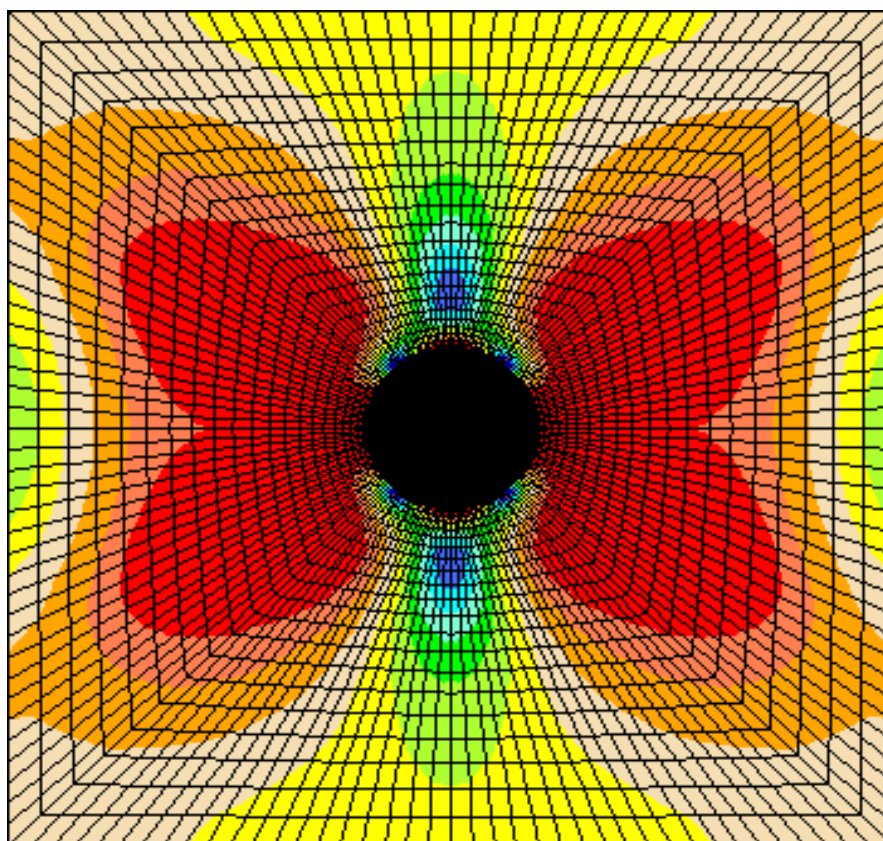




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Ελαστοπλαστική Ανάλυση Δισδιάστατων Κατασκευών

Διπλωματική Εργασία
Λυριτσάκης Χαρίλαος



Επιβλέπων

Καθηγητής Κ. Σπηλιόπουλος

ΜΑΡΤΙΟΣ 2015

Στους γονείς μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνεται ο κύκλος σπουδών μου στην σχολή Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή και δάσκαλό μου Κωνσταντίνο Σπηλιόπουλο τόσο για την βοήθεια, τις συμβουλές και την παροχή υλικού κατά την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, όσο και για την πολύτιμη εκπαιδευτική του συνεισφορά στα –ίσως σημαντικότερα– μαθήματα της σχολής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους Γιάννη Καπογιάννη και Κωνσταντίνο Παναγιώτου, υποψήφιους διδάκτορες ΕΜΠ, για την βοήθειά τους στην διάρκεια αυτή, καθώς και όσους από το διδακτικό προσωπικό, με την στάση και το έργο τους κατά την διάρκεια των σπουδών μας, κατάφεραν να μας μπολιάσουν με το «μικρόβιο» του εκάστοτε μαθήματος, που δεν είναι άλλο από την χωρίς σκοπιμότητα ενασχόληση με το αντικείμενο.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην αναγνωρίσω την «σιωπηρή» συνεισφορά του στενού περιβάλλοντός μου, προπάντων των γονιών μου αλλά και στενών φίλων, όπου κάθε ένας, με τον τρόπο του, μου έδωσε κουράγιο και κίνητρο, πράγματα αναγκαία για την ολοκλήρωση τόσο της εργασίας, όσο και των σπουδών.

ΣΥΝΟΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

Στο **Κεφάλαιο 1** παρουσιάζονται βασικές έννοιες από την μηχανική παραμορφώσιμου στερεού, όπως ο ελκυστής των τάσεων, ο τανυστής τάσεων και παραμορφώσεων, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας, οι εξισώσεις συμβιβαστού, οι συνοριακές συνθήκες κλπ. στην γενική περίπτωση τρισδιάστατων προβλημάτων, ενώ ειδική μνεία γίνεται και για την περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται αρχικά το γραμμικό ελαστικό καταστατικό μοντέλο κατά Hooke, ενώ αναπτύσσονται αναλυτικά το κριτήριο διαρροής Von Mises και το ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο J_2 . Έπειτα αναπτύσσεται το καταστατικό μοντέλο J_2 ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς για ισοτροπική/κινηματική κράτυνση επίπεδης εντατικής κατάστασης

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται εν συντομία η βασική λογική της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ παράγονται οι βασικές σχέσεις για ορθογωνικά τετρακομβικά ισοπαραμετρικά στοιχεία επίπεδης έντασης. Έπειτα αναλύεται λεπτομερώς η γενική προσαυξητική-επαναληπτική διαδικασία μη-γραμμικής στατικής ανάλυσης, τα βήματα της μεθόδου Newton-Raphson καθώς και οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης (return map) των καταστατικών εξισώσεων τοπικά. Γίνεται αναλυτική ανάπτυξη του διακριτοποιημένου ελαστοπλαστικού καταστατικού μοντέλου για J_2 ελαστοπλαστική συμπεριφορά με ισοτροπική/κινηματική κράτυνση επίπεδης εντατικής κατάστασης ενώ λόγος γίνεται και για το συμβιβαστό ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται η δομή της ελαστοπλαστικής ανάλυσης φορέων επίπεδης έντασης, έτσι όπως ενσωματώνεται στο πρόγραμμα ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων FEAP. Αναφέρονται οι βασικές υπορουτίνες και παρουσιάζονται αναλυτικά διαγράμματα ροής της αλγοριθμικής διαδικασίας.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αναλύσεων που έγιναν στο πρόγραμμα FEAP αρχικά για ελαστική-απολύτως πλαστική συμπεριφορά τετραγωνικής πλάκας με οπή. Παρουσιάζονται διαγράμματα που αφορούν την σύγκλιση, την πλαστική διόρθωση έτσι όπως ενσωματώνεται στο FEAP, το οριακό φορτίο κατάρρευσης του φορέα και συγκριτικά αποτελέσματα για διαφορετική πυκνότητα πλέγματος και αριθμό προσαυξήσεων. Στην συνέχεια συγκρίνονται ποιοτικά τα αποτελέσματα ανάλυσης ορθογωνικής πλάκας με αντίστοιχα πειραματικά με υλικό κρατυνόμενο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	10
1.1-Ο ελκυστής των τάσεων	10
1.2-Ο Τανυστής των τάσεων	12
1.2.1 Ο νόμος του Cauchy	13
1.2.2 Κύριες τάσεις και αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων.....	14
1.2.3 Η διαμέριση του τανυστή των τάσεων	17
1.3-Εξισώσεις ισορροπίας	19
1.3.1 Η Συνθήκη Cauchy	20
1.4-Ο τανυστής των παραμορφώσεων	21
1.4.1 Αξονική παραμόρφωση.....	21
1.4.2 Διατμητική παραμόρφωση	23
1.4.3 Γενική μορφή του τανυστή των παραμορφώσεων.....	24
1.5-Εξισώσεις συμβιβαστού.....	28
1.5.1 Παραγωγή εξισώσεων συμβιβαστού	28
1.5.2 Φυσικό νόημα εξισώσεων συμβιβαστού.....	29
1.6-Καταστατικές Εξισώσεις.....	30
1.6.1 Γενικό καταστατικό μοντέλο	30
1.7-Συνοριακές συνθήκες.....	31
1.7.1 Στατικές οριακές συνθήκες	32
1.7.2 Κινηματικές οριακές συνθήκες	33
1.7.3 Μοναδικότητα της λύσης.....	33
1.8-Επίπεδη εντατική κατάσταση	34
Κεφάλαιο 2	37
2.1. Γραμμικά ελαστικό καταστατικό μοντέλο	37
2.2. Κριτήρια διαρροής	39
2.2.1-Το κριτήριο Von Mises	41
2.2.2-Διαμέριση της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης	44
2.2.3-Το επίπεδο π (π -plane).....	45
2.2.4-Η περίπτωση της επίπεδης έντασης.....	50
2.3. Ελαστοπλαστική συμπεριφορά.....	51
2.3.1-Το φαινόμενο της κράτυνσης	55
2.3.2-Νόμοι κράτυνσης	56

2.3.3-Παραδοχές της θεωρίας της Πλαστικότητας.....	61
2.3.4-Διαμέριση της συνολικής παραμόρφωσης.....	62
2.3.5-Νόμος πλαστικής ροής.....	63
2.3.6-Εξελικτικοί νόμοι κράτυνσης	68
2.3.6.1-Ισοδύναμη τάση, ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση	68
2.4. J2 ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο επίπεδης έντασης.....	82
Κεφάλαιο 3.....	86
3.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων – εισαγωγικά στοιχεία.....	86
3.2. Διατύπωση των χαρακτηριστικών σχέσεων πεπερασμένου στοιχείου επίπεδης έντασης.....	88
3.2.1 Συναρτήσεις σχήματος.....	89
3.2.2 Μητρώο Παραμορφώσεων.....	91
3.2.3 Αρχή των δυνατών έργων	92
3.3.Ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης 4-κόμβων	94
3.4.Ισοπαραμετρικά στοιχεία.....	97
3.4.1 Απεικόνιση του Καρτεσιανού συστήματος στο φυσικό σύστημα	97
3.4.2 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης τεσσάρων κόμβων. 99	
3.5. Αριθμητική ολοκλήρωση.....	103
3.5.1-Ολοκλήρωση Gauss.....	103
3.6- Συνάθροιση στοιχείων.	107
3.7-Μη-γραμμική ανάλυση.....	109
3.7.1.Η προσαυξητική-επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson	109
3.8-Υπολογιστική πλαστικότητα.....	116
3.8.1 Το θεμελιώδες πρόβλημα της υπολογιστικής πλαστικότητας	116
3.8.2 Ελαστική πρόβλεψη-πλαστική διόρθωση.....	119
3.8.3 Η διαδικασία ολοκλήρωσης return-map	123
3.8.4- Συνεχές και συμβατό ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο	135
3.8.5- Γενική προσαυξητική-επαναληπτική διαδικασία και τοπική ολοκλήρωση καταστατικών εξισώσεων	137
3.8.6- Αλγόριθμος return map για την περίπτωση J2 επίπεδης έντασης με κινηματική και ισοτροπική κράτυνση.....	138
Κεφάλαιο 4.....	144
4.1-Διαδικασία ελαστοπλαστικής ανάλυσης.....	144
4.1.1- Παραγωγή πλέγματος και αρχικών συνθηκών του φορέα- isw = 1	147

4.1.2- Προετοιμασία επίλυσης προβλήματος/αρχικοποίηση παραμέτρων- isw = 14	149
4.1.2- Έλεγχος συμβατότητας πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων - isw = 2	154
4.1.3- Εκκίνηση της προσαυξητικής διαδικασίας - isw = 6	156
4.1.4- Εκκίνηση της προσαυξητικής διαδικασίας - isw = 12	158
4.1.5- Υπολογισμός residual vector, τροποποίηση εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας, επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων φορέα - isw = 3	158
4.2-Η υπορουτίνα « <i>epps2d.f</i> »	169
4.2.1 Βήματα διαδικασίας στην υπορουτίνα « <i>epps2d.f</i> »	169
4.2.2 Ενσωμάτωση του αλγορίθμου στο FEAP	171
Κεφάλαιο 5	175
5.1- Εξωτερική φόρτιση	175
5.2- Τετραγωνική πλάκα με οπή	176
5.2.1- Μηχανικά χαρακτηριστικά υλικού	176
5.2.2- Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων	177
5.2.3- Φορτίο κατάρρευσης	178
5.2.3- Τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης και συγκριτικά αποτελέσματα	182
5.2.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων για διαφορετικό αριθμό προσαυξήσεων και πυκνότερο πλέγμα	187
5.2.5- Επιφάνεια διαρροής και πλαστική διόρθωση	190
5.3- Σύγκριση αποτελεσμάτων ανάλυσης με τα αντίστοιχα πειραματικά	197
5.3.1- Μηχανικές ιδιότητες του αλουμινίου 57S	197
5.3.2- Γεωμετρία φορέα και πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων	198
5.3.3- Ποιοτική σύγκριση αποτελεσμάτων	199
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	220

Κεφάλαιο 1

1.1-0 ελκυστής των τάσεων

Στην προσπάθειά μας να προσδιορίσουμε την αντοχή ενός σώματος κάτω από δεδομένες φορτικές καταστάσεις, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την *εντατική κατάσταση* σε κάθε σημείο αυτού του σώματος. Επεκτείνοντας το παραπάνω, το ζητούμενο είναι να βρούμε ένα τρόπο να προσδιορίσουμε την *ένταση* των εσωτερικών δυνάμεων σε αυθαίρετες τομές διερχόμενες από το εκάστοτε σημείο του σώματος. Η ένταση σε μια συγκεκριμένη νοητή τομή, έστω S , που κάνουμε στο σώμα, περιγράφεται με την έννοια του **διανύσματος της τάσης** ή **ελκυστή των τάσεων**:

$$\mathbf{t}^s = t_1 \mathbf{n}_1 + t_2 \mathbf{n}_2 + t_3 \mathbf{n}_3 \quad (1.1)$$

όπου t_i οι συνιστώσες του ελκυστή \mathbf{t}^s στο δεδομένο επίπεδο και n_i τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου στην επιφάνεια S διανύσματος $\{\mathbf{n}\}$.

Στην περίπτωση που ως σύστημα αναφοράς υιοθετείται το Καρτεσιανό τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες x_1, x_2, x_3 , και θεωρήσουμε για λόγους απλότητας ότι η επιφάνεια S είναι κάθετη, έστω, στον άξονα x_1 , τότε οι όροι t_1, t_2 και t_3 αντιστοιχούν στις τάσεις σ_{11}, σ_{12} και σ_{13} αντίστοιχα, όπου στο σ_{ij} , το τελεστής i υποδηλώνει τον άξονα στον οποίο το επίπεδο είναι κάθετο και ο τελεστής j υποδηλώνει τον προσανατολισμό προς κάποιον από τους τρεις άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Αντίστοιχα, οι όροι n_1, n_2, n_3 αντιστοιχούν στα μοναδιαία διανύσματα βάσης, έστω $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, και επομένως η (1) μπορεί να γραφεί στην απλούστερη μορφή της ως:

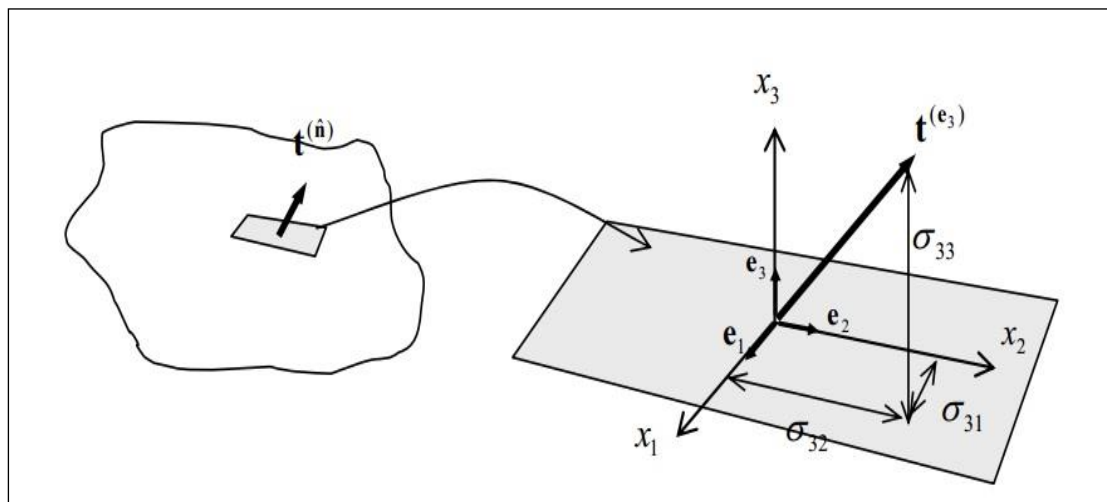
$$\mathbf{t}^{x1} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

Αντίστοιχα, στα άλλα δύο επίπεδα, κάθετα στους άξονες x_2 και x_3 οι ελκυστές είναι:

$$\mathbf{t}^{x2} = \sigma_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

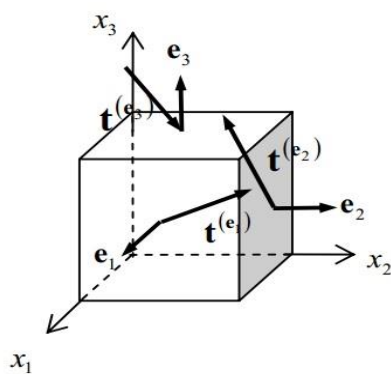
$$\mathbf{t}^{x3} = \sigma_{31} \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \quad (1.4)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο ελκυστής σε επίπεδο κάθετο στον άξονα x_3 .



1- Ελκυστής της σχέσης (4)

Θεωρώντας στοιχειώδες τμήμα εντός σώματος όγκου dV , με ακμές dx_1, dx_2, dx_3 , οι ελκυστές που επενεργούν στις πλευρές του φαίνονται στο σχήμα 2.



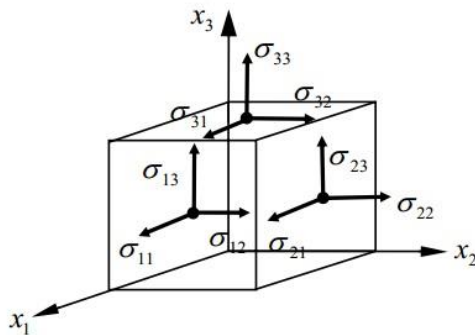
2-Στοιχειώδες τμήμα dV

Συγκεντρώνοντας τις εκφράσεις (2),(3) και (4), μπορούμε να τις γράψουμε με την συγκεντρωμένη μορφή:

$$\{\mathbf{t}\} = [\boldsymbol{\sigma}]\{\mathbf{e}\} \quad (1.5)$$

όπου $[\sigma]$ το μητρώο των τάσεων

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$



3-Τάσεις στις πλευρές του στοιχείου

1.2-0 Τανυστής των τάσεων

Αποδεικνύεται ότι το μητρώο των τάσεων της σχέσης (1.6) είναι τανυστής (2ας τάξεως). Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του παραπάνω γεγονότος είναι ότι αλλάζοντας το σύστημα συντεταγμένων, αλλάζουν και τα στοιχεία του τανυστή των τάσεων – μια συμπεριφορά ανάλογη και αυτής διανύσματος σε μια τέτοια περίπτωση. Κατά συνέπεια θα έχουμε διαφορετική πληροφορία για τους ελκυστές σε μια τέτοια αλλαγή. Δεδομένου ότι τα νοητά επίπεδα που διέρχονται από το σημείο του σώματος που εξετάζουμε είναι άπειρα, προκύπτει το εξής ερώτημα: Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός επιπέδων που διέρχονται από δεδομένο σημείο στα οποία πρέπει να γνωρίζουμε τα στοιχεία της τάσης, ώστε η εντατική κατάσταση σε αυτό το σημείο να είναι πλήρως καθορισμένη? Η απάντηση είναι σε τρία επίπεδα.

Γνωρίζοντας λοιπόν τις τάσεις σε 3 επίπεδα, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα τάσης(ελκυστή) σε οποιοδήποτε άλλο επίπεδο σε συγκεκριμένο σημείο. Είναι δε προφανές ότι ο ελκυστής, *εν γένει*, έχει τυχαίο προσανατολισμό ως προς το επίπεδο του οποίου την ένταση περιγράφει.

1.2.1 Ο νόμος του Cauchy

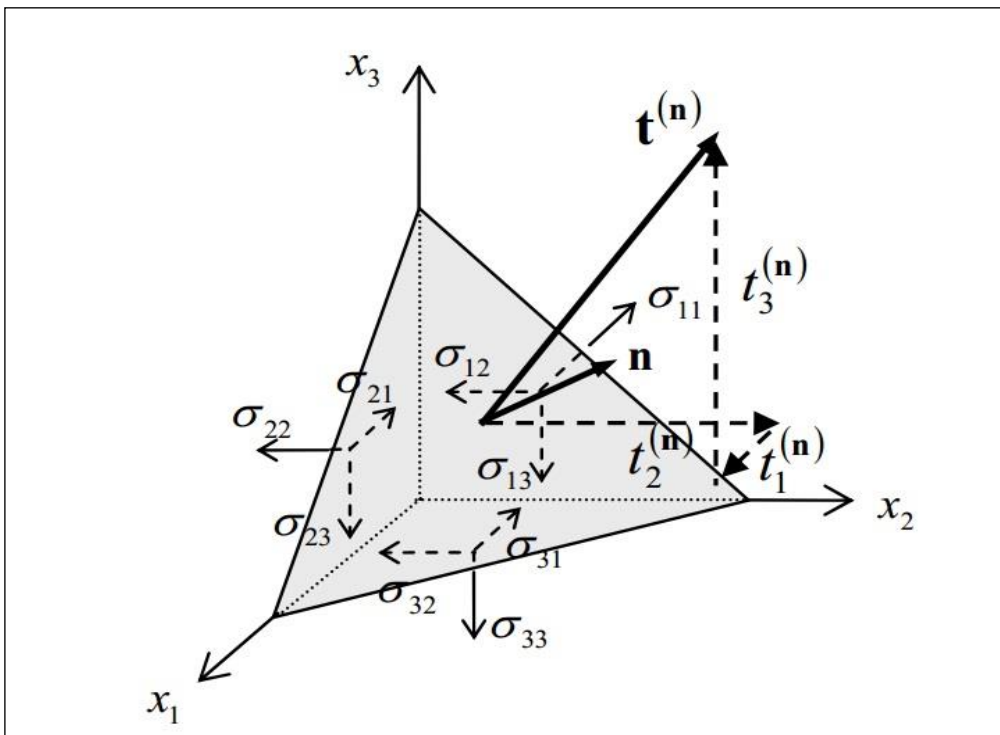
Με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε τον ταυστή των τάσεων σε ένα συγκεκριμένο σημείο, τότε ο ελκυστής σε τυχούσα τομή με κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} δίνεται από την σχέση

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (1.7)$$

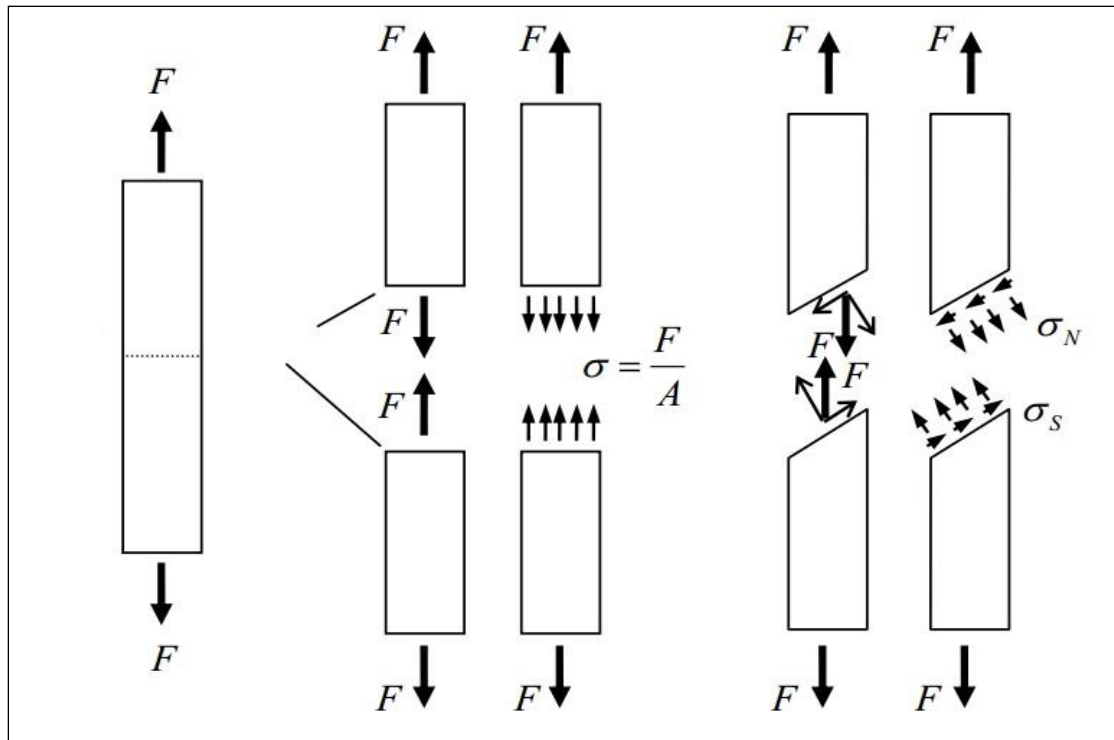
ή σε μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \\ t_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

όπου $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$.



4-Ελκυστής στοιχειώδους επιφάνειας σε τυχούσα τομή



5- Μονοαξονικά καταπονούμενη ράβδος και διακριτές τομές στο μέσον της

Είναι προφανές ότι οι σχέσεις (1.7) και (1.8) είναι ισοδύναμες με την (1.1).

1.2.2 Κύριες τάσεις και αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι τα στοιχεία του τανυστή των τάσεων αλλάζουν με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων ή, διαφορετικά, ο ελκυστής των τάσεων δεν είναι μια σταθερή ποσότητα, αλλά εξαρτάται από τον προσανατολισμό της τομής στο σημείο το οποίο μελετάμε, ακόμα και εάν η εξωτερική φόρτιση είναι σταθερού μέτρου και διεύθυνσης

Ένα κρίσιμης σημασίας ερώτημα για την μελέτη της αντοχής ενός υλικού, αφορά την εύρεση των επιπέδων εκείνων, στα οποία

παρατηρείται μεγιστοποίηση των τάσεων. Για την απάντηση σε αυτό το ερώτημα, αναζητούμε εκείνα τα επίπεδα, στα οποία ο ελκυστής είναι παράλληλος¹ με το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}

$$\{\mathbf{t}\}=\lambda\{\mathbf{n}\} \quad (1.9)$$

Εξισώνοντας την (1.8) με την (1.9) παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Η σχέση (1.10) αποτελεί ένα κλασικό πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών. Αναπτύσσοντας την καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση του τανυστή $[\sigma]$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (1.11)$$

όπου I_1, I_2 και I_3 οι αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων, για τις οποίες ισχύει:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{Tr}([\sigma])$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \quad (1.12)$$

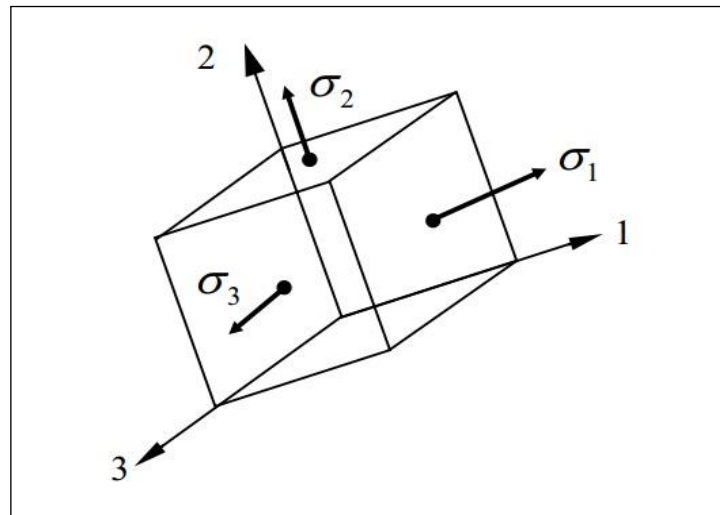
$$I_3 = \det([\sigma])$$

Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού, συμμετρικού πίνακα είναι και αυτές πραγματικές, και επιπλέον τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Οι ιδιοτιμές αυτές καλούνται **κύριες τάσεις** και τα ιδιοδιανύσματα **κύριες διευθύνσεις**. Η συμμετρία του τανυστή των τάσεων θα δειχθεί παρακάτω.

Ο τανυστής των κύριων τάσεων σε μητρική μορφή έχει ως εξής

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Είναι εμφανές ότι στις κύριες διευθύνσεις οι διατμητικές τάσεις μηδενίζονται ενώ οι ορθές τάσεις λαμβάνουν την μέγιστη τιμή τους.



6-Κύριες τάσεις και κύριες διευθύνσεις σε τυχόν σημείο

Η απλούστερη μορφή του $[\sigma]$ στην (1.13) είναι και ο λόγος που συνηθίζεται να επιλέγεται σύστημα συντεταγμένων που αντιστοιχεί με τις κύριες διευθύνσεις. Με αυτό τον τρόπο εκφράζονται και σε απλούστερη μορφή οι αναλλοίωτες ως συνάρτηση μόνο των κύριων τάσεων

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \quad (1.14)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι τα επίπεδα στα οποία εμφανίζονται μέγιστες διατμητικές τάσεις, είναι αυτά τα οποία σχηματίζουν γωνίες $\pm 45^\circ$ με τα κύρια επίπεδα, ενώ οι ορθές τάσεις σε αυτά τα επίπεδα δεν είναι μηδενικές.

Θεωρώντας ότι ισχύει $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, τότε η κρίσιμη διατμητική τάση που μας ενδιαφέρει είναι

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (1.15)$$

1.2.3 Η διαμέριση του τανυστή των τάσεων

Κάθε εντατική κατάσταση είναι δυνατό να αναλυθεί σε δύο διακριτά μέρη: ένα υδροστατικό ή ιστροπικό, το οποίο στο οποίο οφείλεται η αλλαγή του όγκου του στοιχείου, και σε ένα «στρεβλωτικό» (distortional), στο οποίο οφείλεται η αλλαγή του σχήματος του στοιχείου. Η παραπάνω διαδικασία είναι χρήσιμη όταν μελετάμε φαινόμενα διαρροής, στα οποία η διαμέριση του τανυστή των τάσεων διευκολύνει τους υπολογισμούς και βοηθά να καταλήξουμε σε απλούστερες σχέσεις.

Αν, λοιπόν, $[\sigma]$ είναι ο τανυστής των τάσεων σε τυχόν σημείο, τότε ονομάζουμε p την **μέση ορθή τάση**, η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (1.16)$$

και

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

ή

$$[\sigma] = [s] + [p] \quad (1.17)$$

όπου $[p]$ ο υδροστατικός ή ιστροπικός τανυστής και $[s]$ ο αποκλίνων τανυστής.

Σε ανεπτυγμένη μητρωϊκή μορφή, ο αποκλίνων τανυστής δίνεται αμέσως παρακάτω, όπως προκύπτει από την σχέση (1.17)

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Παρατηρώντας ότι ο υδροστατικός τανυστής περιγράφει στην ουσία την εντατική κατάσταση σώματος βυθισμένου σε υγρό, προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι **κύριες διευθύνσεις** του $[\sigma]$ και του αποκλίνοντα τανυστή $[s]$ ταυτίζονται. Επομένως, γνωρίζοντας τις κύριες τάσεις σ_i , μπορούμε απευθείας μέσω της σχέσης (1.17) να βρούμε και τις s_i ($i=1,2,3$)

Η εύρεση των κύριων τάσεων του $[s]$ και των αναλλοίωτών του ακολουθεί την ίδια πορεία με την αντίστοιχη του $[\sigma]$. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση του $[s]$ είναι η ακόλουθη

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.19)$$

όπου J_i ($i=1,2,3$) οι αναλλοίωτες του αποκλίνοντα τανυστή $[s]$, για τις οποίες ισχύει

$$\begin{aligned} J_1 &= s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 \\ J_2 &= - (s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{11}s_{33} - s_{12}^2 - s_{23}^2 - s_{13}^2) = \\ &= - (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_1 s_3) \\ J_3 &= s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{31}^2 - s_{33}s_{12}^2 + 2s_{12}s_{23}s_{13} \\ &= s_1 s_2 s_3 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Όμως εξ' ορισμού, η μέση ορθή τάση του αποκλίνοντα τανυστή $[s]$ οφείλει να είναι μηδενική.

Πράγματι

$$s_m = \frac{s_{11} + s_{22} + s_{33}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} - p = 0 \Rightarrow J_1 = 0 \quad (1.21)$$

Η (1.19) απλουστεύεται μέσω της (1.21):

$$s^3 + J_2 s - J_3 = 0 \quad (1.22)$$

ενώ βολικότερες εκφράσεις εξάγονται και για την J_2 , η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην συνέχεια:

$$J_2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{2} \quad (1.23)$$

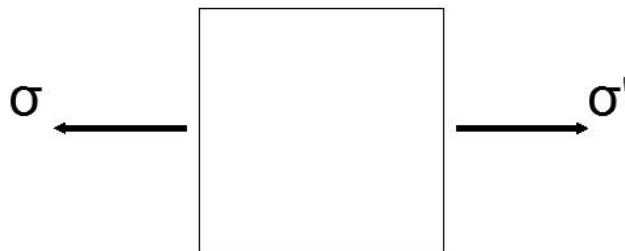
ή, συναρτήσει των κυρίων τάσεων σ_1, σ_2 και σ_3

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (1.24)$$

Είναι εμφανές ότι είναι απλούστερος ο υπολογισμός των αποκλίνουσων κύριων τάσεων s_i μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.22) και κατόπιν ο υπολογισμός των κύριων τάσεων σ_i από την σχέση (1.17), παρά η αντίστροφη διαδικασία. Εκτός αυτού, όπως θα δούμε στην συνέχεια, διαμερίζοντας τον τανυστή των τάσεων εκμεταλλευόμαστε και ιδιότητες των επιμέρους τανυστών για την περεταίρω διευκόλυνση μας στην αντιμετώπιση προβλημάτων πλαστικότητας.

1.3-Εξισώσεις ισορροπίας

Θεωρώντας το στοιχείο του σχήματος 3, απειροστών διαστάσεων, και υποθέτοντας **συνεχές πεδίο** τάσεων, έπεται ότι οι τάσεις θα έχουν μεταβληθεί (έστω και ελάχιστα) από τις αντίστοιχές τους στις απέναντι πλευρές.



7-Μεταβολή τάσης εντός πάχους dx

Αναπτύσσοντας κατά Taylor, έχουμε:

$$\sigma' = \sigma + \frac{d\sigma}{dx} dx \quad (1.25)$$

όπου έχουν αμεληθεί οι όροι ανώτερης τάξης.

Στον βαθμό που το σώμα ισορροπεί κάτω από την επενέργεια εξωτερικών δυνάμεων, τότε πρέπει να ισορροπεί και το στοιχείο κάτω από την επενέργεια στοιχειωδών δυνάμεων και των δυνάμεων ανα μονάδα όγκου, $F(F_1, F_2, F_3)$.

Παίρνοντας ισορροπία κατά τους άξονες x_1, x_2 και x_3 αναπτύσσοντας κάθε στοιχείο του τανυστή σύμφωνα με την (1.25), παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + F_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

ή

$$[\sigma]^T [\Delta] + [F] = [0] \quad (1.27)$$

Οι σχέσεις (1.26), (1.27) αποτελούν τις **διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας** του σώματος ή **εξισώσεις Navier**. Αν ένα οποιοδήποτε σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, τότε οι παραπάνω σχέσεις πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο, **ανεξάρτητα** από την συμπεριφορά του υλικού του σώματος (ελαστική, ελαστοπλαστική κλπ.)

1.3.1 Η Συνθήκη Cauchy

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (1.26) εξήχθησαν απαιτώντας ισορροπία δυνάμεων κατά τις τρεις διευθύνσεις. Δεν ειπώθηκε ωστόσο τίποτα για την ισορροπία ροπών. Αποδεικνύεται² ότι η απαίτηση για ισορροπία ροπών στο στοιχείο μας οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη, η οποία είναι γνωστή και ως συνθήκη Cauchy

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.28)$$

Η παραπάνω συνθήκη υιοθετήθηκε σιωπηρά όταν μιλούσαμε για την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων των κύριων επιπέδων, καθώς η συμμετρία του πίνακα είναι απαιτούμενο του θεωρήματος.

1.4-0 τανυστής των παραμορφώσεων

Στον φυσικό κόσμο κάθε σώμα που υπόκειται σε τυχούσες φορτικές καταστάσεις, αποκρίνεται εν γένει είτε με αλλαγή της θέσης του στον χώρο, είτε του σχήματός του και του μεγέθους του. Αν ασκήσουμε για παράδειγμα δύναμη παράλληλη στο έδαφος σε ένα τραπέζι, κάθε στοιχείο του τελευταίου αλλάζει την θέση του στον χώρο με τον ίδιο «τρόπο». Το αποτέλεσμα είναι ότι το τραπέζι μετακινείται στον χώρο ως **στερεό σώμα** και τα στοιχεία του υποβάλλονται σε ίση **μετακίνηση**(displacement). Σε αυτή την περίπτωση, στο τραπέζι δεν αναπτύσσονται τάσεις. Αν τώρα ασκήσουμε δύναμη στην επιφάνεια του τραπέζιού κάθετη προς το έδαφος, στο οποίο είναι στηριγμένο μέσω των ποδών του, θα παρατηρηθεί αλλαγή στο σχήμα ή/και στο μέγεθός του. Το τραπέζι, τώρα, **παραμορφώνεται**.

Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι κάθε ισοστατικός τουλάχιστον φορέας αποκρίνεται στην επίδραση εξωτερικών φορτίων μέσω της αναδιάταξης των εσωτερικών του στοιχείων σε διαφορετικές θέσεις. Αυτό που παρατηρείται μακροσκοπικά είναι η αλλαγή του σχήματος και του μεγέθους τού φορέα, δηλαδή, η παραμόρφωσή του.

1.4.1 Αξονική παραμόρφωση

Ας υποθέσουμε τον πρόβολο του παρακάτω σχήματος, αρχικού μήκους L_0 , και μια στοιχειώδη προσαύξηση dL στο μήκος του προβόλου. Η αντίστοιχη παραμόρφωση είναι

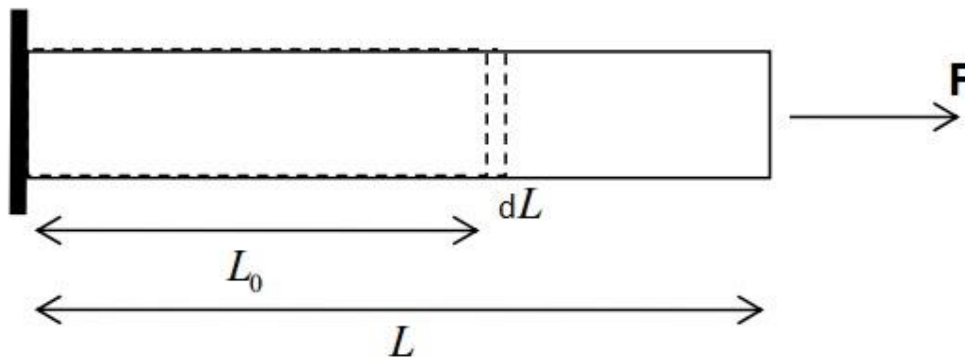
$$d\varepsilon_t = \frac{dL}{L} \quad (1.29)$$

όπου

$$L = L_0 + dL \quad (1.30)$$

Καθώς το μήκος του προβόλου αυξάνει ομοιόμορφα από L_0 σε L , η **συνολική παραμόρφωση** είναι

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (1.31)$$



9-Αξονικά φορτιζόμενος πρόβολος

Η ε_t καλείται **πραγματική** ή **λογαριθμική παραμόρφωση** και όπως θα δούμε χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που παρατηρούνται μεγάλες παραμορφώσεις.

Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της αξονικής παραμόρφωσης του προβόλου είναι ο παρακάτω

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.32)$$

Η ε της σχέσης (1.32) καλείται **τεχνική παραμόρφωση** και είναι αυτή που χρησιμοποιείται σε προβλήματα μηχανικής μικρών παραμορφώσεων.

Είναι εμφανές ότι η λογαριθμική και η τεχνική παραμόρφωση συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\varepsilon_t = \ln(1 + \varepsilon) \quad (1.33)$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση (1.33) κατά Taylor παίρνουμε

$$\varepsilon_t \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \dots \quad (1.34)$$

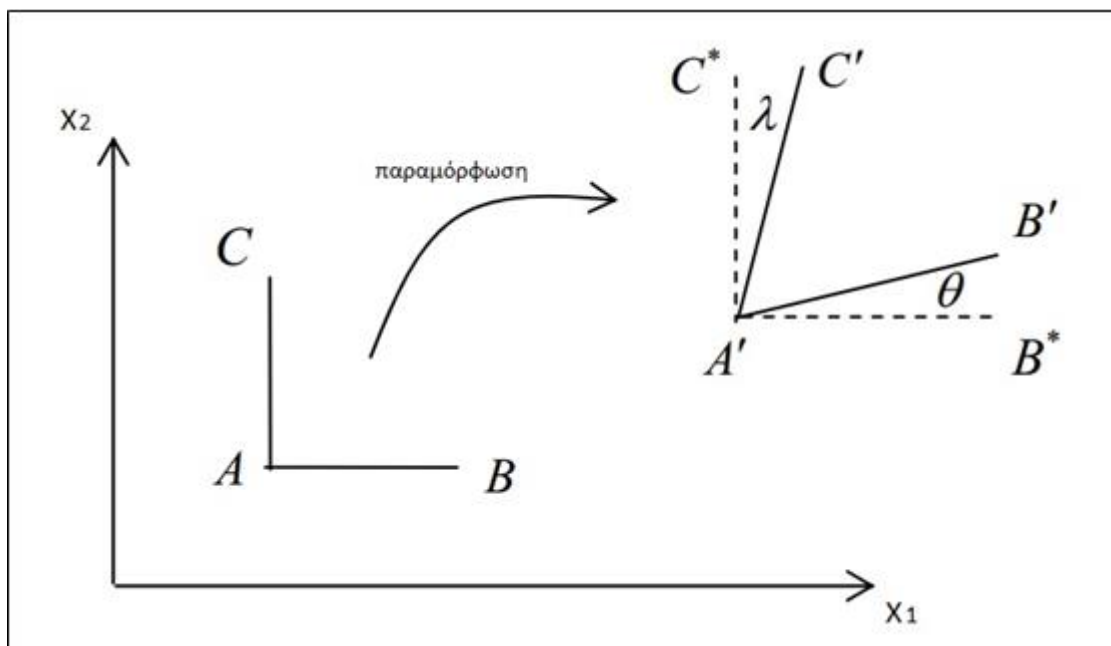
όπου είναι εμφανές ότι για μικρές παραμορφώσεις, ε και ε_t ταυτίζονται.

1.4.2 Διατμητική παραμόρφωση

Στην γενικότερη περίπτωση, η παραμορφωσιακή κατάσταση σε τυχόν σημείο A ενός σώματος δεν καθορίζεται μόνο από τις αξονικές παραμορφώσεις του, δηλαδή την αλλαγή μήκους ανά μονάδα μήκους κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου κάθε φορά σε έναν από τους άξονες x_1, x_2, x_3 , αλλά και από τις **διατμητικές παραμορφώσεις**. Οι τελευταίες οφείλονται στην παρατηρούμενη στρέβλωση του σώματος.

Εξετάζοντας την παραμορφωσιακή κατάσταση ενός σημείου A στο επίπεδο x_1-x_2 , ορίζονται

- αξονική παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα x_1 , ϵ_{11}
- αξονική παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα x_2 , ϵ_{22}
- διατμητική παραμόρφωση ως το ήμισυ της αλλαγής της ορθής γωνίας μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων παράλληλων στους x_1 και x_2 αντίστοιχα, ϵ_{12}



10-Παραμορφωσιακή κατάσταση σημείου A στο επίπεδο x_1-x_2

Είναι

$$\epsilon_{11} = \frac{A'B' - AB}{AB}, \quad \epsilon_{22} = \frac{A'C' - AC}{AC}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{B^*B'}{AB} + \frac{C^*C'}{AC} \right) \quad (1.35)$$

Για την παραγωγή της έκφρασης ε_{12} , υιοθετήθηκε σιωπηρά η παραδοχή των **μικρών μετατοπίσεων-μικρών γωνιών**, όπου η γωνίες είναι περίπου ίσες με τις εφαπτομένες τους. Αντίστοιχα, για τις εκφράσεις των ε_{11} και ε_{22} , είναι προφανές ότι τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων Α'Β' με Α'Β* και Α'C' με Α'C* θεωρούνται ίσα αντίστοιχα ως συνέπεια της παραπάνω παραδοχής.

Στην γενική μορφή της, η παραμορφωσιακή κατάσταση σε ένα σημείο περιγράφεται από ένα μητρώο 3x3, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την εντατική κατάσταση, η εξαγωγή του οποίου ακολουθεί την ίδια λογική με αυτή της παραγράφου **1.4.2**

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Το παραπάνω μητρώο είναι τανυστής 2^{ος} τάξης και ονομάζεται **τανυστής των παραμορφώσεων**. Τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι **αξονικές ή ορθές παραμορφώσεις**, και προκαλούν την αλλαγή του όγκου του στοιχείου, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι **οι διατμητικές παραμορφώσεις** και προκαλούν αλλαγή του σχήματος του στοιχείου.

Μένει να δειχθεί, σε πιο «στέρεη» μορφή, η εξαγωγή των στοιχείων του μητρώου παραμορφώσεων από τις συνιστώσες του πεδίου των μετατοπίσεων.

1.4.3 Γενική μορφή του τανυστή των παραμορφώσεων

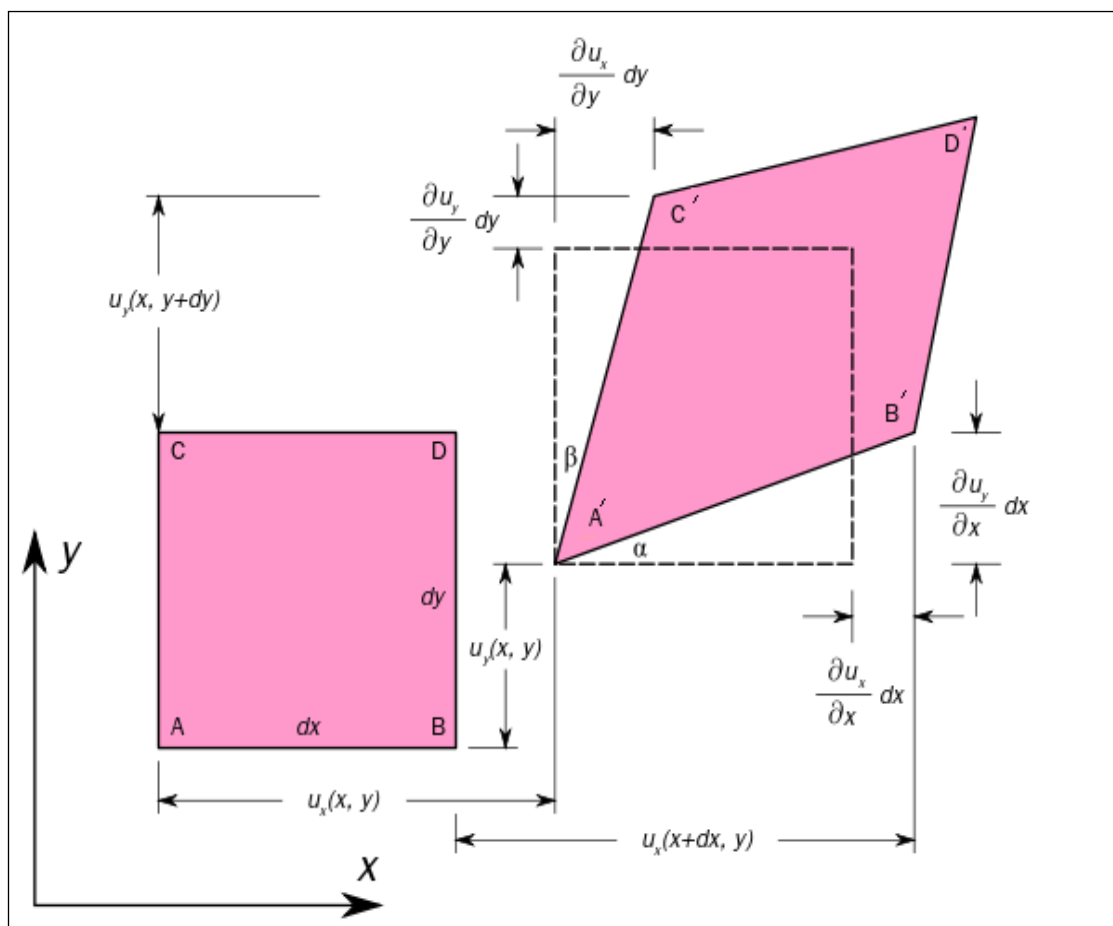
Ας φανταστούμε πάλι την περίπτωση επίπεδου σώματος και στοιχείο αυτού, διαστάσεων dx και dy . Υπό την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων, τα στοιχεία του σώματος αναδιατάσσονται και επομένως χρειαζόμαστε μια συνάρτηση που θα περιγράφει την μεταβολή της θέσης των στοιχείων στον χώρο, δηλαδή, μια συνάρτηση που να μας μεταφέρει από την αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση στην παραμορφωμένη.

Η παραπάνω συνάρτηση λέγεται συνάρτηση του **πεδίου μετατοπίσεων**, και στην περίπτωση του απλούστερου επίπεδου προβλήματος που εξετάζουμε, μπορεί να εκφραστεί ως

$$[U(x,y)] = [u_x(x,y), u_y(x,y)] \quad (1.37)$$

Για την παραπάνω συνάρτηση ισχύουν οι εξής παραδοχές:

- Οι συνιστώσες u_x και u_y , καθώς και οι πρώτες παράγωγοί τους, είναι συνεχείς και μονότονες συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y .
- Οι συνιστώσες u_x και u_y , καθώς και οι πρώτες παράγωγοί τους, θεωρούνται απειροστά πρώτης τάξης



11-Στοιχείο A πριν και μετά την παραμόρφωση στο επίπεδο $x-y$

Σύμφωνα με τις (1.35) , θα εκφραστούν τα στοιχεία του ταυστή των παραμορφώσεων συναρτήσει του πεδίου των μετατοπίσεων.

Είναι

$$AB = dx$$

και

$$A'B' = \sqrt{(dx + u_{x,B} - u_{x,A})^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2}$$

$$u_{x,A} = u_x(x,y)$$

$$u_{x,B} = u_x(x+dx,y) = u_{x,A} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

Άρα

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2} \quad (1.38)$$

Αναπτύσσοντας την (1.38), μηδενίζοντας στην πορεία τα απειροστά δεύτερης και άνω τάξης, προκύπτει ότι

$$A'B' \approx dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$

Επομένως

$$\epsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.39)$$

Ανάλογη μορφή έχουν και οι υπόλοιπες αξονικές παραμορφώσεις. Συνοπτικά έχουμε

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1.40)$$

Οι **τεχνικές διατμητικές παραμορφώσεις** $\gamma_{ij}, i \neq j$, εκφράζουν την μεταβολή στην γωνία δύο αρχικά ορθογώνιων ευθύγραμμων τμημάτων και θα χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των ϵ_{ij} . Στην περίπτωσή μας, αυτά είναι τα (AB) και (AC).

Σύμφωνα με το Σχ.11, έχω:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\beta \approx \tan(\beta) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

άρα

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \gamma_{yx} \quad (1.41)$$

Επομένως, έχουμε από την τρίτη των σχέσεων (1.35)

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1.42)$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες συνιστώσες των διαμηθικών παραμορφώσεων στα άλλα δύο επίπεδα, (y-z), (x-z).

Υπενθυμίζεται επίσης, ότι οι γωνίες α και β θεωρήθηκαν «μικρές», όπως ακριβώς και οι μετατοπίσεις.

Κάθε στοιχείο του τανυστή των παραμορφώσεων (1.36) μπορεί να γραφεί στην γενικότερη περίπτωση των 3 διαστάσεων με την τανυστική μορφή όπως παρακάτω:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.43)$$

Η σχέση (1.43) μαρτυρά επίσης ότι ο τανυστής (1.36) είναι συμμετρικός

1.5-Εξισώσεις συμβιβαστού

1.5.1 Παραγωγή εξισώσεων συμβιβαστού

Όπως είδαμε προηγουμένως, τα στοιχεία του τανυστή των παραμορφώσεων προκύπτουν ως εκφράσεις πρώτων παραγώγων του πεδίου των μετακινήσεων. Συνακόλουθα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, με γνωστά τα στοιχεία ε_{ij} , θα μπορούσε κανείς, μέσω ολοκλήρωσής τους, να βρει τις συνιστώσες του πεδίου μετακινήσεων, u_x και u_y .

Παρατηρεί κανείς όμως ότι στο επίπεδο πρόβλημα, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, τα στοιχεία παραμόρφωσης είναι τρία ($\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$), ενώ οι συνιστώσες του πεδίου μετακινήσεων είναι δύο. Αντίστοιχα, επεκτείνοντας το πρόβλημα στον χώρο, παρατηρούμε ότι τα στοιχεία παραμόρφωσης ε_{ij} είναι έξι, ενώ οι συνιστώσες του πεδίου μετακινήσεων είναι τρεις. Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας οδηγούν στο λογικό συμπέρασμα ότι, κατά κάποιο τρόπο, τα στοιχεία του τανυστή $[\varepsilon]$ σχετίζονται μεταξύ τους. Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις συμβιβαστού ή εξισώσεις St.Venant**.

Παίρνοντας πάλι ως παράδειγμα την απλούστερη περίπτωση του επίπεδου προβλήματος, και παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς y το ε_{xx} , δύο φορές ως προς x το ε_{yy} και δύο φορές το ε_{xy} διαδοχικά μια ως προς x και μια ως προς y , έχω:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2} \right)\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} \quad (1.44)$$

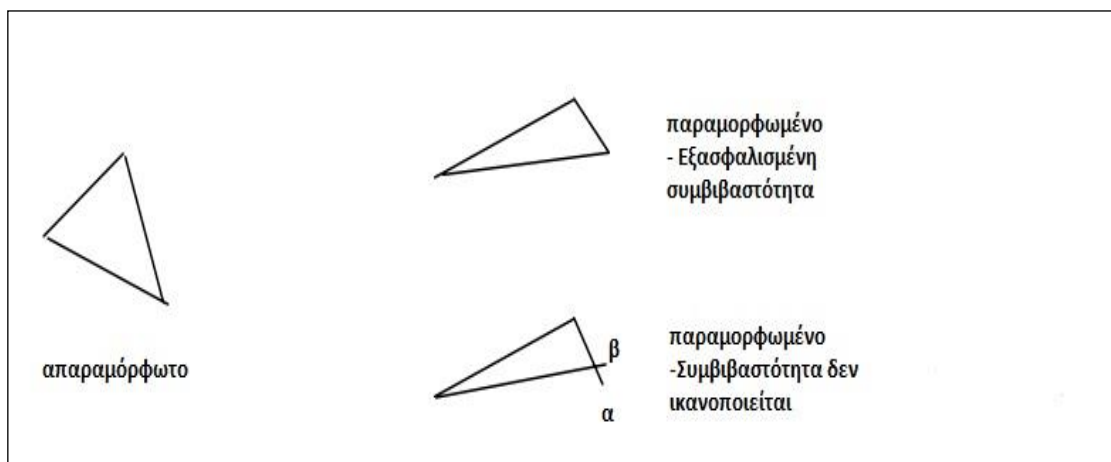
Η (1.44) είναι και η μόνη εξίσωση συμβιβαστού του επίπεδου τανυστή παραμορφώσεων. Στην γενικότερη περίπτωση προβλήματος στον χώρο, οι εξισώσεις συμβιβαστού που πρέπει να ικανοποιούνται είναι έξι, και με γραφή δεικτών έχουν ως εξής:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ji} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1.45)$$

όπου $\varepsilon_{ij,kl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$.

1.5.2 Φυσικό νόημα εξισώσεων συμβιβαστού

Με την επιβολή εξωτερικών φορτίων, το σώμα παραμορφώνεται και ισορροπεί εκ νέου σε μια θέση διαφορετική της αρχικής, όταν βρισκόταν σε ηρεμία. Μια συγκεκριμένη αλληλουχία (γεωμετρικός τύπος πχ.) στοιχειωδών τμημάτων που αποτελούν το σώμα και που αλλάζουν θέση κατά την παραμόρφωση, «οφείλουν» στο πέρας της διαδικασίας –παραμόρφωσης- να έχουν διατηρήσει μια αλλαγμένη μεν, έλλογη δε μορφή της αρχικής αλληλουχίας.



12-Ικανοποίηση και μη της συνθήκης συμβιβαστότητας κατά την παραμόρφωση ενός σώματος

Θεωρώντας για παράδειγμα το νοητό τρίγωνο στην επιφάνεια ενός σώματος που πρόκειται να παραμορφωθεί, αναμένουμε την αλλαγή του μήκους των πλευρών του και των γωνιών του, όπως επίσης αναμένουμε-απαιτούμε τα σημεία α και β να ταυτίζονται μετά την παραμόρφωση.

Με άλλα λόγια, η απαίτηση για ικανοποίηση των εξισώσεων συμβιβαστού εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνεχούς συνάρτησης $U(u_1, u_2, u_3)$ που περιγράφει το πεδίο των μετατοπίσεων.

1.6-Καταστατικές Εξισώσεις

Μέχρι στιγμής έχουμε μιλήσει για την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση σε τυχόν σημείο εξωτερικά φορτιζόμενου σώματος, καθώς και για τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, και που επιβάλλονται στο μοντέλο από το γεγονός ότι το σώμα είναι υπαρκτό και όχι θεωρητική κατασκευή – ήτοι, τις εξισώσεις ισορροπίας και τις εξισώσεις συμβιβαστού. Το πρόβλημα της μελέτης του παραμορφώσιμου σώματος παραμένει αόριστο μέχρι να καθοριστούν οι καταστατικές εξισώσεις του μοντέλου, δηλαδή η σχέση μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων για το δοσμένο σώμα, καθώς και οι συνθήκες στήριξης στα σύνορα του σώματος. Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τον ρόλο που έχουν οι καταστατικές εξισώσεις στην αντιμετώπιση ενός προβλήματος μηχανικής παραμορφώσιμου σώματος.

1.6.1 Γενικό καταστατικό μοντέλο

Αυτό που παρατηρούμε στον φυσικό κόσμο και που μας είναι πρακτικά αξιοποιήσιμο στην μελέτη και στην εξαγωγή συμπερασμάτων είναι οι παραμορφώσεις. Οι τάσεις είναι μια αφηρημένη ποσότητα η οποία διευκολύνει την εποπτεία και την αντίληψή μας για το πρόβλημα. Στόχος των καταστατικών εξισώσεων είναι να διατυπώσουν σχέσεις που να περιγράφουν την εξάρτηση της συμπεριφοράς του σώματος από παράγοντες όπως:

1. η ιστορία της φόρτισης
2. ο ρυθμός επιβολής της φόρτισης
3. τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού
4. την θερμοκρασιακή μεταβολή

Η γενική μορφή των καταστατικών εξισώσεων σε τανυστική μορφή είναι η παρακάτω:

$$\{\tilde{\sigma}\}=f(\{\tilde{\epsilon}\}, \{\tilde{\epsilon}'\}, T, \{\tilde{\epsilon}_h\}, c_1, c_2 \dots c_n, t) \quad (1.46)$$

Στην παραπάνω σχέση, οι σταθερές c_i εκφράζουν μηχανικές ιδιότητες του υλικού, T η θερμοκρασία, $\{\tilde{\epsilon}_h\}$ η ιστορία της παραμόρφωσης και t ο χρόνος.

Οι καταστατικές εξισώσεις με άλλα λόγια καθορίζουν την σχέση μεταξύ των τάσεων που αναπτύσσονται σε ένα σώμα, και των χαρακτηριστικών εκείνων τα οποία μπορούν να «υπολογισθούν» και να καταγραφούν πρακτικά, όπως οι παραμορφώσεις, η ιστορία τους, ο χρόνος, οι μηχανικές σταθερές και η θερμοκρασία.

Είναι η επιθυμητή ακρίβεια που επιβάλλει ο σκοπός του έργου που συνήθως καθορίζει και το καταστατικό μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση. Γραμμικά ελαστικό, ελαστοπλαστικό, βισκοελαστικό, βισκοπλαστικό είναι μερικά από αυτά τα μοντέλα.

Τα μοντέλα αυτά αξιοποιούν τις διευθύνσεις μηχανικής συμμετρίας του υλικού, δηλαδή το πως μεταβάλλονται οι μηχανικές ιδιότητες σε σημείο εντός του υλικού σώματος ανάλογα με τον προσανατολισμό (ισότροπο, ορθότροπο, ανισότροπο).

1.7-Συνοριακές συνθήκες

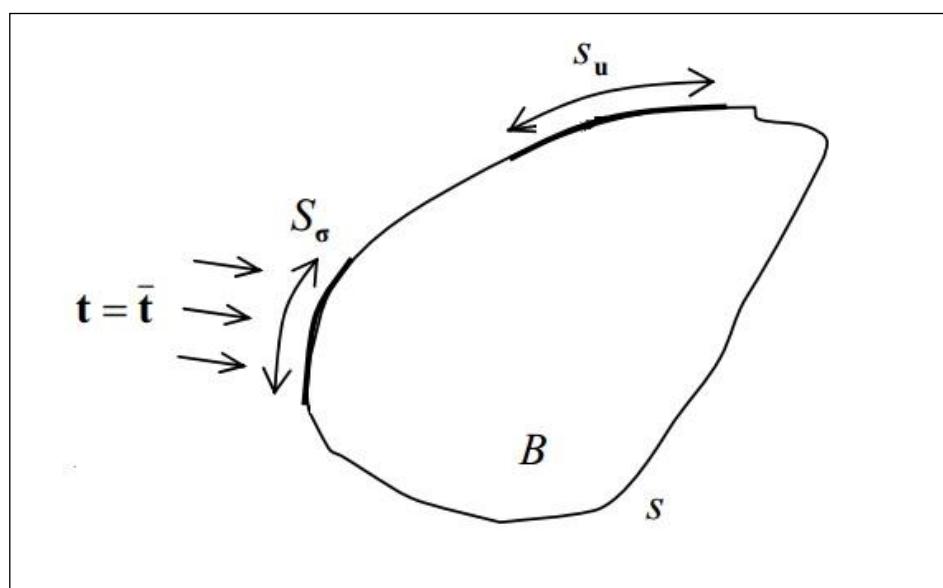
Θεωρώντας δεδομένη την συμμετρία των τανυστών των τάσεων και παραμορφώσεων, για να θεωρηθεί το πρόβλημα προσδιορισμένο, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις δεκαπέντε παραμέτρους που το καθορίζουν: τις έξι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$, τις έξι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων, $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$, και τις τρεις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων, u_1, u_2, u_3 . Αφού υπολογισθούν, μένει να εξασφαλισθεί η μοναδικότητα της λύσης. Αυτό γίνεται λαμβάνοντας υπόψη των δύο ειδών συνοριακών συνθηκών: τις **στατικές** και τις **κινηματικές οριακές συνθήκες**.

Για τον προσδιορισμό των 15 παραπάνω στοιχείων διαθέτουμε

- 3 διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (σχέσεις (1.26))
- 6 διαφορικές εξισώσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων (1.43)
- 6 καταστατικές εξισώσεις τάσεων-παραμορφώσεων (1.46)

1.7.1 Στατικές οριακές συνθήκες

Οι στατικές οριακές συνθήκες εκφράζουν την απαίτηση για ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας σε κάθε σημείο ελεύθερης επιφάνειας του σώματος. Η σχέση που πρέπει να ικανοποιείται προκύπτει από το τετράεδρο Cauchy (σχ. 1.8) μόνο που εδώ η νοητή τομή δεν αφορά ένα εσωτερικό σημείο του σώματος, αλλά σημείο της ελεύθερης, φορτιζόμενης ή μη, επιφάνειας – έστω S_σ ή S_u αντίστοιχα.



13 Στατικές οριακές συνθήκες σώματος B

Οι σχέσεις που περιγράφουν τις στατικές οριακές συνθήκες για είναι

$$[\bar{t}] = \{\bar{\sigma}\}[n], x \in S_\sigma \quad \text{ή} \quad [0] = \{\bar{\sigma}\}[n], x \in S_u \quad (1.47)$$

όπου προφανώς, $[n]$ το κάθετο διάνυσμα ,κάθε φορά, στην στοιχειώδη επιφάνεια dS που εξετάζουμε.

1.7.2 Κινηματικές οριακές συνθήκες

Οι κινηματικές οριακές συνθήκες εκφράζουν τους περιορισμούς που επιβάλλονται στο πεδίο μετατοπίσεων του σώματος στα σύνορα του σώματος. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι συνθήκες στήριξης.

Υποθέτοντας ότι η επιφάνεια S_u στο σχ.13 είναι επιφάνεια στήριξης, τότε η κινηματική οριακή συνθήκη θα είναι

$$\mathbf{U}(x,y,z)=\mathbf{d}_u(x,y,z) \text{ , } x \in S_u \quad (1.48)$$

όπου η d_u εκφράζει τους κινηματικούς περιορισμούς. Αν, για παράδειγμα, η στήριξη ήταν ακλόνητη, τότε

$$\mathbf{d}_u(x,y,z) = [d_{u,x} \quad d_{u,y} \quad d_{u,z}]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T = [\mathbf{0}]$$

1.7.3 Μοναδικότητα της λύσης

Οι σχέσεις (1.26), (1.43), (1.46) είναι στις ουσία οι διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος, και η επίλυσή τους μας δίνει την **γενική** λύση του προβλήματος. Για να είναι πλήρως προσδιορισμένο το πρόβλημα, πρέπει να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα της λύσης, για την οποία απαιτείτε να γνωρίζουμε σε κάθε σημείο της εξωτερικής επιφάνειας του σώματος είτε το διάνυσμα $[\mathbf{t}]$ της εξωτερικής φόρτισης είτε την συνάρτηση \mathbf{d}_u των κινηματικών περιορισμών.

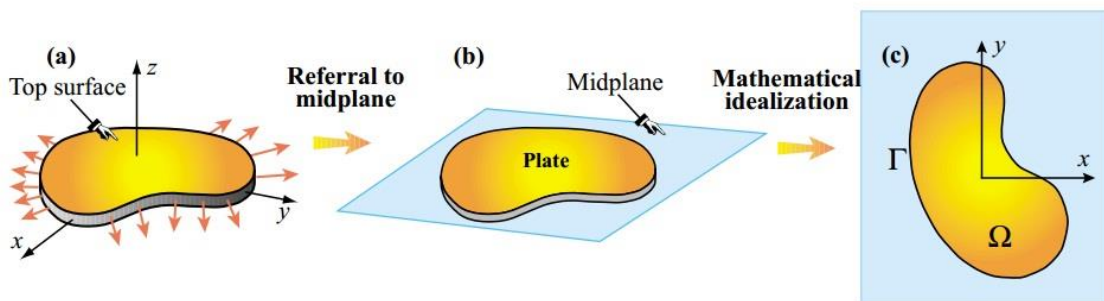
Αν δεν μας είναι γνωστά τα παραπάνω μεγέθη σε διάφορα σημεία του σώματος, προκύπτουν περισσότερες της μιας λύσης από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων και τότε το πρόβλημα είναι **απροσδιόριστο**.

Συνοψίζοντας, για τον πλήρη προσδιορισμό ενός προβλήματος μηχανικής παραμορφώσιμου σώματος, πρέπει να είναι σαφώς καθορισμένες οι εξισώσεις ισορροπίας και οι εξισώσεις συμβιβαστού, να διαθέτουμε ένα καταστατικό μοντέλο για το υλικό του σώματος, και να γνωρίζουμε τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

1.8-Επίπεδη εντατική κατάσταση

Πολλές φορές η μελέτη ενός προβλήματος αντοχής στον τριδιάστατο χώρο παρουσιάζει δυσχέρειες. Έτσι αναγκαζόμαστε να απλουστεύουμε το αρχικό πρόβλημα καταφεύγοντας σε απλούστερες μοντελοποιήσεις ή ακόμα και σε αναγωγές σε «παρόμοια» προβλήματα που οι λύσεις τους είναι απλούστερες. Μια τέτοια περίπτωση, με την οποία θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία, είναι και το πρόβλημα της επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Ας υποθέσουμε ένα σώμα του οποίου η μία διάσταση είναι αρκετά μικρότερη από τις υπόλοιπες (σχ.14). Ένα τέτοιο σώμα μπορεί να είναι μια πλάκα ή ένα φύλλο.



14 Πλάκα σε επίπεδη ένταση α) τριδιάστατη απεικόνιση β) μεσο-επίπεδο γ) διδιάστατη προσομοίωση.

Η κάθετη απόσταση μεταξύ των δύο εξωτερικών επιφανειών που ανήκουν στο επίπεδο x-y (μεγάλες διαστάσεις) ονομάζεται **πάχος** (σχ.14.a). Θεωρούμε ένα νοητό επίπεδο το οποίο είναι παράλληλο στο επίπεδο x-y και βρίσκεται στο μεσοδιάστημα των δύο εξωτερικών επιφανειών (σχ.14.b), το **μεσοεπίπεδο** (midplane). Αν το διάνυσμα της συνισταμένης των εξωτερικών δυνάμεων ανήκει στο μεσοεπίπεδο, τότε λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης έντασης, αν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Οι τάσεις που ανήκουν στο επίπεδο x-y (σχ.14) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος του πάχους.
2. Οι συνθήκες στήριξης του σώματος είναι συμμετρικές ως προς το μεσοεπίπεδο.

3. Η αξονική και οι διατμητικές τάσεις του επιπέδου που είναι κάθετο στον άξονα που ορίζει η ελάχιστη διάσταση, είναι μηδενικές ή αμελητέες. Εν προκειμένω, $\sigma_{zz}=\sigma_{zx}=\sigma_{zy}=0$.

Συνήθως, για να είναι αξιόπιστο το παραπάνω μοντέλο και να ισχύουν οι παραδοχές 1) και 3), πρέπει το πάχος να είναι μικρότερο από το 10% με 15% της μικρότερης από τις υπόλοιπες δύο διαστάσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα πλαίσια της θεωρίας της γραμμικής ελαστικότητας (Hooke), ενώ οι τάσεις $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ και οι παραμορφώσεις $\epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}$ είναι μηδέν, δεν ισχύει το ίδιο και για την ϵ_{zz} . Η τελευταία δεν είναι μηδενική παρόλο που δεν παράγεται έργο κατά την αξονική διεύθυνση z-z ($\sigma_{zz}=0$), και αυτό οφείλεται στο φαινόμενο Poisson.

Συγκεντρώνοντας τώρα τις εξισώσεις που διέπουν το παραπάνω πρόβλημα, παρατηρούμε ότι είναι αρκετά απλούστερες από τις αντίστοιχες των τριδιάστατων προβλημάτων.

Διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας:
$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

Σχέσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων:
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

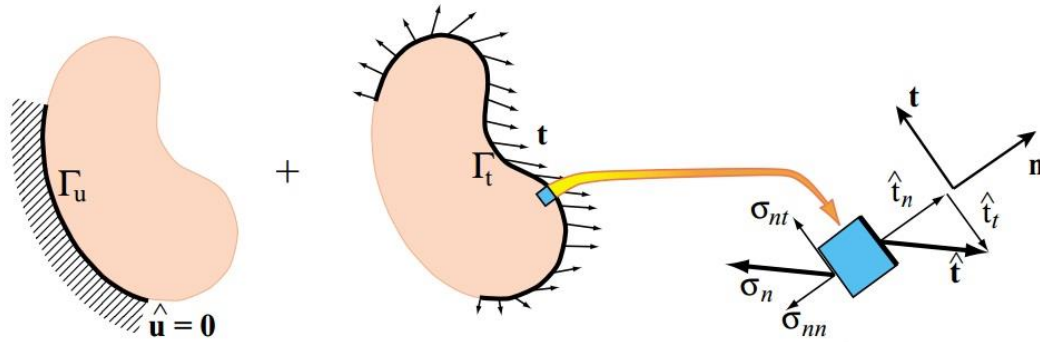
Καταστατικό μοντέλο: $\{\tilde{\sigma}\} = f(\{\tilde{\epsilon}\}, \{\tilde{\epsilon}'\}, T, \{\tilde{\epsilon}_h\}, c_1, c_2 \dots c_n, t)$

όπου $\{\tilde{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$ και $\{\tilde{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$

Εξισώσεις συμβιβαστού:
$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial y \partial x}$$

Στατική οριακή συνθήκη: $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \{\tilde{\sigma}\}[\mathbf{n}]$, $x \in \Gamma_t$

Κινηματική οριακή συνθήκη: $\mathbf{U}(x,y) = \mathbf{d}_s(x,y)$, $x \in \Gamma_u$



15 Κινηματικές οριακές συνθήκες στο σύνορο Γ_u , στατικές οριακές συνθήκες στο σύνορο Γ_t , ισορροπία στοιχείου στην επιφάνεια Γ_t αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

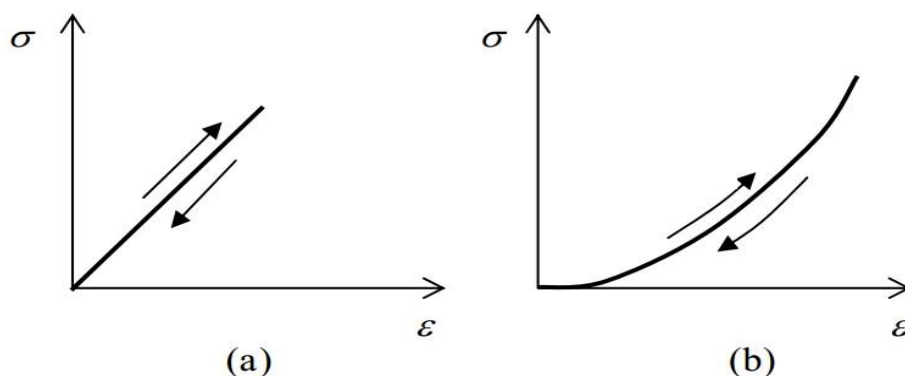
2.1. Γραμμικά ελαστικό καταστατικό μοντέλο

Η μελέτη της συμπεριφοράς υλικών σύμφωνα με το γραμμικά ελαστικό καταστατικό μοντέλο είναι τις περισσότερες φορές απαραίτητη αφενός διότι τα περισσότερα υλικά τείνουν ,μέχρι μια στάθμη φόρτισης, να συμπεριφέρονται ελαστικά, αφετέρου επειδή τα χαρακτηριστικά του προβλήματος καθιστούν την παραπάνω προσομοίωση ως μια ασφαλή αρχική προσέγγιση. Το γραμμικά ελαστικό καταστατικό μοντέλο αποτελεί το απλούστερο καταστατικό μοντέλο καθώς υποθέτει μια **γραμμική και μονοσήμαντη** σχέση μεταξύ τάσεων-παραμορφώσεων, απαλείφοντας επιπλέον την επίδραση του ρυθμού επιβολής του φορτίου.

