Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική εργασία

Θεωρία Ramsey

Μαρίνα Κωνσταντάτου

Τριμελής Επιτροπή

Α. Αρβανιτάκης

Α. Παπαϊωάννου(Επιβλέπων)

Π. Ψαρράκος

Αθήνα 2011

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

- Σε κάθε ομάδα 6 ατόμων είτε θα υπάρχουν 3 άτομα που γνωρίζονται μεταξύ τους είτε 3 άτομα μεταξύ τους άγνωστα.
- Αν οι πλευρές ενός πλήρους γραφήματος με άπειρο σύνολο κορυφών $\mathcal{N}$ χρωματιστούν κόκκινες οι μπλε τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο του $\mathcal{N}$ (το οποίο ονομάζουμε $\mathcal{M}$) με $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε όλες οι πλευρές που ενώνουν τις κορυφές του $\mathcal{M}$ να έχουν το ίδιο χρώμα.

Οι παραπάνω προτάσεις είναι ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος του Ramsey που δημοσιεύτηκε πρώτη φορά το 1930. Τα αρχικά θεωρήματα του Ramsey , όπως θα δούμε και παρακάτω, επεκταθήκαν, εμπλουτίστηκαν και αναδέχθηκαν μέσα από το έργο και άλλων μαθηματικών προς διαφορές κατευθύνσεις με αποτέλεσμα να οδηγηθούν σε μια αυτόνομη και ανεξάρτητη θεωρία η οποία πλέον είναι γνωστή σαν θεωρία Ramsey. Μια θεωρία μη κατασκευαστική η οποία επί της ουσίας-επεκτείνοντας και γενικεύοντας την αρχή του περιστερεώνα- μας περιγράφει το βαθύ μαθηματικό αξίωμα του ότι ασχέτως του πως θα διαμερίσουμε τα αντικείμενα μιας «αρκετά μεγάλης» δομής σε «μερικές» κλάσεις, μια από αυτές τις κλάσεις θα περιέχει ένα «μεγάλο» υποσύστημα. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Burkill και Mirsky: «υπάρχουν πολλά θεωρήματα στα μαθηματικά τα οποία χονδρική λέγουν ότι κάθε σύνολο μιας κάποιας κλάσης περιέχει ένα μεγάλο υποσύνολο με μεγαλύτερο βαθμό οργάνωσης από το αρχικό σύνολο». Θεωρήματα του παραπάνω τύπου είναι παραδείγματος χαρών το θεώρημα Bolzano-Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία και το θεώρημα που αποδεικνύει πως κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μονότονη υπακολουθία.

Ενώ η αρχή του περιστερεώνα του Dirichlet, που θα διατυπώσουμε πιο κάτω, μας εγγυάται πως μπορεί να έχουμε «πολλά» αντικείμενα σε μια κλάση, τα οποία όμως μεταξύ τους μπορεί να μην έχουν καμιά σχέση, η θεωρία του Ramsey ψάχνει για μια μεγάλη υποδομή στην ίδια κλάση. Για παράδειγμα στην δεύτερη πρόταση που κάναμε πιο πάνω δεν μας αρκεί άπλα να έχουμε άπειρες κόκκινες πλευρές άλλα πιο συγκεκριμένα θέλουμε όλες οι πλευρές που ενώνουν τις κορυφές ενός απείρου συνόλου να είναι χρωματισμένες κόκκινες έτσι ώστε να σχηματίζεται μονοχρωματικό υπογράφηκα. Επίσης στην πρώτη μας πρόταση δεν μας αρκεί να έχουμε τρία ζευγάρια γνωστών άλλα τρία άτομα γνωστά μεταξύ τους, να σχηματίζεται δηλαδή ένα «τρίγωνο γνωριμίας».

Για πολλούς η πεμπτουσία της θεωρίας Ramsey είναι το θεώρημα του van der Warden το οποίο ασχολείται με μαθηματικές δομές πλουσιότερες από τα γραφήματα. Σε αυτό το θεώρημα, όπως θα δούμε παρακάτω, ορίζουμε τον αριθμό $\mathrm{W(p,k)}$ σαν τον ακέραιο ο όποιος είναι αρκετά μεγάλος έτσι ώστε αν διαμερίσουμε τους πρώτους $\mathrm{W(p,k)}$ φυσικούς αριθμούς σε k κλάσεις τότε κάποια από αυτές τις κλάσεις περιέχει αριθμητική πρόοδο με p το πλήθος όρους.

Ο ίδιος ο Frank Plumpton Ramsey γεννήθηκε το 1903 στο Cambridge και εκτός από την θεωρία που θα αναπτύξουμε εν μέρη εδώ δούλεψε σε πολλές περιοχές όπως στα οικονομικά μαθηματικά, οπού άνηκε στο επιτελείο του J.M.Keynes και τα θεωρήματα του πάνω στην φορολογία και την αποταμίευση θεωρούνται πολύ σημαντικά στον κλάδο αυτό, στην μετάφραση του Wittgenstein και στην λογική. Πέθανε σε ηλικία μόλις 28 ετών έχοντας όμως προλάβει να θεμελιώσει την θεωρία η οποία θα έπαιρνε στην συνεχεία το όνομα του.

Η θεωρία Ramsey σήμερα είναι ένας μεγάλος τομέας της συνδυαστικής οπού χρησιμοποιούνται πολλές τεχνικές από πολλούς κλάδους των μαθηματικών και τα αποτελέσματα δεν αφορούν μόνο την θεωρία γραφημάτων και τη συνδυαστική άλλα και άλλους πολύ σημαντικούς τομείς όπως η θεωρία συνόλων, η λογική, η ανάλυση, η άλγεβρα και η γεωμετρία. Για να εκθέσουμε σε ένα βαθμό τα παραπάνω θα αναφερθούμε στην αρχή του περιστερεώνα, τα θεωρήματα και τους αριθμούς Ramsey καθώς και την γενικευμένη εκδοχή τους, θα δώσουμε κάποιες εφαρμογές της θεωρίας Ramsey στην γεωμετρία και τη θεωρία γραφημάτων και τέλος θα παρουσιάσουμε τα θεωρήματα των Schur, van der Waerden και κάποιες γενικεύσεις τους.

1.

Η αρχή του περιστερεώνα

- Αν $n+1$ αντικείμενα τοποθετηθούν σε n διαφορετικές θέσεις τότε τουλάχιστον μια θέση θα περιέχει τουλάχιστον 2 αντικείμενα.

Η παραπάνω πρόταση συναντάται πρώτη φορά στο αριθμοθεωρητικό έργο του Γερμανού μαθηματικού P. Lejeune-Dirichlet (1805-1859), αν και φαινομενικά απλή και προφανής οδήγησε σε πολλά ενδιαφέροντα θεωρήματα και εφαρμογές και κατά κύριο λόγο η γενίκευση της αποτελεί θεμέλιο λίθο της θεωρίας Ramsey.

Θεώρημα 1.1 (ισχυρή μορφή της αρχής του περιστερεώνα)

Έστω $q_1,q_2,\ldots,q_n$ θετικοί ακέραιοι. Αν $q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$ διαφορετικά αντικείμενα τοποθετηθούν σε n θέσεις τότε είτε η πρώτη θέση περιέχει τουλάχιστον q_1 αντικείμενα, είτε η δεύτερη θέση περιέχει τουλάχιστον $q_2,\ldots,$ είτε η n-οστη θέση περιέχει τουλάχιστον q_n αντικείμενα.

Απόδειξη

Έστω ότι τοποθετούμε $q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$ αντικείμενα σε n θέσεις. Αν για κάθε i=1,2,…,n η θέση i-τάξης περιέχει λιγότερα από q_i αντικείμενα τότε το πλήθος των αντικειμένων είναι το πολύ:

$$(q_1-1)+(q_2-2)+\ldots+(q_n-1)=q_1+q_2+\ldots+q_n-n < q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

Άρα αφού έχουμε τουλάχιστον 1 αντικείμενο ακόμα συμπεραίνουμε ότι για κάποιο i=1,2,…,n η θέση τάξης i θα περιέχει τουλάχιστον q_i το πλήθος αντικείμενα. ■

Αν $q_1=q_2=\ldots=q_n=2$ καταλήγουμε στην αρχική μας πρόταση ενώ για $q_1=q_2=\ldots=q_n=r$ καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.2

Αν $n(r-1)+1$ αντικείμενα τοποθετηθούν σε n θέσεις τότε τουλάχιστον μια θέση θα περιέχει τουλάχιστον r αντικείμενα.

Από την πρόταση 1.2 μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής ισοδύναμο πόρισμα:

Πόρισμα 1.1

Αν ο αριθμητικός μέσος n μη αρνητικών $m_1,m_2,\dots,m_n$ είναι μεγαλύτερος του $r-1$

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} > r-1$$

Τότε τουλάχιστον ένας από τους ακέραιους αυτούς είναι μεγαλύτερος η ίσος του r.

Απόδειξη

Έστω $n(r-1)+1$ αντικείμενα τα οποία θα τοποθετήσουμε σε n θέσεις. Για $i=1,2,\dots,n$ έστω m_i το πλήθος των αντικειμένων στην θέση i-τάξης ο αριθμητικός μέσος των αριθμών m_i είναι:

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} = \frac{n(r-1)+1}{n} = r-1+\frac{1}{n} > r-1$$

Αρά από την πρόταση 2 τουλάχιστον μια θέση θα περιέχει τουλάχιστον r αντικείμενα δηλαδή για κάποιο $i=1,2,\dots,n$ ισχύει ότι $m_i \geq r$

Θεώρημα 1.2 (Erdös)

Αν $n+1$ αριθμοί εκλεγούν από το σύνολο $\{1,2,\dots,2n\}$ τότε κάποιος από αυτούς θα διαιρεί ακριβώς κάποιον άλλο.

Απόδειξη

Οι $2n$ αριθμοί γράφονται επίσης ως δυνάμεις του 2 επί ένα περιττό μέρος

π.χ. 8=$2^3.1$, 11=$2^0.11$, 22=$2^1.11$

στους αριθμούς $\{1,2,\dots,2n\}$ υπάρχουν n διαφορετικά περιττά μέρη, αν στη συνέχεια εκλέξουμε $n+1$ αριθμούς από την αρχή του περιστερεώνα (πρόταση 1) θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο από αυτούς που θα έχουν κοινό περιττό μέρος,

δηλαδή $m_1=2^{k1}.q$ και $m_2=2^{k2}.q$ (οπού q το κοινό περιττό μέρος)

τότε όμως η μικρότερη δύναμη του 2 διαιρεί την μεγαλύτερη αρά αν $k_1<k_2$ ο m_1 διαιρεί τον m_2 και αν $k_1>k_2$ ο m_2 διαιρεί τον m_1. ■

Παρατήρηση

Το θεώρημα 1.2 είναι το καλύτερο δυνατό, εννοώντας ότι αν εξασθενίσει έστω και στο ελάχιστο η υπόθεση του, αυτό παύει να ισχύει, για παράδειγμα αν επιλέξουμε n αριθμούς αντί για $n+1$ από το σύνολο των $2n$ αριθμών τότε υπάρχει περίπτωση στο διαλεγμένο υποσύνολο μας να μην υπάρχει ούτε ένα ζεύγος αριθμών που διαιρούνται μεταξύ τους και αρά να μην ισχύει το θεώρημα. Π.χ. αν το υποσύνολο των n αριθμών είναι το: $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ προφανώς δεν υπάρχει ζεύγος αριθμών τέτοιο ώστε να διαιρούνται μεταξύ τους.

Θεώρημα 1.3

Αν m διαφορετικά αντικείμενα τοποθετηθούν σε $n<m$ θέσεις τότε τουλάχιστον μια θέση θα περιέχει τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ αντικείμενα.

Παρατήρηση για την απόδειξη του θεωρήματος

Το σύμβολο $\lfloor \chi \rfloor$ παριστά το ακέραιο μέρος του πραγματικού χ δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνά τον χ

Π.χ. $\lfloor 1{,}618 \rfloor = 1, \ \ \lfloor 5 \rfloor = 5, \ \ \lfloor -3{,}141 \rfloor = -4$

Απόδειξη

Το μεγαλύτερο από τα πολλαπλάσια του n που είναι μικρότερο του m είναι το

$$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor . n$$

Αν υπήρχαν ακριβώς $n. \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq m-1<m$ αντικείμενα, τότε αυτά στη χειρότερη περίπτωση οπού συγκατανεύονται σε κάθε θέση θα μπορούσαν να τοποθετηθούν ανά $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ σε κάθε μία από τις n θέσεις. Αλλά αφού έχουμε m αντικείμενα τουλάχιστον μια από τις θέσεις θα περιέχει τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ αντικειμενα. ■

Θεώρημα 1.4 (Erdös-Szekeres)

Έστω μια ακολουθία n^2+1 διαφορετικών ακέραιων: $a_1,a_2,\ldots,a_{n^2+1}$, τότε υπάρχει μια υπακολουθία με $n+1$ όρους που είναι μονότονη.

Απόδειξη

Σε κάθε όρο a_i της ακολουθίας αντιστοιχεί ο ακέραιος t_i ο οποίος δίνει το πλήθος των όρων της μεγαλύτερης αύξουσας υπακολουθίας που αρχίζει από τον a_i, προφανώς υπάρχουν n^2+1 το πλήθος τέτοιοι δείκτες t_i (ένας για κάθε όρο της ακολουθίας).

- Αν κάποιο από τα t_i είναι $t_i \geq n+1$ το θεώρημα αποδείχτηκε διότι υπάρχει αύξουσα υπακολουθία.
- Αν $t_i \leq n$ για κάθε $1 \leq i \leq n^2+1$. Οι n^2+1 δείκτες t_i θα τοποθετηθούν σε n θέσεις αρά από την αρχή του περιστερεώνα (πρόταση 1) τουλάχιστον μια από τις θέσεις θα περιέχει $\left\lfloor\frac{n^2+1-1}{n}\right\rfloor+1=n+1$ δείκτες t_i. Άρα τουλάχιστον $n+1$ από τους δείκτες t_i θα είναι ίσοι μεταξύ τους. Οι όροι της ακολουθίας a_i που αντιστοιχούν στους $n+1$ αυτούς δείκτες σχηματίζουν μια φθίνουσα υπακολουθία ακριβώς $n+1$ όρων διότι για $r<s$ αν $t_r=t_s$ συμπεραίνουμε πως $a_r>a_s$ γιατί αν $a_r<a_s$ θα είχαμε πως $t_r=t_s+1$. ■

Παρατήρηση

Το θεώρημα 1.4, όπως και το θεώρημα 1.2 πριν, είναι το καλύτερο δυνατό με την έννοια ότι αν η ακολουθία μας είχε n^2ορους αντι για n^2+1 θα μπορούσαμε να βρούμε υπακολουθία με $n+1$ όρους που δεν θα έχει την ζητούμενη υπακολουθία. Π.χ. για n=5 ακολουθία 25 όρων:
5,4,3,2,1,10,9,8,7,6,15,14,13,12,11,20,19,18,17,16,25,24,23,22,21 δεν έχει μονότονη υπακολουθία 6 όρων όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί

Παράδειγμα 1

Έστω ένα τηλεφωνικό κέντρο με 4 τηλεφωνητές οπού οι γραμμές ανοίγουν ταυτόχρονα και στους 4 ανά 10 λεπτά για διάρκεια 50 λεπτών (δηλαδή συνολικά οι γραμμές ανοίγουν 5 φορές), το τηλεφώνημα διαρκεί 10 λεπτά και έστω ότι ο καθένας μπορεί παράλληλα να εξυπηρετεί απεριόριστα τηλεφωνήματα.

1. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τηλεφωνημάτων που πρέπει να γίνει έτσι ώστε είτε ο πρώτος τηλεφωνητής να απαντήσει 10 τηλεφωνήματα, είτε ο δεύτερος 17, είτε ο τρίτος 26, είτε ο τέταρτος 37;
2. Αν πραγματοποιηθεί ο παραπάνω ελάχιστος αριθμός τηλεφωνημάτων ώστε να ισχύει η συνθήκη μας πόσα τουλάχιστον τηλεφωνήματα θα δεχτεί ο τρίτος τηλεφωνητής;
3. Για κάθε ακολουθία a_i τηλεφωνημάτων που θα δεχτεί ο τέταρτος(με δεδομένη τη συνθήκη 1), οπού a_i ο αριθμός τηλεφωνημάτων ανά δεκάλεπτο σίγουρα θα υπάρχει ένα μισάωρο οπού είτε ο αριθμός τηλεφωνημάτων θα φθίνει είτε θα αυξάνει (ανά δεκάλεπτο).

Απόδειξη

1. Από την ισχυρή μορφή της αρχής του περιστερεώνα (θεώρημα 1.1) με $q_1=10, q_2=17, q_3=26, q_4=37$, n=4 έχουμε ότι:

   10+17+26+37-4+1=89

   Άρα πρέπει να γίνουν τουλάχιστον 89 τηλεφωνήματα στο τηλεφωνικό κέντρο.

2. Από το θεώρημα 1.3 για n=5 και m=26 σε τουλάχιστον ένα δεκάλεπτο θα απαντήσει τουλάχιστον $\left\lfloor\frac{m-1}{n}\right\rfloor + 1$ τηλεφωνηματα δηλαδη $\left\lfloor\frac{26-1}{5}\right\rfloor + 1 = 6$
3. Το ερώτημα 3 συνεπάγεται με την απόδειξη του θεωρήματος 1.4 για n=2 διότι $n^2 + 1 = 5$ δεκάλεπτα (αρά 5 όρους έχει η ακολουθία) και n+1=3 δεκάλεπτα = μισάωρο (άρα 3 όρους έχει η υπακολουθία)

   Έστω a_i η ακολουθία μας με $1 \leq i \leq 5$,

   θεωρούμε την ακολουθία t_i με $1 \leq i \leq 5$ όπου ο κάθε όρος t_i της ακολουθίας εκφράζει το μήκος της μεγαλύτερης αύξουσας υπακολουθίας που αρχίζει με τον όρο a_i

   Αν έστω και ένας όρος της t_i είναι μεγαλύτερος η ίσος του 3 τότε το ερώτημα λύθηκε άρα υποθέτουμε πως t_i μικρότερο του 3 και επομένως οι 5 αριθμοί t_i θα τοποθετηθούν σε 2 θέσεις την μήκος= 1 και την μήκος= 2 αρά από την αρχή του περιστερεώνα τουλάχιστον $\left\lfloor\frac{5-1}{3}\right\rfloor + 1 = 3$ από τα t_i θα είναι ίσα μεταξύ τους.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας έστω ότι τρία t_i παίρνουν την τιμή 1 και τα άλλα δυο την τιμή 2 δηλαδή έχουμε:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	2	1	1	2

Τα τρία a_i που έχουν την τιμή 1 σχηματίζουν γνησίως φθίνουσα υπακολουθία διότι αφού ti=1 σημαίνει ότι το a_i είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της υπακολουθίας που αρχίζει από το a_i άρα $a_1 > a_3 > a_4$.

Παρόμοια μπορούμε να το αποδείξουμε και στην περίπτωση οπού τα 3 t_i παίρνουν την τιμή 2.

Παράδειγμα 2

Έστω μια ακολουθία αριθμών: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ υποστηρίζουμε πως υπάρχουν φυσικοί αριθμοί k,l με $0 \le k < l \le n$ τέτοιοι ώστε ο αριθμός: $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$ να είναι πολλαπλάσιο του n.

Απόδειξη

Περνούμε: a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

...

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

αν κάποιος από τους παραπάνω n το πλήθος αριθμούς είναι πολλαπλάσιο του n τότε το ζητούμενο έχει αποδεδειχθεί.

Έστω λοιπόν πως κανένας από τους παραπάνω αριθμούς δεν είναι πολλαπλάσιο του n, συμπεραίνουμε πως υπάρχουν n-1 υπόλοιπα από τις διαιρέσεις των αριθμών αυτών με τον n.

Αφού όμως υπάρχουν n το πλήθος αριθμοί και n-1 το πλήθος υπόλοιπα από την αρχή του περιστερεώνα προκύπτει πως θα υπάρχουν δυο αριθμοί με το ίδιο υπόλοιπο u_1, δηλαδή: $a_1 + \ldots + a_k = rn + u_1$

$$a_1 + \ldots + a_k + \ldots + a_l = r'n + u_1$$

οπού r, r' φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $r'>r$

αν τώρα αφαιρέσουμε τον πρώτο αριθμό από τον δεύτερο έχουμε:

$$a_{k+1} + \ldots + a_l = (r'-r)n$$

και το ζητούμενο έχει αποδεδειχθεί.

2.

Θεώρημα και αριθμοί Ramsey

Εν γένει όπως έχουμε δει η θεωρία Ramsey μελετά τις συνθήκες κάτω από τις όποιες εμφανίζεται «τάξη», π.χ. πόσα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να έχουμε ώστε αυτό να εμφανίζει την επιθυμητή δομή.

Περιγραφικά το θεώρημα Ramsey αποδεικνύει πως σε οποιονδήποτε χρωματισμό πλευρών ενός «ικανοποιητικά μεγάλου» πλήρους γραφήματος (πλήρες θεωρείται ένα γράφημα του όποιου κάθε κορυφή γειτονεύει με όλες τις άλλες κορυφές και συμβολίζεται με K_ρ, οπού ρ το πλήθος των κορυφών) μπορούμε να βρούμε μονοχρωματικά, πλήρη υπογραφήματα. Θα επανέλθουμε στη συνέχεια σε πιο αυστηρή διατύπωση και πλήρη απόδειξη του θεωρήματος.

Αρχικά μπορούμε να θεωρήσουμε πως το θεώρημα Ramsey είναι μια γενίκευση της αρχής του περιστερεώνα όπως αυτή διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και η απλούστερη (και γνωστότερη) μορφή του είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 2.1

Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων υπάρχουν είτε τρεις γνωστοί μεταξύ τους, είτε τρεις άγνωστοι μεταξύ τους.

Απόδειξη

Αρχικά υποθέτουμε πως η σχέση γνωριμίας είναι συμμετρική άλλα όχι μεταβατική, δηλαδή αν ο Α γνωρίζει τον Β τότε και ο Β γνωρίζει τον Α, όμως αν ο Α γνωρίζει τον Β και ο Β τον Γ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πως ο Α γνωρίζει τον Γ.

Στη συνέχεια δημιουργούμε 2 κλάσεις ως εξής: θεωρούμε ένα άτομο (έστω τον Α) από το σύνολο των 6 και διαμερίζουμε τα υπόλοιπα 5 άτομα στις κλάσεις F και S, οπού F οι γνωστοί του Α και οπού S οι άγνωστοι.

Αφού 5 άτομα θα τοποθετηθούν σε 2 κλάσεις με απλή εφαρμογή της αρχής του περιστερεώνα προκύπτει πως μια κλάση θα περιέχει τουλάχιστον 3 άτομα. Αν αυτή η κλάση είναι η F τότε είτε οι τρεις γνωστοί του Α είναι άγνωστοι μεταξύ τους οπότε έχουμε το ζητούμενο, είτε υπάρχουν τουλάχιστον δυο άτομα αυτής της κλάσης (έστω οι B,C) οι οποίοι γνωρίζονται και μαζί με τον Α προφανώς αποτελούν ένα τρισύνολο γνωστών μεταξύ τους ατόμων οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε τις διαμερίσεις των πλευρών ενός γραφήματος τις όποιες καλούμε χρωματισμούς των πλευρών αυτών.

Αριθμός Ramsey R(m,n)

Ο αριθμός Ramsey $R(m,n)$, οπού m,n φυσικοί αριθμοί και $m,n \geq 2$ ορίζεται να είναι ο ελάχιστος αριθμός ρ τέτοιος ώστε σε κάθε διχρωματισμό των πλευρών του K_ρ με δυο χρώματα (έστω κόκκινο και μπλε) είτε θα υπάρχει ένα κόκκινο K_m είτε ένα μπλε K_n.

