hidden Energy, Unbounded Domain, Asymptotic Behavior, Global Existence, Semilinear Problem, Bifurcation, Global Attractor, Variational Method.

AMS Classification Subject: 35A15, 35B35, 35Q41, 35Q55, 35K67, 35P15, 35A23, 35B25, 35B32, 35B33, 35B40, 35Q60, 35Q70, 35Q79, 35A01, 35K05, 35K58, 35K67.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Κατά γενική ομολογία, η ποιοτική μελέτη προβλημάτων αρχικών ή/και συνοριακών συνθηκών, με τη χρήση μεθόδων χώρων Hilbert, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με ολοκληρωτικές ανισότητες ποικίλων τύπων. Η χρήση του όρου *ιδιομορφίες* στον τίτλο, προμηνύει τη θεώρηση εξισώσεων που περιλαμβάνουν στοιχεία τα οποία α-πειρίζονται στην αρχή. Παράλληλα, η τοποθέτηση των προβλημάτων σε όλο τον χώρο δρα κατά τρόπο επιβαρυντικό, αφού δεν είναι δυνατός ο ορισμός συμπαγών τελεστών σε κλασικούς χώρους συναρτήσεων. Κατ΄ αυτή την έννοια, οι εξισώ-σεις είναι ιδιόμορφες και στο άπειρο. Η βιβλιογραφία είναι επαρκώς εκτενής σε χρονο-εξαρτώμενα προβλήματα και μπορεί κανείς να συναντήσει πληθώρα αποτε-λεσμάτων σε ερωτήματα που αφορούν τόσο την ολική ύπαρξη λύσεων όσο και την ανάλυση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς τους. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, ο κυρίαρχος κρίκος της αποδεικτικής αλυσίδας καταλήγει να είναι μια ανισότητα τύπου Caffarelli-Kohn-Nirenberg ή Hardy.

Το 1984, στην εργασία [22], οι L. Caffarelli, R. Kohn και L. Nirenberg απέ-δειξαν, μεταξύ άλλων, ότι η ακόλουθη ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|u|^p dx\right)^{2/p} \leq C_{a,b} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2 dx,$$

αληθεύει για κάθε $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $N \geq 3$, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί

$$a < \frac{N-2}{2},$$

και

$$a \leq b \leq a+1, \quad p = \frac{2N}{N-2+2(b-a)}.$$

Έκτοτε, έχει παραχθεί μια δέσμη αποτελεσμάτων που θεμελιώθηκαν πάνω στην ανωτέρω ανισότητα και αφορούν, κατά κύριο λόγο, εξισώσεις με ιδιόμορφους όρους διάχυσης ή/και αντίδρασης. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα εντοπίζεται στην εργασία [33] των A. Dall' Aglio, D. Gianchetti και I. Peral, όπου διατυπώνονται, μεταξύ άλλων, κριτήρια ύπαρξης για το γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - div(|x|^{-2a}\nabla u) = 0, \\ u(x,0) = u_0, \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

πάνω σε ένα φραγμένο υποσύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ που περιέχει την αρχή. Από την οπτική της έκρηξης λύσεων, αναφέρουμε την εργασία [1] των B. Abdellaoui, E. Colorado και I. Peral για το αντίστοιχο σχεδόν γραμμικό[1] πρόβλημα. Μια ημιγραμμική γενίκευση παρουσιάζεται στη [2]. Σημειώνεται ότι και στις τρεις περιπτώσεις το χωρίο είναι φραγμένο. Προβλήματα σε όλο τον χώρο που διέπονται από τον ελλειπτικό διαφορικό τελεστή, για τη σχεδόν γραμμική περίπτωση, εντοπίζονται στις εργασίες [31] και [23] των K. Chou, C. Chu και F. Catrina, Z. Wang, αντίστοιχα. Οι πρώτοι καλύπτουν την περιοχή $0 < a < \frac{N-2}{2}$, ενώ οι δεύτεροι εστιάζουν στις τιμές $-\infty < a < 0$. Σε κάθε περίπτωση, είναι αδύνατη η διαχείριση της κρίσιμης τιμής

$$a_{cr} = \frac{N-2}{2},$$

είτε πρόκειται για αποτέλεσμα ύπαρξης, είτε έκρηξης λύσεων, τόσο σε φραγμένο όσο και μη φραγμένο χωρίο. Στο πρώτο μέρος της εργασίας, απαντάμε καταφατικά στην ύπαρξη ολικής λύσης για το παραβολικό, γραμμικό πρόβλημα, το οποίο εφοδιάζεται με τον κρίσιμο εκθέτη διάχυσης και τίθεται σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^N$. Στο δεύτερο μέρος, θεωρούμε το αντίστοιχο σχεδόν γραμμικό, παραβολικό πρόβλημα, τοποθετημένο σε ένα φραγμένο υποσύνολο που περιέχει την αρχή, για το οποίο αποκτάμε πλήρη εποπτεία ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων. Και στις δύο περιπτώσεις, αναδεικνύεται η ισχυρή αλληλεπίδραση των εξισώσεων με νέες σταθμισμένες ανισότητες Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Η κλασική ανισότητα Hardy

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

η οποία αληθεύει για κάθε $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ και $N \geq 3$, κατέχει, εκ της δομής της, πρωτεύοντα ρόλο στη μελέτη εξισώσεων που περιλαμβάνουν δυναμικά αντίστροφου τετραγώνου

$$V(x) = \frac{c}{|x|^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ιδιαίτερα, η βέλτιστη σταθερά $c_{cr} = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ αποτελεί ένα σημείο αναφοράς ως προς τη μεταβολή των ποιοτικών χαρακτηριστικών, καθώς η παράμετρος c διατρέχει την πραγματική ευθεία. Στην εργασία [13] των P. Baras και J.A. Goldstein, η κρίσιμη τιμή της παραμέτρου οριοθετεί τον ορισμό μιας ολικής λύσης από την ακαριαία έκρηξη (instantaneous blow-up) για την ακόλουθη εξίσωση θερμότητας

$$u_t = \Delta u + \frac{c}{|x|^2} u,$$

με μηδενικές συνοριακές συνθήκες Dirichlet πάνω σε ένα φραγμένο υποσύνολο που περιέχει την αρχή. Σε ανάλογα συμπεράσματα, με πιο ασθενείς συνθήκες στα αρχικά δεδομένα, κατέληξαν οι X. Cabré, Y. Martel και J.L. Vázquez, E. Zuazua στις εργασίες [21] και [76], αντίστοιχα. Έκτοτε, λόγω της εκτεταμένης απήχησης στις εφαρμογές, το ενδιαφέρον έχει στραφεί στο διαφορικό τελεστή

$$H := -\Delta - \frac{c}{|x|^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

[1] Οι όροι semilinear και quasilinear μεταφράζονται ως *σχεδόν γραμμικός* και *ημιγραμμικός*, αντίστοιχα, καθώς ο πρώτος είναι *πιο κοντά* στα γραμμικά προβλήματα.

από διαφορετικές πτυχές, τόσο στα ελλειπτικά όσο και τα χρονο-εξαρτώμενα προβλήματα. Για την υποκρίσιμη περιοχή $0 \leq c < c_{cr}$, η θεωρία είναι σχεδόν πλήρης. Η ανισότητα Hardy αποτελεί το βασικό εργαλείο ώστε η μελέτη οποιουδήποτε ποιοτικού χαρακτηριστικού να μπορεί να θεμελιωθεί στη βάση των κλασικών χώρων συναρτήσεων. Ωστόσο, στην κρίσιμη περίπτωση, πολλά ερωτήματα παραμένουν ανοικτά. Ένα από αυτά είναι το ζήτημα της τροχιακής ευστάθειας για τη σχεδόν γραμμική εξίσωση Schrödinger, η οποία έχει εφοδιαστεί με το κρίσιμο δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου. Η ύπαρξη στάσιμων κυμάτων καθεαυτή, έχει αποδειχθεί για την υποκρίσιμη περίπτωση στις εργασίες [36, 64, 69]. Αξίζει να τονίσουμε ότι, στην κρίσιμη περίπτωση, υπάρχουν αποτελέσματα ύπαρξης για τον στάσιμο τελεστή στις εργασίες [18, 37]. Όμως, και στις δύο περιπτώσεις, το χωρίο είναι φραγμένο. Στο τρίτο μέρος της διατριβής, αποδεικνύουμε την ύπαρξη και την ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων ακριβώς για την κρίσιμη τιμή της παραμέτρου, δεδομένου ότι το πρόβλημα έχει τεθεί σε όλο τον χώρο. Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι η γενίκευση συντελείται σε τρεις κατευθύνσεις. Από όσα γνωρίζουμε στη διεθνή βιβλιογραφία, είναι η πρώτη φορά που συνυπάρχουν στην ίδια εξίσωση Schrödinger τα ακόλουθα:

- Το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου.
- Η βέλτιστη σταθερά της ανισότητας Hardy.
- Η τοποθέτηση σε όλο τον χώρο.

Επίσης, το αποτέλεσμα της τροχιακής ευστάθειας καθεαυτό, επεκτείνει προηγούμενες θεωρήσεις που αναφέρονται σε λιγότερο (ή καθόλου) ιδιόμορφα δυναμικά. Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση είναι η εργασία [41] του F. Genoud, στην οποία παρουσιάζεται η ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων για ένα δυναμικό που συμπεριφέρεται στο άπειρο ακριβώς όπως η συνάρτηση $|x|^{-b}$, $b \in (0,2)$.

Στο Κεφάλαιο 2, διατυπώνονται οι βασικές έννοιες και τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Ακριβέστερα, παρατίθενται στοιχεία της θεωρίας ύπαρξης των γενικευμένων γραμμικών και σχεδόν γραμμικών εξελικτικών εξισώσεων, της τοπολογικής θεωρίας διακλάδωσης, καθώς και της θεωρίας των απειροδιάστατων δυναμικών συστημάτων. Το υλικό αυτού του κεφαλαίου προέρχεται, κατά κύριο λόγο, από τις μονογραφίες [25, 26, 47, 60, 79, 80, 81], το άρθρο [50] και τη διατριβή [83].

Στο Κεφάλαιο 3, εξετάζεται η ορθή τοποθέτηση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t = div(|x|^{-(N-2)}\nabla u), & x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι υποθέσεις του προβλήματος και αναφέρονται τα μέχρι τώρα γνωστά αποτελέσματα για τις εξισώσεις με τον υποκρίσιμο όρο διάχυσης, τόσο σε φραγμένο όσο και μη φραγμένο χωρίο. Στη δεύτερη ενότητα, εισάγονται οι μεταβλητές ομοιότητας (similarity variables) και το συναρτησιακό πλαίσιο δομείται πάνω σε σταθμισμένους χώρους Lebesgue και Sobolev. Επίσης, αποδεικνύονται νέες σταθμισμένες ανισότητες τύπου Caffarelli-Kohn-Nirenberg για τον κρίσιμο εκθέτη ιδιομορφίας. Στην τρίτη ενότητα, αναλύεται το φάσμα του αντίστοιχου ελλειπτικού τελεστή με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων και υπολογίζεται επακριβώς το πρώτο ιδιοζεύγος. Στην τέταρτη ενότητα, θεμελιώνεται η ύπαρξη ολικής λύσης εφαρμόζοντας τη βασική θεωρία επέκτασης Friedrichs για τον διαφορικό τελεστή. Παράλληλα με το αρχικό πρόβλημα, στην πέμπτη ενότητα, θεωρούμε το συσχετισμένο πρόβλημα Hardy που διατυπώνεται ως ακολούθως

$$\begin{cases} v_t = |x|^{-(N-2)} \left(\Delta v + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{v}{|x|^2} \right), & x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Το κίνητρο για τη μελέτη του ανωτέρω προβλήματος εντοπίζεται στην εμφάνιση της ενέργειας τύπου Hardy κατά την έννοια των Vázquez και Ζωγραφόπουλου. Η διαδικασία του χωρισμού μεταβλητών στη φασματική ανάλυση οδήγησε στην ύπαρξη ιδιόμορφων λύσεων στο μηδέν, οι οποίες αδυνατούν να προσεγγισθούν από ομαλές συναρτήσεις υπό τη δράση της ενεργειακής νόρμας. Με τον όρο ενεργειακή νόρμα νοείται η νόρμα που *υποδεικνύεται* από τη θεωρία Friedrichs. Αυτή η παθογένεια αντιμετωπίζεται με την αναδιατύπωση της νόρμας, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό, και τον επαναπροσδιορισμό του συναρτησιακού πλαισίου. Στη νέα θεώρηση, εισχωρεί ένας επιδιορθωτικός ενεργειακός όρος, η παρουσία του οποίου δεν ήταν προφανής με την αρχική προσέγγιση. Ο νέος όρος ορίζεται μέσω ενός επιφανειακού ολοκληρώματος, εμφανίζεται στις πολύ ιδιόμορφες λύσεις και δρα κατά τρόπο αφαιρετικό. Σημειώνεται ότι αυτή η απρόβλεπτη και μη προφανής ενεργειακή προσέγγιση παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία [74] των J.L. Vázquez και N.B. Ζωγραφόπουλου και αφορούσε την κλασική εξίσωση θερμότητας με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου (βλέπε επίσης την [75] για ορισμένες επεκτάσεις από τους ίδιους συγγραφείς). Στην έκτη ενότητα, περιγράφεται πλήρως η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων και για τα δύο προβλήματα. Αποδεικνύεται ότι οι λύσεις συγκλίνουν, με πολυωνυμικό ρυθμό, σε μια ακτινικά συμμετρική συνάρτηση. Τέλος, στην έβδομη ενότητα, αποδεικνύεται μια βελτίωση της ανισότητας Hardy-Sobolev που σχετίζεται με τον ενεργειακό χώρο του προβλήματος. Η διαδικασία βασίζεται στην ανάλυση των συναρτήσεων σε συμμετρικά και μη μέρη και στην αναγωγή στην κλασική ανισότητα Sobolev. Επίσης, υπολογίζεται επακριβώς η βέλτιστη σταθερά.

Στο Κεφάλαιο 4, διερευνάται η δυναμική του απειροδιάστατου δυναμικού συστήματος που ορίζεται από το ακόλουθο σχεδόν γραμμικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t = div(|x|^{-(N-2)} \nabla u) + \lambda |x|^{-r} u - |x|^{-k} |u|^{p-2} u, & x \in \Omega, \; t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \; t > 0. \end{cases}$$

Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι παράμετροι του προβλήματος και αναφέρονται, εν συντομία, ήδη γνωστά αποτελέσματα πάνω σε σχεδόν γραμμικά προβλήματα με τον υποκρίσιμο εκθέτη ιδιομορφίας. Μπορούμε να πούμε ότι η θεώρηση του ανωτέρω προβλήματος επεκτείνει κατά μια έννοια το πρόβλημα του Κεφαλαίου 3. Εντούτοις, η μετάβαση από το γραμμικό στο σχεδόν γραμμικό πρόβλημα απαιτεί κάποιο κόστος, το οποίο αποτιμάται στην τοποθέτηση του δεύτερου προβλήματος σε ένα φραγμένο χωρίο. Η αιτία εντοπίζεται στην κρίσιμη σταθμισμένη ανισότητα Caffarelli-Kohn-Nirenberg, η οποία αληθεύει για συναρτήσεις που μηδενίζονται στο σύνορο ενός φραγμένου χωρίου. Η επαγόμενη εμφύτευση αποτελεί το κύριο εργαλείο της προσέγγισής μας. Ως εκ τούτου, θέτουμε συνθήκες Dirichlet στο αρχικό πρόβλημα. Στη δεύτερη ενότητα, κατασκευάζεται το συναρτησιακό πλαίσιο και διατυπώνονται οι δομικές ιδιότητες των χώρων συναρτήσεων. Στην τρίτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη μη τετριμμένων στάσιμων λύσεων, οι οποίες διακλαδίζονται από την πρώτη ιδιοτιμή του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου ελλειπτικού προβλήματος. Επίσης, θεμελιώνεται ο καθολικός χαρακτήρας του συνεχούς αυτών των λύσεων μέσω του αποκλεισμού της δεύτερης δυνατότητας του Θεωρήματος Rabinowitz. Στην τέταρτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη ολικής λύσης για το εξελικτικό πρόβλημα. Εφόσον ο μη γραμμικός όρος ικανοποιεί μια τοπική συνθήκη Lipschitz, ο ορισμός μιας τοπικής χρονικά λύσης είναι εφικτός. Η ολική ύπαρξη είναι απόρροια της εισαγωγής ενός κατάλληλου συναρτησιακού Lyapunov και της λήψης εκτιμήσεων *εκ των προτέρων* (a priori estimates). Τέλος, στην πέμπτη ενότητα, αναλύεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος λ. Η επιχειρηματολογία βασίζεται στον ορισμό κατάλληλων μορφών Gårding και τη χρήση εργαλείων από τη θεωρία γραμμικοποίησης.

Στο κεφάλαιο 5, εξετάζεται το ζήτημα της τροχιακής ευστάθειας για την ακόλουθη σχεδόν γραμμική εξίσωση Schrödinger

$$iu_t + \Delta u + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{u}{|x|^2} + |u|^{p-2}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Με τον όρο τροχιακή ευστάθεια νοείται η ευστάθεια, με μια εύλογη έννοια, των λεγόμενων στάσιμων κυμάτων (standing waves), τα οποία είναι λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = e^{i\lambda t}v(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, η ύπαρξη ενός τέτοιου τύπου λύσεων ανάγεται στη μελέτη της ελλειπτικής εξίσωσης

$$-\Delta v - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{v}{|x|^2} + \lambda v - |v|^{p-2}v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι υποθέσεις του προβλήματος και γίνεται μια σύντομη αναφορά σε ήδη γνωστά αποτελέσματα που αφορούν την εξίσωση Schrödinger με δυναμικά τα οποία είναι λιγότερο ιδιόμορφα στην αρχή. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται σε αποτελέσματα που σχετίζονται με την επίλυση του στάσιμου προβλήματος, το οποίο είτε είναι τοποθετημένο σε φραγμένο χωρίο, είτε ο αριθμητής του δυναμικού αποτελείται από μια παράμετρο αυστηρά μικρότερη της βέλτιστης σταθεράς Hardy. Στη δεύτερη ενότητα, διατυπώνονται τα δομικά χαρακτηριστικά του συναρτησιακού πλαισίου. Στην τρίτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη ακτινικά συμμετρικών στάσιμων κυμάτων. Η προσέγγιση είναι καθαρά μεταβολική και βασίζεται στην επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης για το συσχετισμένο συναρτησιακό ενέργειας, δεδομένου ότι η L^2-νόρμα των προφίλ v των στάσιμων κυμάτων είναι προκαθορισμένη. Η διαδικασία βασίζεται στη θεμελιώδη ιδιότητα της σχετικής συμπάγειας κάθε ελαχιστοποιητικής ακολουθίας (μια συνθήκη τύπου Palais-Smale). Επίσης, υϊοθετώντας ένα αντιφατικό επιχείρημα, αποδεικνύεται η τροχιακή ευστάθεια με την εξής έννοια: αν η αρχική συνθήκη βρίσκεται επαρκώς κοντά στο σύνολο των ελαχιστοποιήσεων του ενεργειακού συναρτησιακού, τότε η επαγόμενη ολική λύση θα βρίσκεται και αυτή επαρκώς κοντά, εις το διηνεκές. Στην ίδια ενότητα, επιχειρείται η περιγραφή της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των στάσιμων κύματων κοντά στην αρχή. Εφαρμόζοντας βασικά εργαλεία της θεωρίας ομαλότητας ελλειπτικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, αποδεικνύεται ότι τα στάσιμα κύματα πλησιάζουν το μηδέν ακριβώς όπως η συνάρτηση $|x|^{-(N-2)/2}$. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρείται η εμφάνιση του επιδιορθωτικού όρου Hardy κατά την έννοια των Vázquez και Ζωγραφόπουλου. Επίσης, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Kelvin, αποδεικνύεται η τροχιακή ευστάθεια των συμμετρικών στάσιμων κυμάτων για μια σχεδόν γραμμική εξίσωση Schrödinger, στην οποία ο νέος όρος Hardy δρα κατά τρόπο αθροιστικό στη συνολική ενέργεια. Τέλος, στην τέταρτη ενότητα, γενικεύεται το αποτέλεσμα της τροχιακής ευστάθειας για τη μη συμμετρική περίπτωση. Εντούτοις, επειδή δεν είναι διαθέσιμη μια μη σταθμισμένη ανισότητα Hardy-Sobolev, είμαστε υποχρεωμένοι να τοποθετήσουμε μια συνάρτηση βάρους στο μη γραμμικό όρο.

Κεφάλαιο 2

Προκαταρκτικές Έννοιες

Στο παρόν κεφάλαιο, παραθέτουμε προκαταρκτικές έννοιες και γνωστά αποτελέσματα που χρειάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Ακριβέστερα, στην πρώτη ενότητα, γίνεται μία εισαγωγή στην επέκταση Friedrichs των συμμετρικών τελεστών, καθώς και στον συναρτησιακό λογισμό των αυτοσυζυγών τελεστών. Η δεύτερη ενότητα αναφέρεται στις έννοιες της ημιομάδας συστολών και της ομάδας ισομετριών. Στην τρίτη και την τέταρτη ενότητα, παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη και τον χαρακτηρισμό των λύσεων σε γενικευμένες εξελικτικές εξισώσεις. Η πέμπτη και η έκτη ενότητα αποτελούν ανασκόπηση ορισμένων βασικών εννοιών της θεωρίας διακλάδωσης και της θεωρίας ευστάθειας, αντίστοιχα. Τέλος, στην έβδομη ενότητα, γίνεται μία σύντομη αναφορά σε γενικές έννοιες των απειροδιάστατων δυναμικών συστημάτων.

2.1 Επέκταση Friedrichs

Θεωρούμε έναν πραγματικό χώρο Hilbert X, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δίνεται ένας γραμμικός, μη φραγμένος και πυκνά ορισμένος τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $A^* : D(A^*) \subseteq X \to X$ ο συζυγής του τελεστή A. Ο A καλείται:*
(i) συμμετρικός, *αν ισχύει*

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \text{για κάθε } u, v \in D(A), \tag{2.1}$$

(ii) αυτοσυζυγής, *αν ισχύει $A = A^*$,*
(iii) αντισυζυγής, *αν ισχύει $A = -A^*$.*

Ορισμός 2.1.2. *Ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ καλείται* αυστηρά μονότονος (strongly monotone)*, αν ισχύει*

$$(Au, u) \geq c\,\|u\|^2, \tag{2.2}$$

για κάθε $u \in D(A)$ και σταθερό $c > 0$.

Εισάγουμε το *ενεργειακό εσωτερικό γινόμενο (energetic inner product)*, που ορίζεται ως εξής

$$(u, v)_E := (Au, v), \quad \text{για κάθε } u, v \in D(A).$$

Η επαγόμενη νόρμα

$$\|u\|_E := (u,u)_E^{1/2}, \quad \text{για κάθε } u \in D(A),$$

καλείται *ενεργειακή νόρμα (energetic norm)*. Η πλήρωση του $D(A)$ υπό το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_E$ καλείται *ενεργειακός χώρος (energetic space)* και συμβολίζεται με X_E.

Πρόταση 2.1.3. *Αν ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι συμμετρικός και αυστηρά μονότονος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Ο χώρος X_E, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_E$, ορίζει έναν πραγματικό χώρο Hilbert.
(ii) Το σύνολο $D(A)$ είναι πυκνό στον X_E.
(iii) Η εμφύτευση $X_E \hookrightarrow X$ είναι συνεχής.
(iv) Η εμφύτευση $X \hookrightarrow X_E^*$ είναι συνεχής μέσω της δυϊκής απεικόνισης $j : X \to X_E^*$, όπου

$$j(f)(v) := (f,v), \quad \text{για κάθε } v \in X_E \text{ και σταθερό } f \in X.$$

Ορισμός 2.1.4. *Η δυϊκή απεικόνιση $A_E : X_E \to X_E^*$ του ενεργειακού χώρου X_E, που ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\langle A_E u, v\rangle_{X_E^*,X_E} = (u,v)_E, \quad \text{για κάθε } u,v \in X_E, \tag{2.3}$$

καλείται ενεργειακή επέκταση *του τελεστή A.*

Από το θεώρημα Riesz, διαπιστώνεται ότι η $A_E : X_E \to X_E^*$ ορίζει έναν γραμμικό ομοιομορφισμό με

$$\|A_E u\|_{X_E^*} = \|u\|_E, \quad \text{για κάθε } u \in X_E. \tag{2.4}$$

Ορισμός 2.1.5. *Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι συμμετρικός και αυστηρά μονότονος. Η* επέκταση Friedrichs *$A_F : D(A_F) \subseteq X \to X$ του A ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$A_F u := A_E u, \quad \text{για κάθε } u \in D(A_F),$$

όπου

$$D(A_F) := \{u \in X_E : A_E u \in X\} = A_E^{-1}(X).$$

Είναι άμεσα εμφανείς οι ακόλουθοι εγκλεισμοί

$$D(A) \subseteq X_E \subseteq X \subseteq X_E^*, \tag{2.5}$$

καθώς και οι επεκτάσεις

$$A \subseteq A_F \subseteq A_E. \tag{2.6}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $u \in D(A_F)$ αν και μόνο αν υπάρχει $f \in X$ τέτοιο ώστε

$$\langle A_E u, v\rangle_{X_E^*,X_E} = (f,v), \quad \text{για κάθε } v \in X_E. \tag{2.7}$$

Η επέκταση Friedrichs κατέχει κεντρικό ρόλο στην προσέγγιση της μαθηματικής φυσικής με τις λεγόμενες *μεθόδους χώρων Hilbert (Hilbert space methods)*. Σχετίζεται δε, στενά, με την θεμελιώδη έννοια της ενέργειας. Για παράδειγμα, στην κβαντική φυσική, οι καταστάσεις αντιστοιχούν σε μοναδιαία διανύσματα ενός χώρου Hilbert, ενώ οι φυσικές ποσότητες (ενέργεια, ορμή, κλπ.) προσδιορίζονται από αυτοσυζυγείς τελεστές.

Θεώρημα 2.1.6. *(Friedrichs, 1934). Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι συμμετρικός και αυστηρά μονότονος. Τότε, για την επέκταση Friedrichs A_F του A, ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Ο A_F είναι αυτοσυζυγής, ένα προς ένα και επί, και επιπλέον ισχύει

$$(A_F u, u) \geq c \|u\|^2, \quad \text{για κάθε } u \in D(A_F), \tag{2.8}$$

όπου $c > 0$ είναι η σταθερά του Ορισμού 2.1.2.
(ii) Ο αντίστροφος τελεστής $A_F^{-1} : X \to X$ υπάρχει και είναι γραμμικός, συνεχής και αυτοσυζυγής.
(iii) Αν, επιπλέον, η εμφύτευση $X_E \hookrightarrow X$ είναι συμπαγής, τότε ο $A_F^{-1} : X \to X$ είναι συμπαγής.

Στη συνέχεια, θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Au = \mu u, \quad u \in D(A),\ \mu \in \mathbb{R},\ u \neq 0, \tag{2.9}$$

παράλληλα με τα ακόλουθα γενικευμένα προβλήματα:

$$A_F u = \mu u, \quad u \in D(A_F),\ \mu \in \mathbb{R},\ u \neq 0, \tag{2.10}$$

και

$$(u, Av) = \mu(u, v), \quad \text{για κάθε } v \in D(A) \text{ και σταθερά } u \in X_E,\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Διαπιστώνουμε ότι τα προβλήματα (2.10) και (2.11) είναι ισοδύναμα. Τα δύο επόμενα θεωρήματα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι ο αντίστροφος της επέκτασης Friedrichs είναι συμπαγής τελεστής.

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω $A_F : D(A_F) \subseteq X \to X$ η επέκταση Friedrichs του συμμετρικού και αυστηρά μονότονου τελεστή $A : D(A) \subseteq X \to X$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η εμφύτευση $X_E \hookrightarrow X$ είναι συμπαγής, όπου ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος και απειροδιάστατος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $\{u_n, \mu_n\}$ που αποτελείται από ιδιοζεύγη του A_F.
(ii) Τα ιδιοδιανύσματα $\{u_n\}$ ορίζουν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X. Επιπλέον, $u_n \in X_E$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Όλες οι ιδιοτιμές $\{\mu_n\}$ έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και, επιπλέον, αληθεύει ότι

$$0 < c \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \text{ και } \mu_n \to +\infty, \text{ καθώς } n \to \infty. \tag{2.12}$$

Θεώρημα 2.1.8. *Έστω $A : D(A) \subseteq X \to X$ ένας αυτοσυζυγής τελεστής στον διαχωρίσιμο χώρο X. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $\{u_n, \mu_n\}$ ιδιοζευγών του A, όπου οι $\{u_n\}$ ορίζουν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X. Τότε*

$$Au = \sum_n \mu_n (u_n, u) u_n, \quad \text{για κάθε } u \in D(A). \tag{2.13}$$

Επιπλέον, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) $u \in D(A)$.
(ii) Η σειρά $\sum_n \mu_n (u_n, u) u_n$ συγκλίνει.
(iii) Η σειρά $\sum_n |\mu_n (u_n, u)|^2$ συγκλίνει.

Διαισθητικά, αν ένας τελεστής (στην περίπτωσή μας μία επέκταση Friedrichs) επιδέχεται ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα, τότε είναι δυνατή η κατανομή της δράσης του κατά μήκος των ιδιοζευγών του. Με αυτή τη διαδικασία, είναι δυνατή η κατασκευή, κατά μια εύλογη έννοια, ενός συναρτησιακού λογισμού

$$A \to F(A),$$

για την κλάση των αυτοσυζυγών τελεστών $A : D(A) \subseteq X \to X$ που έχουν συμπαγή αντίστροφο. Ακριβέστερα, έστω ότι δίνεται μία συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Κατά φυσιολογικό τρόπο, η δράση του τελεστή $F(A) : D(F(A)) \subseteq X \to X$ μπορεί να οριστεί μέσω της σχέσης

$$F(A)u := \sum_n F(\mu_n)(u_n, u)u_n, \quad \text{για κάθε } u \in D(F(A)), \tag{2.14}$$

όπου $u \in D(F(A))$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_n F(\mu_n)(u_n, u)u_n$ συγκλίνει. Επίσης, ο τελεστής $F(A)$ είναι πυκνά ορισμένος και, επιπλέον, τα $(F(\mu_n), u_n)$ αποτελούν ιδιοζεύγη του. Επιπροσθέτως, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιηθεί στις σχεδόν γραμμικές εξελικτικές εξισώσεις.

Πρόταση 2.1.9. *Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.8, τότε, για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ο τελεστής $F(A)$ είναι αυτοσυζυγής.*

Να σημειωθεί ότι η παραπάνω θεώρηση επεκτείνεται σε ευρύτερες κατηγορίες τελεστών μέσω των λεγόμενων φασματικών κλάσεων (βλ. [81]). Ωστόσο, σε αυτή την εργασία θα μας απασχολήσει μόνο η περίπτωση που ο επεκτεταμένος τελεστής επιδέχεται ένα αριθμήσιμο πλήθος ιδιοζευγών.

Η σπουδαιότητα της παραπάνω διαδικασίας οφείλεται στο ότι είναι δυνατή η εισαγωγή του χρόνου ως μια παράμετρος, δηλαδή μπορούν να οριστούν συναρτήσεις της μορφής

$$F(A,t)u := \sum_n F(\mu_n, t)(u_n, u)u_n, \quad t \geq 0. \tag{2.15}$$

Από την οπτική των εξελικτικών εξισώσεων, θα δούμε στις επόμενες παραγράφους ότι οι λύσεις δίνονται σε μορφές όπως η (2.15). Επομένως, είναι εμφανές ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη συμπεριφορά της $F(\mu_n, t)$, καθώς $t \to \infty$.

2.2 Ημιομάδες και Ομάδες Γραμμικών Τελεστών

Σε αυτή την ενότητα, γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στις έννοιες της ημιομάδας συστολών (semigroup of contractions) και της ομάδας ισομετριών (group of isometries) σε έναν χώρο Banach. Αποτελούν δε, το κύριο εργαλείο στην περιγραφή των λύσεων σε χρονο-εξαρτώμενα προβλήματα, τόσο γραμμικά όσο και σχεδόν γραμμικά.

Έστω X ένας χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|$.

Ορισμός 2.2.1. *Η μονοπαραμετρική οικογένεια τελεστών $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ θα καλείται* ημιομάδα συστολών *στον X, αν ισχύουν τα εξής:*
(i) $\|T(t)\| \leq 1$ για κάθε $t \geq 0$.
(ii) $T(0) = I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής.
(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, για κάθε $t, s \geq 0$.
(iv) Για κάθε $u \in X$, η συνάρτηση $t \to T(t)u$ ανήκει στον $C([0,\infty), X)$.

Ορισμός 2.2.2. *Ο γραμμικός τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ που ορίζεται μέσω των σχέσεων*

$$D(A) := \left\{ u \in X : \text{το } \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ υπάρχει} \right\}, \tag{2.16}$$

και

$$Au := \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad \text{για κάθε } u \in D(A), \tag{2.17}$$

θα καλείται γεννήτορας (generator) *της ημιομάδας συστολών* $(T(t))_{t \geq 0}$.

Ορισμός 2.2.3. *Η μονοπαραμετρική οικογένεια των γραμμικών τελεστών* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *θα καλείται* ομάδα ισομετριών *στον X, αν ισχύουν τα εξής:*
(i) $\|T(t)u\| = \|u\|$ *για κάθε $u \in X$ και $t \in \mathbb{R}$.*
(ii) $T(0) = I$.
(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$.*
(iv) Για κάθε $u \in X$, η συνάρτηση $t \to T(t)u$ ανήκει στον $C(\mathbb{R}, X)$.

Ανάλογα, ορίζεται η έννοια του γεννήτορα $A : D(A) \subseteq X \to X$ μιας ομάδας ισομετριών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ μέσω της σχέσης

$$Au := \lim_{t \to 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \tag{2.18}$$

όπου $u \in D(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει το παραπάνω όριο.

Παρατήρηση 2.2.4. *Οι ημιομάδες συστολών σχετίζονται με εξισώσεις που προκύπτουν από μη αντιστρεπτές φυσικές διαδικασίες, όπως είναι η εξίσωση θερμότητας, η εξίσωση αντίδρασης -διάχυσης, κλπ. Από την άλλη, λόγω της ιδιότητας (iii) στον Ορισμό 2.2.3, ο αντίστροφος του $T(t)$ μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $t \to T(t)u$ είναι μία πιθανή κατάσταση για κάποιο $u \in X$, τότε είναι πιθανή και η $t \to T(-t)u$. Για παράδειγμα, η εξίσωση Schrödinger και η κυματική εξίσωση περιγράφουν τέτοιου είδους αντιστρεπτές διαδικασίες.*

2.3 Γενικευμένη Εξίσωση Θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα, ορίζουμε την έννοια της λύσης για τη γενικευμένη εξίσωση θερμότητας. Επίσης, παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα ύπαρξης τόσο για τη γραμμική, όσο και τη σχεδόν γραμμική περίπτωση.

Εισάγουμε τον γραμμικό, συμμετρικό και αυστηρά μονότονο τελεστή $A : D(A) \subseteq X \to X$ στον πραγματικό και διαχωρίσιμο χώρο Hilbert X. Έστω ότι ο τελεστής $A_F : D(A_F) \subseteq X \to X$ αποτελεί την επέκταση Friedrichs του A με ενεργειακό χώρο τον X_E. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η εμφύτευση $X_E \hookrightarrow X$ είναι συμπαγής.

Θεωρούμε το γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.19}$$

παράλληλα με το γενικευμένο πρόβλημα

$$\begin{cases} u'(t) + A_F u(t) = 0, & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Θεώρημα 2.3.1. *Για κάθε αρχική τιμή $u_0 \in D(A_F)$, το πρόβλημα (2.20) επιδέχεται μοναδική λύση $u \in C^1([0,\infty), X)$, η οποία δίνεται από τον τύπο*

$$u(t) = e^{-tA_F} u_0, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{2.21}$$

Ο τελεστής $-A_F$ είναι ο γεννήτορας της ημιομάδας συστολών $\left(e^{-tA_F}\right)_{t\geq 0}$.

