Προσδιοριστότητα Παιγνίων και Εφαρμογές

Μιλτιάδης Καραμανλής

Επιβλέπων: Αλέκος Αρβανιτάκης Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Προσδιοριστότητα Παιγνίων και Εφαρμογές

Μιλτιάδης Καραμανλής

σε όλους...

Πρόλογος

Η προσδιοριστότητα παιγνίων είναι μια μαθηματική έννοια η οποία γεννήθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα με αφορμή το σκάκι. Από τότε η έρευνα γύρω από αυτή την έννοια υπήρξε πολύ έντονη με αποτελέσματα που επηρεάζουν βαθιά τα θεμέλια των μαθηματικών. Συγχρόνως τεχνικές και αποτελέσματα από την μελέτη της προσδιοριστότητας έχουν βρει εφαρμογές σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών όπως την ανάλυση την τοπολογία και την συνδυαστική.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προσπάθησα να συγκεντρώσω εκείνα τα στοιχεία της θεωρίας, που θα βοηθήσουν τον ενδιαφερόμενο να πάρει μια ιδέα για το τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα παίγνιο είναι προσδιοριστό τις γενικές ιδιότητες αυτών των παιγνίων και πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τέτοιου είδους αποτελέσματα σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Εκτός από ενός βαθμού μαθηματική ωριμότητα και λίγη άνεση με βασικές έννοιες από την τοπολογία και την θεωρία ομάδων το μόνο που πιστεύω ότι χρειάζεται κανείς για να παρακολουθήσει την ροή της εργασίας είναι η διάθεση για εξερεύνηση.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Αλέκο Αρβανιτάκη για την αμέριστη συμπαράσταση που έδειξε, τον Αριστοτέλη ο οποίος μου υπέδειξε μια πολύ ενδιαφέρουσα πτυχή επί του θέματος, τον Νίκο για την βοήθεια στα σχήματα, τον Γιάννη για την παρέα, τον σύλλογο ΠΠΣΑ-ΟΥΑ για την θετική του ενέργεια καθώς επίσης την μητέρα μου, τον πατέρα μου, τον ξάδερφο της κοπέλας του αδερφού μου, τον κουμπάρο του μπατζανάκη του Βίκτωρα και τα δύο μου αδέρφια. Για οποιαδήποτε λάθη τυπογραφικά, ορθογραφικά, γραμματικά ή λογικά μοναδικός υπεύθυνος είμαι εγώ και πραγματικά θα ήθελα πολύ αν κάποιος ανακαλύψει λάθη να με ενημερώσει μέσω email ώστε να προβώ στην διόρθωση τους.

Ελλάδα, Αθήνα — *Μιλτιάδης Καραμανλής*
kararemilt@gmail.com

Μάρτιος 2015

Περίληψη

Εισαγωγή

Στην εισαγωγή αυτής της εργασίας αρχικά δίνουμε κάποια ιστορικά στοιχεία σχετικά με την μελέτη και την χρήση των παιγνίων ως κλάδο των μαθηματικών. Δίνουμε έμφαση στα παίγνια δύο παικτών τέλειας πληροφορίας και την έννοια της προσδιοριστότητας αυτών, δηλαδή την ύπαρξη νικητήριας στρατηγικής για έναν από τους δύο παίκτες.

Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των ακολουθιακών δέντρων, του σώματος ενός δέντρου, της έννοιας του παιγνίου και της στρατηγικής και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες τους. Μετά την εισαγωγή της έννοιας της προσδιοριστότητας δίνουμε παραδείγματα προσδιοριστών και μη προσδιοριστών παιγνίων αναδεικνύοντας την ανάγκη μελέτης αυτής της έννοιας.

Κεφάλαιο 2^o

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε μια τοπολογική δομή στο σώμα του δέντρου περιγράφουμε την βάση της τοπολογίας αυτής και αποδεικνύουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του σώματος ενός δέντρου είναι το σώμα κάποιου υποδέντρου. Στην συνέχεια δίνεται μια απόδειξη του θεωρήματος των Gale και Steward για την προσδιοριστότητα των παιγνίων με ανοιχτό ή κλειστό payoff set.

Αφού αναδείξουμε την κακή συμπεριφορά των προσδιοριστών συνόλων σε σχέση με τις συνολοθεωρητικές πράξεις, η οποία γίνεται αντιληπτή μέσω ενός παραδείγματος ενός προσδιοριτού συνόλου του οποίου το συμπλήρωμα δεν είναι προσδιοριστό, δίνουμε ικανές συνθήκες ώστε η προσδιοριστότητα όλων των στοιχείων μίας κλάσης υποσυνόλων να συνεπάγεται από την προσδιοριστότητα της συμπληρωματικής κλάσης. Στην επόμενη ενότητα κάνουμε την παρατήρηση ότι η τοπολογία την οποία έχουμε εισάγει στο σώμα του δέντρου είναι πλήρως μετρικοποιήσιμη και συγκεκριμένα μέσω μιας υπερμετρικής γεγονός το οποίο της προσδίδει ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Το κεφάλαιο τελειώνει με την περιγραφή της σ-άλγεβρας των borel υποσυνόλων του χώρου ενώ αποδεικνύονται κάποιες βασικές ιδιότητες της ιεραρχίας των borel υποσυνόλων που στην ουσία μας επιτρέπουν την χρήση επαγωγικών και αναδρομικών τεχνικών μεθόδων απόδειξης.

Κεφάλαιο 3^o

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του περίφημου θεωρήματος του Martin για την προσδιοριστότητα των borel υποσυνόλων του σώματος ενός δέντρου. Αφού δοθούν οι αναγκαίοι ορισμοί ακολουθούμε την δεύτερη επαγωγική απόδειξη του θεωρήματος εξετάζοντας αναλυτικά κάθε βήμα του περίπλοκου και συνάμα όμορφου συλλογισμού του Martin.

Κεφάλαιο 4^o

Σε αυτό το κεφάλαιο γυρίζουμε σελίδα και μπαίνουμε στον κλάδο της borel συνδυαστικής. Με εργαλεία της θεωρίας ομάδων και της περιγραφικής θεωρίας συνόλων αυτή η περιοχή των μαθηματικών ασχολείται με τον borel χρωματισμό γραφημάτων και τις borel κλάσεις ισοδυναμίας πρότυπων borel χώρων και έχει συνδέσεις με τομείς όπως η θεωρία μοντέλων και η θεωρητική πληροφορική.

Σταδιακά δίνοντας του κατάλληλους ορισμούς διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το κύριο λήμμα μιας πρόσφατης δουλειάς του Adrew Marks το οποίο έχει αποδειχθεί καρποφόρο στην συγκεκριμένη περιοχή. Κύριο χαρακτηριστικό της απόδειξης είναι ο πρωτότυπος τρόπος με τον οποίο γίνεται η χρήση του θεωρήματος του Martin για την κατασκευή μιας συνάρτησης κάνοντας χρήση αριθμίσιμων σε πλήθος διαφορετικών παιγνίων με ένα προσεκτικά επιλεγμένο payoff set. Κλείνοντας την εργασία αυτή δίνουμε κάποιες από τις εφαρμογές του λήμματος.

Summary

Introduction

During the introduction of this thesis we first give some historical elements that concern the study and the uses of mathematical games. Our main concern is two player games of perfect information and the notion of their determinacy i.e the existence of a winning strategy for one of the two players.

After that we give the definition of sequential trees, the set of outcomes (the body of the tree), the definition of a game and that of the strategy, proving at the same time some of their basic properties. After we introduce the notion of determinacy we give some examples of determined and non determined games bringing out the need for further exploration of the subject.

2^{nd} **Chapter**

In this chapter we equip the body of an arbitrary tree with a topological structure we give an characterization of the topological base and we prove that there is a one to one correspondence of the closed sets and the bodies of the sub trees of the original tree. Afterwards we state and prove the

well know theorem of Gale and Steward about the determinacy of the games with open or closed payoff set and we give some examples which highlight the bad behavior of determined sets concerning the set theoretic operations we give sufficient conditions for the determinacy of a class of sets to imply the determinacy of the dual class of the complements.

The next section has to do with some topological properties of the body of the tree i.e that it is completely metrizable from an ultra metric which gives rise to some interesting properties. The chapter ends with the description of the borel hierarchy and the proof of the more basic closure properties which will help us develop the inductive proof of the main theorem.

3^{rd} **Chapter**

This chapter is completely dedicated to the inductive proof of the famous result about borel determinacy due to Martin. After the introduction of some notions we follow closely Martin through his complicated but still very beautiful reasoning.

4^{th} **Chapter**

In this chapter we dive into the world of borel combinatorics. With tools from group theory and descriptive set theory this area of mathematics studies the coloring of borel graphs and borel equivalence relations on standard borel spaces.

After we set the field with some basic definitions we formulate the main lemma of a recent work of Andrew Marks which has been considerably fruitful in borel combinatorics. The main characteristic of the proof of the lemma is the innovative way that Marks uses Martins result to construct a function by the use of countably infinite games with a clever and carefully pick of the payoff set. We finish this thesis giving some of the mentioned applications.

Περιεχόμενα

1 Ιστορική αναδρομή

Το πρώτο δημοσιευμένο μαθηματικό θεώρημα με θέμα τα παίγνια αποδείχτηκε από τον Ernst Zermelo το 1913 σε ένα άρθρο του [21] το οποίο αφορούσε το συνηθισμένο Σκάκι. Στο άρθρο ο Zermelo ασχολείται με παίγνια δύο παικτών στα οποία απουσιάζει ο παράγοντας τύχη και οι δύο παίκτες έχουν τελείως αντίθετα συμφέροντα. Τα κύρια ερωτήματα που θέτει στο άρθρο είναι πρώτον τι σημαίνει για έναν παίκτη να βρίσκεται σε μία νικηφόρα θέση και δεύτερον πόσο γρήγορα μπορεί να φτάσει στην νίκη (Schwalbe and Walker [16]).

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα χρησιμοποιώντας πιο σύγχρονη ορολογία ένα παίγνιο στο οποίο στην αρχική "θέση" υπάρχει για έναν από τους δύο παίκτες μια *νικητήρια στρατηγική* (**winning strategy**) για έναν από τους δύο παίκτες καλείται *προσδιοριστό* (**determined**).

Το πλαίσιο στο οποίο κυρίως αναπτύχθηκε η μελέτη της προσδιοριστότητας αφορά τα ντετερμινιστικά ακολουθιακά παίγνια δύο παικτών τέλειας πληροφορίας τα οποία αποτελούν κύριο εργαλείο της *περιγραφικής θεωρίας συνό-*

λων (**descriptive set theory**). Αναπόσπαστο χαρακτηριστικό ενός μαθηματικού παιγνίου είναι το σύνολο που περιγράφει την συνθήκη νίκης (**payoff set**) και κινητήρια δύναμη της έρευνας γύρω από αυτές της έννοιες είναι η διαπίστωση ότι σύνολα που αντιστοιχούν σε προσδιοριστά παίγνια παρουσιάζουν κάποιες καλές ιδιότητες που συχνά αναφέρονται με τον όρο **regularity properties**.

Ένα μεγάλο μέρος της θεωρίας που έχει αναπτυχθεί αφορά αξιωματικά συστήματα που περιλαμβάνουν υποθέσεις για την προσδιοριστότητα διαφόρων κλάσεων συνόλων. Με τέτοιου είδους αποτελέσματα δεν θα ασχοληθούμε εδώ αλλά μια πολύ πλήρης ιστορική προσέγγιση του θέματος μπορεί να βρει κανείς στο Larson [8].

Κάποια πρώιμα αποτελέσματα σχετικά με την προσδιοριστότητα διαφόρων παιγνίων ήρθαν από τους Stanis law Mazur, Stefan Banach, Dénes Kőnig, László Kálmar, John von Neumann, Oskar Morgenstern και Ulam. Με ένα άρθρο των David Gale και Frank Stewart [5] στο οποίο μεταξύ άλλων απέδειξαν ότι όλα τα παίγνια των οποίων το payoff set είναι ανοιχτό είναι προσδιοριστά ξεκίνησε μια ιδιότυπη κούρσα. Σκαρφαλώνοντας την ιεραρχία των borel συνόλων οι Mycielski Jan, Swierczkowski και Zieba Andrzej [14] δείξανε ότι τα G_δ και τα F_σ σύνολα είναι προσδιοριστά ενώ ο Morton Davis [3] απέδειξε το ίδιο για τα $F_{\sigma\delta}$ και τα $G_{\delta\sigma}$.

Το αποτέλεσμα του Davis παρέμεινε χωρίς βελτίωση για παραπάνω από μια δεκαετία στην διάρκεια της οποίας η έρευνα που αφορούσε αξιώματα προσδιοριστότητας έγινε πολύ δημοφιλής. Τελικά το 1975 ο Martin [11] απέδειξε ότι όλα τα παίγνια των οποίων το payoff set είναι borel είναι προσδιοριστά κλείνοντας ένα μεγάλο κεφάλαιο.

Οι λόγοι για τους οποίους το πρόβλημα που έλυσε ο Martin είναι σημαντικό είναι πολλοί. Εκτός από τα εργαλεία και τις τεχνικές που δημιουργήθηκαν για την επίλυση προβλημάτων περί της προσδιοριστότητας παιγνίων, προέκυψαν καινούργιες θεωρητικές έννοιες που εξακολουθούν να διαμορφώνουν τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και κατανοούμε τα θεμέλια των μαθηματικών. Ένα ακόμα αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι σε ένα άρθρο του ο Friendman [4] το 1971 απέδειξε ότι η προσδιοριστότητα δεν μπορούσε να αποδειχθεί στην θεωρία ZC δηλαδή στην ZF συνολοθεωρία χωρίς το αξίωμα της αντικατάστασης αλλά με το αξίωμα της επιλογής. Έτσι το θεώρημα του Martin είναι το πρώτο μαθηματικό θεώρημα που αποδεδειγμένα χρειάζεται την πλήρη ισχύ του αξιώματος της αντικατάστασης για να αποδειχθεί.

2 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς που αφορούν τα παίγνια δύο παικτών τέλειας πληροφορίας και θα αναπτύξουμε το μαθηματικό υπόβαθρο που είναι αναγκαίο για την περιγραφή και επίλυση των προβλημάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε. Για μια πιο περιεκτική εισαγωγή στη περιγραφική θεωρία συνόλων υπάρχουν τα κλασσικά συγγράμματα του Γιάννη Μοσχοβάκη [13] και του Αλέκου Κεχρή [6].

2.1 Παίγνια δύο παικτών τέλειας πληροφορίας

Αν και στη μαθηματική θεωρία παιγνίων χρησιμοποιούνται πολλών ειδών μοντέλα εμείς θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με παίγνια δύο παικτών τα οποία χαρακτηρίζονται από τις εξής ιδιότητες: Είναι ακολουθιακά δηλαδή οι παίκτες δεν παίζουν ταυτόχρονα αλλά πραγματοποιούν διαδοχικά τις κινήσεις τους. Είναι παίγνια τέλειας πληροφορίας δηλαδή κάθε παίκτης γνωρίζει τις προηγούμενες αλλά και τις δυνατές επόμενες κινήσεις του αντιπάλου του. Τέλος είναι ντετερμινιστικά δηλαδή δεν υπάρχει ο παράγοντας της τύχης και η αλληλουχία κινήσεων των παικτών καθορίζει μονοσήμαντα το αποτέλεσμα του παιγνίου.

Πολλά πραγματικά παίγνια χαρακτηρίζονται από τις παραπάνω ιδιότητες. Υπάρχουν επίσης πολλές διεργασίες του πραγματικού κόσμου που μπορούν να μοντελοποιηθούν με αυτό τον τρόπο. Αξιοσημείωτο είναι επίσης, ότι με την χρήση των παιγνίων τέλειας πληροφορίας (και όχι μόνο) μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ακόμα και μαθηματικές αποδείξεις έτσι ώστε η μελέτη τους να ανατροφοδοτεί τα μαθηματικά με καινούργιες τεχνικές και αποτελέσματα.

Ας ξεκινήσουμε ξεκαθαρίζοντας κάποια πράγματα σχετικά με τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε από εδώ και στο εξής σε αυτή την εργασία. Σε όλο το κείμενο το ω θα χρησιμοποιείται για να συμβολίζουμε τον πρώτο άπειρο πληθάριθμο ενώ το σύμβολο $\mathbb{N}$ θα χρησιμοποιείται για το σύνολο των φυσικών αριθμών. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $n \in \omega$. Το X^n είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών στοιχείων του X με n όρους με την σύμβαση ότι $X^0 := \{\emptyset\}$. Έστω επίσης ότι $X^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} X^n$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στο X και $X^\omega := \left\{ \, (x_n)_{n\in\omega} : s_n \in X \, \right\}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών απείρων όρων στοιχείων του X. Για τα στοιχεία του X θα χρησιμοποιούμε γράμματα όπως $x, y, \ldots$ για τα στοιχεία του $X^{<\omega}$ θα χρησιμοποιούμε γράμματα όπως $s, t, \ldots$ ενώ τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ θα τα χρησιμοποιούμε για να συμβολίζουμε στοιχεία του X^ω.

Αν $s = (x_k)_{k=0}^{n-1}$ και $t = (y_k)_{k=0}^{m-1}$ γράφουμε $s \sqsubseteq t$ ανν $n \leq m$ και για κάθε $k < n$ ισχύει ότι $x_k = y_k$. Στην παραπάνω περίπτωση θα λέμε ότι η s είναι *αρχικό τμήμα* (**initial segment**) της t ή ότι η t είναι μια *επέκταση* (**extention**) της s. Η σχέση $\sqsubseteq$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $X^{<\omega}$ και με $\sqsubset$ θα συμβολίζουμε την αντίστοιχη αυστηρή εκδοχή της. Αν $\mathbf{x} \in X^\omega$ και $n \in \omega$ τότε γράφουμε $\mathbf{x}{\restriction_n} := (x_k)_{k=0}^{n-1}$ για τον περιορισμό του $\mathbf{x}$ στο n με τη σύμβαση ότι $\mathbf{x}{\restriction_0} = \emptyset$. Αν

$s \in X^{<\omega}$ γράφουμε $s \sqsubset x$ αν για κάθε $n \in \omega$ είτε $s \sqsubseteq x{\restriction}_n$ είτε $x{\restriction}_n \sqsubseteq s$ δηλαδή αν η s είναι ένα αρχικό τμήμα της **x**.

Θεωρούμε το εξής παίγνιο δύο παικτών: Έστω $A \subset X^\omega$ το σύνολο αυτό το ονομάζουμε *σύνολο νίκης* (**payoff set**). Ο παίκτης I ξεκινά και επιλέγει ένα στοιχείο του X, στην συνέχεια ο παίκτης II επιλέγει και αυτός ένα στοιχείο του X και το παιχνίδι συνεχίζεται επ' άπειρον με τον ίδιο τρόπο. Λέμε ότι ο παίκτης I κερδίζει αν η ακολουθία απείρων όρων που θα σχηματιστεί μετά την λήξη του παιγνίου ανήκει στο A ενώ αλλιώς κερδίζει ο παίκτης II. Το παίγνιο αυτό θα το συμβολίζουμε με $G_A(X)$.

Το παραπάνω παίγνιο είναι πολύ απλό και ουσιαστικά οι δύο παίκτες έχουν απόλυτη ελευθερία κινήσεων. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε τους επιπλέον κανόνες που μπορεί έχει ένα παίγνιο θα χρειαστούμε την έννοια του δέντρου.

Ορισμός 2.1 Έστω $T \neq \emptyset$ και $\leq$ μια μερική διάταξη. Το ζεύγος $(T, \leq)$ λέγεται *δέντρο* (**tree**) αν για κάθε $t \in T$ το σύνολο $\{\ s \in T : s \leq t\ \}$ διατεταγμένο από την $\leq$ είναι μια καλή διάταξη.

Προσοχή χρειάζεται στο γεγονός ότι ο παραπάνω ορισμός είναι γενικότερος του γραφο-θεωρητικού ορισμού του δέντρου. Όπου δεν υπάρχει πρόβλημα αμφισημίας ως προς την διάταξη που χρησιμοποιούμε θα γράφουμε "το δέντρο T" αντί του $(T, \leq)$. Ένα στοιχείο $s \in T$ λέγεται *κόμβος* (**vertice**) του T και αν $s \leq t$ λέμε ότι ο s είναι ένας προηγούμενος (κόμβος) του t ενώ ο t είναι ένας επόμενος του s.

Παράδειγμα 2.2 Το $\mathbb{N}^{<\omega}$ διατεταγμένο από την $\sqsubseteq$ είναι ένα δέντρο το οποίο μάλιστα κωδικοποιεί τους κανόνες του παιγνίου που περιγράψαμε παραπάνω. Αν οι κανόνες τους παιγνίου απαιτούσαν η επιλογή κάθε παίκτη να είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από την τελευταία επιλογή τους άλλου παίκτη τότε το δέντρο που θα τους περιέγραφε είναι το σύνολο όλων των αύξουσων πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών διατεταγμένο από την $\sqsubseteq$.

Υποδέντρο (**subtree**) T' ενός δέντρου T λέγεται ένα υποσύνολο του T εφοδιασμένο με την επαγώμενη διάταξη.

Ορισμός 2.3 Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $T \subset X^{<\omega}$. Το $(T, \sqsubseteq)$ θα λέγεται *(ακολουθιακό) δέντρο στο* X (**sequential tree on** X) αν $\sqsubseteq$ είναι είναι η διάταξη της επέκτασης ακολουθιών που περιγράψαμε παραπάνω και για κάθε $s \in T$ ισχύει ότι $\{ t \in X^{<\omega} : t \sqsubseteq s \} \subset T$ δηλαδή το T είναι κλειστό στα αρχικά τμήματα.

Έτσι έχουμε δύο τρόπους να σκεφτόμαστε τα στοιχεία του T, είτε ως πεπερασμένες ακολουθίες είτε ως κόμβους. Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό και την ορολογία που μας βολεύει ανάλογα την περίπτωση.

Έστω T ένα δέντρο στο X. Αν $s, t \in T$ δύο κόμβοι του T και κανείς από τους δύο δεν είναι επέκταση του άλλου τότε λέμε ότι οι s και t είναι *ασύγκριτοι* (**incompatible**) και γράφουμε $s \perp t$, σε αντίθετη περίπτωση λέμε ότι είναι *συγκρίσιμοι* (**compatible**).

Το δέντρο T λέγεται *κλαδεμένο* (**pruned**) αν για κάθε $s \in T$ υπάρχει $t \in T$ τ.ω $s \sqsubset t$, δηλαδή αν κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον μία γνήσια επέκταση. Για κάθε κόμβο $s = (x_k)_{k=0}^{n-1} \in T$ το μήκος του s ορίζεται ως $|s| = n$. Αν $s, t \in T$ ο t λέγεται αμέσως επόμενος του s αν $s \sqsubset t$ και $|s| + 1 = |t|$. Για κάθε $n \in \omega$ το n-οστό επίπεδο του δέντρου είναι το σύνολο $T^n := \{ s \in T : |s| = n \}$ ενώ περιγράφουμε τα n πρώτα επίπεδα του δέντρου χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $T^{\leq n}$. Αν $s = (x_k)_{k=0}^{n-1}$ και $t = (y_k)_{k=0}^{m-1}$ δύο πεπερασμένες ακολουθίες τότε ορίζουμε την *παράθεση* (**concatenation**) τους $s^\frown t$ ως την ακολουθία $(x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{m-1})$. Ένας κόμβος $s = (x_k)_{k=0}^{n-1} \in T$ μπορεί να έχει περισσότερους από έναν αμέσως επόμενους, αντίθετα έχει έναν μοναδικό αμέσως προηγούμενο ο οποίος είναι ο μοναδικός $t \in T$ για τον οποίο υπάρχει $x \in X$ ώστε $t^\frown(x) = s$.

