

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Συστήματα Ελέγχου και Εφαρμογές

Χρυσή Ι. Παπαδάκη

Διπλωματική Εργασία

ΑΘΗΝΑ 2011

Επιβλέποντες Καθηγητές

Prof. Dr. Rainer Nagel (Καθηγητής Πανεπιστημίου *Eberhard Karls, Tübingen* , Τμήμα Μαθηματικών)

Τσινιάς Ι. (Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Τσινιάς Ι. (Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Κραββαρίτης Δ. (Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Κοκκίνης Β. (Επίκουρος Καθηγητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Μετσόβιου Πολυτεχνείου , Τομέας Μαθηματικών)

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	11
1.1	Με τί ασχολείται η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου ;	11
1.2	Ελεγχιμότητα	12
1.3	Σταθεροποίηση και <i>Pole Assignment Theorem</i>	13
1.4	Παρατηρησιμότητα	14
1.5	Ιστορική Αναδρομή	15
2	Εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου - Κίνητρο	17
2.1	Ομαλή προσελήνωση διαστημικού αεροσκάφους	17
2.2	Ηλεκτρικός Φούρνος	22
2.3	Γερανός	24
3	Μαθηματικά Μοντέλα των Γραμμικών Αυτόνομων Συστημάτων Ελέγχου	27
3.1	Γραμμικό Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Γ.Ο.Π.Α.Τ.)	27
3.2	Ευστάθεια	28
3.3	Γραμμικό ΜΗ-Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Γ.ΜΗ-Ο.Π.Α.Τ.)	30
4	Γενική περιγραφή των Συστημάτων Ελέγχου	33
4.1	Περιγραφή του Συστήματος	33
4.2	Ζητήματα της Θεωρίας Ελέγχου	36
5	Ελεγχιμότητα Συστήματος	37
5.1	Βασικά χαρακτηριστικά της ελεγχιμότητας	37
5.2	Πίνακας Ελεγχιμότητας B_t	43
5.3	Ο Πίνακας L_t	45
5.4	Προσδιορισμός του $u(t)$	50
5.5	Παραδείγματα	52
5.6	Σύστημα 2ης Τάξης	55
5.7	Ισοδύναμα Συστήματα	64
5.8	Ανάλυση <i>Kalman</i>	69
6	Παρατηρησιμότητα Συστήματος	77
6.1	Ιδιότητα Παρατηρησιμότητας	77
6.2	Δυϊκό Σύστημα	79
6.3	Συνθήκη Παρατηρησιμότητας	81
7	Σταθεροποίηση Συστήματος	85
7.1	Ορισμός	85
7.2	Σταθεροποιήσιμο Σύστημα	87
7.3	Απολύτως Σταθεροποιήσιμο Σύστημα	87

7.4	Θεώρημα Μετακίνησης Πόλων - <i>Pole Assignment Theorem</i>	97
-----	--	----

Πρόλογος

”Κάθε άνθρωπος έχει μπροστά του χιλιάδες δρόμους. Αλλά ο πραγματικά δικός του δρόμος είναι αυτός, τον οποίο αν αποφασίσει να ακολουθήσει ο φόβος του μεγαλώνει.”

Εμένα ο φόβος μου μεγάλωνε κάθε φορά που αντίκριζα μια νέα μαθηματική έννοια. Και κάπως έτσι, με αυτή τη φράση του Σέρβου συγγραφέα Μίλαν Πάβιτς στο νου μου, αποφάσισα πως ο δικός μου δρόμος θα έπρεπε να χαραχθεί με Μαθηματικά. Αφού έφτιαξα το δρόμο και τον περπάτησα, έφτασα στο τελικό στάδιο, την εκπόνηση της Διπλωματικής μου εργασίας.

Η ενασχόληση μου με τον τομέα της Θεωρίας Ελέγχου οφείλεται στο θέμα αυτό καθ' αυτό, αφού αποτελεί έναν εξαιρετικά ενδιαφέροντα συνδυασμό τόσο των Θεωρητικών Μαθηματικών όσο και της πρακτικής εφαρμογής τους.

Η εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας έγινε στη Γερμανία, σε συνεργασία με τον *Prof. Rainer Nagel* του Πανεπιστημίου *Karls Eberhard* του *Tübingen* μέσω του προγράμματος ανταλλαγής φοιτητών *Erasmus*, ενώ η βελτίωση της έγινε σε συνεργασία με τον Καθηγητή Τσινιά Ιωάννη μετά την επιστροφή μου από τη Γερμανία.

Γι' αυτό το λόγο θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω τον κ.Τσινιά για την αμέριστη υποστήριξη του τόσο στο να κάνω τη διπλωματική μου εργασία σε πανεπιστήμιο του εξωτερικού όσο και στη βελτίωση της.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον *Prof. Rainer Nagel*, ο οποίος αποδέχθηκε πολύ θερμά την αίτηση μου για την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας. Η ιδέα για το θέμα της εργασίας ήταν δική του και η συνεργασία μας ήταν άψογη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς το Διδακτορικό Φοιτητή *Bernd Klöss*, της ερευνητικής ομάδας του *Prof. Nagel*, και την *Dr. Britta Dorn* για την πολύτιμη βοήθεια τους με την εργασία καθώς και τους *Fatih Bayazit*, *Tina Tassouli*, *Retha Heymann* και *Marco Scheiber*

για τη θερμή φιλική αγκαλιά που μου προσέφεραν και η οποία διευκόλυνε όχι μόνο την εργασία μου αλλά κυρίως τη διαμονή μου στο *Tübingen*.

Περίληψη

Στην παρούσα Διπλωματική εργασία, μελετώνται και παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου ενός συστήματος, σε χώρο πεπερασμένης διάστασης. Η μελέτη αυτή αφορά τόσο τις θεωρητικές πτυχές του αντικειμένου όσο και εφαρμογές του, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της σημασίας του.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μοντελοποίηση τριών συστημάτων, κυρίως ως κίνητρο για την ενασχόληση με το αντικείμενο της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 3 εισάγεται η έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος, έννοια η οποία είναι ιδιαίτερος σημαντική και χρήσιμη στα επόμενα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται μία γενική περιγραφή των συστημάτων ελέγχου και των διαφόρων χαρακτηριστικών τους και τίθενται κάποια βασικά ερωτήματα της Θεωρίας Ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 5 αναπτύσσεται η έννοια της Ελεγχιμότητας ενός συστήματος. Παρατίθενται κάποια πολύ βασικά θεωρήματα και επιλύονται εφαρμογές, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής. Κατόπιν, ασχολούμαστε και με τον τρόπο αντιμετώπισης συστημάτων 2ης τάξης, εισάγοντας την έννοια των ισοδύναμων συστημάτων. Στο Κεφάλαιο 6 ασχολούμαστε με την έννοια της Παρατηρησιμότητας ενός συστήματος. Εδώ επιλύονται δύο παραδείγματα που έχουν αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 αναπτύσσεται η δυνατότητα της Σταθεροποίησης ενός συστήματος και αποδεικνύεται το Θεώρημα Μετακίνησης Πόλων.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Με τί ασχολείται η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου ;

Στην εποχή μας υπάρχουν προβλήματα, τα οποία μπορούν να λυθούν -με μαθηματικά μοντέλα- μέσω μίας σχετικά νέας θεωρίας. Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι ένα πεδίο των εφαρμοσμένων μαθηματικών, το οποίο ασχολείται με τις βασικές αρχές της ανάλυσης και του σχεδιασμού συστημάτων ελέγχου και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας μας.

Το να "ελέγχουμε" ένα σύστημα, σημαίνει να μπορούμε να επηρεάσουμε τη λειτουργία του, έτσι ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό για μας αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, στον τομέα της Μηχανικής προκειμένου να επιτύχουν αυτή την επιρροή, οι μηχανικοί κατασκευάζουν συσκευές οι οποίες συνενώνουν διάφορες μαθηματικές τεχνικές.

Αυτές οι συσκευές εκτείνονται από το ρυθμιστή της ατμομηχανής του *Watt*, η οποία σχεδιάστηκε κατά τη διάρκεια της Αγγλικής Βιομηχανικής Επανάστασης, μέχρι τους πλέον εξελιγμένους μικροεπεξεργαστές ελέγχου που χρησιμοποιούνται σε πολλά προϊόντα όπως *CDplayers*, εκτυπωτές, υπολογιστές ή ρομπότ και συστημάτων αυτόματης πλοήγησης αεροσκαφών αλλά ακόμα και σε βιολογικά συστήματα, όπως το ανθρώπινο σώμα.

Θέλουμε λοιπόν να μελετήσουμε αυτές τις συσκευές καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους με το αντικείμενο που ελέγχουμε. Στη Θεωρία Ελέγχου έχουν χαραχθεί δύο βασικοί δρόμοι, με βάση τους οποίους εργαζόμαστε. Αυτοί οι δρόμοι καμιά φορά φαίνεται να ενεργούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις, αλλά στην πραγματικότητα αλληλοσυμπληρώνονται.

Ο ένας εξ' αυτών βασίζεται στην ιδέα ότι υπάρχει ένα καλό μοντέλο του αντικειμένου που θέλουμε να ελέγξουμε και εμείς θέλουμε με κάποιο τρόπο να βελτιστοποιήσουμε τη συμπεριφορά-

λειτουργία του. Για παράδειγμα, οι φυσικές αρχές και οι τεχνικές προδιαγραφές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό εκείνης της τροχιάς, ενός αεροσκάφους, η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο ταξιδιού ή τη συνολική κατανάλωση καυσίμων. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε αυτή τη περίπτωση, είναι στενά συνδεδεμένες με τον κλασικό λογισμό μεταβολών και τα άλλα πεδία της Θεωρίας Βελτιστοποίησης. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα εκ των προτέρων προγραμματισμένο σχέδιο πτήσης.

Η άλλη βασική γραμμή που μπορεί να ακολουθηθεί είναι εκείνη η οποία βασίζεται στους περιορισμούς που επιβάλλονται από την αβεβαιότητα για το μοντέλο ή για το περιβάλλον μέσα στο οποίο λειτουργεί το αντικείμενο της μελέτης μας. Το βασικό εργαλείο σε αυτή τη περίπτωση, είναι η χρήση μίας **ανάδρασης** (*feedback*) προκειμένου να διορθώσουμε τις αποκλίσεις, που υπάρχουν, από την επιθυμητή συμπεριφορά του αντικειμένου μας. Για παράδειγμα, διάφορα συστήματα ελέγχου μέσω ανάδρασης, χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια μιας πραγματικής πτήσης στο διάστημα, προκειμένου να αντισταθμίσουμε τα λάθη που υπάρχουν λόγω του ότι η τροχιά του αεροσκάφους είναι προκαθορισμένη. Από μαθηματική σκοπιά η Θεωρία Σταθεροποίησης και η Θεωρία Δυναμικών Συστημάτων, συνέβαλαν καθοριστικά σε αυτή τη προσέγγιση.

1.2 Ελεγχιμότητα

Ένα απλό καθημερινό παράδειγμα, μίας συσκευής που χρησιμοποιεί τη Θεωρία Ελέγχου για τη λειτουργία της, είναι ο ηλεκτρικός φούρνος του οποίου η θερμοκρασία στο εσωτερικό μπορεί να αλλάξει οποτεδήποτε αν εμείς απλά ρυθμίσουμε διαφορετικά την παροχή θέρμανσης. Κατά συνέπεια, η αλλαγή της θερμοκρασίας στο εσωτερικό του φούρνου είναι ελεγχόμενη. Μια περαιτέρω εφαρμογή, της Θεωρίας Ελέγχου, ουσιαστικής σημασίας είναι ο έλεγχος της λειτουργίας πυρηνικών σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι ένα σύστημα είναι ελέγξιμο, όταν μπορούμε εμείς να βρούμε έναν κατάλληλο τρόπο ελέγχου της λειτουργίας του, έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή κατάσταση του συστήματος, οποιαδήποτε κι αν ήταν η αρχική κατάσταση του συστήματος. Μπορούμε

δηλαδή δοθείσης μίας αρχικής κατάστασης να ελέγξουμε την πορεία λειτουργίας του συστήματος.

1.3 Σταθεροποίηση και *Pole Assignment Theorem*

Η θεωρία ελέγχου, έχει σημαντικό ρόλο ιδιαίτερα στην αεροναυπηγική και τη διαστημική τεχνολογία. Για παράδειγμα, εδώ το ερώτημα είναι κατά πόσο μπορεί ένα αεροσκάφος να ελέγχεται από αυτόματο πιλότο. Ένα από τα απλούστερα συστήματα, είναι ο μηχανισμός που συνδέει τη θέση του πτερυγίου του αεροσκάφους με τη ρύθμιση του μοχλού ελέγχου και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας μια μηχανή, η τρέχουσα κατάσταση αλλάζει προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή κατάσταση για τη θέση του πτερυγίου. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για ένα Σύστημα Ανάδρασης (*Feedback System*).

Προβλήματα αυτού του είδους είναι ιδιαίτερος ενδιαφέροντα, καθώς επιδιώκουν να καταστήσουν τις συσκευές ικανές να ελέγχουν οι ίδιες τη λειτουργία τους. Ένα σύστημα ανάδρασης χρησιμοποιεί μόνο την τιμή της τρέχουσας κατάστασης προκειμένου να προσδιορίσει τον μηχανισμό ελέγχου για το σύστημα. Ένα σύστημα που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται Σταθεροποιήσιμο.

Ένα από τα βασικότερα αποφθέγματα στη Θεωρία Ελέγχου, στον τομέα της Σταθεροποίησης, είναι το Θεώρημα Μετακίνησης Πόλων (*Pole Assignment* ή αλλιώς *Pole Shifting Theorem*). Για ένα σύστημα λοιπόν, το οποίο περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, το θεώρημα αυτό λέει ουσιαστικά ότι σχεδόν για κάθε ζεύγος πινάκων A, B , είναι δυνατό χρησιμοποιώντας κατάλληλη ανάδραση με πίνακα F , να εξασφαλισθούν αυθαίρετες ιδιοτιμές για τον πίνακα $A + BF$, ο οποίος εξαρτάται μόνο από τους προφανείς περιορισμούς (μιάς και ο $A + BF$ είναι πίνακας πραγματικών αριθμών) ότι οι μιγαδικές ιδιοτιμές πρέπει να παρουσιάζονται σε ζεύγη, δηλαδή αν υπάρχει μία μιγαδική ιδιοτιμή τότε και η συζυγής της είναι και αυτή ιδιοτιμή του $A + BF$. "Σχεδόν κάθε" σημαίνει ότι αυτό θα ισχύει για όλα τα ζεύγη που περιγράφουν, αυτό που αποκαλούμε, "ελέγξιμα συστήματα".

Το όνομα του θεωρήματος, οφείλεται στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A + BF$ είναι επίσης οι πόλοι του πίνακα $(zI - A - BF)^{-1}$ ή ισοδύναμα της συνάρτησης $\frac{1}{\det(zI - A - BF)}$.

Ως συνέπεια του Θεωρήματος Μετακίνησης Πόλων, γνωρίζουμε ότι (εκτός από πολύ ειδικές

περιπτώσεις) δοθέντος ενός συστήματος $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, είναι δυνατό να βρούμε ένα νόμο ανάδρασης $u(t) = Fx(t)$, τέτοιο ώστε όλες οι λύσεις του συστήματος να φθίνουν εκθετικά. Για να καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Μετακίνηστος Πόλων προκειμένου να βρούμε έναν πίνακα F , τέτοιο ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A + BF$, να έχουν γνησίως αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή ο πίνακας $A + BF$ να είναι *Hurwitz*.

Το θεώρημα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη θεωρία Γραμμικών Συστημάτων, γιατί από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι μπορούμε να εκχωρήσουμε στο σύστημα μας αυθαίρετα σύνολα ιδιοτιμών, μπορούμε και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα, τις επιδόσεις δηλαδή των διαφόρων αυτών συνόλων. Μεταξύ εκείνων που παρέχουν σταθερότητα, κάποια μπορεί να είναι πιο χρήσιμα από άλλα και επομένως εμείς μπορούμε να διαλέξουμε το πιο χρήσιμο, για μας, σύνολο.

1.4 Παρατηρησιμότητα

Μία βασική θεωρητική ιδιότητα που προκύπτει πολύ φυσικά όταν μελετάμε Παρατηρητές και Μεθόδους Ανάδρασης, είναι αυτή της Παρατηρησιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία μας για την κατάσταση x του συστήματος, πρέπει να ανακτηθεί από τη γνώση των μετρήσεων y που προκύπτουν. Κατά μία έννοια είναι ένα αντιστάθμισμα στην έννοια της ελεγχιμότητας, η οποία έχει να κάνει με την εύρεση ελέγχων u που μας επιτρέπουν να επιτύχουμε μια επιθυμητή κατάσταση x .

Στην περίπτωση των Γραμμικών Συστημάτων, αυτή η σύνδεση της ελεγχιμότητας με την παρατηρησιμότητα μπορεί να γίνει ακριβής μέσω της έννοιας της δυαδικότητας και επιτρέπει την επίτευξη των περισσότερων αποτελεσμάτων για τους παρατηρητές, ως άμεση συνέπεια των αποτελεσμάτων που αφορούν την ελεγχιμότητα.

1.5 Ιστορική Αναδρομή

Με την αρχή της εξέλιξης του πολιτισμού , έγινε απαραίτητος ο έλεγχος διαφόρων συστημάτων προκειμένου να επιτευχθεί μία καλύτερη ποιότητα ζωής.

Ήδη από τον 3ο αιώνα π.Χ., οι άνθρωποι προσπαθούσαν να εφεύρουν ένα ρυθμιστή που να ελέγχει αυτόματα την πρόσληψη νερού σε μια δεξαμενή αποθήκευσης. Από τότε ξεκίνησε η τάση να κατασκευάζονται όλο και περισσότερες συσκευές ελέγχου.

Ειδικά κατά τη διάρκεια της βιομηχανικής επανάστασης το 17ο αιώνα, σημειώθηκε ραγδαία πρόοδος στη μελέτη των συστημάτων ελέγχου. Μια από τις πιο δημοφιλείς κατασκευές , είναι αυτή του *James Watts Regler* για ατμομηχανή , ο ενεργειακός εφοδιασμός της οποίας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να πραγματοποιεί στροφές , με σταθερή ταχύτητα.

Αργότερα , ακολούθησαν περισσότερες εξελίξεις. Κατά τη διάρκεια του πολέμου ,για παράδειγμα, ήταν επιτακτική η ανάγκη για την εξέλιξη της τεχνολογίας. Η τορπίλη ήταν ένα από τα πρώτα όπλα για τα οποία ήταν απαραίτητο ένα εξελιγμένο σύστημα ελέγχου. Αρχικά , στον Αμερικάνικο εμφύλιο υπήρχαν προηγμένες τορπίλες , ωστόσο κατασκευασμένες να λειτουργούν μόνο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας , και επομένως κινδύνευαν καθώς ήταν ένας εύκολα εντοπιζόμενος στόχος.Λίγο αργότερα κατασκευάστηκαν υποβρύχιες τορπίλες , οι οποίες διέθεταν εξελιγμένα συστήματα ελέγχου.Είχαν έναν αισθητήρα βάθους και λεπίδες ελέγχου προκειμένου να κινούνται προς τα πάνω και προς τα κάτω.Ήταν επίσης εξοπλισμένες με ένα σύστημα ελέγχου που επέτρεπε τη ρύθμιση της ταχύτητας της προπέλας της τορπίλης.

Ωστόσο , η μαθηματική μοντελοποίηση των συστημάτων ελέγχου αυτών των τόσο περίπλοκων εξοπλισμών , έγινε αργότερα , καθώς απείχε πολύ από τις μεθόδους της εποχής. Μόνο αργότερα, κατά τη διάρκεια του 2ου Παγκοσμίου πολέμου μπόρεσαν να βρεθούν κάποιες λύσεις γι' αυτά τα μαθηματικά συστήματα ελέγχου.

Μια άλλη σημαντική ώθηση για την εξέλιξη των συστημάτων ελέγχου ,δόθηκε με αφορμή τη χρήση αυτών στον τομέα της τεχνολογίας στην αεροπορία. Ειδικότερα, το σύστημα "αυτόματου πιλότου" είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο σύστημα πλοήγησης αεροσκάφους ,το οποίο το κρατά σε προκαθορισμένο ύψος και κατεύθυνση και ελέγχει την ταχύτητα με την οποία αυτό κινείται.

Από μαθηματικής απόψεως , το μεγαλύτερο μέρος της απαραίτητης ανάλυσης για συστήματα

της μορφής : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, πραγματοποιήθηκε μεταξύ 1940 και 1960. Ωστόσο , λόγω του 2ου Παγκοσμίου πολέμου , πολλά αποτελέσματα δημοσιεύθηκαν αργότερα.

Η Θεωρία Ελέγχου ,είναι επομένως ένα νέο πεδίο έρευνας που εξακολουθεί να αφήνει πολλά περιθώρια για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου - Κίνητρο

Τα επόμενα παραδείγματα αποτελούν μια πρώτη παρουσίαση του είδους των προβλημάτων με τα οποία ασχολείται η Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου.

