



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

ΕΚΕΦΕ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΝΑΝΟΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΚΑΙ ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ**



Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές»

**Μελανές Οπές: λύσεις, χαρακτηριστικά
και νόμοι που τις διέπουν**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Της Μακρυγιάννη Λυδίας

Επιβλέπων: Ιωάννης Μπάκας

Αθήνα, Φεβρουάριος, 2015

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ι.Μπάκα για την ευκαιρία που μου έδωσε να πραγματοποιήσω την εργασία αυτή στα πλαίσια του μεταπτυχιακού. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την άμεση βοήθεια του όποτε τον χρειαζόμουν κατά τη διάρκεια της πραγματοποίησης της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη της κατά την διάρκεια των σπουδών μου μεταπτυχιακών και προπτυχιακών.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια μελέτη των μελανών οπών. Ξεκινώντας από τις βασικές έννοιες της φυσικής σε καμπυλωμένο χώρο καταλήγουμε στις πεδιακές εξισώσεις *Einstein*. Από αυτήν την εξίσωση και τα θεωρήματα μοναδικότητας μπορούμε να αποδείξουμε κάποιες από τις λύσεις αυτής της εξίσωσης. Τόσο στην περίπτωση των στατικών μελανών οπών όπου μεγαλύτερη ανάλυση έγινε για την μελανή οπή *Schwarzschild*, όσο και στην περίπτωση των στάσιμων μελανών οπών όπου επικεντρώθηκα στην περίπτωση της *Kerr* μελανής οπής. Στα πλαίσια της μελέτης αυτών των μελανών οπών μελετήθηκαν αλλαγές συντεταγμένων για την αποφυγή παραδοξότητων των σφαιρικών συντεταγμένων. Επίσης μελετήθηκαν ορισμοί και έννοιες, όπως η επιφανειακή βαρύτητα, η διαδικασία *Penrose*, η εργόσφαιρα κ.α. Τέλος έγινε μελέτη των τεσσάρων νόμων της μηχανικής των μελανών οπών ώστε να δείξουμε τη σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτούς και την κλασική θερμοδυναμική.

Abstract

This thesis is about black holes. Starting from the basic concepts of physics in curved spacetime I prove Einstein field equation. From this equation and uniqueness theorems we can show some of the solutions of this equation. Both in the case of static black holes with greater analysis for Schwarzschild black hole , and in the case of stationary black holes I focused on *Kerr* black hole. For these black holes, I studied changes of coordinates to avoid singularities of spherical coordinates. Also I studied definitions and concepts, such as the surface gravity, the Penrose process, the ergosphere etc. Finally I examined the four laws of black hole mechanics to show the link between them and the classical laws of thermodynamics.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
Περίληψη	v
<i>Abstract</i>	vi
Εισαγωγή	1
1 Πεδιακές Εξισώσεις Einstein	3
1.1 Τι είναι μια μύρη τρύπα ;	3
1.2 Χωροχρόνος Minkowski	4
1.3 Πεδιακές Εξισώσεις Einstein	6
2 Στατικές Λύσεις Πεδιακών Εξισώσεων Einstein	16
2.1 Η μετρική Schwarzschild	16
2.1.1 Μελανή Οπή Schwarzschild	22
2.2 Διάγραμμα Penrose	30
2.3 Ορίζοντες Killing και επιφανειακή βαρύτητα	34
2.4 Μετρική Reissner-Nordstrom	36
3 Στάσιμες Μαύρες Τρύπες	41
3.1 Θεωρήματα Μοναδικότητας	41
3.2 Μετρική Kerr-Newmann	41
3.3 Μετρική Kerr	42
3.4 Ergosphere-Ergoregion	57
3.5 Penrose Process	57
3.6 Υπερακτινοβολία	60
4 Οι νόμοι της μηχανικής των Μελανών Οπών	63
4.1 Geodesic Congruence	63
4.2 Οι νόμοι της μηχανικής των μελανών οπών	67
4.2.1 Μηδενικός Νόμος	67
4.2.2 Πρώτος νόμος	73
4.2.3 Δεύτερος νόμος (Hawking's Area Theorem)	75
4.2.4 Τρίτος Νόμος	76
4.3 Συμπεράσματα	77

Παράρτημα	80
------------------	-----------

Βιβλιογραφία	83
---------------------	-----------

Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή της γεωμετρίας του χωρόχρονου στην γενική θεωρία της σχετικότητας. Αφού παρουσιάζονται οι τανυστές *Riemann*, *Ricci* και *Einstein* στη συνέχεια έδειξα πως γράφονται οι πεδιακές εξισώσεις *Einstein* για το κενό αλλά και παρουσία πηγών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση της μετρικής *Schwarzschild* και πως αυτή περιγράφει ένα στατικό και συμμετρικό χώρο. Έπειτα απέδειξα πως αυτή η μετρική ικανοποιεί την εξίσωση *Einstein* και έτσι η μελανή οπή *Schwarzschild* αποδεικνύεται ως η λύση της εξίσωσης *Einstein* στο κενό και μέσω του θεωρήματος του *Birkoff* αναδεικνύεται η μοναδικότητα της με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Στη διερεύνηση της μελανής οπής *Schwarzschild* τα σημεία ιδιομορφίας της μετρικής αποδείχθηκαν ως ιδιομορφίες συντεταγμένων. Εφόσον έδειξα πως μετατρέπεται η μετρική αν μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες μελετήθηκαν τα διαγράμματα *Penrose* μέσω της σύμμορφης συμπαγοποίησης.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετήθηκε η μελανή οπή *Kerr* που προκύπτει μέσω θεωρημάτων μοναδικότητας από την έννοια της στασιμότητας. Αφού αποδειχθεί ότι αυτή είναι λύση της εξίσωσης *Einstein* στο κενό έγινε διερεύνηση της μετρικής για διάφορες περιπτώσεις όπως αυτές προκύπτουν και πάλι λόγω των ιδιομορφιών της. Στα πλαίσια αυτής της διερεύνησης αναλύεται τι συμβαίνει με τον ορίζοντα γεγονότων και πως προκύπτει η έννοια της εργόσφαιρας. Έπειτα μελετήθηκε η διαδικασία *Penrose*, η εξαγωγή ενέργειας από την μελανή οπή.

Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετώνται η νόμοι της μηχανικής των μελανών οπών. Στα πλαίσια αυτής της μελέτης έγινε πλήρης ανάλυση της απόδειξης του μηδενικού νόμου που μας δείχνει τη σταθερότητα της επιφανειακής βαρύτητας στον ορίζοντα γεγονότων. Έπειτα αποδείχθηκε πως προκύπτει η μεταβολή της μάζας μιας μελανής οπής σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών. Ο δεύτερος νόμος που είναι γνωστός και ως ο νόμος του εμβαδού επιφάνειας όπως διατυπώθηκε από των *Hawking* ότι δηλαδή το εμβαδόν επιφάνειας του ορίζοντα δεν μπορεί να μειώνεται συναρτήσει του χρόνου αν ισχύει η ασθενής ενεργειακή συνθήκη. Τέλος ο τρίτος νόμος μας λέει ότι δεν μπορεί να μηδενισθεί η επιφανειακή βαρύτητα με πεπερασμένη διαδικασία. Για να εξαχθούν τα συμπεράσματα έγινε σύγκριση των νόμων της μηχανικής με τους νόμους της κλασικής θερμοδυναμικής ώστε να δειχθεί πως μιλάμε για τις μελανές οπές ως θερμοδυναμικά

συστήματα και πως αυτό μας βοηθά στην εδραίωση νέων βάσεων για την μελέτη της κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας.

Κεφάλαιο 1

Πεδιακές Εξισώσεις Einstein

1.1 Τι είναι μια μαύρη τρύπα ;

Μια μαύρη τρύπα είναι ένα αντικείμενο τόσο πυκνό που τίποτα δεν μπορεί να δραπετεύσει από εκεί. Η μέγιστη απόσταση από το κέντρο της μαύρης τρύπας όπου τίποτα δεν μπορεί να ξεφύγει λέγεται ορίζοντας γεγονότων. Από μια φυσική οπτική γωνία μπορούμε να παραστήσουμε μια μαύρη τρύπα με όρους ταχύτητας διαφυγής. Σημειώνουμε ότι ένα αντικείμενο για να είναι μαύρη τρύπα θα πρέπει να έχει πολύ μεγάλη πυκνότητα, όχι μάζα.

Ας σκεφτούμε το χωρόχρονο σαν ένα πολύ μεγάλο ελαστικό φύλλο και έστω ότι ακουμπάμε μια μπάλα πανω του. Τότε προκαλείται καμπύλωση γύρω από την μπάλα ενώ το υπόλοιπο παραμένει επίπεδο όπως ήταν αρχικά. Αυτό είναι το ανάλογο του να προσθέσουμε στον χωρόχρονο μια απομονωμένη στατική, σφαιρικά συμμετρική μάζα όπως είναι ένας αστέρας.

Έστω τώρα ότι ρίχνουμε ένα αντικείμενο εντός του τμήματος που έχει καμπυλωθεί και μετά προσπαθούμε να το ωθήσουμε ώστε να βγεί. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε ποια είναι η ταχύτητα διαφυγής. Αν επιλέξουμε μια καινούργια μπάλα με ίδιες διαστάσεις αλλά με μεγαλύτερη μάζα ώστε να αυξήσουμε την πυκνότητα, τότε η ταχύτητα διαφυγής θα γίνει μεγαλύτερη. Μπορούμε λοιπόν να αυξήσουμε τόσο τη μάζα της μπάλας έτσι ώστε το αντικείμενο να μην μπορεί να διαφύγει από την καμπυλωμένη περιοχή. Ξέρουμε ότι υπάρχει μια τέτοια πυκνότητα καθώς τίποτα δεν μπορεί να ταξιδέψει γρηγορότερα από την ταχύτητα του φωτός. Έτσι αν ένα αντικείμενο είναι τόσο πυκνό που η ταχύτητα διαφυγής γίνεται μεγαλύτερη

από την ταχύτητα του φωτός τότε τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει από αυτό και το ονομάζουμε μαύρη τρύπα.

Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στη γεωμετρική ερμηνεία και να κάνουμε μερικές προβλέψεις χρησιμοποιώντας την κλασική Νευτώνεια φυσική. Ξέρουμε ότι η κινητική ενέργεια ενός αντικείμενου μάζας m και ταχύτητας v υπολογίζεται από τον τύπο $\frac{1}{2}mv^2$. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια για ένα αντικείμενο μάζας M σε ακτίνα r δίνεται από $-\frac{GMm}{r}$.

Έτσι λοιπόν για να δραπετεύσει ένα αντικείμενο μάζας m από ένα αντικείμενο μάζας M , η κινητική του ενέργεια πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη βαρυτική δυναμική του ενέργεια. Έτσι αν το αντικείμενο μάζας m έχει την μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή $v = c$ και θέσουμε την κινητική ενέργεια του ίση με την βαρυτική δυναμική του ενέργεια θα είχαμε ένα δυναμικό από το οποίο τίποτα δεν μπορεί να δραπετεύσει.

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GMm}{r} \quad (1.1)$$

Αν λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς την ακτίνα και την εκφράσουμε σύμφωνα με τη μάζα θα βρούμε την ακτίνα για την οποία τίποτα δεν δραπετεύει.

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.2)$$

Με $c = G = 1$ έχουμε

$$r = 2M \quad (1.3)$$

Έτσι αν ένα μαζικό στατικό αντικείμενο M συμπυκνώνεται σε μια σφαιρική περιοχή με ακτίνα r , αν είναι μικρότερη από $2M$ τότε είναι μαύρη τρύπα. Θα δούμε αργότερα ότι αυτή είναι η ακτίνα *Schwarzschild* που συμπίπτει με τον ορίζοντα γεγονότων μιας στατικής σφαιρικά συμμετρικής μαύρης τρύπας.

1.2 Χωροχρόνος Minkowski

Ο *Einstein* για να διατυπώσει τη γενική θεωρία της σχετικότητας χρειάστηκε να χρησιμοποιήσει τον μαθηματικό φορμαλισμό που είχε εισάγει ο *Minkowski*. Το 1907 ο *Minkowski* κατάλαβε ότι οι φυσικές έννοιες της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας θα μπορούσαν να εκφραστούν ως γεγονότα που συμβαίνουν στο σύμπαν

το οποίο περιγράφεται με μια μη Ευκλείδεια γεωμετρία. Ο *Minkowski* πήρε λοιπόν τις τρεις χωρικές διαστάσεις και τον απόλυτο χρόνο και τα μετέτρεψε σε ένα 4-διαστάσεων πολλαπλότητα (*manifold*) που αναπαριστά τον χωρόχρονο.

Το *manifold* είναι ένας n -διάστατος χώρος που περιγράφεται τοπικά από την Ευκλείδεια γεωμετρία. Έτσι μπορούμε να σκεφτούμε το *manifold* σαν ένα χωρόχρονο που αποτελείται από πολλές επίπεδες επιφάνειες των οποίων οι επικαλύψεις είναι συνεχείς. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας το *manifold* δεν είναι απλά τοπικά επίπεδα αλλά παντού. Όμως στη γενική θεωρία της σχετικότητας αυτό αλλάζει. Ορίζουμε τα γεγονότα ως σημεία στο *manifold* που για να περιγραφούν θα χρειάζονται τέσσερις συνιστώσες, τη χρονική και τις τρεις χωρικές.

Minkowski Space *Minkowski* χώρος ονομάζεται ο χωρόχρονος όπως διατυπώθηκε από τον *Minkowski* και όπου τα γεγονότα ορίζονται από τις συνιστώσες (t, x, y, z) . Μπορούμε να ορίσουμε την αναλλοίωτη απόσταση μεταξύ δύο γεγονότων:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.4)$$

η οποία ονομάζεται αναλλοίωτη διότι ένας άλλος παρατηρητής χρησιμοποιώντας άλλες συντεταγμένες θα μετρούσε ακριβώς την ίδια απόσταση. Η ποσότητα αυτή είναι το ανάλογο της απόστασης που ορίζουμε στον 3-διάστατο χώρο. Μοναδική ιδιομορφία είναι ότι η συγκεκριμένη ποσότητα μπορεί να πάρει αρνητική τιμή. Όταν λοιπόν $ds^2 > 0$ τότε λέμε ότι είναι χωροειδής ενώ αν $ds^2 < 0$ τότε είναι χρονοειδής. Τέλος αν ισχύει $ds^2 = 0$ τότε η αναλλοίωτη απόσταση λέμε ότι είναι φωτοειδής.

Χωροειδής είναι εκείνη η απόσταση για την οποία μπορεί να βρεθεί αδρανειακό σύστημα τέτοιο ώστε τα δύο γεγονότα να συμβαίνουν ταυτόχρονα. Κανένα υλικό αντικείμενο δεν μπορεί να είναι παρών σε δύο γεγονότα που χωρίζονται με χωροειδές αναλλοίωτο. Ενώ ένα χρονοειδές αναλλοίωτο μπορεί να περιγράψει δύο γεγονότα ενός υλικού αντικειμένου. Αν μια ακτίνα φωτός μπορούσε να ταξιδέψει ανάμεσα σε δύο γεγονότα λέμε ότι το αναλλοίωτο είναι φωτοειδές.

Για ένα αντικείμενο μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο όλων των παρελθοντικών και μελλοντικών γεγονότων αυτού και το ονομάζουμε κοσμική γραμμή του αντικειμένου. Έτσι αν δύο γεγονότα βρίσκονται στη ίδια κοσμική γραμμή λέμε ότι χωρίζονται χρονοειδώς. Αν αυτά τα γεγονότα βρίσκονται στην κοσμική γραμμή του φωτονίου λέμε ότι τα γεγονότα χωρίζονται φωτοειδώς.

Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε το ds^2 είναι

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

όπου $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

1.3 Πεδιακές Εξισώσεις Einstein

Οι πεδιακές εξισώσεις Einstein περιγράφουν τι συμβαίνει με το χωροχρόνο παρουσία ενέργειας ή ύλης ή ακόμα και χωρίς την παρουσία πηγών.

Τανυστές Riemann, Ricci, και βαθμωτό Ricci

Ο τανυστής *Riemann* είναι σημαντικός για να προσδιορίσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες του χωροχρόνου και με τα σύμβολα *Christoffel* ορίζεται ως:

$$R_{\nu\kappa\mu}^\lambda = \partial_\kappa \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\kappa\rho}^\lambda - \Gamma_{\nu\kappa}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \quad (1.6)$$

Ο χωροχρόνος θεωρείται επίπεδος αν ο *Riemann* μηδενίζεται παντού. Ο γενικός τύπος για να υπολογίσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστώσων του τελεστή είναι $n^2(n^2 - 1)/12$ όπου n ο αριθμός των διαστάσεων.

Ο τανυστής *Ricci* προκύπτει από τον *Riemann* αν κάνουμε συστολή σε δύο δείκτες. Δηλαδή:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (1.7)$$

ο οποίος είναι συμμετρικός, κάτι που σημαίνει ότι έχει 10 ανεξάρτητες συνιστώσες για τον 4-διάστατο χωροχρόνο. Από τον *Ricci* μπορούμε να υπολογίσουμε το λεγόμενο βαθμωτό *Ricci*:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu \quad (1.8)$$

Τανυστής Einstein

Ο τανυστής *Einstein* είναι ένας από τους σημαντικότερους τανυστές στην περιγραφή της βαρύτητας. Ξεκινώντας από την ταυτότητα *Bianchi*:

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda;\sigma} + R_{\mu\nu\lambda\sigma;\kappa} + R_{\mu\nu\sigma\kappa;\lambda} = 0 \quad (1.9)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με το $g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}$:

$$\begin{aligned} (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}R_{\mu\nu\kappa\lambda})_{;\sigma} + (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}R_{\mu\nu\lambda\sigma})_{;\kappa} + (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}R_{\mu\nu\sigma\kappa})_{;\lambda} &= 0 \Rightarrow \\ (g^{\nu\lambda}R_{\nu\lambda})_{;\sigma} - (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}R_{\nu\mu\lambda\sigma})_{;\kappa} - (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}R_{\mu\nu\kappa\sigma})_{;\lambda} &= 0 \Rightarrow \\ R_{;\sigma} - (g^{\mu\kappa}R_{\mu\sigma})_{;\kappa} - (g^{\nu\lambda}R_{\nu\sigma})_{;\lambda} &= 0 \Rightarrow \\ R_{;\sigma} - (g^{\mu\kappa}R_{\mu\sigma})_{;\kappa} - (g^{\mu\kappa}R_{\mu\sigma})_{;\kappa} &= 0 \Rightarrow \\ R_{;\sigma} - 2(g^{\mu\kappa}R_{\mu\sigma})_{;\kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

όμως:

$$R_{;\sigma} = \delta_{\sigma}^{\kappa}R_{;\kappa} = g^{\mu\kappa}g_{\mu\sigma}R_{;\kappa} \quad (1.11)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στη σχέση:

$$g^{\mu\kappa}[g_{\mu\sigma}R - 2R_{\mu\sigma}]_{;\sigma} = 0 \quad (1.12)$$

Ο τανυστής *Einstein* ορίζεται λοιπόν ως:

$$G_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}R \quad (1.13)$$

Τανυστής Ενέργειας-Ορμής Η/Μ Πεδίου

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής αποτελεί βασικό στοιχείο κάθε θεωρίας για τη βαρύτητα. Η κλασική Νευτώνεια αντίληψη ότι η πυκνότητα ενέργειας ρ είναι αυτή

που καθορίζει τη μορφή του βαρυτικού πεδίου μέσω της εξίσωσης *Poisson*:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.14)$$

αναιρείται στην πράξη από την ΕΘΣ. Μπορούμε εύκολα να το αντιληφθούμε από το εξής παράδειγμα: Αν θεωρήσουμε ένα 'νέφος' σωματιδίων τότε ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το 'νέφος' θα μετρά ως ολική πυκνότητα ενέργειας το άθροισμα των ενεργειών των επιμέρους σωματιδίων. Αντίθετα ένας παρατηρητής που κινείται με διαφορετική ταχύτητα (σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα) θα παρατηρεί επιπλέον ροές ενέργειας αλλά και ορμής στις διάφορες διευθύνσεις. Επομένως, με βάση την ΕΘΣ, όπου όλες οι μορφές ενέργειας είναι ισοδύναμες, ο δεύτερος παρατηρητής θα πρέπει να τοποθετηθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης *Poisson* και την κινητική ενέργεια που μετρά για το κάθε σωματίδιο χωριστά, άρα οι δύο παρατηρητές θα κάνουν διαφορετικές μετρήσεις για την ένταση του βαρυτικού πεδίου. Δημιουργείται επομένως η ανάγκη έκφρασης της ενέργειας ενός συστήματος με τρόπο που να είναι ανεξάρτητος του παρατηρητή (δηλαδή του συστήματος συντεταγμένων) και τούτο είναι δυνατόν μόνο αν εκφράσουμε την ενεργειακή κατάσταση ενός συστήματος με τη μορφή τανυστή. Ο ζητούμενος τανυστής είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης και είναι γνωστός ως τανυστής ενέργειας - ορμής. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε με απλές υποθέσεις να ορίσουμε τις συνιστώσες αυτού του τανυστή και επιπλέον να δείξουμε ότι μέσω αυτού του τανυστή μπορούμε να εκφράσουμε τους κλασσικούς νόμους διατήρησης της ενέργειας και της ορμής. Αν υποθέσουμε ότι το 'νέφος' των σωματιδίων έχει μια πυκνότητα ανά μονάδα όγκου n και τα σωματίδια έχουν ταχύτητα u . Τότε η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$T^{00} = \frac{nm}{\sqrt{1-u^2}} \quad (1.15)$$

που είναι απλά το γινόμενο της πυκνότητας των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου επί την σχετικιστική έκφραση της ενέργειας των σωματιδίων. Η πυκνότητα ροής ενέργειας στη διεύθυνση x θα είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται στη μονάδα του χρόνου δια μέσου μιας μοναδιαίας επιφάνειας του επιπέδου xy , δηλαδή:

$$T^{0x} = \frac{nm u_x}{\sqrt{1-u^2}} \quad (1.16)$$

Στη γενική περίπτωση η παραπάνω σχέση θα γραφεί ως:

$$T^{0k} = \frac{nm u_k}{\sqrt{1-u^2}} \quad (1.17)$$

που μπορεί να ιδωθεί και ως 'πυκνότητα ορμής' σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση και είναι ανεξάρτητη της σειράς των δεικτών, δηλαδή T^{0k} . Οι υπόλοιπες συνιστώσες θα ορισθούν ως το ποσό της j συνιστώσας της ορμής που διαρρέει την k διεύθυνση ανα μονάδα επιφάνειας και χρόνου. Για παράδειγμα η x ανά σωματίδιο είναι $nu_x/\sqrt{1-u^2}$ και η $x-y$ ροή της πυκνότητας ορμής είναι $[mu_x/\sqrt{1-u^2}]u_y$ δηλαδή η γενική έκφραση θα είναι:

$$T^{ij} = \frac{nm u^i u^j}{\sqrt{1-u^2}} \quad (1.18)$$

Οπότε η γενική μορφή του τανυστή ενέργειας - ορμής θα είναι:

$$T^{\mu\nu} = n_0 m u^\mu u^\nu \quad (1.19)$$

όπου $n_0 = n\sqrt{1-u^2}$ είναι η ίδια ενεργειακή πυκνότητα όπως την μετράμε σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με τα σωματίδια, και στην ουσία εκφράζει τη συστολή του όγκου που υφίσταται το 'νέφος' των σωματιδίων καθώς κινείται με ταχύτητα u . Και η ποσότητα $\rho = n_0 m$ είναι η ίδια πυκνότητα μάζας. Αν αντικαταστήσουμε το 'νέφος' των σωματιδίων με τέλει ρευστό τότε η μορφή του γίνεται :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p \quad (1.20)$$

όπου p είναι η πυκνότητα του ρευστού. Τέλος οι νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.21)$$