Τώρα που ορίσαμε τον αριθμό Ramsey είμαστε σε θέση να επαναδιατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα 2.1 ως εξής:

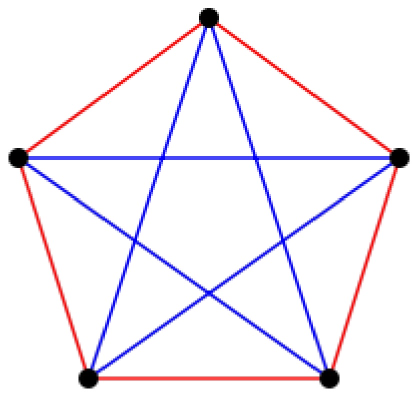
Θεώρημα 2.2

$R(3,3)=6$

Απόδειξη

- Χρωματίζουμε κόκκινες και μπλε τις πλευρές ενός πλήρους γραφήματος τάξης 6 και διαλέγουμε μια τυχαία κορυφή, έστω v. Αφού το γράφημα είναι πλήρες στην κορυφή v καταλήγουν 5 πλευρές και αρά από την αρχή του περιστερεώνα τουλάχιστον 3 από αυτές έχουν το ίδιο χρώμα. Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε πως 3 από αυτές τις πλευρές είναι μπλε και έστω ότι αυτές οι πλευρές συνδέουν την κορυφή v με τις κορυφές r,s,t. Αν κάποια από τις πλευρές (r, s), (r, t), (s, t) είναι επίσης μπλε τότε έχουμε ένα μπλε τρίγωνο K_3, αν όχι οι παραπάνω πλευρές είναι όλες κόκκινες και αρά σχηματίζουν ένα κόκκινο τρίγωνο K_3. Αφού το παραπάνω επιχείρημα ισχύει για κάθε χρωματισμό συμπεραίνουμε πως κάθε K_6 περιέχει μονοχρωματικό K_3 και αρά $R(3,3) \leq 6$.
- Για να αποδείξουμε πως $R(3,3)=6$ παίρνουμε τον ακόλουθο χρωματισμό του K_5 ώστε να μην υπάρχει μονοχρωματικό K_3:

(Μάλιστα αποδεικνύεται ότι ο χρωματισμός αυτός (και ο συμμετρικός του) είναι ο μονός κακός 2-χρωματισμος των πλευρών του K_5 από τους $2^{10}=1024$ δυνατούς 2-χρωματισμους)



Άρα $R(3,3)>5$ και επομένως $R(3,3)=6$. ∎

Θεώρημα 2.3

$R(2,n)=n$

Απόδειξη

- Για $n\geq 2$ διαπιστώνουμε πως $R(2,n)>n-1$ καθώς υπάρχει διχρωματισμό του K_{n-1} όπου δεν υπάρχει ούτε κόκκινο K_2 ούτε μπλε K_n (ο διχρωματισμό αυτός είναι αν χρωματίσω όλες τις πλευρές του K_{n-1} μπλε).
- Όμως προφανώς $R(2,n)\leq n$ αφού αν διχρωματισμό το K_n όπως παραπάνω (δηλαδή όλο μπλε) υπάρχει τετριμμένα το μπλε K_n.

Αρά $R(2,n)=n$ και επίσης όπως προκύπτει από τον ορισμό του αριθμού Ramsey $R(m,n)=R(n,m)$. ■

Θεώρημα 2.4 (Erdös-Szekeres, Greenwood-Gleason)

Αν $m,n\geq 3$ τότε ισχύουν οι σχέσεις:

1. $R(m,n)\leq R(m-1,n)+R(m,n-1)$
2. $R(m,n)\leq\binom{m+n-2}{m-1}$

Απόδειξη

1. Έστω $R(m-1,n)$,$R(m,n-1)$ πεπερασμένοι,
   θέτουμε $\rho= R(m-1,n)+R(m,n-1)$ και θεωρούμε ένα διχρωματισμό του K_ρ(έστω με μπλε και κόκκινο), παίρνουμε μια κορυφή του K_ρ έστω την x και διαπιστώνουμε ότι αφού το γράφημα είναι πλήρες σε αυτήν καταλήγουν ρ-1 πλευρές δηλαδή $d(x)=\rho-1= R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$, άρα από την αρχή του περιστερεώνα είτε θα υπάρχουν τουλάχιστον $n_1= R(m-1,n)$ κόκκινες πλευρές που διέρχονται από την κορυφή x είτε τουλάχιστον $n_2= R(m,n-1)$ μπλε πλευρές που διέρχονται από την κορυφή x. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχουν n_1 κόκκινες πλευρές που διέρχονται από την κορυφή x και άρα το γράφημα που ορίζεται από την x και τις n_1 γειτονικές κορυφές αποτελεί ένα πλήρες γράφημα Kn_1 και επομένως είτε αυτό θα περιέχει ένα μπλε K_n (αφού $n_1= R(m-1,n)$) το οποίο κατ'επεκταση θα περιέχεται και στο K_ρ οπότε το ζητούμενο έχει δηχθεί, είτε το Kn_1 θα περιέχει ένα κόκκινο K_{m-1} το οποίο όμως μαζί με την κορυφή x και τις $m-1$ πλευρές που την συνδέουν με τις γειτονικές n_1 κορυφές δημιουργεί ένα κόκκινο K_m. Αρά κάθε διχρωματισμό του K_ρ περιέχει είτε ένα κόκκινο K_m είτε ένα μπλε K_n και το ζητούμενο έχει αποδεδειχθεί.

2. Για m=2 n=2 η σχέση ισχύει σαν ισότητα, άρα έστω m>2, n>2 και ότι η σχέση ισχύει επαγωγικά για κάθε ζεύγος (m',n') με m'≥2, n'≥2 και m'+n'<m+n επομένως από την σχέση 1 έχουμε:
   R(m,n)≤R(m-1,n)+R(m,n-1)≤$\binom{m-1+n-2}{m-1-1}+\binom{m+n-1-2}{m-1}=\binom{m+n-3}{m-2}+\binom{m+n-3}{m-1}=\binom{m+n-2}{m-1}$. ■

Πόρισμα 2.1

Αν οι δυο αριθμοί R(m-1,n), R(m,n-1) είναι και οι δυο άρτιοι τότε στη σχέση 1 του θεωρήματος 2.4 ισχύει μόνο η ανισότητα:

R(m,n)<R(m-1,n)+R(m,n-1)

Απόδειξη

Θέτουμε ρ= R(m-1,n)+ R(m,n-1)-1 και εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.

Θα δείξουμε πως σε κάθε διχρωματισμό του K_ρ υπάρχει είτε ένα κόκκινο K_m είτε ένα μπλε K_n.

Αρχικά βρίσκουμε την τάξη του K_ρ η οποία είναι: αρτια+αρτια-1=(2t+2)+(2r+2)-1= 2t+2r+3=2t+2r+2+1=2(t+r+1)+1=2h+1=περιττη.

Θεωρούμε το υπογράφημα G το οποίο έχει όλες τις πλευρές του κόκκινες στο K_ρ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή $v \in G$ που να έχει στο G βαθμό άρτιο διότι αν όλες οι κορυφές του G είχαν περιττό βαθμό το πλήθος τους θα ήταν υποχρεωτικά άρτιο και όχι περιττό.

Συμβολίζουμε με $d_r(v)$ το πλήθος των κόκκινων πλευρών που καταλήγουν στην κορυφή v και με $d_b(v)$ το πλήθος των μπλε πλευρών που καταλήγουν σε αυτήν, έχουμε τις εξής δυο περιπτώσεις:

1. $d_r(v)$≥R(m-1,n) οπότε όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει πως υπάρχει είτε ένα μπλε πλήρες υπογράφημα K_n είτε ένα κόκκινο πλήρες υπογράφηκα K_m και το ζητούμενο έχει δηχθεί.
2. $d_r(v)$<R(m-1,n) και επειδή οι δυο αυτοί αριθμοί είναι άρτιοι (άρα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους είναι τουλάχιστον 2) έχουμε ότι: $d_r(v)$≤R(m-1,n)-2 όμως d(v)= $d_r(v)$+ $d_b(v)$= R(m-1,n)+ R(m,n-1)-2 και αφού $d_r(v)$≤R(m-1,n)-2 συνάγουμε από την προηγούμενη ισότητα πως $d_b(v)$≥ R(m,n-1) και άρα κατά τα γνωστά το K_ρ θα περιέχει είτε ένα κόκκινο K_m είτε ένα μπλε K_n και το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

Παρατήρηση

από το θεώρημα 2.4 προκύπτει για m=3:

$$R(3,n) \leq R(2,n) + R(3,n\text{-}1) \leq n + \binom{3+n-1-2}{2} = n + \binom{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Πόρισμα 2.2

Μπορεί να βρεθεί καλλίτερο φράγμα για τον R(3,n), το: $R(3,n) \leq \frac{n^2+3}{2}$

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή, η παραπάνω πρόταση ισχύει για n=3 (αφού όπως έχουμε απόδειξη πιο πάνω R(3,3)=6)

Υποθέτουμε επαγωγικά πως ισχύει για n≥4: $R(3,n\text{-}1) \leq \frac{(n-1)^2+3}{2}$

Θεωρούμε το R(3,n) από το θεώρημα 2.4 προκύπτει πως:

$$R(3,n) \leq R(2,n) + R(3,n\text{-}1) = n + R(3,n\text{-}1) \leq n + \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2+4}{2}$$

Αρκεί επομένως να δείξουμε πως στην παραπάνω σχέση ισχύει μόνο η ανισότητα, περνούμε περιπτώσεις:

- Έστω n περιττός τότε n^2+4 περιττος και $R(3,n) < \frac{n^2+4}{2}$ αφού ο R(3,n) ακέραιος και ο $\frac{n^2+4}{2}$ προφανώς κλασματικός.
- Έστω n άρτιος τότε:
    1. Αν $R(3,n\text{-}1) < \frac{(n-1)^2+3}{2}$ προκύπτει: $R(3,n) \leq R(2,n) + R(3,n\text{-}1) = n + R(3,n\text{-}1) < n + \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2+4}{2}$ δηλαδή όντως ισχύει μόνο η ανισότητα
    2. Αν $R(3,n\text{-}1) = \frac{(n-1)^2+3}{2}$ τότε ο R(3,n-1) είναι άρτιος ως άθροισμα αρτίων καθώς: $R(3,n\text{-}1) = \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2}{2} - n + 2$ και υποθέσαμε πως n άρτιος άρα από το πόρισμα 2.1: $R(3,n) < n + \frac{(n-1)^2+3}{2} = \frac{n^2+4}{2}$ ■

Όσο αναφορά τους αριθμούς Ramsey $R(m,n)$ ελάχιστοι είναι γνωστοί αφού ναι μεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα πάνω όρια τους από τα παραπάνω θεωρήματα άλλα ακόμα είναι πολύ μεγάλη η απόσταση αυτών των πάνω ορίων από τα αντίστοιχα κάτω όρια (τα οποία υπολογίζονται με κατάλληλα επιχειρήματα ανά περίπτωση).

Συνήθως τα προαναφερθέντα κάτω όρια υπολογίζονται με την εξής μεθοδολογία: Έστω το άνω φράγμα L ενός αριθμού $R(m,n)$ περνούμε το πλήρες γράφημα K_{L-1} και μέσω ενός διχρωματισμού του αποδεικνύουμε πως δεν υπάρχουν σε αυτό τα αντίστοιχα μονοχρωματικά υπογραφήματα K_m, K_n. Προφανώς όμως ο υπολογισμός όλων των διχρωματισμών ενός πλήρους γραφήματος γίνεται εξαιρετικά δύσκολος καθώς η τάξη του γραφήματος ανεβαίνει.
Χαρακτηριστικά ο Paul Erdős αναφέρει:

> «Φανταστείτε πως μια εξωγήινη και κατά πολύ ανώτερη δύναμη προσγειώνετε στον πλανήτη μας απαιτώντας την τιμή του R(5,5) ειδάλλως θα μας καταστρέψει. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να επιστρατεύσουμε όλους τους γήινους μαθηματικούς και υπολογιστές σε μια (απέλπιδα) προσπάθεια να βρούμε αυτήν την τιμή. Αν όμως αντί για τον R(5,5) απαιτήσουν τον R(6,6) πιστεύω πως άπλα θα πρέπει να προσπαθήσουμε να καταστρέψουμε τους εξωγήινους.»

Παρόλα αυτά υπάρχει πίνακας που αναφέρει όλες τις μέχρι τώρα γνώστες τιμές (όπως το $R(3,3)=6$ το οποίο υπολογίσαμε πιο πριν) και τις μέχρι τώρα καλύτερες προσεγγίσεις των υπολοίπων αριθμών Ramsey όπως αυτές προκύπτουν από τον υπολογισμό των πάνω και κάτω ορίων τους(ο συγκεκριμένος πίνακας συντάχτηκε από τον Stanisław Radziszowski). Παραθέτουμε αυτόν τον πίνακα για τιμές των m,n μέχρι 10.

m,n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40-43
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84	73-115	92-149
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	125-316	143-442
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	127-495	169-780	179-1171
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	216-1031	233-1713	289-2826
8	1	8	28	56-84	101-216	127-495	216-1031	282-1870	317-3583	317-6090
9	1	9	36	73-115	125-316	169-780	233-1713	317-3583	565-6588	580-12677
10	1	10	40-43	92-149	143-442	179-1171	289-2826	317-6090	580-12677	798-23556

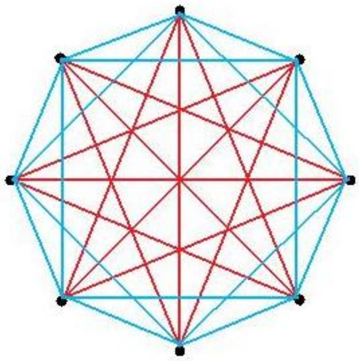
Παράδειγμα 3

R(3,4)=9

Απόδειξη

Προφανώς ο R(2,4)=4 είναι άρτιος και ο R(3,3)=6 είναι επίσης άρτιος άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το πόρισμα 2.1 και να βρούμε ένα άνω φράγμα του R(3,4), συνεπώς: $\mathrm{R}(3,4) < \mathrm{R}(2,4) + \mathrm{R}(3,3) = 10$

Μπορούμε να βρούμε όμως παράδειγμα διχρωματισμού ενός K_8 τέτοιον ώστε να μην υπάρχει κόκκινο K_3 η μπλε K_4



Άρα $\mathrm{R}(3,4) > 8$ και αφού όπως μόλις αποδείξαμε R(3,4)<10 έχουμε πως $\mathrm{R}(3,4) = 9$

Παράδειγμα 4

R(3,5)=14

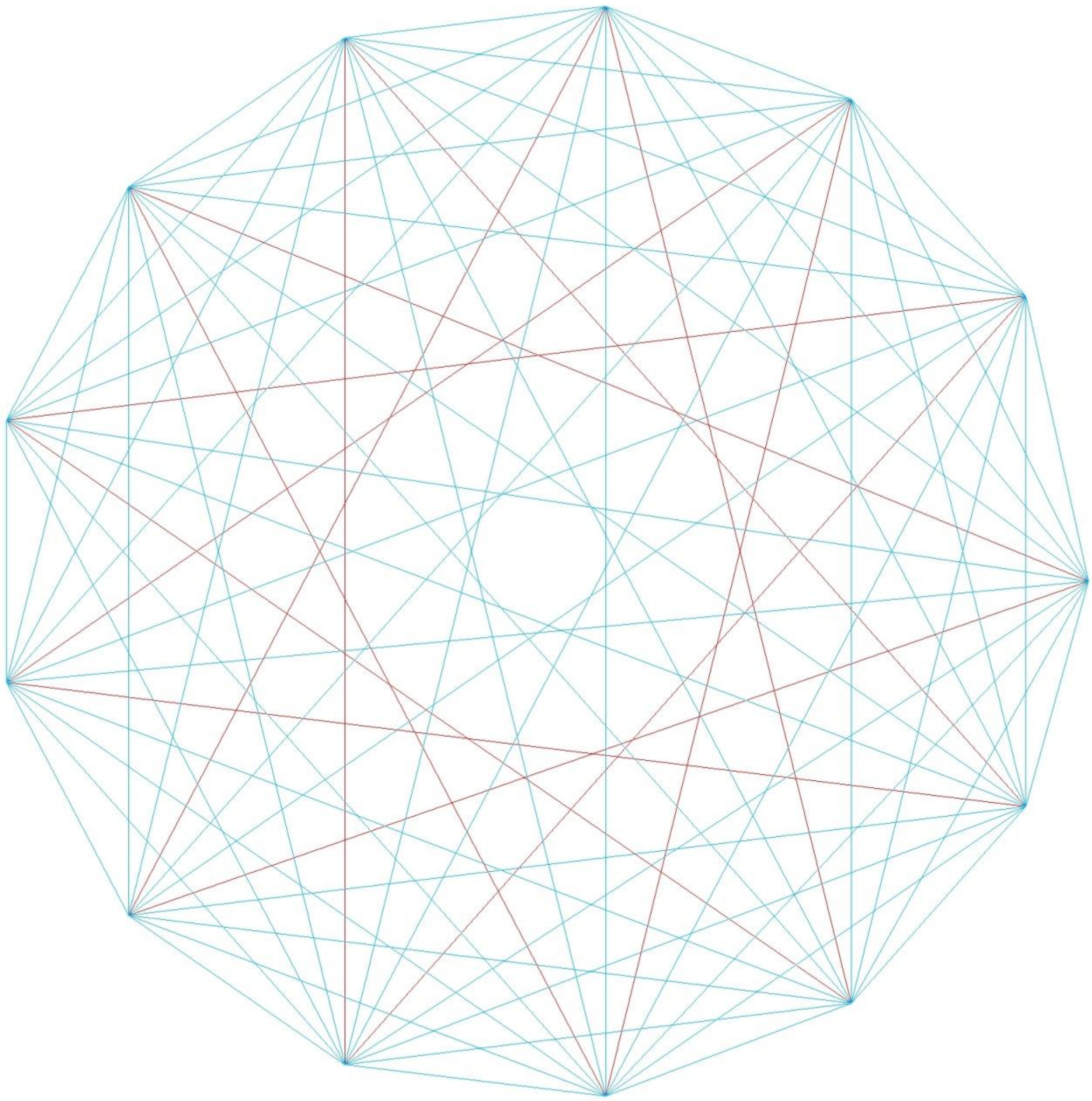
Απόδειξη

Όπως παραπάνω και εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.4 βρίσκουμε το άνω φράγμα του R(3,5) το οποίο είναι: $\mathrm{R}(3,5) \leq \mathrm{R}(2,5) + \mathrm{R}(3,4) = 5 + 9 = 14$

Κατά τα γνωστά πρέπει να βρούμε έναν διχρωματισμό του K_{13} τέτοιον ώστε να μην υπάρχει κόκκινο K_3 η μπλε K_5 και επομένως R(3,5)>13 έτσι ώστε να συνάγουμε πως R(3,5)=14

Ο διχρωματισμός αυτός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Άρα $R(3,4)>13$ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε πως $R(3,4)=14$.



Παράδειγμα 5

R(4,4)=18

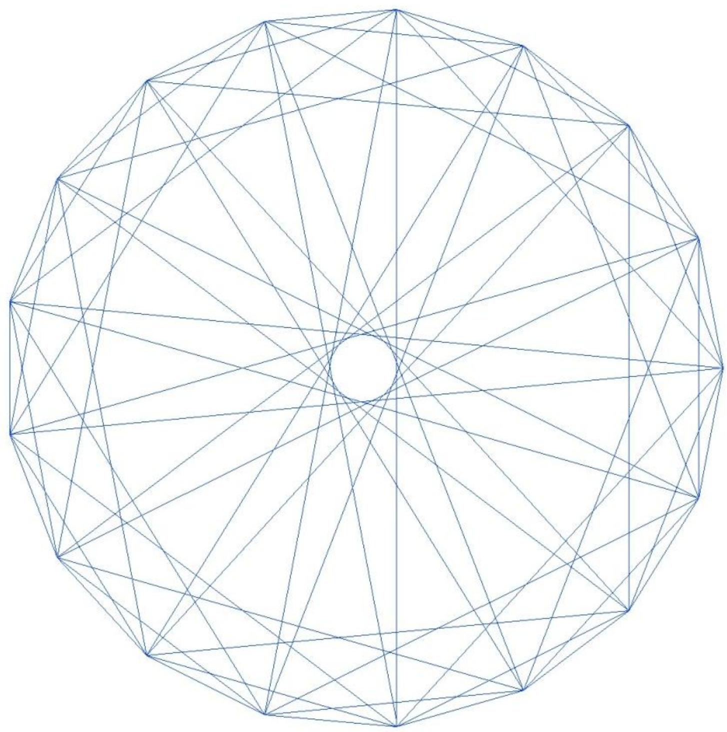
Απόδειξη

Όπως και στα παραπάνω παραδείγματα εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.4 ώστε να βρούμε το άνω φράγμα του $\mathrm{R}(4,4)$ το οποίο είναι: $\mathrm{R}(4,4) \leq \mathrm{R}(3,4) + \mathrm{R}(4,3) = 9 + 9 = 18$

Κατά τα γνωστά πάλι πρέπει να βρούμε έναν διχρωματισμό του K_{17} τέτοιον ώστε να μην υπάρχει κόκκινο K_4 η μπλε K_4 και επομένως R(4,4)>17 έτσι ώστε να συνάγουμε τελικά πως R(4,4)=18. Ο ζητούμενος 2-χρωματισμος προκύπτει εάν σε ένα K_{17} (με κορυφές αριθμημένες από το 0 έως το 16) η πλευρά (i,j) χρωματίζεται μπλε αν i-j είναι τετραγωνικό υπόλοιπο στο $\mathbb{Z}_{17}$ δηλαδή αν

i-j=1,2,4,8,9,13,15,16(mod 17)

το γράφημα που προκύπτει φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε στον παραπάνω 2-χρωματισμο δεν περιέχεται μονοχρωματικό K_4 και η απόδειξη έχει τελείωσε.

Όσο αναφορά χρωματισμούς με περισσότερα από δυο χρώματα είναι γνωστό ότι $30 \leq R(3,3,4) \leq 31$ και ο μονός γνωστός αριθμός Ramsey είναι ο $R(3,3,3)=17$ το οποίο θα αποδείξουμε σαν εφαρμογή του παρακάτω γενικότερου θεωρήματος:

Θεώρημα 2.5

$R_k(3)=R_k(3,\ldots,3) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1$ και για $k=2,3$ ισχύει η ισότητα

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Για $k=2$ έχουμε $R(3,3) \leq 6$ που ισχύει όπως έχουμε δει στο θεώρημα 2.4 (και μάλιστα ισχύει η ισότητα όπως αποδείξαμε)

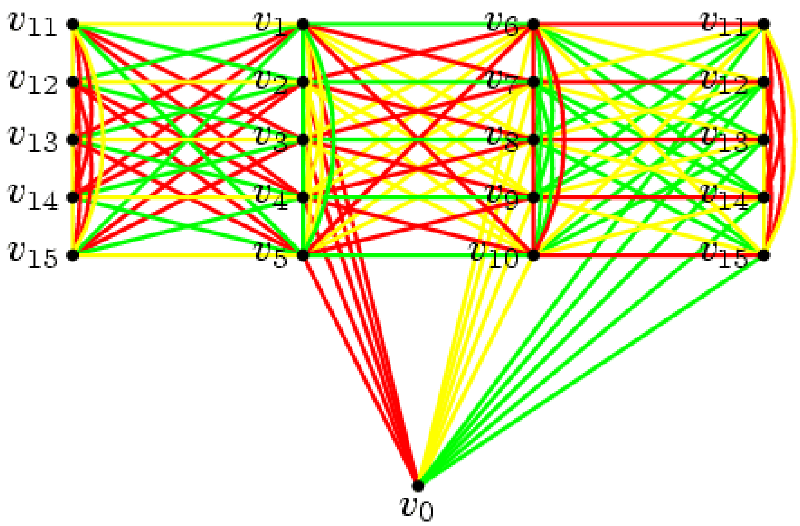
Έστω ότι η υπόθεση μας ισχύει για k, θα την αποδείξουμε για $k+1$

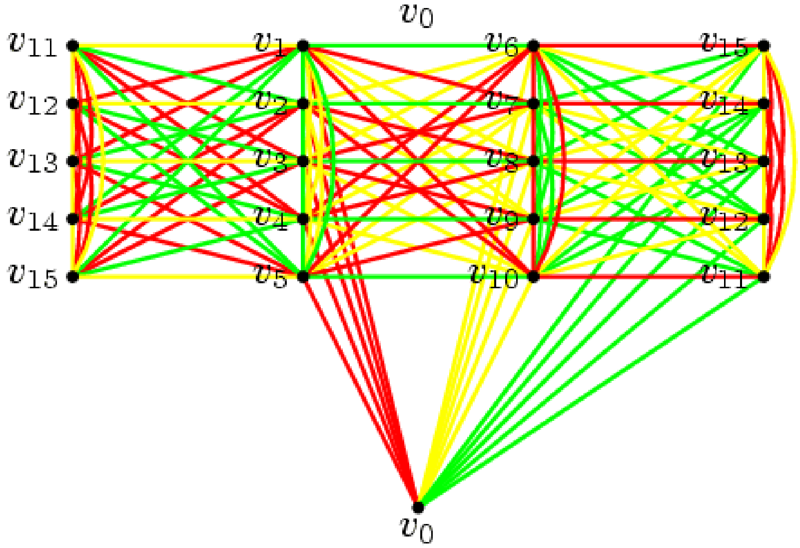
Θεωρούμε έναν χρωματισμό του $K^{\lfloor e(k+1)! \rfloor + 1}$ με $k+1$ χρώματα και έστω χ μια τυχαία κορυφή του γραφήματος μας, αφού το $K^{\lfloor e(k+1)! \rfloor + 1}$ είναι πλήρες θα υπάρχουν $\lfloor e(k+1)! \rfloor$ πλευρές που θα προσπίπτουν στην χ οι οποίες θα χρωματίζονται με $k+1$ χρώματα, άρα από την αρχή του περιστερεώνα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα χρώμα από τα $k+1$ (έστω κόκκινο) που θα χρωματίζει τουλάχιστον $\lfloor \frac{1+(k+1)\lfloor ek! \rfloor - 1}{k+1} \rfloor + 1 = 1 + \lfloor ek! \rfloor$ από αυτές τις πλευρές.

