Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

από τη σκοπιά της Αλγεβρικής Τοπολογίας

Σωτήρης Χούτος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ελλάδα

Φεβρουάριος 2015

Περίληψη

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε κατά κύριο λόγο και μεταξύ άλλων, μία αλγεβροτοπολογική απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας (εφεξής καλούμενο ΘΘΑ). Πρόκειται για το παρακάτω, ιδιαίτερα διάσημο στην επιστήμη των μαθηματικών, αποτέλεσμα:

> *Κάθε πολυώνυμο (μίας μεταβλητής), βαθμού n μεγαλύτερου ή ίσου της μονάδας και με μιγαδικούς συντελεστές, έχει* ***τουλάχιστον μία ρίζα*** *στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

Ισοδύναμα, με όρους καθαρής άλγεβρας, το θεώρημα διατυπώνεται και ως εξής:

> *Το σώμα*[1] *$\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό*[2].

Αν θεωρήσουμε προς στιγμήν δεδομένη την ισχύ του θεωρήματος αυτού, τότε μπορούμε -κάνοντας χρήση απλών αλγεβρικών επιχειρημάτων- να αποδείξουμε και κάτι ακόμα ισχυρότερο: ότι η φράση "τουλάχιστον μία ρίζα" της παραπάνω διατύπωσης μπορεί ισοδύναμα να αντικατασταθεί με την φράση "ακριβώς n ρίζες". Για λόγους πληρότητας της μελέτης μας, η σχετική απόδειξη που γεφυρώνει τη μία περίπτωση με την άλλη, θα δοθεί στο Παράρτημα Β. Δε θα απασχοληθούμε όμως παραπάνω με αυτήν ή άλλες ισοδύναμες διατυπώσεις του ΘΘΑ. Θα επικεντρωθούμε στην πρώτη, "επίσημη" διατύπωση του θεωρήματος, καθώς όλες οι υπόλοιπες προκύπτουν ως πορίσματα από αυτήν.

Σε ό,τι αφορά τώρα τη δομή του κειμένου, αυτό χωρίζεται σε 5 αυτόνομα κεφάλαια. Παραθέτουμε αμέσως και περιληπτικά το περιεχόμενο του καθενός:

[1]Σώμα λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών αποτελεί πράγματι σώμα. Μία περαιτέρω ανάλυση των σχετικών ορισμών καθώς και η σχετική απόδειξη είναι εκτός του σκοπού μας. Παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο στο [1] της βιβλιογραφίας.

[2]Εξ ορισμού, ένα σώμα F λέγεται αλγεβρικά κλειστό, αν κάθε μη σταθερό πολυώνυμο στον $F[x]$ έχει μία ρίζα στο F. Με $F[x]$ καλέσαμε το σύνολο όλων των πολυωνύμων ως προς x, με συντελεστές από το δακτύλιο F. Προς βαθύτερη ανάλυση των εννοιών παραπέμπουμε και πάλι στη βιβλιογραφία.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε αντί εισαγωγής, μία σύντομη -αλλά αρκούντως αναλυτική για τους σκοπούς μας- ιστορική αναδρομή πάνω στο θέμα. Επικεντρωνόμαστε στις ζυμώσεις εκείνες που τελικά οδήγησαν στην αποδοχή της αλήθειας του ΘΘΑ. Αναφέρουμε τις δράσεις και τις σκέψεις όλων εκείνων των διάσημων μαθηματικών, το όνομα των οποίων δικαίως συνδέθηκε με τον έναν ή τον άλλο τρόπο με το θεώρημα. Είναι βέβαια άκρως ενδιαφέρον από μόνο του να παρατηρήσουμε τα εξελικτικά βήματα στην προσέγγιση του προβλήματος. Έχουμε όμως και ένα επιπλέον κίνητρο: κάνοντας τη σύγκριση με το παρελθόν, θα μας επιτραπεί να αξιολογήσουμε ορθότερα αλλά και να εκτιμήσουμε ακόμα περισσότερο, το βάθος της ευρύτερης μαθηματικής έρευνας στη σύγχρονη "μοντέρνα" εποχή.

Στο Κεφάλαιο 2 ξεκαθαρίζουμε όλες εκείνες τις μαθηματικές έννοιες/προτάσεις των οποίων η γνώση θα θεωρείται δεδομένη κατά τη ροή του κειμένου που ακολουθεί (κεφάλαια 3 και 4). Προετοιμάζουμε επί της ουσίας το τεχνικό έδαφος για τη μαθηματική δραστηριότητα της εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 3 λαμβάνει χώρα το κυρίως μέρος της μαθηματικής έρευνας που αποτελεί άλλωστε και το βασικό κορμό της εργασίας. Εδώ επιθυμούμε να χτίσουμε το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο ώστε να είμαστε σε θέση, στο επόμενο κεφάλαιο (4), να περάσουμε πλέον στην ανάπτυξη της ίδιας της απόδειξης του ΘΘΑ. Αναλύουμε και ξεκαθαρίζουμε όλες εκείνες τις έννοιες και τα εργαλεία που χρειαζόμαστε μέσα απο την Αλγεβρική Τοπολογία (ορισμούς, λήμματα, θεωρήματα, πορίσματα κτλ.).

Υπογραμμίζουμε ότι, το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού, είναι εξ ολοκλήρου απαραίτητο για την κατανόηση και πολύ περισσότερο την κατασκευή της απόδειξης! Δεν προσθέσαμε δηλαδή τίποτα εδώ που να εξυπηρετεί απλώς και μόνο στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών, δίχως να αποτελεί αναπόσπαστο κρίκο για τη μετάβαση σε κάποια επόμενη έννοια. Ο τελικός προορισμός της αλυσίδας αυτής είναι βέβαια το ΘΘΑ. Οτιδήποτε λοιπόν συναντάμε στο παρόν κεφάλαιο (ακόμα και όλα τα παραδείγματα που δίνονται) λειτουργεί πάντα *αλυσιδωτά* προς την κατεύθυνση της απόδειξης του κεφαλαίου 4.

Τέλος, το κεφάλαιο αυτό μπορεί με ασφάλεια να αντιμετωπιστεί από τον αναγνώστη και ως μία συνεπής εισαγωγή στο αντικείμενο της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Όχι βέβαια απολύτως πλήρους από άποψη ύλης, αλλά τουλάχιστον μέχρι κάποιο εύλογο σημείο (δεν θα μας απασχολήσουν εδώ για παράδειγμα εξίσου σημαντικές έννοιες της Αλγεβρικής Τοπολογίας όπως είναι π.χ. η Ομολογία, καθότι δεν είναι απαραίτητες για την απόδειξη του ΘΘΑ).

Στο Κεφάλαιο 4 δίνουμε πλέον την αλγεβρο-τοπολογική απόδειξη του ΘΘΑ, όπως εξ αρχής υποσχεθήκαμε. Θέτουμε δηλαδή σε εφαρμογή όλα εκείνα τα μαθηματικά εφόδια που στο προηγούμενο κεφάλαιο συνθέσαμε και καταλήγουμε στο στόχο μας. Η ιδιαίτερη σημασία αυτού του τρόπου απόδειξης του ΘΘΑ, είναι ότι πρόκειται για την προσέγγιση με τη μάλλον πιο ξεκάθαρη γεωμετρική εικόνα για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Λαμβάνοντας λοιπόν αυτά υπόψιν, κρίθηκε για προφανείς λόγους σκόπιμο η απόδειξη του θεωρήματος να αυτονομηθεί σε ένα ξεχωριστό κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 5 συζητάμε μία πολύ πρόσφατη εφαρμογή μίας επέκτασης του ΘΘΑ, σε ένα φυσικό φαινόμενο που απαντάται στην επιστήμη της Αστροφυσικής. Αναδεικνύουμε έτσι αποτελεσματικότερα το ρόλο και τη σημασία του θεωρήματος στον ευρύτερο κόσμο των θετικών επιστημών.

Τέλος, σε ότι αφορά τα υπολογιστικά προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπόνηση της εργασίας αυτής, το κείμενο της εργασίας καθώς και τα μαθηματικά γραφικά που το συνοδεύουν, έχουν παραχθεί εξ ολοκλήρου σε LaTeX. Φωτογραφικό υλικό, όπου κρίθηκε χρήσιμο να συμπεριληφθεί, βρέθηκε αυτούσιο στο διαδίκτυο.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής, Αλέξανδρο Αρβανιτάκη, για την ειλικρινή προσοχή του στις ερωτήσεις μου καθώς και για τη διάθεση και ικανότητά του να μεταδίδει το γνήσιο ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά. Η καθοδήγησή του ήταν πολύτιμη και καθοριστικής σημασίας.

Ευχαριστώ επίσης τον αγαπημένο μου φίλο και συνάδελφο, Βασίλη Βρεττάκο, με τον οποίο συμπορευτήκαμε κατά το μεγαλύτερο μέρος των σπουδών μας. Χωρίς τη συμπαράστασή του ίσως να είχα εγκαταλείψει κάπου στα μισά της διαδρομής.

Η προσπάθεια μου στα χρόνια αυτά αφιερώνεται συνολικά στους γονείς μου, Νίκο και Ειρήνη, στη μαθηματικό και αγαπημένη μου αδερφή Χρυσούλα και τέλος στη μνήμη του παιδικού μου φίλου Δημήτρη.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε σε χρονολογική σειρά τα σημαντικότερα από τα γεγονότα εκείνα τα οποία οδήγησαν τελικά στην ανακάλυψη μίας απόδειξης για το ΘΘΑ. Σημειώνουμε ότι, παρά το όνομά του, το ΘΘΑ δεν διαθέτει καμία απόδειξη καθαρά αλγεβρική, όχι τουλάχιστον με τον τρόπο που σήμερα αντιλαμβανόμαστε το μαθηματικό πεδίο της αφηρημένης Άλγεβρας! Θα ήταν άλλωστε παράλογο κάτι τέτοιο να συνέβαινε, αφού έννοιες άρρηκτα συνδεδεμένες με το θεώρημα (όπως π.χ. οι μιγαδικοί αριθμοί) είναι καθαρά αναλυτικές και όχι αλγεβρικές. Αντίθετα, το θεώρημα πήρε το όνομα του σε μία περίοδο που το περιεχόμενο της Άλγεβρας δεν ήταν η μελέτη δομών αλλά περιοριζόταν κυρίως στην εύρεση λύσεων εξισώσεων. Αυτό δικαιολογεί πλήρως, όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό, το ”θεμελιώδες” της ανακάλυψης του. Η ιστορική αναφορά που ακολουθεί θα ξεκαθαρίσει μεταξύ άλλων και αυτό το σημείο.

1.1 Πρώτες τριβές

Όλοι μας, λιγότερο ή περισσότερο, ερχόμενοι αντιμέτωποι με μία οποιαδήποτε εξίσωση γεννάμε αυθόρμητα και πηγαία κάποια απορία σχετικά με τις λύσεις της. Η γνώση του ΘΘΑ στη σημερινή εποχή μας απαλλάσει από την ερώτηση του ΑΝ μία πολυωνυμική εξίσωση ικανοποιείται κάπου -αφού η απάντηση είναι πάντοτε θετική για οποιοδήποτε πολυώνυμο- και είμαστε έτσι ελεύθεροι να ασχοληθούμε με την ερώτηση του ΠΟΥ[1]

[1]Έως και η ερώτηση αυτή είναι πάντως κατά κανόνα αρκετά δύσκολο να απαντηθεί. Δεν έχει ποτέ υπάρξει κάποια γενική φόρμουλα παραγοντοποίησης πολυωνύμων. Ακόμα χειρότερα, ένα από τα αποτελέσματα της θεωρίας Galois είναι ότι δεν μπορεί ποτέ να υπάρξει μία φόρμουλα επίλυσης πολυωνύμων βαθμού πέντε και άνω! Παρά ταύτα, με το πέρασμα του χρόνου έχουν επινοηθεί αρκετά ισχυρές αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες μπορούν, έστω και προσεγγιστικά, να αντιμετωπίζουν την ερώτηση αυτή με επιτυχία.

αυτή ικανοποιείται. Οι παλαιότεροι μαθηματικοί όμως δεν είχαν αυτή την πολυτέλεια. Επομένως είναι ασφαλές να σκεφτούμε οτι οι ερωτήσεις “ΑΝ” και “ΑΝ ναί τότε ΠΟΥ” ήταν κοινός τόπος για όσους μαθηματικούς εκείνης της εποχής.

Στις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα, η επίλυση των εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού, η “αναγκαστική” επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς για την έκφραση των ριζών καθώς και η εξέλιξη του αλγεβρικού λογισμού, δημιούργησαν τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μιας γενικής θεωρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων. Ας θυμηθούμε ότι η ιδέα για την εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών ως λύσεων εξισώσεων, είχε ήδη εμφανιστεί το 1545 από τον Girolamo Cardano. Μία επιπλέον προσπάθεια καθορισμού πράξεων μεταξύ των μιγαδικών αριθμών μέσω κάποιου κανόνα, είχε γίνει το 1572 από τον Rafael Bombelli στην Άλγεβρά του. Το ενδεχόμενο ότι μπορούν οι μαθηματικοί να δουλεύουν πλέον σε ένα ευρύτερο των πραγματικών αριθμών σύνολο, ενισχύει τη διαίσθηση όλων ότι το ΘΘΑ έχει ισχύ. Διστακτικά λοιπόν, καθώς οι μιγαδικοί δεν θεωρούνται ακόμα “ισότιμοι” των πραγματικών, αρχίζουν να εμφανίζονται και οι πρώτες σχετικές αναφορές. Ο Peter Roth στο βιβλίο του *Arithmetica Philosophica* (1608), κάνει τον ισχυρισμό ότι μια πολυωνυμική εξίσωση n-στού βαθμού μπορεί να έχει *το πολύ n* ρίζες.

Albert Girard

Η πρώτη όμως εικασία πάνω στην ακριβή διατύπωση του ΘΘΑ (ότι δηλαδή οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n διαθέτουν ακριβώς -και όχι το πολύ- n στο πλήθος ρίζες), γίνεται το 1629 από τον Girard (1595-1632) στο βιβλίο του *L'invention en algébre*. Ο ίδιος δίνει μόνο παραδείγματα εξισώσεων για τις οποίες η πρόταση του ισχύει και όχι κάποια απόδειξη για αυτήν. Επιπλέον, δεν ξεκαθαρίζεται στην παρούσα φάση η μιγαδική φύση των λύσεων καθώς αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο οι λύσεις να ανήκουν σε ένα σύνολο ακόμα ευρύτερο των μιγαδικών!

Λίγα χρόνια αργότερα, το 1637, ο Descartes (1596-1650) στο βιβλίο του *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (βιβλίο ΙΙΙ και τελευταίο της “La Geometrie”) κάνει μία περίληψη στα μέχρι τότε γνωστά αποτελέσματα σχετικά με τις εξισώσεις. Παρατηρεί με μεγαλύτερη σαφήνεια ότι

René Descartes

«Κάθε εξίσωση *μπορεί* να έχει τόσες διαφορετικές ρίζες όσος είναι και ο αριθμός των διαστάσεων [δηλαδή ο βαθμός] της άγνωστης ποσότητας στην εξίσωση.»

Επιπλέον, ονομάζει τις θετικές ρίζες "αληθινές", τις αρνητικές "ψεύτικες" και εισάγει για πρώτη φορά τον όρο "φανταστικές" για τις υπόλοιπες! Αναφέρει ότι μπορούμε να "φανταστούμε" ν ρίζες για κάθε εξισωση ν-στού βαθμού, αλλά αυτές δεν θα αντιστοιχούν σε κάποιες πραγματικές ποσότητες.

«...ενώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ έχει τρεις ρίζες, εν τούτοις υπάρχει μία μόνο πραγματική ρίζα, το 2, ενώ οι άλλες δύο παραμένουν φανταστικές.»

Με την ανάπτυξη της Ανάλυσης, η συζήτηση γύρω απο το ΘΘΑ αποκτά εξαιρετική σημασία καθώς η παραγοντοποίηση των πολυωνύμων παίζει πρωταρχικό ρόλο στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων (διάσπαση ρητών κλασμάτων σε απλά κλάσματα). Οι μαθηματικοί λοιπόν "θέλουν" το θεώρημα να έχει ισχύ, διότι έτσι απλοποιούνται οι προσπάθειες τους. Επιπλέον, κατά τον 17^{ο} αιώνα και με χρήση ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων, αποδεικνύεται ότι τα πραγματικά πολυώνυμα περιττού βαθμού έχουν πάντα τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (δηλαδή για n περιττό το ΘΘΑ ισχύει). Το αποτέλεσμα αυτό σαφώς ενισχύει ακόμα περισσότερο την πεποίθηση ότι το θεώρημα είναι αληθές για κάθε βαθμό.

Στην αρχή της επόμενης εκατονταετίας, ο Leibniz (1646-1716), σε μια δημοσίευσή του στο Acta Eruditorum το 1702 που αφορούσε την μέθοδο ολοκλήρωσης ρητών παραστάσεων μέσω απλών κλασμάτων, διατυπώνει έναν λάθος ισχυρισμό... Ισχυρίζεται ότι το πολυώνυμο $x^4 + a^4$ με a πραγματικό, *δεν* μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο γραμμικών ή δευτεροβάθμιων όρων (η ανάλυση ενός πραγματικού πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων 1^{ου} ή 2^{ου} βαθμού με πραγματικούς συντελεστές αποτελεί μία συνέπεια του ΘΘΑ). Αυτό βέβαια, εάν είχε ισχύ, θα σήμαινε ισοδύναμα ότι το πολυώνυμο αυτό δεν διαθέτει ρίζες και επομένως το ΘΘΑ -που βέβαια δεν είχε ακόμα επιβεβαιωθεί- δεν μπορεί να ισχύει, κάτι που είναι φυσικά άτοπο! Το λάθος εντοπίζεται πάντως αρκετά χρόνια αργότερα, το 1742, από τον Euler. Αυτός, σε αλληλογραφία του με τους Nicolas Bernoulli (1687-1759) και Christian Goldbach (1690-1764), δείχνει ότι το αντιπαράδειγμα του Leibniz δεν στέκει[2]. Ο Bernoulli, προς ενίσχυση του ισχυρισμού του Leibniz, δίνει εν

Gottfried Wilhelm Leibniz

[2]Καταφέρνει κάπως να δείξει ότι $x^4 + a^4 = (x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)$.

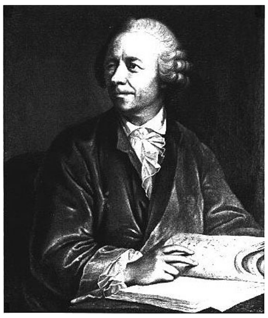
συνεχεία ένα δικό του αντιπαράδειγμα, το πολυώνυμο $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. Όμως και πάλι ο Euler εντοπίζει κάποιο λάθος.

1.2 Οι προσπάθειες απόδειξης του ΘΘΑ

Τα γεγονότα αυτά μας οδηγούν στις πρώτες συστηματικές προσπάθειες να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ βαθμού, που αποτελεί όπως είπαμε ένα πόρισμα του θεμελιώδους θεωρήματος.

Jean le Rond d'Alembert

Τέσσερα μόλις χρόνια αργότερα από τη μικρή αλλά σημαντική αυτή επιτυχία του Euler, το 1746, η πρώτη σοβαρή απόπειρα για απόδειξη είναι γεγονός και οφείλεται στον D'Alembert (1717-1783). Ο ίδιος παρουσιάζει στην Ακαδημία του Βερολίνου την εργασία του με τίτλο *Recherches sur le calcul intégral*. Το εγχείρημα του εμφανίζει όμως πολλά κενά. Χαρακτηριστκό είναι για παράδειγμα ότι η απόδειξη του στηρίζεται σε κάποια μαθηματική πρόταση που δεν είχε επιβεβαιωθεί μέχρι εκείνο το χρονικό σημείο, αλλά αποδείχθηκε εκατό περίπου χρόνια αργότερα! (Πρόκειται για κάτι ισοδύναμο ενός θεωρήματος σε σειρές που απέδειξε ο Victor Puiseux περί το 1850 κάνοντας μάλιστα χρήση του ΘΘΑ). Επιπλέον δεν καταφέρνει να πετύχει την απαραίτητη σύγκλιση καθώς η πυκνότητα των πραγματικών αριθμών δεν έχει ακόμα ξεκαθαριστεί εννοιολογικά. Ο Gauss πάντως διαπιστώνει πως η ιδέα της απόδειξης δεν επηρεάζεται και μπορεί να αξιοποιηθεί.



