ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Μη-Σύμμορφη Τοπική Προσαρμογή Πλέγματος για την Υπολογιστική Επίλυση Αεροδυναμικών Ροών

Διπλωματική Εργασία

Χρήστος Α. Γεωργιάδης

Επιβλέπων: Σπύρος Γ. Βουτσινάς, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2014

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εργασία αφορά στην ανάπτυξη και υλοποίηση μιας μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος για την υπολογιστική επίλυση αεροδυναμικών ροών. Υλοποιήθηκε για δισδιάστατα μη-δομημένα τετραγωνικά πλέγματα. Η υπολογιστική επίλυση των πεδίων ροής βασίζεται στη Μέθοδο Πεπερασμένων Όγκων. Η τεχνική που χρησιμοποιείται για την προσαρμογή εντάσσεται στα πλαίσια του h-refinement, βασίζεται δηλαδή στην τοπική προσθήκη ή αφαίρεση κόμβων από το πλέγμα. Ο χειρισμός νέων κόμβων πραγματοποιείται με μη-σύμμορφο τρόπο, παρέχοντας έτσι ευελιξία στην κατά το δοκούν πύκνωση ή αραίωση του πλέγματος στις περιοχές ενδιαφέροντος. Η επιλογή των περιοχών προς προσαρμογή γίνεται με την σύγκριση υπολογισθέντων μεγεθών για κάθε κελί με προεπιλεγμένα κριτήρια, κατά τη διάρκεια της προσομείωσης. Σκοπός είναι η βελτίωση της επίλυσης χωρίς την a priori γνώση των χαρακτηριστικών της ροής. Η μέθοδος πιστοποιείται με την επίλυση μόνιμων και μη-μόνιμων μη-συνεκτικών ροών, με τα αποτελέσματα να συγκρίνονται με αυτά αντίστοιχων προσομειώσεων χωρίς προσαρμογή ή με αποτελέσματα γνωστών απο τη βιβλιογραφία υπολογιστικών προσομειώσεων. Μελετώνται τέλος οι δυνατότητες και τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου προσαρμογής, καθώς και οι δυνατότητες βελτίωσής της.

National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Section of Fluids
Laboratory of Aerodynamics

Non-Conformal Local Mesh Adaptation for Computation of Aerodynamic Flows

Diploma Thesis

Christos A. Georgiadis

Supervisor: Spyros G. Voutsinas, Associate Professor NTUA

Athens, 2014

Abstract

This Diploma Thesis regards the development and implementation of a mesh adaptation technique for computation of aerodynamic flows. The method was implemented for two-dimensional unstructured quadrilateral meshes. The numerical computation of the flows is based on the Finite Volume Method. The utilized technique for adaptation lies within the framework of h-refinement techniques, thus is based in the insertion or extraction of computational points from the mesh. These new points are manipulated in a non-conformal way, thus providing the flexibility of refining or coarsening regions of interest at will. The selection of regions to adapt is done by the comparison of computed values for each cell with pre-selected refinement criteria, during the simulation. The objective is the improvement of the solution without a priori knowledge of the flow. The method is validated through the simulation of steady and unsteady inviscid flows, and the results are compared with equivalent non-adaptive simulations results or with well-known simulation results. Finally, we study the capabilities and advantages of this particular adaptation method , as well as the possibilities of its improvement.

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αισθάνομαι ιδιαίτερη ικανοποίηση που είχα την τύχη να ολοκληρώσω τις σπουδές μου σε αυτό το εξαιρετικά αναγνωρισμένο δημόσιο ανώτατο εκπαιδευτικό ίδρυμα.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Σπύρο Βουτσινά, όχι ως τυπική υποχρέωση αλλά ως αναγνώριση την ιδιαίτερης συμβολής του στην απόκτηση γνώσης στο πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο της Μηχανικής των Ρευστών. Ο κ. Βουτσινάς στο διάστημα της επίβλεψης της εργασίας μου, με ενέπνευσε και συνέβαλε όχι μόνο στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου αλλά και στην επιλογή μου να συνεχίσω την εξειδίκευση μου στον τομέα αυτό και μετά τις σπουδές μου στο ΕΜΠ.

Θερμότατες ευχαριστίες αποδίδω και στον υποψήφιο διδάκτορα κ. Γιώργο Παπαδάκη, ο οποίος βρέθηκε κάθε στιγμή δίπλα μου και με τις καίριες συμβουλές του καθώς και με την υποστήριξή του συνέβαλλε σημαντικά στην επιτυχή ολοκλήρωση της διπλωματικής μου. Δεν μπορώ δε να παραλείψω και τη συμβολή όλων των συνεργατών του εργαστηρίου Αεροδυναμικής που συμβάλλουν καθημερινά στη λειτουργία μια τόσο σημαντικής για την προώθησης της έρευνας δομής του ΕΜΠ.

Ευχαριστώ θερμά τους φίλους και συμφοιτητές μου με τους οποίους ζήσαμε μια άκρως ενδιαφέρουσα και αποδοτική από άποψη κτήσης γνώσεων και εμπειριών περίοδο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω, πάνω απ'όλα, τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράσταση και πολύπλευρη στήριξη που μου παρέχουν για την εκπλήρωση όλων των στόχων μου.

Αθήνα, Οκτώβριος 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας 1
1.2 Γενικά στοιχεία Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής 1
1.3 Παρουσίαση της αριθμητικής μεθόδου 3
1.3.1 Εξισώσεις επίλυσης 3
1.3.2 Χωρική διακριτοποίηση 4
1.3.3 Προσέγγιση των μεταβλητών στα σύνορα των κελιών 5
1.3.4 Υπολογισμός των συντηρητικών παροχών 7
1.3.5 Συνοριακές συνθήκες 9
1.3.6 Χρονική διακριτοποίηση 11

2 Προσαρμογή Πλέγματος **17**

2.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση 17
2.1.1 Περί του h-refinement 18
2.1.2 Σύμμορφη και μη-σύμμορφη προσαρμογή πλέγματος 20
2.2 Κριτήρια προσαρμογής 21

3 Επισκόπηση της Μεθόδου **23**

3.1 Βασικές αρχές 23
3.2 Παρουσιάση αλγορίθμου 24
3.3 Κριτήρια προσαρμογής 26
3.4 Παρεμβολή μεταβλητών 26

4 Αριθμητικές Προσομοιώσεις - Πιστοποίηση μεθοδου **29**

4.1 Μόνιμη, μη-συνεκτική ροή σε αεροτομή NACA 0012 29
4.1.1 Υπολογιστικό πλέγμα 30
4.1.2 Mach_∞=0.8 - AoA=1.25° 32
4.1.3 Mach_∞=0.85 - AoA=1° 37
4.1.4 Mach_∞=0.95 - AoA=0° 41
4.2 Ζεύγος δινών 45

4.3 Μη-μόνιμη, μη-συνεκτική ροή σε ταλαντούμενη αεροτομή NACA 0012 50

5 Συμπεράσματα **57**

5.1 Ανακεφαλαίωση 57
5.2 Συμπεράσματα 57
5.3 Προτάσεις για μελλοντική βελτίωση 59

Βιβλιογραφία **61**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός και διάρθρωση της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη και υλοποίηση μιας μεθόδου προσαρμογής (adaptation) του υπολογιστικού πλέγματος (mesh) για την επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής των Ρευστών. Εφαλτήριο για αυτή τη μελέτη αποτελεί η προσπάθεια αντιμετώπισης δύο εκ των σημαντικότερων εμποδίων στην επιδίωξη εύρεσης λύσης σε πολύπλοκα πεδία ροής· του χειρισμού περίπλοκων γεωμετριών και της ύπαρξης φαινομένων διαφορετικών κλιμάκων στη ροή. Επιχειρείται λοιπόν κατα την επίλυση η προσαρμογή (πύκνωση ή αραίωση) του πλέγματος , ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής. Η μέθοδος υλοποιήθηκε ως επέκταση του κώδικα MaPflow που αναπτύχθηκε στο Εργαστήριο Αεροδυναμικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes. Ο τελικός στόχος είναι η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων για διάφορες περιπτώσεις ροής, καθώς και η μελέτη των περαιτέρω δυνατοτήτων που μπορεί να προσφέρει αυτή η τεχνική.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία για την Υπολογιστική Ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamics - CFD) καθώς και η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιεί ο κώδικας MapFlow. Στο 2ο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη βιβλιογραφική επισκόπηση διαφόρων μεθόδων προσαρμογής πλέγματος και των χαρακτηριστικών τους. Εν συνεχεία, στο 3ο κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν οι βασικές αρχές και η λογική που διέπει την παρούσα μέθοδο προσαρμογής. Τέλος, τα αποτελέσματα των προσομειώσεων καθώς και η ανάλυση τους θα παρουσιαστούν στο 4ο κεφάλαιο.

1.2 Γενικά στοιχεία Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Αντικείμενο της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής είναι η αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που εκφράζουν μαθηματικά τα πεδία ροής ρευστών. Η αλματώδης αύξηση των δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς και οι εξελίξεις στην σχετική έρευνα

καθιστούν την υπολογιστική ρευστομηχανική, σε συνδυασμό με την πειραματική και την αναλυτική προσέγγιση, ένα σημαντικότατο εργαλείο για την επίλυση και ανάλυση προβλημάτων της μηχανικής των ρευστών. Προσφέρει δε αρκετά πλεονεκτήματα σε σχέση με τις άλλες δύο προσεγγίσεις, όπως:

- δυνατότητα χειρισμού πολύπλοκης φυσικής και γεωμετριας
- επίλυση μη-γραμμικών, χρονικά εξελισσόμενων προβλημάτων
- σημαντική μείωση του χρόνου και του κόστους επίλυσης
- δυνατότητα ανάλυσης σε συνθήκες που το πείραμα είναι δύσκολο ή και αδύνατον να πραγματοποιηθεί
- λεπτομερή παρατήρηση όλων των περιοχών και πρακτικά όλων των κλιμάκων του προβλήματος
- οπτικοποίηση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Η γενική διαδικασιά της υπολογιστικής επίλυσης ενός προβλήματος μπορεί να συνοψιστεί στα παρακάτω στάδια:

Προ-Επεξεργασία (Pre-Processing)

- Καθορισμός της γεωμετριας του προβλήματος.
- Πλεγματοποίηση (grid generation): Διαίρεση του υπολογιστικού χωρίου σε έναν αριθμό μικρότερων υποχωρίων, των υπολογιστικών κελιών (cells).
- Καθορισμός των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, καθώς και των ιδιοτήτων του ρευστού.
- Καθορισμός των αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Επιλυτής (Solver)

- Διακριτοποίηση των εξισώσεων.
- Επαναληπτική επίλυση των διακριτοποιημένων (αλγεβρικών) εξισώσεων.

Μετα-Επεξεργασία (Post-Processing)

- Ανάλυση και
- Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων.

Για μια πιο εκτενή και λεπτομερή ανάλυση του αντικειμένου παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφια [1],[2],[3],[4],[5],[6].

1.3 Παρουσίαση της αριθμητικής μεθόδου

1.3.1 Εξισώσεις επίλυσης

Το σύστημα εξισώσεων ολοκληρωμένο σε όγκο Ω με σύνορο $\partial\Omega$ έχει τη μορφή :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\vec{U}d\Omega + \oint_{\partial\Omega}(\vec{F_c}dS - \vec{F_v})dS = \int_{\Omega}\vec{Q}d\Omega \tag{1.1}$$

όπου $\vec{U}$,

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών,
$\vec{F_c}$,

$$\vec{F_c} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho(E + \frac{p}{\rho})V \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

το διάνυσμα των συντηρητικών γενικευμένων παροχών (Convective Fluxes) και $V = \vec{u}\cdot\vec{n}$,
$\vec{F_v}$,

$$\vec{F_v} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x\tau_x x + n_y\tau_x y + n_z\tau_x z \\ n_x\tau_y x + n_y\tau_y y + n_z\tau_y z \\ n_x\tau_z x + n_y\tau_z y + n_z\tau_z z \\ n_x\Theta_x + n_y\Theta_y + n_z\theta_z \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

το διάνυσμαα των συνεχτικών παροχων (Viscous fluxes) και :

$$\begin{aligned} \Theta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x} \\ \Theta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y} \\ \Theta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων κλείνει με την καταστατική εξίσωση για ιδανικό αέριο:

$$p = (\gamma - 1)\rho[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}] \tag{1.5}$$

1.3.2 Χωρική διακριτοποίηση

Η χωρική διακριτοποίηση αφορά στην αριθμητική προσέγγιση των συντηρητικών και των συνεκτικών παροχών καθώς και των πηγαίων όρων. Πολλές διαφορετικές μεθοδολογίες έχουν αναπτυχθεί για αυτό το σκοπό και άλλες ακόμα εξελίσσονται. Οι μεθόδοι αυτοί ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η διακριτοποίηση χωρίζονται σε:

- Μεθόδους πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference)
- Μεθόδους πεπερασμένων όγκων (Finite Volume)
- Μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element)

Επίσης ανάλογα με το πλέγμα στο οποίο γίνεται η επίλυση χωρίζονται σε:

- Μεθόδους δομημένων πλεγμάτων (Stuctured Grid)
- Μεθόδους μη-δομημένων πλεγμάτων (Unstructured Grid)

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων επιλέχτηκε η μέθοδος πεπερασμένων όγκων γιατί:

- Η χωρική διακριτοποίηση γίνεται στο φυσικό υπολογιστικό χωρίο.
- Μπορεί να εφαρμοστεί σε δοδημένα αλλά και σε μη-δομημένα πλέγματα.

Τέλος οι Μεθόδοι Πεπερασμένων Όγκων χωρίζονται σε :

- Cell-centered: Στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών του πλέγματος. Στην περίπτωση αυτή τα υπολογιστικά κελιά ταυτίζονται με αυτά του πλέγματος.
- Cell-vertex: Στις οποίες οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση το υπολογιστικό κελί ορίζεται απο κάποιον όγκο γύρω απο τον κόμβο του πλέγματος.

Τα κελιά ορίζονται στους κόμβους του πλέγματος ενώ οι μεταβλητές της ροής υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών (Finite Volume-Cell Centered Scheme). Θεωρώντας ότι ο όγκος των

κελιών δεν μεταβάλλεται με το χρόνο :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\vec{U}d\Omega = \Omega\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} \tag{1.6}$$

όπου :

$$\vec{U} = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\vec{U}_{exact}d\Omega \tag{1.7}$$

Συνεπώς η εξίσωση 1.1 γίνεται :

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega}[\oint_{\partial\Omega}(\vec{F}_c - \vec{F}_v)dS - \int_{\Omega}\vec{Q}d\Omega] \tag{1.8}$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση προσεγγίζεται απο το άθροισμα των παροχών στις επιφάνειες (faces) που συνιστούν το εκάστοτε κελί. Συνήθως θεωρείται οτι η παροχή παραμένει σταθερή πάνω σε μιά επιφάνεια και υπολογίζεται στο κέντρο της.

Η εξίσωση 1.8 για ένα κελί I γράφεται :

$$\frac{d\vec{U}_I}{dt} = -\frac{1}{\Omega_I}\underbrace{[\sum_{m=1}^{N_f}(\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m\Delta S_m) - (\vec{Q}\Omega)_I]}_{R_I} \tag{1.9}$$

όπου N_f είναι ο αριθμός των επιφανείων που περιγράφουν το κελί και ΔS_m είναι η επιφάνεια της πλευράς ”m”. Ο όρος R_I ονομάζεται υπόλοιπο (residual) με αποτέλεσμα η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης να γράφεται :

$$\frac{d\vec{U}_I}{dt} = -\frac{1}{\Omega_I}\vec{R}_I \tag{1.10}$$

1.3.3 Προσέγγιση των μεταβλητών στα σύνορα των κελιών

Η διακριτοποίηση των συντηρητικών παροχών (convective fluxes) αφορά την διαδικασία εύρεσης των παροχών στα σύνορα των κελιών. Οπως αναφέρθηκε στα Cell-centered σχήματα οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών (ρ, $\rho\vec{U}$, ρE), είναι γνωστές στα κέντρα των κελιών. Για να υπολογίστουν οι παροχές στα σύνορα των κελιών χρειάζεται να προσεγγίσουμε είτε τις τιμές των συντηρητικών μεταβλητών εκεί είτε τις τιμές των παροχών απευθείας.

Στη μέθοδο που αναπτύχθηκε υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών (πρωτογενών) στα σύνορα και στη συνέχεια υπολογίζονται οι παροχές. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανακατασκευή

των μεταβλητών (reconstruction).

Για να υπολογιστεί η τιμή στις επιφάνειες των κελιών χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα left και right states. Η χρήση αυτών έγκειται στο γεγονός οτι η παρεμβολή των μεταβλητών πάνω σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια του κελιού γίνεται 2 φορές: μία απο τα αριστερά και μία απο τα δεξιά της επιφάνειας και στη συνέχεια υπολογίζεται η παροχή διαμέσου της επιφάνειας.

Στη μέθοδο αυτή γίνεται η υπόθεση ότι η λύση είναι τμηματικά, γραμμικά κατανεμημένη στο πεπερασμένο όγκο. Τα left kai right states υπολογίζονται ως εξής:

$$\vec{W}_L = \vec{W}_I + \Psi_I(\nabla\vec{W}_I \cdot \vec{r}_L) \tag{1.11}$$

$$\vec{W}_R = \vec{W}_J - \Psi_J(\nabla\vec{W}_J \cdot \vec{r}_R) \tag{1.12}$$

οπού $\vec{W}$ είναι το διάνυσμα των πρωτογενών μεταβλητών:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ E \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

και $\vec{r}_L, \vec{r}_R$ είναι οι αποστάσεις τών κέντρων των κελιών από το κέντρο της κοινής επιφάνειας.

Σημαντικός παράγοντας στο παραπάνω σχήμα είναι ο υπολογισμός του $\nabla\vec{W}_I$ στις εξισώσεις 1.11,1.12. Ο υπολογισμός της παραγώγου γίνεται με την προσέγγιση του Green-Gauss. Η παράγωγος προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\nabla\vec{W} \approx \frac{1}{\Omega}\int_{\partial\Omega} \vec{W}\vec{n}dS \tag{1.14}$$

Στα Cell-centered σχήματα η παραπάνω εξίσωση διακριτοποιείται ως εξής:

$$\nabla\vec{W}_I \approx \frac{1}{\Omega}\sum_{J=1}^{N_f}\frac{1}{2}(\vec{W}_I + \vec{W}_J)\vec{n}_{IJ}\Delta S_{IJ} \tag{1.15}$$

Η συνάρτηση Ψ ειναι μια συνάρτηση που αποτρέπει τις μεταβλήτες να πάρουν ακραίες τιμές εκεί που εμφανίζονται ασυνέχειες. Αυτες οι συναρτήσεις ονομάζονται ”περιοριστές”(limiters).Στη

συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόστηκε ο limiter του Venkatakrishnan [7],[8], ο οποίος εφαρμόζεται στο ∇U και υλοποιείται ως εξής :

$$\Psi_i = min_j \begin{cases} \frac{1}{\Delta_2}[\frac{\Delta_{1,max}^2+\epsilon^2)\Delta_2+2\Delta_2^2\Delta_{1,max}}{\Delta_{1,max}^2+2\Delta_2^2+\Delta_{1,max}\Delta_2+\epsilon^2}] & \text{αν } \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{\Delta_2}[\frac{\Delta_{1,min}^2+\epsilon^2)\Delta_2+2\Delta_2^2\Delta_{1,min}}{\Delta_{1,min}^2+2\Delta_2^2+\Delta_{1,min}\Delta_2+\epsilon^2}] & \text{αν } \Delta_2 < 0 \\ 1 & \text{αν } \Delta_2 = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

όπου

$$\Delta_{1,max} = U_{max} - U_i \tag{1.17}$$

$$\Delta_{1,min} = U_{min} - U_i \tag{1.18}$$

Η παράμετρος ϵ^2 έχει στόχο να καθορίσει την αυστηρότητα του limiter.Στην περίπτωση που τεθεί 0 ο limiter γίνεται πολύ αυστηρός ενώ αν πάρει μεγάλες τιμές ο limiter επιστρέφει τιμές κοντά στη μονάδα(οπότε και δεν αλλάζει πολύ την τιμή των μεταβλήτων). Στην πράξη το ϵ ειναι ανάλογο της κλίμακας μήκους του πλέγματος.

$$\epsilon^2 = (K\Delta h)^3 \tag{1.19}$$

όπου το είναι ελεύθερη παράμετρος.

Δοκιμάστηκε και ο limiter των Barth και Jespersen [9], αλλά προτιμήθηκε ο πρώτος αφού ο δεύτερος παρουσιάζει μεγάλη αριθμητική διάχυση.

1.3.4 Υπολογισμός των συντηρητικών παροχών

Ο υπολογισμός των συντηρητικών παροχών γίνεται σύμφωνα με το σχήμα του Roe.
Καταρχάς υπολογίζονται οι κατά Roe μεταβλητές:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L\rho_R} \\ \tilde{u} &= \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{v} &= \frac{v_L\sqrt{\rho_L} + v_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{w} &= \frac{w_L\sqrt{\rho_L} + w_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_L\sqrt{\rho_L} + H_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{c} &= \sqrt{(\gamma-1)(\tilde{H} - \tilde{q}^2/2)} \end{aligned}$$

$$\tilde{q} = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2$$

Η παροχή στην επιφάνεια $I + \frac{1}{2}$ ορίζεται ως:

$$(\vec{F_c})_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\vec{F_c}(\vec{U_R}) + \vec{F_c}(\vec{U_L}) - |A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}}(\vec{U_R} - \vec{U_L})] \tag{1.20}$$

όπου:

$$|A_{Roe}|_{I+\frac{1}{2}}(\vec{U_R} - \vec{U_L}) = |\Delta\vec{F_1}| + |\Delta\vec{F_{2,3,4}}| + |\Delta\vec{F_5}| \tag{1.21}$$

$$|\Delta\vec{F_1}| = |\tilde{V} - \tilde{c}|(\frac{\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} - \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} - \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

$$|\Delta\vec{F_{2,3,4}}| = |\tilde{V}| \left\{ (\Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{q}^2/2 \end{pmatrix} + \tilde{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \Delta w - \Delta V n_z \\ \tilde{u}\Delta u + \tilde{v}\Delta v + \tilde{w}\Delta w - \tilde{V}\Delta V \end{pmatrix} \right\} \tag{1.23}$$

$$|\Delta\vec{F_5}| = |\tilde{V} + \tilde{c}|(\frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \\ \tilde{w} + \tilde{c}n_z \\ \tilde{H} + \tilde{c}\tilde{V} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L \tag{1.25}$$

Οι μεταβλητές στο left και right state υπολογίζονται όπως αναφερθήκε και προηγουμένως με Piecewise Linear σχήμα. Η παραπάνω διατύπωση επιτρέπει λύσεις που δεν είναι φυσικά σωστές και γι'αυτό εισάγεται η διόρθωση εντροπίας (entropy correction) του Harten [10],[10] στίς ιδιοτιμές του συστήματος:

$$|\Lambda_c| = \begin{cases} |\Lambda_c| & \text{αν } |\Lambda_c| > \delta \\ \frac{\Lambda_c^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{αν } |\Lambda_c| \leq \delta \end{cases} \tag{1.26}$$

όπου το $\delta = \frac{1}{10}c$

1.3.5 Συνοριακές συνθήκες

Οι Συνοριακές συνθήκες χωρίζονται σε:

- Συνοριακές συνθήκες τοίχου (Solid Wall)
- Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου (Farfield inflow/outflow)
- Συνοριακές συνθήκες συμμετρίας (Farfield inflow/outflow)
- Συνοριακές συνθήκες ανάμεσα σε blocks (Multiblock boundary conditions)

Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών χρησιμοποιούνται φανταστικά κελιά (dummy cells) τα οποία μεγαλώνουν το υπολογιστικό χωρίο,ώστε να γίνεται πιο εύκολα ο υπολογισμός των μεγεθών στα σύνορα.

Συνοριακές συνθήκες τοίχου(Solid Wall)

Οι συνοριακές συνθήκες τοίχου έχουν διαφορετική έκφραση στην περίπτωση του συνεκτικού και του μη-συνεκτικού ρευστού.