Έστω τώρα S το σύνολο της κόκκινης γειτονιάς της κορυφής χ, δηλαδή των κορυφών που είναι γείτονες της χ μέσω κόκκινης πλευράς.

- Αν στο σύνολο αυτό υπάρχουν δυο κορυφές που γειτονεύουν με κόκκινη πλευρά τότε στο $S \cup \{\chi\}$ προφανώς υπάρχει ένα κόκκινο K_3 και άρα το θεώρημα απεδείχθη.
- Αν στο σύνολο αυτό δεν περιέχεται κόκκινη πλευρά τότε έχουμε ένα σύνολο κορυφών το οποίο παράγει ένα πλήρες υπογράφημα με $1+\lfloor ek! \rfloor$ κορυφές χρωματισμένο με k χρώματα, επομένως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε πως υπάρχει τουλάχιστον ένα χρώμα από τα k που δημιουργεί μονοχρωματικό K_3 και η απόδειξη έχει τελείωσε. ∎

Όπως προκύπτει από το θεώρημα λοιπόν $R(3,3,3) \leq 17$, για να αποδείξουμε την ισότητα αρκεί να βρούμε κατά τα γνωστά έναν τριχρωματισμό του K_{16} τέτοιον ώστε να μην υπάρχουν μονοχρωματικά τρίγωνα. Έχουν βρεθεί δυο τέτοιοι χρωματισμοί οι οποίοι παρατίθενται στο ακόλουθο σχήμα (οι κορυφές συμβολίζονται με v_i $, i \in \{0,\ldots,15\}$, και κάποιες από αυτές έχουν σημειωθεί δυο φορές για καλύτερη εποπτεία του γραφήματος)



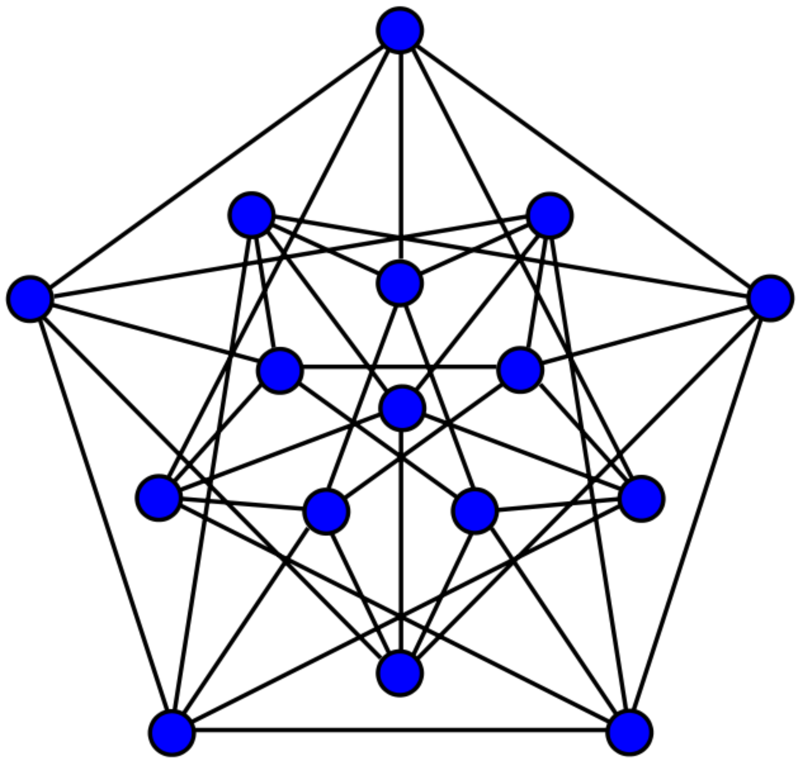


Πράγματι όπως φαίνεται και στα παραπάνω γραφήματα για να μην υπάρχει τριχρωματισμός του K_{16} με μονοχρωματικά K_3 πρέπει η κάθε μονοχρωματική γειτονιά κάθε τυχαίας κορυφής να έχει το πολύ πέντε στοιχεία (διότι αν περιέχει π.χ. 6 στοιχειά έχουμε μονοχρωματικό τρίγωνο αφού $R(3,3)=6$) και συνεπώς κάθε τυχαία κορυφή να έχει βαθμό το πολύ 15.

Άρα πράγματι $R(3,3,3)>16$ και επομένως $R(3,3,3)=17$. ∎

Παρατηρήσεις

- Αν πάρουμε οποιοδήποτε μονοχρωματικό υπογράφηκα του K_{16}, αυτό αποτελεί έναν γράφο Clebsch (δηλαδή το ισχυρά κανονικό γράφημα με παραμέτρους (16, 5, 0, 2).



- Είναι γνωστό ότι στο K_{15} υπάρχουν ακριβώς δυο χρωματισμοί στους οποίους δεν εντοπίζονται μονοχρωματικά K_3 και παράγονται με την διαγραφή οποιασδήποτε κορυφής από τους προαναφερθέντες χρωματισμούς του K_{16}

Στη συνέχεια θα δούμε ένα θεώρημα για χρωματισμούς με k χρώματα όπου $k>2$ τυχαίος πεπερασμένος ακέραιος.

Θεώρημα 2.6

Έστω $a_1,a_2,\ldots,a_k \geq 1$ δοσμένοι φυσικοί αριθμοί με $k>2$. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος φυσικός αριθμός $n=R_k(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ τέτοιος ώστε κάθε χρωματισμός των πλευρών του K_n με k χρώματα έχει την ιδιότητα να περιέχει, για κάποιο i με $1 \leq i \leq k$, ένα πλήρες γράφημα K_{ai} , όλες οι πλευρές του όποιου έχουν το χρώμα i.

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Για $k=2$ το θεώρημα ισχύει όπως έχουμε διαπιστώσει στο θεώρημα 2.4 και συγκεκριμένα έχουμε: $R(a_1,a_2) \leq \binom{a1+a2-2}{a1-1}$

Υποθέτουμε πως $k>3$ και ότι υπάρχει ο αριθμός $R_k(b_1,\ldots,b_k)$ για κάθε $b_1,\ldots.b_k$

Ισχυρισμός: $R_{k+1}(a_1,\ldots,a_{k+1}) \leq R_k(a_1,\ldots,a_{k-1},R_2(a_k,a_{k+1}))$

Θεωρούμε ένα γράφημα με $R_k(a_1,\ldots,a_{k-1},R_2(a_k,a_{k+1}))$ κορυφές του όποιου τις πλευρές χρωματίζουμε με $k+1$ χρώματα. Προς στιγμήν ταυτίζουμε το χρώμα τάξης k με το χρώμα τάξης $k+1$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι είτε υπάρχει ένα πλήρες γράφημα K_{ai} όλες οι πλευρές του όποιου είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης i για $1 \leq i \leq k\text{-}1$ οπότε το θεώρημα έχει δηχθεί, είτε το τελευταίο χρώμα που πρόεκυψε από τη στιγμιαία ταύτιση των χρωμάτων τάξης k και $k+1$ περιέχει ένα πλήρες γράφημα G με $R_2(a_k,a_{k+1})$ κορυφές. Όμως οι πλευρές του G είναι όλες χρωματισμένες με δυο χρώματα τα οποία δεν ταυτίζονται πλέον και άρα από το θεώρημα 2.4 αφού η τάξη του G είναι $R_2(a_k,a_{k+1})$ έπεται ότι αυτό περιέχει είτε ένα πλήρες γράφημα K_{ak} όλες οι πλευρές του όποιου είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης k είτε ένα πλήρες γράφημα K_{ak+1} του όποιου όλες οι πλευρές είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης $k+1$. ■

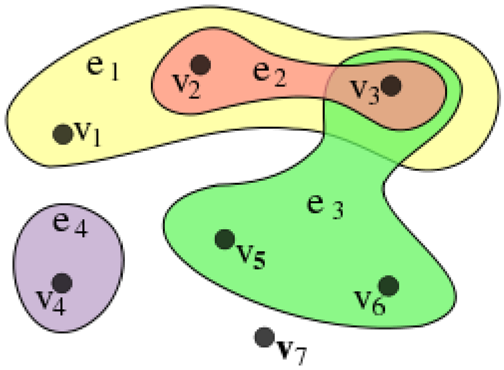
Τώρα θα ορίσουμε τα υπεργραφήματα και τα r-ομοιόμορφα υπεργραφήματα ώστε να κάνουμε μια πρώτη γενίκευση των θεωρημάτων που έχουν διατυπωθεί μέχρι τώρα

Ορισμός

Ένα <u>υπεργράφημα</u> (H) αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών $V(H)$, ένα πεπερασμένο σύνολο πλευρών $E(H)$ και έναν νόμο που αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του $V(H)$ σε κάθε πλευρά του συνόλου $E(H)$. Το υπεργράφημα συμβολίζεται με $H=(V(H),E(H))$

Στα υπεργραφήματα που ορίσαμε δεν επιτρέπεται να υπάρχουν πολλαπλές πλευρές, δηλαδή διαφορετικές πλευρές που να περιέχουν μόνο τις ίδιες κορυφές.

Ένα υπεργράφημα είναι <u>r-ομοιόμορφο</u> αν κάθε πλευρά του περιέχει ακριβώς r διαφορετικές κορυφές. Προφανώς ένα 2-ομοιομορφο υπεργράφημα είναι το συνηθισμένο γράφημα ■

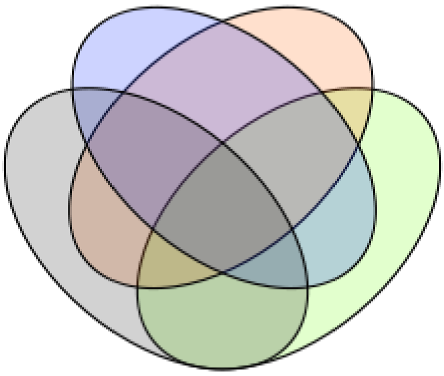


- Στο πάνω σχήμα βλέπουμε ένα υπεργράφημα με πλευρές

  $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\} = \{\{v_1,v_2,v_3\}, \{v_2,v_3\}, \{v_3,v_5,v_6\}, \{v_4\}\}$.

- Ενώ στο κάτω σχήμα ένα 8-ομοιομορφο υπεργράφημα οπού

  Οι πλευρές είναι οι ελλείψεις και οι κορυφές οι τομές τους



Τα θεωρήματα 2.4 και 2.6 που διατυπώθηκαν πιο πάνω μπορούν γενικευθούν σε r-ομοιόμορφα υπεργραφήματα για χρωματισμούς με 2 και k χρώματα.

Ορίζουμε $R^r(s,t)$ να είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο κάθε χρωματισμός με δυο χρώματα του συνόλου X^r όλων των r-άδων του συνόλου X δίνει είτε ένα κόκκινο σύνολο με s στοιχειά είτε ένα μπλε με t.

Ένα σύνολο (υποσύνολο του Χ) είναι μονοχρωματικό αν όλα τα στοιχειά του που είναι r-άδες του αρχικού μας συνόλου, είναι μονοχρωματικά.

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα που είναι γενίκευση του θεωρήματος 2.4 και αποδεικνύει ότι ο αριθμός $R^r(s,t)$ είναι πεπερασμένος και δίνει ένα άνω φράγμα.

Θεώρημα 2.7

Έστω $1<r<\min\{s,t\}$. Τότε ο αριθμός $R^r(s,t)$ είναι πεπερασμένος και ισχύει:

$$R^r(s,t)\leq R^{r-1}(R^r(s-1,t),R^r(s,t-1))+1$$

Απόδειξη

Προφανώς $R^2(s,t)= R(s,t)$

Υποθέτουμε πως οι αριθμοί: $R^{r-1}(u,v)$, $R^r(s-1,t)$, $R^r(s,t-1)$ είναι πεπερασμένοι

Έστω Χ ένα σύνολο με $R^{r-1}(R^r(s-1,t), R^r(s,t-1))+1$ στοιχειά , θα δείξουμε ότι σε κάθε χρωματισμό του X^r με τα δυο χρώματα -έστω κόκκινο και μπλε- θα υπάρχει είτε ένα κόκκινο s-σύνολο είτε ένα μπλε t-σύνολο.

Θεωρούμε έναν τυχαίο χρωματισμό του X^r και έστω $\chi\in X$.

Ορίζουμε έναν χρωματισμό με τα δυο αυτά χρώματα όλων των (r-1) συνόλων του συνόλου $Y=X-\{\chi\}$ χρωματίζοντας το στοιχείο $\sigma\in Y^{r-1}$ με το χρώμα του στοιχείου $\{\chi\}\cup\sigma \in X^r$.

Π.χ. αν $r=4$ η πλευρά $\sigma=y_1y_2y_3$ θα χρωματιστεί μπλε αν η πλευρά $\chi\, y_1y_2y_3$ είναι μπλε στον αρχικό σχεδιασμό.

Από τον ορισμό της συνάρτησης $R^{r-1}(u,v)$ το Y είτε θα περιέχει ένα κόκκινο υποσύνολο Ζ με $u=R^r(s-1,t)$ στοιχειά είτε ένα μπλε υποσύνολο Ζ' με $v= R^r(s,t-1)$ στοιχειά.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ισχύει το δεύτερο και η απόδειξη για την πρώτη περίπτωση είναι εντελώς όμοια.

Εξετάζουμε τον χρωματισμό του Z'^r. Αν το Ζ' περιέχει κόκκινο s-σύνολο τότε αφού $Z'^r\subset X^r$ συμπεραίνουμε πως και το Χ περιέχει αυτό το κόκκινο s-σύνολο και το θεώρημα αποδείχτηκε.

Αν το Ζ' δεν περιέχει κόκκινο s-σύνολο περιέχει ένα t-1 μπλε σύνολο η ένωση του όποιου με το $\{\chi\}$ μας δίνει το ζητούμενο μπλε t-σύνολο στο Χ. ∎

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι μια ευρύτερη γενίκευση για χρωματισμούς με $k>2$ χρώματα και είναι το θεώρημα που απέδειξε ο Ramsey το 1930.

Θεώρημα 2.8

Θεωρούμε το πλήρες r-ομοιόμορφο υπεργράφημα με n κορυφές K_n^r, και τους αριθμούς $\alpha_1,\dots,\alpha_\kappa \geq 1$ με $k>2$ και $1<r<\min\{\alpha_i,\dots,\alpha_\kappa\}$. Υπάρχει ένας ελάχιστος φυσικός αριθμός $n=R_k^r(\alpha_1,\dots,\alpha_\kappa)$ τέτοιος ώστε κάθε χρωματισμός των πλευρών του K_n^r με k χρώματα έχει την ιδιότητα να περιέχει για τουλάχιστον ένα i, $1\leq i\leq k$ ένα α_i-υποσύνολο του $V(K_n^r)$ του όποιου όλα τα r-υποσύνολα είναι χρωματισμένα με το χρώμα i-τάξης.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 2.7, συγκεκριμένα:

Γνωρίζουμε πως $R_k^2(\alpha_1,\dots,\alpha_\kappa)= R_k(\alpha_1,\dots,\alpha_\kappa)$ οπότε υποθέτουμε πως $r>2$ και $\alpha_i\geq 2$ για να αποφύγουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις.

Έστω κατά τα τα γνωστά η κορυφή $\chi\in V(K_n^r)$, χρωματίζουμε όλες τις (r-1)-αδεές του συνόλου $V(K_n^r)-\{\chi\}$, έστω S μια από αυτές, με το χρώμα που έχει η αντίστοιχη r-αδα στο σύνολο $V(K_n^r)$, δηλαδή με το χρώμα της $S\cup\{\chi\}$.

Για $r=3$ έχουμε την περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος. Έτσι οι πλευρές του υπεργραφήματος K_{n-1}^{r-1} έχουν χρωματιστεί με k χρώματα. Από την επαγωγική υπόθεση στον αριθμό r αν για το πλήθος των κορυφών ισχύει η σχέση:

$$n-1\geq R_k^{r-1}(b_1,\dots,b_\kappa)$$

Τότε για κάποιο i με $1\leq i\leq k$ θα υπάρχει ένα b_i υποσύνολο του $V(K_n^r)-\{\chi\}$ δηλαδή ένα σύνολο με $V_i\subseteq V(K_n^r)-\{\chi\}$ με $|V_i|=b_i$, τέτοιο ώστε οι r-αδεές του $V_i\cup\{\chi\}$ που περιέχουν την κορυφή χ θα είναι χρωματισμένες με το χρώμα i-τάξης.

Αν εκλέξουμε λοιπόν τους αριθμούς b_i, $1\leq i\leq k$

$$b_i= R_k^r(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i-1,\alpha_{\iota+1},\dots,\alpha_k)$$

διαπιστώνουμε ότι αυτοί υπάρχουν από την επαγωγική υπόθεση οπότε έχουμε ότι είτε το σύνολο V_i περιέχει ένα α_j-υποσύνολο, δηλαδή ένα υποσύνολο με α_j στοιχειά, όλες οι r-αδεές του όποιου είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης j για $1\leq j\leq k$, $j\neq i$ οπότε έχουμε το ζητούμενο, είτε το V_i περιέχει ένα (α_i-1)-υποσύνολο ‘V όλες οι r-αδεές του όποιου είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης i οπού και σε αυτήν την περίπτωση το θεώρημα απεδείχθη καθώς οι r-αδεές του συνόλου $‘V\cup\{\chi\}$ είναι χρωματισμένες με το χρώμα τάξης i και το σύνολο αυτό είναι ένα α_i-υποσύνολο του συνόλου $V(K_n^r)$. ■

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα για την εύρεση κάτω ορίου για τους αριθμούς Ramsey. Το θεώρημα αυτό ήταν από τα πρώτα αυτού του είδους και απεδείχθη από τον Erdös το 1947 στο πλαίσιο των πιθανοθεωρητικων μεθόδων η αλλιώς της θεωρίας των τυχαίων γραφημάτων.

Θεώρημα 2.9

$R(k,k) \geq 2^{k/2}$

Απόδειξη

Έχουμε τις προφανείς σχέσεις:

$$R(1,k)=R(k,1)=1$$

$$R(2,k)=R(k,2)=k$$

Οπότε υποθέτουμε πως $k \geq 3$

Συμβολίζουμε με Y_n το σύνολο των γραφημάτων με κορυφές το σύνολο $\{v_1,\ldots,v_n\}$ και με Y_n^k το σύνολο των υπογραφημάτων του Y_n που περιέχουν ένα πλήρες γράφημα με $k<n$ κορυφές. Προφανώς $|Y_n|=2^{\binom{n}{2}}$ αφού κάθε υποσύνολο από τις $\binom{n}{2}$ δυνατες πλευρές v_iv_j προσδιορίζει ένα γράφημα του Y_n.

Παίρνουμε ένα συγκεκριμένο υποσύνολο k κορυφών από το σύνολο $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Τότε αφού το κάθε υποσύνολο από τις $\binom{n}{2}-\binom{\kappa}{2}$ δυνατές πλευρές προσδιορίζει ένα γράφημα του Y_n που περιέχει ένα πλήρες υπογράφηκα αποτελούμενο από τις k αυτές κορυφές συμπεραίνουμε πως ο αριθμός των γραφημάτων του Y_n που περιέχουν ένα πλήρες υπογράφηκα αποτελούμενο από τις k συγκεκριμένες αυτές κορυφές είναι $2^{\binom{n}{2}-\binom{\kappa}{2}}$. Εφοσων υπαρχουν $\binom{n}{k}$ διάφορα υποσύνολα του $\{v_1,\ldots,v_n\}$ με k το πλήθος στοιχειά έχουμε ότι $|Y_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{\kappa}{2}}$.

Παράδειγμα 6

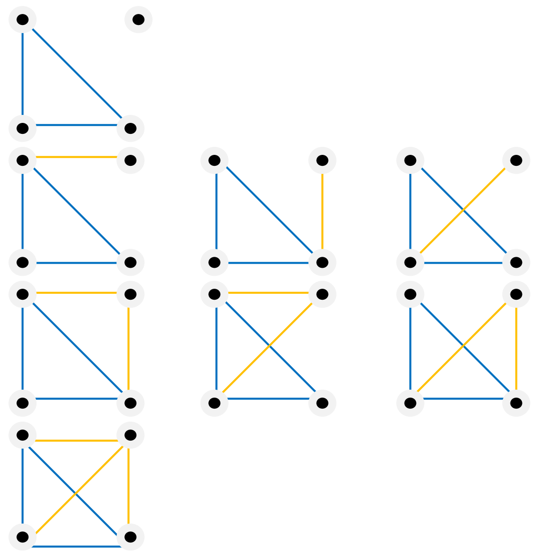
Το σύνολο Y_5 με σύνολο κορυφών $\{v_1,\ldots,v_5\}$ έχει $|Y_5|=2^{\binom{5}{2}}=1024$ και συγκεκριμένα η αριθμητική σχέση: αριθμός υπογραφημάτων-αριθμός πλευρών (πέραν των τετριμμένων: καμία πλευρά-ένα υπογράφηκα, 10 πλευρες-1(πλήρες) υπογράφηκα) φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Αρ.πλευρων	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Αρ.υπγρφ.	10	45	120	210	252	210	120	45	10

Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια το Y_5^3 οπού πρέπει να πάρουμε όλα τα διαφορετικά υποσύνολα με 3 στοιχειά από το $\{v_1,\ldots,v_5\}$ τα οποία είναι 10 και συγκεκριμένα τα:

$\{v_1,v_2,v_3\}$, $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_5\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_5\}$, $\{v_1,v_4,v_5\}$, $\{v_2,v_3,v_4\}$, $\{v_2,v_3,v_5\}$, $\{v_2,v_4,v_5\}$, $\{v_3,v_4,v_5\}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλεγούμε το πρώτο υποσύνολο $\{v_1,v_2,v_3\}$ και σχεδιάζουμε ένα K_3 με αυτές τις κορυφές. Στη συνέχεια προσθέτουμε διαδοχικά 1, 2 και 3 πλευρές και παίρνουμε όλα τα διαφορετικά γραφήματα που προκύπτουν όπως φαίνεται και στο σχήμα



Τα οποία προφανώς έχουν πλήθος $2^{\binom{4}{3}-\binom{3}{2}} = 8$

Αφού λοιπόν υπάρχουν 10 δυνατά 3-συνολα που το καθένα παράγει 8 διαφορετικά γραφήματα, θα έχουμε 10.8=80 γραφήματα τα οποία όμως δεν είναι όλα μεταξύ τους διαφορετικά αφού το K_4 προκύπτει από όλα τα 3-συνολα κατά την πρόσθεση 3 πλευρών άρα $|Y_4^3| \leq 80$ και εν γένει $|Y_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{\kappa}{2}}$. Άρα διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{|Y_n^k|}{|Y_n|} \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{\kappa}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \binom{n}{k} 2^{-\binom{\kappa}{2}} < \frac{n^k}{k!} 2^{-\binom{\kappa}{2}}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} < \frac{n.n\dots n\ (k\#)}{k!}$$

Έστω ότι $n<2^{k/2}$, έχουμε:

$$\frac{|Y_n^k|}{|Y_n|} < \frac{n^k}{k!} 2^{-\binom{\kappa}{2}} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!} 2^{\frac{-k(k-1)}{2}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

Οπού η τελευταία ανισότητα ισχύει επαγωγικά. Άρα λιγότερα από τα μισά γραφήματα του συνόλου Y_n περιέχουν πλήρες γράφημα με k κορυφές. Επίσης $Y_n=\{G:\breve{G}\in Y_n\}$ οπού $\breve{G}$ το συμπληρωματικό γράφημα του G έπεται ότι λιγότερα από τα μισά γραφήματα του Y_n περιέχουν ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.

Άρα υπάρχουν μερικά γραφήματα του Y_n που δεν περιέχουν ούτε ένα πλήρες υπογράφημα με k κορυφές ούτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.

