ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

"Θετικά Ορισμένες Συναρτήσεις και το Θεώρημα Karhunen Loeve"

"Positive Definite Functions and Karhunen-Loeve Theorem"

ΚΑΤΣΙΜΑΡΔΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09312012

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γ.Α. ΑΘΑΝΑΣΟΥΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2015

Πρόλογος - Σύνοψη

Σκοπό της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, αποτελεί η μελέτη μίας κλάσης συναρτήσεων οι οποίες είναι γνωστές ως θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Κίνητρο στην όλη προσπάθεια αποτέλεσε το γεγονός ότι, στη συγκεκριμένη κλάση ανήκουν δύο πολύ σημαντικές κατηγοριές συναρτήσεων, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης, τις οποίες θα μελετήσουμε αναλυτικά. Στην περίπτωση δε των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί σε δύο πολύ σημαντικά αποτέλεσματα που προέρχονται από την θεωρία τελεστών, το θεώρημα Mercer και το θεώρημα Karhunen-Loeve. Η σημαντικότητα των συγκεκριμένων αποτελεσμάτων έγκειται στο γεγονός ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $C(t,s)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων συναρτήσεων μίας μεταβλητής των t και s αντίστοιχα.

Στο ***πρώτο κεφάλαιο,*** της εργασίας, παρατίθενται διάφορες εισαγωγικές έννοιες για τις στοχαστικές διαδικασίες δευτέρας τάξεως. Ακόμα, παρουσιάζονται κάποια πολύ βασικά αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων, τα οποία αποτελούν το βασικό εργαλείο για την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Τέλος, παρουσιάζονται χωρίς αποδείξεις τα βασικά θεωρήματα σύγκλισης της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Στο ***δεύτερο κεφάλαιο,*** ορίζονται και μελετώνται διεξοδικά οι θετικά ορισμένες συναρτήσεις και οι ιδιότητες τους. Οι συναρτήσεις αυτές είναι θεμελιώδους σημασίας καθώς τόσο οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις όσο και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Η χρησιμότητα τους θα γίνει εμφανής στα επόμενα κεφάλαια.

Στο ***τρίτο κεφάλαιο,*** εισάγεται η έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης και παρουσιάζονται αναλυτικά οι ιδιότητες της και τα βασικά αποτελέσματα της αντίστοιχης θεωρίας. Η σημαντικότητα της συγκεκριμένης συνάρτησης έγκειται στο γεγονός ότι μέσω του θεωρήματος αντιστροφής, μπορούμε αν τη γνωρίζουμε να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής. Επιπλέον, το θεώρημα Bochner μας δείχνει πώς οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις συνδέονται με τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται και στο θεώρημα συνέχειας του Levy, η σημαντικότητα του οποίου έπεται στο γεγονός ότι μας εξασφαλίζει ότι αν συγκλίνουν οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι σημειακές συναρτήσεις, τότε συγκλίνουν και οι αρχικές συναρτήσεις κατανομής, για τη σύγκλιση των οποίων δεν είναι εύκολο να μιλήσουμε εξ αρχής. Τέλος, γίνεται αναφορά και στη σχέση της χαρακτηριστικής συνάρτησης με τις ροπές.

Στο ***τέταρτο κεφάλαιο,*** εισάγεται η έννοια της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και γίνεται εμφανές το πώς συνδέεται αυτή με τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Επιπλέον, εξετάζονται οι ιδιότητες των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης καθώς αυτές αποτελούν το βασικό εργαλείο για τη μελέτη στοχαστικών συναρτήσεων δευτέρας τάξεως. Τέλος, παρατίθενται χωρίς αποδείξεις τα βασικά αποτελέσματα του μέσο-τετραγωνικού λογισμού.

Στο ***πέμπτο κεφάλαιο,*** παρουσιάζονται τα θεωρήματα των Mercer και Karhunen-Loeve. Γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στις βασικές έννοιες της θεωρίας τελεστών καθώς και στο θεμελιώδες φασματικό θεώρημα για συμπαγείς και αυτοσυζυγείς τελεστές, ούτως ώστε να έχει αναπτυχθεί το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για την παρουσίαση των θεωρημάτων Mercer και Karhunen-Loeve. Τα θεωρήματα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά και βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορους κλάδούς όπως η ανάλυση εικόνας. Μέσω του Θεωρήματος Mercer η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $C(t,s)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων συναρτήσεων μίας μεταβλητής των t και s αντίστοιχα. Επιπλέον, αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει και μέσω του Θεωρήματος Karhunen-Loeve καθώς έχουμε ότι μία μεσοτετραγωνικά συνεχής τυχαία συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει γινομένων συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Στο ***έκτο κεφάλαιο***, γίνεται αναφορά στην φασματική αναπαράσταση των στάσιμων τυχαίων συναρτήσεων, οι οποίες μοντελοποιούν φαινόμενα τα οποία συναντώνται ευρύτατα στη φύση. Θα δούμε ότι η φασματική αναπαράσταση είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος αντιστροφής των χαρακτηριστικών συναρτήσεων για τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης. Επιπλέον, στο ***παράρτημα***, γίνεται αναφορά και για άλλες παρόμοιες αναπαραστάσεις με αυτή του Θεωρήματος Karhunen-Loeve για τις στοχαστικές συναρτήσεις.

Τέλος, στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίδεται βιβλιογραφία με τα συγγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη συγγραφή του αντίστοιχου κεφαλαίου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Γεράσιμο Α. Αθανασούλη, για την απέραντη υπομονή και τον χρόνο που μου διέθεσε καθ’ όλο το διάστημα της συγγραφής της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αλλά και κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος. Η παρούσα εργασία θα ήταν αδύνατον να εκπονηθεί χωρίς τις πάντα καίριες παρατηρήσεις του, το διδασκαλικό του πνεύμα και την καθοδήγησή του ως προς τη σύνδεση και τη δομή των μαθηματικών εννοιών.
Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους στενούς μου ανθρώπους που είναι δίπλα μου και με στηρίζουν σε κάθε μου προσπάθεια.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Η ανάλυση μας βασίστηκε στον Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, στον Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure, στους Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, στον Γ.Α. Αθανασούλη, Σημειώσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και στον Παπαδάτο Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων σελίδες 261-269.