Στην περίπτωση του μή συνεκτικού ρευστού οι συνοριακές συνθήκες τοίχου εκφράζονται από τη συνθήκη μη εισχώρησης:

$$V = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ στον τοίχο} \tag{1.27}$$

Συνεπώς το διάνυσμα των συντηρητικών παροχών στον τοίχο γίνεται:

$$(\vec{F_c})_w = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x p_w \\ n_y p_w \\ n_z p_w \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

όπου p_w είναι η πίεση στον τοίχο.

Στην περίπτωση του συνεκτικού ρευστού η ταχύτητα στον τοίχο ειναι μηδενική (συνοριακή συνθήκη μη-ολίσθησης). Συνεπώς η συνοριακή συνθήκη στον τοίχο είναι:

$$u = v = w = 0 \text{ στον τοίχο} \tag{1.29}$$

Συνοριακές συνθήκες εισόδου/εξόδου

Ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών των συντηρητικών παροχών, η πληροφορία μεταφέρεται από ή προς τα έξω απο το υπολογιστικό χωρίο πάνω στις χαρακτηριστικές. Ο αριθμός των επιβαλλόμενων συνθηκών στο σύνορο πρέπει να είναι ίδιος με τον αριθμό των χαρακτηριστικών που εισέρχονται στο υπολογιστικό χωρίο. Οι υπόλοιπες συνθήκες υπολογίζονται απο την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

Η ροή μπορεί είτε να εισέρχεται είτε να εξέρχεται απο το υπολογιστικό χωρίο. Συνεπώς, ανάλογα με τον τοπικό αριθμό Mach, προκύπτουν 4 τύποι οριακών συνθηκών:

- Υπερηχητική είσοδος(Supersonic inflow)
- Υπερηχητική έξοδος(Supersonic ouflow)
- Υποηχητική είσοδος(Subsonic inflow)
- Υποηχητική έξοδος (Subsonic ouflow)

Υπερηχητική είσοδος : Σε αυτήν την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και άρα εισέρχονται στο χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται μόνο από την επερχόμενη ροή.

$$\vec{U}_{boundary} = \vec{U}_{freestream}$$

Υπερηχητική έξοδος : Σε αυτήν την περίπτωση όλες οι ιδιοτιμές έχουν το ίδιο πρόσημο και εξέρχονται απο το χωρίο. Συνεπώς οι συντηρητικές μεταβλητές στο σύνορο υπολογίζονται προεκβάλλοντας την υπάρχουσα λύση στο χωρίο.

$$\vec{U}_{boundary} = \vec{U}_{computational}$$

Υποηχητική είσοδος : Σε αυτήν την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εισέρχονται στο χωρίο και μία εξέρχεται. Συνεπώς μια χαρακτηριστική μεταβλητή υπολογίζεται στο σύνορο από το εσωτερικό του χωρίου.

$$
\begin{aligned}
p_b &= \frac{1}{2}\{p_a + p_d - \rho_0 c_0[n_x(u_a - u_d) + n_y(v_a - v_d) + n_z(w_a - w_d)\} \\
\rho_b &= \rho_a + (p_b - p_a)/c_0^2 \\
u_b &= u_a - n_x(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \\
v_b &= v_a - n_y(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \\
w_b &= w_a - n_z(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0)
\end{aligned}
$$

όπου το ρ_0, c_0 αναφέρονται στο εσωτερικό του χωρίου.

Υποηχητική έξοδος : Σε αυτην την περίπτωση, τέσσερις χαρακτηριστικές εξέρχονται από το χωρίο και μία εισέρχεται σε αυτο. Συνεπώς τέσσερις μεταβλητές υπολογίζονται από το εσωτερικό του χωρίου και μία (συνήθως η πίεση) επιβάλλεται εξωτερικά:

$$
\begin{aligned}
p_b &= p_a \\
\rho_b &= \rho_d + (p_b - p_d)/c_0^2 \\
u_b &= u_d + n_x(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \\
v_b &= v_d + n_y(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \\
w_b &= w_d + n_z(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0)
\end{aligned}
$$

Οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες υποθέτουν μηδενική κυκλοφορία το οποίο είναι λάθος για ένα ανωστικό σώμα. Γι αυτό το λόγο το εξωτερικό όριο πρέπει να βρίσκεται μακριά απο το σώμα. Η απόσταση του εξωτερικού ορίου μπορεί να μειωθεί σημαντικά, αν η επερχόμενη ροή περιστραφεί αναλογικά με την κυκλοφορία. Αυτή η διόρθωση ονομάζεται vortex correction.

1.3.6 Χρονική διακριτοποίηση

Για τη χρονική διακριτοποίηση εφαρμόζουμε τη μέθοδο των γραμμών (method of lines). Αυτό σημαίνει ότι ξεχωρίζουμε τη χωρική από τη χρονική διακριτοποίση οπότε καταλήγουμε σ'ένα σύστημα πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο για κάθε κελί :

$$
\frac{d(\Omega \bar{M} \vec{U})_i}{dt} = -\vec{R}_i \tag{1.30}
$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρέπει να ολοκληρωθεί στο χρόνο είτε για να πάρουμε τη λύση (στα μόνιμα προβλήματα) είτε για να αναπαράγουμε τη χρονική ιστορία

στα μή μονιμα προβλήματα. Για μη μεταβαλλόμενα πλέγματα η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{(\Omega\bar{M})_I}{\Delta t_I}\Delta\vec{U}_I^n = \frac{\beta}{1+\omega}\vec{R}_I^{n+1} - \frac{1-\beta}{1+\omega}\vec{R}_I^n + \frac{\omega}{1+\omega}\frac{(\Omega\bar{M})_i}{\Delta t_I}\Delta\vec{U}_i^{n-1} \tag{1.31}$$

όπου:

$$\Delta\vec{U}_I^n = \vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n \tag{1.32}$$

είναι η διόρθωση της λύσης. Το μητρώο $\bar{M}$ ειναι το λεγομένο μητρώο μάζας(mass matrix), το οποίο για τα προβλήματα που εξετάζονται είναι μοναδιαίο.

Ο καθορισμός του χρονικού βήματος είναι σημαντικός παράγοντας για την ευστάθεια του προβλήματος. Το μέγιστο χρονικό βήμα για κάθε κελί καθορίζεται από την παρακάτω σχέση :

$$\Delta t_I = \sigma\frac{\Omega}{(\hat{\Lambda}_c + 4\cdot\hat{\Lambda}_v)_I} \tag{1.33}$$

όπου τα $\hat{\Lambda}_c, \hat{\Lambda}_v$ είναι ένα άθροισμα των συντηρητικών και των συνεκτικών ιδιοτιμών των επιφανειών που αποτελούν το κελί. Αυτά ορίζονται σαν:

$$(\hat{\Lambda}_c)_I = \sum_{J=1}^{N_f}(|\vec{u}_{IJ}\cdot\vec{n}_{IJ}|+c_ij)\Delta S_{IJ} \tag{1.34}$$

$$(\hat{\Lambda}_v)_I = \frac{1}{\Omega_I}\sum_{J=1}^{N_f}[max(\frac{3}{3\rho_{IJ}},\frac{\gamma_{IJ}}{\rho_{IJ}})(\frac{\mu_L}{Pr_L}+\frac{\mu_T}{Pr_T})_{IJ}(\Delta S_{IJ})^2] \tag{1.35}$$

Έμεση Ολοκλήρωση στο χρόνο(Implicit Time-Stepping)

Υπάρχουν αρκέτα σχήματα έμμεσης ολοκλήρωσης στο χρόνο. Ενα έμμεσο σχήμα βάζοντας $\Omega = 0$ στην εξίσωση (1.31) και με $\beta = 1$ είναι :

$$\frac{(\Omega\bar{M})_I}{\Delta t)_I}\Delta\vec{U}_I^n = -\vec{R}_I^{n+1} - \vec{R}_I^n \tag{1.36}$$

Όπως φαίνεται και παραπάνω χρειάζονται οι τιμές των μεταβλητών στη χρονική στιγμή $(n+1)$. Για να υπολογιστεί το υπόλοιπο σε αυτή τη χρονική στιγμή γραμμικοποιείται γύρω από την τρέχουσα χρονική στιγμή:

$$\vec{R}_I^{n+1} \approx \vec{R}_I^n + (\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}})_I\Delta\vec{U}^n \tag{1.37}$$

όπου ο όρος $(\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}})_I$ είναι η ιακωβιανή των παροχών.

Αν εισάγουμε την ιακωβιανή των παροχών στην (1.36) και για $\bar{M} = 1$ παίρνουμε το ακόλουθο σχήμα :

$$\underbrace{[\frac{(\Omega)_I}{\Delta t_I} + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right)_I]}_{\text{implicit operator}} \Delta \vec{U}^n = -\vec{R}_I^n \tag{1.38}$$

Έμμεσος τελεστής(Implicit Operator)

Η ιακωβιανή των παροχών γράφεται ώς:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial (\vec{F}_c)_m}{\partial \vec{U}} \Delta S_m - \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial (\vec{F}_v)_m}{\partial \vec{U}} \Delta S_m - \frac{\partial (\Omega \vec{Q})}{\partial \vec{U}} \tag{1.39}$$

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι παροχές που αναφέρονται στην παραπάνω εξίσωση δεν είναι αναγκαστικά ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στη χωρική διακριτοποίηση αφού η ιακωβιανή επηρεάζει μόνο τη διόρθωση της λύσης.

Χρησιμοποιώντας τις παροχές κατά Roe και βάζοντας την ιακωβιανή των συνεκτικών παροχών μηδέν προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^n = & \sum_{m=1}^{N_f} \Delta S_m \{ (\bar{A}_c)_{L,m} \Delta \vec{W}_{L,m}^n + (\bar{A}_c)_{R,m} \Delta \vec{W}_{R,m}^n \\ & - \frac{\partial}{\partial \vec{W}_{L,m}} [|\tilde{A}_{Roe}|_m (\vec{W}_{R,m}^n - \vec{W}_{L,m}^n)] \Delta \vec{W}_{L,m}^n \\ & - \frac{\partial}{\partial \vec{W}_{R,m}} [|\tilde{A}_{Roe}|_m (\vec{W}_{R,m}^n - \vec{W}_{L,m}^n)] \Delta \vec{W}_{R,m}^n \} \end{aligned} \tag{1.40}$$

αν υποθέσουμε οτι τοπικά οι ιακωβιανές κατα Roe είναι σταθερές, τότε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \Delta \vec{U}^n \approx & \sum_{m=1}^{N_f} \Delta S_m \{ (\bar{A}_c)_{L,m} \Delta \vec{W}_{L,m}^n + (\bar{A}_c)_{R,m} \Delta \vec{W}_{R,m}^n \\ & - |\tilde{A}_{Roe}|_m (\Delta \vec{W}_{R,m}^n - \Delta \vec{W}_{L,m}^n)] \} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Μη-μόνιμες Ροές

Για τον υπολογισμό μη-μόνιμων ροών χρησιμοποιείται η τεχνική του dual time-stepping. Για $\beta = 1$ και $\omega = 1/2$ η εξίσωση (1.31) γίνεται:

$$\frac{3\Omega_I^{n+1}\vec{U}_I^{n+1} - 4\Omega_I^n\vec{U}_I^n + \Omega_I^{n-1}\vec{U}_I^{n-1}}{2\Delta t} = -\vec{R}_I^{n+1} \tag{1.42}$$

όπου το Δt είναι το φυσικό χρονικό βήμα. Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων εισάγεται η έννοια του ψευδοχρόνου. Στην πραγματικότητα το μη-μόνιμο πρόβλημα στον πραγματικό χρόνο μετατρέπεται σε ένα μόνιμο πρόβλημα στο ψευδοχρόνο. Κάνοντας την υπόθεση ότι:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\Omega_I^{n+1}\vec{U}^*) = -\vec{R}_I^*(\vec{U}^*) \tag{1.43}$$

όπου $\vec{U}^*$ είναι η προσέγγιση του $\vec{U}^{n+1}$ και t^* είναι η μεταβλητή του ψευδοχρόνου. Το μη-μόνιμο υπόλοιπο ορίζεται ώς:

$$\vec{R}_I^*(\vec{U}^*) = \vec{R}_I^*(\vec{U}^*) + \frac{3}{2\Delta t}\Omega_I^{n+1}\vec{W}_I^* - \vec{Q}_I^* \tag{1.44}$$

Όλοι οι όροι που παραμένουν σταθεροί κατά τη διάρκεια των ψευδοχρονικών βημάτων τοποθετούνται στον όρο πηγών:

$$\vec{Q}_I^* = \frac{2}{\Delta t}\Omega_I^n\vec{U}_I^n - \frac{1}{2\Delta t}\Omega_I^{n-1}\vec{U}_I^{n-1} \tag{1.45}$$

Όταν η λύση στον ψευδοχρόνο συγκλίνει τότε το υπόλοιπο $\vec{R}_I^*$ θα είναι μηδέν και $\vec{U}_I^* = \vec{U}_I^{n+1}$. Συνεπώς θα ικανοποιείται η αρχική εξίσωση.

Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των έμμεσων μεθόδων ολοκλήρωσης στο χρόνο η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\Omega_I^{n+1}\vec{U}^*) = -(\vec{R}_I^*)^{l+1} \tag{1.46}$$

όπου $(l+1)$ είναι το νέο ψευδοχρονικό βήμα. Ύστερα γίνεται γραμμικοποίηση του μη-μόνιμου υπόλοιπου στο ψευδοχρόνο:

$$(\vec{R}^*)^{l+1} \approx (\vec{R}^*)^l + \frac{\partial\vec{R}^*}{\partial\vec{U}^*}\Delta\vec{U}^* \tag{1.47}$$

με $\Delta\vec{U}^* = (\vec{U}^*)^{l+1} - (\vec{U}^*)^l$ και με την ιακωβιανή των παροχών να ορίζεται ώς:

$$\frac{\partial\vec{R}^*}{\partial\vec{U}^*} = \frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}} + \frac{3}{2\Delta t}\Omega^{n+1} \tag{1.48}$$

Με την εισαγωγή της γραμμικοποίησης στην αρχική εξίσωση παίρνουμε το έμμεσο αριθμητικό

σχήμα :

$$\left[(\frac{1}{\Delta t_I^*} + \frac{3}{2\Delta t})\Omega_I^{n+1} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}\right] \Delta \vec{U}^* == -(R_I^*)^l \tag{1.49}$$

όπου το Δt_I^* αναφέρεται στον ψευδοχρόνο (το οποίο διαφέρει από κελί σε κελί) και το Δt αναφέρεται στο πραγματικό χρονικό βήμα.

Κεφάλαιο 2

Προσαρμογή Πλέγματος

2.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή αναγκαία είναι, όπως έχει αναφερθεί, η δημιουργία ενός υπολογιστικού πλέγματος μέσω κατάτμησης του υπολογιστικού χωρίου σε μικρότερα μέρη (elements, cells) και επιλύοντας την διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων σε αυτά. Είναι προφανής λοιπόν η σημασία που έχουν τα χαρακτηριστικά του πλέγματος στην ακρίβεια και τη σύγκλιση της λύσης. Η αύξηση της επιθυμητής ακρίβειας, καθώς και η δυνατότητα αναγνώρισης φαινομένων σε περιοχές της ροής (κύματα κρούσης, οριακό στρώμα, υψηλή στροβιλότητα), απαιτεί λεπτότερα (finer) πλέγματα και κατα συνέπεια αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Ένας ενδεδειγμένος τρόπος για την αντιμετώπιση αυτού του μειονεκτήματος είναι η προσαρμογή του πλέγματος (mesh adaptation) ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της ροής.

Έχουν παρουσιαστεί αρκετές μεθοδοι προσαρμογής του πλέγματος στην σχετική βιβλιογραφία, τις οποίες μπορούμε να συνοψίσουμε στις εξής κύριες κατηγορίες:

h-refinement [12]-[26]

Η διαδικασία της προσαρμογής του πλέγματος γίνεται με την προσθήκη ή αφαίρεση κόμβων (μέσω διαίρεσης κελιών) στις περιοχές ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, χωρίς αλλαγές στο υπόλοιπο πλέγμα. Σε αυτή την κατηγορία ανήκει και η μέθοδος της παρούσας εργασίας.

r-refinement [27]-[32]

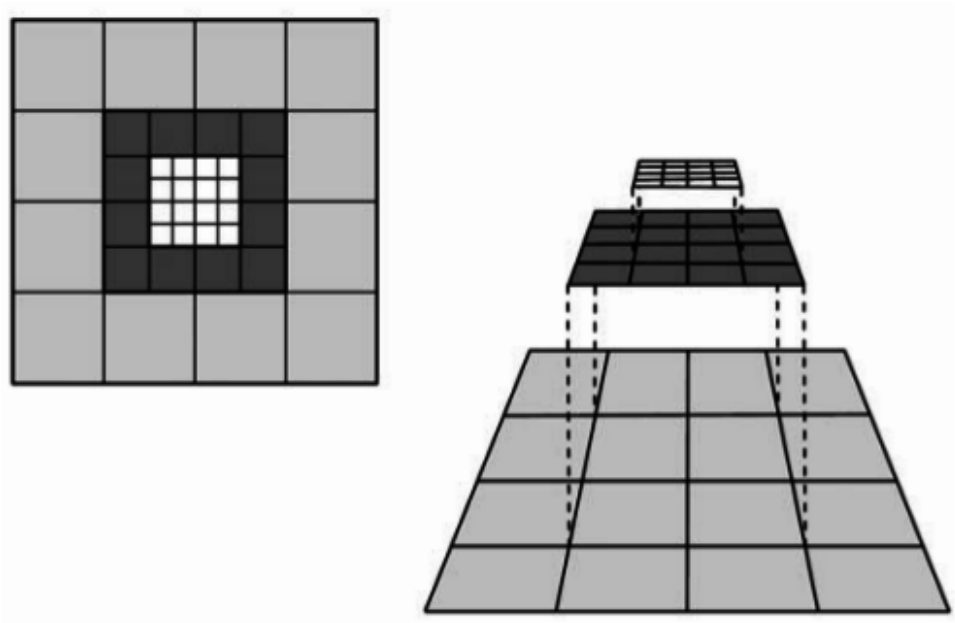
Ο αριθμός των κόμβων παραμένει ίδιος και μεταβάλλεται η διανομή τους στο υπολογιστικό χωρίο. Είναι μια προσέγγιση που στερείται γενικότητας [12], είδικα για 3-D γεωμετρίες. Επίσης, καθώς ο αριθμός των κόμβων παραμένει ίδιος, μπορεί να μην είναι δυνατό να επιτευχθεί η ζητούμενη ακρίβεια

p-refinement

Αλλαγή της τάξης της διακριτοποίησης για κάθε στοιχείο ή κελί. Χρησιμοποείται κυρίως στο πλαίσιο της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method, FEM).

Υβριδικές μέθοδοι

Υβριδικές μέθοδοι που συνδυάζουν τις παραπάνω, όπως για παράδειγμα η μέθοδος h-p [33],[34],[35] για πεπερασμένα στοιχεία, ή μεθοδοι h-r [36],[37],[38].



Σχήμα 2.1: *Επίπεδα refinement σε δομημένο (structured) πλέγμα*

2.1.1 Περί του h-refinement

Καθώς στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του h-refinement, θα ήταν χρήσιμη μια παρουσιάση των πλεονεκτημάτων του:

- Στοχευμένη πύκνωση ή αραίωση του πλέγματος αναλόγως την περίπτωση.
- Σαφής και άμεσα εφαρμόσιμος αλγόριθμος.
- Δεν απαιτείται a priori γνώση χαρακτηριστικών της ροής.
- Ο κώδικας λειτουργεί αυτόνομα, χωρίς την ανάγκη αλλαγών από το χρήστη κατά τη διάρκεια της επίλυσης.
- Δυνατότητα παραλληλοποίησης του κώδικα.

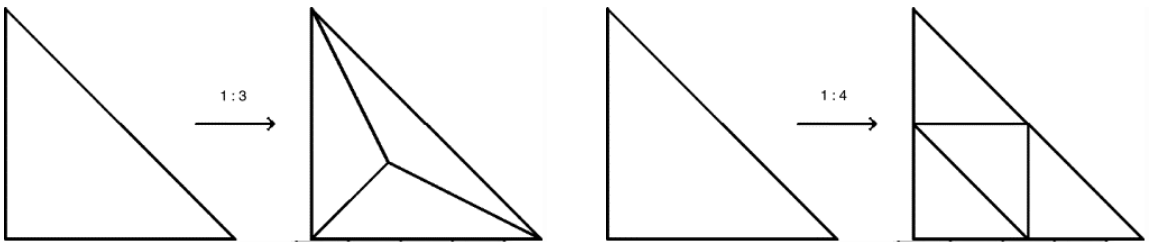
Οσον αφορά τις τεχνικές προσαρμογής και επίλυσης στα πλαίσια του h-refinement, μπορούν να χωριστούν στις δύο παρακάτω κατηγορίες, με την μέθοδο της παρούσας εργασίας να εντάσσεται στη δεύτερη.

Adaptive Mesh Refinement [12]-[15]

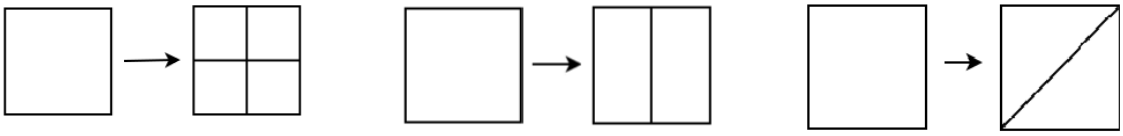
Το κύριο χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι η επικάλυψη των περιοχών προς refinement με λεπτότερα υποπλέγματα, κατα κύριο λόγο ορθογωνικά. Ξεκινώντας από ένα αρχικό, coarse πλέγμα και επιλύοντας τις εξισώσεις του προβλήματος σε αυτό, επιλέγονται με βάση προκαθορισμένα κριτήρια (refinement criteria) τα κελιά προς διαίρεση. Εν συνεχεία, κατασκευάζονται λεπτότερα ορθογωνικά πλέγματα (patches) που περιέχουν τα κελιά αυτά, έχοντας ώς αρχικές και συνοριακές συνθήκες την παρεμβολή της λύσης του προηγούμενου επίπεδου πλέγματος (coarser grid). Σαφώς τα λεπτότερα πλέγματα μπορούν να γίνουν περαιτέρω refined μέχρι ενός επιθυμητού σημείου. Η επιλύση γίνεται σε κάθε βήμα για όλα τα επίπεδα refinement (coarser to finer) με κατάλληλες παρεμβολές μεταξύ τους. Αυτή η διαδικασία σύζευξης είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλοι αλγόριθμοι για την διατήρηση της συνέχειας της λύσης και την επίτευξη της συντηρητικής ιδιότητας. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι την επίτευξη της επιθυμητής σύγκλισης. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η μέθοδος θεωρείται σχετικά απλή στην υλοποίησή της, καθώς δεν απαιτεί σημαντικές αλλαγές στην δομή των δεδομένων, τα σχήματα διακριτοποίησης ή τη μέθοδο επίλυσης των εξισώσεων.

Local Mesh Refinement [15]-[26]

Σε αυτή τη μέθοδο, αντί για την δημιουργία νέων λεπτότερων πλεγμάτων, γίνεται διαίρεση των κελιών που ικανοποιούν τα προκαθορισμένα κριτήρια. Αναλόγως των τύπο των κελιών υπάρχουν διάφοροι τρόποι διαίρεσης τους (σχήματα 2.2, 2.3). Το νέο πλέγμα που δημιουργείται μετά το refine αντιμετώπιζεται ως ενιαίο, χωρισμένο σε έναν αριθμό blocks (block-structured grid). Απαιτούνται βέβαια ανάλογα την περίπτωση κατάλληλες μετατροπές στο σχήμα διακριτοποίησης αλλά και στη δομή των δεδομένων για τον επιτυχή χειρισμό του νέου refined πλέγματος. Η επίλυση σε ένα μόνο πλέγμα για κάθε βήμα καθώς και η στοχευμένη βελτίωση του πλέγματος σε συγκεκριμένες περιοχές με τον ελάχιστο αριθμό νέων κελιών, καθιστούν αυτην την μέθοδο μια ελκυστική εναλλακτική στο AMR.



