Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Θεωρία Αναδρομής - Το Θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:
Αθανάσιος Κατσανος

Επιβλέπων Καθηγητής:
Αλέξανδρος Αρβανιτακης

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα
Μάρτιος 2015

A computer would deserve to be called intelligent if it could deceive a human into believing that it was human.

Alan Turing

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε και να αποδείξουμε το Θεώρημα απληρότητας (μη-πληρότητας) που απέδειξε ο Kurt Gödel το 1931, ένα Θεώρημα που έμελε να αλλάξει τις βάσεις των θεμελιακών μαθηματικών εκείνης της εποχής.

Η μελέτη αυτού του σημαντικού θεωρήματος θα γίνει με την χρήση θεωρίας αναδρομής και υπολογισιμότητας. Στα πλαίσια της εργασίας θα διατυπωθούν ορισμοί, έννοιες και θεωρήματα απαραίτητα τόσο για την εξικίωση του αναγνώστη όσο και για την πλήρη και αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζονται έννοιες όπως το **βασικό λήμμα αναδρομής**, αναδρομικοί ορισμοί, καθώς και οι πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια εισάγονται έννοιες όπως ο υπολογισμός, η εγκυρότητα και οι ελάχιστες λύσεις. Ένα από τα πιο βασικά και σημαντικά θεωρήματα που θα αναφερθούν είναι αυτό της **Κανονικής μορφής και απαρίθμησης** που απέδειξε ο Kleene. Τελειώνοντας θα ορίσουμε την αριθμητική ιεραρχία και σχέσεις που είναι τα βασικά εργαλεία για την απόδειξη του Θεωρήματος μη-πληρότητας.

Το θεώρημα μη πληρότητας έχει στενή συγγένεια με αρκετά αποτελέσματα σχετικά με τα μη-αποφασίσιμα σύνολα στη θεωρία αναδρομής, η οποία αποτελεί κεντρικό πυλώνα της επιστήμης υπολογιστών. Ο Stephen Cole Kleene (1943) παρουσίασε μία απόδειξη του θεωρήματος μη πληρότητας του Γκέντελ χρησιμοποιώντας βασικά αποτελέσματα της θεωρίας υπολογισμού. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα δείχνει ότι το πρόβλημα τερματισμού δεν έχει λύση: δεν υπάρχει πρόγραμμα υπολογιστή που δοθέντος ενός προγράμματος Π ως είσοδο, να μπορεί να αποφασίσει σωστά αν το Π τελικά σταματά όταν τρέξει χωρίς είσοδο. Ο Kleene έδειξε ότι η ύπαρξη μιας πλήρους, αποτελεσματικής θεωρίας της αριθμητικής με συγκεκριμένες ιδιότητες συνέπειας θα σήμαινε πως το πρόβλημα του τερματισμού είναι αποφασίσιμο (υπολογίσιμο), μια αντίφαση. Η μη-υπολογισιμότητα μπορεί επομένως να περιγραφεί ως συνέπεια της μη πληρότητας του Γκέντελ.

Κεφάλαιο 1

Πρωτογενής και γενική αναδρομή

Πρίν ξεκινήσουμε την εισαγωγή κάποιων βασικών αναδρομικών ορισμών θα παραθέσουμε κάποιους συμβολισμούς από την λογική και την θεωρία συνόλων που είναι απαραίτητοι για την κατανόηση της συγκεκριμένης εργασίας.

$\&$: και, $\vee$: ή, $\neg$: όχι, $\Rightarrow$: συνεπάγεται, $\Leftrightarrow$: τότε και μόνο αν,
$\forall$: για κάθε, $\exists$: υπάρχει, $\exists!$: υπάρχει ακριβώς ένα.

$$\begin{aligned}
x \in A &\Leftrightarrow \textit{το στοχείο } x \textit{ ανήκει στο σύνολο } A \\
A \subseteq B &\Leftrightarrow \textit{κάθε μέλος του } A \textit{ είναι μέλος του } B \\
&\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B] \\
A = B &\Leftrightarrow \textit{τα σύνολα } A \textit{ και } B \textit{ έχουν ακριβώς τα ίδια μέλη} \\
&\Leftrightarrow A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A \\
f : A \to B &\Leftrightarrow \textit{η } f \textit{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού} \\
&\qquad \textit{το σύνολο } A \textit{ και πεδίο τιμών το σύνολο } B \\
f : A \rightarrowtail B &\Leftrightarrow \textit{η } f \textit{ είναι μονομορφισμός (ένα-προς -ένα συνάρτηση)} \\
f : A \twoheadrightarrow B &\Leftrightarrow \textit{η } f \textit{ είναι αντιστοιχία(συνάρτηση ένα-προς -ένα και επί)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x \mid P(x)\} &= \textit{το σύνολο όλων των } x \textit{ που έχουν την ιδιότητα } P(x) \\
\{x \in A \mid P(x)\} &= \{x \mid x \in A \textit{και } P(x)\} \\
A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A \textit{και } b \in B\} \\
&= \textit{το σύνολο των ζευγών } (a, b) \textit{ με } a \in A, b \in B \\
A \times B \times C &= \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \\
f : A \times B \to C & \\
&\Leftrightarrow \textit{η } f \textit{ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών στο } A \textit{ και στο } B
\end{aligned}$$

1.1 Αναδρομικοί Ορισμοί

Λήμμα 1.1. ***(Βασικό Λήμμα Αναδρομής).*** *Για όλα τα σύνολα X, W και δοσμένες συναρτήσεις $g : X \to W$, $h : W \times \mathbb{N} \times X \to W$, υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times X \to W$ τέτοια που*

$$f(0, x) = g(x), \tag{1.1}$$
$$f(n + 1, x) = h(f(n, x), n, x,). \tag{1.2}$$

Συγκεκριμένα χωρίς την παράμετρο x, $\forall w_0 \in W$ και για κάθε συνάρτηση $h : W \times \mathbb{N} \times X \to W$, υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times X \to W$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0) = w_0,\ f(n + 1) = h(f(n), n) \tag{1.3}$$

Το βασικό λήμμα αναδρομής είναι ένα κλασικό παράδειγμα θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για ένα σύστημα εξισώσεων για το οποίο ο άγνωστος είναι συνάρτηση. Η ιδιαίτερη σημασία του προέρχεται απο τρεις θεμελιακές ιδιότητες αναδρομικών ορισμών:

(I) Οι περισσότερες συναρτήσεις που ανακύπτουν στη θεωρία αριθμών και στη πληροφορική ορίζονται ή μπορούν να οριστούν αναδρομικά

(II) Ο αναδρομικός ορισμός (1.1) παράγει υπολογίσιμες συναρτήσεις από δοσμένες g και h.

(III) Η μορφή του αναδρομικού ορισμού (1.1) οδηγεί με φυσικό τρόπο σε επαγωγικές αποδείξεις ιδιοτήτων της συνάρτησης $f(n, x)$

Γενικα ο συσχετισμός ′ αναδρομικός ορισμός - επαγωγική απόδειξη′ είναι πλέον απο τις θεμελιακές στα μαθηματικά και στην θεωρητική πληροφορική.

Ορισμός 1.1. *Ένα σύνολο F πλειομελών συναρτήσεων στους φυσικούς ειναι* ***πρωτογενώς κλειστό*** *αν:*
(α) Η συνάρτηση $S(x) = x + 1$ του επομένου ανήκει στο F
(β)Για κάθε n και q , η σταθερή συνάρτηση n μεταβλητών

$$C^n_q(x_1, \ldots, x_n) = q$$

ανήκει στο F. Αν $n = 0$, τότε(συμβατικά) $C^0_q = q$, δηλαδή ταυτίζουμε την συνάρτηση μηδέν μεταβλητών με την μοναδική τιμή της.
(γ) Για κάθε n και i, $1 \leq i \leq n$, η προβολή

$$P^n_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

ανήκει στο F. Παρατηρούμε οτι η P_1^1 είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο $\mathbb{N}$, $P_1^1(x) = x$

*(δ)**Κλειστότητα για σύνθεση**. Αν η m-μελής $g(u_1, \ldots, u_m)$ και οι m,n-μελής συναρτήσεις*

$$h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})$$

ανήκουν στο F,με $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε και η

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \ldots, h_m(\vec{x})) \tag{1.4}$$

ανήκει στο F.

*(ε)**Κλειστότητα για πρωτογενή αναδρομή**. Αν η n-μελής g και η $(n+2)$-μελής h ανήκουν στο F, και αν η $(n+1)$-μελής f ορίζεται από τις εξισώσεις*

$$f(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) \tag{1.5}$$

$$f(y+1, \vec{x}) = h(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}), \tag{1.6}$$

τότε και η f ανήκει στο F. Συμβατικά περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $n = 0$ οπότε οι εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$f(0) = q \quad (= C_q^0)$$
$$f(y+1) = h(f(y), y).$$

Η συνάρτηση f ειναι **πρωτογενώς αναδρομική** (*primitive recursive*) αν ανήκει σε κάθε πρωτογενώς κλειστό σύνολο συναρτήσεων, και **πρωτογενώς αναδρομική στο Ψ**, για ενα τυχαίο σύνολο Ψ "δοσμένων" πλειομελών συναρτήσεων, αν ανήκει σε κάθε πρωτογενώς κλειστό σύνολο που περιέχει το Ψ και γράφουμε:

$$\mathcal{R}_p = \{f \mid \text{η } f \text{ είναι πρωτογενώς αναδρομική}\}$$

$$\mathcal{R}_p(\Psi) = \{f \mid \text{η } f \text{ είναι πρωτογενώς αναδρομική στο } \Psi\}$$

έτσι που

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p(\emptyset).$$

Παράδειγμα 1.1. *Η πρόσθεση*

$$s(x, y) = x + y$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική επειδή ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} s(0,y) &= P_1^1(y) &&= y, \\ s(x+1,y) &= h(s(x,y),x,y) &&= s(x,y)+1 \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση $h(w,x,y) = S(w)$ *είναι πρωτογενώς αναδρομική αφού ορίζεται με την σύνθεση*

$$h(w,x,y) = S(P_1^3(w,x,y)).$$

Πρόταση 1.1. *Το σύνολο* $\mathcal{R}_p(\Psi)$ *των πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων στο* Ψ *περιέχει το* Ψ *και είναι πρωτογενώς κλειστό.*

Απόδειξη. Αν η f ορίζεται με πρωτογενή αναδρομή από τις $g,h \in \mathcal{R}_p(\Psi)$, τοτε $g,h \in F$ για κάθε πρωτογενώς κλειστό F που περιέχει το Ψ, άρα $f \in \mathcal{R}_p(\Psi)$. □

Παράδειγμα 1.2. *Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές.*

$$\begin{aligned} g(w,y) &= 0 \\ h(w,x,y) &= g(P_1^3(w,x,y), P_1^3(w,x,y)) = w+y \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$f(0,y) = 0 \quad = C_0^1(y) \tag{1.7}$$

$$f(x+1,y) = h(f(x,y),x,y) = f(x,y)+1 \tag{1.8}$$

τότε και η $f(x,y)$ *είναι πρωτογενώς αναδρομική.*

Ορισμός 1.2. *Η* ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** *μιας σχέσης* $P(\vec{x})$ *είναι η εξής:*

$$\chi_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } P(\vec{x}), \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1.9}$$

και η σχέση $P(\vec{x})$ *είναι* ***πρωτογενώς αναδρομική*** *αν η* $\chi_P(\vec{x})$ *είναι πρωτογενώς αναδρομική. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την χαρακτηριστική συνάρτηση ενός* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Δηλαδή:*

$$\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1.10}$$

Άρα το A *είναι πρωτογενώς αναδρομικό αν η* $\chi_A(\vec{x})$ *είναι πρωτογενώς αναδρομική.*

Πρόταση 1.2. *Αν η $\chi_P(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική σχέση τότε η $f(\vec{x})$ που ορίζεται με διακλάδωση ώς:*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g(\vec{x}), & \text{αν}\, P(\vec{x}), \\ h(\vec{x}), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική με $g(\vec{x})$, $h(\vec{x})$ πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις.

Απόδειξη. $f(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x})g(\vec{x}) + (1 - \chi_P(\vec{x}))h(\vec{x})$. □

Πρόταση 1.3. *(α) Η παρακάτω συνάρτηση είναι πρωτογενώς αναδρομική.*

$$rm(x+1, y) = \begin{cases} x+1, & \text{αν}\, y = 0 \\ rm(x,y)+1, & \text{αλλιώς, αν}\ rm(x,y)+1 < y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Το σύνολο των πρωτογενών αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για του προτασιακούς τελεστές $\neg, \vee$, & $, \Rightarrow$, δηλαδή αν:

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}) \,\&\, R(\vec{x})$$

και οι Q, R είναι πρωτογενώς αναδρομικές, τότε και η P είναι πρωτογενώς αναδρομική.

(γ) Αν η σχέση $Q(\vec{y})$ και οι συναρτήσεις $f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές , τότε και η σχέση

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

(δ) Αν η $P(i, \vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομική και

$$Q(z, \vec{x}) \Leftrightarrow (\exists i \leq z)\, P(i, \vec{x})$$
$$R(z, \vec{x}) \Leftrightarrow (\exists i \leq z)\, P(i, \vec{x})$$

τότε και οι $Q(z, \vec{x}), R(z, \vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Πόρισμα 1.1. *Αν η σχέση $P(i, \vec{x})$ και η συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές , τότε και οι σχέσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές.*

$$Q(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists i \leq f(\vec{x}))\, P(i, \vec{x})$$
$$R(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists i \leq f(\vec{x}))\, P(i, \vec{x})$$

Στις παραπάνω σχέσεις ισχύει και με $<$ αντί του $\leq$.

Ορισμός 1.3. *Ορίζουμε τον τελεστή **φραγμένης ελαχιστοποίησης** ως εξής:*

$$(\mu i \leq z) R(i, \vec{x}) = \begin{cases} \text{ο ελάχιστος}\ i \leq z \ \ \text{τέτοιος που}\ \ R(i, \vec{x}),\ \text{αν}(\exists i \leq z) R(i, \vec{x}) \\ z+1\ \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4. *Για κάθε πρωτογενώς αναδρομική σχέση $R(i,\vec{x})$, η συνάρτηση*

$$f(z,\vec{x}) = (\mu i \leq z)R(i,\vec{x})$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν η $g(\vec{x})$ είναι επίσης πρωτογενώς αναδρομική, τοτε πρωτογενώς αναδρομική είναι και η συνάρτηση

$$h(\vec{x})(\mu i \leq g(\vec{x}))R(i,\vec{x}) \ \ (= f(g(\vec{x}),\vec{x}).$$

Κωδικοποίηση ακολουθιών. Όταν λέμε κωδικοποίηση ενός τυχαίου συνόλου A σε ένα σύνολο C εννοούμε μια τυχαία 1-1 συνάρτηση $c : A \to C$, που μας επιτρέπει να πάρουμε ενα τυχαίο στοιχείο $x \in A$ απο τον κωδικό του $c(x)$. Η συνήθης κωδικοποίηση που χρησιμοποιείται ειναι στο σύνολο $\mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο μια απλή κωδικοποίηση του συνόλου $\mathbb{N}^*$, των (πεπερασμένων δηλαδή) ακολουθιών από αριθμούς ως εξής.
Η τυχαία κωδικοποίηση

$$\langle\ \rangle : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$$

του $\mathbb{N}^*$ είναι **πρωτογενώς αναδρομική** αν για κάθε ακολουθία φυσικών αριθμών $u_0,\ldots,u_n-1$, με

$$u_i < \langle u_0,\ldots,u_n-1\rangle \ \ (i<n)$$

η σχέση

$$Seq(u) \Leftrightarrow u = \langle u_0,\ldots,u_n-1\rangle \tag{1.11}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική. Επίσης για κάθε n, η n-μελής συνάρτηση

$$f_n(u_0,\ldots,u_n-1) = \langle u_0,\ldots,u_n-1\rangle \tag{1.12}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.
Πιο συχνά χρησιμοποιείται η λεγόμενη "κλασσική" κωδικοποίηση

$$\langle u_0,\ldots,u_n-1\rangle = p_0^{u_0+1}\cdot p_1^{u_1+1}\cdot\ldots p_{n-1}^{u_{n-1}+1}$$

με $\langle\,\rangle = 1$ η οποία είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Ορισμός 1.4. ***Μερική συνάρτηση*** *από το πεδίο εισόδου A στο πεδίο τιμών ή εξόδου B ($f : A \to B$) είναι η τυχαία συνάρτηση*

$$f : A_0 \to B \ \ (A_0 = Domain(f) \subseteq A),$$

όπου το A_0 ονομάζεται πεδίο σύγκλισης της f. Ισοδύναμα η τυχαία συνάρτηση

$$f : A \to B \cup \{\perp\}$$

όπου $\perp$ (πάτος) είναι κάποιο αντικείμενο που δεν ανήκει στο B. Δηλαδή όταν γράφουμε $f(x) =\perp$ το ερμηνεύουμε ως $x \notin Domain(f)$, και λέμε ότι η f αποκλίνει στο x αν $f(x) =\perp$. Εαν $f(x) \in B$, τότε η f συγκλίνει στο x και τα συμβολίζουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x)\downarrow &\Leftrightarrow x \in Domain(f) \Leftrightarrow f(x) \in B \\ f(x)\uparrow &\Leftrightarrow x \notin Domain(f) \Leftrightarrow f(x) =\perp \end{aligned}$$

Ειδικά για n-μελείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ στους φυσικούς αριθμούς.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) > 0 &\Leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow \&\ \ f(\vec{x}) > 0 \\ f(\vec{x}) < g(\vec{y}) &\Leftrightarrow f(\vec{x})\downarrow \&\ \ g(\vec{y})\downarrow \&\ \ f(\vec{x}) < g(\vec{y}). \end{aligned}$$

Ειδική περίπτωση αποτελεί η μερική συνάρτηση $\varepsilon(x) =\perp$ $x \in A$ με $Domain(f) = \emptyset$ που αποκλίνει για κάθε είσοδο. Τέλος οι ολικές (συνήθεις) συναρτήσεις $f : A \to B$ είναι μερικές συναρτήσεις με $Domain(f) = A$.

Ορισμός 1.5. *Για δύο n-μελείς μερικές συναρτήσεις $f, g : A \to B$, θέτουμε*

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow (\forall \vec{x})[f(\vec{x})\downarrow \Rightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x})]. \tag{1.13}$$

Η σχέση $\sqsubseteq$ είναι μερική διάταξη στο σύνολο

$$(A \to B) = \{f \mid f : A \to B\}$$

όλων των μερικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και πεδίο τιμών το B, δηλαδή

$$f \sqsubseteq f, [f \sqsubseteq g\ \ \&\ \ g \sqsubseteq h] \Rightarrow f \sqsubseteq h, [f \sqsubseteq g\ \ \&\ \ g \sqsubseteq f] \Rightarrow f = g.$$

Σύνθεση και πρωτογενής αναδρομή. Οι τελεστές για μερικές συναρτήσεις ερμηνεύονται με το φυσικό τρόπο του υπολογισμού τους, δηλάδη αν $g, h : A \to B$ και $f : B^2 \to C$ τότε για όλα τα $x \in A$, $w \in C$,

$$f(g(x), h(x)) = w \Leftrightarrow (\exists u, v \in B)[g(x) = u\ \ \&\ \ h(x) = v\ \ \&\ \ f(u, v) = w]$$

Και αν

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(y+1, \vec{x}) &= h(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}) \end{aligned}$$

και οι g, h είναι μερικές συναρτήσεις στο σύνολο $\mathbb{N}$, τότε για όλα τα $y, \vec{x}, w \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(y,\vec{x}) = w \Leftrightarrow & (\exists w_0, \ldots, w_y \in \mathbb{N}) \\ & [w_0 = g(\vec{x}) \\ & \ \ \& \ \ (\forall i, 0 < i \leq y)[w_i = h(w_{i-1}, i-1, \vec{x})] \\ & \ \ \& \ \ w_y = w] \end{aligned}$$

Πόρισμα του παραπάνω είναι ότι

$$g(\vec{x}) \uparrow \Leftarrow (\forall y)[f(y,\vec{x}) \uparrow],$$

διότι για κάθε y, ο υπολογισμός της τιμής $f(y,\vec{x})$ ανάγεται στον υπολογισμό της $f(0,\vec{x}) = g(\vec{x})$.

Με αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του συνόλου $\mathcal{R}_p(\Psi)$ των Ψ-πρωτογενώς αναδρομικών συναρτήσεων στην περίπτωση που το Ψ περιέχει μερικές συναρτήσεις.

Ορισμός 1.6. *Η* ***ελαχιστοποίηση*** *της μερικής συνάρτησης $g(i,\vec{x})$ είναι η μερική συνάρτηση*

$$\begin{aligned} f(y,\vec{x}) &= (\mu i \geq y)[g(i,\vec{x}) = 0] \\ &= \text{ο ελάχιστος } w \geq y, \text{τέτοιος που} \\ & g(w,\vec{x}) = 0 \ \ \& \ \ (\forall i)[y \leq i < w \Rightarrow g(i,\vec{x}) > 0]. \end{aligned}$$

Ορισμός 1.7. *Η τυχαία μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι* ***ελαχιστικά αναδρομική*** *(ή μ-αναδρομική) στο σύνολο των μερικων συναρτήσεων Ψ, αν η f ανήκει σε κάθε σύνολο μερικών συναρτήσεων που περιέχει το Ψ και είναι πρωτογενώς κλειστό και κλειστό για ελαχιστοποίηση.*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu(\Psi) &= \{f \mid \eta \ f \ \text{είναι } \mu\text{-αναδρομική στο } \Psi\} \\ \mathcal{R}_\mu &= \mathcal{R}_\mu(\emptyset). \end{aligned}$$

Η τυχαία σχέση $R(\vec{x})$ είναι ελαχιστικά αναδρομική αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{R}_\mu(\Psi)$ των Ψ-ελαχιστικά αναδρομικών μερικών συναρτήσεων είναι κλειστό για την πρωτογενή αναδρομή απο τον ορισμό του συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{R}_p(\Psi) \subseteq \mathcal{R}_\mu(\Psi)$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πρόταση 1.5. *Η ελαχιστοποίηση*

$$f(y,\vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i,\vec{x}) = 0]$$

τυχαίας μερικής συνάρτησης g ειναι $\sqsubseteq$-ελαχιστική λύση της αναδρομικής εξίσωσης

$$p(y,\vec{x}) = \textit{αν}\,(g(y,\vec{x}) = 0)\ \textit{τότε}\ y\ \ \textit{αλλιώς}\ \ p(y+1,\vec{x}), \tag{1.14}$$

δηλαδή:

(α) Η (1.14) ισχύει για όλα τα $y, \vec{x}$ αν θέσουμε $p := f$.

