# Ακέραιες και Μερόμορφες Συναρτήσεις

Κυριάκος Στρατουράς

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Επιβλέπων Καθηγητής : Ιωάννης Σαραντόπουλος

Ιούνιος, 2015

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

Η εργασία αυτή ασχολείται σε μεγάλο βαθμό με θεωρήματα και πορίσματα των Gosta Mittag-Leffler και Karl Weierstrass , γι'αυτό και θεώρησα σκόπιμο να παραθέσω κάποια ιστορικά στοιχεία που αφορούν την ζωή και το έργο των δύο αυτών μαθηματικών.

## 1.1 Σύντομα Ιστορικά και Βιογραφικά στοιχεία

Ο Gosta Mittag-Leffler ήταν Σουηδός μαθηματικός που έζησε το 1846-1927. Είναι γνωστός για την ίδρυση του πρώτου μαθηματικού περιοδικού Acta Mathematica. Ως μεταδιδακτορικός φοιτητής σε Παρίσι και Βερολίνο, μελέτησε και έκτισε πάνω στο έργο του Karl Weierstrass , του οποίου παρακολούθησε διαλέξεις στο Βερολίνο. Το έργο του Mittag-Leffler επηρεάστηκε πολύ απο το αντίστοιχο του Karl Weierstrass στην μιγαδική ανάλυση. Εν συντομία, απέδειξε το θεώρημα Mittag-Leffler , το βασικό πόρισμα του οποίου είναι ότι οι μερόμορφες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από τους πόλους και τις πολλαπλότητές τους και τους συντελεστές που εχουν στα αναπτύγματα Laurent.

Ο Karl Weierstrass ήταν Γερμανός μαθηματικός που έζησε το 1815-1897. Αρχικά φοίτησε στο πανεπιστήμιο της Βόννης για να προετοιμαστεί για κυβερνητική θέση από τον πατέρα του. Εκεί οι σπουδές του ήταν στα πεδία των νομικών και των οικονομικών, όμως ο ίδιος από μικρός ήθελε να σπουδάσει μαθηματικά. Τελικά εφυγε απο το πανεπιστήμιο χωρίς να πάρει πτυχίο. Αργότερα, πήγε στο πανεπιστήμιο του Munster για να σπουδάσει μαθηματικά και φοίτησε σε σχολή καθηγητών για να μπορεί να διδάξει στην πόλη. Λόγω οικονομικών προβλημάτων (ο μισθός του ως καθηγητής ήταν πολύ μικρός) απομονώθηκε από την μαθηματική κοινότητα, αφού δεν μπορούσε να επικοινωνεί με τους μαθηματικούς της εποχής του. Παρ' όλα αυτά, ο Weierstrass δούλεψε ασταμάτητα στην Ανάλυση και έγινε αργότερα γνωστός ως ο "πατέρας της Σύγχρονης Ανάλυσης". Ασχολήθηκε με την θεωρία των περιοδικών συναρτήσεων, την πραγματική ανάλυση, μιγαδική ανάλυση, ελλειπτικές συναρτήσεις, αβελιανές συναρτήσεις και τη σύγκλιση απείρων γινομένων, τα οποία σχετίζονται άμεσα με το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstrass όπως θα δούμε αργότερα.

## 1.2 Στοιχεία της Κλασικής Μιγαδικής Ανάλυσης

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με καποια θεωρήματα και πορίσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης που έχουν να κάνουν με τις Ακέραιες και τις Μερόμορφες Συναρτήσεις. Κατά την διάρκεια της ανάλυσής μας, θα χρησιμοποιήσουμε καποια βασικά αποτελέσματα αλλά και ορισμούς που παραθέτουμε πιο κάτω:

**Ορισμός 1.2.1.** *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *θα λέγεται ακέραια εάν ειναι αναλυτική* $\forall z \in \mathbb{C}$

**Ορισμός 1.2.2.** *Εαν μια συνάρτηση* $f$ *είναι αναλυτική σε κάποιο διάτρητο δίσκο* $D'(z_0, R)$ *για κάποιο* $R > 0$*, τότε από θεώρημα Laurent μπορεί να γραφεί στην μορφή :*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \quad , z \in D'(z_0, R)$$

*όπου*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z-z_0=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (0 < r < R)$$

*Θα λέμε ότι η* $f$ *έχει πόλο τάξης* $k$ *στο* $z_0$ *εάν* $a_{-k} \neq 0$ *και* $a_n = 0 \quad \forall n > k$

**Ορισμός 1.2.3.** *Μια συνάρτηση* $f$ *θα λέγεται μερόμορφη στον τόπο* $\Omega$ *εάν ειναι αναλυτική* $\forall z \in \Omega$ *εκτός των πόλων της στο* $\Omega$.

**Ορισμός 1.2.4.** *Έστω* $z_0$ *μεμονωμένο ανώμαλο σημείο μιας συνάρτησης* $f$. *Ως ολοκληρωτικό υπόλοιπο της* $f$ *ορίζεται το ολοκλήρωμα*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

*όπου το* $r$ *είναι επιλεγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε η* $f$ *να ειναι αναλυτική στον διάτρητο δίσκο* $D'(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}, r \leq R$

**Ορισμός 1.2.5.** *(Τοπική ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων) Μια ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *ορισμένη σε ένα τόπο* $\Omega$ *θα λέμε ότι συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο* $\Omega$ *εάν η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του* $\Omega$.

**Ορισμός 1.2.6.** *Η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ώς εξής :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

*και παραθέτουμε κάποιες ιδιότητές της :*
*1)Είναι αναλυτική για* $\Re z > 0$
*2)*$\Gamma(n) = (n-1)!$ , $n \in \mathbb{N}$
*3)Έχει απλούς πόλους στα σημεία* $0, -1, -2, ......$

**Θεώρημα 1.2.1.** *(Liouville) Μια φραγμένη ακέραια συνάρτηση είναι σταθερή.*

**Θεώρημα 1.2.2.** *(M-test Weierstrass) Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ *ορισμένη στον τόπο* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Εάν η σειρά θετικών αριθμών* $\sum_{n=0}^\infty M_n$ *συγκλίνει και επίσης η* $|f_n(z)| \leq M_n$ $\forall z \in \Omega$ *για επαρκώς μεγάλο* $n$ *, τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^\infty f_n(z)$ *συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο* $\Omega$.

**Θεώρημα 1.2.3.** *(Αρχή Ορίσματος) Έστω* $f$ *μερόμορφη συνάρτηση στον τόπο* $D$ *και* $\gamma$ *κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη στο εσωτερικό του* $D$. *Υποθέτουμε επίσης ότι η* $f$ *είναι αναλυτική στο εσωτερικό της* $\gamma$, *εκτός απο μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα οποία είναι πόλοι της* $f$ *και ότι οι ρίζες και οι πόλοι της* $f$ *δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια την* $\gamma$. *Αν οι ρίζες στο εσωτερικό της* $\gamma$ *συμβολίζονται με* $a_1, a_2, ...., a_m$ *και οι πόλοι με* $b_1, b_2, ....., b_n$, *τότε :*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m} I(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, b_k) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma arg(f(z))$$

*όπου* $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z-a}$ *ο δείκτης στροφής της* $\gamma$ *γύρω από το σημείο* $a$ *και* $\Delta_\gamma arg(f(z))$ *η μεταβολή του ορίσματος της* $f(z)$ *καθώς το* $z$ *κινείται πάνω στην καμπύλη* $\gamma$.

**Θεώρημα 1.2.4.** *(Κριτήριο Cauchy για σύγκλιση ακολουθιών) Μία ακολουθια* $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* $N$ *με την ιδιότητα ότι* $|c_m - c_n| < \epsilon$ *για κάθε* $m, n \geq N$

**Θεώρημα 1.2.5.** *(Κριτήριο Cauchy για σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων) Μία ακολουθια συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ *συγκλίνει ομοιόμορφα (σε μια συνάρτηση* $f$*) σε ένα σύνολο* $\Omega$ *αν και μόνο αν* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* $N$ *με την ιδιότητα ότι* $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ *για κάθε* $m, n \geq N$ *και* $z \in \Omega$

**Πόρισμα 1.2.1.** *(Θεωρήματος Morera) Έστω $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων σε ένα τόπο $\Omega$ η οποία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα σε κάποια $f(z)$ εκεί. Τότε:*
*$(a) f(z) \in H(\Omega)$ , όπου $H(\Omega)$ ο χώρος των αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένων στο $\Omega$*
*$(b) f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)$ τοπικά ομοιόμορφα στο $\Omega$ $(k = 0, 1, 2, ...)$*

**Θεώρημα 1.2.6.** *Αν $f$ είναι αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο, $|f(z)| < 1$, $z \in D(0,1)$ και $a_1, a_2, .........a_n$ ρίζες της $f$ στο $D(0,1)$ ,τότε :*

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k} \right|$$

# Κεφάλαιο 2

# Ακέραιες και Μερόμορφες Συναρτήσεις

## 2.1 Θεώρημα $Mittag - Leffler$

Όπως έχουμε πει, μερόμορφες λέγονται οι συναρτήσεις που είναι αναλυτικές σε όλα τα σημεία ενός τόπου, εκτός των πόλων. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι :

$$\tan z, \quad \cot z, \quad \frac{z}{e^z - 1}$$

Έστω τώρα δύο μερόμορφες συναρτήσεις που να έχουν ακριβώς τους ίδιους πόλους και κύρια μέρη ($singular\ parts$). Τότε η διαφορά τους ειναι μια ακέραια συνάρτηση. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο γενικό συμπέρασμα για τις μερόμορφες συναρτήσεις:
*Η πιο γενικευμένη μορφή μερόμορφης συνάρτησης με ένα συγκεκριμένο κύριο μέρος είναι μια μερόμορφη συνάρτηση που έχει αυτό το κύριο μέρος συν μια αυθαίρετη ακέραια συνάρτηση.*