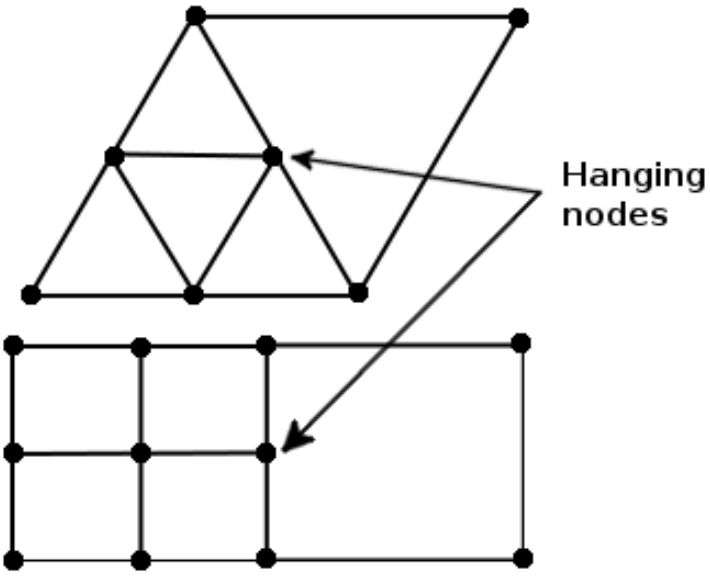
Σχήμα 2.2: *Περιπτώσεις διαίρεσης σε τριγωνικά κελιά*



Σχήμα 2.3: *Περιπτώσεις διαίρεσης σε τετραγωνικά κελιά*

2.1.2 Σύμμορφη και μη-σύμμορφη προσαρμογή πλέγματος

Όπως αναφέρθηκε, κατα την προσαρμογή του πλέγματος με h-refinement προστίθενται νέοι κόμβοι στο πλέγμα. Υπάρχουν δύο στρατηγικές για την τοποθέτηση των νέων αυτών κόμβων. Είτε με σύμμορφη (conformal), είτε με μή-σύμμορφη (non-conformal) προσαρμογή. Στην πρώτη περίπτωση, μέσω κατάλληλων χειρισμών, οι νέοι κόμβοι βρίσκονται στις γωνίες των στοιχείων, με κάθε κόμβο να είναι κοινός σε 2 η περισσότερες έδρες (faces) των κελιών. Η τεχνική αυτή βρίσκει κατα κύριο λόγο εφαρμογή σε τριγωνικά (ή τετραεδρικά στις 3 διαστάσεις) πλέγματα [39]. Στην δεύτερη περίπτωση, που είναι και αυτή που χρησιμοποιήθηκε, η διαίρεση των κελιών μπορεί να δημιουργήσει τους λεγόμενους ελέυθερους κόμβους (hanging nodes) στην επαφή κελιών διαφορετικού επιπέδου πύκνωσης (σχήμα 2.4). Καθώς αυτή η τακτική μεταβάλει των αριθμό εδρών σε συγκεκριμένα κελιά είναι απαραίτητο να υπάρχει η κατάλληλη ανακατασκευή των παροχών (fluxes) και η δυνατότητα χειρισμού απο τον κώδικα των πολυεδρικών πλέων κελιών.



Σχήμα 2.4: *Hanging nodes σε τριγωνικά και τετραγωνικά κελιά*

2.2 Κριτήρια προσαρμογής

Μια πολύ σημαντική παράμετρος για την επιτυχία μιας μεθόδου προσαρμογής είναι η αναγνώριση των περιοχών στις οποίες απαιτείται μεταβολή (πύκνωση ή αραίωση) του πλέγματος. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούνται κατάλληλα κριτήρια προσαρμογής. Υπολογίζοντας τις τιμές συγκεκριμένων μεγεθών για κάθε κελί, ο αλγόριθμος αποφασίζει σύμφωνα με τα προκαθορισμένα κριτήρια έαν το κελί είναι προς πύκνωση ή αραίωση.

Καθώς ο κύριος στόχος είναι η μείωση του σφάλματος, μια προφανής επιλογή είναι κάποιο κριτήριο βασισμένο σε μια τοπική εκτίμηση του σφάλματος. Εκτός τούτου, σε αρκετές περιπτώσεις θέλουμε την εύρεση περιοχών της ροής ιδιαίτερου ενδιαφέροντο όπως για παράδειγμα κύματα κρούσης ή οριακά στρώματα. Καθώς αυτά τα φαινομένα συνοδεύονται απο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, μπορούμε να βασίσουμε τις συναρτήσεις επιλογής σε αυτά. Έτσι για παράδειγμα τα κύματα κρούσης μπορούν να αναγνωριστούν από ένα κριτήριο που λαμβάνει υπόψη την διαφορά μεγεθών όπως η πίεση, η πυκνότητα ή ο αριθμός Mach μεταξύ γειτονικών κελιών. Το οριακό στρώμα σχετίζεται με την περιστροφή της ροής, άρα μπορεί να αναγνωριστεί με βάση τη στροβιλότητα. Η απόκλιση της ταχύτητας μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί, όντας μέτρο της συμπιεστότητας της ροής. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται διάφορα κριτήρια, καθώς και τα πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα τους, σύμφωνα με την έρευνα του Zeeuw [23]:

Criterion	Strength	Weakness
$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto \lvert\triangle\rho\rvert$	find shocks and contacts well	direction dependent, misses shear layers completely
$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto \lvert\triangle p\rvert$	finds shocks well	direction dependent, misses shear layers and contacts completely
$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto \lvert\triangle q\rvert$	best of simple undivided difference criteria, does well for flows with shocks and shears	direction dependent, has trouble with expansions and features of different strength, misses contacts completely
$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto l_i^2 \left(\left\lvert\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right\rvert + \left\lvert\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}\right\rvert + \left\lvert\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right\rvert \right)$	direction independent, detects contacts and shocks well	expensive to compute, has trouble with features of different strength, misses shear layers

$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto l_i \lvert\nabla \times \mathbf{u}\rvert$	direction independent, very effective in locating shears	misses shocks and contacts
$\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto l_i \lvert\nabla \cdot \mathbf{u}\rvert$	direction independent, very effective in locating shocks	misses shears and contacts
Combination of $\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto l_i \lvert\nabla \times \mathbf{u}\rvert$, $\lvert\tilde{\epsilon}_i\rvert \propto l_i \lvert\nabla \cdot \mathbf{u}\rvert$	combines best of curl and divergence, effectively locates all important flow features	a little more work to compute misses contacts

Κεφάλαιο 3

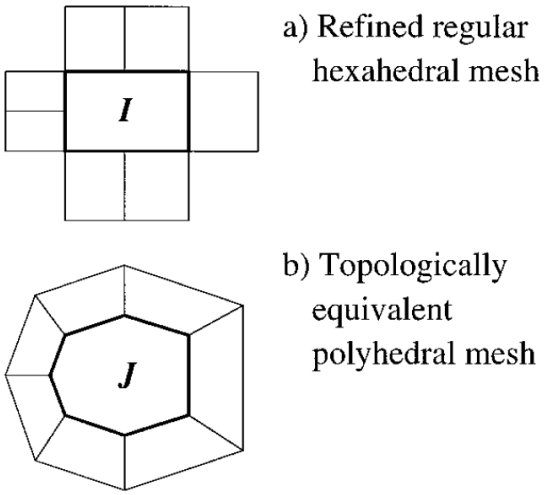
Επισκόπηση της Μεθόδου

3.1 Βασικές αρχές

Αρκετά απο τα χαρακτηριστικά της μεθόδου που ακολουθήθηκε έχουν ήδη αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ανακεφαλαιώντας, βασίζεται στην προσθήκη (ή αφαίρεση) κόμβων και κελιών στο υπολογιστικό πλέγμα για την βέλτιστη επίλυση του προβλήματος. Αναπτύχθηκε για δισδιάστατα μη-δοδημένα (unstructured) τετραγωνικά πλέγματα. Βεβαίως είναι πολύ σημαντική η καλή ποιότητα του αρχικού πλέγματος για την επιτυχία της μεθόδου. Η υλοποίηση της μεθόδου έγινε με τη χρήση τού κώδικα MaPflow που επιλύει τις εξισώσεις Navier-Stokes σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο 1ο κεφάλαιο.

Η διαίρεση των κελιών έγινε ισότροπα (1η περίπτωση, σχήμα 2.3) χωρίζοντας το κάθε κελί σε τέσσερα καινούρια με βάση τα μέσα των απέναντι πλευρών. Διατηρείται έτσι το aspect ratio των κελιών, χωρίς όμως να αποτελεί τη βέλτιστη λύση για τον χειρισμό ανισοτροπικών περιοχών της ροής, όπως για παράδειγμα το οριακό στρώμα. Καθώς προχωράει η διαδικασία της προσαρμογής δημιουργούνται κελιά με αυθαίρετο αριθμό εδρών/πλευρών, τοπολογικά αντίστοιχων με πολύεδρα (σχήμα 3.1). Παρ'όλα αυτά ο κώδικας υπολογίζει τις παροχές με τον ίδιο τρόπο για όλα τα faces και χρησιμοποιεί cell-centered προσέγγιση, οπότε δεν χρειάστηκε κάποια μετατροπή στον επιλυτή. Υπάρχει δηλαδή η δυνατότητα χειρισμού κελιών με αυθαίρετο αριθμό εδρών, χωρίς να χρειάζεται να μας απασχολήσει η παρουσία των ελέυθερων κόμβων.

Όσον αφορά τη διαδικασία αραίωσης, στην σχετική βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται κατα κύριο λόγο κατάλληλες δομές δεδομένων για τη συσχέτιση των κελιών-γονέων με τα κελιά-απογόνους. Αυτό δίνει την δυνατότητα άμεσης αναδρομικής πορείας πύκνωσης, καθώς στην περίπτωση που μια τετράδα απογόνων έχει σημανθεί προς αραίωση (coarsening) μετατρέπεται άμεσα στο κελί-γονέα. Αντ'αυτού χρησιμοποιήθηκε μια μέθοδος εύρεσης γειτονικών τετράδων προς αραίωση, που έχουν κοινό κόμβο και είναι ίδιου επιπέδου refinement. Αυτή η προσέγγιση μπορεί μεν να έχει μια μεγαλύτερη γενικότητα, αλλά έχει το μειονέκτηματα της μη άμεσης



Σχήμα 3.1: *Τοπολογική αντιστοιχία κελιών διαφορετικού σχήματος [22]*

αραίωσης.

Τέλος, επιβλήθηκε ο περιορισμός η διαφορά επιπέδου refinement μεταξύ γειτονικών κελιών να μήν είναι μεγαλύτερη του 1 (1-irregular node constraint [40]). Δηλαδή απαγορεύεται η ύπαρξη περισσοτέρων του ενός ελευθέρων (hanging) κόμβων στην διεπαφή δυο κελιών. Αυτό εξασφαλίζει την ομαλότητα του πλέγματος, ιδιότητα πολύ σημαντική για την ποιότητα της λύσης. Ο περιορισμός αυτός επιβάλλεται σε δύο περιπτώσεις κατα την προσαρμογή του πλέγματος:

- Κατα τη διάρκεια της πύκνωσης, σε περίπτωση που έχει σημανθεί ένα κελί 2 επίπεδα refinement μεγαλύτερο απο το γειτονικό, τότε σημαίνεται προς πύκνωση και το γειτονικό αυτό κελί.
- Κατα τη διάρκεια της αραίωσης, εάν είναι προς αραίωση κελί το οποίο είναι μικρότερου επιπέδου refinement απο γειτονικό του, ακυρώνεται η σήμανση του προς αραίωση.

3.2 Παρουσιάση αλγορίθμου

Η διαδικασία προσαρμογής πλέγματος υλοποιήθηκε και προστέθηκε στον κώδικα σε ξεχωριστή αυτόνομη υπορουτίνα. Ο χρήστης επιλέγει ανά πόσα βήματα θα καλείται η διαδικασία του refinement, τα κριτήρια προσαρμογής και επιθυμητούς περιορισμούς στο επιτρεπομένο επίπεδο refinement ή στο μέγιστο επιτρεπόμενο μέγεθο πλέγματος. Στο πλαίσιο της υπορουτίνας οι διαδικασίες της πύκνωσης και αραίωσης του πλέγματος λειτουργούν αυτόνομα, παρέχοντας τη δυνατότητα επιλογής μόνο για πύκνωση ή μόνο για αραίωση. Μετά το πέρας της προσαρμογής του πλέγματος η επίλυση συνεχίζεται στο επόμενο βήμα με το νέο πλέον πλέγμα.

Συνοψίζοντας, τα βήματα του αλγορίθμου είναι:

1. Είσοδος στην υπορουτίνα ανάλογα με το χρονικό βήμα.
2. Υπολογισμός συναρτήσεων κρίσεως για κάθε κελί.

Πύκνωση (Refinement) πλέγματος

3. Επιλογή των κελιών προς πύκνωση.
4. Εύρεση γειτονικών κελιών προς refinement για την ικανοποιήση του περιορισμού 1-irregular node.
5. Επαναπροσαρμογή των δομών δεδομένων του πλέγματος για την δημιουργία και αποθήκευση των νέων κόμβων, εδρών και κελιών.
6. Κλήση ξεχωριστής υπορουτίνας για την διαίρεση του κάθε κελιού προς πύκνωση. Παρεμβολή της λύσης στα νέα κελιά.
7. Παρεμβολή των νέων κόμβων στο στερεό σύνορο.
8. Επανυπολογισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του προκύπτοντος πλέγματος.

Αραίωση (Coarsening) πλέγματος

9. Επιλογή των κελιών προς αραίωση.
10. Έλεγχος κελιών για την ικανοποίηση του περιορισμού 1-irregular node. Απαγόρευση αραίωσης για κελιά στο στερεό σύνορο.
11. Εύρεση τετράδων κελιών προς αραίωση με ίδιο επίπεδο refinement και κοινό κόμβο.
12. Κλήση ξεχωριστής υπορουτίνας για κάθε τετράδα κελιών. Συνένωση τους σε ένα κελί ενος επιπέδου refinement μεγαλύτερου. Παρεμβολή της λύσης στο νέο κελί.
13. Επαναπροσαρμογή των δομών δεδομένων του πλέγματος μετά την αφαίρεση κόμβων, εδρών και κελιών.
14. Επανυπολογισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του προκύπτοντος πλέγματος.

15. Αρχικοποίηση όλων των υπόλοιπων δομών δεδομένων με βάση τα νέα μεγέθη πλέγματος.
16. Επιστροφή στο κυρίως πρόγραμμα.

3.3 Κριτήρια προσαρμογής

Μια βασική επισκόπηση των συναρτήσεων κρίσεως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην παρούσα εργασία, ακολουθώντας την ενδελεχή έρευνα του Zeeuw[23], χρησιμοποιήθηκαν κυρίως δύο κριτήρια που λαμβάνουν υπόψη τη στροβιλότητα και την απόκλιση της ταχύτητας. Η σταθμισμένη μορφή τους για κάθε κελί είναι:

$$\tau_{ci} = |\nabla \times \mathbf{v}| d_i^{3/2} \qquad (3.1) \qquad\qquad \tau_{di} = |\nabla \cdot \mathbf{v}| d_i^{3/2} \qquad (3.2)$$

όπου το $\mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και $d = V^{1/2}$ με V τον όγκο του κάθε κελιού.

Η τυπική απόκλιση των παραπάνω παραμέτρων υπολογίζεται ώς:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_{ci}^2}{N}} \qquad (3.3) \qquad\qquad \sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_{di}^2}{N}} \qquad (3.4)$$

Οπότε πλέον μπορούμε να ορίσουμε τα κριτήρια προσαρμογής ώς:

Refine	$\tau_{ci} > \sigma_c$	OR	$\tau_{di} > \sigma_d$
Coarsen	$\tau_{ci} < 0.1\sigma_c$	AND	$\tau_{di} < 0.1\sigma_d$

Με την χρήση αυτών των κριτηρίων δεν χρειάζεται κάποια a priori γνώση των χαρακτηριστικών της ροής. Βεβαίως, ανάλογα τις ανάγκες της προσομείωσης, μπορούν κατάλληλα να επιλεχθούν διαφορετικοί συντελεστές στις τυπικές αποκλίσεις.

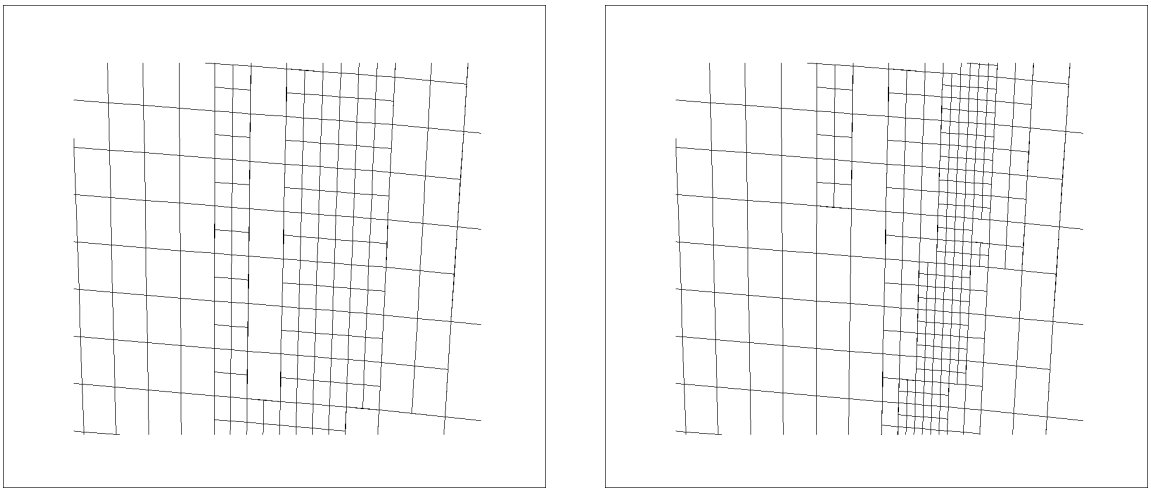
Πέραν αυτών δοκιμάστηκαν και κριτήρια βασισμένα στο τοπικό σφάλμα, καθώς και στην διαφορά μεγεθών μεταξύ γειτονικών κελιών. Για παράδειγμα, αποτελεσματικό κριτήριο για την εύρεση κυμάτων κρούσης αποδείχθηκε η διαφορά του αριθμού Mach μεταξύ γειτονικών κελιών. Τέλος, μπορούν βεβαίως να χρησιμοποιηθούν συγκεκριμένα κριτήρια με βάση τα γνωστά χαρακτηριστικά της ροής, όπως στην περίπτωση των συζυγών στροβιλών που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 4.

3.4 Παρεμβολή μεταβλητών

Όπως αναφέρθηκε, η παρεμβολή των μεταβλητών της ροής στα νέα κελιά γίνεται στις ξεχωριστές υπορουτίνες πύκνωσης και αραίωσης. Προφανώς, στην περίπτωση που δεν μεταβάλλεται κάποιο κελί η πληροφορία μεταβιβάζεται ως έχει. Για την περίπτωση της πύκνωσης, τα τέσσερα νέα κελιά που προκύπτουν λαμβάνουν το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών του

κελιού-γονέα. Στην αραίωση, το νέο κελί λαμβάνει τον μέσο όρο των μεταβλητών των τεσσάρων κελιών απο τα οποία προκύπτει.

Παρ'ολο που η μέθοδος αυτή παρεμβολής είναι η απλούστερη δυνατή, δεν φάνηκε να δημιουργεί σημαντικά αριθμητικά λάθη στην επίλυση. Υπάρχει βεβαίως και η δυνατότητα ανάπτυξης σχημάτων παρεμβολής μεγαλύτερης τάξης για την βελτίωση της ακρίβειας, αυξάνοντας όμως και το υπολογιστικό κόστος.



Σχήμα 3.2: *Λεπτομέρεια πύκνωσης και αραίωσης μεταξύ δύο χρονικών βημάτων*

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές Προσομοιώσεις - Πιστοποίηση μεθοδου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι αριθμητικές προσομειώσεις που έγιναν σε διάφορες περιπτώσεις ροής με σκοπό την πιστοποίηση του κώδικα που αναπτύχθηκε για τη προσαρμογή του πλέγματος. Αρχικά θα παρουσιαστούν 3 περιπτώσεις μη-συνεκτικής ροής γύρω απο την αεροτομή NACA 0012, σε διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης και με διαφορετικούς αριθμούς Mach. Εν συνεχεία θα παρουσιαστεί το μη-μόνιμο πρόβλημα κίνησης ενός ζεύγους δινών (vortex - antivortex pair) και τέλος η προσομείωση μη-μόνιμης,μη-συνεκτικής ροής γύρω απο την ταλαντούμενη αεροτομή NACA 0012.

4.1 Μόνιμη, μη-συνεκτική ροή σε αεροτομή NACA 0012

Για την επίλυση των εξισώσεων Euler σε δύο διάστασεις επιλέχθηκαν τρεις περιπτώσεις ροής με ισχυρά κύματα κρούσης, με τις προσομειώσεις να γίνονται για 30000 βήματα. Οι συνθήκες ροής για τις τρεις περιπτώσεις παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1 :

Περίπτωση	Mach_∞	Γωνία πρόσπτωσης
1η	0.8	1.25°
2η	0.85	1°
3η	0.95	0°

Πίνακας 4.1: *Συνθήκες ροής*

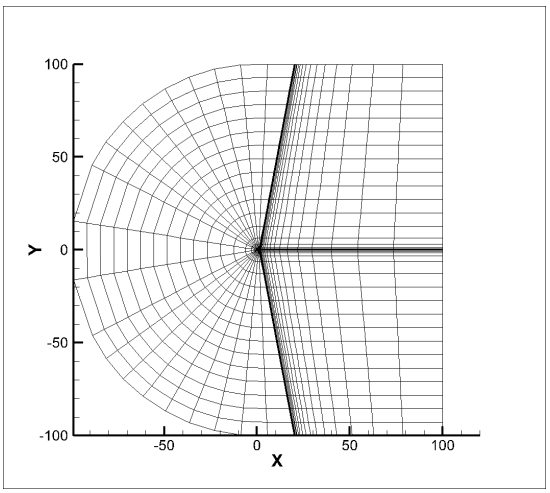
Η διαδικασία της προσαρμογής πραγματοποιήθηκε ανά 500 υπολογιστικά βήματα, με χρήση των κριτηρίων που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 3.3 (3.1, 3.2). Εκτός αυτών χρησιμοποιήθηκε και το κριτήριο της διαφοράς του τοπικό αριθμού Mach, ΔM μεταξύ γειτονικών κελιών για τη βέλτιστη αναγνώριση των κυμάτων κρούσης. Τέλος, επιβλήθηκε ο περιορισμός να μην γίνεται αραίωση των κελιών του αρχικού πλέγματος, καθώς και το μέγιστο επιτρεπομένο επί-

πεδο πύκνωσης να είναι ίσο με 5. Καθώς η διαδικασία της προσαρμογής γίνεται ανα 500 βήματα μέχρι το τέλος της προσομείωσης, ο τελευταίος περιορισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός για να αποφευχθεί η συνεχής διαίρεση κελιών.

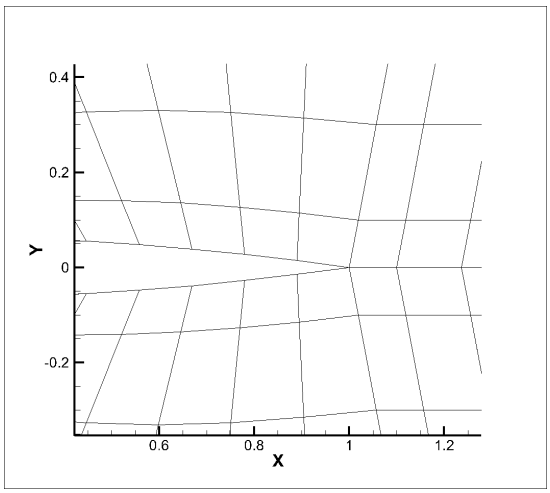
4.1.1 Υπολογιστικό πλέγμα

Για την προσομείωση με προσαρμογή πλέγματος δημιουργήθηκε με το εμπορικό λογισμικό ICEM του πακέτου ANSYS ένα αρχικό πλέγμα τύπου 'C' με 1140 κελιά και με το εξωτερικό σύνορο να βρίσκεται στις 100 χορδές (σχήματα 4.1, 4.2). Χρησιμοποιώντας την υπουρουτίνα πύκνωσης πραγματοποιήθηκαν, πριν το 1ο βήμα της προσομείωσης, δυο επίπεδα πύκνωσης σε όλα τα κελιά και τρία επιπλέον στα συνοριακά κελιά του στερεού συνόρου (σχήματα 4.3, 4.4). Το τελικό πλέγμα προς τρέξιμο επομένως είχε 20100 κελιά με απόσταση της πρώτης πλεγματικής γραμμής απο το στερεό σύνορο 0.001 της χορδής.

