



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΜΗ-ΤΕΛΕΙΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΡΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ
ΤΩΝ ΝΑΝΟ-ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Θ. ΚΑΡΑΛΗ

Διπλωματούχου Μηχανικού Μεταλλείων Μεταλλουργών ΕΜΠ, MSc

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΜΑΡΙΝΟΣ ΚΑΤΤΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΜΗ-ΤΕΛΕΙΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΠΑΝΩ ΣΤΗ ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΡΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΝΑΝΟ-ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Θ. ΚΑΡΑΛΗ

Διπλωματούχου Μηχανικού Μεταλλείων Μεταλλουργών ΕΜΠ, MSc

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Καττής Μ., Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Παπανίκος Π., Αν. Καθ. Παν. Αιγαίου
3. Ευταξιόπουλος Δ., Επ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Καττής Μ., Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Παπανίκος Π., Αν. Καθ. Παν. Αιγαίου
3. Ευταξιόπουλος Δ., Επ. Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Σακελλαρίου Μ., Καθ. Ε.Μ.Π.
5. Γεωργιάδης Χ., Καθ. Ε.Μ.Π.
6. Κοντού-Δρούγκα Ε., Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.
7. Λαμπέας Γ., Αν. Καθ. Παν. Πατρών

Αθήνα, 2014

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο εργαστήριο Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων Τεχνικών Έργων της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη του κ. Μαρίνου Καττή, Αναπληρωτή Καθηγητή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μαρίνο Καττή για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με την έρευνα και για την αδιάκοπη και γεμάτη υπομονή καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της διατριβής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το *Κοινοφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης* για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε τα έτη 2009-2013, μέσω υποτροφίας. Ευχαριστώ τον *Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας, Ε.Μ.Π.* για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε τα έτη 2010-2014, μέσω υποτροφίας. Οι οικονομικές ενισχύσεις ήταν σημαντικές για την εξολοκλήρου ενασχόληση με το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω ευχαριστίες στον κ. Παπανίκο Παρασκευά, Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγίου, και τον κ. Ευταξιοπούλο Δημήτριο, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τη βοήθεια που μου παρείχαν ως μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	v
1 Εισαγωγή	1
1.1 Η ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	1
1.2 Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΕΥΝΑΣ	3
1.3 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	5
2 Το ελαστικό σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας	7
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ	9
2.3 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	9
2.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ	10
2.4.1 Εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων	10
2.4.2 Οι εξισώσεις της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου σε κυλινδρικές συντεταγμένες	15
2.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ	16
2.5.1 Εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων	16
2.5.2 Οι εξισώσεις της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	23
2.6 ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ	25
2.6.1 Το μοντέλο της διεπιφάνειας χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας	25
2.6.2 Το μοντέλο της υψηλής θερμικά αγωγιμότητας	26
3 Η ενεργειακή κατάσταση του συστήματος	29
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	29
3.2 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	30
3.2.1 Το σύστημα ανομοιογένειας - μήτρας με μερική τέλεια διεπιφάνεια	30
3.2.2 Η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος	31
3.2.3 Η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος από επιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις	34
3.3 Η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας στο φορτισμένο σώμα κατά την επέκταση της μη-τέλειας διεπιφάνειας	35
3.3.1 Φόρτιση με επιφανειακές δυνάμεις στο εξωτερικό σύνορο	35

3.4	Μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος κατά τον μετασχηματισμό μίας τέλει σε μη-τέλια διεπιφάνεια	38
3.4.1	Φόρτιση με επιφανειακές δυνάμεις στο εξωτερικό σύνορο του σώματος	38
3.4.2	Φόρτιση με ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια	39
4	Κυκλική ανομοιογένεια με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου	41
4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	41
4.2	ΤΟ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ	42
4.2.1	Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος	42
4.2.2	Η διαδικασία λύσης	42
4.2.3	Επίλυση των p -προβλημάτων	44
4.2.4	Επίλυση των s -προβλημάτων	46
4.2.5	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με τέλια διεπιφάνεια	47
4.2.6	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου	49
4.2.7	Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος	52
4.3	ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ	53
4.3.1	Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος	53
4.3.2	Επίλυση των p -προβλημάτων	54
4.3.3	Επίλυση των s -προβλημάτων	55
4.3.4	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με τέλια διεπιφάνεια	56
4.3.5	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου	57
4.3.6	Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος	59
4.4	Συζήτηση και συμπεράσματα	60
5	Κυκλική ανομοιογένεια με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου	67
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	67
5.2	ΤΟ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ	68
5.2.1	Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η διαδικασία επίλυσης	68
5.2.2	Επίλυση των f -προβλημάτων	70
5.2.3	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου	71
5.2.4	Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος	74
5.3	ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ	75
5.3.1	Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος	75
5.3.2	Επίλυση των f -προβλημάτων	76
5.3.3	Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου	77
5.3.4	Μεταβολή στην ολική δυναμική ενέργεια	78
5.4	Συζήτηση και συμπεράσματα	79
6	Κυκλική ανομοιογένεια με μια μη-τέλια διεπιφάνεια που διαταράσσει μία ομοιόμορφη θερμική ροή	87
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	87
6.2	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ	88

6.2.1	Ανομοιογένεια με διεπιφάνεια χαμηλής αγωγιμότητας	88
6.2.1.1	Περιγραφή του προβλήματος και διαδικασία λύσης του	88
6.2.1.2	Επίλυση του p - και θ - θερμοκρασιακού προβλήματος	89
6.2.2	Ανομοιογένεια με διεπιφάνεια υψηλής αγωγιμότητας	91
6.2.2.1	Το θερμοκρασιακό πρόβλημα και η διαδικασία λύσης του	91
6.2.2.2	Επίλυση του q - θερμοκρασιακού προβλήματος	92
6.3	ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ . .	94
6.3.1	Διαδικασία επίλυσης	94
6.3.2	Το p -θερμοελαστικό πρόβλημα για διεπιφάνεια χαμηλής αγωγιμότητας	95
6.3.3	Το s -θερμοελαστικό πρόβλημα	97
6.4	ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ .	98
6.4.1	Το θερμοελαστικό πρόβλημα I ($\alpha_{tI} \neq 0, \alpha_{tM} \neq 0, \alpha_{tS} = 0$)	99
6.4.1.1	Το p -θερμοελαστικό πρόβλημα I	99
6.4.1.2	Το f -θερμοελαστικό πρόβλημα I	99
6.4.2	Το θερμοελαστικό πρόβλημα II ($\alpha_{tI} = \alpha_{tM} = 0, \alpha_{tS} \neq 0$)	100
6.5	ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑ- ΣΙΑΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	103
6.5.1	Διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου	104
6.5.2	Διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου	105
6.6	Συζήτηση και συμπεράσματα	107
7	Συμπεράσματα και προτάσεις για παραπέρα έρευνα	115
7.1	Συμπεράσματα διατριβής	115
7.2	Προτάσεις για παραπέρα έρευνα	119
	Βιβλιογραφία	121
I	Οι Βασικές Εξισώσεις Ελαστικότητας	127
I.1	Οι εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας	127
I.2	Οι εξισώσεις της ελαστικότητας για διδιάστατη παραμόρφωση	127
I.3	Η διατύπωση της λύσης των διδιάστατων ελαστικών προβλημάτων	128
II	Οι Βασικές Εξισώσεις Θερμικής αγωγιμότητας και Θερμοελαστικότητας	131
II.1	Οι βασικές εξισώσεις της θερμικής αγωγιμότητας για συνθήκες σταθερής κατάστασης .	131
II.2	Η συνεπίπεδη θερμοελαστικότητα	132
III	Διφασικά Δυναμικά για μια κυκλική ανομοιογένεια	133
III.1	Συνεπίπεδη παραμόρφωση	133
III.2	Αντιεπίπεδη παραμόρφωση	136
III.3	Θερμικά διφασικά δυναμικά	137

IV Ελαστικά Πεδία	141
IV.1 Ελαστικά πεδία για το p -πρόβλημα	141
IV.1.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση	141
IV.1.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση	142
IV.2 Ελαστικά πεδία για το s -πρόβλημα	143
IV.2.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση	143
IV.2.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση	145
IV.3 Ελαστικά πεδία για το f -πρόβλημα	146
IV.3.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση	146
IV.3.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση	147
V Θερμοκρασιακά και Θερμοελαστικά Πεδία	149
V.1 Θερμοκρασιακά πεδία για τα p -, θ - και q -προβλήματα	149
V.2 Θερμοελαστικά πεδία για το p -πρόβλημα	150
V.3 Θερμοελαστικά πεδία για το s -πρόβλημα	152
V.4 Θερμοελαστικά πεδία για το f -πρόβλημα	153
V.5 Θερμοελαστικά πεδία για την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια	155
V.6 Θερμοελαστικά πεδία για την μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια	155

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η διερεύνηση της επίδρασης των μη-τέλειων διεπιφανειών πάνω στη συνολική συμπεριφορά των νανο-σύνθετων υλικών για μηχανικές και θερμικές δράσεις. Η έρευνα γίνεται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας και θερμοελαστικότητας για απειροστές παραμορφώσεις χρησιμοποιώντας ένα απλοποιημένο μοντέλο μίας ελαστικής ανομοιογένειας που είναι ένθετη σε μία ελαστική μήτρα. Σε αυτό το μοντέλο, η σύνδεση των δύο υλικών προσομοιώνεται με ένα διδιάστατο συνεχές μέσο του οποίου οι αντίθετες πλευρές είναι συνδεδεμένες με την ανομοιογένεια και τη μήτρα και η μηχανική συμπεριφορά που παρουσιάζει είναι αυτή του ελατηρίου ή της μεμβράνης. Η μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας ελατηριακού ή μεμβρανικού τύπου προσδιορίζεται από τις καταστατικές εξισώσεις της συνεχούς επιφάνειας οι οποίες παράγονται βασιζόμενοι στη θερμοδυναμική του συνεχούς μέσου. Οι καταστατικές εξισώσεις που παράγονται για την διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου ταυτίζονται με αυτές που έχουν εισαχθεί εμπειρικά στη βιβλιογραφία. Στην παρούσα εργασία, οι καταστατικές εξισώσεις της μεμβρανικού τύπου διεπιφάνειας επανεξάγονται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων θεωρώντας ότι στο συνεχές μέσο απουσιάζουν οι παραμένουσες τάσεις: δείχνεται ότι οι ελαστικές σταθερές που εμπλέκονται σε αυτές τις εξισώσεις πρέπει να είναι θετικές έτσι ώστε η ελαστική ενέργεια της συνεχούς επιφάνειας να είναι θετική. Στην παρούσα εργασία, διασαφηνίστηκε η φύση της επιφανειακής τάσης με την εισαγωγή της έννοιας της επιφανειακής ιδιοπαραμόρφωσης για το διδιάστατο μέσο ως το ανάλογο των ιδιοπαραμορφώσεων που ορίζονται σε συνεχή μέσα όγκου. Η επιφανειακή τάση ερμηνεύεται ως η μεμβρανική τάση που αναπτύσσεται λόγω των ομοιόμορφων επιφανειακών ιδιοπαραμορφώσεων, που είναι κατανεμημένες στη συνεχή επιφάνεια της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου: οι επιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις ορίζουν την ασυνέχεια των παραμορφώσεων που παράγονται από την υπάρχουσα διαφορά των ατομικών αποστάσεων της μήτρας και της ανομοιογένειας.

Η επίδραση των δύο τύπων διεπιφανειών, ελατηριακού και μεμβρανικού τύπου πάνω στη συνολική ενεργειακή συμπεριφορά των νανο-σύνθετων υλικών διερευνάται χρησιμοποιώντας το μοντέλο ανομοιογένειας-μήτρας, που περιγράφηκε προηγουμένως. Στην ανάλυση που γίνεται, ένα μέρος της διεπιφάνειας θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε μη-τέλεια διεπιφάνεια, ενώ το υπόλοιπο, σε τέλεια διεπιφάνεια. Το σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας υποβάλλεται σε ένταση είτε από ένα ισόρροπο σύστημα επιφανειακών δυνάμεων που επενεργεί στην εξωτερική επιφάνεια της μήτρας, είτε από μία διανομή ιδιοπαραμορφώσεων στην ανομοιογένεια. Για τους δύο τύπους φόρτισης που εξετάζονται, ορίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα, στην ανομοιογένεια και στη μη-τέλεια διεπιφάνεια, όπως και η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Βασιζόμενοι σε αυτούς τους ορισμούς, θεμελιώνονται δύο νέες ενεργειακές προτάσεις όσον αφορά τη ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Αυτές οι προτά-

σεις επιτρέπουν τον προσδιορισμό της μεταβολής της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει στο σύστημα, όταν σχηματίζεται ή επεκτείνεται η μη-τέλεια διεπιφάνεια ενώ το σύστημα είναι υπό ένταση. Οι δύο αυτές προτάσεις αποτελούν την επέκταση σε μη τέλειες διεπιφάνειες του θεωρήματος των Irwin-Bilby-Eshelby που έχει αναπτυχθεί για ρωγμές.

Τα γενικά αποτελέσματα, σχετικά με την ενεργειακή κατάσταση του συστήματος που περιγράφηκαν προηγούμενα, εφαρμόζονται στην περίπτωση της κυλινδρικής ανομοιογένειας κυκλικής διατομής και άπειρου μήκους, η οποία είναι ένθετη σε μία απείρως εκτεινόμενη μήτρα. Η παραμόρφωση στο σύστημα θεωρείται ότι είναι διδιάστατη (συνεπίπεδη ή αντιεπίπεδη) η οποία προέρχεται από την εφαρμογή ομοιόμορφων τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας ή από την εφαρμογή ιδιοπαραμορφώσεων στην ανομοιογένεια. Για τους δύο τύπους φόρτισης, λαμβάνονται σε αναλυτική μορφή τα πλήρη ελαστικά πεδία μαζί με τις ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στα στοιχεία του συστήματος όταν η μη-τέλεια διεπιφάνεια καταλαμβάνει όλη την έκταση της διεπιφάνειας. Δείχνεται ότι ένα σημαντικό ποσό της ελαστικής ενέργειας αποθηκεύεται και στους δύο τύπους μη-τέλειων διεπιφανειών όταν το μέγεθος της ανομοιογένειας είναι στη νανο-κλίμακα. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προέκυψε αφορά τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει σε ένα υπό ένταση σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας, όταν η τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματίζεται σε μη-τέλεια. Για τους δύο τύπους φόρτισης, δείχνεται ότι αν η τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματιστεί σε μία ελατηριακού τύπου, η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι αρνητική και οι διεπιφανειακές επαπτομενικές ορθές τάσεις στη μήτρα αυξάνονται. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματίζεται σε διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου: η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι θετική και οι διεπιφανειακές επαπτομενικές ορθές τάσεις στη μήτρα μειώνονται. Επίσης, αυτό το αποτέλεσμα παρήχθη για μια κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια που είναι ένθετη σε μία άπειρη μήτρα και για δύο συγκεκριμένες φορτίσεις. Αποδεικνύεται ότι ισχύει για κάθε γεωμετρία και για κάθε φόρτιση του συστήματος. Ειδικότερα, αυτό το αποτέλεσμα αποκαλύπτει την ταυτότητα της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου και της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, των οποίων η συμπεριφορά αποκλίνει αντίθετα από αυτήν της τέλειας. Η διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου χαρακτηρίζει μια υποβαθμισμένη συμπεριφορά των δεσμών μεταξύ των συστατικών ενός σύνθετου υλικού, και η διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, μια αναβαθμισμένη συμπεριφορά.

Σε ένα σύνθετο υλικό, ο μετασχηματισμός μίας τέλειας διεπιφάνειας σε μία μη-τέλεια συνοδεύεται με μεταβολές στις θερμικές συνθήκες που βρίσκονται κατά μήκος της διεπιφάνειας. Θεωρείται ότι η διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου παρουσιάζει θερμική συμπεριφορά χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας, ενώ η διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου συμπεριφορά υψηλής αγωγιμότητας. Η συμπεριφορά χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας περιγράφεται από μία γραμμική σχέση μεταξύ της θερμικής ροής και του θερμοκρασιακού άλματος κατά μήκος της διεπιφάνειας, ενώ αυτή της υψηλής αγωγιμότητας από μία γραμμική σχέση μεταξύ της διεπιφάνειας η οποία σχετίζεται γραμμικά με τη θερμοκρασία της διεπιφάνειας. Η επίδραση των μη-τέλειων διεπιφανειών πάνω στη συνολική θερμική και θερμο-μηχανική συμπεριφορά των νανο-σύνθετων υλικών διερευνάται χρησιμοποιώντας το απλοποιημένο μοντέλο μίας κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας που είναι ένθετη σε μία απείρως εκτεινόμενη μήτρα. Για τους δύο τύπους διεπιφανειών, βρίσκονται τα πλήρη θερμικά και θερμοελαστικά πεδία, όταν η ανομοιογένεια διαταράσσει μία γραμμική θερμοκρασιακή διακύμανση της μήτρας. Δείχνεται ότι, για τους δύο τύπους μη-τέλειων διεπιφανειών, στη νανοκλίμακα γίνεται ασήμαντη η συνεισφορά της απομακρυσμένης ομοιόμορφης θερμικής ροής στα θερμο-ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα. Η ειδική περίπτωση των θερμικών και

θερμοελαστικών πεδίων που βρέθηκαν για τη διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου με συμπεριφορά υψηλής αγωγιμότητας παρέχει ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο σχετίζεται με την επιφανειακή τάση στις διεπιφάνειες των νανο-σωματιδίων. Η ασυνέχεια των παραμορφώσεων που παράγονται από τη διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου με συμπεριφορά υψηλής αγωγιμότητας παράγει σταθερές τάσεις στη διεπιφάνεια, ‘επιφανειακές τάσεις’. Επίσης, δείχθηκε ότι τα αποτελέσματα σχετικά με τη συγκέντρωση τάσεων που βρέθηκαν για τις μηχανικές φορτίσεις ισχύουν για τις θεωρούμενες θερμικές φορτίσεις.

Abstract

The subject of the present doctoral thesis is the investigation of the effect of non-perfect interfaces on the overall mechanical behavior of nano-composite materials for mechanical and thermal actions. The study is done in the framework of linear elasticity and thermoelasticity for infinitesimal strains using the simplified model of an elastic inhomogeneity within an elastic matrix. In this model, the bonding of the two materials is simulated with a two-dimensional continuum medium sticking on its opposite sides with inhomogeneity and matrix and exhibits mechanical behavior of spring or membrane type. The mechanical behavior of both spring-type and membrane-type interface is specified by the constitutive equations of the surface continuum which are derived based on the thermodynamics of continuum media. The constitutive equations derived for a spring type interface coincide with those being proposed empirically in the literature. In the present work, the constitutive equations for a membrane type interface re-derived within the linear elasticity of infinitesimal strains assuming absence of residual stress in the continuum media; it is shown that the elastic constants involved in these equations must be positive in order the elastic energy of the surface continuum to be positive. In the present work, the nature of the surface tension is clarified by introducing the concept of surface eigenstrains for two-dimensional media being the counterpart of eigenstrains defined in volume (bulk) elastic media. The surface tension is interpreted as the membrane stress developed due to uniform surface eigenstrains distributed over the surface continuum of a membrane type interface; the surface eigenstrains prescribe the miss-fitting strains induced by the existing difference in the atomic distances of the matrix and inhomogeneity.

The effect of both spring-type and membrane type interface on the overall energetic behavior of a nano-composite material is investigated using the inhomogeneity-matrix model prescribed previously. In the analysis, a part of the interface is assumed to correspond to the one of the two types of non-perfect interfaces mentioned previously, while the remaining, to a perfect interface. The inhomogeneity-matrix system is stressed either by a set of equilibrated surface forces acting on the external boundary of the matrix, or by a distribution of eigenstrains within inhomogeneity. For both loadings, the elastic energies stored in matrix, inhomogeneity and non-perfect interface, as well as the total potential energy of the system are defined. Based on these definitions, two new energy propositions regarding the potential energy of the system are established. These propositions allow one to determine the change in potential energy occurred in the system as a non-perfect interface forms or extent while the system is stressed. These two propositions constitute the extension of the Irwin-Bilby-Eshelby theorem developed for cracks to non-perfect interfaces.

The general results, regarding the energy state of the system discussed previously, are applied to the case of a cylindrical inhomogeneity of circular crosssectional and infinite length, which is embedded

to an unbounded matrix. The deformation of the system is assumed to be two-dimensional (inplane or antiplane) coming either from uniform stress applied at infinity or from eigenstrains acting in the inhomogeneity. For both loadings, the fully elastic fields along with the elastic energies stored in system constituents are obtained explicitly when the non-perfect covers the whole interface. It shown that a significant amount of elastic energy is stored in both non-perfect interfaces as the inhomogeneity size is in the nano-scale. An interesting result was derived with respect to the change in total potential energy occurring in an inhomogeneity-matrix system, as its perfect interface is transformed to a non-perfect one while the system is stressed. For both loadings, it was shown that if a perfect interface is transformed to a spring-type one, the change in the total potential energy of the system is negative and the hoop interface stress in the matrix increases. The opposite occurs if a perfect interface is transformed to a membrane-type interface: the change in the total energy of the system is positive and the hoop interface stress in the matrix decreases. Although this result was produced regarding a cylindrical circular inhomogeneity embedded in an unbounded matrix and for two specific loadings, it is conjured that it is valid for any geometry and any loading of the system. Essentially, this result reveals the identity of a spring type-interface and a membrane type interface, whose behaviors deviates oppositely from that of a perfect one. A spring type interface characterizes a deteriorating behavior of the bonds between the constituents of a composite, and a membrane type interface, an upgrading behavior.

In a composite material, the transformation of a perfect interface to a non-perfect one is accompanied with changes in the thermal conditions holding across the interface. It is assumed that a spring type interface exhibits thermal behavior of low thermal conductivity, while a membrane type interface, behavior of high conductivity. The low thermal conductivity behavior is prescribed by a linear relation between heat flow and temperature jump across the interface, while those of a high conductivity, by a linear relationship between the interface which is related linearly with the interface temperature. The effect of non-perfect interfaces on the overall thermal and thermo-mechanical behavior of nano-composite materials is investigate by using the simplified model of a cylindrical circular inhomogeneity embedded in an unbounded matrix. For both non-perfect interface types, complete thermal and thermoelastic fields are obtained, when the inhomogeneity disturbs a linear temperature distribution of the matrix. It is shown that, for both types of non-perfect interfaces, the contribution of a remote uniform thermal flow to the thermo-elastic fields arising in the system becomes insignificant in nanoscale. A special case of the thermal and thermo-elastic fields obtained for a membrane type interface with a high conductivity behavior provides an important result related with the surface tension in interfaces of nano-particles. Misfitting thermal deformation produced by a membrane type interface with a high conductivity behavior induces constants stress in the interface of 'surface tension' type. Also, it was shown that the results regarding the stress concentration obtained for the mechanical loadings are valid for the thermal loadings considered.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η νανοτεχνολογία έχει ξεπηδήσει ως ένας νέος και ραγδαία εξελισσόμενος κλάδος της τεχνολογίας και έχει θέσει νέα αντικείμενα έρευνας στις επιστήμες της μηχανικής και των υλικών, που σχετίζονται με τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών στη νανοκλίμακα. Υλικά που περιέχουν σωματίδια διαστάσεων νανομέτρου (νανοσωματίδια), όπως είναι τα πολυκρυσταλλικά υλικά με νανο-κόκκους ή τα υπερ-κράματα υψηλής θερμοκρασίας, επιδεικνύουν μοναδικές ιδιότητες, όπως είναι, για παράδειγμα, η υψηλή αντοχή τους και η πλαστιμότητά τους. Οι μοναδικές αυτές ιδιότητες που παρουσιάζουν τα υλικά αυτά αποδίδονται, κατά κύριο λόγο, στον μεγάλο λόγο διεπιφάνειας/όγκου που παρατηρείται σε αυτά, λόγω της παρουσίας των νανο-σωματιδίων στον όγκο τους. Στα υλικά αυτά, τα άτομα που βρίσκονται πάνω ή κοντά στις διεπιφάνειές τους ή στα σύνορά τους είναι εκτεθειμένα σε ένα εντελώς διαφορετικό τοπικό περιβάλλον σε σχέση με τα υπόλοιπα που βρίσκονται μακριά από αυτές τις περιοχές. Το διαφορετικό αυτό περιβάλλον δημιουργεί μια διαφορετική κατάσταση ισορροπίας και ενέργειας στα άτομα αυτά, που αντιστοιχεί σε ένα πλεόνασμα ελεύθερης ενέργειας στο υλικό. Το πλεόνασμα αυτό της ελεύθερης ενέργειας του σώματος περιγράφεται, στα πλαίσια της μηχανικής των συνεχών μέσων, με την επιφανειακή ενέργεια (surface energy), η δε κατάσταση ισορροπίας των διεπιφανειών και συνόρων του σώματος, με την επιφανειακή ένταση (surface tension). Οι έννοιες της επιφανειακής ενέργειας και επιφανειακής έντασης εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Gibbs (1906) αναφορικά με ένα ελεύθερο σύνορο ενός αφορτιστού σώματος. Οι ποσότητες αυτές ορίστηκαν από τον Gibbs ως συνεχείς συναρτήσεις σε σχέση με μια ‘μαθηματική’ επιφάνεια που περιγράφει το ελεύθερο σύνορο του σώματος. Κατά τη φόρτιση του σώματος, τα άτομα των συνόρων και των διεπιφανειών συμπεριφέρονται, και σε αυτήν την περίπτωση, διαφορετικά σε σχέση με τα υπόλοιπα άτομα του σώματος. Στην ελαστική παραμόρφωση του σώματος, η πλεονάζουσα ελεύθερη ενέργεια στα σύνορα και στις διεπιφάνειές του μεταβάλλεται, η δε τοπική ισορροπία στις περιοχές αυτές επιτυγχάνεται με την επιφανειακή ένταση, και τις επιπρόσθετες επιφανειακές ελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στο σώμα. Έτσι, στα σύνορα και στις διεπιφάνειες, η εντατική συμπεριφορά ενός φορτισμένου σώματος περιγράφεται με τις επιφανειακές τάσεις, που συντίθενται από την επιφανειακή ένταση και τις ελαστικές επιφανειακές τάσεις. Μια ολοκληρωμένη θεωρία που περιγράφει την παραμορφωσιακή ελαστική συμπεριφορά των επιφανειών και των διεπιφανειών σε ένα στερεό σώμα, στα πλαίσια της μηχανικής των συνεχών μέσων, αναπτύ-

χθηκε από τους Gurtin and Murdoch (1975, 1978). Στην θεωρία των Gurtin και Murdoch, η διεπιφάνεια των δύο υλικών προσομοιώνεται με ένα διδιάστατο ελαστικό μέσο, που στις αντίθετες πλευρές του είναι συγκολλημένο με δύο τριδιάστατα ελαστικά μέσα που αντιπροσωπεύουν τα παρακείμενα υλικά. Στην θεωρία αυτή, η επιφανειακή ένταση θεωρείται ως μια ελαστική σταθερά του διδιάστατου ελαστικού μέσου, οι δε καταστατικές εξισώσεις του μέσου εξάγονται με βάση τις αρχές της θερμοδυναμικής. Στην γραμμική ελαστικότητα των απειροστών παραμορφώσεων, οι εξισώσεις αυτές συσχετίζουν γραμμικά τις συνιστώσες των επιφανειακών τάσεων με τις βαθμίδες των ελαστικών μετατοπίσεων του διδιάστατου μέσου. Στις εξισώσεις αυτές, εκτός από τη σταθερά της επιφανειακής έντασης, υπεισέρχονται δύο επιπρόσθετες σταθερές τύπου Lamé, που περιγράφουν τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου. Στη θεωρία των Gurtin και Murdoch, οι εξισώσεις ισορροπίας ενός απειροστού διεπιφανειακού στοιχείου εμπλέκουν τις συνιστώσες των επιφανειακών τάσεων του στοιχείου και τις συνιστώσες των ελκυστών των δύο παρακείμενων ελαστικών μέσων που επενεργούν πάνω στις δύο αντίθετες πλευρές του στοιχείου. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη γενίκευση των γνωστών εξισώσεων Young-Laplace της ρευστομηχανικής, που έχουν αναπτυχθεί για να περιγράψουν αντίστοιχες καταστάσεις ισορροπίας επιφανειών σε ρευστά (Laplace, 1805; Young, 1805). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις αυτές συμπίπτουν με τις εξισώσεις ισορροπίας ενός μεμβρανικού κελύφους (Kraus, 1967), όπου η φόρτιση του κελύφους αντιστοιχεί στους ελκυστές τάσεων που επενεργούν στις δύο αντίθετες πλευρές του μέσου. Στην βιβλιογραφία, μια διεπιφάνεια ενός σύνθετου νανο-υλικού με την συμπεριφορά που περιγράφηκε παραπάνω έχει ονομασθεί *διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου*.

Όταν οι δεσμοί που συνδέουν ένα νανοσωματίδιο με το υλικό που το περιβάλλει είναι αδυνατισμένοι, η σχετική διεπιφάνεια, στη βιβλιογραφία, χαρακτηρίζεται ατελής (imperfect), η δε μηχανική της συμπεριφορά περιγράφεται με το μοντέλο της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου. Το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία για να περιγράψει τη μηχανική συμπεριφορά ατελών διεπιφανειών σε σύνθετα υλικά σε μεγαλύτερες κλίμακες της μηχανικής. Το μοντέλο της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά, σε μια εξειδικευμένη μορφή, από τους Mal and Bose (1974), για να περιγράψει την συμπεριφορά μιας ολισθαίνουσας διεπιφάνειας σε ένα σύνθετο υλικό. Στο μοντέλο αυτό, οι συνδεδεμένες επιφάνειες των δύο φάσεων του σύνθετου υλικού υφίστανται σχετική μετακίνηση (ολίσθηση), που οι συνιστώσες της είναι ανάλογες των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στις συνδεδεμένες επιφάνειες. Αργότερα, το μοντέλο αυτό επεκτάθηκε από τους Achenbach and Zhu (1989) και Hashin (1990) στην γενική του μορφή, όπου οι συνδεδεμένες επιφάνειες διαχωρίζονται, χωρίς όμως να διακόπτεται η μεταφορά δυνάμεων μεταξύ των φάσεων του σύνθετου υλικού. Στο γενικευμένο μοντέλο, οι συνδεδεμένες επιφάνειες υφίστανται μια σχετική μετατόπιση, της οποίας οι συνιστώσες στην εφαπτομενική και κάθετη διεύθυνση της διεπιφάνειας είναι ανάλογες των αντίστοιχων συνιστωσών του ελκυστή που επενεργεί στις συνδεδεμένες επιφάνειες των δύο φάσεων. Σε αντίθεση με το μοντέλο της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου εισήχθησαν σε καθαρά εμπειρική βάση, χωρίς να θεωρηθεί η διεπιφάνεια ως ένα ξεχωριστό μέρος του υλικού. Με το ελατηριακό μοντέλο, οι υπάρχοντες διεπιφανειακοί δεσμοί των δύο φάσεων του υλικού προσομοιώνονται με μια συνεχή διανομή ελατηρίων εξαφανιζόμενου πάχους, που δεν μπορούν να συγκρατούν σε επαφή τις συνδεδεμένες επιφάνειες του σύνθετου υλικού, μπορούν όμως να μεταβιβάζουν δυνάμεις μεταξύ των φάσεων του υλικού.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, σε υλικά με υψηλή πυκνότητα διεπιφανειών, οι επιφανειακές τάσεις

επιηρεάζουν δραστικά τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών αυτών. Στα πλαίσια της μηχανικής των συνεχών μέσων, η επίδραση αυτή έχει εκτενώς διερευνηθεί στη βιβλιογραφία χρησιμοποιώντας απλοποιημένα μοντέλα υλικών που έχουν ενσωματώσει τα παραπάνω διεπιφανειακά μοντέλα. Το μοντέλο της ανομοιογένειας που είναι ενσωματωμένη σε μια απείρως εκτεινόμενη μήτρα έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της επίδρασης των διεπιφανειακών συνθηκών πάνω στη συγκέντρωση των τάσεων σε κοκκώδη διαστικά υλικά. Με το μοντέλο αυτό, έχουν παραχθεί τα ελαστικά πεδία για διάφορες μορφές ανομοιογενειών και για μια μεγάλη ποικιλία εξωτερικών φορτίσεων και πηγών εσωτερικών τάσεων. Συγκεκριμένα, τριδιάστατα ελαστικά πεδία έχουν αποκτηθεί για μια ελλειπτική και σφαιρική ανομοιογένεια, όταν η διεπιφάνεια είναι ελατηριακού ή μεμβρανικού τύπου και η φόρτιση είναι ένα ομοιόμορφο πεδίο τάσεων στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας ή ένα ομοιόμορφο πεδίο ιδιο-παραμορφώσεων στην μήτρα (γενικευμένο πρόβλημα Eshelby) (βλέπε για παράδειγμα, Cahn and Lärché, 1982; Hashin, 1991a,b, 1992; Cammarata, 1997; Sharma et al., 2003; Sharma and Ganti, 2004; Duan et al., 2005a,c,d, Lim et al., 2005, μεταξύ των άλλων). Από την άλλη πλευρά, διδιάστατα ελαστικά πεδία έχουν αποκτηθεί για μια κυλινδρική ανομοιογένεια κυκλικής ή ελλειπτικής μορφής για τους δύο τύπους διεπιφανειακών συνθηκών που προαναφέρθηκαν και για ένα ευρύτερο φάσμα φορτίσεων (Benveniste, 1985, 1987; Qu, 1993; Gao, 1995; Kattis and Providas, 1998; Dong and Levy, 2000; Benveniste and Miloh, 2001, 2007; Tian and Rajapakse, 2006, 2007; Luo and Wang, 2009). Οι αναλύσεις αυτές έδειξαν ότι, η παρουσία μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού ή ελατηριακού τύπου σε ένα σύνθετο νανο-υλικό εισάγει μια ισχυρή εξάρτηση των ελαστικών πεδίων του υλικού από τη διάσταση της ανομοιογένειας. Επίσης, δείχθηκε ότι στα προβλήματα του Eshelby, το πεδίο των ελαστικών τάσεων που αναπτύσσεται στην ελλειπτική ανομοιογένεια δεν είναι ομοιόμορφο, όταν η διεπιφάνεια είναι μεμβρανικού ή ελατηριακού τύπου. Τα ελαστικά πεδία που αποκτήθηκαν για την κυκλική και σφαιρική ανομοιογένεια στα προβλήματα Eshelby, έχουν χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του ισοδύναμου μέτρου ελαστικότητας σύνθετων νανο-υλικών, εφαρμόζοντας γνωστές μεθόδους της μηχανικής των σύνθετων υλικών (βλέπε για παράδειγμα, Hashin, 1962, 1991a,b, 1992; Cammarata and Sieradzki, 1989; He and Benveniste, 2004; Li et al., 2004; Yang, 2004; Duan et al., 2005b,a; Yang, 2006; Chen and Dvorak, 2006; Chen et al., 2007b,a; Duan and Karihaloo, 2007; Huang and Sun, 2007; Quang and He, 2007; Huang et al., 2008; Quang and He, 2008; Yvonnet et al., 2008; Mogilevskaya et al., 2010a,b; Brisard et al., 2010; Wang et al., 2010, μεταξύ των άλλων). Από τη σχετική έρευνα έχειδειχθεί ότι η παρουσία των δύο τύπων διεπιφανειών σε ένα νανο-υλικό επηρεάζει σημαντικά το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας των νανο-υλικών. Η πειραματική έρευνα στην περιοχή επικεντρώνεται, κυρίως, στην ανάπτυξη πειραματικών τεχνικών για τον προσδιορισμό των διεπιφανειακών ελαστικών σταθερών τύπου Lamé στη θεωρία των Gurtin-Murdoch για τις διεπιφάνειες μεμβρανικού τύπου (βλέπε για παράδειγμα, Berger and Spaepen, 1995; Josell et al., 1999; Miller and Shenoy, 2000; Gilbert et al., 2004; Ouyang et al., 2006; Wolfer, 2011, μεταξύ των άλλων).

1.2 Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΕΥΝΑΣ

Από την βιβλιογραφική ανασκόπηση που έγινε προηγούμενα, διαπιστώνεται ότι η μέχρι τώρα έρευνα πάνω στην μηχανική συμπεριφορά των νανο-υλικών περιορίζεται κυρίως στη μελέτη της επίδρασης των δύο τύπων διεπιφανειών στην τασική συγκέντρωση γύρω από νανο-σωματίδια και στο ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας των νανο-υλικών. Όπως συζητήθηκε προηγούμενα, μια μη τέλεια διεπιφάνεια, δηλαδή

μια διεπιφάνεια μεμβρανικού ή ελατηριακού τύπου, δεν αποτελεί μόνο ένα μηχανισμό μεταβίβασης τάσης και ενέργειας στο σώμα, όπως συμβαίνει με μια τέλεια διεπιφάνεια, αλλά και μια ξεχωριστή περιοχή του σώματος όπου αποθηκεύεται ελαστική ενέργεια. Γίνεται, επομένως, φανερό ότι, μια ολοκληρωμένη διαπραγμάτευση της επίδρασης των μη τέλει διεπιφανειών πάνω στη μηχανική συμπεριφορά ενός σύνθετου νανο-υλικού απαιτεί, πριν από όλα, την ανάλυση της ενεργειακής κατάστασης του σώματος. Η ανάλυση αυτή πρέπει να περιλαμβάνει: (α) τον προσδιορισμό της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο νανο-υλικό, καθώς και τη διανομή της στα επιμέρους συστατικά του συμπεριλαμβανομένων και των διεπιφανειών του, (β) τον κατάλληλο ορισμό της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός υπό ένταση νανο-υλικού, καθώς και τις μεταβολές της ολικής δυναμικής ενέργειας λόγω επέκτασης ή εμφάνισης των μη τέλει διεπιφανειών του νανο-υλικού.

Η ενεργειακή ανάλυση ενός νανο-υλικού που περιγράφηκε παραπάνω αποτελεί, στην ουσία, την επέκταση της ενεργειακής ανάλυσης που έχει γίνει στην θραυστομηχανική σε ένα υπό ένταση σώμα λόγω εμφάνισης ή επέκτασης μιας ρωγμής σε αυτό. Όπως είναι γνωστό από την θραυστομηχανική, η ενεργειακή ανάλυση ενός ρηγματωμένου σώματος δεν υπήρξε μια απλή υπόθεση. Η ανάλυση αυτή ξεκίνησε με το περίφημο άρθρο του Griffith (1921) και συνεχίστηκε, πολύ αργότερα, με το έργο πολλών άλλων εξόχων ερευνητών, που διαμόρφωσε τη βάση της θραυστομηχανικής. Στο άρθρο αυτό, ο Griffith, στηριζόμενος στη λύση της ελλειπτικής οπής σε έναν υπό ένταση άπειρο επίπεδο ελαστικό δίσκο, που είχε δοθεί νωρίτερα από τον Inglis (1913), υπολόγισε τη μεταβολή της ελαστικής ενέργειας του φορτισμένου δίσκου, όταν σε αυτόν δημιουργηθεί μια ευθύγραμμη ρωγμή πεπερασμένου μήκους. Η αλγεβρική έκφραση της μεταβολής αυτής, που υπολόγισε ο Griffith, ήταν λανθασμένη και διορθώθηκε από τον ίδιο, τρία χρόνια αργότερα, με ένα σύντομο άρθρο στο ίδιο περιοδικό, χωρίς όμως να δώσει τις υπολογιστικές λεπτομέρειες (Griffith, 1924). Ο αρχικός υπολογισμός του Griffith φαίνεται ότι στηρίχθηκε στη λανθασμένη θεώρηση ότι οι απειροστές τασικές μεταβολές, που προκαλούνται στο άπειρο σύνορο του υπό ένταση δίσκου λόγω εμφάνισης της ρωγμής, δεν συνεισφέρουν στην ελαστική ενέργεια του δίσκου. Η ολοκλήρωση όμως των απειροστών τασικών μεταβολών πάνω σε ένα άπειρο σύνορο, που γίνεται κατά τον υπολογισμό της ελαστικής ενέργειας, καθιστά πεπερασμένη την συνεισφορά τους στη συνολική ελαστική ενέργεια του δίσκου. Όμως, με την ανάπτυξη της μηχανικής των θραύσεων δημιουργήθηκε η ανάγκη του υπολογισμού τέτοιων ενεργειακών μεταβολών για ποιο σύνθετες φορτίσεις από αυτήν που θεωρήθηκε από τον Griffith. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην επινόηση μιας νέας τεχνικής υπολογισμού των παραπάνω ενεργειακών μεταβολών από τους Irwin (1958) και Bilby and Eshelby (1968), ανάγοντας την ολοκλήρωση στο πεπερασμένο σύνορο της ρωγμής, παρακάμπτοντας έτσι τις ολοκληρώσεις στο άπειρο σύνορο του σώματος. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η διαπραγμάτευση της ενεργειακής κατάστασης ενός νανο-υλικού απαιτεί πριν από όλα την κατάλληλη επέκταση του θεωρήματος των Irwin-Bilby-Eshelby στην περίπτωση των διεπιφανειών ελατηριακού ή μεμβρανικού τύπου.

Το βασικό αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη της επίδρασης των μη τέλει διεπιφανειών πάνω στη συνολική ενεργειακή συμπεριφορά των σύνθετων νανο-υλικών για μηχανικές και θερμικές δράσεις. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων χρησιμοποιώντας το απλοποιημένο μοντέλο της ελαστικής νανο-ανομοιογένειας που βρίσκεται ένθετη σε μια ελαστική μήτρα.

Η μελέτη περιλαμβάνει:

- (i) Την ανάπτυξη νέων ελαστικών λύσεων για μηχανικές και θερμικές φορτίσεις χρησιμοποιώντας το μοντέλο ανομοιογένειας-μήτρας.
- (ii) Την ανάπτυξη των καταστατικών εξισώσεων για τη διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου που στηρίζεται στην υπόθεση του συνεχούς διδιάστατου μέσου για τη διεπιφάνεια και στις αρχές της θερμοδυναμικής.
- (iii) Την επέκταση του ενεργειακού θεωρήματος Irwin-Bilby-Eshelby, που έχει αναπτυχθεί για ρωγμές, στην περίπτωση των μη τέλειων διεπιφανειών.
- (iv) Τη χρήση των θεωρημάτων Irwin-Bilby-Eshelby στην επεκτεταμένη τους μορφή, για τον προσδιορισμό των ελαστικών ενεργειών στο σύστημα νανο-ανομοιογένειας-μήτρας-διεπιφάνειας και των σχετικών μεταβολών της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος.
- (v) Τη διερεύνηση της επίδρασης των διεπιφανειών ελατηριακού και μεμβρανικού τύπου πάνω στη συνολική ενεργειακή κατάσταση των νανο-σύνθετων υλικών, καθώς και την αναγνώριση της διαφορετικής επίδρασης των δύο αυτών διεπιφανειών πάνω στη συμπεριφορά αυτή.

Προκειμένου να διερευνηθούν οι συνθήκες που πρέπει να τεθούν στις υπεισερχόμενες ελαστικές σταθερές της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, οι καταστατικές εξισώσεις της διεπιφάνειας αυτή επανεξάγονται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας για μικρές παραμορφώσεις.

1.3 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Στην εισαγωγή, που αποτελεί το κεφάλαιο 1 της διατριβής, παρουσιάζεται το αντικείμενο της έρευνας και αναδεικνύεται η αναγκαιότητα και η επικαιρότητά του. Γίνεται η παρουσίαση της επιστημονικής γνώσης που έχει αποκτηθεί τα τελευταία χρόνια στην περιοχή του αντικειμένου, με αναφορές σε άρθρα επιστημονικών περιοδικών και πρακτικών συνεδρίων, καθώς και σε τεχνικές εκθέσεις και βιβλία. Στο τέλος της εισαγωγής περιγράφεται η δομή της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 2, περιγράφεται το ελαστικό σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς ενός σύνθετου κοκκώδους νανο-υλικού που μελετάται στην διδακτορική διατριβή και παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές εξισώσεις της γραμμικής ελαστικότητας και θερμοελαστικότητας που θα χρησιμοποιηθούν στις σχετικές ελαστικές αναλύσεις που θα γίνουν με βάση το σύστημα αυτό.

Στο κεφάλαιο 3, στα πλαίσια της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων, ορίζονται η ελαστική ενέργεια και η ολική ενέργεια του συστήματος μήτρα-ανομοιογένεια όταν σε ένα τμήμα της διεπιφάνειάς του υπάρχει μία μη τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση ελατηριακού ή μεμβρανικού τύπου και το σύστημα φορτίζεται είτε από εξωτερικές επιφανειακές δυνάμεις είτε από ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια. Στη συνέχεια, με βάση τα ενεργειακά θεωρήματα της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων, εξάγονται δύο βασικές σχέσεις που παρέχουν τη μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος, όταν μία υπάρχουσα μη τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση στο σύστημα επεκτείνεται πάνω στη διεπιφάνεια, ενώ το σώμα είναι φορτισμένο. Στη συνέχεια, οι γενικές αυτές σχέσεις εφαρμόζονται στην περίπτωση που μια τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματίζεται εξολοκλήρου σε μη τέλεια, ενώ το σύστημα

είναι φορτισμένο.

Στο κεφάλαιο 4 μελετάται η ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος μήτρα - ανομοιογένεια με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, όταν η ανομοιογένεια έχει κυλινδρική μορφή κυκλικής διατομής και η μήτρα εκτείνεται στο άπειρο σε όλες τις διευθύνσεις. Η ανάλυση του συστήματος γίνεται για συνεπίπεδη και αντεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση, που προέρχονται είτε από ομοιόμορφες τάσεις που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο της μήτρας, ή από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις που επενεργούν στην ανομοιογένεια. Για τις δύο φορτίσεις που προαναφέρθηκαν, τα προβλήματα αυτά επιλύονται σε κλειστή μορφή, τόσο για συνεπίπεδη όσο και αντεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος. Στη συνέχεια, με βάση τα ελαστικά πεδία και τα θεωρήματα που διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 3 προσδιορίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στις επιμέρους φάσεις του συστήματος που θεωρείται και υπολογίζεται η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος όταν μια τέλεια διεπιφάνεια στο σύστημα μετασχηματισθεί σε μια διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά, διερευνάται θεωρητικά η επίδραση των διάφορων ελαστικών και γεωμετρικών παραμέτρων πάνω στα ελαστικά πεδία του συστήματος και στην ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται.

Στο κεφάλαιο 5, μελετάται η ενεργειακή κατάσταση της συνεπίπεδης και αντεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης μιας κυλινδρικής ανομοιογένειας κυκλικής διατομής που βρίσκεται σε μια άπειρη ελαστική μήτρα και συνδέεται με αυτή με μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται είτε από μια φόρτιση ομοιόμορφων τάσεων στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας, είτε από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις που επενεργούν στην ανομοιογένεια. Για τις δύο αυτές φορτίσεις εξάγονται τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα σε απλή αλγεβρική μορφή σε όρους δύο διφασικών ελαστικών σταθερών τύπου. Στη συνέχεια, με βάση τα ελαστικά αυτά πεδία και τις σχετικές ενεργειακές προτάσεις που διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 3, υπολογίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα και στα επιμέρους συστατικά του. Επίσης, υπολογίζεται η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει στο υπό ένταση σύστημα, όταν η τέλεια διεπιφάνειά του μετασχηματισθεί σε μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Τέλος, παρουσιάζονται και συζητούνται τα βασικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.

Στο Κεφάλαιο 6, τα αποτελέσματα για το σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας επεκτείνονται για θερμικές φορτίσεις. Η θερμική φόρτιση που θεωρείται είναι μια γραμμική θερμοκρασιακή διακύμανση της μήτρας που διαταράσσεται από την ανομοιογένεια. Ο προσδιορισμός των θερμικών και θερμοελαστικών πεδίων στο σύστημα γίνεται στα πλαίσια της ασύζευκτης θερμοελαστικότητας για συνθήκες σταθερής κατάστασης. Οι θερμικές συνθήκες που θεωρούνται στην διεπιφάνεια είναι, κατά αντιστοιχία της ασθενούς και ισχυρής μηχανικής σύνδεσης, μια θερμική συνθήκη χαμηλής αγωγιμότητας και μια συνθήκη υψηλής αγωγιμότητας. Για τις θερμικές αυτές συνθήκες προσδιορίζονται τα πλήρη θερμοκρασιακά και θερμοελαστικά προβλήματα επιλύοντας τα σχετικά θερμικά και θερμοελαστικά προβλήματα. Στη συνέχεια, διερευνάται αριθμητικά η επίδραση των διαφόρων ελαστικών και θερμικών παραμέτρων του συστήματος πάνω στα ελαστικά πεδία.

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται και συζητούνται τα συμπεράσματα που προέκυψαν στα πλαίσια της διατριβής και γίνονται προτάσεις για παραπέρα έρευνα. Τέλος στα Παραρτήματα της διατριβής παρουσιάζονται συνοπτικά η θεωρία ελαστικότητας θερμικής αγωγιμότητας, έτσι όπως χρησιμοποιείται στην διατριβή, οι εξισώσεις της μεθόδου των διφασικών δυναμικών και οι αλγεβρικές εκφράσεις των πεδίων των ελαστικών και θερμικών προβλημάτων που επιλύονται στην διατριβή.

Κεφάλαιο 2

Το ελαστικό σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται το ελαστικό σύστημα ανομοιογένειας - μήτρας που προσομοιώνει τη γεωμετρία και τη μηχανική συμπεριφορά ενός σύνθετου κοκώδους διυλικού που θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία και παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές εξισώσεις της γραμμικής ελαστικότητας και θερμοελαστικότητας που θα χρησιμοποιηθούν στις σχετικές ελαστικές αναλύσεις που θα γίνουν με βάση το σύστημα αυτό.

Τα δύο βασικά μοντέλα που έχουν εισαχθεί για την περιγραφή της διεπιφανειακής σύνδεσης ανομοιογένειας - μήτρας τοποθετούνται σε ενιαία βάση προσομοιώνοντας τη διεπιφανειακή σύνδεση των δύο υλικών ως ένα συνεχές διδιάστατο ελαστικό μέσο, του οποίου η ελαστική συμπεριφορά περιγράφεται με τις δικές του μεταβλητές πεδίου και με το δικό του καταστατικό νόμο. Το συνεχές αυτό μέσο μπορεί να αντιπροσωπευθεί με μία υλική επιφάνεια της οποίας οι δύο αντίθετες πλευρές είναι συνδεδεμένες με τα δύο υλικά που διαχωρίζει, που προσομοιώνονται με τριδιάστατα συνεχή ελαστικά μέσα.

Στο μοντέλο που περιγράφει μια ελατηριακή διεπιφανειακή σύνδεση των δύο υλικών, οι μεταβλητές πεδίου του διδιάστατου ελαστικού συνεχούς μέσου είναι μια επιφανειακή δύναμη που βρίσκεται σε ισορροπία με τις επιφανειακές δυνάμεις που εξασκούν σε αυτό τα συνδεδεμένα υλικά, και μια μετατόπιση που βρίσκεται σε συνέχεια με τις μετατοπίσεις των συνδεδεμένων επιφανειών των δύο υλικών. Οι σχέσεις που συνδέουν τις δύο αυτές μεταβλητές αποτελούν τις καταστατικές εξισώσεις του διδιάστατου συνεχούς μέσου και εξάγονται με βάση την ενεργειακή του συμπεριφορά ορίζοντας κατάλληλα το ελαστικό του δυναμικό.

Στο μοντέλο που περιγράφει μια μεμβρανική σύνδεση των δύο υλικών, η μεταβλητή πεδίου του συνεχούς διδιάστατου ελαστικού μέσου που περιγράφει την ένταση είναι ένας διδιάστατος τανυστής, του οποίου οι συνιστώσες είναι γραμμικές δυνάμεις που επενεργούν εφαπτομενικά στις ακμές των στοιχειωδών τμημάτων του διδιάστατου ελαστικού μέσου. Οι γραμμικές αυτές δυνάμεις, που θα ονομάζονται μεμβρανικές τάσεις, βρίσκονται σε ισορροπία με τις επιφανειακές δυνάμεις των δύο υλικών που επενεργούν στις δύο πλευρές της επιφάνειας που ορίζει το ελαστικό μέσο. Οι μεταβλητές πεδίου που περιγράφουν την παραμόρφωση του μέσου είναι μία μετατόπιση και ο διδιάστατος ελκυστής παραμόρφωσης που παράγεται

από τη μετατόπιση αυτή. Οι καταστατικές σχέσεις του μέσου αυτού, που είναι σχέση μεταξύ του τανυστή των μεμβρανικών τάσεων και του τανυστή των μεμβρανικών παραμορφώσεων, αναπτύσσονται με βάση την τοπική ενεργειακή κατάσταση του διδιάστατου ελαστικού μέσου ορίζοντας το κατάλληλο ελαστικό δυναμικό του μέσου.

Μια γενικότερη θεωρία για το μεμβρανικό τύπο διεπιφανειακής σύνδεσης των δύο υλικών έχει γίνει από τους Gurtin and Murdoch (1975), που είναι οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια του διδιάστατου συνεχούς μέσου για την προσομοίωση της διεπιφανειακής σύνδεσης. Η ανάπτυξη των σχετικών εξισώσεων από τους Gurtin and Murdoch έγινε στα πλαίσια της θεωρίας των μεγάλων παραμορφώσεων χρησιμοποιώντας τις αρχές της μηχανικής του συνεχούς μέσου. Η εξειδίκευση των γενικών καταστατικών σχέσεων στη γραμμική ισότροπη ελαστικότητα, έχει εισάγει τρεις ελαστικές σταθερές του μέσου, μία από τις οποίες είναι η επιφανειακή ένταση. Οι άλλες δύο σταθερές που υπεισέρχονται στις καταστατικές εξισώσεις έχουν ερμηνευθεί εσφαλμένα από μεταγενέστερους ερευνητές με αποτέλεσμα να έχει δημιουργηθεί μία σύγχυση στην επιστημονική αυτή περιοχή (Wolfer, 2011). Οι πρόσφατες εξελίξεις στην περιοχή της νανοτεχνολογίας έχουν φέρει στο προσκήνιο τον τύπο αυτό διεπιφανειακής σύνδεσης, προκειμένου να ερμηνευθούν φαινόμενα που εμφανίζονται στην νανοκλίμακα. Προκειμένου να δοθεί μία φυσική ερμηνεία στις σταθερές που υπεισέρχονται στις καταστατικές εξισώσεις του διδιάστατου μέσου, οι εξισώσεις αυτές επανεξάγονται στο κεφάλαιο αυτό ακολουθώντας την κλασσική διαδικασία που χρησιμοποιείται σε τριδιάστατα ελαστικά συνεχή μέσα.

Όπως στην περίπτωση των μηχανικών διεπιφανειακών μοντέλων, τα δύο βασικά μοντέλα που περιγράφουν τη θερμική συμπεριφορά μιας μη τέλειας θερμικής διεπιφάνειας, δηλαδή, το μοντέλο της χαμηλής και υψηλής αγωγιμότητας, τοποθετούνται σε ενιαία βάση υποθέτοντας ότι η διεπιφάνεια αποτελεί ένα διδιάστατο θερμικό μέσο με τις δικές τους μεταβλητές πεδίου. Για το μοντέλο της διεπιφάνειας με χαμηλή αγωγιμότητα, οι μεταβλητές πεδίου που περιγράφουν τη θερμική συμπεριφορά του μέσου είναι η θερμοκρασιακή μεταβολή και η θερμική ροή που είναι ένα διάνυσμα κάθετο στη διεπιφάνεια. Ως θερμοκρασιακή μεταβολή του μέσου θεωρείται η διαφορά της θερμοκρασίας που επικρατεί στις δύο αντίθετες πλευρές του διδιάστατου θερμικού μέσου. Για το μοντέλο αυτό η θερμική ροή είναι συνάρτηση της θερμοκρασιακής μεταβολής του μέσου. Στο μοντέλο της υψηλής θερμικής αγωγιμότητας, οι μεταβλητές πεδίου είναι η θερμοκρασιακή μεταβολή του μέσου και η μεμβρανική θερμική ροή, της οποίας το διάνυσμα είναι εφαπτόμενο στη διεπιφάνεια. Σε αντίθεση με το μοντέλο της χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας, στις δύο πλευρές της μεμβράνης επικρατεί η ίδια θερμοκρασία, που είναι ίση με τη θερμοκρασία των συνδεδεμένων επιφανειών των δύο υλικών του συστήματος. Στο μοντέλο αυτό, οι εφαπτομενικές συνιστώσες της θερμικής ροής είναι συναρτήσει των βαθμίδων της θερμοκρασίας στις δύο εφαπτομενικές διευθύνσεις.

Στη βιβλιογραφία το μοντέλο της διεπιφάνειας με χαμηλή θερμική αγωγιμότητα έχει εισαχθεί από τους Benveniste and Miloh (1986), ενώ το μοντέλο της υψηλής θερμικής αγωγιμότητας από τους Miloh and Benveniste (1999). Τα δύο αυτά μοντέλα έχουν πρόσφατα χρησιμοποιηθεί στον προσδιορισμό των ισοδύναμων θερμικών παραμέτρων σύνθετων υλικών (Benveniste and Miloh, 1986; Quang et al., 2011; Alali and Milton, 2013). Η χρήση των μοντέλων αυτών σε συνδυασμό με τα μηχανικά μοντέλα διεπιφανειών γίνεται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία.

2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Θεωρούμε ένα διφασικό στερεό σώμα που αποτελείται από μία ανομοιογένεια που περιβάλλεται από μία μήτρα, που είναι και οι δύο από γραμμικώς ελαστικά υλικά με διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες. Αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3) , η μήτρα καταλαμβάνει τον όγκο V_M και η ανομοιογένεια τον όγκο V_I . Το εξωτερικό και το εσωτερικό σύνορο της μήτρας είναι δύο επιφάνειες S_o και S_M , αντίστοιχα, όπου η επιφάνεια S_M , στην αφόρτιστη κατάσταση του σώματος, ταυτίζεται με το εξωτερικό σύνορο της ανομοιογένειας S_I . Η σύνδεση των δύο υλικών του σώματος προσομοιώνεται με ένα διδιάστατο συνεχές μέσο, που αντιπροσωπεύεται από μία κλειστή επιφάνεια S . Στην αφόρτιστη κατάσταση του σώματος η επιφάνεια S ταυτίζεται με τις συνοριακές επιφάνειες S_M και S_I των δυο υλικών και είναι συνδεδεμένες με αυτές στις δύο αντίθετες πλευρές της. Υποθέτουμε ότι οι τρεις συνοριακές επιφάνειες S_o , S_M και S_I είναι κλειστές λείες επιφάνειες. Σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , εισάγεται ένα νέο καμπυλόγραμμο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (α, β, γ) με τις σχέσεις

$$x_i = x_i(\alpha, \beta, \gamma), \quad (2.1)$$

έτσι ώστε η επιφάνεια που ορίζεται με την σχέση $x_i = x_i(\alpha, \beta, \gamma = \gamma_0)$ να ταυτίζεται με την διεπιφάνεια $S (= S_M = S_I)$ των δύο μέσων, οι δε καμπύλες $\alpha = \text{σταθερό}$ και $\beta = \text{σταθερό}$ να αποτελούν τις κύριες παραμετρικές καμπύλες της διεπιφάνειας.

Η προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του διδιάστατου συνεχούς μέσου, που στη συνέχεια θα χαρακτηρίζεται *διεπιφάνεια*, έχει αποτελέσει ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια. Σε μακροσκοπικό επίπεδο, η μηχανική συμπεριφορά του μέσου αυτού εκφράζει τη συμπεριφορά της σύνδεσης των δύο υλικών, που επιτυγχάνεται μέσω των ατομικών δεσμών των δύο υλικών. Η προσομοίωση της μηχανικής συμπεριφοράς του επιφανειακού αυτού μέσου θα συζητηθεί αμέσως παρακάτω για τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις σύνδεσης των δύο υλικών, που εμφανίζονται στα σύνθετα υλικά.

2.3 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Όπως προαναφέρθηκε, η σύνδεση της ανομοιογένειας και της μήτρας προσομοιώνεται με ένα ελαστικό διδιάστατο μέσο S , του οποίου οι δύο αντίθετες πλευρές τους είναι συνδεδεμένες με τις συνοριακές επιφάνειες S_M και S_I των δύο αυτών υλικών. Κατά την φόρτιση του σώματος, το ελαστικό μέσο S παραμορφώνεται λόγω των δυνάμεων που εξασκούνται στις δύο πλευρές του, από τα υλικά που είναι συνδεδεμένα με αυτές. Οι δυνάμεις που επενεργούν στις δύο αντίθετες πλευρές του μέσου S παραλαμβάνονται από τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο μέσο αυτό, η δε παραμόρφωσή του είναι τέτοια ώστε να μη διακόπτεται η συνέχεια του υλικού.

Στην απαραμόρφωτη κατάσταση έχουμε υποθέσει ότι οι επιφάνειες S_M , S_I και S ταυτίζονται. Έστω dS_M , dS_I και dS ότι είναι τρία στοιχειώδη τμήματα των επιφανειών αυτών, που στην απαραμόρφωτη κατάσταση ταυτίζονται και αυτά, δηλαδή $dS_M = dS_I = dS$. Θα θεωρήσουμε ότι τα στοιχειώδη αυτά τμήματα αντιπροσωπεύονται με το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} , που είναι κάθετο σε αυτά και διευθύνεται από την ανομοιογένεια στη μήτρα. Κατά την παραμόρφωση του σώματος πάνω στα dS_M και dS_I εξασκού-

νται οι δυνάμεις

$$d\mathbf{F}^M = \sigma_{ji}^M n_j dS_M \mathbf{i}_i, \quad d\mathbf{F}^I = -\sigma_{ji}^I n_j dS_I \mathbf{i}_i, \quad (2.2)$$

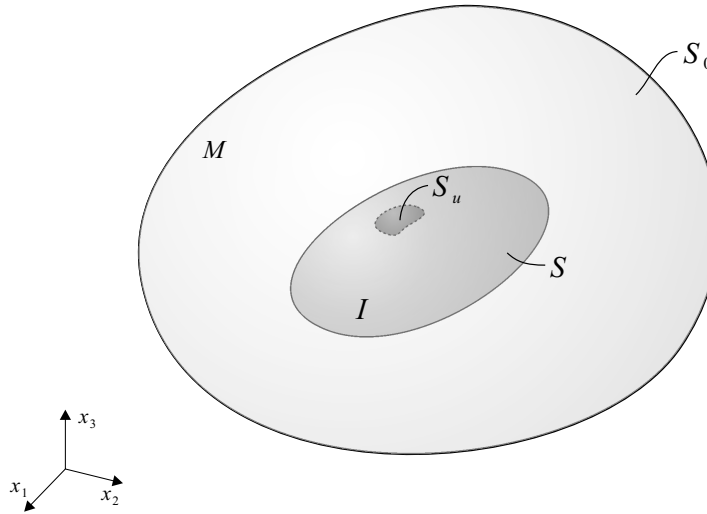
που προέρχονται από τη μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα. Στις σχέσεις αυτές, τα διανύσματα \mathbf{i}_i είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x_i . Οι ποσότητες $\sigma_{ji}^M n_j$, $\sigma_{ji}^I (-n_j)$ αντιπροσωπεύουν τους ελκυστές που επενεργούν πάνω στις πλευρές των στοιχειωδών επιφανειακών τμημάτων dS_M και dS_I που συνορεύουν με τη μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα. Έστω $d\mathbf{F}^S = f_i dS \mathbf{i}_i$ και $\mathbf{u}^S = u_i^S \mathbf{i}_i$ ότι είναι η δύναμη και η μετατόπιση που αναπτύσσονται στο επιφανειακό τμήμα dS της S , όπου $f_i dS$ είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες της διεπιφανειακής δύναμης και u_i^S οι καρτεσιανές συνιστώσες της μετατόπισης. Αν σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας ισχύει

$$d\mathbf{F}^S = d\mathbf{F}^M = -d\mathbf{F}^I, \quad \text{και} \quad \mathbf{u}^S = \mathbf{u}^M = \mathbf{u}^I, \quad (2.3)$$

ή, ισοδύναμα,

$$f_i^S = \sigma_{ij}^M n_j = \sigma_{ij}^I n_j, \quad u_i^S = u_i^M = u_i^I, \quad (2.4)$$

τότε η διεπιφάνεια θα λέγεται *τέλεια*. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι μία τέλεια διεπιφάνεια δεν διακόπτει τη συνέχεια του ελκυστή, ούτε την συνέχεια των μετατοπίσεων του υλικού. Η πρώτη σχέση της (2.3) περιγράφει την ισορροπία του στοιχειώδους διεπιφανειακού τμήματος dS .



Σχήμα 2.1 Οι διεπιφάνειες S , S_u και S_0

2.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

2.4.1 Εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων

Μία διεπιφάνεια θα ονομάζεται ελατηριακού τύπου, αν σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της dS ισχύουν οι σχέσεις

$$d\mathbf{F}^S = d\mathbf{F}^M = -d\mathbf{F}^I, \quad \mathbf{u}^S = \mathbf{u}^M - \mathbf{u}^I, \quad (2.5)$$

οι οποίες, σε αναλυτική μορφή, γράφονται

$$f_i^S = t_i^M = t_i^I, \quad u_i^S = u_i^M - u_i^I, \quad (2.6)$$

όπου $t_i^M = \sigma_{ji}^M n_j$, $t_i^I = \sigma_{ji}^I n_j$ είναι οι ελκυστές που επενεργούν πάνω στα dS_M και dS_I . Οι δυνάμεις $d\mathbf{F}^S$ που αναπτύσσονται στο διεπιφανειακό τμήμα dS συντίθεται από μια διανομή επιφανειακών δυνάμεων \mathbf{f}^S που επενεργούν πάνω στο τμήμα dS . Οι σχέσεις (2.5) δηλώνουν ότι μια διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου διακόπτει τη συνέχεια των μετατοπίσεων \mathbf{u}^M , \mathbf{u}^I των συνδεδεμένων επιφανειών S_M και S_I , αλλά δεν διακόπτει τη συνέχεια των t^M και t^I . Μια τέτοια συμπεριφορά προσομοιώνεται με εκείνη που επιδεικνύει μια συνεχή διανομή ελατηρίων αμελητέου πάχους πάνω στην επιφάνεια S , των οποίων η επέκταση αντιστοιχεί στην \mathbf{u}_i^S και η ελατηριακή δύναμη στην $d\mathbf{F}^S = \mathbf{f}_i^S dS$. Έτσι η παραμορφωσιακή και η εντατική συμπεριφορά του συνεχούς διεπιφανειακού μέσου S περιγράφεται πλήρως από τις ποσότητες f_i^S και u_i^S . Οι σχέσεις που συνδέουν τις ποσότητες αυτές ορίζουν τις καταστατικές εξισώσεις της διεπιφάνειας και θα εξαχθούν παρακάτω.