Leonhard Euler

Μία ακόμα απόδειξη επιχειρείται απο τον Euler (1707-1783) το 1749, τρία μόλις χρόνια αργότερα δηλαδή από αυτή του D'Alembert. Ο Euler μπορούσε να αποδείξει ότι κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό $n \leq 6$ διαθέτει n μιγαδικές ρίζες. Για τη γενική όμως περίπτωση (δηλαδή και για $n > 6$) δεν κατάφερε να δώσει κάτι περισσότερο από ένα "σχέδιο" απόδειξης. Περίπου είκοσι ακόμα χρόνια μετά, το 1772, ο Lagrange εντοπίζει μία -όχι καθοριστικής σημασίας- ατέλεια στην απόδειξη του Euler. Το ελάττωμα που ανακαλύπτει περιορίζεται στην ενδεχόμενη εμφάνιση κάποιας κλασματικής απροσδιοριστίας της μορφής 0/0, ελάττωμα απο το οποίο καταφέρνει να απαλλάξει την απόδειξη. Ο Euler, τουλάχιστον για την περίπτωση $n \leq 6$, τα έχει καταφέρει.

Μία επιπλέον προσπάθεια απόδειξης έχουμε το 1795 από τον Laplace. Η προσέγγισή του είναι αρκετά διαφορετική, αφού χρησιμοποιεί με κάποιον τρόπο την έννοια της διακρίνουσας ενός πολυωνύμου.

1.3 Το κρίσιμο σημείο και οι αποδείξεις του Gauss

Οι παραπάνω υποψήφιες αποδείξεις πάσχουν όλες απο μία κοινή "ασθένεια". Σε όλες υποτίθεται κάπως αυθαίρετα και a priori ότι το πολυώνυμο διαθέτει ρίζες κάποιας οποιασδήποτε μορφής και μόνον εκ των υστέρων αυτές αποδεικνύονται μιγαδικές.

Carl Friedrich Gauss

Ο πρώτος που αντιλήφθηκε τη βαθύτερη αυτή αιτία του προβλήματος ήταν ο Gauss (1777-1855) ο οποίος, το 1799 σε ηλικία μόλις 22 χρονών στη διδακτορική του διατριβή[3], εφιστεί για πρώτη φορά την προσοχή της μαθηματικής κοινότητας στο λεπτό αυτό σημείο. Ξεκινάει με μία λεπτομερή κριτική εξέταση όλων των προηγούμενων προσπαθειών απόδειξης και συνεχίζει παρουσιάζοντας την πρώτη του απόδειξη στην οποία χρησιμοποιεί πια τοπολογικές ιδέες. Η βασική διαφορά της απόδειξης του Gauss από τις προηγούμενες ήταν ότι, αντί να προσπαθήσει να υπολογίσει μία ρίζα, αποδείκνυε την ύπαρξή της με τοπολογικά επιχειρήματα. Με τα σημερινά κριτήρια όμως και αυτή η απόδειξη είχε ένα τοπολογικό κενό. Ο ίδιος έκανε χρήση ενός αποτελέσματος (πρόκειται για το Θεώρημα καμπύλων Jordan) που δεν είχε μέχρι εκείνη τη στιγμή επαληθευτεί αλλά πολλά χρόνια αργότερα. Το κενό αυτό συμπλήρωσε το 1920 ο Alexander Ostrowski.

Το 1816 δίνει μία δεύτερη, σχεδόν εξ ολοκλήρου αλγεβρική απόδειξη (η μόνη πρόταση που δανείζεται από την Ανάλυση είναι αυτή που και πριν αναφέραμε, ότι κάθε πραγματικό πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει πάντοτε τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα). Πρόκειται για υπερβολικά τεχνική απόδειξη αλλά απολύτως ορθή ακόμα και για τα σημερινά δεδομένα.

Το ίδιο έτος έρχεται η τρίτη του απόδειξη που είναι και πάλι τοπολογικής φύσεως. Οι

[3]"Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse." / "Νέα απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε ακέραια ρητή αλγεβρική συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να αναλυθεί σε πραγματικούς παράγοντες πρώτου και δευτέρου βαθμού."

προσπάθειές του ειδικά στην απόδειξη αυτή, θα λέγαμε ότι έριξαν φως στην έννοια του μιγαδικού αριθμού, αφού ο ίδιος κάνει εδώ χρήση έως και μιγαδικών ολοκληρωμάτων.

Η τέταρτη απόδειξή του αποτελεί παραλλαγή της πρώτης. Έγινε το 1849, λίγα χρόνια δηλαδή πριν το θάνατό του και πενήντα χρόνια μετά την πρώτη. Θεωρείται σύμφωνα και με τις σημερινές αντιλήψεις η πιο αυστηρή. Για πρώτη φορά οι συντελεστές του πολυωνύμου υποτίθενται μιγαδικοί και για πρώτη επίσης φορά το θεώρημα αναφέρθηκε με την ονομασία που το καλούμε έως και σήμερα: “Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας”.

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενα

Θα διατυπώσουμε εδώ μία και καλή όλες εκείνες τις μαθηματικές έννοιες/προτάσεις το περιεχόμενο των οποίων θα θεωρούμε στο εξής δεδομένο. Θα θεωρήσουμε γνωστή την έννοια του συνόλου, της συνέχειας μίας συνάρτησης καθώς και όλων των ιδιοτήτων που απορρέουν από τη συνέχεια (όπως π.χ ότι κλειστά σύνολα αντιστρέφονται επίσης σε κλειστά σύνολα) και του τοπολογικού χώρου. Θα θεωρήσουμε τέλος γνωστή την τριγωνική ανισότητα, την οποία θα χρειαστούμε σε ένα σημείο της τελικής απόδειξη του ΘΘΑ.

2.1 Σημειογραφία

Παραθέτουμε τους ορισμούς κάποιων συνόλων που θα εμφανίζονται με μεγάλη συχνότητα μέσα στο κείμενο.

- Τα σύμβολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{C}$ έχουν τις γνωστές μας ερμηνείες (ακέραιοι, πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί αντίστοιχα). Το σύνολο $\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \ , \ \forall i\big\}$ είναι ο επίσης γνωστός μας Ευκλείδιος χώρος. Η μαθηματική δράση της μελέτης αυτής θα λαμβάνει χώρα κατά κύριο λόγο στο Ευκλείδιο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι βέβαια ομοιομορφικό του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ (τον ορισμό του ομοιομορφισμού δίνουμε στα αμέσως επόμενα). Τέλος, για κάποιο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται κατά τα γνωστά η νόρμα $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$.

- Με I θα συμβολίζουμε κατά κανόνα το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή $I = [0, 1]$, αν και αυτό διευκρινίζεται συνήθως και μέσα στη ροή του κειμένου.

- Το σύνολο $S^n = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\big\}$ θα καλείται <u>n-σφαίρα (με ακτίνα 1 και</u>

κέντρο την αρχή των αξόνων)[1]. Παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει $S^n \subset R^{n+1}$. Για παράδειγμα, για την 1-σφαίρα που μας ενδιαφέρει και περισσότερο, είναι $S^1 \subset R^2$ και πρόκειται φυσικά για έναν κύκλο μοναδιαίας ακτίνας και κέντρου 0. Ένα άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η 0-σφαίρα η οποία, όπως προκύπτει από τον ορισμό, είναι το σύνολο $\{1, -1\}$ με αυτά τα δύο και μόνο στοιχεία!

- Το σύνολο $D^n = \big\{x \in R^n : \|x\| \leq 1\big\}$, κατά αντιστοιχία με τον προηγούμενο ορισμό, θα λέγεται n-δίσκος ή αλλιώς n-μπάλα. Παρατηρούμε ότι $S^{n-1} \subset D^n \subset R^n$ και για την ακρίβεια το S^{n-1} είναι το σύνορο του D^n στον R^n. Θα συναντήσουμε αποκλειστικά τον 2-δίσκο, D^2, ο οποίος σχηματικά έχει πράγματι την μορφή ενός δίσκου του $\mathbb{R}^2$ (αυτού με ακτίνα 1 και κέντρου πάλι το σημείο 0).

2.2 Απεικονίσεις

Η έννοια της απεικόνισης είναι βέβαια γνωστή όσο και αυτή ενός συνόλου. Σκοπεύουμε όμως να την ορίσουμε καθώς επιβάλλεται να ξεκαθαρίσουμε και πολλές συγγενείς με αυτήν έννοιες που θα μας φανούν άκρως απαραίτητες στα επόμενα.

Αναφέρουμε προκαταβολικά και για λόγους συνέπειας ότι οι χώροι στους οποίους θα εκτυλίσσεται η δράση των απεικονίσεων υποτίθενται πάντα τοπολογικοί -αν και η πληροφορία αυτή δεν θα επηρεάσει ούτε στο ελάχιστο τις ενέργειές μας σε τεχνικό επίπεδο[2].

ΟΡΙΣΜΟΣ (Function)**.** Απεικόνιση ή συνάρτηση ϕ από σύνολο A σε σύνολο B είναι ένας κανόνας ή μία διαδικασία μέσω της οποίας σε κάθε στοιχείο a του A αντιστοιχίζεται *ακριβώς ένα*[3] στοιχείο b του B.

Συμβολίζοντας $\phi : A \longrightarrow B$ εννοούμε ότι η ϕ δρά μεταξύ των δύο αυτών χώρων, δηλαδή με αυτήν (ή μέσω αυτής), το A απεικονίζεται στο B. Συμβολίζοντας $\phi(a) = b$ εννοούμε οτι η ϕ απεικονίζει το στοιχείο a στο στοιχείο b. Επίσης το b λέγεται και εικόνα του a μέσω της ϕ ενώ το σύνολο $\phi(A) = \{\phi(a) : a \in A\}$ λέγεται εικόνα του A μέσω της ϕ. Το A λέγεται πεδίο ορισμού και το B πεδίο τιμών.

[1] Οι υπογραμμίσεις, όπου και όποτε αυτές εμφανίζονται μέσα στο κείμενο, θα δηλώνουν πάντοτε οτι μία νέα έννοια ορίζεται ακριβώς εκείνη τη στιγμή.

[2] Αυτός είναι και ο λόγος που όπως είπαμε θα αποφύγουμε να δώσουμε τον ορισμό ενός τοπολογικού χώρου.

[3] Σε αντίθετη περίπτωση η συνάρτηση θα ήταν *πλειονότιμη*. Δεν θα μας χρειαστούν εδώ τέτοιου είδους συναρτήσεις.

Τέλος, στα επόμενα θα επικαλούμαστε αρκετά συχνά την έννοια του περιορισμού μίας συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Restriction of a function*)**.** Έστω $X \subset A$. Αν $g : X \longrightarrow B$ με $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε η g λέγεται περιορισμός της f στο X και συμβολίζεται ως $f|_X$.

2.2.1 Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω $\phi : A \longrightarrow B$ και $\psi : B \longrightarrow C$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$$

και $a \in A$ και $c \in C$.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Composite Function*)**.** Με $\phi \circ \psi$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση εκείνη η οποία, διαμέσου του B, απεικονίζει το A στο C. Προφανώς $\phi \circ \psi : A \longrightarrow C$. Αυτή θα λέγεται σύνθετη συνάρτηση ή σύνθεση των ϕ και ψ. Γράφουμε επίσης $(\phi \circ \psi)(a) = \phi\big(\psi(a)\big) = c$ που φανερώνει καλύτερα τη διαδικασία αντιστοίχισης που ακολουθείται.

2.2.2 Ένα-προς-ένα και επί

ΟΡΙΣΜΟΣ (*One-to-one and Surjective (Onto) Function*)**.** Μία συνάρτηση απο ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται ένα-προς-ένα (και θα συμβολίζεται $1-1$) αν για κάθε στοιχείο του B υπάρχει *το πολύ* ένα στοιχείο του A το οποίο απεικονίζεται σε αυτό, ενώ λέγεται επί του B αν για κάθε στοιχείο του B υπάρχει *τουλάχιστον* ένα στοιχείο του A που απεικονίζεται σε αυτό.

Τεχνικά, τα παραπάνω μεταφράζονται ως εξής:

- Αν $\phi(a_1) = \phi(a_2) \implies a_1 = a_2$ τότε η ϕ είναι $1-1$.
- Αν $\phi(A) = B$ τότε η ϕ είναι επί. Με μία άλλη διατύπωση, η ϕ είναι επί αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει κάποιο $a \in A$ τέτοιο ώστε $\phi(a) = b$.

Αν τώρα μία συνάρτηση είναι $1-1$, τότε μπορεί να οριστεί και η αντίστροφή της.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Inverse Function*)**.** Έστω $f : X \longrightarrow Y$ και $1-1$. Τότε υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση g με την ιδιότητα $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Η g καλείται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται ως f^{-1}.

2.3 Σχέσεις/Κλάσεις ισοδυναμίας

Έστω σύνολο S με $a, b, c \in S$. Για δεδομένη διαμέριση[4] του S, με τη δήλωση $a \sim b$ εννοούμε ότι τα στοιχεία a και b ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο της διαμέρισης. Είναι προφανές ότι η σχέση $\sim$ ικανοποιεί καί τις τρείς παρακάτω ιδιότητες:

Ανακλαστική: $a \sim a$ [Το a βρίσκεται στο ίδιο σύνολο με τον εαυτό του.]

Συμμετρική: Αν $a \sim b$ τότε $b \sim a$ [Αν το a βρίσκεται στο ίδιο υποσύνολο με το b, τότε και το b βρίσκεται στο ίδιο υποσύνολο με το a.]

Μεταβατική: Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c$ [Αν το a βρίσκεται στο ίδιο υποσύνολο με το b και το b βρίσκεται στο ίδιο υποσύνολο με το c, τότε και το a βρίσκεται στο ίδιο υποσύνολο με το c.]

Προκύπτει έτσι αβίαστα ο παρακάτω ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Equivalence Relation*)**.** Μία σχέση $\sim$ (σε σύνολο S) που ικανοποιεί την ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική ιδιότητα θα λέγεται σχέση ισοδυναμίας.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί πως, όταν ισχύουν οι παραπάνω τρεις ιδιότητες, η $\sim$ ορίζει με φυσικό τρόπο μία διαμέριση του S. Δηλαδή, μία σχέση ισοδυναμίας στο S, αυτομάτως το διαμερίζει.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Equivalence Class*)**.** Το σύνολο $[a] = \{x \in S : x \sim a\}$ καλείται κλάση ισοδυναμίας του a.

Το σύνολο $[a]$ είναι προφανώς ένα υποσύνολο της διαμέρισης που προκάλεσε η $\sim$ στο S. Πράγματι, όπως φαίνεται και από την αναλυτική του περιγραφή, το $[a]$ περιέχει όλα εκείνα τα στοιχεία x του S που είναι ισοδύναμα του a ως προς την $\sim$.

2.4 Ομάδα

Η δομή της Ομάδας είναι αναμφίβολα απο τις βασικότερες και ευρύτερα μελετημένες αλγεβρικές δομές. Θα παίξει δε κεντρικό ρόλο στη μελέτη που ακολουθεί. Παρά ταύτα, πρόκειται για μία έννοια ιδιαίτερα απλή στη διατύπωση αλλά και κατανόηση της.

[4]Διαμέριση ενός συνόλου λέγεται μία διαίρεση του συνόλου αυτού σε υποσύνολα, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου να ανήκει σε ακριβώς ένα υποσύνολο. Προφανώς τα υποσύνολα μίας διαμέρισης είναι ξένα μεταξύ τους ενώ η ένωση τους συνθέτει το αρχικό σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Group*)**.** Ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μία διμελή πράξη[5] $*$ λέγεται ομάδα αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα τρία αξιώματα:

1. Η $*$ είναι προσεταιριστική

2. Υπάρχει κάποιο $e \in G$ τέτοιο ώστε $e * x = x * e = x$ για κάθε $x \in G$. Το e λέγεται ταυτοτικό στοιχείο για την $*$ στο G.

3. Για κάθε $a \in G$ υπάρχει ένα $a' \in G$ με την ιδιότητα $a' * a = a * a' = e$. Το a' λέγεται αντίστροφο του a ως προς την $*$.

Η ομάδα συνήθως συμβολίζεται ως $< G, * >$.

2.5 Ομομορφισμός και Ισομορφισμός Ομάδων

Στον αμέσως επόμενο ορισμό, τα σύνολα G και G' αποτελούν ομάδες. Μας ενδιαφέρει να συνδέσουμε/συγκρίνουμε τις δομές των δύο αυτών ομάδων. Αυτό θα γίνει με τη χρήση κάποιας κατάλληλης απεικόνισης, η ύπαρξη (αντ. μη ύπαρξη) της οποίας θα μας δώσει την πληροφορία σχετικά με την ομοιότητα (αντ. τη διαφορά) των δομών αυτών.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Homomorphism*)**.** Έστω η απεικόνιση $\phi : G \longrightarrow G'$. Αν για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ τότε αυτή λέγεται ομομορφισμός.

Στο κείμενο αυτό δεν θα κάνουμε χρήση κάποιου ιδιαίτερου συμβολισμού για την περίπτωση του ομομορφισμού ομάδων.

Ας θυμηθούμε ότι η διμελής πράξη είναι ο μόνος παράγοντας που καθορίζει τη δομή μίας ομάδας. Η ύπαρξη λοιπόν μιας τέτοιας ϕ βεβαιώνει για το συσχετισμό των διμελών πράξεων των δύο ομάδων, άρα και για το συσχετισμό των ίδιων των δομών τους. Πράγματι, η ιδιότητα που χαρακτηρίζει την απεικόνιση αυτή ουσιαστικά εγγυάται πως το αποτέλεσμα της πράξης ab -που ανήκει στην G- μεταφέρεται μέσω αυτής στο αποτέλεσμα $\phi(a)\phi(b)$ -που ανήκει στην G'.

[5]Μία διμελής πράξη στο G είναι ένας κανόνας με τον οποίο σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του G αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του G (ενδεχομένως και το ίδιο το a η το b). Απαιτούμε δηλαδή η πράξη αυτή να ορίζεται για κάθε διατεταγμένο ζεύγος του G. Το γεγονός ότι το (a, b) είναι διατεταγμένο, σημαίνει ότι το στοιχείο που αντιστοιχίζεται στο (a, b) είναι εν γένει διαφορετικό από αυτό που αντιστοιχίζεται στο (b, a). Τέλος, από τον τρόπο που ορίσαμε την διμελή πράξη προκύπτει ως απαίτηση το G να ειναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή (δηλαδή οι αντιστοιχίσεις να γίνονται σε στοιχεία που ανήκουν και αυτά στο G).

Μιλήσαμε για το πότε δύο ομάδες είναι δομικά *όμοιες*. Τώρα θα δούμε πότε θα λέμε ότι δύο ομάδες είναι δομικά *ίδιες*. Ένας ισομορφισμός είναι απλώς μία ακόμα ισχυρότερη σύνδεση μεταξύ των δομών δύο ομάδων και μας πληροφορεί ότι η μία ομάδα είναι ουσιαστικά ένα πιστό αντίγραφο της άλλης.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Isomorphism*)**.** Ένας ομομορφισμός $\phi : G \longrightarrow G'$ που είναι $1-1$ και επί της G' λέγεται <u>ισομορφισμός</u>. Συμβολίζουμε $\phi : G \xrightarrow{\cong} G'$.

Δύο ομάδες G και G' μεταξύ των οποίων υπάρχει κάποιος ισομορφισμός, θα καλούνται <u>ισομορφικές</u> (συμβολικά $G \cong G'$).

2.6 Ομοιομορφισμός

Ο ομοιομορφισμός δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας "τοπολογικός ισομορφισμός". Με αυτό εννοούμε ότι ένας ομοιομορφισμός, σε αντίθεση με έναν ισομορφισμό, δρά μεταξύ ευρύτερων τοπολογικών χώρων αλλά παρέχει και εδώ μία παρόμοια πληροφορία: διατηρεί αναλλοίωτες όλες τις τοπολογικές ιδιότητες του χώρου πάνω στον οποίο δρά.

ΟΡΙΣΜΟΣ (*Homeomorphism*)**.** Έστω $f : X \longrightarrow Y$ όπου X και Y τοπολογικοί χώροι. Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

1. Η f είναι $1-1$ και επί

2. Η f είναι συνεχής

3. Η f^{-1} είναι συνεχής

τότε η f θα λέγεται <u>ομοιομορφισμός</u>. Θα συμβολίζουμε $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$.