Ορίζουμε τον αριθμό Ramsey $R(k,k)$ σαν τον μικρότερο ακέραιο τέτοιον ώστε κάθε γράφημα με $R(k,k)$ κορυφές είτε περιέχει ένα πλήρες υπογράφηκα k κορυφών είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών. Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον χρωματικό ορισμό του αριθμού Ramsey.

Για $n<2^{k/2}$ λοιπόν υπάρχουν γραφήματα που δεν περιέχουν ούτε ένα πλήρες γράφημα k κορυφών και ούτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών ενώ για $n>2^{k/2}$ όλα τα γραφήματα θα περιέχουν είτε ένα πλήρες υπογράφηκα k κορυφών είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών, άρα $R(k,k)\geq 2^{k/2}$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Το θεώρημα Ramsey μπορεί να επεκταθεί και σε άπειρα γραφήματα στα οποία όμως επειδή δεν υπάρχει πλέον εποπτική δυνατότητα χρησιμοποιούμε κυρίως συνολοθεωρητική ορολογία.

Θεώρημα 2.10

Έστω X ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, χρωματίζουμε όλα τα στοιχειά του X^n (του συνόλου όλων των υποσυνόλων του X με n το πλήθος στοιχειά δηλαδή) με k διαφορετικά χρώματα. Τότε υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο M του X τέτοιο ώστε όλα τα υποσύνολα του με μέγεθος n να έχουν το ίδιο χρώμα.

3.

Γενικευμένοι αριθμοί Ramsey

Η θεωρία Ramsey στα γραφήματα ξεκίνησε να αναπτύσσεται στις αρχές του 1970 και αποτελεί έναν από τους πιο ενεργούς ερευνητικά τομείς της θεωρίας Ramsey. Αρχική πρόθεση της ανάπτυξης αυτής ήταν ο μεθοδολογικός προσδιορισμός μεγάλων αριθμών Ramsey $R(m,n)$ που ως τότε (και έως σήμερα) ήταν αδύνατος ο υπολογισμός τους. Η πρώτη αυτή επιδίωξη παρέμεινε ουτοπική όμως όπως πολύ συχνά συμβαίνει στην επιστήμη ο κλάδος έρευνας που αναπτύχτηκε αποδείχτηκε εξαιρετικά ενδιαφέρον και χρήσιμος σε σχέση με άλλες εφαρμογές και άλλα ερωτήματα. Το αποτέλεσμα ήταν η θεωρία Ramsey στα γραφήματα να αυτονομηθεί σαν κλάδος και να αλλάξει προσανατολισμό από τον προσδιορισμό μεγάλων τιμών $R(m,n)$ στον προσδιορισμό γενικευμένων αριθμών Ramsey οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Γενικευμένος Αριθμός Ramsey r(G)

Ο γενικευμένος αριθμός Ramsey $r(G)$, (οπού G ένα τυχαίο η συγκεκριμένο γράφημα) είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε ο οποιοσδήποτε 2-χρωματισμος του K_r να δίνει πάντα ένα μονοχρωματικό υπογράφηκα ισόμορφο του G. Η διάφορα με τους κλασσικούς αριθμούς Ramsey είναι ότι εδώ το γράφημα G μπορεί να είναι ένα τυχαίο γράφημα και όχι ένα πλήρες γράφημα όπως στίς περιπτώσεις που έχουμε δει ως τώρα.

Γενικότερα όταν χρησιμοποιούμε πάνω από 2 χρώματα, έστω k θα συμβολίζουμε τον γενικευμένο αριθμό Ramsey με $r(G;k)$ ενώ όταν έχουμε πάνω από έναν γράφους G, έστω τους $G_1, G_2, \ldots, G_k$ (και προφανώς k χρώματα) θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $r(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ και θα εννοούμε τον μικρότερο ακέραιο r τέτοιον ώστε οποιοσδήποτε χρωματισμός του K_r με k χρώματα θα μας παρέχει για κάποιο i, $1 \leq i \leq k$ ένα i-χρώματος μονοχρωματικό υπογράφηκα G_i.

Η ύπαρξη του αριθμού $r(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ είναι εγγυημένη από το αρχικό θεώρημα του Ramsey αφού τα γραφήματα $G_1, G_2, \ldots, G_k$ είναι υπογραφήματα των αντίστοιχων πλήρων γραφημάτων τους $G_{1c}, G_{2c}, \ldots, G_{kc}$ και επομένως

$r(G_{1c}, G_{2c}, \ldots, G_{kc})=R(G_{1c}, G_{2c}, \ldots, G_{kc})$

οπού G_{ic} το πλήρες υπογράφηκα του K_r του όποιου υπογράφηκα είναι το G_i.

Για να ορίσουμε μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά θεωρήματα της θεωρίας Ramsey στα γραφήματα πρέπει να δώσουμε μερικούς ακόμα γραφοθεωρητικούς ορισμούς.

Χρωματικός αριθμός γραφήματος G

Χρωματισμός κορυφών ενός γραφήματος G είναι μια αντιστοιχία χρωμάτων στις κορυφές του G ώστε δυο γειτονικές κορυφές του G να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ο χρωματικός αριθμός του G συμβολίζεται με $\chi(G)$ και είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματίσουν με αυτόν τον τρόπο τις κορυφές του G. Η ανάλογη έννοια για πλευρές γραφήματος G ονομάζεται χρωματικός δείκτης και συμβολίζεται με $\chi'(G)$.

Βαθμός κορυφής ενός γραφήματος G

Ο βαθμός μιας κορυφής v ενός γραφήματος G είναι ο αριθμός των πλευρών που προσπίπτουν σε αυτήν την κορυφή και συμβολίζεται με $c(v)$. Αντίστοιχα ο μέγιστος αριθμός κορυφής ενός γραφήματος G είναι ο μεγαλύτερος $c(v)$ για τις κορυφές v του G και συμβολίζεται με $c(G)$.

Δέντρο T

Ένα δέντρο είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους και συμβολίζεται με T.

Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα των Chvatal και Harary (1972) που αποτελεί ένα από τα πιο απλά και γενικά θεωρήματα του κλάδου.

Θεώρημα 3.1

$r(G,H) \geq (\chi(G)-1)(c(H)-1) + 1$

Απόδειξη

Έστω $m=(\chi(G)-1)(c(H)-1)$ και κατασκευάζουμε το πλήρες γράφημα K_m το οποίο αποτελείται από $\chi(G)$-1 το πλήθος αντίγραφα του πλήρους γραφήματος $K_{c(H)-1}$ οπού πλευρές ενώνουν κάθε κορυφή του K_m με όλες τις άλλες κορυφές του.

Τώρα χρωματίζουμε όλες τις πλευρές μέσα σε ένα $K_{c(H)-1}$ έστω με το χρώμα 1 και όλες τις υπόλοιπες πλευρές που ενώνουν τις κορυφές του $K_{c(H)-1}$ που επιλέξαμε με όλες τις άλλες κορυφές των υπολοίπων $K_{c(H)-1}$ έστω με το χρώμα 2.

Διαπιστώνουμε πως δεν υπάρχει υπογράφηκα ισόμορφο του G χρωματισμένο με το χρώμα 2 στο K_m καθώς αν υπήρχε θα μπορούσαμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του με $\chi(G)$-1 το πλήθος χρώματα το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο από την υπόθεση ότι ο χρωματικός αριθμός του G είναι $\chi(G)$.

Αντίστοιχα διαπιστώνουμε πως δεν υπάρχει 1-χρωματισμενο υπογράφηκα ισόμορφο με το H καθώς στο 1-χρωματισμενο $K_{c(H)-1}$ έχουμε αριθμό κορυφών προφανώς ίσο με $c(H)$-1 πράγμα που αντιβαίνει πάλι με την αρχική μας υπόθεση πως ο μέγιστος αριθμός κορυφής του H είναι $c(H)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

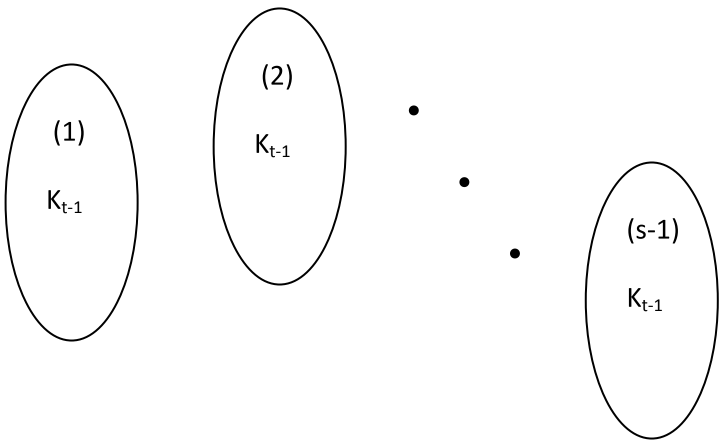
Το θεώρημα 16 μας οδηγεί στο σημαντικό θεώρημα που διατύπωσε ο Chvatal το 1977 και αποτελεί ένα από τα λίγα θεωρήματα που έχουμε στην διάθεση μας για τον προσδιορισμό ακριβών τιμών γενικευμένων αριθμών Ramsey.

Θεώρημα 3.2

Έστω ότι το γράφημα T είναι ένα δέντρο τάξης t. Τότε $r(K_s,T) = (s-1)(t-1)+1$

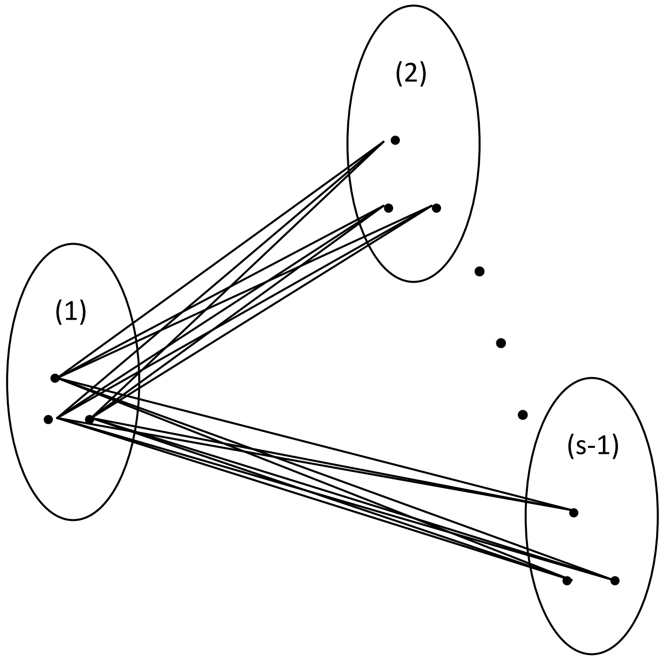
Απόδειξη

Θεωρούμε το μη συνεκτικό γράφημα $G=(s-1)K_{t-1}$ το οποίο αποτελείται από s-1 το πλήθος αντίγραφα του πλήρους γραφήματος με t-1 κορυφές K_{t-1} όπως φαίνεται στο σχήμα



Το G έχει (s-1)(t-1) κορυφές (s-1)$\binom{t-1}{2}$ πλευρές και προφανώς δεν περιέχει το δέντρο T αφού καμιά από το s-1 το πλήθος συνιστώσες δεν έχει t κορυφές.

Στη συνέχεια παίρνουμε το συμπλήρωμα του G το οποίο είναι ένα συνεκτικό γράφημα με τις ίδιες κορυφές οπού όμως πλέον οι s-1 το πλήθος συνιστώσες δεν περιλαμβάνουν μέσα τους καμιά πλευρά ενώ κάθε κορυφή κάθε συνιστώσας συνδέεται με πλευρά με όλες τις άλλες κορυφές όλων των άλλων συνιστωσών. Παραθέτουμε πιο κάτω το αντίστοιχο σχήμα οπού χάρην καλύτερης εποπτείας κάθε συνιστώσα έχει 3 κορυφές.



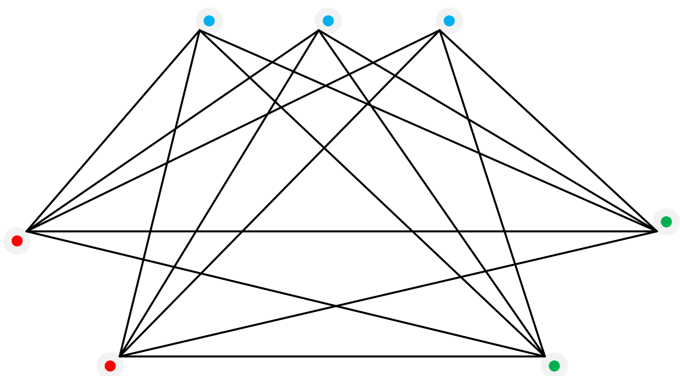
Οι κορυφές είναι και πάλι (s-1)(t-1) το πλήθος ενώ οι πλευρές είναι

$$\binom{(s-1)(t-1)}{2} - (s-1)\binom{t-1}{2}$$

Σύμφωνα με την ορολογία και τον συμβολισμό των διμερών γραφημάτων (διμερές γράφημα είναι το γράφημα οπού το σύνολο των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δυο ξένα υποσύνολα έτσι ώστε κάθε πλευρά του να ενώνει μια κορυφή του ενός υποσυνόλου με μια κορυφή του άλλου υποσυνόλου) το παραπάνω γράφημα είναι ένα πλήρες (s-1)-μέρες γράφημα η αλλιώς γράφημα Turan (προς τιμήν του ομώνυμου μαθηματικού που πρώτος τα χαρακτήρισε το 1941) και συμβολίζονται με $T_{s-1}((s-1)(t-1))$

Αν οι συνιστώσες ενός γραφήματος Turan δεν έχουν όλες τον ίδιο αριθμό κορυφών τότε η μέγιστη διάφορα πλήθους κορυφών μεταξύ τους είναι 1.

Παραθέτουμε ένα $T_3(7)$ με 7 κορυφές και 16 πλευρές οπού όπως είναι φανερό δεν υπάρχει κανένα K_{3+1}.



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το συμπληρωματικό γράφημα του G δεν περιέχει K_s αφού για να περιείχε θα έπρεπε να πάρουμε τουλάχιστον 2 κορυφές σε μια από τις s-1 συνιστώσες οι οποίες όμως από την κατασκευή του συμπληρωματικού του G γραφήματος δεν περιέχουν πλευρές και άρα οι 2 αυτές κορυφές δεν μπορούν να συνδεθούν επομένως δεν μπορούμε να πάρουμε το ζητούμενο πλήρες υπογράφηκα.

Δείξαμε λοιπόν έτσι πως: $r(K_s,T) \geq (s-1)(t-1)+1$

και άρα για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε την αντίθετη συνεπαγωγή, ότι δηλαδή $r(K_s,T) \leq (s-1)(t-1)+1$. Αυτό το σκέλος της απόδειξης θα γίνει επαγωγικά.

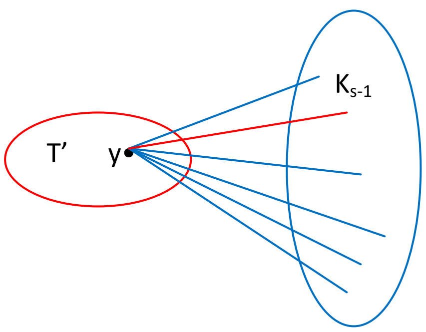
Για $m=2$ η $t=2$ η σχέση ισχύει με τετριμμένο τρόπο.

Έστω ότι η σχέση ισχύει για όλα τα s',t' με $s'+t'<s+t$.

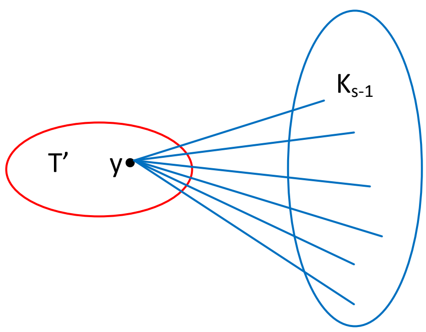
Θεωρούμε ένα 2-χρωματισμο του $K_{(s-1)(t-1)+1}$ έστω με μπλε και κόκκινο. Έστω τώρα το δέντρο T' που παράγεται από το δέντρο T αν αφαιρέσουμε από αυτό μια κορυφή βαθμού 1 (και έστω ότι η κορυφή αυτή x συνδέεται στο δέντρο T με την κορυφή y, επίσης προφανώς σε κάθε δέντρο υπάρχει μια τουλάχιστον κορυφή βαθμού 1).

Από την επαγωγική υπόθεση τώρα το $K_{(s-1)(t-1)+1}$ είτε περιέχει ένα μπλε K_s οπότε το θεώρημα έχει δηχθεί, είτε ένα κόκκινο δέντρο T' με t-1 το πλήθος κορυφές (όπως το κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο) άρα υποθέτουμε το δεύτερο και αφαιρούμε τις t-1 κορυφές του δέντρου T' και μας μένει ένα 2-χρωματισμενο $K_{(s-2)(t-1)+1}$. Πάλι από την επαγωγική υπόθεση είτε θα έχουμε ένα μπλε K_{s-1} είτε ένα κόκκινο T. Στην δεύτερη περίπτωση το θεώρημα αποδείχτηκε οπότε πάλι υποθέτουμε πως έχουμε ένα μπλε K_{s-1}. Με βάση τις δυο τελευταίες υποθέσεις λοιπόν το αρχικό γράφημα $K_{(s-1)(t-1)+1}$ περιέχει ένα μπλε K_{s-1} και ένα κόκκινο T' με t-1 κορυφές και με σύνολα κορυφών ξένα μεταξύ τους εφόσον για να βρούμε το μπλε K_{s-1} είχαμε ήδη αφαιρέσει από το αρχικό μας γράφημα τις κορυφές του T'.

Θεωρούμε τώρα την κορυφή y του T' και όλες τις πλευρές που την συνδέουν με το μπλε K_{s-1}. Αν έστω και μια από αυτές είναι κόκκινη τότε η πλευρά αυτή με το κόκκινο δέντρο T' δίνουν ένα κόκκινο δέντρο T και το θεώρημα απεδείχθη, αν πάλι όλες οι πλευρές είναι μπλε μαζί με το μπλε K_{s-1} παράγεται ένα μπλε K_s όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και η απόδειξη έχει τελείωσε. ■



Ή



Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε άλλα δυο θεωρήματα και ένα λήμμα που δίνουν ακριβείς τιμές γενικευμένων αριθμών Ramsey.

Θεώρημα 3.3 (Burr, 1974)

Έστω T ένα δέντρο με m κορυφές και ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{1,n}$ (ένα γράφημα δηλαδή που αποτελείται από μια κορυφή η οποία συνδέεται με πλευρές με n το πλήθος μη γειτονικές ανά δυο κορυφές) τότε αν το m-1 διαιρεί το n-1 ισχύει ότι: $r(T,K_{1,n})=m+n-1$

Απόδειξη

Όπως αποδείξαμε το θεώρημα 3.2 θα λειτουργήσουμε και άδω. Αρχικά θα αποδείξουμε πως $r(T,K_{1,n}) \geq m+n-1$.

Έστω $k=(n-1)/(m-1)$. Πράγματι, κατασκευάζουμε έναν 2-χρωματισμο του K_{m+n-2} παίρνοντας $k+1$ αντίγραφα κόκκινων K_{m-1} τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με μπλε πλευρές. Προφανώς δεν υπάρχει κόκκινο T με m κορυφές αφού κάθε κόκκινο K_{m-1} έχει m-1 κορυφές και ούτε μπλε $K_{1,n}$ αφού αν υπήρχε ο μέγιστος βαθμός κορυφής του θα ήταν n και άρα δεν μπορεί να υπάρξει ισόμορφο του στο δεδομένο K_{m+n-2} οπού ο μέγιστος βαθμός μπλε κορυφής είναι $k(m-1)=n-1$.

Η πρώτη ανισότητα έχει δηχθεί, στη συνέχεια θα δείξουμε πως $r(T,K_{1,n}) \leq m+n-1$ για να αποδείξουμε την ισότητα της σχέσης.

Πράγματι, εφαρμόζουμε επαγωγικά τη σχέση $r(T,K_{1,n}) \leq m+n-1$. Για $m=2$ έχουμε τετριμμένη περίπτωση. Παίρνουμε όπως και στην προηγούμενη απόδειξη ένα δέντρο T' αφαιρώντας μια ακραία κορυφή του T(δηλαδή μια κορυφή βαθμού 1). Υποθέτουμε από την επαγωγική υπόθεση πως η σχέση μας ισχύει και άρα σε ένα 2-χρωματισμο του K_{m+n-1} μπορούμε να βρούμε είτε ένα μπλε $K_{1,n}$ είτε ένα κόκκινο T'. Στην πρώτη περίπτωση το θεώρημα έχει δηχθεί οπότε εξετάζουμε την δεύτερη. Οι κορυφές του K_{m+n-1} που δεν είναι κορυφές του T' είναι $m+n-1-(m-1)=n$ το πλήθος και αφού υποθέσαμε μόλις πριν πως δεν υπάρχει μπλε $K_{1,n}$ τουλάχιστον μια από αυτές τις n κορυφές θα συνδέεται με κορυφή του T' με κόκκινη πλευρά, με αυτόν τον τρόπο όμως μόλις ανακαλύψαμε ένα κόκκινο T μέσα στο K_{m+n-1} και η απόδειξη έχει τελείωσε. ■

Παρατήρηση

Στο παραπάνω θεώρημα υποθέσαμε πως το m-1 διαιρεί το n-1, σε αντίθετη περίπτωση δεν μας είναι ακόμα σαφές πως ακριβώς συμπεριφέρονται αυτού του τύπου οι γενικευμένοι αριθμοί Ramsey αν και για αρκετά μεγάλες τιμές του n, για σχεδόν όλα τα δέντρα T η σχέση που αποδείξαμε στο παραπάνω θεώρημα ισχύει.

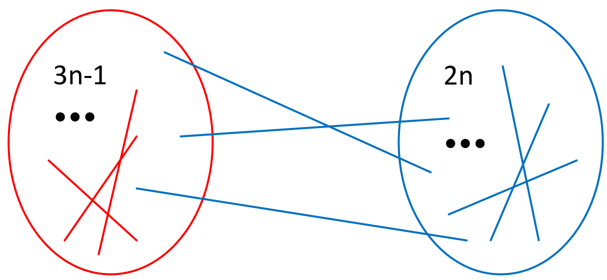
Θεώρημα 3.4 (Burr,Spencer, Erdös, 1975)

Ειδικό θεώρημα υπάρχει για γενικευμένους αριθμούς Ramsey πάνω σε γραφήματα G τα οποία αποτελούνται από έναν αριθμό ασύνδετων μεταξύ τους, συγκεκριμένου τύπου γραφημάτων. Π.χ. για το γράφημα nK_3 το οποίο αποτελείται από το n το πλήθος, ασύνδετα ανά δυο τρίγωνα K_3. Για αυτές τις περιπτώσεις ισχύει πως: $r(nK_3)=5n$ για $n\geq 2$

Απόδειξη

Για $n=1$ ξέρουμε πως $r(K_3)=R(3)=6$.

Κατά τα γνωστά αρχικά θα δείξουμε πως $r(nK_3)\geq 5n$. Παίρνουμε τον παρακάτω 2-χρωματισμο του K_{5n-1} και διαπιστώνουμε ότι σε αυτόν δεν μπορούμε να βρούμε μονοχρωματικό nK_3 καθώς για να έχω κόκκινο nK_3 θα χρειαζόμουν $3n$ κορυφές που να ενώνονται με κόκκινες πλευρές ενώ έχω $3n$-1, και δεν μπορώ να έχω μπλε nK_3 καθώς οι $2n$ κορυφές του δευτέρου συνόλου συνδέονται ανά δυο και άρα ακόμα και με όλες τις μπλε μου πλευρές δεν μπορώ να σχηματίσω nK_3 ασύνδετα μεταξύ τους τρίγωνα. Συνεπώς η πρώτη ανισότητα έχει δηχθεί.

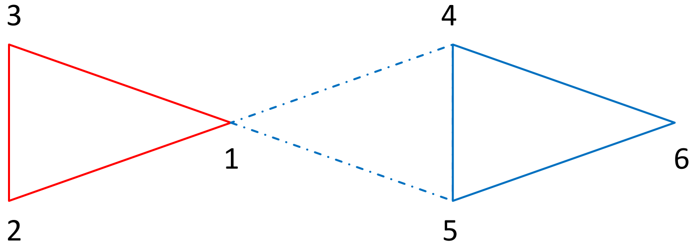


Θα αποδείξουμε τώρα την ανισότητα $r(nK_3)\leq 5n$ με επαγωγή.

