



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ  
και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»**

**ΤΙΤΛΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕ ΜΕΤΡΑ VALUE AT RISK  
ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ ΜΕΤΟΧΩΝ ΕΙΣΗΓΜΕΝΩΝ ΕΤΑΙΡΕΙΩΝ ΣΤΙΣ ΗΠΑ**

**ΚΟΥΜΠΑΣ Ι. ΜΙΧΑΗΛ**

**ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09313024**

**Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία η οποία υποβάλλεται για μερική  
εκπλήρωση των απαιτήσεων στο Δ.Π.Μ.Σ. «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε  
ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»**

**Τριμελής Επιτροπή:**

**ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ (Επιβλέπων)**

**ΛΕΒΕΝΤΙΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

**ΝΤΟΚΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

**ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2015**

## Περίληψη

Οι σημαντικές θεσμικές και διαρθρωτικές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν ως απόρροια της πρόσφατης χρηματοπιστωτικής κρίσης, η αλματώδης πρόοδος της τεχνολογίας και η αυξημένη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών καθιστά επιτακτική την ανάλυση και αξιολόγηση των χρηματοοικονομικών κινδύνων στους οποίους εκτίθενται επιχειρήσεις, οργανισμοί και επενδυτές. Στο πλαίσιο αυτών των αλλαγών, έχει αναπτυχθεί ένας γενικός προβληματισμός σχετικά με την κατάλληλη μεθοδολογία ποσοτικοποίησης των κινδύνων αυτών. Συνεπώς, γίνεται φανερό ότι η ανάγκη για την ανάπτυξη ολοκληρωμένων μεθοδολογικών πλαισίων και συστημάτων υποστήριξης αποφάσεων τα οποία θα ανταποκρίνονται στην πολυδιάστατη φύση του προβλήματος της εκτίμησης του κινδύνου αγοράς αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη σημασία.

Η ανάγκη για συστηματική μέτρηση του χρηματοοικονομικού κινδύνου οδήγησε στην εμφάνιση και στην ολοένα αυξανόμενη χρήση μιας νέας τεχνικής εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, της προσέγγισης Value at Risk (VaR). Η συγκεκριμένη μέθοδος, χρησιμοποιείται ευρύτατα τα τελευταία χρόνια από πιστωτικά ιδρύματα, ασφαλιστικές εταιρείες και χρηματοοικονομικούς οργανισμούς, οι οποίοι έχουν στην κατοχή τους χαρτοφυλάκια περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνουν μετοχές, ομόλογα, νομίσματα και παράγωγα προϊόντα. Η προσέγγιση VaR προσφέρει σε κάθε ένα από τα παραπάνω ιδρύματα μια ένδειξη σχετικά με τις μέγιστες ζημιές που αναμένει να λάβουν χώρα στο χαρτοφυλάκιο τους, για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, βοηθώντας τα να κρίνουν τον τρόπο με τον οποίο θα ανακαταναείμουν τα ποσοστά συμμετοχής των περιουσιακών στοιχείων στα χαρτοφυλάκιά τους, με σκοπό την επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου κινδύνου.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η παρουσίαση των βασικότερων μεθόδων υπολογισμού που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο (VaR) και η αναλυτική αριθμητική εφαρμογή κάποιων εκ των παραπάνω μεθόδων, χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις λογαριθμικές αποδόσεις του αμερικάνικου χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 για το διάστημα από 24/11/2004 έως 21/11/2014. Τέλος, από την υλοποίηση της εμπειρικής εφαρμογής αναδεικνύεται η σημαντικότητα τόσο του Backtesting ως διαδικασία που συμπληρώνει τη μεθοδολογία εκτίμησης της VaR όσο και του ελέγχου του Christoffersen (1998) που επαληθεύει την αξιοπιστία των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμησή της.

## **Abstract**

The important institutional and structural changes that took place as a result of the recent financial crisis as well as the rapid technological progress and the increasing volatility of the financial markets makes the analysis and the evaluation of the financial risks to which companies, organizations and investors are being exposed more than necessary. In the context of these changes, there is a growing concern about the appropriate method of quantifying these dangers. Consequently, it is obvious that the need for the development of complete methodological contexts and of decision supporting systems which will respond to the multidimensional nature of the problem of the evaluation of the market risk is getting more and more important.

The need for a systematic measurement of the financial danger has led to the appearance and the continuously increasing use of a new technical evaluation of the market risk, the Value at Risk approach (VaR). This particular method is widely used in the last years by financial organizations, insurance companies and banks which possess portfolios of financial assets that include stocks, bonds, currencies and derivatives. The VaR approach offers to each of these foundations an indication about the maximum damages that are expected to appear in their portfolios for a particular period, helping them to judge the way in which they should allocate the rates of each asset in their portfolios with the aim of achieving a desirable risk level.

The aim of this diploma thesis is to present the basic measurement methods that have been suggested in the international bibliography about the evaluation of Value at Risk (VaR) and an analytical arithmetic application of some of the above methods by using as data the log returns of the American stock market index S&P500 for a time period between the 24<sup>th</sup> of November 2004 and the 21st of November 2014. Finally, the importance of both Backtesting as a process that supplements the VaR evaluation method, and the Christoffersen test (1998) that verifies the credibility of the models that are being used for its evaluation is highlighted.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή</b> .....	<b>6</b>
1.1 Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων - Value at Risk .....	6
1.2 Σκοπός Εργασίας .....	7
1.3 Δομή Εργασίας .....	8
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk)</b> .....	<b>10</b>
2.1 Εννοιολογική προσέγγιση του μέτρου της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk) .....	10
2.2 Μαθηματική διατύπωση του VaR .....	12
2.3 Παράμετροι υπολογισμού της VaR .....	15
2.4 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα του VaR .....	16
2.5 Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη VaR (Conditional VaR ή CVaR) .....	17
2.6 Χρήσεις των υποδειγμάτων εκτίμησης του κινδύνου αγοράς (VaR) .....	20
2.7 Εμπειρικές εφαρμογές της μεθοδολογίας VaR .....	22
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μεθοδολογικό Πλαίσιο Υπολογισμού της VaR</b> .....	<b>26</b>
3.1 Μέθοδοι Υπολογισμού της VaR .....	26
3.1.1 Μέθοδος Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης (Variance – Covariance) .....	27
3.1.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation Method) .....	30
3.1.3 Μέθοδος του Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average ή EWMA) .....	31
3.1.4 Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo (Monte Carlo Simulation Method) .....	32
3.1.5 Risk Metrics .....	33
3.2 Οικονομετρική προσέγγιση .....	34
3.2.1 Μεταβλητότητα .....	34
3.2.2 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας - Υποδείγματα Αυτοπαλίνδρομης Δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity ή ARCH) .....	35
3.2.3 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας-Γενικευμένο Αυτοπαλίνδρομο Υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικό Υπόδειγμα (Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedastic ή GARCH) .....	37
3.3 Θεωρία ακραίων τιμών (Extreme Value Theory ή EVT) .....	40

3.3.1 Εισαγωγή .....	40
3.3.2 Μέθοδος Μεγίστων Υποσυνόλων (Block Maxima Model) .....	41
3.3.3 Εκτίμηση παραμέτρων της GEV - Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας .....	42
3.3.4 Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής .....	43
3.3.5 Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) με την Generalized Extreme Value Distribution.....	45
3.3.6 Μέθοδος Υπερβάσεων Κατωφλίου (Peak over threshold model) .....	46
3.3.7 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας .....	47
3.3.8 Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής .....	48
3.3.9 Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) με την Generalized Pareto Distribution .....	49
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Έλεγχος της αξιοπιστίας των υποδειγμάτων εκτίμησης κινδύνου (Value at Risk) - Backtesting .....</b>	<b>50</b>
4.1 Μέθοδοι επικύρωσης μοντέλων υπολογισμού της VaR .....	50
4.1.1 Το υπόδειγμα του ρυθμού αποτυχίας (Failure Rate) .....	50
4.1.2 Οι Κανόνες της Επιτροπής της Βασιλείας (Traffic Light System) .....	51
4.1.3 Ο Έλεγχος Kupiec (1995) .....	53
4.1.4 Ο Έλεγχος Christoffersen (1998) .....	54
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εμπειρική μελέτη.....</b>	<b>59</b>
5.1 Εισαγωγή .....	59
5.2 Ο Δείκτης S&P500 .....	60
5.3 Οικονομετρικά υποδείγματα - Υπολογισμός του μέτρου αξία σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998) .....	63
5.4 Εκτίμηση του μέτρου αξία σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 σύμφωνα με τη μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998) .....	82
5.5 Υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 σύμφωνα με τη Θεωρία ακραίων τιμών (EVT) - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998) .....	84
5.6 Συμπεράσματα - Ανακεφαλαίωση .....	89
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....</b>	<b>92</b>
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>96</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων – Value at Risk

Οι σημαντικές θεσμικές και διαρθρωτικές αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν ως απόρροια της πρόσφατης χρηματοπιστωτικής κρίσης, η αλματώδης πρόοδος της τεχνολογίας και η αυξημένη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αγορών καθιστά επιτακτική την ανάλυση και αξιολόγηση των χρηματοοικονομικών κινδύνων στους οποίους εκτίθενται επιχειρήσεις, οργανισμοί και επενδυτές. Στο πλαίσιο αυτών των αλλαγών, έχει αναπτυχθεί ένας γενικός προβληματισμός σχετικά με την κατάλληλη μεθοδολογία ποσοτικοποίησης των κινδύνων αυτών. Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι είναι συνυφασμένοι με τις διακυμάνσεις των αγορών, οι οποίες παρατηρούνται όχι μόνο στις καθοδικές κινήσεις των χρηματοοικονομικών αγορών αλλά και στις περιόδους ανόδου. Οι ζημίες που μπορούν να προέλθουν από τους κινδύνους αυτούς είναι συνάρτηση του ύψους των διακυμάνσεων και της έκθεσης στις διακυμάνσεις αυτές και στις πηγές από τις οποίες προέρχονται.

Όπως είναι κατανοητό, οι διακυμάνσεις των αγορών είναι πέρα από τον έλεγχο που μπορούν να ασκήσουν επιχειρήσεις, οργανισμοί και επενδυτές, οι οποίοι έτσι αναγκαστικά προσανατολίζονται προς την ανάπτυξη κατάλληλων διαδικασιών μέτρησης του κινδύνου και την εφαρμογή στρατηγικών περιορισμού της έκθεσής τους σε αυτές. Τέτοιες στρατηγικές είναι η διαφοροποίηση (diversification) των επενδυτικών χαρτοφυλακίων και η ασφάλιση των χαρτοφυλακίων μέσω τεχνικών αντιστάθμισης (hedging), οι οποίες βασίζονται κυρίως στη χρήση παράγωγων προϊόντων. Πολλά όμως παραδείγματα, κυρίως την τελευταία δεκαετία όπως η πτώχευση της αγγλικής τράπεζας Barings και της επενδυτικής τράπεζας Lehman Brothers, καταδεικνύουν ότι ακόμα και η εφαρμογή τέτοιων στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές απώλειες κεφαλαίων.

Συνεπώς, γίνεται φανερό ότι η ανάγκη για την ανάπτυξη ολοκληρωμένων μεθοδολογικών πλαισίων και συστημάτων υποστήριξης αποφάσεων τα οποία θα ανταποκρίνονται στην πολυδιάστατη φύση του προβλήματος της εκτίμησης του κινδύνου αγοράς αποκτά ολοένα και μεγαλύτερη σημασία. Η ανάπτυξη και εφαρμογή υποδειγμάτων Value at Risk (VaR) έχει αποκτήσει σημαντικό ερευνητικό και πρακτικό ενδιαφέρον με στόχο την αποτελεσματική αντιμετώπιση των παραπάνω θεμάτων.

Η προσέγγιση VaR αποτελεί πλέον το πιο διαδεδομένο μέτρο ποσοτικοποίησης, πρόβλεψης και διαχείρισης των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Η έννοια της VaR αποτελεί ένα άμεσα κατανοητό μέτρο των χρηματοοικονομικών κινδύνων κάθε μορφής και αναφέρεται στη μέγιστη ζημία, η οποία μπορεί να εμφανιστεί σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα με δεδομένο βαθμό βεβαιότητας. Συστήματα διαχείρισης κινδύνων που βασίζονται σε αυτή τη φιλοσοφία χρησιμοποιούνται πλέον ευρύτατα από διεθνή χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και επιχειρήσεις για την παρακολούθηση και έλεγχο των επενδυτικών τους θέσεων σε βραχυπρόθεσμο χρονικό ορίζοντα συνήθως μία ή δέκα ημέρες.

Η φιλοσοφία των συστημάτων VaR έχει σημαντικές εφαρμογές στη μέτρηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια μετοχών, ομολόγων και χρηματοοικονομικών παραγώγων. Με την εισαγωγή όμως του εποπτικού πλαισίου της Βασιλείας II, διαδικασίες που βασίζονται στην έννοια της VaR αναπτύσσονται και εφαρμόζονται πλέον και στον χώρο του πιστωτικού κινδύνου. Η μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου μέσω υποδειγμάτων VaR παρέχει μία εκτίμηση για το αναμενόμενο άνω όριο των ζημιών ενός χαρτοφυλακίου χορηγήσεων σε ένα προσεχές χρονικό διάστημα, το οποίο συνήθως ορίζεται ως ένα έτος. Το στοιχείο αυτό αποτελεί πλέον αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας εκτίμησης της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων. Η πληροφορία αυτή προφανώς παρέχει τις απαραίτητες κατευθυντήριες γραμμές για τη λήψη μέτρων αντιμετώπισης των προβλημάτων που μπορούν να εμφανιστούν και για τον προσδιορισμό των ελάχιστων κεφαλαίων που απαιτούνται για τη διασφάλιση της βιωσιμότητας ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Εν κατακλείδι, τα τελευταία χρόνια στο διεθνές χρηματοοικονομικό σύστημα παρατηρείται ένας σταδιακός επαναπροσδιορισμός του πλαισίου διαχείρισης των κινδύνων από την πλευρά των πιστωτικών ιδρυμάτων και των χρηματοοικονομικών οργανισμών. Η σύγχρονη διαχείριση κινδύνου εφαρμόζει εργαλεία εκτίμησης πιθανοτήτων και μεθόδους προβλέψεων στη λήψη επιχειρηματικών και επενδυτικών αποφάσεων, με στόχο την ενίσχυση των προσδοκώμενων αποδόσεων και τον περιορισμό των κινδύνων. Η ανάπτυξη και χρήση υποδειγμάτων που παρέχουν, κατά το δυνατόν, ακριβείς προβλέψεις στην κατανόηση μίας σειράς κινδύνων, όπως κίνδυνος αγοράς, πιστωτικός, ρευστότητας, λειτουργικός, είναι πλέον επιτακτική ανάγκη για την ισχυροποίηση της κερδοφορίας των επιχειρήσεων, καθώς και της διατήρησης και επαύξησης των επενδυτικών τους κεφαλαίων. Στο πλαίσιο αυτό μπορεί να ενταχθεί η εμφάνιση και ολοένα αυξανόμενη χρήση μιας νέας τεχνικής εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, της προσέγγισης Value-at-Risk (VaR). Η επαναστατικότητα του VaR έγκειται κυρίως στην προσπάθεια μιας συνολικής διαχείρισης των κινδύνων ενός χρεογράφου ή ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων και όχι της διαχείρισης ενός μεμονωμένου τύπου κινδύνου. Αυτή ακριβώς η ιδιαιτερότητά του πιστεύεται ότι θα αυξήσει τη ζήτηση στο μέλλον για νέα εργαλεία συνολικής διαχείρισης των κινδύνων.

## **1.2 Σκοπός Εργασίας**

Η πολύπλοκη μορφή που απέκτησαν οι χρηματοοικονομικές αγορές κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών είχε ως αποτέλεσμα την απώλεια υψηλών κεφαλαίων από πολυεθνικές εταιρείες και πιστωτικά ιδρύματα. Η ανάγκη για συστηματική μέτρηση του χρηματοοικονομικού κινδύνου οδήγησε στην εμφάνιση και στην ολοένα αυξανόμενη χρήση μιας νέας τεχνικής εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, της προσέγγισης Value-at-Risk (VaR). Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση των βασικότερων μεθόδων υπολογισμού που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο (VaR) ενός χαρτοφυλακίου και η αναλυτική αριθμητική εφαρμογή κάποιων εκ των παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 για το διάστημα από 24/11/2004 έως

21/11/2014. Αναλυτικότερα, για την υλοποίηση της εμπειρικής εφαρμογής θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις πιο διαδεδομένες οικονομετρικές μεθόδους και θα προχωρήσουμε σε εκτίμηση και αξιολόγηση της VaR με ορίζοντα μιας ημέρας (1-day ahead) βάσει διαφόρων υποδειγμάτων δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (GARCH, TGARCH, IGARCH, EGARCH) τα οποία παράγουν εκτιμήσεις της δεσμευμένης διακύμανσης από τις οποίες εξαρτάται άμεσα η εκτίμηση του μέτρου VaR. Στον αντίποδα, θα παρουσιαστούν οι πιο διαδεδομένες μη παραμετρικές και ημι-παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της VaR δηλαδή η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation) και η Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory) αντίστοιχα. Εν κατακλείδι, κάθε μέθοδος εκτίμησης της VaR θα ελεγχθεί για την αποτελεσματικότητα της με βάση τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση και πραγματοποιώντας έλεγχο backtesting βάσει των κριτηρίων του Christoffersen (1998) θα είμαστε σε θέση να αποφανθούμε εάν τελικά το μοντέλο υπολογισμού της ημερήσιας VaR είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί.

### 1.3 Δομή Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια, καθένα εκ των οποίων συμβάλλει κατά τον πληρέστερο δυνατό τρόπο στην αποτελεσματική παρουσίαση του θέματος της μελέτης που πραγματεύεται.

Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε αρχικά μια σύντομη εισαγωγή στο αντικείμενο και στους στόχους της μελέτης αυτής. Το κεφάλαιο αυτό, το οποίο αποτελεί ουσιαστικά και την εισαγωγή στην διπλωματική εργασία είναι χωρισμένο σε τρεις υποενότητες, οι οποίες περιέχουν τα εισαγωγικά στοιχεία στα οποία περιγράφεται με σαφήνεια το δύσκολο και ευμετάβλητο χρηματοοικονομικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται σήμερα οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί καθώς και πως η ανάγκη για συστηματική μέτρηση του χρηματοοικονομικού κινδύνου οδήγησε στην εμφάνιση μιας νέας τεχνικής εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, της προσέγγισης Value-at-Risk (VaR). Στη δεύτερη υποενότητα παρουσιάζεται ο σκοπός της εργασίας και τέλος στην τρίτη η δομή της στην οποία παρουσιάζονται επιγραμματικά τα ακόλουθα κεφάλαια της εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχικά παρατίθεται ο ορισμός του μέτρου της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk) καθώς και η μαθηματική του διατύπωση. Στη συνέχεια, αναλύονται οι παράμετροι υπολογισμού της VaR, περιγράφονται τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της και ακολουθεί η εννοιολογική και μαθηματική διατύπωση του μέτρου της δεσμευμένης ή υπό συνθήκη VaR (CVaR). Τέλος, πραγματοποιείται μία ανασκόπηση των κυριότερων χρήσεων και εφαρμογών των υποδειγμάτων VaR για την εκτίμηση του κινδύνου αγοράς, που περιλαμβάνει και μία αναλυτική παρουσίαση των υπάρχουσών εμπειρικών μελετών ανά μεθοδολογία και ανά πεδίο εφαρμογής.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφονται και διατυπώνονται με μαθηματικό τρόπο τα πιο διαδεδομένα μοντέλα υπολογισμού της VaR. Πιο συγκεκριμένα, έγινε μια προσπάθεια να περιγράψουμε τη μεθοδολογία εκτίμησης του κινδύνου με τη μέθοδο VaR και αναλύσαμε τις κυριότερες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμησή της με γνώμονα τη διεθνή



βιβλιογραφία. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου, εξαρτάται από διάφορους παράγοντες σχετικούς με το είδος του χαρτοφυλακίου, το μέγεθος του δείγματος, το εύρος του χρονικού ορίζοντα για τον οποίο επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε προβλέψεις και την κατανομή των αποδόσεων. Για το λόγο αυτό, έγινε και εκτενή αναφορά στις πιο γνωστές μεθόδους, οι οποίες μπορούν να μας οδηγήσουν στην επιλογή του καλύτερου μοντέλου εκτίμησης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναδεικνύεται η σημαντικότητα του Backtesting ως διαδικασία που συμπληρώνει και επαληθεύει την αξιοπιστία των υποδειγμάτων εκτίμησης κινδύνου Value at Risk. Πιο συγκεκριμένα, εξειδικεύουμε την ανάλυση μας πραγματοποιώντας μία ανασκόπηση των σημαντικότερων μεθόδων επικύρωσης (Backtesting) της VaR. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται στον έλεγχο Christoffersen (1998) καθώς η υλοποίηση της εμπειρικής εφαρμογής που ακολουθεί στο πέμπτο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στον έλεγχο αυτό.

Στο πέμπτο κεφάλαιο ακολουθεί η αναλυτική αριθμητική εφαρμογή στην οποία χρησιμοποιήθηκαν ως δεδομένα οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 για το διάστημα από 24/11/2004 έως 21/11/2014. Επιπλέον, πραγματοποιείται σχολιασμός, λεπτομερής παρουσίαση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που επιτεύχθηκαν από την εφαρμογή που πραγματοποιήθηκε.

Τέλος, στο παράρτημα της παρούσας διπλωματικής εργασίας περιγράφονται τα προγράμματα υπολογισμού της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 με τη μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης και της Θεωρίας Ακραίων Τιμών (EVT). Η υλοποίηση των προγραμμάτων αυτών πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του οικονομετρικού πακέτου Eviews 6 και του λογισμικού ανοικτού κώδικα R i386 3.0.0 αντίστοιχα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk)

#### 2.1 Εννοιολογική προσέγγιση του μέτρου της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk)

Η πρόσφατη χρηματοπιστωτική κρίση χαρακτηρίζεται από την ουσιώδη αύξηση της μεταβλητότητας των αγορών, κάτι το οποίο σημαίνει ότι είναι αναγκαία όσο ποτέ η ανάπτυξη τεχνικών για την μείωση των τυχόν απωλειών στην αγορά, του καθορισμού περιθωρίου ασφαλείας τόσο για τους επενδυτές όσο και για τις επιχειρήσεις και εξεύρεση αποτελεσματικότερων τεχνικών ποσοτικοποίησης και διαχείρισης του κινδύνου αγοράς (market risk). Ο κίνδυνος αγοράς είναι ο κίνδυνος που πηγάζει από δυσμενείς μεταβολές στις τιμές των χρεογράφων, των συναλλαγματικών ισοτιμιών, των εμπορευμάτων και από μεταβολές στις αποδόσεις των επενδύσεων λόγω της διακύμανσης των επιτοκίων. Συνεπώς, για τη σωστή διαχείριση του κινδύνου αγοράς είναι απαραίτητη η εφαρμογή υποδειγμάτων μέτρησης του. Ως ο καλύτερος τρόπος μέτρησης του κινδύνου αγοράς έχει αναγνωριστεί η προσέγγιση Value at Risk (VaR).

Η προσέγγιση της αξίας σε κίνδυνο (VaR), έχει προσδώσει μια νέα διάσταση και φιλοσοφία σε όλα τα επίπεδα διαχείρισης του χρηματοοικονομικού κινδύνου και έχει γνωρίσει σημαντική αποδοχή κατά τη τελευταία δεκαετία, τόσο μεταξύ των ερευνητών και ακαδημαϊκών, όσο και μεταξύ των χρηματοπιστωτικών ή μη ιδρυμάτων και οργανισμών. Η δημιουργία της VaR ήταν ένα παράπλευρο αποτέλεσμα των απωλειών υψηλών κεφαλαίων, οι οποίες συνέβησαν σε μεγάλες τράπεζες και πολυεθνικές εταιρείες τις τελευταίες δεκαετίες. Για παράδειγμα, το μεγάλο κραχ στην Wall Street τον Οκτώβριο του 1987 καθώς και άλλες μεγάλες οικονομικές κρίσεις, όπως η πτώχευση της αγγλικής τράπεζας Barings 1995 και της επενδυτικής τράπεζας Lehman Brothers, πολλές από τις οποίες οφείλονταν στην έλλειψη πολιτικών διαχείρισης κινδύνου προσέλκυσε πολύ έντονα το ενδιαφέρον μεγάλων τραπεζών, ρυθμιστικών αρχών και της ακαδημαϊκής κοινότητας για την δημιουργία ενός εξελιγμένου μοντέλου πρόβλεψης του κινδύνου αγοράς. Ο κίνδυνος αγοράς αντανακλάται στη μεταβλητότητα της αξίας ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων, η οποία οφείλεται στις αλλαγές των αγοραίων τιμών των στοιχείων του ενεργητικού ενός οργανισμού. Αυτός ο τύπος κινδύνου είναι περισσότερο ορατός στις δραστηριότητες διαπραγμάτευσης μετοχικών και ομολογιακών τίτλων στη δευτερογενή αγορά ή στο άνοιγμα θέσεων σε συνάλλαγμα.

Το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk) ουσιαστικά αποτελεί μια στατιστική εκτίμηση, η οποία υπολογίζει μέσα σε συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης (π.χ. 95% ή 99%), το χρηματικό ποσό σε ένα συγκεκριμένο νόμισμα, το οποίο ένα χαρτοφυλάκιο ή ένα ίδρυμα αντέχει ανώδυνα να χάσει μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, εξαιτίας των δυνητικών μεταβολών στις αγοραίες τιμές των υποκείμενων τίτλων (Jorion, 2000). Το πιθανό χρονικό διάστημα της ανάλυσης μπορεί να είναι μόνο μία ημέρα για τις περισσότερες θέσεις διαπραγμάτευσης ή ακόμα και ένας μήνας ή περισσότερο για τα χαρτοφυλάκια επενδύσεων. Επιπλέον, η Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (BIS) καθόρισε

ένα επίπεδο εμπιστοσύνης στο 99% και ένα χρονικό ορίζοντα σε 10 ημέρες για λόγους μέτρησης της επάρκειας των κεφαλαίων της κάθε τράπεζας.

Συνεπώς, η VaR αποτελεί μία ένδειξη σχετικά με τις μέγιστες ζημιές που αναμένεται να λάβουν χώρα στο χαρτοφυλάκιο πιστωτικών ιδρυμάτων ή οργανισμών υπό κανονικές συνθήκες αγοράς, για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, βοηθώντας τα να κρίνουν τον τρόπο με τον οποίο θα ανακατανεύμουν τα ποσοστά συμμετοχής των περιουσιακών στοιχείων στα χαρτοφυλάκιά τους, με σκοπό την επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου κινδύνου. Για παράδειγμα, έστω ότι μια τράπεζα υπολογίζει ότι η 99% ημερήσια VaR του επενδυτικού χαρτοφυλακίου της είναι €10 εκατομμύρια. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια των επόμενων 100 ημερών, μόνο μια μέρα οι απώλειες θα είναι μεγαλύτερες από €10 εκατομμύρια. Εάν η διοίκηση εκτιμά ότι η δυνητική απώλεια είναι ιδιαίτερα μεγάλη, ο οργανισμός θα πρέπει να προβεί σε αναπροσαρμογή ή καλυψη (hedging) του συνολικού χαρτοφυλακίου, ώστε να μειώσει τη συνολική VaR.

Η σημαντικότητα της συγκεκριμένης μεθόδου οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός ότι αποτελεί την πρώτη συλλογική προσπάθεια των συμμετεχόντων στις αγορές και των ρυθμιστικών αρχών να δημιουργήσουν μια μεθοδολογία μέτρησης του κινδύνου αγοράς είτε πρόκειται για μεμονωμένο τίτλο, είτε για χαρτοφυλάκιο επενδύσεων, είτε για όλα τα στοιχεία του ισολογισμού ενός οργανισμού.

Η διάδοση της VaR ξεκίνησε με την ανάπτυξη του συστήματος Risk Metrics από την αμερικανική επενδυτική τράπεζα J.P. Morgan (J.P. Morgan, 1995). Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συστήματος από την JP Morgan αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και εφαρμογή ενός εργαλείου για τη μέτρηση και παρακολούθηση των καθημερινών αναμενόμενων ζημιών της τράπεζας από όλες τις επενδυτικές θέσεις που είχε αναλάβει. Μετά την απόφαση της τράπεζας να εκμεταλλευτεί εμπορικά το σύστημα Risk Metrics σε συνδυασμό με τη δημοσιοποίηση της προσέγγισης στην οποία βασίζεται, όλοι οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί ήταν ελεύθεροι να χρησιμοποιούν το σύστημα αυτό για τον υπολογισμό του κινδύνου του χαρτοφυλακίου τους ή για να αντλήσουν πληροφορίες που θα χρησιμοποιούσαν στα δικά τους συστήματα διαχείρισης κινδύνου.

Επιπλέον, η συνθήκη της Βασιλείας ενθάρρυνε τη χρήση τέτοιων υποδειγμάτων για τον καθορισμό των ελάχιστων εποπτικών κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι του κινδύνου της αγοράς. Πιο συγκεκριμένα, έδωσε το ερέθισμα στα πιστωτικά ιδρύματα να αναπτύξουν εσωτερικά συστήματα για να υπολογίζουν το VaR. Πραγματοποιώντας κάτι τέτοιο, οι τράπεζες μπορούν να οδηγηθούν σε μείωση στο απαιτούμενο κεφάλαιο κινδύνου που απαιτείται για να υποστηριχθούν εμπορικές τους δραστηριότητες, σε σύγκριση με τράπεζες που ακολουθούν τυποποιημένες μεθόδους παρακινούμενες από τις εποπτικές αρχές για τον καθορισμό των απαιτούμενων κεφαλαίων.

Το πεδίο εφαρμογών της VaR έχει διευρυνθεί σε τέτοιο βαθμό που μπορεί να συμπεριλάβει όχι μόνο χαρτοφυλάκια μετοχών αλλά και χαρτοφυλάκια ομολόγων, παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων ή τραπεζικά χαρτοφυλάκια, τα οποία συμπεριλαμβάνουν εν γένει συνδυασμό όλων των προαναφερθέντων χρεογράφων. Η ευρεία εφαρμογή της VaR έχει οδηγήσει σε μια πλήρη αλλαγή του τρόπου που προσεγγίζουν τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο οι διάφοροι οργανισμοί.

Παρά τη σπουδαιότητα της VaR ως μέτρου εκτίμησης του κινδύνου της αγοράς, πρέπει να επισημανθεί ότι αποτελεί μόνο μία στατιστική εκτίμηση (πρόβλεψη) η οποία βασίζεται σε μία κατανομή ιστορικών χρονολογικών στοιχείων και δεδομένων και όπως φάνηκε και στην πρόσφατη χρηματοπιστωτική κρίση, τα υποδείγματα αυτά τείνουν να υποεκτιμούν την πιθανότητα εμφάνισης ακραίων φαινομένων.

Ανεξαρτήτως όμως των όποιων μειονεκτημάτων ή αδυναμιών, η προσέγγιση VaR αποτελεί πλέον το πιο διαδεδομένο μέτρο ποσοτικοποίησης, πρόβλεψης και διαχείρισης των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Η υιοθέτησή της έχει προσδώσει μια νέα διάσταση και φιλοσοφία σε όλα τα επίπεδα διαχείρισης των χρηματοπιστωτικών και μη ιδρυμάτων και οδήγησε στην ανάπτυξη νέων υπολογιστικών τεχνικών για τη διαχείριση κινδύνων και εισήγαγε νέες διαδικασίες και πρακτικές για την ανάλυση κάθε τύπου χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές του εξωτερικού περιβάλλοντος.

## 2.2 Μαθηματική διατύπωση του VaR

Το Value at Risk, είναι η μέγιστη αναμενόμενη ζημία που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής ή ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  (π.χ. 1 μέρα, 1 εβδομάδα, 1 μήνας,...) με συγκεκριμένη πιθανότητα  $\alpha$  (1%, 5%,...) ή διαφορετικά με επίπεδο εμπιστοσύνης  $1-\alpha$ . Εναλλακτικά, το VaR είναι το  $(1-\alpha)$  εκατοστημόριο της κατανομής ζημιών για συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ο υπολογισμός του μέτρου αυτού αποτελεί ένα από τους πλέον σαφείς τρόπους με τον οποίο ένας επενδυτής είναι σε θέση να εκτιμήσει σε συγκεκριμένους ποσοτικούς όρους τους κινδύνους που αναλαμβάνει σε καθημερινή βάση. Ουσιαστικά, προσδιορίζεται η μέγιστη ζημία που μπορεί να έχει ο επενδυτής σε δεδομένο χρονικό διάστημα και σε ένα καθορισμένο βαθμό βεβαιότητας (βαθμός εμπιστοσύνης).

Έστω μια θέση long σε ένα περιουσιακό στοιχείο, με περίοδο διακράτησης  $I$  και συνάρτηση ζημιών  $L(I)$ . Ως αξία σε κίνδυνο (με  $VaR(\alpha) < 0$  λόγω θέσης long) ορίζεται το κατώτατο εκείνο όριο το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\alpha = \Pr[L(I) > VaR(\alpha)] = 1 - \Pr[L(I) < VaR(\alpha)]$$

Από την παραπάνω μαθηματική σχέση προκύπτει ότι η αξία σε κίνδυνο είναι το όριο εκείνο, το οποίο οι ζημιές δεν πρόκειται να ξεπεράσουν παρά μόνο στο  $(1 - \alpha)\%$  των περιπτώσεων. Έστω τώρα  $F_I(x)$  η συνάρτηση κατανομής των ζημιών (στην πράξη ως ζημιές λαμβάνονται υπ' όψιν οι αποδόσεις) και  $p = (1 - \alpha)$  με  $0 < p < 1$ . Από την θεωρία πιθανοτήτων προκύπτει ότι το  $q$  ποσοστημόριο της κατανομής των ζημιών (αποδόσεων) ορίζεται ως:

$$X_p = \inf \{x \mid F_I(x) > p\}$$

Συνεπώς, από τα παραπάνω προκύπτει ότι το  $VaR(= x_p)$  αποτελεί το  $(1 - \alpha)$  ποσοστημόριο της εμπειρικής κατανομής των ζημιών (αποδόσεων), οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι η αξία σε κίνδυνο (VaR) αποτελεί την με  $p$  πιθανότητα μεγαλύτερη ζημία που θα εμφανιστεί στο διάστημα διακράτησης.

Αναλυτικότερα, έστω ότι ένας επενδυτής έχει στην κατοχή του ένα χαρτοφυλάκιο αξίας  $P_0$  και θέλει να προσδιορίσει τη μέγιστη ζημία  $\Delta P^* = P_0 - P_t^* > 0$  που μπορεί να έχει σε χρονικό διάστημα  $t$ , με επίπεδο εμπιστοσύνης  $1-\alpha$ . Με άλλα λόγια, το ζητούμενο κατά τον υπολογισμό της VaR για τον επενδυτή είναι ο προσδιορισμός της ζημίας του χαρτοφυλακίου  $\Delta P^*$  έτσι ώστε η πιθανότητα εμφάνισης ζημίας  $\Delta P$  υψηλότερης από  $\Delta P^*$  να είναι  $\alpha$ , δηλαδή:  $\Pr(\Delta P > \Delta P^*) = \alpha$

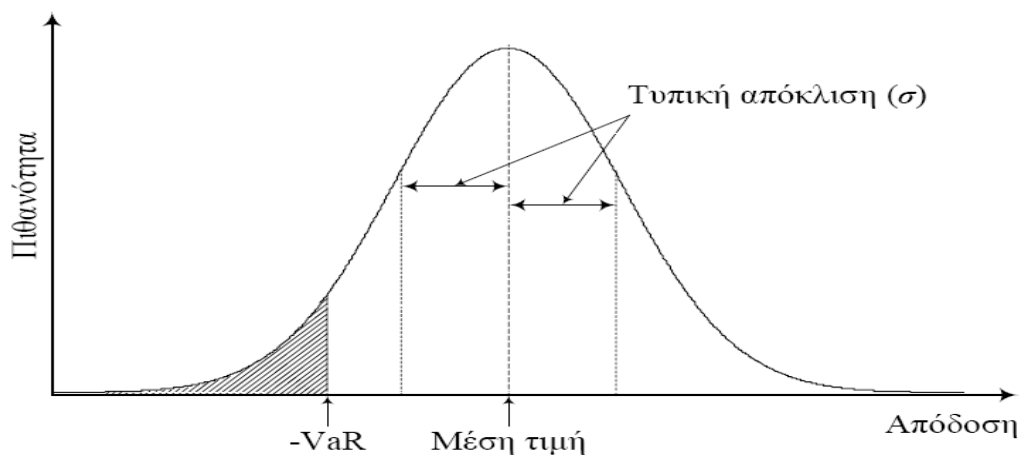
Όμως, κάθε μεταβολή  $\Delta P$  στην αξία ενός χαρτοφυλακίου σε μία δεδομένη χρονική περίοδο, μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με την απόδοση  $r$  και την αρχική αξία  $P_0$  του χαρτοφυλακίου ως εξής:

$$r = \frac{P - P_0}{P_0} = -\frac{\Delta P}{P_0} \Rightarrow \Delta P = -rP_0$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός της VaR ανάγεται στον προσδιορισμό της οριακής απόδοσης  $r^*$ , έτσι ώστε:

$$\Pr(-rP_0 > -r^*P_0) = \Pr(r < r^*) = \alpha$$

Η επίλυση του ανωτέρω προβλήματος απαιτεί τη γνώση της κατανομής πιθανότητας που ακολουθεί η απόδοση. Η ανάλυση μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά θεωρώντας ότι η απόδοση ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ , όπως παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 2.1.