2.1 Ομαλή προσελήνωση διαστημικού αεροσκάφους

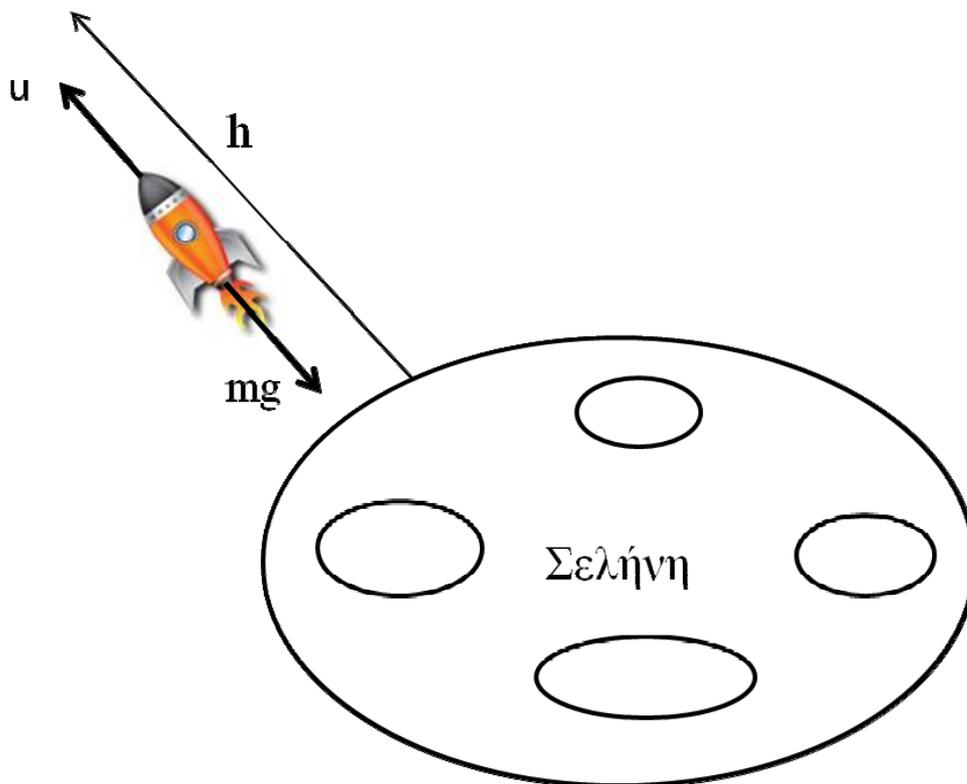
Ένα πρόβλημα στον τομέα της αεροπορίας και της διαστημικής τεχνολογίας είναι η λεγόμενη "Ομαλή προσγείωση διαστημικού αεροσκάφους στο φεγγάρι", δηλαδή η προσγείωση κατά την οποία, όταν το όχημα αγγίζει το έδαφος, έχει ταχύτητα $v = 0$. Αυτό το επιθυμούμε διότι σε κάθε άλλη περίπτωση θα είχαμε μια - μικρή ή μεγάλη- πρόσκρουση του αεροσκάφους κατά την επαφή του με την επιφάνεια της σελήνης.

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t , το ύψος στο οποίο βρίσκεται το διαστημικό σκάφος από το έδαφος είναι $h(t)$, η επιβράδυνση του λόγω της λειτουργίας των ρουκετών είναι $u(t)$ ενώ η μάζα του -η οποία θεωρείται γνωστή- είναι m . Για να λυθεί το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση του *Newton*:

$$m(\ddot{h}(t) + g) = u(t) \quad (2.1)$$

Γράφοντας τη ταχύτητα του διαστημικού αεροσκάφους ως :

$$v(t) = \dot{h}(t) \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.1: Προσελήνωση Αεροσκάφους

και την επιβράδυνση του ως :

$$u(t) = \dot{v}(t) = \ddot{h}(t) \quad (2.3)$$

η εξίσωση (2.1) μετατρέπεται στο Σύστημα :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u(t)}{m} - g \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} h(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.4)$$

Πρέπει να βρούμε μια απεικόνιση $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να υπάρχει $t_0 > 0$ με $h(t_0) = \dot{h}(t_0) = 0$. Από φυσική σκοπιά, είναι προφανές ότι ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις :

$$h(t) \geq 0 \quad (2.5)$$

$$v(t) \leq 0 \quad (2.6)$$

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} \quad (2.7)$$

Για να λυθεί το πρόβλημα, θεωρούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή, η επιβράδυνση που επιβάλλεται είναι σταθερή και ίση με $u(t) \equiv \bar{u}$.

$$\text{Η (2.1)} \implies \ddot{h}(t) + g = \frac{u(t)}{m} \implies \ddot{h}(t) = \dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m} - g \xrightarrow{u(t) \equiv \bar{u}} \dot{v}(t) = \frac{\bar{u}}{m} - g$$

$$\implies v(t) = \int \frac{\bar{u}}{m} - g dt \implies v(t) = \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t + v_0 \quad (2.8)$$

$$\text{Επιπλέον, η (2.8)} \implies \dot{h}(t) = \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t + v_0 \implies h(t) = \int \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t + v_0 dt$$

$$\implies h(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t^2 + v_0 t + h_0 \quad (2.9)$$

$$\text{όπου } \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) = \ddot{h}(t).$$

Έτσι, τη λύση του (2.1) αποτελούν οι σχέσεις (2.8) και (2.9).

Επομένως, πρέπει $\frac{\bar{u}}{m} > g$, δηλαδή $\ddot{h}(t) > 0$, ούτως ώστε να επιτευχθεί η επιβράδυνση του αεροσκάφους, η οποία είναι απαραίτητη για να αποφευχθεί η πρόσκρουση του με την επιφάνεια της σελήνης, τη στιγμή της προσελήνωσης.

Τώρα είναι δυνατό να υπολογίσουμε από τις σχέσεις (2.8) και (2.9), την επιβράδυνση \bar{u} και τη χρονική στιγμή t_0 της προσελήνωσης.

Είναι προφανές ότι τη χρονική στιγμή t_0 , ισχύουν:

$$v(t_0) = v_0 + \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t_0 = 0 \quad (2.10)$$

$$h(t_0) = h_0 + v_0 t_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) t_0^2 = 0 \quad (2.11)$$

Από τη (2.10) συνεπάγεται ότι

$$t_0 = -\frac{v_0}{\frac{\bar{u}}{m} - g} \geq 0 \quad (2.12)$$

Επομένως τώρα, η (2.11) γίνεται :

$$h(t_0) = h_0 - \frac{v_0^2}{\frac{\bar{u}}{m} - g} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right) \frac{v_0^2}{\left(\frac{\bar{u}}{m} - g \right)^2} = 0 \quad (2.13)$$

Η (2.13) μας οδηγεί τελικά στη λύση της \bar{u} :

$$\bar{u} = m \left(\frac{v_0^2}{2h_0} + g \right) \quad (2.14)$$

Συνδυάζοντας τώρα τη (2.12) και τη (2.14) καταλήγουμε στο :

$$t_0 = -\frac{2h_0}{v_0} \quad (2.15)$$

Απομένει λοιπόν να δούμε αν ικανοποιούνται οι υπόλοιπες προϋποθέσεις.

Η προϋπόθεση

$$h(t) \geq 0 \quad (2.16)$$

ισχύει, $\forall t \in [0, t_0]$, όπως μπορούμε να δούμε με αντικατάσταση του \bar{u} , από τη σχέση (2.14), στη σχέση (2.11).

Επίσης ισχύει :

$$v(t) \leq 0, \forall t \in [0, t_0] \quad (2.17)$$

το οποίο αποδεικνύεται εύκολα, αν αντικαταστήσω το \bar{u} , από τη σχέση (2.14), στη σχέση (2.10).

Επιπλέον, το $\bar{u} \geq 0$ πάντα, επομένως ισχύει : $\bar{u} \leq u_{max}$ αν $m \left(\frac{v_0^2}{2h_0} + g \right) \leq u_{max}$, άρα αν και μόνον αν :

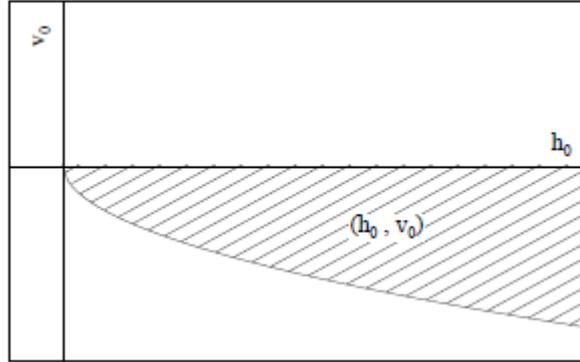
$$v_0^2 \leq 2 \left(\frac{u_{max}}{m} - g \right) h_0 \quad (2.18)$$

όπου προφανώς, $\left(\frac{u_{max}}{m} - g \right) > 0$, αφού γνωρίζουμε ότι $\frac{\bar{u}}{m} - g > 0$.

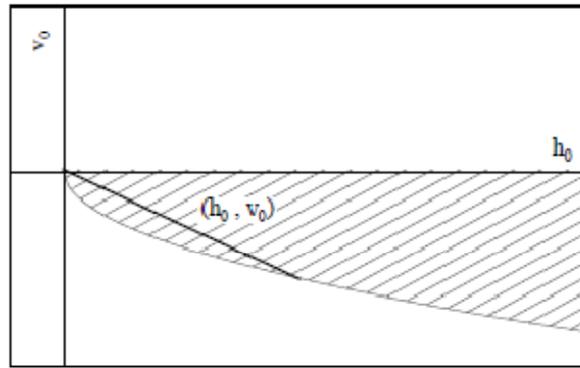
Η σχέση (2.18) μας δίνει τις επιτρεπόμενες αρχικές τιμές.

Για να είναι λοιπόν το αεροσκάφος σε θέση να έχει ταχύτητα $v = 0$ τη στιγμή της προσελήνωσης, θα πρέπει οι αρχικές τιμές να βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα της παρακάτω γραφικής παράστασης 1.

Λαμβάνοντας υπ'όψη το ότι η προσγείωση γίνεται σε δεδομένη χρονική στιγμή T, παίρνουμε ακόμα πιο συγκεκριμένες αρχικές τιμές.



Σχήμα 2.2: Γραφική παράσταση 1



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση 2

Έστω ότι η χρονική στιγμή T είναι γνωστή και ίση με $T = -\frac{2h_0}{v_0}$, τότε $v_0 = -\frac{2h_0}{T}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα :

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \{v_0^2 \leq 2 \left(\frac{u_{max}}{m} - g \right) h_0\} \cap \{v_0 = -\frac{2h_0}{T}\} \quad (2.19)$$

Για να εκπληρωθούν λοιπόν και οι πρόσθετες συνθήκες , πρέπει οι αρχικές τιμές να βρίσκονται στα σημεία τομής της ευθείας $v_0 = -\frac{2h_0}{T}$ και της γραφικής παράστασης 1 όπως φαίνεται και στη γραφική παράσταση 2.

Επομένως , το συμπέρασμα μας είναι ότι μπορεί να βρεθεί κατάλληλος έλεγχος u , τέτοιος ώστε το αεροσκάφος να έχει ομαλή προσελήνωση.

2.2 Ηλεκτρικός Φούρνος

Σκεφθείτε έναν ηλεκτρικό φούρνο , του οποίου η θερμοκρασία ρυθμίζεται από ένα πηνίο θέρμανσης το οποίο βρίσκεται στο περίβλημα του φούρνου. Θα συμβολίζουμε με u , τη **θερμότητα η οποία παρέχεται από το πηνίο**. Θεωρούμε ότι μόνο οι παρακάτω σταθερές επηρεάζουν τη Μεταβολή της θερμοκρασίας :

- Οι **Θερμοχωρητικότητες** c_1 και c_2 ,του εσωτερικού του φούρνου και του περιβλήματος του, αντίστοιχα.
- Οι **επιφάνειες** a_1 και a_2 του εσωτερικού και εξωτερικού των **τοιχωμάτων** του φούρνου, αντίστοιχα.
- Οι **συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας** , r_1 και r_2 αντίστοιχα, της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας του περιβλήματος του φούρνου.

Θεωρούμε ότι η θερμότητα στο εσωτερικό του φούρνου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη και οι απώλειες θερμότητας ανάλογες της επιφάνειας και της διαφοράς θερμοκρασίας με το περιβάλλον. Δε λαμβάνονται υπόψη περαιτέρω παράγοντες. Με T_0 συμβολίζουμε τη θερμοκρασία στο εξωτερικό του φούρνου , με T_1 τη θερμοκρασία στο περίβλημα του φούρνου και με T_2 τη θερμοκρασία στο εσωτερικό του.

Τότε , η μεταβολή Θερμοκρασίας στο περίβλημα δίνεται από τη σχέση :

$$c_1 \dot{T}_1 = -\alpha_2 r_2 (T_1 - T_0) - \alpha_1 r_1 (T_1 - T_2) + u \quad (2.20)$$

και για το εσωτερικό του φούρνου , από τη σχέση :

$$c_2 \dot{T}_2 = \alpha_1 r_1 (T_1 - T_2) \quad (2.21)$$

Με "·" συμβολίζουμε την παράγωγο της θερμότητας ως προς το χρόνο t ,δηλαδή

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} \quad (2.22)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορές θερμοκρασίας $T_1 - T_0$ και $T_2 - T_0$.

Θεωρούμε το διάνυσμα στήλη :

$$x := (T_1 - T_0, T_2 - T_0)^T \in \mathbb{R}^2 \quad (2.23)$$

και λέμε ότι από τη $x(t)$ δίνεται η διαφορά θερμοκρασίας του περιβλήματος και του εσωτερικού του φούρνου , σε σχέση με τη θερμοκρασία στο εξωτερικό ,τη χρονική στιγμή t . Θεωρώντας τους πίνακες :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1)}{c_1} & \frac{\alpha_1 r_1}{c_1} \\ \frac{\alpha_1 r_1}{c_2} & \frac{-\alpha_1 r_1}{c_2} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

και

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

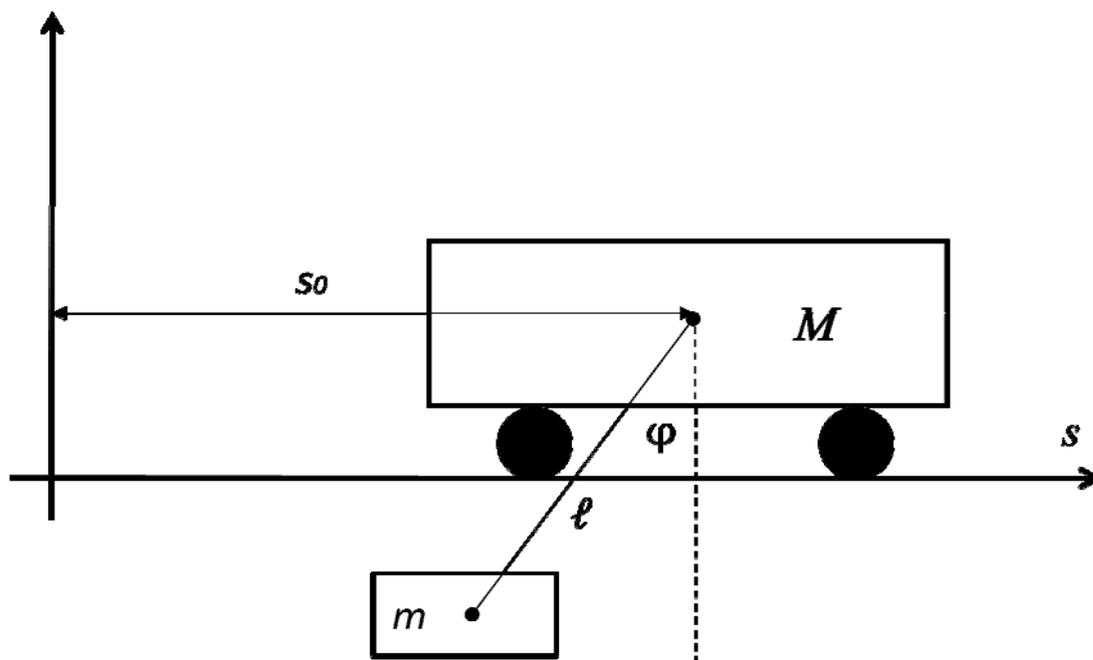
Οι σχέσεις (2.20) και (2.21) μπορούν να εκφραστούν σαν σύστημα , μέσω της διαφορικής εξίσωσης:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.26)$$

Ερωτήματα που γεννιούνται και στα οποία θέλουμε να απαντήσουμε :

- 1) Μπορεί μέσω αύξησης της θερμοκρασίας να επιτευχθεί και να διατηρηθεί οποιαδήποτε θερμοκρασία στο περίβλημα και στο εσωτερικό του φούρνου , σε δεδομένη χρονική στιγμή ;
- 2) Μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς τη θερμοκρασία T_2 στο εσωτερικό του φούρνου , χωρίς να τη μετρήσουμε άμεσα , παρά μόνο μετρώντας τη θερμοκρασία T_1 του περιβλήματος ;

2.3 Γερανός



Σχήμα 2.4: Γερανός

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ένα κινητό μάζας M , στο οποίο ασκείται δύναμη u κατά τη θετική φορά που προσδιορίζει το σύστημα συντεταγμένων (προς τα δεξιά). Σε χρονική στιγμή t , το κέντρο βάρους του κινητού είναι στο σημείο $(0, s_0)$. Από το μέσο του κινητού κρέμεται αντικείμενο μάζας m , με τη βοήθεια σχοινιού μήκους l . Λόγω της κίνησης του κινητού η μάζα m απομακρύνεται από τον κατακόρυφο άξονα και δημιουργεί με αυτόν γωνία εκτροπής ϕ .

Μας ενδιαφέρει, κατά τη χρονική στιγμή t , η μετατόπιση $s(t)$ του κινητού, η ταχύτητα του $\dot{s}(t)$, η εκτροπή $\phi(t)$ της μάζας m και η ταχύτητα $\dot{\phi}(t)$ της μάζας m που προκαλεί αυτή η εκτροπή. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατάσταση του συστήματος, ανά πάσα στιγμή t , μέσω του διανύσματος $x(t) := (s(t), \dot{s}(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))^T \in \mathbb{R}^4$ και γράφουμε $x = (s, \dot{s}, \phi, \dot{\phi})^T$.

Για να παραστήσουμε αυτή την κίνηση μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (2.26), πρέπει να εξετασθούν οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα μας και να γίνουν κάποιοι μετασχηματισμοί.

Αρχικά, για τη δύναμη που ασκείται στο κινητό (σώμα μάζας M) παίρνουμε από το νόμο του

Newton:

$$\Sigma F_x = M\vec{a} \implies u - F_x = M\ddot{s} \implies M\ddot{s} = u - F \sin \phi \quad (2.27)$$

όπου F είναι η δύναμη που ασκείται στο κινητό λόγω της εκτροπής της μάζας m .

Λόγω των οριζόντιων δυνάμεων που δρουν επί της μάζας m , έχουμε :

Η μετατόπιση του m είναι $(s - l \sin \phi)$. Οπότε :

$$\Sigma F_x = m\vec{a} \implies m(s - l \sin \phi)'' = F \sin \phi \quad (2.28)$$

Οι κάθετες συνιστώσες των δυνάμεων, επηρεάζουν μόνο την κίνηση της μάζας m , επομένως έχουμε επιπλέον :

$$F_y - mg = m(l - l \cos \phi)'' \implies m(l - l \cos \phi)'' = F \cos \phi - mg \quad (2.29)$$

όπου g είναι η δύναμη της βαρύτητας, η οποία δρα στη μάζα m .

Προκειμένου να εξαλείψουμε τον όρο F από τις εξισώσεις, προσθέτουμε τη σχέση (2.27) με τη σχέση (2.28) και αφαιρούμε τη σχέση (2.29) πολλαπλασιασμένη με $\sin \phi$ από τη σχέση (2.28) πολλαπλασιασμένη με $\cos \phi$. Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} (2.27) + (2.28) &\implies u - F \sin \phi + F \sin \phi = M\ddot{s} + m(s - l \sin \phi)'' \\ &\implies u = M\ddot{s} + m\ddot{s} - ml(\sin \phi)'' \\ &\implies u = M\ddot{s} + m\ddot{s} - ml(\dot{\phi} \cos \phi)' \implies u = M\ddot{s} + m\ddot{s} - ml \left[\ddot{\phi} \cos \phi + \dot{\phi}^2 (-\sin \phi) \right] \\ &\implies u = M\ddot{s} + m\ddot{s} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ &\implies u = (M + m)\ddot{s} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} (2.28) \cdot \cos \phi - (2.29) \cdot \sin \phi &\implies F \sin \phi \cos \phi - F \cos \phi \sin \phi + mg \sin \phi = \\ &= m\ddot{s} \cos \phi - ml\ddot{\phi} \cos^2 \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - m \sin \phi \left[l\dot{\phi} \sin \phi \right]' = \\ &= m\ddot{s} \cos \phi - ml\ddot{\phi} \cos^2 \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - ml \sin \phi (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \implies \\ &\implies mg \sin \phi = m\ddot{s} \cos \phi - ml\ddot{\phi} \cos^2 \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - ml\ddot{\phi} \sin^2 \phi - ml \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 = \\ &= m \cos \phi \ddot{s} - ml(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)\ddot{\phi} \implies \end{aligned}$$

$$\implies mg \sin \phi = m\ddot{s} \cos \phi - ml\ddot{\phi} \quad (2.31)$$

Αν τώρα , έχουμε μόνο μικρές και αργές ταλαντώσεις , ισχύουν οι προσεγγίσεις : $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$ και $\dot{\phi}^2 \approx 0$, οπότε οι σχέσεις (2.30) και (2.31) , δίνουν αντίστοιχα :

$$u = (M + m)\ddot{s} - ml\ddot{\phi} \quad (2.32)$$

$$mg\phi = m\ddot{s} - ml\ddot{\phi} \quad (2.33)$$

Εύρεση της \ddot{s} :

$$(2.32) - (2.33) \implies u - mg\phi = M\ddot{s} + m\ddot{s} - ml\ddot{\phi} - m\ddot{s} + ml\ddot{\phi}$$

$$\implies \ddot{s} = \frac{1}{M}u - \frac{mg}{M}\phi \quad (2.34)$$

Εύρεση της $\ddot{\phi}$:

$$\text{Από την (2.32) } \stackrel{(2.34)}{\implies} u = (M + m) \left[\frac{1}{M}u - \frac{mg}{M}\phi \right] - ml\ddot{\phi} \implies u = \frac{M+m}{M}u - \frac{(M+m)mg}{M}\phi - ml\ddot{\phi}$$

$$\implies \ddot{\phi} = \frac{1}{Ml}u - \frac{(M + m)g}{Ml}\phi \quad (2.35)$$

Σχετικές ερωτήσεις :

1) Μπορούμε ελέγχοντας τη δύναμη u , να επιτύχουμε κάθε πιθανή κατάσταση του συστήματος; Είναι δηλαδή δυνατό να επιτύχουμε, κάθε θέση και ταχύτητα του κινητού και κάθε μετατόπιση-εκτροπή και ταχύτητα της μάζας m ;

2) Μπορούμε, για παράδειγμα, υπολογίζοντας μόνο τη μετατόπιση s και την εκτροπή ϕ , να προσδιορίσουμε τις ταχύτητες \dot{s} και $\dot{\phi}$;

Παρακάτω θα αναπτυχθεί σχετική θεωρία , ούτως ώστε να απαντήσουμε σε αυτού του τύπου τα ερωτήματα.