Έτσι, το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιείται για να περιγράψει υλικά των οποίων η απόκριση σε εξωτερικά φορτία παρουσιάζει τα παρακάτω χαρακτηριστικά

- οι παραμορφώσεις είναι μικρές
- οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων
- κατά την αποφόρτιση, το υλικό δεν παρουσιάζει μόνιμες παραμορφώσεις αλλά επιστρέφει στο αρχικό του σχήμα
- κατά την αποφόρτιση, το υλικό ακολουθεί τον ίδιο κλάδο όπως αυτό της φόρτισης (σχ. 16)
- αγνοείται ο ρυθμός επιβολής του φορτίου

16- Κλάδοι φόρτισης-αποφόρτισης ελαστικού υλικού, (a) γραμμικό ελαστικό υλικό, (b) μη-γραμμικό ελαστικό υλικό



Λέγοντας ότι οι τάσεις είναι ανάλογες των παραμορφώσεων, εννοούμε ότι κάθε συνιστώσα τάσης σ_{ij} του τανυστή $[\tilde{\sigma}]$ είναι γραμμική συνάρτηση των συνιστωσών των παραμορφώσεων μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$[\tilde{\sigma}] = [\bar{E}] [\tilde{\epsilon}] \quad (2.1)$$

όπου $[\bar{E}]$ το μητρώο των **ελαστικών σταθερών**.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα μας απασχολήσουν υλικά όπου είναι **ομογενή** και **ισότροπα**, δηλαδή υλικά στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Επομένως, το ελαστικό καταστατικό μοντέλο αφορά υλικά τα οποία είναι

- ομογενή
- ισότροπα
- συμπεριφέρονται γραμμικώς ελαστικά μέχρι μια στάθμη φόρτισης

Αναπτύσσοντας την σχέση (2.1) ως προς κάθε συνιστώσα τάσης, έχουμε τις παρακάτω αναλυτικές μορφές σύμφωνα με τις 3 παραπάνω παραδοχές

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})] - \alpha E \Delta T$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz})] - \alpha E \Delta T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{zz} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx})] - \alpha E \Delta T$$

$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = G \gamma_{xz}$$

$$\sigma_{zy} = G \gamma_{zy}$$

όπου **E** το **μέτρο ελαστικότητας** του υλικού, **G** το **μέτρο διάτμησης**, **ν** ο **λόγος Poisson**, **α** ο **συντελεστής θερμικής διαστολής** και **ΔT** η **μεταβολή της θερμοκρασίας**.

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι προφανές ότι στην γραμμική ισότροπη ελαστικότητα, υπό την επίδραση εξωτερικών φορτίων και θερμοκρασίας, η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από τρεις μηχανικές σταθερές, E, G, ν και μια θερμομηχανική, την α , όπως περιγράφηκαν παραπάνω. Οι μια εκ των μηχανικών σταθερών, έστω G , μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των άλλων δύο ως εξής

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.2)$$

Οι παραπάνω καταστατικές σχέσεις μπορούν να εκφραστούν συνοπτικά με την βοήθεια της (2.2) ως εξής

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (2.3)$$

$$E_{ijkl} = \frac{1+\nu}{2E} \left(-\frac{2\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \quad (2.4)$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

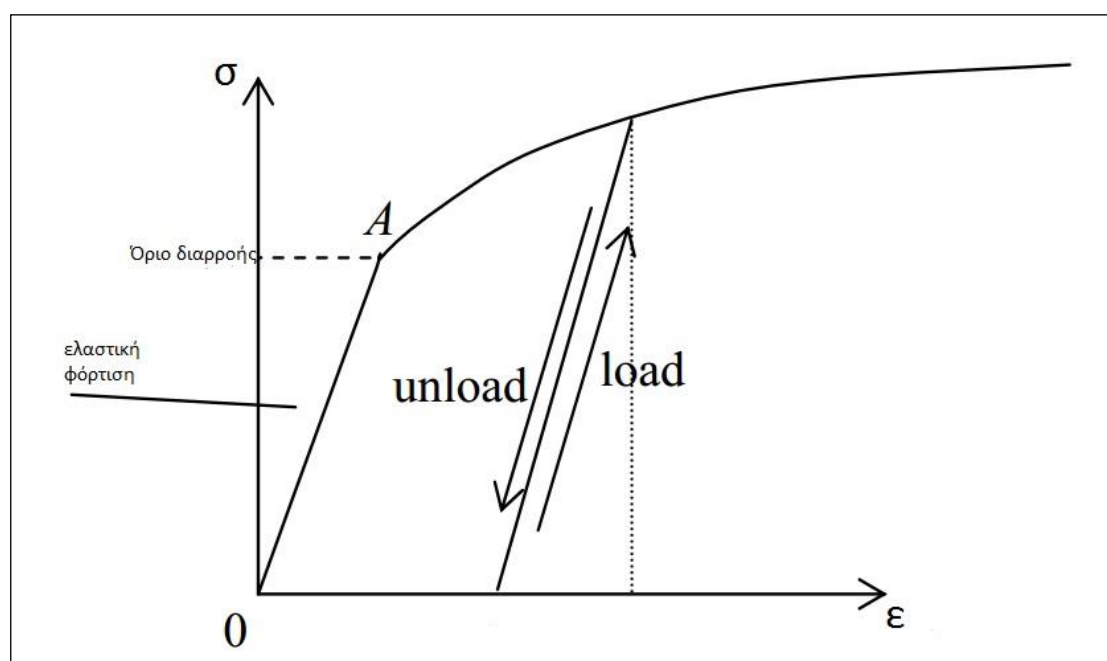
Στην σχέση (2.3) χρησιμοποιείται ο συμβολισμός άθροισης Einstein, όπου επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται ($i, j, k, l = 1, 2, 3$)

Μια σημαντική ιδιότητα των ισότροπων υλικών, και που προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (2.3), είναι ότι το σύστημα των κύριων τάσεων συμπίπτει με το σύστημα των κύριων παραμορφώσεων.

2.2. Κριτήρια διαρροής

Όλα τα υλικά πέραν μιας ορισμένης φορτικής στάθμης υφίστανται μια ποιοτική μεταβολή στην δομή του υλικού. Τα μηχανικά χαρακτηριστικά του αλλοιώνονται και κατά συνέπεια καθιστούν το πρότερο καταστατικό μοντέλο που χρησιμοποιούταν ανεπαρκές. Τέτοιες αλλαγές στην δομή μπορεί να είναι η εκτεταμένη διάδοση ρωγμών σε

ένα δοκίμιο ψαθυρού υλικού (σκυρόδεμα), η αποδιοργάνωσή του και, τέλος, η θραύση του. Αντίστοιχα, μπορεί να είναι η διαρροή ή η παρουσία ρωγμών σε ένα όλκιμο υλικό (χάλυβας). Στην τελευταία περίπτωση των όλκιμων υλικών, με τα οποία θα καταπιαστούμε σε αυτή την εργασία, η διαρροή σηματοδοτεί το τέλος της ελαστικής συμπεριφοράς του υλικού και της παρουσίας μόνιμων παραμορφώσεων κατά την αποφόρτιση. Το όριο ανάμεσα στην περιοχή που συμπεριφέρεται ελαστικά το υλικό και στην ανελαστική περιοχή, εκεί δηλαδή που το υλικό «δια-ρέει», ονομάζεται **όριο διαρροής**.



17- Τυπικό διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων όλκιμου υλικού.

Τέτοιου είδους αλλαγές στην ποιότητα της δομής του υλικού είθισται να καλούνται **αστοχία**, χωρίς αυτό να δηλώνει ότι ένας φορέας που έχει αστοχήσει σε κάποια σημεία βρίσκεται απαραίτητα ο ίδιος σε κατάσταση αστοχίας.

Η μοντελοποίηση υλικών πέραν του ορίου διαρροής (σημείο A, σχ.17) προϋποθέτει αρχικά την γνώση ενός τρόπου μέσω του οποίου θα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τάση εκείνη, μετά από την οποία αρχίζει η διαρροή – το όριο διαρροής. Είναι προφανές ότι στην γενικότερη περίπτωση, η διαρροή ενός σημείου ενός σώματος υπό

σύνθετη καταπόνηση δεν περιλαμβάνει ως παράμετρο μια τάση, αλλά και τις 6 ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή των τάσεων. Εξαιτίας της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η περίπτωση της σύνθετης καταπόνησης, επιδιώκουμε να συσχετίσουμε την τελευταία με τις απλούστερες δυνατές καταπονήσεις, όπως ο απλός μονοαξονικός εφελκυσμός. Τα κριτήρια αστοχίας εκκινούν από την παραπάνω αρχή και, ανάγοντας την σύνθετη καταπόνηση σε **ισοδύναμη** μονοαξονική, η οποία είναι υπολογιστικά εύκολη, μπορούν να αντιπαραβάλουν τα αναλυτικά αποτελέσματα με τα αντίστοιχα πειραματικά.

Υπάρχουν αρκετά κριτήρια διαρροής, τα οποία είναι λιγότερο ή περισσότερο αξιόπιστα ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του υλικού. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα εστιάσουμε στο **κριτήριο διαρροής Von Mises** ή **κριτήριο μέγιστης παραμορφωσιακής ενέργειας στρέβλωσης**.

2.2.1-Το κριτήριο Von Mises

Όπως συμβαίνει και με τα άλλα κριτήρια διαρροής, έχουμε μια **βαθμωτή** συνάρτηση της οποίας οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι έξι ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή των τάσεων. Το υλικό διαρρέει ή πλαστικοποιείται όταν η παραπάνω συνάρτηση πάρει μια κρίσιμη τιμή, έστω k , η οποία είναι χαρακτηριστική του υλικού και προσδιορίζεται πειραματικά.

Οι βασικές παραδοχές του κριτηρίου Von Mises είναι οι παρακάτω:

1. Το υλικό είναι ισότροπο
2. Η συμπεριφορά του υλικού είναι ανεξάρτητη από τον ρυθμό επιβολής της φόρτισης
3. Οι παραμορφώσεις είναι ισόθερμες

Όπως έχει αναφερθεί και νωρίτερα, η ιδιότητα της ισοτροπίας εξασφαλίζει ότι κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αν f η συνάρτηση διαρροής, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω το υλικό θα διαρρέει όταν

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})=k \quad (2.5)$$

τότε μια ενδεχόμενη περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων δεν θα επηρέαζε την τιμή της f

$$f(\{\tilde{Q}\}\{\tilde{\sigma}\}\{\tilde{Q}\}^T)=f(\{\tilde{\sigma}\})$$

όπου Q το μητρώο μετασχηματισμού. Τέτοιου είδους βαθμωτές συναρτήσεις ανεξάρτητες από το σύστημα αναφοράς καλούνται ιστροπικές. Συνέπεια της ιστροπίας είναι ότι ενώ η (2.5) μπορεί να εκφρασθεί με όρους κυρίων τάσεων, είναι ανεξάρτητη από τις διευθύνσεις τους

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=k \quad (2.6)$$

Για το κριτήριο Von Mises γίνεται η θεώρηση της διαμέρισης της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης σε δύο μέρη:

- a) Την ελαστική ενέργεια στρέβλωσης (distortional)
- b) Την ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου (volumetric)

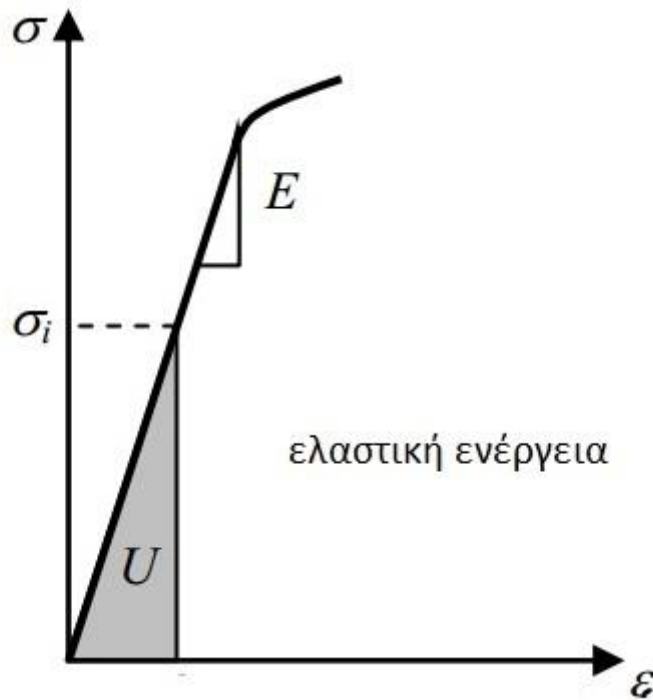
Η βασική θεώρηση είναι ότι η πλαστική διαρροή αρχίζει όταν η ελαστική ενέργεια στρέβλωσης λάβει μια κρίσιμη τιμή, και πιο συγκεκριμένα, όταν γίνει ίση με την τιμή της αντίστοιχης ενέργειας στρέβλωσης σε μονοαξονική καταπόνηση την στιγμή της διαρροής. Η διαρροή είναι δε ανεξάρτητη της ελαστικής ενέργειας αλλαγής όγκου.

Το έργο που προκαλούν οι εξωτερικές δυνάμεις στο στερεό αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια, την οποία καλούμε (ελαστική)ενέργεια παραμόρφωσης και εν γένει δεν κατανέμεται ομοιόμορφα. Εισάγοντας την έννοια της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης, δηλαδή ελαστικής ενέργειας ανα μονάδα όγκου U_o , μπορούμε, ολοκληρώνοντας στον όγκο, να πάρουμε την εκφραση της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης:

$$U = \iiint_V U_o(x, y, z) dV \quad (2.7)$$

Στην περίπτωση τριδιάστατης εντατικής κατάστασης η U_o έχει την παρακάτω μορφή

$$U_o = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad , \quad i,j=1,2,3 \quad (2.8)$$



18-Καμπύλη τάσης-παραμόρφωσης και ελαστική ενέργεια

Σε όρους κυρίων τάσεων η (2.8) είναι:

$$U_o = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (2.9)$$

Επιλύοντας την (2.1) ως προς τις συνιστώσες των (κυρίων) παραμορφώσεων, έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Από τις (2.9),(2.10) προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$U_o = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)) \quad (2.11)$$

2.2.2-Διαμέριση της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης

Έστω U_h η ελαστική ενέργεια αλλαγής όγκου και U_d η αντίστοιχη ενέργεια στρέβλωσης. Χωρίζουμε τον τανυστή των κυρίων τάσεων σε υδροστατικό και αποκλίνοντα:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3d} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

όπου $\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Από τις (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι η U_h είναι

$$U_h = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_h^2 \quad (2.13)$$

ή

$$U_h = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.14)$$

Και η U_d προκύπτει ως $U_d = U_o - U_h$

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2} \quad (2.15)$$

Θέτοντας $\sigma_1 = \sigma_y$, όπου σ_y η τάση διαρροής, και $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ και αντικαθιστώντας στην (2.15), παίρνουμε την κρίσιμη τιμή της U_d για μονο αξονική καταπόνηση:

$$U_{d,crit} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_y^2$$

Επομένως, σε μια γενική εντατική κατάσταση, η διαρροή ξεκινάει όταν το U_d (2.15) γίνει ίσο με το $U_{d,crit}$. Αναπτύσσοντας την εξίσωση $U_d = U_{d,crit}$ έχω τελικά

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{6} = \frac{\sigma_y^2}{3}$$

ή

$$J_2 = \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (2.16)$$

όπου J_2 η 2^η αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων (1.24)

Σύμφωνα με την σχέση (1.60), όταν ισχύει η ισότητα, το υλικό αρχίζει να διαρρέει. Όσο $J_2 < \frac{\sigma_y^2}{3}$, το υλικό βρίσκεται στην ελαστική περιοχή.

Αναπτύσσοντας περαιτέρω την σχέση (2.16) με την βοήθεια της (1.24) έχουμε:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2} = \sigma_y^2 \quad (2.17)$$

ή

$$\sigma_{VM} = \sigma_y \quad (2.18)$$

όπου

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}} \quad (2.19)$$

Η τάση σ_{VM} ονομάζεται **ισοδύναμη τάση Von Mises** και το κριτήριο διαρροής λαμβάνει την κομψή μορφή

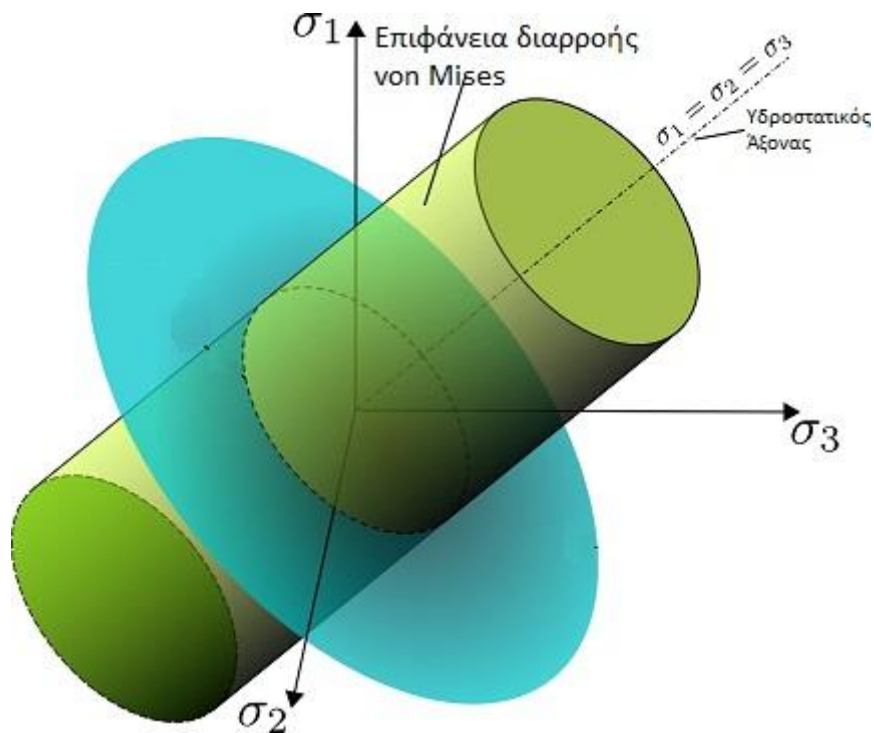
$$f(\sigma_{VM}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{VM} - \sigma_y = 0 \quad (2.20)$$

Η τάση σ_{VM} και συναρτήσει των αυθαίρετων συνιστωσών του τανυστή των τάσεων ως εξής

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{zy}^2)}{2}} \quad (2.21)$$

2.2.3-Το επίπεδο π (π-plane)

Η επιφάνεια διαρροής von Mises (2.173) ορίζει έναν κύλινδρο στο σύστημα συντεταγμένων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 19. Θα δείξουμε ότι όντως, η διαρροή είναι ανεξάρτητη του υδροστατικού τανυστή $[\tilde{\sigma}_h]$

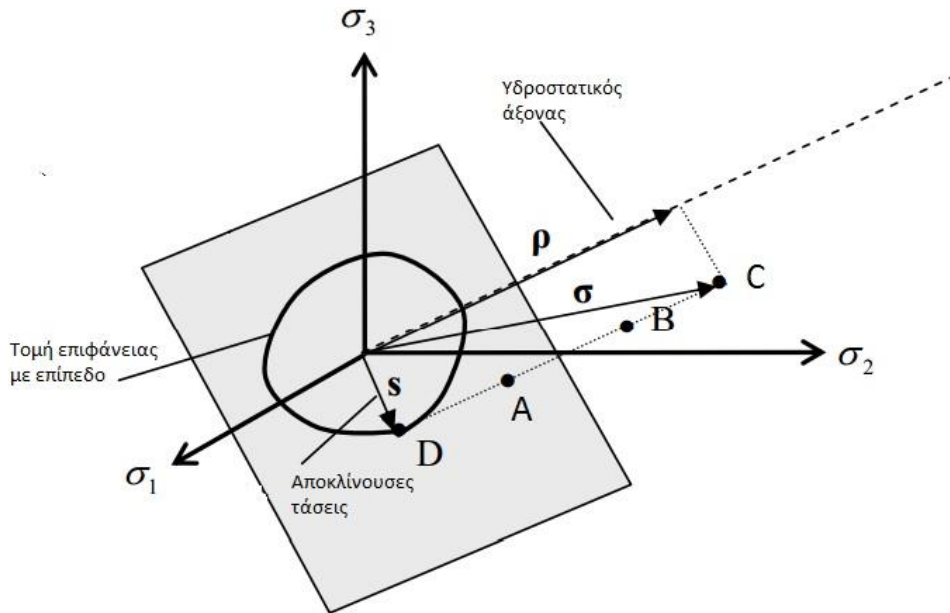


19 -Επιφάνεια διαρροής Von Mises στον χώρο των κυρίων τάσεων

Κάθε σημείο που κείται στην επιφάνεια $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$ είναι σημείο στο οποίο έχουμε διαρροή, ενώ κάθε εσωτερικό σημείο του κυλίνδρου βρίσκεται στην ελαστική περιοχή ($f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$). Τα σημεία που βρίσκονται σε υδροστατική εντατική κατάσταση κείνται στην ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει ίσες γωνίες με τους κύριους άξονες. Στην διαγώνιο αυτή προφανώς ισχύει $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Στο Κεφάλαιο 5 θα εξεταστεί εκτενέστερα η ειδική περίπτωση του «υπόχωρου» von Mises για την επίπεδη εντατική κατάσταση.

Έστω αυθαίρετο σημείο $A(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = A(a, b, c)$ του οποίου η προβολή D κάθετα προς το τυχαίο επίπεδο κείται στην τομή της επιφάνειας διαρροής με αυτό το επίπεδο, δηλαδή, το A είναι σημείο διαρροής. Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας κατά $\lambda \sigma_h$ την εντατική κατάσταση στο A , όπου λ ακέραιος, παίρνουμε σημεία με συνιστώσες τάσεων της μορφής $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (a + \lambda \sigma_h, b + \lambda \sigma_h, c + \lambda \sigma_h)$, όπως τα σημεία B και C , τα οποία είναι μετατοπισμένα ως προς το A κατά διεύθυνση παράλληλη στον υδροστατικό άξονα.



20 -Τομή επιφάνειας von Mises με τυχόν επίπεδο κάθετο στον υδροστατικό άξονα

Αυτό είναι εμφανές αν δούμε ότι

$$\{\bar{\sigma}\} = \{\bar{s}\} + \{\bar{\rho}\}$$

όπου $\{\bar{s}\}$ το άνυσμα που περιέχει τις αποκλίνουσες τάσεις και $\{\bar{\rho}\}$ το άνυσμα των αντίστοιχων υδροστατικών, όπου είναι προφανές ότι $\{\bar{\rho}\} = [\sigma_h \ \sigma_h \ \sigma_h]^T$.

Αν $\{\bar{\sigma}_A\} = \{\bar{s}_A\} + \{\bar{\rho}_A\}$ εντατικό σημείο διαρροής, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλη σημείο για το οποίο ισχύει $\{\bar{\sigma}_B\} = \{\bar{s}_A\} + \lambda\{\bar{\rho}_A\}$.

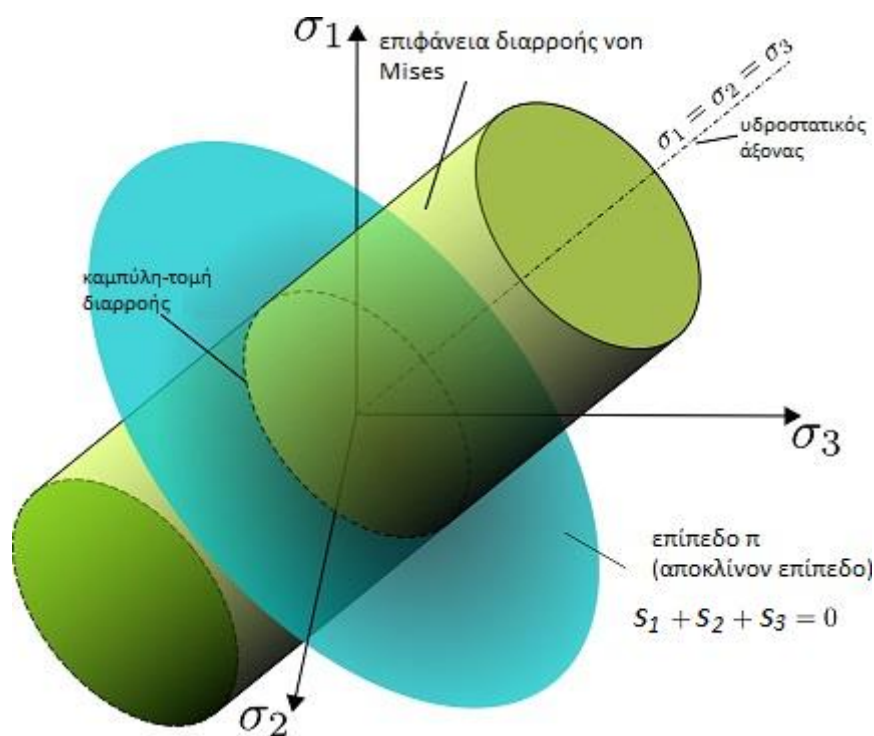
Επιβεβαιώνεται έτσι η βασική παραδοχή που έγινε προηγουμένως, ότι η υδροστατική τάση δεν επηρεάζει την διαρροή. Γι' αυτό τον λόγο μελετάται η διαρροή στον γεωμετρικό εκείνο τόπο που ορίζεται από τα σημεία τομής της επιφάνειας Von Mises με επίπεδο κάθετο στον υδροστατικό άξονα. Η εξίσωση ενός τέτοιου επιπέδου είναι της μορφής

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (2.22)$$

Καλούμε **επίπεδο π** ή **αποκλίνον επίπεδο** εκείνο το επίπεδο το οποίο περιγράφεται από την παραπάνω εξίσωση.

Αξίζει να τονισθεί ότι

- Στο κριτήριο von Mises η τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο π είναι κύκλος
- Στο επίπεδο π κείνται οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή



21-Αποκλίνον επίπεδο και επιφάνεια διαρροής

Το επίπεδο- π παρουσιάζει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Στον χώρο των κύριων τάσεων, το διάνυσμα $(1,1,1)$ είναι κάθετο στο επίπεδο- π
- Οι γωνίες που σχηματίζουν οι προβολές των αξόνων $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ στο επίπεδο- π είναι $\frac{2\pi}{3}$.
- Η ορθή προβολή ενός αυθαίρετου εντατικού σημείου στο επίπεδο- π γίνεται μέσω της σχέσης

$$\vec{s} = \vec{\sigma} - (\vec{\sigma} * \vec{n})\vec{n}$$

$$\text{όπου } \vec{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T.$$

Το κριτήριο διαρροής von Mises (2.21) μπορεί να εκφραστεί και με όρους αποκλίνουσων τάσεων ως εξής

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{13}^2} = \sigma_y$$

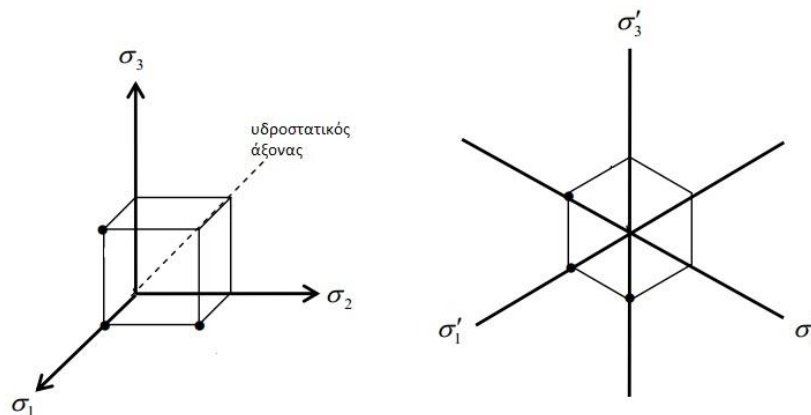
και στην περίπτωση κύριων αποκλίνουσων τάσεων έχω

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sigma_y \quad \text{ή} \quad (2.23)$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y\right)^2 \quad (2.24)$$

Η (2.23) εκφράζει σφαίρα ακτίνας $r = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y\right)$ και δηλώνει ότι το μέτρο του διανύσματος των αποκλίνουσων κύριων τάσεων $\{\vec{s}\}$ είναι σταθερό.

Παρακάτω παρουσιάζεται η προβολική όψη των κύριων αξόνων $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ πάνω στο επίπεδο π σε σχέση με το σύστημα κύριων αξόνων $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

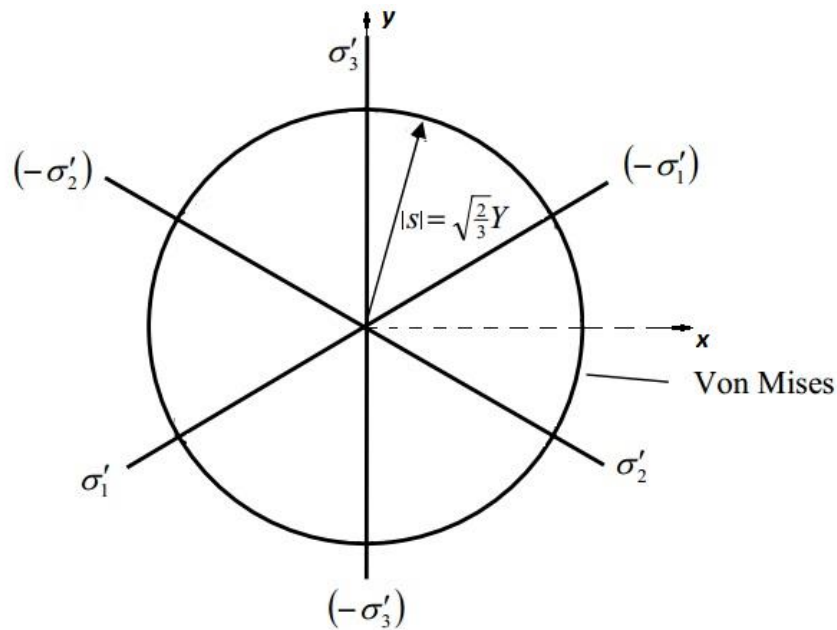


22-Προβολική όψη κύριων αξόνων στο επίπεδο π

Η προβολή \vec{s} μπορεί επιπλέον να αναλυθεί ως προς το επίπεδο π με χρήση των βοηθητικών αξόνων $y = \sigma_3'$ και x κάθετο στον y , ως εξής:

$$\vec{s} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\vec{\sigma}\vec{x}, \vec{\sigma}\vec{y})$$

όπου \vec{x}, \vec{y} τα μοναδιαία διανύσματα των βοηθητικών αξόνων x, y αντίστοιχα στο επίπεδο π (σχήμα 22)



22-Ακτινα καμπύλης διαρροής στο επίπεδο π

$$\vec{x} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{2}} \text{ και } \vec{y} = \frac{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}{\sqrt{6/9}}$$

Ως προς τυχαίους άξονες, η σχέση (2.23) γράφεται

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sigma_Y \quad (2.25)$$

2.2.4-Η περίπτωση της επίπεδης έντασης

Στην περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης, όπου $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, η ισοδύναμη τάση von Mises είναι:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (2.26)$$

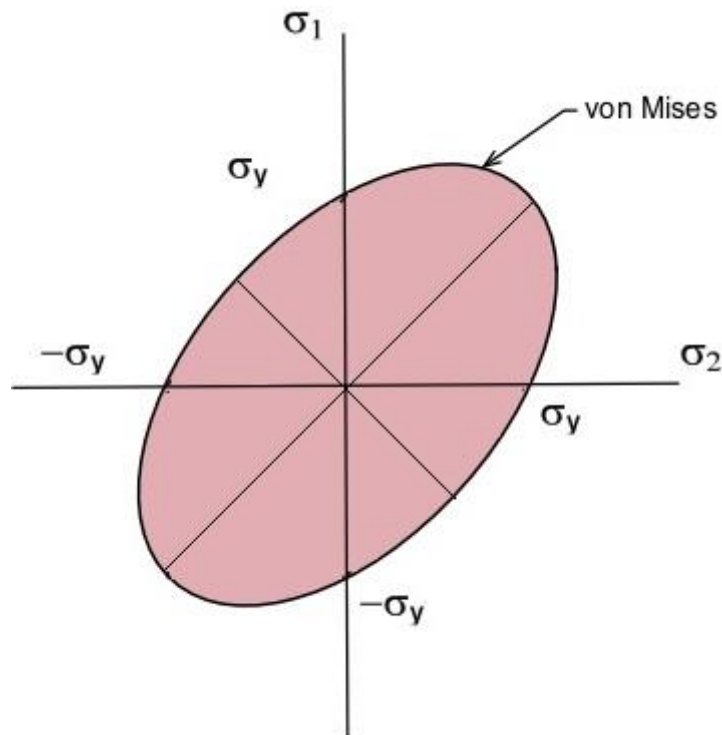
ή με όρους κυρίων τάσεων

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (2.27)$$

Στην περίπτωση που ικανοποιείται η συνθήκη διαρροής $\sigma_{VM} = \sigma_Y$, η (2.27) περιγράφει έλλειψη της μορφής

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_Y^2 \quad (2.28)$$

Η έλλειψη αυτή προκύπτει ως τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο $\sigma_3 = 0$, όπως φαίνεται παρακάτω



23-Καμπύλη διαρροής στην επίπεδη ένταση

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $\sqrt{2}\sigma_y$ ενώ του μικρού είναι $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$.

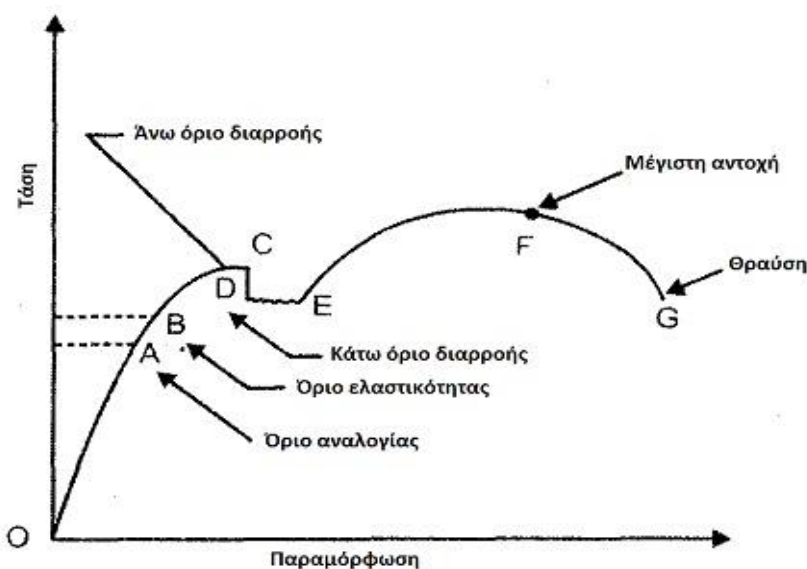
2.3. Ελαστοπλαστική συμπεριφορά

Μέχρι τώρα μιλήσαμε για την συμπεριφορά σωμάτων, τα οποία, υπό την επενέργεια εξωτερικών δυνάμεων, αποκρίνονται ελαστικά. Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι **αντιστρεπτές**, δηλαδή, η ενέργεια που δαπανήθηκε για την παραμόρφωση αποθηκεύεται ως ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης και ανακτάται πλήρως αν αφαιρέσουμε το φορτίο. Επίσης, οι παρατηρούμενες μετατοπίσεις-στροφές είναι «μικρές». Τα παραπάνω χαρακτηριστικά, μαζί με την γραμμική σχέση τάσεων παραμορφώσεων, ενσωματώθηκαν νωρίτερα στην διατύπωση του ελαστικού καταστατικού μοντέλου (παρ. 2.1).

Ωστόσο, στην πραγματικότητα σχεδόν όλα τα υλικά υφίστανται μόνιμες παραμορφώσεις με την αφαίρεση του εξωτερικού φορτίου, και οι οποίες παρατηρούνται όταν η τάση υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, η οποία

χαρακτηριστικό του υλικού. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε **διάχυση ενέργειας** και για την επιστροφή στην αρχική σύνθεση του φορέα απαιτείται **πρόσθετη ενέργεια**. Το υλικό εδώ συμπεριφέρεται **ελαστοπλαστικά**.

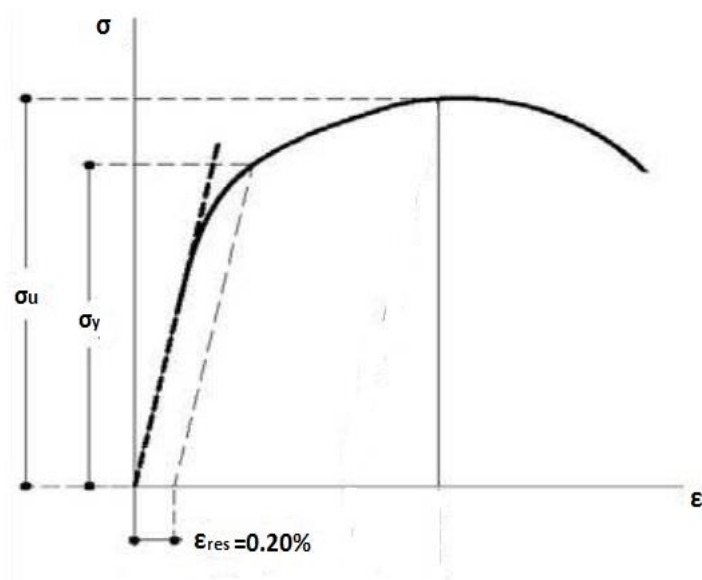
24-Διάγραμμα τάσης –παραμόρφωσης όλκιμου υλικού.



Στο σχήμα 24 φαίνεται ένα τυπικό διάγραμμα συμβατικών τάσεων-παραμορφώσεων ενός μεταλλικού δοκιμίου το οποίο υποβάλλεται σε εφελκυσμό. Διακρίνονται οι παρακάτω περιοχές συμπεριφοράς:

- (OA) – γραμμική ελαστική συμπεριφορά, όριο αναλογίας
- (AB) – μη-γραμμική ελαστική συμπεριφορά, όριο ελαστικότητας
- Σημείο C – άνω όριο διαρροής, σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις από εκεί και έπειτα
- Σημείο D – κάτω όριο διαρροής
- (DE) – ασταθής περιοχή ρεολογικής συμπεριφοράς υπό σταθερή τάση – εμφάνιση γραμμών Lüders
- (EF) Κράτυση
- Σημείο F – μέγιστη τάση που μπορεί να παραλάβει το υλικό
- (FG) – εκτεταμένες παραμορφώσεις με ταυτόχρονη χαλάρωση του υλικού
- G – θραύση

Το άνω και κάτω όριο διαρροής διαφέρουν περίπου κατά 20% και το άνω όριο εξαρτάται και από την ταχύτητα φόρτισης. Το παραπάνω διάγραμμα απλοποιείται έτσι ώστε να έχουμε μοναδικό όριο διαρροής, το **συμβατικό όριο διαρροής ϵ** , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

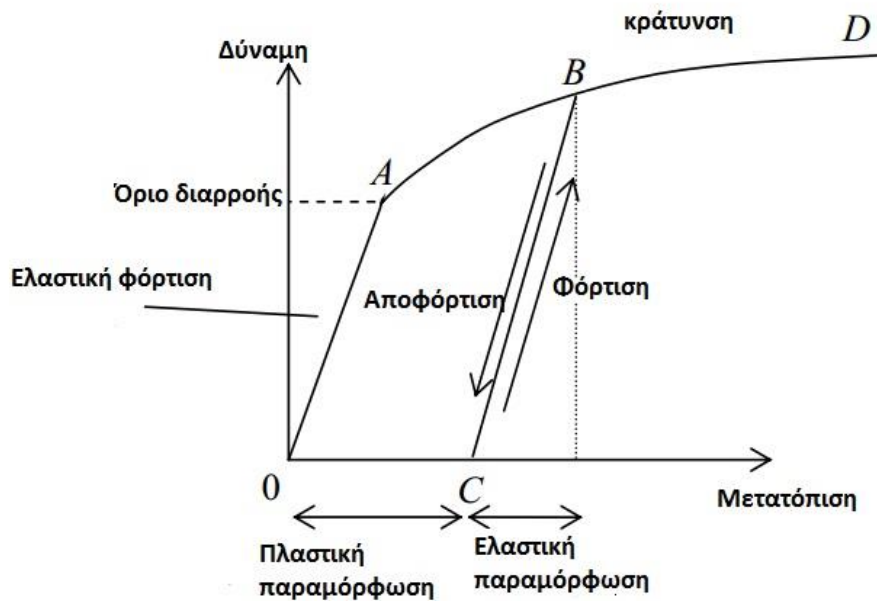


25-Απλοποιημένο διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων χάλυβα οπλισμένου σκυροδέματος

Η μελέτη της πλαστικής συμπεριφοράς των μετάλλων αποτελεί την απλούστερη του αντικειμένου αλλά και την βάση για την μελέτη άλλων υλικών. Η μεταλλική πλαστικότητα χωρίζεται τρόπον τινά σε δύο κατηγορίες: στην πρώτη ανήκουν οι περιπτώσεις όπου παρουσιάζονται σχετικά μικρές πλαστικές-μόνιμες παραμορφώσεις, αρκετές φορές της ίδιας τάξης μεγέθους με τις αντίστοιχες ελαστικές. Στην δεύτερη κατηγορία έχουμε περιπτώσεις όπου οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι αρκετά μεγάλες, σε βαθμό όπου οι ελαστικές παραμορφώσεις μπορούν να αγνοηθούν.

Παρατηρήσεις από δοκιμές εφελκυσμού

Στην περίπτωση ραβδωτού δοκιμίου υποβαλλόμενο σε εφελκυσμό παρατηρούνται τα παρακάτω:



26 – Διάγραμμα δύναμης μετατόπισης σε αξονικό εφελκυσμό

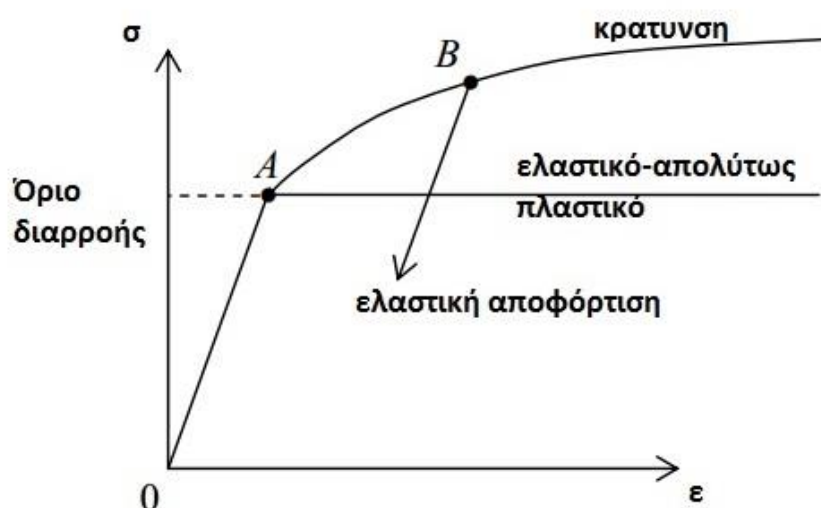
- Στην ελαστική περιοχή, η συμπεριφορά είναι, συνήθως, γραμμική
- Πέραν του ορίου διαρροής (σημείο A), απαιτείται επιπλέον αύξηση στην δύναμη για να επιτύχουμε αντίστοιχη αύξηση και στην μετατόπιση .
- Ο μετελαστικός κλάδος είναι μη-γραμμικός με κλίση που μειώνεται συνεχώς, έως ότου γίνει μηδενική – σημείο μέγιστης αντοχής
- Ενδεχόμενη αποφόρτιση από σημείο εντός του ανελαστικού κλάδου (B), ακολουθεί την διαδρομή (BC) η οποία είναι παράλληλη στον ελαστικό κλάδο. Μέρος της ολικής παραμόρφωσης ανακτάται (ελαστική παραμόρφωση), ενώ το υπόλοιπο (OC) παραμένει ως μόνιμη-πλαστική παραμόρφωση
- Αν το δοκίμιο επαναφορτιστεί εφελκυστικά, ακολουθείται ο νέος ελαστικός κλάδος (CB), με νέο όριο διαρροής το B, το οποίο είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από το αρχικό (A). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **κράτυνση**
- **Κατά την πλαστική παραμόρφωση δεν παρατηρείται αλλαγή όγκου.** Το υλικό στην ρεολογική του κατάσταση είναι ασυμπίεστο

Στην περίπτωση θλίψης, το διάγραμμα για μεταλλικά υλικά είναι το ίδιο.

2.3.1-Το φαινόμενο της κράτυνσης

Είπαμε προηγουμένως ότι κράτυνση είναι εν γένει το φαινόμενο κατά το οποίο μεταβάλλεται, και μάλιστα αυξάνεται, το όριο διαρροής του υλικού. Ένα υλικό με μεγαλύτερη κράτυνση θα παρουσιάσει μεγαλύτερη αντίσταση στο να παραμορφωθεί πλαστικά σε σχέση με ένα αντίστοιχο με μικρότερη κράτυνση.

Στην περίπτωση μονοαξονικής καταπόνησης, το δοκίμιο, αφού διαρρεύσει, γενικά σκληρύνεται. Αυτό συνεπάγεται ότι απαιτείται επιπλέον προσαύξηση της τάσης προκειμένου να αυξηθεί η ολική παραμόρφωση. Αν, σύμφωνα με το Σχήμα 27, διατηρήσουμε σταθερή την τάση στο σημείο Β, τότε δεν θα έχουμε περαιτέρω ανάπτυξη παραμορφώσεων. Στο σχήμα φαίνεται και ο ιδεατή περίπτωση της ελαστικής-απολύτως πλαστικής συμπεριφοράς, όπου όταν η τάση γίνει και διατηρείται ίση με το όριο διαρροής, η παραμόρφωση αυξάνει άπειρα.



27-Κρατυνόμενη και απολύτως πλαστική συμπεριφορά

Στην γενικότερη περίπτωση πολυαξονικής καταπόνησης, όπου η συνθήκη διαρροής δεν είναι της μορφής $\sigma = \sigma_y$, αλλά μια συνάρτηση του

των στοιχείων του τανυστή των τάσεων, το βασικό σκεπτικό επεκτείνεται με παρόμοιο τρόπο. Ας υποθέσουμε ότι η **αρχική** επιφάνεια διαρροής εκφράζεται μέσω της παρακάτω συνάρτησης διαρροής

$$f_0(\sigma_{ij}) = 0$$

όπου θεωρούμε ότι η παραπάνω συνάρτηση προκύπτει σύμφωνα με το κριτήριο διαρροής von Mises.

Στην περίπτωση που η μετελαστική απόκριση είναι απολύτως πλαστική, τότε η συνάρτηση διαρροής δεν αλλάζει μορφή, σε πλήρη αντιστοιχία με την περίπτωση της μονοαξονικής καταπόνησης, όπου το όριο διαρροής παραμένει $\sigma_y = \sigma_{y0}$.

Στην περίπτωση κρατυνόμενου υλικού, η συνάρτηση διαρροής f ενδέχεται να αλλάζει σχήμα, θέση και μέγεθος. Η μορφή της f είναι τότε

$$f(\sigma_{ij}, K_i) = 0 \quad (2.29)$$

όπου, πλέον, η συνάρτηση διαρροής δεν εξαρτάται μόνο από τον τανυστή των τάσεων, αλλά και από τις **παραμέτρους κράτυνσης** K_i .

Οι παράμετροι κράτυνσης αλλάζουν κατά την πλαστική διαρροή και καθορίζουν την εξέλιξη της επιφάνειας διαρροής. Ενδέχεται να είναι βαθμωτά μεγέθη ή τανυστές 1^{ης} ή 2^{ης} τάξης. Αξίζει δεν να σημειωθεί ότι πριν την έναρξη της πρώτης διαρροής, οι παράμετροι κράτυνσης είναι μηδενικοί:

$$f_0(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}, 0)$$

Η περιγραφή της αλλαγής της επιφάνειας διαρροής σε σχέση με την πλαστική παραμόρφωση ονομάζεται νόμος κράτυνσης (hardening rule). Ο νόμος κράτυνσης είναι ένα απαραίτητο στοιχείο για την διατύπωση του ελαστοπλαστικού καταστατικού μοντέλου.

2.3.2-Νόμοι κράτυνσης

Παρακάτω θα εξεταστούν οι δύο μορφές κράτυνσης που παρουσιάζονται στα μεταλλικά υλικά, η μικτή κράτυνση και η ελαστική-

απολύτως πλαστική συμπεριφορά, δηλαδή υλικό μη-κρατυνόμενο μετελαστικά.

2.3.2.1-Ελαστικό-απολύτως πλαστικό υλικό

Η περίπτωση αυτή αναφέρθηκε παραπάνω και αποτελεί την απλούστερη ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Η εξίσωση της επιφάνειας διαρροής, όπως προκύπτει από το κριτήριο von Mises, είναι παρακάτω

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{3J_2} - \sigma_y = 0 \quad (2.30)$$

η οποία είναι μια παραλλαγή της σχέσης (2.23)

2.3.2.2-Ισοτροπική κράτυνση

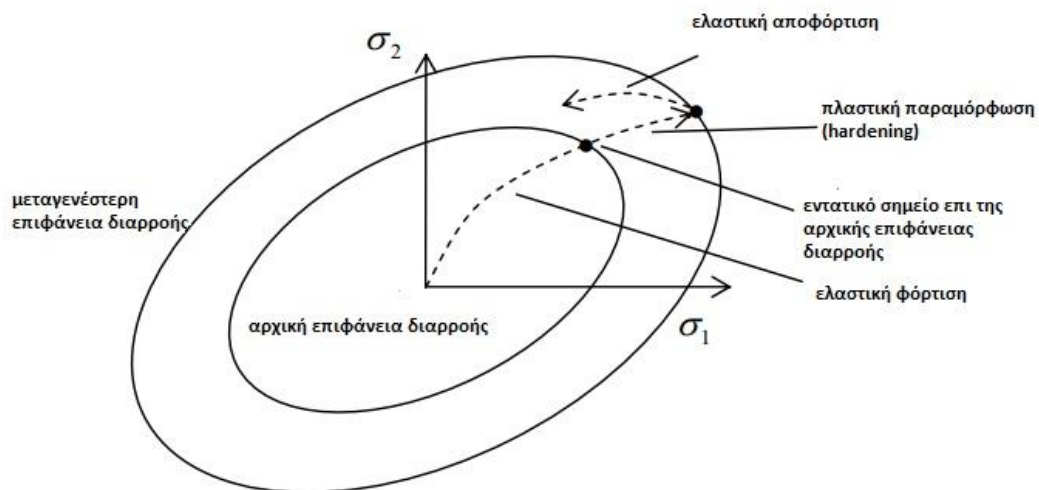
Ισοτροπική κράτυνση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η επιφάνεια διαρροής διατηρεί το σχήμα της, αλλά, με την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων, το μέγεθός της –δηλαδή η ακτίνα του κυλίνδρου – αυξάνει. Το κατ'αντιστοιχία ανάλογο στην περίπτωση μονοαξονικής καταπόνησης είναι αυτό που εξετάστηκε παραπάνω.

Σε αυτή την περίπτωση, η μορφή της συνάρτησης διαρροής είναι η παρακάτω

$$f(\sigma_{ij}, K(\alpha)) = \sqrt{3J_2} - (\sigma_y + K(\alpha)) = 0 \quad (2.31)$$

όπου $\sigma_{VM} = \sqrt{3J_2}$.

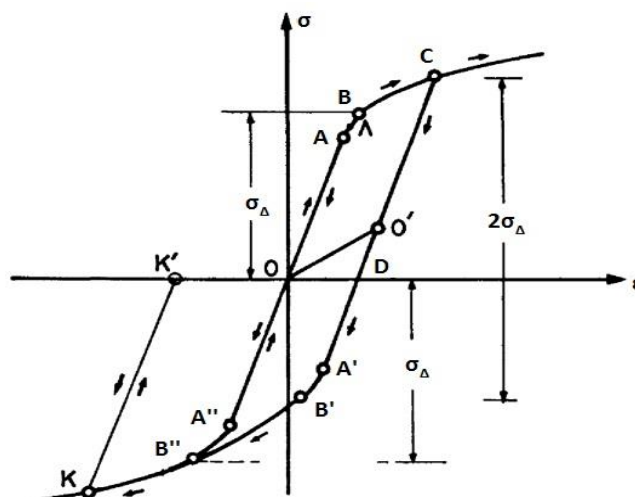
Η σχέση (2.31) κάνει ξεκάθαρο το γεγονός της αύξησης της ακτίνας του κυλίνδρου από $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$ σε $\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + K(\alpha))$, όπως απεικονίζεται και στο παρακάτω σχήμα. Η παράμετρος $K(\alpha)$ είναι συνάρτηση της ιστορίας των πλαστικών παραμορφώσεων και θα καθορισθεί παρακάτω.



28-Ισοτροπική κράτνση. Διεύρυνση της ακτίνας του κυλίνδρου της επιφάνειας διαρροής

2.3.2.3-Κινηματική κράτνση, το φαινόμενο Bauschinger

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πάλι ραβδωτό μεταλλικό δοκίμιο και υποβάλλουμε σε μονοαξονική εφελκυστική φόρτιση μέχρι την πλαστική περιοχή. Αν αρχίσουμε να το αποφορτίζουμε και συνεχίσουμε έπειτα να το φορτίζουμε θλιπτικά μέχρι το όριο διαρροής, παρατηρούμε ότι το όριο διαρροής είναι αισθητά μικρότερο του αρχικού.

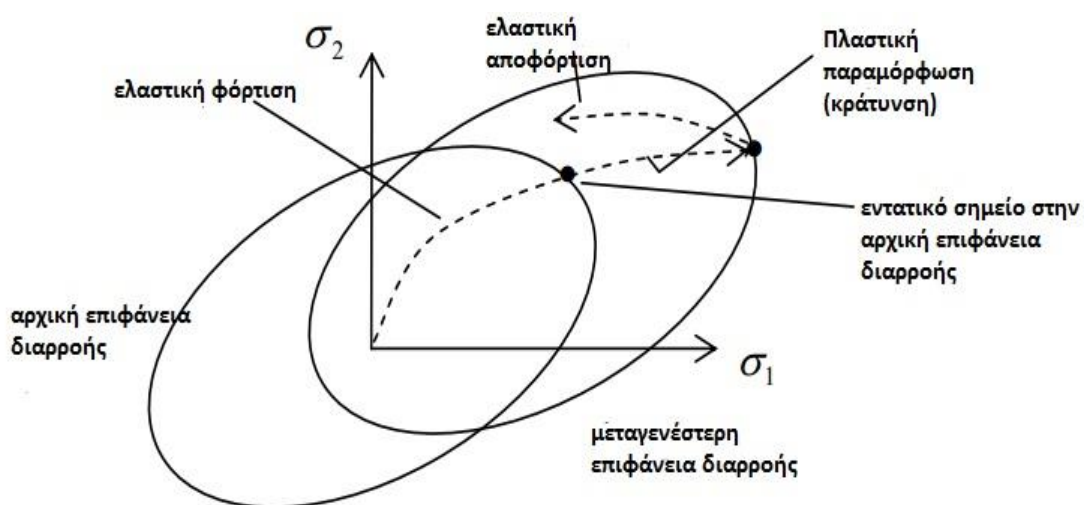


29-Εναλλαγή εφελκυσμού-θλίψης σε ραβδωτό δοκίμιο από χάλυβα-Φαινόμενο Bauschinger

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο Bauschinger. Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, η εφελκυστική φόρτιση ακολουθεί την διαδρομή O-A-B-C, με όριο διαρροής το B (σ_{Δ}). Αν αρχίσει η αποφόρτιση από το σημείο C, τότε ακολουθείται η καμπύλη C-D, παράλληλη της O-A, όπου στο σημείο D θα μηδενιζόταν η τάση. Συνεχίζοντας από το σημείο D και επιβάλλοντας τώρα θλιπτική τάση, η φόρτιση ακολουθεί την διαδρομή D-A'-B' και διαρρέει στο B', δηλαδή σε τάση μικρότερη της $-\sigma_{\Delta}$, στην οποία θα αστοχούσε αν φορτιζόταν εξ αρχής θλιπτικά. Η πτώση τάσης όμως από το σημείο αποφόρτισης C, το οποίο «κλειδώνεται» και ως νέο σημείο διαρροής σε εφελκυσμό, έως το σημείο διαρροής B' κατά την θλίψη είναι $2\sigma_{\Delta}$, όσο, δηλαδή, και η πτώση από το σ_{Δ} στο $-\sigma_{\Delta}$.

Το φαινόμενο Bauschinger ορίζει ένα εκ των δυο μοντέλων πλαστικότητας: αυτό της **κινηματικής κράτυνσης**. Στην κινηματική κράτυνση, το «πλάτος» ή εύρος της ελαστικής διαδρομής από εφελκυσμό σε θλίψη ή το αντίστροφο, διατηρείται σταθερό, σε αντίθεση με την ιστροπική κράτυνση, όπου μεγαλώνει, με την αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό να είναι ίσες.

Γενικεύοντας πάλι, στην περίπτωση της πολυαξονικής καταπόνησης, η επιφάνεια διαρροής διατηρεί το μέγεθός της, αλλά μετατοπίζεται ως προς τον χώρο των τάσεων.

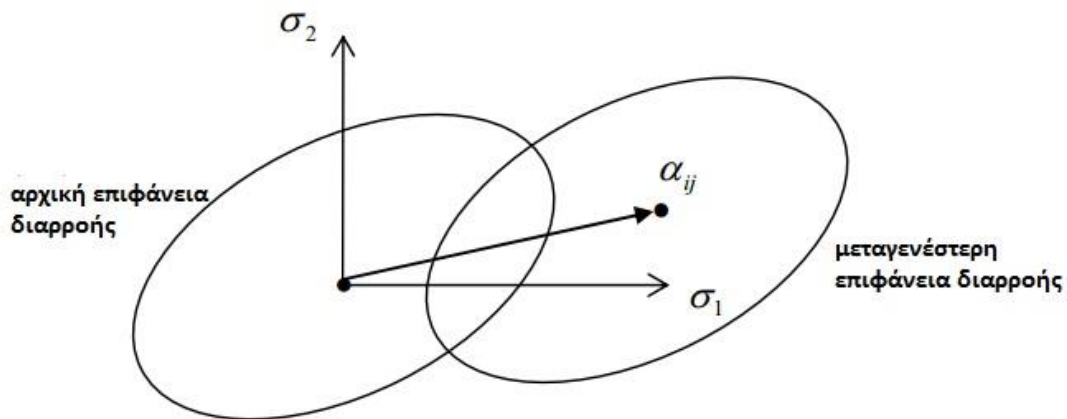


30-Κινηματική κράτυνση. Μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής

Η συνάρτηση διαρροής παίρνει τώρα την παρακάτω μορφή

$$f(\sigma_{ij}, a_{ij}) = f(\sigma_{ij} - a_{ij}) = 0$$

όπου a_{ij} οι λεγόμενες **back-stress** ή **τάσεις μετατόπισης** και αυτό διότι μετατοπίζουν την επιφάνεια διαρροής σε σχέση με τον χώρο των τάσεων κατά a_{ij} .



31- Μετατόπιση επιφάνειας διαρροής κατά a_{ij}

Με όρους αποκλίνουσων τάσεων και αποκλίνουσων τάσεων μετατόπισης, η συνάρτηση διαρροής μορφώνεται ως εξής

$$f(s_{ij}, a_{ij}^d) = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij}^d)(s_{ij} - a_{ij}^d)} - \sigma_y = 0 \quad (2.32)$$

Οι παράμετροι a_{ij} μοντελοποιούν την κινηματική κράτυνση, και το μητρώο $[\tilde{\alpha}]$ είναι τανυστής 2ας τάξης.

2.3.2.4-Μικτή κράτυνση

Πολλές φορές παρατηρείται τα φαινόμενα να λαμβάνουν τόπο ταυτόχρονα. Σε αυτές τις περιπτώσεις μιλάμε για μικτή κράτυνση και η μορφή της συνάρτησης διαρροής είναι η παρακάτω

$$f(s_{ij}, a_{ij}^d, K(\alpha)) = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij}^d)(s_{ij} - a_{ij}^d)} - (\sigma_y + K(\alpha)) = 0 \quad (2.33)$$

2.3.2.5- Εσωτερικές Παράμετροι

Οι παράμετροι ιστροπικής και κινηματικής κράτυνσης, α και $[\tilde{\alpha}]$ αντίστοιχα, καλούνται και **εσωτερικές παράμετροι** ή **εσωτερικές μεταβλητές**. Μαζί με την τάση, την θερμοκρασία –την επίδραση της οποίας έχουμε αγνοήσει μέχρι τώρα- και τις πλαστικές παραμορφώσεις ορίζουν την κατάσταση που επικρατεί σε μια «γειτονία» του εξεταζόμενου σημείου. Μπορεί να έχουν είτε φυσική υπόσταση, με την έννοια ότι ανταποκρίνονται σε μια κατάσταση της δομής του υλικού τοπικά, είτε φαινομενολογική υπόσταση, δηλαδή να είναι μαθηματικές κατασκευές σε κάθε περίπτωση βοηθούν την παραπέρα διερεύνηση. Υπεισέρχονται στους λεγόμενους **νόμους** ή **εξισώσεις εξέλιξης** (evolution equations) οι οποίοι θα οριστούν στην συνέχεια.

2.3.3-Παραδοχές της θεωρίας της Πλαστικότητας

Για την διατύπωση μιας θεωρίας που θα περιγράφει την συμπεριφορά των υλικών πέραν του ελαστικού κλάδου, γίνονται οι παρακάτω παραδοχές:

- Η απόκριση είναι ανεξάρτητη του ρυθμού επιβολής της φόρτισης
- Το υλικό παραμορφώνεται πλαστικά διατηρώντας τον όγκο του
- Το όριο διαρροής είναι ανεξάρτητο της υδροστατικής πίεσης

Οι δύο πρώτες παραδοχές, μαζί με αυτή της ιστροπίας είναι συνήθως ικανοποιητικές, ιδίως όταν δεν αντιμετωπίζουμε μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις. Η αγνόηση της κινηματικής κράτυνσης γίνεται για λόγους απλοποίησης, ενώ η αγνόηση της επιρροής της υδροστατικής πίεσης ανταποκρίνεται στα πειραματικά αποτελέσματα που αφορούν μέταλλα.

Τα παραπάνω συγκροτούν λίγο-πολύ αυτό που ονομάζεται «Κλασική χρονικά ανεξάρτητη πλαστικότητα», δηλαδή την πλαστική συμπεριφορά στερεών η οποία χαρακτηρίζεται από μια μη-μοναδική σχέση μεταξύ τάσεων-παραμορφώσεων, και την ανεξαρτησία της από τον ρυθμό επιβολής της φόρτισης, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα. Αξίζει να τονισθεί επίσης ότι, σε αντίθεση με την ελαστική συμπεριφορά, η

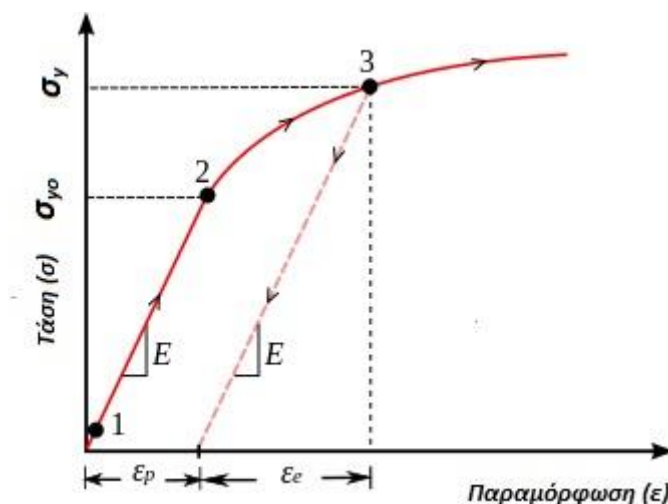
φορτική αλληλουχία παίζει ρόλο στην απόκριση, καθώς διαφορετική διαδρομή αποφόρτισης ακολουθείται αν διαφορετικά φορτία προκάλεσαν διαρροή. Επομένως, η ιστορία της φόρτισης είναι μια βασική παράμετρος καθορισμού της απόκρισης σε μια δεδομένη στιγμή.

2.3.4-Διαμέριση της συνολικής παραμόρφωσης

Προκειμένου να συνεχίσουμε στην ανάλυσή μας, είναι αναγκαίο να αναλύσουμε τον τανυστή συνολικής παραμόρφωσης $[\tilde{\epsilon}]$ σε δύο επιμέρους τανυστές:

- Στον τανυστή ελαστικής παραμόρφωσης $[\tilde{\epsilon}_e]$
- Στον τανυστή πλαστικής παραμόρφωσης $[\tilde{\epsilon}_p]$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{el} + \epsilon_{ij}^{pl} \quad (2.34)$$



32- Διάκριση της συνολικής παραμόρφωσης σε καμπύλη σ-ε

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται πως προκύπτει η διάκριση αυτή. Πρέπει ωστόσο να τονισθεί ότι η πλαστική παραμόρφωση για μια δεδομένη τιμή της τάσης είναι συχνά ελαφρώς διαφορετική από την απομένουσα παραμόρφωση που προκύπτει αν αποφορτίσουμε από την παραπάνω τάση. Αυτό οφείλεται στο ότι ο κλάδος αποφόρτισης αποκλίνει από τον ελαστικό. Στα πλαίσια της εργασίας ωστόσο θα θεωρήσουμε ότι ταυτίζεται.

Στην περίπτωση μονοαξονικής καταπόνησης, η (2.34) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \varepsilon_{pl} \quad (2.35)$$

Η συνολική παραμόρφωση είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ η πλαστική παραμόρφωση μένει να καθοριστεί.

Ο τανυστής των τάσεων σχετίζεται με τον τανυστή των ελαστικών παραμορφώσεων μέσω της σχέσης

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}[\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{pl}] \quad (2.36)$$

όπου $[\tilde{C}]$ το ελαστικοπλαστικό καταστατικό μητρώο, το οποίο είναι τανυστής 4^{ης} τάξης.

Μένει να διερευνηθεί η σχέση που περιγράφει την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων, καθώς και ο καθορισμός των εσωτερικών παραμέτρων.

2.3.5-Νόμος πλαστικής ροής

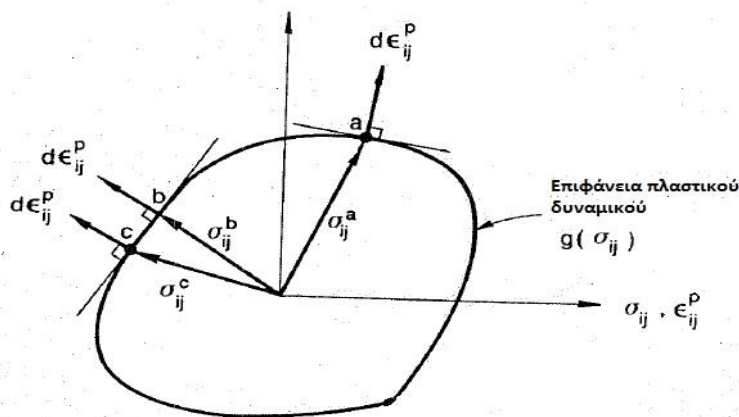
Ο νόμος πλαστικής ροής είναι αναγκαία κινηματική παραδοχή που απαιτείται για την περιγραφή της πλαστικής παραμόρφωσης ή πλαστικής ροής. Σκοπός είναι να ευρεθεί μια διατύπωση για την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων. Αν λάβουμε υπόψη ότι ο τανυστής $[\tilde{\varepsilon}_{pl}]$ μπορεί να εκφραστεί γεωμετρικά ως διάνυσμα με 9 συνιστώσες, τότε ο νόμος πλαστικής ροής μας δίνει εκφράσεις τόσο για τον προσανατολισμό, όσο και για τις 9 συνιστώσες $\{\overline{d\varepsilon^p}\}$. Οι εξισώσεις εξέλιξης των πλαστικών παραμορφώσεων κάνουν χρήση «προσαυξητικών» πλαστικών παραμορφώσεων καθώς εκ των πραγμάτων μελετάμε την εξέλιξή του.

Ακολουθώντας το σκεπτικό παραγωγής της ελαστικής παραμόρφωσης μέσω της παραγωγίσιμης της συνάρτησης ελαστικού δυναμικού (ελαστικής συμπληρωματικής ενέργειας) ως προς την τάση, θεωρούμε την βαθμωτή συνάρτηση πλαστικού δυναμικού, έστω G , ώστε να ισχύει:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\gamma \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.37)$$

Όπου dg βαθμωτή παράμετρος που λέγεται **συντελεστής αναλογίας** ή **παράμετρος συμβατότητας** και θα εξετασθεί περεταίρω παρακάτω.

Σύμφωνα με την σχέση (2.37) το διάνυσμα των προσαυξητικών πλαστικών παραμορφώσεων είναι κάθετο στην επιφάνεια G του πλαστικού δυναμικού.



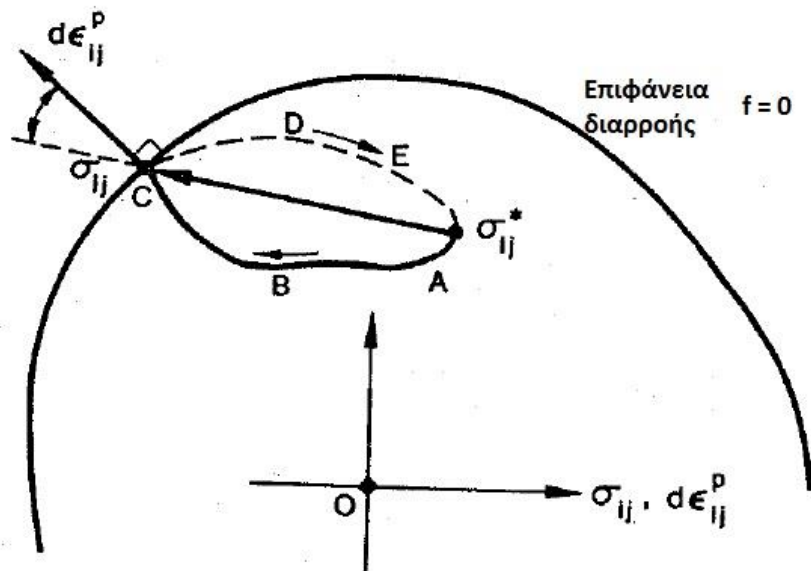
33-Επιφάνεια πλαστικού δυναμικού

2.3.5.1-Συσχετισμένη πλαστικότητα, κυρτότητα, αρχή καθετότητας

Έχει παρατηρηθεί ότι στα μέταλλα ότι η συνάρτηση G ταυτίζεται με την συνάρτηση f της επιφάνειας διαρροής καθώς και ότι όντως οι πλαστικές παραμορφώσεις εκδηλώνονται κάθετα στην επιφάνεια G , όπως επιτάσσει η λεγόμενη **αρχή της μέγιστης διάχυσης της πλαστικής ενέργειας**. Σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για **συσχετισμένη πλαστικότητα**, ενώ όταν $G \neq f$ για μη-συσχετισμένη πλαστικότητα.

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι η πλαστική παραμόρφωση είναι μη-αντιστρεπτή διαδικασία. Λόγω αυτού του χαρακτήρα της, το έργο που δαπανήθηκε προκαλώντας πλαστική ροή δεν μπορεί να ανακτηθεί και επομένως το έργο των τάσεων που προκαλούν μεταβολή στις πλαστικές παραμορφώσεις είναι **πάντα** θετικό. Αν υποθέσουμε ότι σε ένα στοιχειώδες τμήμα του στερεού επικρατεί τάση σ_{ij}^* , εντός ή επί της επιφάνειας διαρροής, και μια εξωτερική δράση επιβάλλει προσαύξηση στην τάση κατά $\Delta\sigma_{ij}$, οδηγώντας σε ένα νέο εντατικό σημείο σ_{ij} επί της επιφάνειας διαρροής μέσω της διαδρομής A-B-C (βλ. Σχήμα 34). Μέχρι και το σημείο C, μόνο ελαστικό έργο έχει δαπανηθεί. Αν εμμένει η εξωτερική δράση στο C, τότε, αναγκαία, θα αρχίσει να εκδηλώνεται

πλαστική παραμόρφωση και μόνο πλαστικό έργο δαπανάται κατά την διάρκεια αυτή.



