



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ,
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ MÖBIUS ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΤΣΑΝΕΒΑΚΗ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Β. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

© ΑΘΗΝΑ 2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή στηρίζεται στη μελέτη των μετασχηματισμών Möbius , μια σημαντική κατηγορία των μιγαδικών συναρτήσεων, μέσα από τη θεωρητική ανάλυση των σύμμορφων απεικονίσεων παρουσιάζοντας μια ποικιλία εφαρμογών σε προβλήματα απεικόνισης πεδίων και σε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Οι σύμμορφες απεικονίσεις αποτελούν σπουδαίο κλάδο των μαθηματικών με τον οποίο έχουν ασχοληθεί σπουδαίοι μαθηματικοί. Οι μετασχηματισμοί Möbius, που είναι μέρος των σύμμορφων απεικονίσεων, πήραν το όνομά τους προς τιμή του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού και αστρονόμου August Ferdinand Möbius (1790-1868) γνωστού κυρίως για τη σύλληψη της λωρίδας Möbius (Möbius Strip). Θεμελιωτής του κλάδου θεωρείται ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής (1873-1950), με πλήθος δημοσιευμένων εργασιών στις αρχές του προηγούμενου αιώνα.

Η χρησιμότητα των μετασχηματισμών Möbius και γενικότερα οι σύμμορφες απεικονίσεις είναι μεγάλη στον κλάδο της φυσικής και της μηχανικής (θεωρία ελαστικότητας, υδροδυναμική, αεροδυναμική) καθώς επιτρέπουν την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών που αφορούν στην εξίσωση Laplace με απλές μεθόδους. Η σπουδαιότητα των σύμμορφων απεικονίσεων είναι ότι η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη και διατηρούν τη γωνία τομής δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.

Συνοψίζοντας, στην εργασία αυτή μελετάμε τη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε πλήθος πεδίων, δίνοντας έμφαση στο δίσκο και στο άνω ημιεπίπεδο.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Παπανικολάου για την υπόδειξη του θέματος και τη βοήθειά του για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜÖBIUS	7
1.1 Σύμμορφες απεικονίσεις	7
1.2 Το θεώρημα Riemann	11
1.3 Μετασχηματισμοί Möbius	14
1.4 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ	65
2.1 Είδη προβλημάτων συνοριακών τιμών	65
2.2 Εφαρμογές προβλημάτων συνοριακών τιμών	69
2.3 Το πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο	81
2.4 Πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιέπιπεδο	88
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 –

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ – ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜÖBIUS

1.1 Σύμμορφες απεικονίσεις

Μία συνάρτηση $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένας **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή **σύμμορφη απεικόνιση** στο πεδίο $D \subset A$, αν η f είναι *ολόμορφη*¹ στο D και $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

Παραδείγματα : i) Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη στο \mathbb{C} αφού $f'(z) = e^z \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

ii) Η συνάρτηση $f(z) = z^3$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

iii) Η συνάρτηση $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Έστω $f(z)$ μία ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη στο πεδίο D με $f'(z) \neq 0$ στο D και $C: z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ μία *λεία*² καμπύλη στο D , η οποία διέρχεται από το σημείο $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο z_0 με τον θετικό άξονα x , τότε ισχύει ότι $\theta = \arg z'(t_0)$, όπου $\arg z'(t_0)$ το *όρισμα*³ του $z'(t_0)$.

Υποθέτουμε ότι η εικόνα της C μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$ είναι η $C': w(t) = f(z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ και w_0 η εικόνα του z_0 , δηλαδή $w_0 = f(z(t_0)) = f(z_0)$.

¹ Μία συνάρτηση $f(z)$ ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο A ονομάζεται **όλομορφη** στο A αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A .

² Μία καμπύλη C ονομάζεται **λεία**, αν η $z(t)$ έχει συνεχή παράγωγο με $z'(t) \neq 0$ στο $[\alpha, \beta]$. Αν η καμπύλη είναι κλειστή θα πρέπει $z'(\alpha) = z'(\beta)$.

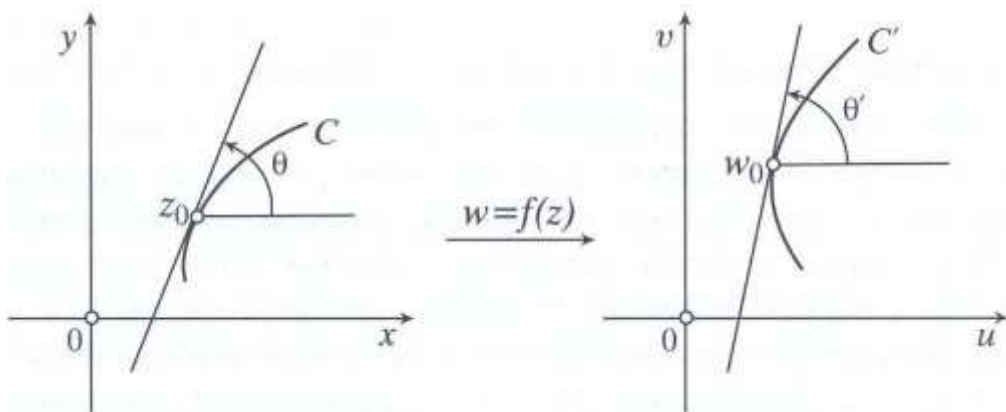
³ Έστω $z = x + iy \neq 0$ ένας μιγαδικός αριθμός, $|z| = r$ και $P(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο. Κάθε γωνία θ , μετρούμενη σε ακτίνια, που ικανοποιεί τις σχέσεις $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ονομάζεται **όρισμα** του z . Το σύνολο όλων των ορισμάτων του z συμβολίζεται με $\arg z$.

Βάσει του κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης έχουμε:

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0). \quad (1)$$

Η καμπύλη C' έχει μία εφαπτομένη στο σημείο w_0 , διότι $w'(t_0) \neq 0$, επειδή $f'(z_0) \neq 0$ και $z'(t_0) \neq 0$. Εάν $\theta' = \arg w'(t_0)$, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0). \quad (2)$$



Η διαφορά γωνιών $\varphi = \theta' - \theta$ ονομάζεται **γωνία στροφής της καμπύλης C** στο σημείο z_0 μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$.

Μέσω της σχέσης (2) συμπεραίνουμε ότι, αν $f'(z_0) \neq 0$, όλες οι καμπύλες που διέρχονται από το z_0 στρέφονται με την ίδια γωνία μέσω της απεικόνισης $w = f(z)$. Αυτό συμβαίνει γιατί η γωνία στροφής στο z_0 δεν εξαρτάται από την καμπύλη και είναι ίση με $\arg f'(z_0)$.

Έστω τώρα δύο λείες καμπύλες C_1, C_2 που βρίσκονται μέσα στο D και διέρχονται από το σημείο z_0 και C'_1, C'_2 οι εικόνες των μέσω της f που διέρχονται από το σημείο w_0 . Αν οι εφαπτόμενες των καμπυλών C_1, C_2 σχηματίζουν με τον άξονα x στο σημείο z_0 γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα, τότε σύμφωνα με τη σχέση (2), οι ποσότητες

$$\theta'_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0) \quad \text{και} \quad \theta'_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$$

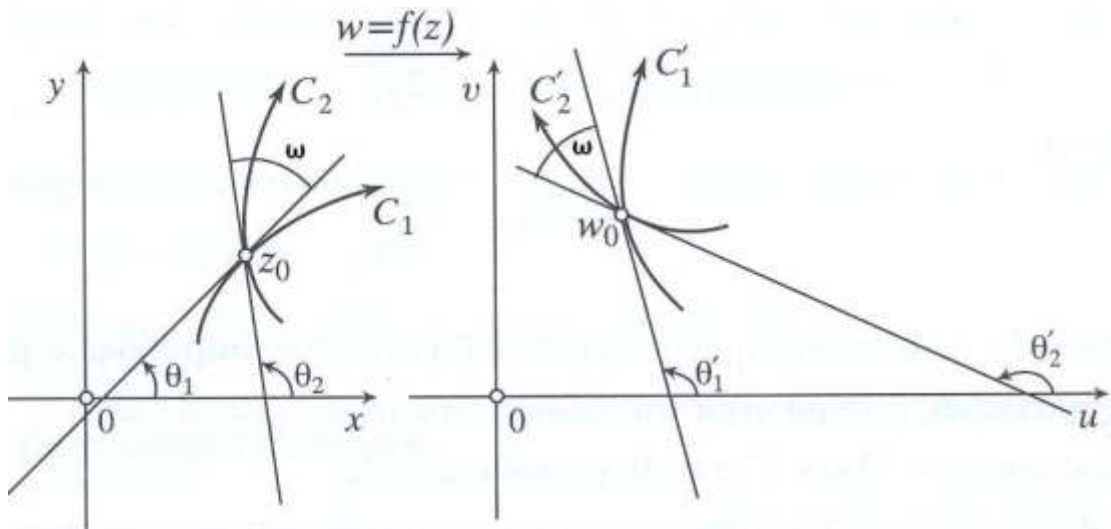
Είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στις C'_1 και C'_2 , στο σημείο $w_0 = f(z_0)$.

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1.$$

Δηλαδή, οι σύμμορφες απεικονίσεις παρουσιάζουν μία *σημαντική ιδιότητα*. **Διατηρούν τη γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.**

Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι η γωνία $\theta_2' - \theta_1'$ από την C_1' στην C_2' είναι η ίδια σε μέτρο και προσανατολισμό με τη γωνία $\theta_2 - \theta_1$ από τη C_1 στη C_2 . Οι γωνίες αυτές σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα με ω .



Εφαρμογή 1

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ είναι σύμμορφη στα σημεία $z_1 = \pi/2$ και $z_2 = 0$ και να βρεθεί η γωνία στροφής $\omega = \arg f'(z)$ σε αυτά τα σημεία.

Λύση : Έχουμε ότι $f'(z) = \cos z$. Οπότε η απεικόνιση $w = \sin z$ είναι σύμμορφη παντού εκτός από τα σημεία $z = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Άρα η $f(z) = \sin z$ είναι σύμμορφη στα σημεία z_1 και z_2 . Επειδή

$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ και με τη χρήση του υπερβολικού ημιτόνου $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ θα έχουμε :

$$\omega = \arg \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \arg \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + i\right)}}{2} = \arg \frac{i(e^{-i} - e)}{2} = -\frac{\pi}{2} \text{ και } \theta = \arg \cos 0 = \arg 1 = 0 .$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί η γωνία στροφής $\omega = \arg f'(z)$ της απεικόνισης $f'(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, στο σημείο z_0 με $\operatorname{Im} z_0 = y_0 > 0$.

Λύση : Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_0\}$ και ισχύει

$$f'(z) = \frac{z - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, z \neq z_0 .$$

Επομένως

$$f'(z) = \frac{1}{2iy_0} = -\frac{i}{2y_0} ,$$

οπότε

$$\omega = \arg f'(z_0) = -\frac{\pi}{2} .$$

Πρόταση : Αν η f είναι ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη σε ένα πεδίο D , τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$, δηλαδή η f είναι σύμμορφη στο D .

Απόδειξη : Έστω ότι για κάποιο $z_0 \in D$ έχουμε ότι $f'(z_0) = 0$. Η συνάρτηση $h(z) = f(z) - f(z_0)$ έχει το z_0 ρίζα τάξης $n \geq 2$. Μέσα στο D υπάρχει κύκλος $C : |z - z_0| = r$ πάνω στον οποίο η h δε μηδενίζεται ενώ στο εσωτερικό του ισχύει $h'(z) = 0$ όταν $z = z_0$. Αν $0 < |a| < \min_C |h(z)|$, τότε η συνάρτηση $h(z) - a$ έχει n ρίζες μέσα στον κύκλο C . Επειδή $h'(z) = 0$ μόνο για $z = z_0$ μέσα στον κύκλο C , οι ρίζες αυτές είναι απλές. Επομένως $f(z) = f(z_0) + a$ για τουλάχιστον δύο σημεία μέσα στον κύκλο C , άτοπο, αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D .

1.2 Το θεώρημα Riemann

Οι σύμμορφες απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που περιέχει την εξίσωση Laplace σε ένα άλλο απλούστερο. Η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης. Για τη μελέτη των συνοριακών συνθηκών, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι το σύνορο απεικονίζεται στο σύνορο.

Εφαρμογή

Έστω $f(z) = z^2$ και

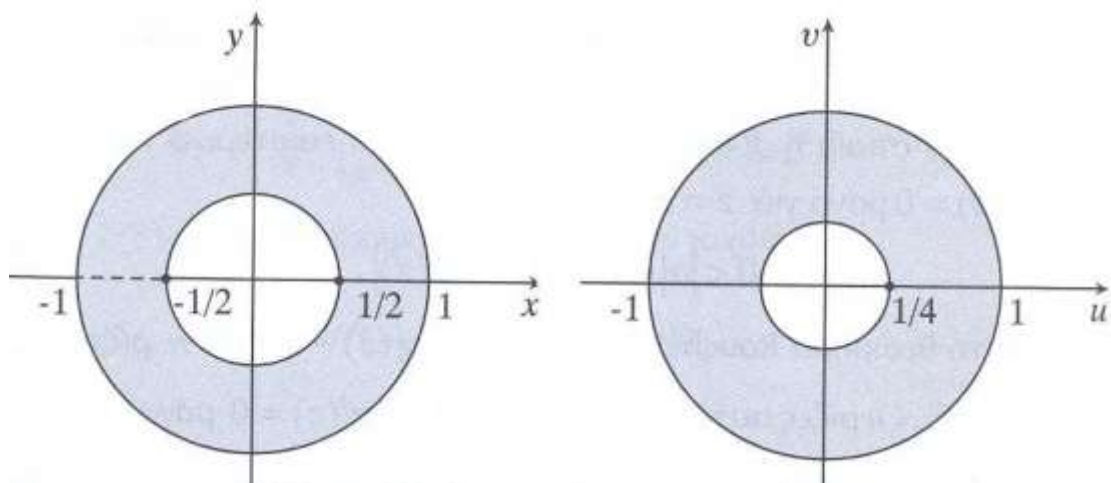
$$D = \left\{ z = re^{i\theta} : \frac{1}{2} < r < 1, -\pi < \theta < \pi \right\}.$$

Η f είναι ολόμορφη στο D με $f'(z) = 2z \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Έυκολα διαπιστώνουμε ότι

$$f(D) = \left\{ w = re^{i\theta} : \frac{1}{4} < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Το συνοριακό τμήμα $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ απεικονίζεται στο εσωτερικό του $f(D)$ στο $-\frac{1}{4} \leq u \leq 1$.

Συνεπώς η f δεν απεικονίζει το σύνορο του D στο σύνορο του $f(D)$.



Έστω ένα πεδίο D , C μία κλειστή καμπύλη μέσα στο D και $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ μία συνεχής απεικόνιση. Η εικόνα, C' , της C μέσω της f είναι μία κλειστή καμπύλη στο w – επίπεδο.

Αν κατά τη συνεχή κίνηση ενός σημείου κατά τη θετική φορά πάνω στη C , η εικόνα του στη C' κινείται και αυτή κατά τη θετική φορά, τότε θα λέμε ότι η f διατηρεί τη φορά. Θετική είναι η φορά με την οποία κινείται ο παρατηρητής για να βλέπει το εσωτερικό της C στα αριστερά του, δηλαδή η αντίστροφη από την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων

Έστω D και G δύο απλά συνεκτικά⁴, φραγμένα πεδία που έχουν σύνορα τις απλές, κλειστές και τμηματικά λείες⁵ καμπύλες C_1 και C_2 αντίστοιχα.

Θεώρημα 1 : Αν η σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και απεικονίζει το πεδίο D επί του πεδίου G , τότε ισχύει ότι

η $f(z)$ μπορεί να επεκταθεί στο \overline{D} ώστε να είναι συνεχής

η επέκταση είναι αμφιμονοσήμαντη από τη C_1 επί της C_2 και διατηρεί τη φορά.

Ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 2 : Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $w = f(z)$ είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο \overline{D} . Η απεικόνιση $f : C_1 \rightarrow C_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη φορά. Τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και απεικονίζει το D σύμμορφα επί του G .

⁴ Ένα D ονομάζεται απλά συνεκτικό αν το D περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του. Δηλαδή, σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο δεν υπάρχουν οπές.

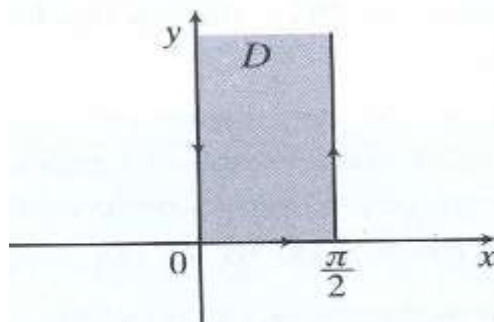
⁵ Μία καμπύλη C ονομάζεται τμηματικά λεία, αν μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό λείων καμπυλών.

Παρατήρηση : Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για μη φραγμένα πεδία D με κατά τμήματα λεία σύνορα • μία αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ απεικονίζει το σύνορο ενός πεδίου επί του συνόρου του $f(D)$ με αμφιμονοσήμαντο τρόπο και διατηρεί τη φορά.

Εφαρμογή

Έστω $f(z) = \sin z$ και $D = \{ z = x + iy : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \}$. Να βρεθεί το $f(D)$.

Λύση :



Στο σχήμα φαίνεται ότι το πεδίο D είναι μια ημίπειρη λωρίδα. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και συνεχής στο σύνορο του D . Για $z = x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(z) = \sin x$, οπότε η f

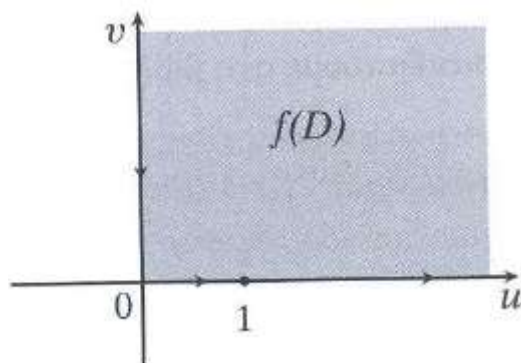
απεικονίζει το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ επί του διαστήματος $[0, 1]$ του $f(D)$. Για $z = iy, y > 0$, έχουμε $f(z) =$

$\sin iy = i \sinh y$, δηλαδή ένας φανταστικός αριθμός, συνεπώς η f απεικονίζει το θετικό $y - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha$

στο θετικό $u - \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha$. Για $z = \frac{\pi}{2} + iy, y > 0$, έχουμε $f(z) = \sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \cosh y$, οπότε η f

απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$ στο διάστημα $[1, \infty]$. Από αρχή της αντιστοιχίας των

συνόρων, το $f(D)$ θα είναι όπως φαίνεται παρακάτω το πρώτο τεταρτημόριο.



Θεώρημα Riemann : Αν D είναι ένα απλά συνεκτικό πεδίο του επιπέδου διαφορετικό του \mathbb{C} , τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ που απεικονίζει το D επί του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$. Η απεικόνιση είναι μοναδική αν για κάποιο $z_0 \in D$ έχουμε $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.