**Σχήμα 2.1: Γραφική απεικόνιση του μέτρου VaR**

Υποθέτοντας λοιπόν ότι η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή, η πιθανότητα  $\Pr(r < r^*)$  μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

$$\Pr(r < r^*) = \alpha \Rightarrow \Pr\left(Z < Z^* = \frac{r^* - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

Από τους πίνακες της τυπικής κανονικής κατανομής μπορεί εύκολα να βρεθεί το  $Z^*$  για δεδομένο  $\alpha$ . Έχοντας υπολογίσει κατά τον τρόπο αυτό το  $Z^*$ , το  $r^*$  μπορεί πλέον εύκολα να υπολογιστεί ως  $r^* = \mu + Z^* \sigma$ .

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω, το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (VaR) μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικό τρόπο ως εξής:

$$VaR = P_0 - P^* = P_0 - (1 + r^*)P_0 = -(\mu + Z^* \sigma)P_0$$

Η χρησιμοποίηση της παραπάνω αναλυτικής προσέγγισης για τον υπολογισμό της VaR μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε χαρτοφυλάκια χρεογράφων. Στη γενική περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου  $m$  χρεογράφων  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , η VaR του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται ως εξής:

$$VaR_p = (VCV^T)^{1/2}$$

όπου  $V$  είναι ένα διάνυσμα  $1 \times m$ , οριζόμενο ως:  $V = [VaR_1, VaR_2, \dots, VaR_m]$ ,  $V^T$  είναι το ανάστροφο διάνυσμα του  $V$  και  $C$  είναι ένας πίνακας  $m \times m$  με τις συσχετίσεις των αποδόσεων των χρεογράφων. Κάθε στοιχείο  $c_{ij}$  του πίνακα  $C$  δίνει το συντελεστή συσχέτισης  $\rho_{ij}$  μεταξύ των χρεογράφων  $x_i$  και  $x_j$ . Προφανώς, ο πίνακας  $C$  είναι συμμετρικός και όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι ίσα με τη μονάδα.

Ο υπολογισμός της VaR σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία συνήθως πραγματοποιείται για χρονική περίοδο μιας ημέρας ή ενός μήνα. Βέβαια, είναι δυνατή η χρήση διαφορετικών χρονικών περιόδων μεγαλύτερων ή μικρότερων. Εάν, για παράδειγμα, ο υπολογισμός της VaR αφορά χρονική περίοδο μιας ημέρας, τότε θα πρέπει να καθοριστεί η τυπική απόκλιση των ημερήσιων αποδόσεων. Έχοντας κάνει τον υπολογισμό αυτό, ο καθορισμός της VaR για ένα άλλο διάστημα, έστω ενός μήνα, δεν απαιτεί τον εκ νέου υπολογισμό της τυπικής απόκλισης των μηνιαίων αποδόσεων. Αντίθετα, υποθέτοντας ότι ο μήνας έχει 20 εργάσιμες ημέρες, η τυπική απόκλιση  $\sigma_M$  των μηνιαίων αποδόσεων μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από την τυπική απόκλιση  $\sigma_H$  των ημερήσιων αποδόσεων:  $\sigma_M = \sigma_H \sqrt{20}$ . Άρα, η VaR για χρονικό διάστημα ενός μήνα υπολογίζεται πλέον πολύ απλά ως  $VaR_M = -Z^* \sigma_H \sqrt{20} P_0$ . Εν κατακλείδι, έχοντας υπολογίσει τη  $VaR_t$  για ένα χρονικό διάστημα  $t$  άρα και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση  $\sigma_t$ , ο υπολογισμός της  $VaR_{t'}$  για ένα οποιοδήποτε άλλο χρονικό διάστημα  $t'$  πραγματοποιείται ως εξής:

$$VaR_{t'} = -Z^* \sigma_t P_0 = -Z^* \sigma_t \sqrt{t'/t} P_0 = VaR_t \sqrt{t'/t}$$

### 2.3 Παράμετροι υπολογισμού της VaR

Η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk) είναι μία στατιστική μέθοδος μέτρησης του κινδύνου αγοράς που υπολογίζει την ανώτατη ζημιά, την οποία μπορεί να υποστεί ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, ομολόγων και χρηματοοικονομικών παραγώγων, σε ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Πριν την εφαρμογή κάποιας μεθόδου για τον υπολογισμό της προσέγγισης VaR θα πρέπει να εξετασθούν οι τρεις βασικοί παράμετροι της ήτοι α) ο χρονικός ορίζοντας, β) το διάστημα (ή επίπεδο) εμπιστοσύνης και γ) το «παραθύρο δεδομένων». Η απόφαση για την τιμή των τριών αυτών παραμέτρων είναι καθοριστικής σημασίας για την εκτίμηση της VaR.

Αναλυτικότερα, η επιλογή του χρονικού ορίζοντα εξαρτάται από τη συχνότητα αναπροσαρμογών του χαρτοφυλακίου και τη ταχύτητα με την οποία ο κάθε οργανισμός μπορεί να ρευστοποιεί τις θέσεις του. Συγκεκριμένα, οι τράπεζες υπολογίζουν τη VaR του επενδυτικού χαρτοφυλακίου τους για χρονικό ορίζοντα μιας ημέρας καθώς οι επενδύσεις που περιλαμβάνει είναι συνήθως άμεσα ρευστοποιήσιμες και επιπλέον παρουσιάζουν σημαντικές μεταβολές στην αξία τους σε καθημερινή βάση. Αντίθετα, για τα χαρτοφυλάκια που ρευστοποιούνται πιο δύσκολα χρησιμοποιείται μεγαλύτερος χρονικός ορίζοντας. Τυπικά για ένα εμπορικό χαρτοφυλάκιο το VaR υπολογίζεται για ορίζοντα μιας ημέρας, μιας ή δύο εβδομάδων, ενώ για επενδυτικά χαρτοφυλάκια χρησιμοποιείται μεγαλύτερος ορίζοντας έως και ένα έτος.

Η επιλογή του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι ενδεικτική της στάσης κάθε οργανισμού έναντι του κινδύνου και εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση του VaR. Συγκεκριμένα, αν χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της κεφαλαιακής επάρκειας τότε η επιλογή του πρέπει να αντανakλά το βαθμό που ένας οργανισμός θέλει να αποφύγει τον κίνδυνο και το κόστος της απώλειας εάν ξεπεραστεί το VaR. Αν ένας οργανισμός θέλει να αποφύγει όσο περισσότερο γίνεται τον κίνδυνο ή αν το κόστος απώλειας είναι εξαιρετικά υψηλό, τότε χρησιμοποιείται μεγαλύτερο διάστημα εμπιστοσύνης. Παρόλο που οι εποπτικές αρχές συστήνουν διάστημα εμπιστοσύνης 99%, η έρευνα δείχνει ότι και ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% συμπεριφέρεται πολύ καλά. Αυτό συμβαίνει διότι η πραγματική κατανομή δεν ταυτίζεται πλήρως με την κανονική η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του VaR, με αποτέλεσμα το 99% των εποπτικών αρχών που αφορά την κανονική κατανομή να συμπίπτει με το 95% της πραγματικής κατανομής, εξαιτίας της συχνότητας εμφάνισης των ακραίων γεγονότων (Minnich,1998).

Το «παραθύρο δεδομένων» είναι η χρονική περίοδος που καλύπτει το δείγμα των ιστορικών δεδομένων. Η επιλογή του εύρους του παραθύρου δεδομένων θα πρέπει να ικανοποιεί δύο αντικρουόμενες απαιτήσεις. Από τη μια πλευρά, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, τόσο ακριβέστερη εκτίμηση του κινδύνου μπορεί να επιτευχθεί, αλλά από την άλλη πλευρά, το μοντέλο υπολογισμού της VaR λαμβάνει υπ' όψιν τα δεδομένα του δείγματος και όχι τις πραγματικές παραμέτρους, πράγμα που αυξάνει το σφάλμα με την αύξηση του αριθμού των παρατηρήσεων. Συνεπώς, όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος των δεδομένων τόσο καλύτερη είναι η πρόβλεψη και λιγότερο καλή η προσαρμογή του υποδείγματος.

## 2.4 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα του VaR

Η προσέγγιση VaR χρησιμοποιείται ευρύτατα τα τελευταία χρόνια από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, ασφαλιστικές εταιρείες και χρηματοοικονομικούς οργανισμούς, οι οποίες έχουν στην κατοχή τους χαρτοφυλάκια περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνουν μετοχές, ομόλογα, νομίσματα και παράγωγα προϊόντα. Το VaR προσφέρει σε κάθε ένα από τα παραπάνω ιδρύματα μια ένδειξη σχετικά με τις μέγιστες ζημιές που αναμένει να λάβουν χώρα στο χαρτοφυλάκιο τους για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, βοηθώντας τα να κρίνουν τον τρόπο με τον οποίο θα ανακαταείμουν τα ποσοστά συμμετοχής των περιουσιακών στοιχείων στα χαρτοφυλάκιά τους, με σκοπό την επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου κινδύνου.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του μέτρου της αξίας σε κίνδυνο (VaR) συνίσταται στο ότι συνοψίζει σε έναν και μόνο αριθμό την συνολική έκθεση ενός οργανισμού στον κίνδυνο αγοράς. Οι πληροφορίες που παρέχει η συγκεκριμένη προσέγγιση χαρακτηρίζονται από απλότητα και σαφήνεια και μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τις ρυθμιστικές αρχές, τους διαχειριστές κινδύνων εταιρειών και ιδρυμάτων, καθώς και από εσωτερικούς και εξωτερικούς ελεγκτές. Άρα, η απλή και εύκολη κατανόηση αυτού του αριθμού, εξηγεί το λόγο για τον οποίο το VaR έγινε τόσο γρήγορα η πιο δημοφιλής μέθοδος μέτρησης χρηματοοικονομικού κινδύνου.

Επιπλέον, με τη χρήση του VaR είναι δυνατή η σύγκριση θέσεων σε διαφορετικές αγορές και διαφορετικά προϊόντα σε καθημερινή, μηνιαία και ετήσια βάση. Συνεπώς, με βάση την πληροφόρηση που παρέχει η συγκεκριμένη προσέγγιση, οι επενδυτές και οι διαχειριστές κινδύνων είναι σε θέση να λάβουν καλύτερες αποφάσεις σχετικά με τη στρατηγική επένδυσης ή διαχείρισης που ακολουθούν, επιτυγχάνοντας τη βέλτιστη απόδοση για τα χαρτοφυλάκιά τους.

Τέλος, το VaR μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης μεταξύ διαφορετικών τύπων κινδύνου. Μπορούμε δηλαδή να συγκρίνουμε το επίπεδο λειτουργικού κινδύνου με τον κίνδυνο αγοράς ή τον πιστωτικό κίνδυνο. Αυτή η δυνατότητα επιτρέπει σε ένα πιστωτικό ίδρυμα ή σε μια επιχείρηση να καθορίζει ποιοι παράγοντες κινδύνου είναι πιο πιθανόν να οδηγήσουν σε μεγάλες ζημιές. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για να συγκρίνουμε τον λειτουργικό κίνδυνο διαφορετικών κατηγοριών εργασιών μιας τράπεζας ή μιας επιχείρησης, παρέχοντας έτσι περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το από ποια κατηγορία προέρχεται ο μεγαλύτερος κίνδυνος και ίσως σε ποια κατηγορία θα πρέπει να προβούμε σε αναθεωρήσεις και βελτιώσεις λειτουργίας.

Ωστόσο, η μεθοδολογία VaR χαρακτηρίζεται και από κάποια μειονεκτήματα και η ακατάλληλη χρήση της μπορεί να οδηγήσει ένα πιστωτικό ίδρυμα ή χρηματοοικονομικό οργανισμό σε αναποτελεσματικές αποφάσεις διαχείρισης κινδύνου. Αυτό μπορεί να συμβεί είτε γιατί το VaR έχει υπολογιστεί κατά τρόπο λανθασμένο είτε γιατί, ενώ έχει υπολογιστεί σωστά, δεν σχετίζεται με τους πραγματικούς στόχους του πιστωτικού ιδρύματος ή του χρηματοοικονομικού οργανισμού για τη διαχείριση κινδύνου (Beder, 1995 και Culp et al., 1998).



Η κυριότερη αρνητική κριτική για τη VaR είναι ότι δεν είναι συνεπές ή συνεκτικό μέτρο κινδύνου καθώς δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας (subadditivity). Η υποπροσθετικότητα για έναν διαχειριστή κινδύνου έχει μεγάλη σημασία καθώς επιτρέπει ένα χαρτοφυλάκιο που είναι σύνολο μικρότερων χαρτοφυλακίων, να έχει κίνδυνο που είναι το πολύ ίσος με το άθροισμα των κινδύνων του κάθε μικρότερου χαρτοφυλακίου. Συνεπώς, η παραβίαση της ιδιότητας της υποπροσθετικότητας έχει ως αποτέλεσμα η VaR ενός συνδυασμένου χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των VaR των συνιστωσών του.

Επίσης, το VaR υπολογίζει τη μέγιστη ζημιά που μπορεί να αναμένει ένας οργανισμός μια δεδομένη χρονική περίοδο, κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα και για δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Παρότι παρέχει έγκυρες εκτιμήσεις για το δοθέν επίπεδο σημαντικότητας, πέρα από αυτό δεν προσφέρει καμία πληροφορία. Συχνά απαιτείται η ανάλυση των ζημιών που υπερβαίνουν το σημείο που οριοθετείται από τη VaR. Το στοιχείο αυτό είναι ιδιαίτερης σημασίας δεδομένου ότι πολλές φορές οι ζημιές που υπερβαίνουν τη VaR μπορεί να είναι ιδιαίτερα υψηλές, όπως για παράδειγμα σε χαρτοφυλάκια χορηγήσεων. Στις περιπτώσεις αυτές, ο υπολογισμός της VaR συμπληρώνεται από τη CVaR (Conditional Value at Risk), η οποία προσδιορίζει τη μέση τιμή των ζημιών που υπερβαίνουν τη VaR. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί ότι εάν τα δύο αυτά μεγέθη δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές, συνάγεται ότι ακόμα και σε ακραίες δυσμενείς συνθήκες οι ζημιές δεν θα υπερβούν κατά πολύ το αναμενόμενο άνω όριο που προσδιορίζεται από τη VaR. Αντίθετα, εάν η CVaR είναι σημαντικά υψηλότερη της VaR, τότε αυτό υποδεικνύει ότι σε ένα ακραίο αρνητικό σενάριο, ο σχεδιασμός που γίνεται μέσω της VaR μπορεί να ανατραπεί.

Επιπρόσθετα, οι ζημιές υπολογίζονται υποθέτοντας ότι τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να πωληθούν στις τρέχουσες αγοραίες τιμές. Ωστόσο, αν η επιχείρηση έχει στην κατοχή της σε μεγάλο βαθμό μη ρευστοποιήσιμα στοιχεία, το VaR μπορεί να υποεκτιμά τις πραγματικές ζημιές, αφού τα στοιχεία ίσως χρειάζεται να πωληθούν με έκπτωση.

Ανεξαρτήτως όμως των παραπάνω μειονεκτημάτων και αδυναμιών, η προσέγγιση VaR αποτελεί πλέον το πιο διαδεδομένο μέτρο ποσοτικοποίησης, πρόβλεψης και διαχείρισης των χρηματοοικονομικών κινδύνων. Η υιοθέτησή της οδήγησε στην ανάπτυξη νέων υπολογιστικών τεχνικών για τη διαχείριση κινδύνων και εισήγαγε νέες διαδικασίες και πρακτικές για την ανάλυση κάθε τύπου χαρτοφυλακίου σε σχέση με τις μεταβολές του εξωτερικού περιβάλλοντος.

## **2.5 Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη VaR (Conditional VaR ή CVaR)**

Η κυριότερη αρνητική κριτική σε σχέση με την καταλληλότητα του VaR, όπως ήδη αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, είναι ότι δεν αποτελεί συνεπές (coherent) μέτρο κινδύνου καθώς δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας (subadditivity) με αποτέλεσμα η VaR ενός συνδυασμένου χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των VaR των συνιστωσών του. Στην πράξη, η χρησιμοποίηση μη υποπροσθετικών

μέτρων στην κατασκευή βέλτιστων χαρτοφυλακίων μπορεί να οδηγήσει σε χαρτοφυλάκια με μεγάλη συγκέντρωση, τα οποία μπορούν να αποδειχθούν υψηλού κινδύνου. Επιπρόσθετα, με τη χρήση από μια εποπτική αρχή ενός μη υποπροσθετικού μέτρου για τον καθορισμό του εποπτικού κεφαλαίου, ένας χρηματοπιστωτικός οργανισμός έχει κίνητρο να διασπαστεί σε μικρότερους, προκειμένου να μειώσει τις κεφαλαιακές του ανάγκες.

Ένας δείκτης  $\rho$  καλείται συνεπής αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω τέσσερις προϋποθέσεις (Artzner et al, 1999) :

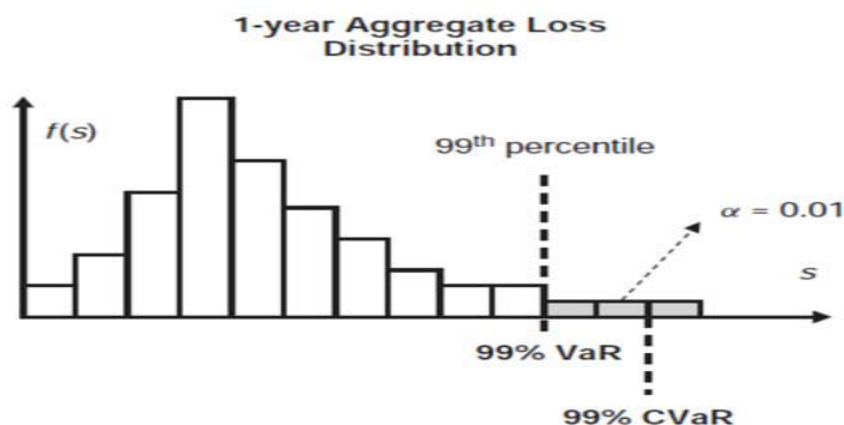
1. **Translation invariance (μεταφορά σταθερότητας):** Δηλαδή εάν προσθέσουμε (ή αντίστοιχα αφαιρέσουμε) ένα ποσό  $c$  σε ένα χαρτοφυλάκιο μειώνεται (αντίστοιχα αυξάνεται) το μέτρο κινδύνου κατά το ίδιο ακριβώς ποσό, δηλαδή :  $\rho(X + c \cdot r) = \rho(X) - c$ .
2. **Subadditivity (υποπροσθετικότητα):** Η επένδυση σε ένα χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει μικρότερο κίνδυνο σε σύγκριση με το άθροισμα των κινδύνων που υφίστανται για κάθε μεμονωμένη θέση, δηλαδή αν  $X_1, X_2$  οι δύο κίνδυνοι, θα πρέπει να ισχύει ότι :  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ .
3. **Positive homogeneity (θετική ομοιογένεια):** Η ιδιότητα αυτή διασφαλίζει ότι ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου είναι ανάλογος με το μέγεθος του, δηλαδή:  $\rho(a \cdot X) = a \cdot \rho(X)$ . Επομένως, ακόμα και εάν είχαμε  $a$  τέλεια συσχετισμένες κατηγορίες εργασιών ο μέγιστος συνολικός κίνδυνος θα ήταν  $a$  φορές τον κίνδυνο της κάθε κατηγορίας εργασιών.
4. **Monotonicity (μονοτονικότητα):** Αν για δύο κινδύνους ισχύει ότι  $X_1 \leq X_2$ , τότε για τον δείκτη  $\rho$  ισχύει  $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ . Η ιδιότητα αυτή διασφαλίζει ότι η απόδοση του χαρτοφυλακίου  $X_2$  υπερέρχει της αντίστοιχης απόδοσης του χαρτοφυλακίου  $X_1$ , τότε ο κίνδυνος που ενέχει το  $X_1$  πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με εκείνον του  $X_2$ .

Το γεγονός ότι το VaR δεν είναι συνεπές μέτρο κινδύνου σε συνδυασμό με ότι είναι μόνο ένα κάτω όριο για υψηλές ζημιές σύμφωνα με κάποιες προαποφασισμένες συνθήκες το οποίο δεν μπορεί να μας πει τίποτα στην περίπτωση που το ξεπεράσουμε αποτέλεσε το έναυσμα για την αναζήτηση εναλλακτικών μέτρων κινδύνου. Για παράδειγμα, ένα 99% VaR καθορίζει ότι μόνο στο 1% των περιπτώσεων το VaR θα ξεπερνιέται. Ποιο μπορεί όμως να είναι το ύψος της ζημιάς στο 1% των περιπτώσεων; Την απάντηση στο πρόβλημα αυτό προσπαθεί να δώσει το μέτρο Conditional Value at Risk (CVaR) που ισούται με την αναμενόμενη αξία της απώλειας, δεδομένου ότι αυτή συνέβη και ξεπέρασε την τιμή του VaR. Εναλλακτικά, το CVaR αποτελεί το εμβαδό της ουράς της κατανομής και δίνει την τιμή της αναμενόμενης απώλειας δεδομένου ότι αυτή συνέβη και ξεπέρασε την αξία σε κίνδυνο.

Για ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης και για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο αποδεικνύεται ότι η δεσμευμένη ή υπό συνθήκη VaR υπολογίζεται μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$CVaR = E[X | X > VaR]$$

Η μαθηματική αυτή διατύπωση του μέτρου Conditional Value at Risk απεικονίζεται γραφικά ως εξής:



Σύμφωνα με το ανωτέρω διάγραμμα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι πράγματι το CVaR εκφράζει τις αναμενόμενες ζημιές του χαρτοφυλακίου δεδομένου ότι οι ζημιές του χαρτοφυλακίου υπερβαίνουν το μέτρο αξία σε κίνδυνο (VaR). Επομένως, η μέτρηση του CVaR βασίζεται στο VaR αλλά προσπαθεί να εκτιμήσει τον κίνδυνο όταν το VaR έχει ξεπεραστεί. Άρα, αν το VaR δίνει απώλεια που μπορεί να ξεπεραστεί μόνο στο 1% των περιπτώσεων, το CVaR δίνει την αναμενόμενη απώλεια δεδομένου ότι εμφανίζεται πράγματι απώλεια στο 1% της ουράς.

Επίσης, η προοπτική του CVaR στο να περιγράψει καλύτερα τον ακραίο και πραγματικά καταστροφικό κίνδυνο είναι καλύτερη από την προοπτική του VaR. Βέβαια ακόμα οι ρυθμιστικές αρχές δεν έχουν υιοθετήσει την χρήση του CVaR. Η εναλλακτική αυτή προσέγγιση, είναι ωστόσο δύσκολο στο να εφαρμοστεί, καθώς τα αναμενόμενα ελλείμματα τυπικά δεν δημοσιεύονται και δεν αποκαλύπτονται από τις τράπεζες και στις μεθόδους backtesting χρησιμοποιούνται μόνο οι παρατηρήσεις στις οποίες η απώλεια υπερβαίνει το VaR, οι οποίες οδηγούν σε εξαιρετικά μικρά δείγματα (Christoffersen, 2003). Επιπρόσθετα, μια άλλη αδυναμία του CVaR είναι ότι επειδή συνήθως υπάρχουν πολύ λίγες παρατηρήσεις στην ουρά, το CVaR έχει μεγάλη μεταβλητότητα αφού ο υπολογισμός του έχει μεγάλο στατιστικό λάθος. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό όταν έχουμε πραγματικά ακραίες τιμές στο δείγμα μας.

Η ικανότητα των μοντέλων που χρησιμοποιούμε στο να περιγράψουν τον κίνδυνο, έχει να κάνει άμεσα με την κατανομή ζημιών που υποθέτουμε. Για παράδειγμα, εάν υποθέσουμε μια κατανομή με λεπτές ουρές τότε το VaR και το CVaR θα μας δώσουν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα. Για κατανομές όμως με παχιές (βαριές) ουρές τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων διαφοροποιούνται σημαντικά. Εμπειρικά αποτελέσματα έχουν δείξει ότι η κατανομή ζημιών είναι πολύ πιο σημαντική για την μέτρηση του κινδύνου σε σχέση με την κατανομή συχνότητας.

Αναφορικά με το μέτρο Conditional Value at Risk έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία εναλλακτικά οι εξής ονοματολογίες: Αναμενόμενο έλλειμμα (Expected Shortfall - ES) ή αναμενόμενη ζημιά ουράς (expected tail loss / tail conditional expectation) ή μέση υπερβάλλουσα ζημιά (mean excess loss).

Συνοψίζοντας, το μέτρο κινδύνου VaR δίνει ένα σημείο στην ουρά της κατανομής και πληροφορεί μόνο για το ότι θα πρέπει να αναμένουμε ότι θα υπάρξει απώλεια μεγαλύτερη από τον εαυτό του, χωρίς να μας δίνει πόσο μεγάλη θα είναι αυτή. Στον αντίποδα, το CVaR αναφέρεται στο εμβαδό της ουράς της κατανομής, ενημερώνει για το πόσο μεγάλη θα είναι η απώλεια και αποτελεί συνεπές μέτρο κινδύνου.

## **2.6 Χρήσεις των υποδειγμάτων εκτίμησης του κινδύνου αγοράς (VaR)**

Ένας οργανισμός, ο οποίος λειτουργεί στα πλαίσια της οικονομίας της αγοράς, υπάρχει πιθανότητα να υποστεί οικονομικές ζημιές εξαιτίας της πραγμάτωσης ενός μη αναμενόμενου γεγονότος. Ο κίνδυνος αγοράς (Jorion,2007) αντανάκλαται στη μεταβλητότητα της αξίας ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων, η οποία οφείλεται στις αλλαγές των αγοραίων τιμών των στοιχείων του ενεργητικού ενός οργανισμού. Αυτός ο τύπος κινδύνου είναι περισσότερο ορατός στις δραστηριότητες διαπραγμάτευσης μετοχικών και ομολογιακών τίτλων στη δευτερογενή αγορά ή στο άνοιγμα θέσεων σε συνάλλαγμα.

Μια νέα μέθοδος διαχείρισης του κινδύνου αγοράς, η αποδοχή της οποίας ιδιαίτερα από τα τραπεζικά ιδρύματα αλλά και από τις ρυθμιστικές αρχές αυξάνεται με ιλιγγιώδεις ρυθμούς, είναι η προσέγγιση value at risk (VaR). Ουσιαστικά, η VaR είναι η μέγιστη αναμενόμενη ζημιά που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής ή ένας οργανισμός σε δεδομένο χρονικό διάστημα για ένα επιλεγόμενο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Η πρώτη χρήση της μεθόδου VaR αναφέρεται στον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας των πιστωτικών ιδρυμάτων και των εταιρειών παροχής επενδυτικών υπηρεσιών. Σύμφωνα με το εποπτικό πλαίσιο που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια μέσω της Επιτροπής της Βασιλείας για τη λειτουργία των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (Τροποποίηση των οδηγιών περί κεφαλαιακής επάρκειας του 1997) οι υπόχρεοι πρέπει να έχουν συγκεκριμένο ύψος ιδίων κεφαλαίων ώστε να καλύπτουν τους κινδύνους αγοράς (δηλαδή κινδύνους επιτοκίου, μετοχών, συναλλαγματικών ισοτιμιών και τιμών εμπορευμάτων).

Η κεφαλαιακή αυτή επάρκεια μπορεί να υπολογίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος βασίζεται σε συγκεκριμένους κανόνες υπολογισμού των προβλεπομένων κεφαλαίων για κάθε θέση και ονομάζεται η τυποποιημένη μέθοδος υπολογισμού της κεφαλαιακής επάρκειας. Ο δεύτερος βασίζεται στη χρήση εσωτερικών υποδειγμάτων (δηλαδή χρήση μεθοδολογίας VaR). Με βάση τα αποτελέσματα του υπολογισμού της VaR προσδιορίζονται οι απαιτήσεις σε κεφάλαια που είναι απαραίτητες για την εύρυθμη λειτουργία κάθε επιχείρησης και οργανισμού. Ο υπολογισμός της VaR συμβάλλει άμεσα προς την κατεύθυνση ανάπτυξης διαδικασιών διασφάλισης της κεφαλαιακής επάρκειας, καθώς παρέχει μία εκτίμηση για το αναμενόμενο άνω όριο των ζημιών που μπορεί να έχει ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Η πληροφορία αυτή προφανώς παρέχει τις απαραίτητες κατευθυντήριες γραμμές για τη λήψη μέτρων αντιμετώπισης των προβλημάτων που μπορούν να εμφανιστούν και για τον προσδιορισμό των ελάχιστων κεφαλαίων που απαιτούνται για τη διασφάλιση της βιωσιμότητας ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Αναλυτικότερα, βάσει της δεύτερης αυτής μεθόδου προβλέπεται ότι ένα πιστωτικό ίδρυμα υπολογίζει το VaR για ορίζοντα 10 ημερών και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Αν το πιστωτικό ίδρυμα υπολογίζει το VaR με ορίζοντα τη μια ημέρα τότε η εκτίμηση μπορεί να αναχθεί σε περίοδο 10 ημερών πολλαπλασιάζοντας την ημερήσια εκτίμηση με τη τετραγωνική ρίζα του δέκα. Η κεφαλαιακή επάρκεια (CA=capital adequacy) τότε δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μέγιστο από τα παρακάτω δύο μεγέθη:

$$CA = \max\left(k(1/60)\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}, VaR_{t-1}\right) \quad (2.1)$$

Άρα, η κεφαλαιακή επάρκεια είναι το μεγαλύτερο από το μέσο όρο των εκτιμήσεων των τελευταίων 60 ημερών, πολλαπλασιασμένο με ένα συντελεστή  $k$  που ισούται τουλάχιστον με 3, ή της εκτίμησης του κινδύνου της χθεσινής ημέρας. Πολλαπλασιάζουμε με το συντελεστή  $k=3$  (Jackson et al.,1997) διότι διαφορετικά σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% θα αποδεχόμασταν 1 αστοχία στις 100 με ορίζοντα τις 10 ημέρες. Με άλλα λόγια, αν δεχθούμε ότι το έτος έχει 250 εργάσιμες ημέρες θα δεχόμασταν μία πτώχευση τράπεζας ανά τέσσερα χρόνια, γεγονός που θεωρείται απαράδεκτα υψηλό για τη σταθερότητα του πιστωτικού συστήματος.

Επιπλέον, οι επιχειρήσεις μπορούν να χρησιμοποιούν τα υποδείγματα VaR για να δημοσιοποιούν στους μετόχους τους, και γενικότερα στους επενδυτές, το ύψος του αναλαμβανόμενου κινδύνου αν επενδύσουν σ' αυτές. Ουσιαστικά, οι μέτοχοι πληροφορούνται ότι για συγκεκριμένο ύψος κεφαλαιοποίησης της επιχείρησης, ο μέγιστος κίνδυνος απώλειας αξίας που αναλαμβάνουν είναι αυτός που αναφέρεται στην εκτίμηση του VaR.

Η δεύτερη χρήση αναφέρεται στη άσκηση παθητικής διαχείρισης του χαρτοφυλακίου ενός χρηματοπιστωτικού ιδρύματος. Η βασική άποψη εδώ είναι ότι ο ρόλος των ιδίων κεφαλαίων είναι να απορροφά τις ζημιές που δημιουργούνται. Συνεπώς, σε ένα

αποκεντρωμένο σύστημα λήψης αποφάσεων, το ερώτημα που ανακύπτει είναι πως οι συνολικά αναλαμβανόμενοι κίνδυνοι δεν υπερβαίνουν το ύψος των ιδίων κεφαλαίων. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα βρίσκεται αν σε κάθε μονάδα λήψης αποφάσεων κατανεμηθεί ένα τμήμα των ιδίων κεφαλαίων το οποίο δεν πρέπει να ξεπεραστεί. Το ύψος των ιδίων κεφαλαίων τα οποία κατανέμονται σε κάθε δραστηριότητα εκφράζουν την πολιτική της διοίκησης όσον αφορά τη προτεραιότητα στην επέκταση κάποιων τομέων (π.χ. corporate banking) σε βάρος κάποιων άλλων (π.χ. λιανική τραπεζική). Επίσης, πρέπει να σχολιασθεί το γεγονός ότι το συνολικό ύψος των κατανεμηθέντων κεφαλαίων υπερβαίνει τα ίδια κεφάλαια δεδομένης της διαφοροποίησης των κινδύνων που επιτυγχάνονται σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Ο ορισμός ενός ύψους VaR που δεν πρέπει να υπερβεί η κάθε μονάδα λήψης αποφάσεων λειτουργεί επίσης και σαν αυτόματος μηχανισμός διόρθωσης του χαρτοφυλακίου σε περιπτώσεις αύξησης του κινδύνου. Αν δηλαδή έχουμε εισέλθει σε μία περίοδο νευρικότητας των αγορών με συνεπακόλουθη αύξηση των διακυμάνσεων τότε αυτόματα ο κάθε διαπραγματευτής (dealer) θα πρέπει να μειώσει τη θέση του έτσι ώστε να παραμείνει ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου του VaR εντός των ορίων που έχουν θεσπισθεί.

Η τρίτη χρήση της μεθοδολογίας VaR αποσκοπεί στην ενεργητική διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου. Η ενεργητική διαχείριση συνεπάγεται ότι δεν περιοριζόμαστε στη επιλογή της κατάλληλης διάρθρωσης του χαρτοφυλακίου που αντανακλά τις απόψεις μας σχετικά με το κίνδυνο αλλά ότι έχουμε άποψη για την εξέλιξη των αποδόσεων και θέλουμε να αναπτύξουμε κριτήρια λήψης αποφάσεων. Τα κριτήρια αυτά κάθε φορά μετρούν την αναμενόμενη απόδοση σε σχέση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο, ο οποίος ταυτίζεται με την εκτιμώμενη συμμετοχή στο κίνδυνο του χαρτοφυλακίου της κάθε θέσης. Το περισσότερο γνωστό κριτήριο αυτής της κατηγορίας είναι ο δείκτης Risk Adjusted Return on Capital (RAROC) που ορίζεται ως:

$$RAROC = \frac{\text{κέρδη} - \kappa(\text{κεφάλαιο})}{\text{κεφάλαιο}} \quad (2.2)$$

Στον αριθμητή χρησιμοποιούμε τα αναμενόμενα κέρδη από την επένδυση και αφαιρούμε τα διαφυγόντα κέρδη που ορίζονται σαν το γινόμενο της εναλλακτικής απόδοσης,  $\kappa$ , επί το κεφάλαιο που συνεισφέρουν οι μέτοχοι για τη συγκεκριμένη επένδυση (VaR) και στο παρανομαστή το ύψος αυτών των κεφαλαίων. Η μέθοδος αυτή είναι εξαιρετικά χρήσιμη στη περίπτωση επενδύσεων όπου τα κεφάλαια που δεσμεύονται δεν είναι εύκολο να υπολογισθούν, όπως συμβαίνει στη περίπτωση των παραγώγων προϊόντων όπου το κεφάλαιο δεν έχει καμία σχέση με το ύψος της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου.

## 2.7 Εμπειρικές εφαρμογές της μεθοδολογίας VaR

Η φιλοσοφία των συστημάτων VaR έχει σημαντικές εφαρμογές στη μέτρηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια μετοχών, ομολόγων και χρηματοοικονομικών παραγώγων. Με την εισαγωγή όμως του εποπτικού πλαισίου της Βασιλείας II, διαδικασίες που βασίζονται στην

έννοια του VaR αναπτύσσονται και εφαρμόζονται πλέον και στον χώρο του πιστωτικού κινδύνου.

Η διάδοση της VaR ξεκίνησε με την ανάπτυξη του συστήματος Risk Metrics από την Αμερικανική επενδυτική τράπεζα J.P. Morgan (J.P. Morgan, 1995). Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συστήματος από την JP Morgan αποσκοπούσε στην ανάπτυξη και εφαρμογή ενός εργαλείου για τη μέτρηση και παρακολούθηση των καθημερινών αναμενόμενων ζημιών της τράπεζας από όλες τις επενδυτικές θέσεις που είχε αναλάβει. Μετά την απόφαση της τράπεζας να εκμεταλλευτεί εμπορικά το σύστημα Risk Metrics σε συνδυασμό με τη δημοσιοποίηση της προσέγγισης στην οποία βασίζεται, έδωσαν ώθηση στην περαιτέρω ανάπτυξη του μέτρου της Αξίας σε Κίνδυνο (Value at Risk).

