Θεωρία Κατηγοριών και Θεμέλια των Μαθηματικών

Ζαχαρίας Φλουρής

January 6, 2011

Περιεχόμενα

1 Αφετηρίες **5**

1.1 Σύντομη ιστορία της Θεωρίας Κατηγοριών 5

1.2 Οι αδυναμίες της θεωρίας συνόλων 6

2 Τα μαθηματικά της Θεωρίας Κατηγοριών **9**

2.1 Οι κατηγορίες και οι συναρτητές 9

2.2 Βασικές έννοιες 17

2.3 Όρια κατηγοριών 21

2.4 Καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες 30

2.5 Ομάδες και κατηγορίες 33

2.6 Φυσικοί μετασχηματισμοί 36

2.7 Καθολικές ιδιότητες 41

2.8 Λήμμα Yoneda 44

2.9 Συζυγείς συναρτητές 46

2.10 Τα συνολοθεωρητικά θεμέλια της θεωρίας κατηγοριών 52

2.11 Η στοιχειώδης θεωρία κατηγοριακών συνόλων 56

2.12 Η κατηγορία όλων των κατηγοριών 61

2.13 Οι τόποι 63

2.14 Η λογική στους τόπους 67

2.15 Βασικές έννοιες στους τόπους 72

3 Η Φιλοσοφια των Μαθηματικών και η Θεωρία Κατηγοριών **77**

3.1 Προέλευση και το πρόγραμμα Erlangen 77

3.2 Ζητήματα ανεξαρτησίας 80

3.3 Αντιθεμελιωτισμός και Θεωρία Κατηγοριών 89

3.4 Ολιστικά και ατομικιστικά μαθηματικά 94

3.5 Οι απόψεις του Lawvere 100

3.6 Οι απόψεις του Bell 101

3.7 Δομισμός και Θεωρία Κατηγοριών 108

3.8 Οι απόψεις του Lambek 115

4 Επίλογος-συμπερασματα **121**

Εισαγωγή

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μπορέσει να παρουσιάσει τον κορμό της θεωρίας κατηγοριών, και κυρίως το κομμάτι εκείνο που έχει να κάνει με τη διασύνδεση αυτής με τα θεμέλια των μαθηματικών, καθώς και τα μείζονα φιλοσοφικά ζητήματα που εγείρει, όσον αφορά τόσο την απάντηση σε προϋπάρχοντα ερωτήματα, όσο και την διάνοιξη νέων οριζόντων στη φιλοσοφία των μαθηματικών

Η προσέγγιση με τον οποία έγινε η παρούσα μελέτη έχει να κάνει περισσότερο με το σχήμα: "μελετάμε τα μαθηματικά με σκοπό να στοχαστούμε πάνω σε αυτά". Αυτό σημαίνει ότι μιας και δεν έχουμε κάποιο "μαθηματικό στόχο" στον οποίο επιθυμούμε να φτάσουμε, δεν προσπαθούμε να τοποθετήσουμε με τέτοιο τρόπο την έκθεση των αποτελεσμάτων ώστε να διευκολύνεται κάποιος τελικός σκοπός, όπως θα συνέβαινε αν θέλαμε να αποδείξουμε ένα συγκεκριμένο θεώρημα για παράδειγμα. Αντίθετα επειδή προσπαθούμε να φτάσουμε στο βάθος των εννοιών κάθε φορά και να μελετήσουμε την εκ πρώτης άποψης κρυμμένη ουσία των μαθηματικών, ίσως θα μπορούσε να πει κανείς πως οδηγηθήκαμε σε κάποιο παράδοξο αποτέλεσμα. Κάποια βασικά αποτελέσματα για την μαθηματική πρακτική αγνοούνται, κάποιες τεχνικές αποδείξεις παραλείπονται, εμμένουμε πολλές φορές σε κάποια σημεία χωρίς κατ' αρχήν προφανή λόγο. Επίσης και αυτό είναι το σημαντικότερο νομίζουμε, πολλές φορές επιμένουμε σε ένα "στεγνό" φορμαλισμό ενώ αντίθετα άλλες φορές επιμένουμε σε μια (ίσως υπερφίαλη) διαισθητική προσέγγιση. Όλα αυτά νομίζουμε δικαιολογούνται από την τελικά φιλοσοφική πραγμάτευση που θέλουμε να πετύχουμε. Ο τελικός στόχος, δηλαδή, καθορίζει την συνολική φυσιογνωμία του κειμένου.

Το όλο κείμενο διέπεται στο σύνολο του από τη συνεχή αντιπαραβολή της θεωρίας κατηγοριών και της θεωρίας συνόλων. Αυτό δεν έγινε φυσικά τυχαία: ήταν αναπόφευκτο. Και τούτο για δύο λόγους. Κατά πρώτον, διότι η θεωρία κατηγοριών είναι με τρόπο που θα εξηγήσουμε ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά και είναι φυσιολογικό να επιθυμούμε όταν αναπτύσσουμε ένα θεμέλιο να το αντιπαραβάλουμε με το άλλο κυρίαρχο μοντέλο θεμελίωσης των μαθηματικών. Κατά δεύτερον, η θεωρία κατηγοριών έχει κάποια χαρακτηριστικά όπως θα δούμε τα οποία είναι ξένα προς τον συνηθισμένο τρόπο με τον οποίο έχουμε μάθει να κάνουμε μαθηματικά και να προσλαμβάνουμε τα μαθηματικά αντικείμενα ενώ αυτός ο συνηθισμένος τρόπος θέασης είναι ένας τρόπος "εμβαπτισμένος" μέσα στη θεωρία συνόλων. Άλλωστε, σε τελική ανάλυση, δεν μπορείς να κάνεις φιλοσοφία των μαθηματικών σαν αυτή που κάνουμε εμείς εδώ, χωρίς να μιλήσεις για την βάση

των μαθηματικών η οποία είναι η θεωρία των συνόλων. Έτσι κατά κάποιο τρόπο η αντίστιξη συνόλων και κατηγοριών είναι εύλογη και αναμενόμενη.

Η θεωρία κατηγοριών έχει τρεις χρήσεις ή τρεις διαφορετικούς χαρακτήρες. Ως εργαλείο για τα υπόλοιπα μαθηματικά, ως αντικείμενο μελέτης η ίδια, και ως θεμέλιο. Στην παρούσα εργασία εξετάζονται βασικά οι ο δεύτερος και ο τρίτος χαρακτήρας. Δυστυχώς, η θεωρία κατηγοριών ως εργαλείο για τη μελέτη των υπόλοιπων μαθηματικών δεν μπορεί να "κατακτηθεί" εύκολα στο σύνολό της γιατί είναι αρκετά ευρείο και πολύπλοκη. Έτσι δεν εκτίθενται παρά σε ελάχιστο βαθμό στο κείμενο στοιχεία των εφαρμογών παρόλο που, όπως θα δούμε, έχουν μεγάλη σημασία για τα ζητήματα που θα πραγματευτούμε. Τους δυο άλλους χαρακτήρες τους παρουσιάζουμε σε ένα επαρκή ελπίζουμε βαθμό.

Η εργασία αυτή έχει ένα αντικείμενο που θα μπορούσε να χαρακτηρίσει κάποιος με δύο τρόπους είτε σαν φιλοσοφίζοντα μαθηματικά είτε σαν πολύ τεχνική και περίεργη φιλοσοφία των μαθηματικών. Έχουμε την πίστη πως αυτή η σύνδεση των "πραγματικών μαθηματικών" και της "σκέψης πάνω σε αυτά" είναι πολύ ενδιαφέρουσα, πολύ γόνιμη και απαραίτητη σήμερα. Οι κλασσικές φιλοσοφίες των μαθηματικών και γενικώς οι κλασσικές φόρμες στη φιλοσοφία των μαθηματικών δεν μπορούν να ανταποκριθούν στις σύγχρονες εξελίξεις τις επιστήμης, γενικά, των μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Χρειάζεται μια εκ νέου προσέγγιση και μια αναζωογόνηση που μπορεί να προκύψει μόνο μέσα από την βαθιά κατανόηση των σύγχρονων μαθηματικών και των συνεπειών τους. Το βασικό μοτίβο που θα έχουμε λοιπόν εδώ είναι πως η φιλοσοφία της επιστήμης δεν είναι κάτι έξω και πέρα από το σώμα της κάθ' αυτής επιστήμης και συνδιαλέγεται μαζί της, αλλά κάτι το οποίο είναι οργανικά δεμένο με αυτήν και το οποίο βρίσκεται μέσα στην επιστήμη και είναι σε συνεχή ανάδραση μαζί της. Αυτή η θέση νομίζουμε πως επικυρώνεται και από τις σύγχρονες εξελίξεις στον κλάδο.

Το βασικό πρόβλημα του αντιμετωπίσαμε σε αυτήν την εργασία, και εν πολύς καθόρισε και τα όρια στα οποία είχαμε τη δυνατότητα να κινηθούμε, έχει να κάνει με την έλλειψη συγκροτημένης μελέτης πάνω στο ζήτημα. Το θέμα της διασύνδεσης της θεωρίας κατηγοριών με τα θεμέλια των μαθηματικών είναι ένα σχετικά καινούριο θέμα που έχει απασχολήσει τους φιλοσόφους και τους μαθηματικούς κατά τα τελευταία μόνο χρόνια. Αυτό δεν έχει γίνει μέχρι τώρα με κάποιο συγκροτημένο τρόπο. Δεν υπάρχουν αρκετά κοινώς αποδεκτά προβλήματα, και ελάχιστες κοινώς αποδεκτές τοποθετήσεις πάνω σε όσα υπάρχουν. Δεν υπάρχουν καν ευδιάκριτες κοινότητες ειδικών που εντάσσονται σε ένα κοινό ρεύμα με κάποιες ξεκάθαρες βάσεις. Δεν υπάρχουν δηλαδή σχολές στο αντικείμενο παρά μόνο η σχολή αυτών που γενικά κάνουν θεωρία κατηγοριών και κάθε ένα από αυτούς έχει και τις δικές ιδιαίτερες θέσεις και τοποθετήσεις. Τα δεδομένα αυτά κάνουν την μελέτη του θέματός μας ιδιαίτερα δύσκολη για ένα νεοεισερχόμενο μιας και δεν υπάρχει ούτε καν ένα σύγγραμμα αναφοράς ούτε και κάποιες γενικές κατευθυντήριες γραμμές. Ελπίζουμε πως καταφέραμε σε ένα βαθμό να ανταπεξέλθουμε σε αυτό το πρόβλημα χωρίς όμως να έχουμε σε κανένα από τα ζητήματα που διαπραγματευόμαστε πληρότητα, ούτε βέβαια κάποια

συνολική γενική εποπτεία του προβλήματος.

Σκιαγραφώντας τα περιεχόμενα τις εργασίας θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πρώτο σύντομο καφάλαιο θέτει ανδρομερώς την ιστορική εξέλιξη της θεωρίας κατηγοριών και αναφέρει εντελώς επιγραμματικά μερικούς λόγους για τους οποίους έχει αμφισβητηθεί η αναγόρευση της θεωρίας συνόλων (συνήθως στην αξιωματική εκδοχή ZFC των Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής) σε μοναδικό και έσχατο θεμέλιο των μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνονται οι πρώτοι βασικοί ορισμοί που αφορούν τα βασικά αντικείμενα διαπραγμάτευσης μας: τις κατηγορίες, τους συναρτητές και τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Δίδονται επίσης και κύριες κατασκευές που μπορούμε να έχουμε (όπως για παράδειγμα οι κατηγορίες εκθετών και τα όρια κατηγοριών) και οι οποίες έχουν κεντρική σημασία τόσο γιατί έχουν μεγάλη πρακτική χρησιμότητα, όσο και επειδή καταφέρνουν να υλοποιούν πολύ ανάγλυφα τα νέα και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που έχει η θεωρία κατηγοριών. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το παράδειγμα της θεωρίας ομάδων την οποία και καταφέρνουμε να την κατηγοροποιήσουμε (να χαρακτηρίσουμε δηλαδή μια ομάδα ισοδύναμα με την χρήση μόνο κατηγορικών εννοιών και εργαλείων). Κατόπιν παρουσιάζουμε τις πιο κρίσιμες και καινοτόμες έννοιες που μας προσφέρει η θεωρία κατηγοριών: την έννοια της συζυγίας και την καθολικότητα. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται τα ζητήματα θεμελίωσης με την περιγραφή του έργου του Lawvere (η στοιχειώδης θεωρία κατηγορικών συνόλων και η κατηγορία όλων των κατηγοριών ως θεμέλιο των μαθηματικών). Στο τέλος κάνουμε μια σύντομη αναφορά στη θεωρία τόπων και στη σύνδεση που έχει με εντυπωσιακό τρόπο η λογική (και ειδικότερα η ιντουσιονοστική λογική) με αυτούς.

Στο τρίτο κεφάλαιο τώρα μελετάμε τη φιλοσοφική πραγμάτευση της θεωρίας κατηγοριών. Η προσέγγιση μας εδώ είναι και θεματική και ιστορική-προσωποκεντρική. Η έμφαση δίνεται στα ζητήματα ανεξαρτησίας ανάμεσα στις θεωρίες κατηγοριών και συνόλων (δηλαδή στην διασύνδεσή αυτών των δύο) καθώς και στα ζητήματα του αντιθεμελιωτισμού του μαθηματικού δομισμού και του ολισμού που ανακύπτουν με νέο και έντονο τρόπο στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών. Τέλος αναφερόμαστε στους πολύ ενδιαφέροντες τρόπους με τους οποίους δυο μαθηματικοί και φιλόσοφοι, ο Bell και ο Lambek, βλέπουν τα μαθηματικά, και θέτουν τη θεωρία κατηγοριών στο κέντρο της μελέτης τους.

Κεφάλαιο 1

Αφετηρίες

1.1 Σύντομη ιστορία της Θεωρίας Κατηγοριών

Η θεωρία κατηγοριών είναι μια μαθηματική θεωρία που αναπτύχθηκε στο δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα από τους Eilenberg και MacLane αρχικά, και πολλούς άλλους συνέχεια, μεταξύ άλλων τους Freyd, Lawvere, Kan, Grothendieck και άλλους. Η θεωρία κατηγοριών ξεκίνησε σαν εργαλείο για τη μελέτη άλλων μαθηματικών δομών, αλλά γρήγορα απέκτησε και υπόσταση σαν αντικείμενο αυτοτελούς μελέτης το ίδιο ενώ από την δουλειά του Lawvere και μετά μπορεί να ειδωθεί και σαν θεμέλιο των μαθηματικών.

Την δεκαετία του 1940 και το μεγαλύτερο μέρος της δεκαετίας του 1950 η θεωρία κατηγοριών ουσιαστικά αναπτυσσόταν μέσα στα μαθηματικά της αλγεβρικής τοπολογίας σαν ένας κομψός τρόπος για να διατυπωθούν τα προβλήματα αυτής και να μελετηθούν σε βάθος έννοιες και διαδικασίες αυτής. Οι δύο βασικές κατακτήσεις της θεωρίας αυτήν την περίοδο είναι ορισμός των αβελιανών κατηγοριών και η ανακάλυψη της έννοιας της συζυγίας (adjuction). Αυτές ήταν ενταγμένες πλήρως μέσα στις ανάγκες της τοπολογίας και ήταν ορισμένες σε ειδικές κατηγορίες που χρησιμοποιούνταν στην τοπολογία. Την εποχή αυτή η θεωρία κατηγοριών δεν ήταν τίποτα άλλο πέρα από ένα ριζοσπαστικό εργαλείο της άλγεβρας και της τοπολογίας που μπορούσε να δώσει νέες μεθόδους έκφρασης και ανάλυσης.

Το πιο ειδικό σημείο στο οποίο η θεωρία κατηγοριών ήρθε να συμβάλει ήταν η θεωρία ομολογίας της αλγεβρικής τοπολογίας κα πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα που προσπάθησαν να λύσουν οι Eilenberg και MacLane ήταν ένα ζήτημα για τις επεκτάσεις των ομάδων και την γεωμετρία του σελινοειδούς. Μια από τις επόμενες προσπάθειες των δύο ήταν να μπορέσουν να δώσουν νέα και πιο πλήρη θεμέλια για την αλγεβρική τοπολογία. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια κατάφερε και ο Kan να δώσει τον πρώτο ορισμό συζυγών συναρτητών την στιγμή που πραγματευόταν τα λεγόμενα απλοποιηντικά σύνολα (simplicial sets). Από την δεκαετία του 1950 έγινε σαφής η σύνδεση της θεωρίας με το χαρακτηριστικό πεδίο εφαρμογής της: την ομολογιακή άλγεβρα. Αυτό ξεκίνησε

από την δουλεία των Cartan και Eilenberg κυρίως αλλά και από τις εργασίες του Buchsbaum. Πολύ σημαντική ήταν και η εισαγωγή και μελέτη της έννοιας του δράγματος από διαφόρους αλλά ο πραγματικός αναμορφωτής της θεωρίας ήταν ο Grothendieck ό οποίος με το άρθρο του που είναι γνωστό ως "Tohoku" όρισε τον τρόπο με τον οποίο θα γίνονται τα μαθηματικά τα επόμενα χρόνια και έβαλε για τα καλά την θεωρία κατηγοριών μέσα στην κυρίαρχη μαθηματική πρακτική. Τέλος με μεγάλη επιτυχία εφαρμόστηκε η θεωρία κατηγοριών και στην αλγεβρική γεωμετρία. Εδώ την κυρίαρχη συμβολή την είχαν οι Grothendieck και Weil.

Η έννοια του τόπου δημιουργήθηκε, επίσης, από τον Grothendieck στη διάρκεια της εργασίας του στην τοπολογία και την θεωρία δραγμάτων. Κάθε τοπολογικός χώρος μας δίνει με φυσιολογικό τρόπο έναν τόπο, τον τόπο των δραγμάτων πάνω σε αυτόν. Το κλειδί στο επιχείρημά του ήταν πως οι τόποι είναι το κατάλληλο αντικείμενο για την μελέτη της τοπολογίας γιατί σε αυτούς γενικεύεται με πολύ κομψό τρόπο η έννοια της συνομολογίας. Η προσέγγιση αυτή ήταν φοβερά γόνιμη και κατάφερε να λύσει πολλά προβλήματα που ανέκυπταν στους παραπάνω κλάδους.

Όσον αφορά την ανάπτυξη της θεωρίας κατηγοριών με ρόλο θεμελίωσης για τα μαθηματικά, αυτό έπρεπε να περιμένει μέχρι τον Lawvere ο οποίος την δεκαετία του 1960, στην διδακτορική του διατριβή, αλλά και στις πρώτες εργασίες του ανέπτυξε την έννοια της αλγεβρικής θεωρίας, την κατηγορία όλων των κατηγοριών και τη θεμελίωση της κατηγοριακής θεωρίας συνόλων. Τις περισσότερες από αυτές τις έννοιες θα τις μελετήσουμε επί μακρόν στην παρούσα εργασία.

Από τη δεκαετία του 1980 η θεωρία κατηγοριών έχει αναπτύξει πάρα πολύ το πεδίο εφαρμογών της. Έχει βρεί εφαρμογή σε όλο και περισσότερα κομμάτια των μαθηματικών, τόσο στο γενικό πεδίο της θεμελίωσης των μαθηματικών, όσο και σε άλλα κομμάτια των καθαυτά μαθηματικών. Πολύ ενδιαφέρουσα επίσης είναι η εφαρμογή της στα πεδία της θεωρητικής πληροφορικής και του προγραμματισμού που έχει διανοίξει νέους ορίζοντες. Τέλος, και αυτό θα είναι κάτι που θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα εμάς, η θεωρία κατηγοριών γίνεται αφορμή για να ανοιχτούν συζητήσεις στην φιλοσοφία των μαθηματικών, να γίνουν νέες προσεγγίσεις και να τεθούν νέα ερωτήματα.

1.2 Οι αδυναμίες της θεωρίας συνόλων

Η καντοριανή θεωρία συνόλων, αλλά και η θεωρία συνόλων όπως την γνωρίζουμε και την εφαρμόζουμε σε όλα τα μαθηματικά, έχει κάποιες πολύ σοβαρές αδυναμίες να πραγματευτεί ένα σύνολο από επιμέρους μαθηματικές θεωρίες οι οποίες μοιάζουν να είναι έξω από την περιοχή ισχύος της. Αντιγράφουμε από το Bell[1986]

> *Σε κάποια έκταση αυτή η αμφισημία αναφοράς των μαθηματικών εννοιών είναι ήδη παρούσα και στην κλασική Θεωρία Συνόλων, εφ' όσον τα αξιώματά της διατυπώνονται με ορούς πρώτης τάξης και επομένως επιδέχονται πολλές, ουσιωδώς διαφορε-*

τικές, ερμηνείες. Πράγματι, από το 1922, ο Skolem παρατήρησε ότι γι' αυτό τον λόγο οι συνολοθεωρητικές ιδέες - και ειδικότερα οι άπειροι πληθάριθμοι (cardinalities) - είναι σχετικοί. Συμπέρανε, δε, ότι η αξιωματικοποιημένη Θεωρία Συνόλων "δεν ήταν μία ικανοποιητική τελική θεμελίωση για τα μαθηματικά". Οι δομές του Skolem σε μεγάλο βαθμό αγνοήθηκαν από τους μαθηματικούς, αλλά μία νέα πρόκληση, για την απολυτότητα του συνολοθεωρητικού πλαισίου, προέκυψε το 1963 όταν ο Paul Cohen κατασκεύασε πρότυπα της Θεωρίας Συνόλων (δηλαδή της Θεωρίας Συνόλων Zermelo-Fraenkel, ZF), όπου αξιόλογες μαθηματικές προτάσεις, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς και το Αξίωμα Επιλογής, διαψεύδονται (ο Godel είχε ήδη δημιουργήσει, από τα τέλη της δεκαετίας του 1930, πρότυπα όπου οι προτάσεις αυτές επικυρώνονται). Η αμφισημία που προκύπτει, όσον άφορα στις τιμές αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων, θεωρήθηκε, από πολλούς συνολοθεωρητικούς (και από πιο "ορθόδοξους" μαθηματικούς), ως ένα πολύ πιο σοβαρό ζήτημα από την "απλή" αμφισημία αναφοράς των μαθηματικών εννοιών, πού είχε ήδη καταδειχθεί από τον Skolem. Στην πραγματικότητα, οι τεχνικές του Cohen και των διαδόχων του, οδήγησαν σε μία τεράστια εξάπλωση των μοντέλων της Θεωρίας Συνόλων με ουσιωδώς διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες, τα οποία με τη σειρά τους έχουν προκαλέσει μία ανησυχητική αβεβαιότητα στα μυαλά των συνολοθεωρητικών ως προς την ταυτότητα του "πραγματικού" σύμπαντος συνόλων, ή τουλάχιστον ως προς το ποιες ακριβώς μαθηματικές ιδιότητες πρέπει αυτό να κατέχει. Το αποκορύφωμα είναι ότι η έννοια σύνολο - στον βαθμό πού μπορεί να συλληφθεί από αξιώματα πρώτης τάξης - κατέληξε να είναι ριζοσπαστικά απροσδιόριστη.

Επίσης υπάρχουν μια σειρά από άλλες εξελίξεις στα μαθηματικά οι οποίες καταλήγουν να θέτουν εν αμφιβόλω τη φερεγγυότητα της θεωρίας δυνόλων ως έσχατου και μοναδικού θεμελίου για τα μαθηματικά. Παραθέτουμε μια λίστα από τον Drosso [2003] χωρίς να δώσουμε περαιτέρω επεξηγήσεις.

1. Η θεωρία δραγμάτων (Leray, Cartan)
2. Οι τόποι του Grothendieck, (Grothendieck, Giraud)
3. Πιθανοκρατικοί μετρικοί χώροι (Menger ,Schweizer και Sklar)
4. Μοντέλα σε άλγεβρες Boole ((Scott, Solovay, Vopenka)
5. Μοντέλα Kripke
6. Ασαφή σύνολα
7. Εσωτερική θεωρία συνόλων (Nelson)

8. Εναλλακτική θεωρία συνόλων (Vopenka)

Φυσικά μια διεξοδική πραγμάτευση όλων αυτών των θεματικών με σκοπό να καταδειχθούν οι λόγοι που συνηγορούν υπέρ της αναζήτησης κάποιου άλλου θεμελίου για τα μαθηματικά, πέραν της αξιωματικής θεωρίας συνόλων, θα συγκροτούσε από μόνητης μια εργασία. Θα προχωρήσουμε, επομάνως, στην παρουσίαση της θεωρίας κατηγοριών και θα αρκεστούμε μόνο σε επιγραμματικές αναφορές στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 2

Τα μαθηματικά της Θεωρίας Κατηγοριών

2.1 Οι κατηγορίες και οι συναρτητές

Η Θεωρία κατηγοριών (και η θεωρία τόπων ως συνέχειά της) είναι ένα σχετικά νέο αντικείμενο των μαθηματικών (δουλειά των MacLane και Eilenberg την δεκαετία του 50) που προσπαθεί να τα προσεγγίσει με διαφορετική οπτική. Αυτή η ματιά χρησιμοποιεί έννοιες, εργαλεία και μεθόδους, που υπήρχαν στα προ-κατηγοριακά μαθηματικά, αλλά δεν είχαν κεντρικό χαρακτήρα, και τα βάζει στον πυρήνα της φιλοσοφίας της. Δύο τέτοια στοιχεία θα αναφέρουμε που πιστεύουμε πως έχουν νόημα να ειπωθούν εισαγωγικά.

Πρώτον η συνεχής πορεία αφαίρεσης στα μαθηματικά φτάνει με την θεωρία κατηγοριών σε ένα ύψιστο βαθμό. Στην άλγεβρα είναι ιδιαίτερα οικεία η διαδικασία που μας πηγαίνει από τους αριθμούς στους δακτύλιους ή από τις συμμετρίες στις ομάδες, δηλαδή έρχεται μια στιγμή που κατανοούμε πως σημασία δεν έχει να προσθέτουμε αριθμούς, πίνακες κτλ αλλά μπορούμε να προσθέτουμε οτιδήποτε κάτω από κάποιες αρχές. Έχουμε δηλαδή μια πορεία αναζήτησης αναλογιών στα επιμέρους και την αναγόρευση αυτών των αναλογιών σε γενικεύσεις ανεξάρτητες των επιμέρους υλοποιήσεών τους. Στην θεωρία κατηγοριών το ρόλο του επιμέρους δεν τον έχει κάποιο συγκεκριμένο αριθμητικό σύστημα αλλά μια ολοκληρωμένη μαθηματική θεωρία, πιθανόν προϊόν γενίκευσης και η ίδια. Έχουμε τρόπον τινά (αν και είναι αδόκιμο) μία άλγεβρα των θεωριών. Αυτή η πορεία γενίκευσης δημιουργεί και διάφορα ενδιαφέροντα προβλήματα που θα δούμε στο κεφάλαιο 3.

Δεύτερον εισάγεται μια προσέεγγιση που βάζει στον πυρήνα της την έννοια της συνάρτησης. Στα μαθηματικά της Θεωρίας Συνόλων (τα μαθηματικά που όλοι έχουμε συνηθίσει να κάνουμε) η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική και η έννοια της συνάρτησης έπεται ενώ οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων είναι ιδιότητες των αντικειμένων των ίδιων. Παρόλα αυτά, πολλές φορές βλέπουμε πως για να κατανοήσουμε σε βάθος ένα αντικείμενο πχ μία ομάδα ή ένα χώρο Banach, χρειάζεται να το δούμε σε σχέση με τις συναρτήσεις που δρούνε πάνω σε αυτό και

με αυτό τον τρόπο να δούμε τα βαθύτερα χαρακτηριστικά της δομής. Η Θεωρία Κατηγοριών αναπτύσει αυτήν την λογική ως τα άκρα και θέτει ως μόνο τρόπο έκφρασης των ιδιοτήτων την γλώσσα των συναρτήσεων. Κάνει την συνάρτηση δηλαδή το κεντρικό αντικείμενο μελέτης.

Ορισμός 1 *Μια κατηγορία (category)* **C** *αποτελείται από:*

- Αντικείμενα *(objects):A,B,C,...*
- Βέλη *ή* **μορφισμούς** *(arrows,morphisms) f,g,h,...*
- *Για κάθε βέλος f υπάρχουν δύο αντικείμενα*

$$dom(f), cod(f)$$

που ονομάζονται πεδίο *και* συν-πεδίο *ορισμού (domain and codomain) του f. Γράφουμε ένα από τα δύο*

$$f : A \longrightarrow B \qquad A \xrightarrow{f} B$$

για να δηλώσουμε οτι

$$dom(f) = A, cod(f) = B$$

- *Δοθέντων βελών*

$$A \xrightarrow{f} B\ , \quad B \xrightarrow{g} C$$

υπάρχει βέλος

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

που καλείται η σύνθεση *(composition) των f και g .*

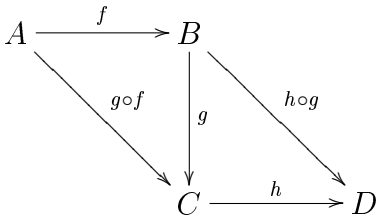
- *Για κάθε αντικείμενο A υπάρχει ένα βέλος*

$$1_A : A \longrightarrow A$$

που καλείται το ταυτοτικό *(indentity) βέλος.*

- *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα για την* $\circ$ *δηλαδή*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$



- *και η ιδιότητα του ταυτοτικού στοιχείου*

$$1_B \circ f = f \circ 1_A = f$$

για

$$f : A \longrightarrow B$$

Παρατηρήσεις 1 *1. Ο ορισμός που δώσαμε είναι εντελώς τυπικός σε πρώτη φάση και δεν αναφέρεται ούτε υπονοεί κάποιο συνολοθεωρητικό μοντέλο. Τα αντικείμενα δεν είναι σύνολα,η συλλογή των αντικειμένων δεν είναι σύνολο και οι μορφισμοί δεν είναι απαραίτητα συναρτήσεις όπως τις καταλαβαίνουμε.*

2. Στα επόμενα πολύ συχνά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $A \in Obj(\mathbf{C})$ για ένα αντικείμενο της $\mathbf{C}$.

3. Κατηγορία είναι όποιο μαθηματικό αντικείμενο ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα με το ίδιο τρόπο που σώμα είναι οτιδήποτε ικανοποιεί τα αξιώματα του σώματος. Έτσι έχουμε τα παρακάτω παραδείγματα

Παραδείγματα 1 *1. Η κατηγορια* **Sets**

Είναι η προφανής κατηγορία με αντικείμενα τα σύνολα και βέλη τις συναρτήσεις μεταξύ των συνόλων οπώς ακριβώς τις γνωρίζουμε. Ταυτοτική συνάρτηση είναι η $I(x) = x$ και $\circ$ η συνήθης σύνθεση συναρτήσεων. Ακόμα μπορούμε να ορίσουμε με προφανή τρόπο την κατηγορία $\mathbf{Sets}_{fin}$ των πεπερασμένων συνόλων με το προφανή τρόπο.

2. Οι κατηγορίες των δομημένων συνόλων που ορίζονται όταν πέρνουμε ως αντικείμενα τα δομημένα σύνολα και ως βέλη τις συναρτήσεις ανάμεσα σε αυτά που σέβονται την δομή τους.

Έτσι έχουμε την κατηγορία των ομάδων **Group** *με βέλη τους ομομορφισμούς ανάμεσα στις ομάδες, την κατηγορία των σωμάτων* **Fields** *, και τον υπολοίπων συνηθισμένων αλγεβρικών δομών* **Vect**, **Ring**, **Mod**, **Monoid** *κτλ. Επίσης έχουμε την κατηγορία των τοπολογικών χώρων* **Top** *με βέλη τις συνεχείς συναρτήσεις και την κατηγορία* **Man** *των πολλαπλοτήτων με βέλη τις συνεχείς και διαφορίσιμες απεικονήσεις.Όλες οι παραπάνω ικανοποιούν τα αξιώματα των κατηγοριών με τρόπο προφανή. Όλες οι παραπάνω, και όσες άλλες, κατηγορίες που έχουν την ιδιότητα να δίδουν μια δομή στην κατηγορία των συνόλων και συνεπως να έχουν ως αντικείμενα κάποια σύνολα και ως μορφισμός κάποιες συναρτήσεις ονομάζονται* συγκεκριμένες κατηγορίες *(Concrete category)*

3. Είναι όμως όλες οι κατηγορίες συγκεκριμένες; Αν ίσχυε αυτό θα σήμαινε πως η έννοια της κατηγορίας ενσωματώνεται κάπως στην θεωρία συνόλων και οτι δεν μπορεί να μας

δώσει δυναμική για κάτι παραπέρα. Αλλά τα πράγματα δεν είναι έτσι και θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα ενδεικτικά των δυνατοτήτων.

Έστω **Rel** *η κατηγορία που έχει ως αντικείμενα της σύνολα και ως μορφισμούς διμελείς σχέσεις. Δηλαδή ένας $f : A \to B$ είναι ένα υποσύνολο $f \subseteq A \times B$ και το ταυτοτικό βέλος είναι το $id_A = \{(\alpha, \alpha) \in A \times A | \alpha \in A\} \subseteq A \times A$. Είναι εύκολο να δει κάνεις οτι αυτά τα βέλη δεν είναι συναρτήσεις (δεν είναι ένα-προς-ένα). Ένα άλλο τέτοιο παράδειγμα όχι συγκεκριμένης κατηγορίας είναι η* **hTop** *με αντικείμενα τους τοπολογικούς χώρους και συναρτήσεις τις κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονήσεων.*

4. *Δύο περιπτώσεις κατηγοριών βγαλμένων όχι από τα κλασσικά μαθηματικά είναι οι εξής:*

   Η κατηγορία των παραγωγικών συστημάτων όπου έχουμε τις λογικές προτάσεις ως αντικείμενα και κάθε μορφισμός να ανταποκρίνεται σε μια απόδειξη. Δηλαδή υπάρχει $f : p \to q$ αν $p \vdash q$. Τα αξιώματα μπορούμε εύκολα να τα αποδείξουμε με τους κανόνες του προτασιακού λογισμού (παρατηρήστε πως σύνθεση μορφισμών απορρέει από τον κανόνα modus ponens). Επίσης έχουμε την κατηγορία **Data** *των δεδομένων όπου αντικείμενα είναι data types και βέλη computable function, δηλαδή προγράμματα.Αυτά τα δύο παραδείγματα είναι ενδεικτικά του εύρους που έχουν οι εφαρμογές της θεωρίας κατηγοριών.*

5. *Ένα τελευταίο, πολύ χρήσιμο για τα υπόλοιπα αν και διαφορετικό, παράδειγμα είναι η κατηγορία* **Pos** *των μερικώς διατεταγμένων συνόλων με αντικείμενα τα στοιχεία ενός μερικού διατεταγμένου συνόλου $< A, \succeq >$ και τα βέλη να είναι ως εξής: υπάρχει ένας μορφισμός $A \to B$ ακριβώς όταν $A \succeq B$.*

   Με αυτόν το τρόπο δημιουργούμε πολλές χρήσιμες κατηγορίες όπως **Open(X)**, *κατηγορία των ανοιχτών συνόλων σε ένα τοπολογικό χώρο X με προσαρτημένη μερική διάταξη την $\subseteq$.*

Από τα παραπάνω είναι φανερό πως η κατηγορία είναι ένα εντυπωσιακά μεγάλο και γενικό αντικείμενο. Περιγράφει τον τρόπο που δομούνται όλες οι μαθηματικές θεωρίες αλλα η ισχύς υπεβαίνει κατά πολύ την ισχύ περιγραφής των κλασικών μαθηματικών. Παρατηρήστε επίσης το γεγονός πως τα αντικείμενα μιας κατηγορίας δεν συνιστούν σύνολο σύμφωνα με την αξιωματική συνοθεωρία, αλλά κλάσεις ή κάτι ακόμα μεγαλύτερο πράγμα που κάνει την θεωρία κατηγοριών να ξεφεύγει της ZFC. Συνεπώς μια διαισθητική προσέγγιση μας σύμφωνη με όσα συνήθως κάνουμε στα μαθηματικά δεν θα μας βοηθήσει. Πολύ πιο χρήσιμο είναι να προσεγγίσουμε τις κατηγορίες σαν γραφήματα.

Ορισμός 2 *Ένα γράφημα (graph) είναι μια διατεταγμένη τριάδα*

$$G =< G_0, G_1, (\alpha, \tau) >$$

όπου

1. G_0 *είναι στοιχεία που ονομάζονται* **κόμβοι** *του γραφήματος.*

2. G_1 *είναι στοιχεία τα οποία ονομάζονται* **ακμές** *του γραφήματος.*

3. (α, τ) *είναι τελεστές που απεικονίζουν μία ακμή σε ένα κόμβο.*

$$\alpha, \tau : G_1 \longrightarrow G_0$$

όπου το πρώτο δίνει το πεδίο κάθε ακμής και το δεύτερο το συν-πεδίο

Ορισμός 3 *Μία κατηγορία* **C** *είναι ένα γράφημα* $< C_0, C_1, (\alpha, \tau) >$ *με δύο επιπλέον τελεστές: τον* id_A *που απεικονίζει κάθε κόμβο σε μια ακμή με* $\alpha(A) = \tau(A) = A$ *και τον* $\circ$ *που απεικονίζει κάθε ζεύγος βελών* f, g *με* $\tau(f) = \alpha(g)$ *σε ένα βέλος* $h = f \circ g$ *με* $\tau(h) = \tau(f)$ *και* $\alpha(h) = \alpha(g)$

Παρατηρήσεις 2 *Στην περίπτωση που τα* C_0 *και* C_1 *είναι σύνολα τότε έχουμε μια* μικρή κατηγορία *(small category) διαφορετικά μια μεγάλη (large category)*

Αναφέραμε ότι στην Θεωρία Κατηγοριών των κεντρικό ρόλο των έχουν οι συναρτήσεις που στα πλαίσια της θεωρίας μας αυτές είναι οι μορφισμοί. Ποσο κομβικοί είναι όμως αυτοί και που έγγυται η κομβικότητά τους θα το δούμε στην συνέχεια. Τώρα θα δώσουμε ένα τρίτο ορισμό για την κατηγορία, εντελώς ισοδύναμο που κάνει χρήση μόνο των μορφισμών. Υπό κάποια έννοια δηλαδή μπορούμε να κάνουμε την θεωρία μας να αναφέρεται αποκλειστικά στην αρχική έννοια των μορφισμών. Έτσι αρχίζει να γίνεται κατανοητό και το σλόγκαν που θέλει την θεωρία Κατηγοριών να είναι *η αφηρημένη θεωρία των συναρτήσεων.*

Ορισμός 4 *Μια κατηγορία* **C** *είναι μια δομή,*

$$< C_1; dom, cod; \circ >$$

με,

$$dom : C_1 \longrightarrow C1, cod : C_1 \longrightarrow C1, \circ : C_2 \longrightarrow C1$$

όπου $C_2 = \{< f_1, f_2 > | cod(f_1) = dom(f_2)\}$ *και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $dom \circ dom = dom = cod \circ dom$ *και* $cod \circ cod = cod = dom \circ cod$

2. *Αν* $f, g \in C_2$ *τότε* $dom(g \circ f) = dom(f)$ *και* $cod(g \circ f) = cod(g)$

3. *Αν* $dom(g) = cod(f) = f$ *τότε* $g \circ f = g$

4. *Αν* $dom(g) = cod(f) = g$ *τότε* $g \circ f = f$

5. *Αν* $dom(g) = cod(f) = g$ *και* $dom(\eta) = cod(\varphi) = g$ *τότε* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Στα μαθηματικά η συνήθης πορεία όταν ορίσουμε ένα αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο η επόμενη ενέργεια είναι να ορίσουμε την κατάλληλη έννοια απεικόνισης που θέλουμε να έχουμε ανάμεσα σε στις συγκεκριμένες υλοποιήσεις του αντικειμένου. Για εμάς εδώ που δουλεύουμε με κατηγορίες η κατάλληλη τέτοια απεικόνιση (μορφισμός των κατηγοριών όπως θα δούμε) είναι ο *συναρτητής*.

Ορισμός 5 *Συναρτητής (functor)*

$$F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$$

ανάμεσα στις κατηγορίες $\mathbf{C}$ *και* $\mathbf{D}$ *ονομάζεται μια απεικόνιση από τα αντικείμενα στα αντικείμενα και από τα βέλη στα βέλη, τέτοια ώστε να ισχύουν τα επόμενα:*

1. $F(f : A \longrightarrow B) = F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Παράδειγμα 1

1. *συναρτητές δυναμοσυνόλων που είναι οι συναρτητές* $P : \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ *οι οποίοι αντιστοιχούν*

$$A \longmapsto P(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

$$(f : A \longmapsto B) \longrightarrow P(f) : P(A) \to P(B)$$

με $P(f)(\cdot) := f[\cdot]$ *και* $F[X] := \{f(x) \mid x \in X\}$

2. *Επιλήσμων συναρτητής (forgetful functor)* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ *όπου* $\mathbf{C}$ *μια συγκεκριμένη κατηγορία είναι ο συναρτητής που αντιστοιχεί κάθε αντικείμενο στο σύνολο του (δηλαδή στέλνει κάθε δομημένο σύνολο στο γυμνό σύνολο ξεχνώντας έτσι την δομή) και κάθε βέλος στην αντίστοιχη συνάρτηση συνόλων. Είναι πολύ εύκολο να δειξουμε ότι είναι όντως συναρτητής.*

3. *Hom - functors: Έστω* $\mathbf{C}$ *μια συγκεκριμένη κατηγορία, τότε θα συμβολίζουμε ως* $Hom(A, B)$ *όπου* $A, B \in Obj(\mathbf{C})$ *το:*

$$Hom_C(A, B) = \{f \in \mathbf{C}_1 \mid f : A \longrightarrow B\}$$

και έχουμε τον (συναλλοίωτο) συναρτητή $F(-) = Hom_C(A, -) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$, $A \in Obj(\mathbf{C})$ *με*

$$F(B) = Hom_C(A, B)$$

και

$$F(f : B \longrightarrow C) = Hom_C(A, f) = Hom_C(A, B) \longrightarrow Hom_C(A, C)$$

τετοιος ώστε κάθε $g \in Hom(A,B)$ *απεικονίζεται στο* $g \longrightarrow g \circ f$.

Για να δούμε πως όντως είναι συναρτητής θα πρέπει να δείξουμε οτι,

$$Hom_C(A, 1_B) = 1_{Hom_C(A,B)}$$

και,

$$Hom_C(A, g \circ f) = Hom_C(A, g) \circ Hom_C(A, f)$$

Πράγματι, έστω ένα $\varphi : A \longrightarrow B$. *Έχουμε:*

$$Hom_C(A, 1_B)(\varphi) = 1_B \circ \varphi = 1_{Hom_C(A,B)}(\varphi)$$

και ,

$$Hom_C(A, g \circ f)(\varphi) = (g \circ f) \circ \varphi = g \circ (f \circ \varphi) = Hom_C(A, g) \circ Hom_C(A, f)$$

Οι συναρτητές αυτοί ονομάζονται συναλλοίωτοι αναπαραστάσιμοι συναρτητές και για κάθε αντικείμενο στην κατηγορία αντιστοιχεί ένας τέτοιος. Οι συναρτητές αυτοί έχουν έναν ιδιαίτερο και κεντρικό ρόλο στην θεωρία. Προβάλλουν κατά κάποιο τρόπο μια κατηγορία , ή οποία μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλη και δύσκολα κατανοήσιμη εκ μέρους μας, στο φιλικό και γνώριμο σύμπαν της θεωρίας συνόλων (της κατηγορίας **Sets** *δηλαδή), με τέτοιο τρόπο που καθιστά δυνατόν να μελετήσουμε ιδιότητες της αρχικής κατηγορίας ως ιδιότητες κάποιον συνόλων. Επίσης οι Hom συναρτητές είναι το εργαλείο με το οποίο εκφράζεται το Λήμμα του Yoneda, ένα από τα κεντρικότερα και πιο συχνά χρησιμοποιήσιμα αποτελέσματα στην θεωρία κατηγοριών.*

Ακόμα έχουμε και τους ανταλλοίωτους Hom *συναρτητές ή συν-συναρτητές που ορίζονται με ένα δυικό τρόπο ως εξής*

$$Hom_C(-.A) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

$$B \longrightarrow Hom_C(B, A)$$

$$(f : C \longrightarrow B) \rightarrow Hom_C(f, A) : Hom_C(C, A) \longrightarrow Hom_C(B, A)$$

4. *Ελεύθεροι συναρτητές (free functors) οι οποίοι κάνουν το ακριβώς αντίθετο από τους επιλησμόντες συναρτητές. Αντιστοιχίζουν ένα σύνολο στο αντικείμενο μιας δομής που παράγεται από το αυτό. Έτσι ο* $F :$ **Sets** $\longrightarrow$ **Grp** *που παίρνει το* X *ως βάση και παράγει την ελεύθερη ομάδα*[1] $F(X)$ *που παράγεται από το* X *καλείται ελεύθερος συναρτητής ομάδων. Αντίστοιχα έχουμε ελεύθερους συναρτητές για κάθε μαθηματική δομή πχ ελεύθερους συναρτητές προτύπων κτλ.*

[1] Ελεύθερη ομάδα είναι η ομάδα εκείνη που τα στοιχεία της μπορούν να γραφούν ως γινόμενο των στοιχείων ενός πεπερασμένου υποσυνόλου της και των αντιστρόφων της.

5. *Αναπαραστάσεις και δράσεις ομάδων Είναι εύκολο να δούμε πως κάθε ομάδα G μπορεί να ειδωθεί ως κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο και με βέλη τα στοιχεία της ομάδας. (Τότε τα αξιώματα της ομάδας ταυτίζονται με τα αξιώματα της κατηγορίας). Κάθε συνρτητής από το G στην* **Sets** *αποτελεί την δράση της ομάδας σέ ένα σύνολο ενώ κάθε συναρτητής από το G στην κατηγορία $Vect$ των διανυσματικών χώρων είναι μια γραμμική αναπαράσταση.*

6. *Οι συναρτητές επισημάνθηκαν πρώτη φορά στα πλαίσια της αλγεβρικής τοπολογίας όπου αναφύονται με πολύ φυσικό τρόπο. Έτσι στην θεωρία ομολογίας για κάθε τοπολογικό χώρο X αντιστοιχείται μια αβελιανή ομάδα $H_n(X)$ και για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ υπάρχει ένας ομομορφισμός $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ ομάδων τέτοιος ώστε ο H_n να καθίστανται συναρτητής συναρτητής* $\mathbf{Top} \to \mathbf{Grp}$. *Ομοίως και οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_n(X)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν συναρτητές. η ουσία τοπυς που κάνει σημαντικούς τους συναρτητές για την τοπολογία είναι πως δεν δίνουν πληροφορίες μόνο για τους τοπολογικούς χώρους, αλλά και για τις συναρτήσεις ανάμεσα σε αυτούς.*

Έστω **C**,**D**,**E** κατηγορίες και F ,G συναρτητές ώστε

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{B} \xrightarrow{G} \mathbf{C}$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση των δυο συναρτητών $G \circ F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ με τον προφανή τρόπο $(G \circ F)(X) := G(F(X))$ και $)G \circ F)(f) := G(F(f))$.

Επίσης για κάθε κατηγορία **C** υπάρχει ο πραφανής ταυτοτικός συναρτητής $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ με

$$A \longmapsto 1_{\mathbf{C}}(A) := A$$

$$f \longmapsto 1_{\mathbf{C}}(f) := f$$

Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να θεωρήσουμε μια άλλη κατηγορία που θα έχει σαν αντικείμενα κατηγορίες και σαν βέλη συναρτητές. Δηλαδή δημιουργήσαμε κατηγορίες κατηγοριών! Αυτά τα αντικείμενα είναι τεράστια και πάρα πολύ γενικά και θα τα μελετήσουμε αργότερα πιο λεπτομερώς. Εδώ αρκεί να σημειώσουμε την ακολουθούμενη μεθοδολογία: Ξεκινώντας από τις οικείες μαθηματικές δομές δημιουργήσαμε άλλες δομές που τις γενικεύουν (τις κατηγορίες) και κατόπιν και άλλες δομές που γενικεύουν τις προηγούμενες γενικεύσεις (κατηγορίες κατηγοριών). Δημιουργήσαμε λοιπόν ένα πύργο δομών-γενικεύσεων. Η μεθοδολογία αυτή είναι κυριολεκτικά η καρδιά και η δύναμη της θεωρίας κατηγοριών. Σε όλα τα επόμενα συνεχώς θα δημιουργούμε με διάφορους τέτοια διαδοχικά επίπεδα δομών τα οποία και θα μας επιτρέπουν να φτάσουμε και να μελετήσουμε ιδιότητες σε εκπληκτικό βάθος.

Ποιά είναι όμως η σπουδαιότητα και ο ρόλος που επιτελούν οι συναρτητές; Μπορούμε να πούμε τα εξής:

1. Ένας συναρτητής παράγει μαθηματικές κατασκευές. Αυτό συνέβει με το παράδειγμα των ελεύθερων συναρτητών που παραθέσαμε παραπάνω. Ο συναρτητής εξέφρασε την δημιουργία μιας μαθηματικής δομής από ένα σύνολο αλλά και γενικότερα την δημιουργία μιας πλουσιότερης μαθηματικής δομής πάνω από μια άλλη απλούστερη. Οι δυικοί προς αυτούς είναι οι επιλήσμοντες συναρτητές οι οποίοι αποδομούν μια δομή σε κάποια άλλη απλούστερη.

2. Ένας συναρτητής λειτουργεί ως αναπαράσταση ή ως μοντέλο για της κατηγορίες. Όταν $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ μπορούμε να πούμε πως η $\mathbf{C}$ αναπαρίστανται ή ερμηνεύεται μέσα στην $\mathbf{D}$. Βλέπουμε δηλαδή την μια μέσα στην άλλη, την μια στα πλαίσια της άλλης ακριβώς όπως βλέπουμε στην θεωρία αναπαραστάσεων τις ομάδες μέσα στους διανυσματικούς χώρους. Ειδικά αν $\mathbf{D} = \mathbf{Sets}$ τότε έχουμε να κάνουμε με ένα τρόπο τινά σημασιολογικό συναρτητή που προσδίδει μια ερμηνεία στα πλαίσια των συνόλων της αφηρημένης κατηγορίας μας. Ένα μοντέλο υλοποίησης δηλαδή της $\mathbf{C}$.

2.2 Βασικές έννοιες

Τώρα που δώσαμε τους βασικούς ορισμούς και τα αξιώματα, θα συνεχίσουμε με το να ορίσουμε κάποιες θεμελιώδεις πρωταρχικές κατασκευές.