Παρατήρηση 2.3.2. *Η συνάρτηση $u = u(t)$, όπως ορίζεται στη σχέση (2.21), έχει νόημα για κάθε $u_0 \in X$. Γι΄ αυτό τον λόγο, η u θα καλείται* ασθενής λύση *αμφότερων των προβλημάτων (2.19) και (2.20).*

Αν τα δεδομένα είναι λιγότερο ομαλά, τότε ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.3. *Αν $u_0 \in X$, τότε ισχύουν τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.3.1, με τη διαφορά ότι πλέον $u \in C([0,\infty), X) \cap C((0,\infty), D(A_F)) \cap C^1((0,\infty), X)$.*

Στη συνέχεια, θεωρούμε το σχεδόν γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u'(t) + A_F u(t) = f(t, u(t)), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.22}$$

Από την Πρόταση 2.1.9, ο τελεστής $A_F^\alpha : D(A_F^\alpha) \subseteq X \to X$ είναι αυτοσυζυγής για κάθε $\alpha \geq 0$. Αποδεικνύεται ότι $D(A_F^{1/2}) = X_E$. Ο X_α θα καλείται *γενικευμένος χώρος Sobolev.*

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 2.3.1 ότι ο τελεστής $-A_F$ είναι ο γεννήτορας μιας ημιομάδας συστολών $(S(t))_{t\geq 0}$. Αντί του αρχικού προβλήματος (2.22), θεωρούμε την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) ds. \tag{2.23}$$

Ορισμός 2.3.4. *Οι λύσεις της εξίσωσης (2.23) θα καλούνται* ασθενείς λύσεις *του προβλήματος (2.22).*

Θεώρημα 2.3.5. *Υποθέτουμε ότι, για κάθε $u_0 \in X_\alpha$, υπάρχουν $\alpha \in [0,1)$ και σταθερές $L > 0, 0 < \beta \leq 1$, τέτοια ώστε*

$$\|f(t,u) - f(s,v)\| \leq L(|t-s|^\beta + \|u-v\|_\alpha), \tag{2.24}$$

για όλα τα $(t,u), (s,v)$ που ανήκουν σε μια περιοχή της αρχικής συνθήκης $(0,u_0)$ στον $\mathbb{R} \times X_\alpha$. Τότε, υπάρχουν $T(u_0) > 0$ και μοναδική ασθενής λύση $u \in C([0,T(u_0)), X_\alpha) \cap C^1([0,T(u_0)), X_\alpha^*)$ του προβλήματος (2.22). Επιπλέον, η u ικανοποιεί την εξίσωση (2.22) στον X_α^*, για κάθε $t \in [0, T(u_0))$.

Από τα προηγούμενα, οι εμφυτεύσεις

$$D(A_F) \hookrightarrow X_\alpha \hookrightarrow X \hookrightarrow X_\alpha^* \hookrightarrow (D(A_F))^*,$$

είναι συνεχείς και πυκνές. Τότε, ο A_F επεκτείνεται σε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $\overline{A}_F$ στον $(D(A_F))^*$ με πεδίο ορισμού τον X. Επιπλέον, ισχύουν τα εξής: $\overline{A}_F|_{D(A_F)} = A_F$, $\overline{A}_F|_{D(A_F)} \in \mathcal{L}(D(A_F), X)$, $\overline{A}_F|_{X_\alpha} \in \mathcal{L}(X_\alpha, X_\alpha^*)$ και $\overline{A}_F|_{X_\alpha} \in \mathcal{L}(X, (D(A_F))^*)$. Ανάλογα, η $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επεκτείνεται σε μία ημιομάδα συστολών $(\overline{S}(t))_{t\geq 0}$ στον $(D(A_F))^*$, η οποία έχει γεννήτορα τον τελεστή $\overline{A}_F$. Η $(\overline{S}(t))_{t\geq 0}$, περιορισμένη σε κάθε έναν από τους χώρους X_α^*, X, X_α και $D(A_F)$ ορίζει μια ημιομάδα συστολών. Επίσης, οι $(S(t))_{t\geq 0}$ και $(\overline{S}(t))_{t\geq 0}$ ταυτίζονται στον X και, για λόγους απλούστευσης, θα χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και για τις δύο.

Δοθέντων $u_0 \in X_\alpha$ και $f \in C([0,T], X_\alpha^*)$, για κάποιο $T > 0$, μια συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση (2.23) στο $[0,T]$ αν και μόνο αν επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} u \in C([0,T], X_\alpha) \cap C^1([0,T], X_\alpha^*), \\ u'(t) + \overline{A}_F u(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.25}$$

Θεωρώντας ομαλότερα δεδομένα, ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.6. *Υποθέτουμε ότι $u_0 \in D(A)$ και $f \in C([0,T], X)$. Τότε, η συνάρτηση u ικανοποιεί τη (2.23) αν και μόνο αν επιλύει το πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X), \\ u'(t) + Au(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.26}$$

2.4 Γενικευμένη Εξίσωση Schrödinger

Σε αυτή την ενότητα, ορίζουμε την έννοια της λύσης για τη γενικευμένη εξίσωση Schrödinger (γραμμική και σχεδόν γραμμική), ενώ παράλληλα παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα ύπαρξης για σχετικά ευνοϊκές μη γραμμικότητες.

Έστω $A : D(A) \subseteq X \to X$ ένας $\mathbb{C}$-γραμμικός τελεστής στον μιγαδικό χώρο Hilbert X, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την ημιαντιδιγραμμική μορφή (sesquilinear form) $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_X$. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα θεωρούμε τον X ως έναν πραγματικό χώρο Hilbert, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $(u,v) = \mathrm{Re}\langle u,v\rangle_X$.

Ορισμός 2.4.1. *Ο τελεστής A καλείται* m-εκλυτικός (m-dissipative), *αν ισχύουν τα εξής:*
(i) Ο A είναι αρνητικά ορισμένος, δηλαδή $(Au,u) \leq 0$, για κάθε $u \in D(A)$.
(ii) Για κάθε $\lambda > 0$ και $f \in X$, υπάρχει $u \in D(A)$ τέτοιο ώστε $u - \lambda Au = f$.

Στην ακόλουθη πρόταση δίνεται ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός των m-εκλυτικών τελεστών.

Πρόταση 2.4.2. *Αν ο τελεστής A είναι αρνητικά ορισμένος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο A είναι m-εκλυτικός.
(ii) Για κάθε $f \in X$, υπάρχουν $\lambda_0 > 0$ και συνάρτηση $u \in D(A)$ που ικανοποιούν την εξίσωση $u - \lambda_0 Au = f$.

Πρόταση 2.4.3. *Αν ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι m-εκλυτικός, τότε το $D(A)$ είναι πυκνό στον X.*

Το γράφημα ενός τελεστή $A : D(A) \subseteq X \to X$ ορίζεται ως εξής

$$G(A) := \{(u, Au) : u \in D(A)\}.$$

Στην επόμενη πρόταση δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας τελεστής να είναι αυτοσυζυγής.

Πρόταση 2.4.4. *Έστω ότι ο γραμμικός τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι πυκνά ορισμένος στον χώρο X. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο A είναι αρνητικά ορισμένος και $G(A) \subseteq G(A^*)$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο A είναι m-εκλυτικός.
(ii) Ο A είναι αυτοσυζυγής.

Πρόταση 2.4.5. *Αν ο τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X$ είναι αυτοσυζυγής και αρνητικά ορισμένος στον X, τότε ο $\mathbb{C}$-γραμμικός τελεστής $iA : D(A) \subseteq X \to X$, που ορίζεται μέσω της σχέσης $(iA)u := iAu$ για κάθε $u \in D(A)$, είναι ο γεννήτορας μιας ομάδας ισομετριών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ στον X.*

Συμβολίζουμε με X_A την πλήρωση του $D(A)$ υπό το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_A := (u, v) - (Au, v), \quad u, v \in D(A),$$

ο οποίος είναι επίσης χώρος Hilbert. Προκύπτει ότι οι συνεχείς εμφυτεύσεις

$$D(A) \hookrightarrow X_A \hookrightarrow X \hookrightarrow X_A^* \hookrightarrow (D(A))^*,$$

είναι πυκνές. Τότε, ο A επεκτείνεται σε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $\overline{A}$ στον $(D(A))^*$ με πεδίο ορισμού τον X. Επιπλέον, ισχύουν τα εξής: $\overline{A}|_{D(A)} = A$, $\overline{A}|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$, $\overline{A}|_{X_A} \in \mathcal{L}(X_A, X_A^*)$ και $\overline{A}|_{X_A} \in \mathcal{L}(X, (D(A))^*)$. Ανάλογα, η $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ επεκτείνεται σε μία ομάδα ισομετριών $(\overline{T}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ στον $(D(A))^*$, η οποία έχει γεννήτορα τον τελεστή $\overline{A}$. Η $(\overline{T}(t))_{t\in\mathbb{R}}$, περιορισμένη σε κάθε έναν από τους χώρους X_A^*, X, X_A και $D(A)$ ορίζει μια ομάδα ισομετριών. Επίσης, οι $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ και $(\overline{T}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ταυτίζονται στον X. Για λόγους απλούστευσης, θα χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο και για τις δύο.
Θεωρούμε το γενικευμένο σχεδόν γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{cases} iu'(t) + \overline{A}u(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.27}$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα επιτρέπει την ορθή τοποθέτηση του (2.27) στην περίπτωση που η μη γραμμικότητα ικανοποιεί μια τοπική συνθήκη Lipschitz στον χώρο X. Αποτελεί δε, ισχυρό εργαλείο στην κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων.

Θεώρημα 2.4.6. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : X \to X$ είναι Lipschitz συνεχής στα φραγμένα υποσύνολα του X και υπάρχει συναρτησιακό $F \in C^1(X_A, \mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $F'(u) = f(u)$ για κάθε $u \in X_A$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

$$(f(u), iu) = 0, \quad \text{για κάθε } u \in X. \tag{2.28}$$

Για κάθε $u \in X_A$, θέτουμε

$$E(u) = -\frac{1}{2}(Au, u) - F(u), \tag{2.29}$$

όπου $E \in C^1(X_A, \mathbb{R})$ *και* $E'(u) = -Au - f(u) \in X_A^*$. *Τότε, για κάθε* $u_0 \in X$, *το πρόβλημα (2.27) επιδέχεται μοναδική λύση* $u \in C(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(A))^*)$, *για την οποία*

$$\|u(t)\|_X = \|u_0\|_X\,, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \ \ (\text{διατήρηση του φορτίου}). \tag{2.30}$$

Επιπροσθέτως, αν $u_0 \in X_A$, *τότε* $u \in C(\mathbb{R}, X_A) \cap C^1(\mathbb{R}, X_A^*)$ *και*

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R} \ \ (\text{διατήρηση της ενέργειας}). \tag{2.31}$$

Δοθέντων $u_0 \in X_A$ και $f \in C(I, X_A^*)$, μια συνάρτηση u επιλύει το πρόβλημα

$$\begin{cases} u \in C(I, X_A) \cap C^1(I, X_A^*), \\ iu'(t) + Au(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.32}$$

αν και μόνο αν ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(t) = \mathcal{T}(t)u_0 + i\int_0^t \mathcal{T}(t-s)f(u(s))ds, \quad \text{για κάθε } t \in I, \tag{2.33}$$

για κάποιο διάστημα I που περιέχει το μηδέν.

Ορισμός 2.4.7. *Κάθε λύση της (2.33) θα καλείται ασθενής λύση στο* I *του ακόλουθου προβλήματος*

$$\begin{cases} iu'(t) + Au(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Θεωρώντας ομαλότερα δεδομένα, ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.4.8. *Υποθέτουμε ότι* $u_0 \in D(A)$ *και* $f \in C(I, X)$. *Τότε, η συνάρτηση* u *ικανοποιεί τη (2.33) αν και μόνο αν επιλύει το πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X), \\ iu'(t) + Au(t) + f(u(t)) = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.35}$$

2.5 Διακλαδώσεις

Σε αυτή την ενότητα, διατυπώνονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας διακλάδωσης και περιγράφονται κάποιες από τις τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί σε σχέση με τη θεωρία αυτή. Αρχικά, παραθέτουμε ορισμένα στοιχεία της φασματικής θεωρίας. Κυρίως δίνουμε τους βασικούς ορισμούς και αναφέρουμε τη μέθοδο με την οποία μπορεί να δειχθεί η ύπαρξη πρώτης ιδιοτιμής.

Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Au = \lambda Bu, \tag{2.36}$$

όπου A και B είναι δυο γραμμικοί μετασχηματισμοί από έναν διανυσματικό χώρο συναρτήσεων V σε έναν άλλο W (οι οποίοι μπορούν να ταυτίζονται) και λ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Ορισμός 2.5.1. *Οι τιμές του λ, για τις οποίες η εξίσωση (2.36) έχει και μη μηδενικές λύσεις, ονομάζονται* ιδιοτιμές *και οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται* ιδιοσυναρτήσεις. *Οι ιδιοτιμές στις οποίες αντιστοιχεί θετική ιδιοσυνάρτηση ονομάζονται* πρωτεύουσες (principal) *ιδιοτιμές. Ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή καθορίζει την πολλαπλότητά της. Ειδικά, στην περίπτωση που η πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής είναι ίση με τη μονάδα, αυτή καλείται* απλή.

Στη συνέχεια, θα μας απασχολήσουν μόνο τα προβλήματα ιδιοτιμών που ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:
($\mathcal{H}$) Υπάρχει ένα ημιγραμμικό συναρτησιακό (v, w) στον χώρο $V \times W$ με τις ιδιότητες:
(i) Αν $(v, w) = 0$, για κάθε $v \in V$, τότε $w = 0$.
(ii) Τα ημιγραμμικά συναρτησιακά (u, Av) και (u, Bv) είναι αυτοσυζυγή.
(iii) Η τετραγωνική μορφή (u, Au) είναι θετικά ορισμένη στον V και υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε $|(u, Bu)| \le c(u, Au)$.
Προφανώς, η τιμή $\lambda = 0$ δε μπορεί να είναι ιδιοτιμή του προβλήματος (2.36), λόγω της υπόθεσης ($\mathcal{H}$)(iii). Γι' αυτό τον λόγο, το (2.36) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Bu = \mu Au, \tag{2.37}$$

όπου $\mu = 1/\lambda$. Είναι πιθανό, αυτό το πρόβλημα να έχει ιδιοτιμή τη $\mu = 0$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η $\lambda = \infty$ είναι ιδιοτιμή του (2.36).

Εισάγουμε τα αυτοσυζυγή συναρτησιακά

$$\mathcal{A}(u, v) := (u, Av) \quad \text{και} \quad \mathcal{B}(u, v) := (u, Bv).$$

Επειδή το $\mathcal{A}(u, u)$ είναι θετικά ορισμένο, έχει νόημα να ορίσουμε τον χώρο V_A ως την πλήρωση του V υπό τη νόρμα $\mathcal{A}(u, u)^{1/2}$. Επίσης, από την ανισότητα Schwartz,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(u, v) + c\mathcal{A}(u, v)|^2 &\le (\mathcal{B}(u, u) + c\mathcal{A}(u, u))(\mathcal{B}(v, v) + c\mathcal{A}(v, v)) \\ &\le 4c^2\mathcal{A}(u, u)\mathcal{A}(v, v). \end{aligned}$$

Συνεπώς, το συναρτησιακό $\mathcal{B}(u, v)$ είναι γραμμικό και φραγμένο. Επομένως, υπάρχει γραμμικός και φραγμένος μετασχηματισμός $\mathcal{T} : V_A \to V_A$, τέτοιος ώστε

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{A}(u, \mathcal{T}v).$$

Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\mathcal{T}u = \mu u, \qquad u \in V_A. \tag{2.38}$$

Η σχέση των προβλημάτων (2.37) και (2.38) δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.2. *Αν u είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ του προβλήματος (2.37), τότε είναι, επίσης, ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ του προβλήματος (2.38). Αντίστροφα, αν η ιδιοσυνάρτηση u του (2.38) βρίσκεται στον χώρο V, τότε είναι ιδιοσυνάρτηση του (2.37) και αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή.*

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι οι τελεστές των παραπάνω προβλημάτων είναι αυτοσυζυγείς.

Λήμμα 2.5.3. *Όλες οι ιδιοτιμές του προβλήματος (2.38), συνεπώς και των προβλημάτων (2.36) και (2.37), είναι πραγματικές.*

Στη συνέχεια δίνονται ικανές συνθήκες για την ύπαρξη πρώτης ιδιοτιμής στο πρόβλημα (2.36). Ορίζουμε την ποσότητα

$$\mu_1 := \sup_{v \in V} \frac{\mathcal{B}(v,v)}{\mathcal{A}(v,v)},$$

η οποία είναι φραγμένη, λόγω υπόθεσης. Αν το ελάχιστο άνω φράγμα επιτυγχάνεται, για κάποιο $u \in V_A$, τότε το μ_1 είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του προβλήματος (2.37), σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4. *Αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $u_1 \in V_A$ για το οποίο ισχύει $\mathcal{B}(u_1,u_1) = \mu_1 \mathcal{A}(u_1,u_1)$, τότε $\mathcal{T}u_1 = \mu_1 u_1$.*

Με το επόμενο θεώρημα, εξασφαλίζεται η επίτευξη του ελάχιστου άνω φράγματος.

Θεώρημα 2.5.5. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός αριθμός η και πεπερασμένα το πλήθος γραμμικά συναρτησιακά $l_1, ..., l_k$, ορισμένα στον V, για τα οποία οι σχέσεις*

$$l_j(v) = 0, \quad j = 1, ..., k, \quad \textit{και}\; v \in V,$$

συνεπάγονται ότι

$$\mathcal{B}(v,v) \leq (\mu_1 - \eta)\mathcal{A}(v,v).$$

Τότε, η μ_1 είναι ιδιοτιμή του προβλήματος (2.37).

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις βασικές έννοιες και ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα της θεωρίας διακλάδωσης. Έστω X, Y δυο πραγματικοί χώροι Banach. Θεωρούμε την εξίσωση

$$F(\lambda, u) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \; u \in X. \tag{2.39}$$

όπου $F(\lambda, \cdot) : X \to Y$ είναι ένας τελεστής.

Ορισμός 2.5.6. *Το σημείο (λ_0, u_0) ονομάζεται* σημείο διακλάδωσης *του προβλήματος (2.39), αν ισχύουν τα εξής:*
(i) $F(\lambda_0, u_0) = 0$,
(ii) υπάρχουν δύο τουλάχιστον διακριτές ακολουθίες, (λ_n, u_n) και (λ_n, v_n), λύσεων του (2.39), που συγκλίνουν στη λύση (λ_0, u_0) καθώς $n \to \infty$. Κάθε μία από αυτές τις ακολουθίες ονομάζεται κλάδος λύσεων. *Ο κλάδος λύσεων για τον οποίο ισχύει $\|u_n\| + |\lambda_n| \to \infty$, καθώς $n \to \infty$, ονομάζεται* ολικό συνεχές λύσεων.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$u = \lambda(Lu + Nu), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \; u \in X, \tag{2.40}$$

και υποθέτουμε ότι ικανοποιείται από τη μηδενική λύση $u \equiv 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Κάνουμε τις εξής παραδοχές:
$(\mathcal{H}_1)$ Ο τελεστής $L : X \to Y$ είναι γραμμικός και συμπαγής.
$(\mathcal{H}_2)$ Ο μη γραμμικός τελεστής $N : U(0) \subseteq X \to Y$ είναι συμπαγής και ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|N(\lambda, u)\|}{\|u\|} = 0. \tag{2.41}$$

$(\mathcal{H}_3)$ Ο αριθμός λ_0 είναι ιδιοτιμή περιττής πολλαπλότητας του τελεστή L.

Η εισαγωγή του τελεστή N μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαταραχή του γραμμικού μέρους. Το επόμενο θεώρημα κάνει σαφή τη σχέση ανάμεσα στο μη γραμμικό πρόβλημα (2.40) και το αντίστοιχο γραμμικό.

Θεώρημα 2.5.7. *(Krasnoselskii, 1956) Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$ και $(\mathcal{H}_3)$, τότε το $(\lambda_0, 0)$ αποτελεί σημείο διακλάδωσης της εξίσωσης (2.40).*

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ενός κλάδου μη τετριμμένων λύσεων, προσπαθούμε να διερευνήσουμε αν ο κλάδος αυτός έχει ολικό χαρακτήρα. Συμβολίζουμε αυτόν τον κλάδο με

$$S := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : (\lambda, u) \text{ είναι λύση του (2.40) με } u \neq 0\}.$$

Έστω $\overline{S}$ το κλείσιμο του S στον $\mathbb{R} \times X$ και C_{λ_0} η συνιστώσα του $\overline{S}$ που περιέχει το $(\lambda_0, 0)$. Με τον όρο συνιστώσα νοείται ένα μέγιστο συνεκτικό υποσύνολο του $\overline{S}$. Επίσης, συμβολίζουμε τον κλάδο των τετριμμένων λύσεων με

$$T := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u = 0\}.$$

Ισχύει ότι τα σημεία $(\lambda_j, 0)$ ανήκουν στο $\overline{S} \cap T$, δηλαδή είναι σημεία διακλάδωσης, αν και μόνο αν τα λ_j είναι ιδιοτιμές του τελεστή L.

Θεώρημα 2.5.8. *(Rabinowitz, 1971). Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$ και $(\mathcal{H}_3)$, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:*
(i) Ο κλάδος C_{λ_0} είναι μη φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R} \times X$.
(ii) Ο κλάδος C_{λ_0} είναι συμπαγής και τέμνει τον μηδενικό κλάδο T τουλάχιστον σε ένα ακόμα σημείο, πέραν του $(\lambda_0, 0)$.

Σημειώνεται ότι, στην πρώτη περίπτωση, δεν αποκλείεται η τομή του C_{λ_0} με τον T σε σημεία διαφορετικά του $(\lambda_0, 0)$.

2.6 Ευστάθεια

Σε αυτή την ενότητα, ορίζουμε την έννοια της ευστάθειας των στάσιμων λύσεων μιας εξελικτικής εξίσωσης. Επίσης, διατυπώνουμε την *αρχή της γραμμικοποίησης* που αποτελεί βασικό εργαλείο στη διερεύνηση του τύπου ευστάθειας των ανωτέρω λύσεων.

Έστω X ένας πραγματικός χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|$. Θεωρούμε την αυτόνομη εξελικτική εξίσωση

$$u'(t) = F(u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.42}$$

όπου $F : X \to X$. Μία λύση της στάσιμης εξίσωσης $F(u) = 0$ θα καλείται *σημείο ισορροπίας (equilibrium point)* της (2.42).
Εφοδιάζουμε τη εξίσωση (2.42) με την αρχική συνθήκη

$$u(0) = u_0. \tag{2.43}$$

Ορισμός 2.6.1. *(Ευστάθεια κατά Lyapunov). Έστω u_* ένα σημείο ισορροπίας της (2.42). Το u_* θα καλείται* ευσταθές *αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε κάθε μοναδική λύση $u(t)$ του προβλήματος (2.42)-(2.43) με*

$$\|u_0 - u_*\| < \delta(\varepsilon), \tag{2.44}$$

να ικανοποιεί

$$\|u(t) - u_*\| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{2.45}$$

Αν, επιπλέον, υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε η συνθήκη

$$\|u_0 - u_*\| < \delta_0, \tag{2.46}$$

να συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*, \tag{2.47}$$

τότε το u_* θα καλείται ασυμπτωτικά ευσταθές. *Σε κάθε άλλη περίπτωση, το u_* θα καλείται* ασταθές.

Συμβολίζουμε με $\sigma(F'(u_*))$ το φάσμα της Fréchet παραγώγου $F'(u_*)$.

Θεώρημα 2.6.2. *Έστω u_* ένα σημείο ισορροπίας της εξίσωσης (2.42), όπου η $F : U(u_*) \subseteq X \to X$ είναι μια απεικόνιση κλάσης C^k. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Αν $Re(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(F'(u_*))$ και $k = 1$, τότε το u_* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
(ii) Αν $Re(\lambda) > 0$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(F'(u_*))$ και $k = 2$, τότε το u_* είναι ασταθές.

Παρατηρούμε ότι αν το φάσμα της γραμμικοποίησης αποτελείται από μια αύξουσα ακολουθία ιδιοτιμών, τότε μια εκτίμηση για τη μικρότερη ή τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή είναι ικανή να δώσει πληροφορία για τον τύπο ευστάθειας των λύσεων ισορροπίας. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση των κανονικών μορφών Gårding.

Ορισμός 2.6.3. *Θεωρούμε δύο πραγματικούς χώρους Hilbert X, Y με νόρμες $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ και εσωτερικά γινόμενα $(\cdot,\cdot)_X, (\cdot,\cdot)_Y$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η εμφύτευση $X \hookrightarrow Y$ είναι συνεχής. Η απεικόνιση $g : X \times X \to \mathbb{R}$ θα καλείται* μορφή Gårding *αν είναι διγραμμική και φραγμένη, και, επιπλέον, υπάρχουν σταθερές $c_1 > 0$ και $c_2 \in \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε*

$$g(u, u) \geq c_1 \|u\|_X^2 - c_2 \|u\|_Y^2, \quad \text{για κάθε } u \in X. \tag{2.48}$$

Αν, επιπροσθέτως, η εμφύτευση $X \hookrightarrow Y$ είναι συμπαγής, τότε η g θα καλείται κανονική (regular) μορφή Gårding.

Θεωρούμε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$g(u, v) = \lambda(u, v)_Y, \quad \text{για κάθε } v \in X, \tag{2.49}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω $g : X \times X \to \mathbb{R}$ μια συμμετρική, κανονική μορφή Gårding στον πραγματικό, διαχωρίσιμο και απειροδιάστατο χώρο Hilbert X, δηλαδή ισχύει η ανισότητα (2.48), όπου ο χώρος Y είναι πραγματικός Hilbert και η εμφύτευση $X \hookrightarrow Y$ είναι συμπαγής. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) Το πρόβλημα (2.49) έχει μια αριθμήσιμη ακολουθία ιδιοτιμών (λ_n) και καθεμιά από αυτές έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα. Διατάσσοντας αυτές κατά πολλαπλότητα, έχουμε

$$-c_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \tag{2.50}$$

και $\lambda_n \to +\infty$, *καθώς* $n \to \infty$.
(ii) Η πρώτη ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται από το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\lambda_1 = \min g(u,u), \quad \|u\|_Y = 1, \quad u \in X. \tag{2.51}$$

(iii) Η n-οστή ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται από την αρχή μεγίστου-ελαχίστου

$$\lambda_n = \min_{M \in \mathcal{L}_m} \max_{u \in M} g(u,u), \tag{2.52}$$

όπου $\mathcal{L}_m$ *είναι η κλάση όλων των συνόλων* $S \cap L$, $S := \{u \in X : \|u\|_Y = 1\}$ *και* L *είναι ένας m-διάστατος, γραμμικός υπόχωρος του* X.

Από την πλευρά της θεωρίας ευστάθειας, η σπουδαιότητα του παραπάνω θεωρήματος είναι εμφανής στην περίπτωση που η πρώτη ιδιοτιμή είναι θετική.

2.7 Απειροδιάστατα Δυναμικά Συστήματα

Σε αυτή την ενότητα, υπενθυμίζουμε κάποια στοιχεία από τη βασική θεωρία των απειροδιάστατων δυναμικών συστημάτων.

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος.

Ορισμός 2.7.1. *Με τον όρο* δυναμικό σύστημα *(ή ημιροή) στον* X *εννοούμε μια οικογένεια απεικονίσεων* $\mathcal{S}_t : X \to X$, $t \geq 0$, *τέτοια ώστε:*
(i) $\mathcal{S}_t \in C(X,X)$, *για κάθε* $t \geq 0$.
(ii) $\mathcal{S}_0 = I$.
(iii) $\mathcal{S}_{t+s} = \mathcal{S}_t \mathcal{S}_s$, *για κάθε* $s, t \geq 0$.
(iv) Η απεικόνιση $t \to \mathcal{S}_t$ *ανήκει στον* $C([0,\infty, X)$ *για κάθε* $\phi_0 \in X$.

Για κάθε $\phi_0 \in X$, η συνεχής καμπύλη $t \to \mathcal{S}_t \phi_0 =: \phi(t)$ ονομάζεται *τροχιά* που εκκινεί από τη ϕ_0. Για κάθε $\mathcal{B}$ και $t \geq 0$, θέτουμε

$$\mathcal{S}(t)\mathcal{B} := \{\phi(t) = \mathcal{S}(t)\phi_0 \text{ με } \phi(0) = \phi_0 \in \mathcal{B}\}.$$

Η *θετική τροχιά* της ϕ που εκκινεί από τη ϕ_0 είναι το σύνολο

$$\gamma^+ := \{\phi(t) = \mathcal{S}(t)\phi_0 : t \geq 0\}.$$

Ανάλογα, η θετική τροχιά του $\mathcal{B}$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\gamma^+(\mathcal{B}) := \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{S}(t)\mathcal{B} = \{\gamma^+(\phi) : \phi(t) = \mathcal{S}(t)\phi_0 \text{ με } \phi(0) = \phi_0 \in \mathcal{B}\}.$$

Αν $t_0 \geq 0$, τότε

$$\gamma^{t_0}(\mathcal{B}) := \bigcup_{t \geq t_0} \mathcal{S}(t)\mathcal{B} = \gamma^+(\mathcal{S}(t_0)\mathcal{B}).$$

Η ημιροή $\mathcal{S}_t$, $t \geq 0$, καλείται *τελικά φραγμένη (eventually bounded)* αν, δοθέντος ενός φραγμένου συνόλου $\mathcal{B} \subset X$, υπάρχει $t_0 \geq 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\gamma^{t_0}(\mathcal{B})$ να είναι φραγμένο.

Ορισμός 2.7.2. *Έστω* $\phi_0 \in X$. *Το σύνολο*

$$\omega(\phi_0) := \{z \in X : \exists\, t_n \to +\infty,\ S_{t_n}\phi_0 \to z,\ \text{καθώς}\ n \to +\infty\},$$

ονομάζεται ω-οριακό *σύνολο του* $\phi_0 \in X$.

Ένας ισοδύναμος χαρακτηρισμός είναι ο ακόλουθος

$$\omega(\phi_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_t\phi_0}^X .$$

Ανάλογα, για κάθε $\mathcal{B} \subset X$, ορίζουμε το ω-οριακό σύνολο του $\mathcal{B}$ ως εξής

$$\omega(\mathcal{B}) := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} \mathcal{S}_t\mathcal{B}}^X .$$

Θα λέμε ότι ένα σύνολο $\mathcal{B} \subset X$ *έλκει, υπό την* $\mathcal{S}_t$, ένα άλλο σύνολο $\mathcal{C} \subset X$, όταν ισχύει $\mathrm{dist}(\mathcal{S}_t\mathcal{C}, \mathcal{B})$, καθώς $t \to +\infty$. Ένα σύνολο $\mathcal{A} \subset X$ καλείται *θετικά αναλλοίωτο* αν ισχύει $\mathcal{S}_t\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε $t \geq 0$. Αν ισχύει $\mathcal{S}_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ για κάθε $t \geq 0$, τότε το $\mathcal{A}$ ονομάζεται *αναλλοίωτο*. Τα ω-οριακά σύνολα των τροχιών ορίζουν μια σημαντική κατηγορία αναλλοίωτων συνόλων.

Ένα αναλλοίωτο σύνολο $J \subset X$ ονομάζεται *ευσταθές* αν, για κάθε περιοχή V του J, υπάρχει περιοχή U του J, τέτοια ώστε $\mathcal{S}_tU \subset V$ για κάθε $t \geq 0$. Το αναλλοίωτο σύνολο J *έλκει τοπικά τα σημεία (attracts points locally)* , αν υπάρχει περιοχή W του J τέτοια ώστε το J να έλκει τα σημεία του W. Το σύνολο J είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές*, αν είναι ευσταθές και έλκει τοπικά τα σημεία. Ο τελευταίος ορισμός είναι ισοδύναμος με την ασυμπτωτική ευστάθεια κατά Lyapunov για μια εξελικτική εξίσωση, δεδομένου ότι αυτή ορίζει ένα δυναμικό σύστημα.

Η ημιροή $\mathcal{S}_t$, $t \geq 0$, καλείται *σημειακά εκλυτική (point dissipative)*, αν υπάρχει φραγμένο σύνολο $\mathcal{B} \subset X$ το οποίο έλκει, υπό την $\mathcal{S}_t$, κάθε σημείο του X. Η ημιροή $\mathcal{S}_t$, $t \geq 0$, καλείται *ασυμπτωτικά συμπαγής* αν, για κάθε φραγμένη ακολουθία ϕ_n στον X και κάθε ακολουθία $t_n \to +\infty$, η ακολουθία $\mathcal{S}_t\phi_n$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Η ημιροή $\mathcal{S}_t$, $t \geq 0$, καλείται *ασυμπτωτικά λεία (asymptotically smooth)* αν, για κάθε μη κενό, φραγμένο και θετικά αναλοίωτο σύνολο $\mathcal{B}$, υπάρχει ένα συμπαγές $\mathcal{K}$ που έλκει, υπό την $\mathcal{S}_t$, το $\mathcal{B}$.

Ορισμός 2.7.3. *Ένα αναλλοίωτο σύνολο* $\mathcal{A} \subset X$ *καλείται* ολικός ελκυστής (global attractor)*, αν είναι μέγιστο συμπαγές και αναλλοίωτο, ενώ έλκει κάθε φραγμένο υποσύνολο* $\mathcal{B}$ *του* X.

Ένα στοιχείο $z \in X$ καλείται σημείο ισορροπίας της ημιροής $\mathcal{S}_t$, $t \geq 0$, αν $\mathcal{S}_tz = z$ για κάθε $t \geq 0$. Το σύνολο των σημείων ισορροπίας θα συμβολίζεται με $\mathcal{E}$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια συγκεκριμένη κλάση δυναμικών συστημάτων, τα συστήματα κλίσης (gradient systems), για τα οποία είναι δυνατή μια πιο λεπτομερής εποπτεία της ροής στον ελκυστή. Μια απεικόνιση $V \in C(X, \mathbb{R})$ καλείται *αυστηρή συνάρτηση Lyapunov* για την $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$, αν ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $V(x) \to +\infty$, καθώς $\|x\| \to +\infty$.
(ii) Η $V(\mathcal{S}_tz)$ είναι φθίνουσα ως προς t για κάθε $z \in X$.
(iii) Αν $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $V(\mathcal{S}_tx) = V(x)$ για κάθε $t \geq 0$, τότε το x είναι σημείο ισορροπίας για την $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$.

Ορισμός 2.7.4. *Η ημιροή* $\mathcal{S}_t : X \to X$ *ονομάζεται* σύστημα κλίσης*, όταν ισχύουν τα εξής:*
(i) Κάθε φραγμένη θετική τροχιά είναι σχετικά συμπαγής[1].
(ii) Υπάρχει μια αυστηρή συνάρτηση Lyapunov για την $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$.

[1] Μετάφραση του όρου precompact.

Από [47, Λήμμα 3.8.3], ισχύει η ισοδυναμία:

Πρόταση 2.7.5. *Η ημιροή $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ είναι σημειακά εκλυτική αν και μόνο αν το $\mathcal{E}$ είναι φραγμένο.*

Σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$, θα χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.7.6. *([12]) Έστω $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ μια ασυμπτωτικά συμπαγής ημιροή στον X, η οποία ορίζει ένα σύστημα κλίσης για μια συνάρτηση Lyapunov $\mathcal{J}$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{E}$ είναι φραγμένο. Τότε, υπάρχει ολικός ελκυστής $\mathcal{A}$, ο οποίος είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του X. Αν το $\mathcal{E}$ είναι αριθμήσιμο, τότε το $z_+ = \lim_{t\to+\infty}\phi(t)$ υπάρχει και είναι σημείο ισορροπίας. Επιπροσθέτως, κάθε λύση $\mathcal{S}(t)\phi_0$ τείνει σε κάποιο σημείο ισορροπίας, καθώς $t \to +\infty$.*

Ακολούθως, θα ορίσουμε το απειροδιάστατο δυναμικό σύστημα που προκύπτει από μια σχεδόν γραμμική παραβολική εξίσωση. Πράγματι, θεωρούμε τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.23) σε ένα διάστημα $[0, T^*(u_0))$, για κάποιο $u_0 \in X_\alpha$. Για κάθε $t \in [0, T^*(u_0))$, θέτουμε

$$u(t) := \mathcal{S}_t u_0.$$

Θεωρούμε ένα υποσύνολο $P \subset X_\alpha$ για το οποίο υπάρχει $M < \infty$, τέτοιο ώστε: (α) $T^*(y) = \infty$, για κάθε $y \in P$, (β) $\|\mathcal{S}_t y\|_{X_\alpha} \leq M$, για κάθε $y \in P$ και $t \geq 0$. Στη συνέχεια, ορίζουμε το σύνολο

$$Z := \overline{\bigcup_{y\in P}\bigcup_{t\geq s}\mathcal{S}_t y}^{X_\alpha},$$

και συμβολίζουμε με ρ τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα του X_α.

Θεώρημα 2.7.7. *Η $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ ορίζει ένα δυναμικό σύστημα στον (Z, ρ).*

Κεφάλαιο 3

Η Κρίσιμη Περίπτωση της Ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg

Το παρόν κεφάλαιο αφορά τη γραμμική παραβολική εξίσωση που σχετίζεται με τον κρίσιμο εκθέτη της ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι παράμετροι του προβλήματος και γίνεται μια σύντομη αναφορά σε ήδη γνωστά αποτελέσματα. Στη δεύτερη ενότητα, κατασκευάζεται το συναρτησιακό πλαίσιο και αποδεικνύονται οι βασικές δομικές ιδιότητες των χώρων συναρτήσεων. Στην τρίτη ενότητα, επιχειρείται η φασματική ανάλυση του αντίστοιχου ελλειπτικού τελεστή και υπολογίζεται επακριβώς το πρώτο ιδιοζεύγος. Στην τέταρτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη ολικής λύσης. Στην πέμπτη ενότητα, διατυπώνεται το συσχετισμένο πρόβλημα Hardy. Αποδεικνύεται η ύπαρξη ενέργειας τύπου Hardy γύρω από την ιδιομορφία και το πρόβλημα αναδιατυπώνεται σε νέο συναρτησιακό πλαίσιο, κατά την έννοια των Vázquez, Ζωγραφόπουλου. Στην έκτη ενότητα, περιγράφεται πλήρως η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων για τα δύο προβλήματα. Τέλος, στην έβδομη ενότητα, αποδεικνύεται μια ανισότητα Hardy-Sobolev που σχετίζεται με το χώρο λύσεων και υπολογίζεται επακριβώς η βέλτιστη σταθερά της.