**Ερώτημα** : Μπορεί να βρεθεί συνάρτηση με απλούς πόλους στους οποίους το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι ίσο με 1, σε κάθε ακέραιο σημείο ;
*Η απάντηση είναι ναι, αφού ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι :*
$f(z) = \pi cot(\pi z)$
Άρα, με βάση αυτά που μόλις έχουμε παρατηρήσει, η γενική λύση ενός τέτοιου προβλήματος θα είναι μια συνάρτηση της μορφής : $\pi cot(\pi z) + g(z)$, όπου $g(z)$ είναι μια αυθαίρετη ακέραια συνάρτηση.
**Ερώτημα**: Υπάρχει μερόμορφη που να έχει πόλους στα σημεία $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική, άφου εαν κάτι τέτοιο ίσχυε, τότε το 0 θα ήταν σημείο συσσώρευσης (σ.σ) των πόλων. Ομώς , εξ᾽ορισμού

των μερόμορφων συναρτήσεων, το μοναδικό σ.σ που μπορούν να έχουν οι πόλοι είναι το σημείο στο άπειρο, αφου είναι μεμονωμένα σημεία. Επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες.
Έστω τώρα ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια μερόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε να έχει πόλους στα $\{b_j\}_{j=0}^n$ με συγκεκριμένα ανώμαλα τμήματα $\{P(z;b_j)\}_{j=0}^n$. Τότε η $P(z;b_j)$ είναι αναλυτική $\forall z$ εκτός για $z=b_j$. Επομένως, η συνάρτηση $\sum_{j=0}^n P(z;b_j)$ είναι μερόμορφη συνάρτηση που έχει την επιζητούμενη συμπεριφορά στα σημεία $\{b_j\}_{j=0}^n$. Αρκεί τότε να προσθέσουμε σ'αυτήν μιαν αυθαίρετη ακέραια συνάρτηση για να πάρουμε την γενική λύση του πιο πάνω προβλήματος.
Το πρόβλημα αυτό γίνεται ακόμα πιο ενδιαφέρον εάν θέλουμε η συνάρτηση μας να έχει άπειρους πόλους. Για παράδειγμα, υπάρχει συνάρτηση που να έχει απλούς πόλους συκεκριμένα στους ακεραίους ; Ναι, αφού ένα παράδειγμα τέτοιας υπάρχει και είναι η $cot(\pi z)$. Εαν η προηγούμενη διαδικασία επιτρεπόταν και για άπειρους πόλους, η συνάρτηση που θα ψάχναμε θα είχε ως κύρια μέρη τα $\{P(z;n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty} = \frac{1}{z-n}$ και θα ήταν της μορφής $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P(z;n) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{z-n}$. Η σειρά αυτή όμως δεν συγκλίνει , άρα το ζητούμενο είναι να τροποποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνει, αλλά ταυτοχρόνως να μην προστεθούν άλλες ανωμαλίες ή να επηρεαστούν οι υπάρχουσες.

**Θεώρημα 2.1.1.** *(Θεώρημα $Mittag - Leffler$) Έστω $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ ακολουθία διακριτών σημείων που δεν έχουν σ.σ. στο $\mathbb{C}$. Έστω επίσης $\{P_k(z)\}_{k=0}^\infty$ ακολουθία πολυωνύμων χωρίς σταθερούς όρους. Τότε, υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση $f(z)$ που να έχει ως κύριο μέρος το $P_k(\frac{1}{z-b_k})$ στο $b_k$, $k \in \mathbb{N}$ και καμία άλλη ανωμαλία στο $\mathbb{C}$.*

**Απόδειξη** : Αφού $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ δεν έχει σ.σ. στο $\mathbb{C}$, κάθε κύκλος με κέντρο το 0 θα έχει πεπερασμένο αριθμό $b_k$ στο εσωτερικό του. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επαναδιατάξουμε τα $b_k$ έτσι ώστε να ισχύει $|b_1| \leq |b_2| \leq ...... \leq |b_n| \leq .....$ Επιπλέον, υποθέτουμε (προσωρινά) ότι $b_1 \neq 0$ και επιλέγουμε μια ακολουθία θετικών αριθμών $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ ώστε $\sum_{k=1}^\infty c_k$ να συγκλίνει.
Επειδή κάθε ανώμαλο τμήμα $P_k(\frac{1}{z-b_k})$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο $D(0,|b_k|)$, μπορεί να γραφεί ως σειρά $Taylor$ γύρω από το 0:

$$P_k(\frac{1}{z-b_k}) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}z + ..... + a_n^{(k)}z^n + ......, z \in D(0,|b_k|)$$

Αυτή η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο $D(0,\frac{|b_k|}{2})$.
Θέτουμε τώρα

$$Q_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} a_j^{(k)} z^j$$

και παίρνουμε $n_k$ επαρκώς μεγάλο έτσι ώστε :

$$\|P_k(\tfrac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\|_{D(0,\frac{|b_k|}{2})} < c_k$$

όπου :

$$\|P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\|_{D(0,\frac{|b_k|}{2})} = \{sup\, |P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)| : z \in D(0, \frac{|b_k|}{2})\}$$

Θεωρούμε τώρα την σειρά :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\} \tag{2.1}$$

και κύκλο με κέντρο το 0 και ακτίνα $R > 0$. Στο εσωτερικό αυτού του κύκλου υπάρχουν πεπερασμένα σημεία στα οποία το άθροισμα έχει πόλους. Πιο συγκεκριμένα, μόνο τα $P_k(\frac{1}{z-b_k}),\ b_k \in D(0, R)$ συνεισφέρουν στους πόλους.
Η ιδέα είναι η εξής : Χωρίζουμε την σειρά σε δύο τμήματα με τον εξής τρόπο :

$$\sum_{|b_k|\leq 2R} \{P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\} + \sum_{|b_k|>2R} \{P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\}$$

Τότε το δεύτερο μέρος δεν έχει πόλους στο $D(0, R)$ και επίσης :

$$\|P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\|_{\bar{D}(0,R)} \ < \ c_k$$

Άρα η ουρά της σειράς συγκλίνει απολύτως και ομοιόμρφα για κάθε $z \in \bar{D}(0, R)$ και άρα είναι αναλυτική στο $D(0, R)$, επομένως το

$$\sum_{|b_k|\leq 2R} \{P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\}$$

είναι ρητή συνάρτηση με την ζητούμενη συμπεριφορά στα $b_k \in D(0, R)$. Επειδή η επιλογή του $R$ ήταν αυθαίρετη, μπορούμε να το στείλουμε στο άπειρο και άρα, η σείρα $Mittag - Leffler$ (2.1) συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $\mathbb{C}\backslash\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ και έχει την ζητούμενη συμπεριφορά παντού στο $\mathbb{C}$ εκτός ίσως από το $z = 0$. Εάν το 0 είναι επιζητούμενος πόλος, τότε προσθέτουμε το ανώμαλο τμήμα που έχει πόλο το 0 στην σειρα (2.1) και τότε παίρνουμε την μερόμορφη συνάρτηση με όλες τις ιδιότητες που θέλουμε.

**Παρατήρηση 2.1.1.** *Θέτουμε* $P_k(z) = z \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

$$Aν \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b_k|^{n+1}} < \infty \quad (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b_k|^{n}} = \infty)$$

*τότε αρκεί να πάρουμε ως* $Q_k(z)$ *τους πρώτους* $n$ *όρους στο ανάπτυγμα Taylor του* $P_k(\frac{1}{z-b_k}) = \frac{1}{z-b_k}$ *(Ανεξάρτητα του k)*

*Δηλαδή*

$$Q_k(z) \;=\; -\frac{1}{b_k} - \frac{z}{{b_k}^2} - ...... - \frac{z^{n-1}}{{b_k}^n} \; (k \in \mathbb{N})$$

*Τότε*

$$P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z) = \frac{z^n}{b_k^n(z-b_k)},$$

*από το οποίο προκύπτει ότι :*

$$\|P_k(\frac{1}{z-b_k}) - Q_k(z)\|_{\bar{D}(0,R)} \leq \frac{2R^n}{|b_k|^{n+1}} = c_k \; (z \in \bar{D}(0,R) \; , |b_k| > 2R)$$

*Όμως η*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R^n}{|b_k|^{n+1}} \quad συγκλίνει,$$

*άρα η επιλογη του* $n_k = n$ *είναι επιτρεπτή.*

## 2.2 Θεώρημα του *Weierstrass*

**Ερώτημα** : Έστω ότι μας δίνεται μια ακολουθία διακριτών σημείων $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Μπορούμε γενικά να βρούμε ακέραια συνάρτηση με ρίζες συγκεκριμένης πολλαπλότητας $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ στα σημεία αυτά και πουθενά αλλού ; Εάν πρόκειται για πεπερασμένη ακολουθία $\{a_j\}_{j=1}^{n}$ η απάντηση είναι τετριμμένη, αφού μπορούμε να θέσουμε ως :

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-a_j)^{k_j}$$

Στην περίπτωση άπειρης ακολουθίας, έχουμε το :

**Θεώρημα 2.2.1.** *Έστω* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ *ακολουθία διακριτών σημείων που να μην έχουν σ.σ στο* $\mathbb{C}$ *και μια ακολουθία θετικών ακεραίων* $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$. *Τότε, υπάρχει ακέραια συνάρτηση που να έχει ρίζες πολλαπλότητας* $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *στα* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ *και πουθενά αλλού.*

(Το θεώρημα αυτό προκύπτει ως πόρισμα του θεωρήματος $Mittag\!-\!Leffler$ αλλά ιστορικά αποδείχτηκε πρώτα από τον $Weierstrass$.)

**Απόδειξη** :

(Εάν υποθέσουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει, ας την καλέσουμε $f(z)$, τότε η λογαριθμική της παράγωγος $(logf(z))' = \frac{f^{'}(z)}{f(z)}$ είναι μερόμορφη και στο $a_j$ το ανώμαλο μέρος της θα είναι το $\frac{k_j}{z-a_j}$)

Από θεώρημα $Mittag-Leffler$, υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση $g(z)$ που έχει το $\frac{k_j}{z-a_j}$ ως ανώμαλο μέρος στο κάθε $a_j$.