Έστω T ένα δέντρο στο X. Για ένα κόμβο $s \in T$ ορίζουμε ως $T(s)$ το υποδέντρο του T που αποτελείται από όλους τους κόμβους που είναι συγκρίσιμοι με τον s (δηλαδή όλους τους περιορισμούς και τις επεκτάσεις της s), έτσι έχουμε ότι $T(s) = \{ t \in T : t \sqsubset s \text{ ή } s \sqsubseteq t \}$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σύνολο όλων των αμέσως επόμενων κόμβων ενός κόμβου s είναι το $T^{|s|+1}(s)$. Σώμα του δέντρου T λέγεται το σύνολο

$$[T] \coloneqq \{ \mathbf{x} \in X^\omega : \forall n \in \omega(\mathbf{x}\restriction_n \in T) \} \subset X^\omega$$

ενώ αν $A \subset [T]$ και s κόμβος του T τότε $A(s) \coloneqq A \cap [T(s)]$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν T_1, T_2 δύο δέντρα στο X τότε $[T_1] \cap [T_2] = [T_1 \cap T_2]$.

Τα δέντρα είναι ένας φυσικός τρόπος περιγραφής όλων των δυνατών καταστάσεων ενός παιγνίου. Παρόλο που δεν είναι απαραίτητο, από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε κάποιο δέντρο T θα εννοούμε ότι είναι ένα κλαδεμένο δέντρο σε κάποιο σύνολο X χωρίς αυτό να βλάψει την γενικότητα των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε. Σε ότι ακολουθεί όταν γράφουμε το παίγνιο $G(T, A)$ θα εννοούμε το παίγνιο με "κανόνες" που περιγράφονται από το κλαδεμένο δέντρο T στο X και payoff set το $A \subset [T]$. Επίσης θα θεωρούμε ότι το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία για να αποφύγουμε τα τετριμμένα παίγνια.

Μία πολύ σημαντική έννοια της θεωρίας παιγνίων είναι αυτή της *στρατηγικής* (**strategy**). Ως στρατηγική για έναν παίκτη εννοούμε ένα σχέδιο δράσης του παίκτη σε κάθε δυνατή κίνηση του παίκτη II. Έτσι μια στρατηγική για τον παίκτη I του υπαγορεύει μία ακριβώς "κίνηση" κάθε φορά που είναι η σειρά του να παίξει προκαθορίζοντας ουσιαστικά όλες τις κινήσεις του παίκτη I ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα κινηθεί ο παίκτης II.

Ένας κλασσικός μαθηματικός ορισμός της έννοιας της στρατηγικής είναι ο εξής: Έστω T ένα δέντρο σε ένα σύνολο X. Μία στρατηγική για τον παίκτη I στο δέντρο T είναι μια συνάρτηση σ_I η οποία σε κάθε κόμβο s άρτιου μήκους του T αντιστοιχεί ένα στοιχείο του X τ.ω $s^\frown(x) \in T$. Αντίστοιχα ορίζουμε και την στρατηγική για τον παίκτη II.

Αν και ο παραπάνω ορισμός είναι εύλογος είναι πλεονάζων διότι αν πχ η στρατηγική του παίκτη I καθορίζει ως πρώτη κίνηση το στοιχείο x δεν έχει νόημα το πεδίο ορισμού της να περιέχει ακολουθίες των οποίων ο πρώτος όρος είναι διαφορετικός από το x.

Είναι πιο πρακτικό να σκεφτόμαστε τις στρατηγικές στην γλώσσα των δέντρων και των κόμβων. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα παίγνιο $G(T, A)$ ο παίκτης I παίζει πρώτος και επιλέγει του κόμβους περιττού μήκους δηλαδή επιλέγει τους περιττούς όρους της ακολουθίας και ο παίκτης II τους άρτιους. Για τον παίκτη I μία στρατηγική σ_I είναι ένα υποδέντρο του T με την ιδιότητα ότι έχει ακριβώς ένα κόμβο μήκους 1, περιλαμβάνει όλους τους αμέσως επόμενους του, για κάθε έναν από αυτούς περιλαμβάνει ακριβώς έναν αμέσως επόμενο τους και θα συνεχίζει να διακλαδώνεται με τον ίδιο τρόπο. Έτσι καταλήγουμε στον παρακάτω μαθηματικό ορισμό της στρατηγικής ενός παίκτη.

Ορισμός 2.4 Έστω $X \neq \emptyset$ και T ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο στο X. Στρατηγική για τον παίκτη I καλείται ένα υποδέντρο σ_I του T με τις εξής ιδιότητες:

(*i*) $\emptyset \in \sigma_I$ (η κενή ακολουθία ανήκει στο σ_I).

(*ii*) Για κάθε $s \in \sigma_I$ με $|s|$ άρτιο υπάρχει ακριβώς ένας αμέσως επόμενος κόμβος $t \in T^{|s|+1}(s)$ ώστε $t \in \sigma_I$.

(*iii*) Για κάθε $s \in \sigma_I$ με $|s|$ περιττό $T^{|s|+1}(s) \subset \sigma_I$ δηλαδή όλοι οι αμέσως επόμενοι του s ανήκουν στο σ_I.

Η έννοια της στρατηγικής για τον παίκτη II ορίζεται παρόμοια με τις προφανείς αλλαγές.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός της στρατηγικής δίνεται αναδρομικά, αυτό το γεγονός είναι πολύ σημαντικό διότι μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση επαγωγικών μεθόδων κάτι το οποίο θα το εκμεταλλευτούμε στις αποδείξεις.

Με S_I και S_{II} θα συμβολίζουμε τα σύνολα των στρατηγικών του παίκτη I και του παίκτη II αντίστοιχα. Στην περίπτωση που ο παίκτης I ακολουθεί μία στρατηγική σ_I είναι προφανές ότι για το αποτέλεσμα του παιγνίου θα ισχύει ότι $\mathbf{x} \in [\sigma_I]$. Λέμε τότε ότι το $\mathbf{x}$ είναι συμβατό με την στρατηγική σ_I. Αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης I επιλέξει μία στρατηγική σ_I και ο παίκτης II μία στρατηγική σ_{II} τότε για το αποτέλεσμα $\mathbf{x}$ του παιγνίου θα ισχύει ότι $\mathbf{x} \in [\sigma_I \cap \sigma_{II}]$.

Από τον ορισμό της στρατηγικής για τους δύο παίκτες μπορούμε να δούμε ότι το $[\sigma_I \cap \sigma_{II}]$ θα είναι αναγκαστικά μονοσύνολο δηλαδή το αποτέλεσμα του παιγνίου θα είναι τότε μοναδικά προσδιορισμένο. Πράγματι ο πρώτος κόμβος θα καθορίζεται μοναδικά από την σ_I και αν βρισκόμαστε σε ένα τυχαίο στάδιο του παιγνίου ο επόμενος κόμβος θα καθορίζεται μοναδικά είτε από την σ_I είτε από την σ_{II} ανάλογα με το αν είναι η σειρά του παίκτη I ή του παίκτη II. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $* : S_I \times S_{II} \longrightarrow [T]$ που στέλνει κάθε ζεύγος στρατηγικών στο μοναδικό $\mathbf{x} \in [T]$ το οποίο ανήκει στο $[\sigma_I \cap \sigma_{II}]$ και το οποίο είναι το αποτέλεσμα του παιγνίου αν ο παίκτης I ακολουθεί την στρατηγική σ_I και ο παίκτης II την στρατηγική σ_{II}.

Σε κάποιες περιπτώσεις παρεκκλίνοντας από τον συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε στοιχεία του X^ω για να περιγράψουμε την στρατηγική η οποία σε κάθε στάδιο του παιγνίου υπαγορεύει στον παίκτη να επιλέγει ως στοιχεία επέκτασης τους όρους της αντίστοιχης ακολουθίας. Προσοχή πρέπει να δίνεται τότε ώστε η στρατηγική που προκύπτει να είναι "νόμιμη" δηλαδή να είναι υποδέντρο του T.

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο περιγραφής του σώματος μιας στρατηγικής.

Πρόταση 2.5 *Αν σ_I μία στρατηγική για τον παίκτη I τότε*

$$[\sigma_I] = \{\, \mathbf{x} \in [T] : \exists \sigma_{II} \in S_{II}(\mathbf{x} = \sigma_I * \sigma_{II}) \,\} .$$

Απόδειξη
Προφανώς ισχύει ότι

$$[\sigma_I] \supset \{\, \mathbf{x} \in [T] : \exists \sigma_{II} \in S_{II}(\mathbf{x} = \sigma_I * \sigma_{II}) \,\} .$$

Έστω $\mathbf{x} \in [\sigma_I]$ τότε αν $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\omega}$ μπορούμε να ορίσουμε την εξής στρατηγική για τον παίκτη II. Έστω σ_{II} η στρατηγική του παίκτη II για την οποία ισχύει ότι:

(*i*) Για κάθε $n \in \omega$ ο κόμβος $s = \mathbf{x}{\restriction}_n \in \sigma_{II}$.

(*ii*) Αν $s \in \sigma_{II}$ και $|s|$ άρτιος τότε $t \in \sigma_{II}$ για κάθε $t \in T^{|s|+1}(s)$.

(*iii*) Αν $s \in \sigma_{II}$, $|s|$ περιττός και $s \neq \mathbf{x}{\restriction}_{|s|}$ τότε επιλέγουμε ακριβώς ένα $t \in T^{|s|+1}(s)$ ώστε $t \in \sigma_{II}$.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι άμεσο ότι η σ_{II} είναι μια στρατηγική για τον παίκτη II και $\mathbf{x} = \sigma_I * \sigma_{II}$. □

Μία ακόμα χρήσιμη έννοια που θα μας φανεί χρήσιμη είναι αυτή της *quasi-στρατηγικής* (**quasi-strategy**).

Ορισμός 2.6 Έστω $G(T, A)$ ένα παίγνιο στο σύνολο X. Μία quasi-στρατηγική για τον παίκτη I είναι ένα υποδέντρο Σ_I του T για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

(*i*) $\emptyset \in \Sigma_I$.

(*ii*) Για κάθε $t \in \Sigma_I$ με $|t|$ άρτιο υπάρχει τουλάχιστον ένας αμέσως επόμενος κόμβος $s \in \Sigma_I$.

(*iii*) $s \in \Sigma_I$ και $|s| \in 2\mathbb{N}$ ανν υπάρχει $t \in \Sigma_I$ ώστε $s \in T^{|t|+1}(t)$.

Παρόμοια ορίζεται η έννοια της quasi-στρατηγικής για τον παίκτη II.

Παρατηρούμε ότι μία quasi-στρατηγική διαφέρει από μία στρατηγική στο ότι κάθε φορά που είναι η σειρά του αντίστοιχου παίκτη να παίξει ακολουθώντας μια quasi-στρατηγική έχει τουλάχιστον μία επιλογή και άρα μπορεί και περισσότερες από μία.

Σε όσα είπαμε μέχρι τώρα όσον αφορά τις στρατηγικές δεν αναφερθήκαμε στην συνθήκη νίκης που καθορίζεται από το payoff set. Πράγματι ο ορισμός της έννοιας της στρατηγικής είναι ανεξάρτητος του payoff set αλλά χρειαζόμαστε έναν τρόπο να ξεχωρίζουμε τις "καλές" από τις κακές στρατηγικές. Ίσως το κυριότερο αντικείμενο μελέτης σχετικά με τα άπειρα παίγνια δύο παικτών είναι οι νικητήριες στρατηγικές.

Ορισμός 2.7 Έστω $G(T, A)$ ένα παίγνιο στο σύνολο X. Μια στρατηγική σ_I για τον παίκτη I λέγεται *νικητήρια στρατηγική* (**winning strategy**) αν $[\sigma_I] \subset A$. Αντίστοιχα μια στρατηγική για τον παίκτη II θα λέγεται νικητήρια αν $[\sigma_{II}] \subset A^c$.

Αντίστοιχα ορίζουμε την έννοια της νικητήριας quasi-στρατηγικής. Ουσιαστικά το ότι ο παίκτης I έχει μια νικητήρια στρατηγική σημαίνει ότι υπάρχει ένα "σχέδιο δράσης" του παίκτη το οποίο του εξασφαλίζει ότι θα κερδίσει ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα παίξει ο παίκτης II. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που μπορεί να θέσει κάποιος σχετικά με ένα συγκεκριμένο παίγνιο είναι κατά πόσο ένας από τους δύο παίκτες έχει μια νικητήρια στρατηγική.

Ορισμός 2.8 Ένα παίγνιο $G(T, A)$ λέγεται *προσδιοριστό* (**determined**) αν τουλάχιστον ένας από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική.

Έστω $G(T, A)$ ένα παίγνιο στο σύνολο X. Το ότι μια στρατηγική σ_I είναι νικητήρια για τον παίκτη I σημαίνει ότι υπάρχει ένα x_0 (ο μοναδικός όρος της ακολουθίας μήκους 1 που αναπαρίσταται από τον μοναδικό κόμβο στο σ_I^1) έτσι ώστε για κάθε x_1 τ.ω $(x_0, x_1) \in \sigma_I^2$ (δηλαδή για κάθε έναν από τους κόμβους που μπορεί να επιλέξει ο παίκτης II) να υπάρχει ένα x_2 (η επιλογή του παίκτη I στην δεύτερη κίνηση του) ώστε για κάθε x_3 ...ώστε η ακολουθία $x = (x_0, x_1, \ldots)$ να είναι στοιχείο του A.

Παρατήρηση 2.9 Πιο συγκεκριμένα υπάρχει θα υπάρχει μια νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I αν και μόνο αν

$$\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \ldots \left((x_n)_{n\in\omega} \in A\right).$$

Με τον ίδιο συλλογισμό ο παίκτης II θα έχει μία νικητήρια στρατηγική αν και μόνο αν

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \ldots \left((x_n)_{n\in\omega} \in A^c\right).$$

Όπως επισήμανε ο Stanislaw Ulam [19] το γεγονός ότι όλα τα παίγνια των οποίων το πλήθος των κινήσεων δεν μπορεί να ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο μέγιστο είναι προσδιοριστά, είναι ουσιαστικά ένα θεώρημα της λογικής.

Θεώρημα 2.10 *Έστω ένα παίγνιο $G(X^{<\omega}, A)$ για το οποίο ισχύει ότι υπάρχει ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε τα στοιχεία $(x_n)_{n\in\omega}$ του A να καθορίζονται από τους k πρώτους όρους τους. Τότε είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη

Πράγματι έστω ότι το σύνολο A καθορίζεται από τους k πρώτους όρους μίας ακολουθίας. Έστω ότι ο παίκτης I δεν έχει νικητήρια στρατηγική. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το k είναι άρτιο, από την παρατήρηση 2.9 και αφού τα αν ανήκει ή όχι μια ακολουθία στο A εξαρτάται μόνο από τους k πρώτους όρους της έχουμε ότι :

$$\neg\left(\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_{k-2} \forall x_{k-1} \left((x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots) \in A\right)\right).$$

Από τους κανόνες De Morgan για την δράση του λογικού συνδέσμου της άρνησης στους ποσοδείκτες $\exists$ και $\forall$ έχουμε ότι

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{k-2} \exists x_{k-1} \left(\neg (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots) \in A \right)$$

επομένως

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{k-2} \exists x_{k-1} \left((x_n)_{n \in \omega} \notin A \right)$$

και άρα ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική. $\square$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην τελευταία περίπτωση αναγκαστικά κάποιος από τους δύο παίκτες θα έχει νικητήρια στρατηγική, όπως θα δούμε από το επόμενο παράδειγμα αυτό δεν ισχύει στην γενική περίπτωση. Παρακάτω θα κατασκευάσουμε ένα παίγνιο στο οποίο κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει νικητήρια στρατηγική. Ας ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας δύο λήμματα τα οποία θα χρησιμεύσουν στην απόδειξη.

Λήμμα 2.11 *Η πληθικότητα του S_I και του S_{II} στο $\mathbb{N}^{<\omega}$ είναι $2^{\aleph_0}$.*

Απόδειξη

Θα δείξουμε το παραπάνω για το σύνολο S_I ενώ η απόδειξη για το S_{II} είναι πανομοιότυπη. Πράγματι για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^\omega$ μπορούμε να ορίσουμε την στρατηγική του παίκτη I που καθορίζεται από το $\mathbf{x}$ δηλαδή την στρατηγική για την οποία ισχύει ότι $\sigma_I^1 = (x_0)$ και $\sigma_I^{2n+1} = \sigma_I^{2n\frown}(x_{n-1})$ δηλαδή την στρατηγική η οποία όποιες και να είναι οι κινήσεις του παίκτη II η ακολουθία που θα σχηματίζεται να έχει την μορφή $(x_0, \cdot, x_1, \cdot, x_2, \cdot, x_3, \ldots)$. Γενικά για να περιγράψουμε το αποτέλεσμα του παιγνίου όταν ο παίκτης I παίζει σύμφωνα με ένα στοιχείο $\mathbf{x} \in X^\omega$ και ο παίκτης II ακολουθεί μία στρατηγική σ_{II} θα γράφουμε $\mathbf{x} * \sigma_{II}$. Η παραπάνω διαδικασία ορίζει μία απεικόνιση $f : \mathbb{N}^\omega \longrightarrow S_I$ η οποία είναι 1-1 και επομένως $2^{\aleph_0} = |\mathbb{N}^\omega| \leq |S_I|$. Επίσης κάθε στρατηγική καθορίζεται από ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^{<\omega}$ και επομένως $|S_I| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Λήμμα 2.12 *Για κάθε στρατηγική $\sigma_I \in S_I$ (αντίστοιχα $\sigma_{II} \in S_{II}$) στο $\mathbb{N}^{<\omega}$ ισχύει ότι η πληθικότητα του $[\sigma_I]$ (αντίστοιχα του $[\sigma_{II}]$) είναι $2^{\aleph_0}$.*

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι $|[\sigma_I]| \leq 2^{\aleph_0}$ αφού $[\sigma_I] \subset \mathbb{N}^\omega$. Για κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^\omega$ αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης I ακολουθεί την στρατηγική σ_I και ο παίκτης II στην στρατηγική που καθορίζεται από το $\mathbf{x}$ τότε θα σχηματιστεί μια ακολουθία της μορφής $(\cdot, x_0, \cdot, x_1, \cdot, x_2, \cdot, x_3, \ldots) = \sigma_I * \mathbf{x} \in [\sigma_I]$. Έτσι έχουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^\omega \longrightarrow [\sigma_I]$ η οποία είναι 1-1 γεγονός το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο.$\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παρακάτω απόδειξη που οφείλεται στους Gale και Steward [5] κάνει ουσιώδη χρήση του αξιώματος της επιλογής.

Θεώρημα 2.13 *Υπάρχει ένα σύνολο $A \subset \mathbb{N}^\omega$ ώστε το παίγνιο $G(\mathbb{N}^{<\omega}, A)$ να μην είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα εφαρμόσουμε ένα επιχείρημα διαγωνιοποίησης κάνοντας χρήση της αρχής καλής διάταξης και επομένως του αξιώματος επιλογής. Από το λήμμα 2.11 στο $\mathbb{N}^\omega$ μπορούμε να διατάξουμε τα σύνολα S_I και S_{II} κάνοντας χρήση του $2^{\aleph_0}$. Έτσι έχουμε τις οικογένειες $(\sigma_{I\xi})_{\xi<2^{\aleph_0}}$ και $(\sigma_{II\xi})_{\xi<2^{\aleph_0}}$. Θα κατασκευάσουμε δύο σύνολα A και B με υπερπεπερασμένη επαγωγή. Επιλέγουμε $\alpha_0 \in [\sigma_{II0}]$ και $\beta_0 \in [\sigma_{I0}]$ με $\beta_0 \neq \alpha_0$. Έχοντας επιλέξει $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa}$ και $(\beta_\xi)_{\xi<\kappa}$ επιλέγουμε

$$\alpha_\kappa \in [\sigma_{IIk}] \setminus (\beta_\xi)_{\xi<\kappa}$$

και

$$\beta_\kappa \in [\sigma_{Ik}] \setminus (\alpha_\xi)_{\xi\leq\kappa}.$$

Αυτό μπορούμε πάντα να το κάνουμε αφού από το λήμμα 2.12 το $[\sigma]$ έχει την πληθικότητα του συνεχούς για κάθε στρατηγική σ ενώ για κάθε $\xi < 2^{\aleph_0}$ οι οικογένειες $(\beta_\xi)_{\xi<\kappa}$ και $(\alpha_\xi)_{\xi\leq\kappa}$ έχουν πληθικότητα αυστηρά μικρότερη του

$2^{\aleph_0}$. Έχουμε σχηματίσει λοιπόν δύο σύνολα τα $A = \left\{ \alpha_\xi : \xi < 2^{\aleph_0} \right\}$ και $B = \left\{ \beta_\xi : \xi < 2^{\aleph_0} \right\}$ και θεωρούμε το παίγνιο $G(\mathbb{N}^\omega, A)$ το οποίο δεν είναι προσδιοριστό. Πράγματι κατ' αρχάς $A \cap B = \emptyset$ διότι για κάθε $\alpha_\kappa \in A$ έχουμε ότι $\alpha_\kappa \notin (\beta_\xi)_{\xi<\kappa}$ από την επιλογή του α_κ και επίσης $\alpha_\kappa \notin (\beta_\xi)_{\kappa \leq \xi < 2^{\aleph_0}}$ από την επιλογή του β_ξ. Έστω ότι ο παίχτης I έχει μια νικητήρια στρατηγική σ_I τότε αυτή θα αντιστοιχεί σε κάποια $\sigma_{I\kappa}$ επομένως υπάρχει $\beta_\kappa \in B$ τ.ω $\beta_\kappa \in [\sigma_I]$ άρα $[\sigma_I] \cap A^c \neq \emptyset$ και άρα η σ_I δεν μπορεί να είναι νικητήρια στρατηγική διότι αν ήταν θα έπρεπε να ισχύει ότι $[\sigma_I] \subset A$. Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε ο παίχτης II μπορεί να έχει μία νικητήρια στρατηγική και επομένως έχουμε το ζητούμενο. □

Μία απόδειξη ότι ένα παίγνιο είναι προσδιοριστό ουσιαστικά μας δίνει ένα αποτέλεσμα διχοτομίας, είτε ο παίκτης I θα έχει νικητήρια στρατηγική είτε ο II. Οι διχοτομίες είναι χρήσιμες ως εργαλεία διότι επιτρέπουν να σπάσουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα στα δύο έχοντας στην διάθεση μας μια επιπλέον υπόθεση για κάθε περίπτωση. Έτσι αντιμετωπίζοντας ένα μαθηματικό πρόβλημα μια πιθανή προσέγγιση είναι να καταφέρει κανείς να κατασκευάσει ένα προσδιοριστό παίγνιο ώστε η συνθήκη νίκης (ανεξάρτητα του ποιος παίκτης κερδίζει) να του δίνει κάποια χρήσιμη πληροφορία.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να πούμε όχι μόνο το ότι κάποιος από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική αλλά μπορούμε να ξέρουμε ποιος.

Θεώρημα 2.14 *Έστω ένα παίγνιο $G(X^\omega, A)$ όπου το A είναι αριθμήσιμο. Τότε ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική.*

Απόδειξη

Έστω $A = (\alpha_n)_{n\in\omega} \subset X^\omega$. Αν ο παίκτης II στην $2n$ κίνηση παίζει-επεκτείνει την σχηματισμένη ακολουθία κατά ένα όρο διαφορετικό από τον $\alpha_n(2n)$ τότε το αποτέλεσμα του παιγνίου αναγκαστικά δεν θα ανήκει στο A. □

Στην επόμενη ενότητα θα εισάγουμε μια τοπολογική δομή στο σώμα του δέντρου και θα δούμε πως από τις τοπολογικές ιδιότητες κάποιων συνόλων μπορούμε να αποφανθούμε για την προσδιοριστότητα των αντίστοιχων παιγνίων.