Έτσι, οι δύο χώροι X και Y μεταξύ των οποίων δρά ένας ομοιομορφισμός, θα λέγονται αντίστοιχα <u>ομοιομορφικοί</u> (συμβολικά $X \simeq Y$).

Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μία πολλαπλότητα δεν είναι παρά μία ειδική περίπτωση χώρου ο οποίος έχει τη μορφή ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Με άλλα λόγια, τοπολογική πολλαπλότητα χαρακτηρίζεται εν γένει ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος είναι τοπικά ομοιομορφικός[6] με τον $\mathbb{R}^n$. Το να είναι λοιπόν δύο πολλαπλότητες ομοιομορφικές, σημαίνει ισοδύναμα ότι μπορούμε με συνεχή τεντώματα και

[6]Για κάθε $x \in X$ υπάρχει κάποια ανοικτή περιοχή U_x του x έτσι ώστε $U_x \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^n$.

λυγίσματα του σχήματος της μίας, να πάρουμε το σχήμα της άλλης. Θα μας απασχολήσει εκτενώς η ιδέα αυτή καθώς η Αλγεβρική Τοπολογία, όπως θα δούμε, ασχολείται με την αλγεβρική αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων τοπολογικής φύσεως και επομένως οι έννοιες της πολλαπλότητας και των συνεχών διαδικασιών μετασχηματισμού έχουν κεντρικό ρόλο σε αυτήν. Χαρακτηριστικά παραδείγματα πολλαπλοτήτων είναι οι πραγματικοί/μιγαδικοί προβολικοί χώροι, ο Torus ($S^1 \times S^1$) και η φιάλη του Klein.

Τέλος, τονίζουμε ότι τοπολογικοί χώροι δεν είναι βέβαια μόνο οι πολλαπλότητες που μόλις αναφέραμε. Προκειμένου λοιπόν να χαρακτηριστούν δύο γενικότεροι τοπολογικοί χώροι ομοιομορφικοί, δεν είναι αναγκαίο να έχουμε συνεχή παραμόρφωση του ενός στον άλλο (κάτι που περιγράφεται όπως θα δούμε σε λίγο μέσα απο την έννοια της ομοτοπίας). Αρκεί η ύπαρξη μίας συνεχούς απεικόνισης με συνεχή αντίστροφη απεικόνιση, όπως ακριβώς απαιτεί ο ορισμός.

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στην Αλγεβρική Τοπολογία

Θα περίμενε κανείς ότι η Αλγεβρική Τοπολογία δεν είναι παρά μία μίξη Άλγεβρας και Τοπολογίας και περί αυτού ακριβώς πρόκειται. Η βασική ιδέα είναι να μετατρέψουμε προβλήματα τοπολογίας και συνεχών συναρτήσεων σε προβλήματα αφηρημένης άλγεβρας (όπου πλέον θα έχουμε να κάνουμε με ομάδες, δακτυλίους, διανυσματικούς χώρους κτλ.). Η προσέγγιση αυτή έχει βέβαια ιδιαίτερη επιτυχία όταν τα προβλήματα στα οποία καταλήγουμε είναι "ευκολότερα" των αρχικών.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί το κύριο μέρος της μαθηματικής δραστηριότητας της εργασίας. Αναπτύσσουμε και αναλύουμε διεξοδικά όλες εκείνες τις έννοιες της Αλγεβρικής Τοπολογίας που θα χρειαστούμε στην τελική απόδειξη του ΘΘΑ στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο (4).

3.1 Διευκρινίσεις προς ευκολότερη ανάγνωση του κεφαλαίου

Καθότι το παρόν Κεφάλαιο αποτελεί την "καρδιά" της εργασίας αυτής και είναι καθαρά τεχνικό, παρέχουμε στο ξεκίνημά του μερικές διευκρινίσεις που αναμφίβολα θα βοηθήσουν στην ομαλότερη ανάγνωση του:

- Στα πλαίσια ενός περιβάλλοντος ορισμού (ή και οπουδήποτε αλλού μέσα στο κείμενο), όταν αναγράφουμε για πρώτη φορά μία καινούργια έννοια υπογραμμίζουμε πάντα την ονομασία της για να δείξουμε ότι αυτή ορίζεται ακριβώς εκείνη τη στιγμή. Ήδη χρησιμοποιήσαμε τη συγκεκριμένη τακτική στη σημειογραφία της Εισαγωγής.

- Στην περίπτωση του περιβάλλοντος ορισμού, παρέχουμε επίσης την αντίστοιχη αγγλική ορολογία στην αρχή πάντα του ορισμού αυτού και εντός παρενθέσεως.

- Κάθε περιβάλλον απόδειξης ξεκινάει με την δήλωση του ως *Απόδειξη* και ολοκληρώνεται με την προσθήκη του συμβόλου $\square$ στο δεξί άκρο της τελευταίας του γραμμής.

- Όλα τα παραδείγματα που δίνονται στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμεύσουν αργότερα όπως είπαμε στην ίδια την απόδειξη του ΘΘΑ που βρίσκεται στο επόμενο κεφάλαιο. Δεν τα προσθέσαμε απλά και μόνο για λόγους καλύτερης κατανόησης του αντικειμένου, ασχέτως βέβαια αν παίζουν και αυτόν το ρόλο. Έχουν τοποθετηθεί σε ξεχωριστές υποενότητες -όπως φαίνεται και στα περιεχόμενα- για καλύτερη οργάνωση της ύλης.

3.2 Το Λήμμα Συγκόλλησης

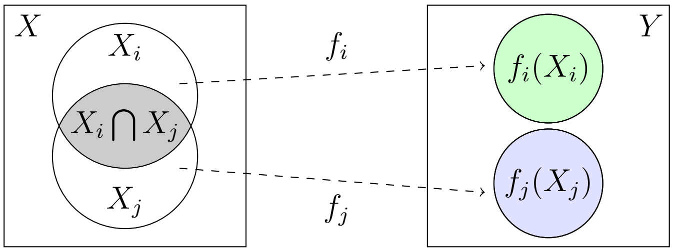
Ξεκινάμε την έρευνά μας με τη διατύπωση[1] ενός πολύ βασικού λήμματος της συνολοθεωρητικής τοπολογίας, του Λήμματος Συγκόλλησης. Εφαρμόζεται κυριολεκτικά παντού στη γενική τοπολογία, σε βαθμό μάλιστα που πολλές φορές δεν αντιλαμβανόμαστε συνειδητά την παρουσία του! Συνοπτικά, το αποτέλεσμα αυτό παρέχει συνθήκες για το πότε είναι συνεχής μία απεικόνιση της οποίας οι περιορισμοί σε υποσύνολα είναι με τη σειρά τους συνεχείς. Στις αμέσως επόμενες ενότητες θα γίνει εκτενής χρήση/αναφορά του στοιχειώδους αυτού εργαλείου και για το λόγο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να το ξεκαθαρίσουμε αμέσως.

Υπάρχουν δύο βασικές εκδοχές του Λήμματος Συγκόλλησης. Η μία πραγματεύεται τα κλειστά υποσύνολα και η άλλη τα ανοικτά. Στη μελέτη μας, θα χρειαστούμε αποκλειστικά την περίπτωση των κλειστών υποσυνόλων και μόνον αυτή θα αναλύσουμε εδώ.

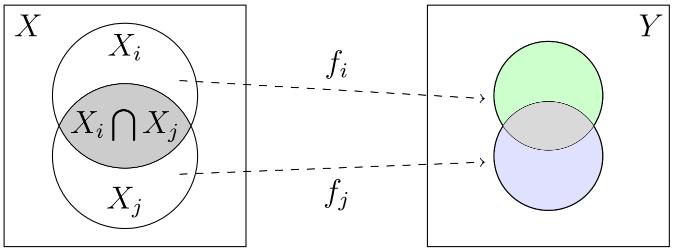
Λήμμα 1 (Gluing/Pasting Lemma for Closed Subsets)**.** *Έστω $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ με X_i κλειστά και οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $f_i : X_i \longrightarrow Y$, όπου Y τοπολογικός χώρος. Αν για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ισχύει $f_i|_{X_i \bigcap X_j} = f_j|_{X_i \bigcap X_j}$ τότε υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ με $f|_{X_i} = f_i$.*

[1] Η σχετική απόδειξη δεν θα δοθεί εδώ αλλά στο Παράρτημα Α, σελίδα 59.

Στα παρακάτω δύο σχήματα παριστάνουμε για δύο τυχαία $X_i, X_j \subset X$ τη "διαδικασία" συγκόλλησης που το λήμμα επιτάσσει. Στο πρώτο σχήμα, η συνθήκη συγκόλλησης δεν ισχύει και οι δύο εικόνες είναι ξένες μεταξύ τους:



Στο δεύτερο σχήμα, η απαίτηση του λήμματος ικανοποιείται και οι εικόνες φαίνεται να επικαλύπτονται:



Παρατήρηση 1. Η συνθήκη $f_i|_{X_i \bigcap X_j} = f_j|_{X_i \bigcap X_j}$ σε καμία περίπτωση δεν επιβάλλει ή υπονοεί ότι είναι $X_i \bigcap X_j \neq \emptyset$ για κάθε i, j. Στην περίπτωση $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ η συνθήκη λαμβάνει τη μορφή $f_i|_{\emptyset} = f_j|_{\emptyset}$ που προφανώς ισχύει αφού και τα δύο μέλη της ισότητας ισούνται με το κενό σύνολο. Πράγματι μία συνάρτηση πάντα απεικονίζει το "τίποτα" στο "τίποτα"!

Παρατήρηση 2. Το αποτέλεσμα αυτό (για τα κλειστά δηλαδή υποσύνολα) δεν διατηρεί την ισχύ του στην περίπτωση οικογένειας *αριθμήσιμου* πλήθους υποσυνόλων αλλά μόνο *πεπερασμένου*, όπως ακριβώς δόθηκε. Αντίθετα, στην εκδοχή των ανοικτών υποσυνόλων -που όπως είπαμε δεν θα μας απασχολήσει- δεν υπάρχει αυτός ο περιορισμός.

3.3 Ομοτοπία

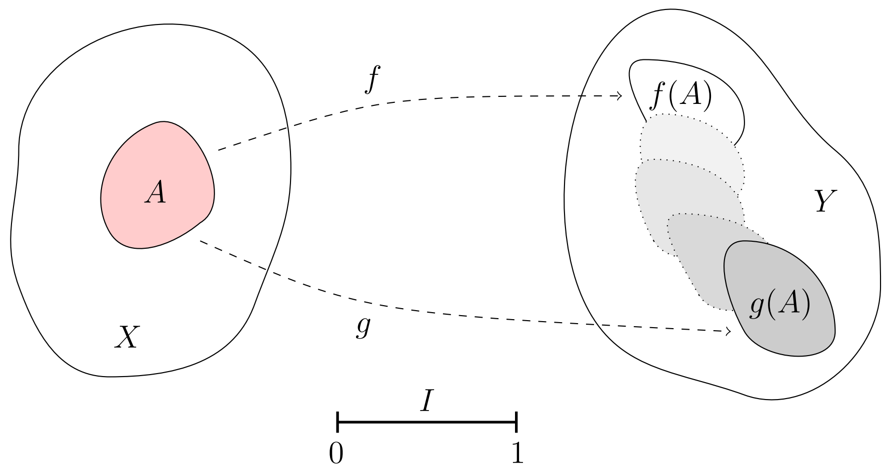
Η ομοτοπία αναμφίβολα αποτελεί κεντρική τοπολογική έννοια και δεν θα μπορούσε να απουσιάζει από το διαισθητικό -πόσο μάλλον το τεχνικό- κομμάτι της απόδειξης που αναζητούμε. Μία απλή παρατήρηση των δύο συνθετικών της λέξης, προδίδει μάλλον εξίσου εύκολα και το περιεχόμενό της: *το πότε δύο αντικείμενα ανήκουν στον "ίδιο τόπο"*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (*Free Homotopy*)**.** Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : X \longrightarrow Y$, όπου X και Y τοπολογικοί χώροι. Εάν υπάρχει (τουλάχιστον) μία συνεχής συνάρτηση $F : X \times I \longrightarrow Y$, όπου κατά τα γνωστά $I = [0, 1]$, τέτοια ώστε

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad F(x, 1) = g(x) \qquad \forall x \in X$$

τότε θα λέμε οτι η f είναι (ελεύθερα) ομοτοπική της g και θα συμβολίζουμε $f \approx g$. Κάθε τέτοια F θα καλείται ομοτοπία ή αναλυτικότερα συνάρτηση ομοτοπίας των f, g.

Στο παρακάτω σχήμα, το ρόλο του στοιχείου x του παραπάνω ορισμού παίζει κάποιο ευρύτερο σύνολο $A \in X$. Δείχνουμε έτσι παραστατικότερα το γεωμετρικό χαρακτήρα της ομοτοπίας.



Παρατήρηση. Αξιοσημείωτο είναι πως ο παραπάνω ορισμός αδιαφορεί πλήρως για το συγκεκριμένο τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετάβαση από τη μία εικόνα στην άλλη. Πράγματι, δεν υπάρχει καμία απολύτως ανάγκη να εξετάσουμε τι ακριβώς συμβαίνει για $0 < t < 1$ διότι, το γεγονός οτι η F απαιτήθηκε συνεχής, μας βεβαιώνει για το πιο κρίσιμο: τη "γεφύρωση" των δύο εικόνων. Παρά ταύτα, ο παραπάνω ορισμός μας οδηγεί με φυσικό τρόπο να σκεφτούμε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ μπορεί να οριστεί και μία μερική συνάρτηση $F_t : X \longrightarrow Y$ με τύπο $F_t(x) = F(x, t)$. Σχηματίζεται έτσι η οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\{F_t : t \in I\}$. Προφανώς $F_0 = f$ και $F_1 = g$.

Το γεγονός ότι δύο συναρτήσεις είναι ομοτοπικές και πολύ περισσότερο, τα χαρακτηριστικά της μεταξύ τους συνάρτησης ομοτοπίας, δίνουν όπως θα δούμε πολύ χρήσιμες πληροφορίες για τη δομή του χώρου στον οποίο αυτές δρούν (εδώ ο Y).

3.3.1 Η Ομοτοπία ως Σχέση Ισοδυναμίας

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $\Omega_{X,Y}$ όλων των συνεχών συναρτήσεων απο το X στο Y. Τότε η ομοτοπία είναι μία σχέση ισοδυναμίας[2] στο $\Omega_{X,Y}$. Πράγματι:

Απόδειξη. **Αυτοπάθεια/Ανακλαστικότητα** Έστω $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση. Τότε η $F : X \times I \longrightarrow Y$ με τύπο $F(x,t) = f(x)$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ της f και της... f! Πράγματι η F είναι συνεχής (αφού η f είναι συνεχής) και ισχύει $F(x,0) = F(x,1) = f(x)$. Επομένως $f \approx f$.

Κατά το πέρασμα του χρόνου t, η ομοτοπία αυτή απλώς διατηρεί ακίνητη την εικόνα $f(A)$. Έτσι οι συνθήκες του ορισμού της ομοτοπίας θα ισχύουν πάντοτε, όποια και αν είναι η μορφή/δομή του χώρου Y. Ενδιαφέρον έχει να παρατηρήσουμε πως, μόνον εάν ο χώρος Y το επέτρεπε, θα μπορούσαν να υπάρχουν πολλές επιπλέον ομοτοπίες. Ας φανταστούμε για παράδειγμα μία ομοτοπία η οποία για $0 < t < 1$ μεταβάλει το σχήμα ή/και τη θέση της εικόνας $f(A)$ και για $t = 1$ την επαναφέρει στην αρχική της κατάσταση (όλα αυτά με συνεχή πάντα τρόπο).

Συμμετρικότητα Έστω ότι $f \approx g$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι υπάρχει μια συνάρτηση ομοτοπίας, έστω F, μεταξύ των f και g. Η συνάρτηση $G : X \times I \longrightarrow Y$ με τύπο $G(x,t) = F(x, 1-t)$ είναι προφανώς συνεχής (αφού η F είναι συνεχής ως συνάρτηση ομοτοπίας) και ισχύουν οι σχέσεις $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ και $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$. Επομένως η G είναι μία συνάρτηση ομοτοπίας μεταξύ των g και f. Άρα και $g \approx f$.

Είναι πολύ εύκολο να δούμε οτι η G απλώς πραγματοποιεί την ακριβώς αντίστροφη κίνηση από αυτή της F.

Μεταβατικότητα Έστω οτι $f \approx g$ και $g \approx h$. Αυτό σημαίνει και πάλι πως θα υπάρχουν αντίστοιχες συναρτήσεις ομοτοπίας, έστω F και G. Η συνάρτηση $H : X \times I \longrightarrow Y$ με τύπο

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

είναι βέβαια συνεχής για κάθε $t \in [0,1] \smallsetminus \{\frac{1}{2}\}$ (αφού οι F και G είναι συνεχείς ως ομοτοπίες) και ισχύουν οι σχέσεις $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ και $H(x,1) =$

[2]Για τον ορισμό της σχέσεως ισοδυναμίας βλέπε κεφάλαιο 2.3, σελίδα 17.

$G(x,1) = h(x)$. Άρα αρκεί να δείξουμε οτι είναι συνεχής και για $t = {}^1/_2$. Προς την κατεύθυνση αυτή θα εφαρμόσουμε το λήμμα συγκόλλησης[3].

Έστω λοιπόν ότι $X_1 = X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ και $X_2 = X \times \left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Τότε θα είναι $X_1 \bigcup X_2 = X \times I$ και $X_1 \bigcap X_2 = X \times \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left\{(x, \frac{1}{2}) : x \in X\right\}$. Ορίζουμε τώρα $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ με $f_1(x,t) = F(x, 2t)$ και $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ με $f_2(x,t) = G(x, 2t-1)$. Τότε θα είναι:

$$f_1(x, \tfrac{1}{2}) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = f_2(x, \tfrac{1}{2})$$

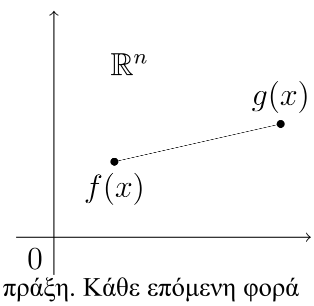
άρα πράγματι $f_1|_{x_1 \bigcap X_2} = f_2|_{x_1 \bigcap X_2}$ και από το λήμμα συγκόλλησης έπεται ότι η H είναι συνεχής.

Αυτό που με την H καταφέρνουμε, είναι να ισομοιράσουμε στις δύο διαδρομές το συνολικό χρόνο που έχουμε στη διάθεσή μας. Έτσι, στον ίδιο χρόνο θα χρειαζόμασταν για να περάσουμε απο την εικόνα f στην εικόνα g (ή από την g στην h), περνάμε τώρα από την εικόνα f στην εικόνα h. Λόγω του τύπου της H, η κίνηση αυτή γίνεται βέβαια σε κάθε τμήμα με την ακριβώς διπλάσια ταχύτητα. Θα μπορούσαμε τέλος να μοιράσουμε και κάπως διαφορετικά τον συνολικό χρόνο, δηλαδή να αφιερώσουμε περισσότερο χρόνο στη μία κίνηση και λιγότερο στην άλλη, το οποίο θα μας οδηγούσε σε πολλές παραπάνω πιθανές συναρτήσεις ομοτοπίας. □

3.3.2 Παράδειγμα - Γραμμική Ομοτοπία στον $\mathbb{R}^n$

Έστω X ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος και $Y = \mathbb{R}^n$. Τότε οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικές! Πράγματι, είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι στη δομή του $\mathbb{R}^n$ δεν εμφανίζεται πουθενά κάποιο "εμπόδιο" το οποίο να μας απαγορεύει να μεταβούμε *με συνεχή τρόπο* απο την μία εικόνα (π.χ. $f(x)$) στην άλλη (π.χ. $g(x)$).

Η μετάβαση αυτή θα μπορούσε μάλιστα να γίνει με οποιαδήποτε κίνηση/διαδρομή επιθυμούμε, άρα και γραμμικά. Θα υπάρχει δηλαδή πάντα στον $\mathbb{R}^n$ ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις εικόνες $f(x)$ και $g(x)$ και αυτό εκφράζεται αναλυτικά μέσω της παρακάτω συνάρτησης γραμμικής ομοτοπίας.