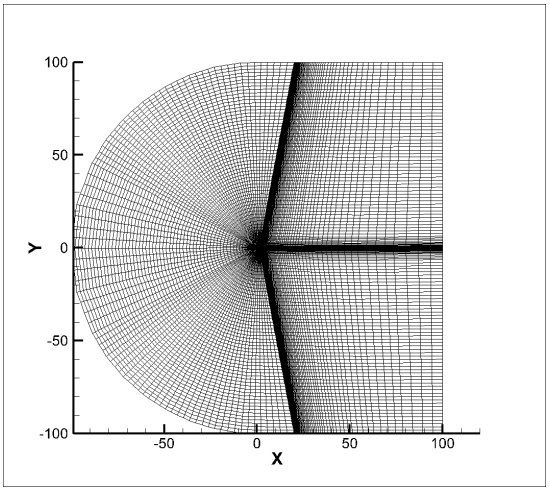
Για τις προσομοιώσεις χωρίς προσαρμογή πλέγματος που έγιναν για λόγους σύγκρισης, χρησιμοποιήθηκε πλέγμα τύπου 'C' με 102080 κελιά, δηλαδή περίπου 5 φορές μεγαλύτερο του αρχικού πλέγματος με προσαρμογή. Πέραν τούτου, ορισμένα απο τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν και με αντίστοιχα αποτελέσματα απο τη βιβλιογραφία.



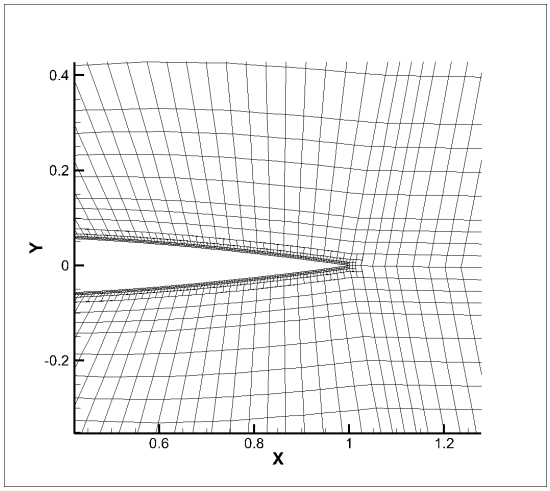
Σχήμα 4.1: *Αρχικό Πλέγμα 1120 cells*



Σχήμα 4.2: *Αρχικό Πλέγμα Λεπτομέρεια*



Σχήμα 4.3: *Τελικό Πλέγμα 20100 cells*



Σχήμα 4.4: *Τελικό Πλέγμα Λεπτομέρεια*

Κατα τη διάρκεια της προσαρμογής, υπάρχει η περίπτωση προσθήκης νέων κόμβων στο στερεό σύνορο. Καθώς όπως είπαμε η διαίρεση των κελιών γίνεται με βάση τα κέντρα των απέναντι εδρών και λόγω του ότι η καμπύλη της αεροτομής είναι κοίλη, οι κόμβοι αυτοί θα βρίσκονται ”κάτω” από το πραγματικό στερεό σύνορο. Είναι λοιπόν αναγκαία για την βελτίωση της ακρίβειας η παρεμβολή των κόμβων αυτών στο στερεό σύνορο, για την οποία χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική εξίσωση της NACA 0012 με sharp trailing edge:

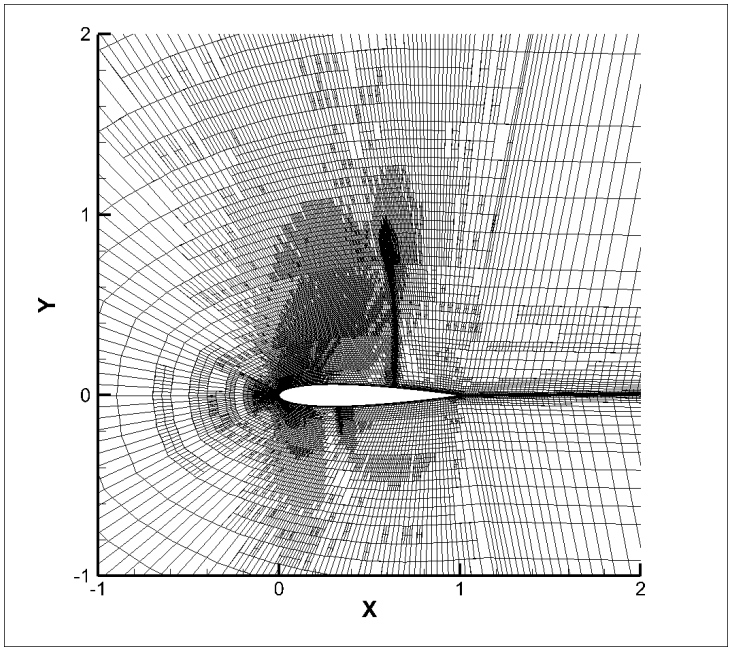
$$\begin{aligned} y = \pm 0.594689181 \cdot (0.298222773 \cdot \sqrt{x} - 0.127125232 \cdot x - 0.357907906 \cdot x^2 \\ + 0.291984971 \cdot x^3 - 0.105174606 \cdot x^4) \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.2 Mach$_\infty$=0.8 - AoA=1.25°

Η πρώτη περίπτωση αφορά διηχητική ροή με τον αριθμό Mach ελευθέρου ρεύματος να ισούται με 0.8 και την γωνία πρόσπτωσης να είναι 1.25°. Σε αυτές τις συνθήκες αναμένεται ισχυρό κύμα κρούσης στην επάνω πλευρά της αεροτομής και ένα σχετικά πιο αδύναμο κύμα κρούσης στην κάτω πλευρά. Τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

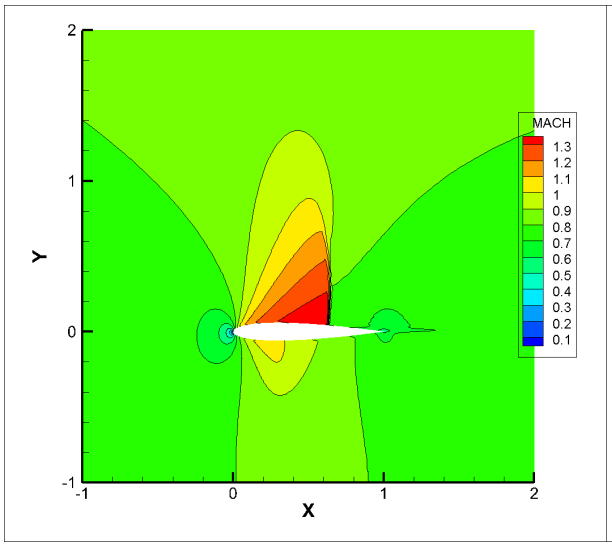
Refine	$\tau_{ci} > \sigma_c$	OR	$\tau_{di} > \sigma_d$	OR	$\Delta M > 0.05$
Coarsen	$\tau_{ci} < 0.1\sigma_c$	AND	$\tau_{di} < 0.1\sigma_d$	AND	$\Delta M > 0.02$

Όπως αναφέρθηκε, η διαδικασία της προσαρμογής γίνεται ανα 500 βήματα με μόνο περιορισμό να γίνεται πύκνωση μέχρι 5 φορές. Έτσι η διαδικασία της πύκνωσης συνεχίζεται μέχρι να μην υπάρχουν νέα κελιά προς πύκνωση σύμφωνα με τα παραπάνω κριτήρια. Στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει στα 8500 βήματα. Ουσιαστικά απο εκείνο το σημείο και μετά γίνεται η τελική σύγκλιση της λύσης, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.11. Ο τελικός αριθμός κελιών του πλέγματος είναι 78216, δηλαδή σχεδόν 4 φορές μεγαλύτερο απο το αρχικό. Για αυτό το πλέγμα βλέπουμε ότι έχουμε ίδια σύγκλιση τόσο στο μέγιστο σφάλμα της ενέργειας όσο και στο μέσο σφάλμα της πυκνότητας σε σχέση με την προσομείωση χωρίς προσαρμογή (σχήματα 4.11, 4.12.

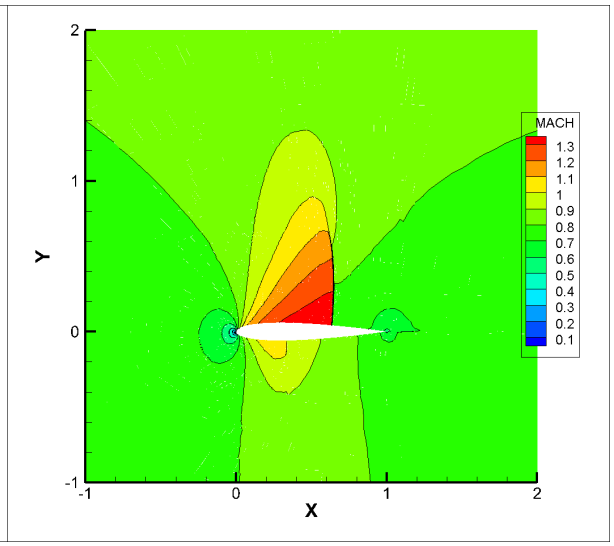


Σχήμα 4.5: *Τελικό πλέγμα γύρω απο την αεροτομή*

Στα σχήματα 4.6, 4.7 παρουσιάζεται η κατανομή του αριθμού Mach γύρω απο την αεροτομή χωρίς και με προσαρμογή, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται σε αυτά τα δύο σχήματα, καθώς και στην σύγκριση της κατανομής πίεσης (σχήμα 4.10) τα αποτελέσματα για την περίπτωση με προσαρμογη πλέγματος κρίνονται ικανοποιητικά σε σύγκριση με αυτά της μη προσαρμοσμένης προσομείωσης. Οι μικρές ασυνέχειες που παρατηρούνται στις γραμμές ίσου αριθμού Mach βρίσκονται σε σημεία διεπαφής κελιών διαφορετικού επιπέδου πύκνωσης.

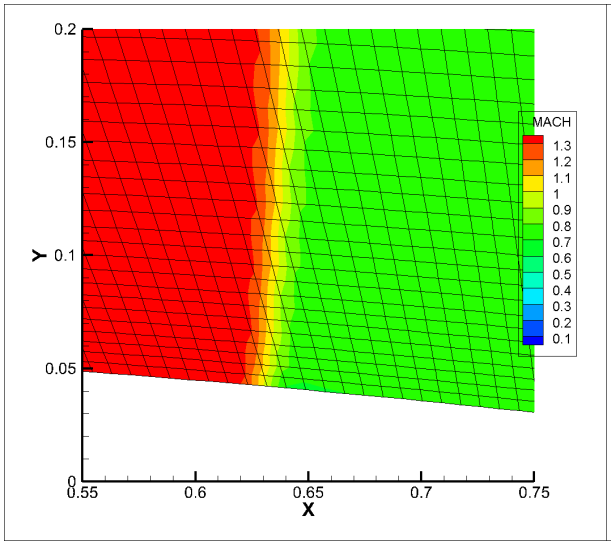


Σχήμα 4.6: *Non-adaptive Mach contours , M=0.8 - AoA=1.25°*

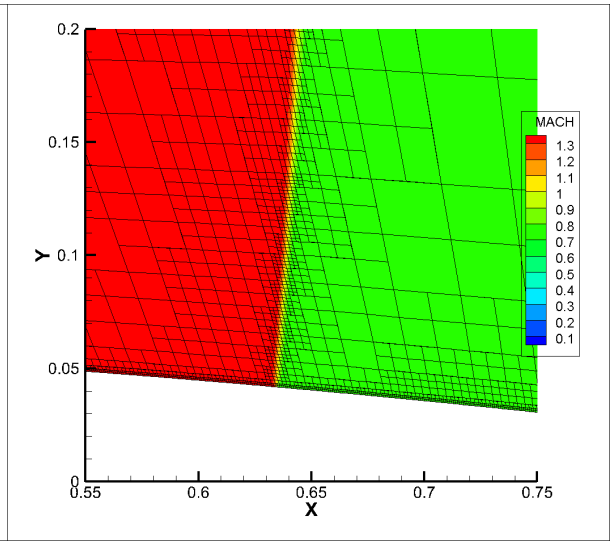


Σχήμα 4.7: *Adaptive Mach contours M=0.8 - AoA=1.25°*

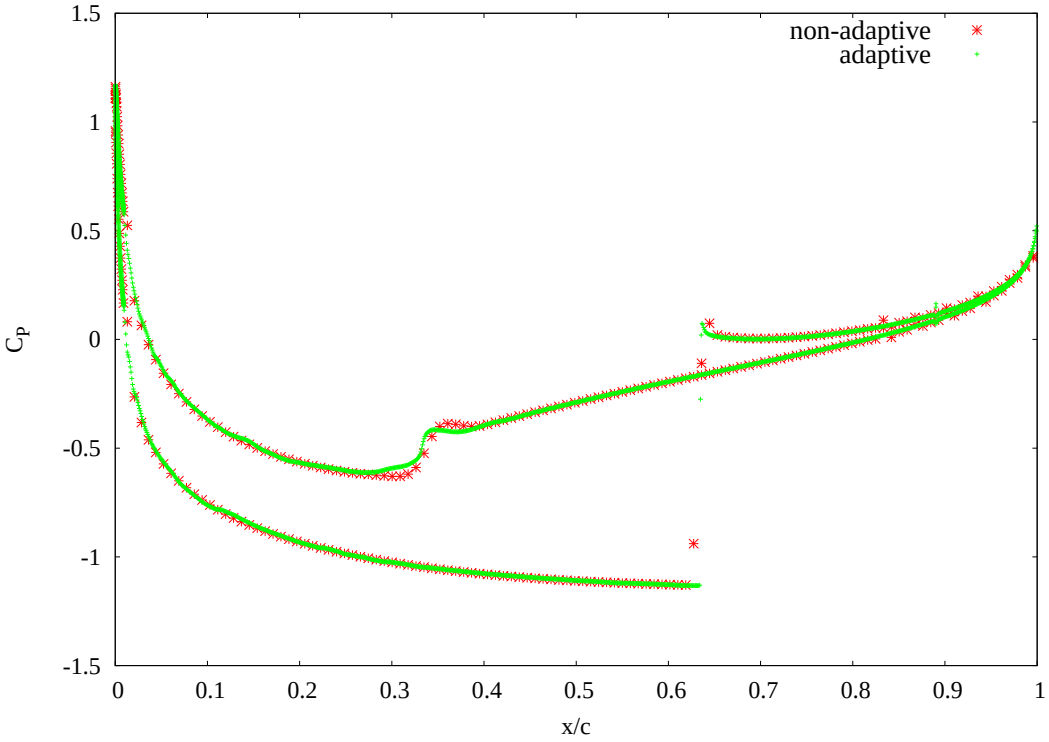
Παρατηρώντας τώρα την περιοχή του κύματος κρούσης για τις δύο περιπτώσεις (σχήματα 4.8, 4.9) βλέπουμε ότι στην δεύτερη περίπτωση έχουμε καλύτερη ποιότητα λύσης. Αυτό φαίνεται και στο διάγραμμα του συντελεστή πίεσης όπου παρατηρείται ότι για την περίπτωση με προσαρμογή το κύμα κρούσης είναι ελαφρώς πιο κάθετο σε σχέση με την περίπτωση χωρίς προσαρμογή, βρίσκεται δηλαδή πιο κοντά στην αναμενόμενη λύση. Αυτό ωφείλεται στο ότι έχουμε πυκνότερο πλέγμα στην περιοχή αυτή, μειώνοντας έτσι την ενδογενή αριθμητική διάχυση της αριθμητικής μεθόδου. Η θέση του κύματος κρούσης πάνω στην αεροτομή προσεγγίστηκε στο $x = 0.630366$ για την πρώτη περίπτωση και στο $x = 0.634683$ για τη δεύτερη.



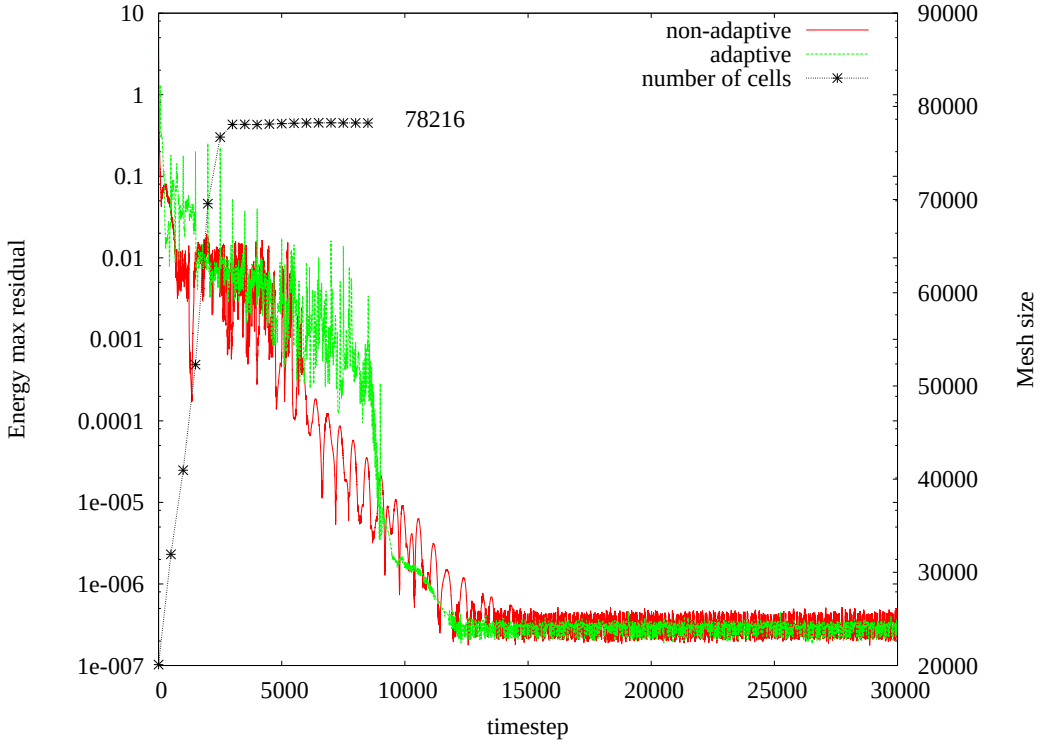
Σχήμα 4.8: *Non-adaptive - Λεπτομέρεια M=0.8 - AoA=1.25°*



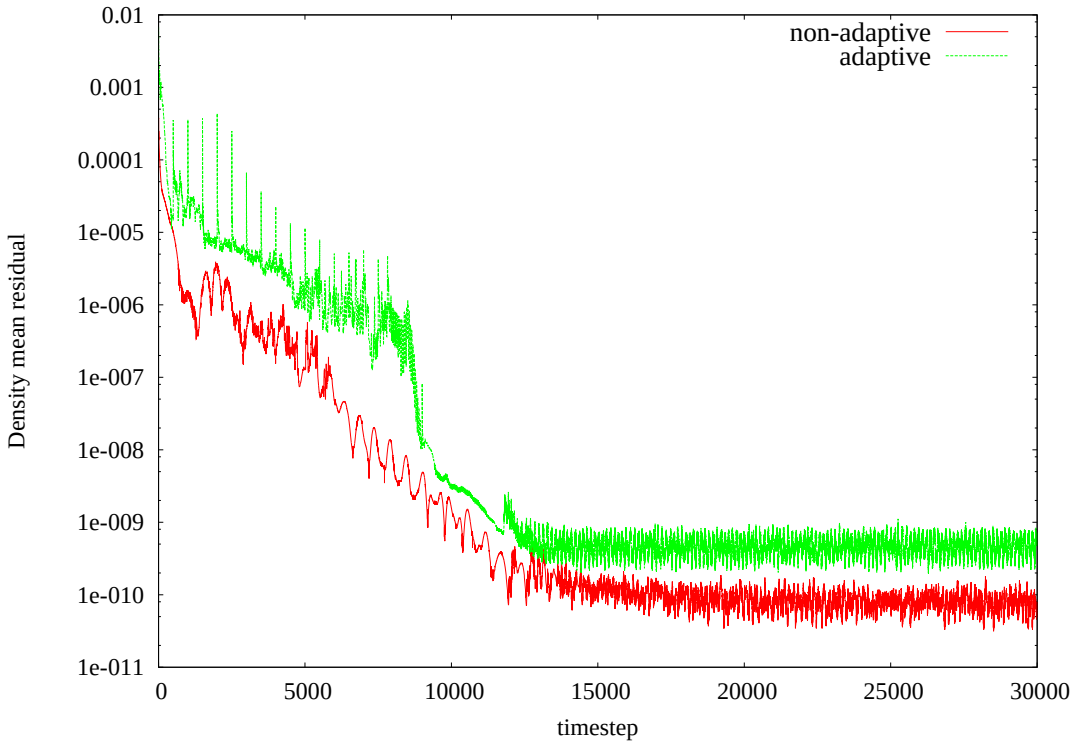
Σχήμα 4.9: *Adaptive - Λεπτομέρεια M=0.8 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.10: *Συντελεστής πίεσης, M=0.8 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.11: *Εξέλιξη μέγιστου σφάλματος ενέργειας και αριθμού κελιών, M=0.8 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.12: *Εξέλιξη μέσου σφάλματος πυκνότητας, M=0.8 - AoA=1.25°*

Τέλος, στον πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι τελικές τιμές των συντελεστών άνωσης, αντίστασης και ροπής πρόνευσης. Για λόγους σύγκρισης παρατίθενται και τα αντίστοιχα αποτελέσματα των Pulliam και Barton [44] και των Vassberg και Jameson [41]. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιείται πλέγμα C-type μεγέθους 560 $\times$ 65 (36400 κελιά). Για τη δεύτερη παρατίθεται η ασυμπτωτική εκτίμηση για τα μεγέθη που προέκυψε μέσω της επίλυσης σε διαδοχικα λεπτότερα πλέγματα O-type (μέχρι 4096 $\times$ 4096 κελιά) με χρήση τεσσάρων διαφορετικών μεθόδων. Θεωρώντας τα αποτελέσματα της δεύτερης περίπτωσης πιο κόντα στην πραγματικότητα και συγκρίνοντας με αυτά, βλέπουμε ότι η προσομείωση με προσαρμογή τα προσεγγίζει καλύτερα σε σχέση με αυτήν χωρίς, εκτός απο τον συντελεστή αντίστασης.