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης που αποθηκεύεται στο σώμα. Προς αυτήν την κατεύθυνση, θα θεωρήσουμε ότι το σώμα παραμορφώνεται ελαστικά από ένα ισόρροπο σύστημα εξωτερικών ελκυστών t_i^{ext} , που εφαρμόζεται σε όλα τα σημεία του εξωτερικού του συνόρου S_o . Ενώ στο σώμα επενεργεί η φόρτιση αυτή, θα εφαρμόσουμε ένα πεδίο δυνατών μετατοπίσεων, που περιγράφεται με τις συναρτήσεις μετατόπισης δu_i^M , δu_i^I στη μήτρα και την ανομοιογένεια, και με τη συνάρτηση δu_i^S στο διδιάστατο μέσο S . Η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων απαιτεί την ικανοποίηση της συνθήκης

$$\delta u_i^S = \delta u_i^M - \delta u_i^I, \quad (2.7)$$

πάνω στη διεπιφάνεια S . Όταν δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις στο σώμα, η αρχή των δυνατών έργων, παρέχει

$$\delta W^{\text{ext}} = \delta E^M + \delta E^I + \delta E^S, \quad (2.8)$$

όπου

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} \delta u_i^M \delta S_o, \quad (2.9)$$

είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που εφαρμόζονται στο σώμα. Στην (2.8), τα δE^M , δE^I , δE^S είναι οι αυξήσεις της εσωτερικής ενέργειας σε ανομοιογένεια, μήτρα και διεπιφάνεια, αντίστοιχα. Στα πλαίσια της ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων, για τις ποσότητες δE^M και δE^I , ισχύουν οι σχέσεις

$$\delta E^M = \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \delta \varepsilon_{ij}^M dV_M, \quad (2.10\alpha)$$

$$\delta E^I = \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \delta \varepsilon_{ij}^I dV_I, \quad (2.10\beta)$$

όπου σ_{ij}^k ($k = M$ ή I) είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων, και

$$2\delta\varepsilon_{ij}^k = \delta u_{i,j}^k + \delta u_{j,i}^k, \quad (2.11)$$

οι δυνατές παραμορφώσεις των δύο μέσων. Με βάση τη συνθήκη ισορροπίας

$$\sigma_{ji,j}^k = 0 \quad (2.12)$$

και το θεώρημα απόκλισης, οι (2.10) παρέχουν

$$\delta E^M = \int_{S_o} t_i^M \delta u_i^M dS_o - \int_{S_M} t_i^M \delta u_i^M dS_M, \quad (2.13\alpha)$$

$$\delta E^I = \int_{S_I} t_i^I \delta u_i^I dS_I, \quad (2.13\beta)$$

όπου, στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (2.13α), το μοναδιαίο διάνυσμα έχει ληφθεί να διευθύνεται από την ανομοιογένεια στη μήτρα. Πάνω στο σύνορο S_o θα πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνοριακή συνθήκη

$$t_i^M = t_i^{\text{ext}}. \quad (2.14)$$

Παίρνοντας υπόψιν τις σχέσεις (2.6), (2.9), (2.14), και από τις σχέσεις (2.13) αποκτάμε

$$\delta E^M + \delta E^I = \delta W^{\text{ext}} - \int_S f_i^S \delta u_i^S dS, \quad (2.15)$$

Από τη σύγκριση των (2.8) και (2.15) συνάγεται η σχέση που παρέχει την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια S

$$\delta E^S = \int_S f_i^S \delta u_i^S dS, \quad (2.16)$$

η οποία, σε διανυσματική μορφή, γράφεται

$$\delta E^S = \int_S \mathbf{f}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S dS, \quad (2.17)$$

όπου

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{i}_i, \quad \delta \mathbf{u} = u_i \mathbf{i}_i. \quad (2.18)$$

Αυτό που απομένει τώρα είναι η εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων του διδιάστατου ελαστικού μέσου S . Προς αυτό το σκοπό, θα εκφράσουμε την ποσότητα $\mathbf{f}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S$ της (2.17) ως προς το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (α, β, γ) . Ως προς το σύστημα αυτό για τις ποσότητες δu^S και f^S έχουμε

$$\delta \mathbf{u}^S = \delta u_\alpha^S \mathbf{e}_\alpha + \delta u_\beta^S \mathbf{e}_\beta + \delta u_\gamma^S \mathbf{e}_\gamma, \quad (2.19\alpha)$$

$$\mathbf{f}^S = f_\alpha^S \mathbf{e}_\alpha + f_\beta^S \mathbf{e}_\beta + f_\gamma^S \mathbf{e}_\gamma, \quad (2.19\beta)$$

όπου $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων α, β και γ . Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\mathbf{f}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S = f_\alpha^S \delta u_\alpha^S + f_\beta^S \delta u_\beta^S + f_\gamma^S \delta u_\gamma^S. \quad (2.20)$$

Συνεπώς, με βάση την (2.20), η (2.17) γράφεται

$$\delta E^S = \int_S (f_\alpha^S \delta u_\alpha^S + f_\beta^S \delta u_\beta^S + f_\gamma^S \delta u_\gamma^S) dS. \quad (2.21)$$

Η προς ολοκλήρωση ποσότητα της (2.21) εκφράζει τη μεταβολή της ελεύθερης ενέργειας του σώματος ανά μονάδα απαραμόρφωτης επιφάνειας dS , που θα τη δηλώνουμε με Γ . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\delta \Gamma = f_\alpha^S \delta u_\alpha^S + f_\beta^S \delta u_\beta^S + f_\gamma^S \delta u_\gamma^S. \quad (2.22)$$

Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι η ποσότητα Γ εξαρτάται από τις κινηματικές ποσότητες της διεπιφάνειας $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$, οι οποίες θα υποθέσουμε ότι αποτελούν τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές της Γ . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\delta \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\alpha^S} \delta u_\alpha^S + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\beta^S} \delta u_\beta^S + \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\gamma^S} \delta u_\gamma^S. \quad (2.23)$$

Έτσι, από τις (2.22) και (2.23) προκύπτει ότι

$$f_\alpha^S = \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\alpha^S}, \quad f_\beta^S = \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\beta^S}, \quad f_\gamma^S = \frac{\partial \Gamma}{\partial u_\gamma^S}. \quad (2.24)$$

Σε αναλογία με τη διαδικασία για τριδιάστατες παραμορφώσεις η επιφανειακή πυκνότητα της ελεύθερης ενέργειας παραμόρφωσης Γ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στη μορφή

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_0 + \frac{1}{2} N_{\alpha\alpha} (u_\alpha^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\beta\beta} (u_\beta^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\gamma\gamma} (u_\gamma^S)^2 \\ + N_{\alpha\beta} u_\alpha^S u_\beta^S + N_{\beta\gamma} u_\beta^S u_\gamma^S + N_{\alpha\gamma} u_\gamma^S u_\alpha^S + \mathcal{O}(u^3), \end{aligned} \quad (2.25)$$

όπου $\Gamma_0, N_{\alpha\alpha}, N_{\beta\beta}, N_{\gamma\gamma}, N_{\alpha\beta}, N_{\beta\gamma}$ και $N_{\gamma\alpha}$ είναι πραγματικές σταθερές. Για τις σταθερές αυτές ισχύουν οι παρακάτω συμμετρικές ιδιότητες

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}, \quad N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\beta}, \quad N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\gamma}. \quad (2.26)$$

Θα υποθέσουμε ότι η ποσότητα Γ έχει μια ελάχιστη τιμή, όταν οι επιφανειακές μετατοπίσεις u_i^S είναι μηδενικές. Με βάση την υπόθεση αυτή και θεωρώντας την απαραμόρφωτη κατάσταση του σώματος ως σημείο αναφοράς για την κλίμακα της ενέργειας, από την (2.25) συνάγεται ότι $\Gamma_0 = 0$. Θέτοντας στην (2.25) $\Gamma_0 = 0$ και παραλείποντας τους απειροστούς όρους που είναι μεγαλύτεροι της δεύτερης τάξης, η (2.25) μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\Gamma \cong \frac{1}{2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{N} \mathbf{u}_S, \quad (2.27)$$

όπου

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{\alpha\alpha} & N_{\alpha\beta} & N_{\alpha\gamma} \\ N_{\beta\alpha} & N_{\beta\beta} & N_{\beta\gamma} \\ N_{\gamma\alpha} & N_{\gamma\beta} & N_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} u_\alpha^S \\ u_\beta^S \\ u_\gamma^S \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Η ποσότητα Γ αντιπροσωπεύει την επιπρόσθετη ενέργεια που αποθηκεύεται στο επιφανειακό τμήμα dS του μέσου Γ , και συνεπώς θα πρέπει να είναι θετική. Από τη θεωρία των τετραγωνικών μορφών, προκύπτει ότι για το συμμετρικό πίνακα \mathbf{N} υπάρχει ένας μετασχηματισμός

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{u}_S = \mathbf{v}_S = [v_{\alpha'}^S, v_{\beta'}^S, v_{\gamma'}^S], \quad (2.29)$$

για τον οποίο

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{N} \mathbf{u}_S = \frac{1}{2} N_{\alpha'} (v_{\alpha'}^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\beta'} (v_{\beta'}^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\gamma'} (v_{\gamma'}^S)^2, \quad (2.30)$$

όπου $N_{\alpha'}$, $N_{\beta'}$, $N_{\gamma'}$ είναι οι ιδιοτιμές του \mathbf{N} . Ο πίνακας \mathbf{Q} του μετασχηματισμού (2.29) συντίθεται από τα ιδιοδιανύσματα του \mathbf{N} και ικανοποιεί τη συνθήκη διαγωνιοποίησης του πίνακα,

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}^{-1}, \quad (2.31)$$

όπου

$$\mathbf{L} = \text{diag}[L_{\alpha'}, L_{\beta'}, L_{\gamma'}]. \quad (2.32)$$

Συνεπώς, η (2.27), με βάση την (2.30) μπορεί να γραφεί

$$\Gamma = \frac{1}{2} N_{\alpha'} (v_{\alpha'}^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\beta'} (v_{\beta'}^S)^2 + \frac{1}{2} N_{\gamma'} (v_{\gamma'}^S)^2. \quad (2.33)$$

Η Γ είναι θετική όταν

$$N_{\alpha'} > 0, \quad N_{\beta'} > 0, \quad N_{\gamma'} > 0. \quad (2.34)$$

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι υπάρχει ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων $(\alpha', \beta', \gamma')$ που ορίζεται από τα τρία κάθετα ιδιοδιανύσματα του \mathbf{N} , ως προς το οποίο η Γ γράφεται στη μορφή (2.33). Η φυσική βάση του προβλήματος απαιτεί ότι $\gamma \equiv \gamma'$. Αυτό σημαίνει ότι το ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{N} και η αντίστοιχη ιδιοτιμή του είναι καθορισμένα όταν έχει ορισθεί η επιφάνεια S . Τα άλλα δύο ιδιοδιανύσματα θα πρέπει να είναι εφαπτομενικά στην επιφάνεια S . Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι τα δύο άλλα ιδιοδιανύσματα είναι εφαπτόμενες στις παραμετρικές καμπύλες α, β της επιφάνειας S . Μια τέτοια υπόθεση είναι συμβατή με την εμπειρική υπόθεση της βιβλιογραφίας για τους καταστατικούς νόμους. Με αυτήν την υπόθεση, θεωρούμε ότι $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma')$, $\mathbf{v}_S = \mathbf{u}_S$, και επομένως, την (2.33) μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή

$$\Gamma = \frac{1}{2} N_\alpha (u_\alpha^S)^2 + \frac{1}{2} N_\beta (u_\beta^S)^2 + \frac{1}{2} N_\gamma (u_\gamma^S)^2. \quad (2.35)$$

Συνεπώς, από τη σχέση αυτή και από τις (2.24) οι καταστατικές σχέσεις της διεπιφάνειας εξάγονται στη μορφή

$$f_\alpha = N_\alpha u_\alpha^S, \quad f_\beta = N_\beta u_\beta^S, \quad f_\gamma = N_\gamma u_\gamma^S. \quad (2.36)$$

Στην επίλυση ελαστικών προβλημάτων είναι βολικό να εκφράσουμε τις παραπάνω καταστατικές εξισώσεις σε όρους των ελαστικών ποσοτήτων των δύο υλικών. Με βάση τις σχέσεις (2.26), προκύπτουν οι ισότητες

$$t_{\alpha}^M = t_{\alpha}^I = f_{\alpha}, \quad t_{\beta}^M = t_{\beta}^I = f_{\beta}, \quad t_{\gamma}^M = t_{\gamma}^I = f_{\gamma}, \quad (2.37\alpha)$$

$$u_{\alpha}^S = u_{\alpha}^M - u_{\alpha}^I, \quad u_{\beta}^S = u_{\beta}^M - u_{\beta}^I, \quad u_{\gamma}^S = u_{\gamma}^M - u_{\gamma}^I. \quad (2.37\beta)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές, οι καταστατικές εξισώσεις (2.37) παίρνουν τη μορφή

$$t_{\alpha}^M = t_{\alpha}^I = N_{\alpha}(u_{\alpha}^M - u_{\alpha}^I), \quad t_{\beta}^M = t_{\beta}^I = N_{\beta}(u_{\beta}^M - u_{\beta}^I), \quad t_{\gamma}^M = t_{\gamma}^I = N_{\gamma}(u_{\gamma}^M - u_{\gamma}^I). \quad (2.38)$$

2.4.2 Οι εξισώσεις της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Αναφορικά με ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ, x_3) , με την αντιστοιχία $\alpha \rightarrow \theta, \beta \rightarrow x_3, \gamma \rightarrow \rho$, οι σχέσεις (2.38) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{\rho\rho}^M = \sigma_{\rho\rho}^I = N_{\rho}(u_{\rho}^M - u_{\rho}^I), \quad (2.39\alpha)$$

$$\sigma_{\theta\rho}^M = \sigma_{\theta\rho}^I = N_{\theta}(u_{\theta}^M - u_{\theta}^I), \quad (2.39\beta)$$

$$\sigma_{3\rho}^M = \sigma_{3\rho}^I = N_3(u_3^M - u_3^I). \quad (2.39\gamma)$$

Αν οι μετατοπίσεις του συστήματος δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή x_3 , τότε η παραμόρφωση του συστήματος διασπάται σε δύο ασύζευκτες παραμορφωσιακές καταστάσεις, που είναι γνωστές ως συνεπίπεδη παραμόρφωση και ως αντιεπίπεδη παραμόρφωση. Οι διεπιφανειακές σχέσεις της συνεπίπεδης παραμόρφωσης είναι

$$\sigma_{\rho\rho}^M = \sigma_{\rho\rho}^I = N_{\rho}(u_{\rho}^M - u_{\rho}^I), \quad (2.40\alpha)$$

$$\sigma_{\theta\rho}^M = \sigma_{\theta\rho}^I = N_{\theta}(u_{\theta}^M - u_{\theta}^I), \quad (2.40\beta)$$

όπου $\sigma_{\rho\rho}^k, \sigma_{\theta\rho}^k, u_{\rho}^k, u_{\theta}^k$ ($k = M$ ή I) εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές x_1, x_2 ή ρ, θ . Οι διεπιφανειακές σχέσεις της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης είναι

$$\sigma_{3\rho}^M = \sigma_{3\rho}^I = N_3(u_3^M - u_3^I), \quad (2.41)$$

όπου οι $\sigma_{3\rho}^k$ και u_3^k εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x_3 .

2.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

2.5.1 Εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων

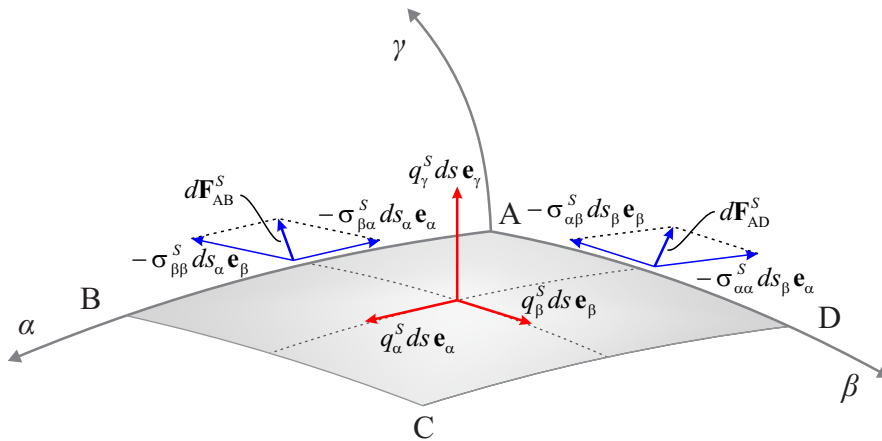
Μια διεπιφάνεια S θα ονομάζεται μεμβρανικού τύπου, αν σε κάθε διεπιφανειακό της τμήμα dS ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$d\mathbf{F}^M - d\mathbf{F}^I = -d\mathbf{F}^S, \quad \mathbf{u}^M = \mathbf{u}^I = \mathbf{u}^S, \quad (2.42)$$

όπου η δύναμη $d\mathbf{F}^S$ συντίθεται από διανομές γραμμικών δυνάμεων, που αναπτύσσονται στις ακμές του στοιχείου και είναι εφαπτομενικές σε αυτό. Με τις υποθέσεις αυτές, συνάγεται ότι το στοιχείο dS θα πρέπει να έχει καμπυλωμένη μορφή προκειμένου να εξασφαλίζεται η ισορροπία του. Όπως δείχνεται στο Σχήμα 2.2, στην πλευρά AD του στοιχείου $dS (\equiv ABCD)$, επενεργεί η δύναμη $d\mathbf{F}_{AD}^S$, που έχει διανυσματικές συνιστώσες τις $\sigma_{\alpha\alpha}^S ds_\beta (-\mathbf{e}_\beta)$ και $\sigma_{\beta\beta}^S ds_\alpha (-\mathbf{e}_\alpha)$, και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$d\mathbf{F}_{AD}^S = -\sigma_{\alpha\beta}^S ds_\beta \mathbf{e}_\beta - \sigma_{\alpha\alpha}^S ds_\beta \mathbf{e}_\alpha. \quad (2.43)$$

Στη σχέση αυτή, το ds_β είναι το μήκος της πλευράς AD του στοιχείου dS και $\sigma_{\alpha\alpha}^S, \sigma_{\beta\beta}^S$ είναι διανεμημένες δυνάμεις που επενεργούν στην κάθετη και εφαπτομενική διεύθυνση της ακμής AD . Τα μήκη ds_α και ds_β



Σχήμα 2.2 Οι μεμβρανικές τάσεις και οι επιφανειακές δυνάμεις

μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$ds_\alpha = A_\alpha d\alpha, \quad ds_\beta = A_\beta d\beta, \quad (2.44)$$

όπου

$$A_\alpha^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha}\right)^2, \quad A_\beta^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)^2. \quad (2.45)$$

Τα $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$ και \mathbf{e}_γ υπενθυμίζεται ότι είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων α, β και γ , αντίστοιχα. Όμοια, στην πλευρά AB του στοιχείου dS επενεργεί η δύναμη $d\mathbf{F}_{AB}^S$ που παρέχεται από τη σχέση

$$d\mathbf{F}_{AB}^S = -\sigma_{\beta\alpha}^S ds_\alpha \mathbf{e}_\alpha - \sigma_{\beta\beta}^S ds_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad (2.46)$$

όπου ds_α είναι το μήκος της πλευράς AB. Κατά αναλογία, για τις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις ακμές BC και DC του στοιχείου dS μπορούμε να γράψουμε

$$d\mathbf{F}_{BC} = \sigma_{\alpha\alpha}^S(\alpha + d\alpha, \beta) ds'_\beta \mathbf{e}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^S(\alpha + d\alpha, \beta) ds'_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad (2.47\alpha)$$

$$d\mathbf{F}_{DC} = \sigma_{\beta\beta}^S(\alpha, \beta + d\beta) ds'_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \sigma_{\beta\alpha}^S(\alpha, \beta + d\beta) ds'_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad (2.47\beta)$$

όπου ds'_β και ds'_α είναι τα μήκη των ακμών BC και DC, αντίστοιχα, και οι ποσότητες $\sigma_{\alpha\alpha}^S(\alpha + d\alpha, \beta)$ και $\sigma_{\alpha\beta}^S(\alpha + d\alpha, \beta)$ είναι οι διανεμημένες δυνάμεις που επενεργούν στις ακμές αυτές, Σχήμα 2.3. Από τα αντίστοιχα αναπτύγματα των ποσοτήτων αυτών σε σειρές, μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma_{\alpha\alpha}^S(\alpha + d\alpha, \beta) \cong \sigma_{\alpha\alpha}^S(\alpha, \beta) + \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (2.48\alpha)$$

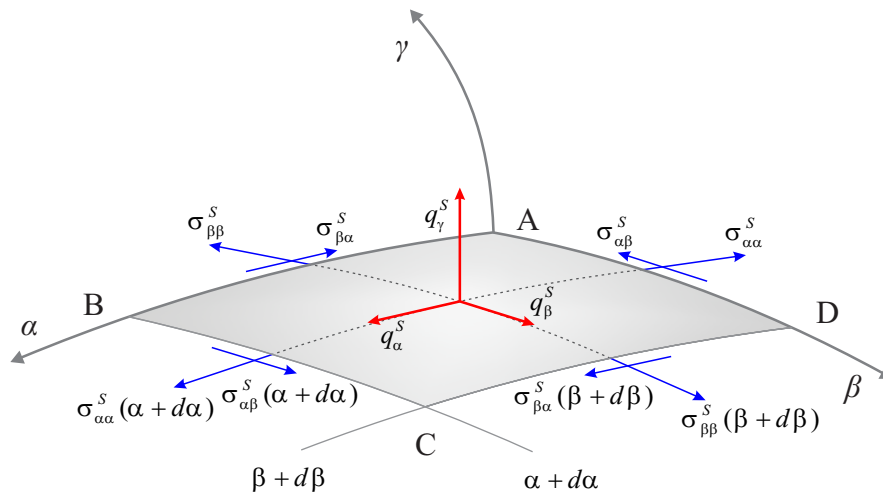
$$\sigma_{\alpha\beta}^S(\alpha + d\alpha, \beta) \cong \sigma_{\alpha\beta}^S(\alpha, \beta) + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^S(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (2.48\beta)$$

Ομοίως, για τα μήκη ds'_α και ds'_β έχουμε

$$ds'_\alpha = A_\alpha(\alpha, \beta + d\beta) d\alpha \cong \left(A_\alpha + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha = A_\alpha d\alpha + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} d\alpha d\beta, \quad (2.49\alpha)$$

$$ds'_\beta = A_\beta(\alpha + d\alpha, \beta) d\beta \cong \left(A_\beta + \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta = A_\beta d\beta + \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} d\alpha d\beta. \quad (2.49\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.48), (2.49) στις (2.47) και παραλείποντας τα απειροστά ανώτερης τάξης, προ-



Σχήμα 2.3 Οι μεμβρανικές τάσεις και οι μεταβολές τους

κύπτουν οι δυνάμεις που επενεργούν στις ακμές BC και DC στη μορφή

$$d\mathbf{F}_{BC} \cong \left[\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta) d\alpha d\beta \right] \mathbf{e}_\alpha + \left[\sigma_{\alpha\beta}^S A_\beta d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_{\alpha\beta}^S A_\beta) d\alpha d\beta \right] \mathbf{e}_\beta, \quad (2.50\alpha)$$

$$d\mathbf{F}_{DC} \cong \left[\sigma_{\beta\alpha}^S A_\alpha d\alpha + \frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_{\beta\alpha}^S A_\alpha) d\alpha d\beta \right] \mathbf{e}_\alpha + \left[\sigma_{\beta\beta}^S A_\beta d\beta + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_{\beta\beta}^S A_\beta) d\alpha d\beta \right] \mathbf{e}_\beta. \quad (2.50\beta)$$

Συνεπώς, η δύναμη $d\mathbf{F}^S$ που αναπτύσσεται στο στοιχείο κατά την παραμόρφωση θα είναι

$$d\mathbf{F}^S = d\mathbf{F}_{AD} + d\mathbf{F}_{AB} + d\mathbf{F}_{BC} + d\mathbf{F}_{DC}, \quad (2.51)$$

όπου οι ποσότητες $d\mathbf{F}_{AD}$, $d\mathbf{F}_{AB}$, $d\mathbf{F}_{BC}$ και $d\mathbf{F}_{DC}$ παρέχονται από τις (2.43), (2.46) και (2.50), αντίστοιχα. Πάνω στις δύο αντίθετες πλευρές του στοιχείου dS επενεργούν οι δυνάμεις,

$$d\mathbf{F}^M = \mathbf{t}^M dS, \quad d\mathbf{F}^I = \mathbf{t}^I dS, \quad (2.52)$$

όπου \mathbf{t}^M και \mathbf{t}^I είναι οι ελκυστές που επενεργούν στα τμήματα dS_M , dS_I των συνόρων S_M , S_I για τα οποία ισχύει $dS_M = dS_I = dS$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.51), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial(\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} - \sigma_{\beta\beta}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} + q_\alpha^S A_\alpha A_\beta = 0, \quad (2.53\alpha)$$

$$\frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\beta\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} + q_\beta^S A_\alpha A_\beta = 0, \quad (2.53\beta)$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}^S}{R_\alpha} + \frac{\sigma_{\beta\beta}^S}{R_\beta} + q_\gamma^S = 0, \quad (2.53\gamma)$$

όπου έχει εισαχθεί η επιφανειακή δύναμη

$$\mathbf{q}^S = \mathbf{t}^M - \mathbf{t}^I, \quad (2.54)$$

της οποίας οι καμπυλόγραμμες συνιστώσες $q_\alpha^S, q_\beta^S, q_\gamma^S$ συνδέονται με τις καμπυλόγραμμες συνιστώσες $t_\alpha^k, t_\beta^k, t_\gamma^k$ ($k = M$ ή I) των ελκυστών που επενεργούν στις επιφάνειες των δύο υλικών με τις σχέσεις

$$q_\alpha^S = t_\alpha^M - t_\alpha^I, \quad q_\beta^S = t_\beta^M - t_\beta^I, \quad q_\gamma^S = t_\gamma^M - t_\gamma^I. \quad (2.55)$$

Οι ποσότητες

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial\gamma}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial\gamma}, \quad (2.56)$$

που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις δύο καμπυλότητες του καμπυλωμένου στοιχείου dS . Έτσι λοιπόν, η παραμόρφωση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου περιγράφεται πλήρως από τις ποσότητες $\sigma_{\alpha\alpha}^S, \sigma_{\beta\beta}^S$ και $\sigma_{\alpha\beta}^S$ και $\sigma_{\beta\alpha}^S (= \sigma_{\alpha\beta}^S)$, που αποτελούν τις καμπυλόγραμμες συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή τάσεων $\boldsymbol{\sigma}^S$ και από το διάνυσμα μετατόπισης \mathbf{u}^S . Τον τανυστή $\boldsymbol{\sigma}^S$ θα τον ονομάζουμε τανυστή μεμβρανικών τάσεων. Οι σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών των μεμβρανικών τάσεων και των βαθμίδων των συνιστωσών της μεμβρανικής μετατόπισης ορίζουν τις καταστατικές εξισώσεις του διδιάστατου συνεχούς μέσου, S της διεπιφάνειας, που προσδιορίζονται αμέσως παρακάτω. Οι σχέσεις (2.53) μπορούν να θεωρηθούν ως η γενίκευση των σχέσεων των Young-Laplace της μηχανικής των ρευστών σε στερεές επιφάνειες.

Έστω ότι η παραμόρφωση του σώματος προέρχεται από μία διανομή ελκυστών t_i^{ext} που εφαρμόζονται πάνω στο εξωτερικό σύνορο S_o του σώματος. Αν εφαρμόσουμε στο σώμα ένα πεδίο δυνατών παραμορφώσεων όπως προηγούμενα, η αρχή των δυνατών έργων παρέχει

$$\delta W^{\text{ext}} = \delta E^I + \delta E^M + \delta E^S, \quad (2.57)$$

όπου δE^I , δE^M και δE^S είναι οι μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας στην ανομοιογένεια, τη μήτρα και τη διεπιφάνεια, αντίστοιχα, και δW^{ext} είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που επενεργεί στο σώμα. Όταν στο σώμα δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις, τότε το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{S_o} \mathbf{t}^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u}^M dS_o. \quad (2.58)$$

Εργαζόμενοι όπως στη διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, οι μεταβολές δE^I και δE^M ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , παρέχονται από τις σχέσεις

$$\delta E^I = \int_{S_I} t_i^I \delta u_i^I dS_I, \quad (2.59\alpha)$$

$$\delta E^M = \int_{S_o} t_i^M \delta u_i^M dS_o - \int_{S_M} t_i^M \delta u_i^M dS_M, \quad (2.59\beta)$$

όπου $t_i^M = \sigma_{ji}^M n_j$, $t_i^I = \sigma_{ji}^I n_j$ είναι οι ελκυστές των τάσεων που επενεργούν στα στοιχειώδη τμήματα dS_M , dS_I , dS_o των επιφανειών S_M , S_I και S_o . Το n_i αποτελεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα των τμημάτων dS_M , dS_I και dS . Το διάνυσμα αυτό, με εξαίρεση αυτό του τμήματος dS_M , εξέρχεται από τη μήτρα και την ανομοιογένεια. Σε διανυσματική μορφή οι σχέσεις (2.59) γράφονται

$$\delta E^I = \int_{S_I} \mathbf{t}^I \cdot \delta \mathbf{u}^I dS_I, \quad (2.60\alpha)$$

$$\delta E^M = \delta W^{\text{ext}} - \int_{S_M} \mathbf{t}^M \cdot \delta \mathbf{u}^M dS_M, \quad (2.60\beta)$$

όπου στη δεύτερη σχέση έχει εισαχθεί το έργο των εξωτερικών δυνάμεων με βάση τη σχέση (2.58). Με πρόσθεση των σχέσεων αυτών προκύπτει

$$\delta E^I + \delta E^M = \delta W^{\text{ext}} - \int_S \mathbf{q}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S dS. \quad (2.61)$$

Στην εξαγωγή της σχέσης αυτής έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση (2.54) καθώς και η συνθήκη $\delta \mathbf{u}^S = \delta \mathbf{u}^M = \delta \mathbf{u}^I$, που απαιτεί η αρχή των δυνατών έργων για τη συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων. Η σύγκριση των (2.57) και (2.61) παρέχει

$$\delta E^S = \int_S \mathbf{q}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S dS, \quad (2.62)$$

όπου

$$\mathbf{q}^S = \mathbf{t}^M - \mathbf{t}^I \quad (2.63)$$

Από τη σχέση αυτή παίρνοντας υπόψιν τις συνθήκες (2.53), προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta E^S = \int_{\alpha} \int_{\beta} & \left[-\frac{\partial(\sigma_{\alpha\alpha}^S A_{\beta})}{\partial\alpha} \delta u_{\alpha}^S - \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_{\alpha})}{\partial\beta} \delta u_{\alpha}^S - \sigma_{\alpha\beta}^S \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\beta} \delta u_{\alpha}^S + \sigma_{\beta\beta}^S \frac{\partial A_{\beta}}{\partial\alpha} \delta u_{\alpha}^S \right. \\ & - \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_{\beta})}{\partial\alpha} \delta u_{\beta}^S - \frac{\partial(\sigma_{\beta\beta}^S A_{\alpha})}{\partial\beta} \delta u_{\beta}^S - \sigma_{\beta\alpha}^S \frac{\partial A_{\beta}}{\partial\alpha} \delta u_{\beta}^S + \sigma_{\alpha\alpha}^S \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\beta} \delta u_{\beta}^S \\ & \left. - \frac{\sigma_{\alpha\alpha}^S}{R_{\alpha}} \delta u_{\gamma}^S - \frac{\sigma_{\beta\beta}^S}{R_{\beta}} \delta u_{\gamma}^S \right] d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Μετά από εκτενή άλγεβρα, η παραπάνω σχέση ανάγεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \delta E^S = \int_{\alpha} \int_{\beta} & [\sigma_{\alpha\alpha}^S \delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \sigma_{\beta\beta}^S \delta\varepsilon_{\beta\beta}^S + 2\sigma_{\alpha\beta}^S \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S] A_{\alpha} A_{\beta} d\alpha d\beta \\ & - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} (\sigma_{\alpha\alpha}^S \delta u_{\alpha}^S A_{\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^S \delta u_{\beta}^S A_{\beta}) + \frac{\partial}{\partial\alpha} (\sigma_{\alpha\beta}^S \delta u_{\alpha}^S A_{\alpha} + \sigma_{\beta\beta}^S \delta u_{\beta}^S A_{\alpha}) \right] A_{\alpha} A_{\beta} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (2.65)$$

όπου έχουν εισαχθεί οι ποσότητες

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^S = \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial u_{\alpha}^S}{\partial\alpha} + \frac{u_{\beta}^S}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\beta} - \frac{u_{\gamma}^S}{R_{\alpha}}, \quad (2.66\alpha)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^S = \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial u_{\beta}^S}{\partial\beta} + \frac{u_{\alpha}^S}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial\alpha} - \frac{u_{\gamma}^S}{R_{\beta}}, \quad (2.66\beta)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{A_{\beta}}{A_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{u_{\beta}^S}{A_{\beta}} \right) + \frac{A_{\alpha}}{A_{\beta}} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_{\alpha}^S}{A_{\alpha}} \right), \quad (2.66\gamma)$$

που ορίζουν τις καμπυλόγραμμες παραμορφώσεις του τανυστή των διεπιφανειακών παραμορφώσεων ε^S . Από το θεώρημα του Stokes, το δεύτερο διπλό ολοκλήρωμα της (2.65) προκύπτει ότι μηδενίζεται.

Συνεπώς,

$$\delta E^S = \int_{\alpha} \int_{\beta} [\sigma_{\alpha\alpha}^S \delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \sigma_{\beta\beta}^S \delta\varepsilon_{\beta\beta}^S + 2\sigma_{\alpha\beta}^S \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S] A_{\alpha} A_{\beta} d\alpha d\beta, \quad (2.67)$$

ή

$$\delta E^S = \int_S [\sigma_{\alpha\alpha}^S \delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \sigma_{\beta\beta}^S \delta\varepsilon_{\beta\beta}^S + 2\sigma_{\alpha\beta}^S \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S] dS. \quad (2.68)$$

Η προς ολοκλήρωση ποσότητα στην (2.68) εκφράζει τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας στην S ανά μονάδα μη παραμορφωμένης επιφάνειας. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\delta\Gamma = \sigma_{\alpha\alpha}^S \delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \sigma_{\beta\beta}^S \delta\varepsilon_{\beta\beta}^S + \sigma_{\alpha\beta}^S \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S + \sigma_{\beta\alpha}^S \delta\varepsilon_{\beta\alpha}^S, \quad (2.69)$$

όπου Γ είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα επιφάνεια της S . Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι η ποσότητα Γ εξαρτάται από τις κινηματικές ποσότητες $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S, \varepsilon_{\beta\beta}^S, \varepsilon_{\alpha\beta}^S, \varepsilon_{\beta\alpha}^S, \varepsilon_{\alpha\beta}^S$, οι οποίες θα υποθέσουμε ότι αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές της, αυτό σημαίνει ότι

$$\delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^S} \delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\beta\beta}^S} \delta\varepsilon_{\beta\beta}^S + \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}^S} \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^S + \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\beta\alpha}^S} \delta\varepsilon_{\beta\alpha}^S. \quad (2.70)$$

Συγκρίνοντας την (2.69) με την (2.70) προκύπτει

$$\sigma_{\alpha\alpha}^S = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^S}, \quad \sigma_{\beta\beta}^S = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\beta\beta}^S}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^S = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}^S}, \quad \sigma_{\beta\alpha}^S = \frac{\partial\Gamma}{\partial\varepsilon_{\beta\alpha}^S}. \quad (2.71)$$

Προκειμένου να είμαστε σε θέση να εξάγουμε τις καταστατικές σχέσεις του συνεχούς διδιάστατου μέσου από τις σχέσεις (2.71), θα πρέπει να γνωρίζουμε την ελεύθερη ενέργεια Γ σαν μια συνάρτηση των συνιστωσών παραμόρφωσης. Η έκφραση αυτή εύκολα μπορεί να αποκτηθεί χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η παραμόρφωση είναι μικρή και επεκτείνοντας την συνάρτηση Γ σε δυνάμεις των συνιστωσών παραμόρφωσης. Περιοριζόμενοι στην περίπτωση του ισότροπου μέσου και θεωρώντας ότι το σώμα βρίσκεται σε μια σταθερή θερμοκρασία χωρίς εσωτερικές τάσεις, μπορούμε να πούμε ότι, όταν οι συνιστώσες της παραμόρφωσης στο σώμα είναι μηδέν, τότε και οι τάσεις στο σώμα είναι μηδέν. Επειδή οι τάσεις προκύπτουν από παραγωγή της συνάρτησης Γ ως προς την παραμόρφωση, συνάγεται ότι δεν υπάρχουν γραμμικοί όροι στην επέκταση της συνάρτησης Γ σε δυνάμεις των συνιστωσών παραμόρφωσης. Επειδή η ελεύθερη ενέργεια είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, κάθε όρος στην επέκταση της Γ πρέπει, επίσης, να είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Από τις συμμετρικές συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης ε^S , μπορούν να σχηματισθούν μόνο οι δύο ανεξάρτητες βαθμωτές ποσότητες δεύτερης τάξης. Οι ποσότητες αυτές είναι η $(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)^2$ και η $(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S)^2 + (\varepsilon_{\beta\beta}^S)^2 + 2(\varepsilon_{\alpha\beta}^S)^2$. Επεκτείνοντας τη συνάρτηση Γ σε σειρά δυνάμεων των συνιστωσών παραμόρφωσης και κρατώντας μόνο όρους δεύτερης τάξης, που διαμορφώνουν τις παραπάνω δύο βαθμωτές ποσότητες, θα έχουμε

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{\lambda_s}{2} (\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)^2 + \frac{\mu_s}{2} [(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S)^2 + (\varepsilon_{\beta\beta}^S)^2 + 2(\varepsilon_{\alpha\beta}^S)^2]. \quad (2.72)$$

Η (2.72) είναι η γενική έκφραση που μπορεί να έχει η ελεύθερη ενέργεια της παραμορφωμένης διεπιφάνειας. Οι ποσότητες λ_s και μ_s που υπεισέρχονται στην (2.72) θα ονομάζονται συντελεστές τύπου Lamé. Η μεταβολή στο εμβαδόν του τμήματος dS συνδέεται με το άθροισμα $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S$. Αν το άθροισμα αυτό είναι μηδέν, τότε η επιφάνεια dS είναι αμετάβλητη κατά την παραμόρφωση και μεταβάλλεται μόνο το σχήμα της. Μια τέτοια παραμόρφωση θα λέμε ότι χαρακτηρίζεται ως καθαρή διάτμηση. Η αντίθετη περίπτωση είναι αυτή που προξενεί μεταβολή στο εμβαδόν του dS , με το σχήμα του να παραμένει αμετάβλητο. Μια τέτοια παραμόρφωση θα χαρακτηρίζεται ως σφαιρική παραμόρφωση. Κάθε παραμόρφωση μπορεί να αντιπροσωπευθεί ως άθροισμα μιας καθαρής διάτμησης και μιας σφαιρικής παραμόρφωσης. Αυτό μπορεί να γίνει γράφοντας τον τανυστή παραμόρφωσης στην παρακάτω μορφή

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^S & \varepsilon_{\alpha\beta}^S \\ \varepsilon_{\beta\alpha}^S & \varepsilon_{\beta\beta}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^S - (\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)/2 & \varepsilon_{\alpha\beta}^S \\ \varepsilon_{\beta\alpha}^S & \varepsilon_{\beta\beta}^S - (\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)/2 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Το πρώτο μητρώο της δεξιάς πλευράς της (2.73) αντιπροσωπεύει μία καθαρή διάτμηση, καθότι το άθροισμα των διαγωνίων όρων είναι μηδέν, ενώ το δεύτερο μητρώο, μια σφαιρική παραμόρφωση. Αντίθετα, μια εναλλακτική γενική έκφραση για την ελεύθερη ενέργεια μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας το διαχωρισμό της παραμόρφωσης του στοιχείου dS σε μια καθαρή παραμόρφωση και σε μία σφαιρική παραμόρφωση. Παίρνοντας ως δύο ανεξάρτητα βαθμωτά μεγέθη δευτέρου βαθμού τις ποσότητες

$$\left[\varepsilon_{\alpha\alpha}^S - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S) \right]^2 + \left[\varepsilon_{\beta\beta}^S - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S) \right]^2 + 2(\varepsilon_{\alpha\beta}^S)^2, \quad (2.74\alpha)$$

και

$$(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)^2, \quad (2.74\beta)$$

η συνάρτηση Γ μπορεί να γραφεί στην εναλλακτική μορφή

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{K_S}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S)^2 + \frac{\mu_S}{2} \left[\left(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S) \right)^2 + \left(\varepsilon_{\beta\beta}^S - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S) \right)^2 + 2(\varepsilon_{\alpha\beta}^S)^2 \right]. \quad (2.75)$$

Από τις σχέσεις (2.72) και (2.75) προκύπτει ότι η σταθερά K_S που υπεισέρχεται στην (2.75) συνδέεται με τις σταθερές τύπου Lamé με τη σχέση

$$K_S = \lambda_S + \frac{1}{2}\mu_S. \quad (2.76)$$

Σε μια κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, η ελεύθερη ενέργεια Γ αντιστοιχεί σε μία ελάχιστη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι η Γ σαν συνάρτηση των συνιστωσών παραμόρφωσης, θα πρέπει να έχει ένα ελάχιστο όταν $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S = \varepsilon_{\beta\beta}^S = \varepsilon_{\alpha\beta}^S = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η Γ πρέπει να είναι θετική. Αν η παραμόρφωση είναι τέτοια ώστε $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^S = 0$, τότε στην (2.75) υπάρχει μόνο ο τελευταίος όρος. Αν από την άλλη πλευρά, αν η παραμόρφωση είναι σφαιρική, τότε υπάρχει μόνο ο δεύτερος όρος. Έτσι, συνάγεται ότι μια αναγκαία (και προφανής) ικανή συνθήκη προκειμένου η (2.72) να είναι θετική, είναι οι συντελεστές K_S και μ_S θα πρέπει να είναι θετικοί, δηλαδή

$$K_S > 0, \quad \mu_S > 0. \quad (2.77)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις σχέσεις (2.71) και (2.75) για να εξάγουμε τις συνιστώσες του τανυστή των μεμβρανικών τάσεων. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\sigma_{\alpha\alpha}^S = \left(K_S + \frac{1}{2}\mu_S \right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \left(K_S - \frac{1}{2}\mu_S \right) \varepsilon_{\beta\beta}^S, \quad (2.78\alpha)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^S = \left(K_S + \frac{1}{2}\mu_S \right) \varepsilon_{\beta\beta}^S + \left(K_S - \frac{1}{2}\mu_S \right) \varepsilon_{\alpha\alpha}^S, \quad (2.78\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^S = 2\mu_S \varepsilon_{\alpha\beta}^S. \quad (2.78\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.76), οι παραπάνω καταστατικές σχέσεις σε όρους των σταθερών λ_S και μ_S γράφονται

$$\sigma_{\alpha\alpha}^S = (\lambda_S + \mu_S)\varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \lambda_S\varepsilon_{\beta\beta}^S, \quad (2.79\alpha)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^S = (\lambda_S + \mu_S)\varepsilon_{\beta\beta}^S + \lambda_S\varepsilon_{\alpha\alpha}^S, \quad (2.79\beta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^S = 2\mu_S\varepsilon_{\alpha\beta}^S. \quad (2.79\gamma)$$

Αντιστρέφοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^S = \frac{\lambda_S + \mu_S}{2\mu_S(\lambda_S + \mu_S/2)}\sigma_{\alpha\alpha}^S - \frac{\lambda_S}{2\mu_S(\lambda_S + \mu_S/2)}\sigma_{\beta\beta}^S, \quad (2.80\alpha)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^S = \frac{\lambda_S + \mu_S}{2\mu_S(\lambda_S + \mu_S/2)}\sigma_{\beta\beta}^S - \frac{\lambda_S}{2\mu_S(\lambda_S + \mu_S/2)}\sigma_{\alpha\alpha}^S, \quad (2.80\beta)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^S = \frac{1}{2\mu_S}\sigma_{\alpha\beta}^S. \quad (2.80\gamma)$$

Θα εισάγουμε τώρα την έννοια της επιφανειακής ιδιοπαραμόρφωσης που μπορεί να υποστεί η διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, την οποία αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε για να ερμηνεύσουμε τις έννοιες επιφανειακή ένταση και επιφανειακή ενέργεια, που έχουν εισαχθεί στην επιστήμη των υλικών. Σε σχέση με το καμπυλόγραμμα σύστημα (α, β, γ) , ως επιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις ορίζουμε τις ποσότητες $\varepsilon_{\alpha\alpha}^*$, $\varepsilon_{\beta\beta}^*$, $\varepsilon_{\beta\alpha}^*$ και $\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \varepsilon_{\beta\alpha}^*$, που μπορούν να αναπτυχθούν στη μεμβρανική διεπιφάνεια και είναι ελεύθερες τάσεων, όταν απουσιάζουν τα δύο υλικά που είναι συνδεδεμένα. Αν η παρουσία των δύο υλικών εμποδίζει την ανάπτυξη των ιδιοπαραμορφώσεων αυτών, τότε αναπτύσσονται, τόσο στη μεμβράνη όσο και στα συνδεδεμένα υλικά, επιπρόσθετες ελαστικές παραμορφώσεις που συνοδεύονται από ελαστικές τάσεις. Αν συμβολίσουμε με $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S$, $\varepsilon_{\beta\beta}^S$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$ τις ελαστικές αυτές παραμορφώσεις, τότε οι συνολικές παραμορφώσεις στη διεπιφάνεια θα είναι

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{S,t} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^S + \varepsilon_{\alpha\alpha}^*, \quad \varepsilon_{\beta\beta}^{S,t} = \varepsilon_{\beta\beta}^S + \varepsilon_{\beta\beta}^*, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{S,t} = \varepsilon_{\alpha\beta}^S + \varepsilon_{\alpha\beta}^*, \quad (2.81)$$

όπου $\varepsilon_{\alpha\alpha}^S$, $\varepsilon_{\beta\beta}^S$ και $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$ είναι οι ελαστικές παραμορφώσεις που συνδέονται με τις μεμβρανικές τάσεις $\sigma_{\alpha\alpha}^S$, $\sigma_{\beta\beta}^S$, $\sigma_{\alpha\beta}^S$ μέσω των καταστατικών σχέσεων (2.79).

2.5.2 Οι εξισώσεις της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Οι διεπιφανειακοί ελκυστές τάσεων t^M και t^I ως προς το καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων (α, β, γ) γράφονται

$$\mathbf{t}^M = \sigma_{\alpha\alpha}^M \mathbf{e}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^M \mathbf{e}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}^M \mathbf{e}_\gamma, \quad (2.82\alpha)$$

$$\mathbf{t}^I = \sigma_{\alpha\alpha}^I \mathbf{e}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^I \mathbf{e}_\beta + \sigma_{\alpha\gamma}^I \mathbf{e}_\gamma. \quad (2.82\beta)$$

Συνεπώς, από τη σχέση (2.54), προκύπτει

$$q_\alpha^S = t_\alpha^M - t_\alpha^I, \quad q_\beta^S = t_\beta^M - t_\beta^I, \quad q_\gamma^S = t_\gamma^M - t_\gamma^I, \quad (2.83)$$

όπου q_α, q_β και q_γ είναι οι καμπυλόγραμμες συνιστώσες της ασυνέχειας \mathbf{q}^S των διεπιφανειακών τάσεων, δηλαδή

$$\mathbf{q}^S = q_\alpha^S \mathbf{e}_\alpha + q_\beta^S \mathbf{e}_\beta + q_\gamma^S \mathbf{e}_\gamma. \quad (2.84)$$

Με βάση τις σχέσεις (2.83), οι (2.53) παρέχουν

$$\sigma_{\alpha\gamma}^M - \sigma_{\alpha\gamma}^I = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left[\frac{\partial(\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} - \sigma_{\beta\beta}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \right], \quad (2.85\alpha)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}^M - \sigma_{\beta\gamma}^I = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left[\frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\beta\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} \right], \quad (2.85\beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^M - \sigma_{\gamma\gamma}^I = -\frac{\sigma_{\alpha\alpha}^S}{R_\alpha} - \frac{\sigma_{\beta\beta}^S}{R_\beta}. \quad (2.85\gamma)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη γενίκευση των σχέσεων Young-Laplace της ρευστομηχανικής σε στερεές επιφάνειες (Young, 1805; Laplace, 1805). Επιπρόσθετα, οι παρακάτω διεπιφανειακές σχέσεις περιγράφουν τη συνέχεια των μετατοπίσεων της διεπιφάνειας

$$u_\alpha^M = u_\alpha^I = u_\alpha^S, \quad u_\beta^M = u_\beta^I = u_\beta^S, \quad u_\gamma^M = u_\gamma^I = u_\gamma^S. \quad (2.86)$$

Στην περίπτωση της κυλινδρικής ανομοιογένειας με κυκλική διατομή R εισάγεται το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ, x_3) με την επιφάνεια $\rho = R$ να αντιστοιχεί στην κυλινδρική διεπιφάνεια S . Ως προς το σύστημα αυτό, οι εξισώσεις (2.85) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{\rho\rho}^M - \sigma_{\rho\rho}^I = \frac{\sigma_{\theta\theta}^S}{R}, \quad (2.87\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^M - \sigma_{\rho\theta}^I = -\frac{1}{R} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^S}{\partial\theta} - \frac{\partial\sigma_{\theta 3}^S}{\partial x_3}, \quad (2.87\beta)$$

$$\sigma_{\rho 3}^M - \sigma_{\rho 3}^I = -\frac{1}{R} \frac{\partial\sigma_{\theta 3}^S}{\partial\theta} - \frac{\partial\sigma_{33}^S}{\partial x_3}, \quad (2.87\gamma)$$

και

$$u_\rho^M = u_\rho^I = u_\rho^S, \quad u_\theta^M = u_\theta^I = u_\theta^S, \quad u_3^M = u_3^I = u_3^S. \quad (2.88)$$

Επίσης, οι παραμορφώσεις (2.66), ως προς το κυλινδρικό σύστημα γράφονται

$$\varepsilon_{\theta\theta}^S = \frac{u_\rho^S}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta^S}{\partial\theta}, \quad (2.89\alpha)$$

$$\varepsilon_{33}^S = \frac{\partial u_3^S}{\partial x_3}, \quad (2.89\beta)$$

$$2\varepsilon_{\theta 3}^S = \frac{1}{R} \frac{\partial u_3^S}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^S}{\partial x_3}, \quad (2.89\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.79) και (2.89) στις συνθήκες ισορροπίας (2.87), προκύπτει

$$\sigma_{\rho\rho}^M - \sigma_{\rho\rho}^I = \frac{\lambda_S + \mu_S}{R} \left[\frac{u_\rho^S}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta^S}{\partial \theta} \right] + \frac{\lambda_S}{R} \frac{\partial u_3^S}{\partial x_3}, \quad (2.90\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^M - \sigma_{\rho\theta}^I = -\frac{\lambda_S + \mu_S}{R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_\rho^S}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_\theta^S}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_3^S}{\partial \theta \partial x_3} \right] - \mu_S \frac{\partial^2 u_\theta^S}{\partial x_3^2}, \quad (2.90\beta)$$

$$\sigma_{\rho 3}^M - \sigma_{\rho 3}^I = -\frac{\lambda_S}{R} \frac{\partial u_\rho^S}{\partial x_3} - (\lambda_S + \mu_S) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_\theta^S}{\partial \theta \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3^S}{\partial x_3^2} \right] - \frac{\mu_S}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^S}{\partial \theta^2}. \quad (2.90\gamma)$$

Αν οι ελαστικές μετατοπίσεις του συστήματος είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x_3 , τότε οι ελαστικές παραμορφώσεις διασπώνται στη συνεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση και την αντιεπίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση. Στη περίπτωση της συνεπίπεδης παραμόρφωσης, οι διεπιφανειακές εξισώσεις ισορροπίας και οι καταστατικές εξισώσεις της διεπιφάνειας είναι

$$\sigma_{\rho\rho}^M - \sigma_{\rho\rho}^I = \frac{\lambda_S + \mu_S}{R} \left[\frac{u_\rho^S}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta^S}{\partial \theta} \right], \quad (2.91\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^M - \sigma_{\rho\theta}^I = -\frac{\lambda_S + \mu_S}{R} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_\rho^S}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta^S}{\partial \theta^2} \right], \quad (2.91\beta)$$

και

$$\sigma_{\theta\theta}^S = (\lambda_S + \mu_S) \varepsilon_{\theta\theta}^S. \quad (2.92)$$

Στη διεπιφάνεια, επιπρόσθετα, αναπτύσσεται και η τάση σ_{33}^S που δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{33}^S = \lambda_S \varepsilon_{\theta\theta}^S = \frac{\lambda_S}{\lambda_S + \mu_S} \sigma_{\theta\theta}^S. \quad (2.93)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης είναι

$$\sigma_{\rho 3}^M - \sigma_{\rho 3}^I = -\frac{\mu_S}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^S}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta 3}^S = 2\mu_S \varepsilon_{\theta 3}^S. \quad (2.94)$$

2.6 ΜΟΝΤΕΛΑ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

2.6.1 Το μοντέλο της διεπιφάνειας χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας

Στο μοντέλο της ελατηριακής σύνδεσης που συζητήθηκε προηγούμενα, τα μηχανικά χαρακτηριστικά της διεπιφάνειας περιγράφουν το βαθμό της ατελούς μηχανικής σύνδεσης των δύο συνδεδεμένων επιφανειών S_M και S_I . Η ατελής αυτή σύνδεση των δύο επιφανειών συνήθως επιφέρει μία μειωμένη θερμική ικανότητα κατά την αγωγή της θερμικής ροής δια μέσου αυτών. Η θερμική υποβάθμιση της διεπιφάνειας μπορεί να περιγραφεί με μία σχέση μεταξύ της κάθετης συνιστώσας της θερμικής ροής στην διεπιφάνεια S και του θερμοκρασιακού άλματος μεταξύ των δύο συνδεδεμένων επιφανειών ΔT . Η σχέση αυτή έχει

τη γενική μορφή

$$q_\gamma^S = f(\Delta T), \quad (2.95)$$

όπου q_γ είναι η κάθετη συνιστώσα στη διεπιφάνεια S αναφορικά με το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (α, β, γ) που έχει εισαχθεί, και $f(\Delta T)$ είναι μία συγκεκριμένη συνάρτηση με όρισμα τη θερμοκρασιακή διαφορά $\Delta T = T^M - T^I$ που επικρατεί μεταξύ των δύο συνδεδεμένων επιφανειών S^M και S^I . Σε ένα σημείο του σώματος, η θερμοκρασία T εκφράζει τη διακύμανση της θερμοκρασίας από μια ομοιόμορφη θερμοκρασία αναφοράς T_C του σώματος. Για μια μικρή θερμοκρασιακή μεταβολή ΔT , μια συνθήκη που μπορεί να περιγράψει τη θερμική συμπεριφορά του συνεχούς μέσου S έχει την παρακάτω γραμμική μορφή

$$q_\gamma^S = -\mathcal{H}T^S, \quad (2.96)$$

όπου η T^S αντιπροσωπεύει τη θερμοκρασία του συνεχούς μέσου που είναι ίση με τη θερμοκρασιακή διαφορά, δηλαδή

$$T^M - T^I = T^S, \quad q_\gamma^M = q_\gamma^I = q_\gamma^S, \quad (2.97)$$

και \mathcal{H} είναι η διεπιφανειακή σταθερά αγωγιμότητας. Το μοντέλο της ελατηριακής σύνδεσης χαρακτηρίζεται ως *μοντέλο χαμηλής θερμικά αγωγιμότητας*.

2.6.2 Το μοντέλο της υψηλής θερμικά αγωγιμότητας

Στην περίπτωση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, το αμελητέο πάχος της μεμβράνης και η τέλεια επαφή της με τα παρακείμενα υλικά εξασφαλίζουν τη συνέχεια του θερμοκρασιακού πεδίου μεταξύ των υλικών της διεπιφάνειας. Η παρουσία της μεμβράνης μεταξύ των δύο υλικών προκαλεί την απορρόφηση ενός ποσοστού της θερμικής ενέργειας που διέρχεται από τη διεπιφάνεια. Αν η διεπιφάνεια έχει την ικανότητα να απορροφάει σημαντική ποσότητα ενέργειας, τότε η διεπιφάνεια θα χαρακτηρίζεται διεπιφάνεια με *υψηλή θερμική αγωγιμότητα*.

Το ελαστικό σύστημα με τη διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.5, θα υποθέσουμε ότι υφίσταται μια θερμοκρασιακή διακύμανση, της οποίας η θερμική ροή παρέχεται με το διάνυσμα \mathbf{q}^k . Αναφορικά με το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (α, β, γ) , το ποσό της θερμικής ενέργειας που εισέρχεται και εξέρχεται από ένα στοιχειώδες τμήμα της μεμβράνης dS , δίνεται από τις σχέσεις (Σχήμα 2.4),

$$dQ^M = q_\gamma^M dS, \quad dQ^I = q_\gamma^I dS, \quad (2.98)$$

όπου dS είναι το εμβαδό του μεμβρανικού στοιχείου ABCD και q_γ^M, q_γ^I είναι οι κάθετες συνιστώσες της θερμικής ροής που εισέρχεται και εξέρχεται από το μεμβρανικό στοιχείο. Η ποσότητα της θερμικής ενέργειας που απορροφάται από το μεμβρανικό στοιχείο dS είναι

$$dQ_{\text{ABCD}} = (q_\gamma^M - q_\gamma^I) dS = (q_\gamma^M - q_\gamma^I) A_\alpha A_\beta d\alpha d\beta. \quad (2.99)$$

Η ποσότητα αυτή της ενέργειας διαχέεται στη διεπιφάνεια. Η θερμική ενέργεια που εισέρχεται από την πλευρά AB του στοιχείου dS (Σχήμα 2.4) είναι

$$dQ_{\text{AB}} = q_\beta^S ds_\alpha = A_\alpha q_\beta^S d\alpha, \quad (2.100)$$

όπου q_β^S είναι η μεμβρανική ροή, που ορίζεται ως θερμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους. Η θερμική ενέργεια που εξέρχεται από την απέναντι πλευρά DC του στοιχείου είναι

$$dQ_{DC} = (q_\beta^S + dq_\beta^S) ds'_\alpha. \quad (2.101)$$

Η σχέση αυτή, λόγω της (2.49) γίνεται,

$$\begin{aligned} dQ_{DC} &= \left[q_\beta^S + \frac{\partial q_\beta^S}{\partial \beta} d\beta \right] \left[\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta) d\alpha d\beta \right] \\ &\cong A_\alpha q_\beta^S d\alpha + q_\beta^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} d\alpha d\beta + A_\alpha \frac{\partial q_\beta^S}{\partial \beta} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (2.102)$$

από όπου

$$dQ_{DC} = A_\alpha q_\beta^S d\alpha + \frac{\partial A_\alpha q_\beta^S}{\partial \beta} d\alpha d\beta. \quad (2.103)$$

Από τις σχέσεις (2.100) και (2.103) προκύπτει

$$dQ_{DC} - dQ_{AB} \cong \frac{\partial (A_\alpha q_\beta^S)}{\partial \beta} d\alpha d\beta. \quad (2.104)$$

Όμοια, αποκτιέται η σχέση

$$dQ_{BC} - dQ_{AD} \cong \frac{\partial (A_\beta q_\alpha^S)}{\partial \alpha} d\alpha d\beta. \quad (2.105)$$

Από το ισοζύγιο ενέργειας στο στοιχείο dS προκύπτει

$$dQ_{ABCD} + (dQ_{DC} - dQ_{AB}) + (dQ_{BC} - dQ_{AD}) = 0, \quad (2.106)$$

όπου

$$q_\gamma^M - q_\gamma^I = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left[\frac{\partial (A_\beta q_\alpha^S)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A_\alpha q_\beta^S)}{\partial \beta} \right]. \quad (2.107)$$

Οι μεμβρανικές θερμικές ροές q_α^S και q_β^S θα υποτεθεί ότι συνδέονται με τη μεταβολή της θερμοκρασίας T^S της μεμβράνης, με τις σχέσεις

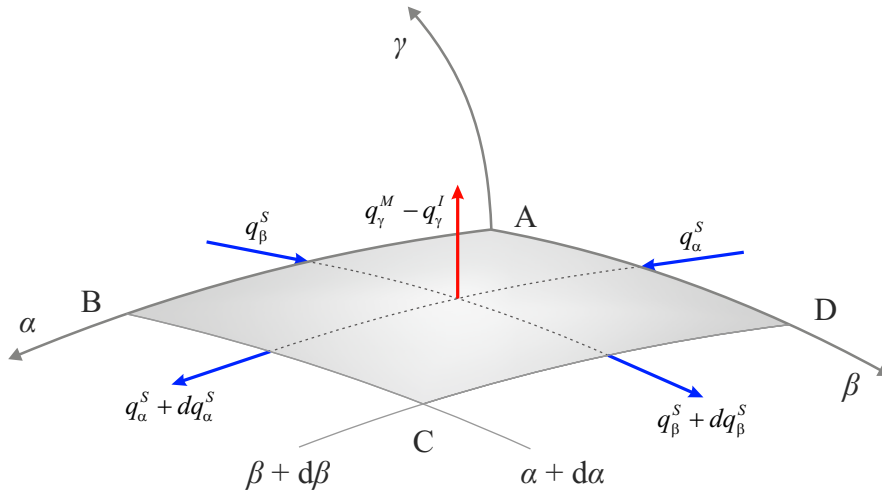
$$q_\alpha^S = -k_S \frac{\partial T^S}{\partial s_\alpha}, \quad q_\beta^S = -k_S \frac{\partial T^S}{\partial s_\beta}, \quad (2.108)$$

όπου k_S είναι ο συντελεστής θερμικής μεμβρανικής αγωγιμότητας (Watt/K). Αντικαθιστώντας τις (2.108) στην (2.107) προκύπτει

$$q_\gamma^M - q_\gamma^I = \frac{k_S}{A_\alpha A_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A_\beta}{A_\alpha} \frac{\partial T^S}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_\alpha}{A_\beta} \frac{\partial T^S}{\partial \beta} \right) \right], \quad \text{πάνω στην } S. \quad (2.109)$$

Επιπρόσθετα, κατά μήκος της διεπιφάνειας θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση,

$$T^M = T^I = T^S, \quad \text{πάνω στην } S, \quad (2.110)$$



Σχήμα 2.4 Η θερμική ροή στη μεμβράνη

που εκφράζει τη συνέχεια της θερμοκρασιακής μεταβολής στη διεπιφάνεια. Αναφορικά με το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ, x_3) , η (2.109) γράφεται

$$q_\rho^M - q_\rho^I = \frac{k_S}{R^2} \frac{\partial^2 T^S}{\partial \theta^2} + k_S \frac{\partial^2 T^S}{\partial x_3^2}. \quad (2.111)$$

Στη διδιάστατη θερμική αγωγιμότητα του συστήματος, όπου η θερμοκρασιακή μεταβολή δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη x_3 , η διεπιφανειακή συνθήκη (2.111) παίρνει τη μορφή

$$q_\rho^M - q_\rho^I = \frac{k_S}{R^2} \frac{\partial^2 T^S}{\partial \theta^2}, \quad T^M = T^I = T^S. \quad (2.112)$$

Κεφάλαιο 3

Η ενεργειακή κατάσταση του συστήματος

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, στα πλαίσια της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων, ορίζονται η ελαστική ενέργεια και η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος μήτρας - ανομοιογένειας, που περιγράφεται στο κεφάλαιο 2.1, όταν σε ένα τμήμα της διεπιφάνειάς του υπάρχει μία μη τέλεια διεπιφάνεια και το σύστημα φορτίζεται είτε από εξωτερικές επιφανειακές δυνάμεις, είτε από ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια. Με βάση τα ενεργειακά θεωρήματα της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων, εξάγονται δύο βασικές σχέσεις που παρέχουν τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος, όταν μία υπάρχουσα μη τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση στο σύστημα επεκτείνεται πάνω στη διεπιφάνεια, ενώ το σώμα είναι φορτισμένο (σχέσεις (3.37) και (3.38)). Από τις σχέσεις αυτές συνάγεται ότι η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας εξαρτάται μόνο από τις διεπιφανειακές ποσότητες των τάσεων και των μετατοπίσεων των εντατικών καταστάσεων πριν και μετά την επέκταση της μη τέλει διεπιφάνειας. Αντίστοιχες σχέσεις για τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας σε ένα φορτισμένο ελαστικό υλικό λόγω επέκτασης προϋπαρχόντων ρωγμών έχουν εξαχθεί από τους Irwin (1958) και Bilby and Eshelby (1968).