Πως θα χρησιμοποιήσουμε όμως αυτήν τη $g(z)$;

Με διάφορα παραδείγματα, π.χ.

$$f(z) = z^3 \Rightarrow \frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{3}{z}$$

$$\int \frac{3}{z} dz = 3log(z) = log(z^3)$$

$$f(z) = z^3 = e^{\int \frac{3}{z} dz} = e^{\frac{f^{'}(z)}{f(z)}}$$

καταλαβαίνουμε ότι αν θέλουμε να αναζητήσουμε για $f(z)$ πρέπει να θεωρήσουμε την $e^{\int g(z)dz}$

Έστω τώρα ζ και $z$ σημεία διάφορα των $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$G(z) = \int_{\zeta}^{z} g(t)dt$$

με δρόμο ολοκλήρωσης που να μην περνά από τα $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Η $G(z)$ δεν είναι μονότιμη, αφού η τιμή που θα πάρει εξαρτάται από το δρόμο ολοκλήρωσης. Χρησιμοποιώντας όμως την Αρχή ορίσματος (Θεώρημα 1.2.3), προκύπτει ότι οποιοιδήποτε δύο κλάδοι της $G(z)$ διαφέρουν κατά $2k\pi i$ , $k \in \mathbb{Z}$. Άρα, η συνάρτηση $h(z) = e^{G(z)}$ είναι μονότιμη. Επειδή η $G(z)$ είναι αναλυτική στα σημεία όπου ορίζεται, η $h(z)$ είναι επίσης αναλυτική και δεν μηδενίζεται, εκτός ίσως για $z = a_j$ , $j \in \mathbb{N}$.

Αυτό που θέλουμε τώρα να δείξουμε είναι ότι η $h(z)$ είναι πράγματι η συνάρτηση που αναζητούμε. Γι'αυτό θα πρέπει να δείξουμε ότι οι ανωμαλίες στα $a_j$ μπορούν να απαλειφθούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η $h(z)$ να έχει ρίζα πολλαπλότητας $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ στα $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Αρκεί τότε να δείξουμε ότι η συνάρτηση $H(z) = (z-a_j)^{-k_j}h(z)$ δεν έχει ούτε πόλο ούτε ρίζα στο $a_j$. Εκ' κατασκευής, πρόκειται για αναλυτική συνάρτηση, εκτός ίσως στα $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Η παράγωγός της τότε υπάρχει, εκτός ίσως στα

$\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ και θα ειναι :

$$H'(z) = (z-a_j)^{-k_j} h'(z) - k_j (z-a_j)^{-k_j-1} h(z)$$

Άρα,

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{k_j}{z-a_j}$$

Ταυτόχρονα έχουμε ότι :

$$h'(z) = G'(z) e^{G(z)} = G'(z) h(z)$$

και

$$G'(z) = \frac{d}{dz} \int_{\zeta}^{z} g(t) dt = g(z)$$

.
Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, παρατηρούμε ότι :

$$h'(z) = g(z) h(z).$$

Συνεπώς,

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = g(z) - \frac{k_j}{z-a_j}$$

Η $g(z)$ έχει απλό πόλο στο $a_j$ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο $k_j$, άρα η συνάρτηση $\frac{H'(z)}{H(z)}$ είναι αναλυτική στο $a_j$ (Έχουμε δηλαδή απαλοιφή της ανωμαλίας) και άρα η $H(z)$ δεν έχει ούτε πόλο, αλλά ούτε και ρίζα στο σημείο $a_j$. Επειδή τώρα η $h(z)$ δεν έχει άλλη ρίζα, είναι μια ακέραια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες που επιζητούσαμε.

**Πόρισμα 2.2.1.** *Εαν υπάρχουν δύο συναρτήσεις $h_1(z), h_2(z)$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος $Weierstrass$ (2.2.1) ,τότε το πηλίκο $\frac{h_1(z)}{h_2(z)}$ θα είναι μια ακέραια συνάρτηση χωρίς ρίζες.*
*Άρα, η πιο γενική μορφή συνάρτησης που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος $Weierstrass$ (2.2.1) είναι μια αυθαίρετη λύση του, πολλαπλασιασμένη με μια ακέραια συνάρτηση που δεν έχει ρίζες.*

**Ερώτημα** : Ποια είναι η πιο γενική μορφή ακέραιας συνάρτησης χωρίς ρίζες ;

**Πόρισμα 2.2.2.** *Εάν $f(z)$ ακέραια συνάρτηση χωρίς ρίζες $\Rightarrow \exists$ ακέραια συνάρτηση $G(z)$ τέτοια ώστε $f(z) = e^{G(z)}$*

**Απόδειξη** :
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $f(0) = 1$. Τότε το πηλίκο $\frac{f'(z)}{f(z)}$ δεν μπορεί να έχει άλλες ανωμαλίες στο $\mathbb{C}$ εκτός απο πόλους. Συγκεκριμένα, οι πόλοι αυτοί θα βρίσκονται μόνο σε σημεία ριζών της $f$, που όμως από υπόθεση δεν έχει. Άρα, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ είναι ακέραια.

Θέτουμε τώρα :

$$G(z) = \int_0^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

και

$$h(z) = e^{G(z)}$$

.
(Η $G(z)$ είναι μονότιμη και ορίζεται παντού ως ακέραια συνάρτηση.)

$$h'(z) = G'(z)e^{G(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} h(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow f(z)h'(z) - f'(z)h(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \{\frac{h(z)}{f(z)}\}' = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \frac{h(z)}{f(z)} \equiv c \text{ (σταθερά)}$$

Όμως,

$$f(0) = 1 = h(0) \quad \text{και άρα} \quad c = 1$$

$$\Rightarrow f(z) = h(z) = e^{G(z)}$$

**Πόρισμα 2.2.3.** *Έστω $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία διακριτών σημείων χωρίς σ.σ. στο $\mathbb{C}$ και $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ μια οποιαδήποτε ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση $f(z)$ ,τέτοια ώστε $f(a_j) = \zeta_j$ , $j \in \mathbb{N}$.*

**Απόδειξη** :
Από το Θεώρημα $Weierstrass$, υπάρχει ακέραια $g(z)$ τ.ω. να έχει απλές ρίζες στα σημεία $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Τότε, $g'(a_j) \neq 0$ αφού οι ρίζες αυτές είναι απλές. Επιπλέον, απο το Θεώρημα $Mittag-Leffler$ υπάρχει $h(z)$ μερόμορφη τέτοια ώστε να έχει απλούς πόλους με υπόλοιπο $\frac{\zeta_j}{g'(a_j)}$ στα σημεία $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Το γινόμενο αυτών των δύο συναρτήσεων $f(z) = g(z)h(z)$ είναι αναλυτική, εκτός

ίσως στα σημεία $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$. Προκύπτει ότι η $f(z)$ είναι ακέραια και πληρεί τις προϋποθέσεις. Αυτό γιατί, στην γειτονιά του κάθε $a_j$, έχουμε ότι :

$$g(z) = (z - a_j)g_j(z), h(z) = \frac{h_j(z)}{z - a_j}$$

όπου $g_j(z), h_j(z)$ αναλυτικές στο $a_j$.

Επίσης,

$$g_j(a_j) = g'(a_j), h_j(a_j) = \frac{\zeta_j}{g'(a_j)}.$$

Άρα,

$$f(z) = g_j(z)h_j(z) \quad \text{αναλυτική στο } a_j$$

και

$$f(a_j) = g_j(a_j)h_j(a_j) = g'(a_j)\frac{\zeta_j}{g'(a_j)} = \zeta_j$$

**Πόρισμα 2.2.4.** *Κάθε μερόμορφη συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως πηλίκο ακεραίων συναρτήσεων.*

**Απόδειξη** :
Θεωρούμε μια τυχαία μερόμορφη συνάρτηση $f(z)$. Σχηματίζουμε ακέραια συνάρτηση $g(z)$ με τους πόλους της $f$ ως ρίζες με την ίδια πολλαπλότητα. (Κάτι τέτοιο είναι εφικτό λόγω του Θεωρήματος $Weierstrass$). Όπως και στο προηγούμενο πόρισμα, η $h(z) = f(z)g(z)$ είναι ακέραια. Άρα, η ζητούμενη αναπαράσταση της μερόμορφης συνάρτησης είναι :

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

## 2.3 Επεκτάσεις των Θεωρημάτων $Mittag - Leffler$ και $Weierstrass$

Όπως έχουμε δει προηγουμένως, τα θεωρήματα αυτά ισχύουν στο $\mathbb{C}$. Μπορούν να επεκταθούν, όμως, γενικά σε τόπους που δεν είναι αναγκαστικά το $\mathbb{C}$, αλλα γνήσια υποσύνολά του.

**Θεώρημα 2.3.1.** *(Mittag – Leffler)*
*Έστω $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία διακριτών σημείων σε ένα τόπο $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$,*
*όπου :*

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

*Έστω επίσης ότι μας δίνεται μια ακολουθία πολυωνύμων $\{P_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ χωρίς σταθερό όρο. Τότε, υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση ορισμένη στο $\Omega$ που να έχει πόλο με ανώμαλο τμήμα το $P_k(\frac{1}{z-b_k})$ στο $b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και καμία άλλη ανωμαλία στο $\Omega$.*

**Απόδειξη** :
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\Omega$ είναι διάφορο του $\mathbb{C}$ και του $\hat{\mathbb{C}}$, διότι έχουμε ήδη εξετάσει αυτές τις περιπτώσεις προηγουμένως. Επίσης, προσωρινά υποθέτουμε ότι $b_k \neq 0, \infty$.
Θέτουμε :

$$E_1 = \{b_k; \quad |b_k|\delta_k \geq 1\} \quad \text{και} \quad E_2 = \{b_k; \quad |b_k|\delta_k < 1\}$$

όπου $\delta_k$ η απόσταση του $b_k$ από το σύνορο $\partial\Omega$.
(Επειδή εξ'υποθέσεως το $\Omega \neq \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow \delta_k < \infty$ και αφού είναι και ανοικτό σύνολο, $\delta_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$)

**Ισχυρισμος**: Το $E_1$ δεν έχει πεπερασμένο σ.σ. Αυτό γιατί, αν $c \neq \infty$ ήταν τέτοιο, τότε θα είχαμε ότι :

$$|b_k| < |c| + 1 \quad \text{για άπειρα το πλήθος } k$$

και επειδή :

$$|b_k|\delta_k \geq 1,$$

θα είχαμε :

$$\delta_k \geq \frac{1}{|c|+1} \quad \text{για άπειρα το πλήθος } k.$$

Άρα,

$$dist(c, \partial\Omega) \geq \frac{1}{|c|+1} > 0.$$

Το συμπέρασμά μας είναι ότι το $c$ οφείλει να είναι εσωτερικό σημείο του $\Omega$, άτοπο λόγω υπόθεσης.
Άρα το $E_1$ δεν έχει πεπερασμένο σ.σ στο $\mathbb{C}$ και άρα από το θεώρημα $Mittag-Leffler$ 2.1.1 ,υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση $f_1(z)$ που να έχει τα ζητούμενα ανώμαλα τμήματα σε κάθε σημείο του $E_1$.
Περίπτωση του $E_2$ : Ισχυρισμός :

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$$

εάν το $E_2$ είναι απειροσύνολο.
(Εάν δεν είναι τότε η απόδειξη είναι άμεση).