34-Διδιάστατη απεικόνιση της διαδρομής κατά την επιβολή Δσ

Κατά την αφαίρεση της εξωτερικής δράσης και την ελαστική αποφόρτιση από σ_{ij} σε σ_{ij}^* μέσω της διαδρομής C-D-E-A, η ελαστική ενέργεια που δαπανήθηκε αρχικά ανακτάται εξολοκλήρου. Έτσι, το πλαστικό έργο που δαπανήθηκε είναι

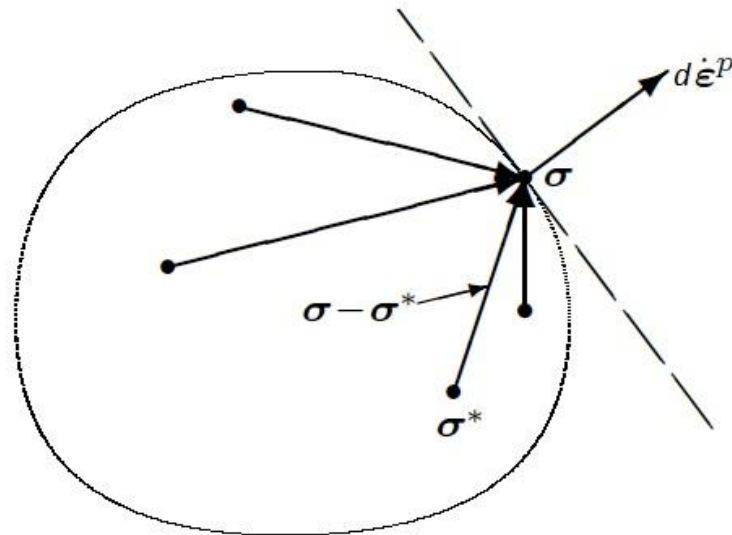
$$dW^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (2.38)$$

Οι συνέπειες της παραπάνω ανισότητας γίνονται πιο ξεκάθαρες αν εκφράσουμε την σχέση (2.38) ως εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

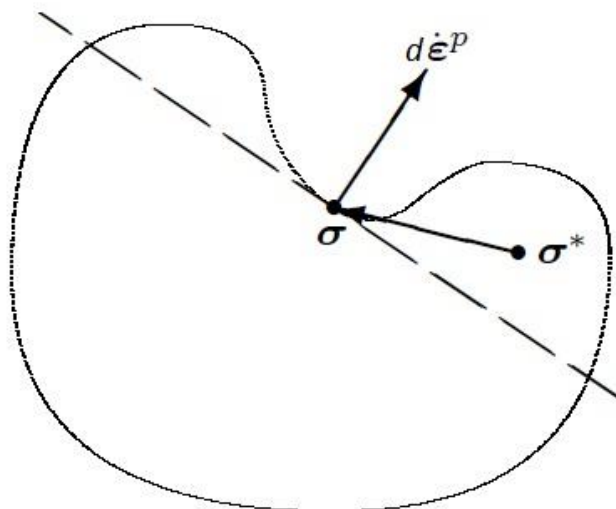
$$(\{\bar{\sigma}\} - \{\bar{\sigma}^*\}) \{\bar{d\epsilon}^p\} \geq \{0\} \quad (2.39)$$

Για να ισχύει η (2.39), πρέπει η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\{\bar{d\sigma}\}$ και $\{\bar{d\epsilon}^p\}$ να είναι οξεία ή οριακά ίση με $\pm 90^\circ$. Από την στιγμή που η (2.39) πρέπει να ισχύει για κάθε αυθαίρετη σ_{ij}^* , τότε προκύπτουν οι παρακάτω συνέπειες:

- Η επιφάνεια διαρροής οφείλει να είναι κυρτή
- Το διάνυσμα της προσαυξητικής πλαστικής παραμόρφωσης οφείλει να είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής και με φορά προς τα έξω.



35-Διδιάστατη απεικόνιση του προσανατολισμού των προσαυξητικών πλαστικών παραμορφώσεων



36-Περίπτωση μη-κυρτής επιφάνειας διαρροής

Για την πρώτη συνέπεια, αν δεν ήταν κυρτή η επιφάνεια διαρροής, τότε θα υπήρχαν τάσεις σ_{ij}^* για τις οποίες το διάνυσμα $\{\overline{d\sigma}\}$ θα σχημάτιζε γωνία μεγαλύτερη των 90° και έτσι θα παραβιαζόταν η (2.39), καθώς θα έδινε αρνητικό πλαστικό έργο.

Όταν η επιφάνεια διαρροής είναι κυρτή, η αυθαίρετη τάση σ_{ij}^* βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά του επαπτόμενου (υπερ)επιπέδου σε κάθε σημείο σ_{ij} και εντός του ελαστικού domain, με μόνη εξαίρεση αν ταυτίζεται με την σ_{ij} , ενώ η προσαυξητική πλαστική παραμόρφωση βρίσκεται εξωτερικά του επιπέδου (Σχήμα 35).

Η δεύτερη συνέπεια είναι και γνωστή ως **αρχή της καθετότητας** και προκύπτει από την αναγκαιότητα η γωνία μεταξύ του $\{\overline{d\sigma}\}$ και $\{\overline{d\varepsilon^p}\}$ να είναι μεταξύ του εύρους $\pm 90^\circ$. Σύμφωνα με την αρχή της καθετότητας, ο διάνυσμα των προσαυξητικών πλαστικών παραμορφώσεων είναι ανάλογο προς το ένα διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια διαρροής στο σημείο σ_{ij} , κατ'αντιστοιχία προς την σχέση (2.37).

Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}$ και η σχέση είναι της μορφής:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\gamma \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \{\sigma_{ij}\}} \quad (2.40)$$

Σύμφωνα με την σχέση (2.40), η οποία έχει την μορφή της (2.37), η συνάρτηση διαρροής f είναι ταυτόχρονα και συνάρτηση πλαστικού δυναμικού. Στις περιπτώσεις όπου ο νόμος πλαστικής ροής μπορεί να εξαχθεί με τέτοιο τρόπο, δηλαδή, μέσω της συνθήκης καθετότητας, μιλάμε για νόμο πλαστικής ροής **συσχετισμένο** με το κριτήριο διαρροής ή απλά για συσχετισμένη πλαστικότητα.

2.3.6-Εξελικτικοί νόμοι κράτυνσης

Για την διατύπωση του πλαστικού καταστατικού μοντέλου απαιτούνται, όπως έχει ήδη αναφερθεί

1. Ένα κριτήριο διαρροής
2. Ένας νόμος πλαστικής ροής (flow rule)
3. Ένας νόμος κράτυνσης, ο οποίος θα περιγράφει την εξέλιξη της επιφάνειας διαρροής (hardening law)

Σε αυτή την παράγραφο θα καθοριστούν οι συναρτήσεις των παραμέτρων κράτυνσης που αναφέρθηκαν παραπάνω.

2.3.6.1-Ισοδύναμη τάση, ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση

Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την ανελαστική συμπεριφορά στην γενικότερη περίπτωση ενός κρατυνόμενου υλικού, ορίζουμε δύο βοηθητικά βαθμωτά μεγέθη: την ισοδύναμη τάση, η οποία ορίστηκε στην παράγραφο 2.2 ως τάση von Mises σ_{VM} , και την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ϵ_{eff}^p , οι οποίες είναι συναρτήσεις των τάσεων και των πλαστικών παραμορφώσεων αντίστοιχα. Αυτό γίνεται για να συσχετίσουμε την πολυαξονική εντατική κατάσταση με την μονοαξονική όπως έγινε και στην διατύπωση του κριτηρίου διαρροής.

Η ισοδύναμη τάση ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις, ανάλογα με το αν εκφραζόμαστε σε κύριους άξονες ή όχι, με όρους αποκλίνουσών τάσεων ή όχι:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{13}^2}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}{2}}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{zy}^2)}{2}}$$

Καθορισμός ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης ε_{eff}^p

Για τον καθορισμό της ε_{eff}^p εκκινούμε από την παρατήρηση ότι τόσο ο τανυστής των αποκλινουσών τάσεων $[\tilde{\mathcal{S}}]$, όσο και ο τανυστής των πλαστικών παραμορφώσεων, $[\tilde{\mathcal{E}}_p]$ έχουν μηδενικό ίχνος:

$$\sum_{i=1}^3 s_{ii} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{p,ii} = 0$$

ή

$$\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}) = \text{Tr}(\tilde{\mathcal{E}}_p) = 0$$

Αυτό ισχύει γιατί αφενός διότι οι αποκλίνουσες τάσεις εκφράζουν τάσεις που αλλάζουν το σχήμα και όχι τον όγκο του στερεού και αφετέρου διότι, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κατά την πλαστική παραμόρφωση δεν παρατηρείται αλλαγή όγκου. Επειδή λοιπόν η σχέση του $[\tilde{\mathcal{E}}_p]$ ως προς τον $[\tilde{\mathcal{E}}]$ είναι αντίστοιχη της σχέσης του $[\tilde{\mathcal{S}}]$ ως προς τον $[\tilde{\sigma}]$, καταλήγουμε στο ότι η έκφραση που θα δίνει την προσαύξηση της ε_{eff}^p θα έχει την ίδια μορφή με την (2.23):

$$d\varepsilon_{eff}^p = C \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad (2.41)$$

Όπου C θετική σταθερά. Ο προσδιορισμός της σταθεράς C γίνεται αν εκφράσουμε την (2.41) ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων και απαιτώντας να ικανοποιείται και για την περίπτωση της μονοαξονικής έντασης.

$$d\varepsilon_1^p = d\varepsilon_{eff}^p = C \sqrt{d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p}$$

και $d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = -\nu d\varepsilon_1^p$. Ο συντελεστής Poisson για ασυμπίεστες συνθήκες, κατά τις οποίες λαμβάνει τόπο και η πλαστική ροή, είναι $\nu = \frac{1}{2}$.

Επομένως, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο ότι

$$C = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Επομένως

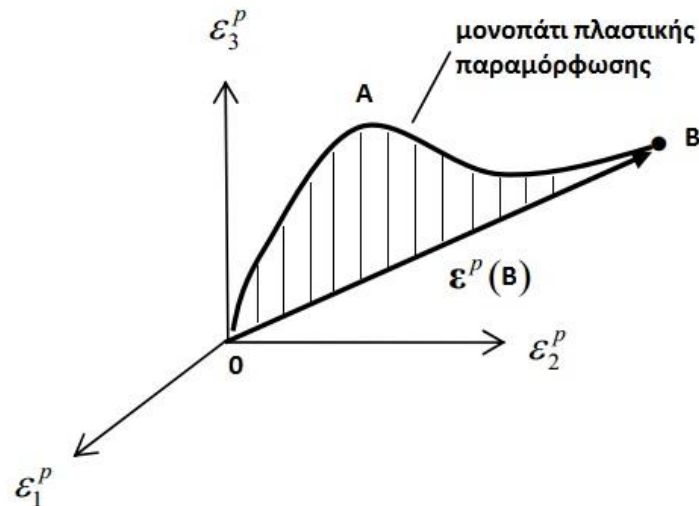
$$d\varepsilon_{eff}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.42)$$

Από την σχέση (2.42) προκύπτει ότι η ε_{eff}^p είναι πάντα θετική και αυξάνεται συνεχώς. Αξίζει να τονισθεί ωστόσο ότι η παραπάνω μορφή προκύπτει λόγω της σχέσης $f=f(J_2)$. Σε περίπτωση άλλων τύπων υλικών, η μορφή της ε_{eff}^p θα ήταν διαφορετική.

Η ε_{eff}^p αντιπροσωπεύει την **ιστορία** των πλαστικών παραμορφώσεων. Αν για παράδειγμα λόγω φορτίσεων καταλήξαμε στο σημείο B μέσω της διαδρομής O-A-B, τότε η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στο B είναι

$$\varepsilon_{eff,B}^p = \int_0^B \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_i^p d\varepsilon_i^p \quad (2.43)$$

Αξίζει να τονισθεί ότι στο σημείο B η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση δεν είναι απλά $\sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{i,B}^p \varepsilon_{i,B}^p$, καθώς η έννοιά της είναι «σωρευτική», δηλαδή υπολογίζουμε το σύνολο των πλαστικών παραμορφώσεων έως το σημείο B, και γι'αυτο χρησιμοποιούνται στον ορισμό οι προσαυξήσεις $d\varepsilon_{ij}^p$. Η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση λέγεται εναλλακτικά και συσσωρευμένη πλαστική παραμόρφωση.



37- Μονοπάτι πλαστικών παραμορφώσεων.

2.3.6.2-Προσδιορισμός εσωτερικών παραμέτρων

Ο προσδιορισμός της εξάρτησης της επιφάνειας διαρροής από τις εσωτερικές παραμέτρους γίνεται μέσω της διατύπωσης του **νόμου κράτυνσης**. Πρόκειται δηλαδή για έναν εξελικτικό νόμο ο οποίος θα καθορίζει τις συνθήκες διαρροής μετά την πρώτη διαρροή του υλικού και η μορφή του είναι η παρακάτω:

$$f([\tilde{\mathbf{s}}], [\tilde{\mathbf{a}}^d], K(\alpha)) = J_2([\tilde{\mathbf{s}}], [\tilde{\mathbf{a}}^d]) - \frac{1}{3} \sigma_y^2(K(\alpha)) = 0 \quad (2.44)$$

Η παραπάνω σχέση αφορά στην γενικότερη περίπτωση της μικτής κράτυνσης, όπου η συνάρτηση J_2 είναι συνάρτηση των τανυστών αποκλίνουσας τάσης και αποκλίνουσας back-stress, $[\tilde{\mathbf{s}}]$ και $[\tilde{\mathbf{a}}^d]$ αντίστοιχα, και ευθύνεται για την μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής στον χώρο των τάσεων (κινηματική κράτυνση), ενώ ο όρος $\frac{1}{3} \sigma_y^2(K(\alpha))$ είναι εκφράζει την αλλαγή μεγέθους της επιφάνειας διαρροής (ισοτροπική κράτυνση). Στην πολυαξονική ένταση η επιφάνεια διαρροής δεν είναι πλέον ένα σταθερό σύνορο με τιμή σ_y , αλλά μια συνάρτηση των εσωτερικών παραμέτρων α και $[\tilde{\mathbf{a}}^d]$. Η παράμετρος α μοντελοποιεί την ισοτροπική κράτυνση και ταυτίζεται με την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ϵ_{eff}^p .

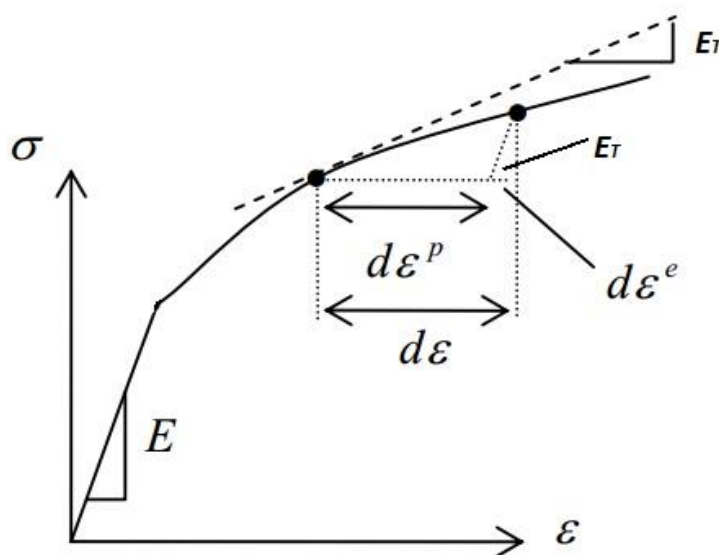
Αναπτύσσοντας την (2.44) έχουμε:

$$f([\tilde{\mathbf{s}}], [\tilde{\mathbf{a}}^d], K(\alpha)) = \frac{1}{2} (s_i - a_i^d)(s_i - a_i^d) - \frac{1}{3} (\sigma_y^0 + K(\varepsilon_{eff}^p))^2 \quad (2.45)$$

Η συνάρτηση $K(\varepsilon_{eff}^p)$ είναι της μορφής:

$$K(\varepsilon_{eff}^p) = H_{iso} \varepsilon_{eff}^p \quad (2.46)$$

Όπου η σταθερά H_{iso} ονομάζεται πλαστική παράμετρος ή παράμετρος ισοτροπικής κράτυνσης και σ_y^0 είναι το αρχικό σύνορο της επιφάνειας διαρροής. Η παράμετρος αυτή καθορίζεται από την παραδοχή ότι η καμπύλη ισοδύναμης τάσης-ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης είναι ίδια με την καμπύλη τάσης-πλαστικής παραμόρφωσης στην περίπτωση μονοαξονικής έντασης. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται **καμπύλη ροής**.



38-Καμπύλη σ-ε και διαμέριση της προσαυξητικής παραμόρφωσης

Πριν την διαρροή ισχύει

$$\sigma = \sigma_{el} = E\varepsilon \quad (2.47)$$

ενώ σε κάθε σημείο της καμπύλης η σχέση μεταξύ της προσαύξεσης των τάσεων και της προσαύξεσης των παραμορφώσεων είναι

$$d\sigma = E_T d\varepsilon \quad (2.48)$$

όπου E_T η εφαπτομενική κλίση σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Μετά την διαρροή, η προσαύξηση της παραμόρφωσης αποτελείται από δύο μέρη, την προσαύξηση ελαστικής παραμόρφωσης και την αντίστοιχη πλαστική

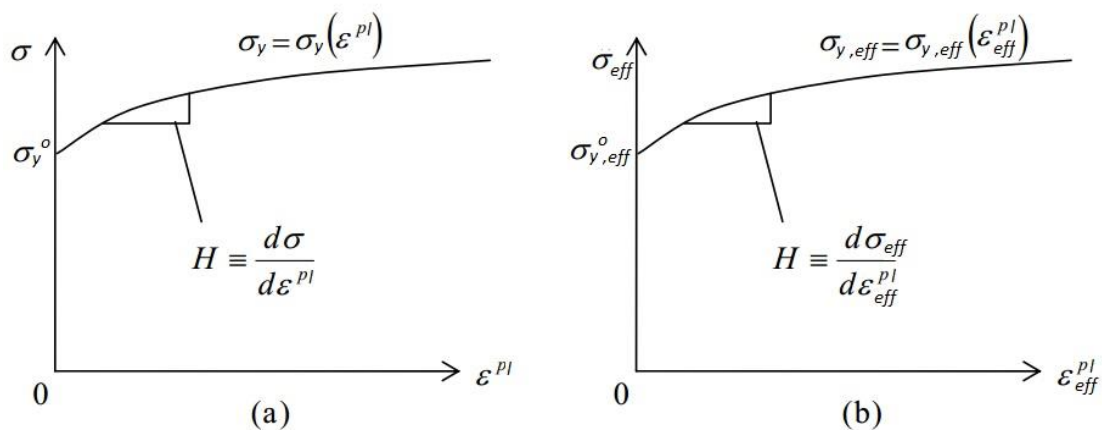
$$d\varepsilon = d\varepsilon_{el} + d\varepsilon_{pl} \quad (2.49)$$

όπου είναι προφανές ότι

$$d\sigma = E d\varepsilon_{el} \quad (2.50)$$

Ενώ η προσαύξηση της τάσης σχετίζεται με την προσαύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης μέσω της πλαστικής παραμέτρου H

$$d\sigma = H_{iso} d\varepsilon_{pl} \quad (2.51)$$



39- Καμπύλες ροής α) μονοαξονική ένταση, καμπύλη σ-ε β) αναγωγή πολυαξονικής έντασης σε μονοαξονική, καμπύλη ισοδύναμης τάσης-ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης

Η πλαστική παράμετρος είναι στην ουσία η κλίση της καμπύλης ροής.

$$d\sigma = E_T \{d\varepsilon_{el} + d\varepsilon_{pl}\} \quad (2.52)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.52) τις (2.50), (2.51), καταλήγουμε σε μια κλειστή έκφραση για την πλαστική παράμετρο H

$$H_{iso} = E \frac{d\sigma/d\varepsilon}{E - d\sigma/d\varepsilon} \quad (2.53)$$

Όσων αφορά για τον καθορισμό των back stress α_{ij} , θεωρείται η απλούστερη δυνατή μορφή εξέλιξης, αυτή της γραμμικής εξάρτησης των α_{ij} με τις $d\varepsilon_{ij}^{pl}$.

Η παρακάτω παραδοχή είναι γνωστή ως **Ziegler's hardening rule**:

$$a_{ij} = H_{kin} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (2.54)$$

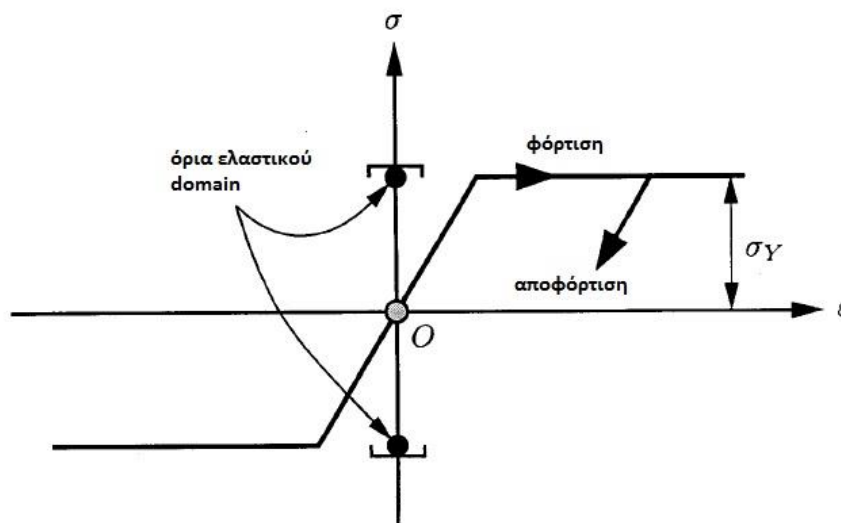
Η παράμετρος H_{kin} αποτελεί χαρακτηριστική σταθερά του υλικού και αποκαλείται παράμετρος κινηματικής κράτυνσης. Στην περίπτωση αυτή, όπου έχουμε συσχετισμένη πλαστικότητα, η μετατόπιση της επιφάνειας διαρροής γίνεται κατά διεύθυνση παράλληλη στο διάνυσμα $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, δηλαδή το διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής.

2.3.6.3-Συνθήκες φόρτισης και αποφόρτισης

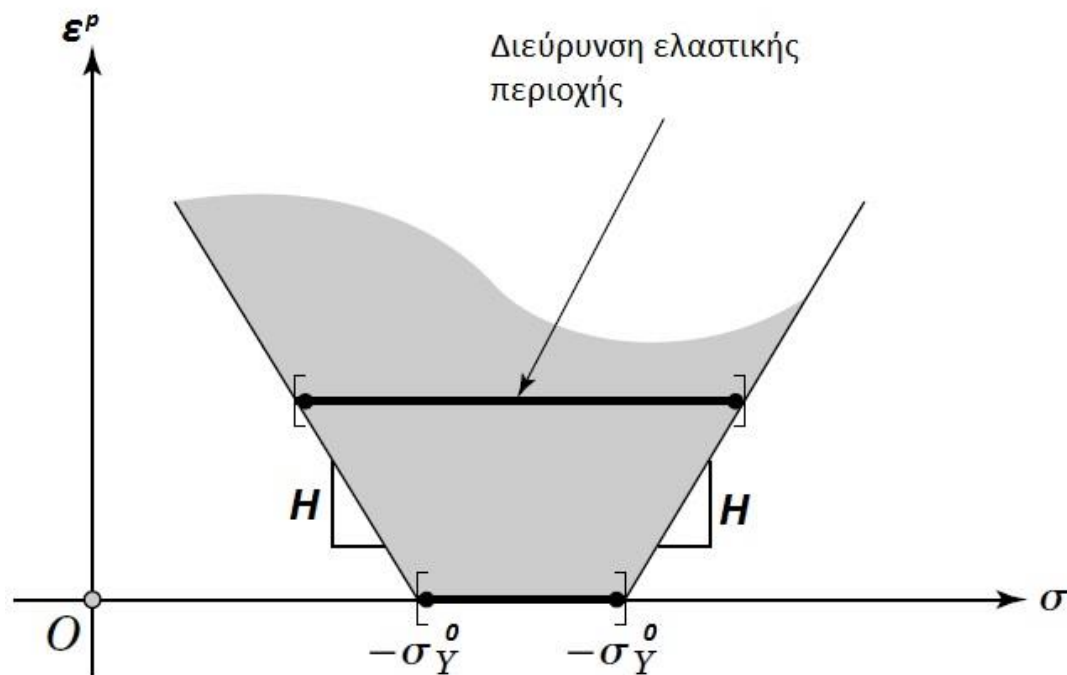
Στα πλαίσιο της ανελαστικής ανάλυσης πρέπει να διατυπωθούν οι σχέσεις εκείνες οι οποίες ορίζουν αν κατά την μετάβαση από το εντατικό σημείο σ_{ij} στο $\sigma_{ij}+d\sigma$ προκύπτει πλαστική ροή ή ελαστική αποφόρτιση. Η σημασία τους έγκειται στο γεγονός ότι πρέπει να γνωρίζουμε αν μια προσαύξηση της φόρτισης προκαλεί πλαστική ροή, καθώς είναι η πλαστική ροή που οδηγεί σε αλλαγή της επιφάνειας διαρροής, την οποία μοντελοποιούν οι νόμοι κράτυνσης. Οι σχέσεις αυτές καλούνται **συνθήκες φόρτισης/αποφόρτισης**.

Στην απλούστερη περίπτωση της μονοαξονικής καταπόνησης, η «επιφάνεια διαρροής» εκφυλίζεται σε δύο σημεία. Στην περίπτωση του ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού, το «εύρος» του ελαστικού τόπου παραμένει σταθερό και ίσο με $2\sigma_Y$ ενώ στην περίπτωση

40- Εύρος ελαστικής περιοχής σε μονοαξονική καταπόνηση ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού.



περίπτωση γραμμικής ιστροπικής κράτυνσης, το «εύρος» διευρύνεται με κλίση H_{iso} .



41-Διεύρυνση ελαστικής περιοχής σε μονοαξονική καταπόνηση.

Στην περίπτωση πολυαξονικής έντασης, όπου συμμετέχουν 9 συνιστώσες τάσεων, η συνθήκη διαρροής καθορίζεται από την σχέση

$$f([\tilde{s}], [\tilde{a}^d], \alpha) = 0 \quad (2.55)$$

η οποία εκφράζει ουσιαστικά έναν υπερ-όγκο, ενώ η ελαστική περιοχή ορίζεται ως ο τόπος των τάσεων για τις οποίες ισχύει

$$f([\tilde{s}], [\tilde{a}^d], \alpha) < 0 \quad (2.56)$$

Τάσεις για τις οποίες προκύπτει $f([\tilde{s}], [\tilde{a}^d], \alpha) > 0$ θεωρούνται μη-παραδεκτές.

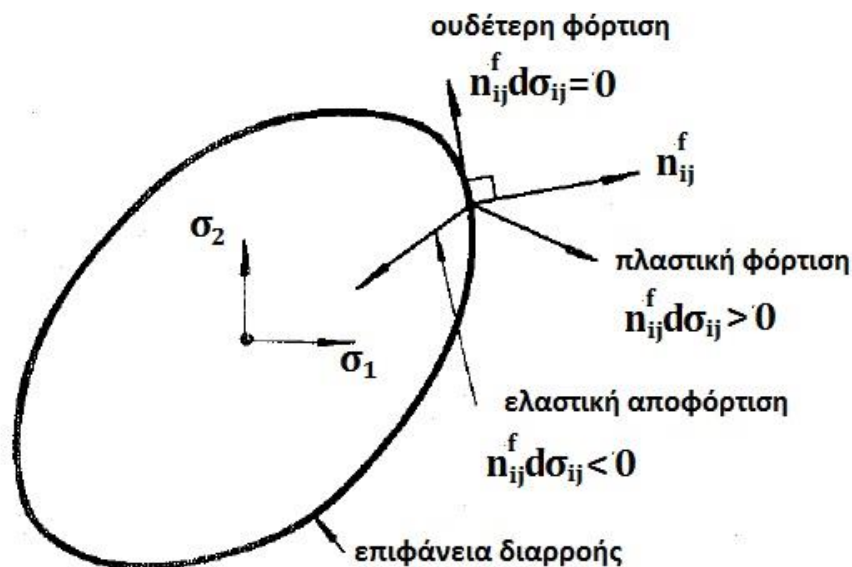
Θεωρούμε ότι επέρχεται πλαστική ροή όταν το τρέχον εντατικό σημείο σ_{ij} βρίσκεται οριακά επί της επιφάνειας διαρροής, δηλαδή $f=0$, και το διάνυσμα της προσαύξησης της τάσης $d\sigma_{ij}$ προσανατολίζεται **εκτός** της τρέχουσας επιφάνειας διαρροής. Αν n_{ij}^f το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας διαρροής, όπου

$$n_{ij}^f = \frac{\partial f / \partial \sigma_{ij}}{\sqrt{\partial f / \partial \sigma_{kl} \partial f / \partial \sigma_{kl}}} \quad (2.57)$$

τότε, υπό την προϋπόθεση ότι για το τρέχον εντατικό σημείο ισχύει $f=0$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

- Αν $n_{ij}^f d\sigma_{ij} > 0$ τότε $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$, έχουμε **πλαστική φόρτιση** και επέρχεται πρόσθετη πλαστική παραμόρφωση. Αυτό συμβαίνει όταν για την γωνία μεταξύ του $d\sigma_{ij}$ και του n_{ij}^f ισχύει $-90^\circ < \theta_{n,d\sigma} < 90^\circ$.
- Αν $n_{ij}^f d\sigma_{ij} < 0$ τότε $\varepsilon_{ij}^p = 0$, έχουμε **ελαστική αποφόρτιση** και δεν έχουμε αύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων. Αυτό συμβαίνει όταν για την γωνία μεταξύ του $d\sigma_{ij}$ και του n_{ij}^f ισχύει $\theta_{n,d\sigma} < -90^\circ$ ή $\theta_{n,d\sigma} > 90^\circ$.
- Αν $n_{ij}^f d\sigma_{ij} = 0$ τότε $\varepsilon_{ij}^p = 0$, έχουμε **ουδέτερη φόρτιση** και δεν έχουμε αύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων. Αυτό συμβαίνει όταν το διάνυσμα $d\sigma_{ij}$ είναι κάθετο στο n_{ij}^f , και έτσι το εντατικό σημείο κινείται επί της επιφάνειας διαρροής.

42-Διδιάστατη απεικόνιση φορτικών ενδεχομένων.



Από τα παραπάνω προκύπτουν οι ακόλουθες περιοριστικές συνθήκες:

$$\gamma \geq 0, \quad f([\tilde{s}], [\tilde{a}^d], \alpha) \leq 0, \quad \gamma * f([\tilde{s}], [\tilde{a}^d], \alpha) = 0 \quad (2.58)$$

Οι σχέσεις (2.58) αποκαλούνται συμπληρωματικές συνθήκες Kuhn-Tucker ή συνθήκες φόρτισης/αποφόρτισης. Μέσω αυτών καθορίζουμε αν έχουμε ελαστική φόρτιση, πλαστική φόρτιση, ελαστική αποφόρτιση ή ουδέτερη φόρτιση.

- Αν ισχύει $\varepsilon_{ij}^p=0$, δηλαδή αν έχω ελαστική ή ουδέτερη φόρτιση, είτε αποφόρτιση, τότε, μέσω της σχέσης (2.40) προκύπτει ότι $\gamma = 0$, ενώ $f < 0$ ή $f = 0$.
- Αν $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$, δηλαδή αν έχω πλαστική φόρτιση, τότε $\gamma > 0$ και $f = 0$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\gamma f = 0$ ενώ $\gamma > 0$ αν και μόνο αν $f = 0$. Η τελευταία των σχέσεων (2.58) εκφράζει την φυσική απαίτηση ότι επιπρόσθετη πλαστική παραμόρφωση μπορεί να εκδηλωθεί μόνο εφόσον η τάση βρίσκεται στην επιφάνεια διαρροής.

2.3.6.4-Συνθήκη συμβατότητας

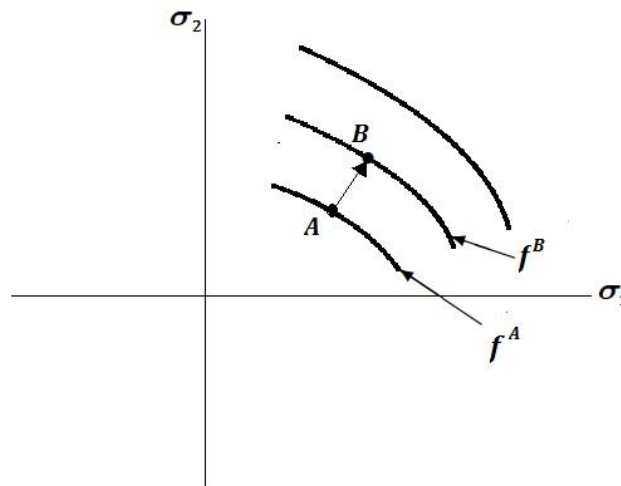
Στην περίπτωση όπου $f = 0$, η συνθήκη $\gamma f = 0$ ικανοποιείται όποια και αν είναι η τιμή του γ , χωρίς να μας δίνει πληροφορίες αν έχουμε πλαστική φόρτιση ($\gamma > 0$), ελαστική αποφόρτιση ή ουδέτερη φόρτιση ($\gamma = 0$). Ακόμα, δεν έχουμε διατυπώσει μια κλειστή σχέση για τον ίδιο τον συντελεστή αναλογίας γ . Τα παραπάνω προβλήματα αίρονται παρατηρώντας ότι για κάθε χρονική στιγμή κατά την οποία έχω διαρροή, θα πρέπει να ισχύει $f = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι το τρέχον εντατικό σημείο A βρίσκεται επί της επιφάνειας διαρροής f^A , και μετά από μια προσαύξηση τάσης, όπου προκαλείται περεταίρω αύξηση στις πλαστικές παραμορφώσεις, οδηγούμαστε στο εντατικό σημείο B και στην νέα επιφάνεια διαρροής f^B , όπου $\sigma_{ij}^B = \sigma_{ij}^A + d\sigma$, $\alpha_{ij}^B = \alpha_{ij}^A + d\alpha$, $\alpha^B = \alpha^A + d\alpha$ και $f^A = f^B = 0$.

Είναι

$$f^B(\sigma_{ij}^A + d\sigma, \alpha_{ij}^A + d\alpha, \alpha^A + d\alpha) = f^A(\sigma_{ij}^A, \alpha_{ij}^A, \alpha^A) + df = 0 \Rightarrow$$

$$df = 0 \quad (2.59)$$



43- Διδιάστατη απεικόνιση μετάβασης από την επιφάνεια διαρροής A στην B

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την σχέση (2.59) παίρνουμε

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (2.60)$$

Η σχέση (2.60) ισχύει όσο εμμένει η πλαστική φόρτιση, δηλαδή, όσο αυξάνονται οι πλαστικές παραμορφώσεις, καθώς κάθε χρονική στιγμή είναι στιγμή όπου ικανοποιείται στιγμιαία η σχέση $f = 0$. Αντίθετα, αν υποθέσουμε ότι από το σημείο B του παραπάνω σχήματος αρχίσει η αποφόρτιση, τότε οι τάσεις θα μεταπίπτουν σε σημεία της (διευρυμένης) ελαστικής περιοχής και θα ισχύει κάθε χρονική στιγμή, όσο εμμένει η αποφόρτιση, $f < 0$ ενώ στο B ίσχυε $f^B = 0$. Έτσι, προκύπτει με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι κατά την αποφόρτιση κάθε χρονική στιγμή ισχύει

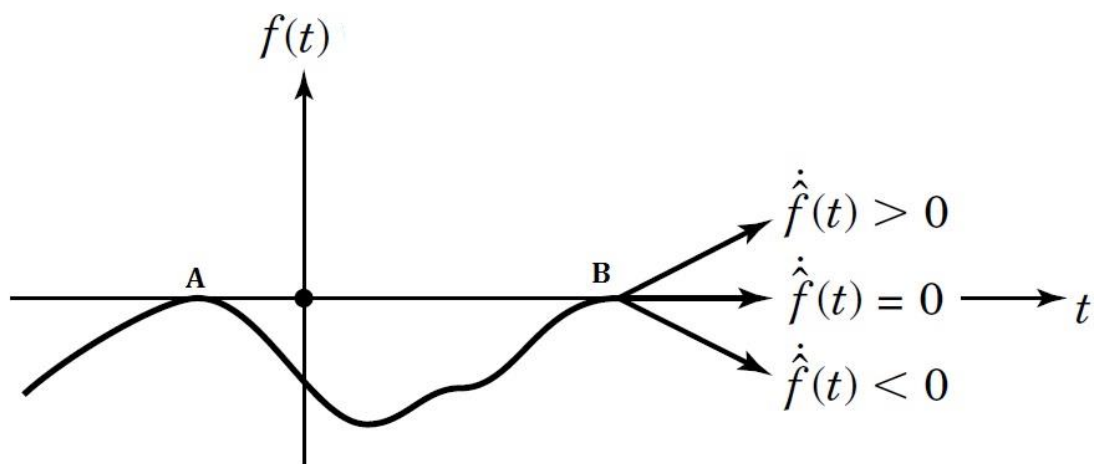
$$\frac{df}{dt} < 0 \quad (2.61)$$

Στην πρώτη περίπτωση της πλαστικής φόρτισης ισχύει ταυτόχρονα ότι $\dot{\gamma} > 0$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση της ελαστικής αποφόρτισης ισχύει $\dot{\gamma} = 0$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0 \quad (2.62)$$

Η σχέση (2.62) ονομάζεται **συνθήκη συμβατότητας** και εκφράζει την φυσική απαίτηση ότι όσο εκδηλώνεται πλαστική ροή, η τάση πρέπει να «εμμένει» κάθε στιγμή στην επιφάνεια διαρροής.

Στο σχήμα 44 παρουσιάζεται η γεωμετρική ερμηνεία των σχέσεων (2.60) και (2.61).



44- Πιθανά ενδεχόμενα μεταβολής της επιφάνειας διαρροής στο B. Η περίπτωση $\dot{f} > 0$ δεν θεωρείται αποδεκτή.

Στο παραπάνω σχήμα τα σημεία A και B είναι σημεία στα οποία έχουμε διαρροή, ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία είναι στην ελαστική περιοχή. Αν στο σημείο B ίσχυε $\dot{f} > 0$, αυτό θα σήμαινε ότι θα υπήρχαν $\{\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \alpha\}$, για τα οποία θα ίσχυε $f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \alpha) > 0$, πράγμα το οποίο δεν είναι αποδεκτό.

2.3.6.5-Καθορισμός του συντελεστή αναλογίας γ και του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου

Ο συντελεστής αναλογίας υπεισέρχεται στον εξελικτικό νόμο της πλαστικής ροής και εκφράζει τον ρυθμό «ολίσθησης» των επιπέδων κατά την πλαστική παραμόρφωση. Προκειμένου να εξάγουμε μια κλειστή αναλυτική σχέση για τον συντελεστή αναλογίας θα πρέπει πρώτα να επαναδιατυπωθούν οι νόμοι κράτυνσης σε μορφή ενοποιημένη, ώστε να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί.

Υπενθυμίζεται ότι για την ισοτροπική κράτυνση έχω

$$K = H_{iso} a \quad (2.63)$$

όπου α η εσωτερική παράμετρος ιστροπικής κράτυνσης για την οποία ισχύει

$$\alpha = \varepsilon_{eff}^p \text{ και } \dot{\alpha} = \varepsilon_{eff}^{\dot{p}} = \dot{\gamma} \quad (2.64)$$

Παραγωγίζοντας την (2.31) ως προς K , προκύπτει

$$\frac{\partial f}{\partial K} = -1$$

Επομένως η (2.64) μπορεί να έρθει στην μορφή του νόμου πλαστικής ροής

$$\dot{\alpha} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial K} \quad (2.65)$$

Όπου φαίνεται ότι ο εξελικτικός νόμος της ιστροπικής κράτυνσης είναι επίσης συσχετισμένος με την επιφάνεια διαρροής.

Για την κινηματική κράτυνση ισχύει η παρακάτω σχέση

$$a_{ij} = H_{kin} \varepsilon_{ij}^{pl}$$

όπου a_{ij} οι back-stresses. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την παραπάνω σχέση, παίρνουμε:

$$\dot{a}_{ij} = \gamma H_{kin} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.66)$$

Ορίζοντας ως «δρώσα» τάση στην περίπτωση κινηματικής κράτυνσης την τάση η_{ij} , όπου $\eta_{ij} = \sigma_{ij} - a_{ij}$, τότε κατά την διαρροή θα ισχύει:

$$f(\{\tilde{\eta}\}, K) = 0 \quad (2.67)$$

Παραγωγίζοντας την (2.67) ως προς $[\tilde{\eta}]$, προκύπτει

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{df}{d\alpha}$$

Άρα η (2.66) παίρνει την μορφή

$$\dot{a}_{ij} = -\dot{\gamma} H_{kin} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \quad (2.68)$$

Προκύπτει επομένως ότι για ένα πλήρως συσχετισμένο πλαστικό μοντέλο, η επιφάνεια διαρροής f καθορίζει πλήρως τόσο το πλαστικό δυναμικό, όσο και τους εξελικτικούς νόμους κράτυνσης.

Ορίζοντας τα διάνυσματα $[q] = (K \quad \{\tilde{a}\})^T$ και $[a] = (\varepsilon_{eff}^p \quad \{\tilde{\varepsilon}^{pl}\})^T$, τότε, αυτά συνδέονται μέσω του μητρώου $[D]$ με την παρακάτω σχέση:

$$[q] = -[D][a] \quad (2.69)$$

Όπου $[D] = \begin{bmatrix} H_{iso} & [0] \\ [0] & H_{kin}[I] \end{bmatrix}$. Το μητρώο $[D]$ λέγεται γενικευμένο πλαστικό καταστατικό μητρώο και ο εξελικτικός νόμος παίρνει την παρακάτω συνεκτική μορφή:

$$[\dot{q}] = -\dot{\gamma}[D] \frac{\partial f}{\partial q} \quad (2.70)$$

Η έκφραση για τον συντελεστή αναλογίας προκύπτει αν κατά την ανάπτυξη πλαστικής ροής, απαιτήσουμε ικανοποίηση της συνθήκης συμβατότητας (2.62) και, αναπτύσσοντάς την, επιλύσουμε ως προς γ .

Η σχέση που προκύπτει, αξιοποιώντας και την (2.36) είναι η παρακάτω:

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : [\tilde{C}] : \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : [\tilde{C}] : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} : [D] : \frac{\partial f}{\partial q}} \quad (2.71)$$

Όπου η πράξη $[*]:[*]$ υποδηλώνει εσωτερικό τανυστικό γινόμενο και $[\tilde{C}]$ το ελαστικό καταστατικό μητρώο.

Αναπτύσσοντας δε την σχέση (2.36) στην παρακάτω μορφή, και έπειτα αντικαθιστώντας σε αυτήν την (2.71), παίρνουμε μια κλειστή έκφραση για το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο $[\tilde{C}_{ep}]$, το οποίο συνδέει τις τάσεις με τις ολικές παραμορφώσεις κατά την πλαστική ροή:

$$[\tilde{\sigma}] = [\tilde{C}]([\tilde{\varepsilon}] - \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) \Rightarrow$$

$$[\widetilde{\mathbf{C}}_{ep}] = [\widetilde{\mathbf{C}}] - \frac{[\widetilde{\mathbf{C}}]:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes [\widetilde{\mathbf{C}}]:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:[\widetilde{\mathbf{C}}]:\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}:[\mathbf{D}]:\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}} \quad (2.72)$$

Όπου η πράξη $[*]\otimes[*]$ υποδηλώνει δυαδικό τανυστικό γινόμενο. Το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο είναι συμμετρικό στην περίπτωση συσχετισμένης πλαστικότητας.

2.4. J_2 ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο επίπεδης έντασης

Παρακάτω συνοψίζονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ανεξάρτητης του χρόνου πλαστικότητας (rate-independent plasticity), στα πλαίσια της θεωρίας μικρών παραμορφώσεων υπό τους περιορισμούς που επιβάλλει η επίπεδη εντατική κατάσταση. Με την χρήση κριτηρίου διαρροής von Mises, το παραπάνω μοντέλο είναι γνωστό και ως J_2 θεωρία ροής (J_2 flow theory).

Οι εξισώσεις θα διατυπωθούν σε μορφή όπου θα καθιστά βολική και αποτελεσματικότερη την διακριτοποίησή τους κατά την αλγοριθμική αντιμετώπιση του προβλήματος. Επιπλέον, τάσεις και παραμορφώσεις ταξινομούνται σε μητρώα-στήλες αντί σε μητρώα-πίνακες, όπως είναι η μαθηματικής τους διατύπωση. Αυτό γίνεται καθαρά για λόγους απλοποίησης.

Περιορισμοί του χώρου της επίπεδης έντασης

Είναι $\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = s_{23} = s_{13} = 0$ και $\text{Tr}(\{\tilde{\mathbf{s}}\}) = 0$ και τα διανύσματα τάσεων και αποκλινουσών τάσεων μορφώνονται ως εξής:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}]^T, \quad [\mathbf{s}] = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{12}]^T \quad (2.73)$$

ενώ η αντιστοίχιση του ενός χώρου με τον άλλο γίνεται μέσω του μητρώου $[\bar{\mathbf{P}}]$ (mapping matrix):

$$[\mathbf{s}] = [\bar{\mathbf{P}}] [\boldsymbol{\sigma}] \quad (2.74)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται και οι τάσεις μετατόπισης και οι αποκλίνουσες τάσεις μετατόπισης (back stresses).

$$[\mathbf{a}] = [a_{11} \quad a_{22} \quad a_{12}]^T, \quad [\mathbf{a}^d] = [a^d_{11} \quad a^d_{22} \quad a^d_{12}]^T$$

$$[\mathbf{a}^d] = [\bar{\mathbf{P}}] [\mathbf{a}] \quad (2.75)$$

Για τις παραμορφώσεις ισχύει:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}]^T, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}^p] = [\varepsilon^p_{11} \quad \varepsilon^p_{22} \quad 2\varepsilon^p_{12}]^T \quad (2.76)$$

Βασικές εξισώσεις J₂ελαστοπλαστικού καταστατικού μοντέλου

Οι βασικές εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{\varepsilon}^e] + [\boldsymbol{\varepsilon}^p]$$

$$[\boldsymbol{\xi}] = [\boldsymbol{\sigma}] - [\boldsymbol{\alpha}]$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{C}][\boldsymbol{\varepsilon}^e]$$

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = \gamma[\bar{\mathbf{P}}][\boldsymbol{\xi}] \quad (2.77)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\alpha}}] = \frac{2}{3}\gamma H_{kin}[\boldsymbol{\xi}]$$

$$f = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\xi}]^T[\bar{\mathbf{P}}][\boldsymbol{\xi}] - \frac{1}{3}\Phi^2(\varepsilon^p_{eff})$$

όπου για την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση ισχύει:

$$\varepsilon^p_{eff} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}[\boldsymbol{\xi}]^T[\bar{\mathbf{P}}][\boldsymbol{\xi}]} \quad (2.78)$$

Στην σχέση (2.77)⁶ η συνάρτηση $\Phi^2(\varepsilon^p_{eff})$ εκφράζει τα σύνορα του ελαστικού τόπου (elastic domain) και δίνεται από την σχέση

$$\Phi(\varepsilon^p_{eff}) = \sigma_y + H_{iso}\varepsilon^p_{eff} \quad (2.79)$$

ενώ αναπτύσσοντας την έκφραση $\frac{1}{2}[\boldsymbol{\xi}]^T[\bar{\mathbf{P}}][\boldsymbol{\xi}]$ καταλήγουμε στην γνώριμη έκφραση της ισοδύναμης τάσης στην επίπεδη ένταση:

$$\frac{1}{2} [\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}] [\xi] = \xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 - \xi_{11}\xi_{22} + 3\xi_{12}^2$$

Αξίζει επίσης να τονισθεί ότι συνιστώσες $\varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}^e$ και ε_{33}^p , δεν εμφανίζονται στις (2.77) καθώς είναι εξαρτημένες μεταβλητές και εξαγονται από τις υπόλοιπες συνιστώσες των $[\varepsilon]$, $[\varepsilon^p]$ και $[\sigma]$.

Στην περίπτωση ισότροπου ελαστικού υλικού, είναι:

$$\varepsilon_{33}^e = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e)$$

$$\varepsilon_{33}^p = -\varepsilon_{11}^p - \varepsilon_{22}^p$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^p$$

Συνθήκες Kuhn-Tucker

Οι συνθήκες φόρτισης/αποφόρτισης είναι, κατά τα γνωστά, οι παρακάτω:

$$\gamma \geq 0, f \leq 0, \gamma * f = 0 \quad (2.80)$$

Συνθήκη Συμβατότητας

Τέλος, με την συνθήκη συμβατότητας ολοκληρώνονται οι εξισώσεις που διέπουν το ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο επίπεδης έντασης:

$$\gamma * \dot{f} = 0 \quad (2.81)$$

Καθορισμός συντελεστή αναλογίας και ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου.

Η διαδικασία που ακολουθείται για τον υπολογισμό των γ και $[\mathbf{C}_{ep}]$ είναι πανομοιότυπη με αυτή της παραγράφου **2.3.5.5**.

Είναι

$$\gamma = \frac{[\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}] [\mathbf{C}] [\dot{\varepsilon}]}{[\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}] [\mathbf{C}] [\bar{\mathbf{P}}] [\xi] (1+\beta)} \quad (2.82)$$

$$\text{Όπου } \beta = \frac{2}{3} \frac{(H_{iso} + H_{kin}) \bar{\varphi}^2}{[\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}] [\mathbf{C}] [\bar{\mathbf{P}}] [\xi]} \text{ και } \bar{\varphi} = \sqrt{[\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}] [\xi]}$$

Τέλος, η έκφραση του ελαστοπλαστικού μητρώου είναι η παρακάτω:

$$[\mathbf{C}_{ep}] = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = [\mathbf{C}] - \frac{\{\mathbf{n}\} \otimes \{\mathbf{n}\}}{1 + \beta} \quad (2.83)$$

$$\text{Όπου } \{\mathbf{n}\} = \frac{[\mathbf{C}][\bar{\mathbf{P}}][\xi]}{\sqrt{[\xi]^T [\bar{\mathbf{P}}][\mathbf{C}][\bar{\mathbf{P}}][\xi]}}$$

Κεφάλαιο 3

3.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων - εισαγωγικά στοιχεία.

Τις περισσότερες φορές, η μελέτη των φυσικών φαινομένων είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και η μελέτη τους στα πλαίσια των *συνεχών συστημάτων* καθίσταται δαπανηρή ή, όπως συμβαίνει τις περισσότερες φορές, αδύνατη. Έτσι, αναγκαζόμαστε να υιοθετήσουμε ένα *διακριτό μοντέλο*, του οποίου η επάρκεια εξαρτάται ασφαλώς από όρους που εμείς ελέγχουμε. Αν συνεχίσουμε την διακριτοποίηση του μοντέλου μας «επί άπειρον», καταλήγουμε στο αρχικό *συνεχές μοντέλο* και στην πραγμάτευσή του με τα μαθηματικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού και των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

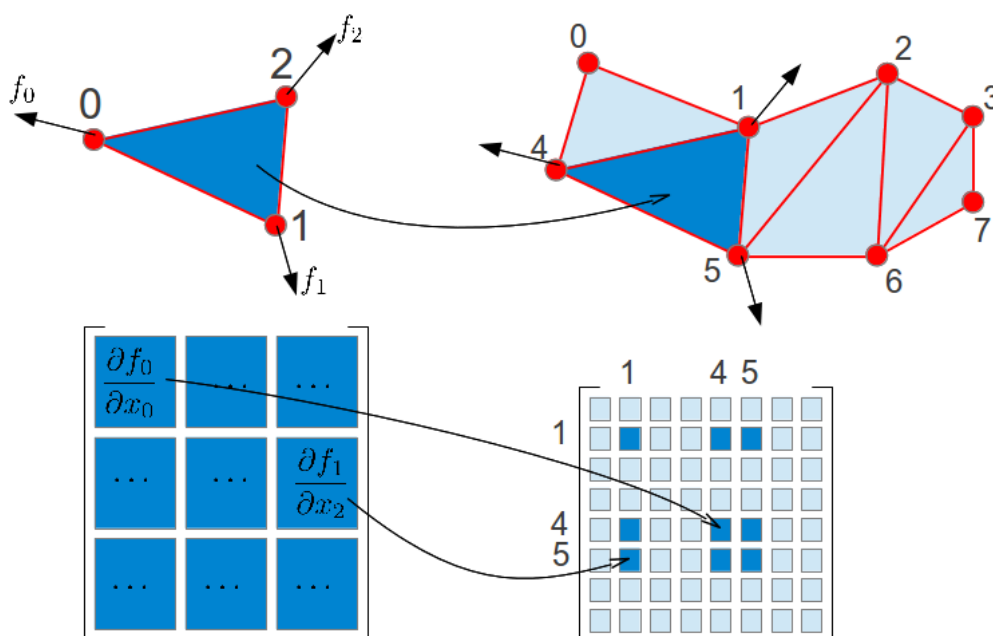
Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια διαδικασία *προσεγγιστικής* επίλυσης ενός προβλήματος στα πλαίσια της οποίας

- Το συνεχές μέσο «χωρίζεται» ή διακριτοποιείται σε έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τα οποία εφάπτονται μεταξύ τους χωρίς να αφήνουν κενά και των οποίων η συμπεριφορά καθορίζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων, έστω a_i , οι οποίες καλούνται **παράμετροι συστήματος** και αποτελούν τους αγνώστους του προβλήματος.
- Τα στοιχεία συνδέονται με κόμβους οι οποίοι βρίσκονται σε σημεία των συνόρων τους. Το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων ονομάζεται **πλέγμα**.
- Για κάθε στοιχείο, μια ομάδα από χαρακτηριστικές παράμετροι, έστω q_i , μπορούν να καθοριστούν συναρτήσει των παραμέτρων συστήματος.
- Οι εξισώσεις του συστήματος ως όλου προκύπτουν συναθροίζοντας τις επιμέρους χαρακτηριστικές παραμέτρους από κάθε στοιχείο.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε με στοιχεία μετατοπίσεων, δηλαδή πεπερασμένα στοιχεία όπου ως παράμετροι συστήματος έχουν επιλεγεί οι επικόμβιες μετατοπίσεις.

Η διαδικασία επίλυσης ενός διακριτού συστήματος ακολουθεί χονδρικά τα παρακάτω βήματα:

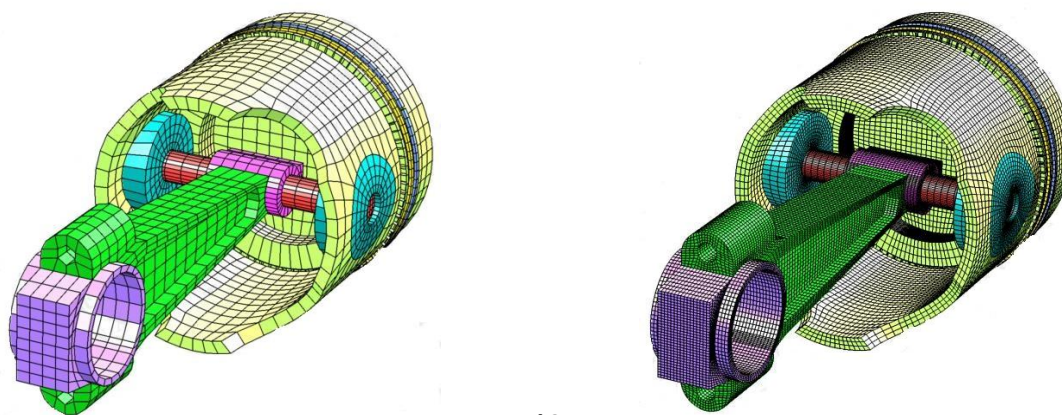
1. Καθορισμός της γεωμετρίας, των μηχανικών χαρακτηριστικών και των φορτίσεων του φορέα.
2. Διακριτοποίηση του φορέα και καθορισμός της γεωμετρίας των πεπερασμένων στοιχείων. Αρίθμηση των στοιχείων.
3. Καθορισμός των επικόμβιων συνδέσεων, επικόμβιων φορτίων και του μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου μεμονωμένα στο τοπικό σύστημα του στοιχείου.
4. Διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας κάθε στοιχείου ξεχωριστά.
5. Συνάθροιση(assembly) των επιμέρους εξισώσεων των στοιχείων από το τοπικό σύστημα στο καθολικό σύστημα του φορέα και διατύπωση της εξίσωσης ισορροπίας του φορέα. Αυτό γίνεται με αντιστοίχιση της αρίθμησης κόμβων του εκάστοτε στοιχείου στο τοπικό σύστημα, με την αντίστοιχη στο καθολικό και πρόσθεση όρων στις κατάλληλες θέσεις του καθολικού μητρώου ακαμψίας.
6. Καθορισμός των συνοριακών συνθηκών ώστε να καθίσταται δυνατή η ύπαρξη μοναδικής λύσης
7. Επίλυση εξίσωσης ισορροπίας.



45- Μετάβαση από το τοπικό σύστημα στο καθολικό – Assembly

Η παραπάνω διαδικασία ακολουθείται τόσο από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όσο και από την Μέθοδο Άμεσης Δυσκαμψίας (ΜΑΔ εφεξής), η οποία θεωρείται πρόδρομος της πρώτης. Η διαφορά τους έγκειται στο ότι στην ΜΑΔ καθίσταται δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός των «ακριβών» μητρώων ακαμψίας, ενώ στην επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία είναι προσεγγιστικός. Αυτό συμβαίνει διότι, στην ΜΑΔ, οι συνιστώσες του μητρώου ακαμψίας προέκυψαν μέσω της κατάλληλης επεξεργασίας του παγιωμένου φορέα και στην βάση τους αποτελούν παράγωγα της επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα.

Αντίθετα, στην μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιλέγεται **αυθαίρετα** το πεδίο των μετατοπίσεων και βάσει αυτού υπολογίζεται το μητρώο ακαμψίας. Η παραπάνω προσέγγιση οδηγεί στην μηχανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας. Το σφάλμα αυτό μειώνεται ωστόσο καθώς αυξάνεται η πυκνότητα του πλέγματος.



46-Αύξηση

πυκνότητας δικτύου πεπερασμένων στοιχείων

3.2. Διατύπωση των χαρακτηριστικών σχέσεων πεπερασμένου στοιχείου επίπεδης έντασης

Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι οι τάσεις, οι παραμορφώσεις και το πεδίο των μετατοπίσεων, ενώ γνωστές είναι οι εξωτερικές δράσεις. Κάθε στοιχείο αποτελείται από $n \geq 3$ μη συνευθειακούς κόμβους, ενώ κάθε κόμβος έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Επομένως κάθε στοιχείο έχει

συνολικά $2n$ βαθμούς ελευθερίας. Παρακάτω θα διατυπωθούν οι σχέσεις πεπερασμένου στοιχείου επίπεδης έντασης n , αλλά για λόγους ευκρίνειας θα παρουσιάζεται στα σχήματα το παράδειγμα ενός τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου.

Το πεδίο των μετατοπίσεων εντός του επιπέδου, έστω x - y , είναι

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Οι παραμορφώσεις και οι τάσεις καταχωρούνται με μορφή διανυσμάτων σύμφωνα με την παρακάτω μορφή:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας, συμβιβαστού και η σχέση μεταξύ $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$ και $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$ διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

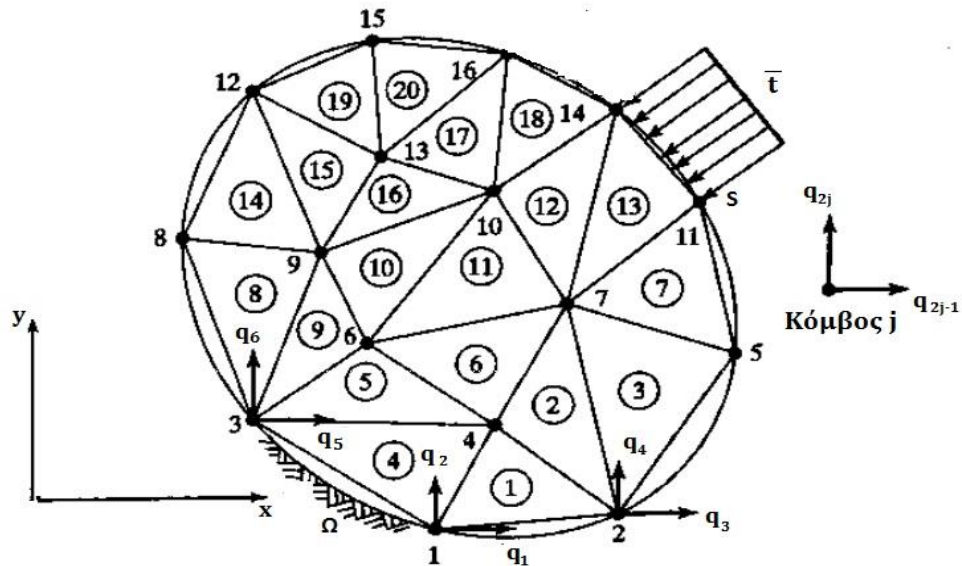
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(x, y) \\ \varepsilon_{yy}(x, y) \\ 2\varepsilon_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

3.2.1 Συναρτήσεις σχήματος

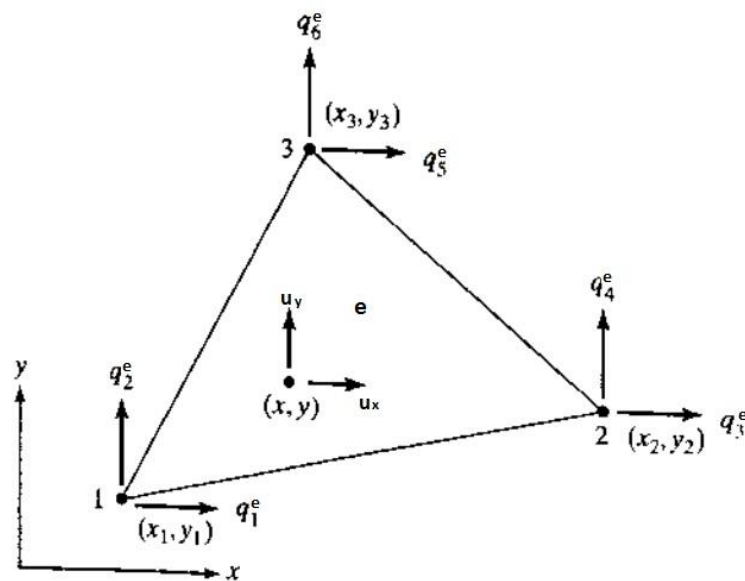
Στο σχήμα 47 παρουσιάζεται το πλέγμα ενός επίπεδου φορέα με αρίθμηση των πεπερασμένων στοιχείων e , των κόμβων n καθώς και των επικόμβιων δυνάμεων q_i στο καθολικό σύστημα. Διακρίνεται

επίσης και η επιφανειακή φόρτιση \bar{t} στο σύνορο S καθώς και η στήριξη του στο σύνορο Ω .

Σχήμα 47



Απομονώνοντας ένα τυχαίο στοιχείο e , το οποίο ορίζεται πλέον από την διάταξη των n κόμβων του στο τοπικό σύστημα, προσεγγίζουμε το πεδίο των μετατοπίσεων $\mathbf{u}(x, y)$ εντός του στοιχείου συσχετίζοντάς το με τις επικόμβιες μετατοπίσεις, έστω \mathbf{a} , μέσω κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής $N(x, y)$.



48-Πεπερασμένο στοιχείο e . Τοπικό σύστημα.

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x(x, y) \\ \tilde{u}_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \dots & N_n(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \dots & 0 & N_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x,1} \\ a_{y,1} \\ a_{x,2} \\ a_{y,2} \\ \vdots \\ a_{x,n} \\ a_{y,n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(x, y) \approx \tilde{\mathbf{u}}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{a} \quad (3.4)$$

Το μητρώο $\mathbf{N}(x, y)$ είναι διαστάσεων $2 \times 2n$ και καλείται μητρώο συναρτήσεων σχήματος και τα στοιχεία του N_i καλούνται **συναρτήσεις σχήματος**. Είναι συναρτήσεις παρεμβολής που συσχετίζουν το πεδίο μετατόπισης σε ένα τυχαίο σημείο με τις επικόμβιες μετατοπίσεις. Έχουν επιλεγεί *a priori* και η αξιοπιστία της μεθόδου εξαρτάται σημαντικά από αυτές. Είναι προφανές ότι αν $(x, y) = (x_i, y_i)$, όπου (x_i, y_i) οι συντεταγμένες ενός κόμβου, τότε η N_i ισούται με 1, οι υπόλοιπες συναρτήσεις σχήματος ($i \neq 1$) με μηδέν και οι μετατοπίσεις (πρέπει να) ισοδυναμούν με τις αντίστοιχες επικόμβιες.

3.2.2 Μητρώο Παραμορφώσεων

Με γνωστή μια προσέγγιση του πεδίου των μετατοπίσεων, από την σχέση (3.3)² μπορεί να υπολογισθεί μια προσέγγιση των παραμορφώσεων:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \approx \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y) = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}}(x, y) \quad (3.5)$$

όπου \mathbf{L} ο γραμμικός τελεστής-μητρώο της σχέσης (3.3)².

Αντικαθιστώντας στην (3.5) την (3.4), εκφράζουμε τις παραμορφώσεις συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{N}(x, y)\mathbf{a}$$

ή

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y) = \mathbf{B}(x, y)\mathbf{a} \quad (3.6)$$

Το μητρώο $\mathbf{B}(x, y)$ ονομάζεται μητρώο παραμορφώσεων και είναι διαστάσεων $3 \times 2n$ και έχει ως στοιχεία πρώτες παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος ως προς x και y .

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & \dots & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2.3 Αρχή των δυνατών έργων

Προκειμένου να εξαγάγουμε την έκφραση του μητρώου ακαμψίας \mathbf{K}^e είναι αναγκαίο να αναγάγουμε τις επιφανειακές και μαζικές δυνάμεις, οι οποίες ασκούνται στις επιφάνειες και στον όγκο του στοιχείου αντίστοιχα, στους κόμβους του. Δηλαδή πρέπει να βρούμε τις στατικά ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις από τις παραπάνω φορτίσεις, συνυπολογίζοντας τις ήδη υπάρχουσες επικόμβιες δράσεις. Με αυτό τον τρόπο οι εξισώσεις ισορροπίας σε συγκεκριμένα σημεία του συνεχούς ενδέχεται να μην ικανοποιούνται, εξασφαλίζεται ωστόσο η ισορροπία του στοιχείου ως όλου.

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα των συνολικών επικόμβιων δράσεων είναι \mathbf{q}^e :

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} q_{x,1}^e \\ q_{y,1}^e \\ q_{x,2}^e \\ q_{y,2}^e \\ \vdots \\ q_{n,1}^e \\ q_{n,2}^e \end{bmatrix} = \mathbf{q}_c^e + \mathbf{q}_t^e + \mathbf{q}_b^e \quad (3.8)$$

όπου \mathbf{q}_c^e οι προϋπάρχουσες επικόμβιες δράσεις, \mathbf{q}_t^e και \mathbf{q}_b^e οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις των επιφανειακών και μαζικών δυνάμεων αντίστοιχα.

Το δυνατό έργο των εξωτερικών επικόμβιων δράσεων είναι:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{a}^e T \mathbf{q}^e \quad (3.9)$$

όπου $\delta \mathbf{a}^{eT}$ το διάνυσμα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων. Το δυνατό πεδίο μετατοπίσεων προκύπτει άμεσα από το $\delta \mathbf{a}^{eT}$ μέσω της σχέσης (3.4):

$$\delta \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \delta \mathbf{a}$$

Το έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\delta W_{int} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Ή, αξιοποιώντας την σχέση (3.6)

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{a}^{eT} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.10)$$

Εξισώνοντας το δυνατό έργο εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, και απαλείφοντας τον όρο $\delta \mathbf{a}^{eT}$, προκύπτει ότι:

$$\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την (3.3)³ με χρήση της (3.6), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{a}^e$$

ή

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (3.11)$$

όπου

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (3.12)$$

Ισοδύναμες δράσεις επιφανειακών δυνάμεων

$$\mathbf{q}_t^e = \int_S \mathbf{N}_S^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.13)$$

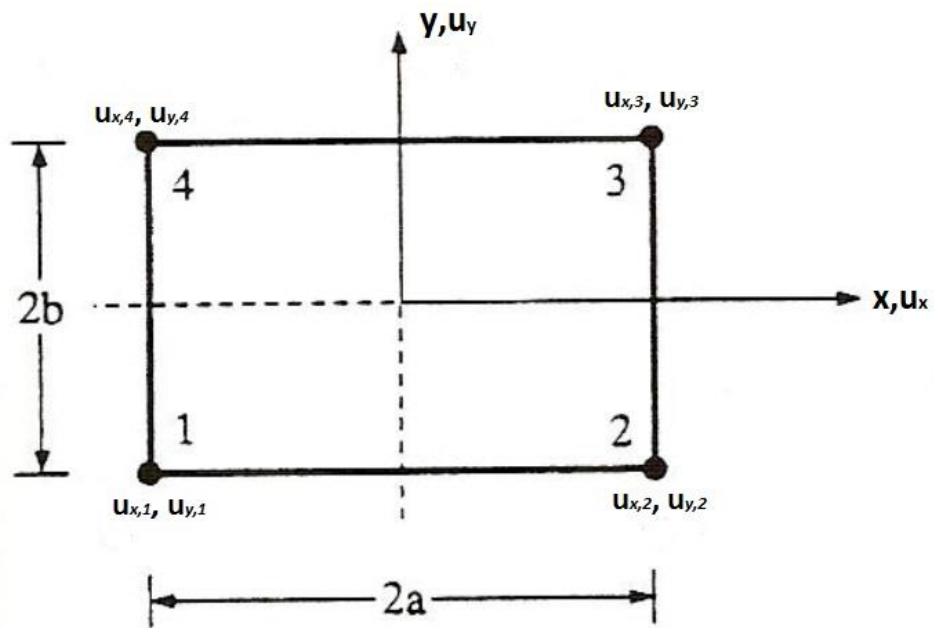
Όπου η ολοκλήρωση γίνεται μόνο στην φορτιζόμενη επιφάνεια S και ο υπολογισμός των συναρτήσεων σχήματος γίνεται επί αυτής. Τα στοιχεία του διανύσματος $\bar{\mathbf{t}}$ πρέπει να είναι ίδια στον αριθμό με τους βαθμούς ελευθερίας για να έχει νόημα η (3.13).

Ισοδύναμες δράσεις μαζικών δυνάμεων

$$\mathbf{q}_b^e = \int_V \mathbf{N}_b^T \mathbf{b} dV \quad (3.14)$$

όπου \mathbf{b} οι μαζικές δυνάμεις.

3.3.Ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης 4-κόμβων



49-Τετρακομβικό ορθογωνικό πεπερασμένο στοιχείο

Εκκινώντας από την παρατήρηση ότι σε κάθε πλευρά του παραπάνω στοιχείου οι βαθμοί ελευθερίας ανά συνιστώσα μετατόπισης είναι δύο, θεωρούμε, θεωρούμε ότι οι συνιστώσες μετατόπισης u_x, u_y θα περιγράφονται από διγραμμικά πολυώνυμα όπως παρακάτω:

$$u_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$u_y = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

ή, σε μητρική γραφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\bar{\mathbf{a}} \quad (3.15)$$

Το μητρώο \bar{a} ονομάζεται μητρώο γενικευμένων συντεταγμένων.

Τοποθετώντας τις συντεταγμένες (x, y) διαδοχικά στους κόμβους 1,2,3 και 4, εκφράζουμε τις μετατοπίσεις των κόμβων συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$\alpha^e = A\bar{a} \quad (3.16)$$

όπου το μητρώο A έχει είναι διαστάσεων 8×8 ($2n \times 2n$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix}$$

Επιλύοντας ως προς \bar{a} την (3.16) και αντικαθιστώντας στην (3.15) παίρνουμε:

$$u = \mathbf{X}A^{-1}\alpha^e = \mathbf{N}\alpha^e \quad (3.17)$$

Όπου $\mathbf{N} = \mathbf{X}A^{-1}$ το μητρώο συναρτήσεων σχήματος για τετρακομβικό ορθογωνικό πεπερασμένο στοιχείο. Το μητρώο \mathbf{N} είναι 2×8 και οι συναρτήσεις σχήματος είναι οι παρακάτω:

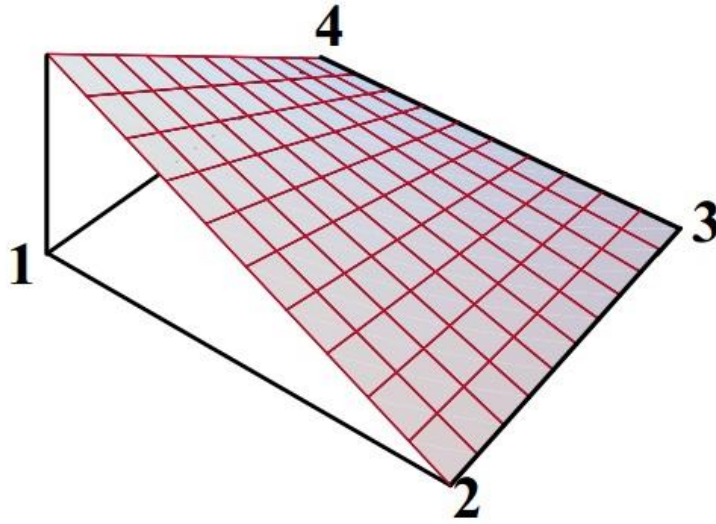
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$



50-Συνάρτηση σχήματος N_1

Στο σχήμα 50 φαίνεται η N_1 , όπου στον κόμβο 1 λαμβάνει την τιμή 1, ενώ στους κόμβους 2,3 και 4 την τιμή 0. Η μετατόπιση σε κάθε σημείο προκύπτει ως επαλληλία των συναρτήσεων σχήματος, μέσω των οποίων, τρόπον τινά, εκτιμούμε την συνεισφορά του κόμβου i μέσω της N_i στην μετατόπιση του τυχόντος σημείου $P(x, y)$.