Για την περίπτωση οπού $n=2$ υπάρχει μια λεπτομερής κατασκευαστική απόδειξη από τους Burr,Spencer, Erdös την οποία παραλείπουμε.

Θεωρούμε έναν 2-χρωματισμο του K_{5n} για $n\geq 3$. Στο K_{5n} μπορούμε να βρούμε $(5n-5)/3$ ασύνδετα μονοχρωματικά τρίγωνα επιλέγοντας τα μέχρις ότου να έχουν μείνει ανεπίλεκτες το πολύ 5 κορυφές. Αφού $(5n-5)/3\geq n$ μπορούμε να υποθέσουμε πως υπάρχουν 2 μονοχρωματικά τρίγωνα διαφορετικού χρώματος(από αυτά που έχουμε ήδη επιλέξει) έστω το κόκκινο $\{1,2,3\}$ και το μπλε $\{4,5,6\}$, από την αρχή του περιστερεώνα έχουμε πως τουλάχιστον 5 από τις πλευρές μεταξύ των δυο συνόλων κορυφών θα έχουν το ίδιο χρώμα, έστω μπλε, και κατ'επέκταση τουλάχιστον μια από τις κορυφές $\{1,2,3\}$, έστω η 1, ενώνεται με μπλε πλευρά με τουλάχιστον δυο από τις κορυφές $\{4,5,6\}$, έστω τις 4 και 5 και με αυτόν τον τρόπο οι κορυφές

$\{1,2,3,4,5\}$ σχηματίζουν δυο μονοχρωματικά τρίγωνα διαφορετικού χρώματος που έχουν κοινή την κορυφή 1 ("bow tie"). Η παραπάνω κατασκευή φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Αν αφαιρέσουμε αυτές τις πέντε κορυφές μένουμε με ένα K_{5n-5} το οποίο από την επαγωγική υπόθεση περιέχει ένα μονοχρωματικό $(n-1)K_3$ το οποίο μαζί με το χρωματικά ίδιο τρίγωνο από τα δυο που μόλις κατασκευάσαμε και στη συνέχεια διαγράψαμε σχηματίζει ένα μονοχρωματικό nK_3 και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Λήμμα 3.1

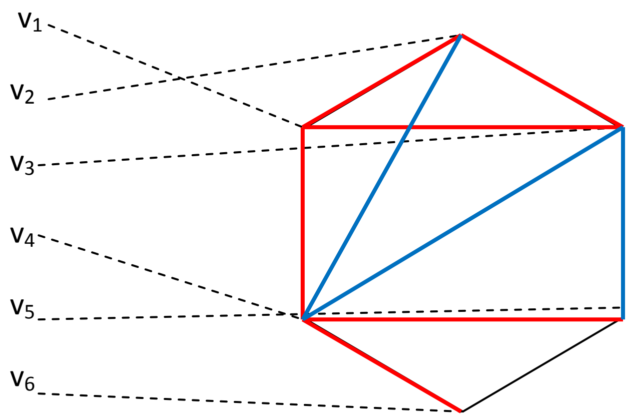
$r(C_4,C_4)=6$, οπού C_4 ο κύκλος με τέσσερις κορυφές.

Απόδειξη

Πρέπει να δείξουμε ότι σε κάθε 2-χρωματισμο του K_6(έστω με κόκκινο και μπλε) υπάρχει είτε ένα κόκκινο C_4 είτε ένα μπλε C_4.

Όπως έχουμε αποδείξει ήδη $R(3,3)=6$, δηλαδή σε κάθε 2-χρωματισμο του K_6 έχουμε είτε ένα μπλε τρίγωνο είτε ένα κόκκινο τρίγωνο. Έστω ότι υπάρχει το κόκκινο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις κορυφές $\{v_1,v_2,v_3\}$ και θεωρούμε την κορυφή v_4. Αν ο κόκκινος βαθμός της v_4 είναι μεγαλύτερος η ίσος του τέσσερα, δηλαδή $d_r(v_4)\geq 4$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δυο κόκκινες πλευρές από την v_4 προς το σύνολο κορυφών $\{v_1,v_2,v_3\}$ οι οποίες μαζί με δυο κόκκινες πλευρές από το κόκκινο τρίγωνο σχηματίζουν ένα κόκκινο C_4.

Αν $d_r(v_4)=3$ η μόνη περίπτωση να μην έχουμε αμέσως κόκκινο C_4 είναι αν η κορυφή v_4 συνδέεται με μόνο μια κόκκινη πλευρά με τις $\{v_1,v_2,v_3\}$ έστω την v_1v_4 οπότε οι πλευρές v_5v_4, v_6v_4 είναι κόκκινες ενώ οι v_2v_4, v_3v_4 είναι μπλε. Όμως σε αυτήν την περίπτωση η πλευρά v_3v_6 είναι μπλε, διότι αν ήταν κόκκινη θα είχαμε κόκκινο C_4 τον $v_3v_1\ v_4v_6\ v_3$, οπότε κατ'επέκταση η v_2v_6 δεν μπορεί να είναι κόκκινη διότι δημιουργείται κόκκινος κύκλος $v_2v_1\ v_4v_6\ v_2$ και δεν μπορεί να είναι μπλε γιατί δημιουργείται μπλε κύκλος $v_2v_4\ v_3v_6\ v_2$. Άρα δεν υπάρχει περίπτωση να μην σχηματιστεί μονοχρωματικό C_4.



Αν $d_r(v_4) \leq 2$ τότε $d_b(v_4) \geq 4$ και ακολουθούμε την ίδια με πιο πάνω διαδικασία για το μπλε χρώμα. ■

Μετά την παράθεση του παραπάνω λήμματος είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5

Έστω Q^2 το σύνολο κορυφών του τετραγώνου πλευράς 1. Τότε $\mathbb{R}^6 \to (Q^2)_2$

Απόδειξη

Θεωρούμε έναν 2-χρωματισμο του $\mathbb{R}^6$ έστω με κόκκινο και μπλε. Θα βρούμε ένα μονοχρωματικό τετράγωνο πλευράς 1.

Κατασκευάζουμε τα εξής 15 σημεία του $\mathbb{R}^6$:

$X_{ij}=(x_{ij}^1, x_{ij}^2, \dots, x_{ij}^6)$ με $1 \leq i<j \leq 6$ οπού $x_{ij}^{\kappa}=0$ εκτος αν $k=i$ η $k=j$ οπότε $x_{ij}^i= x_{ij}^j=1/\sqrt{2}$

Π.χ. για $i=1$, $j=2$ έχουμε το $x_{12} \in \mathbb{R}^6$ με συντεταγμένες:

$X_{12}=(x_{12}^1, x_{12}^2, \dots, x_{12}^6)=(\,1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0)$

Τα 15 σημεία που παίρνουμε λοιπόν είναι τα: x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{56}.

Θεωρούμε τώρα το πλήρες γράφημα K_6 με σύνολο κορυφών: $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ και χρωματίζουμε την κάθε μια από τις 15 πλευρές ως εξής: Η πλευρά v_{ij} έχει το χρώμα του σημείου $x_{ij} \in \mathbb{R}^6$ $(i<j)$.

Όμως, όπως αποδείξαμε στο λήμμα 1 $r(C_4, C_4)=6$ και άρα από τη συμμετρία των σύμβολων μπορούμε να υποθέσουμε ότι στον 2-χρωματισμο των πλευρών του K_6 θα υπάρχει ένα έστω μπλε C_4, το οποίο έστω ότι θα αποτελείται από τις πλευρές v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4. Τότε όμως από την κατασκευή που κάναμε τα σημεία x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{14} είναι κόκκινα και άρα αποτελούν τις κορυφές ενός τετραπλεύρου το οποίο όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε υπολογιστικά από τις συντεταγμένες είναι τετράγωνο πλευράς 1. ∎

Στο τέλος αυτής της ενότητας παραθέτουμε το θεώρημα του Goodman το οποίο εφαρμόζεται (με καθαρά γραφοθεωρητικούς μεθόδους) στον υπολογισμό των τιμών των μικρότερων αριθμών Ramsey.

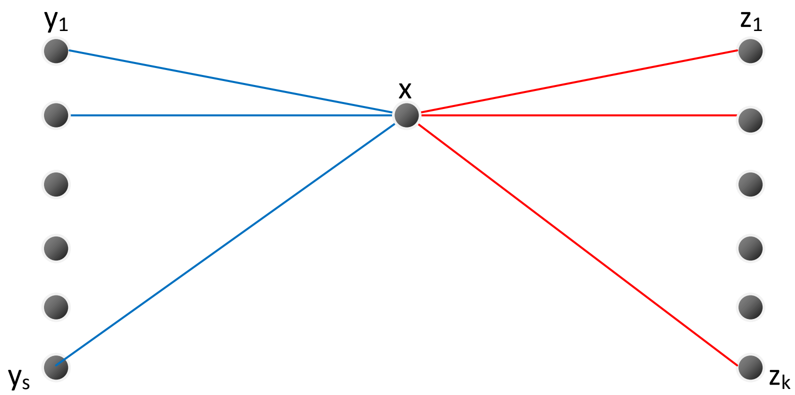
Θεώρημα 3.6 (Goodman)

Έστω το γράφημα K_n οι πλευρές του όποιου χρωματίζονται με δυο χρώματα. Τότε ο αριθμός των μονοχρωματικών του τρίγωνων είναι τουλάχιστον:

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$$

Απόδειξη

Έστω η κορυφή x του γραφήματος K_n. Συμβολίζουμε με $d_r(x)$ τον κόκκινο βαθμό της κορυφής x, δηλαδή το πλήθος των κόκκινων πλευρών που προσπίπτουν σε αυτήν σε ένα 2-χρωματισμο του K_n (έστω με τα χρώματα μπλε και κόκκινο) και με $d_b(x)$ τον αντίστοιχο μπλε βαθμό της κορυφής x. Προφανώς αφού το γράφημα μας είναι πλήρες θα ισχύει ότι $d_r(x)+ d_b(x)=n-1$ και άρα $d_b(x)=n-1-d_r(x)$. Στη συνέχεια θεωρούμε τις τριάδες κορυφών που περιέχουν την δοσμένη κορυφή x και δεν παράγουν μονοχρωματικό τρίγωνο. Αυτές με βάση το επόμενο σχήμα είναι οι: xz_1y_1, xz_1y_2,..., xz_1y_s, xz_2y_1, xz_2y_2,..., xz_2y_s,..., xz_ky_s.



Δηλαδή $d_r(x)(\,n\text{-}1\text{-}d_r(x))$ το πλήθος τρίγωνα και άρα το άθροισμα $\sum_{x\in Kn} \mathrm{dr(x)(\,n-1-dr(x))}$ παριστάνει όλα τα μη μονοχρωματικά τρίγωνα του γραφήματος K_n και μάλιστα δυο φορές το καθένα καθώς τα μετράμε μια φορά για την μια κορυφή τους στην οποία προσπίπτουν δυο διαφορετικού χρώματος πλευρές και άλλη μια φορά για την δεύτερη κορυφή με αυτή την ιδιότητα (στην τρίτη κορυφή αναγκαστικά οι δυο πλευρές που προσπίπτουν έχουν το ίδιο χρώμα και αρά δεν προσμετράτε). Αρά τα μονοχρωματικά τρίγωνα έχουν πλήθος:

$$\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{x\in Kn}\mathrm{dr(x)(\,n-1-dr(x))}$$

Όμως $\mathrm{dr(x)}\big(\,\mathrm{n-1-dr(x)}\big)=-(\mathrm{dr(x)})^2+(\mathrm{n}\text{-}1)\,\mathrm{dr(x)}\leq\frac{(\mathrm{n}-1)^2}{4}$ όπου η ανισότητα

$-(\mathrm{dr(x)})^2+(\mathrm{n}\text{-}1)\,\mathrm{dr(x)}-\frac{(\mathrm{n}-1)^2}{4}\leq 0$ ή $\left[\mathrm{dr(x)}-\frac{(n-1)^2}{2}\right]\geq 0$ ισχύει για όλα τα $\mathrm{dr(x)}$

Αρά

$\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{x\in Kn}\mathrm{dr(x)(\,n-1-dr(x))}\geq\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{x\in Kn}\frac{(\mathrm{n}-1)^2}{4}=$

$=\binom{n}{3}-\frac{1}{8}(n-1)^2\sum_{x\in Kn}\;=\binom{n}{3}-\frac{n\,(n-1)^{\,2}}{8}=\frac{\mathrm{n(n-1)(n-5)}}{24}$

όπου το αποτέλεσμα είναι θετικό για $\mathrm{n}>5$. ■

Παρατηρήσεις

- Συμπεραίνουμε από το παραπάνω θεώρημα πως $\mathrm{R}(3,3)\geq 6$
- Για $\mathrm{n}=1(\mathrm{mod}4)$, δηλαδη $\mathrm{n}=4\mathrm{k}+1$ η παράσταση γίνεται

  $\frac{(4\kappa+1)(4\kappa)4(\kappa-1)}{2.3.4}=\frac{2\kappa(\kappa-1)(4\kappa+1)}{3}$

  Η οποία ισούται με ακέραιο αριθμό διότι:

  - $\mathrm{k}=3\rho$ τότε $\frac{k}{3}=\rho\in\mathbb{N}$ και $2(\mathrm{k}\text{-}1)(4\mathrm{k}+1)\,\frac{k}{3}\in\mathbb{N}$
  - $\mathrm{k}=3\rho+1$ τότε $\frac{k-1}{3}=\rho\in\mathbb{N}$ και $2\mathrm{k}(4\mathrm{k}+1)\frac{k-1}{3}\in\mathbb{N}$
  - $\mathrm{k}=3\rho+2$ τότε $\frac{4k+1}{3}=4\rho+3\in\mathbb{N}$ και $2\mathrm{k}(\mathrm{k}\text{-}1)\frac{4k+1}{3}\in\mathbb{N}$.

Πόρισμα 3.1

Το γράφημα G(n,m) έχει τουλάχιστον $\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$ τρίγωνα.

Απόδειξη

Θεωρούμε την πλευρά xy του γραφήματος G. Συμβολίζουμε με Γ(x) τις κορυφές του γραφήματος που είναι γειτονικές με την κορυφή x (και προφανώς $|\Gamma(x)|=d(x)$) και με Γ(y) τις γειτονικές κορυφές της κορυφής y. Θα βρούμε το πλήθος των σημείων που είναι γειτονικά και με την κορυφή x και με την κορυφή y. Ισχύει:

$|\Gamma(x)\cap\Gamma(y)|=|\Gamma(x)|+|\Gamma(y)|-|\Gamma(x)\cup\Gamma(y)|\geq d(x)+d(y)-n$

Όπου $\Gamma(x)\cup\Gamma(y)\subseteq G$ και αρά $|\Gamma(x)\cup\Gamma(y)|\leq n$.

Ο αριθμός των κορυφών που είναι γειτονικές και με την κορυφή x και με την κορυφή y ισούται με τον αριθμό των τρίγωνων του γραφήματος G που περιέχουν σαν πλευρά την xy.

Αρά ο αριθμός των τρίγωνων που περιέχουν την πλευρά xy είναι μεγαλύτερος η το πολύ ίσος του αριθμού d(x)+d(y)-n.

Έστω P ο αριθμός των τρίγωνων του γραφήματος G, τότε

$P\geq\frac{1}{3}\sum_{xy\in E(G)} d(x)+d(y)-n$

Ο παράγοντας $\frac{1}{3}$ μπαινει στην σχεση διοτι το καθε τριγωνο μετραται συνολικα τρεις φορες, μια φορα για καθε μια απο τις τρεις πλευρες που περιεχει.

Επίσης στην παραπάνω σχέση ο όρος d(x) εμφανίζεται d(x) φορές, μια φορά για κάθε πλευρά που περνά από την κορυφή x, κατ'επέκταση ο όρος d(y) εμφανίζεται d(y) φορές κ.ο.κ. αρά:

$P\geq\frac{1}{3}\{d(x).d(x)+d(y).d(y)+\cdots-m.n\}$

(αν υποθέσουμε πως το γράφημα G έχει m το πλήθος πλευρές)

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία σχέση ως εξής:

$P\geq\frac{1}{3}(\sum_{x\in V(G)} d^{\,2}(x)-m.n)$

Στην συνέχεια από την ανισότητα Cauchy-Schwarz εξάγουμε την σχέση:

$d^2(x_1)+d^2(x_2)+\ldots+d^2(x_n)\geq\frac{[d(x1)+d(x2)+\cdots+d(xn)]^2}{n}$

Αρά:

$$P \geq \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\sum_{x\in V(G)} d(x)\right)^2}{n} - n.m\right]$$

Και από το αποτέλεσμα των χειραψιών: $\sum_{x\in V(G)} d(x) = 2m$, συνεπως:

$P \geq \frac{1}{3}\left[\frac{4m^2}{n} - nm\right]$ και τελικά:

$$P \geq \frac{4m}{3n}\left(m - \frac{n^2}{4}\right).$$

■

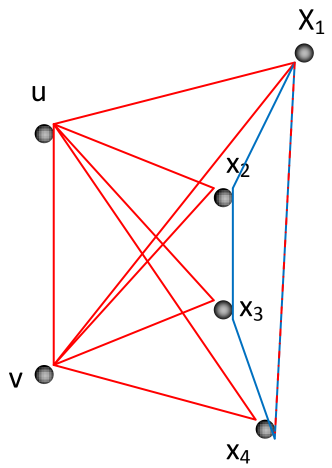
Παράδειγμα 7

Σαν εφαρμογή θα δείξουμε πως $R(4,4) \leq 18$

Πράγματι, αν χρωματίσουμε το K_{18} με δυο χρώματα έστω κόκκινο και μπλε έχουμε από το τελευταίο θεώρημα πως υπάρχουν τουλάχιστον: $\left\lceil\frac{18.17.13}{24}\right\rceil = 166$ μονοχρωματικα τριγωνα.

Στο K_{18} όμως υπάρχουν $\binom{18}{2} = 153$ πλευρές οι οποίες κατανέμονται στα τουλάχιστον 166 τρίγωνα και αφού κάθε τρίγωνο έχει τρεις πλευρές θα υπάρχει μια πλευρά σε τουλάχιστον $\left\lceil\frac{3.166}{153}\right\rceil = 4$ μονοχρωματικα τριγωνα.

Έστω uv η πλευρά που είναι κοινή σε έστω 4 κόκκινα τρίγωνα όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Αν στο σύνολο (x_1, x_2, x_3, x_4) υπάρχει έστω και μια κόκκινη πλευρά (έστω η x_1x_4 στο σχήμα) τότε αυτή μαζί με τις κόκκινες πλευρές ux_1,uv, vx_4 σχηματίζει ένα κόκκινο K_4. Αν πάλι δεν υπάρχει καμιά κόκκινη πλευρά τότε είναι όλες μπλε και συνεπώς σχηματίζουν ένα μπλε K_4 το $x_1x_4x_3x_2$ (υπενθυμίζουμε ότι $R(4,4)=18$).

4.

Εφαρμογές της Θεωρίας Ramsey στη Γεωμετρία και τη Θεωρία Γραφημάτων

Η θεωρία Ramsey εν γένει έχουμε δει πως είναι μια μη-κατασκευαστική θεωρία που αναζητά το ελάχιστο πλήθος αντικειμένων που πρέπει να περιέχει μια συλλογή ούτος ώστε αυτή μέσω συγκεκριμένων χειρισμών να εμφανίζει μια επιθυμητή δομή. Κατ'επέκταση στα παραπάνω η εφαρμογή της θεωρίας Ramsey στη γεωμετρία έγκειται στην διαμέριση(χρωματισμό) οικογενειών πεπερασμένων υποσυνόλων στοιχείων ενός γεωμετρικού αντικειμένου έτσι ώστε τουλάχιστον μια από τις κλάσεις που προκύπτουν από την δοσμένη διαμέριση να περιέχει ένα μέλος της συγκεκριμένης οικογένειας υποσυνόλων. Στην συγκεκριμένη ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με Ευκλείδειους χώρους αν και η θεωρία Ramsey μπορεί να εφαρμοστεί και σε πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους και εν γένει σε κατηγορίες.

Το πρώτο αποτέλεσμα πάνω στην εφαρμογή της θεωρίας Ramsey στην γεωμετρία δόθηκε από την εργασία της E.Klein και του συζύγου της G. Szekers σε συνεργασία με τον P. Erdös οι οποίοι επί της ουσίας ξανά-απέδειξαν τον θεώρημα του Ramsey πέντε χρόνια αργότερα από τον ίδιο τον Ramsey χωρίς να γνωρίζουν την ύπαρξη του και με αυτόν τον τρόπο συνέβαλαν στην γνωστοποίηση των μέχρι τότε άγνωστων αυτών ιδεών και στην αυτονόμηση και άνθηση της θεωρίας Ramsey σαν ανεξάρτητο κλάδο των μαθηματικών.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε κάποια θεωρήματα από την προαναφερθείσα εργασία και κάποια άλλα ενδεικτικά του είδους των εφαρμογών που εξετάζουμε σε αυτήν την ενότητα.

Σκόπιμη είναι η επεξήγηση του συμβολισμού:

$\rightarrow$

Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο M και Π μια οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του M. Τότε με $M\rightarrow(\Pi)_k$ εννοούμε πως σε οποιονδήποτε χρωματισμό των στοιχείων του M με k το πλήθος χρώματα θα υπάρχει ένα μονοχρωματικό σύνολο $\pi\in\Pi$, δηλαδή αν $M=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_k$ τότε θα υπάρχει $\pi\in\Pi$ τέτοιο ώστε $\pi\subseteq M_i$ για κάποιο $i\in\{1,\ldots,k\}$.

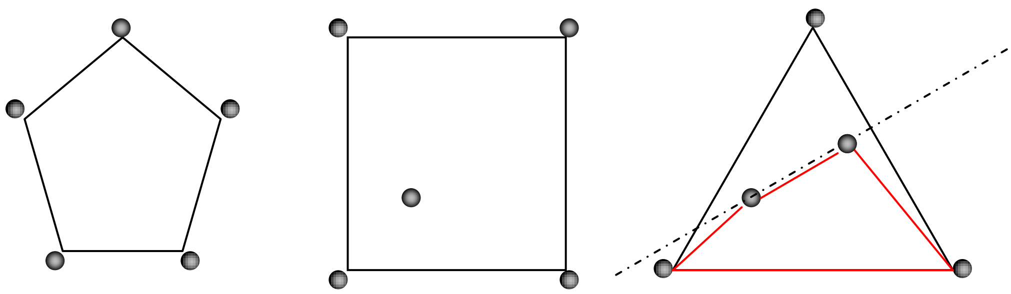
Θεώρημα 4.1(Happy end theorem)

Έστω πέντε σημεία του $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν είναι συγγραμικά ανά τρία, τότε τέσσερα από αυτά αποτελούν τις κορυφές ενός κυρτού τετραπλεύρου.

Απόδειξη (η συγκεκριμένη απόδειξη οδήγησε στον γάμο των Klein και Szekeres)

Τα πέντε αυτά σημεία θα ορίζουν $\binom{5}{2} = 10$ ευθύγραμμα τμήματα. Με τον όρο «κυρτό κάλυμμα» εννοούμε το κυρτό πολύγωνο C το οποίο είναι η περίμετρος των σημείων αυτών (δηλαδή το πολύγωνο που ορίζεται από τα λιγότερα δυνατά τέτοια σημεία ώστε κανένα σημείο να μην βρίσκεται έξω από αυτό).

- Αν το κυρτό κάλυμμα C είναι πεντάγωνο η τετράπλευρο το θεώρημα αποδείχτηκε.



- Έστω λοιπόν πως το C είναι το τρίγωνο $A_1A_2A_3$. Τα υπόλοιπα δυο σημεία A_4,A_5 θα βρίσκονται εντός του τριγώνου (διότι αν ήταν έξω το κυρτό κάλυμμα δεν θα ήταν τρίγωνο) και δεν βρίσκονται πάνω σε πλευρά του C καθώς τότε θα παραβιαζόταν η υπόθεση μας για την μη-συγγραμικότητα (ανά τρία σημεία). Τα A_4,A_5 ορίζουν μια ευθεία η οποία δεν διέρχεται από τις κορυφές του C για τον ίδιο προαναφερθέν λόγο. Από την αρχή του περιστερεώνα λοιπόν τουλάχιστον δυο κορυφές θα βρίσκονται από την μια πλευρά της ευθείας αυτής και οι οποίες όμως μαζί με τα A_4,A_5 σχηματίζουν ένα κυρτό τετράπλευρο και η απόδειξη έχει τελειώσει. ∎

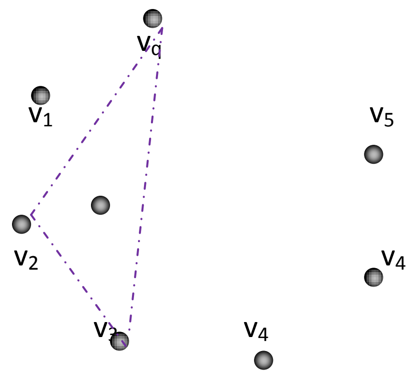
Ακολούθως θα δώσουμε την γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος για m σημεία.