Ο Daryll Hendricks (1996) αξιολόγησε τις επιδόσεις διαφόρων μοντέλων Value at Risk εφαρμόζοντας τα σε 1000 τυχαία χαρτοφυλάκια συναλλαγματικών ισοτιμιών. Τα συμπεράσματα της έρευνάς του ήταν ότι για 5% επίπεδο σημαντικότητας όλα τα μοντέλα ήταν αξιόπιστα, όχι όμως και για 1% επίπεδο σημαντικότητας, με τις μεθόδους ιστορικής προσομοίωσης να υπερεκτιμούν το Value at Risk περισσότερο από τις μεθόδους Διακύμανσης- Συνδιακύμανσης.

Οι Danielsson και de Vries (2000) πρότειναν μια ημι-παραμετρική μέθοδο υπολογισμού του Value at Risk βασισμένη στη Θεωρία ακραίων τιμών. Χρησιμοποιώντας δεδομένα έξι ετών από έξι τυχαίες Αμερικάνικες μετοχές και την τιμή της μετοχής της JP Morgan συνέκριναν τα αποτελέσματα με αυτά της ιστορικής προσομοίωσης και της μεθόδου Risk Metrics. Το αποτέλεσμα της έρευνάς τους ήταν ότι η ανωτέρω ημι-παραμετρική μέθοδος δείχνει να προσαρμόζεται καλύτερα και να αποδίδει πιο ακριβή αποτελέσματα.

Οι Christoffersen, Hahn και Inoue (2001) μελέτησαν τη χρησιμότητα διαφόρων μεθόδων μέτρησης της δεσμευμένης διακύμανσης (GARCH, Risk Metrics, Implied volatility) για την εκτίμηση του μέτρου Value at Risk. Στη συνέχεια, εφάρμοσαν τις διάφορες αυτές μεθόδους σε δεδομένα του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 για ορίζοντα μιας ημέρας, υπολόγισαν την αξία σε κίνδυνο (VaR) και τέλος συνέκριναν μεταξύ τους ένα προς ένα τα μοντέλα μέτρησης της δεσμευμένης διακύμανσης.

Οι Guermat και Harris (2002) χρησιμοποίησαν ένα Εκθετικά Σταθμισμένο μοντέλο Μεγίστης Πιθανοφάνειας (exponentially weighted maximum likelihood ή EWML) για την εκτίμηση του Value at Risk χωρίς να θεωρούν ότι η διακύμανση των αποδόσεων είναι σταθερή στον χρόνο. Χρησιμοποίησαν δεδομένα από τρία αντιπροσωπευτικά χαρτοφυλάκια μετοχών της Αμερικής, της Ιαπωνίας και του Ηνωμένου Βασιλείου. Το αποτέλεσμα της έρευνάς τους ήταν ότι για υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης παρατηρήθηκε βελτίωση στις μετρήσεις του VaR σε σχέση με τα GARCH και EWMA υποδείγματα.

Οι Duan και Simonato (2002) εφάρμοσαν την προσομοίωση Monte Carlo πάνω στα επιτόκια αποταμιεύσεων και οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο παράγει υψηλότερες τιμές από ότι στην πραγματικότητα.

Οι Berkowitch και O'Brien (2002) αξιολόγησαν τις επιδόσεις των μοντέλων που χρησιμοποιούνταν από τις μεγαλύτερες τράπεζες των Η.Π.Α. για τον υπολογισμό του Value at Risk κατά την διάρκεια της δεκαετίας του 1990. Συγκρίνοντας την εκτίμηση του VaR όπως υπολογίστηκε από τα πολύπλοκα υποδείγματα των χρηματοπιστωτικών αυτών ιδρυμάτων με το VaR μέσω ενός απλού GARCH υποδείγματος, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα οικονομετρικά ARMA - GARCH μοντέλα είχαν καλύτερα αποτελέσματα.

Οι Castellacci και Siclari (2003) εφάρμοσαν την VaR σε μη γραμμικά χαρτοφυλάκια. Οι κυριότερες μεθοδολογίες VaR που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η Delta-Gamma, η Delta Gamma Normal, η Delta και η προσομοίωση Delta Gamma Monte Carlo. Το αποτέλεσμα της μελέτης τους ήταν ότι η Delta έδωσε τα πιο απλά και κατανοητά αποτελέσματα και ότι οι παραμετρικές μέθοδοι τείνουν να υπερεκτιμούν την VaR ενώ η Delta Gamma Monte Carlo την υποεκτιμά ελαφρώς.

Οι Angelidis, Benos και Degiannakis (2004) αξιολόγησαν την επίδοση διαφορετικών GARCH υποδειγμάτων στην μοντελοποίηση του ημερήσιου Value at Risk χρησιμοποιώντας διαφορετικά μεγέθη δείγματος και υποθέσεις κατανομών σε χαρτοφυλάκια πέντε διαφορετικών δεικτών (S&P500, NIKKEI 225, FTSE 100, CAC 40 και DAX 30). Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το μέγεθος του δείγματος παίζει σημαντικό ρόλο και οι λεπτόκυρτες κατανομές έχουν την δυνατότητα για καλύτερες προβλέψεις για ένα βήμα μπροστά (1-step ahead) προβλέψεις του VaR. Επίσης, σύμφωνα με την έρευνά τους, η ARCH διαδικασία που επιτυγχάνει τα βέλτιστα αποτελέσματα ποικίλει ανάλογα με τον υπό εξέταση κάθε φορά χρηματιστηριακό δείκτη.

Οι Pierre Giot και Sebastien Laurent (2004) υπολόγισαν το Value at Risk για χρηματιστηριακούς δείκτες χρησιμοποιώντας ARCH μοντέλα βασισμένα στην ασύμμετρη student κατανομή. Το αποτέλεσμα της μελέτης τους ήταν ότι τα μοντέλα με συμμετρικές κατανομές δεν είναι επαρκή σε σχέση με τα μοντέλα που υποθέτουν ασύμμετρες κατανομές όταν ενδιαφερόμαστε για την ερμηνεία τόσο της αριστερής όσο και της δεξιάς ουράς της κατανομής. Τέλος, πρότειναν τη χρήση APARCH μοντέλου βασισμένου στην ασύμμετρη t-student κατανομή για τον υπολογισμό της VaR έτσι ώστε να ληφθούν υπ' όψιν οι μακριές απολήξεις (βαριές ουρές) της κατανομής των αποδόσεων.

Οι Leon Li και William Lin (2004) εκτίμησαν το Value at Risk για τις αποδόσεις διάφορων χρηματιστηριακών δεικτών (Dow Jones, Nikkei, Frankfurt Commerzbank index και FTSE) χρησιμοποιώντας Markov Switching ARCH (SWARCH) μοντέλα. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους ήταν ότι υπάρχει βελτίωση στην εκτίμηση του VaR όταν έχουμε περιπτώσεις κύρτωσης και βαριές ουρές στις κατανομές των αποδόσεων σε σχέση με τα ARCH και GARCH υποδείγματα.

Ο Moscadelli (2004) χρησιμοποίησε Θεωρία ακραίων τιμών (EVT) και συγκεκριμένα την Generalized Pareto Distribution (GPD) προκειμένου να εξετάσει εάν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην μοντελοποίηση του λειτουργικού κινδύνου. Επιπλέον, υπολόγισε το OpVaR για διαφορετικές λειτουργίες των τραπεζών (corporate finance, trading and sales, retail banking, commercial banking, payment and settlement, agency services, asset



management and retail brokerage). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι συμβατικά μοντέλα αποτυγχάνουν να περιγράψουν ικανοποιητικά τον λειτουργικό κίνδυνο κυρίως λόγω της ύπαρξης παχίων ουρών στις κατανομές των δεδομένων. Η GPD κατανομή όμως βρέθηκε να προσφέρει καλή μοντελοποίηση των ζημιών και να οδηγεί σε επαρκείς μετρήσεις του VaR.

Οι Engle και Manganelli (2004) αξιολόγησαν διάφορα υποδείγματα για τον υπολογισμό του Value at Risk, χρησιμοποιώντας Monte Carlo προσομοίωση. Παρήγαγαν δεδομένα χρησιμοποιώντας GARCH διεργασίες για διάφορες κατανομές και συνέκριναν τα εκτιμώμενα ποσοστημόρια με τα πραγματικά. Το αποτέλεσμα της έρευνάς τους ήταν ότι τα CAViaR μοντέλα επιτυγχάνουν τα βέλτιστα αποτελέσματα για κατανομές με βαριές ουρές. Αναλυτικότερα, τα Conditional Autoregressive Value at Risk (CAViaR) υποδείγματα μελετούν την εξέλιξη των ποσοστημορίων στον χρόνο χρησιμοποιώντας μια αυτοσυσχετιζόμενη διαδικασία και όχι ολόκληρη την κατανομή των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου. Οι άγνωστες παράμετροι του υποδείγματος εκτιμώνται με την χρήση μη γραμμικής παλινδρόμησης ποσοστημορίων (non-linear quantile regression).

Οι Chiu, Chiang, Hung και Chen (2006), όσον αφορά τον κίνδυνο από την αγορά Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ), συμπέραναν ότι η χρήση της VaR δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν χρησιμοποιούνται πραγματικές τιμές αφού πρώτα έχει γίνει η εκκαθάριση των συναλλαγών. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την αποτελεσματικότητα της αγοράς και την μεγαλύτερη ρευστότητα των αγορών ΣΜΕ.

Οι Wu και Shieh (2007) προκειμένου να μελετήσουν τον επιτοκιακό κίνδυνο, εφάρμοσαν την VaR μέσω των μοντέλων GARCH (1,1) και FIGARCH (1,d,1) πάνω σε χαρτοφυλάκια ομολόγων και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το FIGARCH (1,d,1) δεν αποδίδει αξιόπιστα αποτελέσματα όπως το GARCH (1,1).

Οι Fresard, Perignon και Wilhelmsson (2011) επισήμαναν ότι κατά την διάρκεια της παγκόσμιας χρηματοοικονομικής κρίσης, ο αριθμός των παραβιάσεων του VaR αυξήθηκε απότομα, κάτι το οποίο αντικατοπτρίζεται στο γεγονός ότι ορισμένα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ξεπέρασαν τις πενήντα παραβιάσεις του VaR κατά την διάρκεια εκείνου του έτους, σε διάστημα εμπιστοσύνης 99%. Ωστόσο, οι έρευνες που είχαν καταγραφεί στη βιβλιογραφία παλιότερα δεν ελάμβαναν υπ' όψιν το μέγεθος των παραβιάσεων του VaR.

Σε ανάλογη περίπτωση, οι Colletaz, Hurlin και Perignon (2012) χρησιμοποίησαν τα πραγματικά VaR και τις αποδόσεις για τη τρίτη μεγαλύτερη Ισπανική τράπεζα, την LaCaixa. Τα δεδομένα ήταν το VaR (1%) της επόμενης μέρας, καθώς επίσης και οι ημερήσιες αποδόσεις για την συγκεκριμένη τράπεζα για την οικονομική περίοδο 2007 - 2008. Καθώς η παραπάνω περίοδος περιλαμβάνει και το ξεκίνημα της μεγάλης χρηματοοικονομικής κρίσης, υπάρχει μια σαφής αλλαγή στην μεταβλητότητα των εσόδων σε σύγκριση με το παρελθόν. Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι ότι η διακύμανση αυξήθηκε μετά το πέρας του πρώτου τετραμήνου του 2007. Κατά τον ίδιο τρόπο, το VaR (1%) μεταπήδησε από δύο εκατομμύρια ευρώ κατά την διάρκεια του 2007 σε τέσσερα εκατομμύρια ευρώ αργότερα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Μεθοδολογικό Πλαίσιο Υπολογισμού της VaR

#### 3.1 Μέθοδοι Υπολογισμού της VaR

Παρά τη σπουδαιότητα του VaR ως μέτρου εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, πρέπει να επισημανθεί ότι αποτελεί μόνο μια στατιστική εκτίμηση, η οποία βασίζεται συνήθως σε μια κατανομή ιστορικών χρονολογικών στοιχείων και δεδομένων. Αποτελεί δηλαδή μια πρόβλεψη, η οποία εκ φύσεως δεν είναι δυνατό να καθοριστεί με ακρίβεια μέσα σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 100%. Οι μεθοδολογίες οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συγκεκριμένης αυτής πρόβλεψης μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες (Engle - Manganelli, 2001) τις παραμετρικές, τις μη παραμετρικές και τις ημι-παραμετρικές.

Οι μη παραμετρικές σε αντίθεση με τις παραμετρικές υπολογίζουν τη ζητούμενη αξία σε κίνδυνο βασιζόμενες αποκλειστικά στην εμπειρική κατανομή των αποδόσεων. Οι διαδικασίες αυτές είναι απλές, δεν απαιτούν ιδιαίτερους υπολογισμούς και επιπλέον, εφόσον δεν κάνουν υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων αποτυπώνουν πλήρως τα χαρακτηριστικά της εμπειρικής κατανομής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μη παραμετρικών μεθόδων είναι η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation).

Στη διεθνή βιβλιογραφία, τα πιο συνηθισμένα παραμετρικά μοντέλα για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο είναι η Μέθοδος Variance Covariance, η Μέθοδος του Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average), η Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo, η Μέθοδος Risk Metrics και τα Οικονομετρικά υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (π.χ. GARCH, TGARCH, IGARCH, EGARCH) ενώ το πιο συνηθισμένο ημι-παραμετρικό μοντέλο είναι η Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory).

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις στον υπολογισμό της εκτίμησης του VaR. Η βασική τους διάφορα έγκειται στον τρόπο υπολογισμού της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Μερικές μέθοδοι υποθέτουν κάποιες δεδομένες κατανομές για τις αποδόσεις (π.χ. κανονική, t - student) ενώ κάποιες άλλες βασίζονται σε μη παραμετρικές μεθόδους και δεν κάνουν κάποια υπόθεση για συγκεκριμένη κατανομή των αποδόσεων.

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν υπάρχει βέλτιστη μέθοδος για τον υπολογισμό του VaR παρά μόνο καταλληλότερη. Η κατανομή των απωλειών (ζημιών) είναι αυτή που καθορίζει ποια μέθοδος είναι καλύτερη ώστε να μπορεί να καταλήξει σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Αν για παράδειγμα τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή, η καλύτερη μέθοδος είναι η μέθοδος Variance Covariance. Αν ακολουθούν μια άλλη οποιαδήποτε γνωστή κατανομή, η καλύτερη προσέγγιση είναι αυτή της ιστορικής προσομοίωσης. Αν δεν είναι γνωστή η κατανομή τότε η καλύτερη μέθοδος είναι η προσομοίωση Monte Carlo (MC). Τέλος, αν δεν ακολουθούν γνωστή κατανομή και το

ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε πραγματικά ακραίες καταστάσεις τότε η καταλληλότερη μέθοδος είναι η Θεωρία Ακραίων Τιμών (EVT).

Εν κατακλείδι, ο υπολογισμός της VaR μπορεί να γίνει, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είτε με τη χρήση παραμετρικών μεθόδων είτε μη παραμετρικών. Τα βήματα που ακολουθούνται σε κάθε περίπτωση, καθώς και η σειρά με την οποία υλοποιούνται, είναι εν γένει διαφορετικά, αλλά υπάρχουν ορισμένες διαδικασίες οι οποίες είναι κοινές. Αυτές οι διαδικασίες είναι οι εξής:

- Υπολογισμός της αγοραίας αξίας του χαρτοφυλακίου.
- Υπολογισμός της διακύμανσης των παραγόντων κινδύνου.
- Καθορισμός του χρονικού ορίζοντα υπολογισμού της VaR.
- Καθορισμός του επιπέδου εμπιστοσύνης της VaR.
- Υπολογισμός της VaR μέσω της επεξεργασίας όλων των προηγούμενων πληροφοριών.

### **3.1.1 Μέθοδος Διακύμανσης-Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance)**

Η μέθοδος Variance-Covariance βασίζεται στην υπόθεση ότι τα διάφορα χρηματοοικονομικά εργαλεία του χαρτοφυλακίου εξαρτώνται γραμμικά από τους παράγοντες αγοράς και ότι αυτοί ακολουθούν κανονική κατανομή. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση αυτή, μπορούμε να καθορίσουμε την κατανομή των κερδών - ζημιών του χαρτοφυλακίου μας, η οποία θα είναι και αυτή κανονική. Μόλις βρεθεί η κατανομή των πιθανών κερδών - ζημιών του χαρτοφυλακίου, για τη δεδομένη χρονική περίοδο που μας ενδιαφέρει, είναι εύκολο να υπολογιστεί το VaR χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος Variance-Covariance απαιτεί τη δημιουργία ενός πίνακα (matrix) που περιλαμβάνει μια σειρά ιστορικών στοιχείων διακύμανσης και συνδιακύμανσης πάνω σε απλουστευμένα χρηματοοικονομικά εργαλεία, και τη μετέπειτα αναγωγή τους στα συστατικά χρεόγραφα που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο. Στη συνέχεια, η μήτρα διακύμανσης - συνδιακύμανσης πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το διάνυσμα των συντελεστών ευαισθησίας, οι οποίοι προκύπτουν ως μερικές παράγωγοι της αξίας του χαρτοφυλακίου ως προς τους παράγοντες κινδύνου προκειμένου να υπολογιστεί το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR).

Αναλυτικότερα, τα βασικά βήματα που απαιτούνται για τον υπολογισμό του VaR με χρήση της παραμετρικής μεθόδου Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης (Variance-Covariance) είναι τα εξής:

- Υπόθεση ότι η αξία του χαρτοφυλακίου, ύστερα από χρόνο ίσο με τον χρονικό ορίζοντα που έχουμε επιλέξει, ακολουθεί κανονική κατανομή.
- Καθορισμός των παραγόντων κινδύνου που απαιτούνται για τον υπολογισμό της αξίας του χαρτοφυλακίου.

- Υπολογισμός των συντελεστών ευαισθησίας των επενδύσεων του χαρτοφυλακίου σε κάθε παράγοντα κινδύνου.
- Εύρεση ιστορικών δεδομένων για τους παράγοντες κινδύνου και υπολογισμός της τυπικής απόκλισης (volatility) του καθενός, καθώς και των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ τους.
- Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της αξίας του χαρτοφυλακίου αθροίζοντας τα γινόμενα των συντελεστών ευαισθησίας με τις τυπικές αποκλίσεις των παραγόντων κινδύνου, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους συντελεστές συσχέτισης.
- Υπολογισμός του μέτρου της Αξίας σε Κίνδυνο (Value-at-Risk).

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικό τρόπο ως εξής: Έστω ένα χαρτοφυλάκιο  $n$  επενδύσεων το οποίο έχει παρούσα αξία  ${}^0v_p$ . Αν  $\mu_i = E({}^1R_i)$  είναι η αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης  $i$ , με  $1 \leq i \leq n$ , και  $\sigma_{ij} = \text{Cov}({}^1R_i, {}^1R_j)$  είναι η συνδιακύμανση των επενδύσεων  $i$  και  $j$ , με  $1 \leq i, j \leq n$ , ύστερα από μία χρονική μονάδα (π.χ. ημέρα, εβδομάδα, μήνας, έτος). Για την αναμενόμενη απόδοση  $\mu_p = E({}^1R_p)$  και τη διακύμανση  $\sigma_p^2 = V({}^1R_p)$  της απόδοσης του χαρτοφυλακίου, ύστερα από μία χρονική μονάδα, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mu_p = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \quad \text{και} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}^T$$

όπου  $\mathbf{w} = [{}^0w_1 \quad {}^0w_2 \quad {}^0w_3 \quad \dots \quad {}^0w_n]$  και  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \dots \quad \mu_n]$

$$\text{και } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \dots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Οι αριθμοί  ${}^0w_1, {}^0w_2, \dots, {}^0w_n$  είναι τα ποσοστά συμμετοχής της κάθε επένδυσης στο χαρτοφυλάκιο δηλαδή τα βάρη του χαρτοφυλακίου.  $\boldsymbol{\Sigma}$  είναι ο συμμετρικός πίνακας διακύμανσης - συνδιακύμανσης με  $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$ , όπου  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\mathbf{C}$  είναι ο συμμετρικός πίνακας συντελεστών συσχέτισης και  $\mathbf{S}$  είναι ο διαγώνιος πίνακας τυπικών αποκλίσεων.

Αν  ${}^1L_p$  είναι οι ζημιές του χαρτοφυλακίου μετά από μία χρονική μονάδα, τότε για την αξία  ${}^1V_p$  του χαρτοφυλακίου μετά από μία χρονική μονάδα ισχύει η εξής σχέση:

$${}^1V_p = {}^0v_p \cdot (1 + {}^1R_p) = {}^0v_p - {}^1L_p, \text{ όπου } {}^1L_p = -{}^0v_p \cdot {}^1R_p$$

Με την υπόθεση ότι η  ${}^1V$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu_{{}^1V_p}, \sigma_{{}^1V_p})$  με μέση τιμή  $\mu_{{}^1V_p} = {}^0v_p \cdot (1 + \mu_p)$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{{}^1V_p} = {}^0v_p \cdot \sigma_p$  συνεπάγεται ότι και η  ${}^1L_p$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu_{{}^1L_p}, \sigma_{{}^1L_p})$  με μέση τιμή  $\mu_{{}^1L_p} = -{}^0v_p \cdot \mu_p$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{{}^1L_p} = {}^0v_p \cdot \sigma_p$ .

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα ανωτέρω, η μαθηματική σχέση που διέπει τον υπολογισμό του μέτρου της αξίας σε κίνδυνο (VaR) είναι η εξής:

$$VaR_p = (\sigma_p \Phi^{-1}(p) - \mu_p) \cdot {}^0v_p, \text{ όπου } \Phi(x) : \text{ η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής } N(0,1) \text{ και } p : \text{ το επίπεδο εμπιστοσύνης.}$$

Συνοψίζοντας, η μέθοδος διακύμανσης - συνδιακύμανσης βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις των χρεογράφων που συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο ακολουθούν την κανονική κατανομή. Υπόθεση που στην πραγματικότητα πολλές φορές δε συμβαίνει, καθώς από την μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς των αποδόσεων των μετοχών οι Mandelbrot (1963) και Fama (1965) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η εμπειρική κατανομή των αποδόσεων είναι λεπτόκυρτη, δηλαδή υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης ακραίων τιμών και συνεπώς, δεν μπορεί να είναι κανονική. Κατά συνέπεια, η χρήση κανονικής κατανομής οδηγεί σε υποεκτίμηση του κινδύνου. Παρατηρείται μάλιστα, ότι οι αποδόσεις δεικτών, μετοχών και συναλλάγματος έχουν βαριές ουρές και ότι η κατανομή των παραγώγων προϊόντων, όπως τα δικαιώματα προαίρεσης (options) παρουσιάζει μεγάλη ασυμμετρία. Αυτό σημαίνει ότι μεγάλες διακυμάνσεις στην αγορά συμβαίνουν πολύ συχνότερα απ' ό,τι προβλέπει η κανονική κατανομή.

Επιπρόσθετα, για τον υπολογισμό του μέτρου της αξίας σε κίνδυνο (VaR) είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης. Όταν όμως το χαρτοφυλάκιο είναι διαφοροποιημένο και ο αριθμός των δεδομένων τιμών είναι μεγάλος, οι υπολογισμοί γίνονται δύσκολοι και χρονοβόροι. Επιπλέον, αυτή η μέθοδος λαμβάνει ως δεδομένο ότι οι μελλοντικές τιμές συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και οι ιστορικές, πράγμα που πολλές φορές είναι αυθαίρετο. Τέλος, υπάρχει περίπτωση η μεθοδολογία VaR να προσφέρει υποεκτιμημένα αποτελέσματα, εάν οι αποδόσεις ενός περιουσιακού στοιχείου ενός χαρτοφυλακίου ξαφνικά μεταβληθούν κατά μη προβλέψιμο τρόπο, λόγω μιας δομικής αλλαγής της υποκείμενης οικονομίας μιας χώρας.

### 3.1.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης (Historical Simulation Method)

Σε αντίθεση με την μέθοδο Variance - Covariance, η ιστορική προσομοίωση (Linsmeier - Pearson, 1999 ; Pritsker, 2006) δεν βασίζεται σε κάποια υπόθεση για τη κατανομή των αποδόσεων και είναι άμεσα εφαρμόσιμη σε κάθε χρεόγραφο ή χαρτοφυλάκιο χρεογράφων. Σ' αυτή τη μέθοδο υποθέτουμε ότι το παρελθόν θα αναπαραχθεί στο μέλλον. Άρα, με τη χρήση των αποδόσεων που παρατηρήθηκαν σε συγκεκριμένη περίοδο στο παρελθόν δημιουργούμε μια εμπειρική κατανομή συχνοτήτων του κέρδους / ζημιάς που θα προκύψει στο σημερινό μας χαρτοφυλάκιο. Από τη κατανομή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το χειρότερο ενδεχόμενο, όσον αφορά την αξία της θέσης μας με χρονικό ορίζοντα τη μία ημέρα, σε επίπεδο σημαντικότητας π.χ.  $\alpha=5\%$  ή  $1\%$ .

Συνεπώς, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ιστορική προσομοίωση βασίζεται στην ιδέα της επανάληψης των ιστορικών ζημιών, γεγονός το οποίο περιορίζει εξορισμού τη μέθοδο αυτή. Συγκεκριμένα δεν μπορούν να αποτυπωθούν ζημίες που δεν έχουν συμβεί στο παρελθόν, ενώ για να παραχθούν ακριβείς προβλέψεις πρέπει να υπάρχει επαρκής αριθμός ιστορικών παρατηρήσεων. Βέβαια, πρέπει να επισημανθεί ότι όσο μεγαλώνει το δείγμα ιστορικών παρατηρήσεων, ενδέχεται να δημιουργηθεί υστέρηση στην αποτύπωση δομικών αλλαγών της κατανομής των αποδόσεων. Πράγματι, έστω ότι ο υπό μελέτη δείκτης παρουσιάζει για μεγάλο χρονικό διάστημα χαμηλή μεταβλητότητα, με τις ζημίες να κυμαίνονται σε χαμηλά επίπεδα. Σε περίπτωση εμφάνισης ακραίων ζημιών, αυτές θα οριοθετήσουν το μικρότερο δυνατό ποσοστημόριο της εμπειρικής κατανομής (την άκρη της αριστερής ουράς της κατανομής) οδηγώντας έτσι σε υποεκτίμηση του κινδύνου. Αντίθετα εάν ο δείκτης παρουσιάζει περιόδους με μεγάλες ζημίες, οποιαδήποτε δομική μετάβαση σε περιόδους μικρών ζημιών θα τοποθετήσει τις ζημίες αυτές μακριά από την ουρά της κατανομής οδηγώντας έτσι σε υπερεκτίμηση του κινδύνου.

Το παραπάνω μειονέκτημα αντιμετωπίζεται μέσω της τροποποίηση του ορίζοντα άντλησης δεδομένων. Με τον περιορισμό του ορίζοντα άντλησης δεδομένων, δημιουργείται μια πλασματική εμπειρική κατανομή, με λιγότερες παρατηρήσεις, η οποία δύναται να αποτυπώσει γρηγορότερα οποιαδήποτε δομική αλλαγή. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι για την υλοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου, σημαντικό ρόλο παίζουν η επιλογή της χρονικής περιόδου που θα συλλέξουμε τα δεδομένα μας, το μέγεθος του δείγματος, το μέγεθος του παραθύρου εκτίμησης, αλλά και το εύρος του χρονικού ορίζοντα για τον οποίο επιθυμούμε να κάνουμε προβλέψεις.

Αναλυτικότερα, η εφαρμογή της Ιστορικής Προσομοίωσης απαιτεί τη συλλογή επαρκών ιστορικών δεδομένων για τις αξίες  ${}^{-m}v_i, {}^{-m+1}v_i, {}^{-m+2}v_i, \dots, {}^{-1}v_i, {}^0v_i$ , όπου  $1 \leq i \leq n$ , των  $n$  επενδύσεων που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο για μια σειρά  $m+1$  χρονικών μονάδων (π.χ. ημέρες, εβδομάδες, μήνες). Με βάση αυτά τα ιστορικά δεδομένα, υπολογίζονται αρχικά οι υποθετικές συνήθως αξίες του χαρτοφυλακίου  ${}^{-m}v_p, {}^{-m+1}v_p, {}^{-m+2}v_p, \dots, {}^{-1}v_p, {}^0v_p$  και ακολούθως οι  $m$  το πλήθος αποδόσεις  ${}^t r_p = ({}^t v_p - {}^{t-1} v_p) / {}^{t-1} v_p$ , όπου  $(-m+1) \leq t \leq 0$ . Στη συνέχεια, οι αποδόσεις  ${}^t r_p$  κατατάσσονται από τη χαμηλότερη προς την υψηλότερη και διαιρώντας το ιστόγραμμα που δημιουργείται με το πλήθος  $m$  των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, κατασκευάζεται η συνάρτηση  $G_{1R_p}(x_1, x_2) = \Pr(x_1 \leq {}^1 R_p \leq x_2)$ . Συνεπώς, η

συνάρτηση κατανομής πιθανότητας  $F_{1R_p}(x)$  της απόδοσης  ${}^1R_p$  ύστερα από μία χρονική μονάδα είναι γνωστή. Για επίπεδο εμπιστοσύνης  $p = 1 - a$ , η VaR μπορεί να προσδιοριστεί από την απόδοση  $r_p^*$  για την οποία το πλήθος  $n$  των περιπτώσεων με  $r_p < r_p^*$  είναι  $n = a \cdot m$  και συγκεκριμένα η αξία σε κίνδυνο (VaR) θα είναι ίση με  $-{}^0v_p \cdot {}^1r_p^*$ , όπου  ${}^0v_p$ : η τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου.

### 3.1.3 Μέθοδος του Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average ή EWMA)

Η μέθοδος του Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average ή EWMA) έχει πολλές ομοιότητες με την μέθοδο Variance - Covariance με τη διαφορά ότι δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις τελευταίες, πιο πρόσφατες παρατηρήσεις εν αντιθέσει με την Variance - Covariance η οποία υπέθετε την ίδια βαρύτητα στο υπολογιστικό κομμάτι της διακύμανσης των αποδόσεων.

Αναλυτικότερα, το υπόδειγμα της Exponentially Weighted Moving Average (Roberts, 1959) έχει τη γενική μορφή:

$$\hat{y}_{T+1} = \lambda y_T + \lambda (1 - \lambda) y_{T-1} + \lambda (1 - \lambda)^2 y_{T-2} + \dots$$

Η παράμετρος εξομάλυνσης, όπως ονομάζεται η τιμή του συντελεστή  $\lambda$ , είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 που δείχνει πόσο μεγαλύτερο βάρος δίνεται στις πρόσφατες τιμές σε σχέση με τις περισσότερο απομακρυσμένες προς το παρελθόν. Για  $\lambda = 1$ , η πρόβλεψη που γίνεται είναι η  $\hat{y}_{T+1} = y_T$  στην οποία αγνοούνται οποιοσδήποτε τιμές της  $y_t$  που συνέβησαν πριν τη  $y_T$ . Όσο μειώνεται η τιμή του συντελεστή  $\lambda$  τόσο μεγαλύτερη σημασία δίνεται στις πιο απομακρυσμένες περιόδους και το αντίστροφο.

Όμως με τέτοιου είδους υποδείγματα εμφανίζεται το εξής πρόβλημα: αν υπάρχει μια ανοδική (καθοδική) τάση τότε το EWMA θα υποεκτιμά (υπερεκτιμά) τις μελλοντικές τιμές της  $y_t$ . Αυτό συμβαίνει, αφού το υπόδειγμα σταθμίζει τις παρελθούσες τιμές της  $y_t$  ώστε να δώσει μια πρόβλεψη. Αν η  $y_t$  μειώνεται σταθερά, η πρόβλεψη του υποδείγματος EWMA για τη  $\hat{y}_{T+1}$  θα είναι επομένως μικρότερη από την πιο πρόσφατη τιμή  $y_T$ , και αν μεγαλώνει σταθερά, η  $\hat{y}_{T+1}$  θα είναι μια υποεκτίμηση της αληθινής τιμής της  $y_{T+1}$ .

Από τα ανωτέρω γίνεται σαφές, ότι η μέθοδος EWMA δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες περιόδους, υποθέτοντας ότι οι συντελεστές βαρύτητας ακολουθούν μια εκθετική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ανάλογα με την τιμή του συντελεστή  $\lambda$ , η συνεισφορά ιστορικών δεδομένων από κάποια περίοδο και έπειτα είναι σχεδόν μηδενική. Η παράμετρος εξομάλυνσης, όπως ονομάζεται η τιμή του συντελεστή  $\lambda$ , είναι συνήθως ίση με 0.94 για την πρόβλεψη μεταβλητότητας μίας ημέρας και  $\lambda=0,97$  για μηνιαίες προβλέψεις. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος περιορισμός ως προς τον

προσδιορισμό των συντελεστών βαρύτητας, οι τιμές των οποίων καθορίζονται από αυτόν που διενεργεί την πρόβλεψη.

Συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι των προηγούμενων μεθόδων είναι η ευκολία των υπολογισμών και το γεγονός ότι απαιτεί λιγότερα ιστορικά δεδομένα. Η μέθοδος EWMA, όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή της ενότητας, έχει πολλές ομοιότητες με τη μέθοδο Variance - Covariance. Η κύρια διαφοροποίηση είναι ότι οι τιμές των προηγούμενων χρονικών περιόδων που συμμετέχουν στον υπολογισμό έχουν διαφορετική βαρύτητα. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται χαμηλότερη σε προγενέστερες χρονικές περιόδους και μεγαλύτερη σε περιόδους κοντινές στην υπό εξέταση περίοδο πρόβλεψης. Έτσι, οι συντελεστές βαρύτητας προοδευτικά μειώνονται όσο κινούμαστε πίσω στο παρελθόν και το αντίστροφο. Με αυτόν τον τρόπο, συγκεκριμένες τάσεις του πρόσφατου παρελθόντος αποτυπώνονται καλύτερα και δεν αλλοιώνονται σε μεγάλο βαθμό από πολύ προγενέστερες τιμές.

### 3.1.4 Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo (Monte Carlo Simulation Method)

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo (Glasserman, Heidelberg και Shahabuddin, 2000 ; Moallemi, 2011) έχει αρκετές ομοιότητες με την μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης. Η βασική τους διαφορά, έγκειται στο γεγονός ότι η προσομοίωση Monte Carlo δεν βασίζεται στην εξέταση ιστορικών δεδομένων αλλά αντίθετα, βάσει των προκαθοριζόμενων στατιστικών ιδιοτήτων της απόδοσης της επένδυσης προσομοιώνει κατά τυχαίο τρόπο τα πιθανά μελλοντικά αποτελέσματα της επένδυσης μέσω ενός μεγάλου αριθμού σεναρίων.

Συνεπώς, για τη χρησιμοποίηση της συγκεκριμένης μεθόδου, επιλέγεται μια κατανομή, η οποία μοιάζει με την κατανομή των πραγματικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Στη συνέχεια, μέσω αριθμητικών μεθόδων (γεννήτρια αριθμών), δημιουργούνται N πιθανές αλλαγές στους παράγοντες της αγοράς. Αυτοί οι υποθετικοί παράγοντες, στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για την παραγωγή N υποθετικών τιμών του χαρτοφυλακίου. Από τις προκύπτουσες τιμές, υπολογίζεται μια νέα κατανομή, από την οποία υπολογίζεται το VaR, με τον ίδιο τρόπο που υπολογίζεται με τη μέθοδο ιστορικής προσομοίωσης.

Αναλυτικότερα, το πρώτο βασικό βήμα για την χρησιμοποίηση της προσομοίωσης Monte Carlo είναι ο καθορισμός του κατάλληλου μοντέλου που περιγράφει τη μεταβολή στην αξία του εξεταζόμενου χρεογράφου. Η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς η μορφή του μοντέλου είναι εκείνη που θα καθορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα πραγματοποιηθεί η προσομοίωση. Για παράδειγμα, μια προσέγγιση που συχνά χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση της μεταβολής στην αξία μιας μετοχής είναι να μοντελοποιηθεί ως μια διαδικασία Wiener, δηλαδή  $dS = \mu Sdt + \sigma SdW$ , όπου το  $dW$  είναι ένας τυχαίος παράγοντας που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

Μετά τον καθορισμό του μοντέλου, για κάθε μία αβέβαια παράμετρο του μοντέλου παράγονται διάφορα τυχαία σενάρια, βάσει της στατιστικής κατανομής που ακολουθεί η κάθε παράμετρος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός χαρτοφυλακίου μετοχών, η αβέβαια παράμετρος του μοντέλου  $dS = \mu Sdt + \sigma SdW$  είναι το  $dW$  το οποίο θεωρείται



ότι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Παράγονται λοιπόν διάφορες τυχαίες τιμές για το  $dW$  βάσει αυτής της συγκεκριμένης κατανομής. Κάθε τυχαία τιμή του  $dW$  αντιστοιχεί σε ένα σενάριο για τη μεταβολή της αξίας της μετοχής.