[3] Αυτή θα είναι και η μοναδική φορά που θα εφαρμόσουμε το λήμμα στην πράξη. Κάθε επόμενη φορά που θα το χρειαστούμε, απλώς θα το επικαλούμαστε, χωρίς δηλαδή να αποδεικνύουμε την ισχύ της σχετικής συνθήκης σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + t \cdot g(x) \qquad \forall (x,t) \in X \times I$$

Παρότι λοιπόν στον $\mathbb{R}^n$ θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε οποιαδήποτε κίνηση επιθυμούσαμε προκειμένου να ενώσουμε τις δύο εικόνες, το γεγονός οτι μπορούμε να έχουμε αυτό το αποτέλεσμα και *γραμμικά*, μας κάνει να λέμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ εμφανίζει γραμμική ομοτοπία. Αυτό διότι η γραμμική ομοτοπία ουσιαστικά υλοποιεί τη "συντομότερη οδό" και άρα αποτελεί μία αρκετά σπάνια και ισχυρή περίπτωση ομοτοπίας.

3.4 Ομοτοπικά Ισοδύναμοι Χώροι

Με τον προηγούμενο ορισμό της ομοτοπίας, καταφέραμε να περιγράψουμε μία συνεχή διαδικασία μετασχηματισμού μίας εικόνας μίας απεικόνισης, σε μία άλλη εικόνα μίας άλλης απεικόνισης. Δώσαμε επίσης συνθήκες για το πότε αυτό μπορεί να συμβαίνει.

Με τον ορισμό που ακολουθεί, επιχειρούμε να περιγράψουμε το πότε ένας ολόκληρος χώρος μπορεί να υποστεί κατάλληλες συνεχείς παραμορφώσεις ώστε το σχήμα του να ταυτιστεί με αυτό κάποιου άλλου χώρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 (*Homotopically Equivalent Spaces*)**.** Θα λέμε ότι ο τ.χ. X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον Y, αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow X$ τέτοιες ώστε

$$g \circ f \approx id_X \quad \text{και} \quad f \circ g \approx id_Y$$

όπου id η ταυτοτική συνάρτηση. Η f, όπως και η g, ονομάζεται ομοτοπική ισοδυναμία (homotopy equivalence) ενώ η μία είναι το ομοτοπικό αντίστροφο (homotopic inverse) της άλλης.

Παρατήρηση. Ένας οποιοσδήποτε ομοιομορφισμός[4] $f : X \longrightarrow Y$ είναι προφανώς και μία ομοτοπική ισοδυναμία με ομοτοπικό αντίστροφο την f^{-1}. Το αντίστροφο δεν ισχύει όμως απαραίτητα.

3.4.1 Παράδειγμα - Οι χώροι S^1 και $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στην περίπτωση αυτή είναι οι χώροι S^1 και $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Θα μπορούσε κανείς να φανταστεί τον χώρο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ως ένα απόλυτα ελαστικό σεντόνι

[4] Για τον ορισμό του ομοιομορφισμού βλέπε κεφάλαιο 2.6, σελίδα 19.

που εμφανίζει μία μόνο τρύπα σε ένα του σημείο. Η ύπαρξη της τρύπας αυτής εκφράζεται μέσω της απουσίας του σημείου 0 από τον χώρο. Ένα τέτοιο σεντόνι, θα μπορούσαμε φυσικά αν θέλαμε να το "μαζέψουμε" ώστε να του δώσουμε το σχήμα ενός στεφανιού (που είναι βέβαια το σχήμα του χώρου S^1) χωρίς μάλιστα να χρειαστεί ποτέ να το κόψουμε.

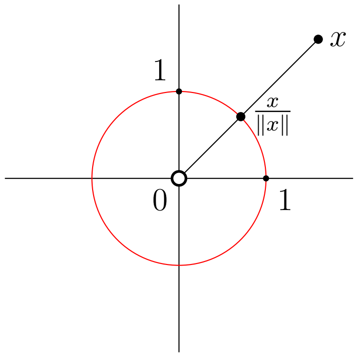
Όπως θα αποδείξουμε λοιπόν αμέσως, αυτοί οι δύο χώροι πράγματι ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό και άρα είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Αρκεί να βρούμε δύο κατάλληλες για τον ορισμό απεικονίσεις. Πράγματι, έστω

$$f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \qquad \text{(ένθεση)}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} &\longrightarrow S^1 \qquad \text{(συρρίκνωση)} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

όπου, κατά τα γνωστά, $\|x\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ για $x = (a, b)$.



Περιγράφουμε τώρα αναλυτικά τη δράση των συνθέσεων $g \circ f$ και $f \circ g$. Έχουμε:

$$\begin{array}{cccccc} g \circ f : & S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{g} & S^1 \\ & x & \longmapsto & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} = x \quad (\text{αφού } x \in S^1) \end{array}$$

άρα $g \circ f = id_{S^1}$ (άρα και $g \circ f \approx id_{S^1}$)

ΚΑΙ

$$\begin{array}{cccccc} f \circ g : & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{g} & S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|} \end{array}$$

άρα $f \circ g \approx id_{\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}}$ (προκύπτει μέσω της γραμμικής ομοτοπίας του παραδείγματος 3.3.2, σελίδα 26). $\square$

3.5 Δρόμοι και Δρομική Ομοτοπία

Η έννοια του δρόμου είναι απλούστατη στη διατύπωση αλλά ταυτόχρονα καθοριστικής σημασίας για την Αλγεβρική Τοπολογία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 (*Path*)**.** Μία οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση $f : I \longrightarrow X$ καλείται δρόμος στο X.

Παρατήρηση. Δεν θα πρέπει να συγχέουμε έναν δρόμο f με την εικόνα του $f(I)$ αλλά να τον αντιμετωπίζουμε ως μία παραμετρική καμπύλη στον X.

Υπάρχει μία ειδική περίπτωση δρόμου ο οποίος θα εμφανίζεται πολύ συχνά στα επόμενα. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$. Ένας δρόμος f για τον οποίο ισχύει $f(0) = f(1) = x_0$ (ότι δηλαδή η αρχή του και το τέλος του ταυτίζονται) θα λέγεται κλειστός δρόμος στο X *με βάση το* x_0.

Αφού οι δρόμοι, όπως ορίστηκαν, δεν είναι τίποτα άλλο παρά συνεχείς απεικονίσεις κάποιας μορφής, θα μπορούσαμε ήδη να μιλήσουμε και για ελεύθερες ομοτοπίες μεταξύ αυτών. Ο παρακάτω ορισμός παρέχει όμως συνθήκες για μία πιο εξειδικευμένη περίπτωση ομοτοπίας μεταξύ συναρτήσεων-δρόμων που απαντάται σχεδόν αποκλειστικά στις εφαρμογές. Πρόκειται για μία *σχετική (relative) ομοτοπία*[5] μεταξύ δρόμων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 (*Path Homotopy*)**.** Έστω δύο δρόμοι $f, g : I \longrightarrow X$. Θα λέμε οτι αυτοί είναι δρομικά ομοτοπικοί (και θα συμβολίζουμε $f \approx_\delta g$) αν πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. $f(0) = g(0) = x_0 \quad$ και $\quad f(1) = g(1) = x_1$

2. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $F : I \times I \longrightarrow X$ τέτοια ώστε

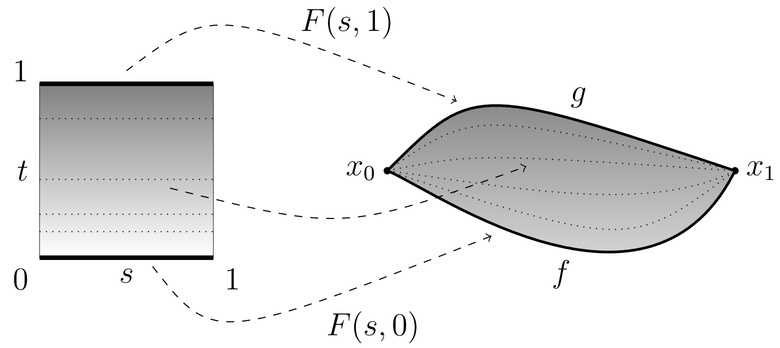
   (i) $F(s, 0) = f(s) \quad$ και $\quad F(s, 1) = g(s) \qquad \forall s \in I$

   (ii) $F(0, t) = x_0 \qquad$ και $\quad F(1, t) = x_1 \qquad \forall t \in I$

Η F καλείται δρομική ομοτοπία μεταξύ των f και g.

[5] Δεν είναι σε καμία περίπτωση απαραίτητο να γνωρίζουμε τον ορισμό της σχετικής ομοτοπίας προκειμένου να κατανοήσουμε τα επόμενα. Θέλουμε να τον συμπεριλάβουμε όμως εδώ για λόγους πληρότητας. Έστω λοιπόν $A \subset X$ και συνεχείς απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ με $f_0|A = f_1|A$. Αν υπάρχει ομοτοπία F μεταξύ των f_0 και f_1 και ισχύει $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ για κάθε $a \in A$ και $t \in I$, τότε η F θα λέγεται σχετική ομοτοπία ως προς A. Επομένως, θα δούμε πως σε μία δρομική ομοτοπία οι δύο δρόμοι είναι σχετικά ομοτοπικοί ως προς τα κοινά σημεία αρχής και τέλους.

Το περιεχόμενο των συνθηκών 1 και 2 φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω σχήμα:



Τα παραπάνω απλώς εκφράζουν μία συνεχή διαδικασία μετασχηματισμού του ενός δρόμου στον άλλο, κατά τη διάρκεια (t) της οποίας, τα αρχικά και τελικά σημεία των δρόμων παραμένουν σταθερά.

Η F, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, δεν είναι εδώ τίποτα άλλο παρά μια ακόμα περίπτωση ομοτοπίας (Ορισμός 1, σελίδα 24) και αυτό εκφράζεται απο τις συνθήκες 2i. Το ειδικό της περίπτωσης εντοπίζεται σε δύο σημεία. Πρώτον, στο γεγονός ότι οι δρόμοι f και g δεν είναι τώρα αυθαίρετοι αλλά έχουν *κοινά άκρα* (συνθήκη 1) και, δεύτερον, στο γεγονός ότι τα άκρα αυτά παραμένουν *σταθερά κατά τη διάρκεια του μετασχηματισμού* (συνθήκη 2ii).

Νωρίτερα αποδείξαμε πως η ομοτοπία ορίζει επιπλέον με φυσικό τρόπο και μία σχέση ισοδυναμίας. Επομένως και η $\approx_\delta$, ως ομοτοπία, θα ορίζει και εδώ μία σχέση ισοδυναμίας. Όμως, στην περίπτωση αυτή, το σύνολο που μας ενδιαφέρει θα είναι το σύνολο όλων των δρόμων στο X *με δεδομένα άκρα σημεία*. Το σύνολο αυτό δεν μπορεί και τώρα να είναι το $\Omega_{I,X}$ διότι αυτό περιέχει όλους τους δυνατούς δρόμους στο X, οποιασδήποτε αρχής και τέλους! Επομένως αναφερόμαστε απλώς σε ένα γνήσιο υποσύνολό του $\Omega_{I,X}$.

Με $[f]$ θα συμβολίζουμε λοιπόν το σύνολο που περιέχει όλους εκείνους τους δρόμους που είναι μόνο *δρομικά* -και όχι ελεύθερα- ομοτοπικοί του f. Ένα τέτοιο σύνολο θα λέγεται δρομική κλάση ομοτοπίας και αποτελεί βέβαια μία κλάση ισοδυναμίας[6]. Με άλλα λόγια, $g \approx_\delta f \;\Leftrightarrow\; g \in [f]$.

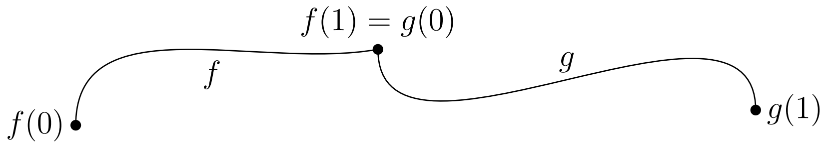
3.5.1 Γινόμενο Δρόμων

Δεδομένων δύο δρόμων οι οποίοι ικανοποιούν την απλή συνθήκη "ο ένας να είναι η συνέχεια του άλλου", μπορεί να οριστεί με φυσικό τρόπο μία ιδιαίτερα χρήσιμη πράξη

[6]Για τον ορισμό της κλάσεως ισοδυναμίας βλέπε κεφάλαιο 2.3, σελίδα 17.

μεταξύ αυτών. Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής, θέλουμε να είναι ένας νέος δρόμος ο οποίος στον ίδιο χρόνο θα εκτελεί τη συνολική διαδρομή που σχηματίζεται απο τους δύο αρχικούς, ενώ θα αφιερώνει το μισό ακριβώς χρόνο στον καθένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 (*Path Multiplication*)**.** Έστω δύο δρόμοι $f, g : I \longrightarrow X$ τέτοιοι ώστε $f(1) = g(0)$, δηλαδή η αρχή του ενός να συμπίπτει με το τέλος του άλλου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Ο δρόμος $f * g : I \longrightarrow X$ με τύπο

$$(f * g)(s) := \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ορίζουμε να είναι το γινόμενο των δύο αυτών δρόμων.

Τονίζουμε ότι η $f * g$ είναι πράγματι ένας δρόμος αφού είναι συνεχής στο I (για τη συνέχεια του στο $s = {}^1/_2$ μας εγκυάται το λήμμα συγκόλλησης).

3.5.2 Γινόμενο Κλάσεων Δρομικής Ομοτοπίας

Μπορούμε τώρα με εξίσου φυσικό τρόπο να επεκτείνουμε την "περιοχή δράσης" της πράξης αυτής και στις κλάσεις δρομικής ομοτοπίας των δρόμων πάνω στους οποίους εξ ορισμού δρά.

Έστω λοιπόν E_X το σύνολο όλων των δρομικών κλάσεων ομοτοπίας ενός χώρου X. Αν παραδείγματος χάριν ο f είναι δρόμος στο X, τότε $[f] \in E_X$. Το σύνολο E_X συμπεριλαμβάνει βέβαια όλες τις δυνατές περιπτώσεις δρομικών κλάσεων ομοτοπίας για δρόμους οποιασδήποτε αρχής και τέλους. Στην περίπτωση και μόνο που οι f και g είναι δρόμοι στο X τέτοιοι ώστε να ορίζεται το γινόμενο τους $f * g$, ορίζουμε $[f] * [g] := [f * g]$.[7]

[7] Ας θυμηθούμε ότι η $*$ ορίστηκε πριν ώστε να αφορά αποκλειστικά και μόνο δρόμους. Στην πραγματικότητα λοιπόν, για να περιγράψουμε τη νέα πράξη που αφορά τώρα όχι δρόμους αλλά ολόκληρες κλάσεις, θα μπορούσαμε πιο αυστηρά να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο (π.χ. $[f] \dagger [g] = [f * g]$ ή ακόμα και $[f][g] = [f * g]$ όπως μερικές φορές συναντάμε στη βιβλιογραφία). Δεν θα το κάνουμε ώστε να μην επιβαρυνθούμε με επιπλέον συμβολισμούς. Η παρατήρηση που θα ακολουθήσει ξεκαθαρίζει το τοπίο.

Ο ορισμός αυτός είναι πράγματι “καλός”. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως αν διαλέγαμε αυθαίρετα κάποιους δρόμους $f' \in [f]$ και $g' \in [g]$ και “δοκιμάζαμε” το γινόμενό τους $f' * g'$, θα βλέπαμε ότι $f' * g' \in [f * g]$ που σημαίνει βέβαια ότι $[f' * g'] = [f * g]$. Θα αποδείξουμε αμέσως ακριβώς αυτό.

Απόδειξη. Έστω λοιπόν ότι $f' \approx_\delta f$ και $g' \approx_\delta g$. Αυτό βέβαια σημαίνει κατά τα γνωστά ότι υπάρχουν οι αντίστοιχες δρομικές ομοτοπίες, έστω F και G. Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση $H : I \times I \longrightarrow X$ με τύπο

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,t) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

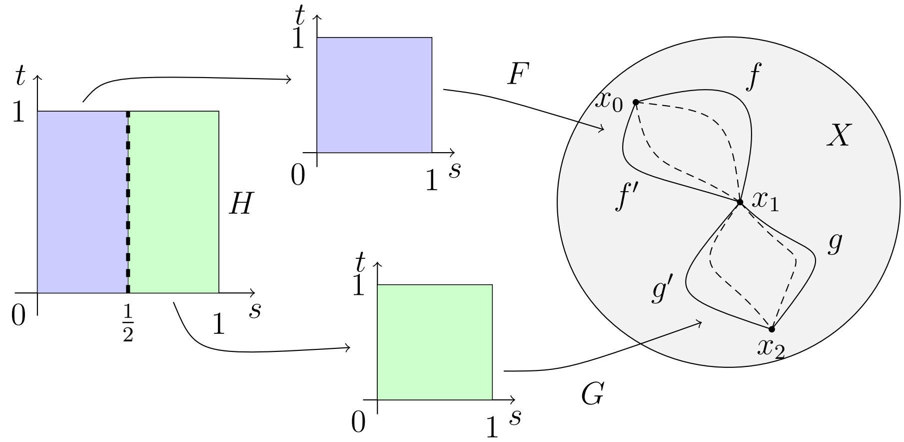
είναι πράγματι μια δρομική ομοτοπία μεταξύ των $f * g$ και $f' * g'$. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι $H(0,t) = F(0,t) = x_0$ και $H(1,t) = G(1,t) = x_2$. Επίσης

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,0) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1) & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (f * g)(s)$$

και όμοια λαμβάνουμε $H(s,1) = (f' * g')(s)$.

Είναι επίσης εύκολο να δούμε οτι η H είναι συνεχής για $s \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (προκύπτει απο τη συνέχεια των F και G). Για την συνέχεια στο $s = {}^1/_2$ επικαλούμαστε και πάλι το λήμμα συγκόλλησης. Πράγματι λοιπόν $f * g \approx_\delta f' * g'$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Στο παρακάτω σχήμα περιγράφουμε τον τρόπο που σκεφτήκαμε για την κατασκευή της ομοτοπίας.



Παρατήρηση. Όπως είπαμε πριν, η σχέση $*$ ορίζεται για κλάσεις δρομικής ομοτοπίας μόνον όταν ορίζεται και για δρόμους. Επομένως, οι δύο περιπτώσεις σαφώς συνδέονται και για το λόγο αυτό επιλέξαμε άλλωστε να χρησιμοποιήσουμε και κοινό συμβολισμό. Δεν πρέπει ποτέ όμως να τις συγχέουμε διότι ουσιαστικά πρόκειται για δύο εντελώς διαφορετικές πράξεις: η μία ορίζεται για απεικονίσεις-δρόμους ενώ η άλλη για σύνολα-κλάσεις. Μία τέτοια σύγχυση θα μας οδηγούσε ενδεχομένως στην παρανόηση ότι αυτό που ορίσαμε με την δεύτερη πράξη είναι δήθεν το παρακάτω

$$[f] * [g] = \big\{(f' * g') : f' \in [f] \,\text{και}\, g' \in [g]\big\}$$

Αντίθετα εμείς ζητήσαμε

$$[f] * [g] = [f * g]$$

Παρατηρήστε ότι στο σύνολο $[f * g]$ θα ανήκουν ενδεχομένως και δρόμοι οι οποίοι δεν διέρχονται από το ενδιάμεσο σημείο $f(1) = g(0)$ αλλά παραμένουν δρομικά ομοτοπικοί του $f' * g'$ (ο οποίος βεβαίως περνάει από το σημείο αυτό). Τέτοιοι δρόμοι όμως δεν μπορεί ποτέ να προκύψουν ως αποτέλεσμα της πράξης $f' * g'$.

Έτσι λοιπόν, στο αποτέλεσμα της πράξης που ορίσαμε θελήσαμε να συμπεριλάβουμε όχι μόνον τους δρόμους που προκύπτουν ως γινόμενο $f' * g'$, αλλά και όλους όσους είναι δρομικά ομοτοπικοί με αυτούς. Αυτό δε δημιουργεί κανένα απολύτως πρόβλημα στο να θεωρηθεί ο παραπάνω ορισμός “καλός”. Η χρηστική αξία της πράξης αυτής και ο λόγος που μας είναι απαραίτητη, θα φανεί στα αμέσως επόμενα.