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικά Μοντέλα των Γραμμικών Αυτόνομων Συστημάτων Ελέγχου

3.1 Γραμμικό Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Γ.Ο.Π.Α.Τ.)

Αρχικά, θεωρούμε το Γ.Ο.Π.Α.Τ. και την αντίστοιχη λύση, τα οποία ορίζονται ως εξής:

3.1.1 Ορισμός

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Το σύστημα:

$$(S_1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ονομάζεται **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών** για τη Γραμμική Ομογενή Διαφορική Εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.2)$$

2. Μία διαφορίσιμη συνάρτηση $x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, η οποία επαληθεύει τη (3.2), αποτελεί **λύση** της και κατ' επέκταση και λύση του συστήματος (S_1) .

3.1.2 Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Τότε η εξίσωση

$$x(t) := e^{tA} x_0 \quad (3.3)$$

αποτελεί μοναδική λύση του συστήματος S_1 .

Σημαντικό ρόλο παίζει η συμπεριφορά των λύσεων για μεγάλες χρονικές περιόδους. Γι' αυτό , είναι σημαντική η σταθεροποιησιμότητα του συστήματος.

3.2 Ευστάθεια

Σε αυτή την ενότητα θα εξηγήσουμε τί ακριβώς εννοούμε όταν αναφερόμαστε στην ευστάθεια ενός Συστήματος Ελέγχου.

3.2.1 Ορισμός

Ένα σημείο $x^* \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **σημείο ισορροπίας** της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3.4)$$

αν ισχύει $f(x^*) = 0$, όπου $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz .

Ισοδύναμα , με βάση το Θεώρημα Έπαρξης και Μοναδικότητας της λύσης , η συνάρτηση

$$x(t) = x^* \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

αποτελεί τη μοναδική λύση , της διαφορικής εξίσωσης (3.4) , που διέρχεται απο το x^* .

3.2.2 Ορισμός - Ευσταθές σημείο ισορροπίας

Έστω το $x^* = 0$, σημείο ισορροπίας της Γραμμικής Ομογενούς Διαφορικής Εξίσωσης (3.2) .

Το $x^* = 0$ ονομάζεται **ευσταθές** σημείο ισορροπίας , αν οι λύσεις του συστήματος (3.1), για όλες τις αρχικές καταστάσεις , συγκλίνουν στο $x^* = 0$, δηλαδή αν ισχύει :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

3.2.3 Ορισμός - Φάσμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Το σύνολο

$$\sigma(A) := \{\lambda : (\lambda I - A) \text{ μη αντιστρεψιμος}\} \quad (3.7)$$

ονομάζεται **Φάσμα** του A .

3.2.4 Σημείωση

Το φάσμα του A είναι ακριβώς όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

3.2.5 Ορισμοί

1. Το σύνολο

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} \quad (3.8)$$

ονομάζεται **Φασματική Ακτίνα** του A .

2. Το σύνολο

$$w(A) := \inf\{w \in \mathbb{R} : \exists M_w \geq 1 \text{ με } \|e^{tA}\| \leq M_w e^{wt} \quad \forall t \geq 0\} \quad (3.9)$$

ονομάζεται "**Φράγμα Ανάπτυξης**" του A .

3. Το ανοιχτό σύνολο

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \quad (3.10)$$

ονομάζεται **Επιλύον Σύνολο** του πίνακα A .

4. Το $x^* = 0$, ονομάζεται **εκθετικά ευσταθές** σημείο ισορροπίας, αν $w(A) \leq 0$.

Την αρχή της εντατικής έρευνας πάνω στην ευστάθεια, έκανε ο *Lyapunov* το 1892 με το παρακάτω θεώρημα, στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων. Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα κριτήριο το οποίο μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν ένα σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές ή ασταθές.

3.2.6 Θεώρημα *Lyapunov* (1857-1918)

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και η διαφορική εξίσωση (3.2). Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

(1) Το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$, είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A έχουν γνησίως αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι *Hurwitz*.

(2) Για τη Φασματική Ακτίνα ισχύει : $s(A) < 0$.

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$.

(4) Υπάρχει $M \geq 1$ και $\varepsilon > 0$ με $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\varepsilon t}$, $\forall t \geq 0$.

(5) Για το "Φράγμα Ανάπτυξης" $w(A)$, ισχύει $w(A) < 0$.

3.2.7 Σημείωση

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ισχύει : $s(A) = w(A)$.

Οι αποδείξεις του θεωρήματος *Lyapunov* καθώς και της παραπάνω σημείωσης, υπάρχουν στις σελίδες 12-13 του βιβλίου (1), που αναφέρεται στη βιβλιογραφία.

Μετά από αυτή την συνοπτική επανάληψη στις Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις, θα ασχοληθούμε τώρα με τις ΜΗ-Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις, καθώς αυτές είναι που κυρίως χρησιμοποιούνται στη Θεωρία Ελέγχου.

3.3 Γραμμικό ΜΗ-Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Γ.ΜΗ-Ο.Π.Α.Τ.)

Αρχίζουμε και πάλι με τον ορισμό του ΜΗ-Ο.Π.Α.Τ. και την αντίστοιχη λύση του.

3.3.1 Ορισμοί

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

1. Το σύστημα :

$$(S_2) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

ονομάζεται **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών** για τη Γραμμική ΜΗ-Ομογενή Διαφορική Εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \quad (3.12)$$

2. Μία διαφορίσιμη συνάρτηση $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, η οποία ικανοποιεί την (3.12), αποτελεί λύση της και κατ' επέκταση και λύση του συστήματος S_2 .

Η λύση της (3.12) προσδιορίζεται μέσω της παρακάτω πρότασης.

3.3.2 Πρόταση

Η συνάρτηση

$$x(t) := e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \quad (3.13)$$

είναι η μοναδική λύση του συστήματος S_2 , με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$.

Η απόδειξη υπάρχει στη σελίδα 59 του βιβλίου (2), που αναφέρεται στη βιβλιογραφία.

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με τις έννοιες Ελεγχιμότητα, Σταθεροποίηση και Παρατηρησιμότητα ενός Συστήματος Ελέγχου. Θα λυθούν και κάποια παραδείγματα, ως εφαρμογές αυτών των εννοιών.

Κεφάλαιο 4

Γενική περιγραφή των Συστημάτων Ελέγχου

4.1 Περιγραφή του Συστήματος

Στόχος της Θεωρίας Ελέγχου είναι να φέρουμε το Σύστημα, με το οποίο ασχολούμαστε, στην επιθυμητή για εμάς κατάσταση, έτσι ώστε να μπορούμε να το ελέγχουμε και να επηρεάζουμε τη λειτουργία του. Ως σύστημα, θεωρούμε ένα σύνολο αντικειμένων, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Ένα σύστημα (Σ) δέχεται κάποιες εισόδους (*inputs*) και παράγει κάποιες εξόδους (*outputs*).

Συγκεκριμένα, το (Σ) περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

με αρχική τιμή $x(0) = x_0$.

Έτσι έχουμε το σύστημα :

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

όπου $t \geq 0$.

4.1.1 Χώροι του Συστήματος $\Sigma(A, B)$

Χώρος Καταστάσεων του συστήματος (4.2), ονομάζεται ο χώρος $X = K^n$ (όπου το K είναι είτε το \mathbb{R} είτε το \mathbb{C}), δηλαδή το X είναι ο χώρος όλων των δυνατών Καταστάσεων του συστήματος. Τα στοιχεία του X , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ονομάζονται **Διανύσματα Κατάστασης**.

Χώρος των τιμών Εισόδου/Ελέγχου του (4.2) , ονομάζεται ο χώρος $U = K^m$,έτσι ώστε το U να είναι το σύνολο όλων των δυνατών εισόδων του συστήματος. Τα στοιχεία του U , $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ ονομάζονται **Διανύσματα Εισόδου/Ελέγχου**.

Στην παρούσα εργασία ο χώρος K θα είναι πάντα ο \mathbb{R} . Επομένως, $X = \mathbb{R}^n$ και $U = \mathbb{R}^m$.

4.1.2 Τελεστές/Πίνακες

Ο **Πίνακας Καταστάσεων** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, είναι ο πίνακας του συστήματος (4.2) .

Ο **Πίνακας Ελέγχου/Εισόδων** $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, είναι μία γραμμική απεικόνιση ορισμένη στο χώρο εισόδων $U = \mathbb{R}^m$, με στοιχεία σε ένα Χώρο Καταστάσεων $X = \mathbb{R}^n$ δηλαδή , $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \mapsto Bu$.

4.1.3 Επίλυση του συστήματος $\Sigma(A, B)$

Για μία δοθείσα αρχική κατάσταση $x(0) \in \mathbb{R}^n$ και έναν έλεγχο $u(t) \in \mathbb{R}^m$,όπου $t \geq 0$, υπάρχει μοναδική λύση $x(t; x(0), u) \in \mathbb{R}^n$ της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος (4.2), η οποία συμφωνα με τη σχέση (3.13) της Πρότασης 3.3.2, είναι :

$$x(t; x(0), u) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \quad (4.3)$$

4.1.4 Συστήματα Ανάδρασης

Συχνά ένα σύστημα της μορφής (4.2) είναι αυτόνομα ελέγξιμο , δηλαδή είναι έτσι σχεδιασμένο ώστε να είναι ελέγξιμο χωρίς εξωτερικές επιρροές. Τότε μιλάμε για τα λεγόμενα "**Feedback Systems - Συστήματα Ανάδρασης**". Σε αυτά τα συστήματα, οι είσοδοι u εξαρτώνται από τις αντίστοιχες καταστάσεις x του συστήματος, δηλαδή υπάρχει γραμμική εξίσωση $u = Fx$, η οποία ονομάζεται **Γραμμική Ανάδραση**.

Σε κάποιες περιπτώσεις η λειτουργία του συστήματος (4.2) μπορεί να παρατηρηθεί μόνο **έμμεσα**, δηλαδή μόνο μέσω μετρήσεων. Τότε , αντί του συστήματος (4.2) , χρησιμοποιούμε το σύστημα:

$$\Sigma(A, B, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

όπου $t \geq 0$.

Ο χώρος $Y = K^l$, ονομάζεται **Χώρος των τιμών Εξόδου** του (4.4) και είναι το σύνολο όλων των εξόδων του συστήματος. Τα στοιχεία του Y , $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$, ονομάζονται **Διανύσματα Εξόδου**.

Και πάλι διευκρινίζουμε ότι σε αυτή την εργασία το K θα είναι πάντα το \mathbb{R} . Επομένως, $Y = \mathbb{R}^l$. Ο **Πίνακας Εξόδων** $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ είναι μία γραμμική απεικόνιση ορισμένη σε ένα Χώρο Καταστάσεων $X = \mathbb{R}^n$ με στοιχεία που ανήκουν στο Χώρο Εξόδων $Y = \mathbb{R}^l$, δηλαδή $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $x \mapsto Cx$.

Η εξίσωση $y(t) = Cx(t)$ λοιπόν, είναι η **έξοδος** του συστήματος, με $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ και είναι :

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-s)A}Bu(s)ds \quad (4.5)$$

4.1.5 Σημειώσεις

1. Αν σε ένα σύστημα δεν υπάρχει Παρατηρητής, τότε αυτό συμβολίζεται $\Sigma(A, B, -)$ ή απλούστερα $\Sigma(A, B)$.

2. Αν σε ένα σύστημα δεν υπάρχει έλεγχος u , τότε αυτό συμβολίζεται $\Sigma(A, -, C)$ ή απλούστερα $\Sigma(A, C)$:

$$\Sigma(A, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

όπου $t \geq 0$.

4.2 Ζητήματα της Θεωρίας Ελέγχου

Μερικά από τα θεμελιώδη ζητήματα της πεπερασμένης Θεωρίας Ελέγχου , προκύπτουν από τα ακόλουθα ερωτήματα :

(1) Είναι δυνατό να βρεθεί έλεγχος u , έτσι ώστε το σύστημα να είναι ελέγξιμο για μία δοθείσα κατάσταση (δηλαδή σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή) ;

Αυτή η ερώτηση αφορά την **Ελεγκσιμότητα** ενός συστήματος.

(2) Είναι δυνατό να προσδιορισθεί η αρχική τιμή ενός συστήματος, μόνο μέσω μετρήσεων; Είναι δηλαδή δυνατό για ένα σύστημα της μορφής (4.4) να καθορίσουμε το x_0 (και επομένως και την $x(t)$) , γνωρίζοντας τα $A, B, C, u(\cdot), y(\cdot)$;

Εδώ υπεισέρχεται η έννοια της **Παρατηρησιμότητας**.

(3) Στην περίπτωση που έχουμε ένα σύστημα της μορφής (4.2) , το ερώτημα που προκύπτει είναι :

Μπορεί να βρεθεί κατάλληλη γραμμική ανάδραση $u(t) = Fx(t)$ τέτοια ώστε το σύστημα μας να είναι σταθεροποιήσιμο μέσω αυτής της γραμμικής ανάδρασης;

Τότε , μιλάμε για **Σταθεροποίηση**.

Κεφάλαιο 5

Ελεγχξιμότητα Συστήματος

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με το εξής ερώτημα :

Είναι δυνατό , μέσω ενός αποδεκτού ελέγχου u , ξεκινώντας απο μία κατάσταση x_0 του συστήματος , να προσεγγίσουμε μία άλλη κατάσταση x_1 ;

Στο παράδειγμα 2.1 του Κεφαλαίου 2 , το u αντιπροσώπευε μία δύναμη πέδησης -επιβράδυνση, το

$$x_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

την αρχική τιμή ύψους και ταχύτητας του αεροσκάφους και το x_1 την κατάσταση του αεροσκάφους μετά την προσελήνωση, δηλαδή το ύψος $h = 0$ του αεροσκάφους από το έδαφος και την ταχύτητα του $v = 0$.

Αρχικά , δίνονται κάποιοι ορισμοί , που θα μας είναι χρήσιμοι για τη συνέχεια της εργασίας.

5.1 Βασικά χαρακτηριστικά της ελεγχξιμότητας

5.1.1 Επισήμανση

Έστω το σύστημα (4.2) του Κεφαλαίου 4 . Το αναφέρουμε και πάλι για λόγους ευκολίας στην ανάγνωση :

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

με χώρο εισόδων , το χώρο όλων των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με τιμές στον \mathbb{R}^m , δηλαδή $u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$.

Στη συνέχεια, εισάγεται η έννοια της ελεγχιμότητας.

5.1.2 Ορισμοί

(1) Η κατάσταση $x_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι **προσεγγίσιμη** από την κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν υπάρχει $t_0 \geq 0$ και $u_0 \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$, με :

$$x_1 = x(t_0; x_0, u_0) := e^{t_0 A} x_0 + \int_0^{t_0} e^{(t_0-s)A} B u_0(s) ds = x(t_0; x_0, 0) + x(t_0; 0, u_0) \quad (5.1)$$

(2) Η κατάσταση $x_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι **προσεγγίσιμη** από την κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ **για συγκεκριμένη χρονική στιγμή** $t_0 > 0$, αν υπάρχει ένα $u_0 \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$, με $x_1 = x(t_0; x_0, u_0)$.

(3) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι **ελέγξιμο** , αν **κάθε** κατάσταση $x_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι προσεγγίσιμη από **κάθε** αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(4) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι **ελέγξιμο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή** $t_0 > 0$, αν **κάθε** κατάσταση $x_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι προσεγγίσιμη από **κάθε** αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τη χρονική στιγμή t_0 .

(5) Προσιτό σύνολο

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ένα σημείο (κατάσταση) και χρόνος $t > 0$. Το σύνολο $A(t, x_0)$ των σημείων (καταστάσεων) $x \in \mathbb{R}^n$, στις οποίες μπορεί να φτάσει τό σύστημα (Σ) σε χρόνο t , ξεκινώντας από το x_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$, με κάποιο αποδεκτό έλεγχο $u \in \mathbb{R}^m$, ονομάζεται **προσιτό σύνολο του σημείου** x_0 και είναι :

$$A(t, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ με } x = x(t, x_0, u)\} \quad (5.2)$$

5.1.3 Θεώρημα Cayley – Hamilton

Το θεώρημα *Cayley – Hamilton* (όνομα το οποίο πήρε από τους μαθηματικούς *Arthur Cayley* και *William Hamilton*) αναφέρει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας που ανήκει σε αντιμεταθετικό δακτύλιο (συμπεριλαμβανομένου του χώρου των πραγματικών ή των μιγαδικών) ικανοποιεί το ίδιο το δικό του χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Πιο συγκεκριμένα, αν ο A είναι ένας δοθέντας $n \times n$ πίνακας και I_n ο $(n \times n)$ ταυτοτικός πίνακας, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ορίζεται ως εξής :

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \quad (5.3)$$

Δεδομένου ότι τα στοιχεία του πίνακα είναι, (γραμμικά ή συνεχή) πολυώνυμα στο λ , η ορίζουσα είναι επίσης πολυώνυμο του λ . Το θεώρημα *Cayley – Hamilton* ισχυρίζεται ότι, αντικαθιστώντας τον πίνακα A στη θέση του λ στο παραπάνω πολυώνυμο, παίρνουμε ως αποτέλεσμα :

$$p(A) = 0 \quad (5.4)$$

Οι δυνάμεις του λ που τώρα είναι δυνάμεις του A , λόγω της αντικατάστασης, θα πρέπει να υπολογίζονται από διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς πινάκων, και ο σταθερός όρος θα πρέπει να πολλαπλασιάζεται με τον ταυτοτικό πίνακα, έτσι ώστε να μπορεί να προστεθεί στους υπόλοιπους όρους.

Το θεώρημα επιτρέπει στο A^n να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των μικρότερων δυνάμεων του πίνακα A .

5.1.4 Λήμμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}, k \geq n$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha_0(k), \dots, \alpha_{n-1}(k)$

με :

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(k) A^j \quad (5.5)$$

Απόδειξη

Για $k = n$: Επιλέγω $\alpha_j(n)$ τέτοιο ώστε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_α του A , να ισχύει:

$$p_\alpha(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) z^j \quad (5.6)$$

Λόγω του Θεωρήματος *Cayley – Hamilton* έχω :

$$A^n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) A^j \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Για } k = n + 1 : \quad A^{n+1} &= A^n A = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) A^j \right) A = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) A^{j+1} \\ &= \alpha_0(n) A + \dots + \alpha_{n-1} A^n = \alpha_0(n) A + \dots + \alpha_{n-2} A^{n-1} + \alpha_{n-1}(n) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j(n) A^{j+1} + \alpha_{n-1}(n) \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(n) A^j . \end{aligned}$$

Άρα και το A^{n+1} είναι γραμμικός συνδιασμός γινομένων των $A^j, j = 0, \dots, n - 1$.

5.1.5 Πρόταση

1. Το $A(t, 0)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n :

$$A(t, 0) \leq \mathbb{R}^n \quad (5.8)$$

2. Το $A(t, x_0)$ είναι γραμμική πολλαπλότητα του \mathbb{R}^n :

$$A(t, x_0) = e^{At} x_0 + A(t, 0) \quad (5.9)$$

5.1.6 Θεώρημα

Για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$A(t, 0) = \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.10)$$

και συνεπώς (με βάση τη Πρόταση 5.1.5) :

$$A(t, x_0) = e^{At}x_0 + \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.11)$$

Απόδειξη

- Αρχικά δείχνουμε ότι :

$$A(t, 0) \subset \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.12)$$

Έστω $x \in A(t, 0)$. Τότε :

$$x = \int_0^t e^{A(t-r)}Bu(r)dr \quad , \quad (5.13)$$

για κάποια μετρήσιμη $u(\cdot)$. Λόγω του Θεωρήματος *Cayley – Hamilton* , το οποίο βεβαιώνει ότι για κάθε $k = 1, 2, \dots$

$$A^k \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\} \quad , \quad (5.14)$$

παίρνουμε ότι :

$$e^{A(t-r)} = I + (t-r)A + \frac{(t-r)^2}{2!}A^2 + \dots \in \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\} \quad (5.15)$$

και υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις

$$\delta_i(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \mu\epsilon \quad \delta_i(t-r) = \frac{(t-r)^i}{i!} \quad (5.16)$$

έτσι ώστε τελικά :

$$e^{A(t-r)} = \sum \delta_i(t-r)A^i \quad (5.17)$$

Επομένως , η (5.13) λόγω της (5.17) γίνεται :

$$x = \int_0^t \sum \delta_i(t-r)A^iBu(r)dr \in \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.18)$$

Συνεπώς :

$$x \in \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.19)$$

Επομένως , όντως

$$A(t, 0) \subset \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.20)$$

- Επιπλέον , σύμφωνα με τη Πρόταση 5.1.5 , που βεβαιώνει ότι το $A(t, 0)$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^n ,

και χρησιμοποιώντας τη (5.20) παίρνουμε ότι ο $A(t, 0)$ είναι υπόχωρος και του $Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, δηλαδή :

$$A(t, 0) \leq Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.21)$$

- Θα δείξουμε τώρα ότι το $A(t, 0)$ δε μπορεί να είναι γνήσιος υπόχωρος του $Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ και πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι ισχύει η (5.10) .

Έστω ότι $A(t, 0) < Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$. Τότε, υπάρχει

$$0 \neq d \in Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (5.22)$$

τέτοιο ώστε το d να είναι κάθετο στον $A(t, 0)$. Τότε :

$$d'x = 0, \quad \forall x \in A(t, 0) \stackrel{(5.13)}{\iff} d' \int_0^t e^{A(t-r)} Bu(r) dr = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

$$\iff d'e^{Ar}B = 0, \quad \forall r \in [0, t] \quad (5.23)$$

Λόγω αναλυτικότητας , από τη (5.23) έπεται ότι :

$$\begin{cases} d'B = 0 \\ d'AB = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ d'A^{n-1}B = 0 \end{cases} \implies d'[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0 \quad (5.24)$$

Όμως , το $d \in Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$. Συνεπώς , από την (5.24) έπεται ότι : $d = 0$,

το οποίο είναι **άτοπο** αφού αρχικά είχαμε υποθέσει ότι $d \neq 0$.