2.2 Το θεώρημα των Gale και Stewart

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό που εισαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με $T(s)$ συμβολίζουμε το υποδέντρο του T που περιλαμβάνει όλους του κόμβους του T οι οποίοι είναι συγκρίσιμοι με τον κόμβο s. Υπενθυμίζουμε ότι όλα τα δέντρα στην συνέχεια θα τα θεωρούμε κλαδεμένα.

Οι παρακάτω απλές προτάσεις θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τις ιδιότητες της τοπολογίας με την οποία θα εφοδιάσουμε το σώμα ενός τυχαίου δέντρου T σε ένα σύνολο X.

Πρόταση 2.15 *Έστω $X \neq \emptyset, T$ ένα δέντρο στο X και $s \sqsubseteq t$. Τότε $[T(t)] \subset [T(s)]$.*

Απόδειξη
Έστω $\mathbf{x} \in [T(t)]$. Από τον ορισμό του σώματος ενός δέντρου έχουμε ότι για κάθε $n \in \omega$ θα πρέπει να ισχύει ότι $\mathbf{x}\restriction_n \in T(t)$ δηλαδή το $\mathbf{x}\restriction_n$ είναι συγκρίσιμο με το t. Αν $t \sqsubseteq \mathbf{x}\restriction_n$ τότε από την μεταβατική ιδιότητα της διάταξης θα έχουμε ότι $s \sqsubseteq \mathbf{x}\restriction_n$. Αν $\mathbf{x}\restriction_n \sqsubseteq t$ από την καλή διάταξη του συνόλου $\{ t' \in T : t' \sqsubseteq t \} \ni s$ θα έχουμε ότι το $\mathbf{x}\restriction_n$ θα είναι συγκρίσιμο με το s. Έτσι για κάθε $n \in \omega$ το $\mathbf{x}\restriction_n$ θα είναι συγκρίσιμο με το s και επομένως $\mathbf{x} \in [T(s)]$. □

Πρόταση 2.16 $[T(s)] \cap [T(t)] = \emptyset$ *ανν* $s \perp t$.

Απόδειξη
Έστω $s \perp t$ και έστω $\mathbf{x} \in [T(t)]$ τότε για $n = |t|$ θα έχουμε ότι $\mathbf{x}\restriction_{|t|} = t \notin T(s)$ και επομένως $\mathbf{x} \notin [T(s)]$. Έστω $[T(s)] \cap [T(t)] = \emptyset$ και έστω s, t συγκρίσιμοι. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s \sqsubseteq t$. Από την πρόταση 2.15 θα έχουμε $[T(t)] \subset [T(s)]$ το οποίο είναι άτοπο αφού τότε $\emptyset \neq [T(t)] = [T(t)] \cap [T(s)]$. □

Πρόταση 2.17 *Έστω $\mathcal{B} = \{ [T(s)] : s \in T \} \subset \mathcal{P}([T])$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μία τοπολογία στο $[T]$.*

Απόδειξη
Μία οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων ενός συνόλου αποτελεί βάση για μία τοπολογία αν $\cup\mathcal{B} = X$ και για κάθε $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τ.ω $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Το ότι $[T] = \cup\mathcal{B}$ είναι άμεσο. Αν $\mathbf{x} \in [T(s)] \cap [T(t)]$ τότε από την πρόταση 2.16 τα s, t είναι συγκρίσιμα και από την πρόταση 2.15 $[T(s)] \cap [T(t)] \in \mathcal{B}$. □

Πρόταση 2.18 *Αν εφοδιάσουμε το $[T]$ με την τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{B}$ τότε τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$ είναι clopen.*

Απόδειξη
Πράγματι είναι εύκολο να δούμε ότι αν $B = [T(s)] \in \mathcal{B}$ τότε $B^c = \bigcup_{t \perp s} [T(t)]$ και επομένως είναι ανοιχτό. □

Παρατήρηση 2.19 Για κάθε στοιχείο $\mathbf{x} \in [T]$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι μια βάση περιοχών του $\mathbf{x}$ είναι η οικογένεια $\mathcal{B}_{\mathbf{x}} = \{ \, [T(\mathbf{x}{\restriction}_n)] : n \in \omega \, \}$ η χρήση της οποίας είναι πολύ βολική όταν ασχολούμαστε με συγκλίσεις στον $[T]$.

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε τον χώρο $[T]$ εφοδιασμένο με την παραπάνω τοπολογία. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της τοπολογίας στο $X^\omega = [X^{<\omega}]$ είναι ότι υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των κλειστών υποσυνόλων και των σωμάτων των κλαδεμένων δέντρων στο X.

Θεώρημα 2.20 *Θεωρούμε τις οικογένειες $\mathcal{F} = \{ \, F \subset X^\omega : F \text{ κλειστό} \, \}$ και $\mathcal{T} = \{ \, T \subset X^{<\omega} : T \text{ κλαδεμένο δέντρο στο } X \, \}$. Τότε η συνάρτηση $[\cdot] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F}$ που απεικονίζει κάθε κλαδεμένο δέντρο στο σώμα του είναι 1-1 και επί του $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη
Έστω T ένα κλαδεμένο δέντρο. Θα δείξουμε ότι το σώμα του είναι κλειστό ή ισοδύναμα ότι το συμπλήρωμα του $[T]^c$ είναι ανοιχτό. Πράγματι έχουμε ότι :

$$[T]^c = \{ \, \mathbf{x} \in X^\omega : \exists n \in \omega (\mathbf{x}{\restriction}_n \notin T) \, \} \, .$$

Για κάθε $\mathbf{x} \in [T]^c$ θέτουμε $n_{\mathbf{x}} = \min \{ \, n \in \omega : \mathbf{x}{\restriction}_n \notin T \, \}$ και ισχυριζόμαστε ότι:

$$\bigcup_{\mathbf{x}\in[T]^c} [X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_\mathbf{x}})] = [T]^c.$$

Αν $\mathbf{x} \in [T]^c$ τότε $\mathbf{x} \in [X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_\mathbf{x}})]$ οπότε

$$\bigcup_{\mathbf{x}\in[T]^c} [X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_\mathbf{x}})] \supset [T]^c.$$

Αν $\mathbf{y} \in \bigcup_{\mathbf{x}\in[T]^c} [X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_\mathbf{x}})]$ τότε υπάρχουν $\mathbf{x}$ και n_x ώστε $\mathbf{y}{\restriction}_{n_x} = \mathbf{x}{\restriction}_{n_x} \notin T$ δηλαδή $\mathbf{y} \in [T]^c$. Από τα παραπάνω έπεται ότι το $[T]^c$ είναι ανοιχτό ως ένωση στοιχείων της βάσης. Αν $T \neq T'$ τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $s \in T$ τ.ω $s \notin T'$ έτσι αφού το T είναι κλαδεμένο θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x} \in ([X^{<\omega}(s)] \cap [T]) \setminus [T']$ και επομένως $[T] \neq [T']$ άρα η απεικόνιση είναι 1-1. Τέλος αν F ένα κλειστό του X^ω τότε σχηματίζουμε το σύνολο :

$$T_F = \left\{ \mathbf{x}{\restriction}_n \in X^{<\omega} : \mathbf{x} \in F \text{ και } n \in \omega \right\}.$$

Το ότι το T_F είναι ένα κλαδεμένο δέντρο στο X είναι άμεσο από τον ορισμό του. Εξ' ορισμού έπεται επίσης ότι $F \subset [T_F]$. Αν $\mathbf{x} \in [T_F]$ τότε για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $\mathbf{y}_n \in F$ ώστε $\mathbf{x}{\restriction}_n = \mathbf{y}_n{\restriction}_n$. Η ακολουθία $(\mathbf{y}_n)_{n\in\omega} \subset X^\omega$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$ διότι αν $[X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_0})]$ μία τυχαία βασική περιοχή του $\mathbf{x}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε ότι $\mathbf{y}_n{\restriction}_{n_0} = \mathbf{x}{\restriction}_{n_0} \in X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_0})$ και επομένως $\mathbf{y}_n \in [X^{<\omega}(\mathbf{x}{\restriction}_{n_0})]$. Έτσι η $(\mathbf{y}_n)_{n\in\omega}$ είναι μία ακολουθία στοιχείων του κλειστού F που συγκλίνει στο $\mathbf{x}$ και επομένως $\mathbf{x} \in F$. Δείξαμε λοιπόν ότι η $[\cdot] : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{F}$ είναι επί του $\mathcal{F}$ και επομένως έπεται το ζητούμενο. $\square$

Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του κυρίως αποτελέσματος αυτού του κεφαλαίου να κάνουμε μια παρατήρηση που αφορά τον συμβολισμό. Πολλές φορές θα εξετάζουμε την κατάσταση ενός παιγνίου $G(T, A)$ σε ένα στάδιο όπου έχουν γίνει ήδη κάποιες κινήσεις από τους παίκτες έτσι ώστε να βρισκόμαστε σε ένα κόμβο $s \in T$. Σε αυτή την περίπτωση είναι χρήσιμο να θεωρούμε το "βοηθητικό" παίγνιο $G(T(s), A(s))$ όπου λόγω της δομής του $T(s)$ μέχρι και τον κόμβο s οι δύο παίκτες δεν έχουν ελευθερία κινήσεων.

Ορισμός 2.21 Έστω $G(T, A)$ ένα παίγνιο. Μία ακολουθία, ένας κόμβος ή μια θέση $(x_k)_{k=1}^n = s \in T$ θα λέγεται *μη χαμένη* (**not losing**) για τον παίκτη I αν ο παίκτης II δεν έχει νικητήρια στρατηγική στο παίγνιο $G(T(s), A(s))$.

Λήμμα 2.22 *Έστω ότι η ακολουθία $s \in T$ δεν είναι χαμένη για τον παίκτη I. Τότε αν $|s|$ είναι άρτιος (και επομένως στο $G(T(s), A(s))$ μετά τον σχηματισμό του s είναι σειρά του παίκτη I να παίξει) υπάρχει τουλάχιστον μία επέκταση $t \in T^{|s|+1}(s)$ τ.ω η t να μην είναι χαμένη για τον παίκτη I ενώ αν $|s|$ (δηλαδή είναι η σειρά του παίκτη II να παίξει) καμία επέκταση της s δεν είναι χαμένη για τον παίκτη I.*

Απόδειξη

Πράγματι, αν είναι η σειρά του παίκτη I να παίξει και αν κάθε δυνατή επέκταση $t \in T^{|s|+1}(s)$ είναι χαμένη για τον παίκτη I τότε για κάθε $t \in T^{|s|+1}(s)$ ο παίκτης II θα είχε μια νικητήρια στρατηγική σ_{II_t} στο παίγνιο $G(T(t), A(t))$. Τότε η στρατηγική σ_{II} στο $T(s)$ η οποία δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_{II} = \bigcup_{t \in T^{|s|+1}(s)} \sigma_{II_t}$$

θα είναι μία νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη II στο παίγνιο $G(T(s), A(s))$ το οποίο είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει ότι η ακολουθία s δεν είναι χαμένη για τον παίκτη I. Αν είναι σειρά του παίκτη II να παίξει και υπάρχει επέκταση t της s η οποία να είναι χαμένη για τον παίκτη I τότε υπάρχει νικητήρια στρατηγική σ_{II_t} για τον παίκτη II στο $G(T(t), A(t))$. Σε αυτή την περίπτωση η σ_{II_t} είναι επίσης νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη II στο $G(T(s), A(s))$ το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Όμοια ορίζουμε την έννοια της μη χαμένης "θέσης" για τον παίκτη II στην οποία περίπτωση ισχύει το ανάλογο του λήμματος 2.22.

Θεώρημα 2.23 (Gale-Steward) *Έστω T ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο στο X και έστω $A \subset [T]$ ένα κλειστό ή ανοιχτό σύνολο στο $[T]$. Τότε το παίγνιο $G(T, A)$ είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι κλειστό στο $[T]$. Υποθέτουμε επίσης ότι ο παίκτης II δεν έχει νικητήρια στρατηγική, επομένως η κενή ακολουθία $\emptyset$ του T είναι μη χαμένη για τον παίκτη I. Έστω $\mathrm{NLT}_I \subset T$ το σύνολο όλων των μη χαμένων κόμβων του παίκτη I και $f : \mathrm{NLT}_I \longrightarrow \mathrm{NLT}_I$ μία συνάρτηση επιλογής η οποία στέλνει τον κόμβο s σε έναν αμέσως επόμενο του $t \in T^{|s|+1}(s)$ ο οποίος είναι μη χαμένος για τον παίκτη I. Από το λήμμα 2.22 η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά μια στρατηγική σ_I για τον παίκτη I ως εξής:

- $\sigma_I^0 = \{\emptyset\}$.
- Αν $n \in \omega$ περιττός τότε $\sigma_I^n = \left\{ f(t) \in T^n : t \in \sigma_I^{n-1} \right\}$.
- Αν $n \in \omega$ θετικός άρτιος τότε $\sigma_I^n = \left\{ s \in T^n : \exists t \in \sigma_I^{n-1} \left(s \in T^n \left(t \right) \right) \right\}$.

Η παραπάνω στρατηγική είναι νικητήρια για τον παίκτη I στο $G(T, A)$. Για να το δούμε αυτό ας υποθέσουμε ότι δεν είναι, τότε θα υπάρχει $\mathbf{x} \in A^c \cap [\sigma_I]$. Αφού το A είναι κλειστό το A^c θα είναι ανοιχτό δηλαδή $A^c = \bigcup_{s \in S}[T(s)]$ για κάποιο $S \subset T$. Έτσι θα υπάρχει $s \in T$ τ.ω $x \in [T(s)] \cap [\sigma_I] \subset A^c$. Το τελευταίο σημαίνει ότι ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο παίγνιο $G(T(s), A(s))$ αφού όπως και να παίξει δεδομένου ότι το παίγνιο έχει ήδη φτάσει στην "θέση" s η ακολουθία που θα σχηματιστεί θα βρίσκεται αναγκαστικά στο A^c. Από τον ορισμό της σ_I αυτό είναι αδύνατο αφού κάθε κόμβος $s \in \sigma_I$ είναι μη χαμένος για τον παίκτη I. Άρα $A^c \cap [\sigma_I] = \emptyset$ το οποίο σημαίνει ότι η στρατηγική σ_I είναι νικητήρια για τον παίκτη I. Αν το σύνολο A είναι ανοιχτό τότε υποθέτοντας ότι ο παίκτης I δεν έχει νικητήρια στρατηγική και χρησιμοποιώντας την έννοια της μη χαμένης θέσης για τον παίκτη II μπορούμε να κατασκευάσουμε με παρόμοιο τρόπο μια στρατηγική για τον παίκτη II τ.ω κάθε κόμβος να είναι μη χαμένη θέση για τον παίκτη II. Με παρόμοια επιχειρήματα και αφού το A είναι ανοιχτό η στρατηγική αυτή θα είναι νικητήρια για τον παίκτη II. $\square$

Παρατήρηση 2.24 Στην περίπτωση που ένας κόμβος $s \in T$ είναι μη χαμένη θέση για έναν παίκτη από τον ορισμό και τις ιδιότητες του συνόλου των μη χαμένων θέσεων που επεκτείνουν τον s μπορούμε να δούμε ότι αυτό αποτελεί μια quasi-στρατηγική για τον ίδιο παίκτη στο $G(T(s), A(s))$. Αυτή η quasi-στρατηγική ονομάζεται *κανονική quasi-στρατηγική* (**canonical quasi-strategy**).

Αρχικά φαίνεται διαισθητικά σωστό ότι αν ένα παίγνιο $G(T, A)$ είναι προσδιοριστό τότε και το δυικό παίγνιο $G(T, A^c)$ θα είναι προσδιοριστό. Το παραπάνω αποτέλεσμα για την προσδιοριστότητα των ανοιχτών και των κλειστών παιγνίων ενισχύει αυτή την διαίσθηση αλλά όπως δείχνει η παρακάτω πρόταση δεν είναι αυτή η περίπτωση.

Πρόταση 2.25 *Υπάρχει ένα σύνολο $A \subset \mathbb{N}^\omega$ τ.ω το παίγνιο $G(\mathbb{N}^{<\omega}, A)$ να είναι προσδιοριστό αλλά το παίγνιο $G(\mathbb{N}^{<\omega}, A^c)$ να μην είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη

Θα ακολουθήσουμε παρόμοια τακτική με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στο θεώρημα 2.13. Τα λήμματα 2.11 και 2.12 και το γεγονός ότι αν $\sigma_I \in S_I$ και $\sigma_{II} \in S_{II}$ δυο στρατηγικές για τον παίκτη I και τον παίκτη II αντίστοιχα τότε το σύνολο $[\sigma_{II}] \setminus [\sigma_I]$ έχει την πληθικότητα του συνεχούς δικαιολογούν τον παρακάτω συλλογισμό.

Από το λήμμα 2.11 μπορούμε να διατάξουμε τα σύνολα S_I και S_{II} κάνοντας χρήση του $2^{\aleph_0}$. Έτσι έχουμε τις οικογένειες $(\sigma_{I\xi})_{\xi<2^{\aleph_0}}$ και $(\sigma_{II\xi})_{\xi<2^{\aleph_0}}$.

Θέτουμε $Z = [\sigma_{I0}]$ και επιλέγουμε $\alpha_0 \in Z$ και $\beta_0 \in [\sigma_{II0}] \setminus Z$. Αν έχουμε επιλέξει τα α_ξ και β_ξ για $\xi < k$ τότε επιλέγουμε $\alpha_k \in [\sigma_{Ik}] \setminus \{ \beta_\xi : \xi < k \}$ και $\beta_k \in [\sigma_{IIk}] \setminus (Z \cup \{ \alpha_\xi : \xi \leq k \})$. Θέτουμε $A = Z \cup \{ \alpha_\xi : \xi < 2^{\aleph_0} \}$

και $B = \left\{ \beta_\xi : \xi < 2^{\aleph_0} \right\}$. Από την κατασκευή τους είναι προφανές ότι $A \cap B = \emptyset$. Το παίγνιο $G(\mathbb{N}^{<\omega}, A)$ είναι προσδιοριστό αφού η στρατηγική σ_{I0} του παίκτη I είναι νικητήρια διότι εκ κατασκευής $[\sigma_{I0}] = Z \subset A$. Όμως στο παίγνιο $G(\mathbb{N}^{<\omega}, A^c)$ κανείς παίκτης δεν έχει νικητήρια στρατηγική διότι αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης I έχει μια νικητήρια στρατηγική έστω την σ_{Ik} τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $[\sigma_{Ik}] \subset A^c$ όμως $\alpha_k \in [\sigma_{Ik}] \cap A$ άτοπο. Αντίστοιχα αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική έστω την σ_{IIk} τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $[\sigma_{IIk}] \subset A$ αλλά υπάρχει το $\beta_k \in B \subset A^c$ το οποίο είναι επίσης άτοπο. □

Έστω $\Gamma \subset \mathcal{P}(X^\omega)$ μια κλάση υποσυνόλων του X^ω. Με $\neg\Gamma$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\{ A^c : A \in \Gamma \}$. Αν το παίγνιο $G(X^{<\omega}, A)$ είναι προσδιοριστό τότε θα λέμε ότι το σύνολο A είναι προσδιοριστό.

Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Det}(\Gamma)$ την πρόταση ότι όλα τα στοιχεία της Γ είναι προσδιοριστά, έτσι αν $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία στον X^ω το συμπέρασμα του θεωρήματος 2.23 είναι ότι $\mathrm{Det}(\mathcal{T})$ και $\mathrm{Det}(\neg\mathcal{T})$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν το ανοιχτό A είναι προσδιοριστό τότε και το A^c θα είναι προσδιοριστό. Το παρακάτω θεώρημα δίνει ικανές συνθήκες ώστε για μια κλάση Γ να ισχύει ότι $\mathrm{Det}(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Det}(\neg\Gamma)$.

Θεώρημα 2.26 *Έστω μια κλάση $\Gamma \subset \mathcal{P}(X^\omega)$ κλειστή στις αντίστροφες εικόνες μέσω συνεχών συναρτήσεων δηλαδή για κάθε $f : X^\omega \longrightarrow X^\omega$ συνεχή αν $A \in \Gamma$ τότε $f^{-1}(A) \in \Gamma$. Τότε* $\mathrm{Det}(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Det}(\neg\Gamma)$.

Απόδειξη

Η παρακάτω απόδειξη κάνει χρήση ενός βοηθητικού παιγνίου μια τεχνική που χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε αποδείξεις που αφορούν την προσδιοριστότητα παιγνίων. Κατ' αρχάς αν η Γ είναι κλειστή στις αντίστροφες εικόνες μέσω συνεχών συναρτήσεων τότε και η κλάση $\neg\Gamma$ είναι.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Det}(\neg\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Det}(\Gamma)$. Έστω λοιπόν ότι $\mathrm{Det}(\neg\Gamma)$ και έστω $A \in \Gamma$ θα δείξουμε ότι το παίγνιο $G(X^{<\omega}, A)$ είναι προσδιοριστό. Θέτουμε

$$B = \{\, \mathbf{x} \in X^{\omega} : (x_n)_{n \geq 1} \in A \,\}$$

και παρατηρούμε ότι $B \in \Gamma$ διότι η συνάρτηση $f : X^{\omega} \longrightarrow X^{\omega}$ η οποία στέλνει την ακολουθία $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \omega}$ στην ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι συνεχής και $B = f^{-1}(A)$.

Επομένως $B^c \in \neg\Gamma$ και άρα το παίγνιο $G(X^{<\omega}, B^c)$ είναι προσδιοριστό. Έστω ότι ο παίκτης I έχει μία νικητήρια στρατηγική σ_I^* στο $G(X^{<\omega}, B^c)$ η οποία καθορίζει ως πρώτη κίνηση για τον παίκτη I το στοιχείο $x \in X$. Θα χρησιμοποιήσουμε την σ_I^* για να κατασκευάσουμε μια στρατηγική για τον παίκτη II στο $G(X^{<\omega}, A)$. Περιγραφικά αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης I ξεκινήσει το $G(X^{<\omega}, A)$ επιλέγοντας ένα x_0 ο παίκτης II "απαντάει" ότι θα επέλεγε ο παίκτης I αν ακολουθούσε την σ_I^* στο $G(X^{<\omega}, B^c)$ και ο παίκτης II επέλεγε το x_0 ως απάντηση στην πρώτη κίνηση του παίκτη I. Ο παίκτης II συνεχίζει ακολουθώντας την σ_I^* θεωρώντας τις κινήσεις του παίκτη I στο $G(X^{<\omega}, A)$ ως τις απαντήσεις του II στο $G(X^{<\omega}, B^c)$ και ακολουθώντας την σ_I^*. Πιο τυπικά ορίζουμε την σ_{II} ως εξής:

- $\sigma_{II}^1 = X$.
- Για $k = 0, 1, \dots$ αν $(x_k)_{k=0}^{2k} \in \sigma_{II}$ τότε $(x_k)_{k=0}^{2k+1} \in \sigma_{II}$ αν και μόνο αν $(x, x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}) \in \sigma_I^*$
- Αν $(x_k)_{k=0}^{2k+1} \in \sigma_{II}$ τότε $(x_0, x_1, \dots, x_{2k+1}, \alpha) \in \sigma_{II}$ για κάθε $\alpha \in X$.