που στο Νευτώνειο όριο ανάγονται στις κλασικές εξισώσεις της υδροδυναμικής. Αν στην εξίσωση (1.20) υποθέσουμε ότι ο χώρος μας είναι επίπεδος τότε $\eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ οπότε οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής θα είναι:

$$T^{00} = (\rho + p)u^0 u^0 \approx \rho \quad (1.22)$$

$$T^{0j} = (\rho + p)u^0 u^j \approx \rho u^j \quad (1.23)$$

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j + p\delta^{i,j} \approx \rho u^i u^j + p\delta^{i,j} \quad (1.24)$$

Για τον υπολογισμό του τανυστή ενέργειας ορμής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\sqrt{\det g} \delta g^{\mu\nu}} \quad (1.25)$$

όπου S είναι η δράση μιας πεδιακής θεωρίας σε ζεύγη με τη γεωμετρία. Από

την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του *Maxwell* γνωρίζουμε ότι αν $A_\mu(x)$ είναι το 4-διάνυσμα δυναμικού μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή δύναμης του η/μ πεδίου.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (1.26)$$

Τότε οι πεδιακές εξισώσεις του *Maxwell*:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu \quad (1.27)$$

που μηδενίζεται όταν δεν υπάρχουν πηγές. Οι εξισώσεις *Maxwell* προκύπτουν ως εξισώσεις *Euler – Lagrange* από:

$$S[A, \partial A] = \int_M d^4x F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) \quad (1.28)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\sqrt{\det g} \delta g^{\mu\nu}} = \frac{S}{\sqrt{\det g} \delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{\det g} F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x (\delta \sqrt{\det g}) F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) \\ &+ \int d^4x \sqrt{\det g} (F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} (\delta g^{\mu\kappa}) g^{\nu\lambda} + F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} g^{\mu\kappa} (\delta g^{\nu\lambda})) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\det g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \\ &+ \int d^4x \sqrt{\det g} (F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} (\delta g^{\mu\kappa}) g^{\nu\lambda} + F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} g^{\mu\kappa} (\delta g^{\nu\lambda})) \\ &= \int d^4x \sqrt{\det g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} + F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} + F_{\lambda\nu} F_{\kappa\mu} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Άρα συνοψίζοντας:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} + 2F_{\mu}^{\lambda} F_{\nu\lambda} \quad (1.31)$$

Πεδιακές Εξισώσεις Einstein

Εφόσον η πηγή του βαρυτικού πεδίου είναι ένας τανυστής, ο τανυστής ενέργειας-ορμής, τότε και η περιγραφή του πεδίου θα πρέπει να γίνεται από ένα τανυστή δεύτερης τάξης. Δηλαδή οι εξισώσεις πεδίου στη βαρύτητα θα πρέπει να είναι της μορφής

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (1.32)$$

Ο τανυστής αυτός θα πρέπει να είναι συνάρτηση του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του 1ης και 2ης τάξης. Οι νόμοι διατήρησης ενέργειας και ορμής επιβάλλουν $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ που σημαίνει ότι θα ισχύει

$$F_{;\mu}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.33)$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέρει ότι : Οι μόνοι τανυστές που μπορούν να κατασκευαστούν από τον μετρικό τανυστή και τις 1ης και 2ης τάξης παραγώγους είναι ο τανυστής Riemann και οι συστολές του.

$$F^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R \quad (1.34)$$

και επομένως οι εξισώσεις πεδίου θα έχουν τη μορφή

$$R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \quad (1.35)$$

ενώ από την εξίσωση λόγω της διατήρηση προκύπτει

$$(R^{\mu\nu} + ag^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0 \quad (1.36)$$

Απόδεικνύεται ότι αυτό είναι δυνατόν μόνο για $a = -1/2$, άρα η τελική μορφή των εξισώσεων *Einstein* είναι

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \quad (1.37)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu} \quad (1.38)$$

Αν υπολογίσουμε το ίχνος της:

$$R - 2R = kT \Rightarrow R = -kT \quad (1.39)$$

Άρα

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (1.40)$$

Η σταθερά k που δείχνει το βαθμό σύζευξης της γεωμετρίας του χωρόχρονου με την κατανομή της ύλης-ενέργειας δίνεται ως συνδυασμός θεμελιωδών σταθερών της φυσικής. Για να την υπολογίσουμε χρησιμοποιούμε το Νευτώνιο όριο. Ξεκινώντας μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση των γεωδαισιακών με τη βοήθεια των συμβόλων *Christoffel*.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (1.41)$$

Για να ορίσουμε το Νευτώνιο όριο απαιτούμε τρία πράγματα. Πρώτον τα σωματίδια να κινούνται αργά σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός. Το βαρυτικό πεδίο να είναι ασθενές (μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαταραχή του επίπεδου χώρου) όπως επίσης το πεδίο να είναι στατικό, δηλαδή να μη μεταβάλλεται με το χρόνο. Ας δούμε όμως πως επιρεάζουν αυτά την εξίσωση μας. Αρχικά μιλήσαμε για αργά σωματίδια που σημαίνει:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (1.42)$$

και άρα η εξίσωση της γεωδαισιακής γράφεται:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.43)$$

Εφόσον το πεδίο είναι στατικό τα σύμβολα *Christoffel* μπορούν να απλοποιηθούν:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00} \quad (1.44)$$

Τέλος αφού υποθέτουμε ασθενές πεδίο και άρα ο χωρόχρονος είναι σχεδόν επίπεδος. Προσδιορίζουμε τους συντελεστές της μετρικής:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.45)$$

όπου η $\eta_{\mu\nu}$ είναι η σταθερή μετρική του M^4 και η $h_{\mu\nu} \ll 1$ είναι η 'μικρή' μετρική, που σημαίνει ότι τετραγωνικοί όροι αυτής ή των παραγώγων της θα παραλείπονται. Επίσης

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.46)$$

όπου $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Αν συνοψίσουμε όλα αυτά τα *Christoffel* πέρνουν την μορφή:

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \quad (1.47)$$

Η εξίσωση της γεωδειακής γίνεται:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (1.48)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\partial_0 h_{00} = 0$, η $\mu = 0$ συνιστώσα αυτής γίνεται:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (1.49)$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{dt}{d\tau}$ είναι σταθερό. Για να εξετάσουμε τις χωροειδής συνιστώσες θυμόμαστε ότι οι χωροειδής συνιστώσες του $\eta^{\mu\nu}$ είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας. Άρα έχουμε:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial_i h_{00} \quad (1.50)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέρη με $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ θα μας δώσει την εξίσωση:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (1.51)$$

Αυτό αρχίζει να μοιάζει με τη θεωρία του Νεύτωνα για τη βαρύτητα, αν δηλαδή συγκρίνουμε με:

$$a = \nabla\Phi \quad (1.52)$$

είναι ίδια εφόσον

$$h_{00} = -2\Phi \quad (1.53)$$

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις *Einstein* στη μορφή:

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (1.54)$$

Θέλουμε να δούμε αν αυτή η εξίσωση μπορεί να προβλέψει την Νευτώνια βαρύτητα, σε ασθενές, χρονικά ανεξάρτητο πεδίο για αργά κινούμενα σωματίδια. Σε αυτό το

όριο η ενέργεια ηρεμίας $\rho = T_{00}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από τους άλλους όρους $T_{\mu\nu}$ και άρα μπορούμε να περιοριστούμε στο $\mu = 0, \nu = 0$. Για το ασθενές πεδίο τώρα από (1.44),(1.45):

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + h_{00} \\ g^{00} = -1 - h^{00} \end{cases} \quad (1.55)$$

Το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής για την μικρότερη μη τριτοβάθμια τάξη:

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} \quad (1.56)$$

Εισάγοντας το αυτό στην εξίσωση *Einstein* έχουμε:

$$R_{00} = \frac{1}{2}kT_{00} = \frac{1}{2}\rho \quad (1.57)$$

Αυτή η εξίσωση σχετίζει της παραγώγους της μετρικής με την πυκνότητα ενέργειας. Για να βρούμε τη σχέση με της παραγώγους της μετρικής θα πρέπει να υπολογίσουμε τον $R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda$. Για την ακρίβεια μας αρκεί ο R_{0i0}^i καθώς $R_{000}^0 = 0$. Έχουμε:

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda \quad (1.58)$$

Ο δεύτερος όρος είναι παράγωγος του χρόνου κι έτσι για στατικό πεδίο διαγράφεται. Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι της μορφής Γ^2 και εφόσον το Γ είναι πρώτης τάξης στην διαταραχή της μετρικής και αυτοί συνεισφέρουν μόνο στις δεύτερη τάξη, μπορούν να αγνοηθούν. Άρα μας μένει $R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i$. Από εκεί έχουμε:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0i0}^i \\ &= \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Συγκρίνοντας την με την (1.56) βλέπουμε ότι η συνισταμένη 00 στο Νευτώνιο όριο προβλέπει:

$$\nabla^2 h_{00} = -k\rho \quad (1.60)$$

Με βάση όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω και το γεγονός ότι η διατύπωση *Poisson* για το Νευτώνιο δυναμικό είναι:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 4\pi G\rho \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} &= 4\pi G\rho \Rightarrow \\ \frac{1}{2}k\rho &= 4\pi G\rho \Rightarrow \\ k &= 8\pi G\end{aligned}\tag{1.61}$$

Η δεύτερη σχέση προκύπτει από την 1.52 ενώ η τρίτη από την 1.59.

Κεφάλαιο 2

Στατικές Λύσεις Πεδιακών Εξισώσεων Einstein

2.1 Η μετρική Schwarzschild

Η μετρική αυτή περιγράφει το βαρυτικό πεδίο γύρω από ένα σφαιρικά συμμετρικό αντικείμενο που δεν περιστρέφεται. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι μια μη περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα. Η εξίσωση *Schwarzschild* γράφεται:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

βλέπουμε ότι η λύση αυτή είναι λύση εξαρτώμενη από μια παράμετρο δηλαδή την μάζα M . Είναι δηλαδή η απλούστερη μαύρη τρύπα που είναι μη περιστρεφόμενη και μη φορτισμένη με σφαιρική συμμετρία. Η ιδιομορφία (*singularity*) που υπάρχει $r = 2M$ είναι λόγω των συντεταγμένων.

Μπορούμε να γράψουμε τη μετρική σε μορφή πίνακα:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε την εξίσωση *Einstein* όπως γράφεται στην τελική της μορφή:

$$R_{\mu\nu} = -k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (2.2)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να επιβεβαιώσουμε ότι η *Schwarzschild* είναι πράγματι λύση των πεδιακών εξισώσεων *Einstein* στο κενό θα πρέπει να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του τανυστή *Ricci*. Για να γίνει όμως αυτό χριάζεται πρώτα να υπολογίσουν αρχικά τα σύμβολα *Christoffel*. Τα μη μηδενικά σύμβολα *Christoffel* για τη μετρική (2.1) είναι:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}\left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^2}\right) \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{2M}{r^2} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = \frac{1}{r} \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = \frac{1}{r} \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}2r^2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^2}\right) \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)2r = -(r - 2M) = 2M - r \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)2r\sin^2\theta = -(r - 2M)\sin^2\theta = (2M - r)\sin^2\theta \quad (2.10)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2r^2}\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta \quad (2.11)$$

Έχοντας υπολογίσει πλέον τα σύμβολα *Christoffel* το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουν τα $R_{\mu\nu}$ και να επιβεβαιωθεί ότι μηδενίζονται. Το R_{tt} αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\phi t}^\phi \\
&= \partial_r \Gamma_{tt}^r - \partial_t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{r\rho}^r - \Gamma_{rt}^\rho \Gamma_{t\rho}^r + \partial_\theta \Gamma_{tt}^\theta - \partial_t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^\theta - \Gamma_{\theta t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\theta \\
&\quad + \partial_\phi \Gamma_{tt}^\phi - \partial_t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi - \Gamma_{\phi t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\phi \\
&= \partial_r \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \right) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{r\phi}^r \\
&\quad - (\Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{tr}^r + \Gamma_{rt}^\theta \Gamma_{t\theta}^r + \Gamma_{rt}^\phi \Gamma_{t\phi}^r) + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta \\
&\quad - (\Gamma_{\theta t}^t \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{\theta t}^r \Gamma_{tr}^\theta + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{\theta t}^\phi \Gamma_{t\phi}^\theta) \\
&\quad + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \\
&\quad - (\Gamma_{\phi t}^t \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{\phi t}^r \Gamma_{tr}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\theta \Gamma_{t\theta}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{t\phi}^\phi) \\
&= \partial_r \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \right) + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\phi r}^\phi \\
&= \frac{2M}{r^2} \frac{M}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{2M}{r^3} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \left(- \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \right) \frac{M}{r^2} \\
&\quad - \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right) \frac{M}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \frac{1}{r} \\
&= \frac{2M}{r^2} \frac{M}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{2M}{r^3} - \frac{M}{r^4} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^3} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^3} \\
&= \frac{2M}{r^4} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{2M}{r^3} - \frac{M}{r^4} - \frac{M}{r^4} + 2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^3} = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Αυτό επιβεβαιώνεται και για τις συνιστώσες R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ και $R_{\phi\phi}$.

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= R_{rtr}^t + R_{r\theta r}^\theta + R_{r\phi r}^\phi \\
&= \partial_t \Gamma_{rr}^t - \partial_r \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^\rho \Gamma_{t\rho}^t - \Gamma_{tr}^\rho \Gamma_{r\rho}^t + \partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^\theta - \Gamma_{\theta r}^\rho \Gamma_{r\rho}^\theta \\
&\quad + \partial_\phi \Gamma_{rr}^\phi - \partial_r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{rr}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi - \Gamma_{\phi r}^\rho \Gamma_{r\rho}^\phi \\
&= 0 - \left(\partial_r \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \right) + \Gamma_{rr}^t \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{rr}^\phi \Gamma_{t\phi}^t \right. \\
&\quad - (\Gamma_{tr}^t \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{tr}^r \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{tr}^\theta \Gamma_{r\theta}^t + \Gamma_{tr}^\phi \Gamma_{r\phi}^t) + 0 - \partial_r \frac{1}{r} + \Gamma_{rr}^t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{rr}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta \\
&\quad - (\Gamma_{\theta r}^t \Gamma_{rt}^\theta + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\phi \Gamma_{r\phi}^\theta) \\
&\quad + 0 - \partial_r \frac{1}{r} + \Gamma_{rr}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{rr}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{rr}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \\
&\quad \left. - (\Gamma_{\phi r}^t \Gamma_{rt}^\phi + \Gamma_{\phi r}^r \Gamma_{rr}^\phi + \Gamma_{\phi r}^\theta \Gamma_{r\theta}^\phi + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{r\phi}^\phi) \right) \\
&= \partial_r \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \right) + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^t - (\Gamma_{tr}^t)^2 + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\theta r}^\theta - (\Gamma_{r\theta}^\theta)^2 + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{\phi r}^\phi - (\Gamma_{r\phi}^\phi)^2 \\
&= \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{2M}{r^2} \frac{M}{r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{2M}{r^3} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \\
&\quad - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{M^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{2M^2}{r^4} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{2M}{r^3} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{M}{r^4} \\
&\quad - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \frac{M}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{M}{r^3} - \frac{1}{r^2} = 0
\end{aligned}$$

(2.13)

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= R_{\theta t\theta}^t + R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\phi\theta}^\phi \\
&= \partial_t \Gamma_{\theta\theta}^t - \partial_\theta \Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\rho \Gamma_{t\rho}^t - \Gamma_{t\theta}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^t + \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\rho \Gamma_{r\rho}^r - \Gamma_{\theta r}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^r \\
&\quad + \partial_\phi \Gamma_{\theta\theta}^\phi - \partial_\theta \Gamma_{\theta\phi}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi - \Gamma_{\phi\theta}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^\phi \\
&= 0 - 0 + \Gamma_{\theta\theta}^t \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{t\phi}^t \\
&\quad - (\Gamma_{t\theta}^t \Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{t\theta}^r \Gamma_{\theta r}^t + \Gamma_{t\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^t + \Gamma_{t\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^t) + 0 - \partial_r(2M - r) + \Gamma_{\theta\theta}^t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{r\phi}^r \\
&\quad - (\Gamma_{\theta r}^t \Gamma_{\theta t}^r + \Gamma_{\theta r}^r \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta r}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^r) \\
&\quad + 0 - \partial_\theta \cot \theta + \Gamma_{\theta\theta}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{\theta\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi \\
&\quad - (\Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{\theta t}^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^r \Gamma_{\theta r}^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\phi + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\phi) \\
&= \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{tr}^t + \partial_r(2M - r) + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\theta}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\phi r}^\phi - (\Gamma_{\theta\phi}^\phi)^2 \\
&= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} - r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2}\right) \\
&\quad + r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= -1 + \frac{M}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M}{r} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
&= -\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 0
\end{aligned}$$

(2.14)

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= R_{\phi t\phi}^t + R_{\phi r\phi}^r + R_{\phi\theta\phi}^\theta \\
&= \partial_t \Gamma_{\phi\phi}^t - \partial_\phi \Gamma_{\phi t}^t + \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{t\rho}^t - \Gamma_{t\phi}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^t + \partial_r \Gamma_{\phi\phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{\phi r}^r + \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{r\rho}^r - \Gamma_{\phi r}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^r \\
&\quad + \partial_\theta \Gamma_{\phi\phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\phi\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\theta \\
&= 0 - 0 + \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{tt}^t + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{t\phi}^t \\
&\quad - (\Gamma_{t\phi}^t \Gamma_{\phi t}^t + \Gamma_{t\phi}^r \Gamma_{\phi r}^t + \Gamma_{t\phi}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^t + \Gamma_{t\phi}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^t) + \partial_r((2M - r) \sin^2 \theta) + 0 \\
&\quad + \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{r\phi}^r \\
&\quad - (\Gamma_{\phi r}^t \Gamma_{\phi t}^r + \Gamma_{\phi r}^r \Gamma_{\phi r}^r + \Gamma_{\phi r}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^r + \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r) \\
&\quad + \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) - 0 + \Gamma_{\phi\phi}^t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\phi}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta \\
&\quad - (\Gamma_{\phi\theta}^t \Gamma_{\phi t}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^r \Gamma_{\phi r}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta) \\
&= \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{tr}^t + \partial_r((2M - r) \sin^2 \theta) + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{\phi r}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^r \\
&\quad + \partial_\theta(-\sin \theta \cos \theta) + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{\theta r}^\theta - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\theta \\
&= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} - \sin^2 \theta \\
&\quad - r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta - \cot \theta(-\sin \theta \cos \theta) \\
&= -\frac{M}{r} \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + \frac{M}{r} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \\
&\quad - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 0
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

Επίσης για $\mu \neq \nu$ υπολογίζεται εύκολα ότι $R_{\mu\nu} = 0$. Άρα αφού κάθε συνιστώσα του *Ricci* είναι μηδέν, το βαθωτό *Ricci*:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0 \tag{2.16}$$

Εφόσον ο $R_{\mu\nu}$ όπως δείξαμε παραπάνω είναι ο μηδενικός πίνακας.

Το θεώρημα του **Birkhoff** λέει ότι κάθε σφαιρικά συμμετρική λύση για το κενού είναι στατική το οποίο ουσιαστικά συνεπάγεται ότι πρέπει να είναι *Schwarzschild*.

2.1.1 Μελανή Οπή Schwarzschild

Η μετρική *Schwarzschild* για τις συντεταγμένες που επιλέξαμε παρουσιάζει ιδιομορφία για $r = 2M$ διότι τότε $g_{tt} = 0$ και $g_{rr} \rightarrow \infty$. Όμως η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g = \det|g_{\mu\nu}| = r^4 \sin^2 \theta$ είναι διάφορη του μηδενός για $r = 2M$ συνεπώς θα λέγαμε ότι αυτή είναι μια φαινομενική ιδιομορφία ή ιδιομορφία του συστήματος συντεταγμένων και όχι μια ουσιαστική ιδιομορφία.

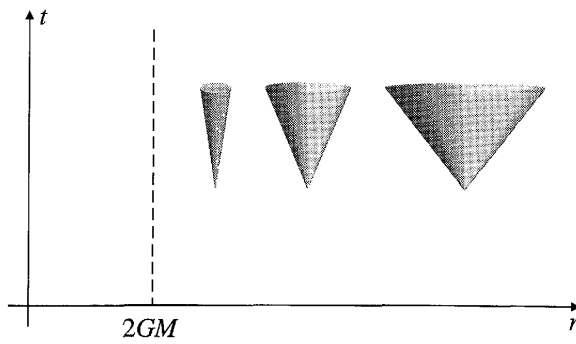
Παρότι η επιφάνεια $r = 2M$ δεν αποτελεί ουσιαστικό μαθηματικό πρόβλημα για την μετρική *Schwarzschild*, έχει σημαντικές φυσικές ιδιότητες που μπορούμε να κατανοήσουμε μέσω της μελέτης του κώνου φωτός στο χωρόχρονο *Schwarzschild*. Οι γενέτειρες του κώνου φωτός (για σταθερά θ, ϕ) θα δημιουργούνται από την περιορισμένη μορφή της μετρικής:

$$ds^2 \equiv 0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (2.17)$$

άρα:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (2.18)$$

Ασυμπτωτικά για $r \rightarrow \infty$ οι γεννήτορες του κώνου θα τέμνονται σε ορθή γωνία, αλλά για μικρότερα r η γωνία ελλατώνεται, ενώ στην κρίσιμη απόσταση $r = 2M$ οι γενέτειρες του κώνου ταυτίζονται κι επομένως φωτεινά σήματα δεν μπορούν να διαφύγουν προς μεγαλύτερα r αλλά αντίθετα φαίνεται να παραμένουν στάσιμα στην επιφάνεια $r = 2M$. Άρα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η ευθεία $r = 2M$ στο διάγραμμα $t-r$ είναι μια φωτεινής καμπύλη και αντίστοιχα η σφαιρική επιφάνεια $r = 2M$ είναι μια φωτεινής επιφάνεια.



ΣΧΗΜΑ 2.1: Διάγραμμα σε συντεταγμένες *Schwarzschild*, ο κώνος φωτός φαίνεται να κλείνει καθώς πλησιάζουμε την ακτίνα $r = 2M$.

Εάν ένας παρατηρητής έπεφτε προς την μαύρη τρύπα στέλνοντας σήματα προς εμάς όλη την ώρα, τα σήματα αυτά θα έρχονταν σε εμάς ολοένα και πιο αργά. Καθώς ο παρατηρητής πλησιάζει στο $r = 2M$ κάθε διάστημα του ιδιοχρόνου του $\Delta\tau_1$ αντιστοιχεί σε ένα πολύ μεγαλύτερο διάστημα του δικού μας ιδιοχρόνου. Αυτό θα γινόταν για πάντα και δεν θα βλέπαμε ποτέ τον παρατηρητή να περνάει το $r = 2M$ αλλά θα κινούταν συνέχεια εκεί όλο και πιο αργά.

Το ότι δεν βλέπουμε τον παρατηρητή να περνάει από το $r = 2M$ είναι λογικό, το γεγονός όμως ότι η τροχιά του δεν φτάνει ποτέ στο σημείο είναι πρόβλημα των συντεταγμένων. Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα αρχικά εισάγεται η συντεταγμένη χελώνας. Η σχέση (2.18) μπορεί να λυθεί με:

$$t = \pm r^* + const. \quad (2.19)$$

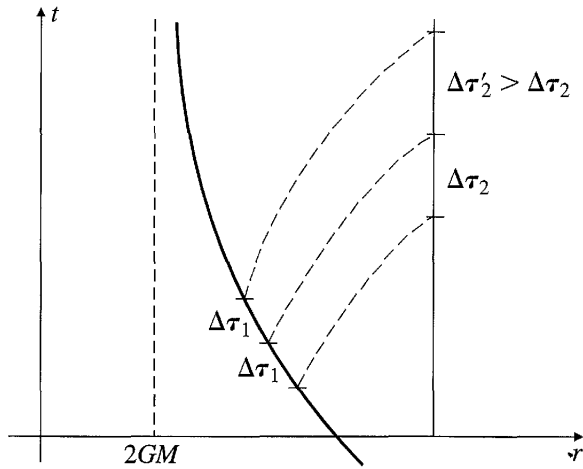
Όπου η συντεταγμένη χελώνας είναι:

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (2.20)$$

και σχετίζεται μόνο με την περιοχή και $r \geq 2M$ αλλά πέρα από εκεί δεν μας κάνει. Με την συντεταγμένη χελώνας η μετρική *Schwarzschild* παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.21)$$

όπου το r είναι συνάρτηση του r^* . Τώρα ο κώνος φωτός δεν κλείνει αλλά για $r = 2M$ το $r^* \rightarrow \infty$. μετρικής δεν απειρίζεται στο $r = 2M$ (αλλά οι $g_{tt}, g_{r^*r^*}$ μηδενίζονται).