Επομένως , όντως $A(t, 0) = Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$. ‡

5.2 Πίνακας Ελεγχιμότητας B_t

5.2.1 Ορισμός

Ορίζουμε Πίνακα Ελεγχιμότητας $B_t : L^2([0, t], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$, την απεικόνιση :

$$B_t u(\cdot) := \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds \quad , t > 0, u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m) \quad (5.25)$$

Η εικόνα του B_t , $Im B_t$, είναι επομένως το σύνολο όλων των καταστάσεων του \mathbb{R}^n , οι οποίες είναι προσεγγίσιμες από το μηδέν, τη χρονική στιγμή t , δηλαδή η εικόνα του B_t είναι το προσιτό σύνολο του μηδέν.

$$Im B_t := A(t, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x = x(t; 0, u)\} \quad (5.26)$$

5.2.2 Πρόταση

Ο B_t είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής.

Απόδειξη

Η γραμμικότητα είναι προφανής. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι :

$$\|B_t\| := \sup\{\|B_t u\| : u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m), \|u\| \leq 1\} < \infty.$$

Πράγματι, έχουμε :

$$\begin{aligned} \|B_t u\| &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds \right\| \leq \int_0^t \|e^{(t-s)A} B u(s)\| ds \leq \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} \|B\| \|u(s)\| ds \leq \\ &\leq M \|u\|_{L^2} < \infty, \end{aligned}$$

αφού $M := \sup_{s \in [0, t]} e^{(t-s)\|A\|} \|B\|$ που είναι πεπερασμένο και $u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$. †

Στη συνέχεια ορίζουμε $Im(B_t) = \{x \in X : \exists u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ έτσι ώστε } x = x(t, 0, u)\}$.

Προφανώς ο $Im(B_t)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n .

5.2.3 Λήμμα

Ο συζυγής του πίνακα ελεγχιμότητας B_t είναι ο :

$$B_t^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([0, t], \mathbb{R}^m), B_t^* x = \int_0^t B^* e^{(t-\cdot)A^*} x, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\langle B_t u, x \rangle &= \langle \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds, x \rangle = \int_0^t \langle e^{(t-s)A} B u(s), x \rangle ds = \\
&= \int_0^t (e^{(t-s)A} B u(s))^* x ds = \int_0^t u^*(s) B^* e^{(t-s)A^*} x ds = \\
&= \int_0^t \langle u(s), B^* e^{(t-s)A^*} x \rangle ds \\
&\implies \langle B_t u, x \rangle = \langle u(s), \int_0^t B^* e^{(t-s)A^*} x ds \rangle
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Γνωρίζουμε από τη Θεωρία Τελεστών ότι : $\langle B_t u, x \rangle = \langle u, B_t^* x \rangle$.

Επομένως, από την (5.27) έπεται ότι :

$$\langle u, \int_0^t B^* e^{(t-s)A^*} x ds \rangle = \langle u, B_t^* x \rangle \implies B_t^* = \int_0^t B^* e^{(t-s)A^*} ds \tag{5.28}$$

5.2.4 Θεώρημα

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

(i) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο .

(ii) $\cup_{t \geq 0} \text{Im}(B_t) = \mathbb{R}^n$

(iii) $\exists T > 0 : \text{Im}(B_T) = \mathbb{R}^n$

Απόδειξη

(i) \implies (ii) Προφανές , από τον ορισμό της ελεγχιμότητας του $\Sigma(A, B)$ και του τελεστή B_t .

(ii) \implies (iii) Έστω $0 \leq t \leq r$ και $u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$. Ορίζουμε :

$$v(s) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq s \leq T - t \\ u(t - r + s) & \text{αν } T - t < s \leq T \end{cases}$$

Τότε : $v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ και $B_t u = B_r v$.

Επομένως , $\text{Im}(B_t) \subset \text{Im}(B_r) \implies \cup_{t \geq 0} \text{Im}(B_t) \subset \text{Im}(B_T) \xrightarrow{(ii)} \mathbb{R}^n \subset \text{Im}(B_T)$. Άρα , η (iii) ισχύει , αφού $\dim(\mathbb{R}^m) < \infty$.

(iii) \implies (i) Έστω δύο καταστάσεις $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ του συστήματος $\Sigma(A, B)$. Λόγω του (iii) , έπεται ότι υπάρχει ένα $u_0 \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ τέτοιο ώστε :

$$B_t u_0 = x_2 - e^{TA} x_1 \in \mathbb{R}^n \tag{5.29}$$

Επομένως ,

$$x_2 = e^{TA} x_1 + B_t u_0 = x(T; x_1, u_0) \tag{5.30}$$

το οποίο σημαίνει ότι για δοθείσα χρονική στιγμή T , κάθε κατάσταση x_2 μπορεί να προσεγγισθεί από μία άλλη κατάσταση x_1 μέσω ενός ελέγχου u_0 , που σημαίνει ότι το $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο.

5.2.5 Πόρισμα

Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο σε δοθείσα χρονική στιγμή T , αν $\text{Im}B_t = \mathbb{R}^n$.

5.3 Ο Πίνακας L_t

Ορίζουμε έναν νέο Τελεστή/Πίνακα για το σύστημα $\Sigma(A,B)$, τέτοιον ώστε :

$$L_t := \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds \quad , t > 0 \quad (5.31)$$

όπου $x \mapsto L_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

5.3.1 Σημείωση

Αφού ασχολούμαστε με πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί, για κάθε συζυγή πίνακα θα ισχύει $K^* = K^T$.

5.3.2 Λήμμα

Ο τελεστής L_t είναι **συμμετρικός**, δηλαδή :

$$\langle L_t x, y \rangle = \langle x, L_t y \rangle \quad (5.32)$$

και **θετικά ημιορισμένος** για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή :

$$\langle L_t x, x \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.33)$$

Απόδειξη

• Συμμετρικός

Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$ τυχαίες καταστάσεις του $\Sigma(A,B)$. Τότε :

$$\langle L_t x, y \rangle = \langle \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} x ds, y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} x, y \rangle ds = \int_0^t \langle x, (e^{sA} B B^* e^{sA^*})^* y \rangle ds \\
&= \int_0^t \langle x, (e^{sA^*} B^*)^* B^* e^{sA^*} y \rangle ds = \int_0^t \langle x, e^{sA} B B^* e^{sA^*} y \rangle ds \\
&= \langle x, \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds y \rangle = \langle x, L_t y \rangle .
\end{aligned}$$

• **Θετικά ημιορισμένος**

Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\langle L_t x, x \rangle &= \int_0^t \langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} x, x \rangle ds \\
&= \int_0^t \langle B^* e^{sA^*} x, B^* e^{sA^*} x \rangle ds = \int_0^t \|B^* e^{sA^*} x\|^2 ds \geq 0
\end{aligned}$$

Τώρα θα δούμε πως μπορούν να συσχετισθούν οι Τελεστές B_t και L_t .

5.3.3 Λήμμα

Ισχύει η σχέση

$$L_t = B_t B_t^* \tag{5.34}$$

Απόδειξη

Για $x \in \mathbb{R}^n$:

$$B_t B_t^* = \int_0^t e^{(t-s)A} B (B_t^* x) ds = \int_0^t e^{(t-s)A} B B^* e^{(t-s)A^*} x ds = \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} x ds = L_t x$$

5.3.4 Πρόταση

Για την εικόνα του τελεστή L_t ισχύει

$$Im L_t = Im[A|B] := Im[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \tag{5.35}$$

Απόδειξη

Αρκεί ισodύναμα να δείξω ότι $(Im L_t)^\perp = (Im[A|B])^\perp$

- Αρχικά αποδεικνύω ότι $(Im[A|B])^\perp \subset (Im L_t)^\perp$.

Έστω λοιπόν : $x \in (Im[A|B])^\perp \implies x \perp Im[A|B]$

$$\implies \langle x, [A|B](y_0, \dots, y_{n-1}) \rangle = 0, \quad \forall y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^m$$

$$\implies \langle x, \sum_{k=0}^{n-1} A^k B y_k \rangle = 0, \quad \forall y_k \in \mathbb{R}^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\implies \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, A^k B y_k \rangle = 0, \quad \forall y_k \in \mathbb{R}^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} \implies \langle x, A^k B y_k \rangle &= 0, \quad \forall y_k \in \mathbb{R}^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ \implies \langle x, A^k B y \rangle &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 5.1.4 από τη σχέση (5.36) έπεται ότι :

$$\begin{aligned} \langle x, A^j B y \rangle &= 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \\ \implies \langle x, e^{tA} B y \rangle &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \implies \langle B^* e^{tA^*} x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \\ \implies B^* e^{tA^*} x &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως : } \langle x, L_t y \rangle &\stackrel{\Lambda.5.3.3}{=} \int_0^t \langle x, e^{sA} B B^* e^{sA^*} y \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle B^* e^{sA^*} x, B^* e^{sA^*} y \rangle ds \stackrel{(5.37)}{=} 0 \\ \implies \langle x, L_t y \rangle &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \implies x \perp \text{Im} L_t \\ \implies x &\in (\text{Im} L_t)^\perp \end{aligned}$$

Επομένως καταλήξαμε ότι

$$(\text{Im}[A|B])^\perp \subset (\text{Im} L_t)^\perp \quad (5.38)$$

- Τώρα δείχνουμε ότι $(\text{Im} L_t)^\perp \subset (\text{Im}[A|B])^\perp$

$$\text{Έστω λοιπόν } x \in (\text{Im} L_t)^\perp \implies x \perp \text{Im} L_t$$

$$\implies \langle x, L_t y \rangle = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

Επομένως και για $y = x$, θα ισχύει :

$$\begin{aligned} \langle x, L_t x \rangle = 0 &\implies \langle x, \int_0^t e^{sA} B B^* e^{sA^*} x ds \rangle = 0 \\ \implies \int_0^t \langle x, e^{sA} B B^* e^{sA^*} x \rangle ds &= 0 \\ \implies \int_0^t \langle B^* e^{sA^*} x, B^* e^{sA^*} x \rangle ds = 0 &\implies \int_0^t \|B^* e^{sA^*} x\|^2 ds = 0 \\ \implies B^* e^{sA^*} x = 0, \quad \forall s \in [0, t] &\implies \frac{d^k}{ds^k} (B^* e^{sA^*} x) = 0 \end{aligned}$$

$$\stackrel{x \neq 0}{\implies} \begin{cases} B^* x = 0 \\ B^* A^* x = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ B^* (A^*)^{n-1} x = 0 \end{cases} \implies B^* (A^*)^k x = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.39)$$

$$\text{Όμως : } \langle x, A^k B y \rangle = \langle B^* (A^*)^k x, y \rangle \stackrel{(5.39)}{\implies} \langle x, A^k B y \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\implies x \perp \text{Im}(A^k B) , \forall k = 0, 1, \dots, n-1 \implies x \in (\text{Im}[A|B])^\perp$$

Άρα καταλήγουμε ότι

$$(\text{Im}L_t)^\perp \subset (\text{Im}[A|B])^\perp \quad (5.40)$$

Επομένως τελικά έπεται απο τις σχέσεις (5.38) και (5.40) , ότι $(\text{Im}L_t)^\perp = (\text{Im}[A|B])^\perp$

το οποίο ισοδυναμεί με το $\text{Im}L_t = \text{Im}[A|B] := \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$.

5.3.5 Πρόταση

Έστω $t > 0$. Τότε , ισχύει : $\text{Im}B_t = \text{Im}[A/B]$ ($= \text{Im}L_t$)

Απόδειξη

- Αρχικά δείχνω ότι $\text{Im}B_t \subset \text{Im}[A/B]$

Έστω $x \in \text{Im}B_t$. Τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x = B_t u$. Τότε :

$$e^{(t-s)A} B u(s) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(t-s)^\kappa A^\kappa}{\kappa!} B u(s) \in \text{Im}[A|B] , \forall s \in [0, t] \quad (5.41)$$

Επομένως : $x = B_t u = \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds \in \text{Im}[A|B]$

$$\implies x \in \text{Im}[A|B] \quad (5.42)$$

όπου $\text{Im}[A|B]$ υπόχωρος του \mathbb{R}^n . Άρα τελικά :

$$\text{Im}B_t \subset \text{Im}[A|B] \quad (5.43)$$

- Τώρα δείχνω ότι ισχύει και $\text{Im}[A/B] \subset \text{Im}B_t$

Έστω $x \in \text{Im}[A|B]$. Τότε από Πρόταση 5.3.4 έπεται ότι :

$x \in \text{Im}L_t \implies$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$x = L_t y = B_t B_t^* y \quad (5.44)$$

Όμως , $y \in \mathbb{R}^n$, επομένως υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $B_t^* y = u$, άρα η (5.44) γίνεται:

$$x = \text{Im}B_t u , u \in \mathbb{R}^m \implies x \in \text{Im}B_t$$

Άρα καταλήγουμε ότι :

$$\text{Im}[A/B] \subset \text{Im}B_t \quad (5.45)$$

Επομένως , επό τις σχέσεις (5.43) και (5.45) , έπεται ότι τελικά : $ImB_t = Im[A/B]$.

5.3.6 Πόρισμα

Η εικόνα ImB_t είναι ανεξάρτητη του t , για κάθε $t > 0$.

Μετά από όλα τα παραπάνω αποτελέσματα αυτής της παραγράφου , μπορούμε να επεκτείνουμε το Θεώρημα 5.2.4 . Έχουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα :

5.3.7 Θεώρημα

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (1) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο .
- (2) Το $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο για δοθείσα χρονική στιγμή $t > 0$.
- (3) $ImB_t = \mathbb{R}^n$
- (4) Ο L_t είναι αντιστρέψιμος , $\forall t > 0$.
- (5) Για το χώρο $C(t) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u_0 \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m) \text{ με } x(t; x_0, u_0) = 0\}$ ισχύει $C(t) = \mathbb{R}^n$
- (6) $span[A|B] = \mathbb{R}^n$
- (7) $rank[A|B] = n$

Απόδειξη

- (3) \iff (1) Η ισοδυναμία είναι άμεση από το Θεώρημα 5.2.4 και το Πόρισμα 5.3.6 .
- (3) \iff (2) Η ισοδυναμία είναι άμεση από το Πόρισμα 5.2.5 .
- (3) \iff (4) Το να είναι ο L_t αντιστρέψιμος , είναι ισοδύναμο με το να ισχύει $ImL_t = \mathbb{R}^n$.

Ισοδύναμα από Πρόταση 5.3.5 , $ImB_t = \mathbb{R}^n$.

- (3) \implies (5) Προφανές από τον Ορισμό του B_t .
- (5) \implies (3) Έστω $x_0 \in C(t)$. Τότε , υπάρχει $u_0 \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$ με $x(t; x_0, u_0) = 0$
 $\implies e^{tA}x_0 + B_t u_0 = 0 \implies e^{tA}x_0 = -B_t u_0 \implies e^{tA}x_0 \in ImB_t$
 $\implies \mathbb{R}^n = C(t) = e^{tA}C(t) \subset ImB_t \implies ImB_t = \mathbb{R}^n$, $t > 0$

- (3) \iff (6) Από Πρόταση 5.3.5 έχω :

$$ImB_t = Im[A|B] \stackrel{(3)}{\iff} \mathbb{R}^n = Im[A|B] \iff span[A|B] = \mathbb{R}^n$$

- (6) \iff (7) Προφανής ισοδυναμία.

5.4 Προσδιορισμός του $u(t)$

Έστω ότι για το σύστημα $\Sigma(A,B)$ δίνονται δύο καταστάσεις $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, οι πίνακες A και B και ο χρόνος t . Τότε αναζητούμε έναν έλεγχο $u_0 \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$ έτσι ώστε το x_1 να είναι προσεγγίσιμο από το x_0 για χρόνο t . Συνεπώς, ψάχνω u_0 τέτοιο ώστε

$$x_1 = e^{tA}x_0 + B_t u_0 \quad (5.46)$$

Ορίζουμε λοιπόν :

$$u_0(s) := B^* e^{(t-s)A^*} x = B_t^* x \quad (5.47)$$

για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.

Με $L_t = B_t B_t^*$, η (5.47) γίνεται :

$$B_t u_0(s) = L_t x \implies x = L_t^{-1} B_t u_0$$

$$\stackrel{(5.46)}{\implies} x = L_t^{-1}(x_1 - e^{tA}x_0) \quad (5.48)$$

Όμως η (5.47) λόγω της (5.48), δίνει τον έλεγχο που αναζητούσαμε :

$$u_0(s) = B^* e^{(t-s)A^*} L_t^{-1}(x_1 - e^{tA}x_0) = B_t^* L_t^{-1}(x_1 - e^{tA}x_0) \in \text{Im} B_t \quad (5.49)$$

Το παρακάτω λήμμα είναι απαραίτητο για την απόδειξη της Πρότασης 5.4.2.

5.4.1 Λήμμα

Έστω δύο χώροι *Hilbert* H και K και ο γραμμικός τελεστής $S : H \rightarrow K$. Τότε ισχύει :

$$\ker S^* = (\text{Im} S)^\perp.$$

Απόδειξη

Έστω $y \in \ker S^*$. Τότε ισοδύναμα :

$$y \in \ker S^* \iff S^*y = 0 \iff \forall x \in H : \langle x, S^*y \rangle = 0$$

$$\iff \forall x \in H : \langle Sx, y \rangle = 0$$

$$\iff \forall x \in H : y \perp \text{Im} S$$

$$\iff y \in (\text{Im} S)^\perp \quad \ddagger$$

5.4.2 Πρόταση

Έστω ότι το $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο. Ο έλεγχος (5.49) ικανοποιεί την εξίσωση

$$x(t; x_0, u_0) = x_1 \tag{5.50}$$

Επιπλέον, ο έλεγχος u_0 είναι εκείνος με τη μικρότερη L^2 -νόρμα μεταξύ όλων των ελέγχων u για τους οποίους $x_1 = x(t; x_0, u)$.

Απόδειξη

Το ότι ισχύει το $x_1 = x(t; x_0, u_0)$ είναι φανερό από τη παραπάνω προσέγγιση.

Για να δείξουμε ότι η νόρμα $\|u_0\|_{L^2}$ είναι η μικρότερη, επιλέγουμε έναν έλεγχο $u \in L^2([0, t], \mathbb{R}^m)$ με $x_1 = x(t; x_0, u)$.

$$\text{Τότε : } x_1 = e^{tA}x_0 + B_t u_0 = e^{tA}x_0 + B_t u \iff B_t(u - u_0) = 0$$

$$\iff u - u_0 \in \ker B_t \stackrel{\Lambda.5.4.1}{=} (\text{Im} B_t^*)^\perp \tag{5.51}$$

Όμως :

$$(\text{Im} B_t^*)^\perp \cap \text{Im} B_t^* = \emptyset \tag{5.52}$$

$$\|u\|^2 = \|u - u_0 + u_0\|^2 = \|u - u_0\|^2 + \|u_0\|^2 + 2\langle u - u_0, u_0 \rangle$$

Όμως, $u - u_0 \in \text{Im} B_t^*$ και $u_0 \in \text{Im} B_t^*$, άρα λόγω της (5.52) έπεται ότι :

$$\langle u - u_0, u_0 \rangle = 0 \tag{5.53}$$

Επομένως :

$$\|u\|^2 = \|u - u_0\|^2 + \|u_0\|^2 \geq \|u_0\|^2 \tag{5.54}$$

που σημαίνει ότι

$$\|u_0\| = \inf\{\|u\|, \forall u \in \mathbb{R}^m\} \tag{5.55}$$

5.5 Παραδείγματα

Εδώ παρουσιάζουμε τις τρεις εφαρμογές για τις οποίες μιλήσαμε στο Κεφάλαιο 2 , ως παραδείγματα στον τομέα της ελεγχιμότητας. Θα εξετάσουμε αν τα συστήματα αυτών των παραδειγμάτων , είναι ελέγξιμα.

5.5.1 ΟΜΑΛΗ ΠΡΟΣΕΛΗΝΩΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΟΥ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

Στο παράδειγμα αυτό , είχαμε βρει έναν έλεγχο u , ο οποίος ελέγχει το σύστημα σε δοθείσα κατάσταση , για την οποία $h = v = 0$. Τώρα , μπορούμε να δείξουμε ότι δεν είναι τυχαίο το ότι είναι ελέγξιμο το σύστημα :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u(t)}{m} - g \end{pmatrix}$$

με αρχικές τιμές :

$$\begin{pmatrix} h(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Είναι εύκολο τώρα , να επαληθεύσουμε τη συνθήκη ελεγχιμότητας του *Kalman*.

Οι πίνακες του συστήματος μας είναι :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

οπότε

$$[A/B] = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Επομένως , ο βαθμός του πίνακα είναι $\text{rank}[A/B] = 2$, όσοι δηλαδή και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

Άρα , το σύστημα είναι ελέγξιμο.

5.5.2 Ηλεκτρικός Φούρνος

Είχαμε δει ότι οι πίνακες του συστήματος δίνονταν από τις σχέσεις (2.24) και (2.25) αντίστοιχα, δηλαδή:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1)}{c_1} & \frac{\alpha_1 r_1}{c_1} \\ \frac{\alpha_1 r_1}{c_2} & \frac{-\alpha_1 r_1}{c_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως ,

$$[A|B] = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & \frac{-(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1)}{c_1^2} \\ 0 & \frac{-\alpha_1 r_1}{c_1 c_2} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε , ότι το σύστημα θα ήταν ΜΗ-ελέγξιμο , μόνο στην περίπτωση που το εσωτερικό τοίχωμα του φούρνου είχε μηδενικού εμβαδού επιφάνεια ($a_1 = 0$) , πράγμα αδύνατο βέβαια να συμβεί ή στην περίπτωση που το εσωτερικό τοίχωμα του φούρνου ήταν θερμικά μη-αγώγιμο ($r_1 = 0$) , πράγμα παράλογο. Επομένως , υπό λογικές προϋποθέσεις , το σύστημα είναι ελέγξιμο το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι με κατάλληλη ρύθμιση της παροχής θερμότητας μπορούμε να πετύχουμε οποιαδήποτε θερμοκρασία στο εσωτερικό του φούρνου.