(β) Αν η (1.14) ισχύει για όλα τα $y, \vec{x}$ με κάποια p, τότε $f \sqsubseteq p$.

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε οτι για όλα τα $y, \vec{x}$,

$$f(y,\vec{x}) = \textit{αν}\,(g(y,\vec{x}) = 0)\ \textit{τότε}\ y\ \ \textit{αλλιώς}\ \ f(y+1,\vec{x}) \tag{1.15}$$

Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις:

$$g(y,\vec{x})\uparrow,\ g(y,\vec{x}) = 0.\ g(y,\vec{x}) > 0$$

Η αλήθεια της (1.15) είναι προφανής στις δύο πρώτες. Στην τρίτη περίπτωση, αν

$$(\forall i \geq y)[g(i,\vec{x})\uparrow \vee g(i,\vec{x}) > 0],$$

τότε,

$$f(y,\vec{x}) = \perp = f(y+1,\vec{x})$$

και έχουμε πάλι ισότητα. Τέλος αν για κάποιο $w > y$

$$g(w,\vec{x}) = 0\ \ \&\ \ (\forall i \geq y)[i < w \Rightarrow g(i,\vec{x}) > 0],$$

τότε $f(y,\vec{x})f(y+1,\vec{x}) = w$ και ξαναέχουμε ισότητα.

(β) Πρέπει να δείξουμε οτι αν για όλα τα $\vec{x}, y$,

$$p(y,\vec{x}) = \textit{αν}\,(g(y,\vec{x}) = 0)\ \textit{τότε}\ y\ \ \textit{αλλιώς}\ \ p(y+1,\vec{x}) \tag{1.16}$$

τότε, για κάθε $\vec{x}$ και όλα τα y και $w \geq y$,

$$f(y,\vec{x}) = w \Rightarrow p(y,\vec{x}) = w. \tag{1.17}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διαφορά $w - y$.

Βαση: $w = y$. Από τον ορισμό της f και την (1.16)

$$f(y,\vec{x}) = y = p(y,\vec{x}).$$

Επαγωγικο Βημα: $w > y$ και $g(y,\vec{x}) > 0$, άρα

$$\begin{aligned} w = f(y,\vec{x}) &= f(y+1,\vec{x})) && \textit{(απο την 1.15)} \\ &= p(y+1,\vec{x}) && \textit{(επαγ. υπόθεση)} \\ & && \textit{αφού}\ w-(y+1) = (w-y)-1) \\ &= p(y,\vec{x}) && \textit{(από την 1.16).} \end{aligned}$$

□

Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, αφού δείχνει ότι η εξίσωση (1.14) που φαίνεται να ορίζει την τιμή $p(y, \vec{x})$ από την επόμενη $p(y+1, \vec{x})$ στην πραγματικότητα εκφράζει τον βασικό αλγόριθμο της "βλακώδους αναζήτησης ".

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα γενικεύσουμε τις αναδρομικές συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς σε ' μερικές αλγεβρες ' κάτι το οποίο όρισε ο Γκέντελ και οφείλεται στον *John McCarthy* (1963). Αυτή είναι η πρώτη φορά που φαίνεται πιο καθαρά η σχέση ανάμεσα στην αναδρομή και τον υπολογισμό.

1.2 Μερικές άλγεβρες

Ορισμός 1.8. ***Μερική άλγεβρα*** *είναι η τυχαία δομή*

$$\mathbf{M} = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_k),$$

όπου το M είναι συνολο, τα $0, 1 \in M$ και $0 \neq 1$ και για $i = 1, \ldots, K$, η

$$f_i : M^{n_i} \to M$$

είναι μερική συνάρτηση πλειομέλειας n_i. Αν το $n_i = 0$ τότε η f_i είναι 0-μελής μερική συνάρτηση στο M, δηλαδή σταθερά, κάποιο μέλος του M ή ο πατος $\perp$.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα μερικής άλγεβρας το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε ειναι η βασική δομή της αριθμητικής.

$$\mathbf{N_0} = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd) \tag{1.18}$$

όπου S και Pd είναι οι συναρτήσεις του επόμενου και του προηγούμενου αντίστοιχα στους φυσικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα η $\mathbf{N_0}$ είναι **ολική άλγεβρα** επειδή τα δοσμένα S, Pd είναι ολικές συναρτήσεις. **Επεκτάσεις** της $\mathbf{N_0}$, δηλαδή μερικές άλγεβρες της μορφής

$$(\mathbf{N_0}, f_1, \ldots, f_m) = (\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd, f_1, \ldots, f_m)$$

όπου οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι πλειομελείς μερικές συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς. Άλλα παραδείγματα μερικών αλγβρών είναι οι

$$(\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot), \ \ (\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot, \div),$$

όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών και $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Χαρακτηριστικό είναι ότι η διαίρεση $r \div s$ $r, s \in \mathbb{Q}$ σ' αυτή την άλγεβρα είναι μερική συνάρτηση αφου δεν συγκλίνει για $s = 0$.

Σύνταξη της τυπικής γλώσσας $\mathbf{R}(\mathbf{M})$: Με κάθε μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ συσχετίζουμε την τυπική γλώσσα $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{M})$, η οποία έχει ως **αλφάβητο** τα εξής **σύμβολα**:

- ατομικές μεταβλητές: $v_0, v_1, \ldots$
- οι ατομικές σταθερές (τα μέλη του M): $x \ (x \in M)$
- οι συναρτησιακές σταθερές: $f_1, \ldots, f_k \quad arity(f_i) = n_i)$
- τα σύμβολα για την διακλάδωση: **αν** **τότε** **αλλιώς**
- τα σημεία στίξεως: , ( )
- το σύμβολο της ισότητας: =

Από αυτά τα σύμβολα ξεχωρίζουμε το **λεξιλόγιο**

$$(f_1, \ldots, f_k) \qquad (arity(f_i) = n_i)$$

που μας παρέχει συμβολισμό για τις δοσμένες μερικές άλγεβρες της $\mathbf{M}$, ενώ τα υπόλοιπα σύμβολα είναι κοινά για τις μερικές άλγεβρες στο σύνολο M. Για την γλώσσα της $\mathbf{N_0}$ συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε το λεξιλόγιο $(\mathbf{S}, \mathbf{Pd})$.

Λέξεις στο τυχαίο σύνολο Σ είναι οι πεπερασμένες ακολουθίες από στοιχεία(ή σύμβολα) του Σ. Για παράδειγμα οι

$$0 = (0v_2f_4 \qquad Pd01x_1\textbf{αν} = \textbf{αλλιώς}$$

είναι λεξεις στο αλφάβητο της $\mathbf{R}$. Στα παραδείγματα θα δημιουργούμε λέξεις γράφοντας τα σύμβολα στη σειρά χωρίς κόμματα. Η **παράθεση** δύο λέξεων συμβολίζεται με την παράθεση των συμβόλων τους. Για τις δύο προηγούμενες λέξεις η παράθεσή τους είναι η λέξη

$$0 = (0v_2f_4Pd01x_1\textbf{αν} = \textbf{αλλιώς} \tag{1.19}$$

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο '$\equiv$' για την σχέση ισότητας των λέξεων. Για παράδειγμα

$$f_3 = (f_1 \equiv f_3 = (f_1 \ \textbf{αλλά} \ f_5 = (0f_1 \not\equiv f_5 = (1f_1$$

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το συγκεκριμένο σύμβολο είναι οτι αν χρησιμοποιούσαμε το "=" θα υπήρχε σύγχυση διότι το "=" χρησιμοποιείται σαν σύμβολο στο αλφάβητο της $\mathbf{R}$.

Η **κενή λέξη** συμβολίζεται με 'Λ'. Έτσι για κάθε λέξη α,

$$\Lambda\alpha \equiv \alpha\Lambda \equiv \alpha$$

Οι "συντακτικά σωστές " εκφράσεις της $\mathbf{R}$ είναι λέξεις από το αλφάβητο και διαχωρίζονται στους όρους και τις **εξισώσεις όρων**, δηλαδή λέξεις της μορφής

$$A = B$$

όπου A και B είναι όροι.

Οι **όροι** της $\mathbf{R}$ αποτελούν το ελάχιστο σύνολο λέξεων ΟΡΟΙ με τις εξής ιδιότητες:

1. Κάθε $x \in M$ (και ιδιαίτερα τα 0 και 1) και κάθε ατομική μεταβλητή v_i είναι όροι.

2. Αν οι λέξεις $A_1, \ldots, A_{n_i}$ είναι όροι, τότε όρος είναι και η λέξη

$$f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$$

3. Αν οι λέξεις A_1, A_2, A_3 είναι όροι, τότε όρος είναι και η λέξη

$$(\textbf{αν}\,(A_1 = 0)\,\textbf{τότε}\,A_2\,\textbf{αλλιώς}\,A_3)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω ο ορισμός αυτός εκφράζεται με την "ισοδυναμία"

$$A :\equiv x \mid v_i \mid f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) \mid (\textbf{αν}\,(A_1 = 0)\,\textbf{τότε}\,A_2\,\textbf{αλλιώς}\,A_3)$$

και διαβαζεται η λέξη A είναι όρος αν είναι μέλος του M, ή ατομική μεταβλητή, ή αν είναι της μορφής $f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ όπου οι $A_1, \ldots, A_{n_i}$ είναι όροι, ή αν ελιναι της μορφής $(\textbf{αν}\,(A_1 = 0)\,\textbf{τότε}\,A_2\,\textbf{αλλιώς}\,A_3)$, όπου οι A_1, A_2, A_3 είναι όροι. Παρατηρούμε ότι η κενή λέξη Λ δεν είναι όρος.

Ο όρος A είναι **κλειστός** αν καμία ατομική μεταβλητή δεν εμφανίζεται στον A, και **αγνός** αν οι μόνες ατομικές σταθερές που εμφανίζονται στον A είναι το 0 και το 1. Παραδείγματα στην $\mathbf{R}(\mathbf{N_0})$.

$S(0)$: *κλειστός,αγνός*
$S(13)$: *κλειστός,όχι αγνός*
$Pd(v_i) =$ *αγνός, όχι κλειστός*
$(\textbf{αν}(v_i = 0)\ \textbf{τότε}\ 3\ \textbf{αλλιώς}\ 1)$: *ούτε κλειστός,ούτε αγνός*

Ο αναδρομικός ορισμός των όρων δικαιολογεί επαγωγικές αποδείξεις ιδιοτήτων των όρων:

Λήμμα 1.2. *(Επαγωγή στους όρους). Έστω Σ σύνολο λέξεων από το αλφάβητο της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ τέτοιο ώστε:*

$$A_1, \ldots, A_{n_i} \Rightarrow f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) \in \Sigma.$$
$$A, B, C \in \Sigma \Rightarrow (\boldsymbol{αν}\,(A = 0)\,\boldsymbol{τότε}\,B\,\boldsymbol{αλλιώς}\,C) \in \Sigma.$$

(α) Άν το Σ περιέχει όλες τις ατομικές σταθερές και μεταβλητές, τότε το Σ περιέχει όλους τους όρους.

(β) Άν το Σ περιέχει όλες τις ατομικές σταθερές, τότε το Σ περιέχει όλους του κλειστούς όρους.

(γ) Άν το Σ περιέχει το 0, 1 και όλες τις ατομικές μεταβλητές, τότε το Σ περιέχει όλους τους αγνούς όρους.

Απόδειξη. (α) Το Σ ικανοποιεί τις συνθήκες (1)-(3) από την υπόθεση, και άρα περιέχει το ελάχιστο σύνολο *ΟΡΟΙ* που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.

Ανάλογα αποδεικνύονται τα (β) και (γ). □

Για να αποδείξουμε ότι ο η λέξη $(S(1)$ δεν είναι όρος θα βασιστούμε στο επόμενο σημαντικό Λήμμα όπου η λέξη α είναι *γνήσιο αρχικό τμήμα* της λέξης β αν

$$\beta \equiv \alpha\gamma \ \textit{με}\ \beta \not\equiv \Lambda,\ \gamma \not\equiv \Lambda$$

Λήμμα 1.3. *(Μοναδική αναγνωσιμότητα όρων).*

(α) Για κάθε όρο A , ο αριθμός εμφανίσεων της αριστερής παρένθεσης '(' στον A είναι ίσος με τον αριθμό εμφανίσεων της δεξιάς παρένθεσης ')' στον A.

(β) Κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα όρου δεν είναι όρος.

(γ) Αν η λέξη $A \equiv \alpha_1 \dots \alpha_m$ είναι όρος, τότε ισχύει ακριβώς μί από τις περιπτώσεις (1), (2) ή (3) στον ορισμό των όρων.

Οπότε τώρα διαπιστώνουμε ότι η λέξη $(S(1)$ δεν είναι όρος, διότι έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις.

Το λήμμα 1.3 επίσης δικαιολογεί αναδρομικούς ορισμούς συναρτήσεων στους όρους.

Λήμμα 1.4. *(Αναδρομή στους όρους). Για κάθε σύνολο W και δοσμένες συναρτήσεις $\Phi_1, \Phi_2^i (i = 1, \dots, K), \Phi_3$, υπαρχεί μοναδική συνάρτηση*

$$\Phi : \mathrm{OPOI} \to W$$

τέτοια που

$$\begin{aligned} \textit{για}\ x \in M, \Phi(x) = \Phi_1(x), \quad \Phi(v_i) = \Phi_1(v_i), \\ \Phi(f_i(A_1, \dots, A_{n_i})) = \Phi_2^i(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_{n_i})), \\ \Phi(\boldsymbol{\alpha\nu}(A = 0)\ \ \boldsymbol{\tau\acute{o}\tau\epsilon}\ B\ \ \boldsymbol{\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma}\ C) = \Phi_3(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)). \end{aligned}$$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στα σύνολα κλειστών και αγνών όρων. Παρατήρηση: Η σύνταξη της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ προσδιορίζεται πλήρως από το σύνολο M και το λεξιλόγιο $(f_1, \dots, f_K)$, δηλαδή δεν εξαρτάται από τις ερμηνείες $f_1, \dots, f_K$ αυτών των σταθερών στην $\mathbf{M}$. Οι ερμηνείες των $f_1, \dots, f_K$ υπεισέρχονται στη σημασιολογία της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$, ως εξής.

Δηλωτική Σημασιολογία της τυπικής γλώσσας $\mathbf{R}(\mathbf{M})$:
Η **τιμή** $\mathbf{val}_M(A)$ του τυχαίου **κλειστού όρου** A στη μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ ορίζεται αναδρομικά από τις εξής συνθήκες, με επίκληση του Λήμματος 1.4 για κλειστούς όρους:

$(DT1)$ $\mathbf{val}_M(x) = x$, για $x \in M$.
$(DT2)$ Αν $\mathbf{val}_M(A_j) = w_j$ για $j = 1, \dots, n_i$, τότε
$\mathbf{val}_M(f_i(A_1, \dots, A_{n_i})) = f_i(w_1, \dots, w_{n_i})$.
$(DT3)$ Αν $\mathbf{val}_M(A) = a$, $\mathbf{val}_M(B) = b$ και $\mathbf{val}_M(C) = c$, τότε
$\mathbf{val}_M($**αν** $(A = 0)$ **τότε** B **αλλιώς** $C) =$ **αν** $(a = 0)$ **τότε** b **αλλιώς** c.

Βλέπουμε οτι ο ορισμός μπορεί να αποδώσει $\mathbf{val}_M(A)\uparrow$, εφόσον τα "δοσμένα" της άλγεβρας $\mathbf{M}$ επιτρέπεται να είναι μερικές συναρτήσεις. Αν $f_1(1)\uparrow$ τότε $\mathbf{val}_M(f_1(1)) = f_1(1) =\perp$, το οποίο σημαίνει ότι $\mathbf{val}_M(f_1(1))\uparrow$.

Πριν συνεχίσουμε με το επόμενο λήμμα θα διατυπώσουμε την έννοια της τυπικής αντικατάστασης.

Αντικατάσταση όρων. Για κάθε όρο A, κάθε ατομική μεταβλητή x, και κάθε όρο B, θέτουμε
$A\{x :\equiv B\}$ $\equiv$ το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της x με B στον όρο A.
Γενικότερα για $\vec{x} = x_1, \ldots, x_m$, $\vec{B} = B_1, \ldots, B_m$,

$$A\{\vec{x} :\equiv \vec{B}\} \equiv A\{x_1 :\equiv B_1\}\ldots\{x_m :\equiv B_m\}. \tag{1.20}$$

Λήμμα 1.5. *(α) Αν η x είναι η μόνη ατομική μεταβλητή που εμφανίζεται στον όρο A και ο B είναι κλειστός όρος τέτοιος που $\mathbf{val}_M(B) = w \in M$, τότε*

$$\mathbf{val}_M(A\{x :\equiv B\}) = \mathbf{val}_M(A\{x :\equiv w\})$$

(β) Γενικότερα, αν όλες οι ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο A είναι στη λίστα $x_1, \ldots, x_n$ και οι $B_1, \ldots, B_n$ είναι κλειστοί όροι τέτοιοι που

$$\mathbf{val}_M(B_1) = w_1 \in M, \ldots, \mathbf{val}_M(B_n) = w_n,$$

τότε

$$\mathbf{val}_M(A\{x_1 :\equiv B_1, \ldots, x_n :\equiv B_n\}) = \mathbf{val}_M(A\{x_1 :\equiv w_1, \ldots, x_n :\equiv w_n\}).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον όρο A. □

Δηλωτική σημασιολογία της τυπικής γλώσσας $\mathbf{R}(\mathbf{M})$: Αποτίμηση στο M είναι η τυχαία συνάρτηση

$$\pi : \{v_0, v_1, \ldots,\} \to M$$

που αναθέτει σε κάθε ατομική μεταβλητή μια τιμή $\pi(v_i)$ στο M και αν όλες οι ατομικές μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο A είναι στη λίστα $x_1, \ldots, X_n$ θέτουμε

$$\mathbf{val}_M(A, \pi) = \mathbf{val}_M(A\{x_1 :\equiv \pi(x_1), \ldots, x_n :\equiv \pi(x_n)\}) \tag{1.21}$$

Χρησιμοποιώντας τον κλασσικό συμβολισμό και την ορολογία της λόγικής έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}, \pi \models A = B &\Leftrightarrow \mathbf{val}_M(A, \pi) = \mathbf{val}_M(B, \pi)\\ &\Leftrightarrow \textit{η } M \textbf{ ικανοποιεί} \textit{ την εξίσωση } A = B \textit{ για την } \pi\end{aligned}$$

έτσι που,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}, \pi \models A = B \Leftrightarrow &[\mathbf{val}_M(A, \pi) \uparrow \textit{ και } \mathbf{val}_M(B, \pi) \uparrow]\\ &\textit{ή } [\mathbf{val}_M(A, \pi) = w \in M \textit{ και } \mathbf{val}_M(B, \pi) = w \in M]\end{aligned}$$

Επίσης θέτουμε,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \models A = B &\Leftrightarrow \textit{(για κάθε } \pi\textit{)} \ \mathbf{M}, \pi \models A = B\\ &\Leftrightarrow \textit{η εξίσωση } A = B \textit{ είναι } \textbf{έγκυρη} \textit{ στην } M.\end{aligned}$$

(Αν $\mathbf{M} \models A = B$, λέμε ότι η $\mathbf{M}$ ικανοποιεί την **ταυτότητα** $A = B$.)

Απλουστευμένοι Συμβολισμοί. Όπως και στην λογική συνηθίζεται να μην γράφουμε "γραμματικά σωστούς " όρους και εξισώσεις. Αντιθέτως χρησιμοποιούμε τα συνηθισμένα μαθηματικά σύμβολα αντί για τα τυπικά τους ισοδύναμα, π.χ. $x, y, \ldots$ για ατομικές μεταβλητές αντί για $v_1, v_2, \ldots$. Αυτό γίνεται καθαρά για διευκόλυνση του αναγνώστη.

Παράδειγμα: $(x + y) \cdot z$ αντί για $(+(x, y), z)$

1.3 Υπολογισμός

Συνεχίζοντας να εισάγουμε ορισμούς και ιδιότητες της γλώσσας $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ παρακάτω θα αναφερθούμε στην **υπολογιστική σημασιολογία** της η οποία συσχετίζει "κανονικές " λύσεις με κάθε σύστημα αναδρομικών εξισώσεων, στην μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και αποδίδει αλγόριθμους για τον υπολογισμό αυτών των λύσεων. Στόχος μας είναι να ορίσουμε την θεμελιακή κλάση των (γενικά) **αναδρομικών μερικών συναρτήσεων** στην τυχαία μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ και φυσικα στην $\mathbf{N}_0$.