Στη συνέχεια, οι γενικές αυτές σχέσεις εξειδικεύονται στην περίπτωση που μια τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματίζεται εξολοκλήρου σε μη τέλεια, ενώ το σύστημα είναι φορτισμένο. Στην περίπτωση της φόρτισης με επιφανειακές δυνάμεις στο σύνορο της μήτρας, δείχνεται ότι, όταν η τέλεια διεπιφάνεια μετασχηματίζεται σε μία διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, τότε η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας στο σύστημα, μπορεί να υπολογισθεί από τις διεπιφανειακές τάσεις του συστήματος με την τέλεια διεπιφάνεια και από το διεπιφανειακό άλμα των μετατοπίσεων με τη δημιουργία της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου. Για την ίδια φόρτιση, όταν η τέλεια διεπιφάνεια του φορτισμένου συστήματος μετασχηματίζεται σε διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, τότε η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος μπορεί να προσδιορισθεί από τις διεπιφανειακές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο σύστημα πριν την εμφάνιση της μη τέλει διεπιφάνειας, και από την ασυνέχεια των διεπιφανειακών ελκυστών που δημιουργείται στο σύστημα με την εμφάνιση της μη τέλει διεπιφάνειας. Για τη φόρτιση του συστήματος με ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια, και για τους δύο τύπους διεπιφανειών που θεωρούνται, δείχνεται ότι η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει στο σύστημα μπορεί να υπολογισθεί από τις ιδιοπαραμορφώσεις και από τη διαφορά τάσεων στην ανομοιογένεια μεταξύ των εντατικών

καταστάσεων του συστήματος πριν και μετά το μετασχηματισμό της διεπιφάνειας. Με δεδομένο ότι η δημιουργία μιας ρωγμής σε ένα φορτισμένο σώμα επιφέρει πάντα μείωση στην ολική δυναμική ενέργεια του σώματος, με βάση τις παραπάνω σχέσεις θα διερευνηθεί αν αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση της δημιουργίας μιας διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου, ειδική περίπτωση της οποίας αποτελεί η ρωγή. Επίσης, με βάση τις σχέσεις αυτές, θα διερευνηθεί τι συμβαίνει με τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος στην περίπτωση του σχηματισμού μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου.

3.2 ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

3.2.1 Το σύστημα ανομοιογένειας - μήτρας με μερική τέλεια διεπιφάνεια

Στην αφόρτιστη κατάσταση, θα υποθέσουμε ότι τα δύο υλικά του διφασικού σώματος είναι συνδεδεμένα με μία μη-τέλεια σύνδεση στο τμήμα S_u της S και με μία τέλεια σύνδεση στο υπόλοιπο τμήμα $S - S_u$. Επιπρόσθετα, θα υποθέσουμε ότι στο σώμα δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις, και ότι δεν υπάρχουν εσωτερικές τάσεις πριν εφαρμοσθούν οι φορτίσεις που συζητιούνται αμέσως παρακάτω. Η παραμόρφωση του σώματος προέρχεται, είτε από ένα ισόρροπο σύστημα συντοριακών επιφανειακών ελκυστών t_i^{ext} που είναι διανεμεμένες στην εξωτερική του επιφάνεια, είτε από ένα μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας που περιγράφεται με τις ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{ij}^T . Λόγω των φορτίσεων αυτών, οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις που αναπτύσσονται στο σώμα ως προς το καρτεσιανό σύστημα αξόνων (x_1, x_2, x_3) θα δηλώνονται με $\epsilon_{ij}^M, u_i^M, \sigma_{ij}^M$, αντίστοιχα, για τη μήτρα και $\epsilon_{ij}^I, u_i^I, \sigma_{ij}^I$, για την ανομοιογένεια. Στη συνέχεια με τους δείκτες M και I θα δηλώνονται ποσότητες της μήτρας και της ανομοιογένειας, ενώ με S ποσότητες της διεπιφάνειας.

Όταν η μη-τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση στο S_u είναι ελατηριακή, με βάση όσα αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι σχέσεις που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των δύο τμημάτων της διεπιφάνειας S είναι

$$u_i^S = u_i^M - u_i^I, \quad t_i^S = t_i^M = t_i^I, \quad \text{πάνω στην} \quad S_u \quad (3.1\alpha)$$

$$u_i^M = u_i^I, \quad t_i^M = t_i^I, \quad \text{πάνω στην} \quad S - S_u, \quad (3.1\beta)$$

όπου $t_i^M = \sigma_{ij}^M n_j$, $t_i^I = \sigma_{ij}^I n_j$. Το n_j είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην S και διευθύνεται από την ανομοιογένεια στη μήτρα. Οι ποσότητες u_i^S και t_i^S περιγράφουν τη μετατόπιση και την επιφανειακή δύναμη που αναπτύσσονται στο διεπιφανειακό τμήμα S_u και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$t_i^S = N_{ij} u_j^S. \quad (3.2)$$

Στη σχέση αυτή, τα N_{ij} αποτελούν τις ελατηριακές παραμέτρους του διεπιφανειακού τμήματος S_u ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) . Οι ποσότητες αυτές αποτελούν ένα συμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης, του οποίου οι ιδιοτιμές είναι οι ελατηριακές παράμετροι $N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$ του καμπυλόγραμμου συστήματος (α, β, γ) που έχει συζητηθεί στην ενότητα 2.4. Το μητρώο $\mathbf{N} = [N_{ij}]$ προκύπτει από το μητρώο $\text{diag}[N_\alpha, N_\beta, N_\gamma]$ χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό που συνδέει το καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3) με το καμπυλόγραμμο σύστημα (α, β, γ) .

Όταν η σύνδεση στο διεπιφανειακό τμήμα S_u είναι μεμβρανικού τύπου, οι συνθήκες που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των δύο τμημάτων της διεπιφάνειας είναι

$$u_i^S = u_i^M = u_i^I, \quad q_i^S = t_i^M - t_i^I, \quad \text{πάνω στην} \quad S_u \quad (3.3\alpha)$$

$$u_i^M = u_i^I, \quad t_i^M = t_i^I, \quad \text{πάνω στην} \quad S - S_u. \quad (3.3\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι ποσότητες q_i^S αποτελούν τις καρτεσιανές συνιστώσες της συνισταμένης των επιφανειακών δυνάμεων (ελκυστών) που επενεργούν πάνω στις δύο πλευρές της S_u και προέρχονται από τη μήτρα και την ανομοιογένεια. Ως προς το καμπυλόγραμμο σύστημα (α, β, γ) , οι συνιστώσες αυτές έχουν τη μορφή

$$q_\alpha^S = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left\{ \frac{\partial(\sigma_{\alpha\alpha}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} - \sigma_{\beta\beta}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} \right\}, \quad (3.4\alpha)$$

$$q_\beta^S = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left\{ \frac{\partial(\sigma_{\alpha\beta}^S A_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\sigma_{\beta\beta}^S A_\alpha)}{\partial\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^S \frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^S \frac{\partial A_\alpha}{\partial\beta} \right\}, \quad (3.4\beta)$$

$$q_\gamma^S = -\frac{\sigma_{\alpha\alpha}^S}{R_1} - \frac{\sigma_{\beta\beta}^S}{R_2}. \quad (3.4\gamma)$$

Οι καρτεσιανές συνιστώσες q_i^S προκύπτουν από τις $q_\alpha^S, q_\beta^S, q_\gamma^S$ χρησιμοποιώντας το γραμμικό μετασχηματισμό που συνδέει τα δύο συστήματα.

3.2.2 Η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος

Όταν το σύνθετο σώμα φορτίζεται παραμένοντας στην ελαστική κατάσταση, ένα μέρος της ενέργειας που εισέρχεται στο σώμα αποθηκεύεται στο διεπιφανειακό τμήμα S_u , ως επιφανειακή ελαστική ενέργεια. Αν η ελαστική παραμόρφωση του σώματος προέρχεται από τους ελκυστές t_i^{ext} που επενεργούν στην εξωτερική του επιφάνεια S_o , σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στο 2.4, η ολική ποσότητα της ελαστικής ενέργειας, που αποθηκεύεται στο σώμα παρέχεται από την εξίσωση

$$E = E^M + E^I + E^S, \quad (3.5)$$

όπου

$$E^M = \frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV, \quad (3.6\alpha)$$

$$E^I = \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV, \quad (3.6\beta)$$

είναι οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και ανομοιογένεια, αντίστοιχα, και

$$E^S = \frac{1}{2} \int_{S_u} (u_i^M - u_i^I) \sigma_{ij}^M n_j dS, \quad (3.7)$$

η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο S_u για διεπιφάνεια ελατηριακού-τύπου και

$$E^S = \frac{1}{2} \int_{S_u} u_i^M (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS, \quad (3.8)$$

η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο S_u για διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου.

Όταν η παραμόρφωση του σώματος προέρχεται από τις επιφανειακές δυνάμεις (ελκυστές) t_i^{ext} που είναι διανεμημένες πάνω στην εξωτερική επιφάνεια S_o , η δυναμική ενέργεια των εξωτερικών αυτών δυνάμεων παρέχεται από τη σχέση

$$\Omega = - \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} u_i^M dS. \quad (3.9)$$

Η ολική δυναμική ενέργεια του σύνθετου σώματος, ή η ολική ενέργεια του σώματος σύμφωνα με την ορολογία του Eshelby, ορίζεται με τη σχέση

$$\Pi = E + \Omega. \quad (3.10)$$

Αν η ελαστική παραμόρφωση του σώματος προέρχεται από ένα μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας που περιγράφεται από τις ιδιοπαραμορφώσεις $\epsilon_{ij}^T = (u_{i,j}^T + u_{j,i}^T)/2$, όπου u_i^T είναι οι ιδιομετατοπίσεις, τότε, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σώμα παρέχεται πάλι από την εξίσωση (3.5), όπου οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και στην ανομοιογένεια παρέχονται από τις (3.6), ενώ η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο S_u παρέχεται από τη σχέση

$$E^S = \frac{1}{2} \int_{S_u} (u_i^M - u_i^I - u_i^T) \sigma_{ij}^M n_j dS, \quad (3.11)$$

για τη διεπιφάνεια ελατηριακού-τύπου, και πάλι από την (3.8) για διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Στην περίπτωση της ιδιοπαραμόρφωσης, δεν ασκούνται εξωτερικές επιφανειακές δυνάμεις στο σώμα, και συνεπώς $\Omega = 0$. Στην περίπτωση αυτή, με βάση την (3.10), η ολική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι

$$\Pi = E. \quad (3.12)$$

Η σχέση (3.12) δείχνει ότι στην περίπτωση του μετασχηματισμού φάσης στην ανομοιογένεια, η ολική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι ίση με την ελαστική του ενέργεια. Όταν απουσιάζουν οι μαζικές δυνάμεις, οι εξισώσεις ισορροπίας του σώματος έχουν τη μορφή $\sigma_{ij,j}^k = 0$ ($k = M$ ή I), και συνεπώς, η ποσότητα $\sigma_{ij}^k \epsilon_{ij}^k$ που υπεισέρχεται στα παραπάνω ολοκληρώματα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sigma_{ij}^k \epsilon_{ij}^k = \sigma_{ij} (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k)/2 = \sigma_{ij}^k u_{i,j}^k = (\sigma_{ij}^k u_i^k)_{,j}. \quad (3.13)$$

Με βάση την (3.13) και το θεώρημα του Gauss, τα ολοκληρώματα όγκου των (3.6) μπορούν να μετασχηματισθούν ως ακολούθως,

$$\frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV = \frac{1}{2} \int_{S_o} u_i^M \sigma_{ij}^M n_j dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} u_i^M \sigma_{ij}^M n_j dS - \frac{1}{2} \int_{S-S_u} u_i^M \sigma_{ij}^M n_j dS, \quad (3.14\alpha)$$

$$\frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV = \frac{1}{2} \int_{S_u} u_i^I \sigma_{ij}^I n_j dS + \frac{1}{2} \int_{S-S_u} u_i^I \sigma_{ij}^I n_j dS. \quad (3.14\beta)$$

Οι εξισώσεις (3.14) ισχύουν και για τις δύο περιπτώσεις φορτίσεων που εξετάζονται. Για την πρώτη περίπτωση, όπου στο σύνορο S_o εφαρμόζονται οι επιφανειακές δυνάμεις t_i^{ext} , θα πρέπει να ισχύει $\sigma_{ij}^M n_j = t_i^{\text{ext}}$ πάνω στην S_o . Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συνθήκες αυτές και, προσθέτοντας κατά μέλη τις (3.14) προκύπτει

$$\frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV + \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV = \frac{1}{2} \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} u_i^M dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} (u_i^M - u_i^I) \sigma_{ij}^M n_j dS, \quad (3.15)$$

για τη διεπιφάνεια ελατηριακού-τύπου για την οποία ισχύει $\sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}^I$ παντού πάνω στην S , και

$$\frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV + \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV = \frac{1}{2} \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} u_i^M dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} u_i^M (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS, \quad (3.16)$$

για διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, για την οποία ισχύει $u_i^M = u_i^I$ παντού πάνω στην S . Η αντικατάσταση της (3.15) στην (3.5) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

$$E = \frac{1}{2} \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} u_i^M dS, \quad (3.17)$$

για την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, όταν το σώμα φορτίζεται με τις επιφανειακές δυνάμεις t_i^{ext} πάνω στο σύνορο S . Συνεπώς, από τις (3.9) και (3.17) συνάγεται

$$\Pi = -E, \quad \Omega = -2E. \quad (3.18)$$

Στη συνέχεια, θα εξαχθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις, όταν η ανομοιογένεια υφίσταται μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται από τις ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{ij}^T . Επειδή, στην εξωτερική επιφάνεια του σώματος S_o δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις, θα ισχύει $t_i^{\text{ext}} = \sigma_{ij}^M n_j = 0$. Συνεπώς, οι (3.14) παρέχουν

$$\frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV + \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV = -\frac{1}{2} \int_{S_u} (u_i^M - u_i^I) \sigma_{ij}^M n_j dS - \frac{1}{2} \int_{S-S_u} (u_i^M - u_i^I) \sigma_{ij}^M n_j dS, \quad (3.19)$$

για τη διεπιφανειακή σύνδεση ελατηριακού-τύπου πάνω στη S_u , και

$$\frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M \epsilon_{ij}^M dV + \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I \epsilon_{ij}^I dV = -\frac{1}{2} \int_{S_u} u_i^M (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS - \frac{1}{2} \int_{S-S_u} u_i^M (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS \quad (3.20)$$

για τη διεπιφανειακή σύνδεση μεμβρανικού τύπου πάνω στην S_u . Η συνέχεια των μετατοπίσεων στο διεπιφανειακό τμήμα $S - S_u$ απαιτεί να ισχύει

$$u_i^M = u_i^I + u_i^T \quad \text{πάνω στην } S - S_u. \quad (3.21)$$

Συνεπώς, οι (3.19) και (3.20), οδηγούν στη σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T \sigma_{ij}^I n_j dS = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij}^I dV. \quad (3.22)$$

Από την (3.10), επειδή $\Omega = 0$, προκύπτει

$$\Pi = E. \quad (3.23)$$

3.2.3 Η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος από επιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις

Στην παρούσα εργασία εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια της επιφανειακής ιδιομετατόπισης που αναπτύσσεται σε ένα διδιάστατο ελαστικό μέσο, όπως είναι η διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Σε μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, ως επιφανειακές ιδιομετατοπίσεις ορίζεται ένα πεδίο μετατοπίσεων u_i^* , που αναπτύσσεται από κάποια αιτία σε ένα τμήμα του μέσου και είναι ελεύθερο τάσεων όταν τα δύο παρακείμενα υλικά είναι απόντα. Οι επιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις μπορούν να προσομοιώσουν την υπάρχουσα ασυμβατότητα ατομικών αποστάσεων στα κρυσταλλικά πλέγματα δύο συνδεδεμένων κρυσταλλικών υλικών, που αποτελούν την πηγή των παραμενουσών επιφανειακών τάσεων, τις δημιουργούμενες ασυμβατότητες των θερμικών παραμορφώσεων μεταξύ ενός λεπτού στρώματος που βρίσκεται μεταξύ δύο υλικών, κλπ.

Αν υποθέσουμε ότι ένα πεδίο ιδιοπαραμορφώσεων u_i^* αναπτυχθεί σε όλη την έκταση της διεπιφάνειας που έχει συμπεριφορά ελαστικής μεμβράνης, τότε η παρουσία των δύο υλικών θα εμποδίσει την ανάπτυξη των ιδιοπαραμορφώσεων αυτών με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν επιπρόσθετες ελαστικές παραμορφώσεις, τόσο στην ελαστική μεμβράνη όσο και στα δύο συνδεδεμένα με αυτή ελαστικά μέσα. Έτσι η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος θα παρέχεται από τη σχέση (3.5), όπου όμως η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια θα παρέχεται από τη σχέση

$$E^S = \frac{1}{2} \int_S (u_i^S - u_i^*) (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS, \quad (3.24)$$

όπου σ_{ij}^k ($k = M$ ή I) είναι οι ελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στα δύο υλικά. Στην παραπάνω σχέση, ο όρος μέσα στην παρένθεση εκφράζει την ελαστική παραμόρφωση που υφίσταται η μεμβράνη. Η ενέργεια των μετατοπίσεων των δύο υλικών και της διεπιφάνειας S επιβάλλει την παρακάτω σχέση πάνω στη διεπιφάνεια

$$u_i^M = u_i^I = u_i^S. \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.24) στην (3.5) προκύπτει η ολική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα στη μορφή

$$E = -\frac{1}{2} \int_S u_i^* (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_j dS. \quad (3.26)$$

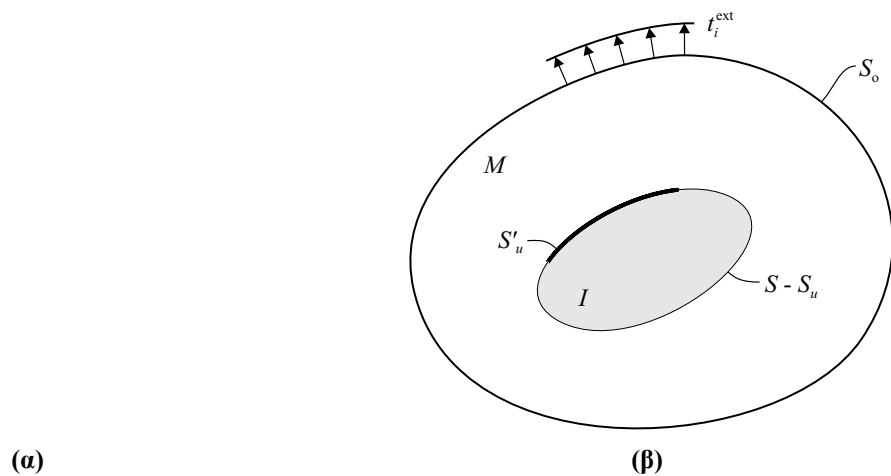
3.3 Η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας στο φορτισμένο σώμα κατά την επέκταση της μη-τέλειας διεπιφάνειας

3.3.1 Φόρτιση με επιφανειακές δυνάμεις στο εξωτερικό σύνορο

Στην συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη μεταβολή που υφίσταται η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος, όταν το διεπιφανειακό τμήμα της μη-τέλειας σύνδεσής του επεκταθεί από το S_u στο S'_u . Θα υποθέσουμε ότι η επέκταση αυτή λαμβάνει χώρα ενώ το σώμα είναι φορτισμένο με τους ελκυστές t_i^{ext} , και ότι οι δυνάμεις αυτές δεν μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της επέκτασης. Αναφορικά με το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , έστω $\sigma_{ij}^k, \epsilon_{ij}^k, u_i^k$ ($k = M$ ή I) ότι είναι τα ελαστικά πεδία της μήτρας και της ανομοιογένειας, όταν η μη-τέλεια διεπιφάνεια καλύπτει το διεπιφανειακό τμήμα S_u , και $\sigma_{ij}^k, \epsilon_{ij}^k, u_i^k$ ότι είναι τα αντίστοιχα πεδία, όταν η μη-τέλεια διεπιφάνεια έχει επεκταθεί στο διεπιφανειακό τμήμα S'_u . Πριν την επέκταση, η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από την πρώτη εξίσωση της (3.18), και μετά την επέκταση από την εξίσωση

$$\Pi' = -E' = -\frac{1}{2} \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} u_i^M dS. \quad (3.27)$$

Συνοπώς, η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος, όταν το διεπιφανειακό τμήμα



Σχήμα 3.1 Το διφασικό σύστημα ανομοιογένειας - μήτρας (α) πριν την επέκταση της μη-τέλειας διεπιφάνειας, και (β) μετά την επέκταση της μη τέλειας διεπιφάνειας

S_u επεκτείνεται από S_u στο S'_u , θα είναι

$$\Delta\Pi = \Pi' - \Pi = -(E' - E) = -\frac{1}{2} \int_{S_o} t_i^{\text{ext}} (u_i'^M - u_i^M) dS. \quad (3.28)$$

Έχοντας υποθέσει ότι οι επιφανειακές δυνάμεις t_i^{ext} παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της επέκτασης, θα ισχύει $\sigma_{ij}^M n_j = \sigma'_{ij} n_j = t_i^{\text{ext}}$ πάνω στο S_o . Συνεπώς, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$\Delta\Pi = -\Delta E = -\frac{1}{2} \int_{S_o} (\sigma_{ij}^M u_i'^M - \sigma'_{ij} u_i^M) n_j dS. \quad (3.29)$$

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε μία κλειστή επιφάνεια S_e , που περιβάλλει και δεν κόβει το διεπιφανειακό τμήμα S'_u , όπως δείχνεται στο Σχήμα 3.2. Με βάση το θεώρημα του Gauss, προκύπτει ότι

$$\int_{V_{o-e}} (\sigma_{ij} \epsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \epsilon_{ij}) dV = \int_{S_o} (\sigma_{ij} u'_i - \sigma'_{ij} u_i) n_j dS + \int_{S_e} (\sigma_{ij} u'_i - \sigma'_{ij} u_i) n_j dS, \quad (3.30)$$

όπου, V_{o-e} είναι ο όγκος του υλικού που βρίσκεται μεταξύ των κλειστών επιφανειών S_e και S_o (Σχήμα 3.2), όπου για απλοποίηση στην παραπάνω σχέση έχουν απαλειφθεί οι εκθέτες M και I ¹. Έστω $S_{e,M}$ και $S_{e,I}$ ότι είναι τα τμήματα της επιφάνειας S_e , που αντιστοιχούν στην μήτρα και στην ανομοιογένεια, αντίστοιχα. Εάν θεωρήσουμε ότι η μήτρα και η ανομοιογένεια αποτελούνται από γραμμικώς ελαστικά υλικά με καταστατικές εξισώσεις $\sigma_{ij}^k = C_{ijlm}^k \epsilon_{lm}^k$ ($k = M$ ή I), τότε $\sigma'^k_{ij} = C_{ijlm}^k \epsilon'^k_{lm}$. Αυτό έχει ως συνέπεια, τον μηδενισμό του ολοκληρώματος όγκου στην (3.30). Συνεπώς, από την σχέση αυτή προκύπτει

$$\int_{S_o} (\sigma_{ij} u'_i - \sigma'_{ij} u_i) n_j dS + \int_{S_e} (\sigma_{ij} u'_i - \sigma'_{ij} u_i) n_j dS = 0. \quad (3.31)$$

Επειδή $S_e = S_{e,M} + S_{e,I}$, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{S_o} (\sigma_{ij}^M u_i'^M - \sigma'_{ij} u_i^M) n_j dS = \int_{S_{e,M}} (\sigma_{ij}^M u_i'^M - \sigma'_{ij} u_i^M) n_j dS + \int_{S_{e,I}} (\sigma_{ij}^I u_i'^I - \sigma'_{ij} u_i^I) n_j dS, \quad (3.32)$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα n_i της καμπύλης S_e διευθύνεται στο υλικό. Υποθέτουμε τώρα ότι η επιφάνεια S_e συρρικνώνεται, έτσι ώστε $S_{e,M} \rightarrow S'_u$ και $S_{e,I} \rightarrow -S'_u$. Τότε, επειδή $\sigma'^M_{ij} n_j = \sigma^M_{ij} n_j = t_i^{\text{ext}}$, πάνω στο S_o το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\int_{S_o} t_i^{\text{ext}} (u_i'^M - u_i^M) dS = \int_{S'_u} (\sigma_{ij}^M \Delta u'_i - \sigma'_{ij} \Delta u_i) n_j dS, \quad (3.33)$$

όπου έχει τεθεί,

$$\Delta u'_i = u_i'^M - u_i^I, \quad \Delta u_i = u_i^M - u_i^I, \quad (3.34)$$

¹ Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss οι τιμές των επιφανειακών ολοκληρωμάτων πάνω στα τμήματα Γ και Γ' αλληλοαναιρούνται.

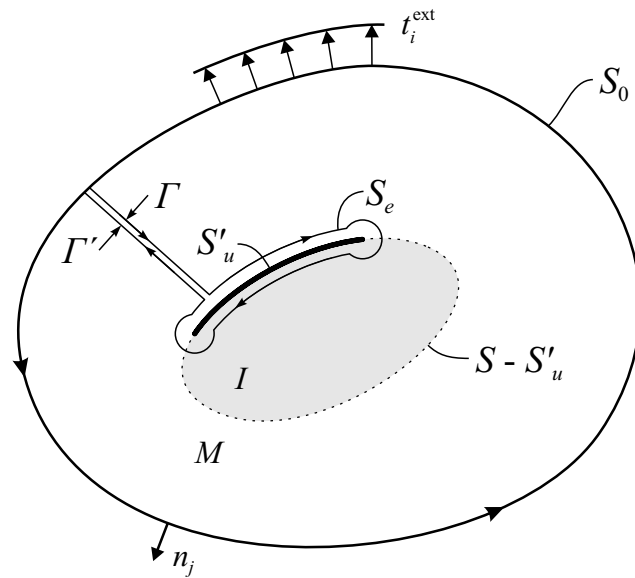
για την ελατηριακού-τύπου διεπιφάνεια. Για διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, στο S'_u , το ολοκλήρωμα παρέχει

$$\int_{S_0} t_i^{\text{ext}} (u_i^M - u_i^M) dS = \int_{S'_u} (\Delta \sigma_{ij} u_i^M - \Delta \sigma'_{ij} u_i^M) n_j dS, \quad (3.35)$$

όπου

$$\Delta \sigma'_{ij} = \sigma'^M_{ij} - \sigma'^I_{ij}, \quad \Delta \sigma_{ij} = \sigma^M_{ij} - \sigma^I_{ij}. \quad (3.36)$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (3.33) και (3.35), η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που



Σχήμα 3.2 Το τμήμα της περιοχής S_e που περιβάλλει το τμήμα S'_u

δίνεται από την (3.28) για την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια στο S'_u , παίρνει τη μορφή

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{2} \int_{S'_u} (\sigma^M_{ij} \Delta u'_i - \sigma'^M_{ij} \Delta u_i) n_j dS, \quad (3.37)$$

και τη μορφή

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{2} \int_{S'_u} (\Delta \sigma_{ij} u_i^M - \Delta \sigma'_{ij} u_i^M) n_j dS, \quad (3.38)$$

για τη μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γενικές και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διερεύνηση πολλών θεμάτων της μηχανικής των σύνθετων υλικών.

3.4 Μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος κατά τον μετασχηματισμό μίας τέλει σε μη-τέλεια διεπιφάνεια

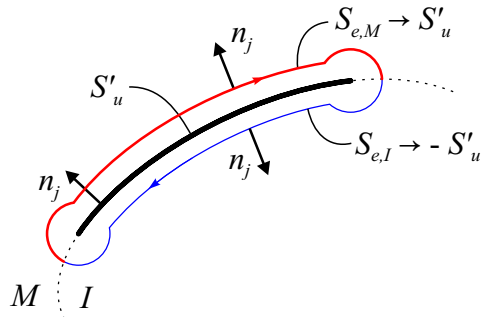
3.4.1 Φόρτιση με επιφανειακές δυνάμεις στο εξωτερικό σύνορο του σώματος

Τα παραπάνω γενικά αποτελέσματα θα εξειδικευθούν τώρα στην περίπτωση που μια τέλεια σύνδεση των δύο υλικών που καλύπτει το σύνολο της διεπιφάνειας μετασχηματίζεται εξολοκλήρου σε μια μη-τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση. Αυτό σημαίνει ότι στις παραπάνω σχέσεις $S_u = 0$ και $S'_u = S$. Τα ελαστικά πεδία του συστήματος με την τέλεια διεπιφάνεια θα τα δηλώνουμε $\sigma_{ij}^{k,p}$, $\epsilon_{ij}^{k,p}$, $u_i^{k,p}$ ($k = M$ ή I). Η παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος με τη μη τέλεια διεπιφάνεια θα θεωρηθεί ότι προέρχεται από αυτήν της τέλει διεπιφάνειας προσθέτοντας μια νέα παραμορφωσιακή κατάσταση που αντιστοιχεί στη διεπιφανειακή μεταβολή. Τα ελαστικά πεδία της επιπρόσθετης αυτής κατάστασης θα δηλώνονται με σ_{ij}^s , ϵ_{ij}^s και u_i^s για την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια και με σ_{ij}^f , ϵ_{ij}^f και u_i^f για τη διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma'_{ij}{}^k = \sigma_{ij}^{k,p+s} = \sigma_{ij}^{k,p} + \sigma_{ij}^{k,s}, \quad \epsilon'_{ij}{}^k = \epsilon_{ij}^{k,p+s} = \epsilon_{ij}^{k,p} + \epsilon_{ij}^{k,s}, \quad (3.39\alpha)$$

$$u_i{}^k = u_i^{k,p+s} = u_i^{k,p} + u_i^{k,s}, \quad (3.39\beta)$$

για τα ελαστικά πεδία του συστήματος με την ελατηριακή διεπιφάνεια. Θέτοντας στην (3.37) $S'_u = S$,



Σχήμα 3.3 Το τμήμα της περιοχής S_e που περιβάλλει το τμήμα S'_u

$\Delta u_i = u_i^{M,p} - u_i^{I,p} = 0$, $\Delta u'_i = u_i^{M,p+s} - u_i^{I,p+s} = (u_i^{M,p} + u_i^{M,s}) - (u_i^{I,p} + u_i^{I,s}) = \Delta u_i^s$, $\sigma_{ij}^M = \sigma_{ij}^{M,p}$, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$\Delta \Pi = -\Delta E = -\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^{M,p} \Delta u_i^{p+s} n_j dS = -\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^{M,p} \Delta u_i^s n_j dS. \quad (3.40)$$

Όμοια, για τα ελαστικά πεδία του σώματος με τη μεμβρανική διεπιφάνεια μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma'_{ij}{}^k = \sigma_{ij}^{k,p+f} = \sigma_{ij}^{k,p} + \sigma_{ij}^{k,f}, \quad \epsilon'_{ij}{}^k = \epsilon_{ij}^{k,p+f} = \epsilon_{ij}^{k,p} + \epsilon_{ij}^{k,f}, \quad (3.41\alpha)$$

$$u_i{}^k = u_i^{k,p+f} = u_i^{k,p} + u_i^{k,f}. \quad (3.41\beta)$$

Θέτοντας στην (3.38) $S'_u = S$, $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{M,p} - \sigma_{ij}^{I,p} = 0$, $\Delta\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^{M,p+f} - \sigma_{ij}^{I,p+f} = (\sigma_{ij}^{M,p} + \sigma_{ij}^{M,f}) - (\sigma_{ij}^{I,p} + \sigma_{ij}^{I,f}) = \Delta\sigma_{ij}^f$, $u'_i = u_i^{M,p+f}$, προκύπτει

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \int_S \Delta\sigma_{ij}^{M,p+f} u_i^{M,p} n_j dS = \frac{1}{2} \int_S \Delta\sigma_{ij}^{M,f} u_i^{M,p} n_j dS. \quad (3.42)$$

3.4.2 Φόρτιση με ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη μεταβολή που υφίσταται η ολική δυναμική ενέργεια του σώματος, όταν μια τέλεια διεπιφάνεια ενός συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας μετασχηματίζεται εξολοκλήρου σε μια μη τέλεια διεπιφάνεια με το σώμα να είναι σε ένταση από ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{ij}^T . Για την περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας η ολική δυναμική ενέργεια του σώματος παρέχεται από τη σχέση

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij}^{I,p} dV = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T \sigma_{ij}^{I,p} n_j dS, \quad (3.43)$$

όπου, όπως προηγουμένα, το $\sigma_{ij}^{I,p}$ δηλώνει τις ελαστικές τάσεις της ανομοιογένειας με τέλεια διεπιφάνεια. Όταν η διεπιφάνεια μετασχηματισθεί εξολοκλήρου σε μία ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, τότε

$$\Pi' = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij}^{I,p+s} dV = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T \sigma_{ij}^{I,p+s} n_j dS. \quad (3.44)$$

Συνεπώς, η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας θα είναι

$$\Delta\Pi = \Pi' - \Pi = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \epsilon_{ij}^T (\sigma_{ij}^{I,p+s} - \sigma_{ij}^{I,p}) dV, \quad (3.45)$$

ή

$$\Delta\Pi = \Pi' - \Pi = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T (\sigma_{ij}^{I,p+s} - \sigma_{ij}^{I,p}) n_j dS. \quad (3.46)$$

Με βάση τις σχέσεις (3.39), οι παραπάνω σχέσεις παρέχουν

$$\Delta\Pi = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij}^{I,s} dV = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T \sigma_{ij}^{I,s} n_j dS, \quad (3.47)$$

για την περίπτωση της ελατηριακής διεπιφάνειας. Με ανάλογο τρόπο αποκτάμε,

$$\Delta\Pi = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \epsilon_{ij}^T \sigma_{ij}^{I,f} dV = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T \sigma_{ij}^{I,f} n_j dS, \quad (3.48)$$

για την περίπτωση της μεμβρανικής διεπιφάνειας.

Κεφάλαιο 4

Κυκλική ανομοιογένεια με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος μήτρας - ανομοιογένειας με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, όταν η ανομοιογένεια έχει κυλινδρική μορφή κυκλικής διατομής και η μήτρα εκτείνεται στο άπειρο σε όλες τις διευθύνσεις. Η ανάλυση του συστήματος γίνεται για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση, που προέρχονται είτε από ομοιόμορφες τάσεις που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο της μήτρας, ή από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις που επενεργούν στην ανομοιογένεια. Ο προσδιορισμός των ελαστικών πεδίων του συστήματος γίνεται εφαρμόζοντας μία νέα μεθοδολογία που στηρίζεται στη θεώρηση της παραμορφωσιακής κατάσταση του συστήματος με την ελατηριακή διεπιφάνεια ως μία διαταραχή της παραμορφωσιακής κατάσταση του συστήματος με τέλεια διεπιφάνεια. Η επιπρόσθετη παραμορφωσιακή κατάσταση του συστήματος (*διαταραγμένη παραμορφωσιακή κατάσταση*) αντιστοιχεί σε μία φόρτιση του συστήματος με μία διεπιφανειακή εξάρμωση τύπου Somigliana, η οποία ικανοποιεί συγκεκριμένες δεσμεύσεις που προέρχονται από τις συνθήκες που περιγράφουν τη διεπιφανειακή ελατηριακή σύνδεση. Έτσι, για μια συγκεκριμένη φόρτιση, το ελαστικό πρόβλημα του συστήματος με ελατηριακή διεπιφάνεια ανάγεται στην επίλυση δύο υπο-προβλημάτων: του ελαστικού προβλήματος με τέλεια διεπιφάνεια που θα δηλώνεται ως *p-πρόβλημα*, και του ελαστικού προβλήματος Somigliana που θα δηλώνεται ως *s-πρόβλημα*. Για τις δύο φορτίσεις που προαναφέρθηκαν, τα προβλήματα αυτά επιλύονται σε κλειστή μορφή, τόσο για συνεπίπεδη όσο και αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος. Στη συνέχεια, με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτώνται προσδιορίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα.

4.2 ΤΟ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ

4.2.1 Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος μήτρας - ανομοιογένειας, όταν η μήτρα εκτείνεται στο άπειρο και η ανομοιογένεια είναι ένα κυλινδρικό σώμα κυκλικής διατομής, του οποίου ο άξονας συμπίπτει με τον άξονα x_3 του συστήματος συντεταγμένων. Τα δύο υλικά, που έχουν λόγο Poisson ν_k και μέτρο ελαστικότητας E_k ($k = M$ για μήτρα και $k = I$ για ανομοιογένεια), συνδέονται κατά μήκος της διεπιφάνειας με ελατηριακού τύπου σύνδεση, της οποίας οι ελατηριακές παράμετροι κατά την ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση θα δηλώνονται με N_ρ και N_θ , αντίστοιχα. Η συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος προκύπτει είτε από μία φόρτιση τάσεων $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty$ στο άπειρο σύνορο της μήτρας, είτε από ένα ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας που περιγράφεται από τις ιδιοπαραμορφώσεις $\epsilon_{11}^T, \epsilon_{22}^T, \epsilon_{12}^T$. Για τον τύπο αυτό σύνδεσης οι διεπιφανειακές συνθήκες που επικρατούν στη διεπιφάνεια είναι

$$[u_\rho] = \frac{n_\rho R}{M} \sigma_{\rho\rho}^M = \frac{n_\rho R}{M} \sigma_{\rho\rho}^I, \quad [u_\rho] = u_\rho^M - u_\rho^I, \quad (4.1\alpha)$$

$$[u_\theta] = \frac{n_\theta R}{M} \sigma_{\rho\theta}^M = \frac{n_\theta R}{M} \sigma_{\rho\theta}^I, \quad [u_\theta] = u_\theta^M - u_\theta^I, \quad (4.1\beta)$$

όπου

$$n_\rho = \frac{M}{N_\rho R}, \quad n_\theta = \frac{M}{N_\theta R}, \quad (4.2)$$

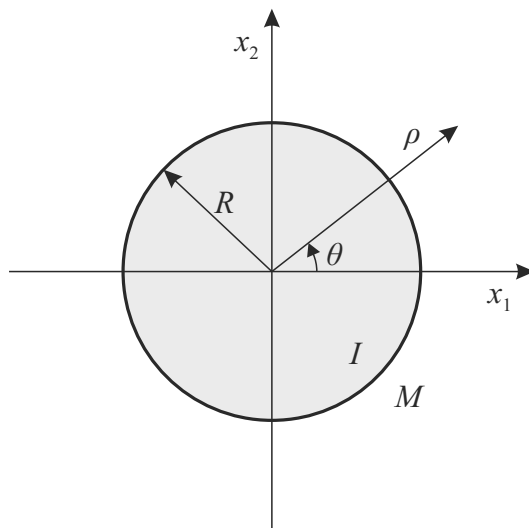
είναι αδιάστατες ελατηριακές σταθερές, και

$$M = \frac{2\mu_M}{1 + \kappa_M}, \quad \kappa_M = 3 - 4\nu_M, \quad \mu_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)}. \quad (4.3)$$

Όταν $N_\theta \rightarrow 0$ και $N_\rho \rightarrow \infty$, η διεπιφάνεια προσεγγίζει τη συμπεριφορά μιας ολισθαίνουσας διεπιφάνειας, ενώ, όταν $N_\theta \rightarrow \infty$ και $N_\rho \rightarrow \infty$, προσεγγίζει τη συμπεριφορά μιας τέλει διεπιφάνειας όταν $N_\theta \rightarrow 0$ και $N_\rho \rightarrow 0$, η ανομοιογένεια διαχωρίζεται πλήρως από τη μήτρα. Στις παραπάνω σχέσεις, το μ_M είναι το μέτρο διάτμησης της μήτρας.

4.2.2 Η διαδικασία λύσης

Οι διεπιφανειακές σχέσεις (4.1) περιγράφουν μία ασθενή σύνδεση των δύο φάσεων του συστήματος, σε σχέση με αυτή που αντιστοιχεί στην τέλεια διεπιφάνεια. Επειδή η αλληλοδιείσδυση των δύο συνδεδεμένων επιφανειών δεν είναι φυσικά αποδεκτή, οι διεπιφανειακές συνθήκες (4.1) ισχύουν μόνο για εφελκυστικές ακτινικές διεπιφανειακές τάσεις. Έτσι, στην παρακάτω ανάλυση, θα υποθέσουμε ότι η φόρτιση και οι ελαστικές σταθερές του συστήματος είναι τέτοιες ώστε η συνθήκη αυτή να ικανοποιείται. Η ασθενής σύνδεση που περιγράφουν οι σχέσεις (4.1) μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από μία τέλεια σύνδεση, όταν προκληθεί ρήξη σε κάποιους από τους διεπιφανειακούς δεσμούς που συνδέουν τα δύο υλικά. Η καταστροφή των δεσμών αυτών μειώνει τη διεπιφανειακή ικανότητα του συστήματος να κρα-



Σχήμα 4.1 Το σύστημα μήτρας - ανομοιογένειας

τάει τις επιφάνειες σε επαφή καθώς αυτό παραμορφώνεται. Συνεπώς, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος με ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, προέρχεται από αυτή της τέλει διεπιφάνειας εφαρμόζοντας μία κατάλληλη διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana \mathcal{U} , που προσομοιώνει το διεπιφανειακό άλμα των μετατοπίσεων $[u_\rho]$, $[u_\theta]$, δηλαδή

$$\mathcal{U}_\rho = [u_\rho], \quad \mathcal{U}_\theta = [u_\theta], \quad (4.4)$$

όπου \mathcal{U}_ρ και \mathcal{U}_θ είναι οι συνιστώσες της \mathcal{U} σε πολικές συντεταγμένες. Έστω $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_\alpha^{k,p}$ ($\alpha, \beta = \rho$ ή θ) ότι είναι τα πεδία των τάσεων και μετατοπίσεων που αναπτύσσονται στο σύστημα με την τέλεια διεπιφάνεια από τη φόρτιση που εφαρμόζεται στο σύστημα, και $\sigma_{\alpha\beta}^{k,s}$, $u_\alpha^{k,s}$ τα αντίστοιχα πεδία από την εξάρμωση Somigliana \mathcal{U} . Τότε, τα πεδία $\sigma_{\alpha\beta}^k$, u_α^k του συστήματος με την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια θα είναι

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = \sigma_{\alpha\beta}^{k,p} + \sigma_{\alpha\beta}^{k,s}, \quad u_\alpha^k = u_\alpha^{k,p} + u_\alpha^{k,s}, \quad (\alpha, \beta = \rho \text{ ή } \theta). \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4) και (4.5) στην (4.1), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\mathcal{U}_\rho = \frac{n_\rho R}{M} (\sigma_{\rho\rho}^{M,p} + \sigma_{\rho\rho}^{M,s}) = \frac{n_\rho R}{M} (\sigma_{\rho\rho}^{I,p} + \sigma_{\rho\rho}^{I,s}), \quad (4.6\alpha)$$

$$\mathcal{U}_\theta = \frac{n_\theta R}{M} (\sigma_{\rho\theta}^{M,p} + \sigma_{\rho\theta}^{M,s}) = \frac{n_\theta R}{M} (\sigma_{\rho\theta}^{I,p} + \sigma_{\rho\theta}^{I,s}), \quad (\alpha, \beta = \rho \text{ ή } \theta), \quad (4.6\beta)$$

όπου στην εξαγωγή τους (4.6) χρησιμοποιήθηκε η διεπιφανειακή συνέχεια των μετατοπίσεων της τέλει σύνδεσης $u_\alpha^{M,p} = u_\alpha^{I,p}$. Συνεπώς, όταν το σύστημα με τη διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου παραμορφώνεται ελαστικά, τότε τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται σε αυτό προσδιορίζονται από την υπέρθεση των πεδίων που αντιστοιχούν σε δύο ξεχωριστές παραμορφωσιακές του καταστάσεις. Η πρώτη παραμορφωσιακή κατάσταση αντιστοιχεί σε τέλεια διεπιφάνεια και προκαλείται από την εξεταζόμενη φόρτιση που επιβάλλεται στο σύστημα. Το ελαστικό πρόβλημα της κατάστασης αυτής θα καλείται p -πρόβλημα και τα σχετικά ελαστικά του πεδία θα δηλώνονται με $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_\alpha^{k,p}$. Η δεύτερη παραμορφωσιακή κατάσταση

προκαλείται από την εφαρμογή μίας εξάρμωσης Somigliana \mathcal{U} κατά μήκος της διεπιφάνειας, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (4.6). Το ελαστικό πρόβλημα της κατάστασης αυτής θα καλείται *s-πρόβλημα*, και τα ελαστικά του πεδία θα δηλώνονται με $\sigma_{\alpha\beta}^{k,s}, u_{\alpha}^{k,s}$. Σημειώνεται ότι το *s-πρόβλημα* είναι ένα συνοριακό πρόβλημα ελαστικότητας νέου τύπου, όπου οι διεπιφανειακές συνθήκες περιγράφονται από συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ του διεπιφανειακού άλματος των μετατοπίσεων και του διεπιφανειακού ελκυστή. Στη συνέχεια, τα *p*- και *s*-προβλήματα, που αντιστοιχούν στις δύο φορτίσεις του συστήματος που θεωρούνται, θα επιλυθούν χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διφασικών δυναμικών (Kattis, 1994; Kattis and Meguid, 1995). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, τα ελαστικά πεδία στο σύστημα προσδιορίζονται πλήρως, όταν είναι γνωστά τα διφασικά δυναμικά του συστήματος. Στα συνεπίπεδα προβλήματα του συστήματος, τα διφασικά δυναμικά είναι δύο ολόμορφες συναρτήσεις, που υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του εξεταζόμενου προβλήματος, ενώ, στα αντιεπίπεδα προβλήματα, το διφασικό δυναμικό είναι μια μόνο ολόμορφη συνάρτηση. Στις γενικές σχέσεις της μεθόδου των διφασικών δυναμικών για κυκλικές διεπιφάνειες, που παρουσιάζονται στο Παράρτημα III.1, έχει συμπεριληφθεί μία διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana που περιγράφεται με μια γενική μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{U} = \mathcal{U}(z, \bar{z})$ για συνεπίπεδα προβλήματα και \mathcal{W} για αντιεπίπεδα προβλήματα. Όταν μία σημειακή φόρτιση εφαρμόζεται στο σύστημα, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος περιγράφονται από την ιδιόμορφη συμπεριφορά των μιγαδικών δυναμικών στο σημείο εφαρμογής της σημειακής φόρτισης, που είναι γνωστή εκ των προτέρων. Οι ομοιόμορφες τάσεις που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο της μήτρας θεωρούνται ως μια ιδιόμορφη φόρτιση που εφαρμόζεται στο σημείο του απείρου. Η ιδιόμορφη συμπεριφορά της φόρτισης αυτής σε όρους των μιγαδικών δυναμικών περιγράφεται από τις σχέσεις (III.9) για το συνεπίπεδο πρόβλημα και από τις σχέσεις (III.20) για το αντιεπίπεδο πρόβλημα. Παρακάτω, τα *s*-προβλήματα των δύο φορτίσεων θα επιλυθούν υποθέτοντας μία πολυωνυμική μορφή των μιγαδικών συναρτήσεων \mathcal{U} , και \mathcal{W} , με αγνώστους πολυωνυμικούς συντελεστές. Για την πολυωνυμική μορφή των συναρτήσεων αυτών θα προσδιορισθούν τα ελαστικά πεδία $\sigma_{\alpha\beta}^{k,s}, u_{\alpha}^{k,s}$ που αναπτύσσονται στο σύστημα. Στη συνέχεια οι πολυωνυμικοί συντελεστές των μιγαδικών αυτών συναρτήσεων θα προσδιορισθούν από την ικανοποίηση του μηδενισμού των τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Τα ελαστικά πεδία $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}, u_{\alpha}^{k,p}$ που υπεισέρχονται στις σχέσεις (4.6) προσδιορίζονται από την επίλυση των αντίστοιχων *p*-προβλημάτων.

4.2.3 Επίλυση των *p*-προβλημάτων

Ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια

Όταν το σύστημα παραμορφώνεται από ένα ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας που περιγράφεται με τις ιδιοπαραμορφώσεις $\epsilon_{11}^T, \epsilon_{22}^T, \epsilon_{12}^T$, η λύση του *p*-προβλήματος ανάγεται σε ένα πρόβλημα διεπιφανειακής εξάρμωσης Somigliana, που ορίζεται με τη σχέση

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(Fz - \bar{G}\bar{z}). \quad (4.7)$$

Πράγματι, αν η ανομοιογένεια υποστεί έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, τότε, εκτός από τις ελαστικές μετατοπίσεις $u_1^M + iu_2^M, u_1^I + iu_2^I$ που θα αναπτυχθούν στη μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα, στην ανομοιογένεια αναπτύσσονται και οι ιδιο-μετατοπίσεις $u_1^T + iu_2^T$ που είναι ελεύθερες-τάσεων. Επειδή οι δύο φάσεις του συστήματος, δηλαδή, η μήτρα και η ανομοιογένεια, είναι τέλεια συν-

δεδεμένες μεταξύ τους κατά μήκος της διεπιφάνειας, θα ισχύει

$$u_1^M + iu_2^M = (u_1^I + iu_2^I) + (u_1^T + iu_2^T). \quad (4.8)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4.11), η παραπάνω σχέση παρέχει

$$(u_1^M + iu_2^M) - (u_1^I + iu_2^I) = \frac{1}{2}(Fz - \bar{G}\bar{z}). \quad (4.9)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι, για το p -πρόβλημα του μετασχηματισμού φάσης στην ανομοιογένεια, οι ελαστικές μετατοπίσεις παρουσιάζουν μία ασυνέχεια $(Fz - \bar{G}\bar{z})/2$ κατά μήκος της διεπιφάνειας. Οι ιδιομετατοπίσεις υπολογίζονται από την ολοκλήρωση των σχέσεων

$$u_{1,1}^T = \epsilon_{11}^T, \quad u_{2,2}^T = \epsilon_{22}^T, \quad u_{1,2}^T + u_{2,1}^T = 2\epsilon_{12}^T, \quad (4.10)$$

από όπου προκύπτει

$$u_1^T + iu_2^T = \frac{1}{2}(Fz - \bar{G}\bar{z}), \quad (4.11)$$

όπου

$$F = \epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T, \quad G = \epsilon_{22}^T - \epsilon_{11}^T + 2i\epsilon_{12}^T. \quad (4.12)$$

Στην εξαγωγή της σχέσης (4.11), οι σταθερές ολοκλήρωσης που εκφράζουν μετακινήσεις στερεού σώματος έχουν παραληφθεί γιατί δε συνεισφέρουν στις τάσεις. Επομένως, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος αυτού μπορούν να υπολογισθούν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διαφοσικών δυναμικών (III.8) για μια διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana που δίνεται από τη σχέση $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = (Fz - \bar{G}\bar{z})/2$. Για το πρόβλημα αυτό, τα διαφοσικά δυναμικά $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$ αναζητούνται σε γραμμική μορφή με άγνωστους συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται απαιτώντας σύγκλιση των $\phi_M(z)$, $\psi_M(z)$ στο άπειρο, που υπαγορεύεται από τις (III.9) λόγω απουσίας εξωτερικών τάσεων στο άπειρο. Από τη διαδικασία αυτή, προκύπτει

$$\phi_0(z) = -\frac{1}{2} \frac{MF}{1 - \Omega} z, \quad \psi_0(z) = -\frac{1}{2} MGz. \quad (4.13)$$

Τα σχετικά ελαστικά πεδία που αντιστοιχούν στη φόρτιση αυτή εξάγονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (I.13) και (III.8). Οι αναλυτικές μορφές των πεδίων αυτών καταχωρούνται στο Παράρτημα IV.1.1.

Ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο σύνορο της μήτρας

Όταν το σύστημα φορτίζεται με ομοιόμορφες τάσεις σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , σ_{12}^∞ στο άπειρο σύνορο της μήτρας, τα μιγαδικά δυναμικά $\phi_M(z)$, $\psi_M(z)$ επιδεικνύουν μία ιδιόμορφη συμπεριφορά στο άπειρο που περιγράφεται από τις (III.9). Τα μιγαδικά δυναμικά $\phi_k(z)$, $\psi_k(z)$ των δύο φάσεων του συστήματος εκφράζονται μέσω των γενικών σχέσεων (III.8) σε όρους διαφοσικών δυναμικών του συστήματος $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$. Για την εξεταζόμενη φόρτιση, ισχύει $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = 0$. Τα διαφοσικά δυναμικά $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$ αναζητούνται σε γραμμικές μορφές, των οποίων οι συντελεστές είναι άγνωστοι. Αντικαθιστώντας τις μορφές αυτές στις (III.8α) και (III.8β), οι άγνωστοι συντελεστές των γραμμικών αυτών μορφών προσδιορίζονται, έτσι ώστε τα αναπτύγματα των $\phi_M(z)$, $\psi_M(z)$ στο άπειρο να ικανοποιούν τη συμπεριφορά που περιγράφεται από τις (III.9). Εφαρμόζοντας τη διαδικασία αυτή προκύπτουν τα διαφοσικά δυναμικά του συστήματος στη

μορφή

$$\phi_0(z) = \frac{T^\infty}{1 - \Omega} z, \quad \psi_0(z) = S^\infty z, \quad (4.14)$$

όπου T^∞ και S^∞ παρέχονται από τη σχέση (III.10). Έχοντας προσδιορίσει τα διφασικά δυναμικά του συστήματος, τα ελαστικά πεδία του προβλήματος αποκτώνται από τις (I.13) και (III.8). Η αναλυτική μορφή των πεδίων αυτών που απαιτείται παρουσιάζεται στο Παράρτημα IV.1.1.

4.2.4 Επίλυση των s-προβλημάτων

Στη συνέχεια, τα s-προβλήματα, που αντιστοιχούν στις δύο φορτίσεις του συστήματος που εξετάζονται, επιλύονται σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα. Για τις δύο αυτές φορτίσεις, η συνάρτηση της διεπιφανειακής εξάρμωσης Somigliana $\mathcal{U}(z, \bar{z})$ θεωρείται ότι έχει τη μορφή

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \lambda R^2 z + \frac{R^2}{2} \bar{A} \bar{z} + \frac{1}{2} z (B z^2 + \bar{B} \bar{z}^2), \quad (4.15)$$

όπου λ είναι μία πραγματική σταθερά και A, B μιγαδικές σταθερές. Τα σχετικά ελαστικά s-προβλήματα επιλύονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διφασικών δυναμικών (III.8). Τα διφασικά δυναμικά $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$ των προβλημάτων αυτών αναζητούνται σε πολυωνυμική μορφή τρίτης τάξης, των οποίων οι πολυωνυμικοί συντελεστές είναι άγνωστοι. Οι πολυωνυμικοί αυτοί συντελεστές υπολογίζονται σε όρους των σταθερών λ, A και B απαιτώντας σύγκλιση των $\phi_M(z)$, $\psi_M(z)$ στο άπειρο. Βρίσκεται ότι

$$\phi_0(z) = -\frac{MR^2 \lambda}{1 - \Omega} z - \frac{MB}{2} z^3, \quad (4.16\alpha)$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2} MR^2 [A + 4B + 3(\Lambda + \Omega)B] z. \quad (4.16\beta)$$

Για να ολοκληρωθεί η επίλυση του προβλήματος, προσδιορίζονται οι πλήρεις εκφράσεις των τάσεων και παραμορφώσεων σε όρους των σταθερών λ, A, B μέσω των (I.13) και (III.8) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.2. Για τον προσδιορισμό των σταθερών λ, A, B , υπολογίζονται πρώτα οι διεπιφανειακές πολικές συνιστώσες της \mathcal{U} , που δίνεται από την (4.15), χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathcal{U}_\rho + i\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta} \mathcal{U}$, για $\rho = R$. Οι συνιστώσες αυτές βρίσκονται στη μορφή

$$\mathcal{U}_\rho = \lambda R^3 + \frac{R^3}{2} \left(\frac{A}{2} + B \right) e^{2i\theta} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{\bar{A}}{2} + \bar{B} \right) e^{-2i\theta}, \quad (4.17\alpha)$$

$$\mathcal{U}_\theta = \frac{i}{4} R^3 (A e^{2i\theta} - \bar{A} e^{-2i\theta}). \quad (4.17\beta)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\rho\rho}^{M,s} (= \sigma_{\rho\rho}^{I,s})$, $\sigma_{\rho\theta}^{M,s} (= \sigma_{\rho\theta}^{I,s})$ που υπεισέρχονται στις (4.6) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (IV.33) και (IV.34) θέτοντας $\rho = R$. Για το μετασχηματισμό φάσης, οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\rho\rho}^{M,p} (= \sigma_{\rho\rho}^{I,p})$, $\sigma_{\rho\theta}^{M,p} (= \sigma_{\rho\theta}^{I,p})$ των (4.6) προσδιορίζονται από τις (IV.1) και (IV.2) θέτοντας $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω διεπιφανειακές ποσότητες στις (4.6) και εξισώνοντας τους σταθερούς όρους και του συντελεστές των $e^{2i\theta}$, $e^{-2i\theta}$ των δύο πλευρών των εξισώσεων αυτών, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων που έχει άγνωστες τις ποσότητες λ, A και

B. Επιλύοντας το σύστημα αυτό, βρίσκεται ότι

$$\lambda = -\frac{n_\rho(1+\Lambda)}{2n_\rho(1+\Lambda) + (1-\Omega)} \frac{F}{R^2} \quad (4.18\alpha)$$

$$A = \frac{2n_\theta(1+\Lambda) + 6n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2}{2(1+\Lambda+\Omega) + (n_\rho+n_\theta)(1+\Lambda)(4+3\Lambda+3\Omega) + 6n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2} \frac{G}{R^2}, \quad (4.18\beta)$$

$$B = \frac{(n_\rho - n_\theta)(1+\Lambda)}{2(1+\Lambda+\Omega) + (n_\rho+n_\theta)(1+\Lambda)(4+3\Lambda+3\Omega) + 6n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2} \frac{G}{R^2}, \quad (4.18\gamma)$$

όπου οι ποσότητες F και G παρέχονται από τη σχέση (4.12). Για τη φόρτιση του συστήματος με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, οι συντελεστές λ , A και B προσδιορίζονται ακολουθώντας μία όμοια διαδικασία. Βρίσκεται ότι

$$\lambda = \frac{2n_\rho(1+\Lambda)}{2n_\rho(1+\Lambda) + (1-\Omega)} \frac{T^\infty}{MR^2}, \quad (4.19\alpha)$$

$$A = -\frac{4n_\theta(1+\Lambda) + 12n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2}{2(1+\Lambda+\Omega) + (n_\rho+n_\theta)(1+\Lambda)(4+3\Lambda+3\Omega) + 6n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2} \frac{S^\infty}{MR^2}, \quad (4.19\beta)$$

$$B = -\frac{2(n_\rho - n_\theta)(1+\Lambda)}{2(1+\Lambda+\Omega) + (n_\rho+n_\theta)(1+\Lambda)(4+3\Lambda+3\Omega) + 6n_\rho n_\theta(1+\Lambda)^2} \frac{S^\infty}{MR^2}, \quad (4.19\gamma)$$

όπου οι ποσότητες T^∞ και S^∞ παρέχονται από τις (III.10).

4.2.5 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με τέλεια διεπιφάνεια

Όταν η ανομοιογένεια υφίσταται ένα ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται με τις ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{11}^T , ϵ_{22}^T , ϵ_{12}^T , τότε η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα με τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E^p &= -\frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\epsilon_{\rho\rho}^T \sigma_{\rho\rho}^{I,p} + \epsilon_{\theta\theta}^T \sigma_{\theta\theta}^{I,p} + 2\epsilon_{\rho\theta}^T \sigma_{\rho\theta}^{I,p}) \rho d\rho d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^T \sigma_{\rho\rho}^{I,p} + u_\theta^T \sigma_{\rho\theta}^{I,p}) R d\theta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Στη σχέση αυτή, που αποτελεί τη 2D μορφή της (3.22) σε πολικές συντεταγμένες ρ , θ , οι ποσότητες $\epsilon_{\rho\rho}^T$, $\epsilon_{\rho\theta}^T$, $\epsilon_{\theta\theta}^T$ και οι u_ρ^T , u_θ^T είναι οι ιδιοπαραμορφώσεις και οι ιδιομετατοπίσεις σε πολική μορφή, που προσδιορίζονται από τις αντίστοιχες καρτεσιανές συνιστώσες με τις σχέσεις

$$\epsilon_{\rho\rho}^T + \epsilon_{\theta\theta}^T = \epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T = F \quad (4.21\alpha)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^T - \epsilon_{\rho\rho}^T + 2i\epsilon_{\rho\theta}^T = e^{i\theta}(\epsilon_{22}^T - \epsilon_{11}^T + 2i\epsilon_{12}^T) = e^{i\theta}G \quad (4.21\beta)$$

$$u_\rho^T + iu_\theta^T = e^{-i\theta}(u_1^T + iu_2^T) \quad (4.21\gamma)$$

Οι ελαστικές ενέργειες στη μήτρα και την ανομοιογένεια παρέχονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$E^{M,p} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{M,p} \sigma_{\rho\rho}^{M,p} + u_\theta^{M,p} \sigma_{\rho\theta}^{M,p}) R d\theta, \quad (4.22\alpha)$$

$$E^{I,p} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{I,p} \sigma_{\rho\rho}^{I,p} + u_\theta^{I,p} \sigma_{\rho\theta}^{I,p}) R d\theta, \quad (4.22\beta)$$

όπου $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_\alpha^{k,p}$ είναι οι συνιστώσες των διεπιφανειακών τάσεων και μετατοπίσεων αντίστοιχα του p -προβλήματος που έχουν υπολογισθεί στο Παράρτημα IV.1. Θέτοντας $\rho = R$ στις διεπιφανειακές αυτές ποσότητες και αντικαθίστανται στις (4.23α) και (4.22), προκύπτει μετά την ολοκλήρωση, προκύπτει

$$E^p = \frac{\pi R^2}{2} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} F^2 + \frac{\pi R^2}{4} M(1 + \Pi) |G|^2, \quad (4.23\alpha)$$

$$E^{M,p} = \frac{\pi R^2}{2\mu_M} \left(M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 F^2 + \frac{\pi R^2}{8} \frac{\kappa_M}{\mu_M} M^2 (1 + \Pi)^2 |G|^2, \quad (4.23\beta)$$

$$E^{I,p} = \pi R^2 \frac{\kappa_I - 1}{4\mu_I} \left(M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 F^2 + \frac{\pi R^2}{8\mu_I} M^2 (1 + \Pi)^2 |G|^2. \quad (4.23\gamma)$$

Στην ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = 3 - 4\nu$, ή $\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), οι σχέσεις αυτές γίνονται

$$E^p = \frac{\pi R^2 \mu}{8(1 - \nu)} [2(\epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T)^2 + (\epsilon_{11}^T - \epsilon_{22}^T)^2 + 4(\epsilon_{12}^T)^2], \quad (4.24\alpha)$$

$$E^{M,p} = \frac{\pi R^2 \mu}{32(1 - \nu)^2} [4(\epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T)^2 + (3 - 4\nu)(\epsilon_{11}^T - \epsilon_{22}^T)^2 + 4(3 - 4\nu)(\epsilon_{12}^T)^2], \quad (4.24\beta)$$

$$E^{I,p} = \frac{\pi R^2 \mu}{32(1 - \nu)^2} [4(1 - 2\nu)(\epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T)^2 + (\epsilon_{11}^T - \epsilon_{22}^T)^2 + 4(\epsilon_{12}^T)^2]. \quad (4.24\gamma)$$

Για $\epsilon_{12}^T = 0$, οι παραπάνω εξισώσεις, συμπίπτουν με αυτές που αποκτήθηκαν από τους Lubarda and Markenscoff (1999). Όταν το σύστημα φορτίζεται με ομοιόμορφες τάσεις σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , σ_{12}^∞ στο άπειρο, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα, και συνεπώς στο σύστημα, είναι προφανώς άπειρη. Όμως, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια είναι πεπερασμένη και παρέχεται από τη σχέση

$$E^{I,p} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{I,p} \sigma_{\rho\rho}^{I,p} + u_\theta^{I,p} \sigma_{\rho\theta}^{I,p}) R d\theta, \quad (4.25)$$

όπου, $\sigma_{\alpha\beta}^{I,p}$, $u_\alpha^{I,p}$ είναι οι συνιστώσες των διεπιφανειακών τάσεων και μετατοπίσεων, αντίστοιχα, που υπολογίζονται από τις (IV.14), (IV.15) και (IV.19), (IV.20) για $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις ποσότητες

αυτές στην (4.25) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$E^{I,p} = \pi R^2 \frac{\kappa_I - 1}{\mu_I} \left(\frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 (T^\infty)^2 + \pi R^2 \frac{1}{2\mu_I} (1 + \Pi)^2 |S^\infty|^2. \quad (4.26)$$

Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = 3 - 4\nu$, ή $\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), η εξίσωση (4.26) απλοποιείται στην

$$E^{I,p} = \pi R^2 \frac{\kappa - 1}{\mu} (T^\infty)^2 + \pi R^2 \frac{1}{2\mu} |S^\infty|^2. \quad (4.27)$$

Αυτή η σχέση συμφωνεί με αυτή που αποκτήθηκε από τους Lubarda and Markenscoff (1999).