Ορισμός 6 *Σε κάθε κατηγορία* $\mathbf{C}$*, ένα βέλος* $f : A \longrightarrow B$ *θα καλείται* ισομορφισμός *αν υπάρχει ένα βέλος* $g : B \longrightarrow A$ *στην* $\mathbf{C}$ *τέτοιο ώστε:*

$$g \circ f = 1_A \qquad \text{και} \qquad f \circ g = 1_B$$

Το g *θα καλείται* αντίστροφο *του* f*, θα είναι μοναδικό (εύκολη απόδειξη) και θα συμβολίζεται* f^{-1}*. Επίσης θα λέμε ότι τα αντικείμενα* A *και* B *είναι* ισόμορφα *και θα γράφουμε* $A \cong B$*.*

Αυτή είναι η πρώτη κατηγοριακή έννοια που ορίζουμε και παρατηρήστε ότι εξάγουμε κάτι που αφορά δύο αντικείμενα μιας κατηγορίας χωρίς να κάνουμε μνεία για ιδιότητες εσωτερικές των αντικειμένων (π.χ., αν είναι σύνολα ή ομάδες ή αν είναι κενά) αλλά ασχολούμαστε μονάχα με τα βέλη και τις ιδιότητες των βελών, που έρχονται και εξέρχονται από αυτά. Έτσι έχουμε ορίσει μια γενική έννοια που περιλαμβάνει τον ομομορφισμό των ομάδων, την ισοδυναμία των συνόλων κ.α. Αυτή η μεθοδος ορισμού είναι χαρακτηριστική της Θεωρίας κατηγοριών και θα την συναντάμε συνέχεια. Ακόμα θα παρατηρήσατε πως στις προηγούμενες παραγράφου δεν ορίσαμε πουθενά κάποια ισότητα για τα αντικείμενα μιας κατηγορίας. Στη θέση αυτής έχουμε την πιο γενική έννοια της ισομορφίας. Δυο αντικείμενα δεν θα είναι ποτέ ταυτόσημα, αλλά θα ταυτίζονται κάθε φορά '*μέχρις ισομορφισμού*'.

Σε αυτό το πνεύμα θα ορίσουμε δυο πολύ ιδιαίτερα για μια κατηγορία αντικείμενα.

Ορισμός 7 *Σε μια κατηγορία, ένα αντικείμενο*

0 *είναι* αρχικό *αν για κάθε αντικείμενο* A *υπάρχει ένα μοναδικό βέλος*

$$0 \longrightarrow A$$

1 *είναι* τερματικό *αν για κάθε αντικείμενο* A *υπάρχει ένα μοναδικό βέλος*

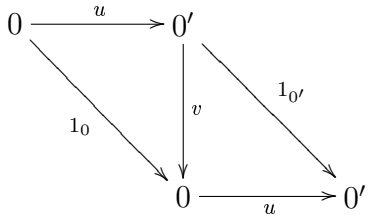
$$A \longrightarrow 1$$

Τα δυο αυτά αντικείμενα γενικεύουν, σε μια τυχούσα κατηγορία, το ρόλο που παίζουν στην κατηγορία **Sets** τα σύνολα $\emptyset$ και $\{\emptyset\} = 1$. Σε άλλες κατηγορίες δεν είναι προφανές ποιά αντικείμενα είναι τέτοια. Για παράδειγμα στην κατηγορία **Groups** η τετριμμένη ομάδα (με ένα στοιχείο) είναι ταυτόχρονα και αρχική και τερματική, ενώ στην **Rings** αρχικός δακτύλιος είναι ο $\mathbb{Z}$ ενώ τερματικός είναι ο τετριμμένος.

Μια απλή πρόταση που αφορά αυτά τα αντικείμενα είναι το εξης:

Πρόταση 1 *Τα αρχικά και τα τερματικά στοιχεία είναι ίσα μέχρι ισομορφισμού. (Με αυτό εννοούμε πως αν* $0, 0'$ *αρχικά, τότε* $0 \cong 0'$ *)*

Απόδειξη: Έστω πως 0 και $0'$ είναι και τα δυο αρχικά αντικείμενα, τότε το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα αποδεικνύει το ζητούμενο:



Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε και για τα τερματικά αντικείμενα. □

Ο επόμενος ορισμός γενικεύει τις γνωστές από την θεωρία συνόλων έννοιες των 'ένα-προς ένα' και των 'επί' συναρτήσεων.

Ορισμός 8 *Σε μια κατηγορία* **C**, *ένα βέλος*

$$f : A \longrightarrow B$$

ονομάζεται

μονομορφισμός, *αν για δυο οποιοδήποτε μορφισμούς* $h, g : C \longrightarrow A$, $f \circ g = f \circ h$ *συνεπάγεται* $g = h$,

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

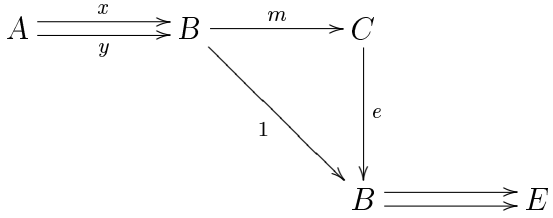
επιμορφισμός, αν για δυο οποιοδήποτε μορφισμούς $i, j : B \longrightarrow D, \quad i \circ f = j \circ f$ *συναπάγεται* $i = j$,

$$A \xrightarrow{f} B \underset{j}{\overset{i}{\rightrightarrows}} D$$

Θα γράφουμε συχνά $f : A \longmapsto B$ *και* $f : A \twoheadrightarrow B$ *αν είναι μονομορφισμός ή επιμορφισμός αντίστοιχα.*

Είναι μια εύκολη άσκηση να δείξει κανείς οτι στην **Sets** οι μονομορφισμοί (επιμορφισμοί) είναι οι 'ενα-προς-ενα' ('επί') συναρτήσεις.

Πρόταση 2 *Κάθε ισομορφισμός είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός.*
Απόδειξη:*Αν* m *είναι ισομορφισμός με αντίστροφο* e *τότε στο ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα*



αν $m \circ x = m \circ y$ *τότε* $x = e \circ m \circ x = e \circ m \circ y = y$ *και άρα* m *μονομορφισμός. Όμοια είναι και επιμορφισμός.* □

Πρόταση 3 *Αν για ένα μορφισμό*

$$f : A \longrightarrow B$$

ο g *είναι αριστερός αντίστροφος, δηλαδή*

$$g : B \longrightarrow A, \quad g \circ f = 1_A$$

τότε ο f *είναι μονομορφισμός και ο* g *επιμορφισμός.*
Απόδειξη: *Απλή* □

Ορισμός 9

Ένας split μονομορφισμός (επιμορφισμός) είναι ένας μορφισμός με αριστερο (δεξιό) αντίστροφο. Αν $e \circ s = 1$ τότε λέμε οτι ο s σχίζει(splitting) τον e, ενώ ο e ανακαλεί (retract) τον s (Εδώ $e : A \longrightarrow B$,$s : B \longrightarrow A$).

Ορισμός 10 *Αν* A *ένα αντικείμενο σε μια κατηγορία* **C**, *τότε ονομάζουμε* υπο-αντικείμενο *(subobject) του* A *ένα μονομορφισμό*

$$f : B \longmapsto A$$

Ορισμός 11 *Αν A ένα αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathbf{C}$ *με το* 1 *το τερματικό αντικείμενο τότε, τα βέλη*

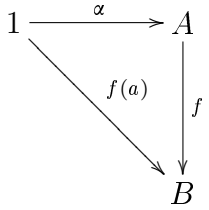
$$\alpha : 1 \longrightarrow A$$

θα τα ονομάζουμε στοιχεία *(elements) του αντικειμένου A, ενώ τα βέλη*

$$x : T \longrightarrow A$$

όπου T ένα άλλο αντικείμενο της κατηγορίας, θα ονομάζονται γενικευμένα στοιχεία *(generalized elements) του A και θα συμβολίζουμε πολλές φορές $x \in_T A$.*

Με την βοήθεια των στοιχείων ενός αντικειμένου δημιουργούμε μια έννοια αποτίμησης $f(\alpha) = f \circ \alpha$



Έτσι το συνολοθεωρητικό αξίωμα της έκτασης κατηγοριακά εκφρασμένο διατυπώνεται ως εξής: Αν

$$1 \xrightarrow{\alpha} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

$f \neq g$ ακριβώς όταν υπάρχει στοιχείο α του κοινού τους πεδίου ώστε $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ Το διαφορετικό όμως στην θεωρία κατηγοριών είναι πως δεν ισχύει η ιδιότητα της έκτασης για όλες τις κατηγορίες. Γι'αυτό χρησιμοποιούμε τα γενικευμένα στοιχεία

Πρόταση 4 *Αν $f, g : A \longrightarrow B$ τότε $f = g$ αν, και μόνο αν για κάθε $x \in_T A$, $f(x) = g(x)$*

Με το αξίωμα της έκτασης όπως τροποποιείται εδώ βλέπουμε για πρώτη φορά ένα ακόμα χαρακτηριστικό της Θεωρίας Κατηγοριών: Τη μεταβλητότητα. Ένα στοιχείο αντικειμένου στην **Sets** αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο, σταθερό στοιχείο ενός συνόλου ενώ ένα γενικευμένο στοιχείο είναι οι συναρτήσεις $x : T \longrightarrow A$ που αντιστοιχούν σε κάποιο υποσύνολο του A. Το γενικευμένο στοιχείο δηλαδή είναι ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο σύνολο. Μία από τις ικανότητες της θεωρίας κατηγοριών είναι να μπορεί να χειρίζεται άνετα το γενικό και το συνεχώς μεταβαλλόμενο, εν αντιθεση προς την Θεωρία Συνόλων η οποία αφορά το συγκεκριμένο και σταθερό.

Θα συνεχίσουμε βλέποντας πως μπορούμε να φτιάξουμε νέες κατηγορίες από άλλες ήδη υπάρχουσες.

Ορισμός 12 *Η δυϊκή κατηγορία $\mathbf{C}^{op}$ μιας κατηγορίας* $\mathbf{C}$ *είναι αυτή η οποία: έχει τα ίδια αντικείμενα, για κάθε A αντικείμενο $1_A^{op} = 1_A$ και για κάθε βέλος της $f : A \longrightarrow B$* $\mathbf{C}$ *αντιστοιχεί ένα βέλος $f^{op} : B \longrightarrow A$ στην $\mathbf{C}^{op}$.*

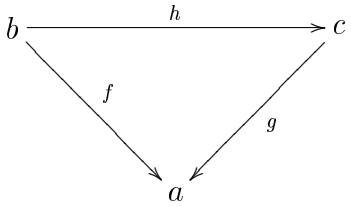
Η δυϊκότητα είναι μια πολύ γενική έννοια στα μαθηματικά. Στη Θεωρία Κατηγοριών αυτό που κάνουμε είναι να αντιστρέφουμε την πορεία των βελών δημιουργώντας μια κατοπτρική κατηγορία. Στην πραγματικότητα μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με κάθε έννοια και κάθε κατηγοριακή κατασκευή. Έχουμε πχ τον *ανταλλοίωτο συναρτητή* για κάθε ένα συναρτητή που ορίζουμε ο οποίος απλώς αντιστρέφει την φορά των βελών. Ακόμα κάθε ένα θεώρημα που αποδεικνύουμε έχει το δυϊκό ανάλογό του. Πολλές δυϊκές κατασκευές θα δούμε και στη συνέχεια.

Ορισμός 13 *Δοθείσας μιας κατηγορίας* $\mathbf{C}$ *και ενός αντικειμένου της* a *ορίζουμε την κατηγορία* $\mathbf{C} \downarrow a$ *ως εξής:*

Αντικείμενα είναι όλα τα βέλη f *της* $\mathbf{C}$ *με* $cod(f) = a$

$$f : b \longrightarrow a$$

Μορφισμός ανάμεσα στα f, g *είναι ένα* $h : b \longrightarrow c$ *τέτοιο ώστε το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:*



Ταυτοτικός μορφισμός είναι ο

$$1_a : a \longrightarrow a$$

Η σύνθεση των μορφισμών να γίνεται όπως αριβώς στην $\mathbf{C}$.

2.3 Όρια κατηγοριών

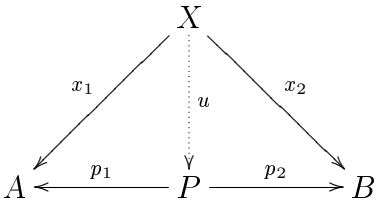
Ορισμός 14 *Έστω* A *και* B *δύο αντικείμενα στην κατηγορία* C. *Τότε ορίζουμε το διάγραμμα γινομένου των δύο αντικειμένων να αποτελείται από ένα αντικείμενο* P *και δύο μορφισμούς* p_1 *και* p_2

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε άλλο διάγραμμα της μορφής

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

υπάρχει ένα μοναδικό $u : X \longrightarrow P$ *ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό*



Το γινόμενο είναι μια γενίκευση του καρτεσιανού γινομένου της **Sets**. Εκεί οι δύο παραπάνω μορφισμοί είναι προφανώς οι προβολικές συναρτήσεις.

Πρόταση 5 *Τα γινόμενα είναι μοναδικά μέχρις ισομορφισμού*
Απόδειξη: *Υποθέστε ότι*

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

και

$$A \xleftarrow{q_1} Q \xrightarrow{q_2} B$$

δύο γινόμενα των A και B. Τότε υπάρχει μοναδικό $i : P \longrightarrow Q$ τέτοιο ώστε $q_1 \circ i = p_1$ και $q_2 \circ i = p_2$. Όμοια υπάρχει μοναδικό $j : Q \longrightarrow P$ τέτοιο ώστε $p_1 \circ j = q_1$ και $p_2 \circ j = q_2$. Έτσι $p_1 \circ j \circ i = p_1$ και $p_2 \circ j \circ i = p_2$. Εφόσον $P_1 \circ 1_P = p_1$ και $P_2 \circ 1_P = p_2$ έπεται από την υπόθεση της μοναδικότητας ότι $j \circ i = 1_P$. Ομοια $i \circ j = 1_Q$. Έτσι, $i : P \longrightarrow Q$ ισομορφισμός. □

Αν τα A και B έχουν όντως γινόμενο, γράφουμε:

$$A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B$$

και αν X, x_1x_2 όπως στον ορισμό, γράφουμε $[x_1, x_2]$ για το $u : X \longrightarrow A \times B$.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και γινόμενα τριών ή και περισσότερων αντικειμένων

$$A_1 \times A_2 \times A_3$$

παίρνοντας τρεις προβολές και συνεχίζοντας παρόμοια. Αν μια κατηγορία έχει τερματικά στοιχείο και γινόμενα για κάθε δυο αντικείμενα της, λέμε ότι η **C** έχει όλα τα πεπερασμένα γινόμενα.

Έστω δυο γινόμενα αντικειμένων ως εξής

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{p_1} & A \times A' & \xrightarrow{p_2} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xleftarrow{q_1} & B \times B' & \xrightarrow{q_2} & B' \end{array}$$

Τότε μπορούμε να βρούμε μορφισμό

$$f \times f' : A \times A' \longrightarrow B \times B'$$

με $f \times f' = (f \circ p_1, f' \circ p_2)$ έτσι ωστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{p_1} & A \times A' & \xrightarrow{p_2} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f \times f'} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ B & \xleftarrow{q_1} & B \times B' & \xrightarrow{q_2} & B' \end{array}$$

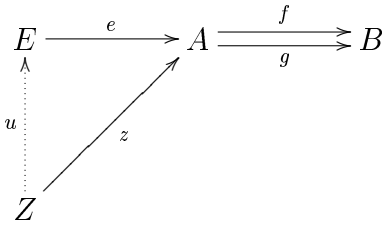
Ορισμός 15 *Σε κάθε κατηγορία δοθέντων δύο παράλληλων μορφισμών*

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

ένα εξισωτής (equalizer) των f και g αποτελείται από ένα αντικείμενο E και ένα βέλος $e : E \longrightarrow A$ τέτοια ώστε

$$f \circ e = g \circ e$$

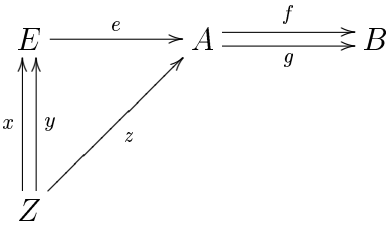
και για κάθε $z : Z \longrightarrow A$ με $f \circ z = g \circ z$ υπάρχει ένα μοναδικό $u : Z \longrightarrow E$ με $e \circ u = z$ όπως στο παρακάτω διάγραμμα



Στο εξής, και για λόγους ευκολίας θα γράφουμε χωρίς διάκριση fg αντί για $f \circ g$.

Πρόταση 6 *Σε κάθε κατηγορία, αν ένα βέλος είναι εξισωτής δύο άλλων, τότε είναι μονομορφισμός*

Απόδειξη: *Θεωρήστε το διάγραμμα*

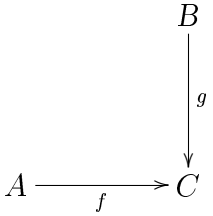


στο οποίο υποθέτουμε πως ο e είναι εξισωτής των f, g. Υποθέτουμε οτι $ex = ey$ και θέλουμε να δείξουμε $x = y$. Έστω $z = ex = ey$,τότε $fz = fex = gex = gz$. Έτσι υπάρχει ένα μοναδικό $u : Z \longrightarrow E$ τέτοιο ώστε $eu = z$. Αλλά από $ex = z$ και $ey = z$ έπεται ότι $x = u = c = y$ □

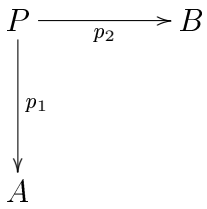
Στην περίπτωση των συνόλων ο εξισωτής δύο συναρτήσεων f, g είναι απλούστατα η ταυτοτική συνάρτηση

$$i : \{x \in A | f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A$$

Ορισμός 16 *Σε κάθε κατηγορία* **C**, *ένας* εφελκυστής *(pullback) δύο μορφισμών f, g με κοινο συν-πεδίο*



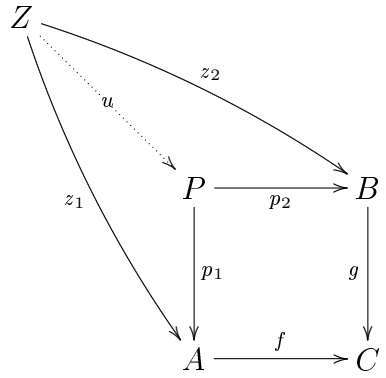
συνίσταται από δυο αλλους μορφισμους



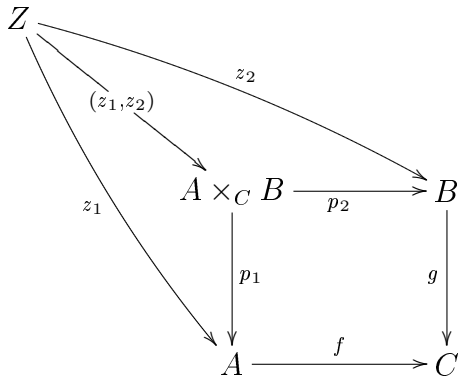
τέτοιοι ώστε να ισχύει $fp_1 = gp_2$ *καθώς και για κάθε* $z_1 : Z \longrightarrow A$ *και* $z_2 : Z \longrightarrow B$ *με* $fz_1 = gz_2$ *υπάρχει ένα μοναδικό*

$$u : Z \longrightarrow P$$

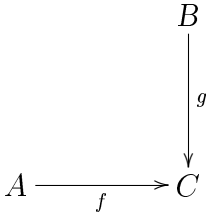
με $z_1 = p_1 u$ *και* $z_2 = p_2 u$ *όπως στο διάγραμμα*



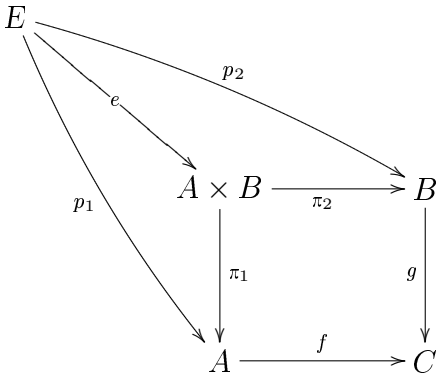
Παρατηρήσεις 3 *Στους εφελκυστές συνήθως χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο ειδικό συμβολισμό*



Πρόταση 7 *Έστω μια κατηγορία με γινόμενα και εξισωτές και το παρακάτω διαγράμμα.*

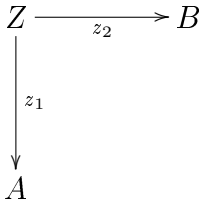


και



στο οποίο e είναι ένας εξισωτής των $f\pi_1$ και $g\pi_2$ και $p_1 = \pi_1 e$, $p_2 = \pi_2 e$. Τότε τα E, p_1, p_2 συνιστούν ένα εφελκυστή των f και g. Δηλαδή μια κατηγορία αν έχει γινόμενα και εξισωτές θα έχει και εφελκυστές.

Απόδειξη: *Ας πάρουμε*



με $fz_1 = gz_2$. Έχουμε $(z_1, z_2) : Z \longrightarrow A \times B$. Έτσι

$$f\pi_1(z_1, z_2) = g\pi_2(z_1, z_2)$$

Έτσι υπάρχει ένα $u : Z \longrightarrow E$ στον εξισωτή με $eu = (z_1, z_2)$. Τότε

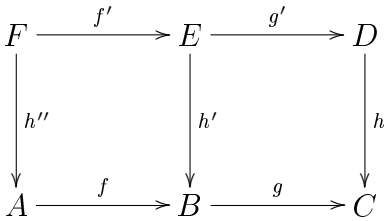
$$p_1 u = \pi_1 eu = \pi_1(z_1, z_2) = z_1$$

και

$$p_2 u = \pi_2 eu = \pi_2(z_1, z_2) = z_2$$

Αν τώρα ένα $u' : Z \longrightarrow E$ έχει $p_i u = z_i$ $(i = 1, 2)$ τότε $\pi_i eu' = z_i$. Έτσι $eu' = (z_1, z_2) = eu$ οπότε τελικά $u = u'$ από τη στιγμή που e είναι μονομορφισμός. □

Λήμμα 1 *Θεωρήστε το παρακάτω διάγραμμα σε μια κατηγορία με εφελκύσεις.*



1. *Αν τα δύο τετράγωνα είναι εφελκίστές, τότε το ίδιο ισχύει και για το εξωτερικό. Έτσι*

$$A \times_B (B \times_C D) \cong A \times_C D$$

2. *Αν το δεξιό τετράγωνο και το εξωτερικό ορθογώνιο παραλληλόγραμο είναι εφελκυστές, τότε το ίδιο ισχύει και για το αριστερό τετράγωνο*

Απόδειξη: *Κατευθείαν από το διάγραμμα.* □

Θεώρημα 1 *Μια κατηγορία έχει πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές ακριβώς όταν έχει εφελκυστές και τερματικό στοιχείο.*
Απόδειξη: *Τη μια φορά τη δείξαμε παραπάνω. Για την άλλη ας υποθέσουμε πως ή* **C** *έχει εφελκυστές και τερματικό στοιχείο* 1. *Τότε*

- *Για κάθε δύο αντικείμενα* A *και* B *έχουμε* $A \times B \cong A \times_1 B$ *λόγω του παράκατω*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

- *Για κάθε δύο μορφισμούς* $f, g : A \longrightarrow B$ *ο εξισωτής* $e :\longrightarrow A$ *κατασκευλαζεται όπως στο παρακάτω εφελκυστή:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & B \\ \downarrow{\scriptstyle e} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta=(1_B,1_B)} \\ A & \xrightarrow{(f,g)} & B \times B \end{array}$$

Με όρους γενικευμένων στοιχείων τώρα,

$$E = \{(a,b) | (f,g)(a) = \Delta b\}$$

όπου $(f,g)(a) = (f(a), g(a))$ *και* $\Delta(b) = (b,b)$. *Έτσι,*

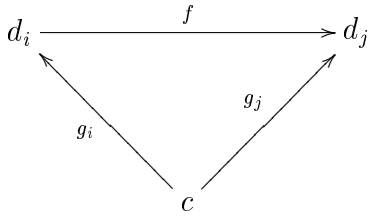
$$E = \{(a,b) | f(a) = b = g(a)\}$$

$$\cong \{a | f(a) = g(a)\}$$

το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε. □

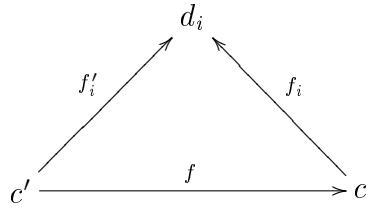
Στην πραγματικότητα όλοι οι παραπάνω ορισμοί είναι ειδικές περιπτώσεις μιας ευρύτερης έννοιας, αυτής του ορίου, την οποία θα ορίσουμε τώρα. Κατ' αρχήν λέγοντας*διάγραμμα* D σε μια κατηγορία **C** εννοούμε κάποια αντικείμενα $d_i, d_j, \ldots$ μαζί με κάποια βέλη ανάμεσα σε αυτά τα αντικείμενα (κάτι πάρα πολύ γενικό το οποίο μπορούμε να το θεωρήσουμε πιο αυστηρά λέγοντας πως είναι ένας συναρτητης $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$, όπου **J** μια κατηγορία με αντικείμενα τους δείκτες $i, j, \ldots$)

Ένας κώνος D στο διάγραμμα αποτελείται από ένα αντικείμενο c της κατηγορίας μαζί με ένα βέλος $g_i : c \longrightarrow di$ για κάθε αντικείμενο του διαγράμματος, τέτοιο ώστε το παρακάτω να ικανοποιήται

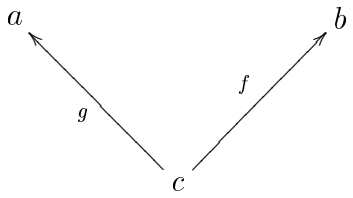


για κάθε βέλος f στο διάγραμμα. Θα συμβολίζουμε με $\{g_i : c \longrightarrow di\}$ για ένα κώνο.

Ορισμός 17 Όριο *(Limit) για ένα διάγραμμα D είναι ένας κώνος $\{g_i : c \longrightarrow d_i\}$ με την ιδιότητα πως για κάθε άλλο κώνο $\{g'_i : c' \longrightarrow d_i\}$ υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $f : c' \longrightarrow c$ τέτοιο ώστε*

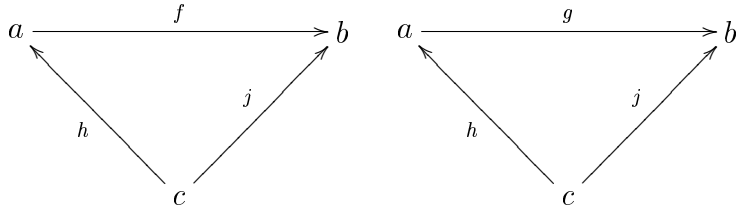


Παράδειγμα 2 • *Αν το διάγραμμα* **D** *είναι περιλαμβάνει δυο αντικείμένα a , b χωρίς κανένα βέλος ,τότε το όριο του διαγράμματος είναι το γινόμενο των δύο αντικειμένων:*



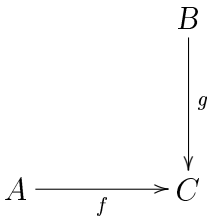
• *Αν το διάγραμμα* **D** *είναι το εξής:*

τότε ένας κώνος είναι ένα ζεύγος που αποτελείτο από δυο βέλη h, j τέτοια ώστε να αντιμετατίθεται



αλλά αυτό υποθέτει ότι $j = fh = gh$ *δηλαδή το όριο του διαγράμματος είναι ο εξισωτής των* f, g

- *Αν το διάγραμμα είναι το κενό (κανένα αντικείμενο, κανένα βέλος), τότε ένα όριο είναι ένα τερματικό στοιχείο.*
- *Αν πάλι έχουμε το παρακάτων διάγραμμα*



τότε με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το όριο είναι ο εφελκυστής.

Θεώρημα 2 *Τα επόμενα είναι, για μια κατηγορία ισοδύναμα:*

1. *Έχει όλα τα πεπερασμένα όρια (δηλαδή όρια πεπερασμένων διαγραμμάτων)*
2. *Έχει πεπερασμένα γινόμενα και εξισωτές*
3. *Έχει εφελκυστές και τερματικό στοιχείο*

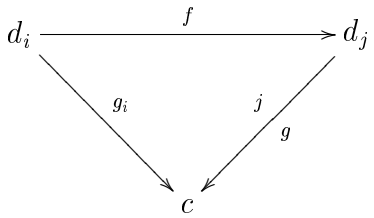
Η απόδειξη του παραπάνω είναι εύκολη, αλλά τεχνική, και την παραλείπουμε.

Ορισμός 18 *Ένας συναρτητής* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C'}$ *θα καλείται συνεχής αν διατηρεί όλα τα όρια, δηλαδή αν* $\{g_i : c \longrightarrow di\}$ *ένα όριο για ένα διάγραμμα* $\mathbf{D}$ *της* $\mathbf{C}$*, τότε το* $\{Fg_i : Fc \longrightarrow Fd_i\}$ *είναι ένα όριο για το διάγραμμα* $F\mathbf{D}$ *της* $\mathbf{C'}$*.*

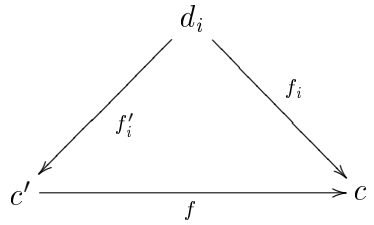
Τώρα θα ορίσουμε τις δυϊκές όλων των παραπάνω εννοιών. Μιλώντας κάπως άτυπα, η μετάβαση από μια κατασκευή στην δυϊκή της είναι μια κίνηση στην οποία κρατάμε τα αντικείμενα ως έχουν, αλλά αντιστρέφουμε τη φορά των βελών. Με αυτήν την μέθοδο μπορούμε για κάθε ορισμό που έχουμε δώσει και για κάθε πρόταση που έχουμε αποδείξει να βρούμε αντίστοιχους δυϊκούς ορισμούς και δυϊκές προτάσεις. Αυτή η μέθοδος δεν είναι τετριμμένη, δηλαδή όταν κάνουμε τα παραπάνω δεν οδηγούμαστε σε μια ισοδύναμη έννοια αλλά σε μια καινούρια που επεκτείνει γνήσια τη γνώση μας για τις δομές. Ακόμα με την εισαγωγή της δυϊκότητας έχουμε

και μια νέα δυνατότητα για να ανακαλύπτουμε σχέσεις ανάμεσα σε δομές και σε προτάσεις. Για παράδειγμα μπορούμε πλέον να δούμε το καρτεσιανό γινόμενο και την ξένη ένωση ως δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, ως δύο έννοιες οι οποίες σχετίζονται πολύ ισχυρά (κάτι που δεν είναι προφανές στην θεωρία συνόλων) και έχουμε την δυνατότητα να μεταβούμε από μια πρόταση για τη μια σε μια πρόταση για την άλλη.

Ορισμός 19 *Ένας* συν-κώνος *(co-cone) αποτελείται από ένα αντικείμενο c της κατηγορίας μαζί με ένα βέλος $g_i : d_i \longrightarrow c$ για κάθε αντικείμενο του διαγράμματος, τέτοιο ώστε το παρακάτω να είναι αντιμεταθετικό.*

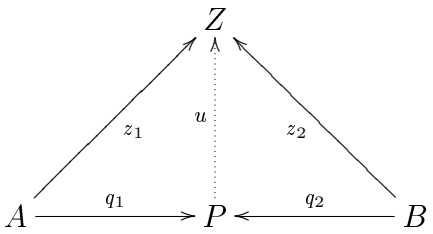


για κάθε βέλος f στο διάγραμμα. Συν-όριο *(co-limit) για ένα διάγραμμα D είναι ένας κώνος $\{g_i : d_i \longrightarrow c\}$ με την ιδιότητα πως για κάθε άλλο κώνο $\{g'_i : d_i \longrightarrow c'\}$ υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $f : c \longrightarrow c'$ τέτοιο ώστε*



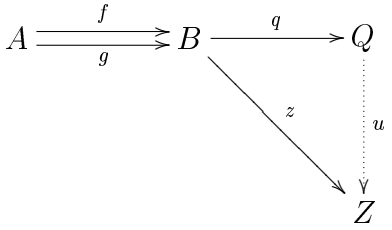
Θα μελετήσουμε τώρα κάποιες σημαντικές έννοιες που μπορούν να εμφανιστούν και ως δυϊκές κάποιων άλλων.

Ορισμός 20 *Ένα διάγραμμα $A \xrightarrow{p_1} P \xleftarrow[p_2]{} B$ είναι ένα* **συν-γινόμενο** *των A και B αν, για κάθε Z και $A \xrightarrow{z_1} Z \xleftarrow[z_2]{} B$ υπάρχει ένα μοναδικό $u : P \longrightarrow Z$ $u \circ p_i = z_i$*

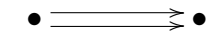


Συνήθως θα γράφουμε $A \xrightarrow{i_1} A + B \xleftarrow[i_2]{} B$ για τον συν-γινόμενο. Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι το συν-γινόμενο είναι το συνόριο ενός διάγραματος με αντικείμενα τα A και B και κανένα βέλος. Σαν συν-γινόμενα μπορούμε να δούμε την ξένη ένωση συνόλων στις **Sets**, **Top**, το ελεύθερο γινόμενο ομάδων στην **Group**, το ευθύ γινόμενο προτύπων στην **Mod** και άλλα.

Ορισμός 21 *Για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών $f, g : A \longrightarrow B$ σε μια κατηγορία* **C**, *ένας* συνεξισωτής *αποτελείται από ένα αντικείμενο Q και ένα βέλος $q : B \longrightarrow Q$ τέτοιο ώστε $qf = qg$ και για κάθε αλλό αντικείμενο Z και βέλος $z : B \longrightarrow Z$ με την ιδιότητα $zf = zg$ υπάρχει ένα μοναδικό $u : Q \longrightarrow Z$ με $uq = z$*

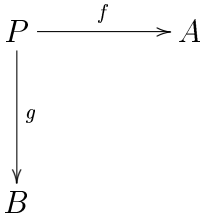


Ισοδύναμα συνεξισωτής είναι το συνόριο του διαγράμματος



Στην κατηγορία των συνόλων τώρα ο συνεξισωτής είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας ώστε $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$.

Ορισμός 22 *Εξωθητής σε μια κατηγορία, δοθέντων $f : P \longrightarrow A$ και $g : P \longrightarrow B$ ονομάζεται το συν-οριο του παρακάτω διαγράμματος*



Πρόκειται δηλαδή για τη δυϊκή έννοια του εφελκυστή.

2.4 Καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες

Θα ορίσουμε μια σημαντική κλάση κατηγοριών, τις καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες. Για να φτάσουμε σε αυτές πρώτα θα ορίσουμε την 'ύψωση σε δύναμη' ανάμεσα σε αντικείμενα μιας

κατηγορίας, η οποία μπορεί να ειδωθεί με τρόπο ανάλογο με αυτό των συνόλων. Η δύναμη είναι ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα (ενός καθολικού στοιχείου το οποίο δεν είναι όριο) και θα μας οδηγήσει στον ορισμό των βαθύτερων κατηγοριακών εννοιών.

Θα ξεκινήσουμε από την περίπτωση των συνόλων. έστω A, B, C τρία σύνολα και

$$f(x,y) : A \times B \longrightarrow C.$$

Αν σταθεροποιήσουμε ένα $a \in A$ τότε έχουμε μια συνάρτηση

$$f(a,y) : B \longrightarrow C$$

και άρα ένα στοιχείο

$$f(a,y) \in C^B$$

του συνόλου όλων αυτών των συναρτήσεων. Αν επιτρέψουμε στο a να διατρέχει το A τότε μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση

$$\widetilde{f} : A \longrightarrow C^B$$

όπου $a \mapsto f(a,y)$

Η απεικόνιση $\widetilde{f}$ απεικανίζει μια παράμετρο a στην συνάρτηση $f_a(y) : B \longrightarrow C$ που ορίζεται μονοσήμαντα από την εξίσωση

$$\widetilde{f_a}(b) = f(a,b)$$

Τώρα στην πραγματικότητα κάθε απεικόνιση

$$\varphi : A \longrightarrow C^B$$

είναι με μοναδικό τρόπο της μορφής

$$\varphi = \widetilde{f}$$

για κάποια $f(x,y) : A \times B \longrightarrow C$. Για την οποία μπορούμε να θέσουμε

$$f(a,b) = \varphi(a)(b)$$

. Έτσι βλέπουμε εδώ ένα ισομορφισμό ανάμεσα στα Hom-set

$$Hom_{\mathbf{Sets}}(A \times B, C) \cong Hom_{\mathbf{Sets}}(A, C^B)$$

Ο παραπάνω ισομορφισμός είναι ένα πρώτο παράδειγμα συζυγίας. Τώρα θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε όλα τα παράπανω με τρόπο που να τα καθιστά γενικεύσιμα σε κάθε κατηγορία. Έτσι ορίζουμε την συνάρτηση εκτίμησης

$$eval : C^B \times B \longrightarrow C$$

έτσι ώστε

$$eval(g, b) = g(b)$$

. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει την εξής ιδιότητα (ιδιότητα καθολικότητας): Δοθέντος ένος άλλου συνόλου και A και μιας συνάρτησης

$$f : A \times B \longrightarrow C$$

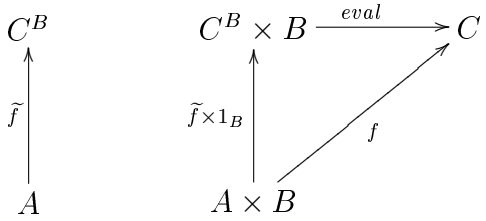
υπάρχει μια άλλη μοναδική συνάρτηση

$$\widetilde{f} : A \longrightarrow C^B$$

έτσι ώστε $eval \circ (\widetilde{f} \times 1_B) = f$. Δηλαδή:

$$eval(\widetilde{f}, b) = f(a, b).$$

Τα παραπάνω υπό μορφή αντιμεταθετικού διαγράμματος είναι:



Μπορούμε τώρα να δώσουμε το γενικό ορισμό

Ορισμός 23 *Έστω μια κατηγορία* **C** *με πεπερασμένα γινόμενα. Ένα* εκθετικο *(exponential) δύο αντικειμένων B και C είναι ένα αντικείμενο*

$$C^B$$

και ένα βέλος

$$\epsilon : C^B \times B \longrightarrow C$$

τέτοιο ώστε για κάθε άλλο αντικείμενο Z και βέλος

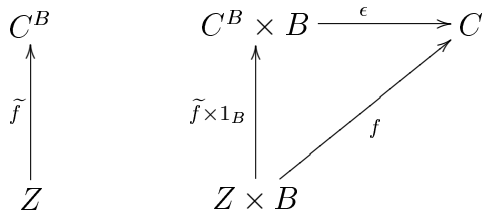
$$f : Z \times B \longrightarrow C$$

υπάρχει ένα μοναδικό βέλος

$$\widetilde{f} : Z \longrightarrow C^B$$

για το οποίο

$$\epsilon \circ (\widetilde{f} \times 1_B) = f$$



Με ανάλογο τρόπο όπως στα σύνολα μπορούμε να δούμε ότι

$$Hom_{\mathbf{C}}(Z \times B, C) \cong Hom_{\mathbf{C}}(Z, C^B)$$

Ορισμός 24 *Μια κατηγορία ονομάζεται* καρτεσιανά κλειστή κατηγορία *(cartesian closed category - CCC)αν έχει όλα τα πεπερασμένα γινόμενα και όλα τα εκθετικά.*

2.5 Ομάδες και κατηγορίες

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε τις ομάδες κάτω από την κατηγοριακή ματιά. Θα δούμε πως μπορούμε να ορίσουμε και να μελετήσουμε την δομή της ομάδας μέσα στον κόσμο της θεωρίας κατηγοριών. Αυτό θα είναι το πρώτο βήμα (αυτή η σχετικά απλή αλλά πλούσια δομη) για να ανασυνθέσει κανείς όλα τα μαθηματικά με κατηγοριακούς όρους. Θα δούμε τρεις τρόπους συσχέτισης: Τις ομάδες μέσα στις κατηγορίες, την κατηγορία των ομάδων και τις ομάδες σαν κατηγορίες. Σε αυτήν την παράγραφο θα φανούν ανάγλυφα τα δύο βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας κατηγοριών: Ο πρωταρχικός ρόλος που παίζουν τα βέλη για τον καθορισμό των ιδιοτήτων (τα πάντα θεωρούνται σε σχέση με τους μορφισμούς) και η τάση να μιλάμε σε κάθε περίπτωση μέσα στα πλαίσια μιας περιβάλλουσας κατηγορίας η οποία όμως μπορεί να μην είναι η ίδια κάθε φορά, πράγμα που μας δίνει δυνατότητες μετάβασης ανάμεσα στις θεωρίες και κάνει πιο εύκολη μια συνολική ματιά στα μαθηματικά.

Κατ' αρχάς μπορούμε να μελετήσουμε την κατηγορία όλων των ομάδων. Όπως έχουμε σημειώσει, αυτή περιλαμβάνει σαν αντικείμκενα τις ομάδες και ως μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων. Σε αυτό το πλαίσιο μπορούμε να ανασυγκροτήσουμε τις έννοιες και τα θεωρήματα της κλασικής θεωρίας ομάδων.

Σε όλα τα παρακάτω το μοναδιαίο στοιχείο μιας ομάδας G, θα το προσεγγίζουμε σαν στοιχειο με την κατηγοριακή έννοια, δηλαδή ως ένα βέλος $u : 1 \longrightarrow G$. Αν $h : G \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων (δηλαδή ένας μορφισμός στην **Group**), τότε ο πυρήνας του h ορίζεται ως ο εξισωτής

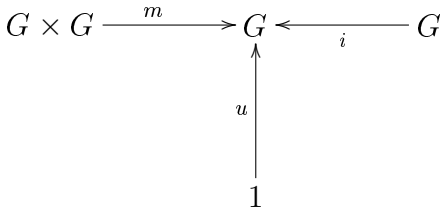
$$ker(h) \longrightarrow G \underset{u!}{\overset{h}{\rightrightarrows}} H$$

όπου

$$u! : G \xrightarrow{\ !\ } 1 \xrightarrow{\ u\ } H$$

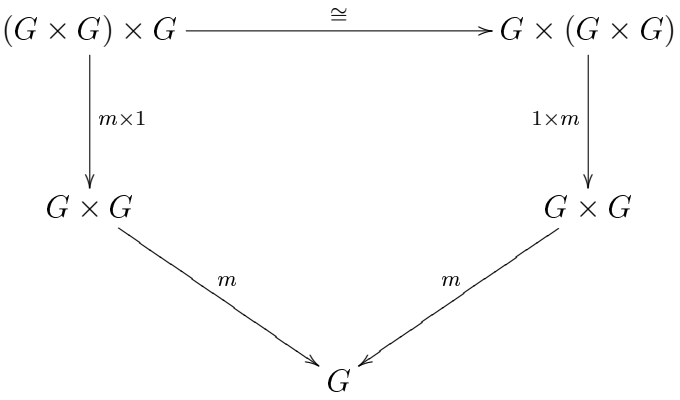
Έστω μια κατηγορία **C** με πεπερασμένα γινόμενα. Θα δώσουμε την έννοια της ομάδας μέσα στη **C**, γενικεύοντας έτσι την έννοια ομάδα στη **Sets**

Ορισμός 25 *Μια ομάδα στην* **C** *αποτελείται από αντικείμενα και βέλη ως εξής:*

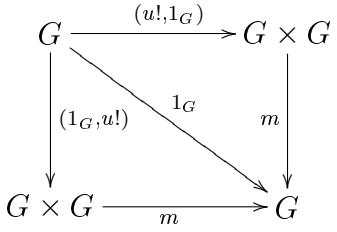


με τις ακόλουθες ιδιότητες:

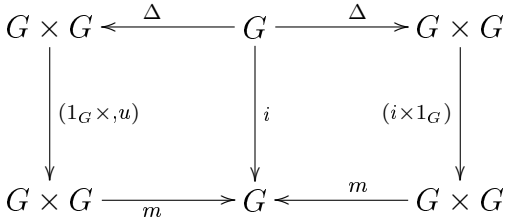
1. *Η m είναι προσεταιρεστική, δηλαδή με την γλώσσα των διαγραμμάτων το επόμενο είναι αντιμεταθετικό:*



2. *Το u είναι μονάδα για κάθε m δηλαδή να είναι προσεταιρεστικά τα παρακάτω*



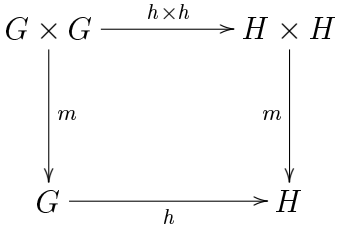
3. *Το i είναι ένα αντίστροφο σε σχέση με το m*



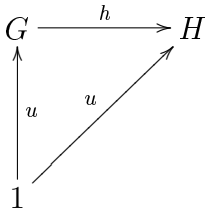
Τα παραπάνω διαγράμματα απλώς μεταφράζουν σε κατηγοριαή γλώσσα τα συνήθη αξιώματα της ομάδας. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό του ομομορφισμού ομάδων.

Ορισμός 26 *Ένα ομομορφισμός δύο ομάδων G και H, $h : G \longrightarrow H$, στην κατηγορία* **C**, *όπως τις ορίσαμε πριν, είναι ένα βέλος h με $cod(h) = H$, $dom(h) = G$ τέτοιο ώστε:*

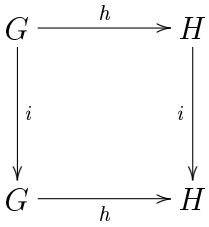
1. *Το h διατηρεί το m:*



2. *Το h διατηρεί το u:*



3. *Το h διατηρεί το i:*



Έτσι, με τις προφανείς συνθέσεις και το προφανές ταυτοτικό στοιχείο, έχουμε ορίσει την κατηγορία των ομάδων στην **C**

$$Group(\mathbf{C})$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε την ομάδα με την συνηθισμένη έννοια ως ομάδα στην **Sets**, την τοπολογική ομάδα ως μια ομάδα στην **Top**, την διατεταγμένη ομάδα ως ομάδα στην **Pos** και ούτως καθεξής.

Τώρα θα αλλάξουμε οπτική γωνία και θα δούμε τις ομάδες ως κατηγορίες.

Ορισμός 27 *Έστω $(G, \circ)$ μια ομάδα, τότε αυτή είναι και μια κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο G με βέλη τα στοιχεία της ομάδας τα οποία, λόγω των αξιωμάτων της ομάδας, είναι όλα ισομορφισμοί.*

Και αντίστροφα: Κάθε κατηγορία με ένα αντικείμενο και με όλους τους μορφισμούς iso είναι μια ομάδα.

Αν τώρα G, H είναι ομάδες όπως παραπάνω τότε ένας ομομορφισμός $h : G \longrightarrow H$ είναι ένα συναρτητής ανάμεσα στις δύο κατηγορίες.

Αν τώρα G είναι μια κατηγορία ομάδα, τότε ένας τυχόν τελεστής $F : G \longrightarrow \mathbf{C}$ στην κατηγορία $\mathbf{C}$ ή οποία δεν είναι απαραίτητα κατηγορία ομάδα, είναι μια απεικόνιση της ομάδας σε μια ευρήτερη κατηγορία. Έτσι αν $\mathbf{C}$ είναι η κατηγορία των διανυσματικών χώρων, ο συναρτητής είναι η γραμμική αναπαράσταση της ομάδας.

2.6 Φυσικοί μετασχηματισμοί

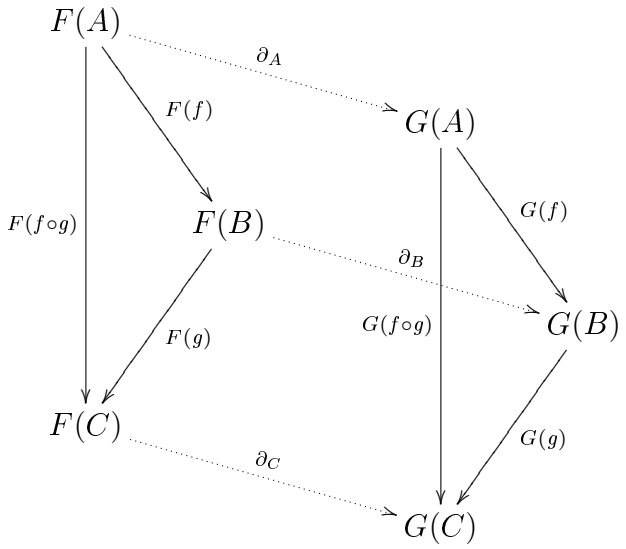
Μέχρι τώρα ορίσαμε τις κατηγορίες ως γενικεύσεις του τρόπου που κατανοούσαμε τις ήδη υπάρχουσες δομές, και κατόπιν ορίσαμε τους συναρτητές σαν τις κατάλληλες απεικονίσεις για να μεταφερθούμε από την μια κατηγορία στην άλλη και να πραγματώσουμε την μια δομή μέσα στην άλλη. Τώρα θα προχωρήσουμε ακόμα περισσότερο προς όλο και πιο αφηρημένες έννοιες και θα ορίσουμε τις κατάλληλες απεικονίσεις ανάμεσα στους συναρτητές τους φυσικούς μετασχηματισμούς. Θα δούμε δηλαδή τους ίδιους τους συναρτητές σαν αντικείμενα μελέτης και αργότερα θα τους δούμε και ως αντικείμενα μιας κατηγορίας. Όταν θεωρούμε κατάλληλες συναρτήσεις ανάμεσα σε κάποια μαθηματικά αντικείμενα το κάνουμε , μεταξύ άλλων, για να συγκρίνουμε τα αντικείμενα. Έτσι, αν σκεφτούμε τους συναρτήτες ως μαθηματικές κατασκευές ή μαθηματικές θεωρίες (πχ θεωρίες αναπαράστασης αλγεβρικών δομών), τότε ένα φυσικός μετασχηματισμός θα προσπαθήσει να μετρήσει την ομοιότητα αυτών των κατασκευών. Ο ορισμός των φυσικών μετασχηματισμών είναι ενδεικτικός ενός από τα πράγματα που κάνουμε στην θεωρία κατηγοριών: Δουλεύομε σε όλο και πιο αφηρημένα και γενικά επίπεδα για να μπορέσουμε να μελετήσουμε όλο και πιο βαθιά τις δομές και να βρούμε όλο και πιο συγκαλυμμένες σχέσεις μεταξύ τους

Έστω δύο κατηγορίες $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ και δύο παράλληλοι συναρτητές F, G

$$\mathbf{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathbf{D}$$

Οι οποίοι , ας το σκεφτούμε έτσι, δίνουν δύο διαφορετικές εικόνες της μιας κατηγορίας στην άλλη. Εμείς επιθυμούμε να συσχετίσουμε με κάποιο τρόπο τις δύο αυτές εικόνες οι οποίες βρίσκονται και οι δύο μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο της κατηγορίας $\mathbf{D}$ και άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα μέσα που μας δίνει αυτή. Μια φυσιολογική προσέγγιση είναι να πάρουμε για κάθε αντικείμενο $A \in \mathbf{C}$ να πάρουμε ένα βέλος $\partial_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ που να συνδέει τις δυο εικόνες. Να

θεωρήσουμε δηλαδή τον (κατα κάποιο τρόπο κύλινδρο) που συνδέει αυτές τις δύο εικόνες.