Παρατηρήσεις : 1) Στην περίπτωση που $D = \mathbb{C}$ το θεώρημα δεν ισχύει. Αν ίσχυε θα έπρεπε για μία ακέραια και μη σταθερή συνάρτηση να ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άτοπο από θεώρημα Liouville.

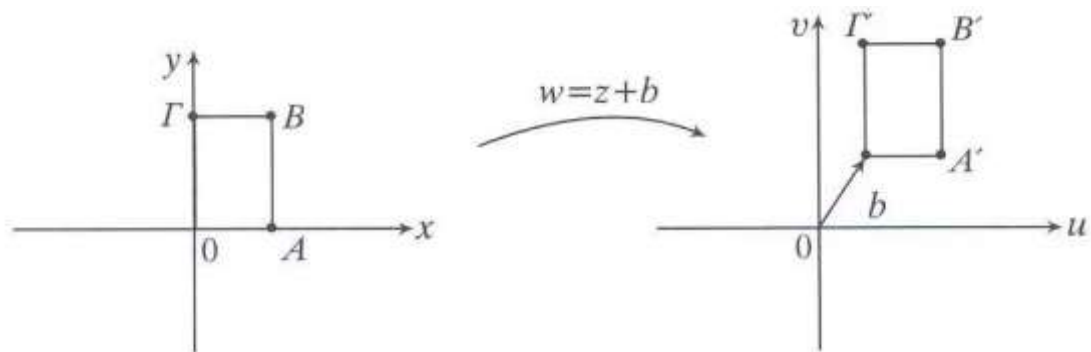
2) Το θεώρημα Riemann εξασφαλίζει την ύπαρξη και όχι την κατασκευή της απεικόνισης f και για το λόγο αυτό έχει θεωρητικό κυρίως ενδιαφέρον.

1.3 Μετασχηματισμοί Möbius

Οι μετασχηματισμοί Möbius αποτελούν τους πιο χρήσιμους και με πολλές εφαρμογές σύμμορφους μετασχηματισμούς. Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι η σύνθεση των ακόλουθων στοιχειωδών μετασχηματισμών.

- **Μετατόπιση**

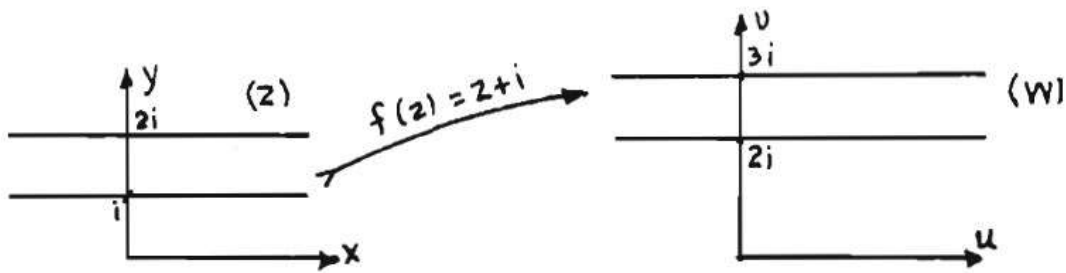
Έστω b μια μιγαδική σταθερά. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = z + b$, είναι αμφιμονοσήμαντη και απεικονίζει το τυχαίο σημείο z του z – επιπέδου στο σημείο $w = z + b$ του w – επιπέδου. Έτσι η εικόνα $f(z)$ είναι μετατοπισμένη ως προς το αρχέτυπο z κατά το διάνυσμα b . Το ίδιο ισχύει και για όλα τα σημεία ενός σχήματος, οπότε μέσου αυτού του μετασχηματισμού μπορεί να μεταφερθεί ολόκληρο το σχήμα κατά το διάνυσμα b . Επειδή όλα τα σημεία μετατοπίζονται κατά το ίδιο διάνυσμα, οι διαστάσεις του σχήματος δεν αλλάζουν.



Ειδικά αν ο b είναι πραγματικός, δηλαδή $\text{Im}b = 0$, η μεταφορά γίνεται παράλληλα στον άξονα x . Αν ο b είναι καθαρά φανταστικός, δηλαδή $\text{Re}b = 0$, τότε η μεταφορά γίνεται παράλληλα στον y . Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $z = w - b$.

Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(z) = z + i$ μετατοπίζει το τυχαίο σημείο z κατά το διάνυσμα i , παράλληλα στον φανταστικό άξονα.



Έτσι η λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $y = 1, y = 2$, απεικονίζεται στη λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $v = 2, v = 3$.

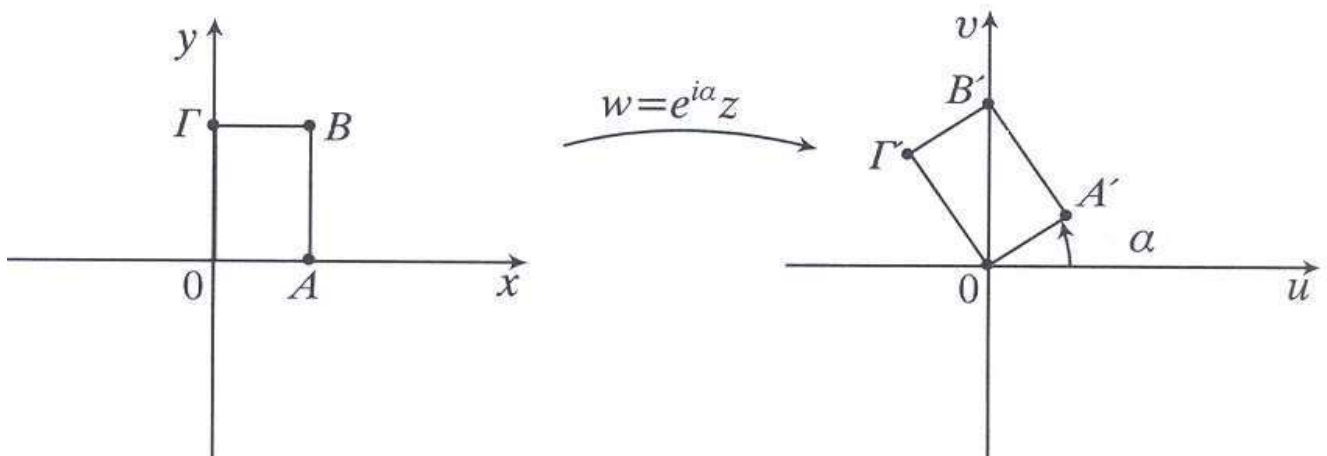
- **Στροφή**

Αν α είναι πραγματική σταθερά, τότε ο μετασχηματισμός

$$w = f(z) = ze^{i\alpha} = re^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$$

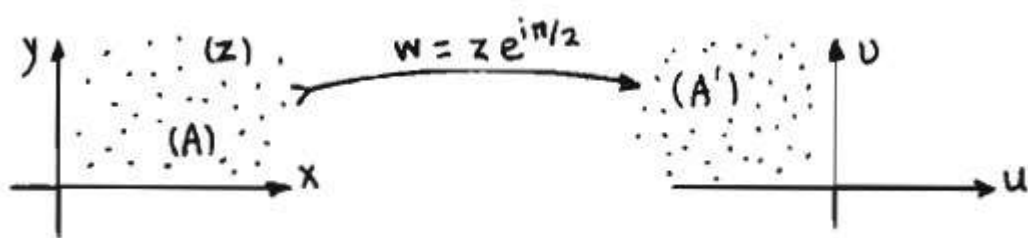
προκαλεί αλλαγή της γωνίας του τυχαίου μιγαδικού z κατά α . Δηλαδή το διάνυσμα z απεικονίζεται στο διάνυσμα w το οποίο έχει στραφεί ως προς το z **κατά γωνία α** . Επειδή $|e^{i\alpha}| = 1$, ισχύει $|w| = |z|$.

Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = we^{-i\alpha}$.



Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ προκαλεί στροφή του τυχαίου διανύσματος z κατά $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

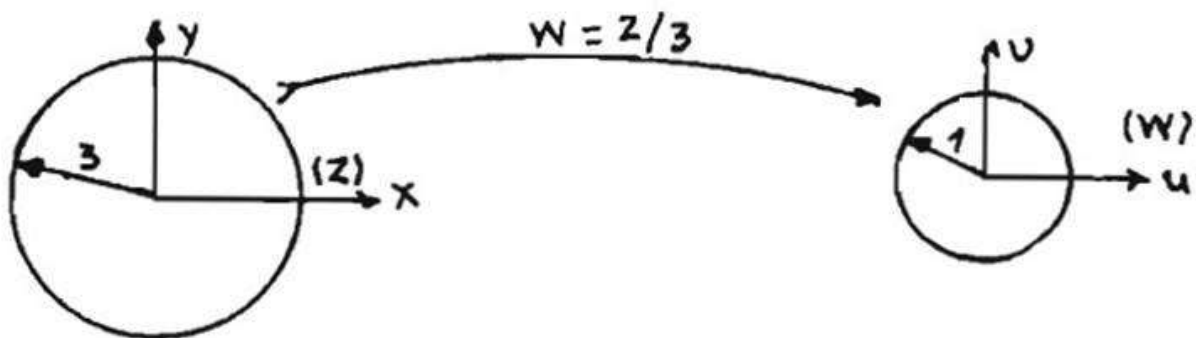


- **Μεγένθυση**

Έστω k μια θετική πραγματική σταθερά. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = kz$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του z – επιπέδου επί του w – επιπέδου και ονομάζεται μεγένθυση. Η απεικόνιση αυτή μεγενθύνει επί k το μέτρο του z χωρίς να του αλλάζει τη διεύθυνση. Αν $0 < k < 1$ έχουμε σμίκρυνση.

Εφαρμογή

Η απεικόνιση $w = \frac{1}{3}z$ μετασχηματίζει τον κυκλικό τόπο $|z| \leq 3$ του επιπέδου z , στον κυκλικό τόπο $|z| \leq 1$ του επιπέδου w .



Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι $z = \frac{1}{k} w$.

- Αντιστροφή

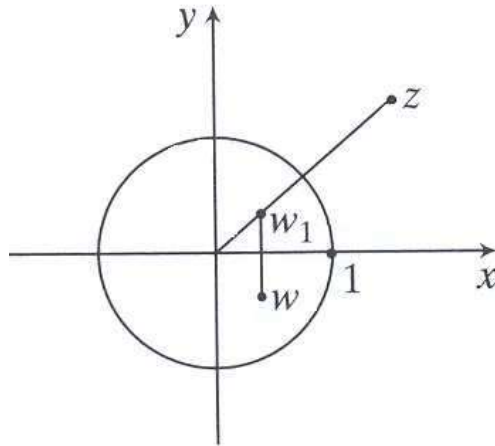
Ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{1}{z}, z \neq 0$$

είναι σύνθεση των μετασχηματισμών

$$w_1 = \frac{1}{|z|^2} z \quad \text{και} \quad w = \overline{w_1}.$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός εκφράζει αντιστροφή ως προς το μοναδιαίο κύκλο $C : |z| = 1$, αφού $|w_1||z| = 1$ και $\text{Arg } w_1 = \text{Arg } z$, ενώ ο δεύτερος εκφράζει συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα.



- **Γραμμικός μετασχηματισμός**

Η απεικόνιση $w = f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός. Έστω ότι $a \neq 0$ και $a = |a| e^{i\theta}$, τότε $w = |a| e^{i\theta} z + b$. Τότε ο μετασχηματισμός f είναι σύνθεση μιας στροφής, μιας μεγέθυνσης και μιας μετατόπισης. Η μετατόπιση γίνεται κατά το διάνυσμα b , η στροφή κατά τη γωνία $\text{Arg} a$ και η μεγέθυνση κατά τον παράγοντα $|a|$. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}$.

Ένας **διγραμμικός μετασχηματισμός** ή **μετασχηματισμός Möbius** είναι μια μιγαδική συνάρτηση της μορφής

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, z \neq -\frac{d}{c}, \quad a b c d \in \mathbb{C} \quad (1)$$

που ικανοποιούν τη συνθήκη $ad \neq bc$, αλλιώς η $f(z)$ θα ήταν σταθερή.

Για την αποφυγή συναρτήσεων που έχουν ήση προκύψει, θεωρούμε $a \neq 0$ και $c \neq 0$. Η συνάρτηση (1) γράφεται ισοδύναμα :

$$w = f(z) = \lambda \frac{z + a}{z + \beta}, \lambda = \frac{a}{c}, a = \frac{b}{a}, \beta = \frac{d}{c}, a \neq \beta. \quad (2)$$

Ισχύει ότι

$$f'(z) = \lambda \frac{\beta - a}{(z + \beta)^2} \neq 0,$$

άρα ο μετασχηματισμός Möbius είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$.

Το σημείο $-\beta$ είναι ένας απλός¹ πόλος της f . Θέτουμε $f(-\beta) = \infty$ και $f(\infty) = \lambda$. Ο μετασχηματισμός (2) είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$ επί του $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$.

Η αντίστροφη συνάρτηση είναι

¹ Έστω f μία ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο D με $z_0 \in \mathbb{C}$ ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο, τότε το z_0 θα καλείται **απλός πόλος** της f , αν το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων και είναι τάξεως 1.

$$z = \frac{-\beta w + \lambda a}{w - \lambda}.$$

Επειδή ο διγραμμικός μετασχηματισμός έχει τρεις παραμέτρους λ, β, a , συμπεραίνουμε πως υπάρχουν άπειροι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το επίπεδο z στο επίπεδο w .

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός (2) γράφεται στη μορφή

$$f(z) = \lambda \left(\frac{\alpha - \beta}{z + \beta} + 1 \right)$$

Αν θέσουμε

$$w_1 = z + \beta, \quad w_2 = \frac{1}{w_1} \quad \text{και} \quad w_3 = \lambda(\alpha - \beta)w_2 + \lambda,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένας διγραμματικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση τριών μετασχηματισμών :

1) Μετατόπισης

$$w_1 = z + \beta,$$

2) Αντιστροφής

$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

3) Γραμμικών μετασχηματισμού

$$w_3 = \lambda(\alpha - \beta)w_2 + \lambda.$$

Οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί έχουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες :

- Κάθε διγραμματικός μετασχηματισμός γράφεται σα σύνθεση των μετασχηματισμών μετατόπισης, στροφής, μεγέθυνσης, και αντιστροφής.
- Η αντίστροφη συνάρτηση ενός διγραμματικού μετασχηματισμού, είναι επίσης διγραμματικός μετασχηματισμός.
- Από τη σύνθεση δύο διγραμματικών μετασχηματισμών, προκύπτει διγραμματικός μετασχηματισμός.

Θεώρημα : Υπάρχει μοναδικός διγραμματικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τρία διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 σε τρία διαφορετικά σημεία w_1, w_2, w_3 , αντίστοιχα. Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται από τη σχέση

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (3)$$

Απόδειξη : Θα δείξουμε ότι οι τιμές των παραμέτρων λ, α και β ορίζονται μονοσήμαντα από τις συνθήκες $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, f(z_3) = w_3$.

Παρατηρούμε ότι

$$w_2 - w_3 = \lambda \frac{(z_2 - z_3)(\beta - \alpha)}{(z_2 + \beta)(z_3 + \beta)}$$

και

$$w_2 - w_1 = \lambda \frac{(z_2 - z_1)(\beta - \alpha)}{(z_2 + \beta)(z_1 + \beta)}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{(z_2 - z_3)(z_1 + \beta)}{(z_2 - z_1)(z_3 + \beta)}. \quad (4)$$

Οπότε για ένα τυχαίο z και $w = f(z)$ ισχύει ότι :

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_3 + \beta)}{(z - z_3)(z_1 + \beta)} \quad (5)$$

Απαλείφοντας το β από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε τη σχέση (3).

Παρατηρήσεις :

✓ Αν το $z_1 = \infty$, τότε το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται $\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$.

✓ Αν το $w_1 = \infty$, τότε το πρώτο μέλος της (3) γίνεται $\frac{w_2 - w_3}{w - w_3}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$ στα σημεία $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -i$.

Λύση : Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $z_4 = z$ που απεικονίζεται στο σημείο $w_4 = w$. Πρέπει οι λόγοι των (z_1, z_2, z_3, z_4) , (w_1, w_2, w_3, w_4) να είναι ίσοι.

$$\frac{z - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{1 - 0}{z - 0} = \frac{w - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{1 - (-i)}{w - (-i)} \Rightarrow \frac{z + 1}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{w + 1}{2} \cdot \frac{1 + i}{w + i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = f(z) = \frac{z - i}{1 - zi} \Rightarrow f(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}.$$

Εφαρμογή :

Να βρεθεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός που απεικονίζει

α) τα σημεία $-1, 0, 2$ στα σημεία $0, 1, \infty$

β) τα σημεία $0, 1, \infty$ στα σημεία $0, 1, 2$

Λύση :

α) Από τη σχέση (1) προκύπτει

$$\frac{w}{w - 1} = \frac{z + 1}{z} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow w = -2 \frac{z + 1}{z - 2}$$

β) Ομοίως,

$$\frac{w}{w - 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{z}{z - i} \Rightarrow w = \frac{2z}{z + i}$$

Πρόταση : Έστω $f(z)$ ένας διγραμμικός μετασχηματισμός. Αν $E \subset \mathbb{C}$ είναι μία ευθεία και $K \subset \mathbb{C}$ ένας κύκλος στο z -επίπεδο, τότε το $f(E)$ είναι ευθεία ή κύκλος και το $f(K)$ είναι ευθεία ή κύκλος στο w -επίπεδο.

Απόδειξη : Επειδή κάθε διγραμμικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών και μιας αντιστροφής, αρκεί να δειχθεί η πρόταση για $w = \frac{1}{z}$.

Η εξίσωση της E στο επίπεδο z θα είναι της μορφής

$$az + \bar{a}\bar{z} + b = 0.$$

όπου $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $b \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $z = \frac{1}{w}$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$bw\bar{w} + a\bar{w} + \bar{a}w = 0$$

η οποία παριστάνει ευθεία αν $b = 0$ ή κύκλο αν $b \neq 0$. Η εξίσωση του K στο επίπεδο z θα είναι της μορφής

$$azz\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + \kappa = 0,$$

όπου $a, \kappa \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, και $|b|^2 > \kappa$. Θέτοντας $z = \frac{1}{w}$ βρίσκουμε

$$\kappa w\bar{w} + \bar{b}\bar{w} + bw + \alpha = 0$$

η οποία παριστάνει κύκλο αν $\kappa \neq 0$ ή ευθεία αν $\kappa = 0$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y = 0$ μέσω του μετασχηματισμού $w = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Λύση : Αν θέσουμε $w = u + iv$ και $z = x + iy$, έχουμε

$$u + iv = \frac{x + iy - i}{x + iy + i} \Rightarrow u + iv = \frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το συζυγή του παρονομαστή $x - i(y+1)$ και καταλήγουμε στις εξής σχέσεις :

$$u = \frac{(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + (y + 1)^2} \quad (1) \text{ και } v = \frac{-2x}{x^2 + (y + 1)^2} \quad (2)$$

Στις (1) και (2) αντικαθιστούμε $y = 0$ και προκύπτει

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (3) \text{ και } v = \frac{-2x}{x^2 + 1} \quad (4).$$

Λύνουμε την (3) ως προς x προκύπτει $x^2 = \frac{1+u}{1-u}$ και αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε

$$x = -\frac{v}{2} \left(\frac{1+u}{1-u} + 1 \right) \Rightarrow x = \frac{2v}{u-1} \quad (5).$$

Αντικαθιστούμε την (5) στην (3) βρίσκουμε ότι $u^2 + v^2 = 1$, η οποία είναι περιφέρεια κύκλου και είναι η ζητούμενη εικόνα.