Ο αριθμός των σεναρίων που αναπτύσσονται στο παραπάνω στάδιο θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος ώστε να περιοριστεί το στατιστικό σφάλμα στην εκτίμηση της VaR. Ένας γενικά αποδεκτός κανόνας είναι ότι περίπου 10.000 επαρκούν για την πραγματοποίηση ασφαλών εκτιμήσεων. Έχοντας αναπτύξει τον απαραίτητο αριθμό σεναρίων, το VaR ενός χαρτοφυλακίου μπορεί πλέον εύκολα να υπολογιστεί μέσω της ιστορικής προσομοίωσης, θεωρώντας ως ιστορικά δεδομένα τα σενάρια όπως αυτά προέκυψαν από την προσομοίωση Monte Carlo.

Το θετικό της συγκεκριμένης μεθόδου, έναντι των προηγούμενων, είναι ότι λόγω του ότι τα δεδομένα είναι προσομοιωμένα, είναι απαλλαγμένα από ακραίες τιμές, οι οποίες μπορεί να μας οδηγήσουν σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Επιπλέον, η προσομοίωση Monte Carlo υπερτερεί έναντι της Μεθόδου Variance - Covariance στην ικανότητα αποτύπωσης μη γραμμικών σχέσεων μεταξύ των παραγόντων κινδύνου και της αξίας του χαρτοφυλακίου, και υπερέχει έναντι της Ιστορικής Προσομοίωσης στο γεγονός ότι δίνει τη δυνατότητα παραγωγής οσοδήποτε μεγάλου αριθμού σεναρίων. Τέλος, το βασικότερο πλεονέκτημα της προσομοίωσης Monte Carlo έγκειται στην υψηλή ακρίβεια που προσφέρει κατά τον υπολογισμό της VaR ανεξαρτήτως της πολυπλοκότητας και των ιδιαιτεροτήτων του χρεογράφου ή του χαρτοφυλακίου που εξετάζεται.

Στον αντίποδα, τα δύο σημαντικά μειονεκτήματά της είναι ότι απαιτεί περισσότερο χρόνο υλοποίησης καθώς και την ανάγκη επιλογής της κατάλληλης προσέγγισης για τη μοντελοποίηση των μεταβολών στην αξία των χρεογράφων. Επιπρόσθετα, εν αντιθέσει με την Ιστορική Προσομοίωση, υποθέτει ότι η τιμή των παραγόντων κινδύνου ακολουθεί κανονική κατανομή.

### 3.1.5 Risk Metrics

Η μέθοδος Risk Metrics αναπτύχθηκε από την JP Morgan το 1995 ως μέθοδος υπολογισμού του κινδύνου αγοράς και αποτελεί επί της ουσίας ένα μοντέλο Εκθετικού Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average). Χρησιμοποιεί την υπόθεση της κανονικότητας στην μοντελοποίηση της διακύμανσης καθώς ανεξαρτήτως καταλληλότητας μοντέλου, εκείνη θα προσομοιώνεται πάντα από ένα IGARCH(1,1) μοντέλο.

Αναλυτικότερα, ένα IGARCH(1,1) μοντέλο, περιγράφεται από την εξίσωση:  $\sigma_t^2 = \beta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) \cdot a_t^2$ , με τα  $a_t^2$  να αποτελούν τα τετραγωνισμένα κατάλοιπα για τα οποία και ισχύει ότι  $a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$ , με  $\varepsilon_t \sim Normal$ . Όπως είναι εμφανές, στηρίζεται αποκλειστικά και μόνο στην πρόβλεψη και εκτίμηση της διακυμάνσεως, από ένα τυποποιημένο οικονομετρικό Integrated GARCH υπόδειγμα.

Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο, στην περίπτωση της Risk Metrics, μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικό τρόπο από την ακόλουθη σχέση:

$$VaR = z_a \cdot \sqrt{\sigma_{t+1}^2}, \quad (3.1)$$

πολλαπλασιαζόμενη με την θέση του επενδυτή ή του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος, όπου  $z_a$ : το ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  και  $\sigma_{t+1}^2$  η πρόβλεψη για την διακύμανση της επόμενης παρατήρησης.

Σύμφωνα με τους Engle και Manganelli (2001), το βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι τείνει να υποεκτιμά το Value at Risk, καθώς η υπόθεση για κανονικότητα δεν φαίνεται να είναι συνεπής με την συμπεριφορά των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Επιπροσθέτως, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αποδόσεις που εμφανίζουν στην κατανομή τους παχιές ουρές καθώς η υπόθεση της κανονικότητας δεν μπορεί να προσαρμοστεί σε αυτά τα δεδομένα. Τέλος, η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να επεκταθεί υιοθετώντας διαφορετικά GARCH μοντέλα και κάνοντας διαφορετικές υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων.

## 3.2 Οικονομετρική προσέγγιση

### 3.2.1 Μεταβλητότητα

Η μεταβλητότητα είναι μια παράμετρος καθοριστικής σημασίας για τη λήψη επενδυτικών αποφάσεων και την άσκηση χρηματοοικονομικής πολιτικής από τους εποπτικούς φορείς. Ως μεταβλητότητα (volatility) ορίζεται η δεσμευμένη τυπική απόκλιση του υπό μελέτη περιουσιακού στοιχείου. Η σημασία της έχει γίνει πιο εμφανής τις τελευταίες δύο δεκαετίες με την ανάπτυξη των αγορών παραγώγων και μεθοδολογιών μέτρησης των χρηματοοικονομικών κινδύνων στα πλαίσια των κανονισμών της Επιτροπής της Βασιλείας. Πιο συγκεκριμένα, η ακριβής μέτρηση της μεταβλητότητας είναι σημαντική τόσο για την ορθή αποτίμηση διαφόρων τύπων χρηματοοικονομικών παραγώγων όσο και για την αποτελεσματική μέτρηση των κινδύνων με τη βοήθεια μεθόδων όπως η Αξία σε Κίνδυνο (VaR).

Στα μοντέλα της αναμενόμενης τιμής θεωρείται ότι η σειρά της νέας πληροφορίας (shock) έχει σταθερή διασπορά. Η υπόθεση αυτή καλείται ομοσκεδαστικότητα και ορίζει ότι η μέση απόσταση των παρατηρήσεων της σειράς των αποδόσεων  $r_t$  από την αναμενόμενη τιμή της είναι σταθερή. Με άλλα λόγια, οι μεταβολές της σειράς που δεν οφείλονται στην δομή της αυτοσυσχέτισης της είναι ίδιες κατά μέση τιμή για κάθε  $r_t$ ,  $t=1,2,\dots,T$ . Ωστόσο, το πρόβλημα με τη μέθοδο της σταθερής μεταβλητότητας είναι ότι οι εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει μια αστάθεια της διακύμανσης από ημέρα σε ημέρα και μια μεταβολή της κατά τη διάρκεια του χρόνου. Η μεταβολή της διακύμανσης από ημέρα σε ημέρα σημαίνει ότι και οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων σε ένα χαρτοφυλάκιο επίσης μεταβάλλονται.

Η λύση στο πρόβλημα αυτό δόθηκε από την έρευνα του οικονομολόγου Tim Bollerslev (1986), ο οποίος γενίκευσε την έρευνα του συναδέλφου του Robert Engle (1982). Η τεχνική της μεταβαλλόμενης στο χρόνο διακύμανσης του Bollerslev, η οποία ονομάστηκε μέθοδος GARCH, επιτρέπει την εκτίμηση της διακύμανσης των σημερινών αποδόσεων, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση της διακύμανσης της χθεσινής ημέρας και το τετράγωνο της αξίας των χθεσινών αποδόσεων.

Συνεπώς, η μοντελοποίηση της μεταβλητότητας και εν τέλει η πρόβλεψη της είναι κομβικής σημασίας καθώς μέσω των εκτιμήσεων της αναμενόμενης τιμής και της μεταβλητότητας υπολογίζονται τα κεφάλαια σε κίνδυνο δηλαδή τα κεφάλαια τα οποία κινδυνεύουν να χαθούν λόγω της υφιστάμενης μεταβλητότητας του υπό μελέτη μεγέθους. Στην πράξη, η παραπάνω διαδικασία καταλήγει στον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (VaR).

### 3.2.2 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας – Υποδείγματα Αυτοπαλίνδρομης Δεσμευμένης Ετεροσκεδαστικότητας (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity ή ARCH)

Ένα ARCH(m) υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot a_{t-i}^2 \quad (3.2),$$

$$a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$$

όπου,  $\varepsilon_t$  αποτελούν μια ακολουθία από τυχαίες ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα. Επιπλέον,  $a_0 > 0$  και  $a_i \geq 0$  για κάθε  $i \geq 1$ . Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι το μοντέλο ARCH(m) συνδέει την μεταβλητότητα με τις m υστερήσεις της σειράς των διαταραχών (shock) χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την ιδέα των αυτοπαλίνδρομων μοντέλων. Επιπλέον, παρατηρείται ότι για μεγάλα παρελθοντικά shock ενδεχομένως να προκύψει τη χρονική στιγμή t νέα πληροφορία με μεγάλη τιμή. Ο όρος ενδεχομένως χρησιμοποιείται καθώς από την σειρά των shock δεν έχει εξαλειφθεί η τυχειότητα. Πράγματι, το παραπάνω μοντέλο ορίζει ότι η σειρά νέας πληροφορίας (shock) κατασκευάζεται ως το γινόμενο της εκτιμώμενης τυπικής απόκλισης επί μια τυχαία μεταβλητή με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Μέσω του  $\sigma_t$  ποσοτικοποιείται η αναμενόμενη τυπική απόκλιση της απόδοσης  $r_t$  από την αναμενόμενη τιμή. Αντίθετα, μέσω του  $\varepsilon_t$  εισάγεται η τυχειότητα στην όλη διαδικασία καθώς μέσω του  $\varepsilon_t$  καθορίζεται η κατεύθυνση του shock (δηλαδή η  $r_t$  πάνω ή κάτω από την αναμενόμενη τιμή) και το εύρος του shock (ποσοστό της αναμενόμενης τυπικής απόκλισης).

Για την κατασκευή ενός ARCH μοντέλου ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Μοντελοποίηση της αναμενόμενης τιμής μέσω της κατάλληλης διαδικασίας.
- Έλεγχος των τετραγωνισμένων καταλοίπων για παρουσία αυτοσυσχετίσεων οι οποίες δεν κατέστη δυνατό να εξαλειφθούν μέσω της τροποποίησης του μοντέλου του μέσου (ARCH effect).
- Μέσω της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης των τετραγωνισμένων καταλοίπων καθορίζεται η τάξη του μοντέλου και οι συντελεστές του.
- Εκτίμηση των συντελεστών του μοντέλου μέσω μεθόδων μέγιστης πιθανοφάνειας.
- Έλεγχος επάρκειας του μοντέλου.

Στην πράξη, εκτιμάται πρώτα το μοντέλο για την αναμενόμενη τιμή. Αφού επιλέγει το καταλληλότερο, ξεκινά η διαδικασία επιλογής του μοντέλου για την μεταβλητότητα. Βέβαια οι συντελεστές του μοντέλου της αναμενόμενης τιμής θα επανεκτιμηθούν κατά την εκτίμηση των συντελεστών του μοντέλου της μεταβλητότητας. Ανάλογα με την εμπειρική κατανομή της υπό μελέτη σειράς επιλέγεται η κατανομή των  $\varepsilon_t$ . Εάν η εμπειρική κατανομή παρουσιάζει μεγάλη υπερβάλλουσα κύρτωση τότε ενδεχομένως η κανονική κατανομή για τα  $\varepsilon_t$  να μην είναι επαρκής. Σύμφωνα με την εργασία του Bollerslev (1986) υποστηρίζεται ότι η χρήση της t-Student κατανομής ως υπό συνθήκη κατανομή για ένα GARCH μοντέλο είναι πιο ικανοποιητική, δεδομένου ότι συγκεντρώνει πιο βαριές ουρές και μεγαλύτερη κύρτωση από την κανονική κατανομή. Παρόλα αυτά, στην πράξη η προσαρμογή της θεωρητικής κατανομής των  $\varepsilon_t$  είναι περισσότερο θέμα δοκιμών παρά μεθοδολογίας.

Εν κατακλείδι, το υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (ARCH) πέρα από ότι βελτιώνει κατά πολύ την αποτύπωση και εν τέλει την πρόβλεψη της σειράς σε σχέση με την υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- i. Είναι απλό καθώς η διασπορά παρουσιάζεται σαν μια απλή τετραγωνική σχέση.
- ii. Αποτυπώνει το φαινόμενο του volatility clustering καθώς μέσω της σχέσης της διασποράς επιτυγχάνει την αναγνώριση περιόδων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.
- iii. Μέχρι ένα βαθμό αποτυπώνει βαριές ουρές φαινόμενο το οποίο παρατηρείται συχνά στις σειρές αποδόσεων ιδίως των μετοχών.

Ωστόσο, η μεθοδολογία του μοντέλου ARCH χαρακτηρίζεται και από κάποια μειονεκτήματα ή αδυναμίες. Συγκεκριμένα:

- i. Δεν εξηγεί το leverage effect (αποτέλεσμα μόχλευσης) καθώς δεν αναγνωρίζει το πρόσημο των διαταραχών (shock).
- ii. Θέτει αρκετούς περιορισμούς για τους συντελεστές.
- iii. Παρέχει μια μηχανιστική εξήγηση για το πώς η μεταβλητότητα αλλάζει καθώς δεν εξηγεί που οφείλονται οι μεταβολές. Απλά τις συνδέει με τις υστερήσεις των shock.
- iv. Παρότι αποτυπώνει το φαινόμενο του volatility clustering (χρονικές περιόδους όπου η μεταβλητότητα παρουσιάζει τα ίδια χαρακτηριστικά) προσαρμόζεται αργά σε δομικές

μεταβολές της μεταβλητότητας (μετάβαση από περιόδους υψηλής μεταβλητότητας σε χαμηλής και το αντίστροφο).

### 3.2.3 Μοντελοποίηση Μεταβλητότητας - Γενικευμένο Αυτοπαλίνδρομο Υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικό Υπόδειγμα (Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedastic ή GARCH)

Παρά τα καλά αποτελέσματα και προσαρμογή που παρέχουν τα ARCH(m) υποδείγματα, πολλές φορές απαιτούνται μεγάλης τάξης μοντέλα. Για να αντιμετωπιστεί το παραπάνω πρόβλημα, εισήχθησαν τα μοντέλα GARCH τα οποία συνδέουν την μεταβλητότητα - διασπορά και με τις υστερήσεις της.

Ένα GARCH(m, s) ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$$

$$a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t \quad (3.3),$$

$$\sum_{ij}^{\max(s,m)} (a_i + \beta_j) < 1$$

όπου,  $\varepsilon_t$  αποτελούν μια ακολουθία από τυχαίες ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση ένα. Επιπλέον, οι περιορισμοί για τους συντελεστές  $a_0 > 0$ ,  $a_i \geq 0$  και  $\beta_j \geq 0$  εξασφαλίζουν ότι η διακύμανση θα είναι θετική ενώ ο περιορισμός

$\sum_{ij}^{\max(s,m)} (a_i + \beta_j) < 1$  εξασφαλίζει ότι θα είναι πεπερασμένη. Από το παραπάνω προκύπτει ότι

μέσω των μοντέλων GARCH συνδέεται η μεταβλητότητα με τις υστερήσεις των shock (διαταραχών) και τις υστερήσεις της διασποράς. Για την κατασκευή των μοντέλων GARCH ακολουθείται η ίδια διαδικασία με των ARCH.

Τα μοντέλα GARCH ουσιαστικά απαλείφουν κάποια από τα μειονεκτήματα των ARCH. Πέρα από τα πλεονεκτήματα των ARCH που συνεχίζουν να ισχύουν, τα μοντέλα GARCH επεξηγούν μέσω των συντελεστών, την μεταβλητότητα και τις αλλαγές της. Επιπλέον, αντιδρούν γρηγορότερα στις αλλαγές των χαρακτηριστικών της μεταβλητότητας. Το κύριο μειονέκτημά τους είναι ότι δεν εξηγείται το leverage effect καθώς και σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ αρνητικού και θετικού shock. Συνεπώς, η προαναφερθείσα μέθοδος εμφανίζει τρωτά σημεία όταν παρατηρούνται ασυμμετρικές κινήσεις της διακύμανσης σε σχέση με τις αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων στο παρελθόν.

Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν μέθοδοι εκτίμησης των ασυμμετρικών διακυμάνσεων (asymmetric volatilities), όπως αυτή του Daniel Nelson (1991), η οποία ονομάστηκε EGARCH.

Αναλυτικότερα, τα κλασικά υποδείγματα GARCH ορίζουν τη δεσμευμένη διακύμανση ως μια γραμμική συνάρτηση των τετραγωνικών σφαλμάτων και των διακυμάνσεων των περασμένων περιόδων. Η βασική κριτική στη μορφή των υποδειγμάτων αυτών προέρχεται από τον Nelson (1991) και εστιάζεται στο γεγονός ότι οι περασμένες διαταραχές επιδρούν με τον ίδιο τρόπο στη μεταβλητότητα, ασχέτως από το πρόσημό τους. Ειδικότερα, μια αρνητική διαταραχή αναμένεται να έχει την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα όπως και μια θετική διαταραχή ίσου μεγέθους. Από την άλλη πλευρά, έχει βρεθεί ότι οι αρνητικές διαταραχές επιδρούν με διαφορετικό τρόπο απ' ότι οι θετικές. Πιο συγκεκριμένα, ο Nelson (1991) κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι αρνητικές διαταραχές αυξάνουν σε μεγαλύτερο βαθμό τη μεταβλητότητα των μετοχών της χρηματιστηριακής αγοράς των Η.Π.Α. Η κριτική του Nelson (1991) περιλαμβάνει και την επιβολή των περιορισμών μη αρνητικότητας στις παραμέτρους της δεσμευμένης διακύμανσης. Για να ξεπεραστούν τα προαναφερόμενα προβλήματα των κλασικών υποδειγμάτων GARCH, ο Nelson (1991) χρησιμοποίησε τη λογαριθμική συνάρτηση της δεσμευμένης διακύμανσης.

Το υπόδειγμα EGARCH (m, s) δίνεται από τη σχέση:

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i \cdot a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \ln(\sigma_{t-1}^2) \quad (3.4),$$

όπου  $a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$  με  $\varepsilon_t$  να αποτελούν τυχαιές ανεξάρτητες και ισόνομες μεταβλητές με

μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1,  $\sum_{ij}^{\max(s,m)} (a_i + \beta_j) < 1$  και  $\gamma_i$  να αποτελεί τον συντελεστή

μόχλευσης που είναι πάντα αρνητικός καθώς υποδηλώνει το πόσο ασύμμετρα αντιδρά το volatility στα θετικά και στα αρνητικά shocks που επέρχονται στην σειρά, είναι μια μη-συμμετρική συνάρτηση των κανονικοποιημένων (τυποποιημένων) καταλοίπων και γι' αυτό το λόγο μπορεί να ερμηνεύσει αποτελεσματικά μη-συμμετρικές επιδράσεις μιας διαταραχής στη μεταβλητότητα.

Εκτός όμως, από τα πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα που περιγράψαμε, το υπόδειγμα EGARCH παρουσιάζει και μερικά μειονεκτήματα, τα οποία όμως δεν μειώνουν τη σημαντική συνεισφορά του στη βελτίωση του κλασικού υποδείγματος GARCH. Η εμπειρική εφαρμογή έχει δείξει ότι επειδή η επίδραση των πιο πρόσφατων διαταραχών είναι πλέον εκθετική και όχι τετραγωνική, αυξάνεται υπερβολικά η επίδραση αυτή σε περιπτώσεις μεγάλων διαταραχών. Επιπρόσθετα, υπάρχουν δυσκολίες στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας και στην κατασκευή προβλέψεων.

Στη διεθνή βιβλιογραφία, για την αντιμετώπιση του leverage effect, εκτός από τα εκθετικά αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα (exponential autoregressive ή EGARCH) έχει προταθεί και μια άλλη παραλλαγή του GARCH, το TGARCH (Threshold GARCH ή GJR model).

Το υπόδειγμα TGARCH (m, s) μπορεί να εκφραστεί με μαθηματικό τρόπο από την εξής σχέση:

$$\sigma_t^2 = w_0 + \sum_{i=1}^m (w_i + \gamma_i \cdot N_{t-i}) \cdot a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$$

(3.5)

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } a_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{εάν } a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

$\gamma_i > 0$ , όπου  $\gamma_i$  καλείται leverage effect.

Συνοψίζοντας, μια από τις κυριότερες εφαρμογές των παραπάνω διαδικασιών μοντελοποίησης είναι στον τομέα της διαχείρισης χρηματοοικονομικού κινδύνου. Συγκεκριμένα, μέσω των εκτιμήσεων της αναμενόμενης τιμής και της μεταβλητότητας υπολογίζεται το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο (Value-at-Risk). Το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο είναι μια άμεσα αντιληπτή μέθοδος ποσοτικοποίησης του κινδύνου αγοράς (Market Risk), ο οποίος σχετίζεται με τη μεταβλητότητα των αγοραίων τιμών των επενδύσεων ενός χαρτοφυλακίου. Τυπικά, η VaR μετρά τη μέγιστη αναμενόμενη ζημία που μπορεί να υποστεί ένας επενδυτής υπό κανονικές συνθήκες αγοράς, για δεδομένο χρονικό ορίζοντα και για ένα επιλεγόμενο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Αναλυτικότερα, εάν  $r_t$  υποδηλώνει την απόδοση ή κατανομή κέρδους / ζημιάς (P/L) ενός χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή  $t$  τότε ένα γενικό μοντέλο χρονολογικών σειρών για τις  $r_t$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \cdot a_{t-j}$$

$$a_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$$

(3.6)

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2$$

Οι παραπάνω σχέσεις υπολογίζουν τον μέσο και την διακύμανση για την  $r_t$ . Αυτές οι δύο σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο να βρεθούν οι προβλέψεις για ένα βήμα μπροστά του υπό συνθήκη μέσου και της υπό συνθήκης διακύμανσης της  $r_t$ , δεδομένου ότι οι παράμετροι είναι γνωστοί.

Αφού υπολογισθεί η πρόβλεψη για ένα βήμα μπροστά της διακύμανσης, το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο (Value-at-Risk) υπολογίζεται ως εξής:

$$VaR = \hat{r}_{n+1} + F(p)\sqrt{\hat{\sigma}_{n+1}^2}, \quad (3.7)$$

όπου το  $F(p)$  ορίζεται ως το  $p$ -ιστό ποσοστημόριο της άγνωστης συνάρτησης κατανομής  $F(\cdot)$  της  $\varepsilon_t$ .

Συνεπώς, η κατανομή των καταλοίπων  $\varepsilon_t$  αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι του υπολογισμού του VaR καθώς για διαφορετική κατανομή προκύπτει και διαφορετική αξία σε κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα, για τις συνηθέστερες κατανομές, κανονική και  $t$  - student, η αξία σε κίνδυνο δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$VaR = \hat{r}_{n+1} + z_\alpha \sqrt{\hat{\sigma}_{n+1}^2}, \quad \text{με } z_\alpha : \text{ το } \alpha\% \text{ ποσοστημόριο της κανονικής κατανομής.}$$

$$VaR = \hat{r}_{n+1} + t_{v,\alpha} \sqrt{\frac{v-2}{v} \cdot \hat{\sigma}_{n+1}^2}, \quad \text{με } t_{v,\alpha} : \text{ το } \alpha\% \text{ ποσοστημόριο της } t \text{ κατανομής για } v \text{ βαθμούς}$$

ελευθερίας και  $r_{n+1}$ : η πρόβλεψη του μέσου των αποδόσεων της σειράς.

### 3.3 Θεωρία ακραίων τιμών (Extreme Value Theory ή EVT)

#### 3.3.1 Εισαγωγή

Τα γεγονότα που συμβαίνουν σπάνια είναι πάρα πολύ σημαντικά όσον αφορά την οικονομική ζημιά που μπορούν να προκαλέσουν σε μια επιχείρηση αλλά και στην γενικότερη εύρυθμη λειτουργίας της. Επομένως, καλό είναι να θέσουμε τις βάσεις για να μπορούμε να τα αναλύουμε, εφόσον η εμφάνιση ακραίων τιμών αποτελεί μάλλον τον κανόνα σε μια διαχρονική εξέλιξη ενός φαινομένου παρά την εξαίρεση.

Η θεωρία ακραίων τιμών (Extreme Value Theory ή EVT) είναι το κομμάτι της στατιστικής που ασχολείται με την περιγραφή και μοντελοποίηση της ακραίας συμπεριφοράς μιας τυχαίας μεταβλητής. Έδωσε ένα καινούργιο πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να μελετηθούν, και χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα να προβλεφθούν μελλοντικά ακραία φαινόμενα.

Η EVT έχει αναπτυχθεί πολύ από την έρευνα στις περιβαλλοντικές επιστήμες και έχει φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη. Τα τελευταία δέκα με δεκαπέντε χρόνια έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στη μοντελοποίηση του χρηματοοικονομικού κινδύνου και κυρίως του κινδύνου αγοράς (π.χ. κίνδυνος μεταβολών από την αλλαγή τιμών σε μετοχές, ομόλογα, συναλλαγματικές ισοτιμίες, επιτόκια).

Η θεωρία ακραίων τιμών έχει ακολουθήσει δύο μεθοδολογίες ή κεντρικούς άξονες ανάπτυξης για να ορίσει και να εκτιμήσει την ακραία συμπεριφορά μίας τυχαίας μεταβλητής. Οι μέθοδοι αυτοί είναι γνωστοί ως *Block maxima model* και *Peaks over Threshold model*.



### 3.3.2 Μέθοδος Μεγίστων Υποσυνόλων (Block Maxima Model)

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, χωρίζουμε το δείγμα μας σε  $n$  μικρότερα δείγματα με τον αριθμό των παρατηρήσεων σε κάθε ένα από τα  $n$  δείγματα να είναι ο ίδιος. Στη συνέχεια, για κάθε ένα από αυτά τα δείγματα ως ακραίες τιμές, ανάλογα με την θέση που έχει ο επενδυτής, επιλέγονται οι μέγιστες ή ελάχιστες τιμές κάθε ενός από τα  $n$  δείγματα.

Έστω  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  τυχαίες μεταβλητές που παριστάνουν τις ζημίες από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους. Καθώς έχουμε χωρίσει το δείγμα μας σε  $n$  μικρότερα, η σειρά  $X_1 = \max(Y_1, \dots, Y_n), X_2 = \max(Y_{n+1}, \dots, Y_{2n}), \dots, X_n = \max(Y_{n-k}, \dots, Y_k)$  παριστάνει τις ακραίες τιμές. Το πρόβλημα τότε είναι να βρούμε μια πιθανοκατανομή που να μπορεί επαρκώς να περιγράψει (μοντελοποιεί) την χρονική σειρά των ακραίων τιμών. Εάν το καταφέρουμε, τότε μέτρα κινδύνου όπως το Value at Risk μπορούν να υπολογιστούν ως συγκεκριμένα μικρά ποσοστημόρια (quantiles) αυτής της κατανομής. Συνεπώς, για να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε τον κίνδυνο που απορρέει από τις ακραίες εκείνες τιμές, το πρόβλημα από την εύρεση των ακραίων ζημιών μετατοπίστηκε στην εύρεση της κατανομής αυτών.

Οι Fisher, Tippett (1928) και Gnedenko (1943) έδειξαν ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με κατάλληλη κανονικοποίηση, η κατανομή οφείλει να είναι μία από την οικογένεια κατανομών γνωστή ως Generalized Extreme Value Distribution (GEV) (Γενικευμένη κατανομή ακραίων τιμών).

Η GEV έχει συνάρτηση κατανομής :

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right], & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \xi = 0 \end{cases} \text{ όπου } (1 + \xi x) > 0.$$

Η παραπάνω συνάρτηση κατανομής, με κατάλληλη κανονικοποίηση, μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right], & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

όπου  $\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right) > 0$  και

$$x > \mu - \frac{\sigma}{\xi}, \text{ όταν ισχύει ότι } \xi > 0,$$

$$x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}, \text{ όταν } \xi < 0,$$

$$-\infty < x < +\infty, \text{ όταν } \xi = 0.$$

Η παράμετρος  $\mu$  ονομάζεται παράμετρος θέσης (location). Είναι ανάλογη του μέσου και μας δίνει μια ιδέα για το κέντρο της κατανομής. Μεγάλες τιμές της παραμέτρου υποδηλώνουν μεγάλες ζημιές και αντίστροφα. Η παράμετρος  $\sigma$  ονομάζεται παράμετρος κλίμακας (scale) και υποδηλώνει το πόσο μία κατανομή εκτείνεται γύρω από τον μέσο. Είναι προφανές, ότι μεγάλες τιμές της παραμέτρου  $\sigma$  δείχνουν και μεγάλες αποκλίσεις από το  $\mu$  αλλά και αντιστρόφως, μικρές τιμές εξάγουν μία κατανομή λιγότερο αποκλίνουσα από την παράμετρο της θέσης. Ωστόσο, η μελέτη της κατανομής της GEV έχει ως σκοπό την μελέτη των ακραίων ζημιών. Συνεπώς, απαραίτητη είναι η μελέτη της παραμέτρου εκείνης που θα μας δίνει πληροφορίες για τις ουρές της κατανομής που προσαρμόζουμε καθώς μία κατανομή με βαριές ουρές δίνει μεγαλύτερες πιθανότητες ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα ή ένας επενδυτής να υποστεί μεγαλύτερες ακραίες ζημιές από μία κατανομή που θα έχει λεπτές ουρές. Επομένως, η παράμετρος  $\xi$  (shape) της κατανομής GEV είναι η πιο σημαντική παράμετρος καθώς είναι εκείνη που στην ουσία διαμορφώνει το πάχος της ουράς της κατανομής. Μεγάλες (σε απόλυτες τιμές) τιμές του  $\xi$  υποδηλώνουν παχιά (ή βαριά) ουρά και αντίστροφα. Παχιά ουρά στην κατανομή υποδηλώνει ότι οι πιθανότητες να υποστούμε πολύ μεγάλες ζημιές είναι πολύ πιο μεγάλες συγκριτικά με μια κατανομή με λεπτή ουρά όπως για παράδειγμα η κανονική κατανομή. Τέλος, η παράμετρος  $\xi$  είναι αυτή που καθορίζει και τον ακριβή τύπο της κατανομής. Έχει αποδειχθεί ότι η παράμετρος σχήματος (shape)  $\xi$ , στην πράξη, παίρνει τιμές στο διάστημα  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

Πιο συγκεκριμένα, αν η παράμετρος  $\xi$  είναι αρνητική, τότε η GEV οδηγεί στην οικογένεια κατανομών Weibull. Αντιθέτως, αν η παράμετρος  $\xi$  είναι θετική, τότε οδηγούμαστε σε κατανομή Fréchet. Στην περίπτωση όπου η παράμετρος  $\xi$  είναι ίση με το μηδέν, τότε η οικογένεια κατανομών που προκύπτει είναι η Gumbel.

Ένα χαρακτηριστικό που έχει αποδειχθεί είναι ότι οι κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια κατανομών Fréchet έχουν ουρές που φθίνουν εκθετικά με ρυθμό ίσο με  $\frac{1}{\xi}$ .

Εξαιτίας αυτού, εάν την συγκρίνουμε με τις άλλες δύο οικογένειες κατανομών που αναφέραμε πρωτίτερα, η Fréchet έχουν και τις πιο βαριές ουρές, γεγονός που σηματοδοτεί και την δημοφιλία τους, ως προς την χρήση τους στη θεωρία των ακραίων τιμών.

### 3.3.3 Εκτίμηση των παραμέτρων της GEV - Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την GEV για να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο (Value-at-Risk), θα πρέπει αρχικά να εκτιμήσουμε τις τρεις παραμέτρους της. Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων της GEV, με επικρατέστερη την μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood-ML). Σε αυτή τη μέθοδο χρειάζεται η

συνάρτηση πιθανοφάνειας η οποία προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την συνάρτηση πυκνότητας για κάθε μία παρατήρηση από το τυχαίο δείγμα των παρατηρήσεων. Αν  $f(x_i; \theta)$  η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου δείγματος και αν συμβολίσουμε με  $L(\theta)$  την συνάρτηση πιθανοφάνειας τότε :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (3.3.2)$$

Προφανώς, το  $\underline{\theta}$ , είναι το διάνυσμα των παραμέτρων  $\mu$ ,  $\sigma$  και  $\xi$ .

Ωστόσο, έχοντας πλέον υπολογίσει την συνάρτηση αυτή, έχει αποδειχθεί ότι λογαριθμίζοντας, ισοδύναμα, η (3.3.2) γίνεται :

$$\ln(L(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \underline{\theta})) \quad (3.3.3)$$

Για την GEV, η αναλυτική μορφή της (3.3.3), όπως έχει διατυπωθεί από τους McNeil, Frey και Embrechts (2005), παριστάνεται παρακάτω από την σχέση (3.3.4).

$$\ln(L(\mu, \sigma, \xi)) = -n \ln(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (3.3.4)$$

Παίρνοντας κάθε φορά την μερική παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας, (συνεπώς θα έχουμε υπολογίσει τρεις μερικές παραγώγους), τις θέτουμε ίσες με το μηδέν. Οι τιμές εκείνες που θα προκύψουν, θα αποτελούν και τις εκτιμήσεις των τριών παραμέτρων της κατανομής GEV. Ωστόσο, για να αποδειχθεί ότι είναι και οι μέγιστες, αρκεί η δεύτερη μερική παράγωγος των παραμέτρων να είναι θετική. Επιπλέον, υπάρχει και ο περιορισμός ότι  $1 + \xi \cdot \frac{x_i - \mu}{\sigma} > 0$  για κάθε παρατήρηση του τυχαίου δείγματος.

### 3.3.4 Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής

Έχοντας βρει τις εκτιμήτριες των παραμέτρων της GEV, θα πρέπει να ελέγξουμε κατά πόσο η θεωρητική κατανομή (GEV) περιγράφει ικανοποιητικά (μοντελοποιεί) τα δεδομένα του δείγματος μας. Με άλλα λόγια, πρέπει να προβούμε σε έλεγχο καλής προσαρμογής (goodness of fit test). Κατά καιρούς, έχουν αναπτυχθεί διάφοροι έλεγχοι για την προσαρμογή των κατανομών. Οι δημοφιλέστεροι είναι: 1) ο  $\chi^2$  έλεγχος του Pearson, 2) ο έλεγχος των Kolmogorov - Smirnov και 3) ο έλεγχος των Anderson - Darling, οι οποίοι πραγματοποιούν τον έλεγχο  $H_0$  : ότι τα δεδομένα προέρχονται από την GEV έναντι της εναλλακτικής  $H_1$  : ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν διαφορετική κατανομή.

### Ο έλεγχος $\chi^2$ του Pearson

Στη μέθοδο block maxima, έχουμε χωρίσει σε ομάδες τις παρατηρήσεις, όπου η μεγαλύτερη είναι και η υπό εξέταση ακραία τιμή. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει και νωρίτερα, έχουμε χωρίσει το δείγμα σε  $n$  ισοπληθή μικρότερα δείγματα. Συνεπώς, έχουμε  $n$  ακραίες τιμές. Για την διεκπεραίωση του συγκεκριμένου ελέγχου, θεωρούμε ότι μεταξύ της μίας από την άλλη ακραία τιμή, είναι ένα διάστημα, όπου το καθένα το χωρίζουμε σε  $k$  υποδιαστήματα. Για κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα υπολογίζουμε την παρατηρούμενη ( $O_i$ ) και την εμπειρική ( $E_i$ ) συχνότητα, δηλαδή το πόσες παρατηρήσεις έχουμε σε κάθε υποδιάστημα και πόσες θα επιθυμούσαμε να έχουμε. Υπολογίζοντας συνεπώς, το πηλίκιο  $\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$  για

κάθε ένα από τα  $k$  υποδιαστήματα, το άθροισμα αυτών δίνει την συνάρτηση για τον έλεγχο  $H_0$ : τα δεδομένα προέρχονται από την GEV έναντι της  $H_1$ : τα δεδομένα μας ακολουθούν διαφορετική κατανομή. Στην ειδική περίπτωση όπου τα  $k$  υποδιαστήματα κατασκευαστούν με τρόπο τέτοιο, έτσι ώστε η εμπειρική πιθανότητα να είναι ίδια σε όλα και ίση με  $\frac{n}{k}$ , τότε

η ελεγχοσυνάρτηση παίρνει την μορφή: 
$$X^2 = \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=1}^k O_i^2 - n.$$

Σε κάθε περίπτωση, για ένα συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , η  $H_0$  του ελέγχου απορρίπτεται αν η ελεγχοσυνάρτηση είναι μεγαλύτερη από την τιμή της  $\alpha\%$  ποσοστημόριο της κατανομής  $\chi^2$  με  $k-1$  βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή από την ποσότητα  $X_{k-1-m;\alpha}^2$ . Το  $k$  παριστάνει τον αριθμό των υποδιαστημάτων και  $m$  των αριθμό των προς εκτίμηση παραμέτρων.