Φυσικά θα θελήσουμε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις που υποδηλώνονται από το παραπάνω αντιμεταθετικό διάγραμμα. Άρα επιθυμούμε τα εξωτερικά παραλληλόγραμμα να είναι μεταθετικά.Όπότε φτάνουμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 28 *Έστω κατηγορίες και συναρτητές όπως προηγουμένως. Ένας* φυσικός μετασχηματισμός *(natural transformation)* $\partial : F \Longrightarrow G$ *είναι μια οικογένεια βελών στην* $\mathbf{D}$

$$\{\partial_C : F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in C_0}$$

τέτοια ώστε για κάθε $f : A \longrightarrow B$ *στην* C*, να ισχύει*

$$\partial_B \circ F(f) = G(f) \circ \partial_A$$

ή στην γλώσσα των διαγραμμάτων:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\partial_A} & G(A)) \\ \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{\partial_B} & G(B) \end{array}$$

Ορισμός 29 *Αν κάθε βέλος* ∂_A *του φυσικού μετασχηματισμού είναι ισομορφισμός, τότε έχουμε έναν* φυσικό ισομορφισμό *(natural isomorphism).*

Παραδείγματα 2 *1. Έστω μια ομάδα* $(G, \circ)$ *και ας πάρουμε την αντίθετη αυτής την* $(G^{op}, \circ^{op})$ *να είναι μια ομάδα με τα ακριβώς ίσια στοιχεία αλλά αντεστραμμένη την πράξη δηλαδη*

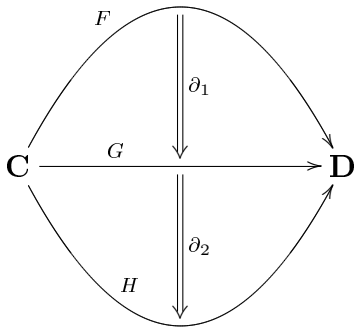
αν $a \circ b = c$ στην G τότε $b \circ^{op} a = c$ στην G^{op}. Είναι διαισθητικά προφανές οτι αυτές οι δυο ομάδες είναι εντελώς παρόμοιες αλλά με βάση τα εργαλεία της θεωρίας ομάδων δεν μπορούμε να αποδείξουμε γιατι η έννοια του ισομορφισμού ομάδων πάει από την μια ομάδα στην άλλη αλλά δεν μπορεί να μιλήσει για όλες τις ομάδες. Εδώ θα βοηθήσει η έννοια του φυσικού ισομορφισμού. Έστω $-^{op}, 1_{\mathbf{Group}} : \mathbf{Group} \longrightarrow \mathbf{Group}$ ο ταυτοτικός συναρτητής και ο συναρτητής που στέλνει κάθε ομάδα στην αντίθετή της και κάθε βέλος στον εαυτό του. Τότε αυτοί οι δύο συναρτητές είναι φυσικά ισόμορφοι. Πράγματι, έστω $\partial_G : G \longrightarrow G^{op}$ ο ομομορφισμός ομάδων που απεικονίζει κάθε στοιχείο στο αντιστροφό του και που είναι προφανώς και ισομορφισμός. Είναι εύκολο να δούμε οτι η ιδιότητα της φυσικότητας ικανοποιείται.

2. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, τότε υπάρχει ένας φυσιολογικός συναρτητής $(-^*)^* : \mathbf{Vect} \longrightarrow \mathbf{Vect}$ που τον απεικονίζει στον δεύτερο δυϊκό του V^{**} και κάθε $f : V_1 \longrightarrow V_2$ γραμμική απεικόνιση έχει σαν πρώτη δυϊκή την $f^* : V_2^* \longrightarrow V_1^*$ με $f(x^*) = x^* \circ f$ και ανάλογα δεύτερη δυϊκή την f^{**}. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\eta_1} & V_1^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle t^{**}} \\ V_2 & \xrightarrow{\eta_2} & V_2^{**} \end{array}$$

(όπου η_j η φυσική απεικόνιση από το V_j στο V_j^{**} ,$\eta_x(x^*) = x^*(x)$) είναι αντιμεταθετικό. Άρα υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός ανάμεσα στον παραπάνω συναρτητή και τον ταυτοτικό. Στην περίπτωση δε που ο διανυσματικός χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης τότε αυτός ο φυσικός μετασχηματισμός είναι φυσικός ισομορφισμός.

Ορισμός 30 *Έστω συναρτητές και φυσικοί μετασχηματισμοί όπως παρακάτω:*



Τότε ορίζουμε τη σύνθεση των φυσικών μετασχηματισμών

$$\partial = \partial_2 \circ \partial_1$$

ως τον φυσικό μετασχηματισμό $\partial : F \Longrightarrow H$ *με συνιστώσες την σύνθεση των συνιστωσών*

$$\partial_A = \partial_{2A} \circ \partial_{1A}$$

Ορισμός 31 Κατηγορία συναρτητών *(functor category) είναι η κατηγορία που έχει, δεδομένων δυο κατηγοριών*

Αντικείμενα: τους συναρτητές $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$

Μορφισμούς: τους φυσικούς μετασχηματισμούς $\partial : F \Longrightarrow G$

και την οποία συμβολίζουμε $Func(\mathbf{C}, D)$ *ή* $D^{\mathbf{C}}$ *για κάθε αντικείμενα* F*, ο φυσικός μετασχηματισμός* 1_F *έχει συνιστώσες τις*

$$(1_F)_C = 1_{FC} : FC \longrightarrow FC$$

και σύνθεση βελών την συνήθη σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών.

Η κατηγορία συναρτητών έχει τον ρόλο του εκθετικού αντικειμένου στην κατηγορία **Cat**

Θεώρημα 3 *Η* **Cat** *είναι καρτεσιανά κλειστή κατηγορία κάτω από ακόλουθη ύψωση σε δύναμη*

$$\mathbf{D}^{\mathbf{C}} = Func(\mathbf{C}, \mathbf{D})$$

Παραδείγματα 3 *1. Αν* **2** *είναι η κατηγορία με δύο αντικείμενα και ένα βέλος πέρα από τα ταυτοτικά*

$$\bullet \longrightarrow \bullet$$

τότε η $\mathbf{C}^{\mathbf{2}}$ *μπορεί να εκληφθεί ως η κατηγορία με αντικείμενα τα βέλη της* $\mathbf{C}$ *και μορφισμούς τα ζέυγη μορφισμών* f_1, f_2 *ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

2. Αν Γ *είναι η κατηγορία*

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

τότε έχουμε για την κατηγορία των κατευθυνόμενων γραφημάτων:

$$\mathbf{Graphs} = \mathbf{Sets}^{\Gamma}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δυο κατηγορίες **D** και **C** και θέλουμε να εξετάσουμε αν αυτές είναι ουσιαστικά οι ίδιες, να δούμε δηλαδή αν είναι ισόμορφες. Αυτό είναι κάτι πολύ χρήσιμο και πολύ συνηθισμένο στην άλγεβρα γιατί είναι δυνατόν να συσχετίσει ή να ταυτίσει δομές φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους. Ο πιο εύλογος τρόπος να κάνουμε αυτό για την περίπτωση των κατηγοριών είναι να πάρουμε ένα συναρτητή F και να δούμε αν έχει αντίστροφο, δηλαδή έναν G τέτοιο ώστε $F \circ G = G \circ F = 1$. Τότε θα λέμε ότι οι κατηγορίες είναι ισομορφικές. Όμως, στην θεωρία κατηγοριών δε δίνουμε τόση σημασία στην ισότητα όση στην ισομορφία. Δηλαδή, αντί για $F(G(B) = b)$, που είναι μια ισότητα αντικειμένων η οποία όπως έχουμε πει δεν έχει νόημα στην θεωρία κατηγοριών πρέπει να απαιτήσουμε $F(G(B) \cong b)$ Έτσι μπορούμε να έχουμε δυο αντίθετους συναρτητές των οποίων η σύνθεση να μην είναι ο ταυτοτικός συναρτητής , αλλά ένα άλλος ισόμορφος με αυτόν. Τότε θα έχουμε την περίπτωση μιας 'ισομορφίας έως ισομορφισμού'. Αυτή η περίπτωση, που θα φανεί ιδιαίτερα πλούσια και χρήσιμη είναι η ισοδυναμία των κατηγοριών. Θα δώσουμε ένα αυστηρό ορισμό:

Ορισμός 32 *Έστω ένα ζευγάρι συναρτητών*

$$\mathbf{C} \xrightarrow{E} \mathbf{D}$$

$$\mathbf{C} \xleftarrow[F]{} \mathbf{D}$$

και ένα ζευγάρι φυσικών ισομορφισμών

$$\alpha : 1_{\mathbf{D}} \Longrightarrow F \circ E$$

$$\beta : 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow E \circ F$$

Τότε οι δύο συναρτητές θα λέγονται ψευδοαντίστροφοι και οι δυο κατηγορίες ισοδύναμες. Θα συμβολίζουμε $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$

Ισχύει το παρακάτω πολυ χρήσιμο θεώρημα με μακροσκέλη απόδειξη που παραλείπεται

Θεώρημα 4 *Αν για ένα συναρτητή* $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *η συνάρτηση*

$$F_{X,Y} : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

είναι 'ένα προς ένα' και "επί" και αν για κάθε $D \in Obj_D$ *υπάρχει* $C \in Obj_C$ *ώστε* $d \cong F(c)$*, τότε οι* **C** *και* **D** *είναι ισοδύναμες. Ισχύει και το αντίστροφο.*

Παραδείγματα 4 *1. Έστω οι κατηγορίες* $\mathbf{Sets}_{fin}$ *και* **Finord** *των πεπερασμένων συνόλων και διατακτικών αντίστοιχα. Εστω επίσης οι συναρτητές* G *, i οι οποίοι απεικονίζουν κάθε συνόλο στον ισοπληθικό διατακτικό του και κάθε πεπερασμένο διατακτικό τον προβάλλουν μέσα στη* $\mathbf{Sets}_{fin}$ *αντίστοιχα. Είναι εύκολο να δει κανείς πως ανάμεσα σε αυτές τις κατηγορίες υπάρχει ισοδυναμία με τους φυσικούς ισομορφισμούς να είναι ο ταυτοτικός* $1 : 1_{\mathbf{Finord}} \Longrightarrow G \circ i$ *και* $\beta : 1_{\mathbf{Sets}_{fin}} \Longrightarrow i \circ G$ *να είναι εκείνος ο φυσικός ισομορφισμός για τον οποίο* β_X *μια συνάρτηση από το* X *στο* $G(X)$*.*

2. *Οι κατηγορίες των πεπαρασμένης διάστασης διανυσματικών χώρων και των πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς (προκύπτει εύκολα απο το θεώρημα)*

3. *Πολλά από τα λεγόμενα θεωρήματα αναπαράστασης των μαθηματικών μπορούν να γίνουν κατανοητά ως θεωρήματα που υποδηλώνουν φυσικές ιδοσυναμίες ανάμεσα σε κατηγορίες. Για παράδειγμα το θεώρημα αναπαράστασης του Gelfand για C^*-άλγεβρες και το θεώρημα αναπαράστασης του Stone για Boolean άλγεβρες.*

2.7 Καθολικές ιδιότητες

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του καθολικού μορφισμού (universal mapping), μια εντελώς κομβική και πάρα πολύ σημαντική έννοια που υπάρχει με την μια ή αλλά μορφή σε όλους σχεδόν τους ορισμούς που έχουμε δώσει μέχρι τώρα. Στην πραγματικότητα αυτό που έχουμε στην θεωρία κατηγοριών δεν είναι ιδιότητες ισότητας αλλά καθολικές ιδιότητες.

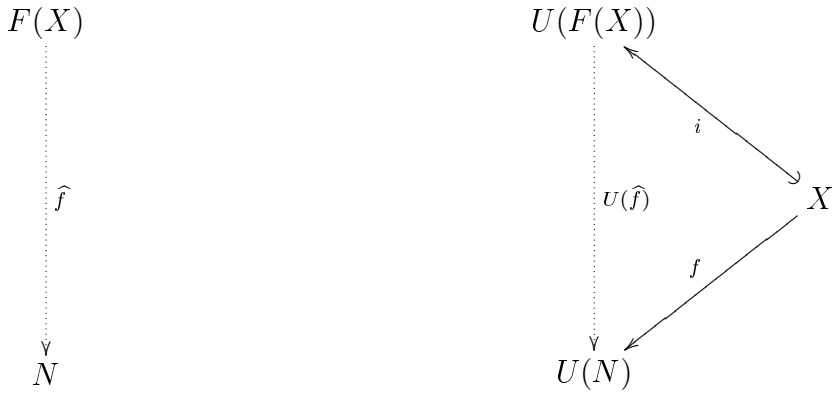
Προκαταρκτικά δίνουμε ένα ορισμό και θυμίζουμε έναν άλλο. Θα μελέτησουμε πρώτα τις ελεύθερες αλγεβρικές δομές και πιο ειδικά τις ελεύθερες ομάδες. Δοθέντος ενός συνόλου X η ελύθερη ομάδα που παράγεται από αυτό (έστω η $F(X)$) είναι η μικρότερη ομάδα που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του X. Αντίστροφα, μια ομάδα καλείται ελεύθερη αν υπάρχει ένα υπόσυνολο της τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο της ομάδας να γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο των στοιχείων του υποσυνόλου και των αντιστρόφων του. Από την θεωρία ομάδων είναι γνωστό πως για κάθε σύνολο υπάρχει ομάδα που να γεννάται από αυτό. Έχουμε έτσι ένα συναρτητή

$$F : \mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Groups}$$

που απεικονίζει κάθε σύνολο στην ομάδα που γεννάει και κάθε συνάρτηση στον ομοιομορφισμό ομάδων που επάγει με προφανή τρόπο. Αυτό ο ορισμός στην γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών μπορεί να γραφτεί ως:

Ορισμός 33 *Θα λέμε ότι το σύνολο X παράγει ελεύθερα την ομάδα $F(X)$ αν (θυμίζουμε ότι U : **Groups** $\longrightarrow$ **Sets** είναι ο επιλήσμων συναρτητής) για κάθε άλλη ομάδα N και κάθε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow U(N)$ υπάρχει ένας μοναδικός ομοιομορφισμός ομάδων $\widehat{f}$ ώστε τα*

παρακάτων διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά



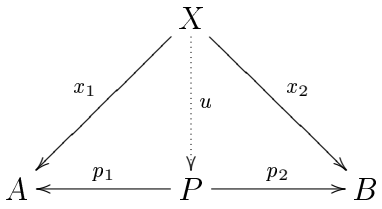
Ακόμα υπενθυμίζουμε και τον ορισμό του γινομένου που είναι και χαρακτηριστικός όλων των ορισμών της κατηγορίας των ορίων. Έστω A και B δύο αντικείμενα στην κατηγορία **C**. Τότε ορίζουμε το διάγραμμα γινόμενο των δύο αντικειμένων να αποτελείται από ένα αντικείμενο P και δύο μορφισμούς p_1 και p_2

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

ώστε να ικανοποιείτε η παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε άλλο διάγραμμα της μορφής

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

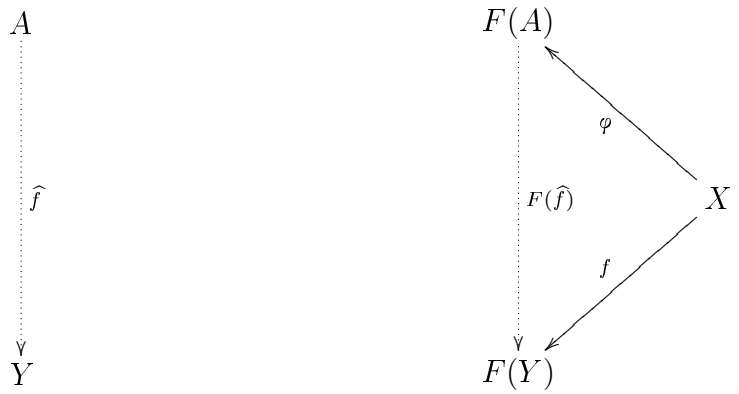
υπάρχει ένα μοναδικό $u : X \longrightarrow P$ ώστε το επόμενα διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά



Παρατηρούμε μια τυπική μέθοδο στα παραπάνω παραδείγματα, αλλά και σε όλους σχεδόν τους ορισμούς που έχουμε δει μέχρι τώρα. Κατασκευάζουμε ένα μαθηματικό αντικείμενο (μια δομή) χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μορφισμών, και έτσι ώστε να έχει μια σχέση συνάφιας με όλα τα άλλα κατηγοριακά αντικείμενα (δομές) που του μοιάζουν. Αυτή η σχέση εκφράζεται με την ύπαρξη ενός βέλους ανάμεσα στο υπό ορισμό δομή και στις όμοιες της. Αυτό εκφράζει μια *καθολικότητα* το οποίο μας επιτρέπει να αποκαλούμε το αντικείμενο αυτό καθολικό ή ελεύθερο. Αυτή η έννοια της καθολικότητας είναι αυτή που μας επιτρέπει ουσιαστικά να υλοποιήσουμε το 'μέχρις ισομορφισμού'. Όλα αυτά μπορούν να δωθούν σε ένα γενικότερο πλαίσιο ως εξής:

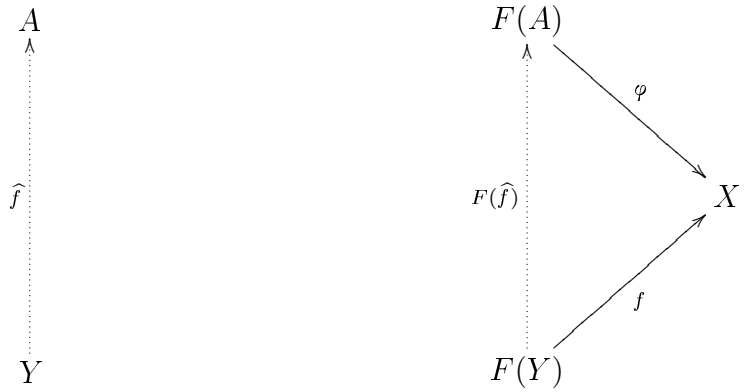
Ορισμός 34 *Έστω ένας συναρτητής* $F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ *και* X *αντικείμενο της* **C**. *Το ζεύγος* (A, φ) *όπου* A *αντικείμενο της* **D** *και* $\varphi : X \longrightarrow F(A)$ *λέγεται* αρχικός μορφισμός *αν ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα:*

Για κάθε αντικείμενο Y της $\mathbf{D}$ και κάθε βέλος $f : X \longrightarrow F(Y)$ υπάρχει μοναδικό βέλος $\widehat{f}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό



Ορισμός 35 *Έστω ένας συναρτητής $F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ και X αντικείμενο της $\mathbf{C}$. Το ζεύγος (A, φ) όπου A αντικείμενο της $\mathbf{D}$ και $\varphi : X \longrightarrow F(A)$ λέγεται* τερματικός μορφισμός *αν ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα*

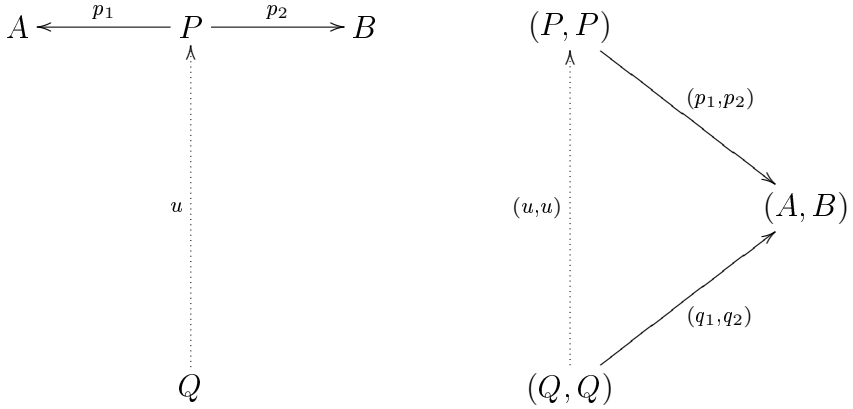
Για κάθε αντικείμενο Y της $\mathbf{D}$ και κάθε βέλος $f : F(Y) \longrightarrow X$ υπάρχει μοναδικό βέλος $\widehat{f}$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό



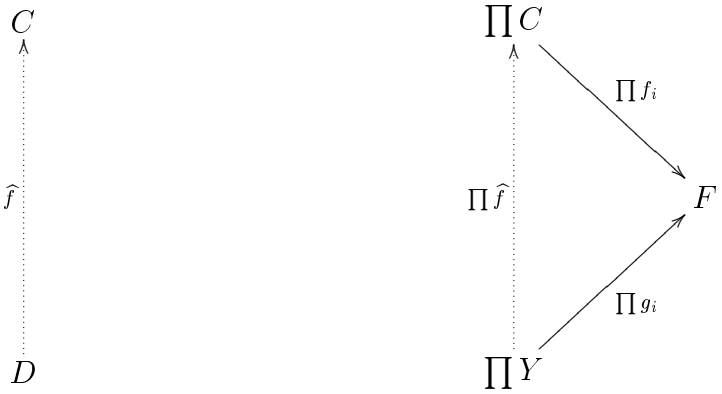
Ορισμός 36 *Οι αρχικοί και οι τελικοί μορφισμοί ονομάζονται καθολικοί μορφισμοί (universal arrows) και οι δυο παραπάνω ιδιότητες καθολικές ιδιότητες (universal properties).*

Παραδείγματα 5 *1. (Γινόμενο αντικειμένων) Έστω οι κατηγορίες $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ και ο διαγώνιος συναρτητής $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Τότε το γινόμενο δυο αντικειμένων είναι καθολικό στοιχείο (τερματικό) με τον τρόπο που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα και το οποίο*

εννοεί ό,τι ακριβώς λέει και ο ορισμός:



2. *(Όριο κώνων) Έστω ένας κώνος $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ δηλαδή $F \in C^J$ και ο διαγώνιος συναρτητής $\Delta : C \longrightarrow C^J$. Τότε το αντικείμενο C είναι όριο του F αν είναι τερματικό στοιχείο όπως στο παρακάτω διάγραμμα.*



2.8 Λήμμα Yoneda

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα από τα πιο χρήσημα τεχνικά εργαλεία της Θεωρίας Κατηγοριών: το Λήμμα του Yoneda. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ειδοθεί ως μια γενικεύση του θεωρήματος του Cayley στην θεωρία ομάδων. Όπως το δεύτερο μας κάνει να βλέπουμε κάθε ομάδα ως ομάδα μετασχηματισμών, έτσι σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε να βλέπουμε κάθε κατηγορία ως μια κατηγορία συναρτητών πάνω στά σύνολα. Σε αντίθεση με με το θεώρημα του Cayley, το λήμμα του Yoneda έχει πλατιά τεχνική χρησιμότητα.

Ορισμός 37 Η εμφύτευση Yoneda *(Yoneda embedding) είναι ο συναρτητής*

$$y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}s^{\mathbf{C}^{op}}$$

που απεικονίζει κάθε αντικείμενο C σε ένα Hom συναρτητή

$$yC = Hom_{\mathbf{C}}(-, C) : \mathbf{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$$

και κάθε βέλος $f : C \longrightarrow D$ στο φυσικό μετασχηματισμό

$$yf = Hom_{\mathbf{C}}(-, f) : Hom_{\mathbf{C}}(-, C) \longrightarrow Hom_{\mathbf{C}}(-, D).$$

Θεώρημα 5 *(Yoneda) Αν $\mathbf{C}$ είναι μια τοπικά μικρή κατηγορία, (κοίτα ορισμό 41 παρακάτω) C ένα αντικείμενό της και F συναρτητής στο $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$Hom_{\mathbf{Set}_s\mathbf{C}^{op}}(yC, F) \cong FC$$

, ο οποίος επιπλέον είναι φυσικός για τα F και C. Το τελευταίο σημαίνει ότι για κάθε $\partial : F \longrightarrow G$ και κάθε $h : C \longrightarrow D$ τα παρακάτω διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{array}{ccc} Hom(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \downarrow{\scriptstyle Hom(yC,\partial)} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_C} \\ Hom(yC, G) & \xrightarrow{\cong} & GC \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Hom(yC, F) & \xrightarrow{\cong} & FC \\ \uparrow{\scriptstyle Hom(yh,F)} & & \uparrow{\scriptstyle Fh} \\ Hom(yD, F) & \xrightarrow{\cong} & FD \end{array}$$

Γράφοντας Hom εννοούμε $Hom_{\mathbf{Set}_s\mathbf{C}^{op}}$.

Πόρισμα 1 *Δοθέντων αντικειμένων A, B σε μια τοπικά μικρή κατηγορία $\mathbf{C}$ τότε*

$$yA \cong yB \Rightarrow A \cong B$$

Έτσι έχουμε για παράδειγμα

$$(A^B)^C \cong A^{(B\times C)}$$

διότι $y((A^B)^C) \cong y(A^{(B\times C)})$ αφού για κάθε αντικείμενο X της $\mathbf{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} Hom(X, (A^B)^C) &\cong Hom(X \times C, A^B) \\ &\cong Hom((X \times C) \times B, A) \\ &\cong Hom(X \times (C \times B), A) \\ &\cong Hom(X, A^{(B\times C)}) \end{aligned}$$

2.9 Συζυγείς συναρτητές

Τώρα θα ασχοληθούμε με μια από τις κομβικότερες έννοιες-ίσως την πιο σημαντική και πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια- αυτή των συζυγών συναρτητών. Οι συζυγείς συναρτητές θα μπορέσουν να κομψό τρόπο να ενσωματώσουν όλες τις έννοιες που έχουμε ορίσει μέχρι τώρα και να καταφέρουν με αυτό τον τρόπο να συμπεριλάβουν και πολλές άλλες. Το εντυπωσιακό με αυτούς είναι πως εμφανίζονται παντού στα μαθηματικά: κάθε ένας κλάδος των μαθηματικών κρύβει πίσω πολλές δομές που στην ουσία τους είναι συζυγείς συναρτητές. Έτσι καταφέρνουμε με ένα ενιαίο τρόπο να ορίσουμε μια δομή που συναντάται παντού, και έτσι να ενοποιήσουμε πολλά εκ πρώτης όψεως ξένα κομμάτια των μαθηματικών. Το άλλο που πρέπει να σημειώσουμε είναι πως οι συζυγείς συναρτητές είναι κάτι που θεματοποιήται μόνο στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών. Μα τα άλλα μαθηματικά δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να τους μελετήσουμε. Θα δώσουμε τρεις ισοδύναμους ορισμούς, κάθε ένας από τους οποίους φωτίζει και μια διαφορετική όψη των πραγμάτων.

Ορισμός 38 *(Με χρήση φυσικών μετασχηματισμών) Έστω δύο συναρτητές*

$$\mathbf{C} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$$

και δυο φυσικοί μετασχηματισμοί

$$\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathbf{C}}$$

$$\eta : 1_{\mathbf{D}} \longrightarrow GF$$

που θα ονομάζοντε μονάδα και συν-μονάδα (unit, co-unit) και οι οποίοι έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\varepsilon_{FX} \circ F(\eta_X) = 1$$

$$G(\varepsilon_A) \circ \eta_{GA} = 1$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & {}^{1}\mathbf{C} \searrow & \downarrow \varepsilon F \\ & & F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & {}^{1}\mathbf{D} \searrow & \downarrow G\varepsilon \\ & & G \end{array}$$

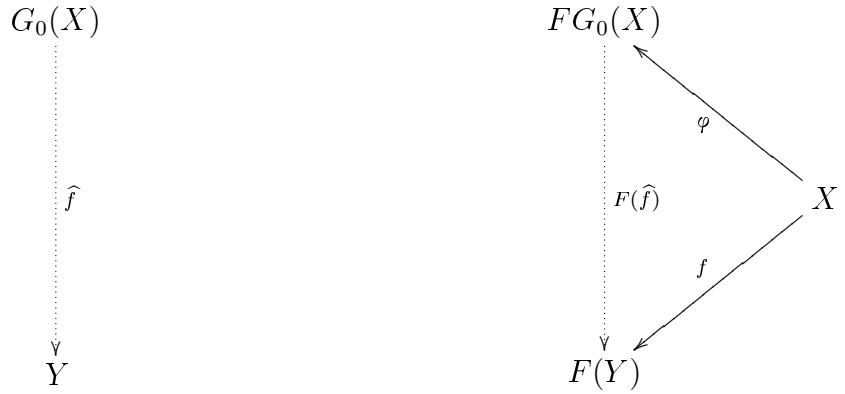
Θα λέμε ότι ο F είναι αριστερός συζυγής του G και ο G δεξιός συζυγής του F και θα συμβολίζουμε

$$F \vdash G$$

Ορισμός 39 *(Με την χρήση καθολικών μορφισμών) Έστω ένας συναρτητής*

$$F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$$

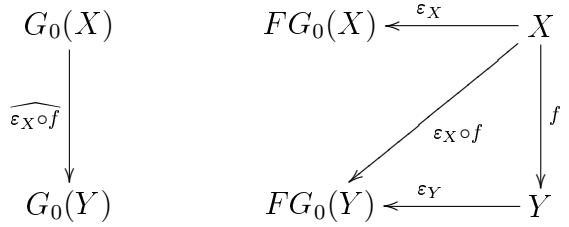
τέτοιος ώστε για κάθε αντικείμενο X στην $\mathbf{C}$ υπάρχει ένας τερματικός μορφισμός $(G_0(X), \varepsilon_X : FG_0(X))$ όπου $G_0(X)$ ένα αντικείμενο στην $\mathbf{D}$ και $\varepsilon_X : FG_0(X) \longrightarrow X$ ένας μορφισμός.



Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα συναρτητή

$$G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$$

$G(X) = G_0(X)$ *για X αντικείμενο στην $\mathbf{C}$*
$G(f) = \widehat{\varepsilon_X \circ f} : G(X) \longrightarrow G(Y)$ *για $f : X \longrightarrow Y$*



Οταν συμβαίνουν τα παραπάνω λέμε οτι ο F είναι αριστερός συζυγής *(left adjoint) του G. Αν αντίστροφα για τον $G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ υπάρχει πάντα ένας αρχικός μορφισμός, ανάλογα με τα παραπάνω όρίζουμε έναν συναρτητή F για τον οποίο και θα λέμε ότι ο G είναι* δεξιός συζυγής *(right adjoint) του F.*

Ορισμός 40 *(Με χρήση Hom-sets) Έστω κατηγορίες και συναρτητές όπως παραπάνω, τότε $F \vdash G$, δηλαδή F αριστερός συζυγής του G, αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός φ τέτοιος ώστε για κάθε ζευγάρι $X \in Obj_C$ και $Y \in Obj_D$ είναι ισομορφισμός συνόλων:*

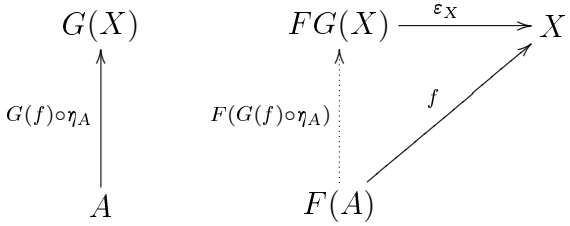
$$\varphi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{C}}(FY, X) \cong Hom_{\mathbf{D}}(Y, GX)$$

Λέγοντας ότι φ είναι φυσικός ισομορφισμός ενοούμε ότι εκλαμβανόμενων των $Hom_{\mathbf{C}}(F-,-)$ και $Hom_{\mathbf{D}}(-,G-)$ ως συναρτητών $\mathbf{D}^{op}\times\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{Sets}$ η φυσικότητα κατανοείται ως εξής: Για όλα τα βέλη $f:X\longrightarrow X'$ στην $\mathbf{C}$ και $g:Y\longrightarrow Y'$ στην $\mathbf{D}$, το παρακάτω διάγραμμα αντιμετατίθεται

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{C}}(FY,X) & \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} & Hom_{\mathbf{D}}(Y,GX) \\ \downarrow{\scriptstyle Hom(Fg,f)} & & \downarrow{\scriptstyle Hom(g,Gf)} \\ Hom_{\mathbf{C}}(FY',X') & \xrightarrow{\varphi_{X',Y'}} & Hom_{\mathbf{D}}(Y',GX') \end{array}$$

Απόδειξη:(Σκιαγράφηση της ισοδυναμίας των τριών ορισμών)

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω δύο συζηγείς συναρτητές όπως στον πρώτο ορισμό. Θα δείξουμε ότι για κάθε αντικείμενο X της $\mathbf{C}$ υπάρχει καθολικός μορφισμός $(G(X),\varphi)$. Θα δείξουμε για τερματικό μορφισμό (για αρχικό είναι ανάλογο). Πράγματι, για $\varphi=\varepsilon_X:FG(X)\longrightarrow X$ ισχύει το ζητούμενο διότι αν για αντικείμενο A της $\mathbf{D}$ $f:F(A)\longrightarrow X$ τότε $\widehat{f}=G(f)\circ\eta_A$



Το παραπάνω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό διότι

$$\varepsilon_X\circ F(G(f)\circ\eta_A)=\varepsilon_X\circ FG(f)\circ F(\eta_A)$$

. Όμως από την ιδιότητα των φυσικών μετασχηματισμών

$$\varepsilon_X\circ FG(f)=f\circ\varepsilon_{FA}$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xleftarrow{\varepsilon_{FA}} & FGF(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle FG(f)} \\ X & \xleftarrow{\varepsilon_X} & GF(X) \end{array}$$

Άρα

$$\varepsilon_X\circ F(G(f)\circ\eta_A)=f\circ\varepsilon_{FA}\circ F(\eta_A)$$

και από την τριγωνική ταυτότητα του πρώτου ορισμού παίρνουμε το ζητούμενο.

(2) $\Rightarrow$ (3) Θα βρούμε κατάλληλο φυσικό ισομορφισμό φ. Αν $g \in Hom_D(FX, Y)$ τότε $\varphi(g) = \eta_X \circ G(g)$ αλλιώς αν $f \in Hom_C(X, GY)$ τότε $\varphi^{-1}(f) = \widehat{f}$ Αυτό δείχνει την ισομορφία των συνόλων. Η ιδιότητα της φυσικότητας προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς αλλά με κάποιους μακροσκελείς συλλογισμούς.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ας ορίσουμε

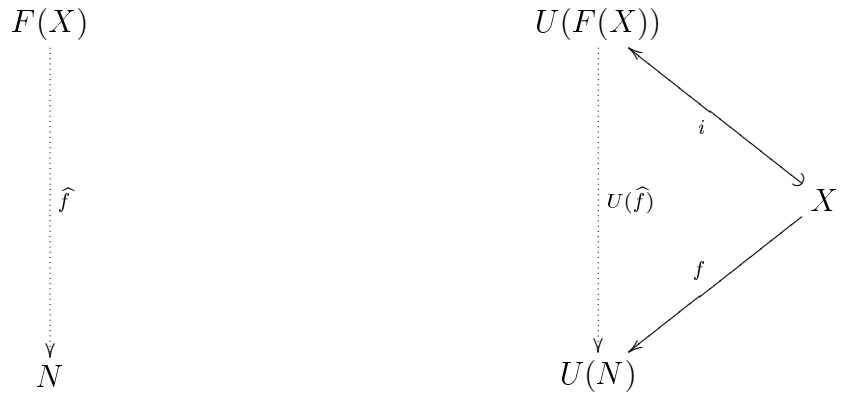
$$\varepsilon_X = \varphi^{-1}_{GX,X}(1_{GX})$$

$$\eta_Y = \varphi_{Y,FY}$$

τότε το γεγονός πως ο φ είναι φυσικός μετασχηματισμός συνεπάγεται ότι GX, ε_X είναι ένας τερματικός μορφισμός και FY, η_Y ένας αρχικός. Ακόμα, επειδή $\varphi_{Y,X}(f) = G(f) \circ \eta_Y$ και $\varphi^{-1}_{Y,X} = \varepsilon_X \circ F(g)$ προκύπτουν αμέσως οι τριγωνικές εξισώσεις. □

Παραδείγματα 6 *1. Αν* $\mathbf{1}$ *είναι η κατηγορία με ένα μόνο αντικείμενο το 0, και* G *ο μοναδικός συναρτητής* $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{1}$*, τότε για τον αριστερά συζυγής του* F *από την στιγμή που ισχύει ότι υπάρχει μοναδικό βέλος* $0 \longrightarrow G(b)$ *υπάρχει και ένα μοναδικό* $F(0) \longrightarrow b$*. Άρα το* $F(0)$ *είναι ένα αρχικό αντικείμενο.*

2. Στην προηγούμενη παράγραφο μιλήσαμε για ελεύθερες αλγεβρικές δομές. Σε αυτές χρησιμοποιήσαμε τον συναρτητή F *που κατασκέυαζε την δομή από ένα σύνολο και τον επιλήσμονα συναρτητή* U*. Είναι εύκολο να δει κανείς οτι* $F \vdash U$ *με μονάδα της συζυγίας τον φυσικό εγκλεισμό των υποσυνόλων.*



3. Αν **KHaus** *είναι η κατηγορία των συμπαγών χώρων Hausdorf και* $U : KHaus \longrightarrow$ **Top** *ένας επιλήσμονα συναρτητής, τότε η Stone-Cech συμπαγοποίηση ενός τοπολογικού χώρου είναι ο αριστερά συζηγής του* U

Τα προηγούμενα δύο παραδείγματα είνα ιμόνο δύο από τις περιπτώσεις που κάποιοι ευρέως χρησιμοποιούμενοι συναρτητές προκύπτουν να είναι συζυγείς κάποιων επιλησμόνων συναρτητών.

4. *Το όριο, όπως το είδαμε στην γλώσσα των καθολικών μορφισμών, είναι ο δεξιά συζυγής σε ένα διαγώνιο συναρτητή. Έτσι έχουμε:*

$$+ \vdash \Delta$$

για το συνγινόμενο αντικειμένων όταν $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, *ή πιο γενικά όταν* $\Delta : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{J}}$

$$\varinjlim \dashv \Delta \dashv \varprojlim$$

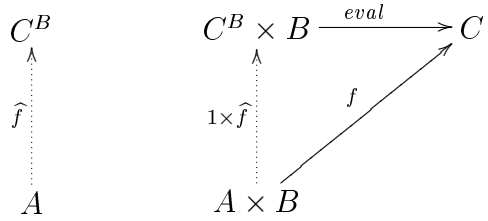
5. *Σε μια καρτεσιανά κλειστή κατηγορία*

$$- \times A \dashv -^A$$

. Πράγματι αν φιξάρουμε ένα αντικείμενο A *και τον συναρτητή*

$$- \times A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

τότε κατευθείαν ο ορισμός του καρτεσιανού γινομένου μας δίνει την συζυγία.



6. *Μια ιδιαίτερη κατηγορία συζυγών συναρτητών είναι εκείνοι που προκύπτουν από κατηγορίες -διατάξεις: διατεταγμένα σύνολα δηλαδή για τα οποία* $x \longrightarrow y$ *όταν* $x \leq y$. *Τότε οι απεικονίσεις* F, G *είναι ακριβώς όταν:*

$$Fx \leq y \Leftrightarrow x \leq Gy$$

Έτσι έχουμε στην κατηγορία των ανοιχτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου ότι

$$inc \dashv int$$

όπου inc *και* int *οι πράξεις της κλειστότητας και της ανοιχτότητας. Παρόμοια για μια συνάρτηση* f

$$Im(f) \dashv f^{-1}$$

Αυτές οι συζυγίες λέγονται και συνδέσεις Galois

Και τώρα θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές για τους συζυγείς συναρτητές προτάσεις.

Πρόταση 8 *Οι συζυγίες είναι μοναδικές μέχρις ισομορφισμού. Δηλαδή δοθέντων συναρτητή* $F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ *και δυο εκ δεξιών συζυγών του* $U, V : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$

$$F \dashv U, \quad F \dashv V$$

τότε έχουμε $U \cong V$.

Απόδειξη: *Για* $D \in Obj_{\mathbf{D}}$ *και* $C \in Obj_{\mathbf{C}}$ *έχουμε:*

$$Hom_{\mathbf{C}}(C, UD) \cong Hom_{\mathbf{D}}(FC, D) \cong Hom_{\mathbf{C}}(C, VD).$$

Έτσι από το λήμμα Yoneda $UD \cong VD$ *με αυτό τον ισομορφισμό να είναι να είναι φυσικός από τις ιδιότητες της συζυγίας.* □

Πρόταση 9 *Οι δεξιά συζυγείς διατηρούν τα όρια και οι αριστερά συζυγείς τα συνόρια.*
Απόδειξη: *Έστω πως έχουμε μια συζυγία*

$$\mathbf{C} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$$

με $F \dashv U$ *και ένα διάγραμμα* $J : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *τέτοιο ώστε το όριο* $\lim_{\leftarrow} D_j$ *να υπάρχει. Τότε για κάθε αντικείμενο* X *της* $\mathbf{C}$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{C}}(X, U(\varprojlim D_j)) &\cong Hom_{\mathbf{D}}(FX, \varprojlim D_j) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\mathbf{D}}(FX, D_j) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\mathbf{C}}(X, UD_j) \\ &\cong Hom_{\mathbf{C}}(X, \varprojlim D_j) \end{aligned}$$

οπότε από το λήμμα Yoneda έχουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό

$$U(\varprojlim D_j) = \varprojlim UD_j.$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι οι δεξιά συζυγείς διατηρούν τα συνόρια. □

Τέλος αναφέρουμε, χωρίς να δώσουμε απόδειξη, το ακόλουθο βασικό για την θεωρία θεώρημα (γνωστό ως το *θεώρημα του συζυγή συναρτητή*) το οποοίο οφείλεται στον Freyd και μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ωστε να έχει ένα συναρτητής συζυγή.

Πρόταση 10 *Έστω* $\mathbf{C}$ *μια τοπικά μικρή και πλήρης (δηλαδή που έχει όλα τα μικρά όρια) κατηγορία. Τότε για κάθε κατηγορία* $\mathbf{X}$ *και συναρτητή*

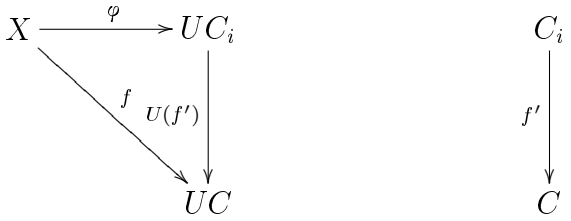
$$U : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{X}$$

τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. *Ο U έχει αριστερά συζυγή.*

2. *Ο U διατηρεί τα όρια και για κάθε αντικείμενο X της κατηγορίας $\mathbf{X}$ ο U ικανοποιεί το ακόλουθο (συνθήκη του επιλύοντος συνόλου): Υπάρχει ένα σύνολο αντικειμένων $(C_i)_{i\in I}$ στην $\mathbf{C}$ τέτοιο ώστε για κάθε αντικείμενο $C \in Obj_{\mathbf{C}}$ και βέλος $f : X \longrightarrow UC$ υπάρχει ένα $i \in I$ και βέλη $\varphi : X \longrightarrow UC_i$ και $f' : C_i \longrightarrow C$ τέτοιο ώστε*

$$f = U(f') \circ \varphi$$



2.10 Τα συνολοθεωρητικά θεμέλια της θεωρίας κατηγοριών

Μέχρι τώρα δεν έχουμε ασχοληθεί καθόλου με τη θεμελίωση της θεωρίας κατηγοριών. Ένα σημαντικό βήμα είναι να μπορέσουμε να βρούμε τα συνοθεωρητικά θεμέλια της θεωρίας, να εντάξουμε δηλαδή την όλη θεωρία μέσα στο οικοδόμημα της θεωρίας συνόλων, σύμφωνα με το δόγμα ότι τα πάντα στα μαθηματικά είναι σύνολα.

Αν υποθέσουμε πρώτα ότι δουλεύουμε μέσα στο καθιερωμένο αξιωματικό σύστημα το ZFC. Τότε πολύ εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε πως υπάρχει πρόβλημα που έχει να κάνει με το μέγεθος των κατηγοριών. Μπορούμε να κάνουμε το παρακάτω διαχωρισμό των κατηγοριών που δίνονται στο παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 41 *Μια κατηγορία C είναι* μικρή *(small) αν η συλλογή των αντικειμένων και συλλογή των βελών είναι και τα δύο σύνολα. Είναι* τοπικά μικρή *(localy small) όταν για κάθε δύο αντικείμενο A, B το $Hom(A, B)$ είναι σύνολο. Οι κατηγορίες δε που δεν είναι μικρές ονομάζονται μεγάλες (large).*

Αν έχουμε να κάνουμε με μικρές κατηγορίες τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα. Όταν όμως χρειαστεί να μελετήσουμε μεγάλες κατηγορίες (και αυτό είναι αναπόφευκτο γιατί τέτοιες είναι βασικές κατηγορίες όπως η **Sets**, η **Grp** κ.α.), τότε αντιμετωπίζουμε ένα ζήτημα γιατί η η συνολοθεωρία ZFC δεν μας επιτρέπει να χειριστούμε αντικείμενα όπως η συλλογή όλων των συνόλων ή όλων των ομάδων. Σε αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε διάφορες λύσεις που έχουν δοθεί σε αυτό το πρόβλημα.

Σε ένα πρώτο επίπεδο προσέγγισης μπορούμε να δώσουμε μια λύση μέσα στο πλαίσιο της ZFC εισάγοντας την έννοια της κλάσης.

Ορισμός 42 *Λέγοντας κλάση(class) εννοούμε μια συλλογή της μορφής*

$$\{x|\Phi(x)\}$$

όπου Φ κάποια ιδιότητα εκφρασμένη σε μια τυπική γλώσσα. Μια κλάση μπορεί να είναι ή να μην είναι σύνολο. Αν δεν είναι, τότε την καλούμε γνήσια κλάση *(proper class).*

Ορίζουμε λοιπόν αυτές οι μεγάλες κατηγορίες να είναι κλάσεις. Η μέθοδος που έχουμε να μελετάμε τις κλάσεις είναι όχι δουλεύοντας με αυτές ως τέτοιες, αλλά με βάση τις ιδιότητες που έχουν όλα τα σύνολα που ανήκουν σε αυτές. Αυτό μας δίνει και τα όρια αυτής της λύσης. Εφόσον δεν έχουμε αξιώματα για κλάσεις, δεν μπορούμε να ξέρουμε τίποτα για αυτές και κυρίως δεν μπορούν να είναι μέσα στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη, δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε ποτέ έναν ισχυρισμό που να περιέχει φράσεις όπως "για κάθε κατηγορία" ή ϋπάρχει μια κατηγορία". Με έναν τέτοιο περιορισμό, βασικά θεωρήματα όπως το θεώρημα συζηγή συναρτητή σεν μπορούν ούτε καν να εκφραστούν. Έτσι φαίνεται πολύ γρήγορα η αδυναμία του συστήματος ZFC να καταπιαστεί με κατηγορίες.

Μια δεύτερη λύση στο πρόβλημα θα ήταν να θεωρήσουμε ένα αξιωματικό σύστημα το οποίο να μας επιτρέπει να καταπιαστούμε και με κλάσεις ως αντικείμενα μελέτης. Το πιο διαδεδομένο τέτοιο σύστημα είναι το NBG το οποίο αποτελεί μια επέκταση του ZFC (με την έννοια πως κάθε πρόταση για σύνολα στο δεύτερο είναι πρόταση και στο πρώτο)[2].

Αυτή είναι και η προσέγγιση που διαισθητικά υιοθετείται από τους περισσότερους μαθηματικούς, αλλά έχει και αυτή προβλήματα μιας και πολύ συχνά θα χρειαστεί να μελετήσουμε κατηγορίες που να μην είναι ούτε κλάσεις. Για παράδειγμα η κατηγορία **CAT** των μεγάλων κατηγοριών και η κατηγορία **Class** των κλάσεων. Αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι δεν μας επιτρέπει να φτιάξουμε κατηγορίες συναρτητών $Func(\mathbf{C},\mathbf{D})$ στην περίπτωση που οι $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ δεν είναι μικρές κατηγορίες.

Μια λύση που λύνει όλα αυτά τα προβλήματα δόθηκε από τον Grothendieck με τον κόσμο που εισηγήθηκε.

---

[2]Συγκεκριμένα το σύστημα NBG περιλαμβάνει: τα αξιώματα 1.της έκτασης, 2. του ζεύγους 3.της ένωσης 4. του δυναμοσυνόλου 5.του απείρου (όλα τα παραπάνω όπως είναι γνωστά στην ZFC) και ακόμα

7.το αξίωμα της οριοθέτησης του μεγέθους: για κάθε κλάση K, ένα σύνολο $x = K$ υπάρχει μόνον όταν δεν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση ανάμεσα στην κλάση K και την κλάση V όλων των συνόλων

8.Για κάθε τύπο φ ο οποίος δεν περιέχει ποσοδείκτες με τιμές κλάσεις, υπάρχει μια κλάση A τέτοια ώστε

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow \varphi(x))$$

9. Το αξίωμα έκτασης των κλάσεων

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B$$

10. Το αξίωμα της θεμελίωσης: Κάθε μη κενή κλάση είναι ξένη με ένα εκ των συνόλων που ανήκουν σε αυτήν.

Ορισμός 43 *Ως μαθηματικό κόσμο (universe) ορίζουμε ένα σύνολο* $\mathcal{U}$ *το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $x \in u \in \mathcal{U}$ *συνεπάγεται* $x \in \mathcal{U}$
2. *Αν* $u \in \mathcal{U}$ *και* $v \in \mathcal{U}$ *τότε* $\{u, v\} \in \mathcal{U}$
3. *Αν* $x \in \mathcal{U}$ *τότε* $2^x \in \mathcal{U}$
4. *Αν* $\{x_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{U}$ *τότε* $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$

Τα παραπάνω δεν είναι τίποτα άλλο παρά κάποια από τα αξιώματα της ZF από τα οποία μπορουύμε να εξάγουμε ότι όλες οι άλλες συνηθισμένες συνολοθεωρητικές κατασκετές ανήκουν μέσα στον κόσμο. Ένας κόσμος δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένα σύνολο συνόλων για το οποίο ισχύουν αυτά. Αλλά η ZF από μόνη της δεν μπορεί να μας βεβαιώσει πως ο κόσμος αυτός υπάρχει. Έτσι ο Grothendieck απαίτησε και το ακόλουθο αξίωμα:

Για κάθε σύνολο x υπάρχει ένας κόσμος $\mathcal{U}$ ώστε $x \in \mathcal{U}$.

Το σύμπαν του Grothendieck μπορούμε να το σκεφτούμε σαν ένα σύνολο πολύ μεγαλύτερο από τα σύνολα που χρησημοποιούμε, ένα σύνολο συνόλων το οποίο να είναι μοντέλο για την ZFC.Πρόκειται για ένα πολύ ισχυρό αξίωμα.