Μητρώο παραμορφώσεως

Το μητρώο παραμορφώσεως για τετραπλευρικό ορθογωνικό στοιχείο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (3.18) με το γραμμικό τελεστή L :

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$N_{1,x} = \frac{y-b}{4ab}, \quad N_{1,y} = \frac{x-a}{4ab}$$

$$N_{2,x} = \frac{-y+b}{4ab}, \quad N_{2,y} = \frac{-x-a}{4ab}$$

$$N_{3,x} = \frac{y+b}{4ab}, \quad N_{3,y} = \frac{x+a}{4ab}$$

$$N_{4,x} = \frac{-y-b}{4ab}, \quad N_{4,y} = \frac{-x+a}{4ab}$$

Το μητρώο ακαμψίας τετραπλευρικού ορθογωνικού στοιχείου δίνεται από την έκφραση (3.12)

$$K^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV$$

3.4.Ισοπαραμετρικά στοιχεία

Στην περίπτωση περίπλοκης γεωμετρίας, όπου δεν είναι δυνατό να δημιουργηθεί πλέγμα αποτελούμενο από ορθογωνικά στοιχεία, κάνουμε χρήση *ισοπαραμετρικών στοιχείων*. Η ισοπαραμετρική θεώρηση βασίζεται στην χρήση ενός δεύτερου συστήματος συντεταγμένων το οποίο ορίζεται στο καρτεσιανό μέσω μιας απεικόνισης. Το δεύτερο αυτό σύστημα ονομάζεται **φυσικό σύστημα**.

3.4.1 Απεικόνιση του Καρτεσιανού συστήματος στο φυσικό σύστημα

Οι συντεταγμένες x, y, z εκφράζονται συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων ξ, η, ζ :

$$x = x(\xi, \eta, \zeta)$$

$$y = y(\xi, \eta, \zeta)$$

$$z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

ενώ η αντίστροφη απεικόνιση είναι

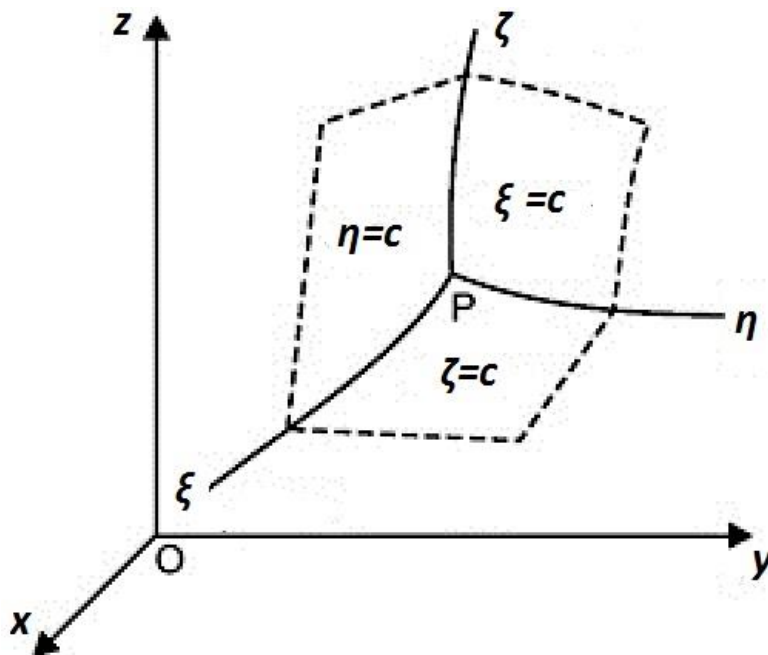
$$\xi = \xi(x, y, z)$$

$$\eta = \eta(x, y, z)$$

$$\zeta = \zeta(x, y, z)$$

Η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή, κάθε σημείο P στο καρτεσιανό σύστημα με συντεταγμένες (x, y, z) έχει στο φυσικό τις αντίστοιχες (ξ, η, ζ) . Η απεικόνιση του φυσικού συστήματος στο καρτεσιανό δίνει σε κάθε σημείο $P(x, y, z)$ ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 51. Διατηρώντας σταθερές τις η και ζ συντεταγμένες, το σημείο P που ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ διαγράφει την καμπύλη ξ . Κάνοντας την

ίδια διαδικασία και για τις άλλες δύο συντεταγμένες, παράγονται οι τρεις καμπύλες, οι οποίες καλούνται *συντεταγμένες καμπύλες*.



51-Ορθή απεικόνιση στο καρτεσιανό σύστημα

Τα εφαπτομενικά διανύσματα στις καμπύλες αυτές είναι:

$$\vec{V}_\xi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{k}$$

$$\vec{V}_\eta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \vec{k}$$

$$\vec{V}_\zeta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \vec{k}$$

Το στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο που ορίζεται μέσω των παραπάνω εφαπτομενικών διανυσμάτων έχει όγκο

$$dV = \vec{V}_\xi (\vec{V}_\eta \times \vec{V}_\zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$dV = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{k} \right) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$

ή

$$dV = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta$$

όπου \mathbf{J} το Ιακωβιανό μητρώο:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$$

3.4.2 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο επίπεδης έντασης τεσσάρων κόμβων.

Ο όρος ισοπαραμετρικό προκύπτει από την παραδοχή ότι η ίδια συνάρτηση περιγράφει τόσο το πεδίο μετατοπίσεων, όσο και την απεικόνιση των σημείων εντός του στοιχείου.

Στην περίπτωση του τετρακομβικού στοιχείου, η απεικόνιση είναι γραμμική.

Πολυωνυμική απεικόνιση

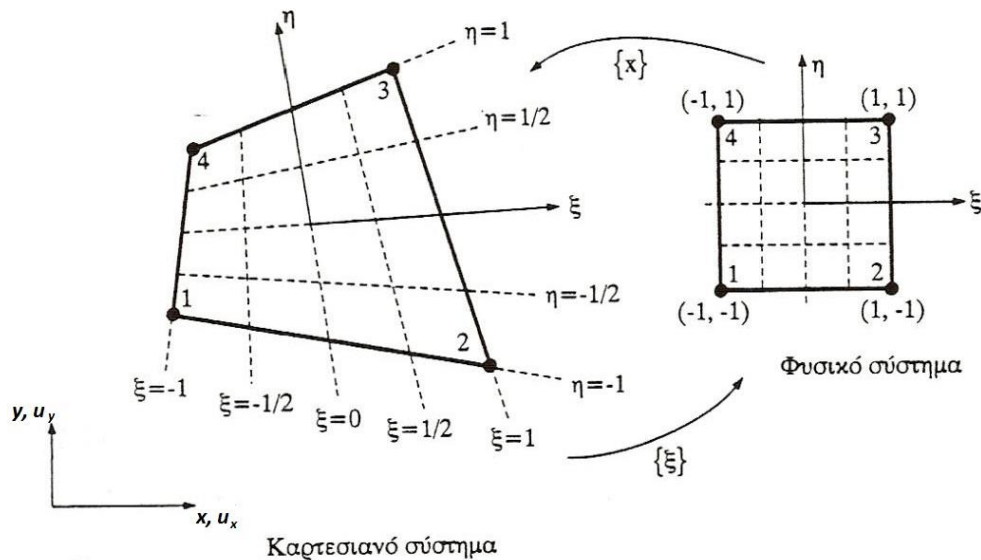
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta$$

Ή

$$x = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Θα εκφράσουμε τις συντεταγμένες (x, y) τυχαίου σημείου ως προς τις συντεταγμένες των κόμβων στο καρτεσιανό σύστημα (x_i, y_i)



52-Τετρακομβικό ισοπαραμετρικό στοιχείο σε φυσικό(δεξιά) και καρτεσιανό (αριστερά) σύστημα

Σύμφωνα με το σχήμα 52, οι συντεταγμένες $x(\xi, \eta)$ των κόμβων δίνονται από την σχέση $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$. Επομένως, αντικαθιστώντας διαδοχικά τις συντεταγμένες των κόμβων στο φυσικό σύστημα, βρίσκουμε τις αντίστοιχες στο καρτεσιανό ως προς τις παραμέτρους a_i :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

ή

$$x = T_x a_x$$

Λύνοντας ως προς τις παραμέτρους a_i την παραπάνω σχέση και αντικαθιστώντας στην (3.20)¹, παίρνουμε την σχέση που συνδέει την συντεταγμένη x τυχόντος σημείου με τις επικόμβιες συντεταγμένες x_i μέσω των συναρτήσεων παρεμβολής του φυσικού συστήματος:

$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Για την συντεταγμένη y ακολουθείται ακριβώς η ίδια διαδικασία:

$$y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Συγκεντρωτικά, είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Για το πεδίο μετατοπίσεων καταλήγουμε σε σχέση ίδιας μορφής, όπως ήταν αναμενόμενο, αφού χρησιμοποιήθηκαν ίδια πολυώνυμα για την απεικόνιση και το πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x,1} \\ u_{y,1} \\ u_{x,2} \\ u_{y,2} \\ u_{x,3} \\ u_{y,3} \\ u_{x,4} \\ u_{y,4} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Έτσι, προκειμένου να βρούμε τις συντεταγμένες (x, y) ή τις μετατοπίσεις (u_x, u_y) ενός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα, αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του (ξ, η) στο φυσικό σύστημα στις σχέσεις (3.21) και (3.22) αντίστοιχα.

Μητρώο παραμορφώσεως

Η παραγωγή του πεδίου μετατοπίσεων ως προς x και y δεν μπορεί να γίνει άμεσα διότι οι συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων είναι συναρτήσεις των ξ και η , δηλαδή είναι εκφρασμένες ως προς το φυσικό σύστημα. Πρέπει επομένως να χρησιμοποιήσουμε την ιακωβιανή του μετασχηματισμού:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} u_{x,\xi} \\ u_{x,\eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Λύνοντας ως προς $\begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} u_{x,\xi} \\ u_{x,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Τα ίδια ισχύουν και για την u_y :

$$\begin{bmatrix} u_{y,x} \\ u_{y,y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} u_{y,\xi} \\ u_{y,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

όπου

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Άρα

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x,\xi} \\ u_{x,\eta} \\ u_{y,\xi} \\ u_{y,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.22) διαδοχικά ως προς ξ και η και αντικαθιστώντας στην (3.27), παίρνουμε το μητρώο παραμορφώσεως $[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}(\xi, \eta)]$.

$$[\mathbf{B}(1, \eta)] = [1 + \eta \quad 0 \quad -(1 + \eta) \quad 0 \quad -(1 - \eta) \quad 0 \quad 1 - \eta \quad 0]$$

$$[\mathbf{B}(2, \eta)] = [0 \quad 1 + \xi \quad 0 \quad 1 - \xi \quad 0 \quad -(1 + \xi) \quad 0 \quad -(1 - \xi)]$$

$$[\mathbf{B}(3, \eta)] = [1 + \xi \quad 1 + \eta \quad 1 - \xi \quad -(1 + \eta) \quad -(1 - \xi) \quad -(1 - \eta) \quad -(1 + \xi) \quad 1 - \eta]$$

Μητρώο ακαμψίας

Το μητρώο ακαμψίας εκφράζεται ως προς τις φυσικές συντεταγμένες με την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} [\mathbf{B}(\xi, \eta)]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}(\xi, \eta)] t \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (3.28)$$

όπου t το πάχος του στοιχείου.

3.5. Αριθμητική ολοκλήρωση

Ο αναλυτικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων της μορφής (3.28) σε περίπτωση ισοπαραμετρικών στοιχείων ή, γενικά, στοιχείων μεγάλης τάξης, γίνεται δυσχερής ή, αρκετές φορές, αδύνατος. Γιαυτό τον λόγο καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού των ολοκληρωμάτων.

3.5.1-Ολοκλήρωση Gauss

Κατά την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (του μητρώου ακαμψίας πχ.) στον όγκο ή στην επιφάνεια του ισοπαραμετρικού στοιχείου αντικαθίσταται με τον υπολογισμό της τιμής του στα λεγόμενα *sample points* ή *Gauss points*. Η ακρίβεια του αποτελέσματος εξαρτάται προφανώς από τα σημεία που επιλέχθηκαν.

Έστω συνάρτηση $F = F(\xi, \eta)$ που ορίζεται σε ένα domain (ξ, η) . Κατά την μέθοδο Gauss το ολοκλήρωμα της F υπολογίζεται αριθμητικά ως εξής:

$$\int_a^b \int_c^d (\xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j F(\xi_i, \eta_j) \quad (3.29)$$

όπου n και m ο αριθμός των σημείων Gauss κατά τις διευθύνσεις ξ και η αντίστοιχα και $w(\xi, \eta)$ συνάρτηση που ονομάζεται **συνάρτηση βάρους**. Ειθησται $n = m$ όταν ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής έχουν επιλεγεί και για τις δύο διευθύνσεις. Τα w_i και w_j είναι οι συντελεστές βάρους και εξαρτώνται από το επιλεγμένο σημείο.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται σταθερή συνάρτηση βάρους, έστω $w(\xi, \eta) = 1$ για ένα πεπερασμένο διάστημα, και τα άκρα του διαστήματος έχουν μετασχηματιστεί σε $[-1, 1]$, τότε η (3.29) γίνεται:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j F(\xi_i, \eta_j) \quad (3.30)$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση κατά την (3.30) είναι γνωστή και ως **τετραγωνισμός Gauss-Legendre**. Η παραπάνω σχέση εφαρμόζεται άμεσα στα ισοπαραμετρικά στοιχεία και, καθώς η ύπαρξη του όρου $\det(J)$ στον παρονομαστή της σχέσης (2.27) αυξάνει κατά πολύ την πολυπλοκότητα των υπολογισμών, η αριθμητική ολοκλήρωση του μητρώου ακαμψίας, των ισοδύναμων δράσεων και των τάσεων είναι κατά βάση μονόδρομος. Η ακρίβεια δε του υπολογισμού είναι θέμα βέλτιστης επιλογής των σημείων Gauss.

Τα βάρη w_i και w_j δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$w_i = \frac{2(1-\xi_i)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(\xi_i)]^2} \quad (3.31)$$

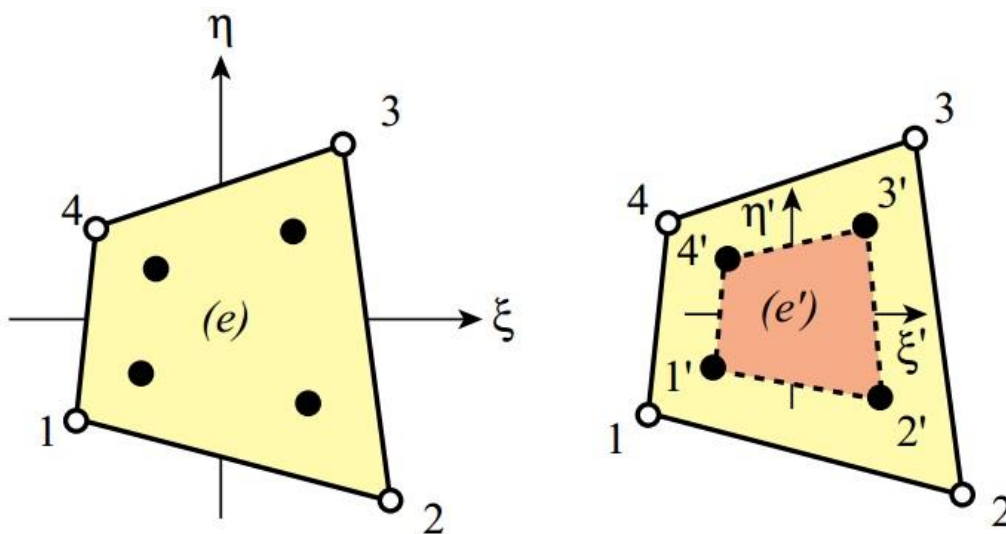
$$w_j = \frac{2(1-\eta_j)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(\eta_j)]^2} \quad (3.32)$$

όπου P_{n+1} το $n + 1^{\text{ο}}$ πολυώνυμο Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (3.33)$$

Αφού καθοριστούν τα σημεία Gauss στο ισοπαραμετρικό στοιχείο, υπολογίζουμε την τιμή του μεγέθους r σε κάθε σημείο Gauss, r_i , και κατόπιν ανάγονται οι τιμές αυτές στους κόμβους του ισοπαραμετρικού με διγραμμική παρεμβολή. Παίρνοντας ως παράδειγμα το τετρακομβικό ισοπαραμετρικό στοιχείο με τέσσερα σημεία Gauss(2x2), ορίζεται το «υποστοιχείο» e' που έχει ως κόμβους τα σημεία Gauss και σύστημα συντεταγμένων (ξ', η') όπου ισχύει:

$$\xi = \frac{\xi'}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \frac{\eta'}{\sqrt{3}}, \quad \text{ή} \quad \xi' = \xi\sqrt{3}, \quad \eta' = \eta\sqrt{3}$$



53- Ισοπαραμετρικό στοιχείο και «υποστοιχείο» Gauss

Η σχέση που συνδέει την τιμή ενός μεγέθους $r(\xi', \eta') = r(\xi\sqrt{3}, \eta\sqrt{3})$ σε οποιοδήποτε σημείο του ισοπαραμετρικού με τις τιμές αυτού στα σημεία Gauss, $r_{1'}, r_{2'}, r_{3'}$ και $r_{4'}$ είναι η παρακάτω:

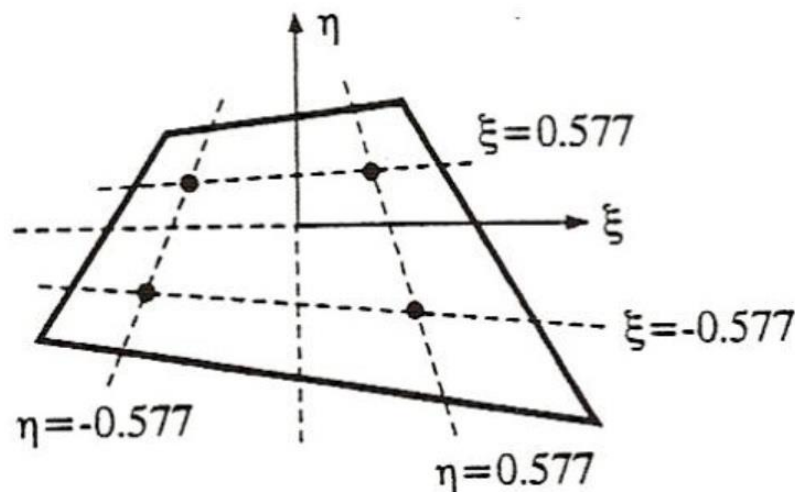
$$r(\xi', \eta') = [r_{1'} \quad r_{2'} \quad r_{3'} \quad r_{4'}] \begin{bmatrix} N_1^{(e')} \\ N_2^{(e')} \\ N_3^{(e')} \\ N_4^{(e')} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Όπου $N_i^{(e')}(\xi', \eta')$ οι συναρτήσεις παρεμβολής στο σύστημα (ξ', η') , και οι οποίες έχουν την ίδια μορφή με τις συναρτήσεις σχήματος.

Η τιμή του μεγέθους r στους κόμβους 1,2,3 και 4 του ισοπαραμετρικού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1'} \\ r_{2'} \\ r_{3'} \\ r_{4'} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Αποδεικνύεται ότι για ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων, τα βέλτιστα σημεία Gauss έχουν συντεταγμένες $(\xi, \eta) = (\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$, με $w_i = w_j = 1$. Γενικά, για n σημεία Gauss, η αριθμητική ολοκλήρωση θα δώσει ακριβή αποτελέσματα μόνο αν η F είναι πολυώνυμο βαθμού $(2n - 1)$ ή μικρότερου.



53-(2x2) ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre.

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου e για παράδειγμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{K}^e = t_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

όπου $F(\xi_i, \eta_j) = t_e \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \det[\mathbf{J}]$ και

$$k_{ij} = w_i^2 F(\xi_i, \eta_i) + w_i w_j F(\xi_i, \eta_j) + w_j w_i F(\xi_j, \eta_i) + w_j^2 F(\xi_j, \eta_j)$$

3.6- Συνάθροιση στοιχείων.

Μέχρι στιγμής έχει εξασφαλισθεί η ισορροπία των στοιχείων, στα οποία έχει διακριτοποιηθεί ο φορέας, καθώς η παραγωγή των μητρικών σχέσεων έγινε για κάθε στοιχείο σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, η οποία είναι στην ουσία μια έκφραση ισορροπίας. Μένει πλέον να διατυπωθεί η βασική μητρική σχέση ισορροπίας ολόκληρου το φορέα, μέσω της οποίας θα επιλύεται το πρόβλημα ως προς τις παραμέτρους του συστήματος. Αυτό γίνεται με την απαίτηση για συνθήκες ισορροπίας και συμβατότητας μετατοπίσεων στους κόμβους του φορέα, δηλαδή, το σύνολο των εξισώσεων που εκφράζει την ισορροπία των κόμβων στο καθολικό σύστημα αφού έχουν επιβληθεί η συμβατότητα στις μετατοπίσεις.

Έστω $[a]$ το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων του φορέα:

$$[a] = \begin{bmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

και $[q]$ το διάνυσμα των εξωτερικά επιβεβλημένων επικόμβιων δράσεων:

$$[q] = \begin{bmatrix} [q_1] \\ \vdots \\ [q_n] \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Είναι προφανές ότι κάθε διάνυσμα επικόμβιας δράσης πρέπει να έχει ίδιο αριθμο συνιστωσών με τους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή, στην περίπτωση της επίπεδης έντασης πρέπει:

$$[q_i] = \begin{bmatrix} q_{x,i} \\ q_{y,i} \end{bmatrix}$$

Προκειμένου να βρίσκεται σε ισορροπία ο κόμβος i , πρέπει το $[q_i]$ να είναι ίσο με το άθροισμα των επικόμβιων δυνάμεων από όλα τα επιμέρους στοιχεία που συντρέχουν με κόμβο στο i :

$$[q_i] = \sum_{e=1}^n [q_i^e] = [q_i^1] + [q_i^2] + \dots \quad (3.37)$$

όπου $[q_i^e]$ το διάνυσμα επικόμβιας δράσης του στοιχείου e στον κόμβο i . Είναι προφανές ότι στοιχεία των οποίων κανένας κόμβος δεν συντρέχει στον κόμβο i έχουν μηδενική συνεισφορά. Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.37) την σχέση (3.11), παίρνουμε:

$$[q_i] = \left(\sum_{e=1}^n [K_{i1}^e] \right) [a_1] + \left(\sum_{e=1}^n [K_{i2}^e] \right) [a_2] + \dots \quad (3.38)$$

Το $[K_{ij}^e]$ είναι ουσιαστικά η δύναμη στον κόμβο i για μοναδιαία μετατόπιση του κόμβου j του στοιχείου e .

Όταν διατυπωθούν οι σχέσεις ισορροπίας για κάθε κόμβο μέσω της (3.38), καταλήγουμε στην βασική μητρική εξίσωση του προβλήματος:

$$[q] = [K][a] \quad (3.39)$$

Το μητρώο $[K]$ είναι το καθολικό μητρώο ακαμψίας του προβλήματος και στην περίπτωση όπου

1. Το μέγεθος των μητρώων $[K^e]$ είναι το ίδιο
2. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι ίδιοι σε κάθε κόμβο

Τότε, το καθολικό μητρώο ακαμψίας δίνεται από την σχέση:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [K_{ij}^e] \quad (3.40)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.39) μπορεί να λυθεί αφότου έχουν επιβληθεί οι συνοριακοί περιορισμοί. Αυτό ισοδυναμεί με τον μηδενισμό ή επιβάλλοντας κάποια άλλη προκαθορισμένη τιμή σε συγκεκριμένα στοιχεία του διανύσματος επικόμβιων μετατοπίσεων $[a]$. Αν δεν γίνει αυτό, το σύστημα δεν μπορεί να λυθεί καθώς το μητρώο

$[K]$ δεν μπορεί να αντιστραφεί. Αυτό ισοδυναμεί με κίνηση στερεού σώματος, όπου οι μετατοπίσεις δεν προκύπτουν άμεσα από τις δράσεις και το πρόβλημα δεν είναι μοναδικά καθορισμένο.

3.7-Μη-γραμμική ανάλυση

3.7.1. Η προσαυξητική-επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Η επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων της σχέσης (3.39) αποτελεί ουσιαστικά και τον καθορισμό του προβλήματος, αφού οι παράμετροι του συστήματος $[a]$, που στην περίπτωση μας είναι οι επικόμβιες μετατοπίσεις, είναι πλέον γνωστές. Αν το σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή τα στοιχεία του καθολικού μητρώου ακαμψίας $[K]$ είναι σταθερές ποσότητες, οι μετακινήσεις παραμένουν μικρές και οι συνοριακές συνθήκες δεν μεταβάλλονται με την επιβολή της φόρτισης, τότε οι επικόμβιες μετατοπίσεις υπολογίζονται άμεσα μέσω της σχέσης (3.39) και η λύση είναι μοναδική. Στην περίπτωση όμως που τα στοιχεία του μητρώου $[K]$ είναι συναρτήσεις των επικόμβιων μετατοπίσεων, τότε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων (3.39) είναι μη-γραμμικό και η λύση του συστήματος ενδέχεται να μην είναι μοναδική. Για την αντιμετώπιση των μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων επιστρατεύονται επαναληπτικές αριθμητικές τεχνικές επίλυσης, με την μέθοδο Newton-Raphson να αποτελεί την πιο διαδεδομένη. Στην ανάλυση αυτής της παραγράφου θα παραληφθούν οι αγκύλες για τον συμβολισμό των μητρώων.

Αρχικά φέρνουμε την βασική εξίσωση του προβλήματος (3.39) στην μορφή:

$$f = q - F^{int} = 0 \quad (3.41)$$

όπου q το διάνυσμα των εξωτερικά επιβεβλημένων ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων και F^{int} το διάνυσμα των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων που προκύπτει από τις τάσεις στο εσωτερικό των στοιχείων. Η απαίτηση για ισότητα μεταξύ των διανυσμάτων q και F^{int} προέκυψε από την αρχή δυνατών έργων.

$$\mathbf{F}^{int} = \bigwedge_{e=1}^n \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.42)$$

Το Λ στην σχέση (3.42) είναι ο τελεστής συνάθροισης (assembly operator) και δηλώνει απλά ότι έχει προηγηθεί η συνάθροιση των στοιχείων και ό,τι ακολουθεί αφορά το σύνολο του φορέα στο καθολικό σύστημα.

Κατά την προσαυξητική μέθοδο επιβάλλουμε μικρές προσαυξήσεις στο διάνυσμα \mathbf{q} , $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n$, ώστε η προσέγγιση γραμμικής συμπεριφοράς μεταξύ του διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$ να θεωρείται δόκιμη. Η υιοθέτηση του ψευδοχρόνου ως μεταβλητής γίνεται μόνο για να αντιπροσωπεύσει τις προσαυξήσεις στα εξωτερικά φορτία. Θεωρώντας ότι το βήμα n αντιπροσωπεύει κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή, ικανοποιείται (προσεγγιστικά) (3.41) και είναι γνωστές οι επικόμβιες μετατοπίσεις $\boldsymbol{\alpha}_n$, οι τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_n$, οι παραμορφώσεις $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ και, άρα, το διάνυσμα ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων \mathbf{F}_n^{int} των τάσεων που επικρατούν στο σώμα, προσπαθούμε μέσω επαναλήψεων στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ (προσαυξητικό βήμα $n + 1$) να βρούμε ένα νέο σημείο ισορροπίας επιλύοντας την διακριτοποιημένη πλέον εξίσωση $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Η επαναληπτική διαδικασία στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ εκκινεί θεωρώντας δοσμένη μια προσαύξηση των επικόμβιων μετατοπίσεων ${}^0\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, και γνωστά τα μεγέθη $\{\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$. Ως αρχικές συνθήκες του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ ορίζονται οι παρακάτω:

$${}^0\mathbf{a}_{n+1} = {}^k\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n \quad \text{και} \quad {}^0\mathbf{F}_{n+1}^{int} = {}^k\mathbf{F}_n^{int} = \mathbf{F}_n^{int} \quad (3.42)$$

όπου ο δείκτης δηλώνει το προσαυξητικό βήμα και ο εκθέτης τον αριθμό της επανάληψης. Στις σχέσεις (3.42) θεωρούμε απλά ότι οι αρχικές συνθήκες του προσαυξητικού βήματος $n + 1$, δηλαδή οι τιμές της πρώτης επανάληψης, ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές του προσαυξητικού βήματος n της επανάληψης k , στην οποία έχει επιτευχθεί η σύγκλιση, δηλαδή, ${}^k\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$. Το διάνυσμα ${}^k\mathbf{f}_n$ ονομάζεται *residual* ή *out-of-balance vector* και εκφράζει ουσιαστικά ένα μέτρο απόκλισης από την ισορροπία.

Γραμμικοποίηση του residual vector

Έστω ότι βρισκόμαστε στην επανάληψη $i - 1$ του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ και η λύση της (3.41) στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ είναι το διάνυσμα \mathbf{a}^* . Οι βασικές διακριτοποιημένες σχέσεις της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson προκύπτουν γραμμικοποιώντας το residual vector στην «περιοχή» $i - 1$ και αναζητώντας την λύση. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την (3.41) έχουμε:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}^*) = \mathbf{f}({}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{{}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}} (\mathbf{a}^* - {}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}) \quad (3.43)$$

Κάθε επανάληψη όπου δεν επιτυγχάνεται σύγκλιση, ορίζει εκ νέου ένα residual vector το οποίο, όσο πλησιάζουμε στην λύση \mathbf{a}^* , τείνει στο $\mathbf{0}$. Επομένως, από την στιγμή που αναζητούμε την λύση στην περιοχή $i - 1$, ισχύει:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}^*) = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{f}({}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{q}_{n+1} - {}^{i-1}\mathbf{F}_{n+1}^{int} \quad (3.45)$$

Με την παραδοχή ότι τα εξωτερικά επικόμβια φορτία δεν εξαρτώνται από τις επικόμβιες παραμορφώσεις, προκύπτει ότι:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{{}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{F}^{int}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{{}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1}} = -{}^{i-1}\mathbf{K}_{n+1} \quad (3.46)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.44),(3.45),(3.46) στην (3.43) προκύπτει η διακριτοποιημένη εξίσωση ισορροπίας της μεθόδου:

$${}^{i-1}\mathbf{K}_{n+1} {}^i\Delta\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1} - {}^{i-1}\mathbf{F}_{n+1}^{int} \quad (3.47)$$

Από την (3.47) επιλύουμε ως προς ${}^i\Delta\mathbf{a}_{n+1}$ χρησιμοποιώντας το εφαπτομενικό μητρώο ακαμψίας της επανάληψης $i - 1$ και βελτιώνουμε την προσέγγισή μας:

$${}^i\mathbf{a}_{n+1} = {}^{i-1}\mathbf{a}_{n+1} + {}^i\Delta\mathbf{a}_{n+1} \quad (3.48)$$

Στο βαθμό που η μέθοδος συγκλίνει, η (3.48) μας δίνει μια όλο και καλύτερη προσέγγιση της λύσης του προβλήματος α^* .

Επαναληπτική διαδικασία εντός προσαυξητικού βήματος $n + 1$

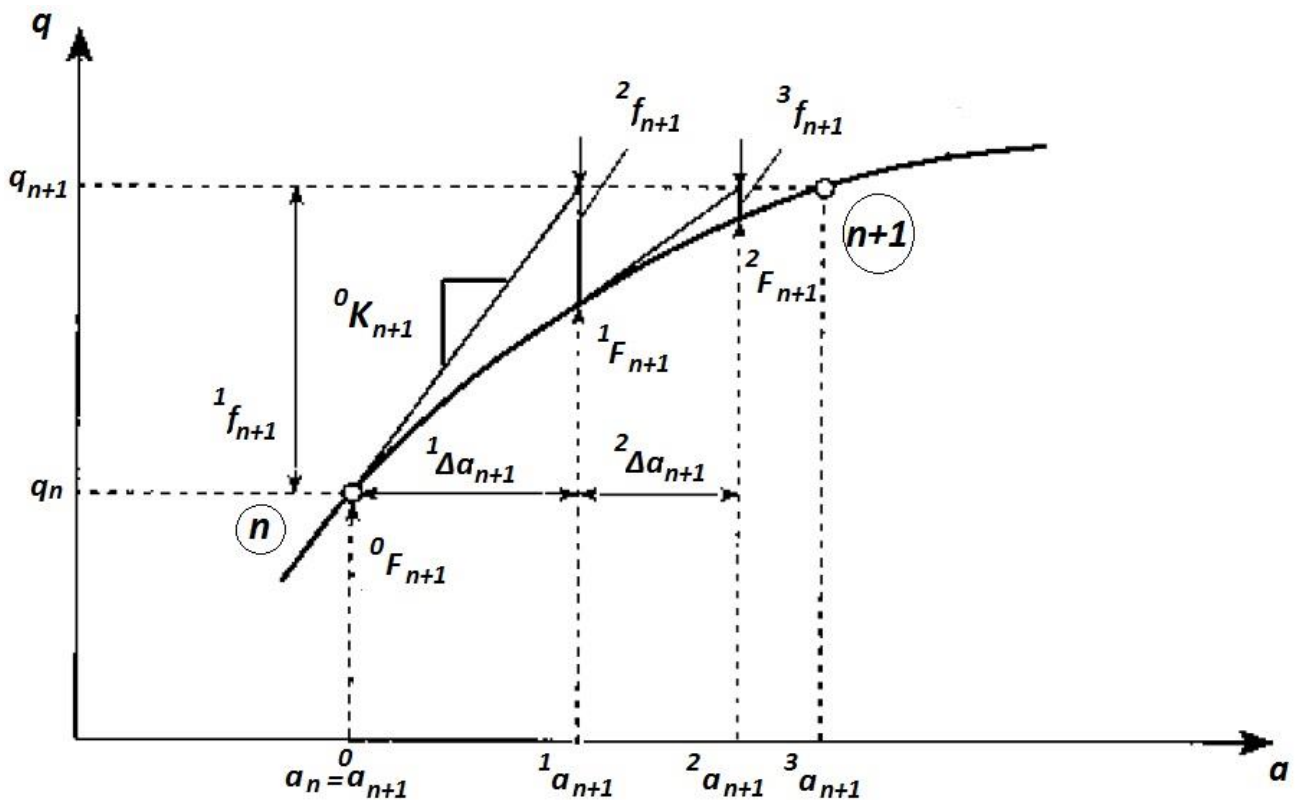
Έστω λοιπόν ότι γνωρίζουμε μια προσαύξηση ${}^i\Delta\alpha_{n+1}$ εβρισκόμενοι στην επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$. Ακολουθούν τα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζουμε τις συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις για το σύνολο του φορέα μέχρι την τρέχουσα επανάληψη:

$${}^i\alpha_{n+1} = {}^{i-1}\alpha_{n+1} + {}^i\Delta\alpha_{n+1}.$$
2. Υπολογίζουμε το διάνυσμα των παραμορφώσεων των επιμέρους στοιχείων: ${}^i\varepsilon_{n+1}^e = \mathbf{B}^e {}^i\alpha_{n+1}.$
3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα των τάσεων ${}^i\sigma_{n+1}^e$ στα σημεία Gauss σύμφωνα με το διαθέσιμο καταστατικό μοντέλο.
4. Υπολογισμός του διανύσματος ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων κάθε στοιχείου: ${}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e} = {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e} ({}^i\sigma_{n+1}^e) = \int_{ve} [\mathbf{B}^e]^T [{}^i\sigma_{n+1}^e] dV$
5. Υπολογισμός του τοπικού μητρώου ακαμψίας ${}^i\mathbf{K}_{n+1}^e$ κάθε στοιχείου.
6. Κάνουμε συνάθροιση των στοιχείων και υπολογίζουμε το διάνυσμα των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων για όλο το φορέα και του καθολικού μητρώου ακαμψίας για την επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$: ${}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int} = \bigwedge_{e=1}^l {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e},$
 ${}^i\mathbf{K}_{n+1} = \bigwedge_{e=1}^l {}^i\mathbf{K}_{n+1}^e$
7. Υπολογίζουμε το διάνυσμα ${}^i\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1} - {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int}.$ Διακρίνονται τώρα οι παρακάτω περιπτώσεις:
 - Αν $\|{}^i\mathbf{f}_{n+1}\| < c\|\mathbf{q}_{n+1}\|,$ τότε έχει επέλθει σύγκλιση στην επανάληψη i και επιβάλλουμε νέα προσαύξηση στα εξωτερικά επικόμβια φορτία ($\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+2} - \mathbf{q}_{n+1}$). Το κριτήριο σύγκλισης εξασφαλίζει ότι δεν αποκλίνουμε αρκετά από την συνθήκη ισορροπίας ${}^i\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}.$

- Αν δεν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, τότε απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις και θέτουμε $i = i + 1$. Ξεκινάει εκ νέου νέα επανάληψη εντός του προσαυξητικού βήματος $n + 1$.

Χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι ότι κάθε νέα επανάληψη εντός συγκεκριμένου προσαυξητικού βήματος χρησιμοποιεί για την εύρεση της τρέχουσας προσαύξησης των επικόμβιων μετατοπίσεων, έστω ${}^i\Delta a_{n+1}$, το μητρώο ακαμψίας της προηγούμενης επανάληψης, ${}^{i-1}K_{n+1}$. Επομένως, σε κάθε επανάληψη τροποποιείται εκ νέου το μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου του φορέα



54-Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson στο προσαυξητικό βήμα $n+1$.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται πως προσεγγίζεται επαναληπτικά το νέο σημείο ισορροπίας $n + 1$ με τρεις επαναλήψεις Newton-Raphson.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις:

- Οι συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις για κάθε στοιχείο στην επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ προέκυψαν από την απαίτηση για ικανοποίηση του συμβιβαστού στους κόμβους του πλέγματος: ${}^i\alpha_{n+1} \rightarrow {}^i\alpha_{n+1}^e$.
- Σε κάθε επανάληψη του προσαυξητικού βήματος $n + 1$, ο υπολογισμός των συνολικών επικόμβιων μετατοπίσεων κάθε στοιχείου ${}^i\alpha_{n+1}^e$, είναι ουσιαστικά το άθροισμα δύο ποσοτήτων: 1) των επικόμβιων μετατοπίσεων $\alpha_n^e = {}^0\alpha_{n+1}^e$ του προηγούμενου προσαυξητικού βήματος όπου έχει επέλθει σύγκλιση και 2) των συνολικών **επιπρόσθετων** επικόμβιων μετατοπίσεων ${}^i_0\Delta\alpha_{n+1}^e$, εντός του προσαυξητικού βήματος $n + 1$, μέχρι την επανάληψη i : ${}^i_0\Delta\alpha_{n+1}^e = {}^i\alpha_{n+1}^e - \alpha_n^e$.
- Μείωση του μεγέθους του προσαυξητικού βήματος $\Delta q = q_{n+1} - q_n$ συνεπάγεται λιγότερες επαναλήψεις εντός ενός προσαυξητικού βήματος και καλύτερη προσέγγιση της λύσης.
- Για τον υπολογισμό του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου εντός του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ απαιτείται πρώτα η ανανέωση των τάσεων και ο υπολογισμός του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου του στοιχείου σε κάθε επανάληψη. Η διαδικασία υπολογισμού τους θα εξεταστεί στο παρακάτω κεφάλαιο.

Κάθε στάθμη των εξωτερικά επιβεβλημένων επικόμβιων φορτίων q_{n+1} δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$q_{n+1} = \bigwedge_{e=1}^l (\int_S N_S^T \bar{t}_{n+1}^e dS + \int_V N^T b_{n+1}^e dV + q_{n+1}^{q,e})$$

$$q_{n+1} = \bigwedge_{e=1}^l (q_{n+1}^{t,e} + q_{n+1}^{b,e} + q_{n+1}^{q,e})$$

Που είναι ουσιαστικά το διάνυσμα των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων των εξωτερικά επιβεβλημένων επιφανειακών και επικόμβιων

δράσεων, $\mathbf{q}_{n+1}^{t,e}$ και $\mathbf{q}_{n+1}^{q,e}$ αντίστοιχα, καθώς και των μαζικών δυνάμεων, $\mathbf{q}_{n+1}^{b,e}$, αφού έχει γίνει το assembly στο καθολικό σύστημα.

Το γενικό επαναληπτικό μοτίβο της μεθόδου Newton-Raphson συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 3.1-Προσαυξητική διαδικασία N-R

- 1) Εκκίνηση τρέχοντος προσαυξητικού βήματος $n + 1$:
καθορισμός αρχικών συνθηκών και υπολογισμός νέας στάθμης εξωτερικών επικόμβιων φορτίων:

$$i = 0, \quad {}^0\mathbf{F}_{n+1}^{int} = \mathbf{F}_n^{int}, \quad {}^0\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e = \boldsymbol{\alpha}_n^e, \quad {}^0\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{K}_n$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \Lambda_{e=1}^l (\int_S \mathbf{N}_S^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1}^e dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1}^e dV + \mathbf{q}_{n+1}^{q,e})$$

- 2) Επανάληψη i .

$$i \rightarrow i + 1, \quad {}^i\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = {}^{i-1}\mathbf{K}_{n+1}^{-1} (\mathbf{q}_{n+1} - {}^{i-1}\mathbf{F}_{n+1}^{int})$$

$${}^i\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = {}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + {}^i\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$$

- 3) Υπολογισμός/ανανέωση συνολικών επικόμβιων μετατοπίσεων και παραμορφώσεων των στοιχείων:

$${}^i\boldsymbol{\alpha}_{n+1} \rightarrow {}^i\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e, \quad {}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{B}^e {}^i\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e$$

- 4) Χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης καταστατικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των τάσεων και του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου: ${}^i\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^e = {}^i\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^e({}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \dots)$, ${}^i\mathbf{C}_{ep}$

- 5) Υπολογισμός του διανύσματος ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων των τάσεων και και τροποποίηση του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας των στοιχείων:

$${}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e} = {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e}({}^i\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^e) = \sum_1^{gaussp} w_j \mathbf{B}_j^T {}^i\boldsymbol{\sigma}_{n+1,j}^e,$$

$${}^i\mathbf{K}_{n+1}^e = \sum_1^{gaussp} w_j \mathbf{B}_j^T {}^i\mathbf{C}_{ep} \mathbf{B}_j$$

- 6) Συνάθροιση στοιχείων και διαμόρφωση του καθολικού μητρώου ακαμψίας και καθολικού διανύσματος επικόμβιων εσωτερικών δυνάμεων: ${}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int,e} \rightarrow {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int}$, ${}^i\mathbf{K}_{n+1}^e \rightarrow {}^i\mathbf{K}_{n+1}$

- 7) Ανανέωση του residual vector και έλεγχος σύγκλισης:

$${}^{i+1}\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1} - {}^i\mathbf{F}_{n+1}^{int},$$

$$\text{Σύγκλιση} = \begin{cases} \text{NAI, τότε } {}^i(*)_{n+1} = (*)_{n+1} \\ \text{OXI, τότε πήγαινε στο βήμα 2)} \end{cases}$$

3.8-Υπολογιστική πλαστικότητα

Η διαδικασία επίλυσης μη-γραμμικών προβλημάτων, και, συγκεκριμένα προβλήματα με μη-γραμμικότητα υλικού, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων συνοψίζεται με τα παρακάτω βήματα:

1. Οι εξισώσεις ισορροπίας διακριτοποιούνται και οδηγούμαστε σε προσαυξητικές επαναληπτικές μεθόδους για να εξασφαλίσουμε την ισορροπία σε καθορισμένα στάδια φόρτισης με οδηγό τις προσαυξήσεις στην παραμόρφωση (strain driven προβλήματα).
2. Για την δοσμένη προσαύξηση στις παραμορφώσεις, υπολογίζεται τοπικά η εξέλιξη των «καταστατικών μεταβλητών» $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \boldsymbol{q}\}$ μέσω της ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων.
3. Ελέγχεται η ολική ισορροπία μέσω της ικανοποίησης των διακριτοποιημένων αλγεβρικών εξισώσεων για τις ανανεωμένες καταστατικές μεταβλητές.

Τα βήματα 1 και 3 λαμβάνουν τόπο στο καθολικό σύστημα για το σύνολο του πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το 2^ο βήμα, κατά το οποίο εξετάζουμε τοπικά, σε επίπεδο πεπερασμένου στοιχείου, τις μεταβολές των καταστατικών μεταβλητών.

3.8.1 Το θεμελιώδες πρόβλημα της υπολογιστικής πλαστικότητας

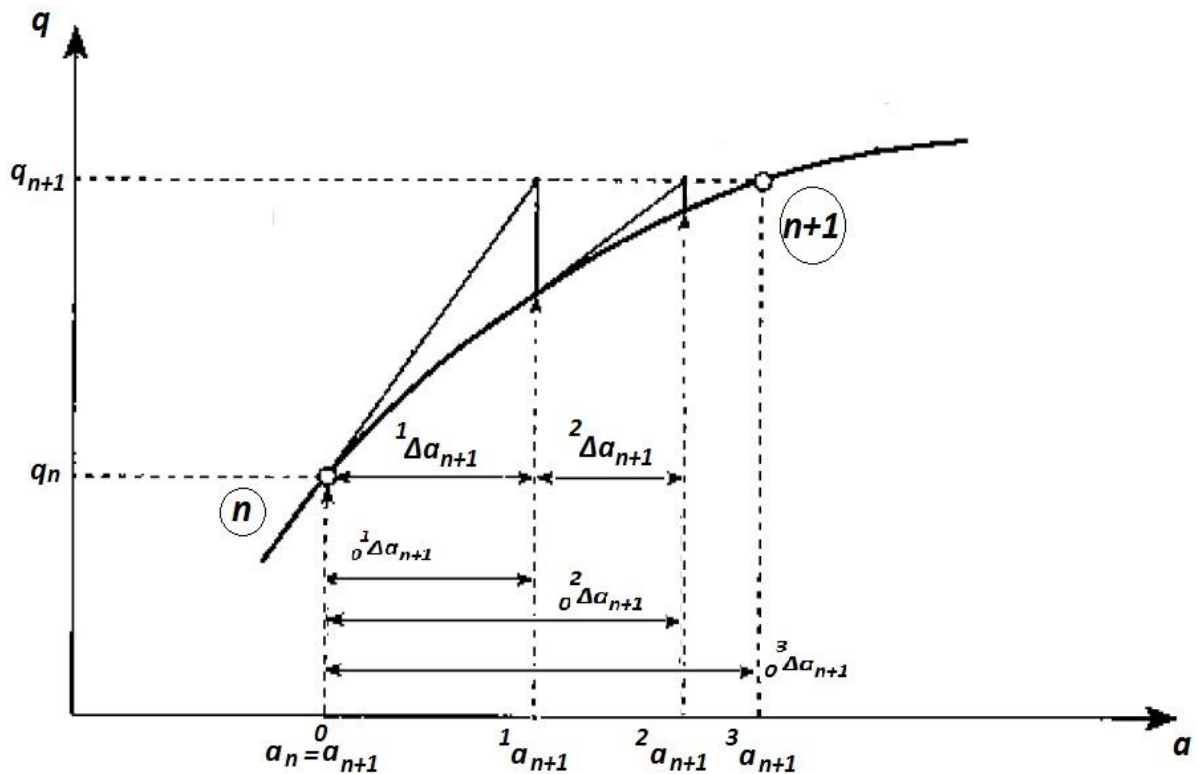
Με τον καθορισμό του καθολικού εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας, λαμβάνονται νέες προσαυξήσεις των επικόμβιων μετατοπίσεων εντός του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ στην επανάληψη i μέσω της σχέσης

$${}^i\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = {}^{i-1}\mathbf{K}_{n+1}^{-1}(\boldsymbol{q}_{n+1} - {}^{i-1}\mathbf{F}_{n+1}^{int}) \quad (3.49)$$

Και, κατ'επέκταση, νέα προσαύξηση στις ολικές παραμορφώσεις των στοιχείων. Έτσι, το διάνυσμα των συνολικών επικόμβιων παραμορφώσεων στην επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$${}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{B}^e {}^i\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e = \mathbf{B}^e ({}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e + {}^i\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e) = \mathbf{B}^e (\boldsymbol{\alpha}_n^e + {}^i\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^e)$$

Στην παραπάνω σχέση το διάνυσμα ${}^i\Delta\alpha_{n+1}^e$ αντιπροσωπεύει την προσαύξηση των επικόμβιων μετατοπίσεων στο στοιχείο e από την επανάληψη $i - 1 \rightarrow i$, ενώ το διάνυσμα ${}_0^i\Delta\alpha_{n+1}^e$ την **συνολική** προσαύξηση των επικόμβιων μετατοπίσεων από την πρώτη επανάληψη του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ έως την τρέχουσα: $i(= 0) \rightarrow i$. Η εισαγωγή του διανύσματος συνολικών προσαυξήσεων των επικόμβιων μετατοπίσεων είναι αναγκαία, όπως θα δούμε στην συνέχεια, όταν αντιμετωπίζονται προβλήματα όπου η απόκριση εξαρτάται από την ιστορία των παραμορφώσεων ή, όπως είθισται να λέγεται διεθνώς, το υλικό παρουσιάζει *path-dependent* συμπεριφορά. Ο,τι αναφερθεί παρακάτω, αφορά συγκεκριμένο σημείο x πεπερασμένου στοιχείου e

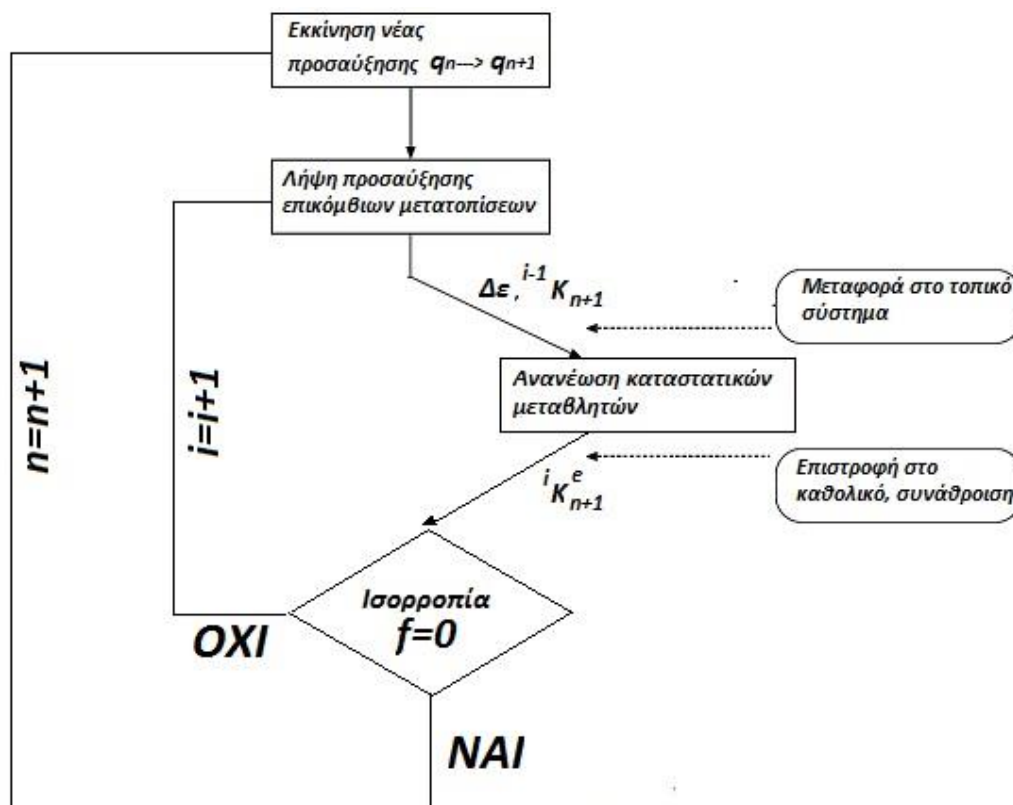


55-Προσαυξητικές και συνολικές προσαυξητικές επικόμβιες μετατοπίσεις εντός προσαυξητικού βήματος

Το πρόβλημα που ανακύπτει σε αυτό το σημείο αποτελεί το θεμελιώδες πρόβλημα της υπολογιστικής πλαστικότητας, το οποίο είναι γνωστό και ως **ελαστοπλαστικό καταστατικό πρόβλημα αρχικών τιμών**:

Δοθείσης μιας προσαύξεσης των ολικών παραμορφώσεων $\Delta \epsilon$ στο σημείο x του στοιχείου e και με γνωστές τις καταστατικές μεταβλητές στον «χρόνο» t_n , $\{\epsilon_n, \epsilon_n^p, q_n\}$, να γίνει ανανέωση των καταστατικών μεταβλητών στο x για τον χρόνο $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, όπου $\Delta t \rightarrow \Delta \epsilon$, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι καταστατικές εξισώσεις.

Η ανανέωση των καταστατικών μεταβλητών είναι προφανώς το πρόβλημα που ανακύπτει στο βήμα 4 του Πίνακα 3.1, καθώς πρέπει να γίνει ολοκλήρωση των τάσεων προκειμένου να υπολογιστεί μια νέα προσέγγιση του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας, και άρα μια νέα προσέγγιση των συνολικών επικόμβιων μετακινήσεων. Επομένως, σε κάθε επανάληψη i κάθε προσαυξητικού βήματος, μεταφερόμαστε από το καθολικό σύστημα του φορέα στο τοπικό των στοιχείων, και συγκεκριμένα στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss των στοιχείων, προκειμένου να ανανεώσουμε τις καταστατικές μεταβλητές, και έπειτα μεταφερόμαστε πάλι στο καθολικό σύστημα, ώστε να δούμε αν επιτεύχθηκε ισορροπία και, επομένως, να επιβάλλουμε νέο προσαυξητικό φορτίο ή αν χρειαζόμαστε περισσότερες επαναλήψεις.



56-Διάγραμμα ροής προσαυξητικής διαδικασίας

Αξίζει δε να τονισθεί ότι οι καταστατικές μεταβλητές που υπολογίζονται μέσα σε μια επανάληψη i στο προσαυξητικό βήμα $n + 1$ αποτελούν **δυναμικά** λύσεις, και μόνο εκ των υστέρων βλέπουμε αν ικανοποιείται η γενική συνθήκη ισορροπίας (3.41). Έτσι, σε ότι ακολουθεί, πραγματευόμαστε μεταβλητές που προκύπτουν από το διάνυσμα συνολικής προσαύξησης των ολικών παραμορφώσεων της τρέχουσας επανάληψης i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ του στοιχείου e , $\{ {}_0^i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \}$, το οποίο έχει ως αρχική κατάσταση αναφοράς το προσαυξητικό βήμα n στο οποίο έχει επέλθει σύγκλιση:

$${}_0^i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = B {}_0^i \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad (3.50)$$

Ο εκθέτης δήλωσης του στοιχείου έχει απαλειφθεί μιας και, όπως είπαμε προηγουμένως, η διαδικασία ανανέωσης των καταστατικών μεταβλητών λαμβάνει τόπο στο επίπεδο του στοιχείου, ενώ ο εκθέτης i που δηλώνει την τρέχουσα επανάληψη Newton-Raphson εντός του προσαυξητικού βήματος διατηρείται για λόγους εποπτείας.

3.8.2 Ελαστική πρόβλεψη-πλαστική διόρθωση.

Η επαυξητική-επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson, έτσι όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.5, έχει εφαρμογή μόνο στην περίπτωση όπου η καμπύλη ικανότητας του φορέα είναι γνησίως αύξουσα για την δεδομένη φόρτιση. Αν, για παράδειγμα, από μια στάθμη φόρτισης και έπειτα, η κλίση γινόταν φθίνουσα, το φθίνων κομμάτι δεν θα μπορούσαμε να το εξαγάγουμε επιβάλλοντας πρόσθετη φόρτιση και, τότε, θα ήταν αναγκαία η χρήση άλλης προσαυξητικής-επαναληπτικής μεθόδου (όπως η μέθοδος μήκους τόξου). Σε κάθε περίπτωση, το πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

Με ποιο τρόπο θα ανανεώσουμε την τάση $\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}$ και τις υπόλοιπες καταστατικές μεταβλητές, όταν δεν γνωρίζουμε τις συνιστώσες $\Delta \varepsilon^{el}$ και $\Delta \varepsilon^{pl}$ στις οποίες διαμερίζεται η συνολική προσαυξητική παραμόρφωση, $\Delta \varepsilon$, την οποία και γνωρίζουμε?

Η γνώση των $\Delta \varepsilon^{el}$ και $\Delta \varepsilon^{pl}$, είναι απαραίτητη, καθώς μέσω αυτών ολοκληρώνονται οι καταστατικές εξισώσεις και προκύπτει αν το σημείο

ενδιαφέροντος α) εμμένει στην πλαστική ροή β) αποφορτίζεται ελαστικά γ) φορτίζεται ελαστικά δ) φορτίζεται ουδέτερα.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την άρση του παραπάνω προβλήματος βασίζεται αρχικά στην υπόθεση ότι το σημείο ενδιαφέροντος x αποκρίνεται ελαστικά. Οι τάσεις υπολογίζονται σύμφωνα με τον νόμο του Hooke και ελέγχεται η συνάρτηση διαρροής. Αν παραβιάζεται η συνθήκη $f \leq 0$, τότε το σημείο διέρρευσε σε κάποια στάθμη τάσης μεταξύ $(\sigma_n, \sigma_n + E\Delta\varepsilon)$ και απαιτείται διόρθωση ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $f = 0$. Το εντατικό σημείο που λαμβάνεται με θεώρηση πλήρους ελαστικής απόκρισης ονομάζεται *ελαστική πρόβλεψη*, ενώ η διαδικασία κατά την οποία διορθώνεται το εντατικό σημείο, σε περίπτωση διαρροής, ονομάζεται *πλαστική διόρθωση*.

Ελαστική πρόβλεψη

Κατά το βήμα της ελαστικής πρόβλεψης, το οποίο ορίζει τις αρχικές συνθήκες της διαδικασίας ανανέωσης των καταστατικών μεταβλητών για κάθε νέα επανάληψη i , θεωρούμε μηδενική επιπρόσθετη πλαστική ροή:

$${}^i\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + {}_0^i\Delta\varepsilon_{n+1} \quad (3.51)$$

$${}_0^i\Delta\varepsilon_{n+1}^{pl,TR} = 0 \rightarrow {}^i\varepsilon_{n+1}^{pl,TR} = \varepsilon_n^{pl} \quad (3.52)$$

$${}_0^i\Delta\mathbf{q}_{n+1}^{pl,TR} = 0 \rightarrow {}^i\mathbf{q}_{n+1}^{TR} = \mathbf{q}_n \quad (3.53)$$

$${}^i\varepsilon_{n+1}^{el,TR} = {}^i\varepsilon_{n+1} - {}^i\varepsilon_{n+1}^{pl,TR} \rightarrow$$

$${}^i\varepsilon_{n+1}^{el,TR} = {}^i\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{pl} \quad (3.54)$$

$${}^i\sigma_{n+1}^{TR} = \mathbf{C}^i\varepsilon_{n+1}^{el,TR} \rightarrow$$

$${}^i\sigma_{n+1}^{TR} = \mathbf{C}[{}^i\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{pl}] \quad (3.55)$$

Με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες (3.51)→(3.55), ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνάρτηση διαρροής:

$$f({}^i\sigma_{n+1}^{TR}, {}^i\mathbf{q}_{n+1}^{TR}) = {}^if_{n+1}^{TR} \leq 0 \quad (3.56)$$

όπου \mathbf{q} το διάνυσμα των παραμέτρων ισοτροπικής και κινηματικής κράτυνσης.

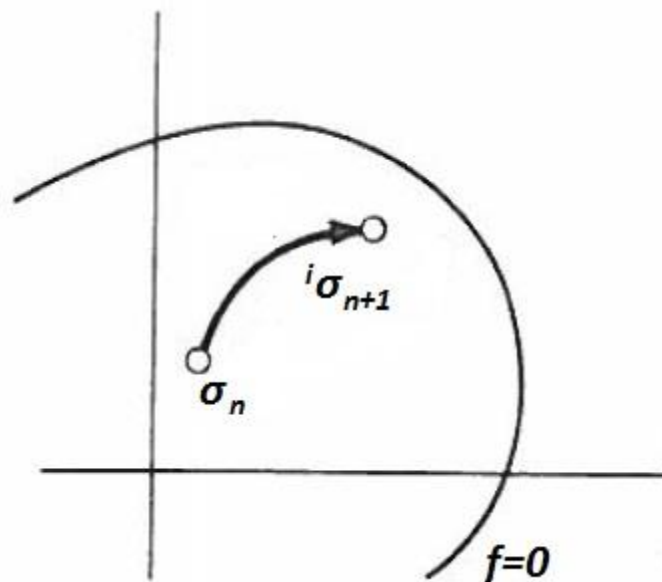
Αν ικανοποιείται η (3.56), τότε ικανοποιούνται επίσης α) η καταστατική σχέση τάσεων παραμορφώσεων, β) οι εξελικτικοί νόμοι πλαστικής ροής και κράτυνσης της μορφής (2.40) και (2.70) αντίστοιχα για $\Delta\gamma = 0$ και γ) οι συνθήκες Kuhn-Tucker. Οι καταστατικές μεταβλητές του βήματος της ελαστικής πρόβλεψης είναι οι ανανεωμένες μεταβλητές της επανάληψης i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ αφού ικανοποιείται το καταστατικό μοντέλο τοπικά και το βήμα ήταν καθαρά ελαστικό :

$${}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}$$

$${}^i \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n$$

$${}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR}$$

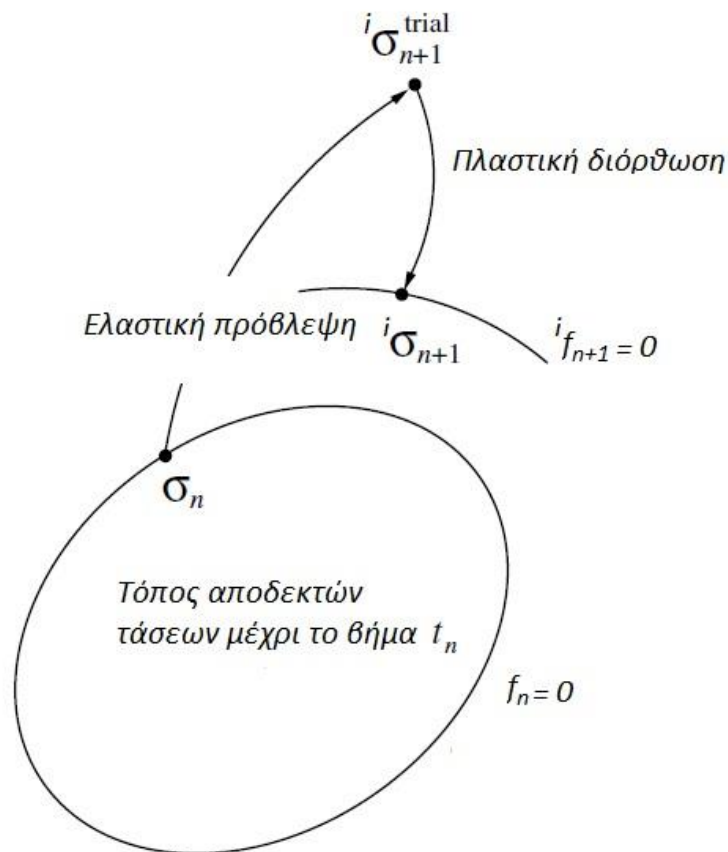
Με βάση αυτές, υπολογίζουμε έπειτα το διάνυσμα ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων των εσωτερικών δυνάμεων και το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου.



57-Ελαστική απόκριση σε σημείο x στοιχείου e στην επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$

Πλαστική διόρθωση

Στην περίπτωση του δεν ικανοποιείται η (3.56) και ${}^i f_{n+1}^{TR} > 0$, τότε απαιτείται διόρθωση ώστε το εντατικό σημείο αφενός να βρίσκεται εντός του τόπου των αποδεκτών τάσεων, δηλαδή ${}^i f_{n+1} \leq 0$, αφετέρου να ικανοποιεί την συνθήκη ${}^i f_{n+1} = 0$ όπως επιτάσσει η συνθήκη συμβατότητας, καθώς η προσαύξηση των παραμορφώσεων προκάλεσε πλαστική ροή στο σημείο ενδιαφέροντος. Πρέπει επομένως να επιστρέψουμε το (δοκιμαστικό) εντατικό σημείο **πάνω** στην επιφάνεια διαρροής, ${}^i \sigma_{n+1}^{TR} \rightarrow {}^i \sigma_{n+1}$. Το βήμα κατά το οποίο απαιτείται διόρθωση της δοκιμαστικής ελαστικής πρόβλεψης ώστε να επαναφέρουμε το εντατικό σημείο επί της επιφάνειας διαρροής ονομάζεται πλαστική διόρθωση.



58-Πλαστική διόρθωση στο σημείο ενδιαφέροντος x

Στο σχήμα 58 παρουσιάζεται η επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής ${}^i f_{n+1} = 0$. Στην γενική περίπτωση όπου έχουμε κράτυνση, ισχύει ${}^i f_{n+1} \neq f_n$. Αυτό συμβαίνει διότι κατά την προσαύξηση των

παραμορφώσεων, οι καταστατικές μεταβλητές q που καθορίζουν την εξέλιξη της επιφάνειας διαρροής μεταβάλλονται.

3.8.3 Η διαδικασία ολοκλήρωσης return-map

Η επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής από το δοκιμαστικό εντατικό σημείο γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων προκειμένου να καταλήξουμε στην νέα επιφάνεια διαρροής ${}^i f_{n+1} = 0$. Η διαδικασία αυτή της αριθμητικής ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων ονομάζεται αλγοριθμική διαδικασία ολοκλήρωσης ή αλγόριθμος return-map και, γεωμετρικά, ισοδυναμεί με την προσπάθεια εύρεσης της ελάχιστης απόστασης ενός σημείου από ένα κυρτό σύνολο. Η λογική του αλγορίθμου αφορά στην επιστροφή του εντατικού σημείου στην νέα επιφάνεια διαρροής μέσω της συντομότερης ενεργειακά διαδρομής από το δοκιμαστικό εντατικό σημείο. Η διαδικασία αυτή είναι συνήθως επαναληπτική καθώς μεταχειρίζεται τις καταστατικές εξισώσεις σε διακριτοποιημένη μορφή και «προοδεύει» με την απαίτηση ικανοποίησης της συνθήκης συμβατότητας ${}^i f_{n+1} = 0$ σε κάθε επανάληψη όπου, μέσω της ελαστικής πρόβλεψης, το δοκιμαστικό εντατικό σημείο βρίσκεται εκτός του τόπου αποδεκτών τάσεων.

Διαφορική-συνεχής μορφή καταστατικών εξισώσεων

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{e}l} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{p}l}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{p}l} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = -\dot{\gamma} H_{kin} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \quad (\text{back-stress})$$

$$\varepsilon_{eff}^{\dot{p}} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{p}l} \boldsymbol{\varepsilon}^{\dot{p}l}} \quad (3.57)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]$$

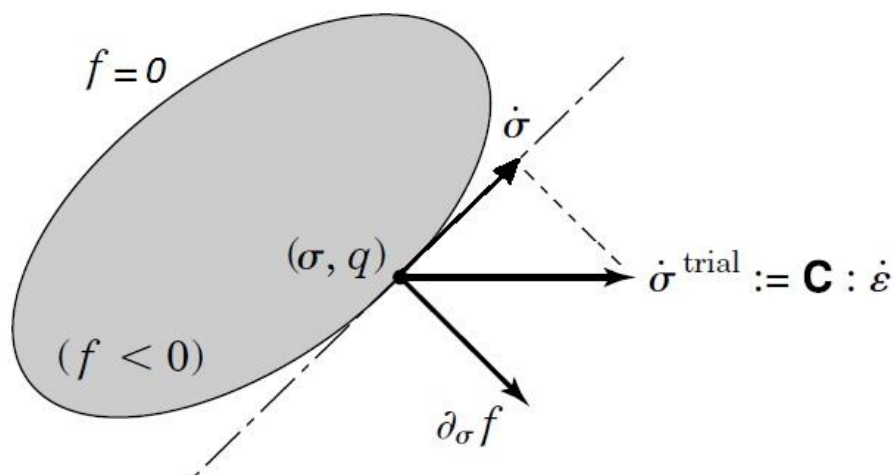
$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} - H_{iso} \varepsilon_{eff}^{\dot{p}} = 0$$

Οι εξελικτικοί νόμοι κινηματικής και ιστροπικής κράτυνσης (3.57)³, (3.57)⁴ μπορούν να συμπυχθούν σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν στην παράγραφο (2.3.5.5) ως εξής:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\gamma} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.57\alpha)$$

Αντίστοιχα, η (3.57)⁶ διαμορφώνεται ως εξής, σύμφωνα με την (3.57α)

$$\dot{f} = \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.57\beta)$$



59-Ρυθμοί μεταβολής τάσης και δοκιμαστικής τάσης

Αν το εντατικό σημείο βρίσκεται επί της επιφάνειας διαρροής, τότε, όσο εμμένει η πλαστική ροή λόγω εξωτερικών φορτίων, το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της τάσης με τον χρόνο οφείλει να είναι εφαπτομενικό στην επιφάνεια διαρροής. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης συμβατότητας, καθώς εντατικά σημεία εκτός της επιφάνειας διαρροής δεν είναι αποδεκτά.

Συνεχής μορφή συνθηκών Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0, \quad f \leq 0 \quad (3.58)$$

Οι σχέσεις (3.57)¹ έως (3.57)⁵ αποτελούν την διαφορική-συνεχή έκφραση των καταστατικών εξισώσεων τις οποίες οφείλει να ικανοποιεί το σημείο ενδιαφέροντος x και οι οποίες, μαζί με τις (3.58), πρέπει να διακριτοποιηθούν και να ολοκληρωθούν αριθμητικά ώστε ανανεωθούν οι καταστατικές παράμετροι για την επανάληψη i . Η σχέση (3.57)⁶ είναι η συνθήκη συμβατότητας, όπου κατά την πλαστική διόρθωση, ισχύει $\dot{\gamma} > 0$ και επομένως πρέπει $\dot{f} = 0$.

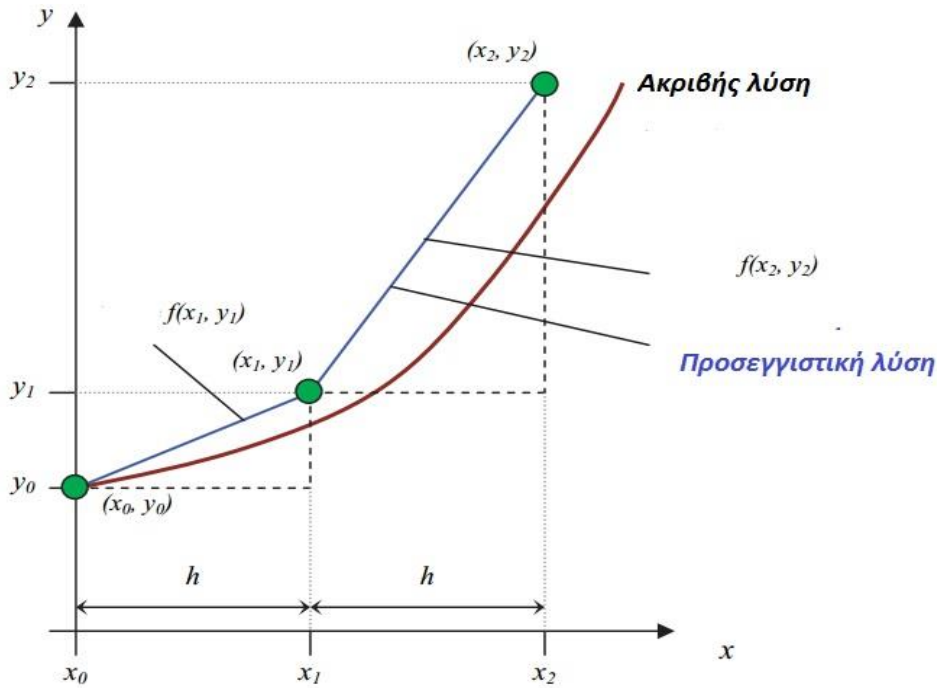
Έμμεση προς-τα-πίσω ολοκλήρωση κατά Euler

Οι καταστατικές μεταβλητές διακριτοποιούνται και ολοκληρώνονται αριθμητικά για το διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$. Η πιο διαδεδομένη μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων είναι η **έμμεση προς-τα-πίσω ολοκλήρωση κατά Euler**, κατά την οποία, νέα προσέγγιση της συνάρτησής μας $y_n(x)$ αναζητείται γραμμικοποιώντας «προς τα πίσω» από περιοχή του x_{n+1} , χρησιμοποιώντας την κλίση της y στο x_{n+1} . Με άλλα λόγια, εξίσωση που προκύπτει είναι πεπλεγμένη και πρέπει να επιλυθεί επαναληπτικά, καθώς χρησιμοποιεί ως πληροφορία την κλίση της y στο x_{n+1} .

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \quad (3.59)$$

Όπως είναι προφανές, στην παραπάνω σχέση δεν γνωρίζουμε ούτε την y_{n+1} την οποία και ψάχνουμε, ούτε την κλίση της, f_{n+1} . Οπότε, για να εκκινήσει η επαναληπτική διαδικασία, απαιτείται μια *αρχική υπόθεση* για την y_{n+1}^0 , υπολογίζεται η f_{n+1} που αντιστοιχεί σε αυτή την εκτίμηση και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι τουλάχιστον δύο επαναλήψεις ικανοποιούν την συνθήκη σύγκλισης. Τέτοιου είδους μέθοδοι, όπως η *προς-τα-πίσω ολοκλήρωση κατά Euler* ανήκουν στην κατηγορία μεθόδων κλειστής μορφής «*Prediction-Correction Methods*».

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η προσέγγιση(μπλε γραμμή) της ακριβούς λύσης (κόκκινη καμπύλη).



60-Προσέγγιση καμπύλης με την προς-τα-πίσω μέθοδο Euler

Διακριτοποιημένη μορφή καταστατικών εξισώσεων

Σύμφωνα με το σχήμα της προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, οι καταστατικές σχέσεις (3.57) διαμορφώνονται ως εξής:

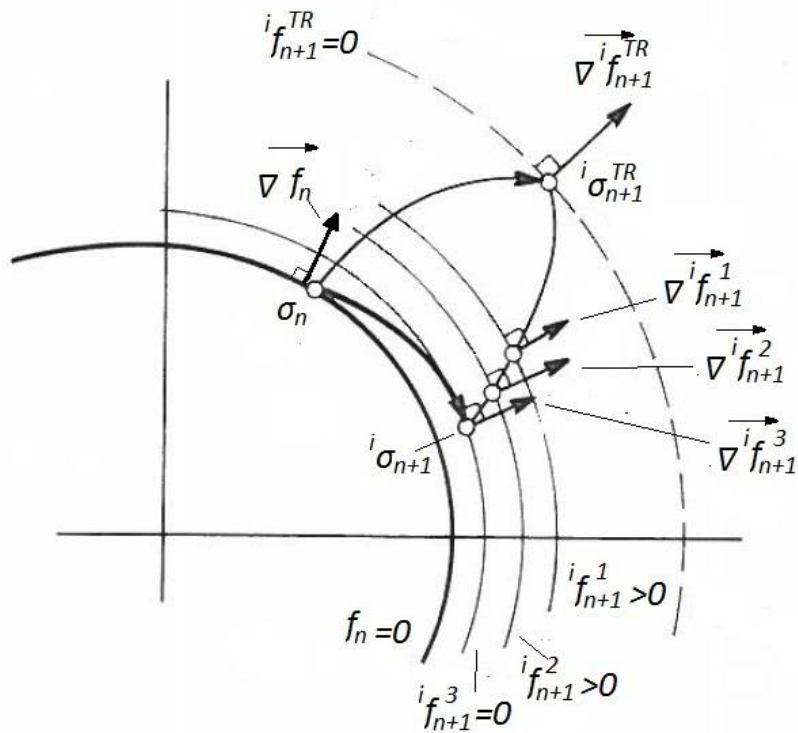
$${}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + {}_0^i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (3.60\alpha)$$

$${}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} + \Delta \gamma \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \quad (3.60\beta)$$

$${}^i \boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n - \Delta \gamma \tilde{\boldsymbol{D}} \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} \right|_{n+1} \quad (3.60\gamma)$$

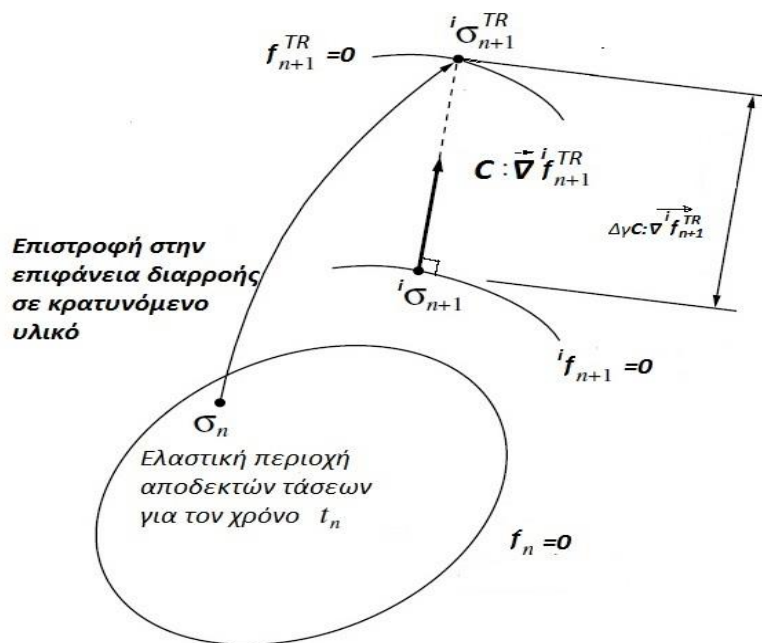
$${}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} - \Delta \gamma \tilde{\boldsymbol{C}} : \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \quad (3.60\delta)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γεωμετρική απεικόνιση της εφαρμογής του σχήματος προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, όπου η αρχική πληροφορία για την πλαστική διόρθωση εξάγεται από το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια f_{n+1}^{TR} , και όχι στην αρχική f_n .



61- Διαδικασία ολοκλήρωσης προς-τα-πίσω κατά Euler

Η διαδρομή δε την οποία ακολουθεί το εντατικό σημείο, εκκινώντας από το $i\sigma_{n+1}^{TR}$ για να φτάσει στο $i\sigma_{n+1}$ φαίνεται στο σχήμα 62, αξιοποιώντας την (3.60δ):



62- Προβολή δοκιμαστικής ελαστικής τάσης στην μετέπειτα επιφάνεια διαρροής.

Διακριτή μορφή συνθηκών Kuhn-Tucker

$$\Delta\gamma \geq 0, \quad \Delta\gamma^i f_{n+1} = 0, \quad {}^i f_{n+1} \leq 0 \quad (3.61)$$

Προκειμένου να εκκινήσει η επαναληπτική διαδικασία επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής από το δοκιμαστικό εντατικό σημείο, αναζητούμε λύση α) γραμμικοποιώντας την συνάρτηση ${}^i f_{n+1}^{TR} > 0$ –ή, αντίστοιχα, διακριτοποιώντας την (2.57β)- στην περιοχή του δοκιμαστικού εντατικού σημείου και θέτουμε το τελευταίο ως αρχική συνθήκη εκκίνησης της διαδικασίας επιστροφής ή β) απαιτώντας την ικανοποίηση της συνθήκης συμβατότητας εκ των προτέρων για το ${}^i \sigma_{n+1}, {}^i f_{n+1} = 0$.

3.8.3.1. Cutting plane αλγόριθμος return-map (α)

$${}^i f_{n+1}^{j+1} = {}^i f_{n+1}^j + \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^j ({}^i \sigma_{n+1}^{j+1} - {}^i \sigma_{n+1}^j) + \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial q} \right|_{n+1}^j ({}^i q_{n+1}^{j+1} - {}^i q_{n+1}^j) \quad (3.62)$$

Ο εκθέτης i δηλώνει την επανάληψη της Newton-Raphson στην οποία βρισκόμαστε και διατηρείται καθαρά για λόγους εποπτείας, ο δείκτης $n + 1$ τον αριθμό του προσαυξητικού βήματος και ο εκθέτης j δηλώνει την επανάληψη της προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler καθώς επιστρέφουμε στην επιφάνεια διαρροής. Θέτοντας $j = 0$, έχουμε:

$${}^i \sigma_{n+1}^0 = {}^i \sigma_{n+1}^{TR} = \mathbf{C} [{}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}]$$

$${}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl, 0} = {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl, TR} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}$$

$${}^i \mathbf{q}_{n+1}^0 = {}^i \mathbf{q}_{n+1}^{TR} = \mathbf{q}_n$$

$$\Delta\gamma_{n+1}^0 = \Delta\gamma_{n+1}^{TR} = 0$$

τα οποία είναι οι καταστατικές μεταβλητές της ελαστικής πρόβλεψης. Θεωρώντας κάθε εντατικό σημείο που δεν ικανοποιεί τα καταστατικές εξισώσεις –δηλ. ${}^i f_{n+1}^j > 0$ – ως ,τρόπον τινά, «διορθωμένο» δοκιμαστικό εντατικό σημείο, οι διαφορές $({}^i \sigma_{n+1}^{j+1} - {}^i \sigma_{n+1}^j)$,

$({}^i \mathbf{q}_{n+1}^{j+1} - {}^i \mathbf{q}_{n+1}^j)$ αντικαθίστανται στην (3.62) μέσω των (3.60γ),(3.60δ) και η (3.62) διαμορφώνεται ως εξής:

$${}^i f_{n+1}^{j+1} = {}^i f_{n+1}^j - \Delta\gamma \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{C}} : \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^j - \Delta\gamma \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{D}} : \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^j \quad (3.63)$$

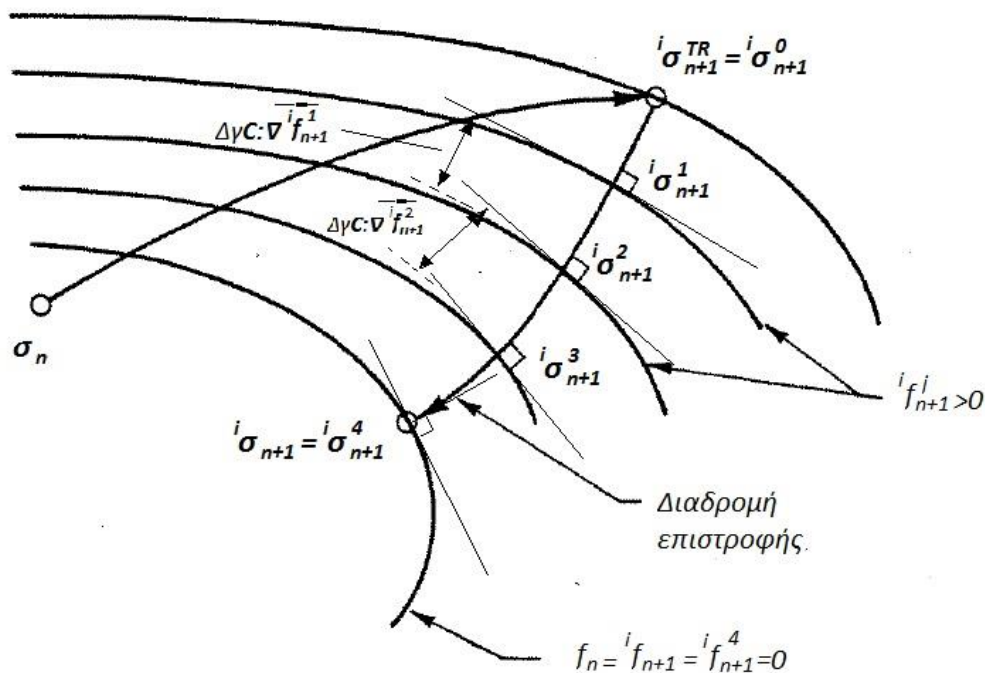
Απαιτώντας η νέα προσέγγιση να ικανοποιεί την συνθήκη συμβατότητας, ${}^i f_{n+1}^{j+1} = 0$, η (3.63) επιλύεται ως προς $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma^{j+1} = \frac{{}^i f_{n+1}^j}{\left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{C}} : \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^j + \Delta\gamma \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{D}} : \left. \frac{\partial {}^i f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^j} \quad (3.64)$$

Αντικαθιστώντας την (3.64) στις (3.60β),(3.60γ),(3.60δ) λαμβάνουμε τις ανανεωμένες τιμές για τις καταστατικές μεταβλητές $\{ {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl,j+1}, {}^i \mathbf{q}_{n+1}^{j+1}, {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{j+1} \}$ και κάνουμε έλεγχο σύγκλισης:

$$|{}^i f_{n+1}^{j+1}| \leq TOL |{}^i f_{n+1}^0| = TOL |{}^i f_{n+1}^{TR}| \quad (3.65)$$

Αν έχουμε σύγκλιση, τότε $\{ {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl,j+1}, {}^i \mathbf{q}_{n+1}^{j+1}, {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{j+1} \} = \{ {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl}, {}^i \mathbf{q}_{n+1}, {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \}$, υπολογίζουμε το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο και συνεχίζουμε στο βήμα 5 του Πίνακα 3.1. Διαφορετικά θέτουμε $i+1 \rightarrow i$ και υπολογίζουμε νέα τιμή για το $\Delta\gamma$ από την σχέση (3.64), μέχρι να ικανοποιηθεί η (3.65). Στο σχήμα 63 βλέπουμε την γεωμετρική απεικόνιση της επαναληπτικής αριθμητικής ολοκλήρωσης για την περίπτωση απολύτως πλαστικού υλικού (χωρίς κράτυνση). Οι ελαστική πρόβλεψη καθορίζει ένα σημείο -predictor- το οποίο και αποτελεί το σημείο εκκίνησης -αρχικές συνθήκες- της επαναληπτικής διαδικασίας διόρθωσης -corrector- της αρχικής (ελαστικής) πρόβλεψης. Η επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής γίνεται με προβολή σε κάθε επανάληψη της τάσης ${}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j$ στο εφαπτόμενο στην ${}^i f_{n+1}^{j+1}$ επίπεδο μέσω μιας ευθείας τομής, η οποία προέκυψε με γραμμικοποίηση της ${}^i f_{n+1}$ στην «περιοχή» του j . Η αρχική γραμμικοποίηση έγινε στην περιοχή της ελαστικής πρόβλεψης. Στην περιοχή κοντά στην επιφάνεια διαρροής



63-Γεωμετρική απεικόνιση της επαναληπτικής διαδικασίας επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής

$i f_{n+1} = 0$, όπου και ικανοποιούνται οι καταστατικές εξισώσεις, αυτές οι γραμμές τομής τείνουν να γίνουν κάθετες προς αυτήν.

Πίνακας 3.2- Αλγόριθμος Return-Map Cutting Plane

- (i) Λήψη προσαύξησης στις συνολικές παραμορφώσεις έως την τρέχουσα επανάληψη και υπολογισμός συνολικών παραμορφώσεων:

$$i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + {}^i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$$

- (ii) Ελαστική πρόβλεψη:

$$i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 = i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} = \mathbf{C} [i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}]$$

$$i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl, 0} = i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl, TR} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}$$

$$i \mathbf{q}_{n+1}^0 = i \mathbf{q}_{n+1}^{TR} = \mathbf{q}_n$$

$$\Delta \gamma_{n+1}^0 = \Delta \gamma_{n+1}^{TR} = 0$$

- (iii) Έλεγχος διαρροής: $i f_{n+1}^0 \leq 0$? ΝΑΙ-> $i \{\}_{n+1}^0 = i \{\}_{n+1}$, ΕΞΟΔΟΣ
 ΟΧΙ-> $i = 0$

- (iv) Πλαστική διόρθωση: $\Delta \gamma^{j+1} = \frac{i f_{n+1}^j}{\frac{\partial i f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{C}} : \frac{\partial i f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}^j + \Delta \gamma \frac{\partial i f}{\partial q} \Big|_{n+1}^j : \tilde{\mathbf{D}} : \frac{\partial i f}{\partial q} \Big|_{n+1}^j}$,

$$i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{j+1} = i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^j - \Delta \gamma^{j+1} \tilde{\mathbf{C}} : \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1},$$

$$i \mathbf{q}_{n+1}^{j+1} = i \mathbf{q}_{n+1}^j - \Delta \gamma^{j+1} \tilde{\mathbf{D}} : \frac{\partial f^j}{\partial q} \Big|_{n+1},$$

$$i_{\epsilon_{n+1}}^{pl,j+1} = i_{\epsilon_{n+1}}^{pl,j} + \Delta\gamma^{j+1} \left. \frac{\partial f^j}{\partial \sigma} \right|_{n+1}$$

(v) Έλεγχος σύγκλισης: $|i_{f_{n+1}}^{j+1}| \leq TOL |i_{f_{n+1}}^0| = TOL |i_{f_{n+1}}^{TR}|$?

ΝΑΙ-> $i_{\Omega_{n+1}}^{j+1} = i_{\Omega_{n+1}}$

ΟΧΙ-> $i + 1 \rightarrow i$, ΠΗΓΑΙΝΕ ΣΤΟ ΒΗΜΑ (iv)

Ο παραπάνω αλγόριθμος αναπτύχθηκε από τους M.Ortiz & J.C. Simo[17].

3.8.3.2- CPP αλγόριθμος return map (β)

Ένας δεύτερος τρόπος επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής βασίζεται στον αλγόριθμο CPP –Closest Point Projection– ο οποίος αναπτύχθηκε από τους J.C.Simo και T.J.R.Hughes¹ και αποτελεί γενίκευση της μεθόδου ακτινικής επιστροφής (Radial return method) που προτάθηκε αρχικά από τον Wilkins². Όπως αναφέρθηκε ήδη, η παραπάνω μέθοδος βασίζεται στην εύρεση της ελάχιστης απόστασης ενός συγκεκριμένου σημείου (δοκιμαστικό εντατικό σημείο) από ένα κυρτό σύνολο (επιφάνεια διαρροής).

Αποδεικνύεται³ ότι για συσχετισμένη πλαστικότητα και με υιοθέτηση του σχήματος προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, η ανανεωμένη τάση $i_{\sigma_{n+1}}$ προκύπτει ως η προβολή του δοκιμαστικού εντατικού σημείου $i_{\sigma_{n+1}}^{TR}$ στο πλησιέστερο ενεργειακά σημείο της επιφάνειας διαρροής $i_{f_{n+1}}$ στην διεύθυνση που ορίζεται από το ελαστικό καταστατικό μητρώο ως τοπικού μετρικού τανυστή (σχ.62). Αυτό συμβαίνει διότι τα (εντατικά) σημεία οφείλουν να κείτονται στην επιφάνεια που ορίζει το κριτήριο von Mises στον υπόχωρο της επίπεδης έντασης. Έτσι, η απόσταση ενός αυθαίρετου σημείου της επιφάνειας διαρροής $i_{f_{n+1}} = 0$, το οποίο εξ ορισμού θα ικανοποιεί τις καταστατικές εξισώσεις, από το «συγκεκριμένο» δοκιμαστικό σημείο

¹ Βλ. J.C.Simo & T.J.R Hughes “Computational Inelasticity”, 2000.

² Wilkins M.L, “Calculation of elastic-plastic flow”

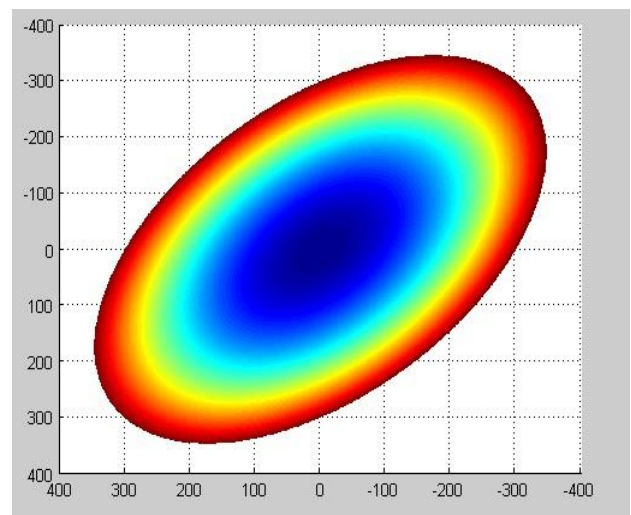
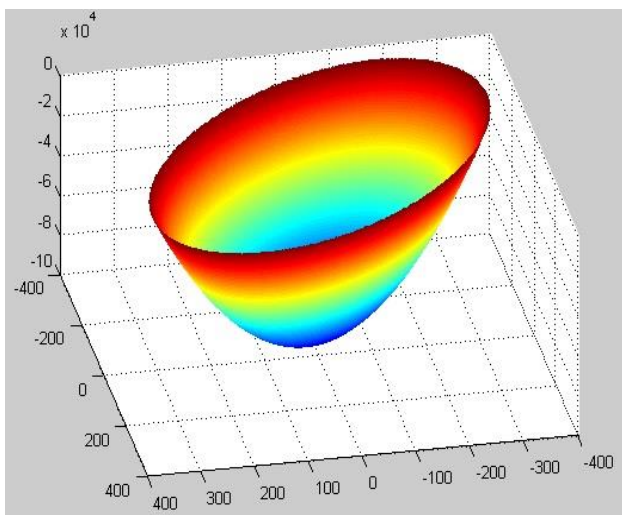
³ Βλ. J.C.Simo & T.J.R Hughes “Computational Inelasticity”, 2000

της ελαστικής πρόβλεψης, $i\sigma_{n+1}^{TR}$, είναι στην ουσία το μήκος του διανύσματος $(i\sigma_{n+1}^{TR} - \sigma)$, το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\|i\sigma_{n+1}^{TR} - \sigma\|^2 = (i\sigma_{n+1}^{TR} - \sigma)^T \tilde{C}^{-1} (i\sigma_{n+1}^{TR} - \sigma)$$

Ελαχιστοποιώντας την παραπάνω σχέση ως προς σ , προκύπτει το σημείο $i\sigma_{n+1}$ στο οποίο επιστρέφουμε από το δοκιμαστικό εντατικό σημείο. Είναι προφανές ότι αντικαθιστώντας το \tilde{C}^{-1} με ένα μοναδιαίο διαγώνιο πίνακα ίδιων διαστάσεων, το αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης θα ήταν η γνωστή εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε περισσότερες διαστάσεις.

Στην περίπτωση της τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης και της επίπεδης παραμόρφωσης, η επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής γίνεται ακτινικά ενώ στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, η επιστροφή δεν γίνεται ακτινικά(σχ.64) καθώς οφείλουμε να παραμείνουμε στον (υπο)χώρο της επίπεδης έντασης ($\sigma_{i3} = 0$). Σε κάθε περίπτωση, η επιστροφή γίνεται μέσω της συντομότερης διαδρομής, και όπως θα δούμε, απαιτείται επαναληπτική διαδικασία στα πλαίσια της προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler.



64-α) Το subspace των τάσεων στην επίπεδη ένταση β) Η επιφάνεια διαρροής για $f = 0$ (σταθερό σ_y)

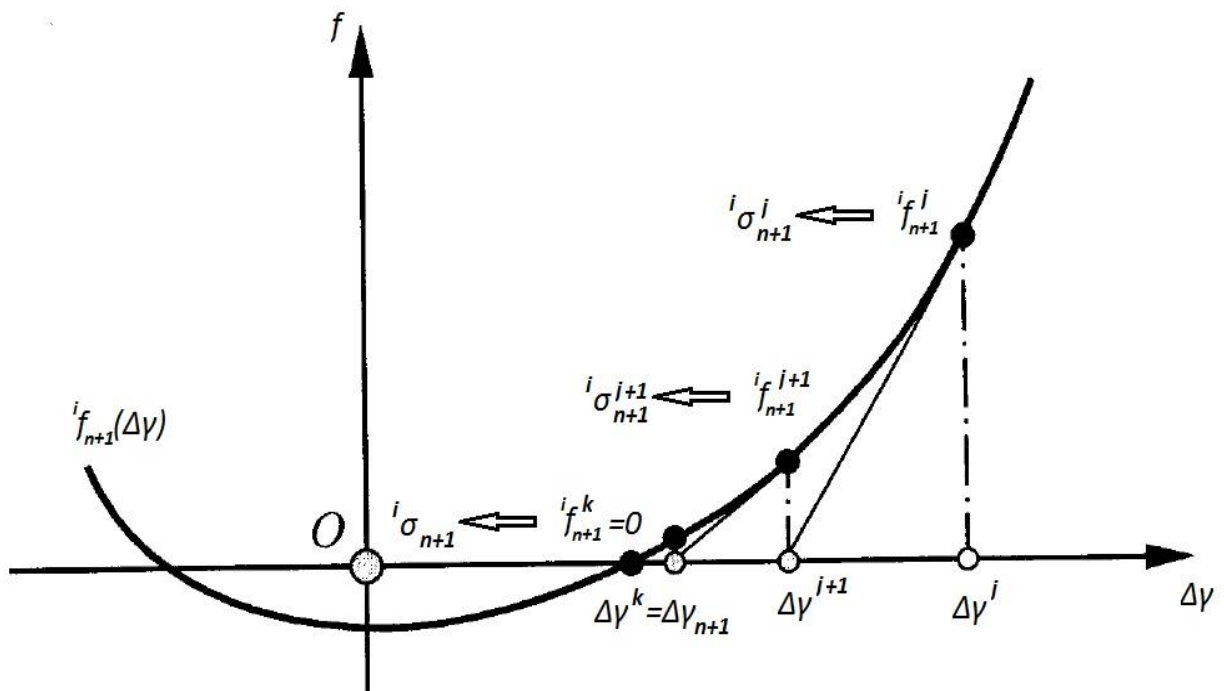
Οι διακριτοποιημένες καταστατικές σχέσεις του ελαστικής πρόβλεψης δίνονται από τις (3.51)->(3.55), της πλαστικής διόρθωσης από τις (3.60α)->(3.60δ) και των συνθηκών φόρτισης/αποφόρτισης από την (3.61). Απαιτώντας ικανοποίηση της συνθήκης συμβατότητας στο τέλος του βήματος, έχουμε:

$$\begin{aligned} {}^i f_{n+1} = 0 &\rightarrow {}^i f_{n+1}^2 = 0 \rightarrow \\ \frac{1}{2} {}^i \bar{f}_{n+1}^2 - {}^i \Phi_{n+1}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Η ${}^i \bar{f}_{n+1}^2$ αντιπροσωπεύει την ισοδύναμη τάση και η ${}^i \Phi_{n+1}^2$ την συνάρτηση εξέλιξης της επιφάνειας διαρροής, κατά τα πρότυπα της (2.77)⁶. Αντικαθιστώντας στην (3.66) τις σχέσεις της πλαστικής διόρθωσης (3.60α)->(3.60δ), προκύπτει ότι οι ${}^i \bar{f}_{n+1}$ και ${}^i \Phi_{n+1}$ είναι, σε τελική ανάλυση, συναρτήσεις του $\Delta\gamma$ και της ελαστικής πρόβλεψης, όπου η τελευταία συνιστά καθορισμένο(γνωστό) βήμα. Επομένως η επίλυση της (3.66) ως προς $\Delta\gamma$ μας δίνει ένα πολυώνυμο 4^{ης} τάξης, το οποίο επιλύεται αριθμητικά. Αποδुकνύεται δε, ότι για $\Delta\gamma \in [0, \infty)$, το πολυώνυμο (3.66) είναι συνάρτηση γνησίως φθίνουσα.

$${}^i f_{n+1}(\Delta\gamma) \searrow \text{για } \Delta\gamma \in [0, \infty)$$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο Newton-Raphson για την εύρεση της θετικής ρίζας της ${}^i f_{n+1}(\Delta\gamma) = 0$, κάθε $\Delta\gamma^j$ της επανάληψης j μας δίνει και μια ανανέωση των καταστατικών μεταβλητών (σχ.64). Ωστόσο, στο βαθμό που δεν έχει επέλθει η ικανοποιητική σύγκλιση αυτές δεν θα ικανοποιούν τις καταστατικές εξισώσεις. Η τάση που αντιστοιχεί στην j επανάληψη της τοπικής Newton-Raphson είναι ορθή προβολή του δοκιμαστικού ελαστικού σημείο στην ${}^i f_{n+1}(\Delta\gamma^j) > 0$. Η διαδικασία πλαστικής διόρθωσης ολοκληρώνεται στην επανάληψη $j = k$, όπου ισχύει ${}^i f_{n+1}(\Delta\gamma^k) = 0$, και έπεται η ανανέωση των καταστατικών μεταβλητών με βάση το $\Delta\gamma^k$.

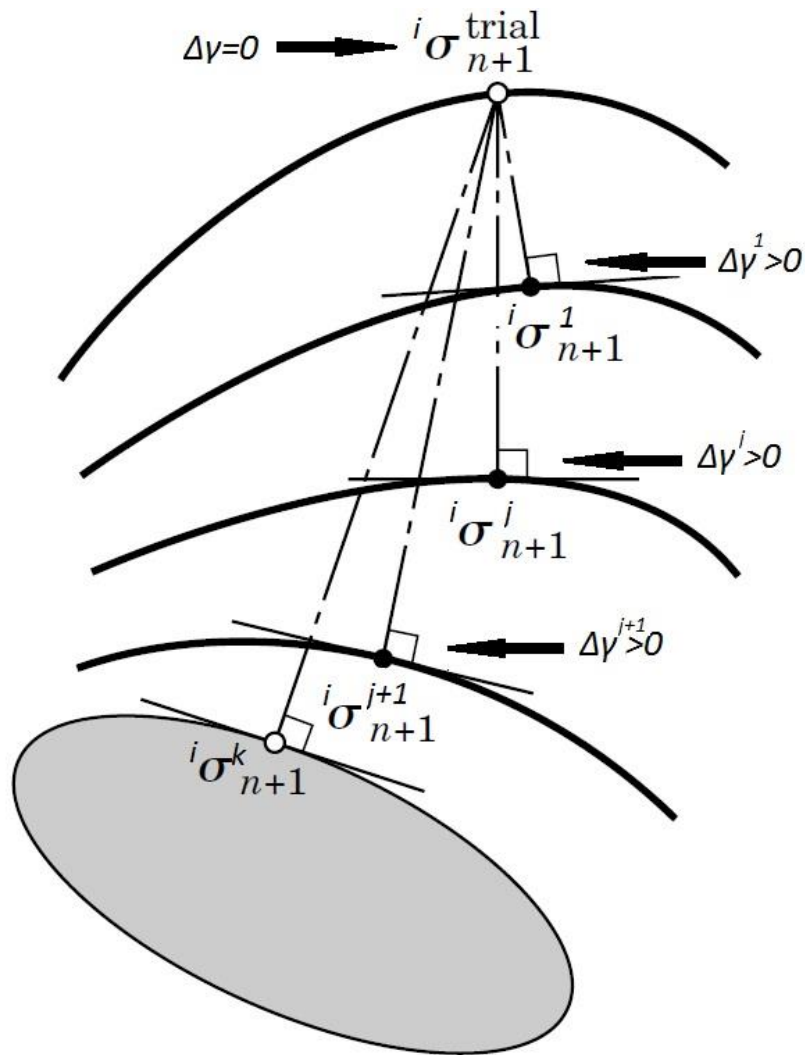


64-Καμπύλη $f_{n+1}^i(\Delta\gamma)$

Σε αντίθεση με τον αλγόριθμο Cutting Plane, όπου η νέα προσέγγιση f_{n+1}^{j+1} γινόταν με αρχική διεύθυνση εκκίνησης την $\left. \frac{\partial f_{n+1}^i}{\partial \sigma} \right|_j$, η οποία ήταν γνωστή, αφού για $j=0$ παίρναμε ως αρχική συνθήκη της επαναληπτικής διαδικασίας την ελαστική πρόβλεψη, στον CPP αλγόριθμο, η νέα προσέγγιση f_{n+1}^{j+1} γίνεται σε κάθε βήμα από την f_{n+1}^{TR} κατά την διεύθυνση $\left. \frac{\partial f_{n+1}^i}{\partial \sigma} \right|_{j+1}$, η οποία δεν μας είναι γνωστή, και γιαυτό εκφράσαμε την (3.66) ως προς $\Delta\gamma$. Επομένως, ο πρώτος αφορά μια άμεση (explicit) ολοκλήρωση, σε αντίθεση με τον δεύτερο(CPP) που είναι έμμεση.

Η βασικότερη διαφορά ωστόσο είναι η αδυναμία εξαγωγής ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου, συμβατού με το επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου N-R. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν περιλαμβάνονται υπολογισμοί των μεταβολών των κλίσεων του πεδίου ροής (που περιλαμβάνονται στο μητρώο Ξ , βλ. παρακάτω)

Στο σχήμα 65 φαίνεται η επαναληπτική διαδικασία επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής σύμφωνα με τον αλγόριθμο CPP.



65-Πλαστική διόρθωση σύμφωνα με τον αλγόριθμο CPP

3.8.4- Συνεχές και συμβατό ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο

Αφού επιστρέψει το δοκιμαστικό εντατικό σημείο στην επιφάνεια διαρροής μέσω του αλγορίθμου return-map, το μόνο που μένει είναι να υπολογιστεί το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο ${}^i\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{ep}$ στο σημείο ενδιαφέροντος (Gauss point), ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί και ο υπολογισμός του τροποποιημένου μητρώου ακαμψίας για κάθε στοιχείο και να προχωρήσουμε με το assembly στο καθολικό σύστημα και στον έλεγχο των γενικών εξισώσεων ισορροπίας:

$${}^i \left[\bigwedge_1^{nel} \left(\int_V \mathbf{B}^T {}^i \tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep} \mathbf{B} dV \right) \right]^{i+1} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{q}_{n+1} - {}^i \mathbf{F}_{n+1}^{int}$$

Το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο δίνεται από την σχέση

$${}^i \tilde{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep} = \frac{\partial {}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.67)$$

Με γνωστές τις καταστατικές μεταβλητές $\{{}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, {}^i \mathbf{q}_{n+1}, {}^i \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{ep}\}$, το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο υπολογίζεται από την σχέση (2.72). Η εξαγωγή της σχέσης (2.72) έγινε με επεξεργασία των καταστατικών εξισώσεων στην συνεχή τους μορφή και, έτσι, το μητρώο που προκύπτει με απευθείας αντικατάσταση των καταστατικών μεταβλητών στην (2.72) ονομάζεται **συνεχές ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο**. Έχει αποδειχθεί ότι χρήση του συνεχούς ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου δεν είναι «συμβατή» με το γενικό προσαυξητικό-επαναληπτικό σχήμα Newton-Raphson, καθώς η ασυμπτωτική σύγκλιση δεν εξασφαλίζεται με τετραγωνικούς ρυθμούς.

Οι J.C.Simo και R.L.Taylor πρότειναν⁴, για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, την χρήση ενός ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου που προκύπτει με γραμμικοποίηση των καταστατικών μεταβλητών στην διακριτοποιημένη τους μορφή. Το καταστατικό μητρώο που προκύπτει με γραμμικοποίηση των εξισώσεων του αλγορίθμου ονομάζεται συμβατό ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο. Το τελευταίο εξασφαλίζει σύγκλιση με τετραγωνικούς ρυθμούς στα πλαίσια του σχήματος Newton-Raphson, επιταχύνοντας αρκετά την υπολογιστική διαδικασία.

Παρατίθενται παρακάτω το συνεχές και συμβατό ή συνεπές ελαστοπλαστικό μητρώο, όπως εξήχθησαν⁵ για την περίπτωση συσχετισμένης πλαστικότητας με κριτήριο διαρροής Von Mises, με μη-γραμμική ιστροπική και κινηματική κράτυνση στα πλαίσια της προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler.

⁴ Βλ. J.C.Simo & R.L.Taylor "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", 1985

⁵ Στο ίδιο.

$$\tilde{\mathcal{C}}^{ep} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] - 2G\gamma\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (3.68)$$

(συνεχές)

$$\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}^{ep} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\beta \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] - 2G\bar{\gamma}\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (3.69)$$

όπου $\mathbf{1}$ ο μοναδιαίος τανυστής 2^{ns} τάξης, K και G χαρακτηριστικά του υλικού που σχετίζονται με την μεταβολή του όγκου και το διατμητικό μέτρο ελαστικότητας, \mathbf{I} είναι συμμετρικός τανυστής 4^{ns} τάξης, $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$, γ ο συντελεστής αναλογίας και $\hat{\mathbf{n}}$ το διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Στην σχέση (3.69) του συμβατού καταστατικού μητρώου εισάγεται η παράμετρος β η οποία απομειώνει την διατμητική αντίσταση G , ενώ τροποποιείται ο συντελεστής αναλογίας $\gamma \rightarrow \bar{\gamma}$, ο οποίος είναι ελαφρώς μικρότερος από τον γ . Για προσαυξητικά βήματα μεγάλου εύρους, η απόκλιση μεταξύ των δύο μητρώων γίνεται μεγάλη, ενώ για βήματα που τείνουν σε μηδενικό εύρος, τα δύο μητρώα καταλήγουν να ταυτίζονται.

3.8.5- Γενική προσαυξητική-επαναληπτική διαδικασία και τοπική ολοκλήρωση καταστατικών εξισώσεων

Με τον υπολογισμό του συμβιβαστού ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου, τροποποιούμε το μητρώο ακαμψίας κάθε στοιχείου και υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων των εσωτερικών δυνάμεων, ${}^iK_{n+1}^e$ και ${}^iF_{n+1}^{int,e}$ (βήμα 5, Πίνακας 3.1). Αφού γίνει συνάθροιση στο καθολικό σύστημα, ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη σύγκλισης για το out-of-balance vector ${}^if_{n+1}$ και συνεχίζουμε αναλόγως.

Ο υπολογισμός των καταστατικών μεταβλητών τοπικά, γίνεται σε κάθε επανάληψη i σε σχέση με τις $\{\sigma_n, q_n \varepsilon_n^{pl}\}$ του προσαυξητικού βήματος n στο οποίο έχει επέλθει σύγκλιση. Οι ενδιάμεσες τιμές των καταστατικών μεταβλητών στις επαναλήψεις $i-1, i-2$ κλπ δεν παίζουν ρόλο στην ανανέωση της τρέχουσας επανάληψης αφού η ελαστική πρόβλεψη, σε κάθε επανάληψη, προκύπτει εξολοκλήρου από το βήμα n . Αυτό συμβαίνει διότι έτσι αποφεύγεται η συσσώρευση

μεταβολών στις πλαστικές παραμορφώσεις και τις παραμέτρους κράτυνσης, οι οποίες θα είχαν καθαρά πλασματικό-«υπολογιστικό» χαρακτήρα και δεν θα ανταποκρίνονταν στην πραγματική διαδικασία φόρτισης. Ένας ακόμη λόγος είναι ότι, σε περίπτωση αποφόρτισης, το σημείο εκκίνησής μας πρέπει να είναι οι τελευταίες τιμές στις οποίες έχουμε σύγκλιση.

Στο τέλος κάθε προσαυξητικού βήματος, στο οποίο ικανοποιείται η συνθήκη σύγκλισης για το out-of-balance vector, ικανοποιούνται η γενική ισορροπία του φορέα, οι συνθήκες συμβιβαστού για το πεδίο μετατοπίσεων και οι καταστατικές εξισώσεις για κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Στις ενδιάμεσες επαναλήψεις εντός ενός προσαυξητικού βήματος, και αφού γίνει πλαστική διόρθωση για κάθε στοιχείο, ικανοποιούνται μεν οι καταστατικές εξισώσεις και οι συνθήκες συμβιβαστού, δεν ικανοποιείται όμως η γενική ισορροπία του φορέα. Η καθολική επαναληπτική διαδικασία είναι στην ουσία η αναζήτηση εκείνης της κατάστασης όπου, και οι τρεις συνθήκες θα ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

3.8.6- Αλγόριθμος return map για την περίπτωση J_2 επίπεδης έντασης με κινηματική και ιστροπική κράτυνση.

Σε αυτή την παράγραφο θα αναπτυχθεί ο αλγόριθμος ολοκλήρωσης για το καταστατικό μοντέλο της παραγράφου 2.4. ο οποίος βασίζεται στην εργασία των J.C.Simo και R.L.Taylor⁶ (1986). Χαρακτηρίζεται για τις σχετικά απλές μορφές σχέσεων που προκύπτουν από την διακριτοποίηση των συνεχών καταστατικών εξισώσεων.

Με χρήση της προς-τα-πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, οι σχέσεις (2.77) διακριτοποιούνται ως εξής:

$$\xi_{n+1} = \sigma_{n+1} - \alpha_{n+1} \quad (3.70)$$

$$\epsilon_{n+1}^{pl} = \epsilon_n^{pl} + \Delta\gamma P \xi_{n+1} \quad (3.71)$$

⁶ Βλ. J.C.Simo & R.L.Taylor "A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity", στο *Int.Journal for Numerical Methods in Eng.* 1986

$$\varepsilon_{eff,n+1}^p = \varepsilon_{eff,n}^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_{n+1} \quad (3.72)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{2}{3} \Delta\gamma H_{kin} \xi_{n+1} \quad (3.73)$$

όπου $\bar{f}_{n+1} = \sqrt{\xi_{n+1}^T \mathbf{P} \xi_{n+1}}$ και α ο ταυιστής των back-stress. Ο εκθέτης i που δηλώνει την επανάληψη εντός του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ παραλείπεται εδώ.

Ελαστική πρόβλεψη

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + {}_0^i \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (3.74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl,TR} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} \quad (3.75)$$

$$\varepsilon_{eff,n+1}^{p,TR} = \varepsilon_{eff,n}^p \quad (3.76)$$

$$\alpha_{n+1}^{TR} = \alpha_n \quad (3.77)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{el,TR} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} = \tilde{\mathbf{C}}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p] \quad (3.79)$$

$$\xi_{n+1}^{TR} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} - \alpha_n \quad (3.80)$$

Πλαστική διόρθωση

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} - \Delta\gamma \mathbf{C}(\mathbf{P} \xi_{n+1}) \quad (3.81)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} + \Delta\gamma \mathbf{P} \xi_{n+1} \quad (3.82)$$

$$\varepsilon_{eff,n+1}^p = \varepsilon_{eff,n}^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{f}_{n+1} \quad (3.83)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{2}{3} \Delta\gamma H_{kin} \xi_{n+1} \quad (3.84)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.81),(3.79) και (3.84) στην (3.70), έχουμε:

$$\xi_{n+1} = \gamma \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \xi_{n+1}^{TR} \quad (3.85)$$

όπου $y = \frac{1}{1+2/3\Delta\gamma H_{kin}}$ και το $\tilde{\Xi}$ ονομάζεται αλγοριθμικό ελαστικό καταστατικό μητρώο και δίνεται από την σχέση:

$$\tilde{\Xi} = [\tilde{\mathbf{C}}^{-1} + y\Delta\gamma\mathbf{P}]^{-1} = [\tilde{\mathbf{C}}^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial}{\partial\sigma} \frac{\partial f}{\partial\sigma}]^{-1} \quad (3.86)$$

και $\tilde{\mathbf{C}}$ το ελαστικό καταστατικό μητρώο. Είναι:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha = \frac{E}{1-\nu^2}$, $c = \frac{1-\nu}{2}$ και

$$\tilde{\Xi} = \alpha \begin{bmatrix} d & w & 0 \\ w & d & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$$

όπου

$$d = \frac{-2\alpha\gamma\nu^2 + 2\alpha\gamma + 3}{-(\alpha\gamma\nu)^2 + (\alpha\gamma)^2 - 2\alpha\gamma\nu + 4\alpha\gamma + 3}$$

$$w = \frac{-\alpha\gamma\nu^2 + 3\nu + \alpha\gamma}{-(\alpha\gamma\nu)^2 + (\alpha\gamma)^2 - 2\alpha\gamma\nu + 4\alpha\gamma + 3}$$

$$\nu = \frac{c}{\alpha\gamma + 1}$$

Η συνάρτηση διαρροής δίνεται από την σχέση:

$$f_{n+1} = \sqrt{\xi_{n+1}^T \mathbf{P} \xi_{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi(\varepsilon_{eff,n+1}^p) \quad (3.87)$$

Οι συνθήκες Kuhn Tucker είναι κατά τα γνωστά:

$$\Delta\gamma \geq 0, \quad \Delta\gamma f_{n+1} = 0, \quad f_{n+1} \leq 0 \quad (3.88)$$

Αν $f_{n+1}^{TR} \geq 0$, τότε, απαιτούμε να ισχύει η συνθήκη συμβατότητας στο τέλος του βήματος $n + 1$:

$$f_{n+1} = 0 \quad (3.89)$$

Η σχέση (3.89) επιλύεται ως προς $\Delta\gamma$ και προκύπτει ένα πολυώνυμο τετάρτης τάξης, το οποίο επιλύεται επαναληπτικά. Μόλις βρεθεί $\Delta\gamma$ το οποίο ικανοποιεί την (3.89) και ταυτόχρονα είναι μεγαλύτερο του μηδενός, ανανεώνουμε τις (3.81)-(3.85).

Υπολογισμός συμβιβαστού ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου.

1) Γραμμικοποίηση της σ_{n+1} :

Είναι $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{TR} - \Delta\gamma \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{P}\xi_{n+1}) = \tilde{\mathbf{C}}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\gamma \mathbf{P}\xi_{n+1}]$ άρα

$$d\sigma_{n+1} = \tilde{\mathbf{C}}[d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - d\Delta\gamma \mathbf{P}\xi_{n+1} - \Delta\gamma \mathbf{P}(d\sigma_{n+1} - d\boldsymbol{\alpha}_{n+1})] \quad (3.90)$$

2) Γραμμικοποίηση της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\varepsilon_{eff,n+1}^p$:

$$d\varepsilon_{eff,n+1}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} [\bar{f}_{n+1} d\Delta\gamma + \Delta\gamma d\bar{f}_{n+1}] \quad (3.91)$$

3) Γραμμικοποίηση των back-stress $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$:

Η $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ συναρτήσει της σ_{n+1} είναι

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \gamma[\boldsymbol{\alpha}_n + \frac{2}{3} \Delta\gamma H_{kin} \sigma_{n+1}]$$

Γραμμικοποιώντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$d\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \frac{2}{3} \gamma H_{kin} [d\Delta\gamma \xi_{n+1} + \Delta\gamma d\sigma_{n+1}] \quad (3.92)$$

Αντικαθιστώντας την (3.92) στην (3.90) παίρνουμε:

$$d\sigma_{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}[d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \gamma d\Delta\gamma \mathbf{P}\xi_{n+1}] \quad (3.93)$$

Γραμμικοποίηση της συνάρτησης διαρροής κοντά στο t_n :

Αντικαθιστώντας την (3.83) στην (3.87) παίρνουμε:

$$f_{n+1} = \bar{f}_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi(\varepsilon_{eff,n+1}^p) = 0$$

όπου $\Phi(\varepsilon_{eff,n+1}^p) = \sigma_y^0 + H_{iso} \varepsilon_{eff,n+1}^p$.

Γραμμικοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$df_{n+1} = d\bar{f}_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}(H_{iso}d\varepsilon_{eff,n+1}^p) = 0$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την (3.91) παίρνουμε:

$$df_{n+1} = d\bar{f}_{n+1} - \frac{2}{3}H_{iso}(\bar{f}_{n+1}d\Delta\gamma + \Delta\gamma d\bar{f}_{n+1}) = 0 \rightarrow$$

$$df_{n+1} = d\bar{f}_{n+1} - \frac{2}{3}H_{iso}\bar{f}_{n+1}d\Delta\gamma - \frac{2}{3}H_{iso}\Delta\gamma d\bar{f}_{n+1} = 0 \rightarrow$$

$$df_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{3}H_{iso}\Delta\gamma\right)d\bar{f}_{n+1} - \frac{2}{3}H_{iso}\bar{f}_{n+1}d\Delta\gamma = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με \bar{f}_{n+1} ώστε να μην υπεισέρχονται ριζικά στις σχέσεις και λύνοντας ως προς $d\Delta\gamma$ παίρνουμε:

$$d\Delta\gamma = \frac{\left(1 - \frac{2}{3}H_{iso}\Delta\gamma\right)\bar{f}_{n+1}d\bar{f}_{n+1}}{\frac{2}{3}H_{iso}\bar{f}_{n+1}^2} \quad (3.94)$$

Ο όρος $\bar{f}_{n+1}d\bar{f}_{n+1}$ ισούται με $\xi_{n+1}^T \mathbf{P}d\xi_{n+1}$. Με αυτό δεδομένο και αντικαθιστώντας στην (3.94) τις (3.92) και (3.93) παίρνουμε:

$$d\Delta\gamma = \frac{1}{y(1+\beta_{n+1})} \frac{\xi_{n+1}^T \mathbf{P}\tilde{\Xi}d\varepsilon_{n+1}}{\xi_{n+1}^T \mathbf{P}\tilde{\Xi}\mathbf{P}\xi_{n+1}} \quad (3.95)$$

όπου

$$y = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma H_{kin}}$$

$$x = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}H_{iso}\Delta\gamma}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{y^{-1}}{x^{-1}} \bar{f}_{n+1}^2 \frac{H_{iso} y^{-1} + H_{kin} x^{-1}}{\xi_{n+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{P} \xi_{n+1}}$$

Αντικαθιστώντας την (3.95) στην (3.93) και βγάζοντας κοινό παράγοντα το $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, προκύπτει η έκφραση του συμβατού ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου για την ειδική περίπτωση επίπεδης έντασης με J_2 ελαστοπλαστικό καταστατικό μοντέλο:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{ep} = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{n+1} = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}} \quad (3.96)$$

$$\text{με } \mathbf{N}_{n+1} = \frac{\tilde{\mathbf{E}} \mathbf{P} \xi_{n+1}}{\sqrt{\xi_{n+1}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{P} \xi_{n+1}}}.$$

Κεφάλαιο 4

Στο τρέχον κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την περιγραφή της διαδικασίας ελαστοπλαστικής ανάλυσης φορέων επίπεδης έντασης στο πρόγραμμα *FEAP*. Το *FEAP* είναι ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων γραμμένο σε γλώσσα FORTRAN και τα όσα ακολουθούν προέκυψαν από την επεξεργασία επίπεδης πλάκας με αναλογικά μηχανικά φορτία και υλικό με J_2 ελαστοπλαστική συμπεριφορά κατά τα πρότυπα του καταστατικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.3. Η φιλοσοφία λειτουργίας του *FEAP* γενικά ως πρόγραμμα έχει αναπτυχθεί σε προηγούμενη εργασία⁷ και, έτσι, θα αρκεστούμε εδώ να αναφερθούμε στα κομμάτια εκείνα που παίζουν ρόλο στην ελαστοπλαστική ανάλυση.

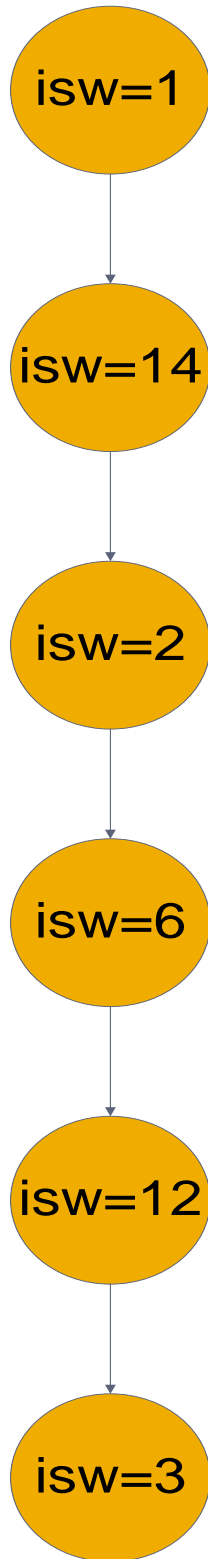
4.1-Διαδικασία ελαστοπλαστικής ανάλυσης

Η ανάγνωση των δεδομένων εισαγωγής από αρχείο (input file), η παραγωγή του πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων, η εφαρμογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών και συνθηκών φόρτισης και, τέλος, η επίλυση του φορέα εκτυλίσσεται στην υπορουτίνα «*pcontr.f*», εντός της οποίας καλούνται και όλες οι υπόλοιπες υπορουτίνες. Η διαδοχή των διαδικασιών που ορίζουν τα δεδομένα εισαγωγής εκφράζεται εντός του προγράμματος με την λεγόμενη *task parameter isw*. Η παράμετρος αυτή δέχεται ακέραιες τιμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη διαδικασία. Στην δική μας περίπτωση, J_2 ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς φορέα επίπεδης έντασης με αναλογικά μηχανικά φορτία, η πορεία «παραγωγής» και επίλυσης του προβλήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

⁷ Συγκεκριμένα, στο «Προσθήκη κώδικα στο *FEAP*: Μη-γραμμικές ελαστικές αναλύσεις», Διπλωματική εργασία του Εμμανουήλ Ζέρβα, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ, 2014.

Οι ακέραιες τιμές της παραμέτρου *isw* αντιστοιχούν σε εντολές του αρχείου δεδομένων εισαγωγής, από τις οποίες, μετά από κατάλληλη επεξεργασία, κρατά τα πρώτα τέσσερα γράμματα. Για παράδειγμα, η εντολή καθορισμού των συνοριακών συνθηκών Boundary (ή EBoundary , ή CBoundary), διαβάζεται από το πρόγραμμα (BOUN –EBOU–CBOU) και η *isw* παίρνει την κατάλληλη τιμή ώστε να ξεκινήσει η διαδικασία καθορισμού των συνοριακών συνθηκών.

66-Διαδοχή διαδικασιών μέσω της παραμέτρου *isw*

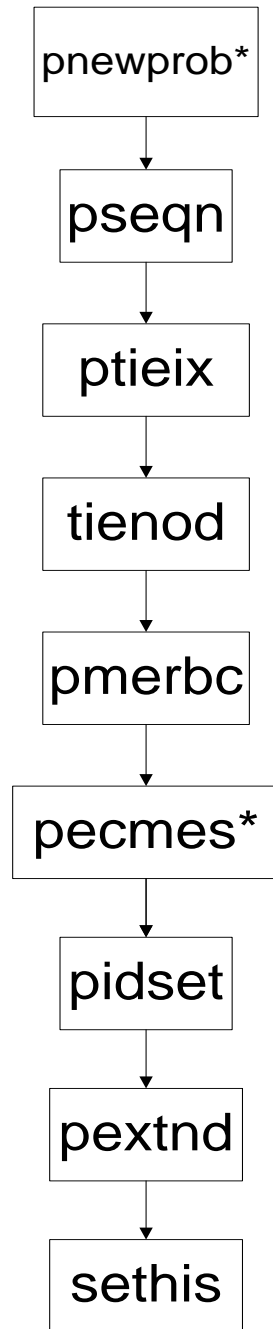


4.1.1- Παραγωγή πλέγματος και αρχικών συνθηκών του φορέα- $isw = 1$

Εδώ γίνεται η επεξεργασία των εντολών του input file που αφορούν το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων. Ποιο συγκεκριμένα, η παράμετρος isw παίρνει την τιμή «1» διαβάζοντας την εντολή MATE (MATErial) και, έπειτα, γίνεται η είσοδος στις υπορουτίνες «***pnewprob.f***», «***tienod.f***», «***pmerbc.f***», «***pecmes.f***», «***pidset.f***», «***pextnd.f***», «***sethis.f***». Κάθε μια από τις παραπάνω βασικές υπορουτίνες καλεί δευτερεύουσες για να ολοκληρωθεί η κάθε επιμέρους διαδικασία.

- ***pnewprob.f***: Η πρώτη υπορουτίνα που καλείται για την πρώτη τιμή (ένα) που παίρνει η παράμετρος isw . Μέσω αυτής καθορίζονται ο μέγιστος αριθμός κόμβων, στοιχείων και υλικών του προβλήματος, η γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά του πλέγματος, ο έλεγχος του πλέγματος και οι συνοριακοί κόμβοι.
- ***tienod.f***: Η υπορουτίνα στην οποία συγχωνεύονται οι κόμβοι των στοιχείων οι οποίοι έχουν ίδιες συντεταγμένες.
- ***pmerbc.f***: Η υπορουτίνα για την αντίστοιχη διαδικασία μετά την συγχώνευση των κόμβων για τις συνοριακές συνθήκες.
- ***pecmes.f***: Υπορουτίνα για την παραγωγή των συνοριακών συνθηκών φόρτισης, αναγωγή των επιφανειακών και μαζικών φορτίων σε ισοδύναμα επικόμβια, καθορισμό των συνοριακών περιορισμών στις μετατοπίσεις και των γωνιών.
- ***pidset.f***: Υπορουτίνα για τον έλεγχο του πλέγματος και μόρφωση των τελικών συνοριακών περιορισμών μετά την συγχώνευση των κόμβων και την επεξεργασία που έγινε από την ***pecmes.f***.
- ***pextnd.f***: Υπορουτίνα για την αποθήκευση των κόμβων των συνόρων σε συγκεκριμένες θέσεις.
- ***sethis.f***: Υπορουτίνα για την δημιουργία θέσεων για τα δεδομένα της ιστορίας της φόρτισης στο μητρώο ix .

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ροής για $isw = 1$.

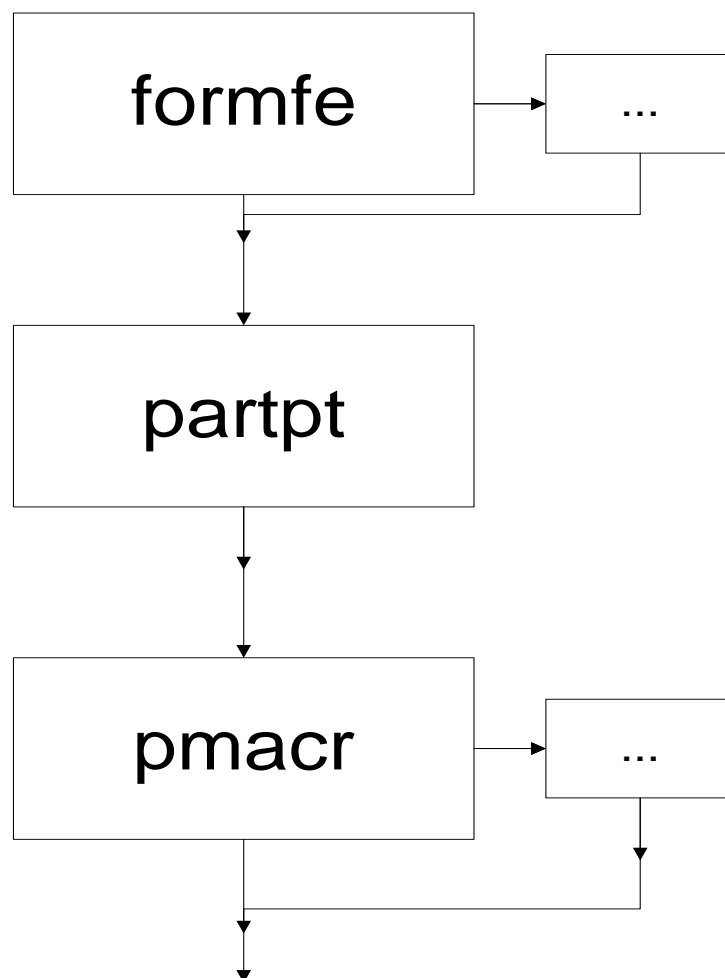


67- Διάγραμμα ροής για την παραγωγή του πλέγματος - $isw = 1$

Ο αστερίσκος υποδηλώνει ότι οι υπορουτίνες καλούν και αυτές άλλες. Με την «**sethis.f**» ολοκληρώνεται η παραγωγή του πλέγματος και η παράμετρος isw παίρνει την τιμή δεκατέσσερα (14).

4.1.2- Προετοιμασία επίλυσης προβλήματος/αρχικοποίηση παραμέτρων- $isw = 14$

Σε αυτή την φάση γίνεται η προετοιμασία για την εκκίνηση της επίλυσης των γενικών εξισώσεων ισορροπίας. Η παράμετρος isw λαμβάνει την τιμή δεκατέσσερα διαβάζοντας από το input file την εντολή BATC (batch), η οποία και δηλώνει την εκκίνηση για την επίλυση του προβλήματος. Μορφώνονται τα καθολικά διανύσματα μέσω της συνάθροισης των πεπερασμένων στοιχείων (assembly) αφού έχει προηγηθεί πρώτα η είσοδος και η επεξεργασία σε κάθε στοιχείο ξεχωριστά για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών του (συναρτήσεις σχήματος, καταστατικό μοντέλο κλπ). Έπειτα, γίνεται επεξεργασία των δεδομένων για την συνάρτηση μεταβολής των ισοδύναμων –πλέον-επικόμβιων εξωτερικών δράσεων.



68- Διάγραμμα ροής για την αρχικοποίηση των παραμέτρων του προβλήματος- $isw = 14$

4.1.2.1- Η υπορουτίνα «*formfe.f*»

Η υπορουτίνα «*formfe.f*» είναι βασική υπορουτίνα μέσω της οποίας γίνεται αρχικά η μετάβαση από το καθολικό σύστημα του πλέγματος στο τοπικό του κάθε στοιχείου για την τοπική επεξεργασία (πχ ανανέωση καταστατικών μεταβλητών, τροποποίηση μητρώου ακαμψίας στοιχείου) και έπειτα η μόρφωση των καθολικών διανυσμάτων για το σύνολο του φορέα με συνάθροιση των στοιχείων. Η είσοδος στην «*formfe.f*» γίνεται αρκετές φορές στην πορεία επίλυσης, ωστόσο, η διαδικασία που ακολουθείται κάθε φορά εντός της καθορίζεται από την τιμή της παραμέτρου *isw*. Στην τρέχουσα φάση, όπου $isw = 14$, προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα ροής εντός της «*formfe.f*».

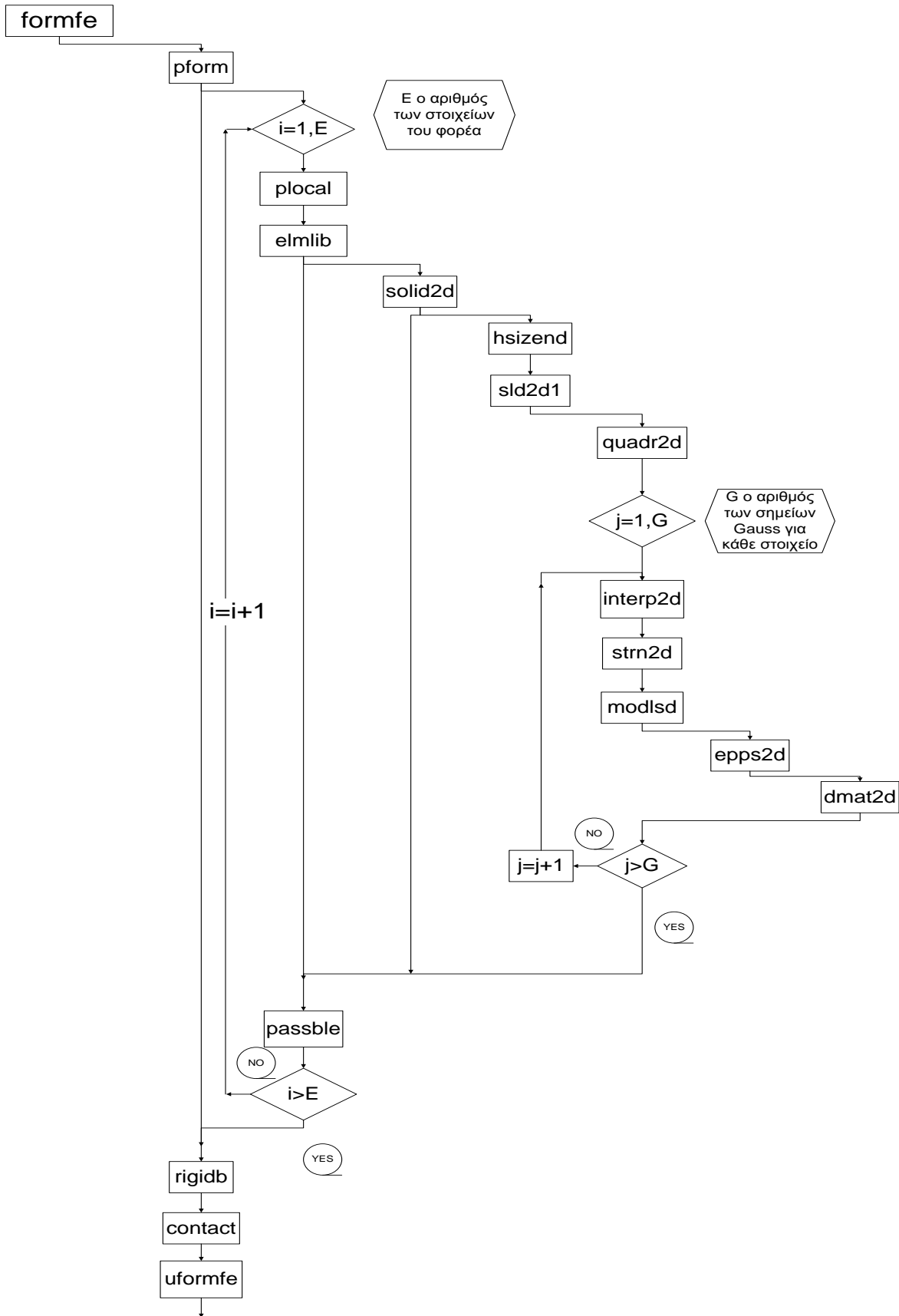
- ***pform.f***: Η υπορουτίνα η οποία για τις τρέχουσες τιμές των καθολικών διανυσμάτων περνά επαναληπτικά από κάθε στοιχείο του φορέα και επαν-υπολογίζει την συνεισφορά στο καθολικό μητρώο ακαμψίας και στο residual vector. Αφου ολοκληρωθεί η ανανέωση των παραμέτρων για κάθε στοιχείο, μορφώνει το καθολικό out-of-balance vector ή residual vector και το καθολικό μητρώο ακαμψίας.
- ***plocal.f***: Η υπορουτίνα όπου μορφώνονται τα τοπικά μητρώα των στοιχείων από το τρέχον καθολικό (ακαμψίας, εσωτερικών επικόμβιων δυνάμεων κλπ) με δεδομένα εισαγωγής την αρίθμηση των κόμβων στο καθολικό σύστημα, τις αντίστοιχες επικόμβιες δράσεις σε αυτούς, τους περιορισμούς αν είναι κόμβοι συνόρου κλπ.
- ***elmlib.f***: Πρόκειται για την «βιβλιοθήκη» στοιχείων του *FEAP*. Μας οδηγεί στην κατάλληλη υπορουτίνα για το είδος του στοιχείου που είναι υπό επεξεργασία στην τρέχουσα επανάληψη εντός της ***pform.f*** (truss, frame κλπ).
- ***solid2d.f***: Πρόκειται για την υπορουτίνα-οδηγό επίπεδων και αξονοσυμμετρικών προβλημάτων. Υπολογίζεται η ιακοβιανή του μετασχηματισμού για ενδεχόμενη «ανώμαλη» γεωμετρία του στοιχείου, το μητρώο μάζας, το μητρώο απόσβεσης, η μέγιστη και ελάχιστη διάσταση των στοιχείων, οι ισοδύναμες δράσεις από μαζικές δυνάμεις στο στοιχείο, λαμβάνονται υπόψη οι ελκυστές

στις επιφάνειες του στοιχείου, τα θερμικά φορτία στο στοιχείο και, τέλος, το μητρώο- διάνυσμα των (αποκλίνουσων) τάσεων και το τοπικό μητρώο ακαμψίας. Στην τρέχουσα διαδικασία ($isw = 14$), υπολογίζεται η μέγιστη και ελάχιστη διάσταση του στοιχείου.

- **hsizend.f**: Υπορουτίνα η οποία καλείται από την **solid2d.f** και υπολογίζει την μέγιστη και ελάχιστη διάσταση του στοιχείου.
- **sld2d1.f**: Υπορουτίνα-οδηγός για επίπεδο ή αξονοσυμμετρικό πρόβλημα για γραμμικό ελαστικό καταστατικό μοντέλο. Καλείται από την **solid2d.f**, η οποία για στοιχεία μετατοπίσεων και στοιχεία τύπου «solid» (η άλλη επιλογή είναι «fluid») καλεί την **sld2d1.f**. Μέσω της τελευταίας καλούνται όλες οι υπορουτίνες οι οποίες υπολογίζουν α) τις συντεταγμένες των σημείων Gauss ανάλογα με τον αριθμό κόμβων του στοιχείου καθώς και τα αντίστοιχα βάρη β) τις τιμές των συναρτήσεων σχήματος σε αυτά γ) το μητρώο παραμορφώσεως και τις παραμορφώσεις στα σημεία Gauss δ) τον υπολογισμό των τάσεων στα σημεία Gauss. Τέλος, αποθηκεύει τις παραμέτρους της ιστορίας της φόρτισης σε κατάλληλες θέσεις και ολοκληρώνει την διαδικασία της με τον υπολογισμό του διανύσματος (ανανεωμένων) αποκλίνουσων τάσεων και του τροποποιημένου μητρώου ακαμψίας του στοιχείου. Τα δύο τελευταία γίνονται στο σώμα της **sld2d1**.
- **passble.f**: Καλείται από την **pform.f** αφού ολοκληρωθεί ο υπολογισμός των απαραίτητων χαρακτηριστικών σε κάθε σημείο Gauss του στοιχείου και κάνει assemble τα τοπικά μητρώα του στοιχείου στα καθολικά του φορέα.

Στην τρέχουσα διαδικασία ($isw = 4$) δεν έχουν επιβληθεί ακόμα τα φορτία και, έτσι, αρκετές από τις υπορουτίνες πουκαλούνται από την **sld2d1.f** είτε δεν καλούνται σε αυτό το σημείο, είτε απλά καλούνται χωρίς να πραγματοποιείται κάποιος υπολογισμός.

Στο διάγραμμα ροής το i δηλώνει το τρέχον στοιχείο στο οποίο γίνεται προσπέλαση, ενώ το j το σημείο Gauss του παραπάνω στοιχείου.



69-Διάγραμμα ροής εντός formfe.f για $isw = 14$

4.1.2.2- Η υπορουτίνα «**p**macr.f»

Η υπορουτίνα «**p**macr.f» είναι η υπορουτίνα εντός της οποίας επιλύεται το πρόβλημα (με προσαυξητική ή μη), ελέγχει την μέθοδο επίλυσης (ψευδο-στατική ή δυναμική) και την χρησιμοποιούμενη μέθοδο ολοκλήρωσης (backward-euler, forward euler κλπ), πραγματοποιείται η διαχείριση της συνάρτησης φόρτισης και η προσαύξηση των φορτικών βημάτων και των εντός αυτών επαναλήψεων, η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων με μορφή ισο-επιφανείων (stress και displacement contours) καθώς και την αποτύπωση αυτών σε μορφή αρχείων .txt . Εντός αυτής της υπορουτίνας καλούνται επίσης και οι ενσωματωμένες από τους χρήστες υπορουτίνες για την επίλυση. Οι παραπάνω διαδικασίες υλοποιούνται από τις παρακάτω υπορουτίνες εντός της **p**macr.f :

- **p**maci.f: διαβάζει από το αρχείο δεδομένων εισόδου (input file) τις εντολές επίλυσης που ακολουθούν της εντολής BATCh (πχ LOOP, TANG,,1 κλπ) και που αντιστοιχούν η κάθε μια σε συγκεκριμένες διαδικασίες της υπολογιστικής επίλυσης.
- **p**macr1.f: Υπορουτίνα η οποία πραγματοποιεί έλεγχο της συμβατότητας του πλέγματος (εντολή CHECK), τον υπολογισμό της τρέχουσας στάθμης του προσαυξητικού φορτίου, δίνει εντολές για υπολογισμό του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας (εντολή TANG), του residual vector (εντολή FORM), επιλύει τις βασικές αλγεβρικές εξισώσεις του φορέα (εντολή SOLVe) και πραγματοποιεί τους ελέγχους σύγκλισης. Εντός της **p**macr1.f αυξάνεται το *iteration counter* της επαναληπτικής μεθόδου Newton-Raphson.
- **p**macr2.f: Υπορουτίνα η οποία εποπτεύει την προσαυξητική διαδικασία και ορίζει πότε τελειώνει μια επανάληψη ενός βρόγχου, ώστε να προχωρήσουμε στην επόμενη. Εντός αυτής γίνεται η προσαύξηση $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Αναφέρει προειδοποιήσεις σε περίπτωση μη-σύγκλισης ανάλογα με το αν χρειάζεται αύξηση ή μείωση του προσαυξητικού βήματος. Διαβάζει την συνάρτηση μεταβολής (με τον χρόνο) της εξωτερικής φόρτισης, στην περίπτωση που πρέπει να «αρχικοποιηθεί το πρόβλημα», όπως στην τρέχουσα φάση και, τέλος, αν έχει

επιτευχθεί σύγκλιση, ανανεώνει τις καταστατικές παραμέτρους δίνοντάς τους τις τιμές $n + 1$ σε περίπτωση σύγκλισης, ώστε να αρχίσει το νέο προσαυξητικό βήμα.

- ***pmacr3.f***: Υπορουτίνα η οποία εκκινεί τις διαδικασίες γραφικής απεικόνισης των ισο-επιφανειών και της αποτύπωσης των αποτελεσμάτων σε αρχεία .txt.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην τρέχουσα φάση καλείται μόνο η ***pmacr2.f*** προκειμένου να ορίσει τον αριθμό τρέχουσας επανάληψης βρόγχου (0) και για τον καθορισμό της συνάρτησης μεταβολής του φορτίου (αναλογική φόρτιση, γραμμική με τον χρόνο σε εμάς).