### Ο έλεγχος Kolmogorov - Smirnov

Το κριτήριο των Kolmogorov – Smirnov στηρίζεται στη μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή απόκλιση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής  $F$  του δείγματος, από την υποθετική  $F_0$ , όπου στην περίπτωσή μας είναι η GEV, δηλαδή στη ελεγχοσυνάρτηση:  $D_N = \max|F(x) - F_0(x)|$ . Ο έλεγχος απορρίπτεται, αν η ποσότητα  $D_N$  είναι μεγαλύτερη από έναν αριθμό  $\kappa_\alpha$  που ικανοποιεί την σχέση  $P(D_N > \kappa_\alpha | H_0) = \alpha$ , όπου  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου.

### Ο έλεγχος των Anderson - Darling

Ένα από τα πιο δημοφιλή κριτήρια ελέγχου στην πράξη, είναι το Anderson - Darling τεστ (AD) που συγκρίνει την θεωρητική κατανομή με την εμπειρική δίνοντας περισσότερη βαρύτητα στις ουρές. Θέλοντας να ελέγξουμε την προσαρμογή της GEV, ο έλεγχος των Anderson – Darling (1952) γίνεται με την ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [(2i-1) \cdot \log F(x_i) + (2n+1-2i) \cdot \log(1-F(x_i))], \text{ με } F(x_i) \text{ να είναι η}$$

σωρευτική εμπειρική κατανομή και  $n$  το μέγεθος του δείγματος. Σύμφωνα με τον έλεγχο αυτό, η  $H_0$  απορρίπτεται αν το  $p$ -value του ελέγχου είναι μικρότερο από το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου. Το  $p$ -value, συνδέεται με την ελεγχοσυνάρτηση μέσα από την σχέση :

$$p - \text{value} = (\sin c)^2 \text{ με}$$

$$c = -1.128 + 0.5708 \cdot A_n^2 - \frac{0.1867}{\sqrt{(A_n^2)^3}} + \frac{0.8145}{A_n^2} - 0.0737 \cdot \frac{A_n^2}{\sqrt{n}} + \frac{0.1399}{A_n^2 \cdot \sqrt{n}}.$$

Πρακτικά, τιμές του AD κοντά στο μηδέν θα μας δίνουν μεγάλη  $p$ -value η οποία είναι η πιθανότητα να απορρίψουμε την βασική υπόθεση ενώ ισχύει (σφάλμα τύπου I). Οπότε μεγάλη  $p$ -value, συνήθως μεγαλύτερη από 0.05 οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης ότι η GEV περιγράφει ικανοποιητικά τα δεδομένα.

Εν κατακλείδι, θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός των ανωτέρω στατιστικών ελέγχων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και γραφικές μέθοδοι ελέγχου καλής προσαρμογής όπως τα Q-Q plot (ποσοστημόρια) και P-P plot (πιθανότητες). Εάν το μοντέλο μας περιγράφει ικανοποιητικά τα δεδομένα του δείγματός μας, τότε η σχέση των ποσοστημορίων και των πιθανοτήτων μεταξύ της εμπειρικής και θεωρητικής κατανομής θα πρέπει να είναι γραμμική.

### 3.3.5 Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) με την Generalized Extreme Value Distribution

Έχοντας εκτιμήσει τις παραμέτρους της GEV αλλά και προχωρήσει σε έλεγχο καλής προσαρμογής, η αξία σε κίνδυνο (VaR) υπολογίζεται ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης, στο δείγμα των ακραίων ζημιών, GEV και θα δίνεται από τον τύπο :

$$VaR = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left[ 1 - (-n \cdot \ln(a))^{\hat{\xi}} \right], \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln(-n \cdot \ln(a)), \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

όπου  $\alpha$  είναι το επίπεδο σημαντικότητας, συνήθως 1% ή 5%.

Ωστόσο, η μέθοδος του block maxima έχει ένα βασικό μειονέκτημα. Τα αποτελέσματα που εξάγονται εξαρτώνται, σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό, από τις πόσες ομάδες θα χωριστούν τα δεδομένα μας. Εάν το  $n$ , για παράδειγμα είναι πολύ μεγάλο, τότε ενδέχεται να έχουμε λίγες ακραίες τιμές οι οποίες θα είναι αρκετά περισσότερο ακραίες από ότι κάποιος θα θεωρούσε. Επίσης, είναι πιθανό να συμβεί και το αντίστροφο, δηλαδή να δημιουργηθεί ένας μικρός αριθμός  $n$  ομάδων και οι ακραίες τιμές να είναι πολλές σε πλήθος χωρίς απαραίτητα να αντιπροσωπεύουν τον όρο «ακραίες». Συνεπώς, η απόφαση του αριθμού  $n$  είναι σχετικά αυθαίρετη και δημιουργεί σημαντικό πρόβλημα. Για να επιλυθεί, ίσως να

χρειαστούν αρκετές προσομοιώσεις για διάφορες τιμές του, προκειμένου να ελέγξουμε και την συμπεριφορά της κατανομής. Το μειονέκτημα της ανωτέρω μεθόδου έρχεται να το επικαλύψει η μέθοδος peak over threshold.

### 3.3.6 Μέθοδος Υπερβάσεων Κατωφλίου (Peak over threshold model)

Σύμφωνα με το μοντέλο peak over threshold, ως ακραίες τιμές θα θεωρούνται εκείνες που θα ξεπερνάνε ένα συγκεκριμένο υψηλό όριο που θα καλείται κατώφλι. Συνεπώς, είναι πολύ σημαντικό να διαλέξουμε κατάλληλο κατώφλι. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση της μέσης υπερβάλλουσας συνάρτησης (*mean excess function*). Η mean excess function εκφράζει τον μέσο της κατανομής αυτής ως συνάρτηση του κατωφλιού  $u$  και δίνεται από τους McNeil et al το 2005. Ο εμπειρικός κανόνας είναι να διαλέγουμε το κατώφλι  $u$  έτσι ώστε να μας δίνει μια γραμμική σχέση μεταξύ της mean excess function και  $u$ . Στόχος όπως και στην περίπτωση του μοντέλου block maxima, είναι η εύρεση της κατανομής των ακραίων τιμών, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να προβούμε σε μία πρόβλεψη της κατανομής μέσω της αξίας σε κίνδυνο (VaR), που θα υπολογιστεί ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης εκείνης κατανομής.

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  το τυχαίο δείγμα των τιμών που ξεπερνάνε το κατώφλι. Η κατανομή που προσομοιάζει καλύτερα τις ακραίες αυτές τιμές είναι η Generalized Pareto Distribution (GPD). Η συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τον τύπο :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Για την τυχαία μεταβλητή  $x$  θα ισχύει ότι :  $\begin{cases} x \geq 0, & \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\xi}, & \xi < 0 \end{cases}$  . Όπως και στην

περίπτωση της GEV, η παράμετρος  $\xi$  καλείται παράμετρος σχήματος και είναι εκείνη, που ανάλογα με την τιμή που θα πάρει καθορίζει την κατανομή, προερχόμενη από την οικογένεια της GPD. Πιο συγκεκριμένα, αν  $\xi > 0$ , τότε η συνάρτηση κατανομής (3.3.6) δίνει

μία κατανομή Pareto με  $\alpha = \frac{1}{\xi}$  και  $\beta = \frac{\sigma}{\xi}$ . Στην περίπτωση όπου  $\xi = 0$ , τότε η (3.3.6) δίνει

την εκθετική κατανομή με μέση τιμή ίση με  $\sigma$ , ενώ για αρνητικές τιμές της παραμέτρου σχήματος ( $\xi < 0$ ), η (3.3.6) δίνει την κατανομή Pareto II με ελαφριές ουρές.

Οι McNeil, Frey και Embrechts (2005), έχοντας βρει την κατανομή των ζημιών δοθέντος ότι έχουν περάσει το κατώφλι, που θα δίνεται από την συνάρτηση κατανομής, αν υποθέσουμε ότι  $u$  είναι το κατώφλι,  $F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$ , αποδείξανε ότι

το κατώφλι μπορεί να βρεθεί από την μέση τιμή της συνάρτησης αυτής, την excess mean

function, η οποία δίνεται από την σχέση :  $e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$  (3.3.7), με

$0 \leq u < \infty$  όταν η παράμετρος σχήματος ανήκει στο διάστημα  $[0,1)$  και  $0 \leq u < -\frac{\sigma}{\xi}$ , όταν

$\xi \in (-\infty, 0)$ . Συνεπώς, για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $\xi$ , η mean excess function είναι μία γραμμική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, αν  $N_u$  ο αριθμός των υπερβάσεων, τότε η

(3.3.7) παίρνει την ακόλουθη μορφή :  $e(u) = \frac{1}{N_u} \cdot \sum_{i=1}^{N_u} (X_i - u)$  (3.3.8). Πραγματοποιώντας,

για κάθε τιμή  $N_i$  για  $i = 1, \dots, u$ , ένα scatter plot, το οποίο, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα πρέπει να είναι γραμμικό ως προς το κατώφλι, μπορεί να υπολογιστεί το κατώφλι  $u$ .

Τέλος, έχοντας καθορίσει το κατώφλι, για να μοντελοποιηθούν οι ακραίες ζημιές, αρκεί να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της Generalized Pareto. Όπως και στην περίπτωση της GEV, στην block maxima μέθοδο, έτσι και σε αυτό το μοντέλο υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι για την εκτίμηση των παραμέτρων της GPD μεταξύ των οποίων η πιο δημοφιλής είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας.

### 3.3.7 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Για το τυχαίο δείγμα των παρατηρήσεων που περνάνε το κατώφλι η συνάρτηση

πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο :  $L(\underline{x}; \sigma, \xi) = \sigma^{-n} + \left[ \sum_{i=1}^n \left( 1 - \xi \cdot \frac{x_i}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right]^{(1-\xi)}$  (3.3.9)

και η λογαριθμική συνάρτησή της δίνεται από τη σχέση :

$\ln L(\underline{x}; \sigma, \xi) = -n \ln \sigma - (1 - \xi) \cdot \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{\xi} \cdot \ln \left( 1 - \xi \cdot \frac{x_i}{\sigma} \right) \right)$  (3.3.10). Καθώς η λογαριθμική

συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η μεγιστοποίηση των παραμέτρων της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας συνεπάγεται εκείνη και της απλής συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Παίρνοντας την μερική παράγωγο της (3.3.10) για κάθε μία από τις παραμέτρους και θέτοντάς ίσον με το μηδέν, οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας θα υπολογίζονται από τις εξισώσεις :

$$\begin{cases} n \cdot (\xi - 1) = \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right) + (\xi - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right)^{-1} \\ \xi = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 - \xi \frac{x_i}{\sigma} \right) \end{cases} \quad (3.3.11)$$

Ωστόσο, ο Davidson το 1984 διατύπωσε ότι οι δύο αυτές εξισώσεις εξαρτώνται από έναν κοινό παράγοντα, που τον συμβόλισε με  $\theta$ , και είναι ίσος με  $\frac{\xi}{\sigma}$  με  $\theta < \frac{1}{\max(X_1, \dots, X_n)}$ .

Το αποτέλεσμα αυτό απλοποίησε την διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων της GPD καθώς πλέον η (3.3.7) εξαρτάται από μία παράμετρο, την  $\theta$ , έχοντας την ακόλουθη μορφή:

$$\ln L(\underline{x}; \theta) = -n - \sum_{i=1}^n \ln(1 - \theta \cdot x_i) - n \ln \left[ -\frac{1}{n\theta} \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(1 - \theta \cdot x_i)) \right] \quad (3.3.12)$$

Οπότε, παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση και θέτοντας την ίση με το μηδέν, βρίσκουμε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για τον παράγοντα  $\theta$ . Κατά αυτόν τον τρόπο, και η εξίσωση για την παράμετρο σχήματος της (3.3.11) παίρνοντας την μορφή

$$\hat{\xi} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln(1 - \hat{\theta} x_i),$$

υπολογίζουμε με έναν διαφορετικό τρόπο τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο  $\xi$ . Όσον αφορά την παράμετρο κλίμακας  $\sigma$ , καθώς ισχύει

$$\theta = \frac{\xi}{\sigma}, \text{ άμεσα θα προκύπτει ότι : } \hat{\theta} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}} \Leftrightarrow \hat{\sigma} = \frac{\hat{\xi}}{\hat{\theta}}.$$

Ωστόσο, ένα μειονέκτημα της απλοποιημένης αυτής μεθόδου, είναι ότι όσο το  $\theta$  πλησιάζει το άνω όριο του, τόσο πιο πολλά προβλήματα μετατρεψιμότητας ενδέχεται να προκύψουν. Επίσης, η 1<sup>η</sup> παράγωγος της (3.3.12) είναι πιθανό να μηδενίζεται για περισσότερες από μία τιμές.

Την ίδια χρονιά, ο Smith, απέδειξε ότι οι εκτιμητές, όπως εκείνοι προκύπτουν από την παράγωγο της (3.3.12), ασυμπτωτικά, κατανομονται κανονικά. Πιο συγκεκριμένα, έδειξε ότι

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{\xi} \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \sigma \\ \xi \end{bmatrix}, \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} 2\sigma^2(1-\xi) & \sigma(1-\xi) \\ \sigma(1-\xi) & (1-\xi)^2 \end{bmatrix} \right), \text{ με } \xi < \frac{1}{2}.$$

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί το γεγονός ότι όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί για τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας έγιναν υπό την προϋπόθεση ότι  $\xi \leq 1$ , καθώς σε αντίθετη περίπτωση, η συνάρτηση πιθανοφάνειας, όταν η τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $x$  θα προσέγγιζε τον παράγοντα  $\theta$ , θα απειρίζοταν.

### 3.3.8 Έλεγχοι Καλής Προσαρμογής

Οι έλεγχοι που αναφέρθηκαν και στο μοντέλο της block maxima, ισχύουν και στην περίπτωση της peak over threshold με όλες τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους που αναφέρθηκαν στην αντίστοιχη εκείνη ενότητα. Λόγω της ιδιότητας που έχει ο έλεγχος Anderson - Darling να δίνει έμφαση στις ουρές της κατανομής, φέρεται ως ο επικρατέστερος όταν τουλάχιστον τα δεδομένα πραγματεύονται τη Θεωρία Ακραίων Τιμών.



### 3.3.9 Υπολογισμός της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) με την Generalized Pareto Distribution

Η αξία σε κίνδυνο, για το peak over threshold μοντέλο, υπολογίζεται απλά ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης κατανομής GPD και δίνεται από τη σχέση:

$$VaR = u - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left( 1 - \left( \frac{N_u}{n \cdot (1-p)} \right)^{\hat{\xi}} \right) \quad (3.3.13)$$

όπου,

$u$  : το κατώφλι, όπως εκείνο έχει υπολογιστεί από την excess mean function

$N_u$  : το πλήθος των παρατηρήσεων που περνάνε το κατώφλι

$p$ : η πιθανότητα υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Έλεγχος της αξιοπιστίας των υποδειγμάτων εκτίμησης κινδύνου (Value at Risk) - Backtesting

#### 4.1 Μέθοδοι επικύρωσης των μοντέλων υπολογισμού της VaR

Έχοντας υπολογίσει την αξία σε κίνδυνο (VaR), το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος για την αξιοπιστία των μοντέλων. Από μόνο του το VaR δεν επαρκεί. Μπορεί να προβλέπει ζημιές με σχετική ακρίβεια αλλά χρειάζεται να συνοδεύεται και με τις απαραίτητες διαδικασίες παρακολούθησης και ελέγχου ώστε οι προβλέψεις VaR να είναι πραγματικά ωφέλιμες. Τα συστήματα εκτίμησης κινδύνου (Value at Risk) που χρησιμοποιούμε κρίνονται ότι είναι ικανοποιητικά αν η πραγματοποιούμενη ζημιά είναι πάντα μικρότερη από εκείνη που προβλέπεται. Βέβαια στη πράξη, θα υπάρχουν και περιπτώσεις που η ζημιά θα υπερβαίνει την εκτιμώμενη. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την επικύρωση των μοντέλων μέτρησης της VaR είναι η διαδικασία του Backtesting.

Το Backtesting (J.P. Morgan, 1999) είναι ένα στατιστικό μεθοδολογικό πλαίσιο, το οποίο επικυρώνει ότι οι πραγματικές ζημιές που παρατηρούνται βρίσκονται εντός των ορίων που καθορίζει η εκτιμώμενη VaR. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει συστηματική σύγκριση των ιστορικών εκτιμήσεων της VaR με τις αντίστοιχες ζημιές που παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια του ίδιου χρονικού διαστήματος. Η διαδικασία του Backtesting είναι απαραίτητη για την ορθή διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου, καθώς παρέχει τη δυνατότητα ελέγχου του πραγματικού επιπέδου εμπιστοσύνης της εκτιμώμενης VaR. Στις περιπτώσεις που διαπιστώνεται ότι η εκτιμώμενη VaR δεν χαρακτηρίζεται από το επίπεδο εμπιστοσύνης για το οποίο είχε υπολογιστεί, το μοντέλο υπολογισμού της VaR θα πρέπει να επανεξετάζεται για το ενδεχόμενο εσφαλμένων υποθέσεων ή λανθασμένων παραμέτρων.

##### 4.1.1 Το υπόδειγμα του ρυθμού αποτυχίας (Failure Rate)

Η απλούστερη μέθοδος (Jorion, 2007) επικύρωσης ή απόρριψης του εκάστοτε μοντέλου υπολογισμού της VaR είναι η καταγραφή του ποσοστού υπερβάσεων της VaR για ένα δεδομένο δείγμα παρατηρήσεων. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή και ως το υπόδειγμα του ρυθμού αποτυχίας (Failure Rate).

Πιο συγκεκριμένα, με τη μέθοδο αυτή υπολογίζεται το ποσοστό που οι πραγματοποιηθείσες αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου ήταν εκτός των εκτιμήσεων της VaR, λαμβάνοντας υπ' όψιν βέβαια το διάστημα εμπιστοσύνης των μοντέλων μας. Αν υποθέσουμε ότι ένας οργανισμός χρησιμοποιεί 99% ημερήσια VaR και συμβολίσουμε με  $N$  τον αριθμό των υπερβάσεων και με  $T$  το πλήθος των παρατηρήσεων, θα αναμένουμε οι πραγματικές αποδόσεις να έχουν μια απόκλιση από τις εκτιμηθείσες στο 1% του δείγματος.

Συνεπώς, θα μετρήσουμε τις ημέρες στο δείγμα μας κατά τις οποίες η απόδοση του χαρτοφυλακίου ήταν μικρότερη από το αναμενόμενο VaR που υπολογίσαμε και θα διαιρέσουμε αυτόν τον αριθμό με το μέγεθος του δείγματος για το οποίο έχουμε κάνει εκτίμηση.

Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε το ποσοστό  $N/T$  των υπερβάσεων (Failure Rate) με το διάστημα εμπιστοσύνης που έχουμε χρησιμοποιήσει για τον υπολογισμό του VaR. Καθώς το μέγεθος του δείγματος θα αυξάνεται, το ποσοστό  $N/T$  των υπερβάσεων πρέπει να συγκλίνει στο  $a = 1 - p = 1\%$ . Αν το ποσοστό των υπερβάσεων των ζημιών που καθορίζει η VaR είναι σημαντικά μεγαλύτερο από τον αριθμό  $1 - p$ , όπου  $p$  το επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR, τότε συνάγεται ότι το μοντέλο υπολογισμού της VaR υποεκτιμά τη VaR. Στην περίπτωση που αυτό το ποσοστό είναι σημαντικά μικρότερο από τον αριθμό  $1 - p$ , τότε το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το μοντέλο υπολογισμού της VaR είναι πολύ συντηρητικό καθώς τείνει να υπερεκτιμά τη VaR.

Σύμφωνα με Τράπεζα Διεθνών Διακανονισμών (Bank of International Settlements - BIS), οι διεθνείς ρυθμιστικές αρχές πρέπει να χρησιμοποιούν το πλήθος των υπερβάσεων κατά τους τελευταίους δώδεκα μήνες ήτοι 250 μέρες συναλλαγών ως βάση για την άσκηση επίβλεψης στους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς. Το πλήθος των υπερβάσεων θα πρέπει να βρίσκεται εντός του αριθμού που καθορίζεται από το επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR. Για παράδειγμα, αν γίνεται χρήση μιας 99% ημερήσιας VaR, τότε πρέπει να παρατηρηθούν περίπου  $(1\% \cdot 250) \approx 2,5$  υπερβάσεις των ζημιών που καθορίζει η VaR. Αν οι υπερβάσεις είναι σαφώς περισσότερες, τότε πρέπει να βελτιωθεί το μοντέλο υπολογισμού της VaR. Η χρήση ενός επιπέδου εμπιστοσύνης 95% είναι συνήθως πιο πρακτικό, καθώς απαιτεί την παρατήρηση μιας περίπου υπέρβασης ανά μήνα (δηλαδή μία ανά 20 ημέρες συναλλαγών). Ένα υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης, όπως π.χ. 99%, θα σήμαινε ότι πρέπει να αναμένουμε την παρατήρηση μιας υπέρβασης ανά 100 ημέρες ή 2.5 υπερβάσεις ανά έτος. Το γεγονός αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η επικύρωση ενός μοντέλου μέτρησης της VaR που χρησιμοποιεί επίπεδο εμπιστοσύνης μεγαλύτερο του 95% απαιτεί σημαντικά μεγαλύτερο όγκο δεδομένων και περισσότερο χρόνο.

#### **4.1.2 Οι Κανόνες της Επιτροπής της Βασιλείας (Traffic Light System)**

Οι κανόνες της Επιτροπής της Βασιλείας (1996) για τον έλεγχο των εσωτερικών μοντέλων υπολογισμού του VaR, βασίζονται στον προαναφερθέντα ρυθμό αποτυχίας. Το Backtesting αποτελεί κεντρικό ζήτημα και για την Επιτροπή της Βασιλείας, καθώς αυτή έχει θεσπίσει ποινές για τις τράπεζες των οποίων τα μοντέλα υπολογισμού της VaR υποεκτιμούν τον κίνδυνο. Τα πιστωτικά ιδρύματα εκτελούν εν γένει τη διαδικασία του Backtesting σε μηνιαία ή τριμηνιαία βάση, ώστε να διαπιστώσουν αν η αξιοπιστία των μοντέλων μέτρησης της VaR που χρησιμοποιούν βρίσκεται εντός των ορίων που καθορίζει η Επιτροπή της Βασιλείας.

Οι οδηγίες της επιτροπής της Βασιλείας ορίζουν ότι στη περίπτωση εκτίμησης του κινδύνου με ημερήσιο ορίζοντα και σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, το σύστημα κρίνεται

ικανοποιητικό αν ο αριθμός των παραβιάσεων δεν υπερβεί τις τέσσερις. Αν υποθέσουμε ότι στο έτος έχουμε 250 εργάσιμες ημέρες τότε ο αριθμός των παραβιάσεων κατά μέσο όρο θα έπρεπε να ήταν:  $(100\% - 99\%)*250 = 2.5$ .

Δεδομένου ότι για κάθε ημέρα υπάρχουν μόνο δύο ενδεχόμενα για τη επόμενη, είτε να ευστοχήσουμε ή να αστοχήσουμε στην εκτίμηση μας, ο αριθμός των παραβιάσεων,  $n$ , ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή:

$$f(n) = \binom{T}{n} a^n (1-a)^{T-n}, \text{ όπου } a=0.01, T=250.$$

Με μέση τιμή  $E(n)=T\alpha=250(0.01)$  και  $\sigma^2(n)=\alpha(1-\alpha)T=0.01(0.99)250=2.47$ .

Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι η σωρευτική πιθανότητα να πραγματοποιηθούν πάνω από 4 αστοχίες ισούται με 10.8%. Δηλαδή, υπάρχει 10.8% πιθανότητα στις οδηγίες της επιτροπής της Βασιλείας να απορριφθεί το σύστημα αν και είναι σωστό. Με άλλα λόγια, αν και οι εκτιμήσεις μας έχουν προκύψει με πιθανότητα σφάλματος 1% και περιμένουμε κατά μέσο όρο 2.5 αστοχίες το χρόνο, παρ' όλα αυτά υπάρχει 10.8% πιθανότητα να απορρίψουμε το σύστημα εκτίμησης κινδύνων που χρησιμοποιούμε (σφάλμα τύπου Ι).

Η επιτροπή της Βασιλείας σε γνώση αυτού του προβλήματος συστήνει σε περιπτώσεις που οι αστοχίες υπερβαίνουν τις 4 αλλά είναι μικρότερες των 10, να επανελέγχεται το σύστημα και να μην απορρίπτεται. Αν η υπέρβαση του ορίου των 4 αστοχιών δεν βασίζεται σε τυχαίους παράγοντες τότε είναι στη διακριτική ευχέρεια των εποπτικών αρχών της κάθε χώρας να επιβάλλουν, υπό μορφή ποινής, στο πιστωτικό ίδρυμα αυξημένο ύψος κεφαλαιακής επάρκειας.

Στη συνέχεια, παρατίθεται πίνακας (Jorion,2000) που απεικονίζει τις ζώνες στις οποίες κατατάσσονται τα διάφορα υποδείγματα υπολογισμού της VaR, σύμφωνα με το πλήθος των υπερβάσεων που δίνουν ως αποτέλεσμα. Σε κάθε πλήθος υπερβάσεων αντιστοιχεί ένας συντελεστής, με τον οποίο κάθε τράπεζα πρέπει να πολλαπλασιάζει το κεφάλαιο ασφαλείας, που ήδη διατηρεί για την αντιμετώπιση του κινδύνου αγοράς.

Ζώνη	Πλήθος Υπερβάσεων	Συντελεστής
Πράσινη	0 έως 4	1.00
Κίτρινη	5	1.13
Κίτρινη	6	1.17
Κίτρινη	7	1.22
Κίτρινη	8	1.25
Κίτρινη	9	1.28
Κόκκινη	10+	1.33

**Πίνακας 4.1: Ζώνες κατάταξης των συστημάτων υπολογισμού της VaR.**

Η επιτροπή λοιπόν δέχεται 4 εξαιρέσεις (σε αντίθεση με τις 2,5 που υποδηλώνει το μοντέλο), οπότε και η τράπεζα βρίσκεται στη ζώνη «green light». Αν οι εξαιρέσεις είναι πιο πολλές τότε το πιστωτικό ίδρυμα πέφτει στην κίτρινη ή την κόκκινη ζώνη οπότε και η τράπεζα έχει ένα σταδιακό πρόστιμο, όπου ο παράγοντας πολλαπλασιασμού ( $\kappa$ ) αυξάνεται από το 3 στο 4.

#### 4.1.3 Ο Έλεγχος Kupiec (1995)

Τα υποδείγματα εκτίμησης κινδύνου (Value at Risk) που χρησιμοποιούνται κρίνονται ότι είναι ικανοποιητικά αν η πραγματοποιούμενη ζημιά είναι πάντα μικρότερη από εκείνη που προβλέπεται. Βέβαια στη πράξη, υπάρχουν περιπτώσεις που η ζημιά θα υπερβαίνει την εκτιμώμενη. Το ερώτημα τότε που τίθεται είναι αν αυτός ο αριθμός αστοχιών ή υπερβάσεων είναι στατιστικά σημαντικός ή όχι. Για να απαντηθεί το παραπάνω ερώτημα θα πρέπει να εξεταστεί αν το ποσοστό των παραβιάσεων που λαμβάνονται για ένα μοντέλο VaR είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το υποσχόμενο ποσοστό,  $\alpha\%$ .

Εάν συμβολίσουμε με  $N$  τον αριθμό των υπερβάσεων (τον αριθμό των περιπτώσεων που απέτυχε το μοντέλο) και με  $T$  το μέγεθος του δείγματος, τότε το πλήθος  $N$  των υπερβάσεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή  $N \sim B(T, \alpha)$  με συνάρτηση μάζας πιθανότητας τη συνάρτηση  $f(x)$  για τη οποία ισχύει η εξής σχέση:  $f(x) = P(N = x) = \binom{T}{x} \cdot a^x \cdot (1-a)^{T-x}$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής  $N$  είναι  $E(N) = a \cdot T$  και  $V(N) = a \cdot (1-a) \cdot T$  αντίστοιχα ενώ  $\alpha$  είναι το επίπεδο σημαντικότητας για το VaR.

Η εμπειρική πιθανότητα  $N/T$ , όπου  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός που το VaR ξεπερνιέται, πρέπει να είναι στατιστικά ίση με την θεωρητική (αληθινή) πιθανότητα  $\alpha$  (π.χ. στο 99% επίπεδο εμπιστοσύνης το  $\alpha$  είναι 1%). Συνεπώς, καθώς το  $T$  θα αυξάνεται, το ποσοστό  $N/T$  των υπερβάσεων θα θέλουμε να συγκλίνει στο  $\alpha=1-p$ . Επομένως, η αρχική υπόθεση του ελέγχου είναι  $H_0: N/T = \alpha$  και η εναλλακτική  $H_1: N/T \neq \alpha$ .

Αν αυτό το ποσοστό είναι στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερο από τον αριθμό  $1-p$ , όπου  $p$  το επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR, τότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι το μοντέλο υπολογισμού της VaR υποεκτιμά τη VaR. Στην περίπτωση που αυτό το ποσοστό είναι στατιστικά σημαντικά μικρότερο από τον αριθμό  $1-p$ , τότε το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το μοντέλο υπολογισμού της VaR είναι πολύ συντηρητικό. Οποιαδήποτε από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις είναι ανεπιθύμητη καθώς οδηγεί σε εσφαλμένη εκτίμηση του κινδύνου. Με άλλα λόγια, στον παραπάνω έλεγχο εξετάζεται κατά πόσο το υπόδειγμα αποδίδει ως προς τον θεμελιώδη σκοπό του, δηλαδή την περιγραφή του στοχευόμενου ποσοστημορίου της κατανομής των αποδόσεων. Άρα, σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης ένα ακριβές VaR μοντέλο θα αποτυγχάνει μόνο στο 1% των περιπτώσεων. Στις 100 ημέρες λοιπόν το 99% VaR πρέπει να ξεπερνιέται μόνο μία φορά. Εάν στην πραγματικότητα ξεπερνιέται περισσότερες από μία φορά τότε το μοντέλο είναι μη ακριβές.

Ο Κυριέκ (1995) για να εξετάσει αν το ποσοστό των παραβιάσεων που λαμβάνονται από ένα υπόδειγμα VaR είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το υποσχόμενο ποσοστό,  $\alpha\%$ , ανέπτυξε έναν έλεγχο λόγου πιθανοφάνειας (likelihood ratio test, LR), για διάστημα εμπιστοσύνης 95%. Ο έλεγχος Likelihood ratio, είναι ένας στατιστικός έλεγχος, που υπολογίζει τη σχέση μεταξύ των μέγιστων πιθανοτήτων ενός αποτελέσματος, υπό το πρίσμα δύο εναλλακτικών υποθέσεων. Η μέγιστη πιθανότητα του εκτιμώμενου αποτελέσματος κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ορίζεται ως αριθμητής και η μέγιστη πιθανότητα κάτω από την εναλλακτική υπόθεση ορίζεται ως παρανομαστής. Όσο πιο μικρή είναι η αναλογία, τόσο πιο μεγάλος θα είναι ο δείκτης LR-statistic.

Για την εξαγωγή συμπεράσματος αποδοχής ή απόρριψης του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της VaR, ο Κυριέκ (1995) υπέθεσε ότι η ελεγχουσυνάρτηση :  $LR_{uc} = -2\ln(a^N \cdot (1-a)^{T-N}) + 2\ln\{(N/T)^N \cdot (1-(N/T)^{T-N})\}$ , κάτω από την υπόθεση  $H_0$ , ακολουθεί ασυμπτωτικά την  $\chi^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας.

Στη συνέχεια, συνέκρινε την LR-statistic με την κριτική τιμή της κατανομής  $\chi^2$  για διάστημα εμπιστοσύνης 95% και με ένα βαθμό ελευθερίας. Εάν η τιμή του LR-statistic γίνει πολύ μεγάλη, σε σχέση με την κριτική τιμή του  $\chi^2$  τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται. Συνεπώς, αν  $LR_{uc} > \chi^2_{1,\alpha}$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου, το μοντέλο θεωρείται μη κατάλληλο και θα πρέπει να απορριφθεί. Επιλέγοντας ένα επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha=5\%$  για τον έλεγχο, βάσει υπολογισμών προκύπτει μία κριτική τιμή 3.84 από την  $\chi^2$  κατανομή. Άρα, η μηδενική υπόθεση ότι  $N/T$  ισούται με  $\alpha$  μπορεί να απορριφθεί εάν  $\chi^2 > 3.84$ . Τέλος, σημειώνεται ότι δεν πρέπει να συγχέεται το διάστημα εμπιστοσύνης του συγκεκριμένου ελέγχου, με το διάστημα εμπιστοσύνης που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση των μεθόδων VaR.

#### 4.1.4 Ο Έλεγχος Christoffersen (1998)

Τα μοντέλα υπολογισμού της VaR είναι χρήσιμα υπό την προϋπόθεση ότι προβλέπουν το μέγεθος των ενδεχόμενων ζημιών με επαρκώς μεγάλο βαθμό επιτυχίας. Για το λόγο αυτό, η εφαρμογή των συγκεκριμένων μοντέλων πρέπει να συνοδεύεται από μια διαδικασία επικύρωσης (Backtesting). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας για την υλοποίηση της αριθμητικής εφαρμογής, θα χρησιμοποιήσουμε τα κριτήρια του ελέγχου Christoffersen (1998), τα οποία αναλύονται στο unconditional test, στο independence test και στο conditional test. Πριν την εκτενή αναφορά των ελέγχων εκείνων, είναι σημαντικό να αποδοθεί μαθηματικά ο όρος παραβίασης.

Έχοντας υπολογίσει την αξία σε κίνδυνο και συγκρίνοντάς την με τις αποδόσεις,  $r_t$ , του δείγματος, η παραβίαση ορίζεται ως μία δείκτρια συνάρτηση :

$$I_t = \begin{cases} 1, & r_t < VaR_t(p) \\ 0, & r_t > VaR_t(p) \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου  $p$  : η πιθανότητα υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR), με την δείκτρια να ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με μέση τιμή  $q = 1 - p$ .

### Unconditional Coverage Criterion - Έλεγχος Παραβιάσεων

Αρχικά πρέπει να εξεταστεί αν το ποσοστό των παραβιάσεων που λαμβάνονται για ένα μοντέλο εκτίμησης κινδύνου (VaR), είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το υποσχόμενο ποσοστό κάλυψης. Το παραπάνω ονομάζεται ως unconditional coverage υπόθεση. Συνεπώς, καλό μοντέλο θα αποτελεί εκείνο που οι παραβιάσεις του θα ανέρχονται σε ποσοστό ακριβώς  $1-p$ . Για να εξεταστεί αυτό, ο Christoffersen ανέπτυξε τον έλεγχο  $H_0$ : ο αναμενόμενος αριθμός των παραβιάσεων να είναι ίσος με  $q$ , δηλαδή  $E(I_t) = q$  έναντι της εναλλακτικής  $H_1$ :  $E(I_t) > q$ , με την ελεγχουσυνάρτηση να δίνεται από την σχέση:

$$LR_{UC} = -2 \ln \left( \frac{(1-q)^{T_0} \cdot q^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \right), \quad (4.2)$$

όπου  $T$  : το μέγεθος του δείγματος,  $T_0$  : το πλήθος των αποδόσεων που δεν ξεπέρασαν την αξία σε κίνδυνο και  $T_1$ : ο αριθμός των παραβιάσεων της VaR.

Για την εξαγωγή συμπεράσματος αποδοχής ή απόρριψης του μοντέλου, ο Christoffersen υπέθεσε ότι η ελεγχουσυνάρτηση (4.2), κάτω από την υπόθεση  $H_0$ , ακολουθεί ασυμπτωτικά (καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων  $T$  τείνει στο άπειρο) την  $\chi^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας. Συνεπώς, αν  $LR_{UC} > \chi_{1,\alpha}^2$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου, το μοντέλο θεωρείται μη κατάλληλο. Σε αντίθετη περίπτωση, αποτελεί ένα καλό αρχικά μοντέλο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο.

Για την αποδοχή ή απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, σημαντικό ρόλο παίζει η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας,  $\alpha\%$ , δηλαδή η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα Τύπου I (που είναι η πιθανότητα να απορρίψουμε μια αληθή υπόθεση). Όσο προσπαθούμε να μειώσουμε την πιθανότητα αυτή τόσο αυξάνεται η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα Τύπου II (που είναι η πιθανότητα να αποδεχθούμε μια εσφαλμένη υπόθεση) και, αντίστροφα, για δεδομένο μέγεθος δείγματος. Ένα κριτήριο επιλογής είναι το κόστος σφάλματος. Για παράδειγμα, εάν εκτιμούμε ότι το κόστος του σφάλματος Τύπου I είναι υψηλότερο από το κόστος του σφάλματος Τύπου II, τότε είναι λογικό να θέσουμε την πιθανότητα σφάλματος Τύπου I πολύ μικρή. Επειδή, όμως, είναι πολύ δύσκολο να υπολογίσουμε το κόστος των δύο σφαλμάτων, θέτουμε, γενικά, την τιμή του επιπέδου σημαντικότητας  $\alpha\%$  ίση με 1% ή 5% (το πολύ 10%).