5.5.3 Γερανός

Θα δώσουμε απάντηση στην πρώτη ερώτηση αυτού του παραδείγματος . Είχαμε δει ότι οι πίνακες του συστήματος είναι :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(m+M)g}{Ml} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{pmatrix}$$

Επομένως , κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων βρίσκουμε ότι :

$$[A|B] = (B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{-mg}{M^2l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{-mg}{M^2l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{-(m+M)g}{M^2l^2} \\ \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{-(m+M)g}{M^2l^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα ,βλέπουμε ότι :

$$\det[A|B] = \frac{g^2}{M^6l^4} [m^2 + (m + M)^2 - 2m(m + M)] = \frac{g^2}{M^4l^4} \quad (5.56)$$

Επομένως $\det[A|B] > 0$ αυστηρά. Άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο , πράγμα το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι ελέγχοντας τη δύναμη u που ασκούμε στο κινητό , μπορούμε να καθορίσουμε ανά πάσα στιγμή τη θέση και την ταχύτητα του κινητού και συνεπώς και τη γωνία εκτροπής της κρεμώμενης μάζας.

Στη συνέχεια , εξετάζουμε την Ελεγχιμότητα ενός συστήματος υψηλότερης τάξης.

5.6 Σύστημα 2ης Τάξης

5.6.1 Παράδειγμα - Μάζες ενωμένες με ελατήρια

Θεωρούμε σύστημα δύο μαζών m_1 και m_2 και δύο ελατηρίων ,σταθερών $k_1 > 0$ και $k_2 > 0$, το οποίο είναι σταθερά συνδεδεμένο σε τοίχο. Σε κατάσταση ηρεμίας , οι θέσεις ισορροπίας των μαζών m_1 και m_2 , είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα.

Ο Χώρος Καταστάσεων του συστήματος , είναι ο $X = \mathbb{R}^2$, με καταστάσεις που περιγράφονται από το διάνυσμα-στήλη $x = (x_1, x_2)' \in X$.

Τι θα συμβεί αν ασκήσουμε δύναμη (έλεγχο) u στο σύστημα (συγκεκριμένα αν τραβήξουμε τη δεξιά μάζα , m_1 , προς τα δεξιά) ; Είναι δυνατό να ελέγξουμε το σύστημα ;

Επίλυση

Αυτό το σύστημα περιγράφεται από τις Εξισώσεις :

$$m_1 \ddot{x}(t) = -k_1(x_1(t) - x_2(t)) + u(t) \quad (5.57)$$

$$m_2 \ddot{x}(t) = -k_2 x_2(t) + k_1(x_1(t) - x_2(t)) \quad (5.58)$$

Άρα , οι πίνακες του συστήματος είναι :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως , το σύστημα είναι :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \iff \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ x(0) = c_0 \\ \dot{x}(0) = c_1 \end{cases}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα 2ης τάξης στον \mathbb{R}^2 . Προκειμένου να μπορέσουμε να εξετάσουμε αν είναι ελέγξιμο , θα το μετατρέψουμε σε σύστημα στον \mathbb{R}^4 .

θέτω λοιπόν , $x_3 := \dot{x}_1$, $x_4 := \dot{x}_2$, $\mathcal{X} := (x_1, x_2, x_3, x_4)'$.

Συνεπώς , οι πίνακες του νέου συστήματος είναι :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & I_2 \\ A & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$$

Έτσι τώρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα 1ης τάξης :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}u(t) \\ \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς των πινάκων , βρίσκουμε ότι :

$$[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-k_1}{m_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} \\ \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{-k_1}{m_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank}[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = 4$, όσοι είναι δηλαδή και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος 1ης τάξης , επομένως το σύστημα $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ είναι ελέγξιμο .

5.6.2 Πρόταση

Ένα σύστημα δεύτερης τάξης $\Sigma^2(A, B)$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), u(t) \in L^2[0, t] \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = x_1 \end{cases}$$

είναι ελέγξιμο , όταν το ισοδύναμο σύστημα 1ης τάξης είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη

Το σύστημα $\Sigma^2(A, B)$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 1ης τάξης , για το οποίο :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & I_2 \\ A & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

δηλαδή με το σύστημα :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}u(t), u \in L^2[0, t] \\ \mathcal{X}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 5.3.7 , έπεται ότι το $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ είναι ελέγξιμο όταν : $rank[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = 2n$.

Επομένως , αρκεί να δείξουμε ότι : $rank[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = 2n \implies rank[A|B] = n$.

Για το σύστημα 1ης τάξης ισχύει :

$$[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ AB \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ A^{2n-1}B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{2n-1}B \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{bmatrix} [A|B] & 0 \\ 0 & [A|B] \end{bmatrix}$$

Επομένως , $rank[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = 2rank[A|B]$. Και επειδή το $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ είναι ελέγξιμο , έπεται ότι :

$$2n = 2rank[A|B] \implies rank[A|B] = n \implies \Sigma^2(A, B) \text{ ελέγξιμο .}$$

5.6.3 Συνέχεια του παραδείγματος 5.6.1

Με την παραπάνω Πρόταση βλέπουμε ότι στο παράδειγμα μας , αρκεί να υπολογίσουμε το βαθμό του πίνακα :

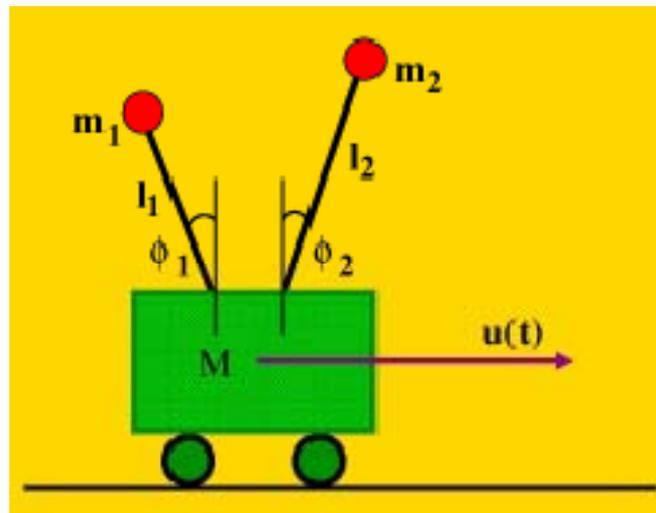
$$[A|B] = (B, AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1^2} \\ 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} \end{pmatrix}$$

Άρα : $rank[A|B] = 2 \implies$ το σύστημα $\Sigma^2(A, B)$ είναι ελέγξιμο.

Πρακτικά αυτό σημαίνει , ότι ασκώντας κατάλληλη δύναμη u στο σύστημα ελατηρίων - μαζών , μπορούμε να ελέγξουμε την κίνηση του συστήματος.

Στη συνέχεια παραθέτουμε άλλο ένα παράδειγμα συστήματος 2ης τάξης , λίγο πιο περίπλοκο από το προηγούμενο.

5.6.4 Διπλό Ανεστραμμένο Εκκρεμές



Σχήμα 5.1: Διπλό ανεστραμμένο εκκρεμές

Θεωρούμε το ανεστραμμένο εκκρεμές του σχήματος. Δύο ράβδοι μήκους l_1, l_2 με στερεωμένες στην κορυφή τους τις μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, ισορροπούν πάνω σε κινητό μάζας M . Οι ράβδοι παραμένουν κάθετες, όταν οι γωνίες φ_1 και φ_2 είναι μηδέν, οπότε και βρίσκεται το σύστημα σε ισορροπία. Οποιαδήποτε μικρή διαταραχή μπορεί να προκαλέσει κίνηση των ράβδων.

Θα εξετάσουμε λοιπόν αν υπάρχει κατάλληλη δύναμη u , έτσι ώστε οι ράβδοι να παραμένουν κατακόρυφες ενώ το σώμα M κινείται.

Το πρόβλημα της ελεγχιμότητας, δίνεται μέσω της ισορροπίας των ράβδων που βρίσκονται στερεωμένες πάνω στο M .

Έστω v η ταχύτητα με την οποία κινείται το σύστημα.

Θα μελετήσουμε την κίνηση του συστήματος, θεωρώντας δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

- **Σύστημα αναφοράς το έδαφος**

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι ο παρατηρητής του συστήματος μας βρίσκεται στο έδαφος απέναντι από το σύστημα και το παρατηρεί ενώ αυτό κινείται. Χρησιμοποιώντας το 2ο Νόμο του *Newton*, μελετάμε την κίνηση του συστήματος τόσο στον οριζόντιο όσο και στον κατακόρυφο άξονα.

Για μικρές μετακινήσεις των μαζών m_1, m_2 , οι γωνίες εκτροπής είναι σχετικά μικρές, οπότε

θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μετατόπιση των μαζών στον κατακόρυφο άξονα . Επομένως :

Για το m_1 :

Η γωνία εκτροπής του m_1 είναι αρνητική . Έστω ότι αυτή είναι $-\varphi_1 < 0$, όπου $\varphi_1 > 0$.

Στον κατακόρυφο άξονα :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{1y} = 0 &\implies F_{1y} + m_1g = 0 \implies F_1 \cos(-\varphi_1) = -m_1g \\ &\implies F_1 = -\frac{m_1g}{\cos \varphi_1} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Έστω $x_1(t)$, η μετατόπιση του m_1 στον οριζόντιο άξονα. Τότε :

$$x_1 = l_1 \sin(-\varphi_1) \implies \ddot{x}_1 = -l_1(\sin \varphi_1)'' \quad (5.60)$$

Στον οριζόντιο άξονα :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{1x} = m_1\alpha_1 &\implies F_{1x} = m_1\alpha_1 \implies F_1 \sin(-\varphi_1) = m_1\alpha_1 \\ \xrightarrow{(5.59)} -\frac{m_1g}{\cos \varphi_1} \sin(-\varphi_1) &= m_1\alpha_1 \implies -\frac{m_1g}{\cos \varphi_1} (-\sin \varphi_1) = m_1\alpha_1 \\ &\implies m_1g \tan \varphi_1 = m_1\alpha_1 \end{aligned} \quad (5.61)$$

όπου $\alpha_1 = \dot{v} - \ddot{x}_1 \implies \alpha_1 = \dot{v} - (-l_1(\sin \varphi_1)'') \implies \alpha_1 = \dot{v} + l_1(\sin \varphi_1)''$.

Άρα , η (5.61) $\implies m_1g \tan \varphi_1 = m_1\dot{v} + m_1l_1(\sin \varphi_1)''$

$$m_1l_1(\sin \varphi_1)'' = m_1(g \tan \varphi_1 - \dot{v}) \quad (5.62)$$

Αντίστοιχα , για το m_2 έχουμε :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{2y} = 0 &\implies F_{2y} + m_2g = 0 \implies F_2 \cos \varphi_2 = -m_2g \\ &\implies F_2 = -\frac{m_2g}{\cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Έστω $x_2(t)$, η μετατόπιση του m_2 στον οριζόντιο άξονα. Τότε :

$$x_2 = l_2 \sin \varphi_2 \implies \ddot{x}_2 = l_2(\sin \varphi_2)'' \quad (5.64)$$

Στον οριζόντιο άξονα :

$$\Sigma F_{2x} = m_2 \alpha_2 \implies -F_{2x} = m_2 \alpha_2 \implies -F_2 \sin \varphi_2 = m_2 \alpha_2$$

$$\stackrel{(5.63)}{\implies} - \left(-\frac{m_2 g}{\cos \varphi_2} \right) \sin \varphi_2 = m_2 \alpha_2$$

$$\implies m_2 g \tan \varphi_2 = m_2 \alpha_2 \quad (5.65)$$

$$\text{όπου } \alpha_2 = \dot{v} + \ddot{x}_2 \implies \alpha_2 = \dot{v} + l_2 (\sin \varphi_2)''$$

$$\text{'Αρα , η (5.65) } \implies m_2 g \tan \varphi_2 = m_2 \dot{v} + m_2 l_2 (\sin \varphi_2)''$$

$$\implies m_2 l_2 (\sin \varphi_2)'' = m_2 (g \tan \varphi_2 - \dot{v}) \quad (5.66)$$

'Αρα έχουμε τις σχέσεις :

$$m_i l_i (\sin \varphi_i)'' = m_i (g \tan \varphi_i - \dot{v}) \quad , i = 1, 2 \quad (5.67)$$

και

$$m_i \dot{v} = m_i g \tan \varphi_i - m_i l_i (\sin \varphi_i)'' \quad , i = 1, 2 \quad (5.68)$$

Επομένως , για όλο το σύστημα έχουμε :

$$\Sigma F = (M + m_1 + m_2) \alpha \implies u = (M + m_1 + m_2) \dot{v} \implies u = M \dot{v} + m_1 \dot{v} + m_2 \dot{v}$$

$$\implies u = M \dot{v} + m_1 g \tan \varphi_1 - m_1 l_1 (\sin \varphi_1)'' + m_2 g \tan \varphi_2 - m_2 l_2 (\sin \varphi_2)'' \quad (5.69)$$

Τώρα θα μελετήσουμε την κίνηση του συστήματος με άλλο σύστημα αναφοράς.

- **Σύστημα αναφοράς το σώμα M**

Σε αυτή την περίπτωση , μελετάμε την κίνηση του συστήματος , θεωρώντας ότι ο παρατηρητής μας βρίσκεται πάνω στο σώμα M και επομένως αντιλαμβάνεται μόνο την κίνηση των m_1, m_2 .

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα μας . Αρχικά η ορμή του συστήματος ήταν μηδέν , αφού αυτό βρισκόταν σε ηρεμία . Επομένως , ισχύει :

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (5.70)$$

Παραγωγίζοντας , παίρνουμε :

$$0 = m_1 \dot{v}_1 + m_2 \dot{v}_2 \implies 0 = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2$$

$$\implies m_1 l_1 (\sin \varphi_1)'' + m_2 l_2 (\sin \varphi_2)'' = 0 \quad (5.71)$$

Επομένως , η (5.69) $\xrightarrow{(5.71)}$ $u = M\dot{v} + m_1 g \tan \varphi_1 + m_2 g \tan \varphi_2$

$$\implies M\dot{v} = u - m_1 g \tan \varphi_1 - m_2 g \tan \varphi_2 \quad (5.72)$$

Όμως για μικρές μετακινήσεις των m_1, m_2 , δηλαδή για μικρές γωνίες εκτροπής, ισχύουν οι προσεγγίσεις $\tan \varphi \sim \varphi$ και $(\sin \varphi)'' \sim \ddot{\varphi}$. Επομένως:

Για $i = 1$, η (5.68) γίνεται :

$$\dot{v} = g\varphi_1 - l_1 \ddot{\varphi}_1 \quad (5.73)$$

ενώ η (5.72) $\implies M\dot{v} = u - m_1 g \varphi_1 - m_2 g \varphi_2$

$$\implies \dot{v} = \frac{u}{M} - \frac{m_1 g}{M} \varphi_1 - \frac{m_2 g}{M} \varphi_2 \quad (5.74)$$

Επομένως , η (5.73) $\xrightarrow{(5.74)}$ $\frac{u}{M} - \frac{m_1 g}{M} \varphi_1 - \frac{m_2 g}{M} \varphi_2 = g\varphi_1 - l_1 \ddot{\varphi}_1$

$$\implies \ddot{\varphi}_1 = -\frac{u}{Ml_1} + \frac{m_1 g}{Ml_1} \varphi_1 + \frac{m_2 g}{Ml_1} \varphi_2 + \frac{g}{l_1} \varphi_1$$

$$\implies \ddot{\varphi}_1 = \frac{(m_1 + M)g}{Ml_1} \varphi_1 + \frac{m_2 g}{Ml_1} \varphi_2 - \frac{1}{Ml_1} u \quad (5.75)$$

Όμοια βρίσκουμε ότι :

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 g}{Ml_2} \varphi_1 + \frac{(m_2 + M)g}{Ml_2} \varphi_2 - \frac{1}{Ml_2} u \quad (5.76)$$

Άρα έχουμε το σύστημα :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \quad (5.77)$$

όπου :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{(M+m_1)g}{l_1 M} \\ \alpha_2 = \frac{m_2 g}{l_1 M} \\ \alpha_3 = \frac{m_1 g}{l_2 M} \\ \alpha_4 = \frac{(M+m_2)g}{l_2 M} \\ b_1 = -\frac{1}{M l_1} \\ b_2 = -\frac{1}{M l_2} \end{array} \right. \quad (5.78)$$

Μετατρέποντας τώρα αυτό το σύστημα , σε σύστημα 1ης τάξης , θα έχουμε πλέον μια διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + Bu(t) \quad (5.79)$$

όπου :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων , βρίσκω :

$$[A|B] = (B, AB, A^2B, A^3B) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & 0 & c_2 \\ b_1 & 0 & c_1 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου : $c_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, $c_2 = \alpha_3 b_1 + \alpha_4 b_2$.

Με αντιμεταθέσεις στηλών , έχουμε :

$$[A|B] = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & b_1 \\ 0 & 0 & c_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα , με το Θεώρημα *Kalman* για να είναι το σύστημα $\Sigma(A, B)$ ελέγξιμο , θα πρέπει να είναι MH-μηδενική η ορίζουσα του πίνακα:

$$D := \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Αν η ορίζουσα του D είναι μηδέν , τότε και η ορίζουσα του $[A|B]$ είναι μηδέν.

$$\begin{aligned} \det(D) &= c_1 b_2 - c_2 b_1 = \alpha_1 b_1 b_2 + \alpha_2 b_2^2 - \alpha_3 b_1^2 - \alpha_4 b_2 b_1 \\ &= \frac{(M+m_1)g}{l_1 M} \frac{1}{M l_1} \frac{1}{M l_2} + \frac{m_2 g}{l_1 M} \frac{1}{M^2 l_2^2} - \frac{m_1 g}{l_2 M} \frac{1}{M^2 l_1^2} - \frac{(M+m_2)g}{l_2 M} \frac{1}{M l_1} \frac{1}{M l_2} \\ &= \frac{m_1 g - m_1 g + M g}{l_1^2 l_2 M^3} - \frac{m_2 g - m_2 g + M g}{l_1 l_2^2 M^3} \\ &= \frac{M g}{M^3} \left(\frac{1}{l_1^2 l_2} - \frac{1}{l_2^2 l_1} \right) \\ &= \frac{g}{M^2 l_1^2 l_2^2} (l_2 - l_1) \end{aligned}$$

Άρα , για να είναι ελέγξιμο το σύστημα $\Sigma(A, B)$, και επομένως και το αρχικό σύστημα 2ης τάξης , θα πρέπει $l_1 \neq l_2$, αφού μόνο τότε $\det(D) \neq 0$.

Επομένως , υπάρχει κατάλληλη δύναμη u (έλεγχος) , έτσι ώστε το σύστημα να είναι ελέγξιμο , αλλά μόνο στην περίπτωση που τα μήκη των δύο ραβδών είναι διαφορετικά.

Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που οι δύο ράβδοι έχουν το ίδιο μήκος ;

Προκειμένου να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα είναι απαραίτητη η ανάλυση της θεωρίας ισοδύναμων συστημάτων.

5.7 Ισοδύναμα Συστήματα

5.7.1 Ορισμός Ισοδύναμων Συστημάτων

Για να περάσουμε από ένα πραγματικό σύστημα σε ένα σύστημα ελέγχου $\Sigma(A,B)$, απαιτείται ένα μαθηματικό μοντέλο. Όμως, αυτό το μοντέλο δεν είναι μοναδικό, αφού εξαρτάται από την επιλογή των μεταβλητών. Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Έστω δύο γραμμικά συστήματα:

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}) \begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ (z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Τα δύο συστήματα $\Sigma(A,B)$ και $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B})$, είναι **ισοδύναμα** (και γράφουμε $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$) αν:

υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, έτσι ώστε για κάθε είσοδο $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ και για κάθε $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$, με:

$$z_0 = Tx_0 \quad , \quad (5.80)$$

να ισχύει:

$$z(t, z_0, u) = Tx(t, x_0, u) \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad (5.81)$$

Παραγωγίζοντας την (5.81) ως προς t , έχουμε:

$$\dot{z}(t, z_0, u) = T\dot{x}(t, x_0, u) \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad (5.82)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις διαφορικές εξισώσεις των συστημάτων Σ και $\tilde{\Sigma}$, η (5.82) μας δίνει:

$$\tilde{A}z_0 + \tilde{B}u(\cdot) = TAx_0 + TBu(\cdot) \quad , \quad \mu\epsilon \quad z_0 = Tx_0 \quad , \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad , \quad u(\cdot) \in \mathbb{R}^m \quad (5.83)$$

Ισοδύναμα :

$$\begin{cases} \tilde{A}T = TA \\ \tilde{B} = TB \end{cases}$$

Άρα τελικά για τα \tilde{A}, \tilde{B} παίρνουμε τις σχέσεις :

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \quad (5.84)$$

και

$$\tilde{B} = TB \quad (5.85)$$

Επομένως , η **ισοδυναμία** μεταξύ των συστημάτων Σ και $\tilde{\Sigma}$ σημαίνει ότι υπάρχει γραμμική αλλαγή συντεταγμένων $z = Tx$, με $\det T \neq 0$ έτσι ώστε το Σ να μετασχηματίζεται μέσω των νέων συντεταγμένων στο $\tilde{\Sigma}$, όπου οι \tilde{A}, \tilde{B} , ικανοποιούν τις σχέσεις (5.84) και (5.85) .