	C_L	C_D	C_M
Agard	0.3618	0.0236	-0.0411
FLO82	0.356208937	0.022684938	-0.038774022
OVERFLOW v2.1t	0.351662793	0.022453440	-0.037946129
CFL3Dv6	0.348226045	0.022501430	-0.037353559
CFL3Dv6+Vortex	0.351596613	0.022674853	-0.037838046
Min	0.348226045	0.022453440	-0.038774022
Max	0.356208937	0.022684938	-0.037353559
Non-adaptive	0.341228324	0.023504772	-0.034661877
Adaptive	0.348824817	0.024443729	-0.037012391

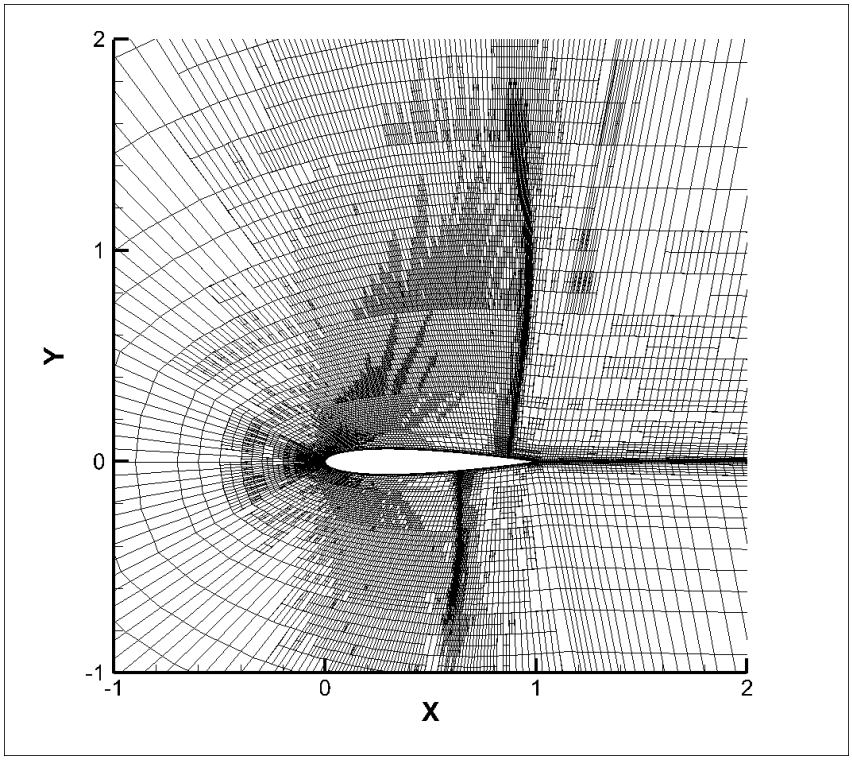
Πίνακας 4.2: *Συντελεστές άνωσης,αντίστασης και ροπής, M=0.8 - AoA=1.25°*

4.1.3 Mach$_\infty$=0.85 - AoA=1°

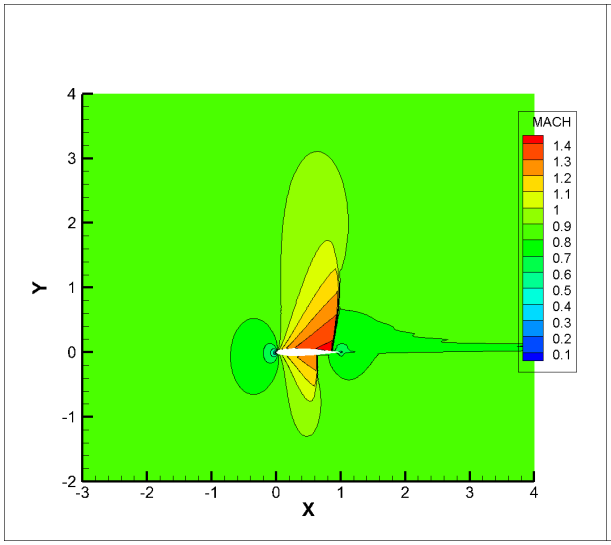
Σε αυτήν την περίπτωση αναμένονται ισχυρά κύματα κρούσης και στις δύο πλευρές της αεροτομής. Όπως και πριν, η προσαρμογή έγινε ανα 500 βήματα με τα παρακάτω κριτήρια:

Refine	$\tau_{ci} > \sigma_c$	OR	$\tau_{di} > \sigma_d$	OR	$\Delta M > 0.05$
Coarsen	$\tau_{ci} < 0.1\sigma_c$	AND	$\tau_{di} < 0.1\sigma_d$	AND	$\Delta M > 0.02$

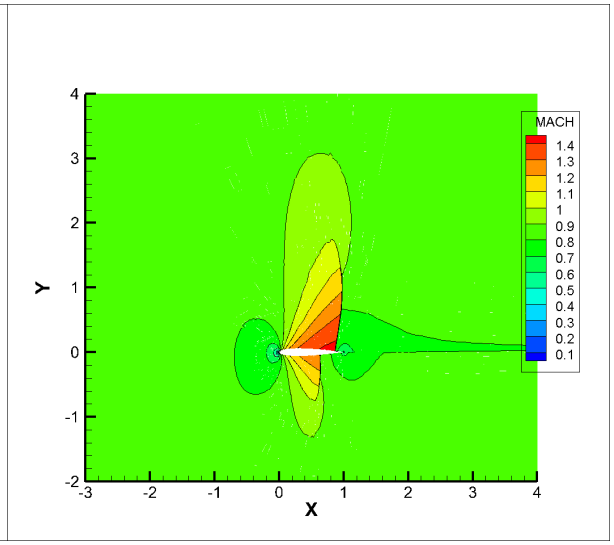
Η διαδικασία της πύκνωσης σταμάτησε στα 11500 βήματα με τον τελικό αριθμό κελιών να είναι 90300. Από τα διαγράμματα σύγκλισης 4.19, 4.20 βλέπουμε ότι για την περίπτωση αυτή δεν έχουμε ικανοποιητική σύγκλιση σε σχέση με την non-adaptive προσομείωση (πλέγμα με 102080 κελιά). Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη περιοχών μεγάλου σφάλματος στο ισχυρό κύμα κρούσης της κάτω πλευράς της αεροτομής. Παρ'ολα αυτά υπάρχει και πάλι καλύτερη απόδοση των κυμάτων κρούσης (σχήματα 4.16, 4.17). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα κριτήρια προσαρμογής αναγνωρίζουν ικανοποιητικά τα κύματα κρούσης και στις δυο πλευρές, καθώς και το λεπτό στρώμα διάτμησης στον ομόρρου της ροής.



Σχήμα 4.13: *Τελικό πλέγμα γύρω απο την αεροτομή, M=0.85 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.14: *Non-adaptive Mach contours M=0.85 - AoA=1.25°*

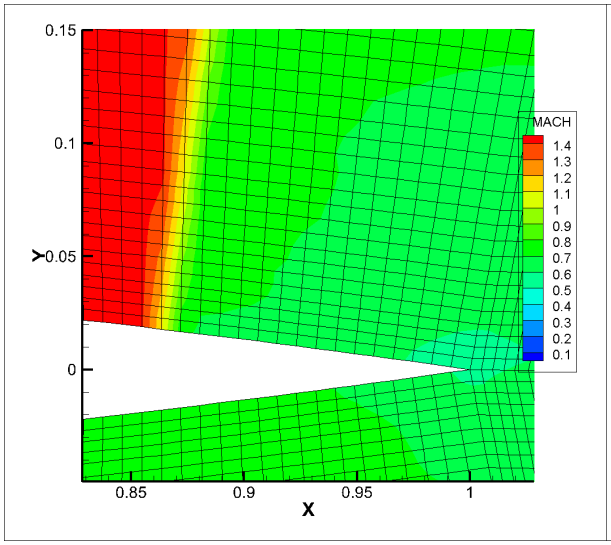


Σχήμα 4.15: *Adaptive Mach contours M=0.85 - AoA=1.25°*

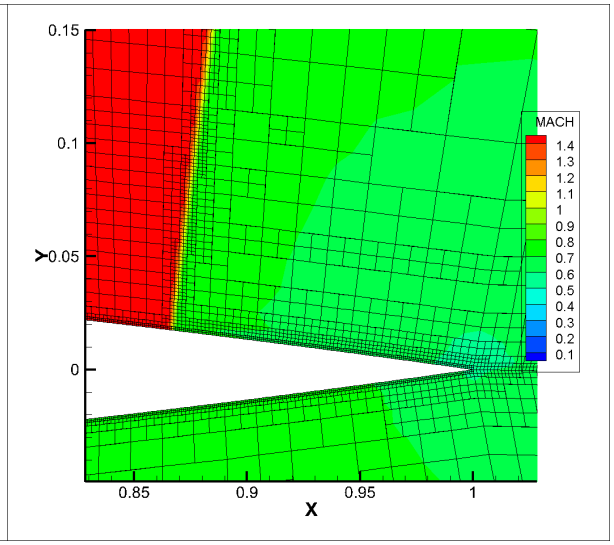
Η θέση των κυμάτων κρούσης για τις δυο πλευρές παρουσιάζεται στον πίνακα 4.3. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στην πλευρά υποπίεσης το κύμα κρούσης στην περίπτωση με προσαρμογή υπολογίζεται πιο κοντά στην ακμή εκφυγής, ενώ στην κάτω πλευρά συμβαίνει το αντίθετο.

	Πάνω πλευρά	Κάτω πλευρά
Non-adaptive	0.86577	0.63176
Adaptive	0.86703	0.63037

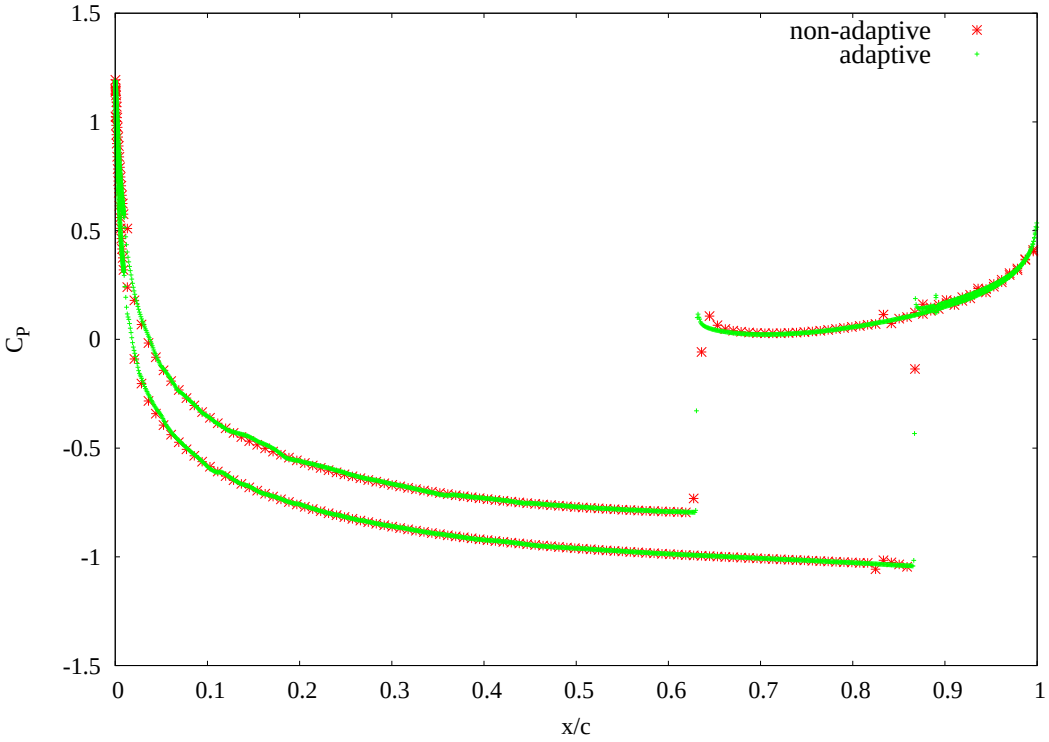
Πίνακας 4.3: *Θέσεις κυμάτων κρούσης πάνω στην αεροτομή, M=0.85 - AoA=1°*



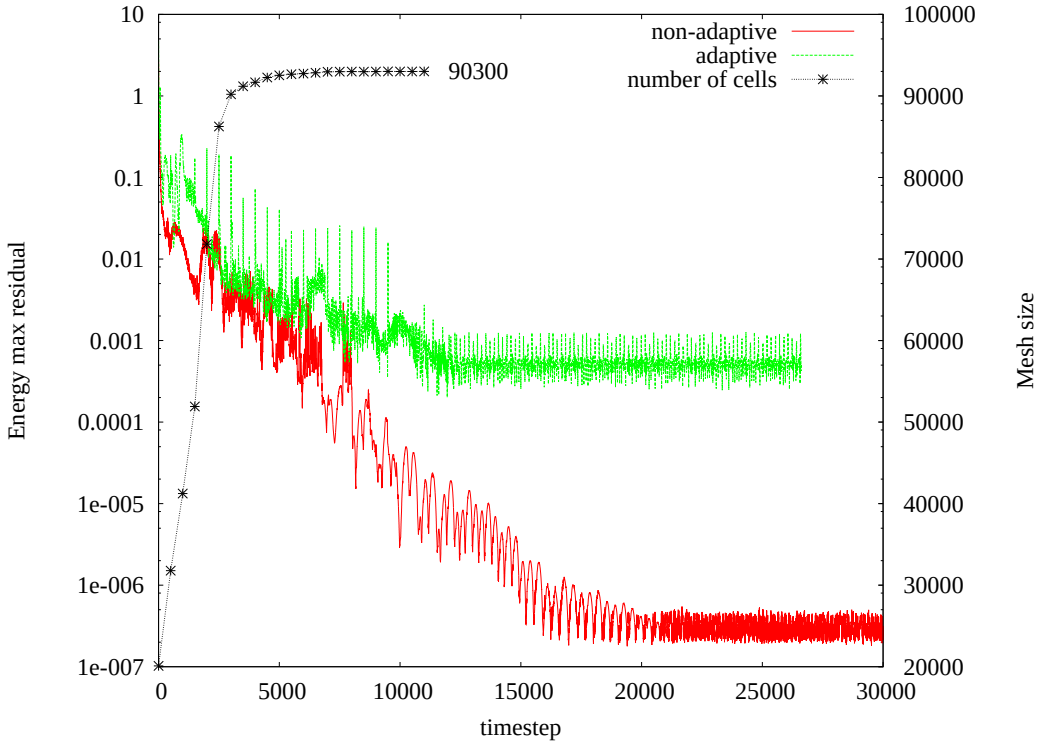
Σχήμα 4.16: *Non-adaptive - Λεπτομέρεια M=0.85 - AoA=1.25°*



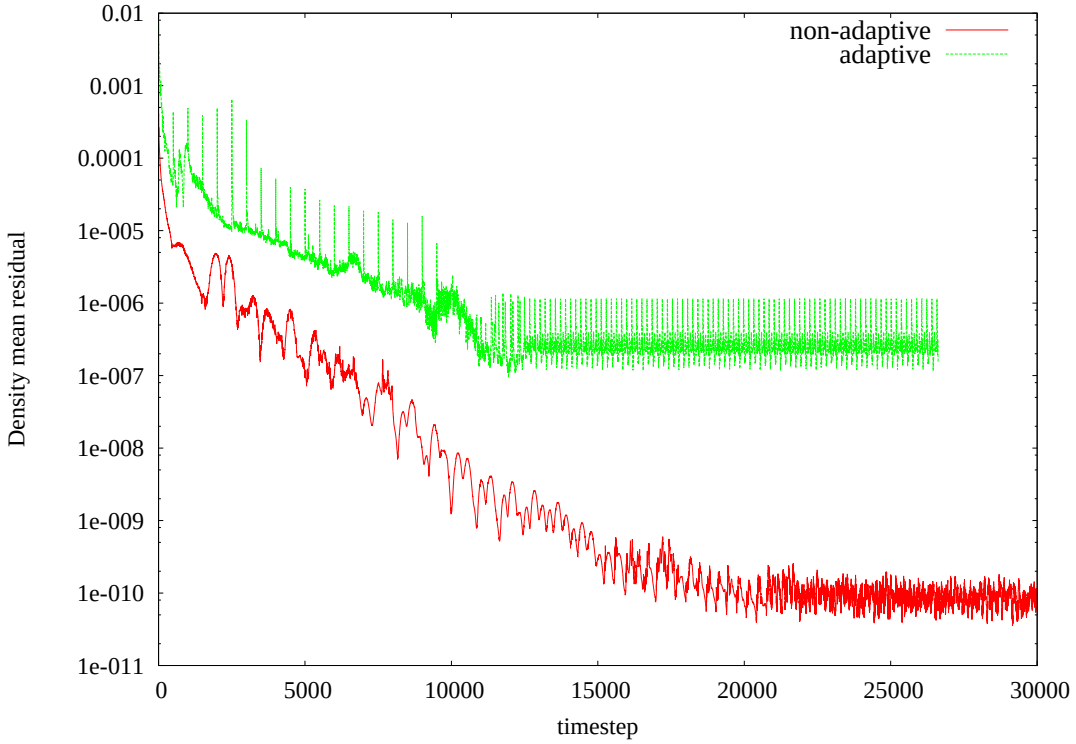
Σχήμα 4.17: *Adaptive - Λεπτομέρεια M=0.85 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.18: *Συντελεστής πίεσης, M=0.85 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.19: *Εξέλιξη μέγιστου σφάλματος ενέργειας και αριθμού κελιών, M=0.85 - AoA=1.25°*



Σχήμα 4.20: *Εξέλιξη μέσου σφάλματος πυκνότητας, M=0.85 - AoA=1.25°*

Τέλος, στον πίνακα 4.4 παρουσιάζονται οι τελικές τιμές των συντελεστών άνωσης, αντίστασης και ροπής πρόνευσης, συγκρινόμενοι με τα αποτελέσματα των Pulliam και Barton [44] και Zeeuw [23]. Η πρώτη περίπτωση αφορά όπως και προηγουμένως πλέγμα C-type μεγέθους 560 $\times$ 65 (36400 κελιά), ενώ η δεύτερη αφορά προσομείωση με προσαρμογή πλέγματος με μικρότερο βέβαια τελικό μέγεθος (13515 κελιά).

	C_L	C_D	C_M
Agard	0.3938	0.0604	-0.1393
Zeeuw	0.3670	0.0581	-
Non-adaptive	0.375737	0.059574	-0.129795
Adaptive	0.378713	0.060537	-0.131190

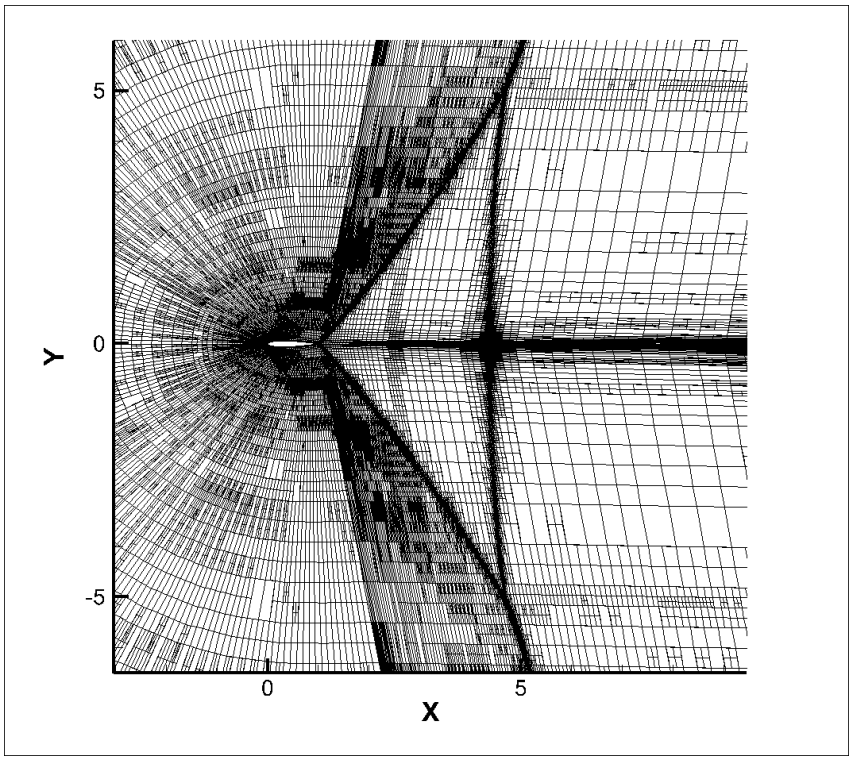
Πίνακας 4.4: *Συντελεστές άνωσης,αντίστασης και ροπής, M=0.85 - AoA=1°*

4.1.4 Mach$_\infty$=0.95 - AoA=0°

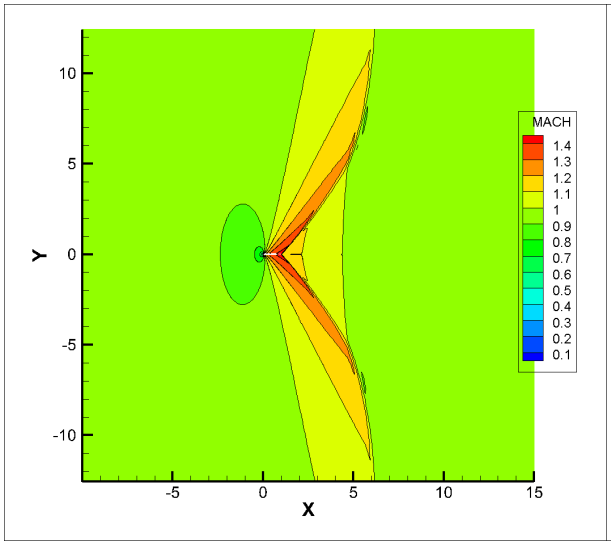
Η τρίτη περίπτωση αφορά διηχητική ροή με Mach=0.95 και μηδενική γωνιά πρόσπτωσης. Η ροή παρουσιάζει ένα ισχυρό κύμα κρούσης που ξεκινάει απο την ακμή εκφυγής και ένα δεύτερο μικρότερης έντασης στον ομόρρου που μειώνει περαιτέρω τον αριθμό Mach σε υποηχητικές συνθήκες (σχήματα 4.22, 4.23). Γνωρίζοντας εκ προτέρων την δυσκολία της συγκεκριμένης ροής, χρησιμοποιηθήκαν λιγότερο αυστηρά κριτήρια:

Refine	$\tau_{ci} > 2 \cdot \sigma_c$	OR	$\tau_{di} > 2 \cdot \sigma_d$	OR	$\Delta M > 0.05$
Coarsen	$\tau_{ci} < 0.1\sigma_c$	AND	$\tau_{di} < 0.1\sigma_d$	AND	$\Delta M > 0.02$

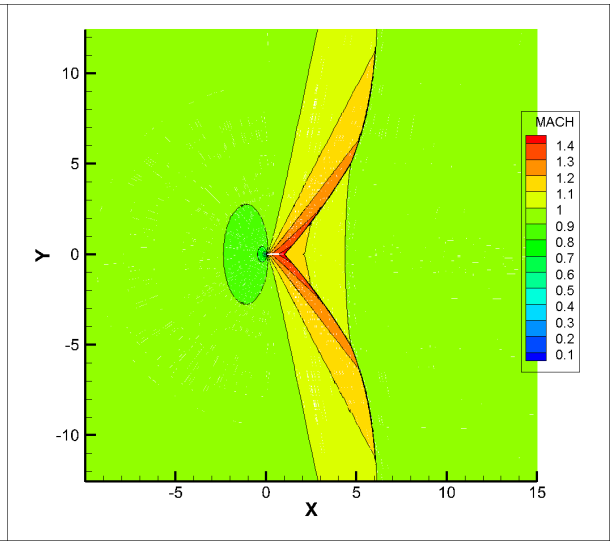
Παρ'ολα αυτά το τελικό πλέγμα έφτασε σε μεγαλύτερο μέγεθος απο τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Σταθεροποιήθηκε στα 113658 κελιά μετα από 24000 βήματα (σχήμα 4.27). Τα κριτήρια προσαρμογής λειτούργησαν και εδώ ικανοποιητικά, αναγνωρίζοντας όλες τις περιοχές ενδιαφέροντος. Η προσομείωση συνέκλινε σε αντίστοιχες τιμές με την χωρίς προσαρμογή περίπτωση (σχήματα 4.27, 4.28), ενώ είχαμε και εδω καλύτερη απόδοση των απότομων αλλαγών στα κύματα κρούσης (σχήματα 4.24, 4.25)



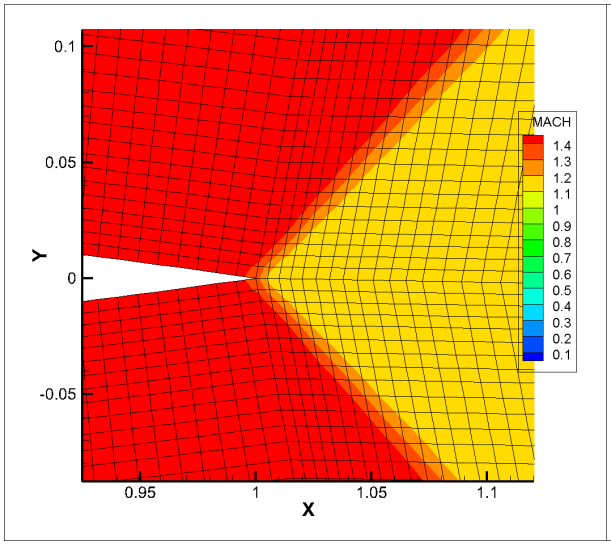
Σχήμα 4.21: *Τελικό πλέγμα γύρω απο την αεροτομή, M=0.95 - AoA=0°*