Παρατηρούμε ότι η σ_{II} είναι μια καλά ορισμένη στρατηγική για τον παίκτη II στο $X^{<\omega}$ αφού όταν είναι η σειρά του παίκτη II να παίξει η επέκταση κατά τον όρο x_{2k+1} είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το στοιχείο $\mathbf{x} \in X^{\omega}$ είναι ένα δυνατό αποτέλεσμα στο $G(X^{<\omega}, A)$ όταν ο παίκτης II ακολουθεί την σ_{II} δηλαδή $\mathbf{x} \in [\sigma_{II}]$.

Τότε $x^\frown\mathbf{x} = (x, x_0, x_1, \ldots) \in [\sigma_I^*]$. Πράγματι $(x^\frown\mathbf{x})\restriction_1 = x \in \sigma_I^*$ ενώ για $k = 0, 1, \ldots$ αν $(x^\frown\mathbf{x})\restriction_{2k+1} \in \sigma_I^*$ τότε $(x^\frown\mathbf{x})\restriction_{2k+2} \in \sigma_I^*$ διότι η σ_I^* είναι στρατηγική του παίκτη I και επομένως περιέχει όλες τις επεκτάσεις άρτιου μήκους. Τέλος αφού για κάθε $k \in \omega$, $\mathbf{x}\restriction_{2k} \in \sigma_{II}$ από τον ορισμό της σ_{II} έπεται ότι $(x, x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}) = (x^\frown\mathbf{x})\restriction_{2k+1} \in \sigma_I^*$.

Αφού η σ_I^* είναι νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I στο $G(X^{<\omega}, B^c)$ έπεται ότι $x^\frown\mathbf{x} \in B^c$ δηλαδή το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο A. Δείξαμε ότι $[\sigma_{II}] \subset A^c$ και επομένως η σ_{II} είναι νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη II στο $G(X^{<\omega}, A)$. Για την περίπτωση που ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G(X^{<\omega}, B^c)$ εργαζόμαστε παρόμοια για να κατασκευάσουμε μία νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I στο $G(X^{<\omega}, A)$. □

Πριν περάσουμε στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι η τοπολογία που έχουμε ορίσει στο σώμα του δέντρου έχει κάποιες καλές ιδιότητες. Για παράδειγμα ο X^ω είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το σύνολο X είναι αριθμήσιμο. Αυτό φαίνεται εύκολα αφού αν το X είναι υπεραριθμήσιμο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια ανοιχτών και ξένων υποσυνόλων του X^ω.

Μία άλλη ιδιότητα είναι ότι η τοπολογία που έχουμε ορίσει στον X^ω είναι ουσιαστικά η τοπολογία γινόμενο αν θεωρήσουμε κάθε αντίγραφο του X εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία.

Πρόταση 2.27 *Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία στο X^ω που παράγεται από τα σύνολα της μορφής $[X^{<\omega}(s)]$ και $\mathcal{T}_\Pi$ η τοπολογία γινόμενο στον X^ω. Τότε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Pi$.*

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\Pi$, για να αποδείξουμε την ισότητα αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σύνολο της μορφής:

$$\{\, \mathbf{x} \in X^\omega : x_n = x \,\}$$

είναι ανοιχτό στην $\mathcal{T}$. Αυτό διότι τότε θα έχουμε δείξει ότι κάθε προβολή είναι συνεχής και επομένως θα έχουμε ότι $\mathcal{T}_\Pi \subset \mathcal{T}$ διότι η τοπολογία γινόμενο είναι η ελάχιστη τοπολογία για την οποία οι προβολές είναι συνεχείς. Πράγματι βλέπουμε ότι :

$$\{\, \mathbf{x} \in X^\omega : x_n = x \,\} = \bigcup_{|s|=n} [X^{<\omega}(s^\frown x)]$$

και επομένως είναι ανοιχτό. □

Τέλος η $\mathcal{T}$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμη δηλαδή υπάρχει μια πλήρης μετρική $d : [T] \times [T] \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε η τοπολογία που παράγεται από αυτή στο $[T]$ να είναι η ίδια με αυτή που ορίσαμε.

Θεώρημα 2.28 *Έστω X μη κενό σύνολο T ένα δέντρο στο X και $\mathcal{T}$ η τοπολογία στο $[T]$ που έχει βάση τα σύνολα $[T(s)]$. Τότε το $[T]$ μπορεί να εφοδιαστεί με μία μετρική d ώστε η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ που επάγει να ισούται με την $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $d : [T] \times [T] \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \dfrac{1}{2^n} & \text{αν } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

όπου $n = \min\{\, n \in \omega : x_n \neq y_n \,\}$. Είναι άμεσο ότι η d είναι μη αρνητική συμμετρική και $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in [T]$ και έστω $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/2^n$. Αν $z \in [T(\mathbf{x}\restriction_{n+1})]$ τότε $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, αν $z \in [T(\mathbf{y}\restriction_{n+1})]$ τότε $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ διαφορετικά $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ και $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \max\{\, d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \,\} \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Έτσι βλέπουμε ότι η d είναι όντως μια μετρική στο $[T]$. Η οικογένεια

$$\left\{\, B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2^n}\right) : \mathbf{x} \in [T] \text{ και } n \in \mathbb{N} \,\right\}$$

όπου:
$$B(\mathbf{x}, \frac{1}{2^n}) = \left\{ \mathbf{y} \in [T] : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{1}{2^n} \right\}$$
αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}_d$. Είναι άμεσο επίσης ότι:
$$B(\mathbf{x}, \frac{1}{2^n}) = [T(\mathbf{x}{\restriction}_{n+1})]$$
ενώ αν $s \in T$ τότε για κάθε $\mathbf{x} \in [T]$ με $s \sqsubset \mathbf{x}$ ισχύει ότι:
$$[T(s)] = B\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2^{|s|+1}}\right).$$
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι βάσεις των $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}_d$ ταυτίζονται και επομένως $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. □

Παρατήρηση 2.29 Η μετρική που ορίσαμε παραπάνω είδαμε ότι όχι μόνο ικανοποιεί την τριγωνική ιδιότητα αλλά επιπλέον ικανοποιεί την πολύ ισχυρότερη ιδιότητα ότι για κάθε x, y, z ισχύει ότι
$$d(x, y) \leq \max\{ d(x, z), d(z, y) \}.$$
Οι μετρικοί χώροι που των οποίων η μετρική ικανοποιεί το παραπάνω λέγονται *υπερμετρικοί* (**ultrametric space**) και έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μία από αυτές όπως φάνηκε στην παραπάνω απόδειξη είναι ότι κάθε σημείο μιας μπάλας με ακτίνα ϵ είναι κέντρο της δηλαδή για κάθε $y \in B(x, \epsilon)$ ισχύει ότι $B(y, \epsilon) = B(x, \epsilon)$!

Πρόταση 2.30 *Έστω $(s_n)_{n\in\omega} \subset T$ μια αύξουσα ακολουθία κόμβων σε ένα δέντρο T δηλαδή $s_i \sqsubseteq s_j$ για $i \leq j$. Αν $\lim|s_n| = \infty$ δηλαδή η ακολουθία $(s_n)_{n\in\omega}$ δεν είναι τελικά σταθερή τότε υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x} \in [T]$ τ.ω $s_n \sqsubset \mathbf{x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \omega$ θέτουμε $k_n = \min\{ k \in \omega : |s_k| \geq n+1 \}$ και $x_n = s_{k_n}(n)$. Θέτουμε $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\omega}$ και ισχυριζόμαστε ότι $\mathbf{x} \in [T]$ και $s_n \sqsubset x$ για κάθε $n \in \omega$.

Έστω $n \in \omega$ τότε $\mathbf{x}\restriction_{n+1} \sqsubseteq s_{k_n}$ διότι για κάθε $m \leq n$ ισχύει ότι $s_{k_m} \sqsubseteq s_{k_n}$ και επομένως $x_m = s_{k_m}(m) = s_{k_n}(m)$. Έτσι βλέπουμε ότι $\mathbf{x} \in [T]$.

Έστω $n, m \in \omega$. Αν $k_m \leq n$ τότε $\mathbf{x}\restriction_{m+1} \sqsubseteq s_{k_m} \sqsubseteq s_n$. Αν $k_m > n$ τότε $s_n \sqsubseteq s_{k_m}$ και $|s_n| \leq m$ επομένως για κάθε $k \leq |s_n|$ θα ισχύει ότι $s_n(k) = s_{k_m}(k) = x_k$ δηλαδή $s_n \sqsubseteq \mathbf{x}\restriction_{m+1}$. Έτσι βλέπουμε ότι $s_n \sqsubset \mathbf{x}$ για κάθε $n \in \omega$. Αν $\mathbf{y} \in [T]$ τ.ω $s_n \sqsubset \mathbf{y}$ για κάθε $n \in \omega$ τότε για κάθε $m \in \omega$ θα έχουμε ότι $y_m = s_{k_m}(m) = x_m$ και επομένως $x = y$. □

Παρατήρηση 2.31 Από την πρόταση 2.30 βλέπουμε ότι αν μια ακολουθία κόμβων $(s_n)_{n\in\omega}$ είναι αύξουσα και μη φραγμένη με την παραπάνω έννοια, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα οριακό αντικείμενο $\lim s_n$ το οποίο δεν είναι άλλο από την μοναδική άπειρη ακολουθία που επεκτείνει όλους τους όρους της ακολουθίας.

Θεώρημα 2.32 *Το $[T]$ εφοδιασμένο με την μετρική d που ορίσαμε παραπάνω είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη

Έστω $(\mathbf{x}_n)_{n\in\omega} \subset [T]$ μια ακολουθία cauchy. Τότε για κάθε $N \in \omega$ θα υπάρχει ένα $n_0 \in \omega$ τ.ω για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει ότι $\mathbf{x}_n\restriction_{N+1} = \mathbf{x}_m\restriction_{N+1} := s_N$. Είναι προφανές ότι η ακολουθία κόμβων s_N ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 2.30 και επομένως υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x} \in [T]$ τ.ω $s_N \sqsubset \mathbf{x}$ για κάθε $N \in \omega$. Έτσι βλέπουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \omega$ και $n_0 \in \omega$ τ.ω για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε ότι $\mathbf{x}_n\restriction_{N+1} = s_N \sqsubset \mathbf{x}$ και επομένως $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \frac{1}{2^N} < \epsilon$. □

Ένας κλάδος ο οποίος ασχολείται με την μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ παιγνίων και τοπολογίας γενικότερα και όχι μόνο ως προς τις τοπολογικές ιδιότητες του payoff set είναι τα *τοπολογικά παίγνια* (**topological games**). Μια καλή επισκόπηση αρκετών αποτελεσμάτων σχετικών με τα τοπολογικά παίγνια δίνεται στο [18].

2.3 Η δομή των Borel υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Την μικρότερη $\sigma-$άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του X την συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X)$. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}(X)$ λέγονται Borel και η $\mathcal{B}(X)$ λέγεται η $\sigma-$άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X. Έτσι η $\mathcal{B}(X)$ είναι η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει τα ανοιχτά, τα κλειστά και είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις και τομές στοιχείων της. Η ιεραρχία των Borel υποσυνόλων είναι ένας τρόπος ταξινόμησης τους σε "επίπεδα" που κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχούν σε κλάσεις συνόλων αύξουσας πολυπλοκότητας. Ο ορισμός όπως θα δούμε είναι επαγωγικός πράγμα που καθιστά εφικτή την χρήση επαγωγής για την απόδειξη ιδιοτήτων των συνόλων Borel.

Έστω ω_1 ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Για $1 \leq \kappa < \omega_1$ ορίζουμε τις κλάσεις $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_\kappa(X)$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ υποσυνόλων του X με υπερπεπερασμένη επαγωγή ως εξής:

- $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{\, G \subset X : G \text{ ανοιχτό} \,\}$.
- $\mathbf{\Pi}^0_1(X) = \{\, F \subset X : F \text{ κλειστό} \,\}$.
- $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa(X) = \left\{\, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\kappa_n} \text{ όπου } \forall n \in \omega\, \kappa_n < \kappa \,\right\}$.
- $\mathbf{\Pi}^0_\kappa(X) = \left\{\, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n} \text{ όπου } \forall n \in \omega\, \kappa_n < \kappa \,\right\}$.
- $\mathbf{\Delta}^0_\kappa(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\kappa(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\kappa(X)$

Για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού θα παραλείπουμε την αναφορά στον τοπολογικό χώρο και έτσι θα αναφερόμαστε στις κλάσεις $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa, \mathbf{\Pi}^0_\kappa$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.33 Είναι φανερό ότι για κάθε $\kappa < \omega_1$ ισχύει ότι $\mathbf{\Delta}^0_\kappa \subset \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa \subset \mathbf{\Pi}^0_\kappa$. Επίσης για $\xi < k$ έχουμε ότι $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \subset \mathbf{\Pi}^0_\kappa$ και $\mathbf{\Pi}^0_\xi \subset \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$.

Έστω $\mathcal{E}$ μία συλλογή υποσυνόλων του X. Θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

- $(\mathcal{E})_\sigma = \{ \bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \mathcal{E} \}$.
- $(\mathcal{E})_\delta = \{ \bigcap_{n\in\omega} A_n : A_n \in \mathcal{E} \}$.

Κάνοντας χρήση του παραπάνω συμβολισμού έχουμε ότι τα γνωστά από την θεωρία μετρικών χώρων G_δ και F_σ σύνολα είναι τα στοιχεία των κλάσεων $\mathbf{\Pi}^0_2$ και $\mathbf{\Sigma}^0_2$ αντίστοιχα ενώ γενικότερα $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa = \big(\bigcup_{\xi<\kappa}\mathbf{\Pi}^0_\xi\big)_\sigma$ και $\mathbf{\Pi}^0_\kappa = \big(\bigcap_{\xi<\kappa}\mathbf{\Sigma}^0_\xi\big)_\delta$.

Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει τις πιο βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των κλάσεων $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa, \mathbf{\Pi}^0_\kappa$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ (ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις), καθώς επίσης τις σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ τους.

Πρόταση 2.34 *Έστω X μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε:*

(i) *Για κάθε κ η κλάση $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις και η $\mathbf{\Pi}^0_\kappa$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές.*

(ii) *Για κάθε κ οι κλάσεις $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa, \mathbf{\Pi}^0_\kappa$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ είναι κλειστές στις πεπερασμένες ενώσεις και τομές.*

(iii) *Για κάθε κ ισχύει ότι $\mathbf{\Pi}^0_\kappa = \neg\mathbf{\Sigma}^0_\kappa$.*

(iv) *Για κάθε κ η κλάση $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ είναι μία άλγεβρα συνόλων.*

(v) *Για κάθε κ ισχύει ότι $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa, \mathbf{\Pi}^0_\kappa \subset \mathbf{\Delta}^0_{\kappa+1}$.*

Απόδειξη

(i) Απλά εφαρμόζουμε το γεγονός ότι η αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο στο σύνολο δεικτών.

(ii) Θα το δείξουμε για δύο σύνολα ενώ η γενική περίπτωση επαληθεύεται με επαγωγή. Έστω B_1 και B_2 δύο $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ σύνολα. Τότε

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= \left(\bigcup_{n_1 \in \omega} A_{n_1} \right) \cap \left(\bigcup_{n_2 \in \omega} A_{n_2} \right) \\ &= \bigcup_{(n_1,n_2)\in\omega^2} (A_{n_1} \cap A_{n_2}) \end{aligned}$$

όπου A_{n_i} είναι $\mathbf{\Pi}^0_{\xi_{n_i}}$ σύνολο με $\xi_{n_i} < \kappa$. Από το *(i)* έπεται ότι $A_{n_i} \cap A_{n_j}$ είναι ένα $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ σύνολο με $\xi < \kappa$ για κάθε n_i, n_j και έτσι $B_1 \cap B_2$ είναι ένα $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ σύνολο. Αντίστοιχα δουλεύουμε για τις κλάσεις $\mathbf{\Pi}^0_\kappa$ ενώ για τις κλάσεις $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ έπεται άμεσα από τον ορισμό και τα προηγούμενα αποτελέσματα.

(iii) Για $\kappa = 1$ ισχύει εξ' ορισμού. Έστω ότι ισχύει για κάθε $\xi < \kappa$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^0_\kappa &= \left\{ \bigcap_{n\in\omega} A_n : A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n} \text{ όπου } \forall n \in \omega\ \kappa_n < \kappa \right\} \\ &= \left\{ \bigcap_{n\in\omega} (B_n)^c : B_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\kappa_n} \text{ όπου } \forall n \in \omega\ \kappa_n < \kappa \right\} \\ &= \left\{ \left(\bigcup_{n\in\omega} B_n \right)^c : B_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\kappa_n} \text{ όπου } \forall n \in \omega\ \kappa_n < \kappa \right\} \\ &= \left\{ A^c : A \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa \right\}. \end{aligned}$$

(iv) Από τον ορισμό της $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ και το *(iii)* έπεται ότι $\mathbf{\Delta}^0_\kappa$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα.

(v) Εδώ θα γίνει αισθητή η χρησιμότητα της απαίτησης ο χώρος στον οποίο δουλεύουμε να είναι μετρικοποιήσιμος. Θα δείξουμε την πρόταση για τις κλά-

σεις $\mathbf{\Pi}^0_\kappa$ τότε ο εγκλεισμός των κλάσεων $\mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ έπεται από το (*iv*). Από την παρατήρηση 2.33 γνωρίζουμε ότι $\mathbf{\Pi}^0_\kappa \subset \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa+1}$ επομένως αν δείξουμε ότι $\mathbf{\Pi}^0_\kappa \subset \mathbf{\Pi}^0_{\kappa+1}$ θα έχουμε ότι $\mathbf{\Pi}^0_\kappa \subset \mathbf{\Delta}^0_{\kappa+1}$. Για $\kappa = 1$ θέλουμε να δείξουμε ότι τα κλειστά σύνολα είναι G_δ δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοιχτών. Αφού ο χώρος στον οποίο δουλεύουμε είναι μετρικοποιήσιμος υπάρχει μία μετρική έστω η $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ που παράγει ακριβώς την ίδια τοπολογία (και άρα την ίδια ιεραρχία) στον X. Έστω F ένα κλειστό στον X τότε θεωρούμε την ακολουθία ανοιχτών συνόλων

$$G_n = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$$

και υποστηρίζουμε ότι $F = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Πράγματι βλέπουμε ότι $F \subset \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αν $x \in \bigcap_{n\in\omega} G_n$ για κάθε $n \in \omega$ επιλέγουμε x_n τ.ω $x \in B(x_n, 1/n)$ και βλέπουμε ότι $x_n \to x$ άρα $x \in F$ αφού $x_n \in F$ και F κλειστό.

Έχουμε λοιπόν ότι $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{\Delta}^0_2$ και επομένως ισχύει επίσης ότι $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subset \mathbf{\Delta}^0_2$. Αν για κάθε $\xi < \kappa$ ισχύει η πρόταση και $A \in \mathbf{\Pi}^0_\kappa$ θέλουμε να δείξουμε ότι $A \in \mathbf{\Pi}^0_{\kappa+1}$. Έχουμε $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ με $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n}$ και $\kappa_n < \kappa$ για κάθε $n \in \omega$. Από την επαγωγική υπόθεση $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_{\kappa_n+1} \subset \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n+1}$ επομένως $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n+1}$ και $\kappa_n + 1 < \kappa + 1$ δηλαδή $A \in \mathbf{\Pi}^0_{\kappa+1}$. □

Έτσι η παρακάτω εικόνα περιγράφει την σχέση μεταξύ των κλάσεων της ιεραρχίας όπου κάθε κλάση περιέχεται σε όλες τις κλάσεις οι οποίες βρίσκονται δεξιά της.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \mathbf{\Sigma}^0_\omega & & \cdots\cdots \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & & \mathbf{\Delta}^0_4 & \cdots\cdots & \mathbf{\Delta}^0_\omega & & \mathbf{\Delta}^0_{\omega+1} & \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \mathbf{\Pi}^0_\omega & & \cdots\cdots
\end{array}$$

Το σημαντικό γεγονός βέβαια είναι ότι οι κλάσεις που ορίσαμε εξαντλούν τα Borel σύνολα.

Θεώρημα 2.35 *Έστω X μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε ισχύει ότι:*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\kappa = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\kappa = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\kappa.$$

Απόδειξη

Η ισότητα μεταξύ των ενώσεων των κλάσεων είναι άμεση, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$.

Έστω $U = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$. Αν $(B_n)_{n\in\omega} \subset U$ τότε $B_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n}$ με $\kappa_n < \omega_1$ για κάθε $n \in \omega$. Θέτουμε $\kappa = \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n$. Ο κ είναι διατακτικός αριθμός και ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων είναι και αριθμήσιμος. Επομένως $\kappa < \omega_1$ και προφανώς $\mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n} \subset \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ για κάθε $n \in \omega$. Έτσι $B_n \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ για κάθε $n \in \omega$ και άρα $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa \subset U$. Επίσης αν $A \in U$ τότε $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa$ για $\kappa < \omega_1$ και επομένως $A^c \in \mathbf{\Pi}^0_\kappa \subset \mathbf{\Delta}^0_{\kappa+1} \subset \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa+1}$ άρα $A^c \in U$. Έτσι η U είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις δηλαδή είναι μία σ-άλγεβρα που προφανώς περιέχει τα ανοιχτά άρα $\mathcal{B}(X) \subset U$. Τέλος με επαγωγή μπορεί να δείξει κανείς ότι $U \subset \mathcal{B}(X)$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας αφορά την καλή συμπεριφορά των κλάσεων ως προς τις αντίστροφες εικόνες μέσω συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.36 *Έστω X και Y μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση. Αν $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa(Y)$ (αντίστοιχα $\mathbf{\Pi}^0_\kappa(Y)$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa(Y)$) τότε $f^{-1}(A) \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa(X)$ (αντίστοιχα $\mathbf{\Pi}^0_\kappa(X)$ και $\mathbf{\Delta}^0_\kappa(X)$).*

Απόδειξη

Πράγματι για $\kappa = 1$ έχουμε ότι η αντίστροφη εικόνα ανοιχτού είναι ανοιχτό και άρα η πρόταση ισχύει. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε $\xi < \kappa$ τότε αν $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa(Y)$ θα έχουμε ότι $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ με $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n}$ και $\kappa_n < \kappa$ για κάθε $n \in \omega$. Από την επαγωγική υπόθεση $f^{-1}(A_n) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\kappa_n}(X)$ για κάθε $n \in \omega$ και επομένως

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(A_n) \in \mathbf{\Sigma}^0_\kappa(X).$$

Παρόμοια δουλεύουμε για τις άλλες περιπτώσεις. $\square$

Πολλές πληροφορίες σχετικά με τα borel σύνολα, τις ιδιότητες τους και της συνδέσεις τους με πολλούς τομείς των μαθηματικών μπορεί να βρει κανείς στο [17].

3 Το Θεώρημα του Martin

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε αναλυτικά την απόδειξη του Donald Martin [12] η οποία αν και περιέχει αρκετά πολύπλοκα επιχειρήματα είναι απλούστερη της αρχικής [11] (επίσης του Martin) και αφορά την προσδιοριστότητα των Borel παιγνίων, δηλαδή των παιγνίων στα οποία το payoff set είναι ένα Borel υποσύνολο του σώματος του δέντρου.

Η απόδειξη στηρίζεται στην δημιουργία ενός βοηθητικού παιγνίου η προσδιοριστότητα του οποίου είναι ικανή συνθήκη ώστε το αρχικό παίγνιο να είναι επίσης προσδιοριστό.

3.1 Μονότονες συναρτήσεις σε δέντρα

Πριν ορίσουμε τα αντικείμενα στα οποία θα στηριχθεί η απόδειξη θα δούμε κάποιες ιδιότητες των μονότονων συναρτήσεων που είναι ορισμένες πάνω σε δέντρα. Σε ολόκληρο το κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε σε ένα δέντρο T θα εννοούμε ένα δέντρο σε κάποιο σύνολο X του οποίου το σώμα $[T]$ θα θεωρείται εφοδιασμένο με την συνήθη (μετρικοποιήσιμη) τοπολογία.