5.7.2 Πρόταση

Αν $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$, τότε το Σ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το $\tilde{\Sigma}$ είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη

Αφού $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$, τα δύο συστήματα έχουν τον ίδιο βαθμό ελεγχιμότητας :

$$\begin{aligned} \text{Im}[\tilde{A}|\tilde{B}] &= \text{Im}[\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = \\ &= \text{Im}[T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, \dots, \tilde{A}\tilde{A}^{n-2}B] = \\ &= \text{Im}[T^{-1}B, T^{-1}AB, \dots, T^{-1}AT(T^{-1}A^{n-2}B)] = \\ &= \text{Im}[T^{-1}B, T^{-1}AB, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = \\ &= \text{Im}T^{-1}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \\ &= \text{Im}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \end{aligned}$$

αφού ο T είναι αντιστρέψιμος .

Άρα όντως , $Im[\tilde{A}|\tilde{B}] = Im[A|B] \implies rank[\tilde{A}|\tilde{B}] = rank[A|B]$.

Επομένως , Σ ελέγξιμο $\iff \tilde{\Sigma}$ ελέγξιμο .

Προκειμένου τώρα να δούμε την ισοδυναμία των συστημάτων όσο πιο απλά γίνεται , θα εξετάσουμε την περίπτωση που ο χώρος εισόδων είναι μονοδιάστατος , δηλαδή ο \mathbb{R} .

5.7.3 Ισοδύναμα συστήματα σε χώρο εισόδων διάστασης 1

Σε αυτή την περίπτωση , ο πίνακας B είναι :

$$B = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

5.7.4 Πρόταση

Έστω το σύστημα $\Sigma(A,B)$ και το δοθέν χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$p_A(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \dots - a_2 x - a_1 \quad (5.86)$$

Έστω επιπλέον,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

και $T := (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = [A|b] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Τότε το $\hat{\Sigma} := \Sigma(\hat{A}, \hat{b})$ ονομάζεται **Κανονική Ελέγξιμη Μορφή** του $\Sigma(A,B)$, είναι πάντα ελέγξιμο και ισχύει: $AT = T\hat{A}$, $b = T\hat{b}$.

Ειδικότερα , το Σ είναι ελέγξιμο , όταν $\Sigma \sim \hat{\Sigma}$.

Απόδειξη

Από τον τρόπο ορισμού των \hat{A} και \hat{b} , είναι προφανές ότι $\text{rank}[\hat{A}|\hat{b}] = n$, που σημαίνει ότι το $\hat{\Sigma}$ είναι ελέγξιμο.

Από το θεώρημα *Cayley – Hamilton* γνωρίζουμε ότι $A^n = a_n A^{n-1} + \dots + a_2 A + a_1 I$.

Επομένως, $A^n b = a_n A^{n-1} b + \dots + a_2 A b + a_1 b$.

Επιπλέον :

$$T\hat{A} = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} = (Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b, \underbrace{a_1b + a_2Ab + \dots + a_n A^{n-1}b}_{=A^n b})$$

και επιπλέον

$AT = A(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = (Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b, A^n b)$, το οποίο σημαίνει τελικά ότι :

$$T\hat{A} = AT \tag{5.87}$$

$$T\hat{b} = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

Επομένως :

$$T\hat{b} = b \tag{5.88}$$

Για να αποδείξουμε τώρα τη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ της ελεγχιμότητας του Σ και της ισοδυναμίας των συστημάτων Σ και $\hat{\Sigma}$, επικαλούμαστε την Πρόταση 5.7.2. Από εκεί έπεται ότι το Σ είναι ελέγξιμο, αφού το $\hat{\Sigma}$ είναι ελέγξιμο και ισοδύναμο με το Σ . †

Ακολουθούν δύο Συνέπειες της Πρότασης 5.7.4.

5.7.5 Συνέπεια 1

Έστω τα ελέγξιμα συστήματα $\Sigma = \Sigma(A, B)$ και $\tilde{\Sigma} = \Sigma(\tilde{A}, \tilde{b})$. Τότε, $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$ αν και μόνο αν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα p_A και $p_{\tilde{A}}$ συμπίπτουν.

Απόδειξη

” \implies ” Γνωρίζω ότι τα $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ είναι ελέγξιμα. Επομένως, κάνοντας χρήση της Πρότασης 5.7.4, έχω :

$$\Sigma \text{ ελέγξιμο} \implies \Sigma \sim \hat{\Sigma} \implies AT = T\hat{A} \implies A = T\hat{A}T^{-1}$$

$$\tilde{\Sigma} \text{ ελέγξιμο} \implies \tilde{\Sigma} \sim \hat{\tilde{\Sigma}}. \text{ Όμως, από υπόθεση: } \Sigma \sim \tilde{\Sigma}, \text{ άρα τελικά } \tilde{\Sigma} \sim \hat{\tilde{\Sigma}}$$

$$\implies \tilde{A}T = T\hat{A} \implies \tilde{A} = T\hat{A}T^{-1}.$$

$$\text{Επομένως, } A = \tilde{A} \implies p_A = p_{\tilde{A}}.$$

” \longleftarrow ” Τα $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ είναι ελέγξιμα, οπότε από Πρόταση 5.7.4, έπεται ότι :

$$\Sigma \sim \hat{\Sigma}, \tilde{\Sigma} \sim \hat{\tilde{\Sigma}} \quad (5.89)$$

$$\text{Όμως, } p_A = p_{\tilde{A}} \implies a_n = \tilde{a}_n, a_{n-1} = \tilde{a}_{n-1}, \dots, a_1 = \tilde{a}_1 \implies$$

$$\implies \hat{\tilde{\Sigma}} = \hat{\Sigma} \quad (5.90)$$

$$\text{Άρα η (5.89) λόγω της (5.90) } \implies \Sigma \sim \hat{\Sigma} \text{ και } \tilde{\Sigma} \sim \hat{\tilde{\Sigma}} \implies \Sigma \sim \tilde{\Sigma}.$$

5.7.6 Συνέπεια 2

Το σύστημα $\Sigma = \Sigma(A, b)$ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma \sim \check{\Sigma} := \Sigma(\check{A}, \check{b})$,

όπου :

$$\check{A} := \hat{A}^* (= \hat{A}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \check{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Στη γενική περίπτωση, δηλαδή για χώρο διάστασης $m > 1$, τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα. Μια απάντηση στο θέμα της αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος, είναι το παρακάτω θεώρημα. Η απόδειξη του, είναι εξαιρετικά σημαντική, αφού δείχνει πώς μπορεί να μετατραπεί ένα ΜΗ-ελέγξιμο σύστημα, χρησιμοποιώντας ένα ” μετασχηματισμό ισοδύναμων συστημάτων ”, σε ένα σύστημα που μπορεί να διαιρεθεί με τη σειρά του σε δύο μέρη, ένα ελέγξιμο και ένα ΜΗ-ελέγξιμο.

5.8 Ανάλυση Kalman

5.8.1 Θεώρημα

Θεωρούμε και πάλι το σύστημα $\Sigma(A,B)$, το οποίο είναι ΜΗ-ελέγξιμο, που σημαίνει ότι :

$$\text{rank}[A|B] = k < n .$$

Τότε, υπάρχει σύστημα :

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}) \begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \\ (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}, \quad \mu\epsilon :$$

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} := \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

τέτοιο ώστε $\Sigma(A, B) \sim \tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B})$, όπου :

$$A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad A_2 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, \quad A_3 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{k \times m} .$$

Τότε, το $\Sigma(A_1, B_1)$ είναι ελέγξιμο, δηλαδή : $\text{rank}[A_1|B_1] = k$.

Προκειμένου να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.8.1 είναι αναγκαίο να μιλήσουμε για τον ελέγξιμο υπόχωρο ενός συστήματος.

5.8.2 Ορισμός

Ονομάζουμε **ελέγξιμο υπόχωρο** $Z = \langle A | B \rangle$, ενός συστήματος $\Sigma(A,B)$, το χώρο $\text{span}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ και **βαθμό ελεγεξιμότητας** του συστήματος, τη διάσταση του $Z = \langle A | B \rangle$.

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος *Cayley – Hamilton*, μπορεί να δειχθεί ότι :

Ο χώρος $Z = \langle A | B \rangle$ είναι A -αναλλοίωτος, δηλαδή :

$$Ax \in Z, \quad \forall x \in Z \tag{5.91}$$

και περιέχει το $\text{Im}B$, δηλαδή :

$$\text{Im}B \subseteq Z. \tag{5.92}$$

5.8.3 Πρόταση

Θεωρούμε το σύστημα $\Sigma(A, B)$. Τότε ο Ελέγξιμος Υπόχωρος $Z = \langle A \mid B \rangle$ είναι ο μικρότερος A -αναλλοίωτος υπόχωρος του \mathbb{R}^n , έτσι ώστε $ImB \subset Z$.

Απόδειξη

• Αρχικά, θα δείξω ότι το $Im(A/B)$, είναι **A -αναλλοίωτος** υπόχωρος του \mathbb{R}^n , δηλαδή ότι :

$$AIm(A/B) \subset Im(A/B).$$

Έστω λοιπόν, $y \in Im(A/B)$ άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε : $y = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]x$.

Επομένως :

$$Ay = [AB, A^2B, \dots, A^nB]x \in Im(A/B) \iff \text{για } y \in Im(A/B) \implies Ay \in Im(A/B) \iff$$

$$AIm(A/B) \subset Im(A/B).$$

• Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι ο $Im(A/B)$ έχει όντως τις εξής ιδιότητες:

(1) είναι ο **μικρότερος** A -αναλλοίωτος υπόχωρος του \mathbb{R}^n και

(2) $ImB \subset Z$.

Έστω ότι ο $Im(A/B)$ δεν είναι ο μικρότερος υπόχωρος του X με τις ιδιότητες (1) και (2).

Επομένως, έστω ότι $\exists V \subset Im(A/B)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

(3) $AV \subset V$ και

(4) $ImB \subset V$

Τότε, με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (4), έχουμε ότι :

$$Im(AB) = AIm(B) \subset AV \subset V \implies Im(AB) \subset V \quad (5.93)$$

Τότε,

$$\eta \quad (5.93) \implies AIm(AB) \subset AV$$

$$\implies Im(A^2B) \subset AV \subset V$$

$$\implies Im(A^2B) \subset V$$

$$Im(A^k B) \subset V, \quad \forall k \geq 0$$

Επομένως, από τις παραπάνω σχέσεις, έχω τελικά: $Im(A|B) \subset V$

Όμως, η αρχική μας υπόθεση ήταν ότι $V \subset Im(A|B)$ άρα τελικά $Im(A|B) = V$ και επομένως ο V είναι πράγματι ο μικρότερος A -αναλλοίωτος υπόχωρος του \mathbb{R}^n τέτοιος ώστε $ImB \subset V$. ‡

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.8.1

- Αποδεικνύουμε πρώτα ότι όντως το $\Sigma(A,B)$ μπορεί να γραφεί ως :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Έστω $V := Im[A|B]$, οπότε $dimV = k$, και W ο συμπληρωματικός χώρος του V . Τότε, ο χώρος \mathbb{R}^n είναι: $\mathbb{R}^n = V \oplus W$. Προφανώς, $dimW = n - k$.

Επιλέγουμε δύο βάσεις $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ και $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$, των χώρων V και W αντίστοιχα.

Θέτουμε $T := (v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Έτσι, ο T είναι αντιστρέψιμος.

Έστω, $\tilde{A} := T^{-1}AT$ και $\tilde{B} := T^{-1}B$. Τότε :

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}v + A_{12}w \\ A_{21}v + A_{22}w \end{pmatrix},$$

όπου :

$$A_{11} : V \rightarrow V, \quad A_{12} : W \rightarrow V, \quad A_{21} : V \rightarrow W, \quad A_{22} : W \rightarrow W$$

Από την Πρόταση 5.8.3, γνωρίζω ότι ο V είναι ο μικρότερος A -αναλλοίωτος υπόχωρος του \mathbb{R}^n τέτοιος ώστε $ImB \subset V$.

Ως εκ τούτου, ο V είναι και \tilde{A} -αναλλοίωτος και επομένως :

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in V \quad \forall v \in V \iff \begin{pmatrix} A_{11}v \\ A_{21}v \end{pmatrix} \in V, \quad \forall v \in V,$$

το οποίο σημαίνει ότι $A_{21} = 0$, αφού $A_{21} : V \rightarrow W$.

Αντίστοιχα , για τον \tilde{B} :

$$\tilde{B}u = \begin{pmatrix} B_1u \\ B_2u \end{pmatrix} ,$$

όπου :

$$B_1 : U \longrightarrow V , \quad B_2 : U \longrightarrow W ,$$

ισχύει ότι $ImB \subset V \iff Im\tilde{B}$ είναι υπόχωρος του $V \iff B_2 = 0$.

Επομένως , φτάσαμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα :

$$T^{-1}AT = \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} , \quad T^{-1}B = \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Μένει ακόμα να αποδείξουμε ότι το σύστημα $\Sigma(A_1, B_1)$ είναι ελέγξιμο.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.7, αρκεί να δείξουμε ότι $rank[A_1|B_1] = k$.

Ισχύει ότι :

$$rank[\tilde{A}|\tilde{B}] = rank(\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = rank \begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = rank[A_1|B_1]$$

Επιπλέον ,

$$rank[\tilde{A}|\tilde{B}] = rank(\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = rank(T^{-1}B, T^{-1}AB, \dots, T^{-1}A^{n-1}B) = rank(T^{-1}[A|B]) = rank[A|B] = k .$$

Άρα τελικά : $rank[A_1|B_1] = k$ που σημαίνει ότι το $\Sigma(A_1, B_1)$ είναι ελέγξιμο.

5.8.4 Υπενθυμίσεις

(1) Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω στον $\mathbb{R}^{n \times n}$ και V, W υπόχωροι του X . Αν $X = V + W$ και $V \cap W = 0$ τότε το X είναι το ευθύ άθροισμα των V, W . Το **ευθύ άθροισμα** συμβολίζεται $X = V \oplus W$.

(2) Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με πεπερασμένη διάσταση πάνω στο σώμα $\mathbb{R}^{n \times n}$ με V, W υπόχωρους τέτοιους ώστε $X = V \oplus W$. Τότε : $dimX = dimV + dimW$.

5.8.5 Σημείωση

Το Θεώρημα 5.8.1, ουσιαστικά μας λέει ότι για το σύστημα :

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

υπάρχει ισοδύναμο σύστημα

$$\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}) \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

το οποίο είναι της μορφής

$$\tilde{\Sigma}_1 \begin{cases} \dot{\xi}_1(t) = A_1\xi_1(t) + A_2\xi_2(t) + B_1u(t) & (1) \\ \dot{\xi}_2(t) = A_3\xi_2(t) & (2) \end{cases} ,$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} := \tilde{x} = T^{-1}x$$

Η εξίσωση (1) του $\tilde{\Sigma}_1$, αποτελεί το **ελέγξιμο** τμήμα του συστήματος , ενώ η (2) το **απολύτως ΜΗ-ελέγξιμο** τμήμα του.

Παραθέτουμε τώρα ως εφαρμογή της ανάλυσης *Kalman* , το παράδειγμα του ανεστραμμένου εκκρεμούς.

5.8.6 Παράδειγμα

Στο παράδειγμα 5.6.4 , είδαμε ότι είναι δυνατό να ελέγξουμε ένα σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς με 2 μάζες ,αν τα μήκη των δύο ραβδών του συστήματος ΔEN είναι ίσα . Τώρα , θα απαντήσουμε στο ερώτημα :

Τι συμβαίνει αν τα δύο μήκη είναι ίσα ;

Έστω λοιπόν $l_1 = l_2 = l$. Τότε οι νέοι συντελεστές είναι :

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \frac{(M+m_1)g}{lM} \\ \alpha'_2 = \frac{m_2g}{lM} \\ \alpha'_3 = \frac{m_1g}{lM} \\ \alpha'_4 = \frac{(M+m_2)g}{lM} \\ b'_1 = b'_2 = b = -\frac{1}{Ml} \end{cases} \quad (5.94)$$

και επομένως οι πίνακες A , B του συστήματος γίνονται :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & 0 & 0 \\ \alpha'_3 & \alpha'_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

Επομένως ,

$$[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = (\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}^2\mathcal{B}, \mathcal{A}^3\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & (\alpha'_1 + \alpha'_2)b \\ 0 & b & 0 & (\alpha'_3 + \alpha'_4)b \\ b & 0 & (\alpha'_1 + \alpha'_2)b & 0 \\ b & 0 & (\alpha'_3 + \alpha'_4)b & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα , είναι φανερό ότι $rank[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = 2 < 4$.

Θέλω λοιπόν , να βρω αντιστρέψιμο πίνακα T τέτοιο ώστε $\tilde{\mathcal{A}} = T^{-1}\mathcal{A}T$ και $\tilde{\mathcal{B}} = T^{-1}\mathcal{B}$.

Επομένως , η βάση του $[\mathcal{A}|\mathcal{B}]$ είναι :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Κάνω επέκταση βάσης και θεωρώ τη βάση του $[\mathcal{A}|\mathcal{B}]$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ο πίνακας T είναι :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς , βρίσκουμε ότι :

$\det T = -1$ και

$$\text{adj}T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα :

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \text{adj}T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως ,

$$\tilde{\mathcal{A}} = T^{-1}\mathcal{A}T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(m_1+m_2+M)g}{Ml} & \frac{(m_1+M)g}{Ml} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ 0 & \mathcal{A}_3 \end{pmatrix}$$

και

$$\tilde{\mathcal{B}} = T^{-1}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Μέσω της ανάλυσης *Kalman* , βρήκαμε λοιπόν ένα σύστημα $\tilde{\Sigma} = \Sigma(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ το οποίο είναι ισοδύναμο του $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, με :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(m_1+m_2+M)g}{Ml} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{Ml} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Για το $\Sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ ισχύει :

$$\det[\mathcal{A}_1|\mathcal{B}_1] = \det(\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{Ml} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Ml} \end{pmatrix} = -\frac{1}{M^2l^2} \neq 0$$

Επομένως , το $\Sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ είναι ελέγξιμο.

Κεφάλαιο 6

Παρατηρησιμότητα Συστήματος

Είναι δυνατό στο παράδειγμα 2.2 του ηλεκτρικού φούρνου (Κεφάλαιο 2) να υπολογίσουμε την εσωτερική θερμοκρασία T_2 του φούρνου, μετρώντας άμεσα μόνο τη θερμοκρασία T_1 του περιβλήματος του φούρνου;

6.1 Ιδιότητα Παρατηρησιμότητας

Μπορεί να καθοριστεί η αρχική κατάσταση x_0 ενός συστήματος (και ως εκ τούτου και κάθε κατάσταση $x(t)$) μόνο μέσω μετρήσεων για το σύστημα. Η επίλυση αυτού του προβλήματος συνίσταται στο σχεδιασμό ενός Παρατηρητή, η κατασκευή του οποίου στηρίζεται στην έννοια της Παρατηρησιμότητας. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα (4.4), που είχε οριστεί στο Κεφάλαιο 4, το οποίο και ξαναγράφουμε για λόγους ευκολίας στην περαιτέρω ανάγνωση :

$$\Sigma(A, B, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Το $y(t) = Cx(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος, η οποία εκφράζει το γεγονός ότι για τον παρατηρητή ενός συστήματος, δεν είναι εν γένει εφικτή η μέτρηση όλου του διανύσματος $x(\cdot)$ της κατάστασης. Μόνο ένα μέρος ή συνδυασμός των συνιστωσών της $x(\cdot)$ είναι διαθέσιμο και αυτό ακριβώς ονομάζεται έξοδος.

6.1.1 Ισοδύναμοι Ορισμοί της Παρατηρησιμότητας

- (i) Έστω δύο καταστάσεις x_0, x_1 του συστήματος (4.4) . Το σύστημα (4.4) είναι παρατηρήσιμο αν ισχύει :

$$"y(t, x_1, u) = y(t, x_0, u), \forall t \geq 0, \text{ τότε } x_0 = x_1" ,$$

όπου $y(\cdot, x_0, u) = Cx(\cdot, x_0, u)$ η έξοδος του συστήματος.

Εφόσον το ολοκλήρωμα είναι γνωστό , δεν παίζει κανένα ρόλο για την απάντηση στο ερώτημα μας και επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να μηδενιστεί.

Έτσι , το σύστημα (4.4) μετατρέπεται στο (4.6), δηλαδή στο:

$$\Sigma(A, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- (ii) Η αρχική τιμή x_0 του συστήματος μπορεί να υπολογισθεί αν για τις καταστάσεις $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ έπεται ότι :

$$\text{Αν } "y(t, x_0, u) = y(t, z_0, u) \iff Ce^{tA}x_0 = Ce^{tA}z_0, \forall t \geq 0" , \text{ τότε } x_0 = z_0.$$

Όμως ο \mathbb{R}^n είναι διανυσματικός χώρος και τα $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$, επομένως υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $x = x_0 - z_0$.

$$\text{Επομένως ισοδύναμα : } \cap_{t>0}\{x \in \mathbb{R}^n : Ce^{tA}x = 0\} = \{0\} \iff \cap_{t>0}ker\{Ce^{tA}\} = \{0\}$$

$$\implies \cap_{t>0}kerC_t = \{0\} \tag{6.1}$$

όπου $C_t := Ce^{tA} : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2([0, t], \mathbb{R}^l)$.

Το σύστημα $\Sigma(A, C)$, θα ονομάζεται παρατηρήσιμο στο διάστημα $[0, t_0]$, αν :

$$\cap_{t \in (0, t_0]}kerC_t = \{0\} \tag{6.2}$$

Στην επόμενη παράγραφο , θα δούμε ότι το πρόβλημα της Παρατηρησιμότητας είναι ένα δυϊκό πρόβλημα Ελεγχιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να συσχετίσουμε την Παρατηρησιμότητα ενός συστήματος με την Ελεγχιμότητα ενός άλλου.

6.2 Δυϊκό Σύστημα

Ορίζουμε ως **Δυϊκό Σύστημα** , του συστήματος $\Sigma(A, -, C)$, το σύστημα :

$$\Sigma'(A', C') \begin{cases} \dot{x}(t) = A'x(t) + C'u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

όπου : ο A' είναι ο γραμμικός Πίνακας Καταστάσεων του Σ' και ο C' δεν είναι πια Πίνακας Εξόδων , αλλά Πίνακας Εισόδων του συστήματος Σ' , όπου $A' = A^* = (\bar{A}^T)$.