Εάν αυτό δεν ίσχυε, τότε :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{τ.ω} \quad \delta_k > \epsilon > 0 \quad \text{για άπειρα το πλήθος } k$$

και άρα

$$|b_k| < \frac{1}{\epsilon} \quad \text{για άπειρα το πλήθος } k.$$

Άρα το $E_2$ έχει σ.σ. στο $\Omega$. Άτοπο λόγω υπόθεσης.

Για κάθε $k$, επιλέγουμε $c_k \in \partial\Omega$ ώστε :

$$|b_k - c_k| = \delta_k = dist(b_k, \partial\Omega)$$

και επεκτείνουμε το $P_k(\frac{1}{z-b_k})$ σε σειρά *Laurent* με κέντρο το $c_k$, στην περιοχή : $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - c_k| > \delta_k\}$

$$P_k(\frac{1}{z - b_k}) = A_0^{(k)} + \frac{A_1^{(k)}}{z - c_k} + .....$$

που συγκλίνει ομοιόμορφα στο εξωτερικό οποιουδήποτε δίσκου $D(c_k, r)$, $r > \delta_k$. Επιλέγουμε μερικό άθροισμα $Q_k(z)$ του πιο πάνω, έτσι ώστε:

$$|P_k(\frac{1}{z - b_k}) - Q_k(z)| < \frac{1}{2^k}, z \notin D(c_k, 2\delta_k).$$

Θέτουμε

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \{P_k(\frac{1}{z - b_k}) - Q_k(z)\}.$$

Τότε, $f_2$ είναι μερόμορφη συνάρτηση με τα ζητούμενα ανώμαλα μέρη στα σημεία του $E_2$. Επειδή $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$, αν K αυθαίρετο συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$, μπορούμε να διαλέξουμε N αρκετά μεγάλο έτσι ώστε :

$$D(c_k, 2\delta_k) \cap K = \emptyset, \forall k \geq N.$$

Άρα,

$$\sum_{k \geq N, b_k \in E_2}^{\infty} \{P_k(\frac{1}{z - b_k}) - Q_k(z)\} \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.}$$

Τότε, η $f_1(z) + f_2(z)$ έχει την επιζητούμενη συμπεριφορά παντού στο $\Omega$, εκτός ίσως στα $0, \infty$. Εαν κάποιο από αυτά είναι ζητούμενος πόλος, αυτό που απομένει να κάνουμε είναι να προσθέσουμε στην συνάρτηση αυτή τα αντίστοιχα

ανώμαλα τμήματα που αφορούν το 0 ή και το $\infty$ και παίρνουμε την ζητούμενη συνάρτηση.
Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να διατυπώσει και να αποδείξει την επεκταμένη μορφή του Θεωρήματος $Weierstrass$ :

**Θεώρημα 2.3.2.** *(Θεώρημα $Weierstrass$) Έστω $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία διακριτών σημείων σε ένα τόπο $\Omega$, που να μην έχει σ.σ. στο $\Omega$, και έστω $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών ακεραίων. Τότε, υπάρχει αναλυτική συνάρτηση στο $\Omega$ τέτοια ώστε να έχει ρίζα πολλαπλότητας $m_k$ στο $a_k$, $k \in \mathbb{N}$, και πουθενά αλλού.*

## 2.4 Άπειρα Γινόμενα

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με την έννοια των απείρων γινομένων, διότι σκοπεύουμε να την συνδέσουμε με το Θεώρημα του $Weierstrass$. Τι είναι όμως ένα άπειρο γινόμενο;
Ένας πρώτος απλοϊκός ορισμός που θα μπορούσαμε να σκεφτούμε είναι ο εξής:
Θεωρούμε το

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Τότε, αν η ακολουθία των μερικών γινομένων $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο, θα λέμε ότι το άπειρο γινόμενο συγκλίνει.
Αυτός όμως ο ορισμός είναι προβληματικός, διότι τότε το άπειρο γινόμενο δεν έχει τις ίδιες ιδιότητες με την σύγκλιση σειρών, όπως θα δούμε στα ακόλουθα παραδείγματα :

**Παραδειγμα 2.4.1.** *Θεωρούμε το άπειρο γινόμενο*

$$\prod_{k=0}^{\infty} k$$

*Τότε, $p_n = 0 \; \forall n$ και άρα το γινόμενο συγκλίνει, όμως το*

$$\prod_{k=1}^{\infty} k \qquad \text{αποκλίνει.}$$

*Οι σειρές, σε αντιδιαστολή, έχουν την ιδιότητα ότι εαν προσθαφαιρέσεις πεπερασμένους το πλήθος όρους, τότε η σύγκλιση της σειράς δεν μεταβάλλεται.*

**Παραδειγμα 2.4.2.**

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

*Αυτό το γινόμενο συγκλίνει στο 0, όμως κανένας απο τους όρους του δεν είναι μηδενικός.*

Γι'αυτό το λόγο θα ορίσουμε την έννοια του απείρου γινομένου με έναν πιο περιοριστικό τρόπο, ούτως ώστε να αποφεύγουμε τέτοιες καταστάσεις.

**Ορισμός 2.4.1.** *Ένα άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ λέμε ότι συγκλίνει εάν :*

*α) Το πολύ πεπερασμένοι όροι του είναι ίσοι με 0.* $|\{k; \quad a_k = 0\}| < \infty$
*β) Η ακολουθία μερικών γινομένων αφαιρώντας τους μηδενικούς όρους συγκλίνει.*
*γ)Το όριο που αναφέρεται στο (β) δεν είναι μηδενικό.*

**Παραδειγμα 2.4.3.** *Το γινόμενο* $\quad 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \dots \cdot$ *αποκλίνει αφού δεν ικανοποιείται το (α)*

**Παραδειγμα 2.4.4.** *Το γινόμενο* $\quad 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot$ *αποκλίνει, αφού ικανοποιούνται τα (α) και (β), αλλά όχι το (γ).*

**Παραδειγμα 2.4.5.** *Το γινόμενο* $\quad 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot$ *συγκλίνει, αφού ικανοποιούνται τα (α),(β),(γ).*

Άρα, αν το γινόμενο συγκλίνει, θα έχει ως όριο αυτό που αναφέρεται στο (β), μόνο στην περίπτωση όπου $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, αλλιώς το όριο θα είναι το 0.

Έτσι όπως ορίσαμε την έννοια του απείρου γινομένου, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι θα ισχύουν τα ακόλουθα:
(α) Εαν το γινόμενο συγκλίνει, τότε εάν αφαιρεθεί πεπερασμένος αριθμός όρων, το γινόμενο θα συνεχίσει να συγκλίνει.
(β) Εαν συγκλίνει στο 0, τότε τουλάχιστον ένας όρος του είναι ισος με 0.

(γ) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \{\prod_{k=N}^{m} a_k\}_{m=N}^{\infty}$ συγκλίνει σε μη μηδενικό αριθμό.

**Θεώρημα 2.4.1.** *(Κριτήριο του Cauchy) Αναγκαία και ικανή συνθήκη για σύγκλιση του $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι ότι,*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \tau.\omega. \ \left| (\prod_{k=n+1}^{m} a_k) - 1 \right| < \epsilon, \textit{για } m > n \geq N.$$

**Απόδειξη** :
(Αναγκαίο). Έστω ότι το άπειρο γινόμενο συγκλίνει. Επειδή μπορούμε να αγνοήσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος μηδενικών παραγόντων του γινομένου, μπορούμε να κάνουμε εξ'αρχής την υπόθεση ότι $a_k \neq 0$ , $\forall k$. Τότε,

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\to} p \neq 0.$$

Άρα, η ακολουθία μερικών γινομένων $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, και αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο $Cauchy$ για ακολουθίες (1.2.4), δοθέντος $\epsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } \quad |p_n| > \frac{p}{2} \, , |p_m - p_n| < \epsilon \cdot \frac{|p|}{2}, \quad \text{για } m > n \geq N.$$

Συνεπώς,

$$\left|(\prod_{k=n+1}^{m} a_k) - 1\right| = \left|\frac{p_m}{p_n} - 1\right| = \frac{|p_m - p_n|}{|p_n|} < \frac{\epsilon \cdot \frac{|p|}{2}}{\frac{|p|}{2}} \, , m > n \geq N.$$

(Ικανό) Υποθέτουμε ότι $\forall \epsilon > 0$ , $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\left|(\prod_{k=n+1}^{m} a_k) - 1\right| < \epsilon, \text{για } m > n \geq N.$$

Τότε η προϋπόθεση (α) του ορισμού του απείρου γινομένου προφανώς και ικανοποιείται. Ακολούθως, θέτουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$. Τότε, εξ'υποθέσεως, $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\left|(\prod_{k=N}^{m} a_k) - 1\right| < \frac{1}{2}, \quad m \geq N$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{2} < \left|(\prod_{k=N}^{m} a_k)\right| < \frac{3}{2}, \quad m \geq N$$

Άρα, εαν το όριο των $\{\prod_{k=N}^{m} a_k\}_{m=N}^{\infty}$ υπάρχει, αυτό δεν είναι το 0.