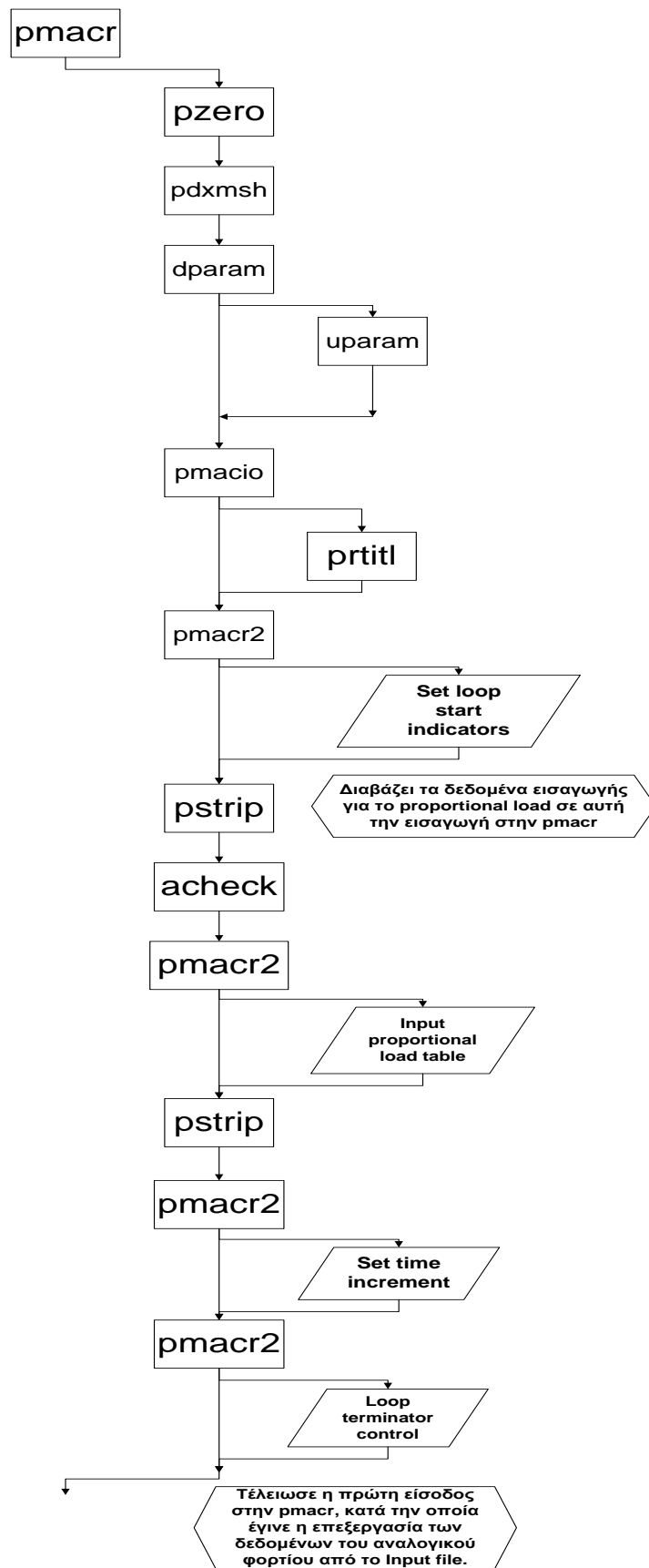
Το διάγραμμα ροής εντός της ***pmacr1.f*** για $isw = 14$ φαίνεται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 70.

- ***dparam.f***: Υπορουτίνα που καθορίζει την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης (Newmark, Backward-Euler, Midpoint Rule κλπ)
- ***dparam.f***: Υπορουτίνα αριθμητικής ολοκλήρωσης προσαρμοσμένη για επεξεργασία από χρήστες

4.1.2- Έλεγχος συμβατότητας πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων - $isw = 2$

Η διαδικασία εκκινεί με την ανάγνωση της εντολής CHECK που έπεται της εντολής BATCh. Ελέγχει την ιακωβιανή για την τρέχουσα διάταξη των κόμβων των στοιχείων τοπικά για ενδεχόμενη ανώμαλη γεωμετρία, καθώς και την διαδοχή στην αρίθμηση των κόμβων στο καθολικά.

- ***ckisop.f***: Υπορουτίνα ελέγχου των στοιχείων τοπικά. Υπολογίζει τις συναρτήσεις σχήματος και τις πρώτες παραγώγους τους (μητρώο παραμορφώσεως) και σε περίπτωση ανώμαλης γεωμετρίας (αρνητικές τιμές της ιακωβιανής για το στοιχείο), αναδιατάσσονται ώστε να αποκτηθεί η απαιτούμενη ποιότητα πλέγματος (αυτόματη διαδικασία για τετρακομβικά στοιχεία)



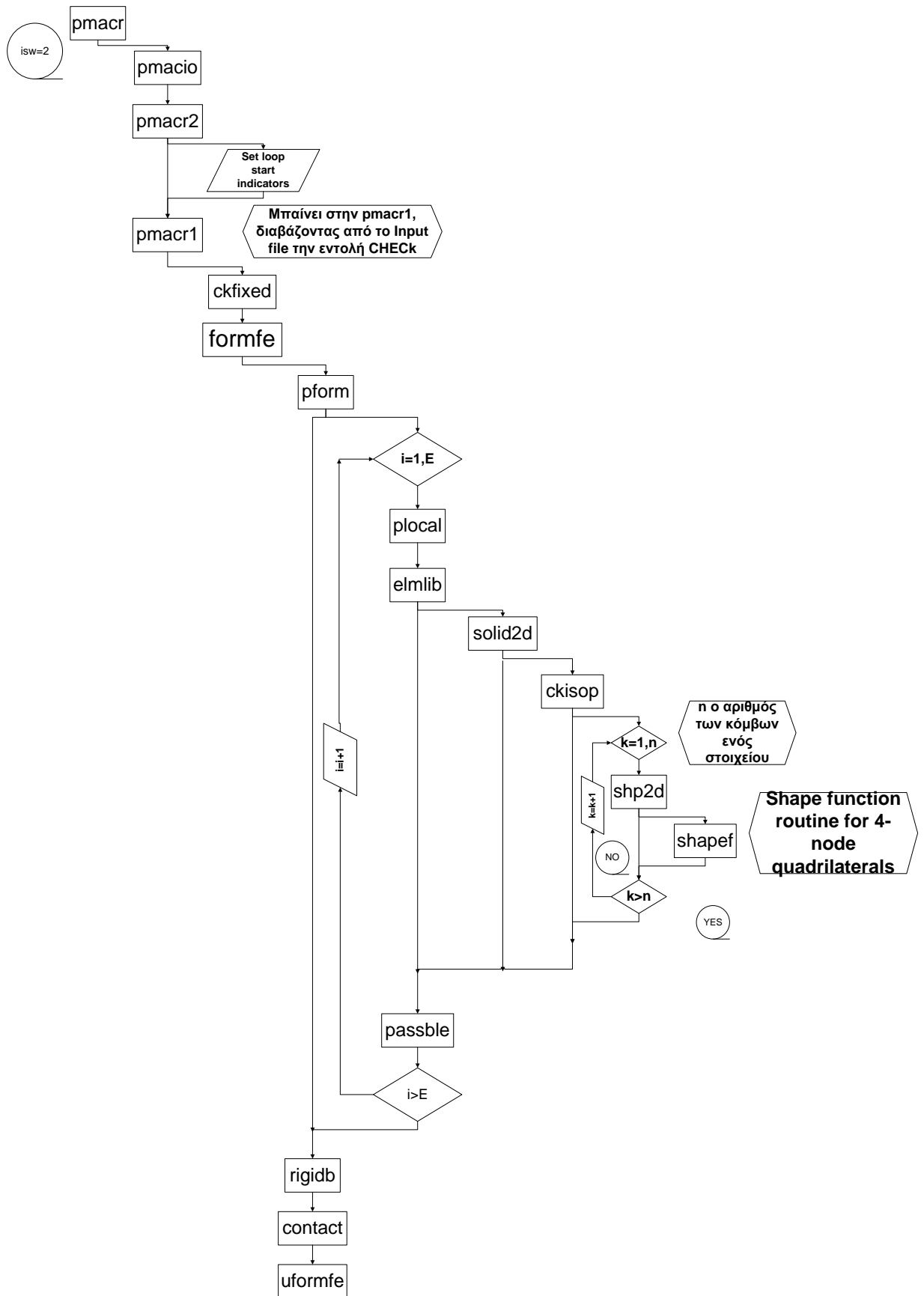
70-Διάγραμμα ροής pmacr.f για isw=14

- **shp2d.f**: Υπορουτίνα η οποία κατασκευάζει την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από το φυσικό στο καρτεσιανό σύστημα για ισοπαραμετρική θεώρηση στοιχείων. Ανάλογα με τον αριθμό κόμβων, καλείται και η αντίστοιχη υπορουτίνα για την παραγωγή των συναρτήσεων σχήματος.
- **shape.f**: Υπορουτίνα για την εκτέλεση της παραπάνω διαδικασίας για τετρακομβικά ισοπαραμετρικά στοιχεία.

Το διάγραμμα ροής του σχήματος 71 υλοποιείται αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας αρχικοποίησης των παραμέτρων του προβλήματος ($isw = 14$), με την έξοδο από την **pmacr2.f** και, όντας στην **pmacr.f** εκ νέου, δίνεται η εντολή να διαβαστεί η επόμενη εντολή μέσω της **pmacio.f**.

4.1.3- Εκκίνηση της προσαυξητικής διαδικασίας - $isw = 6$

Σε αυτή την φάση καλείται η **formfe.f** μέσω της **pmacr2.f** και γίνεται προσπέλαση σε όλες τις βασικές υπορουτίνες για στοιχεία τύπου solid, τεσσάρων κόμβων για επίπεδη ένταση. Αν και για την τιμή 6 της παραμέτρου, η διαδικασία που της αντιστοιχεί αφορά μεμονωμένα τον υπολογισμό του global residual vector έπειτα από τον υπολογισμό της συνεισφοράς σε αυτό κάθε στοιχείου ξεχωριστά, σε αυτή την περίπτωση, ο σκοπός της διαδικασίας είναι να θέσει μηδέν όλα τα μητρώα τάσεων και παραμορφώσεων των στοιχείων, και έπειτα να τα θέσει ως αρχικές τιμές των καταστατικών μεταβλητών του προσαυξητικού βήματος $n = 0$, δηλαδή, ως το σημείο εκκίνησης. Το βήμα αυτό θεωρείται αυτόματα βήμα σύγκλισης (εξορισμό) ως αρχικό βήμα ($t_n = t_0$) και η διαδικασία ολοκληρώνεται με την καταχώρηση των (μηδενικών) αρχικών παραμέτρων και την προσαύξηση του βήματος κατά $\Delta t \rightarrow t_1 = t_0 + \Delta t$. Το τρέχον διάγραμμα ροής είναι σχεδόν πανομοιότυπο με το αντίστοιχο για $isw = 3$ και για τον λόγο αυτό θα παρουσιαστεί λεπτομερώς πιο κάτω.



71-Διάγραμμα ροής για τον έλεγχο ποιότητας του πλέγματος - $isw = 2$

4.1.4- Εκκίνηση της προσαυξητικής διαδικασίας - $isw = 12$

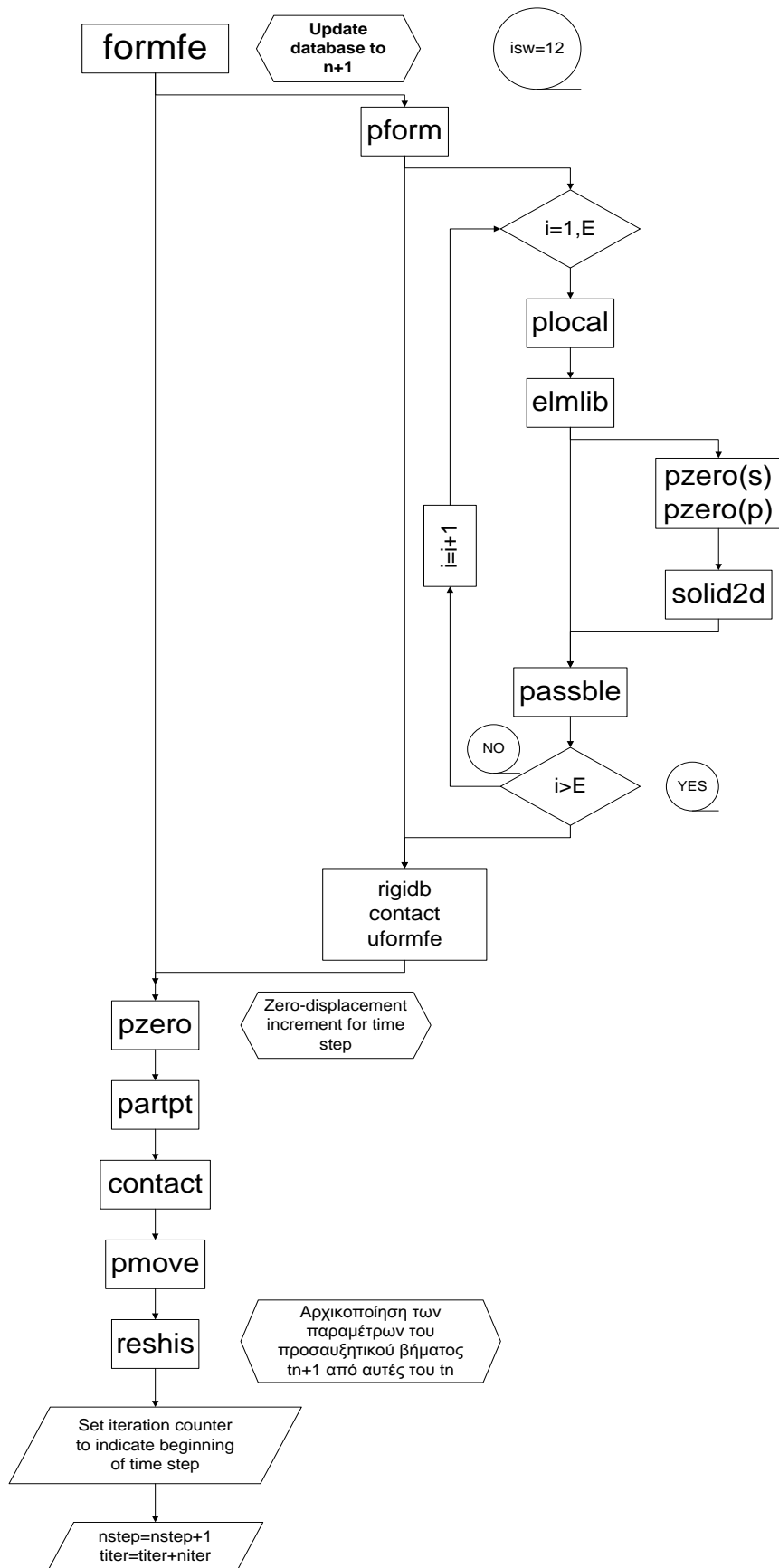
Με την ολοκλήρωση της αρχικής προσαύξεσης $t_1 = t_0 + \Delta t$, καλείται από την **pmacr2.f** η **formfe.f** με τιμή $isw = 12$. Σε αυτή την διαδικασία καθορίζονται οι θέσεις αποθήκευσης των παραμέτρων ιστορίας στο μητρώο - διάνυσμα **hr** (μηδενικές στην τρέχουσα φάση) και έπειτα ορίζονται οι αρχικές συνθήκες του προσαυξητικού βήματος n_1 (και εφεξής, n_{n+1}) ως οι τιμές του βήματος n_0 (εφεξής n_n). Από δω και στο εξής, η τιμή isw θα λαμβάνει επαναληπτικά τις τιμές 12 και 3, που αφορούν τις διαδικασίες ανανέωσης -αποθήκευσης των παραμέτρων ιστορίας και την μόρφωση του global residual vector, του καθολικού μητρώου ακαμψίας και της επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων ισορροπίας του φορέα αντίστοιχα.

- **reshis.f**: Υπορουτίνα η οποία ορίζει ως αρχικές συνθήκες του νέου προσαυξητικού βήματος τις τιμές όπου επήλθε σύγκλιση για το προηγούμενο προσαυξητικό βήμα.

Το διάγραμμα ροής για $isw = 12$ φαίνεται στο σχήμα 72. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται μια φορά σε για κάθε προσαυξητικό βήμα και, συγκεκριμένα, στο τέλος κάθε προσαυξητικού βήματος αφού έχει επέλθει σύγκλιση, ώστε να οριστούν οι αρχικές συνθήκες για το επόμενο.

4.1.5- Υπολογισμός residual vector, τροποποίηση εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας, επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων φορέα - $isw = 3$

Σε αυτή την φάση υλοποιούνται οι επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για το τρέχον προσαυξητικό βήμα t_{n+1} . Η διαδικασία εκκινεί με επαναφορά στην υπορουτίνα **pmacr.f** όπου και διαβάζεται η εντολή TANGent,,1 από το αρχείο δεδομένων εισόδου. Η εντολή αυτή εκκινεί την διαδικασία «ταυτόχρονου» υπολογισμού του residual vector για την τρέχουσα επανάληψη του προσαυξητικού βήματος $n + 1$, την τροποποίηση του καθολικού μητρώου ακαμψίας και την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων.



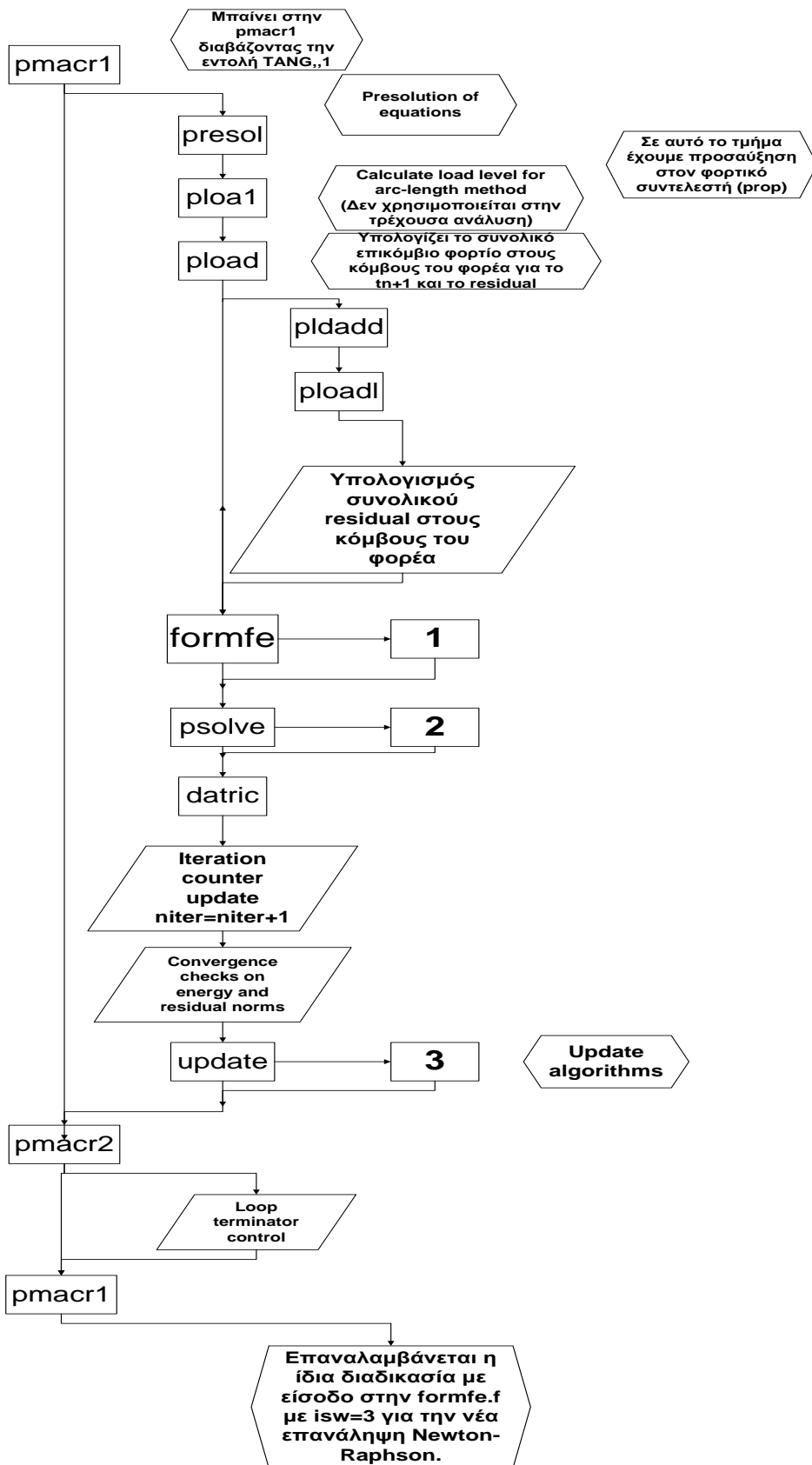
72- Διάγραμμα ροής για αποθήκευση παραμέτρων ιστορίας και καθορισμού αρχικών συνθηκών νέου προσαιζητικού βήματος- $isw = 12$

Η χρήση της εντολής TANGent,,1 επιταχύνει την υπολογιστική επίλυση καθώς αντικαθιστά στο FEAP την αλληλουχία εντολών FORM→TANGent→SOLVE οι οποίες εκτελούν τις ίδιες διαδικασίες (αντίστοιχα) αλλά χωριστά. Έτσι, η προσπέλαση όλων των στοιχείων του φορέα γίνεται μόνο μια φορά (και όχι τρεις).

Το διάγραμμα ροής για $isw = 3$ φαίνεται στο σχήμα 73. Παρακάτω περιγράφονται ορισμένες από τις βασικές υπορουτίνες αυτού του διαγράμματος.

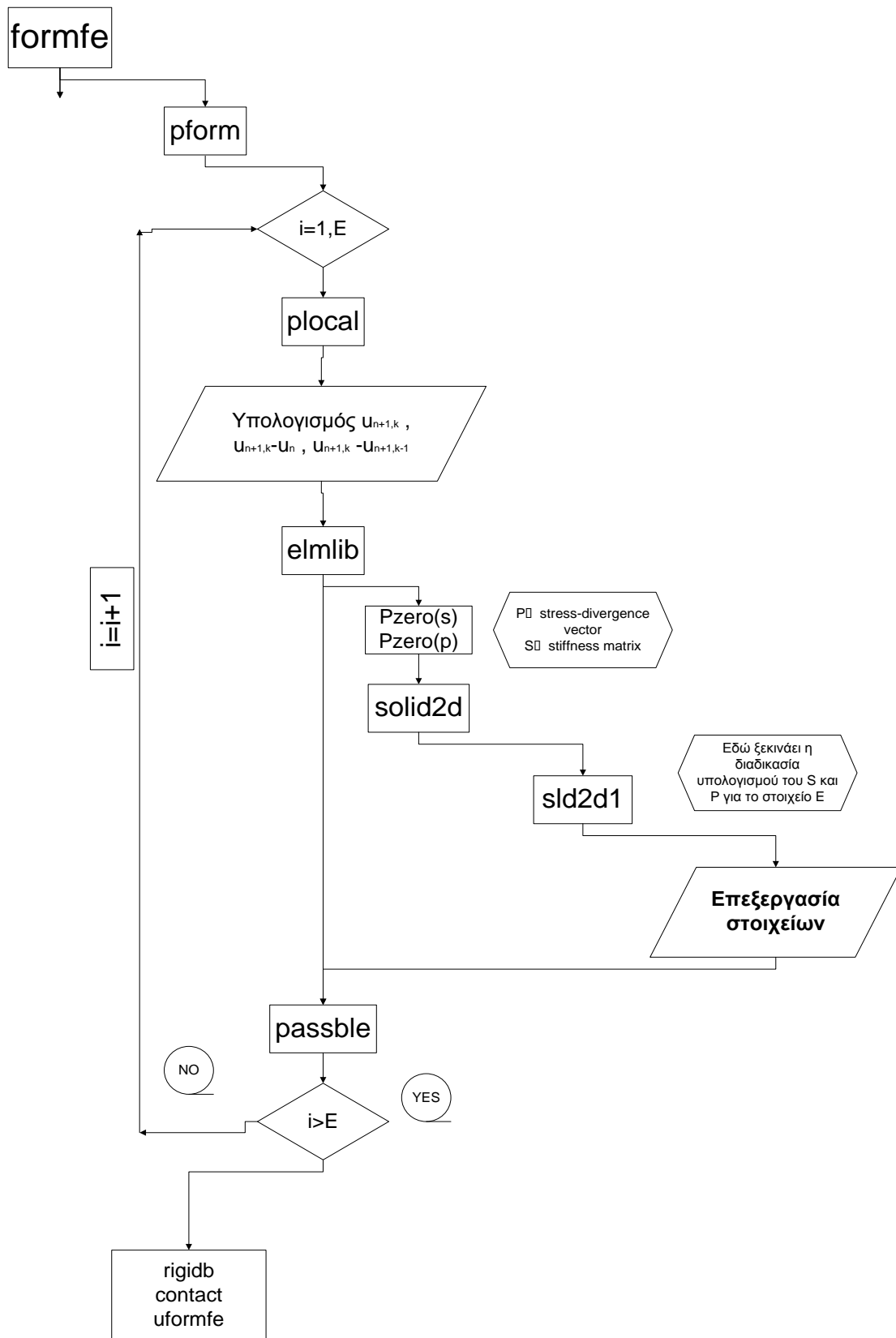
- **pload.f**: Υπορουτίνα μέσω της οποίας μορφώνεται το συνολικό εξωτερικό επικόμβιο φορτίο για το προσαυξητικό βήμα $n + 1$ και αποθηκεύονται τα στοιχεία του (τιμές δυνάμεων σε κόμβους) και οι αντίστοιχοι κόμβοι σε κατάλληλες θέσεις για την μετέπειτα επεξεργασία. Μορφώνεται επίσης το residual ($dr(i)$) στους κόμβους του φορέα.
- **psolve.f**: Βασική υπορουτίνα μέσω της οποίας εφαρμόζεται η άνω και κάτω τριγωνοποίηση των μητρώων και η λεγόμενη LU παραγοντοποίηση των μητρώων, κατά την οποία, ένα μητρώο A γράφεται ως γινόμενο δύο άλλων, L και U αντίστοιχα, όπου L κάτω τριγωνικό και U άνω τριγωνικό μητρώο. Έπειτα επιλύονται οι αλγεβρικές εξισώσεις και αποθηκεύονται οι επικόμβιες λύσεις.
- **update.f**: Υπορουτίνα η οποία δέχεται τις επικόμβιες λύσεις που προέκυψαν από την **psolve.f**, δηλαδή τις επικόμβιες προσαυξητικές μετατοπίσεις που προκύπτουν από τον υπολογισμό του residual και του τροποποιημένου μητρώου ακαμψίας, και υπολογίζει για κάθε βαθμό ελευθερίας α) τις συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις από την αρχή (t_0) έως την τρέχουσα επανάληψη β) τις συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις από το τέλος του προηγούμενου προσαυξητικού βήματος έως την τρέχουσα επανάληψη του τρέχοντος προσαυξητικού βήματος (τις ${}^i_0\Delta\alpha_{n+1}$ του κεφαλαίου 3).

Τα κουτιά με τους αριθμούς 1,2 και 3 δηλώνουν διαδικασίες οι οποίες δεν μπορούσαν να συμπεριληφθούν στο ίδιο διάγραμμα ροής λόγω μεγέθους.



73- Διάγραμμα ροής επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων για την επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1 - isw = 3$

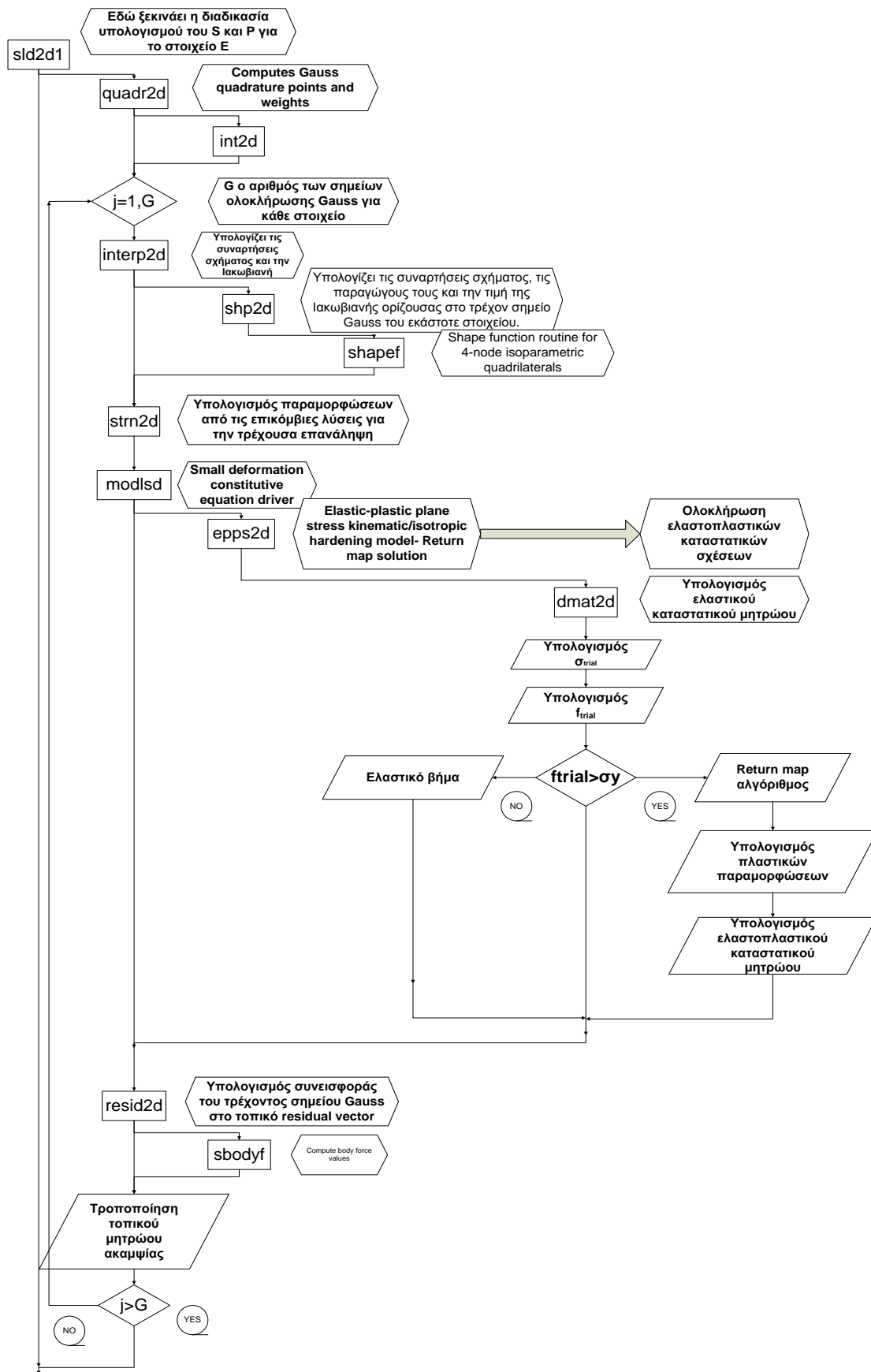
Κουτί 1



74-Διάγραμμα ροής εντός της διαδικασίας επιλυσης (κουτί 1)

Με την είσοδο στην **formfe.f** με $isw = 3$, σύμφωνα με το διάγραμμα ροής του σχ.73, γίνεται προσπέλαση κάθε στοιχείου και, σε τοπικό πλέον επίπεδο, υπολογίζονται οι επικόμβιες λύσεις για κάθε στοιχείο από το αντίστοιχο διάνυσμα επικόμβιων λύσεων στο καθολικό σύστημα (που υπολογίστηκε μέσω της **update.f**). Ακολουθεί η επεξεργασία στοιχείων με την είσοδο στην **sld2d1.f**, της οποίας το διάγραμμα ροής φαίνεται στο σχήμα 75. Εδώ πλέον γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων (διάνυσμα αποκλίνουσων τάσεων στο FEAP, p), ο υπολογισμός του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου και, τέλος, η τροποποίηση του τοπικού μητρώου ακαμψίας (s) για την τρέχουσα επανάληψη, με δοσμένες τις επικόμβιες λύσεις του στοιχείου (διάνυσμα ul στο FEAP).

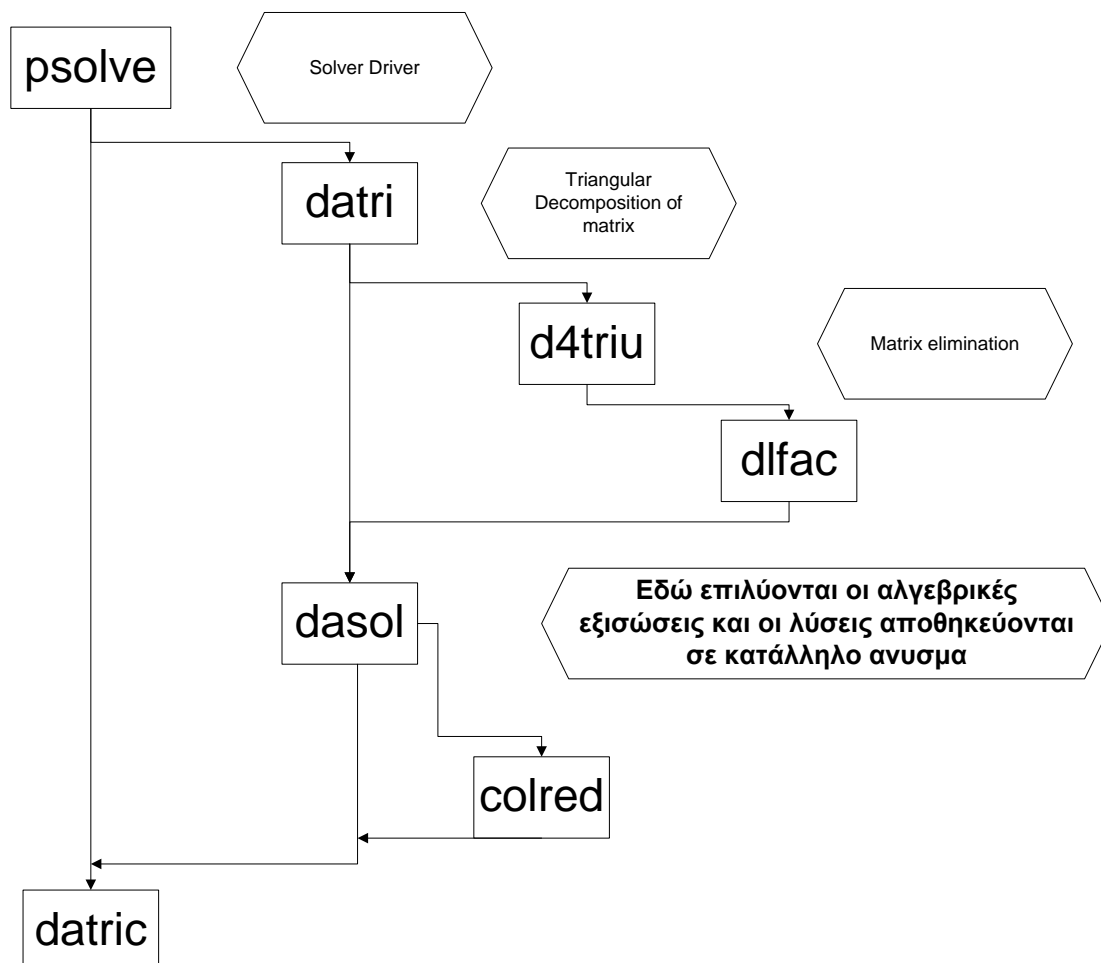
- **modlsd.f**: Υπορουτίνα-οδηγός καταστατικών εξισώσεων για στοιχεία μικρών παραμορφώσεων. Μέσα στην υπορουτίνα γίνονται οι διαδικασίες ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων. Τα δεδομένα εξόδου είναι οι τάσεις και το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο στο υπο εξέταση σημείο Gauss.
- **epps2d.f**: Υπορουτίνα που εφαρμόζει τον αλγόριθμο return-map στο υπό εξέταση σημείο Gauss. Δεδομένα εξόδου είναι οι τάσεις, οι πλαστικές και συνολικές παραμορφώσεις, οι παράμετροι κράτυνσης (back stress και ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση) και το ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο για την επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$.
- **dmat2d.f**: Υπορουτίνα που μορφώνει το ελαστικό καταστατικό μητρώο στο τοπικό σύστημα του στοιχείου, λαμβάνοντας ως δεδομένο εισόδου την γωνία μεταξύ του άξονα x του καθολικού συστήματος και του άξονα y του τοπικού του στοιχείου.
- **resid2d.f**: Υπορουτίνα υπολογισμού του residual vector τοπικά για το κάθε στοιχείο. Προκύπτει από την συνεισφορά όλων των καταστατικών παραμέτρων που υπολογίστηκαν στα σημεία Gauss



75- Ολοκλήρωση καταστατικών σχέσεων, υπολογισμός residual στοιχείου και τροποποίηση μητρώου ακαμψίας

Κουτί 2

Στο κουτί 2 που υλοποιείται η παραγοντοποίηση LU των μητρώων, στο καθολικό σύστημα, και επιλύονται οι αλγεβρικές εξισώσεις.

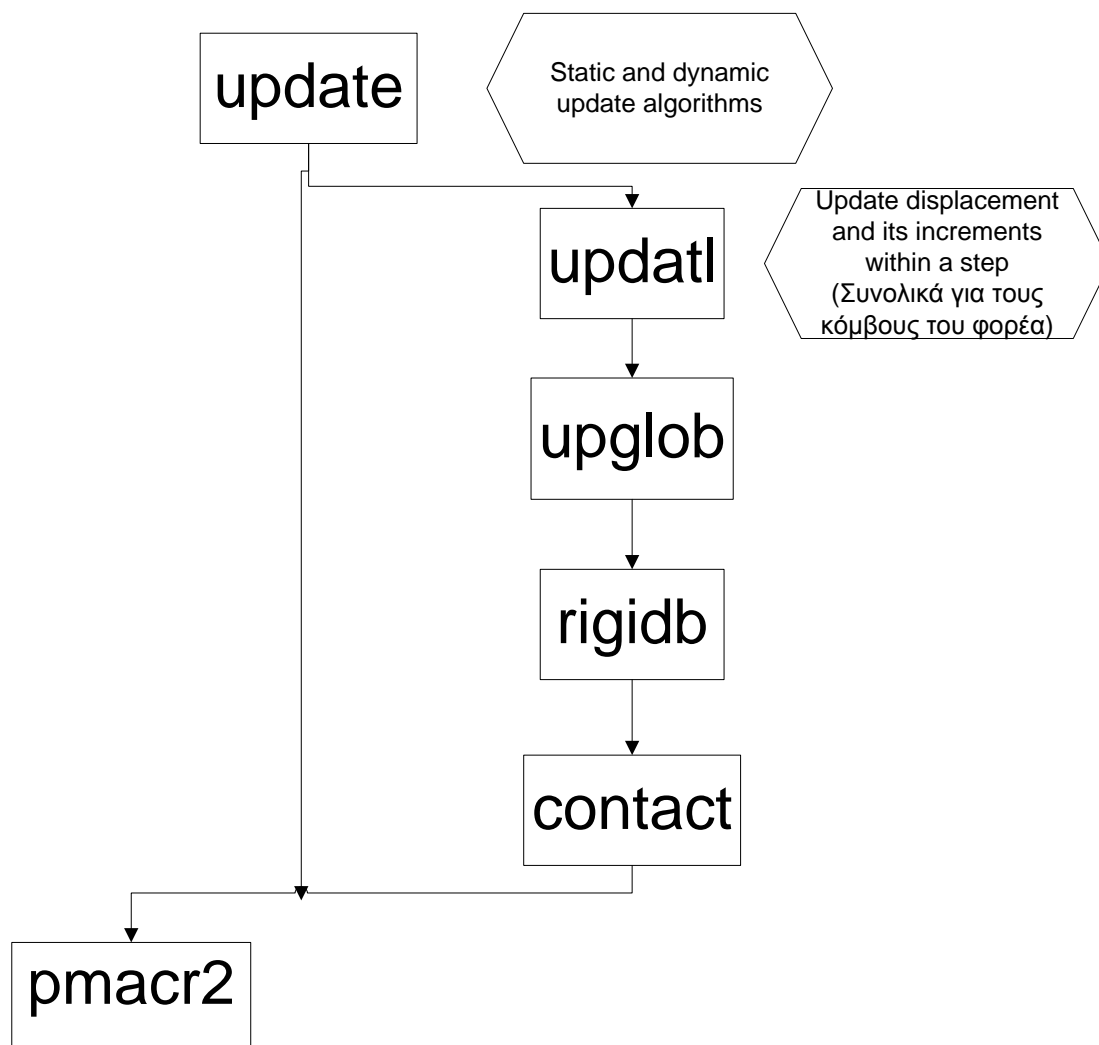


76 – Διάγραμμα ροής επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων

- ***datri.f***: Μόρφωση άνω και κάτω διαγώνιου μητρώου
- ***d4triu.f***: Υπορουτίνα που πραγματοποιεί την τριγωνική «διάσπαση» ή παραγοντοποίηση συμμετρικών/μη-συμμετρικών μητρώων.
- ***dasol.f***: Υπορουτίνα επίλυσης των αλγεβρικών εξισώσεων. Οι λύσεις αποθηκεύονται στο διάνυσμα b .

Κουτί 3

Στο κουτί 3 για το διάγραμμα ροής του σχήματος 73 γίνεται η ανανέωση των προσαυξητικών επικόμβιων μετατοπίσεων, των συνολικών επικόμβιων μετατοπίσεων και των συνολικών επικόμβιων μετατοπίσεων από το βήμα n μέχρι την τρέχουσα επανάληψη i .

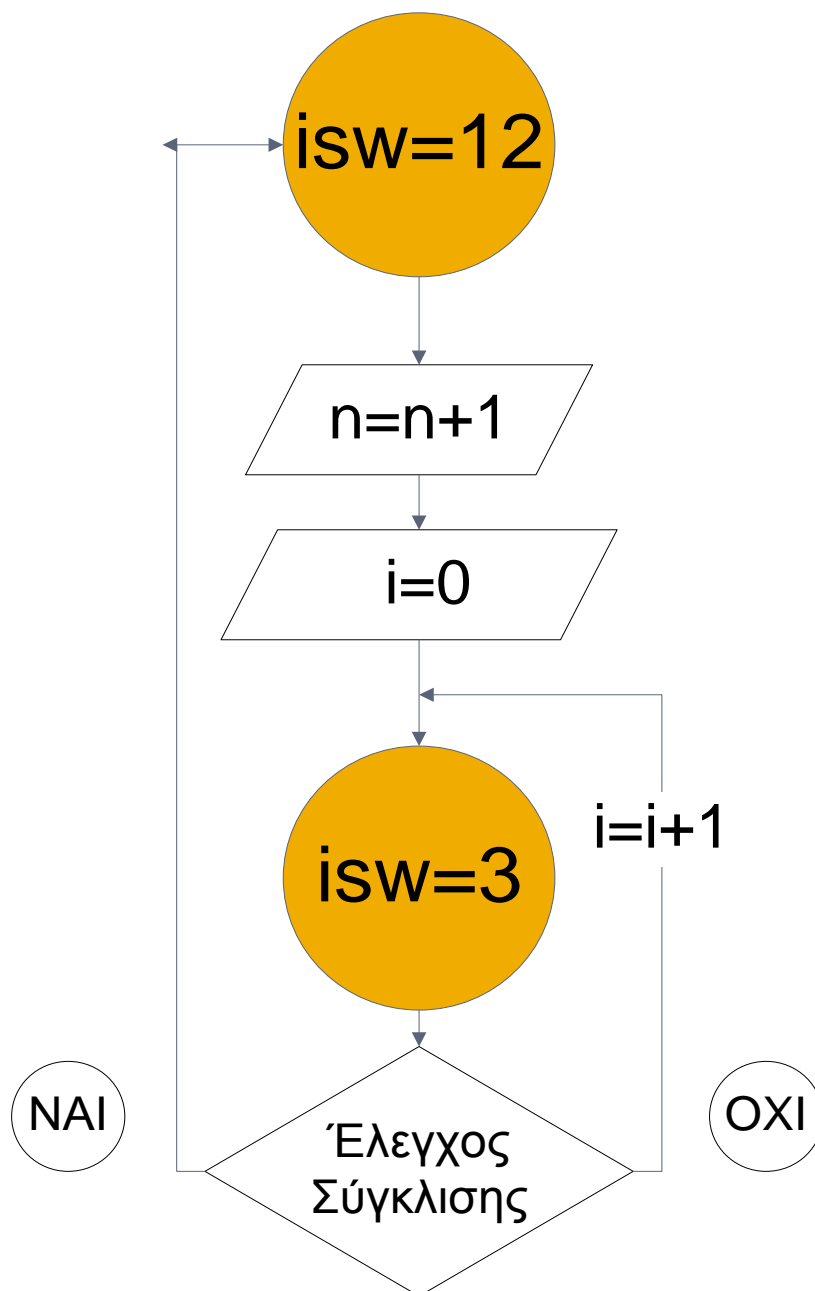


77 – Διαδικασία ανανέωσης των συνολικών προσαυξητικών παραμορφώσεων και των συνολικών παραμορφώσεων.

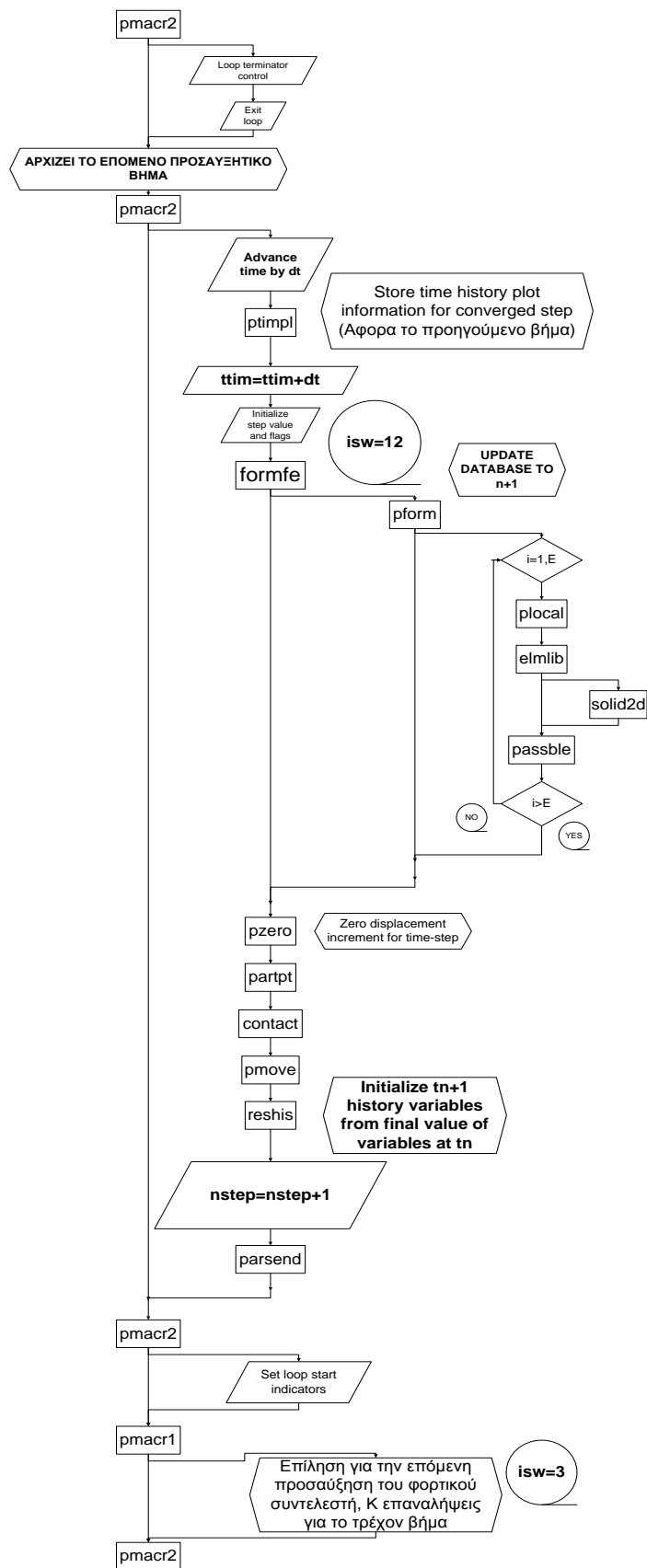
Με την έξοδο από την διαδικασία που περιγράφεται ανανέωσης των παραμορφώσεων (κουτί 3) γίνεται είσοδος στην ***pmacr2.f*** για να τερματίσει η τρέχουσα επανάληψη. Αν ικανοποιούνται οι σχέσεις σύγκλισης, τότε γίνεται ξανά είσοδος στην ***pmacr2.f*** ώστε να γίνει προσαύξηση του βήματος και να καταχωρηθούν οι τιμές που μόλις υπολογίστηκαν ως αρχικές τιμές του νέο βήματος. Αλλιώς

επαναλαμβάνεται η διαδικασία που περιγράφεται στο διάγραμμα ροής του σχήματος 73 για $i \leftarrow i + 1$ (niter = niter+1 στο FEAP).

Σε περίπτωση που στην k επανάληψη πραγματοποιείται σύγκλιση, τότε, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται από διάγραμμα ροής του σχήματος 79. Έτσι, η συνολική προσαυξητική-επαναληπτική διαδικασία εκφρασμένη συναρτήσει της παραμέτρου task manager isw εκφράζεται συνοπτικά σύμφωνα με το σχήμα 78:



78 – Προσαυξητική – επαναληπτική διαδικασία με όρους isw στο FEAP



79- Νέο προσαυξητικό βήμα: $isw = 12 \rightarrow isw = 3$

4.2-Η υπορουτίνα «*epps2d.f*»

Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθεί λεπτομερώς η υπορουτίνα *epps2d.f* που υλοποιεί τον αλγόριθμο return-map για προβλήματα επίπεδης έντασης με J_2 ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Ουσιαστικά πρόκειται για ενσωμάτωση του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε στην ενότητα 3.6.6 στο πρόγραμμα FEAP.

4.2.1 Βήματα διαδικασίας στην υπορουτίνα «*epps2d.f*»

ΒΗΜΑ 1^ο

Υπολογισμός του ελαστικού καταστατικού μητρώου στο τρέχον σημείο Gauss. (μητρώο dd)

ΒΗΜΑ 2^ο

Υπολογισμός τάσεων ελαστικής πρόβλεψης μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{n+1}^{TR} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n]$$

ΒΗΜΑ 3^ο

A) Υπολογισμών των τάσεων ξ_{n+1}^{TR} :

$$\xi_{n+1}^{TR} = \sigma_{n+1}^{TR} - \mathbf{a}_n$$

B) Υπολογισμός της ισοδύναμης τάσης von Mises:

$$\sigma_{VM}^{TR} = \frac{\xi_{11,n+1}^{TR 2} + \xi_{22,n+1}^{TR 2} - \xi_{11,n+1}^{TR} \xi_{22,n+1}^{TR}}{3} + \xi_{12,n+1}^{TR 2}$$

Γ) Υπολογισμός του «εύρους» της επιφάνειας διαρροής με συνεκτίμηση της ισοτροπικής κράτυνσης:

$$Y(\varepsilon_{eff,n}^{pl}) = Y_{\infty} + (Y_0 - Y_{\infty})e^{-\beta * \varepsilon_{eff,n}^{pl}} + H_{iso} \varepsilon_{eff,n}^{pl}$$

Όπου Y_{∞} η τάση διαρροής για μεγάλες παραμορφώσεις, β μια σταθερά υστέρησης, και H_{iso} η πλαστική παράμετρος ισοτροπικής κράτυνσης.

Για $Y_{\infty} = Y_0$ και $\beta = 0$ η παραπάνω σχέση παίρνει την γνωστή, απλούστερη μορφή:

$$Y(\varepsilon_{eff,n}^{pl}) = Y_0 + H_{iso} \varepsilon_{eff,n}^{pl}$$

Το εύρος της επιφάνειας διαρροής είναι:

$$rad2 = \frac{Y(\varepsilon_{eff,n}^{pl})^2}{3}$$

ΒΗΜΑ 4^ο

Γίνεται έλεγχος αν $\sigma_{VM}^{TR} > rad2$. Αν ισχύει, τότε εκκινεί η διαδικασία επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής. Σε αντίθετη περίπτωση το βήμα ήταν ελαστικό και οι σ_{n+1}^{TR} είναι οι τάσεις που ικανοποιούν το καταστατικό μοντέλο. **Θα υποθέσουμε ότι ισχύει $\sigma_{VM}^{TR} > rad2$.**

ΒΗΜΑ 5^ο

Η μεταβλητή dm παίρνει την τιμή της συνάρτησης ***ylds2d.f***. Η συνάρτηση αυτή εφαρμόζει επαναληπτική μέθοδο για την εύρεση του γ , επιλύοντας το πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού που προκύπτει από την σχέση (3.89). Στην συνέχεια υπολογίζει το λογαριθμικό ελαστικό καταστατικό μητρώο $\tilde{\Xi}$ της σχέσης (3.86) και ολοκληρώνει την διαδικασία επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής υπολογίζοντας τις τάσεις από την σχέση (3.85).

ΒΗΜΑ 6^ο

Υπολογισμός των πλαστικών παραμορφώσεων για την επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ μέσω της σχέσης (3.82):

$$\varepsilon_{n+1}^{pl} = \varepsilon_n^{pl} + \Delta\gamma \mathbf{P}\xi_{n+1}$$

ΒΗΜΑ 7^ο

Υπολογισμός των διανυσμάτων \mathbf{N} και υπολογισμός του ελαστικού καταστατικού μητρώου στο τρέχον σημείο Gauss του στοιχείου e , για την επανάληψη i του προσαυξητικού βήματος $n + 1$ (βλέπε σχέσεις 3.96)

4.2.2 Ενσωμάτωση του αλγορίθμου στο FEAP

Η ενσωμάτωση του αλγορίθμου της ενότητας 3.6.6 στο πρόγραμμα FEAP για την ελαστοπλαστική ανάλυση φορέων σε επίπεδη ένταση ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- 1) Διαγωνοποίηση –ή φασματική «διάσπαση» (spectral decomposition) – του ελαστικού καταστατικού μητρώου $\tilde{\mathbf{C}}$ και του μητρώου απεικόνισης (mapping matrix) $\bar{\mathbf{P}}$.

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Με την διαγωνοποίηση προκύπτουν τα μητρώα Λ_C και Λ_P των οποίων τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές των $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\bar{\mathbf{P}}$ αντίστοιχα:

$$\Lambda_C = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$
$$\Lambda_P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Η σχέση που συνδέει τα μητρώα $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\bar{\mathbf{P}}$ με τα αντίστοιχα διαγωνοποιημένα Λ_C και Λ_P είναι η παρακάτω:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}\Lambda_C\mathbf{Q}^T$$
$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}\Lambda_P\mathbf{Q}^T$$

Όπου \mathbf{Q} μητρώα ίδιων διαστάσεων με τα $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\bar{\mathbf{P}}$, των οποίων η i στήλη αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα \vec{V}_i των παραπάνω μητρώων. Για την περίπτωση ισότροπου υλικού αποδεικνύεται ότι τα $\tilde{\mathbf{C}}$ και $\bar{\mathbf{P}}$ έχουν ίδια ιδιοδιανύσματα στον «περιορισμένο» χώρο των τάσεων που ορίζεται από την επίπεδη εντατική κατάσταση. Για το μητρώο \mathbf{Q} ισχύει $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2) Υπο το πρίσμα του μετασχηματισμού αυτού, το διάνυσμα τάσεων μετασχηματίζεται ανάλογα:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\xi} = \left[\frac{\xi_{11} + \xi_{22}}{\sqrt{2}} \quad \frac{-\xi_{11} + \xi_{22}}{\sqrt{2}} \quad \xi_{12} \right]^T = [\eta_{11} \quad \eta_{22} \quad \eta_{12}]^T$$

3) Το διάνυσμα τάσεων της ελαστικής πρόβλεψης είναι:

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{TR} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{TR} = \mathbf{Q}^T [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{TR} - \boldsymbol{\alpha}_n] = \mathbf{Q}^T [(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \boldsymbol{\alpha}_n]$$

4) Αξιοποιώντας τις σχέσεις διαγωνοποίησης, η σχέση (3.85) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\Gamma}(\Delta\gamma) \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{TR}$$

Το μητρώο $\boldsymbol{\Gamma}(\Delta\gamma)$ είναι το διαγώνιο μητρώο που αντιστοιχεί το αλγοριθμικό ελαστικό μητρώο $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}$ μετά από αξιοποίηση των σχέσεων διαγωνοποίησης. Τα στοιχεία της διαγωνίου δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{1 + e_3 \Delta\gamma}$$

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{1 + e_2 \Delta\gamma}$$

$$\Gamma_{33} = \frac{1}{1 + e_2 \Delta\gamma}$$

$$\text{Όπου } e_3 = \frac{E}{3(1-\nu)} + \frac{2}{3} H_{kin} \text{ και } e_2 = 2G + \frac{2}{3} H_{kin}$$

5) Μορφώνεται η συνθήκη συμβατότητας (3.89) σύμφωνα με τα παραπάνω ως εξής:

$$f_{n+1}(\Delta\gamma) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \bar{f}^2(\Delta\gamma) - R^2(\Delta\gamma) = 0$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης εκφράζει την ισοδύναμη τάση von Mises (με συνυπολογισμό των back stress) και ο δεύτερος την συνάρτηση εξέλιξης της επιφάνειας διαρροής (ισοτροπική κράτυνση) ως συναρτήσεις, σε τελική ανάλυση, του $\Delta\gamma$. Είναι

$$\bar{f}^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{3}\eta_{11}^{TR^2}\Gamma_{11}^2 + (\eta_{22}^{TR^2} + 2\eta_{12}^{TR^2})\Gamma_{22}^2$$

και

$$R^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{3}[\gamma_0 + H_{iso}(\varepsilon_{eff,n}^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma\bar{f}(\Delta\gamma))]^2$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτική μέθοδο για την εύρεση θετικής ρίζας ($\Delta\gamma$) της εξίσωσης $f_{n+1}(\Delta\gamma) = 0$, υπολογίζεται το αλγοριθμικό ελαστικό μητρώο $\tilde{\Xi}$, ανανεώνονται οι καταστατικές μεταβλητές (3.81)→(3.85) και ολοκληρώνεται η διαδικασία υπολογισμού του ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου με τον υπολογισμό των σχέσεων (3.95)–(3.96).

Όπως αναφέρθηκε στην **4.2.1**, η εύρεση θετικής ρίζας για την συνθήκη συμβατότητας και ο υπολογισμός του λογαριθμικού ελαστικού μητρώου γίνεται στην συνάρτηση **ylds2d.f**. Η επαναληπτική μέθοδος Newton που γίνεται τοπικά για τον προσδιορισμό του $\Delta\gamma$ τερματίζει μετά το πέρας 100 επαναλήψεων εάν έως τότε δεν έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη σύγκλισης για το $\Delta\gamma$, και οι καταστατικές μεταβλητές ανανεώνονται με $\Delta\gamma = 0 + \sum_1^{100} d(\Delta\gamma)_i$.

Η συνθήκη σύγκλισης του $\Delta\gamma$ είναι η παρακάτω:

$$|d(\Delta\gamma)_i| \leq |\Delta\gamma_i|10^{-8}$$

Η σχέση ανανέωσης του $\Delta\gamma$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{AN}[(d(\Delta\gamma)_i > 0) \mathbf{H}(|d(\Delta\gamma)_i| < |\Delta\gamma_{i-1}|)] \mathbf{TOTE}$$

$$\Delta\gamma_i = \Delta\gamma_{i-1} + d(\Delta\gamma)_i$$

ΑΛΛΙΩΣ

$$\Delta\gamma_i = 0,5 * |\Delta\gamma_{i-1}|$$

όπου

$$d(\Delta\gamma)_i = \frac{0.5\bar{f}^2(\Delta\gamma_{i-1})^{-1}/3(Y_0+H_{iso}(\varepsilon_{eff,n}^p+\Delta\gamma_{i-1}\sqrt{\frac{2}{3}\bar{f}(\Delta\gamma_{i-1})}))^2}{x^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}\eta_{11}^{TR^2}e_3}{\Gamma_{11}^3}+\frac{(\eta_{22}^{TR^2}+2\eta_{12}^{TR^2})e_2}{\Gamma_{22}^3}\right]+\frac{2}{3}H_{iso}\bar{f}(\Delta\gamma_{i-1})}$$

$$\mu\varepsilon \mathcal{X} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}H_{iso}\Delta\gamma}.$$

Κεφάλαιο 5

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από στατικές μη-γραμμικές αναλύσεις που έγιναν σε τετραγωνική πλάκα με μήκος πλευρών 20 cm και οπή διαμέτρου 4cm στο κέντρο της και με συμπεριφορά ελαστική-απολύτως πλαστική καθώς και η ποιοτική σύγκριση των αποτελεσμάτων από ανάλυση ορθογωνικής πλάκας με αντίστοιχα πειραματικά.

5.1- Εξωτερική φόρτιση

Η εξωτερική φόρτιση είναι εφελκυστική με αναλογικό φορτίο ασκούμενο στην πάνω και κάτω πλευρά. Η συνάρτηση φόρτισης είναι η παρακάτω:

$$F_n(t_n) = F_{max}p(t_n)$$

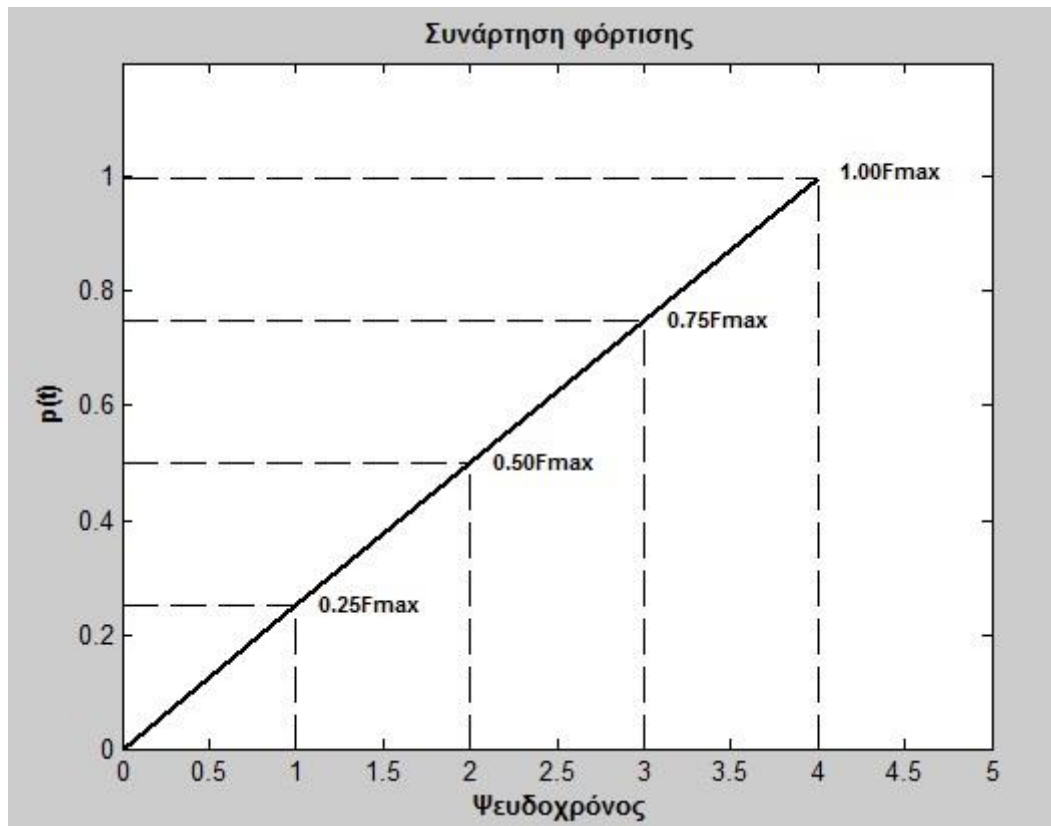
Η μεταβλητή t είναι ο ψευδο-χρόνος μέσω της οποίας καθορίζεται η τρέχουσα τιμή της εξωτερικής φόρτισης F_n στα πλαίσια της προσαυξητικής διαδικασίας. Η $p(t)$ είναι η συνάρτηση που ορίζει την παραπάνω τιμή της F_n ως ποσοστό της μέγιστης τιμής που έχουμε ορίσει στο αρχείο δεδομένων εισόδου, F_{max} :

$$p(t_n) = \frac{t_n}{4}$$

Η μετάβαση στο επόμενο φορτικό βήμα γίνεται προσαυξάνοντας τον χρόνο κατά Δt , και υπολογίζοντας την νέα στάθμη φόρτισης. Η προσαύξηση Δt είναι σταθερή καθ'όλη την διάρκεια μεμονωμένης ανάλυσης για την κλασική προσαυξητική μέθοδο.

Η τιμή της F_{max} είναι η τιμή που ασκείται στις οριζόντιες πλευρές όταν $t_n = 4$ και πιο κάτω θα παρουσιαστούν αποτελέσματα αναλύσεων για διάφορες τιμές της.

Στο σχήμα 80 φαίνεται η συνάρτηση $p(t_n)$.



80 – Συνάρτηση αναλογικού φορτίου

5.2- Τετραγωνική πλάκα με οπή

5.2.1- Μηχανικά χαρακτηριστικά υλικού

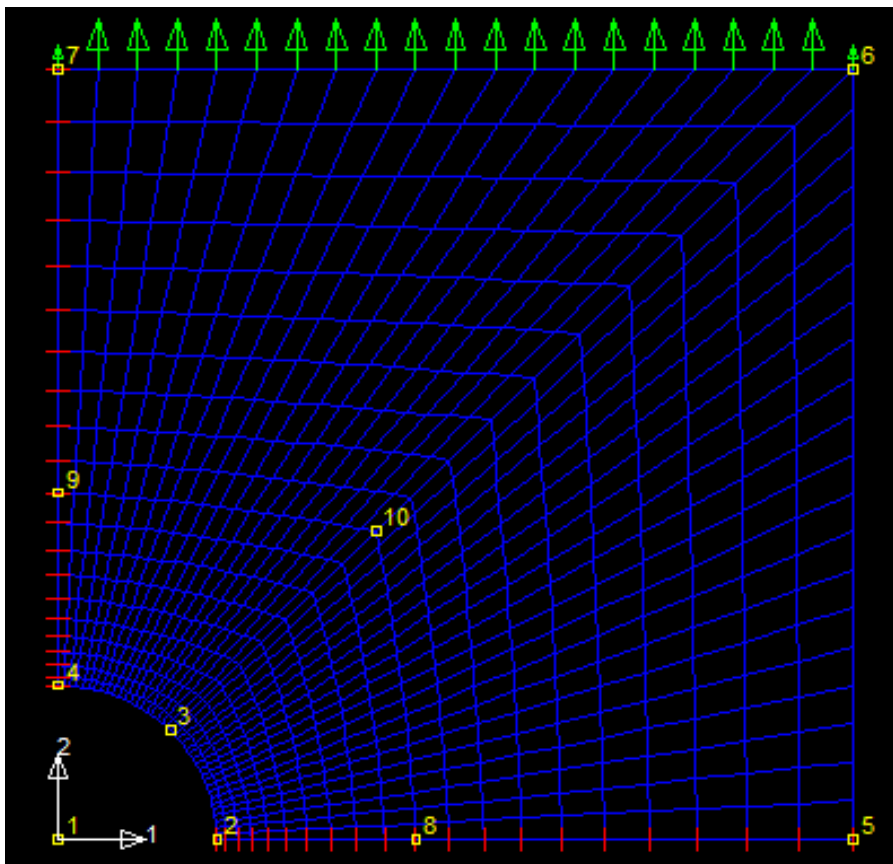
Χρησιμοποιήθηκε ένα υλικό για όλο τον φορέα (τετραγωνική πλάκα), που προσομοιάζει σε χάλυβα, με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Ισότροπο
- Ελαστικό κατά Hook
- Ελαστοπλαστικό με κριτήριο διαρροής von Mises
- Μέτρο ελαστικότητας $E = 210000 \text{ MPa}$
- Λόγος Poisson $\nu = 0,3$
- Πλαστική παράμετρος ιστροπικής κράτυνσης $H_{iso} = 0$
- Πλαστική παράμετρος κινηματικής κράτυνσης $H_{kin} = 0$
- Όριο διαρροής $\sigma_y = 360 \text{ MPa}$
- Όριο διαρροής για μεγάλες παραμορφώσεις $\sigma_y^\infty = 360 \text{ MPa}$

5.2.2- Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων

Χρησιμοποιήθηκαν ισοπαραμετρικά στοιχεία μετατοπίσεων, με τις τελευταίες να παραμένουν «μικρές» για οποιαδήποτε απόκριση. Τα στοιχεία είναι ορθογωνικά τεσσάρων κόμβων, επίπεδης έντασης, με σημεία ολοκλήρωσης Gauss κατά το σχήμα 53.

Θα παρουσιαστούν αποτελέσματα αναλύσεων για 200, 450 και 800 συνολικά πεπερασμένα στοιχεία και θα γίνει διερεύνηση της αξιοπιστίας του FEAP για προβλήματα ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς σε επίπεδη ένταση για μικρές μετατοπίσεις. Αυτό περιλαμβάνει κατά βάση την «αξιολόγηση» του βαθμού σύγκλισης εν γένει και της συμπεριφοράς του αλγορίθμου για φορτία κοντά στο φορτίο αστοχίας.

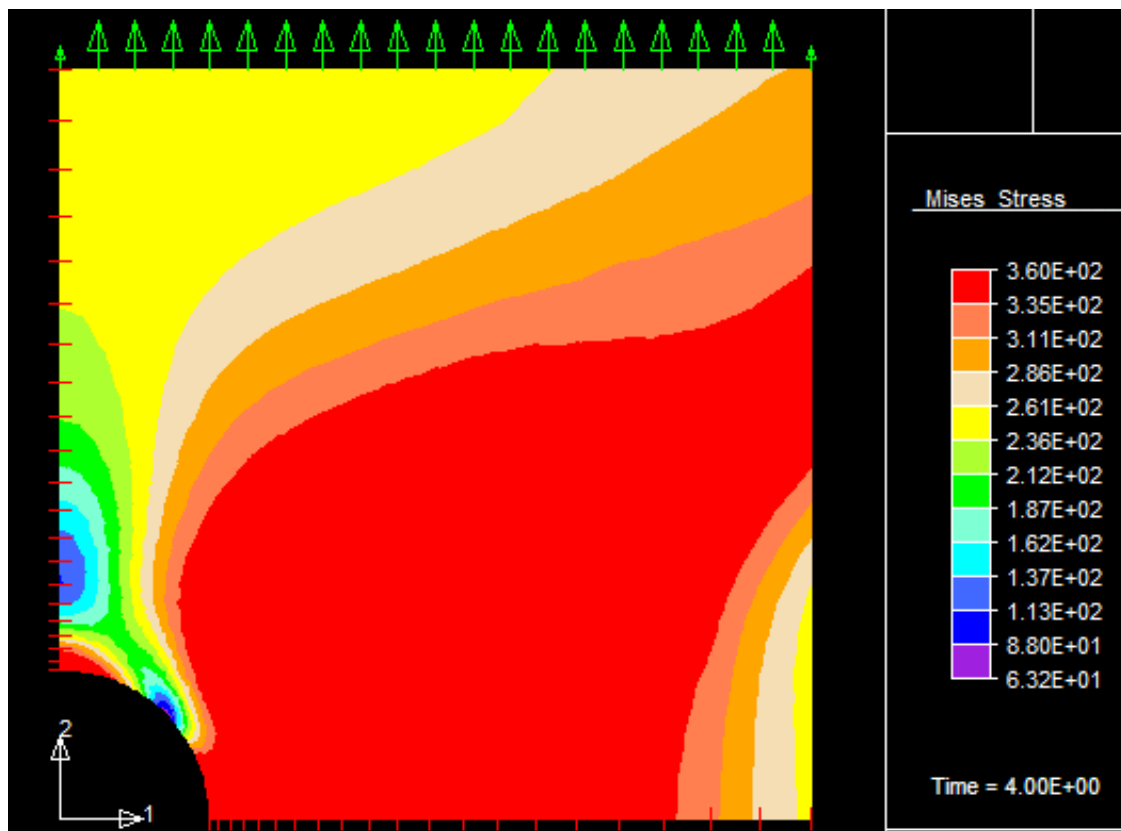


81 – Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων. 800 στοιχεία

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων για το τέταρτο του φορέα, στο οποίο και περιορίζουμε την ανάλυση λόγω γεωμετρικής και φορτικής συμμετρίας. Φαίνονται επίσης οι συνοριακές συνθήκες στις πλευρές 4-9-7 και 2-8-5, όπου περιορίζονται οι οριζόντιες (u_1) και κατακόρυφες (u_2) μετατοπίσεις αντίστοιχα.