Ορισμός 3.1 Έστω T, P δέντρα στα μη κενά σύνολα X, Y αντίστοιχα. Μία συνάρτηση $\phi : T \longrightarrow P$ θα λέγεται μονότονη αν σέβεται την διάταξη δηλαδή αν:

$$s \sqsubseteq_T t \Rightarrow \phi(s) \sqsubseteq_P \phi(t).$$

Έστω $\phi : T \longrightarrow P$ μία μονότονη συνάρτηση. Θέτουμε

$$D(\phi) = \left\{ \mathbf{x} \in [T] : \lim_{n\to\infty} |\phi(\mathbf{x}\restriction_n)| = \infty \right\}.$$

και ορίζουμε $\phi^* : D(\phi) \longrightarrow [P]$ από την σχέση

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \phi(\mathbf{x}\restriction_n).$$

Το όριο στο δεξιό μέρος του ορισμού της ϕ^* δεν είναι άλλο από το μοναδικό στοιχείο του $[P]$ του οποίου την ύπαρξη μας εγγυάται η πρόταση 2.30. Θα λέμε ότι η ϕ είναι proper αν $D(\phi) = [T]$.

Τα παρακάτω θεωρήματα αναδεικνύουν την ισχυρή σύνδεση μεταξύ των μονότονων συναρτήσεων σε δέντρα και των συνεχών συναρτήσεων μεταξύ των σωμάτων τους.

Θεώρημα 3.2 *Έστω $\phi : T \longrightarrow P$ μία μονότονη συνάρτηση μεταξύ των δέντρων T και P. Τότε το σύνολο $D(\phi)$ είναι G_δ (δηλαδή $\mathbf{\Pi}^0_2$) και η ϕ^* είναι συνεχής.*

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{x} \in D(\phi) \Leftrightarrow \forall n \exists k (|\phi(\mathbf{x}\restriction_k)| \geq n).$$

Επομένως αν $A_n^k = \{ \mathbf{x} \in [T] : |\phi(\mathbf{x}\restriction_k)| \geq n \}$ τότε

$$D(\phi) = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\in\omega} A_n^k.$$

Για τα σύνολα A_n^k ισχύει ότι

$$A_n^k = \bigcup_{\substack{s \in T^k \\ |\phi(s)| \geq n}} [T(s)]$$

και άρα είναι ανοιχτά, επομένως το $D(\phi)$ είναι G_δ.

Για την συνέχεια της ϕ^* έστω $\mathbf{x} \in D(\phi)$ και ας θεωρήσουμε μία βασική περιοχή του $\phi^*(\mathbf{x})$ η οποία θα έχει την μορφή $[P(s)]$ για κάποιο κόμβο s του δέντρου P για τον οποίο $s \sqsubset \phi^*(\mathbf{x})$. Αφού $\mathbf{x} \in D(\phi)$ θα πρέπει να υπάρχει $k \in \omega$ τ.ω $|\phi(\mathbf{x}{\restriction}_k)| \geq |s|$ ενώ από τον ορισμό της ϕ^* έπεται ότι $\phi(\mathbf{x}{\restriction}_k) \sqsubset_P \phi^*(\mathbf{x})$, έτσι θα πρέπει να ισχύει ότι $s \sqsubseteq_P \phi(\mathbf{x}{\restriction}_k)$. Αν $\mathbf{y} \in D(\phi) \cap [T(\mathbf{x}{\restriction}_k)]$ από την μονοτονία της ϕ για κάθε $n \geq k$ θα έχουμε

$$\phi(\mathbf{x}{\restriction}_k) \sqsubseteq_P \phi(\mathbf{y}{\restriction}_n) \sqsubset_P \phi^*(\mathbf{y})$$

και επομένως

$$\phi^*(\mathbf{y}) \in [P\left(\phi(\mathbf{x}{\restriction}_k)\right)] \subset [P(s)]. \qquad \square$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι μονότονες συναρτήσεις μεταξύ δέντρων επάγουν συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ των σωμάτων τους, το επόμενο αποτέλεσμα μας βεβαιώνει και για το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.3 *Έστω T, P δέντρα στα σύνολα X και Y αντίστοιχα, $A \subset [T]$ ένα G_δ σύνολο και $f : A \longrightarrow [P]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία μονότονη συνάρτηση $\phi : T \longrightarrow P$ τ.ω $A = D(\phi)$ και $\phi^* = f$.*

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq \emptyset$ αφού αλλιώς μπορούμε απλά να θέσουμε $\phi(s) = \{\emptyset\}$ για κάθε $s \in T$. Αφού το A είναι G_δ υποσύνολο του $[T]$ έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n\in\omega}$ από ανοιχτά σύνολα ώστε $A = \bigcap U_n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα και ότι $U_0 = [T]$.

Για να ορίσουμε την συνάρτηση ϕ εργαζόμαστε ως εξής: Για $s \in T$ θέτουμε

$$k(s) = \max \{ \, n \leq |s| : [T(s)] \subset U_n \, \} .$$

Το $k(s)$ είναι καλά ορισμένο αφού το σύνολο $\{ \, n \leq |s| : [T(s)] \subset U_n \, \}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Θεωρούμε τώρα το σύνολο $[T(s)] \cap A$ και την εικόνα του μέσω της f. Αν $[T(s)] \cap A \neq \emptyset$ τότε $f\left([T(s)] \cap A\right) \neq \emptyset$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\{ \, v \in P : f\left([T(s)] \cap A\right) \subset [P(v)] \, \}$$

είναι μη κενό και καλά διατεταγμένο από την $\sqsubseteq_P$. Έτσι αν θεωρήσουμε μόνο στοιχεία του P με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k(s)$ ορίζεται μονοσήμαντα το μακρύτερο $u \in P$ για το οποίο $f\left([T(s)] \cap A\right) \subset [P(u)]$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε λοιπόν $\phi(s) = u$.

Έστω τώρα ότι $[T(s)] \cap A = \emptyset$. Τότε θα υπάρχει ένα μέγιστο $m \in \omega$ τ.ω $[T(s{\upharpoonright}_m)] \cap A \neq \emptyset$ οπότε θέτουμε $\phi(s) = \phi(s{\upharpoonright}_m)$. Αν $s \sqsubseteq_T s'$ τότε $k(s) \leq k(s')$ και $f\left([T(s')] \cap A\right) \subset f\left([T(s)] \cap A\right) \subset [P(\phi(s))]$ επομένως $\phi(s) \sqsubseteq_P \phi(s')$. Έτσι βλέπουμε ότι η ϕ είναι μια καλά ορισμένη μονότονη συνάρτηση μεταξύ των δέντρων T και P, θα δείξουμε τώρα ότι $A = D(\phi)$.

Έστω $\mathbf{x} \in A$ τότε $\mathbf{x} \in U_n$ για κάθε $n \in \omega$ και επομένως λόγω του ότι το U_n είναι ανοιχτό υπάρχει $k_n \geq n$ τ.ω $[T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{k_n})] \subset U_n$. Από την συνέχεια της f έπεται ότι για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $l_n \geq n$ τ.ω $f([T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{l_n})] \cap A) \subset [P(f(\mathbf{x}){\upharpoonright}_n)]$.

Αν θέσουμε $m_n = \max\{k_n, l_n\}$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $m_n \geq n$ τ.ω $[T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})] \subset U_n$ και επομένως $n \leq k(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n}) \leq m_n$. Από τον ορισμό της ϕ έπεται ότι $f([T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})] \cap A) \subset [P(\phi(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n}))]$ και από τον ορισμό του m_n έπεται ότι $f([T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})] \cap A) \subset [P(f(\mathbf{x}){\upharpoonright}_n)]$. Όμως ο κόμβος $\phi(x{\upharpoonright}_{m_n})$ είναι ο μακρύτερος του οποίου η βασική περιοχή καλύπτει το $f([T(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})] \cap A)$ και είναι μικρότερος από το $k(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})$ και επομένως $n \leq |\phi(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})|$ ενώ επίσης ισχύει ότι $f(\mathbf{x}){\upharpoonright}_n \sqsubseteq \phi(\mathbf{x}{\upharpoonright}_{m_n})$. Έτσι $\lim |\phi(\mathbf{x}{\upharpoonright}_n)| = \infty$ και άρα $\mathbf{x} \in D(\phi)$.

Αν $\mathbf{x} \in D(\phi)$ τότε $\lim k(\mathbf{x}\restriction_m) = \infty$ δηλαδή για κάθε n υπάρχει m_n τέτοιο ώστε $k(\mathbf{x}\restriction_{m_n}) \geq n$. Από τον ορισμό του $k(\mathbf{x}\restriction_{m_n})$ και από την μονοτονία της $(U_n)_{n\in\omega}$ έπεται ότι

$$\mathbf{x} \in [T(\mathbf{x}\restriction_{m_n})] \subset U_{k(\mathbf{x}\downharpoonleft m_n)} \subset U_n$$

για κάθε $n \in \omega$ και επομένως $\mathbf{x} \in A$.

Έτσι δείξαμε ότι $A = D(\phi)$. Για $\mathbf{x} \in A$ και $n \in \omega$ δείξαμε ότι υπάρχει m_n τ.ω $f(\mathbf{x})\restriction_n \sqsubseteq \phi(\mathbf{x}\restriction_{m_n}) \sqsubset \phi^*(\mathbf{x})$ και αφού υπάρχει μοναδική άπειρη ακολουθία που να επεκτείνει όλα τα $f(\mathbf{x})\restriction_n$ έχουμε ότι $\phi^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ δηλαδή $f = \phi^*$. □

3.2 Η προσδιοριστότητα των Borel συνόλων

Στην απόδειξη του θεωρήματος του Martin για την προσδιοριστότητα των Borel υποσυνόλων του σώματος ενός κλαδεμένου δέντρου, κύριο ρόλο παίζει η δυνατότητα της σύνδεσης ενός παιγνίου με ένα άλλο με τέτοιο τρόπο ώστε η προσδιοριστότητα του ενός να συνεπάγεται την προσδιοριστότητα του άλλου.

Αυτό είναι χαρακτηριστικό πολλών αποδείξεων σχετικών με την προσδιοριστότητα κλάσεων υποσυνόλων. Η έννοια που μας επιτρέπει την σύνδεση αυτή στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η παρακάτω:

Ορισμός 3.4 Έστω T ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X. *Ανύψωση* (**Covering ή lifting**) του T ονομάζεται μία τριάδα $(\widetilde{T}, \pi, \phi)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

(*i*) Το $\widetilde{T}$ είναι ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο $\widetilde{X}$.

(*ii*) $\pi : \widetilde{T} \longrightarrow T$ είναι μια μονότονη συνάρτηση από το $\widetilde{T}$ στο T η οποία επάγει μια συνεχή συνάρτηση από το $[\widetilde{T}]$ στο $[T]$ την οποία θα συμβολίζουμε επίσης με π.

(*iii*) $\phi : \widetilde{S} \longrightarrow S$ είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει στρατηγικές του $\widetilde{T}$ σε στρατηγικές του T με τέτοιο τρόπο ώστε αν $\widetilde{\sigma}_I \in \widetilde{S}_I$ στρατηγική του παίκτη I στο $\widetilde{T}$ (αντ. του παίκτη II στο $\widetilde{T}$) τότε $\phi(\widetilde{\sigma}_I) \in S_I$ στρατηγική του παίκτη I στο T (αντ. του παίκτη II στο T).

(*iv*) Η ϕ απεικονίζει κάθε στρατηγική $\widetilde{\sigma}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η $\phi(\widetilde{\sigma})$ περιορισμένη σε θέσεις μήκους $\leq n$ να εξαρτάται μόνο από τα n πρώτα επίπεδα της $\widetilde{\sigma}$ δηλαδή αν $\widetilde{\tau} \in \widetilde{S}$ στρατηγική τ.ω $\widetilde{\sigma}^{\leq n} = \widetilde{\tau}^{\leq n}$ τότε $\phi(\widetilde{\sigma})^{\leq n} = \phi(\widetilde{\tau})^{\leq n}$.

(*v*) Αν $\mathbf{x} \in [\phi(\widetilde{\sigma})]$ τότε υπάρχει $\widetilde{\mathbf{x}} \in [\widetilde{\sigma}]$ τ.ω $\pi(\widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$.

Η επόμενη πρόταση αναδεικνύει την χρησιμότητα του covering.

Πρόταση 3.5 *Έστω ότι το T είναι ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X, $A \subset [T]$ και $G(T, A)$ το αντίστοιχο παίγνιο. Τότε αν το $(\widetilde{T}, \pi, \phi)$ είναι ένα covering του T, $\widetilde{A} = \pi^{-1}(A)$ και $G(\widetilde{T}, \widetilde{A})$ το αντίστοιχο παίγνιο η συνάρτηση ϕ απεικονίζει νικητήριες στρατηγικές του παίκτη I (αντ. του παίκτη II) στο $G(\widetilde{T}, \widetilde{A})$ σε νικητήριες στρατηγικές του παίκτη I (αντ. του παίκτη II) στο $G(T, A)$.*

Απόδειξη
Έστω $\widetilde{\sigma}_I$ μια νικητήρια στρατηγική του παίκτη I στο παίγνιο $G(\widetilde{T}, \widetilde{A})$ και έστω $\mathbf{x} \in [\phi(\widetilde{\sigma})]$. Από τον ορισμό του covering έπεται ότι υπάρχει $\widetilde{\mathbf{x}} \in [\widetilde{\sigma}]$ τ.ω $\pi(\widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$. Αφού η $\widetilde{\sigma}$ είναι νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I στο $G(\widetilde{T}, \widetilde{A})$ θα ισχύει ότι $\widetilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{A} = \pi^{-1}(A)$ και επομένως $\mathbf{x} = \pi(\widetilde{\mathbf{x}}) \in A$. Έτσι βλέπουμε ότι $[\phi(\widetilde{\sigma})] \subset A$ δηλαδή η $\phi(\widetilde{\sigma})$ είναι νικητήρια στρατηγική για τον παίκτη I στο $G(T, A)$.

Έτσι βλέπουμε ότι για να αποδείξουμε την προσδιοριστότητα ενός παιγνίου αρκεί να βρούμε ένα covering και να αποδείξουμε την προσδιοριστότητα του αντίστοιχου παιγνίου. Για τεχνικούς λόγους θα χρειαστούμε ένα πιο ισχυρό τύπο covering.

Ορισμός 3.6 Ονομάζουμε k-covering ενός δέντρου T ένα covering $(\widetilde{T}, \pi, \phi)$ για το οποίο ισχύει ότι $\widetilde{T}^{\leq 2k} = T^{\leq 2k}$ και η συνάρτηση π περιορισμένη στα $2k$ πρώτα επίπεδα του $\widetilde{T}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

Ορισμός 3.7 Έστω T ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X. Ένα covering $(\widetilde{T}, \pi, \phi)$ λέμε ότι *ξεδιπλώνει* (**unravels**) ένα σύνολο $A \subset [T]$ αν το $\pi^{-1}(A)$ είναι clopen στο $[\widetilde{T}]$.

Παρατήρηση 3.8 Είναι φανερό ότι αν ένα covering ξεδιπλώνει το $A \subset [T]$ τότε από το θεώρημα 2.23 των Gale και Steward και την πρόταση 3.5 το παίγνιο $G(T, A)$ θα είναι προσδιοριστό. Επίσης παρατηρούμε ότι αν ένα covering ξεδιπλώνει ένα $A \subset [T]$ τότε θα ξεδιπλώνει και το A^c.

Για την απόδειξη της προσδιοριστότητας των borel υποσυνόλων του $[T]$ θα χρειαστούμε δύο λήμματα. Το πρώτο και πιο δύσκολο αποτέλεσμα μας βεβαιώνει ότι κάθε κλειστό παίγνιο $G(T, A)$ έχει ένα k-covering το οποίο ξεδιπλώνει το A. Αυτό βέβαια δεν το χρειαζόμαστε για να δείξουμε την προσδιοριστότητα του $G(T, A)$ αλλά θα αποτελέσει την επαγωγική βάση πάνω στην οποία θα χτίσουμε την απόδειξη του κυρίως θεωρήματος.

Λήμμα 3.9 *Έστω T ένα κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X και $A \subset [T]$ ένα κλειστό υποσύνολο του $[T]$. Τότε για κάθε $k \in \omega$ υπάρχει ένα k-covering $(\widetilde{T}, \pi, \phi)$ το οποίο ξεδιπλώνει το A.*

Απόδειξη

Έστω $k \in \omega$. Πρώτα θα περιγράψουμε το δέντρο $\widetilde{T}$ και το σύνολο $\widetilde{X}$ έμμεσα καθορίζοντας τις επιτρεπτές κινήσεις για τους δύο παίκτες στο βοηθητικό παίγνιο και στην συνέχεια τυπικά.

Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των μη κενών κλειστών υποσυνόλων του σώματος ενός κλαδεμένου δέντρου και των κλαδεμένων υποδέντρων του, έτσι για το $A \subset [T]$ θεωρούμε το

$$T_A = \{\, x{\restriction}_n \in T : x \in A \text{ και } n \in \omega \,\}$$

για το οποίο ισχύει ότι $[T_A] = A$.

Για τους k πρώτους γύρους (ή τις 2k πρώτες κινήσεις) του παιγνίου οι παίκτες έχουν τις επιλογές και ακολουθούν τους κανόνες που περιγράφονται από το δέντρο T. Έτσι στο αρχικό αυτό στάδιο το παίγνιο στο $\widetilde{T}$ έχει την παρακάτω μορφή:

I	x_0		x_2		x_{2k-2}		
				...			...
II		x_1				x_{2k-1}	

Όπου $(x_k)_{k=0}^{2k-1} \in T$.

Ο $k+1$ γύρος του βοηθητικού παιγνίου είναι καθοριστικός. Στην $2k+1$ κίνηση ο παίκτης I εκτός από ένα στοιχείο $x_{2k} \in X$ τ.ω $s = (x_k)_{k=0}^{2k} \in T$ επιλέγει επίσης μια quasi-στρατηγική Σ_I στο $T(s)$ όπως φαίνεται παρακάτω.

I	x_0		x_2		x_{2k-2}		(x_{2k}, Σ_I)	
				...				...
II		x_1				x_{2k-1}		

Στην συνέχεια ο παίκτης II εκτός ενός στοιχείου $x_{2k+1} \in X$ τέτοιο ώστε $t = s^\frown x_{2k+1} \in \Sigma_I$ παίζει ακόμα ένα αντικείμενο το οποίο επιτρέπεται να είναι ένα από τα παρακάτω:

Είτε ένα $u \in X^{<\omega}$ άρτιου μήκους τ.ω $t^\frown u \in \Sigma_I \setminus T_A$ (άρα $x \notin A$ για κάθε $x \in [T]$ τ.ω $t^\frown u \sqsubset x$).

I	x_0		x_2		x_{2k-2}		(x_{2k}, Σ_I)		
				...					...
II		x_1				x_{2k-1}		(x_{2k+1}, u)	

Είτε μια quasi-στρατηγική Σ_{II} στο $\Sigma_I(t)$ (άρα $\Sigma_{II} \subset \Sigma_I(t)$) τ.ω $\Sigma_{II} \subset T_A$ (άρα $[\Sigma_{II}] \subset A$).

I	x_0		x_2		x_{2k-2}		(x_{2k}, Σ_I)		
				...					...
II		x_1				x_{2k-1}		(x_{2k+1}, Σ_{II})	

Στην περίπτωση που ο παίκτης II επιλέξει ένα στοιχείο $u \in X^{<\omega}$ όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω τότε και οι δύο παίκτες συνεχίζουν επιλέγοντας για τις επόμενες κινήσεις εναλλάξ τα στοιχεία $u_0, u_1, \dots, u_{2l-1} \in X$ μέχρι να σχηματιστεί το $t^\frown u \in \Sigma_I$ και στην συνέχεια απλά ακολουθούν τους κανόνες του T.

I			(x_{2k}, Σ_I)		u_0			u_{2l-2}		
	...						...			...
II		x_{2k-1}		(x_{2k+1}, u)		u_1			u_{2l-1}	

Στην περίπτωση που ο παίκτης II επιλέξει μια quasi-στρατηγική Σ_{II} και οι δύο παίκτες ακολουθούν την Σ_{II}.

Πιο τυπικά το δέντρο $\widetilde{T}$ αποτελείται από όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες v για τις οποίες υπάρχει

$$p = (x_0, x_1, \dots, x_{2k-1})^\frown((x_{2k}, \Sigma_I))^\frown((x_{2k+1}, u))^\frown u$$

ή

$$q = (x_0, x_1, \dots x_{2k-1})^\frown((x_{2k}, \Sigma_I))^\frown((x_{2k+1}, \Sigma_{II}))$$

έτσι ώστε $t = s^\frown x_{2k+1} = (x_i)_{i=0}^{2k+1} \in T$, Σ_I quasi-στρατηγική στο $T(s)$, $u \in X^{<\omega}$ με $t^\frown u \in \Sigma_I \setminus T_A$, Σ_{II} quasi-στρατηγική στο Σ_I με $\Sigma_{II} \subset T_A$ και είτε

$$(v \sqsubseteq p) \vee (p \sqsubseteq v)$$

είτε

$$(v \sqsubseteq q) \vee (q \sqsubseteq v \wedge v' \in \Sigma_{II})$$

όπου v' το είναι το v αφού “αφαιρέσουμε” την επιπλέον πληροφορία.

Είναι φανερό ότι το $\widetilde{T}$ είναι ένα κλαδεμένο δέντρο αφού σε κάθε βήμα κάθε παίκτης έχει τουλάχιστον μια “νόμιμη” κίνηση. Πράγματι ο παίκτης I δεν έχει περιορισμό ως προς την επιλογή της Σ_I και αν $[\Sigma_I] \cap A^c \neq \emptyset$ θα υπάρχει ένα u τ.ω $t^\frown u \notin T_A$ ενώ αλλιώς θα υπάρχει $\Sigma_{II} \subset T_A$.

Η συνάρτηση $\pi : \widetilde{T} \longrightarrow T$ είναι η προφανής δηλαδή αυτή η οποία απλά αγνοεί τα επιπλέον αντικείμενα,

$$(x_0,x_1,\ldots,x_{2k-1},(x_{2k},\Sigma_I),(x_{2k+1},\bullet),x_{2k+2},\ldots) \stackrel{\pi}{\longmapsto} (x_0,x_1,\ldots,x_{2k-1},x_{2k},x_{2k+1},x_{2k+2},\ldots)$$

έτσι βλέπουμε ότι η π είναι μονότονη και στα πρώτα 2k επίπεδα του $\widetilde{T}$ είναι η ταυτοτική όπως επιβάλει ο ορισμός του k-covering.

Επίσης από τον ορισμό του $\widetilde{T}$ έπεται ότι $\widetilde{\mathbf{x}} \in \pi^{-1}(A)$ αν και μόνο αν $\pi(\widetilde{\mathbf{x}}) \in A$ αν και μόνο αν ο παίκτης II επέλεξε μια κίνηση της μορφής (x_{2k+1}, Σ_{II}) στην $2k+2$ κίνηση του. Επομένως

$$\pi^{-1}(A) = \bigcup_q [\widetilde{T}(q)], \quad q \text{ όπως παραπάνω}$$

δηλαδή $\pi^{-1}(A)$ ανοιχτό και αφού $\pi : [\widetilde{T}] \longrightarrow [T]$ συνεχής και το A είναι κλειστό έχουμε επίσης ότι το $\pi^{-1}(A)$ είναι και κλειστό.