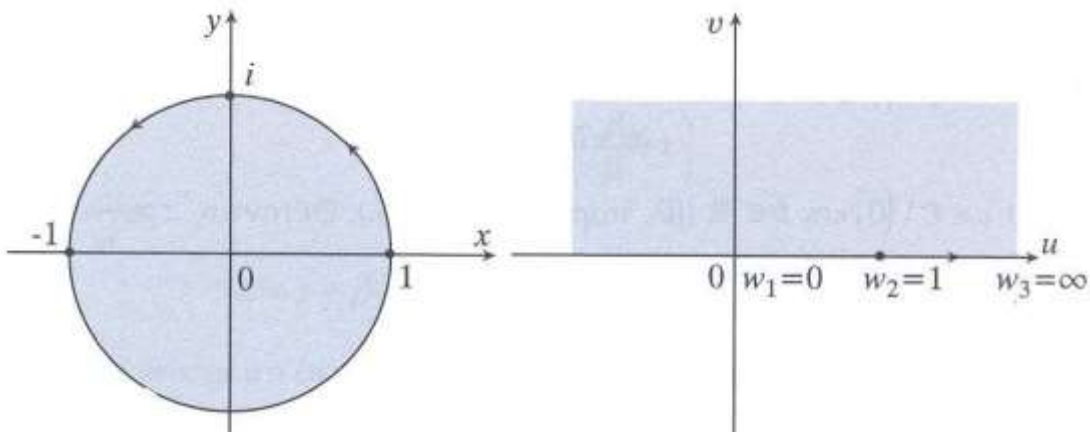
Παρατήρηση: Στη θεωρία των διγραμμικών μετασχηματισμών μια ευθεία θεωρείται κύκλος με άπειρη ακτίνα. Επομένως, η προηγούμενη πρόταση αναφέρει ότι ένας διγραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει κύκλους του επιπέδου z σε κύκλους του επιπέδου w .

Η ιδιότητα αυτή είναι χρήσιμη στην κατασκευή μιας σύμμορφης απεικόνισης μεταξύ πεδίων με κυκλικά σύνορα.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε επίσης και την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων.

Παράδειγμα: Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $|z| < 1$ επί του άνω ημιεπίπεδου $\text{Im}w > 0$.

Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που να απεικονίζει τα σημεία $1, i, -1$ του z – επιπέδου στα σημεία $0, 1, \infty$ του w – επιπέδου.



Ο μετασχηματισμός αυτός είναι της μορφής $w = \lambda \frac{z-1}{z+1}$, αφού απεικονίζει το 1 στο 0 και το -1 στο ∞ . Το I απεικονίζεται στο 1, οπότε και ισχύει

$$1 = \lambda \frac{i-1}{i+1}, \text{ άρα } \lambda = -i. \text{ Ο κύκλος } |z|=1 \text{ απεικονίζεται επί της ευθείας } v=0 \text{ μέσω του}$$

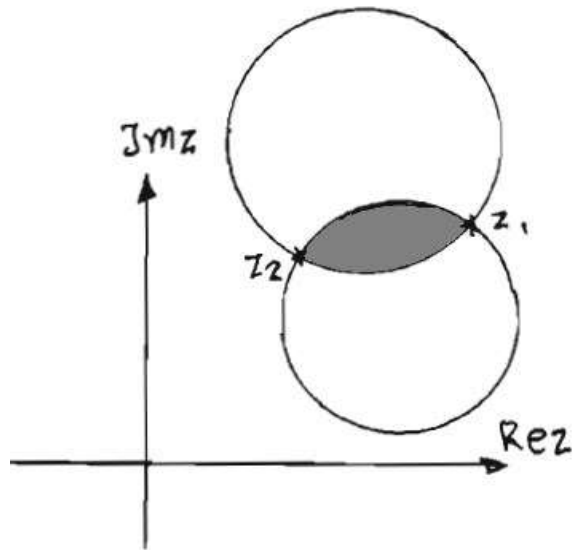
μετασχηματισμού $w = i \frac{1-z}{1+z}$. Επιπλέον επειδή η φορά διαγραφής διατηρείται, από προηγούμενο

θεώρημα το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο $\text{Im}w > 0$.

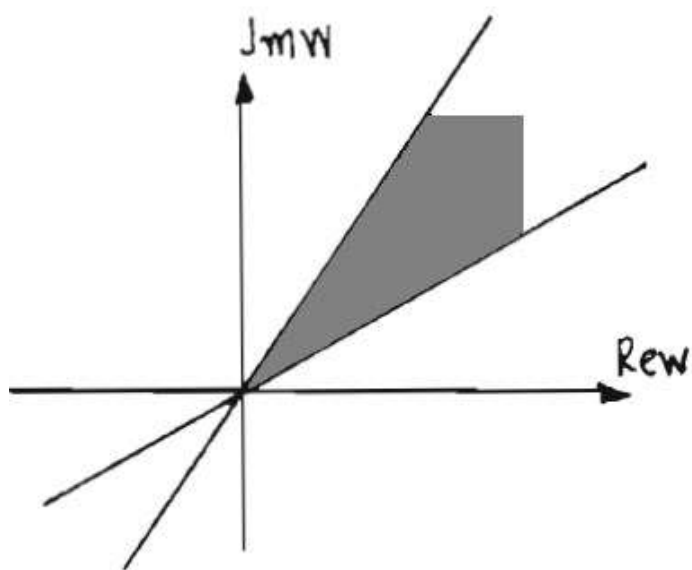
Εφαρμογή

Ένας “φακοειδής” τόπος έχει σύνορα δύο περιφέρειες που τέμνονται. Να βρεθεί η σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει τον “φακοειδή” τόπο σε μια γωνία με κορυφή την αρχή των αξόνων.

Λύση: Έστω ότι έχουμε τον φακοειδή τόπο του σχήματος με σύνορα τις περιφέρειες C_1, C_2 .



Αφού ο μετασχηματισμός απεικονίζει περιφέρειες του z - επιπέδου σε περιφέρειες του w - επιπέδου, εξάγουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία τομής z_1, z_2 απεικονίζονται στα σημεία $w = 0$ και $w = \infty$, ώστε οι εικόνες C'_1, C'_2 να έχουν σημεία τομής τα σημεία $0, \infty$, επομένως είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, αφού δύο περιφέρειες με πεπερασμένη ακτίνα δε γίνεται να τέμνονται στο ∞ .



Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός Möbius είναι της μορφής

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επίσης ισχύει $f(z_1) = 0$ και $f(z_2) = \infty$.

Υπενθύμιση : Η γωνία τομής των δύο περιφερειών είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι εικόνες των.

Συμμετρικά σημεία

Έστω η ευθεία $\alpha z + \overline{\alpha z} + \kappa = 0$. Δύο σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία, αν και μόνο αν, ισχύει $\alpha z_1 + \overline{\alpha z_2} + \kappa = 0$.

Έστω τώρα ο κύκλος $C : |z - z_0| = r$. Τα z_1, z_2 ονομάζονται συμμετρικά ως προς τον κύκλο C , αν ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Arg}(z_1 - z_0) = \text{Arg}(z_2 - z_0) \quad (1)$$

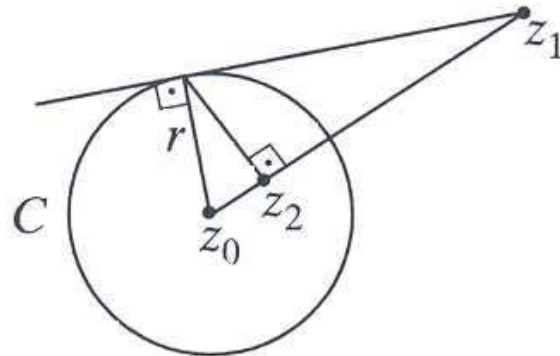
$$|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = r^2 \quad (2)$$

Το κέντρο z_0 και το ∞ θεωρούνται συμμετρικά ως προς τον κύκλο C . Οι παραπάνω σχέσεις (1), (2) γράφονται στην απλούστερη μορφή

$$(z_1 - z_0) \overline{(z_2 - z_0)} = r^2 \quad (3)$$

Όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από τη σχέση (1) τα συμμετρικά σημεία και το κέντρο του κύκλου βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία, ενώ από τη σχέση (2) το γινόμενο των αποστάσεών τους από το κέντρο είναι ίσο με r_2 .

Αν το σημείο z_1 βρίσκεται πάνω στον κύκλο C , τότε αυτό ταυτίζεται με το συμμετρικό του.



Έστω τώρα ο κύκλος C και τα συμμετρικά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2 .

Έστω ακόμα ότι $z_1 = z_0 + r_1 e^{i\theta}$. Έτσι, αφού τα z_1, z_2, z_0 βρίσκονται στην ίδια ευθεία, από τη

σχέση (2) προκύπτει ότι $z_2 = z_0 + r_2 e^{i\theta}$, με $r_2 = \frac{r^2}{r_1}$. Θεωρούμε το τυχαίο σημείο z του κύκλου C ,

$z = z_0 + r e^{i\phi}$. Τότε ισχύει :

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \left| \frac{r e^{i\phi} - r_1 e^{i\theta}}{r e^{i\phi} - r_2 e^{i\theta}} \right| = \frac{r_1}{r} \left| \frac{r e^{i\phi} - r_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\phi} - r e^{i\theta}} \right| \Rightarrow \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2},$$

που είναι μία αναπαράσταση του κύκλου C .

Αντίστροφα, μια εξίσωση της μορφής $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, z_1 \neq z_2, \kappa \geq 0$, παριστάνει κύκλο για τον οποίο

τα σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά. Μπορούμε να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει των συμμετρικών σημείων z_1, z_2 και του κ .

$$|z - z_1| = \kappa |z - z_2| \Leftrightarrow |(z - z_1) - \kappa^2(z - z_2)| = \kappa |(z - z_1) - (z - z_2)|,$$

άρα

$$\left| z - \frac{z_1 - \kappa^2 z_2}{1 - \kappa^2} \right| = \frac{\kappa |z_1 - z_2|}{|1 - \kappa|^2}.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο $z_0 = \frac{z_1 - \kappa^2 z_2}{1 - \kappa^2}$ και ακτίνα $r = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \kappa|^2}$.

Επιπλέον, $z_1 - \alpha = \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2}(z_2 - z_1)$ και $z_2 - \alpha = \frac{1}{1 - \kappa^2}(z_2 - z_1)$,

άρα $(z_1 - \alpha)\overline{(z_2 - \alpha)} = r^2$.

Συνεπώς, πράγματι τα σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο με κέντρο z_0 και ακτίνα r .

- Αν $\kappa = 0$, τότε η ακτίνα είναι μηδέν και ο κύκλος εκφυλίζεται σε ένα σημείο.
- Αν $\kappa = 1$, τότε η ακτίνα γίνεται άπειρη και ο κύκλος γίνεται ευθεία. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία z_1 και z_2 .

Τελικώς, η εξίσωση $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, \kappa > 0$, παριστάνει κύκλο ως προς τον οποίο τα σημεία z_1 και z_2

είναι συμμετρικά.

Η οικογένεια των κύκλων με τα ίδια συμμετρικά σημεία z_1 και z_2 ονομάζεται **οικογένεια κύκλων του Απολλωνίου**.

Πρόταση (Ιδιότητα διατήρησης της συμμετρίας) : Ένας μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει συμμετρικά σημεία ως προς έναν κύκλο C σε συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα, C' , του κύκλου.

Απόδειξη : Έστω ο κύκλος C με τα συμμετρικά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2

$$C : \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \kappa, \kappa > 0$$

και ο μετασχηματισμός $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$. Με αντικατάσταση του μετασχηματισμού αυτού στην

εξίσωση του κύκλου έχουμε $\left| \frac{(cz_1 + d)w - (\alpha z_1 + b)}{(cz_2 + d)w - (\alpha z_2 + b)} \right| = \kappa$. Εάν υποθέσουμε ότι $z_1, z_2 \neq -\frac{d}{c}$ τότε, η

προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$\left| \frac{w - w_1}{w - w_2} \right| = \kappa \left| \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d} \right| = \kappa', \kappa' > 0,$$

δηλαδή τα σημεία w_1, w_2 είναι συμμετρικά σημεία του κύκλου C' . Αν $z_1 = -\frac{d}{c}$ τότε

$w_1 = f(z) = \infty$. Τότε έχουμε $|w - w_2| = \frac{1}{\kappa} \left| \frac{\alpha z_1 + b}{cz_2 + d} \right|$, δηλαδή το w_2 είναι το κέντρο του κύκλου C'

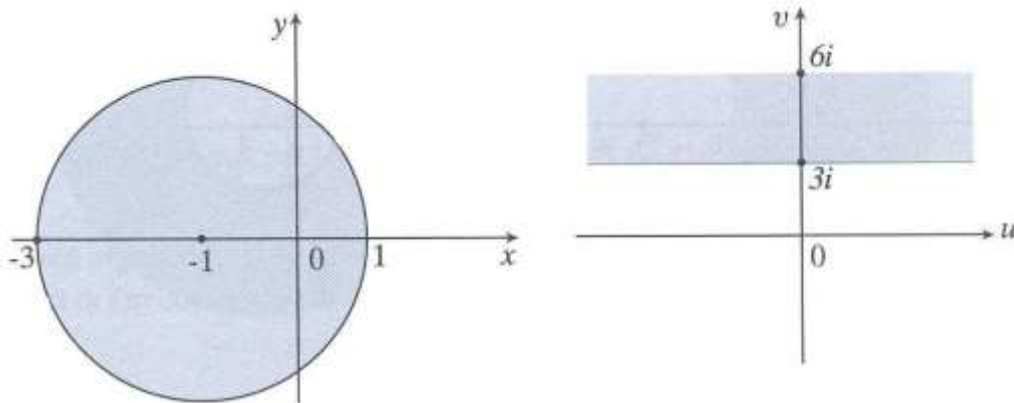
οπότε τα w_1 και w_2 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο C' . Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε

αν $z_2 = -\frac{d}{c}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το δίσκο $|z+1| \leq 2$ στο ημιεπίπεδο $\text{Im}z \geq 3$.

Λύση : Επειδή τα σημεία -1 και ∞ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο $|z+1| = 2$, ενώ τα σημεία 0 και $6i$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\text{Im}z = 3$ ψάχνουμε μετασχηματισμό που θα απεικονίζει τα σημεία $-1, \infty, 1$ του επιπέδου z στα σημεία $6i, 0, 3i$ αντίστοιχα του επιπέδου w .



Επειδή το ∞ απεικονίζεται στο 0 , αναζητούμε μετασχηματισμό της μορφής

$$w = \frac{\alpha}{z + \beta}.$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων

$$6i = \frac{\alpha}{-1 + \beta} \quad \text{και} \quad 3i = \frac{\alpha}{1 + \beta},$$

καταλήγουμε ότι

$$w = \frac{12i}{z + 3}.$$

Έφαρμογή

Να βρεθούν οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$ έτσι ώστε ένα δοσμένο εσωτερικό σημείο a να απεικονίζεται στο κέντρο του δίσκου.

Λύση : Έστω a το δοσμένο εσωτερικό σημείο και $\frac{1}{\bar{a}}$ το συμμετρικό του ως προς τον κύκλο $|z| = 1$.

Εφόσον γνωρίζουμε ότι το a απεικονίζεται στο 0 , το συμμετρικό του θα απεικονίζεται στο ∞ , που είναι το συμμετρικό του 0 ως προς τον κύκλο $|w| = 1$. Συνεπώς ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$w = \lambda \frac{z - a}{z - \frac{1}{\bar{a}}} = -\lambda \bar{a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Επειδή όμως $|w| = 1$, θα ισχύει

$$\left| -\lambda \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \lambda \bar{\alpha} \right| \left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}e^{i\varphi}} \right| = \left| \lambda \bar{\alpha} \right| \left| \frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{-i\varphi} - \bar{\alpha}} \right| = \left| \lambda \bar{\alpha} \right| = 1,$$

το οποίο σημαίνει ότι $-\lambda \alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathfrak{R}$.

Άρα οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί θα είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \theta \in \mathfrak{R}.$$

Σημείωση : Η λύση είναι μοναδική εκτός μιας σταθεράς θ . Όμως $f'(\alpha) = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$, οπότε

$\arg f'(\alpha) = \theta$, δηλαδή μπορεί να υπάρξει πλήρης καθορισμός του μετασχηματισμού αν γνωρίζουμε το όρισμα της παραγώγου της f στο σημείο α .

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός Möbius $w = f(z)$ που απεικονίζει το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$ έτσι ώστε $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ και $\text{Arg} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Λύση : Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = e^{i\theta} \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Επειδή $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} e^{i\theta}$,

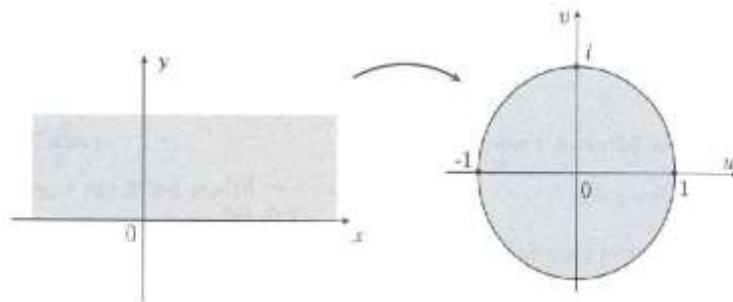
θα πρέπει $\text{Arg} f\left(\frac{1}{2}\right) = \theta = \frac{\pi}{2}$, οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w = i \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Εφαρμογή

Ναδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$, $\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}, \text{Im}\alpha > 0$, απεικονίζει το πάνω ημιεπίπεδο $\text{Im}z > 0$ στο μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$.

Λύση :



Επειδή $\text{Im}\alpha > 0$, το α είναι σταθερό σημείο και βρίσκεται στο πάνω ημιεπίπεδο z . Το συζυγές σημείο του α , δηλαδή το $\bar{\alpha}$, είναι συμμετρικό του α ως προς τον άξονα x , αφού τα $\alpha, \bar{\alpha}$ έχουν ίδια πραγματικά και αντίθετα φανταστικά μέρη. Έστω το τυχαίο σημείο z του τόπου $\text{Im}z > 0$.

Επειδή το θ είναι πραγματική σταθερά ισχύει $|e^{i\theta}| = 1$ οπότε :

$$w = \left| e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right|.$$

Αφού $|z - \alpha|$ είναι η απόσταση των σημείων z , α και $|z - \bar{\alpha}|$ η απόσταση των σημείων z , $\bar{\alpha}$ θα ισχύει ότι $|z - \alpha| < |z - \bar{\alpha}| \Rightarrow |w| < 1$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει το άνω ημιπίεδο $\text{Im}z > 0$ στο μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$, έτσι ώστε : $f(i) = 0$, $\text{Arg} f'(i) = \frac{\pi}{2}$.

Λύση : Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \quad (1)$$

όπου θ πραγματική σταθερά και α μιγαδική σταθερά με φανταστικό μέρος θετικό.