Η προγραμματική γλώσσα $\mathbf{R}(\mathbf{M})$:σύνταξη. Πριν χρησιμοποιήσουμε την $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ σαν προγραμματική γλώσσα θα την εμπλουτίσουμε με **συναρτησιακές μεταβλητές**

$$\zeta_0^n, \zeta_1^n, \ldots \quad (n = 0, 1, \ldots, arity(\zeta_i^n) = n),$$

άπειρες στο πλήθος για κάθε δυνατή πλειομέλεια n. Συντακτικά οι συναρτησιακές μεταβλητές δεν ξεχωρίζουν απο τις συναρτησιακές σταθερές $f_1, \ldots, f_k$

που ονομάζουν τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k$ της $\mathbf{M}$: οι όροι ορίζονται με την αναδρομή

$$A :\equiv x \mid v_i \mid f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) \mid \zeta_i^n(A_1, \ldots, A_{n_i}) \\ \mid (\textbf{αν}\ (A_1 = 0)\ \textbf{τότε} A_2\ \textbf{αλλιώς}\ A_3)$$

Τυπική αναδρομική εξίσωση είναι η τυχαία εξίσωση όρων

$$\zeta(x_1, \ldots, x_n) = A,$$

στο λεξιλόγιο $(f_1, \ldots, f_k, \zeta_0^n, \zeta_1^n, \ldots)$ όπου η ζ είναι συναρτησιακή μεταβλητή. Οι $x_1, \ldots, x_n$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους ατομικές μεταβλητές και ο A είναι αγνός όρος της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ στον οποίο δεν εμφανίζονται ατομικές μεταβλητές εκτος από τις $x_1, \ldots, x_n$. Η εξίσωση καλείται **ρητή** αν καμία συναρτησιακή μεταβλητή δεν εμφανίζεται στον όρο A.

Παράδειγμα 1.3. *Η*

$$\zeta(x) = \textbf{αν}\ (x = 0)\ \textbf{τότε}\ 1\ \textbf{αλλιώς}\ 0$$

είναι ρητή εξίσωση σε κάθε μερική άλγεβρα ενώ η

$$\zeta(x) = \textbf{αν}\ (x = 0)\ \textbf{τότε}\ 1\ \textbf{αλλιώς}\ S(\zeta(Pd(x)))$$

είναι αναδρομική αλλα όχι ρητή εξίσωση της $\mathbf{N}_0$.

Ορισμός 1.9. ***Αναδρομικό Πρόγραμμα*** *(E) της μερικής άλγεβρας $\mathbf{M}$ είναι το τυχαίο σύστημα αναδρομικών εξισώσεων*

$$\begin{array}{ll} (e_0) & \zeta(\vec{x_0}) = E_0 \\ \vdots & \\ (e_k) & \zeta(\vec{x_k}) = E_k \end{array}$$

όπου οι συναρτησιακές μεταβλητές $\zeta_0, \ldots, \zeta_k$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους και είναι οι μόνες που εμφανίζονται στους όρους $E_0, \ldots, E_k$. Οι εξισώσεις του E καλούνται (αναδρομικοί) ***ορισμοί*** *των συναρτησιακών μεταβλητών $\zeta_0, \ldots, \zeta_k$.*

Βασική ιδέα της υπολογιστικής σημασιολογίας της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ είναι ότι κάθε πρόγραμμα E αντιστοιχίζει και υπολογίζει μια μερική συνάρτηση

$$\bar{\zeta} : M^{k_i} \to M \ \ (\text{αν}\ arity\,(\zeta_i) = k_i)$$

σε κάθε σύμβολο ζ_i που ορίζεται απ' αυτό, έτσι που οι $\bar{\zeta_0}, \ldots, \bar{\zeta_k}$ το ικανοποιούν. Δηλαδή

$$(\mathbf{M}, \bar{\zeta_0}, \ldots, \bar{\zeta_k}) \models \zeta_i(\vec{x_i} = E_i \qquad (i = 0, \ldots, k).$$

Παράδειγμα 1.4.

$$(E_1) \qquad\qquad \zeta(x,y) = S(y)$$

είναι απο μόνο του πρόγραμμα της $\mathbf{N_0}$*, που ορίζει τη διμελή συναρτησιακή μεταβλητή* ζ*. Η σημασιολογία θα πρέπει να μας δώσει*

$$\bar{\zeta}(x,y) = \mathbf{val}_{N_0}(S(y)) = y+1$$

$$(E2) \qquad\qquad \zeta(y,\vec{x}) = \textit{αν}\ (g(y,\vec{x}) = 0)\ \textit{τότε}\ y\ \ \textit{αλλιώς}\ \zeta(S(y),x)$$

είναι πρόγραμμα της (N_0, g) *όπου* $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *και υπάρχουν παραδείγματα* g *για τις οποίες η εξίσωση* (E_2) *μπορεί να έχει πολλές λύσεις.*

Τέλος θεωρούμε και το τετριμμένο παράδειγμα προγράμματος με τον ορισμό

$$(E_3) \qquad\qquad \zeta(x) = \zeta(x)$$

Η εξίσωση (E_3) *ικανοποιείται από όλες τις μερικές συναρτήσεις. Η υπολογιστική σημασιολογία θα αποδώσει την κενή μερική συνάρτηση*

$$\bar{\zeta}(x) = \varepsilon(x) = \perp$$

Ορισμός 1.10. ***Σύστημα μεταβάσεων*** *είναι η τυχαία τριάδα*

$$\mathcal{T} = (S, \to, T),$$

όπου:

(α) Το S *είναι μη-κενό σύνολο, οι καταστάσεις του* $\mathcal{T}$*.*

(β) Το $\to$ *είναι μια διμελής σχέση μετάβασης στο* S*.*

(γ) Το $T \subseteq S$ *είναι το σύνολο των τερματικών καταστάσεων, και για κάθε τερματική κατάσταση.*

$$s \in T \Rightarrow (\forall s')[s \not\to s']. \tag{1.22}$$

Αν μια κατάσταση ικανοποιεί την (1.22) αλλά δεν είναι τερματική καλείται **άγονη**. Οπότε οι καταστάσεις ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες: τις τερματικές, τις άγονες και τις γόνιμες, δηλαδή αυτές που έχουν τουλάχιστον μια "επόμενη" κατάσταση. Το $\mathcal{T}$ καλείται **αιτιοκρατικό**, αν κάθε κατάσταση s έχει το πολύ μία επόμενη, δηλαδή

$$[s \to s' \quad \& \quad s \to s''] \Rightarrow\ s' = s''. \tag{1.23}$$

Ορισμός 1.11. *Μερικός υπολογισμός του συστήματος μεταβάσεων* $\mathcal{T}$ *είναι κάθε πεπερασμένο μονοπάτι (ακολουθία)*

$$Y = (s_0 \to s_1 \to \ldots \to s_n) \tag{1.24}$$

στο γράφημα $(S, \rightarrow)$. *Ο* Y *είναι τερματικός αν η τελευταία κατάσταση* s_n *είναι τερματική και άγονος αν η* s_n *είναι άγονη. Άπειρος υπολογισμός είναι κάθε άπειρο μονοπατι της μορφής*

$$Y = (s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \ldots).$$

Το μήκος ενός πεπερασμένου, μερικού υπολογισμού όπως π.χ. στην (1.24) είναι $n+1$.

Το σύστημα μετάβασης $\mathcal{T}$ υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $\pi : S \rightarrow T$ αν, για όλα τα $s \in S$, $t \in T$,

$$\pi(s) = t \Leftrightarrow \ (\exists (s_0, \ldots, s_n) \in C(\mathcal{T}))[s_0 = s \quad \& \quad s_n = t], \tag{1.25}$$

όπου

$$C(\mathcal{T}) = \textit{το σύνολο των τερματικών υπολογισμών του}\, \mathcal{T}. \tag{1.26}$$

Συνεπώς

$$\pi(s) \downarrow \Leftrightarrow \ (\exists (s_0, \ldots, S_n) \in C(\mathcal{T}))[s_0 = s]$$

Κάθε αιτιοκρατικό σύστημα μεταβάσεων υπολογίζει ακριβώς μία μερική συνάρτηση $\pi : S \rightarrow T$ που ορίζεται από την (1.25). Επιπλέον αν το $\mathcal{T}$ είναι αιτιοκρατικό, τότε για κάθε κατάσταση s υπάρχει ακριβώς ένας τερματικός, άγονος ή άπειρος υπολογισμός.

$$comp(s) = comp_{\mathcal{T}}(s) = (s \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \ldots) \tag{1.27}$$

που δεν επεκτείνεται και ορίζεται με την αναδρομή

$$s = s_0,$$
$$s_{n+1} = \begin{cases} \textit{η μοναδική } s' \textit{τέτοια που}\, s_n \rightarrow s', & \textit{αν υπάρχει} \\ \perp, \quad \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορισμός 1.12. ***Αναδρομικές μηχανές***. *Για κάθε πρόγραμμα* E *της* $\mathbf{R}(\mathbf{M})$, *ορίζουμε ένα σύστημα μετβάσεων* $\mathcal{T}(E) = \mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ *ώς εξής:*

(a) Οι καταστάσεις του $\mathcal{T}(E)$ *είναι όλες οι λέξεις* s *της μορφής*

$$\alpha_0 \ldots \alpha_{m-1} : \beta_0 \ldots \beta_{n-1}$$

όπου τα στοιχεία $\alpha_0 \ldots \alpha_{m-1}, \beta_0 \ldots \beta_{n-1}$ *της* s *ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:*

- *κάθε* α_i *είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερό ή μεταβλητή), ή κλειστός όρος, ή το ειδικό σύμβολο ?, και*
- *κάθε* β_j *είναι ατομική σταθερά (δηλαδή* $\beta_j \in M$*).*

- *Οι υπογεγραμμένες λέξεις είναι αυτές που αλλάζουν σε κάθε μετάβαση.*
- $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ *είναι* n*-άδα ατομικών σταθερών.*
- *Στην εξωτερική κλήση* $(e-call)$*,* $f = f_i$ *είναι δοσμένη μερική συνάρτηση της* $\mathbf{M}$ *με* $arity(f_i) = n_i = n$.
- *Στην εσωτερική κλήση* $(i = call)$ *η* ζ_i *είναι* n*-μελής συναρτησιακή μεταβλητή του προγράμματος* E *που ορίζεται από την εξίσωση* $\zeta_i(\vec{x}) = E_i$
- *Στη μετάβαση σύνθεσης* $(comp)$ *η* h *είναι συναρτησιακό σύμβολο (σταθερά η μεταβλητή) με* $arity(h) = n$.

Παρακάτω βλέπουμε πως χρησιμοποιούνται οι μεταβάσεις που μόλις αναφέραμε.

$(pass)$	$\alpha\underline{x\ :}\beta \to \alpha\underline{:\ x}\beta \ \ (x \in M)$
$(e-call)$, *γενικά*	$\alpha\underline{f_i : \vec{x}}\beta \to \alpha\underline{:\ f_i(\vec{x})}\beta$
$(e-call)$, *για την* $\mathbf{N}_0$	$\alpha\underline{S : x}\beta \to \alpha\underline{:\ x+1}\beta$
	$\alpha\underline{Pd : x}\beta \to \alpha\underline{:\ x-1}\beta$
$(i-call)$	$\alpha\underline{\zeta_i : \vec{x}}\beta \to \alpha\underline{:\ E_i\{\vec{x}_i :\equiv \vec{x}\}\ :}\beta$
$(comp)$	$\alpha\underline{h(A_1, \dots, A_n)\ :}\beta \to \alpha\underline{hA_1 \dots A_n\ :}\beta$
(br)	$\alpha\ \underline{\text{αν}\,(A = 0)\ \text{τότε}\ B\ \text{αλλιώς}\ C\ :}\beta \to \alpha\underline{B\,C\,?\,A\ :}\beta$
$(br0)$	$\alpha\,\underline{B\,C\,?\ :\ 0}\,\beta \to \alpha\,\underline{B\ :}\beta$
$(br1)$	$\alpha\,\underline{B\,C\,?\ :\ y}\,\beta \to \alpha\,\underline{C\ :}\beta \qquad (y \neq 0)$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κατάσταση το ειδικό σύμβολο ':' έχει ακριβώς μία εμφάνιση. Οι καταστάσεις των $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ *είναι οι ίδιες για όλα τα προγράμματα της μερικής άλγεβρας* $\mathbf{M}$*, έτσι τις λέμε και καταστάσεις της* $\mathbf{M}$.

(β) Οι τερματικές καταστάσεις του $\mathcal{T}(E)$ *είναι λέξεις της μορφής*

$$: w$$

δηλαδή αυτές που αριστερά του ':' δεν έχουν σύμβολα και δεξιά έχουν μόνο μία σταθερά. Οι μηχανές που στηρίζονται στο $\mathcal{T}(E)$ *θα έχουν κοινή συνάρτηση εξόδου που αποδίδει τον αριθμό,*

$$output(:w) = w.$$

(γ) Η σχέση μετάβασης του $\mathcal{T}(E)$ *ορίζεται σε επτά περιπτώσεις απο τον προηγούμενο πίνακα μετάβασης, δηλαδή η* $s \to s'$ *ισχύει αν είναι ειδική περίπτωση καποιας γραμμής του πίνακα. Παρατηρούμε ότι η* $(e-call)$ *είναι η μόνη που καλεί τα δοσμένα της της* $\mathbf{M}$ *και έτσι εξαρτάται απο το* $\mathbf{M}$*, ενώ η* $(i-call)$ *είναι η μόνη που εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόγραμμα* E*. Προφανώς το* $\mathcal{T}(E)$ *είναι αιτιοκρατικό.*

Για κάθε n-μελή συναρτησιακή μεταβλητή του E, η ***αναδρομική μηχανή*** *$\mathcal{T}(E,\zeta)$ παράγεται από σύστημα μεταβάσεων του $\mathcal{T}(E)$ με την προσθήκη μιας συνάρτησης εισόδου.*

$$input(\vec{x}) \equiv \zeta\ :\ \vec{x}$$

και υπολογίζει τη μερική συνάρτηση $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_E\ :\ M^n \to M$, όπου

$$\bar{\zeta}_E(\vec{x}) = w \Leftrightarrow \zeta\ :\ \vec{x} \to s_1 \to \ldots \to :\ w. \tag{1.28}$$

Χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

$$\mathbf{M}, E \vdash \zeta(\vec{x}) = w \Leftrightarrow \bar{\zeta}_E(\vec{x}) = w \tag{1.29}$$

που δείχνει την εξάρτηση της $\bar{\zeta}$ από την μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$.

Το ***κύριο σύμβολο*** *του προγράμματος E είναι η συναρτησιακή μεταβλητή ζ_0 που ορίζεται στην πρώτη εξίσωση του E, και το E* ***υπολογίζει*** *την $\bar{\zeta}_0$ στην $\mathbf{M}$.*

Παράδειγμα 1.5. *Έστω η ρητή εξίσωση του E στην $\mathbf{N_0}$*

$$\zeta(x) = S(S(x)),$$

Ο υπολογισμός του $\mathcal{T}(E)$ είναι ο

$$\begin{aligned} \zeta\ :\ x \to S(S(x)) :\to S\,S(x) :\to S\,S\,x : \\ \to S\,S\ :\ x\ \to S\ :\ x+1\ \to :\ x+2. \end{aligned}$$

ο οποίος μας δείχνει ότι για κάθε $x, \bar{\zeta}(x) = x + 2$.

Ορισμός 1.13. ***M-αναδρομικές μερικές συναρτήσεις,σχέσεις και σύνολα.*** *Η n-μελής μερική συνάρτηση $f : M^n \to M$ είναι* ***αναδρομική*** *στην μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$ (η αλλιώς* ***M-αναδρομική****) αν $f = \bar{\zeta}$ για κάποιο πρόγραμμα E της $\mathbf{M}$ και κάποια συναρτησιακή μεταβλητή ζ του E. Δηλαδή*

$$f(\vec{x}) = w \Leftrightarrow \mathbf{M}, E \vdash \zeta(\vec{x}) = w$$

με τον συμβολισμό της (1.29). Άν η σειρά με την οποία απαριθμούμε τις εξισώσεις ενός προγράμματος δεν αλλάζει τον ορισμό των μερικών συναρτήσεων $\bar{\zeta}$, η τυχαία μερική συνάρτηση $f\ :\ M^n \to M$ είναι ***M****-αναδρομική* ***αν και μόνο αν*** *υπολογίζεται από κάποιο αναδρομικό πρόγραμμα της* ***M****. Δηλαδή αν $f(\vec{x}) = \bar{\zeta}_0(\vec{x})$ με ζ_0 το κύριο σύμβολο του E.*

Θέτουμε

$$\mathcal{R}(\mathbf{M}) = \{f :\ M^n \to M\ \mid\ \eta\, f \text{ είναι } \boldsymbol{M}\text{-αναδρομική}\}.$$

Η τυχαία σχέση $P(\vec{x})$ στο M είναι **M-αναδρομική** αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι **M**-αναδρομική και το τυχαίο σύνολο $A \subseteq M$ είναι **M**-αναδρομικό αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση είναι **M-αναδρομική**.

Ειδικά για την $\mathbf{N}_0$ και τις επεκτάσεις της που μας ενδιαφέρουν θα γράφουμε

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{N}, 0, 1, S, Pd) = \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \mid \textit{η } f \textit{ είναι } \mathbf{N}_0 - \textit{αναδρομική}\}.$$

και για κάθε σύνολο πλειομελών μερικών συναρτήσεων στο $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\Psi) = \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \mid \textit{η } f \textit{ είναι } (N_0, f_1, \ldots, f_k) - \textit{αναδρομική} \\ \textit{για κάποιες } f_1, \ldots, f_k \in \Psi\},\end{aligned} \tag{1.30}$$

έτσι που $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\emptyset)$.

1.4 Εγκυρότητα

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα διατυπώσουμε δύο θεμελιακά θεωρήματα τα οποία δίνουν ένα "δομικό" χααρακτηρισμό των μερικών συναρτήσεων που υπολογίζονται από τα συστήματα μεταβάσεων $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ που μας δίνουν τις βασικές ιδιότητες των **M**-αναδρομικών μερικών συναρτήσεων.

Λήμμα 1.6. *Για κάθε μερικό υπολογισμό*

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \ldots \to \alpha_m : \beta_m$$

στο σύστημα $\mathcal{T}(E, \boldsymbol{M})$ *και λέξεις* α^*, β^* *τέτοιες που η*

$$\alpha^*\alpha_0 : \beta_0\,\beta^*$$

να είναι κατάσταση, ο

$$\alpha^*\alpha_0 : \beta_0\,\beta^* \to \alpha^*\alpha_1 : \beta_1\,\beta^* \to \ldots \to \alpha^*\alpha_m : \beta_m\,\beta^*$$

είναι επίσης μερικός υπολογισμός του $\mathcal{T}(E, \boldsymbol{M})$.

Έπεται ότι αν ο

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \ldots$$

αποκλίνει και η $\alpha^*\alpha_0 : \beta_0\,\beta^*$ *είναι κατάσταση τότε αποκλίνει και ο*

$$\alpha^*\alpha_0 : \beta_0\,\beta^* \to \alpha^*\alpha_1 : \beta_1\,\beta^* \to \ldots$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο $m \geq 0$, το λήμμα είναι τετριμμένο στη βάση $m = 0$, από την υπόθεση. Στο επαγωγικό βήμα δεχόμαστε ότι η ακολουθία

$$\alpha^*\alpha_0 : \beta_0\,\beta^* \to \alpha^*\alpha_1 : \beta_1\,\beta^* \to \ldots \to \alpha^*\alpha_m : \beta_m\,\beta^*$$

είναι μερικός υπολογισμός και εξετάζουμε ξεχωριστά τις επτά περιπτώσεις που δικαιολογούν την μετάβαση

$$\alpha_m : \beta_m \to \alpha_{m+1} : \beta_{m+1}$$

και είναι προφανές ότι η ίδια γραμμή από τον πίνακα μεταβάσεων επίσης δικαιολογεί την μετάβαση

$$\alpha^* \alpha_m : \beta_m \beta^* \to \alpha^* \alpha_{m+1} : \beta_{m+1} \beta^*$$

και το δεύτερο συμπέρασμα συνάγεται με την εφαρμογή του πρώτου στους μερικούς υπολογισμούς

$$\alpha_0 : \beta_0 \to \alpha_1 : \beta_1 \to \ldots \to \alpha_m : \beta_m \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$\square$

Θεώρημα 1.1. ***(Υπολογιστική εγκυρότητα του** $R(M)$). Για ένα τυχαίο αναδρομικό πρόγραμμα E στην $\boldsymbol{M} = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_k)$ με συναρτησιακές μεταβλητές $\zeta_0, \ldots, \zeta_k$ θέτουμε*

$$\overline{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M}, \bar{\zeta}_0, \ldots, \bar{\zeta}_k) = (M, 0, 1, f_1, \ldots, f_k, \bar{\zeta}_0, \ldots, \bar{\zeta}_k).$$

Έπεται ότι για κάθε κλειστό όρο στο λεξιλόγιο $f_1, \ldots, f_k, \bar{\zeta}_0, \ldots, \bar{\zeta}_k$:

(α) Αν $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A) \uparrow$, τότε ο υπολογισμός $comp_{\mathcal{T}}(A\ :)$ του $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ με αρχική κατάσταση $A :$ είναι άπειρος ή άγονος και άρα αποκλίνει.

(β) Αν $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A) = w$ τότε ο υπολογισμός $comp_{\mathcal{T}}(A\ :)$ του $\mathcal{T}(E, \mathbf{M})$ με αρχική κατάσταση $A :$ συγκλίνει με τερματική κατάσταση $: w$

(γ) Οι μερικές συναρτήσεις $\bar{\zeta}_0, \ldots, \bar{\zeta}_k$ ικανοποιούν το σύστημα E στην μερική άλγεβρα $\mathbf{M}$, και ειδικότερα το E έχει λύσεις στην $\mathbf{M}$.

Απόδειξη. Για τα (α) και (β) θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον δοσμένο, κλειστό όρο A. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(1) Αν $A \equiv x \in M$, τότε $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A) = x$, και ο υπολογισμός

$$\begin{array}{ll} x : & \quad (pass) \\ : x & \end{array}$$

αποδίδει τη σωστή τιμή.