1.1) Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας από μία πολύ βασική έννοια από τη θεωρία συνόλων, αυτή της σ-άλγεβρας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1: Έστω ένα μη κενό σύνολο Θ. Μία ***σ-άλγεβρα*** $\mathscr{F}$ επάνω στο σύνολο Θ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του Θ η οποία είναι εφοδιασμένη με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\emptyset \in \mathscr{F}$

ii) $F \in \mathscr{F} \Rightarrow F^c \equiv \Theta \setminus F \in \mathscr{F}$

iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μία σ-άλγεβρα ή οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Θα θεωρήσουμε ότι το σύνολο Ω είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και θα κατασκευάσουμε μία σ-άλγεβρα που θα αποτελείται από υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Η άλγεβρα αυτή ονομάζεται άλγεβρα Borel. Έχουμε το ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2: Θα ονομάζουμε ***άλγεβρα Borel*** και θα τη συμβολίζουμε με $\mathscr{B}$ την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση όλων των διαστημάτων της μορφής $\left(-\infty, x\right)$ και τα στοιχεία αυτού του συνόλου τα ονομάζουμε σύνολα Borel.

Αντίστοιχα, όταν μεταβούμε στον χώρο $\mathbb{R}^d$, η σ-άλγεβρα Borel $\mathscr{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής:

$$\left(a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_i < x_i < b_i ,\ i = 1,...,d\right\}$$

όπου $a = \left(a_1, a_2, ..., a_d\right) \in \mathbb{R}^d$ και $b = \left(b_1, b_2, ..., b_d\right) \in \mathbb{R}^d$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3: Έστω ένα μη κενό σύνολο Θ και μία σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ ορισμένη επάνω στο σύνολο αυτό. Το ζεύγος $\left(\Theta, \mathscr{F}\right)$ καλείται ***μετρήσιμος χώρος***.

Οι σ-άλγεβρες είναι ουσιαστικά δομές πληροφορίας. Κάθε αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης μπορεί να εκφραστεί ως ένα σύνολο που ανήκει σε μία κατάλληλη σ-άλγεβρα. Έτσι, οδηγούμαστε στην ανάγκη να ορίσουμε συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν τα σύνολα σε αριθμούς. Οι συνάρτήσεις αυτές είναι τα γνωστά μέτρα από την Θεωρία Μέτρου. Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του μέτρου πιθανότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4: Ένα ***μέτρο πιθανότητας*** P ορισμένο πάνω σε έναν μετρήσιμο χώρο $\left(\Theta, \mathscr{F}\right)$ είναι μία απεικόνιση $P : \mathscr{F} \to \left[0,1\right]$ εφοδιασμένη με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) $P\left(\emptyset\right) = 0,\ P\left(\Theta\right) = 1$

ii) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$ και τα $\left\{A_i\right\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

Αφού ορίσαμε τις έννοιες της σ-άλγεβρας και του μέτρου πιθανότητας, είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε τον χώρο πιθανοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5: Θεωρούμε ένα σύνολο Θ, μία σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ ορισμένη πάνω σε αυτό το σύνολο και ένα μέτρο πιθανότητας P. Η τριπλέτα $\left(\Theta, \mathscr{F}, P\right)$ ονομάζεται ***χώρος πιθανοτήτων***.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις έννοιες της τυχαίας μεταβλητής και της στοχαστικής συνάρτησης. Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6: Έστω Θ ένα μη κενό σύνολο. Μία συνάρτηση $Y : \Theta \to \mathbb{R}^d$ καλείται $\mathscr{F}$-***μετρήσιμη*** αν

$$Y^{-1}\left(U \right) = \left\{ \theta \in \Theta ; Y\left(\theta \right) \in U \right\} \in \mathscr{F}$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^d$.

1.2) Τυχαίες μεταβλητές και συναρτήσεις κατανομής

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7: Έστω $\left(\Theta, \mathscr{F}, P\right)$ ο χώρος πιθανότητων, $X : \Theta \to \mathbb{R}^d$ μια απεικόνιση και $\mathscr{F}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Η απεικόνιση X θα καλείται ***τυχαία μεταβλητή*** αν και μόνον αν είναι $\mathscr{F}$-μετρήσιμη, δηλαδή αν για κάθε $U \in \mathscr{F}$, η αντίστροφη εικόνα του μέσω της X, $X^{-1}\left(U \right)$, ανήκει στη σ-άλγεβρα των γεγονότων $\mathscr{F}$.

Θεωρούμε τώρα ένα πείραμα τύχης και την αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή $X\left(\theta \right)$. Θεωρούμε την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός $\left\{ \theta \in \Theta : X\left(\theta \right) \le x \right\}$ ή διαφορετικά την πιθανότητα $P_X\left(X\left(\theta \right) \le x \right)$ όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση $F_X\left(x \right) = P_X\left(X\left(\theta \right) \le x \right)$ καλείται ***συνάρτηση κατανομής*** της τυχαίας μεταβλητής $X\left(\theta \right)$.

Η συνάρτηση κατανομής υπάρχει πάντα. Είναι εξ' ορισμού μία μη αρνητική, συνεχής από τα δεξιά και μη φθίνουσα συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής x . Επιπλέον, έχουμε ότι: $F_X\left(-\infty \right) = 0$ και $F_X\left(+\infty \right) = 1$.