3.1 Το Πρόβλημα

Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} v_t &= div(|x|^{-(N-2)}\nabla v), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \;\; t>0, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου $N \geq 3$. Η παρούσα θεώρηση επεκτείνει γνωστά αποτελέσματα που αφορούν προβλήματα με τον υποκρίσιμο εκθέτη ιδιομορφίας. Στην εργασία [33], οι Dall' Aglio, Gianchetti και Peral αποδεικνύουν, μεταξύ άλλων, την ύπαρξη μιας ενεργειακής λύσης για την εξίσωση

$$v_t - div(|x|^{-2a}\nabla v) = 0, \quad x \in \Omega,$$

όπου $a < \frac{N-2}{2}$ και το $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο και ανοικτό υποσύνολο που περιέχει την αρχή. Ο λόγος για τον οποίο το πρόβλημα αδυνατεί να καταστεί διαχειρίσιμο στην κρίσιμη περίπτωση $a = \frac{N-2}{2}$ εντοπίζεται στους περιορισμούς της κλασικής ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp}|v|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq c\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla v|^2 dx.$$

Πιο συγκεκριμένα, είναι αδύνατος ο ορισμός ενός αυστηρά μονότονου τελεστή μέσα στα όρια της θεωρίας Friedrichs. Παρακάμπτουμε αυτή τη συναρτησιακή δυσκολία εισάγοντας κατάλληλους σταθμισμένους χώρους και αποδεικνύοντας νέες (σταθμισμένες) ανισότητες τύπου Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Ανάλογες δυσκολίες εμφανίζονται στις εργασίες [9, 23, 31, 53, 68, 77] σχετικά με την ελλειπτική εξίσωση

$$-div(|x|^{-2a}\nabla v) = |x|^{-bp}v^{p-1}, \quad v \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

όπως επίσης και στις [2, 3] που αφορούν την ημιγραμμική εξελικτική εξίσωση

$$v_t - div(|x|^{-bp}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = f(x, v), \quad x \in \Omega,$$

πάνω σε ένα φραγμένο σύνολο Ω για την υποκρίσιμη περίπτωση $b < \frac{N-p}{p}$.

Παράλληλα με το πρόβλημα (3.1), εξετάζουμε από μια διαφορετική οπτική την ορθή τοποθέτηση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t &= |x|^{-(N-2)}\left(\Delta u + c_*\frac{u}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

το οποίο σχετίζεται με το αρχικό μέσω της αλλαγής μεταβλητής

$$u(x) = |x|^{-(N-2)/2}v(x).$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός εισήχθη για πρώτη φορά από τους Brezis και Vázquez στην εργασία [19], η οποία αφορούσε τη βελτίωση της κλασικής ανισότητας Hardy σε φραγμένο χωρίο. Στο πνεύμα των Vázquez, Ζωγραφόπουλου (βλέπε [74, 75]), αναδιατυπώνουμε την ενεργειακή νόρμα και τοποθετούμε το πρόβλημα σε ένα νέο, πιο περίπλοκο κατά μια έννοια, συναρτησιακό πλαίσιο. Η νέα τοποθέτηση κρίνεται αναγκαία, δεδομένου ότι εμφανίζονται λύσεις, οι οποίες αδυνατούν να προσεγγισθούν από τις ομαλές συναρτήσεις υπό το πρίσμα της αρχικά θεωρούμενης ενεργειακής νόρμας. Με άλλα λόγια, ο ενεργειακός χώρος που κατασκευάστηκε από τη θεωρία Friedrichs αδυνατεί να συμπεριλάβει κάποιες λύσεις που, όμως, είναι υπαρκτές σύμφωνα με τη φασματική ανάλυση του διαφορικού τελεστή. Η προαναφερθείσα αντίθεση εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην πρωτότυπη εργασία των Vázquez, Ζωγραφόπουλου, [74], και συνδέθηκε με την ορθή τοποθέτηση της εξίσωσης θερμότητας, η οποία έχει εφοδιασθεί με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου πάνω σε φραγμένο χωρίο. Οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η μη προσέγγιση των ιδιολύσεων του τελεστή από ομαλές συναρτήσεις οφείλεται στην παρουσία ενός επιδιορθωτικού όρου, της λεγόμενης *ενέργειας Hardy* γύρω από την ιδιομορφία. Στην ίδια εργασία παρουσιάζεται ένα ανάλογο φαινόμενο για μια εξίσωση τοποθετημένη στο εξωτερικό ενός φραγμένου χωρίου. Στο άρθρο [75] που ακολούθησε από τους ίδιους συγγραφείς, το πρόβλημα τοποθετήθηκε σε όλο τον $\mathbb{R}^N$ και προέκυψαν ανάλογες ιδιότητες.

Σε ότι αφορά τα ιδιόμορφα παραβολικά προβλήματα, η βιβλιογραφία είναι αρκετά εκτενής. Η εργασία των Baras και Goldstein, [13], θεωρείται πρωταρχική σε αυτή την κατηγορία. Οι συγγραφείς θεωρούν την εξίσωση θερμότητας με δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου,

$$u_t = \Delta u + \frac{c}{|x|^2}u,$$

τοποθετημένη σε ένα φραγμένο χωρίο που περιέχει την αρχή. Η μελέτη έδειξε ότι η τιμή της σταθεράς c συνδέεται άρρηκτα με την ορθή τοποθέτηση. Η κρίσιμη τιμή $c = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ διαχωρίζει την ολική ύπαρξη από την ακαριαία έκρηξη των λύσεων. Το παραπάνω αποτέλεσμα έρχεται σε συμφωνία με το άρθρο των Cabré και Martel, [21]. Στο ίδιο συμπέρασμα έφθασαν και οι Vázquez, Zuazua στην εργασία [76], αφαιρώντας κάθε περιορισμό στο πρόσημο της αρχικής κατάστασης. Οι τελευταίοι απάντησαν και στην περίπτωση που το πρόβλημα είναι τοποθετημένο σε όλο τον χώρο, χρησιμοποιώντας μεταβλητές ομοιότητας και κατάλληλους σταθμισμένους χώρους συναρτήσεων.

Τα παραπάνω αποτελέσματα έδωσαν ώθηση σε μια πληθώρα εργασιών που σχετίζονται τόσο με γραμμικά όσο και μη γραμμικά προβλήματα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η ανισότητα Hardy και ορισμένες παραλλαγές της αποτελούν το βασικό συστατικό των αποδεικτικών διαδικασιών. Στην [8], μελετάται η ακόλουθη εξίσωση

$$u_t = \Delta u - \frac{\beta}{|x|}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{|x|^2}u, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Το συναρτησιακό πλαίσιο βασίζεται στον σταθμισμένο χώρο $L^p(|x|^{-\beta}dx, \mathbb{R}^N)$, ενώ η κρίσιμη σταθερά για τον ορισμό μιας ημιομάδας συστολών έχει την τιμή $c = (N-\beta-2)^2(p-1)/p^2$. Επίσης, σχολιάζεται η στενή σχέση με την ανισότητα Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Για τη μη γραμμική περίπτωση, αναφέρουμε την [45] στην οποία προκύπτουν αποτελέσματα ύπαρξης για την *εξίσωση ταχείας διάχυσης* (fast diffusion equation)

$$u_t = \Delta(u^m) + \frac{c}{|x|^2}u^m, \quad c > c_*,$$

και την εξίσωση θερμότητας που καθοδηγείται από την p-Λαπλασιανή

$$u_t = \Delta_p u + \frac{c}{|x|^p}u^p, \quad c > \left(\frac{N-p}{p}\right)^p. \tag{3.3}$$

Η κρίσιμη παράμετρος στην (3.3) αντιστοιχεί στη βέλτιστη σταθερά της $W^{1,p}$-εκδοχής της ανισότητας Hardy. Επίσης, στην [10], αναδεικνύεται η στενή σύνδεση της *p-εξίσωσης θερμότητας*

$$u_t = \Delta_p u + \frac{c}{|x|^p}|u|^{p-2}u,$$

με την προαναφερθείσα ανισότητα. Για κάποια πρόσφατα αποτελέσματα σε κατάλληλους σταθμισμένους χώρους, αναφέρουμε τις [44, 58, 61]. Τέλος, για την κρίσιμη και την υποκρίσιμη περίπτωση, παραπέμπουμε στις [49, 51, 84].

3.2 Συναρτησιακή Τοποθέτηση

Εισάγουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$w(y,s) = (t+1)^{1/2} v((t+1)^{1/N} y, t), \qquad s = \frac{1}{N}\ln(t+1), \tag{3.4}$$

ή με άλλα λόγια,

$$w(y,s) = e^{sN/2} v(e^s y, e^{sN}-1), \tag{3.5}$$

όπου $(y,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$. Αντικαθιστώντας στο αρχικό πρόβλημα (3.1), η νέα μεταβλητή w θα εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$w_s = N div(|y|^{-(N-2)}\nabla w) + y\cdot\nabla w + \frac{N}{2}w, \tag{3.6}$$

εκκινώντας από την κατάσταση $w(y,0) = w_0 = v_0$.
Επίσης, εισάγουμε τη συνάρτηση βάρους $K : \mathbb{R}^N \to [1,+\infty)$, που ορίζεται ως εξής

$$K = K(y) := \exp\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right). \tag{3.7}$$

Με απλούς υπολογισμούς, διαπιστώνεται ότι η v επιλύει το (3.1) αν και μόνο αν η w ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} w_s - \frac{N}{K} div(K|y|^{-(N-2)}\nabla w) - \frac{N}{2}w = 0, \quad & y\in\mathbb{R}^N,\ s>0,\\ w(0) = w_0, \quad & y\in\mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ορίζουμε τον σταθμισμένο χώρο Lebesgue

$$L^2(K) := \left\{ f\in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K dy < \infty \right\},$$

και τον σταθμισμένο χώρο Sobolev

$$\widetilde{\mathcal{W}} := \left\{ f\in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \left(|f|^2 + |\nabla f|^2\right) K|y|^{-(N-2)} dy < \infty \right\},$$

εφοδιασμένους με τις κανονικές τους νόρμες $\|\cdot\|_{L^2(K)}$ και $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{W}}}$, αντίστοιχα.

Λήμμα 3.2.1. *Κάθε συνάρτηση $f \in \widetilde{\mathcal{W}} \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ μπορεί να προσεγγισθεί από τις $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεις υπό τη νόρμα $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{W}}}$.*

Απόδειξη. Έστω $f\in\widetilde{\mathcal{W}}\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Αναζητούμε μια ακολουθία $(\varphi_n)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\varphi_n - f)|^2 + |\varphi_n - f|^2\right) K|y|^{-(N-2)} dy \to 0, \tag{3.9}$$

καθώς $n\to\infty$. Θεωρούμε μια επαρκώς ομαλή συνάρτηση αποκοπής

$$\zeta(|y|) = \begin{cases} 1, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|\ge 2, \end{cases}$$

όπου $\zeta \in (0,1)$ για $|y| \in (1,2)$. Θέτουμε

$$\zeta_n(y) := \zeta\left(\frac{|y|}{n}\right).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\begin{aligned}
\|f-\zeta_n f\|^2_{\widetilde{\mathcal{W}}} &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2|\nabla\zeta_n|^2 K|y|^{-(N-2)}dy + 2\int_{\mathbb{R}^N}(1-\zeta_n)^2|\nabla f|^2 K|y|^{-(N-2)}dy \\
&\quad + c\int_{|y|>n}|f|^2K|y|^{-(N-2)}dy \\
&\leq \frac{c}{n^2}\int_{n<|y|<2n}|f|^2K|y|^{-(N-2)}dy + c\int_{|y|>n}|\nabla f|^2K|y|^{-(N-2)}dy \\
&\quad + c\int_{|y|>n}|f|^2K|y|^{-(N-2)}dy \;\to\; 0, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Για κάθε φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^N$, ορίζουμε το σύνολο

$$W_{b,U} := \left\{ f \in L^1(U) : \int_U |\nabla f|^2|y|^{-(N-2)}dy < \infty \right\}.$$

Γνωρίζουμε ότι οι $C_0^\infty(U\backslash\{0\})$-συναρτήσεις είναι πυκνές στο παραπάνω σύνολο (βλέπε [74, Λήμματα 2.3 και 2.4]). Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\zeta_n f$ έχει συμπαγή φορέα. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία ομαλών συναρτήσεων (φ_n) με συμπαγή φορέα στην B_{2n}, τέτοια ώστε

$$\lim_n \|\zeta_n f - \varphi_n\|^2_{\widetilde{\mathcal{W}}} = 0. \qquad (3.11)$$

Το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση

$$\|f-\varphi_n\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} \leq \|f-\zeta_n f\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} + \|\zeta_n f - \varphi_n\|_{\widetilde{\mathcal{W}}}, \qquad (3.12)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 3.2.2. *Κάθε συνάρτηση f, με $\|f\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} < \infty$, μπορεί να προσεγγισθεί από μια ακολουθία $L^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεων στον $\widetilde{\mathcal{W}}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση f_n ως ακολούθως

$$f_n(y) = \begin{cases} f(y), & |f(y)| \leq n, \\ n, & |f(y)| > n. \end{cases}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|^2_{\widetilde{\mathcal{W}}} &= \int_{C_n}|\nabla(f-n)|^2K|y|^{-(N-2)}dy + \int_{C_n}|f-n|^2K|y|^{-(N-2)}dy \\
&\leq \int_{C_n}|\nabla f|^2K|y|^{-(N-2)}dy + c\int_{C_n}|f|^2K|y|^{-(N-2)}dy, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

ενώ τα σύνολα $C_n := \{y \in \mathbb{R}^N : |f(y)| > n\}$ ορίζουν μια φθίνουσα ακολουθία. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, τα δύο τελευταία ολοκληρώματα τείνουν στο 0, καθώς $n \to \infty$, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Από τα Λήμματα 3.2.1 και 3.2.2, έπεται αυτομάτως το ακόλουθο αποτέλεσμα προσέγγισης.

Πρόταση 3.2.3. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνό στον χώρο $\widetilde{\mathcal{W}}$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \widetilde{\mathcal{W}}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \widetilde{\mathcal{W}}$, τέτοιες ώστε

$$\|f-\varphi\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} = \|f-g\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} + \|g-\varphi\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} < \varepsilon, \tag{3.14}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Πρόταση 3.2.4. *(Σταθμισμένη Κρίσιμη Ανισότητα Caffarelli-Kohn-Nirenberg). Για κάθε $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, υπάρχει σταθερά $C = C(N) > 0$, τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 K |y|^{-(N-2)} dy \geq C \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 K dy. \tag{3.15}$$

Απόδειξη. Έστω $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Θέτουμε $v = K^{1/2} w$. Τότε,

$$\begin{aligned}\nabla v &= w K^{1/2} \nabla \frac{|y|^N}{2N^2} + K^{1/2} \nabla w \\ &= w K^{1/2} \frac{1}{2N} y |y|^{N-2} + K^{1/2} \nabla w,\end{aligned} \tag{3.16}$$

ή ισοδύναμα,

$$K|\nabla w|^2 = |\nabla v|^2 + \frac{1}{4N^2} v^2 |y|^{2(N-1)} - \frac{1}{2N} \nabla |v|^2 \cdot y |y|^{N-2}. \tag{3.17}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 K |y|^{-(N-2)} dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 |y|^{-(N-2)} dy + \frac{1}{4N^2} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 |y|^N dy \\ &\quad - \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} y \cdot \nabla |v|^2 dy \\ &\geq \frac{1}{4N^2} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 |y|^N dy - \frac{1}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} y \cdot \nabla |v|^2 dy \\ &= \frac{1}{4N^2} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 |y|^N dy + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dy \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 K dy,\end{aligned} \tag{3.18}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση 3.2.5. *Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 3.2.4 επιτρέπει ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά $C = C(N) > 0$, τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 K |y|^{-(N-2)} dy \geq C \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 \left(|y|^N + 1\right) K dy, \tag{3.19}$$

για κάθε $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Πρόταση 3.2.6. *Η εμφύτευση $\widetilde{\mathcal{W}} \hookrightarrow L^2(K)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω (w_n) μια φραγμένη ακολουθία στον $\widetilde{\mathcal{W}}$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\|w_n\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} \leq 1$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία στον $\widetilde{\mathcal{W}}$, η οποία συμβολίζεται επίσης με (w_n), τέτοια ώστε

$$w_n \rightharpoonup w, \quad \text{στον } \widetilde{\mathcal{W}}, \tag{3.20}$$

για κάποιο $w \in \widetilde{\mathcal{W}}$. Προφανώς,

$$\|w\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} \leq \liminf_n \|w\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} \leq 1. \tag{3.21}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Γράφουμε

$$\|w_n - w\|^2_{L^2(K)} = \int_{B_R} |w_n - w|^2 K dy + \int_{B_R^c} |w_n - w|^2 K dy. \tag{3.22}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.5, επιλέγοντας R επαρκώς μεγάλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|y|^N + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}, \tag{3.23}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ με $|y| \geq R$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_R^c} |w_n - w|^2 K dy &\leq \int_{B_R^c} |w_n - w|^2 K \left(|y|^N + 1\right) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_n - w|^2 K \left(|y|^N + 1\right) dy \\ &\leq C \|w_n - w\|^2_{\widetilde{\mathcal{W}}} \\ &\leq C \left(\|w_n\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} + \|w\|_{\widetilde{\mathcal{W}}}\right)^2 \\ &\leq 4C, \end{aligned} \tag{3.24}$$

δηλαδή,

$$\int_{B_R^c} |w_n - w|^2 K dy \leq 4C\varepsilon, \tag{3.25}$$

ομοιόμορφα ως προς n.

Ο χώρος $W^{1,2}(B_R, K|y|^{-(N-2)}dy)$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $H^1(B_R, Kdy)$ και αυτός, εν συνεχεία, εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^2(B_R, Kdy)$. Σταθεροποιώντας το $R > 0$ όπως πριν, μπορούμε να επιλέξουμε ένα n_0 τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, να ισχύει

$$\int_{B_R} |w_n - w|^2 K dy \leq C\varepsilon, \tag{3.26}$$

και το ζητούμενο έχει δειχθεί. ■

3.3 Φασματική Ανάλυση

Εισάγουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες $y = (r, \sigma)$, $r > 0$, $\sigma \in \mathbb{S}^{N-1}$, όπου $\mathbb{S}^{N-1}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^N$. Συμβολίζουμε με $f_j(\sigma)$ τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami, οι οποίες συγκροτούν μία ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{S}^{N-1})$ (βλ. [17, 65]) με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$c_j = j(j+N-2), \quad j = 0, 1, 2, ...$$

Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$-Ndiv(|y|^{-(N-2)}\nabla e) - y \cdot \nabla e - \frac{N}{2}e = \lambda e, \quad e \in \widetilde{\mathcal{W}}, \tag{3.27}$$

και αναζητούμε ιδιοσυναρτήσεις της μορφής

$$e(r,\sigma) = \varphi(r) f_j(\sigma). \tag{3.28}$$

Ύστερα από απλούς υπολογισμούς, θέτοντας $\mu := \lambda/N$, προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$\varphi_{rr} + \left(\frac{1}{N}r^{N-1} + \frac{1}{r}\right)\varphi_r + \left(\left(\frac{1}{2}+\mu\right)r^{N-2} - \frac{c_j}{r^2}\right)\varphi = 0, \tag{3.29}$$

υπό τη συνθήκη

$$\int_0^\infty (|\varphi|^2 + |\varphi_r|^2) e^{r^N/N^2} r dr < \infty. \tag{3.30}$$

Εισάγοντας τον μετασχηματισμό

$$\omega = \frac{2}{N} r^{N/2}, \quad z(\omega) := \varphi\left(\left(\frac{N}{2}\omega\right)^{2/N}\right), \tag{3.31}$$

λαμβάνουμε την εξίσωση

$$z_{\omega\omega} + \left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\omega}\right) z_\omega + \left(\left(\frac{1}{2}+\mu\right) - c_j\left(\frac{2}{N}\right)^2 \frac{1}{\omega^2}\right) z = 0, \tag{3.32}$$

Σύμφωνα με την εργασία [76, σελ. 141], η πρώτη ιδιοσυνάρτηση υπολογίζεται επακριβώς,

$$z_1(\omega) = e^{-\omega^2/4}, \qquad \varphi_1(r) = e^{-r^N/N^2}, \tag{3.33}$$

με αντίστοιχη ιδιοτιμή

$$\lambda_1 = \frac{N}{2}. \tag{3.34}$$

3.4 Ολική Λύση

Ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L^2(K) \to L^2(K)$ που ορίζεται ως εξής

$$\begin{cases} \mathcal{L}w := -\frac{N}{K} div(K|y|^{-(N-2)}\nabla w) - \frac{N}{2}w, \\ D(\mathcal{L}) := C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.35}$$

είναι προφανώς συμμετρικός. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.3 με το Θεώρημα 2.6.4, βλέπουμε ότι

$$(\mathcal{L}w, w)_{L^2(K)} \geq \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} K|w|^2 dy, \quad \text{για κάθε } w \in D(\mathcal{L}), \tag{3.36}$$

δηλαδή ο $\mathcal{L}$ είναι αυστηρά μονότονος στον πραγματικό χώρο Hilbert $L^2(K)$. Ο ενεργειακός χώρος $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$, που επάγεται από τον $\mathcal{L}$, αντιστοιχεί στην πλήρωση του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ υπό το εσωτερικό γινόμενο

$$(w_1, w_2)_{\widetilde{\mathcal{S}}(K)} := \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)} \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 dy - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} K w_1 w_2 dy,$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο, λόγω της Πρότασης 3.2.4. Επομένως, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.1 ικανοποιούνται και λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.4.1. *Για κάθε $w_0 \in L^2(K)$, το ακόλουθο πρόβλημα Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{N}{K} div(K|y|^{-(N-2)} \nabla w) - \frac{N}{2} w = 0, \\ w(0) = w_0. \end{cases} \tag{3.37}$$

επιδέχεται μοναδική ασθενή λύση

$$w \in C([0,\infty), L^2(K)) \cap L^2((0,\infty), \widetilde{\mathcal{S}}(K)).$$

Επιπλέον, η λύση μπορεί να αναπτυχθεί στη μορφή

$$w(y,s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} w_k(y), \tag{3.38}$$

όπου η αριθμήσιμη ακολουθία (w_k) ορίζει μία ορθοκανονική βάση στον $L^2(K)$ και αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις της επέκτασης Friedrichs του τελεστή $\mathcal{L}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\frac{N}{2} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty.$$

Οι συντελεστές Fourier a_k καθορίζονται από την αρχική τιμή

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k(y).$$

Παρατήρηση 3.4.2. *Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.3, η πρώτη ιδιοσυνάρτηση είναι ακριβώς η $w_1(y) = e^{-|y|^N/N^2}$.*

3.5 Το Πρόβλημα Hardy

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετηθεί το ακόλουθο ιδιόμορφο πρόβλημα

$$\begin{aligned} |x|^{N-2} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + c_* \frac{u}{|x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

το οποίο συνδέεται με το (3.1) μέσω της σχέσης

$$u(x) = |x|^{-(N-2)/2} v(x). \tag{3.40}$$

Ο κύριος στόχος είναι η εξέταση της ύπαρξης ενέργειας τύπου Hardy γύρω από την ιδιομορφία. Κατόπιν, προσδιορίζεται η ορθή ενεργειακή νόρμα και το πρόβλημα τίθεται από την αρχή σε νέο συναρτησιακό πλαίσιο.

3.5α′ Το Πρόβλημα

Εισάγουμε τη νέα συνάρτηση

$$h(y,s) := e^{s(N-2)}u(e^s y, e^{sN}-1).$$

Η $h(y,s)$ σχετίζεται με την $w(y,s)$ μέσω του μετασχηματισμού

$$h(y) = |y|^{-(N-2)/2}w(y), \tag{3.41}$$

τον οποίο συμβολίζουμε με $h = \mathcal{T}_K(w)$. Προφανώς, ο $\mathcal{T}_K$ ορίζει μια ισομετρία από τον $L^2(K)$ στον $L^2(K|y|^{N-2})$. Η u ικανοποιεί το (3.39) αν και μόνο αν η h επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial s} - |y|^{-\frac{N-2}{2}}\frac{N}{K}div(K|y|^{-(N-2)}\nabla(|y|^{\frac{N-2}{2}}h)) - \frac{N}{2}h = 0, \\ h(0) = h_0, \end{cases} \tag{3.42}$$

όπου $h_0 = u_0$. Ο γραμμικός τελεστής $L_K : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(K|y|^{N-2}) \to L^2(K|y|^{N-2})$, που ορίζεται ως εξής

$$L_K := -|y|^{-\frac{N-2}{2}}\frac{N}{K}div(K|y|^{-(N-2)}\nabla(|y|^{\frac{N-2}{2}}h)) - \frac{N}{2}h,$$

είναι συμμετρικός και πυκνά ορισμένος. Στη συνέχεια, θα καλούμε *συναρτησιακό Hardy με βάρος* Κ την ακόλουθη ποσότητα

$$I_K(h) := \int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla h|^2 dy - c_* \int_{\mathbb{R}^N} K\frac{h^2}{|y|^2}dy.$$

Στην περίπτωση που αποκλίνουν και τα δύο ολοκληρώματα, τότε αυτά θα γίνονται αντιληπτά με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής Cauchy γύρω από την αρχή. Ο ενεργειακός χώρος, που σχετίζεται φυσιολογικά με το πρόβλημα (3.42), είναι η πλήρωση $S(K)$ του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ υπό τη νόρμα

$$\|h\|^2_{S(K)} := NI_K(h) - (N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|h|^2 dy. \tag{3.43}$$

Επίσης, εισάγουμε το συναρτησιακό

$$I_{1,K}(w) := \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy + \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2 dy,$$

το οποίο συνδέεται με το συναρτησιακό Hardy μέσω της σχέσης

$$I_K(h) = I_{1,K}(w),$$

για κάθε $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Λόγω πυκνότητας, η ισοδυναμία επεκτείνεται στον σταθμισμένο χώρο Sobolev $H^1(K)$, ο οποίος ορίζεται ως ακολούθως

$$H^1(K) := \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} K(|h|^2 + |\nabla h|^2)dy < \infty \right\}.$$

Ωστόσο, παύει να ισχύει για συναρτήσεις που συμπεριφέρονται στην αρχή όπως η $|y|^{-\frac{N-2}{2}}$. Σχετικά με τον τελεστή L_K, η συνθήκη μονοτονίας ικανοποιείται, αφού από την Ενότητα 3.4,

$$\begin{aligned}(h, L_K h)_{L^2(K|y|^{N-2})} &= N I_K(h) + \left(\frac{N-2}{2} - (N-1)\right)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|h|^2 dy \\ &= N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|\nabla w|^2 dy - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K|w|^2 dy \\ &\geq \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|h|^2 dy,\end{aligned}$$

για κάθε $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Επιπλέον, από τη Πρόταση 3.2.6, η εμφύτευση $S(K) \hookrightarrow L^2(K|y|^{N-2})$ είναι συμπαγής. Ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία της θεωρίας επέκτασης Friedrichs, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.5.1. *Για κάθε $h_0 \in L^2(K|y|^{N-2})$, το πρόβλημα (3.42) επιδέχεται μοναδική ασθενή λύση*

$$h \in C([0,\infty), L^2(K|y|^{N-2}) \cap L^2((0,\infty), S(K)),$$

η οποία μπορεί να αναπτυχθεί στη μορφή

$$h(y,s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s} h_k(y), \tag{3.44}$$

όπου (λ_k, h_k) είναι τα ιδιοζεύγη της αυτοσυζυγούς επέκτασης του τελεστή L_K στον $S(K)$ και a_k είναι οι συντελεστές Fourier της αρχικής τιμής $h_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k(y)$.

Εντούτοις, φαίνεται να υπάρχει κάποια ασάφεια στη συναρτησιακή τοποθέτηση του προβλήματος (3.42) και σχετίζεται με τη διατύπωση της νόρμας $\|\cdot\|_{S(K)}$. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι λύσεις του (3.42), οι οποίες παρουσιάζουν ιδιομορφία μεγάλης τάξης στην αρχή, αδυνατούν να προσεγγισθούν από ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^N$.

3.5β′ Η Ενεργειακή Αντίφαση

Ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα της Ενότητας 3.3 σε όρους h, βλέπουμε ότι η πρώτη ιδιοσυνάρτηση του τελεστή L_K μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς, δηλαδή

$$h_1(y) = |y|^{-(N-2)/2} e^{-|y|^N/N^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|h_1\|_{S(K)}^2 < \infty, \tag{3.45}$$

με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής Cauchy, παρά τη μεγάλης τάξης ιδιομορφία γύρω από την αρχή. Το παραπάνω φράγμα οφείλεται στην αλληλοαναίρεση των δύο αποκλινόντων όρων του συναρτησιακού Hardy. Ωστόσο, η h_1 αδυνατεί να προσεγγισθεί από $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεις υπό την $\|\cdot\|_{S(K)}$-νόρμα. Η αιτία εντοπίζεται στην παρουσία ενός επιφανειακού ολοκληρώματος γύρω από την ιδιομορφία.

Πρόταση 3.5.2. *Η ιδιοσυνάρτηση h_1 δεν προσεγγίζεται από $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεις μέσω της νόρμας (3.43).*

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, τέτοιο ώστε

$$\|h_1 - \phi\|^2_{S(K)} < \varepsilon. \tag{3.46}$$

Θέτουμε

$$h_1 - \phi = |y|^{-\frac{N-2}{2}}\psi(|y|).$$

Προφανώς, η συνάρτηση ψ είναι ομαλή σε κάθε περιοχή της αρχής. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|h_1 - \phi\|^2_{H(K)} &= NI_K(|y|^{-\frac{N-2}{2}}\psi) - (N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K\psi^2 dy \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla\psi|^2 dy + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K\nabla|y|^{-(N-2)}\cdot\nabla\psi^2 dy \\
&\quad -(N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K\psi^2 dy \\
&\geq \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K\nabla|y|^{-(N-2)}\cdot\nabla\psi^2 dy,
\end{aligned}$$

λόγω της ανισότητας (3.36). Θεωρούμε τον δακτύλιο

$$D := \left\{y \in \mathbb{R}^N : R_1 < |y| < R_2\right\}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K\nabla|y|^{-(N-2)}\cdot\nabla\psi^2 dy = \lim_{R_1\to 0^+}\lim_{R_2\to+\infty}\int_D K\nabla|y|^{-(N-2)}\cdot\nabla\psi^2 dy.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, θα είναι

$$\begin{aligned}
\int_D K\nabla|y|^{-(N-2)}\cdot\nabla\psi^2 dy &= \frac{N-2}{N}\int_D K\psi^2 dy - (N-2)R_2^{-N+1}\int_{|y|=R_2} dS \\
&\quad + (N-2)R_1^{-N+1}\int_{|y|=R_1} K\psi^2 dy.
\end{aligned}$$

Μεταβαίνοντας στα όρια $R_1 \to 0^+$ και $R_2 \to +\infty$, λαμβάνουμε

$$\|h_1 - \phi\|^2_{S(K)} \geq N^2\frac{N-2}{2}\omega_N,$$

η οποία αντίκειται στην (3.46), αφού το δεξί μέλος είναι θετική ποσότητα. ■

Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση, η συνάρτηση h_1 δεν ανήκει στον χώρο $S(K)$ και το ίδιο φαίνεται να συμβαίνει με όλες τις συναρτήσεις που συμπεριφέρονται όπως η $|y|^{-(N-2)/2}$ κοντά στην αρχή. Αυτή η παθογένεια οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο χώρος $S(K)$, με τον τρόπο που έχει οριστεί, πιθανώς δεν είναι ο ενδεδειγμένος για την περαιτέρω μελέτη του εξελικτικού προβλήματος. Η βαθύτερη διερεύνηση δείχνει ότι η προτεινόμενη νόρμα επάγει μία "δυσλειτουργική", κατά κάποιο τρόπο, τοπολογία, η οποία αποτρέπει την προσέγγιση της h_1 από τις $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Το συναρτησιακό κενό θα αντιμετωπιστεί με την εισαγωγή μιας πιο κατάλληλης νόρμας, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (3.41). Η νέα νόρμα ταυτίζεται με την (3.43) πάνω στο σύνολο $C_0(\mathbb{R}^N)$, όμως είναι πιο ενδελεχής κοντά στην ιδιομορφία. Με αυτό τον τρόπο, θα ορίσουμε ενδεχομένως έναν μεγαλύτερο χώρο που θα περιέχει τις απαραίτητες συναρτήσεις για την ορθή τοποθέτηση του προβλήματος (3.42).

3.5γ′ Η Σχέση με το Συναρτησιακό Hardy

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι το πρόβλημα (3.37) έχει τοποθετηθεί ορθά στο $L^2(K)$-περιβάλλον με ενεργειακό χώρο την πλήρωση $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$ του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ υπό τη νόρμα

$$\|w\|^2_{\widetilde{\mathcal{S}}(K)} := N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2 dy.$$

Η ορθή τοποθέτηση του προβλήματος (3.42) θα προκύψει, με φυσιολογικό τρόπο, από την ερμηνεία του w-πλαισίου σε όρους h, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{T}_K$. Με άλλα λόγια, θα ορίσουμε τον ενεργειακό χώρο $\mathcal{S}(K)$ ως ισομετρικό του $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$ υπό τον μετασχηματισμό $\mathcal{T}_K$. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι ο χώρος $\mathcal{S}(K)$ είναι η πλήρωση του συνόλου

$$\left\{h = |y|^{-\frac{N-2}{2}}w : w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\right\} = \mathcal{T}_K(C_0^\infty(\mathbb{R}^N)),$$

υπό τη νόρμα $N_K(h) = \|h\|_{\mathcal{S}(K)}$, η οποία ορίζεται ως ακολούθως

$$\|h\|^2_{\mathcal{S}(K)} := N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla(|y|^{\frac{N-2}{2}}h)|^2 dy - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}h^2 dy. \tag{3.47}$$

Η σχέση του νέου χώρου με τον $H^1(K)$ δίνεται από τον αυστηρό εγκλεισμό $\mathcal{H}(K) \supset H^1(K)$, αφού οι συναρτήσεις που συμπεριφέρονται στην αρχή όπως η $|y|^{-\frac{N-2}{2}}$ δεν ανήκουν στον δεύτερο. Μολαταύτα, ο $\mathcal{H}(K)$ μπορεί να ″υποδεχθεί″ ακόμα πιο ιδιόμορφες συναρτήσεις. Π.χ., αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση w που έχει την ακόλουθη συμπεριφορά στην αρχή

$$w(y) \sim \left(\log\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)^a, \quad 0 < a < \frac{1}{2},$$

τότε αυτή ανήκει στον $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$. Επομένως, η $|y|^{-\frac{N-2}{2}}w$ ανήκει στον $\mathcal{S}(K)$, παρά το γεγονός ότι $w(y) \to \infty$, καθώς $|y| \to 0$.

Στη συνέχεια θα αναδείξουμε τη σχέση της νέας νόρμας με το συναρτησιακό Hardy. Θεωρούμε μια συνάρτηση $h \in \mathcal{S}(K)$. Ισοδύναμα, η συνάρτηση $w = |y|^{\frac{N-2}{2}}h$ ανήκει στον $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$. Όπως είδαμε στην Ενότητα 3.5β′, η συναρτησιακή δυσλειτουργία εντοπίζεται στο μέρος της νόρμας που αποτελείται από το συναρτησιακό Hardy. Εισάγουμε το συναρτησιακό

$$I_{K,B_\varepsilon^c}(h) := \int_{B_\varepsilon^c} K|\nabla h|^2 dy - c_*\int_{B_\varepsilon^c} K\frac{h^2}{|y|^2}dy.$$

Αντικαθιστώντας $h = |y|^{-\frac{N-2}{2}}w$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$I_{K,B_\varepsilon^c}(h) = \int_{B_\varepsilon^c} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy + \frac{N-2}{2}\varepsilon^{-N+1}\int_{S_\varepsilon} Kw^2 dS. \tag{3.48}$$

Η μη αρνητική ποσότητα

$$\begin{aligned}\Lambda_{K,\varepsilon}(h) &= \frac{N-2}{2}\varepsilon^{-N+1}\int_{S_\varepsilon} Kw^2 dS\\ &= \frac{N-2}{2}\varepsilon^{-1}\int_{S_\varepsilon} Kh^2 dS,\end{aligned}$$

συμβολίζει την *ενέργεια Hardy* γύρω από την ιδιομορφία.

Για τη μετάβαση στο όριο $\varepsilon \to 0$ στη σχέση (3.48), θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $h \in H^1(K)$, τότε $h \in \mathcal{S}(K)$ και είναι
$$\Lambda_K(h) := \lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{K,\varepsilon}(h) = 0.$$
Επομένως,
$$I_K(h) = I_{1,K}(w), \quad \text{για κάθε } h \in H^1(K).$$
Παρατηρούμε ότι το αντίθετο δεν είναι αληθές, δηλαδή αν $\Lambda_K(h) = 0$, τότε δεν είναι βέβαιο ότι $h \in H^1(K)$. Π.χ., μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση h, η οποία συμπεριφέρεται όπως η $|y|^{-(N-2)/2}(-\log|y|)^{-1/2}$ κοντά στο μηδέν.