3.6 Η Θεμελιώδης Ομάδα

Ένα από τα βασικά ερωτήματα της τοπολογίας και της γεωμετρίας είναι το αν δύο δεδομένες πολλαπλότητες[8] είναι ομοιομορφικές ή όχι. Μία αλγεβρική αναλλοίωτη είναι ένα αλγεβρικό αντικείμενο το οποίο χαρακτηρίζει την πολλαπλότητα στην οποία το εντοπίζουμε. Ένα τέτοιο αντικείμενο μπορεί να είναι απλώς ένας αριθμός (π.χ. η χαρακτηριστική των Euler-Poincaré) η κάτι πιο σύνθετο όπως ένας δακτύλιος (π.χ. η ομάδα συνομολογίας). Ένας τρόπος λοιπόν να απαντήσουμε στην προηγούμενη ερώτηση όταν αυτή έχει αρνητική απάντηση, είναι να αποδείξουμε ότι οι δύο πολλαπλότητες δεν διαθέ-

[8]Περί πολλαπλοτήτων, βλέπε τη συζήτηση στο κεφάλαιο 2.6, σελίδα 20.

τουν τις ίδιες αλγεβρικές αναλλοίωτες και επομένως δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικές.

Το αλγεβρικό αναλλοίωτο αντικείμενο που θα ορίσουμε τώρα είναι μία πολύ σημαντική ομάδα. Είναι κομβικής σημασίας για τη μελέτη μας και αποτελεί γενικότερα ένα απο τα πιο χρήσιμα και γνωστά εργαλεία της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 (*Fundamental Group*). Θεμελιώδης Ομάδα του X με βάση κάποιο $x_0 \in X$ ονομάζεται το σύνολο των δρομικών κλάσεων ομοτοπίας των κλειστών δρόμων στο x_0, εφοδιασμένο με τη διμελή πράξη $*$. Συμβολίζεται ως $\pi_1(X, x_0)$ ή πιο αυστηρά με συμβολισμό ομάδας $< \pi_1(X, x_0), * >$. Έχουμε δηλαδή:

$$\pi_1(X, x_0) = \big\{[f] : f \text{ κλειστός δρόμος στο } X \text{ με βάση το } x_0\big\}$$

Εναλλακτικά, η θεμελιώδης ομάδα ονομάζεται και “ομάδα Poincaré” ή “1η ομοτοπική ομάδα”.

Η αλήθεια είναι ότι προτρέξαμε να χαρακτηρίσουμε το παραπάνω σύνολο ως “ομάδα” και αυτό δεν θα έπρεπε βέβαια να λαμβάνεται ως δεδομένο. Υποσχόμαστε σε πολύ λίγο να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό αυτό. Προς το παρόν θα αρκεστούμε στο να δώσουμε ένα χαρακτηριστικό και χρήσιμο παράδειγμα θεμελιώδους ομάδας.

3.6.1 Παράδειγμα - Η Θεμελιώδης Ομάδα του $\mathbb{R}^n$

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \big\{[e_{x_0}]\big\}$. Με άλλα λόγια, η θεμελιώδης ομάδα στο χώρο αυτό αποτελείται από ένα και μοναδικό στοιχείο που δεν είναι άλλο από την κλάση δρομικής ομοτοπίας η οποία περιέχει τον τετριμμένο δρόμο $e_{x_0}(s) = x_0$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι ένας οποιοσδήποτε κλειστός δρόμος στον $\mathbb{R}^n$ με βάση το x_0, μπορεί να εκφυλιστεί με συνεχή τρόπο στο σημείο αυτό. Διαφορετικά θα είχαμε περισσότερες απο μία κλάσεις δρομικής ομοτοπίας.

Πράγματι, για κάθε $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $f(0) = f(1) = x_0$ η γραμμική ομοτοπία $F(s,t) = tx_0 + (1-t)f(s)$ είναι πάντα μία δρομική ομοτοπία μεταξύ των δρόμων f και e_{x_0}. Κάθε σημείο $f(s)$ του δρόμου f, “ταξιδεύει” με τελικό προορισμό το σημείο x_0 και αυτό γίνεται αποκλειστικά μέσω του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο αυτά σημεία.

Γενικότερα, αν X είναι ένα κυρτό[9] υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε και πάλι $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) =$

[9]Κυρτό λέγεται ένα σύνολο στο οποίο, εάν ανήκουν κάποια στοιχεία x και y, τότε ανήκει και ολόκληρη

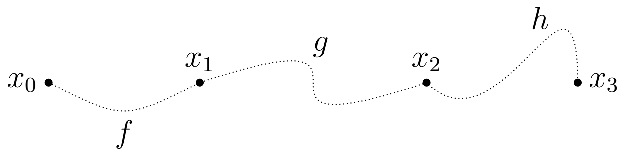
$\{[e_{x_0}]\}$ διότι η γραμμική ομοτοπία δουλεύει επίσης. Ένα παράδειγμα κυρτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$ του οποίου η θεμελιώδης ομάδα θα μας απασχολήσει αργότερα, είναι και ο μοναδιαίος δίσκος D^2 (για τον ορισμό του κυρτού συνόλου D^n βλέπε κεφάλαιο 2.1, σελίδα 15).

3.6.2 ...είναι πράγματι Ομάδα!

Το γεγονός ότι η Θεμελιώδης Ομάδα όπως έχει οριστεί ικανοποιεί τον ορισμό της ομάδας[10] -και άρα αποτελεί πράγματι ομάδα- δεν είναι βέβαια προφανές και χρειάζεται απόδειξη. Τονίζουμε και πάλι ότι τα στοιχεία της θεμελιώδους ομάδας είναι και αυτά σύνολα (πρόκειται για τις κλάσεις $[\,]$) και η πράξη $*$ δρά πάνω σε αυτά με τον τρόπο που ορίστηκε προηγουμένως, δηλαδή ως $[\,] * [\,] := [\,*\,]$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται και οι τρεις απαιτήσεις του ορισμού της ομάδας. Η συνέχεια των συναρτήσεων ομοτοπίας που θα κατασκευάσουμε, εξασφαλίζεται πάντα από το λήμμα συγκόλλησης.

Προσεταιριστική ιδιότητα Έστω τρείς δρόμοι f, g και h τέτοιοι ώστε να ορίζονται τα γινόμενα $f * g$ και $g * h$. Με άλλα λόγια, θέλουμε οι δρόμοι αυτοί να είναι "αλυσιδωτοί" όπως στο σχήμα:



Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση $\big([f] * [g]\big) * [h] = [f] * \big([g] * [h]\big)$. Λόγω του ορισμού της $*$, ισχύει όμως ότι:

$$\begin{gathered}\big([f] * [g]\big) * [h] = [f] * \big([g] * [h]\big) \iff \\ [f * g] * [h] = [f] * [g * h] \iff \\ \big[(f * g) * h\big] = \big[f * (g * h)\big]\end{gathered}$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε οτι ισχύει η $(f * g) * h \approx_\delta f * (g * h)$ και για να το πετύχουμε αυτό, πρέπει να πειστούμε οτι υπάρχει μία δρομική ομοτοπία μεταξύ

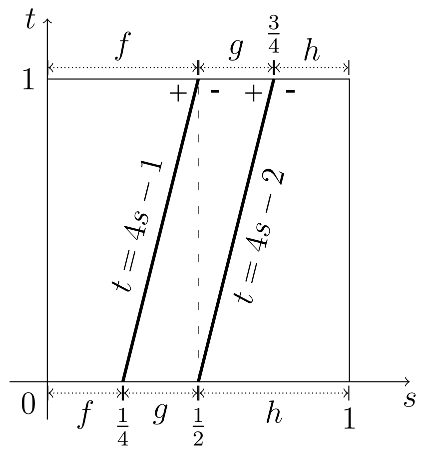
η ευθεία $tx + (1-t)y$ που τα ενώνει.

[10]Για τον ορισμό της ομάδας βλέπε κεφάλαιο 2.4, σελίδα 18.

των $(f * g) * h$ και $f * (g * h)$. Πράγματι, η συνάρτηση $F : I \times I \longrightarrow X$ με τύπο

$$F(s,t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}) & s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \\ g(4s - t - 1) & s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \\ h(\frac{4s-t-2}{2-t}) & s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \end{cases} \qquad \big(t \in [0,1] \, \text{πάντα}\big)$$

ικανοποιεί πλήρως τις απαιτήσεις αυτού του ρόλου. Η διαδικασία απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Το σχήμα αυτό μας εξηγεί με ποιον τρόπο σκεφτήκαμε για να δώσουμε τον ορισμό της F. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε οτι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $t > 4s - 1 \Rightarrow s < \frac{t+1}{4}$ στο *αριστερό* χωρίο
- $4s - 2 < t < 4s - 1 \Rightarrow s < \frac{t+2}{4}$ και $s > \frac{t+1}{4}$ στο *ενδιάμεσο* χωρίο
- $t < 4s - 2 \Rightarrow s > \frac{t+2}{4}$ στο *δεξί* χωρίο

Ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου Θα χρειαστεί χρησιμοποιήσουμε το δρόμο $e_x : I \longrightarrow X$ με τύπο $e_x(s) = x$ για κάθε $s \in I$, που αναφέραμε και σε προηγούμενο παράδειγμα. Είναι προφανές ότι, για $x = x_0$, ο δρόμος e_{x_0} είναι ο τετριμμένος δρόμος ο οποίος βρίσκεται σε απόλυτη ακινησία στο σημείο αυτό.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι $[e_{x_0}] * [f] = [f] * [e_{x_0}] = [f]$. Αν το καταφέρουμε αυτό, θα έχουμε βεβαιωθεί οτι το $[e_{x_0}]$ -και όχι το e_{x_0}- είναι το <u>ουδέτερο ή ταυτοτικό στοιχείο</u> της ομάδας $< \pi_1(X, x_0), * >$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύουν ξεχωριστά οι σχέσεις $[e_{x_0}] * [f] = [f]$ και $[f] * [e_{x_0}] = [f]$. Ισχύει ότι

$$[e_{x_0}] * [f] = [f] \iff [e_{x_0} * f] = [f]$$

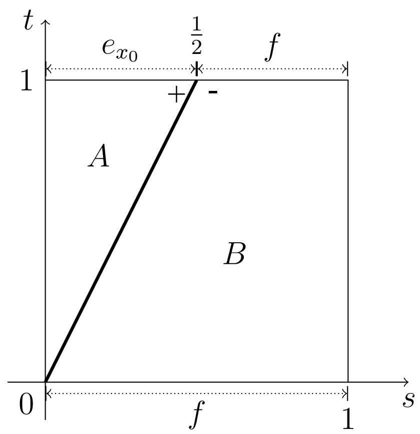
και ακριβώς όμοια

$$[f] * [e_{x_0}] = [f] \iff [f * e_{x_0}] = [f]$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $e_{x_0} * f \approx_\delta f$ και $f * e_{x_0} \approx_\delta f$. Θα εξετάσουμε μεμονωμένα την κάθε περίπτωση.

- Για την *πρώτη* σχέση, ορίζουμε την συνάρτηση $F : I \times I \longrightarrow X$ με τύπο

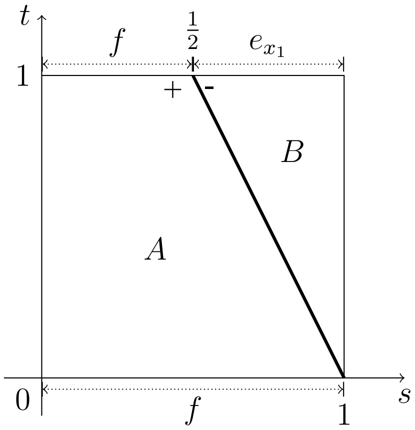
$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & s \in \left[0, \frac{t}{2}\right] \\ f\left(\frac{2s+t-1}{2+t}\right) & s \in \left[\frac{t}{2}, 1\right] \end{cases}$$



Αυτό που κάναμε εδώ προκειμένου να κατασκευάσουμε την ομοτοπία, ήταν απλώς να προβάλλουμε το χωρίο A στο σημείο 0 και το χωρίο B στο διάστημα $[0, 1]$. Το αποτέλεσμα είναι ότι, για δεδομένο στιγμιότυπο t, ο χρόνος (s) που ξοδεύουμε παραμένοντας στο σημείο $x_0 = e_{x_0}$ είναι ίσος με ${}^{t}/_{2}$. Αξίζει τέλος να παρατηρήσουμε ότι για κάθε ευθεία $t = As$ με $A \in (1, +\infty)$ υπάρχει και μία εξίσου λειτουργική συνάρτηση ομοτοπίας. Επιλέξαμε λοιπόν $A = 2$ καθαρά για λόγους ευκολίας.

- Για τη *δεύτερη* σχέση, ορίζουμε τη συνάρτηση $G : I \times I \longrightarrow X$ με τύπο

$$G(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s}{2-t}\right) & s \in \left[0, \frac{2-t}{2}\right] \\ x_1 & s \in \left[\frac{2-t}{2}, 1\right] \end{cases}$$



Η ερμηνεία στην περίπτωση αυτή είναι ακριβώς όμοια με την ερμηνεία που δώσαμε για τη δρομική ομοτοπία της πρώτης σχέσης.

Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου (ως προς την $*$) Δοθέντος ενός οποιουδήποτε δρόμου $f : I \longrightarrow X$ είναι σαφές ότι θα υπάρχει πάντα ο δρόμος $\bar{f} : I \longrightarrow X$ με $\bar{f}(s) = f(1-s)$. Ο δρόμος αυτός θα εκτελεί την ακριβώς αντίστροφη πορεία του f. Εδώ μας ενδιαφέρουν βέβαια μόνο οι κλειστοί δρόμοι με βάση το x_0.

Θέλουμε να δείξουμε τώρα ότι για κάθε $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ θα υπάρχει πάντα κάποιο $\overline{[f]} \in \pi_1(X, x_0)$ τέτοιο ώστε $[f] * \overline{[f]} = \overline{[f]} * [f] = [e_{x_0}]$. Πράγματι, ένα τέτοιο στοιχείο πάντα υπάρχει και μάλιστα ισχύει $\overline{[f]} = [\bar{f}]$ όπως αμέσως θα πειστούμε.

Θα δείξουμε λοιπόν και πάλι ξεχωριστά ότι $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ και $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_0}]$ το οποίο φυσικά σημαίνει ότι το στοιχείο $[\bar{f}]$ είναι αυτό που αναζητούμε. Αυτό θα λέγεται <u>αντίστροφο στοιχείο</u> ως προς την $*$. Γνωρίζουμε, και πάλι εξ ορισμού, ότι

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \iff [f * \bar{f}] = [e_{x_0}]$$

και

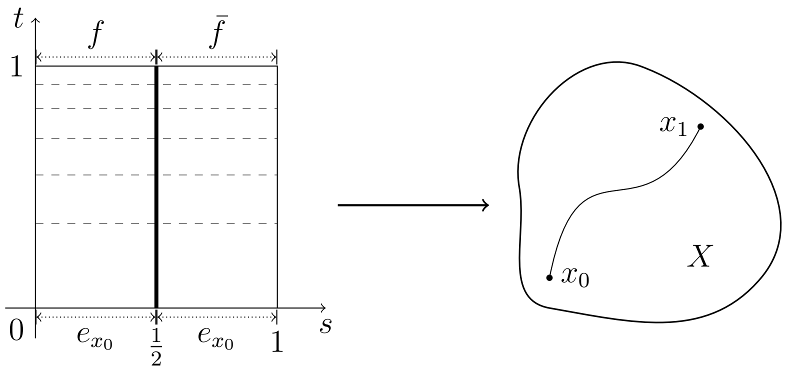
$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_0}] \iff [\bar{f} * f] = [e_{x_0}]$$

επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $f * \bar{f} \approx_\delta e_{x_0}$ και $\bar{f} * f \approx_\delta e_{x_0}$.

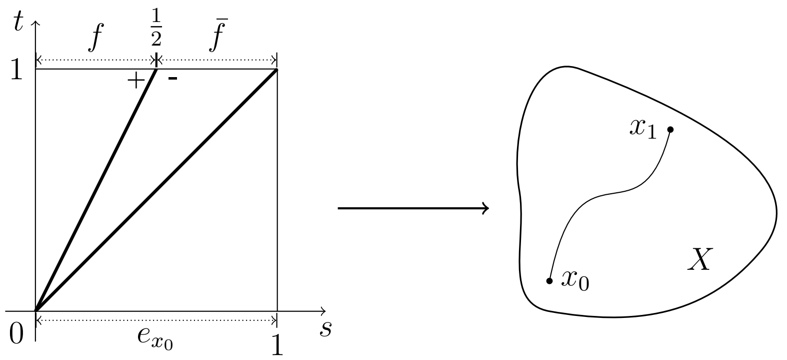
- Για την *πρώτη* σχέση, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2ts) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f\big(2t(1-s)\big) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Η H αποτελεί μία δρομική ομοτοπία μεταξύ των $f * \bar{f}$ και e_{x_0}. Πράγματι, για κάθε $t \in [0,1]$, η συνάρτηση αυτή ξεκινάει με αφετηρία το e_{x_0}, φτάνει μέσω του δρόμου f έως και το σημείο $f(t)$, και επιστρέφει και πάλι στο e_{x_0} εκτελώντας την ακριβώς αντίστροφη κίνηση.



Η H και πάλι όμως δεν είναι είναι η μοναδική ομοτοπία που θα μπορούσαμε να προτείνουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση! Μία διαφορετική ομοτοπία που ικανοποιεί εξίσου τις απαιτήσεις που πρέπει, είναι και αυτή που περιγράφεται με το παρακάτω σχήμα.



Η μόνη διαφορά στον τρόπο δράσης των δύο προηγούμενων ομοτοπιών, είναι το πως αυτές συμπεριφέρονται χρονικά, κατά s. Στην πρώτη περίπτωση, για δεδομένο t, η διαδρομή διαγράφεται ξοδεύοντας ίσους χρόνους s στο "πήγαινε" (x_0 έως $f(t)$) και στο "έλα" (αντίστροφα) και καθόλου χρόνο σε ακινησία. Αντίθετα, στην τελευταία περίπτωση, η κίνηση μέχρι και την επαναφορά στο x_0 εκτελείται ταχύτερα και ένα τελευταίο μέρος του χρόνου s ξοδεύεται σε ακινησία στην τελική θέση. Οι δύο ομοτοπίες επιτυγχάνουν λοιπόν το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα κάνοντας διαφορετική διαχείριση του χρόνου που τους διατίθεται. Και πάλι βέβαια θα μπορούσαμε να φανταστούμε άπειρες στο πλήθος τέτοιες κατάλληλες ομοτοπίες. Κάποιες από αυτές θα μπορούσαν να προκύψουν απλά αλλάζοντας την κλίση της ενδιάμεσης ευθείας των σχημάτων.

- Για τη *δεύτερη* σχέση, βασιζόμενοι στην ισχύ της πρώτης και λαμβάνοντας υπόψιν οτι ο f είναι κλειστός, παρατηρούμε ότι

$$f * \bar{f} \approx_\delta e_{x_0} \implies \bar{f} * \bar{\bar{f}} \approx_\delta e_{x_0}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\bar{\bar{f}}(s) = \bar{f}(1-s) = f\big(1-(1-s)\big) = f(s)$$

δηλαδή $\bar{\bar{f}} = f$ και εύκολα προκύπτει το ζητούμενο. □

Διατυπώνουμε τώρα τον παρακάτω ορισμό

ΟΡΙΣΜΟΣ 7. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται απλά συνεκτικός εάν είναι κατά τόξα συνεκτικός[11] και $\pi_1(X, x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in X$.

Λήμμα 2. *Εάν X απλά συνεκτικός χώρος και $f, g : I \longrightarrow X$ με $f(0) = g(0) = x_0$ και $f(1) = g(1) = x_1$, τότε $[f] = [g]$.*

Απόδειξη. Είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε τα παρακάτω

$$[f] = [f * e_{x_1}] = [f * (\bar{g} * g)] = [(f * \bar{g}) * g] = [e_{x_0} * g] = [g]$$ □

3.7 Χώροι Κάλυψης

Οι ορισμοί του κεφαλαίου αυτού που αμέσως ακολουθούν, φαινομενικά δεν παρουσιάζουν άμεση σύνδεση με την απόδειξη του ΘΘΑ. Παρέχουν εντούτοις κάποια άκρως απαραίτητα (και εν γένει ενδιαφέροντα) αποτελέσματα, χωρίς τα οποία η απόδειξη αυτή δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί. Χτίζουμε και εδώ εξ αρχής το κατάλληλο πλαίσιο και λαμβάνουμε τέλος κάποιες καθοριστικής σημασίας εφαρμογές.