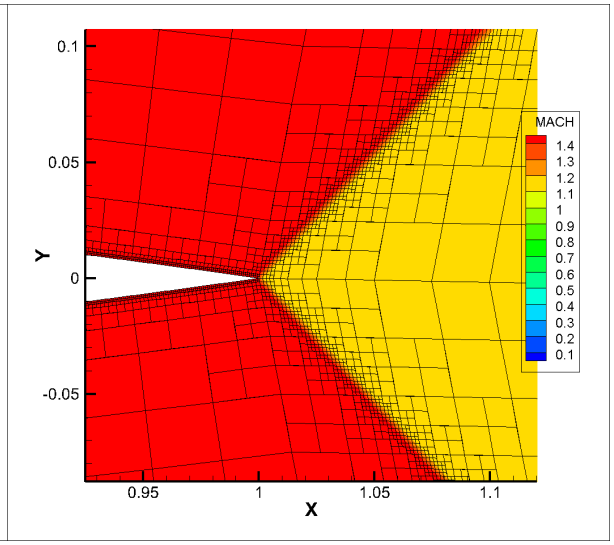
Σχήμα 4.22: *Non-adaptive Mach contours M=0.95 - AoA=0°*



Σχήμα 4.23: *Adaptive Mach contours M=0.95 - AoA=0°*

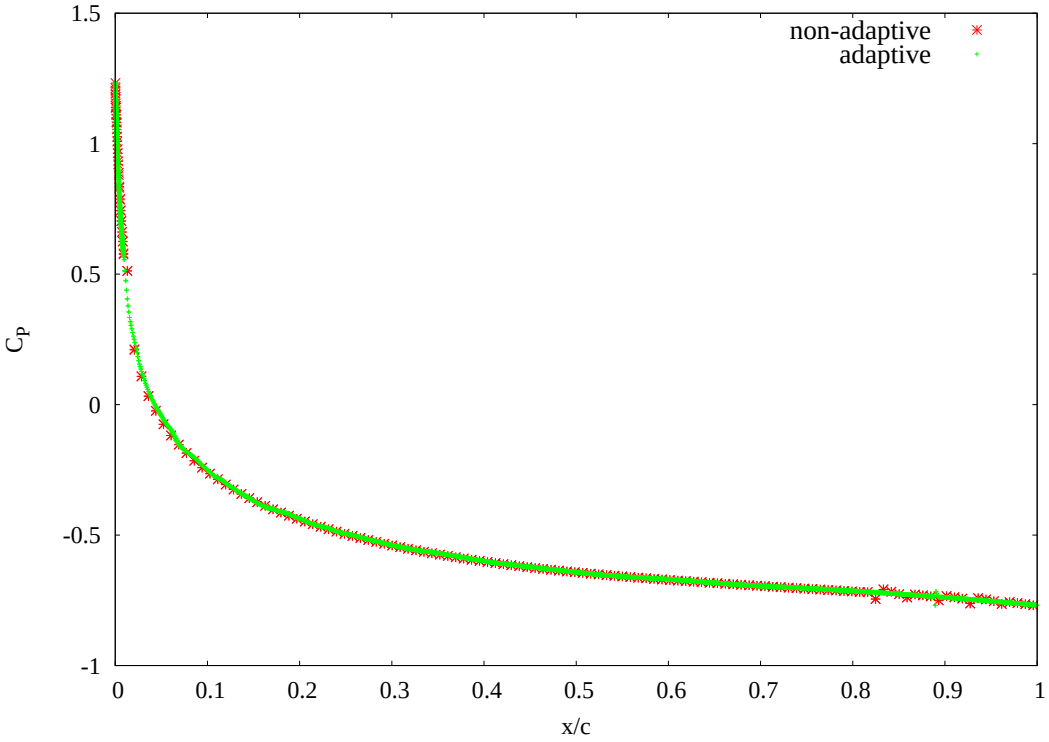


Σχήμα 4.24: *Non-adaptive - Λεπτομέρεια M=0.95 - AoA=0°*

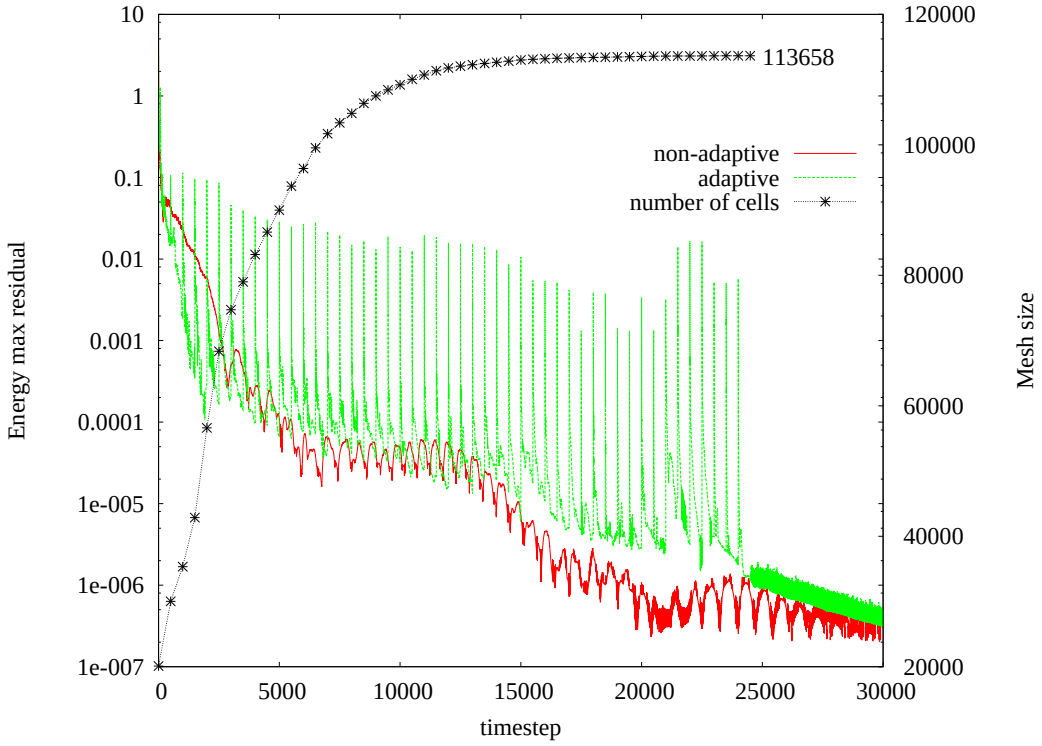


Σχήμα 4.25: *Adaptive - Λεπτομέρεια M=0.95 - AoA=0°*

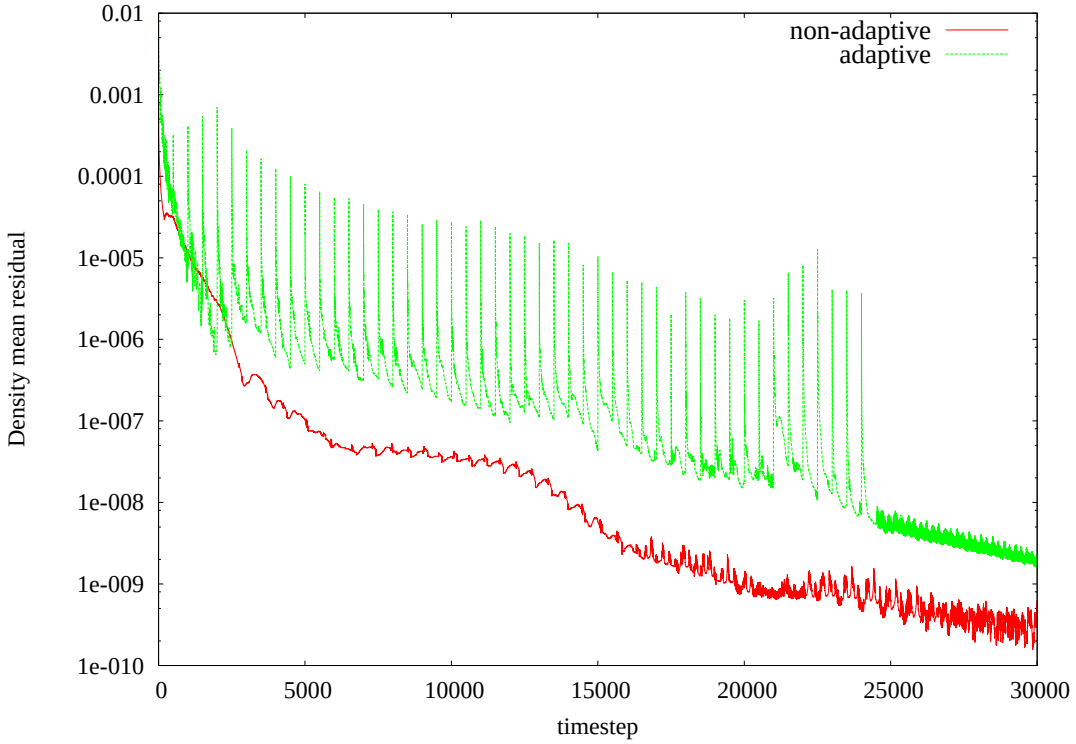
Η θέση του κάθετου κύματος κρούσης στον ομόρρου υπολογίστηκε σε απόσταση 3.355 χορδών από την ακμή εκφυγής ($x = 4.355$). Η θέση του κύματος κρούσης σε αντίστοιχη προσομείωση [23], με μικρότερο όμως αριθμό κελιών, είναι 3.41 χορδές πίσω απο την ακμή. Μια ”βέλτιστη” λύση, την οποία προσεγγίζουμε ικανοποιητικά, είναι η προσομείωση σε πλέγμα O-type 2049 $\times$ 765 που κατέληξε σε τιμή 3.35 χορδών πίσω απο την ακμή εκφυγής [45].



Σχήμα 4.26: *Συντελεστής πίεσης, M=0.95 - AoA=1.0°*



Σχήμα 4.27: *Εξέλιξη μέγιστου σφάλματος ενέργειας και αριθμού κελιών, M=0.95 - AoA=1.0°*



Σχήμα 4.28: *Εξέλιξη μέσου σφάλματος πυκνότητας, M=0.95 - AoA=1.0°*

Τέλος, ο συντελεστής αντίστασης έχει την τιμή 0.11015 που συμφωνεί με αντίστοιχες τιμές στη βιβλιογραφία (Venditti [42]: 0.110 , Pulliam and Barton [44]: 0.1103). Λόγω μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης και συμμετρίας της αεροτομής αναμένουμε μηδενικούς συντελεστές άνωσης και ροπής. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να συμβεί στην πράξη λόγω διαφόρων αριθμητικών παραγόντων. Στην περίπτωση χωρίς προσαρμογή οι συντελεστές αυτοί έχουν τιμή της τάξης του 10^{-4}. Ενδιαφέρον είναι ότι στην περίπτωση με προσαρμογή οι αντίστοιχες τιμές είναι περίπου μιας τάξης μεγέθους μεγαλύτερες. Αυτό πιθανώς οφείλεται σε ενδεχόμενες μικρές ασυμμετρίες που δημιουργεί η προσαρμογή στο πλέγμα.

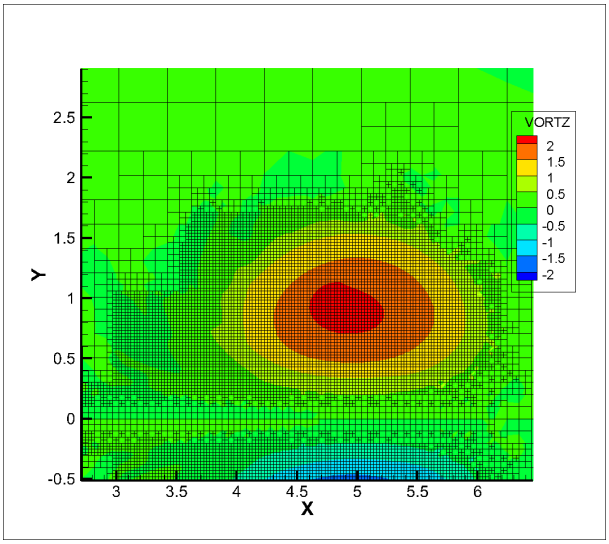
4.2 Ζεύγος δινών

Σε αυτή την περίπτωση μελετάται η κίνηση ενός ζεύγους δινών αντίθετης έντασης σε ελεύθερο ρεύμα Mach$_\infty$=0.5. Οι δύο δίνες είναι τοποθετημένες τη χρονική στιγμή 0 στις θέσεις $x = -4$ και $y = \pm 1.5$ αντίστοιχα. Το υπολογιστικό πλέγμα έχει διάστασεις $x \in [-30, 30]$ και $y \in [-20, 20]$. Για την περίπτωση χωρίς προσαρμογή επιλέχθηκε χωρικό βήμα 0.2 και για τις δύο κατευθύνσεις, με τον αριθμό κελιών να είναι 59501. Για την περίπτωση με προσαρμογή χρησιμοποιηθήκε πιο αραιό πλέγμα με χωρικό βήμα 0.4 και τελικό μέγεθος 14751 κελιά.

Γνωρίζοντας από την προσομείωση χωρίς προσαρμογή την τάξη μεγέθους των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω κριτήρια με σκοπό την πύκνωση του πλέγματος στη θέση των στροβίλων κατά την κίνηση τους.

Refine	$\lvert Vorticity \rvert > 0.3$	ανά 20 βήματα
Coarsen	$\lvert Vorticity \rvert < 0.2$	ανά 20 βήματα

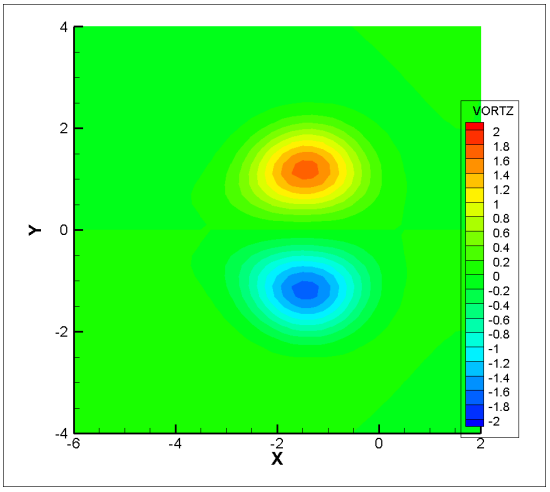
Το μέγιστο επιτρεπόμενο επίπεδο πύκνωσης είναι ίσο με 5. Η προσομείωση έγινε με χρονικό βήμα 0.01 μέχρι τα 10 s (10000 βήματα). Τα συγκεκριμένα κριτήρια λειτούργησαν ικανοποιητικά καθώς γίνονταν πύκνωση και αραίωση κατα τη διάρκεια της κίνησης των δινών.



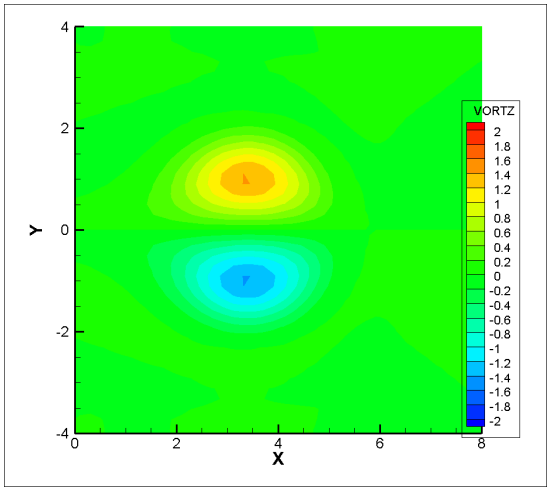
Σχήμα 4.29: *Προσαρμοσμένο υπολογιστικό πλέγμα, t=50 s*

Στα σχήματα 4.30 - 4.37 παρουσιάζονται οι κατανομές στροβιλότητας για τις δύο προσομειώσεις σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα. Όπως παρατηρούμε, στην περίπτωση με προσαρμογή υπάρχει πολύ λιγότερη αριθμητική διάχυση. Για t=80s ενώ οι δίνες της non-adaptive προσομείωσης έχουν εξασθενήσει αρκετά και τείνουν να εξαφανιστούν, οι δίνες στην adaptive εξακολουθουν να έχουν μέγιστη στροβιλότητα μεγαλύτερη του 2. Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ στην

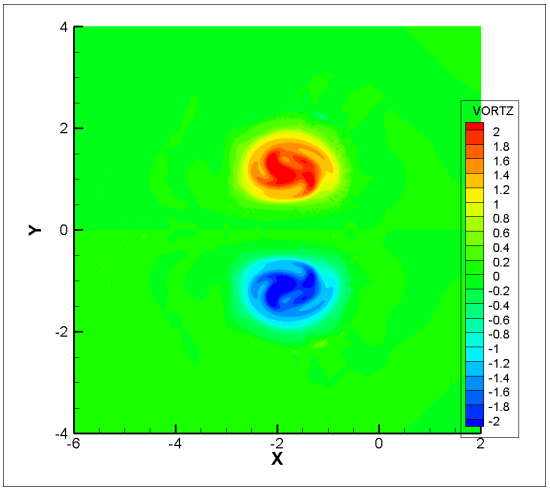
πρώτη περίπτωση το πλέγμα αποτελείται απο 59501 κελιά, στην δεύτερη κυμαίνεται κατά τη διάρκεια της προσομείωσης περίπου στα 32000 κελιά, δηλαδή σχεδόν στα μισά. Φαίνεται παραστατικά έτσι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα που προσφέρει η πύκνωση του πλέγματος, αυτό της μείωσης της αριθμητικής διάχυσης με μικρότερο μάλιστα υπολογιστικό κόστος.