Θα δείξουμε τη δυϊκή σχέση μεταξύ Παρατηρησιμότητας και Ελεγχιμότητας. Θέλουμε να δείξουμε ότι η Παρατηρησιμότητα του $\Sigma(A, C)$ είναι ισοδύναμη της Ελεγχιμότητας του $\Sigma'(A', C')$.

6.2.1 Λήμμα

Για $\tilde{C}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2([0, t], \mathbb{R}^l)$ με $\tilde{C}_t := Ce^{(t-\cdot)A}$, ισχύει :

$$\ker C_t = \ker \tilde{C}_t \tag{6.3}$$

6.2.2 Θεώρημα

Για το σύστημα $\Sigma(A, C)$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (α) Το $\Sigma(A, C)$ είναι **Παρατηρήσιμο** .
- (β) Το $\Sigma(A, C)$ είναι Παρατηρήσιμο τη χρονική στιγμή t , $\forall t > 0$.
- (γ) Το δυϊκό σύστημα $\Sigma'(A', C')$ είναι **ελέγξιμο** .
- (δ) $\text{rank}[A'|C'] = n$

Η βασική ισοδυναμία σε αυτό το Θεώρημα είναι αυτή μεταξύ των συνθηκών (α) και (γ) , αφού

αυτή είναι που μας δίνει την ισοδυναμία μεταξύ της Παρατηρησιμότητας του $\Sigma(A, C)$ και της Ελεγχιμότητας του $\Sigma'(A', C')$.

Απόδειξη

” $(\alpha) \iff (\beta)$ ”

Λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 5.2.3 του Κεφαλαίου 5, συμπεραίνουμε ότι :

$$B'_t = \tilde{C}_t \quad (6.4)$$

Συνδιάζοντας το προηγούμενο Λήμμα 6.2.1 και Λήμμα 5.4.1 του Κεφαλαίου 5 έπεται ότι :

$$\ker C_t = \ker \tilde{C}_t = \ker B'_t = (\text{Im} B_t)^\perp \quad (6.5)$$

Όμως, λαμβάνοντας υπόψη το Πρόσμημα 5.3.6 του Κεφαλαίου 5, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\ker C_t$ είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

Άρα τελικά καταλήγουμε ότι $\bigcap_{t>0} \ker\{C_t x\} = \ker\{C_t x\}, \forall t > 0$.

” $(\gamma) \iff (\delta)$ ”

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.7 του Κεφαλαίου 5.

” $(\alpha) \iff (\gamma)$ ”

Από την (6.2), έχουμε ότι :

$$\bigcap_{t>0} \ker\{C_t x\} = \{0\} \iff \bigcap_{t>0} \text{Im} C_t = \mathbb{R}^n, \quad (6.6)$$

από το οποίο λόγω της (6.2) έπεται ότι:

$$\bigcap_{t>0} \text{Im} B'_t = \mathbb{R}^n \iff \text{Im} B'_t = \mathbb{R}^n, \forall t > 0 \quad (6.7)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.7 του Κεφαλαίου 5, από την (6.7) έπεται ότι το Σ' είναι ελέγξιμο.

6.2.3 Σχόλιο

Όπως και στην περίπτωση της Ελεγχιμότητας, αντίστοιχα και στην περίπτωση της Παρατηρησιμότητας είναι δυνατό να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο μέσω της Συνθήκης *Kalman*.

Έτσι έχουμε την παρακάτω συνθήκη.

6.3 Συνθήκη Παρατηρησιμότητας

6.3.1 Πρόταση

Το σύστημα $\Sigma(A, C)$ είναι Παρατηρήσιμο αν και μόνο αν :

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (6.8)$$

Απόδειξη

Έστω x_0, z_0 δύο καταστάσεις του συστήματος $\Sigma(A, C)$. Τότε :

$$\Sigma(A, C) \text{ παρατηρήσιμο} \iff [Ce^{tA}x_0 = Ce^{tA}z_0, \forall t \geq 0 \implies x_0 = z_0] \iff$$

$$\iff [Ce^{tA}(x_0 - z_0) = 0 \implies x_0 - z_0 = 0]$$

$$\iff [Ce^{tA}\omega = 0 \implies \omega = 0] \quad (6.9)$$

όπου $x_0 - z_0 = \omega \in \mathbb{R}^n$, αφού ο \mathbb{R}^n είναι διανυσματικός χώρος.

Γνωρίζουμε ότι $e^{tA} := I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$

Επομένως, η (6.9) γράφεται ισοδύναμα :

$$[C\omega + tCA\omega + \frac{t^2}{2!}CA^2\omega + \dots = 0 \implies \omega = 0] \iff$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}_K \omega = 0 \implies \omega = 0 \quad (6.10)$$

Όμως, $n = \text{rank}K + \dim \ker K$ και το μοναδικό ω που μηδενίζει το $(K \cdot \omega)$, είναι το μηδενικό.

Επομένως, $\dim \ker K = 0$ και τελικά :

$$\text{rank}K = n \implies \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad \ddagger$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε την επίλυση των παραδειγμάτων 2.2 και 2.3 του Κεφαλαίου 2, ως εφαρμογές της Παρατηρησιμότητας.

6.3.2 Παράδειγμα Ηλεκτρικού Φούρνου

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα τη θερμοκρασία T_1 του περιβλήματος του φούρνου , αλλά όχι και τη θερμοκρασία T_2 στο εσωτερικό του.

Είναι τότε δυνατό να βρούμε ποια είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος , δηλαδή ποια είναι η αρχική θερμοκρασία στο περίβλημα και στο εσωτερικό του φούρνου;

Το γεγονός ότι μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τη θερμοκρασία του περιβλήματος , μας οδηγεί στο να εισάγουμε στο σύστημα μας έναν Πίνακα Εξόδων $C_m := (m, 0)$, με $m \in \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας , μπορώ να θεωρήσω το $m = 1$, οπότε έχω τον πίνακα $C_1 = (1, 0)$.

Έχω λοιπόν το σύστημα :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \\ y = C_1x(t) \end{cases} \quad (6.11)$$

όπου , όπως έχουμε δει από τη σχέση (2.24) :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1)}{c_1} & \frac{\alpha_1 r_1}{c_1} \\ \frac{\alpha_1 r_1}{c_2} & \frac{-\alpha_1 r_1}{c_2} \end{pmatrix}$$

Κάνοντας τις πράξεις των πινάκων , έχουμε :

$$[A|C]' = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(\alpha_2 r_2 + \alpha_1 r_1)}{c_1} & \frac{\alpha_1 r_1}{c_1} \end{pmatrix}$$

Επομένως , $rank[A|C]' = 2$ αν η επιφάνεια a_1 και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας r_1 , του εσωτερικού τοιχώματος του φούρνου είναι ΜΗ μηδενικά. Κάτι που όμως , δεν αποτελεί περιορισμό αφού ισχύει πάντα.

Άρα , το σύστημα μας είναι παρατηρήσιμο και επομένως είναι δυνατό να βρούμε ποια είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος , δηλαδή ποια είναι η αρχική θερμοκρασία στο περίβλημα και στο εσωτερικό του φούρνου , γνωρίζοντας μόνο τη θερμοκρασία του περιβλήματος.

6.3.3 Παράδειγμα Γερανού

Στο παράδειγμα 2.3 του Κεφαλαίου 2 είναι , αν όχι αδύνατη , τότε σίγουρα δύσκολη η άμεση μέτρηση των ταχυτήτων \dot{s} και $\dot{\phi}$.

Όμως , η μετατόπιση s του κινητού και η γωνία εκτροπής ϕ , μπορούν να υπολογισθούν εύκολα.

Μπορούμε , λοιπόν , υπολογίζοντας μόνο τη μετατόπιση s και την εκτροπή ϕ , να προσδιορίσουμε τις ταχύτητες \dot{s} και $\dot{\phi}$;

Ένας Πίνακας Εξόδων , που προκύπτει λογικά είναι ο :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου και πάλι χάριν απλότητας και δίχως βλάβη της γενικότητας , οι σταθερές έχουν τεθεί ίσες με τη μονάδα.

Ο πίνακας A του συστήματος ήταν :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(m+M)g}{Ml} & 0 \end{pmatrix}$$

Κάνοντας τις πράξεις των πινάκων , έχουμε :

$$[A|C]' = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(m+M)g}{Ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-mg}{M} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(m+M)g}{Ml} \end{pmatrix}$$

Είναι προφανές ότι $rank[A|C]' = 4$, δηλαδή ότι το σύστημα μας είναι Παρατηρήσιμο .

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι τελικά , είναι δυνατό υπολογίζοντας μόνο τη μετατόπιση s και την εκτροπή ϕ , να προσδιορίσουμε τις ταχύτητες \dot{s} και $\dot{\phi}$.

Κεφάλαιο 7

Σταθεροποίηση Συστήματος

Τώρα που έχουμε τα απαραίτητα "τεχνικά εργαλεία", θέλουμε να ασχοληθούμε και πάλι με το Γραμμικό Αυτόνομο Πρόβλημα Ελέγχου :

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

με πίνακες $A_{n \times n}, B_{n \times m}$.

Στο πρόβλημα που θα μας απασχολήσει περιοριζόμαστε σε ελέγχους της μορφής $u(t) = Fx(t)$, όπου ο $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ένας γραμμικός τελεστής (μία γραμμική απεικόνιση $F_{m \times n}$). Ήδη από την παράγραφο 4.1 του Κεφαλαίου 4 έχουμε πει στο 4.1.4, ότι η συνάρτηση

$$u(t) = Fx(t) \tag{7.1}$$

ονομάζεται **Γραμμική Ανάδραση**.

7.1 Ορισμός

Με τη χρήση της γραμμικής ανάδρασης (7.1), η διαφορική εξίσωση του συστήματος $\Sigma(A, B)$ μετασχηματίζεται στην :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFx(t) \text{ , δηλαδή } \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \tag{7.2}$$

και άρα το σύστημα $\Sigma(A, B)$ μετασχηματίζεται στο :

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Το **Πρόβλημα Σταθεροποίησης** (ή αλλιώς *Feedback Problem*) για το $\Sigma(A,B)$,είναι να βρούμε μία κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $u = Fx : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, έτσι ώστε η γραμμική διαφορική εξίσωση (7.2) να είναι **ευσταθής** .

Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι το λεγόμενο "Ανοιχτό Σύστημα" . Ενώ με τη χρήση της Γραμμικής Ανάδρασης (7.1), παίρνουμε το "Κλειστό Σύστημα Επανάληψης" Σ_1 .

7.1.1 Σημείωση

Στην πράξη, συχνά η κατάσταση $x(t)$ δεν μπορεί να υπολογισθεί άμεσα. Αντ' αυτού γνωρίζουμε την έξοδο $y = Cx(t)$ για κάποιον πίνακα $C_{l \times n}$. Σε αυτή την περίπτωση, ο *Feedback Operator* F (Τελεστής Ανάδρασης) εξαρτάται μόνο από την έξοδο y . Τότε, μιλάμε για **Ανάδραση Εξόδου**. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα της σταθεροποίησης είναι να βρούμε έναν πίνακα $F_{m \times l}$, έτσι ώστε το $A + BFC$ να είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**.

Στη συνέχεια , δε θα ασχοληθούμε περισσότερο με αυτή τη μορφή ανάδρασης .

Τώρα θα ασχοληθούμε με την εξαγωγή ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την ύπαρξη ενός κατάλληλου *Feedback Operator* F , ο οποίος να σταθεροποιεί το σύστημα $\Sigma(A,B)$.

7.2 Σταθεροποιήσιμο Σύστημα

Από το κριτήριο για τις ιδιοτιμές στην περίπτωση ασυμπτωτικής ευστάθειας, έπεται ότι :

Το σύστημα ελέγχου $\Sigma(A,B)$ είναι ευσταθές αν :

υπάρχει πίνακας $F_{m \times n}$ τέτοιος ώστε $x(t) = e^{t(A+BF)}x_0 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σταθεροποίησης *Lyapunov* (Θεώρημα 3.2.6), παίρνουμε τον παρακάτω ορισμό.

7.2.1 Ορισμός

$\Sigma(A,B)$ σταθεροποιήσιμο $\iff \exists F : s(A+BF) = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A+BF)\} < 0$.

Ουσιαστικά δηλαδή παίρνουμε το παρακάτω Λήμμα :

7.2.2 Λήμμα

Έστω το σύστημα $\Sigma(A,B)$, όπως αυτό έχει οριστεί στην αρχή του κεφαλαίου.

Τότε, ο πίνακας Ανάδρασης $F_{m \times n}$ σταθεροποιεί το σύστημα, αν όλες οι ιδιοτιμές του $n \times n$ -πίνακα $(A + BF)$ έχουν γνησίως αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή αν και μόνο αν ο $A + BF$ είναι **Hurwitz**.

Τώρα, θα εξετάσουμε μία ακόμη αυστηρότερη συνθήκη.

7.3 Απολύτως Σταθεροποιήσιμο Σύστημα

7.3.1 Ορισμός

Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι **απολύτως σταθεροποιήσιμο** αν, για κάθε $\omega \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει πίνακας $F_{m \times n}$ τέτοιος ώστε να ισχύει :

$$s(A + BF) = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A + BF)\} \leq -\omega \quad (7.3)$$

Στο εξής θα επικεντρωθούμε σε αυτού του είδους τη σταθεροποίηση. Θα αποδείξουμε ένα σημαντικό Θεώρημα που συσχετίζει την ελεγχιμότητα ενός συστήματος, με τη σταθεροποίηση του

και τη μεταφορά των πόλων του. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό , είναι απαραίτητη λίγη προα-
 παιτούμενη δουλειά . Γι' αυτό το λόγο , είναι σημαντική η ανάγνωση και η κατανόηση της παρακάτω
 θεωρίας.

7.3.2 Ανάλυση του Συστήματος Ελέγχου

Θεωρούμε το σύστημα $\Sigma(A,B)$ που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου , με τη δοθείσα Γραμμική
 Ανάδραση (7.1).

Έστω $X_1 := Im(B) \subset \mathbb{R}^n$, ο χώρος Ελέγχου του συστήματος και X_2 ο συμπληρωματικός
 χώρος του X_1 . Τότε , ο χώρος Καταστάσεων , μπορεί να εκφραστεί ως $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$.

Επιπλέον , έστω $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow X_1$ και $P_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow X_2$, οι **Ορθές** Προβολές και
 $I_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $I_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, οι **Κανονικές** Προβολές ('1-1') .

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυση των εμπλεκόμενων πινάκων.

$$\dagger \quad A : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\begin{cases} A_{11} : X_1 \rightarrow X_1 \quad \mu\epsilon \quad A_{11} := P_1 A I_1 \\ A_{12} : X_2 \rightarrow X_1 \quad \mu\epsilon \quad A_{12} := P_1 A I_2 \\ A_{21} : X_1 \rightarrow X_2 \quad \mu\epsilon \quad A_{21} := P_2 A I_1 \\ A_{22} : X_2 \rightarrow X_2 \quad \mu\epsilon \quad A_{22} := P_2 A I_2 \end{cases}$$

$$\dagger \quad B : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1 \oplus X_2 \quad , \quad u \mapsto \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

όπου:

$$B_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1 \quad \mu\epsilon \quad B_1 := P_1 B$$

$$\dagger \quad F : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto (F_1 \ F_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\begin{cases} F_1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m & \mu\epsilon \ F_1 = FI_1 \\ F_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m & \mu\epsilon \ F_2 = FI_2 \end{cases}$$

7.3.3 Πρόταση

Αν το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο στον \mathbb{R}^n , τότε το σύστημα $\Sigma(A_{22}, A_{21})$ είναι ελέγξιμο στον X_2 .

Απόδειξη

Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B)$ ελέγξιμο στον \mathbb{R}^n . Θέλουμε να δείξουμε ότι το σύστημα $\Sigma(A_{22}, A_{21})$ είναι ελέγξιμο στο X_2 , άρα πρέπει να ικανοποιείται το κριτήριο *Kalman*, δηλαδή :

$$\text{span}[A_{22}|A_{21}] = \text{span}[A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}] = X_2 .$$

Ισοδύναμα :

$$\text{Im}(A_{21}) \cup \text{Im}(A_{22}A_{21}) \cup \dots \cup \text{Im}(A_{22}^{n-2}A_{21}) = X_2 \quad (7.4)$$

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση του συστήματος $\Sigma(A, B)$, που έγινε παραπάνω, βλέπουμε ότι :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια προχωρώντας με επαγωγή, αποδεικνύουμε ότι το δεύτερο στοιχείο του πίνακα $A^i B$ για κάθε $i = 0, \dots, n-1$, είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\text{span}[A_{22}|A_{21}] = \text{span}[A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}]$

(i) Για $i = 1$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 \\ A_{21}B_1 \end{pmatrix} \implies \text{Im}(AB) = \text{Im} \begin{pmatrix} A_{11}B_1 \\ A_{21}B_1 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

† **Ισχυρισμός** † : Ως συνέπεια του γεγονότος ότι ο B_1 είναι "επί" απεικόνιση , ισχύουν τα κάτωθι :

$$Im(A_{11}B_1) = Im(A_{11}) \quad (7.5)$$

$$Im(A_{21}B_1) = Im(A_{21}) \quad (7.6)$$

Απόδειξη Ισχυρισμού

Απόδειξη της σχέσης (7.5) .

" \subseteq " : Έστω $x \in Im(A_{11}B_1)$. Τότε :

$$\begin{cases} x = A_{11}B_1u , u \in \mathbb{R}^m \\ B_1u = x_1 \in X_1 \end{cases} \implies x = A_{11}x_1 , \mu\epsilon x_1 \in X_1 \implies x_1 \in Im(A_{11})$$

Επομένως :

$$Im(A_{11}B_1) \subseteq Im(A_{11}) \quad (7.7)$$

" \supseteq " : Έστω $x \in Im(A_{11})$. Τότε , υπάρχει $x_1 \in X_1$ τέτοιο ώστε :

$$x = A_{11}x_1 \quad (7.8)$$

Όμως , ο $B_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1$ είναι επί , οπότε:

για κάθε $x_1 \in X_1$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ με $x_1 = B_1u$.

Επομένως , η σχέση (7.8) \implies υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x = A_{11}B_1u$

$\implies x \in Im(A_{11}B_1)$. Συνεπώς :

$$Im(A_{11}) \subseteq Im(A_{11}B_1) \quad (7.9)$$

και άρα από τις σχέσεις (7.7) και (7.9), έπεται ότι :

$$Im(A_{11}B_1) = Im(A_{11}) \quad (7.10)$$

Απόδειξη της σχέσης (7.6)

" \subseteq " : Έστω $x \in Im(A_{21}B_1)$ Τότε , υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x = A_{21}B_1u$.

Όμως ο B_1 είναι επί, επομένως : για κάθε $x_1 \in X_1$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x_1 = B_1 u$.

Άρα, $x = A_{21}x_1$ όπου $x_1 \in X_1 \implies x \in Im(A_{21})$

$$\iff Im(A_{21}B_1) \subseteq Im(A_{21}) \quad (7.11)$$

" \supseteq " : Έστω $x \in Im(A_{21})$. Τότε, υπάρχει $x_1 \in X_1$ τέτοιο ώστε $x = A_{21}x_1$.

Όμως, ο $B_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow X_1$ είναι επί, συνεπώς : για κάθε $x_1 \in X_1$ υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x_1 = B_1 u$. Άρα τελικά, υπάρχει $u \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $x = A_{21}B_1 u$, συνεπώς $x \in Im(A_{21}B_1)$ και επομένως :

$$Im(A_{21}) \subseteq Im(A_{21}B_1) \quad (7.12)$$

Από τις σχέσεις (7.11) και (7.12) έπεται τελικά ότι :

$$Im(A_{21}B_1) = Im(A_{21}) \quad (7.13)$$

Επομένως, το δεύτερο στοιχείο του AB πίνακα, δηλαδή το $A_{21}B_1$, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $span[A_{22}|A_{21}]$.

(ii) Για $i = 2$

$$\begin{aligned} A^2 B &= A(AB) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}B_1 \\ A_{21}B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^2 B_1 + A_{12}A_{21}B_1 \\ A_{21}A_{11}B_1 + A_{22}A_{21}B_1 \end{pmatrix} \implies \\ &\implies Im(A^2 B) = Im \begin{pmatrix} A_{11}^2 B_1 + A_{12}A_{21}B_1 \\ A_{21}A_{11}B_1 + A_{22}A_{21}B_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Έστω $x \in Im(A_{21}A_{11}B_1)$. Τότε, σύμφωνα με την (7.5) έπεται ότι :

$x \in Im(A_{21}A_{11}) \implies$ υπάρχει $y \in X_1$ τέτοιο ώστε $x = A_{21}A_{11}y$

\implies υπάρχει $y \in X_1$ τέτοιο ώστε $x = A_{21}P_1 A I_1 y$.

Επομένως, υπάρχει $y_1 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $I_1 y = y_1$ και άρα ισοδύναμα το x μπορεί να γραφεί ως :

$$x = A_{21}P_1 A y_1 \quad (7.15)$$

Όμως, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, άρα υπάρχει $y_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $A y_1 = y_2$. Συνεπώς, $x = A_{21}P_1 y_2$, $y_2 \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow X_1$, άρα υπάρχει $x_1 \in X_1$: $P_1 y_2 = x_1$.