ΣΧΗΜΑ 2.2: Παρατηρητής που πέφτει προς το κέντρο της μελανής οπής και στέλνει σήματα προς παρατηρητή που στέκεται σε σταθερό ρ έξω από την μελανή οπή.

Το τίμημα που πληρώνουμε είναι ότι η επιφάνεια $r = 2M$ που μας ενδιαφέρει να τραβιέται για την καινούρια συντεταγμένη στο αρνητικό άπειρο. Η επόμενη κίνηση μας, λοιπόν, είναι να ορίσουμε συντεταγμένες που θα προσαρμόζονται στις φωτοειδείς γεωδαισιακές.

$$u = t - r^* \quad (2.22)$$

$$v = t + r^* \quad (2.23)$$

Τότε τα σωμάτια που πέφτουν στο κέντρο σε φωτοειδείς γεωδαισιακές χαρακτηρίζονται από $v = \text{σταθερό}$ ενώ τα σωμάτια που βγαίνουν χαρακτηρίζονται από $u = \text{σταθερό}$. Τώρα πραγματοποιείται ο μετασχηματισμός:

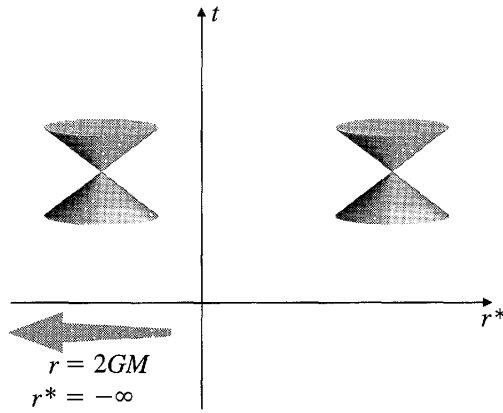
$$r^* \rightarrow r$$

Έστω ότι:

$$t \rightarrow v = t + r^* = t + r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)$$

Για τις οποίες έχουμε τα διαφορικά:

$$dv = dt + dr \left(1 + 2M \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{-1} \frac{1}{2M} \right) \Leftrightarrow$$



ΣΧΗΜΑ 2.3: Διάγραμμα των συντεταγμένων χρόνου και συντεταγμένης Χελώνας με την απροσδιοριστία $r = 2M$ να απομακρύνεται στο άπειρο

$$dt = dv - dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$dt^2 = dv^2 + dr^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} - 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dvdr$$

Δεδομένης της παραπάνω σχέσης η μετρική *Schwarzschild* θα γίνει:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - dr^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + 2dvdr + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.24)$$

Αυτές είναι οι γνωστές *Eddington – Finkelstein* Συντεταγμένες. Μπορούμε να δούμε ότι παρόλο που η g_{vv} εξαφανίζεται στο $r = 2M$ δεν υπάρχει πραγματικός εκφυλισμός και η ορίζουσα της μετρικής είναι

$$g = \det |g| = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = -r^4 \sin^2 \theta \quad (2.25)$$

Η οποία είναι τέλεια για $r = 2M$. Έτσι η ορίζουσα είναι αναστρέφουσα και βλέπουμε γιατί η $r = 2M$ είναι απλά μια απροσδιοριστία συντεταγμένης στο αρχικό μας

σύστημα συντεταγμένων (t, r, θ, ϕ) . Στις *Eddington – Finkelstein* Συντεταγμένες η συνθήκη για ακτινικές φωτεινές καμπύλες είναι:

$$\frac{dv}{dr} \begin{cases} 0 & (\text{infalling}) \\ 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & (\text{outgoing}) \end{cases} \quad (2.26)$$

Σε αυτό λοιπόν το σύστημα ο κώνος φωτός παραμένει καλός στο $r = 2M$, και η επιφάνεια έχει πεπερασμένη τιμή συντεταγμένης. Δεν υπάρχει πρόβλημα για διαδρομές φωτεινών ή χρονοειδών σωματίων να περνούν την επιφάνεια. Από την άλλη όμως, παρόλο που ο κώνος δεν κλίνει, γέρνει προς την κατεύθυνση της μειούμενης ακτίνας. Έτσι στο σημείο $r = 2M$ τοπικά δεν υπάρχει πρόβλημα, αλλά σε παγκόσμιο επίπεδο λειτουργεί σαν επιφάνεια χωρίς γυρισμό-μόλις ένα σωματίο το περάσει, δεν μπορεί να γυρίσει πίσω. Έτσι ορίζεται ο Ορίζοντας Γεγονότων και για την λύση *Schwarzschild* είναι στο $r = 2M$. Αφού τίποτε δεν μπορεί να διαφύγει από τον ορίζοντα γεγονότων, τότε δεν μπορούμε να δούμε τίποτα σχετικά με το τι συμβαίνει μέσα σε αυτόν εξού και το όνομα Μελανή Οπή.

Ο προηγούμενος μετασχηματισμός $t \rightarrow v$ εξάλειψε το πρόβλημα με τον κώνο φωτός όμως μας περιόριζε στο να κάνουμε διαδρομές προς τα μέσα του Ορίζοντα Γεγονότων ακολουθώντας χρονοειδές καμπύλες προς το μέλλον. Όμως εμείς είχαμε ξεκινήσει με μετρική που να έχει συμμετρία στην μετατόπιση στον χρόνο. Επομένως αν $t \rightarrow u$ τότε η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.27)$$

Αυτήν την φορά περνούμε τον Ορίζοντα Γεγονότων ακολουθώντας χρονοειδές καμπύλες προς το παρελθόν. Αυτό είναι μια έκπληξη: εφόσον μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε προς το μέλλον είτε προς το παρελθόν χρονοειδές καμπύλες στο $r = 2M$ και να καταλήγουμε σε διαφορετικά μέρη. Αυτό το περιμένουμε από την σχέση (2.22-2.23) εάν κρατήσουμε σταθερό το v και μειώσουμε το r πρέπει το $t \rightarrow +\infty$, ενώ αν κρατήσουμε σταθερό το u και μειώσουμε την r τότε πρέπει $t \rightarrow -\infty$ (η συντεταγμένη χελώνας r^* πάει στο $-\infty$ για $r \rightarrow 2M$). Έτσι κάνοντας την επέκταση του χωρόχρονου σε δυο κατευθύνσεις έναν στο μέλλον και ένα στο παρελθόν. Ένα επόμενο βήμα θα ήταν να ακολουθήσουμε χωροειδές γεωδαισιακές για να δούμε εάν μπορούμε να καλύψουμε άλλες περιοχές. Αλλά καλά θα ήταν να ορίσουμε συντεταγμένες που θα είναι καλές σε όλο τον χωρόχρονο. Μια

πρώτη μαντεψιά είναι να χρησιμοποιήσουμε και τις δυο συντεταγμένες v, u τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v = t + r^* \\ u = t - r^* \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}(v + u) \\ r^* = \frac{1}{2}(v - u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2}(dv + du) \\ dr \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{2}(dv - du) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} dt^2 = \frac{1}{4}(dv^2 + du^2 + 2dvdu) \\ dr^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \frac{1}{4}(dv^2 + du^2 - 2dvdu) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Επομένως η μετρική θα γίνει:

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dvdu + dudv) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.29)$$

όπου το r δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (2.30)$$

Δηλαδή ξαναορίσαμε τον εκφυλισμό που είχαμε στην αρχή: σε αυτές τις συντεταγμένες $r = 2M$ είναι "άπειρα μακριά" (είτε σε $u \rightarrow +\infty$, είτε σε $v \rightarrow -\infty$). Το μόνο που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι να αλλάξουμε τις συντεταγμένες έτσι ώστε να τραβάμε τα άπειρα αυτά σημεία σε πεπερασμένες τιμές. Μια καλή επιλογή είναι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v' = e^{v/4M} \\ u' = -e^{-u/4M} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v' = e^{(t+r)/4M + \frac{1}{2} \ln(r/2M - 1)} \\ u' = -e^{-(t-r)/4M - \frac{1}{2} \ln(r/2M - 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} v' = (r/2M - 1)^{\frac{1}{2}} e^{(t+r)/4M} \\ u' = -(r/2M - 1)^{\frac{1}{2}} e^{-(t-r)/4M} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες (v, u, θ, ϕ) μετρική *Schwarzschild* θα έχει τη μορφή:

$$ds^2 = -\frac{16M^3}{r} (e^{-r/2M} (dv' du' + du' dv')) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.32)$$

Επιτέλους η φύση της μη-απροσδιοριστία στο $r = 2M$ έγινε εντελώς προφανής. Σε αυτήν την μορφή η μετρική συμπεριφέρεται ειδικά στον Ορίζοντα Γεγονότων. Και οι δυο συντεταγμένες v', u' είναι φωτοειδής, με την έννοια οι μερικές παράγωγοί τους $\frac{\partial}{\partial v'}, \frac{\partial}{\partial u'}$ είναι φωτοειδή διανύσματα! Αυτό είναι εν γένει σωστό, εφόσον η συλλογή από διανύσματα μερικών παραγώγων (2 φωτοειδή και δυο χωροειδή) σε ένα σύστημα συντεταγμένων δουλεύει σαν μια τέλεια βάση του εφαπτόμενου χώρου. Επειδή όμως είναι προτιμότερο να υπάρχει συστήματα όπου η μια συνιστώσα είναι χρονοειδής και οι άλλες τρεις χωροειδής, ορίζουμε τις συντεταγμένες:

$$T = \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.33)$$

$$R = \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.34)$$

Για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} v' = T + R \\ u' = T - R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dv' = dT + dR \\ du' = dT - dR \end{cases} \Leftrightarrow dv'du' = dT^2 - dR^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(dv'du' + du'dv') = dT^2 - dR^2 \quad (2.35)$$

Επομένως η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} (e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2)) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.36)$$

όπου το r καθορίζεται από τη σχέση:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M} \quad (2.37)$$

Οι συντεταγμένες (T, R, θ, ϕ) είναι γνωστές ως συντεταγμένες *Kruskal* ή *Kruskal-Szekeres*. Όπως και οι (t, r^*) συντεταγμένες, η ακτινικές φωτοειδής καμπύλες ακολουθούν, όπως και στον επίπεδο χώρο, την σχέση:

$$T = \pm R + const. \quad (2.38)$$

Αντιθέτως όμως με τις (t, r^*) συντεταγμένες, ο Ορίζοντας Γεγονότων $r = 2M$ δεν είναι απείρως μακριά αλλά ορίζεται από την:

$$T = \pm R \quad (2.39)$$

Η οποία είναι φωτοειδής επιφάνεια. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε τις επιφάνειες με r =σταθερά από την σχέση:

$$T^2 - R^2 = \text{const.} \quad (2.40)$$

οι οποίες παρουσιάζονται σαν υπερβολικές στο επίπεδος $R - T$. Επιπλέον, οι επιφάνειες σταθερού χρόνου t δίνονται από την:

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (2.41)$$

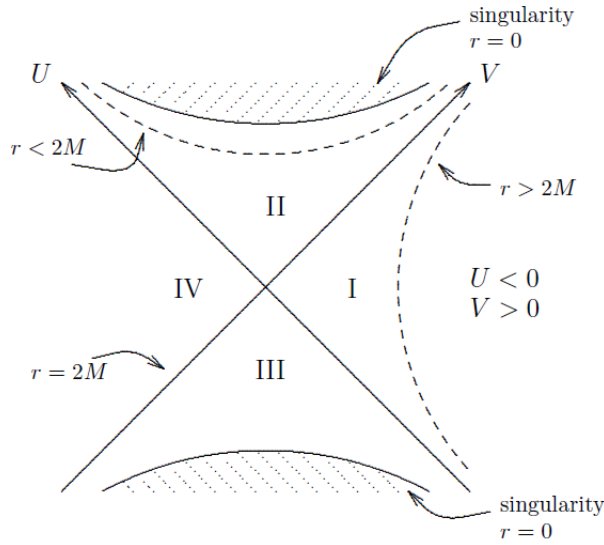
η οποία ορίζει ευθείες γραμμές που περνάνε από την αρχή των αξόνων με κλίση $\tanh(t/4M)$. Για $t \rightarrow \pm\infty$ η 2.41 γίνεται όπως η 2.39: για αυτόν τον λόγο η επιφάνεια $t \rightarrow \pm\infty$ είναι ίδια με την επιφάνεια $r = 2M$. Οι συντεταγμένες (T, R) θα έπρεπε να επιτρέπεται να παίρνουν όλες τις τιμές χωρίς να κτυπούν την απροσδιοριστία $r = 0$: Η επιτρεπόμενη περιοχή είναι:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq R \leq +\infty \\ T^2 &\leq R^2 + 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

αφού $(1 - \frac{r}{2M})e^{r/2M}|_{r=0} = 1$

Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα επιπέδου $T - R$ (με φιζαρισμένα τα θ, ϕ), γνωστό ως *Kruskal* Διάγραμμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Κάθε σημείο είναι μια 3-διάστατη σφαίρα. Το διάγραμμα αυτό αποτελεί την Μέγιστη Επέκταση της *Schwarzschild* γεωμετρίας: οι συντεταγμένες καλύπτουν ολόκληρο αυτό που θεωρούμε Πολλαπλότητα της Λύσης. Το διάγραμμα αυτό χωρίζεται σε 4 περιοχές.

Από τις οποίες η *I* είναι η περιοχή όπου ο χώρος περιγράφεται από τις συντεταγμένες μας. Αυτή η περιοχή είναι ασυμπτωτικά επίπεδη και είναι ο χώρος στον οποίο ζούμε. Ο χώρος *II* είναι αυτός που ονομάζουμε Μαύρη Τρύπα δηλαδή ότι



ΣΧΗΜΑ 2.4: Διάγραμμα *Kruskal*.

παιρνάει την διαχωριστική επιφάνεια δεν μπορεί να επιστρέψει πίσω. Ο Χώρος *III* είναι αυτό που, αποκαλούμε Λευκή Τρύπα. Ένα αντικείμενο που δεν έχει παρατηρηθεί στην φύση και αυτό που κάνει είναι να παράγει σωματίδια έξω από την περιοχή αλλά να μην μπορεί να δεχθεί καθόλου μέσα. Και η *IV* είναι μια περιοχή που θα μπορούσαμε να την φτάσουμε μόνο με χωροειδή διαδρομή και είναι ένας καθρέπτης της πραγματικής περιοχής που ζούμε.

2.2 Διάγραμμα Penrose

Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα *Penrose* χρειάζεται να μιλήσουμε πρώτα για την έννοια της σύμμορφης συμπαγοποίησης. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε ότι η αιτιατή δομή του παραμένει ίδια. Έστω ότι ορίζουμε μια νέα μετρική στον χωρόχρονο τέτοια ώστε:

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \Lambda^2(\vec{r}, t) ds^2 \quad \Lambda \neq 0 \quad (2.43)$$

Μπορούμε να διαλέξουμε το Λ τέτοιο ώστε όλα τα σημεία στο άπειρο να είναι καλώς ορισμένα στο πεπερασμένο για μια παράμετρο στην καινούργια μετρική. Για να συμβεί αυτό διαλέγουμε το Λ να είναι τέτοιο ώστε $\Lambda \rightarrow 0$ καθώς το $|r| \rightarrow \infty$ και/ή $|t| \rightarrow \infty$.

Ας δούμε τι συμβαίνει στο χώρο *Minkowski*. Η μετρική είναι:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.44)$$

Ορίζουμε

$$\begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases} \rightarrow ds^2 = -dudv + \frac{(u-v)^2}{4} d\Omega^2 \quad (2.45)$$

Αν τώρα θέσουμε

$$\begin{cases} u = \tan \bar{U} & -\pi/2 < \bar{U} < \pi/2 \\ v = \tan \bar{V} & -\pi/2 < \bar{V} < \pi/2 \end{cases} \quad (2.46)$$

Σε αυτές τις συντεταγμένες η μετρική γράφεται:

$$ds^2 = (2 \cos \bar{U} \cos \bar{V})^{-2} [-4d\bar{U}d\bar{V} + \sin^2(\bar{V} - \bar{U})d\Omega^2] \quad (2.47)$$

Για να προσεγγίσουμε ∞ σε αυτή τη μετρική πρέπει να πάρουμε $|\bar{U}| \rightarrow \pi/2$ ή $|\bar{V}| \rightarrow \pi/2$ διαλέγοντας:

$$\Lambda = 2 \cos \bar{U} \cos \bar{V} \quad (2.48)$$

φέρνουμε αυτά τα σημεία σε πεπερασμένη αφινική παράμετρο στην καινούργια μετρική:

$$d\bar{s}^2 = \Lambda ds^2 = -4d\bar{U}d\bar{V} + \sin^2(\bar{V} - \bar{U})d\Omega^2 \quad (2.49)$$

Μπορούμε τώρα να προσθέσουμε τα σημεία στο άπειρο. Παίρνοντας $\bar{V} \geq \bar{U}$,

$$\begin{cases} \bar{U} = -\pi/2 \\ \bar{V} = \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \text{ finite} \end{cases} \quad (2.50)$$

χωροειδές άπειρο i_0 .

$$\begin{cases} \bar{U} = \pm\pi/2 \\ \bar{V} = \pm\pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \rightarrow \pm\infty \\ v \rightarrow \pm\infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \rightarrow \pm\infty \\ r \text{ finite} \end{cases} \quad (2.51)$$

μελλοντικό/παρελθοντικό χωροειδές άπειρο i_{\pm} .

$$\begin{cases} \bar{U} = -\pi/2 \\ |\bar{V}| \neq \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \rightarrow -\infty \\ v \quad \text{finite} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \\ r+t \quad \text{finite} \end{cases} \quad (2.52)$$

παρελθοντικό φωτειδές άπειρο \mathfrak{S}^- .

$$\begin{cases} |\bar{U}| = -\pi/2 \\ \bar{V} \neq \pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \quad \text{finite} \\ v \rightarrow \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \\ r-t \quad \text{finite} \end{cases} \quad (2.53)$$

μελλοντικό φωτειδές άπειρο \mathfrak{S}^+ .

Αυτά τα σημεία μαζί σχηματίζουν το σύμμορφο άπειρο. Δεν είναι μέρος του αρχικού χωρόχρονου. Ο χωρόχρονος *Minkowski* είναι τώρα σύμμορφα ενωματομένος στον νέο χωρόχρονο που περιγράφεται από την μετρική $d\bar{s}$ με όριο το $\Lambda = 0$. Εισάγουμε τις νέες συνιστώσες χρόνου και χώρου τ, χ ως:

$$\begin{cases} \tau = \bar{V} + \bar{U} \\ \chi = \bar{V} - \bar{U} \end{cases} \quad (2.54)$$

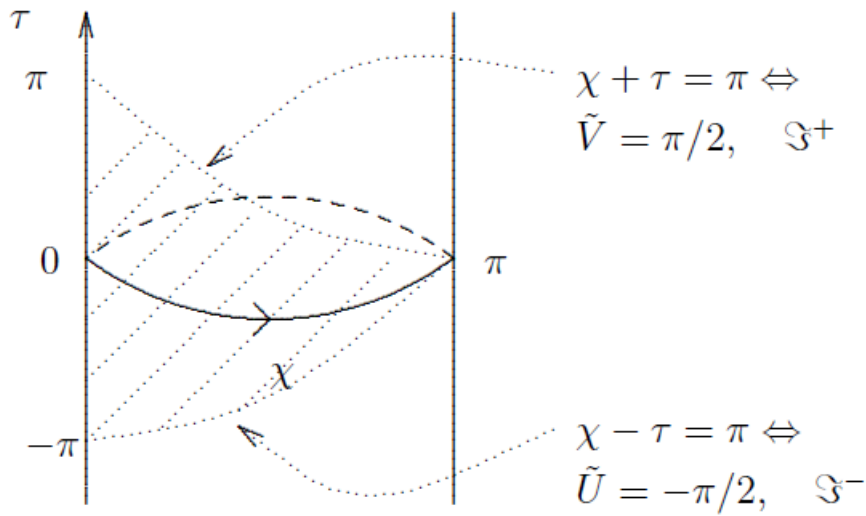
έχουμε:

$$d\bar{s} = \Lambda ds^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \quad (2.55)$$

$$\Lambda = \cos \tau + \cos \chi \quad (2.56)$$

όπου χ είναι γωνιακή μεταβλητή με μέτρο έως 2π , $\chi \sim \chi + 2\pi$. Αν κανένας άλλος περιορισμός δεν υπάρχει για τα τ και χ , τότε η μετρική $d\bar{s}$ είναι αυτή του στατικού σύμπαντος *Einstein*, τοπολογίας $\mathfrak{R}(\text{χρόνος}) \times S^3(\text{χώρος})$. Οι 2-σφαίρες σταθερού $\chi \neq 0, \pi$, έχουν ακτίνα $|\sin \chi|$ (τα σημεία $\chi = 0, \pi$ είναι πόλοι μια 3 σφαίρας). Αν παραστήσουμε κάθε 2-σφαίρα σταθερού χ με ένα σημείο τότε το *E.S.U* σχεδιάζεται ως ένα κύλινδρος.

Κάθε σημείο παριστάνει μια 2-σφαίρα εκτός των σημείων για $r = 0$ και i_0, i_{\pm} . Οι ακτίνες φωτός ταξιδεύουν στις 45° από το \mathfrak{S}^- μέσω του $r = 0$ και μετά έξω προς το \mathfrak{S}^+ .



Σχήμα 2.5: 2.5 Σύμμορφα συμπαγοποιημένο χωρόχρονος *Minkowski* ενσωματωμένο στο *E.S.U*

Για την *Schwarzschild* με βάση την μετρική όπως την υπολογίσαμε παραπάνω

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega \quad (2.57)$$

στην περιοχή *I*.

Ας θέσουμε

$$\begin{cases} u = \tan \bar{U} & -\pi/2 < \bar{U} < \pi/2 \\ v = \tan \bar{V} & -\pi/2 < \bar{V} < \pi/2 \end{cases} \quad (2.58)$$

Τότε έχουμε :

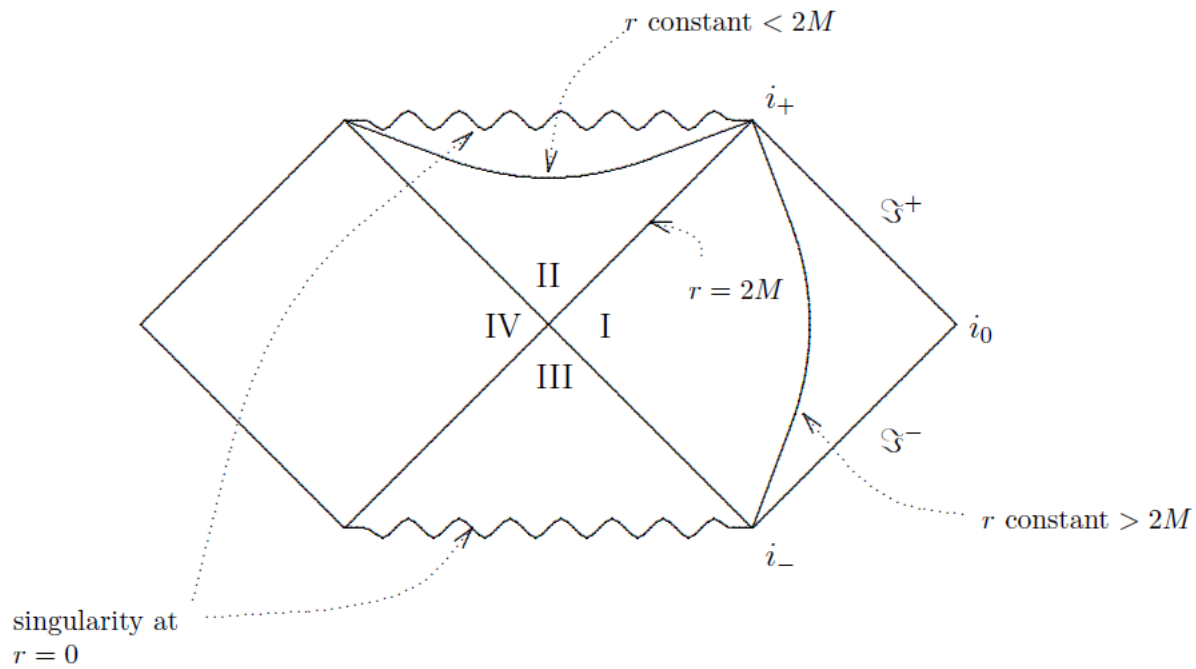
$$ds^2 = (2 \cos \bar{U} \cos \bar{V})^{-2} \left[-4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\bar{U} d\bar{V} + r^2 \cos^2 \bar{U} \cos^2 \bar{V} d\Omega^2 \right] \quad (2.59)$$

χρησιμοποιώντας ότι:

$$r^* = \frac{1}{2}(v - u) = \frac{\sin(\bar{V} - \bar{U})}{2 \cos \bar{U} \cos \bar{V}} \quad (2.60)$$

έχουμε:

$$d\bar{s}^2 = \Lambda^2 ds^2 = -4 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\bar{U} d\bar{V} + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(\bar{V} - \bar{U}) d\Omega^2 \quad (2.61)$$



ΣΧΗΜΑ 2.6: Διάγραμμα Penrose για τη Schwarzschild

Αυτός είναι ένας ασυμπτωτικά επίπεδος χωρόχρονος. Προσεγγίζει την μετρική του συμπαγοποιημένου *Minkowski* χωρόχρονου καθώς το $r \rightarrow 0$ κι έτσι τα σημεία i_0 και \mathfrak{S}^\pm μπορούν να προστεθούν όπως και πριν. Κοντά στο $r = 2M$ μπορούμε να εισάγουμε *KS*-τύπου συντεταγμένες για να περάσουμε μέσω του οριζοντα.