4.2.6 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου

Όταν το διφασικό σύστημα έχει διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου και η ανομοιογένεια υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα προσδιορίζεται από τη σχέση

$$E^{\text{weak}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^T \sigma_{\rho\rho}^{I,p+s} + u_\theta^T \sigma_{\rho\theta}^{I,p+s}) R d\theta, \quad (4.28)$$

όπου ο άνω δείκτης ‘weak’ έχει εισαχθεί για να περιγράψει την υποβαθμισμένη συμπεριφορά της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου σε σχέση με την τέλεια διεπιφάνεια. Η εξίσωση αυτή είναι η 2D μορφή της (3.22) γραμμένη σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ). Οι ελαστικές ενέργειες στη μήτρα και στην ανομοιογένεια δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$E^{M,\text{weak}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{M,p+s} \sigma_{\rho\rho}^{M,p+s} + u_\theta^{M,p+s} \sigma_{\rho\theta}^{M,p+s}) R d\theta, \quad (4.29\alpha)$$

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{I,p+s} \sigma_{\rho\rho}^{I,p+s} + u_\theta^{I,p+s} \sigma_{\rho\theta}^{I,p+s}) R d\theta. \quad (4.29\beta)$$

Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια παρέχεται από τη σχέση

$$E^S = E^{\text{weak}} - E^{M,\text{weak}} - E^{I,\text{weak}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^s \sigma_{\rho\rho}^{M,p+s} + u_\theta^s \sigma_{\rho\theta}^{M,p+s}) R d\theta. \quad (4.30)$$

Στις (4.28) και (4.29), έχει τεθεί

$$\sigma_{\alpha\beta}^{k,p+s} = \sigma_{\alpha\beta}^k = \sigma_{\alpha\beta}^{k,p} + \sigma_{\alpha\beta}^{k,s}, \quad u_\alpha^{k,p+s} = u_\alpha^k = u_\alpha^{k,p} + u_\alpha^{k,s}, \quad (4.31)$$

όπου τα διεπιφανειακά πεδία $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_\alpha^{k,p}$ και $\sigma_{\alpha\beta}^{k,s}$, $u_\alpha^{k,s}$ προσδιορίζονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.1 και IV.2.1 για $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις διεπιφανειακές

αυτές ποσότητες στις (4.28)-(4.30) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$E^{\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{2} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} F^2 f_1^t + \frac{\pi R^2}{4} M (1 + \Pi) |G|^2 f_2^t, \quad (4.32\alpha)$$

$$E^{M,\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{2\mu_M} \left(M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 F^2 f_1^M + \frac{\pi R^2}{8} \frac{\kappa_M}{\mu_M} M^2 (1 + \Pi)^2 |G|^2 f_2^M, \quad (4.32\beta)$$

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{4} \frac{\kappa_I - 1}{\mu_I} \left(M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 F^2 f_1^I + \frac{\pi R^2}{8} \frac{1}{\mu_I} M^2 (1 + \Pi)^2 |G|^2 f_2^I, \quad (4.32\gamma)$$

$$E^S = a_I (1 - a_I) \frac{\pi R^2}{2} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} F^2 + \left(a_{II} (1 - a_{II}) - \frac{3a_{III}^2}{1 + \Lambda + \Omega} \right) \frac{\pi R^2}{4} M (1 + \Pi) |G|^2, \quad (4.32\delta)$$

όπου έχουν εισαχθεί οι συντελεστές

$$f_1^t = a_I, \quad f_2^t = a_{II}, \quad (4.33\alpha)$$

$$f_1^M = a_I^2, \quad f_2^M = a_{II}^2 + \frac{3}{\kappa_M} a_{III}^2, \quad (4.33\beta)$$

$$f_1^I = a_I^2, \quad f_2^I = a_{II}^2 + 3\kappa_I a_{III}^2, \quad (4.33\gamma)$$

και

$$a_I = \frac{1 - \Omega}{2n_\rho(1 + \Lambda) + (1 - \Omega)}, \quad (4.34\alpha)$$

$$a_{II} = \frac{2 + 3(n_\rho + n_\theta)(1 + \Lambda)}{2 + (n_\rho + n_\theta)(4 + \Pi + 3\Lambda) + 6n_\rho n_\theta(1 + \Lambda)(1 + \Pi)}, \quad (4.34\beta)$$

$$a_{III} = \frac{(n_\rho - n_\theta)(1 + \Lambda)}{2 + (n_\rho + n_\theta)(4 + \Pi + 3\Lambda) + 6n_\rho n_\theta(1 + \Lambda)(1 + \Pi)}. \quad (4.34\gamma)$$

Ο συντελεστής f_1^t που έχει εισαχθεί στην (4.32α) ορίζεται ως ο λόγος της ελαστικής ενέργειας διόγκωσης με ελατηριακή διεπιφάνεια προς την ελαστική ενέργεια διόγκωσης με τέλεια διεπιφάνεια. Ο συντελεστής f_2^t αποτελεί τον αντίστοιχο λόγο των στροφικών ελαστικών ενεργειών. Τα ζεύγη των συντελεστών f_1^M , f_2^M και f_1^I , f_2^I ορίζονται όμοια για την ενέργεια διόγκωσης και τη στροφική ενέργεια, που αποθηκεύονται στη μήτρα και την ανομοιογένεια. Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = 3 - 4\nu$, ή $\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), οι εξισώσεις (4.32) απλοποιούνται στη μορφή

$$E^{\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{2} M F^2 f_1^t + \frac{\pi R^2}{4} M |G|^2 f_2^t, \quad (4.35\alpha)$$

$$E^{M,\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{2\mu_M} M F^2 f_1^M + \frac{\pi R^2}{8} \frac{\kappa}{\mu} M^2 |G|^2 f_2^M, \quad (4.35\beta)$$

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{\pi R^2}{4} \frac{\kappa - 1}{\mu} M F^2 f_1^I + \frac{\pi R^2}{8} \frac{1}{\mu} M^2 |G|^2 f_2^I, \quad (4.35\gamma)$$

$$E^S = a_I(1 - a_I) \frac{\pi R^2}{2} M F^2 + a_{II}(1 - 4a_{II}) \frac{\pi R^2}{4} M |G|^2, \quad (4.35\delta)$$

όπου

$$a_I = \frac{1}{2n_\rho + 1} \quad (4.36\alpha)$$

$$a_{II} = \frac{2 + 3n_\rho}{2 + 4(n_\rho + n_\theta) + 6n_\rho n_\theta}, \quad (4.36\beta)$$

$$a_{III} = \frac{n_\rho - n_\theta}{2 + 4(n_\rho + n_\theta) + 6n_\rho n_\theta}. \quad (4.36\gamma)$$

Για το εγκλώβισμα με ολισθαίνουσα διεπιφάνεια ($n_\rho = 0$, $n_\theta \cong \infty$), οι εξισώσεις (4.35) παίρνουν τη μορφή

$$E^{\text{weak}} = \frac{\pi R^2 \mu}{4(1 - \nu)} F^2 + \frac{3\pi R^2 \mu}{32(1 - \nu)} |G|^2, \quad (4.37\alpha)$$

$$E^{M,\text{weak}} = \frac{\pi R^2 \mu}{8(1 - \nu)^2} F^2 + \frac{3\pi R^2 \mu}{256(1 - \nu)^2} (5 - 6\nu) |G|^2, \quad (4.37\beta)$$

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{\pi R^2 \mu}{8(1 - \nu)^2} (1 - 2\nu) F^2 + \frac{3\pi R^2 \mu}{256(1 - \nu)^2} (3 - 2\nu) |G|^2, \quad (4.37\gamma)$$

$$E^S = 0. \quad (4.37\delta)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις, για $\epsilon_{12}^T = 0$, ανάγονται σε αυτές που αποκτήθηκαν από τους Lubarda and Markenscoff (1999).

Για τη φόρτιση με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, η ολική ενέργεια στη μήτρα, και συνεπώς, η ολική ενέργεια στο σύστημα είναι άπειρη. Ωστόσο, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια και τη διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου είναι πεπερασμένη και μπορεί να προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\rho}^{I,p+s} u_\rho^{I,p+s} + \sigma_{\rho\theta}^{I,p+s} u_\theta^{I,p+s}) R d\theta, \quad (4.38\alpha)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\rho}^{I,p+s} \mathcal{U}_\rho^s + \sigma_{\rho\theta}^{I,p+s} \mathcal{U}_\theta^s) R d\theta. \quad (4.38\beta)$$

Στις εξισώσεις αυτές, οι $\sigma_{\alpha\beta}^{I,p+s}$ και $u_{\alpha}^{I,p+s}$ δίνονται από τις (4.31) και οι $\mathcal{U}_{\rho}^s, \mathcal{U}_{\theta}^s$ από τις (4.17). Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στις (4.38), προκύπτει

$$E^{I,\text{weak}} = \pi R^2 \frac{\kappa_I - 1}{\mu_I} \left(\frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 (T^{\infty})^2 f_1^I + \frac{\pi R^2}{2} \frac{1}{\mu_I} (1 + \Pi)^2 |S^{\infty}|^2 f_2^I, \quad (4.39\alpha)$$

$$E^S = a_I(1 - a_I) \frac{2\pi R^2}{M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} (T^{\infty})^2 + \left[a_{II}(1 - a_{II}) - \frac{3a_{III}^2}{1 + \Lambda + \Omega} \right] \frac{\pi R^2}{M} (1 + \Pi) |S^{\infty}|^2. \quad (4.39\beta)$$

Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = 3 - 4\nu$, ή $\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), οι εξισώσεις (4.39) παίρνουν τη μορφή

$$E^{I,\text{weak}} = \pi R^2 \frac{\kappa - 1}{\mu} (T^{\infty})^2 f_1^I + \frac{\pi R^2}{2} \frac{1}{\mu} |S^{\infty}|^2 f_2^I, \quad (4.40\alpha)$$

$$E^S = a_I(1 - a_I) \frac{2\pi R^2}{M} (T^{\infty})^2 + [a_{II}(1 - a_{II}) - 3a_{II}^2] \frac{\pi R^2}{M} |S^{\infty}|^2. \quad (4.40\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα f_1^I, f_2^I και a_I, a_{II} και a_{III} παρέχονται από τις (4.33γ) και (4.34), αντίστοιχα.

4.2.7 Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος

Θα υπολογισθεί τώρα η μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος, εάν η τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος μετασχηματισθεί σε μία διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, ενώ το σύστημα είναι φορτισμένο. Αν η παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης στην ανομοιογένεια, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας παρέχεται από τη σχέση

$$\Delta\Pi = \Delta E = E^{\text{weak}} - E^p. \quad (4.41)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (4.23α) και (4.32α), η (4.41) γίνεται

$$\Delta\Pi = \Delta E = -\frac{\pi R^2}{2} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} F^2 (1 - f_I^t) - \frac{\pi R^2}{4} M (1 + \Pi) |G|^2 (1 - f_{II}^t). \quad (4.42)$$

Αν το σύστημα φορτιστεί με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\Pi = -\Delta E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\rho}^{I,p} \Delta u_{\rho}^s + \sigma_{\rho\theta}^{I,p} \Delta u_{\theta}^s) R d\theta. \quad (4.43)$$

Η (4.43) είναι η 2D μορφή της (3.37) σε πολικές συντεταγμένες ρ και θ . Στην (4.43) οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\alpha\beta}^{I,p}$ δίνονται από τις (IV.14) και (IV.15) για $\rho = R$. Στη σχέση αυτή, είναι $\Delta u_{\rho}^s = \mathcal{U}_{\rho}$, $\Delta u_{\theta}^s = \mathcal{U}_{\theta}$, όπου οι ποσότητες \mathcal{U}_{ρ} και \mathcal{U}_{θ} παρέχονται από τις (4.17). Αντικαθιστώντας τις διεπιφανειακές αυτές

ποσότητες στην (4.43), βρίσκεται ότι

$$\Delta\Pi = -\Delta E = -\frac{2\pi R^2}{M} \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} (T^\infty)^2 (1-f_I^t) - \frac{\pi R^2}{M} (1+\Pi) |S^\infty|^2 (1-f_{II}^t). \quad (4.44)$$

Η ειδική περίπτωση του ασύνδετου εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = \kappa$ και $n_\rho, n_\theta \rightarrow \infty$), αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η μήτρα είναι αδυνατισμένη με μία κυκλική οπή. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η (4.44) παρέχει

$$\Delta\Pi = -\Delta E = -\frac{\pi R^2(1+\kappa)}{16\mu} [(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)^2 + 2(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)^2 + 8(\sigma_{12}^\infty)^2]. \quad (4.45)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σε συμφωνία με αυτό που αποκτήθηκε από τον Griffith (1924) για μία ελλειπτική οπή, στην ειδική περίπτωση της κυκλικής οπής. Αξίζει να σημειωθεί ότι και για τις δύο φορτίσεις ισχύει $\Delta\Pi < 0$.

4.3 ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ

4.3.1 Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος

Το ελαστικό σύστημα που δείχνεται στο Σχήμα 4.1 υφίσταται μία αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση που προέρχεται είτε από ομοιόμορφες τάσεις $\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty$ που εφαρμόζονται στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας, είτε από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις $\epsilon_{31}^T, \epsilon_{32}^T$ που εισάγονται στην ανομοιογένεια. Το σύστημα αυτό θα αναλυθεί για μία ελατηριακή σύνδεση των δύο υλικών που περιγράφεται με τις σχέσεις

$$u_3^M - u_3^I = \frac{1}{N_3} \sigma_{3\rho}^M = \frac{1}{N_3} \sigma_{3\rho}^I, \quad \text{πάνω στην } S, \quad (4.46)$$

όπου $\sigma_{3\rho}^M, \sigma_{3\rho}^I$ είναι οι συντελεστές των τάσεων σε σχέση με τις πολικές συντεταγμένες ρ και θ .

Η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος θα προσδιορισθεί ακολουθώντας την αντίστοιχη διαδικασία που περιγράφηκε στην συνεπίπεδη παραμόρφωση. Με βάση τη διαδικασία αυτή, τα ελαστικά πεδία του συστήματος με ελατηριακή διεπιφάνεια θα προσδιορισθούν αθροίζοντας τα ελαστικά πεδία δύο διαφορετικών ελαστικών παραμορφώσεων του συστήματος. Η πρώτη παραμόρφωση αντιστοιχεί σε τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος και στη φόρτιση που θεωρείται. Από την επίλυση του ελαστικού προβλήματος της παραμόρφωσης αυτής, που αποτελεί το p -πρόβλημα του συστήματος, θα προσδιορισθούν τα ελαστικά πεδία $\sigma_{3\alpha}^{k,p}, u_3^{k,p}$ ($k = M$ ή I και $\alpha = \rho$ ή θ). Η δεύτερη παραμόρφωση του συστήματος παράγεται από μία διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana, της οποίας η ασυνέχεια $\mathcal{W}(z, \bar{z})$ προσομοιώνει το διεπιφανειακό άλμα των μετατοπίσεων $u_3^M - u_3^I$ που εμφανίζεται στην (4.46). Από την επίλυση του ελαστικού προβλήματος της παραμόρφωσης αυτής, που αποτελεί το s -πρόβλημα, θα προσδιορισθούν τα ελαστικά του πεδία $\sigma_{3\alpha}^{k,s}, u_3^{k,s}$ ($k = M$ ή I). Τα ελαστικά πεδία του συστήματος $\sigma_{3\alpha}^{k,p+s}, u_3^{k,p+s}$ θα παρέχονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{3\alpha}^{k,p+s} = \sigma_{3\alpha}^{k,p} + \sigma_{3\alpha}^{k,s}, \quad u_3^{k,p+s} = u_3^{k,p} + u_3^{k,s}. \quad (4.47)$$

Η διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana $\mathcal{W}(z, \bar{z})$ θα πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες διεπιφανειακές συνθήκες

$$u_3^{M,s} - u_3^{I,s} = \frac{1}{N_3}(\sigma_{3\rho}^{I,p} + \sigma_{3\rho}^{I,s}) = \frac{1}{N_3}(\sigma_{3\rho}^{M,p} + \sigma_{3\rho}^{M,s}). \quad (4.48)$$

Η παραπάνω συνθήκη απορρέει από τις (4.46) και (4.47) παίρνοντας υπ' όψιν τη συνέχεια των μετατοπίσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας που ισχύει για το p -πρόβλημα.

4.3.2 Επίλυση των p -προβλημάτων

Ιδιοπαμορφώσεις στην ανομοιογένεια

Όταν η φόρτιση του συστήματος είναι ένας ομοιόμορφος μετασχηματισμός φάσης στην ανομοιογένεια με ιδιοπαμορφώσεις $\epsilon_{31}^T, \epsilon_{32}^T$, το σχετικό ελαστικό πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα διεπιφανειακής εξάρμωσης Somigliana που περιγράφεται με τη σχέση

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = \mathcal{E}^T z + \bar{\mathcal{E}}^T \bar{z}, \quad (4.49)$$

όπου

$$\mathcal{E}^T = \epsilon_{31}^T - i\epsilon_{32}^T. \quad (4.50)$$

Πράγματι, αν η ανομοιογένεια υποστεί έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, τότε, εκτός από τις ελαστικές μετατοπίσεις u_3^M, u_3^I που αναπτύσσονται στα δύο μέσα, αναπτύσσονται και οι μετατοπίσεις u_3^T στην ανομοιογένεια που είναι ελεύθερες τάσεων. Οι μετατοπίσεις αυτές υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial u_3^T}{\partial x_2} = 2\epsilon_{32}^T, \quad \frac{\partial u_3^T}{\partial x_1} = 2\epsilon_{31}^T. \quad (4.51)$$

Από την ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων, προκύπτει

$$u_3^T = \mathcal{E}^T z + \bar{\mathcal{E}}^T \bar{z}, \quad (4.52)$$

όπου η \mathcal{E}^T δίνεται από τις (4.50). Κατά την εξαγωγή της (4.52), οι σταθερές που υπεισέρχονται κατά την ολοκλήρωση αντιστοιχούν σε μετακίνηση του απολύτου στερεού σώματος και παραλείπονται, επειδή δεν συνεισφέρουν στις τάσεις. Στο p -πρόβλημα, επειδή διατηρείται η συνέχεια της μετατόπισης δια μέσου της διεπιφάνειας, θα πρέπει να ισχύει

$$u_3^M = u_3^I + u_3^T. \quad (4.53)$$

Από τις (4.52) και (4.53), προκύπτει ότι

$$u_3^M - u_3^I = \mathcal{E}^T z + \bar{\mathcal{E}}^T \bar{z}. \quad (4.54)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι, για την περίπτωση του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης στην ανομοιογένεια, το p -πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα διεπιφανειακής εξάρμωσης Somigliana, που περιγράφεται από τη σχέση $\mathcal{E}^T z + \bar{\mathcal{E}}^T \bar{z}$. Για το πρόβλημα αυτό, τα ελαστικά πεδία προσδιορίζονται από τις σχέσεις (III.19) θέτοντας $\mathcal{W}(z, \bar{z}) = \mathcal{E}^T z + \bar{\mathcal{E}}^T \bar{z}$. Το διφασικό δυναμικό $f_0(z)$ των σχέσεων αυτών

αναζητείται σε γραμμική μορφή, του οποίου οι συντελεστές υπολογίζονται απαιτώντας σύγκλιση της $f_M(z)$ στο άπειρο. Από την απαίτηση αυτή, βρίσκεται ότι

$$f_0(z) = -\frac{1}{2}\mathcal{E}^T z. \quad (4.55)$$

Τα σχετικά ελαστικά πεδία προσδιορίζονται μέσω των (I.9) και (I.15) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.1.2.

Ομοιόμορφη διατμητική τάση στο άπειρο σύνορο της μήτρας

Αν στο άπειρο σύνορο της μήτρας εφαρμόζεται ένα πεδίο ομοιόμορφων διατμητικών τάσεων $\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty$, τα μιγαδικά δυναμικά $f_M(z)$ επιδεικνύουν μία ιδιόμορφη συμπεριφορά στο άπειρο, που περιγράφεται από την (III.20). Τα μιγαδικά δυναμικά $f_k(z)$ ($k = M$ ή I) των δύο φάσεων του συστήματος εκφράζονται μέσω των γενικών σχέσεων (III.19) σε όρους του διαφοσικού δυναμικού $f_0(z)$ του συστήματος. Για την εξεταζόμενη φόρτιση, στις σχέσεις αυτές λαμβάνεται $\mathcal{W}(z, \bar{z}) = 0$. Το πολυωνυμικό τμήμα της σειράς (III.20), που εκφράζει την ιδιομορφία του μιγαδικού δυναμικού στο άπειρο, υπαγορεύει μία γραμμική μορφή του διαφοσικού δυναμικού $f_0(z)$. Έτσι, υποθέτοντας μία γενική γραμμική μορφή του $f_0(z)$, οι υπεισερχόμενοι άγνωστοι συντελεστές της μορφής αυτής προσδιορίζονται έτσι ώστε το μιγαδικό δυναμικό $f_M(z)$ να προσαρμόζεται στην ιδιόμορφη συμπεριφορά στο άπειρο. Από την απαίτηση αυτή βρίσκεται ότι

$$f_0(z) = \frac{\Sigma^\infty}{2\mu_M} z, \quad (4.56)$$

όπου

$$\Sigma^\infty = \sigma_{31}^\infty - i\sigma_{32}^\infty. \quad (4.57)$$

Έχοντας προσδιορίσει το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$, τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα προσδιορίζονται μέσω των (I.9) και (I.15). Οι αναλυτικές εκφράσεις των πεδίων αυτών παρέχονται στο IV.1.2.

4.3.3 Επίλυση των s -προβλημάτων

Και για τις δύο φορτίσεις που εξετάζονται, η μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{W}(z, \bar{z})$ των s -προβλημάτων, θα υποτεθεί στη μορφή

$$\mathcal{W}(z, \bar{z}) = Az + \bar{A}\bar{z}, \quad (4.58)$$

όπου A είναι μία μιγαδική σταθερά. Το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$ των s -προβλημάτων αναζητείται σε μία γραμμική μορφή, που έχει άγνωστους συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται σε όρους της σταθεράς A , απαιτώντας σύγκλιση της $f_M(z)$ στο άπειρο. Βρίσκεται ότι

$$f_0(z) = -\frac{1}{2}Az. \quad (4.59)$$

Τα πλήρη ελαστικά πεδία των s -προβλημάτων προσδιορίζονται από τις (I.9) - (I.11) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.2.2. Ο προσδιορισμός της σταθεράς A που υπεισέρχεται στα πεδία αυτά γίνεται ως εξής: για τη φόρτιση του συστήματος από τον ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας, υπολογίζονται οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{3\rho}^{M,p} (= \sigma_{3\rho}^{I,p})$ και $\sigma_{3\rho}^{M,s} (= \sigma_{3\rho}^{I,s})$ που εμφανίζονται στη δεξιά

πλευρά της (4.48), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (IV.21) και (IV.43) για $\rho = R$. Επίσης, η ασυνέχεια της μετατόπισης που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της (4.48) προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (IV.47) και (IV.48) για $\rho = R$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνέχεια των διεπιφανειακών τάσεων για το p -πρόβλημα. Βρίσκεται ότι

$$u_3^M - u_3^I = u_3^{M,s} - u_3^{I,s} = ARe^{i\theta} + \bar{A}Re^{-i\theta}. \quad (4.60)$$

Εισάγοντας τις διεπιφανειακές αυτές ποσότητες στην (4.48) και εξισώνοντας του συντελεστές των $e^{i\theta}$ και $e^{-i\theta}$ στις δύο πλευρές της εξίσωσης αυτής προκύπτει

$$A = \frac{\mu_I \mu_M}{R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_M \mu_I} \mathcal{E}^T. \quad (4.61)$$

Για τη φόρτιση του συστήματος με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, ο συντελεστής A προσδιορίζεται ακολουθώντας την ίδια διαδικασία. Βρίσκεται ότι

$$A = \frac{\mu_I}{R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_M \mu_I} \Sigma^\infty. \quad (4.62)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι ποσότητες \mathcal{E}^T και Σ^∞ παρέχονται από τις σχέσεις (4.50) και (4.57).

4.3.4 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με τέλεια διεπιφάνεια

Όταν η ανομοιογένεια υφίσταται έναν αντιεπίπεδο μετασχηματισμό φάσης, η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$E^p = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^T \sigma_{3\rho}^{I,p} R d\theta. \quad (4.63)$$

Η σχέση αυτή είναι η 2D μορφή της (3.22) για κυκλικές διεπιφάνειες και για αντιεπίπεδη παραμόρφωση, σε πολικές συντεταγμένες. Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα και στην ανομοιογένεια παρέχεται από τις σχέσεις

$$E^{M,p} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^{M,p} \sigma_{3\rho}^{M,p} R d\theta, \quad (4.64\alpha)$$

$$E^{I,p} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^{I,p} \sigma_{3\rho}^{I,p} R d\theta. \quad (4.64\beta)$$

Στη σχέση αυτή, η διεπιφανειακή μετατόπιση u_3^T προσδιορίζεται από την (4.52), ενώ οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{3\alpha}^{k,p}$, $u_\alpha^{k,p}$ ($k = M$ ή I), από τις σχετικές εκφράσεις που παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.1.2. Αντικαθιστώντας τις διεπιφανειακές αυτές ποσότητες στις (4.63) και (4.64), προκύπτει ότι

$$E^p = 2\pi R^2 \frac{\mu_I \mu_M}{\mu_I + \mu_M} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.65\alpha)$$

$$E^{M,p} = 2\pi R^2 \frac{\mu_I^2 \mu_M}{(\mu_I + \mu_M)^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.65\beta)$$

$$E^{I,p} = 2\pi R^2 \frac{\mu_I \mu_M^2}{(\mu_I + \mu_M)^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.65\gamma)$$

όπου

$$|\mathcal{E}^T| = \sqrt{(\epsilon_{31}^T)^2 + (\epsilon_{32}^T)^2}. \quad (4.66)$$

Στην ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_I = \mu_M = \mu$), οι εξισώσεις (4.65) απλοποιούνται στη μορφή

$$E^p = \pi R^2 \mu |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.67\alpha)$$

$$E^{M,p} = E^{I,p} = \frac{1}{2} \pi R^2 \mu^2 |\mathcal{E}^T|^2. \quad (4.67\beta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι, όταν ένα κυκλικό εγκλωβισμα που είναι τέλεια συνδεδεμένο με μία άπειρη μήτρα, υφίσταται έναν ομοιόμορφο αντιεπίπεδο μετασχηματισμό φάσης, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα μοιράζεται εξίσου στις δύο φάσεις του.

Όταν το σύστημα φορτίζεται με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα είναι προφανώς άπειρη, ενώ αυτή που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια πεπερασμένη. Η τελευταία προσδιορίζεται από τη σχέση

$$E^{I,p} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p} u_3^{I,p} R d\theta, \quad (4.68)$$

όπου οι $\sigma_{3\rho}^{I,p}$, $u_3^{I,p}$ υπολογίζονται από τις (IV.29) και (IV.32) θέτοντας $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τη διεπιφανειακή αυτή ποσότητα στην (4.68) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$E^{I,p} = 2\pi R^2 \frac{\mu_I}{(\mu_I + \mu_M)^2} |\Sigma^\infty|^2, \quad (4.69)$$

όπου

$$|\Sigma^\infty| = \sqrt{(\sigma_{31}^\infty)^2 + (\sigma_{32}^\infty)^2}. \quad (4.70)$$

Η παραπάνω σχέση συμπίπτει με αυτήν που έχει αποκτηθεί από τους Gong and Meguid (1992).

4.3.5 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου

Όταν το σύστημα της ανομοιογένειας έχει ελατηριακού-τύπου διεπιφάνεια και υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης στην ανομοιογένεια, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα προσδιορίζεται από τη σχέση

$$E^{\text{weak}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^T \sigma_{3\rho}^{I,p+s} R d\theta. \quad (4.71)$$

Η σχέση (4.71) είναι η εξειδικευμένη μορφή της (3.22) για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση και για πολικές συντεταγμένες. Οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και την ανομοιογένεια, αντίστοιχα, παρέχονται από τις σχέσεις

$$E^{M,\text{weak}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^{M,p+s} \sigma_{3\rho}^{M,p+s} R d\theta, \quad (4.72\alpha)$$

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^{I,p+s} \sigma_{3\rho}^{I,p+s} R d\theta. \quad (4.72\beta)$$

Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύονται στη διεπιφάνεια παρέχεται από τη σχέση

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_3^{M,s} - u_3^{I,s} - u_3^T) \sigma_{3\rho}^{M,p+s} R d\theta. \quad (4.73)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι διεπιφανειακές ποσότητες $\sigma_{3\rho}^{k,p}$, $u_3^{k,p}$ και $\sigma_{3\rho}^{k,s}$, $u_3^{k,s}$ ($k = M$ ή I) προσδιορίζονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.2 και IV.2.2 θέτοντας $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στις (4.71) - (4.73), μετά από ολοκλήρωση, προκύπτει

$$E^{\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R\mu_I\mu_M N_3}{R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_I\mu_M} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.74\alpha)$$

$$E^{M,\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R^2\mu_I^2\mu_M N_3^2}{[R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_I\mu_M]^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.74\beta)$$

$$E^{I,\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R^2\mu_I\mu_M^2 N_3^2}{[R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_I\mu_M]^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.74\gamma)$$

$$E^S = 2\pi R^2 \frac{R\mu_I^2\mu_M^2 N_3}{[R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_I\mu_M]^2} |\mathcal{E}^T|^2. \quad (4.74\delta)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν ότι υπάρχει μία ισχυρή εξάρτηση των ελαστικών ενεργειών, που αποθηκεύονται στις συνιστώσες του συστήματος από το μέγεθος της ανομοιογένειας. Όταν $R \rightarrow \infty$, ο λόγος $E^S/E^{I,\text{weak}}$ τείνει στο μηδέν, ενώ οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και την ανομοιογένεια τείνουν στις αντίστοιχες ενέργειες της τέλει διεπιφάνειας, που δίνονται από τις (4.65β) και (4.65γ). Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_I = \mu_M = \mu$), οι εξισώσεις (4.74) απλοποιούνται στις

$$E^{\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R\mu N_3}{2R\mu N_3 + \mu} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.75\alpha)$$

$$E^{M,\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R^2\mu N_3}{(2R\mu N_3 + \mu)^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.75\beta)$$

$$E^{I,\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R^2 \mu N_3^2}{(2R\mu N_3 + \mu)^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.75\gamma)$$

$$E^S = 2\pi R^2 \frac{R\mu^2 N_3}{(2R\mu N_3 + \mu)^2} |\mathcal{E}^T|^2. \quad (4.75\delta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι, για την περίπτωση του εγκλωβίσματος με ελατηριακού-τύπου διεπιφάνεια που υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα είναι ίση με αυτή που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια!

Για την φόρτιση ομοιόμορφων τάσεων στο άπειρο, η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα, και κατά συνέπεια, η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, είναι άπειρη. Ωστόσο, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια και τη διεπιφάνεια είναι πεπερασμένη και μπορεί να προσδιορισθεί από τις σχέσεις

$$E^{I,\text{weak}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p+s} u_3^{I,p+s} R d\theta, \quad (4.76\alpha)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p+s} u_3^T R d\theta. \quad (4.76\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι διεπιφανειακές ποσότητες $\sigma_{3\rho}^{I,p+s}$ ($= \sigma_{3\rho}^{I,p} + \sigma_{3\rho}^{I,s}$) και $u_3^{I,p+s}$ ($= u_3^{I,p} + u_3^{I,s}$) προσδιορίζονται από τις σχέσεις που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.2 και IV.2.2, ενώ η u_3^T από τη σχέση (4.52). Αντικαθιστώντας τις διεπιφανειακές αυτές ποσότητες στις (4.76), προκύπτει

$$E^{I,\text{weak}} = 2\pi R^2 \frac{R^2 \mu_I N_3^2}{[R(\mu_M + \mu_I) N_3 + \mu_M \mu_I]^2} |\Sigma^\infty|^2, \quad (4.77\alpha)$$

$$E^S = 2\pi R^2 \frac{R\mu_I^2 N_3}{[R(\mu_M + \mu_I) N_3 + \mu_M \mu_I]^2} |\Sigma^\infty|^2. \quad (4.77\beta)$$

Όπως συμβαίνει στην περίπτωση του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης στην ανομοιογένεια, όταν $R \rightarrow \infty$, ο λόγος $E^S/E^{I,\text{weak}}$ τείνει στο μηδέν, ενώ η ελαστική ενέργεια, που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια, τείνει σε αυτήν της τέλει διεπιφάνειας, που δίνεται από την (4.69).

4.3.6 Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος

Στη συνέχεια, θα προσδιορισθεί η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει στο σύστημα που βρίσκεται σε αντιεπίπεδη παραμόρφωση, όταν σε αυτό σχηματισθεί μία ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια. Η μεταβολή αυτή υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta\Pi = -\delta E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^T \sigma_{3\rho}^{I,s} R d\theta, \quad (4.78)$$

για ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης στην ανομοιογένεια, και από τη σχέση

$$\delta\Pi = -\delta E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{M,p} (u_3^{M,s} - u_3^{I,s}) R d\theta, \quad (4.79)$$

για φόρτιση με ομοιόμορφες διατμητικές τάσεις στο άπειρο. ι σχέσεις αυτές αποτελούν την εξειδικευμένη μορφή των (3.40) και (3.47) για αντεπίπεδη παραμόρφωση και κυκλική διεπιφάνεια. Στις σχέσεις (4.78) και (4.79), η u_3^T υπολογίζεται από την (4.54) θέτοντας $z = Re^{i\theta}$, ενώ οι $u_3^{M,s}$, $u_3^{I,s}$, $\sigma_{3\rho}^{M,p}$, $\sigma_{3\rho}^{I,s}$ από τις αντίστοιχες εκφράσεις που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.2 και IV.2.2 θέτοντας $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις διεπιφανειακές αυτές ποσότητες στις (4.78) και (4.79) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$\delta\Pi = -\delta E = -2\pi R^2 \frac{\mu_I^2 \mu_M^2 N_3}{(\mu_M + \mu_I)[R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_M \mu_I]} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (4.80)$$

για τον ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάση στην ανομοιογένεια, και

$$\delta\Pi = -\delta E = -2\pi R^2 \frac{\mu_I^2 N_3}{(\mu_M + \mu_I)[R(\mu_M + \mu_I)N_3 + \mu_M \mu_I]} |\Sigma^\infty|^2, \quad (4.81)$$

για την ομοιόμορφη φόρτιση με διατμητικές τάσεις στο άπειρο. Οι εξισώσεις (4.80) και (4.81) δείχνουν ότι, όταν μία τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος μετασχηματισθεί σε μία ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, ενώ το σύστημα είναι υπό ένταση, η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι αρνητική και για τις δύο διατμητικού τύπου φορτίσεις.

4.4 Συζήτηση και συμπεράσματα

Τα ακόλουθα βασικά συμπεράσματα προκύπτουν από την ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο αυτό.

1. Όταν η τέλεια διεπιφάνεια του ελαστικού συστήματος του Σχήματος 4.1, μετασχηματίζεται σε διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, ενώ το σύστημα φορτίζεται είτε από μία ομοιόμορφη απομακρυσμένη φόρτιση στη μήτρα, είτε από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι πάντα αρνητική. Ωστόσο, όπως προκύπτει από τις (4.42) και (4.44), σε ένα τέτοιο μετασχηματισμό της διεπιφάνειας, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα αυξάνεται για την απομακρυσμένη φόρτιση στη μήτρα ($\Delta E > 0$), και μειώνεται για τον ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης στην ανομοιογένεια ($\Delta E < 0$).
2. Οι f -συντελεστές που ορίζονται από τις (4.33) εξαρτώνται από τις διφασικές παραμέτρους Λ , Π , Ω του συστήματος και από τις αδιάστατες παραμέτρους ακαμψίας των διεπιφανειακών ελατηρίων n_ρ , n_θ . Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση για το σύστημα είναι αυτή όπου $n_\rho = 0$, $n_\theta \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, η ανομοιογένεια και η μήτρα είναι τέλεια συνδεδεμένες στην ακτινική διεύθυνση και μη-τέλεια συνδεδεμένες στην εφαπτομενική διεύθυνση. Θέτοντας $n_\rho = 0$ στην (4.33β), προκύπτει ότι $f_1^t = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: αν μία τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος που δείχνεται στην 4.1 μετασχηματισθεί σε μία ελατηριακού τύπου με $n_\rho = 0$ και $n_\theta \neq 0$, ενώ το σύστημα είναι σε ένταση εξ' αιτίας ομοιόμορφων ιδιοπαραμορφώσεων στην ανομοιογένεια, τότε, η ενέργεια όγκου που αποθηκεύεται στο σύστημα παραμένει σταθερή. Για

αυτήν την περίπτωση, εύκολα δείχνεται ότι η ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια με μία τέλεια διεπιφάνεια είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια με την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, εάν ισχύει ότι

$$\nu_I > \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{1 + \Pi}{1 + \Lambda} - \frac{1}{12} \left(\frac{1 + \Pi}{1 + \Lambda} \right)^2 - \frac{1}{3n_\theta} \frac{1 + \Pi}{(1 + \Lambda)^2}. \quad (4.82)$$

Για την περίπτωση της ολισθαίνουσας ανομοιογένειας ($n_\theta \rightarrow \infty$), η συνθήκη αυτή γίνεται

$$\nu_I > \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{1 + \Pi}{1 + \Lambda} - \frac{1}{12} \left(\frac{1 + \Pi}{1 + \Lambda} \right)^2. \quad (4.83)$$

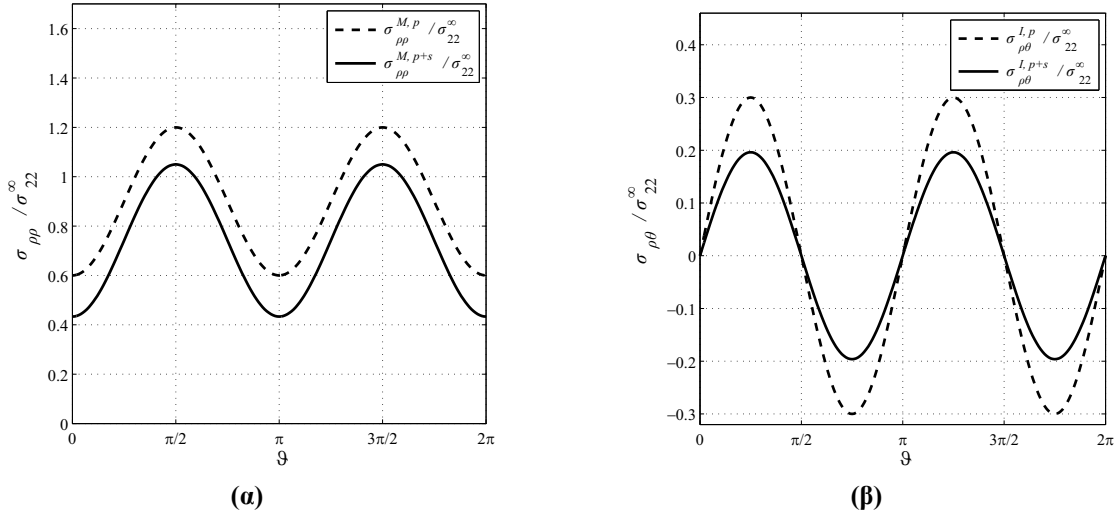
Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), η παραπάνω συνθήκη δίνει $\nu_I > 1/6$. Αυτό το αποτέλεσμα έχει αποκτηθεί από τους Lubarda and Markenscoff (1999).

3. Η αλγεβρική μορφή των ελαστικών πεδίων που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.1 και IV.2.1 για τη συνεπίπεδη παραμόρφωση δείχνουν ότι, για τους δύο τύπου φόρτισης που εξετάστηκαν, η διανομή των τάσεων μέσα στην κυκλική ανομοιογένεια για διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου δεν είναι ομοιόμορφη, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας. Για τους δύο τύπους φόρτισης που θεωρήθηκαν, η διανομή των τάσεων είναι πολυωνυμικής μορφής $2^{\text{ης}}$ τάξεως.
4. Με σκοπό να διερευνηθεί ποσοτικά η επίδραση της διεπιφάνειας ελατηριακού-τύπου στο τασικό πεδίο, παρήχθησαν αριθμητικά αποτελέσματα για ένα σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας για μια σκληρή ανομοιογένεια με $R = 20$ nm, $E_I = 160$ GPa, $E_M = 80$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Οι ελατηριακοί συντελεστές έχουν εκτιμηθεί αντικαθιστώντας τη διεπιφάνεια με μία λεπτή διεπιφάνεια πάχους $t_S (\ll R)$ και μέτρο ελαστικότητας $E_S (\ll E_M$ ή $E_I)$. Στη συνέχεια, οι ελατηριακοί συντελεστές υπολογίστηκαν από τις προσεγγιστικές σχέσεις του Hashin (1991a)

$$N_\rho = \frac{E_S(1 - \nu_S)}{t_S(1 - 2\nu_S)(1 + \nu_S)}, \quad N_\theta = \frac{E_S}{2t_S(1 + \nu_S)}, \quad (4.84)$$

για $E_S = 10$ GPa, $\nu_S = 0.25$ και $t_S = 1$ nm. Στα Σχήματα 4.2 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων διεπιφανειακών τάσεων στη μήτρα κατά μήκος μίας τέλει και μιας μη-τέλει διεπιφάνειας, όταν το σύστημα καταπονείται με ομοιόμορφες τάσεις σ_{22}^∞ , $\sigma_{11}^\infty = 0.5\sigma_{22}^\infty$ και $\sigma_{12}^\infty = 0$ στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας. Στο Σχήμα 4.3 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων της μήτρας και της ανομοιογένειας για την τέλεια και μη-τέλεια διεπιφάνεια. Τα Σχήματα αυτά δείχνουν ότι η εμφάνιση μιας διεπιφάνειας ελατηριακού-τύπου στο σύστημα μειώνει το μέγεθος των ορθών ακτινικών τάσεων και των διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας. Αντίθετα οι εφαπτομενικές ορθές τάσεις αυξάνονται στη μήτρα και μειώνονται στην ανομοιογένεια.

Στα Σχήματα 4.4 και 4.5 δείχνονται οι αντίστοιχες μεταβολές για μια μαλακή ανομοιογένεια για τιμές $R = 20$ nm, $E_I = 80$ GPa, $E_M = 160$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Από τα Σχήματα αυτά γίνεται φανερό ότι και στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας παράγονται τα ίδια αποτελέσματα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για τους ίδιους ελατηριακούς συντελεστές, η μέγιστη τιμή της



Σχήμα 4.2 Η μεταβολή (α) των κανονικοποιημένων ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των κανονικοποιημένων διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια σκληρή ανομοιογένεια ($R = 20$ nm, $E_M = E_I/2 = 80$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$)

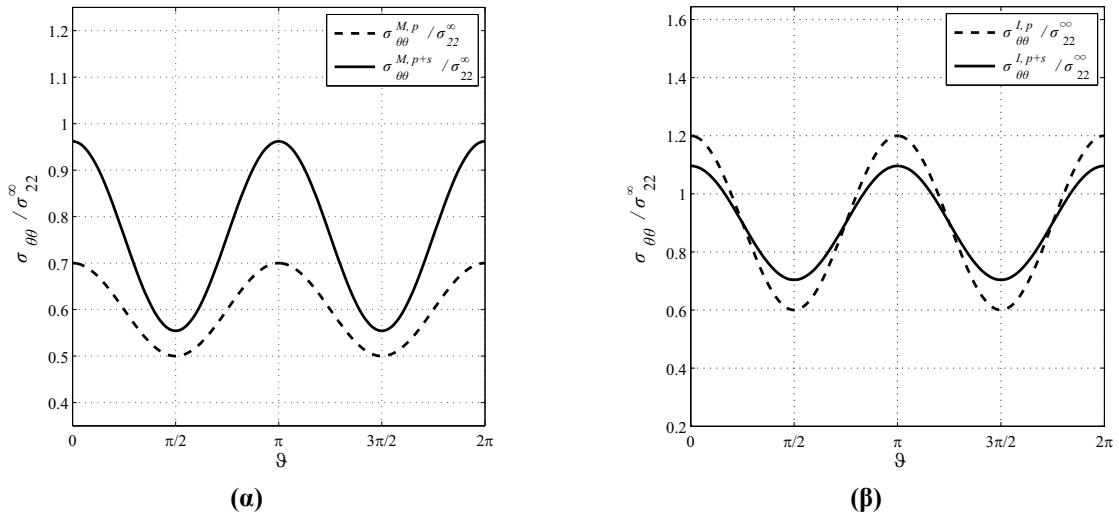
εφαπτομενικής ορθής τάσης συμβαίνει στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας, όπως αναμενόταν. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μεταβολή της μέγιστης εφαπτομενικής ορθής διεπιφανειακής τάσης όταν σχηματισθεί μια ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια είναι σημαντικά μεγαλύτερη στην περίπτωση της σκληρής ανομοιογένειας.

Για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση συντάχθηκαν τα αντίστοιχα διαγράμματα που δείχνονται στα Σχήματα 4.6 και 4.7 αντίστοιχα για μια σκληρή και για μια μαλακή ανομοιογένεια. Στην περίπτωση αυτή ο ελατηριακός συντελεστής N_3 έχει ληφθεί

$$N_3 = N_\theta = \frac{E_S}{2t_S(1 + \nu_S)}. \quad (4.85)$$

Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, όπως προηγουμένως, έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές $E_S = 10$ GPa, $\nu_S = 0.25$ και $t_S = 1$ nm. Από τα διαγράμματα γίνεται φανερό ότι οι μεταβολές των τάσεων $\sigma_{3\rho}$ και $\sigma_{3\theta}$ κατά μήκος της διεπιφάνειας ακολουθούν τις αντίστοιχες μεταβολές των διατμητικών τάσεων και των εφαπτομενικών ορθών της συνεπίπεδης κατάστασης.

5. Για τη διερεύνηση της επίδρασης του μεγέθους της ανομοιογένειας στην ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια συντάχθηκαν τα διαγράμματα που δείχνονται στο Σχήμα 4.8. Στα διαγράμματα αυτά η ακτίνα R της ανομοιογένειας έχει επιλεγεί να μεταβάλλεται από 10 έως 200 nm και οι ελατηριακές σταθερές υπολογίζονται όπως προηγουμένως για τις τιμές $E_S = 10$ GPa, $\nu_S = 0.25$ και $t_S = 1$ nm. Το Σχήμα 4.8(α) απεικονίζει τη μεταβολή του λόγου $E^S/E^{I,weak}$ ως μία συνάρτηση του μεγέθους R της ανομοιογένειας, όταν ο ομοιόμορφος μετασχηματισμός φάσης αντιστοιχεί σε μία διάγκωση ($|G| = 0$) και το Σχήμα 4.8(β) τη μεταβολή του ίδιου λόγου για μία στροφική παραμόρφωση ($F = 0$) στην ανομοιογένεια. Οι μεταβολές αυτές υπολογίζονται για τις ακόλουθες τρεις διακριτές περιπτώσεις του συστήματος: η ανομοιογένεια είναι πιο σκληρή από τη μήτρα ($E_I = 160$ GPa, $E_M = 80$ GPa), η ανομοιογένεια και η μήτρα είναι από το ίδιο υλικό, ($E_I = E_M = 120$ GPa), και η ανομοιογένεια είναι πιο μαλακή από τη μήτρα ($E_I = 80$ GPa, $E_M =$



Σχήμα 4.3 Η μεταβολή των κανονικοποιημένων ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια σκληρή διεπιφάνεια ($E_M = E_I/2 = 80$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$)

160 GPa). Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, οι λόγοι του Poisson λαμβάνονται $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Τα διαγράμματα δείχνουν ότι ο λόγος $E^S/E^{I,weak}$ αυξάνεται πολύ γρήγορα όταν $R < 100$ nm και συγκλίνει στο 0 για μεγάλες τιμές. Επίσης, ο λόγος αυξάνεται όσο η μήτρα γίνεται πιο μαλακή από την ανομοιογένεια.

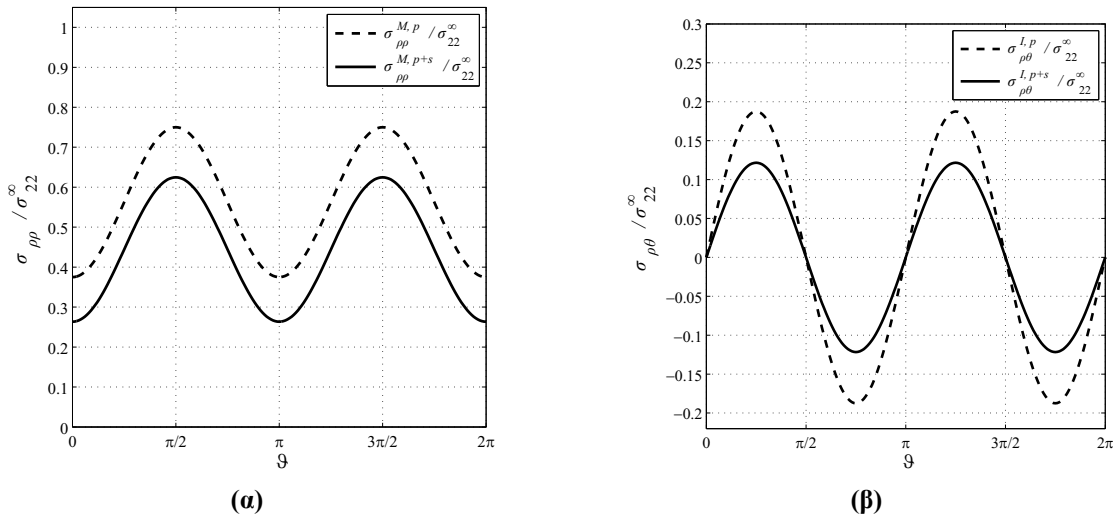
Για την ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια στην περίπτωση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης με ομοιόμορφες διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις συντάχθηκε το διάγραμμα του Σχήματος 4.9 για τις ίδιες τιμές των μηχανικών παραμέτρων που ελήφθησαν για τη συνεπίπεδη κατάσταση. Οι καμπύλες του Σχήματος αυτού δείχνουν ότι η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια ακολουθεί την ίδια συμπεριφορά με αυτήν της συνεπίπεδης κατάστασης.

6. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι συνθήκες της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου που δίνονται από τις (4.1) έχουν φυσική σημασία, όταν οι διεπιφανειακές ακτινικές τάσεις είναι θετικές. Οι διεπιφανειακές ακτινικές τάσεις είναι θετικές όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

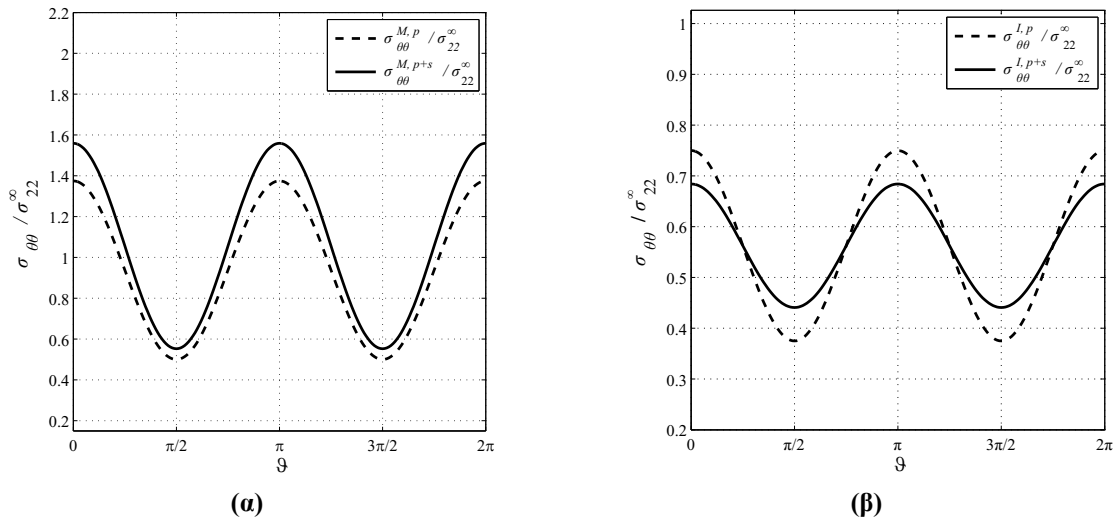
$$h|F| > |G|, \quad h|T^\infty| > |S^\infty|, \quad (4.86)$$

όπου

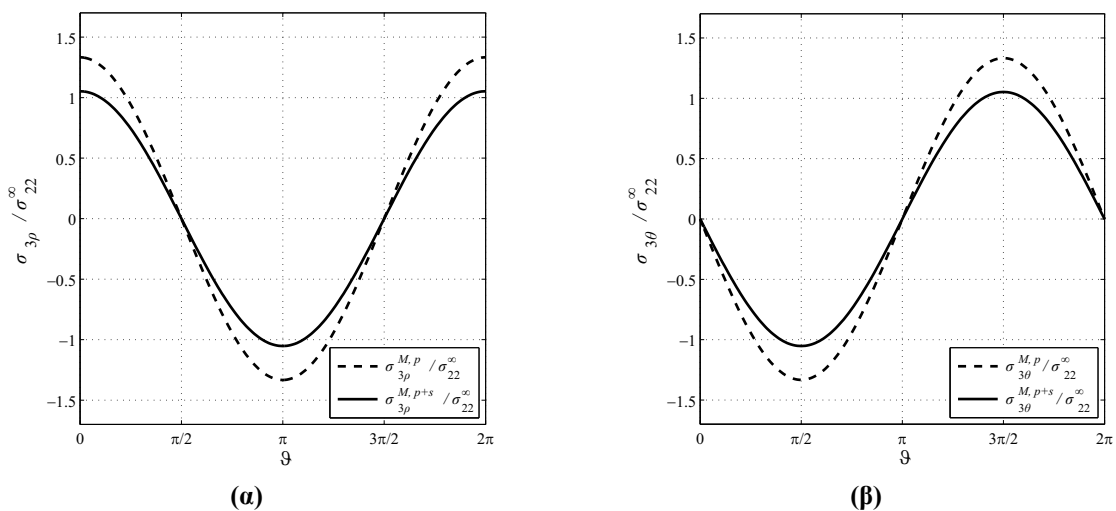
$$h = \left| \frac{1 + \Lambda + \Omega}{1 - \Omega} \frac{2a_I}{a_{II} - 3a_{III}} \right|. \quad (4.87)$$



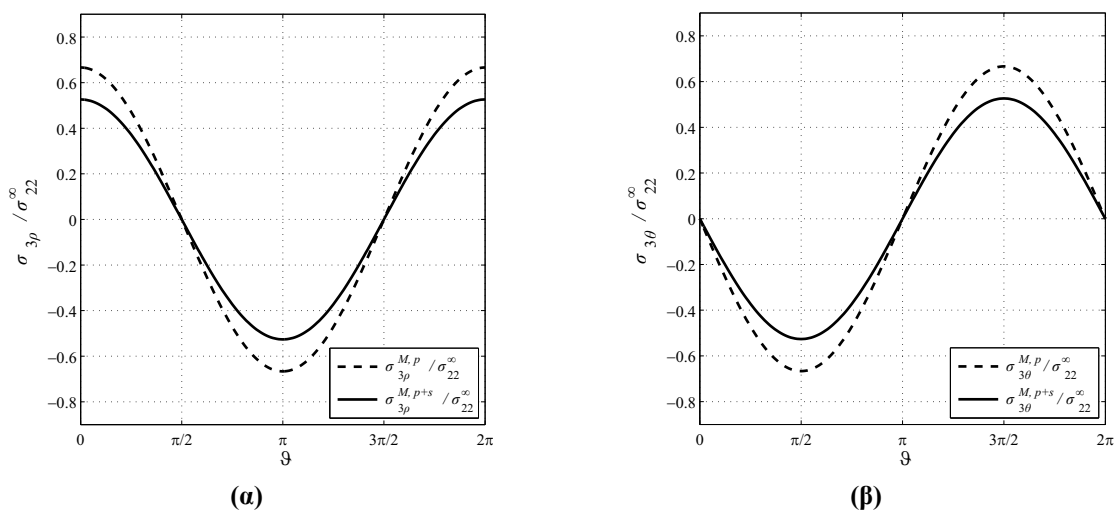
Σχήμα 4.4 Η μεταβολή (α) των κανονικοποιημένων ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των κανονικοποιημένων διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια μαλακή ανομοιογένεια ($R = 20 \text{ nm}$, $E_M = 2E_I = 160 \text{ GPa}$, $\nu_M = \nu_I = 0.25$)



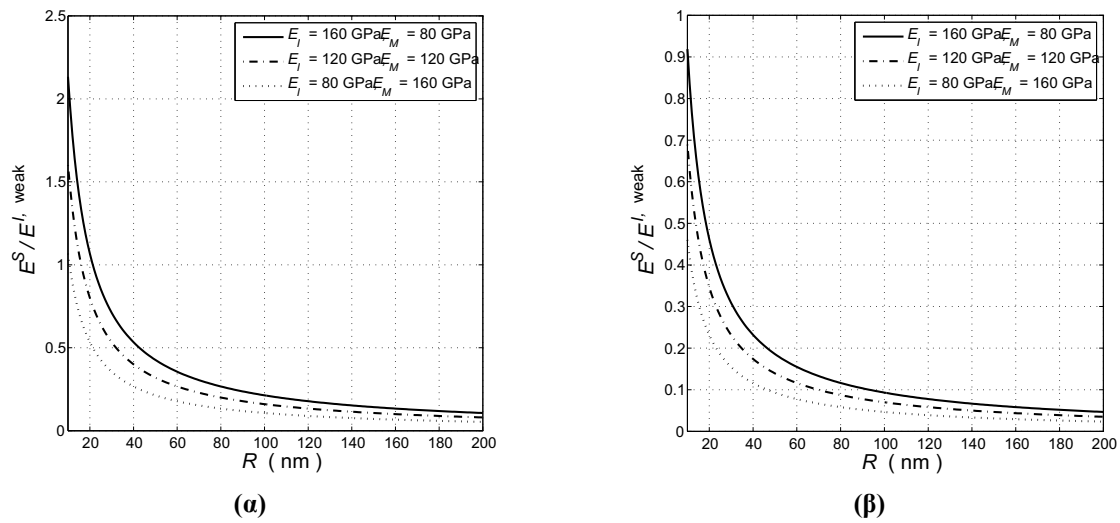
Σχήμα 4.5 Η μεταβολή των κανονικοποιημένων ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια μαλακή διεπιφάνεια ($E_M = 2E_I = 160 \text{ GPa}$, $\nu_M = \nu_I = 0.25$)



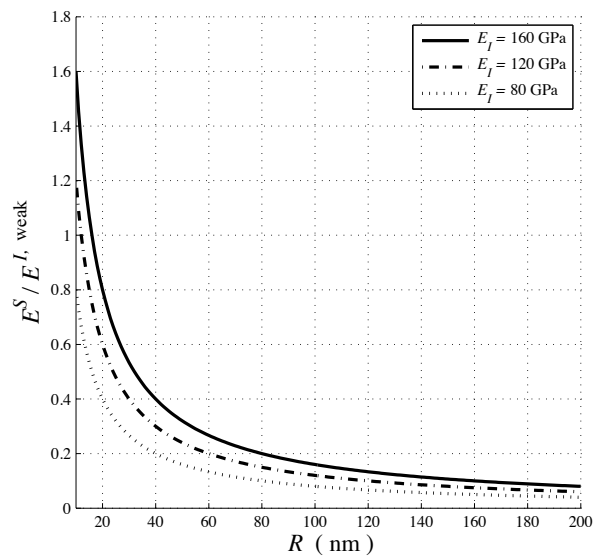
Σχήμα 4.6 Η μεταβολή των των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, όταν $E_M = 80$ GPa και $E_I = 160$ GPa



Σχήμα 4.7 Η μεταβολή των των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, όταν $E_M = 160$ GPa και $E_I = 80$ GPa



Σχήμα 4.8 Ο λόγος των ενεργειών $E^S/E^{I, \text{weak}}$ σε σύγκριση με το μέγεθος R της ανομοιογένειας (α) για διαστολή ($|G| = 0$) και (β) για συστροφή ($F = 0$) της ανομοιογένειας



Σχήμα 4.9 Ο λόγος των ενεργειών $E^S/E^{I, \text{weak}}$ σε σύγκριση με το μέγεθος R της ανομοιογένειας

Κεφάλαιο 5

Κυκλική ανομοιογένεια με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η ενεργειακή κατάσταση της συνεπίπεδης και αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης μιας κυλινδρικής ανομοιογένειας κυκλικής διατομής που βρίσκεται σε μια άπειρη ελαστική μήτρα και συνδέεται με αυτή με μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται είτε από μια φόρτιση ομοιόμορφων τάσεων στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας, είτε από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις που επενεργούν στην ανομοιογένεια.

Για τις δύο αυτές φορτίσεις εξάγονται τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα σε απλή αλγεβρική μορφή σε όρους δύο διφασικών ελαστικών σταθερών τύπου Dundurs. Ο προσδιορισμός των ελαστικών αυτών πεδίων γίνεται εφαρμόζοντας μια νέα μεθοδολογία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία αυτή, η ελαστική κατάσταση του συστήματος με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου προκύπτει από αυτήν της τέλει διεπιφάνειας προσθέτοντας μια επιπρόσθετη ελαστική κατάσταση που προέρχεται από μια κατάλληλη διανομή επιφανειακών δυνάμεων πάνω στη διεπιφάνεια. Η επιπρόσθετη αυτή ελαστική κατάσταση αποτελεί τη διαταραχή που υφίσταται η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος, όταν η τέλεια διεπιφάνειά του μετασχηματισθεί σε μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου ενώ αυτό είναι φορτισμένο. Το ελαστικό πρόβλημα της ελαστικής κατάστασης του συστήματος με την τέλεια διεπιφάνεια, όπως προηγούμενα, θα δηλώνεται ως p -πρόβλημα, ενώ αυτό της επιπρόσθετης κατάστασης ως f -πρόβλημα.

Για την επίλυση των f -προβλημάτων της συνεπίπεδης και αντιεπίπεδης παραμόρφωσης του συστήματος, η μέθοδος των διφασικών δυναμικών επεκτείνεται στην περίπτωση που στη διεπιφάνεια του συστήματος επενεργεί μία διανεμημένη γραμμική δύναμη. Η επέκταση της μεθόδου των διφασικών δυναμικών και οι σχετικές σχέσεις που προκύπτουν παρουσιάζονται στο Παράρτημα I της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια, με βάση τα ελαστικά αυτά πεδία και τις σχετικές ενεργειακές προτάσεις που διατυπώθηκαν στο Κεφάλαιο 3, υπολογίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα και στα επιμέρους συστατικά του, καθώς και η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει στο υπό ένταση σύστημα, όταν η τέλεια διεπιφάνειά του μετασχηματισθεί σε μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Τέλος, παρουσιάζονται και συζητούνται τα βασικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.

5.2 ΤΟ ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ

5.2.1 Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η διαδικασία επίλυσης

Στη συνέχεια, θα αναλυθεί η συνεπίπεδη παραμόρφωση του ελαστικού συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1, όταν η σύνδεση των δύο υλικών του προσομοιώνεται με μία διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Όταν το σύστημα φορτίζεται με ομοιόμορφες τάσεις σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , σ_{12}^∞ στο άπειρο, οι συνθήκες, που επικρατούν στη διεπιφάνεια των δύο υλικών είναι

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^M - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^I = \frac{\sigma_{\theta\theta}^S}{R} - i\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^S}{R\partial\theta}, \quad (5.1\alpha)$$

$$u_\rho^M + iu_\theta^M = u_\rho^I + iu_\theta^I = u_\rho^S + iu_\theta^S, \quad (5.1\beta)$$

όπου $\sigma_{\rho\rho}^k$, $\sigma_{\rho\theta}^k$ και u_ρ^k , u_θ^k ($k = M$ ή I) είναι οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στις συνδεδεμένες επιφάνειες των δύο υλικών. Οι συνθήκες αυτές προκύπτουν από τις (2.87α), (2.87β) και (2.86) υποθέτοντας ότι οι παραγόμενες μετατοπίσεις στο σύστημα είναι συναρτήσεις μόνο των μεταβλητών x_1 και x_2 (διδιάστατη παραμόρφωση). Στην περίπτωση αυτή, η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος διασπάται σε συνεπίπεδη παραμόρφωση και αντιεπίπεδη παραμόρφωση. Οι u_ρ^S , u_θ^S και $\sigma_{\theta\theta}^S$ είναι οι συνιστώσες μετατόπισης και η εφαπτομενική μεμβρανική τάση (δύναμη/μήκος) που αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια. Όταν η παραμόρφωση του συστήματος προξενείται από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης στην ανομοιογένεια με ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{11}^T , ϵ_{22}^T , ϵ_{12}^T , τότε η συνθήκη συνέχειας των μετατοπίσεων (5.1β) αντικαθίσταται από την

$$u_\rho^M + iu_\theta^M = (u_\rho^I + u_\rho^T) + i(u_\theta^I + u_\theta^T) = u_\rho^S + iu_\theta^S, \quad (5.2)$$

όπου οι u_ρ^T και u_θ^T είναι οι κυλινδρικές συνιστώσες των ιδιο-μετατοπίσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοπαραμορφώσεις. Οι συνιστώσες των ιδιομετατοπίσεων u_1^T , u_2^T παρέχονται από τις σχέσεις (4.11), οι δε πολικές συνιστώσες u_ρ^T και u_θ^T προσδιορίζονται με τη σχέση $u_\rho^T + iu_\theta^T = e^{-i\theta}(u_1^T + iu_2^T)$. Για τη διεπιφάνεια που θεωρείται, ισχύει ο ακόλουθος καταστατικός νόμος

$$\sigma_{\theta\theta}^S = E_S \epsilon_{\theta\theta}^S, \quad (5.3)$$

όπου, $\epsilon_{\theta\theta}^S$ είναι η μεμβρανική παραμόρφωση που συνδέεται με τις ελαστικές μετατοπίσεις της μεμβράνης u_ρ^S , u_θ^S με τη σχέση

$$\epsilon_{\theta\theta}^S = \frac{u_\rho^S}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta^S}{\partial\theta}. \quad (5.4)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το R είναι η ακτίνα της κυκλικής διατομής της κυλινδρικής ανομοιογένειας και $E_S = \lambda_S + \mu_S$, όπου λ_S , μ_S είναι οι σταθερές τύπου-Lamè για τη μεμβράνη. Η σχέση (5.3) προκύπτει από την (?), λαμβάνοντας υπόψιν ότι για τη διδιάστατη παραμόρφωση ισχύει $\epsilon_{33}(= \partial u_3 / \partial x_3) = 0$. Στηριζόμενοι στην (5.1α), μπορούμε να πούμε ότι, η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος, λόγω κάποιας εξωτερικής φόρτισης, προέρχεται από αυτήν που προκαλείται στο σύστημα έχοντας μία τέλεια

διεπιφάνεια, όταν κατά μήκος της διεπιφάνειας επιβληθεί μία συνεχή διανομή επιφανειακών δυνάμεων f , που είναι ίση με την ασυνέχεια των διεπιφανειακών ελκυστών των δύο υλικών, δηλαδή

$$f = (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^M - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^I. \quad (5.5)$$

Με βάση τα παραπάνω, η επίλυση του ελαστικού προβλήματος του συστήματος του Σχήματος 4.1 με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου ανάγεται στην επίλυση του ελαστικού προβλήματος του συστήματος με τέλεια διεπιφάνεια για την φόρτιση που θεωρείται (p -πρόβλημα), και, στη συνέχεια, του ελαστικού προβλήματος του συστήματος για την επιφανειακή δύναμη f (f -πρόβλημα). Αν $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_{\alpha}^{k,p}$ και $\sigma_{\alpha\beta}^{k,f}$, $u_{\alpha}^{k,f}$ είναι οι τάσεις και οι μετατοπίσεις των p - και f -προβλημάτων, αντίστοιχα, οι αντίστοιχες ποσότητες των εξεταζόμενων ελαστικών προβλημάτων θα είναι

$$\sigma_{\alpha\beta}^k = \sigma_{\alpha\beta}^{k,p} + \sigma_{\alpha\beta}^{k,f}, \quad u_{\alpha}^k = u_{\alpha}^{k,p} + u_{\alpha}^{k,f}. \quad (5.6)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στη συνοριακή συνθήκη (5.1α) προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = \frac{E_S}{R^2} \left[u_{\rho}^{M,p} + u_{\rho}^{M,f} + \frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f}) \right] \\ - i \frac{E_S}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\rho}^{M,p} + u_{\rho}^{M,f}) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f}) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Αν η μεμβράνη υποστεί ένα μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται από τις ιδιομετατοπίσεις u_{ρ}^* και u_{θ}^* , τότε, οι σχέσεις (5.2) και (5.7) αντικαθίστανται με τις

$$u_{\rho}^M + iu_{\theta}^M = (u_{\rho}^I + u_{\rho}^T) + i(u_{\theta}^I + u_{\theta}^T) = (u_{\rho}^S + u_{\rho}^*) + i(u_{\theta}^S + u_{\theta}^*), \quad (5.8\alpha)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = \frac{E_S}{R^2} \left[u_{\rho}^{M,p} + u_{\rho}^{M,f} - u_{\rho}^* + \frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f} - u_{\theta}^*) \right] \\ - i \frac{E_S}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\rho}^{M,p} + u_{\rho}^{M,f} - u_{\rho}^*) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f} - u_{\theta}^*) \right]. \end{aligned} \quad (5.8\beta)$$

Έτσι, προκειμένου να ικανοποιείται η διεπιφανειακή συνθήκη (5.1α), οι τάσεις και οι μετατοπίσεις των δύο προβλημάτων θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες (5.7) για την φόρτιση στο άπειρο, και την (5.8β) για τις ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια.