- Αν $w \in \widetilde{\mathcal{S}}(K)$ είναι τέτοια που το $\lim_{|y|\to 0} w^2(y) = w^2(0)$ υπάρχει ως πραγματικός και θετικός αριθμός, τότε $h \in \mathcal{S}(K)\backslash H^1(K)$. Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός
$$\Lambda_K(h) = \frac{N(N-2)}{2}\omega_N w^2(0),$$
είναι καλά ορισμένος και θετικός. Επομένως,
$$I_K(h) = I_{1,K}(w) + \Lambda_K(h).$$
Σε αυτή την κατηγορία υπάγεται η πρώτη ιδιοσυνάρτηση h_1 του τελεστή L_K. Σημειώνεται ότι ο $\mathcal{S}(K)$ ορίζει έναν χώρο Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμενο
$$\begin{aligned}(h_1, h_2)_{\mathcal{S}(K)} &= N\left(\int_{\mathbb{R}^N} K\nabla h_1 \cdot \nabla h_2 dy - c_* \int_{\mathbb{R}^N} K\frac{h_1 h_2}{|y|^2} dy\right) \\ &\quad -N^2\frac{(N-2)}{2}\omega_N w_1(0) w_2(0) \\ &\quad -(N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2} h_1 h_2 dy.\end{aligned}$$

- Υποθέτουμε ότι η $w \in \widetilde{\mathcal{S}}(K)$ είναι φραγμένη στο μηδέν, αλλά το $\lim_{|y|\to 0} w^2(y)$ αποκλίνει. Π.χ., όταν η h ταλαντεύεται γύρω από την αρχή. Σε αυτή την περίπτωση, το όριο $\Lambda_K(h)$ δεν υπάρχει, εφόσον ταλαντεύεται. Συνεπώς, το ίδιο συμβαίνει με το συναρτησιακό Hardy, κατά την ακόλουθη έννοια
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_{K,B_\varepsilon^c}(h) - \Lambda_{K,\varepsilon}(h)) = I_{1,K}(w). \tag{3.49}$$

- Θεωρούμε $w \in \widetilde{\mathcal{S}}(K)$, τέτοια ώστε $\lim_{|y|\to 0} w^2(y) = \infty$. Τότε $\Lambda_K(h) = \infty$, άρα το ίδιο συμβαίνει και στο συναρτησιακό Hardy κατά την έννοια της σχέσης (3.49).

Σε όλες τις περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό $I_{K,B_\varepsilon^c}(h)$ είναι μη αρνητικό, εφόσον η ποσότητα $\Lambda_{K,\varepsilon}(h)$ είναι μη αρνητική. Συνεπώς, καταλήγουμε σε μία *γενικευμένη μορφή της ανισότητας Hardy* για την οριακή περίπτωση (3.49), όπου το συναρτησιακό Hardy είτε δεν ορίζεται, είτε απειρίζεται.

Ακολούθως, θα δούμε ότι ο χώρος $S(K)$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{S}(K)$ με μια κατάλληλη έννοια. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ είναι πυκνό στους δύο χώρους και οι αντίστοιχες νόρμες ταυτίζονται πάνω σε αυτό το σύνολο.

Λήμμα 3.5.3. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ είναι πυκνό στον $S(K)$.*

Απόδειξη. Θα προσαρμόσουμε τα επιχειρήματα του [23, Λήμμα 2.1], όπου θεωρείται η υποκρίσιμη περίπτωση της ιδιομορφίας (βλ. επίσης [74, Λήμμα 2.1]). Από τον ορισμό του $S(K)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})}^{\|\cdot\|_{H(K)}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση αποκοπής $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})$, όπου $0 \le \rho(t) \le 1$ και

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1, \\ 1, & 2 \le t. \end{cases} \tag{3.50}$$

Για $\varepsilon > 0$, ορίζουμε

$$h_\varepsilon(y) := \rho\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right) h(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}), \tag{3.51}$$

όπου $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(\nabla h_\varepsilon - \nabla h)^2 dy\right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(\nabla(\rho(|y|/\varepsilon))h + (\rho-1)\nabla h)^2 dy\right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_{A_\varepsilon} K(\nabla\rho(|y|/\varepsilon))^2 h^2 dy\right)^{1/2} + \left(\int_{B_{2\varepsilon}} K(\rho-1)^2 |\nabla h|^2 dy\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου $A_\varepsilon := \left\{y \in \mathbb{R}^N : \varepsilon < |y| < 2\varepsilon\right\}$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_{A_\varepsilon} K(\nabla\rho(|y|/\varepsilon))^2 h^2 dy \le c\,\|h\|_{L^\infty}^2\, \varepsilon^{-2} \int_{A_\varepsilon} (\rho')^2 dy \le c\varepsilon^{N-3} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} (\rho')^2 dr \to 0,$$

καθώς $\varepsilon \to 0$, ενώ για το δεύτερο,

$$\int_{B_{2\varepsilon}} K(\rho-1)^2 |\nabla h|^2 dy \le c \int_{B_{2\varepsilon}} dy.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(\nabla h_\varepsilon - \nabla h)^2 dy \to 0, \quad \text{καθώς } \varepsilon \to 0.$$

Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K \frac{(h_\varepsilon - h)^2}{|y|^2} dy \le c\varepsilon^{N-3} \int_0^{2\varepsilon} dr \to 0,$$

καθώς $\varepsilon \to 0$. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι

$$\|h_\varepsilon - h\|_{H(K)} \to 0,$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση 3.5.4. *Χρησιμοποιώντας την αποκοπτική ακολουθία (3.51), μπορούμε να έχουμε μια δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 3.2.3.*

Σύμφωνα με την εργασία [39], η εμφύτευση

$$H^1(K,\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(Kdy,\mathbb{R}^2), \tag{3.52}$$

είναι συνεχής. Άρα, ο χώρος $H^1(K)$ είναι καλά ορισμένος για $N=2$.

Λήμμα 3.5.5. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ είναι πυκνό στον $H^1(K,\mathbb{R}^2)$.*

Απόδειξη. Πράγματι, από [70], αρκεί μόνο να δείξουμε τις συνθήκες
(i)

$$K^{1/2} \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

(ii)

$$2\frac{\nabla K^{1/2}}{K^{1/2}} \in L^2_{loc}(Kdy,\mathbb{R}^2),$$

(iii)

$$(K^{1/2})^{-2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

οι οποίες είναι προφανείς. ■

Λήμμα 3.5.6. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνό στον $\widetilde{\mathcal{W}}$.*

Απόδειξη. Έστω w μια συνάρτηση με $\|w\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} < \infty$. Αναζητούμε συνάρτηση $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, τέτοια ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$, να είναι

$$\|w-\varphi\|_{\widetilde{\mathcal{W}}} < \varepsilon.$$

Αναλύουμε τις w, φ σε ακτινικά και μη ακτινικά μέρη, δηλαδή $w = w_r + w_{nr}$ και $\varphi = \varphi_r + \varphi_{nr}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|w-\varphi\|^2_{\widetilde{\mathcal{W}}} &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}\left(|\nabla(w_r-\varphi_r)|^2 + |w_r-\varphi_r|^2\right)dy \\
&\quad +2\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}\left(|\nabla(w_{nr}-\varphi_{nr})|^2 + |w_{nr}-\varphi_{nr}|^2\right)dy \\
&=: 2I_1 + 2I_2.
\end{aligned}$$

Όμως, οι $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$-συναρτήσεις είναι πυκνές στον $D^{1,2}(Kdy,\mathbb{R}^2)$. Άρα, από το Λήμμα 3.5.5 και την (3.52), υπάρχει συνάρτηση φ_r τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c\int_0^\infty Kr(|w_r'-\varphi_r'|^2 + |w_r-\varphi_r|^2)dr \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}^2} K|\nabla(w_r-\varphi_r)|^2 dy < \frac{\varepsilon^2}{4},
\end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Σημειώνουμε ότι ένας τέτοιος ομαλοποιητής της w_r μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ακτινικά συμμετρικός και, ταυτόχρονα, να ανήκει στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Η πυκνότητα των $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$-συναρτήσεων στον $D^{1,2}(Kdy,\mathbb{R}^2)$ προκύπτει από την πυκνότητα του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ στον ίδιο χώρο. Πράγματι, αρκεί να δείξει κανείς τον ακόλουθο εγκλεισμό

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})}^{\|\cdot\|_{D^{1,2}(K)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ακολουθία (3.51), έχουμε αυτή τη δυνατότητα, και το ίδιο ισχύει για τον $L^2(Kdy, \mathbb{R}^N)$. Τελικά, υπάρχει συνάρτηση $\varphi_{nr} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla(w_{nr}-\varphi_{nr})|^2 dy + \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} K|w_{nr}-\varphi_{nr}|^2 dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|w_{nr}-\varphi_{nr}|^2 dy \\
&= I_{1,K}(w_{nr}-\varphi_{nr}) + \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|w_{nr}-\varphi_{nr}|^2 dy \\
&= I_K(|y|^{-\frac{N-2}{2}}(w_{nr}-\varphi_{nr})) + \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|w_{nr}-\varphi_{nr}|^2 dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla(|y|^{-\frac{N-2}{2}}(w_{nr}-\varphi_{nr}))|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|w_{nr}-\varphi_{nr}|^2 dy \\
&= |||y|^{-\frac{N-2}{2}}(w_{nr}-\varphi_{nr})||^2_{D^{1,2}(K)} + |||y|^{-\frac{N-2}{2}}(w_{nr}-\varphi_{nr})||^2_{L^2(K)} \\
&< \frac{\varepsilon^2}{4},
\end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{H}}(K)$ την πλήρωση του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ υπό τη νόρμα

$$\|w\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(K)} := \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy. \tag{3.53}$$

Λήμμα 3.5.7. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ είναι πυκνό στον $\widetilde{\mathcal{H}}(K)$.*

Απόδειξη. Όπως στο Λήμμα 3.5.3, από τον ορισμό του $\widetilde{\mathcal{H}}(K)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})}^{\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{H}}(K)}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση αποκοπής $\rho_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in (0,1)$, που ορίζεται ως εξής

$$\rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \varepsilon^2, \\ c_\varepsilon \log\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), & \varepsilon^2 < t < \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon < t, \end{cases}$$

όπου

$$c_\varepsilon := \left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}.$$

Θέτουμε $w_\varepsilon(y) := \rho_\varepsilon(|y|)w(y)$. Παρατηρούμε ότι

$$|\nabla \rho_\varepsilon(|y|)| = \frac{c_\varepsilon}{|y|}, \quad \text{για } y \in A_\varepsilon := \left\{y \in \mathbb{R}^N : \varepsilon^2 < |y| < \varepsilon\right\},$$

ενώ μηδενίζεται στο υπόλοιπο χωρίο. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon - w\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(K)} &\leq 2\int_{A_\varepsilon} K|y|^{-(N-2)}|\nabla\rho_\varepsilon(|y|)|^2 w^2 dy \\
&\quad + 2\int_{A_\varepsilon} K|y|^{-(N-2)}(1-\rho_\varepsilon)^2|\nabla w|^2 dy.
\end{aligned}$$

Τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο μηδέν καθώς $\varepsilon \to 0$. Πράγματι, για το πρώτο που είναι πιο απαιτητικό, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} K|y|^{-(N-2)}|\nabla\rho_\varepsilon(|y|)|^2 w^2 dy &\leq c\,\|w\|_\infty^2 \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} c_\varepsilon^2 r^{-1} dr \\ &\leq c(\log(1/\varepsilon))^{-1} \to 0, \quad \text{καθώς } \varepsilon \downarrow 0, \end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.2 και 3.3, οι νόρμες των χώρων $\widetilde{\mathcal{H}}(K)$ και $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$ είναι ισοδύναμες. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Πόρισμα 3.5.8. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ είναι πυκνό στον $\widetilde{\mathcal{S}}(K)$.*

Από τα Λήμματα 3.5.3 και 3.5.7, οι χώροι $S(K)$ και $\mathcal{S}(K)$ μπορούν να ορισθούν ως το κλείσιμο των $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$-συναρτήσεων υπό τις νόρμες (3.43) και (3.47), αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι οι δύο νόρμες ταυτίζονται για αυτές τις συναρτήσεις, δηλαδή

$$\|h\|_{S(K)}^2 = \|h\|_{\mathcal{S}(K)}^2, \quad \text{για κάθε } h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}).$$

3.5δ′ Αναδιατύπωση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών

Σε αυτή την ενότητα, θα διερευνήσουμε περαιτέρω τη μορφή της νόρμας N_K με την οποία πρέπει να εφοδιασθεί ο χώρος $S(K) = \mathcal{S}(K)$. Γνωρίζουμε ότι οι νόρμες (3.43) και (3.47) ταυτίζονται στον χώρο $H^1(K)$, ενώ η πρώτη είναι μεγαλύτερη, όταν αυτές διαφέρουν. Πιο συγκεκριμένα,

$$\|h\|_{S(K)}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(I_{K,B_\varepsilon^c}(h) - \Lambda_{K,\varepsilon}(h)) - (N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}h^2 dy. \tag{3.54}$$

Για κάθε $h \in S(K)$, θεωρούμε την αποκοπτική ακολουθία προσεγγίσεων $h_\varepsilon(y) = \rho_\varepsilon h(y)$, όπου η ρ_ε είναι όπως στο Λήμμα 3.5.7. Τότε,

$$\|h\|_{S(K)} = NI_K^{1/2}(h_\varepsilon) - (N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}h_\varepsilon^2 dy,$$

και

$$h_\varepsilon \to h \quad \text{στον} \quad S(K).$$

Η οριακή τιμή

$$\|h\|_{S(K)}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\|h_\varepsilon\|_{S(K)}^2,$$

ορίζει την ορθή νόρμα στον χώρο $S(K)$ και αποτελεί τη λεγόμενη *τιμή αποκοπής του συναρτησιακού Hardy*. Πλέον, η επιχειρηματολογία της θεωρίας Friedrichs είναι προσαρμόσιμη στο νέο ενεργειακό πλαίσιο. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, η ορθή νόρμα της πρώτης ιδιοσυνάρτησης h_1 ισούται με

$$\|h_1\|_{S(K)} = \left(N\lim_{\varepsilon\to 0}(I_{K,B_\varepsilon^c}(h_1) - \Lambda_{K,\varepsilon}(h_1)) - (N-1)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}h_1^2 dy\right)^{1/2},$$

όπου η ενέργεια Hardy υπολογίζεται επακριβώς,

$$\Lambda_K(h_1) = N\frac{N-2}{2}\omega_N.$$

Η ποσότητα $\Lambda_K(h)$, όντας θετική και υπαρκτή, ενδεχομένως εκφράζει κάποιο είδος ενέργειας που, όμως, δεν είναι ευδιάκριτη με την πρώτη ματιά. Δεν είμαστε σε θέση να προσδώσουμε κάποια φυσική ερμηνεία. Σίγουρα όμως, από την οπτική των εφαρμογών, είναι απαραίτητη η περαιτέρω διερεύνηση.

3.6 Ασυμπτωτική Ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα, επιχειρούμε την περιγραφή της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων, αμφότερων των προβλημάτων (3.1) και (3.39). Η ανάλυση βασίζεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις v και w εξελίσσονται με το ίδιο μέτρο μέσα στον χώρο $L^2(\mathbb{R}^N)$, αφού ισχύει

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{3.55}$$

Συνεπώς, η ασυμπτωτική μελέτη ανάγεται στη ανάλυση της συμπεριφοράς της w για μέγαλους χρόνους.

Αρχικά, διατυπώνουμε την εξίσωση ενέργειας για το πρόβλημα (3.1) σε όρους w.

Πρόταση 3.6.1. *Κάθε λύση του προβλήματος (3.8) ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση ενέργειας*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy = -N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy, \tag{3.56}$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συνάρτηση $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ και αριθμούς $0 < R_1 < R_2$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του (3.8) με wK και ολοκληρώνοντας στο χωρίο

$$\Omega := \mathbb{R}^N \backslash (B_{R_1} \cup B_{R_2}^c),$$

λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_\Omega Kw^2dy = N\int_\Omega wdiv(K|y|^{-(N-2)}\nabla w) + \frac{N}{2}\int_\Omega Kw^2dy.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος θα είναι

$$\begin{aligned} N\int_\Omega wdiv(K|y|^{-(N-2)}\nabla w)dy &= -N\int_\Omega K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy \\ &\quad +N\int_{\partial\Omega} K|y|^{-(N-2)}w\nabla w\cdot\hat{n}dS. \end{aligned}$$

Εφόσον η w έχει συμπαγή φορέα, επιλέγοντας R_2 επαρκώς μεγάλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w|_{\partial B_{R_2}} = 0$. Άρα,

$$\int_{\partial\Omega} K|y|^{-(N-2)}w\nabla w\cdot\hat{n}dS = -\int_{\partial B_{R_1}} K|y|^{-(N-2)}w\nabla w\cdot\frac{y}{|y|}dS.$$

Το δεξί μέλος εκτιμάται ως εξής

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial B_{R_1}} K|y|^{-(N-2)}w\nabla w\cdot\frac{y}{|y|}dS\right| &\leq c\int_{\partial B_{R_1}} K|y|^{-(N-2)}dS \\ &= cR_1^{-N+2}K(R_1)\int_{\partial B_{R_1}} dS \\ &= cR_1^{-N+2}K(R_1)N\omega_N R_1^{N-1}. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, μεταβαίνοντας στα όρια $R_1 \to 0$, $R_2 \to +\infty$ και υϊοθετώντας ένα επιχείρημα πυκνότητας.■

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω $v_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}$. Τότε, για την αντίστοιχη ολική λύση v, αληθεύει ότι*

$$\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = O(t^{-1/2}), \quad \text{καθώς } t \to +\infty.$$

Απόδειξη. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα της φασματικής ανάλυσης στην Ενότητα 3.3 με το Θεώρημα 2.6.4, οδηγούμαστε στο εξής

$$\begin{aligned}\frac{N}{2} &= \min_{w\in\widetilde{\mathcal{H}}(K)} \frac{(Lw,w)_{L^2(K)}}{\|w\|^2_{L^2(K)}} \\ &= \min_{w\in\widetilde{\mathcal{H}}(K)} \frac{N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy - \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy}{\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy},\end{aligned}$$

και άρα

$$1\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy \le \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy, \tag{3.57}$$

για κάθε $w \in \widetilde{\mathcal{H}}(K)$. Παρατηρούμε ότι για $t = s = 0$, έχουμε $x = y$ και $v(x,0) = w(y,0)$. Επιπλέον, για κάθε $v_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}$, από την Πρόταση 3.6.1, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy &= -N\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy \\ &\le -\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Kw^2dy.\end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (3.55), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|w(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|w(s)\|^2_{L^2(K)} \le e^{-sN}\|w_0\|^2_{L^2(K)} \\ &= e^{-sN}\|v_0\|^2_{L^2(K)} = (t+1)^{-1}\|v_0\|^2_{L^2(K)},\end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Η ιδιολύση με τον μικρότερο ρυθμό απόσβεσης είναι

$$\widetilde{w}_1(y,s) = e^{-sN/2}e^{-|y|^N/N^2},$$

ή, στις αρχικές μεταβλητές,

$$v_1(x,t) = \frac{1}{t+1}\exp\left(\frac{-|x|^N}{N^2(t+1)}\right).$$

Από το ανάπτυγμα της λύσης σε σειρά Fourier, προκύπτει άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα (ολικής) ασυμπτωτικής ευστάθειας:

Θεώρημα 3.6.3. *Για κάθε λύση v του προβλήματος (3.1), αληθεύει ότι*

$$t^{1/2}\|v(x,t) - a_1v_1(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

όπου

$$a_1 = \frac{1}{\|v_1(x,0)\|_{L^2(K)}}\int_{\mathbb{R}^N} Kv_0v_1(x,0)dx,$$

είναι ο πρώτος συντελεστής Fourier.

Με άλλα λόγια, η λύση συγκλίνει, με πολυωνυμικό ρυθμό, σε μια ακτινικά συμμετρική συνάρτηση, που είναι και η πρώτη ιδιοσυνάρτηση του διαφορικού τελεστή. Όσον αφορά το πρόβλημα (3.42), η ιδιολύση με τον μικρότερο ρυθμό απόσβεσης είναι η ακόλουθη

$$\widetilde{h}_1(y,s) = e^{-sN/2}|y|^{-(N-2)/2}e^{-|y|^N/N^2},$$

ή, στις αρχικές μεταβλητές,

$$u_1(x,t) = (t+1)^{-1}|x|^{-(N-2)/2}\exp\left(\frac{-|x|^N}{N^2(t+1)}\right).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε μια *μεμονωμένη στάσιμη ιδιομορφία* στην αρχή.

Πόρισμα 3.6.4. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, η λύση u του προβλήματος (3.39) έχει την ακόλουθη συμπεριφορά*

$$t^{1/2}\left\|u - a_1u_1\right\|_{L^2(B_\varepsilon^c)} \to 0,$$

καθώς $t \to +\infty$.

3.7 Ανισότητα Hardy-Sobolev

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε μια σταθμισμένη ανισότητα τύπου Hardy-Sobolev που σχετίζεται με τον ενεργειακό χώρο $H(K)$, ο οποίος ορίζεται ως πλήρωση των $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεων υπό τη νόρμα $I_K^{1/2}(\cdot)$. Η προσέγγιση που ακολουθούμε αποτελεί μέρος μιας γενικότερης διαδικασίας κατασκευής ανισοτήτων τέτοιου τύπου, τόσο σε φραγμένα, όσο και μη φραγμένα χωρία (βλ. [85]). Στην περίπτωσή μας, έχουμε να διαχειριστούμε τόσο την ιδιομορφία στην αρχή, όσο και τη συμπεριφορά στο άπειρο. Σε φραγμένα χωρία, η δυσκολία αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή κατάλληλου βάρους, λογαριθμικού τύπου, υψωμένου σε κάποια δύναμη. Για την παρούσα βελτίωση, είναι απαραίτητη η χρήση του λεγόμενου *εκθετικού ολοκληρώματος*, το οποίο ορίζεται ως εξής

$$E(r) := \int_r^\infty s^{-1}e^{-2}ds, \qquad r > 0.$$

Εποπτικά, για το γράφημα αυτής της ειδικής συνάρτησης, αληθεύει η ακόλουθη εκτίμηση

$$\frac{1}{2}e^{-r}\log\left(1+\frac{2}{r}\right) < E(r) < e^{-r}\log\left(1+\frac{1}{r}\right). \tag{3.58}$$

Με άλλα λόγια, το E συμπεριφέρεται όπως ο λογάριθμος και η αρνητική εκθετική συνάρτηση, στην αρχή και το άπειρο, αντίστοιχα.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής ενότητας διατυπώνεται ως ακολούθως:

Θεώρημα 3.7.1. *Έστω $N \geq 3$ και $\alpha > 0$ ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Τότε, για κάθε $w \in \widetilde{\mathcal{H}}(K)$, ισχύει το εξής*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2dy \geq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} K^{-1}|y|^{-N}\left(\frac{1}{N}E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right)+\alpha\right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}}|w|^{2^*}dy\right)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Η βέλτιστη σταθερά είναι ακριβώς

$$C_{HC} = S(N)(N-2)^{-2(N-1)/N}, \quad \text{όταν } \alpha \geq (N-2)^{-1}, \tag{3.59}$$

και

$$C_{HC} = S(N)\alpha^{2(N-1)/N}, \quad \text{όταν } 0 < \alpha < (N-2)^{-1}, \tag{3.60}$$

όπου $S(N)$ είναι η βέλτιστη σταθερά στην κλασική ανισότητα Sobolev στον $\mathbb{R}^N$. Ελαχιστοποιητές δεν υπάρχουν.

Αρχικά, θα δείξουμε την ανισότητα για ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις.

Λήμμα 3.7.2. *Για κάθε ακτινικά συμμετρική συνάρτηση $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy \geq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K^{-1}|y|^{-N} \left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2} \right) \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} |w|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Η βέλτιστη σταθερά δίνεται από την (3.59) και επιτυγχάνεται από τη συνάρτηση

$$w_{\mu,\nu}(|y|) = \psi_{\mu,\nu}\left(\left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2} \right) \right)^{\frac{-1}{N-2}} \right), \tag{3.61}$$

όπου $\psi_{\mu,\nu}$ είναι ο ελαχιστοποιητής της κλασικής ανισότητας Sobolev στον $\mathbb{R}^N$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι, κατά κάποιο τρόπο, κατασκευαστική. Θεωρούμε μια ακτινικά συμμετρική συνάρτηση $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Αναζητούμε συνάρτηση $b(y)$, τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w|^2 dy \geq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} b(y)|w|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}}, \tag{3.62}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Ακριβέστερα, αναζητούμε ένα ακτινικά συμμετρικό βάρος της μορφής

$$b(y) = |y|^{-N} X(|y|),$$

για κάποια συνάρτηση X που θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Η ανισότητα (3.62) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$N\omega_N \int_0^\infty Kr(w')^2 dr \geq c \left(N\omega_N \int_0^\infty r^{-1} X(r)|w|^{2^*} dr \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$t = F(r), \qquad w(r) = h(t).$$

Τότε,

$$dt = F'(r)dr, \qquad w'(r) = h'(t)F'(r).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Kr(w')^2 dr &= \int_0^\infty Kr(h'(t))^2(F'(r))^2(F'(r))^{-1} dt \\ &= \int_0^\infty t^{N-1}(h'(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Πλέον, αναζητούμε μια λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$(F(r))^{1-N} dF(r) = K^{-1} r^{-1} dr, \quad \lim_{r \downarrow 0} F(r) = 0, \quad \lim_{r \to +\infty} F(r) = +\infty.$$

Ολοκληρώνοντας στο $(r, +\infty)$, βρίσκουμε

$$\left(\frac{(F(s))^{2-N}}{2-N} \right)_r^{+\infty} = \int_r^{+\infty} K^{-1}(s) s^{-1} ds,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{(N-2)^{-(N-2)}}{N-2} = \int_r^{+\infty} K^{-1} s^{-1} ds = \int_r^{+\infty} e^{-\frac{s^N}{N^2}} s^{-1} ds.$$

Θέτοντας

$$\frac{s^N}{N^2} = u, \qquad du = \frac{1}{N} s^{N-1} ds,$$

προκύπτει το εξής

$$\frac{(F(r))^{-(N-2)}}{N-2} = \frac{1}{N} \int_{\frac{r^N}{N^2}}^{+\infty} e^{-u} u^{-1} du = \frac{1}{N} E\left(\frac{r^N}{N^2} \right),$$

δηλαδή,

$$F(r) = \left(\frac{N-2}{2} E\left(\frac{r^N}{N^2} \right) \right)^{-\frac{1}{N-2}}.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\int_0^{+\infty} r^{-1} X(r) |w|^{2^*} dr = \int_0^{+\infty} t^{N-1} |h|^{2^*} dt.$$

Θεωρούμε τώρα την κλασική ανισότητα Sobolev

$$N\omega_N \int_0^{\infty} t^{N-1} (h'(t))^2 dt \geq c_S \left(N\omega_N \int_0^{\infty} t^{N-1} |h|^{2^*} dt \right)^{\frac{2}{2^*}}. \tag{3.63}$$

για ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις. Θέτοντας

$$t = F(|y|), \quad h(t) = w(|y|),$$

προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα, όπου σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$X(|y|) = K^{-1} \left(\frac{N-2}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2} \right) \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}}.$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Θεωρούμε τον χώρο $D^{1,2}(K)$, ο οποίος ορίζεται ως πλήρωση του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ υπό τη νόρμα

$$\|h\|^2_{D^{1,2}(K)} := \int_{\mathbb{R}^N} K |\nabla h|^2 dx.$$

Σύμφωνα με την εργασία [39], οι χώροι $D^{1,2}(K)$ και $H^1(K)$ είναι ισοδύναμοι.

Λήμμα 3.7.3. *(i) Έστω $N \geq 3$. Τότε, η εμφύτευση*

$$H^1(K) \hookrightarrow L^q(K),$$

είναι συμπαγής, για κάθε $2 \leq q < 2^*$. Επιπλέον, η εμφύτευση

$$H^1(K) \hookrightarrow L^{2^*}(K^{\frac{N}{N-2}}),$$

είναι συνεχής.
(ii) Για $N = 2$, η εμφύτευση

$$H^1(K, \mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(K, \mathbb{R}^2),$$

είναι συμπαγής για κάθε $2 \leq q < \infty$.

Λήμμα 3.7.4. *(Σταθμισμένη Ανισότητα Hardy). Για κάθε $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, αληθεύει ότι*

$$c_* \int_{\mathbb{R}^N} K \frac{|h|^2}{|y|^2} dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} K |\nabla h|^2 dy. \tag{3.64}$$

Απόδειξη. Πράγματι, για ομαλές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, έχουμε το εξής

$$h(y) = -\int_1^\infty \frac{d}{dt}(h(ty))dt = -y \cdot \nabla \int_1^\infty h(ty)dt.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h(y)}{|y|} \right\|_{L^2(K)} &\leq \int_1^\infty \|\nabla h(ty)\|_{L^2(K)} \\ &\leq \|\nabla h\|_{L^2(K)} \int_1^\infty t^{-N/2} dt = \frac{2}{N-2} \|\nabla h\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Έστω τώρα μια συνάρτηση $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Αναλύουμε σε ακτινικό και μη ακτινικό μέρος, δηλαδή γράφουμε $w = w_r + w_{nr}$.

Λήμμα 3.7.5. *Έστω $N \geq 3$. Τότε, υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε*

$$\|w_{nr}\|_{\widetilde{\mathcal{H}}(K)} \geq c || |y|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr} ||_{D^{1,2}(K)}.$$

Ισοδύναμα, η συνάρτηση $h_{nr} = |y|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr}$ ανήκει στον $D^{1,2}(K)$.

Απόδειξη. Έστω $w_{nr} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Αναλύουμε σε σφαιρικές αρμονικές

$$w_{nr} = \sum_{k=1}^\infty w_k := \sum_{k=1}^\infty f_k(r) \phi_k(\sigma),$$

όπου $\phi_k(\sigma)$ είναι οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami με ιδιοτιμές $c_k = k(N+k-2)$, $k \geq 1$. Οι συναρτήσεις f_k ανήκουν στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ και παρουσιάζουν την ακόλουθη συμπεριφορά

$$f_k(r) = O(r^k), \quad f_k'(r) = O(r^{k-1}), \quad \text{καθώς } r \downarrow 0.$$

Έστω $h_{nr} = |x|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr}$ και

$$w_{nr} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \phi_k(\sigma), \quad g_k = |x|^{-\frac{N-2}{2}} f_k.$$

Τότε, από την (3.47), έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w_{nr}|^2 dy &+ \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} K|w_{nr}|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}\left|\nabla\left(|y|^{\frac{N-2}{2}} h_{nr}\right)\right|^2 dy + \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|h_{nr}|^2 dy \\
(3.65) \quad &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla g_k|^2 dy - (c_* - c_k)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-2} g_k^2 dy\right).
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι, για κάθε $k \geq 1$, ισχύει $g_k \in H^1(K)$, αφού

$$g_k(r) = O(r^{-\frac{N-2}{2}+k}), \quad \text{καθώς } r \downarrow 0.$$

Ως εκ τούτου, δεν εμφανίζεται ενέργεια τύπου Hardy στην (3.65). Επιπλέον, από τη σταθμισμένη ανισότητα Hardy, λαμβάνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla g_k|^2 dy - (c_* - c_k)\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-2} g_k^2 dy \geq \frac{c_k}{c_k + c_*}\int_{\mathbb{R}^N} K\left(|\nabla g_k|^2 + c_k \frac{g_k^2}{|y|^2}\right) dy.$$

Τέλος, από την (3.65), συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w_{nr}|^2 dy &+ \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} K|w_{nr}|^2 dy \\
&\geq c\int_{\mathbb{R}^N} K\left|\nabla\left(|y|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr}\right)\right|^2 dy,
\end{aligned}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}(K)$ την πλήρωση του συνόλου

$$\{h = |y|^{-(N-2)/2} w : w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\},$$

υπό την ακόλουθη νόρμα

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}(K)} := \int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}\left|\nabla\left(|y|^{\frac{N-2}{2}} h\right)\right|^2 dy + \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{N-2}|h|^2 dy.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|h_{nr}\|^2_{\mathcal{H}(K)} &= \|w_{nr}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}(K)} \geq c\,\|w_{nr}\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(K)} \geq c\||y|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr}\|^2_{D^{1,2}(K)} \\
(3.66) \quad &= c\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla h_{nr}|^2 dy,
\end{aligned}$$

για κάθε $w \in \widetilde{\mathcal{H}}(K)$ με μηδενικό ακτινικό μέρος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.7.1. Προφανώς, το αποτέλεσμα είναι αληθές για την w_r και για κάθε $\alpha > 0$.

Ισχυρισμός: για κάθε $\alpha > 0$, υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w_{nr}|^2 dy \geq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K^{-1}|y|^{-N} \left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right) + \alpha \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} |w_{nr}|^{2^*} dy \right)^{\frac{N-2}{N}}.$$

Θέτουμε

$$I_1 := \int_{B_1} K^{-1}|y|^{-N} \left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right) + \alpha \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} |w_{nr}|^{2^*} dy,$$

και

$$I_2 := \int_{B_1^c} K^{-1}|y|^{-N} \left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right) + \alpha \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} |w_{nr}|^{2^*} dy.$$

Αρχικά, θα εκτιμήσουμε το I_1. Από το Λήμμα 3.7.5, αν $w_{nr} \in \widetilde{\mathcal{H}}(K)$, τότε $h_{nr} = |y|^{-\frac{N-2}{2}} w_{nr} \in D^{1,2}(K)$. Επιπλέον, από την (3.58), για $0 < r < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} K^{-1}\left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right) + \alpha \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} &< \left(\frac{2N}{2N\alpha + K^{-1}\log\left(1 + \frac{2N^2}{r^N}\right)} \right)^{\frac{2(N-1)}{N-2}} \\ &< \exp\left\{ \frac{2(N-1)}{N^2(N-2)} \right\} \left(\frac{2N}{\log(2N^2+1)} \right)^{\frac{2(N-1)}{N-2}}. \end{aligned}$$

Τότε, από το Λήμμα 3.7.3,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c\int_{B_1} |y|^{-N}|w_{nr}|^{2^*} dy = c\int_{B_1} |h_{nr}|^{2^*} dy \leq c \int_{\mathbb{R}^N} K^{\frac{N}{N-2}} |h_{nr}|^{2^*} dy \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla h_{nr}|^2 dy \right)^{\frac{N}{N-2}}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

και από την (3.66), λαμβάνουμε

$$I_1 \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w_{nr}|^2 dy \right)^{\frac{N}{N-2}}. \tag{3.68}$$

Για $r > 1$, έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} K^{-1}\left(\frac{1}{N} E\left(\frac{|y|^N}{N^2}\right) + \alpha \right)^{\frac{-2(N-1)}{N-2}} &< K^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2N}K^{-1}\log\left(1 + \frac{2N^2}{r^N}\right) + \alpha} \right)^{\frac{2(N-1)}{N-2}} \\ &< K^{\frac{N}{N-2}} \alpha^{\frac{-2(N-1)}{N-2}}. \end{aligned}$$

Τότε, από το Λήμμα 3.7.3, θα είναι

$$I_2 \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|\nabla h_{nr}|^2 dy \right)^{\frac{N}{N-2}},$$

και από την (3.66),

$$I_2 \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} K|y|^{-(N-2)}|\nabla w_{nr}|^2 dy \right)^{\frac{N}{N-2}}. \tag{3.69}$$

Σχετικά με τη βέλτιστη σταθερά, υϊοθετούμε την επιχειρηματολογία του [5]. Τότε, αποδεικνύεται ότι αυτή δίνεται από την (3.59) ή την (3.60), ενώ δεν είναι εφικτός κάποιος ελαχιστοποιητής. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Κεφάλαιο 4

Επί της Δυναμικής της Κρίσιμης Σχεδόν Γραμμικής Περίπτωσης

Στο παρόν κεφάλαιο, επιχειρείται η ακριβής περιγραφή της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων που προκύπτουν από τη σχεδόν γραμμική παραβολική εξίσωση, η οποία σχετίζεται με τον κρίσιμο εκθέτη της ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι παράμετροι του προβλήματος και γίνεται μια σύντομη αναφορά σε ήδη γνωστά αποτελέσματα. Στη δεύτερη ενότητα, δομείται το συναρτησιακό πλαίσιο της εξίσωσης και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των χώρων συναρτήσεων. Στην τρίτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη μη τετριμμένων στάσιμων λύσεων με χρήση τεχνικών από την τοπολογική θεωρία διακλάδωσης. Στην τέταρτη ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη ολικής λύσης για το εξελικτικό πρόβλημα. Τέλος, στην πέμπτη ενότητα, περιγράφεται πλήρως η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης.

4.1 Το Πρόβλημα

Θεωρούμε το ακόλουθο σχεδόν γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{cases} \phi_t = div(|x|^{-(N-2)}\nabla\phi) + \lambda g(x)\phi - f(x,\phi), & x \in \Omega, \\ \phi(0) = \phi_0, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι παράμετρος και $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 3$, είναι ένα φραγμένο και ανοικτό χωρίο με επαρκώς λείο σύνορο. Υποθέτουμε τα ακόλουθα:

(i) $g \geq 0,\ g(x) \sim |x|^{-r}$, καθώς $|x| \to 0$.

(ii) $f(x,\cdot) \sim |x|^{-k}$, καθώς $|x| \to 0$.