2.3 Ορίζοντες Killing και επιφανειακή βαρύτητα

Διανυσματικό πεδίο Killing είναι ένα διανυσματικό πεδίο που έχει την ιδιότητα να μηδενίζει την παράγωγο *Lie* της μετρικής.

Ορίζοντας Killing Ορίζουμε ως ορίζοντα *Killing* ενός διανυσματικού πεδίου *Killing* μια φωτοειδή υπερεπιφάνεια N αν αυτό είναι κάθετο στην N .

Επιφανειακή Βαρύτητα μέσω διανυσματικών πεδίων Killing

Ορίζουμε διανυσματικό πεδίο l κάθετο στην N τέτοιο ώστε να ισχύει $l \cdot \nabla l^\mu = 0$. Αφού η N είναι *Killing* ορίζοντας του διανυσματικού πεδίου ξ τότε έχουμε:

$$\xi = fl \tag{2.62}$$

για κάποια συνάρτηση f . Τότε λοιπόν υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\xi \cdot \nabla \xi^\mu &= fl^\sigma \nabla_\sigma (fl^\mu) = fl^\sigma (\partial_\sigma f) l^\mu + fl^\sigma f \nabla_\sigma l^\mu \\
&= fl \cdot \partial f l^\mu = \xi \cdot \partial \ln |f| \xi^\mu
\end{aligned} \tag{2.63}$$

όπου $\kappa = \xi \cdot \partial \ln |f|$ είναι η επιφανειακή βαρύτητα.

Αφού το ξ είναι κάθετο στη N από το θεώρημα *Frobenius* έχουμε:

$$\xi_{[\mu} \nabla_\nu \xi_{\sigma]} = 0 \tag{2.64}$$

στον ορίζοντα.

Λύνουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma - \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\sigma + \xi_\nu \nabla_\sigma \xi_\mu - \xi_\sigma \nabla_\nu \xi_\mu + \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu - \xi_\mu \nabla_\sigma \xi_\nu &= 0 \\
2\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma - 2\xi_\nu \nabla_\mu \xi_\sigma + 2\xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu &= 0 \\
\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma - \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\sigma + \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu &= 0 \\
\xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu &= -2\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\sigma
\end{aligned} \tag{2.65}$$

στον ορίζοντα. Η δεύτερη γραμμή προήλθε από το γεγονός ότι γωνρίζουμε για τα διανυσματικά πεδία *Killing* ισχύει $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$. Εφαρμόζοντας το $\nabla^\mu \xi^\nu$ και στα δύο μέρη της τελικής εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\xi_\sigma (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu) &= -2(\xi_\mu \nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\nu \xi_\sigma) \\
&= -2\kappa \xi^\nu \nabla_\nu \xi_\sigma \\
&= -2\kappa^2 \xi_\sigma
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Γράφουμε λοιπόν την επιφανειακή βαρύτητα στη μορφή:

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu) \tag{2.67}$$

2.4 Μετρική Reissner-Nordstrom

Η μετρική *Reissner – Nordstrom*(*RN*) περιγράφει μια στατική, σφαιρικά συμμετρική μαύρη τρύπα, μάζας M που έχει ηλεκτρικό φορτίο Q . Δεν είμαστε πλέον στο κενό αφού το ηλεκτρομαγνητικό μας πεδίο είναι μη μηδενικό. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής δίνεται για τον ηλεκτρομαγνητισμό δίνεται από τον τύπο

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \quad (2.68)$$

Οι πεδιακές εξισώσεις σε αυτήν την περίπτωση είναι τόσο η εξίσωση του *Einstein* όσο και οι εξισώσεις του *Maxwell*. Η λύση που προκύπτει είναι η *RN* και έχει τη μορφή:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} + r^2 d\Omega^2 \quad (2.69)$$

Η παράμετρος Q είναι ξεκάθαρα το φορτίο.

Αν υπολογίσουμε τα σύμβολα *Christoffel* για αυτήν τη μετρική θα βρούμε ότι τα μη μηδενικά είναι τα εξής:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = \frac{Q^2 - Mr}{r(r^2 + Q^2 - 2Mr)} \quad (2.70)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{-Q^2 + Mr}{r(r^2 + Q^2 - 2Mr)} \quad (2.71)$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \quad (2.72)$$

$$\Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \quad (2.73)$$

$$\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_{\theta} g_{\phi\phi} = \cot \theta \quad (2.74)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} = -\frac{(Q^2 - Mr)(r^2 + Q^2 - 2Mr)}{r^5} \quad (2.75)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta} = 2M - \frac{Q^2}{r} - r \quad (2.76)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -\frac{(r^2 + Q^2 - 2Mr) \sin^2 \theta}{r} \quad (2.77)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_{\theta}g_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \quad (2.78)$$

Οι μη μηδενικές συνισταμένες του *Ricci* υπολογισμένες όμοια με τον τρόπο που αναλύσαμε στην περίπτωση της μετρικής *Schwarzschild* είναι οι:

$$R_{tt} = \frac{Q^2(r^2 + Q^2 - 2Mr)}{r^6} \quad (2.79)$$

$$R_{rr} = -\frac{Q^2}{r^2(r^2 + Q^2 - 2Mr)} \quad (2.80)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{Q^2}{r^2} \quad (2.81)$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{Q^2}{r^2}\sin^2\theta \quad (2.82)$$

Υπολογίζοντας το βαθμωτό *Ricci* έχουμε

$$\begin{aligned} R &= g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= -\frac{r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \frac{Q^2(r^2 + Q^2 - 2Mr)}{r^6} + \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2} \left(-\frac{Q^2}{r^2(r^2 + Q^2 - 2Mr)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{Q^2}{r^2} + \frac{1}{e^2 \sin^2\theta} \frac{Q^2}{r^2} \sin^2\theta \\ &\quad - \frac{Q^2}{r^4} - \frac{Q^2}{r^4} + \frac{Q^2}{r^4} + \frac{Q^2}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Άρα για τον τανυστή καμπυλότητας *Einstein* θα έχουμε:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \quad (2.84)$$

Ας γράψουμε τώρα την μετρική *RN* στη μορφή:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.85)$$

όπου

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 \quad (2.86)$$

Η Δ μηδενίζεται για $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$, οι οποίες είναι και οι δύο πραγματικές και ο χωρόχρονος RN περιέχει πράγματι μια μαύρη τρύπα όταν $|Q| \leq M$. Η ειδική περίπτωση όπου $|Q| = M$ ονομάζεται ακραία RN μαύρη τρύπα. Αν $|Q| > M$ τότε η λύση RN περιγράφει μια "γυμνή" ιδιομορφία για $r = 0$.

Όπως και στην περίπτωση της *Schwarzschild* για τις συντεταγμένες (t, r) παρουσιάζονται ιδιομορφίες για τον εξωτερικό ορίζοντα $r = r_+$ κι έτσι πρέπει να εισάγουμε νέες συντεταγμένες για να επεκτείνουμε τη λύση μας πέρα από αυτήν την επιφάνεια. Θα ορίσουμε λοιπόν αρχικά όπως είχαμε κάνει και στη περίπτωση της *Schwarzschild* το r^* ως

$$dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr = \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \quad (2.87)$$

$$\Rightarrow r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left(\frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left(\frac{|r - r_-|}{r_-} \right) \quad (2.88)$$

όπου

$$\kappa_{\pm} = \frac{(r_{\pm} - r_{\mp})}{2r_{\pm}^2} \quad (2.89)$$

Εισάγοντας τις $u = t - r^*$ και $v = t + r^*$ την μετρική σε EF (*ingoing*) συντεταγμένες:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega \quad (2.90)$$

που είναι κανονική παντού εκτός του $r = 0$.

Εισάγουμε τις *Kruskal* τύπου συντεταγμένες:

$$U^{\pm} = -e^{\kappa_{\pm} u}, V^{\pm} = e^{\kappa_{\pm} v} \quad (2.91)$$

όπου για το πρόσημο + έχουμε

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{-2\kappa_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\left(\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1 \right)} dU^+ dV^+ + r^2 d\Omega^2 \quad (2.92)$$

όπου το $r(U^+ V^+)$ ορίζεται από:

$$U^+ V^+ = e^{-2\kappa_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\kappa_+ / \kappa_-} \quad (2.93)$$

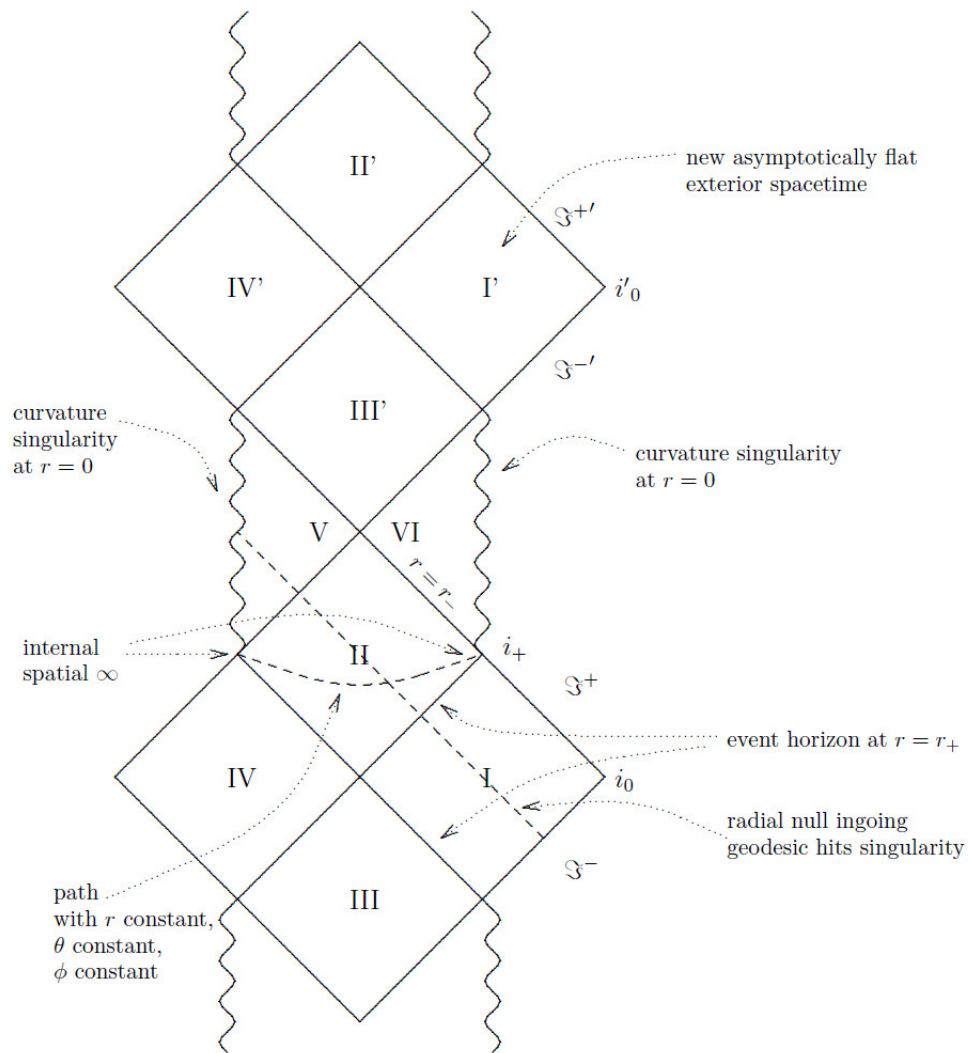
Αυτή η μετρική καλύπτει τέσσερις περιοχές της μέγιστης αναλυτικής επέκτασης της RN . Αυτές οι συντεταγμένες δεν καλύπτουν το $r \leq r_-$ λόγω της ιδιομορφίας στο $r = r_-$ αλλά το $r = r_-$ και παρόμοιες τέσσερις περιοχές καλύπτονται από την μετρική για τις (U^-, V^-) :

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_-^2} \frac{e^{-2\kappa_- r}}{r^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r} \right)^{\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right)} dU^- dV^- + r^2 d\Omega^2 \quad (2.94)$$

$$U^- V^- = -e^{-2\kappa_- r} \left(\frac{r_- - r}{r_-} \right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\kappa_- / \kappa_+} \quad (2.95)$$

όπου η περιοχή II είναι ίδια με αυτή για τις U^+, V^+ ενώ οι υπόλοιπες είναι καινο-ύργιες. Οι περιοχές V, VI περιλαμβάνουν την ιδιομορφία καμπυλότητας στο $r = 0$ η οποία είναι χρονοειδής γιατί το κάθετο στο $r = \text{σταθερό}$ είναι χωροειδές για $\Delta = 0$ για παράδειγμα στο $r < r_-$.

Γνωρίζουμε ότι η περιοχή II του διαγράμματος ενώνεται με ένα εξωτερικό χωρόχρονο στο παρελθόν (περιοχές I, III και IV) η περιοχή III πρέπει να είναι ενωμένη με μια άλλη εξωτερική περιοχή (ισομετρικές περιοχές I', II' και IV').



ΣΧΗΜΑ 2.7: 1.5.2 Penrose Διαγράμμα για RN

Κεφάλαιο 3

Στάσιμες Μαύρες Τρύπες

3.1 Θεωρήματα Μοναδικότητας

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι από το θεώρημα **Birkhoff** ορίζεται πως μια σφαιρικά συμμετρική λύση για το κενό είναι στατική, που συνεπάγεται ότι πρέπει να είναι η *Schwarzschild*. Αλλά ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μόνο ότι η μετρική εξωτερικά ενός αστέρα είναι στατική. Δυστυχώς το στατική δε σημαίνει απευθείας και σφαιρική συμμετρία. Αν όμως ο αστέρας είναι μελανή οπή τότε από το θεώρημα του **Israel** θα έχουμε ότι: Αν ο (M, g) είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, στατικός για το κενό χωρόχρονος που είναι μη-ιδιόμορφος πάνω και εκτός του οριζοντα γεγονότων τότε (M, g) είναι *Schwarzschild*.

Έπειτα από το θεώρημα **Carter-Robinson** γνωρίζουμε ότι αν το (M, g) είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, στάσιμος και αξονικά συμμετρικός κενός χωρόχρονος που είναι μη ιδιόμορφος πάνω στον οριζοντα γεγονότων και έξω από αυτόν τότε ο (M, g) είναι μέλος της 2-παραμέτρων οικογένειας *Kerr*. Οι παράμετροι αυτοί είναι η μάζα M και η στοφορμή J . Ο προσδιορισμός αξονικά συμμετρικός είναι περιττός καθώς όπως προκύπτει από το θεώρημα των **Hawking-Wald** η στασιμότητα συνεπάγεται αξονική συμμετρία.

3.2 Μετρική Kerr-Newmann

Η γενίκευση των παραπάνω θεωρημάτων για τον χώρο στον οποίον ισχύουν οι εξισώσεις *Maxwell–Einstein* ονομάζεται λύση *Kerr–Newmann*. Σε συντεταγμένες

Boyer – Lindquist η μετρική αυτή γράφεται :

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.1)$$

όπου

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.2)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2 \quad (3.3)$$

Οι τρεις παράμετροι που την χαρακτηρίζουν είναι M , a και e .

$$a = \frac{J}{M} \quad (3.4)$$

$$e = \sqrt{Q^2 + P^2} \quad (3.5)$$

όπου Q, P ηλεκτρικά και μαγνητικά φορτία αντίστοιχα.

Μπορούμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τη συγκεκριμένη μετρική. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν το a είναι μηδέν τότε η KN μετρική γίνεται RN . Ο μετασχηματισμός $\phi \rightarrow -\phi$ σημαίνει την ίδια αλλαγή για το a , έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς απώλεια στη γενικότητα ότι $a \geq 0$.

3.3 Μετρική Kerr

Είδαμε ότι η λύση των εξισώσεων που περιγράφει το εξωτερικό ενός απομονωμένου σφαιρικά συμμετρικού αντικειμένου (*Schwarzschild Solution*) είναι αρκετά απλή. Στην περίπτωση όμως ενός περιστρεφόμενου αντικειμένου το πρόβλημα είναι πολύ πιο δύσκολο. Δεν γνωρίζουμε μια αναλυτική, ακριβής λύση που να περιγράφει το εξωτερικό ενός περιστρεφόμενου αντικειμένου.

Ξέρουμε όμως την λύση για μια περιστρεφόμενη, στάσιμη και αξονικά συμμετρική μαύρη τρύπα. Η *Kerr* λύση όπως λέγεται καθώς ο υπολογισμός της έγινε από τον *R.Kerr* το 1963. Λέμε ότι η μετρική περιγράφει μαύρη τρύπα καθώς αποτελεί λύση των εξισώσεων *Einstein* στο κενό και έχει μια ιδιομορφία καμπυλωσης που καλύπτεται από ένα οριζοντα.

Τόνιζουμε ότι ενώ χάρη στο θεώρημα *Birkhoff* η μετρική *Schwarzschild* για $r > 2M$ περιγράφει το εξωτερικό κάθε απομονωμένου, σφαιρικά συμμετρικού αντικειμένου, η *Kerr* μετρική εκτός του οριζοντα μπορεί να περιγράψει μόνο το εξωτερικό μιας μαύρης τρύπας.

Η μετρική *Kerr* σε *Boyer – Lindquist* συντεταγμένες γράφεται

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.6)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.7)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (3.8)$$

Ο πίνακας της μετρική έχει τη μορφή

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} & 0 & 0 & \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Καθώς ο πίνακας δεν είναι διαγώνιος, υπολογίζουμε έπειτα τη $g^{\mu\nu}$ που θα έχει τη μορφή

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{tt} & 0 & 0 & g^{t\phi} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ g^{t\phi} & 0 & 0 & g^{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

Όπου

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \quad (3.9)$$

$$g^{t\phi} = -\frac{2Mr}{\Sigma\Delta} a \quad (3.10)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \quad (3.11)$$

Έχουμε λοιπόν τα μη μηδενικά σύμβολα *Christoffel*

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} \partial_r \frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{2r\Delta - \Sigma(2r - 2M)}{\Delta^2} \\ &= \frac{r}{\Sigma} - \frac{r - M}{\Delta} = \frac{r}{\Sigma} + \frac{M - r}{\Sigma} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma} \partial_\theta \Sigma = \frac{1}{2} a^2 2 \cos \theta (-\sin \theta) \\ &= -\frac{a^2}{2\Sigma} 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{-a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} \partial_r \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{(2r - 2M)\Sigma - (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)2r}{\Sigma^2} \right) \\ &= \Delta \left(\frac{(r - M)\Sigma - (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)r}{\Sigma^3} \right) \\ &= \Delta \left(\frac{r^3 + ra^2 \sin^2 \theta - M\Sigma - r^3 + 2Mr^2 - a^2 r + a^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma^3} \right) \\ &= \Delta \left(\frac{-M\Sigma + 2Mr^2}{\Sigma^3} \right) = \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{-Mra^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{rr}^\theta = \frac{a^2}{2\Sigma\Delta} \sin 2\theta \quad (3.16)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r\Delta}{\Sigma} \quad (3.17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{\Delta}{\Sigma^3} [r\Sigma^2 - Ma^2 \sin^2 \theta (2r^2 - \Sigma)] \sin^2 \theta \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2\Sigma^3} (\Delta\Sigma^2 + 2Mr(r^2 + a^2)^2) \sin 2\theta \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}g^{tt}\delta_r g_{tt} + \frac{1}{2}g^{t\phi}\delta_r g_{t\phi} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{4M^2r^2}{\Delta\Sigma}\right)\frac{2M(2r^2 - \Sigma)}{\Sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{2Mra}{\Delta\Sigma}\frac{2Ma\sin^2\theta}{\Sigma^2}(\Sigma - 2r^2) \\
&= \frac{2r^2 - \Sigma}{\Sigma^2}\left(\left(1 + \frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{4M^2r^2}{\Delta\Sigma}\right)M - \frac{2M^2ra^2\sin^2\theta}{\Delta\Sigma}\right) \\
&= \frac{2r^2 - \Sigma}{\Sigma^2}\left(\frac{M\Delta\Sigma + 2M^2r\Delta + 4M^3r^2 - 2M^2ra^2\sin^2\theta}{\Delta\Sigma}\right) \\
&= \frac{2r^2 - \Sigma}{\Sigma^2}\frac{M\Delta\Sigma + 2M^2r^3 + 2M^2ra^2\cos^2\theta - 4M^3r^2 + 4M^3r^2}{\Delta\Sigma} \\
&= \frac{2r^2 - \Sigma}{\Sigma^2}\frac{Mr^2\Sigma + Ma^2\Sigma - 2M^2r\Sigma + 2M^2r\Sigma}{\Delta\Sigma} \\
&= \frac{2r^2 - \Sigma}{\Sigma^2}\frac{M\Sigma(r^2 + a^2)}{\Delta\Sigma} \\
&= \frac{M(r^2 + a^2)}{\Delta\Sigma^2}(2r^2 - \Sigma)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\Gamma_{t\theta}^t = -\frac{Mra^2\sin 2\theta}{\Sigma^2} = -\frac{Mra\sin\theta\cot\theta}{\Sigma^2} \tag{3.21}$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{-a^2\sin 2\theta}{2\Sigma} \tag{3.22}$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r}{\Sigma} \tag{3.23}$$

$$\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{\Delta\Sigma^2}(r\Sigma(\Sigma - 2Mr) - Ma^2(2r^2 - \Sigma)\sin^2\theta) \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi r}^t &= \frac{1}{2}g^{tt}\delta_r g_{t\phi} + \frac{1}{2}g^{t\phi}\delta_r g_{\phi\phi} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{4M^2r^2}{\Delta\Sigma}\right) \frac{2Ma \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{2Mr a}{\Delta\Sigma} \frac{2r\Sigma^2 + 2Ma^2 \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma^2} \sin^2 \theta \\
&= \frac{Ma}{\Sigma^2} \left(\left(1 + \frac{2Mr}{\Sigma} + \frac{4M^2r^2}{\Delta\Sigma}\right) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - r(2r\Sigma^2 + 2Ma^2 \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)) \right) \sin^2 \theta \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(\Delta\Sigma + 2Mr\Delta + 4M^2r^2) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - (2r^2\Sigma^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)) \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(\Delta\Sigma + 2Mr(\Delta + 2Mr)) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - (2r^2\Sigma^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)) \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(\Delta\Sigma + 2Mr(r^2 + a^2)) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - (2r^2\Sigma^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)) \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(r^2\Sigma + a^2\Sigma - 2Mr\Sigma + 2Mr^2 + 2Mra^2) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - 2r^2\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&\quad + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(r^2\Sigma + a^2\Sigma - 2Mr^3 - 2Mra^2 \cos^2 \theta + 2Mr^3 + 2Mra^2) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma} \\
&\quad - \frac{2r^2\Sigma^2 \sin^2 \theta - 2Mra^2 \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(r^2\Sigma + a^2\Sigma) \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) - 2r^2\Sigma^2 \sin^2 \theta + 2Mra^2 \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma} \\
&\quad - \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(r^2\Sigma^2 + a^2\Sigma^2) \sin^2 \theta - 2r^2(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta - 2r^2\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&= \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} \frac{(a^2 - r^2)\Sigma^2 \sin^2 \theta - 2r^2(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta}{\Sigma} \\
&= -\frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} (\Sigma(r^2 - a^2) + 2r^2(r^2 + a^2)) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = \frac{Ma^3r}{\Sigma^2} \sin 2\theta \sin^2 \theta \tag{3.26}$$