(2) Αν $A \equiv f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ για κάποια δοσμένη μερική συνάρτηση f της $\mathbf{M}$ τότε ο υπολογισμός $comp(A :)$ αρχίζει με την μετάβαση

$$\begin{array}{ll} f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) : & \quad (comp) \\ f_i\, A_1, \ldots, A_{n_i} : & \end{array}$$

Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις:

(2α) Για κάποιο j, $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)\uparrow$ οπότε και $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A)\uparrow$. Αν το j είναι το μέγιστο $\leq n_i$ με αθτή την ιδιότητα, τότε (με επίκληση της επαγωγικής υπόθεσης) ο υπολογισμός $comp(A:)$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{cc} f_i(A_1,\ldots,A_{n_i}): & (comp) \\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i}: & (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.) \\ \vdots & \\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i-1}:w_{n_i} & (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.) \\ \vdots & \\ f_i\,A_1,\ldots,A_j:w_{j+1}\ldots w_{n_i} & \end{array}$$

Πάλι από επαγωγική υπόθεση ο υπολογισμός

$$comp(A_j:) = A_j :\to \alpha_1 : \beta_1 \to \ldots$$

είναι άπειρος, εφόσον $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)\uparrow$ και από το λήμμα (1.6) άπειρος είναι και ο υπολογισμός

$$f_i\,A_1,\ldots,A_j:w_{j+1}\ldots w_{n_i} \to f_i\,A_1,\ldots,A_{j-1}\alpha_1 \quad : \beta_1\,w_{j+1}\ldots w_{n_i}\to\ldots$$

το οποίο συνεπάγεται ότι ο $comp(A:)$ είναι άπειρος.

(2β) Υπάρχουν στοιχεία $w_1,\ldots,w_{n_i}$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)=w_j$ για $j=1,\ldots,n_i$, αλλά $f_i(w_1,\ldots,w_{n_i})\uparrow$. Σε αυτήν την περίπτωση από επαγωγική υπόθεση και επίκληση πάλι του λήμματος (1.6) ο υπολογισμός $comp(A:)$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{cc} f_i(A_1,\ldots,A_{n_i}): & (comp) \\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i}: & (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.) \\ \vdots & \\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i-1}:w_{n_i} & (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.) \\ \vdots & \\ f_i:w_1\,w_2\ldots\,w_{n_i} & \end{array}$$

και εδώ ο υπολογισμός είναι άγονος αφού $f_i(w_1,\ldots,w_{n_i})\uparrow$.

(2γ) $\mathbf{val}_{\overline{M}}(f_i(A_1,\ldots,A_{n_i}))=w$ έτσι που υπάρχουν στοιχεία $w_1,\ldots,w_{n_i}$ στο M με $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)=w_j$ για $j=1,\ldots,n_i$ και $f_i(w_1,\ldots,w_{n_i})=w$. Από την επαγωγική υπόθεση και με την επίκληση του λήμματος (1.6), ο υπολογισμός

$comp(A:)$ είναι ο εξής:

$$\begin{array}{rl} f_i(A_1,\ldots,A_{n_i}): & \quad (comp)\\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i}: & \quad (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.)\\ \vdots & \\ f_i\,A_1,\ldots,A_{n_i-1}: w_{n_i} & \quad (\epsilon\pi.\ \upsilon\pi o\vartheta.)\\ \vdots & \\ f_i: w_1\,w_2\ldots\,w_{n_i} & \\ : f_i(w_1,\ldots,w_{n_i}) & \end{array}$$

που είναι το ζητούμενο.

(3) Αν $A\equiv\zeta_i(A_1,\ldots,A_{n_i})$ για κάποια n-μελή συναρτησιακή μεταβλητή ζ_i του E, τότε ο υπολογισμός $comp(A:)$ αρχίζει με την μετάβαση

$$\begin{array}{rl} \zeta_i(A_1,\ldots,A_{n_i}): & \quad (comp)\\ \zeta_i\,A_1,\ldots,A_{n_i}: & \end{array}$$

Θεωρούμε ξανά τρεις περιπτώσεις:

(3α) Για κάποιο j, $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)\uparrow$, οπότε και $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A)\uparrow$

(3β) Υπάρχουν στοιχεία $w_1,\ldots,w_n$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)=w_j$ για $j=1,\ldots,n$ αλλά $\overline{\zeta_i}(w_1,\ldots,w_n)\uparrow$.

(3γ) $\mathbf{val}_{\overline{M}}(\zeta_i(A_1,\ldots,A_n))=w$, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν $w_1,\ldots,w_n$ στο M τέτοια που $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A_j)=w_j$ για $j=1,\ldots,n$ και $\overline{\zeta_i}(w_1,\ldots,w_n)=w$

Οι αποδείξεις των (3α),(3β) και (3γ) είναι ίδιες με αυτές των (2α),(2β),(2γ) που απλά βασίζονται στον ορισμό της $\bar{\zeta_i}$

(γ) Από τον ορισμό της αναδρομικής μηχανής,

$$\begin{array}{rl}\bar{\zeta_i}(\vec{x})=w\ \Leftrightarrow & \textit{υπάρχει τερματικός υπολογισμός}\\ & E_i\{\vec{x}:\equiv\vec{x}\}\ :\to s_1\ \ldots\to:\ w,\end{array}$$

επειδή ο υπολογισμός της $\bar{\zeta_i}(\vec{x})$ αρχίζει με τα βήματα

$$\begin{array}{rl} \zeta_i:\vec{x} & \quad (i-call)\\ E_i\{\vec{x}:\equiv\vec{x}\}: & \end{array}$$

Τα (α) και (β) τώρα συνεπάγονται ότι

$$E_i\{\vec{x}:\equiv\vec{x}\}\ :\to s_1\ \ldots\to:\ w\ \Leftrightarrow\ \mathbf{val}_{\overline{M}}(E_i\{\vec{x}:\equiv\vec{x}\})=w,$$

έτσι που

$$\bar{\zeta_i}(\vec{x})=w\Leftrightarrow\mathbf{val}_{\overline{M}}(E_i\{\vec{x}:\equiv\vec{x}\})=w.$$

□

Πόρισμα 1.2. *Το σύνολο των **M**-αναδρομικών μερικών συναρτήσεων περιλαμβάνει τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k$ της **M**, τις προβολές*

$$P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

και τις σταθερές $C_0(\vec{x}) = 0$ και $C_1(\vec{x}) = 1$ και είναι κλειστό για την σύνθεση και την διακλάδωση.

Απόδειξη. Για τις δοσμένες μερικές συναρτήσεις, παρατηρούμε ότι για το πρόγραμμα

$$(E_{f_i}) \qquad\qquad \zeta(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$$

Προφανώς $\bar{\zeta}(\vec{x_i}) = f(\vec{x_i})$ εφόσον η $\bar{\zeta}$ ικανοποιεί το (E_{f_i}). Για τις προβολές και τις σταθερές συναρτήσεις 0 και 1 χρησιμοποιούμε τα προγράμματα με μία μόνο εξίσωση,

$$\zeta(\vec{x}) = x_i \qquad \zeta(\vec{x}) = 0 \qquad \zeta(\vec{x}) = 1$$

Για την διακλάδωση η υπόθεση μας δίνει προγράμματα E_c, E_g και E_h της **M** και συγκεκριμένες συναρτησιακές μεταβλητές c, g και h σαυτά τα προγράμματα, άρα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα νέο πρόγραμμα E που να ορίζει μια καινούρια μεταβλητή ζ, έτσι που

$$\bar{\zeta_E}(\vec{x} = \; \textit{αν}\, (\bar{c}_{E_c}(\vec{x}) = 0)\; \textit{τότε}\, \bar{g}_{E_g}(\vec{x})\; \textit{αλλιώς}\, \bar{h}_{E_h}(\vec{x}),$$

Κάνοντας μερικές αλφαβητικές αλλαγές στις συναρτησιακές μεταβλητές των E_c, E_g και E_h, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτά τα προγράμμτα δεν έχουν κοινές συναρτησιακές μεταβλητές και θέτουμε

$$E = E_c + E_g + E_h + \{\zeta(\vec{x}) \;=\; \textit{αν}\; (c(\vec{x}) = 0)\; \textit{τότε}\; g(\vec{x})\; \textit{αλλιώς}\; h(\vec{x})\},$$

όπου με "+" εννοούμε τη συλλογή όλων των ορισμών στα δοσμένα προγράμματα. Το E είναι πρόγραμμα, εφόσον κάθε συναρτησιακή μεταβλητή ορίζεται ακριβώς μία φορά. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\bar{c}_E(\vec{x}) = \bar{c}_{E_c}(\vec{x})$$

επειδή κάθε υπολογισμός

$$comp_{E_c}(c : \vec{x}) = c : \vec{x} \;\rightarrow\; \alpha_1 : \beta_1 \rightarrow \ldots$$

του E_c είναι και υπολογισμός του E, και επομένως (λόγω της αιτιοκρατίας των προγραμμάτων) είναι ο μόνος υπολογισμός στο E που αρχίζει με την κατάσταση $c : \vec{x}$, δηλαδή

$$comp_{E_c}(c : \vec{x}) = comp_E(c : \vec{x})$$

άρα $\bar{c}_E = \bar{c}_{E_c}$ και το ίδιο ισχύει και για τα σύμβολα g και h. Οπότε απο το Θεώρημα (1.1) η $\bar{\zeta}_E$ ικανοποιεί την εξίσωση που την ορίζει στο Ε και άρα

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}(\vec{x}) &= \textit{αν } (\bar{c}_E(\vec{x}) = 0) \textit{ τότε } \bar{g_E}(\vec{x}) \textit{ αλλιώς } \bar{h_E}(\vec{x}) \\ &= \textit{αν } (\bar{c}_{E_c}(\vec{x}) = 0) \textit{ τότε } g_{\bar{E}_g}(\vec{x}) \textit{ αλλιώς } \bar{h}_{E_h}(\vec{x}).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 1.2. *(Ελάχιστων σταθερών σημείων). Για κάθε πρόγραμμα Ε στην μερική άλγεβρα* $\boldsymbol{M}$ *με συναρτησιακές μεταβλητές* $\zeta_0, \dots, \zeta_k$ *οι μερικές συναρτήσεις* $\bar{\zeta}_0, \dots, \bar{\zeta}_k$ *που υπολογίζονται από το* $\mathcal{T}(E)$ *είναι οι* $\sqsubseteq$ *ελάχιστες μερικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις του Ε.*

Απόδειξη. Οι $\bar{\zeta}_0, \dots, \bar{\zeta}_k$ ικανοποιούν το σύστημα Ε απο το προηγούμενο θεώρημα, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι αν οι τυχαίες $\zeta'_0, \dots, \zeta'_k$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του Ε, τότε

$$\bar{\zeta}_i(\vec{x}) = w \Rightarrow \bar{\zeta}'_i(\vec{x}) = w \qquad (i = 0, \dots, k).$$

Υποθέτουμε ότι οι $\zeta'_0, \dots, \zeta'_k$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του Ε, και θεωρούμε τις δομές

$$\overline{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}, \bar{\zeta}_0, \dots, \bar{\zeta}_k), \qquad \mathbf{M}' = (M, \zeta'_0, \dots, \zeta'_k).$$

Από το Θεώρημα (1.1), γνωρίζουμε ότι για κάθε κλειστό όρο Α στο λεξιλόγιο $(f_1, \dots, f_k, \zeta_0, \dots, \zeta_k)$, αν $\mathbf{val}_{\overline{M}}(A) = w$, τότε ο υπολογισμός $comp(A:)$ της $\mathcal{T}(E)$ είναι τερματικός με τελευταία κατάσταση την $: w$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο m,θα δείξουμε ότι για κάθε Α και για κάθε w,

$$\textit{αν } A :\rightarrow \alpha_1 : \beta_1 \rightarrow \dots \alpha_{m-1} : \beta_{m-1} \rightarrow : w, \textit{ τότε } \mathbf{val}_{M'}(A) = w. \quad (1.31)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $A \equiv \zeta_i(x_1, \dots, x_n)$ αυτό αποδίδει

$$\bar{\zeta}_i(\vec{x}) = w \Rightarrow \mathbf{val}_{M'}(\zeta_i(\vec{x})) = w \Rightarrow \zeta'_i(\vec{x}) = w.$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για να αποδείξουμε την (1.31) εξετάζουμε τη μορφή του Α, και το επιχείρημα είναι τετριμένο σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από την

$$\zeta_i(A_1, \dots, A_n),$$

για την οποία ο υπολογισμός έχει την μορφή

$$
\begin{aligned}
\zeta_i(A_1, \ldots, A_n) &: \\
\zeta_i\, A_1, \ldots, A_n &: \\
&\vdots \\
\zeta_i\, A_1, \ldots, A_{n-1} &: w_n \\
&\vdots \\
\zeta_i &: w_1\, w_2 \ldots\, w_n \\
E_i\{\vec{x} :\equiv \vec{w}\} &: \\
&\vdots \\
&: w
\end{aligned}
$$

Οπότε η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{val}_{M'}(A_1) = w_1, \ldots, \mathbf{val}_{M'}(A_n) = w_n, \mathbf{val}_{M'}(E_i\{\vec{x} :\equiv \vec{w}\}) = w$$

επειδή οι υπολογισμοί που αντιστοιχούν σ' αυτές τις τιμές έχουν μικρότερο μήκος. Οπότε

$$
\begin{aligned}
\mathbf{val}_{M'}(\zeta_i(A_1, \ldots, A_n)) &= \zeta_i'(\mathbf{val}_{M'}(A_1), \ldots, \mathbf{val}_{M'}(A_n)) \\
&= \zeta_i'(w_1, \ldots, w_n) \\
&= \mathbf{val}_{M'}(E_i\{\vec{x} :\equiv \vec{w}\}) = w
\end{aligned}
$$

και η τελευταία εξίσωση εκφράζει την υπόθεση

$$\mathbf{M}' \models \zeta_i(\vec{x}) = E_i.$$

$\square$

Ορισμός 1.14. ***Αναδρομικές μερικές συναρτήσεις στους φυσικούς***

Ορίζουμε ως:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\Psi) = \{f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \mid \textit{η } f \textit{ είναι } (\mathbf{N}_0, f_1, \ldots, f_k) - \textit{αναδρομική} \\
\textit{για κάποιες } f_1, \ldots, f_k \in \Psi\}
\end{aligned}
$$

των μεριών συναρτήσεων που είναι αναδρομικές στο τυχαίο σύνολο Ψ πλειομελών, μερικών συναρτήσεων στους φυσικούς, και συλλέγουμε σε ένα θεώρημα τις βασικές ιδιότητες του $\mathcal{R}(\Psi)$ που συνάγονται από τα γενικά θεωρήματα που αναφέραμε προηγουμένως. Αυτές βεβαίως ισχύουν και για το σύνολο

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\emptyset) = \mathcal{R}(\mathbf{N}_0)$$

των (απόλυτα) αναδρομικών, μερικών συναρτήσεων στο $\mathbb{N}$.

Θεώρημα 1.3. *Το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ είναι πρωτογενώς κλειστό και κλειστό για ελαχιστοποίηση, έτσι που*

$$\mathcal{R}_\mu(\Psi) \subseteq \mathcal{R}(\Psi),$$

και ιδιαίτερα, κάθε ελαχιστικά αναδρομική μερική συνάρτηση είναι αναδρομική.

Απόδειξη. Το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ περιέχει τις προβολές, τις σταθερές 0 και 1 και τις δοσμένες $S(x)$ και $Pd(x)$ επειδή κάθε $\mathcal{R}(\mathbf{N}_0, 0, 1, f_1, \ldots, f_k)$ με $f_1, \ldots, f_k \in \Psi$ έχει αυτές τις ιδιότητες απο προηγούμενο πόρισμα.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{R}(\Psi)$ των αναδρομικών στο Ψ μερικών συναρτήσεων είναι κλειστό για ελαχιστοποίηση. Δηλαδή αν

$$g \in \mathcal{R}(\Psi) \text{ και } f(y, \vec{x}) = (\mu i \geq y)[g(i, \vec{x}) = 0]$$

τότε $f \in \mathcal{R}(\Psi)$. Από πρόταση 1.5, η f είναι η ελάχιστη λύση της αναδρομικής εξίσωσης.

$$f(y, \vec{x}) = \text{αν}\, (g(y, \vec{x}) = 0) \text{ τότε } y \text{ αλλιώς } f(y+1, \vec{x}),$$

που είναι πρόγραμμα, άρα η f υπολογίζεται απ΄ αυτό το πρόγραμμα και $f \in \mathcal{R}(\Psi \cup \{g\})$. Αλλά αν $g \in \mathcal{R}(\Psi)$, τότε $\mathcal{R}(\Psi \cup \{g\}) = \mathcal{R}(\Psi)$ □

Κεφάλαιο 2

Υπολογισιμότητα και ημιαναδρομικές σχέσεις

2.1 Κανονική μορφή και απαρίθμηση

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται οι απαραίτητες μαθηματικές βάσεις της θεωρίας αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς με το πολύ σημαντικό Θεώρημα Κανονικής Μορφής και Απαρίθμησης ή αλλιώς Θεώρημα του *Kleene*, το οποίο βοήθησε σημαντικά στη θεμελίωση της σχέσης "αναδρομή-υπολογισιμότητα" γνωστό και ως Αίτημα $Church - Turing$.

Θεώρημα 2.1. ***Θεώρημα Κανονικής Μορφής και Απαρίθμησης***. *Υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $U(y)$, και πρωτογενώς αναδρομικές σχέσεις $T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$ $(n \geq 1)$ και συναρτήσεις $S^n_m(e, z_1, \ldots, z_m)$ $(n, m \geq 1)$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:*

(α) Η τυχαία, n-μελής μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ στους φυσικούς είναι αναδρομική αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός e τέτοιος που

$$f(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)) \qquad (\vec{x} = x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

(β) Για όλα τα $e, y, \vec{z} = z_1, \ldots, z_m$ και $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$,

$$U(\mu y T_{m+n}(e, \vec{z}, \vec{x}, y)) = U(\mu y T_n(S^m_n(e, \vec{z}), \vec{x}, y)). \tag{2.2}$$

Επιπλέον οι συναρτήσεις $S^m_n(e, \vec{z})$ είναι ένα-προς -ένα.

Από την κανονική μορφή (2.1) συνάγεται ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση "παράγεται" από πρωτογενώς αναδρομικές συναρτήσεις με μία μόνο βλακώδη αναζήτηση και ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική. Άν θέσουμε

$$\phi^n_e(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)), \tag{2.3}$$

τότε η εξίσωση (2.1) συνεπάγεται ότι, για κάθε n, η ακολουθία

$$\phi_0^n, \phi_1^n, \ldots,$$

απαριθμεί όλες τις n-μελείς αναδρομικές μερικές συναρτήσεις, έτσι ώστε η $(n+1)$-μελής μερική συνάρτηση

$$\phi^n(e, \vec{x}) = \phi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$$

να είναι αναδρομική. Ο αριθμός e καλείται **κωδικός** της μερικής συνάρτησης ϕ_e^n, και μπορούμε να δούμε ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση έχει πολλούς κωδικούς.

Βασική ιδέα για την απόδειξη του θεωρήματος είναι να κωδικοποιήσουμε με αριθμούς τα αναδρομικά προγράμματα της $\mathbf{N}_0$ και τους τερματικούς υπολογισμούς των αναδρομικών μηχανών, έτσι ώστε η σχέση

$$\begin{aligned} T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow & \textit{ο } e \textit{ είναι κωδικός κάποιου} \\ & \textit{αναδρομικού προγράμματος } E, \\ & \textit{και ο } y \textit{ είναι κωδικός} \\ & \textit{τερματικού υπολογισμού του } E \\ & \textit{στην είσοδο } \zeta_0 : x_1, \ldots, x_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

να είναι πρωτογενώς αναδρομική, και να υπάρχει μία πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $U(y)$, τέτοια που αν ο y είναι κωδικός τερματικού υπολογισμού, τότε

$$U(y) = \textit{ η τιμή εξόδου από τον (τερματικό) υπολογισμό } u. \tag{2.5}$$

Από τους ορισμούς μόνο συνάγεται αμέσως το (α) και διευκρινίζεται το νόημά του. Για του υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα κωδικούς ακολουθιών. Για να απλουστεύσουμε μερικούς τύπους θέτουμε

$$\begin{aligned} (u)_{i,j} &= ((u)_i)_j, & (u)_{i,j,k} &= (((u)_i)_j)_k, \kappa\lambda\pi \\ first(u) &= u(0), & last(u) &= (u)_{lh(w)-1}, \end{aligned}$$

έτσι που

$$\begin{aligned} first(\langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle) &= u_0 = \textit{ το πρώτο στοιχείο της } u_0, \ldots, u_{n-1} \\ last(\langle u_0, \ldots, u_{n-1} \rangle) &= u_{n-1} = \textit{ το τελευταίο στοιχείο της } u_0, \ldots, u_{n-1} \end{aligned}$$

και

$$(\langle\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle\rangle)_{0,1} = 2, \ (\langle\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle\rangle)_{1,0} = 1.$$

Μερικές τεχνικές ιδιότητες των ακολουθιών που θα χρειαστούμε παραθέτονται στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 2.1. *Στην κλασσική κωδικοποίηση οι παρακάτω συναρτήσεις είναι πρωτογενώς αναδρομικές:*

$$maxseq(n) = max\{\langle u_0, \ldots, u_{m-1}\rangle \ \mid \ m, u_0, \ldots, u_{m-1} \leq n\} \tag{2.6}$$

$$seg(u, i, j) = \begin{cases} \langle (u)_i, (u)_{i+1}, \ldots, (u)_{j-1}, & \text{αν } Seq(u) \ \ \& \ \ 0 \leq i < j \leq lh(u), \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Επιπλέον για όλα τα u, i, j,

$$seg(u, i, j) \leq u,$$

και αν $i > 0$ *ή* $j < lh(u)$, *τότε* $seg(u, i, j) < u$.

Απόδειξη. του Θεωρήματος. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη θα ορίσουμε κάποιες κωδικοποιήσεις βασικών συνόλων αντικειμένων στη θεωρία της προγραμματικής γλώσσας R, χρησιμοποιώντας την κλασσική κωδικοποίηση ακολουθιών και τον συμβολισμό $[X]_A$ για τον κωδικό του αντικειμένου X. Οπότε οι ορισμοί θα μας δίνουν διαδοχικά 1-1 συναρτήσεις.

$$[\ ]_A \, : \, A \rightarrowtail \mathbb{N}$$

για κάθε βασικό σύνολο A που θα κωδικοποιούμε. Αντί για $[\ ]_A$ θα γράφουμε $[\ ]_i$, δηλαδή η κωδικοποίηση του συνόλου A ορίζεται στον ορισμό i, για $i = 1, \ldots, 6$.

1. Σύμβολα. Σύμφωνα με τους ορισμούς της $\mathbf{R}(\mathbf{N_0})$ ξεκινάμε θέτοντας

$$[v_i] = \langle 0, 0, i\rangle, \qquad [n]_1 = \langle 0, 1, n\rangle, \qquad [\mathbf{S}]_1 = \langle 1, 1, 0\rangle,$$
$$[\mathbf{Pd}]_1 = \langle 1, 1, 1\rangle, \qquad [\zeta_i^n]_1 = \langle 1, n, 2 + i\rangle,$$

και για τα υπόλοιπα οχτώ σύμβολα

$$\textbf{αν} \qquad \textbf{τότε} \qquad \textbf{αλλιώς} \qquad , \qquad (\qquad) \qquad = \qquad ?$$

χρησιμοποιούμε τους αριθμούς

$$\langle 2, 0\rangle, \ldots, \langle 2, 7\rangle,$$

δηλαδή $[\textbf{αν}]_1 = \langle 2, 0\rangle$, $[\textbf{τότε}]_1 = \langle 2, 1\rangle$,...,$[?]_1 = \langle 2, 7\rangle$.

Παρατηρούμε ότι ο κωδικός του τυχαίου αριθμού n είναι μεγαλύτερος από τον n π.χ.,

$$[1]_1 = \langle 0, 1, 1\rangle = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

Εδώ όμως δεν μας ενδιαφέρει η αποτελεσματικότητα της κωδικοποίησης.

2. Λέξεις. Για κάθε λέξη (ακολουθία)

$$\alpha \equiv \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n$$

από σύμβολα (συμπεριλαμβάνουμε και το "?"), θέτουμε

$$[\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n] = \langle [\alpha_0]_1, [\alpha_1]_1, \dots, [\alpha_n]_1 \rangle.$$

Π.χ.

$$[\mathbf{S}(\mathbf{v_1})]_2 = \langle [\mathbf{S}]_1, [(]_1, [\mathbf{v_1}]_1, [)]_1 \rangle = \langle \langle 1,1,0 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 0,0,1 \rangle, \langle 2,5 \rangle \rangle$$

Ο ορισμός αυτός αναθέτει κωδικούς στους όρους της $\mathbf{R}$, που είναι λέξεις από αυτά τα σύμβολα.

Παρατήρηση: Οι αριθμητικές μεταβλητές v_i και οι αριθμητικές σταθερές n είναι σύμβολα, αλλά είναι και όροι μήκους 1. Έτσι κωδικοποιούνται με δύο διαφορετικούς τρόπους, ως σύμβολα και ως όροι, οπότε θέλει προσοχή να μην τους συγχέουμε:

$$[\mathbf{v_i}]_1 = \langle 0,0,i \rangle, \qquad [\mathbf{v_i}]_2 = \langle \langle 0,0,i \rangle \rangle$$
$$[n]_1 = \langle 0,1,n \rangle, \qquad [n]_2 = \langle \langle 0,1,n \rangle \rangle.$$

Π.χ., $[0]_1 = \langle 0,1,0 \rangle = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, ενώ $[0]_2 = \langle 90 \rangle = 2^{91}$.

3. Αναδρομικές εξισώσεις. Η τυχαία τυπική εξίσωση καθορίζεται από το αριστερό και δεξιό της σκέλος που είναι όροι. Θέτουμε

$$[\zeta(\tilde{\mathbf{v}}) = E]_3 = \langle [\zeta(\tilde{\mathbf{v}})]_2, [E]_2 \rangle.$$

4. Αναδρομικά Προγράμματα. Αν E=$(e_0, \dots, e_k)$, τότε κάθε e_i είναι εξίσωση. Θέτουμε

$$[E]_4 = \langle [e_0]_3, \dots, [e_k]_3 \rangle.$$

5. Καταστάσεις. Τα στοιχεία στο αριστερό σκέλος μιας κατάστασης είναι ή κλειστοί όροι ή συναρτησιακά σύμβολα ή το "?", ενώ τα στοιχεία στο δεξιό σκέλος είναι αριθμητικές σταθερές (δηλάδή αριθμοί). Θέτουμε

$$[\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1} : \beta_0, \dots, \beta_{n-1}]_5 = \langle \langle [\alpha_0]', \dots, [\alpha_{m-1}]' \rangle, \langle [\beta_0]_1, \dots, [\beta_{n-1}]_1 \rangle \rangle,$$

όπου

$$[\alpha_i]' = \begin{cases} [\alpha_i]_1 & \textit{αν το } \alpha_i \textit{ είναι συναρτησιακό σύμβολο ή το } '?' \\ [\alpha_i]_2 & \textit{αλλιώς, δηλαδή αν ο } \alpha_i \textit{ είναι κλειστός όρος} \end{cases}$$

Εδώ πρέπει να προσέξουμε, επειδή οι αριθμητικές σταθερές κωδικοποιούνται ως σύμβολα στο δεξιό σκέλος και ως όροι στο αριστερό. Π.χ.

$$[2:2]_5 = \langle \langle \langle \langle 0,1,2 \rangle \rangle \rangle, \langle \langle 0,1,2 \rangle \rangle \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι όταν ο u είναι κωδικός μιας κατάστασης $\alpha : \beta$ τότε ο $fisrt(u)$ είναι κωδικός του αριστερού σκέλους α, και ο $last(u)$ είναι κωδικός του δεξιού σκέλους β.

Για να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση $\alpha \longmapsto [\alpha]_5$ είναι 1-1 στο σύνολο καταστάσεων, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κανένας αριθμός δεν έιναι ταυτόχρονα κωδικός συναρτησιακού συμβόλου ή του $'?'$ και επίσης κωδικός κλειστού όρου. Αυτό ισχύει επειδή το πρώτο σύμβολο κάθε κλειστού όρου E είναι ένα από τα

$$\mathbf{S}, \quad \mathbf{Pd}, \quad n, \quad \zeta_i^n, \quad ($$

με κωδικό > 2, έτσι που για κάθε όρο E, $first([E]_2) > 2$. Ενώ αν ο u είναι κωδικός συμβόλου, τότε $first(u) \leq 2$.

6. Υπολογισμοί. Για κάθε ακολουθία καταστάσεων $s = (s_0, \ldots, s_k)$, θέτουμε

$$[s_0, \ldots, s_k]_6 = \langle [s_0]_5, \ldots, [s_k]_5 \rangle.$$

Αυτό κωδικοποιεί όλες τις ακολουθίες καταστάσεων, και ιδιαίτερα τους τερματικούς υπολογισμούς της μηχανής για οποιοδήποτε αναδρομικό πρόγραμμα.

Για το (α) μέρος του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση $T_n(e, \vec{x}, y)$ και η συνάρτηση $U(y)$ είναι πρωτογενώς αναδρομικές.

Για το δεύτερο αρκεί να θέσουμε

$$U(y) = last(y)_{1,0,2}$$

Για το πρώτο θα δώσουμε κάποιους βοηθητικούς ορισμούς πρωτογενώς αναδρομικών "συναρτήσεων και σχέσεων αποκωδικοποίησης " που καταλήγουν στο ζητούμενο.

$$
\begin{aligned}
\textit{ΑρΜετ}(v) &\Leftrightarrow \text{ο } v \text{ είναι κωδικός κάποιας } \mathbf{v_i}\\
&\Leftrightarrow v = \langle 0, 0, (v)_2\rangle\\
\textit{ΑρΣταθ}(c) &\Leftrightarrow \text{ο } c \text{ είναι κωδικός αριθμού}\\
&\Leftrightarrow c = \langle 0, 1, (c)_2\rangle\\
\textit{ΣυνΜετ}(f) &\Leftrightarrow \text{ο } f \text{ είναι κωδικός κάποιας } \zeta_i^n\\
&\Leftrightarrow f = \langle 1, (f)_1, (f)_2\rangle \ \ \& \ \ (f)_1 \geq 1 \ \ \& \ \ (f)_2 \geq 2\\
\textit{ΣυνΣταθ}(f) &\Leftrightarrow \text{ο } f \text{ είναι κωδικός του } \mathbf{S} \text{ ή του } \mathbf{Pd}\\
&\Leftrightarrow f = [\mathbf{S}]_1 \vee f = [\mathbf{Pd}]_1\\
\textit{ΣυνΣυμβ}(f) &\Leftrightarrow \textit{ΣυνΜετ}(f) \vee \textit{ΣυνΣταθ}(f)\\
arity(f) &= \text{η πλειομέλεια του συναρτησιακού συμβόλου } \ f\\
&\text{(αν ο } f \text{ είναι κωδικός συμβόλου)}\\
&= (f)_1\\
\textit{Όρος}(u) &\Leftrightarrow \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου}\\
\textit{ΚλΟρος}(u) &\Leftrightarrow \text{ο } u \text{ είναι κωδικός κλειστού όρου}\\
&\Leftrightarrow \textit{Ορος}(u) \ \ \& \ \ (\forall i < lh(u))\neg \textit{ΑρΜετ}((u)_i)\\
\textit{ΣυνθΟρος}(u) &\Leftrightarrow \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου } \ \zeta_i^n(A_1, \ldots, A_n)\\
&\Leftrightarrow \textit{Ορος}(u) \ \ \& \ \ \textit{ΣυνΜετ}(first(u))\\
\textit{ΥποΟρος}(u, v) &\Leftrightarrow \text{ο } v \text{ είναι κωδικός υποόρου του όρου με κωδικό } u\\
&\Leftrightarrow \textit{Ορος}(u) \ \ \& \ \ \textit{Ορος}(v) \ \ \& \ \ (\exists i, j \leq lh(u)[i < j \ \ \& \ \ v = seg(u, i, j)]\\
\textit{ΑπλΟρος}(u) &\Leftrightarrow \text{ο } u \text{ είναι κωδικός όρου } \ \zeta_i^n(v^1, \ldots, v^n)\\
&\Leftrightarrow \textit{ΣυνθΟρος}(u) \ \ \& \ \ (\forall v < u)[\textit{ΥποΟρος}(u, v) \Rightarrow \textit{ΑρΜετ}(v)]\\
\textit{Εξίσωση}(e) &\Leftrightarrow \text{ο } e \text{ είναι κωδικός αναδρομικής εξίσωσης}\\
&\Leftrightarrow e = \langle first(e), last(e)\rangle\\
&\ \ \& \ \ \textit{ΑπλΟρος}(first(e)) \ \ \& \ \ \textit{Ορος}(last(e))\\
&\ \ \& \ \ (\forall i < lh(last(e)))[\textit{ΑρΜετ}((last(e))_i)\\
&\Rightarrow (\exists j < lh(first(e)))[(last(e))_i = (first(e))_j]]\\
\textit{Προγρ}(e) &\Leftrightarrow \text{ο } e \text{ είναι κωδικός προγράμματος}\\
&\Leftrightarrow Seq(e) \ \ \& \ \ lh(e) > 0 \ \ \& \ \ (\forall i < lh(e))[\textit{Εξίσωση}((e)_i)]\\
&\ \ \& \ \ (\forall i < lh(e))(\forall j < lh((e)_{i,1})\\
&[\textit{ΣυνΜετ}((e)_{i,1,j}) \Rightarrow (\exists k < lh(e))[(e)_{i,1,j} = (e)_{k,0,0}]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Κατ(s) &\Leftrightarrow ο\ s\ είναι\ κωδικός\ κατάστασης\\
&\Leftrightarrow s = \langle (s)_0, (s)_1 \rangle\\
&\ \ \&\ \ (\forall i < lh((s)_0)\\
&[ΣυνΣυμβ((s)_{0,i}) \vee (s)_{0,i} = [?]_1 \vee ΚλΟρος((s)_{0,i})]\\
&\ \ \&\ \ (\forall j < lh((s)_1) ΑρΣταθ((s)_{1,j})\\
ΤερμΚατ(s) &\Leftrightarrow ο\ s\ είναι\ κωδικός\ τερματικής\ κατάστασης\\
&\Leftrightarrow Κατ(s)\ \ \&\ \ lh((s)_0) = 0\ \ \&\ \ lh((s)_1) = 1\\
Αντ(u, j, x) &=_{df} το\ αποτέλεσμα\ της\ αντικατάστασης\ της\ μεταβλητής\\
&με\ κωδικο\ j = [v_i]\ με\ τη\ σταθερά\ x\ στον\ όρο\ με\ κωδικό\ u\\
ΠλΑντ(u, v, w) &=_{df} το\ αποτέλεσμα\ της\ αντικατάστασης\\
&των\ μεταβλητών\ με\ κωδικούς (v)_0, \ldots, last(v)\\
&με\ τις\ σταθερές (w)_0, \ldots, last(w)\\
&στον\ όρο\ με\ κωδικό\ u\\
ΜετΑπλΟρου(u) &=_{df} \langle [v_{i_1}]_1, \ldots, [v_{i_n}]_1 \rangle \quad (αν\, u = [\zeta^n(v_1, \ldots, v_{i_n})]_2)\\
Μετάβαση(e, s, s') &\Leftrightarrow Προγρ(e)\ \ \&\ \ Κατ(s)\ \ \&\ \ Κατ(s')\\
&\ \ \&\ \ s \rightarrow s'\ στο\, \mathcal{T}(E)\ για\, e = [E]_4\\
Υπολ(e, y) &ο\ y\ είναι\ κωδικός\ τερματικού\ υπολογισμού\\
&στο \mathcal{T}(E)\ για\, e = [E]_4\\
&\Leftrightarrow Προγρ(e)\ \ \&\ \ Seq(y)\ \ \&\ \ lh(y) > 1\\
&\ \ \&\ \ (\forall i < lh(y) - 1) Μετάβαση(e, (y)_i, (y)_{i+1})\\
&\ \ \&\ \ ΤερμΚατ(last(y))\\
T_n(e, \vec{x}, y) &\Leftrightarrow Προγρ(e)\ \ \&\ \ Υπολ(e, y)\\
&\ \ \&\ \ first(first(y)) = \langle first(first(first(e))) \rangle\\
&\ \ \&\ \ last(first(y)) = [x_1 x_2 \ldots x_n]_2
\end{aligned}
$$

Η μη-προφανής απόδειξη σ' αυτή τη λίστα είναι η πρωτογενής αναδρομικότητα της σχέσης Ορος (u)

Λήμμα 2.2. *Η σχέση*

$$Ορος(u) \Leftrightarrow ο\ u\ είναι\ κωδικός\ όρου \tag{2.8}$$

είναι πρωτογενώς αναδρομική.

Απόδειξη. Από τον ορισμό, οι όροι είναι τεσσάρων μορφών, δηλαδή

$$Ορος(u) \Leftrightarrow Ορος_1(u) \vee Ορος_2(u) \vee Ορος_3(u) \vee Ορος_4(u) \tag{2.9}$$

όπου

$$
\begin{aligned}
Opo\varsigma_1(u) &\Leftrightarrow u = [v_i]_2 \textit{ για κάποια μεταβλητή } v_i \\
&\Leftrightarrow u = \langle\langle 0, 0, (u)_{0,2}\rangle\rangle, \\
Opo\varsigma_2(u) &\Leftrightarrow u = [n]_2 \textit{ για κάποιον αριθμό } n \\
&\Leftrightarrow u = \langle\langle 0, 1, (u)_{0,2}\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Στις άλλες δύο περιπτώσεις το αν μια λέξη είναι όρος εξαρτάται από το εάν μερικά (γνήσια) τμήματά της είναι όροι, και αυτό δίνει δύο ισοδυναμίες που πρέπει να ικανοποιούνται από τους κωδικούς. Στην περίπτωση της διακλάδωσης, υπολογίζουμε:

$$
\begin{aligned}
Opo\varsigma_4(u) \Leftrightarrow\ & u = [(\alpha\nu\,(A = 0)\ \tau\acute{o}\tau\epsilon\ B\ \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\ C)]_2 \textit{ για τους όρους } A, B, C \\
\Leftrightarrow\ & (\exists a, b, c < u)[Opo\varsigma(a)\ \ \&\ \ Opo\varsigma(b)\ \ \&\ \ Opo\varsigma(c) \\
& \&\ \ u = [(\boldsymbol{\alpha\nu}\,(]_2 * a * [= 0)\,\boldsymbol{\tau\acute{o}\tau\epsilon}\,]_2 * b * [\boldsymbol{\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma}\,]_2 * c * [(]_2].
\end{aligned}
$$

Οι ανισότητες $a, b, c < u$ δικαιολογούνται επειδή αν ο u είναι κωδικός ενός όρου.

$$
E \equiv (\alpha\nu\, A = 0)\ \tau\acute{o}\tau\epsilon\, B\ \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\, C).
$$

τότε οι όροι A, B, C είναι γνήσια τμήματα του Ε, και έτσι οι κωδικοί του είναι μικρότεροι του u από την βασική ιδιότητα της συνάρτησης $seg(u, i, j)$ στο λήμμα (2.1)

Τέλος θεωρούμε την περίπτωση όπου ο "σύνθετος " όρος με κωδικό u παράγεται από n υποόρους, για διαφορετικά n:

$$
\begin{aligned}
Opo\varsigma_3(u) \Leftrightarrow\ & u = [f(A_0, \ldots, A_{n-1})]_2 \\
& \textit{για όρους } A_0, \ldots, A_{n-1} \textit{ και } n\textit{-μελές σύμβολο } f
\end{aligned}
$$

όπου με "σύμβολο" εννοούμε κάποια συναρτησιακή μεταβλητή ή μία από τις σταθερές S, Pd. Αν ο u ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον κωδικό του συμβόλου $f, [f]_1 = (u)_0$ και την πλειομέλεια του $n = (u)_{0,1}$. Γνωρίζουμε ότι οι κωδικοί των όρων $A_0, \ldots, A_{n-1}$ είναι μικρότεροι του u, εφόσον είναι γνήσια αρχικά τμήματα του $f(A_0, \ldots, A_{n-1})$. Έτσι η παραπάνω ισοδυναμία πέρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
Opo\varsigma_3(u) \Leftrightarrow\ & Seq(u)\ \ \&\ \ \Sigma\upsilon\nu\Sigma\upsilon\mu\beta((u)_0) \\
& \&\ \ (\exists \alpha_0, \ldots, \alpha_{(u)_{0,1}-1})[(\forall i < (u)_{0,1})\, Opo\varsigma(\alpha_i) \\
& \&\ \ u = \langle (u)_0 \rangle * [(]_2 * \alpha_0 * [,]_2 * \ldots * \alpha_{(u)_{0,1}-1} * [)]_2].
\end{aligned}
$$

το οποίο μοιάζει με την ισοδυναμία του $Opo\varsigma_4(u)$, εκτός από τις "..." που θα πρέπει να αποφύγουμε. Γι' αυτό θα ορίσουμε κάποιες βοηθητικές (πρωτογενώς αναδρομικές) συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} h(0, u, a) &= \langle (u)_0 \rangle * [(]_2 * (a)_0 \\ h(t+1, u, a) &= h(t, u, a) * [,]_2 * \langle (a)_t \rangle \\ g(u, v) &= h((u)_{0,1}, u, a) * [)]_2. \end{aligned}$$

Αν ο $(u)_0$ είναι κωδικός κάποιου n-μελούς συναρτησιακού συμβόλου, $(u)_0 = [f]_1$, και για $i < n$ ο $(a)_i = [A_i]_2$ είναι κωδικός κάποιας λέξης, τότε

$$h(0, u, a) = [f(A_0]_2, \qquad h(1, u, a) = [f(A_0, A_1]_2, \ldots,$$

και τελικά

$$g(u, v) = [f(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})]_2.$$

Οπότε η συνθήκη για την $Opo\varsigma_3(u)$ πέρνει την μορφή

$$\begin{aligned} Opo\varsigma_3(u) \Leftrightarrow\ & Seq(u) \ \& \ \Sigma\upsilon\nu\Sigma\upsilon\mu\beta((u)_0) \\ & \& \ (\exists a \leq maxseq(u))[(\forall i < (u)_{0,1}) Opo\varsigma((a)_i) \\ & \& \ u = g(u, a)]. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση αυτών των ισοδυναμιών στην σχέση (2.9) παράγεται μια ισοδυναμία που ικανοποιεί τη σχέση $Opo\varsigma(u)$ και συνεπάγεται με πλήρη πρωτογενή αναδρομή για τις σχέσεις ότι η $Opo\varsigma(u)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική. Πράγματι αν θέσουμε

$$\begin{aligned} H(w, u) \Leftrightarrow\ & Opo\varsigma_1(u) \vee Opo\varsigma_2(u) \\ & \vee [Seq(u) \ \& \ \Sigma\upsilon\nu\Sigma\upsilon\mu\beta((u)_0) \\ & \ \& \ (\exists a \leq maxseq(u))[(\forall i < (u)_{0,1})[(w)_{(a)_i} = 1] \\ & \qquad \& \ u = g(u, a)] \\ & \vee (\exists a, b, c < u)[(w)_a = 1 \ \& \ (w)_b = 1 \ \& \ (w)_c = 1) \\ & \ \& \ u = [(\boldsymbol{\alpha\nu}\ (]_2 * a * [= 0]_2 * b * [\boldsymbol{\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma}]_2 * c * [)]_2], \end{aligned}$$

και επαληθεύουμε ότι για κάθε u,

$$Opo\varsigma(u) \Leftrightarrow H(\langle \chi_{Opo\varsigma}(0), \ldots, \chi_{Opo\varsigma}(u-1) \rangle, u),$$

ότι η $Opo\varsigma(u)$ είναι πρωτογενώς αναδρομική. □

Για το (β) μέρος του θεωρήματος, πρέπει να υπολογίσουμε τον κωδικό e κάποιου συστήματος E που υπολογίζει τη μερική συνάρτηση

$$g(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = \phi_e(\vec{y}, \vec{x})$$

και δοσμένους αριθμούς $\vec{z} = z_1, \ldots, z_m$, τον κωδικό $S_n^m(e, \vec{z})$ κάποιου άλλου συστήματος $E_{\vec{z}}$ που υπολογίζει τη μερική συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = g(\vec{z}, \vec{x}) \tag{2.10}$$

Αν το πρώτο συναρτησιακό σύμβολο του E είναι το g και το f είναι καινούργια συναρτησιακή μεταβλητή η οποία δεν ορίζεται στο E, τότε αρκεί να προσθέσουμε στην αρχή του E τον ορισμό (2.10). Έστω

$$\zeta_i^{m+n}(v_0, \ldots, v_{m-1}, v_m, \ldots, v_{m+n-1}) = E_0$$

η πρώτη εξίσωση του συστήματος E με κωδικό e. Έπεται ότι ο κωδικός της συναρτησιακής μεταβλητής που ορίζεται στην εξίσωση με κωδικό $(e)_i$ του E είναι

$$[\zeta_{j_i}^{k_i}] = g_1(e) = (e)_{i,0,0},$$

και άρα ο κωδικός της συναρτησιακής μεταβλητής που ορίζεται στην πρώτη εξίσωση του E είναι

$$[\zeta_i^{m+n}] = g_1(e) = (e)_{0,0,0}$$

Οι κωδικοί των αριθμητικών μεταβλητών στην πρώτη εξίσωση υπολογίζονται από την πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση

$$[v^i] = g_2(e, i) = (e)_{0,0,2+2i} \qquad (i = 0, \ldots, m+n-1).$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός

$$f^*(e) = \langle 1, n, max\{(e)_{i,0,0,2} + 1 \mid i < lh(e)\}\rangle$$

είναι κωδικός συναρτησιακής μεταβλητής ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τους κωδικούς όλων των συναρτησιακών μεταβλητών που εμφανίζονται στο E, και άρα δεν εμφανίζεται στο E. Οπότε αν ο e είναι κωδικός προγράμματος τότε ο ζητούμενος κωδικός υπολογίζεται με την

$$\begin{aligned} S_n^m(e, \vec{z}) = \langle\langle f^*(e), [(], g_2(e, m), [,], \ldots, g_2(e, m+n-1), [)]\rangle, \\ \langle g_1(e), [z_1]_1, [,]_1, \ldots, [,]_1, [z_m]_1, [)]_1\rangle\rangle * e. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση όπου $\neg \Pi\rho o\gamma\rho(e)$ θέτουμε

$$S_n^m(e, \vec{z}) = \langle 0, e, \vec{z}\rangle,$$

διότι καμία ακολουθία της μορφής $\langle 0, e, \vec{z}\rangle$ δεν είναι κωδικός προγράμματος.

Τέλος οι συναρτήσεις $S_n^m(e, \vec{z})$ είναι 1-1 από τον ορισμό τους. □

Πόρισμα 2.1. *Η μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι αναδρομική τότε και μόνο αν είναι ελαχιστικά αναδρομική.*

Απόδειξη. Οι ελαχιστικά αναδρομικές μερικές συναρτήσεις είναι αναδρομικές από το Θεώρημα (1.3), και από το Θεώρημα Κανονικής Μορφής συνεπάγεται ότι κάθε αναδρομική μερική συνάρτηση είναι ελαχιστικά αναδρομική. □

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κανονική μορφή (2.1) σπάνια δίνει τον αποτελεσματικότερο αλγόριθμο για τον υπολογισμό μιας συνάρτησης, όπου σε πολλές περιπτώσεις ορίζεται εύκολα με τη "γενική" αναδρομή.

Από την άλλη μεριά το Θεώρημα Κανονικής Μορφής είναι βασικό για την μελέτη των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων, και ιδιαίτερα για αποδείξεις **μη-αναδρομικότητας**. Το επόμενο Θεώρημα είναι παραδειγματικό της χρήσης του.

2.2 Η σχέση τερματισμού

Θεώρημα 2.2. *(Turing). Η σχέση **τερματισμου***

$$H(e, x) \Leftrightarrow \phi_e(x) \downarrow$$

δεν είναι αναδρομική.

Από τον ορισμό της βλέπουμε

$$\begin{aligned} H(e, x) &\Leftrightarrow (\exists y) T_1(e, x, y) \\ &\Leftrightarrow \textit{Προγρ}(e) \ \ \& \ \ \textit{η αναδρομική μηχανή με κωδικό } e \\ &\qquad \textit{τερματίζει στην έισοδο } x \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αν η $H(e, x)$ ήταν αναδρομική, τότε η ολική συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \phi_x(x) + 1 & \textit{αν } H(x, x) \\ 0 & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

θα ήταν αναδρομική. Άρα για κάποιο e και για όλα τα x

$$f(x) = \phi_e(x) = \phi_x(x) + 1$$

Άτοπο για $x = e$. □

Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος Κανονικής Μορφής μας βεβαιώνει ότι μια συγκεκριμένη κατασκευή αναδρομικών προγραμμάτων είναι πρωτογενώς αναδρομική στους κωδικούς. Συγκεκριμένα αν ο e είναι κωδικός της $f(\vec{z}, \vec{x})$, τότε για κάθε $\vec{z}$, ο $S^m_n(e, \vec{z})$ είναι κωδικός της μερικής συνάρτησης

$$f_{\vec{z}}(\vec{x}) = f(\vec{z}, \vec{x}).$$

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα καλείται συχνά **Θεώρημα** S^m_n και είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι συνεπάγεται ότι πολλές άλλες, πολυπλοκότερες κατασκευές προγραμμάτων είναι επίσης πρωτογενώς αναδρομικές στους κωδικούς.

Παράδειγμα 2.1. *Η πρωτογενής αναδρομή είναι πρωτογενώς αναδρομική στους κωδικούς, δηλαδή: για κάθε n, υπάρχει πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση $u(e,m)$ τέτοια που αν*

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= \phi_e^n(\vec{x}) \\ f(y+1,\vec{x} &= \phi_m^{n+2}(f(y,\vec{x}),y,\vec{x}), \end{aligned}$$

τότε

$$f(y,\vec{x}) = \phi_{u(e,m)}^{n+1}(y,\vec{x}).$$

Απόδειξη. Η μερική συνάρτηση

$$\begin{aligned} g(0,e,m,\vec{x}) &= \phi^n(e,\vec{x}) \\ g(y+1,e,m,\vec{x}) &= \phi^{n+2}(m,g(y,e,m,\vec{x}),y,\vec{x}) \end{aligned}$$

είναι αναδρομική, επειδή το $\mathcal{R}$ είναι κλειστό για πρωτογενή αναδρομή, οπότε αναδρομική είναι και η

$$h(e,m,y,\vec{x}) = g(y,e,m,\vec{x}),$$

και άρα έχει κάποιο κωδικό $\widehat{h}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} g(y,e,m,\vec{x}) &= h(e,m,y,\vec{x}) \\ &= \phi_{\widehat{h}}^{n+3}(e,m,y,\vec{x}) \\ &= \phi_{s_{n+1}^2(\widehat{h},e,m)}^{n+1}(y,\vec{x}), \end{aligned}$$

και το ζητούμενο ισχύει με την συνάρτηση

$$u(e,m) = S_{n+1}^2(\widehat{h},e,m).$$

□

Τελειώνοντας με την συγκεκριμένη παράγραφο θα διατυπώσουμε και θα σχολιάσουμε το περίφημο

Αίτημα Church – Turing Η τυχαία μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ είναι υπολογίσιμη αν και μόνο αν είναι αναδρομική.

Το Αίτημα $C - T$ διατυπώθηκε από τον Αμερικανό Alonzo Church και τον Βρετανό Alan Turing το 1936.

Η συνεπαγωγή

$$f \text{ αναδρομική } \Rightarrow f \text{ υπολογίσιμη}$$

για την τυχαία f είναι η προφανής και τετριμμένη κατεύθυνση του Αιτήματος. Η σημασία του βρίσκεται στην κατεύθυνση

$$f \text{ υπολογίσιμη } \Rightarrow f \text{ αναδρομική}$$

Το Αίτημα $C - T$ δεν επιδέχεται αυστηρή απόδειξη (εξού και το Αίτημα και όχι Θεώρημα) επειδή ταυτίζει την διαισθητική έννοια της υπολογισιμότητας με την αυστηρή (μαθηματική) έννοια της αναδρομικότητας. Στα Μαθηματικά το Αίτημα εκφράζεται ως:

Κάθε κλασσική, υπολογίσιμη συνάρτηση είναι αναδρομική

κάτι το οποίο στην εποχή μας δεν αμφισβητείται, διότι ανατρέχοντας ιστορικά στις έρευνες μεγάλων μαθηματικών δεν μπόρεσε να βρεθεί κανένα "άντιπαράδειγμα", δηλαδή κάποια συνάρτηση που να θεωρείται υπολογίσιμη και να μην είναι αναδρομική.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές μαθηματικές ιδιότητες των αναδρομικών μερικών συναρτήσεων, σχέσεων και συνόλων, όπως και τις **ημιαναδρομικές** σχέσεις. Τέλος θα ορίσουμε τα **αναδρομικά απαριθμητά σύνολα**, τα απλούστερα μη-υπολογίσιμα μαθηματικά αντικείμενα. Βασικά εργαλεία γι' αυτό είναι η στιβαρή κλειστότητα του $\mathcal{R}$ καθώς και το Θεώρημα του $Kleene$.

Όσον αφορά το Θεώρημα του $Kleene$ θα απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, παραλείποντας τον άνω δείκτη, δηλαδή

$$\phi_e(\vec{x}) = \phi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y))$$

και σε μερικές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τον εναλλακτικό συμβολισμό του $Kleene$,

$$\{(\vec{x}) = \phi_e^n(\vec{x}) = U(\mu y T_n(e, \vec{x}, y)). \tag{2.11}$$

Ο συγκεκριμένος συμβολισμός βοηθάει διότι τοποθετεί "στο ίδιο επίπεδο" το πρόγραμμα e και τα δεδομένα $\vec{x}$. Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$W_e = \{x \mid \phi_e(x)\downarrow\} \tag{2.12}$$

για το πεδίο σύγκλισης της αναδρομικής μερικής συνάρτησης με κωδικό e.

2.3 Ημιαναδρομικές Σχέσεις

Για την διευκόλυνση στη διατύπωση των ορισμών και των αποτελεσμάτων, απαριθμούμε και ονομάζουμε τους βασικότερους τελεστές ορισμών σχέσεων:

$$
\begin{array}{rl}
(\neg) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow \neg Q(\vec{x}) \\
(\ \&\ ) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(\vec{x})\ \ \&\ \ R(\vec{x}) \\
(\vee) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}) \vee R(\vec{x}) \\
(\Rightarrow) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}) \Rightarrow R(\vec{x}) \\
(\exists) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y) \\
(\exists_{\leq}) & P(z, \vec{x}) \Leftrightarrow (\exists i \leq z) Q(\vec{x}, i) \\
(\forall) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall Y) Q(\vec{x}, y) \\
(\forall_{\leq}) & P(z, \vec{x}) \Leftrightarrow (\forall i \leq z) Q(\vec{x}, i) \\
(\textit{αντικατάσταση}) & P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))
\end{array}
$$

Έχουμε ήδη δείξει ότι το σύνολο των πρωτογενώς αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για όλους αυτούς τους τελεστές (με πρωτογενώς αναδρομικες $f_i(\vec{x})$) εκτός από τους (μη-φραγμένους) ποσοδείκτες $\exists, \forall$ για τους οποίους δεν είναι κλειστό από το Θεώρημα (2.2). Επίσης έχουμε δείξει και τις ιδιότητες κλειστότητας των αναδρομικών σχέσεων:

Πρόταση 2.1. *Το σύνολο των αναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για τους τελεστές του προτασιακού λογισμού* $\neg$, $\&$, $\vee, \Rightarrow$, *τους φραγμένους ποσοδείκτες* $\exists_{\leq}, \forall_{\leq}$ *και αντικατάσταση (ολικών) αναδρομικών συναρτήσεων, αλλά δεν έιναι κλειστό για τους ποσοδείκτες* $\exists, \forall$.

Ορισμός 2.1. *(α) Η σχέση* $P(\vec{x})$ *είναι* ***ημιαναδρομκή*** *αν για κάποια μεριή, αναδρομική συνάρτηση* $f(\vec{x})$,

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \downarrow .$$

(β) Η σχέση $P(\vec{x})$ *είναι* Σ_1^0 *αν για κάποια αναδρομική σχέση* $Q(\vec{x}, y)$

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y).$$

Πρόταση 2.2. *Για την τυχαία σχέση* $P(\vec{x})$, *τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(1) Η $P(\vec{x})$ *είναι ημιαναδρομική.*
(2) Η $P(\vec{x})$ *είναι* Σ_1^0.
(3) Η $P(\vec{x})$ *ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y)$$

με κάποια πρωτογενώς αναδρομική $Q(\vec{x}, y)$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (3) από το θεώρημα κανονικής μορφής. (3) $\Rightarrow$ (2) τετριμμένο και (2) $\Rightarrow$ (1) θέτοντας

$$f(\vec{x}) = \mu y Q(\vec{x}, y).$$

έτσι που

$$(\exists y) Q(\vec{x}, y) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \downarrow .$$

□

Κλασσικό παράδειγμα σχέσης που είναι ημιαναδρομική αλλά όχι αναδρομική είναι η σχέση τερματισμού $H(e, x)$.

Πρόταση 2.3. *(**Θεώρημα Kleene**) Η τυχαία σχέση $P(\vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνο αν η $P(\vec{x})$ και η άρνησή της $\neg P(\vec{x})$ είναι και οι δύο ημιαναδρομικές.*

Απόδειξη. Αν η $P(\vec{x})$ είναι αναδρομική, τότε και οι

$$Q(\vec{x}, y) \Leftrightarrow P(\vec{x}), \qquad R(\vec{x}, y) \Leftrightarrow \neg P(\vec{x})$$

είναι αναδρομικές, και έχουμε

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y) \\ \neg P(\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y) R(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

Για την άλλη κατεύθυνση, αν

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y) \\ \neg P(\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y) R(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

με αναδρομικές σχέσεις Q και R, τότε η συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = \mu y [R(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)]$$

είναι ολική αναδρομική, και

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}, f(\vec{x})).$$

□

Πρόταση 2.4. *Το σύνολο των ημιαναδρομικών σχέσεων είναι κλειστό για αναδρομικές αντικαταστάσεις, για τους "θετικούς" προτασιακούς τελεστές & , $\vee$, για τους φραγμένους ποσοδείκτες $\exists_{\leq}, \forall_{\leq}$, και για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists$. Δεν είναι κλειστό για την άρνηση $\neg$ και για τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$.*

Απόδειξη. Η κλειστότητα για αναδρομικές αντικαταστάσεις είναι προφανής, και οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί δείχνουν τους υπόλοιπους, θετικούς ισχυρισμούς της πρότασης:

$$
\begin{aligned}
(\exists y)Q(\vec{x},y) \vee (\exists y)R(\vec{x},y) &\Leftrightarrow (\exists u)[Q(\vec{x},u) \vee R(\vec{x},u)] \\
(\exists y)Q(\vec{x},y) \ \& \ (\exists y)R(\vec{x},y) &\Leftrightarrow (\exists u)[Q(\vec{x},(u)_0) \ \& \ R(\vec{x},(u)_1)] \\
(\exists Z)(\exists y)Q(\vec{x},y,z) &\Leftrightarrow (\exists u)R(\vec{x},(u)_0,(u)_1) \\
(\exists i \leq z)(\exists y)Q(\vec{x},y,i) &\Leftrightarrow (\exists u)[(u)_0 \leq z \ \& \ Q(\vec{x},(u)_1,(u)_0)] \\
(\forall i \leq z)(\exists y)Q(\vec{x},y,i) &\Leftrightarrow (\exists u)(\forall i \leq z)Q(\vec{x},(u)_i,i).
\end{aligned}
$$

Αντίθετα το σύνολο των ημιαναδρομικών σχέσεων δεν είναι κλειστό για την άρνηση ή τον καθολικό ποσοδείκτη, γιατί αλλιώς η βασική σχέση τερματισμού

$$H(e,x) \Leftrightarrow (\exists y)T_1(e,x,y)$$

θα είχε ημιαναδρομική άρνηση και άρα θα ήταν αναδρομική, κάτι το οποίο δεν ισχύει. $\square$

Το **γράφημα** μιας μερικής συνάρτησης $f(\vec{x})$ είναι η σχέση στους φυσικούς.

$$G_f(\vec{x},w) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = w, \qquad (2.13)$$

Η επόμενη πρόταση δίνει σε πολλές περιπτώσεις τετριμμένες αποδείξεις αναδρομικότητας για μερικές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.5. *Η τυχαία μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική αν και μόνο αν το γράφημα της $G_f(\vec{x},w)$ είναι ημιαναδρομική σχέση.*

Απόδειξη. Αν η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική με κωδικό $\widehat{f}$, τότε

$$G_f(\vec{x},w) \Leftrightarrow (\exists y)[T_n(\widehat{f},\vec{x},y) \ \& \ U(y) = w],$$

έτσι που η $G_f(\vec{x},w)$ είναι ημιαναδρομική, και αν

$$f(\vec{x}) = w \Leftrightarrow (\exists u)R(\vec{x},w,u)$$

με κάποια αναδρομική $R(\vec{x},w,u)$, τότε

$$f(\vec{x}) = (\mu u R(\vec{x},(u)_0,(u)_1))_0,$$

έτσι που η $f(\vec{x})$ είναι αναδρομική. $\square$

Πρόταση 2.6. *Λήμμα Σ^0_1-επιλογής*. *Για κάθε ημιαναδρομική σχέση $R(\vec{x},w)$, υπάρχει αναδρομική, μερική συνάρτηση $f(\vec{x})$ τέτοια που για κάθε $\vec{x}$,*

$$
\begin{aligned}
&(\exists w)R(\vec{x},w) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \downarrow \\
&(\exists w)R(\vec{x},w) \Rightarrow R(\vec{x},f(\vec{x})).
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχει αναδρομική σχέση $P(\vec{x}, w, y)$ τέτοια που

$$R(\vec{x}, w) \Leftrightarrow (\exists y) P(\vec{x}, w, y),$$

και το συμπέρασμα δείχνεται αν θέσουμε

$$f(\vec{x}) = (\mu u P(\vec{x}, (u)_0, (u)_1))_0.$$

$\square$

2.4 Αναδρομικά απαριθμητά σύνολα

Ορισμός 2.2. *Το τυχαίο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι* ***αναδρομικά απαριθμητό*** *(ή αναδρομικά αριθμήσιμο, α.α.), αν $A = \emptyset$, ή κάποια ολική, αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ απαριθμεί το A,*

$$A = f[\mathbb{N}] = \{f(0), f(1), \dots\}. \tag{2.14}$$

Πρόταση 2.7. *(1) Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για το τυχαίο $A \subseteq \mathbb{N}$:*

(α) Το A είναι α.α.

(β) Η σχέση $x \in A$ είναι ημιαναδρομική, έτσι που

$$A = Domain(g) = \{x \mid g(x)\downarrow\}$$

για κάποια αναδρομική μερική συνάρτηση g.

(γ) Το A είναι πεπερασμένο, ή υπάρχει 1-1 αναδρομική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που απαριθμεί το A, $A = f[\mathbb{N}]$.

(2) Η ακολουθία

$$W_0, W_1, \dots$$

απαριθμεί τα α.α. σύνολα έτσι που η σχέση $x \in W_e$ να είναι ημιαναδρομική.

(3) Το τυχαίο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι αναδρομικό αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο ή υπάρχει (αυστηρά) αύξουσα, αναδρομική συνάρτηση που απαριθμεί το A,

$$A = \{f(0) < f(1) < f(2) < \dots\}.$$

Απόδειξη. Για το (3) υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι αύξουσα αν

$$f(n) < f(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

που συνεπάγεται ότι

$$n \leq f(n).$$

Έπεται ότι αν το A απαριθμείται από μια άυξουσα, αναδρομική f, τότε

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists n \leq x)[x = f(n)],$$

και άρα το A είναι αναδρομικό. Για το αντίστροφο, αν το A είναι αναδρομικό και άπειρο, τότε η

$$\begin{aligned} f(0) &= (\mu x)[x \in A] \\ f(n+1) &= (\mu x)[x > f(n) \ \& \ x \in A] \end{aligned}$$

είναι αναδρομική, αύξουσα και απαριθμεί το A. (1) Η συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (β) είναι τετριμμένη για το $A = \emptyset$, και αν $A = f[\mathbb{N}$, τότε

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y)[x = f(i)].$$

Το (β) $\Rightarrow$ (α) είναι επίσης τετριμμένο για το $A = \emptyset$, και αν $x_0 \in A$ και

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y) R(x, y),$$

τότε το A απαριθμείται από την αναδρομική, ολική συνάρτηση

$$f(u) = \begin{cases} x_0 & \alpha\nu \ \neg R((u)_0, (u)_1), \\ (u)_0 & \alpha\nu \ R((u)_0, (u)_1). \end{cases}$$

Τέλος η συνεπαγωγή (γ) $\Rightarrow$ (α) είναι τετριμμένη, όπως και η (α) $\Rightarrow$ (γ) για πεπερασμένα A. Μένει μόνο να δείξουμε ότι αν το A είναι άπειρο και

$$A = \{f(0), f(1), \ldots\}$$

για κάποια αναδρομική συνάρτηση f, τότε το A απαριθμείται επίσης από κάποια 1-1 αναδρομική συνάρτηση. Βασική ιδέα είναι να " διαγράψουμε τις επαναλήψεις ", κάτι το οποίο οδηγεί σε μια ολική, 1-1 αναδρομική απαρίθμηση του A.

Για την αυστηρή απόδειξη αυτής της πρότασης. έστω

$$B = \{n \mid (\forall i < n)[f(i) \neq f(n)]\}$$

το αναδρομικό σύνολο των θέσεων όπου καινούρια μέλη του A απαριθμούνται από την $f \cdot B = g[\ltimes]$ για κάποια αύξουσα $g(n)$ από την (3), και το A απαριθμείται από την 1-1 σύνθεση $h(n) = f(g(n))$.

Το (2) συνάγεται από τον χαρακτηρισμό του (β) του (1). □

Πόρισμα 2.2. *Κάθε αναδρομικό σύνολο είναι α.α., αλλά υπάρχουν α.α. σύνολα που δεν είναι αναδρομικά. Π.χ. το*

$$H' = \{x \mid H((x)_0, (x)_1)\}. \tag{2.15}$$

Απόδειξη. Αν το H′ ήταν αναδρομικό, τότε αναδρομική θα ήταν και η σχέση τερματισμού, αφού

$$H(e, x) \Leftrightarrow \langle e, x \rangle \in H'$$

□

Κεφάλαιο 3

Αναδρομή και Ορισιμότητα

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις σχέσεις στους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να "κατασκευαστούν" ξεκινώντας με τις αναδρομικές σχέσεις και εφαρμόζοντας επανειλημμένα τους τελεστές της πρωτοβάθμιας λογικής. Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της μελέτης ειναι το Θεώρημα του $Tarski$ και φυσικά το Θεώρημα απληρότητας του Gödel.

3.1 Αριθμητική Ιεραρχία

Οι ημιαναδρομικές (Σ_1^0) σχέσεις είναι της μορφής

$$(\exists y)Q(\vec{x}, y)$$

με κάποια αναδρομική $Q(\vec{x}, y)$, και έτσι απέχουν σε πολυπλοκότητα μόλις ένα υπαρξιακό ποσοδείκτη από τις αποκρίσιμες (αναδρομικές) σχέσεις. Ο ορισμός που ακολουθεί είναι χρήσιμος για την ταξινόμηση πολύπλοκων, αναποκρίσιμων σχέσεων.

Ορισμός 3.1. ***(Η αριθμητική ιεραρχία).*** *Οι κλάσεις (σύνολα) σχέσεων $\Sigma_k^0, \Pi_k^0, \Delta_k^0$ ορίζονται με την αναδρομή:*

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^0 &: \text{οι ημιαναδρομικές σχέσεις}\\
\Pi_k^0 = \neg\Sigma_k^0 &: \text{οι αρνήσεις (συμπληρώματα) των σχέσεων στο } \Sigma_1^0\\
\Sigma_{k+1}^0 = \exists\Pi_k^0 &: \text{οι σχέσεις που ικανοποιούν μια ισοδυναμία}\\
&\quad P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y)Q(\vec{x}, y),\ \text{όπου η } Q(\vec{x}, y) \text{ είναι } \Pi_k^0\\
\Delta_k^0 = \Sigma_k^0 \cap \Pi_k^0 &: \text{οι σχέσεις που είναι } \Sigma_k^0 \text{ και } \Pi_k^0.
\end{aligned}$$

Το τυχαίο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι σε μια απ΄ αυτές τις κλασεις Γ αν η σχέση $x \in A$ ανήκει στην Γ.

Κανονικές μορφές. Οι κλάσεις αυτές της αριθμητικής ιεραρχίας χαρακτηρίζονται από τις εξής "κανονικές μορφές ", με την έννοια ότι μια σχέση $P(\vec{x})$ ανήκει στην κλάση Γ αν είναι ισοδύναμη με την κανονική μορφή για την Γ, για κάποια αναδρομική σχέση Q:

$$
\begin{array}{lr}
\Sigma_1^0 : & (\exists y)Q(\vec{x}, y) \\
\Pi_1^0 : & (\forall y)Q(\vec{x}, y) \\
\Sigma_2^0 : & (\exists y_1)(\forall y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) \\
\Pi_2^0 : & (\forall y_1)(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) \\
\Sigma_3^0 : & (\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3)Q(\vec{x}, y_1, y_2, y_3) \\
\vdots &
\end{array}
$$

Παράδειγμα 3.1. *Αν η σχέση $P(\vec{x})$ είναι Π_1^0, τότε από τους ορισμούς,*

$$
\begin{array}{rll}
P(\vec{x}) & \Leftrightarrow \neg P_1(\vec{x}) & \mu\epsilon\, P_1 \in \Sigma_2^0, \\
& \Leftrightarrow \neg(\exists y_1)P_3(\vec{x}, y_1) & \mu\epsilon\, P_3 \in \Pi_1^0, \\
& \Leftrightarrow \neg(\exists y_1)\neg P_4(\vec{x}, y_1) & \mu\epsilon\, P_4 \in \Sigma_1^0, \\
& \Leftrightarrow \neg(\exists y_1)\neg(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) & \mu\epsilon\, Q \text{ αναδρομική}, \\
& \Leftrightarrow (\forall y_1)(\exists y_2)Q(\vec{x}, y_1, y_2) &
\end{array}
$$

Θεώρημα 3.1. *(1) Για κάθε $k \geq 1$, οι κλάσεις Σ_k^0, Π_k^0 και Δ_k^0 είναι κλειστές για αναδρομικές αντικαταστάσεις και για τους τελεστές $\&$ $, \vee, \exists_{\leq}$ και $\forall_{\leq}$. Επιπλέον:*

- *Η κλάση Δ_k^0 είναι κλειστή για την άρνηση $\neg$.*
- *Η κλάση Σ_k^0 είναι κλειστή για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists$.*
- *Η κλάση Π_k^0 είναι κλειστή για τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$.*

(2) Για κάθε $k \geq 1$,

$$\Sigma_k^0 \subseteq \Delta_{k+1}^0, \tag{3.1}$$

και άρα οι αριθμητικές κλάσεις ικανοποιούν το παρακάτω διάγραμμα συμπεριλήψεων.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Sigma_1^0 & & & & \Sigma_2^0 & & & & \Sigma_3^0 & & \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & \\
\Delta_1^0 & & & & \Delta_2^0 & & & & \Delta_3^0 & & & & \ldots \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & \\
 & & \Pi_1^0 & & & & \Pi_2^0 & & & & \Pi_3^0 & &
\end{array}
\tag{3.2}
$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε την κλειστότητα όλων των αριθμητικών κλάσεων για αναδρομικές αντικαταστάσεις, με επαγωγή στο k. Η πρόταση είναι γνωστή για $k = 1$ από την Πρόταση (2.4), και επαγωγικά για την περίπτωση Σ^0_{k+1} υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\Leftrightarrow R(f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})) \\ &\Leftrightarrow (\exists y) Q(f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}), y) \\ &\qquad \textit{όπου } Q \in \Pi^0_k, \ \textit{από ορισμό} \\ &\Leftrightarrow (\exists y) Q'(\vec{x}, y) \\ &\qquad \textit{όπου } Q' \in \Pi^0_k \ \textit{από επαγωγική υπόθεση.} \end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα δείχνονται παρόμοια με επαγωγή στο k και με εφαρμογές των μετασχηματισμών της απόδειξης της (2.4).

Για το (2) χρησιμοποιούμε επαγωγή στο k, όπου στη βάση, αν

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\exists y) Q(\vec{x}, y),$$

όπου Q αναδρομική. Τότε η P είναι Σ^0_2, αφού κάθε αναδρομική σχέση είναι Π^0_1, αλλά είναι και Π^0_2, αφού

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow (\forall z)(\exists y) Q(\vec{x}, y)$$

και η σχέση

$$Q_1(\vec{x}, z, y) \Leftrightarrow Q(\vec{x}, y)$$

είναι αναδρομική. Το επαγωγικό βήμα είναι ακριβώς ίδιο, και οι συμπεριλήψεις του διαγράμματος συνάγονται από την (3.1) και τετριμμένους συλλογισμούς. □

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το επόμενο θεώρημα που δικαιολογεί την επονομασία "ιεραρχία" για τις κλάσεις Σ^0_k, Π^0_k

Θεώρημα 3.2. ***(Θεώρημα αριθμητικής ιεραρχίας**,Kleene)*

(1) (Απαρίθμηση του Σ^0_k) Για κάθε $k \geq 1$ και κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $(n+1)$-μελής σχέση $S_{k,n}(e, \vec{x})$ στην κλάση Σ^0_k που απαριθμεί τις n-μελείς, Σ^0_k σχέσεις, δηλαδή η τυχαία $P(\vec{x})$ είναι Σ^0_1 αν και μόνο αν για κάποιο e,

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow S_{k,n}(e, \vec{x}).$$

(2) (Απαρίθμηση του Π^0_k) Για κάθε $k \geq 1$ και κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $(n+1)$-μελής σχέση $P_{k,n}(e, \vec{x})$ στην κλάση Π^0_k που απαριθμεί τις n-μελείς, Π^0_k σχέσεις, δηλαδή: η τυχαία $P(\vec{x})$ είναι Π^0_k αν και μόνο αν για κάποιο e,

$$P(\vec{x}) \Leftrightarrow P_{k,n}(e, \vec{x}).$$

(3) (Ιεραρχία) Οι συμπεριλήψεις του διαγράμματος στο Θεώρημα (3.1) είναι όλες αυστηρές, δηλαδή:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & & & \Sigma^0_3 & & \\
 & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & \\
\Delta^0_1 & & & & \Delta^0_2 & & & & \Delta^0_3 & & & & \cdots \\
 & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & & \subsetneq & \\
 & & \Pi^0_1 & & & & \Pi^0_2 & & & & \Pi^0_3 & &
\end{array}$$

Απόδειξη. Για τα (1) και (2) θέτουμε αναδρομικά

$$\begin{aligned}
S_{1,n}(e,\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y)T_n(e,\vec{x},y)\\
P_{k,n}(e,\vec{x}) &\Leftrightarrow \neg S_{k,n}(e,\vec{x})\\
S_{k+1,n}(e,\vec{x}) &\Leftrightarrow (\exists y)P_{k,n+1}(e,\vec{x},y),
\end{aligned}$$

και οι αποδείξεις προκύπτουν με επαγωγή στο k. Για το (3), παρατηρούμε ότι η "διαγώνια" σχέση

$$D_k(x) \Leftrightarrow S_{k,1}(x,x)$$

είναι Σ^0_k και δεν μπορεί να είναι Π^0_k, γιατί αν ήτανε τότε για κάποιο e θα είχαμε,

$$\neg S_{k,1}(x,x) \Leftrightarrow S_{k,1}(e,x)$$

που είναι άτοπο για $x = e$. Άρα για κάθε k, υπάρχουν σχέσεις που είναι Σ^0_k αλλά δεν είναι Π^0_k, και από αυτό συνάγεται η αυστηρότητα όλων των συμπεριλήψεων του διαγράμματος. □

Ορισμός 3.2. *(Πλήρης)* ***ταξινόμηση*** *μιας σχέσης $P(\vec{x})$ στην αριθμητική ιεραρχία είναι ο καθορισμός της " ελάχιστης " αριθμητικής κλάσης στην οποία ανήκει η $P(\vec{x})$, δηλαδή η απόδειξη πρότασης της μορφής*

$$P \in \Sigma^0_k \setminus \Pi^0_k \qquad \text{ή} \qquad P \in \Pi^0_k \setminus \Sigma^0_k \qquad \text{ή} \qquad P \in \Delta^0_{k+1} \setminus (\Sigma^0_k \cup \Pi^0_k)$$

για κάποιο k. Π.χ.

$$\{e \mid W_e \neq \emptyset\} \in \Sigma^0_1 \setminus \Pi^0_1.$$

Κάποιες φορές η πλήρης ταξινόμηση μιας σχέσης είναι πολύ δύσκολη, οπότε αρκούμαστε στον υπολογισμό κάποιου " άνω φράγματος ", δηλαδή κάποιου k τέτοιου που $P \in \Sigma^0_k$ ή $P \in \Pi^0_k$. Η βασική μέθοδος για τον υπολογισμό "κάτω φράγματος ", όταν είναι εφικτό, είναι η απόδειξη ότι η δοσμένη σχέση είναι πλήρης σε κάποια κλάση Σ^0_k ή Π^0_k όπως στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1. *(1) Το σύνολο $F = \{e \mid$ η ϕ_e είναι ολική$\}$ είναι Π^0_2 αλλά δεν είναι Σ^0_2.*

(2) Το σύνολο $Fin = \{e \mid$ το W_e είναι πεπερασμένο$\}$ είναι $\Sigma^0_2 \setminus \Pi^0_2$.

Απόδειξη. (1) Το άνω φράγμα είναι προφανές, αφού

$$e \in F \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)T_1(e, x, y).$$

Δείχνουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι το F δεν είναι Σ^0_2, θεωρώντας μια τυχαία σχέση Π^0_2, που ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$P(x) \Leftrightarrow (\forall u)(\exists v)Q(x, u, v)$$

με κάποια αναδρομική $Q(x, u, v)$, και θέτουμε

$$f(x, u) = \mu v Q(x, u, v).$$

Αν $\widehat{f}$ είναι κωδικός της αναδρομικής $f(x, u, v)$, τότε

$$\begin{aligned} P(x) &\Leftrightarrow (\forall u)[f(x, u)\downarrow] \\ &\Leftrightarrow (\forall u)[\{S^1_1(\widehat{f}, x)\}(u)\downarrow] \\ &\Leftrightarrow S^1_1(\widehat{f}, x) \in F. \end{aligned}$$

Έπεται ότι αν το F ήταν Σ^0_2, τότε κάθε Π^0_2 σχέση θα ήταν Σ^0_2, κάτι το οποίο αντιτίθεται στο Θεώρημα Ιεραρχίας.

(2) Το άνω φράγμα είναι πάλι προφανές,

$$e \in Fin \Leftrightarrow (\exists k)(\forall x)[x \in W_e \Rightarrow x \leq k].$$

Για το κάτω φράγμα, έστω $P(x)$ τυχαία Σ^0_2 σχέση, έτσι ώστε

$$P(x) \Leftrightarrow (\exists u)(\forall v)Q(x, u, v)$$

όπου Q αναδρομική. Θέτουμε

$$g(x, u) = \mu y(\forall i \leq u)\neg Q(x, i, (y)_i),$$

έτσι που αν ο $\widehat{g}$ είναι κωδικός της g, τότε

$$\begin{aligned} (\exists u)(\forall v)Q(x, u, v) &\Leftrightarrow \{u \mid g(x, u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο} \\ &\Leftrightarrow \{u \mid \{\widehat{g}\}(x, u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο} \\ &\Leftrightarrow \{u \mid \{S^1_1(\widehat{g}, x)\}(u)\downarrow\} \text{ είναι πεπερασμένο}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$P(x) \Leftrightarrow S^1_1(\widehat{g}, x) \in Fin.$$

αλλά αυτό συνεπάγεται ότι το Fin δεν είναι Π^0_2, γιατί αν ήταν, τότε κάθε Σ^0_2 σχέση θα ήταν Π^0_2. Άτοπο. □

3.2 Αριθμητικές Σχέσεις

Στόχος μας εδώ είναι να δείξουμε τα κλασσικά θεωρήματα αναποκρισιμότητας των *Tarski* και Gödel για τις έννοιες της αλήθειας και της απόδειξης στην ολική άλγεβρα

$$\mathbf{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot), \tag{3.3}$$

Πριν ξεκινήσουμε θα κάνουμε μια σύντομη αναδρομή στους ορισμούς από την πρωτοβάθμια λογική για ολικές άλγεβρες

$$\mathbf{M} = (m, 0, 1, f_1, \ldots, f_k)$$

Ορισμός 3.3. ***Σύνταξη της πρωτοβάθμιας γλώσσας*** $L = L(0, 1, f_1, \ldots, f_k)$: *Η L είναι παραλλαγή της $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ που ορίσαμε στο 1ο κεφάλαιο. Για λόγους ευκολίας αλλα και για να διευκρινίσουμε τις διαφορές τους παραθέτουμε τους ορισμούς της L.*

ατομικές μεταβλητές:	$v_0, v_1, \ldots$
ατομικές σταθερές:	$0, 1$
συναρτησιακές σταθερές:	$f_1, \ldots, f_k \quad (arity(f_i) = n_i)$
τα σημέια στίξεως:	$, \quad (\quad)$
το σύμβολο ισότητας:	$=$
τα σύμβολα της πρωτοβάθμιας λογικής:	$\neg \quad \& \quad \vee \quad \rightarrow \quad \exists \quad \forall$

Οι διαφορές της L από την $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ είναι οι εξής:

i) Δεν έχει ατομικές σταθερές, έτσι που δεν κάνει καμία συγκεκριμένη αναφορά στο σύνολο M

ii) Δεν έχει συμβολισμό για την διακλάδωση

iii) Παρέχει συμβολισμό για τελεστές της προτασιακής και πρωτοβάθμιας λογικής.

Οι σταθερές 0,1 και οι ατομικές μεταβλητές είναι ***αρχικοί όροι****, και οι (αγνοί, ρητοί)* ***όροι*** *ορίζονται αναδρομικά, ξεκινώντας με τους αρχικούς όρους και χρησιμοποιώντας συναρτησιακά σύμβολα, έτσι ώστε κάθε όρος που δεν είναι αρχικός είναι της μορφής $f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ όπου $A_1, \ldots, A_{n_i}$ είναι όροι μικρότερου μήκους. Συνοπτικά ορίζουμε,*

$$A :\equiv \mathbf{v_i} \mid 0 \mid 1 \mid f_i(A_1, \ldots, A_{n_i}) \tag{3.4}$$

Αρχικοί τύποι *είναι οι λέξεις της μορφής*

$$A_1 = A_2$$

όπου A_1, A_2 είναι όροι, και οι ***τύποι*** *της L ορίζονται αναδρομικά. Κάνοντας χρήση των τελεστών της λογικής, ξεκινώντας με τους αρχικούς τύπους έτσι ώστε κάθε τύπος που δεν είναι αρχικός είναι της μορφής*

$$\neg(a_1) \quad (a_1) \vee (a_2) \quad (a_1) \;\&\; (a_2) \quad (a_1) \rightarrow (a_2) \quad \exists \mathbf{v_i}(a_1) \quad \forall \mathbf{v_i}(a_1)$$

όπου a_1, a_2 *είναι τύποι μικρότερου μήκους. Οπότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} a :\equiv A_1 = A_2 \mid \neg(a_1) \mid (a_1) \vee (a_2) \mid (a_1) \ \& \ (a_2) \mid (a_1) \to (a_2) \\ \mid \exists \mathbf{v_i}(a_1) \mid \forall \mathbf{v_i}(a_1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Οι παρουσία των ***ποσοδεικτών*** $\exists$ *και* $\forall$ *δημιουργούν κάποια καινούρια φαινόμενα στην γλώσσα που δεν υπάρχουν στην* $\mathbf{R}(\mathbf{M})$. *Η* ***εμφάνιση*** *(εγγραφή) μιας μεταβλητής* $\mathbf{v_j}$ *στον τύπο* a *είναι* ***ελεύθερη*** *αν ο* a *είναι αρχικός, ή αναδρομικά αν ο* a *είναι ένας από τους τύπους της (3.5) και η εμφάνιση της* $\mathbf{v_j}$ *είναι ελεύθερη στον* a_1 *ή στον* a_2. *Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις οι εμφανίσεις της* $\mathbf{v_j}$ *είναι* ***δεσμευμένες****, και* ***προτάσεις*** *είναι οι τύποι που δεν έχουν καμία ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής.*

Ορισμός 3.4. ***Σημασιολογία της πρωτοβάθμιας γλώσσας*** $L = L(0, 1, f_1, \dots, f_k)$: *Υπενθυμίζουμε ότι* **αποτίμηση** *στην άλγεβρα* $\mathbf{M}$ *είναι η τυχαία συνάρτηση*

$$\pi : \{\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \dots\} \to \mathbb{N}$$

που αναθέτει σε κάθε μεταβλητή $\mathbf{v_i}$ *ένα στοιχείο* $\pi(\mathbf{v_i}) \in M$, *και η* ***τιμή*** $\mathbf{val_M}(t, \pi)$ *του όρου* A *στην* $\mathbf{M}$ *για την αποτίμηση* π *ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

$$\begin{gathered} \mathbf{val_M}(0, \pi) = 0 \quad \mathbf{val_M}(1, \pi) = 1 \quad \mathbf{val_M}(\mathbf{v_i}, \pi) = \pi(\mathbf{v_i}) \\ \mathbf{val_M}(f_i(A_1, \dots, A_{n_i}), \pi) = f_i(\mathbf{val_M}(A_1, \pi), \dots, \mathbf{val_M}(A_{n_i}), \pi) \end{gathered}$$

Η κλασσική σχέση ***ικανοποίησης*** *του Tarski ανάμεσα σε σχέσεις και αποτιμήσεις καθορίζει την ερμηνεία των τύπων και ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}, \pi \models t_1 = t_2 &\Leftrightarrow \mathbf{val_M}(t_1, \pi) = \mathbf{val_M}(t_2, \pi) \\ \mathbf{M}, \pi \models \neg(a_1) &\Leftrightarrow \mathbf{M}, \pi \not\models a_1 \\ \mathbf{M}, \pi \models (a_1) \ \& \ (a_2) &\Leftrightarrow \mathbf{M}, \pi \models a_1 \, \textit{και} \, \mathbf{M}, \pi \models a_2 \\ \mathbf{M}, \pi \models (a_1) \vee (a_2) &\Leftrightarrow \mathbf{M}, \pi \models a_1 \, \textit{ή} \, \mathbf{M}, \pi \models a_2 \\ \mathbf{M}, \pi \models (a_1) \to (a_2) &\Leftrightarrow \mathbf{M}, \pi \not\models a_1 \, \textit{ή} \, \mathbf{M}, \pi \models a_2 \\ \mathbf{M}, \pi \models \exists \mathbf{v_i}(a_1) &\Leftrightarrow \textit{υπάρχει } x \in M \textit{ τέτοιος που } \mathbf{M}, \pi\{\mathbf{v_i} := x\} \models a_1 \\ \mathbf{M}, \pi \models \forall \mathbf{v_i}(a_1) &\Leftrightarrow \textit{για κάθε } x \in M, \ \mathbf{M}, \pi\{\mathbf{v_i} := x\} \models a_1, \end{aligned}$$

όπου

$$\pi\{\mathbf{v_i} := x\}(\mathbf{v_j}) = \begin{cases} x & \textit{αν } j = i \\ \pi(\mathbf{v_j}) & \textit{αλλιώς, αν } i \neq j \end{cases}$$

είναι η ***ενημέρωση*** *της αποτίμησης* π *με την "ανάθεση"* $\mathbf{v_i} := x$.

Βασική ιδιότητα εδώ έιναι ότι η αλήθεια της σχέσης $\mathbf{M}, \pi \models a$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της π στις ελεύθερες μεταβλητές του a.

$$\begin{aligned}(\forall i)[\text{η } \mathbf{v_i} \text{ είναι ελεύθερη στον } a \Rightarrow \pi_1(\mathbf{v_i}) = \pi_2(\mathbf{v_i})\\ \Rightarrow [\mathbf{M}, \pi_1 \models a \Leftrightarrow \mathbf{M}, \pi_2 \models a].\end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι αν ο a είναι πρόταση (δηλαδή χωρίς ελεύθερες μεταβλητές), τότε η σχέση $\mathbf{M}, \pi \models a$ είναι ανεξάρτητη από τη αποτίμηση π. Οπότε ο συμβολισμός μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \models a &\Leftrightarrow \text{για κάποια } \pi, \mathbf{M}, \pi \models a\\ &\Leftrightarrow \text{για κάθε } \pi, \mathbf{M}, \pi \models a.\end{aligned}$$

Ορισμός 3.5. *Ο τύπος a* ***ορίζει τη n-μελή σχέση*** *$R(\vec{x})$ με τις μεταβλητές $v^1, \ldots, v^n$ στην άλγεβρα $\mathbf{M}$, αν η ακολουθία $v^1, \ldots, v^n$ περιέχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του a και για όλα τα $x_1, \ldots, x_n \in M$,*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \mathbf{M}, \{u^1 := x_1, \ldots, x_n, v^n := x_n\} \models a \tag{3.6}$$

Τελικά μια σχέση $R(\vec{x})$ είναι ***απλή*** *ή* ***πρωτοβάθμια*** *στην άλγεβρα $\mathbf{M}$ αν ορίζεται από καποιο τύπο με κάποια ακολουθία μεταβλητών, και μια συνάρτηση $f : M^n \to M$ είναι* ***απλή*** *αν το γράφημα της είναι αριθμητική σχέση.*

Αριθμητικές σχέσεις και συναρτήσεις. Επειδή ενδιαφερόμαστε στην ερμηνεία της πρωτοβάθμιας γλώσσας $L(+, \cdot)$ στην άλγεβρα $\mathbf{N}$ της αριθμητικής ο ορισμός των όρων πέρνει την μορφή:

$$A :\equiv \mathbf{v_i} \mid 0 \mid 1 \mid (A_1) + (A_2) \mid (A_1) \cdot (A_2)$$

Οι πρωτοβάθμιες σχέσεις και συναρτήσεις της $\mathbf{N}$ καλούνται **αριθμητικές**.

Θεώρημα 3.3. *Το σύνολο των αριθμητικών σχέσεων είναι το ελάχιστο σύνολο σχέσεων $\mathcal{A}$ στους φυσικούς αριθμούς με τις εξής ιδιότητες:*

(1) Οι σχέσεις

$$x = y, \qquad x = 0, \qquad x = 1, \qquad x + y = z, \qquad x \cdot y = z$$

είναι στο $\mathcal{A}$.

(2) Το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό για αντικαταστάσεις με τις προβολές $P_i^n(\vec{x})$ και τους τελεστές της λογικής, $\neg$, &, $\vee, \exists, \forall$.

Οπότε η σχέση της ανισότητας

$$x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)[x + y = z]$$

είναι αριθμητική, και ότι το σύνολο των αριθμητικών σχέσεων είναι κλειστό για αριθμητικές αντικαταστάσεις, αφού

$$\begin{aligned}&P(f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))\\ &\Leftrightarrow (\exists w_1) \cdots (\exists w_m)[f_1(\vec{x}) = w_1 \ \& \ \cdots \ \& \ f_m(\vec{x}) = w_m \ \& \ P(w_1, \ldots, w_n)].\end{aligned}$$

Πριν διατυπώσουμε το επόμενο βασικό Θεώρημα το οποίο δικαιολογεί την ονομασιά " αριθμητική ιεραρχία " για τις κλάσεις συνόλων Σ_k^0, Π_k^0 θα χρησιμοποιήσουμε ένα Λήμμα από την αριθμοθεωρία, που δίνει μια κωδικοποίηση ακολουθιών, αυτή τη φορά αριθμητική:

Λήμμα 3.1. *(Η συνάρτηση β του Gödel). Η συνάρτηση*

$$\beta(a,b,i) = rm(a, 1+(i+1)b)$$

είναι αριθμητική, και για κάθε ακολουθία αριθμών $w_0, \ldots, w_y$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί a και b, τέτοιοι που

$$w_i = \beta(a,b,i) \qquad (i = 0, \ldots, y).$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\beta(a,b,i)$ είναι αριθμητική διότι

$$\beta(a,b,i) = w \Leftrightarrow (\exists c)[a = (1+(i+1)b)c + w \ \ \& \ \ w < 1+(i+1)b].$$

Για το δεύτερο μέρος του λήμματος, έστω

$$\begin{aligned} d &= max(w_0, \ldots, w_y, y) + 1 \\ b &= d! \\ z_i &= 1+(i+1)b = 1+(i+1)d! \qquad (i = 0, \ldots, y). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $z_0, z_1, \ldots, z_y$ είναι **σχετικώς πρώτοι**, δηλαδή δεν υπάρχει πρώτος αριθμός που να διαιρεί δύο απ΄ αυτούς. Αν συνέβαινε αυτό τότε ο p είναι πρώτος και κοινός διαιρέτης των z_i και z_j με $i < j \leq y$, και άρα:

1. $p > d$, αλλιώς $p \mid d!$, και αυτό είναι άτοπο αφού $p \mid 1+(i+1)d!$, και
2. ο p διαιρεί τη διαφορά $(j-i)d!$, άρα $p \mid (j-i)$ ή $p \mid d!$, το οποίο είναι πάλι άτοπο διότι $j - i \leq y < d < p$ και ο p δεν διαιρεί το $d!$, όπως στο 1.

Κάνοντας χρήση του **Κινέζικου Θεωρήματος Υπολοίπων** το οποίο βεβαιώνει ότι αφού $w_0 < z_0, \ldots, w_y < z_y$ τότε υπάρχει κάποιος a τέτοιος που

$$w_0 = rm(a, z_0) = \beta(a,b,0), \ldots, w_y = rm(a, z_y) = \beta(a,b,y).$$

□

Θεώρημα 3.4. *(1) Κάθε πρωτογενώς αναδρομική συνάρτηση είναι αριθμητική.*

(2) Η τυχαία σχέση είναι αριθμητική αν και μόνο αν είναι Σ_k^0, για κάποιο k, δηλαδή

$$\mathcal{A} = \bigcup_k \Sigma_k^0 = \bigcup_k \Pi_k^0.$$

Απόδειξη. (1) Αρκεί να δείξουμε ότι οι S, C_q^n και P_i^n είναι αριθμητικές, και ότι το σύνολο των αριθμητικών συναρτήσεων είναι κλειστό για σύνθεση και πρωτογενή αναδρομή. Από αυτά μόνο το τελευταίο είναι μη-τετριμμένο.

Παρατηρούμε ότι αν η $f(y, \vec{x})$ ορίζεται με την πρωτογενή αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(y+1, \vec{x}) &= h(f(y, \vec{x}), y, \vec{x}), \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} f(y, \vec{x}) = w(\exists w_0, \ldots, w_y)[g(\vec{x}) = w_0 \ \& \ w = w_y \\ \& \ (\forall i < y)[h(w_i, i, \vec{x}) = w_{i+1}]] \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύεται με $w_i = f(i, \vec{x})$ για το $(\Rightarrow)$ και με επαγωγή στο $i \leq y$ για το $(\Leftarrow)$. Οπότε

$$\begin{aligned} f(y, \vec{x}) = w \Leftrightarrow (\exists a)(\exists b)[g(\vec{x}) = \beta(a, b, 0) \ \& \ w = \beta(a, b, y) \\ (\forall i < y)[h(\beta(a, b, i), i, \vec{x}) = \beta(a, b, i+1)]] \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η $f(y, \vec{x})$ είναι αριθμητική από τις ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{A}$. (2) Το $\Sigma_k^0 \subseteq \mathcal{A}$ αποδεικνύεται με επαγωγή στο k και το $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_k \Sigma_k^0$ συνάγεται από το Θεώρημα (3.3) $\square$

Αριθμητικοποίηση. Για κάθε σύμβολο c της πρωτοβάθμιας γλώσσας της αριθμητικής $L = L(+, \cdot)$ συσχετίζουμε ένα φυσικό αριθμό $[c]$ με την απαρίθμηση

0	1	$+$	$\cdot$	$=$	$\neg$	$\&$	$\vee$	$\rightarrow$	$\exists$	$\forall$	(	)	,	$\mathbf{v_0}$	$\mathbf{v_1}$	$\ldots$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\ldots$

π.χ $[\exists] = 9, [=] = 4$ κλπ. Κωδικοποιούμε τους τύπους ως πεπερασμένες ακολουθίες από σύμβολα, κάνοντας χρήση κάποιας σταθερής, πρωτογενώς αναδρομικής κωδικοποίησης ακολουθιών,

$$[s_0 s_1 \cdots s_n] = \langle [s_0], [s_1], \ldots, [s_n] \rangle,$$

π.χ.

$$[\exists \mathbf{v_2}(0 = \mathbf{v_2})] = \langle [\exists], [\mathbf{v_2}], [(], [0], [=], [\mathbf{v_2}], [)] \rangle.$$

Τέλος θέτουμε

$$\begin{aligned} Truth &= Truth(\mathbf{N}) \\ &= \{a \mid \textit{ο } a \textit{ είναι κωδικός πρότασης που αληθεύει στην } \mathbf{N}\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Αυτό είναι το σύνολο φυσικών αριθμών που κωδικοποιεί όλες τις πρωτοβάθμιες “ αριθμητικές αλήθειες ”, δηλαδή κάθε σημαντική πρόταση της θεωρίας αριθμών που αληθεύει έχει τον κωδικό της στο $Truth$.

Λήμμα 3.2. *Κάθε αριθμητική σχέση $R(\vec{x})$ ανάγεται στο σύνολο $Truth$, δηλαδή υπάρχει 1-1 αναδρομική συνάρτηση $f(\vec{x})$ τέτοια που*

$$R(\vec{x}) \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in Truth \tag{3.8}$$

Απόδειξη. Για κάθε φυσικό x ορίζουμε τον όρο $\Delta(x)$ με την αναδρομή,

$$\Delta(0) = 0, \qquad \Delta(x+1) = (\Delta(x)) + (1),$$

έτσι ώστε ο $\Delta(x)$ είναι κλειστός (χωρίς μεταβλητές) και έχει την ίδια τιμή για κάθε αποτίμηση π,

$$\mathbf{val}(\Delta(x), \pi) = x.$$

Από τις συνθήκες του $Tarski$ έπεται ότι για κάθε τύπο a με ελεύθερες μεταβλητές στη λίστα $v^1, \ldots, v^n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{N}, \{v^1 := x_1, \ldots, v^n := x_n\} \models a \\
&\Leftrightarrow \mathbf{N} \models (\exists v^1) \ldots (\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1) \ \& \ \ldots \ \& \ v^n = \Delta(x_n) \ \& \ a] \\
&\Leftrightarrow [(\exists v^1) \ldots (\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1) \ \& \ \ldots \ \& \ v^n = \Delta(x_n) \ \& \ a]] \in Truth.
\end{aligned}$$

και άρα αν ο τύπος a ορίζει τη σχέση $R(\vec{x})$ σύμφωνα με την (3.6) τότε η (3.8) ισχύει με την συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = [(\exists v^1) \ldots (\exists v^n)[v^1 = \Delta(x_1) \ \& \ \ldots \ \& \ v^n = \Delta(x_n) \ \& \ a]]$$

η οποία είναι αναδρομική και 1-1. □

Θεώρημα 3.5. *(**Tarski**). Το σύνολο $Truth$ δεν είναι αριθμητικό, και επομένως ούτε αναδρομικό.*

Απόδειξη. Αν το $Truth$ ήταν αριθμητικό, τότε θα ήταν Σ^0_k, για κάποιο k, και άρα από το προηγούμενο Λήμμα, κάθε αριθμητική σχέση θα ήταν Σ^0_k, που αντιτίθεται στο Θεώρημα Ιεραρχίας. □

Παρατήρηση: Βλέπουμε ότι ο $Tarski$ απέδειξε μόνο το 1ο μέρος του Θεωρήματος, δηλαδή ότι το σύνολο $Truth$ δεν είναι αριθμητικό. Για το 2ο δεν ήταν σε θέση να το αποδείξει διότι δεν γνώριζε ότι τα αναδρομικά σύνολα είναι αριθμητικά, κάτι το οποίο χρειαζόταν την σχέση ανάμεσα σε αναδρομικότητα και υπολογισιμότητα, δηλαδή το Αίτημα $C - T$.

3.3 Το θεώρημα μη-πληρότητας

Τελειώνοντας το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το Θεώρημα του Gödel χρησιμοποιώντας πορίσματα της θεωρίας αναδρομικών συναρτήσεων.

Αποδεικτικά συστήματα. **Τυπική απόδειξη** στην αριθμητική είναι μια ακολουθία από τυπους

$$a_0, \dots, a_n,$$

τέτοια που κάθε a_i είναι αξίωμα (της λογικής ή της αριθμητικής) ή συνεπάγεται με κάποιο κανόνα της λογικής ή της αριθμητικής από κάποια $a_{j_1}, \dots, a_{j_l}$, με $j_1, \dots, j_l < i$ και το a_n είναι πρόταση. **Αποδεικτικό σύστημα** $\mathcal{P}$ είναι μια αυστηρή διατύπωση των αξιωμάτων και κανόνων που καθορίζουν ποιες ακολουθίες είναι " αποδείξεις ", και τα θεωρήμτα του $\mathcal{P}$ είναι τα συμπεράσματα των αποδείξεών του,

$$\vdash_{\mathcal{P}} a \Leftrightarrow \textit{υπάρχει απόδειξη } a_0, \dots, a_n \textit{ στο } \mathcal{P} \textit{ με } a_n \equiv a.$$

Τα συγκεκριμένα αποδεικτικά συστήματα ικανοποιούν δύο βασικές ιδιότητες:

(1) **Ορθότητα**(αριθμητική εγκυρότητα): Για κάθε πρόταση a, αν $\vdash_{\mathcal{P}} a$, τότε $\mathbf{N} \models a$, έτσι που τα θεωρληματα του $\mathcal{P}$ να είναι όλα αληθή.

(2) **Αποκρισιμότητα για τις αποδείξεις**: Η σχέση

$$Proof_{\mathcal{P}}(y) \Leftrightarrow (\exists a_0, \dots, a_n \in \mathcal{P})[y = \{[a_0], \dots, [a_n]\}]$$

είναι αναδρομική.

Υπάρχει και μια τρίτη ιδιότητα που θα θέλαμε να έχει το ιδανικό αποδεικτικό σύστημα:

(3) **Πληρότητα**: Για κάθε πρόταση a,

$$\vdash_{\mathcal{P}} a \textit{ ή } \vdash_{\mathcal{P}} \neg a$$

Στις αρχές του 20ου αιώνα έγιναν πολλές προσπάθειες να βρεθεί ένα αποδεικτικό σύστημα για την αριθμητική που να ήταν ορθό,αποκρίσιμο και πλήρες. Αυτό το σύστημα θα κωδικοποιούσε ότι χρειάζεται από την λογική για να λυθούν όλα τα προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Αυτές οι προσπάθειες απέτυχαν διότι:

Θεώρημα 3.6. ***Απληρότητας*** *(μη-πληρότητας)* ***του Gödel.*** *Δεν υπάρχει αποδεικτικό σύστημα για την αριθμητική που να έιναι ορθό, αποκρίσιμο για αποδείξεις και πλήρες.*

Απόδειξη. Αν το $\mathcal{P}$ είχε και τις τρεις ιδιότητες, τότε για κάθε πρόταση a

$$\vdash_{\mathcal{P}} a \Rightarrow \mathbf{N} \models a$$

επειδή το σύστημα είναι αριθμητικά έγκυρο, και

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \models a &\Rightarrow \mathbf{N} \not\models \neg a \\ &\Rightarrow \not\vdash_{\mathcal{P}} \neg a \qquad \textit{(ορθότητα)} \\ &\Rightarrow \vdash_{\mathcal{P}} a \qquad \textit{(πληρότητα).} \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} Truth &= \{[a] \mid \vdash_{\mathcal{P}} a\} \\ &= \{e \mid \textit{Πρόταση}(e) \;\;\&\;\; (\exists y)[Proof_{\mathcal{P}}(y) \;\;\&\;\; e = last(y)]\}, \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο $Truth$ είναι Σ_1^0, από την υπόθεση της αποκρισιμότητας για αποδείξεις του $\mathcal{P}$ το οποίο αντιτίθεται στο Θεώρημα του $Tarski$. $\square$

Στις εφαρμογές του Θεωρήματος Απληρότητας δεν παίζει ρόλο το Αίτημα $C-T$, διότι τα συγκεκριμένα συστήματα που χρησιμοποιούνται και έχουν μελετηθεί είναι όλα αποκρίσιμα για αποδείξεις, ακριβώς επειδή η συνθήκη (2) είναι φυσική.

Επίλογος

Για να εκτιμηθεί ο αντίκτυπος του θεωρήματος της μη πληρότητας του Gödel, είναι κρίσιμο να καταλάβουμε πώς τα μαθηματικά ήταν αντιληπτά την περίοδο που αποδείχθηκε. Μετά από πολλούς αιώνες συνύπαρξης υπό ίσους όρους ασαφών διαισθητικών αντιλήψεων και ακριβούς λογικής, τα μαθηματικά στο τέλος του 19ου αιώνα άρχισαν να αποσαφηνίζονται. Επινοήθηκαν τα αποκαλούμενα τυπικά συστήματα. Η δύναμη αυτού του μηχανιστικού οράματος των μαθηματικών ήταν ότι εξάλειπτε την ανάγκη για τη σκέψη ή την κρίση. Εφ΄ όσον τα αξιώματα ήταν σωστά και εφ΄ όσον οι κανόνες με τους οποίους γινόταν η χρήση τους διατηρούσαν την αλήθεια, τα μαθηματικά δεν θα μπορούσαν να εκτροχιαστούν σε αναλήθειες. Η αλήθεια ήταν εξασφαλισμένη μέσω μιας αυτόματης θεωρητικής μεθοδολογίας. Ένας από τους μεγάλους μαθηματικούς στόχους ήταν να μειωθεί η όλη θεωρία αριθμών σε ένα τελικό τυπικό σύστημα. Όπως στη γεωμετρία του Ευκλείδη, ένα τέτοιο σύστημα θα άρχιζε με μερικά απλά αξιώματα που είναι σχεδόν αναμφισβήτητα, και θα παρείχε τα θεωρήματα με έναν μηχανικό τρόπο. Η ιδέα ήταν ότι αυτό το σύστημα θα εμπεριείχε κάθε δήλωση που θα μπορούσαμε να κάνουμε για τους φυσικούς αριθμούς. Έτσι εάν κάναμε τη δήλωση «κάθε ζυγός αριθμός μεγαλύτερος από 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων» θα ήμασταν σε θέση να αποδείξουμε αυστηρά, από τα αξιώματα, είτε ότι είναι αληθής είτε ότι είναι ψευδής. Οι λέξεις «αληθές» και «ψευδές» θα γίνονταν συνώνυμα των «αποδείξιμο» και «διαψεύσιμο» αντίστοιχα, μέσα στο σύστημα αυτό. Το $Principia Mathematica$ των $Russell$ και $Whitehead$ ήταν η διασημότερη προσπάθεια να βρεθεί ένα τέτοιο σύστημα.

Το θεώρημα του Gödel κατέρριψε την ελπίδα αυτήν εντελώς. Δε βρήκε απλά μια ρωγμή στο συλλογισμό των $Russell$ και $Whitehead$, η οποία πιθανώς θα μπορούσε να επιδιορθωθεί. Έδειξε ότι ο ολόκληρος στόχος είναι ανεπίτευκτος. Πιο συγκεκριμένα, ο Gödel έδειξε ότι σε οποιοδήποτε τυπικό σύστημα, υπάρχει πάντα μια δήλωση για τους φυσικούς αριθμούς που είναι αληθινή, αλλά που δεν μπορεί να αποδειχθεί στο σύστημα. Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά δεν θα είναι ποτέ το αυστηρό κι ακλόνητο σύστημα που οι μαθηματικοί ονειρεύονταν επί χιλιετίες.

Βιβλιογραφία

- Γ. Μοσχοβάκης, 2008. Αναδρομή και υπολογισιμότητα. Αθήνα.
- Α. Τζουβάρας, 2007. Θεωρία Αναδρομικών Συναρτήσεων και Υπολογισιμότητας. Θεσσαλονίκη.
- Γ. Κολέτσος, 2011. Εισαγωγή στη Μαθηματική Λογική. Αθήνα.
- S. Kleene, 1952. Introduction to Metamathematics, North-Holland
- P. Odifreddi, 1989. Classical Recursion Theory, North-Holland.
- H. Rogers, Jr., 1967. The Theory of Recursive Functions and Effective Computability, second edition 1987, MIT Press.
- G Sacks, 1990. Higher Recursion Theory, Springer-Verlag.
- R. I. Soare, 1987. Recursively Enumerable Sets and Degrees, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag.
- S. B. Cooper, 2004. Computability Theory, Chapman and Hall/ CRC.
- N. Cutland, 1980. Computability, An introduction to recursive function theory, Cambridge University Press.