(iii) $f(\cdot,x) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(iv) $f(\cdot,x) \leq c(|u|^p + 1),\ 2 < p < \frac{2N-2}{N-2}$.

Οι δε εκθέτες, περιορίζονται στο εξής πεδίο:

$$\mathcal{P} := \left\{0 \leq r \leq \frac{N-2}{2},\ \ \frac{rp}{2} \leq k \leq \frac{N-2}{4}p\right\}. \tag{4.2}$$

Κινούμενοι από τη συνύπαρξη του κρίσιμου εκθέτη $2-N$ με τον ιδιόμορφο όρο αντίδρασης, θεωρούμε κατά μήκος του κεφαλαίου ότι $0 \in \Omega$. Η κρισιμότητα γίνεται αντιληπτή με την έννοια της κλασικής ανισότητας Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί τη σχεδόν γραμμική επέκταση του προηγούμενου. Ο βασικός στόχος είναι η ασυμπτωτική περιγραφή των λύσεων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$. Για τον σκοπό αυτόν, θα εφαρμόσουμε βασικές τεχνικές της τοπολογικής θεωρίας διακλάδωσης (ολική θεωρία Rabinowitz) σε συνδυασμό με βασικά εργαλεία της θεωρίας γραμμικοποίησης και των κανονικών μορφών Gårding. Ανάλογα αποτελέσματα για εξισώσεις που περιλαμβάνουν ιδιόμορφους όρους μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [6, 7, 50, 51, 52, 56, 57, 59]. Ειδικά, στην υποκρίσιμη περιοχή του εκθέτη, αναφέρουμε την εργασία [1], όπου αποδεκνύονται αποτελέσματα ύπαρξης και μη ύπαρξης για την εξίσωση

$$\phi_t - div(|x|^{-2a}\nabla\phi) = f(x,\phi), \quad a < \frac{N-2}{2}.$$

σε ένα φραγμένο χωρίο. Το αντίστοιχο ημιγραμμικό, υποκρίσιμο πρόβλημα

$$\phi_t - div(|x|^{-bp}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) = 0,$$

εμφανίζεται στη [2], όπου $1 < p < N$ και $b < \frac{N-p}{p}$. Και στις δύο περιπτώσεις, ο όρος αντίδρασης είναι πολυωνυμικού τύπου με κάποιο βάρος. Ανάλογοι περιορισμοί, ως προς το βαθμό της ιδιομορφίας, έχουν τεθεί και στα ελλειπτικά προβλήματα. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της εξίσωσης

$$-div(|x|^{-2a}\nabla\phi) = |x|^{-bp}|\phi|^{p-1},$$

σε όλο τον $\mathbb{R}^N$, η οποία έχει αναλυθεί σε μια σειρά άρθρων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a. Στην [68], θεωρείται η περίπτωση $a = b = 0$. Στην [53], ο Lieb ανέλυσε την περίπτωση $a = 0,\ 0 < b < 1$. Οι Chou και Chu, στην εργασία [31], ασχολήθηκαν με την περίπτωση $0 < a < \frac{N-2}{2}$ (βλ. επίσης [54, 55, 77]). Σε όλες τις περιπτώσεις, οι λύσεις είναι θετικές και ακτινικά συμμετρικές. Επίσης, σημειώνουμε την εργασία των Catrina και Wang, [23], η οποία σχετίζεται με την ύπαρξη συναρτήσεων ελαχιστοποίησης για την παραμετρική περιοχή $-\infty < a < 0$. Τέλος, αναφέρουμε την εργασία [30], στην οποία παρουσιάζονται αποτελέσματα ύπαρξης για την ημιγραμμική εξίσωση

$$-div(|x|^{-bp}|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi) + h(x)|\phi|^{m-2}\phi = H(x)|\phi|^{q-2}\phi,$$

στην περίπτωση $b < \frac{N-p}{p}$, όπου οι συναρτήσεις h και H είναι μη αρνητικές και ακτινικά συμμετρικές.

4.2 Συναρτησιακή Τοποθέτηση

Θεωρούμε τον χώρο $\widetilde{\mathcal{H}}$ που ορίζεται ως η πλήρωση των $C_0^\infty(\Omega)$-συναρτήσεων υπό την ακόλουθη νόρμα

$$\|\phi\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} := \int_\Omega |x|^{-(N-2)}|\nabla\phi|^2 dx.$$

Τίθεται φυσιολογικά το ερώτημα αν ο $\widetilde{\mathcal{H}}$ είναι ένας ορθά ορισμένος χώρος Hilbert. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ακόλουθη εμφύτευση.

Λήμμα 4.2.1. *([74]). Για κάθε $0 \le s \le \frac{N-2}{2}q$, η εμφύτευση*

$$\widetilde{\mathcal{H}} \hookrightarrow L^q(|x|^{-s}dx, \Omega), \quad 1 \le q < 2^*, \tag{4.3}$$

είναι συμπαγής, όπου ο σταθμισμένος χώρος $L^q(|x|^{-s}dx, \Omega)$ ορίζεται ως πλήρωση των $C_0^\infty(\Omega)$-συναρτήσεων υπό τη νόρμα

$$\|\phi\|_{L^q(|x|^{-s},\Omega)} := \left(\int_\Omega |x|^{-s}|\phi|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Παρατήρηση 4.2.2. *Για τη βελτίωση της ποιότητας της παρουσίασης, υποθέτουμε ότι $g(x) \equiv |x|^{-r}$ και $f(x,s) \equiv |x|^{-k}|s|^{p-2}s$. Εντούτοις, τα αποτελέσματα που προκύπτουν, ισχύουν στη γενική περίπτωση.*

Με το επόμενο λήμμα γίνεται δυνατή η διαχείριση του μη γραμμικού όρου εντός του $\widetilde{\mathcal{H}}$-πλαισίου.

Λήμμα 4.2.3. *Η συνάρτηση $g(s) := |x|^{-k}|s|^{2\gamma}s$, $s \in \mathbb{R}$, ορίζει μια ακολουθιακά ασθενώς συνεχή απεικόνιση από τον $\widetilde{\mathcal{H}}$ στον $L^2(\Omega)$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $G(\phi) := \int_0^\phi g(s)ds$. Τότε το συναρτησιακό $\mathcal{G} : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως $\mathcal{G}(\phi) := \int_\Omega G(\phi)dx$, είναι C^1 και ακολουθιακά συνεχές.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι οι g και $\mathcal{G}$ είναι ορθά ορισμένες λόγω της εμφύτευσης (4.3) και των περιορισμών (4.2). Η ασθενής συνέχεια προκύπτει επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του [12, Λήμμα 3.3]. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{G}$ είναι C^1 και η παράγωγός του δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}'(\phi)(z) =< g(\phi), z >, \quad \text{για κάθε } \phi, z \in \widetilde{\mathcal{H}}. \tag{4.4}$$

Πράγματι, για $\phi, \psi \in \widetilde{\mathcal{H}}$, θεωρούμε την ποσότητα

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{G}(\phi + s\psi) - \mathcal{G}(\phi)}{s} &= \frac{1}{s}\int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{d\theta} G(\phi + \theta s\psi) d\theta dx \\ &= \int_\Omega \int_0^1 g(\phi + s\theta\psi)\psi d\theta dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Από την ανισότητα Hölder για $q^{-1} + \sigma^{-1} = 1$,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega g(\phi + s\theta\psi)\psi dx\right| &\le \int_\Omega |x|^{-k}|\phi + s\theta\psi|^{q-1}|\psi| dx \\ &\le \left(\int_\Omega |x|^{-k}|\phi + s\theta\psi|^{(q-1)\sigma} dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega |x|^{-k}|\psi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le c\left(\int_\Omega |x|^{-k}(|\phi| + |\psi|)^{(q-1)\sigma} dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega |x|^{-k}|\psi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= c\left(\int_\Omega |x|^{-k}(|\phi| + |\psi|)^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |x|^{-k}|\psi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Μεταβαίνοντας στο όριο $s \to 0$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, προκύπτει ότι το $\mathcal{G}$ είναι διαφορίσιμο και η παράγωγός του δίνεται από την (4.4).

Για την ομαλότητα, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\mathcal{G}' : \widetilde{\mathcal{H}} \to \widetilde{\mathcal{H}}^{-1}$ είναι συνεχής (βλέπε [80]). Πράγματι, θεωρούμε μια ακολουθία $(\phi_n) \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ τέτοια ώστε $\phi_n \to \phi$ στον $\widetilde{\mathcal{H}}$. Παρατηρούμε ότι

$$||\mathcal{G}'(\phi_n) - \mathcal{G}'(\phi)||_{\widetilde{\mathcal{H}}^{-1}} \leq \sup_{\|w\|_{\widetilde{\mathcal{H}} \leq 1}} ||g(\phi_n) - g(\phi)||_{L^\sigma} ||w||_{L^q}.$$

Από την ανισότητα Hölder για $q_1^{-1} + q_2^{-1} = 1$ και $q_1 = q/\sigma$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
||g(\phi_n) - g(\phi)||_{L^\sigma}^\sigma &= \int_\omega |x|^{-k\sigma} ||\phi_n|^{q-2}\phi_n - |\phi|^{q-2}\phi|^\sigma dx \\
&\leq c \int_\omega |x|^{-k\sigma} (|\phi_n| + |\phi|)^{(q-2)\sigma} |\phi_n - \phi|^\sigma dx \\
&\leq c \left(\int_\omega |x|^{-k\sigma} (|\phi_n| + |\phi|)^{(q-2)\sigma q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} \left(\int_\omega |x|^{-k\sigma} |\phi_n - \phi|^{\sigma q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= c \left(\int_\omega |x|^{-k\sigma} (|\phi_n| + |\phi|)^{(q-2)\sigma q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} \left(\int_\omega |x|^{-k\sigma} |\phi_n - \phi|^{q} dx \right)^{\frac{1}{q_1}}.
\end{aligned}$$

Από την εμφύτευση (4.3), καταλήγουμε στο εξής

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |x|^{-k\sigma} |\phi_n - \phi|^q dx,$$

και άρα στη συνέχεια της $\mathcal{G}'$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

4.3 Διακλάδωση των Στάσιμων Λύσεων

Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε τη διακλάδωση των στάσιμων λύσεων του προβλήματος (4.1) με χρήση της θεωρίας Rabinowitz. Προφανώς, οι στάσιμες λύσεις ικανοποιούν το σχεδόν γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(|x|^{-(N-2)} \nabla u) = \lambda |x|^{-r} u - |x|^{-k} |u|^{q-2} u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Ο τελεστής

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} := -div(|x|^{-(N-2)} \nabla) \\ D(\mathcal{L}) = \{ u \in \widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{L}u \in L^2(|x|^{-r} dx, \Omega) \}, \end{array} \right. \tag{4.7}$$

επεκτείνεται σε έναν μη φραγμένο, αυτοσυζυγή τελεστή με συμπαγή αντίστροφο, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία Friedrichs. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ολικού συνεχούς λύσεων που διακλαδίζεται από τον τετριμμένο κλάδο στο σημείο $(\lambda_1, 0)$. Εδώ, με λ_1 συμβολίζεται η πρωτεύουσα ιδιοτιμή του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(|x|^{-(N-2)} \nabla u) = \lambda |x|^{-r} u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Στη συνέχεια, εκτός και αν δηλώνεται ρητά, θα θεωρούμε ότι $r = 0$, προκειμένου να απλουστευθεί η παρουσίαση.

Λήμμα 4.3.1. *Το πρόβλημα (4.8) επιδέχεται μια πρωτεύουσα θετική ιδιοτιμή λ_1, η οποία δίνεται από τον τύπο*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{H}}} \frac{\int_\Omega |x|^{-(N-2)}|\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx}. \tag{4.9}$$

Επιπροσθέτως:
(i) Η λ_1 είναι απλή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση τη u_1, η οποία είναι θετική και ανήκει στον $C^{1,\zeta}_{loc}(\Omega \backslash \{0\})$ για κάποιο $\zeta \in (0,1)$.
(ii) Η λ_1 είναι η μοναδική ιδιοτιμή του προβλήματος (4.8) που αντιστοιχεί σε θετική ιδιοσυνάρτηση.

Απόδειξη. Η ύπαρξη και ο μεταβολικός χαρακτηρισμός της πρωτεύουσας ιδιοτιμής προκύπτουν άμεσα από το Λήμμα 4.2.1, εφόσον ο τελεστής $\mathcal{L}$ έχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοσυναρτήσεων με ακολουθία ιδιοτιμών

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ... \to +\infty.$$

Από τη βασική θεωρία ομαλότητας (βλέπε [43, Θεώρημα 8.22]) έπεται ότι αν u είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (4.8), τότε $u \in C^{2,\zeta}_{loc}(\Omega \backslash \{0\})$, για κάποιο $\zeta \in (0,1)$. Η θετικότητα είναι άμεση συνέπεια της ασθενούς αρχής μεγίστου. Τέλος, για την απλότητα της λ_1 θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ταυτότητα Picone:

$(\mathcal{PI})$ Υποθέτουμε ότι οι $u \geq 0$ και $v > 0$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμες συναρτήσεις στο Ω. Ορίζουμε

$$L(u,v) := |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u \cdot \nabla v,$$

και

$$R(u,v) := |\nabla u|^2 - \nabla\left(\frac{u^2}{v}\right) \cdot \nabla v.$$

Τότε, $L(u,v) = R(u,v)$ και $L(u,v) \geq 0$, ενώ $L(u,v) = 0$ αν και μόνο αν $u = kv$ σχεδόν παντού στο Ω για κάποια σταθερά k.

Έστω Ω_0 ένα συμπαγές υποσύνολο του $\Omega \backslash \{0\}$ και $0 \leq u \in C^\infty_0(\Omega \backslash \{0\})$. Για κάθε $\lambda > 0$ θεωρούμε μια ασθενή λύση $z \in C^{1,\zeta}_{loc}(\Omega \backslash \{0\})$, $\zeta \in (0,1)$, του προβλήματος (4.8) τέτοια ώστε $z \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega_0} |x|^{-(N-2)} L(u, z+\varepsilon) dx \\
&\leq \int_\Omega |x|^{-(N-2)} L(u, z+\varepsilon) dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-(N-2)} R(u, z+\varepsilon) dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-(N-2)} |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |x|^{-(N-2)} \nabla\left(\frac{u^2}{z+\varepsilon}\right) \cdot \nabla z dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-(N-2)} |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \frac{u^2}{z+\varepsilon} \nabla(|x|^{-(N-2)}\nabla z) dx \\
&= \int_\Omega |x|^{-(N-2)} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega \frac{u^2}{z+\varepsilon} z dx. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η λ_1 δεν είναι απλή. Έστω, επίσης, μια δεύτερη ιδιοσυνάρτηση $v \neq u_1$, $v \in \widetilde{\mathcal{H}}$, σχεδόν παντού διαφορίσιμη στο Ω, τέτοια ώστε $v(x) \geq 0$ σε κάποιο $\Omega^+ \subset \Omega$. Θεωρούμε την (4.10) με $\Omega_0 \subseteq \Omega^+$, $\lambda = \lambda_1$ και $z = u_1$. Μεταβαίνοντας στο όριο $\varepsilon \to 0$, από το Λήμμα Fatou και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε $L(v, u_1) = 0$ σχεδόν παντού στο Ω^+. Οπότε, από την $(\mathcal{PI})$, συνάγουμε ότι $v = ku_1$ σχεδόν παντού στο Ω^+, που είναι άτοπο.

Για τη (ii), υποθέτουμε ότι υπάρχει και δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda^* > \lambda_1$ του (4.8) στην οποία αντιστοιχεί μη αρνητική ιδιοσυνάρτηση z^*. Θεωρούμε την (4.10) με $\Omega_0 \subseteq \Omega^+$, $\lambda = \lambda^*$ και $z = z^*$. Περνώντας στο όριο $\varepsilon \to 0$, προκύπτει το εξής

$$0 \leq \int_\Omega |x|^{-(N-2)} L(u_1, z^*) dx < 0,$$

που είναι άτοπο. ■

Θεώρημα 4.3.2. *Η πρωτεύουσα ιδιοτιμή λ_1 του γραμμικού προβλήματος (4.8) ορίζει ένα σημείο διακλάδωσης για το πρόβλημα (4.6). Επιπλέον, ο διερχόμενος κλάδος C_{λ_1} αποτελεί ένα ολικό συνεχές μη αρνητικών λύσεων στον $\widetilde{\mathcal{H}}$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την ακόλουθη διγραμμική μορφή

$$< u, v >_X := \int_\Omega |x|^{-(N-2)} \nabla u \nabla v dx - \frac{\lambda_1}{2} \int_\Omega uv dx, \tag{4.11}$$

για κάθε $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με X το κλείσιμο του $C_0^\infty(\Omega)$ υπό τη νόρμα που επάγει η (4.11), δηλαδή την

$$\|u\|_X^2 = < u, u >_X .$$

Από το Λήμμα 4.2.1, συνάγεται η ισοδυναμία των νορμών

$$\frac{1}{2} \|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 \leq \|u\|_X^2 \leq \frac{3}{2} \|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 , \quad \text{για κάθε } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Προφανώς, οι X και $\widetilde{\mathcal{H}}$ ταυτίζονται, αφού το $C^\infty(\Omega)$ είναι πυκνό υποσύνολο και στους δύο χώρους. Μπορούμε πλέον να ταυτίσουμε τη νόρμα του X με αυτήν του $\widetilde{\mathcal{H}}$ και να χρησιμοποιήσουμε το $(u, v)_{\widetilde{\mathcal{H}}}$ ως εσωτερικό γινόμενο.

Ορίζουμε τη διγραμμική μορφή

$$a(u, v) := \int_\Omega uv dx, \quad u, v \in X,$$

η οποία προφανώς είναι συνεχής. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει γραμμικός φραγμένος τελεστής L, τέτοιος ώστε

$$a(u, v) =< Lu, v >, \quad u, v \in X. \tag{4.12}$$

Ο τελεστής L είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του χαρακτηρίζεται από τον τύπο

$$\nu_1 = \sup_{u \in X} \frac{< Lu, u >}{< u, u >} = \sup_{u \in X} \frac{\int_\Omega u^2 dx}{\int_\Omega |x|^{-(N-2)} |\nabla u|^2 dx}.$$

Τότε, από το Λήμμα 4.3.1, προκύπτει ότι η θετική ιδιοσυνάρτηση u_1, που αντιστοιχεί στη λ_1, αποτελεί ιδιοσυνάρτηση του L με αντίστοιχη ιδιοτιμή τη $\nu_1 = \lambda_1^{-1}$.

Ορίζουμε τον μη γραμμικό τελεστή $N(\lambda, \cdot) : \mathbb{R} \times X \to X^*$ ως ακολούθως

$$< N(\lambda, u), v > := \int_\Omega |x|^{-(N-2)} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx + \int_\Omega |x|^{-k}|u|^{q-2}uv,$$

για κάθε $v \in X$, ο οποίος προφανώς είναι καλά ορισμένος. Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $X = \widetilde{\mathcal{H}}$ και τη σχέση (4.12), ο τελεστής μπορεί να γραφεί στη μορφή $N(\lambda, u) = u - G(\lambda, u)$, όπου $G(\lambda, u) := \lambda L u - H(u)$,

$$< H(u), v >= \int_\Omega |x|^{-k}|u|^{q-2}uv, \quad \text{για κάθε } v \in X.$$

Η συμπάγεια του H έπεται από την εμφύτευση (4.3). Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη ανισότητα Hölder, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\|u\|_X} | < H(u), v > | \leq c \|u\|_X^{q-2} \|v\|_X .$$

Συνεπώς,

$$\lim_{\|u\|_X \downarrow 0} \frac{\|H(u)\|_{X^*}}{\|u\|_X} = \lim_{\|u\|_X \downarrow 0} \sup_{\|v\|_X \leq 1} | < H(u), v > | = 0. \tag{4.13}$$

Επομένως, από το Θεώρημα Rabinowitz, υπάρχει ένας συνεκτικός κλάδος λύσεων C_{λ_1} στον $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{H}}$, ο οποίος τέμνει τον τετριμμένο κλάδο στο σημείο $(\lambda_1, 0)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε τον ολικό χαρακτήρα του C_{λ_1} αποκλείοντας τη δεύτερη δυνατότητα του Θεωρήματος 2.5.8. Η απόδειξη συντελείται σε δύο βήματα.

Βήμα 1. Όλες οι λύσεις $(\lambda, u) \in C_{\lambda_1}$, που βρίσκονται επαρκώς κοντά στη $(\lambda_1, 0)$, είναι θετικές για κάθε $x \in \Omega$. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $(\lambda, u(x)) \in C_{\lambda_1} \cap B_{\varepsilon_0}((\lambda_1, 0))$ να ισχύει $u(x) > 0$ στο Ω. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n, u_n) λύσεων του (4.6) τέτοια ώστε $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda_1, 0)$, ενώ ταυτόχρονα οι u_n μεταβάλλουν το πρόσημό τους στο Ω. Έστω $u_n^- := \min\{0, u_n\}$ και $\mathcal{U}_n^- := \{x \in \Omega : u_n(x) < 0\}$. Δεδομένου ότι η $u_n = u_n^+ - u_n^-$ επιλύει το πρόβλημα (4.6), η u_n^- είναι ασθενής λύση του ακόλουθου προβλήματος

$$\begin{cases} -div(|x|^{-(N-2)} \nabla u_n^-) = \lambda_n u_n^- - |x|^{-k}|u_n|^{q-2}u_n^-, & x \in \Omega, \\ u_n^- = 0, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

Πολλαπλασιάζοντας με u_n^- και ολοκληρώνοντας στο Ω, βρίσκουμε

$$\int_{\mathcal{U}_n^-} |x|^{-(N-2)} |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda_n \int_{\mathcal{U}_n^-} |u_n^-|^2 dx + \int_{\mathcal{U}_n^-} |x|^{-k}|u_n|^{q-2}|u_n^-|^2 dx = 0. \tag{4.15}$$

Όμως η ακολουθία (λ_n) είναι φραγμένη, άρα

$$||u_n^-||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{U}_n^-)} \leq \lambda_n \int_{\mathcal{U}_n^-} |u_n^-|^2 dx \leq c|\mathcal{U}_n^-|^{\frac{q-2}{q}} ||u_n^-||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{U}_n^-)},$$

για κάθε $q \in \left(2, \frac{2N-2}{N-2}\right)$. Τελικά, υπάρχει σταθερά $M > 0$, ανεξάρτητη του n, τέτοια ώστε

$$M \leq |\mathcal{U}_n^-|. \tag{4.16}$$

Έστω $\widetilde{u}_n = u_n / \|u_n\|_X$, η κανονικοποίηση της u_n στον X. Τότε, υπάρχει υπακολουθία που τη συμβολίζουμε ξανά με $\widetilde{u}_n$, η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\widetilde{u}_0$ στον X. Επιχειρηματολογώντας όπως στο [50, Λήμμα 4.3], αποδεικνύεται ότι $\widetilde{u}_0 = u_1$. Μεταβαίνοντας σε περαιτέρω υπακολουθία αν χρειαστεί, από το Θεώρημα Egorov, $\widetilde{u}_n \to u_1$ ομοιόμορφα στο Ω, αποκλείοντας ενδεχομένως ένα υποσύνολο επαρκώς μικρού μέτρου. Όμως αυτό αντίκειται στην (4.16). Συνεπώς, οι λύσεις δε μπορούν να μεταβάλουν το πρόσημό τους όταν βρίσκονται αυθαίρετα κοντά στη $(\lambda_1, 0)$.

Βήμα 2. Θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να υπάρχει σημείο $\xi \in \Omega$ με $u(\xi) < 0$ για κάποια λύση $(\lambda, u) \in C_{\lambda_1}$. Η συνεκτικότητα του συνεχούς C_{λ_1}, η θετικότητα κοντά στη $(\lambda_1, 0)$ και η $C^{1,\zeta}_{loc}(\Omega\backslash\{0\})$-ομαλότητα των λύσεων οδηγούν στην ύπαρξη ενός ζεύγους $(\lambda_0, u_0) \in C_{\lambda_1}$, τέτοιου ώστε $u_0(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Omega$, εξαιρουμένου πιθανώς κάποιου σημείου $x_0 \in \Omega$ στο οποίο $u_0(x_0) = 0$. Τότε όμως, από την αρχή μεγίστου, θα ισχύει ότι $u_0 \equiv 0$ στο Ω. Συνοψίζοντας, έχουμε κατασκευάσει μια ακολουθία (λ_n, u_n) στον C_{λ_1}, τέτοια ώστε $u_n(x) > 0$ για κάθε n και $x \in \Omega$, $u_n \to 0$ στον $\widetilde{\mathcal{H}}$ και $\lambda_n \to \lambda_0$. Ωστόσο, αυτό είναι αληθές μόνο για $\lambda_0 = \lambda_1$. Συνεπώς, ο κλάδος C_{λ_1} δε διαπερνά το $(\lambda, 0)$ για $\lambda \neq \lambda_1$ και κάθε συνάρτηση που ανήκει σε αυτόν είναι αυστηρά θετική. ■

Πρόταση 4.3.3. *(i) Ο ολικός κλάδος C_{λ_1} κείται δεξιά της λ_1 (*υπερκρίσιμη διακλάδωση*) και είναι φραγμένος για κάθε φραγμένο λ.*
(ii) Κάθε λύση $u \in C_{\lambda_1}$ είναι η μοναδική μη αρνητική λύση του προβλήματος (4.6).

Απόδειξη. (i) Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο C_{λ_1} κείται αριστερά της λ_1. Τότε, υπάρχει ζεύγος $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{H}}$ με $0 < \lambda < \lambda_1$, τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega |x|^{-(N-2)} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega |u|^2 dx - \int_\Omega |x|^{-k} |u|^q dx. \tag{4.17}$$

Από την (4.17), αληθεύει ότι

$$\|u\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} \leq \lambda \|u\|^2_{L^2}, \quad \text{με } \lambda < \lambda_1,$$

το οποίο αντίκειται στον μεταβολικό χαρακτηρισμό της λ_1. Επομένως, ο κλάδος C_{λ_1} κείται δεξιά.

Θεωρούμε την ασθενή μορφή που ικανοποιείται από κάθε $u \in C_{\lambda_1}$, δηλαδή

$$\int_\Omega |x|^{-(N-2)} \nabla u \nabla \psi dx - \lambda \int_\Omega u\psi dx + \int_\Omega |x|^{-k} |u|^q u\psi dx = 0, \tag{4.18}$$

για κάθε $\psi \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Θέτοντας $\psi = u$ στην (4.18) και χρησιμοποιώντας την εμφύτευση (4.3) και την κλασική ανισότητα παρεμβολής για $a \in (0,1)$, έχουμε

$$\begin{aligned} 2\lambda \|\phi\|^2_{L^2} &= 2\lambda \|\phi\|^{2a}_{L^2} \|\phi\|^{2(1-a)}_{L^2} \leq 2\lambda c_1(q,\Omega,a) \|\phi\|^{2a}_{L^q} \|\phi\|^{2(1-a)}_{L^2} \\ &\leq 2\lambda c_2(q,\Omega,a) \|\phi\|^{2a}_{L^q(|x|^{-k})} \|\phi\|^{2(1-a)}_{L^2} \leq 2\lambda c_3(q,\Omega,a) \|\phi\|^{2a}_{L^q(|x|^{-k})} \|\phi\|^{2(1-a)}_{\widetilde{\mathcal{H}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\phi\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} + c_4(\lambda,q,\Omega,a) \|\phi\|^2_{L^q(|x|^{-k})}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

για κάθε $2 < q < \frac{2N-2}{N-2}$, όπου

$$c_4 = c_3^{\frac{1}{a}} a(1-a)^{\frac{1-a}{a}} 2^{\frac{2-a}{a}} \lambda^{\frac{1}{a}}.$$

Από την ανισότητα Young, προκύπτει η εκτίμηση

$$2\lambda \|\phi\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 + \frac{1}{2}\|\phi\|_{L^q(|x|^{-k})}^q + R_1(q,\Omega,\lambda,a), \tag{4.20}$$

όπου

$$R_1(q,\Omega,\lambda,a) = c_4^{\frac{q}{q-2}} \frac{2^{\frac{2}{q-2}}\frac{q-2}{2}}{\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}}}.$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε το φράγμα

$$\|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 \leq 2R_1, \tag{4.21}$$

για κάθε $u \in C_{\lambda_1}$.
(ii) Βλέπε [50, Πρόταση 4.11]. ■

4.4 Ολική Λύση

Στην παρούσα ενότητα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ολικής λύσης, όπως επίσης και την ύπαρξη ολικού ελκυστή για το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα. Αρχικά, θεωρούμε το συναρτησιακό $\mathcal{J} : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως ακολούθως

$$\mathcal{J}(\phi) := \frac{1}{2}\int_\Omega |x|^{-(N-2)}|\nabla\phi|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\phi|^2 dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-k}|\phi|^q dx.$$

Ο γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{L} := -div(|x|^{-(N-2)}\nabla),$$

δέχεται μια αυτοσυζυγή και θετική επέκταση Friedrichs στο πεδίο ορισμού

$$D(\mathcal{L}) = \{\phi \in \widetilde{\mathcal{H}} : \mathcal{L}\phi \in L^2(\Omega)\}.$$

Συνεπώς, ο $\mathcal{L}$ είναι ο γεννήτορας μιας γραμμικής ημιομάδας συστολών $T(t)$ στον $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Ορισμός 4.4.1. *Δοθέντος $\phi_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}$, θεωρούμε ως λύση του προβλήματος (4.1) μια συνάρτηση*

$$\phi \in C([0,T),\widetilde{\mathcal{H}}) \cap C^1([0,T),L^2(\Omega)),$$

που ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(t) = T(t)\phi_0 + \int_0^t T(t-s)(\lambda\phi(s) - |x|^{-k}|\phi(s)|^{q-2}\phi(s)),$$

για κάποιο χρόνο $T = T(\phi_0)$.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $\phi_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Τότε, το πρόβλημα (4.1) επιδέχεται μοναδική, ολική λύση. Επιπλέον, για κάθε λύση $\phi(t)$, το $\mathcal{J}(\phi(\cdot))$ ανήκει στον $C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ και ικανοποιεί τη σχέση*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}(\phi(t)) = -\int_\Omega |\phi_t|^2 dx, \tag{4.22}$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας όμοια επιχειρήματα με αυτά του Λήμματος 4.2.3, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η $f(s) := \lambda s - |x|^{-k}|s|^{q-2}s$ ορίζει μια τοπικά Lipschitz απεικόνιση από τον $\widetilde{\mathcal{H}}$ στον $L^2(\Omega)$. Αυτό είναι επαρκές για την ύπαρξη μοναδικής λύσης ϕ με $\phi(0) = \phi_0$, η οποία είναι ορισμένη σε ένα μέγιστο διάστημα $[0, T_{max})$, όπου $0 < T_{max} \leq \infty$. Θα δείξουμε ότι $T_{max} = \infty$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό $\mathcal{J}$ είναι C^1, όπως προκύπτει από το Λήμμα 4.2.3. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να υϊοθετήσουμε την προσέγγιση των [12, 50] για να αποδείξουμε τη σχέση (4.22) για κάθε $t \in [0, T]$, $T < T_{max}$.

Παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\begin{aligned} < \mathcal{J}'(\phi), div(|x|^{-(N-2)}\nabla\phi) + f(\phi) > &= -\int_\Omega |div(|x|^{-(N-2)}\nabla\phi) + f(\phi)|^2 dx \\ &= -\int_\Omega |\phi_t|^2 dx \leq 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

ισχύει για κάθε $\phi \in D(\mathcal{L})$. Θέτουμε $h(t) := f(\phi(t))$ και θεωρούμε ακολουθίες $h_n(t) \in C^1([0, T], \widetilde{\mathcal{H}})$ και $\phi_{0n} \in D(\mathcal{L})$, τέτοιες ώστε

$$h_n \to h, \quad \text{στον } C^1([0, T], \widetilde{\mathcal{H}}),$$

και

$$\phi_{0n} \to \phi_0, \quad \text{στον } \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Ορίζουμε

$$\phi_n(t) := T(t)\phi_{0n} + \int_0^t T(t-s)h_n(s)ds.$$

Από το [60, Πόρισμα 2.5], γνωρίζουμε ότι $\phi_n(t) \in D(\mathcal{L})$, $\phi_n \in C^1([0, T], \widetilde{\mathcal{H}})$ και, επιπλέον, ικανοποιείται η εξίσωση

$$\partial_t \phi_n + \mathcal{L}\phi_n - h_n = 0.$$

Επίσης, από το [11, Λήμμα 5.5] (βλέπε επίσης [12, Θεώρημα 3.6]), θα είναι

$$\phi_n \to \phi, \quad \text{στον } C([0, T], \widetilde{\mathcal{H}}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\phi_n(t)) - \mathcal{J}(\phi_{0n}) &= \int_0^t < \mathcal{J}'(\phi_n(s)), div(|x|^{-(N-2)}\nabla\phi_n(s)) + h_n(s) > ds \\ &= \int_0^t < \mathcal{J}'(\phi_n(s)), h_n(s) - f(\phi_n(s)) > ds - \int_0^t ||\partial_t\phi_n(s)||_{L^2}^2 ds. \end{aligned}$$

Μεταβαίνοντας στο όριο και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\mathcal{J}$ είναι C^1, προκύπτει η (4.22).

Από το (4.1), συνάγεται η ενεργειακή εξίσωση

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\phi\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |x|^{-(N-2)}|\nabla\phi|^2 dx - \lambda\|\phi\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |x|^{-k}|\phi|^q dx = 0. \tag{4.24}$$

Για $\lambda \leq \lambda_1$ είναι άμεσο το εξής

$$\limsup_{t\to\infty} \|\phi\|_{L^2}^2 = 0. \tag{4.25}$$

λόγω της (4.9). Για την περίπτωση $\lambda > \lambda_1$, εισάγοντας την (4.19) στην (4.24), προκύπτει το ακόλουθο

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\phi\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 + \lambda\|\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\phi\|_{L^q(|x|^{-k})}^q \le R_1.$$

Τότε, από το Λήμμα Gronwall,

$$\|\phi(t)\|_{L^2}^2 \le \|\phi(0)\|_{L^2}^2 \exp(-2\lambda t) + \frac{R_1}{\lambda}(1-\exp(-2\lambda t)). \tag{4.26}$$

Θεωρώντας $t \to +\infty$, έχουμε

$$\limsup_{t\to\infty}\|\phi(t)\|_{L^2}^2 \le d^1, \quad d^2 := \frac{R_1}{\lambda}. \tag{4.27}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η ϕ_0 ανήκει σε ένα φραγμένο σύνολο $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$. Τότε, από την (4.27), για κάθε $d_1 > d$, υπάρχει $t_0(\mathcal{B}, d_1) > 0$, τέτοιο ώστε

$$\|\phi(t)\|_{L^2}^2 \le d_1^2, \tag{4.28}$$

για κάθε $t \ge t_0$. Από τον ορισμό του συναρτησιακού $\mathcal{J}$ και την (4.28), λαμβάνουμε

$$\mathcal{J}(\phi(t)) \ge \frac{1}{2}\|\phi(t)\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 - \frac{\lambda}{2}d_1^2, \quad t \ge t_0.$$

Αφού το $\mathcal{J}$ φθίνει ως προς t, συμπεραίνουμε

$$\|\phi(t)\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 \le 2\mathcal{J}(\phi_0) + \lambda d_1^2, \quad t \ge t_0,$$

και τελικά, κάθε λύση ορίζεται ολικά στον $\widetilde{\mathcal{H}}$ για κάθε $\lambda > \lambda_1$. ∎

Θεώρημα 4.4.3. *Το πρόβλημα (4.1) ορίζει μια ημιροή*

$$\mathcal{S}(t) : \widetilde{\mathcal{H}} \to \widetilde{\mathcal{H}},$$

για την οποία υπάρχει ολικός ελκυστής $\mathcal{A}$. Έστω $\mathcal{E}$, το σύνολο των σημείων ισορροπίας της $\mathcal{S}(t)$. Αν το $\mathcal{E}$ είναι αριθμήσιμο, τότε το όριο

$$z_+ := \lim_{t\to\infty}\phi(t),$$

υπάρχει και είναι σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, κάθε λύση του (4.1) τείνει σε ένα σημείο ισορροπίας καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\phi_0 \in \mathcal{B}(0, R)$, όπου $\mathcal{B}(0, R)$ είναι μια κλειστή μπάλα του $\widetilde{\mathcal{H}}$, κέντρου 0 και αντίνας R. Τότε, από το Λήμμα 4.2.3, υπάρχει σταθερά $c(R) > 0$, τέτοια ώστε $\mathcal{J}(\phi_0) \le c(R)$. Συνεπώς, από την (4.28), η $\mathcal{S}(t)$ είναι τελικά φραγμένη. Το επιλύον σύνολο του τελεστή $\mathcal{L}$ είναι συμπαγές, οπότε η $\mathcal{S}(t)$ είναι απόλυτα συνεχής για $t > 0$, άρα ασυμπτωτικά ομαλή. Το κριτήριο ισοδυναμίας [12, Πρόταση 2.3] συνεπάγεται ότι η $\mathcal{S}(t)$ είναι ασυμπτωτικά συμπαγής. Η θετική τροχιά $\gamma^+(\phi_0)$ είναι σχετικά συμπαγής και έχει ένα μη κενό συμπαγές, συνεκτικό και αναλλοίωτο σύνολο $\omega(\phi_0)$. Από την (4.22) και τη συνέχεια της $\mathcal{S}(t)$ έπεται ότι $\omega(\phi_0) \subseteq \mathcal{E}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $\mathcal{S}(t)$ είναι σημειακά εκλυτική. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{E}$ είναι φραγμένο. Πράγματι, κάθε σημείο ισορροπίας της $\mathcal{S}(t)$ αποτελεί ακρότατο του συναρτησιακού $\mathcal{J}$, ισοδύναμα ικανοποιεί την (4.18) και άρα είναι φραγμένο στον $\widetilde{\mathcal{H}}$, όπως προκύπτει από την (4.21). ∎

4.5 Ασυμπτωτική Ανάλυση

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.3, για κάθε $\lambda > \lambda_1$, υπάρχει μοναδικό μη αρνητικό σημείο ισορροπίας για την ημιροή $\mathcal{S}(t)$. Λαμβάνοντας υπόψιν το Θεώρημα 4.4.3, θα αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Λήμμα 4.5.1. *Το σύνολο*

$$\mathcal{D}_+ := \{\phi \in \widetilde{\mathcal{H}} : \phi(x) \geq 0 \text{ στο } \overline{\Omega}\},$$

είναι θετικά αναλλοίωτο για την ημιροή $\mathcal{S}(t)$.