$$\Gamma_{t\phi}^r = \frac{\Delta}{\Sigma^3} Ma \sin^2 \theta(\Sigma - 2r^2) \tag{3.27}$$

$$\Gamma_{t\phi}^\theta = \frac{Mra}{\Sigma^3} \sin 2\theta(r^2 + a^2) \tag{3.28}$$

$$\Gamma_{tr}^\phi = \frac{Ma}{\Delta\Sigma^2} (2r^2 - \Sigma) \tag{3.29}$$

$$\Gamma_{t\theta}^\phi = -\frac{2Mra}{\Sigma^2} \cot \theta \tag{3.30}$$

Αν τώρα λοιπόν υπολογίσουμε το R_{tt} θα δούμε ότι πράγματι ισούται με μηδέν

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\phi t}^\phi \\
&= \partial_r \Gamma_{tt}^r - \partial_t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{r\rho}^r - \Gamma_{rt}^\rho \Gamma_{t\rho}^r + \partial_\theta \Gamma_{tt}^\theta - \partial_t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{\theta\rho}^\theta - \Gamma_{\theta t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\theta \\
&\quad + \partial_\phi \Gamma_{tt}^\phi - \partial_t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{tt}^\rho \Gamma_{\phi\rho}^\phi - \Gamma_{\phi t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\phi \\
&= \partial_r \left(\frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \right) + 0 + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rt}^r + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{r\phi}^r \\
&\quad - (\Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{rt}^r \Gamma_{tr}^r + \Gamma_{rt}^\theta \Gamma_{t\theta}^r + \Gamma_{rt}^\phi \Gamma_{t\phi}^r) + \partial_\theta \left(\frac{-Mra^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \right) + 0 \\
&\quad + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\theta t}^\theta + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{\theta\phi}^\theta - (\Gamma_{\theta t}^t \Gamma_{tt}^\theta + \Gamma_{\theta t}^r \Gamma_{tr}^\theta + \Gamma_{\theta t}^\theta \Gamma_{t\theta}^\theta + \Gamma_{\theta t}^\phi \Gamma_{t\phi}^\theta) \\
&\quad + 0 + 0 + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{\phi t}^\phi + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{\phi r}^\phi + \Gamma_{tt}^\theta \Gamma_{\phi\theta}^\phi + \Gamma_{tt}^\phi \Gamma_{\phi\phi}^\phi - (\Gamma_{\phi t}^t \Gamma_{tt}^\phi + \Gamma_{\phi t}^r \Gamma_{tr}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\theta \Gamma_{t\theta}^\phi + \Gamma_{\phi t}^\phi \Gamma_{t\phi}^\phi) \\
&= \partial_r \left(\frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \right) + \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \left(\frac{r}{\Sigma} + \frac{M-r}{\Delta} \right) + \frac{-Mra^2 \sin 2\theta - a^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \frac{-a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma} \\
&\quad - \left(\frac{M(r^2 + a^2)}{\Delta \Sigma^2} (2r^2 - \Sigma) \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) + \frac{Ma}{\Delta \Sigma^2} (2r^2 - \Sigma) \frac{\Delta}{\Sigma^3} Ma \sin^2 \theta (\Sigma - 2r^2) \right) \\
&\quad + \partial_\theta \left(\frac{-Mra^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \right) + \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \frac{r}{\Sigma} + \frac{-Mra^2 \sin 2\theta - a^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \frac{-a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma} \\
&\quad - \left(\frac{-2Mra^2}{\Sigma^2} \sin \theta \cos \theta \right) \left(\frac{-Mra^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \right) \\
&\quad - \left(-\frac{2Mra}{\Sigma^2} \cot \theta \frac{Mra \sin 2\theta}{\Sigma^3} (r^2 + a^2) \right) \\
&\quad + \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \left(\frac{1}{\Delta \Sigma^2} (r\Sigma(\Sigma - 2Mr) - Ma^2(2r^2 - \Sigma) \sin^2 \theta) \right) \\
&\quad + \frac{-Mra^2 \sin 2\theta}{\Sigma^3} \left(\frac{1}{\Sigma^3} (\Sigma(r^2 + a^2) + 2Mra^2 \sin^2 \theta - \Sigma a^2 \sin^2 \theta) \right) \cot \theta \\
&\quad - \left(\frac{\Delta}{\Sigma^3} Ma \sin^2 \theta (\Sigma - 2r^2) \frac{Ma}{\Delta \Sigma^2} (2r^2 - \Sigma) + \frac{Mra \sin 2\theta}{\Sigma^3} (r^2 + a^2) \frac{-2Mra}{\Sigma^2} \cot \theta \right) \\
&= \frac{2M(r-M)}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) - \frac{6M\Delta r}{\Sigma^4} (2r^2 - \Sigma) + \frac{2Mr\Delta}{\Sigma^3} \\
&\quad + \frac{M\Delta}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) \left(\frac{r}{\Sigma} + \frac{M-r}{\Delta} \right) + \frac{2Mra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\Sigma^4} - \frac{M^2(r^2 + a^2)}{\Sigma^5} (2r^2 - \Sigma)^2 \\
&\quad + \frac{M^2 a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^5} (2r^2 - \Sigma)^2 \\
&\quad + \frac{-2Mra^2 \cos^2 \theta}{\Sigma^3} + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^3} - \frac{3Mra^4 \sin^2 2\theta}{\Sigma^4} + \frac{M\Delta r}{\Sigma^4} (2r^2 - \Sigma) \\
&\quad + \frac{2Mra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\Sigma^4} - \frac{4M^2 r^2 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\Sigma^5} + \frac{4M^2 r^2 a^4 \cos^2 \theta}{\Sigma^5} (r^2 + a^2) \\
&\quad + \frac{Mr}{\Sigma^3} (2r^2 - \Sigma) - \frac{2M^2 r^2}{\Sigma^4} (2r^2 - \Sigma) + \frac{M^2 a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^5} (2r^2 - \Sigma)^2 \\
&\quad - \frac{Mra^4 \cos^2 \theta}{\Sigma^4} (r^2 + a^2) - \frac{4M^2 r^2 a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\Sigma^5} + \frac{2Mra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\Sigma^4} - \frac{M^2 a^2}{\Sigma^5} (2r^2 - \Sigma)^2 \\
&\quad + \frac{4M^2 r^2 a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma^5} (r^2 + a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{\Sigma^4}(((r\Sigma - M\Sigma) - 5r\Delta - M(2r^2 - \Sigma))(2r^2 - \Sigma) + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2r\Delta\Sigma) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(-2r^2a^2 \cos^2 \theta \Sigma + 2ra^2 \sin^2 \theta \Sigma - 12ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4Mr^2 \cos^2 \theta \\
&+ r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(r\Sigma(2r^2 - \Sigma) - 2Mr^2(2r^2 - \Sigma) - 2ra^2 \cos^2 \theta(r^2 + a^2) + 2ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4Mr^2a^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{M}{\Sigma^4}((r\Sigma - M\Sigma - 5r\Delta - 2r^2M + M\Sigma)(2r^2 - \Sigma) + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2r\Delta\Sigma) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(-2r^3a^2 \cos^2 \theta - 2ra^4 \cos^4 \theta + 2r^3a^2 \sin^2 \theta + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 10ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
&+ r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta + 4Mr^2 \cos^2 \theta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(r(\Sigma - 2Mr)(2r^2 - \Sigma) - 2r^3a^2 \cos^2 \theta - 2ra^4 \cos^2 \theta + 2ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4Mr^2a^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{M}{\Sigma^4}((r(\Sigma - 2Mr) - 5r\Delta)(2r^2 - \Sigma) + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2r\Delta\Sigma) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(-2ra^2 \cos^2 \theta(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr) + 2r^3a^2 \sin^2 \theta - 10ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
&+ r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3a^2 \sin^2 \theta + ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2r^3a^2 \cos^2 \theta - 2ra^4 \cos^2 \theta \\
&+ 2ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4Mr^2a^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{M}{\Sigma^4}((r(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) - 5r\Delta)(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) + 2ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2r\Delta\Sigma) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}((-2ra^2 \cos^2 \theta(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)) + 2r^3a^2 \sin^2 \theta - 10ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
&+ r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(r^3\Delta - ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3a^2 \sin^2 \theta + 3ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2ra^2 \cos^2 \theta(r^2 + a^2 - 2Mr)) \\
&= \frac{M}{\Sigma^4}(-2r^3\Delta + 6ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3a^2 \sin^2 \theta + 3ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(-6ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + r^3\Delta - 3ra^2 \cos^2 \theta \Delta + 2r^3a^2 \sin^2 \theta) \\
&+ \frac{M}{\Sigma^4}(r^3\Delta - 3ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3a^2 \sin^2 \theta + 3ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3.31)

Είδαμε παραπάνω από τη λύση για το R_{tt} πως βρίσκουμε τις R_{trt}^r , $R_{t\theta t}^\theta$ και $R_{t\phi t}^\phi$ συνιστώσες του *Riemann* για τη μετρική. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες συνιστώσες και μέσω αυτών τις συνιστώσες του *Ricci* όπου τελικά βρίσκουμε ότι $R_{\mu\nu} = 0$. Συνεπώς θα αποτελεί λύση για τις πεδιακές εξισώσεις *Einstein* στο κενό.

Η μετρική αυτή παρουσιάζει ιδιομορφίες για αυτές τις συντεταγμένες για: 1) $\theta = 0$ η οποία είναι μια ιδιομορφία συντεταγμένων, 2) για $\Delta = 0$. Μπορούμε να γράψουμε τη Δ ως:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)(r - r_-) \quad (3.32)$$

όπου

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.33)$$

Άρα οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις θα καθορίζονται από τα μέτρα των M και a .

1) Αν $M^2 < a^2$ τότε το Δ δεν έχει πραγματικά μηδενικά και έτσι η μόνη ιδιομορφία συντεταγμένων που έχει είναι η $\theta = 0$. Επίσης υπάρχει μια ιδιομορφία καμπυλότητας για $\Sigma = 0$ δηλαδή για:

$$r = 0, \theta = \pi/2 \quad (3.34)$$

Για να καταλάβουμε τη γεωμετρία εδώ μετασχηματίζουμε την μετρική σε συντεταγμένες *Kerr - Schild* (\bar{t}, x, y, z) για τις οποίες:

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta \exp \left(i \int (d\phi + \frac{a}{\Delta} dr) \right) \quad (3.35)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.36)$$

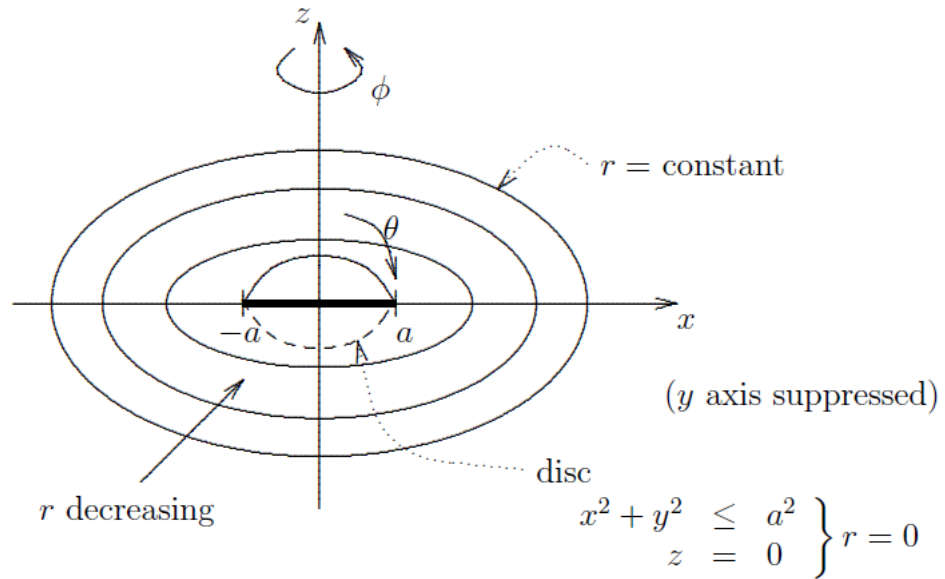
$$\bar{t} = \int \left(dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) - r \quad (3.37)$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι το $r = r(x, y, z)$ δίνεται από:

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0 \quad (3.38)$$

Η μετρική λοιπόν θα πάρει τη μορφή:

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left(\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\bar{t} \right)^2 \quad (3.39)$$



ΣΧΗΜΑ 3.1

όπου για $M = 0$ η μετρική είναι επίπεδη. Αφού

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{a^2 + r^2}{r^2} z^2 \right) = r^2 + a^2 \quad (3.40)$$

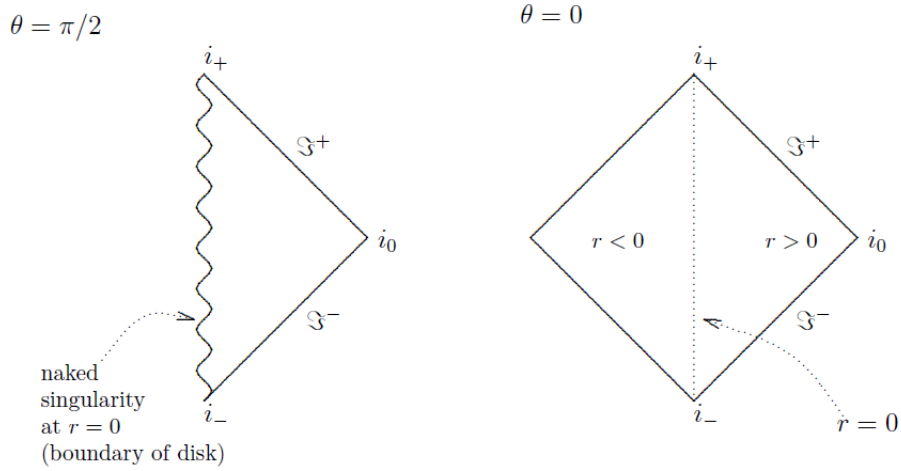
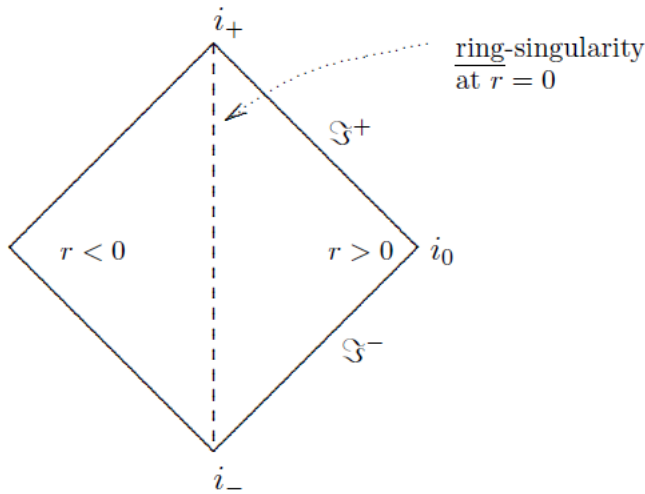
οι επιφάνειες σταθερών r, \bar{t} είναι που εκφυλίζονται για $r = 0$ σε ένα δίσκο $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Η ιδιομορφία για $r = 0, \theta = \pi/2$ αντιστοιχεί στο $z = 0$ και $x^2 + y^2 = a^2$.

Αιτιατή Δομή

Επειδή έχουμε αξονική συμμετρία χρειαζόμαστε ένα 3-διάστατο διάγραμμα για το χωρόχρονο για να κωδικοποιήσουμε την αιτιατή δομή, όμως για $\theta = 0, \pi/2$ τα *submanifolds* είναι τελείως γεωδειακά. Δηλαδή μια γεωδειακή που είναι αρχικά εφαπτόμενη σε αυτό θα παραμείνει εφαπτόμενη άρα μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα 2-διάστατο CP διάγραμμα.

Για $\theta = \pi/2$ κάθε σημείο του διαγράμματος παριστάνει έναν κύκλο ($0 \leq \phi \leq 2\pi$). Κάθε εισερχόμενη γεωδειακή προσκρούει στη ιδιομορφία δακτυλιδιού για $r = 0$ που είναι 'γυμνή'. Για $\theta = 0$ εξετάζουμε γεωδειακές μόνο πάνω στον άξονα συμμετρίας. Εισερχόμενες φωτεινές γεωδειακές περνάνε μέσω του δίσκου στο $r = 0$ στην επόμενη περιοχή για $r < 0$. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα δύο διαγράμματα σε ένα.


 ΣΧΗΜΑ 3.2: CP διαγράμματα για $\theta = 0, \pi/2$

 ΣΧΗΜΑ 3.3: Σύνοψη των διαγραμμάτων για $\theta = 0, \pi/2$

Ο χωρόχρονος αυτός είναι μη-φυσικός για έναν ακόμα λόγο. Υπολογίζουμε την νόρμα του διανύσματικού πεδίου *Killing* $m = \bar{\partial}/\partial\phi$:

$$m^2 = g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{Ma^2}{r} \left(\frac{2 \sin^4 \theta}{1 + \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta} \right) \quad (3.41)$$

Θεωρούμε $r/a = \delta$ (μικρό) και θεωρούμε $\theta = \pi/2 + \delta$. Τότε:

$$m^2 = a^2 + \frac{Ma}{\delta} + O(\delta), \quad \delta \ll 1 \quad (3.42)$$

< 0 για μικρο αρνητικο δ

Άρα το m γίνεται χρονοειδές κοντά στην δακτυλική ιδιομορφία στον κλάδο $r < 0$.

Αλλά οι τροχιές του m είναι κλειστές, έτσι λέμε ότι ο χωρόχρονος εισάγει κλειστές χρονοειδής καμπύλες $CTCs$. Αυτό συνιστά μια παγκόσμια παράβαση της αιτιότητας.

Επί προσθέτως λόγω της απουσίας ορίζοντα αυτές οι χρονοειδής καμπύλες μπορούν να παραμορφώνονται ώστε να περνούν από οποιοδήποτε σημείο του χωρόχρονου. Επίσης χάνουν την ιδιομορφία σε μία απόσταση M , για $M \sim a$ και M μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλη. Εφόσον η δακτυλική ιδιομορφία θα είναι γυμνή για $M^2 < a^2$ τότε ακόμα κι αν η περιοχή της λευκής τρύπας αντικατασταθεί από έναν καταρρέον αστέρα μπορούμε να επικαλεστούμε την κοσμική λογοκρισία για να αποκλείσουμε το $M^2 < a^2$.

2) Για $M^2 > a^2$, τα $r = r_{\pm}$ είναι ιδιομορφίες των συντεταγμένων. Για να το δούμε αυτό ορίζουμε τις καινούργιες συντεταγμένες:

$$dv = dt + \frac{r^2 - a^2}{\Delta} dr \quad (3.43)$$

$$d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr \quad (3.44)$$

Αυτό μετατρέπει την μετρική *Kerr* σε *Kerr* συντεταγμένες (v, r, θ, χ) που είναι ανάλογη της μετρικής *Schwarzschild* σε *EF - ingoing*:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dv^2 + 2dvdr - 2a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} dvd\chi - 2a \sin^2 \theta d\chi dr + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\chi^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (3.45)$$

Δηλαδή έχουμε:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 1 & 0 & a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} \\ 1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ a \sin^2 \theta \frac{a^2 + r^2 - \Delta}{\Sigma} & -a \sin^2 \theta & 0 & \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Έστω N_{\pm} οι υπερεπιφάνειες για $r = r_{\pm}$. Τότε τα κάθετα διανύσματα για τις υπερεπιφάνειες δίνονται από τον τύπο :

$$l = f(g^{\mu\nu} \partial_{\nu} S) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (3.46)$$

Τότε :

$$l = -f_{\pm} g^{\mu r} |_{N_{\pm}} = - \left(\frac{r_{\pm}^2 + a^2}{r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) f_{\pm} \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \quad (3.47)$$

Πρώτα μπορούμε να δούμε ότι :

$$\begin{aligned} l_{\pm}^2 &\propto \left(g_{vv} + \frac{2a}{r^2 + a^2} g_{v\chi} + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} g_{\chi\chi} \right) |_{\Delta=0} \\ &= \left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} - \frac{2a}{r^2 + a^2} \frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2)}{\Sigma} + \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Για να υπολογίσουμε την επιφανειακή βαρύτητα χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$\xi \cdot \nabla \xi^{\mu} \quad (3.49)$$

όπου το ξ είναι το διάνυσμα *Killing* για χωρόχρονο *Kerr* όπως αυτό φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις :

$$\xi = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{a}{a^2 + r^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (3.50)$$

Έτσι έχουμε :

$$\kappa = \left(\nabla_v + \frac{a}{a^2 + r^2} \nabla_{\chi} \right) \xi_{\mu} |_{r=r_{\pm}} \quad (3.51)$$

όπου θα διαλέξουμε ξ^v για το ξ^ν . Λόγω του ότι στην συναλλοίωτη παράγωγο οι μερικές παράγωγοι θα απαλοίζονται, η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\kappa = \left(\Gamma_{v\mu}^v + \frac{a}{a^2 + r^2} \Gamma_{\chi\nu}^v \right) \xi^\mu |_{r=r_\pm} \quad (3.52)$$

$$\kappa = \Gamma_{vv}^v + \frac{2a}{r^2 + a^2} \Gamma_{v\chi}^v + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \Gamma_{\chi\chi}^v \quad (3.53)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τα σύμβολα *Christoffel* που έχουμε στη σχέση. Δεδομένου ότι η μετρική δεν εξαρτάται από τα v και χ

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^v &= \frac{1}{2} g^{v\lambda} (\partial_v g_{v\lambda} + \partial_v g_{\lambda v} - \partial_\lambda g_{vv}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{v\lambda} \partial_\lambda g_{vv} = -\frac{1}{2} (g^{vr} \partial_r g_{vv} + g^{v\theta} \partial_\theta g_{vv}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{vr} \partial_r g_{vv} = -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \partial_r \left(-\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \left(\frac{-(2r - 2M)\Sigma - (-\Delta - a^2 \sin^2 \theta)2r}{\Sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Για $r = r_\pm$, όπου $\Delta = 0$:

$$\Gamma_{vv}^v |_{r=r_\pm} = \frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \frac{(2r - 2M)\Sigma + 2ra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{v\chi}^v &= -\frac{1}{2} g^{v\lambda} (\partial_\lambda g_{v\chi}) = -\frac{1}{2} g^{vr} \partial_r g_{v\chi} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \partial_r \left(\frac{a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} \right) = -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \partial_r \left(\frac{a \sin^2 \theta (2Mr)}{\Sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \frac{2Ma \sin^2 \theta \Sigma - 4Mr^2 a \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Και τέλος:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\chi\chi}^v &= -\frac{1}{2} g^{v\lambda} (\partial_\lambda g_{\chi\chi}) = -\frac{1}{2} g^{vr} \partial_r g_{\chi\chi} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \partial_r \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \frac{4r(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta - (2r - 2M)a^2 \sin^4 \theta \Sigma - ((r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta - \Delta a^2 \sin^4 \theta)2r}{\Sigma^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\Gamma_{\chi\chi}^v|_{r=r_{\pm}} = -\frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \frac{4r(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta - (2r - 2M)a^2 \sin^4 \theta \Sigma - ((r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta)2r}{\Sigma^2} \quad (3.58)$$

Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα παραπάνω στην σχέση για τον υπολογισμό της επιφανειακής βαρύτητας.