Έτσι μένει να ορίσουμε την $\phi : \widetilde{S} \longrightarrow S$ έτσι ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού του covering. Η συνάρτηση ϕ ορίζεται πρώτα σε μερικές στρατηγικές με ένα μονότονο τρόπο δηλαδή αν $m \leq n$ τότε $\phi(\widetilde{\sigma}^{\leq m}) = (\phi(\widetilde{\sigma}^{\leq n}))^{\leq m}$ και στη συνέχεια η δράση της ορίζεται από την σχέση $\phi(\widetilde{\sigma})^{\leq n} = \phi(\widetilde{\sigma}^{\leq n})$ για κάθε $n \in \omega$. Έτσι εξασφαλίζουμε την ισχύ της απαίτησης (*iv*) του ορισμού 3.4 του covering.

Θα ορίσουμε πρώτα την δράση της ϕ στις στρατηγικές του παίκτη I και ύστερα του παίκτη II. Έστω λοιπόν $\widetilde{\sigma}_I \in \widetilde{S}_I$ μια στρατηγική για τον παίκτη I στο $\widetilde{T}$. Οι στρατηγικές $\widetilde{\sigma}_I$ και $\phi(\widetilde{\sigma}_I)$ ταυτίζονται στα $2k$ πρώτα επίπεδα. Έστω ότι η

$\widetilde{\sigma}_I$ υπαγορεύει στον παίκτη I την κίνηση (x_{2k}, Σ_I). Τότε η $\phi(\widetilde{\sigma}_I)$ θα υπαγορεύει την κίνηση x_{2k} (στην "θέση" $(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1})$ του παιγνίου στο T).

Έστω ότι στην συνέχεια ο παίκτης II επιλέγει το στοιχείο x_{2k+1} σαν κίνηση του στο T. Το σύνολο $[\Sigma_I] \cap A^c$ είναι ανοιχτό στην τοπολογία του $[\Sigma_I]$ και επομένως από το θεώρημα 2.23 έπεται ότι το παίγνιο $G(\Sigma_I, [\Sigma_I] \cap A^c)$ είναι προσδιοριστό. Όσον αφορά την κίνηση απάντηση του παίκτη I στην θέση $t = (x_i)_{i=0}^{2k+1}$ στο T διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω ότι ο παίκτης I έχει μια νικητήρια στρατηγική έστω την τ στο παίγνιο $G(\Sigma_I, [\Sigma_I] \cap A^c)$. Αν ο παίκτης I ακολουθεί την τ τότε αφού το $[\Sigma_I] \cap A^c$ είναι ανοιχτό θα υπάρξει μια πρώτη στιγμή τ.ω η ακολουθία που θα έχει σχηματιστεί θα είναι της μορφής $t^\frown u$, $|u|$ άρτιο και $[\Sigma_I(t^\frown u)] \subset A^c$ (ενδέχεται $u = \emptyset$ αν $\Sigma_I(t) \subset A^c$). Από τον ορισμό του $\widetilde{T}$ η ακολουθία

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I), (x_{2k+1}, u))$$

θα είναι στοιχείο της $\widetilde{\sigma}$. Έτσι ορίζουμε την $\phi(\widetilde{\sigma})$ ώστε να ακολουθεί την τ μέχρι να σχηματιστεί το u και στην συνέχεια να ακολουθεί την $\widetilde{\sigma}$ θεωρώντας ότι ο παίκτης II επέλεξε την κίνηση (x_{2k+1}, u) σαν απάντηση στο $(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I))$.

(ii) Αν ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική στο $G(\Sigma_I, [\Sigma_I] \cap A^c)$ τότε ο κόμβος $s = (x_i)_{i=0}^{2k}$ είναι μη χαμένη θέση για τον παίκτη II και επομένως ορίζεται η κανονική quasi-στρατηγική Σ_{II} του παίκτη II στο $\Sigma_I(s)$. Αν $\mathbf{x} \in [\Sigma_{II}]$ τότε για κάθε $n \in \omega$, $\mathbf{x}\restriction_n \in T_A$ διότι αν όχι θα είχαμε ότι $\mathbf{x}\restriction_n$ χαμένη θέση για τον παίκτη II στο $G(\Sigma_I, [\Sigma_I] \cap A^c)$ το οποίο είναι άτοπο. Έτσι $[\Sigma_{II}] \subset A$ και επομένως η ακολουθία

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I), (x_{2k+1}, \Sigma_{II}))$$

είναι στοιχείο της $\widetilde{\sigma}$. Τότε λοιπόν όσο ο παίκτης II ακολουθεί την Σ_{II} η $\phi(\widetilde{\sigma})$ ακολουθεί την $\widetilde{\sigma}$ θεωρώντας ότι ο παίκτης II επέλεξε την κίνηση

(x_{2k+1}, Σ_{II}) σαν απάντηση στο $(x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I))$. Αν κάποια στιγμή σχηματιστεί μια ακολουθία $v \notin \Sigma_{II}$ (ή αμέσως αν $(x_i)_{i=0}^{2k+1} \notin \Sigma_{II}$) αυτό θα σημαίνει ότι ο παίκτης I θα έχει μια νικητήρια στρατηγική τ στο $G(\Sigma_I, [\Sigma_I] \cap A^c)$ και η $\phi(\widetilde{\sigma})$ θα ακολουθήσει πρώτα την τ και στην συνέχεια την $\phi(\widetilde{\sigma})$ σε αντιστοιχία με την πρώτη περίπτωση.

Έστω τώρα $\widetilde{\sigma}_{II} \in \widetilde{S}_{II}$ μια στρατηγική του παίκτη II στο $\widetilde{T}$. Όπως και πριν οι $\widetilde{\sigma}$ και $\phi(\widetilde{\sigma})$ ταυτίζονται στα $2k$ πρώτα επίπεδα. Έστω ότι ο παίκτης I επιλέγει το x_{2k} στην επόμενη του κίνηση στο T. Παρεκκλίνοντας από τον συμβολισμό θεωρούμε τα εξής σύνολα:

$$\mathfrak{T} = \{\ \Sigma_I : \Sigma_I \text{ quasi-στρατηγική στο } T(s)\ \}$$
$$\mathcal{U} = \left\{\ t^\frown u \in T(s) : t = s^\frown x_{2k+1} \wedge \exists \Sigma_I \in \mathfrak{T}\,(\widetilde{\sigma}\,(x_{2k}, \Sigma_I) = (x_{2k+1}, u))\ \right\}$$
$$\mathfrak{U} = \left\{\ \mathbf{x} \in [T(s)] : \exists t^\frown u \in \mathcal{U}\left(t^\frown u \sqsubset x\right)\ \right\}$$

Από τον ορισμό του το $\mathfrak{U}$ (το οποίο εξ' ορισμού είναι υποσύνολο του A^c) προκύπτει ότι είναι ανοιχτό σύνολο και επομένως το παίγνιο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$ (όπου ο παίκτης II προσπαθεί να κατασκευάσει ένα $\mathbf{x} \in \mathfrak{U}$) είναι προσδιοριστό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

(i) Έστω ότι ο παίκτης II έχει μια νικητήρια στρατηγική έστω την τ στο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$. Τότε η $\phi(\widetilde{\sigma})$ ακολουθεί την τ έως ότου σχηματιστεί μια ακολουθία $t^\frown u \in \mathcal{U}$. Από εκείνη την στιγμή και έπειτα η $\phi(\widetilde{\sigma})$ ακολουθεί την $\widetilde{\sigma}$ (για τις κινήσεις μήκους $\geq |t^\frown u|$ θεωρώντας ότι ο παίκτης I επέλεξε για την $2k+1$ κίνηση του το (x_{2k}, Σ_I) όπου Σ_I είναι η quasi-στρατηγική που αντιστοιχεί στο $t^\frown u$.

(ii) Έστω ότι ο παίκτης I έχει νικητήρια στρατηγική στο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$. Έστω Σ_I η κανονική quasi-στρατηγική του παίκτη I στο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$ και έστω ότι η $2k+1$ κίνηση του παίκτη Ι στο $\widetilde{T}$ ήταν η (x_{2k}, Σ_I). Αν υπήρχαν x_{2k+1}, u ώστε η $\widetilde{\sigma}$ να υπαγόρευε την κίνηση (x_{2k+1}, u) στο $\widetilde{T}$ η θέση $t^\frown u \in \Sigma_I$ θα ήταν χαμένη για τον παίκτη Ι στο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$ πράγμα άτοπο από τον ορισμό της κανονικής quasi-στρατηγικής. Έτσι θεωρώντας ότι ο παίκτης Ι επέλεξε το (x_{2k}, Σ_I) σαν κίνηση η $\phi(\widetilde{\sigma})$ ακολουθεί την $\widetilde{\sigma}$ (η οποία θα υπαγορεύει μια κίνηση της μορφής (x_{2k+1}, Σ_{II})) για όσο η κινήσεις του παίκτη Ι ανήκουν στην Σ_I. Αν κάποια στιγμή στο T ο παίκτης Ι πάψει να ακολουθεί την Σ_I (ή αμέσως αν $s = (x_i)_{i=0}^{2k} \notin \Sigma_I$) ο παίκτης ΙΙ θα έχει μια νικητήρια στρατηγική στο $G(T(s), \mathfrak{U}^c)$ και επομένως η $\phi(\widetilde{\sigma})$ μπορεί να οριστεί από εκεί και έπειτα όπως στην πρώτη περίπτωση.

Ορίσαμε τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζουμε το $\widetilde{S}$ στο S και από την κατασκευή είναι φανερό ότι για κάθε $n \in \omega$ το $\phi(\widetilde{\sigma})^{\leq n}$ εξαρτάται μόνο από το $\widetilde{\sigma}^{\leq n}$. Τέλος για να δείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα (v) του ορισμού 3.4 αρκεί να πάρουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις ανάλογα με το αν έχουμε στρατηγική του παίκτη Ι ή του παίκτη ΙΙ και το $\mathbf{x} \in A$ ή το $\mathbf{x} \in A^c$. □

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $A \subset [T]$ κλειστό, για κάθε k υπάρχει ένα k-covering το οποίο ξεδιπλώνει το A. Η επόμενη πρόταση μας βεβαιώνει για την καλή συμπεριφορά των coverings σε σχέση με την σύνθεση.

Πρόταση 3.10 *Έστω ότι το T είναι ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X, (T_1, π_1, ϕ_1) ένα k-covering του T και (T_2, π_2, ϕ_2) ένα k-covering του T_1. Τότε η τριάδα $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \phi_1 \circ \phi_2)$ είναι ένα k-covering του T.*

Απόδειξη

Η σύνθεση μονότονων συναρτήσεων είναι μονότονη και αν σ_I^2 στρατηγική για τον παίκτη Ι στο T_2 η $\phi_2(\sigma_I^2)$ θα είναι στρατηγική για τον ίδιο παίκτη στο T_1 και άρα μέσω της ϕ_1 θα απεικονιστεί πάλι σε στρατηγική για τον ίδιο παίκτη. Τα n πρώτα επίπεδα της $\phi_1(\phi_2(\sigma^2))$ εξαρτώνται μόνο από τα n πρώτα επίπεδα της $\phi_2(\sigma_2)$ τα οποία εξαρτώνται μόνο από τα n πρώτα επίπεδα της σ^2. Αν $\mathbf{x} \in [\phi_1(\phi_2(\sigma^2))]$ τότε υπάρχει $\mathbf{x}_1 \in [\phi_2(\sigma^2)]$ και άρα και $\mathbf{x}_2 \in [\sigma^2]$ ώστε $\pi_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1$ και $\pi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}$, έτσι $\pi_1(\pi_2(\mathbf{x}_2)) = \mathbf{x}$. Τέλος είναι προφανές ότι $\pi_1 \circ \pi_2$ είναι η ταυτοτική στα $2k$ πρώτα επίπεδα. $\square$

Παρατήρηση 3.11 Όπως είδαμε από το θεώρημα 2.28 η τοπολογία στο σώμα ενός δέντρου είναι μετρικοποιήσιμη και έτσι από το θεώρημα 2.36 προκύπτει ότι αν ένα σύνολο $A \subset [T]$ ανήκει σε κάποια borel κλάση τότε το $\pi^{-1}(A)$ θα ανήκει στην αντίστοιχη κλάση του $[\widetilde{T}]$. Πιο συγκεκριμένα αν στα δεδομένα της προηγούμενης πρότασης προσθέσουμε την υπόθεση ότι το (T_1, π_1, ϕ_1) κάνει unravel το A τότε το ίδιο θα ισχύει και για το $(T_2, \pi_1 \circ \pi_2, \phi_1 \circ \phi_2)$.

Το δεύτερο λήμμα το οποίο θα μας χρειαστεί για την απόδειξη του κυρίως θεωρήματος είναι το παρακάτω.

Λήμμα 3.12 *Έστω $T := T_0$ ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X. Έστω επίσης ότι $(T_{n+1}, \pi_{n+1}, \phi_{n+1})_{n\in\omega}$ μια ακολουθία τ.ω η τριάδα $(T_{n+1}, \pi_{n+1}, \phi_{n+1})$ να είναι ένα $k+n$-covering του T_n για κάποιο $k \in \omega$. Τότε υπάρχει ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο $\widetilde{T}$ και ακολουθίες $(\widetilde{\pi}_n)_{n\in\omega}$ και $(\widetilde{\phi}_n)_{n\in\omega}$ τ.ω*

$$\begin{aligned}
&\left(\widetilde{T}, \widetilde{\pi}_n, \widetilde{\phi}_n\right) \text{ είναι } k+n\text{-covering του } T_n \\
&\pi_{n+1} \circ \widetilde{\pi}_{n+1} = \widetilde{\pi}_n \text{ και} \\
&\phi_{n+1} \circ \widetilde{\phi}_{n+1} = \widetilde{\phi}_n.
\end{aligned}$$

Απόδειξη

Οι κόμβοι του $\widetilde{T}$ θα είναι πεπερασμένες ακολουθίες του συνόλου $\widetilde{X} = \bigcup X_n$ όπου $(X_n)_{n\in\omega}$ είναι τα σύνολα πάνω τα οποία είναι ορισμένα τα $(T_n)_{n\in\omega}$. Από τον ορισμό του k-covering προκύπτει ότι $T_n^{\leq 2(k+n)} = T_{n+1}^{\leq 2(k+n)}$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Έτσι για μια οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία $s \in \widetilde{X}^{<\omega}$ το μήκος της οποίας ικανοποιεί την σχέση $|s| \leq 2(k+n_0)$ για κάποιο n_0 θα ισχύει είτε ότι $s \in T_n$ για κάθε $n \geq n_0$ είτε ότι $s \notin T_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Θέτουμε

$n(s) = \min\{ n \in \omega : |s| \leq 2(k+n) \}$ και ορίζουμε

$$\widetilde{T} = \left(\left\{ s \in \widetilde{X} : s \in T_{n(s)} \right\}, \sqsubseteq\right).$$

Έτσι $s \in \widetilde{T}$ αν και μόνο αν ανήκει σε όλα τα T_n για αρκετά μεγάλο n. Είναι φανερό ότι αν $t \in \widetilde{T}$ και $s \sqsubseteq t$ τότε $s \in \widetilde{T}$ και άρα το $\widetilde{T}$ είναι ένα καλώς ορισμένο δέντρο στο $\widetilde{X}$. Επίσης αν $s \in \widetilde{T}$ τότε $s \in T_{n(s)+1}^{\leq 2(k+n(s))}$ και άρα υπάρχει ένας αμέσως επόμενος $t \in T_{n(s)+1}$ του s. Για τον t ισχύει ότι $|t| \leq 2(k+n(s)+1)$ και επομένως $t \in T_n$ για κάθε $n \geq n(s)+1$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι $t \in \widetilde{T}$ και άρα το $\widetilde{T}$ είναι ένα κλαδεμένο δέντρο.

Μία χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι από την κατασκευή του $\widetilde{T}$ προκύπτει ότι

$$\forall n \in \omega \left(\widetilde{T}^{\leq 2(k+n)} = T_n^{\leq 2(k+n)}\right).$$

Για να ορίσουμε την $\widetilde{\pi}_n : \widetilde{T} \longrightarrow T_n$ εργαζόμαστε ως εξής: Αν $s \in \widetilde{T}$ και $n(s) \leq n$ Θέτουμε $\widetilde{\pi}_n(s) = s$. δηλαδή την ορίζουμε ώστε να είναι η ταυτοτική στα $2(k+n)$ πρώτα επίπεδα του $\widetilde{T}$ όπως απαιτείται από τον ορισμό του $2(k+n)$-covering. Έστω τώρα ένα $s \in \widetilde{T}$ με $n < n(s)$. Τότε

$$\widetilde{\pi}_n(s) = \pi_{n+1} \circ \pi_{n+2} \circ \cdots \pi_{n(s)}(s) \in T_n.$$

και παρατηρούμε ότι όντως

$$\pi_{n+1} \circ \widetilde{\pi}_{n+1}(s) = \widetilde{\pi}_n(s)$$

για κάθε $s \in \widetilde{T}$. Επίσης οι $\widetilde{\pi}_n$ είναι αποτέλεσμα σύνθεσης μονότονων συναρτήσεων και επομένως επίσης μονότονες όπως απαιτείται από τον ορισμό του covering.

Θα ορίσουμε την δράση της $\widetilde{\phi}_n$ σε “μερικές” στρατηγικές με έναν μονότονο τρόπο. Έστω $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{S}(\widetilde{T})$ μία στρατηγική στο $\widetilde{T}$ και έστω $n \in \omega$. Αν $m \leq n$ θέτουμε

$$\widetilde{\phi}_n(\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)}) = \widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)} \subset T_n.$$

Αν $n < m$ θέτουμε

$$\widetilde{\phi}_n(\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)}) = \phi_{n+1} \circ \phi_{n+2} \circ \cdots \phi_m(\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)}) \subset T_n.$$

Από τις ιδιότητες των $\phi_{n+1}, \ldots \phi_m$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο ορισμός είναι καλός δηλαδή ότι αν $\lambda \leq m$ τότε $\widetilde{\phi}_n(\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+l)}) = \widetilde{\phi}_n(\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)})^{\leq 2(k+\lambda)}$. Είναι άμεσο επίσης ότι $\phi_{n+1} \circ \widetilde{\phi}_{n+1} = \widetilde{\phi}_n$.

Μένει να επιβεβαιώσουμε την ιδιότητα (v) του ορισμού 3.4. Έστω ένα $\mathbf{x}_n \in [\widetilde{\phi}_n(\widetilde{\sigma})] \subset [T_n]$. Αφού $\widetilde{\phi}_n = \phi_{n+1} \circ \widetilde{\phi}_{n+1}$ και η τριάδα $(T_{n+1}, \pi_{n+1}, \phi_{n+1})$ είναι ένα $2(k+n)$-covering του T_n υπάρχει ένα $\mathbf{x}_{n+1} \in T_{n+1}$ τ.ω $\pi_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{x}_n$ με $\mathbf{x}_{n+1} \in [\widetilde{\phi}_{n+1}(\widetilde{\sigma})]$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε μια αύξουσα ακολουθία $(\widetilde{s}_m)_{m\in\omega} = (\mathbf{x}_m \restriction_{2(k+m)})_{m\in\omega}$ στοιχείων του $\widetilde{T}$ οποία συγκλίνει σε ένα μοναδικό όριο. Έστω $\widetilde{\mathbf{x}}$ αυτό το όριο. Εξ' ορισμού $\widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)} = \widetilde{\phi}_m(\widetilde{\sigma})^{\leq 2(k+m)}$ και $\widetilde{\mathbf{x}}\restriction_{2(k+m)} = \widetilde{s}_m \in \widetilde{\sigma}^{\leq 2(k+m)}$ για κάθε $m \in \omega$. Έτσι αποδείξαμε ότι $\widetilde{\mathbf{x}} \in [\widetilde{\sigma}]$. Τέλος μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\widetilde{\pi}_n(\widetilde{\mathbf{x}}\restriction_{2(k+m)}) = \pi_{n+1} \circ \pi_{n+2} \circ \cdots \pi_m(\mathbf{x}_m\restriction_{2(k+m)}) = \mathbf{x}_n\restriction_{2(k+m)}$$

για κάθε $m > n$ και επομένως $\widetilde{\pi}_n(\widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_n$ όπως απαιτείται. □

Με την βοήθεια των λημμάτων 3.9 και 3.12 μπορούμε να αποδείξουμε την προσδιοριστοτητα των borel υποσυνόλων του $[T]$.

Θεώρημα 3.13 (Martin 1985) *Έστω T ένα μη κενό κλαδεμένο δέντρο σε ένα σύνολο X και $A \subset [T]$ ένα borel υποσύνολο του σώματος του T. Τότε το αντίστοιχο παίγνιο $G(T, A)$ είναι προσδιοριστό.*

Απόδειξη

Από την παρατήρηση 3.8 προκύπτει ότι αρκεί να βρούμε ένα covering το οποίο να κάνει unravel το A. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.35 για κάθε A borel υπάρχει $\alpha < \omega_1$ τ.ω $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο α. Για $\alpha = 1$ έχουμε ότι $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ και επομένως $A^c \in \mathbf{\Pi}^0_1$ ενώ από το λήμμα 3.9 έχουμε ότι για κάθε $k \in \omega$ υπάρχει ένα k-covering που κάνει unravel το A^c και επομένως κάνει unravel και το A.

Έστω ότι για κάθε δέντρο T' για κάθε $\beta < \alpha$ για κάθε $B \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta([T']) \cup \mathbf{\Pi}^0_\beta([T'])$ και για κάθε $k \in \omega$ υπάρχει ένα k-covering το οποίο να κάνει unravel το B. Για το A έχουμε ότι

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_{\beta_n}, \quad \beta_n < \alpha,\ A_{\beta_n} \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_n}([T]),\ \forall n \in \omega.$$

Έστω $k \in \omega$ και έστω (T_1, π_1, ϕ_1) ένα k-covering του $T = T_0$ το οποίο κάνει unravel το A_{β_0}. Θεωρούμε το σύνολο $\pi_1^{-1}(A_{\beta_1}) \subset [T_1]$ από το θεώρημα 2.36 έπεται ότι αυτό είναι ένα $\mathbf{\Pi}^0_{\beta_1}([T_1])$ σύνολο. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει ένα $k+1$-covering του T_1, έστω το (T_2, π_2, ϕ_2) το οποίο κάνει unravel το $\pi_1^{-1}(A_{\beta_1})$. Συνεχίζοντας μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (T_n, π_n, ϕ_n) τ.ω για $n \geq 2$ η τριάδα (T_n, π_n, ϕ_n) να είναι ένα $k + (n-1)$-covering του T_{n-1} το οποίο κάνει unravel το

$$(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_{n-1})^{-1}(A_{\beta_{n-1}}).$$

Έστω $\widetilde{T}$, $(\widetilde{\pi}_n)_{n\in\omega}$ και $(\widetilde{\phi}_n)_{n\in\omega}$ όπως προκύπτουν από το λήμμα 3.12. Η τριάδα $(\widetilde{T}, \widetilde{\pi}_0, \widetilde{\phi}_0)$ είναι ένα k-covering του T και για κάθε $n \geq 2$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_0^{-1}(A_{\beta_n}) &= (\pi_1 \circ \widetilde{\pi}_1)^{-1}(A_{\beta_n}) \\
&= \ldots \\
&= (\pi_1 \circ \pi_2 \cdots \circ \pi_{n+1} \circ \widetilde{\pi}_{n+1})^{-1}(A_{\beta_n}) \\
&= \widetilde{\pi}_{n+1}^{-1}\left(\pi_{n+1}^{-1}\left((\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n)^{-1}(A_{\beta_n})\right)\right).
\end{aligned}$$

Επομένως από την συνέχεια της $\widetilde{\pi}_{n+1}$ και τις ιδιότητες των (T_n, π_n, ϕ_n) προκύπτει ότι το $\widetilde{\pi}_0^{-1}(A_{\beta_n})$ είναι clopen για κάθε $n \in \omega$ και έτσι το $(\widetilde{T}, \widetilde{\pi}_0, \widetilde{\phi}_0)$ κάνει unravel όλα τα A_{β_n}. Άρα το

$$\widetilde{\pi}_0^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\omega} \widetilde{\pi}_0^{-1}(A_{\beta_n})$$

είναι ανοιχτό στο $[\widetilde{T}]$ και επομένως υπάρχει ένα k-covering (T^*, π^*, ϕ^*) του $\widetilde{T}$ το οποίο το κάνει unravel. Από την πρόταση 3.10 και τα παραπάνω δεδομένα έχουμε ότι το $(T^*, \widetilde{\pi}_0 \circ \pi^*, \widetilde{\phi}_0 \circ \phi^*)$ είναι ένα k-covering του οποίο κάνει unravel το A. □

4 Borel Χρωματισμοί Γραφημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ένα τρόπο σύνδεσης του θεωρήματος του Martin για την προσδιοριστότητα των παιγνίων των οποίων το payoff set είναι Borel και ενός κλάδου της συνδυαστικής που αφορά τους Borel χρωματισμούς Γραφημάτων.