Από τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω διαδικασία επίλυσης του ελαστικού προβλήματος του διφαντικού συστήματος με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Πρώτα προσδιορίζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p}$, $u_{\alpha}^{k,p}$ του συστήματος με τέλεια διεπιφάνεια για τη φόρτιση που θεωρείται. Στη συνέχεια, υποθέτοντας μία κατάλληλη μορφή της f , που εμπλέκει άγνωστες σταθερές, υπολογίζονται τα ελαστικά πεδία $\sigma_{\alpha\beta}^{k,f}$, $u_{\alpha}^{k,f}$ επιλύοντας το σχετικό πρόβλημα (f -πρόβλημα). Οι υπεισερχόμενες άγνωστες σταθερές στην f συγκεκριμενοποιούνται απαιτώντας την ικανοποίηση της σχέσης (5.7) ή της (5.8β). Ουσιαστικά, το f -πρόβλημα είναι το ανάλογο του s -προβλήματος, που είναι ένα πρόβλημα εξάρμωσης Somigliana.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, η μέθοδος των διαφοσικών δυναμικών έχει επεκταθεί για την περίπτωση που στη διεπιφάνεια επενεργεί μία διεπιφανειακή γραμμική δύναμη \mathcal{F} . Οι σχετικές σχέσεις παρέχονται στο Παράρτημα III.1.

Αμέσως παρακάτω, επιλύονται τα ελαστικά προβλήματα του συστήματος του Σχήματος 4.1 με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, για τις δύο φορτίσεις που μας ενδιαφέρουν. Τα ελαστικά πεδία των σχετικών p -προβλημάτων του ελαστικού συστήματος έχουν προσδιορισθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και έχουν καταχωρηθεί στα Παραρτήματα (IV.1.1).

5.2.2 Επίλυση των f -προβλημάτων

Για τις δύο φορτίσεις που θεωρούμε, η μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ που υπεισέρχεται στις (5.5) επιλέγεται να έχει την παρακάτω μορφή

$$i\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \lambda R^2 z + \frac{1}{2} R^2 \bar{A} \bar{z} + \frac{1}{2} z (B z^2 + \bar{B} \bar{z}^2), \quad (5.9)$$

όπου λ είναι μία πραγματική σταθερά και A, B είναι μιγαδικές σταθερές. Για την επιλογή αυτή, τα διαφοσικά δυναμικά $\phi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ των (5.5) αναζητούνται σε πολυωνυμική μορφή τρίτης τάξης με άγνωστους συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται σε όρους των σταθερών λ, A, B απαιτώντας σύγκλιση των $\phi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ στην περιοχή του απείρου. Αυτή η απαίτηση απορρέει από τις σχέσεις (III.9), που περιγράφουν τη συμπεριφορά των μιγαδικών δυναμικών $\phi_M(z), \psi_M(z)$ στο άπειρο. Από την ικανοποίηση της απαίτησης αυτής, προκύπτει

$$\phi_0(z) = -\frac{1}{2(1 + \kappa_M)} \left[\lambda \frac{2}{1 - \Omega} R^2 z + B z^3 \right], \quad (5.10\alpha)$$

$$\psi_0(z) = -\frac{1}{2(1 + \kappa_M)} [\kappa_M(A + B) - 3(1 + \Lambda + \Omega)B] R^2 z. \quad (5.10\beta)$$

Οι πλήρεις εκφράσεις των ελαστικών πεδίων προσδιορίζονται μέσω των (I.13) και (III.16), (III.17) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.3.1.

Στη συνέχεια θα προσδιορισθούν οι σταθερές λ, A, B για τους δύο εξεταζόμενους τύπους φόρτισης. Στην (5.7), οι συνιστώσες των διεπιφανειακών μετατοπίσεων $u_\rho^{M,f} (= u_\rho^{I,f})$ και $u_\theta^{M,f} (= u_\theta^{I,f})$ υπολογίζονται από τις (IV.55), (IV.56) θέτοντας $\rho = R$. Για τη φόρτιση του συστήματος από τις ιδιοπαμορφώσεις, οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\rho\rho}^{M,p} (= \sigma_{\rho\rho}^{I,p}), \sigma_{\rho\theta}^{M,p} (= \sigma_{\rho\theta}^{I,p})$ υπολογίζονται από τις (IV.1), και (IV.2), και οι διεπιφανειακές μετατοπίσεις $u_\rho^{M,p}, u_\theta^{M,p}$, από τις (IV.7) και (IV.8). Εισάγοντας τις διεπιφανειακές αυτές συνθήκες στις (5.7) και (5.9) και εξισώνοντας τους σταθερούς όρους, καθώς επίσης και τους συντελεστές των $e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}$ των δύο πλευρών των εξισώσεων αυτών, προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με άγνωστες ποσότητες τις λ, A, B . Η επίλυση του συστήματος αυτού παρέχει

$$R^2 \lambda = \frac{2(1 + \Lambda)\mu_I E_S}{(\kappa_I - 1)(1 + \Lambda)E_S + 2(1 + \kappa_M)(1 - \Omega)R\mu_I} F, \quad (5.11\alpha)$$

$$A = 0, \quad (5.11\beta)$$

$$R^2 B = \frac{2\kappa_M(1+\Pi)\mu_I E_S}{[\kappa_M(1+\Pi) + 3\kappa_I(1+\Lambda)] E_S + 4(1+\kappa_M)R\mu_I} G, \quad (5.11\gamma)$$

όπου, οι ποσότητες F και G παρέχονται από τις

$$F = \epsilon_{11}^T + \epsilon_{22}^T, \quad G = \epsilon_{22}^T - \epsilon_{11}^T + 2i\epsilon_{12}^T.$$

Για την φόρτιση του συστήματος με τις ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\rho\rho}^{M,p}(= \sigma_{\rho\rho}^{I,p})$, $\sigma_{\rho\theta}^{M,p}(= \sigma_{\rho\theta}^{I,p})$ υπολογίζονται από τις (IV.11), και (IV.12), και οι διεπιφανειακές μετατοπίσεις $u_\rho^{M,p}$, $u_\theta^{M,p}$, από τις (IV.17) και (IV.18). Στην περίπτωση αυτή, με μία ανάλογη διαδικασία αποκτάμε

$$R^2 \lambda = \frac{(1+\kappa_M)(\kappa_I-1)(1+\Lambda)E_S}{(\kappa_I-1)(1+\Lambda)E_S + 2(1+\kappa_M)(1-\Omega)R\mu_I} T^\infty, \quad (5.12\alpha)$$

$$A = 0, \quad (5.12\beta)$$

$$R^2 B = \frac{2(1+\kappa_M)(1+\Pi)E_S}{[\kappa_M(1+\Pi) + 3\kappa_I(1+\Lambda)] E_S + 4(1+\kappa_M)R\mu_I} S^\infty, \quad (5.12\gamma)$$

όπου οι ποσότητες T^∞ και S^∞ παρέχονται από τις σχέσεις

$$T^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4}, \quad S^\infty = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2} + i\sigma_{12}^\infty.$$

5.2.3 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου

Όταν η ανομοιογένεια του συστήματος υποστεί έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα είναι

$$E^{\text{strong}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^T \sigma_{\rho\rho}^{I,p+f} + u_\theta^T \sigma_{\rho\theta}^{I,p+f}) R d\theta, \quad (5.13)$$

όπου ο άνω δείκτης ‘strong’ έχει εισαχθεί για να περιγράψει τη μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου. Αυτή η εξίσωση αποτελεί τη 2D μορφή της (3.22) γραμμένη σε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) . Οι ελαστικές ενέργειες της μήτρας, της ανομοιογένειας και της διεπιφάνειας, αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις

$$E^{M,\text{strong}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{M,p+f} \sigma_{\rho\rho}^{M,p+f} + u_\theta^{M,p+f} \sigma_{\rho\theta}^{M,p+f}) R d\theta, \quad (5.14\alpha)$$

$$E^{I,\text{strong}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_\rho^{I,p+f} \sigma_{\rho\rho}^{I,p+f} + u_\theta^{I,p+f} \sigma_{\rho\theta}^{I,p+f}) R d\theta, \quad (5.14\beta)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [u_\rho^{M,p+f} (\sigma_{\rho\rho}^{M,f} - \sigma_{\rho\rho}^{I,f}) + u_\theta^{M,p+f} (\sigma_{\rho\theta}^{M,f} - \sigma_{\rho\theta}^{I,f})] R d\theta. \quad (5.14\gamma)$$

Τα διεπιφανειακά ελαστικά πεδία $\sigma_{\rho\rho}^{k,p}$, $u_\rho^{k,p}$ και $\sigma_{\rho\rho}^{k,f}$, $u_\rho^{k,f}$ υπολογίζονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις των Παραρτημάτων IV.1.1 και IV.3.1 για $\rho = R$. Αντικαθιστώντας αυτά τα διεπιφανειακά ελαστικά πεδία στις (5.13) και (5.14) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$E^{\text{strong}} = \frac{\pi R^2}{2} M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} f_1^t F^2 + \frac{\pi R^2}{4} M (1+\Pi) f_2^t |G|^2, \quad (5.15\alpha)$$

$$E^{M,\text{strong}} = \frac{\pi R^2}{2\mu_M} \left(M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \right)^2 f_1^M F^2 + \frac{\pi R^2}{8\mu_M} \kappa_M M^2 (1+\Pi)^2 f_2^M |G|^2, \quad (5.15\beta)$$

$$E^{I,\text{strong}} = \pi R^2 \frac{\kappa_I - 1}{4\mu_I} \left(M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \right)^2 f_1^I F^2 + \frac{\pi R^2}{8\mu_I} M^2 (1+\Pi)^2 f_2^I |G|^2, \quad (5.15\gamma)$$

$$E^S = \frac{\pi R^2}{2} \mu_M \left[1 - M \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} f_1^t \right] (f_1^t - 1) F^2 \\ + \frac{\pi R^2}{4} M (1+\Pi) \left[1 - \frac{\mu_M}{\mu_I \kappa_M} (f_2^t - 1) \left(1 + 3 \frac{\kappa_I}{\kappa_M} \frac{1+\Lambda}{1+\Pi} \right) \right] (f_2^t - 1) |G|^2. \quad (5.15\delta)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, έχουν εισαχθεί οι αδιάστατοι συντελεστές

$$f_1^t = \alpha_I, \quad f_2^t = \alpha_{II}, \quad (5.16\alpha)$$

$$f_1^M = \left[1 + \mu_M \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} (1 - \alpha_I) \right]^2, \quad (5.16\beta)$$

$$f_2^M = \left[1 - \frac{\mu_M}{\mu_I \kappa_M} (\alpha_{II} - 1) \right]^2 + 3 \left(\frac{\mu_M \kappa_I}{2\mu_I \kappa_M} \frac{1+\Lambda}{1+\Pi} \right)^2 (\alpha_{II} - 1)^2,$$

$$f_1^I = \alpha_I^2, \quad f_2^I = \alpha_{II}^2 + \frac{3\kappa_I}{\kappa_M^2} \left(\frac{1+\Lambda}{1+\Pi} \right)^2 (\alpha_{II} - 1)^2, \quad (5.16\gamma)$$

όπου οι ποσότητες α_I και α_{II} ορίζονται από τις σχέσεις

$$\alpha_I = \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{E_S}{R\mu_M}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_I - 1}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \frac{E_S}{R\mu_I}}, \quad (5.17\alpha)$$

$$\alpha_{II} = \frac{1 + \frac{1}{4} \left(\kappa_M \frac{\mu_I}{\mu_M} + 3\kappa_I \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \right) \frac{E_S}{R\mu_I}}{1 + \frac{\kappa_M (1 + \Pi) + 3\kappa_I (1 + \Lambda)}{4(1 + \kappa_M)} \frac{E_S}{R\mu_I}}. \quad (5.17\beta)$$

Ο αδιάστατος συντελεστής f_1^t , ορίζεται ως ο λόγος της ολικής ελαστικής ενέργειας διόγκωσης που αποθηκεύεται στο σύστημα με την ισχυρή διεπιφάνεια προς την ολική ελαστική ενέργεια διόγκωσης που αποθηκεύεται στο σύστημα με την τέλεια διεπιφάνεια, όταν $|G| = 0$. Ο συντελεστής f_2^t ορίζεται ως ο λόγος των αντίστοιχων ολικών στρωφικών ενεργειών που αποθηκεύονται στο σύστημα, όταν $F = 0$. Οι συντελεστές f_1^M, f_2^M και f_1^I, f_2^I ορίζονται με τον ίδιο τρόπο για τις ενέργειες διόγκωσης και τις στρωφικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και την ανομοιογένεια.

Για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu, \kappa_M = \kappa_I = 4 - 3\nu, \Lambda = \Pi = \Omega = 0$), οι εξισώσεις (5.15) απλοποιούνται στις

$$E^{\text{strong}} = \frac{\pi R^2}{2} M f_1^t F^2 + \frac{\pi R^2}{4} M f_2^t |G|^2, \quad (5.18\alpha)$$

$$E^{M,\text{strong}} = \frac{\pi R^2}{2\mu} M^2 f_1^M F^2 + \frac{\pi R^2}{8\mu} \kappa M^2 (f_2^M)^2 |G|^2, \quad (5.18\beta)$$

$$E^{I,\text{strong}} = \pi R^2 \frac{\kappa - 1}{4\mu} M^2 f_1^I F^2 + \frac{\pi R^2}{8\mu} M^2 f_2^I |G|^2, \quad (5.18\gamma)$$

$$E^S = \frac{\pi R^2}{2} \mu \left(1 - M \frac{\kappa - 1}{2\mu} f_1^t \right) (f_1^t - 1) F^2 + \frac{\pi R^2}{4} M \left[1 - \frac{4}{\kappa} (f_2^t - 1) \right] (f_2^t - 1) |G|^2, \quad (5.18\delta)$$

όπου οι συντελεστές α_I και α_{II} γίνονται

$$\alpha_I = \frac{(1 + \kappa)E_S + 2(1 + \kappa)R\mu}{(\kappa - 1)E_S + 2(1 + \kappa)R\mu}, \quad (5.19\alpha)$$

$$\alpha_{II} = \frac{1}{4} \frac{\kappa(4 + \kappa)E_S + 4(1 + \kappa)R\mu}{4\kappa E_S + 4(1 + \kappa)R\mu}. \quad (5.19\beta)$$

Για τη φόρτιση στο άπειρο, η ολική ενέργεια στη μήτρα, και συνεπώς, η ολική ενέργεια στο σύστημα είναι άπειρη. Ωστόσο, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια και στη διεπιφάνεια μπορούν να προσδιορισθούν από τις εξισώσεις

$$E^{I,\text{strong}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\rho}^{I,p+f} u_\rho^{I,p+f} + \sigma_{\rho\theta}^{I,p+f} u_\theta^{I,p+f}) R d\theta, \quad (5.20\alpha)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [u_\rho^{M,p+f} (\sigma_{\rho\rho}^{M,f} - \sigma_{\rho\rho}^{I,f}) + u_\theta^{M,p+f} (\sigma_{\rho\theta}^{M,f} - \sigma_{\rho\theta}^{I,f})] R d\theta. \quad (5.20\beta)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι ποσότητες $\sigma_{\alpha\beta}^{k,p+f}$ και $u_{\alpha}^{k,p+f}$ δίνονται από τις (5.6). Αντικαθιστώντας τα πεδία αυτά στις (5.20) προκύπτει

$$E^{I,\text{strong}} = \pi R^2 \frac{\kappa_I - 1}{\mu_I} \left(\frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \right)^2 \left[f_1^t - \frac{1 + \kappa_M}{2} \frac{1 - \Omega}{1 + \Lambda} (f_1^t - 1) \right]^2 (T^\infty)^2$$

$$+ \frac{\pi R^2}{2\mu_I} (1 + \Pi)^2 \left\{ \left[1 - \frac{\mu_M}{\mu_I \kappa_M} (f_2^t - 1) \right]^2 + 3\kappa_I \left[\frac{\mu_M}{\mu_I \kappa_M^2} \frac{1 + \Lambda}{1 + \Pi} \right]^2 (f_2^t - 1)^2 \right\} |S^\infty|^2 \quad (5.21\alpha)$$

$$E^S = \frac{\pi R^2}{2} \mu_M \left[(1 + \kappa_M) \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \right]^2 \left(1 - M \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} f_1^t \right) (f_1^t - 1) (T^\infty)^2$$

$$+ \pi R^2 \frac{\mu_M}{\mu_I^2} \frac{1 + \kappa_M}{2\kappa_M^2} (1 + \Pi) \left[1 - \frac{\mu_M}{\mu_I \kappa_M} (f_2^t - 1) \left(1 + 3 \frac{\kappa_I}{\kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 + \Pi} \right) \right] (f_2^t - 1) |S^\infty|^2, \quad (5.21\beta)$$

όπου οι συντελεστές f_1^t , f_2^t και α_I , α_{II} παρέχονται από τις (5.16γ) και (5.17), αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (5.21), για την ειδική περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\mu_M = \mu_I = \mu$, $\kappa_M = \kappa_I = 4 - 3\nu$, $\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), γίνονται

$$E^{I,\text{strong}} = \pi R^2 \frac{\kappa - 1}{\mu} \left[f_1^t - \frac{1 + \kappa}{2} (f_1^t - 1) \right]^2 (T^\infty)^2$$

$$+ \frac{\pi R^2}{2\mu} \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa} (f_2^t - 1) \right)^2 + \frac{3}{\kappa} (f_2^t - 1)^2 \right] |S^\infty|^2 \quad (5.22\alpha)$$

$$E^S = \frac{\pi R^2}{2} \mu \left[(1 + \kappa) \frac{\kappa - 1}{2\mu} \right]^2 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{1 + \kappa} f_1^t \right) (f_1^t - 1) (T^\infty)^2$$

$$+ \pi R^2 \frac{1}{2\mu} \frac{1 + \kappa}{\kappa^2} \left[1 - \frac{4}{\kappa} (f_2^t - 1) \right] (f_2^t - 1) |S^\infty|^2. \quad (5.22\beta)$$

5.2.4 Μεταβολή στην ολική ενέργεια του συστήματος

Στη συνέχεια θα υπολογισθεί η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας στο σύστημα, όταν η τέλεια διεπιφάνειά του μετασχηματισθεί σε μία διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου ενώ είναι φορτισμένο. Στην περίπτωση που το σύστημα είναι σε ένταση από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας, η μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας θα είναι

$$\delta\Pi = \delta E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\rho}^{I,f} u_\rho^T + \sigma_{\rho\theta}^{I,f} u_\theta^T) R d\theta. \quad (5.23)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (4.11) και (4.21γ), (IV.52) και (IV.53), η (5.23) γίνεται

$$\delta\Pi = \delta E = \frac{\pi R^2}{2} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} (f_1^t - 1) F^2 + \frac{\pi R^2}{4} M (1 + \Pi) (f_2^t - 1) |G|^2. \quad (5.24)$$

Όταν το σύστημα είναι σε ένταση από μία ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\delta\Pi = -\delta E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\Delta\sigma_{\rho\rho}^f u_{\rho}^{M,p} + \Delta\sigma_{\rho\theta}^f u_{\theta}^{M,p}) R d\theta. \quad (5.25)$$

Η (5.25) είναι η 2D μορφή της (3.42) σε πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) . Στη σχέση αυτή, οι διεπιφανειακές μετατοπίσεις $u_{\alpha}^{M,p}$ δίνονται από τις (IV.17) και (IV.18) για $\rho = R$. Οι ποσότητες $\Delta\sigma_{\rho\rho}^f = \sigma_{\rho\rho}^{M,f} - \sigma_{\rho\rho}^{I,f}$ και $\Delta\sigma_{\rho\theta}^f = \sigma_{\rho\theta}^{M,f} - \sigma_{\rho\theta}^{I,f}$ είναι η ασυνέχεια των ακτινικών και εφαπτομενικών τάσεων πάνω στη διεπιφάνεια, όπου οι ποσότητες $\sigma_{\alpha\beta}^{M,f}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{I,f}$ και $\sigma_{\alpha\beta}^{k,f}$ παρέχονται από τις (IV.49) και (IV.50). Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην (5.25) προκύπτει

$$\begin{aligned} \delta\Pi = -\delta E = \frac{\pi R^2}{2} \left[(1 + \kappa_M) \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \right]^2 M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} (f_1^t - 1) (T^\infty)^2 \\ + \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{1 + \kappa_M}{\mu_I \kappa_M} \right)^2 M (1 + \Pi) (f_2^t - 1) |S^\infty|^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.3 ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ

5.3.1 Οι διεπιφανειακές συνθήκες και η φόρτιση του συστήματος

Οι ποσότητες που περιγράφουν την αντιεπίπεδη παραμόρφωση της μεμβράνης είναι η μετατόπιση u_3^S και η μεμβρανική τάση $\sigma_{3\theta}^S$ (δύναμη/μήκος), οι οποίες συνδέονται με τη σχέση

$$\sigma_{3\theta}^S = 2\mu_S \varepsilon_{3\theta}^S, \quad (5.27)$$

όπου,

$$\varepsilon_{3\theta}^S = \frac{1}{2R} \frac{\partial u_3^S}{\partial \theta} \quad (5.28)$$

είναι η μεμβρανική παραμόρφωση, το μ_S είναι το μεμβρανικό μέτρο διάτμησης, το οποίο είναι μία θετική ποσότητα. Η σχέση (5.28) προκύπτει από την (2.89γ), παίρνοντας υπόψιν ότι για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση ισχύει $\partial u_\theta^S / \partial x_3 = 0$. Η ισορροπία και η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων ενός διεπιφανειακού στοιχείου dS οδηγεί στις ακόλουθες διεπιφανειακές συνθήκες για τη μεμβράνη

$$\sigma_{3\rho}^M - \sigma_{3\rho}^I = -\frac{\partial \sigma_{3\theta}^S}{R \partial \theta}, \quad u_3^M = u_3^I = u_3^S. \quad (5.29)$$

Λόγω των (5.27) και (5.28), η πρώτη εξίσωση από τις (5.29) μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_{3\rho}^M - \sigma_{3\rho}^I = -\frac{\mu_S}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^S}{\partial \theta^2}. \quad (5.30)$$

Για τη διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, η δεύτερη παραμορφωσιακή κατάσταση παράγεται από μία διανομή επιφανειακών δυνάμεων f που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η κατανομή των διεπιφανειακών αυτών δυνάμεων προσομοιώνει το άλμα των διεπιφανειακών τάσεων $\sigma_{3\rho}^M - \sigma_{3\rho}^I$ που εμφανίζεται στην (5.29). Για την παραμόρφωση αυτή, τα ελαστικά πεδία θα δηλώνονται με $\sigma_{3\alpha}^{k,f}$, $u_3^{k,f}$ και το σχετικό ελαστικό πρόβλημα θα καλείται f -πρόβλημα. Τα ελαστικά πεδία του συστήματος, που θα δηλώνονται με $\sigma_{3\alpha}^{k,p+f}$, $u_3^{k,p+f}$ ($k = M$ ή I), προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\sigma_{3\alpha}^{k,p+f} = \sigma_{3\alpha}^{k,p} + \sigma_{3\alpha}^{k,f}, \quad u_3^{k,p+f} = u_3^{k,p} + u_3^{k,f}. \quad (5.31)$$

Η επιφανειακή δύναμη f θα πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη διεπιφανειακή συνθήκη

$$\sigma_{3\rho}^{M,f} - \sigma_{3\rho}^{I,f} = -\frac{\mu_S}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_3^{M,p} + u_3^{M,f}) = -\frac{\mu_S}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u_3^{I,p} + u_3^{I,f}). \quad (5.32)$$

Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την (5.30) λαμβάνοντας υπόψιν την (5.31) και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια των διεπιφανειακών τάσεων $\sigma_{3\rho}^{M,p} = \sigma_{3\rho}^{I,p}$.

5.3.2 Επίλυση των f -προβλημάτων

Για τις δύο φορτίσεις που εξετάζονται, η ακόλουθη μορφή της $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ που υπεισέρχεται στην (III.22a) επιλέγεται

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = Bz + \bar{B}\bar{z}, \quad (5.33)$$

όπου η B είναι μία μιγαδική σταθερά. Όπως στα s -προβλήματα, έτσι και εδώ, τα διφασικά δυναμικά $f_0(z)$ αναζητούνται σε γραμμική μορφή, των οποίων οι συντελεστές προσδιορίζονται απαιτώντας σύγκλιση της $f_M(z)$ στο άπειρο. Με τη διαδικασία αυτή βρίσκεται ότι

$$f_0(z) = -\frac{i}{2\mu_M} B. \quad (5.34)$$

Τα ελαστικά πεδία των f -προβλημάτων υπολογίζονται σε όρους των συντελεστών B και παρουσιάζονται στο Παράρτημα IV.3.2. Ο προσδιορισμός του συντελεστή B γίνεται απαιτώντας ικανοποίηση της συνθήκης (5.32). Προκύπτει ότι

$$B = i \frac{\mu_S \mu_I}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S} \mathcal{E}^T, \quad (5.35)$$

για τον ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας, και

$$B = i \frac{\mu_S}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S} \Sigma^\infty, \quad (5.36)$$

για τη φόρτιση με ομοιόμορφες διατμητικές τάσεις της μήτρας στο άπειρο.

5.3.3 Ελαστικές ενέργειες στο σύστημα με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου

Όταν το σύστημα έχει μία διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου και οι τάσεις προέρχονται από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό της ανομοιογένειας, η ολική ελαστική ενέργεια στο σύστημα προσδιορίζεται από τη σχέση (3.22), η οποία για αντιεπίπεδη παραμόρφωση παίρνει τη μορφή

$$E^{strong} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p+f} u_3^T R d\theta. \quad (5.37)$$

Οι ελαστικές ενέργειες στη μήτρα, την ανομοιογένεια και τη διεπιφάνεια υπολογίζονται, αντίστοιχα, από τις (3.6) και (3.8) οι οποίες, για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση, εξειδικεύονται στις σχέσεις

$$E^{M,strong} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{M,p+f} u_3^{M,p+f} R d\theta, \quad (5.38\alpha)$$

$$E^{I,strong} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p+f} u_3^{I,p+f} R d\theta, \quad (5.38\beta)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{3\rho}^{M,f} - \sigma_{3\rho}^{I,f}) u_3^{M,p+f} R d\theta. \quad (5.38\gamma)$$

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα των (5.37), (5.38), προσδιορίζονται από τις αντίστοιχες σχέσεις που παρουσιάζονται στα Παραρτήματα IV.1.2 και IV.3.2 θέτοντας $\rho = R$. Από τις (5.37) και (5.38), μετά από ολοκλήρωση, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$E^{strong} = 2\pi R^2 \frac{(R\mu_M + \mu_S)\mu_I}{R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (5.39\alpha)$$

$$E^{M,strong} = 2\pi R^2 \frac{R^2 \mu_I^2 \mu_M}{[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (5.39\beta)$$

$$E^{I,strong} = 2\pi R^2 \frac{(R\mu_M + \mu_S)^2 \mu_I}{[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]^2} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (5.39\gamma)$$

$$E^S = 2\pi R^2 \frac{R\mu_I^2 \mu_S}{[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]^2} |\mathcal{E}^T|^2. \quad (5.39\delta)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δείχνουν μία ισχυρή εξάρτηση των ελαστικών ενεργειών, που αποθηκεύονται σε επιμέρους τμήματα του συστήματος, από το μέγεθος της ανομοιογένειας. Όταν $R \rightarrow \infty$, ο λόγος $E^S/E^{I,weak}$ τείνει στο μηδέν, ενώ οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα και την ανομοιογένεια τείνουν στις αντίστοιχες ενέργειες της τέλει διεπιφάνειας που παρέχονται από τις (4.65β) και (4.65γ).

Όπως προαναφέρθηκε, για τη φόρτιση με διατμητικές τάσεις στο άπειρο σύνορο της μήτρας, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη μήτρα, και συνεπώς, η ελαστική ενέργεια στο σύστημα είναι άπειρη. Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια και στη διεπιφάνεια προσδιορίζονται από τις (3.6β) και (3.8) στη μορφή

$$E^{I,\text{strong}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{3\rho}^{M,p+f} - \sigma_{3\rho}^{I,p+f}) u_3^{M,p+f} R d\theta, \quad (5.40\alpha)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{3\rho}^{I,p+f} u_3^{I,p+f} R d\theta. \quad (5.40\beta)$$

Υπολογίζοντας τα διεπιφανειακά πεδία που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις από τα Παραρτήματα IV.1.2 και IV.3.2, από την ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών προκύπτει

$$E^{I,\text{strong}} = 2\pi R^2 \frac{R^2 \mu_I}{[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]^2} |\Sigma^\infty|^2, \quad (5.41\alpha)$$

$$E^S = 2\pi R^2 \frac{R \mu_S}{[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]^2} |\Sigma^\infty|^2. \quad (5.41\beta)$$

Όταν $R \rightarrow \infty$, ο λόγος $E^S/E^{I,\text{strong}}$ τείνει στο μηδέν, ενώ η $E^{I,\text{strong}}$ τείνει στην ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια με τέλεια διεπιφάνεια, που παρέχεται από την (4.69).

5.3.4 Μεταβολή στην ολική δυναμική ενέργεια

Η μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος που βρίσκεται σε αντιεπίπεδη παραμόρφωση εξαιτίας του σχηματισμού μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου (ισχυρή διεπιφάνεια) υπολογίζεται από τις γενικές εξισώσεις (3.42) και (3.48). Οι εξειδικευμένες μορφές των εξισώσεων αυτών για αντιεπίπεδη παραμόρφωση και κυκλική διεπιφάνεια είναι

$$\delta\Pi = -\delta E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^T \sigma_{3\rho}^{I,f} R d\theta, \quad (5.42)$$

για την περίπτωση του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης στην ανομοιογένεια, και

$$\delta\Pi = -\delta E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{3\rho}^{M,f} - \sigma_{3\rho}^{I,f}) u_3^{M,p} R d\theta, \quad (5.43)$$

για τις ομοιόμορφες διατμητικές τάσεις στο άπειρο. Χρησιμοποιώντας τις σχετικές σχέσεις των Παραρτημάτων IV.1.2 και IV.3.2 σε συνδυασμό με την (4.52), οι παραπάνω εξισώσεις παρέχουν

$$\delta\Pi = -\delta E = 2\pi R^2 \frac{\mu_S \mu_I^2}{(\mu_M + \mu_I)[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]} |\mathcal{E}^T|^2, \quad (5.44\alpha)$$

$$\delta\Pi = -\delta E = 2\pi R^2 \frac{\mu_S}{(\mu_M + \mu_I)[R(\mu_M + \mu_I) + \mu_S]} |\Sigma^\infty|^2. \quad (5.44\beta)$$

Όπως αναμενόταν, ο μετασχηματισμός μιας τέλειας διεπιφάνειας σε διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, όταν το σύστημα του Σχήματος 4.1 βρίσκεται σε αντιεπίπεδη παραμόρφωση, προκαλεί θετική μεταβολή της ολικής δυναμικής του ενέργειας.

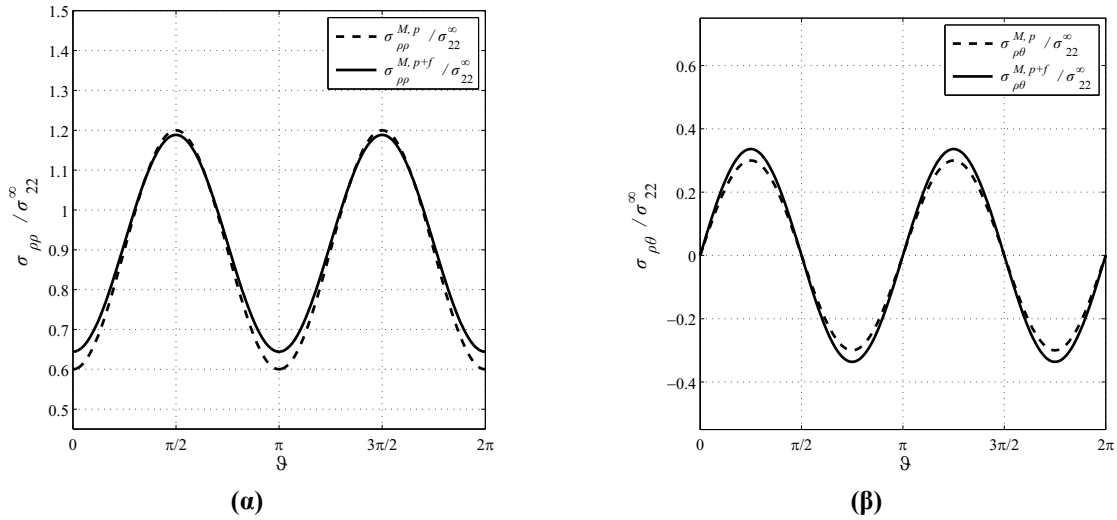
5.4 Συζήτηση και συμπεράσματα

1. Εύκολα δείχνεται ότι οι συντελεστές f_I^t και f_{II}^t που υπεισέρχονται στις (5.15) είναι μεγαλύτεροι της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα είναι πάντα μεγαλύτερη από την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται σε αυτό, όταν η διεπιφάνειά του είναι τέλεια. Όταν η ακτίνα της ανομοιογένειας αυξάνει τείνοντας στο άπειρο, οι συντελεστές f_I^t και f_{II}^t τείνουν στη μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση αυτή, η διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου προσεγγίζει την τέλεια διεπιφάνεια.
2. Προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου στο τασικό πεδίο που αναπτύσσεται στο σύστημα, παρήχθησαν αριθμητικά αποτελέσματα για μία σκληρή ανομοιογένεια με $R = 20$ nm, $E_I = 160$ GPa, $E_M = 80$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Οι ελαστικές παράμετροι της μεμβράνης εκτιμήθηκαν προσομοιώνοντας τη μεμβράνη με ένα πολύ λεπτό κέλυφος μέτρου ελαστικότητας $E_{sh} = 500$ GPa, $\nu_{sh} = 0.25$ και πάχους $h_{sh} = 1.5$ nm. Οι παράμετροι λ_S και μ_S εκτιμήθηκαν από τις σχέσεις,

$$\lambda_S = \frac{\nu_{sh} E_{sh} h_{sh}}{(1 + \nu_{sh})(1 - \nu_{sh})}, \quad \mu_S = \frac{E_{sh} h_{sh}}{2(1 + \nu_{sh})}, \quad (5.45)$$

που προκύπτουν από τη σύγκριση των καταστατικών εξισώσεων (??) με τις καταστατικές εξισώσεις των λεπτών κελυφών (Reissner, 1941). Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι τιμές $\lambda_S = 200$ N/m και $\mu_S = 300$ N/m.

Στα Σχήματα 5.1 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων διεπιφανειακών τάσεων στη μήτρα κατά μήκος μίας τέλειας και μιας μη-τέλειας διεπιφάνειας, όταν το σύστημα καταπονείται με ομοιόμορφες τάσεις σ_{22}^∞ , $\sigma_{11}^\infty = 0.5\sigma_{22}^\infty$ και $\sigma_{12}^\infty = 0$ στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας. Στα Σχήματα 5.2 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων ορθών εφαπτομενικών τάσεων της μήτρας και της ανομοιογένειας για την τέλεια και μη-τέλεια διεπιφάνεια. Τα Σχήματα αυτά δείχνουν ότι η εμφάνιση μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού-τύπου στο σύστημα *μειώνει* το μέγεθος των ορθών ακτινικών τάσεων ενώ *αυξάνει* το μέγεθος των διατμητικών τάσεων στη μήτρα κατά μήκος της διεπιφάνειας. Επίσης, οι ορθές εφαπτομενικές τάσεις *μειώνονται* και στη μήτρα και την ανομοιογένεια. Στα Σχήματα 5.3 και 5.4 δείχνονται οι αντίστοιχες μεταβολές για μια *μαλακή* ανομοιογένεια για τιμές $R = 20$ nm, $E_I = 80$ GPa, $E_M = 160$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Από τα Σχήματα δείχνεται ότι οι ορθές ακτινικές τάσεις και οι διατμητικές τάσεις *αυξάνονται* κατά μήκος της διεπιφάνειας ενώ οι ορθές εφαπτομενικές τάσεις *μειώνονται* και στη μήτρα και την ανομοιογένεια.

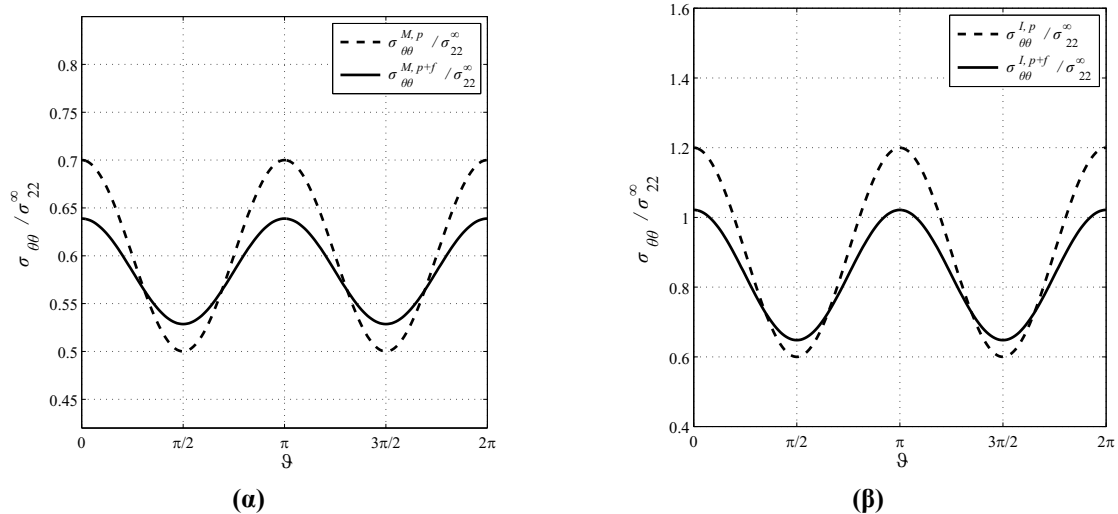


Σχήμα 5.1 Η μεταβολή (α) των κανονικοποιημένων ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των κανονικοποιημένων διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια σκληρή ανομοιογένεια ($R = 20$ nm, $E_M = E_I/2 = 80$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$, $\lambda_S = \mu_S/3 = 200$ N/m)

Για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση συντάχθηκαν τα αντίστοιχα διαγράμματα που δείχνονται στα Σχήματα 5.5 και 5.6, αντίστοιχα, για μια σκληρή και για μια μαλακή ανομοιογένεια. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές $E_{sh} = 500$ GPa, $\nu_{sh} = 0.25$ και $h_{sh} = 1.5$ nm. Από τα διαγράμματα γίνεται φανερό ότι οι τάσεις $\sigma_{3\rho}$ αυξάνονται ενώ οι $\sigma_{3\theta}$ μειώνονται κατά μήκος της διεπιφάνειας.

3. Για τη διερεύνηση της επίδρασης του μεγέθους της ανομοιογένειας στην ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια συντάχθηκαν τα διαγράμματα που δείχνονται στο Σχήμα 5.7. Στα διαγράμματα αυτά η ακτίνα R της ανομοιογένειας έχει επιλεχθεί να μεταβάλλεται από 10 έως 200 nm και για την ελαστική μεμβράνη $E_{sh} = 500$ GPa, $\lambda_S = \mu_S/3 = 200$ N/m. Το Σχήμα 5.7(α) απεικονίζει τη μεταβολή του λόγου $E^S/E^{I, \text{strong}}$ ως μία συνάρτηση του μεγέθους R της ανομοιογένειας, όταν ο ομοιόμορφος μετασχηματισμός φάσης αντιστοιχεί σε μία διόγκωση ($|G| = 0$) και το Σχήμα 5.7(β) τη μεταβολή του ίδιου λόγου για μία στροφική παραμόρφωση ($F = 0$) στην ανομοιογένεια. Οι μεταβολές αυτές υπολογίζονται για τις ακόλουθες τρεις διακριτές περιπτώσεις του συστήματος: η ανομοιογένεια είναι πιο σκληρή από τη μήτρα ($E_I = 160$ GPa, $E_M = 80$ GPa), η ανομοιογένεια και η μήτρα είναι από το ίδιο υλικό ($E_I = E_M = 120$ GPa), και η ανομοιογένεια είναι πιο μαλακή από τη μήτρα ($E_I = 80$ GPa, $E_M = 160$ GPa). Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, οι λόγοι του Poisson λαμβάνονται $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Τα διαγράμματα δείχνουν ότι ο λόγος $E^S/E^{I, \text{strong}}$ παρουσιάζει ένα μέγιστο στην περιοχή των μικρών τιμών της ακτίνας R και συγκλίνει στο μηδέν όταν η ακτίνα αυξάνεται. Στην περίπτωση της διόγκωσης, ο λόγος αυξάνεται όσο η ανομοιογένεια γίνεται πιο σκληρή. Στην περίπτωση της στροφικής παραμόρφωσης, για μικρές τιμές της ακτίνας R όσο η ανομοιογένεια γίνεται πιο σκληρή ο λόγος μειώνεται ενώ για μεγάλες τιμές της ακτίνας R ο λόγος αυξάνεται.

Στην περίπτωση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης με ομοιόμορφες διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις, ο λόγος της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια περιγράφεται από τη



Σχήμα 5.2 Η μεταβολή των κανονικοποιημένων ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια σκληρή διεπιφάνεια ($E_M = E_I/2 = 80$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$, $\lambda_S = \mu_S/3 = 200$ N/m)

σχέση

$$\frac{E^S}{E^{I,\text{strong}}} = \frac{\mu_S}{R\mu_I}. \quad (5.46)$$

Η μεταβολή του λόγου συναρτήσει του μεγέθους της ακτίνας R της ανομοιογένειας αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.9 για τις ίδιες τιμές των μηχανικών παραμέτρων που ελήφθησαν στη συνεπίπεδη κατάσταση. Οι καμπύλες του Σχήματος αυτού δείχνουν ότι η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια ως προς την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια μειώνεται, όταν η ανομοιογένεια γίνεται πιο σκληρή και όσο αυξάνεται η ακτίνα της.

4. Η μεμβρανική τάση $\sigma_{\theta\theta}^S$ γίνεται εφελκυστική, όταν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες

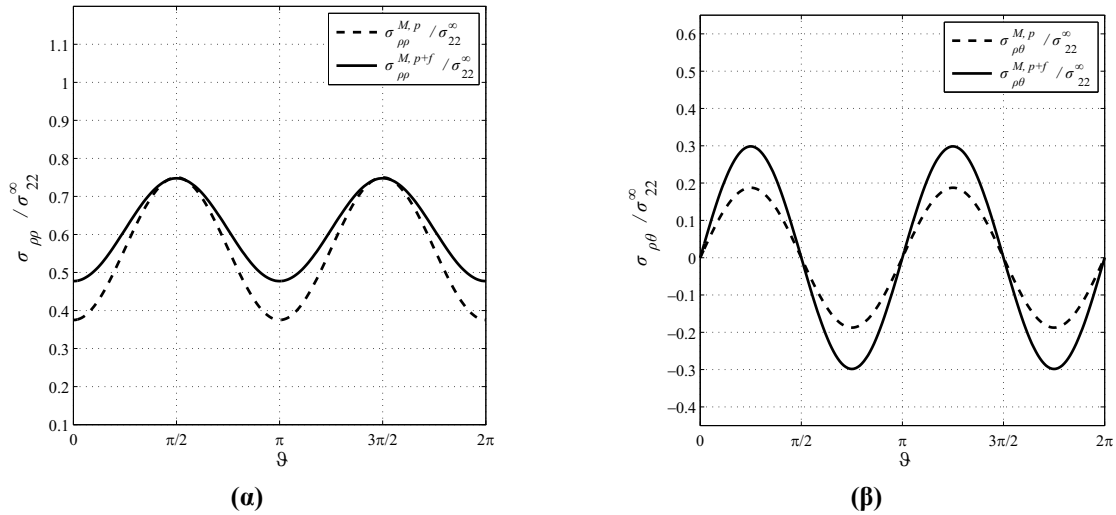
$$h_1|F| > |G|, \quad h_2|T^\infty| > |S^\infty|, \quad (5.47)$$

όπου οι συντελεστές h_1 και h_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$h_1 = \left| \frac{\kappa_M \alpha_{II} - 1}{2 \alpha_I - 1} \right|, \quad h_2 = \kappa_M^2 \left| \frac{\kappa_I - 1 \alpha_{II} - 1}{4 \alpha_I - 1} \right|. \quad (5.48)$$

5. Για την περίπτωση όπου η φόρτιση στο σύστημα οφείλεται σε ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις στη μήτρα, η ελαστική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται στη μεμβράνη προσδιορίζεται από τη σχέση (5.15δ). Αν θεωρήσουμε ότι το χαρακτηριστικό μέγεθος της μεμβράνης E_S μεταβάλλεται, τότε για την περίπτωση όπου ο ομοιόμορφος μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε μία διόγκωση ($|G| = 0$), η ενέργεια E^S γίνεται μέγιστη όταν ισχύει

$$\frac{E_S}{R} = 2\mu_I \frac{1 + \kappa_M}{\kappa_I - 1} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega}. \quad (5.49)$$



Σχήμα 5.3 Η μεταβολή (α) των κανονικοποιημένων ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των κανονικοποιημένων διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια μαλακή ανομοιογένεια ($R = 20$ nm, $E_M = 2E_I = 160$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$, $\lambda_S = \mu_S/3 = 200$ N/m)

Η μέγιστη τιμή που παίρνει δίνεται από τη σχέση

$$(E^S)_{\max} = \frac{\pi R^2}{2} \frac{1}{1 + \kappa_M} \frac{\mu_I}{\kappa_I - 1} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} F^2, \quad (5.50)$$

Όταν ο ομοιόμορφος μετασχηματισμός αντιστοιχεί σε μία στροφική παραμόρφωση ($F = 0$), η ελαστική ενέργεια γίνεται μέγιστη όταν ισχύει

$$\frac{E_S}{R} = \frac{4\mu_I(1 + \kappa_M)}{\kappa_M(1 + \Pi) + 3\kappa_I(1 + \Lambda)}, \quad (5.51)$$

και η μέγιστη τιμή που παίρνει είναι

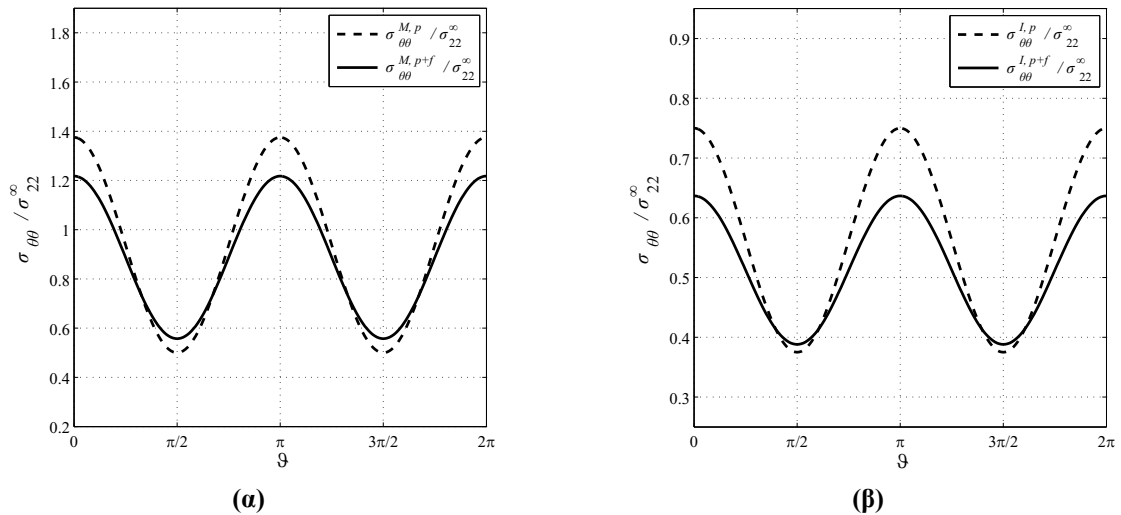
$$(E^S)_{\max} = \frac{\pi R^2}{8} \left(\kappa_M \frac{1 + \Pi}{1 + \kappa_M} \right)^2 \frac{\mu_I(1 + \kappa_M)}{\kappa_M(1 + \Pi) + 3\kappa_I(1 + \Lambda)} |G|^2. \quad (5.52)$$

Εάν η ελαστική παραμόρφωση οφείλεται σε ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, και η φόρτιση προκαλεί διαστολή του συστήματος ($|S^\infty| = 0$) η μέγιστη τιμή της ελαστικής ενέργειας E^S λαμβάνεται όταν ισχύει η σχέση (5.49) και η μέγιστη τιμή δίνεται στη μορφή

$$(E^S)_{\max} = \frac{\pi R^2}{8} (1 + \kappa_M) \frac{\kappa_I - 1}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} (T^\infty)^2. \quad (5.53)$$

Όταν η φόρτιση στο άπειρο είναι διατμητική, η ελαστική ενέργεια E^S γίνεται μέγιστη όταν ισχύει η σχέση (5.51) και η μέγιστη τιμή προκύπτει στη μορφή

$$(E^S)_{\max} = \frac{\pi R^2}{8} \frac{1 + \kappa_M}{\mu_I} \frac{(1 + \Pi)^2}{\kappa_M(1 + \Pi) + 3\kappa_I(1 + \Lambda)} |S^\infty|^2. \quad (5.54)$$



Σχήμα 5.4 Η μεταβολή των κανονικοποιημένων ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μη-τέλεια διεπιφάνεια, για μια μαλακή διεπιφάνεια ($E_M = 2E_I = 160$ GPa, $\nu_M = \nu_I = 0.25$, $\lambda_S = \mu_S/3 = 200$ N/m)

Από τις σχέσεις (5.49) και (5.45) προκύπτει ο κρίσιμος λόγος του πάχους της μεμβράνης ως προς την ακτίνα της ανομοιογένειας για την οποία η ελαστική ενέργεια στη μεμβράνη, στην περίπτωση της διαστολή, είναι μέγιστη

$$\frac{h_{sh}}{R} = \frac{1 - \nu_{sh}^2}{E_{sh}} \frac{4(1 + \nu_M)(1 - \nu_M)^2}{(1 - 2\nu_I)(1 + \nu_I)} \frac{E_I^2}{E_I(1 + \nu_M) + E_M(1 + \nu_I)(1 - 2\nu_I)}. \quad (5.55)$$

Αντίστοιχη σχέση προκύπτει για την περίπτωση όπου το σύστημα υποβάλλεται σε διατμητική παραμόρφωση. Αντικαθιστώντας την (5.51) στην (5.45) προκύπτει

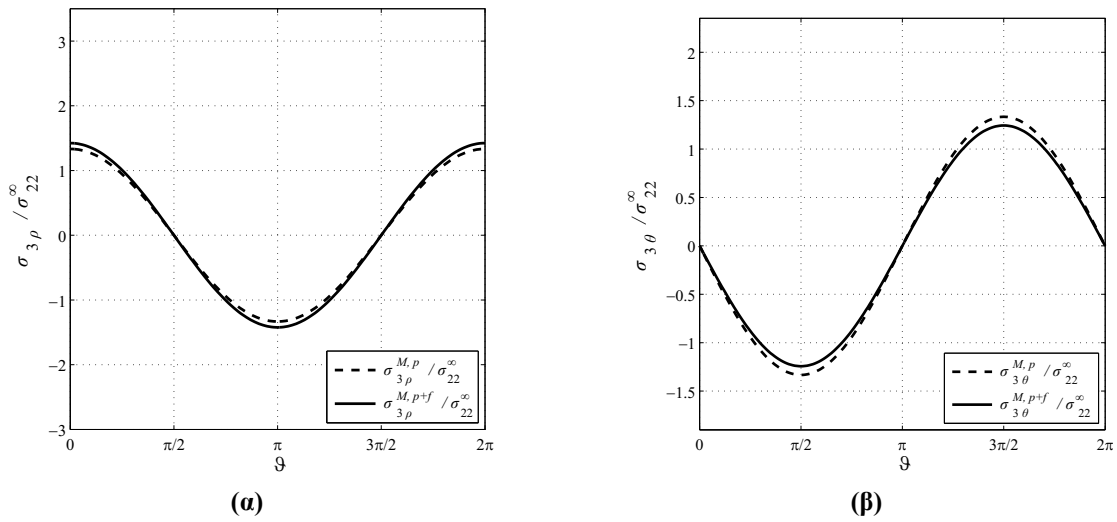
$$\frac{h_{sh}}{R} = \frac{1 - \nu_{sh}^2}{E_{sh}} \frac{\frac{E_I + E_M(3 - 4\nu_I)(1 + \nu_I)}{(1 + \nu_M)(1 + \nu_I)}}{E_M(1 + \nu_I)(3 - 4\nu_I)(3 - 2\nu_M) + E_I(1 + \nu_M)(3 - 4\nu_M)(5 - 6\nu_I)}. \quad (5.56)$$

Στην περίπτωση του εγκλωβίσματος ($\nu_M = \nu_I = \nu$, $E_M = E_I = E$) οι (5.55) και (5.56) γίνονται

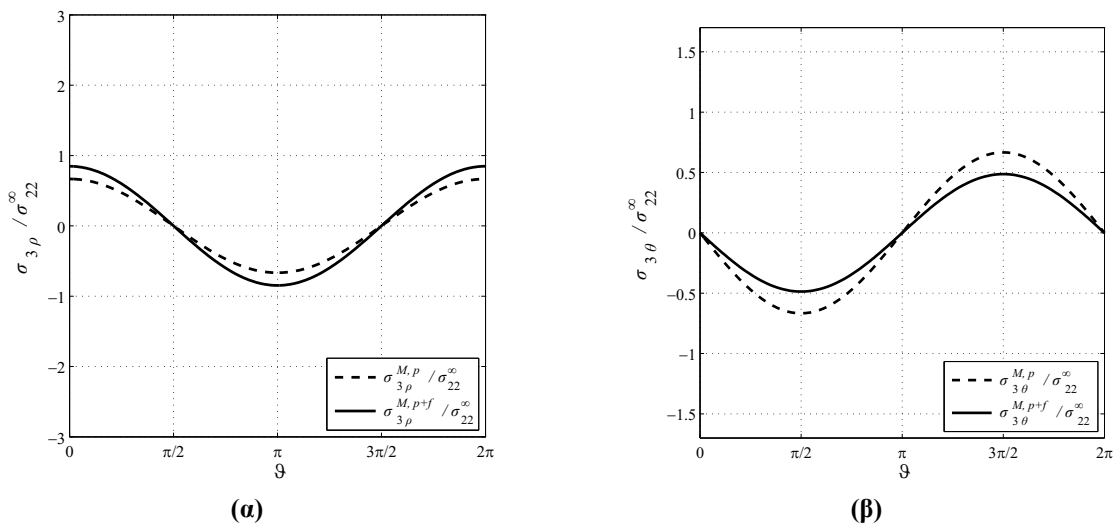
$$\frac{h_{sh}}{R} = \frac{4(1 - \nu_{sh}^2)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{E_{sh}}, \quad (5.57\alpha)$$

$$\frac{h_{sh}}{R} = \frac{16(1 - \nu_{sh}^2)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - 4\nu)} \frac{E}{E_{sh}}. \quad (5.57\beta)$$

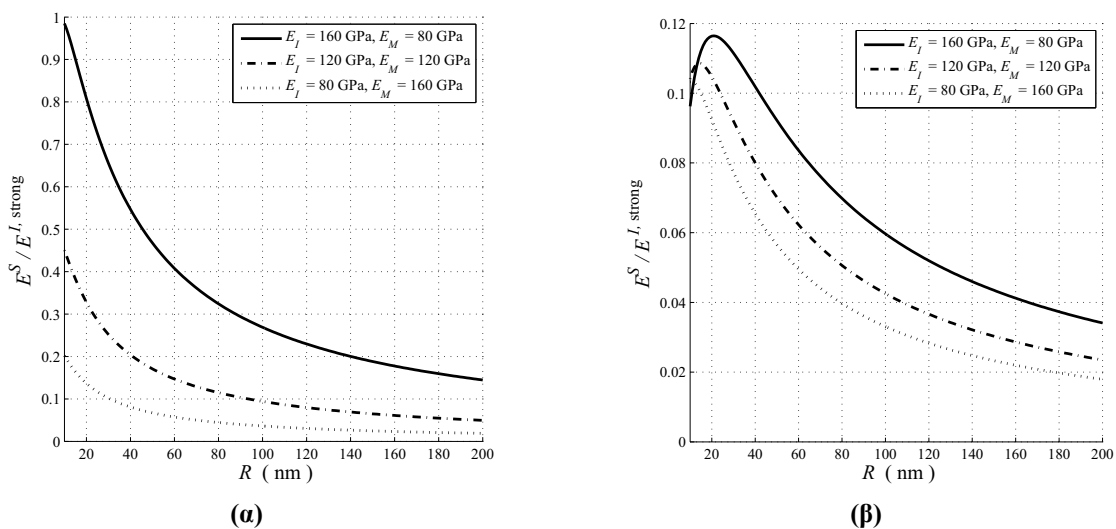
Για το πάχος της μεμβράνης h_{sh} σε σχέση με την ακτίνα R της ανομοιογένειας ισχύει $h_{sh}/R \ll 1$. Επίσης, δείχνεται ότι η μεμβράνη μπορεί να ενισχύσει το σύστημα όταν για το λόγο των μέτρων ελαστικότητας της μεμβράνης και των διεπιφανειακών υλικών ισχύει $E/E_{sh} \ll 1$. Επίσης, από τις (5.57α) και (5.57β) δείχνεται ότι εάν είναι δεδομένη η ακτίνα της ανομοιογένειας R και το πάχος της μεμβράνης h_{sh} μπορεί να επιλεχθεί υλικό μέτρου ελαστικότητας E_{sh} τέτοιο ώστε να ικανοποιείται μία από τις παραπάνω σχέσεις (5.57α) ή (5.57β). Σ' αυτήν την περίπτωση η ελαστική ενέργεια η οποία θα αποθηκευτεί στη μεμβράνη θα είναι η μέγιστη.



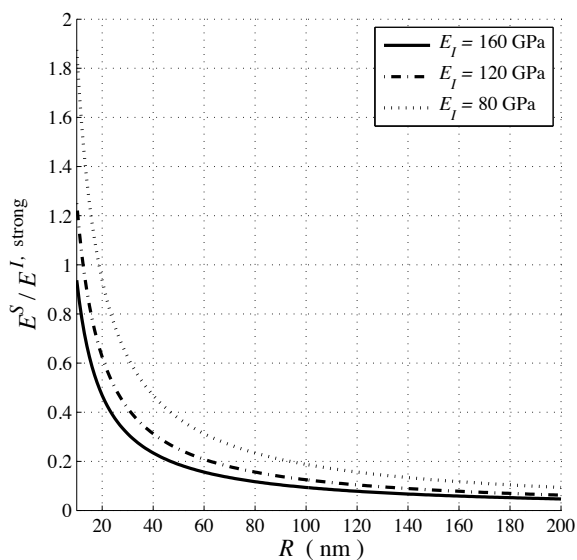
Σχήμα 5.5 Η μεταβολή των των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, όταν $E_M = 80$ GPa και $E_I = 160$ GPa



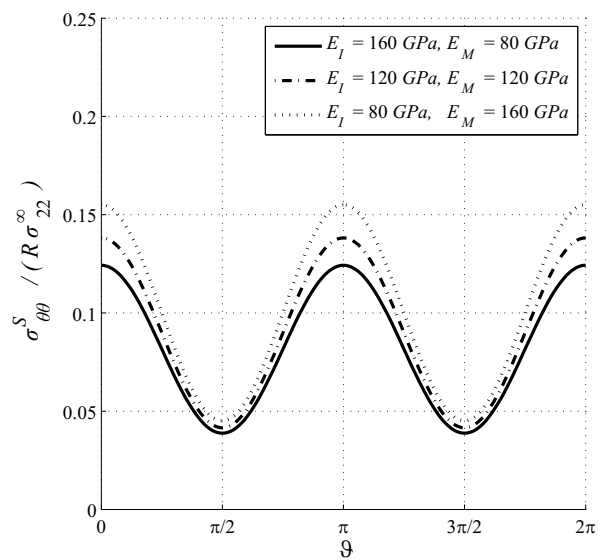
Σχήμα 5.6 Η μεταβολή των των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μη-τέλεια διεπιφάνεια, όταν $E_M = 160$ GPa και $E_I = 80$ GPa



Σχήμα 5.7 Ο λόγος $E^S / E^{I, \text{strong}}$ σε σύγκριση με το μέγεθος της ανομοιογένειας R (α) για διαστολή ($|G| = 0$) και (β) για συστροφή ($F = 0$) στην ανομοιογένεια



Σχήμα 5.8 Ο λόγος των ενεργειών $E^S / E^{I, \text{strong}}$ σε σύγκριση με το μέγεθος R της ανομοιογένειας



Σχήμα 5.9 Η μεμβρανική τάση $\sigma_{\theta\theta}^S$ στην όπυ η φόρτιση οφείλεται σε ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο

Κεφάλαιο 6

Κυκλική ανομοιογένεια με μια μη-τέλεια διεπιφάνεια που διαταράσσει μία ομοιόμορφη θερμική ροή

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό επιλύονται τα προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας και θερμοελαστικότητας μιας κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας, που βρίσκεται σε μια απείρως εκτεινόμενη μήτρα και διαταράσσει ένα ομοιόμορφο θερμικό πεδίο της μήτρας, για δύο περιπτώσεις διεπιφανειακών συνθηκών. Στην πρώτη περίπτωση, οι διεπιφανειακές συνθήκες περιγράφουν μια διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου και χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας, και στη δεύτερη περίπτωση, μια διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου και υψηλής αγωγιμότητας. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε μια υποβαθμισμένη μηχανικά και θερμικά διεπιφάνεια, η δε δεύτερη, σε μια αναβαθμισμένη μηχανικά και θερμικά διεπιφάνεια. Η ομοιόμορφη θερμική ροή q^∞ , που θεωρείται παράλληλη στον άξονα x_2 , αντιστοιχεί στην παρακάτω θερμοκρασιακή διανομή

$$T = -\frac{q^\infty}{k_M}x_2 + T_C, \quad (6.1)$$

όπου το T_C αντιπροσωπεύει μία σταθερή θερμοκρασιακή μεταβολή από τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 του συστήματος. Το k_M αντιπροσωπεύει το συντελεστή θερμική αγωγιμότητας της μήτρας. Και στις δύο περιπτώσεις η ανάλυση των σχετικών θερμοκρασιακών και θερμοελαστικών προβλημάτων γίνεται θεωρώντας ότι η γραμμική θερμοκρασιακή διακύμανση (6.1) προέρχεται από την επαλληλία μιας σταθερής θερμοκρασιακής διακύμανσης T_C και μιας γραμμικής θερμοκρασιακής διακύμανσης $-q^\infty/k_M x_2$ από τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στη θερμοκρασία αναφοράς του συστήματος T_0 , το σύστημα είναι ελεύθερο τάσεων.

Το πρόβλημα θερμικής αγωγιμότητας (θερμοκρασιακό πρόβλημα) και τα θερμοελαστικά προβλήματα επιλύονται στα πλαίσια της ασύζευκτης θερμοελαστικότητας για συνθήκες σταθερής κατάστασης. Οι σχετικές εξισώσεις που περιγράφουν τα δύο προβλήματα παρέχονται στο Παράρτημα II, οι δε συνθήκες που περιγράφουν τη θερμική συμπεριφορά της διεπιφάνειας έχουν αναπτυχθεί στα Κεφάλαια 4 και 5.