Επειδή $f(i) = 0$ η σχέση (1) δίνει :

$$f(i) = 0 \Rightarrow e^{i\theta} \frac{i - \alpha}{i - \bar{\alpha}} = 0 \Rightarrow \alpha = i$$

Τότε όμως $\bar{\alpha} = -i$ και η (1) γίνεται :

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}, \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας τη (2) παίρνουμε

$$f'(z) = e^{i\theta} \frac{z + i - (z - i)}{(z + i)^2} \Rightarrow f'(z) = \frac{2ie^{i\theta}}{(z + i)^2} \Rightarrow$$

$$f'(i) = \frac{2ie^{i\theta}}{(2i)^2} \Rightarrow f'(i) = \frac{e^{i\theta}}{2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow f'(i) = \frac{1}{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Επειδή το θ πραγματικός, το όρισμα της $f'(i)$ είναι $\theta - \frac{\pi}{2}$. Θα πρέπει $\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Άρα $\theta = \pi$ και η

(2) δίνει :

$$f(z) = e^{i\pi} \frac{z-i}{z+i} \Rightarrow f(z) = -\frac{z-i}{z+i}$$

Εφαρμογή

Αν θ πραγματική σταθερά και α μιγαδική σταθερά με $|\alpha| < 1$, να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός

$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$ απεικονίζει το δίσκο $|z| < 1$ επί του δίσκου $|w| < 1$. Να προσδιορισθούν οι σταθερές

θ και α ώστε : $w\left(\frac{1-i}{2}\right) = 0$ και $\text{Arg } w\left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Λύση : Επιλύουμε ως προς z τον δοσμένο μετασχηματισμό :

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1} \Leftrightarrow w(\bar{\alpha}z-1) = e^{i\theta}(z-\alpha) \Leftrightarrow z = \frac{w-\alpha e^{i\theta}}{w\bar{\alpha}-e^{i\theta}}$$

Με αντικατάσταση του z στη σχέση $|z| < 1$ έχουμε :

$$\left| \frac{w - \alpha e^{i\theta}}{w\bar{\alpha} - e^{i\theta}} \right| < 1 \Leftrightarrow |w - \alpha e^{i\theta}| < |w\bar{\alpha} - e^{i\theta}| \Leftrightarrow |w - \alpha e^{i\theta}|^2 < |w\bar{\alpha} - e^{i\theta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$(w - \alpha e^{i\theta})(\bar{w} - \bar{\alpha} e^{-i\theta}) < (w\bar{\alpha} - e^{i\theta})(\bar{w}\alpha - e^{-i\theta}) \Rightarrow$$

$$w\bar{w} - w\bar{\alpha}e^{-i\theta} - \alpha\bar{w}e^{i\theta} + \alpha e^{i\theta}\bar{\alpha}e^{-i\theta} < w\bar{w}\alpha\bar{\alpha} - w\bar{\alpha}e^{-i\theta} - e^{i\theta}\bar{w}\alpha + e^{i\theta}e^{-i\theta} \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w} + \alpha\bar{\alpha} < w\bar{w}\alpha\bar{\alpha} + 1 \Rightarrow w\bar{w}(1 - \alpha\bar{\alpha}) < 1 - \alpha\bar{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$|w|^2(1 - |\alpha|^2) < (1 - |\alpha|^2) \Rightarrow |w|^2 < 1 \Rightarrow |w| < 1,$$

διότι $1 - |\alpha|^2 > 0$, αφού $|\alpha| < 1$. Συνεπώς ο δίσκος $|z| < 1$ απεικονίζεται στο δίσκο $|w| < 1$. Επειδή απαιτείται $w\left(\frac{1-i}{2}\right) = 0$ έχουμε :

$$e^{i\theta} \frac{\frac{1-i}{2} - \alpha}{\bar{\alpha} \frac{1-i}{2} - 1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1-i}{2}$$

οπότε είναι $\bar{\alpha} = \frac{1+i}{2}$ και ο μετασχηματισμός γράφεται :

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \frac{1-i}{2}}{\frac{1+i}{2}z - 1} \Rightarrow w = e^{i\theta} \frac{2z - 1 + i}{(1+i)z - 2}$$

Παραγωγίζοντας την παίρνουμε :

$$w' = e^{i\theta} \frac{2((1+i)z-2) - (2z-1+i)(1+i)}{((1+i)z-2)^2}$$

και επειδη $\text{Arg } w'(\frac{1-i}{2}) = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει :

$$\text{Arg} \left\{ e^{i\theta} \frac{2\left((1+i)\frac{1-i}{2}-2\right) - \left(2\frac{1-i}{2}-1+i\right)(1+i)}{\left((1+i)\frac{1-i}{2}-2\right)^2} \right\} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Arg} (e^{i\theta} (-2)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Arg} (2e^{i(\theta+\pi)}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\theta + \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad (\text{με } -2 = 2e^{i\pi}).$$

Τελικώς καταλήγουμε στο μετασχηματισμό :

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{2z-1+i}{(1+i)z-2}$$

Εφαρμογή

Να βρεθούν τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού $f(z) = \frac{(1+2i)z-i}{z+i}$.

Λύση : Αν α ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού $w = f(z)$, ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) = \alpha$.

$$\alpha = \frac{(1+2i)\alpha - i}{\alpha + i} \Leftrightarrow \alpha(\alpha + i) = (1+2i)\alpha - i \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha i = \alpha + 2\alpha i - i \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha(1+i) + i = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \frac{(1+i) \pm \sqrt{-2i}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1+i \pm i\sqrt{2}i}{2} \Leftrightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1+i \pm i\sqrt{2}\sqrt{i}}{2} \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του \sqrt{i} θεωρούμε την εξίσωση :

$$z^2 = i \Rightarrow z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \rho^2 e^{2i\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \rho = 1, 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0,1)$$

Προκύπτουν οι ρίζες

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}, z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

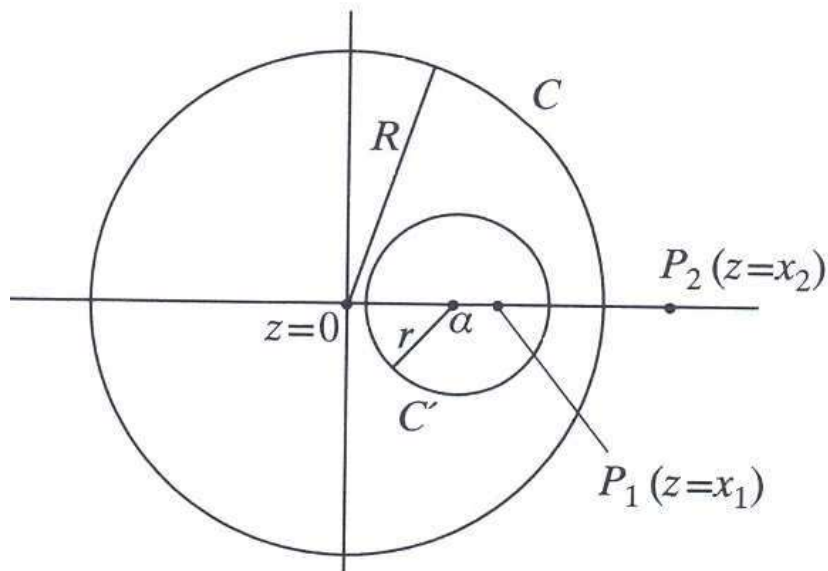
Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε τα παρακάτω σταθερά σημεία :

$$\alpha_1 = 1 \text{ και } \alpha_2 = i.$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός Möbius που απεικονίζει ένα δακτύλιο μη ομόκεντρων κύκλων σε δακτύλιο ομόκεντρο κύκλων.

Λύση : Έστω C ο μεγαλύτερος κύκλος με κέντρο το $z = 0$ και ακτίνα R και C' ο μικρότερος κύκλος με κέντρο το σημείο $z = a$ και ακτίνα $r < R$. Δύο σημεία P_1 και P_2 που είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κύκλους, βρίσκονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Λόγω της συμμετρίας των P_1 και P_2 ως προς τους δύο κύκλους θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$(x_1 - a)(x_2 - a) = r^2 \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = R^2 \quad (2)$$

Όπως προκύπτει από τις (1) και (2), τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\alpha x^2 - (R^2 - r^2 + \alpha^2)x + \alpha R^2 = 0. \quad (3)$$

με θετική ορίζουσα

$$(R^2 - r^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 R^2,$$

αφού $R-r > \alpha$.

Θεωρούμε το διγραμμικό μετασχηματισμό

$$w = \lambda \frac{z - x_1}{z - x_2},$$

με x_1, x_2 να είναι οι ρίζες της εξίσωσης (3) και ο οποίος απεικονίζει τους κύκλους C και C' σε δύο κύκλους K και K' του w – επιπέδου. Το σημείο P_2 απεικονίζεται στο ∞ , ενώ το σημείο P_1 που είναι είναι συμμετρικό του P_2 ως προς τους κύκλους C και C' απεικονίζεται σε σημείο που είναι συμμετρικό του $w = \infty$ ως προς τους κύκλους K και K' . Όμως ένα συμμετρικό σημείο του απείρου είναι το κέντρο του κύκλου, οπότε ο διγραμμικός μετασχηματισμός θα απεικονίζει το P_1 στο κοινό κέντρο των δύο κύκλων K και K' . Επομένως ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι ο ζητούμενος.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο

$$D = \{z : \text{Im } z < 0, |z + i\alpha| > R, \alpha > R > 0\}$$
 σε ένα δακτύλιο με κέντρο το 0.

Λύση : Θα βρούμε αρχικά δύο σημεία που είναι ταυτόχρονα συμμετρικά ως προς την ευθεία $\text{Im } z = 0$ και ως προς τον κύκλο $|z+i\alpha| = R$. Είναι προφανές ότι αυτά τα σημεία ανήκουν στον φανταστικό άξονα και είναι της μορφής ik και $-ik$, $k > 0$. Λόγω της συμμετρίας ως προς τον κύκλο ισχύει

$$(\alpha + k)(\alpha - k) = R^2, \text{ δηλαδή } k = \sqrt{\alpha^2 - R^2}. \text{ Ο μετασχηματισμός που θέλουμε να βρούμε είναι}$$

$$w = \frac{z + ik}{z - ik}.$$

Πράγματι, το σημείο $z = -ik$ απεικονίζεται στο $w = 0$, ενώ το σημείο $z = ik$ απεικονίζεται στο $w = \infty$, άρα η εικόνα της ευθείας $\text{Im } z = 0$ θα είναι ο κύκλος $C : |w| = 1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ο

κύκλος $|z+ia| = R$ απεικονίζεται σε έναν κύκλο $|w| = R_1$, με $R_1 = \frac{R + \alpha - k}{R + \alpha + k}$. Από την αρχή της

αντιστοιχίας των συνόρων ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z + ik}{z - ik}$$

απεικονίζει το πεδίο D του επιπέδου z στο δακτύλιο $R_1 < |w| < 1$ του επιπέδου w .

1.4 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

α) Ο μετασχηματισμός $f(z) = z^2$

Η παράγωγος του μετασχηματισμού είναι $f'(z) = 2z$, άρα ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν $w = f(z) = Re^{i\phi}$ και $z = re^{i\theta}$, τότε

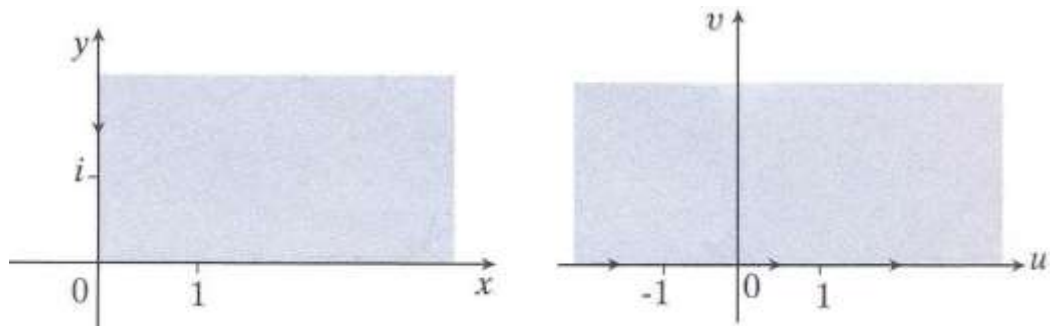
$$w = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \Rightarrow R = r^2 \text{ και } \phi = 2\theta.$$

Επομένως η f απεικονίζει τον κύκλο $|z| = a$ στον κύκλο $|w| = a^2$, καθώς και μία ημιευθεία, έστω την $\theta = \kappa$ του επιπέδου z , με αρχή το 0 στην ημιευθεία $\phi = 2\kappa$ του επιπέδου w .

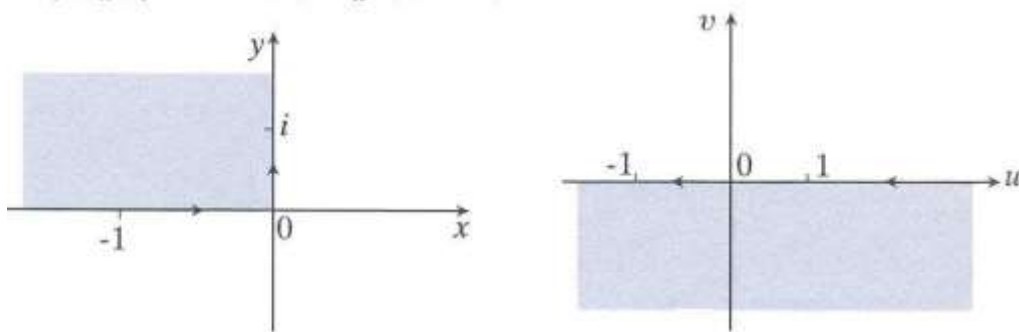
Αν $w = u + iv = f(z) = z^2$, τότε $u(x, y) = x^2 - y^2$ και $v(x, y) = 2xy$.

Άρα η f απεικονίζει τις οικογένειες υπερβολών $x^2 - y^2 = C$ και $2xy = C$ του επιπέδου z , στις οικογένειες ευθειών του επιπέδου w , $u = c$, και $v = c$.

Επειδή $f(i) = -1$, $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, η f απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο άνω ημιπίπεδο του επιπέδου w .



Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι η f απεικονίζει το δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο κάτω ημιεπίπεδο του επιπέδου w .



β) Εκθετικοί και λογαριθμικοί μετασχηματισμοί

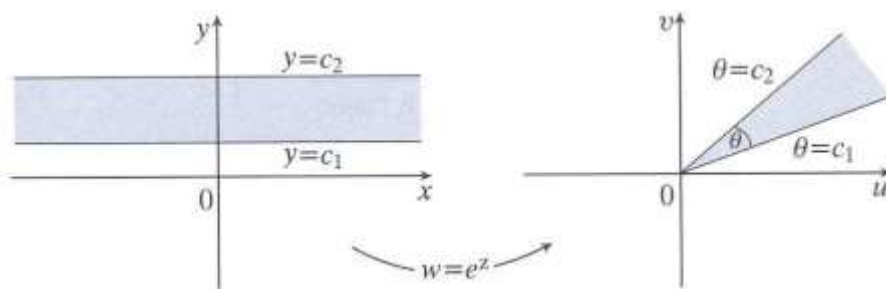
Η συνάρτηση $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ είναι σύμμορφη σε όλο το \mathbb{C} αφού $f'(z) = e^z$, δεν είναι όμως αμφιμονοσήμαντη σε όλο το \mathbb{C} . Η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο πεδίο

$$D = \{z = x + iy : -\pi < y \leq \pi\}.$$

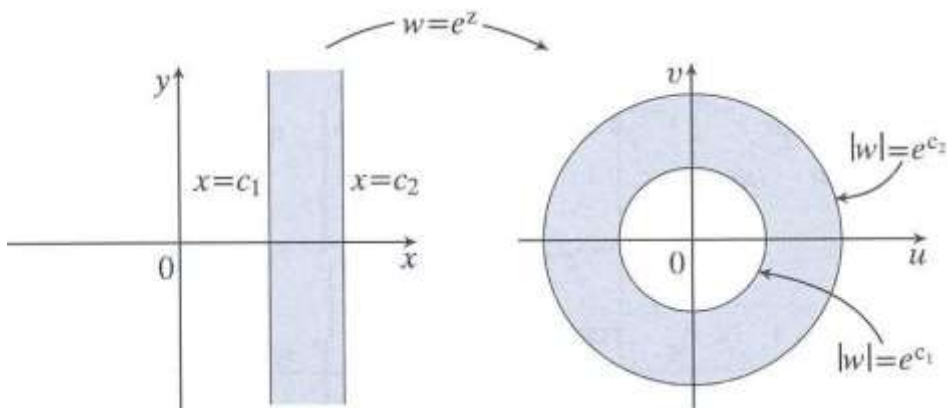
Έστω τώρα πως $z = x + iy$ και $w = re^{i\phi}$. Τότε αν $w = e^z$, έχουμε

$$r(x, y) = e^x \text{ και } \phi(x, y) = y.$$

Από τις παραπάνω ισότητες συμπεραίνουμε ότι f απεικονίζει μια οριζόντια ευθεία $y = c$, όπου c σταθερά, σε μια ημιευθεία $\phi = c$ με αρχή το 0 του επιπέδου w καθώς και μια ευθεία κατακόρυφη, την $x = c$ του επιπέδου z , στον κύκλο $|w| = e^c$ του επιπέδου w . Έτσι αν $c_2 > c_1$, $c_2 - c_1 < 2\pi$ τότε η f απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα που έχει σύνορα τις ευθείες $y = c_1$, $y = c_2$ του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο με γωνία $\theta = c_2 - c_1$.

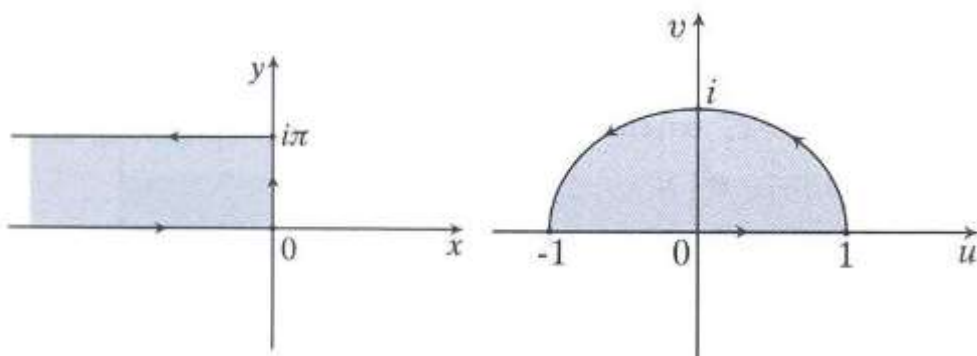


Επιπλέον, η άπειρη λωρίδα που περιορίζεται από τις $x = c_1$ και $x = c_2$ με $c_2 > c_1$ του επιπέδου z απεικονίζονται στο δακτύλιο που ορίζουν οι κύκλοι $|w| = e^{c_1}$, $|w| = e^{c_2}$.



Εφαρμογή

Να βρεθεί η εικόνα του πεδίου D μέσω της απεικόνισης $f(z) = e^z$.