Οι τυχαίες μεταβλητές διακρίνονται σε ***συνεχείς*** και ***διακριτές***. Μία τυχαία μεταβλητή καλείται ***διακριτή*** όταν η συνάρτηση κατανομής της είναι μία σκαλωτή συνάρτηση με πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος αλμάτων. Ενώ μία τυχαία μεταβλητή $X\left(\theta \right)$ καλείται

συνεχής αν η συνάρτηση κατανομής της είναι συνεχής και σχεδόν παντού διαφορίσιμη. Για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή $X(\theta)$, υπάρχει η παράγωγος

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Και στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f_X(x)$ ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X(\theta)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

Οι ορισμοί της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που έχουμε πολλές τυχαίες μεταλητές. Στην περίπτωση αυτή η από κοινού συνάρτηση κατανομής μίας ακολουθίας n τυχαίων μεταβλητών $\{X_n(\theta)\}$, ορίζεται ως εξής:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = P_{X_1 X_2 \dots X_n}\left(X_1 \leq x_1 \bigcap X_2 \leq x_2 \bigcap \dots \bigcap X_n \leq x_n\right)$$

Η αντίστοιχη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \partial^n F_{X_1 X_2 \dots X_n}\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n$$

Δεδομένου ότι η παραπάνω μερική παράγωγος υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή η πεπερασμένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n(\theta)\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως τα στοιχεία ενός n-διάστατου τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}(\theta)$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους ορισμούς της στοχαστικής συνάρτησης καθώς και της τυχαίας μεταβλητής δεύτερης τάξης.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8</u>: ***<u>Στοχαστική Διαδικασία ή Τυχαία Συνάρτηση ή Στοχαστική Συνάρτηση,</u>*** ονομάζουμε την οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών

$$\left(X_t(\theta)\right)_{t\in\left[t_a,t_b\right]} = \left\{X(t;\theta), t\in\left[t_a,t_b\right], \theta\in\Theta\right\},$$

υπό την προϋπόθεση ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\left\{t_1,t_2,...,t_N\right\}\in\left[t_a,t_b\right]^N$, ορίζεται η κατανομή πιθανότητας της N-διάστατης (συνήθους) τυχαίας μεταβλητής,

$$\left(X_1(\theta), X_2(\theta),..., X_N(\theta)\right) = \left(X\left(t_1;\theta\right), X\left(t_2;\theta\right),..., X\left(t_N;\theta\right)\right).$$

Μια οικογένεια που χρησιμοποιείται ευρέως λόγω των χρήσιμων ιδιοτήτων της είναι αυτή των τυχαίων μεταβλητών πεπερασμένης δευτεροτάξιας ροπής και η εξαγόμενη από αυτές κλάση των τυχαίων συναρτήσεων δευτέρας τάξεως.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9</u>: Μια ***<u>τυχαία μεταβλητή δεύτερης τάξης</u>*** $X:\Theta\ni\theta\to X(\theta)\in\mathbb{C}$ είναι μια $\left(\mathscr{F},\mathscr{B}(\mathbb{C})\right)$ μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $E^{\theta}\left[\left|X(\theta)\right|^2\right] = E^{\theta}\left[X(\theta)\overline{X(\theta)}\right] < +\infty$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10</u>: Μια στοχαστική συνάρτηση $X(t;\theta)$ όπου, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\left\{t_1,t_2,...,t_N\right\}\in\left[t_a,t_b\right]^N$, η κατανομή πιθανότητας της N-διάστατης τυχαίας μεταβλητής

$$\left(X_1(\theta), X_2(\theta),..., X_N(\theta)\right) = \left(X\left(t_1;\theta\right), X\left(t_2;\theta\right),..., X\left(t_N;\theta\right)\right)$$

είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών δεύτερης τάξης, τότε θα καλείται ***<u>στοχαστική συνάρτηση δεύτερης τάξης</u>***.

1.3) Στοιχεία από τη σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών

Στη παράγραφο αυτή θα δώσουμε χωρίς αποδείξεις τις διάφορες έννοιες σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών. Η ενότητα αυτή είναι πλήρως αναπτυγμένη σε κάθε σοβαρό βιβλίο Θεωρίας Πιθανοτήτων. Βλέπε για παράδειγμα Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, Κεφάλαιο 6 και Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure, Κεφάλαιο 5.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11: Θα λέμε ότι μία στοχαστική διαδικασία δευτέρας τάξεως $X(t,\theta)$, όταν $t \to t_0$, ***συγκλίνει κατά μέση τετραγωνική έννοια*** προς την τυχαία μεταβλητή $A_0(\theta)$, εάν και μόνον εάν

$$\lim_{t \to t_0} E^{\theta}\left[\left|X(t;\theta) - A_0(\theta)\right|^2\right] = 0$$

Η μέση τετραγωνική σύγκλιση της διαδικασίας $X(t,\theta)$ αναφέρεται και ως L^2 σύγκλιση δεδομένου ότι αντιστοιχεί στη σύγκλιση στον χώρο Hilbert των στοχαστικών διαδικασιών δευτέρας τάξεως. Με τη μέση τετραγωνική σύγκλιση ασχολούμαστε αναλυτικά στην ενότητα 4.2 στοιχεία από το μέσο τετραγωνικό λογισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12: Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Theta, \mathscr{F}, P)$ λέμε ότι συγκλίνει ***σχεδόν βεβαίως*** σε μία τυχαία μεταβλητή X όταν το $n \to \infty$ και συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, αν

$$P\left(\lim_{n \to \infty} X_n(\theta) = X(\theta)\right) = 1$$

δηλαδη αν θεωρήσουμε το υποσύνολο $\Theta_0 = \left\{\theta \in \Theta : \lim_{n \to \infty} X_n(\theta) \neq X(\theta)\right\}$ τότε έχουμε $P\left(\Theta_0\right) = 1$.

Η σχεδόν βεβαία σύγκλιση συχνά ονομάζεται και σύγκλιση σχεδόν παντού ή σύγκλιση με πιθανότητα 1.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13: Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Theta, \mathscr{F}, P)$ λέμε ότι συγκλίνει ***κατά πιθανότητα*** σε μία τυχαία μεταβλητή X όταν το $n \to \infty$ και συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{P} X$, αν $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε ότι:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\theta \in \Theta : \left|X_n(\theta) - X(\theta)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Η σύγκλιση κατά πιθανότητα καλείται επίσης και σύγκλιση κατά μέτρο.

Πολύ χρήσιμη είναι και η έννοια της σύγκλισης κατά κατανομή. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14: Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανοτήτων $(\Theta, \mathscr{F}, P)$ λέμε ότι συγκλίνει ***κατά κατανομή*** σε μία τυχαία μεταβλητή X όταν το $n \to \infty$ και συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{d} X$, αν

$$P\left[X_n(\theta) \leq x\right] \to P\left[X(\theta) \leq x\right], \text{ καθώς } n \to \infty,$$

Για κάθε x για το οποίο ισχύει $P\left[X(\theta) = x\right] = 0$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η σύγκλιση κατά κατανομή δεν απαιτεί οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ και X να είναι ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων. Η σύγκλιση αυτή είναι συνέπεια της συμπεριφοράς των συναρτήσεων κατανομής $F_n(x)$ και $F(x)$ και όχι των ίδιων των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ και X .