6.2 ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

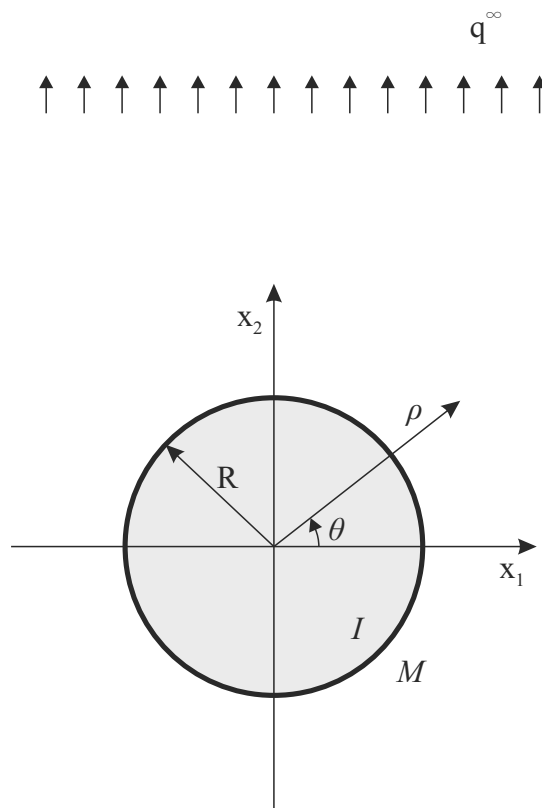
6.2.1 Ανομοιογένεια με διεπιφάνεια χαμηλής αγωγιμότητας

6.2.1.1 Περιγραφή του προβλήματος και διαδικασία λύσης του

Στην συνέχεια, θα προσδιορισθούν τα θερμοκρασιακά πεδία στο σύστημα μήτρας - ανομοιογένειας για μία διεπιφάνεια χαμηλής αγωγιμότητας όταν η ανομοιογένεια διαταράσσει την παρακάτω θερμοκρασιακή διακύμανση της μήτρας

$$T \cong -\frac{q^\infty}{k_M} x_2 \quad (x_2 \cong \infty), \quad (6.2)$$

όπου k_M είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας της μήτρας. Στην περίπτωση της κυκλικής ανο-



Σχήμα 6.1 Η θερμική φόρτιση του συστήματος

μοιογένειας, η συνοριακή συνθήκη (2.97) γράφεται

$$q_\rho^M = q_\rho^I = -h_S [T], \quad [T] = T_M - T_I, \quad (6.3)$$

όπου ο συντελεστής h_S είναι η διεπιφανειακή σταθερά θερμικής αγωγιμότητας. Τα θερμοκρασιακά πεδία που παράγονται στο σύστημα θα αποκτηθούν από την επαλληλία δύο ξεχωριστών θερμικών του καταστάσεων. Η πρώτη θερμική κατάσταση του συστήματος προέρχεται από την ομοιόμορφη θερμική ροή της μήτρας, που δίνεται από την (6.2), όταν η θερμική διεπιφανειακή επαφή των δύο υλικών είναι τέλεια. Η δεύτερη θερμική κατάσταση του συστήματος προέρχεται από μία *θερμική εξάρμωση* που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας και είναι ίση με το θερμοκρασιακό άλμα $[T]$ που εμφανίζεται στο δεξιό

μέλος της (6.3), δηλαδή

$$\vartheta = [T]. \quad (6.4)$$

Το θερμοκρασιακό πρόβλημα που αντιστοιχεί στην πρώτη θερμική κατάσταση του συστήματος θα ονομάζεται *p-θερμοκρασιακό πρόβλημα*, ενώ αυτό που αντιστοιχεί στη δεύτερη κατάσταση, θα ονομάζεται *θ-θερμοκρασιακό πρόβλημα*. Τα θερμοκρασιακά πεδία στο σύστημα θα αποκτηθούν από την επαλληλία των πεδίων των δύο αυτών προβλημάτων, δηλαδή

$$q_\rho^k = q_\rho^{k,p} + q_\rho^{k,\vartheta}, \quad q_\theta^k = q_\theta^{k,p} + q_\theta^{k,\vartheta}, \quad (6.5\alpha)$$

$$T^k = T^{k,p} + T^{k,\vartheta}, \quad (k = M \text{ ή } I) \quad (6.5\beta)$$

όπου $q_\rho^{k,p}$, $q_\theta^{k,p}$, $T^{k,p}$ είναι τα θερμοκρασιακά πεδία του *p-θερμοκρασιακού προβλήματος* και $q_\rho^{k,\vartheta}$, $q_\theta^{k,\vartheta}$, $T^{k,\vartheta}$ τα αντίστοιχα πεδία του *θ-θερμοκρασιακού προβλήματος*. Αντικαθιστώντας τις (6.4), (6.5α) στην (6.3), προκύπτει η παρακάτω συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η θερμοκρασιακή εξάρμωση ϑ πάνω στη διεπιφάνεια

$$\vartheta = T^{M,\vartheta} - T^{I,\vartheta} = -\frac{1}{h_S}(q_\rho^{M,p} + q_\rho^{M,\vartheta}) = -\frac{1}{h_S}(q_\rho^{I,p} + q_\rho^{I,\vartheta}), \quad (6.6)$$

όπου, για την εξαγωγή της σχέσης αυτής, πάρθηκε υπόψιν η συνέχεια της θερμοκρασιακής μεταβολής του *p-θερμοκρασιακού προβλήματος*. Οι γενικές εκφράσεις των θερμοκρασιακών δυναμικών των δύο φάσεων του συστήματος που ικανοποιούν τις διεπιφανειακές συνθήκες του *θ-θερμοκρασιακού προβλήματος*, εξάγονται στο Παράρτημα III.3.

6.2.1.2 Επίλυση του *p-* και *θ-* θερμοκρασιακού προβλήματος

Τα θερμοκρασιακά πεδία του *p-θερμοκρασιακού προβλήματος* έχουν προσδιορισθεί από τους Kattis and Meguid (1995). Τα θερμοκρασιακά δυναμικά του προβλήματος αυτού, με τους συμβολισμούς που έχουν υιοθετηθεί στην παρούσα εργασία, έχουν τη μορφή

$$\chi_I^p(z) = iq^\infty \frac{2}{k_M + k_I} z, \quad (6.7\alpha)$$

$$\chi_M^p(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \left(z - \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \frac{R^2}{z} \right), \quad (6.7\beta)$$

όπου, k_M , k_I είναι οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας της ανομοιογένειας και της μήτρας, αντίστοιχα. Τα θερμοκρασιακά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα υπολογίζονται από τα παραπάνω δυναμικά χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (II.3), (II.4) και (II.7). Οι σχετικές εκφράσεις των πεδίων αυτών έχουν παρατεθεί στο Παράρτημα V.1. Από τις εκφράσεις αυτές, υπολογίζεται η θερμική διεπιφανειακή ροή $q_\rho^{M,p}$ που υπεισέρχεται στη σχέση (6.6) στη μορφή

$$q_\rho^{M,p} = q_\rho^{I,p} = -iq^\infty \frac{k_I}{k_M + k_I} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (6.8)$$

Για την επίλυση του ϑ -θερμοκρασιακού προβλήματος, η διεπιφανειακή εξάρμωση που υπεισέρχεται στις σχέσεις (III.28α) και (III.28β) θεωρείται στη μορφή

$$\vartheta(z, \bar{z}) = Az + \bar{A}\bar{z}, \quad (6.9)$$

όπου A είναι μια μιγαδική σταθερά. Για τη μορφή αυτή της θερμικής εξάρμωσης, το διαφορικό θερμοκρασιακό δυναμικό του συστήματος, που θα δηλώνεται με $\chi_0^\vartheta(z)$, αναζητείται στη μορφή

$$\chi_0^\vartheta(z) = \alpha_1 z, \quad (6.10)$$

όπου α_1 μία μιγαδική σταθερά. Δηλώνοντας τα δύο θερμοκρασιακά δυναμικά του συστήματος με $\chi_M^\vartheta(z)$ και $\chi_I^\vartheta(z)$, με βάση τις σχέσεις (III.28α), (III.28β) και (6.9), (6.10) έχουμε

$$\chi_M^\vartheta(z) = (\alpha_1 + A)z + \left(\frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \bar{\alpha}_1 + A \right) \frac{R^2}{z}, \quad (6.11\alpha)$$

$$\chi_I^\vartheta(z) = \frac{2k_M}{k_M + k_I} \alpha_1 z. \quad (6.11\beta)$$

Η απαίτηση για σύγκλιση του θερμοκρασιακού δυναμικού $\chi_M^\vartheta(z)$ στο άπειρο οδηγεί στη σχέση $\alpha_1 = -A$. Συνεπώς, τα παραπάνω δυναμικά των δύο φάσεων του συστήματος γράφονται

$$\chi_M^\vartheta(z) = \frac{2k_I}{k_M + k_I} \bar{A} \frac{R^2}{z}, \quad (6.12\alpha)$$

$$\chi_I^\vartheta(z) = -\frac{2k_M}{k_M + k_I} Az. \quad (6.12\beta)$$

Απομένει τώρα ο προσδιορισμός της σταθεράς A , που θα γίνει από την απαίτηση ικανοποίησης της συνθήκης (6.6). Στη σχέση αυτή, οι ποσότητες $q_\rho^{M,\vartheta} (= q_\rho^{I,\vartheta})$, $T^{M,\vartheta}$ και $T^{I,\vartheta}$ υπολογίζονται από τις (V.7), (V.9) και (V.12), αντίστοιχα, θέτοντας $\rho = R$. Βρίσκεται ότι

$$q_\rho^{M,\vartheta} = q_\rho^{I,\vartheta} = \frac{k_I^2}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}), \quad (6.13\alpha)$$

$$T^{M,\vartheta} = \frac{k_I}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta})R, \quad (6.13\beta)$$

$$T^{I,\vartheta} = -\frac{k_M}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta})R. \quad (6.13\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.8), (6.13) στην (6.6) και απαιτώντας η σχέση αυτή να ισχύει για κάθε τιμή της γωνίας θ , προκύπτει

$$A = \frac{i q^\infty}{k_M} \frac{k_I k_M}{(k_M + k_I) h_S R + k_I k_M}. \quad (6.14)$$

Έχοντας υπολογίσει την παράμετρο A , τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων του θερμοκρασιακού προβλήματος είναι

$$\chi_M(z) = \chi_M^p(z) + \chi_M^q(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \left[z - \frac{(k_M - k_I)h_S R + k_I k_M R^2}{(k_M + k_I)h_S R + k_I k_M z} \right], \quad (6.15\alpha)$$

$$\chi_I(z) = \chi_I^p(z) + \chi_I^q(z) = iq^\infty \frac{2h_S R}{(k_M + k_I)h_S R + k_I k_M z}. \quad (6.15\beta)$$

Είναι φανερό από τις παραπάνω σχέσεις, η θερμική ροή στο σύστημα εξαρτάται από το μέγεθος της ανομοιογένειας R . Όταν $h_S = 0$, τα παραπάνω θερμοκρασιακά δυναμικά παίρνουν τη μορφή

$$\chi_M(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \left(z - \frac{R^2}{z} \right), \quad (6.16\alpha)$$

$$\chi_I(z) = 0. \quad (6.16\beta)$$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε διεπιφάνεια με συμπεριφορά τέλει μονωτή και η σχέση (6.16α) συμπίπτει με αυτή που έχει αποκτηθεί από τους Florence and Goodier (1959) για μια κυκλική οπή με μονωμένο σύνορο, που διαταράσσει μια ομοιόμορφη θερμική ροή σε έναν άπειρο δίσκο.

6.2.2 Ανομοιογένεια με διεπιφάνεια υψηλής αγωγιμότητας

6.2.2.1 Το θερμοκρασιακό πρόβλημα και η διαδικασία λύσης του

Στη συνέχεια, θα επιλυθεί το αντίστοιχο θερμοκρασιακό πρόβλημα όταν το σύστημα έχει μια διεπιφάνεια υψηλής αγωγιμότητας. Στην περίπτωση αυτή, οι διεπιφανειακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$q_\rho^M - q_\rho^I = \frac{k_S}{R^2} \frac{\partial^2 T^S}{\partial \theta^2}, \quad T^M = T^I = T^S. \quad (6.17)$$

Τα θερμοκρασιακά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα θα θεωρηθούν ότι προκύπτουν από την επαλληλία των πεδίων δύο ξεχωριστών θερμοκρασιακών του καταστάσεων. Η πρώτη θερμοκρασιακή κατάσταση προέρχεται από μία ομοιόμορφη θερμική ροή στο άπειρο q^∞ για μια τέλεια θερμικά διεπιφάνεια, η δε δεύτερη, από μια θερμική ροή q_ρ διανεμημένη κατά μήκος της διεπιφάνειας, που αντιπροσωπεύει την ποσότητα $q_\rho^M - q_\rho^I$ της σχέσης (6.17), δηλαδή

$$q_\rho = q_\rho^M - q_\rho^I. \quad (6.18)$$

Το θερμοκρασιακό πρόβλημα της πρώτης κατάστασης έχει ονομασθεί p -θερμοκρασιακό πρόβλημα και έχει επιλυθεί προηγούμενα. Το δεύτερο πρόβλημα θα ονομασθεί q -θερμοκρασιακό πρόβλημα και θα επιλυθεί αμέσως παρακάτω. Αν τα θερμοκρασιακά πεδία του q -θερμοκρασιακού προβλήματος δηλωθούν με $q^{k,q}$, $T^{k,q}$, τότε τα θερμοκρασιακά πεδία του προβλήματος που μελετάται θα είναι

$$q_\rho^k = q_\rho^{k,p} + q_\rho^{k,q}, \quad q_\theta^k = q_\theta^{k,p} + q_\theta^{k,q}, \quad (6.19\alpha)$$

$$T^k = T^{k,p} + T^{k,q}, \quad (k = M \text{ ή } I). \quad (6.19\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.19) στις (6.17), προκύπτουν οι σχέσεις

$$q_0 = q_\rho^{M,q} - q_\rho^{I,q} = \frac{k_S}{R^2} \frac{\partial^2 T^S}{\partial \theta^2}, \quad (6.20\alpha)$$

$$T^S = T^{M,p} + T^{M,q} = T^{I,p} + T^{I,q}, \quad (6.20\beta)$$

όπου, στην εξαγωγή της (6.20α), πάρθηκε υπόψιν η συνέχεια της θερμικής ροής διαμέσου της διεπιφάνειας που ισχύει για το p -θερμοκρασιακό πρόβλημα.

6.2.2.2 Επίλυση του q -θερμοκρασιακού προβλήματος

Όπως προαναφέρθηκε, στο q -θερμοκρασιακό πρόβλημα, η διανεμημένη θερμική ροή \mathcal{J}_ρ , που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας, προσομοιώνει το διεπιφανειακό άλμα της θερμικής ροής. Συνεπώς θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (6.18)

$$\mathcal{J}_\rho = q_\rho^{M,q} - q_\rho^{I,q}. \quad (6.21)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφθεί στην παρακάτω ισοδύναμη ολοκληρωμένη μορφή

$$\mathcal{Q}(t, \bar{t}) = Q^{M,q}(t, \bar{t}) - Q^{I,q}(t, \bar{t}), \quad (6.22)$$

όπου

$$\mathcal{Q}(t, \bar{t}) = Q_1(R, \theta) = \int_0^\theta \mathcal{J}_\rho(\theta) R d\theta, \quad (6.23\alpha)$$

$$Q^{M,q}(t, \bar{t}) = Q_1^{M,q}(R, \theta) = \int_0^\theta q_\rho^{M,q}(\theta) R d\theta, \quad (6.23\beta)$$

$$Q^{I,q}(t, \bar{t}) = Q_1^{I,q}(R, \theta) = \int_0^\theta q_\rho^{I,q}(\theta) R d\theta, \quad (6.23\gamma)$$

όπου $t (= Re^{i\theta})$ αντιπροσωπεύει ένα διεπιφανειακό σημείο. Για το πρόβλημα που μελετάμε, θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\mathcal{Q}(z, \bar{z})$, που υπεισέρχεται στην (6.22), έχει τη μορφή

$$\mathcal{Q}(z, \bar{z}) = Az + \bar{A}\bar{z}, \quad (6.24)$$

όπου A είναι μία μιγαδική σταθερά, η οποία, προς το παρόν, θεωρείται μία γνωστή ποσότητα. Το διαφορικό δυναμικό του συστήματος, που δηλώνεται με $\chi_0^q(z)$, θα αναζητηθεί στη μορφή

$$\chi_0^q(z) = \beta z, \quad (6.25)$$

όπου β είναι μια σταθερά που θα προσδιορισθεί σε όρους της ποσότητας A . Αντικαθιστώντας τις (6.24) και (6.25) στην (III.35), προκύπτει

$$\chi_M^q(z) = \left(\beta - \frac{i}{k_M} A \right) z + \left(\frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \bar{\beta} - \frac{i}{k_M} \bar{A} \right) \frac{R^2}{z}, \quad (6.26\alpha)$$

$$\chi_I^q(z) = \frac{2k_M}{k_M + k_I} \beta z. \quad (6.26\beta)$$

Επειδή η θερμική κατάσταση του συστήματος προκύπτει από μία διανεμημένη θερμική ροή που εφαρμόζεται στη διεπιφάνεια, συνάγεται ότι το θερμοκρασιακό δυναμικό της μήτρας πρέπει να είναι φραγμένο στο άπειρο, προκειμένου να μην παράγεται θερμική ροή στην περιοχή αυτή. Από την (6.26α), προκύπτει ότι αυτό εξασφαλίζεται όταν $\beta = iA/k_M$. Συνεπώς, το διαφορικό δυναμικό $\chi_0^q(z)$ που παρέχεται από την (6.25) παίρνει τη μορφή

$$\chi_0^q(z) = \frac{iA}{k_M} z. \quad (6.27)$$

Έτσι, για $\beta = iA/k_M$, τα θερμοκρασιακά δυναμικά των δύο φάσεων (6.26) γίνονται

$$\chi_M^q(z) = -\frac{2i}{k_M + k_I} \bar{A} \frac{R^2}{z}, \quad (6.28\alpha)$$

$$\chi_I^q(z) = \frac{2i}{k_M + k_I} Az. \quad (6.28\beta)$$

Με βάση τις σχέσεις (II.3), (II.4), εξάγονται τα θερμοκρασιακά πεδία του q -θερμοκρασιακού προβλήματος που παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.1. Για την ολοκλήρωση της λύσης του προβλήματος, απομένει ο προσδιορισμός της σταθεράς A , που θα γίνει ικανοποιώντας τις διεπιφανειακές συνθήκες (6.20). Οι ποσότητες που υπεισέρχονται στις συνθήκες αυτές υπολογίζονται από τις (V.3), (V.13), (V.15) και (V.16) για $\rho = R$. Βρίσκεται ότι

$$q_\rho^{M,q} - q_\rho^{I,q} = i(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}), \quad (6.29\alpha)$$

$$T^{M,q} = \frac{i}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta})R, \quad (6.29\beta)$$

$$T^{M,p} = \frac{iq^\infty}{k_M + k_I} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})R. \quad (6.29\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.29) στην (II.6), και απαιτώντας η σχέση αυτή να ισχύει για κάθε τιμή της γωνίας θ , προκύπτει η σταθερά A στη μορφή

$$A = -q^\infty \frac{k_S}{(k_M + k_I)R + k_S}. \quad (6.30)$$

Τα θερμοκρασιακά δυναμικά των δύο υλικών του συστήματος υπολογίζονται από την επαλληλία των αντίστοιχων θερμοκρασιακών δυναμικών των δύο προβλημάτων. Βρίσκεται ότι

$$\chi_M(z) = \chi_M^p(z) + \chi_M^q(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \left[z - \frac{(k_M - k_I)R - k_S R^2}{(k_M + k_I)R + k_S} z \right], \quad (6.31\alpha)$$

$$\chi_I(z) = \chi_I^p(z) + \chi_I^q(z) = iq^\infty \frac{2R}{(k_M + k_I)R + k_S} z. \quad (6.31\beta)$$

Η περίπτωση για την οποία $k_S \rightarrow \infty$ αντιστοιχεί σε διεπιφάνεια στην οποία η θερμοκρασιακή διακύμανση διατηρείται μηδενική. Στην περίπτωση αυτή, τα θερμοκρασιακά δυναμικά παίρνουν τη μορφή

$$\chi_M(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad (6.32\alpha)$$

$$\chi_I(z) = 0. \quad (6.32\beta)$$

6.3 ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

6.3.1 Διαδικασία επίλυσης

Η επίλυση των σχετικών θερμοελαστικών προβλημάτων θα γίνει ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 4.2. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή, η επίλυση ενός θερμοελαστικού προβλήματος ανάγεται στην επίλυση του p -θερμοελαστικού προβλήματος και στην επίλυση του s -προβλήματος. Το p -θερμοελαστικό πρόβλημα του συστήματος είναι εκείνο του οποίου η διεπιφάνεια είναι χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας (θερμικά ασθενής διεπιφάνεια), αλλά μηχανικά τέλεια. Με άλλα λόγια, στο p -θερμοελαστικό πρόβλημα, το σύστημα καταπονείται από τις θερμικές φορτίσεις του θερμοελαστικού προβλήματος και η διεπιφάνειά του είναι θερμικά ασθενής και μηχανικά τέλεια. Το τελευταίο σημαίνει ότι οι τάσεις και μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο σύστημα, είναι συνεχείς δια μέσου της διεπιφάνειας. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται ακολουθώντας τις γνωστές μεθόδους της ελαστικότητας. Το s -πρόβλημα είναι εκείνο του οποίου η φόρτιση είναι μια εξάρμωση Somigliana που προσομοιώνει τη διαφορά μετατοπίσεων των δύο υλικών κατά μήκος της διεπιφάνειας του συστήματος. Η εξάρμωση Somigliana, που δηλώνεται με $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \mathcal{U}_p(z, \bar{z}) + i\mathcal{U}_\theta(z, \bar{z})$, εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας και ικανοποιεί τις συνθήκες (4.6). Παρακάτω επιλύονται τα δύο αυτά προβλήματα, όταν η ανομοιογένεια διαταράσσει μία θερμοκρασιακή διακύμανση $-q^\infty x_2/k_M$ και η διεπιφάνεια είναι ελατηριακού τύπου.

6.3.2 Το p -θερμοελαστικό πρόβλημα για διεπιφάνεια χαμηλής αγωγιμότητας

Στο p -θερμοελαστικό πρόβλημα με διεπιφάνεια χαμηλής θερμικής αγωγιμότητας, η μηχανική συμπεριφορά της διεπιφάνειας περιγράφεται από τις συνθήκες

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,p} = (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,p}, \quad (u_1 + iu_2)^{M,p} = (u_1 + iu_2)^{I,p}, \quad (6.33)$$

όπου $(u_1 + iu_2)^{k,p}$ ($k = M$ ή I) είναι οι διεπιφανειακές μετατοπίσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες και $(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{k,p}$ οι διεπιφανειακοί (μιγαδικοί) ελκυστές σε πολικές συντεταγμένες. Η πρώτη διεπιφανειακή συνθήκη μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$X_\rho^{M,p} + iY_\theta^{M,p} = X_\rho^{I,p} + iY_\theta^{I,p}, \quad (6.34)$$

όπου οι ποσότητες

$$X_\rho^{k,p} + iY_\theta^{k,p} = \int_0^\theta (\sigma_{\rho\rho}^{k,p} + i\sigma_{\rho\theta}^{k,p}) R d\theta, \quad (6.35)$$

εκφράζουν τις ολικές δυνάμεις που επενεργούν πάνω στα διεπιφανειακά τόξα $(0, \theta)$ των δύο συνδεδεμένων διεπιφανειών. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $X_\rho^{k,p} + iY_\theta^{k,p} = e^{-i\theta}(X_1^{k,p} + iX_2^{k,p})$, όπου $X_1^{k,p}$ και $X_2^{k,p}$ είναι οι συνιστώσες των ολικών δυνάμεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η σχέση (6.34) ανάγεται στη μορφή

$$R^{M,p}(t, \bar{t}) = R^{I,p}(t, \bar{t}), \quad (t = Re^{i\theta}), \quad (6.36)$$

όπου έχει τεθεί

$$R^{k,p} = X_1^{k,p} + iX_2^{k,p}. \quad (6.37)$$

Σε κάθε σημείο του συστήματος, οι μετατοπίσεις $(u_1 + iu_2)^{k,p}$ είναι

$$(u_1 + iu_2)^{k,p} = (u_1 + iu_2)^{k,e} + (u_1 + iu_2)^{k,T}, \quad (6.38)$$

όπου $(u_1 + iu_2)^{k,e}$ είναι οι ελαστικές μετατοπίσεις και $(u_1 + iu_2)^{k,T}$ οι θερμικές μετατοπίσεις που δίνονται από τη σχέση (Muskhelishvili, 1953)

$$(u_1 + iu_2)^{k,T} = \alpha_{tk}(1 + \nu_k) \int \chi_k(z) dz. \quad (6.39)$$

Στην (6.39), α_{tk} είναι οι συντελεστές θερμικής διαστολής, ν_k οι λόγοι του Poisson και $\chi_k(z)$ τα θερμοκρασιακά δυναμικά των δύο φάσεων του συστήματος. Από τις (6.33)₂ και (6.38) προκύπτει ότι

$$(u_1 + iu_2)^{M,e} - (u_1 + iu_2)^{I,e} = \mathcal{X}(t), \quad (6.40)$$

όπου

$$\mathcal{X}(z) = \alpha_{tI}(1 + \nu_I) \int \chi_I(z) dz - \alpha_{tM}(1 + \nu_M) \int \chi_M(z) dz. \quad (6.41)$$

Εισάγοντας στη σχέση αυτή τις $\chi_I(z)$ και $\chi_M(z)$ που παρέχονται από τις (6.15) προκύπτει

$$\mathcal{X}(z) = -\frac{iq^\infty}{2k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)R^2 \left[\mathcal{D}_t \frac{z^2}{R^2} - \mathcal{Z}_t \ln\left(\frac{z}{R}\right) \right]. \quad (6.42)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουν εισαχθεί οι αδιάστατοι συντελεστές \mathcal{D}_t και \mathcal{Z}_t με τις σχέσεις

$$\mathcal{D}_t = 1 - \frac{\alpha_{tI}(1+\nu_I)}{\alpha_{tM}(1+\nu_M)} \frac{2k_M h_S R}{(k_M + k_I)h_S R + k_I k_M}, \quad \mathcal{Z}_t = 2 \frac{(k_M - k_I)h_S R + k_I k_M}{(k_M + k_I)h_S R + k_I k_M}. \quad (6.43)$$

Έτσι, οι διεπιφανειακές συνθήκες (6.33) του p -θερμοελαστικού προβλήματος έχουν αναχθεί ισοδύναμα στις συνθήκες (6.36) και (6.40). Οι συνθήκες αυτές δείχνουν ότι το p -θερμοελαστικό πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα εξάρμωσης Somigliana, του οποίου η επιβαλλόμενη διεπιφανειακή μετατόπιση παρέχεται από την ολόμορφη συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ της σχέσης (6.42). Το πρόβλημα αυτό επιλύεται παρακάτω με τη μέθοδο των διαφοσικών δυναμικών, της οποίας οι σχέσεις παρέχονται στο Παράρτημα III.1. Οι σχέσεις (III.8) παρέχουν τα μιγαδικά δυναμικά $\phi_k(z)$, $\psi_k(z)$ των δύο φάσεων του συστήματος σε όρους δύο ολόμορφων συναρτήσεων $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$, που αποτελούν τα διαφοσικά δυναμικά του προβλήματος, και της εξάρμωσης Somigliana $\mathcal{U}(z, \bar{z})$, που επενεργεί κατά μήκος της διεπιφάνειας. Τα διαφοσικά αυτά δυναμικά προσδιορίζονται, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $\mathcal{U}(z, \bar{z})$, που, γενικά, είναι μία μη-ολόμορφη συνάρτηση. Για την περίπτωση που μελετάμε, η συνάρτηση αυτή, που εκφράζει την ασυνέχεια των μετατοπίσεων δια μέσου της διεπιφάνειας, από την (6.38) προκύπτει στη μορφή

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \mathcal{X}(z), \quad (6.44)$$

όπου η $\mathcal{X}(z)$ παρέχεται από την (6.42). Τα διαφοσικά δυναμικά του συστήματος θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\phi_0(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad \psi_0(z) = d_0, \quad (6.45)$$

όπου c_0 , c_1 , c_2 και d_0 είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας τις (6.44) και (6.45) στις (III.8α) (III.8β), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \phi_M(z) = & \left[c_2 - \frac{iq^\infty}{2k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)M\mathcal{D}_t \right] z^2 + (c_1 - \Omega\bar{c}_1)z + (\bar{c}_0 - 2\Omega\bar{c}_2 R^2 + \Pi\bar{d}_0) \\ & + \frac{iq^\infty}{2k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)\mathcal{Z}_t M R^2 \ln\left(\frac{z}{R}\right), \end{aligned} \quad (6.46\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \left[d_0 + \Lambda\bar{c}_0 + 2(\Lambda + \Omega)c_2 R^2 + \frac{iq^\infty}{k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)\mathcal{D}_t M R^2 \right] \\ & + (\Lambda + \Omega)(c_1 + \bar{c}_1)\frac{R^2}{z} + \left[\Lambda\bar{c}_2 - \frac{iq^\infty}{2k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)M(\mathcal{D}_t + \mathcal{Z}_t) \right] \frac{R^4}{z^2} \\ & + \frac{iq^\infty}{2k_M}\alpha_{tM}(1+\nu_M)\mathcal{Z}_t M R^2 \ln\left(\frac{z}{R}\right). \end{aligned} \quad (6.46\beta)$$

Επειδή η εξάρμωση Somigliana \mathcal{U} επενεργεί στη διεπιφάνεια του συστήματος, οι τάσεις που αναπτύσσονται θα πρέπει να μηδενίζονται στο άπειρο. Οι σχέσεις (6.46) δείχνουν ότι το μιγαδικό δυναμικό $\psi_M(z)$ είναι φραγμένο στο άπειρο, ενώ το μιγαδικό δυναμικό $\phi_M(z)$ απειρίζεται. Το μιγαδικό δυναμικό $\phi_M(z)$ γίνεται φραγμένο, όταν

$$c_2 = \frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M \mathcal{D}_t, \quad c_1 = 0. \quad (6.47)$$

Επίσης, θέτουμε

$$c_0 = d_0 = 0, \quad (6.48)$$

επειδή οι σταθερές αυτές δε συνεισφέρουν στις τάσεις που αναπτύσσονται στο σύστημα. Αντικαθιστώντας τις (6.47) και (6.48) στις σχέσεις (6.45) και (6.46), προκύπτουν τα διφασικά δυναμικά του συστήματος

$$\phi_0(z) = \frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M \mathcal{D}_t z^2, \quad \psi_0(z) = 0, \quad (6.49)$$

και τα μιγαδικά μιγαδικά της μήτρας και της ανομοιογένειας

$$\phi_M(z) = \frac{iq^\infty}{k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M R^2 \left[\Omega \mathcal{D}_t + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_t \ln \left(\frac{z}{R} \right) \right], \quad (6.50\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) &= \frac{iq^\infty}{k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M R^2 \frac{1 + \Lambda}{1 + \Pi} \left[\mathcal{D}_t - 2(1 + \Pi) \frac{R^2}{z^2} \right] \\ &\quad - \frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M R^2 \mathcal{Z}_t \left[\frac{R^2}{z^2} + \ln \left(\frac{z}{R} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.50\beta)$$

και

$$\phi_I(z) = \frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t z^2, \quad (6.50\gamma)$$

$$\psi_I(z) = 0. \quad (6.50\delta)$$

Από τις σχέσεις αυτές, υπολογίζονται τα πλήρη ελαστικά πεδία των δύο φάσεων του συστήματος που παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.2. Από τα ελαστικά αυτά πεδία υπολογίζονται οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\rho\rho}^{M,p} (= \sigma_{\rho\rho}^{I,p})$ και $\sigma_{\rho\theta}^{M,p} (= \sigma_{\rho\theta}^{I,p})$ που υπεισέρχονται στις σχέσεις (4.6) στη μορφή

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = \sigma_{\rho\rho}^{I,p} = \frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t R(e^{i\theta} - e^{-i\theta}), \quad (6.51\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p} = \sigma_{\rho\theta}^{I,p} = \frac{q^\infty}{2k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) M(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t R(e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \quad (6.51\beta)$$

6.3.3 Το s -θερμοελαστικό πρόβλημα

Για το s -πρόβλημα, η συνάρτηση $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \mathcal{U}_1 + i\mathcal{U}_2$ αναζητείται στη μορφή

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = CR^2 \frac{z}{\bar{z}} + (Dz + \bar{D}\bar{z})z, \quad (6.52)$$

όπου C και D είναι μιγαδικές σταθερές. Κάνοντας χρήση της σχέσης

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + i\mathcal{U}_2 = (\mathcal{U}_\rho + i\mathcal{U}_\theta)e^{i\theta}, \quad (6.53)$$

οι διεπιφανειακές πολικές συνιστώσες $\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_\theta$ της \mathcal{U} υπολογίζονται στη μορφή

$$\mathcal{U}_\rho = \left(D + \frac{C}{2}\right) R^2 e^{i\theta} + \left(\bar{D} + \frac{\bar{C}}{2}\right) R^2 e^{-i\theta} \quad (6.54\alpha)$$

$$\mathcal{U}_\theta = -i(Ce^{i\theta} - \bar{C}e^{-i\theta})\frac{R^2}{2}. \quad (6.54\beta)$$

Τα διαφορικά δυναμικά $\phi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ του s -προβλήματος υποθέτουμε ότι είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Οι συντελεστές των πολυωνύμων αυτών υπολογίζονται σε όρους των παραμέτρων C και D της (6.52) απαιτώντας μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Τα διαφορικά δυναμικά $\phi_0(z), \psi_0(z)$ που υπολογίζονται είναι

$$\phi_0(z) = -M(C + D)z^2, \quad \psi_0(z) = 0, \quad (6.55)$$

όπου οι σταθεροί όροι έχουν παραληφθεί καθότι δε συνεισφέρουν στις τάσεις. Από τα παραπάνω δυναμικά εξάγονται τα πλήρη ελαστικά πεδία του συστήματος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (I.13) που παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.3. Οι διεπιφανειακές τάσεις που υπεισέρχονται στις (4.6) υπολογίζονται από τις (V.45) και (V.46) θέτοντας $\rho = R$

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,s} = \sigma_{\rho\rho}^{I,s} = -M(1 + \Lambda) [(C + D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] R, \quad (6.56\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,s} = \sigma_{\rho\theta}^{I,s} = iM(1 + \Lambda) [(C + D)e^{i\theta} - (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] R. \quad (6.56\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.51), (6.54) και (6.56) και απαιτώντας την ικανοποίηση των συνθηκών (4.6) σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας, υπολογίζονται οι σταθερές C και D :

$$C = \frac{iq^\infty}{k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) \frac{n_\theta(1 + \Lambda)}{1 + (n_\rho + n_\theta)(1 + \Lambda)} \mathcal{D}_t, \quad (6.57\alpha)$$

$$D = -\frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) \frac{(n_\theta - n_\rho)(1 + \Lambda)}{1 + (n_\rho + n_\theta)(1 + \Lambda)} \mathcal{D}_t. \quad (6.57\beta)$$

6.4 ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Σ' αυτό το κεφάλαιο, επιλύεται το θερμοελαστικό πρόβλημα υπερθέτοντας δύο διακριτές περιπτώσεις του συστήματος. Στην πρώτη περίπτωση, οι συντελεστές θερμικής διαστολής των δύο υλικών θεωρούνται μη-μηδενικοί, δηλαδή, $\alpha_{tI} \neq 0$ και $\alpha_{tM} \neq 0$, ενώ αυτός της μεμβράνης μηδενικός, δηλαδή, $\alpha_{tS} = 0$, (θερμοελαστικό πρόβλημα I). Στη δεύτερη περίπτωση, θεωρείται ότι $\alpha_{tI} = \alpha_{tM} = 0$ και $\alpha_{tS} \neq 0$ (θερμοελαστικό πρόβλημα II).

6.4.1 Το θερμοελαστικό πρόβλημα I ($\alpha_{tI} \neq 0, \alpha_{tM} \neq 0, \alpha_{tS} = 0$)

6.4.1.1 Το p -θερμοελαστικό πρόβλημα I

Το θερμοελαστικό αυτό πρόβλημα είναι ουσιαστικά ταυτόσημο με το προηγούμενο διαφέροντας μόνο ως προς τους συντελεστές της θερμοκρασιακής συνάρτησης $\mathcal{X}(z)$. Στην παρούσα περίπτωση, η θερμοκρασιακή συνάρτηση $\mathcal{X}(z)$ υπολογίζεται από τις σχέσεις (6.31),

$$\mathcal{X}(z) = -\frac{iq^\infty}{2k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) R^2 \left[\mathcal{D}_t \frac{z^2}{R^2} - \mathcal{Z}_t \ln \left(\frac{z}{R} \right) \right], \quad (6.58)$$

όπου εδώ οι συντελεστές \mathcal{D}_t και \mathcal{Z}_t είναι

$$\mathcal{D}_t = 1 - \frac{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)} \frac{2k_M R}{(k_M + k_I)R + k_S}, \quad \mathcal{Z}_t = 2 \frac{(k_M - k_I)R - k_S}{(k_M + k_I)R + k_S}. \quad (6.59)$$

6.4.1.2 Το f -θερμοελαστικό πρόβλημα I

Για την επίλυση του f -θερμοελαστικού προβλήματος I, η συνισταμένη δύναμη $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ που υπεισέρχεται στην (III.17) αναζητείται στη μορφή

$$i\mathcal{F}(z, \bar{z}) = (Dz + \bar{D}\bar{z})z, \quad (6.60)$$

όπου το D είναι μία μιγαδική σταθερά. Τα διφασικά δυναμικά $\varphi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ του συστήματος θεωρούνται ότι έχουν πολωνυμική μορφή δεύτερου βαθμού. Οι άγνωστοι συντελεστές των πολωνυμικών όρων υπολογίζονται σε όρους της παραμέτρου D απαιτώντας μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται, αν τα δυναμικά $\varphi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ συγκλίνουν στο άπειρο. Βρίσκεται ότι

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{1 + \kappa_M} Dz^2, \quad \psi_0(z) = 0, \quad (6.61)$$

όπου οι σταθεροί όροι έχουν παραληφθεί γιατί δεν επηρεάζουν το τασικό πεδίο. Τα πλήρη ελαστικά πεδία σε όρους της παραμέτρου D υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις (III.16), (III.17), (I.13) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.4. Ο προσδιορισμός της σταθεράς D γίνεται μέσω της (5.7), αφού πρώτα υπολογισθούν οι σχετικές ποσότητες που υπεισέρχονται σ' αυτήν. Από τις σχέσεις του Παραρτήματος V.4 βρίσκεται ότι

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = 2DR e^{i\theta}, \quad (6.62\alpha)$$

$$\begin{aligned} u_\rho^{M,p} + u_\rho^{M,f} &= \frac{2 - \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta})R^2 \\ &+ \frac{iq^\infty}{4k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) R^2 \left(1 - \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{2\mu_M + \mu_I}{\mu_I} \mathcal{D}_t \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}), \end{aligned} \quad (6.62\beta)$$

$$u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f} = i \frac{2 + \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} - \bar{D}e^{-i\theta})R^2 + \frac{q^{\infty}}{4k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M)R^2 \left(1 + \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{2\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \mathcal{D}_t \right) (e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \quad (6.62\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στην (5.7) και απαιτώντας η συνθήκη αυτή να ικανοποιείται σε κάθε διεπιφανειακό σημείο, προκύπτει

$$D = \frac{iq^{\infty}}{k_M} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mu_I(1 - \mathcal{D}_t) + \mu_M \kappa_I}{2(\mu_I + \mu_M \kappa_I)R + \kappa_I(\lambda_S + \mu_S)} (\lambda_S + \mu_S). \quad (6.63)$$

6.4.2 Το θερμοελαστικό πρόβλημα II ($\alpha_{tI} = \alpha_{tM} = 0, \alpha_{tS} \neq 0$)

Για το δυνικό του συστήματος του Σχήματος 6.1, οι συντελεστές θερμικής διαστολής της μήτρας και της ανομοιογένειας α_{tM} και α_{tI} θεωρούνται ότι είναι μηδενικοί, ενώ αυτός της μεμβράνης α_{tS} , μη-μηδενικός. Με αυτήν την επιλογή, η θερμοελαστική κατάσταση του συστήματος προκαλείται μόνο από τη θερμική επέκταση της ελαστικής μεμβράνης. Σημειώνεται ότι η επέκταση αυτή είναι ελεύθερη τάσεων και περιορίζεται να αναπτυχθεί από τα δύο υλικά που είναι συνδεδεμένα με αυτή στις δύο αντίθετες πλευρές της. Για μία ομοιόμορφη θερμική ροή στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας, η θερμοκρασιακή μεταβολή στη μεμβράνη έχει βρεθεί προηγούμενα στη μορφή

$$T^S(\theta) = iq^{\infty} \frac{R^2}{(k_M + k_I)R + k_S} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (6.64)$$

Για τη θερμοκρασιακή αυτή μεταβολή η θερμική παραμόρφωση της μεμβράνης, είναι

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = \alpha_{tS} T^S(\theta). \quad (6.65)$$

Παίρνοντας υπόψιν την (6.64), η σχέση αυτή γράφεται

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = -\frac{i}{2} \varepsilon^* (e^{i\theta} - e^{-i\theta}), \quad (6.66)$$

όπου έχει τεθεί

$$\varepsilon^* = -2\alpha_{tS} q^{\infty} \frac{R^2}{(k_M + k_I)R + k_S}. \quad (6.67)$$

Αν u_{ρ}^* , u_{θ}^* είναι οι ιδιομετατοπίσεις της μεμβράνης, τότε η θερμική παραμόρφωσης $\varepsilon_{\theta\theta}^*$ είναι

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = \frac{u_{\rho}^*}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_{\theta}^*}{\partial \theta}. \quad (6.68)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι ιδιομετατοπίσεις που παράγουν τις παραμορφώσεις αυτές είναι

$$u_{\rho}^* = -\frac{i}{4} \varepsilon^* R (e^{i\theta} - e^{-i\theta}), \quad (6.69\alpha)$$

$$u_{\theta}^* = -\frac{1}{4} \varepsilon^* R (e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \quad (6.69\beta)$$

Όπως προαναφέρθηκε, όταν απουσιάζουν τα δύο υλικά που είναι συνδεδεμένα με τις δύο πλευρές της μεμβράνης, η επέκταση της μεμβράνης είναι ελεύθερη τάσεων. Όμως η παρουσία των υλικών περιορίζει τη επέκταση της μεμβράνης με αποτέλεσμα να αναπτυχθούν σε αυτή και στα δύο υλικά θερμοελαστικές τάσεις. Οι θερμοελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στη μεμβράνη δίνονται από την εξίσωση

$$\sigma_{\theta\theta}^S = E_S(\varepsilon_{\theta\theta}^{S,t} - \varepsilon_{\theta\theta}^*), \quad (6.70)$$

και η $\varepsilon_{\theta\theta}^{S,t}$ είναι η ολική παραμόρφωση της μεμβράνης. Στην περίπτωση αυτή, οι διεπιφανειακές συνθήκες του θερμοελαστικού προβλήματος προκύπτουν από τις (5.8β), θέτοντας $u_{\rho}^{M,p} = u_{\theta}^{M,p} = 0$ και $u_{\rho}^T = u_{\theta}^T = 0$. Έτσι, οι (5.8β) γίνονται

$$\begin{aligned} [\sigma_{\rho\rho}^{M,f} - \sigma_{\rho\rho}^{I,f}] + i[\sigma_{\rho\theta}^{M,f} - \sigma_{\rho\theta}^{I,f}] &= \frac{E_S}{R^2} \left[u_{\rho}^{M,f} - u_{\rho}^* + \frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\theta}^{M,f} - u_{\theta}^*) \right] \\ &- i \frac{E_S}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\rho}^{M,f} - u_{\rho}^*) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u_{\theta}^{M,f} - u_{\theta}^*) \right]. \end{aligned} \quad (6.71\alpha)$$

$$u_{\rho}^{M,f} + iu_{\theta}^{M,f} = u_{\rho}^{I,f} + iu_{\theta}^{I,f} = (u_{\rho}^S + u_{\rho}^*) + i(u_{\theta}^S + u_{\theta}^*). \quad (6.71\beta)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι ποσότητες χωρίς αστερίσκο αντιπροσωπεύουν θερμοελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στα δύο υλικά και στη μεμβράνη, ενώ οι ποσότητες με αστερίσκο αντιπροσωπεύουν τη “φόρτιση” του συστήματος, δηλαδή την αιτία των πεδίων αυτών. Η “φόρτιση” αυτή είναι μια διανομή επιφανειακών ιδιοπαραμορφώσεων στο διδιάστατο ελαστικό μέσο της μεμβράνης, που είναι ελεύθερες τάσεων.

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η επίλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος μπορεί να επιλυθεί ως εξής. Κατά μήκος της διεπιφάνειας των δύο υλικών εφαρμόζεται μία υποθετική κατανομή γραμμικών δυνάμεων f , που αντιπροσωπεύει τη διαφορά των αναπτυσσόμενων ελαστικών τάσεων που εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της (6.71α). Η διανομή αυτή είναι ίση με

$$f = [\sigma_{\rho\rho}^{M,f} - \sigma_{\rho\rho}^{I,f}] + i[\sigma_{\rho\theta}^{M,f} - \sigma_{\rho\theta}^{I,f}]. \quad (6.72)$$

Για την υποθετική αυτή δύναμη f προσδιορίζονται τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στα δύο υλικά, επιλύοντας το σχετικό ελαστικό πρόβλημα (f -πρόβλημα). Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τις ποσότητες με αστερίσκο από τις σχέσεις (6.69), η υποθετική διανομή f συγκεκριμενοποιείται από την απαίτηση ικανοποίησης των δύο αυτών συνθηκών. Η ποσότητα $\mathcal{F}(z, \bar{z})$, που παρέχει τη γραμμική δύναμη f , υποθέτουμε ότι έχει τη μορφή

$$i\mathcal{F}(z, \bar{z}) = (Dz + \overline{Dz})z, \quad (6.73)$$

όπου η D είναι μία μιγαδική σταθερά. Τα διαφορικά δυναμικά του συστήματος θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\phi_0(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad \psi_0(z) = d_1 z, \quad (6.74)$$

όπου c_0 , c_1 , c_2 και d_1 είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας τις (6.73) και (6.74) στις (III.17), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \phi_M(z) &= \left(c_2 + \frac{1}{1 + \kappa_M} D \right) z^2 + (c_1 - \Omega \bar{c}_1) z \\ &+ \left(c_0 - 2\Omega \bar{c}_2 R^2 + \frac{1}{1 + \kappa_M} \bar{D} R^2 \right) + \Pi \bar{d}_1 \frac{R^4}{z^3}, \end{aligned} \quad (6.75\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) &= d_1 z + \left[\Lambda \bar{c}_0 + 2(\Lambda + \Omega) c_2 R^2 - \frac{2 - \kappa_M}{1 + \kappa_M} D R^2 \right] \\ &+ (\Lambda + \Omega)(c_1 + \bar{c}_1) \frac{R^2}{z} + \left(\Lambda \bar{c}_2 + \frac{\kappa_M}{1 + \kappa_M} D \right) \frac{R^4}{z^2} + 2\Pi \bar{d}_1 \frac{R^4}{z^3}. \end{aligned} \quad (6.75\beta)$$

Επειδή η φόρτιση του συστήματος επενεργεί στη διεπιφάνεια, οι τάσεις στο άπειρο θα πρέπει να μηδενίζονται. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, όταν τα μιγαδικά δυναμικά $\phi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ συγκλίνουν στο άπειρο. Από τις (6.75) προκύπτει ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται, όταν

$$c_2 = -\frac{1}{1 + \kappa_M} D, \quad c_1 = 0, \quad \text{και} \quad d_1 = 0, \quad (6.76)$$

όπου οι υπεισερχόμενες σταθερές έχουν παραληφθεί, επειδή δε συνεισφέρουν στο τασικό πεδίο. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.76) στις (6.74), προκύπτουν τα διαφορικά δυναμικά των θερμοελαστικών προβλημάτων στη μορφή

$$\phi_0(z) = -\frac{1}{1 + \kappa_M} D z^2, \quad \psi_0(z) = 0. \quad (6.77)$$

Επίσης, για τις σταθερές αυτές, τα μιγαδικά μιγαδικά της μήτρας και της ανομοιογένειας που παρέχονται από τις (6.75) παίρνουν τη μορφή

$$\phi_M(z) = \frac{1 + 2\Omega}{1 + \kappa_M} \bar{D} R^2, \quad (6.78\alpha)$$

$$\psi_M(z) = \frac{-2(1 + \Lambda + \Omega) + \kappa_M}{1 + \kappa_M} D R^2 - \frac{\Lambda - \kappa_M}{1 + \kappa_M} \bar{D} \frac{R^4}{z^2}, \quad (6.78\beta)$$

και

$$\phi_I(z) = -\frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} D z^2, \quad (6.78\gamma)$$

$$\psi_I(z) = 0. \quad (6.78\delta)$$

Αντικαθιστώντας τα μιγαδικά δυναμικά (6.78) στις εξισώσεις (I.13) προσδιορίζονται τα πλήρη ελαστικά πεδία σε όρους της παραμέτρου D , τα οποία παραθέτονται στο Παράρτημα V.4. Ο προσδιορισμός της σταθεράς D θα γίνει απαιτώντας την ικανοποίηση της (5.8β). Οι ιδιομετατοπίσεις που υπεισέρχονται στην (6.71) δίνονται από τις σχέσεις (6.69) ενώ τα θερμοελαστικά πεδία υπολογίζονται από τις σχέσεις

του Παραρτήματος (V.4), στη μορφή

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = 2DR e^{i\theta}, \quad (6.79\alpha)$$

$$u_{\rho}^{M,f} = \frac{2 - \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (D e^{i\theta} - \bar{D} e^{-i\theta}) R^2, \quad (6.79\beta)$$

$$u_{\theta}^{M,f} = i \frac{2 + \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (D e^{i\theta} + \bar{D} e^{-i\theta}) R^2. \quad (6.79\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.69) και (6.79) στην (5.8β) και απαιτώντας η συνθήκη αυτή να ισχύει για κάθε θ , βρίσκεται ότι

$$RD = i\varepsilon^* \frac{(\mu_I + \mu_M \kappa_I)(\lambda_S + \mu_S)}{2(\mu_I + \mu_M \kappa_I)R + \kappa_I(\lambda_S + \mu_S)}. \quad (6.80)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.79β), (6.79γ) και (6.80) στην (2.89α) προσδιορίζεται η ολική ελαστική παραμόρφωση σε κάθε σημείο της μεμβράνης

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{S,t} = - \frac{2q^{\infty} \alpha_{tS} R^2}{(k_M + k_I)R + k_S} \frac{\kappa_I(\lambda_S + \mu_S)}{2(\mu_I + \mu_M \kappa_I)R + \kappa_I(\lambda_S + \mu_S)} \sin \theta. \quad (6.81)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.81) και (6.66) στην εξίσωση (6.70), βρίσκεται ότι

$$\sigma_{\theta\theta}^S = \frac{4q^{\infty} \alpha_{tS} R^3}{(k_M + k_I)R + k_S} \frac{(\mu_I + \mu_M \kappa_I)(\lambda_S + \mu_S)}{2(\mu_I + \mu_M \kappa_I)R + \kappa_I(\lambda_S + \mu_S)} \sin \theta. \quad (6.82)$$

6.5 ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Όταν το σύστημα σε κάθε σημείο του υφίσταται μια ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή T_C , τότε τα θερμοκρασιακά δυναμικά των δύο φάσεων είναι

$$\chi_M(z) = T_C, \quad (6.83\alpha)$$

$$\chi_I(z) = T_C. \quad (6.83\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (6.41) προκύπτει

$$\mathcal{X}(z) = [\alpha_{tI}(1 + \nu_I) - \alpha_{tM}(1 + \nu_M)] T_C z. \quad (6.84)$$

Στη συνέχεια, θα επιλύσουμε τα δύο θερμοελαστικά προβλήματα για τους δύο τύπους διεπιφανειών που θεωρούμε.

6.5.1 Διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου

Για μια σταθερή θερμοκρασιακή μεταβολή T_C στο σύστημα, τα διαφορικά δυναμικά έχουν υπολογισθεί από τους Kattis and Meguid (1995)

$$\phi_0^p(z) = \frac{M}{1-\Omega} [\alpha_{tM}(1+\nu_M) - \alpha_{tI}(1+\nu_I)] T_C z, \quad (6.85\alpha)$$

$$\psi_0^p(z) = 0. \quad (6.85\beta)$$

Έχοντας υπολογίσει τα διαφορικά δυναμικά, τα πλήρη θερμοελαστικά πεδία του p -προβλήματος υπολογίζονται από τις σχέσεις (I.13) και παραθέτονται στο Παράρτημα V.2. Στη συνέχεια, θα επιλυθεί το σχετικό s -πρόβλημα του συστήματος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.6). Από τα ελαστικά πεδία του p -θερμοελαστικού προβλήματος υπολογίζονται οι παρακάτω διεπιφανειακές τάσεις

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} [\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)] T_C, \quad (6.86\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p} = 0, \quad (6.86\beta)$$

που υπεισέρχονται στις σχέσεις (4.6). Η συνάρτηση $\mathcal{U}(z, \bar{z})$ του s -προβλήματος θα υποτεθεί στη μορφή

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \lambda z, \quad (6.87)$$

όπου λ μία πραγματική σταθερά. Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι παραπάνω πολικές συνιστώσες της,

$$\mathcal{U}_\rho = R\lambda, \quad (6.88\alpha)$$

$$\mathcal{U}_\theta = 0, \quad (6.88\beta)$$

που υπεισέρχονται στην (4.6). Τα διαφορικά δυναμικά $\phi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ του s -προβλήματος αναζητούνται σε γραμμική μορφή. Οι συντελεστές των γραμμικών αυτών μορφών υπολογίζονται σε όρους της σταθεράς λ απαιτώντας μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Τα διαφορικά δυναμικά $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$ που υπολογίζονται είναι

$$\phi_0(z) = -\frac{M}{1-\Omega} \lambda z, \quad \psi_0(z) = 0, \quad (6.89)$$

όπου οι σταθεροί όροι έχουν παραληφθεί καθότι δε συνεισφέρουν στις τάσεις. Από τα παραπάνω διαφορικά δυναμικά εξάγονται τα πλήρη ελαστικά πεδία του συστήματος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (I.13), που παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.3. Οι διεπιφανειακές τάσεις που υπεισέρχονται στις (4.6) υπολογίζονται από τις (V.55) και (V.56) θέτοντας $\rho = R$,

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,s} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \lambda, \quad (6.90\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,s} = 0. \quad (6.90\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.86), (6.88) και (6.90) και απαιτώντας την ικανοποίηση των συνθηκών (4.6) σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας, υπολογίζεται η σταθερά λ

$$\lambda = -\frac{2n_\rho\mu_I(1+\kappa_M)[\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)]T_C}{2\mu_I + \mu_M(\kappa_I - 1) + 2n_\rho\mu_I(1+\kappa_M)}. \quad (6.91)$$

6.5.2 Διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου

Για την περίπτωση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, η επίλυση του σχετικού προβλήματος για ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή του συστήματος T_C , θα γίνει, όπως στην περίπτωση της σταθερής θερμοκρασιακής ροής q^∞ . Για την ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή T_C του συστήματος, θα υποθέσουμε ότι η θερμοελαστική παραμόρφωση που θα προκύψει προέρχεται από την επαλληλία δύο ξεχωριστών διαδοχικών θερμοελαστικών καταστάσεων του συστήματος. Στην πρώτη κατάσταση (θερμοελαστικό πρόβλημα I), για τη θερμοκρασιακή μεταβολή T_C του συστήματος, η θερμοελαστική παραμόρφωση αναπτύσσεται υποθέτοντας $\alpha_{tS} = 0$. Στη συνέχεια, στην κατάσταση αυτή προστίθεται η θερμοελαστική παραμόρφωση του συστήματος που προέρχεται από μία επιφανειακή ιδιοπαραμόρφωση

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = \varepsilon_0^* = \alpha_{tS}T_C, \quad (6.92)$$

που επιβάλλεται στη μεμβράνη (θερμοελαστικό πρόβλημα II).

Θερμοελαστικό πρόβλημα I ($\alpha_{tM} \neq 0$, $\alpha_{tI} \neq 0$, $\alpha_{tS} = 0$)

Για την επίλυση του θερμοελαστικού προβλήματος I, η $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ θα αναζητηθεί στη μορφή

$$i\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \lambda z, \quad (6.93)$$

όπου λ είναι μία πραγματική σταθερά. Τα διφασικά δυναμικά $\phi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ θα υποθέσουμε ότι είναι γραμμικής μορφής που έχουν άγνωστους συντελεστές. Οι άγνωστοι αυτοί συντελεστές υπολογίζονται σε όρους της σταθεράς λ απαιτώντας μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται, αν τα $\phi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ συγκλίνουν στο άπειρο. Βρίσκεται ότι

$$\phi_0(z) = -\frac{1}{1+\kappa_M} \frac{1}{1-\Omega} \lambda z, \quad \psi_0(z) = 0, \quad (6.94)$$

όπου οι σταθεροί όροι έχουν αμεληθεί γιατί δε συνεισφέρουν στο τασικό πεδίο. Τα πλήρη ελαστικά πεδία σε όρους της παραμέτρου λ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.93), (6.94), (III.16), (III.17) και (I.13) και παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.4. Ο προσδιορισμός της παραμέτρου λ γίνεται μέσω της (5.7), υπολογίζοντας τις σχετικές ποσότητες που υπεισέρχονται σε αυτήν. Οι ποσότητες αυτές είναι

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = \lambda, \quad (6.95\alpha)$$

$$u_{\rho}^{M,p} + u_{\rho}^{M,f} = \frac{1}{\mu_I(1 + \kappa_M)} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} [2\mu_I\alpha_{tI}(1 + \nu_I) + \mu_M(\kappa_I - 1)\alpha_{tM}(1 + \nu_M)] T_C R$$

$$- \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I(1 + \kappa_M)} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R, \quad (6.95\beta)$$

$$u_{\theta}^{M,p} + u_{\theta}^{M,f} = 0. \quad (6.95\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (5.7) προκύπτει

$$\lambda = 2 \frac{\mu_I(1 + \nu_I)\alpha_{tI} + \mu_M(1 + \nu_M)(1 - 2\nu_I)\alpha_{tM}}{2[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)]R + (1 - 2\nu_I)(\lambda_S + \mu_S)} (\lambda_S + \mu_S) T_C. \quad (6.96)$$

p-Θερμοελαστικό πρόβλημα II

Στην περίπτωση αυτή, οι θερμοελαστικές τάσεις προέρχονται από τη θερμοκρασιακή ιδιοπαραμόρφωση της μεμβράνης

$$\varepsilon_{\theta\theta}^* = \varepsilon_0^* = \alpha_{tS} T_C, \quad (6.97)$$

που αντιστοιχεί μέσω της (6.68) στις ιδιομετατοπίσεις

$$u_{\rho}^* = \varepsilon_0^* R, \quad u_{\theta}^* = 0. \quad (6.98)$$

Παίρνοντας $u_{\rho}^{M,p} = u_{\theta}^{I,p} = 0$ και $u_{\rho}^T = u_{\theta}^T = 0$, οι διεπιφανειακές σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται για το *f*-πρόβλημα είναι οι (6.71). Για το *f*-πρόβλημα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$i\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \lambda z, \quad (6.99)$$

όπου λ είναι μια πραγματική σταθερά. Τα ελαστικά πεδία που αντιστοιχούν στην περίπτωση αυτή παρέχονται στο Παράρτημα V.4. Ο προσδιορισμός της άγνωστης μιγαδικής σταθεράς λ που υπεισέρχεται στις εκφράσεις των θερμοελαστικών πεδίων γίνεται από την ικανοποίηση της διεπιφανειακής συνθήκης (6.71), όπου οι ιδιομετατοπίσεις δίνονται από τις σχέσεις (6.98) και τα θερμοελαστικά πεδία έχουν τη μορφή

$$(\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{M,f} - (\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta})^{I,f} = \lambda, \quad (6.100\alpha)$$

$$u_{\rho}^{M,f} = \frac{1 - \kappa_I}{2\mu_I(1 + \kappa_M)} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R, \quad (6.100\beta)$$

$$u_{\theta}^{M,f} = 0. \quad (6.100\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω ποσότητες στην (6.71) και απαιτώντας η συνθήκη αυτή να ικανοποιείται σε κάθε διεπιφανειακό σημείο, βρίσκεται ότι

$$\lambda = - \frac{2[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)](\lambda_S + \mu_S)}{2[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)]R + (1 - 2\nu_I)(\lambda_S + \mu_S)} \alpha_{tS} T_C. \quad (6.101)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.100β), (6.100γ) και (6.101) στην (2.89α) προσδιορίζεται η ολική ελαστική παραμόρφωση σε κάθε σημείο της μεμβράνης

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{S,t} = -\frac{1}{2} \frac{(1 - 2\nu_I)(\lambda_S + \mu_S)\alpha_{tS}T_C}{2[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)]R + (1 - 2\nu_I)(\lambda_S + \mu_S)}. \quad (6.102)$$

Αντικαθιστώντας τις (6.102) και (6.97) στην εξίσωση (6.70), βρίσκεται ότι

$$\sigma_{\theta\theta}^S = -2 \frac{[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)](\lambda_S + \mu_S)R}{2[\mu_I + \mu_M(1 - 2\nu_I)]R + (1 - 2\nu_I)(\lambda_S + \mu_S)} \alpha_{tS}T_C. \quad (6.103)$$

6.6 Συζήτηση και συμπεράσματα

1. Στο κεφάλαιο αυτό επιλύθηκε το συνεπίπεδο πρόβλημα μιας κυκλικής ανομοιογένειας, που συνδέεται με μια άπειρη μήτρα με μια μη τέλεια διεπιφάνεια και διαταράσσει ένα γραμμικό θερμοκρασιακό πεδίο. Το γραμμικό θερμοκρασιακό πεδίο αντιστοιχεί σε μια ομοιόμορφη θερμική ροή q^∞ στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας και σε μια σταθερή θερμοκρασιακή μεταβολή T_C της θερμοκρασίας αναφοράς του διαφασικού συστήματος. Για τις δύο περιπτώσεις διεπιφανειών που θεωρούνται, οι συνολικές θερμοελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στις συνδεδεμένες επιφάνειες των δύο υλικών, παρουσιάζονται στο Παράρτημα V.5. Από τις σχέσεις των διεπιφανειακών αυτών τάσεων συνάγεται άμεσα ότι, όταν η διάσταση της ανομοιογένειας R είναι στη νανοκλίμακα, οι όροι των τάσεων που αντιστοιχούν στη θερμική ροή q^∞ καθίστανται αμελητέοι συγκρινόμενοι με τους όρους που αντιστοιχούν στην ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή T_C . Προκειμένου να δειχθεί το παραπάνω αριθμητικά, θα υπολογίσουμε τις εφαπτομενικές ορθές τάσεις στη διεπιφάνεια για ένα σύστημα με τις παρακάτω μηχανικές και θερμικές παραμέτρους των δύο υλικών: $E_I = 2E_M = 160$ GPa, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\alpha_{tI} = \alpha_{tM}/2 = 2 \times 10^{-5}$ 1/K και $k_I = k_M/2 = 20$ W/(mK). Οι διεπιφανειακοί παράμετροι του συστήματος θα εκτιμηθούν προσεγγιστικά θεωρώντας ένα λεπτό διεπιφανειακό στρώμα μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας με πάχος $t_l = 1$ nm, μέτρο ελαστικότητας $E_l = 10$ GPa, λόγο Poisson $\nu_l = 0.25$ και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k_l = 10$ W/(mK). Με τα δεδομένα του στρώματος αυτού και για μία νανο-ανομοιογένεια ακτίνας $R = 20$ nm, από τις σχέσεις (4.84), προκύπτει $N_\rho = 12 \times 10^{18}$ N/m³ και $N_\theta = 4 \times 10^{18}$ N/m³. Η διεπιφανειακή σταθερά θερμικής αγωγιμότητας h_S προσδιορίζεται με την προσεγγιστική σχέση $h_S = k_l/t_l$ στην τιμή $h_S = 10^{-10}$ N/(m²K). Με τα δεδομένα αυτά υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στις (V.81): $\Lambda = 0.5$, $\Omega = -0.25$, $\mu_M = \mu_I/2 = 32$ GPa, $M = 21.3$ GPa και $n_\rho = 0.09$, $n_\theta = 0.27$ και $\mathcal{D}_t = 0.375$. Με βάση τα παραπάνω στοιχεία και για μια θερμοκρασιακή μεταβολή $T_C = 100$ K και για μια θερμική ροή $q^\infty = 20$ kW/m², η ορθή εφαπτομενική τάση που παρέχεται από τη σχέση (V.81γ) προκύπτει στη μορφή

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p+s} = -105.5 + 4.9565 \times 10^{-6} \sin \theta, \quad [\text{MPa}], \quad (6.104)$$

όπου ο πρώτος όρος προέρχεται από τη θερμοκρασιακή μεταβολή $T_C = 100$ K, ο δε δεύτερος από τη θερμική ροή $q^\infty = 20$ kW/m². Από τη σχέση αυτή άμεσα συνάγεται ότι η συνεισφορά της θερμικής ροής q^∞ στις θερμικές τάσεις είναι αμελητέα συγκρινόμενη με τη συνεισφορά στις

θερμικές τάσεις που προέρχεται από τη θερμική μεταβολή T_C .

Στην περίπτωση που η ανομοιογένεια έχει διάσταση της τάξεως των cm, επαναλαμβάνοντας τους παραπάνω υπολογισμούς για μια ανομοιογένεια με $R = 20$ cm, $t_l = 1$ cm και κρατώντας τις ίδιες τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους, από τη σχέση (V.81γ) προκύπτει

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p+s} = -105.5 + 49.565 \sin \theta, \quad [\text{MPa}]. \quad (6.105)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι, στην περίπτωση που η ανομοιογένεια είναι στην κλίμακα του cm, η συνεισφορά της θερμικής ροής είναι της ίδιας τάξης με τη συνεισφορά της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής μεταβολής.

2. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και στην περίπτωση που η διεπιφάνεια στο σύστημα είναι μεμβρανικού τύπου και υψηλής θερμικής αγωγιμότητας. Στους σχετικούς υπολογισμούς των διεπιφανειακών τάσεων στο σύστημα με διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου, θα θεωρήσουμε τις παρακάτω παραμέτρους: $E_I = 2E_M = 160$ GPa, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\alpha_{tI} = \alpha_{tM}/2 = 2 \times 10^{-5}$ /K και $k_I = k_M/2 = 20$ W/(mK). Στην περίπτωση που η διάσταση της ανομοιογένειας είναι $R = 20$ nm, οι μηχανικές και θερμικές παράμετροι της διεπιφάνειας του συστήματος θα εκτιμηθούν προσεγγιστικά από τις σχέσεις (5.45) θεωρώντας ένα λεπτό διεπιφανειακό στρώμα μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας πάχους $t_{sh} = 1.5$ nm με μέτρο ελαστικότητας $E_{sh} = 100$ GPa, $\nu_{sh} = 0.25$ και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k_{sh} = 10$ W/(mK). Με τα δεδομένα αυτά και από τις σχέσεις (5.45) προκύπτει $\lambda_S = 40$ N/m και $\mu_S = 60$ N/m. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής λαμβάνεται ίσος με $\alpha_{tS} = 10^{-5}$ 1/K, ενώ ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας υπολογίζεται προσεγγιστικά με τη σχέση $k_S = k_{sh}t_{sh}$ στην τιμή $k_{sh} = 1.5 \times 10^{-8}$ W/K. Με τα δεδομένα αυτά προκύπτουν $\Lambda = 0.5$, $\Omega = -0.25$, $\mu_I = 2\mu_M = 64$ GPa, $M = 21.3$ GPa, $\lambda_S + \mu_S = 100$ N/m και $\mathcal{D}_t = 0.3416$. Με τα στοιχεία αυτά, οι διεπιφανειακές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^{M,p+f}$ που αναπτύσσονται για $T_C = 100$ K και $q^\infty = 20$ kW/m² υπολογίζεται στη μορφή

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p+f} = -129.97 + 6.1457 \times 10^{-6} \sin \theta, \quad [\text{MPa}], \quad (6.106)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον σταθερό όρο $T_C = 100$ K, ο δε δεύτερος στη θερμική ροή q^∞ . Από τη σχέση αυτή, προκύπτει ότι η συνεισφορά της θερμικής ροής, που αντιστοιχεί στο δεύτερο όρο της σχέσης, είναι αμελητέα. Η μεμβρανική τάση που αντιστοιχεί στην περίπτωση αυτή είναι

$$\sigma_{\theta\theta}^S = 0.1969 - 2.7229 \times 10^{-8} \sin \theta \cong 0.1969, \quad [\text{N/m}]. \quad (6.107)$$

Για ανομοιογένεια με $R = 20$ cm και $t_{sh} = 1.5$ cm, προκύπτουν $\lambda_S = 4 \times 10^7$ N/m και $\mu_S = 6 \times 10^7$ N/m. Κρατώντας ίδιες τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους, προκύπτει η σχέση

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p+f} = -129.97 + 61.457 \sin \theta, \quad [\text{MPa}]. \quad (6.108)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η συνεισφορά της θερμικής ροής στην περίπτωση που η ανομοιογένεια είναι στην κλίμακα του cm είναι της ίδιας τάξης με τη συνεισφορά της ομοιόμορφης

θερμοκρασιακής διακύμανσης. Στην περίπτωση αυτή, η μεμβρανική τάση είναι

$$\sigma_{\theta\theta}^S = 1.969 \times 10^6 - 2.7229 \times 10^6 \sin \theta, \quad [\text{N/m}]. \quad (6.109)$$

3. Ένα αξιολογούμενο φαινόμενο παρατηρείται στην περίπτωση που η διεπιφάνεια του συστήματος είναι ολισθαίνουσα ($N_\rho \cong 0$, $N_\theta \neq 0$ ή $n_\rho \cong \infty$, $n_\theta \neq 0$). Στην περίπτωση αυτή οι τάσεις στην ανομοιογένεια μηδενίζονται, ενώ οι τάσεις στη μήτρα παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p+s} = \sigma_{\theta\theta}^{M,p+s} = \frac{q^\infty}{k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) M \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \frac{R^2}{\rho^2} \sin \theta, \quad (6.110\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p+s} = -\frac{q^\infty}{k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) M \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \frac{R^2}{\rho^2} \cos \theta. \quad (6.110\beta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η παρουσία μιας ολισθαίνουσας διεπιφάνειας στο σύστημα στην περίπτωση που η ανομοιογένεια διαταρράσει μία γραμμική θερμοκρασιακή μεταβολή ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας κυλινδρικής οπής στη θέση της ανομοιογένειας. Αν τώρα η διεπιφανειακή σταθερά αγωγιμότητας γίνει ίση με

$$h_S = \frac{1}{R} \frac{k_I k_M}{k_I - k_M}, \quad (6.111)$$

τότε $\mathcal{Z}_t = 0$ και οι τάσεις μηδενίζονται και στη μήτρα.

4. Οι σχέσεις (V.82) του Παραρτήματος παρέχουν τις συνολικές διεπιφανειακές τάσεις της μήτρας και της ανομοιογένειας και τις μεμβρανικές τάσεις της μεμβράνης, όταν η ανομοιογένεια διαταρράσει μια γραμμική θερμοκρασιακή μεταβολή της θερμοκρασίας αναφοράς που παρέχεται από τη σχέση $T_C - q^\infty x_2 / k_M$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι στο σύστημα δεν αναπτύσσονται θερμικές τάσεις, όταν ισχύουν οι σχέσεις

$$k_S = (k_M - k_I) R, \quad (6.112\alpha)$$

$$\frac{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)} + \frac{1 - 2\nu_I}{2\mu_I} \frac{\lambda_S + \mu_S}{R} \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)} = 1 + \frac{1 - 2\nu_I}{2\mu_I} \frac{\lambda_S + \mu_S}{R}, \quad (6.112\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{4k_M R}{(k_M + k_I)R + k_S} \frac{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)} + \frac{2k_M R}{(k_M + k_I)R + k_S} \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{\lambda_S + \mu_S}{2R} \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)} \\ = 2 + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{\lambda_S + \mu_S}{2R}. \end{aligned} \quad (6.112\gamma)$$

Αν ισχύει η (6.112α), τότε από τις σχέσεις (6.59) προκύπτει

$$\mathcal{D}_t = 1 - \frac{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{\alpha_{tM}(1 + \nu_M)}, \quad \mathcal{Z}_t = 0. \quad (6.113)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στην (6.112), συνάγεται ότι

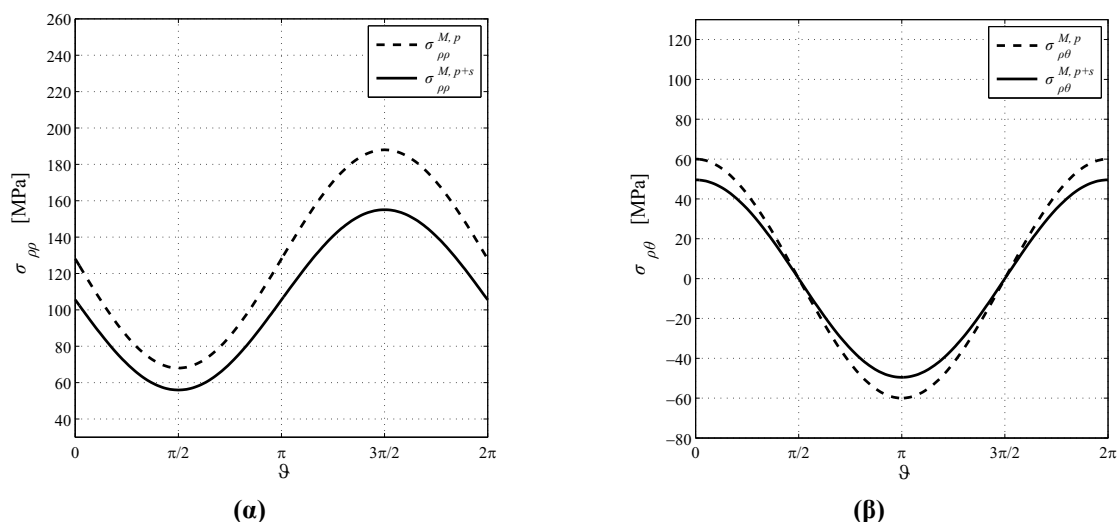
$$\alpha_{tS} = \alpha_{tI}(1 + \nu_I) = \alpha_{tM}(1 + \nu_M). \quad (6.114)$$

Έτσι, όταν οι θερμοκοί παράμετροι του συστήματος επιλεχθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις (6.112α) και (6.114), τότε η παρουσία της ανομοιογένειας στο σύστημα δεν διαταρράσει τη θερμική μεταβολή $T_C - q^\infty x_2/k_M$ της μήτρας.

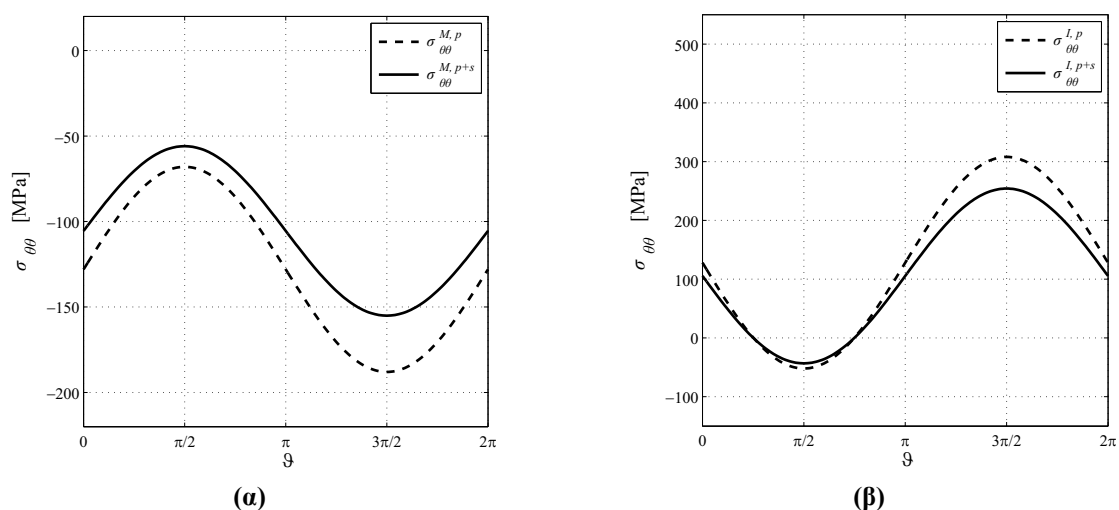
5. Προκειμένου να διερευνηθεί ποσοτικά η επίδραση της διεπιφάνειας ελατηριακού-τύπου στα θερμοελαστικά πεδία του συστήματος, στην περίπτωση που η διάσταση της ανομοιογένειας είναι στην κλίμακα του μέτρου, παρήχθησαν αριθμητικά αποτελέσματα για μια *σκληρή* ανομοιογένεια με $R = 0.2$ m, $E_I = 2E_M = 160$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Οι συντελεστές θερμικής διαστολής επιλέχθηκαν $\alpha_{tI} = \alpha_{tM}/2 = 2 \times 10^{-5}$ 1/K και οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας $k_I = k_M/2 = 20$ W/(mK). Οι ελατηριακοί συντελεστές υπολογίστηκαν από τις προσεγγιστικές σχέσεις (4.84) για $E_I = 10$ GPa, $\nu_I = 0.25$ και $t_I = 0.01$ m και η διεπιφανειακή σταθερά αγωγιμότητας εκτιμήθηκε από την προσεγγιστική σχέση $h_S = k_I/t_I$, όπου k_I είναι η θερμική αγωγιμότητα της διεπιφάνειας. Εάν για τη διεπιφάνεια θεωρηθεί ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι $k_I = 10$ W/(mK), η διεπιφανειακή σταθερά αγωγιμότητας είναι $h_S = 10^4$ W/(m²K). Στα Σχήματα 6.2 δείχνεται η μεταβολή των ακτινικών ορθών και διατμητικών εφαπτομενικών τάσεων στη μήτρα κατά μήκος μίας τέλειαις και μιας ελατηριακού τύπου διεπιφάνειας, όταν η ένταση στο σύστημα οφείλεται σε μία ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή $T_C = 100$ K και μία ομοιόμορφη θερμική ροή $q^\infty = 20$ kW/m². Στα Σχήματα 6.3 δείχνεται η μεταβολή των εφαπτομενικών ορθών τάσεων της μήτρας και της ανομοιογένειας για μία τέλεια και για μη-τέλεια διεπιφάνεια. Από τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών δείχνεται ότι η εμφάνιση μιας διεπιφάνειας ελατηριακού-τύπου στο σύστημα με μια σκληρή ανομοιογένεια *μειώνει* το μέγεθος των ακτινικών ορθών τάσεων και εφαπτομενικών διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας, ενώ αυξάνει τις εφαπτομενικές ορθές τάσεις στη μήτρα και τις μειώνει στην ανομοιογένεια.

Στα Σχήματα 6.4 και 6.5 δείχνονται οι αντίστοιχες μεταβολές των τάσεων όταν $R = 20$ cm, $E_I = E_M/2 = 80$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Από τα διαγράμματα των Σχημάτων αυτών προκύπτει ότι και στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας, προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα.

6. Για τον προσδιορισμό της επίδρασης της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου στα θερμοελαστικά πεδία του συστήματος, παρήχθησαν αριθμητικά αποτελέσματα για μια *σκληρή* ανομοιογένεια με $R = 0.2$ m, $E_I = 2E_M = 160$ GPa και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Η ελαστική μεμβράνη προσομοιώθηκε με ένα λεπτό κέλυφος με $E_{sh} = 100$ GPa, $\nu_{sh} = 0.25$ και $h_{sh} = 0.015$ m. Οι παράμετροι λ_S και μ_S εκτιμήθηκαν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.45) και οι τιμές τους που βρέθηκαν είναι $\lambda_S = 4 \times 10^8$ N/m και $\mu_S = 6 \times 10^8$ N/m. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της μεμβράνης λαμβάνεται ίσος με $\alpha_{tS} = 10^{-5}$ 1/K, ενώ ο συντελεστής μεμβρανικής θερμικής αγωγιμότητας εκτιμάται ίσος με $k_S = 0.15$ W/K. Στα Σχήματα 6.6 δείχνεται η μεταβολή των διεπιφανειακών τάσεων στη μήτρα, και στα Σχήματα 6.7, η μεταβολή των εφαπτομενικών ορθών τάσεων στη μήτρα και στην ανομοιογένεια. Τα Σχήματα αυτά δείχνουν ότι, με την εμφάνιση μιας διεπιφάνειας



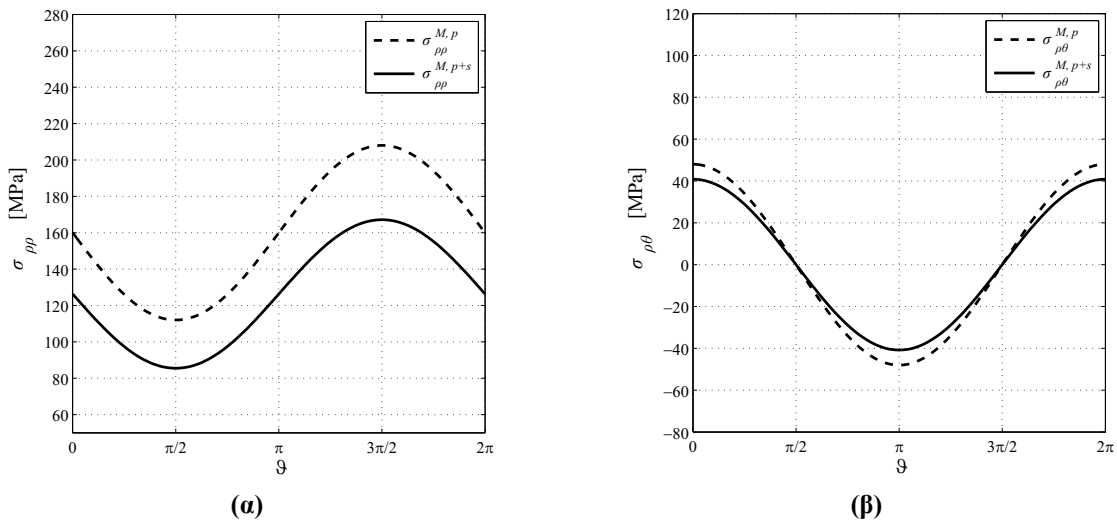
Σχήμα 6.2 Μεταβολή (α) των ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των εφαπτομενικών διαμηθικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, όταν $R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = 2E_M = 160 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$.



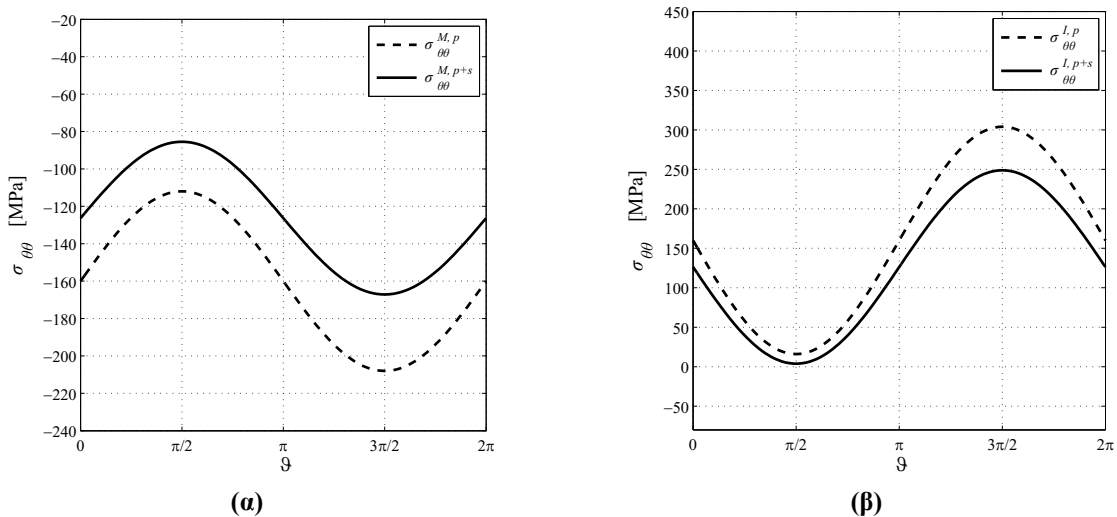
Σχήμα 6.3 Μεταβολή των ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, όταν $R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = 2E_M = 160 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$.

μεμβρανικού τύπου, οι ορθές ακτινικές τάσεις και οι εφαπτομενικές διαμηθικές τάσεις αυξάνονται στη μήτρα, ενώ οι εφαπτομενικές ορθές τάσεις αυξάνονται στη μήτρα και μειώνονται στην ανομοιογένεια.

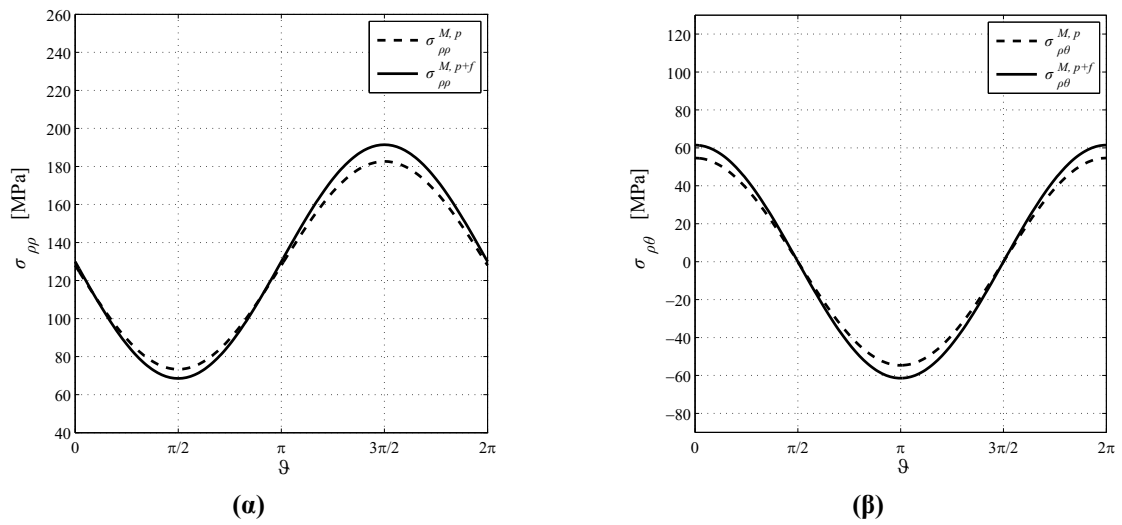
Για τους ίδιους θερμικούς συντελεστές των στοιχείων του συστήματος, εξετάζεται η επίδραση της διεπιφάνειας για μία μαλακή ανομοιογένεια με $R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = E_M/2 = 80 \text{ GPa}$ και $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Στα Σχήματα 6.8 δείχνεται η μεταβολή των διεπιφανειακών τάσεων στη μήτρα, και στα Σχήματα 6.9, η μεταβολή των ορθών εφαπτομενικών τάσεων στη μήτρα και στην ανομοιογένεια. Από τα Σχήματα αυτά προκύπτει ότι το σύστημα με την μαλακή ανομοιογένεια παρέχει τα ίδια αποτελέσματα με το σύστημα με τη σκληρή ανομοιογένεια.



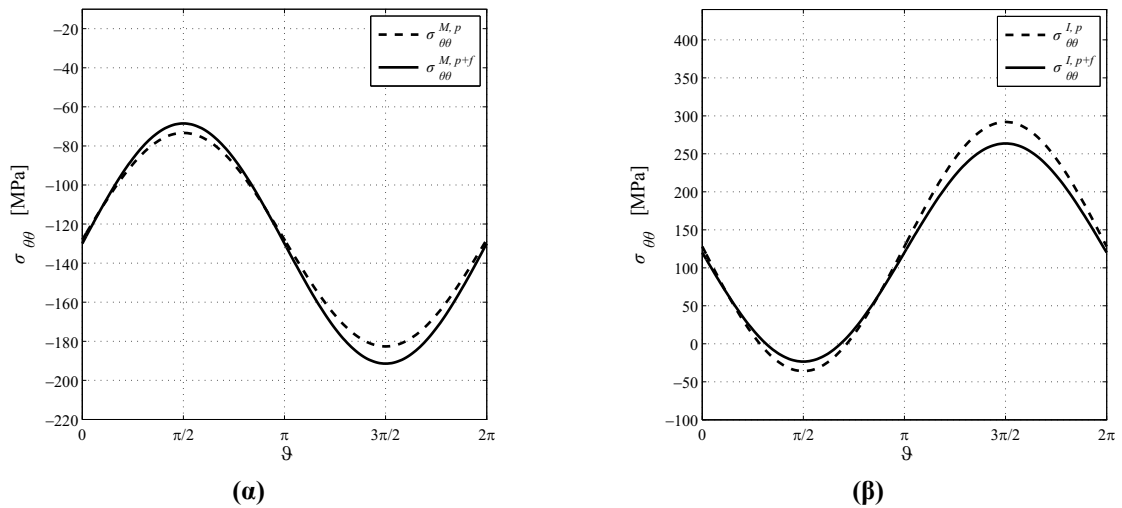
Σχήμα 6.4 Μεταβολή (α) των ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των εφαπτομενικών διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, όταν $R = 0.2$ m, $E_I = E_M/2 = 80$ GPa, $\nu_I = \nu_M = 0.25$.



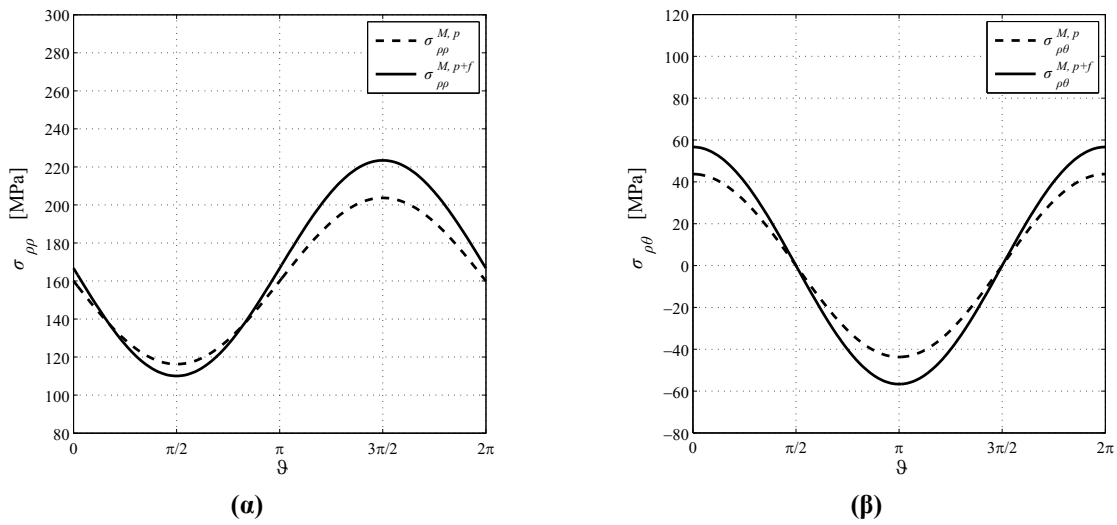
Σχήμα 6.5 Η μεταβολή των ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, για μια μαλακή ανομοιογένεια ($R = 0.2$ m, $E_I = E_M/2 = 80$ GPa, $\nu_I = \nu_M = 0.25$)



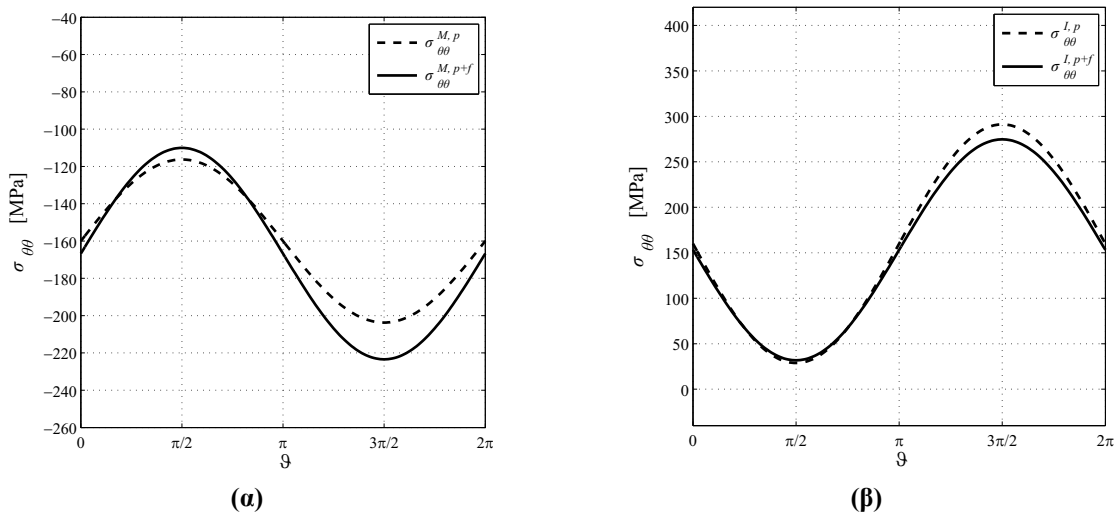
Σχήμα 6.6 Η μεταβολή (α) των ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια, για μια σκληρή ανομοιογένεια ($R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = 2E_M = 160 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\lambda_S = 2/3\mu_S = 4 \times 10^8 \text{ N/m}$)



Σχήμα 6.7 Η μεταβολή των ορθών επαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια, για μια σκληρή ανομοιογένεια ($R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = 2E_M = 160 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\lambda_S = 2/3\mu_S = 4 \times 10^8 \text{ N/m}$)



Σχήμα 6.8 Η μεταβολή (α) των ακτινικών ορθών τάσεων και (β) των διατμητικών τάσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μία μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια, για μια μαλακή ανομοιογένεια ($R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = E_M/2 = 80 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\lambda_S = 2/3\mu_S = 4 \times 10^8 \text{ N/m}$)



Σχήμα 6.9 Η μεταβολή των ορθών εφαπτομενικών τάσεων (α) στη μήτρα και (β) στην ανομοιογένεια κατά μήκος της διεπιφάνειας για τέλεια και για μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια, για μια μαλακή ανομοιογένεια ($R = 0.2 \text{ m}$, $E_I = E_M/2 = 80 \text{ GPa}$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$, $\lambda_S = 2/3\mu_S = 4 \times 10^8 \text{ N/m}$)

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και προτάσεις για παραπέρα έρευνα

7.1 Συμπεράσματα διατριβής

Η έρευνα που διεξήχθη στα πλαίσια της παρούσας διατριβής εστιάζει στη διερεύνηση της μηχανικής συμπεριφοράς δύο συγκεκριμένων τύπων διεπιφανειών σε νανο-υλικά, που προσομοιώνουν μία ισχυρή και μία ασθενή σύνδεση των επιμέρους συστατικών τους. Η ασθενής σύνδεση των επιμέρους συστατικών ενός νανοσύνθετου υλικού προσομοιώνεται με ένα διδιάστατο συνεχές ελαστικό μέσο που επιδεικνύει τη δική του μηχανική συμπεριφορά. Το διδιάστατο αυτό συνεχές ελαστικό μέσο (*διεπιφάνεια*) είναι συνδεδεμένο στις δύο αντίθετες πλευρές του με δύο συνεχή ελαστικά μέσα όγκου, που προσομοιώνουν τις συνδεδεμένες φάσεις του νανο-σύνθετου υλικού. Στην παραμορφωμένη κατάσταση, η εντατική κατάσταση του διδιάστατου ελαστικού μέσου περιγράφεται με μία επιφανειακή δύναμη, που είναι διανεμημένη πάνω στην απαραμόρφωτη επιφάνεια του μέσου, η δε παραμορφωσιακή του κατάσταση, με ένα διάνυσμα μετατόπισης, που αναπτύσσεται έξω από την επιφάνεια αυτή. Για την εξαγωγή των καταστατικών εξισώσεων του διδιάστατου μέσου, με βάση τις αρχές της θερμοδυναμικής, η συνάρτηση πυκνότητας της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης του μέσου θεωρείται ότι εξαρτάται από τις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης, που αποτελούν τις ανεξάρτητες μεταβλητές της. Από τη συνάρτηση αυτή, που αποτελεί το ελαστικό δυναμικό του μέσου, στα πλαίσια της γραμμικής απειροστής ελαστικότητας, εξάγονται οι καταστατικές εξισώσεις του διδιάστατου μέσου, που είναι τρεις γραμμικές σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών της διανεμημένης δύναμης και των συνιστωσών του διανύσματος μετατόπισης. Για λόγους συνέχειας του υλικού, σε ένα σημείο του μέσου, η αναπτυσσόμενη μετατόπιση θα πρέπει να είναι ίση με τη σχετική μετατόπιση των συνδεδεμένων επιφανειών των δύο φάσεων του νανο-σύνθετου υλικού στο ίδιο σημείο. Επίσης, για λόγους ισορροπίας, η διανεμημένη δύναμη, που αναπτύσσεται σε ένα σημείο του διδιάστατου μέσου, θα πρέπει να είναι ίση με τους αναπτυσσόμενους ελκυστές των δύο υλικών στο ίδιο σημείο. Με βάση τα παραπάνω, το διδιάστατο συνεχές μέσο, που προσομοιώνει τη διεπιφανειακή σύνδεση, μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από μία συνεχή διανομή ελατηρίων, που στην απαραμόρφωτη κατάστασή τους έχουν εξαφανιζόμενο πάχος. Οι καταστατικές εξισώσεις του μέσου αυτού, που εξάγονται στην παρούσα διατριβή με βάση την υπόθεση του συνεχούς μέσου και τις αρχές της θερμοδυναμικής, συμπίπτουν με αυτές που έχουν εισαχθεί εμπειρικά στη βιβλιογραφία. Δείχνεται επίσης, ότι οι

ελαστικές σταθερές των καταστατικών εξισώσεων του μέσου θα πρέπει να είναι θετικές, προκειμένου η αποθηκευόμενη ελαστική ενέργεια του διδιάστατου μέσου να είναι θετική.

Η αντίστοιχη προσομοίωση μιας ισχυρής διεπιφανειακής σύνδεσης με ένα διδιάστατο συνεχές μέσο έχει γίνει στο παρελθόν από τους Gurtin και Murdoch, και οι σχετικές καταστατικές εξισώσεις του μέσου αυτού έχουν εξαχθεί για πεπερασμένες παραμορφώσεις αναφορικά με ένα Eulerian σύστημα συντεταγμένων. Η εντατική κατάσταση του μέσου αυτού περιγράφεται με έναν ταυστή τάσεων μεμβράνης δεύτερης τάξης, η δε παραμορφωσιακή του κατάσταση, με ένα διάνυσμα μετατόπισης. Το διάνυσμα αυτό, σε κάθε σημείο του μέσου, ταυτίζεται με τα διανύσματα μετατόπισης των δύο συνδεδεμένων επιφανειών των δύο υλικών που αντιστοιχούν στο σημείο αυτό. Η ισορροπία ενός στοιχειώδους τμήματος του μέσου περιγράφεται με τρεις σχέσεις, που συνδέουν τις συνιστώσες των ελκυστών, που επενεργούν πάνω στις δύο αντίθετες πλευρές του στοιχειώδους τμήματος από τα παρακείμενα υλικά, με τις συνιστώσες του ταυστή τάσεων του μέσου. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη γενίκευση των σχέσεων Young-Laplace της μηχανικής των ρευστών σε στερεά. Πρόσφατα, ο τύπος αυτός διεπιφανειακής σύνδεσης έχει εκτενώς θεωρηθεί στη βιβλιογραφία, αλλά σε πολλές εργασίες έχει γίνει μία εσφαλμένη εξειδίκευση των σχετικών εξισώσεων Gurtin-Murdoch στη γραμμική ελαστικότητα με απειροστές παραμορφώσεις. Το γεγονός αυτό έχει προκαλέσει μια σύγχυση στη σχετική βιβλιογραφία που έχει οδηγήσει, ακόμα, και σε αποδοχή αρνητικών τιμών των ελαστικών σταθερών των σχετικών καταστατικών εξισώσεων. Στην παρούσα διατριβή, οι καταστατικές εξισώσεις των Gurtin-Murdoch επανεξάγονται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας των απειροστών παραμορφώσεων και διερευνάται το πρόσημο των υπεισερχόμενων ελαστικών σταθερών. Δείχνεται ότι, οι ελαστικές σταθερές τύπου Lamé, που υπεισέρχονται στις καταστατικές εξισώσεις του διδιάστατου ελαστικού μέσου της μεμβράνης, θα πρέπει να είναι πάντα θετικές προκειμένου η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μεμβράνη να είναι θετική. Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα που έχει προκύψει αναφορικά με τις διεπιφάνειες μεμβρανικού τύπου είναι η διασαφήνιση της φύσης των παραμενουσών επιφανειακών τάσεων στα υλικά. Στη βιβλιογραφία, η παραμένουσα διεπιφανειακή τάση θεωρείται ως μια διεπιφανειακή σταθερά των συνδεδεμένων υλικών, όπως είναι οι διεπιφανειακές ελαστικές σταθερές τύπου Lamé λ_S και μ_S . Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής εισάγεται η έννοια της επιφανειακής ιδιοπαραμόρφωσης σε ένα διδιάστατο ελαστικό μέσο, ως το ανάλογο της ιδιοπαραμόρφωσης που έχει εισαχθεί στη βιβλιογραφία σε συνεχή ελαστικά μέσα όγκου. Η επιφανειακή ιδιοπαραμόρφωση είναι ελεύθερη τάσεων, όταν αναπτύσσεται στο διδιάστατο συνεχές μέσο χωρίς την παρουσία των παρακείμενων υλικών. Όταν το συνεχές ελαστικό μέσο είναι συνδεδεμένο με τα παρακείμενα υλικά, η ανάπτυξη των επιφανειακών ιδιοπαραμορφώσεων εμποδίζεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη τάσεων, τόσο στο διδιάστατο μέσο, όσο και στα συνδεδεμένα με αυτό μέσα. Η παραμένουσα επιφανειακή σταθερή τάση τ_0 στις διεπιφάνειες κρυσταλλικών νανο-υλικών μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από μία συνεχή διανομή σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων τύπου Landau, που εισάγεται λόγω της διαφοράς των ατομικών αποστάσεων των επιμέρους υλικών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοιου είδους παραμένουσες τάσεις μπορούν να αναπτυχθούν και από άλλους τύπους διεπιφανειακών ιδιοπαραμορφώσεων, όπως για παράδειγμα, από θερμικές διεπιφανειακές ιδιοπαραμορφώσεις. Αυτός ο τύπος διεπιφανειακών ιδιοπαραμορφώσεων συζητιέται στην παρούσα διατριβή. Δείχνεται ότι οι αναπτυσσόμενες παραμένουσες τάσεις μπορεί να μην είναι σταθερές κατά μήκος της διεπιφάνειας.

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής διερευνάται η επίδραση που ασκούν οι δύο τύποι διεπιφανειών που προαναφέρθηκαν πάνω στην εντατική και ενεργειακή κατάσταση ενός νανο-σύνθετου υλικού. Η

διερεύνηση γίνεται αναφορικά με ένα διφασικό νανο-σύνθετο υλικό που αποτελείται από μια ανομοιογένεια που βρίσκεται σε μια ελαστική μήτρα. Το διφασικό αυτό υλικό παραμορφώνεται είτε από ένα ισόρροπο σύστημα επιφανειακών δυνάμεων που επενεργεί στην εξωτερική επιφάνεια της μήτρας, είτε από μια διανομή ιδιοπαραμορφώσεων στην ανομοιογένεια. Στην ανάλυση που γίνεται, ένα τμήμα της διεπιφάνειας θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε έναν από τους δύο τύπους διεπιφανειακής σύνδεσης που προαναφέρθηκαν, ενώ το υπόλοιπο, σε μια τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση. Για το διφασικό αυτό υλικό και για τις δύο φορτίσεις που θεωρούνται, ορίζονται οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα, στην ανομοιογένεια και στο μη-τέλεια συνδεδεμένο τμήμα της διεπιφάνειας, καθώς επίσης και η ολική δυναμική ενέργεια του διφασικού υλικού. Με βάση τους ορισμούς αυτούς και το θεώρημα αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων, διατυπώνονται δύο νέες ενεργειακές προτάσεις αναφορικά με τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του υπό ένταση διφασικού υλικού, όταν σε αυτό σχηματισθεί μια μη-τέλεια διεπιφάνεια των παραπάνω τύπων. Οι προτάσεις αυτές επιτρέπουν τον υπολογισμό της μεταβολής της ολικής δυναμικής ενέργειας χρησιμοποιώντας μόνο τα διεπιφανειακά ελαστικά πεδία του συστήματος για δύο διακριτές ελαστικές καταστάσεις. Η πρώτη ελαστική κατάσταση αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σώμα παραμορφώνεται από τις φορτίσεις που θεωρούνται έχοντας μία τέλεια διεπιφάνεια, ενώ η δεύτερη κατάσταση αντιστοιχεί στην περίπτωση που σε ένα τμήμα της διεπιφάνειας αντιστοιχεί μια μη τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση. Οι δύο αυτές ενεργειακές προτάσεις αποτελούν την επέκταση σε μη τέλειες διεπιφάνειες της πρότασης που έχει αναπτυχθεί από τους Irwin - Bilby - Eshelby για φορτισμένα υλικά με ρωγμές.

Οι παραπάνω ενεργειακές προτάσεις εφαρμόζονται στην περίπτωση μιας κυλινδρικής κυκλικής ανομοιογένειας που βρίσκεται σε μια απείρως εκτεινόμενη ελαστική μήτρα, για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση που προκαλούνται από μηχανικές και θερμικές φορτίσεις. Οι μηχανικές φορτίσεις περιλαμβάνουν μία ομοιόμορφη συνεπίπεδη ή αντιεπίπεδη φόρτιση σταθερών τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας, και για συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις στην κυλινδρική ανομοιογένεια. Οι θερμικές φορτίσεις που θεωρούνται είναι μια σταθερή θερμοκρασιακή διακύμανση στο σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας και μια ομοιόμορφη θερμική ροή στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Σε όλες τις παραπάνω φορτίσεις, η μη-τέλεια διεπιφάνεια θεωρείται ότι καταλαμβάνει όλη την έκταση της διεπιφάνειας.

Οι δύο ενεργειακές προτάσεις που διατυπώθηκαν θεωρούν την ελαστική κατάσταση του συστήματος με μη τέλεια διεπιφάνεια ως μια διαταραχή της ελαστικής κατάστασης του συστήματος με τέλεια διεπιφάνεια. Στην περίπτωση της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου, η διαταραχή αντιστοιχεί σε μια επιπρόσθετη παραμόρφωση του υλικού που προέρχεται από μία εξάρμωση Somigliana που εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας. Η ασυνέχεια της εξάρμωσης Somigliana πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες δεσμεύσεις που επιβάλλονται από τις συνθήκες που περιγράφουν τις διεπιφάνειες ελατηριακού τύπου. Η επίλυση των σχετικών συνεπίπεδων και αντιεπίπεδων ελαστικών προβλημάτων έγινε με τη μέθοδο των διφασικών δυναμικών, που επεκτάθηκε κατάλληλα προκειμένου να συμπεριλάβει διεπιφανειακές φορτίσεις εξαρμώσεων Somigliana. Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθήθηκε για την επίλυση των αντίστοιχων ελαστικών προβλημάτων του νανο-σύνθετου υλικού, όταν η διεπιφάνειά του είναι μεμβρανικού τύπου. Στην περίπτωση αυτή, τα διαταραγμένα ελαστικά πεδία αντιστοιχούν σε μια παραμόρφωση του συστήματος που προέρχεται από μια διανομή γραμμικών δυνάμεων κατά μήκος της διεπιφάνειας. Οι γραμμικές αυτές δυνάμεις πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένες δεσμεύσεις κατά μήκος της διεπιφάνειας, που επιβάλ-

λονται από τις συνθήκες που περιγράφουν τις διεπιφάνειες μεμβρανικού τύπου. Το ελαστικό πρόβλημα των γραμμικών διεπιφανειακών δυνάμεων είναι το ανάλογο του ελαστικού προβλήματος εξάρμωσης Somigliana. Η επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων έγινε με κατάλληλη επέκταση της μεθόδου των διαφασικών δυναμικών.

Για όλες τις φορτίσεις που θεωρήθηκαν, προσδιορίστηκαν τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα σε αλγεβρική μορφή. Για τη συνεπίπεδη κατάσταση, τα ελαστικά πεδία έχουν εκφρασθεί σε όρους τριών διαφασικών παραμέτρων τύπου Dundurs που καθιστά τη μορφή τους απλή και συνεπτυγμένη. Με βάση τα ελαστικά αυτά πεδία προσδιορίστηκαν οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα, στην ανομοιογένεια και στη διεπιφάνεια του συστήματος. Δείχνεται ότι, τόσο τα ελαστικά πεδία, όσο και οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στη μήτρα, την ανομοιογένεια και τη διεπιφάνεια εξαρτώνται δραστικά από το μέγεθος της ανομοιογένειας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην διεπιφάνεια σε σύγκριση με την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια, καθίσταται αμελητέα, όταν η διάσταση της ανομοιογένειας τείνει στο άπειρο. Αυτό συμβαίνει και για τους δύο τύπους διεπιφανειών που θεωρήθηκαν. Αντίθετα, η ενέργεια που αποθηκεύεται στη διεπιφάνεια καθίσταται σημαντική, όταν η διάσταση της ανομοιογένειας είναι της τάξεως νανομέτρου. Βρέθηκε, επίσης, ότι η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου αποκτάει μια μέγιστη τιμή για μια συγκεκριμένη διάσταση της ανομοιογένειας που εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές των δύο υλικών και της διεπιφάνειας.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που προέκυψε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής αφορά τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας που συμβαίνει σε ένα υπό ένταση νανο-σύνθετο υλικό, όταν σε αυτό σχηματισθεί μια μη τέλεια διεπιφάνεια. Προέκυψε ότι η μεταβολή αυτή είναι πάντα αρνητική, όταν μία τέλεια διεπιφάνεια σε ένα υπό ένταση νανο-σύνθετο υλικό μετασχηματισθεί σε διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου, και είναι πάντα θετική, όταν η τέλεια διεπιφάνειά του μετασχηματισθεί σε διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Το συμπέρασμα αυτό, αν και προέκυψε για μια κυλινδρική κυκλική διεπιφάνεια και για συγκεκριμένες φορτίσεις, φαίνεται να είναι ένα γενικό συμπέρασμα που ισχύει για κάθε διεπιφάνεια και για κάθε φόρτιση του νανο-σύνθετου υλικού. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, κατά το μετασχηματισμό μιας τέλει διεπιφάνειας σε διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου ενώ το σύστημα είναι φορτισμένο, συμβαίνει μια αύξηση των διεπιφανειακών επαπτομενικών ορθών τάσεων της μήτρας, ανεξάρτητα από τον λόγο των μέτρων ελαστικότητας μήτρας/ανομοιογένειας. Αυτό σημαίνει ότι η εμφάνιση μιας διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου σε ένα σύνθετο υλικό προκαλεί μια υποβάθμιση της μηχανικής του συμπεριφοράς, καθότι αυξάνει τοπικά την ορθή επαπτομενική τάση, που προξενεί μια ακτινική ρωγμή στη μήτρα, όταν αυτή προσεγγίσει μια οριακή τιμή. Το αντίθετο παρατηρείται, όταν η τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος μετασχηματιστεί σε διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου. Στην περίπτωση αυτή οι διεπιφανειακές επαπτομενικές τάσεις στη μήτρα μειώνονται, ανεξάρτητα από τα μέτρα ελαστικότητας μήτρας και ανομοιογένειας. Αυτό, σημαίνει ότι η εμφάνιση μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου σε ένα υλικό προξενεί μια αναβάθμιση της μηχανικής του συμπεριφοράς, καθότι η αιτία που προκαλεί τις ακτινικές ρωγμές στη μήτρα μειώνεται. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αναγνώριση της διακριτής αυτής συμπεριφοράς των δύο αυτών διεπιφανειών σε ένα σύνθετο υλικό γίνεται για πρώτη φορά στην παρούσα διατριβή. Στα πλαίσια της επίλυσης των σχετικών προβλημάτων θερμικής αγωγιμότητας, εισάγεται η έννοια της θερμικής εξάρμωσης, που αποτελεί το θερμικό ανάλογο της μηχανικής εξάρμωσης Somigliana των ελαστικών προβλημάτων. Με βάση τη μέθοδο των διαφασικών δυναμικών, προσδιορίζονται τα θερμοκρα-

σιακά πεδία του υλικού για μια σταθερή θερμική διακύμανση και για μια ομοιόμορφη θερμική ροή στο άπειρο. Στη συνέχεια, τα θερμοκρασιακά αυτά πεδία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των θερμοελαστικών πεδίων για διεπιφανειακές συνθήκες ελατηριακού και μεμβρανικού τύπου. Όπως στις μηχανικές φορτίσεις, τα θερμοελαστικά πεδία που προσδιορίστηκαν είναι εξαρτημένα από το μέγεθος της ανομοιογένειας. Η εξάρτηση αυτή εισάγεται, τόσο από τις μηχανικές όσο και από τις θερμικές διεπιφανειακές συνθήκες του συστήματος, που είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Το γεγονός αυτό παρέχει τη δυνατότητα σχεδιασμού της ουδέτερης ανομοιογένειας σε μια άπειρη ελαστική μήτρα, όταν αυτή διαρρέεται από μια ομοιόμορφη θερμική ροή, δηλαδή, μιας ανομοιογένειας που δεν προξενεί θερμοελαστικές τάσεις στο σύστημα. Ένα άλλο ενδιαφέρον αποτέλεσμα, που έχει προκύψει για θερμικές δράσεις, σχετίζεται με τις θερμικές παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε μία διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου και υψηλής αγωγιμότητας. Όταν το σύστημα υπόκειται σε μια ομοιόμορφη θερμική διακύμανση, οι θερμικές παραμορφώσεις της μεμβράνης προκαλούν μια ομοιόμορφη τάση στη μεμβράνη και ανομοιόμορφες θερμο-ελαστικές τάσεις στα δύο υλικά του συστήματος. Οι τάσεις αυτές αποτελούν ένα είδος εσωτερικών διεπιφανειακών τάσεων στα υλικά και διασαφηνίζουν τη φύση των εσωτερικών επιφανειακών τάσεων στα υλικά, που εμφανίζονται στη νανοκλίμακα. Για ομοιόμορφη θερμική ροή, οι θερμικές αυτές τάσεις δεν είναι ομοιόμορφες, αλλά μεταβάλλονται κατά μήκος της διεπιφάνειας.

7.2 Προτάσεις για παραπέρα έρευνα

Ως συνέχεια της έρευνας που έχει διεξαχθεί στα πλαίσια της παρούσας διατριβής προτείνονται τα παρακάτω:

- Χρήση των εκτεταμένων θεωρημάτων Irwin-Bilby-Eshelby για την ανάλυση της ενεργειακής κατάστασης της ελλειψοειδούς ανομοιογένειας με μια μη-τέλεια διεπιφάνεια που διαταράσσει ένα ομοιόμορφο φορτίο τασικό πεδίο στη μήτρα ή υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης (γενικευμένο πρόβλημα Eshelby).
- Επέκταση των θεωρημάτων Irwin-Bilby-Eshelby στην περίπτωση θερμοκρασιακών δράσεων χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα θερμο-ελαστικά δυναμικά και τη διερεύνηση των σχετικών θερμοελαστικών προβλημάτων.
- Ανάπτυξη μιας νέας μεθοδολογίας προσδιορισμού του ισοδύναμου μέτρου ελαστικότητας σύνθετων νανο-υλικών που θα στηρίζεται στην ενεργειακή ανάλυση που προτάθηκε στην παρούσα διατριβή.
- Διερεύνηση των τοπικών ελαστικών πεδίων στην άκρη μιας πεπερασμένης μη-τέλειας διεπιφάνειας και προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ολικής ενέργειας του συστήματος για μια απειροστή αύξηση της μη-τέλειας διεπιφάνειας. Η ανάλυση αυτή να γίνει κατά αντιστοιχία των αναλύσεων που έχουν γίνει για (διεπιφανειακές) ρωγμές.

Βιβλιογραφία

- Achenbach, J. and Zhu, H. (1989). Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37(3):381 – 393.
- Alali, B. and Milton, G. W. (2013). Effective conductivities of thin-interphase composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(12):2680 – 2691.
- Benveniste, Y. (1985). The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials*, 4(2):197 – 208.
- Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials*, 6(2):147–157.
- Benveniste, Y. and Miloh, T. (1986). The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces. *International Journal of Engineering Science*, 24(9):1537 – 1552.
- Benveniste, Y. and Miloh, T. (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mechanics of Materials*, 33(6):309 – 323.
- Benveniste, Y. and Miloh, T. (2007). Soft neutral elastic inhomogeneities with membrane-type interface conditions. *Journal of Elasticity*, 88(2):87–111.
- Berger, S. and Spaepen, F. (1995). The Ag/Cu interface stress. *Nanostructured Materials*, 6(1–4):201 – 204.
- Bilby, B. and Eshelby, J. (1968). Dislocations and the theory of fracture. In: *Fracture, an Advanced Treatise*, New York.
- Brisard, S., Dormieux, L., and Kondo, D. (2010). Hashin–Shtrikman bounds on the bulk modulus of a nanocomposite with spherical inclusions and interface effects. *Computational Materials Science*, 48(3):589 – 596.
- Cahn, J. and Lärché, F. (1982). Surface stress and the chemical equilibrium of small crystals–II. Solid particles embedded in a solid matrix. *Acta Metallurgica*, 30(1):51 – 56.
- Cammarata, R. (1997). Surface and interface stress effects on interfacial and nanostructured materials. *Materials Science and Engineering: A*, 237(2):180 – 184.

- Cammarata, R. C. and Sieradzki, K. (1989). Effects of surface stress on the elastic moduli of thin films and superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2005–2008.
- Chen, T., Dvorak, G., and Yu, C. (2007a). Size-dependent elastic properties of unidirectional nanocomposites with interface stresses. *Acta Mechanica*, 188(1-2):39–54.
- Chen, T., Dvorak, G., and Yu, C. (2007b). Solids containing spherical nano-inclusions with interface stresses: Effective properties and thermal–mechanical connections. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3–4):941–955.
- Chen, T. and Dvorak, G. J. (2006). Fibrous nanocomposites with interface stress: Hill’s and Levin’s connections for effective moduli. *Applied Physics Letters*, 88(21):–.
- Dong, Z. and Levy, A. J. (2000). Mean field estimates of the response of fiber composites with nonlinear interface. *Mechanics of Materials*, 32(12):739 – 767.
- Duan, H. and Karihaloo, B. (2007). Thermo-elastic properties of heterogeneous materials with imperfect interfaces: Generalized levin’s formula and hill’s connections. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(5):1036 – 1052.
- Duan, H., Wang, J., Huang, Z., and Karihaloo, B. (2005a). Eshelby formalism for nano-inhomogeneities. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2062):3335–3353.
- Duan, H., Wang, J., Huang, Z., and Karihaloo, B. (2005b). Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(7):1574 – 1596.
- Duan, H., Wang, J., Huang, Z., and Luo, Z. (2005c). Stress concentration tensors of inhomogeneities with interface effects. *Mechanics of Materials*, 37(7):723–736.
- Duan, H., Wang, J., Huang, Z., and Zhong, Y. (2005d). Stress fields of a spheroidal inhomogeneity with an interphase in an infinite medium under remote loadings. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2056):1055–1080.
- Florence, A. and Goodier, J. (1959). Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow. *ASME. J Appl Mech*, 26:293–294.
- Gao, Z. (1995). A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby’s tensor and related problems. *Journal of Applied Mechanics*, 62(4):860–866.
- Gibbs, J. W. (1906). *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, volume 1. Longmans, Green and Company.
- Gilbert, B., Huang, F., Zhang, H., Waychunas, G. A., and Banfield, J. F. (2004). Nanoparticles: Strained and stiff. *Science*, 305(5684):651–654.
- Gong, S. and Meguid, S. (1992). A general treatment of the elastic field of an elliptical inhomogeneity under antiplane shear. *Journal of applied mechanics*, 59(2S):S131–S135.

- Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, pages 163–198.
- Griffith, A. A. (1924). The theory of rupture,” proc. *First Int. Congo Appl. Mech., Delft*, pages 55–63.
- Gurtin, M. E. and Murdoch, A. I. (1975). A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4):291–323.
- Gurtin, M. E. and Murdoch, A. I. (1978). Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 14(6):431 – 440.
- Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):143–150.
- Hashin, Z. (1990). Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials*, 8(4):333 – 348.
- Hashin, Z. (1991a). The spherical inclusion with imperfect interface. *Journal of applied Mechanics*, 58(2):444–449.
- Hashin, Z. (1991b). Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(6):745 – 762.
- Hashin, Z. (1992). Extremum principles for elastic heterogenous media with imperfect interfaces and their application to bounding of effective moduli. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(4):767–781.
- He, Q.-C. and Benveniste, Y. (2004). Exactly solvable spherically anisotropic thermoelastic microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(11):2661 – 2682.
- Huang, Z. and Sun, L. (2007). Size-dependent effective properties of a heterogeneous material with interface energy effect: from finite deformation theory to infinitesimal strain analysis. *Acta Mechanica*, 190(1-4):151–163.
- Huang, Z., Wang, Z., Zhao, Y., and Wang, J. (2008). Influence of particle-size distribution on effective properties of nanocomposites. In Fan, J. and Chen, H., editors, *ICHMM 2008: Advances in heterogeneous material mechanics, 2008: proceedings of the second International Conference on Heterogeneous Material Mechanics, Huangshan, China*, pages 925–932. DEStech Publications.
- Inglis, C. (1913). Stress in a plate due to the presence of sharp corners and cracks. *Trans. Roy. Inst. Naval Architects*, 55:219–241.
- Irwin, G. (1958). *Handbuch der physik*, vol. 6.
- Josell, D., Bonevich, J. E., Shao, I., and Cammarata, R. C. (1999). Measuring the interface stress: Silver/nickel interfaces. *Journal of Materials Research*, 14:4358–4365.

- Kattis, M. and Meguid, S. (1995). Two-phase potentials for the treatment of an elastic inclusion in plane thermoelasticity. *Journal of applied mechanics*, 62(1):7–12.
- Kattis, M. and Providas, E. (1998). Inplane deformation of a circular inhomogeneity with imperfect interface. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 28(3):213 – 222.
- Kattis, M. A. (1994). Two-phase potentials for isotropic elastic bi-materials. *International journal of engineering science*, 32(9):1493–1499.
- Kraus, H. (1967). *Thin Elastic Shells: An Introduction to the Theoretical Foundations and the Analysis of Their Static and Dynamic Behavior*. John Wiley & Sons.
- Laplace, P. d. (1805). *Méccmique céleste. Tome IV*.
- Li, S., Yiming, W., Zhuping, H., and Jianxiang, W. (2004). Interface effect on the effective bulk modulus of a particle-reinforced composite. *Acta Mechanica Sinica*, 20(6):676–679.
- Lubarda, V. and Markenscoff, X. (1999). Energies of circular inclusions: sliding versus bonded interfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1983):961–974.
- Luo, J. and Wang, X. (2009). On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(5):926 – 934.
- Mal, A. K. and Bose, S. K. (1974). Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 76:587–600.
- Miller, R. E. and Shenoy, V. B. (2000). Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 11(3):139.
- Miloh, T. and Benveniste, Y. (1999). On the effective conductivity of composites with ellipsoidal inhomogeneities and highly conducting interfaces. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1987):2687–2706.
- Mogilevskaya, S. G., Crouch, S. L., Grotta, A. L., and Stolarski, H. K. (2010a). The effects of surface elasticity and surface tension on the transverse overall elastic behavior of unidirectional nanocomposites. *Composites Science and Technology*, 70(3):427 – 434.
- Mogilevskaya, S. G., Crouch, S. L., Stolarski, H. K., and Benusiglio, A. (2010b). Equivalent inhomogeneity method for evaluating the effective elastic properties of unidirectional multi-phase composites with surface/interface effects. *International Journal of Solids and Structures*, 47(3–4):407–418.
- Muskhelishvili, N. (1953). *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (trans. JRM Radok) Noordhoff*.
- Ouyang, G., Li, X. L., Tan, X., and Yang, G. W. (2006). Size-induced strain and stiffness of nanocrystals. *Applied Physics Letters*, 89(3):–.

- Qu, J. (1993). The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials. *Mechanics of Materials*, 14(4):269 – 281.
- Quang, H. L. and He, Q.-C. (2007). Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9):1899 – 1931.
- Quang, H. L. and He, Q.-C. (2008). Variational principles and bounds for elastic inhomogeneous materials with coherent imperfect interfaces. *Mechanics of Materials*, 40(10):865 – 884.
- Quang, H. L., He, Q.-C., and Bonnet, G. (2011). Eshelby's tensor fields and effective conductivity of composites made of anisotropic phases with Kapitza's interface thermal resistance. 91(25):3358–3392.
- Reissner, E. (1941). A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells. *American Journal of Mathematics*, pages 177–184.
- Sharma, P. and Ganti, S. (2004). Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies. *Journal of Applied Mechanics*, 71(5):663–671.
- Sharma, P., Ganti, S., and Bhate, N. (2003). Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities. *Applied Physics Letters*, 82(4):535–537.
- Tian, L. and Rajapakse, R. (2007). Elastic field of an isotropic matrix with a nanoscale elliptical inhomogeneity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(24):7988 – 8005.
- Tian, L. and Rajapakse, R. K. N. D. (2006). Analytical solution for size-dependent elastic field of a nanoscale circular inhomogeneity. *Journal of Applied Mechanics*, 74(3):568–574.
- Wang, Z.-Q., Zhao, Y.-P., and Huang, Z.-P. (2010). The effects of surface tension on the elastic properties of nano structures. *International Journal of Engineering Science*, 48(2):140 – 150.
- Wolfer, W. G. (2011). Elastic properties of surfaces on nanoparticles. *Acta Materialia*, 59(20):7736 – 7743.
- Yang, F. (2004). Size-dependent effective modulus of elastic composite materials: spherical nanocavities at dilute concentrations. *Journal of Applied Physics*, 95(7):3516–3520.
- Yang, F. (2006). Effect of interfacial stresses on the elastic behavior of nanocomposite materials. *Journal of Applied Physics*, 99(5):–.
- Young, T. (1805). An essay on the cohesion of fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95:65–87.
- Yvonnet, J., Quang, H., and He, Q.-C. (2008). An XFEM/level set approach to modelling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites. *Computational Mechanics*, 42(1):119–131.

Παράρτημα I

Οι Βασικές Εξισώσεις Ελαστικότητας

I.1 Οι εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας

Θεωρούμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία καταπονούμενο είτε από ένα σύστημα εξωτερικών δυνάμεων, είτε από πηγές εσωτερικών τάσεων. Αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x_i , οι εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία και την παραμόρφωση του σώματος είναι

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (\text{I.1}\alpha)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (\text{I.1}\beta)$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (\text{I.1}\gamma)$$

Στις σχέσεις αυτές, σ_{ij} και ε_{ij} είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων και παραμορφώσεων, u_i είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης, C_{ijkl} είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού. Η επίλυση του γενικού ελαστικού προβλήματος του σώματος ανάγεται στον προσδιορισμό των μετατοπίσεων u_i επιλύοντας την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = 0, \quad (\text{I.2})$$

η οποία στην ισότροπη περίπτωση παίρνει τη μορφή

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = 0, \quad (\text{I.3})$$

όπου λ και μ είναι οι σταθερές του Lamè.

I.2 Οι εξισώσεις της ελαστικότητας για διδιάστατη παραμόρφωση

Ως διδιάστατη παραμόρφωση ενός σώματος ορίζεται εκείνη στην οποία οι φορτίσεις είναι τέτοιες ώστε οι αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις u_1 , u_2 , και u_3 είναι ανεξάρτητες της μίας μεταβλητής. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις της διδιάστατης παραμόρφωσης για την περίπτωση που οι μετατοπίσεις

είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x_3 , δηλαδή, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ και $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Στην ισότροπη ελαστικότητα, το διδιάστατο ελαστικό πρόβλημα περιγράφεται από δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις, που αντιπροσωπεύουν δύο ανεξάρτητες καταστάσεις παραμόρφωσης του συστήματος. Η μία κατάσταση αντιστοιχεί στη *συνεπίπεδη παραμόρφωση* του σώματος, με άγνωστες τις μετατοπίσεις u_1 και u_2 , και η δεύτερη στην *αντιεπίπεδη παραμόρφωση*, με άγνωστη συνάρτηση την μετατόπιση u_3 . Για την κατάσταση ισορροπίας και για απουσία μαζικών δυνάμεων, η συνεπίπεδη παραμόρφωση, περιγράφεται με την διαφορική εξίσωση

$$(\lambda + \mu)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} = 0, \quad (\text{I.4})$$

όπου, λ και μ είναι οι σταθερές του Lamè. Έχοντας προσδιορίσει τις μετατοπίσεις u_α από την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης παίρνοντας υπόψιν τις σχετικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, οι τάσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda u_{\alpha,\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}). \quad (\text{I.5})$$

Για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση, οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι

$$u_{3,\alpha\alpha} = 0, \quad \sigma_{\alpha 3} = \mu u_{3,\alpha}. \quad (\text{I.6})$$

I.3 Η διατύπωση της λύσης των διδιάστατων ελαστικών προβλημάτων

Οι διαφορικές εξισώσεις της (I.4) έχουν ως άγνωστες συναρτήσεις τις καρτεσιανές συνιστώσες μετατόπισης $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ και $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, που αναπτύσσονται στο σώμα. Μία γενική αντιπροσώπευση της λύσης των διαφορικών εξισώσεων (I.4), που θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσας διαφορικής, έχει αναπτυχθεί από τους Koloson και Muskhelishvili (1953). Σύμφωνα με τη λύση αυτή, η μιγαδική μετατόπιση $D = u_1 + iu_2$ και η μιγαδική δύναμη $R = X_1 + iX_2$ που επενεργεί πάνω σε ένα τόξο μπορούν να εκφραστούν σε όρους δύο ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων $\phi(z)$, $\psi(z)$ με τη σχέση

$$2\mu D = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (\text{I.7a})$$

$$iR = \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (\text{I.7b})$$

όπου $z = x_1 + ix_2$, ($i^2 = -1$) και $\kappa = 3 - 4\nu$. Οι παρακάτω εκφράσεις των τάσεων σε όρους των ολόμορφων συναρτήσεων ϕ , ψ έχουν τη μορφή

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}], \quad (\text{I.8a})$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]. \quad (\text{I.8b})$$

Έτσι, το πρόβλημα του προσδιορισμού των ελαστικών πεδίων για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων $\phi(z)$, $\psi(z)$ των δύο μέσων που ικανοποιεί τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Οι δύο αυτές ολόμορφες συναρτήσεις αποτελούν τα μιγαδικά δυνα-

μικά του συνεπίπεδου ελαστικού προβλήματος.

Για τη διαφορική εξίσωση της αντεπίπεδης παραμόρφωσης (I.6), μία γενική αντιπροσώπευση της λύσης μπορεί να εκφρασθεί σε όρους μιας ολόμορφης συνάρτησης $f(z)$ με τη σχέση

$$u_3 = f(z) + \overline{f(z)}. \quad (\text{I.9})$$

Η δύναμη που επενεργεί πάνω σε ένα τόξο έχει τη μορφή

$$iX_3 = \mu[f(z) - \overline{f(z)}]. \quad (\text{I.10})$$

Έχοντας προσδιορίσει την ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$, οι τάσεις υπολογίζονται από τη σχέση

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = 2\mu \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \quad (\text{I.11})$$

από την οποία υπολογίζονται οι συνιστώσες των τάσεων σ_{31} και σ_{32} . Η ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$ αποτελεί το μιγαδικό δυναμικό του αντεπίπεδου ελαστικού προβλήματος.