Έστω τώρα αυθαίρετο $\epsilon > 0$. Για αυτό το $\epsilon$, $\exists N'$ τ.ω.

$$\left|\prod_{k=n+1}^{m} a_k - 1\right| < \epsilon, \text{ για } m > n \geq N'.$$

Τότε έχουμε ότι :

$$\left|\prod_{k=N}^{m} a_k - \prod_{k=N}^{n} a_k\right| = \left|\prod_{k=N}^{n} a_k\right| \cdot \left|\prod_{k=n+1}^{m} a_k - 1\right| < \frac{3}{2} \cdot \epsilon,$$

για $m > n \geq max(N, N')$.
Συνεπώς, λόγω του κριτηρίου $Cauchy$ για ακολουθίες 1.2.4 ,η

$$\{\prod_{k=N}^{m} a_k\}_{m=N}^{\infty} \text{ είναι συγκλίνουσα.}$$

Επειδή το όριο αυτό δεν είναι μηδενικό, το αρχικό μας γινόμενο (πριν να αφαιρέσουμε τους μηδενικούς όρους) επίσης συγκλίνει.

**Πόρισμα 2.4.1.** *Για $m = n+1$ στο πιο πάνω θεώρημα, έχουμε το συμπέρασμα ότι αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση του :*

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ είναι } : \lim_{k\to\infty} a_k = 1.$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή, αφού τα άπειρα γινόμενα

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k}) \quad \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k}) \quad \text{αποκλίνουν,}$$

ενώ ταυτοχρόνως την ικανοποιούν.

Λαμβάνοντας υπ'όψην το πιο πάνω πόρισμα, μας είναι βολικό να γράφουμε

$$a_k = 1 + c_k,$$

όπου

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0$$

και άρα

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$$

**Ορισμός 2.4.2.** *Αν το άπειρο γινόμενο*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+|c_k|) \text{ συγκλίνει,}$$

*τότε θα λέμε ότι το*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k) \text{ συγκλίνει απόλυτα.}$$

**Παραδειγμα 2.4.6.** *Το*

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{(-1)^n}{n})=\frac{1}{2} \text{ δεν συγκλίνει απόλυτα,}$$

*αφου*

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) \text{ δεν συγκλίνει.}$$

**Θεώρημα 2.4.2.** *Εάν ένα γινόμενο συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.*

**Απόδειξη** :
Η απόδειξη αυτού γίνεται με την χρήση της πιο κάτω ανισότητας και του κριτηρίου *Cauchy* (2.4.1).

$$\left|\prod_{k=n+1}^{m}(1+c_k)-1\right| \leq \prod_{k=n+1}^{m}(1+|c_k|)-1$$

**Θεώρημα 2.4.3.** *Το άπειρο γινόμενο* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+c_k)$ *συγκλίνει απολύτως* $\Leftrightarrow$ *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

**Απόδειξη** :
$\Rightarrow$ Έστω ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως. Θέτουμε :

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+|c_k|), n\in\mathbb{N}.$$

Τότε προφανώς $p_n \geq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Θα αρκούσε να δείξουμε ότι είναι και άνω φραγμένη.
Όμως,

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+|c_k|) \leq \prod_{k=1}^{n}e^{|c_k|}$$

$$=exp(\sum_{k=1}^{n}|c_k|) \leq exp(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(Έχουμε κάνει χρήση της ανισότητας $1+x \leq e^x \; \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftarrow$ Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, έχουμε την προφανή ανισότητα :

$$\sum_{k=n+1}^{m} |c_k| \leq \prod_{k=n+1}^{m} (1+|c_k|) - 1$$

στην οποία εφαρμόζουμε το κριτήριο *Cauchy* για σειρές και γινόμενα.

**Παρατήρηση 2.4.1.** *Το θεώρημα αυτό δεν ισχύει πλέον αν αφαιρέσουμε την λέξη απολύτως, αφού η σύγκλιση του :*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+c_k) \text{ δεν μας λέει κάτι για την σύγκλιση της}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ και αντιστρόφως.}$$

**Πόρισμα 2.4.2.** *Η σύγκλιση και τιμή ενός απείρου γινομένου που συγκλίνει απολύτως είναι ανεξάρτητο της σειράς των παραγόντων του.*

**Απόδειξη** :
Ως γνωστόν, εάν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε δεν επηρεάζεται η σύγκλιση και η τιμή της εαν επαναδιατάξουμε τους όρους του αθροίσματος. Αυτό το πόρισμα είναι το ανάλογο για άπειρα γινόμενα.
Έστω

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} (1+c_k) \text{ συγκλίνει απολύτως.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ συγκλίνει απολύτως.}$$

Θέτουμε $q = \prod_{k=1}^{\infty} (1+c'_k)$ το γινόμενο που προήλθε από την επαναδιάταξη.

Δηλαδή,

$$\{c_k : \quad k \in \mathbb{N}\} = \{c'_k : \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k < \infty.$$

Άρα,

$$q = \prod_{k=1}^{\infty} (1+c'_k) \text{ συγκλίνει απολύτως από το θεώρημα (2.4.3)}$$

Μένει να δείξουμε ότι $p = q$.

$$\text{Θέτουμε } p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c_k), \quad q_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + c'_k).$$

Τότε, έχουμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p, \ \lim_{m\to\infty} q_m = q$$

Για κάθε $\epsilon > 0$ , $\exists N' \in \mathbb{N}$ :

$$|p_n - p| < \epsilon, |q_m - q| < \epsilon, \quad \text{όταν } m, n \geq N'.$$

$$\text{Λόγω της απόλυτης σύγκλισης του } \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k), \ \exists N \geq N' \text{ τ.ω.}$$

$$\prod_{k=N}^{n} (1 + |p_k|) - 1 < \epsilon \text{ , όταν } n \geq N'$$

Στέλνοντας $n \to \infty$ παίρνουμε ότι :

$$\prod_{k=N}^{\infty} (1 + |c_k|) - 1 < \epsilon$$

Επιλέγοντας τώρα $m \geq N$ αρκούντως μεγάλο, μπορούμε να πετύχουμε οι όροι $c_1, c_2, ......, c_N$ να εμφανίζονται όλοι στο $c'_1, c'_2, .....c'_m$. Άρα,

$$\left|\frac{q_m}{p_N} - 1\right| \leq \prod_{k=N+1}^{\infty} (1 + |c_k|) - 1 < \epsilon$$

$$\Rightarrow |q_m - p_N| \leq \epsilon \cdot |p_N| \leq \epsilon \cdot (|p| + \epsilon)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |p - q| &\leq |p - p_N| + |p_N - q_m| + |q_m - q| \\ &< \epsilon + \epsilon \cdot (|p| + \epsilon) + \epsilon = \epsilon \cdot (|p| + 2 + \epsilon) \end{aligned}$$

και στέλνοντας το $\epsilon \to 0$ ,παίρνουμε ότι $p = q$.
Δηλαδη η σύγκλιση και τιμή ενός απείρου γινομένου που συγκλίνει απόλυτα δεν εξαρτάται από την διάταξη των παραγόντων του.

Έστω τώρα μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ που ορίζεται σε έναν τόπο $\Omega$. Μπορούμε να αναρωτηθούμε πότε έχουμε τοπική ομοιόμορφη σύγκλιση του

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

.

**Ορισμός 2.4.3.** *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *που ορίζεται στον τόπο* $\Omega$. *Θα λέμε ότι το γινόμενο*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \text{ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο } \Omega,$$

*εαν για κάθε συμπαγές υποσύνολο* $K \subset \Omega$ *υπάρχουν το πολύ πεπερασμένοι παράγοντες στο γινόμενο που να έχουν ρίζες στο* $K$ *και εάν υπάρχουν τέτοιοι παράγοντες και τους αφαιρέσουμε, τα μερικά γινόμενα που απομένουν συγκλίνουν ομοιόμορφα στο* $K$ *σε μια συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στο* $K$.

**Θεώρημα 2.4.4.** *(Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες συναρτήσεων)*

*Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \text{ να συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο } \Omega,$$

*είναι* $\forall \epsilon > 0$ *και αυθαίρετο* $K \subset \Omega$ *συμπαγές,* $\exists N \in \mathbb{N}$ *τ.ω.*

$$\|[\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))]-1\|_K < \epsilon \text{ για } m > n \geq N.$$

**Απόδειξη** :

Άμεση συνέπεια του πιο πάνω ορισμού και του Κριτηριου *Cauchy* (2.4.1).

**Θεώρημα 2.4.5.** *Έστω η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *που ορίζεται στον τόπο* $\Omega$. *Εάν η*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)| \text{ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο } \Omega, \text{ τότε :}$$

*(Α) Το* $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ *συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο* $\Omega$.

*(Β)Εάν* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων, τότε το* $p(z)$ *είναι αναλυτική συνάρτηση που έχει ρίζες στο* $\Omega$ *μόνο στα σημεία όπου ουλάχιστον ένας εκ των παραγόντων έχει ρίζα.*

*(Γ) Εάν το* $p(z)$ *δεν μηδενίζεται, τότε η λογαριθμική παράγωγος* $\frac{p'(z)}{p(z}$ *του* $p(z)$ *είναι το άθροισμα των λογαριθμικών παραγώγων των παραγόντων στο γινόμενο, δηλαδή*

$$\frac{p'(z)}{p(z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}$$

*και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές* $K \subset \Omega$ *που δεν περιέχει ρίζες του* $p(z)$.

**Απόδειξη** :
Έστω $K \subset \Omega$ αυθαίρετο συμπαγές υποσύνολο και $p_n(z)$ η ακολουθία των μερικών γινομένων. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης στο K, είναι άμεσο ότι η σειρα :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \text{ ορίζει μια συνεχή συνάρτηση στο K,}$$

άρα θα παίρνει μεγιστη και ελάχιστη τιμή.
Θέτουμε σ να είναι αυτή η μέγιστη τιμή. Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$ , $z \in K$ έχουμε :

$$|p_n(z)| = \left|\prod_{k=1}^{n} (1 + f_k(z))\right| \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |f_k(z)|)$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} exp(|f_k(z)|) = exp(\sum_{k=1}^{n} |f_k(z)|) \leq exp(\sigma).$$

Επομένως,

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| = |p_{n-1}(z) f_n(z)| \leq e^{\sigma} |f_n(z)| \, , z \in K$$

Και πάλι λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς στο K, δοθέντος $\epsilon > 0$ , $\exists N \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\sum_{n>N} |f_n(z)| < \epsilon \, , \forall z \in K.$$

Τότε, για $m > n \geq N$ και $z \in K$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
&|p_n(z) - p_m(z)| \\
&= |p_n(z) + p_{n+1}(z) - p_{n+1}(z) + \cdots + p_{m-1}(z) - p_{m-1}(z) + p_m(z)| \\
&\leq |p_n(z) - p_{n+1}(z)| + |p_{n+1}(z) - p_{n+2}(z)| + \cdots + |p_{m-1}(z) - p_m(z)| \quad (2.2) \\
&\leq e^{\sigma} \cdot \{|f_n(z)| + |f_{n+1}(z) + \cdots + |f_m(z)|\} \\
&< e^{\sigma} \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο *Cauchy* για ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων (1.2.4) παίρνουμε ότι το $p(z)$ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα και είναι συνεχής συνάρτηση στο Ω.