Απόδειξη. Έστω $\phi_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}$, $\phi_0 \geq 0$ σχεδόν παντού στο Ω και

$$\phi \in C([0,\infty), \widetilde{\mathcal{H}}) \cap C^1C([0,\infty), L^2(\Omega)),$$

η αντίστοιχη ολική λύση του (4.1). Θέτουμε $\phi^+ := \max\{\phi, 0\}$ και $\phi_- := -\min\{\phi, 0\}$, οι οποίες είναι μη αρνητικές. Τότε,

$$\phi^+, \phi_- \in C([0,\infty), \widetilde{\mathcal{H}}) \cap C^1C([0,\infty), L^2(\Omega)),$$

και $\phi = \phi^+ - \phi^-$. Από το (4.1), η ϕ^- ικανοποιεί την εξίσωση

$$\partial_t \phi^- - div(|x|^{-(N-2)}\nabla\phi^-) - \lambda|x|^{-r}\phi^- + |x|^{-k}|\phi|^{q-2}\phi^- = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με ϕ^- και ολοκληρώνοντας στο $\Omega\backslash B_\varepsilon$, λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(0))} |\phi^-|^2 dx \leq -c(\lambda_1 - \lambda)\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(0))} |\phi^-|^2 dx, \tag{4.29}$$

για κάποια θετική σταθερά c. Εφαρμόζοντας το Λήμμα Gronwall και μεταβαίνοντας στο όριο $\varepsilon \downarrow 0$, καταλήγουμε στο εξής

$$\left\|\phi^-(t)\right\|_{L^2}^2 = 0, \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty),$$

δηλαδή η λύση είναι σχεδόν παντού θετική στο Ω. ■

Με την ίδια διαδικασία, το ακόλουθο είναι άμεσο.

Πόρισμα 4.5.2. *Το σύνολο*

$$\mathcal{D}_- := \{\phi \in \widetilde{\mathcal{H}} : \phi(x) \leq 0 \text{ στο } \overline{\Omega}\},$$

είναι θετικά αναλλοίωτο για την ημιροή $\mathcal{S}(t)$.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, εφαρμόζοντας βασικά εργαλεία από τη θεωρία γραμμικοποίησης.

Πρόταση 4.5.3. *Για κάθε $\lambda > \lambda_1$, το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η γραμμικοποιημένη ημιροή γύρω από τη μηδενική λύση προσδιορίζεται από το ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} \psi_t = div(|x|^{-(N-2)}\nabla\psi) + \lambda\psi, & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \psi(0) = \psi_0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

Προφανώς, για κάθε $\lambda < \lambda_1$, η τετριμμένη λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής στον $\widetilde{\mathcal{H}}$. Από την άλλη, η γραμμικοποίηση γύρω από τη μη αρνητική στάσιμη λύση u οδηγεί στο εξής πρόβλημα

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi_t = div(|x|^{-(N-2)}\nabla\psi) + \lambda\psi - (q-1)|x|^{-k}|u|^{q-2}\psi, & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \psi(0) = \psi_0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4.31}$$

Θα διαπιστώσουμε ότι η u είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Γι΄ αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το μηδέν δεν αποτελεί ιδιοτιμή του ακόλουθου προβλήματος

$$\left\{\begin{array}{ll} -div(|x|^{-(N-2)}\nabla\psi) = \lambda\psi - (q-1)|x|^{-k}|u|^{q-2}\psi + \rho\psi, & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.32}$$

για κάθε $\lambda > \lambda_1$ σταθερό. Η ασθενής διατύπωση του (4.32) είναι επακριβώς

$$\begin{aligned} A(\psi,\omega) &:= \int_\Omega |x|^{-(N-2)}\nabla\psi\nabla\omega dx - \lambda\int_\Omega \psi\omega dx + (q-1)\int_\Omega |x|^{-k}|u|^{q-2}\psi\omega dx \\ &= \rho\int_\Omega \psi\omega dx, \end{aligned} \tag{4.33}$$

για κάθε $\omega \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Η συμμετρική διγραμμική μορφή $A : \widetilde{\mathcal{H}} \times \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ ορίζει μια κανονική μορφή Garding, αφού

$$A(\psi,\psi) \geq \|\psi\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} - \lambda\,\|\psi\|^2_{L^2}.$$

Τότε, από το Θεώρημα 2.6.4, το πρόβλημα έχει μια ακολουθία ιδιοτιμών

$$-\lambda < \rho_1 \leq \rho_2 \leq ...,$$

όπου $\rho_n \to +\infty$, καθώς $n \to +\infty$. Χρησιμοποιώντας όμοια επιχειρήματα με αυτά του Λήμματος 4.3.1, βλέπουμε ότι η ιδιοσυνάρτηση ψ_1, που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή ρ_1, είναι μη αρνητική. Εφόσον το ιδιοζεύγος ικανοποιεί την εξίσωση (4.33), θέτοντας $\omega = u$, βρίσκουμε

$$\int_\Omega |x|^{-(N-2)}\nabla\psi_1\nabla u dx - \lambda\int_\Omega \psi_1 u dx + (q-1)\int_\Omega |x|^{-k}|u|^{q-2}\psi_1 u dx = \rho_1\int_\Omega \psi_1 u dx. \tag{4.34}$$

Θεωρώντας την (4.18) με $\psi = \psi_1$ και αφαιρώντας από την (4.34), καταλήγουμε στην

$$(q-2)\int_\Omega |x|^{-k}|u|^{q-2}\psi_1 u dx = \rho_1\int_\Omega u\psi_1 dx,$$

που σημαίνει ότι $\rho_1 > 0$, εφόσον $q > 2$. ■

Αναζητώντας μη θετικές στάσιμες λύσεις $u = -u_-$ με $u_- \geq 0$, είναι προφανές ότι η u_- ικανοποιεί το πρόβλημα (4.6). Επομένως, το Θεώρημα 4.3.2 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ακολούθως:

Θεώρημα 4.5.4. *Η πρωτεύουσα ιδιοτιμή λ_1 του προβλήματος (4.8) ορίζει ένα σημείο διακλάδωσης για το πρόβλημα (4.6) (κατά Rabinowitz) και τα σύνολα C_{λ_1}, $C^-_{\lambda_1}$ ορίζουν ολικούς κλάδους μη αρνητικών και μη θετικών $\widetilde{\mathcal{H}}$-λύσεων, αντίστοιχα, οι οποίοι κείνται δεξιά της λ_1. Για κάθε $\lambda > \lambda_1$, κάθε $u \in C_{\lambda_1}$ και $u_- \in C^-_{\lambda_1}$ αποτελεί τη μοναδική μη αρνητική και μη θετική λύση του προβλήματος (4.6), αντίστοιχα, ενώ $u_- = -u$.*

Θεώρημα 4.5.5. *Αν $\phi_0 \geq 0$ (≤ 0) σχεδόν παντού στο Ω, τότε κάθε ολική λύση $\phi(t)$ του (4.1) τείνει είτε στην τετριμμένη λύση, είτε στο μοναδικό και μη αρνητικό (μη θετικό) σημείο ισορροπίας, καθώς $t \to \infty$.*

Απόδειξη. Η ιδιότητα της θετικότητας (αρνητικότητας) στο Λήμμα 4.5.1 (Πόρισμα 4.5.2) σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.4.3 συνεπάγονται ότι κάθε λύση $\phi(t)$ συγκλίνει στο σύνολο των μη αρνητικών (μη θετικών) λύσεων της (4.6) καθώς $t \to \infty$, στον $\widetilde{\mathcal{H}}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.5.3, για την περίπτωση $\lambda > \lambda_1$, προκύπτει ότι $\omega(\phi_0) = \{u\}$ ($= \{u_-\}$), για κάθε μη αρνητική (μη θετική) συνθήκη ϕ_0. Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό (4.25), εύκολα βλέπουμε ότι στην περίπτωση $\lambda < \lambda_1$, ισχύει

$$dist(\mathcal{S}(t)\mathcal{B}, \{0\}) \to 0, \quad \text{καθώς } t \to \infty,$$

για κάθε φραγμένο σύνολο $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο ολικός ελκυστής ανάγεται στο $\{0\}$. ■

Παρατήρηση 4.5.6. *Με την παραπάνω θεώρηση, είναι δυνατή η πλήρης εποπτεία της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων για το δυναμικό σύστημα που επάγει το πρόβλημα (4.1). Πράγματι, για κάθε ϕ_0, η αντίστοιχη ολική λύση συγκλίνει σε μια από τις λύσεις ισορροπίας u ή u_-, ανάλογα με το πρόσημο της αρχικής συνθήκης. Επιπλέον, η μεταβολή του τύπου ευστάθειας της τετριμμένης λύσης παραπέμπει στην εμφάνιση διακλάδωσης τύπου υπερκρίσιμης τρίαινας (supercritical pitchfork bifurcation).*

Κεφάλαιο 5

Εξίσωση Schrödinger και Δυναμικό Hardy: Τροχιακή Ευστάθεια

Στο παρόν κεφάλαιο, διερευνάται η ιδιότητα της τροχιακής ευστάθειας για τη σχεδόν γραμμική εξίσωση Schrödinger, η οποία είναι εφοδιασμένη με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου και τη βέλτιστη σταθερά της ανισότητας Hardy. Στην πρώτη ενότητα, διατυπώνονται οι παράμετροι του προβλήματος και γίνεται μια σύντομη αναφορά στα υπάρχοντα αποτελέσματα. Στη δεύτερη ενότητα, δομείται το συναρτησιακό πλαίσιο της εξίσωσης. Στην τρίτη ενότητα, αποδεικνύονται η ύπαρξη και η ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων για την περίπτωση των ακτινικά συμμετρικών λύσεων. Επίσης, προσδιορίζεται η ακριβής ασυμπτωτική συμπεριφορά των στάσιμων κυμάτων γύρω από την αρχή, η οποία έχει ως συνέπεια την εμφάνιση ενέργειας τύπου Hardy. Ακόμη, διατυπώνεται ένα πρόβλημα στο οποίο ο επιδιορθωτικός ενεργειακός όρος δρα κατά τρόπο αθροιστικό στη συνολική ενέργεια. Τέλος, στην τέταρτη ενότητα, αποδεικνύεται η τροχιακή ευστάθεια για τη μη συμμετρική περίπτωση.

5.1 Το Πρόβλημα

Θεωρούμε το σχεδόν γραμμικό πρόβλημα

$$
\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{\psi}{|x|^2} + |\psi|^{q-2}\psi = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \tag{5.1}
$$

όπου $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, $N \geq 3$ και $2 < q < \frac{4}{N} + 2$. Αρχικά, δείχνουμε την ύπαρξη λύσεων της μορφής

$$\psi(x,t) = e^{i\lambda t}u(x),$$

όπου $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Οι λύσεις αυτού του τύπου ονομάζονται *στάσιμα κύματα (standing waves)* ή *λύσεις εντοπισμού (localized solutions)*. Κατόπιν, αποδεικνύουμε την (τοπική) ευστάθεια, με μια εύλογη έννοια, για μια κλάση στάσιμων κυμάτων.

Προφανώς, η αναζήτηση στάσιμων κυμάτων ανάγεται στη μελέτη της ελλειπτικής εξίσωσης

$$-\Delta u - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 u + \lambda u - |u|^{q-2}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.2}$$

Είναι γνωστό ότι η κλασική ανισότητα Hardy,

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 3,$$

συνδέεται άρρηκτα με στάσιμα και εξελικτικά προβλήματα που περιέχουν δυναμικά αντίστροφου τετραγώνου. Η δε βέλτιστη σταθερά $c_* = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$, αποτελεί το φυσικό όριο που διαχωρίζει την ύπαρξη από τη μη ύπαρξη. Στην εργασία [76] των Vázquez και Zuazua, η εξίσωση θερμότητας με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου,

$$u_t = \Delta u + \frac{c}{|x|^2}u,$$

επιδέχεται ολική λύση σε κλασικούς χώρους για $c < c_*$, τόσο στη φραγμένη όσο και τη μη φραγμένη περίπτωση. Από την άλλη μεριά, δε μπορούν να οριστούν λύσεις για $c > c_*$ (ούτε καν τοπικές ως προς το χρόνο), λόγω της ακαριαίας έκρηξής τους (instantaneous blow-up). Στην κρίσιμη περίπτωση $c = c_*$ είναι δυνατός ο ορισμός μιας ολικής λύσης, όμως το συναρτησιακό πλαίσιο καταλήγει να είναι πιο σύνθετο (βλ. [74, 75, 76]).

Σχετικά με τον τελεστή Schrödinger, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου,

$$H_c := -\Delta - c|x|^{-2},$$

η βιβλιογραφία είναι ικανοποιητικά εκτενής. Απομονώνοντας το στάσιμο πρόβλημα, θα αναφερθούμε σε μια σειρά εργασιών που σχετίζονται με τη σχεδόν γραμμική εξίσωση

$$H_c = f(x,u).$$

Στην εργασία [37], παρουσιάζονται αποτελέσματα ύπαρξης, μοναδικότητας και ομαλότητας για την περίπτωση $0 < c \leq c_*$ και αφορούν διαφορετικούς τύπους λύσεων. Το χωρίο είναι φραγμένο και περιέχει την αρχή, ενώ η μη γραμμικότητα είναι της μορφής $f(x,u) = u^q + tg(x)$, όπου το δυναμικό g είναι ομαλό και φραγμένο, και η παράμετρος t είναι θετική. Η περίπτωση $t = 0$ πάνω σε μια μπάλα του $\mathbb{R}^N$ εμφανίζεται στην [18].

Στην αυστηρά υποκρίσιμη περίπτωση $c \in (0, c_*)$, αναφέρουμε ενδεικτικά το αποτέλεσμα ύπαρξης στον $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ της εργασίας [69], για τη μη γραμμικότητα $f(x,u) = u^{\frac{N+2}{N-2}}$. Επίσης, σημειώνουμε την [64] που οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα μη ύπαρξης για $c \geq c_*$, στην περίπτωση $f(x,u) = K(x)u^{\frac{N+2}{N-2}}$, όπου το βάρος $K(x)$ είναι θετικό και φραγμένο. Στην [36], προκύπτει ένα αποτέλεσμα ύπαρξης στον $H^1(\mathbb{R}^N)$, όπου $f(x,u) = a(x)u + |u|^{\frac{4}{N-2}}u + g(x,u)$ για συναρτήσεις a, g που ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες αύξησης. Εκτιμήσεις για τον πυρήνα της ημιομάδας e^{-tH_c}, $0 < c < c_*$ (kernel estimates), μπορούν να βρεθούν στην [34]· βλέπε επίσης [14] για την κρίσιμη περίπτωση του δυναμικού. Ανάλογα αποτελέσματα του πυρήνα Schrödinger για την περίπτωση του τελεστή Laplace-Beltrami σε μια πολλαπλότητα Riemman βρίσκονται στην [82]. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά για το μαγνητικό τελεστή Schrödinger με κρίσιμο δυναμικό εμφανίζεται στην [24]. Επίσης, αναφέρουμε την εργασία [4] πάνω στη φασματική ανάλυση στο χώρο $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ του τελεστή

$$L_{q,\eta}u := -\Delta u - c_* \frac{qu}{|x|^2} - \eta u,$$

για κατάλληλες συναρτήσεις $0 \leq q \leq 1$ και η. Τέλος, στην εργασία [38] παρουσιάζονται εκτιμήσεις επί των ροπών των αρνητικών ιδιοτιμών του τελεστή Schrödinger στην κρίσιμη περίπτωση.

Στην εργασία [66], αποδεικνύεται η ύπαρξη ακτινικά συμμετρικών λύσεων που ελαχιστοποιούν μια ορισμένη ποσότητα (ground states) για την ακόλουθη σχεδόν γραμμική εξίσωση

$$-\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)u^{p-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.3}$$

όπου το δυναμικό $V(|x|)$ είναι μη αρνητικό και επιτρέπεται να είναι ιδιόμορφο στην αρχή μέχρι τάξεως $|x|^{-s}$, $s \in [2, N)$. Ισοδύναμα αποτελέσματα, για μια εξίσωση ανάλογη της (5.3) που, όμως, καθοδηγείται από την p-Λαπλασιανή, υπάρχουν στην εργασία [67]. Και στις δύο περιπτώσεις, η προσέγγιση θεμελιώνεται στην απόδειξη συμπαγών εμφυτεύσεων για κατάλληλους σταθμισμένους χώρους Sobolev. Επίσης, αναφέρουμε τη μεταβολική προσέγγιση της [32] για την περίπτωση $V(|x|) \geq -(c_* - \alpha)|x|^{-2}$, $\alpha > 0$, όπου $V(|x|)|x|^2 \to +\infty$, οποτεδήποτε $|x| \to 0$ ή $|x| \to \infty$. Τέλος, στην [15], εμφανίζεται η περίπτωση ενός μη αρνητικού δυναμικού $V(|x|) = l^2|x|^{-2} + |x|^{-a}$, όπου $a > 0$ και $l \in \mathbb{Z}$.

Οι μη γραμμικές εξισώσεις της μορφής

$$i\psi_t + \Delta\psi + V(x)\psi + f(x, \psi) = 0, \tag{5.4}$$

προκύπτουν σε διάφορα πεδία της μαθηματικής φυσικής (βλέπε π.χ. [62] και τις αντίστοιχες αναφορές). Σε πολλές περιπτώσεις, η γνώση της τροχιακής ευστάθειας (ή αστάθειας) αποτελεί, ενδεχομένως, τη μοναδική πληροφορία σχετικά με τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά των λύσεων ενός συστήματος που καθοδηγείται από την εξίσωση Schrödinger. Στη συνέχεια, αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που σχετίζονται με την ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων για την εξίσωση (5.4). Η περίπτωση $V(x) \equiv 0$ εντοπίζεται στην κλασική εργασία των Cazenave και Lions, [27] (βλέπε επίσης [63]). Στην ίδια εργασία, περιλαμβάνεται μια εξίσωση τύπου Hartree, εφοδιασμένη με ένα δυναμικό της μορφής $V(x) = \sum_1^m \frac{c_i}{|x-x_i|}$, όπου $c_1, ..., c_m$ και $x_1, ..., x_m$ είναι θετικές σταθερές και δοθέντες πόλοι, αντίστοιχα. Η περίπτωση $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ μπορεί να βρεθεί στις [16, 62]. Τονίζουμε ιδιαίτερα την εργασία [41] όπου, μεταξύ άλλων, αποδεικνύεται η ύπαρξη και η ευστάθεια για ένα δυναμικό που συμπεριφέρεται όπως η $|x|^{-b}$, $b \in (0, 2)$, στο άπειρο. Στις εργασίες [35, 42, 48], αποδεικνύεται η τροχιακή ευστάθεια για μη γραμμικότητες της μορφής $f(x, \psi) = Q(x)|\psi|^{p-1}\psi$, όπου το βάρος Q επιτρέπεται να παρουσιάζει ιδιομορφία της τάξεως $|x|^{-b}$, $b \in (0, 2)$. Παραδείγματα ιδιομορφιών στο άπειρο μπορούν να βρεθούν στις [28, 29], όπου διατυπώνονται αποτελέσματα αστάθειας για το αρμονικό δυναμικό $V(x) = |x|^2$. Τέλος, στην [46] βρίσκεται ένα παράδειγμα ημιγραμμικής εξίσωσης.

5.2 Συναρτησιακή Τοποθέτηση

Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ την πλήρωση των $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-συναρτήσεων υπό τη νόρμα

$$\|v\|_{\mathcal{H}}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|\nabla v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|v|^2 dx. \tag{5.5}$$

Στη συνέχεια, ο $\mathcal{H}$ θα θεωρείται ένας πραγματικός χώρος Hilbert, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(v_1, v_2)_{\mathcal{H}} := \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} \nabla v_1 \cdot \overline{\nabla v_2} dx + \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} v_1 \overline{v_2} dx. \tag{5.6}$$

Λήμμα 5.2.1. *Κάθε συνάρτηση v, τέτοια ώστε $\|v\|_{\mathcal{H}} < \infty$, ανήκει στον $\mathcal{H}$.*

Απόδειξη. Εργαζόμαστε όπως στο Κεφάλαιο 3. Αρχικά, δείχνουμε το αποτέλεσμα για $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εισάγουμε τη συνάρτηση $\rho_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})$, $0 \leq \rho_\varepsilon(t) \leq 1$, η οποία ορίζεται ως εξής

$$\rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \varepsilon^2, \\ (\log 1/\varepsilon)^{-1} \log t/\varepsilon^2, & \varepsilon^2 < t < \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon < t < \frac{1}{\varepsilon}, \\ (\log \varepsilon)^{-1} \log t\varepsilon^2, & \frac{1}{\varepsilon} < t < \frac{1}{\varepsilon^2}, \\ 0, & t > 1/\varepsilon^2. \end{cases}$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, για την οποία $\|v\|_{\mathcal{H}} < \infty$, και ορίζουμε $v_\varepsilon(x) := \rho_\varepsilon(|x|)v(x)$. Παρατηρούμε ότι

$$|\nabla \rho_\varepsilon(|x|)| = \frac{c_\varepsilon}{|x|}, \qquad c_\varepsilon := \left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-1},$$

για κάθε $x \in A_\varepsilon \cup A_{\frac{1}{\varepsilon}}$, όπου $A_\varepsilon := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon^2 < |x| < \varepsilon\right\}$ και $A_{\frac{1}{\varepsilon}} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon^{-1} < |x| < \varepsilon^{-2}\right\}$, ενώ είναι μηδέν σε κάθε άλλο σημείο. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v\|_{\mathcal{H}}^2 \leq\ & 2\int_{A_\varepsilon \cup A_{\frac{1}{\varepsilon}}} |x|^{-(N-2)}|\nabla \rho_\varepsilon(|x|)|^2 v^2 dx \\ & + 2\int_{B_\varepsilon \cup B^c_{\frac{1}{\varepsilon}}} |x|^{-(N-2)}(1-\rho_\varepsilon)^2(|\nabla v|^2 + |v|^2) dx. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Θα δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (5.7) τείνουν στο μηδέν, καθώς $\varepsilon \downarrow 0$. Για το πρώτο, που είναι πιο απαιτητικό, έχουμε

$$\int_{A_\varepsilon} |x|^{-(N-2)}|\nabla \rho_\varepsilon(|x|)|^2 v^2 dx \leq c\|v\|_\infty^2 \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} c_\varepsilon^2 r^{-1} dr = c\|v\|_\infty^2 (\log(1/\varepsilon))^{-1},$$

και

$$\int_{A_{1/\varepsilon}} |x|^{-(N-2)}|\nabla \rho_\varepsilon(|x|)|^2 v^2 dx c\|v\|_\infty^2 \int_{\varepsilon^{-1}}^{\varepsilon^{-2}} c_\varepsilon^2 r^{-1} dr = c\|v\|_\infty^2 (\log(1/\varepsilon))^{-1},$$

τα οποία τείνουν στο μηδέν καθώς $\varepsilon \downarrow 0$. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι κάθε συνάρτηση v, τέτοια ώστε $\|v\|_{\mathcal{H}} < \infty$, μπορεί να προσεγγισθεί από μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων στον $\mathcal{H}$. Πράγματι, θεωρώντας τη συνάρτηση v_n που ορίζεται ως εξής

$$v_n(x) = v(x), \text{ αν } |v(x)| \leq n, \quad \text{και} \quad v_n(x) = n, \text{ αν } |v(x)| > n,$$

προκύπτει ότι

$$\|v_n - v\|_{\mathcal{H}} = \int_{C_n} |x|^{-(N-2)}|\nabla v|^2 dx + \int_{C_n} |x|^{-(N-2)}|v|^2 dx < \infty.$$

όπου τα σύνολα

$$C_n := \left\{x \in \mathbb{R}^N : |v(x)| > n\right\},$$

ορίζουν μία φθίνουσα ακολουθία με μέτρο που τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο ολοκληρώματα τείνουν στο μηδέν καθώς $n \to \infty$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $u = \mathcal{T}(v)$ όπως ορίστηκε στην (3.40), ο οποίος αποτελεί μια ισομετρία ανάμεσα στους χώρους $X = L^2(\mathbb{R}^N)$ και $\widetilde{X} = L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$, $d\mu = |x|^{-N+2}dx$. Ακολουθώντας την προσέγγιση της Ενότητας 2.4 στην [74], προκύπτει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός:

Πρόταση 5.2.2. *Το σύνολο $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ είναι πυκνό στους χώρους $\mathcal{H}$ και H.*

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_H, \quad \text{για κάθε } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}),$$

δηλαδή, οι δύο χώροι ταυτίζονται. Εντούτοις, σύμφωνα με την επιχειρηματολογία της ίδιας εργασίας, η νόρμα πρέπει να οριστεί διαφορετικά πάνω στις μη ομαλές συναρτήσεις. Η ορθή ενεργειακή νόρμα διατυπώνεται ως εξής:

$$\|u\|_H^2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(I_{B_\varepsilon^c}(u) - \Lambda_\varepsilon(u)\right) + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.8}$$

όπου

$$I_{B_\varepsilon^c}(u) := \int_{B_\varepsilon^c} |\nabla u|^2 dx - c_* \int_{B_\varepsilon^c} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx,$$

είναι το συναρτησιακό Hardy στο εξωτερικό της μπάλας B_ε^c και

$$\Lambda_\varepsilon(u) = \frac{N-2}{2}\varepsilon^{-1} \int_{S_\varepsilon} |u|^2 dS,$$

είναι η ενέργεια Hardy γύρω από την ιδιομορφία.

5.3 Η Συμμετρική Περίπτωση

Συμβολίζουμε με $\mathcal{H}_r$ τον υπόχωρο του $\mathcal{H}$ που περιέχει τις ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις.

Λήμμα 5.3.1. *Η εμφύτευση*

$$\mathcal{H}_r \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-q\frac{N-2}{2}} dx),$$

είναι συμπαγής για κάθε $2 < q < 2^*$.

Απόδειξη. Έστω $v_n(r)$, $r = |x|$, μια φραγμένη ακολουθία από $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$-συναρτήσεις στον $\mathcal{H}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $v_n \rightharpoonup 0$ στον $\mathcal{H}$. Θα δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v_n|^q dx = \int_{B_1} |x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v_n|^q dx + \int_{B_1^c} |x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v_n|^q dx \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$.
Ισχυρισμός: $v_n \in H^1(B_1 \subset \mathbb{R}^2)$. Πράγματι, αυτό προκύπτει από την ισοδυναμία

$$\|v_n\|^2_{\mathcal{H}(B_1)} \sim \int_0^1 r|v_n'|^2 dr + \int_0^1 r|v_n|^2 dr.$$

Από τη συμπαγή εμφύτευση

$$H^1(B_1 \subset \mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(B_1 \subset \mathbb{R}^2), \quad p \in [1, +\infty),$$

θα είναι

$$\int_{B_1} |x|^{-(N-2)}|v_n|^p dx \to 0, \quad \text{για κάθε } p \in [1, +\infty),$$

καθώς $n \to \infty$. Τότε, για p επαρκώς μεγάλο,

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |x|^{-\frac{N-2}{2}q}|v_n|^q dx &= \int_{B_1} |x|^{-(N-2)\frac{p-2}{2p}q}||x|^{-\frac{N-2}{p}}v_n|^q dx \\ &\leq \left(\int_{B_1} |x|^{-(N-2)\frac{p-2}{2(p-q)}q} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_{B_1} |x|^{-(N-2)}|v_n|^p\right)^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους είναι πεπερασμένο για κάθε $2 < q < 2^*$. Επομένως,

$$\int_{B_1} |x|^{-\frac{N-2}{2}q}|v_n|^q dx \to 0, \quad \text{καθώς } n \to +\infty. \tag{5.9}$$

Συμβολίζουμε με $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ τον υπόχωρο του $H^1(\mathbb{R}^2)$ που περιέχει τις ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις. Για το δεύτερο ολοκήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία των νορμών των χώρων $\mathcal{H}_r$ και $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ σε συνδυασμό με την ακόλουθη συμπαγή εμφύτευση

$$H_r^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{για κάθε } 2 < q < 2^*.$$

Τότε, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|v_n|^q dx \to 0,$$

και τελικά

$$\int_{B_1^c} |x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v_n|^q dx \leq \int_{B_1^c} |x|^{-(N-2)}|v_n|^q dx \to 0,$$

καθώς $n \to +\infty$. ∎

Προφανώς, το αποτέλεσμα ισχύει και σε όρους u, δηλαδή η εμφύτευση

$$H_r \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad 2 < q < 2^*,$$

είναι συμπαγής, όπου H_r είναι ο υπόχωρος του H με τις ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις.
Στο επόμενο θεώρημα, διατυπώνουμε ένα αποτέλεσμα που θεωρείται κλασικό στην περιοχή των ανισοτήτων παρεμβολής με βάρος.

Θεώρημα 5.3.2. *(Ανισότητα Caffarelli-Kohn-Nirenberg, [22]) Υποθέτουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί $p, q, r, \alpha, \beta, \sigma$ και a ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες*

$$p, q \geq 1, \quad r > 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{N}, \quad \frac{1}{q} + \frac{\beta}{N}, \quad \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{N} > 0, \tag{5.11}$$

όπου

$$\gamma = a\sigma + (1-a)\beta. \tag{5.12}$$

Τότε, υπάρχει θετική σταθερά C για την οποία η ακόλουθη ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\gamma r} |v|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha p} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\beta q} |v|^q dx \right)^{\frac{1-a}{q}}, \tag{5.13}$$

αληθεύει για κάθε $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{N} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N} \right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{N} \right), \tag{5.14}$$

$$0 \leq \alpha - \sigma, \quad \text{αν } a > 0,$$

και

$$\alpha - \sigma \leq 1, \quad \text{αν } a > 0 \text{ και } \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{N} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{N}. \tag{5.15}$$

Στην κρίσιμη περίπτωση $\alpha = \beta = \gamma = -\frac{N-2}{2}$, ισχύει το ακόλουθο:

Πόρισμα 5.3.3. *Έστω $2 < q < 2^*$, $N \geq 3$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} |v|^q dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} |v|^2 dx \right)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}},$$

για κάθε $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

5.3α΄ Ολική Λύση

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε την ορθή τοποθέτηση του προβλήματος (5.1). Αρχικά, δείχνουμε την τοπική ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων εντός του ενεργειακού χώρου H_r. Στη συνέχεια, ακολουθεί η ολική ύπαρξη χρησιμοποιώντας εκ των προτέρων εκτιμήσεις (a priori estimates).

Κατ΄ αρχάς, καθιστούμε σαφή την έννοια της λύσης.

Ορισμός 5.3.4. *Έστω $\psi_0 \in H_r$ και $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα που περιέχει το μηδέν.*
(i) Με τον όρο ασθενής λύση, εννοούμε μια συνάρτηση

$$u \in L^\infty(I, H_r) \cap W^{1,\infty}(I, H_r^{-1}),$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$i\psi_t + \Delta\psi + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{\psi}{|x|^2} + |\psi|^{q-2}\psi = 0, \quad \text{στον } H^{-1}, \tag{5.16}$$

σχεδόν παντού στο I, και τη συνθήκη $\psi(0)=\psi_0$.
(ii) Με τον όρο λύση, εννοούμε μια συνάρτηση

$$u \in C(I, H_r) \cap C^1(I, H_r^{-1}),$$

η οποία ικανοποιεί την εξίσωση (5.16) στον H_r^{-1}, για κάθε $t \in I$, και τη συνθήκη $\psi(0)=\psi_0$.

Θέτουμε $f(s) := |s|^{q-2}s$ και $F(u) := \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{|u|} f(s)dsdx$. Είναι εμφανές ότι

$$f = F', \quad \text{και} \quad F \in C^1(H_r, \mathbb{R}). \tag{5.17}$$

Ακριβέστερα, $f \in C(H, H^{-1})$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για κάθε $r \in [2, 2^*)$ και $M < \infty$, υπάρχει $C(M) < \infty$, τέτοιο ώστε

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^N)} \leq C(M)\|u - v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.18}$$

για κάθε $u, v \in H$ με $\|u\|_H + \|v\|_H \leq M$. Επίσης, ορίζουμε την *ενέργεια* E ως ακολούθως

$$E(u) := \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(I_{B_\varepsilon^c}(u) - \Lambda_\varepsilon(u)) - F(u), \quad \text{για κάθε } u \in H.$$

Παρατήρηση 5.3.5. *Για κάθε $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$, ισχύει η ισοδυναμία*

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v|^q dx.$$

Τα δύο επόμενα λήμματα είναι απαραίτητα για την απόδειξη της τοπικής ύπαρξης μιας ασθενούς λύσης.

Λήμμα 5.3.6. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Τότε, για κάθε $u \in L^\infty(I, H_r) \cap W^{1,\infty}(I, H_r^{-1})$, αληθεύει ότι*

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|t-s|^{1/2}, \tag{5.19}$$

για κάθε $t, s \in I$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί βήμα προς βήμα τα επιχειρήματα του [25, Λήμμα 3.3.6] για τον χώρο H_r. ■

Λήμμα 5.3.7. *Υπάρχει σταθερά $C(M) > 0$, τέτοια ώστε*

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^{\rho'}(\mathbb{R}^N)} \leq C(M)\|u - v\|^a_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.20}$$

$$|F(u) - F(v)| \leq C(M)\|u - v\|^b_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.21}$$

για κάθε $u, v \in H_r$ με $\|u\|_{H_r} + \|v\|_{H_r} \leq M$, όπου $a = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$, $b = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho}\right)$ και $\rho, r \in (2, 2^*)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί βήμα προς βήμα τα επιχειρήματα του [25, Λήμμα 3.3.7] για τον χώρο H_r. ■

Λήμμα 5.3.8. *Ο τελεστής $\mathcal{L}$, που ορίζεται ως εξής*

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{L}) := \{\psi \in H_r : \mathcal{L}\psi \in X\}, \\ \mathcal{L}\psi := \Delta\psi + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{\psi}{|x|^2}, \end{array} \right. \tag{5.22}$$

είναι αυτοσυζυγής και αρνητικά ορισμένος.

Απόδειξη. Ορίζουμε τον ακόλουθο τελεστή

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\widetilde{\mathcal{L}}) := \{\varphi \in \mathcal{H}_r : \widetilde{\mathcal{L}}\varphi \in \widetilde{X}\}, \\ \widetilde{\mathcal{L}}\varphi := |x|^{N-2}\nabla \cdot (|x|^{-(N-2)}\nabla\varphi). \end{array} \right. \tag{5.23}$$

Προφανώς, $\widetilde{\mathcal{L}}\phi = \mathcal{L}\psi$ για κάθε $\psi = |x|^{-\frac{N-2}{2}}\phi$. Έστω $\phi \in D(\widetilde{\mathcal{L}})$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \cdot (|x|^{-(N-2)}\nabla\phi) z dx = -\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}\nabla\phi \cdot \nabla z dx, \tag{5.24}$$

για κάθε $z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Λόγω πυκνότητας, η σχέση (5.24) επεκτείνεται στον $\mathcal{H}_r$.

Παρατηρούμε ότι το $D(\widetilde{\mathcal{L}})$ είναι πυκνό στον $\widetilde{X}$, αφού $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset D(\widetilde{\mathcal{L}})$. Επίσης, θέτοντας $z = \phi$ στην (5.24), λαμβάνουμε

$$(\widetilde{\mathcal{L}}\phi, \phi)_{\widetilde{X}} \leq 0,$$

δηλαδή ο $\widetilde{\mathcal{L}}$ είναι αρνητικά ορισμένος.

Ορίζουμε την ακόλουθη συνεχή και διγραμμική μορφή

$$b(\phi, z) := \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}(\phi z + \nabla\phi \cdot \nabla z) dx,$$

η οποία είναι συμπιεστική[1] στον $\mathcal{H}_r$. Τότε, από το Θεώρημα Lax-Milgram, για κάθε $f \in \widetilde{X}$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi \in \mathcal{H}_r$, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}\phi z dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}\nabla\phi \cdot \nabla z dx = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}\phi z dx,$$

για κάθε $z \in \mathcal{H}_r$. Ισοδύναμα, η ϕ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\phi - \widetilde{\mathcal{L}}\phi = f,$$

με την έννοια των κατανομών. Επίσης, $\phi \in D(\widetilde{\mathcal{L}})$, εφόσον $f \in \widetilde{X}$. Με άλλα λόγια, ο τελεστής $\widetilde{\mathcal{L}}$ είναι m-εκλυτικός.