Θεώρημα 4.2

Αν m το πλήθος σημεία του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι συγγραφικά ανά τρία και αν όλα τα τετράπλευρα που σχηματίζονται από τα m σημεία είναι κυρτά τότε τα m αυτά σημεία αποτελούν κορυφές κυρτού m-γώνου.

Απόδειξη

Τα m το πλήθος δοσμένα στοιχειά ορίζουν $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ ευθύγραμμα τμήματα και η περίμετρος αυτών όπως και στο προηγούμενο θεώρημα ορίζει ένα κυρτό q-γωνο με κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_q$. Όμως αν $q<m$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο έστω v_n με $q<n<m$ το οποίο θα βρίσκεται μέσα σε ένα από τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις κορυφές του q-γωνου(και δεν θα βρίσκεται πάνω σε πλευρά τέτοιου τριγώνου διότι τότε παραβιάζεται η συνθήκη μη συγγραμικότητας ανά τρία σημεία)



Τότε όμως το τετράπλευρο που δημιουργείται από αυτό το σημείο και τις κορυφές του τριγώνου μέσα στο οποίο βρίσκεται σχηματίζουν ένα μη κυρτό τετράπλευρο, άτοπο από υπόθεση και το θεώρημα έχει
αποδεδειχθεί. ■

Θεώρημα 4.3

Έστω ο ακέραιος $m \geq 3$. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος φυσικός αριθμός έστω N_m τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N_m$ αν θεωρήσουμε n μη συγγραφικά ανά τρία σημεία του $\mathbb{R}^2$ τότε m από αυτά θα αποτελούν τις κορυφές κυρτού m-γωνου

Απόδειξη

- Αν $m=3$ προφανώς $N_m=3$
- Αν $m=4$ από το θεώρημα 4.1 έχουμε πως $N_m=5$

Έστω m>4. Θέτουμε $n \geq R^4(5,m)$, δηλαδή διαμερίζουμε όλα τα υποσύνολα με τέσσερα στοιχειά των n το πλήθος μη-συγγραμικών ανά τρία σημείων του $\mathbb{R}^2$ σε κυρτά και μη κυρτά τετράπλευρα. Από το θεώρημα του Ramsey είτε θα υπάρχει ένα πεντάγωνο με όλα τα τετράπλευρα του μη κυρτά, πράγμα το οποίο αποδείξαμε ότι δεν γίνεται στο θεώρημα 4.1, είτε θα υπάρχει ένα m-γωνο με όλα τα τετράπλευρα του κυρτά. Όμως στην δεύτερη περίπτωση από το θεώρημα 4.2 το m-γόνο είναι κυρτό και η απόδειξη έχει τελειώσει. ■

Από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος συνάγουμε πως $N_m \leq R^4(5,m)$

Όμως η ισότητα της παραπάνω σχέσης για $m \in \{3,4,5\}$ οδήγησαν στην διατύπωση από τους Klein, Szekeres, Erdös το 1935 της υπόθεσης: $N_m = 2^{m-2}+1$

Υπόθεση που εν μέρη αποδείχτηκε από τους Klein και Szekeres πολλά χρόνια αργότερα και λίγο πριν τον θάνατο τους.

Θεώρημα 4.4

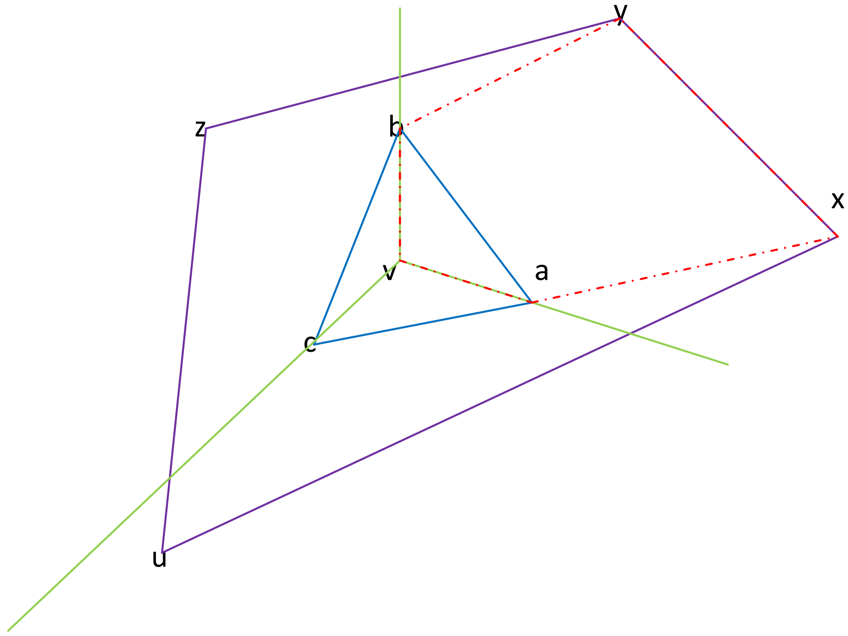
$N_5 = 9$

Απόδειξη

Θεωρούμε το κυρτό κάλυμμα C των 9 σημείων του $\mathbb{R}^2$.

- Αν το C είναι πεντάγωνο η έχει περισσότερες από πέντε κορυφές τότε το θεώρημα αποδείχτηκε.
- Υποθέτουμε λοιπόν πως το C είναι είτε τετράπλευρο είτε τρίγωνο.

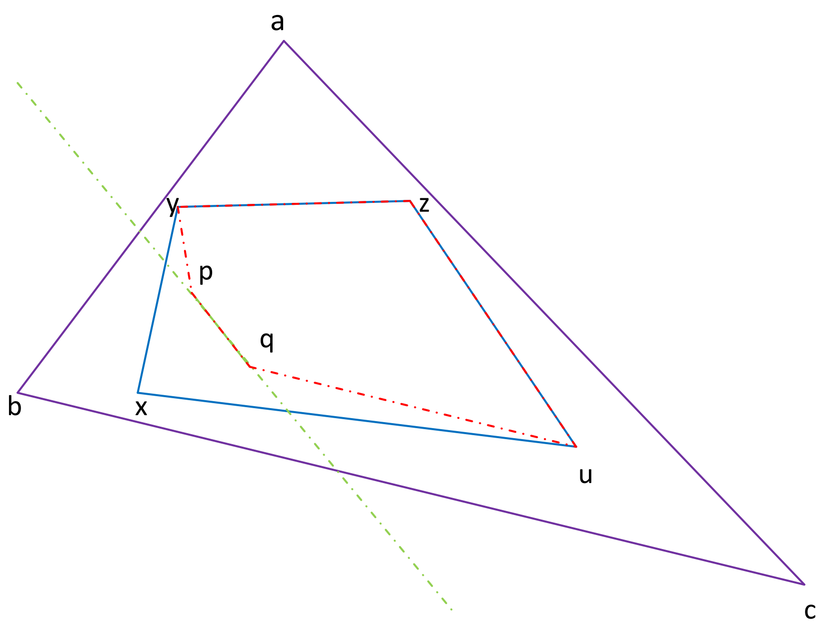
  I. Έστω αρχικά πως το C είναι τετράπλευρο και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι είναι το τετράπλευρο xyzu.



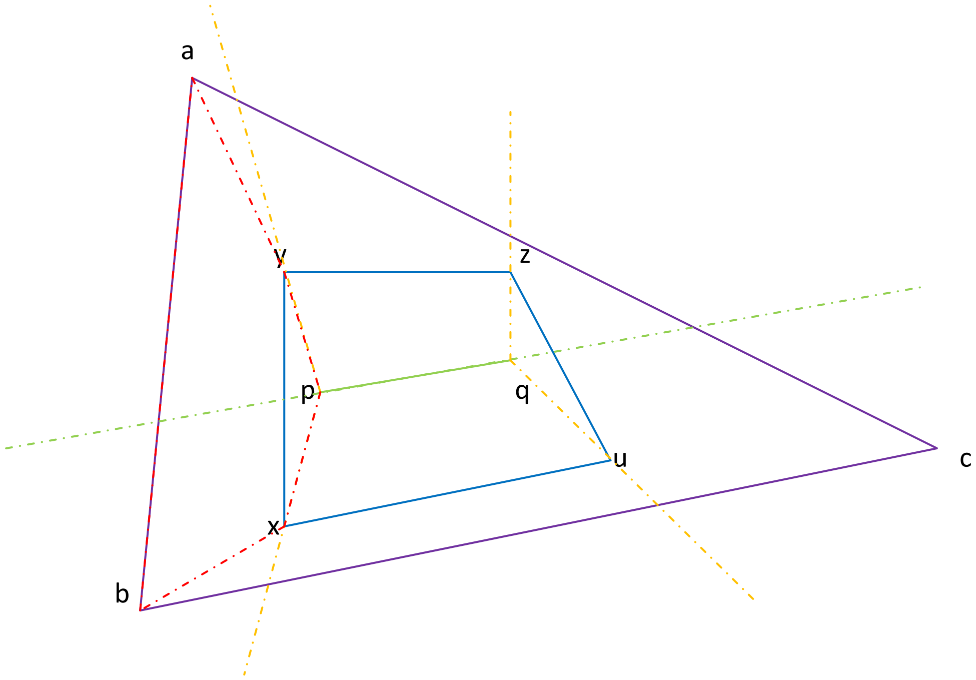
θεωρούμε τα υπόλοιπα πέντε σημεία τα οποία βρίσκονται μέσα στο C, αν αυτά τα πέντε σημεία αποτελούν κυρτό πεντάγωνο η πρόταση έχει αποδεδειχθεί. Αν πάλι όλες οι τετράδες που σχηματίζονται από αυτά αποτελούν κορυφές κυρτών τετράπλευρων τότε από το θεώρημα 4.2 για $m=5$ το πεντάγωνο θα ήταν κυρτό αρά για να εξαντλήσουμε τις περιπτώσεις υποθέτουμε πως υπάρχει τουλάχιστον μια τετράδα σημείων έστω a,b,c,v η οποία δεν σχηματίζει κυρτό τετράπλευρο και σχηματίζει ένα τρίγωνο a,b,c μέσα στο οποίο βρίσκεται το σημείο v. Θεωρούμε τις τρεις γωνίες που προκύπτουν από το σημείο v και τις κορυφές του τριγώνου a,b,c και συγκεκριμένα τις: avb, avc, bvc τότε όμως από από την αρχή του περιστερεώνα τουλάχιστον δυο από τις κορυφές του C θα περιέχονται σε μια από αυτές τις γωνιές έστω ότι οι κορυφές αυτές είναι οι x, y και η γωνία η bva. Παρατηρούμε ότι το πεντάγωνο xybva είναι κυρτό.

II. Έστω λοιπόν ότι το κυρτό κάλυμμα των εννέα σημείων είναι τρίγωνο, και συγκεκριμένα το τρίγωνο a,b,c. Παίρνουμε το κυρτό κάλυμμα των υπολοίπων έξι σημείων που βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο και θεωρούμε τις δυο υποπεριπτώσεις όπου αυτό είναι είτε τετράπλευρο είτε τρίγωνο.

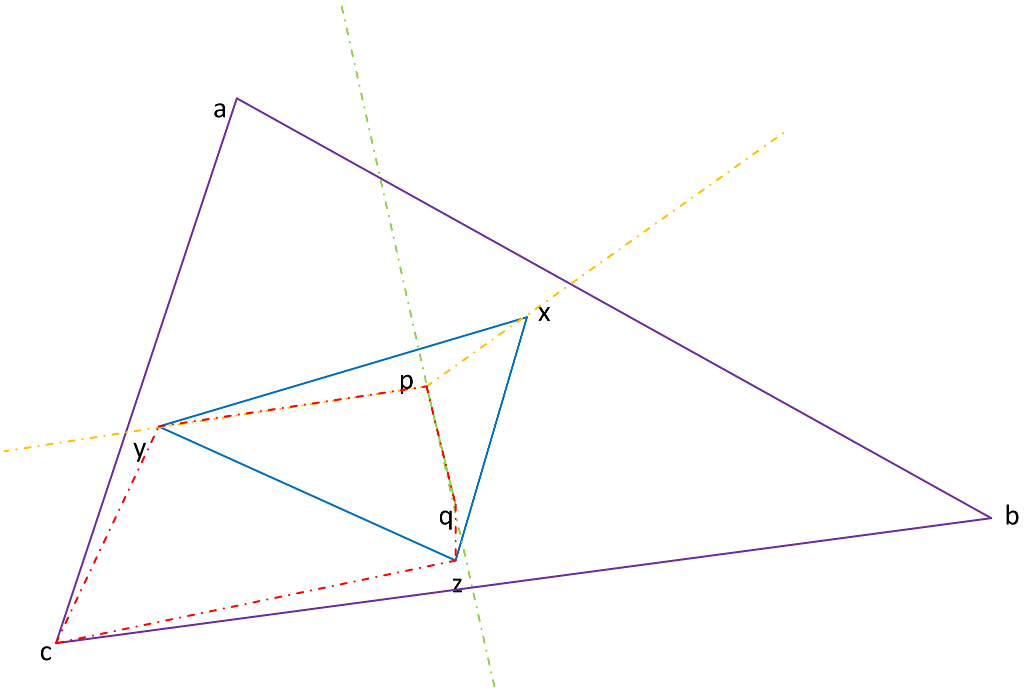
   i. Έστω λοιπόν ότι το κυρτό κάλυμμα των εσωτερικών έξι σημείων είναι τετράπλευρο (έστω το xyzu). Θεωρούμε τα υπόλοιπα δυο σημεία p, q τα οποία βρίσκονται μέσα στο τετράπλευρο. Αν η ευθεία που δημιουργείται από αυτά τέμνει δυο συνεχόμενες πλευρές τότε όπως φαίνεται και στο σχήμα, εμφανίζεται το κυρτό πεντάγωνο ypquz.



   ii. Για να εξαντλήσουμε και πάλι τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι η ευθεία pq τέμνει δυο απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου, έστω τις xy, zu. Θεωρούμε στην συνέχεια τις ημιευθείες px, py, qu, qz οι οποίες χωρίζουν το εξωτερικό του τετραπλεύρου στις εξής τέσσερις περιοχές: xpy, ypqz, zqu, xpqu. Αν έστω μια από τις περιοχές που ορίζονται από τέσσερα σημεία (ypqz, xpqu) περιέχει μια από τις κορυφές a, b, c του εξωτερικού τριγώνου τότε σχηματίζεται κυρτό πεντάγωνο. Αν όμως σε αυτές τις περιοχές δεν βρίσκεται κανένα από τα σημεία a, b, c τότε σημαίνει ότι αυτά διαμερίζονται στις άλλες δυο περιοχές xpy, zqu και αρά από την αρχή του περιστερεώνα έχουμε ότι τουλάχιστον δυο από τα a, b, c βρίσκονται σε μια από τις δυο αυτές περιοχές και επομένως σχηματίζεται και πάλι κυρτό πεντάγωνο το οποίο σχηματίζουμε με κόκκινο χρώμα στο σχήμα μας.



iii. Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι το κυρτό κάλυμμα των εσωτερικών έξι σημείων είναι τρίγωνο(έστω το xyz). Περνούμε πάλι δυο από τα εναπομένοντα τρία (εσωτερικά του εσωτερικού τριγώνου) σημεία έστω τα p, q και έστω ότι η ευθεία που σχηματίζεται από αυτά τέμνει τις πλευρές xy, zx όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας. Θεωρούμε την γωνία xpy, το πολύ ένα από τα σημεία a, b, c του εξωτερικού τριγώνου βρίσκεται μέσα σε αυτήν καθώς σε αντίθετη περίπτωση θα σχηματιζόταν κυρτό πεντάγωνο. Ανάλογα το πολύ ένα από αυτά τα σημεία μπορεί να βρίσκεται μέσα στη γωνία xpz. Τότε όμως τουλάχιστον ένα από αυτά βρίσκεται μέσα στην περιοχή που περιορίζεται από τις ημιευθείες py, qz και το ευθύγραμμο τμήμα yz με αποτέλεσμα να δημιουργείται και πάλι κυρτό πεντάγωνο και η απόδειξη έχει τελειώσει.



■

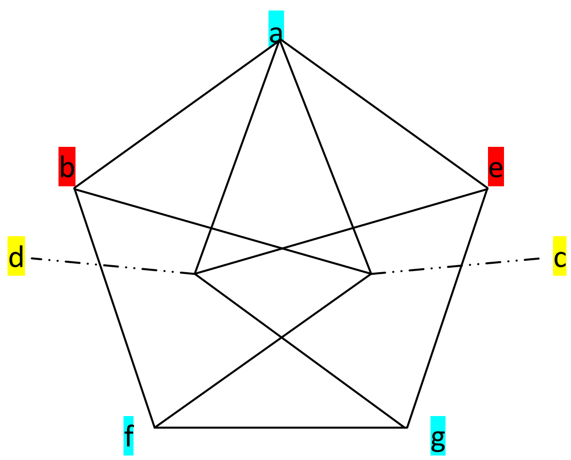
Το 1961 ο Hadwiger απέδειξε πως αν 3-χρωματισουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ τότε θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο σημεία των οποίων η απόσταση ισούται με ένα και έχουν το ίδιο χρώμα, δηλαδή:

Θεώρημα 4.5

Αν Π ένα ζεύγος σημείων του $\mathbb{R}^2$ των οποίων η απόσταση ισούται με την μονάδα τότε:

- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi_3$
- $\mathbb{R}^2 \nrightarrow \Pi_7$

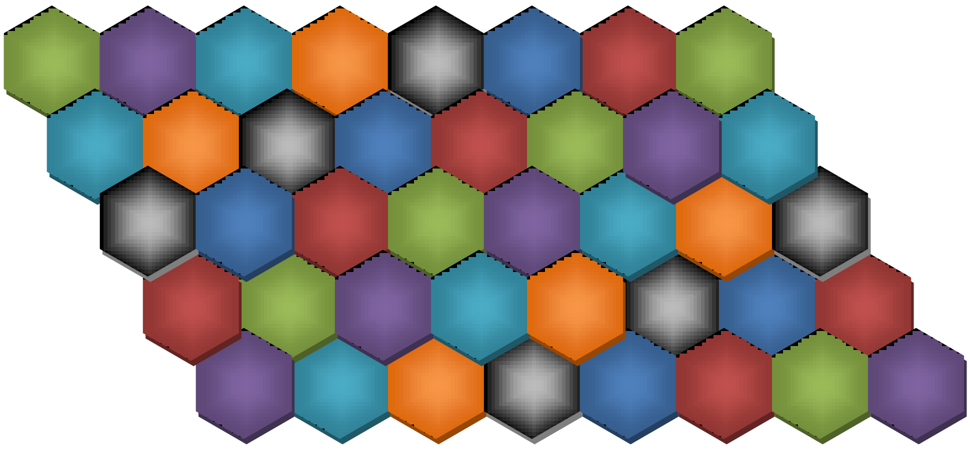
Απόδειξη

- 

θεωρούμε τα επτά σημεία του παραπάνω σχήματος a, b, c, d, e, f, g των οποίων οι πλευρές που φαίνονται στο σχήμα έχουν μήκος ίσο με την μονάδα. Έστω ότι σε κάθε 3-χρωματισμο του $\mathbb{R}^2$ δεν υπάρχει ζεύγος σημείων με απόσταση ένα και με το ίδιο χρώμα(έστω μπλε, κόκκινο, κίτρινο τα 3 χρώματα).

Έστω λοιπόν πως το σημείο a έχει χρωματιστεί μπλε. Τότε τα σημεία b, c που απέχουν ένα από το a και μεταξύ τους θα είναι έστω κόκκινο και κίτρινο. Αρά το σημείο f που απέχει ένα από τα b, c θα είναι μπλε και για τον ίδιο λόγο το σημείο g έχει χρωματιστεί μπλε και επομένως τα f, g αποτελούν ένα ζεύγος σημείων με απόσταση ένα και ίδιο χρώμα.

- Για να αποδείξουμε πως $\mathbb{R}^2 \nrightarrow \Pi_7$ θα βρούμε ένα αντιπαράδειγμα 7-χρωματισμου του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε να μην υπάρχουν δυο σημεία με το ίδιο χρώμα και απόσταση ένα.



Στον παραπάνω χρωματισμό χρησιμοποιήσαμε επτά χρώματα και ίσα μεταξύ τους εξάγωνα τα οποία έχουν πλευρές ίσες με a, όπου για το a με 0,4<a<0,5 ισχύει: $\frac{1}{2} > a > \frac{4\sqrt{5}-5}{10} \cong 0{,}4$ κατά συνέπεια η διάμετρος του κάθε εξαγώνου είναι μικρότερη της μονάδας ενώ η απόσταση μεταξύ δυο εξάγωνων με ίδιο χρώμα όπως φαίνεται από το σχήμα είναι μεγαλύτερη της μονάδας και αρά $\mathbb{R}^2 \nrightarrow \Pi_7$. Με αυτό το αντιπαράδειγμα ολοκληρώνεται η απόδειξη. ∎

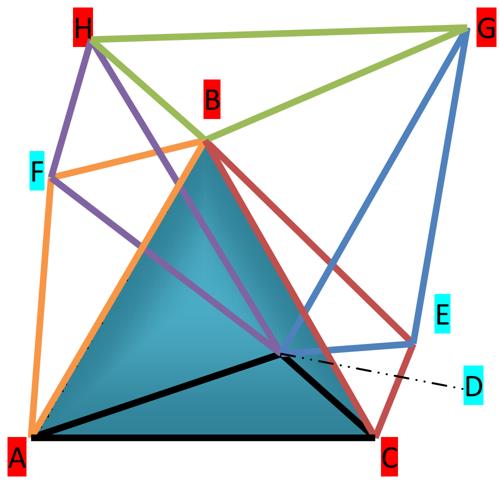
Παρατήρηση

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε πως η μέγιστη τιμή του k για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi_k$ είναι ένας φυσικός αριθμός με $3 \leq k < 7$. Παρόλα αυτά η ακριβής τιμή του k δεν μας είναι ακόμα γνωστή.

Θεώρημα 4.6

2-χρωματιζουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Έστω ότι υπάρχουν τρία σημεία που έχουν το ίδιο χρώμα και που αποτελούν τις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρές μήκους ένα. Τότε για κάθε $a, b > 0$ με $|a - b| < 1 < a + b$ θα υπάρχει ένα μονοχρωματικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $1, a, b$.

Απόδειξη



Θεωρούμε το ισόπλευρο (με μήκος πλευράς ένα) τρίγωνο ABC (το οποίο έχουμε χρωματίσει μπλε) και τα υπόλοιπα έξι τρίγωνα των οποίων μόνο το περίγραμμα έχουμε χρωματίσει με διαφορά χρώματα. Για τις πλευρές των έξι αυτών τρίγωνων ισχύει πως:

$AB=AC=BC=GD=GH=DH=1$

$BE=EG=BG=AD=DF=AF=b$

$BF=FH=BH=DE=CE=CD=a$

2-χρωματιζουμε στη συνέχεια τις κορυφές των παραπάνω τρίγωνων με χρώματα έστω μπλε και κόκκινο.

Υποθέτουμε πως το μονοχρωματικό μας τρίγωνο ABC έχει όλες τις κορυφές του χρωματισμένες κόκκινες.

- Αν έστω μια από τις κορυφές D, E, F είναι κόκκινη το θεώρημα αποδείχτηκε αρά υποθέτουμε πως είναι όλες χρωματισμένες μπλε.
- Αν τώρα έστω μια από τις κορυφές G, H είναι μπλε τότε το τρίγωνο DEG η το DFH είναι μπλε-μονοχρωματικά με μήκη πλευρών 1, a, b.
- Αν τέλος και οι δυο κορυφές G, H είναι χρωματισμένες κόκκινες τότε εντοπίζουμε το μονοχρωματικό (κόκκινο) τρίγωνο BGH με μήκη πλευρών 1, a, b.