Σύμφωνα με τον έλεγχο Christoffersen (1998) επιλέγεται ένα επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha=10\%$ . Επιλέγοντας ένα επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha=10\%$  για τον έλεγχο, βάσει υπολογισμών προκύπτει μία κριτική τιμή 2,7055 από την  $\chi^2$  κατανομή. Αν η τιμή της ελεγχουσυνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή 2,7055 τότε απορρίπτεται το VaR

μοντέλο στο επίπεδο 10%. Εναλλακτικά, μπορεί να υπολογισθεί η σύνδεση των p-values με τα αποτελέσματα των ελέγχων. Το p-value ορίζεται ως η πιθανότητα να μπορεί ένα δείγμα να επαληθευτεί μέσω της μηδενικής υπόθεσης. Σύμφωνα με την παραπάνω υπόθεση, αν το p-value είναι μικρότερο του επιθυμητού επιπέδου σημαντικότητας τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

### **Independency Criterion – Έλεγχος Ανεξαρτησίας**

Η Unconditional Coverage υπόθεση δεν δίνει καμία πληροφορία για την πρόσκαιρη ανεξαρτησία των παραβιάσεων του VaR των αποδόσεων. Ωστόσο, το να δημιουργηθούν παραβιάσεις των αποδόσεων οι οποίες είναι χρονικά ανεξάρτητες, είναι μία σημαντική ιδιότητα των συστημάτων εκτίμησης κινδύνου (VaR).

Επομένως, εκτός από τη μέτρηση των υπερβάσεων πρέπει να ελεγχθεί το ενδεχόμενο ύπαρξης ομαδοποιημένων υπερβάσεων (clustered excessions). Αν υποθεθεί ότι όλες οι παραβιάσεις του VaR σε ένα δείγμα συμβαίνουν κατά την διάρκεια της ίδιας χρονικής περιόδου, τότε ο κίνδυνος πιθανής χρεοκοπίας θα είναι πολύ μεγαλύτερος από το αν οι παραβιάσεις ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένες σε όλη τη διάρκεια του χρόνου. Ως εκ τούτου, μοντέλα υπολογισμού της VaR στα οποία παρατηρούνται έντονες συγκεντρώσεις των παραβιάσεων θα ήταν πολύ πιθανόν να απορριφθούν ή να αναθεωρηθούν.

Απώτερος σκοπός λοιπόν, είναι η δημιουργία ενός ελέγχου που μπορεί να είναι ικανός στο να απορρίψει ένα VaR με ομαδοποιημένες παραβιάσεις. Τελικά, γίνεται η υπόθεση ότι η ακολουθία των παραβιάσεων είναι ανεξάρτητη κατά τη διάρκεια του χρόνου και μπορεί να περιγραφεί ως μια σειρά πρώτης τάξης του Markov. Κατά αυτόν τον τρόπο, περιορίζει την υπό εξέταση συσχέτιση μόνο σε συνεχόμενες και όχι σε όλες τις παραβιάσεις  $I_t$ . Η ιδιότητα του πρώτου κανόνα του Markov αναφέρεται στην υπόθεση ότι μόνο τα αποτελέσματα του σήμερα μπορούν να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα του αύριο. Καθώς όμως δύο αποτελέσματα είναι πιθανά, μηδέν και ένα, οι δύο πιθανότητες  $\pi_{01}$ ,  $\pi_{11}$  περιγράφουν ολόκληρη τη διαδικασία. Η πιθανότητα μιας ακολουθίας μη παραβιάσεων ακολουθώντας μία μη παραβίαση είναι  $1-\pi_{01}$  και η πιθανότητα μιας ακολουθίας μη παραβιάσεων ακολουθώντας μία παραβίαση είναι  $1-\pi_{11}$ .

Για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας, ο Christoffersen χρησιμοποίησε την ακόλουθη ελεγχουσυνάρτηση :

$$LR_{IND} = -2 \ln \left( \left( 1 - \frac{T_1}{T} \right)^{T_0} \cdot \left( \frac{T_1}{T} \right)^{T_1} \right) + 2 \ln \left( (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \cdot \pi_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \cdot \pi_{11}^{T_{11}} \right) \quad (4.3),$$

όπου T: το συνολικό μέγεθος του δείγματος,  $T_0$  : το πλήθος των αποδόσεων που δεν ξεπέρασαν την αξία σε κίνδυνο (ο αριθμός των μη-παραβιάσεων) και  $T_1$ : ο αριθμός των παραβιάσεων της αξίας σε κίνδυνο.

$T_{00}$  : για την  $i$  παρατήρηση δεν έχω παραβίαση και δεν ακολουθεί παραβίαση για την παρατήρηση  $j$ .



$T_{10}$  : για την  $i$  παρατήρηση έχω παραβίαση και δεν ακολουθεί παραβίαση για την παρατήρηση  $j$ .

$$T_{01} = T_0 - T_{00}$$

$$T_{11} = T_1 - T_{10}$$

$$\pi_{01} = \frac{T_{01}}{T_0}$$

$$\pi_{11} = \frac{T_{11}}{T_1}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο ελέγχου της ανεξαρτησίας, το μοντέλο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR), απορρίπτεται αν  $LR_{IND} > X_{1,\alpha}^2$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου και  $X^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας, η κατανομή της ελεγχουσυνάρτησης. Επιλέγοντας ένα επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 10\%$  για τον έλεγχο, βάσει υπολογισμών προκύπτει μία κριτική τιμή 2,7055 από την  $X^2$  κατανομή. Αν η τιμή της ελεγχουσυνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή 2,7055 τότε απορρίπτεται το VaR μοντέλο στο επίπεδο 10%.

### **Conditional Coverage Criterion**

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να τονισθεί ότι οι δύο ανωτέρω ιδιότητες των παραβιάσεων του VaR των αποδόσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, αν ένα VaR των αποδόσεων δεν ικανοποιεί καμία από τις δύο αυτές υποθέσεις, πρέπει να θεωρηθεί ως μη έγκυρο. Για παράδειγμα, ικανοποιώντας την υπόθεση του unconditional coverage δεν μπορεί να εξαχθεί συμπέρασμα για την πιθανή ύπαρξη πληθώρας παραβιάσεων ούτε για την μη συμμόρφωση με την υπόθεση ανεξαρτησίας. Στη συνέχεια, οι ερευνητές ενδιαφέρθηκαν για ένα ταυτόχρονο έλεγχο, αν δηλαδή το μέτρο της Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) είναι ανεξάρτητο, όπως επίσης και αν ο μέσος αριθμός των παραβιάσεων είναι σωστός.

Σύμφωνα με τον Christoffersen, η απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα μπορεί να δοθεί με το conditional coverage του VaR των αποδόσεων το οποίο ικανοποιεί τόσο την unconditional coverage υπόθεση όσο και την υπόθεση της ανεξαρτησίας. Με άλλα λόγια, μπορεί να ελεγχθεί η από κοινού ανεξαρτησία καθώς επίσης και η σωστή κάλυψη χρησιμοποιώντας το conditional coverage test. Πιο συγκεκριμένα, η μηδενική υπόθεση περιγράφει το ιδανικό εκείνο μοντέλο που θα δίνει τον επιτρεπόμενο αριθμό παραβιάσεων οι οποίες και θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Επομένως, εάν η ελεγχουσυνάρτηση :  $LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND}$  (4.4), που υπό την  $H_0$  ακολουθεί την  $\chi^2$  με δύο βαθμούς ελευθερίας, είναι μεγαλύτερη από το  $\alpha$  ποσοστημόριο της  $\chi^2_2$ , η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και κατ' επέκταση και το μοντέλο υπολογισμού της VaR. Επιλέγοντας επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 10\%$  για τον έλεγχο, βάσει υπολογισμών προκύπτει μία κριτική τιμή  $\chi^2_{2,0.1} = 9,210$ . Αν ο έλεγχος είναι μεγαλύτερος από την κριτική αυτή τιμή τότε απορρίπτεται το VaR μοντέλο στο επίπεδο 10%.

Εν κατακλείδι, θα πρέπει να σημειωθεί ότι εάν ένα υπόδειγμα εκτίμησης της VaR απορριφθεί οριακά με ένα από τα δύο παραπάνω κριτήρια (conditional test ή independence test), αλλά κρίνεται αποδεκτό από το συνδυαστικό conditional coverage test τότε θεωρείται τελικά αποδεκτό και αξιόπιστο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Εμπειρική μελέτη

#### 5.1 Εισαγωγή

Για την εμπειρική διερεύνηση του θέματος της παρούσας διπλωματικής εργασίας, χρησιμοποιήθηκαν ως δεδομένα οι τιμές κλεισίματος του αμερικάνικου χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 για το διάστημα από 24/11/2004 έως 21/11/2014. Στη συνέχεια, προχωρήσαμε σε μετατροπή των ημερήσιων τιμών κλεισίματος του δείκτη S&P500 σε λογαριθμικές αποδόσεις (log returns). Συνολικά το δείγμα αποτελείται από 2517 παρατηρήσεις. Οι πρώτες 1747 θα χρησιμοποιηθούν ως *in sample* ώστε να εκτιμήσουμε τη VaR, ενώ οι τελευταίες 770 παρατηρήσεις ως *out of sample* προκειμένου να εξετάσουμε την προβλεψιμότητα των υποδειγμάτων μας με τη μέθοδο backtesting.

Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό της ημερήσιας VaR και τον εκ των υστέρων έλεγχο των υποδειγμάτων εκτίμησης της (backtesting), χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των rolling windows (κυλιόμενα χρονικά παράθυρα). Στη συγκεκριμένη μέθοδο εκτιμάται η VaR για ένα μέρος του συνολικού δείγματος, για παράδειγμα 1747 παρατηρήσεων. Άρα, μόλις εκτιμηθεί η VaR της πρώτης ημέρας, μεταφέρεται το παράθυρο εκτίμησης μια θέση εμπρός (π.χ. παρατηρήσεις 2 έως 1748) και επανυπολογίζεται η VaR για την επόμενη ημέρα. Η διαδικασία αυτή ακολουθείται συνεχώς, μέχρι να εκτιμηθούν οι προβλέψεις για τις out of sample παρατηρήσεις (δηλαδή πραγματοποιείται 770 φορές, ώστε να υπολογιστεί η VaR και για τις 770 ημέρες του out of sample δείγματος).

Στη συνέχεια, κάθε μέθοδος εκτίμησης της VaR ελέγχθηκε για την αποτελεσματικότητα της με βάση τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση. Με άλλα λόγια, εξετάζεται για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ. 95% ή 99%) της VaR, ο αριθμός των παραβιάσεων του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμησή της. Επιπρόσθετα, πραγματοποιώντας τον έλεγχο του Christoffersen (1998) ήτοι (α) independence test, (b) unconditional coverage test, (c) conditional coverage test διαπιστώνουμε το κατά πόσο τα αποτελέσματα του backtesting ικανοποιούν την ανεξαρτησία και την καλή προσαρμοστικότητα και κατ'επέκταση κατά πόσο οι μέθοδοι εκτίμησης που χρησιμοποιήθηκαν έχουν ερμηνευτική δυνατότητα, δηλαδή αν μπορούν να προβλέψουν τις μέγιστες απώλειες του χαρτοφυλακίου μας έτσι ώστε να αποφανθούμε εάν το υπόδειγμά μας είναι αξιόπιστο ή θα πρέπει να απορριφθεί.

Οι μεθοδολογίες που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για τον υπολογισμό της VaR, όπως ήδη έχουμε περιγράψει διεξοδικά στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, ταξινομούνται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες (Engle - Manganelli, 2001) τις παραμετρικές, τις μη παραμετρικές και τις ημι-παραμετρικές. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα προχωρήσουμε σε αναλυτική αριθμητική εφαρμογή κάποιων εκ των παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη

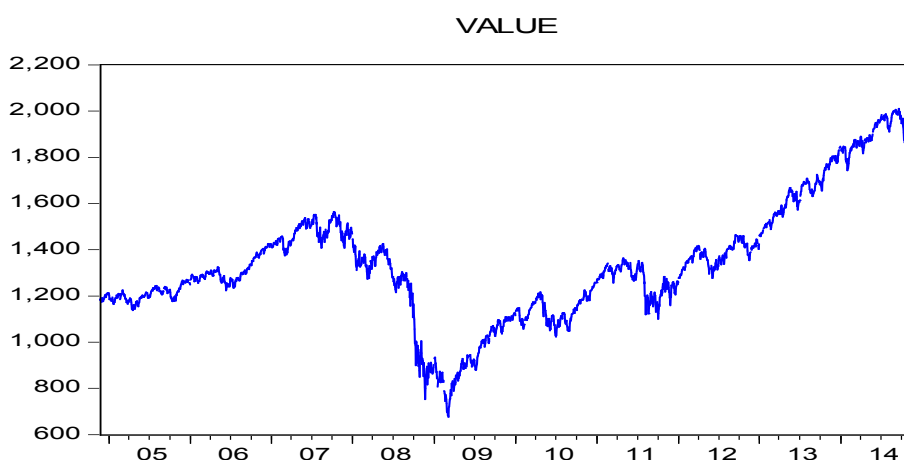
S&P500. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την κατηγορία των παραμετρικών μεθόδων θα παρουσιάσουμε κάποιες από τις πιο διαδεδομένες οικονομετρικές μεθόδους και θα προχωρήσουμε σε εκτίμηση και αξιολόγηση της VaR με βάση διάφορα υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (π.χ. GARCH, TGARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M) τα οποία παράγουν εκτιμήσεις της δεσμευμένης διακύμανσης από τις οποίες εξαρτάται άμεσα η εκτίμηση του μέτρου VaR. Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά την κατηγορία των μη παραμετρικών και ημι-παραμετρικών μεθόδων θα χρησιμοποιήσουμε την ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation) και την Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory) αντίστοιχα.

Εν κατακλείδι, για την υλοποίηση της πρακτικής εφαρμογής για τις παραμετρικές (υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας) και τις μη παραμετρικές μεθόδους (ιστορική προσομοίωση) υπολογισμού της VaR, χρησιμοποιήθηκε το οικονομετρικό πακέτο Eviews 6 ενώ για την ημι-παραμετρική μέθοδο της Θεωρίας Ακραίων Τιμών χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό ανοικτού κώδικα R i386 3.0.0 και συγκεκριμένα τα πακέτα της R, extRemes, envir και POT. Τέλος, ο έλεγχος backtesting βάσει των κριτηρίων του Christoffersen (1998) πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του Microsoft Excel 2007.

## 5.2 Ο Δείκτης S&P500

Ο δείκτης S&P500 ή αλλιώς Standard and Poor's 500 είναι ένας σταθμισμένος δείκτης κεφαλαιοποίησης που καλύπτει σχεδόν το 70% της αξίας της αμερικανικής χρηματιστηριακής αγοράς και συμπεριλαμβάνει μεταξύ άλλων 380 βιομηχανικές, 37 δημόσιες υπηρεσίες, 73 οικονομικές και 10 μετοχές μεταφοράς. Είναι ένας από τους πιο κοινούς ακολουθούμενους δείκτες παγκοσμίως, ο οποίος θεωρείται ότι εμφανίζει παραστατικότερα την πορεία της Αμερικανικής, όσο και της παγκόσμιας οικονομίας.

Στο παρακάτω γράφημα, απεικονίζονται οι τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P500 για την περίοδο αναφοράς 24/11/2004 έως 21/11/2014.

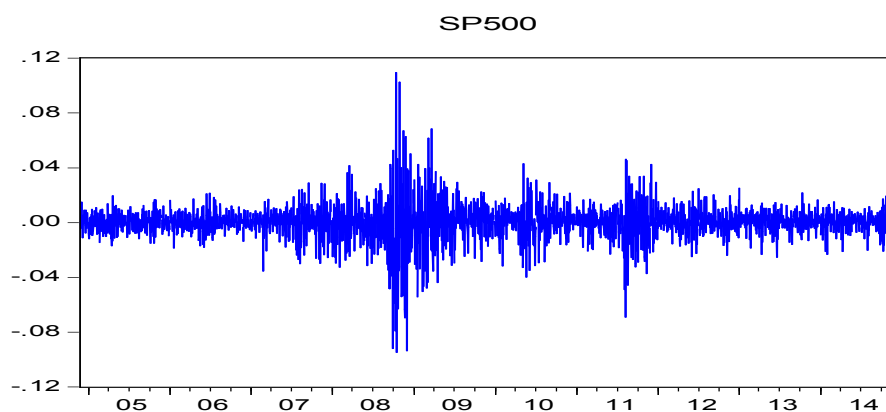


Διάγραμμα δείκτη S&P500

Όπως φαίνεται από το παραπάνω διάγραμμα ο δείκτης S&P500 στα τέλη Μαΐου του 2007 έκλεισε στις 1,530 μονάδες, το οποίο ήταν και το πρώτο ιστορικό υψηλό μετά από επτά χρόνια. Το υψηλότερο βέβαια σημείο του δείκτη πραγματοποιήθηκε στις 9 Οκτωβρίου 2007 στις 1,570 μονάδες. Στα μέσα του 2007 λόγω της οικονομικής κρίσης, εξαιτίας των στεγαστικών δανείων υψηλού κινδύνου, κάτι που κορυφώθηκε τον Μάρτιο του 2008 ο δείκτης καταρρέει στις 675 μονάδες, το χαμηλότερο ιστορικό μετά και τις αρχές του 1997. Οι απώλειες του συγκεκριμένου έτους έφθασαν το 45%. Οι απώλειες της τριετίας αυτής της κρίσης έφθασε το 80% ενώ στην ευρύτερη αγορά στο μεγάλο κραχ του 1931 είχαν φθάσει στο 50%. Στη συνέχεια, ο δείκτης είχε μια απότομη ανάταση για να κλείσει την 1<sup>η</sup> Δεκεμβρίου 2010 στις 1,260 μονάδες, το οποίο μεταφράζεται ως και 78% πάνω από το ιστορικό χαμηλό που είχε συμβεί τρία χρόνια πριν, δηλαδή το 2007 αλλά και 23% πάνω από το υψηλότερο της χρονιάς εκείνης. Το φάσμα των 1,400 μονάδων ξεπεράστηκε μετά από πολύ καιρό στις 15 Μαρτίου 2012. Η ανοδική τάση του δείκτη S&P500 συνεχίστηκε καταγράφοντας στις 23 Ιουλίου 2013 νέο ιστορικό υψηλό στις 1675 μονάδες, έχοντας ενισχυθεί κατά 7,5% τις τελευταίες 12 ημέρες. Σε πείσμα όλων όσων περίμεναν μια μεγάλη πτώση στους αμερικανικούς δείκτες, ο δείκτης S&P500 έκλεισε με κέρδη κατά 0,29% στις 2,069 μονάδες στις 20 Νοεμβρίου 2014. Σ' αυτό συνέβαλε σημαντικά το γεγονός ότι οι ρυθμοί ανάπτυξης της αμερικανικής οικονομίας παρέμειναν ισχυροί και στο τρέχον τελευταίο τρίμηνο του έτους.

Υπενθυμίζουμε ότι το πρώτο βήμα πριν προχωρήσουμε στην υλοποίηση της πρακτικής εφαρμογής, είναι η μετατροπή των ημερήσιων τιμών κλεισίματος του δείκτη S&P500 σε λογαριθμικές αποδόσεις ( $\log$  returns). Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του οικονομετρικού πακέτου Eviews 6, χρησιμοποιώντας τον τύπο:  $series\ sp500 = d(\log(value))$ , όπου  $value$  : οι ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P500.

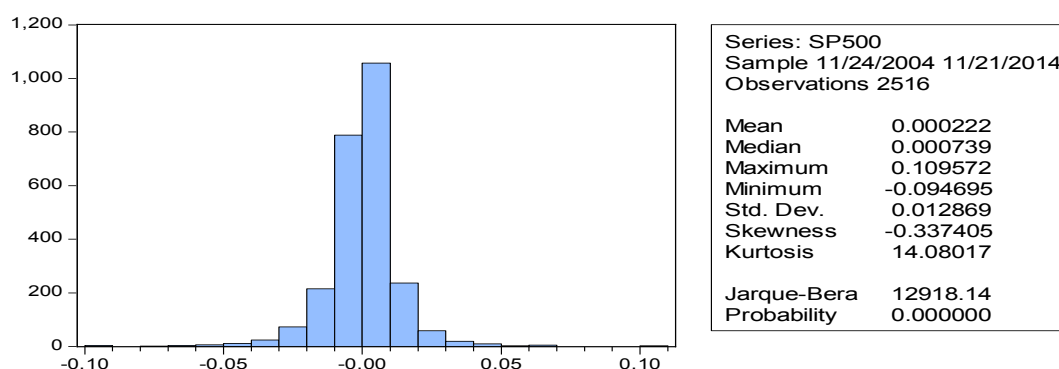
Το δείγμα που χρησιμοποιείται είναι από τις 24/11/2004 έως και τις 21/11/2014, με πλήθος παρατηρήσεων 2517.



**Διάγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500**

Το διάγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων αναπαριστά με απόλυτη σαφήνεια όλα τα ιστορικά στοιχεία που αναφέρθηκαν εκτενέστερα παραπάνω, με τα ιστορικά υψηλά και χαμηλά αντίστοιχα. Επίσης, είναι εμφανές ότι οι αποδόσεις του δείκτη κινούνται γύρω από τον μέσο. Επιπρόσθετα, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει και τις ήμερες περιόδους, για παράδειγμα το διάστημα μεταξύ 2004 έως και 2006 καθώς και το διάστημα 2012 έως 2014.

Στη συνέχεια, παρατίθεται το ιστόγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων στο οποίο απεικονίζονται περιληπτικά, μερικά περιγραφικά στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς του Αμερικάνικου Χρηματιστηριακού δείκτη S&P500.



**Ιστόγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500**

Από το παραπάνω γράφημα διαπιστώνουμε ότι η χρονοσειρά μας παρουσιάζει υψηλή κύρτωση (κύρτωση = 14.08 > 3). Άρα, η κατανομή των αποδόσεων του δείκτη S&P500 χαρακτηρίζεται ως λεπτόκυρτη και δεν ακολουθεί την κανονική. Επισημαίνεται ότι η κύρτωση παρέχει πληροφορίες για το σημείο κατανομής της μάζας πιθανότητας στο πεδίο τιμών της κατανομής. Επομένως, υψηλή κύρτωση συνεπάγεται την τοποθέτηση μάζας πιθανότητας στις ουρές της κατανομής γεγονός το οποίο συνεπάγεται αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης ακραίων τιμών. Επιπρόσθετα, μέσω της ασυμμετρίας (skewness) ελέγχεται η θέση του κυρίου μέρους της μάζας πιθανότητας της κατανομής της σειράς των αποδόσεων του δείκτη S&P500. Η αρνητική ασυμμετρία (skewness = - 0.337) υποδηλώνει ότι η μάζα πιθανότητας της κατανομής των αποδόσεων είναι μετατοπισμένη προς τα αριστερά της αναμενόμενης τιμής. Αυτό συνεπάγεται αυξημένη πιθανότητα εμφάνισης τιμής μικρότερης της αναμενόμενης. Τέλος, μέσω του Jarque-Bera εξετάζεται εάν οι αποδόσεις του δείκτη S&P500 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Από τα αποτελέσματα του παραπάνω ιστογράμματος διαπιστώνουμε ότι το p-value του εκτιμώμενου στατιστικού Jarque and Berra (JB) είναι μικρότερο από το επίπεδο εμπιστοσύνης, το οποίο συνεπάγεται ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή.

### 5.3 Οικονομετρική προσέγγιση της εκτίμησης του μέτρου αξία σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998)

Πριν από οποιαδήποτε οικονομετρική εκτίμηση στην οποία γίνεται χρήση χρονολογικών σειρών είναι αναγκαία η εξέταση της συμπεριφοράς των σειρών ως προς τη στασιμότητα. Η στασιμότητα αποτελεί βασικό δομικό χαρακτηριστικό μιας χρονοσειράς που επιτρέπει την μοντελοποίηση της και εν τέλει την πρόβλεψή της. Συνεπώς, η χρήση σε κάποια οικονομετρική εκτίμηση χρονολογικών σειρών που παρουσιάζουν μη στασιμότητα οδηγεί σε πλασματικά αποτελέσματα που μπορεί να μας παρασύρουν σε λανθασμένες προβλέψεις και συμπεράσματα (Davidson και MacKinnon, 1993). Για την εξέταση της ύπαρξης στασιμότητας των σειρών γίνεται χρήση της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε από τους Dickey και Fuller (1979), η οποία βασίζεται στους γνωστούς ελέγχους μοναδιαίας ρίζας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η δύναμη αυτών των ελέγχων δεν εξαρτάται τόσο από το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι διαθέσιμες αλλά από το εύρος των ετών που καλύπτουν (Shiller και Perron, 1985).

Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η αυτοσυσχέτιση και η μερική αυτοσυσχέτιση μεταξύ παρατηρήσεων της σειράς μέσω των κατάλληλων ελέγχων. Πιο συγκεκριμένα, θα πραγματοποιηθεί ο από κοινού έλεγχος (Joint test ή Ljung - Box statistics, 1978) των διαφορετικών αυτοσυσχετίσεων των αποδόσεων  $r_t$  να είναι ίσος με το μηδέν. Χρησιμοποιείται η μηδενική υπόθεση  $H_0: \rho_1 \dots \rho_m = 0$  έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης  $H_1: \rho_i \neq 0$ , με  $i=1\dots m$ . Κάτω από αυτή την υπόθεση, η μεταβλητή  $r_t$  είναι ανεξάρτητη και ισόνομη και η συσχέτιση είναι ασυμπτωτική με την κατανομή  $X_m^2$  με  $m$  βαθμούς ελευθερίας. Η συνθήκη απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης ισχύει αν το  $Q(m) > X_m^2$ , όπου το  $Q(m)$  δηλώνει την συσχέτιση στην παρατήρηση  $m$  και επίσης το  $X_m^2$  είναι το  $100(1-\alpha)$  – ισοτό ποσοτημόριο μίας  $X^2$  κατανομής με  $m$  βαθμούς ελευθερίας. Με την πραγματοποίηση του ανωτέρω ελέγχου, θα είμαστε σε θέση να ελέγξουμε εάν οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 είναι πράγματι ασυσχέτιστες ή αν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα αυτοπαλίνδρομο AR(p) υπόδειγμα για την μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου της υπό μελέτης σειράς.

Για την επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος δεσμευμένου μέσου των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500, ελέγχονται οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς μας. Συγκεκριμένα, για την επιλογή του κατάλληλου αυτοπαλίνδρομου μοντέλου AR(p) τάξης  $p$  επιθυμούμε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης να επιδεικνύει μια φθίνουσα πορεία. Ως τάξη του μοντέλου επιλέγουμε τη μεγαλύτερη υστέρηση που παρουσιάζει στατιστικά σημαντική μερική αυτοσυσχέτιση. Για τις ενδιάμεσες υστερήσεις λαμβάνουμε υπ' όψιν αυτές που παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική μερική αυτοσυσχέτιση. Εναλλακτικά μπορούμε να επιλέξουμε το κατάλληλο μοντέλο χρησιμοποιώντας τα κριτήρια AIC και BIC.

$$AIC(l) = \ln(\widehat{\sigma}_a^2) + \frac{2l}{T}, BIC(l) = \ln(\widehat{\sigma}_a^2) + \frac{l * \ln(T)}{T}$$

Μέσω των κριτηρίων αυτών, ελέγχεται αφενός η τάξης του και αφετέρου η επάρκεια των συντελεστών που συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο.

Αφού επιλεγεί το μοντέλο και εκτιμηθούν οι συντελεστές του, ελέγχεται εάν τα κατάλοιπα παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική αυτοσυσχέτιση. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο δεν είναι επαρκές καθώς η αυτοσυσχέτιση των καταλοίπων υποδηλώνει ότι το επιλεγμένο μοντέλο δεν είναι αρκετό για να ενσωματώσει την υπάρχουσα πληροφορία. Άμεση συνέπεια του ανωτέρω είναι ότι χρειάζεται να επανεξετάσουμε το μοντέλο μας ή να εξετάσουμε για ARCH effect, δηλαδή να γίνει έλεγχος των τετραγωνισμένων καταλοίπων για παρουσία αυτοσυσχετίσεων οι οποίες δεν κατέστη δυνατό να εξαλειφθούν μέσω της τροποποίησης του μοντέλου του μέσου.

Για τον προσδιορισμό της τάξης ενός ARCH - GARCH μοντέλου γίνεται χρήση της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης των τετραγωνισμένων καταλοίπων της εκτίμησης του μέσου. Αφού εκτιμηθεί η διακύμανση μέσω του κατάλληλου ARCH - GARCH μοντέλου χωρίζεται το δείγμα σε in sample και out of sample και για κάθε μία από τις παρατηρήσεις του τελευταίου, υπολογίζεται η αξία σε κίνδυνο (VaR).

Αναλυτικότερα, χρησιμοποιώντας τις 770 τελευταίες παρατηρήσεις του δείγματος οι οποίες καλύπτουν την χρονική περίοδο 1/11/2011 – 21/11/2014 προχωρήσαμε σε διαδοχικές 1-day ahead (ένα βήμα εμπρός με χρονικό ορίζοντα τη μία ημέρα) προβλέψεις της δεσμευμένης διακύμανσης υιοθετώντας διαφορετικά μοντέλα GARCH. Στη συνέχεια, προχωρήσαμε σε διαφορετικές υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων (π.χ. κανονική, t-student, generalized error distribution) και σε διαδοχικές 1-day-ahead προβλέψεις του Value-at-Risk για 5% και 1% επίπεδο σημαντικότητας. Η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk) για το δείγμα που εξετάζουμε υπολογίστηκε σύμφωνα με τον γενικό τύπο :

$$VaR = \hat{r}_{n+1} + F(p)\sqrt{\hat{\sigma}_{n+1}^2}$$
, όπου  $F(p)$  το p-ιοστό ποσοστημόριο της επιλεγμένης συνάρτησης κατανομής  $F(\cdot)$

Τέλος, κάθε ένα GARCH μοντέλο θα ελεγχθεί για την αποτελεσματικότητα του με βάση τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση και πραγματοποιώντας έλεγχο backtesting βάσει των κριτηρίων του Christoffersen (1998) θα αποφανθούμε εάν το μοντέλο μας τελικά είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί.

Έχοντας ως γνώμονα τα όσα αναφέρθηκαν εκτενώς ανωτέρω προχωρήσαμε αρχικά σε έλεγχο της στασιμότητας της χρονοσειράς του δείγματος σύμφωνα με τον επαυξημένο έλεγχο των Dickey και Fuller (1979). Η μεθοδολογία των Augmented Dickey Fuller (ADF) ελέγχων για μη στασιμότητα εξετάζει την πιθανή ύπαρξη αυτοσυσχέτισης στα κατάλοιπα πραγματοποιώντας τον έλεγχο ότι η χρονοσειρά έχει μοναδιαία ρίζα έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης ότι δεν υπάρχει μοναδιαία ρίζα.



Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται τα αποτελέσματα του ελέγχου στασιμότητας (unit root test) των λογαριθμικών αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500.

Null Hypothesis: SP500 has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-40.20435	0.0000
Test critical values:	1% level		-3.432757	
	5% level		-2.862489	
	10% level		-2.567321	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(SP500)				
Method: Least Squares				
Date: 11/30/14 Time: 23:16				
Sample (adjusted): 11/30/2004 11/21/2014				
Included observations: 2514 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SP500(-1)	-1.193831	0.029694	-40.20435	0.0000
D(SP500(-1))	0.072770	0.019904	3.656092	0.0003
C	0.000265	0.000255	1.041815	0.2976
R-squared	0.558766	Mean dependent var		3.45E-06
Adjusted R-squared	0.558414	S.D. dependent var		0.019206
S.E. of regression	0.012763	Akaike info criterion		-5.883384
Sum squared resid	0.409009	Schwarz criterion		-5.876427
Log likelihood	7398.414	Hannan-Quinn criter.		-5.880859
F-statistic	1589.928	Durbin-Watson stat		1.995995
Prob(F-statistic)	0.000000			

Από τα αποτελέσματα του ελέγχου είναι εμφανές ότι το probability (p-value) είναι μικρότερο του 1% και άρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Ως εκ τούτου η χρονοσειρά των λογαριθμικών αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 είναι στάσιμη.

Επιπλέον, ελέγχθηκε αν οι αποδόσεις του δείκτη S&P500 είναι ασυσχέτιστες ή αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα AR(p) υπόδειγμα για την μοντελοποίηση του δεσμευμένου μέσου των λογαριθμικών αποδόσεων.

Correlogram of residuals S&P500							
Date: 11/30/14 Time: 23:17							
Sample: 11/26/2004 11/21/2014							
Included observations: 2516							
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob		
*	*	1	-0.113	-0.113	32.077	0.000	
	*	2	-0.059	-0.073	40.879	0.000	
		3	0.042	0.027	45.360	0.000	
		4	-0.017	-0.013	46.065	0.000	
		5	-0.050	-0.050	52.398	0.000	
		6	0.020	0.005	53.362	0.000	
		7	-0.027	-0.030	55.256	0.000	
		8	0.026	0.024	56.922	0.000	
		9	-0.012	-0.012	57.258	0.000	
		10	0.049	0.050	63.388	0.000	
		11	-0.032	-0.024	65.930	0.000	
		12	0.032	0.031	68.460	0.000	

Ο ανωτέρω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα της στατιστικής Ljung - Box (Q - stat) και την αντίστοιχη τιμή πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, ελέγχεται αν η αυτοσυσχέτιση στις πρώτες δώδεκα παρατηρήσεις είναι ίση με το μηδέν. Χρησιμοποιείται η μηδενική υπόθεση  $H_0: \rho_1 \dots \rho_{12} = 0$  έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης  $H_1: \rho_i \neq 0$ , με  $i=1...12$ .

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι  $Q(12) = 68.46 > X_{12}^2(0.05) = 21.026$ , το οποίο ουσιαστικά σημαίνει ότι απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση άρα υπάρχει αυτοσυσχέτιση μεταξύ των δώδεκα πρώτων υστερήσεων (lags). Επομένως, από τις τιμές του στατιστικού ελέγχου Ljung-Box (1978) συνάγεται πως τα κατάλοιπα είναι αυτοσυσχετιζόμενα. Το αποτέλεσμα αυτό, συμφωνεί με τη διαπίστωση ύπαρξης αυτοσυσχέτισης στα ημερήσια δεδομένα της χρηματιστηριακής αγοράς των Η.Π.Α. (Chou, 1988).

Θεωρώντας λοιπόν ότι τα δεδομένα του δείκτη S&P500 παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική αυτοσυσχέτιση, η μοντελοποίηση της αναμενόμενης τιμής του θα γίνει μέσω ενός κατάλληλου υποδείγματος δεσμευμένου μέσου των λογαριθμικών αποδόσεων και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας ένα AR(1) υπόδειγμα όπως φαίνεται άλλωστε και στον ακόλουθο πίνακα.

Dependent Variable: SP500  
Method: Least Squares  
Date: 02/11/15 Time: 02:28  
Sample (adjusted): 11/29/2004 11/21/2014  
Included observations: 2515 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000246	0.000255	0.964718	0.3348
SP500(-1)	-0.112852	0.019821	-5.693467	0.0000
R-squared	0.012735	Mean dependent var		0.000221
Adjusted R-squared	0.012342	S.D. dependent var		0.012871
S.E. of regression	0.012792	Akaike info criterion		-5.879237
Sum squared resid	0.411200	Schwarz criterion		-5.874601
Log likelihood	7395.140	Hannan-Quinn criter.		-5.877554
F-statistic	32.41556	Durbin-Watson stat		2.016316
Prob(F-statistic)	0.000000			

Πίνακας 5.1: Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης της αναμενόμενης τιμής των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 με τη χρήση αυτοπαλίνδρομου AR(1) υποδείγματος

Στη συνέχεια, εξετάστηκαν τα τετραγωνισμένα κατάλοιπα της παραπάνω εκτίμησης τα οποία παρουσιάζουν την ακόλουθη εικόνα:

Correlogram of Squared residuals S&P 500

Date: 11/30/14 Time: 23:19  
Sample: 11/30/2004 11/21/2014  
Included observations: 2514

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*	*	1	0.197	0.197	97.659	0.000
***	***	2	0.435	0.413	574.81	0.000
*	*	3	0.202	0.089	677.96	0.000
**	*	4	0.349	0.178	985.01	0.000
**	**	5	0.344	0.245	1283.6	0.000
**	*	6	0.348	0.158	1588.2	0.000
**	*	7	0.334	0.120	1869.0	0.000
**		8	0.253	0.011	2030.5	0.000
**		9	0.312	0.067	2276.0	0.000
**		10	0.280	0.061	2474.2	0.000
***	*	11	0.387	0.153	2851.9	0.000
**		12	0.297	0.071	3074.6	0.000

Από τις τιμές του p-value < 0.05 καταλαβαίνουμε πως υπάρχει πρόβλημα αυτοσυσχέτισης. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται να εξετάσουμε για ARCH effect. Αυτό σημαίνει ότι θα

πρέπει να γίνει έλεγχος των τετραγωνισμένων καταλοίπων για παρουσία αυτοσυσχετίσεων οι οποίες δεν κατέστη δυνατό να εξαλειφθούν μέσω της μοντελοποίησης του μέσου χρησιμοποιώντας ένα AR(1) υπόδειγμα. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα GARCH για τις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 (π.χ. GARCH, TARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M) και κάνοντας διαφορετικές υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων καταλήξαμε αρχικά στα εξής μοντέλα: IGARCH(1,1) ή Risk Metrics και EGARCH(2,1) για κανονική κατανομή, κατανομή t-student και κατανομή ged.