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, Wiley Eastern Limited

Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure, John Wiley & Sons, Inc

Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων, Αθήνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1) Εισαγωγή και Ορισμός

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με μία ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις, καθώς όπως θα δούμε στη συνέχεια, τόσο οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις όσο και οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Η ανάλυση μας για τη συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων και τις ιδιότητες τους βασίστηκε στους Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.,1984, Harmonic Analysis on Semigroups, Springer-Verlag, σελίδες 66-73, στους Sheney W., Light W., 2000, A Course in the Approximation Theory, σελίδες 77-86, στον Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδες 25-32 και Vakhania N.N. ,Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A., 1987, Probability Distributions on Banach Spaces, σελίδες 184-190.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1</u>: Έστω X μη κενό σύνολο. Μία συνάρτηση μίας μεταβλητής $f : X \to \mathbb{C}$ λέμε ότι είναι ***<u>θετικά ορισμένη</u>*** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c}_i \, c_j \, f(x_i - x_j) \geq 0 \tag{1}$$

<u>Σημείωση 2.2</u>: i) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η f είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση αν και μόνον αν ο $n \times n$ πίνακας $A_{ij} = (f(x_i - x_j))_{i,j=1}^{n}$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε αυθαίρετη επιλογή $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$.

ii) Η σχέση (1) μπορεί να γραφεί και στη μορφή: $c^* A c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_i \, c_j \, A_{ij} \geq 0$, όπου c είναι ένα διάνυσμα στήλη και c^* είναι ο συζυγής ανάστροφος του , δηλαδή ένα διάνυσμα γραμμή.

2.2) Βασικά αποτελέσματα γραμμικής άλγεβρας

Προτού προχωρήσουμε στην παράθεση βασικών αποτελεσμάτων για τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις, θα παραθέσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα από την γραμμική άλγεβρα τα οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

<u>ΛΗΜΜΑ 2.3</u>: Έστω A να είναι ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει $c^* Ac = 0$ για όλα τα $c \in \mathbb{C}^n$. Τότε $A = 0$.

<u>Απόδεξη</u>: Έστω ότι για τον πίνακα A ισχύει ότι $c^* Ac = 0$. Για αυθαίρετη επιλογή c και v έχουμε ότι:

$$0 = (c+v)^* A(c+v) = c^* Ac + c^* Av + v^* Ac + v^* Av$$

και συνεπώς λόγω της σχέσης $c^* Ac = 0$ προκύπτει ότι:

$$0 = c^* Av + v^* Ac \tag{2}$$

Αν στην τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε το c με ic προκύπτει ότι: $0 = -ic^* Av + iv^* Ac$ ή ισοδύναμα

$$0 = -c^* Av + v^* Ac \tag{3}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι $v^* Ac = 0$. Αν στην τελευταία σχέση θέσουμε $v = Ac$ έχουμε ότι: $(Ac)^* (Ac) = 0$. Συνεπώς, $\| Ac \|^2 = 0$ και επομένως $Ac = 0$. Αφού το c είναι αυθαίρετη επιλογή προκύπτει ότι $A = 0$.

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι έαν A είναι ένας μιγαδικός πίνακας , θα συμβολίζουμε με A^* τον συζυγή ανάστροφό του δηλαδή τον πίνακα για τον οποίο ισχύει $\left(A^*\right)_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Στην περίπτωση που ισχύει ότι $A = A^*$ ο πίνακας A καλείται ***<u>Ερμιτιανός</u>*** και είναι πάντοτε ένας τετραγωνικός πίνακας.

Έχουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4</u>: Θεωρούμε έναν μιγαδικό πίνακα A. Οι ακόλουθες δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

i) Ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός

ii) Η ποσότητα $c^* Ac$ ανήκει στο σύνολο $\mathbb{R}$ για κάθε $c \in \mathbb{C}^n$.

Απόδεξη: Θεωρούμε ότι ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός. Τότε έχουμε ότι:

$$\overline{\left(c^* Ac\right)} = \left(c^* Ac\right)^* = c^* A^* c = c^* Ac$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι η ποσότητα $c^* Ac$ ανήκει στο σύνολο $\mathbb{R}$ για κάθε $c \in \mathbb{C}^n$ αφόυ προκύπτει ότι είναι ίση με το συζυγή της.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο. Θεωρούμε ότι ο πίνακας A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = B + iC$ όπου $B = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)$ και $C = \frac{1}{2i}\left(A - A^*\right)$. Θα εξετάσουμε αρχικά ότι οι πίνακες B και C είναι Ερμιτιανοί. Έχουμε ότι:

$$B^* = \frac{1}{2}\left(A^* + A^{**}\right) = \frac{1}{2}\left(A^* + A\right) = B \text{ και}$$

$$C^* = \frac{-1}{2i}\left(A^* - A^{**}\right) = \frac{1}{2i}\left(A - A^*\right) = C$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης προκύπτει ότι αφού οι πίνακες είναι Ερμητιανοί ισχύει ότι οι σχέσεις $c^* Bc, c^* Cc$ είναι πραγματικοί. Δεδομένου ότι ισχύει $c^* Ac = c^* Bc + i c^* Cc$ συμπεραίνουμε ότι $c^* Cc = 0$. Από το λήμμα 2.3 η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι $C = 0$. Συνεπώς, $A = B$ και από τη σχέση $B = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)$ προκύπτει ότι για να ισχύει ότι $A = B$ πρέπει ο πίνακας A να είναι ερμιτιανός.

Σημείωση 2.5: Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει απευθείας ότι ένας μη αρνητικά ορισμένος πίνακας είναι Ερμιτιανός.

ΛΗΜΜΑ 2.6: Εάν ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος, τότε οι ιδιοτιμές του και η ορίζουσα του είναι θετικές.

Απόδειξη: Έστω A ένας θετικά ορισμένος πίνακας και έστω λ μία από τις ιδιοτιμές του.

Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $c \in \mathbb{C}^n$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτμή.

Έχουμε ότι: $0 < c^* A c = c^* \lambda c = \lambda \|c\|^2$. Συνεπώς, $\lambda > 0$.

Δεδομένου ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές και το γινόμενο τους είναι θετικό. Το γινόμενο των ιδιοτιμών όμως είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα A, καθώς από τη γραμμική άλγεβρα έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δίνεται από την σχέση:

$$p(t) = \det\left(A - tI\right) = \left(-1\right)^n \left(t - \lambda_1\right)\left(t - \lambda_2\right)...\left(t - \lambda_n\right)$$

Για $t = 0$ στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, θα αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά το Hadamard γινόμενο δύο μη αρνητικά ορισμένων πινάκων, γνωστό και ως Λήμμα του Schur. Υπενθυμίζουμε ότι το Hadamard γινόμενο δύο $n \times n$ πινάκων A και B είναι ο πίνακας C του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τη σχέση $C_{ij} = A_{ij} B_{ij}$.

<u>ΛΗΜΜΑ SCHUR</u>: Το Hadamard γινόμενο δύο μη αρνητικά ορισμένων πινάκων είναι μη αρνητικά ορισμένο.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sheney W., Light W., 2000, A Course in the Approximation Theory, σελίδα 81.

2.3) Βασικές ιδιότητες και αποτελέσματα θετικά ορισμένων συναρτήσεων

Αφού παρουσιάσαμε βασικά αποτελέσματα γραμμικής άλγεβρας είμαστε σε θέση να παραθέσουμε το ακόλουθο λήμμα:

<u>ΛΗΜΜΑ 2.7</u>: Έστω f μια θετικά ορισμένη συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο X . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $f\left(0 \right) \geq 0$

ii) $f(- x) = \overline{f(x)}, \quad \forall\ x \in X$

iii) $\left| f(x) \right| \leq f(0) \quad \forall \quad x \in X$

<u>Απόδειξη</u>: i) Αν στον ορισμό της θετικά ορισμένης συνάρτησης θέσουμε $n = 1$ προκύπτει ότι ο 1×1 πίνακας $f\left(0 \right)$ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος, άρα $f\left(0 \right) \geq 0$.

ii) Αν στον ορισμό της θετικά ορισμένης συνάρτησης θέσουμε $n=2, x_2=0$ και $x_1 = x$ προκύπτει ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} f(x_1 - x_1) & f(x_1 - x_2) \\ f(x_2 - x_1) & f(x_2 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{bmatrix}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι θετικά ορισμένη, ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος. Επομένως, από τη σημείωση 2.5 προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός και συνεπώς ισχύει $f(-x) = \overline{f(x)} \ \ \forall \ \ x \in X$.

iii) Από το Λήμμα 2.6 έχουμε ότι αν ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος, η ορίζουσα του είναι θετική. Επομένως, αν υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A έχουμε ότι

$$\det A = f(0)^2 - |f(x)|^2 \geq 0$$

Και δεδομένου ότι $f(0) \geq 0$ προκύπτει $|f(x)| \leq f(0) \ \ \forall \ \ x \in X$.

<u>ΛΗΜΜΑ 2.8</u>: Έστω f μια θετικά ορισμένη συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο X . Τότε εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο μηδέν, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο X . Ειδικότερα, ισχύει η ανισότητα:

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\mathrm{Re}\left[f(0) - f(y-x)\right]$$

<u>Απόδειξη</u>: Αν στον ορισμό της θετικά ορισμένης συνάρτησης θέσουμε $n=3$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1 - x_1) & f(x_1 - x_2) & f(x_1 - x_3) \\ \overline{f(x_1 - x_2)} & f(x_2 - x_2) & f(x_2 - x_3) \\ \overline{f(x_1 - x_3)} & \overline{f(x_2 - x_3)} & f(x_3 - x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (4)$$

Έστω τώρα ότι x και y είναι δύο στοιχεία του συνόλου X . Αν στη σχέση (4) θέσουμε $x_1 = x, x_2 = 0$ και $x_3 = x - y$ προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) & f(x) & f(y) \\ \overline{f(x)} & f(0) & f(y-x) \\ \overline{f(y)} & \overline{f(y-x)} & f(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

Κάνοντας τις παραπάνω πράξεις έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) & f(x) & f(y) \\ \overline{f(x)} & f(0) & f(y-x) \\ \overline{f(y)} & \overline{f(y-x)} & f(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_1 f(0) + \bar{c}_2 \overline{f(x)} + \bar{c}_3 \overline{f(y)} & \bar{c}_1 f(x) + \bar{c}_2 f(0) + \bar{c}_3 \overline{f(y-x)} & \bar{c}_1 f(y) + \bar{c}_2 f(y-x) + \bar{c}_3 f(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 \right) f(0) + 2\mathrm{Re}\left\{ \bar{c}_1 c_2 \, f(x) + \bar{c}_1 c_3 \, f(y) + \bar{c}_2 c_3 \, f(y-x) \right\} \geq 0$$

Επιλέγουμε ένα $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $e^{i\theta}\left[f(x) - f(y) \right] = \left| f(x) - f(y) \right|$. Στη συνέχεια θέτουμε στην τελευταία σχέση $c_1 = t$, $c_2 = e^{i\theta}$ και $c_3 = -e^{i\theta}$, όπου $t \in \mathbb{R}$ και $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$,και έχουμε ότι:

$$\left(t^2 + 2\right) f(0) + 2\mathrm{Re}\left\{ te^{i\theta} f(x) - te^{i\theta} f(y) - f(y-x) \right\} \geq 0 \qquad (5)$$

Καθώς από τη μιγαδική ανάλυση έχουμε ότι: $\left| e^{i\theta} \right| = 1$ και $e^{-i\theta} e^{i\theta} = e^0 = 1$.