Λύση : Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$ και $f(\pi) = -1$. Επίσης αν $x \leq 0$ και $y \leq 0$, ισχύει ότι $w = e^x \in \mathbb{R}$ με $0 < w \leq 1$. Εξάλλου, αν $x = 0$ και $0 \leq y \leq \pi$, τότε $|w| = 1$ και $0 \leq \text{Arg} w \leq \pi$. Για $x \leq 0$ και $y = \pi$, προκύπτει ότι $w = -e^{-x}$ και $-1 \leq w \leq 0$.

γ) Τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί

Έστω ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$, που είναι σύμμορφος στο διάστημα $-\frac{\pi}{2} < \text{Re } z < \frac{\pi}{2}$, αφού για κάθε z ισχύει ότι $f'(z) = \cos z$.

Έστω

$$u + i v = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Αν $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, τότε η ευθεία $x = \alpha$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $u = \sin \alpha \cosh y$,
 $v = \cos \alpha \sinh y$.

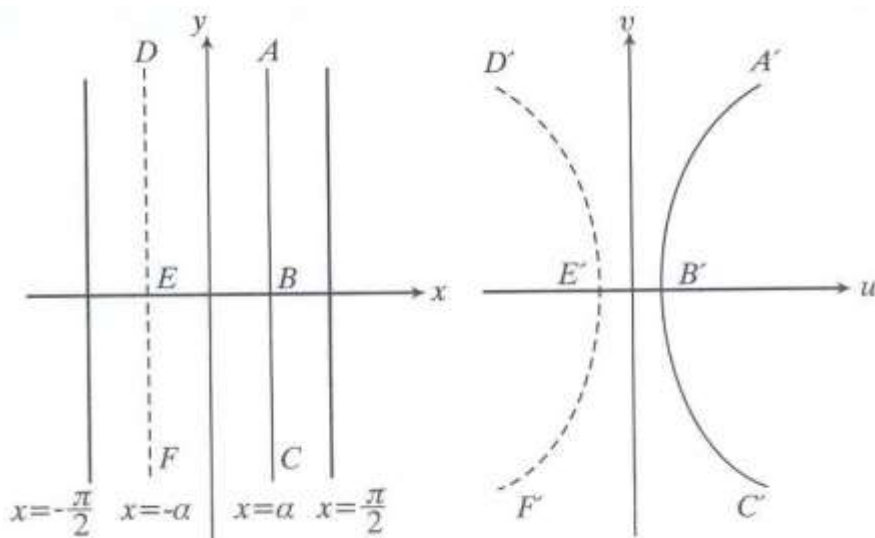
Αφού $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\frac{u^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 1$$

δηλαδή μια υπερβολή στο επίπεδο (u, v) με εστίες τα σημεία $\pm 1, 0$.

Αν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $u = \sin \alpha \cosh y > 0, \forall y$, οπότε η ευθεία $x = a$ απεικονίζεται στο δεξιό κλάδο της υπερβολής.

Αν $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε η ευθεία $x = -a$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $v = 0, u > 1$. Επίσης, ο άξονας y απεικονίζεται στον άξονα v .



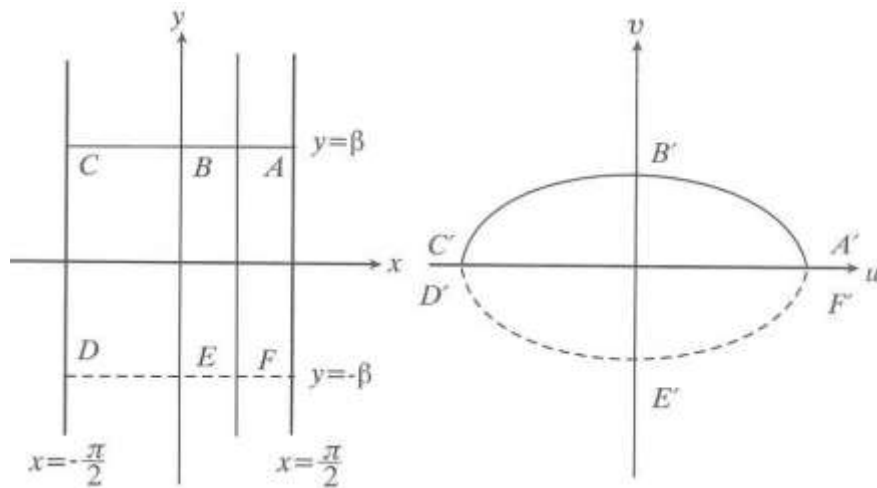
Έστω τώρα μια οριζόντια γραμμή $y = \beta, \beta > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ισχύει ότι $u = \sin x \cosh \beta, v = \cos x \sinh \beta$, οπότε

$$\frac{u^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{v^2}{\sinh^2 \beta} = 1$$

δηλαδή μια έλλειψη στο επίπεδο (u, v) . Η γραμμή $y = \beta$ απεικονίζεται στο άνω μέρος της έλλειψης, ενώ η γραμμή $y = -\beta$ απεικονίζεται στο κάτω μέρος της έλλειψης.

Αν $\beta = 0$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $v = 0, -1 \leq u \leq 1$.



Εφαρμογή

Ναδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$ απεικονίζει το πεδίο

$$D = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\} \text{ στο άνω ημιεπίπεδο.}$$

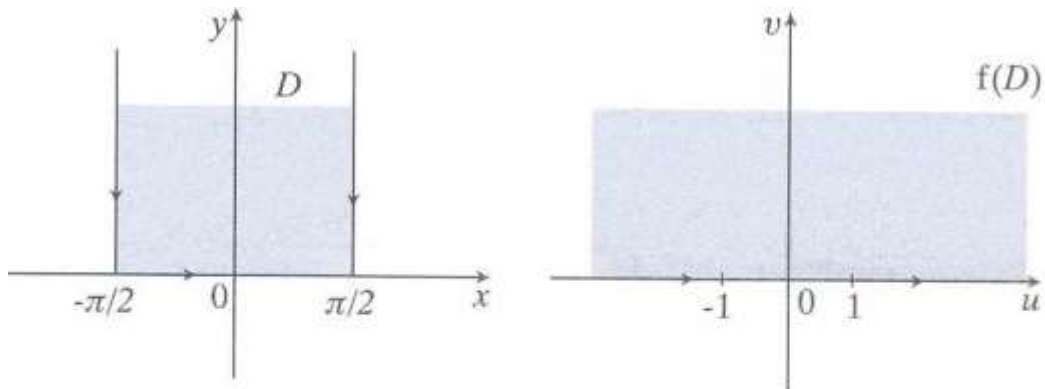
Λύση : Αν $z = -\frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την

ημιευθεία $z = -\frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$ στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ απεικονίζεται στο

διάστημα $[-1, 1]$. Ακόμα αν $z = \frac{\pi}{2} + iy, y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$, οπότε η f

απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy, y > 0$ στο διάστημα $[1, \infty)$. Άρα, η f απεικονίζει το σύνορο

του D στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων το D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.

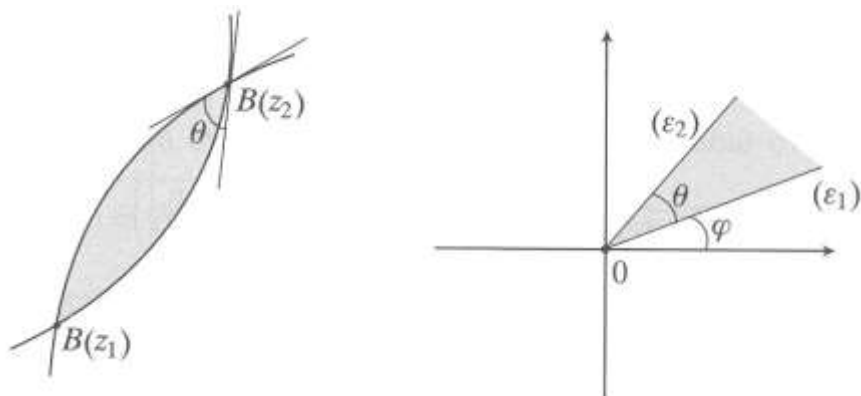


δ) Σύνθεση σύμμορφων απεικονίσεων

Αρκετές φορές η κατασκευή μιας σύμμορφης απεικόνισης μεταξύ δύο πεδίων προκύπτει από τη σύνθεση στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα φακοειδή πεδίο που προκύπτει από την τομή δύο κυκλικών δίσκων στο άνω ημιεπίπεδο.



Λύση : Έστω ο μετασχηματισμός

$$w_1 = \frac{z_1 - z}{z_2 - z},$$

ο οποίος απεικονίζει το σημείο $z = z_1$ στο $w = 0$ και το σημείο $z = z_2$ στο σημείο $w = \infty$.

Επίσης, απεικονίζει τα δύο κυκλικά τόξα του φακού σε δύο ημιευθείες με αρχή των αξόνων και σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους, όπου θ είναι η γωνία τομής των εφαπτομένων σε ένα από τα σημεία τομής των δύο περιφερειών των κυκλικών δίσκων. Δηλαδή ο μετασχηματισμός απεικονίζει το φακοειδές πεδίο του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο του επιπέδου w .

Στη συνέχεια, με χρήση του μετασχηματισμού $w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\theta}}$ για να απεικονίσουμε το γωνιακό πεδίο που έχουμε στο ημιεπίπεδο $\frac{\phi}{\theta}\pi < \arg w_1 < \frac{\phi}{\theta}\pi + \pi$. Το ημιεπίπεδο αυτό μέσω του

μετασχηματισμού $w_3 = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi} w_2$ απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο. Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi} \left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right)^{\frac{\pi}{\theta}}$$

Εφαρμογή

i) Να κατασκευαστεί μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το άνω ήμισυ του δίσκου $|z| < 1$, $\text{Im}z > 0$ επί του άνω ημιεπιπέδου $\text{Im}w > 0$.

ii) Να κατασκευαστεί μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει τη λωρίδα $0 < \text{Re}z < a$ στο άνω ημιεπίπεδο $\text{Im}w > 0$.

Λύση : i) Είναι προφανές ότι το άνω ήμισυ του δίσκου είναι ένας φακός με κορυφές στα σημεία

$z_1 = -1$ και $z_2 = 1$ και γωνία κορυφής $\theta = \frac{\pi}{2}$. Από την προηγούμενη εφαρμογή, η ζητούμενη

σύμμορφη απεικόνιση είναι η

$$w = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

ii) Η απεικόνιση $w_1 = \frac{\pi}{\alpha} z$ απεικονίζει τη δοσμένη λωρίδα επί της λωρίδας $I_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \pi$,

ενώ η $w_2 = iw_1$ τη λωρίδα I_1 επί της $I_2 : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi$. Τέλος η απεικόνιση $w_3 = e^{w_2}$

απεικονίζει τη I_2 επί του άνω ημιεπιπέδου. Επομένως η απεικόνιση $w = e^{\frac{i\pi}{\alpha} z}$ είναι η ζητούμενη.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο

$$D = \{|z| < 1, |z + 1| > \sqrt{2}\}$$

στο μοναδιαίο δίσκο.

Λύση :

Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων $|z| = 1$ και $|z+1| = \sqrt{2}$.

$$z = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \tag{1}$$

$$|z + 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (z + 1)(\overline{z + 1}) = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 2$$

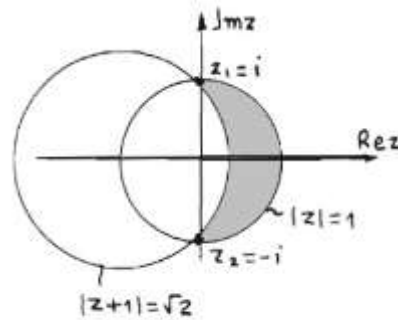
και χρησιμοποιώντας την (1) προκύπτει ότι

$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

και επειδή $|z| = 1$ έχουμε ότι

$$z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i, z_2 = -i,$$

όπου z_1 και z_2 τα σημεία τομής. Σχηματικά,



Θα μετασχηματίσουμε τις περιφέρειες σε ευθείες μέσω του μετασχηματισμού

$$w_1 = \frac{z - i}{z + i}$$

Το πεδίο D αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z| = 1$ και στο εξωτερικό της περιφέρειας $|z+1| = \sqrt{2}$, οπότε επειδή το σύνορο $|z| = 1$ απεικονίζεται σε ευθεία και $I \rightarrow 0$ αρκεί να βρούμε την εικόνα ενός ακόμα σημείου.

Για $z = 1$ ο μετασχηματισμός μας δίνει

$$w_1 = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = -i$$

Επομένως το σύνορο του $z = 1$ απεικονίζεται στο αρνητικό μέρος του άξονα των φανταστικών αριθμών. Ομοίως βρίσκουμε και την εικόνα του συνόρου $|z+1| = \sqrt{2}$.

$$z = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} - 1 + i} = \frac{1 - \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}(1 + i)$$

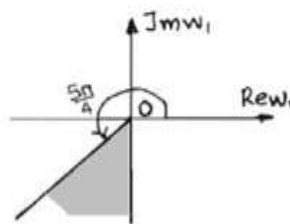
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για το σημείο

$$z = \sqrt{2} - 1$$

ισχύει

$$\operatorname{Re} w_1 = \operatorname{Im} w_1 < 0$$

οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το D στο πεδίο του σχήματος



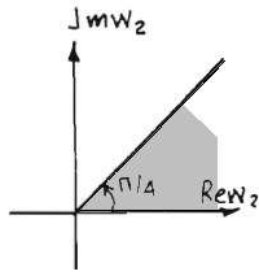
Στη συνέχεια , με το μετασχηματισμό

$$w_2 = w_1 e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$

στρέφουμε το πεδίο κατά γωνία

$$-\frac{5\pi}{4}$$

ώστε η μία πλευρά της γωνίας που έχουμε να συμπέσει με τον θετικό άξονα των πραγματικών αριθμών.

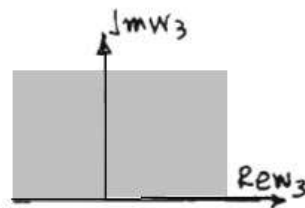


Ακόμα, θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$w_3 = w_2^4$$

έτσι ώστε να μετασχηματίσουμε το παραπάνω πεδίο σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο

$$\text{Im} w_3 > 0.$$



Τέλος, με το μετασχηματισμό

$$w = e^{i\theta} \frac{w_3 - a}{w_3 - \bar{a}}, \theta \in \mathbb{R}$$

απεικονίζουμε το άνω ημιεπίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$.

Οπότε, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο

$$D: \{|z| < 1, |z + 1| > \sqrt{2}\}$$

στο μοναδιαίο δίσκο είναι ο παρακάτω :

$$w = e^{i\theta} \frac{\left(\frac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}}\right)^4 - a}{\left(\frac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}}\right)^4 - \bar{a}}, \theta \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το ήμισυ του δίσκου

$$D = \{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$

στο μοναδιαίο δίσκο.

Λύση :

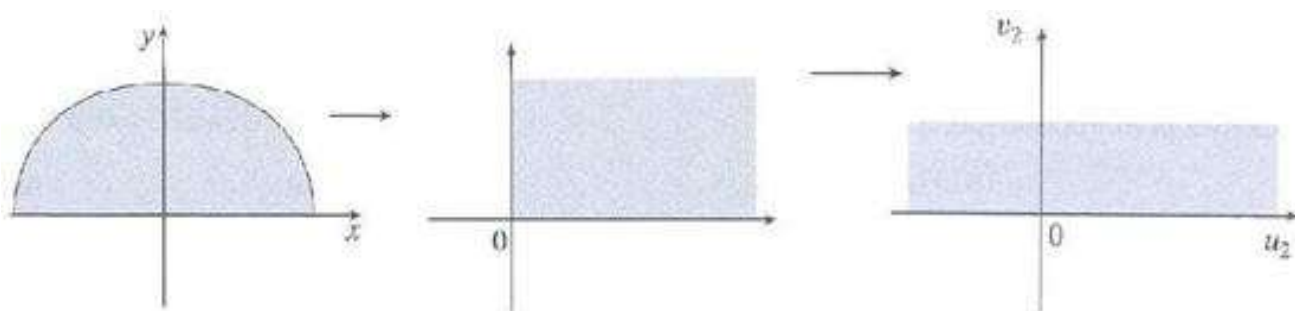
Από την προηγούμενη εφαρμογή γνωρίζουμε ότι ο μοναδιαίος δίσκος απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο μέσω του μετασχηματισμού

$$w_1 = \frac{z-i}{z+i} .$$

Ισχύει ότι

$$\varphi\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$$

οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το πεδίο D στο πρώτο τεταρτημόριο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $w_2 = w_1^2$ ώστε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιπίεδο.



Τέλος, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιπίεδο στο μοναδιαίο δίσκο είναι ο

$$w = \frac{i - w_2}{i + w_2}$$

Οπότε ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D στο μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$ είναι ο

$$w = \frac{i - w_2}{i + w_2} = \frac{i - w_1^2}{i + w_1^2} = \frac{i - \left(i\frac{1-z}{1+z}\right)^2}{i + \left(i\frac{1-z}{1+z}\right)^2} = -i\frac{1 + 2iz + z^2}{1 - 2iz + z^2}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z+i| < 3$ στο ημιεπίπεδο $2\text{Im}w > \text{Re}w$.

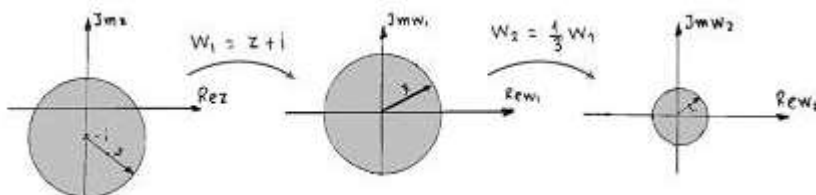
Δίνεται ότι $-1 \rightarrow i$.

Λύση :

Αρχικά θεωρούμε το μετασχηματισμό $w_1 = z + i$ ώστε να μετατοπίσουμε το δίσκο για να έχει το κέντρο την αρχή των αξόνων. Έπειτα παίρνουμε το μετασχηματισμό

$$w_2 = \frac{1}{3} w_1$$

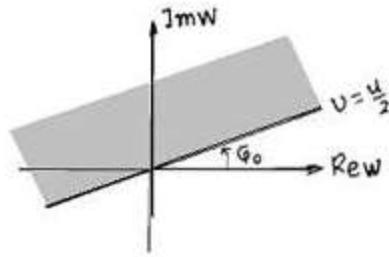
έτσι ώστε να σμικρύνει τον κύκλο για να έχει ακτίνα ίση με το 1.