Τέλος, από την (5.24), ισχύει ότι

$$(\widetilde{\mathcal{L}}\phi, z)_{\widetilde{X}} = (\phi, \widetilde{\mathcal{L}}z)_{\widetilde{X}},$$

για κάθε $\phi, z \in D(\widetilde{\mathcal{L}})$, δηλαδή $G(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset G((\widetilde{\mathcal{L}})^*)$. Επομένως, από την Πρόταση 2.4.4, ο τελεστής $\widetilde{\mathcal{L}}$ είναι αυτοσυζυγής. Λόγω ισοδυναμίας, το αποτέλεσμα ισχύει για τον τελεστή $\mathcal{L}$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

[1] Μετάφραση του όρου coercive.

Παρατήρηση 5.3.9. *Ακολουθώντας τη διαδικασία της [26, Ενότητα 2.6.5], προκύπτει ότι τόσο ο $i\mathcal{L}$, όσο και ο τελεστής $\mathcal{B}$, ο οποίος ορίζεται ως εξής*

$$\begin{cases} D(\mathcal{B}) := H_r, \\ \mathcal{B}\psi := i\mathcal{L}\psi, \end{cases} \tag{5.25}$$

είναι αντισυζυγείς. Ως εκ τούτου, αμφότεροι επάγουν μια ομάδα ισομετριών $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ στον χώρο Hilbert H_r.

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται η τοπική ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης στον H_r.

Θεώρημα 5.3.10. *Για κάθε $\psi_0 \in H_r$ με $\|\psi_0\|_{H_r} \leq M$, υπάρχουν $T(M) > 0$ και μια ασθενής λύση ψ του προβλήματος (5.1) στο διάστημα $I_M = (-T(M), T(M))$. Επιπροσθέτως,*

$$\|\psi\|_{L^\infty(I_M,H_r)} \leq 2M, \tag{5.26}$$

και

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2}, \tag{5.27}$$

$$E(\psi(t)) \leq E(\psi_0), \tag{5.28}$$

για κάθε $t \in I_M$.

Απόδειξη. Έστω $\psi_0 \in H_r$ με $\|\psi_0\|_{H_r} = M$.

Βήμα 1. Κατασκευή των προσεγγιστικών λύσεων. Θεωρούμε την αποκοπτική ακολουθία

$$f_m(\psi) := \begin{cases} f(\psi), & |\psi| \leq m, \\ \frac{\psi}{m} f(m), & |\psi| \geq m. \end{cases} \tag{5.29}$$

Επίσης, ορίζουμε

$$F_m(\psi) := \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^{|\psi|} f_m(s) ds dx.$$

Παρατηρούμε ότι η f_m είναι Lipschitz συνεχής στα φραγμένα υποσύνολα του $L^2(\mathbb{R}^N)$, ενώ $F_m \in C^1(H_r, \mathbb{R})$ με $F_m' = f_m$. Παράλληλα, για κάθε $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, θα είναι

$$(f_m(\psi), i\psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.6, υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων (ψ^m) στον χώρο $C(\mathbb{R}, H_r) \cap C^1(\mathbb{R}, H_r^{-1})$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} i\psi_t^m + \mathcal{L}\psi^m + f_m(\psi^m) = 0, \\ \psi^m(0) = \psi_0. \end{cases} \tag{5.30}$$

Επιπλέον, ισχύουν τα εξής

$$\|\psi^m(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \tag{5.31}$$

και

$$\frac{1}{2} \|\psi^m(t)\|_{H_r}^2 - F_m(\psi^m(t)) = \frac{1}{2} \|\psi_0\|_{H_r}^2 - F_m(\psi_0), \tag{5.32}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Βήμα 2. Εκτιμήσεις για την ακολουθία ψ^m. Για λόγους απλούστευσης, συμβολίζουμε με $C(M)$ διάφορες σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το M. Θέτουμε

$$\theta_m = \sup\left\{\tau > 0 : \|\psi^m(t)\|_{H_r} \leq 2M \ \text{ στο διάστημα } \ (-\tau, \tau)\right\}. \tag{5.33}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f_m ικανοποιεί τη συνθήκη (5.18) ομοιόμορφα ως προς $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, από την (5.30), λαμβάνουμε

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|\psi_t^m\|_{L^\infty((-\theta_m,\theta_m),H_r^{-1})} \leq C(M). \tag{5.34}$$

Συνδυάζοντας τις (5.33) και (5.34) με το Λήμμα 5.3.6, προκύπτει ότι

$$\|\psi^m(t) - \psi^m(s)\|_{L^2} \leq C(M)|t-s|^{\frac{1}{2}}, \tag{5.35}$$

για κάθε $t, s \in (-\theta_m, \theta_m)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις (5.31), (5.32), (5.21), (5.33) και (5.35), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|\psi^m(t)\|_{H_r}^2 &\leq \|\psi_0\|_{L^2}^2 + \|\psi_0\|_{H_r}^2 + 2\,|F_m(\psi^m(t)) - F_m(\psi_0)| \\ &\leq \|\psi_0\|_{H_r}^2 + C(M)|t|^{\frac{b}{2}}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

για κάθε $t \in (-\theta_m, \theta_m)$. Θέτοντας

$$T(M) := (2M^2C(M)^{-1})^{\frac{2}{b}},$$

από την (5.36), θα είναι

$$\|\psi^m\|_{L^\infty((-T,T),H_r)} < 2M,$$

για $T = \min\{T(M), \theta_m\}$. Τότε, θα ισχύει $T(M) \leq \theta_m$. Άρα, καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\|\psi^m\|_{L^\infty((-T(M),T(M)),H_r)} \leq 2M, \tag{5.37}$$

και, λόγω της (5.34), στο φράγμα

$$\|\psi_t^m\|_{L^\infty((-T(M),T(M)),H_r^{-1})} \leq C(M). \tag{5.38}$$

Βήμα 3. Μετάβαση στο όριο. Από τις (5.37), (5.38) και την [25, Πρόταση 1.1.2], υπάρχουν

$$\psi \in L^\infty((-T(M),T(M)),H_r) \cap W^{1,\infty}((-T(M),T(M)),H_r^{-1}),$$

και μια υπακολουθία, η οποία επίσης συμβολίζεται με (ψ^m), τέτοια ώστε, για κάθε $t \in [-T(M), T(M)]$,

$$\psi^m(t) \rightharpoonup \psi(t), \quad \text{στον } H_r, \quad \text{καθώς } m \to \infty. \tag{5.39}$$

Από τις (5.37), (5.38), (5.21) και το Λήμμα 5.3.6, προκύπτει ότι η ακολουθία $f_m(\psi^m)$ είναι φραγμένη στον $C^{0,\frac{a}{2}}((-T(M),T(M)),L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$. Επίσης, από την [25, Πρόταση 1.1.2], υπάρχουν: υπακολουθία, που συμβολίζεται ξανά με $f_m(\psi^m)$, και συνάρτηση $f \in C^{0,\frac{a}{2}}((-T(M), T(M)), L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$, τέτοιες ώστε, για κάθε $t \in [-T(M), T(M)]$,

$$f_m(\psi^m(t)) \rightharpoonup f(t), \quad \text{στον } L^{\rho'}(\mathbb{R}^N), \quad \text{καθώς } m \to \infty. \tag{5.40}$$

Από την άλλη, για κάθε $w \in H_r$ και $z \in C_0^\infty(-T(M), T(M))$, η πρώτη εξίσωση στο πρόβλημα (5.30) οδηγεί στην ακόλουθη

$$\int_{-T(M)}^{T(M)} [-\langle i\psi^m, w\rangle_{H_r^{-1},H_r} z'(t) + \langle \mathcal{L}\psi^m + f_m(\psi^m), w\rangle_{H_r^{-1},H_r} z(t)]dt = 0.$$

Λόγω των (5.39) και (5.40), με εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\int_{-T(M)}^{T(M)} [-\langle i\psi, w\rangle_{H_r^{-1},H_r} z'(t) + \langle \mathcal{L}\psi + f, w\rangle_{H_r^{-1},H_r} z(t)]dt = 0.$$

Συνακόλουθα, η ψ ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} i\psi_t + \mathcal{L}\psi + f = 0, \\ \psi = \psi_0, \end{cases} \tag{5.41}$$

όπου η πρώτη εξίσωση ισχύει σχεδόν παντού στο $(-T(M), T(M))$.

Βήμα 4. Θα δείξουμε ότι, για κάθε $t \in (-T(M), T(M))$, ισχύει $(f(t), i\psi)_{L^2} = 0$. Αρχικά, γράφουμε

$$\begin{aligned} (f(t), i\psi)_{L^2} &= (f(t) - f_m(\psi^m) + f_m(\psi^m), i\psi)_{L^2} \\ &= (f(t) - f_m(\psi^m), i\psi)_{L^2} + (f_m(\psi^m) - f(\psi^m) + f(\psi^m), i\psi)_{L^2} \\ &= (f(t) - f_m(\psi^m), i\psi)_{L^2} + (f_m(\psi^m) - f(\psi^m), i\psi)_{L^2} \\ &\quad + (f(\psi^m), i\psi)_{L^2} \\ &= (f(t) - f_m(\psi^m), i\psi)_{L^2} + (f_m(\psi^m) - f(\psi^m), i\psi)_{L^2} \\ &\quad + (f(\psi^m), i(\psi - \psi^m))_{L^2} + (f(\psi^m), i\psi^m)_{L^2} \\ &=: a_m + b_m + c_m + d_m. \end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι $f_m(\psi^m) \rightharpoonup f(t)$ στον $L^2(\mathbb{R}^N)$, έχουμε $a_m \to 0$. Επίσης, σημειώνουμε ότι υπάρχει $\nu > 0$, τέτοιο ώστε

$$\|f_m(u) - f(u)\|_{L^2}^2 \leq C(M)m^{-\nu}, \tag{5.42}$$

για κάθε $u \in H$ με $\|u\|_H \leq M$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f_m(u) - f(u)|^2 dx &\leq k\int_{|u|\geq m} |u|^{2(q-1)}dx = k\int_{|u|\geq m} |u|^{2(q-1)-r+r}dx \\ &\leq km^{-(r-2(q-1))}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leq km^{-\nu}\|u\|_H^2 \\ &\leq C(M)m^{-\nu}, \end{aligned}$$

όπου η σταθερά $k > 0$ δεν εξαρτάται από το m, ενώ $2(q-1) < r < 2^*$. Τότε, από την (5.42), $b_m \to 0$. Η σύγκλιση $c_m \to 0$ είναι άμεση, αφού η ακολουθία $(f(\psi^m))$ είναι φραγμένη στον $L^2(\mathbb{R}^N)$. Τέλος, είναι προφανές ότι $d_m \equiv 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Βήμα 5. Θεωρούμε το $< \cdot, \cdot >_{H_r^{-1}, H_r}$ δυϊκό γινόμενο της πρώτης εξίσωσης του (5.41) με $i\psi$. Τότε, βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt} \|\psi(t)\|_{L^2}^2 = 0, \quad \text{για κάθε } t \in (-T(M), T(M)),$$

και άρα,

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2}. \tag{5.43}$$

Από τις (5.31), (5.43) και την [25, Πρόταση 1.1.2], έχουμε

$$\psi^m \to \psi, \quad \text{στον } C([-T(M), T(M)], L^2(\mathbb{R}^N)). \tag{5.44}$$

Συνδυάζοντας τις (5.37), (5.44) με την ανισότητα (5.13), εκπεφρασμένη σε όρους ψ, λαμβάνουμε

$$\psi^m \to \psi, \quad \text{στον } C([-T(M), T(M)], L^q(\mathbb{R}^N)), \tag{5.45}$$

για κάθε $2 < q < 2^*$. Από τις (5.18), (5.42) και (5.45) εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f_m(\psi^m(t)) - f(\psi(t)) &= f_m(\psi^m(t)) - f_m(\psi(t)) + f_m(\psi(t)) - f(\psi(t)) \\ &\to 0, \quad \text{καθώς } m \to \infty, \end{aligned}$$

στον $L^\rho(\mathbb{R}^N)$, $\rho \in [2, 2^*)$, για κάθε $t \in (-T(M), T(M))$. Συνεπώς, $h = f(\psi)$ και η ψ επιλύει το πρόβλημα (5.1). Η εκτίμηση (5.26) έπεται από την (5.37), η δε (5.27), προκύπτει από την (5.43). Η (5.28) είναι άμεση συνέπεια της (5.32), της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας της H-νόρμας και του γεγονότος ότι $F_m(\psi^m(t)) \to F(\psi(t))$, καθώς $m \to \infty$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Στο επόμενο θεώρημα διαπιστώνεται η ορθή τοποθέτηση του προβλήματος (5.1). Το πρόβλημα θεωρείται ότι είναι (τοπικά) ορθά τοποθετημένο, αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- *Μοναδικότητα* στον H_r.
- *Ύπαρξη* λύσης για κάθε $\psi_0 \in H_r$, η οποία ορίζεται σε ένα μέγιστο διάστημα $(-T_{min}, T_{max})$, όπου $T_{max} = T_{max}(\psi_0) \in (0, +\infty]$ και $T_{min} = T_{min}(\psi_0) \in (0, +\infty]$.
- *Εναλλακτική της έκρηξης* (blow-up alternative): αν $T_{max} < \infty$, τότε $\lim_{t \uparrow T_{max}} \|\psi(t)\|_{H_r} = +\infty$ (αντίστοιχα, αν $T_{min} < +\infty$, τότε $\lim_{t \downarrow -T_{min}} \|\psi(t)\|_{H_r} = +\infty$).
- *Συνεχής εξάρτηση* από τα αρχικά δεδομένα: αν $\psi_{0n} \to \psi_0$ στον H_r και $I \subset (-T_{min}(\psi_0), T_{max}(\psi_0))$ είναι ένα κλειστό διάστημα, τότε η λύση ψ_n, που αντιστοιχεί στη συνθήκη $\psi_n(0) = \psi_{0n}$, ορίζεται στο $\overline{I}$ και αληθεύει ότι $\psi_n \to \psi$ στον $C(\overline{I}, H_r)$.

Θεώρημα 5.3.11. *Το πρόβλημα (5.1) είναι ορθά τοποθετημένο στον H_r. Επιπλέον, για κάθε $\psi_0 \in H_r$, η αντίστοιχη λύση ψ ικανοποιεί τα εξής:*

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} \quad \textit{(διατήρηση του φορτίου)}, \tag{5.46}$$

και

$$E(\psi(t)) = E(\psi_0) \quad \textit{(διατήρηση του ενέργειας)}, \tag{5.47}$$

για κάθε $t \in (-T_{min}, T_{max})$.

Απόδειξη. Η απόδειξη συντελείται σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. Μοναδικότητα. Έστω I ένα διάστημα που περιέχει το 0 και $\psi_0 \in H_r$. Θεωρούμε δύο λύσεις $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(I, H_r) \cap W^{1,\infty}(I, H_r^{-1})$ του προβλήματος (5.1). Τότε,

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = i \int_0^t T(t-s)(f(\psi_1(s)) - f(\psi_2(s)))ds, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Συνεπώς, υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{L^2} \leq C \int_0^t \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\|_{L^2} \, ds.$$

Η μοναδικότητα προκύπτει με εφαρμογή του Λήμματος Gronwall.

Βήμα 2. Ομαλότητα. Έστω

$$\psi \in L^\infty(I, H_r) \cap W^{1,\infty}(I, H_r),$$

μία λύση της εξίσωσης $i\psi_t + \mathcal{L}\psi + f(\psi) = 0$ σχεδόν παντού στο I. Ισχυριζόμαστε ότι η ψ ικανοποιεί τους νόμους διατήρησης φορτίου και ενέργειας, αντίστοιχα, και επίσης

$$\psi \in C(I, H_r) \cap C^1(I, H_r^{-1}).$$

Θέτουμε

$$M := \sup\{\|\psi(t)\|_{H_r} : t \in I\},$$

και θεωρούμε ένα $T(M) > 0$, όπως αυτό που προέκυψε από το Θεώρημα 5.3.10. Θα δείξουμε ότι οι ποσότητες $\|\psi(t)\|_{L^2}$ και $E(\psi(t))$ διατηρούνται σταθερές σε κάθε διάστημα $J \subset I$, μήκους το πολύ ίσο με $T(M)$. Πράγματι, έστω J ένα τέτοιο διάστημα και $\sigma, \tau \in J$. Θέτουμε $\psi_0 = \psi(\sigma)$ και θεωρούμε μία λύση v του προβλήματος (5.1), όπως αυτή που δόθηκε από το Θεώρημα 5.3.10. Η $v(\cdot - \sigma)$ είναι ορισμένη στο J και, λόγω μοναδικότητας, $v(\cdot - \sigma) = \psi(\cdot)$ στο J. Εφαρμόζοντας τις (5.27) και (5.28), προκύπτει ότι

$$\|\psi(\tau)\|_{L^2} = \|\psi(\sigma)\|_{L^2}, \quad \text{και} \quad E(\psi(\tau)) \leq E(\psi(\sigma)). \tag{5.48}$$

Θέτουμε τώρα $\psi_0 = \psi(\tau)$ και θεωρούμε τη λύση w του προβλήματος (5.1), όπως αυτή που δόθηκε στο Θεώρημα 5.3.10. Η $w(\cdot - \tau)$ είναι ορισμένη στο J και, λόγω μοναδικότητας, $w(\cdot - \tau) = \psi(\cdot)$ στο J. Από την (5.28), βρίκουμε

$$E(\psi(\sigma)) \leq E(\psi(\tau)).$$

Συγκρίνοντας με την (5.48), παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\|\psi(t)\|_{L^2}$ και $E(\psi(t))$ είναι σταθερές στο J. Άρα,

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi(s)\|_{L^2}, \quad E(\psi(t)) = E(\psi(s)), \quad \text{για κάθε } t, s \in I, \tag{5.49}$$

εφόσον το J είναι αυθαίρετο. Επιπλέον, από το Λήμμα 5.3.6, $\psi \in C^{0,1/2}(\overline{I}, L^2(\mathbb{R}^N))$, οπότε η συνάρτηση $t \mapsto F(\psi(t))$ από το $\overline{I}$ στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, λόγω του Λήμματος 5.3.7. Συνεπώς, $\psi \in C(\overline{I}, H_r)$ και, από την εξίσωση καθεαυτή, $\psi \in C^1(\overline{I}, H_r^{-1})$.

Βήμα 3. Εναλλακτική έκρηξης. Έστω $\psi_0 \in H_r$ και

$$T_{max}(\psi_0) = \sup\{T > 0 : \text{ υπάρχει λύση του (5.1) στο } [0, T]\},$$

$$T_{min}(\psi_0) = \sup\{T > 0 : \text{ υπάρχει λύση του (5.1) στο } [-T, 0]\}.$$

Από το Βήμα 2 και τη μοναδικότητα, υπάρχει μια λύση

$$\psi \in C((-T_{min}, T_{max}), H_r) \cap C^1((-T_{min}, T_{max}), H_r^{-1}),$$

του προβλήματος (5.1).
Έστω ότι $T_{max} < \infty$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M < \infty$ και ακολουθία $t_j \uparrow T_{max}$, για τα οποία $\|\psi(t_j)\|_{H_r} \leq M$. Θεωρούμε k τέτοιο ώστε $t_k + T(M) > T_{max}(\psi_0)$. Εκκινώντας από το $\psi(t_k)$, η ψ μπορεί να επεκταθεί μέχρι το $t_k + T(M)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.10 και το Βήμα 2. Όμως, αυτό αντίκειται στο γεγονός ότι το διάστημα ύπαρξης είναι μέγιστο. Επομένως,

$$\|\psi(t)\|_{H_r} \to \infty, \quad \text{καθώς } t \uparrow T_{max}.$$

Υϊοθετώντας το ίδιο επιχείρημα, μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $T_{min}(\psi_0) < \infty$, τότε

$$\|\psi(t)\|_{H_r} \to \infty, \quad \text{καθώς } t \downarrow T_{min}.$$

Βήμα 4. Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα. Θέτουμε

$$M := 2 \sup\{\|\psi(t)\|_{H_r} : t \in [-T_1, T_2]\}.$$

Έστω ότι $\psi_{0m} \to \psi_0$ στον H_r. Αφού $\|\psi_{0m}\|_{H_r} \leq M$ για m αρκετά μεγάλο, τότε προφανώς $[-T(M), T(M)] \subset (-T_{min}(\psi_0), T_{max}(\psi_0))$. Δηλαδή, η ψ_m είναι φραγμένη στον

$$L^\infty((-T(M), T(M)), H_r) \cap W^{1,\infty}((-T(M), T(M)), H_r^{-1}).$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στο Βήμα 3 της απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.10, λαμβάνουμε $\psi_m \to \psi$ στον $C([-T(M), T(M)], L^2(\mathbb{R}^N))$. Από το Λήμμα 5.3.7 και τη διατήρηση της ενέργειας, έπεται ότι η $\|\psi_m\|_{H_r}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\|\psi\|_{H_r}$, κατά μήκος του διαστήματος $[-T(M), T(M)]$. Από [25, Πρόταση 1.1.2],

$$\psi_m \to \psi, \quad \text{στον} \quad C([-T(M), T(M)], H_r).$$

Αφού το $T(M)$ εξαρτάται μόνο από το M, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί ώστε να καλυφθεί ολόκληρο το $[-T_1, T_2]$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Θεώρημα 5.3.12. *Έστω $\psi_0 \in H_r$ και $2 < q < \frac{4}{N} + 2$. Τότε, η λύση ψ του Θεωρήματος 5.3.11 επεκτείνεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, οι νόμοι διατήρησης (5.46) και (5.47) ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $C = C(\|\psi\|_{L^2})$, τέτοια ώστε

$$F(\psi) \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \|\psi\|_{H_r}^2 + C, \tag{5.50}$$

για κάθε $\psi \in H_r$. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα (5.13) σε συνδυασμό με την ανισότητα Young.

Έστω τώρα ότι I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το μηδέν. Θεωρούμε μια ασθενή λύση ψ του προβλήματος (5.1), ορισμένη στο I. Από τη σχέση

$$\|\psi(t)\|_{H_r}^2 = E(\psi(t)) - 2F(\psi(t)) + \|\psi(t)\|_{L^2},$$

και τις (5.27), (5.28), έπεται το εξής

$$\|\psi(t)\|_{H_r}^2 \le \|\psi_0\|_{H_r}^2 - 2F(\psi_0) + 2F(\psi(t)), \quad \text{για κάθε } t \in I,$$

και, λόγω της (5.50), καταλήγουμε στην

$$\|\psi(t)\|_{H_r}^2 \le \|\psi_0\|_{H_r}^2 - 2F(\psi_0) + (1-\varepsilon)\|\psi(t)\|_{H_r}^2 + 2C.$$

Άρα,

$$\|\psi(t)\|_{H_r}^2 \le \frac{1}{\varepsilon}(\|\psi_0\|_{H_r}^2 - 2F(\psi_0) + 2C), \quad \text{για κάθε } t \in I. \tag{5.51}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος στην (5.51) εξαρτάται μόνο από την αρχική τιμή ψ_0 και όχι από τα t, ψ.

Θέτουμε

$$M := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\|\psi_0\|_{H_r}^2 - 2F(\psi_0) + 2C}.$$

Αν $\|\psi_0\|_{H_r} \le M$, τότε, από το Θεώρημα 5.3.10, υπάρχει ασθενής λύση ψ στο διάστημα $[0, T(M)]$, η οποία ικανοποιεί τις (5.27) και (5.28) για κάθε $t \in [0, T(M)]$. Επίσης, από την (5.51), έχουμε $\|\psi(T(M))\|_{H_r} \le M$. Θέτοντας $\widetilde{\psi}_0 = \psi(T(M))$ και εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα 5.3.10, βλέπουμε ότι υπάρχει μια ασθενής λύση του προβλήματος (5.1) (με αρχική τιμή $\widetilde{\psi}_0 = \psi(T(M))$) στο διάστημα $[0, T(M)]$, η οποία ικανοποιεί τις (5.27) και (5.28) για κάθε $t \in [0, T(M)]$. Ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$\psi(t) := \begin{cases} \psi(t), & \text{αν } 0 \le t \le T(M), \\ \widetilde{\psi}(t - T(M)), & \text{αν } 0 \le T(M) \le t \le 2T(M), \end{cases} \tag{5.52}$$

η οποία, προφανώς, ορίζει μια ασθενή λύση του (5.1) στο διάστημα $[0, 2T(M)]$. Επιπλέον,

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\widetilde{\psi}(t - T(M))\|_{L^2} = \|\widetilde{\psi}_0\|_{L^2} = \|\psi(T(M))\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2}$$

και

$$E(\psi(t)) = E(\widetilde{\psi}(t - T(M))) \le E(\widetilde{\psi}_0) = E(\psi(T(M))) \le E(\psi_0),$$

για κάθε $t \in [T(M), 2T(M)]$, ενώ η ψ ικανοποιεί τις (5.27) και (5.28) για κάθε $t \in [0, 2T(M)]$. Από την (5.51), παρατηρούμε ότι $\|\psi(2T(M))\|_{H_r} \le M$. Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ασθενή λύση ψ στο $[0, \infty)$, η οποία θα ικανοποιεί τις (5.27) και (5.28) για κάθε $t \ge 0$. Για $t \le 0$, η επιχειρηματολογία είναι ανάλογη και το αποτέλεσμα έχει δειχθεί. ■

Συνοψίζοντας:

Πόρισμα 5.3.13. *(Ολική Λύση). Έστω $2 < q < \frac{4}{N} + 2$ και $N \ge 3$. Τότε, για κάθε $\psi_0 \in H_r$, το πρόβλημα επιδέχεται μοναδική λύση $\psi \in C(\mathbb{R}, H_r) \cap C^1(\mathbb{R}, H_r^{-1})$, η οποία ικανοποιεί τα εξής:*

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} \quad (\textit{διατήρηση του φορτίου}), \tag{5.53}$$

και

$$E(\psi(t)) = E(\psi_0) \quad (\textit{διατήρηση της ενέργειας}), \tag{5.54}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

5.3β′ Ευστάθεια

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύεται η ύπαρξη στάσιμων κυμάτων, καθώς και η ευστάθειά τους με μια εύλογη έννοια. Η προσέγγιση είναι καθαρά ''μεταβολική'' και βασίζεται στην αναζήτηση κρίσιμων σημείων του συναρτησιακού E πάνω σε σύνολα με προκαθορισμένη L^2-νόρμα. Εν προκειμένω, ορίζουμε την L^2-σφαίρα του H_r,

$$\Gamma := \left\{ u \in H : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = \gamma \right\},$$

για δοθέν $\gamma > 0$, και στη συνέχεια μελετάμε το ακόλουθο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \Gamma, \\ E(u) = \min \{ E(z) : z \in \Gamma,\ z = z(|x|) \}. \end{array} \right. \tag{5.55}$$

Με άλλα λόγια, αναζητούμε λύσεις για το ελλειπτικό πρόβλημα (5.2), οι οποίες ελαχιστοποιούν κάποια δεδομένη ποσότητα. Τέτοιες λύσεις είναι γνωστές στη βιβλιογραφία με τον όρο ground state solutions.

Εισάγουμε το συναρτησιακό $J : \mathcal{H}_r \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής

$$J(v) := E(|x|^{-\frac{N-2}{2}} v) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} |v|^2 dx.$$

Η επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (5.55) μπορεί να αναχθεί στην επίλυση του ακόλουθου ισοδύναμου

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in \widetilde{\Gamma}, \\ J(v) = \min \{ J(z) : z \in \widetilde{\Gamma} \}, \end{array} \right. \tag{5.56}$$

όπου

$$\widetilde{\Gamma} := \{ v \in \mathcal{H}_r : |x|^{-\frac{N-2}{2}} v \in \Gamma \}.$$

Παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό J είναι κάτω φραγμένο στο $\widetilde{\Gamma}$. Πράγματι, από την ανισότητα (5.13) και την ιδιότητα $2 < q < \frac{4}{N} + 2$, υπάρχουν $\delta > 0$ και $K < \infty$, τέτοια ώστε

$$J(v) \geq \delta \, \|v\|^2_{\mathcal{H}_r} - K, \quad \text{για κάθε } v \in \widetilde{\Gamma}.$$

Ως εκ τούτου, είναι εύλογη η αναζήτηση ελαχιστοποιήσεων (minimizers) εντός του $\widetilde{\Gamma}$. Θέτουμε

$$\widetilde{k}_\gamma := \inf \left\{ J(v) : v \in \widetilde{\Gamma} \right\}.$$

Με το ακόλουθο λήμμα, διαπιστώνεται η σχετική συμπάγεια (precompactness) κάθε ελαχιστοποιητικής ακολουθίας ως προς το $\widetilde{k}_\gamma$.

Λήμμα 5.3.14. *Έστω $\gamma > 0$. Τότε, κάθε ακολουθία (v_n) στον $\mathcal{H}_r$, για την οποία αληθεύουν*

$$J(v_n) \to \widetilde{k}_\gamma, \quad J'(v_n) \to 0, \quad v_n \in \widetilde{\Gamma},$$

περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στον $\mathcal{H}_r$. Επιπλέον, το όριό της επιλύει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (5.56), δηλαδή το $\widetilde{k}_\gamma$ είναι εφικτό.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για επαρκώς μεγάλο n, ισχύει το εξής

$$\begin{aligned}\widetilde{k}_\gamma + o(1) &\geq J(v_n) - \frac{1}{q} < J'(v_n), v_n > \\ &= \frac{q-2}{2q} \|v_n\|^2_{\mathcal{H}_r}, \end{aligned} \tag{5.57}$$

δηλαδή η $\|v_n\|_{\mathcal{H}_r}$ είναι φραγμένη. Μεταβαίνοντας ίσως σε μια υπακολουθία, που συμβολίζεται ξανά με (v_n), υπάρχει ένα $v \in \mathcal{H}_r$ τέτοιο ώστε $v_n \rightharpoonup v$ στον $\mathcal{H}_r$. Όμως, από το Λήμμα 5.3.1, $v_n \to v$ στον $L^q(\mathbb{R}^N, |x|^{-q\frac{N-2}{2}}dx)$.
Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\|v_n - v\|^2_{\mathcal{H}_r} &= < J'(v_n) - J'(v), v_n - v > \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} (|v_n|^{q-2}v_n - |v|^{q-2}v)(v_n - v)dx. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Προφανώς, θα είναι

$$< J'(v_n) - J'(v), v_n - v > \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty. \tag{5.59}$$

Επίσης, από την ανισότητα Hölder, λαμβάνουμε
(5.60)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} (|v_n|^{q-2}v_n - |v|^{q-2}v)(v_n - v)dx \right| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} |v_n - v|^q dx \right)^{1/q},$$

το οποίο τείνει στο μηδέν, καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς, βρήκαμε ένα $v \in \mathcal{H}_r$ και μια υπακολουθία (v_n), τέτοια ώστε

$$v_n \to v, \quad \text{στον } \mathcal{H}_r.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $v \in \widetilde{\Gamma}$. Τέλος, από τον ορισμό του $\widetilde{k}_\gamma$ και την ασθενή κάτω ημισυνέχεια του J, προκύπτει ότι $J(v) = \widetilde{k}_\gamma$. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Με τον όρο λύση του προβλήματος (5.2), νοείται ένα ζεύγος $(\lambda_\gamma, u_\gamma) \in \mathbb{R} \times H_r$, όπου λ_γ είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange που σχετίζεται με το κρίσιμο σημείο του E, u_γ, πάνω στο σύνολο Γ. Αν v_γ είναι η ελαχιστοποίηση του J πάνω στο $\widetilde{\Gamma}$, τότε υπάρχει ένα ζεύγος $(\lambda_\gamma, v_\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_r$ που επιλύει την ελλειπτική εξίσωση

$$-\nabla \cdot (|x|^{-(N-2)} \nabla v_\gamma) + \lambda_\gamma |x|^{-(N-2)} v_\gamma - |x|^{-q\frac{N-2}{2}} |v_\gamma|^{q-2} v_\gamma = 0, \tag{5.61}$$

όπου

$$\lambda_\gamma = \frac{-1}{\gamma} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} |\nabla v_\gamma|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} |v_\gamma|^q dx}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$S_\gamma := \{u \in \Gamma : \text{ η } u \text{ επιλύει το πρόβλημα (5.55)}\},$$

που περιέχει τις ελαχιστοποιήσεις του προβλήματος (5.55). Λόγω ισοδυναμίας, $S_\gamma \neq \emptyset$ και η συνάρτηση $e^{i\lambda_\gamma t}|x|^{-\frac{N-2}{2}} v_\gamma$ αντιστοιχεί σε ένα στάσιμο κύμα του (5.2). Παρατηρούμε ότι αν $u_\gamma \in S_\gamma$, τότε $e^{i\lambda_\gamma t} u_\gamma \in S_\gamma$, για κάθε $t \geq 0$. Ακόμη, η $e^{i\lambda_\gamma t} u_\gamma$ είναι μια περιοδική συνάρτηση ως προς το χρόνο, οπότε μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο S_γ ορίζει μια κλάση από κλειστές τροχιές. Συνεπώς, ο ακόλουθος ορισμός της (τοπικής) τροχιακής ευστάθειας έχει νόημα.

Ορισμός 5.3.15. *Το σύνολο S_γ καλείται* (τοπικά) τροχιακά ευσταθές *αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε ολική λύση $\psi(t)$ του προβλήματος (5.1), για την οποία αληθεύει*

$$dist(\psi_0, S_\gamma) < \delta, \tag{5.62}$$

έπεται ότι

$$dist(\psi(t), S_\gamma) < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } t \geq 0, \tag{5.63}$$

όπου

$$dist(w, S_\gamma) := \inf_{z \in S_\gamma} \|w - z\|_H . \tag{5.64}$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το βασικό αποτέλεσμα σχετικά με την ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων στη συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα 5.3.16. *Δίνεται ένα $\gamma > 0$. Υποθέτουμε ότι $2 < q < \frac{4}{N} + 2$ και $N \geq 3$. Τότε, το σύνολο S_γ είναι τροχιακά ευσταθές.*

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχουν ακολουθίες $(\psi_{0n}) \subset H_r$, $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ και ένα $\varepsilon_0 > 0$ με

$$\|\psi_{0n} - u\|_{H_r} \to 0, \tag{5.65}$$

για κάποιο $u \in S_\gamma$, ενώ οι ολικές λύσεις ψ_n με αρχικές τιμές ψ_{0n} ικανοποιούν τη σχέση

$$\inf_{z \in S_\gamma} \|\psi_n(t_n) - z\|_{H_r} \geq \varepsilon_0. \tag{5.66}$$

Θέτουμε

$$u_n := \psi_n(t_n).$$

Είναι εμφανές ότι αν

$$k_\gamma := \min \{E(u) : u \in \Gamma,\ u = u(|x|)\},$$

τότε

$$\widetilde{k}_\gamma = k_\gamma + \frac{\gamma}{2}.$$

Από την (5.65), έχουμε

$$E(\psi_{0n}) \to k_\gamma \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_{0n}|^2 dx \to \gamma. \tag{5.67}$$

Εφαρμόζοντας τους νόμους (5.27) και (5.28), λαμβάνουμε

$$E(u_n) \to k_\gamma \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx \to \gamma. \tag{5.68}$$

Επιλέγουμε μια ακολουθία $\beta_n \to 1$, τέτοια ώστε

$$E(\beta_n u_n) \to k_\gamma \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\beta_n u_n|^2 dx = \gamma, \tag{5.69}$$

δηλαδή η $\beta_n u_n$ ορίζει μια ελαχιστοποιητική ακολουθία για το πρόβλημα (5.55). Μια τέτοια επιλογή είναι εφικτή, π.χ. μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\beta_n = \left(\frac{\gamma}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx} \right)^{1/2}. \tag{5.70}$$

Θέτοντας $v_n = |x|^{\frac{N-2}{2}} u_n$, προκύπτουν τα εξής

$$J(\beta_n v_n) \to \widetilde{k}_\gamma \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)} |\beta_n v_n|^2 dx = \gamma. \tag{5.71}$$

Από την αρχή μεταβολών του Ekeland (βλ. [78, Θεώρημα 2.4]), υπάρχει ακολουθία $\zeta_n \in \widetilde{\Gamma}$, τέτοια ώστε

$$J(\zeta_n) \to \widetilde{k}_\gamma, \quad J'(\zeta_n) \to 0, \quad \|\zeta_n - \beta_n v_n\|_{\mathcal{H}_r} < \frac{1}{n}. \tag{5.72}$$

Επίσης, από το Λήμμα 5.3.14, υπάρχουν: υπακολουθία στον $\mathcal{H}_r$, η οποία συμβολίζεται ξανά με ζ_n, και $\zeta \in S_\gamma$, τέτοια ώστε $\zeta_n \to |x|^{\frac{N-2}{2}} \zeta$ στον $\mathcal{H}_r$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \inf_{z \in S_\gamma} \|u_n - z\|_{H_r} &\leq ||v_n - |x|^{\frac{N-2}{2}} \zeta||_{\mathcal{H}_r} \\ &= ||v_n - \beta_n v_n + \beta_n v_n - \zeta_n + \zeta_n - |x|^{\frac{N-2}{2}} \zeta||_{\mathcal{H}_r} \\ &\leq |1 - \beta_n| \, \|v_n\|_{\mathcal{H}_r} + \frac{1}{n} + ||\zeta_n - |x|^{\frac{N-2}{2}} \zeta||_{\mathcal{H}_r} \to 0, \end{aligned} \tag{5.73}$$

το οποίο αντίκειται στην (5.66). Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

5.3γ′ Ασυμπτωτική Συμπεριφορά στην Ιδιομορφία

Σε αυτή την ενότητα, προσδιορίζουμε την ακριβή συμπεριφορά των στάσιμων κυμάτων γύρω από την ιδιομορφία. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι κάθε ελαχιστοποίηση του προβλήματος (5.55) συμπεριφέρεται στην αρχή ακριβώς όπως η συνάρτηση $|x|^{-(N-2)/2}$. Συνεπώς, δεν ανήκει στον $H^1(\mathbb{R}^N)$. Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε την εμφάνιση ενέργειας τύπου Hardy.