$$\begin{aligned}
\kappa &= \Gamma_{vv}^v + \frac{2a}{r^2 + a^2} \Gamma_{v\chi}^v + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \Gamma_{\chi\chi}^v \\
&= \frac{1}{2} \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \left(\frac{(2r - 2M)\Sigma + 2ra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \right. \\
&\quad + \frac{2a}{r^2 + a^2} \frac{2Ma \sin^2 \theta \Sigma - 4Mr^2 a \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \frac{4r(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta - (2r - 2M)a^2 \sin^4 \theta \Sigma - ((r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta)2r}{\Sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} (((r - M)\Sigma + ra^2 \sin^2 \theta)(r^2 + a^2)^2 \\
&\quad + 2a(r^2 + a^2)(Ma \sin^2 \theta \Sigma - 2Mr^2 a \sin^2 \theta) - a^2(2r(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta \\
&\quad - (r - M)a^2 \sin^4 \theta \Sigma - r(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} ((r - M)\Sigma(r^2 + a^2)^2 + ra^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)^2 \\
&\quad + 2Ma^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \Sigma - 4Mr^2 a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \Sigma \\
&\quad - 2ra^2(r^2 + a^2)\Sigma \sin^2 \theta - (r - M)a^4 \sin^4 \theta \Sigma + ra^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)^2) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} (\Sigma((r - M)(r^2 + a^2)^2 + 2Ma^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2) \\
&\quad - 2ra^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + (r - M)a^4 \sin^4 \theta) \\
&\quad + ra^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)^2 - 2ra^2(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta + ra^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} (\Sigma((r - M)(r^2 + a^2)^2 + 2Ma^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2) \\
&\quad - 2ra^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + (r - M)a^4 \sin^4 \theta) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} (\Sigma((r - M)(r^2 + a^2)^2 - 2a^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)(r - M) + (r - M)a^4 \sin^4 \theta) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^3} (\Sigma((r - M)(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)(r - M) \\
&\quad - a^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2)(r - M) + (r - M)a^4 \sin^4 \theta) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^2} (r - M)((r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta) - a^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2 - a^2 \cos^2 \theta)) \\
&= \frac{1}{(r^2 + a^2)\Sigma^2} (r - M)((r^2 + a^2)\Sigma - a^2 \sin^2 \theta \Sigma) \\
&= \frac{r - M}{(r^2 + a^2)\Sigma} (r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta) \\
&= \frac{r - M}{(r^2 + a^2)\Sigma} \Sigma = \frac{r - M}{(r^2 + a^2)}
\end{aligned}$$

(3.59)

Εφόσον μιλάμε για το $r = r_{\pm}$:

$$\kappa = \frac{r_{\pm} - M}{(r_{\pm}^2 + a^2)} = \frac{r_{\pm} \sqrt{M^2 - a^2}}{(r_{\pm}^2 + a^2)} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2(r_{\pm}^2 + a^2)} \quad (3.60)$$

3.4 Ergosphere-Ergoregion

Το γεγονός ότι το *Killing Vector* k είναι χρονοειδές στο άπειρο δε σημαίνει ότι είναι χρονοειδές και παντού έξω από τον ορίζοντα. Για την *Kerr* έχουμε

$$k^2 = g_{tt} = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \quad (3.61)$$

έτσι αφού το k είναι χρονοειδές:

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr > 0 \quad (3.62)$$

Αν $M^2 \gg a^2$ υποδεικνύει ότι

$$r > M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.63)$$

Το όριο αυτής της περιοχής

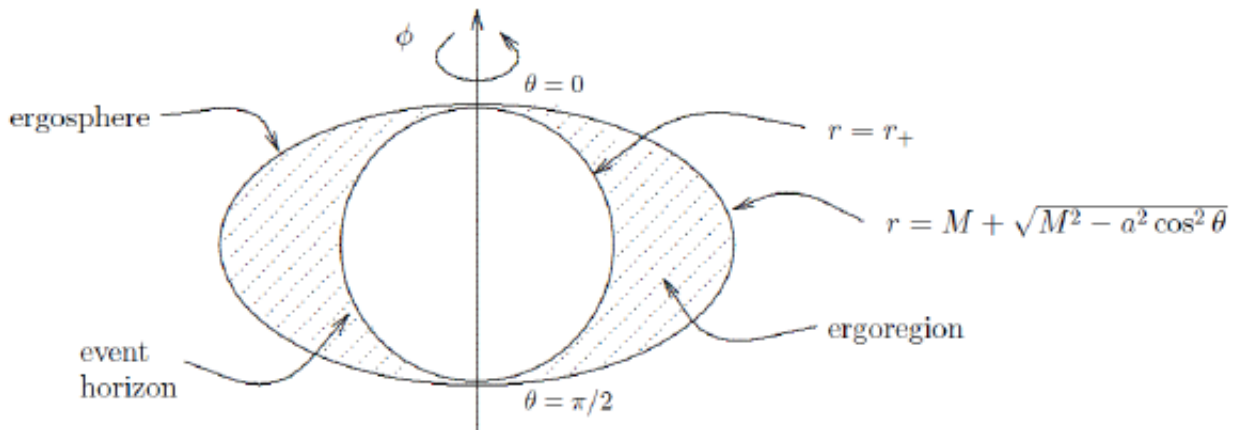
$$r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.64)$$

είναι η εργόσφαιρα (*ergosphere*). Η εργόσφαιρα τέμνει τον ορίζοντα για $\theta = 0, \pi$ αλλά βρίσκεται εξωτερικά του ορίζοντα για άλλες τιμές του θ . Έτσι το k μπορεί να είναι χωροειδές σε μια περιοχή εκτός του ορίζοντα. Αυτή ονομάζεται *ergoregion*.

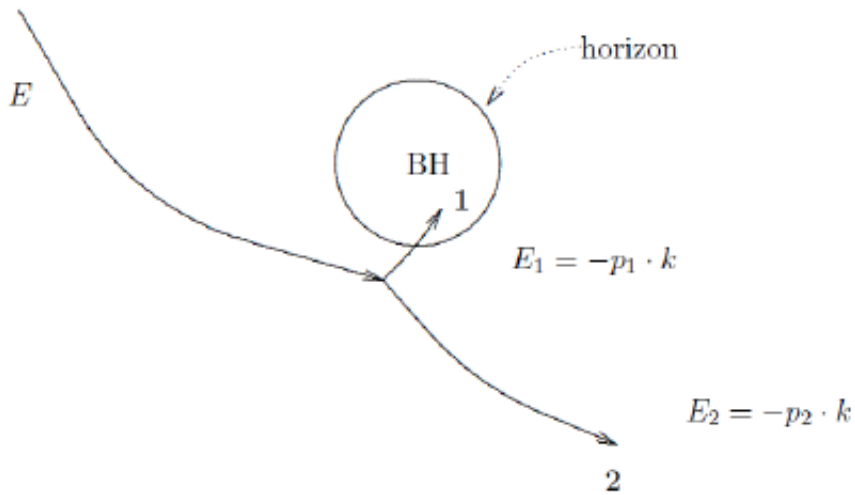
3.5 Penrose Process

Ας υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο πλησιάζει μια *Kerr* μαύρη τρύπα κατα μήκος μιας γεωδειακής. Αν p είναι η 4-ορμή τότε προσδιορίζουμε την σταθερά της κίνησης:

$$E = -p \cdot k \quad (3.65)$$



ΣΧΗΜΑ 3.4: Η εργόσφαιρα μιας *Kerr* μαύρης τρύπας



ΣΧΗΜΑ 3.5: *Penrose* Διαδικασία

ως την ενέργεια του αφού $E = p^0$ στο άπειρο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σωματίδιο διασπάται σε δύο άλλα, από τα οποία το ένα πέφτει πέρα από τον ορίζοντα ενώ το άλλο δραπητεύει στο άπειρο.

Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$E_2 = E - E_1 \tag{3.66}$$

Φυσιολογικά $E_1 > 0$, αλλά σε αυτήν την περίπτωση:

$$E_1 = -p_1 \cdot k \tag{3.67}$$

δεν είναι απαραίτητα θετική στην *ergoregion* διότι εκεί το k μπορεί να είναι χωροειδές. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί κλασικά σωματίδια να έχουν ολική ενέργεια αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι αν η διάσπαση γίνει στην *ergoregion* θα έχουμε $E_2 > E$ που σημαίνει ότι θα έχει εξαχθεί ενέργεια από την μαύρη τρύπα.

Δείξαμε ότι ο οριζοντας γεγονότων είναι οριζοντας *Killing* διανύσματος *Killing* $\xi = k + \Omega_H m$ άρα για σωματίδια που περνούν μέσω του οριζοντα $r = r_+$:

$$-p \cdot \xi \geq 0 \quad (3.68)$$

αφού το ξ είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο φωτοειδές στον οριζοντα και το p είναι μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές ή φωτοειδές. Ακολουθεί ότι:

$$E - \Omega_H L \geq 0 \quad (3.69)$$

όπου $L = p \cdot m$, είναι η συνιστώσα της στροφορμής του σωματιδίου με κατεύθυνση όπως ορίζεται από το m (μόνο αυτή η συνιστώσα είναι σταθερά της κίνησης). Έτσι:

$$L \leq \frac{E}{\Omega_H} \quad (3.70)$$

Αν το E είναι αρνητικό όπως είναι για το σωματίδιο 1 τότε το L είναι επίσης αρνητικό, άρα η στροφορμή της μαύρης τρύπας μειώνεται. Καταλήγουμε με μια μελανή οπή μάζας $M + \delta M$ και στροφορμής $J + \delta J$ όπου $\delta M = E$ και $\delta J = L$, έτσι:

$$\delta J \leq \frac{\delta M}{\Omega_H} = \frac{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}{J} \delta M \quad (3.71)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε:

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{J}{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})} \quad (3.72)$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$0 \leq \left(2M^3 + 2M\sqrt{M^4 - J^2} - J \frac{\delta J}{\delta M} \right) \delta M \quad (3.73)$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με:

$$\delta(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}) \geq 0 \quad (3.74)$$

Το εμβαδόν επιφανείας του ορίζοντα γεγονότων είναι:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{r=r_+} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi \\
&= \int (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 4\pi(r_+^2 + a^2) \\
&= 8\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})
\end{aligned} \tag{3.75}$$

3.6 Υπερακτινοβολία

Η διαδικασία *Penrose* έχει ένα κοντινό ανάλογο στην σκέδαση της ακτινοβολία από *Kerr* μαύρη τρύπα. Για απλότητα θεωρούμε άμαζο βαθμωτό πεδίο Φ . Ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial\Phi)^2 \tag{3.76}$$

Αφού $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ έχουμε:

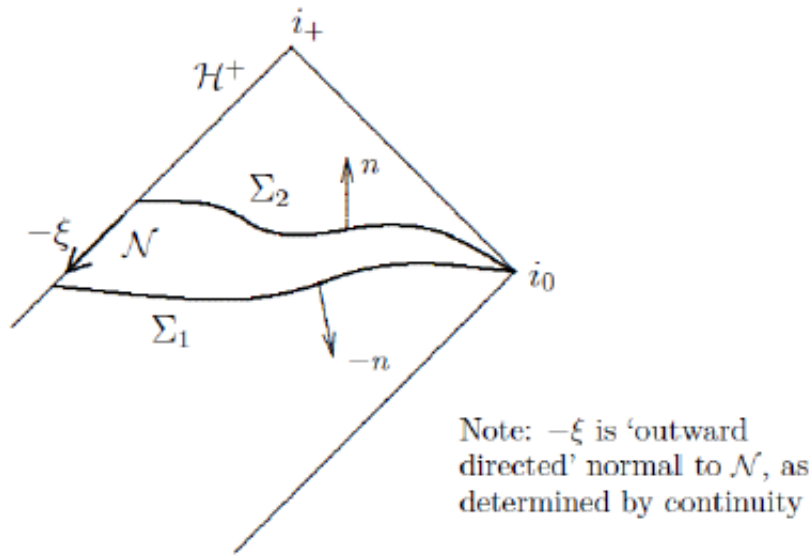
$$\nabla_\mu(T_\nu^\mu k^\nu) = T^{\mu\nu}\nabla_\mu k_\nu = 0 \tag{3.77}$$

Μπορεί λοιπόν κανείς να θεωρήσει:

$$j^\mu = -T_\nu^\mu k^\nu = -\partial^\mu\Phi k \cdot \partial\Phi + \frac{1}{2}k^\mu(\partial\Phi)^2 \tag{3.78}$$

ως μελλοντικά κατευθυνόμενου ($k \cdot J > 0$) ροή ενέργεια-ορμής 4-διάνυσμα του Φ . Τώρα θεωρούμε την ακόλουθη περιοχή S του χωρόχρονου, που έχει τη φωτεινική υπερεπιφάνεια $N \subset H^+$ ως το ένα σύνορο. Υποθέτουμε ότι $\partial\Phi = 0$ στο i_0 . Εφόσον $\nabla_\mu j^\mu = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu j^\mu = \int_{\partial S} dS_\mu j^\mu \\
&= \int_{\Sigma_2} dS_\mu j^\mu - \int_{\Sigma_1} dS_\mu j^\mu - \int_N dS_\mu j^\mu \\
&= E_2 - E_1 - \int_N dS_\mu j^\mu
\end{aligned} \tag{3.79}$$



ΣΧΗΜΑ 3.6: Περιοχή του χωρόχρονου για υπερακτινοβολία

όπου E_i είναι η ενέργεια του βαθμωτού πεδίου στην χωροειδή υπερεπιφάνεια Σ_i . Η ενέργεια που περνά μέσω του ορίζοντα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned} \Delta E = E_1 - E_2 &= - \int_N dS_\mu j^\mu \\ &= - \int dA dv \xi_\mu j^\mu \end{aligned} \quad (3.80)$$

όπου v είναι η *Kerr* συντεταγμένη του χρόνου όπως ορίστηκε για την μετρική (3.45). Η ροή ενέργεια που χάνεται ανα μονάδα του *Kerr* χρόνου είναι λοιπόν:

$$P = - \int dA dv \xi_\mu j^\mu = \int dA (\xi \cdot \partial \Phi) (k \cdot \nabla \Phi) \quad (3.81)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για το j^μ μαζί με το γεγονός ότι $\xi \cdot k = 0$ για τον ορίζοντα *Killing* N του ξ . Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα:

$$\xi \cdot k|_N = \xi^2|_N - \Omega_H \xi \cdot m|_N = -\Omega_H \xi \cdot m|_N \quad (3.82)$$

επειδή η N είναι φωτεινής επιφάνεια και έτσι το ξ ως το διανυσματικό πεδίο *Killing* αυτής είναι φωτεινός στη N . Τώρα λέμε ότι το N είναι σταθερό σύνολο σημείων του m αφού το m είναι διανυσματικό πεδίο *Killing* (διαλέγουμε $m = \partial/\partial\phi$ όπου η μετρική είναι ανεξάρτητη του ϕ άρα η θέση του ορίζοντα είναι ανεξάρτητη του ϕ .) Άρα το m πρέπει να είναι εφαπτόμενο στο N ή $l \cdot m = 0$ όπου l το κάθετο

στη N . Αλλά $\xi \propto l$ συνεπώς $\xi \cdot m|_N = 0$. Έτσι:

$$P = \int dA \left(\frac{\partial}{\partial v} \Phi + \Omega_H \frac{\partial}{\partial \chi} \Phi \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \quad (3.83)$$

Για κύμα γωνιακής συχνότητας ω :

$$\Phi = \Phi(\cos \omega v - \nu \chi) \quad (3.84)$$

όπου το ν είναι ο κβαντικός αριθμός της γωνιακής συχνότητας. Μέση ισχύς που χάνεται στον ορίζοντα είναι:

$$P = \frac{1}{2} \Phi_0^2 A \omega (\omega - \nu \Omega) \quad (3.85)$$

Η P είναι θετική για τις περισσότερες τιμές του ω αλλά για το εύρος τιμών:

$$0 < \omega < \nu \Omega_H \quad (3.86)$$

δηλαδή το κύμα με ω, ν ενισχύεται από την μαύρη τρύπα.

Η διαδικασία είναι θετική μόνο για $\nu \neq 0$ αφού το ενισχυμένο πεδίο πρέπει παίρνει στροφορμή από την τρύπα. Επίσης η διαδικασία είναι όμοια με μια εξαναγκασμένη εκπομπή γεγονός που υποδηλώνει την δυνατότητα αυθόρμητης εκπομπής. Έχουμε αγνοήσει τη "back - reaction" του Φ στη μετρική. Αν το διορθώναμε για back - reaction στην μετρική θα είχαμε στασιμότητα μόνο αν $\Phi = 0$ αλλά τότε θα είχαμε $j^\mu = 0$ και η ενέργεια της μελανής οπής δε θα άλλαζε. Δηλαδή αυστηρά μιλώντας η στασιμότητα και η υπερ-ακτινοβολία είναι ασυμβίβαστες.

Κεφάλαιο 4

Οι νόμοι της μηχανικής των Μελανών Οπών

4.1 Geodesic Congruence

Ορίζουμε ως *Congruence* ένα σύνολο καμπυλών τέτοιων ώστε κάθε σημείο να βρίσκεται πάνω σε μόνο μία από αυτές. Ονομάζεται *Geodesic Congruence* αν οι καμπύλες είναι γεωδειακές.

Θεωρούμε διανυσματικό πεδίο t^μ το σύνολο των εφαπτόμενων στην *Geodesic Congruence*. Αν θεωρήσουμε τις καμπύλες ως ένα σύνολο χρονοειδών γεωδειακών παραμετροποιημένες ως προς τον ιδιοχρόνο τ ώστε $t^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ τότε μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα ως $t^\mu t_\mu = -1$.

$$t^\lambda D_\lambda t^\mu = 0 \quad (4.1)$$

Αν ορίσουμε διάνυσμα που να θεωρείτε η "μετατόπιση", που δείχνει από τη μία γεωδειακή προς τη γειτονική της η_α . Τα διανύσματα αυτά αντιμετωπίζονται συνεπώς

$$t^\nu D_\nu \eta_\alpha^\mu - \eta_\alpha^\nu D_\nu t^\mu = 0 \quad (4.2)$$

ή

$$t^\nu D_\nu \eta_\alpha^\mu = B_\nu^\mu \eta_\alpha^\nu \quad (4.3)$$

όπου

$$B_\nu^\mu = D_\nu t^\mu \quad (4.4)$$

Ο $B_{\mu\nu}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η αποτυχία παράλληλης μετατόπισης για το η_α κατά μήκος της *congruence*. Με άλλα λόγια περιγράφει το μέγεθος της απόκλισης των γειτονικών γεωδεσιακών από το να παραμείνουν παράλληλες.

Έτσι αν έχουμε μια γεωδεσιακή μπορούμε να περιγράψουμε τις άλλες γεωδεσιακές κοντά σε αυτήν με ένα διάνυσμα μετατόπισης. Το διάνυσμα αυτό όμως δεν θα είναι μοναδικό αφού αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο του t θα δώσει ένα άλλο τέτοιο διάνυσμα. Για να το διορθώσουμε αυτό επιβάλλουμε τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\eta \cdot t = 0 = \eta \cdot n \quad n \cdot t = -1 \quad n^2 = 0 \quad (4.5)$$

όπου το n είναι ένα άλλο διάνυσμα που εισάγεται για τους ακόλουθους λόγους: ο χώρος των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια στο t περιλαμβάνει επίσης το t αφού είναι φωτοειδής έτσι η συνθήκη $\eta \cdot t$ είναι επαρκείς για να φτιάξει το βαθμωτό. Έτσι διαλέγουμε ένα διάνυσμα n μη ορθογόνιο στο t ώστε η συνθήκη $\eta \cdot n$ θα ορίζει μοναδικά τα διανύσματα μετατόπισης στο 2-διάστατο χώρο που μας ενδιαφέρει. Σημειώνουμε ότι $n \cdot t$ είναι αυθαίρετο. Εισάγουμε τον $P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + t^\mu n_\nu + n^\mu t_\nu$, έτσι ώστε $P_\nu^\mu \eta^\nu = \eta^\mu$. Αυτός προβάλλει πάνω σε ένα 2-διάστατο εφαπτόμενο χώρο που καλύπτεται από τα διανύσματα η . Προβάλλοντας το B στο χώρο αυτό έτσι ώστε να είναι ορθογώνιο στο n δηλαδή δεν υπάρχουν συνιστώσες στην κατεύθυνση του n . Αναλύοντας το $\widehat{B}_\nu^\mu = P_\rho^\mu B_\sigma^\rho P_\nu^\sigma$ σε αναλλοίωτα μέρη. Επιβεβαιώνεται ότι:

$$t \cdot \nabla \eta^\mu = \widehat{B}_\nu^\mu \eta^\nu \quad (4.6)$$

Ορίζουμε την διαστολή, την διάτμηση και την στρέψη αντίστοιχα:

$$\theta = \widehat{B}_\mu^\mu \quad (4.7)$$

$$\widehat{\sigma}_{\mu\nu} = \widehat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} \widehat{B}_\rho^\rho \quad (4.8)$$

$$\widehat{\omega}_{\mu\nu} = \widehat{B}_{[\mu\nu]} \quad (4.9)$$

Όπου η αλγεβρική ανάλυση είναι:

$$\widehat{B}_\nu^\mu = \frac{1}{2} \theta P_\nu^\mu + \widehat{\sigma}_\nu^\mu + \widehat{\omega}_\nu^\mu \quad (4.10)$$

Μια εξίσωση που θα μας χρησιμεύσει στην συνέχεια είναι η εξίσωση *Raychaudhuri* (για φωτοειδής γεωδεσιακές). Για να καταλήξουμε στην εξίσωση αυτή θα πρέπει

πρώτα να αναφέρουμε κάποια πράγματα. Πρώτα από όλα αν $t \cdot \nabla t = 0$ και $t^2 = 0$:

$$\widehat{B}_\nu^\mu = B_\nu^\mu + t^\mu (n_\lambda B_\nu^\lambda + n_\lambda B_\rho^\lambda t_\nu) + (B_\rho^\mu n^\rho) t_\nu \quad (4.11)$$

Εφόσον $B_\nu^\mu t_\mu = 0$ (και $t \cdot \nabla t = 0$ και $t^2 = 0$):

$$\widehat{B}_\mu^\mu = B_\mu^\mu = B_\nu^\mu P_\mu^\nu \quad (4.12)$$

Θυμόμαστε ότι $t \cdot \nabla n = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $t \cdot \nabla P^\nu_\mu = 0$. Έτσι:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta \\ &= t \cdot \nabla \theta \\ &= t \cdot \nabla \widehat{B}_\mu^\mu \\ &= t \cdot \nabla (B_\nu^\mu P_\mu^\nu) \\ &= P_\mu^\nu t \nabla B_\nu^\mu \\ &= P_\mu^\nu t^\rho \nabla_\rho \nabla_\nu t^\mu \\ &= P_\mu^\nu t^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho t^\mu + P_\mu^\nu t^\rho [\nabla_\rho, \nabla_\nu] t^\mu \end{aligned} \quad (4.13)$$

Σημειώνουμε ότι $\nabla(t \cdot \nabla t) = (\nabla t)(\nabla t) + t \nabla \nabla t = 0 \Rightarrow t \nabla \nabla t = -(\nabla t)(\nabla t) = -BB$ και $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] t^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha t^\beta$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= -P_\mu^\nu B_\rho^\mu B_\nu^\rho + P_\mu^\nu t^\rho R_{\sigma\rho\nu}^\mu t^\sigma \\ &= -P_\mu^\nu B_\rho^\mu B_\nu^\rho + \delta_\mu^\nu t^\rho R_{\sigma\rho\nu}^\mu t^\sigma \\ &= -\widehat{B}_\rho^\mu \widehat{B}_\mu^\rho - R_{\sigma\rho} t^\sigma t^\rho \end{aligned} \quad (4.14)$$

Με δεδομένο ότι $n \cdot t = -1$ θα έχουμε $P^{\mu\nu} P_{\nu\mu} = tr \delta + 4(n \cdot t) + 2(n \cdot t)(n \cdot t) = 4 - 4 + 2 = 2$ και $P^{\mu\nu} \widehat{B}_{\nu\mu} = tr(\widehat{B}) = \theta$ που μας δίνουν:

$$P^{\mu\nu} \sigma_{\nu\mu} = P^{\mu\nu} \widehat{B}_{\nu\mu} - \frac{1}{2} \theta P^{\mu\nu} P_{\nu\mu} = \theta - \theta = 0 \quad (4.15)$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned}
-\widehat{B}_\rho^\mu \widehat{B}_\mu^\rho &= -\left(\frac{1}{2}\theta P_\rho^\mu + \widehat{\sigma}_\rho^\mu + \widehat{\omega}_\rho^\mu\right) \left(\frac{1}{2}\theta P_\mu^\rho + \widehat{\sigma}_\mu^\rho + \widehat{\omega}_\mu^\rho\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4}\theta^2 P_\rho^\mu P_\mu^\rho + \frac{1}{2}\theta P_\rho^\mu \widehat{\sigma}_\mu^\rho + \frac{1}{2}\theta \widehat{\sigma}_\rho^\mu P_\mu^\rho + \widehat{\sigma}_\rho^\mu \widehat{\sigma}_\mu^\rho + \widehat{\omega}_\rho^\mu \widehat{\omega}_\mu^\rho\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\theta^2 + \widehat{\sigma}^{\mu\rho} \widehat{\sigma}_{\mu\rho} - \widehat{\omega}^{\mu\rho} \widehat{\omega}_{\mu\rho}\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση *Raychaudhuri*:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \widehat{\sigma}^{\mu\rho} \widehat{\sigma}_{\mu\rho} + \widehat{\omega}^{\mu\rho} \widehat{\omega}_{\mu\rho} - R_{\sigma\rho} t^\sigma t^\rho \tag{4.17}$$

Συγκεκριμένα ας σκεφτούμε την εξίσωση σύμφωνα με την ασθενή ενεργειακή συνθήκη $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ και την διαστολή θ του γεννήτορα μιας φωτοειδούς γεωδειακής μιας φωτοειδούς υπερεπιφάνειας:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{d\lambda} &\leq -\frac{1}{2}\theta^2 - 8\pi T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \leq \frac{1}{2}\theta^2 \Leftrightarrow \\
\frac{d}{d\lambda} \theta^{-1} &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta^{-1} \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{2}\lambda
\end{aligned} \tag{4.18}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την μη αρνητικότητα του $\widehat{\sigma}^2$ και το γεγονός ότι το $\widehat{\omega}$ εξαφανίζεται (αφού το t είναι κάθετο στη φωτοειδή επιφάνεια) αλλά και την εξίσωση *Einstein*. Αν το $\theta_0 < 0$ τότε το $\theta \rightarrow -\infty$ όταν $\lambda = 2/|\theta_0|$.