4.1 Λίγα προαπαιτούμενα

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τις βασικές έννοιες πάνω στις οποίες χτίζονται τα ερωτήματα με τα οποία ασχολείται ο κλάδος της συνδυαστικής Borel.

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *πολωνικός* (**polish**) αν είναι μετρικοποιήσιμος, πλήρης και διαχωρίσιμος. Ένας μετρήσιμος τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{B})$ λέγεται Borel χώρος αν η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων υποσυνόλων του είναι τα

Borel υποσύνολα του ενώ θα λέγεται *Standard Borel χώρος* (**SB-χώρος**) αν ως τοπολογικός χώρος είναι πολωνικός.

Παρατήρηση 4.1 Όπως είδαμε το σώμα ενός δέντρου $[T] \subset X^\omega$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος ενώ αν το σύνολο X είναι αριθμήσιμο τότε είναι και διαχωρίσιμος δηλαδή πολωνικός. Έτσι αν θεωρήσουμε το σώμα ενός τέτοιου δέντρου εφοδιασμένο με την σ-άλγεβρα των borel υποσυνόλων του αυτό θα αποτελεί ένα SB-χώρο.

Παρατήρηση 4.2 Την έννοια των χώρων Borel εισήγαγε ο G.W. Mackey [9] σαν εργαλείο για την μελέτη αναπαραστάσεων αλγεβρικών δομών ως σύνολα γραμμικών τελεστών σε διανυσματικούς χώρους. Δύο κείμενα όπου κανείς μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους borel χώρους είναι τα [1, 15].

Έστω Γ μία αριθμήσιμη ομάδα την οποία εφοδιάζουμε με την διακριτή τοπολογία και X ένας SB-χώρος. Αν εφοδιάσουμε τον χώρο των συναρτήσεων X^Γ από την Γ στον X με την τοπολογία γινόμενο και την σ-άλγεβρα των borel υποσυνόλων που προκύπτουν από αυτή ο χώρος X^Γ γίνεται ένας SB-χώρος.

Ορισμός 4.3 Η δράση αριστερής μετατόπισης $\cdot : \Gamma \times X^\Gamma \longrightarrow X^\Gamma$ της ομάδας Γ στον χώρο X^Γ ορίζεται από την σχέση $\alpha \cdot y(\beta) = y(\alpha^{-1}\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Gamma$ και κάθε $y \in X^\Gamma$. Με $\mathrm{Free}(X^\Gamma)$ συμβολίζουμε το ελεύθερο μέρος αυτής της δράσης δηλαδή το σύνολο $\{\, y \in X^\Gamma : \alpha \cdot y \neq y \,\forall \alpha \neq 1_\Gamma \,\}$.

Ορισμός 4.4 Αν μία ομάδα Γ δρα σε ένα σύνολο X και $Y \subset X$ τότε το Y λέγεται Γ-*αναλλοίωτο* (**invariant**) αν $\Gamma \cdot Y := \{\, \gamma \cdot y \in X : \gamma \in \Gamma \text{ και } y \in Y \,\} \subset Y$.

Ορισμός 4.5 Έστω X και Y δύο σύνολα και $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση. Αν μία ομάδα Γ δρα στα X και Y λέμε ότι η f είναι *equivariant* αν για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot f(x)$.

Έστω Γ και Δ δύο ομάδες. Μία λέξη στοιχείων των Γ και Δ είναι ένα ”γινόμενο” της μορφής $s_1 s_2 s_3 \cdots s_n$ όπου κάθε s_i είναι στοιχείο είτε της Γ είτε της Δ. Μία λέξη λέγεται *ανοιγμένη* (**reduced**) αν δεν περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο καμίας ομάδας και δεν περιέχει ζεύγη της μορφής xx^{-1}. Κάθε λέξη μπορεί να αναχθεί με μοναδικό τρόπο σε μία ανοιγμένη λέξη με βάση τα αξιώματα της ομάδας. Η κενή λέξη είναι η μοναδική λέξη μήκους 0 και είναι ανοιγμένη με τετριμμένο τρόπο.

Ορισμός 4.6 Έστω Γ και Δ δύο ομάδες. Το ελεύθερο γινόμενο $\Gamma * \Delta$ των Γ και Δ είναι η ομάδα που περιέχει ως στοιχεία όλες της ανοιγμένες λέξεις με χαρακτήρες από τις Γ και Δ με πράξη την παράθεση λέξεων ακολουθούμενη από αναγωγή σε ανοιγμένη λέξη.

Παρατήρηση 4.7 Το ταυτοτικό στοιχείο της $\Gamma * \Delta$ είναι η κενή λέξη $\emptyset$. Κάθε ανοιγμένη λέξη της $\Gamma * \Delta$ εκτός της κενής μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως ένα πεπερασμένο γινόμενο της μορφής $\gamma_{i_0}\delta_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots$ ή $\delta_{i_0}\gamma_{i_1}\delta_{i_2}\cdots$. Οι πρώτες θα λέγονται Γ-λέξεις ενώ οι δεύτερες Δ-λέξεις.

Για την συνέχεια θα θεωρούμε μόνο αριθμήσιμες διακριτές ομάδες τις οποίες θα συμβολίζουμε με γράμματα όπως τα Γ, Δ ενώ τα στοιχεία τους θα τα συμβολίζουμε με μικρά ελληνικά γράμματα όπως τα α, β, γ, κτλ. Με γράμματα όπως τα X, Y, Z, θα συμβολίζουμε SB-χώρους, με τα x, y, z στοιχεία αυτών και με τα f, g και h θα συμβολίζουμε συναρτήσεις μεταξύ τους.

4.2 Το κυρίως λήμμα

Τώρα θα προχωρήσουμε στο κυρίως λήμμα με την χρήση του οποίου προκύπτουν πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Να παρατηρήσουμε ότι οι ομάδες Γ και Δ δρουν στο σύνολο $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ απλά περιορίζοντας την δράση της αριστερής μετατόπισης όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Η απόδειξη του λήμματος θα κάνει χρήση ενός παιγνίου αποτέλεσμα του οποίου θα είναι ένα στοιχείο y του $\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}$ και στο οποίο ο παίκτης I θα ορίζει το y στις Γ-λέξεις ενώ ο παίκτης II θα το ορίζει στις Δ-λέξεις.

Παρατήρηση 4.8 Το ελεύθερο μέρος της αντίστοιχης δράσης αριστερής μετατόπισης στους χώρους $\mathbb{N}^{\Gamma}$, $\mathbb{N}^{\Delta}$ και $\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}$ είναι standard borel χώροι.

Μια παρατήρηση η οποία θα μας βοηθήσει να συνδυάσουμε νικητήριες στρατηγικές με ένα χρήσιμο τρόπο είναι ότι αν W_{Γ} και W_{Δ} είναι τα σύνολο των Γ και Δ-λέξεων αντίστοιχα και γ_0, γ_1 διαφορετικά στοιχεία της Γ τότε

$$\gamma_0 \cdot W_{\Delta} \cap \gamma_1 \cdot W_{\Delta} = \emptyset$$

και το ίδιο ισχύει αν εναλλάξουμε τους ρόλους των Γ και Δ.

Λήμμα 4.9 *Έστω Γ και Δ αριθμήσιμες διακριτές ομάδες. Αν $A \subset \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ είναι ένα borel υποσύνολο του $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ τότε τουλάχιστον ένα από τα επόμενα είναι αληθές:*

(i) *Υπάρχει μία 1-1 borel συνάρτηση $f : \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ η οποία είναι equivariant ως προς την δράση αριστερής μετατόπισης της Γ σε αυτούς τους χώρους και είναι τέτοια ώστε $f\left(\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma})\right) \subset A$.*

(ii) *Υπάρχει μία 1-1 borel συνάρτηση $f : \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Delta}) \longrightarrow \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ η οποία είναι equivariant ως προς την δράση αριστερής μετατόπισης της Δ σε αυτούς τους χώρους και είναι τέτοια ώστε $f\left(\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Delta})\right) \subset A^c$.*

Απόδειξη

Η κύρια δυσκολία της απόδειξης έγκειται στο γεγονός ότι θέλουμε το αποτέλεσμα του παιγνίου να είναι στοιχείο του $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ και όχι απλά στοιχείο του $\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}$. Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη με έναν ορισμό ο οποίος θα μας βοηθήσει στο παραπάνω.

Έστω P το υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta}$ που περιλαμβάνει όλα τα $y \in \mathbb{N}^{\Gamma*\Delta}$ για τα οποία έχουμε ότι για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και $\delta \in \Delta$ διαφορετικά του ταυτοτικού ισχύει ότι $\gamma \cdot y\restriction_\Gamma \neq y\restriction_\Gamma$ και $\delta \cdot y\restriction_\Delta \neq y\restriction_\Delta$. Έστω Y το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του P. Το παραπάνω σημαίνει ότι το Y είναι το σύνολο που περιλαμβάνει όλα εκείνα τα x για τα οποία για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta$ και για κάθε $y \in \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ αν $y = \alpha^{-1}x$ τότε $y \in P$.

Το Y είναι Borel διότι $Y = \bigcap_{\alpha\in\Gamma*\Delta} \alpha \cdot P$ και το P είναι Borel αφού μπορεί να γραφτεί ως αριθμήσιμη τομή ανοιχτών. Παρατηρούμε επίσης ότι $Y \cap \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta}) \neq \emptyset$ αφού μπορεί να δει κανείς ότι κάθε 1-1 συνάρτηση από το $\Gamma * \Delta$ στο $\mathbb{N}$ θα ανήκει και στα δύο σύνολα. Παρόλα αυτά κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχεται στο άλλο εκτός και αν κάποια από τις Γ ή Δ είναι η τετριμμένη ομάδα στην οποία περίπτωση θα ταυτίζονται.

Το παίγνιο που θα κατασκευάσουμε θα έχει ως αποτέλεσμα ένα στοιχείο $y \in \mathbb{N}^{\Gamma*\Delta}$ όπου οι δύο παίκτες θα ορίζουν την y στα στοιχεία $\alpha \in \Gamma * \Delta$. Θα δώσουμε έναν ορισμό τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να καθορίσουμε την σειρά με την οποία θα ορίζεται το $y(\alpha)$ για κάθε μη ταυτοτικό στοιχείο $\alpha \in \Gamma * \Delta$. Αριθμούμε με 1-1 τρόπο όλα τα μη ταυτοτικά στοιχεία των Γ και Δ οπότε έχουμε τις ακολουθίες $(\gamma_i)_{i=0}^{\infty}$ και $(\delta_i)_{i=0}^{\infty}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $t : \Gamma * \Delta \setminus \{e\} \longrightarrow \mathbb{N}$ ως εξής:

Για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta \setminus \{e\}$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_m$ τ.ω $\alpha = \gamma_{i_0}\delta_{i_1}\cdots$ ή $\alpha = \delta_{i_0}\gamma_{i_1}\cdots$. Τότε

$$t(\alpha) := \max_{j\leq m} \{\, i_j + j \,\}\,.$$

Αυτός ο ορισμός έχει την εξής ιδιότητα: Αν $i \leq n+1$ και α είναι μία Δ-λέξη, τότε $t(\alpha) \leq n$ ανν $t(\gamma_i\alpha) \leq n+1$. Η ιδιότητα αυτή παραμένει αληθής αν εναλλάξουμε τους ρόλους των Γ και Δ.

Δοθέντος ενός borel υποσυνόλου $B \subset Y$ και ενός $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ένα παίγνιο G_k^B από το οποίο προκύπτει ένα $y \in \mathbb{N}^{\Gamma*\Delta}$ τ.ω $y(e) = k$. Ο παίκτης

I ξενικά με τους παίκτες εναλλάξ να ορίζουν το y σε πεπερασμένα το πλήθος $\alpha \in \Gamma * \Delta$ ως εξής:

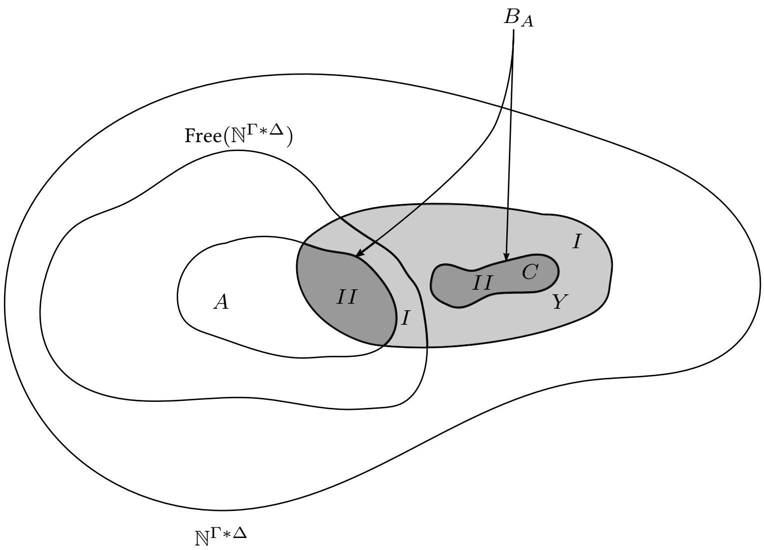
Στον n-οστό γύρο του παιγνίου πρώτα ο παίκτης I ορίζει το y σε όλες τις Γ-λέξεις $\alpha \in \Gamma * \Delta$ για τις οποίες $t(\alpha) = n$ και στην συνέχεια ο παίκτης II ορίζει το y σε όλες τις Δ-λέξεις $\alpha \in \Gamma * \Delta$ για τις οποίες $t(\alpha) = n$. Έτσι το παίγνιο ξεκινά όπως φαίνεται παρακάτω:

I	$y(\gamma_0)$		$y(\gamma_1), y(\gamma_0\delta_0), y(\gamma_1\delta_0)$		$\cdots$
II		$y(\delta_0)$		$y(\delta_0), y(\delta_0\gamma_0), y(\delta_1), y(\delta_1\gamma_0)$	

Για να ολοκληρωθεί ο ορισμός του παιγνίου πρέπει να καθορίσουμε την συνθήκη νίκης για κάθε παίκτη. Πρώτα αν το y είναι στοιχείο του Y τότε ο παίκτης II κερδίζει αν και μόνο αν $y \in B$. Αν $y \notin Y$ τότε είτε θα υπάρχει ένα $\gamma \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$ και ένα $\alpha \in \Gamma * \Delta$ ώστε $\gamma\alpha^{-1} \cdot y{\restriction_\Gamma} \neq \alpha^{-1} \cdot y{\restriction_\Gamma}$ είτε θα υπάρχει ένα $\delta \in \Delta \setminus \{e_\Delta\}$ και ένα $\alpha \in \Gamma * \Delta$ ώστε $\delta\alpha^{-1} \cdot y{\restriction_\Delta} \neq \alpha^{-1} \cdot y{\restriction_\Delta}$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι το (α, Γ) μαρτυρά το $y \notin Y$ ενώ στην δεύτερη ότι το (α, Δ) μαρτυρά το $y \notin Y$. Αν λοιπόν το (e, Γ) μαρτυρά το $y \notin Y$ τότε κερδίζει ο παίκτης II αλλιώς αν το (e, Δ) μαρτυρά το $y \notin Y$ τότε κερδίζει ο παίκτης I. Στην περίπτωση που ούτε το (e, Γ) ούτε το (e, Δ) μαρτυρούν το $y \notin Y$ κερδίζει ο παίκτης I αν και μόνο αν υπάρχει μία Δ-λέξη $\alpha \in W_\Delta$ η οποία μαρτυρά το $y \notin Y$ τ.ω για κάθε Γ-λέξη $\beta \in W_\Gamma$ για την οποία $t(\beta) \leq t(\alpha)$ η β δεν μαρτυρά το $y \notin Y$.

Στην συνέχεια συσχετίζουμε με το σύνολο $A \subset \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ ένα σύνολο B_A το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στο παίγνιο μας. Έστω E_Γ η σχέση ισοδυναμίας στο Y όπου $xE_\Gamma y$ αν υπάρχει $\gamma \in \Gamma$ τ.ω $\gamma \cdot x = y$. Ορίζουμε την σχέση E_Δ αντίστοιχα. Όπως προκύπτει από το λήμμα 2.3 του [10] του οποίου την απόδειξη δεν θα παρουσιάσουμε εδώ, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $C \subset Y \setminus \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ το οποίο να είναι borel και να τέμνει κάθε E_Δ κλάση ισοδυναμίας στο $Y \setminus \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ ενώ το συμπλήρωμα του C^c να τέμνει κάθε E_Γ κλάση ισοδυναμίας στο $Y \setminus \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$. Τώρα θέτουμε $B_A = (A \cap Y) \cup C$ και όπως θα δούμε παρακάτω η χρήση του C θα παίξει σημαντικό ρόλο στο τέλος της απόδειξης όπου θα δείξουμε ότι η συνάρτηση που θα κατασκευάσουμε παίρνει τιμές στο $\text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ και όχι απλά στο Y.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μορφή του payoff set όσον αφορά τα αποτελέσματα που βρίσκονται μέσα στο Y.



Σχήμα 4.1: Το payoff set

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το αντίστοιχο παίγνιο $G_k^{B_A}$ του οποίου το payoff set είναι Borel αφού τα σύνολα A, Y και C είναι Borel. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ από το θεώρημα του Martin το παίγνιο $G_k^{B_A}$ είναι προσδιοριστό και επομένως ένας από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική. Το τελευταίο σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους δύο παίκτες έχει νικητήρια στρατηγική για άπειρο το πλήθος k.

Έστω ότι ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική για άπειρα το πλήθος k. Έστω επίσης $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που απαριθμεί τα παίγνια $G_k^{B_A}$ για τα οποία ο παίκτης II έχει νικητήρια στρατηγική, δηλαδή $G_{k(i)}^{B_A}$ είναι το i-οστό παίγνιο για το οποίο ο παίκτης II έχει μια νικητήρια στρατηγική έστω την $\sigma_{II}^{k(i)}$.

Θα κατασκευάσουμε μια $f : \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma}) \longrightarrow \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ η οποία θα είναι 1-1, borel, equivariant ως προς την δράση αριστερής μετατόπισης της Γ σε αυτούς του χώρους και το πεδίο τιμών της $\mathrm{ran}(f)$ θα είναι υποσύνολο του A.

Για να κατασκευάσουμε την f αρκεί να ορίσουμε τις τιμές $f(x)(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma})$ και για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta$. Έστω $x \in \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma})$, θα εξαντλήσουμε το $\Gamma * \Delta$ χρησιμοποιώντας την προδιάταξη που προκύπτει από την t ορίζοντας τις τιμές $f(\gamma x)(\alpha)$ για όλα τα στοιχεία γx της τροχιάς του x συγχρόνως.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ορίζουμε

$$f(\gamma x)(e) = k(x(\gamma^{-1})).$$

Η τιμή $k(x(\gamma^{-1}))$ αντιπροσωπεύει το παίγνιο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για ορίσουμε τις τιμές $f(\gamma x)(\alpha)$. Οι κινήσεις του παίκτη I θα καθορίζουν τις τιμές στις γ-λέξεις ενώ οι τιμές στις δ-λέξεις καθορίζονται από την στρατηγική $\sigma_{II}^{k(x(\gamma^{-1}))}$.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ο παίκτης I στο παίγνιο $G_{k(x(\gamma^{-1}))}^{B_A}$ στην πρώτη του κίνηση δίνει την τιμή

$$f(\gamma x)(\gamma_0) = k(x(\gamma^{-1}\gamma_0)).$$

Στο παίγνιο $G_{k(x(\gamma^{-1}))}^{B_A}$ όταν η κίνηση του παίκτη I είναι $k(x(\gamma^{-1}\gamma_0))$ η επόμενη κίνηση του παίκτη II είναι μονοσήμαντα ορισμένη από την στρατηγική $\sigma_{II}^{k(x(\gamma^{-1}))}$. Έτσι για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ορίζουμε

$$f(\gamma x)(\delta_0) = \sigma_{II}^{k(x(\gamma^{-1}))}\left(f(\gamma x)(\gamma_0)\right)(\delta_0).$$

Έστω τώρα ότι έχουμε ορίσει τις τιμές $f(\gamma x)(\alpha)$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και για όλα τα $\alpha \in \Gamma * \Delta$ για τα οποία $t(\alpha) \leq n$. Έστω $\beta \in \Gamma * \Delta$ μία Γ-λέξη για την οποία $t(\beta) = n + 1$. Τότε είτε $\beta = \gamma_{n+1}$ είτε $\beta = \gamma_i \alpha$ για κάποιο $i \leq n$ και α μια Δ-λέξη για την οποία ισχύει ότι $t(\alpha) \leq n$. Στην πρώτη περίπτωση η τιμή $f(\gamma_{n+1}^{-1}\gamma x)(e)$ και στην δεύτερη η τιμή $f(\gamma_i^{-1}\gamma x)(\alpha)$ έχουν ήδη καθοριστεί από κάποιο προηγούμενο βήμα και επομένως μπορούμε στην $n+1$-οστή κίνηση του παίκτη I στο $G^{B_A}_{k(x(\gamma^{-1}))}$ να θέσουμε

$$f(\gamma x)(\beta) = \begin{cases} f(\gamma_{n+1}^{-1}\gamma x)(e) & \text{αν } \beta = \gamma_{n+1} \\ f(\gamma_i^{-1}\gamma x)(\alpha) & \text{αν } \beta = \gamma_i \alpha \end{cases}$$

Αν τώρα α μία Δ-λέξη για την οποία $t(\alpha) = n+1$ και $\gamma \in \Gamma$ το στιγμιότυπο

$$(f(\gamma x)(\beta))_{t(\beta) \leq n \text{ ή } \beta \in W_\Gamma \text{ και } t(\beta) = n+1}$$

του παιγνίου $G^{B_A}_{k(x(\gamma^{-1}))}$ είναι πλήρως καθορισμένο και άρα χρησιμοποιώντας την στρατηγική $\sigma_{II}^{k(x(\gamma^{-1}))}$ έχουμε

$$f(\gamma x)(\alpha) = \sigma_{II}^{k(x(\gamma^{-1}))}\left((f(\gamma x)(\beta))_{t(\beta) \leq n \text{ ή } \beta \in W_\Gamma \text{ και } t(\beta) = n+1}\right)(\alpha)$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εξαντλήσουμε το $\Gamma * \Delta$ και επομένως να ορίσουμε τις τιμές $f(\gamma x)(\alpha)$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ και για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για κάθε τροχιά στο $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ ορίζουμε μια $f : \mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ και αυτό που απομένει είναι να δείξουμε ότι έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Κατ' αρχάς ο ορισμός είναι καλός διότι οι τροχιές $\{\, \gamma x : \gamma \in \Gamma \,\}$ διαμερίζουν το $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$. Επίσης η f είναι 1-1 διότι αν $x \neq y$ τότε υπάρχει γ τ.ω $x(\gamma) \neq y(\gamma)$ και άρα

$$f(x)(\gamma) = f(\gamma^{-1}x)(e) = k(x(\gamma)) \neq k(y(\gamma)) = f(y)(\gamma).$$

Το ότι η f είναι equivariant ως προς την δράση αριστερής μετατόπισης της Γ στους $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ και $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ έπεται άμεσα από τον ορισμό της f.