Κάνοντας τις πράξεις στη σχέση (5) και χρησιμοποιώντας και τη σχέση $e^{i\theta}\left[f(x) - f(y) \right] = \left| f(x) - f(y) \right|$ προκύπτει το ακόλουθο τριώνυμο ως προς t:

$$t^2 f(0) + 2t\left| f(x) - f(y) \right| + 2\mathrm{Re}\left\{ f(0) - f(y-x) \right\} \geq 0$$

Από την άλγεβρα γνωρίζουμε ότι για να είναι ένα τριώνυμο πάντα θετικό πρέπει η ορίζουσα του να είναι αρνητική. Επομένως,

$$4\left| f(x) - f(y) \right|^2 - 4f(0) 2\mathrm{Re}\left[f(0) - f(y-x) \right] \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left| f(x) - f(y) \right|^2 \leq 2f(0)\mathrm{Re}\left[f(0) - f(y-x) \right]$$

Δηλαδή αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε πότε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι θετικά ορισμένη.

<u>**ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9**</u>: Έστω X μη κενό σύνολο . Μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : X \times X \to \mathbb{C}$ λέμε ότι είναι θετικά ορισμένη αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα

$c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}, x_1,\ldots,x_n \in X$ έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \ f(x_i, x_j) \geq 0 \tag{6}$$

2.4) Βασικές ιδιότητες μίας θετικά ορισμένης συνάρτησης δύο μεταβλητών

1) Αν $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε $f(x,x) \geq 0$ και $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$, $s,t \in X$, δηλαδή η f είναι μία Ερμιτιανή συνάρτηση. Ειδικότερα, αν η f παίρνει τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών τότε λέμε ότι η f είναι και συμμετρική.

__**Απόδειξη**__: Αν στη σχέση $\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \ f(x_i, x_j) \geq 0$ θεωρήσουμε ότι $n = 1,\ c_1 = 1, x_1 = x$, συνεπάγεται ότι $f(x,x) \geq 0$. Αν τώρα θέσουμε $x_1 = s,\ x_2 = t$, τότε για όλα τα $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι για $a, \beta \neq 0$:

$$\mathrm{Im}\{(a+\beta j) f(s,t) + (a - \beta j) f(t,s)\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Im}\{(a + j\beta)[\mathrm{Re} f(s,t) + j \,\mathrm{Im} f(s,t)] + (a - j\beta)[\mathrm{Re} f(t,s) + j\,\mathrm{Im} f(t,s)]\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\beta \,\mathrm{Re} f(s,t) + \alpha \,\mathrm{Im} f(s,t) - \beta \,\mathrm{Re} f(t,s) + \alpha \,\mathrm{Im} f(t,s) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\beta(\mathrm{Re} f(s,t) - \mathrm{Re} f(t,s)) + \alpha(\mathrm{Im} f(s,t) + \mathrm{Im} f(t,s)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\overset{a,b\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathrm{Re} f(t,s) = \mathrm{Re} f(s,t) \\ \mathrm{Im} f(t,s) = -\mathrm{Im} f(s,t) \end{cases}$$

Επομένως προκύπτει ότι $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$,δηλαδή η συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι Ερμιτιανή συνάρτηση.

2) Εάν οι $f_1 : X \times X \to \mathbb{C}$ και $f_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις και $a_1, a_2 \geq 0$ τότε η $a_1 f_1 + a_2 f_2$ είναι επίσης μία θετικά ορισμένη συνάρτηση.

__**Απόδειξη**__: Δεδομένου ότι η συνάρτηση $f_1 : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση και η συνάρτηση $a_1 f_1$ με $a_1 > 0$ είναι επίσης μία θετικά ορισμένη συνάρτηση.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τη συνάρτηση $a_2 f_2$ με $a_2 > 0$. Επομένως:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_1 c_i \, \overline{c}_j \; f(x_i, x_j) \geq 0 \text{ και } \sum_{i,j=1}^{n} a_2 \, c_i \, \overline{c}_j \; f(x_i, x_j) \geq 0$$

Αν πάρουμε το άθροισμα τους έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_1 c_i \, \overline{c}_j \; f_1(x_i, x_j) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_2 c_i \, \overline{c}_j \; f_2(x_i, x_j) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \left[\alpha_1 c_i \, \overline{c}_j \; f_1(x_i, x_j) + \alpha_2 c_i \, \overline{c}_j \; f_2(x_i, x_j) \right] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} c_i \, \overline{c}_j \left(\alpha_1 f_1(x_i, x_j) + \alpha_2 f_2(x_i, x_j) \right) \geq 0$$

Αφού το τελευταίο άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός προκύπτει ότι για τη ποσότητα $\alpha_1 f_1(x_i, x_j) + \alpha_2 f_2(x_i, x_j)$ ισχύει $\alpha_1 f_1(x_i, x_j) + \alpha_2 f_2(x_i, x_j) \geq 0$.

3) Εάν $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε για όλα τα $x_1, x_2 \in X$ ισχύει: $\left| f(x_2, x_1) \right|^2 \leq f(x_2, x_2) \, f(x_1, x_1)$. Η ιδιότητα αυτή είναι ουσιαστικά η ανισότητα Cauchy Schwarz για τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις.

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε το Ερμιτιανό 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} f(x_1, x_1) & \overline{f(x_2, x_1)} \\ f(x_2, x_1) & f(x_2, x_2) \end{bmatrix}$. Η συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη αν ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος. Από το κριτήριο του Sylvester έχουμε ότι για να ισχύει αυτό πρέπει όλες οι διαδοχικά ελάσσονες ορίζουσες του να είναι θετικές. Επομένως, αν πάρουμε την ορίζουσα του πίνακα A έχουμε:

$$\det A = f(x_1, x_1) \, f(x_2, x_2) - \left| f(x_2, x_1) \right|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| f(x_2, x_1) \right|^2 \leq f(x_2, x_2) \, f(x_1, x_1)$$

δηλαδή αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

4) Εάν $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε για όλα τα $x_1, x_2, x_3 \in X$ ισχύει η ανισότητα:

$$\left| f\left(x_1,x_2\right)- f\left(x_1,x_3\right)\right|^2 \leq f\left(x_1,x_1\right)\Big(f\left(x_2,x_2\right)+ f\left(x_3,x_3\right)-2\mathrm{Re}\left\{ f\left(x_2,x_3\right)\right\}\Big)$$

Επιπλέον, αν ο χώρος X είναι ένας τοπολογικός χώρος και το πραγματικό μέρος της συνάρτηση f είναι συνεχές σε κάθε σημείο της διαγωνίου, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $X \times X$.