3.7.1 Απεικονίσεις Κάλυψης και Lifting

Οι παρακάτω τρείς ορισμοί (8, 9 και 10) θα καθορίσουν τα επόμενα σημεία του κεφαλαίου και πρέπει να τους δοθεί η ανάλογη προσοχή.

[11] Κατά τόξα συνεκτικός χώρος, είναι ένα χώρος του οποίου δύο οποιαδήποτε σημεία ενώνονται με μία καμπύλη που ανήκει και αυτή στο χώρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 (*Evenly Covered set*)**.** Έστω E και B τοπολογικοί χώροι. Έστω ακόμα $p : E \longrightarrow B$ μία συνεχής απεικόνιση *επί* του B και $U \subset B$ ανοικτό σύνολο. Αν η αντίστροφη εικόνα $p^{-1}(U)$ είναι ένωση *ξένων ανα δύο* ανοικτών συνόλων V_a του E, τέτοιων ώστε για κάθε a ο περιορισμός της p στο V_a να είναι ένας ομοιομορφισμός του V_a επί του U, τότε το U λέγεται άρτια καλυμμένο απο την p. Κάθε σύνολο V_a ονομάζεται "φέτα" (sheet) του $p^{-1}(U)$. Με άλλα λόγια, για οικογένεια δεικτών $\mathcal{A}$ και V_a ανοικτά σύνολα, ο ορισμός που δώσαμε λέει ότι:

$$\exists (V_a)_{a\in\mathcal{A}} \subset E \quad \text{ώστε} \quad p^{-1}(U) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} V_a \quad \text{και} \quad p|_{V_a} : V_a \xrightarrow{\simeq} U$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 9 (*Covering Projection/Space*)**.** Έστω απεικόνιση p κατά τον ορισμό 7. Αν για κάθε σημείο $b \in B$ υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U του B τέτοια ώστε $b \in U$ και η U να είναι άρτια καλυμμένη απο τη p, τότε η p λέγεται απεικόνιση κάλυψης. Με άλλα λόγια και εδώ:

$$\forall b \in B \quad \exists U \ni b \quad \text{με } U \text{ άρτια καλυμμένο από την } p$$

Επιπλέον, ο E λέγεται χώρος κάλυψης του B (ή ολικός χώρος) ενώ ο B λέγεται χώρος βάσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10 (*Lifting*)**.** Έστω X συνεκτικός[12] χώρος. Έστω ακόμα μία συνάρτηση $p : E \longrightarrow B$ και $f : X \longrightarrow B$ συνεχής συνάρτηση. Μία απεικόνιση $\widetilde{f} : X \longrightarrow E$ θα ονομάζεται "ανέβασμα" της f αν και μόνον αν $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

3.7.2 Δύο Λήμματα και ένα Θεώρημα

Το υποκεφάλαιο αυτό αποτελεί το κυρίως μέρος του ευρύτερου κεφαλαίου των χώρων κάλυψης. Τα εργαλεία όμως που αναπτύσσονται εδώ, μας χρειάζονται απλώς και μόνο για

[12] Συνεκτικός χώρος (Connected Space) είναι ένας τοπολογικός χώρος που δεν μπορεί να είναι η ένωση δύο η περισσότερων ξένων, μη κενών και ανοικτών συνόλων.

την εκπόνηση του αποτελέσματος του τελευταίου υποκεφαλαίου, το οποίο με τη σειρά του είναι βασικό κομμάτι της απόδειξης του ΘΘΑ.

Λήμμα 3. *Έστω μία απεικόνιση κάλυψης $p : E \longrightarrow B$ και δρόμος $f : I \longrightarrow B$ με $f(0) = b_0$. Εάν $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ τότε υπάρχει μοναδικό "ανέβασμα" $\widetilde{f}$ του δρόμου f στον χώρο E, που να αρχίζει απο το e_0.*

Απόδειξη. Αφού η p είναι απεικόνιση κάλυψης, αυτό εξ ορισμού μας εγγυάται ότι για κάθε σημείο του χώρου B θα υπάρχει ένα σύνολο U άρτια καλυμμένο απο την p. Προφανώς τα σύνολα U συνθέτουν τον χώρο B ή, σε αυστηρότερη διατύπωση, η ένωση τους είναι ο χώρος B.

Ο δρόμος f τώρα βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στον χώρο B. Άρα, αφού ο B είναι η ένωση των U και μόνο, είναι αναπόφευκτο τα διάφορα τμήματα του δρόμου να ανήκουν το καθένα ξεχωριστά σε κάποιο απο τα U. Με τη βοήθεια του αριθμού Lebesgue λοιπόν, μπορούμε ισοδύναμα να βρούμε μία διαμέριση $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = 1$ του $[0, 1]$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ να ισχύει

$$f\big([s_i, s_{i+1}]\big) \subset U$$

για κάποιο απο τα U.

Θα επιχειρήσουμε τώρα να κατασκευάσουμε την $\widetilde{f}$ βήμα προς βήμα:

- Θέτουμε $\widetilde{f}(0) = e_0$.
- Υποθέτουμε ότι η $\widetilde{f}$ έχει οριστεί στο διάστημα $[0, s_i]$. Θα ορίσουμε τώρα την $\widetilde{f}$ στο διάστημα $[s_i, s_{i+1}]$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιο $U \in B$ ώστε $f\big([s_1, s_{i+1}]\big) \subset U$. Επιπλέον, αφού το U είναι άρτια καλυμμένο απο την p, αυτό σημαίνει ότι $p^{-1}(U) = \bigcup V_a$, όπου $\{V_a\}_{a \in \mathcal{A}} \in E$ οικογένεια απο "φέτες" του $p^{-1}(U)$. Είναι ακόμα σαφές ότι, αφού $f(s_i) \in U$, θα είναι και $p^{-1}\big(f(s_i)\big) \subset \bigcup V_a$ και μάλιστα κάθε αντίστροφη εικόνα του $f(s_i)$ θα ανήκει σε ακριβώς ένα V_a. Επιλέγουμε λοιπόν εκείνη τη "φέτα" V_a για την οποία ισχύει $\widetilde{f}(s_i) \in V_a$ και ορίζουμε

$$\widetilde{f}(s) = p|_{V_a}^{-1}\big(f(s)\big) \quad \text{όταν } s \in [s_i, s_{i+1}] \tag{3.1}$$

Η $p|_{V_a} : V_a \longrightarrow U$ είναι εξ ορισμού ομοιομορφισμός. Αυτό σημαίνει πως η $\widetilde{f}$, με τον τρόπο που ορίστηκε προηγουμένως, είναι συνεχής (διότι η f είναι συνεχής ως δρόμος).

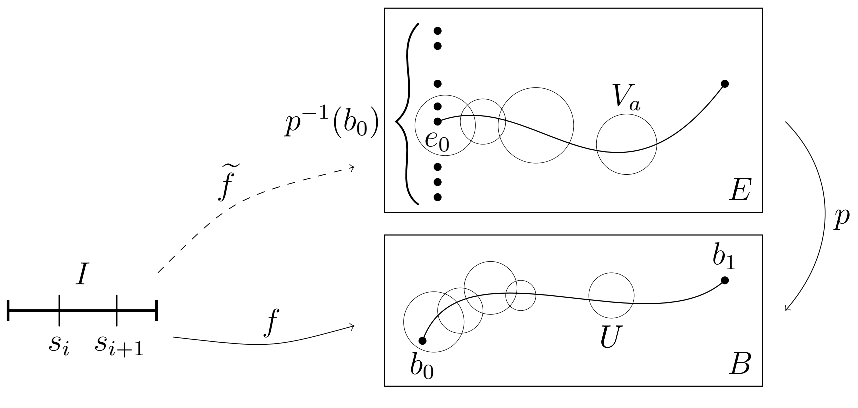
Ο λόγος που η παραπάνω επαγωγική διαδικασία κατασκευής δουλεύει, είναι ότι για $i = 0$ λαμβάνουμε $[0, s_0] = [0, 0] = \{0\}$ άρα η $\widetilde{f}$ έχει οριστεί στο πρώτο βήμα. Έτσι η $\widetilde{f}$ έχει οριστεί επιτυχώς σε όλο το διάστημα $[0, 1]$.

Θα δείξουμε τέλος ότι η $\widetilde{f}$ είναι πράγματι μοναδική. Προς απαγωγή σε άτοπο, θα υποθέσουμε κατά τη συνήθη τεχνική ότι υπάρχει και κάποιο άλλο “ανέβασμα” $\grave{\widetilde{f}}$ της f και θα δείξουμε ότι σε κάθε διάστημα $[s_i, s_{i+1}]$ με $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ισχύει $\grave{\widetilde{f}} = \widetilde{f}$ το οποίο και εγγυάται το ζητούμενο. Είναι προφανές ότι πρέπει $\grave{\widetilde{f}}(0) = \widetilde{f}(0) = e_0$. Έστω λοιπόν ότι και στο $[0, s_i]$ ισχύει το ίδιο, δηλαδή $\grave{\widetilde{f}} = \widetilde{f}$. Στο $[s_i, s_{i+1}]$ τώρα, για την $\widetilde{f}$ ξέρουμε πως ισχύει η σχέση (3.1) ενώ για την $\grave{\widetilde{f}}$ θα είναι σίγουρα $\grave{\widetilde{f}}\big([s_i, s_{i+1}]\big) \subset p^{-1}(U)$. Όμως το $[s_i, s_{i+1}]$ είναι συνεκτικό σύνολο άρα συνεκτικό θα είναι και το $\grave{\widetilde{f}}\big([s_i, s_{i+1}]\big)$ λόγω της συνέχειας του δρόμου. Αυτό σημαίνει πως η εικόνα αυτή θα περιέχεται εξ ολοκλήρου σε ακριβώς μία “φέτα” (αφού οι “φέτες” ειναι ξένες μεταξύ τους ανα δύο). Γνωρίζουμε επίσης ότι $\widetilde{f}(s_i) \in V_a$ άρα δεν μπορεί παρά να είναι και $\grave{\widetilde{f}}\big([s_i, s_{i+1}]\big) \subset V_a$. Τελικά καταλήγουμε ότι για $s \in [s_i, s_{i+1}]$ είναι

$$\grave{\widetilde{f}}(s) \in V_a \bigcap p^{-1}\big(f(s)\big) \quad \Longrightarrow \quad \grave{\widetilde{f}}(s) = \widetilde{f}(s)$$

όπου λάβαμε υπόψιν ότι $p \circ \grave{\widetilde{f}} = f$. □

Στο παρακάτω σχήμα συνοψίζουμε την προηγούμενη δραστηριότητα.



Το λήμμα που ακολουθεί δεν είναι τίποτα παραπάνω απο μία φυσιολογική επέκταση του προηγούμενου λήμματος σε -υποψήφιες- συναρτήσεις ομοτοπίας.

Λήμμα 4. *Έστω απεικόνιση κάλυψης $p : E \longrightarrow B$ με $p(e_0) = b_0$. Έστω ακόμα συνεχής συνάρτηση $F : I \times I \longrightarrow B$ με $F(0, 0) = b_0$. Τότε υπάρχει μοναδικό “ανέβασμα” $\widetilde{F}$ της*

F, τέτοιο ώστε να ισχύει $\widetilde{F}(0,0) = e_0$.

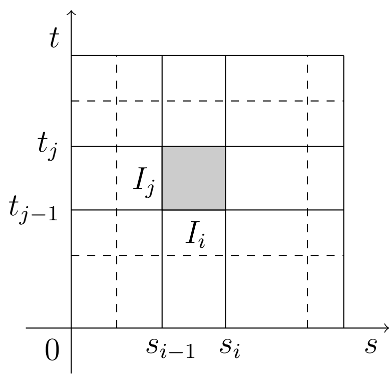
Τέλος, αν η F είναι δρομική ομοτοπία, τότε και η $\widetilde{F}$ θα είναι δρομική ομοτοπία.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε και εδώ την $\widetilde{F}$ με παρόμοιο σκεπτικό. Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Ορίζουμε $\widetilde{F}(0,0) = e_0$

- Στις πλευρές $0 \times I$ και $I \times 0$ του τετραγώνου $I \times I$, η $\widetilde{F}$ ως συνεχής συνάρτηση είναι δρόμος. Επομένως, εκεί μπορούμε να την ορίσουμε κάνοντας απλά χρήση του προηγούμενου λήμματος.

- Ο B είναι χώρος βάσης και η εικόνα του τετραγώνου $I \times I$ μέσω της F περιέχεται εξ ολοκλήρου σε αυτόν. Μπορούμε λοιπόν και εδώ να βρούμε κατάλληλες διαμερίσεις των πλευρών I, έτσι ώστε κάθε $I_i \times I_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ να απεικονίζεται μέσω της F σε ένα άρτια καλυμμένο υποσύνολο του B.



- Χρησιμοποιούμε τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα με το προηγούμενο λήμμα για να ορίσουμε τελικά $\widetilde{F} = p^{-1}|_{V_a} \circ F$.

Έστω τώρα ότι η F είναι δρομική ομοτοπία. Αυτό συνεπάγεται βέβαια ότι οι κάθετες πλευρές του τετραγώνου $I \times I$ απεικονίζονται σε σημεία. Δηλαδή $F(0 \times I) = b_0$ και $F(1 \times I) = b_1$ για κάποιο $b_1 \in B$. Άρα έχουμε

$$p\big(\widetilde{F}(0 \times I)\big) = b_0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{F}(0 \times I) \in p^{-1}(b_0)$$

Το σύνολο $0 \times I$ είναι προφανώς συνεκτικό. Επομένως, αφού η $\widetilde{F}$ είναι συνεχής, το $\widetilde{F}(0 \times I)$ θα είναι και αυτό συνεκτικό. Εφόσον λοιπόν το $p^{-1}(b_0)$ έχει την διακριτή τοπολογία, η εικόνα $\widetilde{F}(0 \times I)$ θα είναι σημείο.

Τέλος, εντελώς όμοια μπορεί να δειχθεί ότι και η εικόνα $\widetilde{F}(1 \times I)$ είναι σημείο. Άρα η $\widetilde{F}$ είναι πράγματι μία δρομική ομοτοπία. $\square$

Τα δύο προηγούμενα λήμματα, είναι εύκολα αντιληπτό ότι μας οδηγούν αβίαστα στο παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω απεικόνιση κάλυψης $p : E \longrightarrow B$ με $p(e_0) = b_0$. Έστω ακόμα δύο δρομικά ομοτοπικοί δρόμοι $f, g : I \longrightarrow B$ με $f(0) = g(0) = b_0$. Τότε τα "ανεβάσματά" τους $\widetilde{f}$ και $\widetilde{g}$ είναι και αυτά δρομικά ομοτοπικά και ισχύει $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0) = e_0$.*

Απόδειξη. Δίνεται ότι $f \approx_\delta g$ επομένως υπάρχει μία δρομική ομοτοπία $F : I \times I \longrightarrow B$ μεταξύ των δρόμων f και g. Από το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει "ανέβασμα" $\widetilde{F} : I \times I \longrightarrow E$ της F. Ο περιορισμός $\widetilde{F}|_{I\times 0}$ είναι ένας δρόμος στο Ε με αρχικό σημείο το e_0. Άρα ο δρόμος αυτός δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα "ανέβασμα" του $f = F|_{I\times 0}$. Όμως, όπως δείξαμε στα προηγούμενα, ένα τέτοιο ανέβασμα είναι μοναδικό! Άρα θα ισχύει $\widetilde{F}(s, 0) = \widetilde{f}(s)$ για κάθε $s \in I$.

Με την ίδια ακριβώς επιχειρηματολογία διαπιστώνουμε και ότι $\widetilde{F}(s, 1) = \widetilde{g}(s)$ για κάθε $s \in I$.

Επομένως οι $\widetilde{f}$ και $\widetilde{g}$ έχουν και κοινό τελικό σημείο εκτός απο κοινή αρχή. Έτσι η $\widetilde{F}$ είναι μία δρομική ομοτοπία μεταξύ αυτών. $\square$

3.7.3 Παράδειγμα - Η κάλυψη $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$

Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ με τύπο $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ είναι μία απεικόνιση κάλυψης.

Απο τον τύπο της p αντιλαμβανόμαστε αμέσως πως η δράση της συνίσταται στο να "τυλίγει" την πραγματική ευθεία γύρω απο τον κύκλο, με τρόπο τέτοιο ώστε κάθε διάστημα $[n, n + 1]$ να απεικονίζεται *επί* του κύκλου. Επομένως η ίδια η p είναι *επί* του S^1. Είναι τέλος προφανές ότι η p είναι συνεχής (οι cos και sin ειναι συνεχείς συναρτήσεις).

Για να δείξουμε τώρα ότι η p είναι απεικόνιση κάλυψης, αρκεί σύμφωνα με τον ορισμό να δείξουμε ότι το S^1 μπορεί να εκφραστεί ως ένωση άρτια καλυμμένων ανοικτών υποσυνόλων του. Θέτουμε

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}$$

και ζητάμε σε πρώτη φάση να δείξουμε οτι το σύνολο αυτό είναι άρτια καλυμμένο. Για την αντίστροφη εικόνα του U_1 έχουμε εύκολα τα παρακάτω

$$p^{-1}(U_1) = \big\{x \in \mathbb{R} : \cos 2\pi x > 0\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(n - \tfrac{1}{4}\, ,\, n + \tfrac{1}{4}\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι το V_n είναι ομοιομορφικό με το U_1 για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, επειδή η συνάρτηση του ημιτόνου είναι γνησίως μονότονη στο V_n, έπεται ότι η[13] $p|_{\overline{V_n}} : \overline{V_n} \longrightarrow \overline{U_1}$ είναι 1-1. Επιπλέον, είναι φανερά και *επί*. Επειδή το $\overline{V_n}$ είναι συμπαγές, έπεται ότι η $p|_{\overline{V_n}}$ είναι ομοιομορφισμός. Ειδικότερα η $p|_{V_n} : V_n \longrightarrow U_1$ είναι ομοιμορφισμός.

Θέτουμε τώρα κατά το ίδιο σκεπτικό τα παρακάτω σύνολα

$$U_2 = \big\{(x, y) \in S^1 : x < 0\big\}$$
$$U_3 = \big\{(x, y) \in S^1 : y > 0\big\}$$
$$U_2 = \big\{(x, y) \in S^1 : y < 0\big\}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι και τα U_i $(i = 2, 3, 4)$ είναι άρτια καλυμμένα. Τέλος, προφανώς ισχύει $S^1 = U_1 \bigcup U_2 \bigcup U_3 \bigcup U_4$ άρα φτάσαμε στο ζητούμενο.

3.7.4 Υπολογισμός της Θεμελιώδους Ομάδας του κύκλου

Όλα τα προηγούμενα του παρόντος κεφαλαίου δεν είχαν άλλο σκοπό παρά να φτάσουμε ακριβώς εδώ. Στη διατύπωση δηλαδή και απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος, η αλήθεια του οποίου είναι καθοριστικής σημασίας γα την απόδειξη του ΘΘΑ. Μπορούμε να πούμε πως η ισχύς της πρότασης αυτής γίνεται μάλλον εύκολα αντιληπτή - τουλάχιστον διαισθητικά σε μία πρώτη επαφή. Πρόκειται επιπλέον για ένα αρκετά διάσημο αποτέλεσμα. Παρ'όλα αυτά, η σχετική απόδειξη δεν είναι σε καμία περίπτωση τετριμμένη και θα πρέπει, χάρην πληρότητος της μελέτης μας, να δοθεί αναλυτικά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.

$$\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z} \quad \textit{όπου } b_0 \in S^1$$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι $b_0 = (1, 0)$. Αν καταφέρουμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων $\pi_1(S^1, b_0)$ και $(\mathbb{Z}, +)$ θα έχουμε πετύχει το ζητούμενο.

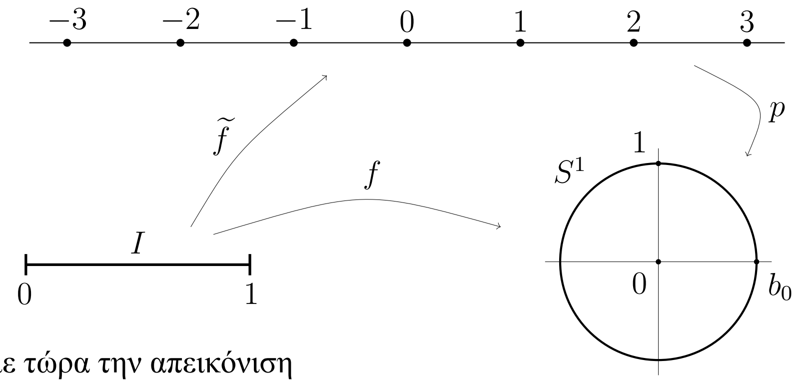
[13] στον τύπο που ακολουθεί, με την άνω παύλα συμβολίζουμε τις κλειστότητες των συνόλων.