(Β)Χρησιμοποιώντας το πόρισμα του θεωρήματος *Morera* (1.2.1) παίρνουμε ότι το γινόμενο $p(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση και εξ'ορισμού της σύγκλισης απείρων γινομένων έχουμε ότι το $p(z)$ θα έχει ρίζες μόνο εκεί όπου τουλάχιστον ένας εκ των παραγόντων του έχει ρίζα.

(Γ) Ήδη έχουμε δείξει ότι $p_n(z) \to p(z)$ τοπικά ομοιόμορφα στο $\Omega$. Απο το πόρισμα του θεωρήματος $Morera$ (1.2.1) $\Rightarrow p'_n(z) \to p'(z)$ τοπικά ομοιόμορφα, άρα

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} \to \frac{p'(z)}{p(z)} \quad \text{τοπικά ομοιόμορφα αφού} \quad p(z) \neq 0.$$

Όμως,

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)}$$

και άρα

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)} \text{ αφού } p(z) \neq 0.$$

## 2.5 Γινόμενα *Blaschke*

Από την αρχή ταυτοτισμού, γνωρίζουμε ότι οι ρίζες μιας αναλυτικής συνάρτησης σε έναν τόπο $\Omega$ δεν μπορούν να έχουν σ.σ. στο $\Omega$, εκτός αν η συνάρτηση αυτή είναι ταυτοτικά μηδενική. Επίσης, εάν η συνάρτηση δεν είναι ταυτοτικά μηδενική, τότε ο αριθμός των ριζών είναι το πολύ αριθμίσιμος στο $\Omega$.

Έστω τώρα έχουμε την επιπλέον υπόθεση οτι η συνάρτηση μας είναι και φραγμένη.

**Θεώρημα 2.5.1.** *(Blaschke)*
*Έστω $f(z)$ μια φραγμένη αναλυτική συνάρτηση, $f \not\equiv 0$ στο $D(0,1)$. Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των ριζών της $f(z)$ στο $D(0,1)$, όπου η κάθε μια επαναλαμβάνεται όσες φορές είναι η πολλαπλότητά της, τότε το :*

$$\prod_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ συγκλίνει ή ισοδύναμα } \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

**Απόδειξη** :
Το θεώρημα αυτό είναι τετριμμένο εάν η $f$ έχει πεπερασμένο αριθμό ριζών. Άρα, μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι έχει άπειρες ρίζες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι $\|f\|_{D(0,1)} \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (1.2.6) και θέτοντας $z = 0$, παίρνουμε το εξής

$$|f(0)| \leq \prod_{k=1}^{n} |a_k| \,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Θέτουμε $p_n = \prod_{k=1}^{n} |a_k|$. Τότε, αφού $|a_k| \leq 1$

$$\Rightarrow\ p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq ...... \geq p_n \geq ....... \geq |f(0)|.$$

Άρα, η ακολουθία $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συνεπώς το :

$$\lim_{n\to\infty} p_n \text{ υπάρχει και } \lim_{n\to\infty} p_n \geq |f(0)|.$$

Άρα, αν $f(0) \neq 0$ ,έχουμε τελειώσει. (Ικανοποιείται ο ορισμός της σύγκλισης απείρων γινομένων.)
Εάν πάλι $f(0) = 0$ και αφού $f \not\equiv 0$

$$\Rightarrow f(z) = z^k \cdot g(z),$$

όπου $g$ φραγμένη και αναλυτική στο $D(0,1)$ με $g(0) \neq 0$. Άρα, εφαρμόζοντας στην $g$ αυτά που έχουμε δείξει για την $f$ , παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 2.5.1.** *Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία σημείων στο $D(0,1)$ και η σειρά :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) \text{ αποκλίνει}$$

*Τότε η μόνη φραγμένη αναλυτική συνάρτηση με ρίζες τα $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι η $f \equiv 0$.*

**Ερώτημα** : Εάν μας δοθεί μια ακολουθία σημείων $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο $D(0,1)$ τέτοια ώστε :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty,$$

υπάρχει φραγμένη αναλυτική συνάρτηση που οι ρίζες της είναι ακριβώς τα $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;

**Θεώρημα 2.5.2.** *(Blaschke)*
*Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μη μηδενικών αριθμών στο $D(0,1)$. Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το :*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}$$

*να συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $D(0,1)$ είναι το*

$$\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

*να συγκλίνει ή ισοδύναμα*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$$

*Όταν η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, τότε το γινόμενο αυτό ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $B(z)$ της οποίας οι ρίζες είναι ακριβώς τα $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και επίσης $\|B(z)\|_{D(0,1)}=1$.*

**Απόδειξη** :
Αναγκαίο : Προκύπτει άμεσα με την αντικατάσταση $z=0$.
Ικανό : Έστω

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty.$$

Τότε για $z\in\bar{D}(0,1)$ , $r\in[0,1]$ έχουμε :

$$\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\right|=\left|\frac{(a_n+|a_n|z)(1-|a_n|)}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right|\leq\frac{2(1-|a_n|)}{1-r}$$

και άρα το άπειρο γινόμενο, χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του $Weierstrass$ (1.2.2), θα συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα σε κάθε δίσκο $\bar{D}(0,r)$. Από το θεώρημα (2.4.5), το άπειρο γινόμενο ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $B(z)$ στο $D(0,1)$ και οι ρίζες της $B(z)$ είναι τα $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Επίσης,

$$\|B(z)\|_{D(0,1)}=1$$

αφού αυτό ισχύει για όλα μερικά γινόμενα και άρα θα ισχύει και για το όριό τους.

**Ορισμός 2.5.1.** *(Γινόμενο Blaschke)*
*Μια συνάρτηση της μορφής :*

$$B(z)=z^m\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\cdot\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\ ,z\in D(0,1)$$

*ονομάζεται γινόμενο Blaschke ,όπου $m\in\{0,1,2,......\}$ , $a_n\in D(0,1)$, $a_n\neq 0$ , $n\in\mathbb{N}$ και*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$$

## 2.6 Παραγοντοποίηση Ακέραιων συναρτήσεων

**Πρόβλημα** : Έστω ότι ψάχνουμε ακέραια συνάρτηση $f(z)$ που να έχει ρίζες τα

$$a_1, a_2, ......a_k, ...$$

Εάν $a_k \neq 0$ , $k \in \mathbb{N}$ ,τότε διαισθητικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση θα έπρεπε να έχει την μορφή :

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k})$$

Όμως, το γινόμενο αυτό συγκλίνει και ορίζει ακέραια συνάρτηση εάν το $|a_k| \to \infty$ αρκετά γρήγορα ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ να συγκλίνει.
Αν τώρα η σειρά δεν συγκλίνει, τότε το γινόμενο μπορεί και να αποκλίνει και να μην ορίζει καν συνάρτηση. Όπως και στην περίπτωση του θεωρήματος $Mittag-Leffler$ (2.1.1) ,ο κάθε παράγοντας του γινομένου πρέπει να τροποποιηθεί έτσι ώστε το γινόμενο να συγκλίνει αλλά ταυτόχρονα να μην εισάγουμε νέες ρίζες στο γινόμενο.
Θα προσπαθήσουμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα του $Weierstrass$ σε μια ελαφρώς τροποποιημένη μορφή και να συνδέσουμε τα δύο αυτά θεωρήματα, έτσι ώστε να πετύχουμε την λεγόμενη παραγοντοποίηση μιας ακέραιας συνάρτησης.
Η συνάρτηση $E_0(z) = 1 - z$ είναι αναλυτική συνάρτηση και δεν έχει ρίζες στον μοναδιαίο δίσκο. Άρα,

$$\int_0^z \frac{E_0'(t)}{E_0(t)} dt = \int_0^z \frac{dt}{1-t}$$

$$= - \int_0^z (1 + t + t^2 + .. + t^n + ....) dt$$

$$= -(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^{n+1}}{n+1} + .....)$$

είναι αναλυτική και μονότιμη, ενώ η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε δρόμο στο μοναδιαίο δίσκο. Τότε,

$$1 - z = E_0(z) = exp(\int_0^z \frac{E_0'(t)}{E_0(t)} dt)$$

$$= exp(-z - \frac{z^2}{2} - ........ - \frac{z^{n+1}}{n+1} - .....) \quad (z \in D(0,1))$$

Αναμένουμε η ακολουθία συναρτήσεων (που θα ονομάσουμε κύριους παράγοντες του $Weierstrass$)

$$E_n(z) = (1-z)exp(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^n}{n}) \ , n \in \mathbb{N}$$

να συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο μοναδιαίο δίσκο στην σταθερή συνάρτηση 1.