Από τους παρακάτω πίνακες προκύπτει ότι όλοι οι συντελεστές των ανωτέρω μοντέλων είναι στατιστικά σημαντικοί.

Dependent Variable: SP500				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 12/03/14 Time: 01:13				
Sample (adjusted): 11/29/2004 11/21/2014				
Included observations: 2514 after adjustments				
Convergence achieved after 16 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(2)*RESID(-1)^2 + (1 - C(2))*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
SP500(-1)	-0.068025	0.018784	-3.621425	0.0003
Variance Equation				
RESID(-1)^2	0.067366	0.003815	17.65759	0.0000
GARCH(-1)	0.932634	0.003815	244.4568	0.0000
R-squared	0.010398	Mean dependent var		0.000219
Adjusted R-squared	0.010004	S.D. dependent var		0.012874
S.E. of regression	0.012809	Akaike info criterion		-6.445094
Sum squared resid	0.412148	Schwarz criterion		-6.440457
Log likelihood	8103.483	Hannan-Quinn criter.		-6.443411
Durbin-Watson stat	2.099102			

Πίνακας 5.2: Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μέσου και της διακύμανσης των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 με τη χρήση AR(1) - IGARCH(1,1) ή Risk Metrics υποδείγματος

Dependent Variable: SP500				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 12/05/14 Time: 00:07				
Sample (adjusted): 11/29/2004 11/21/2014				
Included observations: 2515 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)				
*ABS(RESID(-2)/@SQRT(GARCH(-2))) + C(5)*RESID(-1)				
/@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
SP500(-1)	-0.058276	0.017697	-3.292936	0.0010
Variance Equation				
C(2)	-0.393061	0.031869	-12.33354	0.0000
C(3)	-0.125029	0.037484	-3.335522	0.0009
C(4)	0.281577	0.038998	7.220272	0.0000
C(5)	-0.162969	0.010781	-15.11666	0.0000
C(6)	0.970275	0.002627	369.3903	0.0000
R-squared	0.009426	Mean dependent var		0.000221
Adjusted R-squared	0.007451	S.D. dependent var		0.012871
S.E. of regression	0.012823	Akaike info criterion		-6.529241
Sum squared resid	0.412578	Schwarz criterion		-6.515332
Log likelihood	8216.520	Hannan-Quinn criter.		-6.524193
Durbin-Watson stat	2.117139			

Πίνακας 5.3: Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μέσου και της διακύμανσης των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 με τη χρήση AR(1) - EGARCH(2,1) - Normal κατανομή υποδείγματος

Dependent Variable: SP500				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution				
Date: 12/01/14 Time: 00:12				
Sample (adjusted): 11/29/2004 11/21/2014				
Included observations: 2515 after adjustments				
Convergence achieved after 15 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5) *ABS(RESID(-2)/@SQRT(GARCH(-2))) + C(6)*RESID(-1) /@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000546	0.000145	3.771480	0.0002
SP500(-1)	-0.053873	0.017779	-3.030128	0.0024
Variance Equation				
C(3)	-0.306036	0.038769	-7.893801	0.0000
C(4)	-0.101864	0.051755	-1.968183	0.0490
C(5)	0.247407	0.052948	4.672681	0.0000
C(6)	-0.173081	0.016249	-10.65146	0.0000
C(7)	0.979689	0.003435	285.1924	0.0000
T-DIST. DOF	6.493938	0.922704	7.037943	0.0000
R-squared	0.008664	Mean dependent var		0.000221
Adjusted R-squared	0.005896	S.D. dependent var		0.012871
S.E. of regression	0.012833	Akaike info criterion		-6.563325
Sum squared resid	0.412895	Schwarz criterion		-6.544780
Log likelihood	8261.381	Hannan-Quinn criter.		-6.556594
F-statistic	3.130188	Durbin-Watson stat		2.124767
Prob(F-statistic)	0.002709			

Πίνακας 5.4: Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μέσου και της διακύμανσης των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 με τη χρήση AR(1) - EGARCH(2,1) - t-student κατανομή υποδείγματος

Dependent Variable: SP500				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Generalized error distribution (GED)				
Date: 12/04/14 Time: 02:55				
Sample (adjusted): 11/29/2004 11/21/2014				
Included observations: 2515 after adjustments				
Convergence achieved after 24 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5) *ABS(RESID(-2)/@SQRT(GARCH(-2))) + C(6)*RESID(-1) /@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000598	0.000141	4.236886	0.0000
SP500(-1)	-0.056109	0.017036	-3.293479	0.0010
Variance Equation				
C(3)	-0.345557	0.044487	-7.767670	0.0000
C(4)	-0.108859	0.054818	-1.985824	0.0471
C(5)	0.263669	0.056001	4.708297	0.0000
C(6)	-0.167576	0.016316	-10.27089	0.0000
C(7)	0.976384	0.003822	255.4640	0.0000
GED PARAMETER	1.342746	0.051135	26.25876	0.0000
R-squared	0.008712	Mean dependent var		0.000221
Adjusted R-squared	0.005944	S.D. dependent var		0.012871
S.E. of regression	0.012833	Akaike info criterion		-6.566363
Sum squared resid	0.412875	Schwarz criterion		-6.547818
Log likelihood	8265.201	Hannan-Quinn criter.		-6.559632
F-statistic	3.147571	Durbin-Watson stat		2.120159
Prob(F-statistic)	0.002583			

Πίνακας 5.5: Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του μέσου και της διακύμανσης των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 με τη χρήση AR(1) - EGARCH(2,1) - ged κατανομή υποδείγματος

Συνοψίζοντας, για τα δεδομένα του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 μοντελοποιήσαμε τον δεσμευμένο μέσο των λογαριθμικών αποδόσεων χρησιμοποιώντας ένα AR(1) υπόδειγμα εξαιτίας της αυτοσυσχέτισης τους. Επίσης, προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματος σε ένα IGARCH(1,1) μοντέλο, για την εφαρμογή του Risk Metrics υποδείγματος και σε EGARCH(2,1) για κανονική κατανομή, κατανομή t-student και κατανομή ged καταφέραμε αρχικά να υπολογίσουμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και να ελέγξουμε τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την

πραγματική λογαριθμική απόδοση του S&P500. Ωστόσο, για να αποφανθούμε τελικά εάν τα οικονομετρικά αυτά υποδείγματα είναι αξιόπιστα ή πρέπει να απορριφθούν πραγματοποιήσαμε τον έλεγχο Christoffersen (1998), ο οποίος αναλύεται α) στο unconditional test, β) στο independence test και γ) στο conditional test.

Υπενθυμίζουμε, ότι με το unconditional coverage test εξετάζουμε αν το ποσοστό των παραβιάσεων που λαμβάνονται από ένα μοντέλο εκτίμησης κινδύνου (VaR) είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το υποσχόμενο ποσοστό κάλυψης. Για την εξαγωγή συμπεράσματος αποδοχής ή απόρριψης του μοντέλου, ο Christoffersen χρησιμοποίησε την

$$\text{ελεγχοςυνάρτηση : } LR_{UC} = -2 \ln \left( \frac{(1-q)^{T_0} \cdot q^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \right), \text{ η οποία ακολουθεί την } \chi^2$$

κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας. Άρα, αν  $LR_{UC} > X_{1,\alpha}^2$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου, το μοντέλο εκτίμησης κινδύνου (VaR) απορρίπτεται.

Στη συνέχεια, για να ελεγχθεί το ενδεχόμενο ύπαρξης ομαδοποιημένων υπερβάσεων και να δημιουργηθεί ένας έλεγχος που μπορεί να είναι ικανός στο να απορρίψει ένα VaR με ομαδοποιημένες παραβιάσεις, ο Christoffersen χρησιμοποίησε την ακόλουθη ελεγχοςυνάρτηση η οποία με τη σειρά της ακολουθεί την  $\chi^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας :

$$LR_{IND} = -2 \ln \left( \left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \cdot \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1} \right) + 2 \ln \left( (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \cdot \pi_{01}^{T_{01}} \cdot (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \cdot \pi_{11}^{T_{11}} \right),$$

όπου  $T$  : το συνολικό μέγεθος του δείγματος,  $T_0$  : το πλήθος των αποδόσεων που δεν ξεπέρασαν την αξία σε κίνδυνο,  $T_1$  : ο αριθμός των παραβιάσεων,  $T_{00}$  : για την  $i$  παρατήρηση δεν έχω παραβίαση και δεν ακολουθεί παραβίαση για την παρατήρηση  $j$ ,  $T_{10}$  : για την  $i$  παρατήρηση έχω παραβίαση και δεν ακολουθεί παραβίαση για την παρατήρηση  $j$ ,  $T_{01} = T_0 - T_{00}$ ,  $T_{11} = T_1 - T_{10}$ ,  $\pi_{01} = \frac{T_{01}}{T_0}$ ,  $\pi_{11} = \frac{T_{11}}{T_1}$

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό (independence test), το μοντέλο υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR) απορρίπτεται αν  $LR_{IND} > X_{1,\alpha}^2$ , με  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου.

Τέλος, το conditional coverage test αποτελεί ένα ταυτόχρονο έλεγχο με τον οποίο μπορεί να ελεγχθεί η από κοινού ανεξαρτησία καθώς επίσης και η σωστή κάλυψη του μοντέλου υπολογισμού της αξίας σε κίνδυνο (VaR). Σύμφωνα με τον Christoffersen, εάν η ελεγχοςυνάρτηση :  $LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND} > X_{2,\alpha}^2$ , η οποία ακολουθεί την  $\chi^2$  κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας και  $\alpha$  το επίπεδο σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου, το μοντέλο εκτίμησης κινδύνου (VaR) απορρίπτεται.

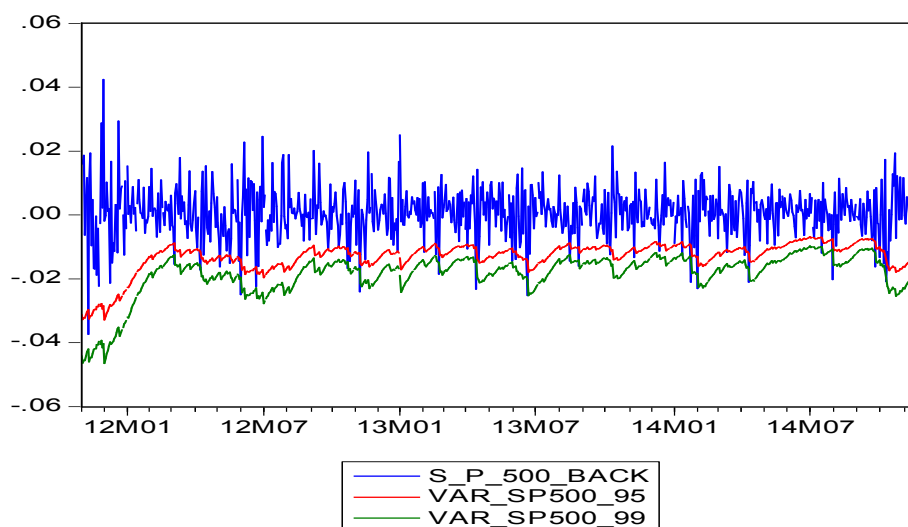


Εν κατακλείδι, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι εάν ένα υπόδειγμα εκτίμησης της VaR απορριφθεί οριακά με ένα από τα δύο παραπάνω κριτήρια (conditional test ή independence test), αλλά κρίνεται αποδεκτό από το συνδυαστικό conditional coverage test τότε θεωρείται τελικά αποδεκτό και αξιόπιστο.

Πριν προχωρήσουμε στην αξιολόγηση (backtesting) των οικονομετρικών υποδειγμάτων εκτίμησης της VaR, κρίνεται σκόπιμο να τονίσουμε ότι για την αποδοχή ή απόρριψη των κριτηρίων ελέγχου Christoffersen (1998) σημαντικό ρόλο παίζει η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας διεξαγωγής του ελέγχου,  $\alpha\%$ , δηλαδή η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα Τύπου I (που είναι η πιθανότητα να απορρίψουμε μια αληθή υπόθεση). Όσο προσπαθούμε να μειώσουμε την πιθανότητα αυτή τόσο αυξάνεται η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα Τύπου II (που είναι η πιθανότητα να αποδεχθούμε μια εσφαλμένη υπόθεση) και αντίστροφα. Σύμφωνα με τον έλεγχο Christoffersen, επιλέγεται ένα επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha=10\%$  καθώς εκτιμάται ότι το κόστος του σφάλματος Τύπου II είναι υψηλότερο από το κόστος του σφάλματος Τύπου I. Με άλλα λόγια, θέτουμε την πιθανότητα σφάλματος Τύπου I πολύ μεγάλη διότι είναι προτιμότερο να απορριφθεί ένα μοντέλο με καλή προβλεπτικότητα από το να αποδεχτούμε ένα κακό μοντέλο που θα μας οδηγήσει σε εσφαλμένες εκτιμήσεις και συμπεράσματα για τη μέγιστη ζημιά που μπορεί να υποστεί το χαρτοφυλάκιό μας.

Ο πιο άμεσος τρόπος υλοποίησης backtesting είναι η αναπαράσταση των καθημερινών αποδόσεων (κερδών / ζημιών) στο ίδιο διάγραμμα με την εκτιμώμενη ημερήσια VaR και παρακολούθηση των υπερβάσεων για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης της VaR.

Στο πρώτο κατά σειρά γράφημα απεικονίζονται οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500, το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (VaR) για διάστημα εμπιστοσύνης 99%, καθώς επίσης και το εκτιμώμενο VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 95% σύμφωνα με την εφαρμογή του Risk Metrics υποδείγματος.



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι εκτιμήσεις του VaR και στα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης φαίνεται ότι ακολουθούν σε μεγάλο βαθμό τη τροχιά των διακυμάνσεων των αποδόσεων κάτι το οποίο αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ότι το μοντέλο της Risk Metrics είναι μάλλον αποδεκτό. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι μέσω της διαγραμματικής αυτής απεικόνισης δεν μπορεί να βγει κάποιο ασφαλές συμπέρασμα. Για να αποφανθούμε τελικά εάν το οικονομετρικό υπόδειγμα της Risk Metrics είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί πραγματοποιήσαμε τον έλεγχο του Christoffersen (1998). Τα αποτελέσματα του ελέγχου συνοψίζονται στους δύο παρακάτω πίνακες :

Risk Metrics			
5%		1%	
$T_0$	726	$T_0$	751
$T_1$	43	$T_1$	18
$T_{00}$	685	$T_{00}$	733
$T_{01}$	41	$T_{01}$	18
$T_{10}$	41	$T_{10}$	18
$T_{11}$	2	$T_{11}$	0
$\pi$	0,055916775	$\pi$	0,023407022
$\pi_{01}$	0,056473829	$\pi_{01}$	0,023968043
$\pi_{11}$	0,046511628	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	0,546759352	$LR_{uc}$	10,13649228
$LR_{ind}$	0,08046423	$LR_{ind}$	0,86293213
$LR_{cc}$	0,627223582	$LR_{cc}$	10,99942441

Πίνακας 5.6: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) για τον S&P500 με τη μέθοδο Risk Metrics

Σύμφωνα με τους ελέγχους παραβιάσεων για την μέθοδο υπολογισμού του VaR, Risk Metrics, προκύπτουν 43 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και 18 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

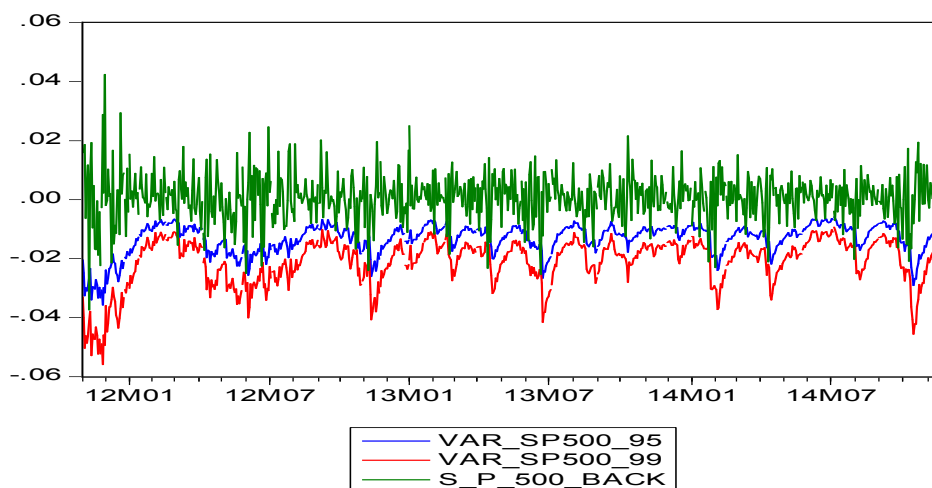
Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

Πίνακας 5.7: Τα αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για την αποδοχή ή απόρριψη του οικονομετρικού μοντέλου της Risk Metrics για τον S&P500

Προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα IGARCH(1,1) μοντέλο για την εφαρμογή της Risk Metrics για τον υπολογισμό της 95% και 99% αξία σε κίνδυνο του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 και πραγματοποιώντας τους ελέγχους των κριτηρίων του Christoffersen για την αξιολόγηση του μοντέλου, καταλήξαμε εν τέλει ότι το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό για την 95% αξία σε κίνδυνο καθώς και τα τρία κριτήρια ελέγχου συνηγορούν στην απόφαση αυτή. Ωστόσο, το αποτέλεσμα δεν παραμένει το ίδιο για την 99% VaR καθώς το μοντέλο δεν γίνεται αποδεκτό αφού αποτυγχάνει να περάσει με επιτυχία από το συνδυαστικό έλεγχο (conditional test) και τον έλεγχο του αριθμού των παραβιάσεων (unconditional test).

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (VaR) εφαρμόσαμε το οικονομετρικό μοντέλο AR(1) - EGARCH(2,1) όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Στο δεύτερο κατά σειρά γράφημα, οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 απεικονίζονται στο ίδιο διάγραμμα με την εκτιμώμενη ημερήσια VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 95% και 99% ως εξής :



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα οι γραμμές του μέτρου VaR και στα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης ακολουθούν τις διακυμάνσεις των αποδόσεων του δείκτη S&P500 κάτι το οποίο αποτελεί ένα πρώτο δείγμα γραφής για την αποδοχή του συγκεκριμένου υποδείγματος. Για να αποφανθούμε τελικά εάν πράγματι το οικονομετρικό υπόδειγμα AR(1) - EGARCH(2,1) με τις λογαριθμικές αποδόσεις του S&P500 να ακολουθούν κανονική κατανομή είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί προχωρήσαμε στην εφαρμογή των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen (1998). Τα αποτελέσματα του ελέγχου συνοψίζονται στους δύο παρακάτω πίνακες:

AR(1) - EGARCH (2,1) Normal			
5%		1%	
$T_0$	738	$T_0$	757
$T_1$	31	$T_1$	12
$T_{00}$	707	$T_{00}$	745
$T_{01}$	31	$T_{01}$	12
$T_{10}$	31	$T_{10}$	12
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0,040312094	$\pi$	0,015604681
$\pi_{01}$	0,04200542	$\pi_{01}$	0,015852048
$\pi_{11}$	0,00000001	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	1,622684165	$LR_{uc}$	2,084107145
$LR_{ind}$	2,605101837	$LR_{ind}$	0,380465053
$LR_{cc}$	4,227786002	$LR_{cc}$	2,464572198

Πίνακας 5.8: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) για τον S&P500 με τη μέθοδο AR(1) - EGARCH(2,1) Normal

Σύμφωνα με τους ελέγχους παραβιάσεων για την μέθοδο υπολογισμού του VaR, AR(1) - EGARCH(2,1) για κανονική κατανομή, προκύπτουν 31 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και 12 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

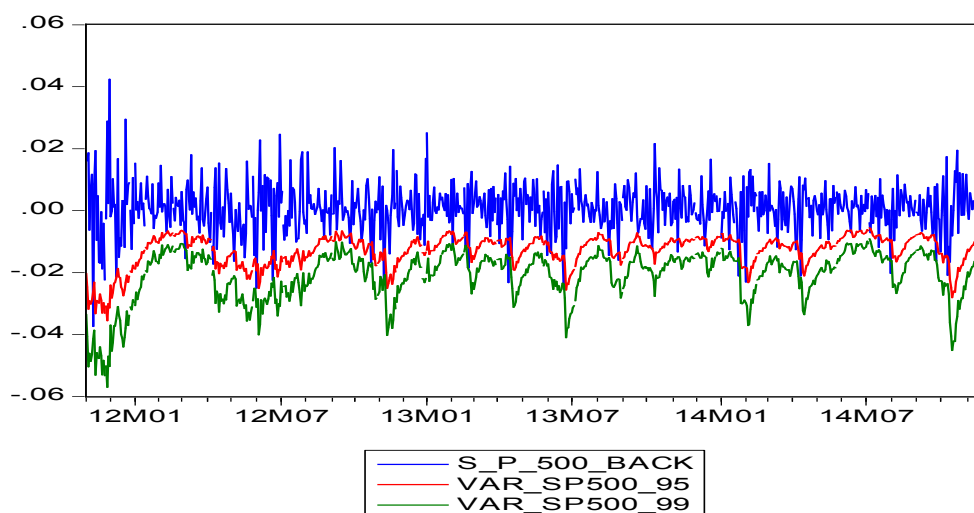
Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

Πίνακας 5.9: Τα αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για την αποδοχή ή απόρριψη του οικονομετρικού μοντέλου AR(1) - EGARCH(2,1) Normal για τον S&P500

Προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα AR(1) - EGARCH(2,1) οικονομετρικό μοντέλο όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 ακολουθούν την κανονική κατανομή για τον υπολογισμό της 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και πραγματοποιώντας τους ελέγχους των κριτηρίων του Christoffersen για την αξιολόγηση του εν λόγω μοντέλου καταλήξαμε ότι το υπόδειγμα αυτό είναι αποδεκτό, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο, καθώς και τα τρία κριτήρια ελέγχου συνηγορούν στην απόφαση αυτή.

Επιπρόσθετα, προχωρήσαμε σε υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (VaR) εφαρμόζοντας το οικονομετρικό μοντέλο AR(1) - EGARCH(2,1) με τις λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 να ακολουθούν την κατανομή t-student.

Στο γράφημα που ακολουθεί απεικονίζονται οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500, το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (VaR) για διάστημα εμπιστοσύνης 99%, καθώς επίσης και το εκτιμώμενο VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 95%.



Σύμφωνα με το ανωτέρω διάγραμμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι εκτιμήσεις του VaR και στα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης ακολουθούν τη γραμμή των αποδόσεων στα σημεία εκείνα όπου υπάρχει υψηλή διακύμανση. Συνεπώς, έχουμε μια πρώτη ένδειξη ότι το μοντέλο είναι αποδεκτό. Βέβαια, για να αποφανθούμε εάν το οικονομετρικό υπόδειγμα AR(1) - EGARCH(2,1) με τις λογαριθμικές αποδόσεις του S&P500 να ακολουθούν κατανομή t-student είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί προχωρήσαμε στην εφαρμογή των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen (1998). Τα αποτελέσματα του ελέγχου τα οποία συνοψίζονται στους δύο παρακάτω πίνακες έρχονται να επαληθεύσουν την αρχική μας παρατήρηση για αποδοχή του μοντέλου AR(1) - EGARCH(2,1) t-student.

AR(1) - EGARCH (2,1) t-Student			
5%		1%	
$T_0$	729	$T_0$	760
$T_1$	40	$T_1$	9
$T_{00}$	689	$T_{00}$	751
$T_{01}$	40	$T_{01}$	9
$T_{10}$	40	$T_{10}$	9
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0,052015605	$\pi$	0,011703511
$\pi_{01}$	0,054869684	$\pi_{01}$	0,011842105
$\pi_{11}$	0,000000001	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	0,064951599	$LR_{uc}$	0,213723724
$LR_{ind}$	4,391779939	$LR_{ind}$	0,213162859
$LR_{cc}$	4,456731539	$LR_{cc}$	0,426886583

Πίνακας 5.10: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% VaR για τον S&P500 με τη μέθοδο AR(1) - EGARCH(2,1) t-student

Αναφορικά με τους ελέγχους παραβιάσεων για την μέθοδο υπολογισμού του VaR, AR(1) - EGARCH(2,1) για κατανομή t-student, προκύπτουν 40 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και 9 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

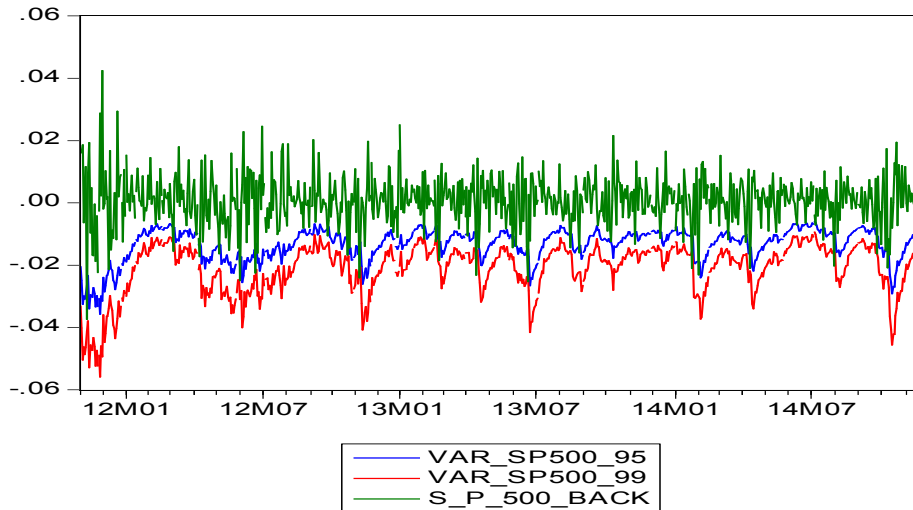
Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

Πίνακας 5.11: Τα αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για την αποδοχή ή απόρριψη του οικονομετρικού μοντέλου AR(1) - EGARCH(2,1) t-student για τον S&P500

Άρα, προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα AR(1) - EGARCH(2,1) μοντέλο με τις λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 να ακολουθούν την κατανομή t-student για τον υπολογισμό της VaR(5%) και VaR(1%), τα κριτήρια του Christoffersen έδειξαν ότι το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο. Η μόνη εξαίρεση είναι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων, independency coverage test, για την 95% αξία σε κίνδυνο, όπου αποτελεί και ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απόρριψης του μοντέλου βάσει του συγκεκριμένου κριτηρίου ελέγχου αλλά συνολικής αποδοχής του λόγω των αποτελεσμάτων του συνδυαστικού conditional coverage test.

Τέλος, προσαρμόσαμε τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα AR(1) - EGARCH(2,1) μοντέλο με τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 να ακολουθούν την κατανομή generalized error distribution (ged) για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (VaR).

Στη συνέχεια, παραθέτουμε στο ίδιο διάγραμμα τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την εκτιμώμενη ημερήσια VaR για διάστημα εμπιστοσύνης 95% και 99%.



Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι οι εκτιμήσεις του VaR και στα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης (95% και 99%) ακολουθούν τη διακύμανση των αποδόσεων έχοντας μια πρώτη εικόνα ότι το μοντέλο είναι μάλλον αποδεκτό. Βέβαια, για να επαληθεύσουμε τον διαγνωστικό αυτό έλεγχο θα προβούμε στην εφαρμογή των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen (1998). Τα αποτελέσματα του ελέγχου παρατίθενται στους δύο παρακάτω πίνακες:

AR(1) - EGARCH (2,1) GED			
5%		1%	
$T_0$	731	$T_0$	761
$T_1$	38	$T_1$	8
$T_{00}$	693	$T_{00}$	753
$T_{01}$	38	$T_{01}$	8
$T_{10}$	38	$T_{10}$	8
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0,049414824	$\pi$	0,010403121
$\pi_{01}$	0,051983584	$\pi_{01}$	0,010512484
$\pi_{11}$	0,000000001	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	0,005564378	$LR_{uc}$	0,012458378
$LR_{ind}$	3,952533593	$LR_{ind}$	0,168202819
$LR_{cc}$	3,958097971	$LR_{cc}$	0,180661197

Πίνακας 5.12: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% VaR για τον S&P500 με τη μέθοδο AR(1) - EGARCH(2,1) κατανομή ged



Όσον αφορά τους ελέγχους παραβιάσεων για την μέθοδο υπολογισμού του VaR, AR(1) - EGARCH(2,1) για κατανομή *ged*, προκύπτουν 38 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και 8 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. Συνεπώς, η 95% αξία σε κίνδυνο αποδίδει περισσότερες παραβιάσεις, γεγονός που καταδεικνύει την υποεκτίμηση του κινδύνου.

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Don't Reject VaR Model

Πίνακας 5.13: Τα αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για την αποδοχή ή απόρριψη του οικονομετρικού μοντέλου AR(1) - EGARCH(2,1) *ged* για τον S&P500

Εν κατακλείδι, τα κριτήρια ελέγχου του Christoffersen για το υπόδειγμα AR(1) - EGARCH(2,1) με τις λογαριθμικές αποδόσεις του S&P500 να ακολουθούν κατανομή *ged*, όπως και στη περίπτωση του οικονομετρικού μοντέλου AR(1) - EGARCH(2,1) με τις λογαριθμικές αποδόσεις να ακολουθούν κατανομή *t*-student, συνηγορούν ότι το μοντέλο είναι αξιόπιστο και αποδεκτό, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο. Η μόνη εξαίρεση είναι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων, *independency coverage test*, για την 95% αξία σε κίνδυνο, όπου αποτελεί όπως αναφέραμε και νωρίτερα ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απόρριψης του μοντέλου βάσει του συγκεκριμένου κριτηρίου ελέγχου αλλά συνολικής αποδοχής του λόγω των αποτελεσμάτων του συνδυαστικού *conditional coverage test*.

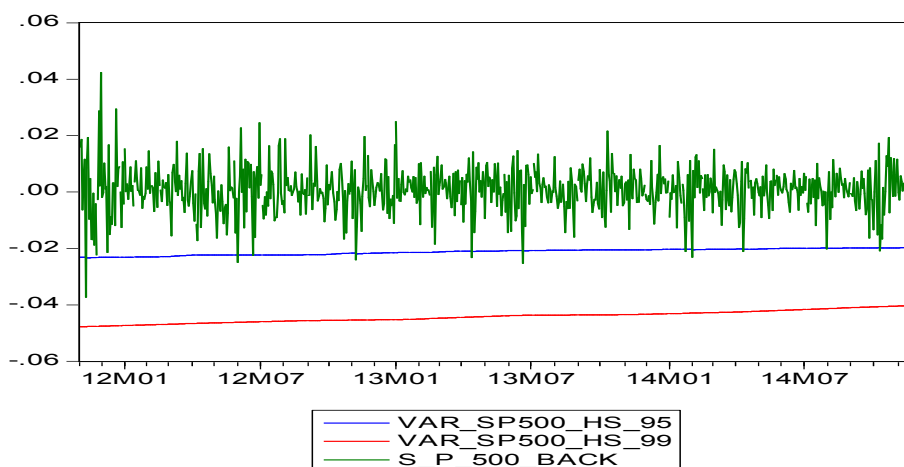
#### 5.4 Εκτίμηση του μέτρου αξία σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 σύμφωνα με τη μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998)

Έχοντας ολοκληρώσει στην προηγούμενη ενότητα την ανάλυσή μας όσον αφορά τα οικονομικά υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας και τη μεθοδολογία Risk Metrics, θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μη παραμετρικής μεθόδου υπολογισμού της VaR, της ιστορικής προσομοίωσης.

Όπως και στη περίπτωση της οικονομετρικής προσέγγισης έτσι και στη περίπτωση της ιστορικής προσομοίωσης χρησιμοποιούνται rolling windows εύρους 1747 παρατηρήσεων. Μόλις εκτιμηθεί η VaR της πρώτης ημέρας, μεταφέρεται το παράθυρο εκτίμησης μια θέση εμπρός και ακολουθεί η πραγματοποίηση νέων υπολογισμών για την εκτίμηση της VaR για την επόμενη ημέρα. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται συνεχώς, μέχρι να εκτιμηθούν οι προβλέψεις για τις out of sample παρατηρήσεις (δηλαδή πραγματοποιείται 770 φορές, ώστε να υπολογιστεί η VaR και για τις 770 ημέρες του out of sample δείγματος).

Στη συνέχεια, η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης ελέγχεται για την αποτελεσματικότητά της με βάση τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης (π.χ. 95% ή 99%). Τέλος, αφού έχει υπολογιστεί ο αριθμός των παραβιάσεων του μοντέλου διενεργείται backtesting με γνώμονα τα κριτήρια ελέγχου του Christoffersen (1998).

Ακολουθεί γράφημα στο οποίο απεικονίζονται από κοινού οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την εκτίμηση της αναμενόμενης VaR για διαστήματα εμπιστοσύνης 95% και 99%.



Σύμφωνα με το ανωτέρω διάγραμμα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι οι εκτιμήσεις του VaR και στα δύο διαστήματα εμπιστοσύνης ακολουθούν ευθεία γραμμή χωρίς να επηρεάζονται από τις διακυμάνσεις των αποδόσεων. Η διαγραμματική αυτή απεικόνιση αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ότι το μοντέλο της ιστορικής προσομοίωσης δεν είναι αποδεκτό. Βέβαια, για να αποφανθούμε εάν πράγματι το υπόδειγμα είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί προχωρήσαμε στην εφαρμογή των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen (1998). Τα αποτελέσματα του ελέγχου τα οποία συνοψίζονται στους δύο παρακάτω πίνακες έρχονται να επαληθεύσουν την αρχική μας παρατήρηση.

Historical Simulation			
5%		1%	
$T_0$	758	$T_0$	769
$T_1$	11	$T_1$	0
$T_{00}$	746	$T_{00}$	769
$T_{01}$	12	$T_{01}$	0
$T_{10}$	11	$T_{10}$	0
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0,014304291	$\pi$	0,00000001
$\pi_{01}$	0,015831135	$\pi_{01}$	0,00000001
$\pi_{11}$	0,000000001	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	28,38654185	$LR_{uc}$	15,45740116
$LR_{ind}$	- 8,027455093	$LR_{ind}$	0
$LR_{cc}$	20,35908675	$LR_{cc}$	15,45740116

Πίνακας 5.14: Έλεγχος των παραβιάσεων της 95% και 99% VaR για τον S&P500 με τη μέθοδο της ιστορικής προσομοίωσης

Όσον αφορά τους ελέγχους παραβιάσεων για την μέθοδο υπολογισμού του VaR, Historical Simulation, προκύπτουν 11 παραβιάσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και καμία παραβίαση σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

Πίνακας 5.15: Τα αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για την αποδοχή ή απόρριψη του μη παραμετρικού μοντέλου της ιστορικής προσομοίωσης για τον S&P500

Τα κριτήρια του Christoffersen έδειξαν τελικά ότι το μοντέλο αυτό δεν είναι αποδεκτό, τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο. Η μόνη εξαίρεση είναι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων, independency coverage test, όπου αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποδοχής του μοντέλου βάσει του συγκεκριμένου κριτηρίου ελέγχου αλλά συνολικής απόρριψης του λόγω των αποτελεσμάτων του συνδυαστικού conditional coverage test.

### 5.5 Υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο (VaR) για τον δείκτη S&P500 σύμφωνα με τη Θεωρία ακραίων τιμών (EVT) - Backtesting - Έλεγχος Christoffersen (1998)

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (EVT) επικεντρώνεται στην ουρά της κατανομής με αποτέλεσμα να δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα όπου χρειάζεται να γίνει πρόβλεψη ακραίων γεγονότων. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία της EVT, το μέτρο της αξίας σε κίνδυνο (VaR) εκτιμάται ανάλογα με τη μέθοδο με την οποία θα γίνει η επιλογή της ουράς των δεδομένων δηλαδή μέσω της *Block maxima* ή της *Peaks over Threshold*.

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις παρατηρήσεις του out of sample μέρους του δείγματος μας, εκτιμούμε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας τις παραμέτρους σχήματος  $\xi$ , μορφής  $\mu$  και κλίμακας  $\sigma$  της κατανομής. Για την block maxima (Μέθοδος Μεγίστων Υποσυνόλων), προσαρμόσαμε στη σειρά των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη S&P500 την κατανομή της Generalized Extreme Value (GEV), σύμφωνα με το πακέτο ExtRemes και Evir της R i386 3.0.0 ενώ για την μέθοδο του κατωφλίου (Peaks over Threshold), προσαρμόσαμε την κατανομή της Generalized Pareto (GPD), βρίσκοντας πρώτα ένα ιδανικό κατώφλι, με την βοήθεια του πακέτου ExtRemes και POT της R.