Θεωρούμε αρχικά την απεικόνιση της προηγούμενης εφαρμογής. Έστω δηλαδή $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ με τύπο $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Η p, όπως αποδείξαμε, είναι απεικόνιση κάλυψης και παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$p(i) = b_0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad i \in \mathbb{Z}$$

Συνεπώς $p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$.

Έστω ακόμα $f : I \longrightarrow S^1$ με $f(0) = f(1) = b_0$ καθώς επίσης και ένα "ανέβασμα" $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ της f με $\widetilde{f}(0) = 0$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\widetilde{f}(1) \in p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$. Πράγματι, $p \circ \widetilde{f} = f \implies p\big(\widetilde{f}(1)\big) = f(1) = b_0$, που σημαίνει βέβαια ακριβώς αυτό. Αυτά φαίνονται καλύτερα στο σχήμα.



Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(S^1, b_0) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\longmapsto \widetilde{f}(1) \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι αυτή είναι ισομορφισμός. Πράγματι:

(a) Η Φ είναι καλώς ορισμένη. Έστω $[f] = [g]$. Τότε όπως ξέρουμε θα είναι και $f \approx_\delta g$ επομένως απο το Θεώρημα 1, σελίδα 45, προκύπτει οτι υπάρχουν "ανεβάσματα" $\widetilde{f}$ και $\widetilde{g}$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

- $\widetilde{f} \approx_\delta \widetilde{g}$
- $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0) \quad \text{και} \quad \widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$

Το οποίο βέβαια σημαίνει ότι $\Phi\big([f]\big) = \Phi\big([g]\big)$ και άρα η Φ ορίστηκε καλώς.

(b) Η Φ είναι 1-1. Έστω $f, g : I \longrightarrow S^1$ με $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = b_0$ και έστω ότι $\Phi\big([f]\big) = \Phi\big([g]\big)$. Αν ισχύει απαραίτητα ότι $[f] = [g]$, τότε έχουμε άμεσα το ζητούμενο. Θα αποδείξουμε ακριβώς αυτό.

Ισχύει $\Phi\big([f]\big) = \Phi\big([g]\big) \implies \widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$. Γνωρίζουμε όμως ότι $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0)$. Επομένως οι δρόμοι $\widetilde{f}, \widetilde{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ έχουν κοινά άκρα και επιπλέον ο $\mathbb{R}$ είναι απλά συνεκτικός. Άρα, από λήμμα 2, σελίδα 40, ισχύει $[\widetilde{f}] = [\widetilde{g}]$. Τελικά

$$[\widetilde{f}] = [\widetilde{g}] \Longrightarrow \widetilde{f} \approx_\delta \widetilde{g} \Longrightarrow p \circ \widetilde{f} \approx_\delta p \circ \widetilde{g} \Longrightarrow f \approx_\delta g \Longrightarrow [f] = [g]$$

(c) Η Φ είναι επί. Επιλέγουμε ένα τυχαίο $n \in \mathbb{Z}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει δρόμος $f : I \longrightarrow S^1$ του οποίου η κλάση ισοδυναμίας να αντιστοιχίζεται μέσω της Φ στο n.

Ο $\mathbb{R}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός άρα θα υπάρχει πάντα ένας δρόμος $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\widetilde{f}(0) = 0$ και $\widetilde{f}(1) = n$. Το μονοπάτι $\widetilde{f}(t) = n \cdot t$ είναι για παράδειγμα ένα τέτοιο. Και εδώ η f είναι φυσικά η $p \circ \widetilde{f}$. Άρα εύκολα προκύπτει ότι $\Phi\big([f]\big) = \widetilde{f}(1) = n$.

(d) Η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων. Ισχύει ότι

$$\Phi\big([f] * [g]\big) = \Phi\big([f]\big) + \Phi\big([g]\big) \iff (\widetilde{f * g})(1) = \widetilde{f}(1) + \widetilde{g}(1)$$

επομένως αρκεί να αποδείξουμε το δεξί μέλος της ισοδυναμίας αυτής. Εάν λοιπόν $\widetilde{f}(1) = n$ και $\widetilde{g}(1) = m$, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα “ανέβασμα” του $f * g$ το οποίο να ξεκινάει απο το 0 και να καταλήγει στο $n+m$. Ισχύει βέβαια εξ ορισμού

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \\ g(2s-1) & s \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \end{cases}$$

Ορίζουμε λοιπόν το δρόμο $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(s) = \begin{cases} \widetilde{f}(2s) & s \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \\ n + \widetilde{g}(2s-1) & s \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \end{cases}$$

Είναι $h(0) = \widetilde{f}(0) = 0$ και $h(1) = n + \widetilde{g}(1) = n + m$ και παρατηρούμε ότι:

$$p\big(h(s)\big) = \begin{cases} p\big(\widetilde{f}(2s)\big) & s \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \\ p\big(n + \widetilde{g}(2s-1)\big) & s \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \end{cases} = \begin{cases} (p \circ \widetilde{f})(2s) & s \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \\ p\big(\widetilde{g}(2s-1)\big) & s \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(2s) & s \in \big[0, \frac{1}{2}\big] \\ g(2s-1) & s \in \big[\frac{1}{2}, 1\big] \end{cases} = f * g(s)$$

Επομένως, το h είναι ένα ανέβασμα του $f * g$ που ξεκινάει από το 0 άρα έχουμε

$$\Phi\big([f] * [g]\big) = \Phi\big([f * g]\big) = h(1) = n + m = \Phi\big([f]\big) + \Phi\big([g]\big)$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

3.8 Ένα κρίσιμο Θεώρημα

Θα χρειαστούμε στα επόμενα τον παρακάτω απλό ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11 (*Nullhomotopic Function*)**.** Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ και η g σταθερή. Αν $f \approx g$ τότε η f λέγεται "ομοτοπική ως προς το 0".

Παρατήρηση. Η ονομασία που δίνεται στον παραπάνω ορισμό είναι καθαρά θέμα σύμβασης και σε καμία περίπτωση δεν υπονοεί ότι η συνάρτηση g είναι απαραίτητα η μηδενική συνάρτηση. Θα μπορούσε άλλωστε το στοιχείο μηδέν να απουσιάζει από το σύνολο Y. Είναι σημαντικό να ξεκαθαρίσουμε αμέσως το λεπτό αυτό σημείο ώστε να αποφύγουμε οποιαδήποτε σύγχυση στην ερμηνεία του ορισμού που δώσαμε.

Το θεώρημα που διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε παρακάτω, θα παίξει κομβικό ρόλο στην προσπάθεια απόδειξης του ΘΘΑ.

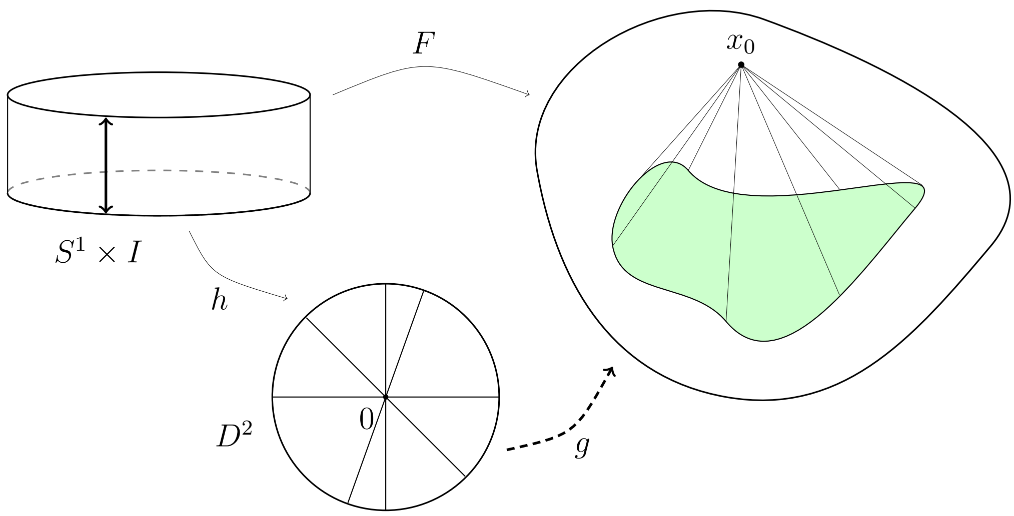
ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Έστω συνεχής $f : S^1 \longrightarrow X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *η f είναι nullhomotopic.*
2. *η f μπορεί να επεκταθεί σε μία συνεχή $g : D^2 \longrightarrow X$.*

Απόδειξη. **"Ευθύ"** $1 \Rightarrow 2$ Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι η f δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας κλειστός δρόμος στο X. (Αυτό προκύπτει άμεσα απο το γεγονός οτι ορίζεται στο S^1 και ότι είναι βέβαια συνεχής).

Αφού τώρα η f είναι nullhomotopic, θα είναι εξ ορισμού ομοτοπική με μία σταθερή συνάρτηση $c : S^1 \longrightarrow X$, έστω με τύπο $c(x) = x_0$. Έστω ακόμα ότι η συνάρτηση ομοτοπίας μεταξύ των f και c είναι η $F : S^1 \times I \longrightarrow X$. Για την F θα ισχύει δηλαδή ότι είναι συνεχής και ότι $F(x, 0) = f(x)$ και $F(x, 1) = c(x) = x_0$, χωρίς να μπορούμε βέβαια να πούμε κάτι για τον τύπο της.

Στο σημείο αυτό ας φανταστούμε το σύνολο $S^1 \times I$ ώς το τμήμα ενός κενού "σωλήνα" ή σαν ένα βραχιόλι. Οι προηγούμενες σχέσεις απλά μας λένε ότι, μέσω της F, η μία άκρα περιφέρεια του βραχιολιού (η $S^1 \times 1$) θα απεικονίζεται στο x_0 και η άλλη (η $S^1 \times 0$) στον κλειστό δρόμο f. Θεωρούμε την απεικόνιση $h : S^1 \times I \longrightarrow D^2$ με τύπο $h(x, t) = (1 - t)x$. Είναι εύκολο να δούμε και ότι, μέσω της h τώρα, η περιφέρεια $S^1 \times 1$ θα αντιστοιχίζεται στο 0 ενώ η $S^1 \times 0$ στην περιφέρεια του D^2. Αν επιπλέον φανταστούμε κάθετες γραμμές να ενώνουν τις δύο άκρες περιφέρειες του βραχιολιού, τότε αυτές απεικονίζονται μέσω της h σε ακτίνες του D^2. Τέλος παρατηρούμε ότι η $h : S^1 \times [0, 1) \longrightarrow D^2 \setminus \{0\}$ είναι ομοιομορφισμός. Οι διαδικασίες που μόλις περιγράψαμε απεικονίζονται καθαρότερα στο παρακάτω σχήμα:



Τα προηγούμενα μας οδηγούν με φυσικό τρόπο να σκεφτούμε οτι η ζητούμενη επέκταση της f είναι η συνάρτηση $g : D^2 \longrightarrow X$ με τύπο.

$$g(x) = \begin{cases} F \circ h^{-1}(x) & x \in D^2 \setminus \{0\} \\ x_0 & x = 0 \end{cases}$$

Είναι πράγματι φανερό ότι $g|_{S^1} = f$ (ότι πρόκειται δηλαδή για μία επέκταση της f).

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η g είναι και συνεχής. Πράγματι, όπως θα δείξουμε αμέσως μετά, η g μεταφέρει κλειστά υποσύνολα του D^2 σε κλειστά υποσύνολα του X άρα το ζητούμενο θα ισχύει.

Έστω κάποιο $A \subset X$ κλειστό. Τότε το σύνολο $F^{-1}(A) \subset S^1 \times I$ θα είναι κλειστό (αφού η είναι F συνεχής). Θέλουμε επιπλέον να είναι κλειστό και το σύνολο $h\big(F^{-1}(A)\big) = g^{-1}(A)$. Πράγματι η $h : S^1 \times I \longrightarrow D^2$ είναι κλειστή απεικόνιση διότι το $S^1 \times I$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και το D^2 ειναι T_2 χώρος[14] και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

"Αντίστροφο" $2 \Rightarrow 1$ Έστω λοιπόν ότι η $g : D^2 \longrightarrow X$ είναι μία συνεχής επέκταση της f. Με δεδομένο αυτό, θέλουμε να δείξουμε ότι θα υπάρχει κάποια σταθερή συνάρτηση $c : S^1 \longrightarrow X$ ομοτοπική της f. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε πως η συνάρτηση $F : S^1 \times I \longrightarrow X$ με τύπο $F(x,t) = g\big((1-t)x\big)$ είναι μία ομοτοπία μεταξύ της f και μίας τέτοιας c με τύπο $c(x) = g(0), \forall x \in S^1$. Πράγματι, η F είναι συνεχής (αφού η g είναι συνεχής) και ισχύουν οι σχέσεις $F(x,0) = g(x) = f(x)$ (αφού η F ορίστηκε για $x \in S^1$ και εκεί ισχύει $f = g$) και $F(x,1) = g(0) = c(x)$. Άρα $f \approx c$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. $\square$

Παρατήρηση. Ένας διαφορετικός τρόπος απόδειξης του προηγούμενου λήμματος είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g : D^2 \longrightarrow X$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x_0 & , 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ F\big(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\big) & , \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Το λήμμα συγκόλλησης μας εγκυάται ότι η g είναι συνεχής. Επιπλέον, για $x \in S^1$ είναι $\|x\| = 1$ άρα τότε $g(x) = F(x,0) = f(x)$ που σημαίνει ότι η g είναι πράγματι μία επέκταση της f στο δίσκο D^2.

Έστω τώρα τοπολογικοί χώροι X και Y. Έστω ακόμα f ένας κλειστός δρόμος στο $x_0 \in X$. Παρατηρούμε ότι από κάθε συνεχή συνάρτηση $h : X \longrightarrow Y$ με $h(x_0) = y_0$, επάγεται η συνάρτηση $h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ με $h_*\big([f]\big) = [h \circ f]$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η h_* είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός ομάδων. Δε θα δώσουμε όμως εδώ τις σχετικές αποδείξεις. Σημασία έχει για εμάς η πληροφορία που ακολουθεί και αφορά στη συνάρτηση αυτή.

[14] Χώρος T_2 (ή Hausdorff): δύο οποιαδήποτε σημεία μπορούν να διαχωριστούν από γειτονιές τους.

3.8.1 Ένα κρίσιμο Πόρισμα

Πόρισμα 1. *Αν η* $f : S^1 \longrightarrow Y$ *είναι nullhomotopic τότε* $f_* = 0$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει επέκταση $g : D^2 \longrightarrow Y$ της f. Έχουμε τα παρακάτω δύο διαγράμματα:

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & & Y \\
& D^2 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, b_0) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "i_*"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & & \pi_1(Y, f(b_0)) \\
& \pi_1(D^2, b_0) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Η μεταθετικότητα του πρώτου διαγράμματος εξασφαλίζει και τη μεταθετικότητα του δεύτερου και έτσι λαμβάνουμε $f_* = g_* \circ i_*$.

Όμως, από παράδειγμα 3.6.1, σελίδα 35, γνωρίζουμε ότι $\pi_1(D^2, b_0) = 0$. Επομένως $i_* = 0 = g_*$ και τελικά $f_* = 0$ όπως ζητούσαμε. $\square$

Κεφάλαιο 4

Η Απόδειξη του ΘΘΑ

Με τα εργαλεία που έχουμε αναπτύξει μέχρι και αυτό το σημείο, είμαστε πλέον σε θέση να επιχειρήσουμε μία απόδειξη του ΘΘΑ αφού όμως το διατυπώσουμε και πάλι με τον απαιτούμενο βέβαια τώρα μαθηματικό φορμαλισμό. Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί σε πέντε (5) διακριτά βήματα για λόγους ευκολίας στην ανάγνωση και κατανόησή της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (The Fundamental Theorem of Algebra)**.** *Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ βαθμού $n > 0$ με μιγαδικούς συντελεστές ($a_i \in \mathbb{C}$ για $i = 0, 1, ..., n-1$) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. **Βήμα 1** Προς αλλαγή μεταβλητής, θέτουμε $x = cy$ με $c \in \mathbb{C}$. Η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται τώρα ως εξής:

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \ldots + a_1(cy) + a_0 = 0 \iff$$
$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0$$

Παρατηρούμε οτι η νέα εξίσωση που λαμβάνουμε είναι ισοδύναμη της αρχικής, τουλάχιστον σε ότι αφορά αυτό που πρωτίστως εδώ μας ενδιαφέρει, το αν δηλαδή μηδενίζεται. Πράγματι είναι αρκετά εύκολο να ελέγξουμε οτι, εάν η y_0 είναι μία ρίζα της νέας, τότε και η $x_0 = cy_0$ θα είναι μία ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Επιπλέον, κατά την αλλαγή μεταβλητής που πραγματοποιήσαμε, ήμασταν βέβαια ελεύθεροι να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε c. Επιλέγουμε αυθαίρετα λοιπόν ένα c κατάλληλο ώστε να ισχύει $\sum_{i=0}^{n-1} |\frac{a_i}{c^{n-1}}| < 1$, δηλαδή το άθροισμα των απολύτων τιμών των συντελεστών της νέας μας εξίσωσης να είναι μικρότερο της μονάδας.

Όμως, ακριβώς επειδή το μετασχηματισμένο πρόβλημα ειναι όπως είπαμε πλήρως ισοδύναμο του αρχικού, μπορούμε με ασφάλεια και χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε το ίδιο και για τους συντελεστές της αρχικής μας εξίσωσης. Δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < 1$$

και να συνεχίσουμε να θεωρούμε την αρχική κατάσταση όπως διατυπώθηκε. Θα χρειαστούμε το αποτέλεσμα αυτό αργότερα, μέσα στην απόδειξη.

Βήμα 2 Προς απαγωγή σε άτοπο, θα υποθέσουμε ότι η εξίσωσή μας δεν έχει ρίζα.

Αν αυτό ισχύει, τότε μπορεί να οριστεί η συνεχής συνάρτηση $g : D^2 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με τύπο $g(x) = x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Η g είναι έτσι καλώς ορισμένη, αφού η υπόθεση που κάναμε μας εξασφαλίζει ότι πράγματι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D^2$.

Βήμα 3 Έστω ακόμη ότι $f = g|_{S^1}$. Παρατηρούμε τα εξής δύο:

1. Η f είναι nullhomotopic, δηλαδή $f \approx c_0$. Αυτό προκύπτει άμεσα απο το λήμμα 3, σελίδα 49.

2. Η f είναι ομοτοπική ως προς τη συνάρτηση $\kappa : S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με τύπο $\kappa(x) = x^n$. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση ομοτοπίας μεταξύ των f και κ. Στην προκειμένη περίπτωση είναι εύκολο να δούμε και ποιά θα μπορούσε να ειναι αυτή. Η συνάρτηση λοιπόν $F : S^1 \times I \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με τύπο

$$F(x,t) = x^n + t \cdot (a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

ικανοποιεί πλήρως τις προϋποθέσεις αφού είναι συνεχής (ώς πολυώνυμο), ισχύει $F(x,0) = \kappa(x)$ και $F(x,1) = f(x)$ και είναι καλώς ορισμένη. Για να δείξουμε ότι είναι καλώς ορισμένη, αρκεί να δείξουμε ότι $F(S^1 \times I) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ δηλαδή με άλλα λόγια ότι $F(x,t) \neq 0$ για κάθε $(x,t) \in S^1 \times I$. Πράγματι:

$$\big|F(x,t)\big| \geq |x|^n - t \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} |a_i||x|^i)$$

όμως $x \in S^1$ άρα $|x| = 1$ και τελικά

$$\big|F(x,t)\big| \geq 1 - t \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| > 0$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο Βήμα 1. Επομένως $f \approx \kappa$.