■

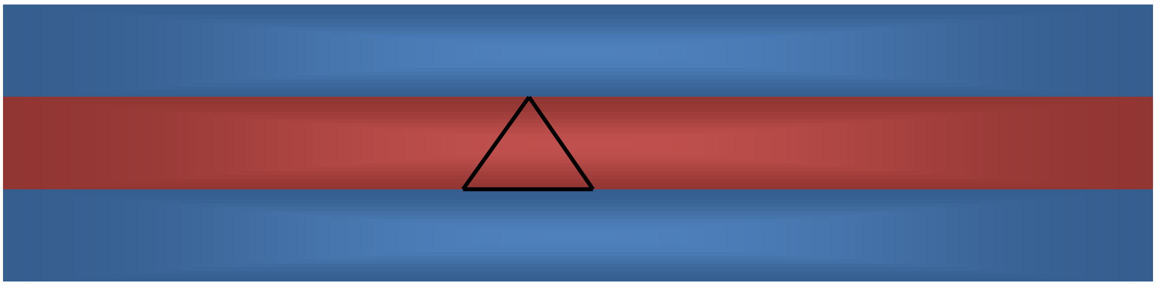
Θεώρημα 4.7

Αν 2-χρωματισουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ τότε:

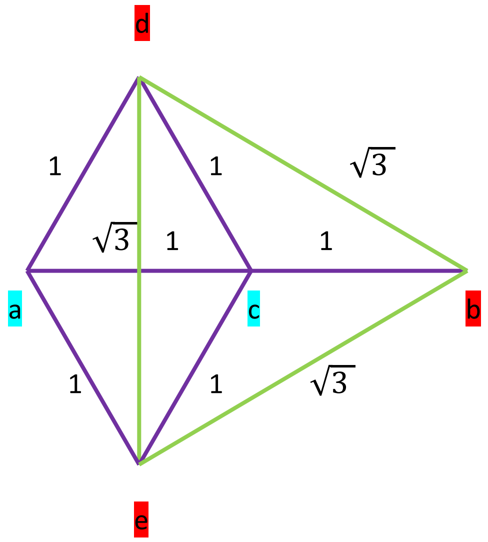
- Δεν υπάρχει πάντα μονοχρωματικό ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά μήκους ένα.
- Υπάρχει πάντα ένα μονοχρωματικό τρίγωνο με μήκη πλευρών 1, $\sqrt{3}$, $\pi\sqrt{2}$.

Απόδειξη

- Θεωρούμε τον 2-χρωματισμο έστω με μπλε και κόκκινο του $\mathbb{R}^2$ χρωματίζοντας εναλλάξ παράλληλες ταινίες του επίπεδου πλάτους $\frac{\sqrt{3}}{2}$ η κάθε μια ,όπου η κάτω ευθεία που ορίζει την ταινία ανήκει σε αυτήν ενώ η αντίστοιχη πάνω όχι. Προφανώς κάθε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους άσο με την μονάδα έχει υποχρεωτικά δυο κορυφές σε δυο διαδοχικές ταινίες όπως φαίνεται και από το σχήμα καθώς το ύψος του τριγώνου είναι άσο με το πλάτος των ταινιών και αρά στην καλύτερη περίπτωση η βάση του τριγώνου είναι πάνω στην ευθεία- κάτω όριο της ταινίας και η πάνω κορυφή του πάνω στην ευθεία-άνω όριο της ταινίας η οποία όμως δεν ανήκει σε αυτήν και αρά έχει διαφορετικό χρώμα.



Θα αποδείξουμε πως αν 2-χρωματισουμε το $\mathbb{R}^2$ τότε θα υπάρχει ένα μονοχρωματικό ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά είτε ίση με τη μονάδα είτε όση με $\sqrt{3}$. Και στις δυο περιπτώσεις από εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος θα υπάρχει ένα μονοχρωματικό τρίγωνο με μήκη πλευρών 1, a= $\sqrt{3}$, b= $\pi\sqrt{2}$. Σε κάθε 2-χρωματισμο του $\mathbb{R}^2$ υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα ζεύγος σημείων a, b με απόσταση δυο που έχουν διαφορετικό χρώμα. Όντως αν θεωρήσουμε δυο τυχαία σημεία με διαφορετικό χρώμα τότε μπορούμε να τα συνδέσουμε με μια πολυγωνική γραμμή κάθε πλευρά της οποίας έχει μήκος δυο. Τουλάχιστον μια από τις πλευρές της πολυγωνικής αυτής γραμμής έχει άκρα με διαφορετικό χρώμα. Υποθέτουμε ότι το σημείο a είναι χρωματισμένο μπλε και το σημείο b(το οποίο βρίσκεται σε απόσταση δυο) ότι είναι χρωματισμένο κόκκινο. Επίσης υποθέτουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ab το οποίο ονομάζουμε c είναι χρωματισμένο μπλε. Αν ένα από τα σημεία d, e είναι χρωματισμένο μπλε τότε θα έχουμε το μονοχρωματικό μπλε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους 1 acd η ace. Αν και τα δυο σημεία είναι χρωματισμένα κόκκινα έχουμε το μονοχρωματικό κόκκινο τρίγωνο πλευράς μήκους $\sqrt{3}$ bde.



(στο σχήμα μας οι πλευρές με μήκος ένα είναι χρωματισμένες με μωβ και αυτές με μήκος $\sqrt{3}$ είναι χρωματισμένες με πράσινο.)

Και με αυτόν τον τρόπο η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ∎

5.

Το θεώρημα του Schur

Χρονολογικά το πρώτο αποτέλεσμα της θεωρίας Ramsey δεν διατυπώθηκε από τον ίδιο τον Ramsey η τον Erdös άλλα από τον I. Schur το 1916 καθώς προσπαθούσε να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, πολλές φορές στην επιστήμη η έρευνα προς μια κατεύθυνση για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος μπορεί να αποπροσανατολιστεί και να καταλήξει σε ένα άσχετο με το αρχικά ζητούμενο άλλα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Έτσι και σε αυτήν την περίπτωση ο Schur ψάχνοντας για την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Fermat απέδειξε αντ'αυτου το πρώτο χρονολογικά θεώρημα της θεωρίας Ramsey.

(Υπενθυμίζουμε πως για τον αριθμό Ramsey R_k ισχύει πως
$R_k=R_k(3,3,\ldots,3)\leq\lfloor k!\,e\rfloor + 1$)

Θεώρημα 5.1(Schur)

Διαμερίζουμε τους φυσικούς αριθμούς $\{1,2,\ldots,R_k\}$ σε k το πλήθος κλάσεις. Τότε τουλάχιστον μια από αυτές τις κλάσεις περιέχει φυσικούς αριθμούς x, y, z (όχι απαραίτητα διάφορους ανά δυο) τέτοιους ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση $x+y=z$.

Απόδειξη

Έστω ότι η διαμέριση των φυσικών αριθμών $\{1,2,\ldots,R_k\}$ σε k το πλήθος κλάσεις είναι η $\{A_1,A_2,\ldots,A_K\}$ και ας θεωρήσουμε το πλήρες γράφημα K^{R_k} το οποίου τις πλευρές χρωματίζουμε με k το πλήθος χρώματα ως εξής:

Η πλευρά ij του γραφήματος μας θα χρωματιστεί με το χρώμα v αν και μόνον αν $|i-j|\in A_v$. Όμως εξορισμού το K^{R^k} περιέχει τουλάχιστον ένα μονοχρωματικό(έστω με το χρώμα v) τρίγωνο έστω αυτό με κορυφές τις ijk, οπότε για αυτές θα ισχύει ότι: $|i-j|\in A_v$, $|j-k|\in A_v$, $|i-k|\in A_v$.

Τώρα έστω πως $\chi=|i-j|$, $y=|j-k|$, $z=|i-k|$ και πως i<j<k οπότε θα έχουμε $\chi+y=|i-j|+|j-k|=j-i+k-j=k-i=|i-k|=z$

Και το ζητούμενο έχει δηχθεί. ■

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα δεν είναι το καλύτερο δυνατό αφού ενώ για $k=3$ έχουμε πως $R_3=17$ γνωρίζουμε πως αν οι φυσικοί αριθμοί $\{1,2,\ldots,14\}$ διαιρεθούν σε 3 κλάσεις θα υπάρχει πάντα μια κλάση που θα ικανοποιεί την εξίσωση $x+y=z$.

Για τους φυσικούς αριθμούς $\{1,2,\ldots,13\}$ υπάρχουν τρεις μόνο διαμερίσεις σε τρεις κλάσεις έτσι ώστε να μην ικανοποιείται η δοσμένη εξίσωση. Μια από αυτές τις διαμερίσεις είναι η $S_1=\{A_1, A_2, A_3\}$ όπου $A_1=\{1,4,10,13\}$, $A_2=\{2,3,11,12\}$, $A_3=\{5,6,7,8,9\}$. Οι διαμερίσεις S_2 και S_3 διαφέρουν από την S_1 μόνο στην θέση του αριθμού 7 ο οποίος στην S_2 ανήκει στην κλάση A_2 και στην S_3 ανήκει στην κλάση A_1.

Στη συνέχεια ας συμβολίσουμε με S_k τον ελάχιστο ακέραιο για τον οποίο κάθε διαμέριση του συνόλου των φυσικών αριθμών $\{1,2,\ldots,S_k\}$ σε k το πλήθος υποσύνολα περιέχει ένα υποσύνολο στο οποίο υπάρχει μια λύση της εξίσωσης $x+y=z$.

Παραδείγματος χάριν έχουμε πως:

- $S_1=2$
- $S_2=5$ αφού το σύνολο $\{1,2,3,4\}$ μπορεί να διαμεριστεί σε 2 υποσύνολα που να μην περιέχουν λύση της προαναφερθείσας εξίσωσης και συγκεκριμένα τα $A_1=\{1,4\}$ και $A_2=\{2,3\}$
- $S_3=14$
- Και $S_4=45$ όπως αποδεικνύεται μέσω υπολογιστή.

Παρακάτω δίνουμε έναν άλλον συμβολισμό σε σχέση με την χρωματική ορολογία.

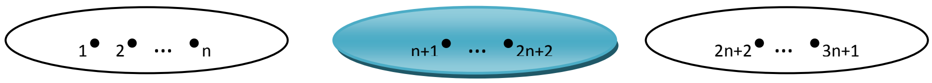
Συμβολίζουμε με $f(k)$ τον μέγιστο ακέραιο n τέτοιον ώστε αν χρωματίσουμε το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ με k το πλήθος χρώματα να μην υπάρχει μονοχρωματική λύση της εξίσωσης $x+y=z$. Είναι προφανές από τον προηγούμενο ορισμό του S_k πως $f(k)=S_k-1$ είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2

- $S_k \geq 3.S_{k-1}-1$
- $S_k \geq \frac{1}{2}(27.3^{k-3}+1)$

Απόδειξη

- Χρωματίζουμε το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ (οπού $n=f(k)$) με k το πλήθος χρώματα και άρα από τον ορισμό του $f(k)$ δεν θα υπάρχει μονοχρωματική λύση της εξίσωσης $x+y=z$. Έστω μια διαμέριση του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}=C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$. Ο παραπάνω χρωματισμός-διαμέριση όμως επάγει και έναν χρωματισμό του συνόλου $\{1,2,\ldots,3n+1\}$ με $k+1$ το πλήθος χρώματα έτσι ώστε η εξίσωση $x+y=z$ να μην έχει πάλι λύση. Ο χρωματισμός αυτός είναι ο ακόλουθος: κρατάμε τον χρωματισμό των n πρώτων αριθμών με τα αρχικά k το πλήθος χρώματα, στην συνέχεια χρωματίζουμε με το καινούργιο χρώμα τάξης $k+1$ τους αριθμούς $n+1$ έως $2n+1$ (όποτε προφανώς και εδώ δεν υπάρχει λύση της $x+y=z$). Τέλος χρωματίζουμε τα εναπομείναντα στοιχειά $2n+2$ έως $3n+1$ με k χρώματα όπως και το πρώτο σύνολο και από τον ορισμό του $f(k)$ και πάλι δεν έχουμε λύση της εξίσωσης και το ζητούμενο έχει δηχθεί.



k χρώματα χρώμα τάξης k+1 k χρώματα

Αρά από τον χρωματισμό αυτό έχουμε $S_k \geq 3.S_{k-1}-1$ ■

- Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε πως $S_k \geq 3.S_{k-1}-1$ όμως
  $S_k \geq 3.S_{k-1}-1 \geq 3.(3.S_{k-2}-1)-1=3^2 S_{k-2}-3^1-3^0$
  Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση i φορές θα έχουμε πως:
  $S_k \geq 3^i S_{k-i}-3^{i-1}-3^{i-2}-\ldots-3^1-3^0$
  Για $i=k-3$ έχουμε:
  $S_k \geq 3^{k-3}.S_3-3^{k-4}-3^{k-5}-\ldots-3^1-3^0$
  και από το άθροισμα n-3 το πλήθος γεωμετρικών όρων βρίσκουμε την σχέση:
  $S_k \geq 3^{k-3}.S_3 - \frac{3.3^{k-3}-3^0}{3-1}$ Αν σε αυτήν θέσουμε $S_3=14$ καταλήγουμε στην:

$$S_k \geq 3^{k-3}.14 - \frac{3^{k-3}-1}{2} = \frac{3^{\kappa-3}.2.14-3^{\kappa-3}+1}{2} = \frac{3^{k-3}.27+1}{2} = \frac{3^k+1}{2}$$ ■

Παρατηρήσεις

Το φράγμα που μόλις αποδείξαμε βελτιώθηκε από τους Abbot και Moser.

Προφανώς από το παραπάνω θεώρημα έχουμε πως $f(k) \geq \frac{3^k - 1}{2}$

Ακόμα δεν είναι γνωστό αν η παράσταση $f(k)^{1/k}$ είναι φραγμένη η όχι.

Οι γνωστές τιμές του $f(k)$ σταματούν στην $f(4) = 44$ καθώς η πολυπλοκότητα των παραπέρα υπολογισμών είναι μέχρι στιγμής απαγορευτική.

6.

Το θεώρημα του van der Waerden

O Balthazar van der Waerden το 1927 απέδειξε μια εικασία του Schur, και πιο συγκεκριμένα πως "Αν οι θετικοί ακέραιοι χωριστούν σε δυο κλάσεις, τότε τουλάχιστον μια από αυτές θα περιέχει οσοδήποτε μεγάλες αριθμητικές προόδους". Στη συνέχεια έγιναν δυο αλλαγές στην παραπάνω πρόταση από τους O.Schreyer και E.Artin, η πρώτη ήταν η απόδειξη του ότι για κάθε k μπορούμε να θεωρήσουμε ένα αρχικό τμήμα $W(k)$ ακέραιων τέτοιο ώστε τουλάχιστον μια κλάση να περιέχει αριθμητικές προόδους k το πλήθος όρων, η δεύτερη αλλαγή ήταν επί της ουσίας η γενίκευση της πρότασης του van der Waerden σε r το πλήθος κλάσεις. Μετά από της παραπάνω αλλαγές η αρχική πρόταση πήρε την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 6.1

Για κάθε θετικούς ακέραιους k και r υπάρχει ένας ακέραιος $W(k,r)$ τέτοιος ώστε αν το σύνολο των ακέραιων $\{1,2,\dots,W(k,r)\}$ διαιρεθεί σε r το πλήθος κλάσεις τότε τουλάχιστον μια από αυτές θα περιέχει αριθμητικές προόδους με k το πλήθος όρους.

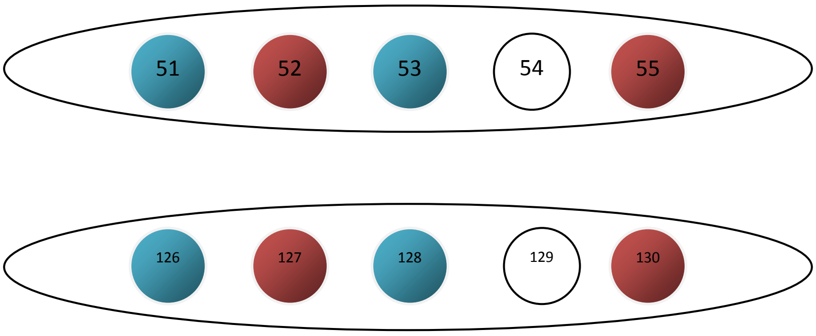
Απόδειξη

Στην απόδειξη αρχικά θα εξετάσουμε και θα αναλύσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις για μικρές τιμές των k,r έτσι ώστε να καταστήσουμε σαφέστερη την γενική απόδειξη.

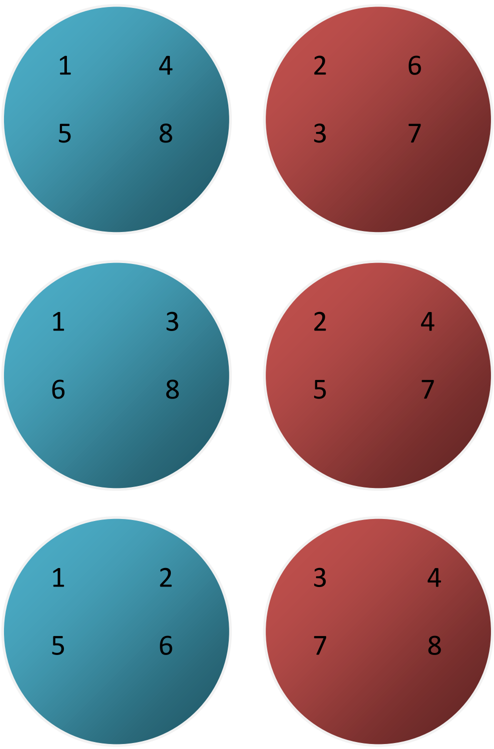
- Για $k=2$ και αυθαίρετο r από την αρχή του περιστερεώνα έχουμε τετριμμένα πως $W(2,r)=r+1$.

- Για $k=3$ και $r=2$ θα αποδείξουμε πως $W(3,2)\leq 325$.
  Χωρίζουμε το $\{1,2,\dots,325\}$ σε 65 μπλοκ των 5 ακεραίων ως εξής: $\{1,2,\dots,325\}=\{1,\dots,5\}\cup\{6,\dots,10\}\cup\dots\cup\{321,\dots,325\}$ έστω τα $B_1,\dots,B_{65}$. Κάθε τέτοιο μπλοκ 2-χρωματιζεται με $2^5=32$ διαφορετικούς τρόπους και άρα από το θεώρημα του περιστερεώνα από τα 33 πρώτα μπλοκ θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο που θα έχουν ακριβώς τον ίδιο χρωματισμό έστω τα $B_{11}=\{51,52,53,54,55\}$ και $B_{26}=\{126,127,128,129,130\}$. Εξετάζουμε τα τρία πρώτα στοιχειά του B_{11}, δηλαδή τα 51,52,53, δυο από αυτά θα έχουν το ίδιο χρώμα διότι αν και τα τρία είχαν το ίδιο χρώμα θα είχαμε μια αριθμητική πρόοδο με τρία στοιχειά.

Έστω πως τα παραπάνω δυο στοιχειά είναι τα j και j+d τότε και το στοιχείο j+2d προφανώς ανήκει στο B_{11} και επομένως το j+2d θα έχει διαφορετικό χρώμα από τα j, j+d. Οδηγούμαστε λοιπόν στην εξής κατάσταση:



Όμως το στοιχείο 205 ανήκει στο μπλοκ B_{41} και αν αυτό είναι χρωματισμένο κόκκινο δημιουργεί κόκκινη μονοχρωματική πρόοδο 55-130-205 ενώ αν αυτό είναι χρωματισμένο μπλε δημιουργεί την μπλε μονοχρωματική πρόοδο 51-128-205. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως ανεξάρτητα από το χρώμα που θα έχει το 205 θα δημιουργηθεί οπωσδήποτε μια μονοχρωματική πρόοδος που θα το περιέχει.
Η τιμή του $W(3,2)$ στην πραγματικότητα είναι κατά πολύ μικρότερη του 325 και συγκεκριμένα $W(3,2)=9$. Οι μονές τρεις διαιρέσεις του συνόλου $\{1,\ldots,8\}$ σε δυο κλάσεις που δεν περιέχουν αριθμητική πρόοδο είναι οι ακόλουθες: (καθώς όπου και να βάλω τον 9 θα δημιουργηθεί αριθμητική πρόοδος μήκους 3)



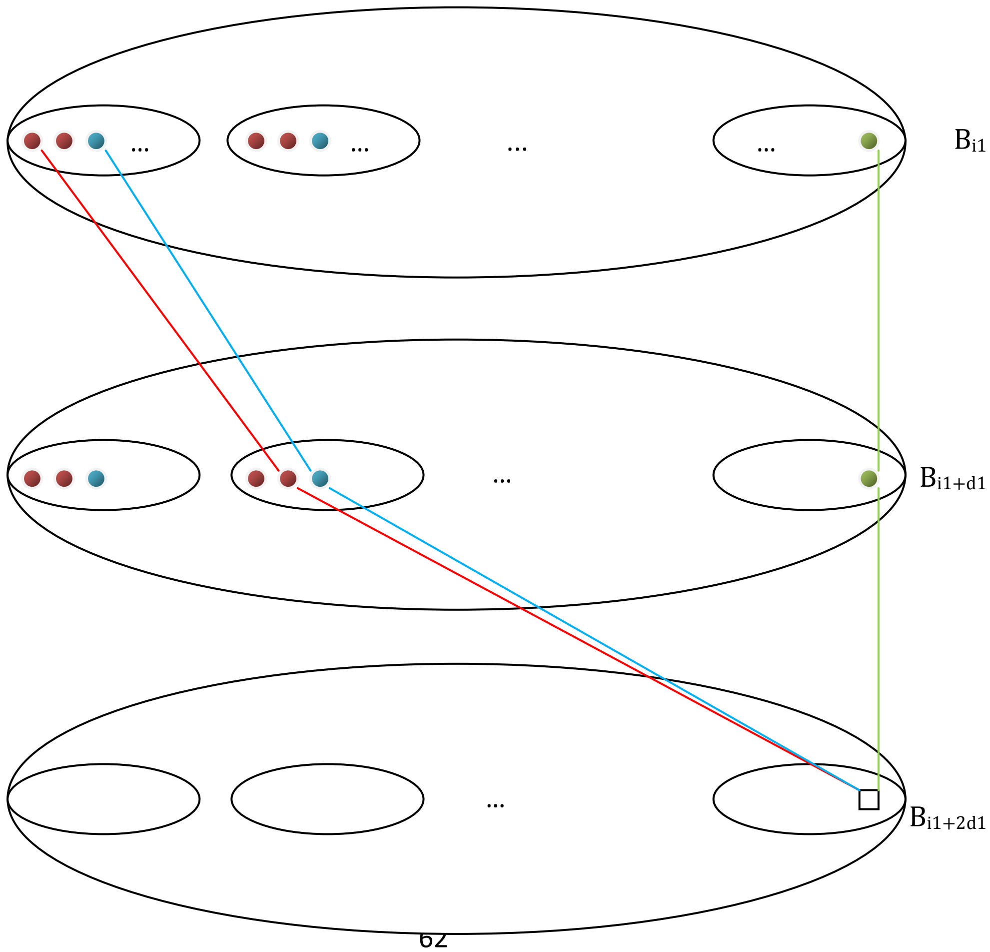
1_η διαίρεση

2_η διαίρεση

3_η διαίρεση

- Θα δούμε τώρα αναλυτικά τον αριθμό $W(3,3)$ του οποίου η πραγματική τιμή είναι ίση με 27.

  Παίρνουμε τους πρώτους $7(2.3^7+1)(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$ ακεραιους και τους διαιρουμε σε $(2.3^{7(2.3^7+1)}+1)$ το πληθος μπλοκ B_i με $7(2.3^7+1)$ στοιχειά το καθένα. Κάθε μπλοκ B_i 3-χρωματιζεται με $3^{7(2.3^7+1)}$ τροπους αρα τα πρωτα $3^{7(2.3^7+1)}+1$ μπλοκ θα περιέχουν τουλάχιστον δυο μπλοκ τα οποία θα είναι χρωματισμένα με ακριβώς τον ίδιο τρόπο, έστω ότι αυτά είναι τα B_{i1} και B_{i1+d1}. Στη συνέχεια διαιρούμε το κάθε μπλοκ σε μικρότερα τα οποία να περιέχουν επτά διαδοχικούς ακεραίους το καθένα και άρα έχουμε 2.3^7+1 μικρα μπλοκ μεσα σε καθε μεγαλο. Το καθε μικρο μπλοκ 3-χρωματιζεται με 3^7 διαφορετικους τροπους και αρα στα πρωτα 3^7+1 μικρα μπλοκ του B_{i1} υπάρχουν τουλάχιστον δυο με ακριβώς τον ίδιο χρωματισμό, έστω τα $B_{i1,i2}$ και $B_{i1,i2+d2}$. Τέλος στα πρώτα τέσσερα στοιχειά του $B_{i1,i2}$ από την αρχή του περιστερεώνα ένα από τα τρία χρώματα υπάρχει τουλάχιστον δυο φορές. Έστω πχ ότι τα τα στοιχειά i_3, i_3+d_3 είναι κόκκινα, τότε το στοιχείο i_3+2d_3 ανήκει στο $B_{i1,i2}$ και άρα για να μην εμφανίζεται μονοχρωματική πρόοδος έχει διαφορετικό χρώμα έστω μπλε. Οδηγούμαστε λοιπόν στην παρακάτω κατάσταση:



Το μικρό μπλοκ επτά στοιχείων $B_{i1,i2+d2}$ ανήκει στο μεγάλο μπλοκ B_{i1} αφού επιλέξαμε τους αριθμούς $i2$ και $d2$ με κατάλληλο τρόπο. Αφού όμως τα μικρά μπλοκ $B_{i1,i2}$ και $B_{i1,i2+d2}$ έχουν το ίδιο χρώμα τότε το στοιχείο $p=i3+2d3+14d2$ που ανήκει στο $B_{i1,i2+2d2}$ δεν είναι κόκκινο διότι τότε θα δημιουργούνταν κόκκινη αριθμητική πρόοδος

$i3$ - $i3+d3+7d2$ – p

με τρεις όρους και επίσης δεν είναι μπλε καθώς τότε θα δημιουργούνταν μπλε αριθμητική πρόοδος

$i3+2d3$ – $i3+2d3+7d2$ – p

με τρεις όρους και επομένως το p έχει υποχρεωτικά το τρίτο χρώμα έστω το πράσινο.