Αναφορικά με ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ, x_3) , οι καμπυλόγραμμες συνιστώσες των μετατοπίσεων u_ρ και u_θ και οι καμπυλόγραμμες συνιστώσες των τάσεων $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\theta\theta}$ και $\sigma_{\rho\theta}$ συνδέονται με τις αντίστοιχες καρτεσιανές συνιστώσες με τις σχέσεις

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad (\text{I.12}\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\rho} + i\sigma_{\rho\theta} = e^{-i\theta}(\sigma_{11} + i\sigma_{22}), \quad (\text{I.12}\beta)$$

$$u_\rho + iu_\theta = e^{-i\theta}(u_1 + iu_2). \quad (\text{I.12}\gamma)$$

Με βάση τις σχέσεις (I.8) και (I.12), οι κυλινδρικές συνιστώσες των ελαστικών πεδίων του συνεπίπεδου προβλήματος σε όρους των μιγαδικών δυναμικών παρέχονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}], \quad (\text{I.13}\alpha)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\rho\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + \frac{z^2}{z} \overline{\phi''(\bar{z})} + \frac{z}{z} \overline{\psi'(\bar{z})}. \quad (\text{I.13}\beta)$$

$$2\mu(u_\rho + iu_\theta) = \frac{\bar{z}}{z} \kappa \phi(z) - \bar{z} \overline{\phi'(\bar{z})} - \frac{\bar{z}}{z} \overline{\psi(\bar{z})}, \quad (\text{I.13}\gamma)$$

Για το διδιάστατο πρόβλημα, οι αντίστοιχες σχέσεις είναι

$$\sigma_{3\rho} + i\sigma_{3\theta} = e^{-i\theta}(\sigma_{31} + i\sigma_{32}), \quad (\text{I.14})$$

και

$$\sigma_{3\rho} + i\sigma_{3\theta} = 2\mu e^{i\theta} \frac{\partial f(z)}{\partial z}. \quad (\text{I.15})$$

Παράρτημα II

Οι Βασικές Εξισώσεις Θερμικής αγωγιμότητας και Θερμοελαστικότητας

II.1 Οι βασικές εξισώσεις της θερμικής αγωγιμότητας για συνθήκες σταθερής κατάστασης

Σε ένα ανισότροπο σώμα οι εξισώσεις που περιγράφουν την κατάσταση της θερμικής αγωγιμότητας για τις συνθήκες σταθερής κατάστασης είναι

$$k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (\text{II.1})$$

όπου $T = T(x_1, x_2, x_3)$ είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος σε σχέση με μία θερμοκρασία αναφοράς T_0 και q_i είναι οι συνιστώσες της θερμικής ροής. Οι ποσότητες k_{ij} αποτελούν τις συνιστώσες ενός συμμετρικού τανυστή που λέγεται τανυστής θερμικής αγωγιμότητας. Για ένα ισότροπο θερμικά υλικό οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$\nabla^2 T = 0, \quad q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (\text{II.2})$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του ισότροπου υλικού. Μία γενική αντιπροσώπευση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης της θερμικής αγωγιμότητας που παρέχεται από τη σχέση (II.2)₁ είναι

$$T = \frac{1}{2} [\chi(z) + \overline{\chi(z)}], \quad (\text{II.3})$$

όπου $\chi(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση που ονομάζεται θερμοκρασιακό δυναμικό. Η μιγαδική ροή $q = q_1 + iq_2$ σε όρους του θερμοκρασιακού δυναμικού $\chi(z)$ έχει τη μορφή

$$q_1 - iq_2 = -k \frac{\partial \chi(z)}{\partial z}. \quad (\text{II.4})$$

Μια άλλη ποσότητα που έχει εισαχθεί στην επίλυση προβλημάτων θερμικής αγωγιμότητας είναι η ολική ροή Q που διέρχεται δια μέσου μίας καμπύλης C . (Η καμπύλη αυτή ορίζεται αναφορικά με το μιγαδικό

επίπεδο, ξεκινάει από ένα σταθερό του σημείο δεν τέμνει τον εαυτό της και το πέρας της είναι το σημείο z .) Η ποσότητα αυτή σε όρους του θερμοκρασιακού δυναμικού $\chi(z)$ δίνεται από τη σχέση

$$Q = \frac{ik}{2}[\chi(z) - \overline{\chi(\bar{z})}]. \quad (\text{II.5})$$

Όταν είναι γνωστή η ολική θερμική ροή που διέρχεται από ένα τόξο, η θερμική ροή προσδιορίζεται από τη σχέση

$$q_1 + iq_2 = -2i \frac{dQ}{dz}. \quad (\text{II.6})$$

Αναφορικά με ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων (ρ, θ, x_3) , οι καμπυλόγραμμες συνιστώσες της θερμικής ροής q_ρ και q_θ συνδέονται με τις καρτεσιανές συνιστώσες q_1, q_2 με τη σχέση

$$q_\rho + iq_\theta = e^{-i\theta}(q_1 + iq_2). \quad (\text{II.7})$$

II.2 Η συνεπίπεδη θερμοελαστικότητα

Όταν ένα θερμικά και μηχανικά ισότροπο σώμα έχει υποστεί μια θερμοκρασιακή μεταβολή $T = T(x_1, x_2, x_3)$ από τη θερμοκρασία αναφοράς T_0 , τότε στο σώμα αναπτύσσονται θερμικές μετατοπίσεις $u_\alpha^T = u_\alpha^T(x_1, x_2)$. Οι μετατοπίσεις αυτές είναι ελεύθερες τάσεων και ικανοποιούν τη σχέση

$$u_\alpha^T = \alpha_t(1 + \nu)T x_\alpha, \quad (\text{II.8})$$

όπου α_t είναι ο συντελεστής θερμικής επέκτασης του σώματος και ν ο λόγος του Poisson. Αν οι μετατοπίσεις αυτές εμποδίζονται να αναπτυχθούν τότε στο σώμα αναπτύσσονται ελαστικές μετατοπίσεις που συνοδεύονται από ελαστικές τάσεις. Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση του προβλήματος έχει τη μορφή

$$(\lambda + \mu)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t T_{,\alpha}, \quad (\text{II.9})$$

όπου u_α είναι οι ολικές παραμορφώσεις που εμφανίζονται στο σώμα. Οι θερμικές τάσεις προσδιορίζονται από την εξίσωση

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda u_{\alpha,\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \alpha_t(3\lambda + 2\mu)T \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.10})$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (II.9) μπορεί να εκφραστεί σε όρους δύο μιγαδικών δυναμικών $\phi(z), \psi(z)$, όπως στην περίπτωση των μηχανικών φορτίσεων. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις που παρέχουν τις θερμικές τάσεις παρέχονται από τις (I.8). Η σχέση που παρέχει τις μετατοπίσεις είναι

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta_t \int \chi(z) dz, \quad (\text{II.11})$$

όπου

$$\beta_t = 2\mu\alpha_t(1 + \nu) = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \alpha_t. \quad (\text{II.12})$$

Η σχέση που παρέχει τη δύναμη R που επενεργεί πάνω σε ένα τόξο έχει τη μορφή της (I.7β).

Παράρτημα III

Διφασικά Δυναμικά για μια κυκλική ανομοιογένεια

III.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση

Εξάρμωση τύπου Somigliana κατά μήκος της διεπιφάνειας

Θεωρούμε μια ανομοιογένεια ακτίνας R που είναι ένθετη σε μία ελαστική μήτρα. Αν κατά μήκος της διεπιφάνειας εφαρμόζεται μια εξάρμωση τύπου Somigliana, της οποίας η ασυνέχεια παρέχεται με τη μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{U}(z, \bar{z})$, τότε πάνω στη διεπιφάνεια θα ισχύουν οι σχέσεις

$$D_M(t, \bar{t}) - D_I(t, \bar{t}) = \mathcal{U}(t, \bar{t}), \quad (\text{III.1}\alpha)$$

$$R_M(t, \bar{t}) = R_I(t, \bar{t}), \quad t = Re^{i\theta}. \quad (\text{III.1}\beta)$$

όπου

$$D_k = (u_1 + iu_2)_k, \quad R_k = (X_1 + iX_2)_k, \quad (k = M \text{ ή } I). \quad (\text{III.2})$$

Από τις εξισώσεις (I.7), οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε όρους των μιγαδικών διφασικών δυναμικών της μήτρας και της ανομοιογένειας, γράφονται

$$\frac{1}{2\mu_M} \left[\kappa_M \varphi_M(t) - t\overline{\varphi'_M(t)} - \overline{\psi_M(t)} \right] - \frac{1}{2\mu_I} \left[\kappa_I \varphi_I(t) - t\overline{\varphi'_I(t)} - \overline{\psi_I(t)} \right] = \mathcal{U}(t, \bar{t}), \quad (\text{III.3}\alpha)$$

$$\varphi_M(t) + t\overline{\varphi'_M(t)} + \overline{\psi_M(t)} = \left[\varphi_I(t) + t\overline{\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)} \right]. \quad (\text{III.3}\beta)$$

Από τις σχέσεις αυτές, εύκολα προκύπτει ότι, πάνω στη διεπιφάνεια, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας $\phi(t)$ και $\psi(t)$ μπορούν να γραφούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της ανομοιογένειας $\phi(t)$, $\psi(t)$ με τις σχέσεις

$$\varphi_M(t) = \frac{1}{1+\Lambda} \varphi_I(t) - \frac{\Omega}{1+\Lambda} \left[t\overline{\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)} \right] + M\mathcal{U}(t, \bar{t}), \quad (\text{III.4}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(t) = & \frac{1}{1+\Pi}\psi_I(t) + \frac{\Lambda+\Omega}{1+\Lambda}\bar{t}\varphi'_I(t) + \frac{\Lambda}{1+\Lambda}\overline{\varphi_I(t)} + \frac{\Omega}{1+\Lambda}\bar{t}\frac{d}{dt}\left[\overline{t\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)}\right] \\ & - M\left[\overline{\mathcal{U}(\bar{t}, t)} + \bar{t}\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t, \bar{t})\right]. \end{aligned} \quad (\text{III.4}\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχει εισαχθεί ο συντελεστής

$$M = \frac{2\mu_M}{1+\kappa_M}, \quad (\text{III.5})$$

και οι αδιάστατες διφασικές σταθερές Λ , Π και Ω που παρέχονται από τις σχέσεις

$$\Lambda = \frac{\mu_I\kappa_M - \mu_M\kappa_I}{\mu_I + \mu_M\kappa_I}, \quad \Pi = \frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_M + \mu_I\kappa_M}, \quad \Omega = \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I + \mu_M\kappa_I}. \quad (\text{III.6})$$

Οι σταθερές αυτές ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Pi(1+\Lambda) = -\Omega(1+\Pi), \quad (\text{III.7}\alpha)$$

$$(1+\Pi)(1+\Lambda+\Omega) = 1+\Lambda. \quad (\text{III.7}\beta)$$

Αν τώρα τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων ορισθούν με τις σχέσεις

$$\phi_M(z) = \phi_0(z) - \Omega z \overline{\phi'_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \Pi \overline{\psi_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} + M \mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{III.8}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_0(z) + \Lambda \overline{\phi_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} + (\Lambda + \Omega) \frac{R^2}{z} \phi'_0(z) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \left[\Omega z \overline{\phi'_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \Pi \overline{\psi_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} \right] \\ & - M \left[\overline{\mathcal{U}\left(\frac{R^2}{z}, z\right)} z + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.8}\beta)$$

$$\phi_I(z) = (1+\Lambda)\phi_0(z), \quad (\text{III.8}\gamma)$$

$$\psi_I(z) = (1+\Pi)\psi_0(z), \quad (\text{III.8}\delta)$$

οι διεπιφανειακές σχέσεις (III.4) ικανοποιούνται αυτόματα. Στις σχέσεις (III.8) έχουν εισαχθεί οι ολόμορφες συναρτήσεις $\phi_0(z)$, $\psi_0(z)$, που ορίζουν τα διφασικά δυναμικά του διυλικού. Όταν η μήτρα εκτείνεται στο άπειρο, όπου φορτίζεται από μία ομοιόμορφη φόρτιση, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας έχουν τα παρακάτω αναπτύγματα στην περιοχή του απείρου ($z \rightarrow \infty$),

$$\phi_M(z) = T^\infty z + A_0 + \frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \dots, \quad (\text{III.9}\alpha)$$

$$\psi_M(z) = S^\infty z + B_0 + \frac{B_{-1}}{z} + \frac{B_{-2}}{z^2} + \dots, \quad (\text{III.9}\beta)$$

όπου οι $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$ και B_0, B_{-1}, B_{-2} είναι μιγαδικές σταθερές και

$$T^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4}, \quad S^\infty = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2} + i\sigma_{12}^\infty. \quad (\text{III.10})$$

Γραμμική δύναμη f κατά μήκος της διεπιφάνειας

Όταν μία διανεμημένη δύναμη $f(\theta) = f_1(\theta) + if_2(\theta)$ εφαρμόζεται κατά μήκος της διεπιφάνειας θα ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$D_M(t, \bar{t}) = D_I(t, \bar{t}), \quad (\text{III.11}\alpha)$$

$$R_M(t, \bar{t}) - R_I(t, \bar{t}) = \mathcal{F}(t, \bar{t}), \quad t = Re^{i\theta}, \quad (\text{III.11}\beta)$$

όπου έχει εισαχθεί η μιγαδική συνάρτηση $\mathcal{F}(t, \bar{t})$ με τη σχέση

$$\mathcal{F}(t, \bar{t}) = \mathcal{F}_1(R, \theta) = \int_A^B f(\theta) R d\theta. \quad (\text{III.12})$$

Από τις εξισώσεις (I.7), οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της μήτρας και της ανομοιογένειας, γράφονται

$$\frac{1}{2\mu_M} \left[\kappa_M \varphi_M(t) - \overline{t\varphi'_M(t)} - \overline{\psi_M(t)} \right] = \frac{1}{2\mu_I} \left[\kappa_I \varphi_I(t) - \overline{t\varphi'_I(t)} - \overline{\psi_I(t)} \right], \quad (\text{III.13}\alpha)$$

$$i\mathcal{F}(t, \bar{t}) = \varphi_M(t) + \overline{t\varphi'_M(t)} + \overline{\psi_M(t)} - \left[\varphi_I(t) + \overline{t\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)} \right]. \quad (\text{III.13}\beta)$$

Από τις σχέσεις αυτές, εύκολα προκύπτει ότι, πάνω στη διεπιφάνεια, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας $\phi(t)$ και $\psi(t)$ μπορούν να γραφούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της ανομοιογένειας $\phi(t)$, $\psi(t)$ με τις σχέσεις

$$\varphi_M(t) = \frac{1}{1+\Lambda} \varphi_I(t) - \frac{\Omega}{1+\Lambda} \left[\overline{t\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)} \right] + \frac{i}{1+\kappa_M} \mathcal{F}(t, \bar{t}), \quad (\text{III.14}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(t) = & \frac{1}{1+\Pi} \psi_I(t) + \frac{\Lambda+\Omega}{1+\Lambda} \bar{t}\varphi'_I(t) + \frac{\Lambda}{1+\Lambda} \overline{\varphi_I(t)} + \frac{\Omega}{1+\Lambda} \bar{t} \frac{d}{dt} \left[\overline{t\varphi'_I(t)} + \overline{\psi_I(t)} \right] \\ & - \frac{i}{1+\kappa_M} \left[\kappa_M \overline{\mathcal{F}(\bar{t}, t)} + \bar{t} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t, \bar{t}) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.14}\beta)$$

όπου τα Λ, Π και Ω παρέχονται από τις (III.6). Αν τώρα τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων ορισθούν με τις σχέσεις

$$\varphi_M(t) = \frac{1}{1+\Lambda} \varphi_I(t) - \frac{\Omega}{1+\Lambda} \left[\overline{t\varphi'_I\left(\frac{R^2}{t}\right)} + \overline{\psi_I\left(\frac{R^2}{t}\right)} \right] + \frac{i}{1+\kappa_M} \mathcal{F}\left(t, \frac{R^2}{t}\right), \quad (\text{III.15}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(t) = & \frac{1}{1+\Pi} \psi_I(t) + \frac{\Lambda + \Omega}{1+\Lambda} \frac{R^2}{t} \varphi'_I(t) + \frac{\Lambda}{1+\Lambda} \overline{\varphi}_I \left(\frac{R^2}{t} \right) + \frac{\Omega}{1+\Lambda} \frac{R^2}{t} \frac{d}{dt} \left[t \overline{\varphi}'_I \left(\frac{R^2}{t} \right) + \overline{\psi}_I \left(\frac{R^2}{t} \right) \right] \\ & - \frac{i}{1+\kappa_M} \left[\kappa_M \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{R^2}{t}, t \right) + \frac{R^2}{t} \frac{d}{dt} \mathcal{F} \left(t, \frac{R^2}{t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.15}\beta)$$

Οι παραπάνω διεπιφανειακές συνθήκες ικανοποιούνται αυτόματα, εάν τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας ορίζονται ως

$$\varphi_I(z) = (1 + \Lambda) \varphi_0(z), \quad (\text{III.16}\alpha)$$

$$\psi_I(z) = (1 + \Pi) \psi_0(z), \quad (\text{III.16}\beta)$$

και αυτά της μήτρας

$$\varphi_M(z) = \varphi_0(z) - \Omega z \overline{\varphi}'_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) + \Pi \overline{\psi}_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{i}{1+\kappa_M} \mathcal{F} \left(z, \frac{R^2}{z} \right), \quad (\text{III.17}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_0(z) + \Lambda \overline{\varphi}_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) + (\Lambda + \Omega) \frac{R^2}{z} \varphi'_0(z) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \left[\Omega z \overline{\varphi}'_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) - \Pi \overline{\psi}_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) \right] \\ & - \frac{i}{1+\kappa_M} \left[\kappa_M \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{R^2}{z}, z \right) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \mathcal{F} \left(z, \frac{R^2}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.17}\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα $\varphi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ είναι δύο ολόμορφες συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του διυλικού. Στις (III.17), ο ορισμός της μιγαδικής συνάρτησης $\mathcal{F}(t, \bar{t})$ έχει επεκταθεί σε όλο το επίπεδο z γράφοντας την $\mathcal{F}(z, \bar{z})$, όπου z είναι ένα σημείο στο επίπεδο z .

III.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση

Διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana

Αν κατά μήκος της διεπιφάνειας επενεργεί μία εξάρμωση τύπου Somigliana με ασυνέχεια που ορίζεται από τη συνάρτηση \mathcal{W} , που διευθύνεται στον άξονα x_3 , τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

$$u_3^M - u_3^I = \mathcal{W}(t, \bar{t}), \quad X_3^M = X_3^I. \quad (\text{III.18})$$

Αν τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων ορισθούν με τις σχέσεις

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \overline{f}_0 \left(\frac{R^2}{z} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{W} \left(z, \frac{R^2}{z} \right), \quad (\text{III.19}\alpha)$$

$$f_I(z) = \frac{2}{1+\Gamma} f_0(z), \quad (\text{III.19}\beta)$$

όπου, $\Gamma = \mu_I/\mu_M$. Στην περίπτωση που η αντιεπίπεδη παραμόρφωση στο διυλικό προέρχεται από ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας στην περιοχή του απείρου ($z \rightarrow \infty$) αναπτύσσεται σε σειρά της μορφής

$$f_M(z) = \frac{\Sigma^\infty}{2\mu_M} z + A_0 + \frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \dots, \quad (\text{III.20})$$

όπου οι $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$ είναι μιγαδικές σταθερές και

$$\Sigma^\infty = \sigma_{31}^\infty - i\sigma_{32}^\infty. \quad (\text{III.21})$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούν τις διεπιφανειακές σχέσεις (III.18).

Διανεμημένη δύναμη \mathcal{F}

Όταν η αντιεπίπεδη παραμόρφωση του δι-υλικού προέρχεται από μία γραμμική δύναμη $\mathcal{F} = \mathcal{F}(z, \bar{z})$ ομοιόμορφα κατανεμημένη κατά μήκος της διεπιφάνειας, οι (III.19) αντικαθίστανται από τις

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \bar{f}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{i}{2\mu_M} \mathcal{F}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{III.22α})$$

$$f_I(z) = \frac{2}{1+\Gamma} f_0(z). \quad (\text{III.22β})$$

III.3 Θερμικά διφασικά δυναμικά

Θερμική εξάρμωση τύπου Somigliana

Αν κατά μήκος της διεπιφάνειας υπάρχει μία θερμοκρασιακή διαφορά $\mathcal{T}(t, \bar{t})$ μεταξύ των δύο επιφανειών, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω θερμικές συνθήκες για τη διεπιφάνεια

$$T^M - T^I = \mathcal{T}(t, \bar{t}), \quad Q^M = Q^I, \quad (t = Re^{i\theta}) \quad (\text{III.23})$$

όπου τα T^k και Q^k είναι οι θερμοκρασίες και οι ολικές θερμικές ροές, αντίστοιχα. Η δεύτερη συνθήκη της (III.23) περιγράφει τη συνέχεια της θερμικής ροής κατά μήκος της διεπιφάνειας στην ολοκληρωμένη της μορφή. Αυτό το πρόβλημα θερμικής αγωγιμότητας είναι το αντίστοιχο του ελαστικού προβλήματος εξάρμωσης Somigliana. Παίρνοντας υπόψιν τις (II.3) και (II.5), οι διεπιφανειακές συνθήκες (III.23) γράφονται

$$\frac{1}{2} [\chi_M(t) + \overline{\chi_M(t)}] - \frac{1}{2} [\chi_I(t) + \overline{\chi_I(t)}] = \vartheta(t, \bar{t}), \quad (\text{III.24α})$$

$$\frac{ik_M}{2} [\chi_M(t) - \overline{\chi_M(t)}] = \frac{ik_I}{2} [\chi_I(t) - \overline{\chi_I(t)}], \quad (\text{III.24β})$$

όπου έχει εισαχθεί η μιγαδική συνάρτηση $\vartheta(z, \bar{z})$ με τη σχέση

$$\vartheta(z, \bar{z}) = \mathcal{T}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right). \quad (\text{III.25})$$

Οι δύο εξισώσεις (III.24) μπορούν να αντικατασταθούν ισοδύναμα από την εξίσωση

$$2\chi_M(t) = \left(1 + \frac{k_M}{k_I}\right) \chi_I(t) + \left(1 - \frac{k_M}{k_I}\right) \overline{\chi_I(t)} + 2\vartheta(t, \bar{t}). \quad (\text{III.26})$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι, στη διεπιφάνεια, τα θερμοκρασιακά δυναμικά της μήτρας εκφράζονται σε όρους των θερμοκρασιακών δυναμικών της ανομοιογένειας. Παίρνοντας υπόψιν ότι πάνω στην κυκλική διεπιφάνεια ισχύει $t\bar{t} = R^2$ μπορούμε να γράψουμε

$$2\chi_M(t) = \left(1 + \frac{k_M}{k_I}\right) \chi_I(t) + \left(1 - \frac{k_M}{k_I}\right) \overline{\chi_I\left(\frac{R^2}{t}\right)} + 2\vartheta\left(z, \frac{R^2}{z}\right). \quad (\text{III.27})$$

Η παραπάνω διεπιφανειακή συνθήκη ισχύει αν τα μιγαδικά θερμοκρασιακά δυναμικά των δύο φάσεων του συστήματος ορισθούν

$$\chi_I(z) = \frac{2k_M}{k_M + k_I} \chi_0(z), \quad (\text{III.28α})$$

$$\chi_M(z) = \chi_0(z) + \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \overline{\chi_0\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \vartheta\left(z, \frac{R^2}{z}\right). \quad (\text{III.28β})$$

όπου $\chi_0(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση που θα ονομάζεται *θερμοκρασιακό διφασικό δυναμικό* του συστήματος. Στις παραπάνω εξισώσεις, η μιγαδική συνάρτηση $\vartheta(t, \bar{t})$ που ορίζεται με την (III.25) για τα διεπιφανειακά σημεία t , επεκτείνεται σε όλο το επίπεδο z γράφοντας $\vartheta(z, \bar{z})$, όπου z είναι ένα σημείο του επιπέδου z . Έτσι, αν είναι γνωστή η μη-ολόμορφη συνάρτηση $\vartheta(z, \bar{z})$, τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (III.28) μπορεί να βρεθεί η κατάλληλη συνάρτηση $\chi_0(z)$, έτσι ώστε οι $\chi_I(z)$ και $\chi_M(z)$ να είναι ολόμορφες συναρτήσεις σε όλο το επίπεδο z .

Διφασικά δυναμικά για το πρόβλημα της θερμικής αγωγιμότητας

Στη συνέχεια, θα αναπτυχθούν οι αντίστοιχες σχέσεις των διφασικών δυναμικών για το σύστημα, όταν οι συνθήκες στη διεπιφάνεια είναι οι παρακάτω

$$q_\rho^0(\theta) = q_\rho^M(R, \theta) - q_\rho^I(R, \theta), \quad T^M(R, \theta) = T^I(R, \theta), \quad (\text{III.29})$$

όπου q_ρ^0 είναι μία δεδομένη κατανομή της θερμικής ροής. Θεωρώντας ένα τμήμα της διεπιφάνειας που ορίζεται από το τόξο AB , όπου το A αντιστοιχεί σε ένα σταθερό σημείο $t_0 = Re^{i\theta_0}$ και το B σε ένα κινητό σημείο $t = Re^{i\theta}$, η εξίσωση (III.29)₁ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή,

$$Q(t, \bar{t}) = Q_\rho^M(t, \bar{t}) - Q_\rho^I(t, \bar{t}), \quad (\text{III.30})$$

όπου οι συναρτήσεις $Q(t, \bar{t})$, $Q_\rho^M(t, \bar{t})$ και $Q_\rho^I(t, \bar{t})$ έχουν εισαχθεί με τις σχέσεις

$$Q(t, \bar{t}) = Q_1(R, \theta) = \int_A^B q_\rho^0(\theta) R d\theta, \quad (\text{III.31α})$$

$$Q_\rho^M(t, \bar{t}) = Q_1^M(R, \theta) = \int_A^B q_\rho^M(\theta) R d\theta, \quad (\text{III.31}\beta)$$

$$Q_\rho^I(t, \bar{t}) = Q_1^I(R, \theta) = \int_A^B q_\rho^I(\theta) R d\theta. \quad (\text{III.31}\gamma)$$

Οι συναρτήσεις $Q_1(R, \theta)$, $Q_1^M(R, \theta)$ και $Q_1^I(R, \theta)$, έχουν γραφεί στη μιγαδική τους μορφή $Q(t, \bar{t})$, $Q_\rho^M(t, \bar{t})$ και $Q_\rho^I(t, \bar{t})$ θέτοντας $R = \sqrt{t\bar{t}}$ και $\theta = \log(t/\bar{t})/(2i)$, όπου το $t = Re^{i\theta}$ αντιπροσωπεύει τα διεπιφανειακά σημεία. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (II.3) και (II.5), οι εξισώσεις (III.29) γράφονται

$$\chi_M(t) + \overline{\chi_M(t)} = \chi_I(t) + \overline{\chi_I(t)}, \quad (\text{III.32}\alpha)$$

$$\frac{ik_M}{2} [\chi_M(t) - \overline{\chi_M(t)}] - \frac{ik_I}{2} [\chi_I(t) - \overline{\chi_I(t)}] = Q(t, \bar{t}). \quad (\text{III.32}\beta)$$

Οι δύο εξισώσεις (III.32) μπορούν να αντικατασταθούν ισοδύναμα από την παρακάτω εξίσωση

$$2\chi_M(t) = \left(1 + \frac{k_I}{k_M}\right) \chi_I(t) + \left(1 - \frac{k_I}{k_M}\right) \overline{\chi_I(t)} - \frac{2i}{k_M} Q(t, \bar{t}). \quad (\text{III.33})$$

Η εξίσωση (III.33) δείχνει ότι, στη διεπιφάνεια, το θερμικό μιγαδικό δυναμικό της μήτρας $\chi_M(t)$ εκφράζεται σε όρους του θερμικού μιγαδικού δυναμικού της ανομοιογένειας $\chi_I(t)$. Επειδή για ένα διεπιφανειακό σημείο ισχύει $t\bar{t} = R^2$, η εξίσωση (III.33) γράφεται

$$2\chi_M(t) = \left(1 + \frac{k_I}{k_M}\right) \chi_I(t) + \left(1 - \frac{k_I}{k_M}\right) \bar{\chi}_I\left(\frac{R^2}{t}\right) - \frac{2i}{k_M} Q\left(t, \frac{R^2}{t}\right). \quad (\text{III.34})$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αυτόματα, εάν τα θερμικά δυναμικά των δύο φάσεων του συστήματος ορισθούν με τις σχέσεις

$$\chi_I(z) = \frac{2k_M}{k_M + k_I} \chi_0(z), \quad (\text{III.35}\alpha)$$

$$\chi_M(z) = \chi_0(z) + \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \bar{\chi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{i}{k_M} Q\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{III.35}\beta)$$

όπου η $\chi_0(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση που αποτελεί το θερμικό διφασικό δυναμικό του διυλικού. Στις παραπάνω εξισώσεις, η μιγαδική συνάρτηση $Q(t, \bar{t})$ που ορίζεται με την (III.30) για τα διεπιφανειακά σημεία t , επεκτείνεται σε όλο το επίπεδο z γράφοντας $Q(z, \bar{z})$, όπου z είναι ένα σημείο του επιπέδου z . Έτσι, αν είναι γνωστή η μή-ολόμορφη συνάρτηση $Q(z, \bar{z})$, τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (III.35) μπορεί να βρεθεί η κατάλληλη συνάρτηση $\chi_0(z)$, έτσι ώστε οι $\chi_I(z)$ και $\chi_M(z)$ να είναι ολόμορφες συναρτήσεις σε όλο το επίπεδο z .

Παράρτημα IV

Ελαστικά Πεδία

IV.1 Ελαστικά πεδία για το ρ-πρόβλημα

IV.1.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση

Ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις $\epsilon_{11}^T, \epsilon_{22}^T, \epsilon_{12}^T$, στην ανομοιογένεια

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = -M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \frac{R^2}{\rho^2} F + \frac{1}{4} M(1+\Pi) \frac{R^2}{\rho^2} \left(4 - 3 \frac{R^2}{\rho^2}\right) [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.1})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p} = \frac{i}{4} M(1+\Pi) \frac{R^2}{\rho^2} \left(3 \frac{R^2}{\rho^2} - 2\right) [Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.2})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p} = M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \frac{R^2}{\rho^2} F + \frac{3}{4} M(1+\Pi) \frac{R^2}{\rho^2} [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.3})$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,p} = -M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} F + \frac{1}{4} M(1+\Pi) [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.4})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,p} = \frac{i}{4} M(1+\Pi) [Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.5})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{I,p} = -M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} F - \frac{1}{4} M(1+\Pi) [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.6})$$

$$u_{\rho}^{M,p} = \frac{1}{2\mu_M} M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \frac{R^2}{\rho} F - \frac{1}{8\mu_M} M(1+\Pi) \left(1 + \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \frac{R^2}{\rho} [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.7})$$

$$u_{\theta}^{M,p} = \frac{i}{8\mu_M} M(1+\Pi) \left(1 - \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \frac{R^2}{\rho} [Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.8})$$

$$u_{\rho}^{I,p} = -\frac{\kappa_I - 1}{4\mu_I} M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \rho F + \frac{1}{8\mu_I} M(1+\Pi) \rho [Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.9})$$

$$u_{\theta}^{I,p} = \frac{i}{8\mu_I} M(1 + \Pi)\rho[G e^{2i\theta} - \bar{G} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.10})$$

Ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο σ_{11}^{∞} , σ_{22}^{∞} , σ_{12}^{∞}

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = 2 \left(1 + \frac{\Lambda + \Omega R^2}{1 - \Omega \rho^2} \right) T^{\infty} - \frac{1}{2} \left(1 + \Pi \frac{R^2}{\rho^2} \left(4 - 3 \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right) [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.11})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p} = -\frac{i}{2} \left[1 - \Pi \frac{R^2}{\rho^2} \left(2 - 3 \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] [S^{\infty} e^{2i\theta} - \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.12})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p} = 2 \left(1 - \frac{\Lambda + \Omega R^2}{1 - \Omega \rho^2} \right) T^{\infty} + \frac{1}{2} \left(1 - 3\Pi \frac{R^4}{\rho^4} \right) [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.13})$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,p} = 2 \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} T^{\infty} - \frac{1}{2} (1 + \Pi) [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.14})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,p} = -\frac{i}{2} (1 + \Pi) [S^{\infty} e^{2i\theta} - \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.15})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{I,p} = 2 \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} T^{\infty} + \frac{1}{2} (1 + \Pi) [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.16})$$

$$u_{\rho}^{M,p} = \frac{1}{2\mu_M} \rho \left(\kappa_M - 1 - 2 \frac{1 + \Lambda R^2}{1 - \Omega \rho^2} \right) T^{\infty} \quad (\text{IV.17})$$

$$+ \frac{1}{4\mu_M} \rho \left(\Pi \left(1 + \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right) [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}]$$

$$u_{\theta}^{M,p} = -\frac{i}{4\mu_M} \rho \left(\Pi \left(1 - \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \frac{R^2}{\rho^2} + 1 \right) [S^{\infty} e^{2i\theta} - \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.18})$$

$$u_{\rho}^{I,p} = \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \rho T^{\infty} - \frac{1 + \Pi}{4\mu_I} \rho [S^{\infty} e^{2i\theta} + \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.19})$$

$$u_{\theta}^{I,p} = -i \frac{1 + \Pi}{4\mu_I} \rho [S^{\infty} e^{2i\theta} - \bar{S}^{\infty} e^{-2i\theta}] \quad (\text{IV.20})$$

IV.1.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση

Ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις ϵ_{31}^T , ϵ_{32}^T , στην ανομοιογένεια

$$\sigma_{3\rho}^{M,p} = -\frac{\mu_I}{1 + \Gamma} (\mathcal{E}^T e^{i\theta} + \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2} \quad (\text{IV.21})$$

$$\sigma_{3\theta}^{M,p} = i \frac{\mu_I}{1 + \Gamma} (\mathcal{E}^T e^{i\theta} - \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2} \quad (\text{IV.22})$$

$$\sigma_{3\rho}^{I,p} = -\frac{\mu_I}{1+\Gamma}(\mathcal{E}^T e^{i\theta} + \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.23})$$

$$\sigma_{3\theta}^{I,p} = -i\frac{\mu_I}{1+\Gamma}(\mathcal{E}^T e^{i\theta} - \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.24})$$

$$u_3^{M,p} = \frac{\Gamma}{1+\Gamma}(\mathcal{E}^T e^{i\theta} + \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta})\frac{R^2}{\rho} \quad (\text{IV.25})$$

$$u_3^{I,p} = -\frac{1}{1+\Gamma}(\mathcal{E}^T e^{i\theta} + \bar{\mathcal{E}}^T e^{-i\theta})\rho \quad (\text{IV.26})$$

Ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο $\sigma_{31}^\infty, \sigma_{32}^\infty$

$$\sigma_{3\rho}^{M,p} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\frac{R^2}{\rho^2}\right)(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.27})$$

$$\sigma_{3\theta}^{M,p} = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\frac{R^2}{\rho^2}\right)(\Sigma^\infty e^{i\theta} - \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.28})$$

$$\sigma_{3\rho}^{I,p} = \frac{\Gamma}{1+\Gamma}(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.29})$$

$$\sigma_{3\theta}^{I,p} = i\frac{\Gamma}{1+\Gamma}(\Sigma^\infty e^{i\theta} - \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.30})$$

$$u_3^{M,p} = \frac{\rho}{2\mu_M}\left(1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}\frac{R^2}{\rho^2}\right)(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.31})$$

$$u_3^{I,p} = \frac{\rho}{\mu_M}\frac{1}{1+\Gamma}(\Sigma^\infty e^{i\theta} + \bar{\Sigma}^\infty e^{-i\theta}) \quad (\text{IV.32})$$

IV.2 Ελαστικά πεδία για το s-πρόβλημα

IV.2.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{M,s} = & -2M\frac{1+\Lambda}{1-\Omega}\lambda R^2\frac{R^2}{\rho^2} - M\frac{R^4}{\rho^2}\left[(1+\Pi)[A+B]\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R^2}{\rho^2}\right) + \frac{3}{4}(1+\Lambda)B\frac{R^2}{\rho^2}\right]e^{2i\theta} \\ & - M\frac{R^4}{\rho^2}\left[(1+\Pi)[\bar{A}+\bar{B}]\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R^2}{\rho^2}\right) + \frac{3}{4}(1+\Lambda)\bar{B}\frac{R^2}{\rho^2}\right]e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{M,s} &= \frac{i}{2} M \frac{R^4}{\rho^2} \left[(1 + \Pi)[A + B] \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \right) + \frac{3}{2} (1 + \Lambda) B \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{2i\theta} \\ &\quad - \frac{i}{2} M \frac{R^4}{\rho^2} \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{\rho^2} \right) + \frac{3}{2} (1 + \Lambda) \bar{B} \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{M,s} &= 2M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R^2 \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} M \frac{R^4}{\rho^2} \left[(1 + \Pi)[A + B] \left(2 - 3 \frac{R^2}{\rho^2} \right) + 3(1 + \Lambda) B \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{2i\theta} \\ &\quad + \frac{1}{4} M \frac{R^4}{\rho^2} \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] \left(2 - 3 \frac{R^2}{\rho^2} \right) + 3(1 + \Lambda) \bar{B} \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{I,s} &= -2M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R^2 - \frac{1}{4} M R^2 [(1 + \Pi)[A + B] + 3(1 + \Lambda) B] e^{2i\theta} \\ &\quad - \frac{1}{4} M R^2 [(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] + 3(1 + \Lambda) \bar{B}] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{I,s} &= -\frac{i}{4} M R^2 \left[(1 + \Pi)[A + B] + 3(1 + \Lambda) \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2} \right) B \right] e^{2i\theta} \\ &\quad + \frac{i}{4} M R^2 \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] + 3(1 + \Lambda) \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2} \right) \bar{B} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{I,s} &= \frac{1}{4} M R^2 \left[(1 + \Pi)[A + B] + 3(1 + \Lambda) \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2} \right) B \right] e^{2i\theta} \\ &\quad + \frac{1}{4} M R^2 \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] + 3(1 + \Lambda) \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2} \right) \bar{B} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.38)$$

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{M,s} &= \frac{\lambda R^2}{\mu_M} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \frac{R^2}{\rho} \\ &\quad + \frac{1}{8\mu_M} M \frac{R^4}{\rho} \left[(1 + \Pi)[A + B] \left(1 + \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + (1 + \Lambda) B \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{2i\theta} \\ &\quad + \frac{1}{8\mu_M} M \frac{R^4}{\rho} \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] \left(1 + \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + (1 + \Lambda) \bar{B} \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.39)$$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{M,s} &= -\frac{i}{8\mu_M} M \frac{R^4}{\rho} \left[(1 + \Pi)[A + B] \left(1 - \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + (1 + \Lambda) B \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{2i\theta} \\ &\quad + \frac{i}{8\mu_M} M \frac{R^4}{\rho} \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] \left(1 - \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + (1 + \Lambda) \bar{B} \frac{R^2}{\rho^2} \right] e^{-2i\theta} \end{aligned} \quad (IV.40)$$

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{I,s} &= -\frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R^2 \rho \\
 &\quad - \frac{1}{8\mu_I} MR^2 \rho \left[(1 + \Pi)[A + B] + (1 + \Lambda)B \left(3 + (\kappa_I - 3) \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] e^{2i\theta}
 \end{aligned} \tag{IV.41}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad - \frac{1}{8\mu_I} MR^2 \rho \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] + (1 + \Lambda)\bar{B} \left(3 + (\kappa_I - 3) \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] e^{-2i\theta} \\
 u_{\theta}^{I,s} &= -\frac{i}{8\mu_I} MR^2 \rho \left[(1 + \Pi)[A + B] + (1 + \Lambda)B \left(3 - (\kappa_I + 3) \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] e^{2i\theta} \\
 &\quad + \frac{i}{8\mu_I} MR^2 \rho \left[(1 + \Pi)[\bar{A} + \bar{B}] + (1 + \Lambda)\bar{B} \left(3 - (\kappa_I + 3) \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] e^{-2i\theta}
 \end{aligned} \tag{IV.42}$$

IV.2.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση

$$\sigma_{3\rho}^{M,s} = -\mu_M \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2} \tag{IV.43}$$

$$\sigma_{3\theta}^{M,s} = i\mu_M \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2} \tag{IV.44}$$

$$\sigma_{3\rho}^{I,s} = -\mu_I \frac{1}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \tag{IV.45}$$

$$\sigma_{3\theta}^{I,s} = -i\mu_I \frac{1}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \tag{IV.46}$$

$$u_3^{M,s} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho} \tag{IV.47}$$

$$u_3^{I,s} = -\frac{1}{1 + \Gamma} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \rho \tag{IV.48}$$

IV.3 Ελαστικά πεδία για το f-πρόβλημα

IV.3.1 Συνεπίπεδη παραμόρφωση

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{M,f} &= \left(1 - \frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega}\right) \lambda R^2 \frac{R^2}{\rho^2} \\ &\quad - \frac{1 - \kappa_M \Pi}{4(1 + \kappa_M)} \frac{R^2}{\rho^2} \left(4 - 3 \frac{R^2}{\rho^2}\right) [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{\kappa_M - \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{R^6}{\rho^4} (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta}) \end{aligned} \quad (IV.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{M,f} &= \frac{i}{4} \frac{1 - \kappa_M \Pi}{\kappa_M + 1} \frac{R^2}{\rho^2} \left(2 - 3 \frac{R^2}{\rho^2}\right) [(A + B)e^{2i\theta} - (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad - \frac{3i}{4} \frac{\kappa_M - \Lambda}{\kappa_M + 1} \frac{R^6}{\rho^4} (Be^{2i\theta} - \bar{B}e^{2i\theta}) \end{aligned} \quad (IV.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{M,f} &= - \left(1 - \frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega}\right) \lambda R^2 \frac{R^2}{\rho^2} - \frac{3}{4} \frac{1 - \kappa_M \Pi}{1 + \kappa_M} \frac{R^4}{\rho^4} [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{\kappa_M - \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{R^6}{\rho^4} (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta}) \end{aligned} \quad (IV.51)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{I,f} &= - \frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R^2 + \frac{\kappa_M(1 + \Pi)}{4(1 + \kappa_M)} [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta}) R^2 \end{aligned} \quad (IV.52)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{I,f} &= \frac{i}{4} \frac{\kappa_M(1 + \Pi)}{\kappa_M + 1} [(A + B)e^{2i\theta} - (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad - \frac{3i}{4} \frac{1 + \Lambda}{\kappa_M + 1} R^2 \left(1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2}\right) (Be^{2i\theta} - \bar{B}e^{2i\theta}) \end{aligned} \quad (IV.53)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{I,f} &= - \frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda R^2 - \frac{\kappa_M(1 + \Pi)}{4(1 + \kappa_M)} [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}] R^2 \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} R^2 \left(1 - 4 \frac{\rho^2}{R^2}\right) (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta}) \end{aligned} \quad (IV.54)$$

$$u_{\rho}^{M,f} = -\frac{\lambda R^2}{2\mu_M} \left(1 - \frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega}\right) \frac{R^2}{\rho} - \frac{1}{8\mu_M} \frac{\kappa_M - \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{R^6}{\rho^3} (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta})2$$

$$+ \frac{1}{8\mu_M} \frac{1 - \kappa_M \Pi}{1 + \kappa_M} \frac{R^4}{\rho} \left(1 + \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2}\right) [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}]$$
(IV.55)

$$u_{\theta}^{M,f} = -\frac{i}{8\mu_M} \frac{1 - \kappa_M \Pi}{1 + \kappa_M} \left(1 - \kappa_M - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \frac{R^4}{\rho} [(A + B)e^{2i\theta} - (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}]$$

$$+ \frac{i}{8\mu_M} \frac{\kappa_M - \Lambda}{1 + \kappa_M} \frac{R^6}{\rho^3} (Be^{2i\theta} - \bar{B}e^{2i\theta})$$
(IV.56)

$$u_{\rho}^{I,f} = \frac{\lambda R^2}{2\mu_I} \frac{1 - \kappa_I}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \rho + \frac{\kappa_M}{8\mu_I} \frac{1 + \Pi}{1 + \kappa_M} R^2 \rho [(A + B)e^{2i\theta} + (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}]$$

$$- \frac{1}{8\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} R^2 \rho \left(3 - (3 - \kappa_I) \frac{\rho^2}{R^2}\right) (Be^{2i\theta} + \bar{B}e^{2i\theta})$$
(IV.57)

$$u_{\theta}^{I,f} = \frac{i\kappa_M}{8\mu_I} \frac{1 + \Pi}{1 + \kappa_M} R^2 \rho [(A + B)e^{2i\theta} - (\bar{A} + \bar{B})e^{-2i\theta}]$$

$$- \frac{i}{8\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} R^2 \rho \left(3 - (3 + \kappa_I) \frac{\rho^2}{R^2}\right) (Be^{2i\theta} - \bar{B}e^{2i\theta})$$
(IV.58)

IV.3.2 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση

$$\sigma_{3\rho}^{M,f} = -\frac{i}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}$$
(IV.59)

$$\sigma_{3\theta}^{M,f} = -\frac{1}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} + \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho^2}$$
(IV.60)

$$\sigma_{3\rho}^{I,f} = i \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta})$$
(IV.61)

$$\sigma_{3\theta}^{I,f} = -\frac{\Gamma}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} + \bar{B}e^{-i\theta})$$
(IV.62)

$$u_3^{M,f} = \frac{1}{\mu_M} \frac{i}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \frac{R^2}{\rho}$$
(IV.63)

$$u_3^{I,f} = \frac{1}{\mu_M} \frac{i}{1 + \Gamma} (Be^{i\theta} - \bar{B}e^{-i\theta}) \rho$$
(IV.64)

Παράρτημα V

Θερμοκρασιακά και Θερμοελαστικά Πεδία

V.1 Θερμοκρασιακά πεδία για τα p -, θ - και q -προβλήματα

p-temperature problem

$$q_{\rho}^{M,p} = -\frac{iq^{\infty}}{2} \left(1 - \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2}\right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.1})$$

$$q_{\theta}^{M,p} = \frac{q^{\infty}}{2} \left(1 + \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2}\right) (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (\text{V.2})$$

$$T^{M,p} = \frac{iq^{\infty}}{2k_M} \left(1 + \frac{k_M - k_I}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2}\right) \rho (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.3})$$

$$q_{\rho}^{I,p} = -iq^{\infty} \frac{2k_I}{k_M + k_I} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.4})$$

$$q_{\theta}^{I,p} = q^{\infty} \frac{2k_I}{k_M + k_I} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (\text{V.5})$$

$$T^{I,p} = iq^{\infty} \frac{1}{k_M + k_I} \rho (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.6})$$

\theta-temperature problem

$$q_{\rho}^{M,\theta} = \frac{k_I k_M}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.7})$$

$$q_{\theta}^{M,\theta} = -\frac{k_I k_M}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.8})$$

$$T^{M,\theta} = \frac{k_I}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.9})$$

$$q_\rho^{I,\theta} = \frac{k_I k_M}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.10})$$

$$q_\theta^{I,\theta} = i \frac{k_I k_M}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.11})$$

$$T^{I,\theta} = -\frac{k_M}{k_M + k_I} \rho (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.12})$$

q-temperature problem

$$q_\rho^{M,q} = i \frac{k_M}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.13})$$

$$q_\theta^{M,q} = \frac{k_M}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho^2} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.14})$$

$$T^{M,q} = \frac{i}{k_M + k_I} \frac{R^2}{\rho} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.15})$$

$$q_\rho^{I,q} = -i \frac{k_I}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.16})$$

$$q_\theta^{I,q} = \frac{k_I}{k_M + k_I} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.17})$$

$$T^{I,q} = \frac{i}{k_M + k_I} \rho (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \quad (\text{V.18})$$

V.2 Θερμοελαστικά πεδία για το p-πρόβλημα

Ομοιόμορφη θερμική ροή στη μήτρα

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = \frac{i q^\infty}{2k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) \frac{MR^2}{\rho} \left[(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t \frac{R^2}{\rho^2} - \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.19})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,p} = \frac{q^\infty}{2k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) \frac{MR^2}{\rho} \left[(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t \frac{R^2}{\rho^2} - \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (\text{V.20})$$

$$\sigma_{\theta\rho}^{M,p} = -\frac{i q^\infty}{2k_M} \alpha_{tM} (1 + \nu_M) \frac{MR^2}{\rho} \left[(1 + \Lambda) \mathcal{D}_t \frac{R^2}{\rho^2} + \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (\text{V.21})$$

$$\begin{aligned}
 u_{\rho}^{M,e} &= -\frac{iq^{\infty}}{4k_M} \frac{\alpha_{tM}(1+\nu_M)}{1+\kappa_M} \left[(1+\Lambda)\mathcal{D}_t \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} + \frac{R^2}{\rho^2} \right) - \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] R^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
 &\quad + \frac{iq^{\infty}}{4k_M} \frac{\alpha_{tM}(1+\nu_M)}{1+\kappa_M} \left[(1-\kappa_M) \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + (1+\kappa_M) \ln(e^{i\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \right] \mathcal{Z}_t R^2
 \end{aligned} \tag{V.22}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{M,e} &= \frac{q^{\infty}}{4k_M} \frac{\alpha_{tM}(1+\nu_M)}{1+\kappa_M} \left[(1+\Lambda)\mathcal{D}_t \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} - \frac{R^2}{\rho^2} \right) + \mathcal{Z}_t \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right] R^2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
 &\quad - \frac{q^{\infty}}{4k_M} \frac{\alpha_{tM}(1+\nu_M)}{1+\kappa_M} \left[(1-\kappa_M) \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (1+\kappa_M) \ln(e^{i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \mathcal{Z}_t R^2
 \end{aligned} \tag{V.23}$$

$$u_{\rho}^{M,T} = \frac{iq^{\infty}}{4k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) R^2 \left[\frac{\rho^2}{R^2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \mathcal{Z}_t \left[\ln \left(\frac{\rho}{R} e^{i\theta} \right) e^{-i\theta} - \ln \left(\frac{\rho}{R} e^{-i\theta} \right) e^{i\theta} \right] \right] \tag{V.24}$$

$$u_{\theta}^{M,T} = \frac{q^{\infty}}{4k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) R^2 \left[\frac{\rho^2}{R^2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \mathcal{Z}_t \left[\ln \left(\frac{\rho}{R} e^{i\theta} \right) e^{-i\theta} + \ln \left(\frac{\rho}{R} e^{-i\theta} \right) e^{i\theta} \right] \right] \tag{V.25}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,p} = \frac{iq^{\infty}}{2k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) M(1+\Lambda) \mathcal{D}_t \rho (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{V.26}$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,p} = \frac{q^{\infty}}{2k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) M(1+\Lambda) \mathcal{D}_t \rho (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{V.27}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{I,p} = \frac{3iq^{\infty}}{2k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) M(1+\Lambda) \mathcal{D}_t \rho (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{V.28}$$

$$u_{\rho}^{I,e} = -\frac{iq^{\infty}}{8k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) M(1+\Lambda) \frac{2-\kappa_I}{\mu_I} \mathcal{D}_t \rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{V.29}$$

$$u_{\theta}^{I,e} = \frac{q^{\infty}}{8k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) M(1+\Lambda) \frac{2+\kappa_I}{\mu_I} \mathcal{D}_t \rho^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{V.30}$$

$$u_{\rho}^{I,T} = -\frac{iq^{\infty}}{4k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) (\mathcal{D}_t - 1) \rho^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{V.31}$$

$$u_{\theta}^{I,T} = -\frac{q^{\infty}}{4k_M} \alpha_{tM}(1+\nu_M) (\mathcal{D}_t - 1) \rho^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{V.32}$$

Ομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,p} = -\sigma_{\theta\theta}^{M,p} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} [\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)] T_C \frac{R^2}{\rho^2} \tag{V.33}$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p} = 0 \tag{V.34}$$

$$u_{\rho}^{M,e} = \frac{M}{\mu_M} \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} [\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)] T_C \frac{R^2}{\rho} \quad (\text{V.35})$$

$$u_{\theta}^{M,e} = 0 \quad (\text{V.36})$$

$$u_{\rho}^{M,T} = \alpha_{tM}(1+\nu_M) T_C \rho \quad (\text{V.37})$$

$$u_{\theta}^{M,T} = 0 \quad (\text{V.38})$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,p} = \sigma_{\theta\theta}^{I,p} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} [\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)] T_C \quad (\text{V.39})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,p} = 0 \quad (\text{V.40})$$

$$u_{\rho}^{I,e} = -\frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} [\alpha_{tI}(1+\nu_I) - \alpha_{tM}(1+\nu_M)] T_C \rho \quad (\text{V.41})$$

$$u_{\theta}^{I,e} = 0 \quad (\text{V.42})$$

$$u_{\rho}^{I,T} = \alpha_{tI}(1+\nu_I) T_C \rho \quad (\text{V.43})$$

$$u_{\theta}^{I,T} = 0 \quad (\text{V.44})$$

V.3 Θερμοελαστικά πεδία για το s-πρόβλημα

Ομοιόμορφη θερμική ροή στη μήτρα

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,s} = -M(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \frac{R^4}{\rho^3} \quad (\text{V.45})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,s} = iM(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} - (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \frac{R^4}{\rho^3} \quad (\text{V.46})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,s} = M(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \frac{R^4}{\rho^3} \quad (\text{V.47})$$

$$u_{\rho}^{M,s} = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\Lambda}{1+\kappa_M} \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} + \frac{R^2}{\rho^2} \right) (C+D) + D \right] R^2 e^{i\theta} \quad (\text{V.48})$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1+\Lambda}{1+\kappa_M} \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} + \frac{R^2}{\rho^2} \right) (\bar{C} + \bar{D}) + \bar{D} \right] R^2 e^{-i\theta}$$

$$u_{\theta}^{M,s} = \frac{i}{2} \left[\frac{1+\Lambda}{1+\kappa_M} \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} - \frac{R^2}{\rho^2} \right) (C+D) + D \right] R^2 e^{i\theta} \quad (V.49)$$

$$- \frac{i}{2} \left[\frac{1+\Lambda}{1+\kappa_M} \left(\frac{2\mu_M}{\mu_I} - \frac{R^2}{\rho^2} \right) (\bar{C} + \bar{D}) + \bar{D} \right] R^2 e^{-i\theta}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,s} = -M(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \rho \quad (V.50)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,s} = iM(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} - (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \rho \quad (V.51)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{I,s} = -3M(1+\Lambda) [(C+D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \rho \quad (V.52)$$

$$u_{\rho}^{I,s} = \frac{1}{2} M(1+\Lambda) \frac{2-\kappa_I}{2\mu_I} [(C+D)e^{i\theta} + (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \rho^2 \quad (V.53)$$

$$u_{\theta}^{I,s} = \frac{i}{2} M(1+\Lambda) \frac{2+\kappa_I}{2\mu_I} [(C+D)e^{i\theta} - (\bar{C} + \bar{D})e^{-i\theta}] \rho^2 \quad (V.54)$$

Ομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,s} = -\sigma_{\rho\theta}^{M,s} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \lambda \frac{R^2}{\rho^2} \quad (V.55)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,s} = 0 \quad (V.56)$$

$$u_{\rho}^{M,s} = \frac{2}{1+\kappa_M} \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \lambda \frac{R^2}{\rho} \quad (V.57)$$

$$u_{\theta}^{M,s} = 0 \quad (V.58)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,s} = \sigma_{\theta\theta}^{I,s} = -2M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \lambda \quad (V.59)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,s} = 0 \quad (V.60)$$

$$u_{\rho}^{I,s} = -\frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} M \frac{1+\Lambda}{1-\Omega} \lambda \rho \quad (V.61)$$

$$u_{\theta}^{I,s} = 0 \quad (V.62)$$

V.4 Θερμοελαστικά πεδία για το f-πρόβλημα

Ομοιόμορφη θερμική ροή στη μήτρα

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,f} = -\frac{\Lambda - \kappa_M}{1 + \kappa_M} (D e^{i\theta} + \bar{D} e^{-i\theta}) \frac{R^4}{\rho^3} \quad (V.63)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,f} = i \frac{\Lambda - \kappa_M}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} - \bar{D}e^{-i\theta}) \frac{R^4}{\rho^3} \quad (\text{V.64})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{M,f} = \frac{\Lambda - \kappa_M}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta}) \frac{R^4}{\rho^3} \quad (\text{V.65})$$

$$u_{\rho}^{M,f} = \frac{1}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \left(2 - \kappa_I \frac{R^2}{\rho^2}\right) (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta}) R^2 \quad (\text{V.66})$$

$$u_{\theta}^{M,f} = \frac{i}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \left(2 + \kappa_I \frac{R^2}{\rho^2}\right) (De^{i\theta} - \bar{D}e^{-i\theta}) R^2 \quad (\text{V.67})$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,f} = -\frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta}) \rho \quad (\text{V.68})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,f} = i \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} - \bar{D}e^{-i\theta}) \rho \quad (\text{V.69})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{I,f} = -3 \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta}) \rho \quad (\text{V.70})$$

$$u_{\rho}^{I,f} = \frac{2 - \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} + \bar{D}e^{-i\theta}) \rho^2 \quad (\text{V.71})$$

$$u_{\theta}^{I,f} = i \frac{2 + \kappa_I}{4\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (De^{i\theta} - \bar{D}e^{-i\theta}) \rho^2 \quad (\text{V.72})$$

Ομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας

$$\sigma_{\rho\rho}^{M,f} = -\sigma_{\theta\theta}^{M,f} = M \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \lambda \frac{R^2}{\rho^2} \quad (\text{V.73})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,f} = 0 \quad (\text{V.74})$$

$$u_{\rho}^{M,f} = -\frac{1}{2\mu_I} \frac{\kappa_I - 1}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda \frac{R^2}{\rho} \quad (\text{V.75})$$

$$u_{\theta}^{M,f} = 0 \quad (\text{V.76})$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{I,f} = \sigma_{\theta\theta}^{I,f} = -\frac{2}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda \quad (\text{V.77})$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{I,f} = 0 \quad (\text{V.78})$$

$$u_{\rho}^{I,f} = -\frac{1}{2\mu_I} \frac{\kappa_I - 1}{1 + \kappa_M} \frac{1 + \Lambda}{1 - \Omega} \lambda \rho \quad (\text{V.79})$$

$$u_{\theta}^{I,f} = 0 \quad (\text{V.80})$$

V.5 Θερμοελαστικά πεδία για την ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{M,p+s}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{1 - \Omega + 2n_{\rho}(1 + \Lambda)} T_C \\ &\quad - M(1 + \Lambda) \frac{\mathcal{D}_t \alpha_{tM}(1 + \nu_M)}{1 + (n_{\rho} + n_{\theta})(1 + \Lambda)} \frac{q^{\infty}}{k_M} R \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.81}\alpha)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{M,p+s}(R, \theta) = -M(1 + \Lambda) \frac{\mathcal{D}_t \alpha_{tM}(1 + \nu_M)}{1 + (n_{\rho} + n_{\theta})(1 + \Lambda)} \frac{q^{\infty}}{k_M} R \cos \theta, \quad (\text{V.81}\beta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{M,p+s}(R, \theta) &= -2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{1 - \Omega + 2n_{\rho}(1 + \Lambda)} T_C \\ &\quad + M(1 + \Lambda) \frac{\mathcal{D}_t \alpha_{tM}(1 + \nu_M)}{1 + (n_{\rho} + n_{\theta})(1 + \Lambda)} \frac{q^{\infty}}{k_M} R \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.81}\gamma)$$

V.6 Θερμοελαστικά πεδία για την μεμβρανικού τύπου διεπιφάνεια

Όταν η διεπιφάνεια στο σύστημα είναι μεμβρανικού τύπου και υψηλής θερμικής αγωγιμότητας, τα θερμοελαστικά πεδία στη μήτρα δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{M,p+f}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} RT_C \\ &\quad + M(1 + \Lambda) \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{[\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tS}](\lambda_S + \mu_S)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} T_C \\ &\quad - 2M(1 + \Lambda) \alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^{\infty} R}{k_M} \sin \theta \\ &\quad - M(1 + \Lambda) \alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mu_I (\lambda_S + \mu_S) \left[1 - \frac{\alpha_{tS}(1 - \mathcal{D}_t)}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^{\infty} R}{k_M} \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.82}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{M,p+f}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \cos \theta \\ &+ M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\frac{\kappa_I}{\mu_I} (\lambda_S + \mu_S) \left[1 - \frac{\alpha_{tS}(1 - \mathcal{D}_t)}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.82}\beta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{M,p+f}(R, \theta) &= -2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} RT_C \\ &- M(1 + \Lambda) \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{[\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tS}](\lambda_S + \mu_S)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} T_C \\ &+ 2M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta \\ &+ M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\frac{\kappa_I}{\mu_I} (\lambda_S + \mu_S) \left[1 - \frac{\alpha_{tS}(1 - \mathcal{D}_t)}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.82}\gamma)$$

Οι διεπιφανειακές τάσεις στην ανομοιογένεια παρέχονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{I,p+f}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} RT_C \\ &- \frac{M(1 + \Lambda)}{\mu_M} \frac{[\alpha_{tI}(1 + \nu_I) - \alpha_{tS}](\lambda_S + \mu_S)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} T_C \\ &- 2M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta \\ &+ M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{(1 - \mathcal{D}_t) \frac{\lambda_S + \mu_S}{\mu_M} \left[1 - \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.83}\alpha)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\theta}^{I,p+f}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \cos \theta \\ &\quad - M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{(1 - \mathcal{D}_t) \frac{\lambda_S + \mu_S}{\mu_M} \left[1 - \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{V.83}\beta)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{I,p+f}(R, \theta) &= 2M(1 + \Lambda) \frac{\alpha_{tM}(1 + \nu_M) - \alpha_{tI}(1 + \nu_I)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} RT_C \\ &\quad - \frac{M(1 + \Lambda)}{\mu_M} \frac{[\alpha_{tI}(1 + \nu_I) - \alpha_{tS}](\lambda_S + \mu_S)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} T_C \\ &\quad - 6M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{\mathcal{D}_t R}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta \\ &\quad + 3M(1 + \Lambda)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{(1 - \mathcal{D}_t) \frac{\lambda_S + \mu_S}{\mu_M} \left[1 - \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)} \right]}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.83}\gamma)$$

Η διεπιφανειακή τάση $\sigma_{\theta\theta}^S$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta}^S}{R} &= \frac{M(1 + \Lambda) \left[\frac{1}{\mu_M} \alpha_{tI}(1 + \nu_I) + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \alpha_{tM}(1 + \nu_M) \right] - \alpha_{tS}(1 - \Omega)}{(1 - \Omega)R + \frac{\kappa_I - 1}{2\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} (\lambda_S + \mu_S) T_C \\ &\quad - 2(\lambda_S + \mu_S)\alpha_{tM}(1 + \nu_M) \frac{1 - \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} \mathcal{D}_t - (1 - \mathcal{D}_t) \frac{\alpha_{tS}}{\alpha_{tI}(1 + \nu_I)}}{2R + \frac{\kappa_I}{\mu_I} \frac{1 + \Lambda}{1 + \kappa_M} (\lambda_S + \mu_S)} \frac{q^\infty R}{k_M} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{V.84})$$

Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ

- 2008-2015 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Διδακτορική Διατριβή
Διερεύνηση της επίδρασης των μη-τέλειων διεπιφανειών πάνω στη συνολική μηχανική και θερμική συμπεριφορά των νανο-σύνθετων υλικών
- 2008-2010 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
Σχεδιασμός και Κατασκευή Υπογείων Έργων
(βαθμός διπλώματος 7.08/10)
- 2002-2007 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανικών Μεταλλείων Μεταλλουργών
Τίτλος: Δίπλωμα Μηχανικού Μεταλλείων Μεταλλουργού
(βαθμός διπλώματος 8.32/10, πρώτος στην τάξη)

ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΗ ΜΟΥΣΙΚΗ

- Ιανουάριος 2006 Εθνικό Ωδείο Αθηνών
Πτυχίο Πιάνου, "Άριστα Παμψηφεί" (10)
- Ιούνιος 2005 Εθνικό Ωδείο Αθηνών
Πτυχίο Αρμονίας, "Άριστα" (10)

ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

- Μάιος 2012 The University of Michigan
Certificate of Competency in English
- Μάιος 2012 University of Cambridge
Council of Europe Level B1
- Ιούλιος 2006 Κρατικό Πιστοποιητικό Γλωσσομάθειας της αγγλικής γλώσσας
Επίπεδο B1

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

- Kattis, M. A., Karalis, N., Gkouti, E. (2014). Energy Changes In a Stressed Unbounded Matrix Containing a Inhomogeneity Due to Formation of a Non-perfect Interface. *International Journal of Fracture*, 185(1-2), 217-224.
- Kattis, M. A., Karalis, N. T. (2013). Elastic Energies in Circular Inhomogeneities: imperfect versus perfect interfaces. *Journal of Elasticity*, 111(2), 131-151.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΝΕΔΡΙΑ

- Καραλής, Ν. Θ., Καραλής Θ. Κ. Μαθηματικό μοντέλο για την μελέτη του οστεο – μυϊκού συστήματος του ανθρώπου. *2ο Συνέδριο Ελληνικής Εταιρείας Εμβιομηχανικής*, Μάιος 2007, Αρχαία Ολυμπία.
- Καραλής Θ. Κ., Καραλής, Ν. Θ., Παπαβασιλείου Γ. Σ., Γεωργιάδου Μ., Τριγούση Χ. Η Ζεύξη του Μαλιακού. *5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής και Γεωπεριβαλλοντικής Μηχανικής*, Μάιος-Ιούνιος 2006, Ξάνθη.

ΥΠΟΤΡΟΦΙΕΣ

- Υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του ΕΜΠ για εκπόνηση διδακτορικής διατριβής (2010-2014)
- Υποτροφία από το Κοινοφελές Ίδρυμα Αλεξανδρος Σ. Ωνάσης για εκπόνηση διδακτορικής διατριβής (2009-2013)

ΤΙΜΗΤΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ

2012	Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδος <i>Απονομή τιμητικής διάκρισης για την εξαιρετη επίδοση κατά τη διάρκεια των σπουδών.</i>
2007	Βραβείο Χ. Χρυσοβέργη <i>Απονομή βραβείου του ευεργέτη – δωρητή Χ. Χρυσοβέργη ως φοιτητής της Σχολής Μηχανικών Μεταλλείων-Μεταλλουργών, που αρίστευσε και διακρίθηκε κατά τη φοίτησή του.</i>
2007	Βραβείο 1 ^{ου} αποφοιτήσαντα της Σχολής Μηχανικών Μεταλλείων Μεταλλουργών <i>Το βραβείο συνοδεύεται από το αργυρό μετάλλιο με τον Προμηθέα Πυρφόρο.</i>
2004	Υποτροφία Νικολάου Ι. Κρητικού <i>Απονομή υποτροφίας για τη μεγαλύτερη βαθμολογία σε δύο εξεταστικές περιόδους στο σύνολο των μαθημάτων των "Μαθηματικών" κατά το πρώτο έτος σπουδών.</i>