Βήμα 4 Απο τα 1 και 2 του προηγούμενου βήματος έχουμε $\kappa \approx f \approx c_0$ άρα (λόγω της μεταβατικότητας της ομοτοπίας[1]) συμπεραίνουμε και ότι $\kappa \approx c_0$. Από το πόρισμα 1, σελίδα 52 έπεται τότε άμεσα ότι $\kappa_* = 0$. Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε πως η συνάρτηση κ δρα ως $\kappa = i \circ h$ όπου

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{h} & S^1 & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & x^n & \longmapsto & x^n \end{array}$$

Επομένως, για τον επαγώμενο ομομορφισμό ομάδων $\kappa_* = i_* \circ h_*$ θα είναι

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^1,1) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(S^1,1) & \underset{\cong}{\xrightarrow{i_*}} & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}\,,\,1) \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

και ο τελευταίος ισομορφισμός προκύπτει από το παράδειγμα 3.4.1, σελίδα 27.

Βήμα 5 Επειδή $\kappa_* = 0$ θα πρέπει αναγκαστικά και $h_* = 0$. Θα δείξουμε όμως τώρα ότι η τελευταία σχέση δεν μπορεί να ισχύει, δηλαδή $h_* \neq 0$ και συνεπώς $\kappa_* \neq 0$.

Έστω $[\phi] \in \pi_1(S^1, 1)$ με $\phi : I \longrightarrow S^1$ και τύπο $\phi(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) = e^{2\pi i s}$. Τότε $h_*\big([\phi]\big) = [h \circ \phi]$ όπου $(h \circ \phi)(s) = (\cos 2\pi n s, \sin 2\pi n s)$.

Επίσης $\widetilde{\phi}(1) = 1$ και $(\widetilde{h \circ \phi})(1) = n$. Επομένως, αν μέσω ταυτίσεων θεωρήσουμε την απεικόνιση $h_* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ τότε έχουμε

$$h_*(1) = n \neq 0$$

Η υπόθεση που κάναμε μας οδήγησε λοιπόν σε άτοπο και επομένως η αρχική μας εξίσωση θα έχει πάντα μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Το ΘΘΑ μόλις αποδείχθηκε. $\square$

[1] Η ομοτοπία είναι όπως είπαμε μία σχέση ισοδυναμίας άρα ισχύει για αυτήν η μεταβατική σχέση. Για τη σχετική συζήτηση ανατρέξτε στο κεφάλαιο 3.3.1, σελίδα 25.

Κεφάλαιο 5

Αρμονικά Πολυώνυμα: Μία Εφαρμογή στην Αστροφυσική

Ένα μιγαδικό πολυώνυμο $h(x, y)$ που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace[1] $\Delta h = 0$, ονομάζεται αρμονικό[2]. Ένα τέτοιο πολυώνυμο, αν θέσουμε $z = x + iy$ και $\overline{z} = x - iy$, είναι εφικτό να πάρει εύκολα την ισοδύναμη μορφή $h(z) = p(z) - \overline{q(z)}$, όπου p και q μιγαδικά πολυώνυμα..

Στη δεκαετία 1990, οι Terry Sheil-Small και Alan Wilmshurst διερεύνησαν την ερώτηση του πως μπορεί να επεκταθεί το ΘΘΑ ώστε να αφορά και αρμονικά πολυώνυμα. Ο Sheil-Small κάνει το 1992 την εικασία ότι εάν ο βαθμός του p είναι μεγαλύτερος απο αυτόν του q, τότε το αρμονικό πολυώνυμο έχει το πολύ n^2 ρίζες, όπου n ο βαθμός του h. Αυτό είναι κρίσιμο διότι, λόγω της εμφάνισης όρων ως προς $\overline{z}$, υπάρχουν περιπτώσεις αρμονικών πολυωνύμων με άπειρες λύσεις[3]!

Το 1994, ο Wilmshurst πράγματι επιβεβαιώνει την εικασία αυτή και μάλιστα με ασθενέστερες ακόμα συνθήκες. Η απόδειξή του έγινε με χρήση μεθόδων Αλγεβρικής Γεωμετρίας (Θεώρημα Bézout).

ΘΕΩΡΗΜΑ (Wilmshurst). *Αν $h(z) = p(z) - \overline{q(z)}$ είναι αρμονικό πολυώνυμο βαθμού n και $\lim_{|x| \to +\infty} |h(z)| = +\infty$, τότε το h έχει το πολύ n^2 ρίζες.*

Επιπλέον, υπάρχουν μιγαδικά πολυώνυμα p και q με $deg(q) = n - 1$, ώστε το άνω φράγμα n^2 να επιτυγχάνεται.

[1] $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

[2] Ισοδύναμα, αρμονικό πολυώνυμο ονομάζεται μία συνάρτηση $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ με $h(z) = u(z) + iv(z)$ τέτοια ώστε οι πραγματικές συναρτήσεις u και v να είναι πραγματικά μέρη μιγαδικών πολυωνύμων. Δηλαδή υπάρχουν μιγαδικά πολυώνυμα $p_1(z)$ και $p_2(z)$ ώστε $u(z) = Re(p_1(z))$ και $v(z) = Re(p_2(z))$.

[3] Ένα παράδειγμα είναι το $h(z) = z^n + \overline{z}^n$.

Από τη στιγμή που αποδείχθηκε το παραπάνω θεώρημα και έπειτα, έχουμε την εμφάνιση ποικίλων μεθόδων οι οποίες αποσκοπούν στον εντοπισμό του πλήθους των ριζών αρμονικών πολυωνύμων. Ο Wilmshurst κάνει όμως και μία ακόμα εικασία: ότι υπάρχει ακόμα μικρότερο άνω φράγμα όταν οι βαθμοί των p και q διαφέρουν κατά περισσότερο από μία μονάδα.

Αρκετά αναπάντεχα, οι D. Khavinson και G. Swiatek αποδεικνύουν το 2001 ότι για την περίπτωση που $f(z) = p(z) - \overline{z}$ η εικασία Wilmshurst είναι ορθή. Βρίσκουν μάλιστα ότι το πλήθος των ριζών είναι εδώ το πολύ $3n - 2$. Δεδομένου ότι η απόδειξη έγινε με χρήση αναλυτικής δυναμικής, ο Pietro Poggi-Corradini διερωτάται εάν η προσέγγιση αυτή θα μπορούσε να γενικευτεί ώστε να βρεθεί ένα όριο και για το πλήθος των ριζών μίας ρητής αρμονικής συνάρτησης $f(z) = p(z)/q(z) - \overline{z}$. Το 2003, οι D. Khavinson και G. Neumann ασχολούνται με το θέμα αυτό και καταλήγουν στο φράγμα $5n - 5$ που είναι -προς μεγάλη τους έκπληξη- διαφορετικό απο το προηγούμενο. Παρά ταύτα, δεν μπορούν προς το παρόν να ξεκαθαρίσουν αν το άνω φράγμα που έδωσαν επιτυγχάνεται.

Αυτό που όμως σε καμία περίπτωση οι δύο τελευταίοι δεν είχαν φανταστεί, είναι πως η έρευνά τους βρέθηκε να εμφανίζει ισχυρή σύνδεση με ένα φαινόμενο που απαντάται στην Αστροφυσική, αυτό των *βαρυτικών φακών* (gravitational lensing). Σύμφωνα με το φαινόμενο αυτό, όταν μία μεγάλη μάζα παρεμβάλλεται μεταξύ μίας φωτεινής πηγής (π.χ. άστρο ή γαλαξίας) και ενός παρατηρητή, το πλήθος των ειδώλων που δημιουργούνται μπορεί να επηρεαστεί. Η ύπαρξη του φαινομένου προβλέφθηκε στις αρχές του 19ου αιώνα με χρήση Νευτώνιας Μηχανικής. Ο Einstein, στα πλαίσια της Γενική Θεωρίας της Σχετικότητας, έδωσε το 1915 μία πιο ακριβή πρόβλεψη ενώ το 1919 έχουμε μάλιστα και την πρώτη πειραματική ενίσχυσή του (κατά τη διάρκεια μία ηλιακής έκλειψης). Το πρώτο gravitational lensing σύστημα ανακαλύφθηκε πάντως αρκετά χρόνια αργότερα, το 1979.

Ο αστροφυσικός Sun Hong Rhie, μελετώντας λοιπόν το φαινομένο αυτό, είχε οδηγηθεί στο να εικάσει την πρόταση που οι Khavinson και Neumann κατάφεραν τελικά να αποδείξουν! Ο Rhie, ερευνώντας τον πιθανό αριθμό των ειδώλων που δημιουργούνται απο ένα σύστημα n ενδιάμεσων βαρυτικών μαζών, διατύπωσε την εικασία ότι ο αριθμός αυτός είναι το πολύ $5n - 5$. Η συνεισφορά του όμως σε μαθηματικό επίπεδο εντοπίζεται στο εξής: ο ίδιος είχε ήδη καταφέρει με έναν έξυπνο τρόπο να κατασκευάσει ένα παράδειγμα ρητής αρμονικής συνάρτησης που να επιτυγχάνει το άνω φράγμα $5n - 5$! Αυτό διαλύει τις αμφιβολίες που όπως ήδη αναφέραμε υπήρχαν. Η ανακάλυψη του Rhie, δε-

Einstein rings produced by a galaxy behind the lensing galaxy. The sources are actually extended and that is why one sometimes sees arcs rather than complete rings. Credit: Photo credit: NASA, ESA, and the SLACS Survey team: A. Bolton (Harvard/Smithsonian), S. Burles (MIT), L. Koopmans (Kapteyn), T. Treu (UCSB), and L. Moustakas (JPL/Caltech).

δομένης της ισχύος του αποτελέσματος των Khavinson και Neumann, ξεκαθαρίζει ότι ο αριθμός $5n - 5$ είναι το "sharp bound" του πλήθους των ριζών μίας ρητής αρμονικής συνάρτησης.

Έτσι, το θεώρημα αποκτά ένα εντελώς απρόσμενο ενδιαφέρον καθώς βρίσκει εφαρμογή σε ένα επιστημονικό πεδίο πέραν των καθαρών μαθηματικών. Παρότι αυτό φαινόταν αρχικά αρκετά απίθανο να συμβαίνει, προκύπτει τελικά ότι μπορεί κανείς πράγματι να μετρήσει τον αριθμό των ειδώλων ενός συστήματος, μετρώντας απλώς τον αριθμό των ριζών μίας ρητής αρμονικής συνάρτησης (που είναι ακριβώς το είδος συνάρτησης που μελετήθηκε).

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η μελέτη μας για το ΘΘΑ. Σε κάθε περίπτωση, το γεγονός ότι ένα τόσο καλά ριζωμένο, κομψό στην απλότητά του αλλά και εξαντλητικά μελετημένο μαθηματικό αποτέλεσμα βρίσκει μέχρι και σήμερα εντελώς νέες εφαρμογές, είναι από μόνο του τουλάχιστον αξιοθαύμαστο. Η έκπληξή μας τέλος δεν μπορεί παρά να είναι ακόμα μεγαλύτερη, όταν ένα καθαρά θεωρητικό αποτελέσμα όπως το ΘΘΑ βρίσκει εφαρμογές, όχι μόνο στον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών, αλλά και στην ίδια τη φυσική πραγματικότητα.

Παράρτημα Α□

Απόδειξη του Λήμματος Συγκόλλησης

Για λόγους ευκολίας, η απόδειξη του λήμματος θα γίνει για την περίπτωση που δύο μόνο κλειστά υποσύνολα X_1 και X_2 συνθέτουν το X (δηλαδή $X = X_1 \bigcup X_2$). Η προσαρμογή της απόδειξης ώστε αυτή να αφορά και την περίπτωση μίας ευρύτερης πεπερασμένης οικογένειας υποσυνόλων, γίνεται έτσι μάλλον προφανής.

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $f_1|_{X_1 \bigcap X_2} = f_2|_{X_1 \bigcap X_2}$, είναι προφανής η ύπαρξη μίας συνάρτησης $f : X \longrightarrow Y$ με $f|_{X_1} = f_1$ και $f|_{X_2} = f_2$. Αυτή θα μπορούσε να γραφτεί αναλυτικά ώς εξής:

$$f = \begin{cases} f_1 & \text{για } \ x \in X \setminus X_2 \\ f_1 \text{ ή } f_2 & \text{για } \ x \in X_1 \bigcap X_2 \\ f_2 & \text{για } \ x \in X \setminus X_1 \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση αυτή έχουμε τα παρακάτω δύο αποτελέσματα:

Είναι μοναδική. Αυτό είναι αρκετά προφανές. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει και κάποια άλλη $f' : X \longrightarrow Y$ με $f'|_{X_1} = f_1$ και $f'|_{X_2} = f_2$. Γνωρίζουμε ότι $f|_{X_1} = f_1$ και $f|_{X_2} = f_2$ άρα θα είναι και $f'|_{X_1} = f|_{X_1}$ και $f'|_{X_2} = f|_{X_2}$ που σημαίνει ασφαλώς ότι $f' = f$ παντού στο X.

Είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα μέσω της f οποιουδήποτε κλειστού υποσυνόλου του Y, είναι κλειστό σύνολο στο X. Έστω λοιπόν $B \subset Y$ κλειστό σύνολο για το οποίο ισχύει ότι $f^{-1}(B) \in X = X_1 \bigcup X_2$. Οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς συναρτήσεις επομένως τα σύνολα $f^{-1}(B) \bigcap X_1$ και $f^{-1}(B) \bigcap X_2$ θα είναι κλειστά. Άρα, αφού $f^{-1}(B) = \Big(f^{-1}(B) \bigcap X_1\Big) \bigcup \Big(f^{-1}(B) \bigcap X_2\Big)$, αυτό θα είναι επίσης κλειστό ως ένωση κλειστών συνόλων και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Παράρτημα Β□

Δύο ισοδύναμες διατυπώσεις του ΘΘΑ

Έχουμε πλέον πειστεί για την ισχύ της πρώτης διατύπωσης του ΘΘΑ ("τουλάχιστον μία ρίζα"). Βασιζόμενοι τώρα στο αποτέλεσμα αυτό, μπορούμε να αποδείξουμε και την παρακάτω πρόταση η οποία δεν αποτελεί παρά μία πιο ισχυρή εκδοχή του θεωρήματος.

> *Κάθε πολυώνυμο (μίας μεταβλητής) βαθμού n μεγαλύτερου ή ίσου της μονάδας και με μιγαδικούς συντελεστές, έχει* ***ακριβώς n ρίζες*** *στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, συμπεριλαμβανομένης της πολλαπλότητας των ριζών.*

Είναι προφανές πως εάν ένα πολυώνυμο διαθέτει ακριβώς n ρίζες, τότε θα διαθέτει και τουλάχιστον μία. Επομένως, αν καταφέρουμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο, θα έχουμε ουσιαστικά δείξει ότι οι δύο διατυπώσεις είναι πλήρως ισοδύναμες. Πράγματι, περί αυτού ακριβώς πρόκειται και για τον λόγο αυτό οι μαθηματικοί αναφέρονται στο ΘΘΑ επικαλούμενοι οποιαδήποτε απο τις δύο.

Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί εφαρμόζοντας διαδοχικές πολυωνυμικές διαιρέσεις. Υπενθυμίζουμε πως το Θεώρημα της Διαίρεσης Πολυωνύμων (ΘΔΠ) αναφέρει ότι:

Δοθέντων δύο πολυωνύμων $p(x)$ και $d(x) \neq 0$ υπάρχουν πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$ τέτοια ώστε

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

όπου $0 \leq deg\big(r(x)\big) < deg\big(d(x)\big)$ και deg ο βαθμός ενός πολυωνύμου.

Είμαστε πλέον σε θέση να περάσουμε στην απόδειξη της πρότασης.

Απόδειξη. Έστω λοιπόν $p(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτό έχει ακριβώς n ρίζες. Λόγω του ΘΘΑ, είμαστε βέβαιοι ότι το $p(x)$ θα διαθέτει μία τουλάχιστον ρίζα, έστω x_1 αυτή. Επομένως, ένας παράγοντας του $p(x)$ αναμένουμε να είναι και ο $d(x) = (x - x_1)$. Θα δείξουμε προς το παρόν ακριβώς αυτό.

Έστω λοιπόν τα πολυώνυμα $p(x)$ και $d(x) = (x - x_1)$, με το x_1 να είναι ρίζα του $p(x)$. Το ΘΔΠ μας εξασφαλίζει ότι θα υπάρχουν δύο επιπλέον πολυώνυμα $q(x)$ και $r(x)$, τέτοια ώστε το $p(x)$ να μπορεί να γραφτεί ως:

$$p(x) = q(x)(x - x_1) + r(x)$$

Όμως, πρέπει επίσης $0 \leq deg\big(r(x)\big) < deg(x - x_1) = 1$ και επομένως $deg\big(r(x)\big) = 0$. Άρα το $r(x)$ θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έστω λοιπόν:

$$p(x) = q(x)(x - x_1) + c$$

Το x_1 είναι όμως μία ρίζα του $p(x)$ και επομένως, θέτοντας $x = x_1$ στην παραπάνω εξίσωση, λαμβάνουμε $c = 0$. Τελικά έχουμε:

$$p(x) = q(x)(x - x_1)$$

όπως ακριβώς αναμέναμε. Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε επίσης ότι, αφού $deg\big(p(x)\big) = n$, θα είναι αναγκαστικά και $deg\big(q(x)\big) = n - 1$.

Παρατηρούμε τώρα το εξής: λόγω του ΘΘΑ, το $q(x)$ με τη σειρά του θα έχει και αυτό τουλάχιστον μία ρίζα, έστω x_2 αυτή. Επομένως, όλη η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί τώρα και για το $q(x)$ και έτσι το $p(x)$ θα πάρει τη μορφή

$$p(x) = q'(x)(x - x_2)(x - x_1)$$

όπου το $q'(x)$ είναι πλέον πολυώνυμο βαθμού $n-2$. Στην ειδική περίπτωση που $x_1 = x_2$, θα είναι $p(x) = q(x)(x - x_1)^2$ και το x_1 είναι -προς το παρόν- διπλή ρίζα.

Προφανώς μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι έως ότου εξαντλήσουμε όλους τους βαθμούς του $q(x)$, με τελικό προορισμό ένα πολυώνυμο βαθμού 1. Είμαστε λοιπόν βέβαιοι ότι, στο τέλος της διαδικασίας αυτής, το $p(x)$ θα έχει παραγοντοποιηθεί πλήρως σε n στο πλήθος γραμμικούς (πρωτοβάθμιους) παράγοντες. Αν επιπλέον κάποιοι από αυτούς τους παράγοντες είναι ίδιοι (όπως π.χ. στην περιπτωση $x_1 = x_2$), τότε κάποιες απο τις ρίζες θα έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας. Το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] John B. Freleigh: *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Έκδοση 7 (2009)

[2] Joseph J. Rotman: *An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag (1988)

[3] B. Fine and G. Rosenberger: *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag (1997) (μετάφραση στα Ελληνικά από τις εκδόσεις Leader Books το 2001)

[4] D. Khavinson and G. Newmann, *From the Fundamental Theorem of Algebra to Astrophysics: A Harmonious Path*, Notices of the American Math. Soc. Vol.55,6, (June/July 2008)

Η μαθηματική έρευνα που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, βασίστηκε κατά κύριο λόγο στη χρήση σημειώσεων ενός μεταπτυχιακού μαθήματος Αλγεβρικής Τοπολογίας που μου σύστησε ο κ. Αρβανιτάκης. Τα δύο πρώτα συγγράμματα της βιβλιογραφίας εξυπηρέτησαν περισσότερο ως βοηθήματα για τη διευκρίνιση πολλών μαθηματικών εννοιών που εμφανίζονται στο κείμενο.

Το τρίτο βιβλίο δεν χρησιμοποιήθηκε εδώ. Μπορεί όμως να φανεί χρήσιμο στον αναγνώστη που επιθυμεί να εμβαθύνει ακόμα περισσότερο στο θέμα καθώς παρέχει πληθώρα διαφορετικών επιπλέον αποδείξεων του ΘΘΑ, προερχόμενες απο ποικίλες άλλες περιοχές των μαθηματικών. Δίνεται μάλιστα έως και μία εκδοχή της αυθεντικής απόδειξης του Gauss.

Έγινε τέλος χρήση μίας ανεπτυγμένης μορφής διάλεξης (2008) του καθηγητή Πανεπιστημίου Αθηνών, Σοφοκλή Κ. Μερκουράκη, με τίτλο “Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας- Μια στοιχειώδης απόδειξη” καθώς επίσης και μίας παρουσίασης (2012) του μαθήματος “Ιστορία των Μαθηματικών” του καθηγητή Α.Π.Θ, Χ. Χαραλάμπους. Τα δύο αυτά κείμενα, μπορούν να βρεθούν αυτούσια στο διαδίκτυο.