<u>Απόδειξη</u>: Σε μορφή πίνακα η συνάρτηση $f : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$(f(x_i,x_j))_{i,j=1}^3 = \begin{pmatrix} f(x_1,x_1) & f(x_1,x_2) & f(x_1,x_3) \\ f(x_2,x_1) & f(x_2,x_2) & f(x_2,x_3) \\ f(x_3,x_1) & f(x_3,x_2) & f(x_3,x_3) \end{pmatrix}.$$

Αφού η f είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, ο πίνακας $A = (f(x_i,x_j))_{i,j=1}^3$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε αυθαίρετη επιλογή $n \in \mathbb{N}$ και $x_1,\ldots,x_n \in X$. Από το κριτήριο του Sylvester έχουμε ότι ένας πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος όταν όλες οι διαδοχικά ελάσσονες ορίζουσες του είναι θετικές. Επομένως, αν υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A με $\det(A) \geq 0$ και κάνουμε χρήση των σχέσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος του Sylvester προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα της συνέχειας. Έστω $\left(s_0,t_0\right) \in X \times X$ και $(s,t) \rightarrow \left(s_0,t_0\right)$. Έχουμε ότι:

$$\left|f(s,t)- f\left(s_0,t_0\right)\right| \leq \left|f(s,t)- f\left(s,t_0\right)\right| + \left|f\left(s,t_0\right)- f\left(s_0,t_0\right)\right| \tag{7}$$

Λόγω της ιδιότητας

$$\left| f\left(x_1,x_2\right)- f\left(x_1,x_3\right)\right|^2 \leq f\left(x_1,x_1\right)\Big(f\left(x_2,x_2\right)+ f\left(x_3,x_3\right)-2\mathrm{Re}\left\{ f\left(x_2,x_3\right)\right\}\Big)$$

έχουμε ότι

$$\left| f(s,t)- f(s,t_0)\right|^2 \leq f(s,s)\Big(f(t,t)+ f\left(t_0,t_0\right)-2\mathrm{Re}\left\{ f\left(t,t_0\right)\right\}\Big)$$

Και συνεπώς $\lim\left| f(s,t)- f(s,t_0)\right| = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim\left| f(s,t_0)- f(s_0,t_0)\right| = 0$. Επομένως, από την ανισότητα (7) προκύπτει ότι $f(s,t) \rightarrow f\left(s_0,t_0\right)$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε την ακόλουθη πολύ σημαντική ιδιότητα.

5) Έστω I μη κενό σύνολο. Θεωρούμε την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ μιγαδικών συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει ότι $\sum_{i\in I}|f_i(t)|^2<\infty$ για κάθε $t\in X$. Μία συνάρτηση $f: X\times X\to\mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση αν και μόνον αν η συνάρτηση $f(s,t)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(s,t)=\sum_{i\in I} f_i(s)\overline{f_i(t)}$ για $s,t\in X$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Vakhania N.N. ,Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A., 1987, Probability Distributions on Banach Spaces, σελίδα 187.

6) Έστω $f: X\times X\to\mathbb{C}$ και $g: X\times X\to\mathbb{C}$ θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Τότε και η συνάρτηση $k=f\cdot g$ είναι επίσης θετικά ορισμένη συνάρτηση. Ειδικότερα, εάν $f: X\times X\to\mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση, τότε και οι συναρτήσεις $f^n,\ n\in\mathbb{N}$, είναι επίσης θετικά ορισμένες.

Απόδειξη: Θεωρούμε $A_{ij}=f\left(x_i,x_j\right)g\left(x_i,x_j\right)$ και θέλουμε να δείξουμε ότι το γινόμενο αυτό είναι μη αρνητικά ορισμένο. Ο A_{ij} είναι ουσιαστικά το γινόμενο Hadamard δύο μη αρνητικά ορισμένων πινάκων και εφαρμόζοντας το Λήμμα του Schur προκύπτει απευθείας ότι και ο A_{ij} είναι μη αρνητικά ορισμένος. Επομένως, η συνάρτηση $k=f\cdot g$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

Ένας δεύτερος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $k=f\cdot g$ είναι μια θετικά

ορισμένη συνάρτηση είναι ο ακόλουθος:

Δεδομένου ότι η $f: X\times X\to\mathbb{C}$ και η $g: X\times X\to\mathbb{C}$ είναι θετικά ορισμένες

συναρτήσεις, μπορούν να γραφούν στη μορφή $f(s,t)=\sum_{i\in I_1} f_i^{(1)}(s)\overline{f_i^{(1)}(t)}$ και

$g(s,t)=\sum_{i\in I_2} f_i^{(2)}(s)\overline{f_i^{(2)}(t)}$ με $s,t\in X$. Αν πάρουμε το γινόμενο τους τότε και αυτό μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή όπου $i \in I$, με $I = I_1 \times I_2$ και η οικογένεια μιγαδικών συναρτήσεων $(f_i)_{i \in I}$ αποτελείται από συναρτήσεις της μορφής $f_{(i_1, i_2)} = f_{i_1}^{(1)} f_{i_2}^{(2)}$

Συνεπώς η συνάρτηση k είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

7) Εάν $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε και η e^f είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

<u>Απόδειξη</u>: Η e^f μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά ως εξής:

$$e^f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!} = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \frac{f^3}{3!} + \ldots.$$

Έχουμε ότι αφού η $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση και οι

$$\begin{aligned} f^2 &= f \cdot f \\ f^3 &= f \cdot f \cdot f \\ &\;\;\cdots \end{aligned}$$

είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Επομένως η e^f είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός θετικά ορισμένων συναρτήσεων.

Τέλος παραθέτουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή θετικά ορισμένων συναρτήσεων.