Η χρήση του όσον αφορά την θεμελίωση των κατηγοριών είναι η εξής. Θεωρούμε κατά πρώτον ένα κόσμο $\mathcal{U}$. Τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε τα σύνολα που ανήκουν στο $\mathcal{U}$ και συνιστούν την κατηγορία των συνόλων. Ας τα πούμε αυτά $\mathcal{U}$-σύνολα. Όμοια μπορούμε να έχουμε τις $\mathcal{U}$-ομάδες, τους $\mathcal{U}$-τοπολογικούς χώρους, την κατηγορία των κατηγοριών στο $\mathcal{U}$ κτλ. Έτσι όλες οι συνήθεις κατηγορίες μπορούν να βρεθούν μελετηθούν ικανοποιητικά. Οι κατηγορίες συναρτητών, για τους οποίους αντιμετωπίσαμε πρόβλημα προηγουμένως, μπορούν να γίνουν επίσης κατανοητοί. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 44 *Έστω ένας κόσμος Grothendieck* $\mathcal{U}$*. Ένα σύνολο λέγεται* $\mathcal{U}$*-μικρό αν είναι ισόμορφο με ένα στοιχείο του* $\mathcal{U}$*. Μια κατηγορία λέγεται* $\mathcal{U}$*- τοπικά μικρή αν για κάθε δύο αντικείμενα της* A, B *το* $Hom(A, B)$ *είναι* $\mathcal{U}$*-μικρό σύνολο.*

Είναι εύκολο τώρα να δείξει κανείς πως αν $\mathbf{C}$ και $\mathbf{D}$ είναι κατηγορίες στο $\mathcal{U}$, τότε η κατηγορία συναρτητών $Fun(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ είναι $\mathcal{U}$ τοπικά μικρή. Αν τώρα η $\mathbf{C}$ είναι $\mathcal{U}$ τοπικά μικρή και η $\mathbf{D}$ είναι κατηγορία στο $\mathcal{U}$, τότε η κατηγορία είναι κατηγορία στο $\mathcal{U}$.

Και αυτή η προσέγγιση αντιμετωπίζει προβλήματα τα οποία θα αναπτύξουμε στο κεφάλαιο 3. Μια κάπως διαφοροποιημένη απάντηση δόθηκε από τον MacLane ο οποίος έδωσε τον παρακάτω ορισμό για τον κόσμο.

Ορισμός 45 *Ως μαθηματικό κόσμο (universe) κατά MacLane ορίζουμε ένα σύνολο* $\sqsubseteq$ *το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $x \in u \in \mathcal{V}$ *συνεπάγεται* $x \in \mathcal{V}$
2. *Αν* $u \in \mathcal{V}$ *και* $v \in \mathcal{V}$ *τότε* $\{u, v\}, u \times v, \langle u, v\rangle \in \mathcal{V}$
3. *Αν* $x \in \mathcal{V}$ *τότε* $2^x, \bigcup x \in \mathcal{V}$
4. $\omega \in \mathcal{V}$
5. *Αν* $f : a \longrightarrow b$ *συνάρτησ επί, και* $a \in \mathcal{V}$ *και* $b \subset \mathcal{V}$ *τότε* $b \in \mathcal{V}$.

Τέλος απαίτησε το παρακάτω αξίωμα:

Υπάρχει ένα κόσμος $\mathcal{V}$.

Μια άλλη λύση προτάθηκε από τον Feferman (1969). Αυτή βασίζεται στην λεγόμενη αρχή της ανάκλασης (reflexion principle): Ότι είναι αληθές για όλο τον κόσμο των συνόλων είναι αληθές και για ένα μέρος αυτού. Έτσι ορίζει ένα νέο σύστημα αξιωμάτων με το οποίο να μπορούμε να δουλέψουμε πιο εύκολα με το διαχωρισμό μικρών και μεγάλων σύνολων.

Δουλεύουμε με την συνληθη πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζουμε τα αξιώματα της ZFC και προσθέτουμε ένα σύμβολο το $\underline{s}$ που να αντιστοιχεί στο 'μικρό' κάνοντας τις εξής συμβάσεις. Γράφουμε $\exists x \in \underline{s}\varphi(x)$ για $\exists x[x \in \underline{s} \wedge \varphi(x)]$ και $\forall x \in \underline{s}\varphi(x)$ για $\forall x[x \in \underline{s} \rightarrow \varphi(x)]$. Επίσης για κάθε τύπο φ αντιστοιχούμε τον $\varphi^{(\underline{s})}$ ο οποίος εγκλείει τους ποσοδείκτες στο $\underline{s}$. Έτσι ορίζουμε το σύστημα $ZFC/\underline{s}$ να αποτελείται από τα παρακάτω αξιώματα:

1. Τα αξιώματα της ZFC
2. $\exists x[x \in \underline{s}]$
3. $\forall x \forall y[(y \in x \wedge x \in \underline{s}) \rightarrow y \in \underline{s}]$
4. $\forall x \forall y[x \in \underline{s} \wedge \forall z((z \in y \rightarrow z \in x) \rightarrow y \in \underline{s})]$
5. $\forall x_1 \in \underline{s} ... \forall x_n \in \underline{s}[\varphi^{(\underline{s})}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n)]$ για κάθε τύπο φ της γλώσσας με ελεύθερες μεταβλητές $x_1, ..., x_n$.

Ο Feferman [1969] έδειξε πως μπορούμε να πάρουμε όλη την θεωρία κατηγοριών και να μιλήσουμε για μικρές και μεγάλες κατηγορίες, κατηγορίες συναρτητών κτλ.

2.11 Η στοιχειώδης θεωρία κατηγοριακών συνόλων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την λεγόμενη "στοιχειώδη θεωρία της κατηγορίας των συνόλων" (Elementary Theory of the Category of Sets, ETCS στο εξής) την οποία και πρωτοπαρουσίασε ο B. Lawvere το 1964. Αποτελεί την πρώτη και μάλλον την σημαντικότερη προσπάθεια για την κατασκευή κατηγοριακών θεμελίων για τα μαθηματικά. Σε όσα θα ακολουθήσουν, θα δώσουμε μια μεθοδική ανάπτυξη του πώς είναι δυνατόν να παραχθεί η θεωρία συνόλων μέσα στο πλαίσιο της θεωρίας κατηγοριών δηλαδή, με εργαλεία μεθόδους και όρους που μας προσφέρονται από αυτήν. Η δουλειά αυτή του Lawvere είναι ιδιαίτερα κομβική: αποτελεί την κατάρριψη της μονοσήμαντης προσέγγισης για τα θεμέλια, το τέλος του δόγματος πως τα μαθηματικά πρέπει να βασίζονται στην έννοια της συλλογής και την ιδιότητα του ανήκειν. Αντίθετα εδώ οι πρωταρχικές έννοιες είναι ο μορφισμός, το πεδίο και το συνπεδίο ενώ σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε καν να ορίσουμε μια ιδιότητα όπως το $\in$. Η μεγάλη μαθηματική αξία του προγράμματος είναι πως μπορεί να αναπαραγάγει μεγάλο κομμάτι των μοντέρνων μαθηματικών και κλάδους όπως η ανάλυση. Ιδιαίτερο είναι το μετα-θεώρημα που δίνεται παρακάτω που διασφαλίζει μια κάποιου είδους μοναδικότητα του κατασκευάσματος. Στην παρουσίαση αυτής της παραγράφου θα δουλέψουμε με την ακριβή δομή που είχε το αρχικό άρθρο του Lawvere. Ο σκοπός μας εδώ είναι να μπορέσουμε να προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την κατηγορία των συνόλων δίχως να κάνουμε αναφορά σε σύνολα (δηλαδή να θεωρήσουμε τη θεωρία συνόλων από πριν), αλλά μιλώντας μόνο με όσα έχουμε αναπτύξει στην θεωρία κατηγοριών μέχρι τώρα.

Η θεωρία αυτή αποτελείται από ένα σύνολο οκτώ αξιωμάτων τα οποία αποτελούν και στοιχειώδεις τις περισσότερες φορές ιδιότητες των συνόλων όπως τα αντιλαμβανόμαστε στο πλαίσιο της βασικής θεωρίας ZFC (Όσα από αυτά δεν είναι προφανή θα γίνουν πιο κατανοητά αργότερα όταν θα έχουμε την τεχνολογία της θεωρίας τόπων που θα μπορέσει να γενικεύσει τα όσα λέμε εδώ και να τους δώσει πιο πλούσια δομή και να καταρτίσει με μια εσωτερική λογική).

Ξεκινάμε την παράθεση των αξιωμάτων. Το πρώτο μας βεβαιώνει για την ύπαρξη των βασικών κατηγοριακών ορίων και συνορίων και το δευτερο για τα εκθετικά αντικείμενα.

Αξίωμα 1 *Υπάρχει ένα τερματικό αντικείμενο 1 και ένα αρχικό 0. Τα γινόμενα $A \times B$ και τα συνγινόμενα $A+B$ κάθε δυο αντικειμένων A, B υπάρχουν. Επίσης για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών, υπάρχουν ένας εξισωτής και ένας συνεξισωτής.*

Αξίωμα 2 *Το εκθετικό αντικειμένο B^A υπάρχει για κάθε δυο αντικείμενα.*

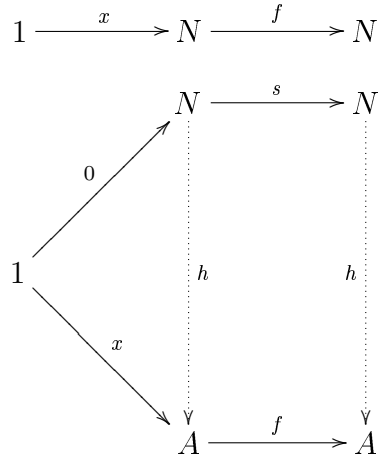
Το τρίτο αξίωμα μας δίνει κάτι ανάλογο με το αξίωμα το απείρου για την ZF που μας ορίσει και τους φυσικούς αριθμούς. Εδώ θα ανοίξουμε μια παρένθεση και πούμε πως αντιλαμβανόμαστε κατηγοριακά τους φυσικούς αριθμούς. Μέχρι τώρα στη θεωρία κατηγοριών και τόπων δεν έχουμε δει κάτι που να μπορεί να θεωρηθεί ώ 'φυσικοί αριθμοί'. Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του αντικειμένου των φυσικών αριθμών που οφείλεται στον Lawvere.

Τα αξιώματα των φυσικών αριθμών μας λένε πως ένα σύστημα φυσικών αριθμών αποτελείται από ένα σύνολο N, ένα στοιχείο του συνόλου, το 0 καθώς και μια συνάρτηση επομένου s. Στη θεωρία κατηγοριών αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Το N γίνεται αντικείμενο, το 0 στοιχείο με την κατηγοριακή έννοια και η συνάρτηση s ένα βέλος. Φυσικά την κατασκευή αυτήν την ορίζουμε 'μέχρις ισομορφισμού' με την κατάληλη καθολική ιδιότητα. Οπότε:

Ορισμός 46 Αντικείμενο φυσικών αριθμών *(natural number object) είναι ένα αντικείμενο* N *με δυο μορφισμούς*

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

τέτοιο ώστε να ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα καθολικότητας: για κάθε αντικείμενο A *και βέλη* x, f *όπως παρακάτω υπάρχει μοναδικό βέλος* $h : N \longrightarrow A$



Τώρα για την κατηγορία των συνόλων απαιτούμε το ακόλουθο:

Αξίωμα 3 *Υπάρχει ένα αντικείμενο φυσικών αριθμών* $\langle N, s, 0\rangle$.

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ένα από τα θεμελιακά θεωρήματα, αυτό της πρωταρχικής αναδρομής.

Θεώρημα 6 *(Πρωταρχικής αναδρομής) Αν έχουμε δύο βέλη στην κατηγορία των συνόλων*

$$f_0 : A \longrightarrow B$$

$$u : N \times A \times B \longrightarrow B$$

τότε υπάρχει ένας μορφισμός

$$f : N \times A$$

τέτοιος ώστε για κάθε $a \in A$ *και* $n \in N$ *έχουμε τα εξής δύο,*

$$f\langle 0, a\rangle = f_0 a$$

$$f\langle sn, a\rangle = u\langle n, a, f\langle n, a\rangle\rangle$$

Απόδειξη: *Την απόδειξη μπορεί να την βρεί κανείς στο άρθρο του Lawvere. Είναι μια εφαρμογή των αξιωμάτων 2 και 3, με χρήση των κατασκευών που υποθέτει η το αξίωμα 1.* □

Μέχρι τώρα όλα τα τα παραπάνω αξιώματα δεν είναι δυνατά. Υπάρχουν πολλές κατηγορίες που τα ικανοποιούν όπως για παράδειγμα η κατηγορία όλων των μικρών (small) κατηγοριών και των συναρτητών.

Κάτι ακόμα βασικό για τα σύνολα είναι η συνολοθεωρητική ιδιότητα της έκτασης. Όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, αυτή δεν ισχύει σε μια τυχούσα κατηγορία, οπότε θα αναγκαστούμε να την απαιτήσουμε. Επίσης με το παρακάτω αξίωμα μπορούμε να εξασφαλίσουμε οτι η συνάρτηση f στο θεώρημα της πρωταρχικής αναδρομής είναι μοναδική.

Αξίωμα 4 *Αν δύο παράλληλοι μορφισμοί $f, g : A \longrightarrow B$ είναι διαφορετικοί, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $x : 1 \longrightarrow A$ τέτοιο ώστε $f \circ x \neq g \circ x$*

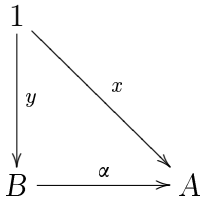
Θα δώσουμε τώρα ένα κατηγοριακό αξίωμα της επιλογής, το ποίο συναντάται πολλές φορές και σε κείμενα της θεωρίας συνόλων.

Αξίωμα 5 *(Αξίωμα της επιλογής) Αν το πεδίο ενός μορφισμού f είναι μη κενό, τότε υπάρχει ένας μορφισμός g τέτοιος ώστε*

$$fgf = f$$

Το αξίωμα της επιλογής είναι ανεξάρτητο από όλα τα υπόλοιπα αξιώματα (αυτά που αναφέραμε και όσα θα ακολουθήσουν). Απόδειξη αυτού είναι η κατηγορία των μερικώς διατεταγμένων συνόλων με μορφισμούς τις απεικονίσεις που σέβονται την διάταξη. Για να το δει μπορεί να πάρει κανείς την ταυτοτική απεικόνιση από ένα έναν τέτοιο χώρο σε ένα άλλο πιο δυνατά διατεταγμένο αλλά με το ίδιο σύνολο σαν πεδίο. Τα περισσότερα από τα θεωρήματα που θα ακολουθήσουν δεν ικανοποιούνται σε αυτήν την κατηγορία.

Ορισμός 47 *Το βέλος $\alpha : B \longrightarrow A$ είναι* υποσύνολο *του A ανν είναι μονομορφισμός. Ένα στοιχείο y θα* ανήκει στο υποσύνολο *α αν το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό για όλα τα y.*



Ορισμός 48 *Γράφουμε ότι $a \subseteq b$ αν τα a και b είναι υποσύνολα του ίδιου συνόλου και υπάρχει ένα h τέτοιο ώστε $a = bh$.*

Πρόταση 11 *Αν a, b υποσύνολα του ίδιου συνόλου, τότε*

$$a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x[x \in a \Rightarrow x \in b]$$

Απόδειξη: *Αν $a \subseteq b$ και $x : 1 \longrightarrow A$ τότε ξεκάθαρα $x \in a \Rightarrow x \in b$.*

Αντιστρόφως. Αν $\forall x[x \in a \Rightarrow x \in b]$ τότε από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει $g : A \longrightarrow dom(b)$ ώστε $bgb = b$. Από την στιγμή που b είναι μονομορφισμός, $gb = 1_{dom(b)}$. Ορίζουμε $h = ga$ και επιδιώκουμε να δείξουμε ότι $a = hb$. Αρκεί να δείξουμε ότι $a\xi = hb\xi$ για κάθε ξ στοιχείο του πεδίου του a. Όμως το $a\xi$ είναι ένα στοιχείο του A, για το οποίο $x \in a$, έτσι από την υπόθεση, $x \in b$ δηλαδή $\exists y[x = by]$. Τότε

$$bh\xi = bga\xi = bgx = bgby = by = x = a\xi$$

Αυτό δείχνει και το ζητούμενο. □

Τα τελευταία τρία αξιώματα είναι τα εξής:

Αξίωμα 6 *Αν το αντικείμενο A δεν είναι ένα αρχικό αντικείμενο, τότε έχει στοιχεία.*

Αξίωμα 7 *Κάθε στοιχείο ένος συνγινομένου είναι υποσύνολο μιας εκ των δύο συνπροβολών.*

Αξίωμα 8 *Υπάρχει ένα αντικείμενο με περισσότερα του ενός στοιχεία.*

Το τελευταίο αξίωμα είναι ανεξάρτητο από όλα τα υπόλοιπα. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι η πεπερασμένη κατηγορία

$$0 \longrightarrow 1$$

Περνάμε τώρα σε μια πρόταση που η σημασία της θα φανεί στις παραγράφους που πραγματελυοντε τους τόπους.

Πρόταση 12

$$1 + 1 = 2$$

δηλαδή το αντικείμενο $1 + 1$ έχει μόνο δυο στοιχεία, τις συνπροβολές του.

$$1 \xrightarrow{i_1} 1 + 1 \xleftarrow[i_2]{} 1$$

Απόδειξη: *Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το αξίωμα 7 και την καθολική ιδιότητα του συνγινομένου.* □

Πρόταση 13 *Τα αξιώματα του Peano ικανοποιούνται για το αντικείμενο των φυσικών αριθμών.*

Ορισμός 49 *Ο μορφισμός* $\varphi : X \longrightarrow 2$ *είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του υποσυνόλου* $\alpha : A \longrightarrow X$ *αν*

$$\forall x \in X[x \in \alpha \Leftrightarrow \varphi x = i_1]$$

όπου το i_1 *όπως παραπάνω.*

Οπότε τώρα δίνουμε και το αναμενόμενο αποτέλεσμα

Πρόταση 14 *Κάθε υποσύνολο ενός αντικείμένου έχει χαρακτηριστική συνάρτηση.*

Τέλος παρουσιάζουμε το μεταθεώρημα του Lawvere για την ETCS.

Θεώρημα 7 *Αν* **C** *είναι μια κατηγορία που ικανοποιεί τα αξιώματα και είναι πλήρης, τότε είναι ισοδύναμη με την* **Sets**.

Το φυσιολογικό ερώτημα που ανακίπτει είναι πως αυτή η θεωρία συνόλων που δημιουργήσαμε, σχετίζεται με την παραδοσιακή ZF. Ακόμα πρέπει να μελετήσουμε τι φραγμούς έχει και τι δυνατότητες μας δίνει σε σχέχη με τις παραδοσιακες προσεγγίσεις.

Το πρώτο και πολυ βασικό μειονέκτημα έχει να κάνει με το γεγονός πως η θεωρία $ETCS$ αναφέρεται φυσικά σε σύνολα και συναρτήσεις αλλά όχι σε όλο τον κόσμο των συνόλων ή σε οποιαδήποτε proper κλάση. Μπορεί για παράδειγμα να μιλήσει για ομάδες αλλά δεν μπορεί να δει τις ομάδες σαν μια δομή, σαν την κατηγορία των ομάδων. Αυτό το πρόβλημα ως ένα σημείο λύνεται από το επόμενο βήμα στη προσπάθεια του Lawvere, την αξιωματικοποίηση της κατηγορίας όλων των κατηγοριών.

Αν τώρα θέλουμε να δούμε τη συνολοθεωρητική ισχύ της $ETCS$, τότε θα παρατηρήσουμε ότι δεν είναι τόσο ισχυρή όσο η ZF. Είναι ισοδύμαμη με την κάπως ασθενέστερη θεωρία, τη φραγμένη ZF η οποία το μόνο που έχει λιγότερο είναι το οτι δεν μπορεί να αποδείξει την υπάρξη μη πεπερασμέων πληθαρίθμων. Δηλαδή

$$ETCS \vdash \exists\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3\aleph_4\}$$

η $ETCS$ δεν μπορεί να δείξει ότι υπάρχει ένας πληθικός $\aleph_\omega$ πέρα από όλους τους $\aleph_n$. Αλλά ακόμα περισσότερο, δεν μπορεί καν να δείξει πως υπάρχεο οσοδήποτε μεγάλος πεπερασμένος πληθάριθμος. Δηλαδή δεν μπορεί να δείξει το

$$\forall n \in \mathbb{N}\exists\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3 \ldots \aleph_n\}$$

Για να μπορέσουμε να κάνουμε την θεωρία τόσο δύνατη όσο είναι η ZF προσθέτουμε ένα κατηγοριακό αξίωμα αντικατάστασης **R** το οποίο και θα δώσουμε στην επόμενη παράγραφο. Με αυτήν την προσθήκη έχουμε δύο εντελώς ιδοσύναμες αποδεικτικά θεωρίες.

2.12 Η κατηγορία όλων των κατηγοριών

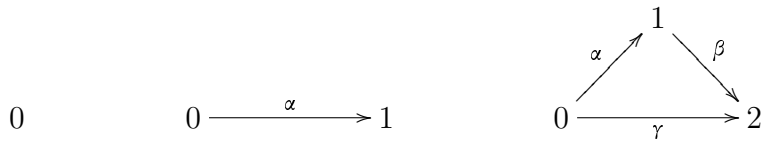
Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό της κατηγορίας με έναν αφηρημένο τρόπο, έναν φορμαλισμό μιας δευτεροβάθμιας λογικής.

Ορισμός 50 *Μια κατηγορία αποτελείται από:*

- Τύπους: $A, B, C, \ldots$ *για αντικείμενα και* $f, g, h, \ldots$ *για βέλη.*
- Τελεστές: Dom *και* Cod *που πάνε βέλη σε αντικείμενα και* 1 *που στέλνει αντικείμενα σε βέλη.*
- Σχέση $C(x, y; z)$ *που εφαρμόζεται σε βέλη και διαβάζεται: το* z *είναι σύνθεση των* x *και*y
- *Ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα*

  1. $\forall f, g, h$ *αν* $C(f, g; h)$ *τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
  $$Dom(f) = Dom(h), \quad Cod(f) = Dom(g), \quad Cod(g) = Cod(h)$$
  2. $\forall f, g$ *αν* $Cod(f) = Dom(h)$ *τότε* $\exists!$ h *τέτοιο ώστε* $C(f, g; h)$
  3. $\forall A$, $Dom(1_A) = Cod(1_A) = A$ *και*
  $$\forall f, \quad C(1_{Dom(f)}, f; f) \wedge C(f, 1_{Cod(f)}; f)$$
  4. $\forall f, g, h, i, j, k$ *αν* $C(f, g; i)$ *και* $C(g, h, j)$ *και* $C(f, g; k)$ *τότε* $C(i, h; k)$

Ορίζουμε τώρα τις τρεις πεπερασμένες κατηγορίες $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ οι οποίες είναι όπως παρακάτω (ταυτοτικά βέλη ενοούνται)

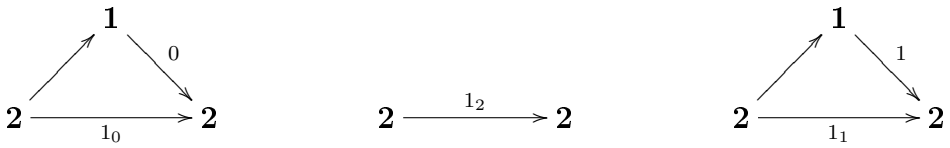


1 **2** **3**

Τα αξιώματα τώρα του Lawvere είναι ως εξής.

A1 Κάθε κατηγορία έχει ένα μοναδικό συναρτητή $\mathbf{C} \longrightarrow 1$

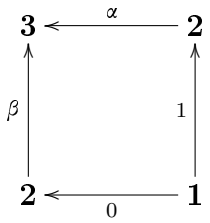
A2 Η κατηγορία **2** έχει ακριβώς δύο συναρτητές από την κατηγορία **1**, τους 0 και 1, και τρείς από τον εαυτό της



Ένα αντικείμενο A μιας κατηγορίας $\mathbf{A}$ ορίζεται να είναι ένα συναρτητής $A : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{A}$ και ένα βέλος f να είναι ένας συναρτητής $f : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{A}$. Το πεδίο f_0 και το συνπεδίο f_1 της f είναι οι συνθέσεις της f με τους $0, 1 : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$ ενώ το ταυτοτικό βέλος 1_A ορίζεται να είναι η σύνθεση:

$$\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1} \xrightarrow{A} \mathbf{A}$$

A3 Η κατηγορία $\mathbf{3}$ είναι ένας εξωθητής

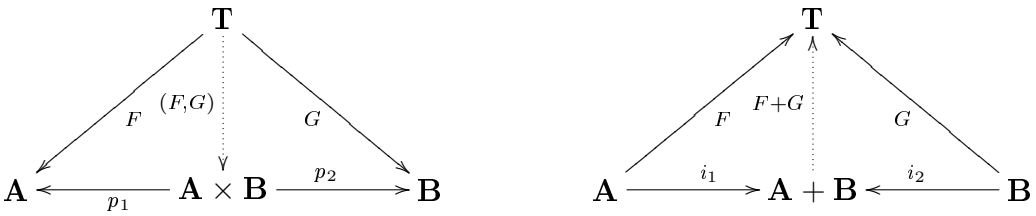


και υπάρχει ένας συναρτητής $\gamma : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$ με $\gamma_0 = \alpha_0$ και $\gamma_1 = \beta_1$

Το παραπάνω αξίωμα μας επιτρέπει να ορίσουμε την σύνθεση. Πράγματι ο συναρτητής γ-βέλος μπορεί διαισθητικά να θεωρηθεί ως η συνθεση των συναρτητών-βελών α και β για τους οποίους η αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος σηναίνει οτι $\alpha_1 = \beta_0$, δηλαδή οτι το πειδίου του ενός είναι το συν-πεδίο του άλλου (και έτσι μπορούμε να κάνουμε σύνθεση). Από την ιδιότητα καθολικότητας του εξωθητή τώρα μπορούμε να πούμε πως για κάθε ζεύγος συναρτητών $f, g : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{A}$ με $f_1 = g_0$ υπάρχει μοναδικός συναρτητής $t : \mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{A}$ τέτοιος ώστε $t \circ \alpha = f$ και $t \circ \beta = g$. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε φυσιολογικά οτι $gf = t\gamma$.

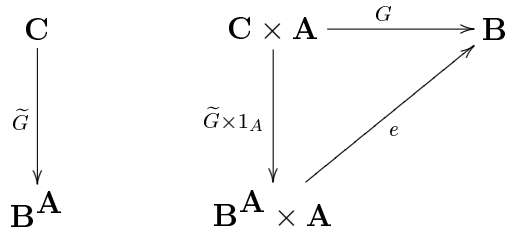
A4 $\forall \mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ αν $\mathbf{F} \neq \mathbf{G}$ τότε $\exists f : \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{A}$ με $\mathbf{F}f \neq \mathbf{G}f$.

A5 Κάθε ζεύγος κατηγοριών **A**,**B** έχει γινόμενα και συυνγινόμενα

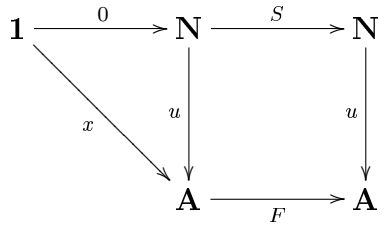


A6Κάθε ζεύγος παράλληλων συναρτητών $G, F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ έχει εξισωτή και συνεξισωτή.

A7 Υπάρχει μια κατηγορία συναρτητών από κάθε κατηγορία **A** σε κάθε κατηγορία **B**.



A8 Υπάρχει μια κατηγορία φυσικών αριθμών $\mathbf{N}, 0, S$.



A9 (επιλογές) Για κάθε συναρτητή $F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ επί υπάρχει ένας συναρτητής $H : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ τέτοιος ώστε

$$FH = 1_{\mathbf{B}}$$

Και τώρα θα απαιτήσουμε την ύπαρξη της κατηγορία των συνόλων, της **Sets**.

A10 Υπάρχει μια κατηγορία, η **Sets** η οποία όλα τα αξιώματα της ETCS θεωρίας και την ακόλουθη ιδιότητα πληρότητας: Για όλα τα αντικείμενα της κατηγορίας **Sets**, $I, J : \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{Sets}$, κάθε συναρτητής $(1 \downarrow I) \longrightarrow (1 \downarrow J)$ ταυτίζεται με ένα βέλος $(1 \downarrow f)$ για κάποια συνάρτηση (βέλος) $f : I \longrightarrow J$ στην **Sets**

2.13 Οι τόποι

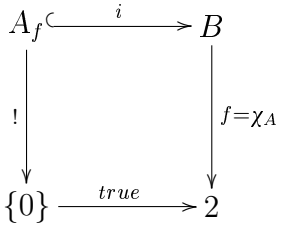
Στην θεωρία συνόλων είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι μπορούμε να χειριζόμαστε με ευκολία τα υποσύνολα ενός συνόλου. Στην θεωρία κατηγοριών μέχρι τώρα έχουμε δει τα υποαντικείμενα και την κατηγορία των υποαντικειμένων, αλλά αυτή είναι μια έννοια που δεν μας επιτρέπει να εξετάσουμε τα υποαντικείμενα με έναν ενιαίο τρόπο. Για να δούμε πως μπορούμε να το κάνουμε αυτό θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε την άλγεβρα των υποσυνόλων με τη γλώσσα των συναρτήσεων, δηλαδή κατηγοριακά.

Έστω το σύνολο $2 = \{0, 1\}$ και A, B δύο σύνολα με $A \subseteq B$. Τότε ορίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του A

$$\chi_A : B \longrightarrow 2$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

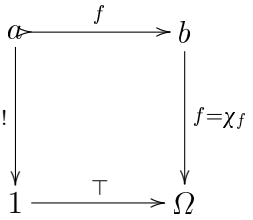
Αλλά και αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση $f : B \longrightarrow 2$ υπάρχει ένα σύνολο $A_f \subseteq B$ με $A_f = f^{-1}(1)$. Οπότε τελικά έχουμε ένα διάγραμμα όπως το παρακάτω



όπου $true(0) = 1$. Το γεγονός τώρα πως το παραπάνω τετράγωνο είναι εφελκυστής εκφράζει την σχέση ισοδυναμίας που περιγράψαμε ανάμεσα στα υποσύνολα και τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Αυτό μας δίνει την αφορμή να γενικεύσουμε τα παραπάνω και σε μια τυχούσα κατηγορία.

Ορισμός 51 *Έστω* **C** *μια κατηγορία με τερματικό στοιχείο 1. Τότε ορίζουμε τον* ταξινομητή υποαντικειμένων *(subobject classifier) να αποτελείται από ένα αντικείμενο* Ω *και ένα βέλος* $\top : 1 \longrightarrow \Omega$ *ώστε να ικανοποιείται το παρακάτω αξίωμα (*Ω*- axiom):*

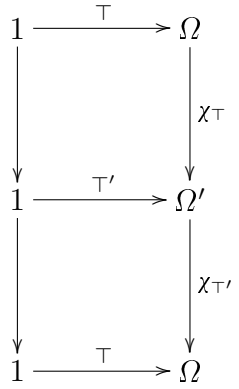
Για κάθε βέλος $f : a \longrightarrow b$ *μονομορφισμός, υπάρχει* $\chi_f : b \longrightarrow \Omega$ *μοναδικό τέτοιο ώστε το παρακάτω να είναι εφελκυστής*



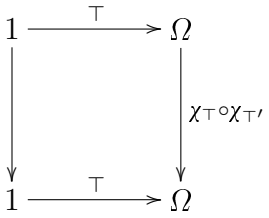
Κάποιες άμεσες και σημαντικές προτάσεις για τον ταξινομητή υποαντικειμένων είναι οι παρακάτω.

Πρόταση 15 *Σε μια κατηγορία ο ταξινομητής υποαντικειμένων είναι μοναδικός μέχρις ισομορφισμού.*

Απόδειξη: *Έστω* $(\Omega, \top)$ *και* $(\Omega', \top')$ *δύο ταξινομητές. Τότε*



Το πάνω και το κάτω είναι και τα δύο εφελκυστές από την υπόθεση (ο μορφισμός $\top$ *είναι όπως έχουμε δείξει μονομορφισμός). Άρα από την πρόταση για τους εφελκυστές το ίδιο ισχύει και για το εξωτερικό τετράγωνο.*



Όμως λόγω της μοναδικότητας του ορισμού $\chi_\top \circ \chi_{\top'} = 1_\Omega$. *εναλλάσοντας τα* $\top$ *και* $\top'$ *παίρνουμε* $\chi_{\top'} \circ \chi_\top = 1_\Omega$. *Άρα*

$$\Omega \cong \Omega'$$

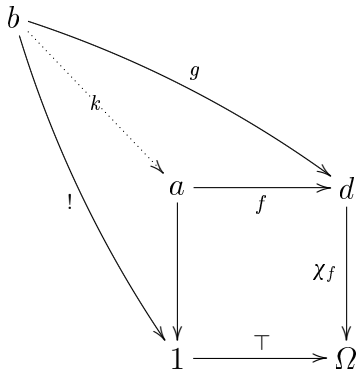
$$\top' = \chi_\top \circ \top$$

. □

Πρόταση 16 *Για δύο μονομορφισμούς* $f : a \longrightarrow b$, $g : a' \longrightarrow b$ *ισχύει*

$$f \cong g \Leftrightarrow \chi_f = \chi_g$$

Απόδειξη: *Αν* $\chi_f = \chi_g$ *τότε*



από την ιδιότητα του εφελκυστή υπάρχει βέλος k όπως παραπάνω. Αν εναλλάξουμε την θέση των f και g θα πάρουμε την ισομορφία τους ως αντικείμενα της κατηγορίας των υποαντικείμενα του b

Αν $f \cong g$ τότε το βέλος k στο παραπάνω διάγραμμα υπάρχει και έχει αντίστροφο k^{-1}. Χρησιμοποώντας αυτό μπορούμε να δείξουμε ότι το εξωτερικό τετράγωνο είναι εφελκυστής, άτι που θα ισχύει μόνο όταν $\chi_f = \chi_g$. □

Από τα παραπάνω έπεται το παρακάτω σημαντικό

Πρόταση 17 *Αν A είνα αντικείμενο της κατηγορίας, τότε*

$$Sub(A) \cong C[A, \Omega]$$

Δηλαδή η κατηγορία των υποαντικείμενων ενός αντικείμενου είναι ισόμορφη με την κατηγορία των βελών από το αντικείμενο στον ταξινομητή. Ειδικότερα $Sub(1) \cong C[1, \Omega]$

Και τώρα μπορούμε να περάσουμε στον ορισμό του τόπου.

Ορισμός 52 Τόπος *(topos) ονομάζεται μια κατηγορία* **E** *η οποία έχει:*

1. *Πεπερασμένα όρια και συνόρια*
2. *Εκθετικά αντικείμενα*
3. *Ταξινομητή υποαντικειμένων*

Η ύπαρξη πεπερασμένων ορίων και συνορίων είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη

1. Αρχικού αντικειμένου και εφελκυστών
2. Τελικού αντικειμένου και εξωθητή.

Θα δώσουμε κάποια παραδείγματα τόπων

Παραδείγματα 7
1. *Το πρώτο, και αρχετυπικό για όλους τους τόπους παράδειγμα, είναι η κατηγορία* **Sets** *με ταξινομητή υποαντικειμένων όπως ακριβώς αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Επίσης τόποι είναι και οι κατηγορίες $\mathbf{Sets}_{fin}$ και $\mathbf{Sets}_{\varkappa}$ των πεπερασμένων συνόλων και των συνόλων με πληθικότητα μικρότερη από $\varkappa$ με $\varkappa$ έναν οριακό πληθάριθμο.*

2. *Αν* **C** *μια μικρή κατηγορία τότε η κατηγορία των συναρτητών*

$$Func(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$$

είναι τόπος. Για την απόδειξη αυτού βλ. Johnstone(2002)

3. *Μια δέσμη συνόλων (bundle) είναι η κατηγορία* $\mathbf{Bn}(I) = \mathbf{Sets} \downarrow I$ *όπου* I *είναι ένα σύνολο. Κάθε αντικείμενο της κατηγορίας είναι μια συνάρτηση* $f : A \longrightarrow I$ *η οποία υπονοεί μια οικογένεια ξένων μεταξύ τους συνόλων* $\{A_i = f^{-1}\{i\}\}_{i \in I}$ *(που το κάθε ένα λέγεται ίνα πάνω στο* i*). Η κατηγορία αυτή είναι ένας τόπος. Αυτό στην πραγματικότητα είναι αποτέλεσμα ένος θεωρήματος του Freyd (γνωστού και ως το θεμελιώδες θεώρημα των τόπων) που αποδεικνύει οτι αν* $\mathbf{E}$ *είναι ένας τόπος και* A *είναι ένα αντικείμενό του τότε ο* $\mathbf{E} \downarrow A$ *είναι τόπος επίσης.*

   Ο τόπος των δεσμών μπορεί να ειδωθεί σαν μια γενίκευση του τόπου των συνόλων. Εδώ τα αντικείμενα δεν είναι στατικά σύνολα αλλά όλες οι οικογένειες των συνόλων που μπορούν να διατρέχουν ένα σύνολο.

2.14 Η λογική στους τόπους

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των τόπων είναι η στενή σχέση που έχουν με τη λογική. Σε κάθε τόπο μπορούμε με φυσικό τρόπο να ορίσουμε μια εσωτερική πρωτοβάθμια λογική, όπως επίσης υπάρχει η δυνατότητα να δούμε ένα τόπο ως σημασιολογικό μοντέλο μιας λογικής. Το εντυπωσιακό είναι πως αυτή η εσωτερική λογική είναι γενικά ιντουσιονιστική.

Υπάρχει ένας φυσικός τρόπος να επανορίσουμε τις λογικές πράξεις ως χαρακτηριστικές συναρτήσεις συνόλων.

- Η άρνηση $\neg$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου

$$\{x | \neg x = 1\} = \{0\} \subseteq \Omega$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\perp} & 2 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \neg} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & 2 \end{array}$$

- Η τομή $\cap : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ είναι η χαρακτηριστική χ_A του συνόλου $A = \{(1,1)\}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{[\top,\top]} & 2 \times 2 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \cap} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & 2 \end{array}$$

- Η συνεπαγωγή $\Rightarrow: 2\times 2 \longrightarrow 2$ είναι η χαρακτηριστική του συνόλου $\mathcal{A} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & 2\times 2 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \Rightarrow} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

- Η ένωση $\cup : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ είναι η χαρακτηριστική του συνόλου $\mathcal{D} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & 2\times 2 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \cup} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

Η προαναφερθείσα διαδικασία μπορεί να μας επιτρέψει μια παρόμοια κατασκευή σε ένα γενικό τόπο.

Ορισμός 53 *Σε ένα τόπο* $\mathbf{E}$ *ορίζουμε τα εξής βέλη:*

1. *Το βέλος άρνηση* $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ *να είναι το μοναδικό βέλος για το οποίο το παρακάτω είναι εφελκυστής.*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\bot} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \neg} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

2. *Το βέλος τομή* $\cap : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ *να είναι ο μοναδικό βέλος για το οποίο το παρακάτω είναι εφελκυστής.*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{[\top,\top]} & \Omega\times\Omega \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \cap} \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

3. *Το βέλος ένωση* $\cup : 2 \times 2 \longrightarrow 2$ *να είναι όπως παραπάνω (παραλείπουμε το διάγραμμα) η* χ_g *για* g *να είναι ο*

$$g = [(\top_\Omega, 1_\Omega), (1_\Omega, \top_\Omega) : \Omega + \Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega]$$

4. *Το βέλος συνεπαγωγή* $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ *να είναι η* χ_e *για* e *να είναι ο εξισωτής των*

$$\Omega \times \Omega \underset{pr_1}{\overset{\cap}{\rightrightarrows}} \Omega$$

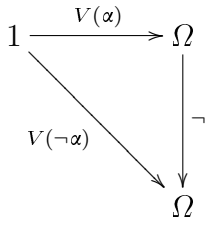
Ο παραπάνω ορισμός μας επιτρέπει να κάνουμε σημασιολογία πάνω σε ένα τόπο. Μια εκτίμηση μιας προτασιακής λογικής είναι μια συνάρτηση

$$V_0 : \Phi_0 \longrightarrow \mathbf{E}(1, \Omega)$$

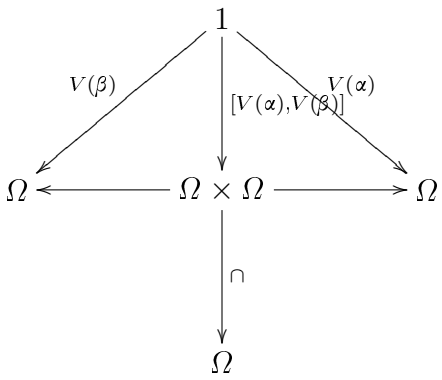
όπου το Φ_0 είναι το σύνολο των ατομικών προτάσεων . Την εκτίμηση μπορούμε να την επεκτείνουμε σε όλους τους προτασιακούς τύπους Φ ως εξής:

$$V : \Phi \longrightarrow \mathbf{E}(1, \Omega)$$

1. $V(\neg\alpha) = \neg \circ \alpha$



2. $V(\alpha \wedge \beta) = \cap \circ [V(\alpha), V(\beta)]$



3. $V(\alpha \vee \beta) = \cup \circ [V(\alpha), V(\beta)]$

4. $V(\alpha \rightarrow \beta) ==\Rightarrow \circ[V(\alpha), V(\beta)]$

Ορισμός 54 *Θα λέμε ένα προτασιακό τύπο* α **E**-*έγκυρο αν για κάθε εκτίμηση* V *στον τόπο* **E** ,

$$V(\alpha) = \top$$

Έχουμε ορίσει μια πλήρη σημασιολογία για μια προτασιακή λογική πάνω σε ένα τόπο. Ένας τόπος λοιπόν μπορεί να γίνει το μοντέλο για μια απλή θεωρία, ένα μοντέλο όμως αρκετά διαφορετικό από τα συνήθη συνολοθεωρητικά μοντέλα. Η διαφοροποίηση έγκειται στο ότι οι αληθοτιμές δεν παίρνουν αναγκαστικά μια από τις δύο τιμές 0 ή 1, αλήθεα ή ψεύδος, αλλά ταυτίζονται με τα στοιχεία του Ω. Το Ω τώρα μπορεί να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο. Αυτή η πολυπλοκότητα φαίνεται στα παρακάτω.

Το επόμενο βήμα από την στιγμή που ορίσαμε μια σημασιολογική αποτίμηση είναι να αναρωτηθούμε για την πληρότητα και την ορθότητα της. Έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα (Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι απλές και παραλείπονται, ενώ ένα αντιπαράδειγμα για την πρόταση δεν είμαστε σε θέση να δώσουμε).

Θεώρημα 8 *(Πληρότητα) Οι* **E***-έγκυρες προτάσεις είναι θεωρήματα της κλασσικής λογικής*

$$\mathbf{E} \models \alpha \Rightarrow \vdash_{CL} \alpha$$

Πρόταση 18 *Υπάρχουν τόποι στους οποίους ο νόμος αποκλείσεως του τρίτου δεν ισχύει, δηλαδή ο προτασιακός τύπος* $\alpha \vee \neg\alpha$ *δεν είναι έγκυρος. Η σημασιολογική αποτίμηση που περιγράψαμε δηλαδή δεν είναι ορθή.*

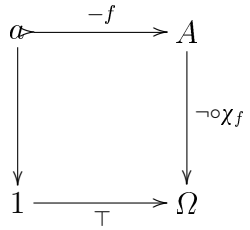
Θεώρημα 9 *Αν ο τόπος* **E** *είναι δυαδικός τότε*

$$\mathbf{E} \models \alpha \Leftrightarrow \vdash_{CL} \alpha$$

Στα σύνολα το σύνολο των υποσυνόλων του A είναι μια άλγεβρα Boole. Θα δείξουμε κάτι ανάλογο και για την κατηγορία των υποαντικείμενων ενός αντικείμενου.

Ορισμός 55 *Έστω* A *ένα αντικείμενου του τόπου* E *και* f, g *δύο αντικείμενα της κατηγορίας* $Sub(A)$*. Τότε,*

1. $-f$ *είναι το αντικείμενο εκείνο της* $Sub(A)$ *το οποίο έχει χαρακτηριστική* $\neg \circ \chi_f$



2. $f \cap g$ *είναι το αντικείμενο εκείνο της* $Sub(A)$ *το οποίο έχει χαρακτηριστική* $\chi_f \cap \chi_g = \cap \circ (\chi_f, \chi_g)$

3. $f \cup g$ *είναι το αντικείμενο εκείνο της* $Sub(A)$ *το οποίο έχει χαρακτηριστική* $\chi_f \cup \chi_g = \cup \circ (\chi_f, \chi_g)$

Πρόταση 19 *Το* $\langle Sub(A), \subseteq, \cup, \cap, - \rangle$ *πλέγμα (lattice) φραγμένο από τα* 0_A *και* 1_A *(τερματικό και αρχικό αντικείμενο).* **Απόδειξη:***Η απόδειξη είναι ιδιαίτερα μακροσκελής και παραλείπεται.* □

Το $Sub(A)$ δεν είναι άλγεβρα Boole επειδή δεν ισχύει πάντοτε η ιδιότητα

$$f \cup -f = 1_A$$

.

Ορισμός 56 *Ένας τόπος λέγεται* boolean *όταν για κάθε αντικείμενό του* A *το* $\langle Sub(A), \subseteq \rangle$ *είναι άλγεβρα Boole.*

Θεώρημα 10 *1. Ο τόπος* $\mathbf{E}$ *είναι boolean όταν, και μόνο όταν είναι κλασικός.*

2. Αν ο τόπος $\mathbf{E}$ *είναι boolean τότε*

$$\mathbf{E} \models \alpha \vee \neg\alpha$$

.

Θεώρημα 11 *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. Η σημασιολογία στον τόπο E *είναι πλήρης και ορθή.*

2. $\mathbf{E} \models \alpha \vee \neg\alpha$

3. Το $Sub(1) \cong \mathbf{E}(1, \Omega)$ *είναι άλγεβρα Boole.*

Είναι τώρα εύκολο να επεκτείνουμε την παραπάνω συζήτηση για τα μοντέλα μιας προτασιακής λογικής σε έναν τόπο και σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα ορίζοντας κανόνες αποτίμησης ανάλογους με τους γνωστούς κανόνες του Tarski. Το γενικό συμπέρασμα στο οποίο φτάνουμε (και σε σχέση με τα προηγούμενα) είναι το εξής:

Θεώρημα 12 *Αν* $\vdash_I L\varphi$ *τότε* $\mathbf{E} \models \varphi$

Το παραπάνω θεώρημα θεμελιώνει μια εκ πρώτης προσέγγισης ιδιότυπη σχέση ανάμεσα στους τόπους και την ιντουσιονιστική λόγική. Η εσωτερική λογική που δημιουργούμε σε ένα τόπο δεν είναι γενικά κλασσική, και οι τόποι είναι μοντέλα για ιντουσιονιστικές θεωρίες.

2.15 Βασικές έννοιες στους τόπους

Πρόταση 20 *Σε ένα τόπο $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός, ακριβώς όταν είναι επιμορφισμός και μονομορφισμός.*
Απόδειξη:.*Η μια φορά είναι προφανής ενώ η απόδειξη της άλλης φοράς βασίζεται στην εξής πρόταση (που αποδεικνύεται εύκολα): Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι μονομορφισμός τότε, ο f είναι ένας εξισωτής των μορφισμών χ_f και $true \circ !_B$* □

Ορισμός 57

- *Ένας τόπος είναι* εκφυλισμένος *(degenerated) όταν όλα τα αντικείμενα είναι ισομορφικά μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, όταν $0 \cong 1$.*
- *Ένας τόπος είναι* μη-εκφυλισμένος *(non-degenerated) όταν δεν είναι εκφυλισμένος ή, ισοδύναμα, όταν το αντικείμενο 0 δεν έχει στοιχεία.*
- *Ένας τόπος είναι* well-pointed *όταν δεν είναι εκφυλισμένος και ικανοποιεί το αξίωμα της έκτασης.*

Να θυμίσουμε εδώ πως το αξίωμα της έκτασης εκφρασμένο κατηγοριακά έχει ως εξής: Αν f, g δυο βέλη με κοινο πεδίο A και συνπεδίο B διαφορετικά μεταξύ τους, τ'οτε υπάρχει ένα στοιχείο $x : 1 \longrightarrow A$ τέτοι ώστε $f \circ x \neq g \circ x$.