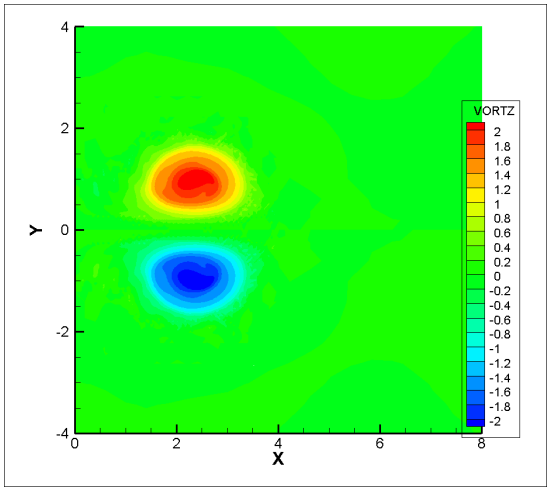
Σχήμα 4.30: *non adaptive, 20 s*



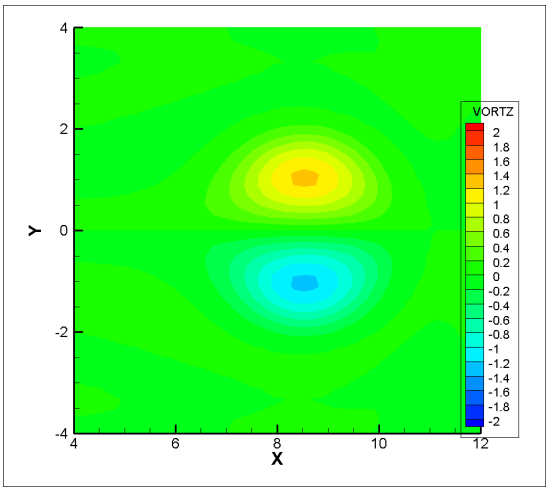
Σχήμα 4.31: *non adaptive, 40 s*



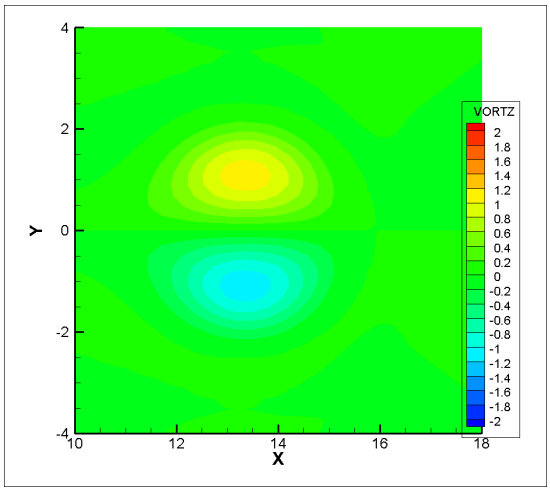
Σχήμα 4.32: *adaptive, 20 s*



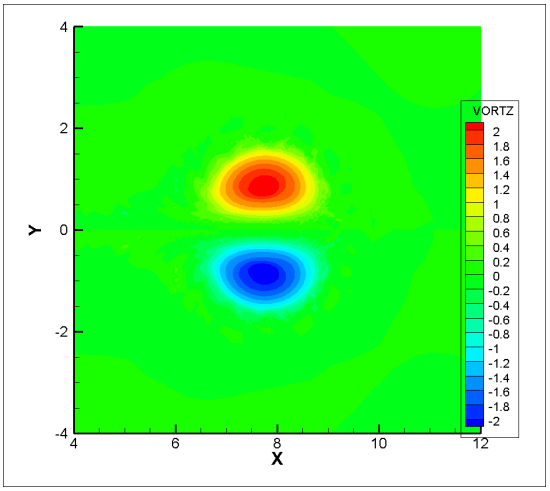
Σχήμα 4.33: *adaptive, 40 s*



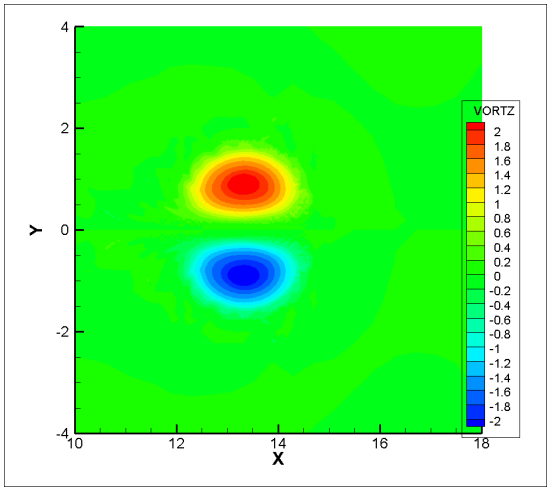
Σχήμα 4.34: *non adaptive, 60 s*



Σχήμα 4.35: *non adaptive, 80 s*



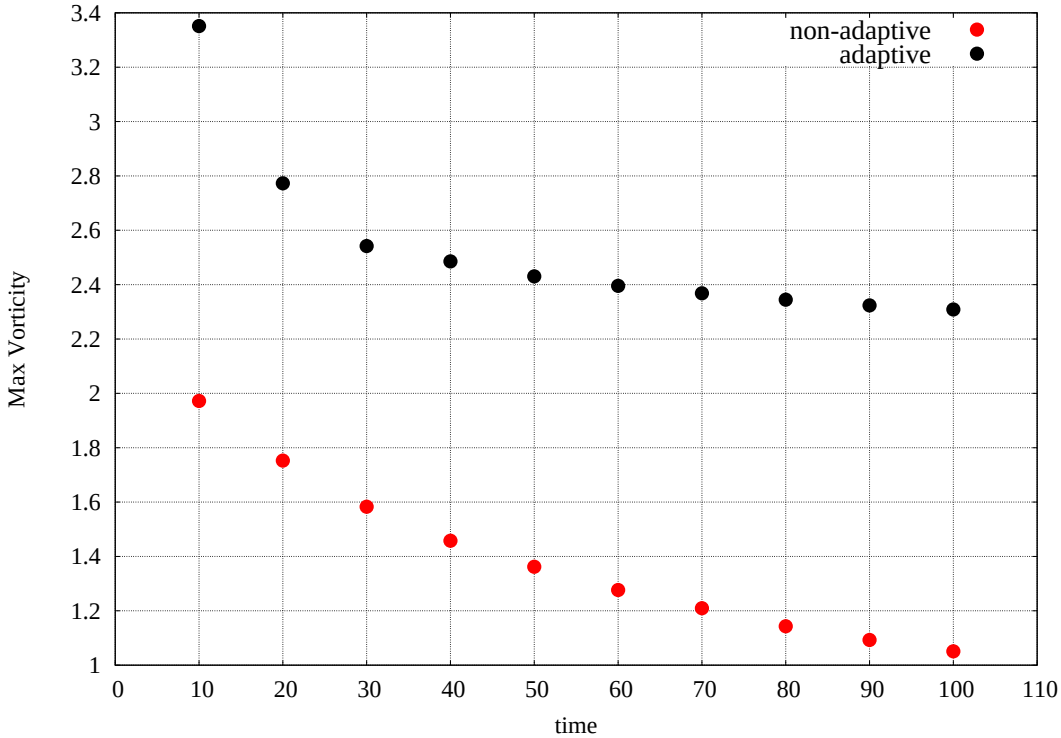
Σχήμα 4.36: *adaptive, 60 s*



Σχήμα 4.37: *adaptive, 80 s*

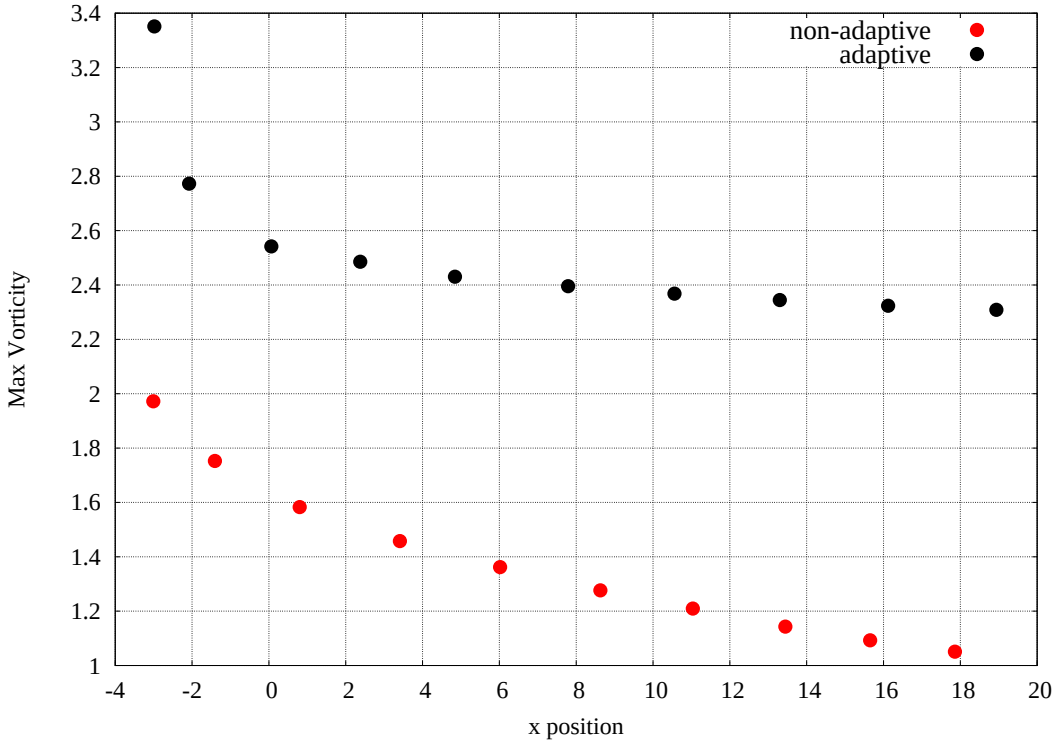
Από τα παραπάνω στιγμιότυπα παρατηρούμε ότι για τα ίδια χρονικά σημεία οι θέσεις των στροβίλων βρίσκονται σε διαφορετικό σημείο. Αυτό φαίνεται καλύτερα παρατηρώντας τα διαγράμματα 4.38, 4.39 όπου παρουσιάζονται οι μέγιστες θετικές τιμές στροβιλότητας ανα 10 second (δηλαδή μόνο η δίνη με θετική ένταση καθώς το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα x). Σε ορισμένα χρονικά σημεία οι στρόβιλοι στο πυκνωμένο πλέγμα βρίσκονται πιο πίσω σε σχέση με αυτούς του μη-πυκνωμένου. Αυτό το γεγονός προκαλεί εντύπωση, καθώς λόγω μεγαλύτερων τιμών στροβιλότητας θα έπρεπε να κινούνται με μεγαλύτερη ταχύτητα και επομένως να έχουν προχωρήσει πιο μπροστά για το ίδιο χρονικό σημείο. Όπως αναφέρθηκε, οι δύο δίνες εκκινούν στις θέσεις $x = -4$ και $y = \pm 1.5$ αντίστοιχα. Καθώς προχωράει η προσομείωση, πλησιάζουν μεταξύ τους και καταλήγουν σε μια ”μόνιμη” τροχιά, με το κέντρο τους να βρίσκεται στο $y \simeq \pm 1$ αντίστοιχα. Έτσι μια πιθανή εξήγηση θα ήταν ότι στην περίπτωση του πυκνωμένου πλέγματος υπάρχει μια καθυστέρηση στην προσέγγιση αυτής της ”μόνιμης” κατάστασης, πιθανώς λόγω ανεπαρκούς παρεμβολής της λύσης μεταξύ των διαφόρων επιπέδων

πύκνωσης. Φαίνεται άλλωστε ότι και από το σημείο και μετά που οι δίνες του πυκνωμένου πλέγματος βρίσκονται σε αυτή τη μόνιμη κατάσταση αρχίζουν και προπορεύονται σε σχέση με αυτές του μη-πυκνωμένου.



Σχήμα 4.38: *Μέγιστη στροβιλότητα σε διάφορα χρονικά σημεία (ανά 10 s)*

Τέλος, παρατηρούμε ότι για την περίπτωση του προσαρμοσμένου πλέγματος έχουμε ψηλότερες τιμές στροβιλότητας στην αρχή της προσομείωσης. Επίσης, όπως παρατηρείται στο σχήμα 4.32 στην αρχή της κίνησης υπάρχει μια εσωτερική δομή στους στροβίλους που δεν αναμενόταν. Η δημιουργία αυτής της εσωτερικής δομής μπορεί να εξηγηθεί λόγω της μεταβατικής διαδικασίας από τις αρχικές συνθήκες και του ανεπαρκούς σχήματος παρεμβολής. Η συνολική στροβιλότητα παραμένει μεν στα ίδια επίπεδα και για τις δύο περιπτώσεις, εμφανίζονται όμως στην προσομείωση με προσαρμογή σημεία με αρκετά υψηλότερες τιμές. Παρ'όλα αυτά, οι δύο στρόβιλοι συγκλίνουν προς την "μόνιμη" λύση με την επιθυμητή μορφή.



Σχήμα 4.39: *Μέγιστη στροβιλότητα συναρτήσει της θέσης κατα x για τα ίδια χρονικά σημεία*

4.3 Μη-μόνιμη, μη-συνεκτική ροή σε ταλαντούμενη αεροτομή NACA 0012

Όπως είδαμε, με την προσαρμογή μπορεί να μειωθεί η μείωση της αριθμητικής διάχυσης λόγω του πυκνότερου πλέγματος στις περιοχές ενδιαφέροντος. Για την περαιτέρω μελέτη των δυνατοτήτων του αλγορίθμου πύκνωσης και αραίωσης, επιλέχθηκε η περίπτωση μη-μόνιμης ροής γύρω απο ταλαντούμενη σε υψηλή συχνότητα αεροτομή. Η εξίσωση που περιγράφει τη γωνία πρόσπτωσης είναι:

$$AoA = A \cdot sin(\omega t) \tag{4.2}$$

όπου $A = 2°$ το πλάτος και $\omega = 8$ η συχνότητα της ταλάντωσης. Η περίοδος υπολογίζεται $T \simeq 0.785398s$.

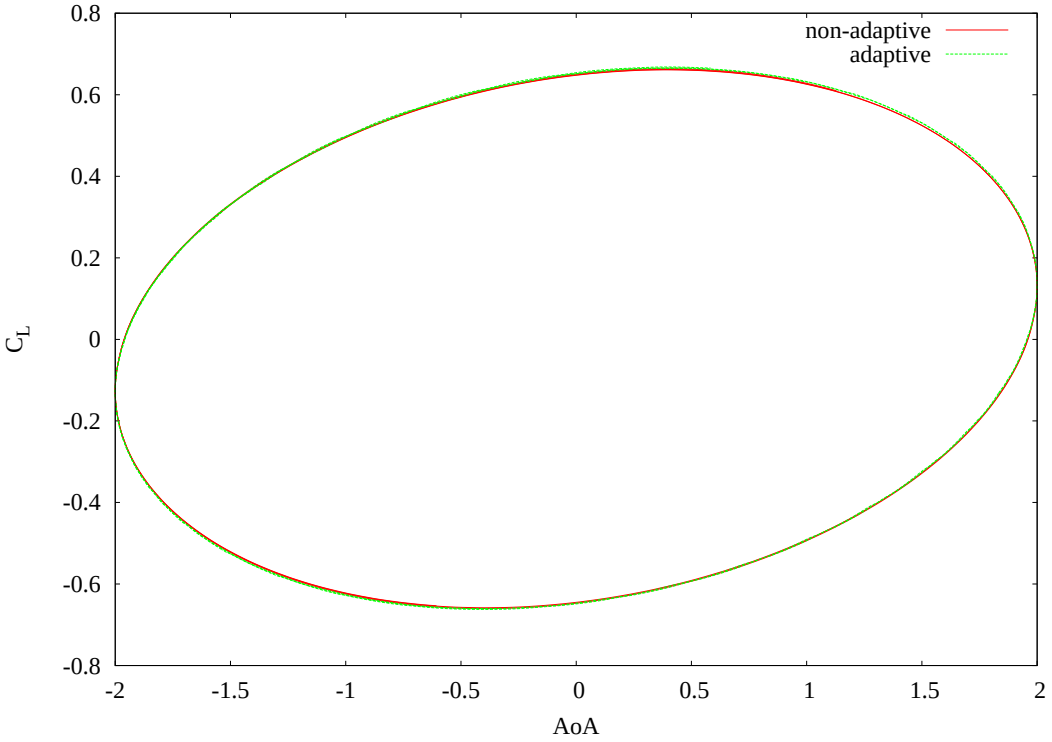
Στην συγκεκριμένη περίπτωση η περιοχή ενδιαφέροντος είναι ο ομόρρους της αεροτομής, συγκεκριμένα η δημιουργία σειράς στροβίλων Karman (Karman vortex street) λόγω της ταλάντωσης της αεροτομής. Για αυτό το λόγω επιλέχθηκε η διαδικασία της προσαρμογής να γίνεται μόνο σε κελιά που βρίσκονται πίσω απο την ακμή εκφυγής ($x > 1$), ενώ χρησιμοποιήθηκε και μόνο ένα κριτήριο προσαρμογής βασισμένο στη στροβιλότητα. Το μέγιστο επιτρεπόμενο επίπεδο πύκνωσης ορίστηκε σε τέσσερα επίπεδα παραπάνω απο το αρχικό πλέγμα.

Refine	$\tau_{ci} > \sigma_c$	ανά 10 βήματα
Coarsen	$\tau_{ci} < 0.1\sigma_c$	ανά 10 βήματα

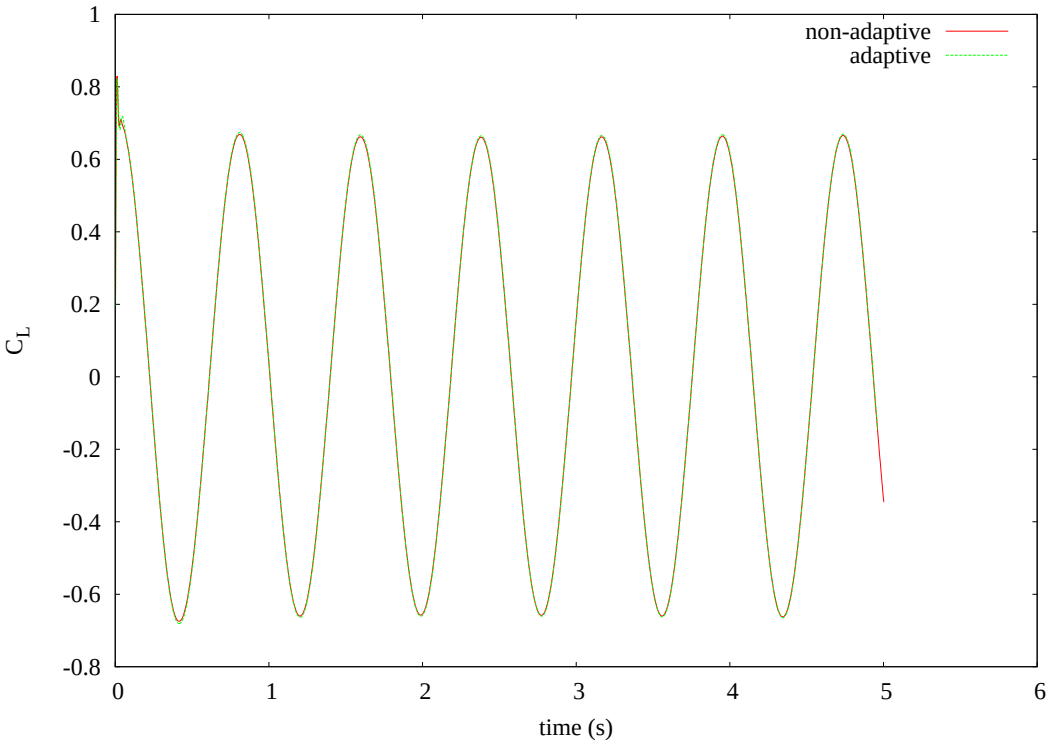
Η προσομείωση έγινε με χρονικό βήμα $dt = 0.002$ (περίπου 393 υπολογιστικά βήματα για κάθε περίοδο). Η διαδικασία της προσαρμογής καλείται ανά 10 υπολογιστικά βήματα, έτσι ώστε να υπάρχει ικανοποιητική απόδοση της κίνησης. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση χωρίς προσαρμογή αποτελείται απο 36757 κελιά. Το πλέγμα για την προσομείωση με προσαρμογή δημιουργήθηκε με τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 4.1.1 με τελικό μέγεθος 19038 κελιά.

Στα σχήματα 4.40, 4.41 παρουσιάζονται το πολικό διαγράμμα του συντελεστή άνωσης καθώς και η χρονική εξέλιξη του για λόγους πληρότητας και για τις δύο προσομειώσεις. Όπως παρατηρούμε, δεν υπάρχει κάποια ουσιαστική διαφορά για τις δυο προσομειώσεις. Η μέση τιμή του συντελεστή είναι όπως αναμενόταν 0 , ενώ το πλάτος του λίγο πάνω απο το 0.6.

Στο σχήμα 4.42, παρατηρούμε ότι γίνεται μεν πύκνωση στους στροβίλους του ομόρρου, αλλά δεν γίνεται ικανοποιητική αραίωση σε περιοχές χαμηλής στροβιλότητας. Αυτό οφείλεται εν μέρει στα κριτήρια προσαρμογής και στο ότι η διαδικασία της αραίωσης γίνεται ανα 10 βή-

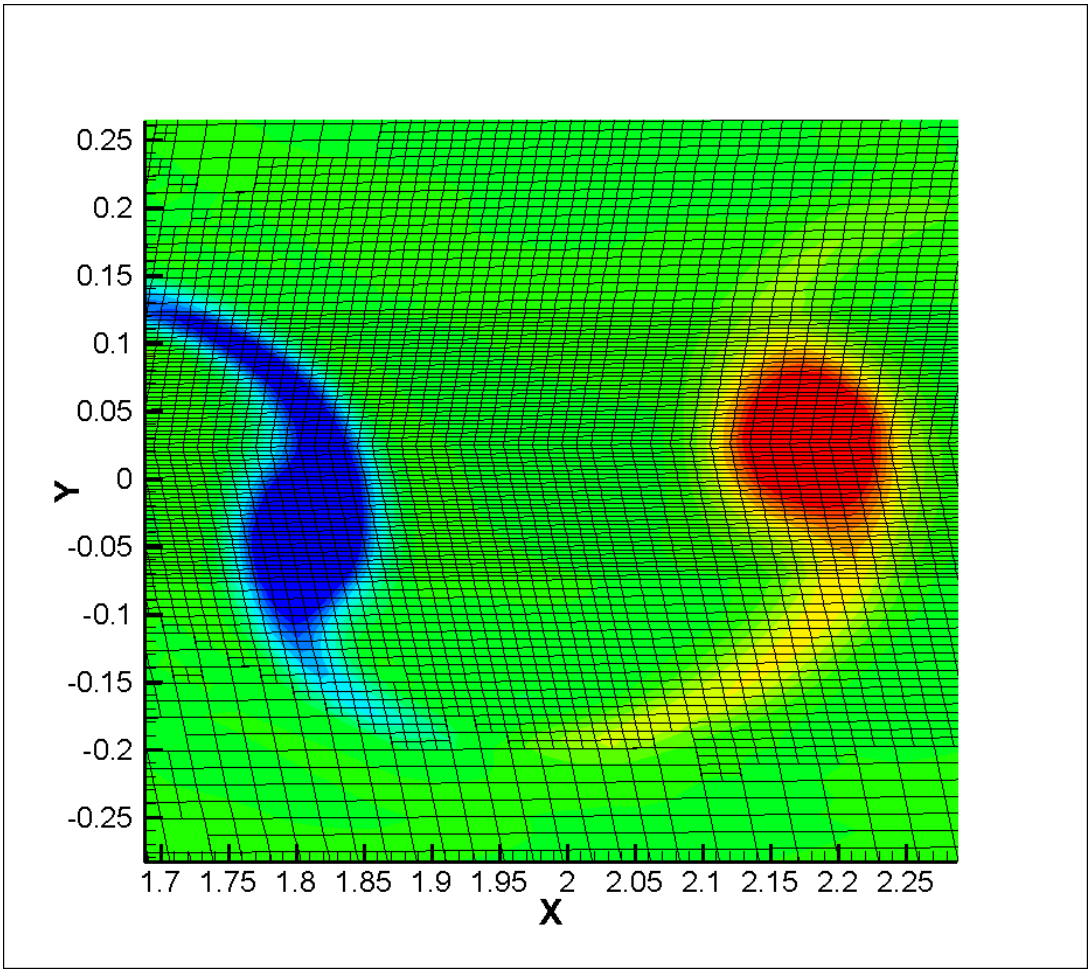


Σχήμα 4.40: *Συντελεστής άνωσης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης*



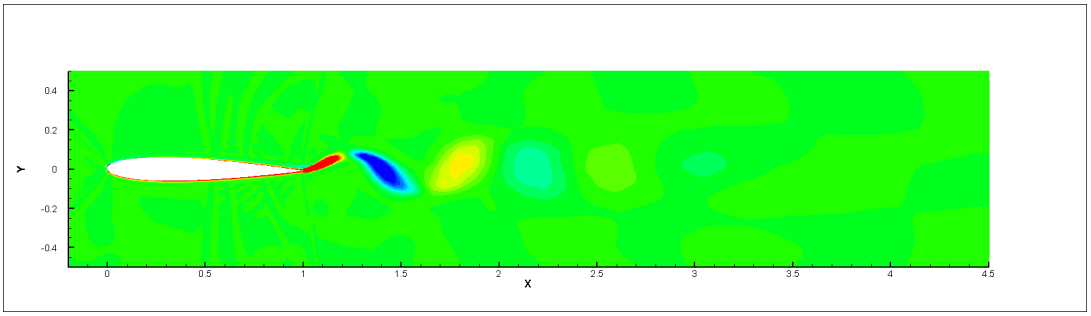
Σχήμα 4.41: *Χρονική εξέλιξη του συντελεστής άνωσης*

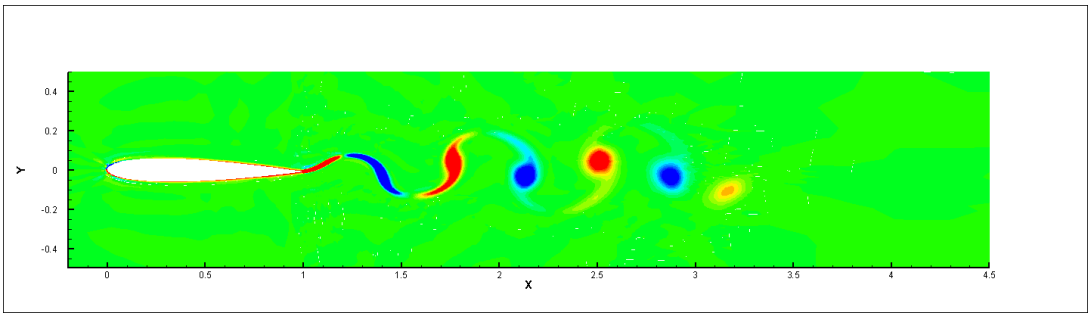
ματα. Κατά κύριο λόγω όμως οφείλεται στον αλγόριθμο επιλογής τετράδων προς αραίωση που φαίνεται να μην λειτουργεί ικανοποιητικά.



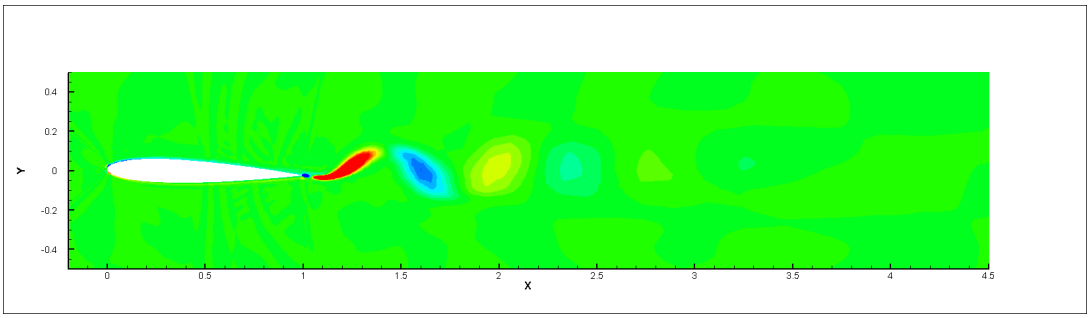
Σχήμα 4.42: *Λεπτομέρεια πλέγματος στον ομόρρου - Τιμές στροβιλότητας από -5 ως 5*

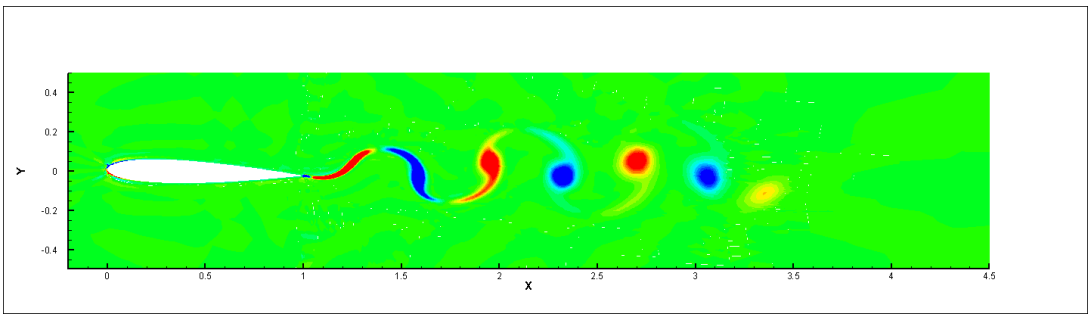
Όπως αναφέραμε, η περιοχή ενδιαφέροντος σε αυτή τη προσομείωση είναι ο ομόρρους της αεροτομής. Στα σχήματα 4.43- 4.47 παρουσιάζεται η κατανομή της στροβιλότητας πίσω απο την αεροτομή σε διάφορα χρονικά στιγμιότυπα και για τις δύο περιπτώσεις. Τα διαγράμματα παρουσιάζονται ανά δύο για κάθε χρονικό σημείο, με το πάνω να είναι αυτό της προσομείωσης χωρίς προσαρμογή και το κάτω αυτό της προσομείωσης με προσαρμογή. Οι τιμές τις αδιάστατης στροβιλότητας που παρουσιάζονται είναι απο -5 εώς 5. Βλέπουμε ότι ενώ στην περίπτωση χωρίς προσαρμογή οι προκύπτοντες στρόβιλοι εξαφανίζονται ύστερα απο απόσταση δύο περίπου χοδών απο την ακμή εκφυγής , στην περίπτωση με προσαρμογή διατηρούνται για αρκετά περισσότερο. Μπορούμε έτσι να παρατηρήσουμε καθαρά το μοτίβο στροβιλότητας που παράγεται, με τους στρόβιλους να κινούνται γύρω απο μια νοητή ευθεία γραμμή. Όπως βλέπουμε και σε πειραματική οπτικοποίηση ταλαντωσης αεροτομής (σε διαφορετικές συνθήκες μεν αλλά με αντίστοιχη συχνότητα και πλάτος)[46] στο σχήμα 4.48, το μοτίβο στροβιλότητας που παράγεται έχει την αναμενόμενη μορφή.