Σύμφωνα με προηγούμενη εφαρμογή, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο στο άνω ημιεπίπεδο είναι ο

$$w_3 = \frac{w_2 \cdot \bar{a} - a e^{i\theta}}{w_2 - e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Η σχέση $2\text{Im}w > \text{Re}w$ περιγράφει το ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $v > u/2$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Έτσι, ο μετασχηματισμός $w = w_3 e^{i\phi_0}$ απεικονίζει το $\text{Im} w_3 > 0$ στο ημιεπίπεδο $2\text{Im} w > \text{Re} w$.
 Οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w_3 = \frac{\frac{1}{3}(z+i)\bar{a} - ae^{i\theta}}{\frac{1}{3}(z+i) - e^{i\theta}} e^{i\phi_0}, \theta \in \mathbb{R}$$

και επειδή $-I \rightarrow I$ έχουμε ότι $i = ae^{i\phi_0} \Rightarrow a = ie^{i\phi_0} = e^{i\left(\phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Λύση : Το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ απεικονίζεται στο άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου μέσω του μετασχηματισμού

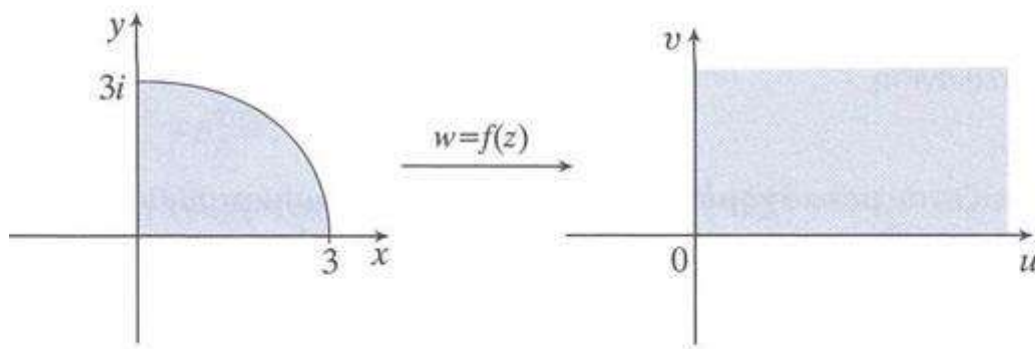
$$w_1 = \frac{z^2}{9}.$$

Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός

$$w_2 = i \frac{1 - w_1}{1 + w_1}$$

απεικονίζει το άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = f(z) = i \frac{1 - w_1}{1 + w_1} = i \frac{1 - \frac{z^2}{9}}{1 + \frac{z^2}{9}} = i \frac{9 - z^2}{9 + z^2}$$



Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το

$$D = \{z: 0 < \text{Im}z < \pi, \text{Re}z > 0\}$$

στο μοναδιαίο δίσκο.

Λύση : Η απεικόνιση $w_1 = e^z$ απεικονίζει το D στο άνω ήμισυ του δίσκου $D_1 = \{w_1 : |w_1| < 1, \text{Im}w_1 > 0\}$.

Από προηγούμενη εφαρμογή ο μετασχηματισμός

$$w_2 = -i \frac{1 + 2iw_1 + w_1^2}{1 - 2iw_1 + w_1^2}$$

απεικονίζει το D_1 στο μοναδιαίο κύκλο. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο παρακάτω :

$$w = -i \frac{1 + 2ie^z + e^{2z}}{1 - 2ie^z + e^{2z}}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $|z-1-i| > 1$ στο $\text{Im}w > 0$.

Λύση : Ο μετασχηματισμός $w_1 = z-1-i$ απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου

$|z-1-i|=1$ στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

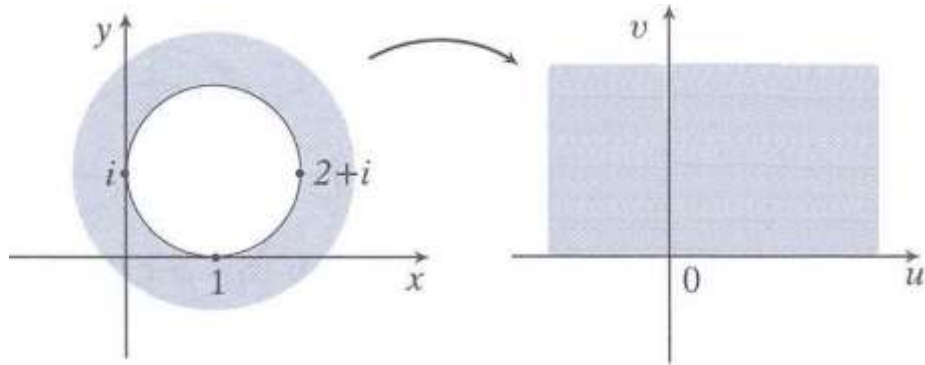
$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

ο οποίος απεικονίζει το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικό του. Τέλος, επειδή ο μετασχηματισμός

$$w_3 = i \frac{1 - w_2}{1 + w_2}$$

απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο στο άνω ημιεπίπεδο, κατάλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w = i \frac{z - 2 - i}{z - i} .$$



Εφαρμογή

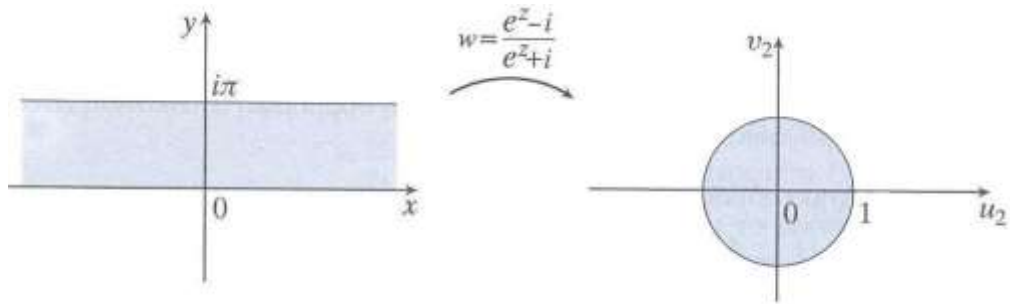
Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα $0 < y < \pi$ επί του μοναδιαίου δίσκου.

Λύση : Ο μετασχηματισμός $w_1 = e^z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < y < \pi$ στο άνω ημιέπιπεδο. Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιέπιπεδο στο μοναδιαίο δίσκο είναι ο

$$w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$$

οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w = \frac{e^z - i}{e^z + i}$$



Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $0 < \text{Re}z < 1$ στο πεδίο $e^2 < |w| < e^4$.

Λύση : Ο μετασχηματισμός $w_1 = 2z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < \text{Re}z < 1$ στο πεδίο $0 < \text{Re}w_1 < 2$, ενώ ο μετασχηματισμός $w_2 = w_1 + 2$ απεικονίζει το πεδίο αυτό στο πεδίο $2 < \text{Re}z < 4$.

Στη συνέχεια, ο

$$w = e^{w_2}$$

απεικονίζει το πεδίο $2 < \text{Re}z < 4$ στο πεδίο

$$e^2 < |w| < e^4.$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός που απεικονίζει απευθείας το $0 < \text{Re}z < 1$ στο

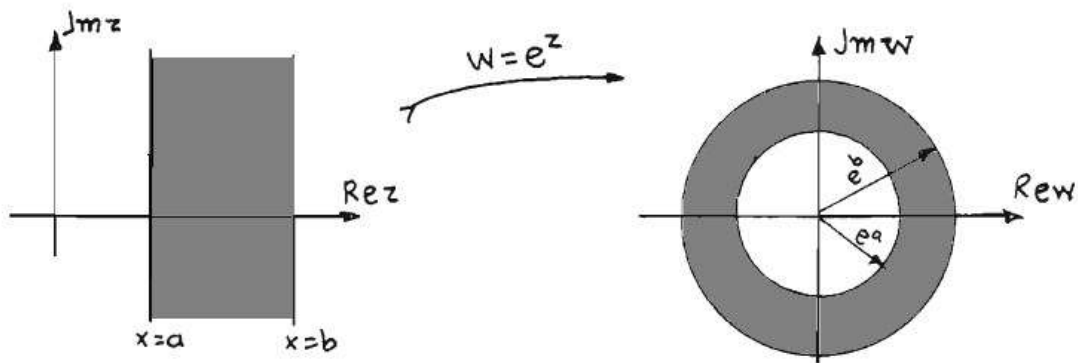
$e^2 < |w| < e^4$ είναι ο

$$w = e^{2z} + 2.$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$ η εικόνα του πεδίου $D = \{ \alpha < \text{Re}z < b, \alpha, b \in \mathbb{R} \}$.

Λύση : Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο του πεδίου D , το $z = x + iy$, $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$. Έτσι ο μετασχηματισμός μας δίνει $w = e^{x+iy} \Rightarrow w = e^x e^{iy}$ και επειδή $|w| = e^x$ έχουμε $a < x < b \Rightarrow e^a < |w| < e^b$ καθώς και επειδή $\arg w = y$ παίρνουμε ότι $-\infty < y < \infty \Rightarrow -\infty < \arg w < \infty$. Συνεπώς το ζητούμενο πεδίο είναι το $e^a < |w| < e^b$, $-\infty < \arg w < \infty$ όπως φαίνεται και στο σχήμα



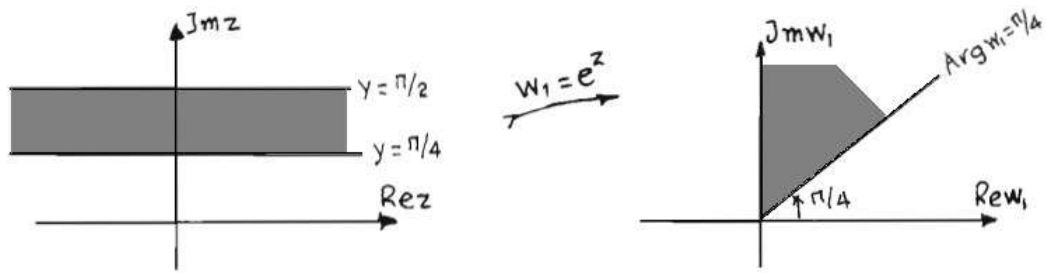
Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\pi/4 < \text{Im}z < \pi/2$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση : Θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία :

Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον εκθετικό μετασχηματισμό ώστε να απεικονίσουμε τη λωρίδα που είναι κάθετη στον άξονα y σε γωνία στο επίπεδο w . Στη συνέχεια θα πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που θα προκύψει ώστε η μια ημιευθεία που σχηματίζει τη γωνία να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w και στη συνέχεια αυτό το πεδίο να το κάνουμε ίσο με το άνω ημιεπίπεδο.

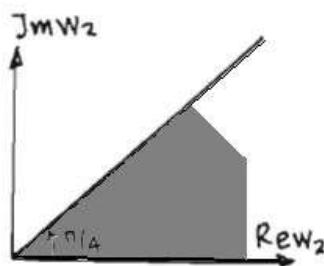
Έστω τώρα, ένα τυχαίο σημείο του πεδίου, το $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$, $\pi/4 < y < \pi/2$. Με χρήση του εκθετικού μετασχηματισμού $w_1 = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ προκύπτει ότι $|w_1| = e^x$, $-\infty < x < \infty \Rightarrow 0 < |w_1| < \infty$ και $\arg w_1 = y$, $\pi/4 < y < \pi/2 \Rightarrow \pi/4 < \arg w_1 < \pi/2$ δηλαδή όπως φαίνεται και στο κάτω σχήμα



Έπειτα, πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που προέκυψε κατά γωνία $-\pi/4$ έτσι ώστε η μία πλευρά της γωνίας να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών και αυτό γίνεται με το μετασχηματισμό

$$w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

οπότε και προκύπτει το πεδίο του σχήματος



Τέλος, επειδή το πεδίο που έχουμε τώρα είναι το $0 < \arg w_2 < \pi/4$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$w = w_2^4$$

ώστε να τετραπλασιάσουμε τη γωνία και να απεικονίζεται σε ολόκληρο το άνω ημιπίεδο.

Οπότε, καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\pi/4 < \text{Im} z < \pi/2$ στο άνω ημιπίεδο είναι ο

$$w = \left(e^z e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^4 \Rightarrow w = e^{4z} e^{-i\pi} \Rightarrow w = -e^{4z}.$$

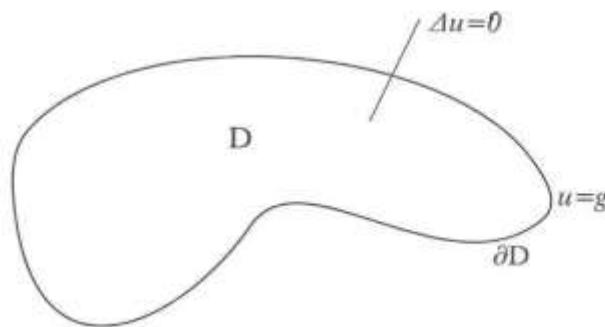
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

2.1 Είδη προβλημάτων συνοριακών τιμών

Πρόβλημα Dirichlet : Έστω D ένα πεδίο του \mathbb{R}^2 με σύνορο ∂D και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ∂D . Το πρόβλημα Dirichlet συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης u που είναι **αρμονική**¹ στο D , συνεχής στο $\bar{D} = D \cup \partial D$ και ταυτίζεται με τη g πάνω στο σύνορο, δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ στο } D \\ u = g \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (1)$$

Αν το πρόβλημα (1) έχει λύση, τότε από την αρχή μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις προκύπτει ότι η λύση είναι μοναδική.



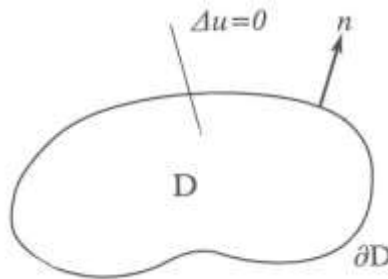
Πρόβλημα Neumann : Έστω ένα πεδίο D με σύνορο ∂D και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνορο. Το πρόβλημα Neumann συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης u που είναι αρμονική στο D , συνεχής στο $\bar{D} = D \cup \partial D$ και της οποίας η παράγωγος ως προς την κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο του συνόρου να ταυτίζεται με τη g ,

¹ Μια πραγματική συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ονομάζεται **αρμονική** στο πεδίο D , αν φ έχει μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης συνεχείς στο D και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

δηλαδή,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ στο } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (2)$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D με κατεύθυνση προς τα έξω.



- Στα προβλήματα Neumann υποθέτουμε ότι σύνορο ∂D είναι αρκετά λείο για να υπάρχει το κάθετο προς το σύνορο διάνυσμα n .
- Το πρόβλημα Neumann για να έχει λύση πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\int_{\partial D} g \, ds = 0$$

η οποία προκύπτει από τη σχέση

$$\iint_D \Delta u \, dx \, dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

και τη σχέση (2) και η φυσική της ερμηνεία είναι η εξής :

Έστω ότι $u(x,y)$ είναι η λύση της στάσιμης κατανομής θερμοκρασίας εντός του πεδίου D . Η συνάρτηση $\frac{\partial u}{\partial n}$ πάνω στο σύνορο παριστάνει τη ροή θερμοκρασίας κατά μήκος του. Για να υπάρχει στάσιμη θερμοκρασία, πρέπει η συνολική ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου να είναι 0.

- Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.

Οι προτάσεις που ακολουθούν, είναι πολύ χρήσιμες για τη μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια των σύμμορφων απεικονίσεων.

Πρόταση : Έστω φ αρμονική συνάρτηση σε ένα πεδίο $D \in \mathbb{C}$. Τότε η φ παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό.

Απόδειξη : Έστω ότι το πεδίο D είναι απλά συνεκτικό και F ένας σύμμορφος μετασχηματισμός όπου

$$w = u + iv = F(z) = F(x + iy).$$

Ισχύει ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στο D τέτοια ώστε

$$f(z) = \varphi(x, y) + iv(x, y).$$

Έστω

$$g(w) = f(z) = f(F^{-1}(w)).$$

Επειδή η F είναι σύμμορφη, η g είναι ολόμορφη στο $F(D)$. Έστω

$$g(w) = \varphi(u, v) + iv(u, v).$$

Τότε από τη σχέση $g(w) = f(z)$ έχουμε

$$\varphi(u, v) = \varphi(x(u, v), y(u, v))$$

και επειδή $\varphi = \operatorname{Re} z$ η φ θα είναι αρμονική στο $F(D)$.

Πρόταση : Έστω $w = F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ μια σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη στο πεδίο D, C μια λεία καμπύλη στο D και $C' = F(C)$. Αν η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\varphi(x,y) = \kappa$, όπου κ σταθερά ή $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ κατά μήκος της C τότε η συνάρτηση $\Phi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\Phi(u,v) = \kappa$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ κατά μήκος της C' .

Απόδειξη : Αν $\varphi = \kappa$ πάνω στη C , τότε $\varphi = \kappa$ πάνω στη C' , Αν υποθέσουμε ότι

$$\frac{\nabla \varphi}{\nabla n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \text{ πάνω στη } C, \text{ όπου } \nabla \varphi = (\varphi_x, \varphi_y) \text{ και } \mathbf{n} \text{ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο}$$

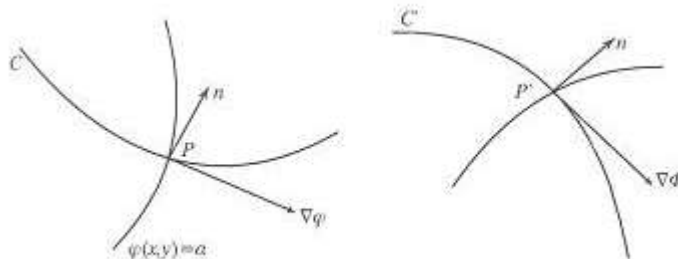
στη C στο σημείο $P(x,y)$, τότε είτε $\nabla \varphi = 0$, είτε $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο \mathbf{n} . Αν $\nabla \varphi = 0$ τότε

$$\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v) = \mathbf{0} \text{ άρα } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Έστω $\nabla \varphi \neq \mathbf{0}$, άρα το $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο \mathbf{n} . Αν $\nabla \varphi = 0$ τότε $\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v) = \mathbf{0}$, οπότε $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

Έστω $\nabla \varphi \neq \mathbf{0}$, άρα το $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στο \mathbf{n} και επομένως εφαπτόμενο της C στο P .

Το $\nabla \varphi$ είναι ορθογώνιο στην καμπύλη $\varphi(x,y) = \alpha$ που περνάει από το P . Η εικόνα της καμπύλης $\varphi(x,y) = \alpha$ μέσω της F είναι η καμπύλη $\Phi(u,v) = \alpha$ στο επίπεδο w . Επειδή η F είναι σύμμορφη, οι γωνίες μεταξύ των καμπυλών διατηρούνται, οπότε η C' είναι ορθογώνια της καμπύλης $\Phi(u,v) = \alpha$ στο P' . Συνεπώς το $\nabla \Phi = (\Phi_u, \Phi_v)$ είναι εφαπτόμενο της C' στο P' επομένως και ορθογώνιο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C' στο P' , οπότε $\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ και $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ πάνω στη C' .



Πολλές φορές, βασιζόμενοι στις δύο παραπάνω προτάσεις, ακολουθούμε την εξής διαδικασία για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών για ένα πεδίο D του \mathbb{R}^2 :

- ◆ Απεικονίζουμε το πεδίο D σε ένα απλούστερο D' μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης της μορφής $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
- ◆ Μετασχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες από το αρχικό πεδίο στο καινούριο
- ◆ Λύνουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο καινούριο πεδίο D' και η λύση του είναι της μορφής $\Phi(u,v)$
- ◆ Για να βρούμε τη λύση του αρχικού προβλήματος θέτουμε $\varphi(x,y) = \Phi(u(x,y),v(x,y))$ και προκύπτει η λύση.