Θεώρημα 13 *Αν E είναι well-pointed τόπος, τότε κάθε μη μηδενικό αντικείμενο είναι μη κενό.*
Απόδειξη: *Έστω $A \neq 0$ τότε τα βέλη $0_A : 0 \longrightarrow A$ και $1_A : A \longrightarrow A$ είναι σίγουρα διαφορετικά, άρα $\chi_{0_A} \neq \chi_{1_A}$. Από το αξίωμα της έκτασης υπάρχει $x : 1 \longrightarrow A$ τέτοιο ώστε $\chi_{0_A} \circ x \neq \chi_{1_A} \circ x$, συνεπώς το A έχει ένα στοιχείο, άρα είναι μη κενό.* □

Στον τόπο **Sets** έχουμε $\Omega = \{0, 1\}$ και δύο στοιχεία του Ω $\{0\} = 1 \longrightarrow \Omega$. Το true με $\top(0) = 1$ και το false με $\bot\ (0) = 0$

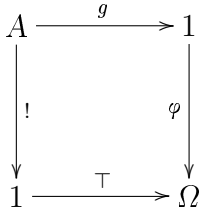
$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\ !\ } & 1 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle false} \\ 1 & \xrightarrow{\ true\ } & \Omega \end{array}$$

Ανάλογα, σε κάθε τόπο έχουμε το false (ή $\bot$) να είναι το μοναδικό βέλος που κάνει το επόμενο εφελκυστή

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\ !\ } & 1 \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle \bot} \\ 1 & \xrightarrow{\ \top\ } & \Omega \end{array}$$

Ορισμός 58 *Ένα μη εκφυλισμένος τόπος είναι δυαδικός ή δισθενής (bivalent) αν τα* $\top$ *και* $\bot$ *είναι τα μοναδικά στοιχεία του* Ω*.*

Θεώρημα 14 *Αν ο τόπος* **E** *είναι well-pointed, τότε είναι και δυαδικός.*
Απόδειξη: *Έστω* $\varphi : 1 \longrightarrow \Omega$ *ένα στοιχείο του* Ω *και από τον εφελκυστή των* φ *και* $\top$

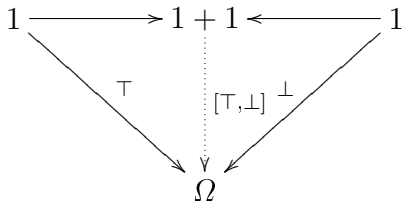


παίρνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $A \cong 0$ *τότε από τα παραπάνω* $\varphi = false$

Αν όχι $A \cong 0$ *τότε από την στιγμή που ο* **E** *είναι well-pointed, το αντικείμενο* A *έχει ένα στοιχείο* $x : 1 \longrightarrow A$*. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο μορφισμός* g *είναι επιμορφισμός (πράγματι αν* h *,*k *είναι βέλη* $1 \longrightarrow B$ *τότε* $h \circ g = k \circ g \Rightarrow h \circ g \circ x = k \circ g \circ x \Rightarrow h = k$ *με την τελευταία συνεπαγωγή να ισχύει διότι το* $g \circ x : 1 \longrightarrow 1$ *μπορεί να είναι μόνο το* id_1 *) Από την προηγούμενη πρόταση ο* g *είναι ισομορφισμός (ως επιμορφισμός και μονομορφισμός).Άρα* $A \cong 1$*. Έτσι* $\varphi = \chi_g = \chi_{id_1} = true$ *Δείξαμε λοιπόν πως ένα στοιχείο του* Ω *δεν μπορεί πάρα να είναι true ή false.* □

Κάθε τόπος έχει συνγινόμενα, οπότε υπάρχει το βέλος $[\top, \bot] : 1 + 1 \longrightarrow \Omega$



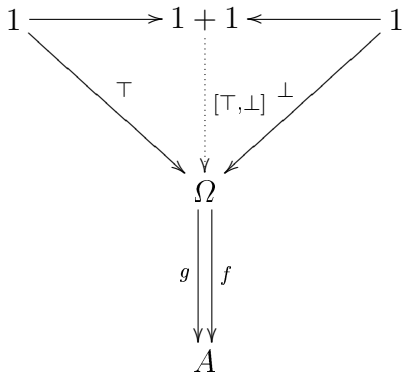
Ορισμός 59 *Ένας τόπος λέγεται* κλασσικός *(classical) αν το βέλος* $[\top, \bot]$ *είναι ισομορφισμός δηλαδή, αν*

$$1 + 1 \cong \Omega$$

Θεώρημα 15 *Αν ο τόπος* E *είναι well-pointed, τότε είναι και κλασικός.*
Απόδειξη: *Θα χρησιμοπιήσουμε το εξής λήμμα χωρίς απόδειξη (μπορεί να βρεθεί στο Goldbatt 1979)*

Λήμμα 2 *Σε κάθε τόπο το βέλος* $[\top, \bot]$ *είναι μονομορφισμός.*

Μάς μένει να δείξουμε ότι είναι και επιμορφισμός. Έτσι υποθέτουμε ότι $f \circ [\top, \bot] = g \circ [\top, \bot]$



τότε

$$f \circ \top = f \circ [\top, \bot] \circ i$$

$$= g \circ \top$$

$$= f \circ [\top, \bot] \circ i$$

$$= g \circ \top$$

και παρόμοια μπορύμε να δείξουμε ότι $f \circ \bot = g \circ \bot$. *Εφόσον τώρα τα* $\top$ *και* $\bot$ *είναι τα μόνα στοιχεία του* Ω, *και κανένα από αυτά δεν διαχωρίζει τα* f *και* g, *έπεται ότι* $f = g$. □

Θα δώσουμε και ένα ακόμα θεώρημα αρκετά σημαντικό, χωρίς όμως απόδειξη.

Θεώρημα 16 *Ο τόπος* E *είναι well-pointed ακριβώς όταν είναι κλασικός και τα αντικείμενά του είναι μη κενά.*

Ορισμός 60 *Ένα βέλος* $f : A \longrightarrow B$ *σε μια κατηγορία με τερματικό στοιχείο είναι* ένα-προς-ένα *όταν για κάθε* $y : 1 \longrightarrow B$ *υπάρχει κάποιο* $x : 1 \longrightarrow A$ *με* $f \circ x = y$ *και είναι* επί *όταν για οποιαδήποτε* $x, y : 1 \longrightarrow A$ *με* $f \circ x = f \circ y$ *ισχύει ότι* $x = y$.

Πρόταση 21 *Αν* E *είναι ένας well-pointed τόπος, τότε ένα βέλος σε αυτόν* $f : A \longrightarrow B$ *είναι*

1. *ένα-προς-ένα, αν και μόνο αν είναι επιμορφισμός*

2. *επί, αν και μόνο αν είναι μονομορφισμός.*

Απόδειξη: *Η απόδειξη είναι εύκολη, αν και κάπως τεχνική, και μπορεί να βρεθεί στον Goldbatt 1979.* □

Θα προσπαθήσουμε τώρα μια πρώτη προσέγγιση στην θεμελίωση των μαθηματικών με εναλλακτικό (σε σχέση με την Θεωρία Σύνόλων) τρόπο. Στόχος είναι να υπάρξει μια ανασύνθεση των αξιώματων και των ορισμών τις ZFC θεωρίας στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών. Δίνουμε τις παρακάτω συνθήκες:

NE (Non Empty) Όλα τα μη αρχικά αντικείμενα έχουν τουλάχιστον ένα στοιχείο.

Οι επόμενες συνθήκες είναι ιδιαίτερα σημαντικες γιατί μας δίνει μια έκφραση του αξιώματος της επιλογής σε κατηγοριακούς όρους.

AC1 Κάθε επιμορφισμός έχει section αντίστροφο.

AC2 Αν το αντικείμενο A δεν είναι ισόμορφο με το 0, τότε για κάθε $f : A \longrightarrow B$ υπάρχει $g : B \longrightarrow A$ με

$$f \circ g \circ f = f$$

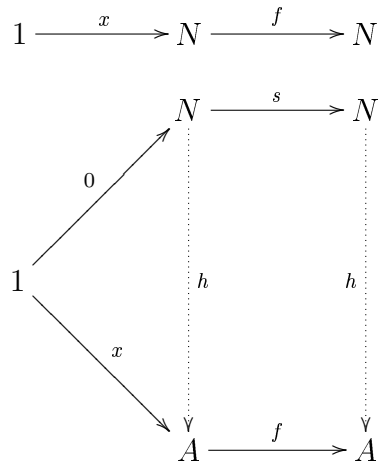
Η σχέση αυτών των δυο (που είναι και τα δύο χρήσιμα) είναι $(AC2) \Leftrightarrow (AC1) \wedge (NE)$

Μια πολύ σημαντική κατασκευή είναι αυτή των φυσικών αριθμών. Μέχρι τώρα στην θεωρία κατηγοριών και τόπων δεν έχουμε δει κάτι που να μπορεί να θεωρηθεί ώς 'φυσικοί αριθμοί'. Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του αντικειμένου των φυσικών αριθμών που οφείλεται στον Lawvere.

Ορισμός 61 Αντικείμενο φυσικών αριθμών *(natural number object) είναι ένα αντικείμενο* N *και με δυο μορφισμούς*

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

τέτοια ώστε να ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα καθολικότητας: Για κάθε αντικείμενο A *και βέλη* x, f *όπως παρακάτω υπάρχει μοναδικό βέλος* $h : N \longrightarrow A$



Παρατηρούμε τώρα ότι ένας στοιχειώδης τόπος, well pointed, με φυσικό αντικείμενο δεν είναι τίποτα παρα η κατηγορία που περιέγραψε ο Lawvere με το ETCS.

Κεφάλαιο 3

Η Φιλοσοφια των Μαθηματικών και η Θεωρία Κατηγοριών

3.1 Προέλευση και το πρόγραμμα Erlangen

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των μειζόνων φιλοσοφικών προβλημάτων που αφορούν την Θεωρία Κατηγοριών τόσο της ίδιας ως θεωρία με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, όσο και σε σχέση με την Θεωρία Συνόλων και τα ζητήματα που προκύπτουν σε αντιδιαστολή με αυτήν για την θεμελίωση των μαθηματικών καθώς επίσης και τον ριζικά διαφορετικό τρόπο θέασης που μας προσφέρεται αν δούμε την ΘΚ ως θεμελιώδη.

Το πρώτο πράγμα που θα προσπαθήσουμε να κάνουμε είναι να βρούμε την θέση της Θεωρίας Κατηγοριών μέσα στην ιστορική πορεία των μαθηματικών, να δούμε το εννοιολογικό νήμα που τη συνδέει με προγενέστερες προσπάθειες και να μελετήσουμε τις σχέσεις τομής και συνέχειας με παλαιότερες ιδέες και μεθόδους. Πιστεύουμε πως αυτό είναι ένα απαραίτητο μοτίβο και άγχος για όποιον που θέλει να απαντήσει σε σφαιρικά ερωτήματα σχετικά με ένα αντικείμενο αλλά, εδώ με την Θεωρία Κατηγοριών, αντιμετωπίζουμε ένα σοβαρό πρόβλημα, το οποίο εν πολλοίς καθορίζει και το όλο εγχείρημα αυτού του κεφαλαίου: Η θεωρία Κατηγοριών και η Θεωρία τόπων είναι σχετικά νέες θεωρίες αλλά κυρίως η φιλοσοφική συζήτηση και αναζήτηση γύρω από αυτές είναι δραματικά πρόσφατη και σε καμία περίπτωση δεν έχει φτάσει σε ολοκληρωμένα αποτελέσματα (τεκμήριο για αυτό είναι ότι δεν υπάρχει στη διεθνή βιβλιογραφία μια συγκροτημένη προσπάθεια για την παρουσίαση των ζητημάτων που πραγματεύεται το παρόν κεφάλαιο). Πολώ δε μάλλον αυτά δεν έχουν γίνει κτήμα των "εργαζόμενων μαθηματικών", πράγμα αναγκαίο για να δεχτούμε να επικυρώσουμε την άποψη για μια εννοιολογική διαφοροποίηση. Αυτό δημιουργεί προβλήματα όσον αφορά την σχέση που θα έπρεπε να έχει μια ιστορική και φιλοσοφική αποτίμηση της Θεωρίας Κατηγοριών με το μέλλον της. Αλλά και σε αναφορά με το παρελθόν λίγη συζήτηση έχει γίνει. Συνήθως η ΘΚ παρουσιάζεται σαν ένα σώμα ξένο προς την προγενέστερη ιστορία των

μαθηματικών και η μεθοδολογία της ασύμμετρη με την παρελθούσα διανοητική προσπάθεια στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Αλλά τα πράγματα εκτιμούμε πως δεν είναι έτσι όπως έδειξε ο JP Marquis στο πρόσφατο βιβλίο του From a Geometrical Point of View. Η θεωρία κατηγοριών εντάσσεται με φυσικό τρόπο στην πορεία των ιδεών που ξεκίνησε με το πρόγραμμα Erlangen που διατύπωσε ο Felix Klein και αποτελεί μια ουσιώδη, κατά κάποιο τρόπο, γενίκευση του.

Το 1872 ο Klein, στο λόγο του όταν πήρε έδρα στο πανεπιστήμιο του Erlangen, έδωσε ένα περίφημο ορισμό για το τι είναι γεωμετρία:

> *Γεωμετρία είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων ενός χώρου (συνόλου) που παραμένουν αναλλοίωτες ως προς κάποια δεδομένη υποομάδα της ομάδας των μετασχηματισμών.*

Με τον ορισμό αυτό ο Klein δημιούργησε ένα νέο επιστημονικό πρόγραμμα για την ενοποίηση των γεωμετριών και την ταξινόμηση τους. Το 1872 ήταν ήδη μια εποχή που είχαν καθιερωθεί πολλές γεωμετρίες (ευκλείδεια, μη ευκλείδειες, αφφινική, προβολική, μετρική γεωμετρία) που όριζαν η κάθε μια και ένα διαφορετικό τρόπο σύλληψης και αντίληψης της έννοιας του χώρου και χρησιμοποιούσαν ριζικά διαφορετικά και ασύμμετρα μεταξύ τους εργαλεία. Με το μανιφέστο του αυτό ο Klein προσπάθησε να βρει έναν ενοποιητικό παράγοντα που θα μπορούσε να συνενώσει όλες αυτές τις προσπάθειες, μια πρωταρχική ιδέα που θα μπορούσε να είναι η πρώτη αρχή μιας ενιαίας προσέγγισης για τη γεωμετρία. Και αυτό το πέτυχε μέσω της αφηρημένης άλγεβρας και ειδικά με την λεγόμενη ομάδα συμμετρίας.

Το πρόγραμμα του Erlagen είχε γενικά πολλές επιπτώσεις στον τρόπο με τον όποιο αντιλαμβανόμαστε τα μαθηματικά ως όλον, και άνοιξε μια νέα σελίδα στην προσπάθειες θεμελίωσης. Ιδιαίτερη σημασία για όσα θα δούμε και αργότερα έχει η συσχέτιση αυτής της προσπάθειας με τις αξιώσεις του μαθηματικού δομισμού (στην πραγματικότητα το Erlangen είναι μαζί με τους Bourbaki οι δυο κλασικές δομιστικές προσπάθειες, προγενέστερες της "επίσημης έναρξης" του μαθηματικού δομισμού). Ενδεικτική είναι η τοποθέτηση του φιλόσοφου Jean Piaget ο οποίος στο βιβλίο του Structuralism (1970) αναφέρει: "*Στα μάτια των σύγχρονων στρουκτουραλιστών (...) το πρόγραμμα Erlangen αποτελεί μια μερική νίκη στην από την στιγμή που θέλουν να βάλουν όλα τα μαθηματικά, και όχι μόνο την γεωμετρία, κάτω από την έννοια της δομής.*" Στο πρόγραμμα αυτό ο Marquis τονίζει τρείς πλευρές με σοβαρές φιλοσοφικές επιπτώσεις:

> *Πρώτον το γεγονός πως οι ομάδες μετασχηματισμών δεν είναι απλά και μόνο χρήσιμα αλγεβρικά εργαλεία για την στοιχειώδη γεωμετρία αλλά εμπεριέχουν με ένα ακριβή τρόπο την αλγεβρική κωδικοποίηση ενός κριτηρίου ισότητας για γεωμετρικά αντικείμενα ή για να είμαστε πιο ακριβείς για γεωμετρικά αντικείμενα - τύπους. Δεύτερον, οι ίδιες ομάδες μετασχηματισμών επίσης ορίζουν ένα συγκεκριμένο (...) κριτήριο για τις γεωμετρικές ιδιότητες. Τρίτον ο βασικός σκοπός του προγράμματος είναι να κατηγοριοποιήσει τους γεωμετρικούς χώρους συστηματικά και να δει*

επακριβώς πως αυτοί σχετίζονται ο ένας με τον άλλο. Το πώς αυτές οι τοποθετήσεις, χαρακτηριστικές για την κατά Erlangen γεωμετρία, ικανοποιούνται είναι πολύ εύκολο να το δούμε. Οι τρεις αυτές βασικές μαθηματικές διαδικασίες: η ταύτιση, ο καθορισμός ιδιοτήτων και η κατηγοριοποίηση ορίζονται σε συνάφεια με ένα συγκεκριμένο αλγεβρικό πλαίσιο, την ομάδα μετασχηματισμών, με μονοσήμαντο και καθολικό τρόπο. Με τρόπο που έρχεται να υποκαταστήσει τις προηγούμενες "τοπικές" μεθόδους και να συνενώσει σε ένα ανώτερο επίπεδο αφαίρεσης διάφορες ανάλογες καταστάσεις. Αυτή ακριβώς είναι και η μεθοδολογία που επιχειρείται στη θεωρία κατηγοριών. Αναζητείται κάτι που θα συνθέσει σε ανώτερο βαθμό τις επιμέρους θεωρίες (και όχι της επιμέρους γεωμετρίες), δίνοντας ένα αλγεβρικό χαρακτήρα με την άλγεβρα των ομομορφισμών (στη θέση της ομάδας μετασχηματισμού).

Πάντως αυτή η προσέγγιση ξεκινάει πολύ πιο πριν. Οι Eilenberg και McLane στο "General theory of natural equivalence", το άρθρο τους ουσιαστικά ξεκίνησε την θεωρία κατηγοριών προτάσσουν την ισοδυναμία (και η οποία προφανώς φανερώνει τις προκείμενες ιδέες και στοχεύσεις που είχαν οι δύο στο μυαλό τους όταν δημιουργούσαν τις κατηγορίες) ανάμεσα σε ένα χώρο εφοδιασμένο με την ομάδα μετασχηματισμών του και την κατηγορία εφοδιασμένη με την άλγεβρα των απεικονίσεών της. Όπως το θέτουν και οι ίδιο (σελ 237)

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνέχεια του προγράμματος Erlangen του Klein, με την έννοια ότι ένας γεωμετρικός χώρος μαζί με την ομάδα μετασχηματισμών του γενικεύεται σε μια κατηγορία μαζί με την άλγεβρα των απεικονίσεων της. Ο τρόπος που γίνεται αυτή η συσχέτιση έχει στον πυρήνα της την εξής ιδέα, η οποία ενυπάρχει και στην θεωρία κατηγοριών και στο πρόγραμμα Erlangen: Ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ουσιωδώς "προσκολλημένο" με ένα άλλο αλγεβρικό αντικείμενο, το οποίο του καθορίζει τις ιδιότητες και το στάτους. Η μετατροπή δηλαδή της ουσίας του αντικειμένου από ουσία ενυπάρχουσα μέσα στο αντικείμενο σε ουσία αποκτώμενη δια της δράσης ενός συνόλου άλλων αντικειμένων πάνω στο αντικείμενο.

Αυτή η μάτια των πραγμάτων απορρέει από μια πολύ συχνή στα μαθηματικά παρατήρηση. Πολλές φορές σε πρώτο χρόνο ορίζουμε ένα αντικείμενο αυτοτελώς και με εσωτερικό τρόπο (χωρίς αναφορά δηλαδή σε άλλα αντικείμενα έξω από αυτό που δρουν πάνω του) και παρατηρούμε δουλεύοντας μαζί του πως είναι πολύ συχνό φαινόμενο να εκμαιεύουμε βασικές πληροφορίες κοιτώντας πως ανταποκρίνεται κάτω από κάποιες ενέργειες (απεικονίσεις ή δράσεις επ' αυτού). Έτσι ερχόμαστε σε δεύτερο χρόνο να ορίσουμε αυτό το ίδιο αντικείμενο με ισοδύναμο τρόπο στην βάση του πως συμπεριφέρεται κάτω από αυτές τις ενέργειες. Αυτή η πρακτική, όταν αποκτήσει καθολικά χαρακτηριστικά μετατρέπεται σε ένα πρόγραμμα ανάλογο με τη Θεωρία Κατηγοριών και το Erlangen. Αυτός είναι ο κοινός τόπος που μας επιτρέπει να μιλάμε για ένα κοινό νήμα ιδεών που συνδέει τα δύο αυτά εγχειρήματα.

Εδώ να σημειώσουμε πως είναι ίσως πιθανόν να φάνει πολύ παράδοξο που δύο θεωρίες, τόσο διαφορετικές μπορούν να αποτελέσουν η μια γενίκευση της άλλης. Αλλά είναι σύνηθες στα μαθηματικά η πορεία γενίκευσης να μην είναι μονοσήμαντη, να γίνεται κατά πολλούς και όχι ισοδύναμους τρόπους. Για παράδειγμα, με πολύ διαφορετικό τρόπο επεκτάθηκε το πρόγραμμα Erlangen από τον Καρτάν ώστε να εμπεριέχει και τη διαφορική γεωμετρία. Η παραδοξότητα της θεωρίας κατηγοριών εμφανίζεται γιατί αποτελεί μια ριζοσπαστική γενίκευση, η οποία είναι μάλλον και η βαθύτερη γενίκευση που έχουμε σήμερα στον τομέα της άλγεβρας. Από την άλλη υπάρχουν ειδικοί που ισχυρίζονται πως η σχέση ανάμεσα σε κατηγορίες και Erlangen (πχ ο Marquis στο προαναφερθέν βιβλίο).

Παρόλα αυτά ένα είναι σίγουρο. Η θεωρία κατηγοριών αποτελεί μια γενίκευση, αν όχι με την αυστηρή μαθηματική έννοια, σίγουρα με την έννοια της γενίκευσης κάποιων διανοητικών διαστάσεων και μιας μεθοδολογίας που είναι ταυτόσημη. Το πρόγραμμα του Erlangen προσφέρει μια βοήθεια στη σύλληψη των μαθηματικών αντικειμένων που χρησιμοποιούνται στις κατηγορίες.

3.2 Ζητήματα ανεξαρτησίας

Όταν κάποιος ορίζει, για παράδειγμα, μια ομάδα ως ομάδα μετασχηματισμών ενός συνόλου, τότε είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι ομάδα είναι κάτι το οποίο χρησιμοποιείτε ως ένα εργαλείο για να μελετήσει τις ιδιότητες του δοσμένου συνόλου, και ότι το σύνολο αυτό ήταν το πρωταρχικό. Όταν τώρα προχωράμε στην αφηρημένη έννοια της ομάδας, μπορούμε να κοιτάξουμε κατευθείαν τη δομή της ομάδας όπως ορίζεται από θεωρητικά μέσα, και να επιστρέψουμε μετά στις εφαρμογές της, δηλαδή πίσω στην ομάδα μετασχηματισμού του συνόλου. Στην ίδια θέση όμως μπορούμε να βρεθούμε και όσον αφορά τις κατηγορίες. Πολλές φορές τα αξιώματά της εμφανίζονται ως εργαλεία για να μελετήσουμε συλλογές δομημένων αντικειμένων τα οποία τότε θα έρχονται πρώτα σε σχέση με τις κατηγορίες (δηλαδή η κατηγορία θα έχει νόημα μόνο όταν θα υπάρχουν πιο πριν αυτά τα αντικείμενα για να την ορίσουμε σε σχέση με αυτά). Φυσικά είναι πολύ εύλογο στο σημείο αυτό να αναρωτηθεί κανείς αν μπορούμε να κάνουμε με την κατηγορία κάτι αντίστοιχο με αυτό που κάναμε με την έννοια της ομάδας να προχωρήσουμε σε ένα βήμα αφαίρεσης και να δούμε μια κατηγορία ως ανεξάρτητο αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο, ένα αντικείμενο ψηλότερα από κάθε άλλο στην ιεραρχία των μαθηματικών αφαιρέσεων.

Ένα εύλογο και άμεσο ερώτημα που προκύπτει όταν κάποιος πραγματεύεται την Θεωρία Κατηγοριών ως ένα θεμέλιο των μαθηματικών, και μάλιστα ανταγωνιστικό προς την θεωρία συνόλων, είναι η συνάφεια των δυο αυτών αντικειμένων. Τα μαθηματικά με τον χαρακτήρα της αντικειμενικότητας που έχουν, εν αντιδιαστολή με τις φυσικές επιστήμες (και πολύ περισσότερο με τις κοινωνικές), δεν μπορούν να δεχτούν δύο εναλλακτικούς τρόπους αντιμετώπισής τους εντελώς ανεξάρτητους μεταξύ τους. Με μια αφελή φιλοσοφική διάθεση μπορούμε να πούμε πως για έναν μαθηματικό η ύπαρξη δύο διαφορετικών (σε έννοιες και μεθόδους) θεωριών να προ-

σεγγίσουν ένα μεγάλο κομμάτι της μαθηματικής γνώσης και να παράγουν κοινά αποτελέσματα σημαίνει την έναρξη μιας προσπάθειας που αποσκοπεί σε στόχους όπως οι εξής: να βεβαιωθούμε για την μη αντιφατικότητα των θεωριών, να αναγάγουμε την μια στην άλλη, να προσδιορίσουμε κάποια μετα-μαθηματικά, φιλοσοφικά ή και αισθητικά κριτήρια για να αποφανθούμε για την προτεραιότητα μιας εξ αυτών κοκ. Ζητήματα που έχουν να κάνουν λοιπόν με το πρόβλημα της ανεξαρτησίας και της συσχέτισής τους.

Τέτοια ζητήματα απαντούν πολύ συχνά στην ιστορική πορεία των μαθηματικών και το ότι ανακύπτουν συνεχώς έχει να κάνει με την διαλεκτική της μαθηματικής προόδου: η κατεύθυνση της γενίκευσης και η κατεύθυνση της ειδίκευσης συνυπάρχουν και είναι πολλές φορές δυσδιάκριτες. Η μία θεωρία (ή ακόμα και απόδειξη) συγκρίνεται με μια άλλη διαφορετική, με αποτέλεσμα το ξεπέρασμα και των δυο και την δημιουργία μιας ανώτερης που τις γενικεύει.

Σε αυτό το πλαίσιο πρέπει να δούμε και το ζήτημα που μας αφορά εδώ: τις σχέσεις ανάμεσα στην θεωρία κατηγοριών και την θεωρία συνόλων. Το ζήτημα της ανεξαρτησίας (γενικώς δυο αξιωματικών θεωριών) πρέπει να το δούμε σε τέσσερα διαφορετικά επίπεδα: **Πρώτον** με κριτήρια εσωτερικής συνέπειας και τεχνικής καταλληλότητας. **Δεύτερον** με κριτήρια τις εξωτερικές σχέσεις των θεωριών με αλλά κομμάτια του πλέγματος των μαθηματικών. **Τρίτο**ν εξετάζοντας την συνέπεια με τις φιλοσοφικές προκείμενες που θέτουμε (αν αποφασίσουμε να θέσουμε τέτοιες). **Τέταρτον** συγκρίνοντας και αξιολογώντας τις πρωταρχικές έννοιες στις οποίες πατάει μια θεωρίας. Ας τα δούμε αυτά πιο αναλυτικά.

A. Πρώτα πρέπει να εξετάζεται η σχέση ανάμεσα στις λογικές συνέπειες δυο αξιωματικών θεωριών Α και Β. Κατά πόσο μπορεί η θεωρία Β να αντικαταστήσει τη θεωρία Α, με την έννοια της διατήρησης της εγκυρότητας όλων των Α-έγκυρων προτάσεων που συνεπάγονται από τα αξιώματα της Α. Τα πιθανά ενδεχόμενα είναι τρία: 1)Μια πρόταση που είναι Α-αληθείς να είναι παράλληλα και Β-ψευδής ή αντίστροφα, οπότε έχουμε ασυνέπεια των θεωριών 2)να ταυτίζονται όλες οι αληθείς προτάσεις (ισοδυναμία των θεωριών) 3)οι Β-αληθείς να είναι όσες είναι και οι Α-αληθείς αλλά να υπάρχουν και κάποιες παραπάνω αληθείς στην θεωρία Β (μεγαλύτερη ισχύς της Β έναντι της Α). Προφανώς στην πρώτη περίπτωση αποφαινόμαστε ότι η Β δεν μπορεί να αντικαταστήσει την Α αλλά στις άλλες δυο περιπτώσεις δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα με ασφάλεια. Στην δεύτερη δεν έχουμε κάποιο προφανή λόγο να επιλέξουμε κάποια από τις δύο ενώ στην τρίτη θα χρειαστεί να δούμε το ζήτημα σε βάθος για να εξετάσουμε αν επιθυμούμε ή όχι αυτές τις παραπάνω αληθείς προτάσεις. Για να μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα συμπέρασμα πρέπει να συγκρίνουμε τις δύο θεωρίες με άλλα κριτήρια σαν αυτά που παραθέσαμε παραπάνω (φιλοσοφικά, αισθητικά, μεθοδολογικά). Είναι φανερό τελικά πως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τις σχέσεις δύο θεωριών αποκλειστικά και μόνο βασιζόμενοι στη λογική ανάλυση και την παράθεση αποδείξεων συνέπειας και ισοδυναμίας, αλλά πρέπει να κάνουμε μια φιλοσοφική και πραγματολογική ανάλυση του θέματος. Η λογική μπορεί να αρκεί να κάνουμε μαθηματικά αλλά σε καμία περίπτωση δεν είναι αρκετή από μόνη της ώστε να μιλήσουμε για τα μαθηματικά!

Αυτή η αντικατάσταση των αξιωμάτων Α μέσω των αξιωμάτων της Β μπορεί να γίνει στην πραγματικότητα με δύο τρόπους: Είτε μερικώς είτε ουσιωδώς. Με αυτό εννοούμε το εξής: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αξιώματα της Β για να συνάγουμε αξιώματα της Α (να δούμε τα αξιώματα Α δηλαδή ως θεωρήματα της θεωρίας Β) ή, με μια ισχυρότερη και ουσιωδέστερη έννοια αντικατάστασης, μπορούμε να προσπαθήσουμε να ανασυγκροτήσουμε όλα τα θεωρήματα της Α στο πλαίσιο της Β. Η δεύτερη προσέγγιση, που είναι και η πιο ριζική, είναι αυτή που αντιμετωπίζει τα προβλήματα που αναφέραμε προηγουμένως, αλλά και η πρώτη στην πράξη ποτέ δεν μένει σε αυτό το επίτευγμα αλλά πάντα προσπαθεί να ανταποκριθεί στην ευρύτερη πρόκληση του Β. Άλλωστε λίγη πρακτική ουσία θα είχε και λίγο θα ενδιέφερε τόσο τον φιλόσοφο όσο και τον μαθηματικό απλώς και μόνο να αποδείξει τα αξιώματα από άλλα αξιώματα, αυτό θα έμοιαζε περισσότερο με μια προσπάθεια διασαφήνισης των αξιωμάτων.

Β. Χρειάζεται μια διάθεση συνολικοποίησης των προβλημάτων και αντιμετώπισης των μαθηματικών ως ένα οργανικό όλον. Στα σύγχρονα μαθηματικά σχεδόν ποτέ δεν βρισκόμαστε απέναντι από ένα κλάδο ή θεωρία επαρκώς ανεπτυγμένο που δεν δημιουργεί σχέσεις με άλλους κλάδους. Λέγοντας σχέσεις εννοούμε την αμοιβαία χρήση αποτελεσμάτων, τη μεταφορά μεθόδων, την εισαγωγή εννοιών κτλ.

Έτσι, κατά κάποιο τρόπο, καθώς εισάγουμε στο σύνολο των μαθηματικών νέα στοιχεία, είτε αυτά είναι νέα αξιώματα, είτε νέα εργαλεία είτε απλώς νέες μεθόδοι θέασης των μαθηματικών, αυτό αργά η γρήγορα επηρεάζει και κομμάτι των υπόλοιπων μαθηματικών. Για παράδειγμα το αξίωμα της επιλογής, από την στιγμή που αρνηθούμε ή δεχτούμε, ταυτόχρονα αρνούμαστε και δεχόμαστε ένα μεγάλο κομμάτι των μαθηματικών. Αλλά και γενικότερα, η εισαγωγή της θεωρίας συνόλων σήμανε την έναρξη μιας προσπάθειας για υπαγωγή όλων των γνωστών μαθηματικών στην πρωταρχική έννοια του συνόλου. Συμπερασματικά δηλαδή, η δουλειά στα θεμέλια, επηρεάζει όλο το οικοδόμημα, μια αλλαγή στις θεμελιώδης, πρωταρχικές, ύστατες βάσεις μπορεί, σαν ένα ντόμινο, να αναθεωρήσει πράγματα σε όλα τα μαθηματικά, αλλά και αντιστρόφως (και αυτό είναι πολύ σημαντικό), όλη η ουσία και όλο το νόημα μιας αλλαγής στα θεμέλια είναι οι αλλαγές που επάγονται στο κύριο σώμα. Αυτό μας δίνει και ένα κριτήριο για την αντιμετώπιση προβλημάτων στα θεμέλια: το κριτήριο της ολότητας, της αναφοράς στο όλον ως αναγκαία συνθήκη για την αντιμετώπιση ζητημάτων στα επιμέρους.

Αυτή η προσέγγιση έχει στον πυρήνα της την άρνηση μιας ιεραρχικής κατάταξης της (μαθηματικής εν προκειμένου) γνώσης. Οι μαθηματικές προτάσεις δεν πρέπει να διαχωρίζονται σε θεμελιώδεις και σε μη θεμελιώδεις με τέτοιο τρόπο που οι πρώτες να αποτιμώνται με τρόπο ανεξάρτητο από της δεύτερες, αλλά αντιθέτως όλα κρίνονται συνολικά και τα μαθηματικά νοούνται ως ένα ενιαίο και οργανικό όλον. Έμφαση επίσης δίδεται και στην μαθηματική πρακτική και τα μαθηματικά όπως τα χρειάζονται και τα αντιλαμβάνονται οι εργαζόμενοι μαθηματικοί. Το κριτήριο της ολότητας είναι τελικά και ένα κριτήριο της πράξης: κάθε φορά αναζητούμε τη βέλτιστη εκείνη λύση που να μπορεί τελικά να οδηγεί σε πρακτικές απολήξεις που να είναι ομόρροπες

προς τις κατευθύνσεις των πραγματικών μαθηματικών. Αυτός ο τρόπος σκέψης είναι τέλος μάλλον ενάντια στη θεμελιωτίστικη βάση των μαθηματικών, αλλά και εν γένει στις αντιλήψεις της αναλυτικής φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Αυτό είναι κατά την γνώμη μας ένα βασικό κριτήριο για την αντιμετώπιση και του ζητήματος της θεωρίας κατηγοριών αλλά η απάντηση που δίνεται δεν είναι σε καμία περίπτωση σαφής και κατηγορηματική.

Αν κατ' αρχήν δεχτούμε έναν μη-ουσιαστικό ρόλο για την Θεωρία Κατηγοριών ως θεμελίωση (όπως τον ορίσαμε παράπανω), τότε δεν υπάρχει κανένα απολύτως πρόβλημα. Στο μεγάλο κομμάτι των μαθηματικών το οποίο λειτουργεί καλά με τη χρήση συνόλων απλώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατηγοριακά σύνολα (δηλαδή σύνολα ορισμένα μέσα στην θεωρία κατηγοριών και τόπων όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) και όλα βαίνουν καλώς αφού δεν χρειάζεται να αλλάξουμε κάτι στην πρακτική μας. Στο κομμάτι τώρα που η παραδοσιακή προσέγγιση με τα σύνολα παρουσιάζει πρόβλημα (όπως η κατά Grothendieck αλγεβρική γεωμετρία) τότε χρησιμοποιούμε την θεμελιώδες εννοιολογικό πλαίσιο των κατηγοριών.

Αν πάλι απαιτήσουμε οι κατηγορίες να είναι το ουσιαστικό θεμέλιο των μαθηματικών τότε αντιμετωπίζουμε πρόβλημα. Είναι πραγματικά πολύ δύσκολο να σκεφτούμε πως θα ήταν όλα τα μαθηματικά, ακόμα και τα στοιχειωδέστερα εάν καλούμασταν να τα δούμε όλα σαν κατηγορίες. Πόσω δε μάλλον είναι, εξ όσο γνωρίζουμε, ακόμα ανοιχτό ζήτημα το να θα μπορέσουμε μπορέσουμε να επαναδιατυπώσουμε όλες τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο απαλλαγμένο από κάθε νύξη και χρήση συνόλων. Από την άποψη αυτή λοιπόν, το κριτήριο της καθημερινής πρακτικής φαίνεται να αποτυγχάνει.

Η πιο προφανής απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα "ξυράφι του Occam" και να περικόψουμε την υπερβολική απαίτησης για ουσιαστική και απόλυτη θεμελίωση πάνω στην θεωρία κατηγοριών και να υιοθετήσουμε μια πιο ευέλικτη προσέγγιση. Κατά την γνώμη μας εκεί βρίσκεται και η ορθότερη τοποθέτηση του γενικότερου προβλήματος που εξετάζουμε, αλλά για να είναι φιλοσοφικά αποδεκτή και πλήρης απάντηση θα χρειαστεί να εξετάσουμε το θέμα από πιο κοντά με τις λεγόμενες τοπικές θεμελιώσεις για τα μαθηματικά.

Η θεωρία κατηγοριών τώρα έχει μια ακόμη πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα η οποία θα λέγαμε ταιριάζει απόλυτα με ότι συζητάμε εδώ και κατά κάποιο τρόπο καταφέρνει να δώσει μια πραγμάτωση με μαθηματικά εργαλεία της άποψης αυτής που αναπτύξαμε πιο πάνων περί αμοιβαίας σύνδεσης ανάμεσα στα κομμάτια των μαθηματικών.

Όλο αυτό έχει να κάνει με τον ιδιαίτερο ρόλο που επιτελεί στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών η έννοια του συναρτητή. Ο συναρτητής, όπως αναλύσαμε στο κεφάλαιο 2, είναι ένας μορφισμός ανάμεσα στις κατηγορίες, ένας τρόπος για κατευθυνθούμε από την μια κατηγορία στην άλλη, η κατάλληλη συνάρτηση ανάμεσα στις κατηγορίες. Με τον ίδιο τρόπο τώρα που ένας ομομορφισμός ομάδων, μπορεί και μετάφέρει ιδιότητες από τη μια στην άλλη, ανάλογα ένας συναρτητής μπορεί να μετάφερει ιδιότητες ανάμεσα στις κατηγορίες. Αυτό μπορούμε να το δούμε

διαισθητικά με δύο τρόπους:

Πρώτον ο συναρτητής έχει χαρακτήρα αναπαράστασης. Μπορεί να αναπαραστήσει μια δομή μέσα στα πλαίσια μια ευρύτερης κατηγορίας. Πχ ο συναρτητής που μας απεικονίζει μια ομάδα, ειδομένη ως κατηγορία, στην κατηγορία για παράδειγμα των τοπολογικών χώρων στην ουσία δημιουργεί τις τοπολογικές ομάδες. Έχουμε δηλαδή ένα γενικό εργαλείο για να μπορέσουμε να δούμε πως αντικείμενα από μια περιοχή των μαθηματικών εμβαπτίζονται μέσα σε μια άλλη θεωρία. Να δούμε σε τελική ανάλυση, πως ένα γεγονός που συμβαίνει σε μια περιοχή των μαθηματικών επηρεάζει μια άλλη.

Δεύτερον μια ειδική, και πάρα πολύ σημαντική κατηγορία συναρτητών, οι συζηγείς συναρτητές, έχουν την ιδιότητα να διατηρούν από τη μια κατηγορία στην άλλη τους κώνους και τα καθολικά στοιχεία (universal elements). Αυτά είναι που στην ουσία εμπεριέχουν όλες τις βαθιές και δομικές ιδιότητες ανάμεσα στις κατηγορίες (τις ιδιότητες που κατά βάση μας ενδιαφέρουν και που απαντούν πιο συχνά στα μαθηματικά).

Στην πραγματικότητα η πραγμάτωση αυτής της καθολικότητας των μαθηματικών από την θεωρία κατηγοριών είναι απόρροια του γεγονότος που θα δούμε παρακάτω, ότι η θεωρία κατηγοριών είναι ιδανική για τέτοιου είδους ολιστικές και διαλεκτικές προσεγγίσεις των μαθηματικών.

Γ. Η μαθηματική πρακτική (αλλά και γενικώς η κοινωνική μας πράξη) επιθυμούμε κάθε φορά να είναι συμβατή με τις θέσεις αρχής και τις δεσμεύσεις που βάζουμε εξ αρχής. Στα μαθηματικά τώρα αυτές οι δεσμεύσεις έχουν συνήθως τη μορφή φιλοσοφικών απόψεων και θέσεων. Έτσι παραδείγματος χάρη ένας ιντουσιονιστής δεν θα καταδεχτεί ουδέποτε να εφαρμόσει την εις άτοπον επαγωγή, ένας φορμαλιστής δεν θα αναζητήσει ποτέ την κρυμμένη ουσία πίσω από τις εξισώσεις του, και ένας πλατωνιστής θα δει με ιδιαίτερη ευχαρίστηση τη συσωρευτική ιεραρχία των συνόλων, ενώ ένας λογικιστής με όχι και τόση. Δηλαδή από την μεριά ενός φιλοσόφου ή ενός φιλοσοφίζοντα μαθηματικού, η πρακτική του πρέπει να είναι οριοθετημένη από τα σύνορα που ορίζει κάθε φορά η θεωρία του.

Έτσι έχουν τα πράγματα και με τη θεωρία Κατηγοριών και το πρόβλημα που προσεγγίζουμε εμείς εδώ. Για την συμβατότητα θεωρίας Κατηγοριών και μαθηματικού δομισμού υπάρχει μια μεγάλη συζήτηση η οποία δεν έχει καταλήξει και παρουσιάζεται στην ενότητα 3.7 ενώ όσον αφορά τις κλασικές φιλοσοφίες παρουσιάζουμε μια άποψη στην ενότητα 3.8.

Υπάρχει όμως και μια άλλη φιλοσοφική θέση η οποία λέει πως το φιλοσοφικό κριτήριο που παρουσιάζουμε εδώ (αυτό για το πώς οι φιλοσοφικές προκείμενες επηρεάζουν την επιστήμη) είναι εντελώς λάθος. Αυτή η άποψη, γνωστή ως νατουραλισμός, παρουσιάστηκε στην σύγχρονη εκδοχή της από τον Quine ως η "άρνηση του σκοπού της πρώτης φιλοσοφίας" και μας λέει πως είναι λάθος να ορίζουμε οποιοδήποτε εξω-επιστημονικό κριτήριο για θέματα που αφορούν την ίδια την επιστήμη. Η επιστήμη από μόνη εμπεριέχει στο εσωτερικό της όλα τα εργαλεία, της μεθόδους και τα κριτήρια για να αποφανθεί για κάθε ζήτημα. Λέγοντας εδώ επιστήμη δεν εννοούμε τα μαθηματικά ή την φυσική από μόνες τους ξέχωρα, αλλά όλο το λεγόμενο "πλέγμα των πεποιθή-

σεών μας" στο οποίο τα μαθηματικά βρίσκονται στο κέντρο. Συνεπώς για να αποφανθούμε για ένα θέμα (πχ την καταληλότητα της θεωρίας κατηγοριών ως θεμέλιο των μαθηματικών) πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τι συνέπειες επάγει αυτή η θέση στα άλλα κομμάτια του πλέγματος, και να κρίνουμε μετά (αυτό είναι το λεγόμενο ολιστικό κριτήριο).

Ακολουθώντας αυτόν τον τρόπο σκέψης μπορούμε να πούμε κατ' αρχήν ότι απορρίπτουμε τα κριτήρια αυτής και της επόμενης κατηγορίας καθώς επίσης και ότι αναμένουμε να δούμε πως θα μπορέσει πχ να επηρεάσει με ένα τελεσίδικο τρόπο η θεωρία κατηγοριών την θεωρητική φυσική ώστε να μπορέσουμε να αποφανθούμε. Κατά την άποψή μας, αυτή η τοποθέτηση είναι λανθασμένη για δυο λόγους (πολύ κομβικά): Πρώτον δεν αναγνωρίζει τον ρόλο της ιδεολογίας στην επιστήμη και τη διαλεκτική σύνδεση θεωρητικών δεσμεύσεων και πρακτικών επιλογών, και δεύτερον γιατί το να περιμένουμε μέσω του ιστού των πεποιθήσεων να δούμε πως επηρεάζονται όλες οι περιοχές της ανθρώπινης επιστημονικής γνώσης είναι πρακτικά ατελέσφορο, πάντα μπορεί να υπάρξει ένα κομμάτι της επιστήμης που μπορεί να σου ανατρέψει την άποψη.

Δ. Κατ' αρχήν να σημειώσουμε το εξής: Μια αξιωματική θεωρίας πάντοτε, πέρα από τα αξιώματα και τους πρωταρχικούς ορισμούς, προϋποθέτει ρητά ή άρρητα (τις περισσότερες φορές) και ένα σύνολο εννοιών δοσμένων από τα πριν. Δεν υπάρχει εδώ λόγος να συζητήσουμε για το οντολογικό και γνωσιολογικό καθεστώς αυτών των εννοιών, αλλά να παραμείνουμε στην ύπαρξη τους

Είναι προφανές πως αν θέλουμε να μελετήσουμε και να συγκρίνουμε μαθηματικές θεωρίες, που επιδιώκουν μάλιστα να αποκτήσουν το τίτλο του θεμέλιο για τα μαθηματικά, θα χρειαστεί να εξετάσουμε και αυτές τις εκ των προτέρων έννοιες. Για παράδειγμα ο Πουανκαρέ, στρεφόμενος ενάντια στον λογικισμό ισχυρίστηκε ότι οι Frege και Russell μέσα στην προσπάθειά τους για την επίτευξη του λογικιστικού αναγωγισμού προϋπόθεσαν άθελά τους την ικανότητα των αναγνωστών στην αριθμητική και την επαγωγική συμπερασματολογία. Σε αυτά τα πλαίσια εντάσσεται και η επιχειρηματολογία του Feferman (1977) ενάντια στην θεωρία κατηγοριών ως θεμέλιο. Το επιχείρημά του, που είναι ένα από τα κεντρικά σημεία διαμάχης αλλά και πιο εύλογα ερωτήματα που μπορεί να θέσει κανείς, έχει ως εξής: Για να εξηγήσει κάποιος την έννοια της κατηγορίας χρειάζεται να εξηγήσει πρώτα τις έννοιες της συλλογής και της συνάρτησης και την έννοια της δομής. Έτσι, οι έννοιες αυτές έρχονται πριν από την κατηγορία και συνεπώς δεν μπορεί να λογιστεί η κατηγορία σαν θεμέλιο για τα μαθηματικά. Με τα δικά του λόγια:

> *Η ουσία είναι απλώς πως όταν εξηγείς την γενική έννοια της δομής αλλά και συγκεκριμένων δομών όπως οι ομάδες, οι δακτύλιοι και οι κατηγορίες, αυτόματα προϋποθέτουμε ως κατανοητές την έννοιες της συλλογής και της πράξης.* (ο.π. σελ 150)

Έτσι, αφού μια θεωρία που επιδιώκει να αποτελέσει το θεμελιώδες πλαίσιο για όλα τα μαθηματικά πρέπει να εξηγεί από μόνη της αυτές τις έννοιες και τα μην αφήνει αυτό το έργο σε κάποια άλλη θεωρία, είναι σαφές πως η θεωρία Κατηγοριών δεν μπορεί να παίξει ένα τέτοιο ρόλο.

Κατά πρώτον να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις πάνω στο επιχείρημα ως τέτοιο (παρμένες από το From Geometrical Point Of View - J.P. Marquis σελ 63). Το επιχείρημα χρησιμοποιεί μια εντελώς λογική σύλληψη της εξήγησης η οποία μάλιστα παραπέμπει στο επαγωγικό-νομολογικό μοντέλο εξήγησης με τέτοια τρόπο που η παραδοχή της κατανόησης να γίνεται δεκτή μόνο όταν προκύπτει από έναν λογικό συμπέρασμα.

Κατά δεύτερον μια γραμμική αναλογία ανάμεσα στις κατηγορίες και το τις αλγεβρικές δομές (πχ ομάδες) ένεχει την προβληματική ότι ενώ στην δεύτερη περίπτωση αναφερόμαστε σε δομές, στην πρώτη (κατηγορίες) έχουμε να κάνουμε με για ένα γενικό πρότυπο δομών, μια μεταδομή και δεν μπορούμε να τις μεταχειριζόμαστε με τα ίδια κριτήρια.

Πέρα από αυτές τις παρατηρήσεις, οι οποίες χτυπάν την δομή του επιχειρήματος αλλά δεν μας λένε τίποτα για την ουσία του ζητήματος (μάλλον προσπαθούν να ξεφύγουν από το πρόβλημα) η πιο επαρκείς απάντηση πιστεύουμε πως είναι αυτή την οποία παραθέτει ο Helman στο "Does Category Theory Provide a Framework For Mathematical Structuralism " σελ 133-4 και την οποία με την σειρά του την εξάγει από διάφορα γραπτά του MacLane. Σύμφωνα με αυτό το αντεπιχείρημα, κάθε μια θεωρία θεμελίωσης πρέπει να βασιστεί κάπου, ακόμα δε και η θεωρία συνόλων, μπορεί να διατυπωθεί με τέτοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας την αξιωματικοποίηση NBG με την μέθοδο που χρησιμοποίησε ο VonNeuman όταν την πρωτοπαρουσίασε το 1925, δηλαδή ταυτίζοντας τα σύνολα με τις χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις) ώστε η έννοια της συνάρτησης να προαπαιτείτε, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προαπαιτείται και στην θεωρία κατηγοριών.

Το θέμα της κατανόησης τέλος, όπως τέθηκε από τον Feferman υποθέτει ότι για να κατανοήσουμε μια δομή πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ένα σύνολο γυμνών σημείων και κατόπιν, να ορίσουμε συγκεκριμένες πράξεις που ικανοποιούν κάποιες συνθήκες και ορίζονται πάνω στα σημεία του συνόλου. Δηλαδή ο Feferman βλέπει την έννοια της κατανόησης μέσα στις γραμμές της θεωρίας μοντέλων. Παρόλα αυτά, οι μαθηματικές δομές στην μαθηματική πρακτική, τις περισσότερες φορές εμφανίζονται ήδη μέσα σε ένα μαθηματικό πλαίσια και σαν γενικεύσεις από αυτό το πλαίσιο. Έτσι είναι απολύτως πιθανόν το γεγονός ότι μολονότι κάποιες δομές μπορούν να ανακατασκευαστούν λογικά από την γενική ιδέα της συλλογής και της πράξης, είναι ίσως πιο εύκολα κατανοήσιμες πρώτα μέσω παραδειγμάτων. Με αυτό θέλουμε να τονίσουμε όχι ότι ο Feferman είχε άδικο, αλλά ότι το επιχείρημά του προϋποθέτει μια συγκεκριμένη επιστημολογία κατανόησης την οποία όμως μπορούμε και να την αρνηθούμε.

Παρακάτω παραθέτουμε και το σχετικό επιχείρημα του Bell.

> *Now it seems to me implausible that category theory is, or could be, foundationally adequate in the stronger sense. For consider the meta- theoretical framework in which category theory (or any other first-order theory) is embedded. This framework has two basic aspects: the combinatorial, which is concerned with the formal, finitely presented properties of the inscriptions of the ambient formal language, and the semantical, which is concerned with the interpretation and truth of the expressions*

of that language. Neither one of these aspects is at present reducible to the other. The former deals with intensional objects such as proofs and constructions whose actual presentation is crucial, while the latter employs extensional objects such as classes whose identity is determined in- dependently of how they may be presented or defined. So if category theory is to furnish a foundation for mathematics in the stronger sense, it must provide convincing accounts of both of these aspects. But a category is defined to be a class of a certain kind, and classes are extensional, while combinatorial objects are generally not. Since there is no reason to suppose that a satisfactory account of intensional (i.e. non-extensional) objects can be given solely in terms of extensional ones, it seems to me that category theory as currently formulated in terms of classes must fail to provide a faithful account of the combinatorial aspect at least. (Of course for similar reasons this 'weakness' is shared by set theory.)