Θεώρημα 5.3.17. *Έστω $\gamma > 0$. Τότε, κάθε ελαχιστοποίηση του προβλήματος (5.55) πλησιάζει την αρχή ακριβώς όπως η συνάρτηση $|x|^{-(N-2)/2}$.*

Απόδειξη. Έστω $u_\gamma \in S_\gamma$ μια ελαχιστοποίηση του προβλήματος (5.55) για κάποιο $\gamma > 0$, η οποία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι θετική στο $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$. Τότε, υπάρχει πολλαπλασιαστής Lagrange λ_γ τέτοιος, που το ζεύγος $(\lambda_\gamma, v_\gamma) \in \mathcal{H}_r$ επιλύει το στάσιμο πρόβλημα (5.97), όπου $v_\gamma = |x|^{\frac{N-2}{2}} u_\gamma$. Εισάγουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\widetilde{w}_\gamma(t) = v_\gamma(r), \quad t = (-\log r)^{-\frac{1}{N-2}}, \quad r = |x|, \tag{5.74}$$

για $0 < r < 1$. Σημειώνουμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} \widetilde{w}_\gamma(t) = \lim_{r \to 1^-} v_\gamma(r).$$

Τότε, η $\widetilde{w}_\gamma$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$-\Delta \widetilde{w}_\gamma + \lambda (N-2)^2 V_1(t) \widetilde{w}_\gamma + (N-2)^2 V_2(t) |\widetilde{w}_\gamma|^{q-2} \widetilde{w}_\gamma = 0, \tag{5.75}$$

όπου

$$V_1(t) = \exp\left(-2t^{-(N-2)}\right) t^{-2(N-1)} \quad \text{και} \quad V_2(t) = \exp\left(\left(q\frac{N-2}{2} - 2\right) t^{-(N-2)}\right).$$

Αν θέσουμε $V_1(0) = V_2(0) = 0$, τότε οι V_1, V_2 ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Εφαρμόζοντας βασικά εργαλεία της θεωρίας ομαλότητας, έπεται ότι ο $\widetilde{w}_\gamma(0)$ είναι ένας καλά ορισμένος πραγματικός αριθμός. Επιπλέον, από την αρχή μεγίστου, αποκλείεται αυτός ο αριθμός να είναι μηδέν. Ως εκ τούτου, ο $v_\gamma(0)$ είναι ένας καλά ορισμένος θετικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι η $u_\gamma = |x|^{-(N-2)/2} v_\gamma$ πηγαίνει στο μηδέν ακριβώς όπως η $|x|^{-(N-2)/2}$. ■

Σύμφωνα με τη θεώρηση της εργασίας [74, Ενότητα 2.3] για τον ορθό ορισμό της ενεργειακής νόρμας, πρέπει να ληφθεί υπ΄ όψιν η παρουσία του επιδιορθωτικού ενεργειακού όρου Λ. Η δε ακριβής τιμή της νόρμας του στάσιμου κύματος u_γ δίνεται από τον τύπο

$$\|u_\gamma\|_H^2 = I_{\mathbb{R}^N}(u_\gamma) - \Lambda(u_\gamma) + \|u_\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2,$$

όπου

$$\Lambda(u_\gamma) = \frac{N(N-2)}{2}\omega_N v_\gamma^2(0).$$

Στην επόμενη παράγραφο, θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο νέος ενεργειακός όρος δρα κατά τρόπο αθροιστικό στη συνολική ενέργεια.

5.3δ΄ Ενέργεια στο Άπειρο

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε την τροχιακή ευστάθεια για ένα πρόβλημα, στο οποίο ο επιδιορθωτικός ενεργειακός όρος αυξάνει τη συνολική ενέργεια και εμφανίζεται ως ένα επακόλουθο της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των στάσιμων κυμάτων στο άπειρο. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Kelvin, το πιο σχετικό πρόβλημα με αυτή την ιδιότητα είναι το ακόλουθο

$$\begin{cases} i|x|^{-4}w_t + \Delta w + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{w}{|x|^2} = -|x|^{q(N-2)-2N}|w|^{q-2}w, \\ w(0) = w_0, \end{cases} \tag{5.76}$$

όπου $w = w(|x|)$, $N \geq 3$ και $2 < q < \frac{4}{N} + 2$. Η προσέγγιση βασίζεται στην ισοδυναμία με το πρόβλημα (5.1), όπως προκύπτει από τον ακόλουθο μετασχηματισμό Kelvin

$$\psi(y) = |x|^{N-2}w(x), \quad x = \frac{y}{|y|^2}, \tag{5.77}$$

ο οποίος συμβολίζεται με $\psi = \mathcal{K}(w)$. Παρατηρούμε ότι για ομαλές συναρτήσεις ισχύουν οι σχέσεις

$$\Delta_y\psi(y) = |x|^{N+2}\Delta_x w(x) \quad \text{και} \quad \frac{\psi(y)}{|y|^2} = |x|^{N+2}\frac{w(x)}{|x|^2}.$$

Η διαφορά των δύο προβλημάτων συνίσταται στο γεγονός ότι η νέα ενέργεια ″προέρχεται″ από το άπειρο.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο ενεργειακός χώρος στον οποίο θεμελιώνεται το πρόβλημα (5.1) είναι ο H_r. Η δε νόρμα του, δίνεται από τον τύπο (5.8). Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το σχήμα για τον ορισμό του ενεργειακού χώρου $\mathcal{W}$, ο οποίος αντιστοιχεί στο πρόβλημα (5.76). Πράγματι, ακολουθώντας επακριβώς την πρόταση του [74, Ενότητα 5], ο $\mathcal{W}$ ορίζεται ως ο ισομετρικός χώρος του H_r υπό τον μετασχηματισμό $\mathcal{K}$. Με άλλα λόγια, ο χώρος $\mathcal{W}$ ορίζεται ως πλήρωση του συνόλου

$$\left\{ w(x) = |x|^{-N+2}\psi\left(\frac{x}{|x|^2}\right) : \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \right\},$$

υπό τη νόρμα $\|w\|_{\mathcal{W}}$, η οποία έχει την ακόλουθη μορφή

$$\|w\|^2_{\mathcal{W}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(I_\varepsilon(u) - \Lambda_\varepsilon(u)) + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-4}|w|^2 dx, \;\; u = \mathcal{K}(w). \tag{5.78}$$

Παρατήρηση 5.3.18. *Η ορθή τοποθέτηση του προβλήματος (5.76) στον χώρο $\mathcal{W}$ γίνεται αντιληπτή μέσω της ισοδυναμίας με τον H_r. Συνακόλουθα, η ύπαρξη και η τροχιακή ευστάθεια των στάσιμων κυμάτων είναι άμεσες για το πρόβλημα (5.76).*

Στη συνέχεια, θα διερευνήσουμε τη σχέση του χώρου $\mathcal{W}$ με το συναρτησιακό Hardy. Αρχικά, θεωρούμε τα συναρτησιακά

$$I_\varepsilon(\psi) := \int_{B_\varepsilon} |\nabla\psi|^2 dy - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_\varepsilon} \frac{|\psi|^2}{|y|^2} dy,$$

και

$$I_{1/\varepsilon}(w) := \int_{B_{1/\varepsilon}} |\nabla w|^2 dx - \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_{1/\varepsilon}} \frac{|w|^2}{|x|^2} dx,$$

πάνω στις μπάλες B_ε και $B_{1/\varepsilon}$, αντίστοιχα.

Λήμμα 5.3.19. *([74]) Αληθεύει ότι*

$$I_\varepsilon(u) = I_{1/\varepsilon}(w) + 2\Lambda_{1/\varepsilon}(w), \tag{5.79}$$

όπου

$$\Lambda_{1/\varepsilon}(w) = \frac{N-2}{2}\varepsilon \int_{|x|=\frac{1}{\varepsilon}} |w|^2 dS.$$

Επιπλέον,

$$\Lambda_\varepsilon(u) = \Lambda_{1/\varepsilon}(w), \quad u = \mathcal{K}(w). \tag{5.80}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στα στοιχεία του $\mathcal{W}$, προκύπτει ο ακόλουθος, μη αναμενόμενος, ορισμός της ενεργειακής νόρμας

$$\|w\|^2_{\mathcal{W}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(I_{1/\varepsilon}(w) + \Lambda_{1/\varepsilon}(w)) + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-4}|w|^2 dx. \tag{5.81}$$

Παρατήρηση 5.3.20. *Για μια συνάρτηση w, η οποία έχει τη συμπεριφορά της $|x|^{-(N-2)/2}$ στο άπειρο, ο επιδιορθωτικός όρος της ενέργειας έχει την ακόλουθη τιμή*

$$\Lambda_\infty(w) = \frac{N(N-2)}{2}\omega_N v^2(0),$$

όπου $v(x/|x|^2) = |x|^{\frac{N-2}{2}} w(x)$. Ωστόσο, υπάρχει μια αξιοσημείωτη διαφορά με το πρόβλημα (5.1), αφού σε αυτή την περίπτωση η επίδραση της ιδιομορφίας έχει αθροιστικό ρόλο στο σύνηθες συναρτησιακό Hardy.

5.4 Η Γενική Περίπτωση

Σε αυτή την ενότητα, επεκτείνουμε το Θεώρημα 5.3.16 για συναρτήσεις που δεν είναι ακτινικά συμμετρικές. Εντούτοις, στη γενική περίπτωση απαιτείται η τοποθέτηση ενός βάρους στη μη γραμμικότητα. Αυτή η ανάγκη προκύπτει από το γεγονός ότι δεν είναι δυνατή μια ανισότητα τύπου Hardy-Sobolev χωρίς βάρος. Το υπό μελέτη πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \frac{\psi}{|x|^2} + g(x)|\psi|^{q-2}\psi = 0, \\ \psi(0) = \psi_0, \end{cases} \tag{5.82}$$

όπου η συνάρτηση $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ είναι μη αρνητική. Θεωρούμε τον ακόλουθο σταθμισμένο χώρο Sobolev

$$L^q_g(|x|^{-q\frac{N-2}{2}}dx, \mathbb{R}^N) := \left\{ v : \int_{\mathbb{R}^N} g|x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v|^q dx < \infty \right\}.$$

Λήμμα 5.4.1. *Έστω ότι η συνάρτηση g έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά*

$$g(r) \sim r^\omega, \ \ \mu\epsilon \begin{cases} \omega > -N + \frac{q(N-2)}{2}, & \sigma\tau o \ \ 0, \\ \omega < -N + \frac{q(N-2)}{2}, & \sigma\tau o \ \ \infty, \end{cases} \tag{5.83}$$

όπου $2 \le q < 2^*$. Τότε, η εμφύτευση

$$\mathcal{H} \hookrightarrow L^q_g(|x|^{-q\frac{N-2}{2}}dx, \mathbb{R}^N),$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Έστω (v_n) μια φραγμένη ακολουθία από $C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$-συναρτήσεις στον $\mathcal{H}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $v_n \rightharpoonup 0$ στον $\mathcal{H}$. Αρχικά, αναλύουμε τη νόρμα της v_n ως εξής

$$\|v_n\|_{\mathcal{H}} = \|v_n\|_{\mathcal{H}(B_1)} + \|v_n\|_{\mathcal{H}(B_1^c)}.$$

Επιπλέον, θα μελετήσουμε χωριστά τα ακτινικά και τα μη ακτινικά μέρη, θεωρώντας την ανάλυση $v_n = v_n^r(r) + v_n^{nr}$, $r = |x|$. Η απόδειξη συντελείται σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. Το ακτινικό μέρος v_n^r στην $B_1 \subset \mathbb{R}^N$. Επιχειρηματολογώντας όπως στο Λήμμα 5.3.1, αληθεύει ότι $v_n^r \in H^1(B_1 \subset \mathbb{R}^2)$, οποτεδήποτε $v_n^r \in \mathcal{H}(B_1)$. Άρα,

$$\int_{B_1} |x|^{-(N-2)}|v_n^r|^p dx \to 0, \quad \text{για κάθε } p \in [1, +\infty),$$

καθώς $n \to \infty$. Για p επαρκώς μεγάλο, θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} g|v_n^r|^q dx &= \int_{B_1} |x|^{-q(N-2)\frac{p-2}{2p}} g||x|^{-\frac{N-2}{p}} v_n^r|^q dx \\ &\le \left(\int_{B_1} |x|^{-q(N-2)\frac{p-2}{2(p-q)}} g^{\frac{p}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_{B_1} |x|^{-(N-2)}|v_n^r|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Έστω ότι $g \sim r^w$ στο 0. Αν

$$\omega > (N-2)\frac{q}{2} - N, \tag{5.84}$$

τότε το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο. Επομένως,

$$\int_{B_1} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} g|v_n^r|^q dx \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Βήμα 2. Το μη ακτινικό μέρος v_n^{nr} στην $B_1 \subset \mathbb{R}^N$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$|x|^{-(N-2)/2}\, v_n^{nr} \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{5.85}$$

όπως προκύπτει από το [76] (βλ. επίσης [40, σελ. 196]). Θέτοντας $u_n^{nr} = |x|^{-(N-2)/2} v_n^{nr}$, λαμβάνουμε

$$\|v_n^{nr}\|_{\mathcal{H}}^2 = I_{\mathbb{R}^N}(u_n^{nr}) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{nr}|^2 dx.$$

Ωστόσο, αναλύοντας σε σφαιρικές αρμονικές, προκύπτει το εξής

$$I_{\mathbb{R}^N}(u_n^{nr}) \geq c \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^{nr}|^2 dx,$$

και η (5.85) ισχύει. Επιπλέον,

$$\|v_n^{nr}\|_{\mathcal{H}} \geq c\, \|v_n^{nr}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

δηλαδή η (v_n^{nr}) είναι φραγμένη στον $H^1(\mathbb{R}^N)$. Επομένως, $|x|^{-(N-2)/2}\, v_n^{nr} \in H^1(B_1)$, ενώ ο χώρος $H^1(B_1)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^p(B_1)$ για κάθε $1 \leq p < 2^*$.

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$A_{q,\varepsilon} := \left(1 - \frac{q}{2^* - \varepsilon}\right)^{-1}, \tag{5.86}$$

για $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό. Είναι εμφανές ότι η συνάρτηση $A_{q,\varepsilon}$ είναι αύξουσα ως προς ε, οπότε

$$A_{q,\varepsilon} > \left(1 - \frac{q}{2^*}\right)^{-1},$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} g|v_n^{nr}|^q dx &= \int_{B_1} g||x|^{-\frac{N-2}{2}} v_n^{nr}|^q dx \\
&\leq \left(\int_{B_1} g^{A_{q,\varepsilon}} dx\right)^{\frac{1}{A_{q,\varepsilon}}} \left(\int_{B_1} ||x|^{-\frac{N-2}{2}} v_n^{nr}|^{2^*-\varepsilon} dx\right)^{\frac{q}{2^*-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Αν $g \sim r^w$ στο μηδέν και ισχύει η (5.84), τότε το πρώτο ολοκήρωμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο. Συνακόλουθα,

$$\int_{B_1} |x|^{-q\frac{N-2}{2}} g|v_n^{nr}|^q dx \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Στην περίπτωση του εξωτερικού της σφαίρας, θα χρησιμοποιήσουμε έναν μετασχηματισμό τύπου Kelvin, τόσο στην ακτινική όσο και τη μη ακτινική περίπτωση. Εισάγουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$v(x) = w(y), \qquad y = \frac{x}{|x|^2}\,. \tag{5.87}$$

Η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα στις διαστάσεις $d \geq 2$ ισούται με $-|x|^{2d}$, ενώ, από την ταυτότητα

$$\left|\nabla_x w\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^2 = |x|^{-4}\,|\nabla_y w(y)|^2,$$

έχουμε

$$\|v_n\|^2_{\mathcal{H}(B_1^c)} = \int_{B_1} |y|^{-(N-2)}\,|\nabla w_n|^2\,dy + \int_{B_1} |y|^{-N-2}\,|w_n|^2\,dy. \tag{5.88}$$

Βήμα 3. Το ακτινικό μέρος v_n^r στην B_1^c. Παρατηρούμε ότι για ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις w_n^r, ισχύει το εξής

$$\int_{B_1} |y|^{-(N-2)}\,|\nabla w_n^r|^2\,dy + \int_{B_1} |y|^{-N-2}\,|w_n^r|^2\,dy \geq ||w_n^r||^2_{H^1(B_1\subset\mathbb{R}^2)}.$$

Σύμφωνα με το Βήμα 1,

$$\text{η} \quad |y|^{-\frac{N-2}{p}}\,w_n^r \quad \text{συγκλίνει στο 0 στον } \ L^p(B_1), \ \text{ για κάθε } \ p \geq 1.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^c} |x|^{-\frac{N-2}{2}q}\,g\,|v_n^r|^q\,dx &= \int_{B_1} |y|^{\frac{N-2}{2}q-2N}\,g\,|w_n^r|^q\,dy \\
&= \int_{B_1} |y|^{\frac{N-2}{2}q-2N+\frac{N-2}{p}q}\,g\,||y|^{-\frac{N-2}{p}}\,w_n^r|^q\,dy \\
&\leq \left(\int_{B_1} |y|^{(N-2)\frac{p+2}{2(p-q)}q-\frac{2Np}{p-q}}\,g^{\frac{p}{p-q}}\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&\quad \left(\int_{B_1} |x|^{-(N-2)}\,|v_n^r|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Αν $g \sim |x|^\omega$ στο άπειρο και

$$-\omega > -q(N-2)\frac{p+2}{2p} + N + \frac{q}{p}N,$$

ή ισοδύναμα, για επαρκώς μεγάλο p,

$$\omega < \frac{q(N-2)}{2} - N, \tag{5.89}$$

τότε το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, αν $g \sim |x|^\omega$ στο μηδέν και το ω ικανοποιεί την (5.89), τότε

$$\int_{B_1} |x|^{-\frac{N-2}{2}q}\,g\,|v_n^r|^q\,dx \to 0, \qquad \text{καθώς} \quad n \to \infty.$$

Βήμα 4. Το μη ακτινικό μέρος v_n^{nr} στην B_1^c. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (5.87), λαμβάνουμε

$$||v_n||_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{-(N-2)} |\nabla w_n|^2 \, dy + \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{-N-2} |w_n|^2 \, dy. \tag{5.90}$$

Επιπλέον, ακολουθώντας τη διαδικασία του Βήματος 2, προκύπτει το εξής

$$||v_n^{nr}||_{\mathcal{H}}^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(|y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr})|^2 \, dy + \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{-4} \, ||y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr}|^2 \, dy.$$

Αν περιοριστούμε στην B_1, τότε η $|y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr}$ είναι φραγμένη στον $H^1(B_1)$, άρα

$$|y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr} \to 0 \quad \text{στον} \quad L^p(B_1), \;\; 1 \leq p < 2^*.$$

Μετασχηματίζοντας,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^c} |x|^{-\frac{N-2}{2}q} g \, |v_n^{nr}|^q \, dx &= \int_{B_1} |y|^{\frac{N-2}{2}q - 2N} g \, |w_n^{nr}|^q \, dy \\
&= \int_{B_1} |y|^{(N-2)q-2N} g \, ||y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr}|^q \, dy \\
&\leq \left(\int_{B_1} (|y|^{(N-2)q-2N} g)^{A_{q,\varepsilon}} \, dy \right)^{\frac{1}{A_{q,\varepsilon}}} \\
&\quad \left(\int_{B_1} ||y|^{-\frac{N-2}{2}} w_n^{nr}|^{2^*-\varepsilon} \, dy \right)^{\frac{q}{2^*-\varepsilon}},
\end{aligned}$$

όπου η ποσότητα $A_{q,\varepsilon}$ έχει οριστεί στην (5.86). Έστω τώρα ότι $g \sim |x|^\omega$ στο άπειρο. Αν

$$-\omega > 2N - (N-2)q - \frac{N}{A_{q,\varepsilon}} > N - \frac{N-2}{2}q,$$

ή ισοδύναμα, το ω ικανοποιεί την (5.89), τότε το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι πεπερασμένο. Σε αυτή την περίπτωση, προκύπτει το ακόλουθο

$$\int_{B_1^c} |x|^{-\frac{N-2}{2}q} g \, |v_n^{nr}|^q \, dx \to 0, \qquad \text{ας} \quad n \to \infty,$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Παρατήρηση 5.4.2. *(i) Εφόσον*

$$-N + \frac{N-2}{2}q < 0, \tag{5.91}$$

για κάθε $2 \leq q < 2^*$, συμπεραίνουμε ότι η g μπορεί να είναι σταθερή στην αρχή. Από την άλλη, θα πρέπει να φθίνει στο άπειρο. Ωστόσο, αυτό δεν είναι υποχρεωτικό, όταν περιοριστούμε στις ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις, όπως διαπιστώσαμε στο Λήμμα 5.3.1.
(ii) Αν $u = |x|^{-(N-2)/2} v$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\frac{N-2}{2}q} g \, |v|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g \, |u|^q \, dx.$$

Ειδικά, αν $q = 2$, τότε η g πρέπει να έχει την ακόλουθη συμπεριφορά

$$g \sim r^{\omega}, \quad \mu\epsilon \begin{cases} \omega > -2, & \sigma\tau o \;\; 0, \\ \omega < -2, & \sigma\tau o \;\; \infty, \end{cases}$$

όπως αναμένεται από την ανισότητα Hardy.
(ii) Κάθε συνάρτηση $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (5.83).

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στην τροχιακή ευστάθεια του προβλήματος (5.82). Η προσέγγιση αποτελεί πιστή προσαρμογή των επιχειρημάτων για τη συμμετρική περίπτωση. Γι' αυτόν τον λόγο, θα δοθεί ένα περίγραμμα της διαδικασίας.

Η ακόλουθη ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του Πορίσματος 5.3.3 και της δεδομένης συμπεριφοράς της g στο μηδέν και το άπειρο.

Πόρισμα 5.4.3. *Έστω $2 < q < 2^*$, $N \geq 3$. Υποθέτουμε ότι η g έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά*

$$g(r) \sim r^{\omega}, \quad \mu\epsilon \begin{cases} \omega \geq 0, & \sigma\tau o \;\; 0, \\ \omega < -N + \frac{q(N-2)}{2}, & \sigma\tau o \;\; \infty. \end{cases} \tag{5.92}$$

Τότε, υπάρχει σταθερά $C = C(N, q) > 0$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g|x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v|^q dx \quad &\leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \\ &\quad\;\; \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|v|^2 dx\right)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}}, \end{aligned} \tag{5.93}$$

για κάθε $v \in \mathcal{H}$.

Εισάγουμε το ενεργειακό συναρτησιακό $E_g : H \to \mathbb{R}$,

$$E_g(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-(N-2)}|\nabla(|x|^{\frac{N-2}{2}}u)|^2 dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^q dx,$$

που σχετίζεται φυσιολογικά με το πρόβλημα (5.82).

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω $2 < q < 2^*$, $N \geq 3$. Υποθέτουμε ότι η g ικανοποιεί τη συνθήκη (5.92). Τότε, για κάθε $\psi_0 \in H$, το πρόβλημα (5.82) επιδέχεται μοναδική λύση*

$$\psi \in C([0, \infty), H) \cap C^1([0, \infty), H^{-1}).$$

Επιπλέον, για κάθε $t \geq 0$, η λύση ικανοποιεί τα εξής:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi(t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_0|^2 dx, \tag{5.94}$$

και

$$E_g(\psi(t)) = E_g(\psi_0). \tag{5.95}$$

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\begin{cases} u \in \Gamma, \\ E_g(u) = \min\left\{E_g(z) : z \in \Gamma\right\}, \end{cases} \tag{5.96}$$

Από το Πόρισμα 5.4.3, το E_g είναι κάτω φραγμένο στο σύνολο Γ. Υϊοθετώντας την επιχειρηματολογία του Λήμματος 5.3.14, βλέπουμε ότι, για δοθέν $\gamma > 0$, υπάρχουν στάσιμα κύματα $e^{i\lambda_\gamma t}u_\gamma \in H$, τα οποία επιλύουν το ελλειπτικό πρόβλημα

$$-\nabla \cdot (|x|^{-(N-2)}\nabla v_\gamma) + \lambda_\gamma |x|^{-(N-2)} v_\gamma - g|x|^{-q\frac{N-2}{2}}|v_\gamma|^{q-2}v_\gamma = 0. \tag{5.97}$$

Θέτουμε

$$S_{g,\gamma} := \{u \in H : u \text{ επιλύει το } (5.96)\}.$$

Τότε, η μη συμμετρική εκδοχή του Θεωρήματος 5.3.16 διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.4.5. *Υποθέτουμε ότι $N \geq 3,\ 2 < q < \frac{4}{N} + 2$ και η g ικανοποιεί τη συνθήκη (5.92). Τότε, το σύνολο $S_{g,\gamma}$ είναι τροχιακά ευσταθές.*

Υποκρίσιμη Περίπτωση. Όσον αφορά το παραμετρικό πεδίο $0 \leq c < c_*$, ο ενεργειακός χώρος που σχετίζεται φυσιολογικά με την εξίσωση

$$i\psi_t + \Delta\psi + \frac{c}{|x|^2}\psi + |\psi|^{q-2}\psi = 0, \tag{5.98}$$

τόσο στη συμμετρική όσο και τη μη συμμετρική περίπτωση, καταλήγει να είναι ο $H^1(\mathbb{R}^N)$, όπως προκύπτει από την κλασική ανισότητα Hardy (βλ. [76]). Τότε, η ύπαρξη ολικής λύσης και η τροχιακή ευστάθεια προκύπτουν με προσαρμογή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε στην κλασική μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (βλ. [25, 27]). Σε αυτή την προσέγγιση, η επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος ελαχιστοποίησης βασίζεται στο Λήμμα Συγκέντρωσης -Συμπάγειας του Lions (Concentration-Compactness Lemma) (βλ. [54, 55]).

Υπερκρίσιμη Περίπτωση. Στο πεδίο $c > c_*$ τη παραμέτρου, ενδεχομένως, να μην είναι δυνατός ο ορισμός λύσης (ούτε καν τοπικής χρονικά) για την εξίσωση (5.98). Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για ακαριαία έκρηξη των λύσεων, όπως στην περίπτωση της εξίσωσης θερμότητας με το δυναμικό αντίστροφου τετραγώνου (βλ. [13]).

Βιβλιογραφία

[1] B. Abdellaoui, E. Colorado, I. Peral, *Existence and nonexistence results for a class of linear and semilinear parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **6** (2004), 119-148.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, *On quasilinear elliptic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Commun. Pure Appl. Anal **2** (2003), 539-566.

[3] B. Abdellaoui, I. Peral, *Hölder regularity and Harnack inequality for degenerate parabolic equations related to Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Nonlinear Anal. **57** (2004), 971-1003.

[4] Adimurthi, M. J. Esteban, *An improved Hardy-Sobolev inequality in $W^{1,p}$ and its application to Schrödinger operators*, Nonlinear Differential Equations Appl. **12** (2005), 243-263.

[5] Adimurthi, S. Filippas, A. Tertikas, *On the best constant of Hardy-Sobolev inequalities*, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. **70** (2009), 2826-2833.

[6] M. Anguiano, T. Caraballo, J. Real, J. Valero, *Pullback attractors for reaction-diffusion equations in some unbounded domains with an H^{-1}-valued non-autonomous forcing term and without uniqueness of solutions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **14** (2010), 307-326.

[7] C. T. Anh, T. Q. Bao, *Pullback attractors for a non-autonomous semilinear degenerate parabolic equation*, Glasg. Math. J. **52** (2010), 537-554.

[8] W. Arendt, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, *Outgrowths of Hardy's inequality*, Contemp. Math. **412** (2006), 51-68.

[9] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques de Sobolev*, J. Differential Geometry **11** (1976), 573-598.

[10] J. P. Azorero, I. Peral, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Differential Equations **144** (1998), 441-476.

[11] J. M. Ball, *On the asymptotic behavior of generalized processes with applications to nonlinear evolution equations*, J. Differential Equations **27** (1978), 224-265.

[12] J. M. Ball, *Global attractors for damped semilinear wave equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **10** (2004), 31-52.

[13] P. Baras, J. A. Goldstein, *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 121-139.

[14] G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas, *Critical heat kernel estimates for Schrödinger operators via Hardy-Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **208** (2004), 1-30.

[15] J. Bellazzini, C. Bonanno, *Nonlinear Schrödinger equations with strongly singular potentials*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **140** (2010), 707-721.

[16] J. Bellazzini, N. Visciglia, *On the orbital stability for a class of nonautonomous NLS*, Indiana Univ. Math. **59** (2010), 1211-1230.

[17] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d' une variété Riemannienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[18] H. Brezis, L. Dupaigne, A. Tesei, *On a semilinear elliptic equation with inverse-square potential*, Selecta Math. (N. S.) **11** (2005), 1-7.

[19] H. Brezis, J. L. Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997), 443-469.

[20] K J. Brown, N. M. Stavrakakis, *Global bifurcation results for a semilinear elliptic equation on all of* $\mathbb{R}^N$, Duke Math. J. **85** (1996), 77-94.

[21] X. Cabré, Y. Martel, *Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329** (1999), 973-978.

[22] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation with weights*, Compositio Math. **53** (1984), 259-275.

[23] F. Catrina, Z-Q. Wang, *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions*, Comm. Pure App. Math. **54** (2001), 229-258.

[24] C. Cazacu, D. Krejcirik, *The Hardy inequality and the heat equation with magnetic field in any dimension*, arXiv: 1409.6433v1.

[25] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics **10**, 2003.

[26] T. Cazenave, A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **13**, 1998.

[27] T. Cazenave, P. L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 549-561.

[28] J. Chen, *On the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential and unbounded coefficient*, Czechoslovak Math. J. **60** (2010), 715-736.

[29] J. Chen, Y. Liu, *Instability of standing waves to the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential*, Illinois J. Math. **52** (2008), 1259-1276.

[30] C. Chen, H. Wang, *Ground state solutions for singular p-Laplacian equation in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **351** (2009), 773-780.

[31] K. S. Chou, C. W. Chu, *On the best constant for a weightes Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc., **48** (1993), 137-151.

[32] D. G. Costa, J. Marcos do Ó, K. Tintarev, *Compactness properties of critical nonlinearities and nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Edinb. Math. Soc. **56** (2013), 427-441.

[33] A. Dall' Aglio, D. Giachetti, I. Peral, *Results on parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, SIAM J. Math. Anal. **36** (2005), 691-716.

[34] E. B. Davies, B. Simon, L^p *norms of noncritical Schrödinger semigroups*, J. Funct. Anal. **102** (1991), 95-115.

[35] A. de Bouard, F. Fukuizumi, *Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, Ann. Henri Poincaré **6** (2005), 1157-1177.

[36] Y. Deng, L. Jin, S. Peng, *Solutions of Schrödinger equations with inverse square potential and critical nonlinearity*, J. Differential Equations **253** (2012), 1376-1398.

[37] L. Dupaigne, *A nonlinear elliptic PDE with the inverse square potential*, J. Anal. Math. **86** (2002), 359-398.

[38] T. Ekholm, R. L. Frank, *On Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with virtual level*, Comm. Math. Phys. **264** (2006), 725-740.

[39] M. Escobedo, O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. **11** (1987), 1103-1133.

[40] S. Filippas, A. Tertikas, *Optimizing improved Hardy inequalities*, J. Funct. Anal. **192** (2002), 186-233.

[41] F. Genoud, *Existence and orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, J. Differential Equations **246** (2009), 1921-1943.

[42] F. Genoud, C. A. Stuart, *Schrödinger equations with a spatially decaying nonlinearity: existence and stability of standing waves*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **21** (2008), 137-186.

[43] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 Edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[44] C. R. Goldstein, J. A. Goldstein, A. Rhandi, *Kolmogorov equations perturbed by an inverse-square potential*, Discrete Cont. Dyn. Syst.-Series S **4** (2011), 623-630.

[45] J. A. Goldstein, I. Kombe, *Nonlinear degenerate parabolic equations with singular lower-order term*, Adv. Differential Equations **8** (2003), 1153-1192.

[46] B. Guo, J. Chen, *Orbital stability of standing wave solution for a quasilinear Schrödinger equation*, Quart. Appl. Math. **67** (2009), 781-791.

[47] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**, 1988.

[48] L. Jeanjean, S. Le Coz, *An existence and stability result for standing waves of nonlinear Schrödinger equations*, Adv. Differential Equations **11** (2006), 813-840.

[49] N. I. Karachalios, *Weyl's type estimates on the eigenvalues of critical Schrödinger operators*, Lett. Math. Phys. **83** (2008), 189-199.

[50] N. I. Karachalios, N. B. Zographopoulos, *On the dynamics of a degenerate parabolic equation: global bifurcation of stationary states and convergence*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), 361-393.

[51] N. I. Karachalios, N. B. Zographopoulos, *The semiflow of a reaction diffusion equation with a singular potential*, Manuscripta Math. **130** (2009), 63-91.

[52] H. Li, S. Ma, *Asymptotic behavior of a class of degenerate parabolic equations*, Abstract. Appl. Anal. (2012), Article ID 673605.

[53] E. H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. **118** (1983), 349-374.

[54] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The localy compact case. I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 109-145.

[55] P.-L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The localy compact case. II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 223-283.

[56] Y. Meihua, P. E. Kloeden, *Random attractors for stochastic semilinear degenerate parabolic equations*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **12** (2011), 2811-2821.

[57] A. Miranville, S. Zelik, *Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains*, in C. M. Dafermos, M. Pokorny (Eds.), Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations **4** ,2008, pp. 103-200.

[58] L. Moschini, G. Reyes, A. Tesei, *Nonuniqueness of solutions to semilinear parabolic equations with singular coefficients*, Commun. Pure Appl. Anal. **1** (2006), 155-179.

[59] W. Niu, *Global attractors for degenerate semilinear parabolic equations*, Nonlinear Anal. **77** (2013), 158-170.

[60] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[61] G. Reyes, A. Tesei, *Self-similar solutions of a semilinear parabolic equation with inverse-square potential*, J. Differential Equations **219** (2005), 40-77.

[62] H. A. Rose, M. I. Weinstein, *On the bounde states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential*, Phys. D **30** (1988), 207-218.

[63] M. Shibata, *Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term*, Manuscripta Math. **143** (2014), 221-237.

[64] D. Smets, *Nonlinear Schrödinger equations with Hardy potential and critical nonlinearities*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 2909-2938.

[65] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[66] J. Su, Z.-Q. Wang, M. Willem, *Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials*, Commun. Contemp. Math. **9** (2007), 571-583.

[67] J. Su, Z.-Q. Wang, M. Willem, *Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials*, J. Differential Equations **238** (2007), 201-219.

[68] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353-372.

[69] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent*, Adv. Differential Equations **1** (1996), 241-264.

[70] J. M. Tölle, *Uniqueness of weighted Sobolev spaces with weakly differentiable weights*, J. Funct. Anal. **263** (2012), 3195-3223.

[71] G. P. Trachanas, N. B. Zographopoulos, *A strongly singular parabolic problem on an unbounded domain*, Comm. Pure. Appl. Anal. **13** (2014), 789-809.

[72] G. P. Trachanas, N. B. Zographopoulos, *On the dynamics of a strongly singular parabolic equation*, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), 21-37.

[73] G. P. Trachanas, N. B. Zographopoulos, *Orbital stability for the Schrödinger operator involving inverse square potential*, J. Differential Equations, pp. 24, to appear.

[74] J.L. Vázquez, N.B. Zographopoulos, *Functional aspects of the Hardy inequality: appearance of a hidden energy*, J. Evol. Equ. **12** (2012), 713-739.

[75] J.L. Vázquez, N.B. Zographopoulos, *Hardy type inequalities and hidden energies*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 5457-5491.

[76] J.L. Vázquez, E. Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, J. Funct. Anal. **173** (2000), 103-153.

[77] Z. Q. Wang, M. Willem, *Singular minimization problems*, J. Differential Equations **161** (2000), 307-320.

[78] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **24**, 1996.

[79] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Applicatios to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences **108**, 1995.

[80] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications **I**, Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[81] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications **II/A**, Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York 1990.

[82] Q. S. Zhang, *Global bounds of Schrödinger heat kernels with negative potentials*, J. Funct. Anal. **182** (2001), 344-370.

[83] N. B. Ζωγραφόπουλος, *Ύπαρξη διακλάδωσης σε μη γραμμικά ελλειπτικά συστήματα ορισμένα στο* $\mathbb{R}^N$, Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, ΣΕΜΦΕ, 2000.

[84] N. B. Zographopoulos, *Weyl's type estimates on the eigenvalues of critical Schrödinger operators using improved Hardy-Sobolev inequalties*, J. Physics A: Math. Theor. **42** (2009), 465204.

[85] N. B. Zographopoulos, *Existence of extremal functions for a Hardy-Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 308-314.