5.2.3- Φορτίο κατάρρευσης

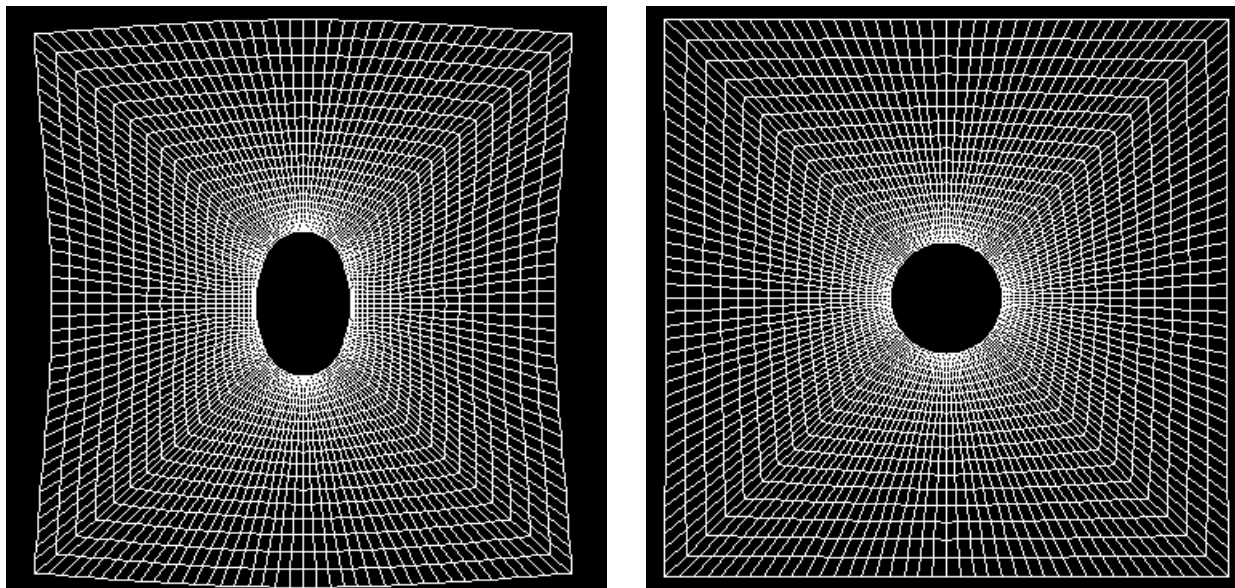
Το φορτίο κατάρρευσης του φορέα είναι $F_{max} = 288.75 \text{ MPa}$. Το φορτίο αυτό υπολογίστηκε προσεγγιστικά αρχικά με ανάλυση για $F_{max} = 300 \text{ MPa}$ και μέγιστο αριθμό προσαυξήσεων 800. Στο προσαυξητικό βήμα 771 το πρόγραμμα σταμάτησε καθώς η ευκλείδεια νόρμα του residual vector έγινε «άπειρη». Κοιτώντας στο αρχείο εξόδου «O'filename'» που δημιουργεί το FEAP και που περιέχει πληροφορίες τόσο του πλέγματος όσο και της πορείας επίλυσης, προκύπτει ότι για τις επαναλήψεις εντός του βήματος 771 τόσο η ενεργειακή, όσο και η residual νόρμα λάμβαναν μεγάλες τιμές, ενώ προειδοποιούσε ότι η υπορουτίνα «**d4tri.f**» αδυνατούσε να ολοκληρώσει διαγωνοποίηση του μητρώου ακαμψίας καθώς αυτό είναι πλέον «ιδιάζον» (κάποια ή κάποιες από τις ιδιοτιμές του είναι πλέον μηδενικές).



82- Ισοεπιφάνειες Von Mises για φορτίο 287 MPa

Με την αύξηση του φορτίου, η πλαστική ζώνη διευρύνεται από την περιοχή κοντά στην οπή προς το αριστερό κατακόρυφο σύνορο. Κοντά στο φορτίο κατάρρευσης, έχει δημιουργηθεί μια ζώνη πλαστικοποίησης η οποία περιλαμβάνει τμήμα του κατακόρυφου συνόρου, σχεδόν

ολόκληρο το οριζόντιο σύνορο και την οπή. Αυτό δημιουργεί τρόπον τινά συνθήκη «μηχανισμού» καθώς ο φορέας δεν μπορεί πλέον να προβάλει αντίσταση κατά διεύθυνση κάθετη στην φορά διάδοσης της ζώνης πλαστικοποίησης.

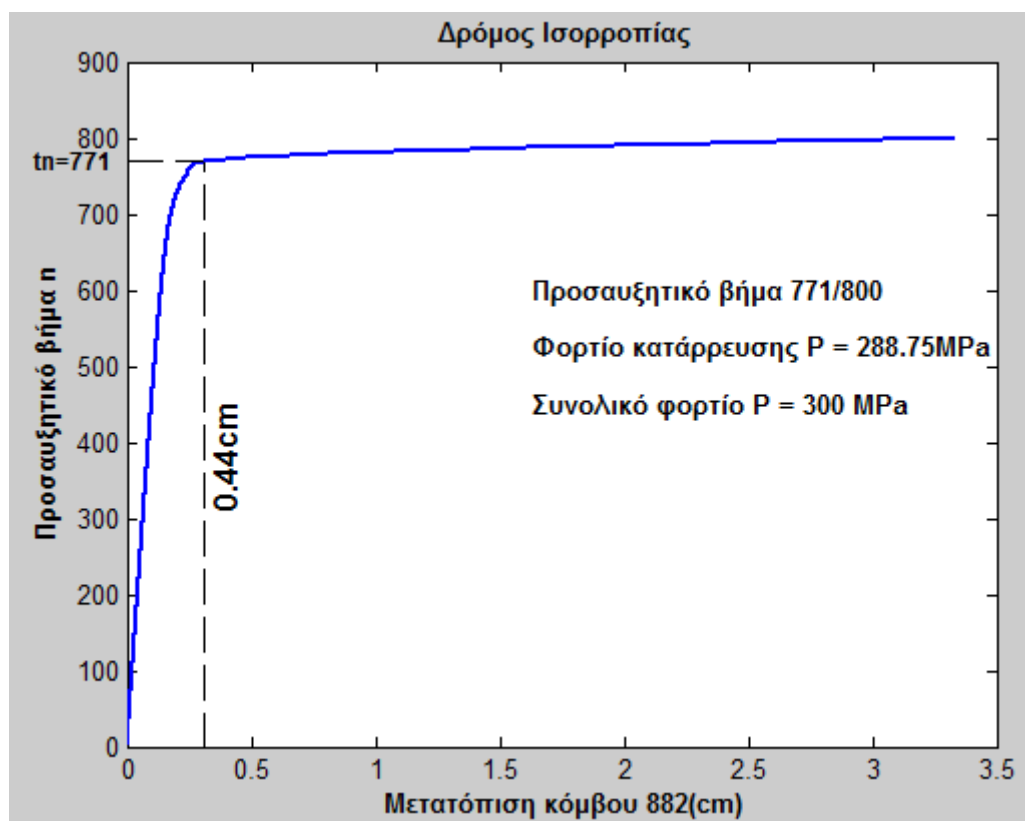


83- Παραμορφωμένο και απαραμόρφωτο πλέγμα για φορτίο 287 MPa

Ο δρόμος ισορροπίας που προέκυψε φαίνεται στο σχήμα 84. Σύμφωνα με αυτό, η κλίση της καμπύλης ισορροπίας οριζοντιοποιείται περίπου στο βήμα $t_n = 771$, το οποίο αντιστοιχεί σε φορτίο ≈ 288.75 MPa. Για να λάβουμε και μετατοπίσεις πέραν του φορτίου αστοχίας στην συγκεκριμένη περίπτωση, ορίστηκε παράμετρος ισοτροπικής κράτυνσης με πολύ μικρή τιμή, προκειμένου να συγκλίνει ο αλγόριθμος για τιμές μεγαλύτερες του φορτίου αστοχίας. Αυτή η πρακτική είναι χρήσιμη όταν μελετάμε περιπτώσεις ελαστικής-απολύτως πλαστικής συμπεριφοράς.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι που μπορούμε να διαπιστώσουμε αν το συμπέρασμά μας για το φορτίο κατάρρευσης είναι σωστό. Ένας από αυτούς είναι να εκφράσουμε την εξέλιξη της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης σημείου Gauss του στοιχείου που βρίσκεται στην πιο «δυσμενή» εντατική κατάσταση συναρτήσει των προσαυξητικών

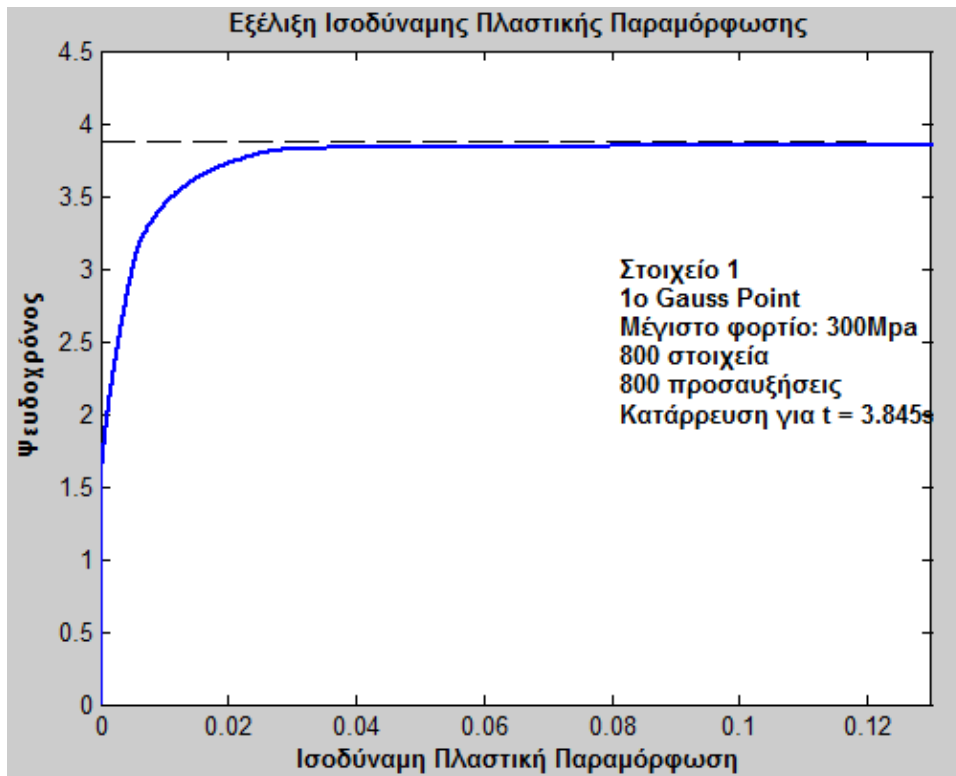
βημάτων. Στην περίπτωση μας, πρόκειται για το στοιχείο 1 (κάτω γωνία της οπής).



84- Δρόμος ισορροπίας για συνολικό εξωτερικό φορτίο 300 MPa

Όπως φαίνεται στο σχήμα 85, με επιβολή μέγιστου φορτίου 300 MPa και με «βοηθητική» παράμετρο ισοτροπικής κράτυνσης με τιμή περίπου 10 MPa, η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στο πρώτο σημείο Gauss του στοιχείου 1 αυξάνεται ραγδαία για $t_n > 3.845sec$ και για $t_n = 4$ η κλίση οριζοντιοποιείται πλήρως.

Μια άλλη ένδειξη ότι βρισκόμαστε κοντά στο οριακό φορτίο είναι το μέγεθος των προσαυξητικών επικόμβιων παραμορφώσεων και των ευκλείδειων νορμών του residual vector. Σε φορτία μακριά από το οριακό, οι πρώτες και οι δεύτερες μειώνονται με ρυθμό που αντιστοιχεί στον ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου. Όσο προσεγγίζουμε το οριακό φορτίο, οι προσαυξητικές επικόμβιες μετατοπίσεις και οι νόρμες του residual vector αυξάνουν δραστικά και εμφανίζονται προβλήματα σύγκλισης.



85- Ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση συναρτήσει προσαυξητικού βήματος

Στον βαθμό που ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι αξιόπιστος και ανταποκρίνεται στην φύση του προβλήματος, τέτοιες ενδείξεις δείχνουν ότι βρισκόμαστε κοντά στο οριακό φορτίο.

Παρουσιάζεται παρακάτω η εξέλιξη των επικόμβιων προσαυξητικών μετατοπίσεων κατά την κατεύθυνση 2 του κόμβου 882 εντός προσαυξητικού βήματος συναρτήσει των επαναλήψεων της Newton-Raphson α) για βήμα σύγκλισης μακριά από το οριακό φορτίο (657) και β) για το βήμα τερματισμού του προγράμματος (771)

Πίνακας.5.1

Iteration	$\Delta\alpha_{657}$	iter.	$\Delta\alpha_{771}$	iter.	$\Delta\alpha_{771}$
1	$2,18 \cdot 10^{-4}$	1	$2,18 \cdot 10^{-4}$	6	$10,8 \cdot 10^6$
2	$1,62 \cdot 10^{-4}$	2	0,384	7	$10,1 \cdot 10^{11}$
3	$4,42 \cdot 10^{-7}$	3	0,700	8	$2,51 \cdot 10^{15}$
4	$3,07 \cdot 10^{-11}$	4	8,654	9	$1,57 \cdot 10^{20}$
5	$2,53 \cdot 10^{-17}$	5	1205,25	10	$4,91 \cdot 10^{31}$

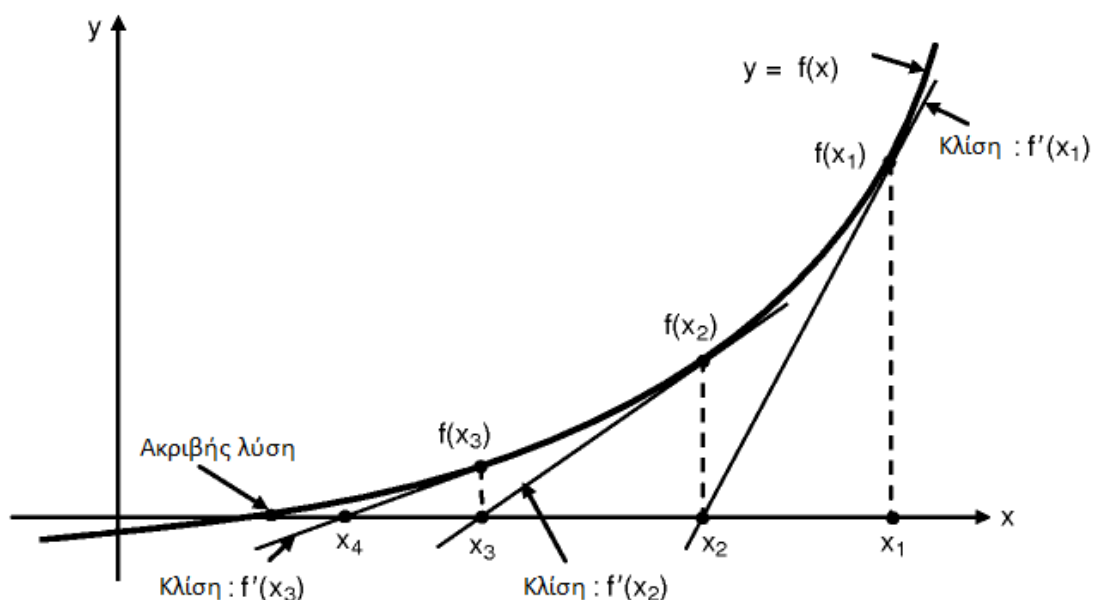
Για βήμα μακριά από το φορτίο αστοχίας, ο αλγόριθμος συγκλίνει εντός 5 επαναλήψεων και οι επικόμβιες προσαυξητικές μετατοπίσεις μειώνονται με μη-γραμμικό ρυθμό. Για το βήμα αστοχίας, ο αλγόριθμος αναζητεί την νέα προσέγγιση με κλίση σχεδόν μηδενική, καθώς σε αυτό το βήμα το καθολικό μητρώο ακαμψίας γίνεται ιδιάζον. Επομένως οι προσαυξητικές μετατοπίσεις λαμβάνουν παράλογα μεγάλες τιμές, πράγμα που δεικνύει ότι ο φορέας έχει αστοχήσει.

5.2.3- Τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης και συγκριτικά αποτελέσματα

5.2.3.1 Τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης

Η σχέση ανανέωσης της ανεξάρτητης μεταβλητής x με βάση την τρέχουσα τιμή της x_i στα πλαίσια του σχήματος της κλασικής μεθόδου Newton-Raphson είναι η εξής:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



86-Κλασική Newton-Raphson

Η κλασική Newton-Raphson συγκλίνει γρήγορα. Προβλήματα σύγκλισης παρουσιάζονται αν η αρχική εκτίμηση x_0 δεν βρίσκεται «κοντά» στην ρίζα x^* ή αν κλίση f' κοντά στην ρίζα είναι πολύ μικρή ή μηδενική.

Αν πληρούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η επαναληπτική διαδικασία τερματίζει όταν

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| \leq \varepsilon$$

όπου ε η ανοχή. Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα της προσέγγισης στην επανάληψη $i + 1$, e_{i+1} είναι ανάλογο του τετραγώνου του σφάλματος e_i της αμέσως προηγούμενης επανάληψης:

$$e_{i+1} \approx \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} e_i^2$$

Η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης της κλασικής Newton-Raphson είναι τετραγωνικός. Η εκτίμηση του ρυθμού σύγκλισης από δεδομένα προκύπτει σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$a = \frac{\log \left| \frac{e_{i+1}}{e_i} \right|}{\log \left| \frac{e_i}{e_{i-1}} \right|}$$

Για την κλασική Newton-Raphson, πρέπει $a \approx 2$.

5.2.3.2 Κριτήρια σύγκλισης στο FEAP

Ο τετραγωνικός ρυθμός σύγκλισης εξασφαλίζεται για την μέθοδο Newton-Raphson με χρήση του συμβατού ελαστοπλαστικού καταστατικού μητρώου, αντί του συνεχούς. Αυτό οδηγεί στην κατά πολύ μεγαλύτερο βαθμό γρηγορότερη ικανοποίηση των κριτηρίων σύγκλισης, σε σχέση με έναν γραμμικό ή υπεργραμμικό ρυθμό σύγκλισης. Το FEAP ελέγχει την σύγκλιση μέσω 2 κριτηρίων:

α) Ενεργειακό

$$E_i = d\mathbf{u}^T \mathbf{f} \leq TOL E_1$$

Όπου E_i η ενέργεια της τρέχουσας επανάληψης ως γινόμενο των επικόμβιων προσαυξητικών μετατοπίσεων και του τρέχοντος residual vector. E_1 είναι η ενέργεια της πρώτης επανάληψης για το τρέχον βήμα και TOL ανοχή. Το FEAP χρησιμοποιεί $TOL = 10^{-16}$.

β) Κριτήριο ευκλείδειας νόρμας του residual vector

$$(\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_i)^{\frac{1}{2}} = RTOL(\mathbf{f}_0^T \mathbf{f}_0)^{\frac{1}{2}}$$

όπου η ανοχή $RTOL$ στο FEAP είναι 10^{-8} .

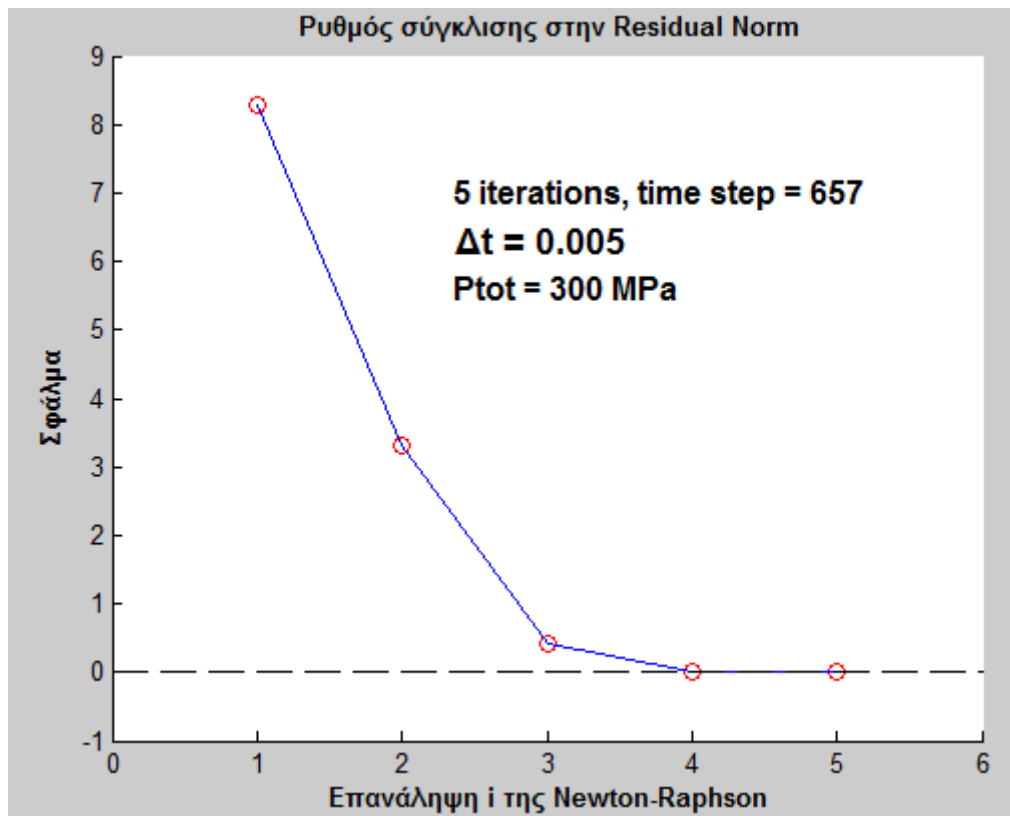
Το FEAP σε κάθε επανάληψη ελέγχει την ικανοποίηση των κριτηρίων. Αν ένα εκ των δύο ικανοποιείται, η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται και προχωράει στο επόμενο προσαυξητικό βήμα.

Το residual vector εκφράζει, μαθηματικώς, το σφάλμα της προσέγγισής μας από την πραγματική λύση, η οποία στην περίπτωσή μας είναι η $f = q_{n+1} - F_{n+1}^i = 0$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε την χρήση του συμβατού καταστατικού μητρώου από τον αλγόριθμο και, άρα, το κατά πόσο συγκλίνει με τετραγωνικούς ρυθμούς, βρίσκοντας την τιμή της παραμέτρου α ανα δύο επαναλήψεις ή απεικονίζοντας τις νόρμες ως προς τις επαναλήψεις της Newton-Raphson.

Πίνακας 5.2

Προσαυξητικό βήμα	Επανάληψη	Ευκλείδεια νόρμα του residual vector	α	Μέσος όρος $\bar{\alpha}$
657	1	8,27977	-	$\bar{\alpha} = 2,68$
	2	3,30259	-	
	3	0,40486	2,28	
	4	$4,635 \cdot 10^{-5}$	4,31	
	5	$8,778 \cdot 10^{-11}$	1,45	

Βλέπουμε ότι ο μέσος όρος της παραμέτρου α για την επαναληπτική διαδικασία εντός του συγκεκριμένου βήματος είναι 2,68. Το ότι η σύγκλιση γίνεται με τετραγωνικούς ρυθμούς φαίνεται και από το σχήμα 86, όπου απεικονίζονται οι νόρμες συναρτήσει της επανάληψης i . Αξίζει να τονισθεί ότι, χαρακτηριστικό της επαναληπτικής μεθόδου είναι ότι οι τετραγωνικοί ρυθμοί σύγκλισης «αποκαθίστανται» καθώς πλησιάζουμε προς την «ρίζα». Αρχικά, στις πρώτες επαναλήψεις μακριά από την ρίζα, είναι σχεδόν γραμμικές.



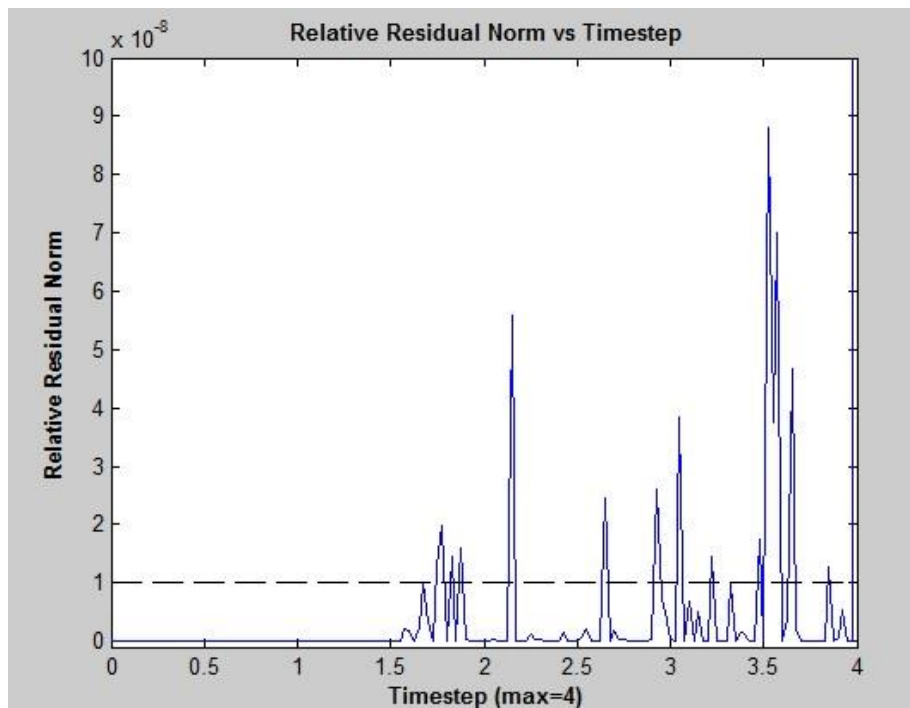
87- Σύγκλιση με όρους ευκλείδειας νόρμας του residual vector στο προσαυξητικό βήμα 657.

5.2.3.3- Συμπεριφορά κριτηρίων σύγκλισης καθ' όλη την μη-γραμμική ανάλυση

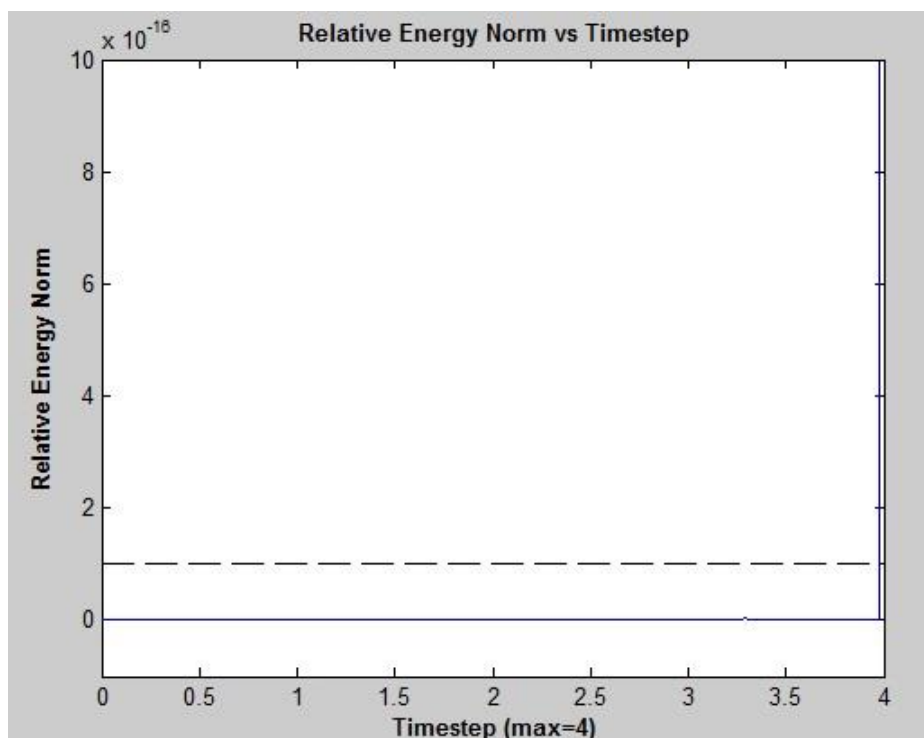
Παρουσιάζεται παρακάτω η συμπεριφορά των τελικών τιμών (τελευταία επανάληψη σε κάθε προσαυξητικό βήμα) της σχετικής residual νορμας και της σχετικής ενεργειακής νορμάς, δηλαδή, των λόγων που προκύπτουν από την τιμή στην τελευταία επανάληψη προς την αντίστοιχη στην πρώτη επανάληψη.

Παρατηρούμε ότι το κριτήριο σύγκλισης για την ενεργειακή νόρμα συμπεριφέρεται αρκετά καλύτερα από το αντίστοιχο της residual, το οποίο «σημειακά» υπερβαίνει την ανοχή (10^{-8}). Αυτό μας δείχνει ότι η μη-γραμμική ανάλυση «προχωράει» συνήθως αφού ικανοποιηθεί το ενεργειακό κριτήριο σύγκλισης. Ωστόσο οι τιμές στις σχετικές νόρμες του residual vector είναι μια ή το πολύ δύο τάξεις μεγαλύτερες από την ανοχή, επομένως, η ικανοποίηση και του δεύτερου κριτηρίου απαιτεί

περισσότερες επαναλήψεις. Βασιζόμενοι επομένως στις ενεργειακές νόρμες, έχουμε και πιο γρήγορη σύγκλιση στην επαναληπτική διαδικασία.



88- Τελική τιμή της σχετικής νόρμας του residual vector συναρτήσει των προσυζητικών βημάτων. Με διακεκομμένη η ανοχή 10^{-8}



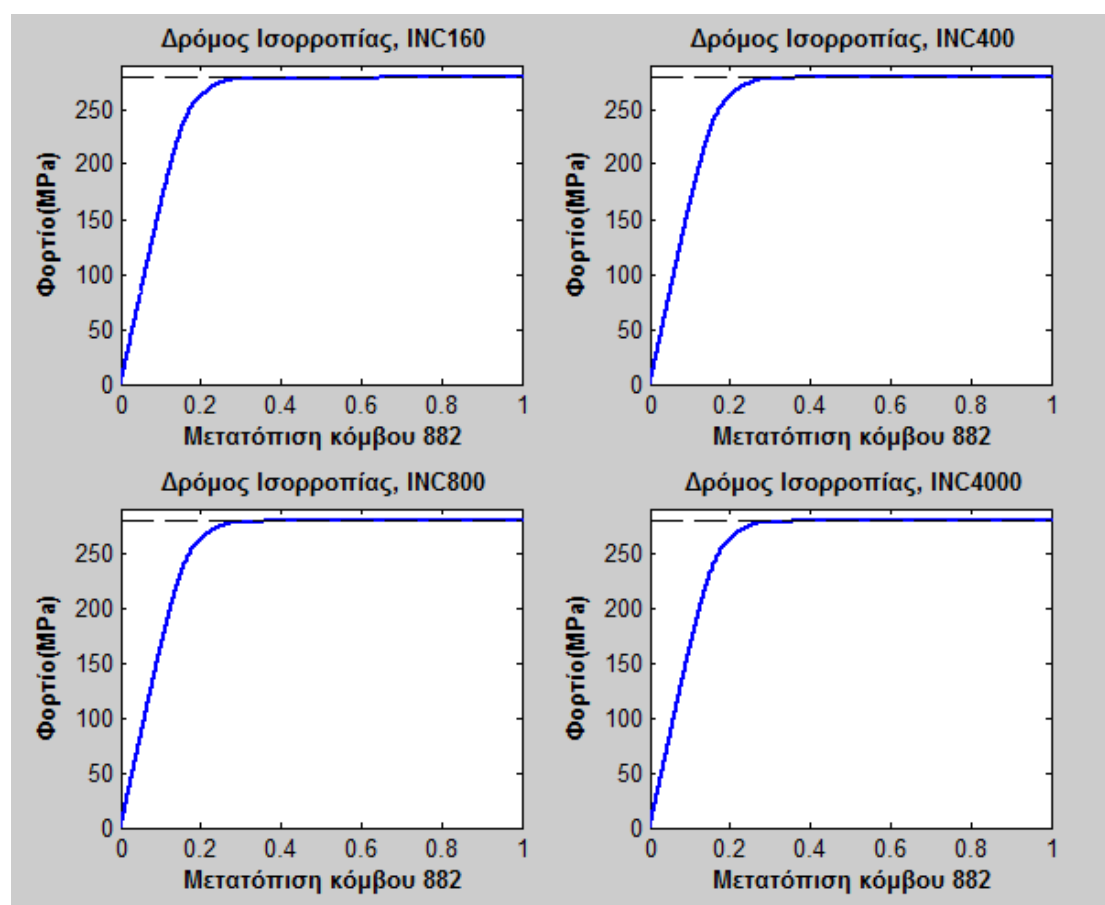
89- Τελική τιμή της σχετικής ενεργειακής νόρμας συναρτήσει των προσυζητικών βημάτων

5.2.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων για διαφορετικό αριθμό προσαυξήσεων και πυκνότερο πλέγμα.

5.2.4.1- Σύγκριση δρόμων ισορροπίας για διαφορετικό αριθμό προσαυξήσεων

Παρουσιάζονται οι διαφορές στην καμπύλη ικανότητας για τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς προσαυξήσεων: 160, 400, 800, 4000.

Χρησιμοποιήθηκε πλαστική παράμετρος ιστροπικής κράτυνσης $H_{iso} = 5 \text{ MPa}$ βοηθητικά, προκειμένου να συνεχίσει το πρόγραμμα και για φορτία μεγαλύτερα του $288,75 \text{ MPa}$.



90 – Καμπύλες Ικανότητας για διαφορετικές προσαυξήσεις

Ουσιαστικές διαφορές στην κλίση του ελαστικού κλάδου δεν υπάρχουν. Ωστόσο, όσο μεγαλύτερος ο αριθμός προσαυξήσεων, ή ,ισοδύναμα, με όσο μικρότερη προσαύξηση φορτίου προχωράμε την στατική μη-γραμμική ανάλυση, τόσο πιο ακριβής είναι η εικόνα που έχουμε για την

μέγιστη μετατόπιση του κόμβου ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, για μικρότερες προσαυξήσεις, προκύπτουν, σε περίπτωση μονοτονικά αυξανόμενης εφελκυστικής φόρτισης, μικρότερες μετατοπίσεις αφενός διότι τα μικρότερα βήματα επιτρέπουν σύγκλιση για στάθμες φόρτισης που με μεγαλύτερα δεν θα επέτρεπαν, αφετέρου διότι με μεγάλα προσαυξητικά βήματα, δημιουργούνται «πλασματικές» πλαστικές διαρροές σε σημεία Gauss στοιχείων τα οποία στην πραγματικότητα μένουν ελαστικά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η προσέγγιση της μετατόπισης του κόμβου 882 στο προσαυξητικό βήμα που αντιστοιχεί στον χρόνο 3.845 (φορτίο $\approx 288 \text{ MPa}$), όπου και σταματάει το πρόγραμμα για H_{iso} .

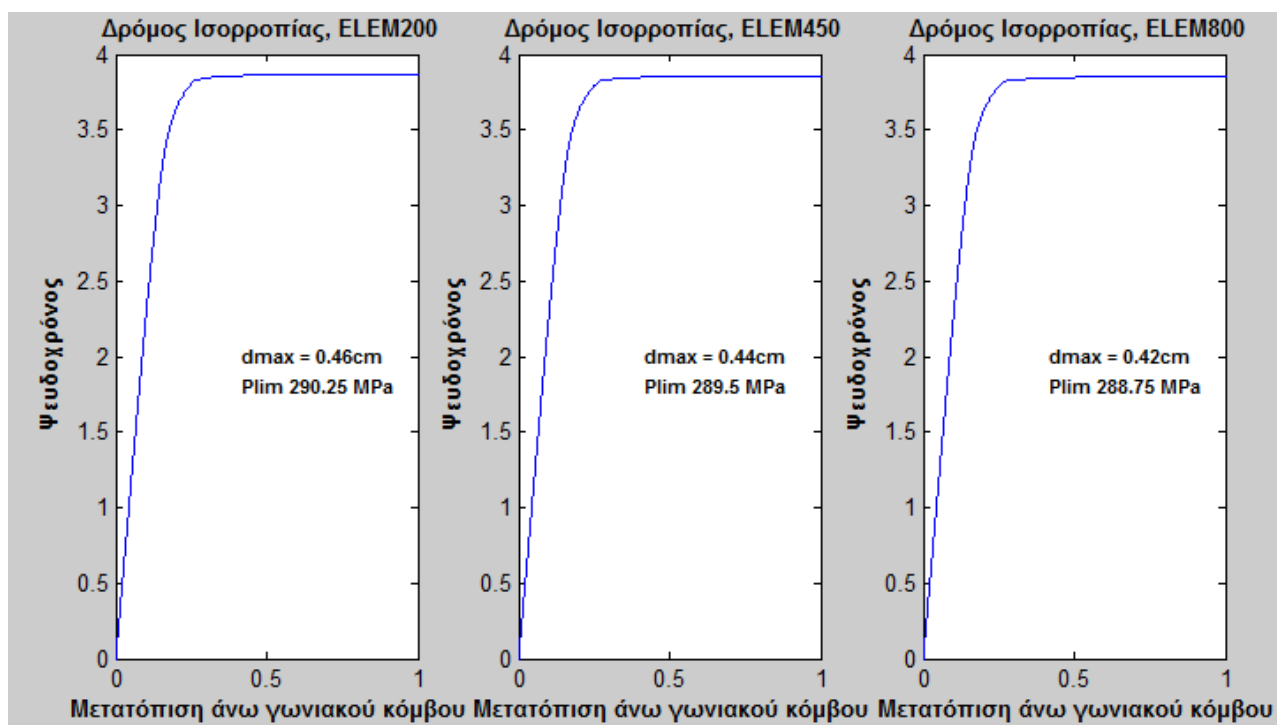
Πίνακας 5.3 – Μετατόπιση κόμβου 882 κατά την κατάρρευση

Χρόνος κατάρρευσης	Αριθμός προσαυξήσεων	Μετατόπιση κόμβου 882
3,845s	160	6.4705E – 01
	400	5.0033E – 01
	800	4.2849E – 01
	4000	4.1896E – 01

Παρατηρούμε ότι για μεγάλες προσαυξήσεις (μικρό αριθμό προσαυξητικών βημάτων), η πρόβλεψη της μετατόπισης κατά την κατάρρευση είναι ελαφρώς μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη για μικρές προσαυξήσεις (400, 800, 4000). Άξιο προσοχής είναι επίσης το γεγονός ότι για ανάλυση με $H_{iso} = 0$ και για 800 προσαυξήσεις, η μετατόπιση του κόμβου 882 είναι 4.4730E-01 *cm*, σύμφωνα με το σχήμα 84, δηλαδή ελαφρώς μεγαλύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη που προκύπτει με χρήση βοηθητικού $H_{iso} = 5 \text{ MPa}$.

5.2.4.2- Σύγκριση δρόμων ισορροπίας για διαφορετικό αριθμό στοιχείων

Παρουσιάζονται παρακάτω οι δρόμοι ισορροπίας για τρεις αναλύσεις με 200, 450 και 800 στοιχεία. Όπως φαίνεται και από τα σχήματα, όσο αραιότερο είναι το πλέγμα, τόσο κατά την ανάλυση υπερεκτιμάται το φορτίο κατάρρευσης, αν και οι διαφορές στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι μεγάλες. Αυτό συμβαίνει, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3, επειδή η διακριτοποίηση του συνεχούς φορέα επιβάλλει περιορισμούς στο πεδίο μετατοπίσεων, με αποτέλεσμα να υπερεκτιμά την ακαμψία του. Όσο πυκνότερο το πλέγμα, τόσο καλύτερη η προσέγγιση του (φυσικού) συνεχούς προβλήματος.



91 – Δρόμοι ισορροπίας για διαφορετικό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων a) 200 b) 450 c) 800

5.2.5- Επιφάνεια διαρροής και πλαστική διόρθωση

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί η γεωμετρική απεικόνιση του λεγόμενου περιορισμένου τόπου των τάσεων για επίπεδη ένταση (constrained stress space) και η επαναληπτική επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής σε μια επανάληψη Newton-Raphson για την περίπτωση ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού. Τα δεδομένα εξήχθησαν από το FEAP μετά από κατάλληλη επεξεργασία ορισμένων υπορουτινών, ώστε να πάρουμε ως δεδομένα εξόδου τις τάσεις που προκύπτουν για $\Delta\gamma$ που δεν ικανοποιούν την ανοχή που έχει ενσωματώσει το FEAP⁸.

Τόπος αποδεκτών τάσεων (admissible stress space)

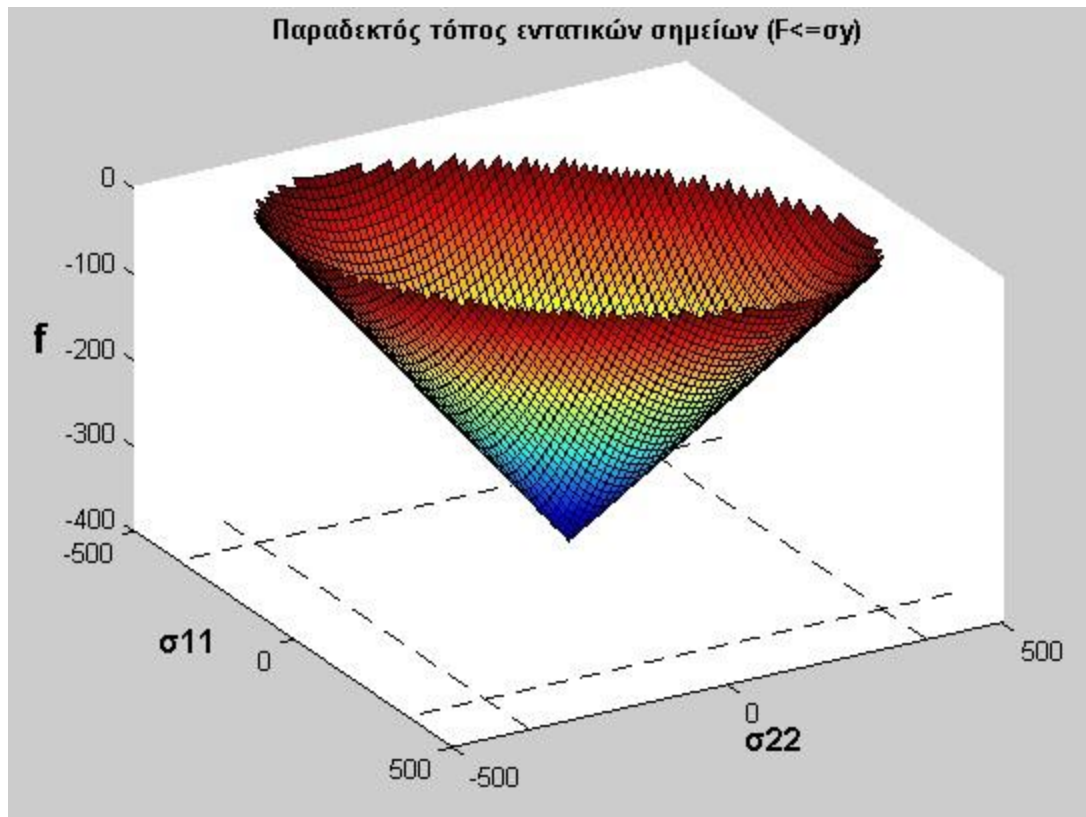
Παρακάτω φαίνονται όψεις του τόπου αποδεκτών τάσεων, δηλαδή, της επιφάνειας εκείνης στην οποία πρέπει να ανήκει το εντατικό σημείο μέσω της απεικόνισης $\bar{f}: A \rightarrow B$, όπου \bar{f} η συνάρτηση ισοδύναμης τάσης ή τάσης von Mises, A και B το πεδίο ορισμού των τάσεων και το σύνολο τιμών της \bar{f} .

Στα σχήματα 92-94 φαίνεται η επιφάνεια στην οποία οφείλουν να κείνται τα εντατικά σημεία όσο το σημείο ενδιαφέροντος παραμένει ελαστικό:

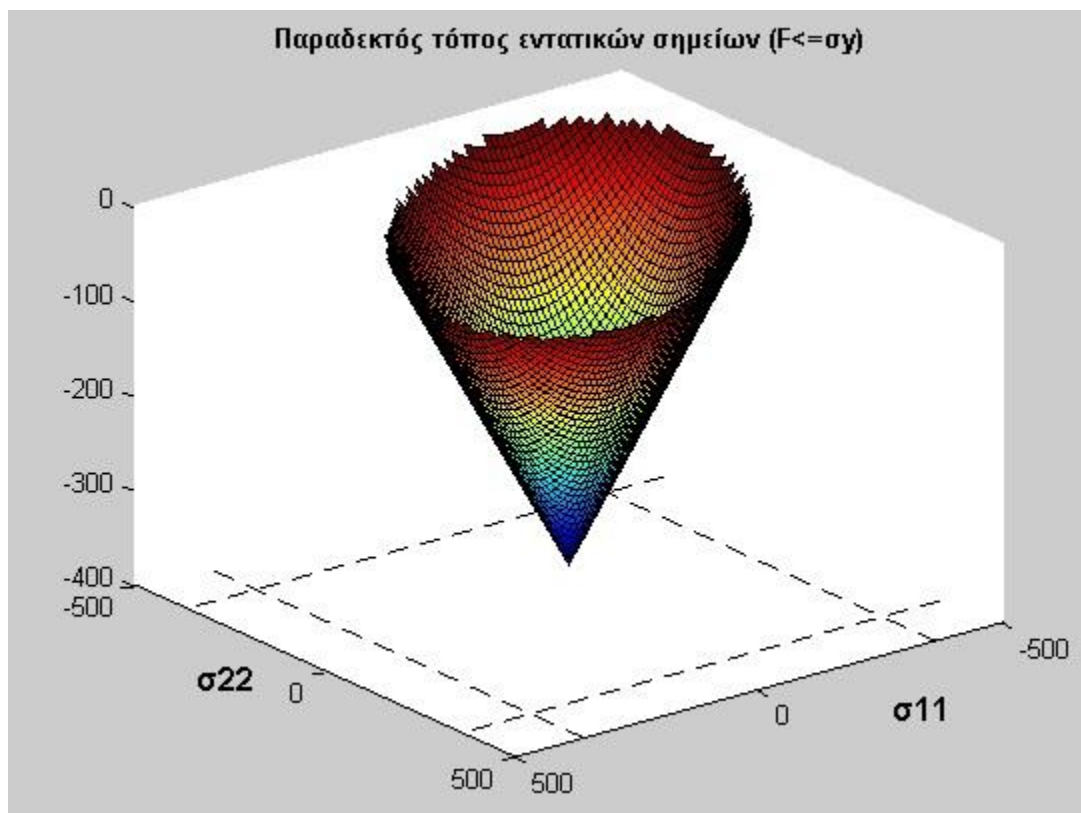
$$f = \bar{f} - 360 \leq 0$$

Όπου επιλέχθηκε η σταθερά 360 επειδή αντιπροσωπεύει το όριο διαρροής στα παραδείγματα που αναλύσαμε παραπάνω.

⁸ Βλ. Ενότητα 4.2.2 για την σύγκλιση της πλαστικής παραμέτρου $\Delta\gamma$

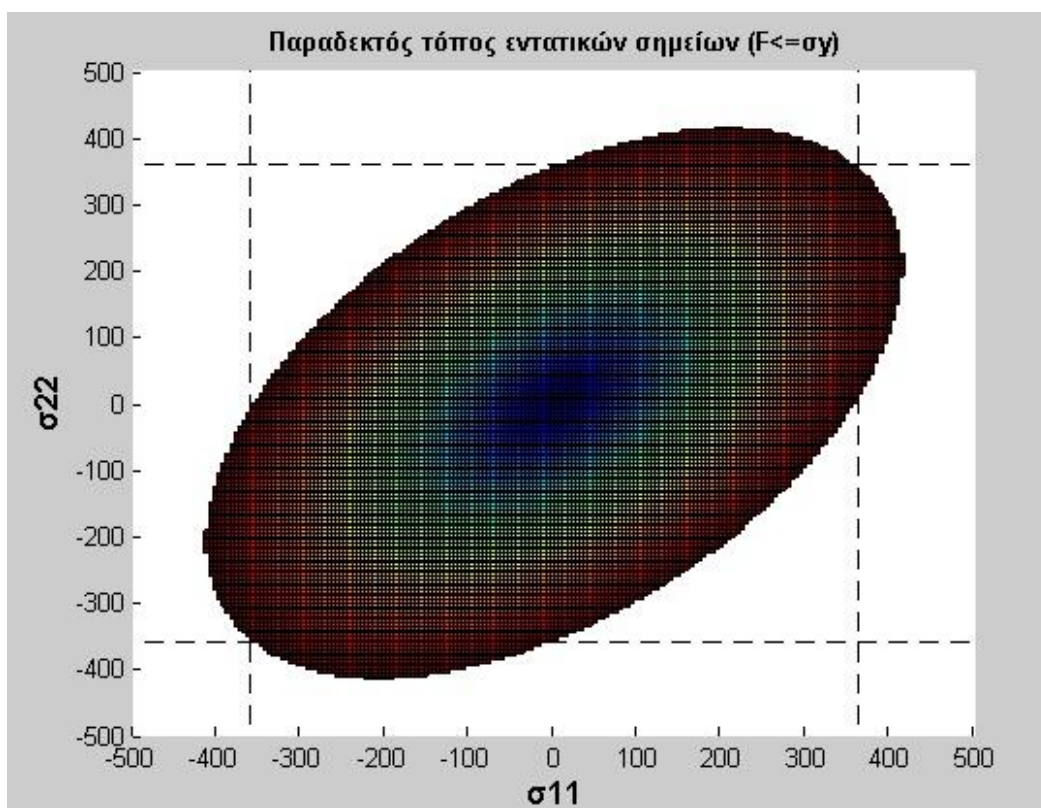


92- Επιφάνεια ελαστικής εντατικής κατάστασης



93- Επιφάνεια ελαστικής εντατικής κατάστασης

Η κάτοψη της επιφάνειας αυτής (σχήμα 94) αποτελεί ουσιαστικά την πιο διαδεδομένη μορφή παρουσίασης του κριτηρίου von Mises για επίπεδη ένταση. Τα εσωτερικά σημεία της έλλειψης αντιστοιχούν ουσιαστικά σε εντατικά σημεία που ανήκουν στο υποσύνολο $[-360,0)$ του συνόλου τιμών B . Τα σημεία της περιφέρειας της έλλειψης ικανοποιούν την εξίσωση και δίνουν τιμή 0. Τάσεις που οδηγούν σε εντατικά σημεία μέσω των οποίων η απεικόνιση δίνει τιμές μεγαλύτερες του μηδενός δεν θεωρούνται αποδεκτές. Έτσι, για την περίπτωση ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού, το πεδίο ορισμού των τάσεων είναι το $[-\sigma_y, \sigma_y]$.



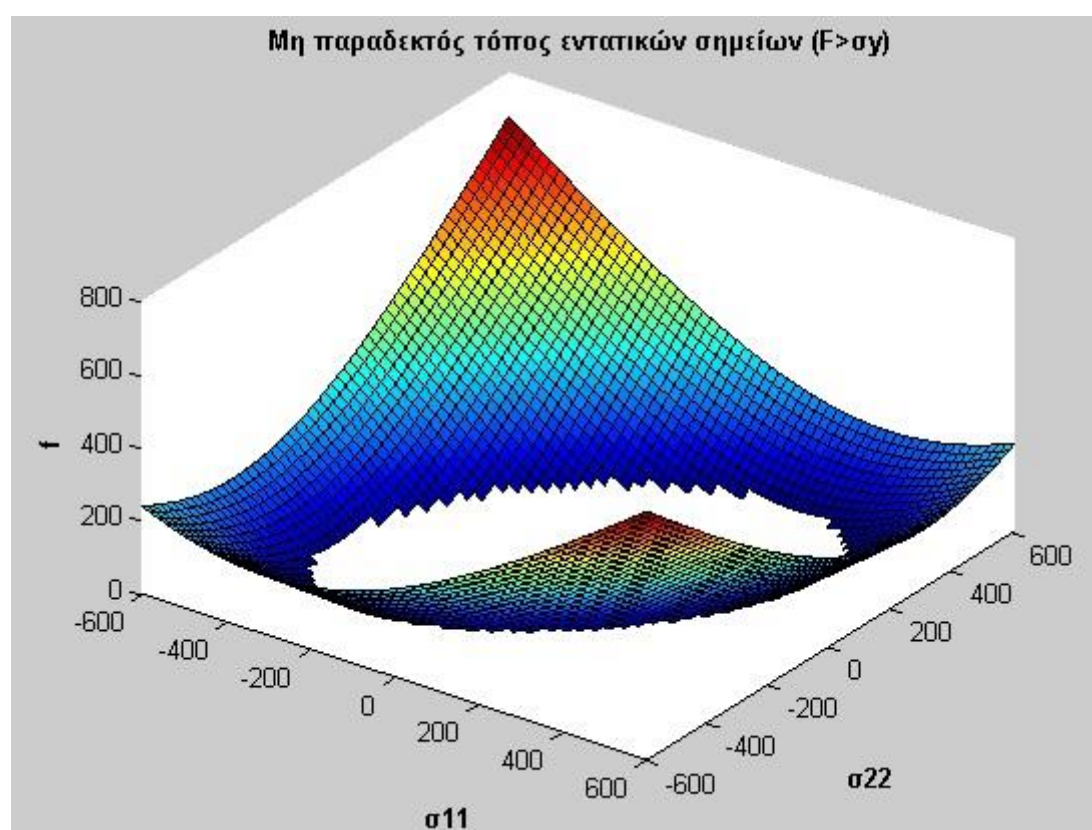
94- Κάτοψη επιφάνειας ελαστικής εντατικής κατάστασης

Τόπος μη-αποδεκτών τάσεων

Είναι σημαντικό να έχουμε εικόνα του τόπου εκείνου όπου τα εντατικά σημεία οδηγούνται σε τιμές μεγαλύτερες του καθορισμένου ορίου διαρροής, δηλαδή, στα σημεία εκείνα όπου ισχύει $f > 0 \rightarrow \bar{f} > 360$. Με αυτό τον τρόπο γίνεται κατανοητό το γιατί, σύμφωνα με τον return-map αλγόριθμο CPP, η επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής από το

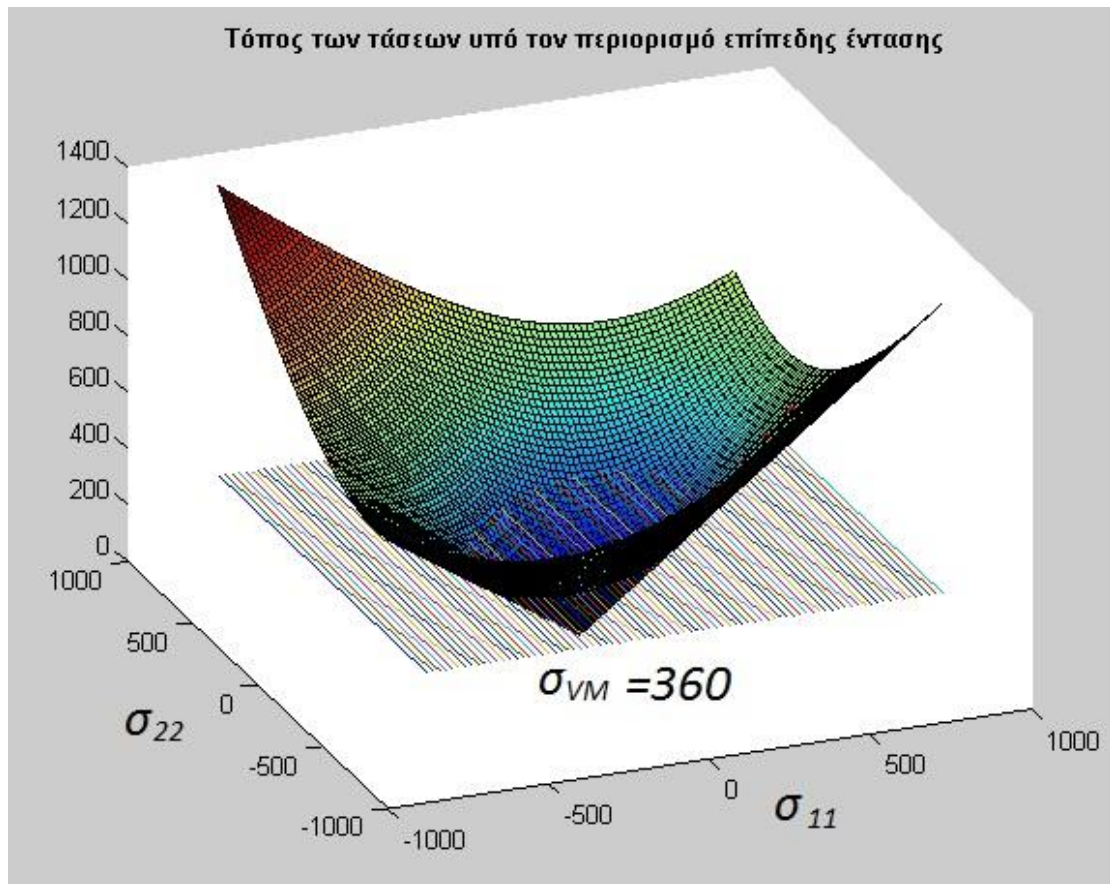
δοκιμαστικό εντατικό σημείο δεν είναι η ακτινική για την περίπτωση της επίπεδης έντασης.

Ο τύπος αυτός αποτελεί στην ουσία γραφική απεικόνιση της ισοδύναμης τάσης υπό τον περιορισμό $\bar{f} > 360$ και φαίνεται στο σχήμα 95. Η απεικόνιση χωρίς τον περιορισμό μας δίνει την επιφάνεια στην οποία οφείλουν να κείνται τα εντατικά σημεία, είτε είναι ελαστικά, είτε αποτελούν σημεία της ελαστικής πρόβλεψης, είτε σημεία που κινούνται ανοδικά λόγω κράτυνσης. Ο χωρίς περιορισμό επιφάνεια φαίνεται στο σχήμα 96.



95– Μη παραδεκτός τύπος τάσεων

Στην επιφάνεια του σχήματος 95 οφείλουν να κείτονται τα εντατικά σημεία που έχουν προκύψει κατά το βήμα της ελαστικής πρόβλεψης και όλα τα σημεία τα οποία, έως ότου επιστρέψουμε στην γραμμή διαρροής, δεν ικανοποιούν το καταστατικό μοντέλο.



96– Τόπος τάσεων στην επίπεδη ένταση

Στο σχήμα 114 έχει προστεθεί για εποπτικούς λόγους και το επίπεδο $\sigma_{VM} = \bar{f} = 360$, το οποίο οριοθετεί το σύνολο τιμών για ελαστικά εντατικά σημεία και τα σημεία που εμμένουν στην διαρροή ή σημεία της ελαστικής πρόβλεψης. Σε περίπτωση κρατυνόμενου υλικού, το επίπεδο μετατοπίζεται προς τα πάνω.

Πλαστική διόρθωση στον περιορισμένο τόπο της επίπεδης έντασης.

Η πλαστική διόρθωση γίνεται από την συνάρτηση **ylds2d.f**, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Καταγράφηκαν οι τιμές που παίρνει η πλαστική παράμετρος συμβατότητας (ή συντελεστής αναλογίας) $\Delta\gamma$ κατά την επαναληπτική επίλυση της συνθήκης συμβατότητας εντός μιας επανάληψης για ένα τυχαίο σημείο Gauss τυχαίου στοιχείου. Οι τιμές είναι οι παρακάτω:

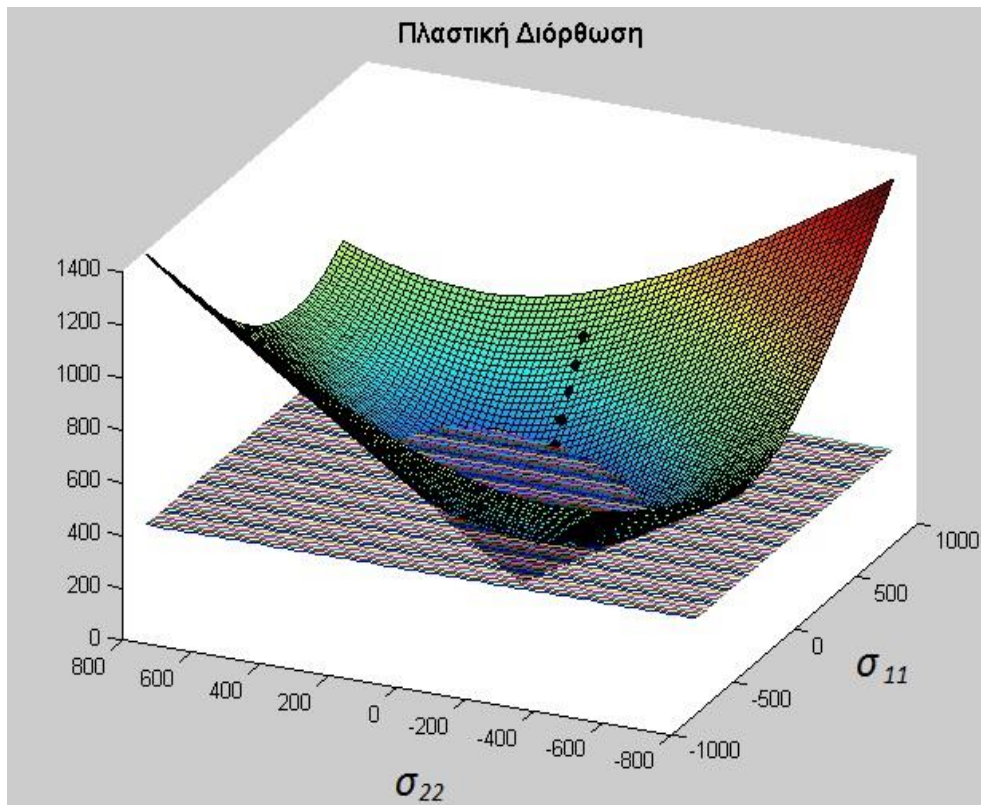
Πίνακας 5.4

Επανάληψη	σ_{11}	σ_{22}	σ_{12}	\bar{f}
1	28.8289802805181	376.081986020481	-4.06639644568934	362.5966311129238
2	29.2138202868560	373.677625858918	-4.03373439968373	360.0287174599692
3	29.2180861473932	373.650720247591	-4.03336937602576	360.0000035722232
4	29.2180866780468	373.650716900303	-4.03336933061435	360.0000000000004
5	29.2180866780468	373.650716900303	-4.03336933061435	360.00000000000000

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει σε 5 επαναλήψεις και το εντατικό σημείο επιστρέφει στην επιφάνεια διαρροής $\bar{f} = \bar{f}_5 = 360$ από το δοκιμαστικό εντατικό σημείο $\bar{f}_1 = 362.5966311129238$.

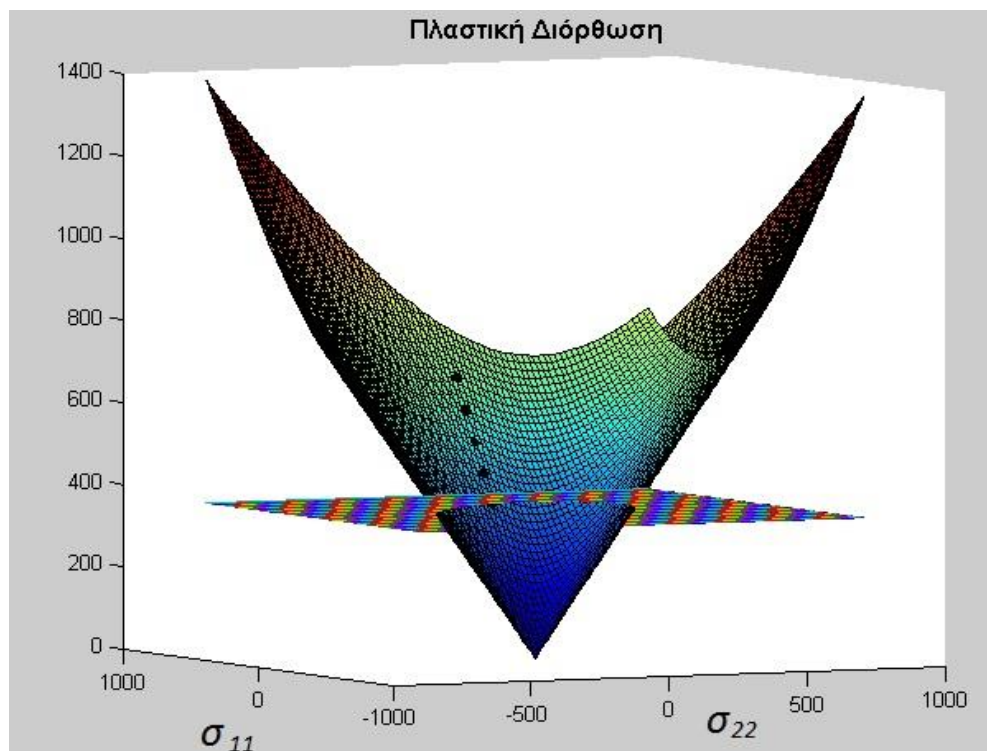
Για τις παραπάνω τιμές έγινε μετασχηματισμός τους στα κύρια επίπεδα και η απεικόνιση των εντατικών σημείων στον τόπο των τάσεων επίπεδης έντασης. Όπως φαίνεται στο σχήμα 97, κατά την επιστροφή στην αρχική επιφάνεια διαρροής, κάθε σημείο κείται επί της επιφάνειας \bar{f} και προσεγγίζει την γραμμή διαρροής κατά μήκος της συντομότερης διαδρομής. Στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης ή τριδιάστατης εντατικής κατάστασης, ο αντίστοιχος τόπος θα ήταν ένας διευρυμένος κύλινδρος (τόπος σημείων ελαστικής πρόβλεψης) και η επιστροφή στην αρχική γραμμή διαρροής θα γινόταν ακτινικά, όπου ο «τοπικός κύκλος» είναι ουσιαστικά η τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο-π (π-plane).

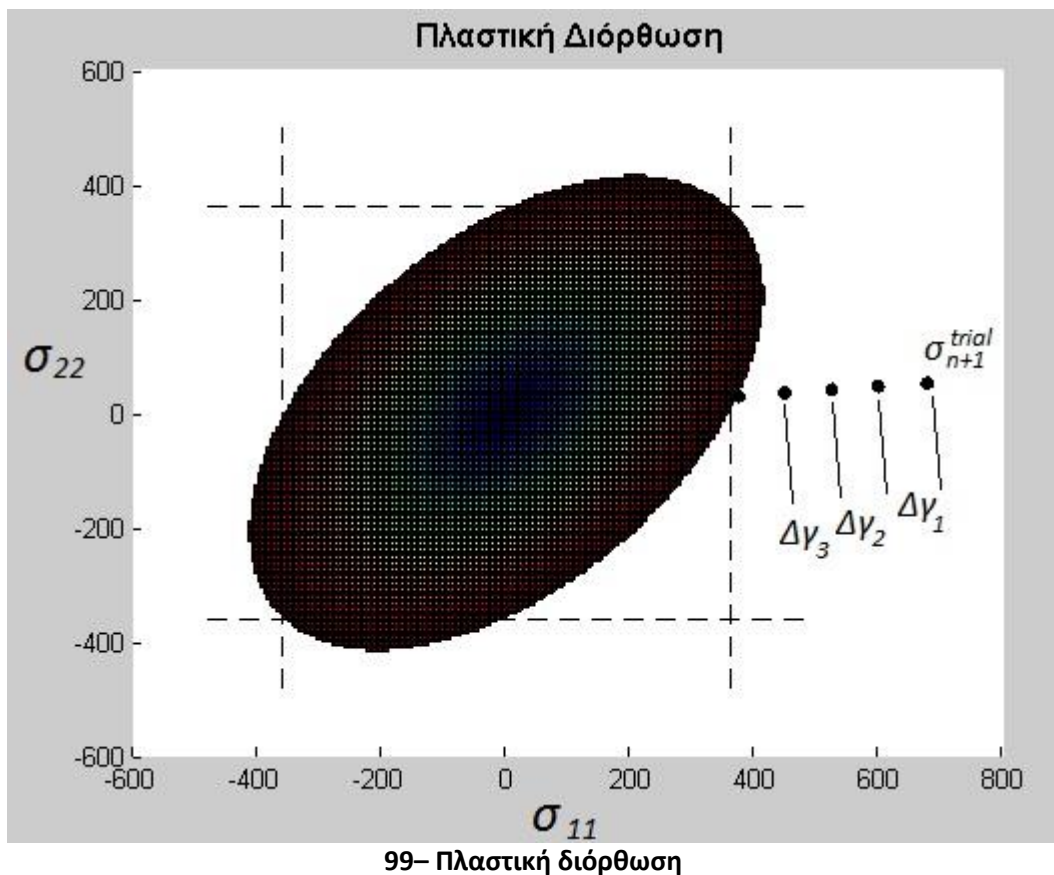
Στα σχήματα 97-99 φαίνεται η πλαστική διόρθωση. Τα σημεία με μαύρο χρώμα αντιστοιχούν σε διορθωμένα εντατικά σημεία στα οποία έχει γίνει «rescale» με συντελεστή $(6 - i)$ ώστε να είναι διακριτά και εμφανή στο σχήμα.



97- Πλαστική διόρθωση

98- Πλαστική διόρθωση





5.3- Σύγκριση αποτελεσμάτων ανάλυσης με τα αντίστοιχα πειραματικά.

Στην ενότητα αυτή θα συγκριθούν τα αποτελέσματα αναλύσεων στο FEAP με αντίστοιχα πειραματικά που έγιναν σε ορθογωνική πλάκα αλουμινίου από τους Θεωχάρη & Μαρκέτο. Στην εργασία τους αυτή, «*Elastic-plastic analysis of perforated thin strips*» (1964), το δοκίμιο υποβαλλόταν σε εφελκυστική φόρτιση στις δύο οριζόντιες πλευρές, ενώ οι κατακόρυφες πλευρές, οι οποίες ήταν μεγαλύτερες από τις οριζόντιες, ήταν ελεύθερες φορτίων.

5.3.1- Μηχανικές ιδιότητες του αλουμινίου 57S

Τα δεδομένα εισόδου αφορούν ελαστοπλαστικό υλικό για επίπεδη ένταση, με μηχανικά χαρακτηριστικά που προσιδιάζουν στο κράμα αλουμινίου 57S που χρησιμοποίησαν οι παραπάνω ερευνητές:

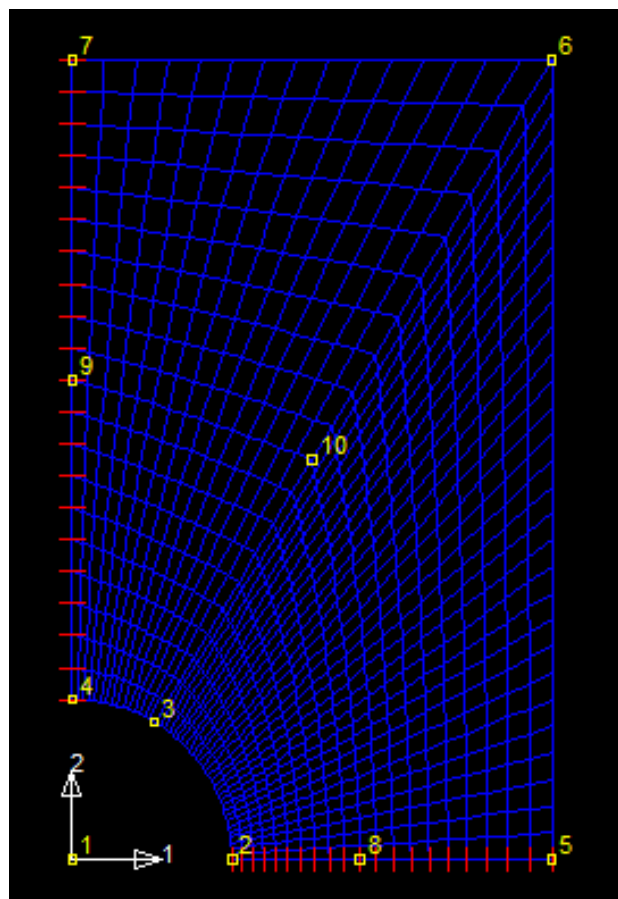
- Όριο διαρροής $\sigma_y = 238 \text{ MPa}$

- Λόγος Poisson $\nu = 0.33$
- Μέτρο ελαστικότητας 68644.22 MPa
- Πλαστική παράμετρος ισοτροπικής κράτυνσης $H_{iso} = 2158 \text{ MPa}$

Τόσο στα πλαίσια της έρευνάς τους, όσο και στα πλαίσια των αναλύσεων που θα γίνουν με το FEAP, λαμβάνεται ως καταστατικό μοντέλο η λεγόμενη θεωρία πλαστικής ροής J_2 , η οποία αναπτύχθηκε λεπτομερώς σε προηγούμενες ενότητες.

5.3.2- Γεωμετρία φορέα και πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων

Για την προσομοίωση του δοκιμίου χρησιμοποιήθηκαν 900 ισοπαραμετρικά τετρακομβικά στοιχεία με την παραδοχή μικρών μετατοπίσεων. Το πλέγμα φαίνεται στο σχήμα 100.



100- Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων δοκιμίου

Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται και τα λεγόμενα master nodes μέσω των οποίων γίνεται η παραγωγή του πλέγματος από το FEAP. Η πλευρά 1-2-8-5 έχει μήκος 180mm, η 5-6 300mm και η ακτίνα της οπής είναι 60mm, έτσι ώστε ο λόγος δ διαμέτρου οπής προς το πλάτος του δοκιμίου να είναι $\frac{1}{3}$, όπως και στο δοκίμιο του πειράματος.

5.3.3- Ποιοτική σύγκριση αποτελεσμάτων.

Ακολουθεί η ποιοτική σύγκριση των αποτελεσμάτων της πειραματικής διαδικασίας για την περίπτωση $\delta = \frac{1}{3}$, με τα αντίστοιχα της μη-γραμμικής στατικής ανάλυσης που έγινε με το FEAP. Ο αριθμός των προσαυξητικών βημάτων είναι 800 σε κάθε περίπτωση, και χρησιμοποιείται η κλασική Newton-Raphson. Εφεξής, η περιγραφή των bullets θα αφορά τις παρατηρήσεις επί των πειραματικών αποτελεσμάτων και θα αντιπαραβάλλονται με αυτά του FEAP.