Ορίζουμε στοιχείο επιφάνειας $a = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \eta_\nu \eta_\rho^{(1)} \eta_\sigma^{(2)}$ και δεδομένου ότι $t \cdot \nabla t = 0$ και $t \cdot \nabla n = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\lambda} &= t \cdot \nabla a = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \eta_\nu (t \cdot \nabla \eta_\rho^{(1)} \eta_\sigma^{(2)} + \eta_\rho^{(1)} t \cdot \nabla \eta_\sigma^{(2)}) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \eta_\nu [\widehat{B}_\rho^\lambda \eta_\lambda^{(1)} \eta_\sigma^{(2)} + \eta_\rho^{(1)} \widehat{B}_\sigma^\lambda \eta_\lambda^{(2)}] \\
&= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} t_\mu \eta_\nu \widehat{B}_\rho^\lambda \eta_\lambda^{(1)} \eta_\sigma^{(2)} \\
&= \theta a
\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.2 Οι νόμοι της μηχανικής των μελανών οπών

4.2.1 Μηδενικός Νόμος

Η πρόταση των *Hawking* και *Ellis* μας λέει ότι αν $(M, g_{\mu\nu})$ είναι ασυμπτωτικά επίπεδος χωρόχρονος και στάσιμος και αν ο $(M, g_{\mu\nu})$ είναι λύση των εξισώσεων *Einstein* με την ύλη να ικανοποιεί κατάλληλες υπερβολικές εξισώσεις, όπως επίσης ότι η μετρική και τα υλικά πεδία είναι αναλυτικά τότε ο ορίζοντας γεγονότων (H^+) οποιασδήποτε μελανής οπής είναι ορίζοντας *Killing*.

Ο μηδενικός νόμος της μηχανικής των μελανών οπών μας λέει:

Όταν ισχύει η κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη τότε η επιφανειακή βαρύτητα είναι σταθερή σε όλο τον ορίζοντα γεγονότων.

Για να το αποδείξουμε αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αρχικά την εξίσωση *Raychaudhuri*. Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}^{\mu\nu}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \hat{\omega}^{\mu\nu}\hat{\omega}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}t^{\mu}t^{\nu} \quad (4.20)$$

για φωτοειδής γεωδειακές. Δεδομένου ότι για τον ορίζοντα *Killing* τα $\theta, \hat{\sigma}, \hat{\omega}$ είναι μηδέν τότε ισχύει:

$$R_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}|_N = 0 \quad (4.21)$$

Χρησιμοποιώντας ότι $\xi^2 = 0$ για τον ορίζοντα γεγονότων H^+ και το γεγονός ότι ο ορίζοντας γεγονότων μιας στάσιμης μελανής οπής είναι ορίζοντας *Killing* τότε:

$$0 = -T_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}|_{H^+} \equiv J_{\mu}\xi^{\mu}|_{H^+} \quad (4.22)$$

όπου $J = (-T_{\nu}^{\mu}\xi^{\nu})\check{\partial}_{\mu}$ είναι εφαπτόμενο στον H^+ . Τώρα το J μπορεί να αναλυθεί σε μια βάση εφαπτόμενων διανυσμάτων στον H^+ :

$$J = \alpha\xi + b_1\eta^{(1)} + b_2\eta^{(2)} \quad (4.23)$$

στον H^+ . Άρα $J^2 = b_1^2\eta^{(1)} + b_2^2\eta^{(2)}$ λόγω ότι $\xi \cdot \eta^{(i)} = \xi^2 = 0$ είναι οι εφαπτόμενοι γενήτορες της φωτοειδούς επιφάνειας που σημαίνει ότι είναι στην χρονική κατεύθυνση. Από τη σχέση συνεπάγεται ότι τα $\eta^{(i)}$ είναι χωροειδή διανύσματα που

σημαίνει ότι το J είναι είτε χωροειδές είτε φωτοειδές (αν $b_1 = b_2 = 0$). Όμως από την κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη θα έπρεπε να είναι χρονοειδές ή φωτοειδές λόγω της (4.21). Έτσι από αυτό $J \propto \xi$ που συνεπάγεται:

$$\xi_{[\sigma} J_{\rho]}|_{H^+} = \frac{1}{2}(\xi_{\sigma} J_{\rho} - \xi_{\rho} J_{\sigma})|_{H^+} = 0 \quad (4.24)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για το J :

$$0 = \xi_{[\sigma} T_{\rho]}^{\lambda} \xi_{\lambda}|_{H^+} = \xi_{[\sigma} R_{\rho]}^{\lambda} \xi_{\lambda}|_{H^+} \quad (4.25)$$

όπου η τελευταία μορφή προκύπτει από τις εξισώσεις *Einstein*. Για να συνεχίσουμε θα πρέπει να αναφερθούμε αναλυτικά σε κάποια βήματα. Για υπερεπιφάνεια N γνωρίζουμε ότι είναι οριζοντιας της μελανής οπής αν είναι οριζοντιας *Killing* ενός διανύσματικού πεδίου *Killing* ξ . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Frobenius* συνεπάγεται ότι:

$$\xi_{[\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma]} = 0 \quad (4.26)$$

στην N . Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η συστολή του $\xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma}$ με ένα τρίτου βαθμού τελείως αντισυμμετρικού τανυστή $A^{\mu\nu\sigma}$ εξαφανίζεται. Ας πάρουμε όλους τους όρους της συστολής με τις μεταθέσεις μεταξύ μ, ν, σ :

$$\begin{aligned} & A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma} - A^{\nu\mu\sigma} \xi_{\nu} \nabla_{\mu} \xi_{\sigma} + A^{\nu\sigma\mu} \xi_{\nu} \nabla_{\sigma} \xi_{\mu} \\ & - A^{\sigma\nu\mu} \xi_{\sigma} \nabla_{\nu} \xi_{\mu} + A^{\sigma\mu\nu} \xi_{\sigma} \nabla_{\mu} \xi_{\nu} - A^{\mu\sigma\nu} \xi_{\mu} \nabla_{\sigma} \xi_{\nu} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Μια συμπεκνωμένη μορφή της παραπάνω παράστασης μπορεί να γραφεί λόγω της πλήρους αντισυμμετρικότητας του A :

$$\frac{1}{3!} A^{\mu\nu\sigma} \xi_{[\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma]} \quad (4.28)$$

το οποίο λόγω της σχέσης (4.26) θα είναι μηδέν γιατί πρέπει να ισχύει για κάθε A . Η ίδια λογική ισχύει για κάθε άλλο συνδιασμό δεικτών.

Επειδή ισχύει ότι στον οριζοντια $\Psi = A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma} = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{\rho} \nabla^{\rho} (A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma}) \\ &= A^{\mu\nu\sigma} (\xi^{\rho} \nabla_{\rho} \xi_{\mu}) \nabla_{\nu} \xi_{\sigma} + A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} (\xi_{\rho} \nabla^{\rho} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma}) \\ &= A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma} + A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} (\xi_{\rho} \nabla^{\rho} \xi_{\sigma}) - A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\rho} (\nabla^{\rho} \xi_{\sigma}) \\ &= A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma} + A^{\mu\nu\sigma} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} (\kappa \xi_{\sigma}) - A^{\mu\nu\sigma} (\xi_{\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\rho}) (\nabla^{\rho} \xi_{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Άρα τελικά έχουμε :

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu\sigma} \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) &= A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma + A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma + A^{\mu\nu\sigma} \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma (\kappa) \\ &= 2A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma \end{aligned} \quad (4.30)$$

Από την εξίσωση (2.65):

$$\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\sigma = -2\xi_{[\nu} \nabla_{\sigma]} \xi_\mu \quad (4.31)$$

Ενώ :

$$\begin{aligned} &\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) + \xi_\nu \nabla_\rho \xi_\mu (\nabla^\rho \xi_\sigma) + \xi_\rho \nabla_\mu \xi_\nu (\nabla^\rho \xi_\sigma) \\ &\quad - \xi_\mu \nabla_\rho \xi_\nu (\nabla^\rho \xi_\sigma) - \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) - \xi_\rho \nabla_\nu \xi_\mu (\nabla^\rho \xi_\sigma) = 0 \\ &2\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) + 2\xi_\nu \nabla_\rho \xi_\mu (\nabla^\rho \xi_\sigma) + 2\xi_\rho \nabla_\mu \xi_\nu (\nabla^\rho \xi_\sigma) = 0 \\ &\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) + \xi_\nu \nabla_\rho \xi_\mu (\nabla^\rho \xi_\sigma) + \xi_\rho \nabla_\mu \xi_\nu (\nabla^\rho \xi_\sigma) = 0 \quad (4.32) \\ &\xi_\rho \nabla_\mu \xi_\nu (\nabla^\rho \xi_\sigma) = -\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) - \xi_\nu \nabla_\rho \xi_\mu (\nabla^\rho \xi_\sigma) \\ &\kappa \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu = -\xi_\mu \nabla_\nu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) + \xi_\nu \nabla_\mu \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) \\ &\kappa \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu = -2\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ξανά την εξίσωση *Killing* $\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu$ Συνεπώς :

$$A^{\mu\nu\sigma} \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) = -\frac{1}{2} A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_\sigma \nabla_\mu \xi_\nu = A^{\mu\nu\sigma} \kappa \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\sigma \quad (4.33)$$

Αφού αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε A έχουμε :

$$\kappa \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\sigma = \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\rho (\nabla^\rho \xi_\sigma) \quad (4.34)$$

Από το γεγονός ότι το Ψ μηδενίζεται στον N συνεπάγεται ότι η παράγωγος του θα είναι κάθετη στον N . Αυτό μας ορίζει ότι το $\delta_\mu \Psi$ είναι ανάλογο του ξ_μ κι έτσι $\xi_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \Psi = 0$ στον N .

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{[\alpha} \nabla_{\beta]} A^{\nu\rho\sigma} \xi_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma \\ &= (\xi_{[\alpha} \nabla_{\beta]} A^{\nu\rho\sigma}) \xi_\nu \nabla_\rho \xi_\sigma + A^{\nu\rho\sigma} (\xi_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \xi_\nu) \nabla_\rho \xi_\sigma + A^{\nu\rho\sigma} \xi_\nu (\xi_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \nabla_\rho \xi_\sigma) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Δεδομένου ότι αυτό πρέπει να συμβαίνει για κάθε τελείως αντισυμμετρικό $A^{\nu\rho\sigma}$, συνεπάγεται ότι κάθε ένας από τους όρους της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει να μηδενίζεται.

Πριν προχωρήσουμε θα πρέπει να αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ταυτότητα. Από τον ορισμό για τον τανυστή καμπυλότητας *Riemann* έχουμε:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi_{\sigma} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\xi_{\sigma} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\rho} \quad (4.36)$$

Και από την εξίσωση *Killing*:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi_{\sigma} + \nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\xi_{\mu} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\rho} \quad (4.37)$$

Προσθέτοντας την εξίσωση:

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\xi_{\mu} + \nabla_{\sigma}\nabla_{\mu}\xi_{\nu} = R^{\rho}_{\nu\sigma\mu}\xi_{\rho} \quad (4.38)$$

και αφαιρώντας:

$$\nabla_{\sigma}\nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi_{\sigma} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\xi_{\rho} \quad (4.39)$$

Θα έχουμε:

$$2\nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\xi_{\mu} = (R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} + R^{\rho}_{\nu\sigma\mu} - R^{\rho}_{\sigma\mu\nu})\xi_{\rho} = -2R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\xi_{\rho} \quad (4.40)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση για τον τανυστή *Riemann* ($R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} + R^{\rho}_{\nu\sigma\mu} + R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = 0$).

Παίρνοντας τον τρίτο όρο στην σχέση 4.35 και χρησιμοποιώντας την τελευταία ταυτότητα που υπολογίσαμε θα έχουμε:

$$A^{\nu\rho\sigma}\xi_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho[\beta\xi_{\alpha]}\xi_{\lambda}} = 0 \quad (4.41)$$

Χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρικότητα του *Riemann* κάτω από την μετάθεση των δύο πρώτων δεικτών, η ίδια λογική που μας οδήγησε στην 4.27 μας δίνει:

$$(\xi_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho[\beta\xi_{\alpha]} + \xi_{\rho}R^{\lambda}_{\nu\sigma[\beta\xi_{\alpha]} + \xi_{\sigma}R^{\lambda}_{\rho\nu[\beta\xi_{\alpha]})\xi_{\lambda}} = 0 \quad (4.42)$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε την συστολή για την παραπάνω σχέση στα ρ, α . Έτσι ο πρώτος όρος μπορεί να γραφεί:

$$\xi_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho[\beta\xi_{\alpha]}\xi_{\lambda}} = \frac{1}{2}(\xi_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho\beta\xi_{\alpha}\xi_{\lambda}} - \xi_{\nu}R^{\lambda}_{\sigma\rho\alpha\xi_{\beta}\xi_{\lambda}}) \quad (4.43)$$

Κάνοντας τη συστολή για ρ, α έχουμε:

$$\frac{1}{2}(\xi_\nu R_{\sigma\alpha\beta}^\lambda \xi^\alpha \xi_\lambda - \xi_\nu R_\sigma^\lambda \xi_\beta \xi_\lambda) \quad (4.44)$$

όπου $R_{\sigma\lambda} = R_{\sigma\alpha\lambda}^\alpha$ είναι ο τανυστής *Ricci*. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί:

$$\xi_\rho R_{\nu\sigma[\beta\xi\alpha]}^\lambda \xi_\lambda = \frac{1}{2}(\xi_\rho R_{\nu\sigma\beta}^\lambda \xi_\alpha \xi_\lambda - \xi_\rho R_{\nu\sigma\alpha}^\lambda \xi_\beta \xi_\lambda) \quad (4.45)$$

Κάνοντας την συστολή στα ρ, α παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος μηδενίζεται από $\xi^2 = 0$ στον N . Ο δεύτερος όρος δίνει κι αυτός μηδέν μετά την συστολή διότι ο τανυστής καμπυλότητας *Riemann* είναι αντισυμμετρικός για τους δύο τελευταίους δείκτες. Για τον τρίτο όρο τώρα έχουμε:

$$\xi_\sigma R_{\rho\nu[\beta\xi\alpha]}^\lambda \xi_\lambda = \frac{1}{2}(\xi_\sigma R_{\rho\nu\beta}^\lambda \xi_\alpha \xi_\lambda - \xi_\sigma R_{\rho\nu\alpha}^\lambda \xi_\beta \xi_\lambda) \quad (4.46)$$

Μετά την συστολή με τα ρ, α το δεύτερο μέρος θα γίνει:

$$\frac{1}{2}(\xi_\sigma R_{\alpha\nu\beta}^\lambda \xi^\alpha \xi_\lambda - \xi_\sigma R_\nu^\lambda \xi_\beta \xi_\lambda) \quad (4.47)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις 4.44 και 4.47 για τους πρώτους όρους έχουμε:

$$\xi^\alpha \xi_{[\nu} R_{\sigma]\alpha\beta}^\lambda \xi_\lambda \quad (4.48)$$

Ενώ για τους δεύτερους όρους:

$$\xi_\beta \xi_{[\nu} R_{\sigma]\alpha\beta}^\lambda \xi_\lambda \quad (4.49)$$

Τελικά δηλαδή από την 4.42 έχουμε λόγω των δύο παραπάνω σχέσεων:

$$\xi^\alpha \xi_{[\nu} R_{\sigma]\alpha\beta}^\lambda \xi_\lambda = -\xi_\beta \xi_{[\nu} R_{\sigma]\alpha\beta}^\lambda \xi_\lambda \quad (4.50)$$

Με δεδομένο ότι:

$$\xi \cdot \nabla \xi^\mu = \kappa \xi^\mu \quad (4.51)$$

το βαθμωτό $\Phi = (\xi \cdot \nabla \xi - \kappa \xi) \cdot \nu$, όπου ν αυθαίρετο διάνυσμα, μηδενίζεται στον N . Έτσι με βάση την ίδια λογική με παραπάνω $\xi_{[\mu} \tilde{\partial}_{\nu]} \Phi|_N = 0$. Επειδή το ν είναι

αυθαίρετο, συνεπάγεται:

$$\begin{aligned}
0 &= \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} (\xi^\alpha \nabla_\alpha \xi_\sigma - \kappa \sigma) \\
&= \xi^\alpha \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} (\nabla_\alpha \xi_\sigma) + (\nabla_\alpha \xi_\sigma) (\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} x^{i^\alpha}) \\
&\quad - \xi_\sigma (\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa) - \kappa (\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\sigma)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί $\kappa \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \xi_\sigma$ κι έτσι απαλοίφεται με τον τελευταίο όρο. Γράφουμε λοιπόν:

$$\xi_\sigma (\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa) = \xi^\alpha \xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} (\nabla_\alpha \xi_\sigma) \tag{4.53}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα 4.40 θα πάρουμε:

$$\xi_\sigma (\xi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa) = -\xi^\alpha \xi_{[\mu} R_{|\sigma\alpha|\nu]}^\lambda \xi_\lambda = \xi^\alpha R_{\sigma\alpha[\nu}^\lambda \xi_{\mu]} \xi_\lambda \tag{4.54}$$

Άρα παίρνουμε την επιθυμητή σχέση και μετονομάζοντας κάποιους από του δεξίτες έχουμε:

$$\xi_\mu \xi_{[\rho} \check{\partial}_{\sigma]} \kappa = -\xi^\nu R_{\mu\nu[\sigma}^\lambda \xi_{\rho]} \xi_\lambda \tag{4.55}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα για τον τανυστή *Riemann* που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω:

$$R_{\mu\nu\sigma}^\rho + R_{\nu\sigma\mu}^\rho + R_{\sigma\mu\nu}^\rho = 0 \tag{4.56}$$

το δεξί μέρος της 4.55 θα είναι:

$$\begin{aligned}
-\xi^\nu R_{\mu\nu[\sigma}^\lambda \xi_{\rho]} \xi_\lambda &= -\xi^\nu R_{\mu\nu\alpha[\sigma} \xi_{\rho]} \xi^\alpha \\
&= -\xi^\nu (R_{\mu\alpha[\sigma|\nu} + R_{\mu[\sigma\nu\alpha}) \xi_{\rho]} \xi^\alpha
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Ο δεύτερος όρος στην τελευταία ισότητα είναι μηδέν γιατί ο *Riemann* είναι αντισυμμετρικός στους δύο τελευταίους όρους του. Συνεπάγεται λοιπόν ότι:

$$-\xi^\nu R_{\mu\nu[\sigma}^\lambda \xi_{\rho]} \xi_\lambda = -\xi^\nu R_{\mu\alpha[\sigma|\nu} \xi_{\rho]} \xi^\alpha = -\xi^\nu \xi_{[\rho} R_{\sigma]\nu\mu}^\lambda \xi_\lambda \tag{4.58}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις 4.50 και 4.58 η εξίσωση 4.40 μπορεί να γραφεί:

$$\xi_{[\rho} \check{\partial}_{\sigma]} \kappa = -\xi_{[\sigma} R_{\rho]}^\lambda \xi_\lambda \tag{4.59}$$

Έχουμε ήδη δείξει με την σχέση 4.25 ότι $\xi_{[\sigma} R_{\rho]}^{\lambda} \xi_{\lambda} = 0$ στον ορίζοντα συνεπώς:

$$\xi_{[\rho} \bar{\partial}_{\sigma]} \kappa|_{H^+} = 0 \quad (4.60)$$

Συμπερασματικά $\bar{\partial}_{\sigma} \kappa \propto \xi_{\sigma}$ και άρα συνεπάγεται:

$$t \cdot \bar{\partial} \kappa = 0 \quad (4.61)$$

για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στον ορίζοντα γεγονότων. Αυτό μας λέει ότι η επιφανειακή βαρύτητα είναι σταθερή στον H^+ και άρα μπορούμε να το λάβουμε ως ένδειξη για την ποσότητα αυτή ως ανάλογο της θερμοκρασίας. Η σχέση μεταξύ επιφανειακής βαρύτητας και θερμοκρασίας γίνεται πιο ξεκάθαρη με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής.

4.2.2 Πρώτος νόμος

Ο πρώτος νόμος της μηχανικής των μελανών οπών μας λέει ότι αν μια στάσιμη μελανή οπή μάζας M , φορτίου Q και στροφορμής J με μελλοντικό ορίζοντα γεγονότων επιφανειακής βαρύτητας κ , ηλεκτρικού επιφανειακού δυναμικού Φ_H και γωνιακής ταχύτητας Ω_H διαταράσσεται έτσι ώστε να καταλήξει σε μια άλλη μύρη τρύπα μάζας $M + \delta M$, φορτίου $Q + \delta Q$ και στροφορμής $J + \delta J$ τότε:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad (4.62)$$

Για να καταλήξουμε τον πρώτο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών χρειάζεται να αναφερθούμε στον τύπο του *Smarr*. Έστω λοιπόν Σ μια χωροειδής υπερεπιφάνεια στο στάσιμο εξωτερικό μια μαύρης τρύπας με εσωτερικό όριο H στον μελλοντικό ορίζοντα γεγονότων και ένα άλλο όριο στο i_0

Η επιφάνεια H είναι μια 2-σφαίρα που μπορεί να θεωρηθεί το όριο της μελανής οπής. Εφαρμόζουμε τον νόμο του *Gauss* στο *Komar* ολοκλήρωμα για την J και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} m^{\nu} + \frac{1}{16\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} m^{\nu} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS_{\mu} R_{\nu}^{\mu} m^{\nu} + J_H \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου για το πρώτο μέρος χρησιμοποιήσαμε τη σχέση που ήδη αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο $\nabla_\sigma \nabla_\mu \zeta_\nu = R_{\nu\mu\sigma}^\lambda \zeta_\lambda$ και J_H είναι το ολοκλήρωμα στον H . Χρησιμοποιώντας την εξίσωση *Einstein*:

$$J = \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma dS_\mu (T_\nu^\mu m^\mu m^\nu - \frac{1}{2} T m^\mu) + J_H \quad (4.64)$$

Απουσία άλλης ύλης εκτός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχουμε $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(F)$ ο ταυσιτής για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αφού $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(F) = T(F) = 0$ έχουμε:

$$J = \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu m^\mu(F) m^\nu + J_H \quad (4.65)$$

για απομονωμένη μελανή οπή.