Ο καθορισμός του κατωφλίου  $u$  είναι πολύ σημαντικός διότι αν το κατώφλι είναι πολύ υψηλό τότε οι υπερβάσεις θα είναι λίγες ενώ αν είναι πολύ χαμηλό τότε η κατανομή των

αποδόσεων  $F_u$  δεν θα προσεγγίζει ικανοποιητικά την GPD. Συνεπώς, πρωταρχικό βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου Peaks over Threshold είναι ο καθορισμός του συγκεκριμένου κατώφλιου  $u$ . Η επιλογή του κατάλληλου  $u$  επιτυγχάνεται με τη χρήση της μέσης υπερβάλλουσας συνάρτησης του δείγματος (*sample mean excess function*). Ο εμπειρικός κανόνας είναι να διαλέγουμε το κατώφλι  $u$  έτσι ώστε να μας δίνει μια γραμμική σχέση μεταξύ της mean excess function και  $u$ . Με άλλα λόγια, επιλέγεται ως κατώφλι  $u$ , η τιμή μετά από την οποία μοιάζει να ευθυγραμμίζεται το γράφημα του μέσου υπολειπόμενου χρόνου (Mean Residual Plot). Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι αφού η κατανομή των αποδόσεων  $F_u$  προσεγγίζει καλά την GPD, η παράμετρος κλίμακας  $\sigma$  της κατανομής μεταβάλλεται γραμμικά ως προς τη  $u$  και η παράμετρος σχήματος  $\xi$  σταθεροποιείται.

Επομένως, έχοντας επιλέξει το κατάλληλο κατώφλι  $u$  και έχοντας εκτιμήσει τις παραμέτρους της GPD, η αξία σε κίνδυνο (VaR) υπολογίζεται ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης στο δείγμα των ακραίων ζημιών κατανομή της GPD, δηλαδή:

$$VaR = u - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left( 1 - \left( \frac{N_u}{n \cdot (1-p)} \right)^{\hat{\xi}} \right)$$

Αντίστοιχα, η αξία σε κίνδυνο (VaR) για την block maxima μέθοδο υπολογίζεται απλά ως ένα ποσοστημόριο της προσαρμοσμένης κατανομής Generalized Extreme Value (GEV), δηλαδή:

$$VaR = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \cdot \left[ 1 - (-n \cdot \ln(1-p))^{\hat{\xi}} \right], \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \ln(-n \cdot \ln(1-p)), \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Εν κατακλείδι, αφού υπολογίσαμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο (VaR) για την GEV και για την GPD, τις συγκρίναμε με τις λογαριθμικές αποδόσεις του S&P500 για να μπορέσουμε να ελέγξουμε σε πρώτη φάση τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση του S&P500 και σε δεύτερη φάση να εξετάσουμε εάν το μοντέλο μας είναι αξιόπιστο ή πρέπει να απορριφθεί βάσει των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen (1998), τα οποία αναλύονται όπως έχουμε ήδη αναπτύξει διεξοδικά νωρίτερα α) στο unconditional test, β) στο independence test και γ) στο conditional test.

Με βάση όλα τα παραπάνω, η προσαρμογή της GEV σύμφωνα με τα κριτήρια ελέγχου του Christoffersen, συνοψίζεται στους δύο παρακάτω πίνακες:

Generalized Extreme Value (GEV)			
5%		1%	
$T_0$	0.00000001	$T_0$	0.00000001
$T_1$	769	$T_1$	769
$T_{00}$	0.00000001	$T_{00}$	0.00000001
$T_{01}$	0.00000001	$T_{01}$	0.00000001
$T_{10}$	0.00000001	$T_{10}$	0.00000001
$T_{11}$	769	$T_{11}$	769
$\pi$	1	$\pi$	1
$\pi_{01}$	0.1	$\pi_{01}$	0.1
$\pi_{11}$	1	$\pi_{11}$	1
$LR_{uc}$	3682.118617	$LR_{uc}$	5466.623442
$LR_{ind}$	-5.1769E-09	$LR_{ind}$	-7.3249E-09
$LR_{cc}$	3682.118617	$LR_{cc}$	5466.623442

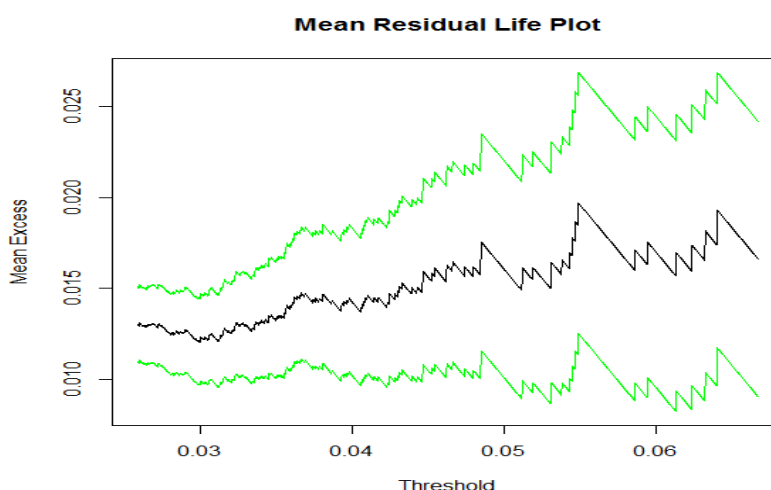
Πίνακας 5.16: Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο (VaR) με τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την προσαρμογή της GEV

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

Πίνακας 5.17: Αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την GEV

Τα κριτήρια ελέγχου του Christoffersen δείχνουν τελικά ότι η προσαρμογή της GEV καθιστά τις παραβιάσεις της αξίας σε κίνδυνο ένα συχνό φαινόμενο με αποτέλεσμα την απόρριψη του μοντέλου της Block maxima τόσο για την 95% όσο και για την 99% αξία σε κίνδυνο. Η μόνη εξαίρεση είναι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των παραβιάσεων, independency coverage test, όπου αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποδοχής του μοντέλου βάσει του συγκεκριμένου κριτηρίου ελέγχου αλλά συνολικής απόρριψης του λόγω των αποτελεσμάτων του συνδυαστικού conditional coverage test. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο στην 95% όσο και στην 99% αξία σε κίνδυνο, καμία από τις παρατηρήσεις δεν βρίσκεται κάτω από την εκτιμώμενη αξία σε κίνδυνο με αποτέλεσμα να θέσουμε  $T_0 = 0.000000001$  για την ευστάθεια των υπολογισμών.

Σε αντίστοιχα αποτελέσματα καταλήγουμε και με την προσαρμογή της Generalized Pareto Distribution κατά την εφαρμογή της μεθόδου Peaks over Threshold. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή θα πρέπει αρχικά να βρεθεί ένα κατάλληλο κατώφλι. Για την επιλογή του κατωφλίου χρησιμοποιούμε το γράφημα του μέσου υπολειπόμενου χρόνου (*Mean Residual Life Plot*).



**Διάγραμμα Mean Residual Plot για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500**

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα επιλέγεται ως κατώφλι το  $u=0.04$ , καθώς αποτελεί τη τιμή μετά από την οποία μοιάζει να ευθυγραμμίζεται το γράφημα του μέσου υπολειπόμενου χρόνου (*Mean Residual Life Plot*) δηλαδή μας δίνει μια γραμμική σχέση μεταξύ της *mean excess function* και  $u$ . Εναλλακτικά, η επιλογή του κατωφλίου επιτυγχάνεται και με την εντολή *findThreshold* του πακέτου της R, ExtRemes. Η συγκεκριμένη εντολή ορίζει το κατώφλι στην παρατήρηση πάνω από την οποία βρίσκεται το 5% των πιο ακραίων παρατηρήσεων. Συνεπώς, με την εντολή αυτή το κατώφλι για τη συγκεκριμένη χρονοσειρά του δείγματός μας, δηλαδή για τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500 θα είναι  $u=0.04162884$ .

Generalized Pareto (GPD)			
5%		1%	
$T_0$	751	$T_0$	758
$T_1$	18	$T_1$	11
$T_{00}$	733	$T_{00}$	746
$T_{01}$	18	$T_{01}$	12
$T_{10}$	18	$T_{10}$	11
$T_{11}$	0	$T_{11}$	0
$\pi$	0,023407022	$\pi$	0,014304291
$\pi_{01}$	0,023968043	$\pi_{01}$	0,015831135
$\pi_{11}$	0,000000001	$\pi_{11}$	0,000000001
$LR_{uc}$	14,14365115	$LR_{uc}$	28,38654185
$LR_{ind}$	0,86293213	$LR_{ind}$	-8,02745509
$LR_{cc}$	15,00658328	$LR_{cc}$	20,35908675

Πίνακας 5.18: Αναλυτικά αποτελέσματα σύγκρισης αποδόσεων των 95% και 99% αξιών σε κίνδυνο (VaR) με τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την προσαρμογή της GPD

Chi-test			
Significance	10%	Significance	10%
$LR_{uc}$	Reject VaR Model	$LR_{uc}$	Reject VaR Model
$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model	$LR_{ind}$	Don't Reject VaR Model
$LR_{cc}$	Reject VaR Model	$LR_{cc}$	Reject VaR Model

Πίνακας 5.19: Αποτελέσματα των κριτηρίων ελέγχου του Christoffersen για τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 με την GPD



Τα κριτήρια ελέγχου του Christoffersen και στην περίπτωση της Generalized Pareto Distribution συνηγορούν σε αρνητικό αποτέλεσμα ως προς την καταλληλότητα του μοντέλου Peaks over Threshold, καθώς το μοντέλο αποτυγχάνει να περάσει με επιτυχία από το συνδυαστικό έλεγχο (conditional test) και τον έλεγχο του αριθμού των παραβιάσεων (unconditional test).

Όπως γίνεται αντιληπτό από την παραπάνω ανάλυση, η θεωρία ακραίων τιμών δεν αποτελεί ένα κατάλληλο μοντέλο για την προσαρμογή των αποδόσεων του δείκτη S&P500 με καμία από τις δύο μεθόδους που την έχουμε αναπτύξει. Τα συμβατικά οικονομετρικά μοντέλα, δείχνουν να προσαρμόζονται καλύτερα πάνω στα δεδομένα του δείγματός μας. Επιπρόσθετα, η σειρά μας χαρακτηρίζεται από στασιμότητα, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις, με την έλευση μίας ξαφνικής ζημίας, shock, οι αποδόσεις δείχνουν να επιστρέφουν πίσω στην μέση τιμή τους, μην αφήνοντας κατά αυτόν τον τρόπο περιθώριο στην ανάπτυξη πολλών ακραίων παρατηρήσεων, στοιχείο απαραίτητο στην EVT έτσι ώστε να προσαρμοστεί κατάλληλα. Επίσης, η GPD δεν προσαρμόστηκε καλά δεδομένου ότι όσο και να θεωρούσαμε μικρότερα ποσοστημόρια ως ακραίες τιμές, για την εύρεση ενός καταλλήλου κατωφλιού, μέσω της απεικόνισης του mean residual plot, τα δεδομένα δεν αποτελούσαν τον επαρκή αριθμό έτσι ώστε η EVT να δώσει εκτιμήσεις που τα σφάλματά τους να ήταν μικρά. Εν κατακλείδι, βάσει των κριτηρίων του Christoffersen ο επανέλεγχος (backtesting) της EVT, καθώς και όλων των συγκρινόμενων με την EVT μοντέλων υπολογισμού αξίας σε κίνδυνο (VaR), έκρινε ότι τα οικονομετρικά EGARCH(2,1) δείχνουν να προσαρμόζονται καλύτερα.

## 5.6 Συμπεράσματα - Ανακεφαλαίωση

Στην παρούσα εργασία, έγινε μια προσπάθεια να περιγράψουμε τη μεθοδολογία εκτίμησης του κινδύνου αγοράς με τη μέθοδο VaR και αναλύσαμε τις κυριότερες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμησή της. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου, εξαρτάται από διάφορους παράγοντες σχετικούς με το είδος του χαρτοφυλακίου, το μέγεθος του δείγματος, το εύρος του χρονικού ορίζοντα για τον οποίο επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε προβλέψεις και την κατανομή των αποδόσεων. Για το λόγο αυτό, έγινε και εκτενής αναφορά στις πιο γνωστές μεθόδους, οι οποίες μπορούν να μας οδηγήσουν στην επιλογή του καλύτερου μοντέλου εκτίμησης. Παρά τη σπουδαιότητα του VaR ως μέτρου εκτίμησης του κινδύνου αγοράς, αποτελεί μόνο μια στατιστική εκτίμηση, η οποία βασίζεται συνήθως σε μια κατανομή ιστορικών χρονολογικών στοιχείων και δεδομένων. Αποτελεί δηλαδή μια πρόβλεψη, η οποία εκ φύσεως δεν είναι δυνατό να καθοριστεί με ακρίβεια μέσα σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 100%.

Οι μεθοδολογίες οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συγκεκριμένης αυτής πρόβλεψης μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες (Engle - Manganeli, 2001) τις παραμετρικές, τις μη παραμετρικές και τις ημι-παραμετρικές. Στη διεθνή βιβλιογραφία, τα πιο συνηθισμένα παραμετρικά μοντέλα για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο είναι η Μέθοδος Variance Covariance, η Μέθοδος του Εκθετικά Σταθμισμένου Κινούμενου Μέσου (Exponentially Weighted Moving Average), η Μέθοδος Προσομοίωσης

Monte Carlo, η Μέθοδος Risk Metrics και τα Οικονομετρικά υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (π.χ. GARCH, TARARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M). Στον αντίποδα, το πιο συνηθισμένο μη παραμετρικό και ημι-παραμετρικό μοντέλο είναι η ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation) και η Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory) αντίστοιχα.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας προχωρήσαμε σε αναλυτική αριθμητική εφαρμογή κάποιων εκ των παραπάνω μεθόδων χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη S&P500. Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά την κατηγορία των παραμετρικών μεθόδων παρουσιάσαμε κάποια από τα πιο διαδεδομένα οικονομικά υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (π.χ. GARCH, TGARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M) τα οποία παράγουν εκτιμήσεις της δεσμευμένης διακύμανσης από τις οποίες εξαρτάται άμεσα η εκτίμηση του μέτρου VaR. Στη συνέχεια, ακολούθησε η διαδικασία του Backtesting και ο έλεγχος Christoffersen (1998) προκειμένου να επαληθευτεί η αξιοπιστία των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμησή της VaR.

Αναλυτικότερα, για τα δεδομένα του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 μοντελοποιήσαμε τον δεσμευμένο μέσο των λογαριθμικών αποδόσεων χρησιμοποιώντας ένα AR(1) υπόδειγμα εξαιτίας της αυτοσυσχέτισης τους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε διαφορετικά μοντέλα GARCH για τον υπολογισμό του VaR (GARCH, TGARCH, IGARCH, EGARCH, GARCH-M) κάνοντας διαφορετικές υποθέσεις για την κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων και προχωρήσαμε σε διαδοχικές 1-day-ahead προβλέψεις του Value-at-Risk για 95% και 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τις τελευταίες 770 παρατηρήσεις του δείγματος μας. Το κάθε μοντέλο ελέγχθηκε για την αποτελεσματικότητα του με βάση τον αριθμό των περιπτώσεων που το εκτιμώμενο VaR ήταν μικρότερο από την πραγματική λογαριθμική απόδοση με τον έλεγχο Christoffersen (1998).

Επομένως, προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματος μας σε ένα IGARCH(1,1) μοντέλο, για την εφαρμογή του Risk Metrics υποδείγματος και σε EGARCH(2,1) για κανονική κατανομή, κατανομή t-student και κατανομή ged καταφέραμε αρχικά να υπολογίσουμε την 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και να ελέγξουμε τον αριθμό των περιπτώσεων που η εκτιμώμενη ημερήσια VaR ήταν μικρότερη από την πραγματική λογαριθμική απόδοση του S&P500.

Πιο διεξοδικά, προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα IGARCH(1,1) μοντέλο για την εφαρμογή της Risk Metrics για τον υπολογισμό της 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και πραγματοποιώντας τους ελέγχους των κριτηρίων του Christoffersen για την αξιολόγηση του μοντέλου, καταλήξαμε εν τέλει ότι το μοντέλο αυτό είναι αποδεκτό για την 95% αξία σε κίνδυνο καθώς και τα τρία κριτήρια ελέγχου συνηγορούν στην απόφαση αυτή. Ωστόσο, το αποτέλεσμα δεν παραμένει το ίδιο για την 99% VaR καθώς το μοντέλο δεν γίνεται αποδεκτό αφού αποτυγχάνει να περάσει με επιτυχία από το συνδυαστικό έλεγχο (conditional test) και τον έλεγχο του αριθμού των παραβιάσεων (unconditional test).

Στη συνέχεια, προσαρμόζοντας τα δεδομένα του δείγματός μας σε ένα AR(1) - EGARCH(2,1) οικονομικό μοντέλο όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 ακολουθούν την κανονική κατανομή, την t-student, την ged για τον υπολογισμό της 95% και 99% αξία σε κίνδυνο και πραγματοποιώντας τους ελέγχους των κριτηρίων του

Christoffersen καταλήξαμε ότι τα μοντέλα αυτά μπορούν να γίνουν αποδεκτά τόσο σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% όσο και σε 99%.

Στον αντίποδα, τα μοντέλα εκείνα τα οποία δεν αποτελούν ένα κατάλληλο μοντέλο για την προσαρμογή των αποδόσεων του δείκτη S&P500 είναι το μοντέλο της ιστορικής προσομοίωσης και τα υποδείγματα Block maxima και Peaks over Threshold της θεωρίας ακραίων τιμών καθώς αποτυγχάνουν να περάσουν με επιτυχία το συνδυαστικό conditional coverage test του Christoffersen.

Συνοψίζοντας, η συγκεκριμένη εμπειρική εφαρμογή μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι για VaR με 99% επίπεδο εμπιστοσύνης, τα μοντέλα για τα οποία είχαμε τα καλύτερα αποτελέσματα ήταν αυτά για τα οποία είχαμε κάνει την υπόθεση ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις ακολουθούν την generalized error distribution, δηλαδή ένα AR(1) - EGARCH(2,1) όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 ακολουθούν την ged κατανομή. Από την άλλη πλευρά, για VaR με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης το μοντέλο για τα οποία είχαμε τα καλύτερα αποτελέσματα ήταν ένα AR(1) - EGARCH(2,1) όπου οι λογαριθμικές αποδόσεις του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τέλος, παρατίθεται συνοπτικός πίνακας με όλα τα παραπάνω αποτελέσματα :

<b>Backtesting - VaR</b>	<b>5%</b>	<b>1%</b>
	<b>Πλήθος Παραβιάσεων</b>	
Risk Metrics	43	18
AR(1) - EGARCH(2,1) Normal	<b>31</b>	12
AR(1) - EGARCH(2,1) t-Student	40	9
AR(1) - EGARCH(2,1) ged	38	<b>8</b>

Εν κατακλείδι, θα πρέπει να επισημανθεί ότι από την υλοποίηση της ανωτέρω αριθμητικής εφαρμογής αναδεικνύεται η σημαντικότητα τόσο του Backtesting ως διαδικασία που συμπληρώνει τη μεθοδολογία εκτίμησης της VaR όσο και του ελέγχου του Christoffersen (1998) που επαληθεύει την αξιοπιστία των υποδειγμάτων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμησή της.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- (1) Πρόγραμμα στο Eviews για τον υπολογισμό της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 με τη μέθοδο της Ιστορικής Προσομοίωσης και την υλοποίηση του εκ των υστέρων ελέγχου (Backtesting).

**'in-sample observations'**

!s=1747

**'out-of-sample observations'**

!u=770

```
series var_sp500_hs_95
series var_sp500_hs_99
series result_sp500_hs_95
series result_sp500_hs_99
```

```
for !i=1 to !u
smpl @first @first+!s-1+!i-1
```

**'Calculating the VaR via Historical Simulation'**

```
var_sp500_hs_95(!s+!i) = @quantile(sp500, 0.05)
var_sp500_hs_99(!s+!i) = @quantile(sp500, 0.01)
```

**'Backtesting for Historical Simulation'**

```
if var_sp500_hs_95(!s+!i) > sp500(!s+!i) then
result_sp500_hs_95(!i) = 1
else
result_sp500_hs_95(!i) = 0
endif
```

```
if var_sp500_hs_99(!s+!i) > sp500(!s+!i) then
result_sp500_hs_99(!i) = 1
else
result_sp500_hs_99(!i) = 0
endif
next
```

- (2) Πρόγραμμα στην R για την εκτίμηση των παραμέτρων της GEV, τον υπολογισμό της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 με τη μέθοδο EVT - GEV και την υλοποίηση του εκ των υστέρων ελέγχου (Backtesting).

```
data<-read.table ("sp500_returns.txt", header=TRUE)

x<-data[[1]]

zp95<-NULL

zp99<-NULL

y<-NULL

ins=1747

os=770

r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for (i in 1:ins)
{
y[i]<-x[i]
}

for (j in 1:os)
{
y[ins+j]<-x[ins+j]

a<-gev.fit(y)

mu<-a$mle[1]

sigma<-a$mle[2]

x1<-a$mle[3]

## 95% VaR ##

p1=0.05

w=-log(-log(1-p1))

zp95[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))
```

```

## 99% VaR ##

p2=0.01

w=-log(-log(1-p2))

zp99[j]<-mu-sigma/x1*(1-exp(x1*w))

## Backtesting 95% VaR ##

if (zp95[j]>y[ins+j])

r95[j]<-1 else

r95[j]<-0

## Backtesting 99% VaR ##

if (zp99[j]>y[ins+j])

r99[j]<-1 else

r99[j]<-0

}

```

- (3) Πρόγραμμα στην R για την εκτίμηση των παραμέτρων της GPD, τον υπολογισμό της 95% και 99% αξίας σε κίνδυνο (VaR) των αποδόσεων του χρηματιστηριακού δείκτη S&P500 με τη μέθοδο EVT - GPD και την υλοποίηση του εκ των υστέρων ελέγχου (Backtesting).

```

data<-read.table("sp500_rtns.txt", header=TRUE)

x<-data[[2]]

vr95<-NULL

vr99<-NULL

y<-NULL

ins=1747

os=770

r95<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

r99<-matrix(0, ncol=1, nrow=os)

for (i in 1:ins)

```

```

    {
      y[i]<-x[i]
    }
  for (j in 1:os)
    {
      y[ins+j]<-x[ins+j]
      a<-gpd.fit(y,0.04)
      s<- a$mle[1]
      z<- a$mle[2]
      k<-length (y)
      ## 95% VaR ##
      p1=0.05
      v1<- (a$nexc[1]/k*(1-p1))^a$mle[2]
      vr95[j]<-a$threshold[1] - (a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v1)
      ## 99% VaR ##
      p2=0.01
      v2<- (a$nexc[1]/k*(1-p2))^a$mle[2]
      vr99[j]<-a$threshold[1] - (a$mle[1]/a$mle[2])*(1-v2)
      ## Backtesting 95% VaR ##
      if (vr95[j]>y[ins+j])
        r95[j]<-1 else
          r95[j]<-0
      ## Backtesting 99% VaR ##
      if (vr99[j]>y[ins+j])
        r99[j]<-1 else
          r99[j]<-0
    }

```

# Βιβλιογραφία

## I. Ελληνική βιβλιογραφία

1. Αργυρόπουλος Χ., (2010), "Σημειώσεις Χρηματοοικονομικής Οικονομετρίας", Πανεπιστήμιο Πειραιά, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστική Επιστήμης, σελ. 70-82,88-93,97-98.
2. Γεωργούτσος Δ., (2002), "Υπολογισμός Κινδύνων Αγοράς (market risk)", σημειώσεις μαθήματος, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΑΣΟΕΕ).
3. Δούμπος Μ., (2006), "Διαχείριση Χρηματοοικονομικών Κινδύνων και Value at Risk", Περιοδικό «Επιστημονικό Marketing», τεύχος Σεπτεμβρίου.
4. Δούμπος Μ., (2008), "Μαθηματικός Χρηματοοικονομικός Λογισμός", σημειώσεις μαθήματος, Πολυτεχνείο Κρήτης.
5. Ζοπουνίδης Κ., (1998), "Ανάλυση και διαχείριση χρηματοοικονομικών κινδύνων", εκδόσεις Κλειδάριθμος.
6. Καινούργιος Δ., "Value-at-Risk (VaR) Μεθοδολογία Εκτίμησης του Κινδύνου Αγοράς και VaR Παράγωγα Εργαλεία", Ένωση Ελληνικών Τραπεζών.
7. Κακούρης Θ., (2006), "Μέτρηση χρηματοοικονομικού κινδύνου με τη μέθοδο VaR και εφαρμογές", ΕΜΠ, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, σελ. 31, 80-81.
8. Κώτσου Σ., (2007), "Μεθοδολογία σύνθεσης χρηματιστηριακών μετοχικών χαρτοφυλακίων", ΕΜΠ, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, σελ. 90-91.
9. Μπούτσικας Μ., (2008), "Σημειώσεις διαλέξεων στη Θεωρία ακραίων τιμών", Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

## II. Ξένη βιβλιογραφία

1. Akgiray, V., (1989), "Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecast", *Journal of Business* 62, 55 - 80.
2. Angelidis, T Benos, A., Degiannakis, S., (2004), "The use of GARCH models in VaR estimation". *Statistical Methodology* Vol. 1, No. 2, 105 - 128.
3. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999), "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance* 9, 203 - 228.
4. Basak, S., and Shapiro, A., (2001), "Value-at-Risk-based risk management: Optimal policies and asset prices", *Review of Financial Studies* 14, 371 - 405.
5. Bali, T. G., (2003), "An extreme value approach to estimating volatility and value at risk", *Journal of Business* 76, 83 – 108.
6. Basel Committee on Banking Supervision (1996), "Supervisory Framework Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Risk Capital Requirements," Bank for International Settlements.



7. Basel Committee on Banking Supervision (2011a), "Revisions to the Basel II Market Risk Framework," Bank for International Settlements.
8. Beder, T., (1995), "VAR: seductive but dangerous", *Financial Analysts Journal* 51, 12 - 24.
9. Berkowitz, J. O'Brien, J., (2002), "How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks?", *Journal of Finance* 57, 1093 – 1112.
10. Bollerslev T., (1986), "Generalized autogressive conditional heteroscedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
11. Bredin, D. and Hyde, S., (2001), "FOREX Risk: Measurement and Evaluation using Value-at-Risk", Research Department, Central Bank of Ireland.
12. Brooks, C., and Persaud, G., (2003), "The effect of asymmetries on stock index return Value -at-Risk estimates", *The Journal of Risk Finance* (Winter), 29 - 42.
13. Butler, C., (1999), "*Mastering Value at Risk: A step by step Guide to Understanding and Applying VaR*", Prentice Hall.
14. Castellacci, C., Siclari, M.J., (2003), "The practice of Delta-Gamma VaR: Implementing the quadratic portfolio model", *European Journal of Operational Research* 150, 529 - 545.
15. Chiu, C., Chiang, S., Hung, J. and Chen, Y., (2006), "Clearing margin system in the futures market-Applying the value-at-risk model to Taiwanese data", *Physica A*, 353 - 374.
16. Chou, R. Y. (1988), "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 3, 279 - 294.
17. Christoffersen P. (November, 1998), "*Evaluating interval forecasts*", *International Economic Review*, Volume 39, No. 4, 841 - 848.
18. Christoffersen P., Diebold F., Schuermann T., (1998), "*Horizon Problem and Extreme Events in Financial Risk Management*", FRBNY Economic Review.
19. Christoffersen, P., Hahn, J., Inoue, A., (2001), "Testing and comparing value-at-risk measures", *Journal of Empirical Finance* 8, 325 - 342.
20. Christoffersen, P. (2003), "*Elements of Financial Risk Management*", Academic Press.
21. Coles S.G., (2001), "*An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*", 154 - 158.
22. Colletaz G., Hurlin C., Perignon C., (2012), "The Risk Map: A New Tool for Validating Risk Models", 1-41.
23. Culp et al., (1998), "Value at Risk: Uses and Abuses", *Journal of Applied Corporate Finance* 10 (Winter), 26 - 38.
24. Danielsson, J., De Vries, C.G., (2000). "Value-at-risk and extreme returns", *Annales d'Economie et de Statistique* No 60.
25. Davidson, R., MacKinnon, J., (1993), "*Estimation and Inference in Econometrics*", Oxford University Press, Oxford, New York, 701 - 715.
26. Dickey, D.A., Fuller, W.A., (1979), "Distributions of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of American Statistical Association* 74, 427 - 431.

27. Duan J.C., Simonato J.G., (2002), "Maximum Likelihood Estimation of Deposit Insurance Value with Interest Rate Risk", *Journal of Empirical Finance* 9 (1), 109 - 132.
28. Duffie, D and J.Pan, (1997), "An Overview of Value at Risk", *Journal of Derivatives* 4 (Spring), 7 - 49.
29. Embrechts P., Kluegelberg C., Mikosch T., (1997), "Modeling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer
30. Engle R.F. (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation", *Econometrica* 50, 987-1008.
31. Engle, R.F., Manganelli, S., (2001). "Value at Risk Models in Finance". European Central Bank Working Paper Series, ECB Working Paper No.75.
32. Engle, R.F., Manganelli, S., (2004), "CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles," *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 367 - 381.
33. Fama, E., (1965), "The Behavior of Stock-Market Prices," *Journal of Business* 38, 34 - 105.
34. Fisher, R. A., Tippett, L.H.C., (1928), "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*", 24, 180 - 190.
35. Fishman, G., (1996), "Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications", Springer - Verlag, New York.
36. Fresard, L., Perignon, C., Wilhelmsson, A., (2011)," The Pernicious Effects of Contaminated Data in Risk Management", 1-43.
37. Giot, P., Laurent, S., (2004). "Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models", *Journal of Empirical Finance* 11, 379- 398.
38. Glasserman, P., Heidelberger, P., Shahabuddin, P., (2000), "Variance reduction techniques for estimating Value-at-Risk", *Management Science* 46, 1349 - 1364.
39. Gnedenko B.V., (1943), "Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Serie Aleatoire", *Annals of Mathematics* 44, 423 - 453.
40. Guermat, C. and Harris, R.D.F, (2002), "Forecasting Value-at-Risk allowing for time variation in the variance and kurtosis of portfolio returns", *International Journal of Forecasting* 18, 409 - 419.
41. Hammerslay, J., Handscomb, D., (1964), "Monte Carlo Methods. John Wiley & Sons, New York.
42. Hendricks, D., (1996), "Evaluation of Value-at-Risk models using historical data", *Economic Police Review* 2, Federal Reserve Bank of New York, 39 - 70.
43. Hocking J.R.M., Wallis J.R., Wood E.F., (1985), "Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments", 252 - 253.
44. Hocking J.R.M., Wallis J.R., (1987), "Estimation of the Generalized Pareto Distribution".
45. Holton, G., (2003), "Value at Risk: Theory and Practice", Elsevier Academic Press.
46. Hull, J., White, A., (1998), "Incorporating Volatility updating into the Historical Simulation Method for VaR", *Journal of Risk*, 5 - 19.
47. Jackson et al., (1997), "Advances in Decision Analysis: From Foundations to Applications", 20 - 24, 453 - 454.

48. Jondeau, E. and Rockinger, M., (1999), "The tail behavior of stock returns: Emerging versus mature markets", Working Paper, HEC-School of Management, Department of Finance.
49. Jondeau, E. and Rockinger, M., (2003), "Testing for differences in the tails of stock-market returns", *Journal of Empirical Finance* 10, 559 - 581.
50. Jorion, P., (2000), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", 2nd edition, McGraw-Hill, New York.
51. Jorion, P., (2007), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", McGraw-Hill, 3rd Edition.
52. Kuester, K., Mittnik, S., Paolella, M.S., (2006). "Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies", *Journal of Financial Econometrics* 4, 53 - 89.
53. Kupiec, P., (1995), "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Models," *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
54. Lambadiaris, G.; Papadopoulou, L.; Skiadopoulos, G.; and Zoulis, Y., (2003), "VAR: history or simulation? ", *Risk* 16 (September), 122 - 127.
55. Lambert, P. and Laurent, S., (2000), "Modeling skewness dynamics in series of financial data", Discussion Paper, Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve.
56. Lambert, P. and Laurent, S., (2001), "Modeling financial time series using Garch - type models and a skewed student Density", Mimeo, Université de Liège.
57. Leon Li M.Y., William Lin H.W., (2004), "Estimating value-at-risk via Markov switching ARCH models - an empirical study on stock index returns", *Applied Economics Letters*, Volume 11, Issue 11, 679 - 691.
58. Letmark, M. and Ringstrom, M., (2006), "Robustness of Conditional Value-at-Risk (CVaR) for Measuring Market Risk", 7-16, 23-24, Stockholm School of Economics, Master's Thesis in Finance.
59. Linsmeier T, Pearson N., (1999), "Risk Metrics: An introduction to Value At Risk", University of Illinois an Urbana-Champaign.
60. Ljung, G. and Box, G., (1978), "On a Measure of lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, 66, 67-72.
61. Lopez, J., (1999b), "Methods for Evaluating Value-at-Risk Models," Reserve Bank of San Francisco Economic Review 2, 3-17.
62. Lopez, J., (1999), "Regulatory Evaluation of Value at Risk Models", *Journal of Risk* 1, Winter, 37-63.
63. Mandelbrot B., (1963b), "New Methods in Statistical Economics", *Journal of Political Economy* 71, 421 - 440.
64. McNeil A., Frey R., (2000), "Estimation of tail related measures for heteroskedasticity financial time series: an extreme value approach", *Journal of Empirical Finance*, 7, 271 - 300.
65. McNeil A., Frey R., Embrechts P., (2005), "Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools", 220 - 236, 264 - 269, 271 - 272, 275 - 280.
66. Minnich, M., (1998), "Vignettes on VaR", *Journal of Financial Engineering* 7:3/4, 289 - 309.
67. Mandelbrot B., (1963a), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business* 36, 394 - 419.

68. Moallemi, C. C., (2011), "An axiomatic approach to systemic risk", Working paper, Columbia University.
69. Morgan J.P. (1996), "*RiskMetrics: Technical Document (4<sup>th</sup> edition)*", J.P. Morgan & Co, New York.
70. Morgan J.P. (1999), "*RiskMetrics: Practical Guide (1<sup>st</sup> edition)* ", J.P. Morgan & Co, New York.
71. Moscadelli, M., (2004), "The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee", Bank of Italy, Banking and Finance Supervision Department July 2004, Technical Report, no 517.
72. Nelson, B., (1991), "Conditional Heteroskedasticity in asset Returns: A New approach ", *Econometrica* 59, 347-370.
73. Picoult, E. (1997), "*Calculating Value at Risk with Monte Carlo Simulation*", In Risk Management for Financial Institutions, Risk Publications, London, 73-92.
74. Poon, Rockinger, Tawn, (2004), "*Modeling Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, models and financial implications*", *The Review of Financial Studies* 17(2), 581 - 610.
75. Pritsker, M. (2006), "The Hidden Dangers of Historical Simulation," *Journal of Banking and Finance* 30, 561-582.
76. Risk Metrics TM - Technical Document, Morgan Guaranty Trust Company, Global research, New York, 1995.
77. Rubinstein, R., (1981), "*Simulation and the Monte Carlo Method*", John Wiley & Sons, New York.
78. Sarma, M.; Thomas S.; and Shah., A., (2003), "Selection of VaR models", *Journal of Forecasting* 22, 337-358.
79. Shiller R., Perron P. , (1985), "Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM," *Journal of Financial Economics*, 14, 327-348.
80. Singh, M., (1997), "*Value at Risk using Principal Component Analysis*", *Journal of Portfolio Management*, 24(1), 101-112.
81. Smith, R.L., (June, 1993), "*Multivariate Threshold Methods*", Departments of Statistics, Chapel Hill, North Carolina.
82. Taylor, J. W., (2005), "Generating Volatility Forecasts from Value at Risk Estimates," *Management Science*, 51, 712-725.
83. Tsay R. S., (2010), "*Willey Series in Probability and Statistics: Analysis of Financial Time Series*", Third Edition, 109 - 149, 363 - 365, Willey, Hoboken, New Jersey.
84. Van den Goorbergh, R.W.J. and Vlaar, P., (1999), "Value-at-Risk analysis of stock returns. Historical simulation, variance techniques or tail index estimation?", DNB Staff Reports 40, Netherlands Central Bank.
85. Wiener Zvi, (1997), "*Introduction to VaR (Value at Risk)*", Working Paper, Business School, The Hebrew University of Jerusalem.
86. Wu, P.T., Shieh, S., (2007), "Value-at-Risk analysis for long term interest rate futures: Fat-tail and long memory in return innovations", *Journal of Empirical Finance* 14, 248 - 259.
87. Zangari, P. (1996b), "*An Improved Methodology for Measuring VaR*", *Risk Metrics Monitor*, Second Quarter, 7-25.

## **Ιστότοποι**

<http://www.eviews.com>

<http://www.finance.yahoo.gr>

<http://www.en.wikipedia.org/wiki>

<http://www.capital.gr>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Extreme\\_value theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theory)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov Smirnov test](http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov_Smirnov_test)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Anderson-Darling test](http://en.wikipedia.org/wiki/Anderson-Darling_test)