Η θεωρία Κατηγοριών ως θεμέλιο, από την πρώτη επαφή κιόλας κάποιου με το θέμα εμφανίζει μια ιδιαιτερότητα και ένα διαφορετικό πνεύμα το οποίο ίσως να φανεί ξένο προς ένα μαθηματικό. Ο λόγος είναι πως εμφανίζει κάτι διαφορετικό σε σχέση με την άποψη του κοινού νου για τα θεμέλια των μαθηματικών και προτάσει μια προσέγγιση αρκετά διαφορετική και κάπως πιο εκλεπτυσμένη. Αυτήν την κοινή άποψη για τα θεμέλια την περιγράφει όμορφα ο Russell στην εισαγωγή του βιβλίου του "Introduction to Mathematical Philosophy " όπου λέει (σελ 6):

Τα μαθηματικά είναι μια μελέτη στην οποία, όταν ξεκινάμε από τα ποιο οικεία σημεία και συνεχίζουμε σε δυο κατευθύνσεις. Η πιο συνήθης πορεία είναι η κατασκευαστική, προχωράμε συνεχώς προς σταδιακά αυξανόμενη πολυπλοκότητα: Από τους ακέραιους στους ρητούς, πραγματικούς, μιγαδικούς. Από την πρόσθεση στον πολλαπλασιασμό, στη διαφόριση και την ολοκλήρωση. Η άλλη κατεύθυνση, η λιγότερο συνηθισμένη, περιλαμβάνει την ανάλυση σε όλο και μεγαλύτερη γενίκευση και λογική απλότητα.

(...) αντί να αναρωτιόμαστε τι μπορεί να οριστεί και να επαχθεί από όσα υποθέσαμε να ξεκινήσουμε, αναζητούμε ποιες είναι οι πιο γενικές ιδέες και αρχές που μπορούν να βρεθούν, με τους όρους των οποίων μπορούν να τα αρχικά μας σημεία να οριστούν και επαχθούν. Όταν υιοθετούμε αυτήν την αντίθετη πορεία, η οποία χαρακτηρίζει την φιλοσοφία των μαθηματικών είναι σαν να κινούμαστε ενάντια στα συνηθισμένα μαθηματικά.

Είναι φανερό ότι έχουμε να κάνουμε με μια αντίληψη για τα θεμέλια πού διαφορετική από ότι πρεσβεύουμε με την θεωρία Κατηγοριών. Αν θεωρήσουμε πως ο Russell εδώ εκφράζει (και εμείς νομίζουμε ότι το κάνει) την πλέον καθιερωμένη αντίληψη γύρω από ποιό πρέπει να είναι το

σημείο εκκίνησης, τόσο στην εποχή όσο και σήμερα , τότε με την θεωρία κατηγοριών έχουμε μια μεγάλη αντιστροφή. Πλέον δεν είναι το πιο οικείο αυτό που θα αποτελέσει την βάση, αλλά το ανώτερο αποτέλεσμα μιας πορείας γενικεύσεων το οποίο θα έρθει εκ των υστέρων να αναγορευτεί σε πρώτη αρχή. Κάτι που σύμφωνα με τον Russell πάει κόντρα με την λογική των θεμελίων των μαθηματικών.

Ο G. Kreisler στα άρθρα του Category theory and the foundations of mathematics. (1969) και Observations on popular discussions of foundations (1971) βάζει συγκεκριμένα κριτήρια για το χαρακτήρα που πρέπει να έχουν τα θεμέλια των μαθηματικών και κάνει έναν διαχωρισμό ανάμεσα στην θεμελίωση των μαθηματικών και την προσπάθεια οργάνωσής τους.

> *Για την θεμελίωση είναι σημαντικό να ξέρουμε τι αυτό για το οποίο μιλάμε. Να κάνουμε το αντικείμενο όσο το δυνατόν περισσότερο συγκεκριμένο. In this way we have a chance to make strong assertions. Για παράδειγμα για να κάνουμε μια απόδειξη κατανοητή θα πρέπει να παραλείψουμε όσες ιδιότητες δεν είναι σχετικές με το προς απόδειξη αποτέλεσμα, ή με άλλα λόγια πρέπει να κάνουμε το αντικείμενο λιγότερο συγκεκριμένο. Τα θεμέλια προσφέρουν μια ανάλυση της πρακτικής (...) και πρέπει να περιμένουμε να εισάγουν έννοιες οι οποίες να μην χρησιμοποιούνται στην πράξη.*
>
> *Η θεμελίωση και η οργάνωση (των μαθηματικών) είναι όμοιες από την άποψη ότι και οι δύο προσφέρουν κάποιο είδος πιο συστηματικής προσέγγισης, Αλλά ένα βήμα σε αυτήν την κατεύθυνση που είναι κρίσιμο για την οργάνωση, αν και τετριμμένο από την πλευρά της θεμελίωσης, είναι η στιγμή της επιλογή μιας νέας γλώσσας, όταν (1) τα παλαιά θεωρήματα είναι ευκολότερο να διατυπωθούν αλλά (2) οι πρωταρχικές έννοιες της νέας γλώσσας ορίζονται με όρους της παλαιάς, δηλαδή είναι λογικά μη ανεξάρτητοι από τους πρώτους. Αρκετά συχνά το (1) μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας έννοιες με περισσότερη δομή, δηλαδή λιγότερο αναλύσιμες, το οποίο είναι ένα βήμα στην απέναντι κατεύθυνση από την θεμελίωση. Δηλαδή εν συντομία οι στόχοι της οργάνωσης και της θεμελίωσης μπορούν να είναι εντελώς αντίθετοι.*

Εκφράζεται λοιπόν στα προηγούμενα η απαίτηση από τα θεμέλια να είναι όσο πιο ειδικά γίνεται, να μην είναι προϊόν μιας διαδικασίας αφαίρεσης αλλά να εκφράζουν κάτι το συγκεκριμένο. Έτσι η θεωρία Κατηγοριών απορρίπτεται μιας αποτελεί και η ίδια αποτέλεσμα αφαίρεσης και μάλιστα, με τους όρους του Kreisler, δίνει μια νέα γλώσσα στα μαθηματικά χρησιμοποιώντας έννοιες με περισσότερη δομή (τις κατηγορίες), για να αναγάγει σε αυτές έννοιες με λιγότερη δομή (τα σύνολα). Ο ρόλος που αφήνεται για τις κατηγορίες είναι ο ρόλος της οργάνωσης και κατάταξης των μαθηματικών, ρόλος εργαλείο λοιπόν για τον μαθηματικό ο οποίος ήταν ο πρωταρχικός λόγος ορισμού τους και που ομολογουμένως μπορούν να τον κάνουν με άριστο τρόπο.

Ο συλλογισμός του Kreisler είναι ορθός, μολονότι η αρχική του θέση φαίνεται ατεκμηρίωτη. Κατ' αρχήν να παρατηρήσουμε την συγγένεια της δικής του θέσης με αυτή του Russell που αναφέραμε πιο πριν. Φαίνεται να θέλει να πει το ίδιο πράγμα μόνο που το εντάσσει σε μια ευρύτερη φιλοσοφική κατασκευή η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο επιχείρημα αλλά μάλλον προσπαθεί να γενικεύσει μια ήδη εφαρμόζόμενη ευρέως πρακτική, χάνει το γεγονός πως η οι κατηγορίες έρχονται από την φύση τους να ανατρέψουν υπάρχουσες καταστάσεις και αντιλήψεις στα μαθηματικά. Τέλος προωθεί και έναν διαχωρισμό, θεμελίων των μαθηματικών από την μια μεριά και πραγματικών μαθηματικών από την άλλη. Μάλιστα φτάνει στο σημείο να αρνηθεί την δυνατότητα των εννοιών και των εργαλείων που χρησιμοποιούνται στην μελέτη των πρώτων να εφαρμοστούν στα δεύτερα.

Κατά την γνώμη μας η άποψη του Kreisler δεν αποτελεί μια αποστομωτική απάντηση, και η σημαντικότητά της έγκειται στο ότι πρώτος αυτός εξέφρασε μια πραγματική και πολύ σοβαρή αντίθεση πάνω στο θέμα. Την αντίθεση ανάμεσα στην ατομιστική και θετικιστική έναντι της ολιστικής και διαλεκτικής προσέγγιση. Πρόκειται για έναν βαθιά προκατειλημμένο φιλόσοφο ο οποίος δεν μπόρεσε καν να διανοηθεί πως ο θεμελιώδης ρόλος μπορεί να είναι και οργανωτικός, που δεν μπόρεσε να δει το πώς μπορεί η βάση των πάντων να είναι και η ίδια κομμάτι αυτών.

3.3 Αντιθεμελιωτισμός και Θεωρία Κατηγοριών

Εν αντιθέσει με τις απόψεις του Mac Lane και άλλων ότι η θεωρία κατηγοριών μπορεί να αποτελέσει ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά, και όποτε το ζήτημα είναι πως αυτή αξιολογείτε συγκρινόμενη με άλλες θεμελιώσεις, όπως η θεωρία συνόλων, υπάρχει και μια πιο ριζοσπαστική προσέγγιση που αγνοεί αυτή τη διαμάχη:

> *...το ζήτημα [...] δεν είναι να επιλέξουμε αυτή ή εκείνη τη θεμελίωση αλλά να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία κατηγοριών για να αποφύγουμε την όλη υπόθεση των "θεμελίων"* Awodey S[2004,2]

Ερχόμαστε αντιμέτωποι λοιπόν με την δυνατότητα ενός πιο ριζικού επαναπροσδιορισμού του τρόπου που εκλαμβάνουμε και δομούμε την γνώση, αρνούμενοι την ύπαρξη απόλυτων και ακλόνητων θεμελίων και διερευνώντας έτσι την δυνατότητα εναλλακτικών προσεγγίσεων.

Αν καταρχήν τοποθετήσουμε το ζήτημα συνολικά στην σφαίρα της γνωσιολογίας θα δούμε μια θέση γνωστή και ως "θεμελιωτισμός" ή αλλιώς γραμμική θεωρία δικαιολόγησης να εκκινεί από την αρχή κιόλας της δυτικής φιλοσοφίας. Αν θέλουμε να δώσουμε έναν ορισμό θα λέγαμε:

> *...είναι η άποψη αυτή σύμφωνα με την οποία μια αμέτοχη, αναστοχαστική γνωσιακή στάση είναι σε θέση να αποκαλύψει τις οντολογικές ή γνωσιολογικώς προνομιακές οντότητες στις οποίες είναι αναγώγιμο κάθε τι, όπως "λογικά άτομα" , "προτάσεις*

> *πρωτόκολλα", "αισθητηριακά δεδομένα" και "αυξανόμενο εμπειρικό περιεχόμενο"* J.E. Mc Guire στο Εισαγωγή στην φιλοσοφία της επιστήμης εκδόσεις ΠΕΚ σελ 199

> *Ιεραρχική-γραμμική θεωρία δικαιολόγησης. Οι πεποιθήσεις χωρίζονται σε δυο κατηγορίες: βασικές (που είναι αυτο-δικαιολογούμενες ή προφανώς αληθείς) και παραγόμενες, των οποίων η δικαιολόγηση είναι συναγωγική (inferential) και εξαρτάται από τις βασικές πεποιθήσεις.* S. Psillos: Philosophy of Science from A to Z σελ 95

Συνεπώς όταν μιλάμε για θεμέλια θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας δύο πράγματα: Πρώτον μια πρωταρχική συλλογή στοιχείων, πεποιθήσεων και θέσεων οι οποίες έχουν το ρόλο του μη αναγώγιμου πρωταρχικού και θεμελιώδους και δεύτερον ένα σύνολο κανόνων που μπορούν να παράγουν καλώς όλες τις υπόλοιπες δικαιολογημένες πεποιθήσεις μας.

Ο ορισμός αυτός είναι απλώς μεθοδολογικός και σχηματικός. Δεν μας αφορά εδώ η φύση ή η προέλευση των βασικών πεποιθήσεων, παρά μόνο το γεγονός πως υπάρχουν και πως είναι καθολικές, δηλαδή σε αυτές βασίζονται όλες οι άλλες γνώσεις μας. Οι δε κανόνες παραγωγής δεν απαιτείται να είναι οι κανόνες συμπερασματολογίας κάποιας συγκεκριμένης λογικής.

Από τον ορισμό αυτό έπεται και διπλός τρόπος άρνησης του θεμελιωτισμού. Μπορούμε κατά πρώτον να αρνηθούμε την ύπαρξη τέτοιων προνομιακών οντοτήτων είτε με απόλυτο τρόπο απορρίπτοντας την, εν γένει, δυνατότητα ύπαρξης τους, είτε σχετικά υπερασπιζόμενοι την τοπικότητα και μερικότητα των θεμελίων έναντι της καθολικότητάς τους. Κατά τον δεύτερον τρόπο μπορούμε να "επιτεθούμε" στην ισχύ των μεθόδων συμπερασματολογίας? στο κατά πόσο δηλαδή αυτές μπορούν να μας δώσουν επιτυχώς όλα τις "αλήθειες". Για τον δικό μας σκοπό εδώ όσον αφορά τις δυνατότητες της Θεωρίας Κατηγοριών θα δούμε κυρίως το πρώτο κομμάτι.

Εδώ πρέπει οπωσδήποτε να σημειώσουμε το εξής: Η όλη η λογική του θεμελιωτισμού εδράζεται πριν από όλα σε μια άλλη φιλοσοφική προκείμενη που αρνείται τον γνωσιολογικό αντικειμενισμό, την αντίληψη δηλαδή πως υπάρχουν μια αντικειμενική πραγματικότητα και μια αντικειμενική αλήθεια ανεξάρτητες από την νόηση του υποκειμένου? προϋποθέτει μια μετάβαση, δηλαδή, από την "γνώση" στην "δικαιολογημένη πεποίθηση": ένας ισχυρισμός είναι αληθής όχι γιατί ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα άλλα γιατί είναι δικαιολογημένος στην βάση κάποιων άλλων αληθών πεποιθήσεων. Η έννοια του θεμελίου τώρα έρχεται φυσιολογικά ως λύση στο πρόβλημα της άπειρης αναδρομής (γνωστό και ως επιχείρημα της αναδρομής) του παραπάνω σχήματος. Συνεπώς για να έχει νόημα να μιλήσουμε στα μαθηματικά για θεμέλια ή για άρνηση αυτών πρέπει να δουλέψουμε έξω από κάθε αντικειμενισμό στα μαθηματικά.

Προβάλλοντας τώρα αυτήν την γενική επιστημολογική μεθοδολογία στα μαθηματικά πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Μία πρώτη προσέγγιση της μαθηματικής πρακτικής θα μπορούσε να έλεγε ακόμα και το ότι τα μαθηματικά είναι πρότυπα για τον θεμελιωτισμό. Μια θεωρία εκκινεί από τα αξιώματά της και κατόπιν παράγει με λογικούς κανόνες θεωρήματα και κατασκευάζει οντότητες. Θα μπορούσε να πει κανείς πως τα μαθηματικά όπως τα κάνουμε, από

την αποχή του Ευκλείδη κιόλας, έχουν εν σπέρματι λογικές θεμελίων (ή για το πούμε σωστότερα η θεμελιωτιστική προσπάθεια βασίστηκε και εμπνεύστηκε από τα την δομή και την λειτουργία των μαθηματικών). Άλλα εμείς θέλουμε να δούμε τα μαθηματικά εν συνόλω, ως μια ενιαία περιοχή και να διερευνήσουμε εκεί την δυνατότητα εφαρμογής σε αυτή της μεθοδολογίας των θεμελίων. Οι δύο βασικές προσπάθειες του παρελθόντος να ανασυνθέσουν τα μαθηματικά σε στέρεες βάσεις, απρόσβλητες από κάθε λογική αμφιβολία ήταν ο λογικισμός και φορμαλισμός οι οποίες και απέτυχαν. Σήμερα όπως λέει η P. Muddy

> *Η μαθηματική γνώση πατάει πάνω σε δύο βάσεις: την αμείλικτη παραγωγική λογική, την ύλη των αποδείξεων δηλαδή, και τα αξιώματα τις θεωρίας συνόλων* Penelope Maddy: The Naturalism in Mathematics σελ 1

Στόχος μας εδώ είναι να δούμε κατά πόσο αυτό το μοντέλο μπορεί να αναιρεθεί και κατά πόσο η Θεωρία Κατηγοριών μπορεί να βοηθήσει σε αυτό. Εδώ να σημειώσουμε πως αυτό δεν γίνεται αυτόματα και με ένα προφανή τρόπο μέσα στις κατηγορίες. Στα πλαίσια των υποστηρικτών της θεωρίας Κατηγοριών όπως έχουμε δει υπάρχουν αυτοί που την θέλουν ως ένα εναλλακτικό θεμέλιο, πχ πρόγραμμα ETCS του Lawvere η οι απόψεις για την Κατηγορία όλων των κατηγοριών ή οι προσεγγίσεις για έναν απόλυτο τόπο που θα είναι πλέον αυτός το σωστό πεδίο για την εκτέλεση των μαθηματικών. Σε ότι ακολουθεί θα θέτουμε εαυτόν στο ρεύμα που βλέπει την θεωρία κατηγοριών ως το μονοπάτι για τοπικές θεμελιώσεις.

Μία πρώτη και πιο βασική προσβολή του θεμελιωτισμού μπορεί να γίνει μέσα από τις απόψεις που είναι γνωστές ως συνεκτικισμός (coherentism). Αν θέλαμε να τις οριοθετήσουμε κάπως θα λέγαμε ότι είναι μια$ldots$

> *...ολιστική-μη-γραμμική θεωρία δικαιολόγησης. Δεν υφίσταται διαχωρισμός μεταξύ των πεποιθήσεων. Όλες οι πεποιθήσεις ενός συστήματος είναι εξίσου δικαιολογημένες, στο βαθμό που το σύστημα είναι δικαιολογημένο. Συνεπώς, η δικαιολόγηση είναι ιδιότητα του συστήματος εν τω συνόλω, και όχι των πεποιθήσεων που το αποτελούν εξατομικευμένα. Αυτό που καθορίζει την δικαιολόγηση του συστήματος είναι η συνοχή του ή η συνεκτικότητά του. Το αίτημα της δικαιολόγησης δεν μπορεί να τεθεί για κάθε πεποίθηση εξατομικευμένα. Μια πεποίθηση είναι δικαιολογημένη και πρέπει να γίνει αποδεκτή μόνο εάν εντάσσεται σε ένα σύστημα και μόνο εάν η ένταξή της αυξάνει ή βελτιώνει την συνοχή του συστήματος.* S. Psillos: Philosophy of Science from A to Z σελ 39

Ακολουθώντας αυτό το νήμα της σκέψης γενικά και όχι με απόλυτο τρόπο, θα μπορούσαμε να περάσουμε αυτές τις φιλοσοφικές θέσεις στα μαθηματικά με τον ιδιαίτερο εκείνο τρόπο που η θεωρία κατηγοριών και η "τοπική" προσέγγιση τον θεμελίων βλέπει τα πράγματα. Έτσι η αποτίμηση της αληθοτιμής μιας πρότασης δεν γίνεται ατομικά από μόνη της αλλά σε σχέση

πάντα με ένα σύνολο προτάσεων που μαζί όλες αυτές αποτελούν ένα τοπικό σύστημα των μαθηματικών. Η άποψη αυτή θεωρητικοποιείτε πολύ όμορφα από τον John Bell στον οποίο τα συστήματα που αναφέρονται παραπάνω σε ένα γενικότερο πλαίσιο γίνονται συγκεκριμένα μαθηματικά κατασκευάσματα, τοπικά αξιωματικά συστήματα (τα τοπικά πλαίσια) που είναι ευέλικτα και πλουραλιστικά κομμάτια των μαθηματικών. Έτσι μια πρόταση μπορεί να είναι αληθής σε ένα τοπικό πλαίσιο και ψευδή σε κάποιο άλλο. Αυτό που αποδεχόμαστε κάθε φορά δεν είναι προτάσεις αλλά τοπικά πλαίσια.

Στα πλαίσια ενός συνεκτικισμού αλλά κάπως τροποποιημένου είναι και οι απόψεις του W.V. Quine περί ολισμού και όπως αυτές επεκτείνονται στην λογική στην αντίληψη ότι η λογική δεν μπορεί να ειδωθεί ξεκομμένη από το σώμα των κυρίως μαθηματικών, είναι κομμάτι του ιστού της πεποίθησης και δεν μπορούμε να την αποτιμήσουμε χωρίς να δούμε μαζί και όλες τις άλλες πεποιθήσεις της θεωρίας και να τις κρίνουμε έτσι εν συνόλω. Με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να κάνουμε λογική από μόνη της, και πριν τα μαθηματικά και a priori. Ο νατουραλισμός και ο μη διαχωρισμός αναλυτικών και συνθετικών προτάσεων δεν επιτρέπει λοιπόν να μιλάμε για κάποιο από τα πριν θεμέλιο, για κάτι διάφορο της εμπειρίας στο οποίο μπορεί να βασιστεί η επιστήμη κα τα μαθηματικά.

Αυτός ο αντιθεμελιωτισμός του Quine, έρχεται να "δικαιωθεί" στην θεωρία κατηγοριών τουλάχιστον στο βαθμό που μπορούμε να δούμε την τελευταία ως μια άρση του διαχωρισμού της λογικής με τα υπόλοιπα μαθηματικά και ως μια επιβεβαίωση του κουινιανού ολισμού. Έτσι βλέπουμε στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών την λογική (ή τις διάφορες λογικές) να προκύπτουν ως αποτελέσματα της μαθηματικής θεωρίας, απορρίπτοντας έτσι κάποιον υποτιθέμενο πρωταρχικό και από τα πριν ρόλο που είχε η λογική.

Μια άμεση υλοποίηση του παραπάνω προγράμματος μοιάζει να είναι η δημιουργία της λογικής στα πλαίσια μιας μαθηματικής θεωρίας, της θεωρίας τόπων. Η λογική δεν εισάγεται από τα έξω αλλά υλοποιείτε μέσα στα μαθηματικά. Μια αναλυτική πραγμάτευση αυτών των θεμάτων δίνεται στο δεύτερο κεφάλαιο.

Ένα ρεύμα σκέψης με ιδιαίτερες σχέση με την άρνηση των θεμελίων μέσα στην ιστορία της δυτικής σκέψης είναι εν γένει το ρεύμα του δομισμού ή στρουκτουραλισμού (και λέμε εν γένει διότι γενικά σε αυτό, και ειδικότερα σε ότι αφορά τον μαθηματικό δομισμό, υπάρχουν ιδιαίτερα αντίρροπες και αντιφατικές προσεγγίσεις). Πέρα από τα γενικότερα ζητήματα που αφορούν την ταυτόχρονη αποδοχή της δομιστικής φιλοσοφίας στα μαθηματικά και την Θεωρία Κατηγοριών εδώ θέλουμε να μας απασχολήσει η πιο εξειδικευμένη άποψη του Awodey που κατά την γνώμη παρουσιάζει όλα εκείνα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ένα αντιθεμελιωτικό εγχείρημα για τα μαθηματικά. Στο άρθρο του [2003] ο Awodey παίρνει τις εξής θέσεις:

Κατά πρώτον δίνει στην Θεωρία Κατηγοριών και τόπων την πρωταρχική θέση στα μαθηματικά αλλά με τον ίδιο τρόπο που το κάνει και Bell (ενότητα 2.6) χωρίς να δέχεται την απόλυτη ισχύ της και την καθολική εφαρμογή της. Το σκεπτικό του βασίζεται στην άρνηση της καθολικότητας

των μη συμπερασματικών (noninferential) μαθηματικών προτάσεων (όπως τα αξιώματα) και αιτιολογήσεων (όπως οι κανόνες τις λογικής και οι μέθοδοι αιτιολόγησης). Μία μη καθολικότητα με μια έννοια κατά πρώτον ιστορική: οι αρχές και οι μεθοδολογίες ειδωμένες στην ιστορικότητά τους είναι ουσιωδώς μεταβαλλόμενες (πχ διαφορετικές ήταν οι πρακτικές της ανάλυσης στον 19ο αιώνα και σήμερα) και κατά δεύτερον με ένα χαρακτήρα εσωτερικών διαφοροποιήσεων των θεμελίων: πάνω σε άλλες βάσεις πατάει για παράδειγμα η συναρτησιακή ανάλυση και σε άλλες η θεωρία συνομολογίας. Έτσι για να ορίσουμε τα θεμέλια ενός υποσύνολου των μαθηματικών δεν χρειάζεται στην προσφυγή μας σε κάποιες απόλυτες καθολικές βάσεις αλλά σε κάποια τοπικά θεμέλια που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες χρησιμοποιούμενες μαθηματικές πρακτικές, στις ιστορικές και κοινωνικές συνήθειες και στις ιδιαίτερες μαθηματικές αρχές-αξιώματα που δουλεύουμε.

> *Η ιδέα δηλαδή είναι να προσδιορίζουμε για ένα θεώρημα ή μια θεωρία μόνο την απαιτούμενη ή σχετική πληροφορία ή δομή για κάθε περίπτωση και όχι να θεωρούμε κάποια μοναδική επίγνωση ή καθορισμό των αντικειμένων που εξετάζουμε.* Awodey όπως πριν σελ 3

Κατά δεύτερον αποδέχεται ξεκάθαρα μια "top-down" μεθοδολογία όπως ακριβώς την ορίσαμε σαν φιλοσοφική θέση στο κεφάλαιο την οποία όμως εμπλούτισε με έναν σαφή in re στρουκτουραλισμό και μια πολύ αυστηρή αντι-ουσιοκρατική, Hilbert-ιανή και αντι-Frege-ιανή οντολογία: Τα μαθηματικά είναι σχηματικά, φορμαλιστικά παίγνια των οποίων τα αξιώματα δεν χρειάζεται να αναφέρονται σε κάποια αλήθεια των πραγμάτων "εκεί έξω", δεν χρειάζεται να έχουν καμία ερμηνεία (μια θέση που όπως δήξαμε παραπάνω είναι απαραίτητο να αρνηθείς ώστε να μπορέσεις να μιλήσεις για θεμέλια).

Τις δύο αυτές θέσεις τις χρησιμοποίησε ώστε να δώσει έναν κάπως διαφοροποιημένο στην ουσία του Ρασσελιανικό if-then-ισμό ο οποίος θα μπορούσε με λίγα λόγια να περιγραφεί:

> *Τα καθαρά μαθηματικά είναι η κλάση όλων των προτάσεων της μορφής "p συνεπάγεται q" όπου τα p και q είναι προτάσεις που περιέχουν μια ή περισσότερες μεταβλητές...* (Russell, B., Russell, B. (1992). Principles of Mathematics. London: Routledge , σ. 3)

με δύο όμως τροποποιήσεις:

1. Όλα τα θεωρήματα έχουν την μορφή "αν...τότε..." αλλά το "αν..." δεν έχει την μορφή "αν τα p είναι αληθή τότε..." αλλά την μορφή "αν θεωρήσουμε τα p τότε..." δηλαδή τονίζεται πολύ ο σχηματικός χαρακτήρας των μαθηματικών (Hilbert). Οι αποδείξεις των μαθηματικών δηλαδή έχουν ένα χαρακτήρα απροσδιοριστίας: περιλαμβάνουν τις δομές που αναφέρονται και ίσως κάποιες αρχές δικαιολόγησης όπως αυτές της λογικής όχι όμως μια συγκεκριμένη φύση των δομών ή των στοιχείων τους με μια καθολική έννοια.

2. Δεν υιοθετούμε μια "bottom-up" προσέγγιση. Οι σχέσεις δεν πρέπει να είναι σχέσεις κάποιων συγκεκριμένων που προχωρώντας αναδρομικά γίνονται σχέσεις μεταξύ λογικών ατόμων όπως θα ήθελε ο Russell αλλά δουλεύουμε "top-down" και ορίζουμε την δομή όχι με βάση στην έννοια της σχέσης αλλά σε αυτή του μορφισμού.

Αυτόν τον "in re", "botton up" στρουκτουραλισμό, με ala Hilbert αξιώματα μπορεί να, κατά τον Awodey να υπηρετήσει με τον καλύτερο τρόπο μια Θεωρία Κατηγοριών ειδομένη ως ένα τοπικό θεμέλιο για τα μαθηματικά.

3.4 Ολιστικά και ατομικιστικά μαθηματικά

Μια από τις διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται μεταβαίνοντας από τα συνολοθεωρητικά μαθηματικά στα κατηγοριακά είναι μια συνολική αλλαγή του τρόπου με τον οποίο προσλαμβάνουμε και χειριζόμαστε τα μαθηματικά αντικείμενα. Αλλαγή που έχει να κάνει με το που δίνεται η οντολογική προτεραιότητα στα πλαίσια μιας θεωρίας: στο όλο ή στο άτομο, στο συνολικό πλαίσιο ή στο μεμονωμένο αντικείμενο, στο χώρο ή στο σημείο για να μιλήσουμε σχηματικά. Μετάβαση από ένα "ατομικιστικό" πρότυπο όπου το όλο θα νοείται ως άθροισμα διακριτών και στοιχειακών επιμέρους, με το οντολογικό ερώτημα πολλές φορές να αναγάγετε στο άτομο, και ενός μοντέλου που απλώς θα αδιαφορεί για την αναζήτηση του στοιχειώδους και θα δίνει τον τόνο στο όλο και στην δομή η οποία θα είναι η μόνη για την οποία θα μπορούμε θέσουμε ερωτήματα. Για να το πούμε με όρους που εισήγαγε ο Awodey (Awodey[2004]) έχουμε δύο προσεγγίσεις: την "top-down" και την "bottom-up". Έτσι παραδείγματος χάρη, αν μιλήσουμε για το ευκλείδειο χώρο η πρώτη άποψη θα έλεγε πως ο χώρος προϋπάρχει των σημείων (όχι πως δεν βλέπει σημεία, αλλά πως αυτά έπονται οντολογικά του χώρου) ενώ η δεύτερη θα ισχυριζόταν πως ο χώρος αποτελείτε (εξ ορισμού) από σημεία.

Αυτή η αντίθεση ανάμεσα στην καθοριστικότητα ή όχι της ολότητας πρέπει να σημειώσουμε, δεν αποτελεί φαινόμενο της φιλοσοφίας των μαθηματικών, αλλά διατρέχει και τέμνει οριζόντια μεγάλα κομμάτια της ανθρώπινης σκέψης (την οντολογία, την κοινωνιολογία και την πολιτική, την ψυχολογία και ακόμη και την ηθική), σε ένα διάστημα που ξεκινά από τους αρχαίους ατομικούς και φτάνει μέχρι και την Γαλλική σχολή του δομισμού στον 20ο αιώνα (το τελευταίο έχει και μια ιδιαίτερη σημασία και για την δική μας συζήτηση).

Οι δύο αυτές προσεγγίσεις δεν είναι διαχωρισμένες στην μαθηματική πρακτική. Μεταβαίνοντας από ένα επίπεδο γενίκευσης σε ένα άλλο αλλά και μέσα στην ίδια θεωρία τις βλέπουμε να συνυπάρχουν π.χ. στα στοιχεία του Ευκλείδη ή στην περίπτωση των φυσικών αριθμών μπορούμε να ορίσουμε το R και ως το σύνολο των πραγματικών αριθμών (που έχουν οριστεί πιο πριν ως τομές Dedekind) αλλά και ως το πλήρες διατεταγμένο σώμα. Οι δύο τρόποι θέασης δηλαδή τείνουν σε πολλές περιπτώσεις να δώσουν κοινό αποτέλεσμα αλλά και κάποιες άλλες διαχωρίζονται. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα θα αντιγράψουμε αυτό που δίνει ο Awodey στο (2004) σελ 5 :

Έστω πως θέλουμε να δείξουμε πως $i^5 = i$.

Ένας που δουλεύει ολιστικά θα χρειαζόταν τα εξής:

1. Σε κάθε δακτύλιο αν $x^2 = -1$ τότε $x^5 = x$.
2. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι εξ ορισμού δακτύλιος με ένα στοιχείο i ώστε $i^2 = -1$

Αντίθετα κάποιος που αντιμετωπίζει τα πράγματα ατομικιστικά:

1. Να δείξει ότι για κάθε δακτύλιο στο σύμπαν των ατόμων του που έχουν ένα στοιχείο για το οποίο $x^2 = -1$ ισχύει $x^5 = x$.
2. Να δείξει ότι μιγαδικοί είναι δακτύλιος και το i είναι η τετραγωνική ρίζα του -1.

Και οι δύο τρόποι πρέπει να τονίσουμε εδώ είναι ισοδύναμοι αλλά διαφέρουν ποιοτικά. Ο δεύτερος έχει έναν καθολικό ποσοδείκτη "για κάθε" που διατρέχει ένα σύνολο δυνατών μαθηματικών κόσμων και την απόδειξη αυτή πρέπει να την κάνουμε για κάθε ένα στοιχείο αυτού του σύμπαντος. Εν αντίθεσει ο πρώτος έχει έναν δομικό χαρακτήρα: δεν ζητά να δειχθεί κάτι για κάποιους φιξαρισμένους δακτύλιους αλλά για την ίδια την δομή των δακτυλίων η σε απόδειξή του είναι σχηματική

Εκεί όπου τα δυο μοντέλα αυτά διαχωρίζονται με σαφή τρόπο είναι όταν θελήσουμε να μιλήσουμε για τα θεμέλια και προσπαθήσουμε να βρούμε μια πλήρη μεθοδολογία ανάπτυξης των μαθηματικών.

Αυτός ο διαχωρισμός μπορούμε να πούμε πως έχει δύο πτυχές: μια μεθοδολογική και μια μεταφυσική. Κατά πρώτον μεθοδολογική γιατί ορίζει δυο σαφώς διακριτούς και αντιθετικούς τρόπους αναζήτησης της αλήθειας και διεκπεραίωσης μιας ανάλυσης όπου κάποιος είτε προσπαθεί να δει ένα αντικείμενο ως σύνθεση κάποιων άλλων ουσιωδώς απλούστερων αντικειμένων, είτε το εισαγάγει στην σφαίρα μιας ευρύτερης ολότητας. Κατά δεύτερον μεταφυσική διότι αναγνωρίζει ή όχι την ύπαρξη θεμελιωδών στοιχείων που καθορίζουν το οντολογικό καθεστώς του κάθε αντικειμένου.

Την "bottom-up" προσέγγιση μπορούμε να την ανιχνεύσουμε στη δουλειά του Russell (αλλά και του Wittgenstein στην πρώτη του περίοδο) στη φιλοσοφία και τη λογική των μαθηματικών κατά τις πρώτες δεκαετίες του εικοστού αιώνα όπου εισάγει την φιλοσοφική θέση που είναι γνωστή και ως "λογικός ατομισμός". Αυτή θέση έπαιξε καθοριστικό ρόλο σε όλη την αναλυτική φιλοσοφία και καθόρισε πράγματα και στα μαθηματικά. Έτσι βλέπει το θεμελιώδη ρόλο να τον παίζουν τα γεγονότα στα οποία και αναγόμαστε κάθε φορά για την σημασιολογική αποτίμηση και αναγνωρίζει δύο στάδια στην μέθοδο: πρώτον την αναζήτηση των βασικών αρχών και στοιχείων που βρίσκονται πίσω μια θεωρία (ανάλυση) και δεύτερον την αντίστροφη πορεία ανασύνθεσης του σώματος της θεωρίας από αυτά που προέκυψαν από το πρώτο βήμα (σύνθεση). Έτσι στο μαθηματικό του έργο στα πλαίσια της θεωρίας τύπων αναγνωρίζει την αναγκαιότητα να ορίσει

τύπους βαθμού 0 οι οποίοι και θα αποτελέσουν και τα ατομικά στοιχεία για την δημιουργία τύπων μεγαλύτερου βαθμού.

Αλλά εκεί που έχουμε με το πιο ξεκάθαρο τρόπο τη χρήση αυτής της θεώρησης είναι στην θεωρία συνόλων όταν την βλέπουμε ως θεμέλιο όλων των μαθηματικών. Εδώ, και αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, δεν έχουμε μόνο τη συγκρότηση μιας μαθηματικής οντότητας εκ των στοιχείων της, αλλά την ενοποίηση όλων των μαθηματικών στη βάση της έννοιας του συνόλου. Έτσι σύμφωνα με το πρόγραμμα που άρχισε με τους Zermelo και Fraenkel και που έχει κατισχύσει πλέον, μπορούμε να δούμε κάθετι στα μαθηματικά μέσα στο περιβάλλον σύμπαν της θεωρίας συνόλων. Εδώ έχει σημασία να παρατηρήσουμε πως αυτό συνεχίζει να ισχύει και αν διαταράξουμε τα συνολοθεωρητικά αξιώματα αφαιρώντας τις αρχές αγνότητας ή καλής θεμελίωσης. Είτε δουλέψουμε με "άτομα" μέσα στη θεωρία συνόλων είτε όχι (βλέποντας, δηλαδή, τα πάντα ως σύνολα) η προσέγγιση συνεχίζει να δουλεύει. Όπως λέει και ο Kunnen (Kunnen[1980] σελ 63):

> *Η θεωρία συνόλων είναι το θεμέλιο των μαθηματικών. Όλες οι ιδέες των μαθηματικών ορίζονται χρησιμοποιώντας τις πρωταρχικές έννοιες του συνόλου και του ανήκειν (...) από τα αξιώματα όλα τα γνωστά μαθηματικά μπορούν να προκύψουν.*

Με αυτήν την καθολικότητα της θεωρίας συνόλων θα ασχοληθούμε αργότερα όταν μιλήσουμε για απόλυτα μαθηματικά. Αυτό που έχει σημασία εδώ είναι η μεθοδολογία όπου ένα αντικείμενο μιας μαθηματικής θεωρίας πρέπει πάντα να μπορεί να κατασκευάζεται ως κάποιο αυστηρά προσδιορίσιμο σύνολο ή κάποια συλλογή συνόλων. Από την άλλη, για να έχουμε μια "bottom-up" λογική είναι αναγκαίο να έχουμε κάποιο εργαλείο που θα μας μεταφέρει από την βάση επάνω - από τα άτομα στο όλο, και αυτό το εργαλείο δεν μπορεί παρά να είναι η έννοια της συλλογής η οποία με την σειρά της μας οδηγεί με φυσικό τρόπο στη θεωρία συνόλων. Η απόκτηση ενός τέτοιου ρόλου από τα σύνολα, πρέπει να παρατηρήσουμε, δεν είναι τυχαία αλλά σχετίζεται με το γεγονός της ταυτόχρονης ανάπτυξης θεωρίας συνόλων και της αναλυτικής φιλοσοφίας. Από την άλλη πλευρά τώρα ο αντίστροφος τρόπος σκέψης (ο τόνος να πέφτει στην ολότητα) προϋπήρχε ιστορικά και ξεκινάει από τον Αριστοτέλη ο οποίος είχε αποφανθεί "το όλον είναι κάτι παραπάνω από το άθροισμα των επιμέρους" (Μεταφυσικά 1045a10) και φτάνει στην κορύφωσή του με το έργο των ευρωπαϊκού ιδεαλισμού και ιδιαιτέρως του Hegel. Μια ολιστική απάντηση θα έλεγε πως είναι αδύνατον να αναγάγουμε το όλο στα στοιχειώδη, χωρίς να αρνείται όμως την δυνατότητα ύπαρξης επιμέρους, αλλά τονίζοντας την ποιοτική διαφοροποίηση και τελική καθοριστικότητα του όλου. Την ιδιότητα δηλαδή της ολότητας να εμπεριέχει μεγαλύτερη εξηγητική ικανότητα και αλήθεια σε σχέση με αυτά με τα όσα εμπεριέχει. Πως είναι δυνατό να υπάρξει μια διαφορετική αντίληψη για τα μαθηματικά; Μια "top-down " μεθοδολογία θα είναι κατά βάση αλγεβρική. Θα μιλάει για κάποια αντικείμενα, των οποίων η φύση θα παραμένει άγνωστη, και που θα διέπονται από προσδιορίσημες μεταξύ τους σχέσεις και από κανόνες. Τα αντικείμενα, δηλαδή, θα εντάσσονται σε κάποια δομή και δεν θα είναι ήδη κατασκευάσμένα από κάποια πρώτη ύλη.

Αντίστοιχα τα θεωρήματα δεν θα παρουσιάζουν ιδιότητες κάποιων κατασκευών αλλά θα αναφέρονται σε αναλλοίωτα σε κάθε δομή χαρακτηριστικά ενώ το νόημα μιας οντότητας δεν υπάρχει από μόνο του αλλά θα είναι σε αναφορά με κάποιο περιβάλλον. Όπως το έθεσε ο Lawvere:

> *... τα θεμέλια δεν μπορούν να ταυτιστούν με κανένα αρχικό σημείο (...) αλλά θα πρέπει να βάζει τις κατευθυντήριες γραμμές για να περνάμε από τον έναν κλάδο των μαθηματικών στον άλλον ...*

Το προφανές πρόβλημα είναι εδώ πότε δύο αντικείμενα ταυτίζονται εφόσον δεν νομιμοποιούμαστε όταν δουλεύουμε "top-down " να έχουμε κάτι αντίστοιχο του αξιώματος της έκτασης. Ένα παράδειγμα για το πώς μπορεί να επιτευχθεί αυτό είναι το παράδειγμα του Δρόσσου (Drossos: Set Categories and Structuralism 2005 σελ2) στο οποίο επιτυγχάνουμε μια ολιστική προσέγγιση της ισότητας ως εξής. Έστω $A, B \subseteq \Omega$. Τότε $A = B$ αν, και μόνο αν για κάθε $X \subseteq \Omega$ έχουμε $A \cup X = B \cup X$ και $A \cap X = B \cap X$. Μπορούμε να ορίσουμε δηλαδή την ισότητα δύο συνόλων, όχι σε σχέση με το ποιά ατομικά στοιχεία εμπεριέχουν, αλλά σε σχέση με τη συμπεριφορά και τη συσχέτιση με όλα τα άλλα σύνολα.

Το πιο χαρακτηριστικό εδώ παράδειγμα (δες και παρακάτω) είναι ή έννοια του ϋποσυνόλου στη θεωρία κατηγοριών" η οποία καθορίζετε όχι μέσω μιας ιδιότητας του περιέχειν αλλά ως ένα βέλος που ξεκινά από ένα αντικείμενο U και καταλήγει στο A και είναι monic. Η ισότητα εδώ επιτυγχάνεται μέσω της έννοιας του "έως ισομορφισμού". Εφόσον πλέον "χάνουμε" την πρωταρχικότητα του ατόμου αναζητούμε άλλη μέθοδο "σύγκρισης" η οποία επιτυγχάνεται μέσω μιας πορείας αφαίρεσης εκκινώντας από το συγκεκριμένο αναζητούμε την "ουσία" της δομής του (ένα διχοτομικό σχήμα δηλαδή της μορφής "τύπος-έδειγμα" . Η μέθοδος αυτή που πρωτοπαρουσιάστηκε με προσέγγιση των Peano-Dedekind για το συστήμα των φυσικών αριθμών, αποτελεί τον βασικό τρόπο πρακτικής στην άλγεβρα στον 20ο αιώνα και κυριολεκτικά τον κορμό της θεωρίας κατηγοριών. Μια τέτοια φιλοσοφική σκοπιά έχει ένα πολύ έντονο ιστορικό και διαλεκτικό χαρακτήρα. Δεν βλέπει τις μαθηματικές θεωρίες τη μια δίπλα στην άλλη, συνδεόμενες μόνο ως διαφορετικές ενσαρκώσεις μιας πρωτεϊκής θεωρίας, αλλά ως οντολογικά αυτοτελής και ταυτόχρονα διαλεκτικά συνδεόμενες, καθώς μεταφερόμαστε από την μια στην άλλη μέσω των καθολικών ιδιοτήτων.

Επίσης συνδέεται και με μια στρουκτουραλιστική τοποθέτηση για τα μαθηματικά (συγκεκριμένα αυτήν την τοποθέτηση που στην πιο πρόσφατη βιβλιογραφία αναφέρεται ως pure-structuralism) αφού τώρα η μορφή ή δομή είναι αυτή που παίζει το πρωταρχικό ρόλο. Μοιάζει να ικανοποιείται η άποψη του Resnik ότι:

> *... στα μαθηματικά ισχυρίζομαι ότι δεν έχουμε αντικείμενα με μια εσωτερική σύνθεση που διευθετείται στις δομές, έχουμε μόνο δομές (...) Τα αντικείμενα των μαθηματικών είναι σημεία χωρίς δομή ή αλλιώς θέσεις στις δομές.*

Βέβαια το ερώτημα του κατά πόσο η κατηγορίες μπορούν να παίξουν κάποιο ρόλο στον μαθηματικό στρουκτουραλισμό έγκειται στο κατά πόσο μπορούμε να δεχτούμε πως μια δομή μπορεί να καθορίζεται από αντικείμενα και μορφισμούς ανάμεσα σε αυτά ή κατά πόσο μπορούν να αποτελούνται από στοιχειωδέστερα "άτομα". Συνεπώς μια η "top-down" προσέγγιση δεν ταυτίζεται με τον στρουκτουραλισμό αλλά μάλλον ο οριζόντιος διαχωρισμός σε ολιστικά και ατομιστικά μαθηματικά, σύνολα και κατηγορίες, διατρέχει όλες τις στρουκτουραλιστικές εικόνες.

Η θεωρία κατηγοριών τώρα φαίνεται πως ικανοποιεί απόλυτα τη "top-down" προσέγγιση. Η άποψη αυτή στηρίζεται στην ιστορική πρόοδο της κατηγοριο -θεωρητικής πρακτικής από την δεκαετία του 60 και μετά και συνέχει όλους τους μελετητές που ασχολήθηκαν με τη σχέση ζητημάτων θεμελίωσης και θεωρίας κατηγοριών. Η βαρύτητα εδώ πέφτει στην έννοια του μορφισμού. Όλες οι προσδιορίσιμες ιδιότητες ενός αντικειμένου ανάγονται σε ιδιότητες των μορφισμών που εκκινούν ή καταλήγουν στο αντικείμενο. Έτσι η ιδιότητα δεν βρίσκεται στο αντικείμενο "εν αυτώ" αλλά αποτελεί κάτι που είναι σε πρωταρχική συνάφεια με τα άλλα αντικείμενο και το "περιβάλλον" στο οποίο δουλεύουμε (παραδείγματα παρακάτω). Αυτή η "top-down" οπτική επιτυγχάνεται μέσω μια "αρχής πλαισίου" που χαρακτηρίζει την φιλοσοφία της Θεωρίας Κατηγοριών κατά τους Marquis και Landry[2005]:

> *Η "top-down" προσέγγιση για να χαρακτηρίσει μαθηματικά αντικείμενα με κατηγοριοθεωρητικούς όρους εννοείτε ως τα μέσα με τα οποία πρέπει να αναλύσουμε την "shared structure"*

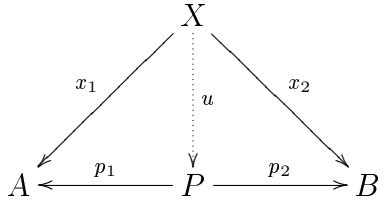
Ένα βασικό παράδειγμα για το πως αυτό συμβαίνει είναι η ιδιότητα τις καθολικότητας που είναι χαρακτηριστική για την θεωρία κατηγοριών. Θα την υπενθυμίσουμε εδώ στην ειδική περίπτωση του γινομένου αντικειμένων.Έστω A και B δύο αντικείμενα στην κατηγορία **C**. Τότε ορίζουμε το διάγραμμα γινόμενο των δύο αντικειμένων να αποτελείτε από ένα αντικείμενο P και δύο μορφισμούς p_1 και p_2

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω ιδιότητα: Για κάθε άλλο διάγραμμα της μορφής

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

υπάρχει ένα μοναδικό $u : X \longrightarrow P$ ώστε το επόμενα διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό



Από την άλλη ο συνήθης, ατομικιστικός, ορισμός του καρτεσιανού γινουμένου συνόλων (κάτι αντίστοιχο ισχύει σε όλες τις συγκεκριμένες κατηγορίες ενώ για τις μη συγκεκριμένες κατηγορίες δεν υπάρχει κάποιος προφανής τρόπος να ορίσουμε ατομικιστικά το γινόμενο) είναι

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

Η διαφοροποίηση που θέλουμε να επισημάνουμε είναι προφανής.

Εδώ βέβαια προκύπτουν κάποια ερωτήματα. Ο Shapiro [1997] κάνει έναν διαχωρισμό ανάμεσα στις αλγεβρικές και τις μη-αλγεβρικές θεωρίες των μαθηματικών. Οι δεύτερες είναι αυτές που φαίνονται εκ πρώτης άποψης να αναφέρονται σε ένα μοναδικό συγκεκριμένο μοντέλο ενώ οι πρώτες αυτές που δεν αναφέρονται prima facie σε κάποιο. Τις αλγεβρικές θεωρίες εύκολα μπορεί κάποιος να τις "δει" στο κατηγοριακό "top-down" κόσμο (όπως την θεωρίες ομάδων ή γραφημάτων που είδαμε από πάνω), αλλά τι γίνεται με τις μη αλγεβρικές, και ειδικά εκείνες που έχουν ως "έμφυτο" μοντέλο αυτό της θεωρίας συνόλων; Μία πρώτη λύση σε αυτό όσον αφορά την αριθμητική δίνεται με το λεγόμενο αντικείμενο των φυσικών αριθμών, ένα αντικείμενο που ορίζεται σε έναν τόπο και είναι σαν να τον εξοπλίζει με τους φυσικούς. Αλλά κατά πόσον μπορεί να γενικευτεί αυτός; Πως μπορούμε να κάνουμε αποτελεσματικά "top-down" πραγματική ανάλυση για παράδειγμα (είτε κατηγοριακά είτε όχι); Φαίνεται πως για να κάνει κάποιος μαθηματικά με την θεωρία κατηγοριών πρέπει πρώτα να ξεκαθαρίσει αν γίνεται να έχουμε μια τέτοια ανάλυση για τις μη αλγεβρικές θεωρίες. Αλλά ακόμα και να παραδεχόταν κάποιος πως μπορεί να το κάνει, αυτό θα σήμαινε αυτόματα πως παραδέχεται ότι οι μη αλγεβρικές θεωρίες έχουν να κάνουν με κάποιες δομές και άρα(ακολουθώντας την γνώμη του Shapiro) συνεπάγεται πως δεσμευόμαστε σε κάποιου είδους στρουκτουραλισμό πράγμα που (όπως θα δούμε παρακάτω) έχουμε καλά επιχειρήματα να αποφανθούμε ότι δεν συνάδει με την ταυτόχρονη αποδοχή της θεωρίας κατηγοριών ως θεμέλιο.

Ακόμα νομίζω πως πρέπει να διαχωρίσουμε τον ολισμό στη θεμελίωση και το οντολογικό στάτους από τον ολισμό όπως τον προσέγγισε ο W.V. Quine που έχει περισσότερο εξηγητικόγνωσιολογικό χαρακτήρα. Ο ολισμός κατά τον Quine αναφέρεται στο πως πρέπει να αποδεχτούμε ή όχι μία θεωρία βάζοντας το ολιστικό κριτήριο: Πρέπει να την αποδεκτούμε συνολικά μαζί με ότι άλλο σχετίζεται μαζί της στον ιστο της πεποίθησης. Αυτός ο ολισμός είναι περισσότερο γνωσιολογικός παρά οντολογικός. (Αποκτάει όμως και κάποια οντολογικά χαρακτηριστικά μέσω του επιχειρήματος αλλά δεν θα επεκταθούμε εδώ).