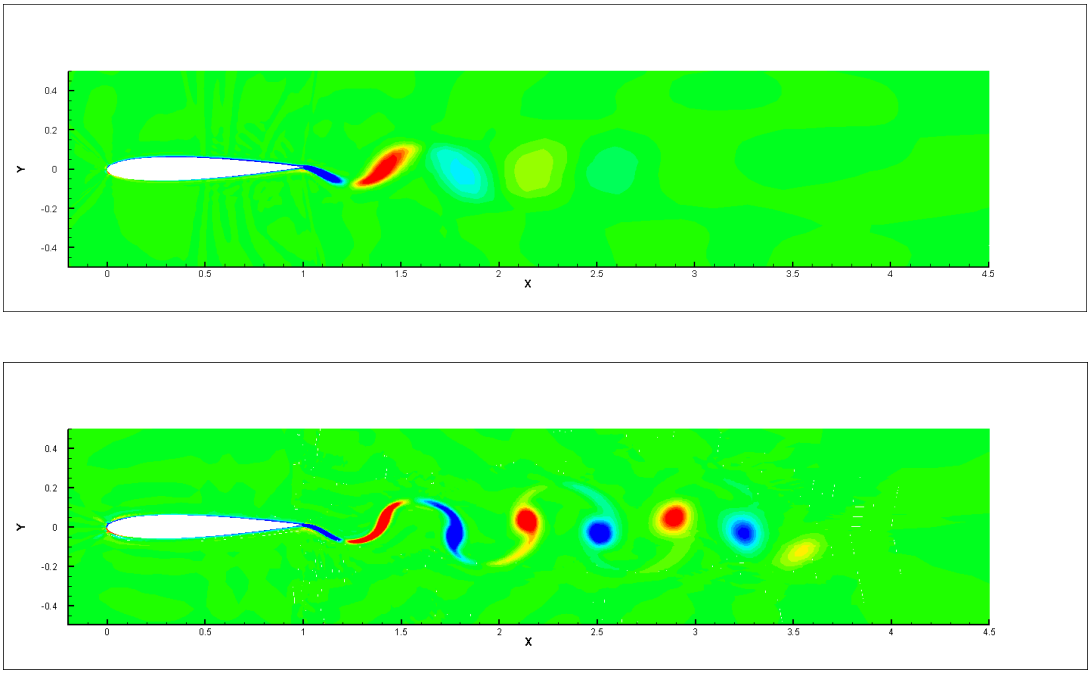


Σχήμα 4.43: *Time = 2.4 s - AoA = 0.68°*

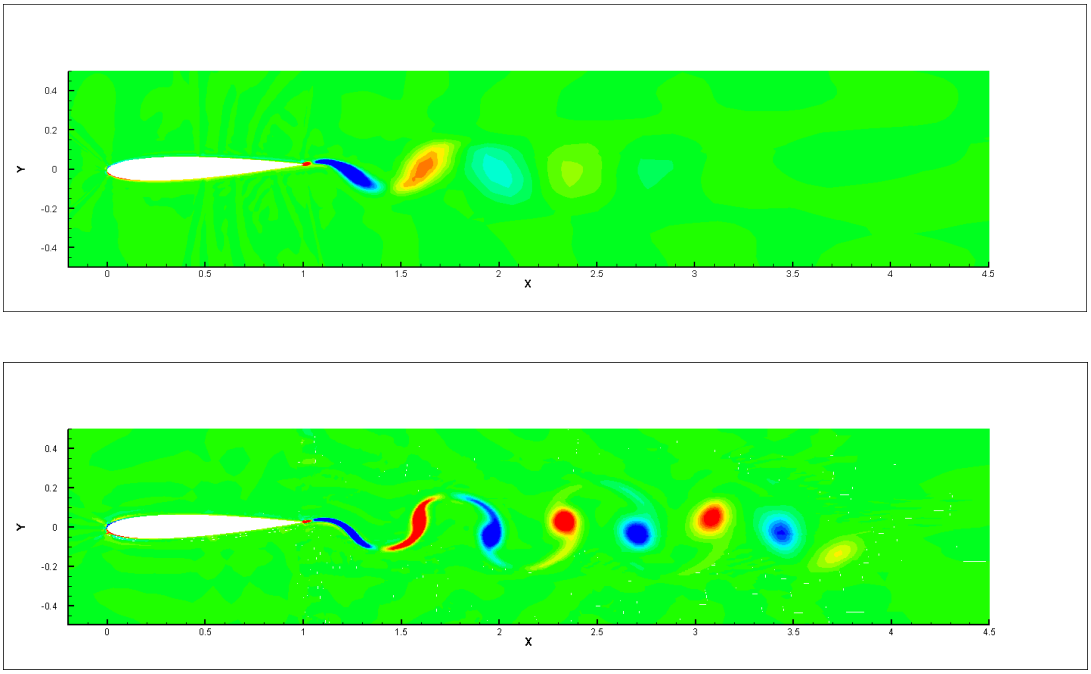




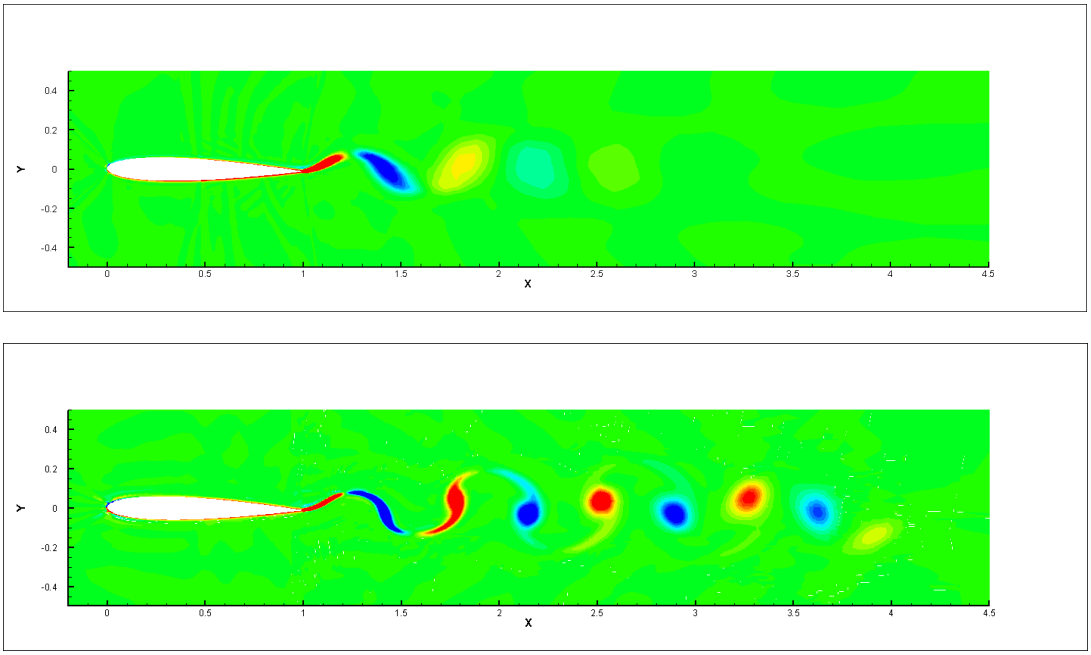
Σχήμα 4.44: *Time = 2.6 s - AoA = 1.86°*



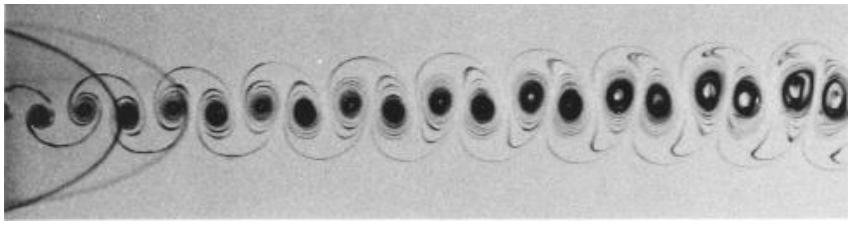
Σχήμα 4.45: *Time = 2.8 s - AoA = -0.80°*



Σχήμα 4.46: *Time = 3.0 s - AoA = -1.81°*



Σχήμα 4.47: *Time = 3.2 s - AoA = 0.90°*



Σχήμα 4.48: *Πειραματική οπτικοποίηση*

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

5.1 Ανακεφαλαίωση

Ανακεφαλαιώνοντας, αντικείμενο της παρούσας εργασίας ήταν η υλοποίηση και ο προγραμματισμός μιας μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes, προσαρμοσμένης στον επιλυτή MaPflow. Η μέθοδος αναπτύχθηκε για δισδιάστατα μη-δομημένα τετραγωνικά πλέγματα. Για την εύρεση των περιοχών πύκνωσης ή αραίωσης υπολογίζονται από τον κώδικα οι τιμές συγκεκριμένων μεταβλητών για κάθε κελί και συγκρίνονται με προεπιλεγμένα κριτήρια για κάθε περίπτωση. Όσον αφορά τον επιλυτή, δεν απαιτήθηκαν ιδιαίτερες μετατροπές του για τον υπολογισμό των παροχών στα κελιά με αυθαίρετο αριθμό πλευρών που προκύπτουν κατά την προσαρμογή. Η πύκνωση έγινε μέσω διαίρεσης των επιλεγμένων τετραγωνικών κελιών σε τέσσερα κελιά-απογόνους, ενώ η αραίωση με την εύρεση τετράδων κελιών και την συνένωση τους σε ένα μεγαλύτερο κελί. Η εισαγωγή νέων κόμβων στο πλέγμα έγινε με μη-σύμμορφο τρόπο, δημιουργώντας δηλαδή ”ελεύθερους” (hanging) κόμβους στα όρια των κελιών με διαφορετικό επίπεδο πύκνωσης. Για την διατήρηση της ομαλότητας του πλέγματος αποκλείστηκε η ύπαρξη γειτονικών κελιών με διαφορά επιπέδου πύκνωσης μεγαλύτερη του ενός (1-irregular node constraint). Η παρεμβολή της λύσης στα νέα κελιά έγινε με απευθείας ανάθεση των τιμών που είχαν τα κελιά-γονείς ή ως ο μέσος όρος των τεσσάρων κελιών στην περίπτωση της αραίωσης. Τέλος, η μέθοδος προσαρμογής χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση μιας πληθώρας προβλημάτων, παρέχοντας έτσι μια πολύπλευρη οπτική μελέτης.

5.2 Συμπεράσματα

Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος προσφέρει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε σχέση με αντίστοιχα αποτελέσματα χωρίς προσαρμογή. Η διαδικασία της προσαρμογής δεν προκαλεί άυξηση του σφάλματος, ούτε και αστάθειες στην τελική λύση. Μέσω της διερεύνησης διαφόρων περιπτώσεων ροής πιστοποιηθήκε η εγκυρότητα της μεθόδου. Ειδικά για τις μη-συνεκτικές ροές μπορεί

να αποτελέσει ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην παρούσα της μορφή.

Η μετατροπή του πλέγματος δεν προκάλεσε απώλεση της συντηρητικής ιδιότητας της μεθόδου πεπερασμένων όγκων. Λόγω της τεχνικής πύκνωσης που χρησιμοποιήθηκε διατηρείται και η ομαλότητα του πλέγματος, με τις ασυνέχειες που παρατηρούνται στα όρια κελιών διαφορετικού επιπέδου πύκνωσης να μην είναι πολύ σημαντικές. Όσον αφορά της διαδικασία αραίωσης, ο αλγόριθμος εύρεσης τετράδων κελιών κρίθηκε ανεπαρκής, ειδικά για τις περιπτώσεις μη-μόνιμων ροών. Η παρεμβολή της λύσης στα νέα κελιά έγινε με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, με στόχο την ελάττωση του υπολογιστικού κόστους. Παρουσιάστηκαν όμως λόγω αυτού αριθμητικές ανακρίβειες, όπως για παράδειγμα στη μη-μόνιμη κίνηση του ζεύγους δινών. Τέλος, αναδείχθηκε η προφανής αναγκαιότητα καλής ποιότητας του αρχικού πλέγματος στην επιτυχία των αποτελεσμάτων της προσαρμογής.

Μια πολύ σημαντική παράμετρος για την επιτυχία μιας τέτοιας μεθόδου είναι η επιλογή των κριτηρίων προσαρμογής. Τα κριτήρια που κατα κύριο λόγο χρησιμοποιήθηκαν λαμβάνουν υπ'όψη τους την συμπιεστότητα και τη στροβιλότητα της ροής. Ένας βασικός στόχος της προσαρμογής πλέγματος είναι η απόκτηση τελικής λύσης χωρίς a priori γνώση των χαρακτηριστικών της ροής. Αυτό επιτεύχθηκε στις περισσότερες περιπτώσεις, με τα κριτήρια να αναγνωρίζουν τα επιθυμητά φαινόμενα. Υπάρχουν βεβαίως σημαντικά περιθώρια μελέτης άλλων κριτηρίων, όπως για παράδειγμα συναρτήσεων των τοπικών σφαλμάτων ή πιο εκλεπτυσμένων ευριστικών μεθόδων για την αναγνώριση των περιοχών ενδιαφέροντος.

Όπως είδαμε, το σημαντικό πλεονέκτημα της προσαρμογής του πλέγματος είναι η μετατροπή συγκεκριμένων περιοχών του πλέγματος ανάλογα τα χαρακτηριστικά της ροής. Έτσι, υπάρχει η δυνατότητα βελτίωσης της τελικής λύσης με μικρότερο υπολογιστικό κόστος και καλύτερη απόδοση των "δύσκολων" φαινομένων. Συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε την καλύτερη απόδοση των απότομων ασυνεχειών στα κύματα κρούσης των μη-συνεκτικών προσομοιώσεων, σε συνδυασμό με τα πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα των αεροδυναμικών συντελεστών. Ακόμα, επιτεύχθηκε η μείωση της αριθμητικής διάχυσης λόγω πυκνότερου πλέγματος και κατα συνέπεια η διατήρηση των στροβίλων στην περίπτωση του ζεύγους δινών και στην μη-μόνιμη προσομείωση της ταλαντούμενης αεροτομής NACA 0012.

Το σφάλμα των προσομειώσεων με προσαρμογή συγκλίνει ικανοποιητικά, φτάνοντας ανά περιπτώσεις το αντίστοιχο του χωρίς προσαρμογή πλέγματος. Είναι βέβαια αναμενόμενη η δυσκολία σύγκλισης που αντιμετωπίζει ένα πιο πύκνο πλέγμα. Για την βελτίωση της σύγκλισης αναγκαία είναι μια πιο διεξοδική μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων του επιλυτή, όπως ο αριθμός CFL ή το επιθυμητό σφάλμα επίλυσης του τελικού συστήματος εξισώσεων, σε συνδυασμό με τη διαδικασία προσαρμογής.

5.3 Προτάσεις για μελλοντική βελτίωση

- Επέκταση σε άλλους τύπους στοιχείων καθώς και σε τρισδιάστατα πλέγματα.
- Ενσωμάτωση της δυνατότητας παράλληλης επεξεργασίας με στόχο την μείωση του υπολογιστικού χρόνου. Για την βέλτιστη επίτευξη αυτού του στόχου, αναγκαίος είναι ο κατάλληλος διαχωρισμός των προσαρμοσμένων πλεγμάτων σε υποπλέγματα με αντίστοιχους αριθμούς κελιών.
- Χρήση κατάλληλων δομών δεδομένων (quadtrees) για την αποθήκευση των σχέσεων κελιών-γονέων και κελιών-απογόνων. Θα επιτευχθεί έτσι η δυνατότητα άμεσης αραίωσης του πλέγματος και συνεπώς η βελτίωση σε σχέση με την χρησιμοποιούμενη τεχνική.
- Εισαγωγή σχημάτων μεγαλύτερης τάξης για την παρεμβολή της λύσης στα νέα κελιά, καθώς και για την εύρεση των τιμών στις διαιρεμένες πλευρές των κελιών (με σκοπό τον ακριβέστερο υπολογισμό των τιμών των παραγώγων στα κέντρα των κελιών μέσω του θεωρήματος Green-Gauss).
- Ανάπτυξη υπορουτίνας παρεμβολής των νέων κόμβων στο στερεό σύνορο, μέσω κατάλληλου σχήματος παρεμβολής.
- Χρήση της μεθόδου προσαρμογής σε καρτεσιανά πλέγματα, σε συνδυασμό με τεχνικές cut-cell ή immersed boundary condition για τον χειρισμό των κελιών στα σύνορά και των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών.

Βιβλιογραφία

[1] Blazek, J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications.* Amsterdam: Elsevier, 2001.

[2] Wesseling, Pieter. *Principles of Computational Fluid Dynamics.* Berlin: Springer, 2001.

[3] Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge: Cambridge UP, 2005.

[4] Versteeg, H. K., W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics.* Harlow: Longman, 1996.

[5] Tannehill, John C., Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.* Washington, DC: Taylor and Francis, 1997.

[6] Μπεργελές, Γ. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική.* Αθήνα: 2006.

[7] Venkatakrishnan, V. *On the accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solution.*AIAA Paper 93-0880,1993.

[8] Venkatakrishnan, V. *Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters.* J.Computational Physics, 118(1995), pp. 120-130.

[9] Barth, T.J., Jespersen, D.C. *The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes.* AIAA Paper 89-0366,1989.

[10] Harten, A., Lax, P.D., Van Leer, B. *On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws.* Soc.Industrial and Applied Mathematics Rew. 25(1983), No. 1

[11] Harten, A., Hyman, J.M. *Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws.* J. Computational Physics, 50(1983), pp.235-269

[12] Fischer, J. *Self-Adaptive Mesh Refinement for the Computation of Steady, Compressible Viscous Flows.* Aeronaut. J., pp. 357-367, Dec. 1993.

[13] Berger, M. J., Collela, P. *Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics* J. Comput. Phys., vol. 82, pp. 64-84, 1989.

[14] Berger, M. J., Oliger, J. *Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations.* J. Comput. Phys., vol. 53, pp. 484-512, 1984.

[15] Berger, M. J. *On Conservative at Grid Interfaces.* SIAM J. Numer. Anal., vol. 24, no. 5, pp. 967-984, 1987.

[16] Mesaros, L. M., Stephenson, P.W. *Application of Computational Mesh Optimization Techniques to Heavy Duty Diesel Intake Port Modelling* SAE Tech. Paper 1999-01-1182, 1999.

[17] Ochs, S. S., Rajagopalan, R. G. *An Adaptively Refined Quadtree Grid Method for Incompressible Flow.* Numer. Heat Transfer B, vol. 34, pp. 379-400, 1998.

[18] Kallinderis, Y., Vidwans, A. *Generic Parallel Adaptive-Grid Navier-Stokes Algorithm.* AIAA J., vol. 32, no. 1, pp. 54-61, 1994.

[19] Connell, S. D., Holmes, D. G. *Three-Dimensional Unstructured Adaptive Multigrid Scheme for the Euler Equations.* AIAA J., vol. 32, no. 8, pp. 1626-1632, 1994.

[20] Coelho, P., Pereira, J. C. F., Carvalho, M. G. *Calculation of Laminar Recirculating Flows Using a Local Non-staggered Grid Refinement System* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 12, no. 6, pp. 535-557, 1991.

[21] Vilsmeier, R., HÌnel, D. *Adaptive Methods on Unstructured Grids for Euler and Navier-Stokes Equations.* Comput. Fluids, vol. 22, no. 4-5, pp. 485-499, 1993.

[22] Muzaferija, S., Gosman, D. *Finite-Volume CFD Procedure and Adaptive Error Control Strategy for Grids of Arbitrary Topology.* J. Comput. Phys., vol. 138, no. 2, pp. 766-787, 1997.

[23] DeZeeuw, D. L. *A Quadtree-Based Adaptively Refined Cartesian Grid Algorithm for Solution of the Euler Equations.* Department of Aerospace Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI. 1993.

[24] DeZeeuw, D. L., Powell, K. G. *A Quadtree-Based Adaptively Refined Cartesian Mesh Solver for the Euler Equations.* AIAA. 1991.

[25] Greaves, D. *A Quadtree Adaptive Method for Simulating Fluid Flows with Moving Interfaces.* Journal of Computational Physics. 2004. 194(1): 35-56.

[26] W.L. Chen, F.S. Lien, M.A. Leschziner. *Local mesh refinement within a multi-block structured-grid scheme for general flows.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 144, Issues 3–4, 30 May 1997, Pages 327-369

[27] Ait-Ali-Yahia, D., Habashi, W. G., Tam, A., Vallet, M.-G., Fortin, M. *A Directionally Adaptive Methodology Using an Edge-Based Error Estimate on Quadrilateral Grids.* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 23, pp. 673-690, 1996.

[28] Patel, M. K., Pericleous, K. A., Baldwin, S. *The Development of a Structured Mesh Grid Adaptation Technique for Resolving Shock Discontinuities in Upwind Navier-Stokes Codes* Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 20, pp. 1179-1197, 1995.

[29] Tattersall, P., McGuirk, J. J. *Evaluation of Numerical Diffusion Effects in Viscous Flow Calculations.* Comput. Fluids, vol. 23, no. 1, pp. 177-209, 1994.

[30] Ramakrishnan, R. *Structured and Unstructured Grid Adaptation Schemes for Numerical Modelling of Field Problems.* Appl. Numer. Math., vol. 14, no. 1-3, pp. 285-310, 1994.

[31] Dwyer, H. A. *Grid Adaptation for Problems in Fluid Dynamics* AIAA J., vol. 22, no. 12, pp. 1705-1712, 1984.

[32] Dandekar, H. W., Hlavacek, V., Degreve, J. *An Explicit 3D Finite-Volume Method for Simulation of Reactive Flows Using a Hybrid Moving Adaptive Grid.* Numer. Heat Transfer B, vol. 24, no. 1, pp. 1-29, 1993.

[33] Demkowicz, L., Oden, J. T., Rachowicz, W., Hardy, O. *Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy: Part 1: Constrained Approximation and Data Structure.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 77, pp. 79-112, 1989.

[34] Oden, J. T., Demkowicz, L., Rachowicz, W., Westermann, T. A. *Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy: Part 2: A-Posteriori Error Estimation.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 77, pp. 113-180, 1989.

[35] Rachowicz, W., Oden, J. T., Demkowicz, L. *Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy: Part 3: Design of h-p Meshes.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 77, pp. 181-212, 1989.

[36] Dompierre, J., Vallet, M. G., Fortin, M., Bourgault, Y., Habashi, W. G. *Anisotropic Mesh Adaptation: Towards a Solver and User Independent CFD.* AIAA Paper 97-0861, 1997.

[37] Habashi, W. G., Dompierre, J., Bourgault, Y. *Certifiable Computational Fluid Dynamics through Mesh Optimisation.* AIAA J., vol. 36, no. 5, pp. 703-711, 1998.

[38] Fortin, M., Valet, M. G., Dompierre, J., Bourgault, Y., Habashi, W. G. *Anisotropic Mesh Adaptation: Theory, Validation and Applications.* in EC-COMAS Conference, Paris, Wiley, Conference Proceedings, vol. 2, pp. 1-7, 1996.

[39] De Cougn, H. L., Shepard, M. S. *Parallel refinement and coarsening of tetrahedral meshes.* Int. J. Numer. Methods Eng. 46, 1101 (1999).

[40] Babuska I., Rheinboldt W. *Error estimates for adaptive finite element computations.* SIAM J.Numer.Anal, 15:736–754, 1978.

[41] Vassberg J. C., Jameson A. *In Pursuit of Grid Convergence, Part I: Two-Dimensional Euler Solutions* AIAA Paper 2009-4114.

[42] Venditti A. D. *Grid adaptation for functional outputs of compressible flow simulations* Thesis PhD. MIT. Dept. of Aeronautics and Astronautics. 2002.

[43] Morton K. W., Paisley M. F., *A finite volume scheme with shock fitting for the steady euler equations.* . Journal of Computational Physics. Volume 80 Issue 1. January 1989

[44] Pullia T. H., Barton J. T., *Euler computations of AGARD working group 07 airfoil test cases.* AIAA-85-0018. 1985.

[45] Warren G., Anderson W. K., Thomas L., Krist S. *Grid convergence for adaptive methods.* AIAA PAPER 91-1592. p. 729-741. 1991.

[46] Koochesfahani, M. M., *Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil.* AIAA Journal 27. p. 1200-1205. 1989.