**Λήμμα 2.6.1.**

$$|1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1} \ , z \in D(0,1)$$

**Απόδειξη** :
Για $n = 0$ είναι τετριμμένο.

Έστω $n \geq 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} E_n'(z) &= -exp(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^n}{n}) \\ &\quad + (1-z)(1 + z + .... + z^{n-1}) \cdot exp(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^n}{n}) \\ &= (-1 + (1 - z^n)) \cdot exp(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^n}{n}) \\ &= z^n \cdot exp(z + \frac{z^2}{2} + .... + \frac{z^n}{n} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Παρατηρούμε ότι η ακέραια συνάρτηση

$$\begin{aligned} 1 - E_n(z) &= E_n(0) - E_n(z) \\ &= -\int_0^z E_n'(t)dt \\ &= \int_0^z t^n \cdot exp(t + \frac{t^2}{2} + .... + \frac{t^n}{n})dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

έχει συντελεστές $Taylor$ θετικούς πραγματικούς αριθμούς (υπολογισμένη γύρω από το 0) και ότι η $1 - E_n(z)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας $n+1$ το 0. Άρα,

$$f(z) = \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}}$$

είναι ακέραια συνάρτηση της οποίας οι συντελεστές $Taylor$ είναι επίσης θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Λόγω τριγωνικής ανισότητας,

$$|f(z)| \leq f(1) \ , z \in \bar{D}(0,1) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \left| \frac{1 - E_n(z)}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{1 - E_n(1)}{1^{n+1}} = 1$$

**Θεώρημα 2.6.1.** *(Weierstrass) Έστω $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία σημείων χωρίς σ.σ. στο $\mathbb{C}$. Τότε, υπάρχει ακέραια συνάρτηση που να έχει ακριβώς τα $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ως ρίζες με πολλαπλότητα ίση με τις φορές που επαναλαμβάνεται το κάθε $a_k$ στην ακολουθία. Εάν $a_k \neq 0$ , $k \in \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση αυτή θα δίνεται από την*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

*, όπου $n_k$ καταλλήλως επιλεγμένη ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων.*

**Απόδειξη** :
Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι :

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq ....... \leq |a_k| \leq .....$$

Θεωρούμε τώρα το γινόμενο :

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι με κατάλληλη επιλογή της $n_k$ το γινόμενο αυτό συγκλίνει. Από το λήμμα (2.6.1),

$$\left|1 - E_{n_k}(\frac{z}{a_k})\right| \leq \left|\frac{z}{a_k}\right|^{n_k+1} \quad , z \in \bar{D}(0, |a_k|)$$

Άρα, για κάθε $k$, επιλέγουμε εκθέτη $n_k$ τέτοιο ώστε η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_k}\right|^{n_k+1}$$

συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $\mathbb{C}$. Μια δυνατή επιλογή είναι η $n_k + 1 = k$, αφού τότε για το τυχόν $R > 0$, αν $z \in \bar{D}(0, R)$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_k}\right|^k &= \sum_{a_k \leq 2R} \left|\frac{z}{a_k}\right|^k + \sum_{a_k > 2R} \left|\frac{z}{a_k}\right|^k \\ &\leq \sum_{a_k \leq 2R} \left|\frac{z}{a_k}\right|^k + \sum_{a_k > 2R} (\frac{1}{2})^k \end{aligned} \tag{2.5}$$

Επειδή $a_k \to \infty$ , το πρώτο άθροισμα έχει πεπερασμένους όρους και το δεύτερο συγκλίνει. Επιλέγοντας την $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ με την ζητούμενη ιδιότητα, έχουμε για αυθαίρετο $R > 0$ και για $|a_k| > 2R$ :

$$\left|1 - E_{n_k}(\frac{z}{a_k})\right| \leq \left|\frac{z}{a_k}\right|^{n_k+1} \leq \left|\frac{R}{a_k}\right|^{n_k+1} \quad , z \in \bar{D}(0, R)$$

Άρα απο τα προηγούμενα, η σειρα :

$$\sum_{a_k>2R} \left|\frac{R}{a_k}\right|^{n_k+1} \text{ συγκλίνει.}$$

Τότε απο το $M - test\ Weierstrass$ η σειρά

$$\sum_{a_k>2R} \left|\frac{z}{a_k}\right|^{n_k+1}$$

συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $\bar{D}(0,R)$ και λόγω του θεωρήματος (2.4.5) το

$$\prod_{|a_k|>2R} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, ορίζοντας αναλυτική συνάρτηση στο $D(0,R)$. Επειδή το $\{k : |a_k| > 2R\}$ παραλείπει πεπερασμένους όρους από το άθροισμα, η

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

είναι αναλυτική στο $D(0,R)$ και λόγω αυθαίρετης επιλογής του $R$, το γινόμενο ορίζει ακέραια συνάρτηση. Προφανώς, έχει τις ζητούμενες ρίζες με τις πολλαπλότητες που θελουμε.

**Παρατήρηση 2.6.1.** *Για συγκεκριμένες περιπτώσεις ακολουθιών $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, η $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεχθεί ανεξάρτητα του $k$. Τότε γράφουμε :*

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_n(\frac{z}{a_k}) \text{ , για κάποιο θετικό ακέραιο } n.$$

*Αν το $n$ είναι ο μικρότερος δυνατός ακέραιος για τον οποίο ισχύει το πιο πάνω, τότε το γινόμενο ονομάζεται Κανονικό Γινόμενο του $Weierstrass$.*

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με τα πορίσματα του θεωρήματος $Weierstrass$ (2.2.1) παίρνουμε το :

**Θεώρημα 2.6.2.** *(Θεώρημα Παραγοντοποίησης του $Weierstrass$) Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση, όχι ταυτοτικά μηδενική, που έχει την ακολουθία $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ως ρίζες όπου η κάθε μια επαναλαμβάνεται όσες φορές είναι η πολλαπλότητα της. Τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g(z)$ και ακολουθία $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε :*

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot z^n \cdot \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(\frac{z}{a_k})$$

*όπου $n$ είναι η πολλαπλότητα της ρίζας που έχει η $f$ στο 0.*
*(Αν δεν έχει, τότε προφανώς $n = 0$)*

**Παρατήρηση 2.6.2.** *Η παραγοντοποίηση αυτή δεν είναι μοναδική. Αν όμως οι ρίζες της $f$ ικανοποιούν την συνθήκη :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{n+1}}, \quad \text{για κάποιο } n$$

$\Rightarrow \ \exists$ *κανονικό γινόμενο Weierstrass και άρα μπορεί να καθοριστεί μια μοναδική παραγοντοποίηση της $f$ χρησιμοποιώντας το κανονικό γινόμενο.*

# Κεφάλαιο 3

# Εφαρμογές

## 3.1 Υπολογισμός σειρών

Όπως έχουμε δει πριν από το θεώρημα $Mittag - Leffler$ (2.1.1), υπάρχει μερόμορφη συνάρτηση που να έχει απλούς πόλους με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1 σε κάθε ακέραιο. Τα ανώμαλα τμήματα μιας τέτοιας συνάρτησης θα έχουν την μορφή :

$$P(z;n) = \frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \frac{z^2}{n^3} - ......... \qquad (|z| < n \ , n \neq 0)$$

Αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{συγκλίνει,}$$

χρησιμοποιώντας την παρατήρηση (2.1.1), μπορούμε να πάρουμε για $Q_k(z)$ τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα $Taylor$ και να σχηματίσουμε την πιο κάτω σειρά :

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{z}{n(z-n)}$$

Παίρνουμε αυθαίρετο $R > 0$ και θεωρούμε το :

$$\sum_{|n|>2R} \frac{z}{n(z-n)} \quad , z \in \bar{D}(0,R)$$

Τότε,

$$\sum_{|n|>2R} \frac{R}{|n||z-n|} \leq \sum_{|n|>2R} \frac{2R}{n^2} \quad , z \in \bar{D}(0,R)$$

και άρα απο το $M - test$ του $Weierstrass$ έχουμε ότι :

$$\sum_{|n|>2R} \frac{z}{n(z-n)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(0,R)$, άρα είναι αναλυτική συνάρτηση εκεί. Επειδή έχουμε παραλείψει το πολύ πεπερασμένους όρους από το άθροισμα, στέλνουμε το $R \to \infty$ και συμπεραίνουμε ότι η $g(z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ εκτός των ακεραίων, οι οποίοι είναι απλοί πόλοι με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1.

Θέτουμε τώρα

$$h(z) = \pi \cdot cot(\pi z) - g(z) = \pi \cdot cot(\pi z) - (\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z}))$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ακέραια, αφού πρόκειται για διαφορά δύο μερόμορφων συναρτήσεων που έχουν ακριβως τα ίδια ανώμαλα μέρη. Θα προχωρήσουμε στον εντοπισμό αυτής της συνάρτησης.
Λόγω του ότι η σύγκλιση είναι τοπικά ομοιόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , από το πόρισμα του θεωρήματος $Morera$, (πόρισμα 1.2.1), έχουμε το δικαίωμα να παραγωγίσουμε την $h$ κατα όρο, δηλαδή :

$$h'(z) = -\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

**Ισχυρισμός** : Η $h'$ είναι φραγμένη.
Αρχικά, παρατηρούμε ότι είναι περιοδική με περίοδο 1. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένη σε μια λωρίδα πλάτους 1, για παράδειγμα την :

$$\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\}$$

Όμως, λόγω της συμμετρίας $h'(\bar{z}) = \overline{h'(z)}$, αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένη στο

$$\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\ , \Im z \geq 0\}$$

Επειδή τώρα η $h'$ είναι ακέραια, γνωρίζουμε εξ'αρχής ότι θα είναι φραγμένη σε οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο ,άρα και στο τετράγωνο :

$$\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\ , 0 \leq \Im z \leq 1\}$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η $h'$ είναι φραγμένη στο σύνολο

$$\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\ , \Im z \geq 1\}$$

Για να το κάνουμε αυτό, θα εξετάσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά. Είναι

$$\left|-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)}\right| = \pi^2 \cdot \left|\frac{2i}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right|^2 \leq \frac{4\pi^2}{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||^2}$$

$$= \frac{4\pi^2}{(e^{\pi y} - e^{-\pi y})^2} \leq \frac{4\pi^2}{(e^{\pi} - e^{-\pi})^2} \; (y \geq 1)$$

και

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| = \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \leq \begin{cases} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+1} & (n > 0) \\ \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+1} & (n < 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

Επειδή η σειρά

$$\sum_{n<0} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2+1} + 1 + \sum_{n>0} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+1}$$

$$= 1 + 2 \cdot \sum_{n>0} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+1}$$

συγκλίνει, η ακέραια συνάρτηση $h'$ είναι φραγμένη και άρα από το Θεώρημα *Liouville* έχουμε ότι

$$h'(z) \equiv c \quad (\text{σταθερά})$$

Δοθέντος $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε $z$ στην

$$\{z \in \mathbb{C};\ -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}\}$$

να ισχύει :

$$\left|\sum_{|n|>N} \frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \sum_{|n|>N} \left|\frac{1}{(z-n)^2}\right|$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{|n|>N} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2+1} < \frac{\epsilon}{2}$$

Προφανώς ισχύει

$$\left|\sum_{|n|\leq N} \frac{1}{(z-n)^2}\right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{για } \Im z = y \text{ αρκούντως μεγάλο}$$