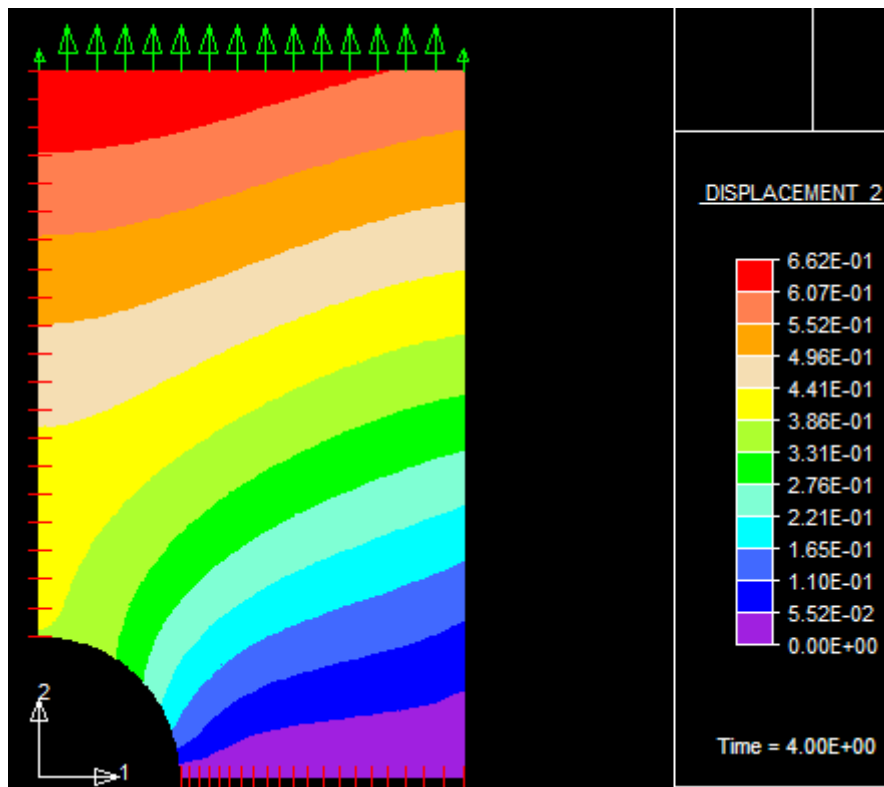
Κατανομή των παραμορφώσεων

- Η κατανομή των παραμορφώσεων ε_{yy} (ε_{22} στο FEAP) κατά μήκος της ελάχιστης διατομής που ορίζεται από τους κόμβους 2-8-5 (σχήμα 100) παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο όριο της οπής και την ελάχιστη στην κατακόρυφη παρειά της εξωτερικής κατακόρυφης πλευράς

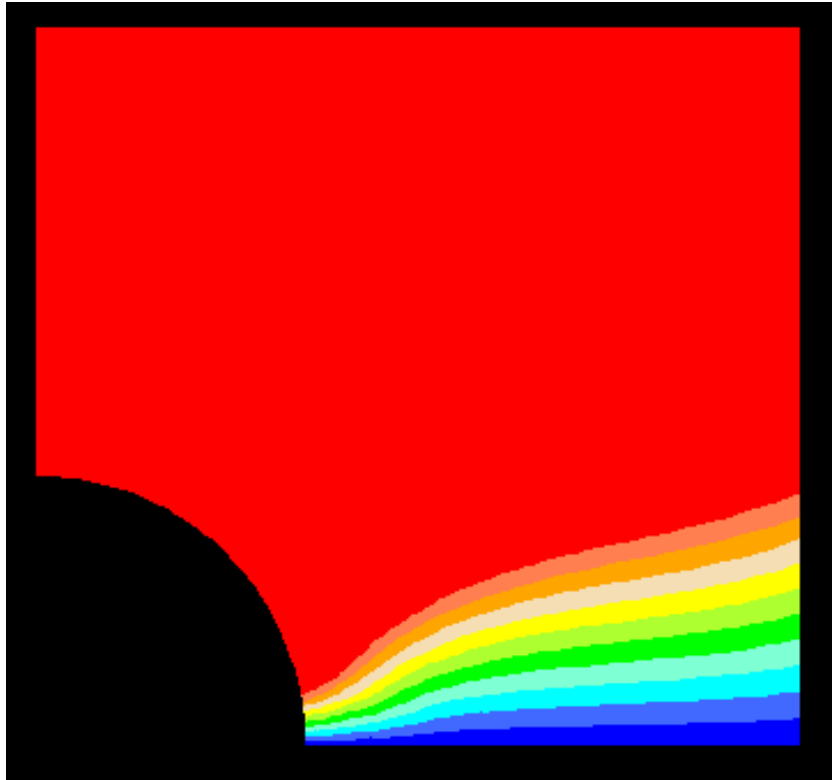
Όπως φαίνεται στο σχ.101, οι μετατοπίσεις αυξάνουν όσο κινούμαστε από την εξωτερική κατακόρυφη πλευρά προς την οπή, κατά μήκος της ελάχιστης διατομής, ενώ, στο όριο της οπής, παρατηρείται αύξηση των ε_{22} . Οι μικρές εως μηδενικές τιμές της ε_{22} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής προκύπτουν από τον συνοριακό περιορισμό. Αυτό μπορεί να γίνει πιο ξεκάθαρο αν εστιάσουμε, πυκνώνοντας το διάστημα τιμών για κάθε ισο-επιφάνεια (σχήμα 102) ή βλέποντας την κλίση του πεδίου μετατοπίσεων (σχήμα 103).

Είναι προφανές ότι η κλίση αυξάνει καθώς πλησιάζουμε προς την οπή. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 104, το οποίο παρατίθεται στην εργασία

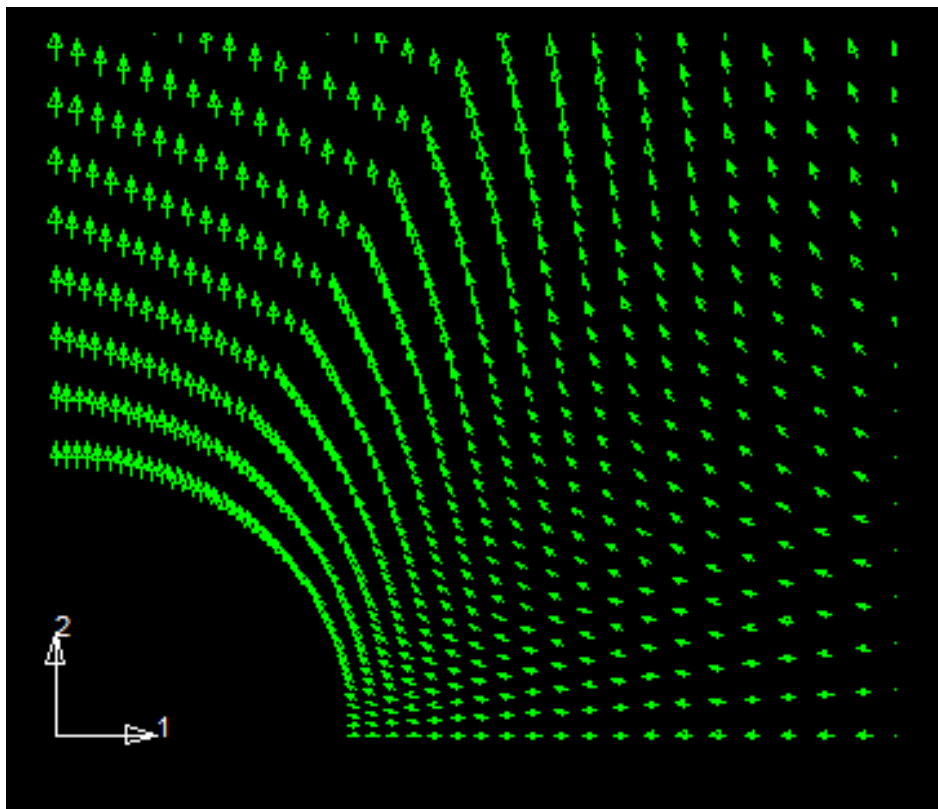
των Θεοχάρη & Μαρκέτου, η κατανομή των παραμορφώσεων είναι ποιοτικά ίδια με αυτή των σχημάτων 101,102.



101- Ισοεπιφάνειες παραμόρφωσης u_y



102- Εστίαση κοντά στην περιοχή της σπής και πύκνωση των διαστημάτων των ισο-επιφανειών. Τιμές μεγαλύτερες του 0.1 είναι κόκκινες.



103- Κλίση του πεδίου μετατοπίσεων

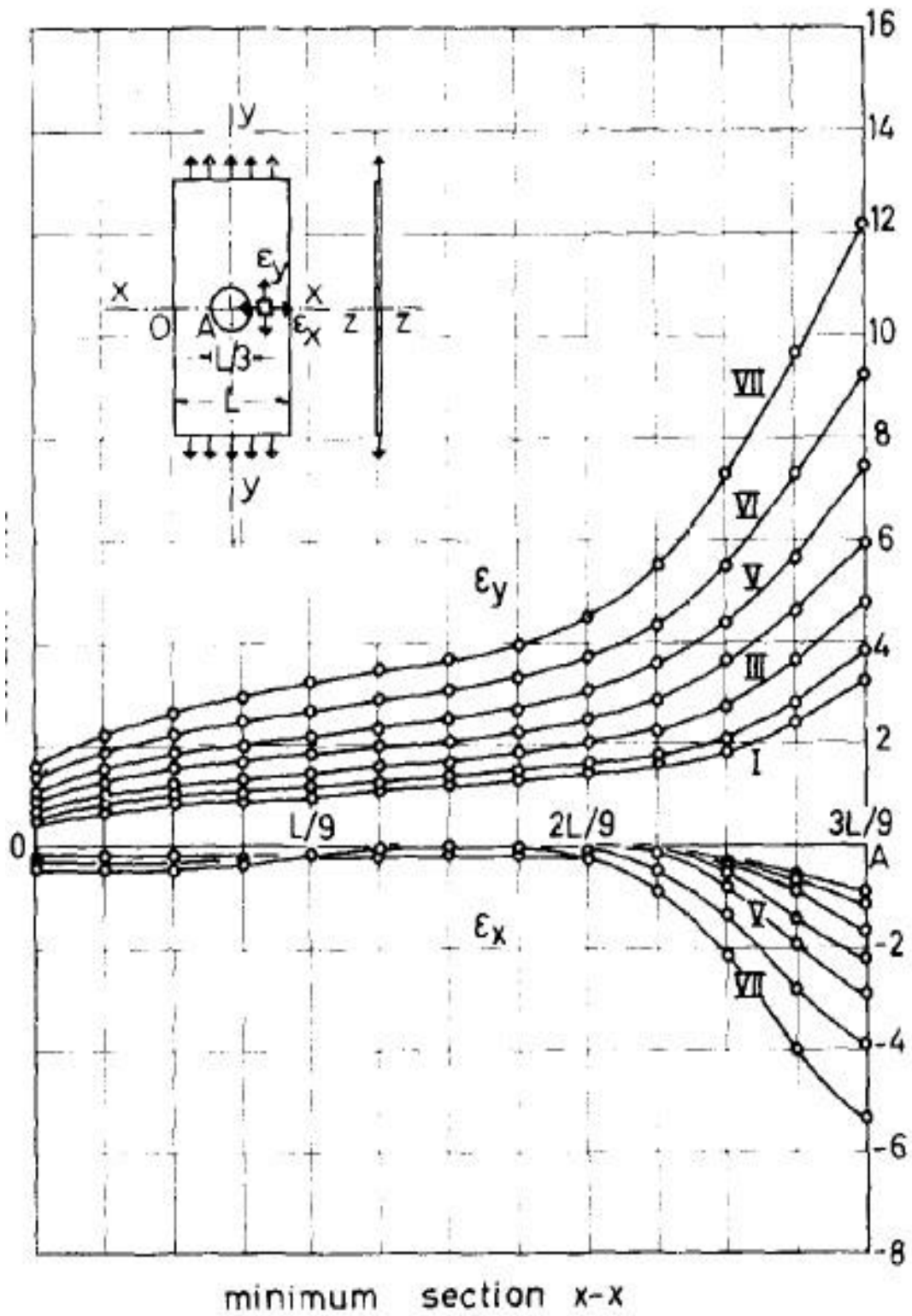
Όπως σημειώνεται, κοντά στο εξωτερικό κατακόρυφο σύνορο, οι ισοεπιφάνειες οριοθετούνται από κυρτές γραμμές προς τα πάνω, ενώ στο υπόλοιπο της διατομής, από κυρτές γραμμές προς τα κάτω.

Στην συνέχεια, όπου είναι απαραίτητο, θα γίνεται πύκνωση του διαστήματος των ισοεπιφανειών, καθώς το FEAP χωρίζει σε δώδεκα διαστήματα τις τιμές των πεδίων.

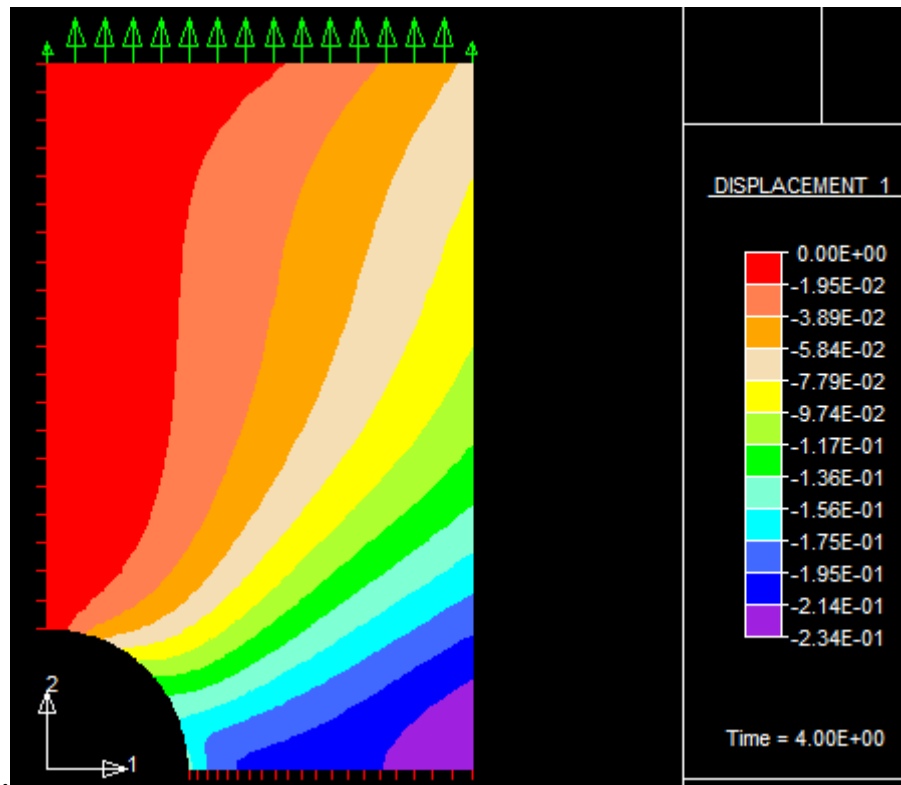
- Οι παραμορφώσεις ε_x (ε_{11} στο FEAP) είναι παραμορφώσεις συστολής. Αποκτούν και αυτές την μέγιστη (αλγεβρική) τιμή τους στην περιοχή της οπής.

Στα σχήματα 105 και 106 φαίνεται η κατανομή του πεδίου u_x . Στο σχήμα 106 έχει γίνει πύκνωση των διαστημάτων.

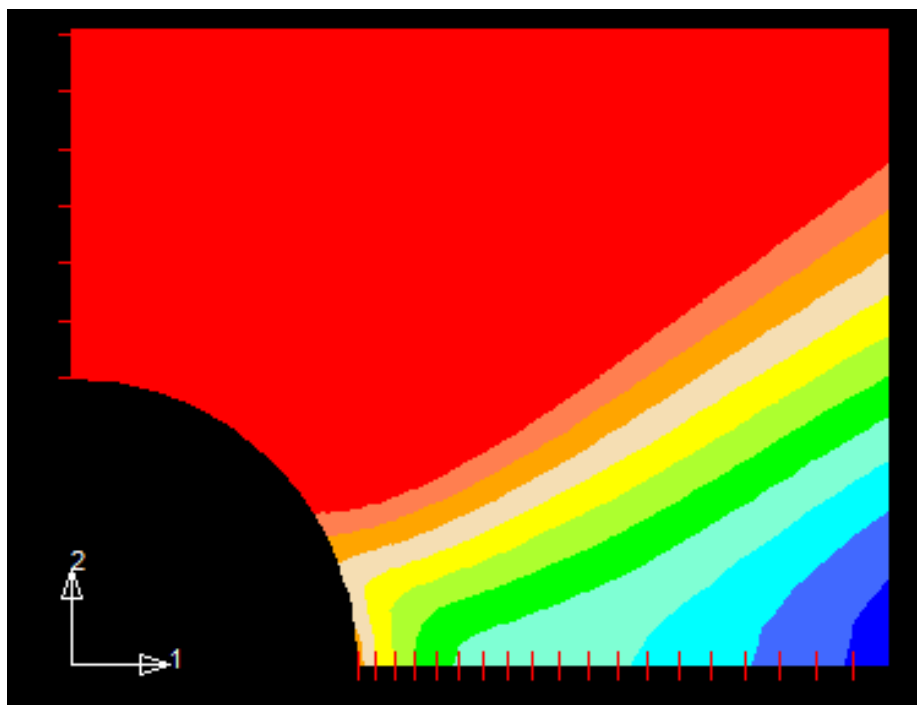
Στο σχήμα φαίνονται τα αποτελέσματα για την κατανομή των ε_x και ε_y κατά μήκος της ελάχιστης διατομής σύμφωνα με την έρευνα των Θεοχάρη & Μαρκέτο, για λόγο $\delta = 1/3$.



104- Κατανομή των ϵ_x και ϵ_y κατά μήκος της ελάχιστης διατομής για $\delta = \frac{1}{3}$ σύμφωνα με την εργασία του Θεοχάρη & Μαρκέτου.



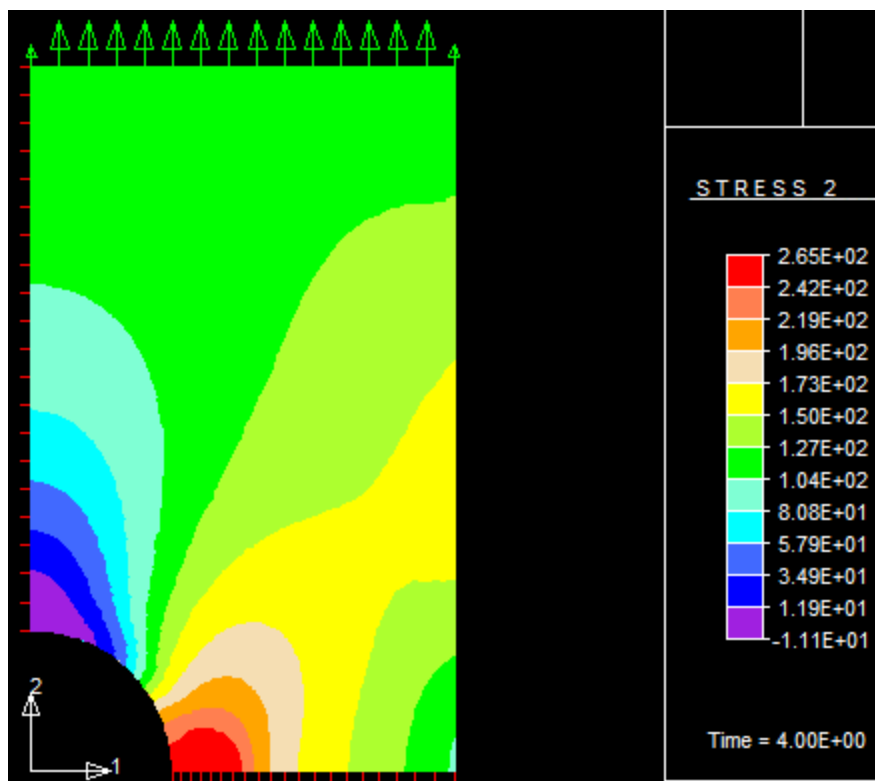
105- Ισοεπιφάνειες παραμόρφωσης u_x



106- Εστίαση κοντά στην περιοχή της σπής και πύκνωση των διαστημάτων των ισοεπιφανειών. Τιμές μεγαλύτερες του -0.136 είναι κόκκινες

Κατανομή των τάσεων

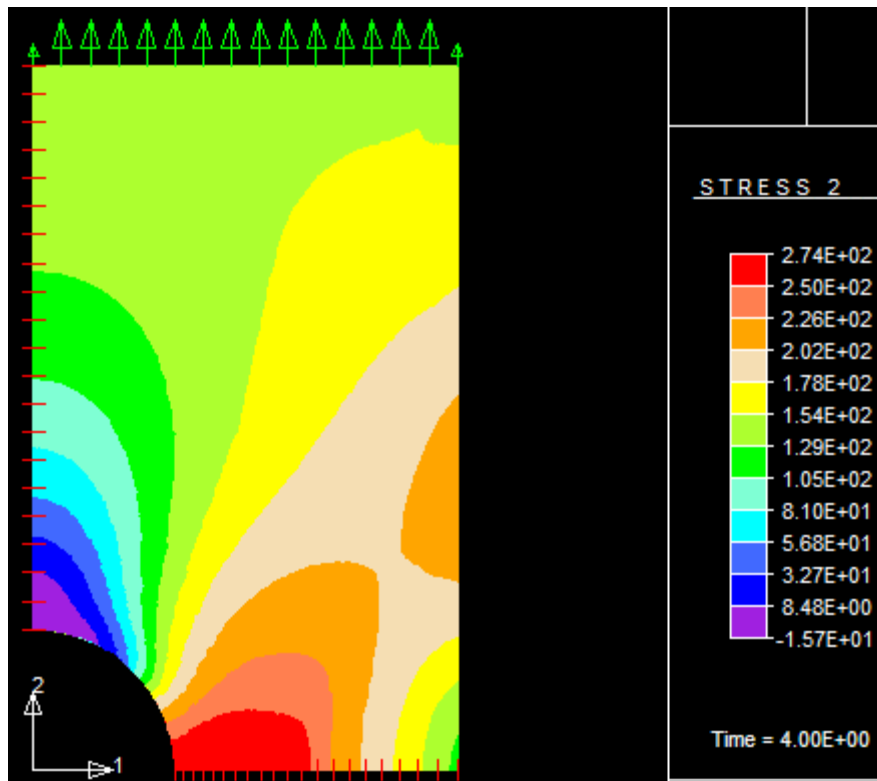
- Η τάση σ_y (σ_{22} στο FEAP) παρουσιάζει την μέγιστη τιμή της κατά μήκος της ελάχιστης διατομής στο σύνορο της οπής ενώ την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του κατακόρυφου εξωτερικού συνόρου.



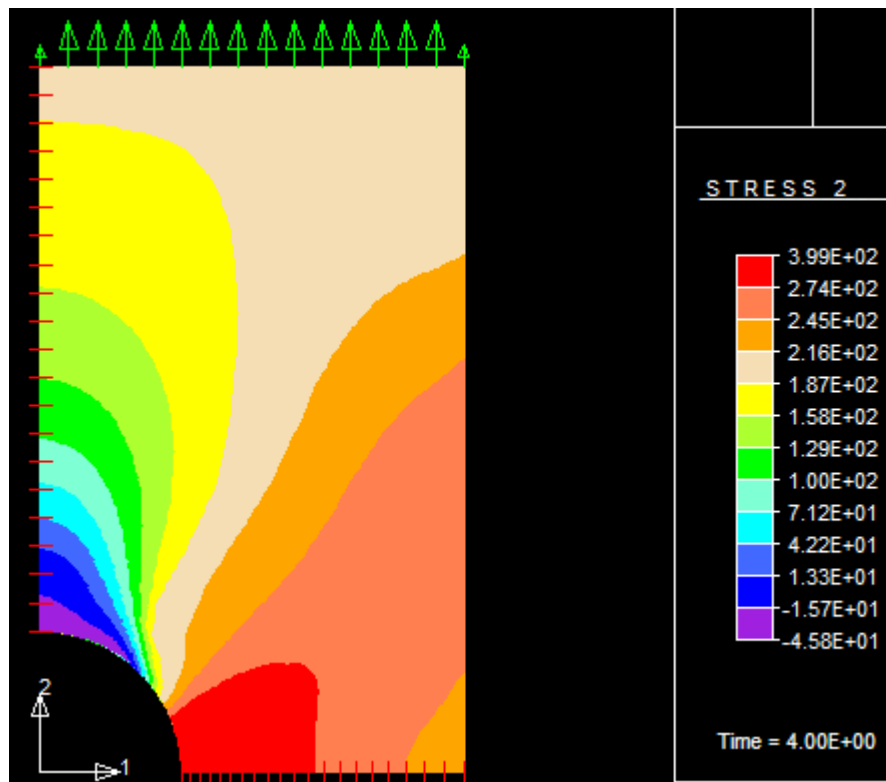
107- Κατανομή τάσης σ_{22} για μέγιστο φορτίο 120 MPa

- Το μέγιστο της τάσης σ_y διαδίδεται προς το εσωτερικό της πλάκας κατά μήκος της ελάχιστης διατομής ενώ εμμένει και στην περιοχή της οπής

Στα σχήματα 108 και 109 φαίνεται η διάδοση της τάσης σ_{22} προς το εσωτερικό της ελάχιστης διατομής για φορτία 150 MPa και 190 MPa αντίστοιχα



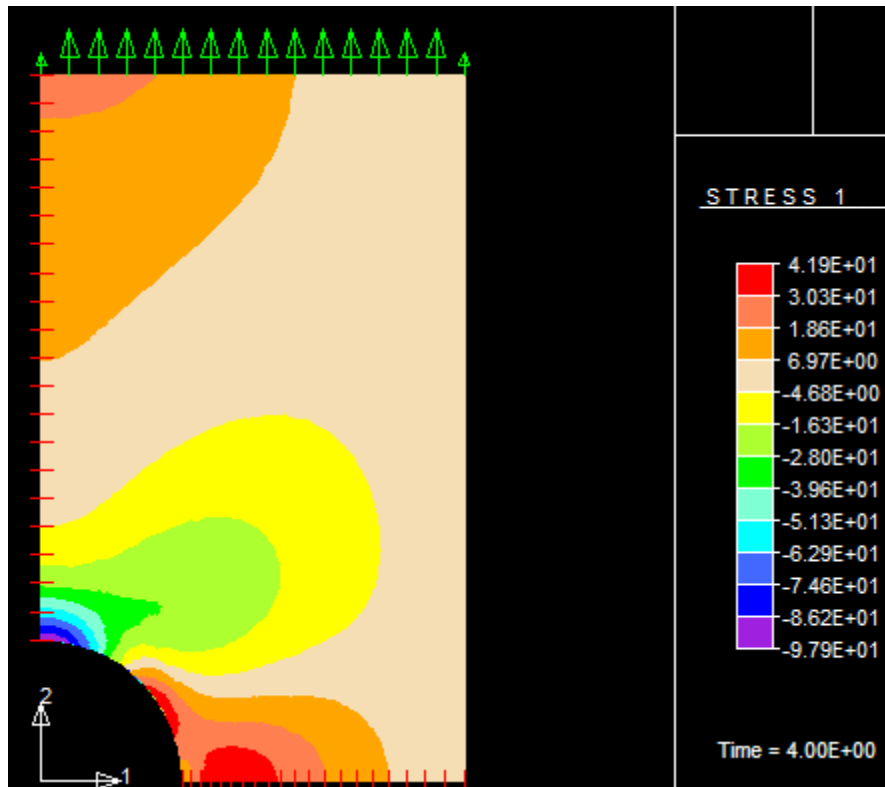
108- Κατανομή τάσης σ_{22} για μέγιστο φορτίο 150 MPa



109- Κατανομή τάσης σ_{22} για μέγιστο φορτίο 190 MPa

- Οι τάσεις σ_x είναι μηδενικές στο σύνορο ενώ παρουσιάζουν μέγιστη τιμή (εφελκυστική) στην περιοχή της οπής και στο εσωτερικό της ελάχιστης διατομής, πλησίον της οπής.

Στο σχήμα 110 φαίνεται η κατανομή της σ_x για στάθμη φόρτισης 90 MPa, η οποία είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από το φορτίο πρώτης διαρροής ($F_y = \frac{\sigma_y}{3}$)

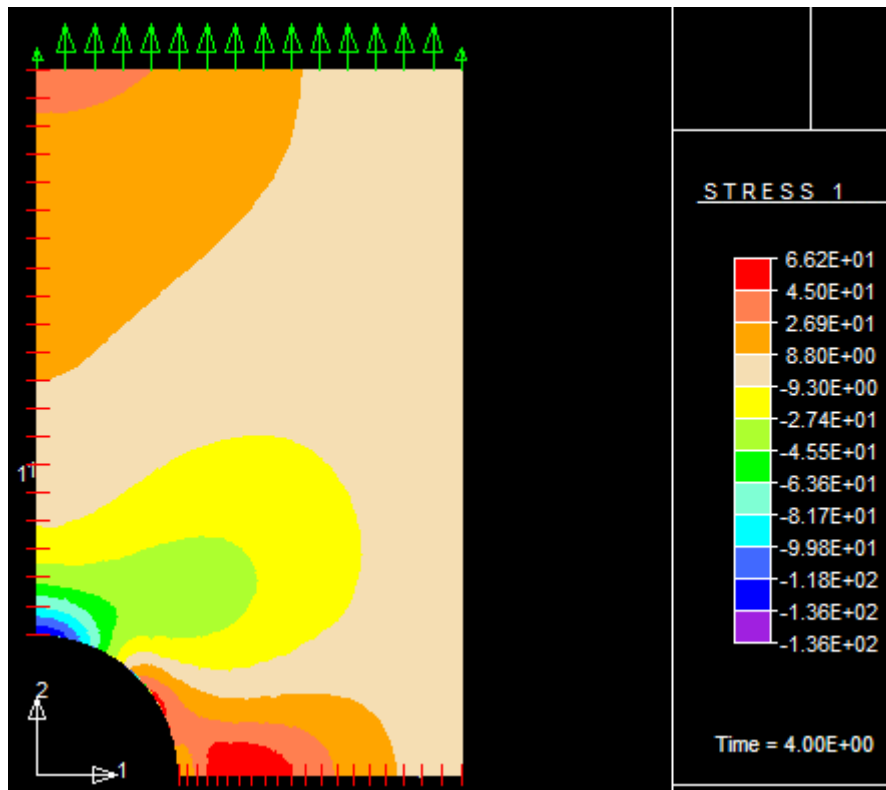


110 - Κατανομή της σ_{11} για φορτίο 90 MPa

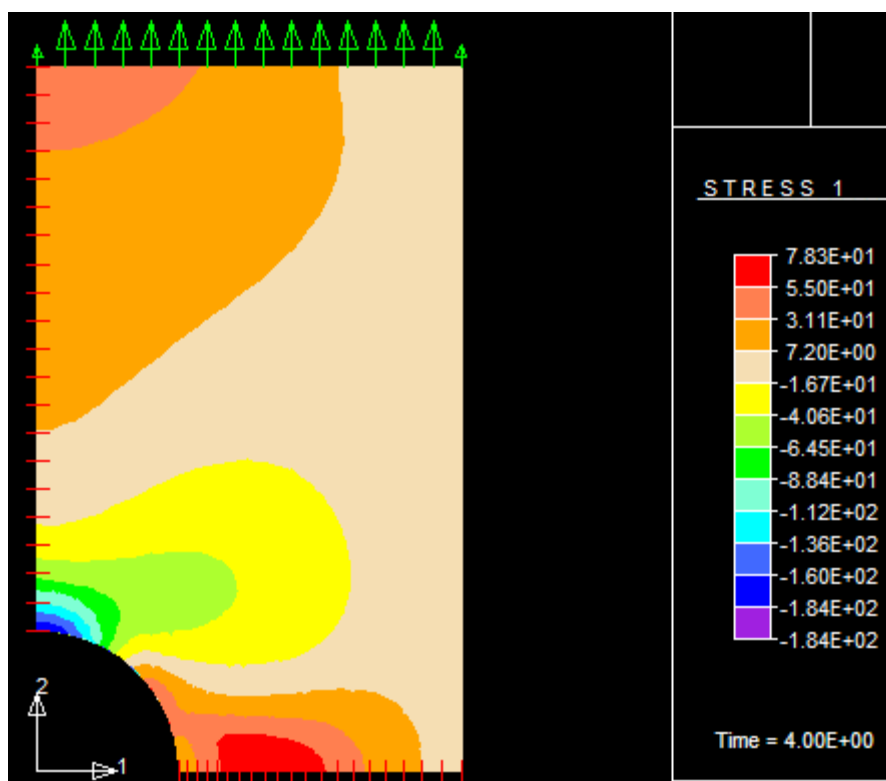
- Με την αύξηση της πλαστικής παραμόρφωσης, το μέγιστο της σ_x μετατοπίζεται προς τα δεξιά, στο εσωτερικό της ελάχιστης διατομής, χωρίς να εμμένει στο άκρο της οπής.

Όπως φαίνεται και στα σχήματα 111 και 112, το μέγιστο στο σύνορο της οπής δεν εμμένει. Αντίθετα, το μέγιστο στο οριζόντιο σύνορο πλησίον της οπής, που ορίζεται από τον κλωβό, διευρύνεται προς τα δεξιά με την περαιτέρω ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, ενώ αυξάνει και σε απόλυτη τιμή.

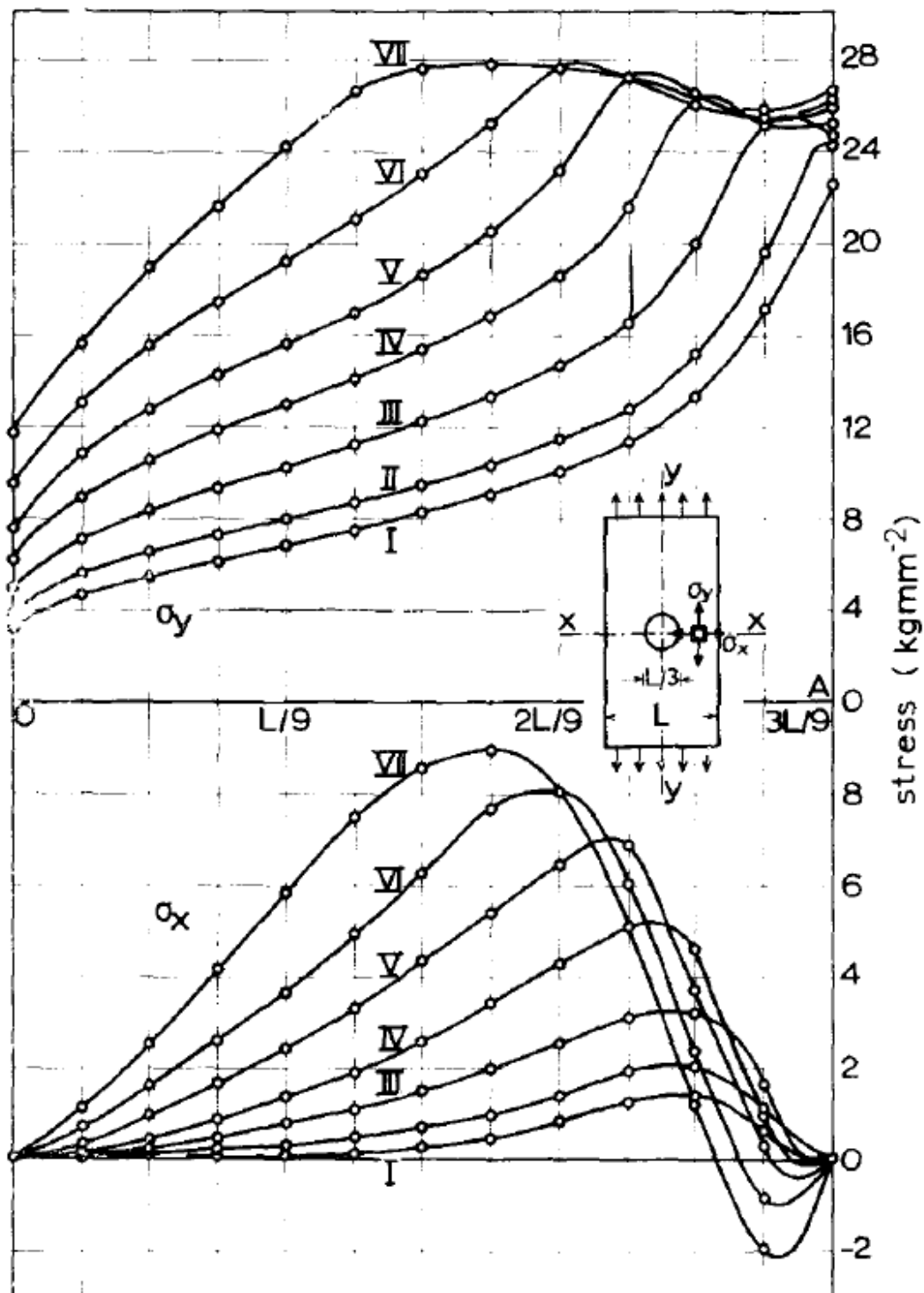
Ταυτόχρονα αναπτύσσεται θλιπτική σ_{11} στην περιοχή της οπής (άνω τμήμα), η οποία διαδίδεται κατά μήκος του άνω τμήματος του συνόρου που ορίζεται από την οπή.



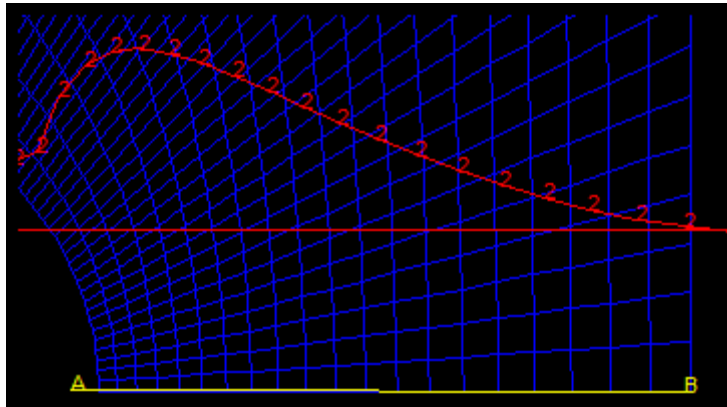
111-112- Κατανομή τάσης σ_{11} για μέγιστο φορτίο 120 MPa-150 MPa



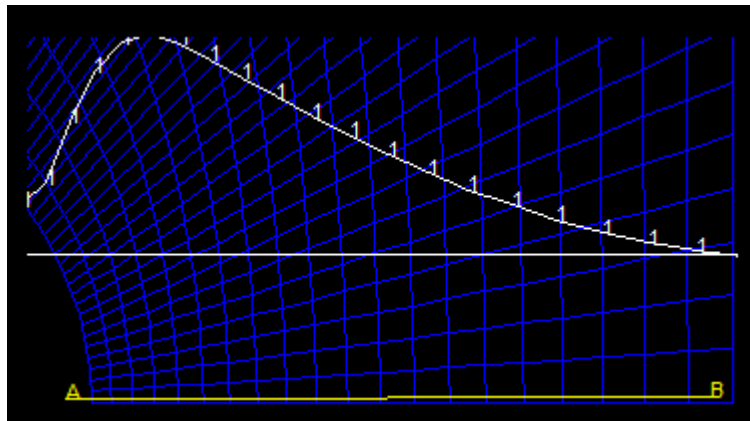
Παρακάτω παρουσιάζεται η καμπύλη που σχηματίζουν οι τάσεις σ_{11} , σ_{22} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής έτσι όπως προέκυψε από τα πειραματικά αποτελέσματα και οι αντίστοιχες καμπύλες που προκύπτουν από το FEAP (εντολή SPLO,n1,n2) για την γραμμή AB.



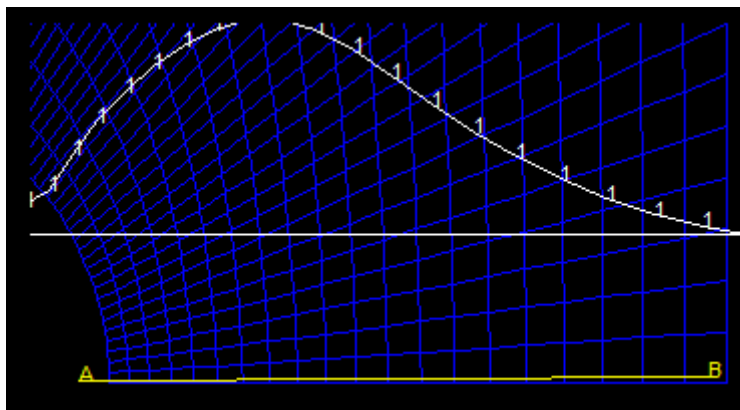
113 – Καμπύλη τάσεων σ_{22} (πάνω) και σ_{11} κάτω, όπως δημοσιεύτηκε από τους Θεοχάρη&Μαρκέτο



114-Κατανομή σ_{11} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για ελαστικό φορτίο 75 MPa



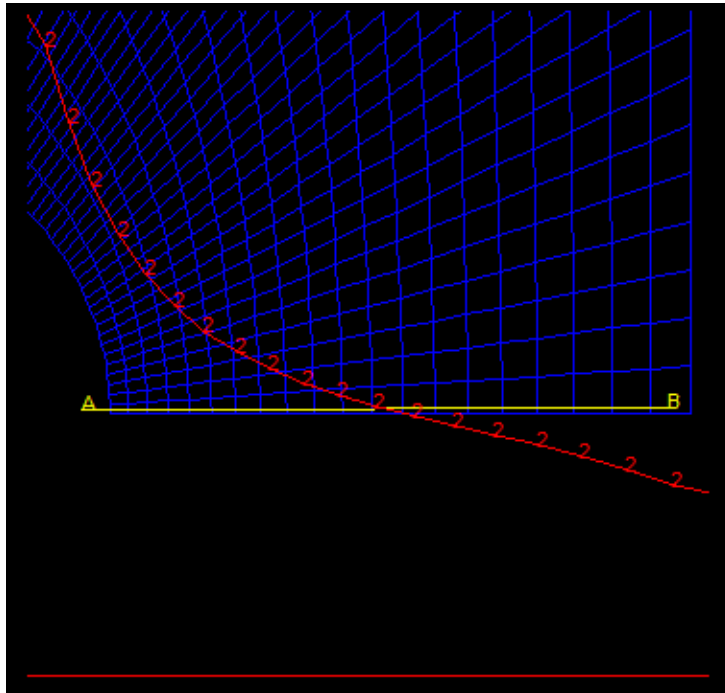
115-Κατανομή σ_{11} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για φορτίο 100 MPa



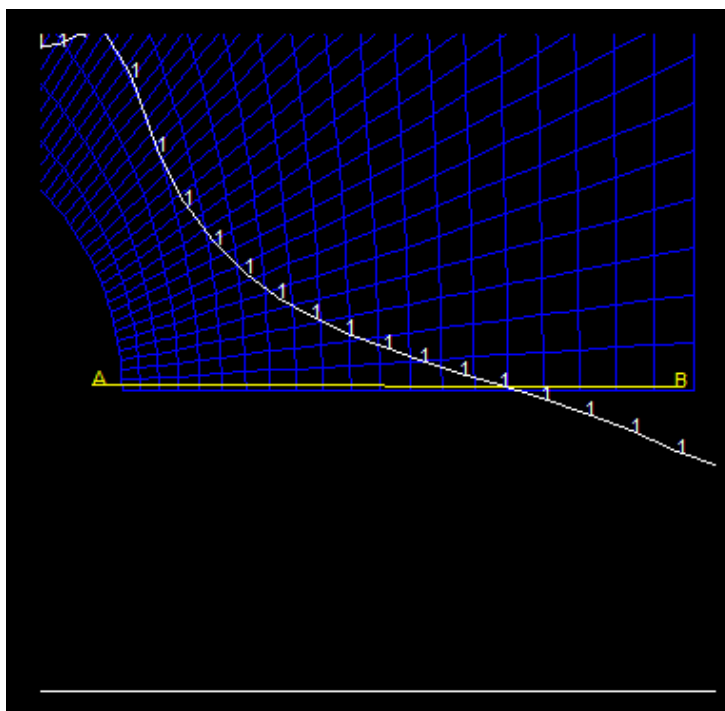
116-Κατανομή σ_{11} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για φορτίο 150 MPa

Σύμφωνα με τα σχήματα 114-116 γίνεται ξεκάθαρο ότι με την πλαστικοποίηση, αρχίζει και η μετατόπιση του μεγίστου της σ_{11} προς το εσωτερικό της διατομής. Η μη-μηδενική τιμή στα σύνορα (σημεία A και B) είναι μη-ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης που προκύπτει

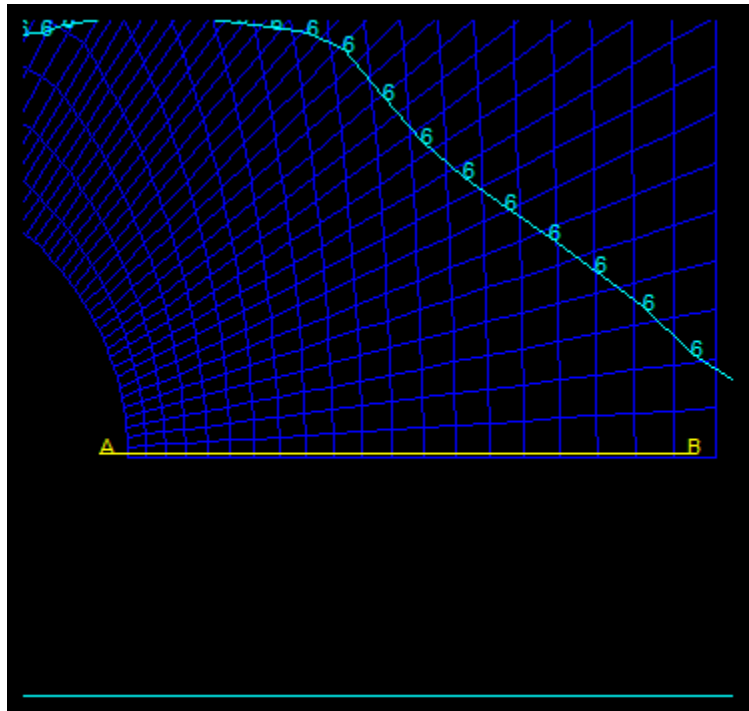
«φυσιολογικά» λόγω της μη-ικανοποίησης της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας για κάθε σημείο.



117-Κατανομή σ_{22} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για ελαστικό φορτίο 75 MPa



118-Κατανομή σ_{22} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για φορτίο 100 MPa

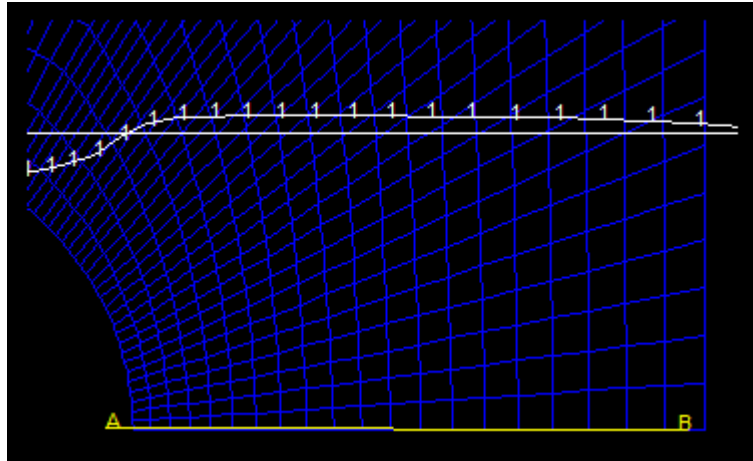


119-Κατανομή σ_{22} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για φορτίο 150 MPa

Όπως φαίνεται στα σχήματα 117-119, το μέγιστο της τάσης σ_{22} , όσο αυξάνεται η πλαστικοποίηση, διαδίδεται προς το εσωτερικό της ελάχιστης διατομής, εμμένοντας ωστόσο στο σύνορο της οπής. Επίσης, η καμπύλη αρχίζει να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, το οποίο φαίνεται και στο σχήμα 113.

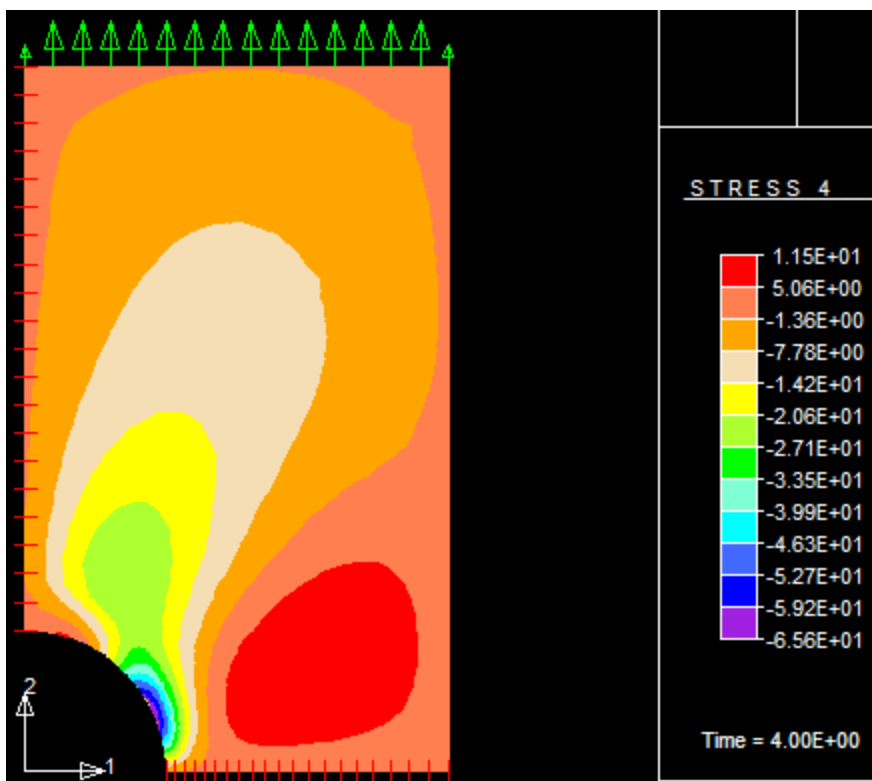
- Η διατμητική τάση σ_{12} παρουσιάζει την μέγιστη τιμή, κατά μήκος της ελάχιστης διατομής, στην περιοχή της οπής και την ελάχιστη στο κατακόρυφο σύνορο (απόλυτες τιμές)

Στο σχήμα 119 φαίνεται η καμπύλη των διατμητικών τάσεων σ_{12} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής A-B. Στην οπή παρουσιάζεται το μέγιστο της διατμητικής τάσης ενώ στο εσωτερικό της διατομής φαίνεται να σταθεροποιείται σε μικρότερη όμως τιμή (και με διαφορετικό πρόσημο).

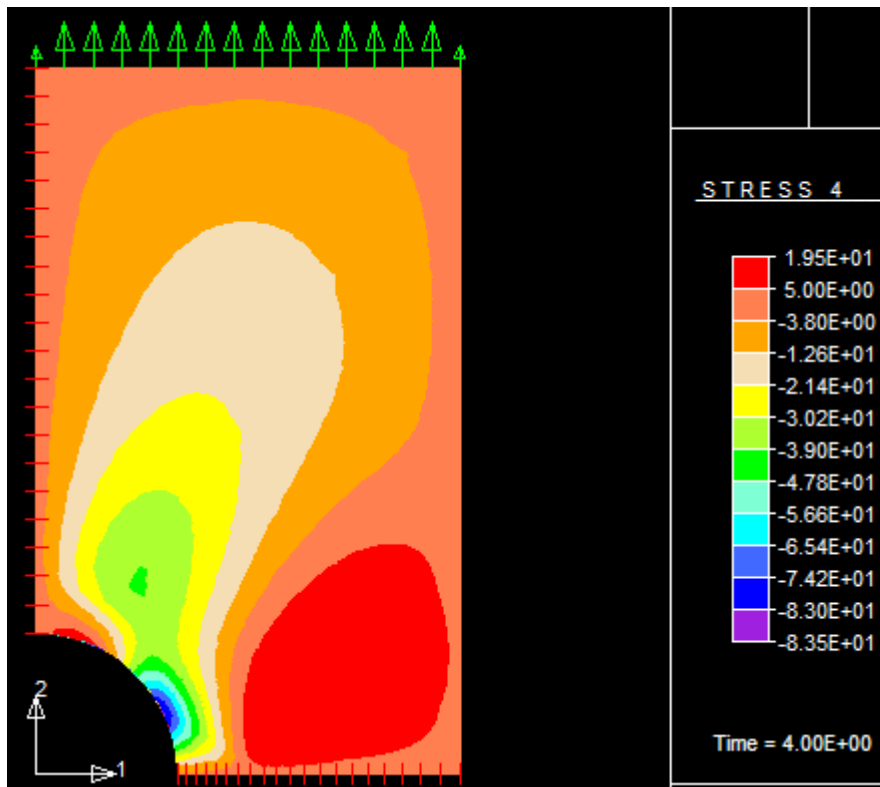


119-Κατανομή σ_{12} κατά μήκος της ελάχιστης διατομής (AB) για φορτίο 100 MPa

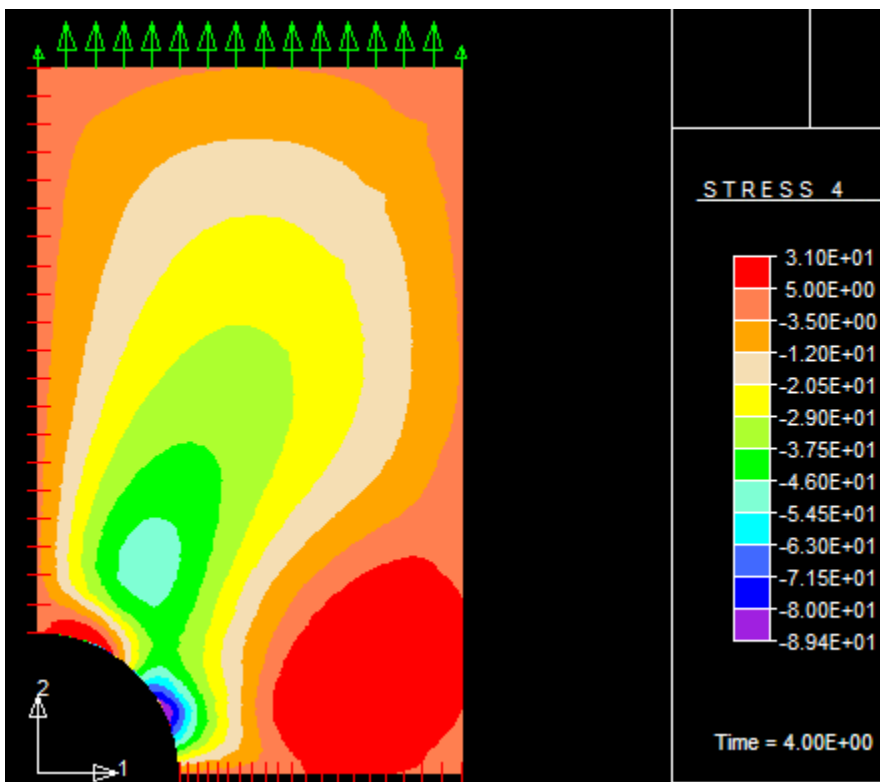
- Με την εξέλιξη των πλαστικών παραμορφώσεων δημιουργούνται κυρτές επιφάνειες διατμητικών τάσεων στην περιοχή της οπής και εντός της ελάχιστης διατομής, με προσανατολισμό προς το κατακόρυφο εξωτερικό σύνορο. Οι κυρτές επιφάνειες διευρύνονται καθώς αυξάνεται η φόρτιση.



120- Ισοεπιφάνειες τάσης σ_{12} ελαστικό φορτίο 80 MPa



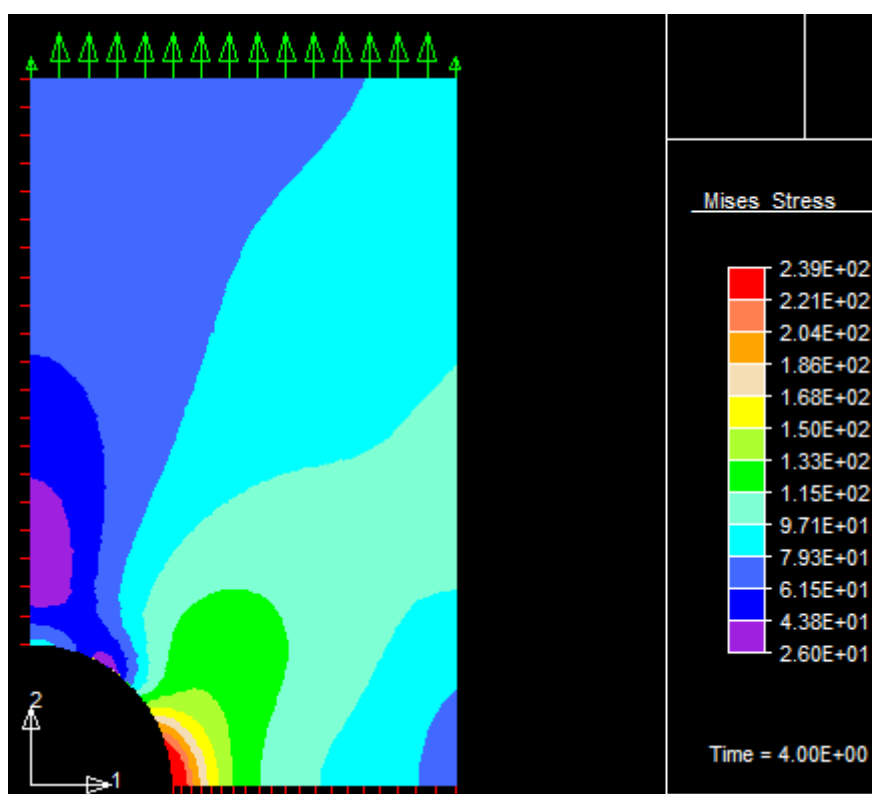
121- Ισοεπιφάνειες τάσης σ_{12} ελαστικό φορτίο 120 MPa. Πυκνωμένο εύρος υπομνήματος.



122- Ισοεπιφάνειες τάσης σ_{12} ελαστικό φορτίο 160 MPa. Πυκνωμένο εύρος υπομνήματος..

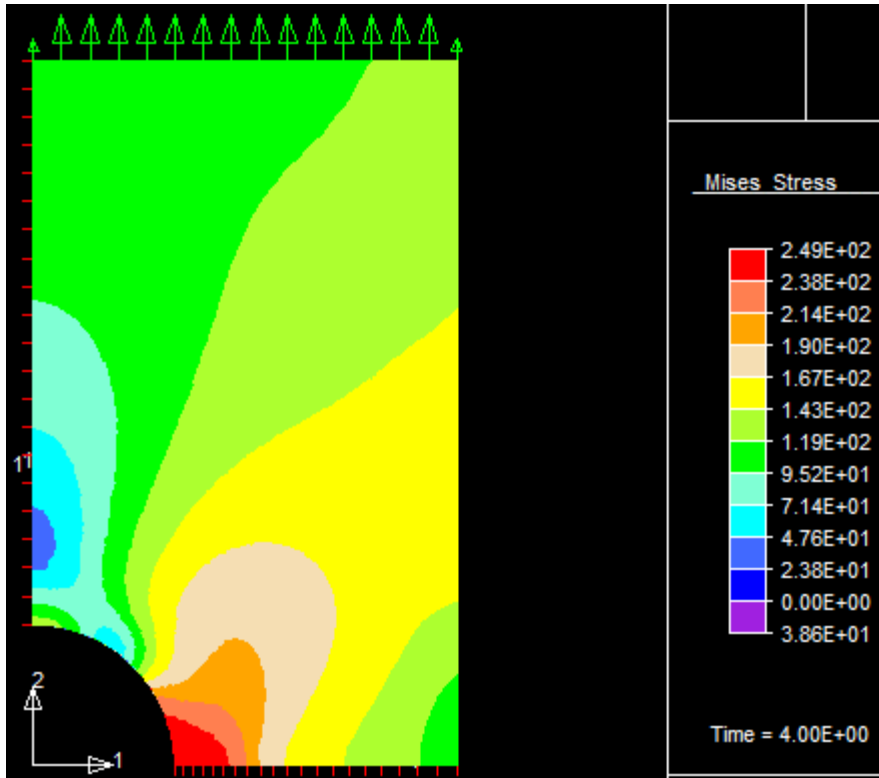
Εξέλιξη της πλαστικής ζώνης

- Η πρώτη ζώνη πλαστικοποίησης εμφανίζεται στο σύνορο της οπής, επί του οριζόντιου άξονα 1. Με την περαιτέρω ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων το εύρος της πλαστικής ζώνης διευρύνεται προς το εσωτερικό του φορέα, σχηματίζοντας γωνία με τον οριζόντιο άξονα που εξαρτάται από τον λόγο διαμέτρου οπής προς το μήκος της πλευράς στην οποία ασκείται το φορτίο(Σχήματα 123-125)

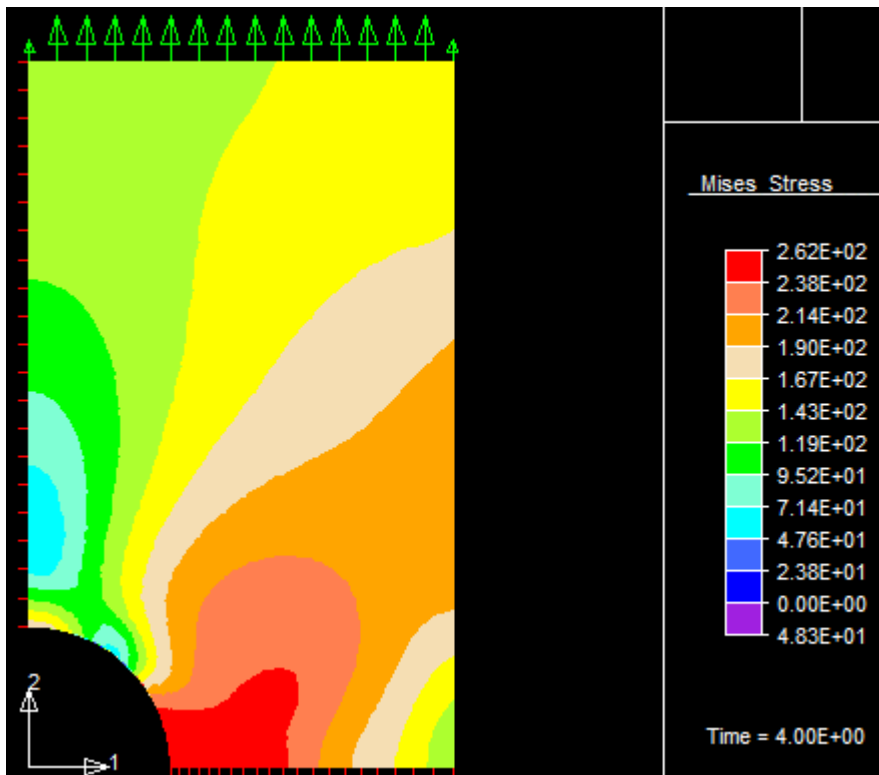


123- Πλαστική ζώνη (κόκκινο) για φορτίο πρώτης πλαστικοποίησης 80 MPa

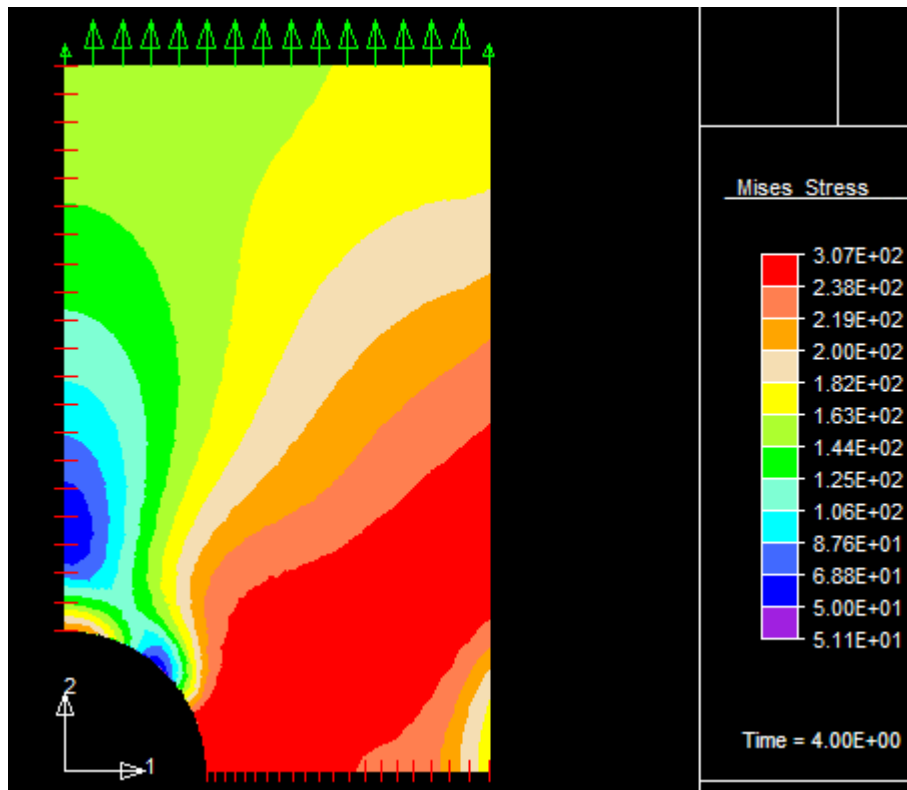
- Για μεγάλα φορτία κοντά στο οριακό φορτίο, η πλαστική ζώνη προσεγγίζει το κατακόρυφο σύνορο ενώ νέα πλαστική ζώνη αναπτύσσεται στο πάνω τμήμα του συνόρου της οπής. Η τελευταία αναπτύσσεται όταν η (θλιπτική) τάση σ_{11} υπερβεί το όριο διαρροής σε μονοαξονική θλίψη(σχήματα 126-127)



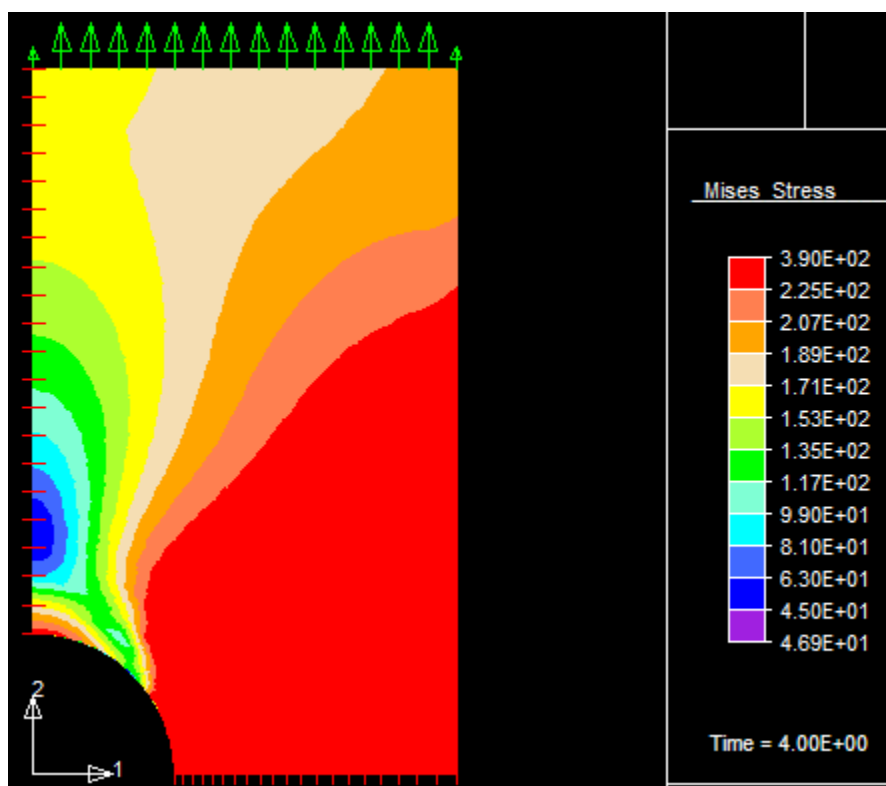
124- Πλαστική ζώνη (κόκκινο) για φορτίο 120 MPa



125- Πλαστική ζώνη (κόκκινο) για φορτίο 150 MPa

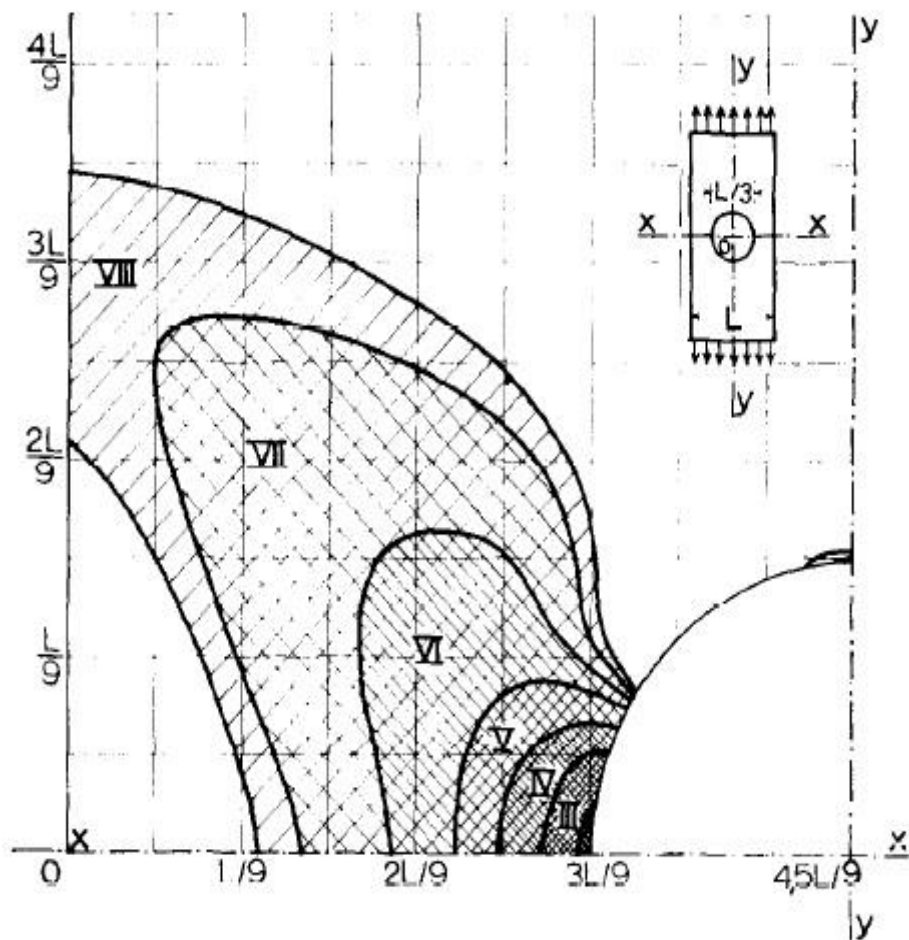


126- Πλαστική ζώνη (κόκκινο) για φορτίο 170 MPa. Πρώτη πλαστικοποίηση στο πάνω μέρος της οπής και διάδοση της πλαστικής ζώνης στο κατακόρυφο σύνορο.



127- Πλαστική ζώνη (κόκκινο) για φορτίο 190 MPa.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω σχήματα, η εξέλιξη της πλαστικής ζώνης προσομοιάζει στην αντίστοιχη του πειράματος για λόγο $\delta=0.33$.



128- Εξέλιξη της πλαστικής ζώνης σύμφωνα με τους Θεοχάρη & Μαρκέτο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor «*The Finite Element Method Vol.1- The Basis*»,1967
- [2] O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor «*The Finite Element Method Vol.2- Solid Mechanics*»,1967
- [3] J.C.Simo, T.J.R Hughes «*Computational Inelasticity*», 2000
- [4] Klaus-Jurgen Bathe «*Finite Element Procedures*»,1996
- [5] Klaus-Jurgen Bathe, M.Kojic «*Inelastic Analysis of Solids and Structures*»,2005
- [6] Wau-Fah Chen, Da-Jian Han «*Plasticity for Structural Engineers*»,2007
- [7] J.C.Simo «*Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*»,1998
- [8] EA de Souza Neto, D.Peric, DRJ Owen «*Computational Methods for Plasticity*»,2008
- [9] Alexander Mendelson «*Plasticity, Theory and Applications*»
- [10] Jacob Lubliner «*Plasticity Theory*»,1990
- [12] Γιώργος Τσαμασφύρος «*Μηχανική των παραμορφώσιμων σωμάτων*», 1991
- [13] Παπαδρακάκης Μ. «*Ανάλυση Φορέων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*»,2001
- [14] NAFEMS «*Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*»,1992
- [15] F.B.Hildebrand «*Introduction to Numerical Analysis*»,1987
- [16] J.C.Sim, R.L.Taylor «*A return-mapping algorithm for plane stress elastoplasticity*», Int.Jour. for Num.Methods in Eng., 1986
- [17] M.Ortiz, J.C.Simo «*An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*», Int.Jour. for Num.Methods in Eng., 1986

[18] J.C.Simo, R.L.Taylor «*Consistent Tangent Operator for rate-independent elastoplasticity*», *Comp.Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985

[19] O.C.Zienkiewicz, S.Valliappant, I.P.King «*Elasto-plastic solutions of engineering problems. "Initial Stress", Finite element approach*», *Int.Jour. for Num.Methods in Eng.*, 1969

[20] P.S.Theocaris, E.Marketos «*Elastic-Plastic analysis of perforated thin strips of a strain-hardening material*», *J.Mech.Phys.Solids*, 1964

[21] M.L.Wilkins «*Calculation of elastic-plastic flow*», 1963