2.2 Εφαρμογές προβλημάτων συνοριακών τιμών

Εφαρμογή (άπειρη κατακόρυφη λωρίδα)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & \alpha < x < b, \\ \varphi(\alpha, y) = k_1, & y \in \mathbb{R} \\ \varphi(b, y) = k_2, & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

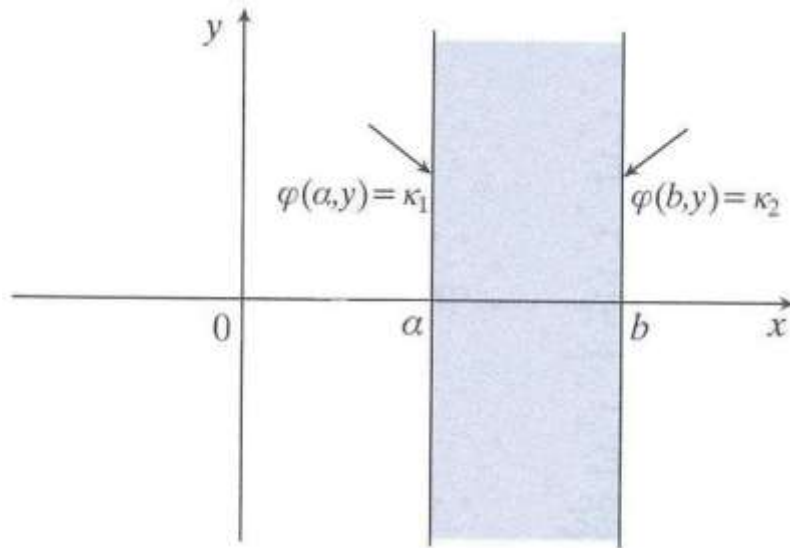
Λύση : Είναι φανερό πως οι συνοριακές τιμές δεν εξαρτώνται από το y , οπότε προφανώς αναζητούμε ως λύση μια αρμονική συνάρτηση της μορφής $\varphi(x,y) = f(x)$, $\alpha < x < b$.

Η σχέση $\Delta\varphi = 0$ γράφεται ως $f''(x) = 0$ συνεπώς η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$, όπου λ, μ σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που έχουμε, μετά τη διπλή ολοκλήρωση προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda\alpha + \mu = k_1 \\ \lambda b + \mu = k_2 \end{cases}$$

από το οποίο προκύπτουν τα λ και μ οπότε η τελική λύση είναι

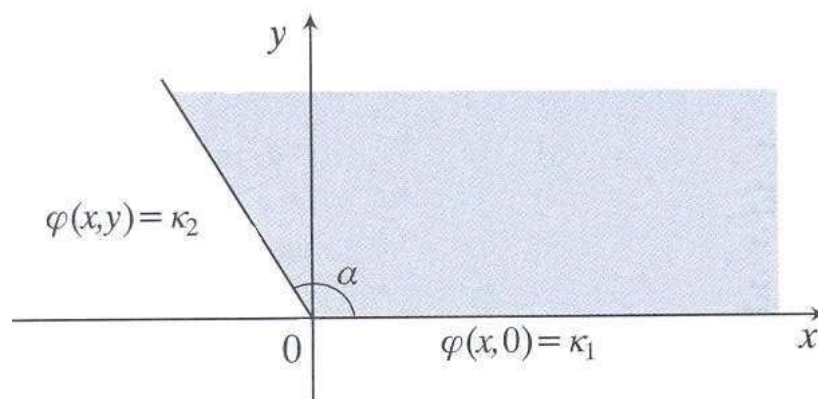
$$\varphi(x,y) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{b - a}(x - a)$$



Εφαρμογή (γωνιακό πεδίο)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & 0 < \arg z < \alpha, (\alpha \leq \pi) \\ \varphi(x,0) = k_1, & x > 0 \\ \varphi(x,y) = k_2, & r > 0, \theta = \alpha \end{cases}$$



Λύση : Η συνάρτηση $\text{Arg}z$ είναι αρμονική, καθώς είναι το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $\text{Log}z$ και είναι σταθερή σε ημιευθείες με αρχή το 0. Αναζητούμε μια λύση της μορφής $\varphi(x,y) = b \arg z + c$ με $b, c \in \mathfrak{R}$ αφού έχουμε ότι $\Delta\varphi = 0$. Λόγω των συνοριακών συνθηκών προκύπτει η παρακάτω λύση :

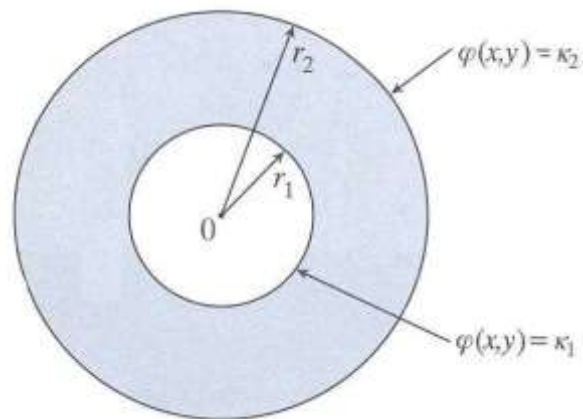
$$\varphi(x,y) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{\alpha} \arg z.$$

Εφαρμογή (δακτύλιος)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & r_1 < |z| < r_2 \\ \varphi(x,y) = k_1, & |z| = r_1 \\ \varphi(x,y) = k_2, & |z| = r_2 \end{cases}$$

Λύση :



Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της γωνίας θ , οπότε η λύση θα είναι μια αρμονική συνάρτηση ανεξάρτητη γωνίας, της μορφής

$$\varphi(x,y) = \alpha + b \ln|z|, \quad \alpha, b \text{ σταθεροί.}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που μας δίνει το πρόβλημα υπολογίζουμε τις σταθερές α, β και προκύπτει η τελική λύση

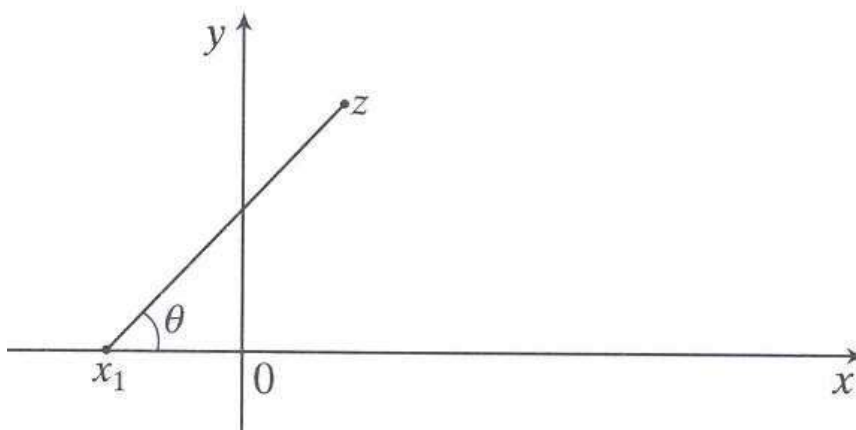
$$\varphi(x, y) = k_1 + (k_2 - k_1) \frac{\ln\left(\frac{|z|}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Εφαρμογή (άνω ημιεπίπεδο)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & -\infty < x < \infty, y > 0 \\ \varphi(x, 0) = \begin{cases} \alpha_0, & -\infty < x < \infty \\ \alpha_1, & x_1 < x < \infty \end{cases}, & \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση : Γνωρίζουμε ότι η γωνία θ είναι ίση με $\arg(z - x_1)$.



Η λύση που θέλουμε είναι η συνάρτηση της μορφής

$$\varphi(x, y) = \lambda + \mu \arg(z - x_1)$$

η οποία είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Τώρα, λόγω των συνοριακών συνθηκών θα πρέπει

$$\lambda = \alpha_1 \quad \text{και} \quad \lambda + \mu \cdot \pi = \alpha_0$$

Άρα η λύση του προβλήματος είναι η

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 + \frac{1}{\pi} (\alpha_0 - \alpha_1) \arg(z - x_1).$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ \varphi(x, 0) = \begin{cases} \alpha_0, & -\infty < x < x_1 \\ \alpha_1, & -x_1 < x < x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n, & -x_n < x < \infty \end{cases} \end{cases}$$

Λύση : Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή κατασκευάζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \alpha_n + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \operatorname{Arg}(z - x_m).$$

Για να είναι αυτή η συνάρτηση η λύση του προβλήματος πρέπει α) να είναι αρμονική για $y > 0$, δηλαδή στο άνω ημιεπίπεδο, καθώς και β) να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Α) Η συνάρτηση είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο ως το φανταστικό μέρος της ολόμορφης

$$\chi(z) = i\alpha^m + \sum_{m=1}^{m=I} \Gamma \circ \partial \left[\frac{1}{\alpha^{m-1} - \alpha^m} (z - x^m) \right].$$

β) Έστω k μια σταθερή τιμή του m . Αν $z = x$ είναι ένα σημείο με $x_k < x < x_{k+1}$, τότε

$$\begin{cases} \arg(z - x_k) = 0, 1 \leq m \leq k \\ \arg(z - x_m) = \pi, k+1 \leq m \leq n \end{cases}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \alpha_n + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^k (a_{m-1} - a_m) \operatorname{Arg}(z - x_m) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=k+1}^n (a_{m-1} - a_m) \operatorname{Arg}(z - x_m) \\ &= \alpha_n \sum_{m=1}^k (a_{m-1} - a_m) \cdot 0 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=k+1}^n (a_{m-1} - a_m) \cdot \pi \\ &= \alpha_n + (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2}) + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) = \alpha_k. \end{aligned}$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ \varphi(x, 0) = \begin{cases} 3, & -\infty < x < -3 \\ 7, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 2 \\ 4, & 2 < x < \infty \end{cases} \end{cases}$$

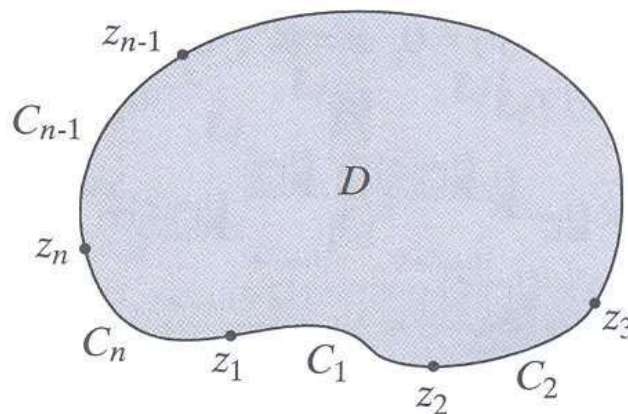
Λύση : Το πρόβλημα αυτό είναι υποπερίπτωση του προηγούμενου έχοντας απλά $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$, $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= 4 - \frac{4}{\pi} \operatorname{Arg}(z+3) + \frac{6}{\pi} \operatorname{Arg}(z+1) - \frac{3}{\pi} \operatorname{Arg}(z-2) \\ &= 4 - \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+3}\right) + \frac{6}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right) - \frac{3}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x-2}\right).\end{aligned}$$

Μια γενίκευση των παραπάνω είναι η εξής :

Έστω ένα απλά συνεκτικό πεδίο D που περιορίζεται από μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη C και z_1, z_2, \dots, z_n , n σημεία τα οποία βρίσκονται πάνω στη C διατεταγμένα. Έστω C_k το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ z_k και z_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n-1$ και έστω C_n το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ των z_n και z_1 . Έστω $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ σταθεροί αριθμοί στον \mathbb{R} . Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι το ακόλουθο.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ στο } D \\ \varphi(x,y) = a_1 \text{ για } z = x + iy \in C_1 \\ \varphi(x,y) = a_2 \text{ για } z = x + iy \in C_2 \\ \vdots \\ \varphi(x,y) = a_n \text{ για } z = x + iy \in C_n. \end{array} \right.$$



Μια μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος είναι η εύρεση μιας σύμμορφης απεικόνισης της μορφής $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ του πεδίου D στο **άνω ημιέπιπεδο** $\operatorname{Im}w > 0$ ώστε τα σημεία z_1, z_2, \dots, z_n να απεικονίζονται στα σημεία $u_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ και το z_n να απεικονίζεται στο $u_n = \infty$ του άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w .

Έτσι λοιπόν, η απεικόνιση $f(z)$ δίνει ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο άνω ημιεπίπεδο του οποίου η λύση βρέθηκε σε προηγούμενη εφαρμογή. Αν τώρα θέσουμε $a_0 = a_n$, η λύση του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= a_{n-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k) \operatorname{Arg}(f(z) - u_k) \\ &= a_{n-1} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k) \operatorname{Arctan} \frac{u(x, y)}{u(x, y) - u_k}.\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο αν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σύμμορφη απεικόνιση από το D στο άνω ημιεπίπεδο. Η ύπαρξη μιας τέτοιας απεικόνισης εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riemann.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, |z| < 1 \\ \varphi(x, y) = 0, z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi \\ \varphi(x, y) = 1, z = e^{i\theta}, \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Λύση: Μία σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο του προβλήματος στο άνω ημιεπίπεδο είναι, όπως έχουμε δει και στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων, η παρακάτω:

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα σημεία $z = x + iy$ τα οποία βρίσκονται στο άνω ημικύκλιο: $x^2 + y^2 - 1 = 0, y > 0$ απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα.

Έχουμε επομένως ένα νέο πρόβλημα στο επίπεδο w

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, -\infty < u < \infty, v > 0 \\ \Phi(u, 0) = 0, u > 0 \\ \Phi(u, 0) = 0, u < 0 \end{cases}$$

η λύση του οποίου βρίσκεται χρησιμοποιώντας την εφαρμογή για το άνω ημιεπίπεδο που είδαμε και πριν και είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x^2 - y^2 - 1}{2y}.$$

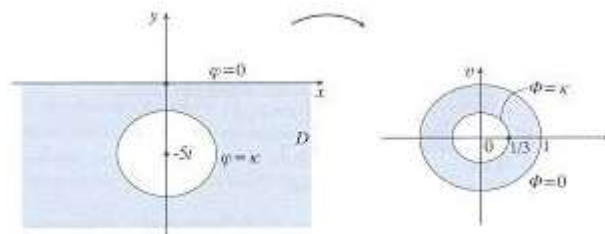
Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet για το πεδίο $D = \{z : \text{Im}z < 0, |z+5i| > 3\}$

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{στο } D \\ \varphi(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = \kappa, |z + 5i| = 3 \end{cases}$$

Λύση : Όπως έχουμε δει και στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων, ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z + 4i}{z - 4i} \text{ απεικονίζει το πεδίο } D \text{ στο δακτύλιο } 1/3 < |w| < 1.$$



Η λύση του προβλήματος Dirichlet στο δακτύλιο είναι

$$\Phi(u, v) = -\kappa \frac{\ln |w|}{\ln 3} .$$

Επομένως, η ζητούμενη λύση στο πεδίο D είναι

$$\varphi(x, y) = -\frac{\kappa}{\ln 3} \ln \left| \frac{z + 4i}{z - 4i} \right| = -\frac{\kappa}{2 \ln 3} \ln \left(\frac{x^2 + (y + 4)^2}{x^2 + (y - 4)^2} \right).$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet για το πεδίο $D = \{z : |z| < 5, |z-2| > 2\}$.

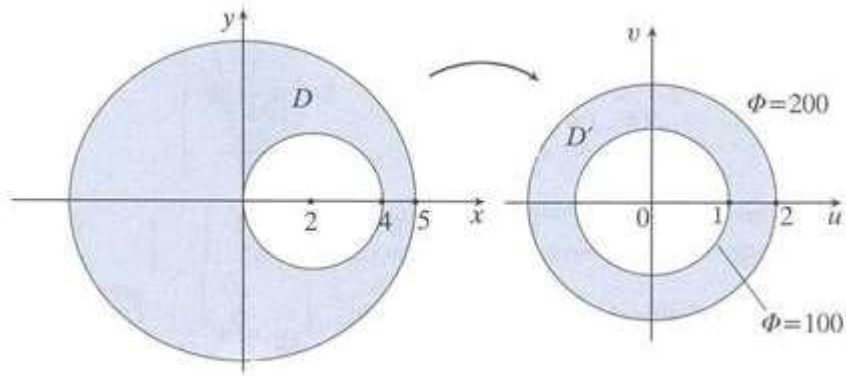
$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{στο } D \\ \varphi(x, y) = 100, & |z| = 5 \\ \varphi(x, y) = 200, & |z - 2| = 2 \end{cases}$$

Λύση : Θα βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το πεδίο D σε ένα δακτύλιο. Δύο σημεία που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους του πεδίου D, δηλαδή τους κύκλους $|z| = 5$ και $|z-2| = 2$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2 - 25x + 50 = 2 ,$$

οπότε

$$x_1 = 5/2 \text{ και } x_2 = 10.$$



Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$w = \lambda \frac{z - 10}{2z - 5} .$$

Αν το $z = 5$ απεικονίζεται στο $w = -1$, τότε θα πρέπει $\lambda = -1$, οπότε ο μετασχηματισμός

$$w = \frac{z - 10}{2z - 5}$$

απεικονίζει το D στο D' .

Η λύση του προβλήματος στο D' είναι

$$\Phi(u, v) = 100 + 100 \frac{\ln |w|}{\ln 2} ,$$

ενώ η λύση στο D είναι

$$\varphi(x, y) = 100 + 100 \frac{\ln |w(x, y)|}{\ln 2}$$

με $w = u + iv \Rightarrow$

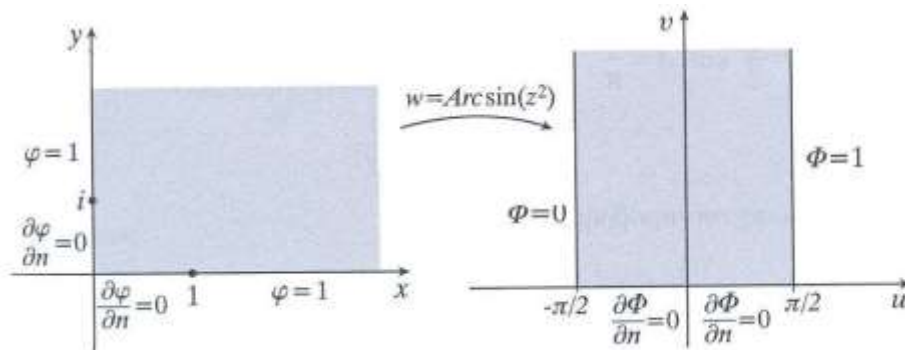
$$u(x, y) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 25x + 50}{(2x - 5)^2 + 4y^2} , \quad v(x, y) = \frac{15y}{(2x - 5)^2 + 4y^2} .$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & x, y > 0 \\ \varphi(x, 0) = 1, & x > 1 \\ \varphi(0, y) = 0, & y > 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, & 0 < y < 1, x = 0 \text{ και } 0 < x < 1, y = 0. \end{cases}$$

Λύση : Με χρήση του μετασχηματισμού $w = z^2$ μπορούμε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο, ενώ με το μετασχηματισμό $w = \text{Arcsin}z$ μπορούμε να απεικονίσουμε το άνω ημιεπίπεδο στην ημιάπειρη λωρίδα $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v > 0$. Συνεπώς με το μετασχηματισμό $w = \text{Arcsin}(z^2)$ μπορούμε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο πεδίο $D = \{(u, v) : -\pi/2 < u < \pi/2, v > 0\}$.