και άρα παίρνουμε ότι $h'(z) \equiv 0$, δηλαδή ότι :

$$\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Από αυτά προκύπτει ότι

$$h(z) = \pi \cdot cot(\pi z) - (\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n})) \equiv c.$$

Υπολογίζουμε την σταθερά αυτή εύκολα, αν κάνουμε την παρατήρηση ότι η $h$ είναι περιττή συνάρτηση, άρα

$$c = h(-z) = -h(z) = -c \Rightarrow c = 0.$$

Τότε παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned} \pi \cdot cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες σειρές!
Για παράδειγμα, εάν αντικαταστήσουμε $z = \frac{1}{4}$ στην έκφραση που έχουμε για το $\pi \cdot cot(\pi z)$, παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned} \pi cot(\frac{\pi}{4}) &= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\frac{1}{4} - n} + \frac{1}{\frac{1}{4} + n} \right) \\ &= 4 + \left( -\frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{5}{4}} \right) + \left( -\frac{1}{\frac{7}{4}} + \frac{1}{\frac{9}{4}} \right) + \left( -\frac{1}{\frac{11}{4}} + \frac{1}{\frac{13}{4}} \right) + ........ \\ &= 4 \left( 1 + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left( -\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) + ..... \right) \\ &= 4 + \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} ....... \right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Άρα,**

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} .....}$$

Θέτοντας $z = \frac{1}{2}$ στην έκφραση για το $\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)}$, παίρνουμε ότι :

$$\pi^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2} - n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = 4 \sum_{k:\text{περιττός}} \frac{1}{k^2} = 8 \sum_{k:\text{περιττός}, k>0} \frac{1}{k^2}$$

**Και άρα,**

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + .......}$$

Αρχίζοντας ξανά με την έκφραση του $\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)}$, παίρνουμε ότι :

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2}=\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)}-\frac{1}{z^2}=\frac{\pi^2z^2-sin^2(\pi z)}{z^2sin^2(\pi z)}$$

Θέτουμε $t=\pi z$. Τότε,

$$\pi^2\cdot\frac{t^2-sin^2t}{t^2sin^2t}=\pi^2\frac{(t-sint)(t+sint)}{(tsint)^2}$$

$$=\pi^2\frac{\left(t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}.....\right)\right)\left(t+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}.....\right)\right)}{\left(t\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}.....\right)\right)^2}$$

$$=\pi^2\frac{\frac{2}{3!}t^4+O(t^6)}{t^4+O(t^6)}=\frac{\pi^2}{3}+O(t^2)\text{ , για μικρά } t$$

Στέλνοντας το $t=\pi z\to 0$ ,παίρνουμε :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Παρομοίως, εάν παραγωγίσουμε κατα όρο την έκφραση για το $\frac{\pi^2}{sin^2(\pi z)}$ και αφήνοντας το $z\to 0$, παίρνουμε ότι :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

## 3.2 Άπειρα γινόμενα και πρώτοι αριθμοί

Επειδή οι πρώτοι αριθμοι είναι άπειροι, θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς εαν το γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}\quad (s>1)\quad \text{συγκλίνει}$$

όπου προφανώς με $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ συμβολίζουμε την ακολουθία των πρώτων αριθμών. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό που είχαμε στα άπειρα γινόμενα, έχουμε ότι

$$c_k=\frac{1}{1-p_k^{-s}}-1=\frac{1}{p_k^s-1}$$

$$\Rightarrow\ 0<c_k<\frac{2}{p_k^s}\ (k\geq 2)$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k^s}$ συγκλίνει, αφού είναι τμήμα της απολύτως συγκλίνουσας σειράς $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ και άρα με αυτήν την παρατήρηση έχουμε δείξει ότι το γινόμενο που ορίσαμε συγκλίνει απόλυτα για $s > 1$.
Θα προσπαθήσουμε τώρα να αποδείξουμε την ταυτότητα του $Euler$ που συνδέει το πιο πάνω γινόμενο, που αφορά μονο τους πρώτους, με μια σειρά που αφορά όλους τους φυσικούς.

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Ας θεωρήσουμε αρχικά το γινόμενο των πρώτων $m$ όρων του γινομένου

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}}=\prod_{k=1}^{m}(1+p_k^s+p_k^{2s}+....)=\sum_{n\in K(m)}\frac{1}{n^s}$$

όπου $K(m)$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών που οι πρώτοι παράγοντές τους είναι μικρότεροι ή ίσοι με το $p_m$. Επειδή προφανώς το $\{1,2,.....p_m\}\subset K(m)$, παίρνουμε την πιο κάτω ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s}<\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}}=\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s}+\sum_{n\in K'(m)}\frac{1}{n^s}$$

όπου $K'(m)=K(m)\setminus\{1,2,.....p_m\}$. Επειδή τώρα η $\sum_{n\in K'(m)}\frac{1}{n^s}$ είναι τμήμα της απολύτως συγκλίνουσας σειρας $\sum_{n>p_m}\frac{1}{n^s}$, μπορούμε να την κάνουμε οσοδήποτε μικρή θέλουμε παίρνοντας $m$ αρκούντως μεγάλο και παίρνουμε έτσι την ταυτότητα του $Euler$. Θυμίζουμε ό,τι έχει προηγηθεί ήταν για $s > 1$.
Εάν $s = 1$, τότε η ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n}<\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-1}}\text{ εξακολουθεί να ισχύει.}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right)$$

με την έννοια ότι και τα δύο αποκλίνουν στο $\infty$.
Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k-1}$ αποκλίνει, όμως $\frac{1}{p_k-1}\leq\frac{2}{p_k}$ και άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ αποκλίνει.
**Συμπέρασμα** : Κατά κάποια έννοια, αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, τα τετράγωνα των φυσικών αριθμών είναι αραιότερα ($sparser$) από τους πρώτους στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

## 3.3 Συναρτήσεις ως άπειρα γινόμενα

Θα δούμε κάποια παραδείγματα συναρτήσεων που είναι εκφρασμένες ως άπειρα γινόμενα και πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την μορφή τους ώστε να υπολογίσουμε κάποιες ενδιαφέρουσες ταυτότητες.

$$\boxed{sin(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

**Απόδειξη** :
Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο :

$$cot(z) = \frac{1}{z} + 2z\left[\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + ....\right]$$

Αφού

$$\int \left[cot(t) - \frac{1}{t}\right] dt = ln\left(\frac{sint}{t}\right) + c,$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^z \left[cot(t) - \frac{1}{t}\right] dt = \left[ln\left(\frac{sint}{t}\right)\right]_{t=0}^{z} = ln\left(\frac{sinz}{z}\right)$$

Με αντικατάσταση του τυπου για την συνεφαπτομένη,

$$\int_0^z \left[cot(t) - \frac{1}{t}\right] dt = \int_0^z \left[\frac{2t}{t^2 - \pi^2} + \frac{2t}{t^2 - 4\pi^2} + ......\right] dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, παίρνουμε ότι :

$$sin(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Άρα,

$$\boxed{sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

Ας συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με την δυναμοσειρά της συνάρτησης αυτής.

$$\frac{sin(\pi z)}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \frac{\pi^4 z^4}{120} - ......$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές γραφές, παίρνουμε ότι :

$$\frac{sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$= (1 - z^2)\left[1 - \frac{z^2}{4}\right]\left[1 - \frac{z^2}{9}\right].......$$

$$= 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)z^2 + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}\right]\right]z^4 - ......$$

Παρατηρούμε πώς

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

(Το οποίο υπολογίσαμε και με διαφορετικό τρόπο προηγουμένως)

και

$$\boxed{\frac{\pi^4}{120} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^2}\right]}$$

Συνδυάζοντας αυτά τώρα, παίρνουμε ότι :

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .....\right) - \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ....\right) = \frac{\pi^4}{60}}$$

και

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Αντικαθιστώντας $z = \frac{1}{2}$ , $z = \frac{1}{4}$ στην έκφραση για το $\frac{sin(\pi z)}{\pi z}$, παίρνουμε :

$$\frac{sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right), \quad \frac{sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(4n)^2}\right)$$

Διαιρώντας,

$$\frac{sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{sin(\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(4n)^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right)}$$

Όμως,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(4m)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(4m-2)^2}\right)$$

Με αντικατάσταση,

$$\boxed{\sqrt{2}=\frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(4m-2)^2}\right)}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\ldots.}$$

**Πρόβλημα** : **Εύρεση απείρου γινομένου της συνάρτησης Γάμμα.**

Έστω τώρα ότι έχουμε μια ακέραια συνάρτηση $f(z)$ που να έχει απλές ρίζες στα $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και επιπλέον

$$0<|a_1|<|a_2|<\ldots.. \quad \text{και} \lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα παραγοντοποίησης του $Weierstrass$ για ακέραιες συναρτήσεις, η $f$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$f(z)=f(0)\cdot e^{\frac{f'(0)z}{f(0)}}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right]$$

Ας θέσουμε

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma(z+1)}$$

Η συνάρτηση που ορίσαμε είναι ακέραια ,έχει απλές ρίζες στα σημεία $-1,-2,-3,\ldots...$ και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις για την πιο πάνω γραφή. Επομένως, έχουμε ότι :

$$f(z)=\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{f'(0)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\right] \qquad (3.3)$$

Για να υπολογίσουμε το $f'(0)$ ,απλά θέτουμε $z=1$ και παίρνουμε :

$$1=e^{f'(0)}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\right]=e^{f'(0)}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\right]$$

Λογαριθμίζοντας την σχέση αυτή παίρνουμε :

$$f'(0) = \left\{ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ........ + \frac{1}{N} - ln\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{N}\right)\right]\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ........ + \frac{1}{N} - lnN\right] = \gamma$$ , όπου $\gamma$ είναι η σταθερά του $Euler$.

Αντικαθιστώντας αυτό στην (3.3) και επίσης $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

# Βιβλιογραφία


[1] *J.Bak & D.J.Newman*, *Complex Analysis*, *3rd Edition*, 2010.

[2] *E.G.Milewski*, *Problem Solvers − Complex Variables*, 1998

[3] *L − S.Hahn & B.Epstein*, *Classical Complex Analysis*,
*1st Indian Edition*, 2011

[4] *W.Rudin*, *Real and Complex Analysis* (*3rd edition*),
*McGraw − Hill, Inc.*, 1987.