Η "top-down" προσέγγιση είναι αυτή την στιγμή κυρίαρχη μέσα στην μαθηματική πρακτική. Όπως λέει ο Awodey [1996]

> *Λίγοι μοντέρνοι μαθηματικοί ενδιαφέρονται για κάποια ιδιότητα των αντικειμένων που μελετούν χωρίς μια αναφορά σε μια δοσμένη, καλώς ορισμένη έννοια ισομορφισμού. Έτσι, οι τοπολόγοι δεν ενδιαφέρονται να διαχωρίσουν ομοιομορφικούς χώρους εξετάζοντας τη συνολοθεωρητική δομή των σημείων του χώρου, ούτε οι γεωμέτρες*

> *αναζητούν την πληθικότητα μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Το αντικείμενο των σύγχρονων μαθηματικών είναι σπάνια η μελέτη ενός συγκεκριμένου συνόλου με κάποια δοσμένη δομή Bourbaki αλλά περισσότερο ένα μαθηματικό αντικείμενο ορισμένο έως ισομορφισμού*

Σε κλάδους δε όπως οι αλγεβρική τοπολογία και ή η αλγεβρική γεωμετρία είναι ο μόνος τρόπος σκέψης.

3.5 Οι απόψεις του Lawvere

Ο F. William Lawvere ήταν, αναμφισβήτητα, εκείνος ο οποίος "κήρυξε την έναρξη" όλου του θέματος που πραγματευόμαστε εμείς εδώ. Ήδη από την διδακτορική του διατριβή, στην οποία συναντάμε στοιχεία καθοριστικά και για όλη την υπόλοιπη πορεία του, έβαλε στο κέντρο της προσοχής των μαθηματικών την Θεωρία Κατηγοριών ως κάτι το οποίο πρέπει να αποκτήσει ανεξάρτητη θεμελίωση και ρόλο στα θεμέλια των μαθηματικών γενικά. Αλλά και αργότερα, δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυριστούμε ότι στην ουσία τους όλα τα βασικά θέματα που μας αφορούν εδώ είχαν τεθεί από τον Lawvere.

Στην πορεία της σκέψης του μπορούμε όμως να εντοπίσουμε μια ενδιαφέρουσα αλλαγή πάνω στο πως έβλεπε την υπόθεση των θεμελίων. Το 1966, όταν έγραφε για αξιωματικοποίηση της κατηγορίας των συνόλων με αποκλειστικά και μόνο κατηγοριακούς όρους και όταν έβλεπε την κατηγορία όλων των κατηγοριών ως ένα δυνατό θεμέλιο για τα μαθηματικά εννοούσε την υπόθεση της θεμελίωσης με ένα παραδοσιακό τρόπο ως ένα σύστημα πρωτοβάθμιων αξιωμάτων στο οποίο κάθένα αντικείμενο τον μαθηματικών θα μπορούσε να οριστεί και καθεμια καθιερωμένη μαθηματική πρόταση να αποδεικτή. Προόκειται για μια άποψη συμβατή με ότι νοούταν ως θεμέλιο εκείνη την εποχή και η οποία κοίταζε σαφώς προς τις θέσεις των φορμαλιστών. Μια αλλαγή πραγματοποιήθηκε το 1969 με το πολύ σημαντικό άρθρο του "Adjointness in foundations" στο οποίο βρίσκουμε το σλόγκαν: "Με την έννοια των θεμελίων θα εννοούμε τη μελέτη όσων είναι καθολικά στα μαθηματικά".

Έτσι τα θεμέλια με αυτή την έννοια δεν μπορούν να ταυτιστούν με κανένα "αρχικό σημείο" ή καμία "συγκεκριμενοποίηση" για τα μαθηματικά, αλλά μερικά αποτελέσματα σε αυτές τις κατευθύνσεις μπορούν να συνιστούν αποτελέσμα της της θεμελίωσης. Αλλά ανάμεσα στα άλλα αποτελέσματα των Θεμελίων (έτσι νοουνένων) πρέπει να βρίσκονται καθοδηγητικές γραμμές για το πέρασμα από τον ένα κλάδο των μαθηματικών στον άλλο Στο βιβλίο του "Set Theory" (2003, σελ 235)γράφει:

> Ένα θεμέλιο καθιστά σαφής τα βασικά και γενικά χαρακτηριστικά, τα συστατικά των διαδικασιών της επιστήμης καθώς επίσης τις αρχές και τους γενικούς νόμους ανάπτυξης. Ο σκοπός για τον οποίο που κάνουμε αυτήν την ρητή είναι για να προβάλουμε

έναν οδηγό για την εκμάθηση, τη χρήση και την περαιτέρω ανάπτυξη της επιστήμης. 'Ενα 'γνήσιο' θεμέλιο που ξεχνά αυτόν τον σκοπό και επιδιώκει μια θεωρησιακή "θεμελίωση" για ρην ίδια την "θεμελίωση" είναι σαφώς ένα μηθεμέλιο.

Ενώ πάλι στο 'Adjointness in foundations' γράφει:

'Οντας η ίσια μέρος των μαθηματικών , τα θεμέλια μετέχουν της δυϊκότητας του τυπικού- εννοιλογικού. Στην τυπική τους διάσταση, τα θεμέλια επικεντρώνονται συχνά στην τυπική πλευρά των μαθηματικών, δίνοντας αφορμή για ανάπτυξη της Λογικής. Πιο πρόσφατα η αναζήτηση καθολικών στοιχείων έχει επίσης κάνει μια εννοιλογική στριφή με την μορφή της θεωρίας κατηγοριών, η οποία ξεκίνησε εκλαμβάνοντας ως νέο μαθηματικό αντικείμενο την ολότητα όλων των μορφισμών των μαθηματικών αντικειμένων ενός δεδομένου είδους A και διαπιστώνοντας τότε ότι όλα αυτά τα νέα μαθηματικά αντικείμενα ανήκουν σε ένα μη τετριμένο είδος C που είναι ανεξάρτητο του A.

3.6 Οι απόψεις του Bell

Είδαμε νωρίτερα τις απόψεις που εξέφρασε ο John Bell το 1981. Είχαν να κάνουν με μια άρνηση κάθε θεμελιωτικού ρόλου που θα μπορούσε να παίξει η θεωρία κατηγοριών. Η άποψή του βασίζονταν σε μια κατά τη γνώμη του ασυμμετρία ανάμεσα στις απαιτήσεις και το χαρακτήρα που πρέπει να έχουν τα θεμέλια και τα βασικά χαρακτηριστικά της κατηγοριακής προσέγγισης. Λίγα χρόνια αργότερα όμως η θέση του αυτοαναιρέθηκε. Στα 1986 παρουσίασε το άρθρο του "From absolute to local mathematics" στο οποίο παρουσιάζει μια νέα τοποθέτηση για τη μαθηματική θεμελίωση η οποία, εκκινώντας από τις σύγχρονες εξελίξεις στα μαθηματικά, αναδεικνύει μια βαθύτερη διαλεκτική φύση στα μαθηματικά.Αυτη η πάλι, κατά τη γνώμη του, μπορεί να αποτυπωθεί καλύτερα με τον πλουραλισμό και την πολυπτυχότητα της θεωρίας τόπων, ειδομένη (όπως θα δούμε) ως μια ιντουσιονιστική θεωρία τύπων υψηλότερης τάξης.

Στην παρούσα παράγραφο θα επιχειρήσουμε μια ερμηνευτική ανασύνθεση των βασικών επιχειρημάτων που παρουσιάζονται σε αυτό το άρθρο. Αν θέλαμε να βάλουμε μια περιβάλλουσα της διάρθρωσης του κειμένου, θα εντοπίζαμε τα εξής στάδια στον συλλογιστική του:

(i) Κάθε λογική (ακόμα και τάξης μεγαλύτερης της πρώτης) είναι ερμηνεύσιμη σε έναν τόπο.

(ii) Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους τόπους και τις ιντουσιονιστικές θεωρίες τύπων υψηλότερης τάξης.

(iii) Ορίζονται τα λεγόμενα *τοπικά πλαίσια* ως γενικευμένα μοντέλα της θεωρίας συνόλων.

(iv) Ορίζεται ένας κατάλληλος μετασχηματισμός ανάμεσα στα τοπικά πλαίσια.

Το τελικά αποτελέσματα που καταλήγει ο Bell με τη νέα μέθοδό του για την προσέγγιση των μαθηματικών είναι η απλοποίηση κάποιων περίπλοκων και δυσνόητων διαδικασιών, καθώς και δημιουργία ενός πολύ ενδιαφέροντος ανάλογου των μαθηματικών με την θεωρία της σχετικότητας. Θα περάσουμε τώρα να δούμε ένα προς ένα αυτά τα βήματα.

Πρώτον. Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά στο δεύτερο κεφάλαιο (στο υποκεφάλαιο για τους τόπους και την εσωτερική λογική τους), είναι δυνατόν να ερμηνεύσουμε σε κάθε τόπο την προτασιακή λογική. Επίσης (αυτό δεν το αποδείξαμε στο δεύτερο κεφάλαιο) μπορούμε να δώσουμε ερμηνείες για τους δύο ποσοδείκτες $\exists$ και $\forall$, και έτσι είναι δυνατόν να δώσουμε ερμηνεία και για τις λογικές πρώτης τάξης. Αλλά μπορούμε να συνεχίσουμε. Εξαιτίας της ύπαρξης του εκθετικού Ω^A για τον ταξινομητή υποαντικειμένων και για κάθε αντικείμενο A του τόπου, που μπορούμε να πούμε ότι παριστάνουν συλλογές ιδιοτήτων, ιδιότητες ιδιοτήτων κ.τ.λ., μπορούμε να καταστήσουμε ερμηνεύσιμες και λογικές μεγαλύτερης τάξης, το ίδιο δηλαδή που μπορούμε να κάνουμε και σε κάποιο συνηθισμένο μοντέλο στη συνολοθεωρία. Παρενθετικά να πούμε πως το γεγονός αυτό έχει πολύ μεγάλη σημασία στα μαθηματικά καθώς έτσι δίδεται στα χέρια των λογικολόγων ένας νέος καινούριος κόσμος μοντέλων για τις θεωρίες.

Δεύτερον. Αυτό το αποτέλεσμα, το οποίο και χρησιμοποιεί με κομβικό τρόπο, ο Bell είναι ιδιαίτερα σημαντικό και θα το δούμε κάπως αναλυτικά. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να το αποδείξουμε αλλά εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Lambek. Εδώ πρέπει να πούμε πως το θεώρημα αυτό θα παίξει ιδιαίτερο ρόλο και στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Δημιουργούμε μια θεωρία τύπων η οποία να περιλαμβάνει τους εξής τύπους:

- Τους πρωταρχικούς τύπους 1, N (φυσικοί αριθμοί), Ω (προτάσεις)
- Για κάθε τύπο A τον τύπο $\mathscr{P}(A)$.
- Για κάθε δύο τύπους A και B τον τύπο $A \times B$.

Αν ό όρος α είναι του τύπου A τότε γράφουμε $\alpha \varepsilon A$ και έχουμε:

1. Οι όροι x_1^A,x_2^A,... είναι του τύπου A.
2. Ο όρος $*$ είναι τύπου 1.
3. Αν $\alpha \varepsilon A$ και $\alpha' \varepsilon \mathscr{P}(A)$ τότε οι όροι $\alpha \in \alpha'$ και $\alpha = \alpha'$ είναι τύπου Ω.
4. Ο όρος $0 \varepsilon N$ και αν $n \varepsilon N$ τότε $Sn \varepsilon N$.
5. Αν $\alpha \varepsilon A$ και $\beta \varepsilon B$ τότε $\langle \alpha, \beta \rangle \varepsilon A \times B$.
6. Αν x τύπου A και $\varphi(x)$ τύπου Ω, τότε $\{x|\varphi(x)\} \varepsilon \mathscr{P}(A)$

Επίσης, σταδιακά μπορούμε να ορίσουμε όλους τους λογικούς όρους που χρησιμοποιούμε. Για παράδειγμα αν $p, q \varepsilon \Omega$ και $\alpha \varepsilon A$ τότε γράφουμε:

- $\top$ (αληθές) όταν $* = *$
- $p \wedge q$ όταν $\langle p, q\rangle = \langle \top, \top\rangle$.
- $p \Rightarrow q$ όταν $(p \wedge q) = p$.
- $\forall x \in A\varphi(x)$ όταν $\{x \in A|\varphi(x)\} = \{x \in A|\top\}$
- $p \vee q$ όταν $\forall t \in \Omega(((p \Rightarrow t) \wedge (q \Rightarrow t)) \Rightarrow t)$
- $\neg p$ όταν $p \Rightarrow \top$

Σε μια τέτοια γλώσσα, πρέπει να καθορίσουμε και μια συλλογή θεωρημάτων, ως συνήθως με τη βοήθεια του συμβόλου $\vdash$. Γράφουμε την παραγωγή ως εξής:

$$p_1, p_2, \ldots p_n \vdash_X p_{n+1}$$

όπου τα p_i είναι τύπου Ω και X το σύνολο των ελευθέρων μεταβλητών. Είναι επίσης πολύ εύκολο να ορίσουμε και ένα σύνολο κανόνων συναγωγής οι οποίοι να μπορούν να παράγουν τα θεωρήματα από ένα σύνολο αξιωμάτων. (Αυτό είναι κάτι στο οποίο δεν θα επιμείνουμε).

Κάθε τυπική γλώσσα $\mathscr{L}$ που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες για τους τύπους, τους όρους και τα θεωρήματα ονομάζεται θεωρία τύπων. Για να έχουμε την γνήσια ιντουϊσιονιστική θεωρία τύπων $\mathscr{L}_0$ απαιτούμε οι όροι, οι τύποι και τα θεωρήματα να είναι ελεύθερα παραγόμενα, δηλαδή: Πρώτον να μην υπάρχουν τύπο ή όροι πέρα από αυτούς που ορίζονται παραπάνω και να μην υπάρχουν μη τετριμμένες ισότητες ανάμεσα σε όρους και τύπους και δεύτερον να μην υπάρχουν θεωρήματα άλλα εκτός από αυτά που παράγονται από τους κανόνες συμπερασματολογίας της ιντουϊσονιστικής αριθμητικής. Για να έχουμε μια γνήσια κλασσική θεωρία τύπων$\mathscr{L}_1$, απαιτούμε όπως παραπάνω, μόνο που ζητάμε παραπάνω το αξίωμα αποκλείσεως του τρίτου

$$\forall t \in \Omega(t \wedge \neg t)$$

Για κάθε τόπο $\mathbf{E}$ υπάρχει μια θεωρία τύπων

$$L(\mathbf{E}) = \mathcal{L}$$

που αντιστοιχεί στην εσωτερική λογική και για κάθε θεωρία τύπων υπάρχει τόπος

$$T(\mathcal{L}) = \mathbf{E}$$

που γεννάται από τη θεωρία τύπων γνωστός και ως τόπος των Tarski ὐ Lindenbaum. Οι τόποι και οι θεωρίες τύπων αποτελούν κατηγορίες. Συνεπώς οι L, T είναι συναρτητές που αποδεικνύεται πως είναι συζυγείς και μάλιστα αποτελούν το ζευγάρι μιας ισοδυναμίας κατηγοριών. Αυτοί μας δίνουν μια αντιστοίχιση ανάμεσα στους τόπους αυτούς και τις θεωρίες τύπων.

Τρίτον. Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το κεντρικό αντικείμενο της θεωρίας . Αυτό είναι το λεγόμενο *τοπικό πλαίσιο ή τοπική θεωρία συνόλων* (local set theory). Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από ένας στοιχειώδης τόπος ο οποίος είναι εφοδιασμένος με ένα αντικείμενο φυσικών αριθμών. Εδώ να θυμίσουμε πως αντικείμενο φυσικών αριθμών είναι όπως το έχουμε ορίσει ένας τρόπος για να έχουμε φυσικούς αριθμούς στην θεωρία κατηγοριών. Οι τόποι αυτοί όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι τόποι που προσομοιάζουν πάρα πολύ τα σύνολα, είναι, τρόπον τινά, γενικεύσεις τους. Όπως λέει και ο ίδιος ο Bell:

> *Αυτά τα τοπικά πλαίσια γίνονται τώρα τα γενικευμένα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων ή τοπικών συμπάντων πραγμάτευσης στα οποία οι μαθηματικές έννοιες οφείλουν να αναφέρονται: έτσι προκύπτει η τοπική ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών. Ανάλογα, οι θεωρίες που συσχετίζονται με αυτά τα τοπικά πλαίσια είναι οι γενικευμένες συνολοθεωρίες, στις οποίες πρέπει να κωδικοποιηθούν οι μαθηματικές κατασκευές και οι ισχυρισμοί.*

Αυτό το σημείο είναι και το πιο κομβικό. Το πλαίσιο για να κάνουμε μαθηματικά πλέον γίνεται το τοπικό αυτό πλαίσιο. Εδώ υπάρχει μια σπουδαία ποιοτική τομή σε σχέση με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα όπου το "γενικό μοτίβο" ήταν: αλλάζουμε το μοναδικό σύμπαν το συνόλων με ένα άλλο μοναδικό επίσης σύμπαν όπου όμως θα εκφράζονταν όλα κατηγοριακά. Ο Bell κάνει μια πιο ριζική πρόταση και απορρίπτει τη μονολιθικότητα στη θεμελίωση προς όφελος ενός "θεμελιωτιστικού πλουραλισμού". Δεν αναζητεί έναν τόπο ή μια κατηγορία για να πάρει τη θέση του ενός κόσμου συνόλων αλλά αντίθετα προτάσσει μια πολλαπλότητα τοπικών θεμελίων δηλαδή μια πολλαπλότητα τοπικών πλαισίων στα οποία μπορούμε να κάνουμε μαθηματικά.

Η τοποθέτηση αυτή για τα μαθηματικά δεν είναι εντελώς αυθαίρετη, αποστειρωμένη από την πραγματικότητα και φιλοσοφική, αλλά κατά τη γνώμη του Bell επιβάλλεται από τις εξελίξεις στα μαθηματικά την τελευταία εξηκονταετία. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μη συμβατική ανάλυση του Robinson, οι επεκτάσεις Cohen στη μέθοδο forcing και τα μοντέλα με που μπορούμε να δημιουργήσουμε με αυτήν, οι μοντέρνες εργασίες στην αλγεβρική γεωμετρία, (ειδικά η δουλειά του Grothedieck και της γαλλικής σχολής), καθώς και οι εξελίξεις στον κλάδο της πληροφορικής (και στα μαθηματικά που είναι πρέπει να εφαρμόσουμε σε αυτήν) αλλάζουνε δραματικά τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να σκεφτόμαστε και να κάνουμε μαθηματικά. Όλα αυτά τα προβλήματα

> *έχουν προκαλέσει μια ανησυχητική αβεβαιότητα στα μυαλά των συνολοθεωρητικών ως προς την ταυτότητα του "πραγματικού" σύμπαντος συνόλων ή τουλάχιστον ως προς το ποιες ακριβώς μαθηματικές ιδιότητες πρέπει αυτό να κατέχει. Το αποκορύφωμα είναι ότι η έννοια σύνολο - στον βαθμό πού μπορεί να συλληφθεί από αξιώματα πρώτης τάξης - κατέληξε να είναι ριζικά απροσδιόριστη.*

Προτείνω, λοιπόν, να αποδεχθούμε την ριζικά απροσδιόριστη φύση της έννοιας σύνολο και να εγκαταλείψουμε την αναζήτηση του απόλυτου σύμπαντος συνόλων, στη μορφή πού προτάθηκε από την κλασική Θεωρία Συνόλων.

Σ' αυτήν την περίπτωση, ένας ισχυρισμός, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς, δεν θα πρέπει πλέον να θεωρείται ως κατέχουσα μία απόλυτη αλλά άγνωστη τιμή αλήθειας, γιατί το μοναδικό σύμπαν συνόλων το οποίο θεωρήθηκε ότι προμηθεύει τη συγκεκριμένη τιμή αλήθειας δεν υπάρχει πια .Οι συνολοθεωρητικοί ισχυρισμοί, όπως το Αξίωμα της Επιλογής ή η Υπόθεση του Συνεχούς, δεν θα κατέχουν την ιδιότητα του αληθούς (ή ψευδούς) κατηγοριακά, επειδή σε κάποια τοπικά πλαίσια θα ισχύουν και σε κάποια άλλα όχι.

Τέταρτον Στη συνέχεια ο Bell ορίζει ένα κατάλληλο μετασχηματισμό ανάμεσα στα τοπικά πλαίσια. Αυτόν τον ονομάζει αποδεκτό (admisible) ή συνεχή μετασχηματισμό, και ορίζεται να είναι ένας

$$f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$$

όπου $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ τοπικά πλαίσια και αποτελείται από ένα ζεύγος συναρτητών

$$f^* : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$$

$$f_* : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$$

τέτοιων ώστε ο f^* να είναι δεξιά συζυγής του f_* και επιπλέον ο f^* είναι αριστερά ακριβής.

Για ένα παράδειγμα τέτοιων μετασχηματισμών αν πάρουμε χώρους δραγμάτων τότε

Στη "γεωμετρική" περίπτωση όπου οι $\mathbf{E}$ *και* $\mathbf{F}$ *είναι οι τόποι δραγμάτων πάνω στους τοπολογικούς χώρους* X *και* Y *και σκεφτόμαστε τους* E *και* F *ως γενικευμένους χώρους, οι αποδεκτοί μετασχηματισμοί μεταξύ* E *και* F *αντιστοιχούν ακριβώς στις συνεχείς απεικονίσεις από το* Y *στο* X*: αυτή είναι η πηγή του όρου συνεχής μετασχηματισμός*

Ή δυνατότητα μετάβασης μέσω αποδεκτών μετασχηματισμών από ένα τοπικό πλαίσιο σε ένα άλλο είναι κεντρική στην ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών πού προτείνεται εδώ, και δείχνει τον ουσιαστικά κινητικό και σχεσιακό χαρακτήρα της. Σχετικό με αυτό, εντυπωσιάζεται κανείς από την εμφανή αναλογία με τη φυσικογεωμετρική έννοια της αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων. Και πράγματι, ακριβώς όπως στην αστρονομία για να απλοποιήσει κάποιος την κίνηση ενός πλανήτη επιφέρει μια αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων, έτσι και εδώ αποδεικνύεται ότι είναι δυνατόν επιφέροντας μια μετατόπιση του τοπικού μαθηματικού πλαισίου να απλοποιηθεί η διατύπωση μιας μαθηματικής έννοιας.

και συνεχίζει δίνοντας το εξής ενδιαφέρον παράδειγμα:

Κάθε τέτοια συνάρτηση (συνεχής πραγματική συνάρτηση σε ένα τοπολογικό χώρο) μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός αριθμός (ή ποσότητα) πού μεταβάλλεται συνεχώς επί του X. Ας θεωρήσουμε τώρα τον τόπο $\mathbf{Shv}(X)$ *των δραγμάτων πάνω στο X. Εδώ τα πάντα μεταβάλλονται (συνεχώς) επί του X, έτσι η μετατόπιση στο* $\mathbf{Shv}(X)$ *από το* **Sets** *ουσιαστικά ισοδυναμεί με την ενσωμάτωση κάποιου σε ένα πλαίσιο το όποιο είναι, σαν να λέμε, αυτό το ίδιο μετακινούμενο μαζί με τη μεταβολή πάνω στο X των δοσμένων μεταβαλλόμενων πραγματικών αριθμών. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην παρατηρείται η μεταβολή κάθε μεταβαλλόμενου πραγματικού αριθμού στο* $\mathbf{Shv}(X)$ *επομένως θεωρείται εκεί, ότι είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Με αυτό τον τρόπο η έννοια "πραγματική συνάρτηση συνεχής επί του X" μετασχηματίζεται στην έννοια "πραγματικός αριθμός" όταν ερμηνεύεται στο* $\mathbf{Shv}(X)$*. (Για να είμαστε ακριβείς, τα αντικείμενα στο* $\mathbf{Shv}(X)$ *που ικανοποιούν τη συνθήκη να είναι οι (κατα Dedekind)πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχούν, μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού*

$$\mathbf{Sets} \longrightarrow \mathbf{Shv}(X)$$

στις πραγματικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς επί του X). Αντίστροφα, η έννοια "πραγματικός αριθμός" ερμηνευμένη στον $\mathbf{Shv}(X)$*, αντιστοιχεί στην έννοια "πραγματική συνάρτηση", συνεχής επί του Xη ερμηνευμένη στο S. Αυτή η παρατήρηση παρέχει τη βάση για διάφορες αποδείξεις ανεξαρτησίας στην ιντουϊσιονιστική ανάλυση (ανάλυση ερμηνευμένη στον* $\mathbf{Shv}(X)$*)*

Επίσης ένα ακόμα σημαντικό στοιχείο που εισάγεται αναπόδραστα είναι η σχετικότητα. Κανένα μαθηματικό αντικείμενο δεν αντιμετωπίζεται πλέον ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα και αυτοδύναμο (με την έννοια ενός οντολογικού αυτοκαθορισμού, μιας δυνατότητας εύρεσης στο ίδιο το αντικείμενο κάποιας ουσίας ανεξάρτητης που μπορεί να καθορίσει πλήρως το είναι του μαθηματικού αντικειμένου).

Η τοπική ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών, βασισμένη όπως είναι στη Θεωρία Κατηγοριών, έχει έναν ουσιαστικά σχεσιακό χαρακτήρα. Σύμφωνα με την τοπική ερμηνεία, η αναφορά μιας μαθηματικής έννοιας, στον βαθμό που μπορεί να ερμηνευθεί (construed) ως μια οντότητα (entity), δεν πρέπει πια να εκλαμβάνεται ως ένα πράγμα καθεαυτό, του οποίου η φύση είναι ανεξάρτητη από άλλα πράγματα, και του οποίου οι χαρακτηριστικές ιδιότητες είναι ολοκληρωτικά εγγενείς (intrinsic). Αντιθέτως, οι ιδιότητες μιας μαθηματικής οντότητας, καθορίζονται τώρα από, και πράγματι έχουν νόημα μόνο σε σχέση με την ολότητα των συσχετίσεών της με άλλες οντότητες.

Αυτές οι ιδιότητες που προκύπτουν από την τοπική θεμελίωση εγείρουν σοβαρά φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με τον ολισμό στα μαθηματικά, τον μαθηματικό δομισμό και τον θεμελιωτισμό ως γενικό επιστημολογικό και γνωσιοθεωρητικό πρόταγμα. Όλα τα παραπάνω ζητήματα τα

εξετάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου. Η διάρθρωση για τα μαθηματικά που παρουσιάστηκε παραπάνω βασίζεται σε, και κατά κάποιο τρόπο υλοποιεί μια διαλεκτική και τοπική προσέγγιση που έχει ο Bell για τα μαθηματικά και η οποία βρίσκει την καλύτερη έκφρασή της με την θεωρία κατηγοριών. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιαίτερης φύσης και θέσης που έχουν οι κατηγορίες και οι τόποι στο οικοδόμημα των μαθηματικών. Με τα δικά του λόγια αυτό σημαίνει ότι:

> *(...)η γένεση της θεωρίας των κατηγοριών είναι μία στιγμή της διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του σταθερού από το μεταβαλλόμενο (...) η Θεωρία Κατηγοριών επιτρέπει ακόμη και τη μορφή των δομών να μεταβάλλονται, παρέχοντας έτσι μια γενική Θεωρία Μαθηματικών Δομών ή Μορφών (...)προτείνει πως οι μαθηματικές έννοιες και οι μαθηματικοί ισχυρισμοί, θα πρέπει να θεωρηθούν ότι κατέχουν νόημα μόνο σε σχέση προς μια ποικιλία, περισσότερο ή λιγότερο, τοπικών πλαισίων.*

Το πιο ενδιαφέρον στην προσέγγιση αυτή είναι μια ξαφνική αναλογία που εμφανίζεται ανάμεσα στην κατανόηση με αυτό τον τρόπο της θεμελίωσης των μαθηματικών και του τρόπου με τον οποίο βλέπουμε τα συστήματα αναφοράς στα πλαίσια της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η προσπάθεια αυτή από τον Bell έχει περισσότερο το χαρακτήρα ερμηνείας της μαθηματικής θεωρίας στην φύση (κάτι γενικά συνηθισμένο στην φυσική, το οποίο εδώ έχει πολύ ιδιαίτερο χαρακτήρα). Με όλα όσα θα ακολουθήσουν ο Bell σίγουρα δεν επιθυμεί ούτε να αποδείξει την ένταξη όλων του κλάδου αυτού της φυσικής και της προσέγγισης των τοπικών πλαισίων σε ένα ενιαίο ευρύτερο πλαίσιο, ούτε να προσπαθήσει να ιχνηλατήσει κάποιες άρρητες διασυνδέσεις. Περισσότερο αυτή η αναλογία έχει ένα χαρακτήρα παιδαγωγικού μετασχηματισμού: Προσπαθεί να προβάλει κάποιες έννοιες σε κάποιες άλλες να αναδείξει την ευρύτητα κάποιων σχημάτων και δομών αλλά και για να βοηθήσει διαισθητική αποδοχή του επόμενου βήματός μας στην θεωρία το οποίο ίσως να φαίνεται ασύμμετρο.

Ας δούμε κάθε ένα τοπικό πλαίσιο το ως ένα σύστημα αναφοράς όπως το ξέρουμε από την φυσική. Η επόμενη βασική έννοια στην φυσική είναι αυτή του αναλλοίωτου μεγέθους. Με λίγη σκέψη ανακαλύπτουμε πως υπάρχει και το ανάλογό του στα τοπικά πλαίσια. Από την στιγμή που δεν υπάρχει η έννοια της απόλυτα αληθούς πρότασης (αυτή διαφέρει ανάλογα με το πιο τοπικό πλαίσιο δεχόμαστε με τον ίδιο τρόπο που ένα μέγεθος παίρνει άλλη τιμή ανάλογα με το πιο πλαίσιο αναφοράς έχουμε) παίρνουν μεγάλη βαρύτητα οι μαθηματικές εκείνες προτάσεις που παραμένουν αληθείς σε όλα τα πλαίσια αναφοράς. Αυτές οι προτάσεις θα ονομάζονται *αναλλοίωτοι μαθηματικοί νόμοι*. Ποιοι νόμοι είναι τέτοιοι;

> *Αυτοί, στην πραγματικότητα τα θεωρήματα υψηλότερης τάξης της ιντουϊσιονιστικής λογικής με ένα σύστημα φυσικών αριθμών, το όποιο περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τα θεωρήματα της ιντουϊσιονιστικής αριθμητικής, αλλά όχι το Αξίωμα της Επιλογής ή τον Νόμο της του Μέσου Αποκλείσεως. Έτσι οι αναλλοίωτοι μαθηματικοί νόμοι*

είναι αυτοί οι όποιοι είναι αποδείξιμοι κατασκευαστικά: αυτό δείχνει τη σημαντικότητα του κατασκευαστικού λογισμού για την τοπική ερμηνεία.

Η διαδικασία μετάφρασης της κλασικής σε ιντουϊσιονιστική λογική είναι επομένως το λογικό ανάλογο της έκφρασης ενός φυσικού νόμου σε αναλλοίωτη μορφή.

Εξαιτίας δηλαδή της ιντουϊσιονιστικής φύσης των τόπων αυτό μας βάζει της προτάσεις των ιντουϊσιονιστικών μαθηματικών σε μια κεντρική θέση. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι δικαιώνει ως ένα σημείο αλλά και δείχνει τα όρια που μπορεί να έχουν τα κατασκευαστικά μαθηματικά. Όσα ειπώθηκαν παραπάνω δεν σημαίνουν ότι οι αυτές οι προτάσεις είναι οι μόνες αληθείς αλλά ότι είναι οι μόνες που δεν μπορείς σε καμία των περιπτώσεων (μέσα στα πλουραλιστικά μαθηματικά που δημιούργησε ο Bell) να αμφισβητήσεις.

Στην φυσική τώρα ανάμεσα σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων υπάρχουν κάποια τα οποία τα ξεχωρίζουμε: τα αδρανειακά στα οποία ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα. Το αντίστοιχο στα τοπικά πλαίσια είναι οι τόποι αυτοί για τους οποίους ισχύει το αξίωμα της επιλογής στην κατηγορική του μορφή όπως το έχουμε δώσει (και το οποίο παίζει το ρόλο του πρώτου νόμου). Αυτό συμβαίνει γιατί οι τόποι στους οποίους ισχύει αυτό είναι εκείνο που προσομοιάζουν περισσότερο την κλασσική μορφή των συνόλων.

Γιατί από την αλήθεια του (ισχυρού) Αξιώματος Επιλογής σε ένα πλαίσιο E δεν συνεπάγεται μόνο ότι η εσωτερική λογική του E είναι κλασική και δίτιμη (δηλαδή υπάρχουν μόνο δύο τιμές αλήθειας "αληθές" και "ψευδές"), αλλά επίσης ότι είναι και εκτασιακό (extentional), δηλ. τα βέλη του E μοιάζουν με συνολοθεωρητικές απεικονίσεις, με το ότι προσδιορίζονται από τη δράση τους πάνω στα "σημεία" του πεδίου ορισμού τους. Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να θεωρηθούν ότι διακρίνουν τους τόπους των σταθερών συνόλων, μεταξύ αυθαιρέτων τόπων ή πλαισίων.

3.7 Δομισμός και Θεωρία Κατηγοριών

Ο μαθηματικός στρουκτουραλισμός ή μαθηματικός δομισμός αποτελεί μια από τις σύγχρονες και πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις στην φιλοσοφία των μαθηματικών. Έλκει την καταγωγή από τις δεκαετίες του 60 και 70, αν και στοιχεία της μεθοδολογίας του βρίσκουμε από πολύ νωρίτερα και έχει κάποιες κοινές σχέσεις με το ευρύτερο ρεύμα του γαλλικού δομισμού αν και δεν μπορεί να ενταχθεί σε αυτό με απόλυτο τρόπο. Κάτι που τον χαρακτηρίζει είναι οι πολλές και αντιδιαμετρικές τοποθετήσεις στο εσωτερικό του, τοποθετήσεις που, όπως οι διαφοροποίηση σε ante rem/ in re στρουκτουραλισμό, εγκολπώνουν μέσα του ευρύτερες φιλοσοφικές διαφοροποιήσεις και οι οποίες έτσι συνιστούν ένα πολυσχιδές και όχι ενιαίο ρεύμα ιδεών μπορούμε να περιγράψουμε μάλιστα 4 διαφορετικούς και μεταξύ τους αντίθετους στρουκτουραλισμούς (τον συνολοθεωρητικό,

τον λεγόμενο suis generis, τον κατηγοριακό και τον τροπικό (modal)). Η θεωρία κατηγοριών έρχεται να συμβάλει με έναν ειδικό τρόπο στις συζητήσεις για τον μαθηματικό δομισμό. Η συζήτηση είναι πολύ έντονη τα τελευταία χρόνια και αφορά το εάν μπορεί να προσφέρει ένα πλαίσιο για τον μαθηματικό στρουκτουραλισμό, και εάν ναι για ποιον ακριβώς.

Η βασικά θέση είναι πως τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με δομές. Η ουσία των μαθηματικών αντικειμένων είναι η σχέση τους με τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα και στην ουσία τους τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με δομές. Όπως λέει και ο Resnik(1981,25) ,ένας από τους εξέχοντες υποστηρικτές του:

> *Στα μαθηματικά, ισχυρίζομαι ότι δεν έχουμε αντικείμενα με μια "εσωτερική" σύνθεση που διευθετείται στις δομές, έχουμε μόνο δομές. Τα αντικείμενα των μαθηματικών, δηλαδή οι μαθηματικές οντότητες τις οποίες οι μαθηματικές σταθερές και οι ποσοδείκτες, είναι σημεία χωρίς δομή ή θέσεις στις δομές. Ως θέσεις στις δομές δεν έχουν καμία ιδιότητα ή ταυτότητα έξω από την δομή.*

Ο δε ρόλος των αξιωμάτων είναι να μπορέσουν να δώσουν τα χαρακτηριστικά και να ορίσουν την δομή. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι κατά Peano-Dedekind φυσικοί αριθμοί. Σύμφωνα με αυτά ένα σύνολο φυσικών αριθμών είναι ένα σύνολο $\mathbb{N}$ μαζί με μια συνάρτηση $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

(A1) Το σύνολο έχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{N}$.

(A2) Η συνάρτηση s είναι ένα-προς-ένα.

(A3) Δεν υπάρχει κανένα $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο $s(n) = 0$.

(A4) Αν για κάποιο $A \subseteq \mathbb{N}$ ίσχύει ότι για κάθε $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$ τότε $A = \mathbb{N}$

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ανάγλυφα η δομιστική τοποθέτηση. Τα στοιχεία του συνόλου δεν έχουν νόημα στην δομή μόνα τους παρά μόνο στο πλαίσιο της δομής όλων των φυσικών αριθμών ενώ τα αξιώματα έχουν δεν μας λένε κάτι για κάποια φύση ή οντότητα των φυσικών αριθμών αλλά το μόνο που κάνουν είναι να καθορίζουν την δομή. Τέλος να σημειώσουμε πως οι φυσικοί αριθμοί ορίζονται παραπάνω με ναι ελευθερία ισομορφισμού. Φυσικοί αριθμοί μπορεί να είναι ότι μπορεί να ειδωθεί ως υλοποίηση της δομής, και όλες αυτές οι υλοποιήσεις είναι ισόμορφες μεταξύ τους.

Η έννοια κλειδί εδώ είναι η έννοια της δομής. Τι ακριβώς όμως σημαίνει αυτό και ως το αντιλαμβάνεται ένας σύγχρονος μαθηματικός. Κατά πρώτον με την προσπάθειες αξιωματικοποίησης των Hilbert και Dedekind αλλά και με τις ιδέες των Bourbaki η έννοια της δομής απέκτησε κεντρικό ρόλο και πλέον τα μαθηματικά βρίθουν δομών (πχ η δομή ενός τοπολογικού χώρου, η δομή μιας ομάδας, μιας πολλαπλότητας κτλ). Μια "πιο φιλοσοφική" προσπάθεια ερμηνείας της δομής είναι η εξής Shapiro(1982 167):

> *Ορίζω ένα σύστημα να είναι μια συλλογή αντικειμένων με συγκεκριμένες σχέσεις. (...) μια δομή είναι η αφηρημένη μορφή ενός συστήματος δίνοντας έμφαση στην διασύνδεση των αντικειμένων και αγνοώντας όσα στοιχεία για αυτά δεν παίζουν κάποιο ρόλο στο πως συνδέονται με άλλα αντικείμενα μέσα στο σύστημα.*

Η πιο συνηθισμένη είναι η συνολοθεωρητική προσέγγιση των δόμων. Αυτή ορίστηκε με λεπτομέρεια στο Bourbaki's Elements, vol. 1, ả4, αλλά αν θέλουμε να δώσουμε ένα πιο συνεκτικό και εύληπτο ορισμό θα λέγαμε:

> *Δομημένο σύνολο ή χώρος ή δομη λέγεται ένα ζεύγος U=(A,δ) όπου A=Field(U) είναι σύνολο, το πεδίο του U και δ είναι τυχών αντικείμενο, ο σκελετός του U (...)* Γ. Μοσχοβάκης: Σημειώσεις στην συνολοθεωρία σελ 51

> *Έτσι στην δομή του τοπολογικού χώρου ο σκελετός είναι ένα σύνολο υποσυνόλων γνωστό και ως τοπολογία, στην ομάδα είναι μια πράξη (δηλαδή μια συνάρτηση που σε τελική ανάλυση είναι ένα σύνολο) και πάει λέγοντας. Ακόμα έχουμε ότι: Οι δομές μπορούν να είναι μοντέλα συγκεκριμένων θεωριών που ικανοποιούν τα θεωρήματά τους.* G. Hellman : Structuralism: Oxford Handbook of philosophy of mathematics σελ 539

Με μοντέλα αυτά να είναι βέβαια τα συνήθη συνολοθεωρητικά μοντέλα της θεωρίας μοντέλων η οποία και εξετάζει συστηματικά αυτές τις ιδέες. Τέλος σημαντικό ρόλο παίζει και η έννοια του μορφισμού η οποία επιτρέπει απεικονίσεις μεταξύ των δομημένων συνόλων που "διατηρούν" την δομή και συγκεκριμένο και κατάλληλο κάθε φορά τρόπο (Οι Bourbaki στο προαναφερθέν βιβλίο ορίζει και με ένα γενικό τρόπο την έννοια του μορφισμού ανάμεσα στις δομές). Όλα τα παραπάνω ορίζουν τον λεγόμενο συνολοθεωρητικό στρουκτουραλισμό. Την θέση σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά αφορούν πάντα δομές ,και οι δομές με την σειρά τους αφορούν πάντα αντικείμενα στο κόσμο των συνόλων. Αυτή η προσέγγιση, αν και η πρώτη που εμφανίστηκε ιστορικά και σίγουρα η πιο διαδεδομένη ανάμεσα στους εργαζόμενους μαθηματικούς, αντιμετωπίζει αρκετά προβλήματα με σημαντικότερο όλων το εξής (J. Hellmann Mathematical Structuralism σελ 2):

> *Κάνει μία μιζών εξαίρεση (όσον αφορά την θεωρία συνόλων). Παρόλη την πολλαπλότητα των θεωριών με σύνολα που διαφέρουν ανάλογα με την επιλογή αξιωμάτων, τα αξιώματα γίνονται πάντα κατανοητά περισσότερα ως αλήθειες για τον "πραγματικό κόσμο των συνόλων" παρά μεταχειρίζονται σύμφωνα με τις στρουκτουραλιστικές αρχές.*

Βλέπει δηλαδή παντού δομές εκτός από την ίδια την θεωρία συνόλων. Απάντηση σε αυτό και σε άλλα συναφή προβλήματα προσπάθησαν να δοθούν με την προώθηση άλλων στρουκτουραλισμών. Ένας από αυτούς είναι και ο κατηγοριακός στρουκτουραλισμός.

Η ουσία εδώ είναι μια αντιστροφή της πορείας. Δεν ορίζουμε πρώτα την δομή και έπειτα τους μορφισμούς ανάμεσα στις δομες αλλά έχοντας ως πρωταρχικό στοιχείο τον μορφισμό χαρακτηρίζουμε την δομή σύμφωνα με το πως αυτή συμπεριφέρεται κάτω από την δράση των μορφισμών. Μπορούμε να δείξουμε πως το σύνολο των ευρέως χρησιμοποιούμενων μαθηματικών δομών μπορούνε να ειδωθούν με αυτήν την λογική, και μάλιστα να ισχυριστούμε επιχειρήματα το πως αυτός είναι ο επιθυμητός τρόπος για να προσεγγιστούν τα μαθηματικά. Η θεωρία αυτή, που με φυσικό τρόπο μπορεί να υπηρετήσει αυτήν την μεθοδολογία είναι σαφώς η θεωρία κατηγοριών και ο στρουκτουραλισμός αυτός που δεν αναζητά της δομές στα σύνολα αλλά στους μορφισμούς χρησιμοποιώντας την θεωρία κατηγοριών είναι γνωστός ως κατηγοριακός στρουκτουραλισμός.

> *Μια δομή ορίζεται από αντικείμενα και μορφισμούς ανάμεσα τους, παρά από συγκεκριμένες μαθηματικά αντικείμενα που μπορούν να ειδωθούν απομονωμένα (...)Λίγοι σημερινοί μαθηματικοί ενδιαφέρονται για τις ιδιότητες των αντικειμένων που μελετούν χωρίς την αναφορά σε ένα δοσμένη και καλώς ορισμένη έννοια ισομορφισμού (...) σπάνια ασχολούνται με ένα συγκεκριμένο σύνολο με μια κατά Bourbaki δομή παρά για αντικείμενα ορισμένα μέχρις ισομορφισμού (...) Έτσι η θεωρία κατηγοριών ανακύπτει όχι ως μια εναλλακτική προσπάθεια θεμελίωσης αλλά ως απάντηση σε μια μαθηματική ανάγκη για μια γλώσσα και για μεθόδους που θα ταιριάζουν σε προβλήματα που αφορούν διάφορα είδη μαθηματικών δομών.* Awodey 1996 Structures in mathematics and logic: A categorical perspective σελ 212

Οι περιπτώσεις και οι τρόποι που μπορουμε να δούμε αυτήν την λογική να δουλέυει είναι πολλές. Το πιο χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των ομάδων το οποίο και αναφέραμε νωρίτερα. Ας θεωρήσουμε την κατηγορία **Grps** των ομάδων και ας πάρουμε τους συναρτητές

$$F : \mathbf{Grps} \longrightarrow \mathbf{C}$$

όπου **C** μια τυχούσα κατηγορία. Τότε ο συναρτητής διαισθητικά μας δίνει την εικόνα της μιας κατηγορίας μέσα στην άλλη ή διαφορετικά την κατηγορία **Grps** μέσα στο περιβάλλον της **C** δίνοντας μας έτσι μια διαφορετική ερμηνεία.Έτσι, η ερμηνεία του ορού ὲομάδαῃ στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων είναι η τοπολογική ομάδα, στην κατηγορία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων είναι μια ομάδα Lie και στην κατηγορία των δραγμάτων (sheaves), επί ενός τοπολογικού χώρου, είναι ένα δράγμα ομάδων.Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι το κατηγοριο-θεωρητικό νόημα μιας μαθηματικής έννοιας, όπως αυτό της ομάδας, προσδιορίζεται τώρα αποκλειστικά σε σχέση με μία περιβάλλουσα (ambient) κατηγορία, και αυτή η περιβάλλουσα κατηγορία μπορεί να μεταβάλλεται

Μια τέτοια προσέγγιση μας δίνει μια σειρά από πλεονεκτήματα τα οποία παραθέτει ο Awodey στο 1996. Κατ' αρχήν είναι μια αντίληψη για την δομή που είναι συντακτικά αναλλοίωτη (syntax invariant) δηλαδή δεν εξαρτάτε από κάποια συγκεκριμένη επιλογή ανάμεσα στις δυνατές επιλογές

περιγραφής κατά Bourbaki. Κατά δεύτερον ορίζει μια ομοιόμορφη περιγραφή της δομής που μας επιτρέπει να συσχετίζουμε διαφορετικές δομές. παράδειγμα τοπολογίας, ομάδας και τυπολογικής ομάδας. Τέλος υπάρχουν μαθηματικές δομές που δεν μπορούν να περιγράφουν κατά Bourbaki (ένα τέτοια παράδειγμα είναι η κατηγορία με αντικείμενατα ανοιχτά σύνολα ενός χώρου και μορφισμούς τις απεικονίσεις εγκλεισμού ανάμεσα σε αυτά).

Η κατασκευή των δομών που παρουσιάζουμε εδώ έχει χαρακτηριστικά μιας Top down προσέγγισης έναντι της bottom up που παρουσιάζει η συνολοθεωρητική.

Το επιχείρημα εδώ είναι ισχυρότερο από την αναζήτηση απλώς ενός διαφορετικού από την θεωρία συνόλων θεμελίου για τα μαθηματικά. Εκκινώντας από τις φιλοσοφικές προκείμενες του στρουκτουραλισμού προσπαθούμε να επανεξετάσουμε το σύνολο των μαθηματικών και να το προσαρμόσουμε στις αρχικές μας τοποθετήσεις. Έτσι οδηγούμαστε στην θεωρία κατηγοριών και την θεωρία τόπων η οποία εκ πρώτης άποψης λύνει κάποια προβλήματα σε σχέση με τα σύνολα. Η διαφοροποίηση εδώ σε σχέση με τις πρώτες απόπειρες θεμελίωσης με κατηγορίες έγκειται στο ότι τώρα η νέα θεμελίωση μοιάζει συνυφασμένη με μία συνολική φιλοσοφία για τα μαθηματικά ιδιαίτερα προνομιούχα μιας και λύνει ένα σύνολο φιλοσοφικών προβλημάτων. Όλα αυτά όμως δεν ισχύουν χωρίς αντιρρήσεις.

Κριτική έκανε ο Hellman στο Does Category Theory Provide A Framework For Categorical Structuralism (2003) όπου επανέφερε επιχειρήματα που πρώτα διατύπωσε ο Fefferman το 1977 στο Categorical foundations and foundations of category theory', in R. E. Butts and J. Hintikka, eds., Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory. Dordrecht: Reidel, pp. 149-169 επαναειδωμένα όπως υπό το φως των στρουκτουραλιστικών θέσεων για να φτάσει τελικά στο συμπέρασμα ότι είναι τελικά ακατάλληλη να παίξει ένα ρόλο σαν αυτόν που περιγράψαμε παραπάνω. Και αυτό για δύο λόγους "επειδή στερείται μιας εξωτερικής θεωρίας σχέσεων και ουσιαστικών αξιωμάτων ύπαρξης". Με το πρώτο εννοεί (ακολουθώντας τον Fefferman) ότι μιλώντας για κατηγορίες, αντικείμενα και μορφισμούς υπονοούμε και προϋποθέτουμε έννοιες όπως "συλλογή" και "απεικόνιση" για της οποίες όμως η Θεωρία κατηγοριών ειδομένη ως θεμέλιο όλων των μαθηματικών δεν τις αντιμετωπίζει με συστηματικό τρόπο και έτσι, εφόσον τα αξιώματα της Θεωρίας Κατηγοριών είναι εντελώς σχηματικά- με την έννοια ότι διαφέρουν ουσιαστικά από τα αξιώματα την θεωρίας συνόλων γιατί δεν έχουν τον χαρακτήρα της αναφοράς στην "πραγματικότητα" ενός κόσμου, αλλά είναι αλγεβρικά και θυμίζουν περισσότερο τα αξιώματα της άλγεβρας- (αυτό είναι μια από τις βασικές θέσεις του Hellmann), χρειαζόμαστε δομές που θα ικανοποιούν τα αξιώματα αυτά και τον ρόλο αυτό μπορεί να παίξει αυτό που ονομάζει θεωρία σχέσεων (μια θεωρία που καταπιάνεται με τη έννοια της συλλογής.).

> *Όπως ο η θεωρία ομάδων δεν προϋποθέτει το γινόμενο κατά κανένα συνήθη τρόπο ως πρωταρχικό (...) ούτε και κατηγοριακός στρουκτουραλισμός μπορεί να σταθεί σε κάποια πρωταρχική ερμηνεία της σύνθεσης, το πεδίου ορισμού κτλ.* Hellmann (2003) σελ 135

Η δυσκολία που σημειώνει ο Hellmann όσον αφορά τον στρουκτουραλισμό και δεν μπορούμε να αρκεστούμε στην συνηθισμένη απάντηση που δίνεται στην προβληματική του Fefferman, ότι δηλαδή κάθε θεμέλιο μπορεί να πατάει σε κάποιες μη τυπικές ιδέες και θέσεις, έγκειται στην εξηγητική προτεραιότητα που πρέπει να έχει η δομή και η οποία δεν μπορεί να βασίζεται με την σειρά της σε κάποιο πιο θεμελιώδες επίπεδο. Με το δεύτερο εννοεί ότι αξιώματα της Θ. Κατηγοριών δεν μας εξηγούν τι είναι που βρίσκονται και ποια αξιώματα αφορούν την ύπαρξη των αντικειμένων που πραγματεύονται, κάτι που θα έπρεπε να κάνει, κατά τον Hellmann, κάθε θεμέλιο των μαθηματικών. Δηλαδή εκ κατακλείδι παρότι η Θεωρία Κατηγοριών καταφέρνει να περιγράψει αποτελεσματικά την δομές στα μαθηματικά αποτυγχάνει να απαντήσει και να διασαφηνίσει συγκεκριμένα οντολογικά ζητήματα.