Έτσι λοιπόν το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών γίνεται

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0 & \text{στο } D \\ \Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = 0, & v > 0 \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 1, & v > 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, & -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v = 0 \end{cases}$$

Μια λύση Φ του νέου προβλήματος που προκύπτει στο πεδίο D είναι η $\Phi(u, v) = Au + Bv$, A, B σταθερές.

Για τη συνοριακή καμπύλη $-\pi/2 < u < \pi/2$, $v = 0$ έχουμε ότι $n = (0, -1)$ άρα

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot n = A \cdot 0 + 0(-1) = 0$$

οπότε η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $A, B \in \mathfrak{R}$.

Από τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει ότι

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -A \frac{\pi}{2} + B = 0 \quad \text{και} \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = A \frac{\pi}{2} + B = 2$$

Επομένως έχουμε $B = 1/2$ και $A = 1/\pi$, άρα, $\Phi(u, v) = (1/\pi) \cdot u + 1/2$.

Τελικώς, η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} [\operatorname{Arc} \sin(z^2)] + \frac{1}{2}$$

2.3 Το πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο

Ολοκληρωτικός τύπος Poisson – Πυρήνας Poisson

Έστω $D = \{z : |z| < R\}$ και $f(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στο D και συνεχής στο \overline{D} . Αν $z \in D$, με $z \neq 0$ τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

με C ο κύκλος $|z| = R$ θετικά προσανατολισμένος. Έστω τώρα το συμμετρικό του z ως προς τον κύκλο C , το z_1 . Τότε $z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}}$.

Επειδή το z_1 βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου C , από το θεώρημα Cauchy – Goursat, προκύπτει ότι

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta = 0.$$

$$\text{Επομένως, } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1} \right) f(\zeta) d\zeta. \quad (1)$$

Θεωρούμε την ποσότητα

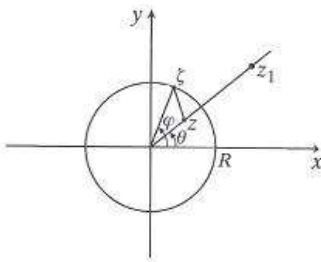
$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\zeta - \bar{z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}. \quad (2)$$

Για $\zeta = R e^{i\phi}$ και $z = r e^{i\theta}$, έχουμε

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2},$$

αφού η ποσότητα $|\zeta - z|$ παριστάνει την απόσταση μεταξύ του ζ και z και από το γνωστό νόμο των συνημιτόνων είναι

$$|\zeta - z|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2 > 0.$$



Επειδή $d\zeta = iR e^{i\phi} d\phi = i\zeta d\phi$, η σχέση (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} f(R e^{i\phi}) d\phi. \quad (3)$$

Αν το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης f είναι u , τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \phi)}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi, r < R.$$

Αυτός ο τύπος ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson** για την αρμονική συνάρτηση u στο δίσκο $|z| < R$.

Η συνάρτηση

$$P(R, r, \phi - \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Poisson**.

Ιδιότητες του πυρήνα Poisson

a. Από τη σχέση (2) έχουμε

$$\begin{aligned} P(R, r, \phi - \theta) &= \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\zeta - \bar{z}} = \frac{z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\zeta - \bar{z}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$ είναι ολόμορφη μέσα στο δίσκο $|z| < R$. Έτσι, το πραγματικό μέρος της που είναι το $P(R, r, \phi - \theta)$ θα είναι αρμονική συνάρτηση εντός του δίσκου.

b. Η συνάρτηση $u(r, \theta) = 1$ είναι αρμονική, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Poisson προκύπτει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \phi - \theta) d\phi = 1.$$

c. Για R, r, θ σταθερά, η μέγιστη τιμή της $P(R, r, \phi - \theta)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, λαμβάνεται για $\phi = \theta$ και είναι

$$\max_{0 \leq \phi \leq 2\pi} P(R, r, \phi - \theta) = \frac{R+r}{R-r},$$

η οποία τείνει στο ∞ για $r \rightarrow R$.

Η ελάχιστη τιμή της $P(R, r, \phi - \theta)$ λαμβάνεται είτε για $\phi = \theta + \pi$ ή για $\phi = \theta - \pi$ και είναι

$$\min_{0 \leq \phi \leq 2\pi} P(R, r, \phi - \theta) = \frac{R-r}{R+r},$$

η οποία τείνει στο 0 όταν $r \rightarrow R$.

Θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για ένα δίσκο

Έστω $g(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση πάνω στον κύκλο $C : |z| = R$ με περίοδο 2π . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \phi - \theta) g(\phi) d\phi, 0 \leq r < R \\ u(R, \theta) = g(\theta) \end{array} \right\}$$

Τότε η u είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = R$ και συνεχής στο $|z| \leq R$.

Απόδειξη : Η συνάρτηση P είναι αρμονική ως προς r, θ στο εσωτερικό του κύκλου C , όπως είδαμε και στην ιδιότητα a πιο πριν, άρα και η συνάρτηση $u(r, \theta)$ είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου C . Μένει να δείξουμε τη συνέχεια της u στον κλειστό δίσκο $|z| \leq R$. Έστω Re^{ia} , $a \in \mathfrak{R}$, ένα σταθερό σημείο πάνω στη C . Θα δείξουμε ότι $u(r, \theta) \rightarrow g(a)$ όταν $r \rightarrow R$ και $\theta \rightarrow a$. Λόγω της ιδιότητας b του πυρήνα Poisson, έχουμε

$$u(r, \theta) - g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \phi - \theta) (g(\phi) - g(a)) d\phi.$$

Έστω ε θετικό. Επειδή η g είναι συνεχής πάνω στη C , υπάρχει ένα β θετικό τέτοιο ώστε

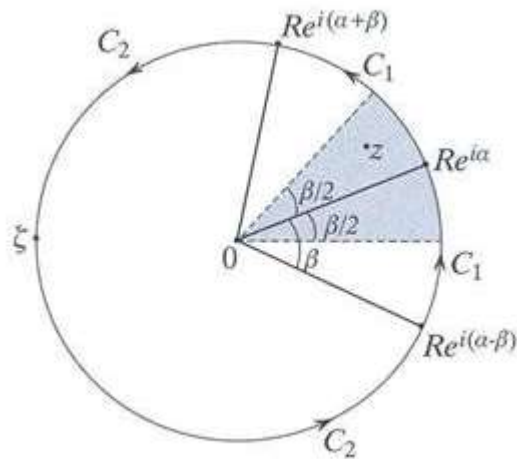
$|g(\phi) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε ϕ με $|\phi - a| < \beta$, δηλαδή για κάθε ϕ τέτοιο, ώστε το $Re^{i\phi}$ να βρίσκεται στο τόξο C_1 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Είναι φανερό ότι $u(r, \theta) - g(a) = I_1 + I_2$, όπου, $2\pi i I_1 = \int_{a-\beta}^{a+\beta} P(R, r, \phi - \theta) (g(\phi) - g(a)) d\phi$ και

$$2\pi i I_2 = \int_{a+\beta}^{a-\beta+2\pi} P(R, r, \phi - \theta) (g(\phi) - g(a)) d\phi.$$

Επειδή $P(R, r, \phi - \theta) \geq 0$ για $r \leq 1$, έχουμε

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{a-\beta}^{a+\beta} P(R, r, \phi - \theta) |g(\phi) - g(a)| d\phi < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(R, r, \phi - \theta) d\phi = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Έστω $C_2 = C \setminus C_1$. Είναι φανερό ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε z εντός του γραμμοσκιασμένου τμήματος όπου $|\theta - \alpha| < \beta/2$ και κάθε $\zeta \in C_2$ να ισχύει $|\zeta - z|^2 \geq m$. Επομένως

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} \frac{(R^2 - r^2)}{|\zeta - z|^2} |g(\phi) - g(a)| d\phi < \frac{2\pi M (R^2 - r^2)}{2\pi m},$$

όπου

$$M = \max_{\phi \in C_2} |g(\phi) - g(a)|.$$

Επειδή δε $R + r < 2R$, θα έχουμε

$$|I_2| < \frac{2M(R - r)}{m} < \frac{2M\delta}{m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

αν $|r - R| < \delta$, όπου $\delta = m\varepsilon / 4M$.

Επομένως,

$$|u(r, \theta) - g(a)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

για κάθε r με $|r - R| < \delta$ και θ με $|\theta - \alpha| < \beta/2$.

Παρατηρήσεις : i) Η λύση (1) του προβλήματος Dirichlet για το δίσκο είναι μοναδική, λόγω της αρχής του μεγίστου μέτρου.

ii) Η λύση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί και με άλλους τρόπους.

iii) Το θεώρημα γενικεύεται στην περίπτωση που η g είναι τμηματικά συνεχής πάνω στον κύκλο C .

Αν $R = 1$, από την ιδιότητα του πυρήνα Poisson, η λύση του προβλήματος γράφεται

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, |z| < 1$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα $\Delta u = 0$, $0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi$

$$u(1, \theta) = \frac{\sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Λύση : Αν $\zeta = e^{i\theta}$, τότε

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

οπότε

$$u(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)}.$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση iii) για την εύρεση της λύσης του προβλήματος αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta^2 - 1)(\zeta + z)}{2i(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)\zeta} d\zeta.$$

Μέσω του θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων προκύπτει ότι $I = \frac{z}{2i(z+2)}.$

Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{z}{2i(z+2)} = \frac{y}{(x+2)^2 + (y^2)}$$

ή

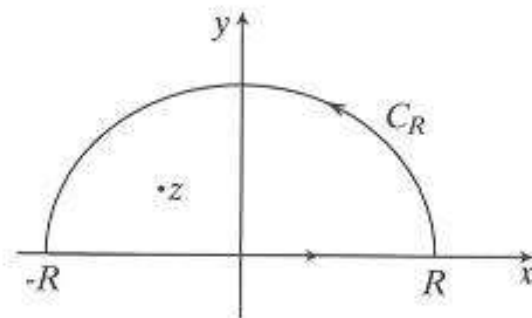
$$u(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{r^2 + 4r \cos \theta + 4}.$$

2.4 Πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιέπιπεδο

Ολοκληρωτικός τύπος Schwarz – Πυρήνας Schwarz

Έστω $f(z)$ ολόμορφη στο $\operatorname{Im} z > 0$ και συνεχής στο $\operatorname{Im} z \geq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές κ και M τέτοιες ώστε $|z^\kappa f(z)| < M, \operatorname{Im} z \geq 0$.

Έστω $C = C_R \cup [-R, R]$ η καμπύλη του σχήματος θετικά προσανατολισμένη.



Αν z είναι ένα εσωτερικό σημείο της C , τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(t) dt}{t - z}.$$

Επειδή $|f(z)| < \frac{M}{R^k}$, το πρώτο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 όταν $R \rightarrow \infty$. Επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt, \operatorname{Im} z > 0 \quad (1)$$

Ο τύπος (1) είναι ένας ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για το άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z > 0$.

Επειδή το \bar{z} είναι στο εξωτερικό της C , έχουμε $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \bar{z}} dt = 0$.

Επομένως ο τύπος (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \bar{z}} \right) f(t) dt$$

δηλαδή,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t - z|^2} dt, y > 0.$$

Έτσι, αν $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, τότε έχουμε

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t, 0)}{|t - z|^2} dt, y > 0$$

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson για το άνω ημιεπίπεδο** ή **ολοκληρωτικός τύπος Schwarz**.

Η συνάρτηση

$$S(t-x, y) = \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Schwarz**. Θέτοντας στον τύπο Schwarz $u(x, y) = 1$ και $u(t, 0) = 1$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t-x, y) dt = 1, y > 0.$$

Η μέγιστη τιμή της $S(t-x, y)$ σα συνάρτηση του t λαμβάνεται για $t = x$ και ισχύει

$$\max_{t \in \mathbb{R}} S(t-x, y) = S(0, y) = \frac{1}{y} \rightarrow \infty, \text{ όταν } y \rightarrow 0.$$

Θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω $f(x)$ μια δοσμένη συνάρτηση συνεχής και φραγμένη στον πραγματικό άξονα $\text{Im}z = 0$. Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), -\infty < x < \infty \end{array} \right\}$$

είναι αρμονική στο $\text{Im}z > 0$ και συνεχής στο $\text{Im}z \geq 0$.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο, αν η δοσμένη συνάρτηση στο σύνορο είναι

$$f(x) = \begin{cases} \kappa, & a < x < b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λύση : Σύμφωνα με το θεώρημα, η λύση είναι

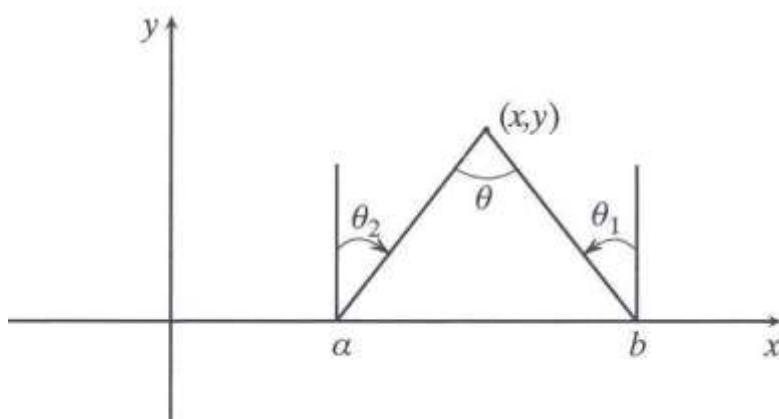
$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_a^b \frac{\kappa}{(t-x)^2 + y^2} dt.$$

Στη συνέχεια λύνουμε

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \cdot \frac{\kappa}{y^2} \int_a^b \frac{1}{\left(\frac{t-x}{y}\right)^2 + 1} dt = \frac{\kappa}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{\kappa}{\pi} \left[\text{Arc tan } \frac{b-x}{y} + \text{Arc tan } \frac{x-a}{y} \right].$$

Η λύση αυτή έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία. Αν $\theta_1 = \text{Arc tan } \frac{b-x}{y}$ και

$\theta_2 = \text{Arc tan } \frac{x-a}{y}$, τότε $u(x, y) = \frac{\kappa}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\kappa}{\pi} \theta(x, y)$, όπου θ η γωνία του σχήματος



Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < y < \pi \\ u(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ u(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

Λύση : Η λωρίδα $0 < y < \pi$ απεικονίζεται σύμμορφα στο άνω ημιεπίπεδο μέσω της συνάρτησης $\zeta = e^z (\zeta = \xi + i\eta)$, $\eta > 0$. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος γίνονται

$$\tilde{u}(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi > 1 \\ 0, & \xi < 1 \end{cases}$$

Από το θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο έχουμε

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\eta dt}{(\xi - t)^2 + \eta^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \frac{1 - \xi}{\eta}.$$

Όμως $\xi = e^x \cos y$ και $\eta = e^x \sin y$ επομένως η λύση του προβλήματος θα είναι

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc} \tan \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}.$$

Εφαρμογή

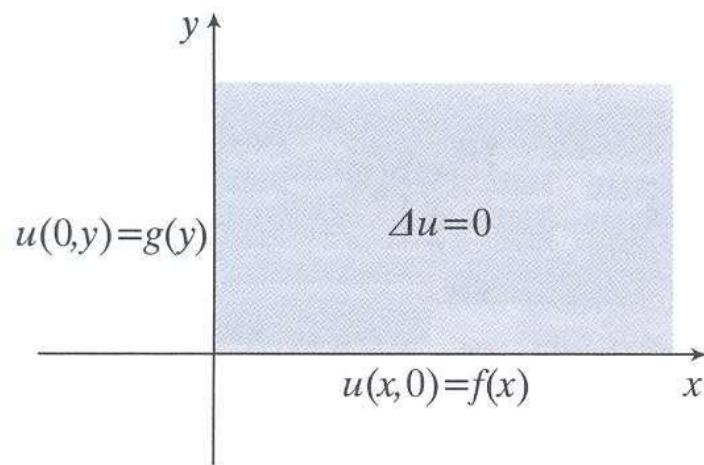
Να βρεθεί μια συνάρτηση $u(x, y)$ που είναι αρμονική στο πρώτο τεταρτημόριο $x > 0$ και $y > 0$ και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες :

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \infty$$

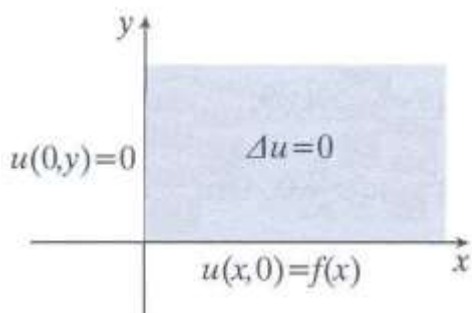
$$u(0,y) = g(y), \quad 0 < y < \infty ,$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$ είναι φραγμένες και συνεχείς.

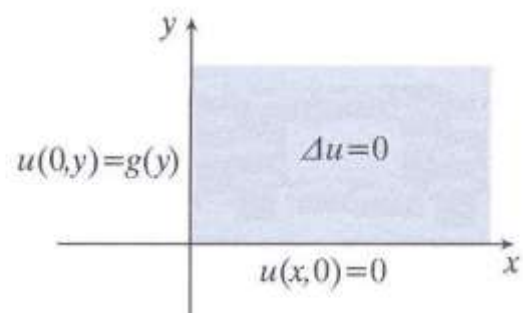
Λύση :



Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους προβλήματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



(I)



(II)

Εάν θεωρήσουμε $u_1(x,y)$ ως λύση του προβλήματος (I) και $u_2(x,y)$ ως λύση του δεύτερου προβλήματος (II), τότε η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y).$$

Για την επίλυση του προβλήματος (I) θεωρούμε την περιττή επέκταση $\tilde{f}(x)$ της $f(x)$. Η λύση $u_1(x, y)$ θα είναι

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt - \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(-t)}{(t-x)^2 + y^2} dt = \\ &= \frac{y}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] f(t) dt, x > 0, y > 0. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την επίλυση του προβλήματος (II), θεωρούμε την περιττή επέκταση $\tilde{g}(y)$ της $g(y)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}(t)}{(t-y)^2 + x^2} dt = \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(t)}{(t-y)^2 + x^2} dt - \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(-t)}{(t-y)^2 + x^2} dt = \\ &= \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{(t-y)^2 + x^2} - \frac{1}{(t-y)^2 + x^2} \right] g(t) dt, x > 0, y > 0. \end{aligned}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Ablowitz M.J., Fokas A.S.:** Complex Variables : Introdcion and Applications, Cambridge University Press, 1997.

[2] **Ahlfors, L.V.,** Complex Analysis, 3rd ed., London, /mcGraw-Hill, 1979.

[3] **Asmar N.H:** Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations, Prentice-Hall, Inc. 2002.

[4] **Gamelin T.W. :** Complex Analysis

[5] **Mathews J.H. :** Basic Complex Variables and their Applixations

[6] **M.R Spiegel :** Μιγαδικές μεταβλητές

[7] **Osborne A.D. :** Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

[8] **J.D.Paliouras, D.S.Meadows :** Complex variables for scientists and engineers

[9] **Κραββαρίτης Δ.Χ. :** Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση , Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα

[10] **Γ.Παντελίδης, Δ.Κραββαρίτης, Β.Νασοπούλου :** Μιγαδικές συναρτήσεις