Τώρα εφαρμόζουμε το νόμο του *Gauss* στο *Komar* ολοκλήρωμα της μάζας (ολικής ενέργειας):

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dS_\mu R_\nu^\mu k^\nu - \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu k^\nu \\ &= \int_\Sigma dS_\mu (-2T_\nu^\mu k^\nu + T k^\mu) - \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} (\nabla^\mu \xi^\nu - \Omega_H \nabla^\mu m^\nu) \end{aligned} \quad (4.66)$$

όπου για τη δεύτερη σχέση εκτός από την εξίσωση *Einstein* χρησιμοποιήσαμε τη σχέση για το διανυσματικό πεδίο *Killing* $\xi = k + \Omega_H m$. Για $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(F)$ ($T(F) = 0$):

$$\begin{aligned} M &= -2 \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu(F) k^\nu + 2\Omega_H J_H - \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \\ &= -2 \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu(F) \xi^\nu + 2 \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu(F) m^\nu + 2\Omega_H J_H - \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \\ &= -2 \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu(F) \xi^\nu + 2\Omega_H J - \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \end{aligned} \quad (4.67)$$

Για

$$dS_{\mu\nu} = (\xi_\mu \eta_\nu - \xi_\nu \eta_\mu) \quad (4.68)$$

τέτοιο ώστε $\eta \cdot \xi = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu &= -\frac{1}{4\pi} \oint_H dA (\xi \cdot \nabla \xi)^\nu \eta_\nu \\ &= -\frac{\kappa}{4\pi} \oint_H dA \xi \cdot \eta_\nu \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} A \end{aligned} \quad (4.69)$$

Επίσης έχουμε:

$$-2 \int_\Sigma dS_\mu T_\nu^\mu(F) \xi^\nu = \Phi_H Q \quad (4.70)$$

για εξισώσεις *Einstein – Maxwell* για το κενό που είναι:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}(F) \quad (4.71)$$

και

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.72)$$

όπου $F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, και

$$T_{\mu\nu}(F) = \frac{1}{4\pi} (F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \quad (4.73)$$

Έτσι προκύπτει ο τύπος:

$$M = \frac{\kappa}{4\pi} A + 2\Omega_H J + \Phi_H Q \quad (4.74)$$

από την οποία προκύπτει ο διαφορικός τύπος που μας δίνει τον πρώτο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών:

$$dM = \frac{\kappa}{4\pi} dA + 2\Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad (4.75)$$

4.2.3 Δεύτερος νόμος (Hawking's Area Theorem)

Ορισμός 1 Η ασθενής ενεργειακή συνθήκη ορίζει ότι για κάθε χρονοειδές διανυσματικό πεδίο ξ ισχύει

$$T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu \geq 0 \quad (4.76)$$

Ορισμός 2 Υπόθεση κοσμικής λογοκρισίας : Ο μελλοντικός ορίζοντας γεγονότων δεν έχει μελλοντικά καταληκτικά σημεία.

Αν ο $T_{\mu\nu}$ ικανοποιεί την ασθενής ενεργειακή συνθήκη και υποθέτοντας ότι η υπόθεση κοσμικής λογοκρισίας ισχύει τότε το εμβαδόν επιφάνειας του μελλοντικού ορίζοντα γεγονότων ενός ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου δεν μπορεί να μειώνεται συναρτήσει του χρόνου.

Ας θεωρήσουμε μια φωτοειδή επιφάνεια και έστω λ αφινική παράμετρος των γεννητόρων των φωτοειδών επιφανειών, όπου τα εφαπτόμενα διανύσματα του ως t^μ . Έστω γ ο γεννήτορας μιας φωτοειδούς γεωδειακής και έστω $p \in \gamma$. Η διαστολή των γεννητόρων των φωτοειδών γεωδειακών της N στο σημείο p ορίζεται ως $\theta = \nabla_\mu t^\mu$. Το ίχνος της ποσότητας $B_\nu^\mu = \nabla_\mu t^\nu$ μετράει την γεωδειακή απόκλιση. Αν θεωρήσουμε τώρα ένα απειροστό στοιχείο επιφάνειας για μια δέσμη γεωδειακών όπου ισχύει από την ανάλυση :

$$\frac{dA}{d\lambda} = \theta a \quad (4.77)$$

Για να ισχύει ο δεύτερος νόμος θα πρέπει να ισχύει ότι $\theta \geq 0$ παντού στον ορίζοντα γεγονότων. Για να δούμε ότι αυτό είναι αλήθεια λέμε ότι αν $\theta < 0$, οι γεωδειακές πρέπει να συγκλίνουν σε μια εστία δηλαδή αν έχουμε τη γεωδειακή γ το πέρασμα από το p θα πρέπει να τέμνει ξάνα τη γ σε ένα άλλο σημείο q το οποίο ονομάζεται συζυγές του p στην γ , και τότε υπάρχει μια χρονοειδής καμπύλη που ενώνει το p με το q . Αυτό θα ισχύει για κάθε σημείο πέρα από το q .

Η ύπαρξη του συζυγούς σημείου στο μέλλον ενός γεννήτορα φωτοειδούς γεωδειακής στον H^+ σημαίνει ότι αυτός ο γεννήτορας του H^+ θα έχει ένα πεπερασμένο καταληκτικό σημείο, σε αντίθεση με το θεώρημα *Penrose*. Έτσι το υποθετικό αυτό συζυγές σημείο δεν γίνεται να υπάρχει. Έτσι πρέπει να είναι παντού $\theta \geq 0$ και συνεπώς :

$$\frac{dA}{d\lambda} \geq 0 \quad (4.78)$$

4.2.4 Τρίτος Νόμος

Ο τρίτος νόμος της μηχανικής των μελανών οπών ορίζει ότι αν ο τανυστής ενέργειας ορμής ικανοποιεί την ασθενής ενεργειακή συνθήκη τότε η επιφανειακή βαρύτητα δεν μπορεί να μειωθεί στο μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο.

Η σημασία αυτού του νόμου μπορεί να αντληθεί αν δούμε τι θα γινόταν σε περίπτωση που προσπαθούσαμε να παραβιάσουμε αυτό το νόμο. Αρχικά για μια μη περιστρεφόμενη μελανή οπή η επιφανειακή βαρύτητα μειώνεται όσο προσθέτουμε μάζα. Θα χρειαζόταν όμως άπειρη μάζα για να μειωθεί η κ στο μηδέν. Μια περιστρεφόμενη, φορτισμένη μελανή οπή με στροφορμή J και φορτίο Q έχει επιφανειακή βαρύτητα και το εμβαδόν επιφανείας του ορίζοντα δίνονται από:

$$\kappa = 4\pi\mu/A \quad (4.79)$$

$$A = 4\pi[2M(M + \mu) - Q^2] \quad (4.80)$$

με $\mu = (M^2 - Q^2 - J^2/M^2)^{\frac{1}{2}}$. Μια άκρειαί μελανή οπή είναι αυτή για την οποία $\mu = 0$. Για μια άκρειαί η κ μηδενίζεται και το $A = 4\pi(2M^2 - Q^2)$. Έτσι λέμε ότι η άκρειαί μελανή οπή έχει μηδενική 'θερμοκρασία' αλλά μη μηδενική έντροπία'. Αν $M^2 < Q^2 + J^2/M^2$ τότε ο χωρόχρονος έχει 'γυμνή' ιδιομορφία και δεν είναι μελανή οπή. Έτσι αν η επιφανειακή βαρύτητα έπρεπε να μειωθεί στο μηδέν, κάποιος θα ήταν πολύ μακριά από το να δημιουργήσει μια 'γυμνή' ιδιομορφία, παραβιάζοντας την κοσμική λογοκρισία.

Για να μειωθεί η επιφανειακή βαρύτητα στο μηδέν θα έπρεπε κάποιος να εμβάλει άπειρη στροφορμή ή φορτίο στην τρύπα. Υποθέστε ότι προσπαθείτε να ρίξετε ένα φορτίο q μάζας m σε μια μη περιστρεφόμενη μελανή οπή μάζας M και φορτίου $Q < M$, προσπαθώντας να έχουμε $Q + q = M + m$. Για να είναι η βαρυτική έλξη μεγαλύτερη από την ηλεκτροστατική απώθηση πρέπει να διαλέξουμε $mM > qQ$, ώστε $q/m < M/Q$. Αλλά αυτή η ανισότητα διασφαλίζει ότι $Q + q < M + m$. Όμοια αν προσπαθήσεις να εμβάλεις αρκετή στροφορμή σε μια περιστρεφόμενη μελανή οπή τότε το σωματίδιο θα έχανε απλά την μελανή οπή. Αν προσπαθήσεις να ρίξεις ένα περιστρεφόμενο σωματίδιο κατά μήκος του άξονα της οπής που περιστρέφεται με τον ίδιο τρόπο θα έβρισκες ότι υπάρχει βαρυτική $spin - spin$ δύναμη που είναι απωθητική και αποτρέπει την μείωση της βαρυτικής επιφάνειας στο μηδέν.

4.3 Συμπεράσματα

Μπορούμε να συνοψίσουμε τους νόμους της μηχανικής των μελανών οπών και τους αντίστοιχους της θερμοδυναμικής στον παρακάτω πίνακα:

<i>BlackHoles</i>	<i>Thermodynamics</i>
$\kappa = \text{const.}$	$T = \text{const.}$
$dM = \frac{\kappa}{2\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$	$dE = TdS + \text{workterms}$
$dA \geq 0$	$dS \geq 0$
$\kappa \geq 0$	$T \geq 0$

Μπορούμε ήδη να παρατηρήσουμε μια ομοιότητα μεταξύ των νόμων της μηχανικής των μελανών οπών και των νόμων της θερμοδυναμικής όπου η κ έχει τον ρόλο της θερμοκρασίας, το A τον ρόλο της εντροπίας και η M αυτόν της ενέργειας. Αυτό αρχικά αναγνωρίστηκε ως μια απλή αναλογία κάτι που όμως αργότερα αποδείχθηκε βαθύτερο από αυτό.

Όταν ο *Wheeler* με το *gedankenexperiment*, “χύνοντας” ένα φλυτζάνι τσάι στην μελανή οπή αναρωτήθηκε αν αυτό θα παραβίαζε τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής δηλαδή αν η εντροπία θα μειωνότανε. Η απόδειξη παραβίασης του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής αλλά και του θεωρήματος του εμβαδού επιφάνειας του *Hawking* οδήγησε τον *Bekenstein* στην πρόταση ότι η εντροπία μιας μαύρης τρύπας θα είναι ανάλογη του εμβαδού επιφάνειας του ορίζοντα.

$$S_{bh} = \eta \frac{k_B c^3 A}{\hbar G} \quad (4.81)$$

Έτσι ο δεύτερος νόμος αντικαθίσταται από τον γενικευμένο δεύτερο νόμο όπου :

$$\delta S_{matter} + \delta S_{bh} \geq 0 \quad (4.82)$$

Η σχέση μεταξύ της εντροπίας των μελανών οπών και του εμβαδού επιφάνειας του ορίζοντα μαζί με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής μας δείχνει ότι οι μαύρες τρύπες έχουν θερμοκρασία η οποία είναι ανάλογη της κ . Αν η μαύρη τρύπα “βυθίζεται” σε ακτινοβολία μέλανους σώματος χαμηλότερης θερμοκρασίας τότε ο δεύτερος νόμος παραβιάζεται εκτός κι αν η μαύρη τρύπα ακτινοβολεί. Χρειάζεται λοιπόν αυθόρμητη δημιουργία σωματιδίων για να αποφθεχθεί η παραβίαση του δεύτερου νόμου. Τελικά ο *Hawking* απέδειξε ότι μια μαύρη τρύπα ακτινοβολεί αυθόρμητα χαρακτηριστικό ενός μελανού σώματος σε θερμοκρασία :

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c k_B} \quad (4.83)$$

εδραιώνοντας έτσι μεγαλύτερη εγκυρότητα για τον γενικευμένο δεύτερο νόμο. Ο συντελεστής η είναι σταθερός στο $\frac{1}{4}$ πράγμα που αποδεικνύεται από τον πρώτο νόμο. Κατά συνέπεια και οι τέσσερις νόμοι της μηχανικής των μελανών οπών παύουν να είναι απλή αναλογία των νόμων της θερμοδυναμικής, αλλά θα περιγράψουν τις μαύρες τρύπες ως θερμοδυναμικά συστήματα.

Πολλοί συγγραφείς έχουν αναγνωρίσει αυτήν την σύνδεση ως πολύ βαθιά και η οποία αποτελεί ένα βήμα για μια ισχυρή κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Κάποιες θεωρίες κβαντικής βαρύτητας όπως η κβαντική βαρύτητα βρόχων χρησιμοποιούν τις θερμοδυναμικές εξισώσεις ως αρχικό σημείο για την ανάπτυξη μιας στατιστικής μηχανικής περιγραφής των μελανών οπών. Η μικροσκοπική περιγραφή του χωροχρόνου χρησιμοποιείται για να προσαρμόσει τους νόμους της θερμοδυναμικής των μελανών οπών στο κατάλληλο μακροσκοπικό όριο με τον ίδιο τρόπο που η εφαρμογή της κβαντομηχανικής σε μεγάλα συστήματα θα δώσει τους νόμους της κλασικής θερμοδυναμικής. Υπάρχουν, ωστόσο, ορισμένα θεμελιώδη ερωτήματα στην προσπάθεια να καταλήξουμε σε μια μικροσκοπική, στατιστική εικόνα των μαύρων οπών. Δεν είναι προφανές για παράδειγμα που "αποθηκεύεται" η εντροπία σε μια μελανή οπή. Στην κβαντική στατιστική μηχανική υπάρχει άμεση αντιστοιχία μεταξύ της εντροπίας του συστήματος και τον αριθμό των κβαντικών καταστάσεων της ίσης ενέργειας που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Υποθέτοντας ότι υπάρχει μια ισοδύναμη μικροσκοπική προέλευση για εντροπία της μαύρης τρύπας, δεν είναι σαφές αν αυτή η εντροπία μπορεί κάλλιστα να θεωρηθεί ότι υπάρχει στο σύννεφο της ακτινοβολίας *Hawking* γύρω από τη μαύρη τρύπα, όπως να είναι στον ορίζοντα γεγονότων ή να περιέχεται σε μερικά *Planck* μήκη κύματος της ίδιας της ιδιομορφίας. Τα ζητήματα αυτά δρουν τόσο ως κίνητρα όσο και ως άμεσες μελέτες για την πλήρη άνθηση μιας κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας, και τον πρώτο έλεγχο ότι οποιαδήποτε τέτοια θεωρία θα πρέπει να αναμένεται για να εγκριθεί είναι ότι θα απλοποιήσει τις παραπάνω εξισώσεις σε κάποιο μακροσκοπικό όριο.

Παράρτημα

Μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή *Riemann* για την μετρική *Kerr*.

$$\begin{aligned}
R_{trt}^r &= \frac{M}{\Sigma^4} (-2r^3 \Delta + 6ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3 a^2 \sin^2 \theta + 3ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
R_{t\theta t}^\theta &= \frac{M}{\Sigma^4} (-6ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + r^3 \Delta - 3ra^2 \cos^2 \theta \Delta + 2r^3 a^2 \sin^2 \theta) \\
R_{t\phi t}^\phi &= \frac{M}{\Sigma^4} (r^3 \Delta - 3ra^2 \cos^2 \theta \Delta - r^3 a^2 \sin^2 \theta + 3ra^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
R_{t\phi t}^t &= R_{\phi t \phi}^\phi = \frac{2M^2 a r^2}{\Sigma^4} (r^2 \sin^2 \theta - 3a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\
R_{\phi t \phi}^t &= -\frac{Mr}{\Sigma^4} (r^2 (r^2 + a^2)^2 - r^2 \Delta a^2 \sin^2 \theta - 3a^2 (r^2 + a^2)^2 \cos^2 \theta + 3a^4 \Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
R_{tr\theta}^t &= -R_{\phi r \theta}^\phi = -\frac{M^2 a^2 r}{\Delta \Sigma^3} (3r^2 \sin 2\theta - a^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta) \\
R_{\phi r \theta}^t &= \frac{Ma}{2\Delta \Sigma^3} (3r^2 \sin 2\theta (r^2 + a^2)^2 - a^2 (r^2 + a^2)^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta \\
&\quad - 3r^2 a^2 \Delta \sin 2\theta \sin^2 \theta + a^4 \Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin 2\theta) \\
R_{tr\theta}^\phi &= \frac{Ma}{2\Delta \Sigma^3} (3r^2 \Delta - a^2 \cos^2 \theta \Delta - 3r^2 a^2 \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \\
R_{rtr}^t &= \frac{M}{\Delta \Sigma^3} (2r^3 (r^2 + a^2) + r^3 a^2 \sin^2 \theta - 6ra^2 (r^2 + a^2) \cos^2 \theta - 3ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\
R_{r\theta r}^\theta &= -\frac{M}{\Delta \Sigma^2} (r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta) \\
R_{r\phi r}^\phi &= -\frac{M}{\Delta \Sigma^3} (r^3 (r^2 + a^2) + 2r^3 a^2 \sin^2 \theta - ra^2 (r^2 + a^2) \cos^2 \theta - 6ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\
R_{\theta r \theta}^r &= -\frac{M}{\Sigma^2} (r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta) \\
R_{\theta\phi\theta}^\phi &= \frac{M}{\Sigma^3} (2r^3 (r^2 + a^2) + r^3 a^2 \sin^2 \theta - 6ra^2 (r^2 + a^2) \cos^2 \theta - 3ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\
R_{\theta t \theta}^t &= -\frac{M}{\Sigma^3} (r^3 (r^2 + a^2) + 2r^3 a^2 \sin^2 \theta - 3ra^2 (r^2 + a^2) \cos^2 \theta - 6ra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\
R_{rt\theta}^t &= R_{r\theta\phi}^\phi = -\frac{Ma^2}{\Delta \Sigma^3} (9r^2 (r^2 + a^2) - 3a^2 \cos^2 \theta (r^2 + a^2) - 6Mr^3 + 2Mra^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\
R_{\theta tr}^t &= R_{\theta r \phi}^\phi = -\frac{Ma^2}{\Delta \Sigma^3} (9r^2 (r^2 + a^2) - 3a^2 \cos^2 \theta (r^2 + a^2) - 12Mr^3 + 4Mra^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\
R_{rr\phi}^t &= \frac{3Ma}{\Delta \Sigma^3} (r^2 + a^2) (r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$R_{\theta\theta\phi}^t = -\frac{3Ma}{\Sigma^3}(r^2 + a^2)(r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$$

$$R_{rtr}^\phi = \frac{3Ma}{\Delta\Sigma^3}(r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta)$$

$$R_{\theta t\theta}^\phi = -\frac{3Ma}{\Sigma^3}(r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta)$$

$$R_{tt\theta}^r = -\frac{3Ma^2\Delta}{\Sigma^4}(3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \quad (4.84)$$

$$R_{ttr}^\theta = -\frac{3Ma^2}{\Sigma^4}(3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} R_{tr\phi}^r &= -R_{\phi tr}^r = \frac{Ma}{\Sigma^4}(3r^3(r^2+a^2) - 9ra^2 \cos^2 \theta(r^2+a^2) - 4Mr^4 + 12Mr^2a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \\ -R_{t\theta\phi}^\theta &= R_{\phi t\theta}^\theta = \frac{Ma}{\Sigma^4}(3r^3(r^2+a^2) - 9ra^2 \cos^2 \theta(r^2+a^2) - 4Mr^4 + 6Mr^2a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \\ R_{t\theta\phi}^r &= -\frac{Ma\Delta}{\Sigma^4}(6r^2(r^2+a^2) + 3r^2a^2 \sin^2 \theta - 2a^2(r^2+a^2) \cos^2 \theta - a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ R_{\phi tr}^\theta &= \frac{Ma}{\Sigma^4}(6r^2(r^2+a^2) + 3r^2a^2 \sin^2 \theta - 2a^2(r^2+a^2) \cos^2 \theta - a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ R_{\phi t\theta}^r &= \frac{Ma\Delta}{\Sigma^4}(3r^2(r^2+a^2) + 6r^2a^2 \sin^2 \theta - a^2(r^2+a^2) \cos^2 \theta - 2a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ R_{\theta t\theta}^t &= -\frac{Ma}{\Sigma^4}(3r^2(r^2+a^2) + 6r^2a^2 \sin^2 \theta - a^2(r^2+a^2) \cos^2 \theta - 2a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$R_{\theta t\phi}^r = -\frac{Ma\Delta}{2\Sigma^3}(3r^2 \sin 2\theta - a^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta)$$

$$R_{rt\phi}^\theta = \frac{Ma}{2\Sigma^3}(3r^2 \sin 2\theta - a^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta)$$

$$R_{\phi\theta\phi}^r = \frac{3Ma^2\Delta}{\Sigma^4}(r^2 + a^2)(3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (4.86)$$

$$R_{\phi r\phi}^\theta = \frac{3Ma^2}{\Sigma^4}(r^2 + a^2)(3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} R_{r\theta\phi}^t &= -\frac{Ma}{2\Delta\Sigma^3}(6r^2 \sin 2\theta(r^2 + a^2)^2 + 2a^2(r^2 + a^2)^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta \\ &\quad - r^2a^2\Delta \sin 2\theta \sin^2 \theta - a^4\Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\theta r\phi}^t &= -\frac{Ma}{2\Delta\Sigma^3}(3r^2 \sin 2\theta(r^2 + a^2)^2 - a^2(r^2 + a^2)^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta \\ &\quad - 6r^2a^2\Delta \sin 2\theta \sin^2 \theta + 2a^4\Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$R_{rt\theta}^\phi = -\frac{Ma}{\Delta\Sigma^3}(3r^2\Delta - a^2 \cos^2 \theta\Delta + 6r^2a^2 \sin^2 \theta - 2a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \cot \theta$$

$$R_{\theta tr}^\phi = -\frac{Ma}{\Delta\Sigma^3}(6r^2\Delta - 2a^2 \cos^2 \theta\Delta + 3r^2a^2 \sin^2 \theta - a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \cot \theta$$

$$R_{\phi r \phi}^r = -\frac{Mr}{\Sigma^4} (r^2(r^2+a^2)^2 + 2r^2\Delta a^2 \sin^2 \theta - 3a^2(r^2+a^2)^2 \cos^2 \theta - 6a^4\Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$$

$$R_{\phi \theta \phi}^\theta = \frac{Mr}{\Sigma^4} (2r^2(r^2+a^2)^2 + r^2\Delta a^2 \sin^2 \theta - 6a^2(r^2+a^2)^2 \cos^2 \theta - 3a^4\Delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$$

Βιβλιογραφία

1. P.K. Townsend, Black holes. 1997.
2. R. M. Wald, Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics, The University of Chicago Press, 1994.
3. S.M. Carroll, Lecture notes on general relativity. 1997.
4. R.M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press, 1984.
5. Daniel Grumiller, Robert McNees and Jakob Salzer, Black holes and thermodynamics | The first half century, 2014.
6. Ted Jacobson, Introductory Lectures on Black Hole Thermodynamics.
7. R. Adamson, Black holes and thermodynamics.
8. Eric Poisson, A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics, 2007
9. V. Frolov , I. Novikov, Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments (Fundamental Theories of Physics), 1998.
10. V.Frolov and A. Zelnikov, Introduction to Black Hole Physics, 2011.
11. Sean Carroll (Author) Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, 2003.
12. Stijn J. van Tongeren, Rotating Black Holes, 2009.

13. S.W. Hawking and F.R.W. Ellis, The large-scale structure of space-time, Cambridge University Press, 1973.

14. C. DeWitt, Bryce Seligman DeWitt, Black Holes, 1973.

15. S.W. Hawking, The Nature of Space and Time, 1994.

16. J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, The Four Laws of Black Hole Mechanics, 1973