Τα επιχειρήματα αυτά του Hellmann έδωσαν την αφορμή για την έναρξη ενός γόνιμου διαλόγου σχετικά με την θεωρία κατηγοριών, τον μαθηματικό στρουκτουραλισμό και τα θεμέλια των μαθηματικών. Πρωταγωνιστές σε αυτό το "debate" είναι επίσης ο Awodey, και ο McLarty ενώ παρεμβάσεις κάνει και ο Shapiro. Μια διαχωριστική ανάμεσα στα επιχειρήματα του διαλόγου είναι οι δύο παραδόσεις σχετικά με την φύση των μαθηματικών αξιωμάτων που ξεκινά με την γνωστή αντίθεση των Hilbert και Frege για το αν τα αξιώματα είναι σχηματικά, απλοί κανόνες χωρίς κάποια ερμηνεία ή για το αν θα πρέπει να "πατάνε" και να αποκαλύπτουν κάποια αλήθεια σε σχέση με αυτό που θέλουν να περιγράψουν.

Κατ' αρχήν παρενέβη ο Awodey από μια αντί-θεμελιωτική σκοπιά. 'Οπως είπε "(ο Hellmann) έχασε αυτό που προσπαθούσε πραγματικά που δεν είναι άλλο από το να χρησιμοποιήσει ην Θεωρία Κατηγοριών για να αποφύγει την όλη φιλολογία περί 'θεμελίων'" Awodey (2004) σελ 55. Η απάντηση εδώ είναι ϊσοπεδωτική". Αρνείται τα θεμέλια ως ένα κομμάτι των μαθηματικών που θα ενοποιεί στην βάση τους όλα τα μαθηματικά και υπερασπίζεται μια απόλυτα σχηματική προσέγγιση για τα μαθηματικά και τα μετά-μαθηματικά που δεν θα είναι αναγκασμένη να έχει οντολογικές "ανησυχίες" και προϋποθέσεις σαν αυτές του Hellmann γιατί θα είναι καθολικά top-down και δεν θα έχει να κάνει με κάποιες σχέσεις. Δηλαδή η θεωρία δομών δεν χρειάζεται να πατά σε θεωρία σχέσεων ανάμεσα σε κάποια άτομα όπως θέλει ο Hellmann κάτι που φέρνει τελικά το πρόβλημα μιας πλουραλιστικής οντολογίας.

Από μια άλλη σκοπιά απάντησε ο Colin McLarty. Στο άρθρο του Exploring Categorical Structuralism (2004) αρνήθηκε πως η πρέπει να ρωτούμε αν η θεωρία κατηγοριών μπορεί πετύχει τέτοιους είδους σκοπούς και πως αυτό που πρέπει να κρίνουμε τα προγράμματα όπως η το ETCS και το CCAF. Τα αξιώματα αυτών των θεωριών, ισχυρίζεται ο McLarty είναι ανεξάρτητα από κάθε εξωτερική θεωρία σχέσεων και προβάλουν συγκεκριμένες, αν και διαφορετικές, απαντήσεις σχετικά με το ποίες μαθηματικές οντότητες υπάρχουν και πιο είναι το καθεστώς της ύπαρξής τους. Δηλαδή, παρόλο που ο χαρακτήρας των αξιωμάτων των κατηγοριών είναι όντως αλγεβρικός και σχηματικός, ο McLarty ισχυρίζεται πως αυτά τα προγράμματα έχουν αξιώματα Frege-ιανού χαρακτήρα. Η αξιωματικοποίηση του ETCS ας πούμε έχουν τον ίδιο σκοπό με την ZF με μόνη

διαφορά την χρήση του μηχανισμού των βελών παρά την σχέση του ανήκειν.

Η συζήτηση αυτή συνεχίζεται μέχρι σήμερα: Hellman:What is Categorical Structuralism, McLarty: Learning from Questions on Categorical Foundations(2005), McLarty: Recent Debate Over Categorical Foundations (2010) με πιο ειδικό όμως τρόπο πάνω στο κατά πόσο αυτές οι ειδικές προσεγγίσεις στην θεωρία κατηγοριών ικανοποιούν τα προβλήματα τα οποία έθεσε αρχικά ο Hellmann. Αν θέλαμε κάπως να "μαζέψουμε" αυτή την συζήτηση θα είχαμε συνοπτικά: Ο Hellmann,με μια "μεσοβέζικη στάση" σχετικά με την φύση των αξιωμάτων, ισχυρίζεται πως συνολικά η θεωρία κατηγοριών έχει ανάγκη μιας θεωρίας υποβάθρου και ως εκ τούτου δεν μπορεί να υπηρετήσει έναν συνεπή στρουκτουραλισμό. Ο ακραία φορμαλιστής πατάει πάνω στις θέσεις του Hilbert και τις προεκτείνει βλέποντας τα πάντα στα μαθηματικά ως σχηματικά και έτσι απορρίπτει τις ανησυχίες του Hellmann και τέλος ο McLarty, υπό την επιρροή των ιδεών του Frege, επιχειρηματολογεί πως υπάρχουν κάποιες προσεγγίσεις πάνω στην θεωρία κατηγοριών που μας δίνουν το απαιτούμενο υπόβαθρο που ζητά ο Hellmann.

Ένα βασικό ζήτημα που διατρέχει όλον τον διάλογο παραπάνω είναι κατά πόσο η θεωρία κατηγοριών είναι ανεξάρτητη από την θεωρία συνόλων Αυτή η γενικότερη προβληματική, εμφανίζεται με ιδιαίτερο τρόπο στην συζήτηση για τον δομισμό. Το ζήτημα το θέτει πιο ξεκάθαρα ο Shapiro στο Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: The status of meta-mathematics Philosophia Mathematica, 13(1), 61-77. (2005). Εμείς εδώ θα το παρουσιάσουμε όπως το ανασυνέθεσε ο Makmiller Pedroso στο On three arguments against categorical structuralism Synthese (2009) 170:21-31. Έχουμε:

(S1) Κάθε μετά-θεωρία θα πρέπει να είναι Φρεγκιανή (εδώ λέγοντας μετά-θεωρία εννοούμε κάθε θεωρία που μας επιτρέπει να διατυπώνουμε μετά-θεωρήματα όπως πχ πληρότητας)

(S2) Η θεωρία κατηγοριών είναι αλγεβρική, Χιλμπερτιανή

(S3) Η θεωρία συνόλων είναι η μόνη Φρεγκιανή θεωρία που έχουμε και ικανοποιεί πλήρως τα κριτήριά μας.

(S) Η θεωρία κατηγοριών βασίζεται στην θεωρία συνόλων.

Με το επιχείρημα αυτό ο Shapiro προσδοκά να δείξει ότι τα μαθηματικά δεν μπορούνε να εκφραστούν πλήρως δομικά (δηλαδή πλήρως αλγεβρικά) . Ειδικότερα πιστεύει ότι δεν μπορούν να γίνουν κατανοητά δομικά, πρέπει πάντα να έχουν ένα αντικείμενο αναφοράς. Συνεπώς, αφού η θεωρία κατηγοριών είναι μια θεωρία για δομές, δεν μπορούμε να την δούμε σαν μια μετά-θεωρία για τα μαθηματικά.

3.8 Οι απόψεις του Lambek

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις τοποθετήσεις του *J. Lambek*. Η συνεισφορά του είναι πολυσχιδείς στο αντικείμενο που μας αφορά εδώ (αλλά και γενικά στα μαθηματικά) και ειδικά στην κατηγορική λογική. Εδώ όμως θα μας απασχολήσουν κάποιες συγκεκριμένες θέσεις πάνω στην φιλοσοφία των μαθηματικών και τον τρόπο με τον οποίο η είσοδος της θεωρίας κατηγοριών και της θεωρίας τόπων μπορεί να επαναπροσδιορίσει την κλασσικές φιλοσοφίες των μαθηματικών και να μας οδηγήσει σε συμπεράσματα που, όπως θα δούμε αναλυτικά, υπερβαίνουν αυτά που στο παρελθόν φαινόταν εντελώς αντίρροπα. Επίσης ο Lambek επισήμανε και έφερε στην επικαιρότητα κάποιες ιδέες του Lawvere για την διαλεκτική φύση των μαθηματικών και ειδικά της θεωρίας κατηγοριών στις οποίες και θα σταθούμε.

Θα αναφερθούμε πρώτα περιληπτικά στα συμπεράσματα στα οποία έφτασε τα οποία σε μια πρόταση θα μπορούσαν να ειπωθούν ως εξής: *Οι κλασσικές φιλοσοφίες των μαθηματικών (φορμαλισμός, πλατωνισμός, λογικισμός και ιντουϊσιονισμός) δεν είναι αντιπαραθετικές απαραίτητα μεταξύ τους γιατί υπάρχει ένας δυνατός κόσμος για όλα τα μαθηματικά ο οποίος να συνταιριάζει κάποιες μετριοπαθείς εκδοχές όλων των παραπάνω σχολών.* Αυτός ο κόσμος είναι ένας τόπος (τον οποίο και θα ορίσουμε παρακάτω). Όπως και στις εργασίες του Bell η ιντουϊσιονιστική θεωρία τύπων υψηλής τάξης παίζουν κομβικό ρόλο.

Πρώτα θα προσπαθήσουμε να δούμε τι εννοεί ο Lambek μιλώντας για μετριοπαθή φιλοσοφίες των μαθηματικών. Λέγοντας ας πούμε μετριοπαθής λογικισμός ας πούμε για παράδειγμα, δεν δημιουργεί μια νέα εκδοχή του λογικισμού που να έχει κάποιο ολοκληρωμένο χαρακτήρα, μια απόλυτη λογική συνέπεια, μια απάντηση σε όλα επιστημολογικά ερωτήματα των μαθηματικών, ένα συνεπή και λεπτομερώς επεξεργασμένο χαρακτήρα δηλαδή. Αυτό που προσπαθεί να κάνει μάλλον είναι να απομονώσει κάποιες βασικές θέσεις που συνέχουν όλους τους εργαζόμενους μαθηματικούς (και όχι τους φιλοσόφους) οι οποίοι ασπάζονται την συγκεκριμένη φιλοσοφία των μαθηματικών και που έχουν μεγάλη ιστορική βαρύτητα. Έτσι ο μετριοπαθής λογικιστής απέχει πολύ από τον ακόλουθο το Brower για παράδειγμα. Η προσπάθεια του Lambek έχει δηλαδή ένα απλουστευτικό χαρακτήρα που μάλλον δεν λύνει το πρόβλημα αλλά προσπαθεί να το συμβιβάσει με ένα τεχνικό τρόπο. Βέβαια αυτό δεν μειώνει την σημασία που έχει αυτή η προσπάθεια γενικά.

Το πρώτο πράγμα που κάνει ο Lambek είναι να δώσει μια σχέση αντιστοίχισης ανάμεσα στους τόπους (ορισμένους κατηγορικά) και θεωρίες τύπων υψηλής τάξης με ιντουϊσιονιστική λογική. Ο τρόπος μάλιστα που το κάνει αυτό (αυτός που χρησιμοποιήσαμε και εμείς για να το δείξουμε σε προηγούμενη παράγραφο) ήταν, από τεχνική πλευρά πρωτότυπος. Το πρώτο αυτό βήμα ήταν ταυτόσημο με το Bell, αλλά αυτό είναι και το μόνο κοινό σημείο μεταξύ τους. Από κει πέρα ο Lambek καταπιάνεται με την αναζήτηση του απόλυτου τόπου που θα μπορέσει να παίξει το ρόλο του "κόσμου των μαθηματικών", την στιγμή που ο Bell πορεύεται σε ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση, στην αποδόμηση κάθε απόλυτου, καθολικού και παγκόσμιου κόσμου για τα μαθηματικά. Την στιγμή που ο ένας δηλαδή αναζητά την ρήξη με τα εργαλεία του παρελθόντος,

αξιοποιώντας στο έπακρο τις δυνατότητες που παρέχει η μοντέρνα τεχνολογία των μαθηματικών, ο άλλος εμμένει στα σχήματα του παρελθόντος και προσπαθεί να συμφιλιώσει παρωχημένες από καιρό αντιλήψεις. Ας προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε αυτές τις μετριοπαθείς εκδοχές των κλασσικών φιλοσοφιών.

Μετριοπαθής φορμαλισμός. Αυτός δανείζεται από τον φορμαλισμό όπως τον ξέρουμε στις διάφορες εκδοχές του την έμφαση στα τυπικά (φορμαλιστικά) συστήματα και τους τυπικούς επαγωγικούς συλλογισμούς. Με τα λόγια του Lambek δηλαδή "*εμμένει στον ριζοσπαστικό φορμαλισμό αυτών που ισχυρίζονται πως οι μαθηματικοί ισχυρισμοί δεν έχουν κάποιο περιεχόμενο, πως δεν υπάρχουν μαθηματικές υπάρξεις και ότι τα μαθηματικά είναι κατά βάση ένα παιχνίδι*"

Μετριοπαθής ιντουϊσιονισμός. Είναι εκείνος ο οποίος χρησιμοποιεί στα μαθηματικά την ιντουϊσιονιστική λογική, δηλαδή αυτός που αρνείται της ισχύ του Αριστοτελικού κανόνα αποκλίσεως του τρίτου και συνεπώς δεν δέχεται μη κατασκευαστικές αποδείξεις.

Μετριοπαθής λογικισμός. Ο οποίος αποδέχεται απλώς πως τα μαθηματικά μπορούν να οριστούν με όρους της λογικής

Μετριοπαθής πλατωνιστής. Αυτός ο οποίος δέχεται ένα ανεξάρτητό χαρακτήρα των μαθηματικών. Υπάρχει ένας ανεξάρτητός κόσμος για τα μαθηματικά και οι μαθηματικές αλήθειες είναι εκεί για να τις ανακαλύψουμε.

Το ενδιαφέρον βήμα που προσπαθεί να κάνει είναι να συνθέσει κατά κάποιο τρόπο όλα τα παραπάνω σε μια φιλοσοφία σε νατουραλιστική βάση που ο ίδιος αποκαλεί *κατασκευαστικό νομιναλισμό*. (constructive nominalism'). Με τα δικά του λόγια ο στόχος του είναι ο εξής:

> *Ανάμεσα σε όλες τις φιλοσοφικές θέσεις που μπορεί κανείς να πάρει είναι τέσσερεις αυτές που έχουν συζητηθεί ευρέως. Κάθε μια από αυτές είναι βασισμένη σε χρήσιμες παρατηρήσεις για το τι τα μαθηματικά είναι ή θα μπορούσαν να είναι, αλλά οι απαντήσεις που προσφέρουν αυτές στην πιο ριζοσπαστική μορφή τους, μοιάζουν να είναι ασυμβίβαστες. Η πρότασή μας είναι να σταθεί κανείς στα καλύτερα σημεία αυτών και να υπερασπιστεί μια εκλεκτική φιλοσοφία που θα συνδυάζει μέσες μορφές αυτών των τεσσάρων θέσεων.(...) στην θέση μας αυτή δίνουμε το όνομα κατασκευαστικό νομιναλισμό.*

Η σημασία που έχουν αυτή όλη η φιλολογία είναι γιατί ο Lambek βρίσκει πάτημα για όλη αυτήν την θεωρία στην δυνατότητα που του δίνει η θεωρία τόπων να βρει ένα ειδικό κόσμο για όλα τα μαθηματικά. Εδώ κατά την γνώμη μας υπάρχει ένα ζήτημα. Δεν μπορέσαμε να βρούμε πουθενά να γραπτά του Lambek έναν σαφή ορισμό για του τι εννοεί λέγοντας κόσμο. Εννοεί το μοντέλο για κάποια θεωρία τύπων ή για την θεωρία συνόλων; Εννοεί κάποιο θεμέλιο με την έννοια που του έχουμε δώσει σε προηγούμενη παράγραφο ή μήπως κάτι άλλο; Εμείς, λόγω ελλείψεις διασαφήνισης σε όλα τα παρακάτω λέγοντας κόσμο θα εννοούμε ένα στατικό σύστημα θεμελίων ανάλογο της θεωρίας συνόλων που θα μπορεί να υλοποιεί μια σημασιολογική ανάλυση των φορμαλιστικών θεωριών.

Αυτός ο κόσμος λοιπόν είναι ο λεγόμενος ελεύθερος τόπος (free topos). Να υπενθυμίσουμε εδώ πως δομείται η θεωρία μας. Ορίζουμε μια ιντουϊσιονιστική θεωρία τύπων με καρτεσιανά γινόμενη και ενσωματωμένη ένα ολοκληρωμένο σύστημα λογικών επαγωγικών συλλογισμών. Κατόπιν βρίσκουμε δυο συζυγείς συναρτητές ανάμεσα στην κατηγορία των τύπων και την κατηγορία των τόπων.

Για κάθε τόπο $\mathbf{E}$ υπάρχει μια θεωρία τύπων

$$L(\mathbf{E}) = \mathcal{L}$$

που αντιστοιχεί στην εσωτερική λογική και για κάθε θεωρία τύπων υπάρχει τόπος

$$T(\mathcal{L}) = \mathbf{E}$$

που γενάται απί την θεωρία τύπον γνωστός και ως τόπος των TarskiὐLindenbaum. Οι τόποι και οι θεωρίες τύπων αποτελούν κατηγορίες, συνεπώς οι L, T είναι συναρτητές που αποδυκνείονται πως είναι συζυγείς και μάλιστα αποτελούν το ζευγάρη μιας ισοδυναμίας κατηγοριών. Αυτοί μας δίνουν μια αντιστοίχιση ανάμεσα στους τόπους αυτούς και τις θεωρίες τύπων. Μια ειδική κατηγορία τόπων είναι οι ελεύθεροι (free) τόποι που έχουν τη ιδιότητα να είναι αρχικά αντικείμενα στην ακτηγορία όλων των τόπων. Οι ελεύθεροι τόποι έχουν πολλές ιδιαίτερες ιδιότητες που συνδέουν την δομή του τόπου (και τον κάνουν να μοιάζει με σύνολο) και τις ιδιότητες της αντίστοιχης θεωρίας τύπων. Παραδείγματα τέτοιων τόπων είναι ο $T(\mathcal{L}_0)$ της καθαρής ιντουισιονιστικής λογικής και ο τόπος $T(\mathcal{L}_1)$ της θεωρίας τύπων μιας κλασσικής λογικής. Η πρόταση που κάνει ο Lambek είναι να θεωρήσουμε τον τόπο $T(\mathcal{L}_0)$ ως τον κόσμο όλων των μαθηματικών.

Η πρόταση λοιπόν είναι να δούμε τον κόσμο των μαθηματικών ως ένα τέτοιο ελεύθερο τόπο που αντιστοιχεί σε μια καθαρή ιντουϊσιονιστική θεωρία τύπων. Αυτό έχει τα το πλεονεκτήματα να συνταιριάξει τις φιλοσοφίες των μαθηματικών όπως τις ανασυνθέσαμε παραπάνω και τα αποτελέσει το μαθηματικό υπόδειγμα για το κατασκευαστικό νομιναλισμό. Όπως λέει και ο ίδιος:

> *(...) ο ελεύθερος τόπος είναι ένα κατάλληλος υποψήφιος για τον κόσμο όλων των μαθηματικών, αποδεκτός από μέλη διαφόρων φιλοσοφικών σχολών οι οποίοι δέχονται την αρχή του μέσο αποκλίσεως του τρίτου και οι οποίοι επιθυμούν να συμβιβαστούν με (α) τους μετριοπαθείς Πλατωνιστές, επειδή είναι ένα αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία όλων των τόπων (β) τους μετριοπαθείς φορμαλιστές ή ακόμα και νομιναλιστές επειδή μπορεί (ο ελεύθερος τόπος) να κατασκευαστεί από λέξεις(...) (γ) τους μετριοπαθείς ιντουϊσιονιστές γιατί είναι μια ιντουϊσιονιστική θεωρία τύπων.*
>
> *(...) είναι αχρείαστο να αναφέρω ότι ένας συμβιβασμός θα απορριφθεί από τους ακραίους πλατωνιστές, που ίσως πιστεύουν ότι οι μαθηματικές οντότητες είναι σκέψεις στην συνείδηση ενός demiurge, από τους ακραίους νομοναλιστές που ίσως πιστεύουν ότι μόνο οι λέξειες είναι αληθείς, αλλά η ισοδυναμία κλάσεων συνώνυμων*

λέξεων δεν είναι, και από τους ακραίους ιντουϊσιονιστές που θεωρούν ότι δεν υπάρχουν άπειρα σύνολα ή ότι η αλήθεια μεταβάλλεται ιστορικά.

Η διαλεκτική στα μαθηματικά

Ο Lambek επηρεασμένος ιδιαίτερα από τον Lawvere, στο άρθρο του "The Influence of Heraclitus in Mathematics" προσπάθησε να επαναφέρει μια παλιά ιδέα του δεύτερου (από την δεκαετία του εξήντα κιόλας) που σύνδεε με έναν πολύ άμεσο τρόπο την κλασσική διαλεκτική φιλοσοφία με τα μαθηματικά την οποία την προσάρμοσε και τις έδωσε νέο βάθος. Αυτή η σύνδεση δεν είχε να κάνει με κάποια μακροσκοπική αποτίμηση της λογικής που έχει η ιστορία της επιστήμης (όπως θα περίμενε ίσως κανείς να κάνει η διαλεκτική), αλλά είχε να κάνει με την αναζήτηση διαλεκτικών σχημάτων μέσα στα ίδια τα μαθηματικά. Κάποιο τέτοιο παράδειγμα είδαμε πως έδινε ο Bell στο προηγούμενο υποκεφάλαιο αλλά εδώ έχουμε μια διαφορά. Η αναζήτηση διαλεκτικών αντιθέσεων την οποία επιχειρεί ο Lambek δεν γίνεται όπως ο Bell στην βάση μιας αμφισβητήσιμης επαναπροσέγγισης όλης της μεθοδολογίας των μαθηματικών, αλλά μένει στην παρατήρηση των ειδικών χαρακτηριστικών που φαίνεται πως έχουν κάποια κοινώς αποδεκτά μαθηματικά εργαλεία. Κομβικό ρόλο σε όλα τα παρακάτω θα παίξει ο συζυγής συναρτητής.

Η διαλεκτική φιλοσοφία έχει τις ρίζες της ουσιαστικά στον προσωκρατικό φιλόσοφο Ηράκλειτο (ο οποίος είναι γνωστός από τα γνωμικά του όπως το "τα πάντα ρεί" και το "είναι αδύνατον κάποιος να διασχίσει το ίδιο ποτάμι δύο φορές") αλλά ουσιαστικά θεμελιώνεται από το μεγάλο γερμανό φιλόσοφο Hegel και αναπτύσσεται δημιουργικά από τους Marx, Lucats, την σχολή της Φραγκφούρτης τον Mao Tse-Tung και άλλους. Αυτό που λέει η διαλεκτική πολύ συνοπτικά και υπεραπλουστευτικά διατυπώνετε από τους τρεις νόμους της (που οφείλονται στον Engels) 1. Τα πράγματα έχουν στο εσωτερικό τους δύο πόλους (θέση και αντίθεση) που μάχονται μεταξύ τους και τελικά καταλήγουν σε κάτι νέο που υπερβαίνει και τα δύο προηγούμενα 2. Η ποιότητα μπορεί να μετασχηματιστεί σε ποσότητα και αντιστρόφως 3. Η άρνηση της άρνησης μιας πρότασης δεν ταυτίζεται με την πρόταση αλλά με κάτι άλλο νέο.

Είναι εύλογο τώρα να αναρωτηθεί κανείς τώρα πως μπορούν όλα αυτά να εμφανιστούν στα μαθηματικά. Υπάρχουν κάποια τετριμμένα και μάλλον ασήμαντα παραδείγματα πχ ή ύπαρξη αρνητικών και θετικών αριθμών υποδηλώνει συνύπαρξη αντιθέτων και το γεγονός ότι το 2 δεν είναι απλώς τι άθροισμα 1 συν 1, δείχνει μια ποιότητα διαφορετικά από την ποσότητα. Αλλά μπορούμε να βρούμε και πιο ουσιώδεις συνάφειες. Ο Lawvere το 1970 σε μια τοποθέτησή σε ένα συνέδριο (το οποίο και παραθέτει και ο Lambek στο παραπάνω άρθρο του) είπε τα εξής:

Ενότητα των αντιθέτων (...) είναι ουσιωδώς αυτή ανάμεσα στην λογική και την γεωμετρία (...) Πρώτα θεωρούμε τις θεμελιώδεις αντιθέσεις της θεωρίας τόπων των Grothendieck - Giraud - Verdier με όρους τεσσάρων ή πέντε συζυγών συναρτητών. (...) Όταν οι κύριες αντιθέσεις έχουν βρεθεί, η επιστημονική πορεία πλέον περιλαμβάνει την μορφοποίηση αυτών σε σλόγκαν που κανείς θα μπορεί σταθερά να

χρησιμοποιεί σαν ένα ιδεολογικό όπλο για την περεταίρω μετασχηματισμό και ανάπτυξη του αντικειμένου. Κάνοντας αυτό για την θεωρία συνόλων απαιτείτε να ληφθεί υπόψη ότι τα αντίθετα ζεύγη τάσεων στα μαθηματικά παίρνουν την μορφή συζυγών συναρτητών.

Η ιδέα του δράγματος δακτυλίων για παράδειγμα, μπορεί να ειδοθεί σαν ένας μεταβαλλόμενος δακτύλιος ή ίσως ένας δακτύλιος μεταβαλλόμενων δακτυλίων (...) η μετάβαση από τις σταθερές ποσότητες στις μεταβλητές είναι μια μαθηματική έκφραση της μετάβασης από την μεταφυσική στην διαλεκτική

Θα αναφέρουμε κάποια από τα παραδείγματα που δίνει και ο Lambek προς υπεράσπιση αυτής της θέσεως.

Έστω $\langle \mathbf{A}, \prec \rangle$ και $\langle \mathbf{B}, \prec \rangle$ δυο κατηγορίες διατάξεις και F, G δυο συζυγείς συναρτητές ανάμεσα σε αυτές (αυτούς που ονομάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο συνδέσεις Galois). Αν πάρουμε τους συναρτητές $GF : A \longrightarrow A$ και $FG : B \longrightarrow B$ τότε είναι εύκολο να δείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

$$a \prec GF(a)$$

$$GFGF(a) \prec GF(a)$$

$$a \prec a' \Leftrightarrow GF(a) \prec GF(a')$$

και αντίστοιχες για το συναρτητή FG. Θεωρούμε τώρα τις υποκατηγορίες A_0, B_0 για τις οποίες $GF(a) \cong a$ και $FG(b) \cong b$ αντίστοιχα για όλα τα αντικείμενά τος. Τότε απο τις ιδιότητες προκύπτει μια φυσική ισοδυναμία για τις δυο κατηγορίες.

Μια διαλεκτική ερμηνεία των παραπάνω μπορεί να γίνε σύμφωνα με το Lambek με δύο τρόπους. Πρώτον βλέποντας το ζευγάρη των συναρτητών F, G σαν την αντίφαση ανάμεσα στις κατηγορίες, και την ισοδύναμια ανάμεσα στις A_0, B_0 σαν την σύνθεση. Δεύτερον αν ο ένας συναρτητής είναι η θέση και ο άλλος η αντίφαση, τότε η συζυγία ανάμεσα τους είναι η σύνθεση (αυτήν την ερμηνεία προτιμούσε και ο Lawvere). Θα δώσουμε ένα ακόμα κατοπιστικό παράδειγμα.

Αν δούμε τώρα την κατηγορία των αλγεβρών Banach και την κατηγορία των συμπαγών τοπολογικών χώρων, τότε οι συναρτητές που μας πάνε από την μια κατηγορία στην άλλη (τους αναφέραμε σε προηγούμενο παράδειγμα) συνθέτονται μέσω της δυικότητας του Gelfand.

Κεφάλαιο 4

Επίλογος-συμπερασματα

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής προσπαθήσαμε να πραγματευτούμε, κατά το μέτρο του δυνατού βέβαια, κάποια από τα πιο ενδιαφέροντα νέα χαρακτηριστικά που εμφανίζονται με την ανάδυση της θεωρίας κατηγοριών. Η θεωρία κατηγοριών ορίζει αναμφισβήτητα ένα νέο πλαίσιο πραγμάτευσης των μαθηματικών, ένα πλαίσιο που διαφοροποιείται ριζικά από πολλά από τα δόγματα που, είτε συνειδητά είτε όχι, πολλοί μαθηματικοί υιοθετούν στην καθημερινή τους πρακτική και σχεδόν όλοι αποδέχονται ως φιλοσοφικό- ιδεολογικό υπόβαθρο.

Το πρώτο ερώτημα που θα μπορούσε να προκύψει είναι εάν πιστεύουμε ότι η Θεωρία Κατηγοριών αποτελεί ένα ριζικά νέο πλαίσιο για τα μαθηματικά. Λέγοντας πλαίσιο θα θέλαμε να εννοήσουμε κάτι διαφορετικό από έννοιες όπως θεμέλιο, λογική, φιλοσοφία ή κάτι άλλο παρεμφερές. Και αυτό γιατί η Θεωρία Κατηγοριών είναι απλώς μια θεωρία (πολύ ιδιαίτερη όμως) η οποία χωρίς να είναι κατεξοχήν κάτι από τα παραπάνω, είναι κατά κάποιο τρόπο και θεμέλιο και φιλοσοφία και λογικό σύστημα. Για κανένα από αυτά δεν παρουσιάζει ένα συνεκτικό σύστημα, ένα ολοκληρωμένο και απρόσβλητο οικοδόμημα που να μπορεί να δίνει απαντήσεις σε όλα τα προβλήματα αλλά για όλα αυτά έχει να δώσει θέσεις και επεξεργασίες που απαντούν σε υπαρκτά ερωτήματα των μαθηματικών και μπορούν να ανοίγουν δρόμο, δείχνοντας μεθόδους που μπορεί να ακολουθήσει η ανάπτυξη της έρευνας. Αφαιρώντας το "εξωτερικό φαίνεσθε", στην ουσία της, η θεωρία κατηγοριών είναι ένα σύνολο αρχών που όταν εμπλουτίσει την μαθηματική πρακτική ή τον στοχασμό πάνω στα μαθηματικά μπορεί να χαρίσει ριζοσπαστικές και διαφορετικές από τα συνηθισμένα αναλύσεις και απόψεις. Από αυτήν την έννοια δίνει ένα διαφορετικό πλαίσιο για να κάνουμε τα ήδη υπάρχοντα μαθηματικά και ένα διαφορετικό πλαίσιο για να τοποθετηθούμε πάνω στην υπάρχουσα φιλοσοφική αναζήτηση στα μαθηματικά. Δεν συνιστά λοιπόν η Θεωρία Κατηγοριών κάποια ριζικά και συνολικά νέα μαθηματικά ούτε και μια νέα φιλοσοφία για αυτά, αλλά ένα τρόπο θέασης των μαθηματικών.

Ποια είναι όμως αυτά τα βασικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν την θεωρία κατηγοριών; Τα παρακάτω είναι πιστεύουμε αυτά που τοποθετούν κάποιον ως προς την θεωρία κατηγοριών.

1. Η "συνάρτηση" μπαίνει στο κέντρο της μελέτης και γίνεται όχι μόνο το βασικό αντικείμενο αλλά και το μέσο ορισμού κάθε άλλης έννοιας και ιδιότητας. Αυτό δημιουργεί μια μετάβαση στην οντολογική προτεραιότητα από το "σημείο" στην "συνάρτηση".

2. Η αναφορά στο ευρύτερο πλαίσιο γίνεται κομβική και το πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να δουλέψουμε αποκτά ευελιξία και μπορεί να αλλάζει.

3. Η έννοια του ζεύγους συζυγών συναρτητών συνιστά μια πραγματικά νέα ιδέα, την μαθηματική έκφραση μιας βαθύτερης δομής και μιας βαθύτερης αναλογίας που υπάρχει σε εντελώς ξένα μεταξύ τους αντικείμενα των μαθηματικών. Έτσι βλέπουμε πως η τάση της ενοποίησης έρχεται παράλληλα με την τάση της τοπικής πραγμάτευσης που συγκροτείτε από την δυνατότητα μεταφοράς από την μια κατηγοριακή δομή σε μια άλλη

4. Η τοπικότητα που μας επιτρέπει την τοπική πραγμάτευση των μαθηματικών προτάσεων μέσα σε συγκεκριμένα πλαίσια ορισμένα εκ των προτέρων με κατηγοριακούς όρους.

Βέβαια σε αυτό το σημείο αυτό αναφύεται μια φυσιολογική ερώτηση. Ποιες είναι οι σχέσεις ανάμεσα στα μη κατηγοριακά μαθηματικά και στα κατηγοριακά; (Φυσικά από τα προηγούμενα που αναφέραμε αυτοί οι όροι είναι λανθασμένοι, παρόλα αυτά τους χρησιμοποιούμε όπως και σε όλη την εργασία για να γίνουμε κατανοητοί). Υπάρχει κάποιου είδους ασυμμετρία ανάμεσα στο νέο πλαίσιο που φέρει η θεωρία κατηγοριών σε σχέση με τα προηγούμενα; Η απάντηση θεωρούμε πως είναι "όχι". Οι 1,2,4 από τις παραπάνω ουσιώδεις ιδιότητες των κατηγοριών και των μαθηματικών που κάνουμε με κατηγοριακούς όρους προϋπήρχαν, με διαφορετικό τρόπο αλλά πάντως αναλλοίωτες στην ουσία τους, στα μαθηματικά από πολύ παλιά. Οι δε συζυγείς συναρτητές παρότι κάτι νέο δεν είναι τίποτα άλλο από μια πολύ εκλεπτυσμένη μαθηματική δομή που εμφανίζεται σε πολλούς διαφορετικούς κλάδους. Αυτό που πραγματικά συμβαίνει είναι η "ως τα άκρα" εμμονή σε αυτές. Αυτό βέβαια δεν μειώνει την σημασία της θεωρίας κατηγοριών και σπουδαιότητα αυτού του νέου πλαισίου για τα μαθηματικά, αλλά σημειώνει τη συνέχεια σε εννοιολογικό επίπεδο με τα προϋπάρχοντα μαθηματικά.

Αν θέλαμε να δούμε τη θεωρία κατηγοριών μέσα στο γίγνεσθαι των μαθηματικών θα λέγαμε πως επαναφέρει (με μια πολύ αφηρημένη μορφή συνέχειας, με μια επαναφορά εννοιών που μόνο εκ των υστέρων μπορούμε να βρούμε σε πρωταρχική μορφή) στοιχεία που προϋπήρχαν στα μαθηματικά πριν την πλήρη κατίσχυση του συνολοθεωρητικού θεμελιωτισμού. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η άρνηση της καθολικής ισχύς των θεμελίων, και η επαναπροσέγγιση της τοπικής θεμελίωσης. Αυτή η επαναφορά γίνεται βέβαια με νέο τρόπο και πολύ συστηματική μέθοδο η οποία μπορεί να φτάνει να ορίζει ακόμα και μια νέα θεμελίωση.

Αφού είδαμε λοιπόν την καταγωγή και την συνέχεια των βασικών στοιχείων της θεωρίας κατηγοριών, θα προσπαθήσουμε τώρα να δούμε και να κρίνουμε τον ρόλο της, και πιο συγκεκριμένα το ρόλο της στη θεμελίωση των μαθηματικών σε σύγκριση με την θεωρία συνόλων. Ένα

από τα συμπεράσματα που βγάλαμε στο τελευταίο κεφάλαιο είναι πως την υπόθεση των θεμελίων γενικά δεν μπορούμε και δεν πρέπει να την δούμε ως μια απλή εξέταση των λογικών συνεπειών κάθε μιας επιλογής μας αλλά με ένα ολιστικό κριτήριο που θα αντιλαμβάνεται τα μαθηματικά ως ένα όλον, ενιαίο και κρινόμενο όχι μόνο με λογικά και μαθηματικά επιχειρήματα, αλλά με μια ευρύτερη ματιά, φιλοσοφική και αισθητική.

Συνεπώς για να υπηρετήσουμε ένα τέτοιο στόχο, θα κάνουμε ένα διαχωρισμό ανάμεσα στους διαφορετικούς ρόλους που μπορούν να παίξουν οι δύο αυτές θεωρίες μέσα στα μαθηματικά. Αυτοί οι ρόλοι είναι 1) ως εργαλείο για τα μαθηματικά 2) ως αυτοτελές αντικείμενο μελέτης και 3) ως θεμέλιο. Οι τρείς αυτοί ρόλοι είναι καταρχήν ανεξάρτητοι μεταξύ τους, αλλά τελικά καταλήγουν να διαπλέκονται. Η άποψή μας είναι πως για να φτάσει κανείς σε μια θέση σχετικά με τα θεμέλια των μαθηματικών είναι μελετήσει αυτές τις τρείς πλευρές των θεωριών στην ενότητά τους. Αυτό και μόνο θα μπορέσει να αποτελέσει ένα επαρκές φυσιοκρατικό κριτήριο για το πρόβλημά μας.

Η θεωρία συνόλων, κατά πρώτον, είναι ένα φοβερά χρήσιμο εργαλείο που χρησιμοποιείται εντελώς φυσιολογικά στο σύνολο των μαθηματικών με πολύ καλά αποτελέσματα. Ως αντικείμενο μελέτης έχει έναν πολύ πλούσιο και κυρίως αυτοτελή χαρακτήρα και ως θεμέλιο (με πιο συνηθισμένη εκδοχή την ZFC) καταφέρνει να συνθέσει όλα σχεδόν τα μαθηματικά.

Η θεωρία κατηγοριών από την άλλη έχει έναν σαφώς πιο περιορισμένο εργαλειακό ρόλο (περιορίζεται μόνο στην ομολογιακή άλγεβρα, κομμάτια της αλγεβρικής τοπολογίας και της αλγεβρικής γεωμετρίας καθώς και σε κλάδους από την λογική). Είναι πλούσια, αν και η ανάπτυξή της είναι λιγότερο αυτοτελής και περισσότερο εμπνεόμενη από άλλα κομμάτια των μαθηματικών και ως θεμέλιο μπορεί να μας προσφέρει τελικά όλα όσα μπορεί και η ZFC.

Τοποθετώντας τώρα την μια θεωρία μέσα στην άλλη παρατηρούμε τα εξής. Η συνηθισμένη συνολοθεωρία δεν μπορεί να "δει" στο εσωτερικό της τις κατηγορίες ενώ η θεωρία κατηγοριών μπορεί να ορίσει μέσα της με ευκολία την κατηγορία των συνόλων αλλά αυτό γίνεται με ad hoc και ιδιαίτερα αντιαισθητικό τρόπο. Φαίνεται πως η παρουσία της μιας υπονομεύει την ικανότητα της άλλης και της θέτει περιορισμούς.

Με μια τέτοια πρόχειρη ματιά είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς για πιο λόγο τίθεται εν αμφίβολο η ισχύς της θεωρίας συνόλων ως θεμέλιο, όταν μάλιστα το πρόβλημα της αρμονικής συνύπαρξης των κατηγοριών μέσα στα σύνολα μπορεί να λυθεί με μια απλή επέκταση των αξιωμάτων ή με μια έξυπνη κίνηση όπως η αρχή της ανάκλασης. Οι λόγοι πιστεύουμε πως είναι δύο. Πρώτον γιατί φαίνεται να υπάρχει μια συμπληρωματικότητα των δύο θεωριών και δεύτερον διότι ξεφεύγοντας από το περιοριστικό πλαίσιο του φυσιοκρατισμού ανακαλύπτουμε πως στην θεωρία κατηγοριών εμφανίζονται να ικανοποιούνται πολλά φιλοσοφικά κριτήρια που για διάφορους λόγους θα θέλουν οι μαθηματικοί να αποδεχτούν. Για παράδειγμα, αν κάποιος επιθυμεί να συνταχθεί με τον μαθηματικό δομισμό, τότε έχει κάποιους αρκετά καλούς λόγους να αποδεχτεί τον θεμελιωτίστικο πρόγραμμα της θεωρίας κατηγοριών.

Έτσι έχουμε από την μια πλευρά την θεωρία συνόλων να εμφανίζει περιβλήματα γύρω από

διάφορα ζητήματα που εκθέσαμε στην αρχή της εργασίας μας στα οποία οι κατηγορίες μοιάζουν να αποτελούν την ιδανική απάντηση, το πλαίσιο στο οποίο μπορούν να αναπτυχθούν με φυσικό τρόπο αυτές οι ανωμαλίες. Από την άλλη μέσα από τις κατηγορίες φαίνεται να αναιρείται το μαθηματικό υπόβαθρο του φορμαλισμού και θεμελιωτισμού της θεωρίας συνόλων και να αφήνεται χώρος να υιοθετήσουμε μια μαθηματική πρακτική με διαφορετικούς φιλοσοφικούς ορίζοντες. Είδαμε στο τελευταίο κεφάλαιο πως οι κατηγορίες μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για έναν μη-θεμελιωτισμό στα μαθηματικά, για μια πιο ολιστική top - down προσέγγιση κτλ.

Συνεπώς η συζήτηση για το πιο πρέπει να είναι το θεμέλιο των μαθηματικών μεταφέρεται σε μια κουβέντα για το πια θεωρούμε πως πρέπει να εννοούμε τα καλά θεμέλια. Σε όλο το κείμενο εμφανίστηκαν πολλές απόψεις για τι είναι το θεμέλιο, τι αρχές πρέπει να ικανοποιεί, ποιο ρόλο πρέπει να έχει και το πώς συνδέεται με τις φιλοσοφικές αρχές που κάθε ένας υιοθετεί.

Μια ενδιαφέρουσα συζήτηση που όμως δεν έχει γίνει σίγουρα επαρκώς είναι το πώς συνδέεται η θεωρία κατηγοριών με τις κλασσικές φιλοσοφίες των μαθηματικών. Για παράδειγμα μέσα στα πλαίσια της θεωρίας τόπων ειδομένης σαν μια προέκταση των κατηγοριών, η λογική, ενάντια σε ότι μπορεί να ισχυρίζονται οι λογικιστές, δεν αποτελεί την αρχή των μαθηματικών αλλά ένα πόρισμα αυτών, μια κατασκευή που προκύπτει φυσιολογικά μέσα στο σώμα των μαθηματικών και όχι το θεμέλιο αυτών. Έτσι φαίνεται η αποδοχή της θεωρίας κατηγοριών ως θεμέλιο αυτομάτως δεν επιτρέπει κανένα λογικισμό, και αντιστρόφως, ο φανατικός λογικιστής δεν μπορεί να είναι σε καμία περίπτωση με την θεωρία κατηγοριών. Αυτή η ανάλυση είναι πολύ ενδιαφέρουσα και πρέπει να γίνει προτού να μπορέσει κανείς να ολοκληρώσει μια γνώμη πάνω στο θέμα. Βέβαια τα πράγματα είναι αρκετά πιο περίπλοκα διότι για παράδειγμα οι νεολογικιστές έχουν μια κάπως πιο γενική και διευρυμένη άποψη για το λογικισμό που μάλλον δεν αναιρείται από τις κατηγορίες. Η μόνη φιλοσοφία των μαθηματικών για την οποία έχει γίνει σχετική δουλειά είναι ο μαθηματικός δομισμός για τον οποίο μιλήσαμε εκτενώς.

Η ιδανική απάντηση κατά την άποψή μας για την θεμελίωση των μαθηματικών πρέπει να παίρνει υπόψη της και τα δυο κριτήρια όπου θέσαμε παραπάνω: το κριτήριο της μαθηματικής πράξης και το κριτήριο της φιλοσοφικής στάσης. Είναι ακριβώς ο δρόμος που ακολούθησαν οι Bell και Lambek οι οποίοι έδωσαν και τις πιο πειστικές απαντήσεις κατά την γνώμη μας που κινούνται σε μια κατεύθυνση που λύνουν το πρόβλημα. Αυτές κωδικοποιούνται στο ακόλουθο σχήμα: Εισάγουμε την θεωρία κατηγοριών, υπό την μορφή των τόπων και των ισοδύναμων θεωριών τύπων, με τρόπο που χαρακτηρίζεται από μια ευελιξία αφού είναι εύκολο να μεταβούμε σε μια θεωρία συνόλων αλλά ταυτόχρονα να λύσουμε και όλα τα προβλήματα αυτής. Παράλληλα αφού αφήσουμε το πρακτικό ζήτημα μπορούμε να πούμε πως έτσι ικανοποιούμε πολλές από τις φιλοσοφικές προσδοκίες μας για το οικοδόμημα των μαθηματικών ερμηνεύοντας με κατάλληλο τρόπο το απόλυτο κόσμο (ή τους τοπικούς κόσμους) των μαθηματικών.

Μια τελευταία παρατήρηση που πρέπει να γίνει είναι ότι η θεωρία κατηγοριών βρίσκεται πολλές φορές έξω από τα πλαίσια της παράδοσης της αναλυτικής φιλοσοφίας όσον αφορά τις φι-

λοσοφικές της προϋποθέσεις. Όταν μιλάμε για ολισμό, για διαλεκτική αντίληψη στα μαθηματικά, για άρνηση του θεμελιωτισμού (όπως την περιγράψαμε αυτήν την άρνηση) τότε αυτομάτως βρισκόμαστε εκτός των στεγανών ορίων που έθεσε η αγγλοσαξονική φιλοσοφία τον εικοστό αιώνα. Αυτό και για εμάς σημαίνει αδυναμία και στην φιλοσοφία των μαθηματικών να απαντήσουμε σε ερωτήματα με τα εργαλεία της παραδοσιακής και κυρίαρχης φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

[1] Adamek, J., and J. Rosicky [1994]: Locally Presentable and Accessible Categories "Cambridge: Cambridge University Press."

[2] Awodey, S. [1996]: ôStructure in mathematics and logic: A categorical perspectiveő,Philosophia Mathematica (3) 4, 209ů237.

[3] Awodey, S [2004]: ôAn answer to Hellmanős question: őDoes category theory provide a framework for mathematical structuralism?ů ő, Philosophia Mathematica (3) 12, 54ů64.

[4] Bell, J. L.[1981] ôCategory theory and the foundations of mathematicső, British Journal for the Philosophy of Science 32, 349ů358.

[5] Bell, J. L. [1986] ôFrom absolute to local mathematicső, Synthese 69, 409ů426.

[6] Bell, J. L. [1988] Toposes and Local Set Theories. Oxford: Oxford University Press

[7] Bourbaki, N.[1968]: Theory of Sets. Reading, Mass.: Addison-Wesley

[8] Couture, J., and J. Lambek [1991]: ôPhilosophical reflections on the foundations of mathematicső, Erkenntnis 34, 187ů209

[9] Feferman, S. [1977]: ôCategorical foundations and foundations of category theoryő, in R. Butts and J. Hintikka, eds. Foundations of Mathematics and Computability Theory. Dordrecht: Reidel.

[10] Grothendieck, A. [1957]: ôSur quelques points dőalgθbra homologiqueő, Tτhoku Mathematics Journal (2) 9, 119ů221.

[11] Hellman, G. [1996]: ôStructuralism without structureső, Philosophia Mathematica (3) 4, 100ů123.

[12] Hellman, G [2001]: ôThree varieties of mathematical structuralismő, Philosophia Mathematica (3) 9, 184ů211

[13] Hellman, G [2003]: ôDoes category theory provide a framework for mathematical structuralism?ő, Philosophia Mathematica (3) 11, 129ů157.

[14] Lambek, J. [1982]: ôThe influence of Heraclitus on modern mathematicső, in J. Agassi and R. S. Cohen, eds. Scientific Philosophy Today. Dordrecht: Reidel, pp. 111ů122.

[15] Lambek, J. [1994]: ôAre the traditional philosophies of mathematics really incompatible?ő, The Mathematical Intelligencer 16, 56ů62.

[16] Lambek, J. [1995]: ôOn the nominalistic interpretation of natural languageső, in R. Cohen and M. Marion, eds. Quebec Studies in the Philosophy of Science I. Dordrecht: Kluwer, pp. 69ů77.

[17] Lambek, J. [2000]: ôCategorical logicő, in M. Hazewinkel, ed. Encyclopedia of Mathematics. Dordrecht: Kluwer. http://reference.kluweronline.com/

[18] Lambek, J. ůů[2004]: ôWhat is the world of mathematics? Provinces of logic determinedő, Annals of Pure and Applied Mathematics 126, 149ů158.

[19] Lambek, J., and P. J. Scott [1980]: ôIntuitionist type theory and the free toposő, Journal of Pure and Applied Algebra 19, 215ů257.

[20] Lawvere, F. W. [1963]: Functorial Semantics of Algebraic Theories. Ph.D. Thesis. New York: Columbia University

[21] Lawvere, F. W. [1969]: ôAdjointness in foundationső, Dialectica 23, 281ů296

[22] Lawvere, F. W. [2000]: ôComments on the development of Topos theoryő, in J.-P. Pier, ed. Development of Mathematics: 1950ů2000. Vol. II. Basel: Birkhδuser, pp. 715ů734.

[23] Lawvere, F. W. [2003]: ôFoundations and applications: Axiomatization and educationő, Bulletin of Symbolic Logic 9, 213ů224.

[24] Lawvere, F.W., and R. Rosebrugh [2003]: Sets for Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

[25] Lawvere, F. W., and S. H. Schanuel [1998]: Conceptual Mathematics: A first introduction to categories. Cambridge: Cambridge University Press.

[26] Mac Lane, S. [1968]: ôFoundations of mathematics: Category theoryő, in R. Klibansky, ed. Contemporary Philosophy. Vol. I. Florence: La Nuova Italia Editrice, pp. 286ů294.

[27] Mac Lane, S.[1969a]: ôOne universe as a foundation for category theoryő, in S. Mac Lane, ed. Reports of the Midwest Category Seminar. III. Lecture Notes in Mathematics 106. New York: Springer-Verlag, pp. 192ů200.

[28] Mac Lane, S. ůů[1969b]: ôFoundations for categories and setső, P. Hilton, ed. Category Theory, Homology Theory and their Applications. II. Lecture Notes in Mathematics 92. New York: Springer-Verlag, pp. 146ů164.

[29] Mac Lane, S. [1971a]: Categories for the Working Mathematician. New York: Springer-Verlag.

[30] Mac Lane, S. [1986]: Mathematics, Form and Function. New York: Springer-Verlag

[31] McLarty, C. [1990]: ôThe uses and abuses of the history of topos theoryő, British Journal for the Philosophy of Science 41, 351ů375.

[32] McLarty, C. [1992]: Elementary Categories, Elementary Toposes. Oxford: Oxford University Press.

[33] McLarty, C. [2004]: ôExploring categorical structuralismő, Philosophia Mathematica (3) 12, 37ů53.

[34] Shapiro, S. [1997]: Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. Oxford: Oxford University Press.

[35]

[36]

[37]

[38]

[39]

[40]

[41]

[42]

[43]

[44]