Τα μεγάλα μπλοκ B_{i1} και B_{i1+d1} έχουν ακριβώς τον ίδιο χρωματισμό και άρα το στοιχείο $i3+2d3+14d2+7(2.3^7+1)$ ανήκει στο μπλοκ $B_{i1+d1,i2+2d2}$ και επίσης είναι πράσινο.

Θεωρούμε τώρα τον ακέραιο $m=i3+2d3+14d2+14(2.3^7+1)d1$ ο οποίος ανήκει στο μπλοκ $B_{i1+2d1,i2+2d2}$.

Αν το στοιχείο m είναι κόκκινο τότε υπάρχει μονοχρωματική κόκκινη αριθμητική πρόοδος

$i3$ – $i3+d3+7d2+7(2.3^7+1)d1$ – m

Αν το στοιχείο m είναι μπλε τότε αντίστοιχα υπάρχει μονοχρωματική μπλε αριθμητική πρόοδος

$i3+2d3$ – $i3+2d3+7d2+7(2.3^7+1)d1$ – m

Τέλος αν το στοιχείο m είναι πράσινο τότε υπάρχει μονοχρωματική πράσινη αριθμητική πρόοδος

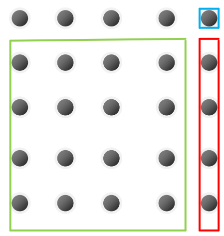
$i3+2d3+14d2$ – $i3+2d3+14d2+7(2.3^7+1)d1$ – m

Επομένως ανεξάρτητα από την επιλογή του χρώματος του m υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος που το περιέχει.

- Θα προχωρήσουμε στην κυρίως απόδειξη του θεωρήματος του Van Der Waerden αφού δώσουμε πρώτα έναν χρήσιμο ορισμό.

  Δυο m-αδες $(x_1,\ldots,x_m)$ όπου $x_i\in[0,\ell]$ και $(y_1,\ldots,y_m)$, $y_i\in[0,\ell]$ λεμέ ότι είναι *ℓ-ισοδύναμες* όταν συμφωνούν μέχρι και την τελευταία συνάντηση του αριθμού ℓ. Αν οι δυο αυτές m-αδες δεν περιέχουν τον αριθμό ℓ τότε πάλι λέγονται ℓ-ισοδύναμες.
  Έστω ότι ℓ=4, m=2, κατασκευάζουμε το καρτεσιανό γινόμενο x^2 όπου $x=\{0,1,2,3,4\}$. Το x^2 περιέχει 25 στοιχειά τα οποία διαμερίζουμε ως εξής:

  Η κλάση S_1 περιέχει τα 16 ζεύγη που δεν περιέχουν το στοιχείο 4
  Η κλάση S_2 περιέχει τα 4 ζεύγη που αρχίζουν με το στοιχείο 4
  Η κλάση S_3 περιέχει το ζεύγος (4,4)



  Οι παραπάνω κλάσεις διαμερίζουν ένα γνήσιο υποσύνολο του $[0,\ell]^m$ και τα υπόλοιπα ζεύγη είτε δεν λαμβάνονται υπόψη είτε ισοδύναμα θεωρούμε ότι αποτελούν το καθένα μια κλάση.

  Όμοια αν ℓ=5, m=3 έχουν 125 τριάδες τις οποίες διαμερίζουμε στις εξής οκτώ κλάσεις:

  Η κλάση S_1 περιέχει τις 4^3=64 τριάδες $x_1x_2x_3$ με $x_i\neq 4$, $1\leq i\leq 3$
  Η κλάση S_2 περιέχει τις 16 τριάδες $4x_1x_2$ με $x_i\neq 4$, $1\leq i\leq 2$
  Η κλάση S_3 περιέχει τις 4 τριάδες 04x με $x\in\{0,1,2,3\}$
  Η κλάση S_4 περιέχει τις 4 τριάδες 14x με $x\in\{0,1,2,3\}$
  Η κλάση S_5 περιέχει τις 4 τριάδες 24x με $x\in\{0,1,2,3\}$
  Η κλάση S_6 περιέχει τις 4 τριάδες 34x με $x\in\{0,1,2,3\}$
  Η κλάση S_7 περιέχει τις 4 τριάδες 44x με $x\in\{0,1,2,3\}$
  Η κλάση S_8 περιέχει την τριάδα 444

  Οι υπόλοιπες 24 τριάδες είτε αποτελούν 24 κλάσεις η κάθε μια εκ των οποίων περιέχει ένα μονό στοιχείο είτε ισοδύναμα όπως έχουμε ήδη πει δεν λαμβάνονται καθόλου υπόψη.

Θεωρούμε τώρα την παρακάτω πρόταση $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$ όπου $\ell,\mathrm{m}\in\mathbb{N}$ και με $[\mathrm{m},\mathrm{n}]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{\mathrm{m},\mathrm{m}+1,\ldots,\mathrm{n}\}$.

$\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$: Για δοσμένο ακέραιο k υπάρχει ακέραιος $\mathrm{W}=\mathrm{W}(\ell,\mathrm{m},\mathrm{k})$ τέτοιος ώστε για κάθε συνάρτηση $\mathrm{c}[1,\mathrm{W}(\ell,\mathrm{m},\mathrm{k})]\to[1,\mathrm{k}]$ υπάρχουν ακέραιοι $\mathrm{a},\mathrm{d}_1,\ldots,\mathrm{d}_\mathrm{m}\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε:

$$\mathrm{a}+\ell\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\mathrm{d}_\mathrm{i}\leq \mathrm{W}(\ell,\mathrm{m},\mathrm{k})$$

και η συνάρτηση $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\ell\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\mathrm{d}_\mathrm{i})$ είναι σταθερή σε κάθε ℓ −ισοδυναμη κλαση του $[0,\ell]^\mathrm{m}$.

Η πρόταση $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$ συμπίπτει με το θεώρημα του van der Waerden για αριθμητικές προόδους με ℓ όρους. Πράγματι για $\mathrm{m}=1$ και για κάθε k, υπάρχει $\mathrm{W}(\ell,\mathrm{m},\mathrm{k})=\mathrm{W}(\ell,\mathrm{k})$ τέτοιος ώστε για κάθε $\mathrm{c}\in[1,\mathrm{W}(\ell,\mathrm{k})]\to[1,\mathrm{k}]$ υπάρχουν δυο ακέραιοι $\mathrm{a},\mathrm{d}_1\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\mathrm{a}+\ell\mathrm{d}_1\leq\mathrm{W}(\ell,\mathrm{k})$ και επίσης η συνάρτηση $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{x}_1\mathrm{d}_1)$ είναι σταθερή σε κάθε μια από τις δυο ℓ-ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell]$. Όμως η μια ℓ-ισοδύναμη κλάση είναι η $[0,\ell\text{-}1]$ και η άλλη η $\{\ell\}$. Αν λοιπόν $\mathrm{x}_1=0,1,\ldots,\ell\text{-}1$, οι ℓ όροι της μονοχρωματικής αριθμητικής προόδου είναι οι a, $\mathrm{a}+\mathrm{d}_1$, $\mathrm{a}+\mathrm{d}_1$, …, $\mathrm{a}+(\ell\text{-}1)\mathrm{d}_1$ και επομένως $\mathrm{c}(\mathrm{a})=\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{d}_1)=\ldots=\mathrm{c}(\mathrm{a}+(\ell\text{-}1)\mathrm{d}_1)$.

Μόλις δείξαμε πως η πρόταση $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$ συμπίπτει με το θεώρημα του Van Der Waerden. Παρατηρούμε πως η συνάρτηση c μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας χρωματισμός του διαστήματος $[1,\mathrm{W}]$ με k το πλήθος χρώματα και πως η παράσταση $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\ell\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\mathrm{d}_\mathrm{i})$ μας δινει την m-αδα $(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{m})$.

Αντί για το θεώρημα του van der Waerden θα αποδείξουμε λοιπόν το παρακάτω ισχυρότερο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2

Η πρόταση $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$ ισχύει για όλους τους ακεραίους $\ell,\mathrm{m}\geq1$.

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με διπλή επαγωγή στους ακεραίους ℓ,m.

Η πρόταση $\mathcal{S}(1,1)$ ισχύει τετριμμένα, στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα εξής δυο διαφορετικά επαγωγικά βήματα:

i. Αν η $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m})$ αληθεύει για ℓ σταθερό και $\mathrm{m}\geq1$ τότε θα αληθεύει και η $\mathcal{S}(\ell,\mathrm{m}+1)$

Θέτουμε $W=W(\ell,m,k)$ όπου k σταθερός

$W'=W(\ell,1,k^w)$

$W_j=[(j-1)W+1,jW]$ με $1\leq j\leq W'$

Έστω η δοσμένη συνάρτηση $c:[1,WW']\rightarrow[1,k]$ η οποία μπορεί να θεωρηθεί όπως είπαμε σαν ένας χρωματισμός του διαστήματος $[1,WW']$ με k χρώματα

$\underbrace{1 \quad W}_{W_1} \qquad \underbrace{W+1 \quad 2W}_{W_2} \; \dots \; \underbrace{(a'-1)W+1 \qquad a'W}_{Wa'} \; \dots \; \underbrace{(W'-1)W+1 \qquad W'W}_{Ww'}$

● 1 ● 2 ● a' ● w'

Επειδή το σύνολο των χρωματισμών κάθε μπλοκ W_j ειναι k^w ο χρωματισμός c παράγει έναν χρωματισμό $c':[1,W']\rightarrow[1,k^w]$ ο οποίος χρωματίζει το $j\in[1,W']$ με την συνάρτηση που περιγράφει τον c-χρωματισμό του μπλοκ W_j δηλαδή:

$F(w)=c[(j-1)W+w]$ με $1\leq w\leq W$ όπου $f\in[1,k]^{[1,W]}$.

Δηλαδή αν δυο μπλοκ W_k και $W_{k'}$ έχουν τον ίδιο χρωματισμό c, και συνεπώς $c[(k-1)w+t]=c[(k'-1)W+t]$ για κάθε $t\in[1,W]$, τότε και $c'(k)=c'(k')$.

Από την εκλογή του $W'=W(\ell,1,k^w)$ και την επαγωγική υπόθεση, για $m=1$ θα υπάρχουν αριθμοί a',d' τέτοιοι ώστε $a'+\ell d'\leq W'$ και ο χρωματισμός $c'(a+xd')$ να είναι σταθερός στις δυο ℓ-ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell]$ δηλαδή στις $[0,\ell-1]$ και $\{\ell\}$ άρα

$c'(a')=c'(a'+d')=\ldots=c'(a'+(\ell-1)d')$

Εφαρμόζουμε τώρα την πρόταση $\mathcal{S}(\ell,m)$ στο μπλοκ $Wa'=[(a'-1)W+1, a'W]$ το οποίο σαν υποσύνολο του $[1,WW']$ είναι k-χρωματισμένο με τον χρωματισμό c. θα υπάρχουν λοιπόν ακέραιοι a, d_1, …, d_m τέτοιοι ώστε

$(a-1)W+1\leq a\leq a+\ell\sum_{i=1}^{m} d_i\leq a'W$ και

Ο χρωματισμός $c(a+\ell\sum_{i=1}^{m} d_i)$ να είναι σταθερός στις ℓ-ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell]^m$

Θέτουμε τώρα $d_{m+1}=d'W$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι a, d_1, …, d_{m+1} τέτοιοι ώστε:

$$a+\ell\sum_{i=1}^{m+1} d_i = a+\ell\sum_{i=1}^{m} d_i+\ell d_{m+1}\leq a'W+\ell d'W = (a+\ell d')W\leq W'W$$

και ο χρωματισμός $c(\ell\sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i)$ να είναι σταθερός στις ℓ-ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell]^{m+1}$. Αποδείξαμε μόλις το πρώτο επαγωγικό βήμα.

ii. Θα δείξουμε στη συνεχεία το δεύτερο επαγωγικό βήμα δηλαδή αν η πρόταση $\mathscr{s}(\ell,\mathrm{m})$ ισχύει για κάθε m τότε ισχύει και η πρόταση $\mathscr{s}(\ell+1,\mathrm{m})$.

Έστω ο δοσμένος χρωματισμός $c[1,W(\ell,k,k)]\rightarrow[1,k]$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι a, d_1, ..., d_k τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{a}+\ell\sum_{\mathrm{i}=1}^{k}\mathrm{d_i}\leq \mathrm{W}(\ell,\mathrm{k},\mathrm{k})$$

και ο $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{k}\mathrm{x_i}\mathrm{d_i})$ να είναι σταθερός στις ℓ-ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell]^k$.

Όμως τα χρώματα $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\ell\mathrm{d_i})$ s=0,1,...,k όπου θέσαμε $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{0}\ell\mathrm{d_i})=\mathrm{c}(\mathrm{a})$ είναι k+1 το πλήθος ενώ το διάστημα $[1,W(\ell,k,k)]$ έχει χρωματιστεί με k χρώματα και επομένως από την αρχή του περιστερεώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον δυο ίδια χρώματα δηλαδή θα υπάρχουν κάποια s,t με $0\leq s<t\leq k$ τέτοια ώστε $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\ell\mathrm{d_i})=\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{t}\ell\mathrm{d_i})$ (*)

Ας υποθέσουμε πως το κοινό αυτό χρώμα είναι το κόκκινο. Τότε υπάρχουν δυο αριθμοί $\mathrm{A}=\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\ell\mathrm{d_i}$ και $\mathrm{D}=\sum_{s+1}^{t}d_i$ τέτοιοι ώστε:

$A+(\ell+1)D\leq W(\ell+1,1,k)$, πράγματι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+(\ell+1)\mathrm{D}&=\mathrm{a}+\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\ell\mathrm{d_i}+(\ell+1)\sum_{s+1}^{t}d_i=\\&=\mathrm{a}+\textstyle\sum_{\mathrm{i}=1}^{t}\ell\mathrm{d_i}+\sum_{s+1}^{t}d_i\leq W(\ell,k,k)+\sum_{s+1}^{t}d_i=\\&=W(\ell+1,1,k)\end{aligned}$$

Και επίσης

$\mathrm{c}[(\mathrm{a}+\sum_{1}^{s}\ell\mathrm{d_i})+\mathrm{j}\sum_{s+1}^{t}d_i]$ είναι σταθερό στις δυο ισοδύναμες κλάσεις του $[0,\ell+1]$, δηλαδή στις $[0,\ell]$ και $\{\ell+1\}$ άρα $c(A+jD)$ σταθερό για κάθε $j\in[0,\ell]$, πράγματι αφού $\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{s}\ell\mathrm{d_i})=\mathrm{c}(\mathrm{a}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{t}\ell\mathrm{d_i})$ συνεπάγεται πως η αντίστοιχη s-αδα και t-αδα είναι ισοδύναμες.

Αν επαυξήσουμε την s-αδα σε t-αδα προσθέτοντας t-s συντεταγμένες με οτιδήποτε στοιχειά έκτος από ℓ τότε

- Αν $j\in[0,\ell-1]$ τότε η t-αδα του $\mathrm{c}(\mathrm{A}+\mathrm{jD})=(\mathrm{a}+\sum_{1}^{s}\ell\mathrm{d_i}+\mathrm{j}\sum_{s+1}^{t}d_i)$ έχει την μορφή $(\ell,\ell,...,\ell,j,j,...j)$ (όπου το ℓ εμφανίζεται s το πλήθος φορές και το j εμφανίζεται t-s το πλήθος φορές) με $j\neq\ell$ και η μορφή αύτη είναι ισοδύναμη με την $(\ell,\ell,...,\ell,0,0,...,0)$ και άρα είναι χρωματισμένη κόκκινη από την σχέση (*)

- Αν $j=\ell$ τότε $c(A+jD)=c(a+\sum_1^s \ell d_i + j\sum_{s+1}^t d_i)=$
$$=c(a+\sum_1^s \ell d_i + \sum_{s+1}^t \ell d_i)=$$
$$=c(a+\sum_1^t \ell d_i)$$

Η οποία από την σχέση (*) είναι χρωματισμένη κόκκινη.

Δείξαμε λοιπόν ότι $c(A+jD)$ είναι σταθερό για $j\in[0,\ell]$ και επομένως δείξαμε την πρόταση $\mathscr{s}(\ell+1,m)$.

Άρα η μέθοδος της διπλής επαγωγής που ακολουθήσαμε αποδεικνύει το θεώρημα 6.2.

$\mathscr{s}(1,1)\rightarrow \mathscr{s}(1,2)\rightarrow\ldots\rightarrow \mathscr{s}(1,n)$

$\mathscr{s}(2,1)\rightarrow \mathscr{s}(2,2)\rightarrow\ldots\rightarrow \mathscr{s}(2,n)$

$\mathscr{s}(3,1)\rightarrow\ldots$

■

Ανάλογα με τους αριθμούς Ramsey μπορούμε να ορίσουμε τους αριθμούς Wan Der Waerden τους οποίους συμβολίζουμε με $W(k,t)$ και τους ορίζουμε σαν τον ελάχιστο ακέραιο τέτοιο ώστε αν το διάστημα $[1,W]$ χρωματιστεί με t το πλήθος χρώματα τότε υπάρχει μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος με k το πλήθος όρους. Ελάχιστοι αριθμοί Van Der Waerden είναι γνωστοί, μέχρι τώρα γνωρίζουμε μονό τους:

$W(3,2)=9$

$W(4,2)=35$

$W(3,3)=27$

$W(3,4)=76$

$W(5,2)=178$

Ο van der Waerden υποστήριξε πως υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος και οι Erdös και Turan πως αύτη η πρόοδος βρίσκεται μέσα στην χρωματική κλάση του “συχνότερα εμφανιζόμενου χρώματος”. Η εικασία τους αύτη πρωτοδιατυπωθηκε το 1936 και αποδεδείχθηκε πλήρως μόλις το 1974.

7.

Γενικεύσεις των θεωρημάτων του Schur και Van Der Waerden

Τα θεωρήματα των Schur, van der Waerden και Ramsey γενικεύτηκαν το ύστερο μισό του εικοστού αιώνα δίνοντας ενδιαφέροντα αποτελέσματα όπως το θεώρημα Hales-Jewett και η εικασία του Rota.

Πιο συγκεκριμένα αναφέρουμε την ακόλουθη γενίκευση των θεωρημάτων Schur και van der Waerden:

Θεώρημα 7.1

Για όλα τα $k,r,s \geq 1$ υπάρχει ακέραιος $n(k,r,s)=n$ τέτοιος ώστε αν χρωματίσουμε με r χρώματα το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ τότε υπάρχουν ακέραιοι $a,d > 0$ τέτοιοι ώστε το σύνολο $\{a,a+d,a+2d,\ldots a+kd\}\cup\{sd\}$ να είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη

Για $r=1$ έχουμε τετριμμένα πως $n(k,1,s)=\max(k+1,s)$ με $a=d=1$.

Συμβολίζουμε με $W=W(t,r)$ τον ελάχιστο ακέραιο τέτοιον ώστε αν το σύνολο $\{1,2,\ldots,w\}$ χρωματισθεί με r το πλήθος χρώματα να υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος t ορών. Η ύπαρξη του παραπάνω αριθμού εξασφαλίζεται από το θεώρημα του van der Waerden αφού μπορούμε να θέσουμε $n=S.W(kn(k,r\text{-}1,s),r)$ (όπως κάναμε και στην απόδειξη του ομώνυμου θεωρήματος).

Αν τώρα χρωματίσουμε με r χρώματα το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ μεταξύ των πρώτων $W(kn(k,r\text{-}1,s),r)$ ακέραιων αυτού του συνόλου θα βρούμε ένα μονοχρωματικό(έστω μπλε) υποσύνολο της μορφής $\{a+id'\}$ όπου $0\leq i\leq kn(k,r\text{-}1,s)$ δηλαδή μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο μήκους $kn(k,r\text{-}1,s)+1$. Αν για κάποιο δείκτη j με $1\leq j\leq n(k,r\text{-}1,s)$ ο αριθμός $sd'j$ είναι χρωματισμένος μπλε τότε αν θέσουμε $d=jd'$ το σύνολο $\{a,a+d,\ldots,a+kd\}\cup\{sd\}$ είναι χρωματισμένο μπλε και το θεώρημα έχει δηχθεί.

Αν πάλι όχι τότε το σύνολο $\{sd'j\text{: } 1\leq j\leq n(k,r\text{-}1,s)\}$ είναι χρωματισμένο με r-1 χρώματα. Από την επαγωγική υπόθεση και την ισοδυναμία των χρωματισμών των συνόλων $\{1,2,\ldots,n\}$ και $\{sd',2sd',\ldots,nsd'\}$ έπεται ότι υπάρχει μονοχρωματικό σύνολο της μορφής $\{a,a+d,\ldots,a+kd\}\cup\{sd\}$ και η απόδειξη έχει τελειώσει. ■

Επίσης το θεώρημα των Hales-Jewett που αποτελεί σημαντική γενίκευση των θεωρημάτων του Ramsey και του van der Waerden διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 7.2

Υπάρχει αριθμός N(k,r,m) τέτοιος ώστε αν $|S| \geq$ N(k,r,m) τότε υπάρχουν ξένα μη κενά υποσύνολα $x_1,\ldots,x_r$ του S και μια m-συλλογή $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ σημείων του S-x_1-…-x_r τετοια ώστε όλες οι m-συλλογές $\boldsymbol{\mathcal{A}}=\sum_{i=1}^{r} a_i x_i + \boldsymbol{\mathcal{B}}$ με $0 \leq a_i \leq$m να έχουν το ίδιο χρώμα.

(Ονομάζουμε συλλογή ένα σύνολο S που σε κάθε στοιχειό του έχουμε αντιστοιχίσει έναν μη αρνητικό ακέραιο που λέγεται πολλαπλότητα του στοιχείου. Μια m-συλλογή είναι μια συλλογή όπου κάθε στοιχειό έχει πολλαπλότητα μικρότερη του m.)

Θα αναφέρουμε στη συνεχεία την εικασία του Rota η όποια έχει στενή σχέση με το παραπάνω θεώρημα και αποδεδείχθηκε το 1972 από τους Graham, Leeb και Rothschild.

Θεώρημα 7.3

Αν δοθούν ένα πεπερασμένο σώμα F και φυσικοί αριθμοί n και k τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε αν ο N-διάστατος διανυσματικός χώρος επί του F ο όποιος συμβολίζεται με F^N χρωματιστεί με k το πλήθος χρώματα τότε ο F^N περιέχει έναν μονοχρωματικό n-διάστατο ομοπαραλληλικο υπόχωρο. Επίσης αν δοθεί ένα πεπερασμένο σώμα F και φυσικοί αριθμοί n,m,k$\geq$1 υπάρχει φυσικός αριθμός M τέτοιος ώστε αν το σύνολο των k-διάστατων υποχώρων του F^M χρωματιστεί με m το πλήθος χρώματα, τότε υπάρχει ένας n-διαστατός υπόχωρος μέσα στον οποίο όλοι οι k-διάστατοι υπόχωροι του έχουν το ίδιο χρώμα.

Βιβλιογραφία

- Παπαϊωάννου, Α.([2004]): Θεωρία Γραφημάτων. Αθήνα: Ε.Μ.Π.
- Παπαϊωάννου, Α.([1993]): Θεωρία Ramsey.Αθήνα: Ε.Μ.Π.
- Graham, R., Rothschild, B., Spencer, J.([1980]): Ramsey Theory.U.S.A.: John Wiley
- Bollobas, B.([1998]): Modern Graph Theory. New York: Springer