Άρα :

$$x = A_{21}x_1, x_1 \in X_1 \implies x \in \text{Im}(A_{21}) \quad (7.16)$$

Έτσι τελικά:

$$\text{Im}(A_{21}A_{11}B_1) = \text{Im}(A_{21}A_{11}) \subset \text{Im}(A_{21}) \quad (7.17)$$

Έστω $x \in \text{Im}(A_{22}A_{21}B_1)$. Τότε , από τη σχέση (7.6) έπεται ότι :

$$x \in \text{Im}(A_{22}A_{21}) \implies \text{υπάρχει } y \in X_1 \text{ τέτοιο ώστε } x = A_{22}A_{21}y$$

$$\implies \text{υπάρχει } y \in X_1 \text{ τέτοιο ώστε } x = A_{22}P_2A_{11}y$$

$$\implies \text{υπάρχει } y \in X_1 \text{ τέτοιο ώστε } I_1y = y_1 \text{ και άρα } x = A_{22}P_2Ay_1$$

$$\implies \text{υπάρχει } y_2 \in \mathbb{R}^n \text{ τέτοιο ώστε } Ay_1 = y_2 \text{ επομένως } x = A_{22}P_2y_2$$

$$\implies \text{υπάρχει } x_2 \in X_2 \text{ τέτοιο ώστε } P_2y_2 = x_2 \text{ επομένως } x = A_{22}x_2$$

$$\implies x \in \text{Im}(A_{22})$$

Άρα :

$$\text{Im}(A_{22}A_{21}) \subset \text{Im}(A_{22}) \quad (7.18)$$

Επομένως από τις σχέσεις (7.17) και (7.18), έπεται και πάλι ότι το δεύτερο στοιχείο , $(A_{21}A_{11}B_1 + A_{22}A_{21}B_1)$, του πίνακα A^2B είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\text{span}[A_{22}|A_{21}]$.

(iii) Εφαρμόζουμε την Επαγωγική μέθοδο. Συγκεκριμένα, για $\mathbf{i} = \mathbf{k} < \mathbf{n} - 1$, δεχόμαστε ότι το δεύτερο στοιχείο του πίνακα $A^k B$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\text{span}\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$, δηλαδή δεχόμαστε ότι υπάρχει $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ έτσι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει :

$$P_2 A^k B x = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x \quad (7.19)$$

Δείχνουμε ότι στην περίπτωση $\mathbf{i} = \mathbf{k} + 1 \leq \mathbf{n} - 1$, το δεύτερο στοιχείο του πίνακα $A^{k+1}B$ είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\text{span}\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι:

$$A^k B = \begin{pmatrix} * \\ \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x \end{pmatrix}$$

με $Im(*) \subset X_1$.

Όμως επιπλέον ,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

οπότε :

$$A^{k+1}B = A \begin{pmatrix} * \\ \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} * + A_{12} \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x \\ A_{21} * + A_{22} \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Οπότε , το δεύτερο στοιχείο : $A_{21} * + A_{22} \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i A_{22}^i A_{21} x$, του πίνακα $A^{k+1}B$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $span\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$.

Συνεπώς, από τα βήματα (i) – (iv) έπεται ότι το δεύτερο στοιχείο κάθε στοιχείου του $span\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $span\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$.

Ισοδύναμα :

$$P_2 span\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} = span\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$$

Όμως : $P_2 span\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = P_2 \mathbb{R}^n$ και $P_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow X_2$, άρα :

$$P_2 span\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = X_2 \quad (7.20)$$

Οπότε :

$$X_2 =: P_2 span\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} = span\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\}$$

$$\iff span\{A_{21}, A_{22}A_{21}, \dots, A_{22}^{n-2}A_{21}\} = X_2$$

$$\iff \Sigma(A_{22}, A_{21}) \text{ είναι ελέγξιμο στον } X_2 . \quad \ddagger$$

7.3.4 Σημείωση για την παραπάνω Πρόταση

Είναι προφανές ότι $\dim X = n$ και $\dim X_2 \leq n - 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα των *Calley – Hamilton*, το $\text{span}[A|B]$ χρειάζεται να περιέχει μόνο τα στοιχεία $A^i B$, μέχρι τάξεως $i = n - 1$ και το $\text{span}[A_{22}|A_{21}]$ χρειάζεται να περιέχει μόνο τα στοιχεία $A_{22}^j A_{21}$ μέχρι τάξεως $j = n - 2$, άρα $j = i - 1$.

Στη συνέχεια θέλουμε να αποδείξουμε το Θεώρημα Μετακίνησης Πόλων. Για να γίνει αυτό μας είναι απαραίτητα τα παρακάτω, Λήμμα 7.3.5 και Πρόταση 7.3.6.

7.3.5 Λήμμα - "Φάσμα των Σύνθετων-Τριγωνικών Πινάκων"

Έστω

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Τότε ισχύει :

$$\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \iff \lambda \in [\sigma(A) \cup \sigma(D)] \quad (7.21)$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι: " Ένας Τριγωνικός Σύνθετος πίνακας \mathbb{A} είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν και οι δύο πίνακες A και D είναι αντιστρέψιμοι ". Επομένως, ο $(\lambda I - \mathbb{A})$ είναι αντιστρέψιμος αν και οι δύο πίνακες $(\lambda I - A)$ και $(\lambda I - D)$ είναι αντιστρέψιμοι. Σύμφωνα με τον ορισμό του επιλύοντος συνόλου έχουμε ότι :

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \quad (7.22)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και τη σχέση (7.22) έχουμε :

$$\{ \lambda \in \rho(\mathbb{A}) \iff \lambda \in [\rho(A) \cap \rho(D)] \} \iff \{ \lambda \in [\rho(\mathbb{A})]^c \iff \lambda \in [\rho(A) \cap \rho(D)]^c \}$$

$$\stackrel{(De Morgan)}{\iff} \{ \lambda \in \Sigma(\mathbb{A}) \iff \lambda \in [[\rho(A)]^c \cup [\rho(D)]^c] \}$$

$$\iff \{ \lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \iff \lambda \in [\sigma(A) \cup \sigma(D)] \} . \quad \ddagger$$

7.3.6 Πρόταση

Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο σε ένα χώρο X αν και μόνο αν , για κάθε $\phi \in X'$ ιδιοδιάνυσμα του A' , ισχύει :

$$B'\phi \neq 0 \quad (7.23)$$

Απόδειξη

" \implies " Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής

Έστω ότι υπάρχει $\phi_0 \in X'$ ιδιοδιάνυσμα του A' τέτοιο ώστε η (7.23) να μην ισχύει ,δηλαδή:

$$B'\phi = 0 \quad (7.24)$$

Το $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο , επομένως σύμφωνα με το Κριτήριο του *Kalman* , έπεται ότι :

$$Z := \text{Im}[A|B] = X \quad (7.25)$$

Όμως , $\text{Im}[A|B] = \{[A|B]u \in X , \forall u \in X\}$.

Επομένως : $[\text{Im}(A|B)]^\perp = \{0\} \implies$

$$\implies [\text{Im}(A|B)]^\perp = \{\phi \in X' : \phi(x) = 0 , \forall x \in \text{Im}(A|B)\} = \{0\} \quad (7.26)$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 5.4.1 του Κεφαλαίου 5 , έχουμε ότι :

$$[\text{Im}(A|B)]^\perp = \ker(A|B)' \quad (7.27)$$

Οπότε , η σχέση (7.27) λόγω της (7.26) γίνεται :

$$\ker(A|B)' = \{0\} \implies \ker \begin{pmatrix} B' \\ B'A' \\ \vdots \\ B'(A')^{n-1} \end{pmatrix} = \{0\} , \forall \phi \in X' \quad (7.28)$$

Το $\phi_0 \in X'$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A' , που σημαίνει ότι :

υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $A'\phi_0 = \lambda_0\phi_0 \implies A'B'\phi_0 = \lambda_0 B'\phi_0$.

Τώρα , σύμφωνα με τη σχέση (7.24) , έπεται ότι :

$$A'B'\phi_0 = \lambda_0 B'\phi_0 = 0 \implies A'B'\phi_0 = 0 \quad (7.29)$$

$$\implies A'(A'B'\phi_0) = 0 \implies (A')^2 B'\phi_0 = 0 \quad (7.30)$$

$$\implies \dots \implies (A')^{n-1} B'\phi_0 = 0 \quad (7.31)$$

Επομένως , από τις σχέσεις (7.24) και (7.29), (7.30), (7.31) έπεται ότι :

$$\begin{cases} B'\phi_0 \\ A'B'\phi_0 \\ A'^2 B'\phi_0 \\ \vdots \\ A'^{n-1} B'\phi_0 \end{cases} \implies \phi_0 \in \ker \begin{pmatrix} B' \\ A'B' \\ A'^2 B' \\ \vdots \\ A'^{n-1} B' \end{pmatrix} = \{0\} \implies \phi_0 = 0$$

ΆΤΟΠΟ , αφού το $\phi_0 \in X'$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A' και άρα διάφορο του μηδενός.

Άρα , η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη , συνεπώς :

ΔΕΝ υπάρχει $\phi_0 \in X'$, ιδιοδιάνυσμα του A' τέτοιο ώστε $B'\phi_0 = 0$.

” \Leftarrow ” Και πάλι η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής

Γνωρίζουμε ότι για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\phi \in X'$ του A' , ισχύει η (7.23) .

Έστω ότι το $\Sigma(A,B)$ ΔΕΝ είναι ελέγξιμο. Τότε :

$$Z := \text{Im}(A|B) \subset X \implies Z^\perp \neq \{0\}$$

$$\text{Όμως , } Z^\perp \supset \{0\} \implies Z^\perp := [\text{Im}(A|B)]^\perp \supset \{0\}$$

$$\implies Z^\perp := \{\phi \in X' : \langle \phi, x \rangle = 0, \forall x \in \text{Im}(A|B)\} \supset \{0\}$$

$$\implies \text{υπάρχει } \phi \neq 0, \phi \in X' : \langle \phi, x \rangle = 0, \forall x \in \text{Im}(A|B)$$

$$\implies \text{υπάρχει } \phi \in Z^\perp, \phi \neq 0, \text{ που σημαίνει ότι το } \phi \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα του } A'.$$

Επιπλέον , από Πρόταση 5.8.3 (Κεφάλαιο 5) γνωρίζουμε ότι $Z^\perp \subset \ker B'$ και αφού $\phi \in Z^\perp$, έπεται ότι :

$$B'\phi = 0 \quad (7.32)$$

Άρα , υπάρχει $\phi \in X'$ τέτοιο ώστε $B'\phi = 0$. ΆΤΟΠΟ , αφού αντιτίθεται στην (7.23) .

Επομένως , η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη και άρα το $\Sigma(A,B)$ είναι ελέγξιμο . ‡

7.4 Θεώρημα Μετακίνησης Πόλων - *Pole Assignment Theorem*

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

- (i) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο.
- (ii) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι απολύτως σταθεροποιήσιμο.
- (iii) Το σύστημα $\Sigma(A, B)$ επιτρέπει τη Μετατόπιση των Πόλων (*Pole Assignment*), δηλαδή: για κάθε $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, υπάρχει ένας Πίνακας Ανάδρασης F τέτοιος ώστε

$$\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (7.33)$$

Απόδειξη

(iii) \implies (ii)

Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B)$ όπως αυτό έχει οριστεί στην αρχή του κεφαλαίου.

$$\Sigma(A, B) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Επιβάλλω ανάδραση $u(t) = Fx(t)$ στο σύστημα, οπότε προκύπτει το κλειστό σύστημα :

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \quad (7.34)$$

Από τον Ορισμό 7.3.1, γνωρίζουμε ότι το $\Sigma(A, B)$ είναι απολύτως σταθεροποιήσιμο αν για κάθε $\omega \in \mathbb{R}^-$ υπάρχει τελεστής $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ τέτοιος ώστε

$$s(A + BF) = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A + BF)\} < \omega. \quad (7.35)$$

Έστω λ_i η ιδιοτιμή του $(A + BF)$ με $Re\lambda_i = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A + BF)\}$, ισοδύναμα η λ_i είναι τέτοια ώστε

$$Re\lambda_i = s(A + BF) \quad (7.36)$$

Προφανώς λόγω της (iii) μπορεί να επιτευχθεί κατάλληλη επιλογή της λ_i , έτσι ώστε $Re\lambda_i < \omega$ και αντίστοιχη επιλογή του F . Επομένως, λόγω της (7.36) καταλήγω στη συνθήκη $s(A + BF) < \omega$, της (ii).

(ii) \implies (i) Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής

Έστω ότι το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο, αλλά όχι ελέγξιμο.

Τότε, λόγω της Πρότασης 7.3.6 υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $v \neq 0$ του πίνακα A' και $\lambda \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε:

$$\lambda v = A'v \quad (7.37)$$

και

$$B'v = 0 \quad (7.38)$$

Επομένως, υπάρχει $v \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$F'B'v = 0, \forall F \quad (7.39)$$

Επιλέγουμε F τέτοιον ώστε

$$s(A + BF) < \operatorname{Re} \lambda \quad (7.40)$$

Η (7.37) συνεπάγεται ότι $\lambda v = A'v + 0$ και λόγω της (7.39) έχουμε :

$$\lambda v = A'v + F'B'v \implies \lambda v = (A + BF)'v$$

$$\implies \lambda \in \sigma[(A + BF)'] \quad (7.41)$$

Όμως, ο $(A + BF)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, επομένως :

$$\sigma(A + BF) = \sigma[(A + BF)'] \quad (7.42)$$

Συνεπώς:

$$(7.41) \xrightarrow{(7.42)} \lambda \in \sigma(A + BF)$$

Όμως, αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση (7.40).

Επομένως, το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι **ελέγξιμο**.

(i) \implies (iii) Η απόδειξη θα γίνει με χρήση της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω ότι το σύστημα $\Sigma(A, B)$ είναι ελέγξιμο και X ο Χώρος Καταστάσεων.

- Εξετάζω πρώτα τη στοιχειώδη περίπτωση $\dim X = 1$. Έστω $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ δοθέν. Πρέπει να

βρούμε κατάλληλο πίνακα F τέτοιο ώστε $\sigma(A+BF) = \{\lambda_1\}$. Ισοδύναμα, χρειάζεται να βρούμε κατάλληλο F τέτοιο ώστε ο $[\lambda_1 I - (A + BF)]$ να είναι μη-αντιστρέψιμος πίνακας. Ισοδύναμα, στη μονοδιάστατη περίπτωση που μελετάμε:

$$\lambda_1 I - (A + BF) = 0 \iff \lambda_1 I = A + BF$$

$$\iff \text{υπάρχει πίνακας } F \text{ τέτοιος ώστε } F := \bar{B}(\lambda_1 I - A)$$

όπου \bar{B} ο δεξιά αντίστροφος του B .

- Συνεχίζουμε επαγωγικά. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι για $\dim X = k < n$, $k = 2, \dots, n-1$ η συνθήκη (iii) πληρούται, δηλαδή :

$$\sigma(A + BR) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \quad (7.43)$$

όπου R ένας Πίνακας Ανάδρασης.

- Θα δείξουμε ότι η συνθήκη (iii) πληρούται και για $k = n$. Πράγματι, έστω $\dim X = n$ και το δοθέν σύνολο μιγαδικών αριθμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Θέλουμε να βρούμε κατάλληλο Πίνακα Ανάδρασης F τέτοιο ώστε $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Χρησιμοποιούμε την ανάλυση που έγινε στην παράγραφο 7.3.2. Εφόσον, το φάσμα είναι ίδιο για ισοδύναμους πίνακες, μπορούμε τώρα να επιλέξουμε τους παράγοντες για τους οποίους, ο ισοδύναμος τριγωνικός πίνακας του $(A + BF)$ έχει το επιθυμητό φάσμα.

Επομένως: υπάρχει σύστημα $\Sigma(A_{22}, A_{21})$ ελέγξιμο στον X_2 , όπου $\dim X_2 = k < n-1$, με σύνολο ιδιοτιμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. Σύμφωνα με τη σχέση (7.43), για το σύνολο των ιδιοτιμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ έπεται ότι, υπάρχει Πίνακας Ανάδρασης R τέτοιος ώστε

$$\sigma(A_{22} + A_{21}R) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \quad (7.44)$$

Επιλέγω Πίνακα Ανάδρασης F τέτοιο ώστε ο πίνακας $(A + BF)$ να έχει το επιθυμητό φάσμα.

Μετατροπή του πίνακα $(A + BF)$ στην ισοδύναμη τριγωνική μορφή

Επιλέγουμε T αντιστρέψιμο πίνακα τέτοιο ώστε :

$$T = \begin{pmatrix} I & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}$$

Τότε :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} I & -R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix}$$

Επομένως :

$$\mathcal{A} = T^{-1}(A + BF)T \implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & -R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} (F_1 \ F_2) \right] \begin{pmatrix} I & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & -R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1F_1 - RA_{21} & A_{12} + B_1F_2 - RA_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & R \\ \mathbb{O} & I \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1F_1 - RA_{21} & (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R + A_{12} + B_1F_2 - RA_{22} \\ A_{21} & A_{21}R + A_{22} \end{pmatrix} ,$$

όπου :

$$F = (F_1 \ F_2) : \mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2 \longmapsto \mathbb{R}^m .$$

Τώρα διαλέγω $F_2 := \bar{B}_1 [RA_{22} - A_{12} - (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R]$, έτσι ώστε $F_2 : X_2 \longrightarrow U$, με \bar{B}_1 το δεξιά αντίστροφο του B_1 .

Επεξήγηση: Γνωρίζω ότι ο B_1 έχει δεξιά αντίστροφο, όπως ισχύει εζ' ορισμού για τις "επί" απεικονίσεις, όπως η $B_1 := P_1B : \mathbb{R}^m \longrightarrow X_1$, με $P_1 : X \longrightarrow X_1$.

Με αυτό τον τρόπο το στοιχείο \mathcal{A}_{12} του

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} ,$$

μηδενίζεται. Πράγματι υπολογίζουμε :

$$\mathcal{A}_{12} = (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R + A_{12} + B_1F_2 - RA_{22}$$

$$\implies \mathcal{A}_{12} = (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R + A_{12} + B_1\bar{B}_1[RA_{22} - A_{12} - (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R] - RA_{22}$$

$$\implies \mathcal{A}_{12} = (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R + A_{12} + RA_{22} - A_{12} - (A_{11} + B_1F_1 - RA_{21})R - RA_{22}$$

$$\implies \mathcal{A}_{12} = \mathbb{O}$$

Άρα :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathbb{O} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1 - R A_{21} & \mathbb{O} \\ A_{21} & A_{21} R + A_{22} \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το φάσμα του $(A + BF)$ είναι

$$\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (7.45)$$

Επομένως , αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (7.46)$$

Πράγματι, για όλους τους τριγωνικούς πίνακες

$$K = \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbb{O} \\ M & N \end{pmatrix}$$

γνωρίζουμε από το Λήμμα 7.3.5 ότι :

$$\sigma(K) = \sigma(\Lambda) \cup \sigma(N) \quad (7.47)$$

Επομένως ,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_{11} + B_1 F_1 - R A_{21}) \cup \sigma(A_{21} R + A_{22}) \quad (7.48)$$

Από τη σχέση (7.44) γνωρίζουμε ότι

$$\sigma(A_{21} R + A_{22}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \subset \sigma(\mathcal{A}) \quad , \quad (7.49)$$

αφού το \mathcal{A} ορίζεται στον \mathbb{R}^n ενώ το $A_{22} + A_{21} B$ ορίζεται στο $X_2 \subset \mathbb{R}^m$.

Οπότε , για να δείξουμε ότι $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \cup \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} \quad (7.50)$$

Αφού ισχύουν οι σχέσεις (7.48) και (7.49) , αρκεί να δείξω ότι υπάρχει πίνακας F_1 τέτοιος ώστε

$$\sigma(A_{11} + B_1 F_1 - R A_{21}) = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\} \quad (7.51)$$

Για να δειχθεί η (7.51), Θεωρούμε

$$F_1 := \bar{B}_1(\text{diag}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) - A_{11} + RA_{21}) \quad (7.52)$$

Οπότε :

$$\begin{aligned} A_{11} + B_1 F_1 - RA_{21} &= A_{11} - RA_{21} + \underbrace{B_1 \bar{B}_1}_I (\text{diag}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) - A_{11} + RA_{21}) \\ \implies A_{11} + B_1 F_1 - RA_{21} &= \text{diag}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \\ \implies \sigma(A_{11} + B_1 F_1 - RA_{21}) &= \sigma(\text{diag}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)) \\ \implies \sigma(A_{11} + B_1 F_1 - RA_{21}) &= \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει κατάλληλος πίνακας F_1 τέτοιος ώστε να ισχύει η επιθυμητή (7.51).

Καταλήγουμε λοιπόν ότι υπάρχει κατάλληλος πίνακας F_1 τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση (7.50).

Άρα, αφού $A \sim A + BF$ έπεται ότι, για δοθέν σύνολο μιγαδικών αριθμών $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, υπάρχει πράγματι κατάλληλος πίνακας F τέτοιος ώστε $\sigma(A + BF) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. ‡

Βιβλιογραφία

- 1) *K. – J.Engel , R.Nagel , One parameter semigroups for linear evolution equations , Springer – Verlag , New – York , Berlin , Heidelberg 2000*
- 2) *H.Heuser , Gewoehnliche Differentialgleichungen , B.G.Teubner , Stuttgart , 1989*
- 3) *S.Barnett , Introduction to mathematical control theory , Oxford University Press , 1975*
- 4) *K.Janich , Funktionentheorie. Eine Einfuehrung , Springer–Verlag , New–York , Berlin, Heidelberg , 1999*
- 5) *C.Pocanshi , WissenschaftlicheArbeit : Kontrolle und Beobachtung von linearen Systemen , Tuingen 2003*
- 6) *D.Werner , Funktionalanalysis , Springer – Verlag , Berlin , Heidelberg , 1995*
- 7) *J.Zabczyk , Mathematical control theory : An introduction , Birkhauser , Boston , Basel , Berlin , 1992*
- 8) *Eduardo D. Sontag , Mathematical Control Theory : Determenistic Finite Dimensional Systems , Springer – Verlag , New – York , 1998*
- 9) *H.–W.Knobloch , H.Kwakernaak : Lineare Kontrolltheorie , Springer–Verlag , Berlin , 1985*

10) *R.Nagel , Vorlesung Kontrolltheorie , Tübingen SS2009*

11) Τσινιάς Ιωάννης , Σημειώσεις μαθήματος "Βέλτιστος Έλεγχος" , Εαρινό Εξάμηνο Ακ.Έτους 2008-2009

12) Τσινιάς Ιωάννης , Σημειώσεις μαθήματος "Σχεδίαση και Ανάλυση Συστημάτων Ελέγχου" , Χειμερινό Εξάμηνο Ακ.Έτους 2009-2010

13)Καρανάσιος Σωτήριος , Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές , Αθήνα 2009

14) *[http : //en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)*