Επίσης η f είναι borel αφού είναι συνεχής. Για να το δούμε αυτό πρώτα παρατηρούμε ότι αν $x \in \text{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ μία υπό-βασική περιοχή του $f(x)$ είναι της μορφής

$$V^\alpha_{f(x)} = \left\{ z \in \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}) : z(\alpha) = f(x)(\alpha) \right\}.$$

και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια περιοχή V_x του x της οποίας η εικόνα $f[V_x]$ μέσω της f να είναι υποσύνολο της $V^\alpha_{f(x)}$. Αν $F \subset \Gamma$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο της Γ τότε το σύνολο

$$V^F_x = \left\{ y \in \text{Free}(\mathbb{N}^\Gamma) : \forall \gamma \in F(y(\gamma) = x(\gamma)) \right\}$$

είναι μια περιοχή του x. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta$ υπάρχει πεπερασμένο $F_\alpha \subset \Gamma$ τ.ω αν $y(\gamma) = x(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in F_\alpha$ τότε $f(x)(\alpha) = f(y)(\alpha)$. Τότε θα έχουμε ότι $f[V^{F_\alpha}_x] \subset V^\alpha_{f(x)}$.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στην τιμή της συνάρτησης t. Είναι προφανές ότι αν $x(e_\Gamma) = y(e_\Gamma)$ τότε

$$f(x)(e) = k(x(e_\Gamma)) = k(y(e_\Gamma)) = f(y)(e)$$

και επομένως $F_e = \{e_\Gamma\}$. Έστω $t(\alpha) = 0$. Τότε $\alpha = \gamma_0$ ή $\alpha = \delta_0$. Αν $x(\gamma_0) = y(\gamma_0)$ τότε:

$$f(x)(\gamma_0) = k(x(\gamma_0)) = k(y(\gamma_0)) = f(y)(\gamma_0)$$

και αν $x(e_\Gamma) = y(e_\Gamma)$ και $x(\gamma_0) = y(\gamma_0)$ τότε:

$$f(x)(\delta_0) = \sigma_{II}^{k(x(e_\Gamma))}(f(x)(\gamma_0))(\delta_0) = \sigma_{II}^{k(y(e_\Gamma))}(f(y)(\gamma_0))(\delta_0) = f(y)(\delta_0).$$

Επομένως $F_{\gamma_0} = \{e_\Gamma\}$ και $F_{\delta_0} = \{e_\Gamma, \gamma_0\}$.

Έστω ότι για κάθε $\alpha \in \Gamma * \Delta$ με $t(\alpha) = m < n$ υπάρχει $F_\alpha \subset \Gamma$ πεπερασμένο τ.ω αν $x\restriction_{F_\alpha} = y\restriction_{F_\alpha}$ τότε $f(x)(\alpha) = f(y)(\alpha)$. Έστω $\alpha \in \Gamma * \Delta$ με $t(\alpha) = n$. Αν α είναι μια Γ-λέξη θα είναι της μορφής $\alpha = \gamma_i \beta$ όπου $\beta = e$ ή $\beta \in W_\Delta$ και $t(\beta) = m < n$. Σε κάθε περίπτωση αν $x(\gamma) = y(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in \gamma_i \cdot F_\beta$ τότε

$\gamma_i^{-1} \cdot x(\gamma) = \gamma_i \cdot y(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in F_\beta$ και επομένως $f(\gamma_i^{-1}x)(\beta) = f(\gamma_i^{-1}y)(\beta)$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $f(x)(\alpha) = f(y)(\alpha)$. Έτσι βλέπουμε ότι

$$F_\alpha = F_{\gamma_i \beta} = \gamma_i \cdot F_\beta.$$

Αν α είναι μια Δ-λέξη και $x \in \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ τότε

$$f(x)(\alpha) = \sigma_{II}^{k(x(e_\Gamma))} \left((f(x)(\beta))_{t(\beta)<t(\alpha) \text{ ή } \beta \in W_\Gamma \text{ και } t(\beta)=t(\alpha)} \right) (\alpha)$$

και επομένως αν $x, y \in \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ τ.ω $x(e_\Gamma) = y(e_\Gamma)$ και $x{\restriction}_{F_\beta} = y{\restriction}_{F_\beta}$ για κάθε $\beta \in \Gamma * \Delta$ για το οποίο $t(\beta) < t(\alpha)$ ή $\beta \in W_\Gamma$ και $t(\beta) = t(\alpha)$ θα έχουμε ότι $f(x)(\alpha) = f(y)(\alpha)$. Έτσι βλέπουμε ότι αν $\alpha \in W_\Delta$ τότε

$$F_\alpha = \{e_\Gamma\} \cup \bigcup_{\substack{t(\beta)<t(\alpha) \\ \text{ή} \\ t(\beta)=t(\alpha) \text{ και } \beta \in W_\Gamma}} F_\beta.$$

και επομένως η πρόταση ισχύει για κάθε n από το οποίο έπεται το ζητούμενο.

Το μόνο που απομένει για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη είναι να δείξουμε ότι το πεδίο τιμών ran(f) της f είναι υποσύνολο του A. Κατ' αρχάς δείχνουμε ότι για κάθε $x \in \text{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ ισχύει ότι $f(x) \in Y$. Αν $f(x) \notin Y$ τότε θα υπάρχει $\alpha \in \Gamma * \Delta$ τ.ω είτε το (α, Γ) είτε το (α, Δ) να μαρτυρούν το $f(x) \notin Y$. Με επαγωγή θα δείξουμε ότι αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει. Αν (e, Γ) μαρτυρά το $f(x) \notin Y$ τότε υπάρχει $\gamma \neq e_\Gamma$ τ.ω $\gamma \cdot f(x){\restriction}_\Gamma = f(x){\restriction}_\Gamma$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι για κάθε $\gamma' \in \Gamma$ έχουμε $k(x(\gamma^{-1}\gamma')) = k(x(\gamma'))$ από το οποίο έπεται ότι $\gamma \cdot x = x$ το οποίο είναι άτοπο αφού $x \in \text{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$. Αν (e, Δ) μαρτυρά το $f(x) \notin Y$ και αφού το (e, Γ) δεν μαρτυρά το $f(x) \notin Y$ το $f(x)$ θα είναι ένα νικηφόρο αποτέλεσμα για τον παίκτη I στο παίγνιο $G_{k(x(e_\Gamma))}^{B_A}$ το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί είναι αποτέλεσμα μιας νικητήριας στρατηγικής για τον παίκτη II.

Έστω ότι $\alpha \in \Gamma * \Delta$ και ότι έχουμε δείξει ότι για κάθε $x \in \mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ και για κάθε $\beta \in \Gamma * \Delta$ με $t(\beta) < n$ ούτε το (β, Γ) ούτε το (β, Δ) μαρτυρούν το $f(x) \notin Y$. Αν α είναι μια Γ-λέξη τότε $t(\alpha = n)$ τότε $\alpha = \gamma\beta$ για κάποιο $\gamma \in \Gamma$ και όπου $\beta = e$ ή $t(\beta) < n$. Σε κάθε περίπτωση αν το (α, Γ) μαρτυρά το $f(x) \notin Y$ τότε υπάρχει ένα $\gamma \neq e_\Gamma$ τ.ω

$$\gamma\alpha^{-1} \cdot f(x)\restriction_\Gamma = \alpha^{-1} \cdot f(x)\restriction_\Gamma$$

Τότε από τις ιδιότητες της f έπεται ότι:

$$\gamma\beta^{-1} \cdot f(\gamma^{-1}x)\restriction_\Gamma = \beta^{-1} \cdot f(\gamma^{-1}x)\restriction_\Gamma$$

Το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την επαγωγική μας υπόθεση. Όμοια δείχνουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει ότι το (α, Δ) μαρτυρά το $f(x) \notin Y$. Το γεγονός ότι το $f(X)$ είναι νικηφόρο αποτέλεσμα για τον παίκτη II μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι για κάθε $\alpha \in W_\Delta$ με $t(\alpha) = n$ το α δεν μαρτυρά το $f(x) \notin Y$ και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

Αφού το $f(x)$ είναι στοιχείο του Y από την συνθήκη νίκης έπεται ότι $f(x) \in (A \cap Y) \cup C$. Αν $f(x) \notin A$ τότε $f(x) \in C \subset Y \setminus \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$. Από τον ορισμό του C υπάρχει γ τ.ω $\gamma f(x) = f(\gamma x) \in C^c \setminus \mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $f(\gamma x)$ είναι νικηφόρο αποτέλεσμα για τον παίκτη II αφού το A είναι υποσύνολο του $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma*\Delta})$. Έτσι $f(x) \in A$ για κάθε $x \in \mathrm{Free}(\mathbb{N}^\Gamma)$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

4.3 Borel Γραφήματα και ο $\chi_B(G)$

Θα δούμε λοιπόν μερικά παραδείγματα εφαρμογής του λήμματος 4.9 σε προβλήματα borel χρωματισμών γραφημάτων. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παρακάτω μια πηγή είναι το άρθρο του Andrew Marks [10] όπου εμφανίστηκε το λήμμα 4.9 και περιέχει μια πιο εκτενή λίστα με εφαρμογές.

Να θυμηθούμε ότι μία σχέση R σε ένα σύνολο X είναι ένα υποσύνολο του $X \times X$, μια σχέση R λέγεται irreflexive αν για κάθε $x \in X \neg xRx$.

Ορισμός 4.10 Μια συμμετρική irreflexive σχέση G σε έναν standard Borel χώρο X η οποία είναι Borel υποσύνολο του $X \times X$ λέγεται *Borel γράφημα* (**Borel graph**) στο X.

Τα στοιχεία του X λέγονται *κόμβοι* (**vertices**) του γραφήματος, τα στοιχεία $(x, y) \in G$ λέγονται *ακμές* (**edges**) του γραφήματος και τότε οι κόμβοι x και y λέγονται *γείτονες* (**neighbors**). *Βαθμό* (**degree**) ενός κόμβου x λέμε την πληθικότητα του συνόλου των γειτόνων του $\mathrm{Deg}(x) := \#\{\, y \in X : (x, y) \in G \,\}$ ενώ λέμε ότι ένα γράφημα G έχει βαθμό $\mathrm{Deg}(G) \leq n$ αν $\mathrm{Deg}(x) \leq n$ για κάθε κόμβο x του G. Ένα γράφημα λέγεται κανονικό αν όλοι οι κόμβοι του έχουν τον ίδιο βαθμό ενώ λέγεται n-κανονικό αν $\mathrm{Deg}(x) = n$ για κάθε κόμβο x.

Ο χρωματισμός γραφημάτων είναι ένα τυπικό πρόβλημα στον κλάδο της Borel συνδυαστικής. Ένας Borel χρωματισμός ενός Borel γραφήματος G στον X είναι μια Borel συνάρτηση $c : X \longrightarrow Y$ από τον SB-χώρο X σε έναν SB-χώρο Y τ.ω αν xGy τότε $c(x) \neq c(y)$ δηλαδή οποιοιδήποτε δύο γειτονικοί κόμβοι του G έχουν διαφορετικό χρώμα. Ο Borel χρωματικός αριθμός $\chi_B(G)$ ενός Borel γραφήματος G είναι η ελάχιστη πληθικότητα ενός SB-χώρου Y ώστε να υπάρχει ένας Borel χρωματισμός του G με πεδίο τιμών τον Y.

Αν $\chi(G)$ είναι ο συνηθισμένος χρωματικός αριθμός ενός borel γραφήματος G τότε προφανώς $\chi(G) \leq \chi_B(G)$. Οι $\chi(G)$ και $\chi_B(G)$ μπορούν να διαφέρουν σημαντικά αφού όπως πχ έδειξαν οι Κεχρής, Solecki, και Todorcevic στο [7] υπάρχει ένα ακυκλικό borel γράφημα G (άρα $\chi(G) = 2$)) για το οποίο $\chi_B(G) = 2^{\aleph_0}$. Παρόλα αυτά υπάρχουν πολλές ομοιότητες ως προς τις ιδιότητες τους, παραδείγματος χάριν ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.11 *Αν G είναι ένα borel γράφημα βαθμού $\leq n$ τότε $\chi(G) \leq n+1$ και $\chi_B(G) \leq n+1$.* $\square$

Στα επόμενα θεωρούμε αριθμήσιμες *μαρκαρισμένες ομάδες* (**marked groups**). Με τον όρο αυτό εννοούμε ομάδες μαζί με ένα προεπιλεγμένο σύνολο *γεννητόρων* (**generators**) τους το οποίο θεωρούμε ότι δεν περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο. Με $G(\Gamma, X)$ θα συμβολίζουμε το borel γράφημα στο Free(X^{Γ}) για το οποίο $xG(\Gamma, X)y$ αν και μόνο αν υπάρχει γεννήτορας γ της Γ τ.ω $x = \gamma y$.

Ορισμός 4.12 υπους borel χώρους X και Y αντίστοιχα τότε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται borel ομομορφισμός από το G στο H αν είναι borel και για κάθε $x, y \in X$ αν xGy τότε $f(x)Hf(y)$.

Ορισμός 4.13 Αν G και H είναι borel γραφήματα ορισμένα στους πρότυπους borel χώρους X και Y αντίστοιχα τότε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται borel ομομορφισμός από το G στο H αν είναι borel και για κάθε $x, y \in X$ αν xGy τότε $f(x)Hf(y)$.

Είναι φανερό ότι αν υπάρχει ένας borel ομομορφισμός από το G στο H τότε $\chi_B(G) \leq \chi_B(H)$ αφού αν c ένας borel χρωματισμός του H τότε ο $c \circ f$ είναι ένας borel χρωματισμός του G.

Θεώρημα 4.14 *Αν Γ και Δ είναι πεπερασμένα παραγόμενες μαρκαρισμένες ομάδες, τότε:*

$$\chi_B(G(\Gamma * \Delta, \mathbb{N})) \geq \chi_B(G(\Gamma, \mathbb{N})) + \chi_B(G(\Delta, \mathbb{N})) - 1$$

Απόδειξη
Έστω $\chi_B(G(\Gamma, \mathbb{N})) = n + 1$ και $\chi_B(G(\Delta, \mathbb{N})) = m + 1$. Επομένως το $G(\Gamma, \mathbb{N})$ δεν έχει n-borel χρωματισμό και το $G(\Delta, \mathbb{N})$ δεν έχει m-borel χρωματισμό. Έστω ότι το $G(\Gamma * \Delta, \mathbb{N})$ έχει ένα $n + m$-borel χρωματισμό

$$c : \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}) \longrightarrow \{ 0, 1, 2, \ldots, (n + m - 1) \} .$$

Θέτουμε $A = \left\{ x \in \text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta}) : c(x) < n \right\}$ το οποίο είναι borel υποσύνολο του Free$(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$ και έτσι αν f είναι η συνάρτηση που μας δίνεται από το λήμμα 2.1 έχουμε ότι η $c \circ f$ θα μας δίνει είτε έναν n-borel χρωματισμό του $G(\Gamma, \mathbb{N})$ είτε έναν m-borel χρωματισμό του $G(\Delta, \mathbb{N})$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το γεγονός ότι η f είναι equivariant συνεπάγεται ότι $c \circ f$ είναι όντως χρωματισμός. $\square$

Έστω X ένας SB-χώρος και E μια σχέση ισοδυναμίας στον X. Μία *πλήρης τομή* (**complete section**) της E είναι ένα υποσύνολο A του X το οποίο τέμνει κάθε κλάση ισοδυναμίας στον X. Αν E και F δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο X λέμε ότι έχουν borel ξένες τομές αν υπάρχουν A και B ξένα μεταξύ τους τ.ω το A να τέμνει κάθε κλάση ισοδυναμίας της E και το B να τέμνει κάθε κλάση ισοδυναμίας της F.

Θεώρημα 4.15 *Έστω* Γ *και* Δ *αριθμίσιμες ομάδες. Έστω* E_Γ *και* E_Δ *οι συνήθεις κλάσεις ισοδυναμίας που παράγονται από αυτές στον* $\mathrm{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$*. Τότε οι* E_Γ *και* E_Δ *δεν έχουν borel ξένες τομές.*

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχουν A και B ξένα borel τ.ω το A να τέμνει κάθε E_Γ κλάση ισοδυναμίας και το B να τέμνει κάθε E_Δ κλάση ισοδυναμίας. Από το λήμμα 2.1 υπάρχει συνάρτηση f είτε με Γ αναλλοίωτο πεδίο τιμών υποσύνολο του B είτε με Δ αναλλοίωτο πεδίο τιμών υποσύνολο του B^c. Βλέπουμε ότι και τα δύο αυτά ενδεχόμενα οδηγούν σε άτοπο. $\square$

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι μόνο κάποιες από τις εφαρμογές του λήμματος 4.9 το οποίο φαίνεται να είναι ένα πολύ βολικό εργαλείο. Στο [10] υπάρχουν ακόμα πολλά αποτελέσματα που βασίζονται στην χρήση του αλλά ο όγκος των προαπαιτούμενων για την διατύπωση και απόδειξη τους ξεπερνά τον σκοπό αυτής της εργασίας.

5 Επίλογος

Σε αυτή την εργασία καταπιαστήκαμε με τις βασικές έννοιες της θεωρίας που αφορά την προσδιοριστότητα παιγνίων και είδαμε κάποιους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παίγνια αυτά στην απόδειξη μη τετριμμένων μαθηματικών προβλημάτων.

Αν και δεν δώσαμε βάρος στη σύνδεση με την θεωρία συνόλων, η προσδιοριστότητα των παιγνίων έχει μελετηθεί κατά κόρον μέσω της περιγραφικής θεωρίας συνόλων από όπου έχουν προέλθει πολλά αποτελέσματα. Αν κάποιος θέλει να μάθει περισσότερα για αυτή την σύνδεση και τις συνέπειες στα θεμέλια των μαθηματικών μπορεί να ανατρέξει από τα [20], [4], [8], [6] και [13]. Από την άλλη αν κάποιος θέλει να δει συγκεκριμένα παραδείγματα παιγνίων με πιθανές εφαρμογές σε άλλους τομείς των μαθηματικών τα [18], και [2] είναι μια πιθανή αρχή.

Όσον αφορά την απόδειξη του λήμματος 4.9 αξίζει να κανείς να προσπαθήσει να αποδομήσει την γενική στρατηγική που ακολουθεί ο Andrew Marks.

Κατ' αρχάς το αποτέλεσμα είναι ενός τύπου διχοτομίας και επομένως φαίνεται λογική η χρήση αποτελεσμάτων προσδιοριστότητας. Για την κατασκευή μιας συνάρτησης είναι φυσιολογική η επιλογή ενός παιγνίου για κάθε όρισμα. Από την άλλη το παίξιμο αριθμήσιμων το πλήθος παιγνίων ταυτόχρονα ένα για κάθε στοιχείο της της τροχιάς του ορίσματος είναι ένας βολικός τρόπος για να εξασφαλιστεί η ιδιότητα της equivariance της f. Αρκούν οι κατάλληλα ορισμένες αρχικές τιμές στα παίγνια και η συμβατότητα των κινήσεων του παίκτη "πιόνι" ενώ ο "νικητής" σε αυτό το σημείο δεν παίζει ρόλο αφού οι κινήσεις του είναι περιορισμένες σε στοιχεία που ο αρχικός χαρακτήρας δεν ανήκει στην ομάδα ως προς την οποία χρειαζόμαστε την equivariance. Οι αρχικές συνθήκες και η προσεκτικά επιλεγμένη επιλογή της συνθήκης νίκης σε συνδυασμό με το σύνολο Y "αναγκάζουν" το αποτέλεσμα να ανήκει στο σύνολο Y . Τέλος η συμπερίληψη του συνόλου C του λήμματος 2.3 του [10] και η ήδη αποδεδειγμένη ιδιότητα της equivariance δεν αφήνουν περιθώρια περιορίζοντας το αποτέλεσμα αποκλειστικά στο $\text{Free}(\mathbb{N}^{\Gamma * \Delta})$.

Γενικά η προσδιοριστότητα παιγνίων έχει ενδιαφέροντα αποτελέσματα και τεχνικές που μπορούν να εφαρμοσθούν σε πολλούς τομείς των μαθηματικών αλλά όχι μόνο. Αν και ύλη που παρουσιάσαμε σε αυτή την εργασία είναι πολύ λίγη ελπίζω να την βρήκατε ενδιαφέρουσα.

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] S.K. Berberian. *Borel spaces*. S.K. Berberian, 1988. URL http://books.google.gr/books?id=D4t7HAAACAAJ. 56

[2] Jiling Cao and Warren B Moors. A survey on topological games and their applications in analysis. *RACSAM*, 100(1-2):39–49, 2006. 71

[3] Morton David Davis. *Infinite games with perfect information*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1961. 2

[4] Harvey M Friedman. Higher set theory and mathematical practice. *Annals of Mathematical Logic*, 2(3):325–357, 1971. 3, 71

[5] David Gale and Frank M Stewart. Infinite games with perfect information. *Contributions to the Theory of Games*, 2:245–266, 1953. 2, 16

[6] Alexander S Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer-Verlag New York, 1995. 5, 71

[7] Alexander S Kechris, Slawomir Solecki, and Stevo Todorcevic. Borel chromatic numbers. *Advances in Mathematics*, 141(1):1–44, 1999. 67

[8] Paul B Larson. A brief history of determinacy. *Sets and Extensions in the Twentieth Century*, 6:457, 2012. 2, 71

[9] George W Mackey. Borel structure in groups and their duals. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 134–165, 1957. 56

[10] Andrew Marks. A determinacy approach to borel combinatorics. *E-Print arxiv*, 1304, 2013. 60, 66, 69, 72

[11] Donald A Martin. Borel determinacy. *Annals of Mathematics*, pages 363–371, 1975. 2, 37

[12] Donald A Martin. A purely inductive proof of borel determinacy. In *Recursion Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 42, pages 303–308, 1985. 37

[13] Yiannis N Moschovakis. *Descriptive set theory*. Number 155. American Mathematical Soc., 2009. 5, 71

[14] Jan Mycielski, S Swierczkowski, and Andrzej Zieba. On infinite positional games. *Bull. Acad. Polon. Sci*, 4:485–488, 1956. 2

[15] Chris Preston. Some notes on standard borel and related spaces. *arXiv preprint arXiv:0809.3066*, 2008. 56

[16] Ulrich Schwalbe and Paul Walker. Zermelo and the early history of game theory. *Games and economic behavior*, 34(1):123–137, 2001. 1

[17] Sashi Mohan Srivastava. *A course on Borel sets*, volume 180. Springer Science & Business Media, 1998. 36

[18] Rastislav Telgársky. Topological games: on the 50th anniversary of the banach-mazur game. *JOURNAL OF MATHEMATICS*, 17(2), 1987. 30, 71

[19] Stanislaw M Ulam. A collection of mathematical problems. *New York*, 29, 1960. 14

[20] PD Welch. Large cardinals, inner models and determinacy: an introductory overview. 2011. 71

[21] Ernst Zermelo. Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. In *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians*, volume 2, pages 501–504. II, Cambridge UP, Cambridge, 1913. 1

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο