

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός Μεθόδου Παραμόρφωσης Πλέγματος  
με Συναρτήσεις Ακτινικής Βάσης και Προσταθεροποιητή  
για χρήση στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση.

Διπλωματική Εργασία

του

Αθανάσιου Λιατσικούρα

Επιβλέποντες: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015



## Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε κάποιους ανθρώπους, των οποίων η συμβολή αν καθοριστική για την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής εργασίας, κύριο Κ. Γιαννάκογλου, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε όποτε και αν τη χρειάστηκα.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλα τα μέλη του ΜΠΥΡ&Β του Ε.Μ.Π. για το χρόνο που μου αφιέρωσαν και για τις εύστοχες συμβουλές τους. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή - Κιαχαγιά που διέθεσε πολύτιμο χρόνο και συνέβαλε στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, παρά το βεβαρημένο του πρόγραμμα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη και τον Δρ. Ξενοφόντα Τρομπούκη καθώς και τον διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο οι οποίοι ήταν πάντα πρόθυμοι να με βοηθήσουν.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Προγραμματισμός Μεθόδου Παραμόρφωσης Πλέγματος με  
Συναρτήσεις Ακτινικής Βάσης και Προσταθεροποιητή για χρήση  
στην Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση**

**Αθανάσιος Λιατσικούρας**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2015

**Περίληψη**

Η μετακίνηση ενός υπολογιστικού πλέγματος, μαζί ή χωρίς την μετακίνηση των ορίων του, είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής. Ενδεικτικά αναφέρονται τα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, είτε στην παραλλαγή όπου χρησιμοποιείται παραμετροποίηση της προς σχεδιασμό μορφής, η οποία τροποποιεί σε κάθε κύκλο της βελτιστοποίησης τα όρια του υπολογιστικού χωρίου και αυτό που χρειάζεται είναι να προσαρμοστεί κατάλληλα το εσωτερικό πλέγμα, είτε στην παραλλαγή που ενιαίος μηχανισμός αναλαμβάνει, ελλείψει παραμετροποίησης, την ταυτόχρονη και συμβατή μετακίνηση όλων των κόμβων ενός υπολογιστικού πλέγματος, συμπεριλαμβανομένων των ορίων. Από την άλλη πλευρά, στην αεροελαστικότητα, τα τοιχώματα ενός στερεού σώματος, λ.χ. μιας πτέρυγας, μετακινούνται με το χρόνο και, σε κάθε χρονικό βήμα, πρέπει να αναπροσαρμοστεί το πλέγμα σε αυτά. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, η επαναπλεγματοποίηση είναι παντελώς ασύμφορη, ως πολύ χρονοβόρα.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά τεχνικές μετακίνησης πλεγμάτων, αναπτύσσοντας και εφαρμόζοντας δίκτυα συναρτήσεων ακτινικής βάσης (RBF) για το σκοπό αυτό. Στην εργασία παρουσιάζονται και χρησιμοποιούνται μετρικές ποιότητας μη-δομημένων πλεγμάτων, με τις οποίες πραγματοποιείται έλεγχος της ποιότητας κάθε προκύπτοντος πλέγματος. Επειδή σε μεγάλα προβλήματα βιομηχανικής κλίμακας, τα δίκτυα RBF έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, κατασκευάζεται ένας απλός προσταθεροποιητής, ο οποίος παρουσιάζει δυνατότητα παραλληλοποίησης, ώστε να επιταχύνει την εκπαίδευσή τους. Αναπτύσσεται λογισμικό υλοποίησης της μεθόδου μετακίνησης του πλέγματος και ανάπτυξης του προσταθεροποιητή και παρουσιάζονται δοκιμές και εφαρμογές.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Programming of a Mesh Displacement Method using Radial Basis  
Functions and a Preconditioner for use in Aerodynamic Optimization**

**Athanasios Liatsikouras**

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, March 2015

Abstract

Mesh displacement, where “mesh” might either stand for the internal nodes or may include boundary nodes, is very useful in Computational Fluid Dynamic. In shape optimization problems, this is necessary either if a shape parameterization tool is used, in which case the boundaries of the computational mesh are modified in each cycle of the optimization loop and a mechanism propagating the surface displacements to the interior mesh nodes must be devised, or in parameterization-free methods, where the same mechanism undertakes the displacement of internal and boundary nodes. On the other hand, in aeroelasticity, the solid walls of a body, such as a wing, oscillates and, therefore, in every time step, the mesh must be readjusted to the new boundaries. In all the above cases, remeshing is expensive and, usually, out of question in industrial applications.

This diploma thesis focuses in mesh displacement techniques. In specific, a network based on Radial Basis Functions for mesh displacement. In this thesis, metrics regarding the quality of unstructured grids are presented and used, in order to quantitatively assess the resulting/displaced meshes. Since in Industrial applications, with huge meshes, RBF networks have a high computational cost, a simple preconditioner is constructed, which has the capability of running in parallel to accelerate the training phase of the RBF networks. Software was programmed for mesh displacement including the preconditioner and applied in a number of cases.





## Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΜΠΤΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
<hr/>	
CFD	Computational Fluid Dynamics
NTUA	National Technical University of Athens
RBF	Radial Basis Functions



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική . . . . .	1
1.2 Ανάγκη για παραμόρφωση πλέγματος . . . . .	2
1.3 Άλλες μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος . . . . .	3
1.4 Δομή της εργασίας . . . . .	4
<b>2 Δίκτυα Συναρτήσεων Ακτινικής Βάσης</b>	<b>7</b>
2.1 Μετατόπιση πλέγματος με δίκτυα (RBF) . . . . .	7
2.2 Συναρτήσεις Ακτινικής Βάσης (RBF) . . . . .	9
2.3 Τα δίκτυα RBF ως εργαλείο μορφοποίησης . . . . .	15
2.3.1 Χρησιμότητα δικτύων RBF . . . . .	15
2.3.2 Εκπαίδευση και χρήση του δικτύου RBF . . . . .	16
<b>3 Προσταθεροποίηση</b>	<b>21</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	21
3.2 Κατασκευή του Προσταθεροποιητή . . . . .	23
<b>4 Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων</b>	<b>27</b>
4.1 Εισαγωγή . . . . .	27
4.2 Μέθοδος των συζυγών κλίσεων . . . . .	28
4.2.1 Η Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων - Βασικός Αλγόριθμος . . . . .	34
4.2.2 Αλγόριθμος των Συζυγών Κλίσεων για την επίλυση προσταθε- ροποιημένων συστημάτων . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Εφαρμογές στο πλέγμα μεταξύ δύο τετραγώνων</b>	<b>37</b>
5.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	37
5.2	Παρουσίαση αποτελεσμάτων . . . . .	39
5.2.1	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=0.6$ . . . . .	39
5.2.2	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=1.2$ . . . . .	42
5.2.3	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=2$ . . . . .	45
5.2.4	Αποτελέσματα με τη συνάρτηση Gauss . . . . .	48
5.3	Σχόλια . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Εφαρμογές σε μεμονωμένη αεροτομή NACA12</b>	<b>53</b>
6.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	53
6.2	Αποτελέσματα με αραιό πλέγμα . . . . .	58
6.2.1	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$ . . . . .	58
6.2.2	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$ . . . . .	61
6.2.3	Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics . . . . .	64
6.3	Αποτελέσματα με μέτρια πυκνό πλέγμα . . . . .	67
6.3.1	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$ . . . . .	67
6.3.2	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$ . . . . .	70
6.3.3	Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics . . . . .	73
6.4	Αποτελέσματα της αεροτομής με πυκνό πλέγμα . . . . .	76
6.4.1	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$ . . . . .	76
6.4.2	Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$ . . . . .	79
6.4.3	Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics . . . . .	82
6.5	Σχόλια . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Εφαρμογές σε <math>2\Delta</math> πτερύγωση συμπίεστή</b>	<b>89</b>
7.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	89
7.2	Παρουσίαση αποτελεσμάτων . . . . .	91
7.2.1	Αποτελέσματα με $R=0.5$ . . . . .	91
7.2.2	Αποτελέσματα με $R=2$ . . . . .	94

7.3	Σχόλια - Συμπεράσματα . . . . .	97
8	Σύγκριση διαφόρων συναρτήσεων ενεργοποίησης	99
8.1	Περιγραφή του προβλήματος και αποτελέσματα . . . . .	99
8.2	Σχόλια και συμπεράσματα . . . . .	100
9	Σύνοψη - Συμπεράσματα	103
A'	Μέτρηση ποιότητας διδιάστατου τριγωνικού πλέγματος	105
	Βιβλιογραφία	109



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Η Βελτιστοποίηση στην Αεροδυναμική

Τον τελευταίο καιρό υπάρχει έντονο ενδιαφέρον στον τομέα της βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό αεροδυναμικών ή υδροδυναμικών μορφών (πτερυγίων, πτερύγων, αεροτομών, μορφολογία σχήματος αυτοκινήτων κλπ) με καλύτερη απόδοση σε κάποιο εύρος λειτουργίας [1], [2], [3], ή επιδιώκοντας ικανοποιητική απόδοση σε ένα εύρος λειτουργίας [4]. Το επόμενο, δηλαδή, βήμα όταν είναι υπολογιστικά εφικτή η ανάλυση μιας μηχανολογικής συνιστώσας, είναι η βελτιστοποίησή της βάσει προδιαγραφών και απαιτήσεων. Η βελτιστοποίηση των μορφών αυτών στην αεροδυναμική ή την υδροδυναμική, επιτυγχάνεται μέσω μεθόδων βελτιστοποίησης [5] και εμπλέκει μεθόδους πρόλεξης πεδίων ροής, δηλαδή μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ, Computational Fluid Dynamics, CFD).

Η μέθοδος της βελτιστοποίησης είναι το εργαλείο το οποίο ανιχνεύει τον χώρο των υποψήφιων λύσεων και οδηγεί στην επιλογή της βέλτιστης από όλες τις υποψήφιες λύσεις. Για αυτόν το λόγο, απαιτείται ο καθορισμός ενός ή περισσότερων στόχων που φέρονται στη μορφή συναρτήσεων – στόχου (objective functions) οι οποίες πρέπει να ελαχιστοποιηθούν ή να μεγιστοποιηθούν, των περιορισμών (constraints) ανισότητας ή ανισότητας του προβλήματος καθώς και των (ελεύθερων) μεταβλητών σχεδιασμού (design variables), η επιλογή συνόλου τιμών των οποίων οδηγεί στη βέλτιστη λύση ενός προβλήματος. Σαφώς, κατά την ανίχνευση του χώρου των υποψήφιων λύσεων, την επιλογή δηλαδή των βέλτιστων τιμών μεταβλητών σχεδιασμού, απαιτείται υποστήριξη και από ένα υπολογιστικό εργαλείο. Αυτό ονομάζεται λογισμικό αξιολόγησης, που βαθμολογεί και αξιολογεί ως προς τους στόχους που τέθηκαν τις υποψήφιες λύσεις. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα λογισμικού αξιολόγησης στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση είναι ο κώδικας επίλυσης των εξισώσεων ροής γύρω λ.χ. από μία πτέρυγα ενός

αεροσκάφους. Ένα είδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται πολύ συχνά είναι η βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization), όπου το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της μορφής, λ.χ. μιας αεροτομής [6] που θα παρουσιάζει μέγιστο συντελεστή άνωσης  $c_L$  υπό κάποιους περιορισμούς.

## 1.2 Ανάγκη για παραμόρφωση πλέγματος

Αντικείμενο μιας ευρείας περιοχής της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης είναι η εύρεση βέλτιστων μορφών ως προς ένα στόχο. Για την εύρεση της βέλτιστης λύσης πρέπει, πρώτα, να αξιολογηθούν οι υποψήφιες λύσεις με τη χρήση ενός επιλύτη της ροής. Επομένως, επειδή τα προβλήματα αυτά λύνονται με τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, χρήζουν χωρικής διακριτοποίησης, απαιτείται δηλαδή η γένεση κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος [7]. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης, όμως, δεν πραγματοποιείται σε ένα βήμα, αλλά αντιθέτως είναι επαναληπτική, γεγονός που σημαίνει ότι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, όποια μέθοδος και αν χρησιμοποιείται, τροποποιείται η γεωμετρία της προς βελτιστοποίηση μορφής. Ως εκ τούτου πρέπει να προσαρμοστεί το πλέγμα στη νέα αυτή γεωμετρία ώστε να υποστηρίξει τον επιλύτη στο νέο κύκλο βελτιστοποίησης. Επίσης, πολλές φορές, επιλέγεται βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγορίθμους (evolutionary algorithms) [8], οι οποίοι είναι πιο αποδοτικοί όταν χειρίζονται λίγες μεταβλητές και για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται παραμετροποίηση της προς βελτιστοποίηση μορφής. Με αυτόν τον τρόπο, μειώνεται ο αριθμός των άγνωστων και έτσι το λογισμικό που χρησιμοποιείται, λ.χ. ο EASY (Evolutionary Algorithms System) [9] του ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, μπορεί να ανταπεξέλθει. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι αναγκαία η ενιαία και συμβατή κίνηση του υπολογιστικού πλέγματος αλλά και της προς βελτιστοποίηση μορφής.

Επιπροσθέτως, σε προβλήματα αεροελαστικότητας, όπου λαμβάνει χώρα αλληλεπίδραση ρευστού με στερεό σώμα, όπως λ.χ. ένα πτερύγιο μιας ανεμογεννήτριας, της οποίας τα στερεά τοιχώματα μετακινούνται λόγω της χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης που ασκείται από τον αέρα, σε κάθε χρονικό βήμα απαιτείται η προσαρμογή του πλέγματος στο νέο σχήμα του πτερυγίου. Μια ακόμα περίπτωση είναι αυτή σε χωρία ροής με κινούμενα όρια, λ.χ. μία παλλόμενη αεροτομή (pitching airfoil), όπου απαιτείται η προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση της κάθε χρονική στιγμή.

Επειδή η επαναπλεγματοποίηση σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις και ειδικά σε βιομηχανικές εφαρμογές, με μεγάλα και τριδιάστατα πλέγματα, έχει απαγορευτικό κόστος, εφαρμόζεται ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο που υλοποιείται με συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBF) [10], [11]. Τα δίκτυα RBF μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως “ εργαλείο παραμόρφωσης ” (δηλαδή, μετακίνησης κάποιων κόμβων του πλέγματος) σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις, αρκεί να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις κάποιων άλλων κόμβων της προς βελτιστοποίηση μορφής. Με αυτόν τον τρόπο, η διαδικασία της βελτιστοποίησης επιταχύνεται, κάτι το οποίο είναι απαραίτητο



στη σημερινή εποχή μιας και ο ανταγωνισμός είναι μεγάλος.

Μία βασική εργασία απόλυτα συνυφασμένη με τη χρήση των δικτύων RBF είναι η διαφύρασή του μοντέλου αυτού, στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες χρησιμοποιούν τη γενικευμένη έννοια της παραγωγού της αντικειμενικής συνάρτησης με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης λύσης, και, ειδικότερα, όταν χρησιμοποιείται βελτιστοποίηση μέσω συζυγών μεθόδων. Οι συζυγείς μέθοδοι βελτιστοποίησης (adjoint – based optimization) [12], [13] οι οποίες είναι μαθηματικά – υπολογιστικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα και ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του προβλήματος (λ.χ. των εξισώσεων Navier Stokes). Σε αυτήν τη μέθοδο βελτιστοποίησης, με συζυγείς μεθόδους [14] υπολογίζονται οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις κομβικές τιμές των συντεταγμένων των κόμβων πάνω στο σώμα λ.χ., και βάσει του κανόνα της αλυσίδας, είναι επιθυμητό να βρεθούν οι παράγωγοι αυτών των μεταβλητών (πρακτικά συντελεστών) ως προς τις παραμέτρους του δικτύου RBF. Το θέμα αυτό αποτελεί λογικά το επόμενο βήμα που πρέπει να γίνει, μετά την ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας που θεμελιώνει και προγραμματίζει τη μέθοδο μετατόπισης πλεγμάτων με χρήση συναρτήσεων ακτινικής βάσης.

### 1.3 Άλλες μέθοδοι παραμόρφωσης πλέγματος

Η ανάγκη αποφυγής της επαναπλεγματοποίησης οδήγησε στην ανάπτυξη πολλών μεθόδων προσαρμογής πλέγματος στη νέα γεωμετρία. Μερικές από αυτές εξασφαλίζουν καλύτερη ποιότητα πλέγματος έναντι άλλων μεθόδων αλλά με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος ή το ανάποδο. Γενικότερα, η αύξηση της ποιότητας προσαρμογής του υπολογιστικού πλέγματος συνεπάγεται και μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

Μία πρώτη κατηγορία μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος είναι η μέθοδος στην οποία το υπολογιστικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα ελαστικό στερεό σώμα [15], [16]. Οι ελαστικές εξισώσεις εκφράζουν ισορροπία των ασκούμενων δυνάμεων και ροπών σε στοιχειώδες τμήμα του όγκου αυτού. Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν το σχήμα του υπολογιστικού πλέγματος, το οποίο προέκυψε από την μετατόπιση των επιφανειακών κόμβων.

Μία άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος των ελατηρίων [17], [18]. Σε αυτήν, το πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα ελατηρίων. Σε αυτή τη μέθοδο θεωρείται ότι η παραμόρφωση ενός στοιχείου του πλέγματος περιορίζεται από γραμμικά ή στρεπτικά ελατήρια, τοποθετημένα πάνω στους κόμβους ή στις ακμές που ενώνουν τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Η μετατόπιση των οριακών κόμβων του πλέγματος επηρεάζει την μετατόπιση των εσωτερικών, η οποία υπολογίζεται από επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στους κόμβους του πλέγματος.

Επίσης, υπάρχει και η μέθοδος στην οποία ορίζεται μία συνάρτηση στόχος [19], η οποία ποσοτικοποιεί την ποιότητα του πλέγματος και, λύνοντας το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, προκύπτουν οι νέες θέσεις του υπολογιστικού πλέγματος.

## 1.4 Δομή της εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην υλοποίηση, προγραμματισμό και δοκιμή των δικτύων RBF, αλλά και στην εφαρμογή κατάλληλου προσταθεροποιητή (preconditioner) με σκοπό την επιτάχυνση της φάσης της εκπαίδευσής τους.

- **Κεφάλαιο 2**

Παρουσιάζονται οι συναρτήσεις RBF οι οποίες χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις ενεργοποίησης στα δίκτυα RBF.

- **Κεφάλαιο 3**

Παρουσιάζεται κατάλληλος προσταθεροποιητής, ο οποίος εφαρμόζεται για την επιτάχυνση της φάσης εκπαίδευσης των δικτύων RBF.

- **Κεφάλαιο 4**

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται εκτενής αναφορά στη μέθοδο των συζυγών κλίσεων (Conjugate gradient) η οποία χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία για τον υπολογισμό των βαρών των κέντρων του δικτύου RBF (φάση εκπαίδευσης).

- **Κεφάλαιο 5**

Στο κεφάλαιο αυτό, εφαρμόζεται το λογισμικό που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τα δίκτυα RBF σε ένα τετράγωνο τοποθετημένο μέσα σε ένα άλλο τετράγωνο. Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα περίπτωση που βοηθά να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

- **Κεφάλαιο 6**

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μία εφαρμογή σε πλέγμα γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA 12 και εξάγονται συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της μεθόδου σε αραιά, μέτρια πυκνά σε πολύ πυκνά πλέγματα.

- **Κεφάλαιο 7**

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μία άλλη εφαρμογή σε μία διδιάστατη πτερύγωση συμπίεστη ελεγχόμενης διάχυσης. Στην περίπτωση αυτή, μεταβάλλεται και το πάχος του πτερυγίου και αξιολογείται η ποιότητα του πλέγματος.

- **Κεφάλαιο 8**

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μία σύγκριση μεταξύ των συναρτήσεων ενεργοποίησης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Εφαρμόζεται σταθερού μέτρου στροφή ενός τετραγώνου, το οποίο είναι τοποθετημένο μέσα σε ένα άλλο τε-

τράγωνο και υπολογίζονται τα στατιστικά ποιότητας του προκύπτοντος πλέγματος.

- **Κεφάλαιο 9**

Παρουσιάζεται μια σύνοψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

- **Παράρτημα Α**

Στο παράρτημα αυτό γίνεται αναφορά σε μετρικές ποιότητας πλέγματος. Συγκεκριμένα, γίνεται ανάλυση των μετρικών μέσης αναλογίας (mean - ratio metrics) για τριγωνικά στοιχεία.

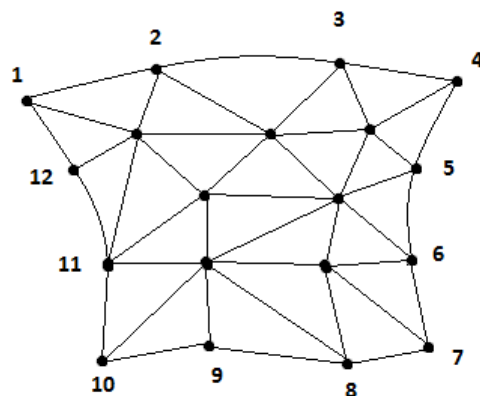


## Κεφάλαιο 2

# Δίκτυα Συναρτήσεων Ακτινικής Βάσης

### 2.1 Μετατόπιση πλέγματος με δίκτυα (RBF)

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η επεξήγηση της έννοιας της μετατόπισης πλέγματος με δίκτυα RBF, η οποία για λόγους απλότητας θα πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Έστω ότι το πλέγμα είναι αυτό του σχήματος 2.1, το οποίο αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία και έχει 12 οριακούς κόμβους.



**Σχήμα 2.1:** Μη-δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων με  $K=12$  οριακούς κόμβους και  $N=7$  εσωτερικούς κόμβους.

Για να είναι εφικτή η χρήση ενός μοντέλου RBF πρέπει πρώτα να οριστούν τα  $K$  σε πλήθος κέντρα του, τα οποία είναι οι οριακοί κόμβοι, (ή μέρος αυτών, σε κάποια ειδικότερη περίπτωση) των οποίων η μετατόπιση είναι γνωστή. Το μοντέλο μετατόπισης ενός οποιουδήποτε εσωτερικού κόμβου που βρίσκεται στη θέση με διάνυσμα  $\mathbf{x}$  (υποθέτοντας ότι τα κέντρα βρίσκονται στη θέση με διάνυσμα  $\mathbf{x}_{ci}$ ) θα είναι

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sum_{i=1}^K w_{x,i} \phi(\|\mathbf{x}_{ci} - \mathbf{x}\|) \\ \Delta y &= \sum_{i=1}^K w_{y,i} \phi(\|\mathbf{x}_{ci} - \mathbf{x}\|) \\ \Delta z &= \sum_{i=1}^K w_{z,i} \phi(\|\mathbf{x}_{ci} - \mathbf{x}\|)\end{aligned}\tag{2.1}$$

όπου  $\vec{w}_x = (w_{x,1}, \dots, w_{x,K})$ ,  $\vec{w}_y = (w_{y,1}, \dots, w_{y,K})$  και  $\vec{w}_z = (w_{z,1}, \dots, w_{z,K})$  είναι τα βάρη του δικτύου RBF των οποίων οι τιμές είναι άγνωστες και  $\phi$  μία συνάρτηση βάσης. Για την εύρεση αυτών των βαρών, πρέπει να εκπαιδευτεί το σύστημα, να εφαρμοστούν, δηλαδή, οι εξισώσεις 2.1,  $K$  φορές στα  $K$  κέντρα του δικτύου και έτσι δημιουργείται το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_{c1} - \mathbf{x}_{c1}\|) & \phi(\|\mathbf{x}_{c1} - \mathbf{x}_{c2}\|) & \cdots & \phi(\|\mathbf{x}_{c1} - \mathbf{x}_{cK}\|) \\ \phi(\|\mathbf{x}_{c2} - \mathbf{x}_{c1}\|) & \phi(\|\mathbf{x}_{c2} - \mathbf{x}_{c2}\|) & \cdots & \phi(\|\mathbf{x}_{c2} - \mathbf{x}_{cK}\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_{cK} - \mathbf{x}_{c1}\|) & \phi(\|\mathbf{x}_{cK} - \mathbf{x}_{c2}\|) & \cdots & \phi(\|\mathbf{x}_{cK} - \mathbf{x}_{cK}\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x1} \\ w_{x2} \\ \vdots \\ w_{xK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{c1} \\ \Delta x_{c2} \\ \vdots \\ \Delta x_{cK} \end{bmatrix}$$

για το  $x$  (ομοίως και με ίδιο μητρώο συντελεστών θα είναι και για  $y$  και για το  $z$  σε μία τριδιάστατη περίπτωση) ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned}A\vec{w}_x &= \Delta\vec{x}_c \\ A\vec{w}_y &= \Delta\vec{y}_c \\ A\vec{w}_z &= \Delta\vec{z}_c\end{aligned}\tag{2.2}$$

Το μητρώο  $A$ , είναι ίδιο για κάθε κατεύθυνση, είναι συμμετρικό και έχει τιμή μονάδα σε κάθε στοιχείο στη διαγώνιό του. Επίσης, αν βρεθούν τα βάρη, επόμενο βήμα είναι η χρήση του δικτύου RBF για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων των εσωτερικών κόμβων. Αν οι εσωτερικοί κόμβοι είναι  $N$  σε πλήθος, τότε για να βρεθεί η μετατόπιση τους εφαρμόζεται ο τύπος 2.1,  $N$  φορές για τους  $N$  εσωτερικούς κόμβους, αφού αυτός ο τύπος είναι γενικός.

Όσον αφορά το υπολογιστικό κόστος του δικτύου RBF, αυτό εξαρτάται τόσο από το πλήθος  $K$  των κέντρων του, όσο και από το πλήθος  $N$  των εσωτερικών κόμβων των

οποίων η μετατόπιση ζητείται να βρεθεί.

1. Αν το πλήθος των κέντρων του δικτύου ( $K$ ) είναι μεγάλο, τότε η εκπαίδευση έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Το γεγονός ότι το μητρώο των συντελεστών είναι το ίδιο για  $x, y, z$  αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα, αλλά το υπολογιστικό κόστος δεν παύει να είναι μεγάλο.
2. Αν το πλήθος των εσωτερικών κόμβων ( $N$ ) είναι λ.χ. της τάξης του  $10^9$ , τότε παρόλο που ο τύπος υπολογισμού των μετατοπίσεων τους είναι εύκολος, δεν παύει να είναι μεγάλος ο βρόχος, γεγονός που οδηγεί σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος.
3. Αν συμβαίνει ταυτόχρονα να είναι μεγάλο το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF και το πλήθος των εσωτερικών κόμβων, τότε το υπολογιστικό κόστος είναι πολύ μεγάλο.

## 2.2 Συναρτήσεις Ακτινικής Βάσης (RBF)

Οι συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBF) έχουν ως πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών και η τιμή τους εξαρτάται από την απόστασή τους από την αρχή των αξόνων, έτσι ώστε  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|)$ . Εναλλακτικά, αντί της αρχής των αξόνων, μπορεί να εξαρτάται από την απόστασή του από ένα σημείο  $\mathbf{x}_{c_j}$ , το οποίο λέγεται κέντρο, τέτοιο ώστε  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{c_j}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{c_j}\|)$ . Οποιαδήποτε συνάρτηση έχει την ιδιότητα  $\phi(x) = \phi(\|x\|)$ , λέγεται ακτινική συνάρτηση. Τις περισσότερες φορές, νόρμα είναι η Ευκλείδεια απόσταση.

Οι συναρτήσεις RBF, αν χρησιμοποιηθούν σε ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο ως συναρτήσεις ενεργοποίησης, μπορούν να εφαρμοστούν ως μέσο παρεμβολής. Υπάρχουν πολλών ειδών συναρτήσεις RBF οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παρεμβολή και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στις συναρτήσεις ολικής επιρροής (global support) και τοπικής επιρροής (compact support). Οι συναρτήσεις RBF τοπικής επιρροής, έχουν την ιδιότητα

$$\phi(r, R) = \begin{cases} f(r, R) & 0 \leq x \leq R, \\ 0 & x > R. \end{cases} \quad (2.3)$$

όπου  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{c_j}\|_2$ ,  $f(x, R) \geq 0$ ,  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο χώρο και  $\mathbf{x}_{c_j}$  το διάνυσμα θέσης του  $j$  κέντρου του δικτύου. Η τιμή της ακτίνας  $R$ , δρα ως κατώφλι επιρροής, καθορίζεται από τον χρήστη ή, μερικές φορές, υπολογίζεται από εμπειρικές σχέσεις. Αν  $\xi = r/R$ , συνηθίζεται και η αδιάστατη γραφή

$$\phi(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0 & \xi > 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Είναι σημαντικό ότι ένα κέντρο, έστω το  $\mathbf{x}_{cj}$ , των συναρτήσεων RBF τοπικής επιρροής επηρεάζει αποκλειστικά εκείνα τα σημεία που ανήκουν σε κύκλο, αν είναι διδιάστατο, ή σφαίρα, αν είναι τριδιάστατο, με κέντρο το  $\mathbf{x}_{cj}$  και ακτίνα  $R$ . Επομένως, τα σημεία τα οποία δεν ανήκουν σε αυτόν το κύκλο ή τη σφαίρα αντίστοιχα, δεν επηρεάζονται καθόλου από το κέντρο  $\mathbf{x}_{cj}$  [20]. Στον πίνακα 2.1 φαίνονται μερικές από τις συχνά χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις ακτινικής βάσης τοπικής επιρροής όπως προτάθηκαν από τον Wendland [21]. Στον πίνακα αυτό οι τέσσερις πρώτες συναρτήσεις βασίζονται σε πολυώνυμο (Continuous Polynomial), ενώ οι τέσσερις τελευταίες βασίζονται στη συνάρτηση Thin Plate Spline, για την οποία ισχύει  $f(x) = x^2 \ln(x)$ . Στα σχήματα 2.2 και 2.3 φαίνεται η μορφή των ακτινικών συναρτήσεων βάσης που παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1.

Στον αντίποδα, υπάρχουν και συναρτήσεις ολικής επιρροής, συναρτήσεις δηλαδή για τις οποίες ισχύει ότι το εκάστοτε κέντρο  $\mathbf{x}_{cj}$  επηρεάζει όλα τα σημεία/κόμβους του χώρου στον οποίο γίνεται η παρεμβολή, άσχετα από το πόσο μακριά είναι το υπόψη κέντρο [20]. Υπάρχουν και σε αυτήν την κατηγορία αρκετές συναρτήσεις ακτινικής βάσης μερικές από τις οποίες φαίνονται στον πίνακα 2.2 [20], [22]. Ο συντελεστής  $a$  που υπάρχει στη συνάρτηση βάσης '*Multiquadric Biharmonics*' και στη '*Inverse Multiquadric Biharmonics*' ελέγχει τη μορφή της συνάρτησης βάσης. Μεγάλη τιμή αυτής της παραμέτρου δίνει στη συνάρτηση επίπεδη μορφή ενώ η μικρή τιμή δίνει σχήμα κώνου. Στο σχήμα 2.4 φαίνεται η μορφή των συναρτήσεων ολικής επιρροής του πίνακα 2.2.

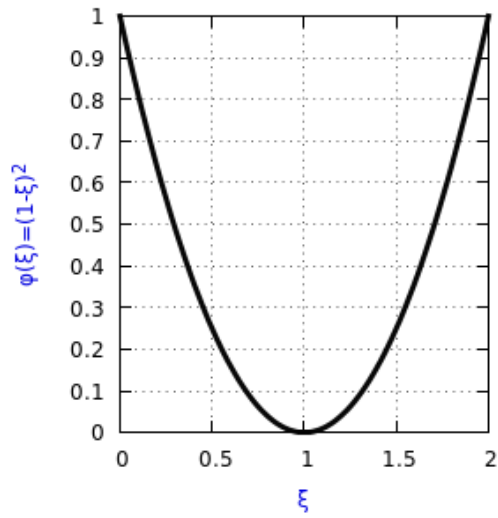


Όνομα	$\phi(\xi)$
$CP C^0$	$(1 - \xi)^2$
$CP C^2$	$(1 - \xi)^4(4\xi + 1)$
$CP C^4$	$(1 - \xi)^6(\frac{35}{3}\xi^2 + 6\xi + 1)$
$CP C^6$	$(1 - \xi)^8(38\xi^3 + 25\xi^2 + 8\xi + 1)$
$CTPS C^0$	$(1 - \xi)^5$
$CTPS C^1$	$1 + \frac{80}{3}\xi^2 - 40\xi^3 + 15\xi^4 - \frac{8}{3}\xi^5 + 20\xi^2 \ln(\xi)$
$CTPS C_a^2$	$1 - 30\xi^2 - 10\xi^3 + 45\xi^4 - 6\xi^5 - 60\xi^3 \ln(\xi)$
$CTPS C_b^2$	$1 - 20\xi^2 + 80\xi^3 - 45\xi^4 - 16\xi^5 + 60\xi^4 \ln(\xi)$

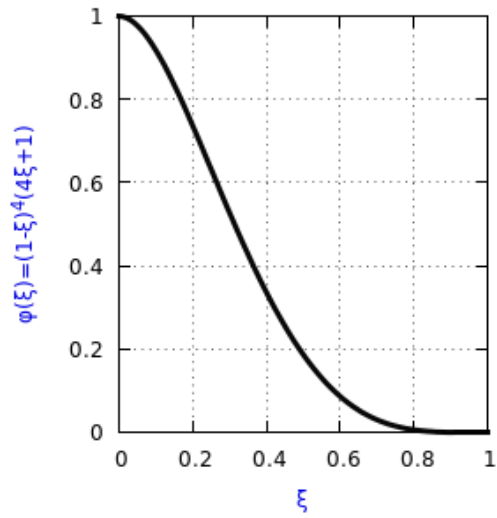
**Πίνακας 2.1:** Συναρτήσεις ακτινικής βάσης τοπικής επιρροής όπως προτάθηκαν από τον Wendland [21]. Οι πρώτες τέσσερις βασίζονται σε συνεχή πολώνυμα.

Όνομα	$\phi(r)$
<i>Gaussian</i>	$\exp(-r^2)$
<i>Multiquadric Biharmonics</i>	$\sqrt{a^2 + r^2}$
<i>Inverse Multiquadric Biharmonics</i>	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}$
<i>Inverse Quadric Biharmonics</i>	$\frac{1}{1+r^2}$

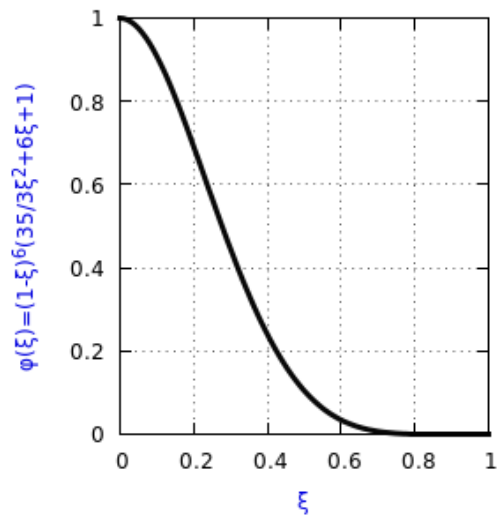
**Πίνακας 2.2:** Συναρτήσεις ακτινικής βάσης ολικής επιρροής που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις ενεργοποίησης σε ένα δίκτυο RBF.



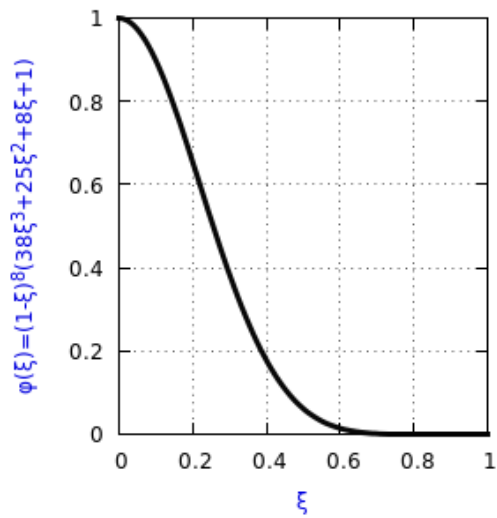
(α) Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CP C^0$ .



(β') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CP C^2$ .

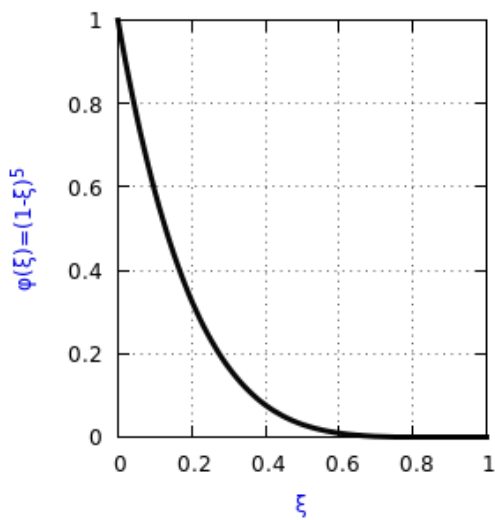


(γ') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CP C^4$ .

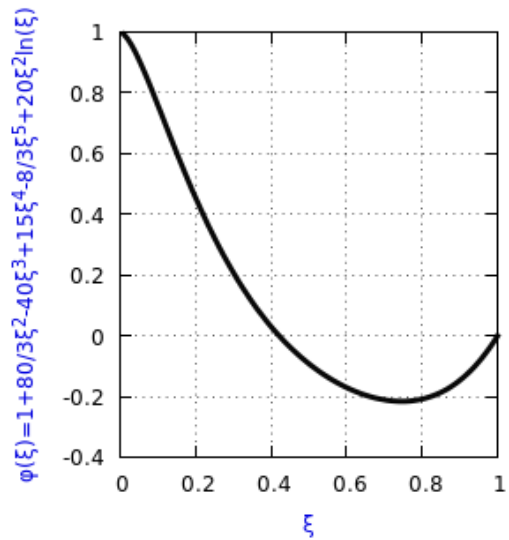


(δ') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CP C^6$ .

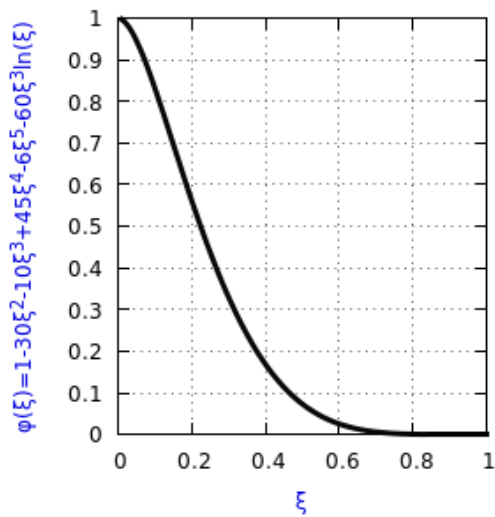
**Σχήμα 2.2:** Γραφική απεικόνιση των τεσσάρων πρώτων συναρτήσεων τοπικής επιρροής του πίνακα 2.1. Για τις συναρτήσεις αυτές είναι αναγκαίος και ο καθορισμός μιας ακτίνας επιρροής  $R$ , για την οποία ισχύει ότι, όταν  $r > R$ , τότε  $\phi(r) = 0$ .



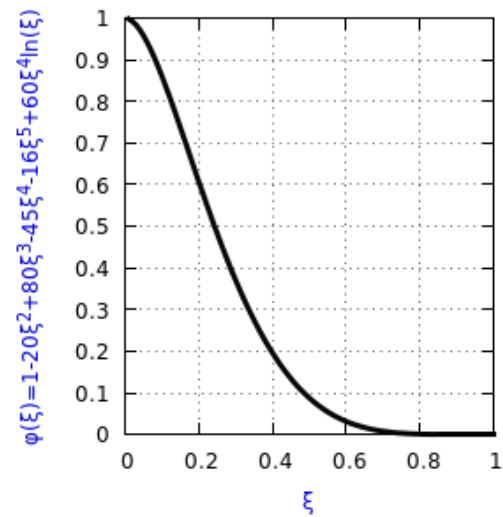
(α') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CTPS C^0$ .



(β') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CTPS C^1$ .

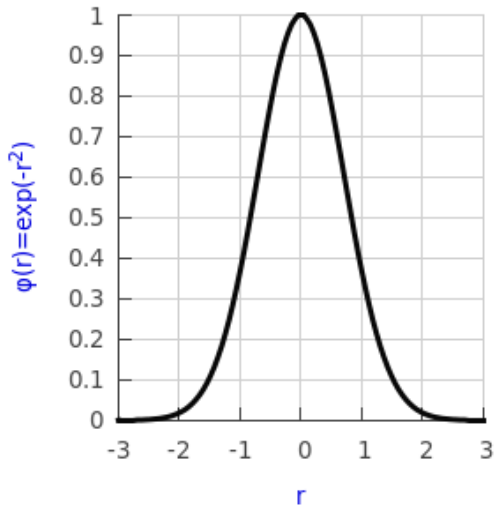


(γ') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CTPS C_a^2$ .

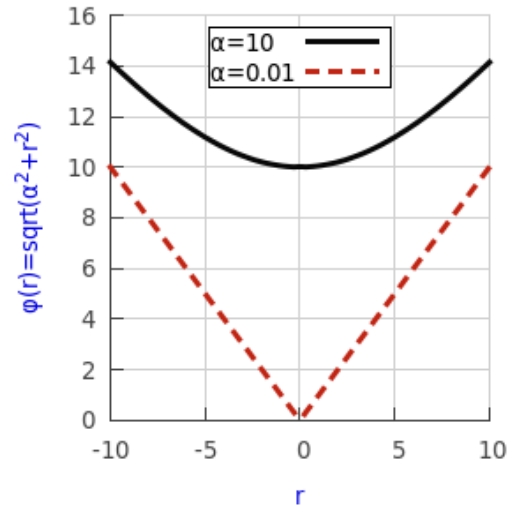


(δ') Συνάρτηση τοπικής επιρροής  $CTPS C_b^2$ .

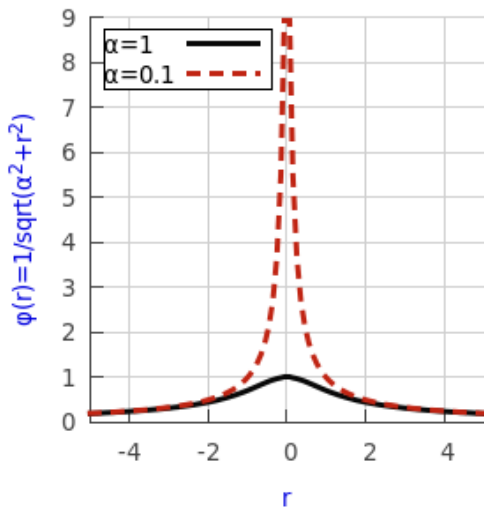
**Σχήμα 2.3:** Γραφική απεικόνιση των τεσσάρων τελευταίων συναρτήσεων τοπικής επιρροής του πίνακα 2.1. Για τις συναρτήσεις αυτές είναι αναγκαίος και ο καθορισμός μιας ακτίνας επιρροής  $R$ , για την οποία ισχύει ότι, όταν  $r > R$ , τότε  $\phi(r) = 0$ .



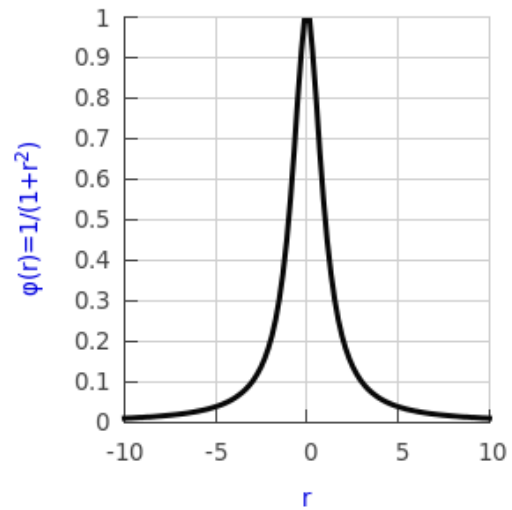
(α') Συνάρτηση ολικής επιρροής *Gaussian*.



(β') Συνάρτηση ολικής επιρροής *Multiquadric Biharmonics*.



(γ') Συνάρτηση ολικής επιρροής *Inverse Multiquadric Biharmonics*.



(δ') Συνάρτηση ολικής επιρροής *Inverse Quadric Biharmonics*.

**Σχήμα 2.4:** Γραφική απεικόνιση συναρτήσεων ολικής επιρροής του πίνακα 2.2. Όταν χρησιμοποιείται μια από αυτές τις συναρτήσεις, η κίνηση κάθε κέντρου του δικτύου επηρεάζει όλα τα σημεία στο χώρο.

## 2.3 Τα δίκτυα RBF ως εργαλείο μορφοποίησης

### 2.3.1 Χρησιμότητα δικτύων RBF

Τα προβλήματα τα οποία καλείται να αντιμετωπίσει ένας μηχανικός στον τομέα της ΥΡΔ, χρήζουν Ηλεκτρονικού Υπολογιστή, αφού πραγματοποιεί πράξεις πολύ γρήγορα και με μεγάλη ακρίβεια. Πριν όμως οδηγηθεί το πρόβλημα στον υπολογιστή, πρέπει να δημιουργηθεί υπολογιστικό πλέγμα και να διακριτοποιηθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα (λ.χ. να εκφραστούν οι παράγωγοι ως πεπερασμένες διαφορές ή με κάποιο ισοδύναμο σχήμα) σε αυτό. Με την έννοια διακριτοποίηση του χώρου νοείται η γένεση πλέγματος, το οποίο αποτελείται από κόμβους και τη συνδεσμολογία τους. Τα πλέγματα αυτά, ανάλογα με τη δομή τους χωρίζονται σε δομημένα (structured grids) και μη-δομημένα (unstructured grids).

Υπάρχουν πολλές εφαρμογές στην ΥΡΔ, στις οποίες είναι απαραίτητη η μετακίνηση του υπολογιστικού πλέγματος. Τέτοιου είδους προβλήματα συναντώνται κυρίως στον τομέα της βελτιστοποίησης, της αεροελαστικότητας και σε προβλήματα ροής με κινούμενα όρια. Για παράδειγμα, στα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, ελλείψει κλασικής παραμετροποίησης της προς σχεδιασμό μορφής (λ.χ. παραμετροποίηση με πολυώνυμα Bezier, NURBS και άλλα), είναι απαραίτητη η ταυτόχρονη και συμβατή μετακίνηση των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος, συμπεριλαμβανομένων και των ορίων του. Μια άλλη περίπτωση είναι όταν χρησιμοποιούνται μέθοδοι αιτιοκρατικής βελτιστοποίησης (gradient-based methods), όπου χρησιμοποιείται παραμετροποίηση της προς σχεδιασμό μορφής, η οποία τροποποιεί σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης τα όρια του υπολογιστικού χωρίου και αυτό που χρειάζεται είναι ένας μηχανισμός ο οποίος αναλαμβάνει να προσαρμόζει κατάλληλα το εσωτερικό πλέγμα. Όταν λ.χ. χρησιμοποιείται η συζυγής μέθοδος για τη βελτιστοποίηση της μορφής μιας αεροτομής, οι παράγωγοι ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης- στόχου ως προς της μεταβλητές της παραμετροποίησης, τροποποιούν τη μορφή της αεροτομής, αλλάζοντας το σχήμα της και πρέπει να προσαρμοστεί το προηγούμενο πλέγμα στη νέα γεωμετρία, έτσι ώστε να συνεχιστεί η διαδικασία βελτιστοποίησης. Από την άλλη πλευρά, στην αεροελαστικότητα ή σε χωρία CFD με κινούμενα όρια, τα τοιχώματα ενός στερεού σωματος, λ.χ. μιας πτέρυγας ή μιας αεροτομής, μετακινούνται με το χρόνο και, σε κάθε χρονικό βήμα, πρέπει να αναπροσαρμόζεται το πλέγμα σε αυτά ώστε λ.χ. να βρεθούν οι σωστές στιγμιαίες ασκούμενες δυνάμεις.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, η επαναπλεγματοποίηση είναι παντελώς ασύμφορη και χρονοβόρα και, ειδικά σε βιομηχανικής κλίμακας εφαρμογές, μάλλον απαγορευτική. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την ανάπτυξη ενός τεχνητού νευρωνικού δικτύου με συναρτήσεις ακτινικής βάσης RBF, το οποίο αναλαμβάνει τη μετακίνηση- παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος, συμπεριλαμβάνοντας τους κόμβους των ορίων ή όχι. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε δομημένα ή μη-δομημένα πλέγματα, η

μεγάλη τους αξία, όμως, φαίνεται στα μη-δομημένα. Η διαδικασία της μετακίνησης του υπολογιστικού πλέγματος με ένα δίκτυο RBF προϋποθέτει την επιλογή των κέντρων του δικτύου και μιας συνάρτησης ενεργοποίησης σε πρώτη φάση και, σε δεύτερη φάση, την εκπαίδευσή του, με σκοπό να βρεθούν οι συντελεστές βάρους του κάθε κέντρου του δικτύου για κάθε κατεύθυνση, το οποίο αναλύεται σε επόμενη παράγραφο.

### 2.3.2 Εκπαίδευση και χρήση του δικτύου RBF

Για να βρεθεί, λοιπόν, η μετατόπιση των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος, συμπεριλαμβάνοντας ή όχι τους οριακούς κόμβους, πρέπει πρώτα να επιλεγούν τα  $K$  κέντρα του δικτύου RBF και μία συνάρτηση ενεργοποίησης από τον πίνακες 2.1 και 2.2 ή κάποια άλλη διαθέσιμη στη βιβλιογραφία. Ως κέντρα του δικτύου επιλέγονται όλοι εκείνοι οι κόμβοι ή υποσύνολο αυτών, των οποίων η τιμή της μετατόπισης είναι γνωστή.

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης, όπου δεν γίνεται χρήση κλασικής παραμετροποίησης της προς σχεδιασμό μορφής, είναι δυνατόν τα δίκτυα RBF να αναλάβουν ταυτόχρονα την τροποποίηση του σχήματός της και τη μετατόπιση των εσωτερικών κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Σε αυτήν την περίπτωση, το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF είναι αρκετά μικρό. Όταν όμως χρησιμοποιείται εργαλείο παραμετροποίησης και αναζητείται η βέλτιστη μορφή, λ.χ μιας πτέρυγας, ή όταν υπολογίζονται οι δυνάμεις σε μια παλλόμενη αεροτομή, τότε τροποποιείται η γεωμετρία της μορφής που βελτιστοποιείται ή υπολογίζεται αντίστοιχα και για να προσαρμοστεί το εσωτερικό πλέγμα στη νέα γεωμετρία πρέπει να επιλεγούν ως κέντρα του δικτύου όλα ή ένα υποσύνολο των κόμβων της τροποποιημένης γεωμετρίας. Σε αυτήν την περίπτωση, το πλήθος των κέντρων είναι αρκετά μεγάλο, ειδικά σε προβλήματα βιομηχανικής κλίμακας που τα πλέγματα είναι τεράστια και αφορούν τριδιάστατες γεωμετρίες.

Η επόμενη φάση, πριν τη χρησιμοποίηση του δικτύου RBF, περιλαμβάνει την εκπαίδευση του δικτύου, την εύρεση δηλαδή των βαρών κάθε κέντρου για κάθε κατεύθυνση, η οποία διαδικασία είναι ίδια για όλες τις περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα δίκτυα RBF, ανεξάρτητα από το πλήθος των κέντρων του. Έστω ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, είναι γνωστές οι μετατοπίσεις  $\Delta\vec{r}_{cx}$ ,  $\Delta\vec{r}_{cy}$  και  $\Delta\vec{r}_{cz}$  των  $K$  οριακών κόμβων ενός υπολογιστικού πλέγματος για την  $x$ ,  $y$  και  $z$  κατεύθυνση αντιστοίχως (οι οποίοι είναι και τα κέντρα του δικτύου RBF). Για την εκπαίδευση του δικτύου RBF και την εύρεση των βαρών τους πρέπει να διατυπωθούν και λυθούν τα τρία γραμμικά συστήματα

$$\begin{aligned} A\vec{w}_x &= \Delta\vec{r}_{cx} \\ A\vec{w}_y &= \Delta\vec{r}_{cy} \\ A\vec{w}_z &= \Delta\vec{r}_{cz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ένα για κάθε κατεύθυνση (αν το πρόβλημα είναι διδιάστατο, τότε δεν λαμβάνεται υπόψη το τρίτο σύστημα της σχέσης 2.5). Τα διανύσματα  $\Delta\vec{r}_{cx}$ ,  $\Delta\vec{r}_{cy}$  και  $\Delta\vec{r}_{cz}$  είναι οι γνωστές μετατοπίσεις του κάθε κέντρου σε κάθε κατεύθυνση,  $\vec{w}_x$ ,  $\vec{w}_y$  και  $\vec{w}_z$  είναι τα άγνωστα βάρη των κέντρων για κάθε κατεύθυνση και το μητρώο  $A$ , διάστασης  $K \times K$ , περιέχει τις σχέσεις μεταξύ των κέντρων του δικτύου RBF. Σε περίπτωση που χρησιμοποιείται συνάρτηση ολικής επιρροής, η τιμή στην  $i$  γραμμή και στη  $j$  στήλη του μητρώου  $A$  είναι ίση με  $\alpha_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_{ci} - \mathbf{x}_{cj}\|_2)$ , ενώ αν χρησιμοποιείται μια συνάρτηση τοπικής επιρροής τότε  $\alpha_{ij} = \phi(\frac{\|\mathbf{x}_{ci} - \mathbf{x}_{cj}\|_2}{R})$ , όπου  $R$  η ακτίνα επιρροής,  $\mathbf{x}_{ci}$  και  $\mathbf{x}_{cj}$  τα διανύσματα θέσης του  $i$  και  $j$  κέντρου του δικτύου RBF και  $\phi$  η συνάρτηση ενεργοποίησης. Διευκρινίζεται ότι το μητρώο αυτό είναι σε όλες τις περιπτώσεις συμμετρικό, θετικά ορισμένο και στη διαγώνιο έχει παντού τιμή ίση με τη μονάδα. Είναι το ίδιο μητρώο και στα τρία συστήματα της σχέσης 2.5, οπότε μπορούν να λυθούν με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης συστημάτων, όπως με Gauss-Seidel, LU decomposition και άλλες.

Όταν το πλήθος των κέντρων του δικτύου είναι σχετικά μικρό, είναι πολύ βολικό να βρεθεί λ.χ. ο αντίστροφος του μητρώου  $A$ . Επειδή το μητρώο αυτό είναι ίδιο και στα τρία συστήματα, ο αντίστροφος του  $A$  υπολογίζεται μία φορά και για την εύρεση των βαρών υπολογίζονται τα γινόμενα

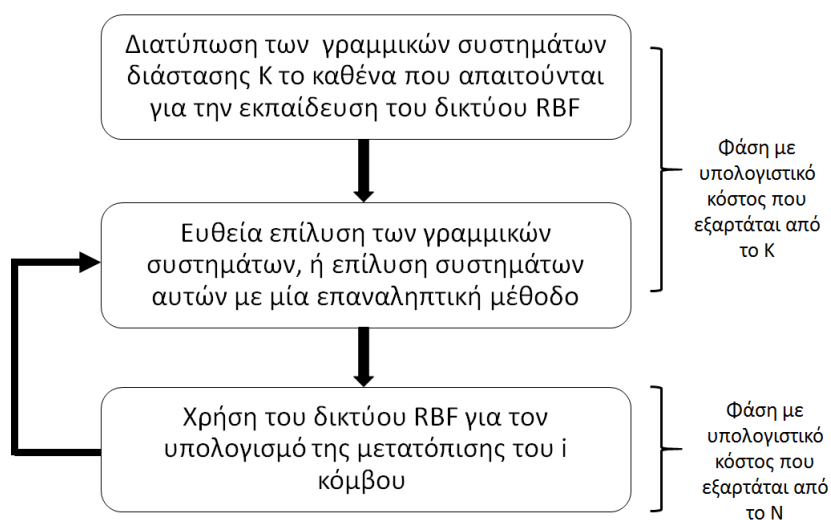
$$\begin{aligned}\vec{w}_x &= A^{-1}\Delta\vec{r}_{cx} \\ \vec{w}_y &= A^{-1}\Delta\vec{r}_{cy} \\ \vec{w}_z &= A^{-1}\Delta\vec{r}_{cz}\end{aligned}\tag{2.6}$$

όπου  $A^{-1}$  ο αντίστροφος του μητρώου  $A$ . Από την άλλη μεριά, όταν το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF είναι αρκετά μεγάλο, η ευθεία επίλυση των τριών συστημάτων της σχέσης 2.5 έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης των συστημάτων όπως για παράδειγμα η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient).

Με διαδικασία που πραγματοποιήθηκε για την εύρεση των συντελεστών βάρους του δικτύου RBF, αυτό πλέον μπορεί να αυτό χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων κάθε κόμβου του εσωτερικού πλέγματος. Αν οι κόμβοι αυτοί, των οποίων η νέα θέση πρέπει να υπολογιστεί, είναι  $N$  σε πλήθος, τότε οι μετατοπίσεις τους υπολογίζονται ως εξής

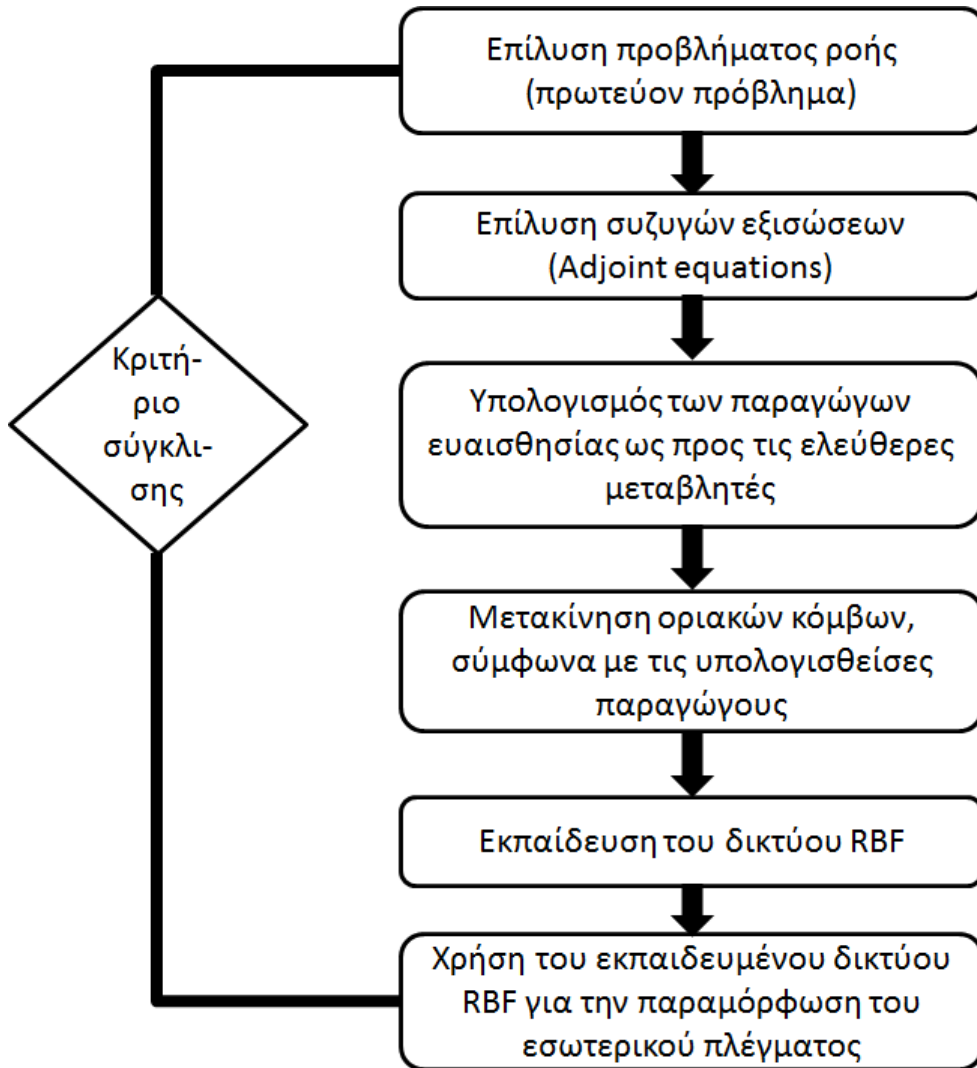
$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_x &= M\vec{w}_x \\ \Delta\vec{r}_y &= M\vec{w}_y \\ \Delta\vec{r}_z &= M\vec{w}_z\end{aligned}\tag{2.7}$$

όπου  $\vec{w}_x$ ,  $\vec{w}_y$  και  $\vec{w}_z$  τα γνωστά βάρη που υπολογίστηκαν κατά τη φάση της εκπαίδευσης,  $\Delta\vec{r}_x$ ,  $\Delta\vec{r}_y$  και  $\Delta\vec{r}_z$  οι ζητούμενες μετατοπίσεις των κόμβων του εσωτερικού πλέγματος σε κάθε κατεύθυνση και το μητρώο  $M$ , διάστασης  $N \times K$ , περιέχει τη σχέση του κάθε κόμβου του εσωτερικού πλέγματος με όλα τα κέντρα του δικτύου RBF. Η τιμή του μητρώου αυτού στην  $i$  γραμμή και στη  $j$  στήλη είναι ίση με  $m_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cj}\|_2)$  (ή  $m_{ij} = \phi(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cj}\|_2}{R})$  σε περίπτωση που χρησιμοποιείται συνάρτηση ενεργοποίησης τοπικής επιρροής). Με  $\mathbf{x}_i$  ορίζεται το διάνυσμα θέσης του  $i$  κόμβου, του οποίου η νέα θέση ζητείται να υπολογιστεί. Ο πίνακας  $M$  είναι ένα μητρώο  $N \times K$  και είναι ίδιος για όλα τα συστήματα της σχέσης 2.7. Το υπολογιστικό κόστος αυτή της φάσης είναι μικρότερο από αυτό της εκπαίδευσης του δικτύου RBF και εξαρτάται από το πλήθος  $N$  των κόμβων του εσωτερικού πλέγματος (Αυτό ισχύει για τις περιπτώσεις που το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF είναι μεγάλο). Πρακτικά, το κόστος είναι ο πολλαπλασιασμός του μητρώου  $M$  διάστασης  $N \times K$  με τα διανύσματα-στήλη  $\vec{w}_x$ ,  $\vec{w}_y$  και  $\vec{w}_z$ . Τέλος, στο σχήμα 2.5 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ροής στο οποίο εξηγείται με απλά λόγια τον τρόπο με τον οποίο παραμορφώνεται ένα πλέγμα με τη χρήση ενός κώδικα που υλοποιεί τα δίκτυα RBF, ενώ στο σχήμα 2.6 γίνεται σαφής η χρησιμότητα των δικτύων RBF σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης με χρήση συζυγών μεθόδων βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 2.5:** Σε αυτό το διάγραμμα ροής παρουσιάζεται με απλά λόγια η διαδικασία εκπαίδευσης του δικτύου RBF καθώς και ποια από τις φάσεις χρήσης του δικτύου έχει το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Διευκρινίζεται ότι,  $N$  είναι το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος, των οποίων η μετατόπιση ζητείται να βρεθεί και  $K$  το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF.





**Σχήμα 2.6:** Σε αυτό το διάγραμμα ροής γίνεται σαφής η χρησιμότητα παραμόρφωσης ενός υπολογιστικού πλέγματος με τη χρήση δικτύων *RBF* μέσα σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης μέσω συζυγών μεθόδων στον οποίο γίνεται χρήση κλασικής παραμετροποίησης. Μετά τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ελεύθερες μεταβλητές σχεδιασμού μετακινούνται οι επιφανειακοί κόμβοι της προς σχεδιασμό μορφής, εκπαιδεύεται το δίκτυο *RBF* με βάση αυτές τις μετατοπίσεις και, στη συνέχεια, ο ίδιος μηχανισμός αναλαμβάνει τη μετατόπιση των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος.



# Κεφάλαιο 3

## Προσταθεροποίηση

### 3.1 Εισαγωγή

Σε μια περίοδο όπως η σημερινή, που ο ανταγωνισμός είναι μεγάλος και η τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει προχωρήσει, οι βιομηχανίες απαιτούν, όχι μόνο την εύρεση λύσης με ικανοποιητική ακρίβεια για τα προβλήματα τους, αλλά την εύρεση αυτής της λύσης με μικρό υπολογιστικό κόστος. Επειδή σε μεγάλα προβλήματα, βιομηχανικής κλίμακας, τα δίκτυα RBF έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, το παρόν κεφάλαιο επικεντρώνεται στην επιτάχυνση της φάσης εκπαίδευσής τους, με σκοπό τα δίκτυα RBF να είναι βιώσιμα.

Υπενθυμίζεται ότι, το κόστος εκπαίδευσης των δικτύων RBF σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των κέντρων τους. Ως κέντρα επιλέγονται εκείνοι οι κόμβοι, ή μέρος αυτών, των οποίων η μετατόπιση είναι γνωστή. Σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, λ.χ. στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται παραμετροποίηση της προς βελτιστοποίηση μορφής, η οποία τροποποιεί τη μορφή της σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, τα κέντρα του δικτύου είναι όλοι οι επιφανειακοί κόμβοι ή μέρος αυτών. Για να είναι εφικτή η χρήση του δικτύου RBF πρέπει πρώτα να εκπαιδευτεί, να λυθούν δηλαδή τα τρία γραμμικά συστήματα 2.5, ένα για κάθε κατεύθυνση (αν το πρόβλημα είναι διδιάστατο, τότε ο αριθμός των γραμμικών συστημάτων είναι δύο). Αυτή η φάση, η εκπαίδευση του δικτύου RBF, έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, ειδικά όταν το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF είναι μεγάλο. Αν υποθεθεί ότι ο αριθμός των κέντρων είναι  $K$  στο πλήθος, τότε το μητρώο  $A$  είναι διάστασης  $K \times K$  και περιέχει τις σχέσεις μεταξύ των κέντρων. Σημειώνεται ότι είναι ένα μητρώο συμμετρικό και με τιμή ίση με τη μονάδα στη διαγώνιο.

Τα συστήματα 2.5 μπορούν να λυθούν με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων, είτε άμεσες μεθόδους (Direct Methods), είτε με επαναληπτικές μεθόδους

(Iterative Methods) [23]. Όταν τα συστήματα αυτά είναι μικρά, δηλαδή όταν το πλήθος των κέντρων που έχει επιλεγεί είναι μικρό, τότε προτιμώνται οι άμεσες μέθοδοι επίλυσης, γιατί είναι πολύ απλές. Το γεγονός, όμως ότι το κόστος επίλυσής τους ανάγεται σε  $O(N^3)$  τις καθιστά απαγορευτικές για περιπτώσεις που η τάξη του συστήματος είναι μεγάλη. Μία μέθοδος που ανήκει σε αυτή την κατηγορία, είναι η απαλοιφή κατά Gauss (Gauss elimination). Ειδικά στα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν από δίκτυα RBF, η τάξη του συστήματος μπορεί να είναι μεγάλη, όταν λ.χ οι επιφανειακοί κόμβοι μιας πτέρυγας προς βελτιστοποίηση είναι πολλοί σε πλήθος (σε μια τέτοια περίπτωση το πλήθος των κόμβων μπορεί να είναι και της τάξης του  $10^6$ ).

Σε αυτές τις περιπτώσεις γραμμικών συστημάτων, μεγάλης τάξης, χρησιμοποιούνται αποκλειστικά επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης, όπως λ.χ. η μέθοδος των συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient) [5], η οποία αναλύεται σε επόμενο κεφάλαιο. Αξίζει να σημειωθεί ότι το κόστος επίλυσης μια μεθόδου αυτής της κατηγορίας εξαρτάται, φυσικά, από την επιλογή της επαναληπτικής μεθόδου, από τον τρόπο δηλαδή με τον οποίο υπολογίζεται το γινόμενο του μητρώου  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{w}_x$  και το κόστος επίλυσής της μπορεί να είναι  $O(N^2)$ ,  $O(N \log N)$ , ή ακόμα και  $O(N)$  [24].

Ο ρυθμός σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μητρώου  $A$ . Για το λόγο αυτό έχει οριστεί ο αριθμός ή δείκτης κατάστασης (condition number), ο οποίος είναι μία ιδιότητα του μητρώου  $A$  και δεν εξαρτάται ούτε από την επαναληπτική μέθοδο που επιλέγεται, αλλά ούτε και από την ακρίβεια του υπολογιστή που χρησιμοποιείται. Ο αριθμός κατάστασης συμβολίζεται με  $\kappa(A)$  και ορίζεται ως

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \quad (3.1)$$

Όσο ο δείκτης κατάστασης πλησιάζει τη μονάδα, η μέθοδος θα συγκλίνει γρηγορότερα από ένα σύστημα ίδιας τάξης αλλά μεγαλύτερου δείκτη κατάστασης. Αν επιλεγεί η Ευκλείδεια νόρμα, τότε ο ορισμός του αριθμού κατάστασης γίνεται

$$\kappa(A) = \frac{|\sigma_{max}|}{|\sigma_{min}|} \quad (3.2)$$

όπου  $\sigma_{max}$  και  $\sigma_{min}$  είναι η τετραγωνική ρίζα της μέγιστης και της ελάχιστης ιδιοτιμής του πίνακα  $A$  αντίστοιχα.

Πολλά από τα γραμμικά συστήματα, τα οποία χρήζουν επίλυσης, έχουν μητρώο  $A$  του οποίου ο δείκτης κατάστασης να μην είναι ικανοποιητικός, έτσι ώστε να επιτευχθεί ταχύς ρυθμός σύγκλισης. Το ίδιο συμβαίνει συχνά και με αυτά τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν από δίκτυα RBF. Ειδικά στην περίπτωση όπου το μητρώο  $A$  είναι τεράστιο, είναι απαραίτητο να βρεθεί μία λύση ώστε το σύστημα να συγκλίνει με τον ταχύτερο δυνατό ρυθμό. Για το λόγο αυτό, γίνεται χρήση κατάλληλου προσταθεροποιητή (Preconditioner) που στόχο έχει να οδηγήσει σε ένα προσταθεροποιημένο σύστημα

εξισώσεων που, επειδή θα έχει συγκεντρωμένες τις ιδιοτιμές (πιο συγκεντρωμένες από το ίδιο το μητρώο  $A$ ) θα παρουσιάζει (πολύ) καλύτερες ιδιότητες σύγκλισης. Ο προσταθεροποιητής που επιλέχθηκε την παρούσα διπλωματική εργασία βρέθηκε μετά από ανάρτηση στη βιβλιογραφία [24] και είναι απλός, αλλά έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι μπορεί να κατασκευαστεί παράλληλα. Το παρόν κεφάλαιο, λοιπόν, επικεντρώνεται στον τρόπο κατασκευής αυτού του προσταθεροποιητή.

## 3.2 Κατασκευή του Προσταθεροποιητή

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται βήμα - βήμα η μέθοδος κατασκευής του προσταθεροποιητή ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία στα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν κατά την εκπαίδευση των δικτύων RBF. Θεωρώντας ως  $P$  τον προσταθεροποιητή, ο οποίος πρέπει να είναι εύκολα αντιστρέψιμος, τότε εφαρμόζοντας προσταθεροποίηση στα προς επίλυση γραμμικά συστήματα του δικτύου RBF, τότε αυτά μετασχηματίζονται ως

$$\begin{aligned} PA\vec{w}_x &= P\Delta\vec{r}_{cx} \\ PA\vec{w}_y &= P\Delta\vec{r}_{cy} \\ PA\vec{w}_z &= P\Delta\vec{r}_{cz} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Η εφαρμογή του προσταθεροποιητή γίνεται στα αριστερά των βασικών εξισώσεων, αποτελεί δηλαδή ένα σχήμα αριστερής προσταθεροποίησης.

Η πρώτη φάση για την κατασκευή του προσταθεροποιητή περιλαμβάνει τον καθορισμό του “ οδηγού μη - μηδενικών στοιχείων ” του. Σε αυτήν τη φάση γίνεται αποκοπή των λιγότερο σημαντικών στοιχείων του πίνακα  $A$ , για να βρεθούν τα στοιχεία του προσταθεροποιητή που είναι ουσιαστικά μη - μηδενικά. Υπάρχουν πολλά κριτήρια με τη βοήθεια των οποίων καθορίζεται ο “ οδηγός μη - μηδενικών στοιχείων ” του προσταθεροποιητή. Στη διπλωματική αυτή εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα απλό κριτήριο [25], στο οποίο ορίζεται ένα κατώφλι  $\epsilon \in (0,1)$ , με σκοπό να αποκοπούν εκείνα τα στοιχεία του  $A$  τα οποία είναι μικρότερα από αυτό το κατώφλι. Σε εκείνες τις θέσεις του το αντίστοιχο στοιχείο του προσταθεροποιητή τίθεται ίσο με μηδέν. Με άλλα λόγια, όταν ισχύει

$$|\alpha_{i,j}| < \epsilon \quad 1 \leq i, j \leq K \quad (3.4)$$

τότε η τιμή του προσταθεροποιητή στη θέση του μητρώου  $i, j$  είναι μηδενική. Διευκρινίζεται ότι,  $\alpha_{i,j}$  είναι η τιμή του μητρώου  $A$  στη θέση  $i, j$  και  $K$  το πλήθος των

κέντρων του δικτύου, άρα και ή τάξη του συστήματος προς επίλυση. Στο σχήμα 3.1 απεικονίζεται ο τρόπος με τον με τον οποίο καθορίζεται ο “ οδηγός μη - μηδενικών στοιχείων ” του προσταθεροποιητή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στο σχήμα αυτό εξηγείται η φάση αυτή σε ένα μητρώο  $A$  διάστασης  $4 \times 4$ , άρα και ο προσταθεροποιητής πρέπει να είναι ένα μητρώο  $4 \times 4$ .

A			
1	$\alpha_{12}$		$\alpha_{14}$
$\alpha_{21}$	1		
		1	$\alpha_{34}$
$\alpha_{41}$		$\alpha_{43}$	1

P			
$P_{11}$	$p_{12}$	0	$P_{14}$
$p_{21}$	$P_{22}$	0	0
0	0	$P_{33}$	$P_{34}$
$P_{41}$	0	$P_{43}$	$P_{44}$

**Σχήμα 3.1:** Χωρίς βλάβη της γενικότητας στο σχήμα αυτό φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο καθορίζεται ο “ οδηγός μη - μηδενικών στοιχείων ” του προσταθεροποιητή  $P$ . Αν υποθεθεί ότι τα στοιχεία του πίνακα  $A$  με έντονο/γκρι χρώμα είναι μικρότερα από ένα κατάφλι  $\epsilon \in (0,1)$ , τότε οι αντίστοιχες θέσεις του προσταθεροποιητή επιβάλλονται να έχουν τιμή ίση με το 0, ενώ οι υπόλοιπες θέσεις παραμένουν άγνωστες και εξηγείται σε επόμενη φάση ο τρόπος εύρεσής τους.

Επόμενη φάση για την κατασκευή του προσταθεροποιητή είναι η εύρεση των τιμών των μη - μηδενικών στοιχείων του. Στη φάση αυτή, εφόσον στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόζεται σχήμα αριστερής προσταθεροποίησης, αναζητείται εκείνο το μητρώο  $P$  που ελαχιστοποιεί την Ευκλείδεια νόρμα  $\|I - PA\|_2$ , όπου  $I$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Με άλλα λόγια, για να βρεθούν τα άγνωστα στοιχεία του προσταθεροποιητή, πραγματοποιείται πολλαπλασιασμός κάθε γραμμής, έστω  $i$ , του προσταθεροποιητή με το μητρώο  $A$  και αν  $K^*$  είναι το πλήθος των μη - μηδενικών στοιχείων της  $i$  γραμμής, τότε η εύρεση των στοιχείων αυτής γραμμής του προσταθεροποιητή είναι ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, με  $K$  στο πλήθος εξισώσεις (όσες και οι στήλες του μητρώου  $A$ ) και  $K^*$  αγνώστους. Διευκρινίζεται ότι,  $K^* \leq K$ , γιατί πολλά από τα στοιχεία του προσταθεροποιητή αναμένεται να έχουν μηδενιστεί κατά την πρώτη φάση. Αυτό πραγματοποιείται για όλες τις γραμμές του προσταθεροποιητή, επιλύονται δηλαδή  $K$  σε πλήθος προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων. Τα συστήματα δηλαδή που πρέπει να επιλυθούν για να βρεθούν οι άγνωστες τιμές του προσταθεροποιητή είναι

$$P_{i,\rho}A_{\rho,j} = \vec{e}_i^T \quad i, \rho, j = 1, 2, \dots, K \quad (3.5)$$

Ο διπλός επαναλαμβανόμενος δείκτης δηλώνει άθροιση κατά Einstein,  $\vec{e}_i^T$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα - γραμμή που έχει στην  $i$  στήλη του την τιμή 1. Η σχέση 3.5 είναι  $K$  συστήματα (1 για κάθε γραμμή του μητρώου  $P$ )  $K$  εξισώσεων  $K^*$  αγνώστους. Το  $K^*$  είναι διαφορετικό για κάθε πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, γιατί ισούται με τους άγνωστους της εκάστοτε γραμμής. Αφού λυθούν τα  $K$  συστήματα ελαχίστων τετραγώνων, οι άγνωστες τιμές των στοιχείων του προσταθεροποιητή έχουν πλέον βρεθεί. Το κόστος αυτής της φάσης είναι η επίλυση των  $K$  σε πλήθος προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων.

Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτού του προσταθεροποιητή είναι ότι μπορεί να κατασκευαστεί παράλληλα, αφού τα  $K$  συστήματα ελαχίστων τετραγώνων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και μπορεί να επιλύονται ταυτοχρόνως, τρέχοντας σε διαφορετικούς επεξεργαστές. Αυτό μπορεί να επιταχύνει πολύ την εύρεση του προσταθεροποιητή αν επιλυθούν αυτά τα προβλήματα σε ένα σύστημα παράλληλων υπολογιστών ως αυτό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ. Τα στοιχεία του προσταθεροποιητή υπολογίζονται μία μόνο φορά για την επίλυση των συστημάτων 2.5. Στο σχήμα 3.2 φαίνεται, σε ένα μητρώο  $4 \times 4$ , η εύρεση του προσταθεροποιητή σε 4 επεξεργαστές.

Επόμενο βήμα πριν από την επίλυση των προσταθεροποιημένων συστημάτων 3.3 με την επαναληπτική μέθοδο των συζυγών κλίσεων, είναι η επιβολή τεχνητής συμμετρίας του προσταθεροποιητή, κάτι το οποίο είναι απαραίτητο για την μέθοδο των συζυγών κλίσεων, αφού ο προσταθεροποιητής που προκύπτει από αυτή τη μέθοδο δεν είναι συμμετρικός. Ένας απλός τρόπος είναι η εύρεση του μέσου όρου των συμμετρικών θέσεων του προσταθεροποιητή και η επιβολή αυτής της τιμής και στις δύο θέσεις. Με

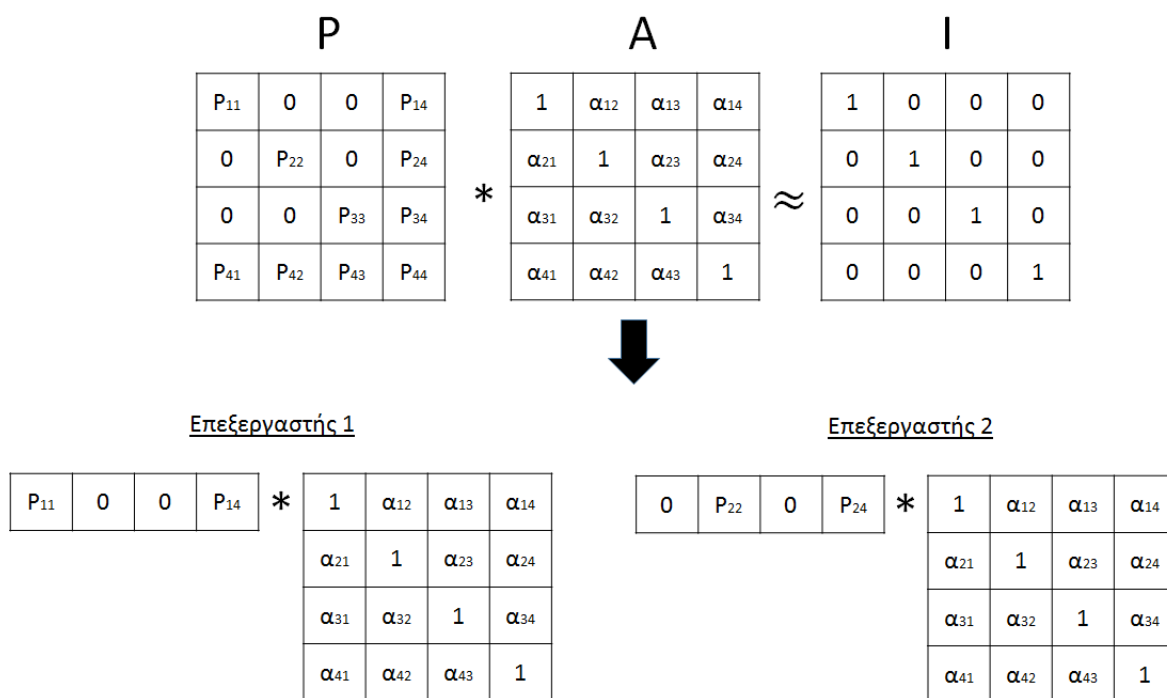
άλλα λόγια, υπολογίζεται η τιμή

$$t = \frac{p_{ij} + p_{ji}}{2} \quad i, j = 1, 2, \dots, K \quad (3.6)$$

και αντικαθίσταται και στις δύο θέσεις, ώστε να επιτευχθεί η συμμετρία ως

$$p_{ij} = p_{ji} = t \quad i, j = 1, 2, \dots, K \quad (3.7)$$

Τέλος, εφαρμόζεται η μέθοδος των συζυγών κλίσεων, η οποία θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο, για την επίλυση των τριών προσταθεροποιημένων συστημάτων 3.3, με σκοπό την εύρεση των βαρών του δικτύου RBF. Διευκρινίζεται ότι, η λύση αυτών των συστημάτων δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό των συστημάτων 2.5, αλλά επιτυγχάνεται ταχύτερη σύγκλιση.



**Σχήμα 3.2:** Στο σχήμα αυτό παρουσιάζεται η ανεξαρτησία εύρεσης των γραμμών του προσταθεροποιητή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας στο σχήμα αυτό απεικονίζεται το μητρώο A διάστασης 4×4, καθώς και ο προσταθεροποιητής ίδιας διάστασης αφού έχει καθοριστεί ο “οδηγός μη - μηδενικών στοιχείων” του. Ο επεξεργαστής 1 αναλαμβάνει την εύρεση των άγνωστων στοιχείων του προσταθεροποιητή της πρώτης γραμμής, ενώ την ίδια στιγμή ο επεξεργαστής 2 αναλαμβάνει την εύρεση των άγνωστων τιμών του προσταθεροποιητή της δεύτερης γραμμής κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο, ο χρόνος εύρεσης του προσταθεροποιητή μειώνεται πάρα πολύ σε σχέση με την εύρεση αυτού σειριακά, με ένα δηλαδή επεξεργαστή.



## Κεφάλαιο 4

# Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων

### 4.1 Εισαγωγή

Για την εκπαίδευση ενός δικτύου RBF είναι αναγκαία η επίλυση τριών γραμμικών συστημάτων, ενός για κάθε κατεύθυνση συντεταγμένων, για τριδιάστατα προβλήματα. Πρακτικά, αυτά μπορούν να επιλυθούν με οποιαδήποτε μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων αλλά, επειδή όπως έχει αναφερθεί, η τάξη αυτών των συστημάτων εξαρτάται από το πλήθος των κέντρων του δικτύου RBF, που σε βιομηχανικές εφαρμογές μπορεί να είναι και της τάξης του  $10^6$ , τα συστήματα αυτά πρέπει αναγκαστικά να επιλυθούν με μία επαναληπτική μέθοδο, για να έχουν αποδεκτή ταχύτητα επίλυσης.

Το παρόν κεφάλαιο, εστιάζει στην παρουσίαση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων (Conjugate Gradient) [5], [26], μιας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης γραμμικών συστημάτων, η οποία χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, με σκοπό την εκπαίδευση του δικτύου RBF. Ένας λόγος παραπάνω βάσει του οποίου επιλέχθηκε αυτή η μέθοδος, είναι ότι τα συστήματα που πρέπει να λυθούν για την εκπαίδευση του δικτύου έχουν συμμετρικά μητρώα συντελεστών.

Αν θεωρηθεί ότι το προς επίλυση γραμμικό σύστημα είναι το

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (4.1)$$

τότε η βασική αρχή μιας επαναληπτικής μεθόδου ανίχνευσης κατά γραμμή είναι να δημιουργείται η επόμενη προσέγγιση  $\vec{x}^{n+1}$  της λύσης του συστήματος 4.1 χρησιμοποιώντας την τρέχουσα  $\vec{x}^n$  και μία κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}^n$  (search direction) [5],

σύμφωνα με το σχήμα

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta \vec{p}^n \quad (4.2)$$

όπου  $\eta$  είναι το μήκος του βήματος (step length) στην κατεύθυνση  $p^n$  και ο άνω δείκτης  $n$  συμβολίζει τον αριθμό της επανάληψης ή του βήματος. Στη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n \quad (4.3)$$

καθώς η τιμή  $\eta$  δεν είναι σταθερή με τις επαναλήψεις και υπολογίζεται σε κάθε βήμα. Για την επεξήγηση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων, είναι αναγκαίο να παρουσιαστεί πρώτα η έννοια της τετραγωνικής μορφής (quadratic form) ενός διανύσματος  $\vec{x}$ , η οποία είναι κάθε βαθμωτή συνάρτηση της μορφής

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x} + c \quad (4.4)$$

όπου, αν το  $A$  είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο, τότε η ελαχιστοποίηση της  $F(\vec{x})$  (σχέση 4.4) ταυτίζεται με τη λύση του γραμμικού συστήματος 4.1. Με άλλα λόγια, αν  $\vec{x}^*$  η λύση του γραμμικού συστήματος 4.1, δηλαδή  $\vec{x}^* = A^{-1} \vec{b}$ , τότε αυτό είναι και το καθολικό ελάχιστο της  $F(\vec{x})$  (σχέση 4.4). Αυτό συμβαίνει, γιατί η κλίση της  $F(\vec{x})$  είναι

$$\nabla F(\vec{x}) = \frac{1}{2} A^T \vec{x} + \frac{1}{2} A \vec{x} - \vec{b} \quad (4.5)$$

η οποία, για συμμετρικό μητρώο  $A$ , γράφεται ως

$$\nabla F(\vec{x}) = A \vec{x} - \vec{b} \quad (4.6)$$

το οποίο μηδενίζοντας το, οδηγεί στη λύση του συστήματος 4.1. Όλα όσα προαναφέρθηκαν είναι μια μικρή εισαγωγή που απαιτείται για την επεξήγηση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων που ακολουθεί.

## 4.2 Μέθοδος των συζυγών κλίσεων

Αφετηρία για την ανάπτυξη της μεθόδου των συζυγών μεθόδων επίλυσης γραμμικών προβλημάτων (ή, ισοδύναμα, την ελαχιστοποίηση της τετραγωνικής μορφής της σχέσης

4.4) υπήρξε η τάση να αναπτυχθεί μια μέθοδος ανίχνευσης κατά γραμμή, στην οποία να εξαντλείται το ψάξιμο της λύσης κατά την κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}^n$ , ώστε αυτή να χρησιμοποιείται μία μόνο φορά. Με άλλα λόγια, αν  $\vec{x} \in \mathbb{R}^K$  τότε η επίλυση ενός  $K \times K$  γραμμικού συστήματος απαιτεί  $K$  το πολύ βήματα [5]).

Μια καλή λύση για αυτό είναι η επιλογή κάθετων κατευθύνσεων ανίχνευσης για τις οποίες ισχύει

$$\vec{p}^{iT} \vec{p}^j = 0, \quad i \neq j \quad (4.7)$$

Αν θεωρηθεί ότι η λύση του συστήματος 4.1 (ή ισοδύναμα το καθολικό ελάχιστο της τετραγωνικής μορφής της σχέσης 4.4) είναι το  $\vec{x}^*$  τότε, αφαιρώντας και από τα δύο μέλη της σχέσης 4.3 το  $\vec{x}^*$  και με τον ορισμό του σφάλματος να είναι

$$\vec{e}^n = \vec{x}^* - \vec{x}^n \quad (4.8)$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$\vec{e}^{n+1} = \vec{e}^n - \eta^n \vec{p}^n \quad (4.9)$$

Επειδή είναι επιθυμητό να εξαντληθεί το ψάξιμο κατά την κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}^n$ , τελειώνοντας με αυτή την κατεύθυνση πραγματοποιείται κίνηση με κάθετα  $\vec{p}$ , απαιτείται το νέο σφάλμα να είναι κάθετο στην παλιά κατεύθυνση  $\vec{p}^{nT}$ , ή ισοδύναμα

$$\vec{p}^{nT} \vec{e}^{n+1} = 0 \quad (4.10)$$

Όμως, από τη σχέση 4.9, με αντικατάσταση στην 4.10 προκύπτει

$$\vec{p}^{nT} (\vec{e}^n - \eta^n \vec{p}^n) = 0 \quad (4.11)$$

και λύνοντας ως προς το μήκος βήματος προκύπτει

$$\eta^n = \frac{\vec{p}^{nT} \vec{e}^n}{\vec{p}^{nT} \vec{p}^n} \quad (4.12)$$

Όμως, πρακτικά, δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η 4.12 γιατί απαιτεί τη γνώση του σφάλματος της τρέχουσας επανάληψης,  $\vec{e}^n$ , το οποίο αν ήταν γνωστό, θα ήταν γνωστή και λύση του συστήματος. Έτσι εναλλακτικά επιβάλλεται το τρέχον υπόλοιπο

(residual)

$$\vec{r}^n = \vec{b} - A\vec{x}^n \quad (4.13)$$

να είναι κάθετο σε κάθε προηγούμενη κατεύθυνση ανίχνευσης  $\vec{p}^n$ , δηλαδή

$$\vec{p}^{nT} \vec{r}^{n+1} = 0 \quad (4.14)$$

Επειδή όμως

$$\vec{r}^n = \vec{b} - A\vec{x}^{n+1} = \vec{b} - A(\vec{x}^* - \vec{e}^{n+1}) \quad (4.15)$$

και  $\vec{b} - A\vec{x}^* = 0$ , ισχύει ότι

$$\vec{r}^{n+1} = A\vec{e}^{n+1} \quad (4.16)$$

τότε η σχέση 4.14 γράφεται και ως

$$\vec{p}^{nT} A\vec{e}^{n+1} = 0 \quad (4.17)$$

Συγχρόνως, υιοθετώντας Gram - Schmidt διατύπωση, υποθέτοντας δηλαδή είναι διαθέσιμα  $K$  γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ( $K \times K$  είναι η διάσταση του μητρώου  $A$ ), τα  $\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^{K-1}$ , τα οποία λ.χ. μπορεί να είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους καρτεσιανούς άξονες του χώρου των λύσεων, παράγεται κάθε διάνυσμα  $\vec{p}^n$  από τη σχέση

$$\vec{p}^n = \vec{u}^n + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} \vec{p}^i \quad (4.18)$$

Με αφετηρία τη σχέση 4.9, προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned} \vec{e}^n &= \vec{e}^0 - \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i \vec{p}^i \\ e^K &= \vec{e}^0 - \sum_{i=0}^{K-1} \eta^i \vec{p}^i = 0 \end{aligned}$$

αφού, φτάνοντας στο  $K$ -ιστό βήμα, το σφάλμα της λύσης μηδενίζεται. Αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\vec{e}^n = \sum_{i=0}^{K-1} \eta^i \vec{p}^i \quad (4.19)$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 4.19 με  $\vec{p}^{mT} A$  ( $m < n$ ), προκύπτει ότι

$$\vec{p}^{mT} A \vec{e}^{n+1} = 0, \forall m < n \quad (4.20)$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=n}^{K-1} \vec{p}^{mT} A \vec{p}^i = 0, \quad \forall m < n \quad (4.21)$$

Αυτό, πρακτικά, σημαίνει ότι

$$\vec{p}^{iT} A \vec{p}^j = 0, \quad i \neq j \quad (4.22)$$

το οποίο είναι η έκφραση της  $A$ -ορθογωνιότητας ( $A$ -orthogonal), η μαθηματική, δηλαδή, διατύπωση της συζυγίας (conjugacy).

Στη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, στη σχέση 4.18, ως διανύσματα  $\vec{u}^0, \vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^{K-1}$ , επιλέγονται να είναι τα διανύσματα των υπολοίπων  $\vec{r}^0, \vec{r}^1, \vec{r}^2, \dots, \vec{r}^{K-1}$  και, έτσι, προκύπτει η σχέση

$$\vec{p}^n = \vec{r}^n + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} \vec{p}^i \quad (4.23)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση 4.22 της  $A$ -ορθογωνιότητας, καθώς και την έκφραση 4.23 του Gram-Schmidt, προκύπτει διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\vec{p}^{iT} A \vec{p}^j &= 0 \\
(\vec{r}^i + \sum_{m=0}^{i-1} \beta_{im} \vec{p}^m)^T A \vec{p}^j &= 0 \\
\vec{r}^{iT} A \vec{p}^j + \sum_{m=0}^{i-1} \beta_{im} \vec{p}^{mT} A \vec{p}^j &= 0 \\
\vec{r}^{iT} A \vec{p}^j + \beta_{ij} \vec{p}^{jT} A \vec{p}^j &= 0
\end{aligned}$$

άρα

$$\beta_{ij} = - \frac{\vec{r}^{iT} A \vec{p}^j}{\vec{p}^{jT} A \vec{p}^j}, \quad i > j \quad (4.24)$$

Βέβαια, με αυτό τον τύπο πρέπει να αποθηκευτούν όλα τα προηγούμενα  $\vec{p}^j$  για να φτιαχτούν όλα τα  $\beta_{ij}$ . Για την περαιτέρω επεξεργασία του αριθμητή της σχέσης αυτής, λαμβάνεται υπόψη η σχέση 4.9, η οποία, μετά από πράξεις, καταλήγει στην

$$\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n - \eta^n A \vec{p}^n \quad (4.25)$$

ή, ισοδύναμα, στην

$$\vec{r}^{j+1} = \vec{r}^j - \eta^j A \vec{p}^j \quad (4.26)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 4.26 με  $\vec{r}^{iT}$  ( $i, j$ )

$$\vec{r}^{iT} \vec{r}^{j+1} = \vec{r}^{iT} \vec{r}^j - \eta^j \vec{r}^{iT} A \vec{p}^j \quad (4.27)$$

εμφανίζεται ένα γινόμενο υπολοίπων (ο όρος  $\vec{r}^{iT} \vec{r}^{j+1}$ ) και ο αριθμητής του  $\beta_{ij}$  της εξίσωσης 4.24. Όσον αφορά τα γινόμενα των υπολοίπων, αν πολλαπλασιαστεί η σχέση 4.23 με  $\vec{r}^j$  ( $i < j$ ), προκύπτει ότι

$$\vec{p}^{iT} \vec{r}^j = \vec{r}^{iT} \vec{r}^j + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} \vec{p}^{kT} \vec{r}^j \quad (4.28)$$

στην οποία οι όροι  $\vec{p}^{iT} \vec{r}^j$  και  $\vec{p}^{kT} \vec{r}^j$  είναι ίσοι με 0, λόγω της εξίσωσης 4.14, οπότε

η σχέση 4.28 καταλήγει στη μορφή

$$\vec{r}^{iT} \vec{r}^j = 0 \quad (4.29)$$

Συνεπώς, η σχέση 4.24, για κάθε τιμή του  $i$ , αποκτά μη-μηδενική τιμή μόνο αν  $i = j + 1$  ή  $j = i - 1$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση 4.27 λαμβάνει τη μορφή

$$\vec{r}^{iT} A \vec{p}^{i-1} = \frac{1}{\eta^{i-1}} \vec{r}^{iT} \vec{r}^i \quad (4.30)$$

με αποτέλεσμα, η εξίσωση 4.24 να γράφεται

$$\beta_{i,i-1} = \beta^i = \frac{1}{\eta^{i-1}} \frac{\vec{r}^{iT} \vec{r}^i}{\vec{p}^{i-1T} \vec{p}^{i-1}} \quad (4.31)$$

Έτσι, οι συντελεστές  $\beta$  διατάσσονται στην παρακάτω εύχρηστη μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ \beta^1 & - & - & - \\ - & \beta^2 & - & - \\ - & - & \beta^3 & - \end{bmatrix}$$

Τελευταίο στάδιο είναι η εύρεση του βέλτιστου μήκους βήματος  $\eta$  το οποίο, στη μέθοδο των συζυγών κλίσεων είναι

$$\eta^n = \frac{\vec{p}^{nT} \vec{r}^n}{\vec{p}^{nT} A \vec{p}^n} \Rightarrow \eta^n = \frac{\vec{p}^{i-1T} \vec{r}^{i-1}}{\vec{p}^{i-1T} A \vec{p}^{i-1}} \quad (4.32)$$

και η σχέση 4.31 γίνεται τελικά

$$\beta^i = \frac{\vec{r}^{iT} \vec{r}^i}{\vec{p}^{i-1T} \vec{r}^{i-1}} \quad (4.33)$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της σχέσης για το  $\beta^i$ , είναι ότι υπολογίζεται ένα  $\beta$ , εξοικονομώντας με αυτό τον τρόπο μνήμη. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση 4.23 με  $\vec{r}^i$ , προκύπτει

$$\vec{p}^{iT} \vec{r}^i = \vec{r}^{iT} \vec{r}^i + \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{ik} \vec{p}^{kT} \vec{r}^i \quad (4.34)$$

Με την παραδοχή ότι  $\vec{p}^{kT} \vec{r}^i = 0$  (για  $k < i$ ), λόγω της 4.14, η 4.34 γίνεται

$$\vec{p}^{iT} \vec{r}^i = \vec{r}^{iT} \vec{r}^i \Rightarrow \vec{p}^{i-1T} \vec{r}^{i-1} = \vec{r}^{i-1T} \vec{r}^{i-1} \quad (4.35)$$

Επομένως, το  $\beta^i$  είναι ίσο με

$$\beta^i = \frac{\vec{r}^{iT} \vec{r}^i}{\vec{r}^{i-1T} \vec{r}^{i-1}} \quad (4.36)$$

### 4.2.1 Η Μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων - Βασικός Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για γραμμικά προβλήματα διατυπώνεται ως εξής [5]:

**Βήμα 0:** Επιλογή αρχικής λύσης  $\vec{x}^0$ . Υπολογισμός αρχικού υπολοίπου  $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$ . Ορισμός αρχικής κατεύθυνσης αντίχενωσης  $\vec{p}^0 = \vec{r}^0$ . Δείκτης  $n = 0$ .

**Βήμα 1:** Υπολογισμός μεγέθους βήματος  $\eta^n = \frac{\vec{r}^{nT} \vec{r}^n}{\vec{p}^{nT} A \vec{p}^n}$ , (σχέση 7.1 σε συνδυασμό με την 4.35).

**Βήμα 2:** Ανανέωση λύσης  $\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n$ .

**Βήμα 3:** Ανανέωση υπολοίπου  $\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n - \eta^n A \vec{p}^n$ , (σχέση 4.25).

**Βήμα 4:** Υπολογισμός συντελεστή  $\beta^{n+1} = \frac{\vec{r}^{n+1T} \vec{r}^{n+1}}{\vec{r}^{nT} \vec{r}^n}$ , (σχέση 4.36).

**Βήμα 5:** Ανανέωση διανύσματος κατεύθυνσης αντίχενωσης  $\vec{p}^{n+1} = \vec{r}^{n+1} + \beta^{n+1} \vec{p}^n$ , (προκύπτει από τη σχέση 4.25, για δείκτη  $n + 1$  αντί του  $n$ ).

**Βήμα 6:** Ανανέωση τιμής δείκτη  $n \leftarrow n + 1$ . Επιστροφή στο βήμα 1, μέχρι σύγκλισης.

### 4.2.2 Αλγόριθμος των Συζυγών Κλίσεων για την επίλυση προσταθεροποιημένων συστημάτων

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων, εφαρμόζεται κατάλληλα για την επίλυση των προσταθεροποιημένων συστημάτων 3.3, για την εύρεση των βαρών του δικτύου RBF. Επομένως, αν ληφθεί υπόψη ότι  $P$  είναι ο προσταθεροποιητής, ο αλγόριθμος της μεθόδου για την επίλυση των προσταθεροποιημένων συστημάτων 3.3 διατυπώνεται ως εξής:



**Βήμα 0:** Επιλογή αρχικής λύσης  $\vec{x}^0$ . Υπολογισμός αρχικού υπολοίπου  $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$  και της ποσότητας  $\vec{z}^0 = P\vec{r}^0$ . Ορισμός αρχικής κατεύθυνσης ανίχνευσης  $\vec{p}^0 = \vec{z}^0$ . Δείκτης  $n = 0$ .

**Βήμα 1:** Υπολογισμός μεγέθους βήματος  $\eta^n = \frac{\vec{r}^{nT}\vec{z}^n}{\vec{p}^{nT}A\vec{p}^n}$ .

**Βήμα 2:** Ανανέωση λύσης  $\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \eta^n \vec{p}^n$ .

**Βήμα 3:** Ανανέωση υπολοίπου  $\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n - \eta^n A\vec{p}^n$  και της ποσότητας  $\vec{z}^{n+1} = P\vec{r}^{n+1}$ .

**Βήμα 4:** Υπολογισμός συντελεστή  $\beta^{n+1} = \frac{\vec{z}^{n+1T}\vec{r}^{n+1}}{\vec{z}^nT\vec{r}^n}$ .

**Βήμα 5:** Ανανέωση διανύσματος κατεύθυνσης ανίχνευσης  $\vec{p}^{n+1} = \vec{z}^{n+1} + \beta^{n+1}\vec{p}^n$ .

**Βήμα 6:** Ανανέωση τιμής δείκτη  $n \leftarrow n+1$ . Επιστροφή στο βήμα 1, μέχρι σύγκλισης.



# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογές στο πλέγμα μεταξύ δύο τετραγώνων

### 5.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η ενότητα αυτή ασχολείται με την εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυα συναρτήσεων ακτινικής βάσης. Σκοπός είναι η εφαρμογή της μεθόδου και η διερεύνησή της για το πώς η στροφή ενός τετραγώνου (τοποθετημένου μέσα σε ένα μεγαλύτερο τετράγωνο και με τον ενδιάμεσο χώρο να έχει πλεγματοποιηθεί με τριγωνικά στοιχεία με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου - advancing front method) γύρω από το κέντρο του, επηρεάζει την ποιότητα του πλέγματος. Πρόκειται μεν για μια, εκ πρώτης όψεως, απλή εφαρμογή, αλλά που μπορεί να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για την απόδοση και τη συμπεριφορά της μεθόδου μετακίνησης πλέγματος.

Γι' αυτό το λόγο φτιάχτηκε ένα τετράγωνο διαστάσεων μοναδιαίου μήκους μέσα σε ένα άλλο τετράγωνο διαστάσεων  $4 \times 4$  όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκε μη-δομημένο πλέγμα με τριγωνικά στοιχεία, με τη βοήθεια λογισμικού της ΜΠΥΡ&Β/ΕΜΠ, γύρω από το τετράγωνο διαστάσεων  $1 \times 1$ . Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιούνται διαφορετικού μέτρου στροφές του εσωτερικού τετραγώνου αριστερόστροφα, προσαρμόζεται το αρχικό πλέγμα στο αλλαγμένο περίγραμμα μέσω του δικτύου RBF και διερευνάται η ποιότητα του πλέγματος. Πρωτίστως ενδιαφέρον προκαλεί το πότε δημιουργούνται ανεπιθύμητα αντεστραμμένα (inverted) τρίγωνα.

Ως συναρτήσεις ενεργοποίησης του δικτύου RBF επιλέχθηκαν μία συνάρτηση τοπικής επιρροής και μια ολικής επιρροής. Η συνάρτηση τοπικής επιρροής που χρησιμοποιήθηκε

είναι η Wendland  $C^2$  με τιμή που δίνεται από τη σχέση

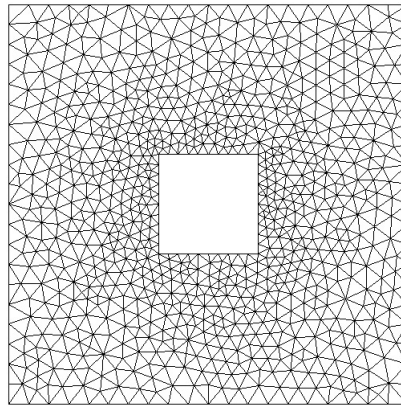
$$\phi(\xi) = \begin{cases} (1 - \xi)^4(4\xi + 1) & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0 & \xi > 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

ενώ η συνάρτηση ολικής επιρροής είναι η συνάρτηση Gauss σύμφωνα με τη σχέση

$$\phi(r) = e^{-r^2} \quad (5.2)$$

Υπενθυμίζεται ότι  $\xi = \frac{r}{R}$ , όπου  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{c_j}\|$  και  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_{c_j}$  τα διανύσματα θέσης δύο σημείων στο χώρο. Συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση τοπικής επιρροής ορίστηκε μία ακτίνα  $R$ , τέτοια ώστε κάθε κέντρο  $\mathbf{x}_{c_j}$  του δικτύου να επηρεάζει εκείνους τους κόμβους του χωρικού πλέγματος, εξαιρώντας τους οριακούς κόμβους, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε κύκλο ακτίνας  $R$  και κέντρο το εκάστοτε  $\mathbf{x}_{c_j}$  κέντρο του δικτύου RBF.

Επομένως, για τις δύο αυτές συναρτήσεις ενεργοποίησης, διερευνάται το πώς η στροφή του εσωτερικού τετραγώνου επηρεάζει τόσο την ποιότητα του πλέγματος, που προσαρμόζεται με τη μέθοδο της μετακίνησης πλέγματος με δίκτυα RBF, όσο και τη δημιουργία ανεπιθύμητων ανεστραμμένων τριγώνων. Για την συνάρτηση τοπικής επιρροής, το πρόγραμμα εκτελείται για διάφορες ακτίνες  $R$ . Στη συνέχεια, παρουσιάζονται σχόλια - συμπεράσματα για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των συναρτήσεων ενεργοποίησης 5.1 και 5.2 του δικτύου RBF στο πλέγμα του σχήματος 5.1.



**Σχήμα 5.1:** Το εσωτερικό τετράγωνο μοναδιαίου μήκους έχει 11 κόμβους ανά πλευρά, ενώ το εξωτερικό τετράγωνο, διαστάσεων  $4 \times 4$ , έχει 21 κόμβους σε κάθε πλευρά. Στο εσωτερικό τετράγωνο πραγματοποιούνται διαφορετικού μέτρου στροφές, προσαρμόζεται το αρχικό πλέγμα (το οποίο αποτελείται από 1648 τριγωνικά στοιχεία) στο στραμμένο περίγραμμα μέσω δικτύου RBF και γίνεται διερεύνηση της ποιότητας του πλέγματος.

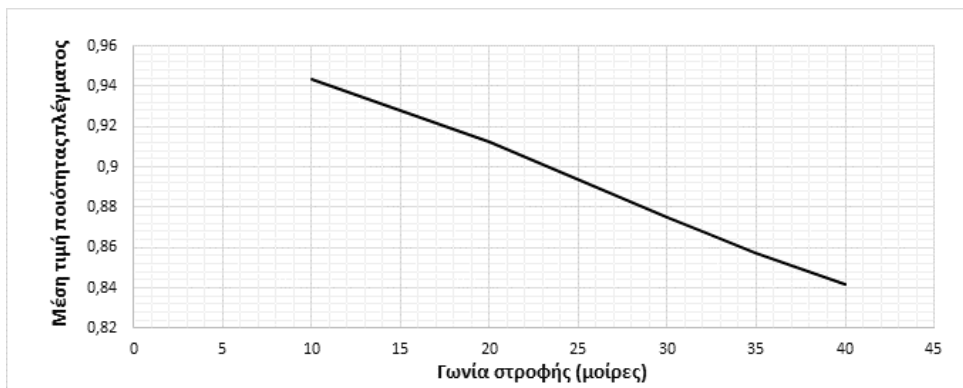
## 5.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

### 5.2.1 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=0.6$

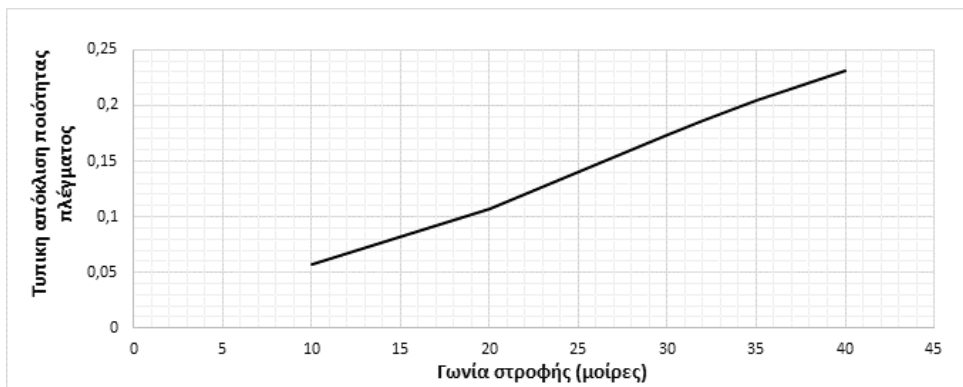
Πρώτη ακτίνα επιρροής που επιλέχτηκε για τη συνάρτηση ενεργοποίησης Wendland  $C^2$  είναι  $R=0.6$ . Έπειτα έγινε στροφή του εσωτερικού τετραγώνου για διάφορες γωνίες στροφής,  $\varphi$ . Στον πίνακα 5.1 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του για κάθε γωνία στροφής. Στα διαγράμματα των σχημάτων 5.2(α'), 5.2(β') και 5.2(γ') φαίνονται τα ίδια μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες, ενώ σχήμα 5.3 φαίνεται το τετράγωνο σε τέσσερις τυχαία επιλεγμένες γωνίες στροφής, καθώς και το πως διαμορφώθηκε το πλέγμα μετά την εφαρμογή της μεθόδου. Η στροφή του εσωτερικού τετραγώνου σταμάτησε στις 40 μοίρες, γιατί το πλέγμα εμφάνισε πολύ μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων.

$\varphi$ (μοίρες)	10	20	30	35	40
$\bar{q}_e$	0.944	0.912	0.875	0.857	0.842
$\sigma_{q_e}$	5.77E-2	0.107	0.173	0.205	0.231
$q_{e,min}$	0.630	0.327	3.02E-2	1.11E-2	7.62E-3

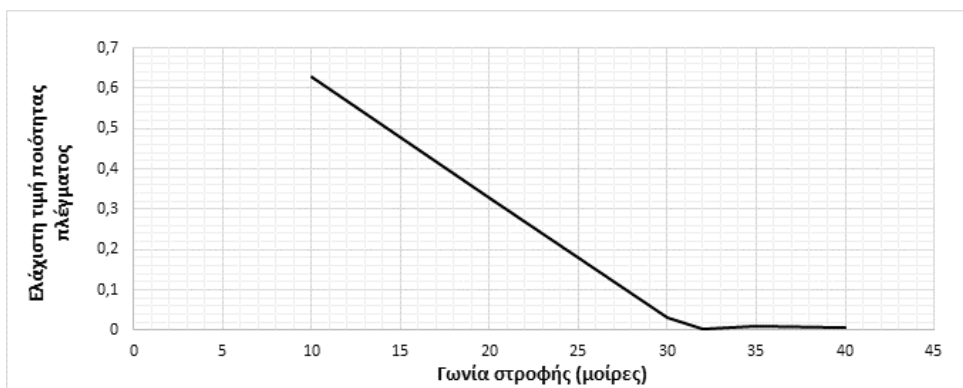
**Πίνακας 5.1:** Αποτελέσματα μέσης τιμής  $\bar{q}_e$ , τυπικής απόκλισης  $\sigma_{q_e}$  και ελάχιστη τιμής  $q_{e,min}$  της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η Wendland  $C^2$  με ακτίνα  $R=0.6$ .



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

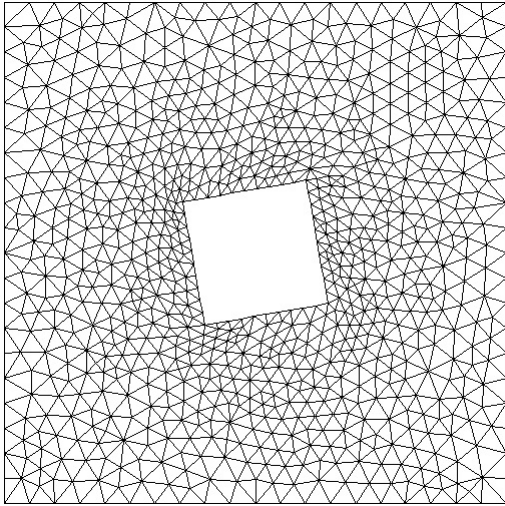


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

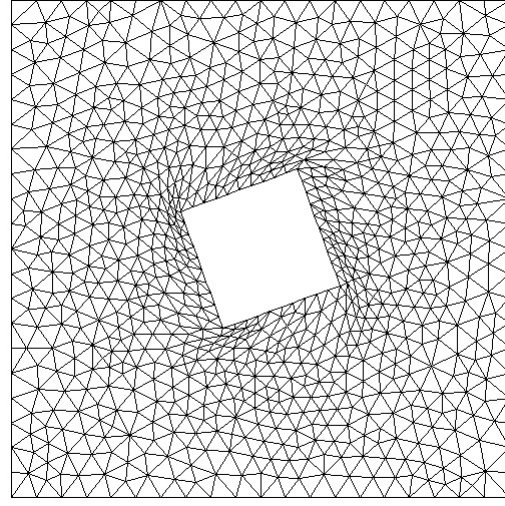


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

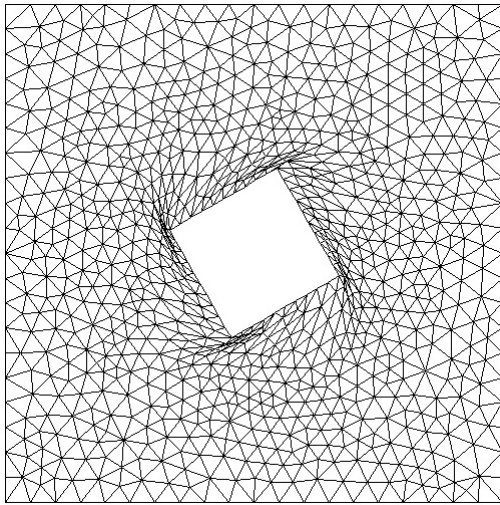
**Σχήμα 5.2:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, τα οποία προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυο  $RBF$ . Ως συνάρτηση ενεργοποίησης επιλέχθηκε η  $Wendland C^2$  με  $R=0.6$ .



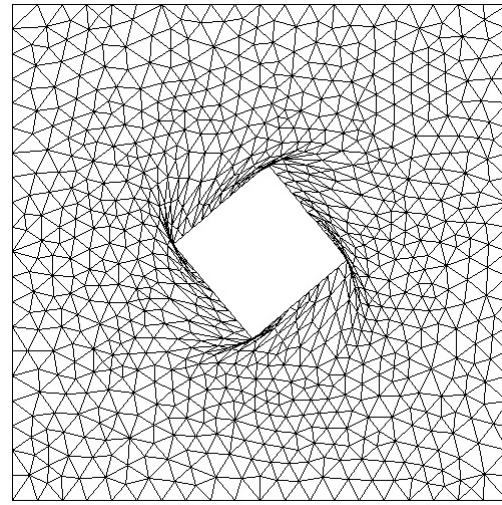
(α') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 10 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 20 μοίρες.



(γ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 30 μοίρες.



(δ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 40 μοίρες.

**Σχήμα 5.3:** Εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυο RBF σε τέσσερις γωνίες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, με χρήση της Wendland  $C^2$  με  $R=0.6$ . Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 40 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει έναν πολύ μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων, έχει δηλαδή κριθεί ακατάλληλο για χρήση με λογισμικό επίλυσης ΜΔΕ.

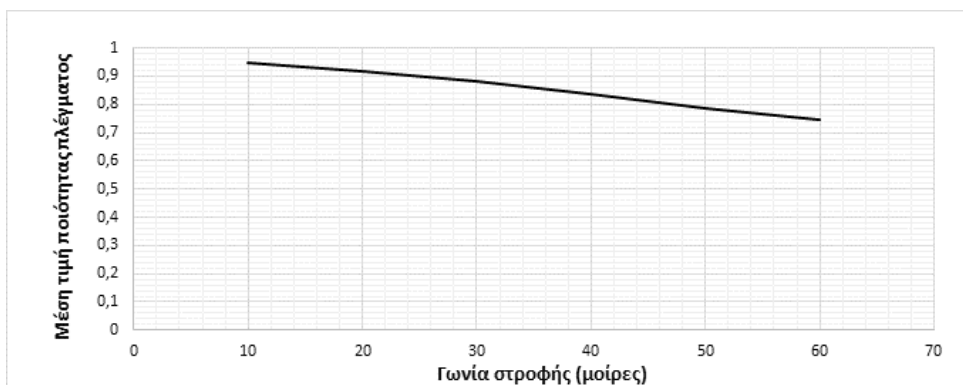
## 5.2.2 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=1.2$

Η επόμενη ακτίνα που επιλέχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι  $R=1.2$ . Ομοίως, στον πίνακα 5.2 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της ποιότητας για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , που επιλέχθηκε για την συγκεκριμένη περίπτωση. Στα διαγράμματα 5.4(α'), 5.4(β') και 5.4(γ') απεικονίζονται αντιστοίχως τα ίδια μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες. Στο σχήμα 5.5 φαίνεται το πως προσαρμόστηκε το αρχικό πλέγμα στο αλλαγμένο περίγραμμα, το οποίο έχει στραφεί κατά 20, 30, 40 και 55 μοίρες αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση, που η ακτίνα επιρροής είναι μεγαλύτερη, το πλέγμα άντεξε μεγαλύτερη γωνία στροφής, όπως αναμενόταν, πριν κριθεί ακατάλληλο.

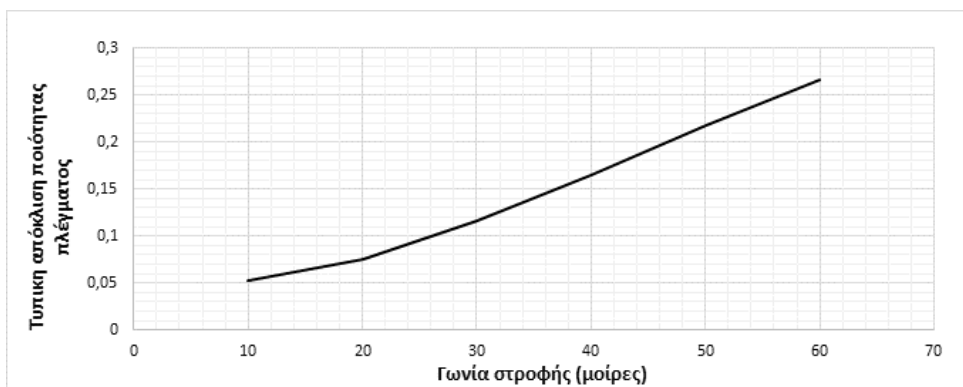
$\varphi$ (μοίρες)	10	20	30	40	55	60
$\bar{q}_e$	0.946	0.919	0.879	0.835	0.765	0.744
$\sigma_{q_e}$	5.21E-2	7.62E-2	0.116	0.165	0.241	0.266
$q_{e,min}$	0.680	0.601	0.486	0.271	1.02E-2	5.17E-4

**Πίνακας 5.2:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, με ακτίνα  $R=1.2$ .

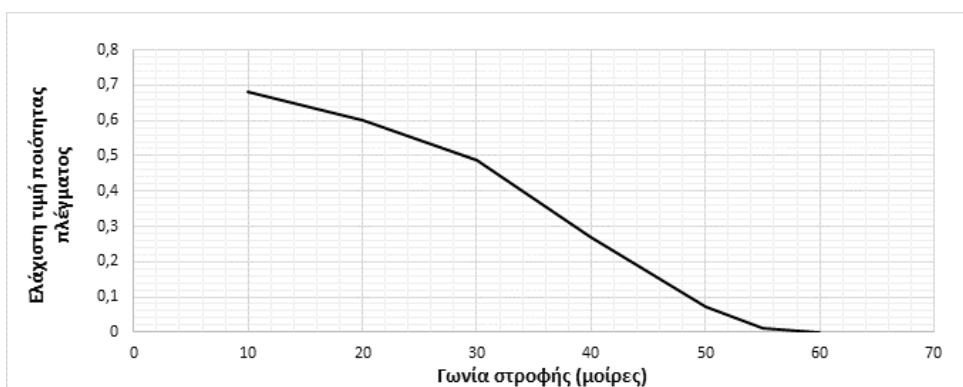




(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

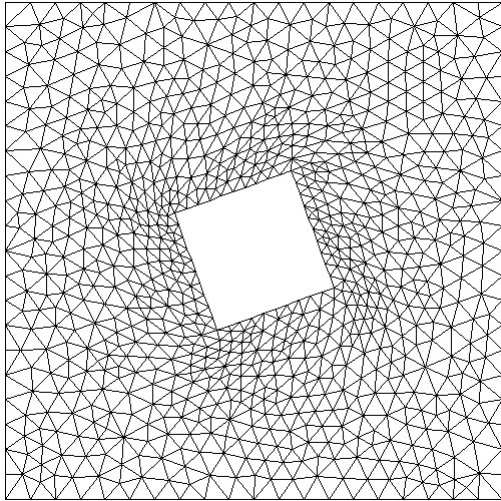


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

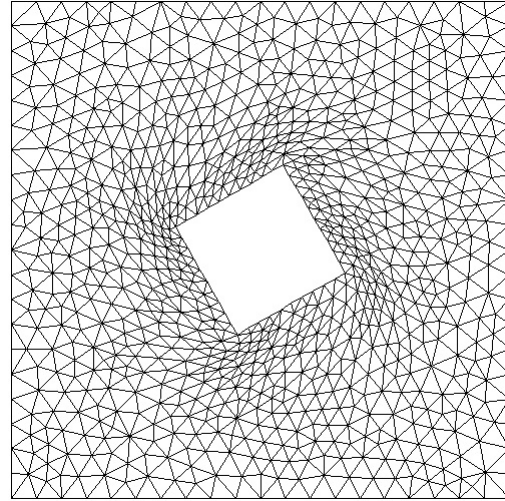


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

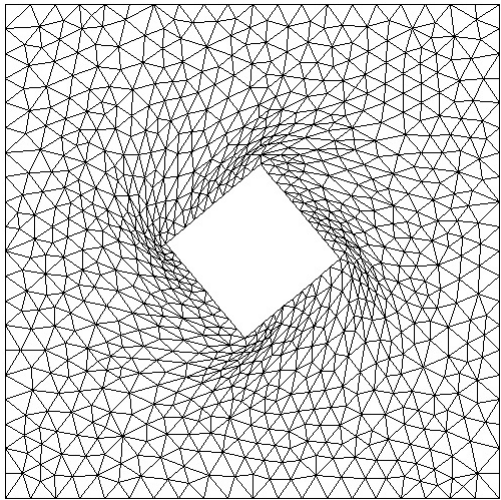
**Σχήμα 5.4:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, από την εφαρμογή της μεθόδου RBF. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης επιλέχθηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=1.2$ .



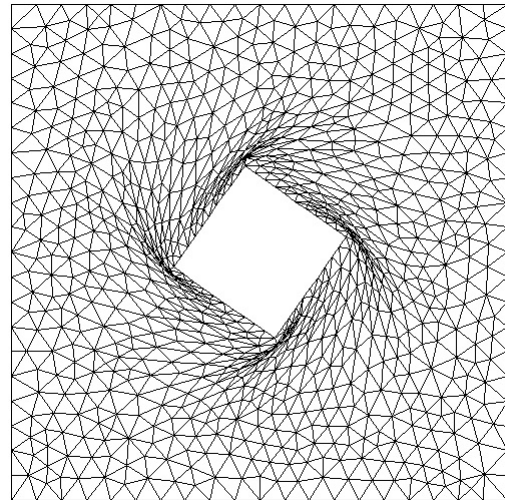
(α') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 20 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 30 μοίρες.



(γ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 40 μοίρες.



(δ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 55 μοίρες.

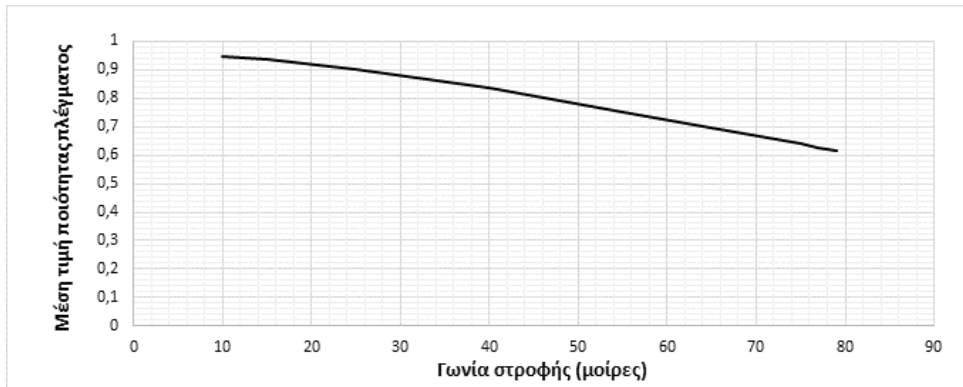
**Σχήμα 5.5:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε τέσσερις γωνίες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, στην περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκε η *Wendland C<sup>2</sup>* με  $R=1.2$ . Στην τελευταία περίπτωση, για στροφή 55 μοιρών, παρουσιάστηκαν 2 ανεστραμμένα τρίγωνα.

### 5.2.3 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ , $R=2$

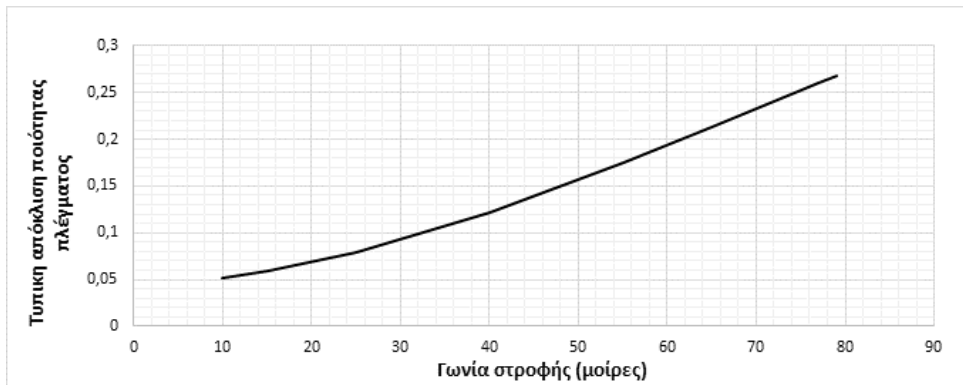
Τελευταία ακτίνα που επιλέχτηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι  $R=2$ . Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, έγιναν τα αντίστοιχα διαγράμματα και πίνακες, τα οποία φαίνονται στον πίνακα 5.3 και στα διαγράμματα 5.6. Η επιλεγείσα ακτίνα είναι τέτοια ώστε κάθε κέντρο του δικτύου RBF να περιλαμβάνει όλους τους κόμβους του εσωτερικού πλέγματος.

$\varphi$ (μοίρες)	15	25	40	55	65	75
$\bar{q}_e$	0.936	0.903	0.834	0.752	0.695	0.639
$\sigma_{q_e}$	5.11E-2	7.91E-2	0.122	0.174	0.213	0.253
$q_{e,min}$	0.681	0.551	0.421	0.269	0.154	1.26E-3

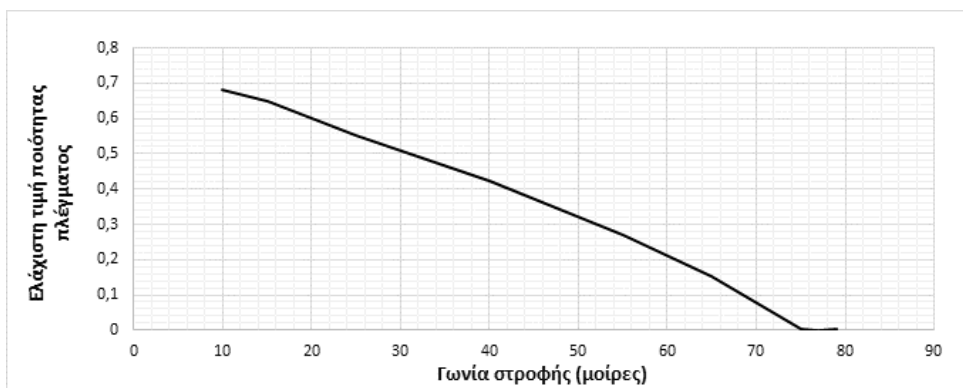
**Πίνακας 5.3:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  με ακτίνα  $R=2$ .



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

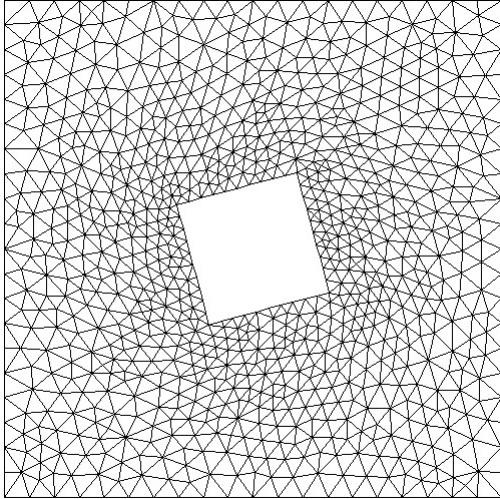


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

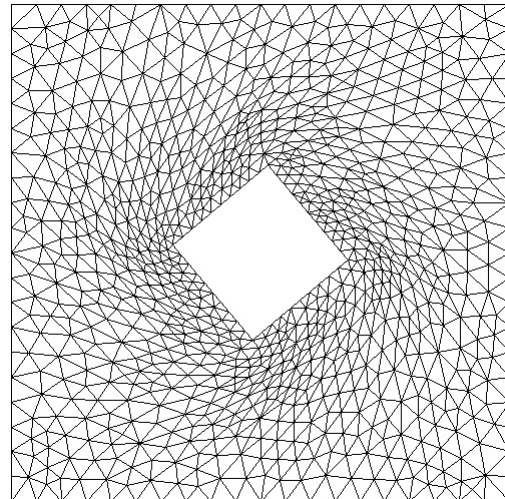


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

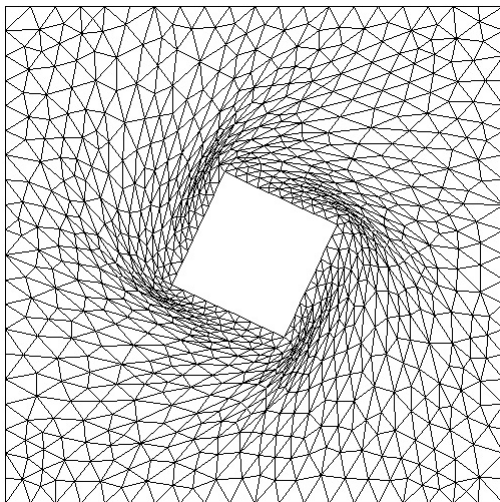
**Σχήμα 5.6:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου με τη  $Wendland C^2$  και  $R=2$ .



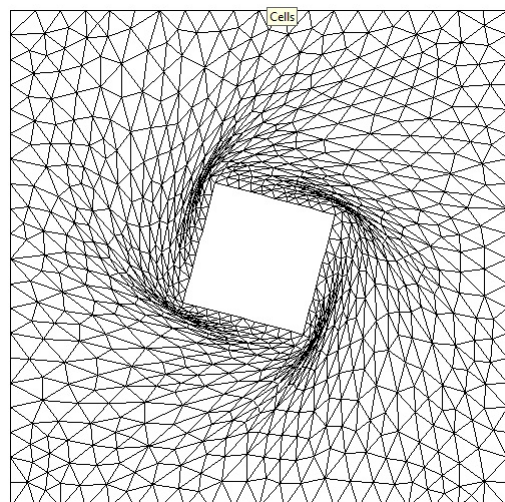
(α') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 15 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 40 μοίρες.



(γ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 60 μοίρες.



(δ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 75 μοίρες.

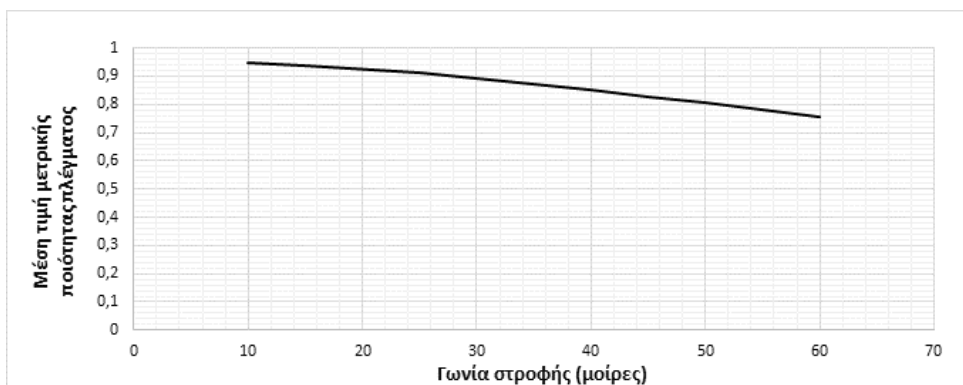
**Σχήμα 5.7:** Εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυο  $RBF$  σε τέσσερις γωνίες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, με τη  $Wendland C^2$  και  $R=2$ . Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 75 μοιρών, εμφανίστηκε ένα ανεστραμμένο τρίγωνο.

## 5.2.4 Αποτελέσματα με τη συνάρτηση Gauss

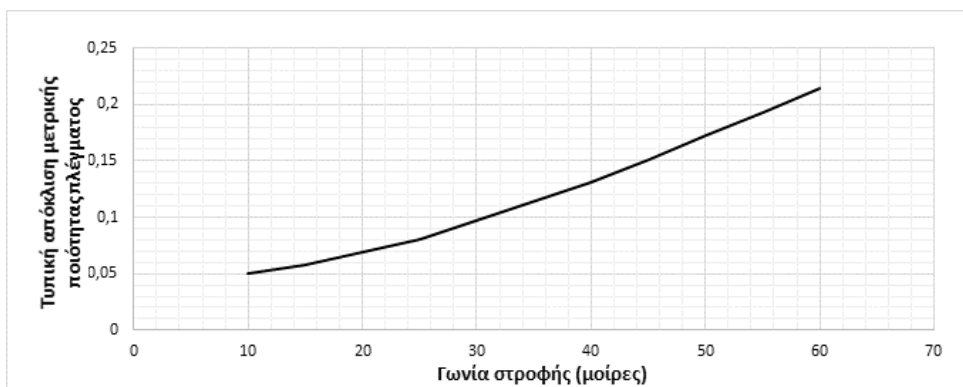
Στην ενότητα αυτή επιλέχθηκε ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF η συνάρτηση Gauss (σχέση 5.1), μια συνάρτηση ολικής επιρροής, με σκοπό να παρουσιαστούν και εδώ η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του πλέγματος. Στον πίνακα 5.4 φαίνονται τα αποτελέσματα αυτά για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , ενώ στα σχήματα 5.8(α'), 5.8(β') και 5.8(γ') παρουσιάζονται τα τρία αυτά μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής.

$\varphi$ (μοίρες)	15	25	40	45	55	60
$\bar{q}_e$	0.939	0.910	0.851	0.828	0.780	0.756
$\sigma_{q_e}$	5.80E-2	8.04E-2	0.131	0.151	0.193	0.214
$q_{e,min}$	0.626	0.417	6.33E-2	5.04E-2	2.63E-3	9.94E-3

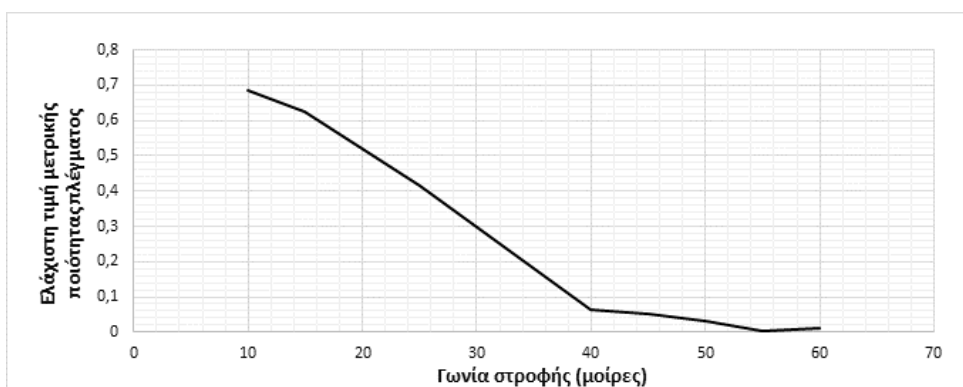
**Πίνακας 5.4:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου με τη συνάρτηση Gauss.



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

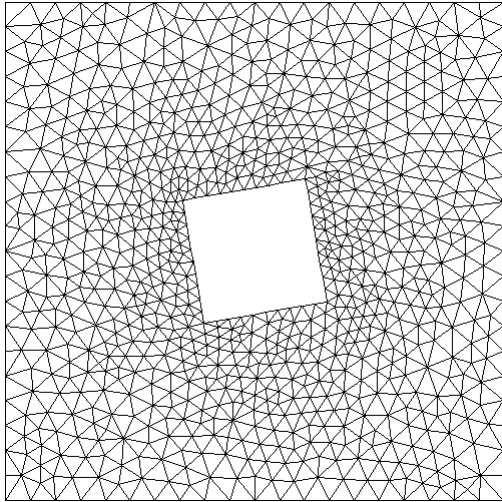


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

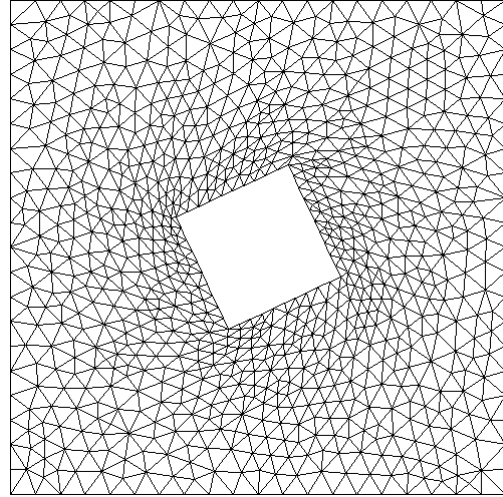


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου.

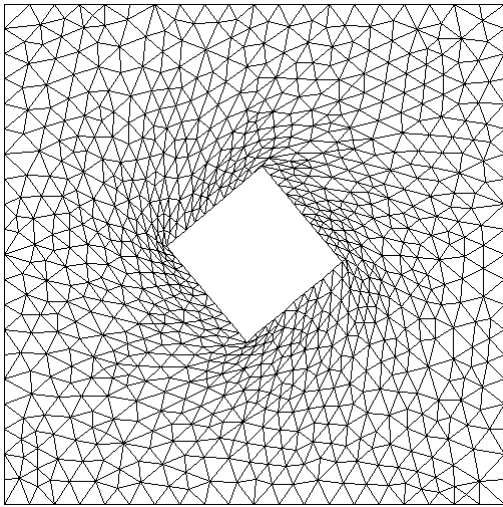
**Σχήμα 5.8:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, τα οποία προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου *RBF* και συνάρτηση ενεργοποίησης την *Gauss*.



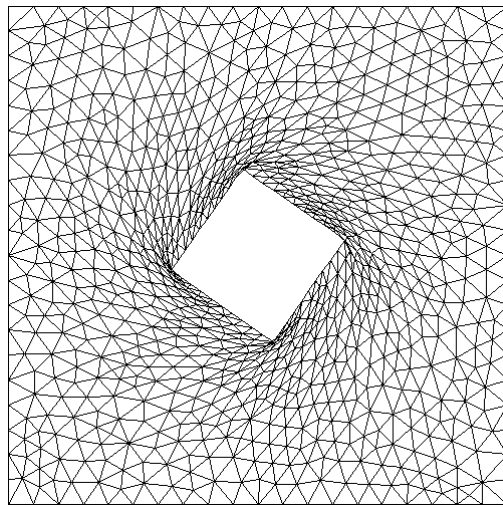
(α') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 10 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 25 μοίρες.



(γ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 40 μοίρες.



(δ') Γωνία στροφής εσωτερικού τετραγώνου κατά 55 μοίρες.

**Σχήμα 5.9:** Εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυο *RBF* σε τέσσερις γωνίες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, με τη συνάρτηση *Gauss*. Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 55 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει τρία ανεστραμμένα τρίγωνα.



### 5.3 Σχόλια

Όσον αφορά τη συνάρτηση ενεργοποίησης Wendland  $C^2$ , παρατηρείται ότι όσο η ακτίνα επιρροής αυξάνεται, τόσο πιο μεγάλη γωνία στροφής αντέχει το εσωτερικό τετράγωνο. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος, όπως εκφράστηκε με τη μετρική αυτή της μέσης αναλογίας, δεν καθορίζει το πότε το πλέγμα κρίνεται ακατάλληλο, αφού όσο αυξάνεται η ακτίνα επιρροής η ποιότητα είναι χειρότερη από την ποιότητα της κατάστασης στην οποία οριακά το πλέγμα γίνεται ακατάλληλο με άλλες ακτίνες  $R$ . Η Ιακωβιανή ορίζουσα του κάθε τριγωνικού στοιχείου είναι αυτή που καθορίζει το πότε είναι ακατάλληλο το πλέγμα. Όταν η ορίζουσα αυτή ενός, τουλάχιστον, τριγωνικού στοιχείου του πλέγματος αποκτήσει αρνητική τιμή, τότε σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ανεστραμμένο τρίγωνο, το οποίο καθιστά το πλέγμα ακατάλληλο.

Επίσης, από τα σχήματα 5.2, 5.4, 5.6 και 5.8, παρατηρείται ότι σε όλες τις περιπτώσεις (και σε αυτές που χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  και σε αυτές που χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση Gauss ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF), η μέση τιμή μειώνεται, αλλά η τυπική απόκλιση αυξάνεται καθώς αυξάνεται η γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, γεγονός που δείχνει ότι υπάρχει αυξημένη ποικιλία στην μετρική ποιότητας των τριγώνων.

Επιπλέον, στον πίνακα 5.5 φαίνεται, για κάθε ακτίνα επιρροής της συνάρτησης Wendland  $C^2$ , η κρίσιμη γωνία,  $\varphi_{crit}$ , στην οποία παρουσιάστηκε τουλάχιστον ένα ανεστραμμένο τρίγωνο. Για τις γωνίες αυτές, παρατίθενται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του πλέγματος. Τα ίδια μεγέθη φαίνονται αντίστοιχα στον πίνακα 5.6 για την συνάρτηση Gauss του δικτύου RBF. Παρατηρείται ότι με τη συνάρτηση Gauss το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο στις 55 μοίρες στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, ενώ με την Wendland  $C^2$  το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο στην ίδια γωνία για ακτίνα επιρροής  $R=1.2$ . Η διαφορά είναι ότι, στην τελευταία συνάρτηση, το πλέγμα είχε λίγο καλύτερη μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι τόσο μεγάλες γωνίες στροφής, λ.χ. 40 μοιρών, δεν θα χρειαστεί σχεδόν ποτέ να εφαρμοστούν σε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Αν όμως η μέθοδος αυτή εφαρμοστεί λ.χ. σε μια παλλόμενη αεροτομή, έχει νόημα, γιατί σε αυτήν την περίπτωση κανείς δεν ξέρει τι μπορεί να αντιμετωπίσει.

Ακτίνα επιρροής $R$	0.6	1.2	2
$\varphi_{crit}$	32	55	75
$\bar{q}_e$	0.857	0.765	0.639
$\sigma_{q_e}$	0.205	0.241	0.253
$q_{e,min}$	1.12E-2	1.02E-2	1.26E-3

**Πίνακας 5.5:** Αποτελέσματα μέσης τιμής ποιότητας, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος για εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης πλέγματος με δίκτυα  $RBF$  και συνάρτηση ενεργοποίησης, τη  $Wendland C^2$ . Παρουσιάζεται, για κάθε ακτίνα επιρροής, η κρίσιμη γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, στην οποία το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο.

$\varphi_{crit}$	$\bar{q}_e$	$\sigma_{q_e}$	$q_{e,min}$
55	0.780	0.193	2.63E-3

**Πίνακας 5.6:** Αποτελέσματα μέσης τιμής ποιότητας, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος για εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης πλέγματος με δίκτυα  $RBF$  και συνάρτηση ενεργοποίησης τη  $Gauss$ . Παρουσιάζεται η κρίσιμη γωνία στροφής του εσωτερικού τετραγώνου, στην οποία το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο.

# Κεφάλαιο 6

## Εφαρμογές σε μεμονωμένη αεροτομή NACA12

### 6.1 Περιγραφή του προβλήματος

Το θέμα αυτής της ενότητας αφορά την εφαρμογή της μεθόδου παραμόρφωσης του πλέγματος με δίκτυα RBF. Κύριος σκοπός είναι η εφαρμογή του λογισμικού που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τα δίκτυα συναρτήσεων RBF καθώς και η διερεύνηση για το πώς η στροφή μιας μεμονωμένης αεροτομής NACA12 (isolated airfoil) γύρω από το κέντρο της, επηρεάζει την ποιότητα του προκύπτοντος πλέγματος. Ο χώρος γύρω από την αεροτομή έχει πλέγματοποιηθεί με τριγωνικά στοιχεία με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου. Πρόκειται για μια αεροτομή η οποία είναι συμμετρική κατά τον άξονα  $x$  και έχει μήκος χορδής ίσο με τη μονάδα.

Αναμφίβολα, επειδή η διαφορετική πύκνωση του πλέγματος μπορεί να δώσει διαφορετικά αποτελέσματα, δοκιμάζεται η μέθοδος προσαρμογής πλέγματος με δίκτυα RBF σε τρία πλέγματα με διαφορετική πύκνωση στην περιοχή δημιουργίας οριακού στρώματος, το καθένα. Σε κάθε περίπτωση, εφαρμόζονται διαφορετικού μέτρου στροφές στην αεροτομή, αντιωρολογιακά, γύρω από το κέντρο της και εξετάζεται η ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει. Αυτό που προκαλεί ενδιαφέρον είναι η συμπεριφορά της μεθόδου σε πλέγματα με διαφορετική πύκνωση και πρωτίστως, η δημιουργία ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων που καθιστούν το υπολογιστικό πλέγμα ακατάλληλο για χρήση λ.χ με λογισμικό CFD.

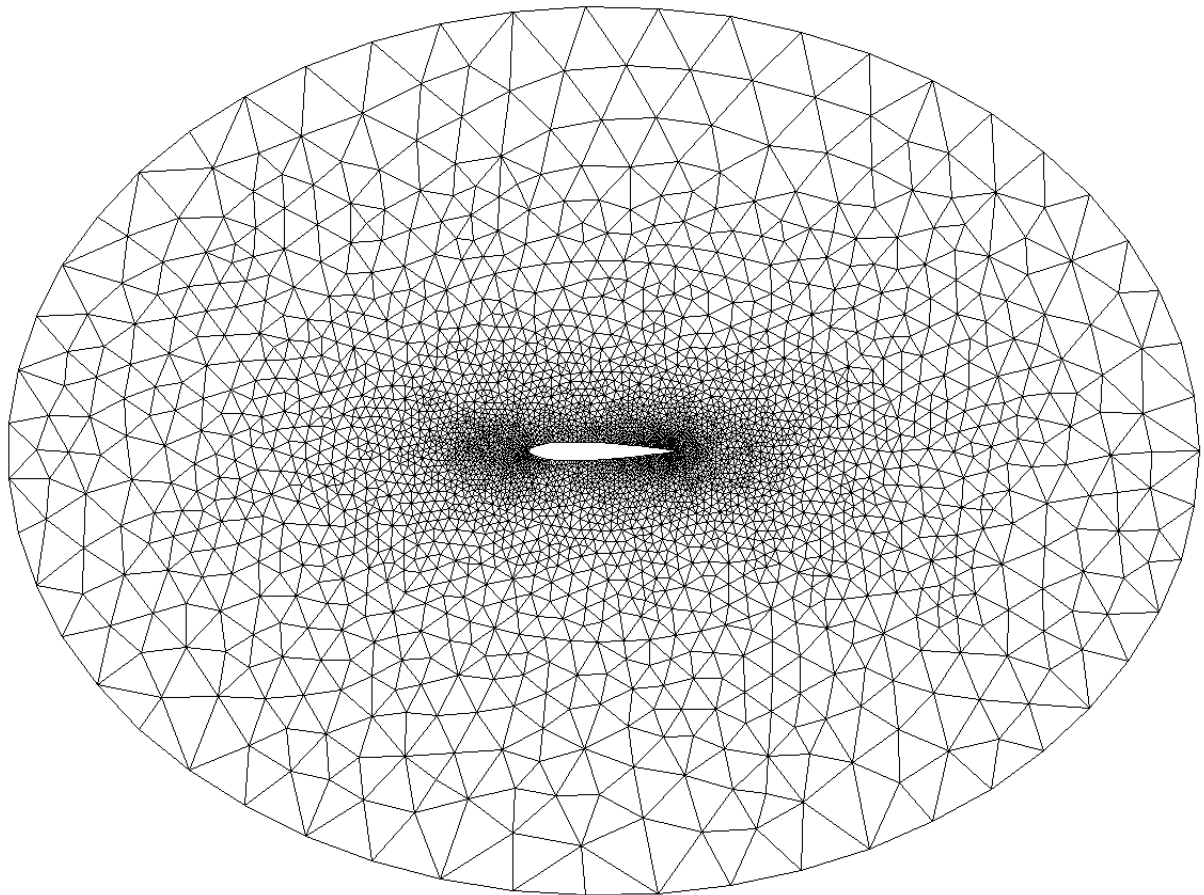
Η μέθοδος που αναπτύχθηκε δοκιμάζεται με δυο συναρτήσεις ενεργοποίησης, μια ολικής και μία τοπικής επιρροής. Ως συνάρτηση τοπικής επιρροής επιλέχθηκε η Wendland  $C^2$  με τιμή που δίνεται από τη σχέση 5.1 ενώ ως συνάρτηση ολικής επιρροής επιλέχθηκε

η Multiquadric Biharmonics με έκφραση την

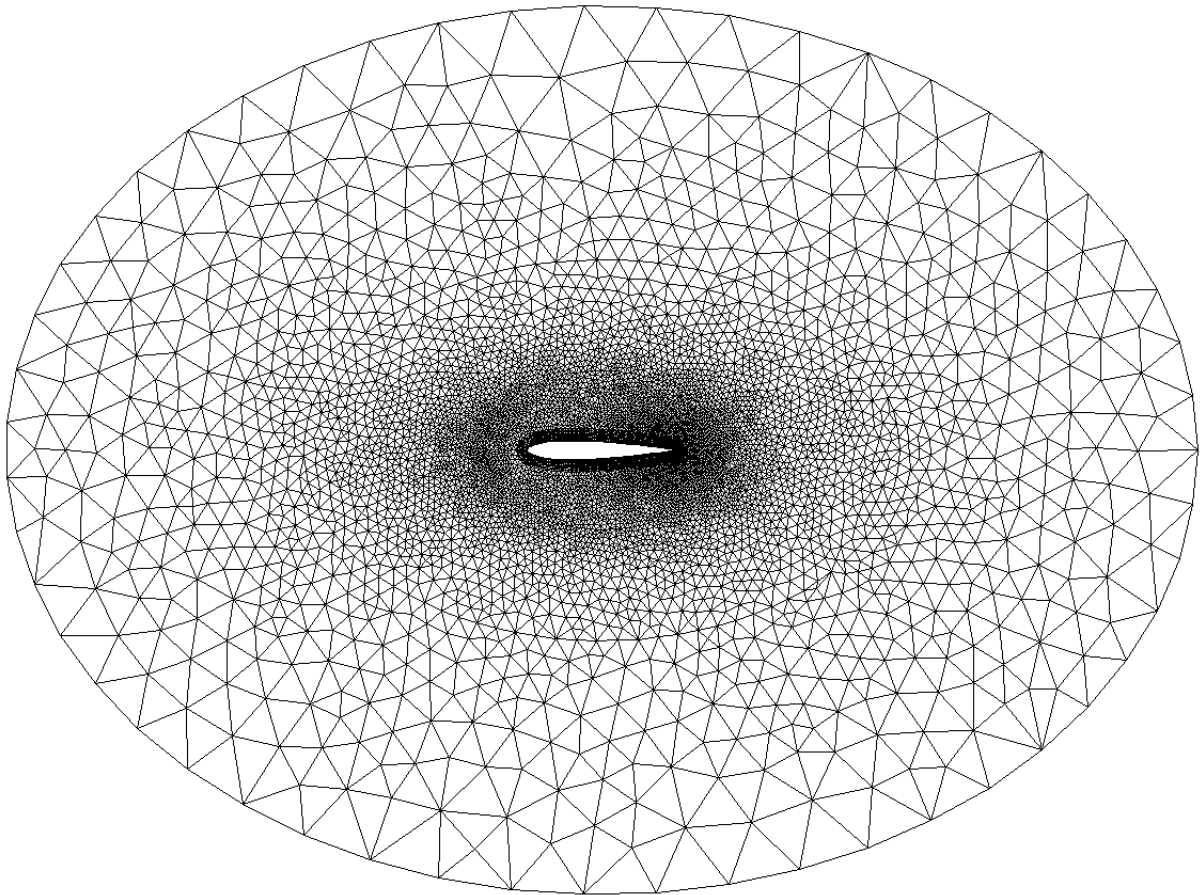
$$\phi(r) = \sqrt{10^{-5} + r^2} \quad (6.1)$$

Υπενθυμίζεται ότι  $\xi = \frac{r}{R}$ , όπου  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{e}_j}\|$  και  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\mathbf{e}_j}$  τα διανύσματα θέσης δύο σημείων στο χώρο. Συγκεκριμένα για τη συνάρτηση τοπικής επιρροής ορίστηκε μία ακτίνα  $R$ , τέτοια ώστε κάθε κέντρο  $\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j}$  του δικτύου να επηρεάζει εκείνους τους κόμβους του χωρικού πλέγματος, εξαιρώντας τους οριακούς κόμβους, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε κύκλο ακτίνας  $R$  και κέντρο το εκάστοτε  $\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j}$  κέντρο του δικτύου RBF.

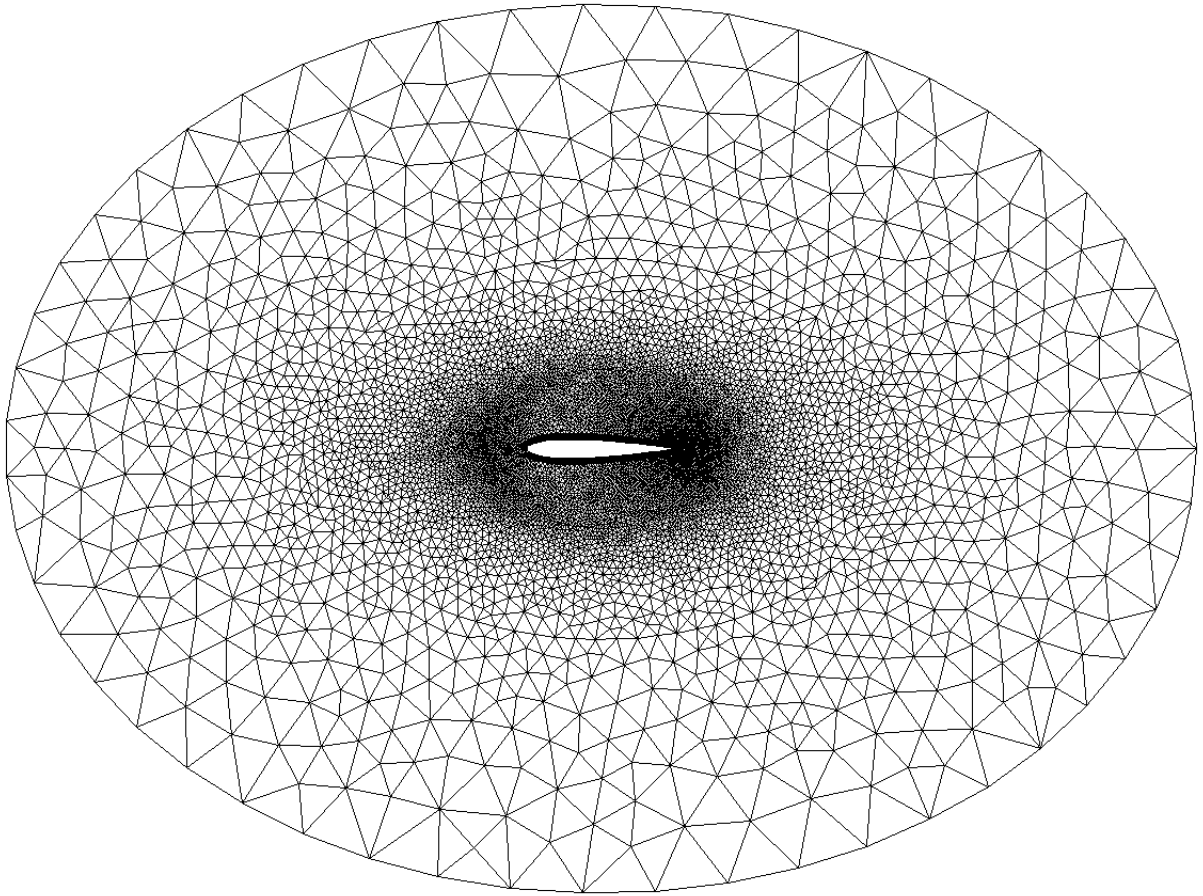
Επομένως, για τις δύο αυτές συναρτήσεις ενεργοποίησης, διερευνάται το πώς η στροφή της αεροτομής επηρεάζει τόσο την ποιότητα του πλέγματος που προσαρμόζεται με τη μέθοδο RBF, όσο και τη δημιουργία ανεπιθύμητων ανεστραμμένων τριγώνων. Για τη συνάρτηση τοπικής επιρροής, το πρόγραμμα αυτό εκτελείται για διάφορες ακτίνες  $R$ . Στη συνέχεια, παρουσιάζονται σχόλια και συμπεράσματα για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των συναρτήσεων ενεργοποίησης 5.1 και 6.1 του δικτύου RBF στα πλέγματα των σχημάτων 6.1, 6.2 και 6.3 τα οποία έχουν διαφορετική πύκνωση στην περιοχή του οριακού στρώματος, συνεπώς, και διαφορετικό αριθμό τριγωνικών στοιχείων.



**Σχήμα 6.1:** Η αεροτομή *NACA12* του σχήματος αποτελείται από 151 οριακούς κόμβους, οι οποίοι χρησιμοποιούνται από το δίκτυο *RBF* ως κέντρα. Ο χώρος γύρω από την αεροτομή έχει πλεγματοποιηθεί με τριγωνικά στοιχεία, με τη μέθοδο προελαύνοντος μετώπου. Το πλέγμα αποτελείται από συνολικά από 3469 κόμβους και από 6787 τριγωνικά στοιχεία.



**Σχήμα 6.2:** Για την αεροτομή *NACA12* του σχήματος ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στο σχήμα 6.1 με τη διαφορά ότι σε αυτήν την περίπτωση το πλέγμα είναι πιο πυκνό στα στερεά τοιχώματα. Αποτελείται από 6734 κόμβους και από 13317 τριγωνικά στοιχεία.



**Σχήμα 6.3:** Η αεροτομή του σχήματος είναι ίδια με αυτή των σχημάτων 6.1 και 6.2, ισχύουν όσα αναφέρθηκαν, μόνο που σε αυτή την περίπτωση το πλέγμα είναι πιο πυκνό σε σχέση με αυτά των σχημάτων 6.1 και 6.2. Το πλέγμα αυτό αποτελείται από 11149 κόμβους και 22147 τριγωνικά στοιχεία. Επίσης, έχει και μεγάλο αριθμό στρώσεων δομημένων τριγώνων γύρω από τα στερεά τοιχώματα (περισσότερα από αυτά της αεροτομής του σχήματος 6.2).

## 6.2 Αποτελέσματα με αραιό πλέγμα

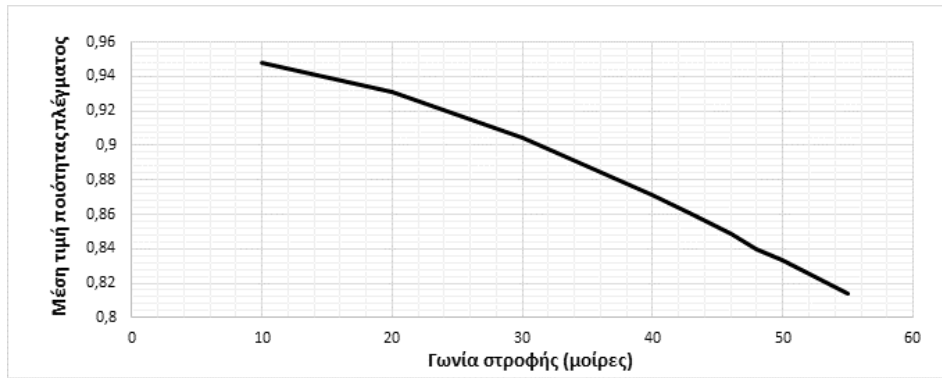
### 6.2.1 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$

Σε αυτήν την περίπτωση, μελετάται η συμπεριφορά της μεθόδου μετακίνησης πλέγματος σε αεροτομή NACA12 με σχετικά αραιό πλέγμα κοντά στα στερεά τοιχώματα. Το πλέγμα αποτελείται συνολικά από 6787 τριγωνικά στοιχεία. Πρώτη ακτίνα επιρροής που επιλέχθηκε για τη συνάρτηση ενεργοποίησης Wendland  $C^2$  είναι  $R=2$ . Έπειτα έγινε στροφή της αεροτομής για διάφορες γωνίες,  $\varphi$ . Στον πίνακα 6.1 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του για κάθε γωνία στροφής. Στα διαγράμματα των σχημάτων 6.4(α'), 6.4(β') και 6.4(γ') φαίνονται τα ίδια μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες, ενώ σχήμα 6.5 φαίνεται η αεροτομή σε δύο τυχαία επιλεγμένες γωνίες στροφής, καθώς και το πως διαμορφώθηκε το πλέγμα μετά την εφαρμογή της μεθόδου. Στο σχήμα αυτό έχει γίνει εστίαση στην περιοχή της αεροτομής για λόγους ευκρίνειας. Η στροφή της αεροτομής σταμάτησε στις 50 μοίρες, γιατί το πλέγμα εμφάνισε ένα πολύ μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων.

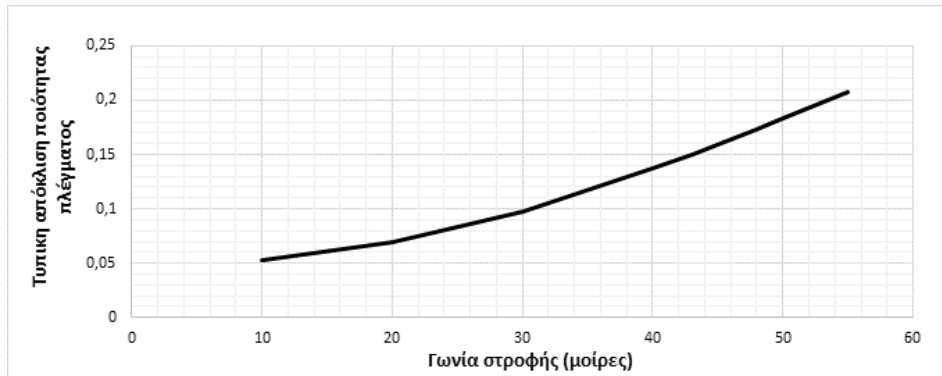
$\varphi$ (μοίρες)	10	20	30	40	50
$\bar{q}_e$	0.948	0.931	0.904	0.871	0.833
$\sigma_{q_e}$	5.32E-2	6.94E-2	9.77E-2	0.137	0.183
$q_{e,min}$	0.569	0.432	0.301	0.144	3.96E-4

**Πίνακας 6.1:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστη τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης επιλέχθηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=2$ .

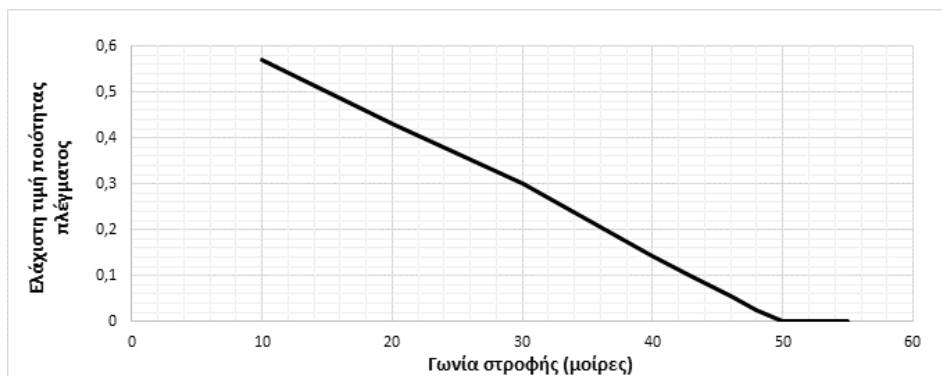




(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

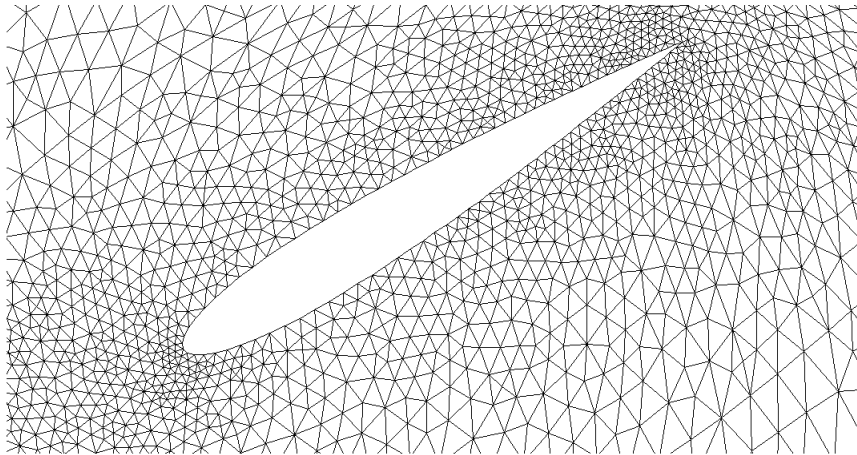


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

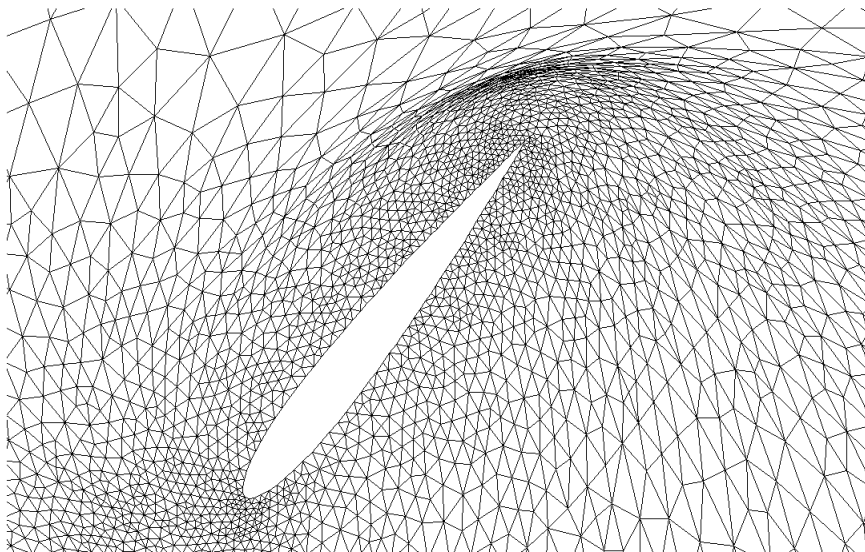


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.4:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, τα οποία προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου *RBF* με τη *Wendland C<sup>2</sup>*,  $R=2$ .



(α) Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 30 μοίρες.



(β) Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 50 μοίρες.

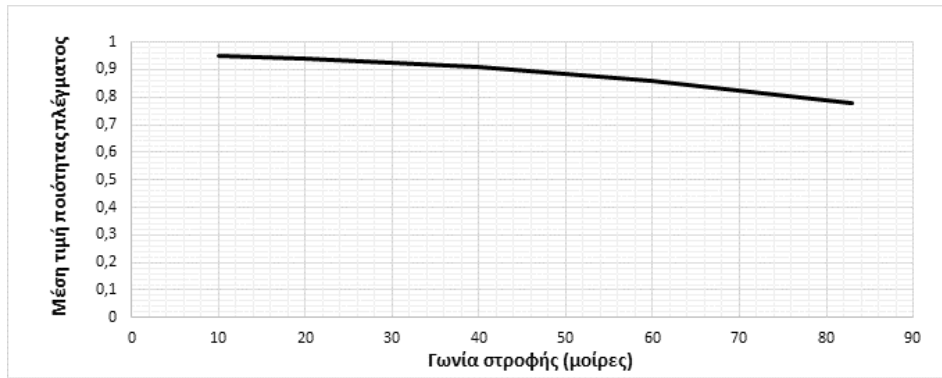
**Σχήμα 6.5:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση της *Wendland C<sup>2</sup>* με  $R=2$ . Για γωνία 50 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει ένα μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων και έχει γίνει πλέον ακατάλληλο για χρήση.

### 6.2.2 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$

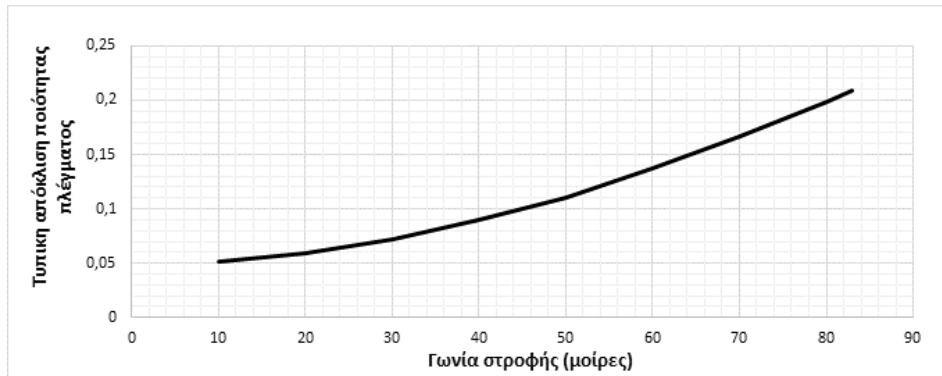
Η επόμενη ακτίνα που δοκιμάστηκε είναι  $R=4$ . Ομοίως, στον πίνακα 6.2 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της ποιότητας για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ . Στα διαγράμματα 6.6(α'), 6.6(β') και 6.6(γ') απεικονίζονται αντιστοίχως τα μεγέθη της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες.

$\varphi$ (μοίρες)	20	40	60	80	85
$\bar{q}_e$	0.941	0.908	0.857	0.791	0.772
$\sigma_{q_e}$	5.92E-2	8.99E-2	0.137	0.199	0.217
$q_{e,min}$	0.519	0.382	0.233	2.44E-3	1.51E-4

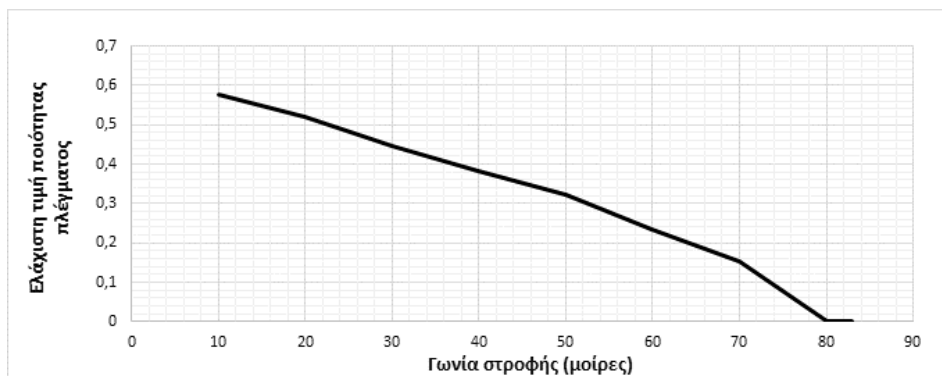
**Πίνακας 6.2:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Χρησιμοποιείται η Wendland  $C^2$  με  $R=4$ .



(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

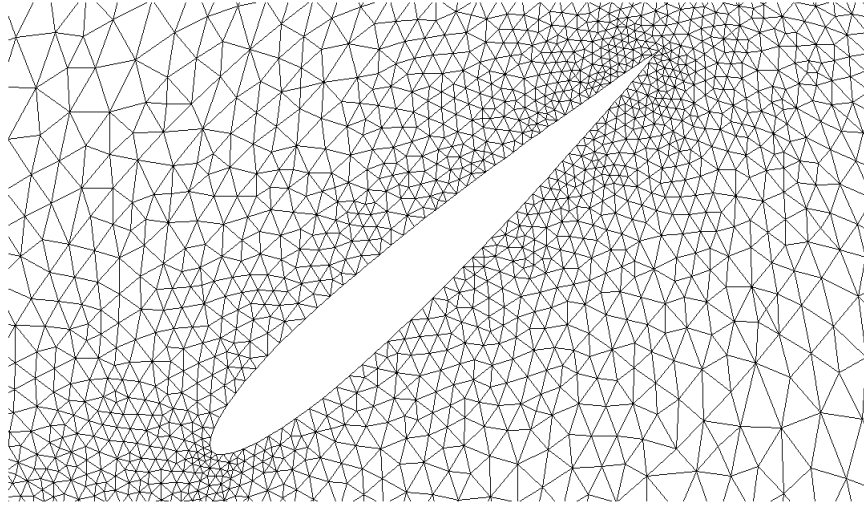


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

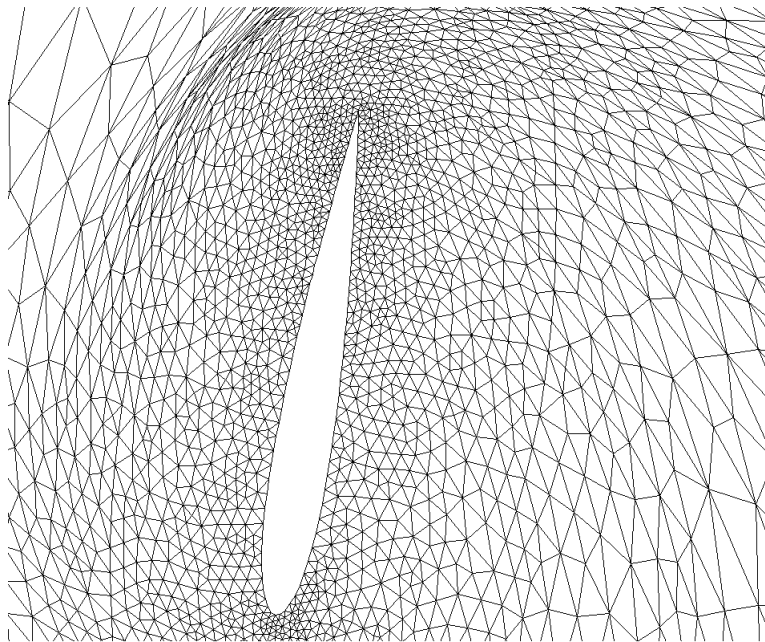


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.6:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, τα οποία προέκυψαν από τη μέθοδο RBF με τη Wendland  $C^2$  και  $R=4$ .



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 80 μοίρες.

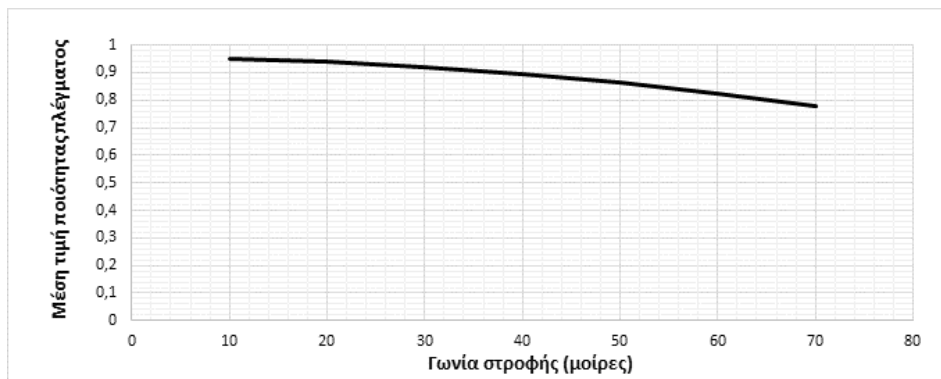
**Σχήμα 6.7:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, με τη *Wendland  $C^2$*  και  $R=4$ . Η στροφή 80 μοιρών είναι η οριακή περίπτωση, αφού στις 81 μοίρες παρατηρείται ένας μικρός αριθμός ανεστραμμένων τριγώνων. Εστίαση στην περιοχή της αεροτομής.

### 6.2.3 Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics

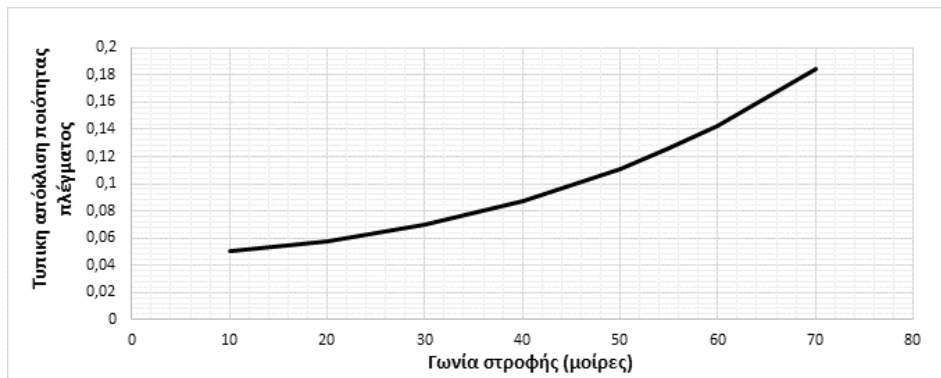
Στην ενότητα αυτή επιλέχθηκε ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF η Multiquadric Biharmonics (σχέση 6.1), μια συνάρτηση ολικής επιρροής, με σκοπό να παρουσιαστούν και εδώ η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του πλέγματος. Στον πίνακα 6.3 φαίνονται τα αποτελέσματα αυτά για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , ενώ στα σχήματα 6.8(α'), 6.8(β') και 6.8(γ') παρουσιάζονται τα τρία αυτά μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής.

$\varphi$ (μοίρες)	20	30	40	55	60	70
$\bar{q}_e$	0.938	0.921	0.896	0.846	0.826	0.780
$\sigma_{q_e}$	5.77E-2	6.95E-2	8.69E-2	0.126	0.143	0.184
$q_{e,min}$	0.580	0.535	0.478	0.287	0.188	1.16E-2

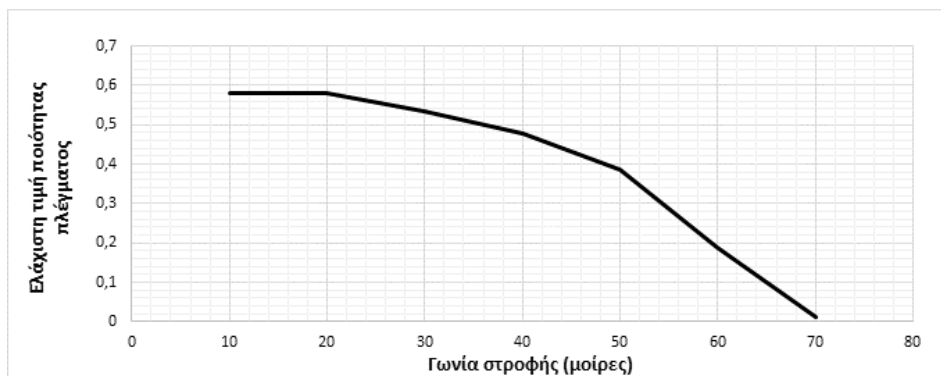
**Πίνακας 6.3:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιήθηκε η Multiquadric Biharmonics.



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

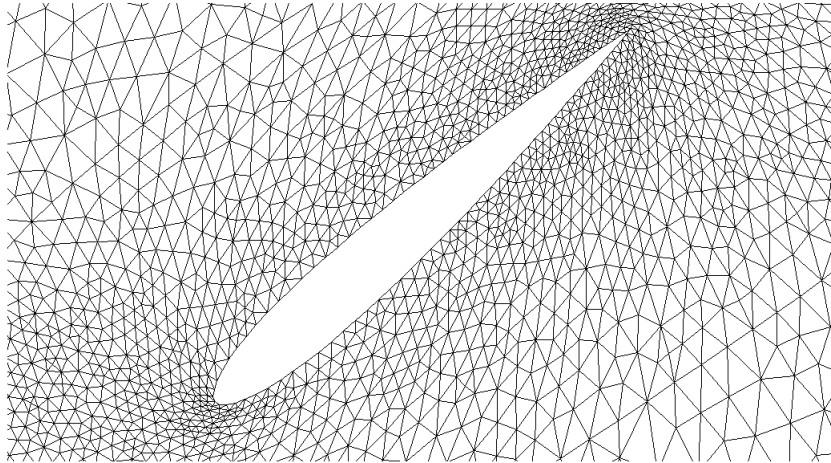


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής .

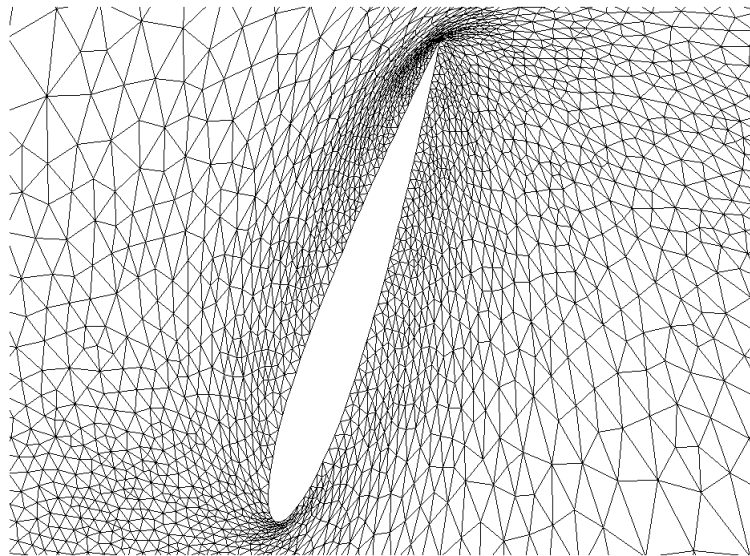


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.8:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, τα οποία προέκυψαν με τη *Multiquadric Biharmonics*.



(α) Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β) Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 70 μοίρες.

**Σχήμα 6.9:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, με τη *Multiquadric Biharmonics*. Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 70 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει τρία ανεστραμμένα τρίγωνα.



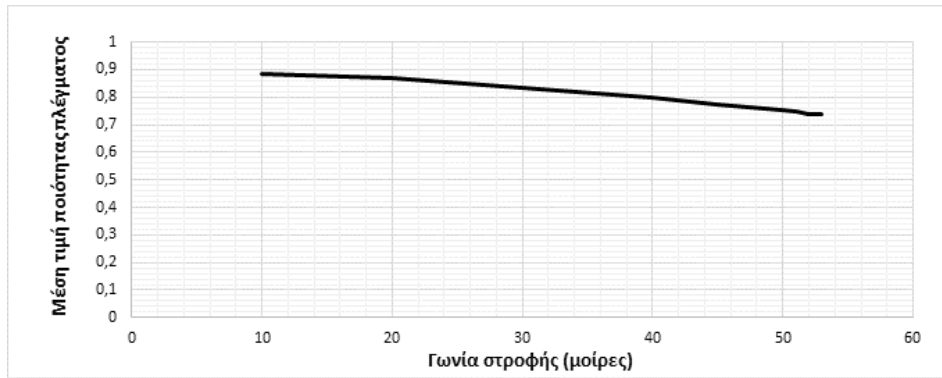
## 6.3 Αποτελέσματα με μέτρια πυκνό πλέγμα

### 6.3.1 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$

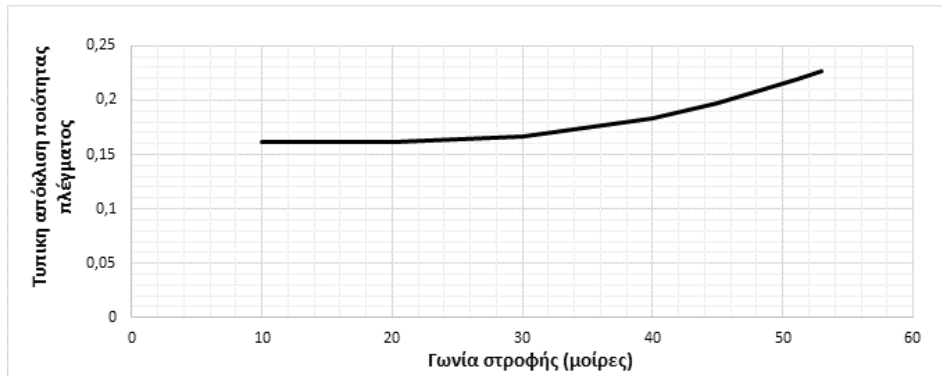
Σε αυτήν την περίπτωση μελετάται η συμπεριφορά της μεθόδου μετακίνησης πλέγματος στην αεροτομή του σχήματος 6.2, η οποία έχει πυκνότερο πλέγμα από την προηγούμενη περίπτωση και αποτελείται συνολικά από 13317 τριγωνικά στοιχεία και από στρώσεις δομημένων τριγώνων γύρω από τα στερεά τοιχώματα. Πρώτη ακτίνα επιρροής για τη συνάρτηση Wendland  $C^2$  είναι  $R=2$ . Ομοίως σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται στον πίνακα 6.4 η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του για κάθε γωνία στροφής. Η στροφή της αεροτομής σταμάτησε στις 50 μοίρες, γιατί εμφάνισε ένα πολύ μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων.

$\varphi$ (μοίρες)	10	20	30	40	50
$\bar{q}_e$	0.885	0.867	0.836	0.797	0.751
$\sigma_{q_e}$	0.162	0.162	0.166	0.183	0.215
$q_{e,min}$	0.285	0.281	0.278	0.200	4.02E-2

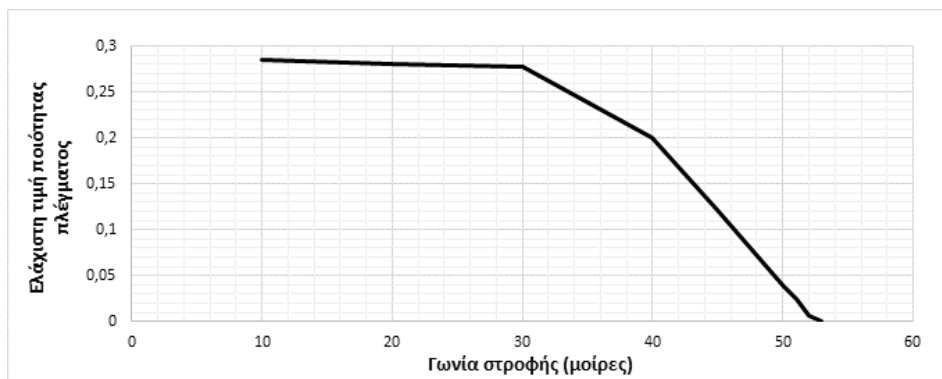
**Πίνακας 6.4:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστη τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης επιλέχθηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=2$ .



(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

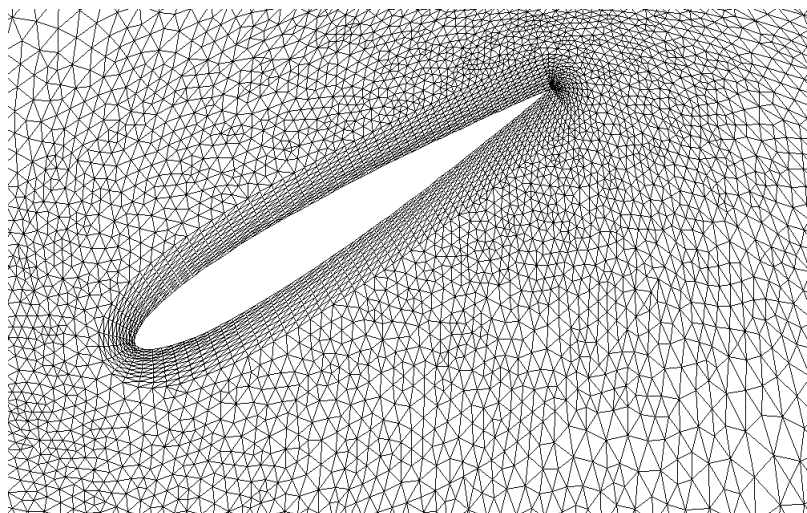


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

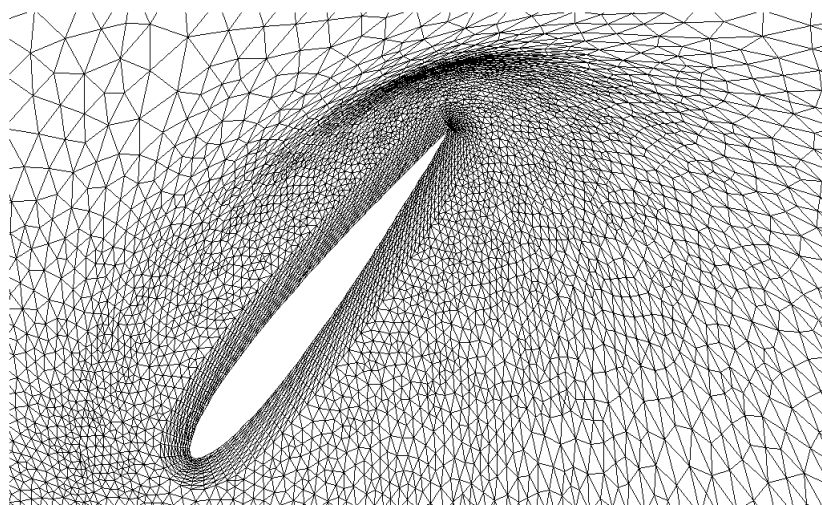


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.10:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, τα οποία προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου *RBF* με τη *Wendland C<sup>2</sup>* και  $R=2$ .



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 30 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 50 μοίρες.

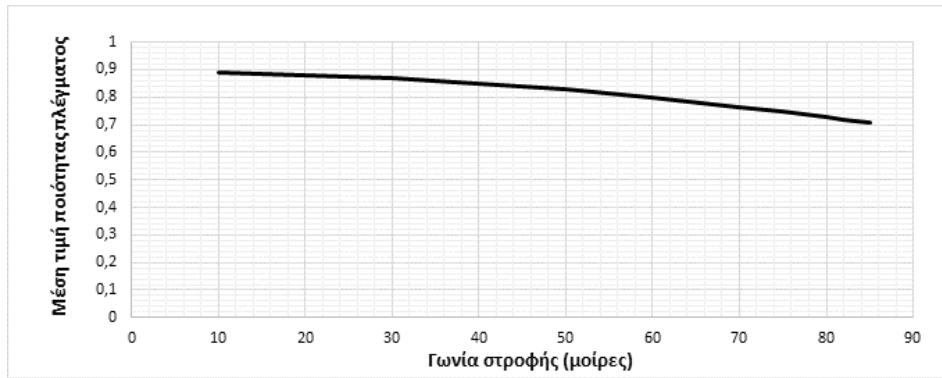
**Σχήμα 6.11:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, με τη *Wendland  $C^2$*  και  $R=2$ . Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 50 μοιρών, το πλέγμα είναι οριακά πριν τη δημιουργία ανεστραμμένων τριγώνων.

### 6.3.2 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$

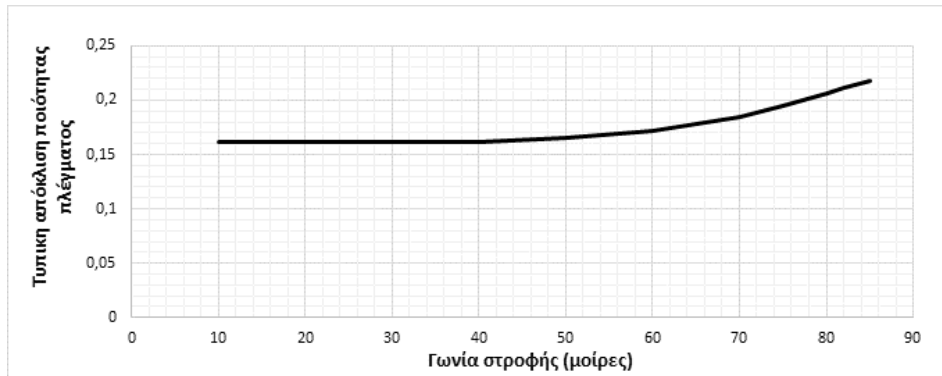
Η επόμενη ακτίνα που επιλέχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι  $R=4$ . Ομοίως, στον πίνακα 6.5 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της ποιότητας για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ . Στα διαγράμματα 6.12(α'), 6.12(β') και 6.12(γ') απεικονίζονται αντιστοίχως τα μεγέθη της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες.

$\varphi$ (μοίρες)	20	40	60	70	82
$\bar{q}_e$	0.881	0.849	0.799	0.766	0.720
$\sigma_{q_e}$	0.161	0.161	0.172	0.185	0.211
$q_{e,min}$	0.287	0.285	0.238	0.137	6.56E-4

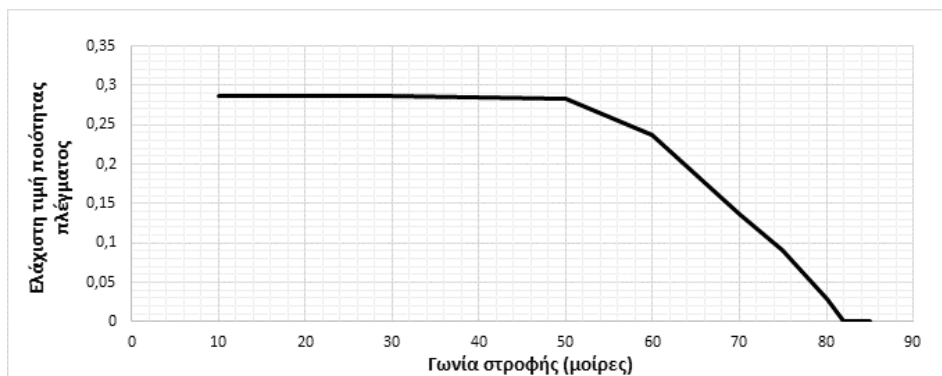
**Πίνακας 6.5:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής με τη Wendland  $C^2$  και  $R=4$ .



(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

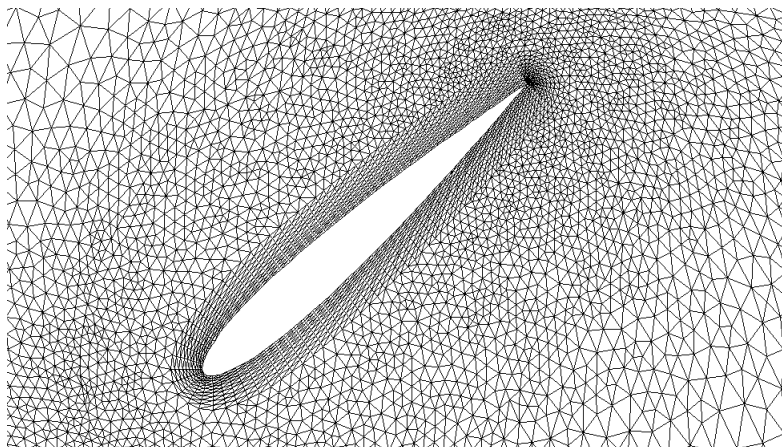


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

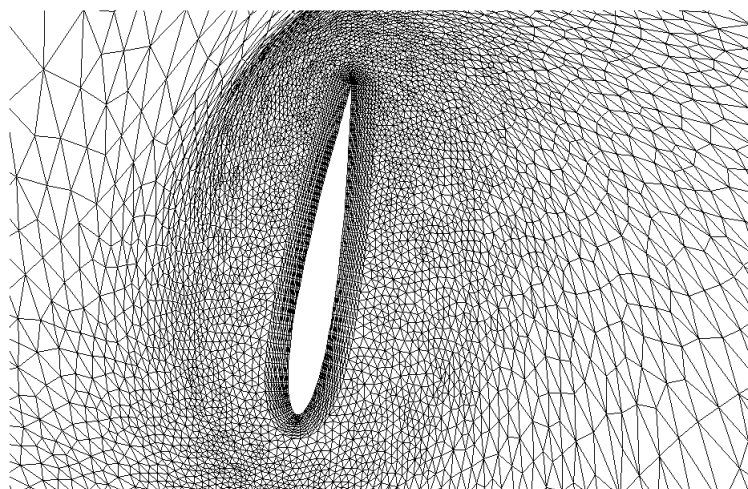


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.12:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής για τη Wendland  $C^2$  και  $R=4$ .



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 80 μοίρες.

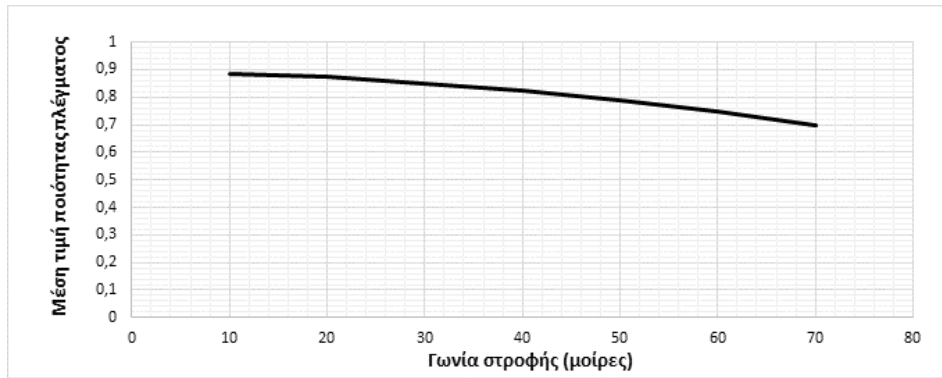
**Σχήμα 6.13:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση της *Wendland  $C^2$*  και  $R=4$ . Στην περίπτωση στροφής 80 μοιρών, το πλέγμα είναι οριακά πριν κριθεί ακατάλληλο.

### 6.3.3 Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics

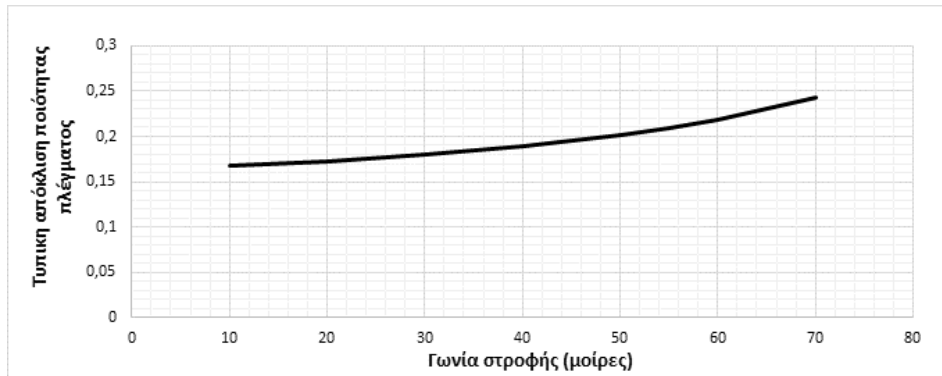
Εδώ χρησιμοποιήθηκε ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF η Multiquadric Biharmonics (σχέση 6.1), μια συνάρτηση ολικής επιρροής. Στον πίνακα 6.6 φαίνονται τα αποτελέσματα ως προς την ποιότητα του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , ενώ στα σχήματα 6.14(α'), 6.14(β') και 6.14(γ') παρουσιάζονται τα τρία αυτά μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής.

$\varphi$ (μοίρες)	20	30	40	55	60	70
$\bar{q}_e$	0.872	0.851	0.824	0.769	0.747	0.699
$\sigma_{q_e}$	0.173	0.180	0.189	0.209	0.219	0.243
$q_{e,min}$	0.227	0.197	0.170	0.130	7.81E-2	2.14E-3

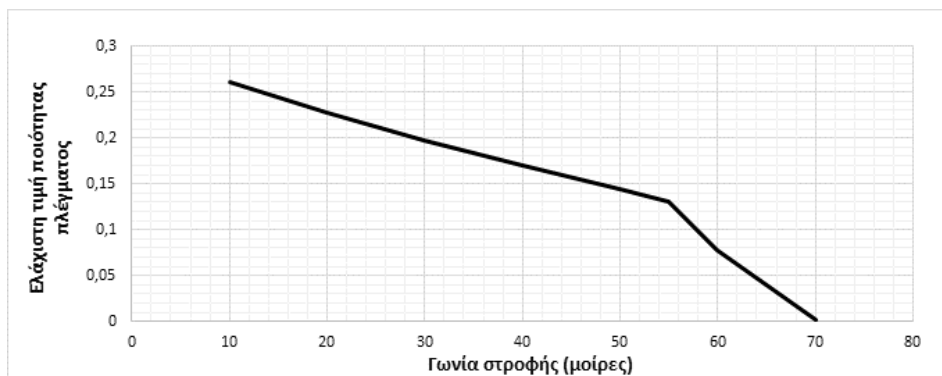
**Πίνακας 6.6:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιήθηκε η Multiquadric Biharmonics.



(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.



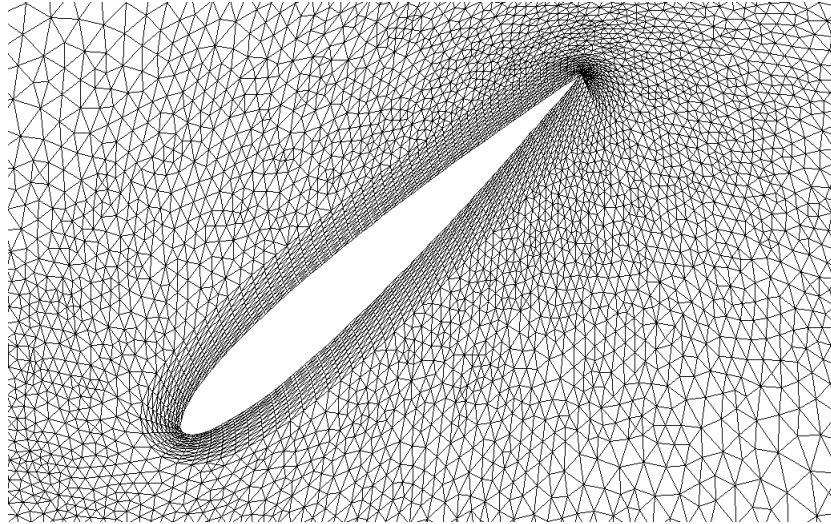
(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.



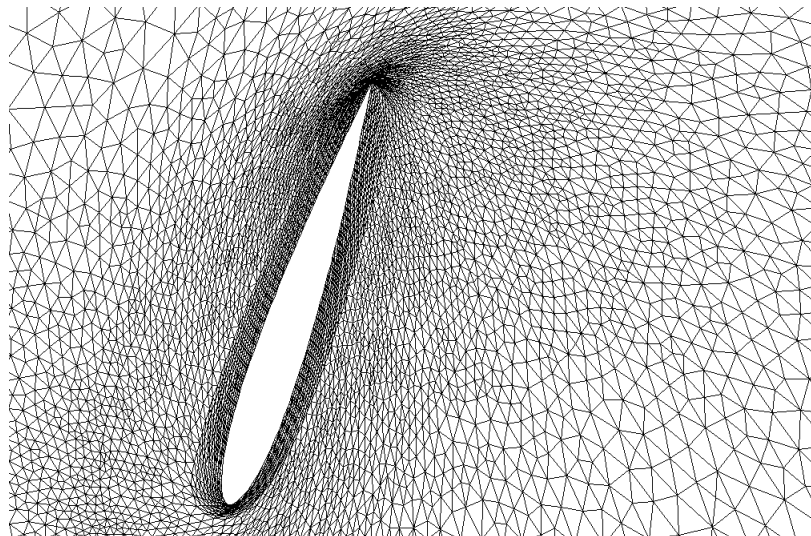
(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.14:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, τα οποία προέκυψαν με συνάρτηση ενεργοποίησης τη *Multiquadric Biharmonics*.





(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 70 μοίρες.

**Σχήμα 6.15:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση της *Multiquadric Biharmonics*. Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 70 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει πέντε ανεστραμμένα τρίγωνα.

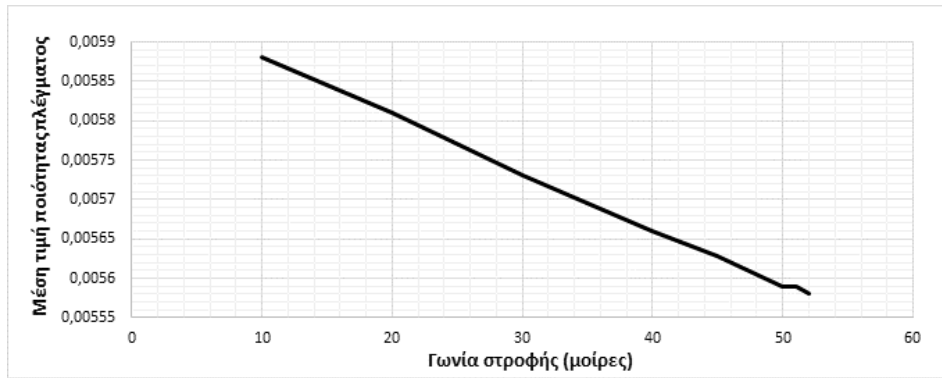
## 6.4 Αποτελέσματα της αεροτομής με πυκνό πλέγμα

### 6.4.1 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=2$

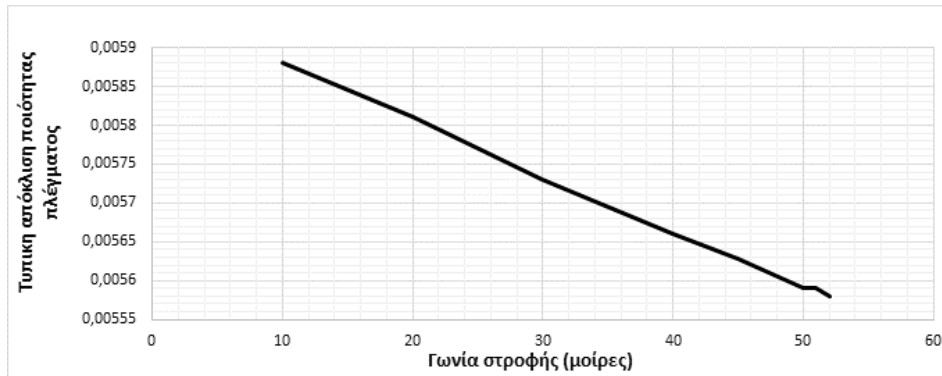
Σε αυτήν την περίπτωση, μελετάται η συμπεριφορά της RBF σε αεροτομή NACA12 με πολύ πυκνό πλέγμα κοντά στα στερεά τοιχώματα. Το πλέγμα αποτελείται συνολικά από 22147 τριγωνικά στοιχεία και από στρώσεις δομημένων τριγώνων γύρω από τα στερεά τοιχώματα. Πρώτη ακτίνα επιρροής που επιλέχθηκε για τη συνάρτηση ενεργοποίησης Wendland  $C^2$  είναι  $R=2$ . Στον πίνακα 6.7 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του για κάθε γωνία στροφής. Στα διαγράμματα των σχημάτων 6.16(α'), 6.16(β') και 6.16(γ') φαίνονται τα ίδια μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες, ενώ σχήμα 6.17 φαίνεται η αεροτομή σε δύο τυχαία επιλεγμένες γωνίες στροφής, καθώς και το πως διαμορφώθηκε το πλέγμα μετά την εφαρμογή της μεθόδου. Η στροφή της αεροτομής σταμάτησε στις 50 μοίρες, γιατί είναι η οριακή περίπτωση πριν τη δημιουργία ανεπιθύμητων ανεστραμμένων τριγώνων.

$\varphi$ (μοίρες)	10	20	30	40	50
$\bar{q}_e$	0.721	0.706	0.680	0.645	0.604
$\sigma_{q_e}$	0.375	0.368	0.358	0.350	0.349
$q_{e,min}$	5.88E-3	5.81E-3	5.73E-3	5.63E-3	5.59E-3

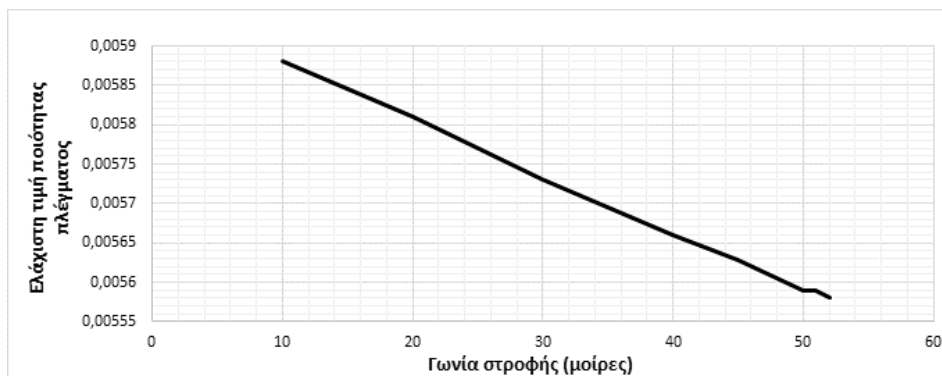
**Πίνακας 6.7:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστη τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης επιλέχθηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=2$ .



(α) Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

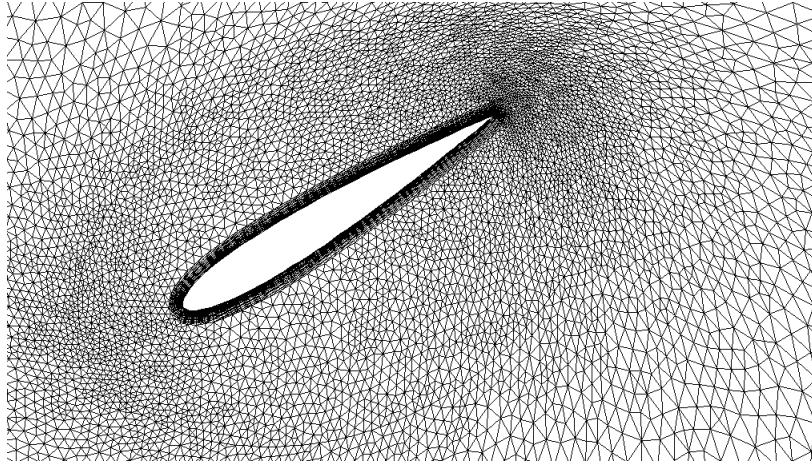


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

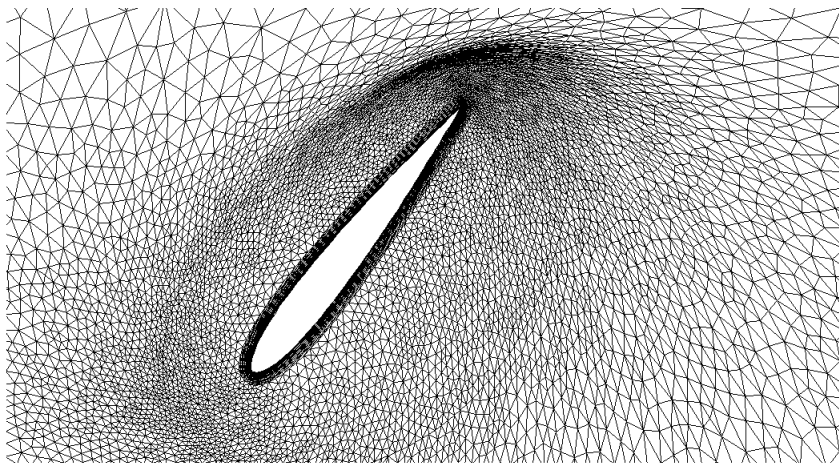


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.16:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής με τη *Wendland C<sup>2</sup>* και  $R=2$ .



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 30 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 50 μοίρες.

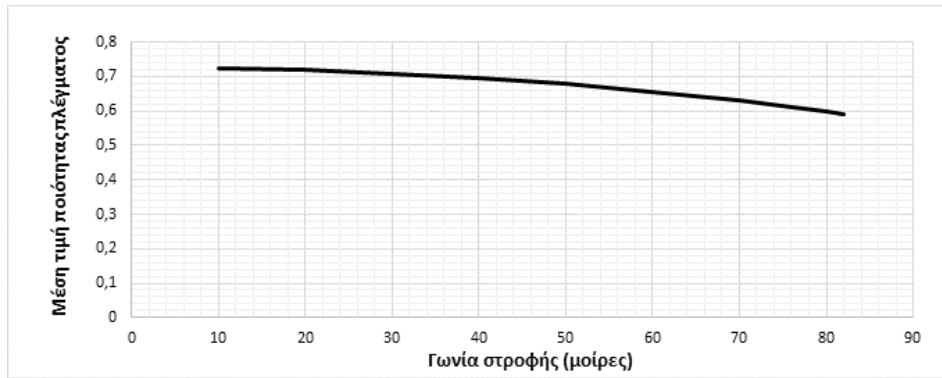
**Σχήμα 6.17:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση της *Wendland  $C^2$*  και  $R=2$ .

### 6.4.2 Αποτελέσματα με τη Wendland $C^2$ και $R=4$

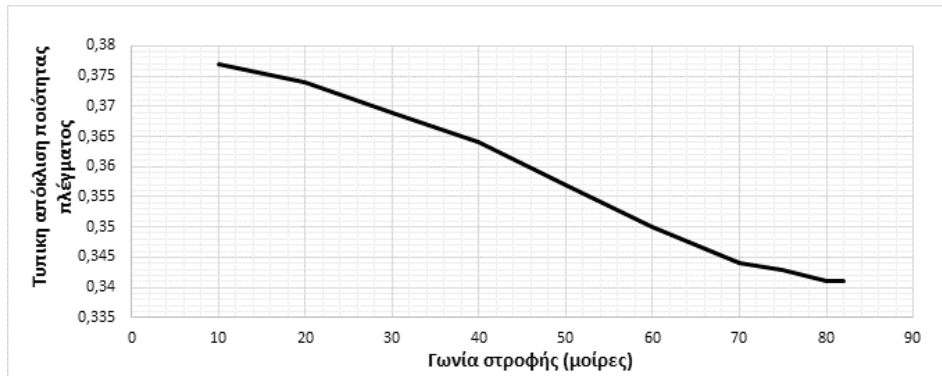
Η επόμενη ακτίνα που επιλέχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, είναι  $R=4$ . Ομοίως, στον πίνακα 6.8 φαίνονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της ποιότητας για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , που επιλέχθηκε για την συγκεκριμένη περίπτωση. Στα διαγράμματα 6.18(α'), 6.18(β') και 6.18(γ') απεικονίζονται αντιστοίχως τα μεγέθη της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής σε μοίρες.

$\varphi$ (μοίρες)	20	40	60	70	82
$\bar{q}_e$	0.719	0.695	0.656	0.629	0.592
$\sigma_{q_e}$	0.374	0.364	0.350	0.344	0.341
$q_{e,min}$	5.92E-3	5.88E-3	5.85E-3	5.83E-3	5.81E-3

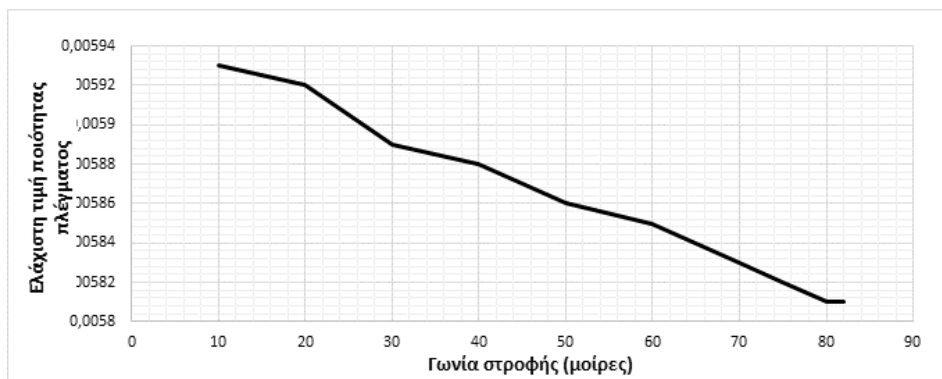
**Πίνακας 6.8:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Η ακτίνα επιρροής είναι  $R=4$ .



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

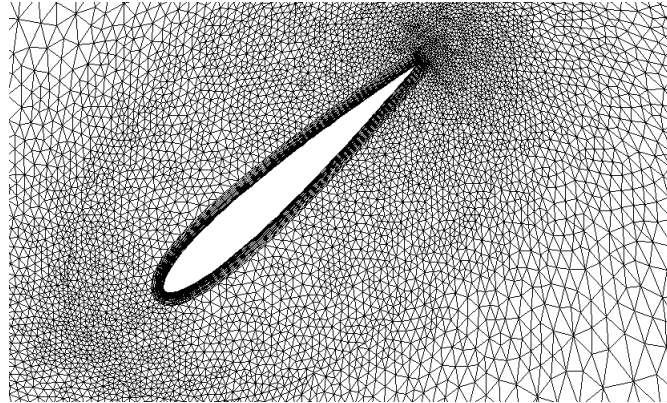


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

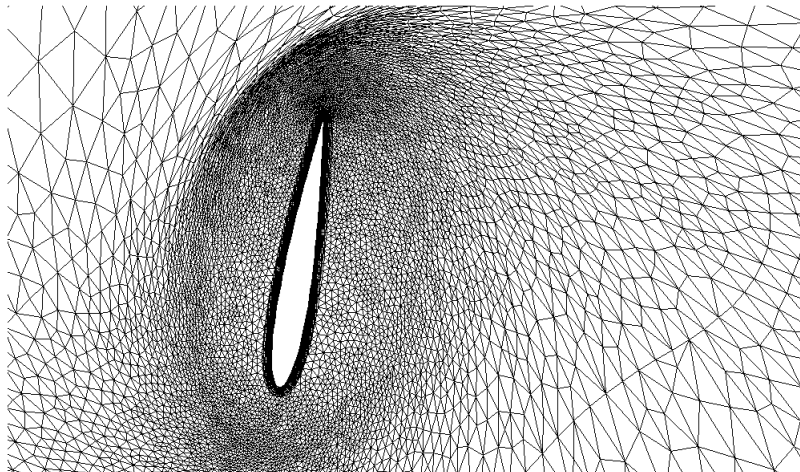


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.18:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής με τη *Wendland C<sup>2</sup>* και  $R=4$ .



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 80 μοίρες.

**Σχήμα 6.19:** Εφαρμογή της μεθόδου RBF σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  με ακτίνα επιρροής  $R=4$ . Στην τελευταία περίπτωση, για στροφή 80 μοιρών, το πλέγμα είναι η οριακά αποδεκτό, αφού στις 82 μοίρες δημιουργήθηκαν τα πρώτα ανεπιθύμητα ανεστραμμένα τρίγωνα.

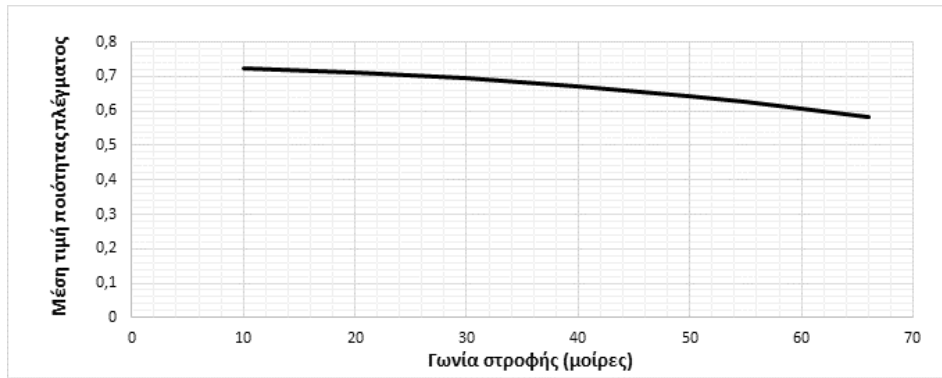
### 6.4.3 Αποτελέσματα με τη Multiquadric Biharmonics

Στην ενότητα αυτή επιλέχθηκε ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF η Multiquadric Biharmonics (σχέση 6.1), μια συνάρτηση ολικής επιρροής, με σκοπό να παρουσιαστούν και εδώ η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του πλέγματος. Στον πίνακα 6.9 φαίνονται τα αποτελέσματα αυτά για κάθε γωνία στροφής,  $\varphi$ , ενώ στα σχήματα 6.20(α'), 6.20(β') και 6.20(γ') παρουσιάζονται τα τρία αυτά μεγέθη συναρτήσει της γωνίας στροφής.

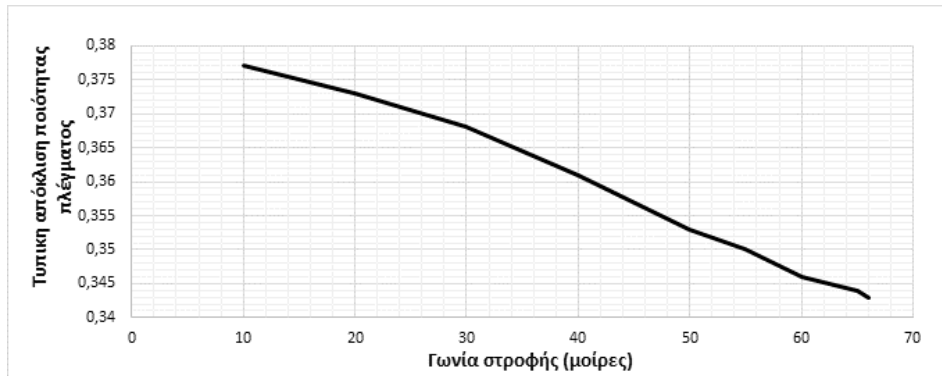
$\varphi$ (μοίρες)	20	30	40	55	60	67
$\bar{q}_e$	0.712	0.695	0.672	0.626	0.608	0.580
$\sigma_{q_e}$	0.373	0.368	0.361	0.350	0.346	0.343
$q_{e,min}$	5.73E-3	5.54E-3	5.32E-3	4.94E-3	4.8E-3	1.14E-3

**Πίνακας 6.9:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε γωνία στροφής της αεροτομής. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης χρησιμοποιήθηκε η *Multiquadric Biharmonics*.

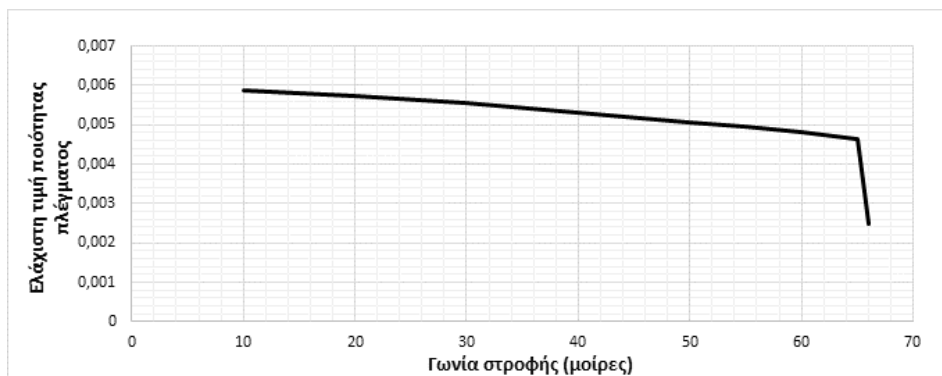




(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

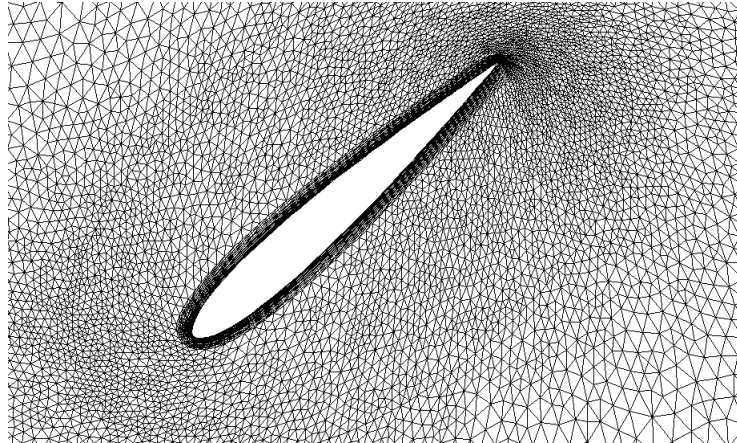


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

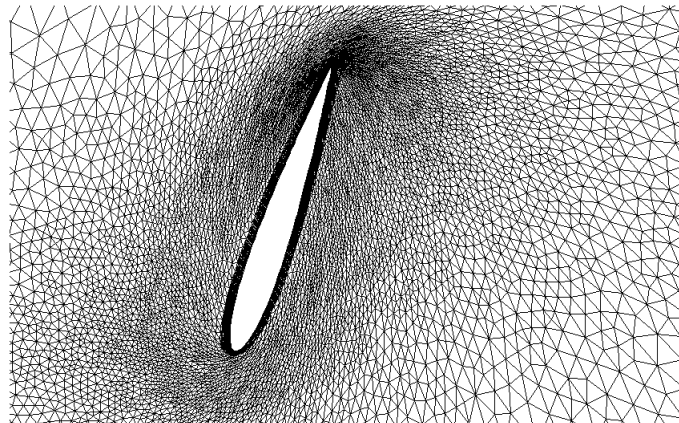


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

**Σχήμα 6.20:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής, με δίκτυο *RBF* με τη *Multiquadric Biharmonmics*.



(α') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 40 μοίρες.



(β') Γωνία στροφής της αεροτομής κατά 70 μοίρες.

**Σχήμα 6.21:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* σε δύο γωνίες στροφής της αεροτομής, στην περίπτωση όπου χρησιμοποιήθηκε η *Multiquadric Biharmonics*. Στην τελευταία περίπτωση, για γωνία 70 μοιρών, το πλέγμα έχει εμφανίσει ένα μεγάλο αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων.

## 6.5 Σχόλια

Σκοπός της εφαρμογής αυτής είναι, όπως αναφέρθηκε, η χρήση του προγραμματισθέντος λογισμικού παραμόρφωσης πλεγμάτων με δίκτυα συναρτήσεων RBF που αναπτύχθηκε, αλλά και η αξιολόγηση του προκύπτοντος πλέγματος. Πραγματοποιήθηκαν διαφορετικού μέτρου στροφές της αεροτομής NACA12 (αντιωρολογιακά) και εξετάστηκε η δημιουργία ανεπιθύμητων ανεστραμμένων τριγώνων. Η δοκιμή αυτή πραγματοποιήθηκε στην ίδια αεροτομή σε τρία πλέγματα με διαφορετική πυκνωση κοντά στα στερεά τοιχώματα το καθένα και χρησιμοποιήθηκαν δύο συναρτήσεις ενεργοποίησης, μια τοπικής και μία ολικής επιρροής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος, όπως εκφράστηκε με τη μετρική αυτή της μέσης αναλογίας, δεν καθορίζει το πότε το πλέγμα είναι ακατάλληλο λόγω της δημιουργίας ανεστραμμένων τριγώνων, απλά ποσοτικοποιούν την ποιότητα του πλέγματος. Επίσης, όσο η αεροτομή στρέφεται, τόσο η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας μειώνεται, ενώ η τυπική απόκλιση αυξάνεται που σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλο εύρος τιμών της μετρικής. Αυτό είναι λογικό, γιατί τα τρίγωνα που είναι κοντά στους οριακούς κόμβους, οι οποίοι έχουν επιλεγεί ως κέντρα του δικτύου, επηρεάζονται περισσότερο από τα πιο μακρινά τρίγωνα, με αποτέλεσμα να αλλάζει πιο πολύ η ποιότητά τους.

Ως προς τη συνάρτηση ενεργοποίησης Wendland  $C^2$ , παρατηρείται ότι όσο η ακτίνα επιρροής αυξάνεται, τόσο πιο μεγάλη γωνία στροφής αντέχει η αεροτομή, μέχρις ότου να κριθεί ακατάλληλο το πλέγμα. Αυτό που παρατηρήθηκε και στις δύο συναρτήσεις ενεργοποίησης (Wendland  $C^2$  και Multiquadric Biharmonics) είναι ότι δεν επηρεάζεται το πόσο μπορεί να στραφεί η αεροτομή από το πόσο πυκνό είναι το πλέγμα, απλά όσο πιο πυκνό είναι το πλέγμα, τόσο χαμηλότερη είναι η ποιότητα εξ αρχής με αποτέλεσμα όταν κρίνεται ακατάλληλο λ.χ το πυκνό πλέγμα, έχει χαμηλότερη μέση τιμή της μετρικής ποιότητας από αυτήν της περίπτωσης με το αραιό πλέγμα. Στην περίπτωση της Wendland  $C^2$  με  $R=2$ , το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο στις 50 μοίρες περίπου και στα τρία πλέγματα, ενώ όταν εφαρμόστηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=4$ , το πλέγμα σε όλες τις περιπτώσεις κρίθηκε ακατάλληλο στις 82 μοίρες περίπου. Τέλος, στην περίπτωση της συνάρτησης ολικής επιρροής η κρίσιμη αυτή γωνία είναι 67 μοίρες. Επομένως, η χρήση συναρτήσεων ενεργοποίησης τοπικής υποστήριξης με μεγάλη ακτίνα, επιτρέπουν μεγαλύτερη στροφή πριν δημιουργηθεί κάποιο ανεστραμμένο τρίγωνο. Βέβαια, αυτό εξαρτάται και από την εφαρμογή, γιατί μπορεί να μην είναι επιθυμητή μία τόσο μεγάλη στροφή, οπότε σε μία τέτοια περίπτωση προτιμούνται οι συναρτήσεις τοπικής υποστήριξης με μικρότερη ακτίνα, γιατί έχει μικρότερο υπολογιστικό κόστος η φάση εκπαίδευσης των δικτύων καθώς το μητρώο των συντελεστών του συστήματος που πρέπει να επλυθεί είναι πιο αραιό. Αυτό συμβαίνει γιατί όσοι κόμβοι είναι έξω από τον κύκλο με κέντρο το εκάστοτε  $x_{ej}$  και ακτίνα  $R$  δεν επηρεάζονται από τη μετατόπιση του κέντρου αυτού.

Επιπλέον, στον πίνακα 6.11 φαίνεται, για κάθε ακτίνα επιρροής της συνάρτησης W-

endland  $C^2$  και για καθένα από τα τρία πλέγματα, η κρίσιμη γωνία,  $\varphi_{crit}$ , στην οποία παρουσιάστηκε τουλάχιστον ένα ανεστραμμένο τρίγωνο. Για τις γωνίες αυτές, παρατίθενται τα στατιστικά ποιότητας του πλέγματος. Τα ίδια μεγέθη φαίνονται αντίστοιχα στον πίνακα 6.10 για τη συνάρτηση Multiquadric Biharmonics του δικτύου RBF.

Περίπτωση	$\varphi_{crit}$	$\bar{q}_e$	$\sigma_{q_e}$	$q_{e,min}$
Αραιό πλέγμα	69	0.786	0.180	7.85E-3
Μέτρια πυκνό	67	0.715	0.235	4.87E-3
Πυκνό πλέγμα	67	0.580	0.344	1.13E-4

**Πίνακας 6.10:** Αποτελέσματα μέσης τιμής ποιότητας, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος για εφαρμογή της μεθόδου RBF και συνάρτηση ενεργοποίησης τη Multiquadric Biharmonics. Παρουσιάζεται για τη συνάρτηση αυτή η κρίσιμη γωνία στροφής της αεροτομής, στην οποία το πλέγμα κρίθηκε το πλέγμα ακατάλληλο, καθώς και τα μεγέθη της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης τιμής ποιότητας του πλέγματος.

Αραιό πλέγμα		
Ακτίνα επιρροής $R$	2	4
$\varphi_{crit}$	50	83
$\bar{q}_e$	0.833	0.779
$\sigma_{q_e}$	0.183	0.209
$q_{e,min}$	3.96E-4	5.79E-4
Μέτρια πυκνό πλέγμα		
Ακτίνα επιρροής $R$	2	4
$\varphi_{crit}$	52	82
$\bar{q}_e$	0.740	0.720
$\sigma_{q_e}$	0.223	0.211
$q_{e,min}$	6.23E-3	6.56E-4
Πυκνό πλέγμα		
Ακτίνα επιρροής $R$	2	4
$\varphi_{crit}$	52	83
$\bar{q}_e$	0.595	0.589
$\sigma_{q_e}$	0.350	0.341
$q_{e,min}$	5.58E-3	5.85E-4

**Πίνακας 6.11:** Αποτελέσματα μέσης τιμής ποιότητας, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος για εφαρμογή της μεθόδου  $RBF$  με τη  $W$ - $endland$   $C^2$ . Παρουσιάζεται, για κάθε ακτίνα επιρροής και για κάθε τύπο πλέγματος, η κρίσιμη γωνία στροφής της αεροτομής, στην οποία το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο, καθώς και τα μεγέθη της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης τιμής ποιότητας του πλέγματος.



# Κεφάλαιο 7

## Εφαρμογές σε 2Δ πτερύγωση συμπιεστή

### 7.1 Περιγραφή του προβλήματος

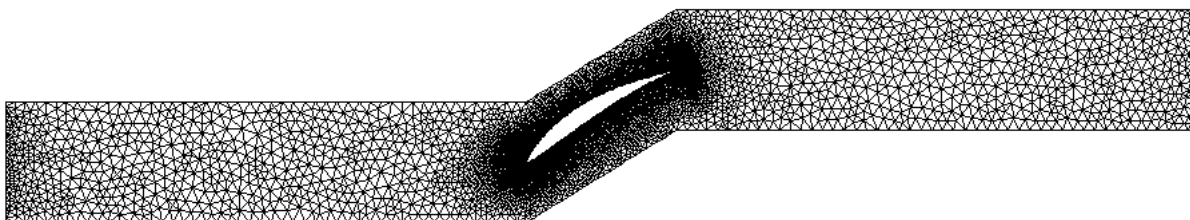
Στις προαναφερθείσες εφαρμογές της μεθόδου προσαρμογής πλέγματος με δίκτυα RBF, το λογισμικό που αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για την προσαρμογή του πλέγματος που προκύπτει από την περιστροφή είτε ενός τετραγώνου γύρω από το κέντρο του, είτε από την περιστροφή της αεροτομής NACA12 γύρω από το μέσο της χορδής της. Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται μια 2Δ πτερύγωση συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης του οποίου το σχήμα τροποποιείται (κατά μία άυθαίρετη μίμηση των όσων συμβαίνουν σε μία διαδικασία βελτιστοποίησης, σε υπερθετικό βαθμό πάντως) και το λογισμικό που αναπτύχθηκε, χρησιμοποιείται για την προσαρμογή του προκύπτοντος πλέγματος στη νέα θέση των στερεών ορίων της αεροτομής. Η γένεση πλέγματος μέσα στη 2Δ πτερύγωση έγινε με τριγωνικά στοιχεία με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.

Στην παρούσα εφαρμογή, όπως επίσης και στις προαναφερθείσες, ενδιαφέρον προκαλεί η αξιολόγηση της ποιότητας του προκύπτοντος πλέγματος, καθώς και η δημιουργία ανεστραμμένων τριγώνων. Για το λόγο αυτό, τροποποιούνται έντονα τα στερεά όρια της αεροτομής του πτερυγίου, αυξάνεται το πάχος της αεροτομής του πτερυγίου, προσαρμόζεται το πλέγμα στη νέα θέση των ορίων του πτερυγίου με τη μέθοδο παραμόρφωσης πλέγματος με δίκτυα RBF και, τέλος αξιολογείται η ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει, χρησιμοποιώντας μετρικές μέσης αναλογίας, που ποσοτικοποιούν την ποιότητα ενός πλέγματος. Η αεροτομή του πτερυγίου της οποίας τα όρια τροποποιούνται παρουσιάζεται στο σχήμα 7.1.

Για τη μεταβολή του πάχους της αεροτομής, χρησιμοποιείται η συνάρτηση (Gauss)

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7.1)$$

όπου  $C$  σταθερά, η οποία ελέγχει την αύξηση του πάχους του πτερυγίου. Λαμβάνοντας το μέσο της χορδής του πτερυγίου ως κέντρο της συνάρτησης αυτής, το πάχος της αεροτομής μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση 7.1. Ως συνάρτηση ενεργοποίησης του δικτύου RBF χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  με ακτίνες επιρροής  $R = 0.5$  και  $R = 2$ . Στις ενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζεται η αεροτομή με διαφορετικά πάχη, για κάθε ακτίνα επιρροής της συνάρτησης ενεργοποίησης, καθώς και η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε περίπτωση.



**Σχήμα 7.1:** Το απεικονιζόμενο σχήμα είναι ένα πτερόγιο συμπιεστή MAN το οποίο αποτελείται συνολικά από 11792 κόμβους και από 22992 τριγωνικά στοιχεία. Πραγματοποιείται τροποποίηση του πάχους της, προσαρμόζεται το πλέγμα στα νέα στερεά όρια του πτερυγίου και αξιολογείται η ποιότητα του προκύπτοντος πλέγματος. Η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος πριν οποιαδήποτε τροποποίηση του πάχους του πτερυγίου είναι  $\bar{q}_e = 0.749$ , η τυπική απόκλιση είναι  $\sigma_{q_e} = 0.308$  και η ελάχιστη ποιότητα που εμφανίζεται είναι  $q_{e,min} = 8.97E-2$ .



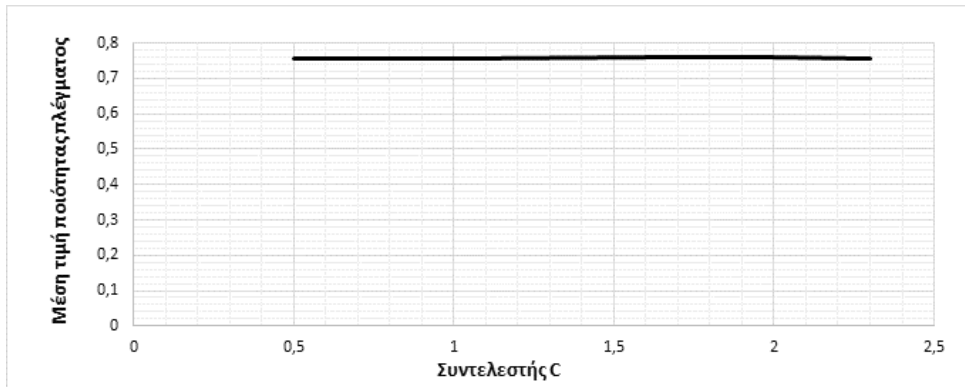
## 7.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

### 7.2.1 Αποτελέσματα με $R=0.5$

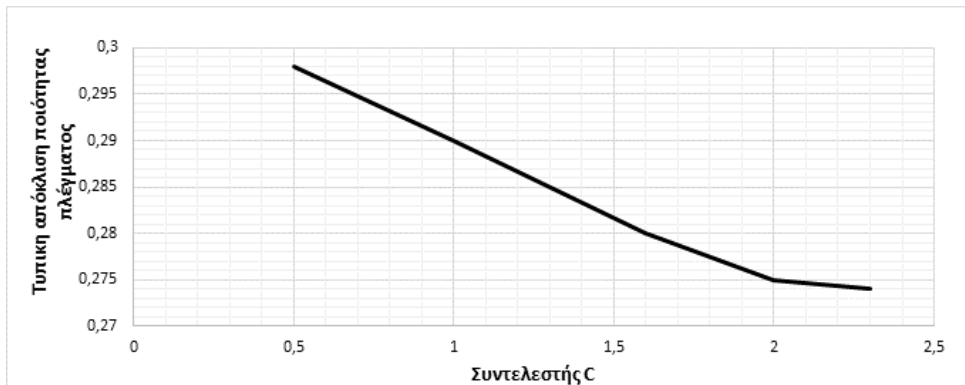
Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  με  $R=0.5$ . Για κάθε συντελεστή  $C$  της εξίσωσης 7.1, παρουσιάζονται διαγράμματα της σχέσης του συντελεστή αυτού με τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και την ελάχιστη ποιότητα του πλέγματος. Τα αποτελέσματα σταματούν σε εκείνη την τιμή του συντελεστή  $C$ , για την οποία το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο. Στον πίνακα 7.1 παρουσιάζονται για κάθε τιμή του συντελεστή  $C$ , τα στατιστικά ποιότητας του πλέγματος.

Σταθερά $C$	0.5	1	1.6	2	2.3
$\bar{q}_e$	0.755	0.758	0.760	0.759	0.758
$\sigma_{q_e}$	0.298	0.290	0.28	0.275	0.274
$q_{e,min}$	9.72E-2	0.100	9.93E-2	9.96E-2	8.05E-3

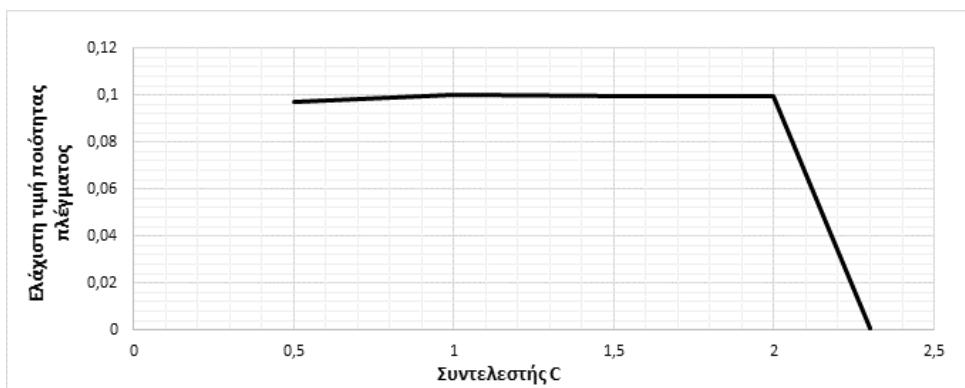
**Πίνακας 7.1:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστη τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε τιμή της σταθεράς  $C$ . Η ακτίνα επιρροής της Ωενδλανδ  $C^2$  είναι  $R=0.5$ .



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

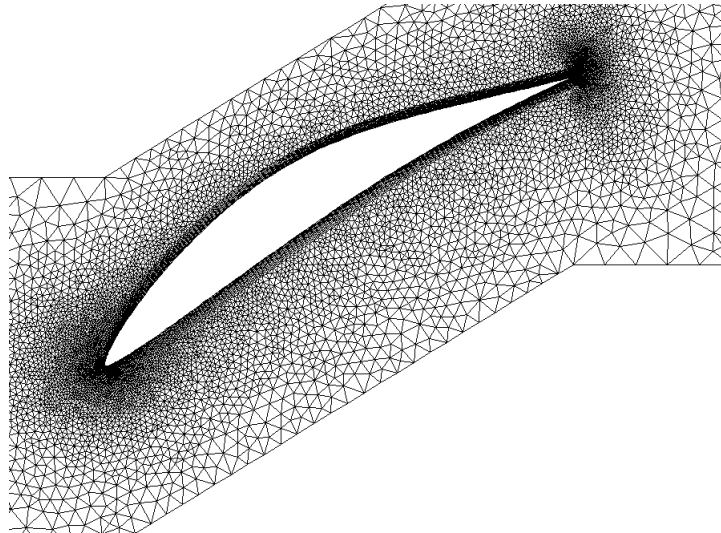


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

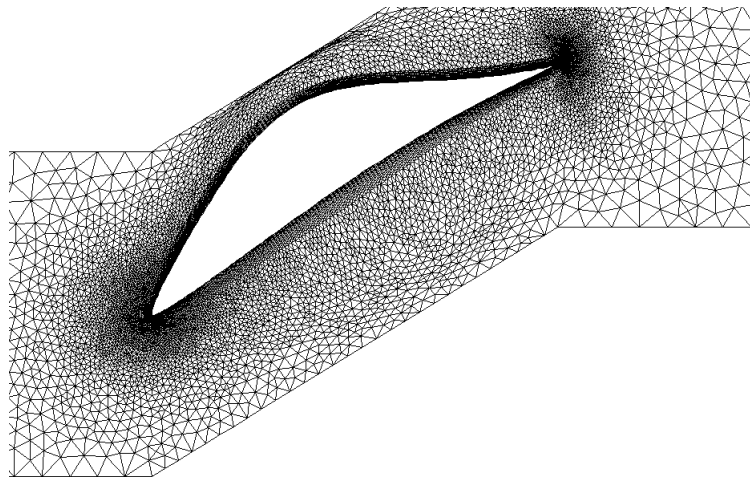


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

**Σχήμα 7.2:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς  $C$  με τη *Wendland*  $C^2$  και  $R=0.5$ .



(α') Η πτερύγωση για  $C=0.5$ .



(β') Η πτερύγωση για  $C=2.3$ .

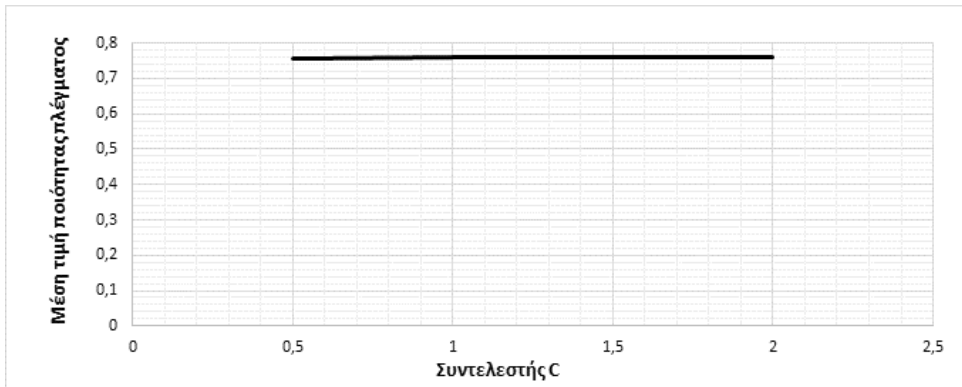
**Σχήμα 7.3:** Εφαρμογή της μεθόδου της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυο *RBF* για δύο τιμές της σταθεράς  $C$ . Στην τελευταία περίπτωση, για  $C=2.3$ , το πλέγμα έχει εμφανίσει ένα μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων και επιπλέον ακατάλληλο για χρήση.

### 7.2.2 Αποτελέσματα με $R=2$

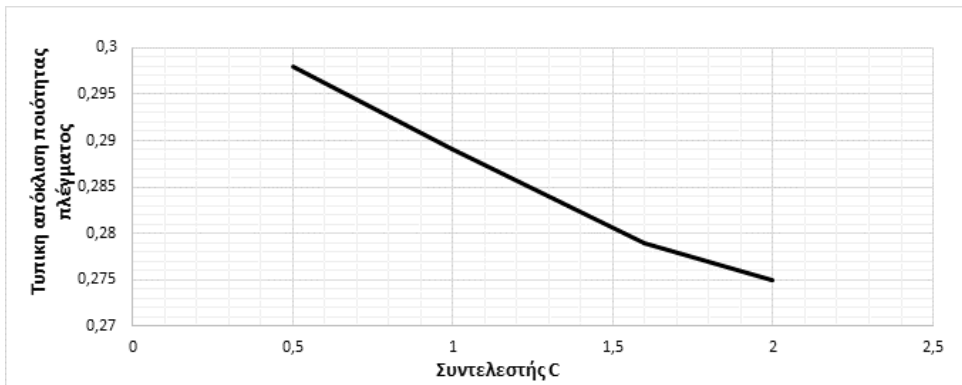
Στην ενότητα αυτή, χρησιμοποιήθηκε η Wendland  $C^2$  με ακτίνα επιρροής  $R=2$ . Ομοίως με την προηγούμενη ενότητα παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι πίνακες 7.2, σχήματα 7.5 και διαγράμματα 7.4 για την συγκεκριμένη περίπτωση.

Σταθερά $C$	0.5	1	1.6	2
$\bar{q}_e$	0.755	0.759	0.760	0.759
$\sigma_{q_e}$	0.298	0.289	0.279	0.275
$q_{e,min}$	0.10	9.99E-2	9.96E-2	2.15E-3

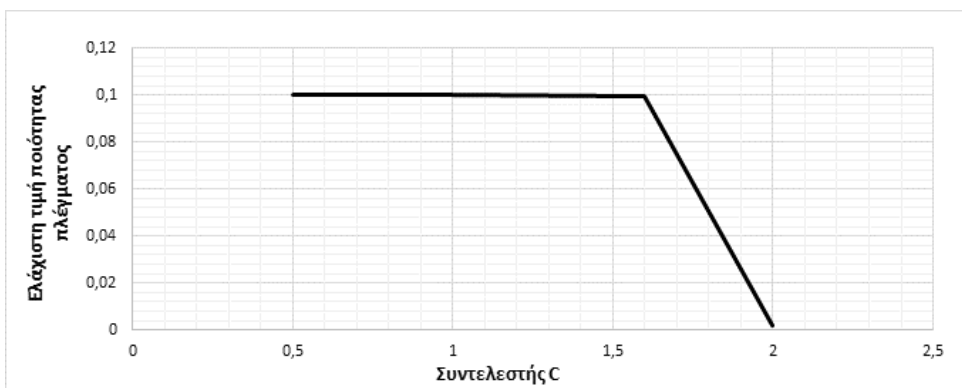
**Πίνακας 7.2:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστη τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος για κάθε τιμή της σταθεράς  $C$ . Η ακτίνα επιρροής της Wendland  $C^2$  είναι  $R=2$ .



(α') Μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

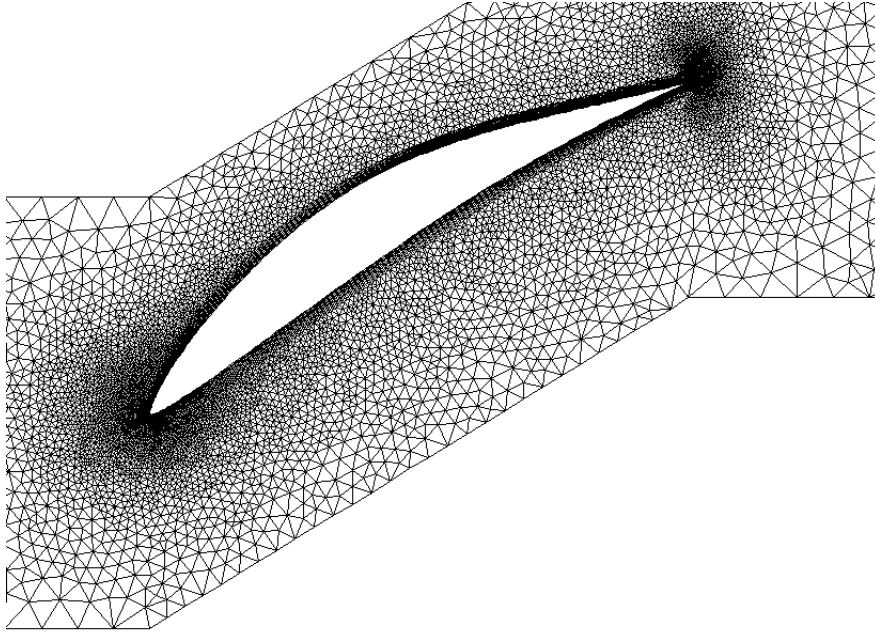


(β') Τυπική απόκλιση της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

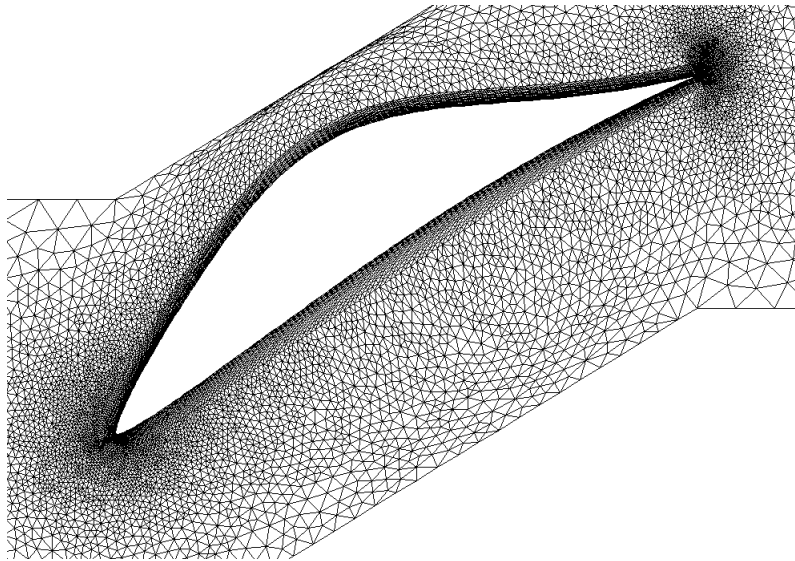


(γ') Ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς παραμόρφωσης  $C$ .

**Σχήμα 7.4:** Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της τιμής της σταθεράς  $C$  με τη *Wendland*  $C^2$  και  $R=2$ .



(α') Η πτερύγωση για  $C=0.5$ .



(β') Η πτερύγωση για  $C=2$ .

**Σχήμα 7.5:** Εφαρμογή της μεθόδου *RBF* για δύο τιμές της σταθεράς  $C$ . Στην τελευταία περίπτωση, για  $C=2$ , το πλέγμα έχει εμφανίσει ένα μικρό αριθμό ανεστραμμένων τριγώνων.

### 7.3 Σχόλια - Συμπεράσματα

Σκοπός της εφαρμογής αυτής είναι η χρησιμοποίηση του λογισμικού που αναπτύχθηκε και υλοποιεί τη μέθοδο προσαρμογής πλέγματος, αλλά και η αξιολόγηση του προκύπτοντος πλέγματος. Η εφαρμογή αυτή πραγματοποιήθηκε με σκοπό να γίνει κατανοητός ο ρόλος των δικτύων RBF μέσα σε ένα κύκλο βελτιστοποίησης. Όπως σε ένα αλγόριθμο βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας, αν λ.χ. η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται με χρήση συζυγών μεθόδων, καθορίζουν την μετατόπιση των στερεών ορίων, έτσι και σε αυτή την εφαρμογή τροποποιούνται τα στερεά όρια της αεροτομής του πτερυγίου με τη χρήση της συνάρτησης 7.1. Φυσικά η πολυπλοκότητα δεν είναι η ίδια, αλλά με αυτήν την εφαρμογή είναι εύκολο να γίνει σαφής ο ρόλος του δικτύου RBF στην προσαρμογή του πλέγματος για να αποφευχθεί η επαναπλεγματοποίηση.

Από τα διαγράμματα 7.2 και 7.4 παρατηρείται ότι η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας παραμένει σταθερή και στις δύο περιπτώσεις (για  $R=0.5$  και για  $R=2$ ) καθώς αλλάζει το πάχος του πτερυγίου. Αυτό πιθανόν οφείλεται στο γεγονός τα μόνα τριγωνικά στοιχεία που αλλάζουν σχήμα είναι αυτά που επηρεάζονται από την πάνω πλευρά του πτερυγίου, αφού ουσιαστικά μόνο αυτή μετατοπίζεται (η κάτω πλευρά παραμένει ακίνητη). Επίσης, επειδή το πλέγμα αποτελείται από πάρα πολλά τριγωνικά στοιχεία, 22992 σε πλήθος, η αλλαγή του σχήματος των τριγωνικών στοιχείων που επηρεάζονται από την πάνω πλευρά του πτερυγίου δεν αλλάζει πολύ την μέση τιμή της μετρικής ποιότητας του πλέγματος. Επιπροσθέτως, σε αντίθεση με τη στροφή, η αύξηση του πάχους της αεροτομής δεν είναι τόσο βίαιη μεταβολή ώστε να επηρεάσει πολύ την ποιότητα του πλέγματος.

Επίσης, η μεταβολή της τυπικής απόκλισης είναι πάρα πολύ μικρή για τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι η τιμή της ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας. Παρατηρείται και στις δύο περιπτώσεις ( $R=0.5$ ,  $R=2$ ) ότι όταν εμφανίζονται τα πρώτα ανεστραμμένα τρίγωνα, η ελάχιστη τιμή της μετρικής ποιότητας πέφτει κατακόρυφα.





## Κεφάλαιο 8

# Σύγκριση διαφόρων συναρτήσεων ενεργοποίησης

### 8.1 Περιγραφή του προβλήματος και αποτελέσματα

Η μέθοδος μετακίνησης πλέγματος με δίκτυα RBF, για να λειτουργήσει, απαιτεί τη χρησιμοποίηση μιας συνάρτησης ενεργοποίησης. Στις εφαρμογές που προηγήθηκαν, χρησιμοποιήθηκε μία συνάρτηση τοπικής και μία ολικής επιρροής. Σε αυτήν τη εφαρμογή πραγματοποιείται μία σύγκριση μεταξύ των συναρτήσεων των πινάκων 2.1 και 2.2.

Οι διάφορες συναρτήσεις των πινάκων αυτών, εφαρμόστηκαν στην περίπτωση των δύο τετραγώνων, στην οποία το ένα είναι τοποθετημένο μέσα στο άλλο και ο μεταξύ τους χώρος έχει πλεγματοποιηθεί με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου. Πραγματοποιείται στροφή σταθερού μέτρου, 40 μοίρες αριστερόστροφα και καταγράφονται τα στατιστικά ποιότητας του πλέγματος που προκύπτει για κάθε συνάρτηση ενεργοποίησης. Για τις συναρτήσεις τοπικής επιρροής η ακτίνα είναι σταθερή και ίση με  $R=2$  (ώστε κάθε κέντρο του δικτύου RBF να επηρεάζει όλους τους κόμβους του εσωτερικού πλέγματος). Στον πίνακα 8.1 παρουσιάζονται η μέση τιμή ( $\bar{q}_e$ ), η τυπική απόκλιση ( $\sigma_{q_e}$ ) και η ελάχιστη τιμή ( $q_{e,min}$ ) της μετρικής ποιότητας του πλέγματος που προκύπτει.

Συναρτήσεις τοπικής επιρροής			
Όνομα	$\bar{q}_e$	$\sigma_{q_e}$	$q_{e,min}$
$CP C^0$	0.852	0.109	0.252
$CP C^2$	0.834	0.122	0.421
$CP C^4$	0.820	0.142	0.362
$CP C^6$	0.822	0.150	0.334
$CTPS C^0$	0.851	0.164	2.33E-2
$CTPS C^1$	0.846	0.148	0.192
$CTPS C_a^2$	0.843	0.140	0.386
$CTPS C_b^2$	0.840	0.136	0.405
Συναρτήσεις ολικής επιρροής			
Όνομα	$\bar{q}_e$	$\sigma_{q_e}$	$q_{e,min}$
<i>Gaussian</i>	0.791	0.212	3.36E-2
<i>Multiquadric Biharmonics</i>	0.852	0.108	0.271
<i>Inverse Multiquadric Biharmonics</i>	0.904	0.179	7.78E-3
<i>Inverse Quadric Biharmonics</i>	0.789	0.156	0.310

**Πίνακας 8.1:** Αποτελέσματα μέσης τιμής ποιότητας, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής μετρικής ποιότητας πλέγματος για εφαρμογή της μεθόδου *RBF* με τις συναρτήσεις ενεργοποίησης των πινάκων 2.1 και 2.2. Διευκρινίζεται ότι, όσο πιο κοντά τείνει στη μονάδα η μέση τιμή της μετρικής ποιότητας, τόσο πιο καλή είναι η ποιότητα του πλέγματος.

## 8.2 Σχόλια και συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα του πίνακα 8.1 δείχνουν ότι σε όλες τις συναρτήσεις τοπικής επιρροής, η ποιότητα του πλέγματος είναι περίπου η ίδια. Με εξαίρεση τη συνάρτηση *CTPS C<sup>0</sup>* στην οποία το πλέγμα κρίθηκε κατάλληλο, γιατί παρουσιάστηκαν 2 ανεστραμμένα τρίγωνα, οι λοιπές συναρτήσεις παρουσιάζουν ποικιλία στην ελάχιστη τιμή και την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας.

Οι συναρτήσεις ολικής επιρροής παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, γιατί έχουν μεγάλη ποικιλία σε όλα τους τα μεγέθη (εξαιρώντας την *Inverse Multiquadric Biharmonics* στην οποία το πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο). Οι τιμές των στατιστικών μεγεθών ποιότητας των συναρτήσεων ολικής επιρροής είναι κοντά με αυτές των συναρτήσεων

τοπικής επιρροής. Παρ' αυτά, ενδείκνυται η χρήση συναρτήσεων τοπικής επιρροής, γιατί εμφανίζουν ευελιξία όσον αφορά την ακτίνα  $R$ , δίνοντας εξίσου καλά αποτελέσματα.



# Κεφάλαιο 9

## Σύνοψη - Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε και προγραμματίστηκε λογισμικό μετατόπισης πλέγματος με δίκτυα RBF και, στη συνέχεια, αυτό χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες εφαρμογές. Κατά τη διάρκεια του βρόχου βελτιστοποίησης, προκύπτει η ανάγκη για τη γένεση πλέγματος καθώς τα στερεά όρια της προς βελτιστοποίησης μορφής τροποποιούνται. Επειδή η επαναπλεγματοποίηση δεν ενδείκνυται, ιδιαίτερα σε βιομηχανικές εφαρμογές με μεγάλα τριδιάστατα πλέγματα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος που παρουσιάστηκε, ώστε να επιταχυνθεί ο κύκλος βελτιστοποίησης.

Η μετατόπιση πλέγματος με δίκτυα RBF παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, ιδίως όταν το πλήθος των κέντρων του είναι μεγάλο. Για αυτό το λόγο, αναπτύχθηκε προσταθεροποιητής ο οποίος αναλαμβάνει την επιτάχυνση της εκπαίδευσης του δικτύου, το οποίο συνήθως έχει, όπως αναφέρθηκε, μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Για την εκπαίδευση του δικτύου είναι αναγκαία η επίλυση τριών (αν το πρόβλημα είναι τριδιάστατο) ή δύο (αν το πρόβλημα είναι διδιάστατο) γραμμικών συστημάτων, τα οποία έχουν ίδιο μητρώο συντελεστών, τα οποία επιλέχθηκε στην παρούσα εργασία να επιλύονται με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων, μίας και το μητρώο είναι συμμετρικό. Η ανάγκη για συμμετρικό προσταθεροποιητή οδηγεί στην τεχνητή συμμετροποίησή του, αφού ο συγκεκριμένος προσταθεροποιητής δεν είναι συμμετρικός και απαιτείται περαιτέρω μελέτη και έρευνα για την εύρεση καλύτερου προσταθεροποιητή ή καλύτερου τρόπου συμμετροποίησης του ήδη υπάρχοντος. Από την άλλη μεριά, η μέθοδος μετατόπισης που αναπτύχθηκε παρουσιάζει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι μετατοπίζει με επιτυχία πλέγμα το οποίο προέκυψε από μεγάλου μέτρου στροφές λ.χ. της αεροτομής NACA 12 που, αν και δεν συναντώνται τόσο μεγάλες μεταβολές σε έναν κύκλο βελτιστοποίησης, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για περιπτώσεις λ.χ. αεροελαστικότητας και αεροακουστικής.



## Παράρτημα Α΄

### Μέτρηση ποιότητας διδιάστατου τριγωνικού πλέγματος

Αναμφίβολα, η σύνδεση της ποιότητας του πλέγματος με το αποτέλεσμα ενός επιλύτη είναι πολύ σημαντικός παράγοντας. Ένα πλέγμα υψηλής ποιότητας, μπορεί να οδηγήσει σε γρηγορότερη σύγκλιση του επιλύτη, ενώ ένα χαμηλής ποιότητας πλέγμα, εάν λ.χ. δεν υπάρχει η απαραίτητη πύκνωση στα οριακά στρώματα ή κοντά σε ένα κρουστικό κύμα, θα δώσει λάθος αποτελέσματα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η μέθοδος της μετακίνησης του πλέγματος με δίκτυα RBF, με σκοπό να αποφευχθεί η επαναπλεγματοποίηση μέσα λ.χ. σε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Με αυτόν τον τρόπο εξοικονομείται χρόνος, αλλά είναι αναγκαίο να ελεγχθεί και η ποιότητα του πλέγματος που προκύπτει, γιατί αν αυτό είναι χαμηλής ποιότητας, η όλη διαδικασία είναι πρακτικά άχρηστη και το πλέγμα αυτό είναι ακατάλληλο για χρήση, λ.χ. με λογισμικό CFD.

Για τη μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος ορίζονται συνήθως μετρικές, οι οποίες ποσοτικοποιούν την ποιότητα, πραγματοποιώντας σύγκριση με τη θεωρητικά μέγιστη ποιότητα που μπορεί να έχει ένα πλέγμα (αν λ.χ. το πλέγμα έχει τριγωνικά στοιχεία, βέλτιστο θεωρείται αυτό που αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα, αν πάλι έχει τετραπλευρικά στοιχεία τότε το βέλτιστο αποτελείται από τετράγωνα). Οι μετρικές αυτές περιέχουν πληροφορίες σχετικά με βασικές ιδιότητες των στοιχείων, όπως λ.χ. το μέγεθος, τον προσανατολισμό, το σχήμα και άλλα. Θα γίνει αναφορά στις μετρικές ποιότητας για τριγωνικά στοιχεία.

Πρώτο βήμα είναι ο ορισμός του ιδανικού στοιχείου, το οποίο στην περίπτωση τριγωνικών στοιχείων είναι το ισόπλευρο τρίγωνο. Στο παρελθόν έχουν παρουσιαστεί διάφορες εργασίες σχετικές με μετρικές ποιότητας τριγωνικών και τετραεδρικών στοιχείων [27]. Σύμφωνα με αυτές, μια μετρική μορφής (shape metric) είναι μία συνεχής συνάρτηση, η οποία υπολογίζει την ποιότητα του τριγωνικού ή τετραπλευρικού στοιχείου και παραμένει αναλλοίωτη κατά τη μεταφορά, τον καθρεπτισμό, την περιστροφή και ομοιόμορφη συμπίεση [28]. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, επιλέχθηκε η **μετρι-**

**κῆ μέσης αναλογίας** (mean - ratio) [29], [30], αφού είναι εύκολη στη διαχείρισή της λόγω της αλγεβρικής της μορφής.

Για τον καθορισμό της ποιότητας ( $q_e$ ) ενός τριγωνικού στοιχείου πρέπει πρώτα να οριστεί η φορά με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων του τριγωνικού στοιχείου. Αυτή βολεύει να είναι αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ώστε να διασφαλιστεί το θετικό πρόσημο της Ιακωβιανής ορίζουσας για τα αποδεκτά τρίγωνα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η Ιακωβιανή κάθε κόμβου του τριγωνικού στοιχείου, η οποία για τον κόμβο  $i$  εκφράζεται ως

$$A_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \quad (A'.1)$$

όπου  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  και  $(x_k, y_k)$  οι συντεταγμένες των τριών κορυφών  $i$ ,  $j$  και  $k$  του τριγωνικού στοιχείου αντίστοιχα. Το γινόμενο της Ιακωβιανής αυτής με την αντίστροφη Ιακωβιανή του ιδανικού τριγωνικού στοιχείου ορίζουν τον πίνακα  $S_i$ , δηλαδή

$$S_i = A_i W^{-1} = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (A'.2)$$

ο οποίος απαιτείται για την εύρεση της μετρικής μέσης αναλογίας του κόμβου  $i$ , η οποία ορίζεται ως

$$\mu_i = \mu(S_i) = \frac{\det(S_i)}{\|S_i\|_F^2} \quad (A'.3)$$

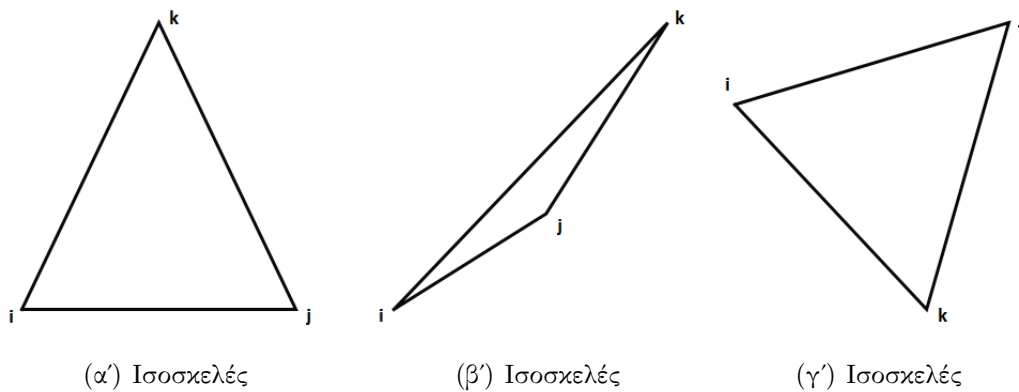
Εδώ  $\det(S_i)$  είναι η ορίζουσα του πίνακα  $S_i$ , η οποία αν είναι αρνητική σημαίνει ότι το τρίγωνο αυτό είναι ανεστραμμένο και  $\|\cdot\|_F^2$  είναι η νόρμα κατά *Frobenius* και ισούται με την τετραγωνική ρίζα ίχνους γινομένου πινάκων ως

$$\|S_i\|_F = \sqrt{\text{tr}(S_i^T S_i)} \quad (A'.4)$$

όπου το ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του. Ως ποιότητα του τριγωνικού στοιχείου ( $q_e$ ) ορίζεται το διπλάσιο της μέσης τιμής των μετρικών μέσης αναλογίας κάθε κόμβου όπως φαίνεται στη σχέση A'.5 [7]. Τέλος, στο σχήμα A'.1 παρουσιάζονται η μετρική ποιότητας, όπως εκφράζεται με τη μετρική μέσης αναλογίας, για τρεις περιπτώσεις τριγωνικών στοιχείων, ενώ στον πίνακα A'.1 παρατίθενται οι συντεταγμένες των κόμβων κάθε τριγωνικού στοιχείου καθώς και η τιμή της μετρικής ποιότητας (η φορά αρίθμησης των κόμβων είναι από τον  $i$  κόμβο προς τον  $k$ )

$$q_e = 2\bar{\mu} \quad \mu \varepsilon \quad \bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_i}{3} \quad (A'.5)$$





**Σχήμα Α'.1:** Τρεις περιπτώσεις τριγώνων των οποίων οι μετρικές ποιότητες παρατίθενται στον πίνακα Α'.1. Το τρίγωνο Α'.1(α') είναι ισόπλευρο με μετρική ποιότητας ίση με τη μονάδα (η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ένα τρίγωνο με αυτές τις μετρικές), το τρίγωνο Α'.1(β') είναι χαμηλής ποιότητας, ενώ το τρίγωνο Α'.1(γ') είναι ανεστραμμένο, το οποίο φαίνεται και από την αρίθμηση των κόμβων η οποία είναι ωρολογιακή.

Κορυφή	$x_\alpha$	$y_\alpha$	$x_\beta$	$y_\beta$	$x_\gamma$	$y_\gamma$
$i$	0	0	0	0	0	0
$j$	1	0	1	0.2	1	0.2
$k$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.8	0.6	0.7	-0.5
$q_e$	1.00		0.153		-	

**Πίνακας Α'.1:** Μετρικές ποιότητες μέσης αναλογίας για κάθε τρίγωνο του σχήματος Α'.1. Για το τελευταίο τρίγωνο, το ανεστραμμένο (τρίγωνο Α'.1(γ')), η μετρική ποιότητας δεν έχει νόημα, διότι η ύπαρξη ενός τριγώνου σαν αυτό καθιστά το υπολογιστικό πλέγμα ακατάλληλο για χρήση. Τα  $x_\alpha, y_\alpha, x_\beta, y_\beta, x_\gamma, y_\gamma$  αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των τριγώνων Α'.1(α'), Α'.1(β') και Α'.1(γ') αντιστοίχως.



## Βιβλιογραφία

- [1] Παπαδημητρίου, Δ.: *Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση-σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2007.
- [2] Καμπόλης, Ι.: *Πολυεπίεδοι, πολυεπεξεργαστικοί αλγόριθμοι αεροδυναμικής βελτιστοποίησης στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [3] Ζυμάρης, Α.: *Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2010.
- [4] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων. Εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2009.
- [5] Χ., Γιαννάκογλου Κ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2006.
- [6] Elizarov, A.M., P'inskiy, N.B., and Potashev, A.V.: *Mathematical Methods of Airfoil Design: Inverse Boundary Value Problems of Aerohydrodynamics*. Wiley, 1997.
- [7] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος (Grid computing)*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [8] Kämpolis I.C., Zymaris A.C, Asouti V.G. and Giannakoglou K.C.: *Multilevel Optimization Strategies based on Metamodel-Assisted Evolutionary Algorithms, for Computationally Expensive Problems*. 2007 IEEE Congression Evolutionary Computation CEC, Singapore, September 25-28, 2007.
- [9] Κοντολέοντος, Ε.: *Ανάλυση και βελτιστοποίηση σύνθετων ρευστομηχανικών διατάξεων με χρήση υπολογιστικής ρευστοδυναμικής και εξελικτικών αλγορίθμων*.

- Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [10] M.E., Biancolini, Viola, Ignazio Maria, and M., Riotte: *Sails trim optimisation using CFD and RBF mesh morphing*, 2014. Export Date: 6 March 2014 Source: Scopus.
- [11] Sieger, D. and Menzel, S. and Botsch, M.: *RBF Morphing Techniques for Simulation-based Design Optimization*. Engineering with Computers, 30(2):161–174, 2014.
- [12] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [13] Ζερβογιάννης, Θ.: *Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική και τις στροβιλομηχανές με χρήση συζυγών τεχνικών, υβριδικών πλεγμάτων και του ακριβούς εσσιανού μητρώου*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [14] Καββαδιάς, Ι.: *Αεροδυναμική βελτιστοποίηση για τυρβώδεις ροές με χρήση συζυγών μεθόδων και επεξεργαστών καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.
- [15] Lynch, D.: *Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems*. Journal of Computational Physics, 47(3):387 – 411, 1982.
- [16] Lynch, D. and ONeil, K.: *Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions*. In 3rd International Conference, Mississippi University, Oxford, May 19-23 1980.
- [17] Batina, J.: *Unsteady Euler algorithms with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aerodynamic analysis*. AIAA Journal, 29(3):327-333, 200.
- [18] Degand, C. and Farhat, C.: *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. Computers & Structures, 80(3-4):305-316, 2002.
- [19] Braess, H. and Wriggers, P.: *Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element analysis of free surface flow*. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 190(1-2):95-109, 2000.
- [20] Boer, A. de, Schoot, M. S. van der, and Bijl, H.: *Mesh deformation based on radial basis function interpolation*. Comput. Struct., 85(11-14):784–795, jun 2007.
- [21] Wendland, H.: *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger*, 1996.

- [22] *Radial Basis Functions, webpage.* [en.wikipedia.org/wiki/Radial\\_basis\\_functions](http://en.wikipedia.org/wiki/Radial_basis_functions).
- [23] Γιαννάκογλου Κ. Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ.: *Αριθμητική Ανάλυση για μηχανικούς.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ, 2003.
- [24] Alléon, G. and Benzi, M. and Giraud, L.: *Sparse approximate inverse preconditioning for dense linear systems arising in computational electromagnetics.* Numerical algorithms, 16:1–15, 1997.
- [25] Kolotilina, L. Yu.: *Explicit preconditioning of systems of linear algebraic equations with dense matrices,* 1988.
- [26] Shewchuk, Jonathan R: *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain.* Technical report, Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [27] Knupp, P. M.: *Algebraic mesh quality metrics.* SIAM J. Sci. Comput., 23(1):193–218, January 2001.
- [28] Dompierre, J., Labbe P. Guibault .F and Camerero, R.: *Proposal of benchmarks for 3d unstructured tetrahedral mesh optimization, proceedings of the 7th international meshing roundtable, dearborn, MI, (1998).*
- [29] A. Liu and Joe, B.: *Relationship Between Tetrahedron Shape Measures.* BIT, vol. 34, pp.268-287, (1994).
- [30] Munson, T. S.: *Mesh Shape-Quality Optimization Using the Inverse Mean-Ration Metric: Tetrahedral proofs.* Technical Memorandum ANL/MCS-TM-275, Argonne National Laboratory, (2004).