<u>ΛΗΜΜΑ 2.10:</u> Έστω ότι η $g : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση και έστω $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε η σειρά $\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$ να

είναι συγκλίνουσα όταν $|z| \le g(0)$. Τότε η συνάρτηση $f(x) := \varphi(g(x)),\quad x \in X$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

<u>Απόδειξη:</u> Από το Λήμμα 2.7 για τις θετικά ορισμένες συναρτήσεις έχουμε ότι για τη συνάρτηση g ισχύει $|g(x)| \le g(0)\ \ \forall\ \ x \in X$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\varphi\big(g(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[g(x)\right]^n , \ z \in \mathbb{C} .$$

Από το Λήμμα του Schur έχουμε ότι οι συνάρτήσεις g^n είναι θετικά ορισμένες και συνεπώς η συνάρτηση $f(x) := \varphi\big(g(x)\big), \quad x \in X$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

2.5) Παραδείγματα Θετικά Ορισμένων Συναρτήσεων

1) Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $y \in X$. Τότε η συνάρτηση $\chi(x) = e^{iyx}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση. Έστω $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ και $c \in \mathbb{C}^n$. Τότε :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_k \, c_j \, e^{iy(x_k - x_j)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k e^{iyx_k} \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-iyx_j} = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-iyx_j} \right|^2 \geq 0$$

2) Η συνάρτηση $\cos x$ είναι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών καθώς μπορεί να γραφεί στη μορφή $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, δηλαδή αποτελεί άθροισμα θετικά ορισμένων συναρτήσεων.

3) Αν η συνάρτηση $f : X \times X \to \mathbb{C}$ είναι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση τότε η $\overline{f}$ και η $\mathrm{Re}\, f$ είναι επίσης θετικά ορισμένες συναρτήσεις.

Πράγματι για την $\overline{f}$ έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} \, \overline{\overline{c_j}} \, \overline{f(x_i, x_j)} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} \, c_j \, f(x_j, x_i) \geq 0$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης f μπορεί να γραφεί ως $\mathrm{Re} k = \frac{1}{2}(k + \overline{k})$ και επομένως είναι και αυτό μία θετικά ορισμένη συνάρτηση ως άθροισμα θετικά ορισμένων συναρτήσεων.

3) Η συνάρτηση $\chi(x) = e^{-\|x\|^2}$, ορισμένη πάνω σε έναν χώρο Hilbert H ($x \in H$) είναι μια

θετικά ορισμένη συνάρτηση . Για $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, και $x_1, \ldots, x_n \in H$ έχουμε ότι :

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} e^{-\|x_i - x_j\|^2} = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} e^{-\|x_i\|^2} e^{-\|x_j\|^2} e^{2\mathrm{Re}<x_i, x_j>} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i' \overline{c_j'} e^{2\mathrm{Re}<x_i, x_j>} \geq 0$$

Όπου :

$c_i' = c_i e^{-\|x_i\|^2}$ και δεδομένου ότι η συνάρτηση $e^{2\mathrm{Re}<x_i, x_j>}$ είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.,1984, Harmonic Analysis on Semigroups, Springer-Verlag New York Inc.

Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

Sheney W., Light W., 2000, A Course in the Approximation Theory, Brooks/Cole Publishing Company

Vakhania N.N. ,Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A., 1987, Probability Distributions on Banach Spaces. D Reidel Publishing Company.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.1) Εισαγωγή, ορισμός και βασικές ιδιότητες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον ορισμό καθώς και βασικές ιδιότητες και θεωρήματα για τη χαρακτηριστική συνάρτηση. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στο Θεώρημα της Αντιστροφής στη μία αλλά και στις *n* διαστάσεις καθώς εκεί αναδεικνύεται και η σημαντικότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Η ανάλυση μας βασίστηκε στους Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory σελίδες 132-145, Gnedenko Boris V., 1997, Theory of Probability, σελίδες 219-258, Lukacs E. and Laha R.G., 1964, Applications of Characteristic Functions σελίδες 19-25, στον Γ.Α. Αθανασούλη , Σημείωσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και στον Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων σελίδες 261-269.

Θεωρούμε τον χώρο πιθανοτήτων $(\mathbb{R}^N, B(\mathbb{R}^N), P_{\vec{X}})$. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 1, το μέτρο πιθανότητας $P_{\vec{X}}$ περιγράφεται πλήρως από τη συνάρτηση κατανομής $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{X_1 X_2 \dots X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$.Όμως ένα μέτρο πιθανότητας $P_{\vec{X}}$ ορίζεται επίσης μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης που είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου πιθανότητας $P_{\vec{X}}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1</u>: Έστω $\vec{X}(\theta)$ ένα τυχαίο διάνυσμα και $P_{\vec{X}}$ το μέτρο πιθανότητας που επάγει. Η **<u>χαρακτηριστική συνάρτηση</u>** του τυχαίου διανύσματος $\vec{X}(\theta)$ ορίζεται ως:

$$\varphi_P(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dP(\vec{x}) \tag{1}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει και είναι καλά ορισμένο αφού η $e^{i<\vec{x},\vec{u}>}$ είναι μια μετρήσιμη και φραγμένη συνάρτηση.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής ως εξής:

$$\varphi_F(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dF(\vec{x}) \tag{2}$$

<u>Σημείωση 3.2</u>: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν υπάρχει πάντα. Στην περίπτωση που υπάρχει, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση γράφεται

$$\varphi_f(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>} f(\vec{x}) d\vec{x} \tag{3}$$

<u>ΛΗΜΜΑ 3.3</u>: Για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$ οποιουδήποτε τυχαίου διανύσματος $\vec{X}(\theta)$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $\varphi_{\vec{X}}(0,0,...,0) = 1$

ii) $\left|\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})\right| \leq 1$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^N$.

iii) $\varphi_{\vec{X}}(-\vec{u}) = \overline{\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})}$ όπου $\overline{\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$.

iv) $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που είναι ορισμένες στον $\mathbb{R}^N$ ως εξής: $\varphi_n \in C_b^{(\mathrm{ch})}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Απόδειξη</u>: i) Πράγματι έχουμε ότι $\varphi_X(0,0,...,0) = \int_{\mathbb{R}^N} 1 dF(\vec{x}) = 1$.

ii) Ισχύει ότι: $\left|\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dF(\vec{x})\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|e^{i<\vec{x},\vec{u}>}\right| dF(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} dF(\vec{x}) = 1$

iii) Πράγματι $\varphi_{\vec{X}}(-\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i<\vec{x},\vec{u}>} dF(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dF(\vec{x})} = \overline{\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})}$

iv) Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^k$ όπου $A \subset \mathbb{R}^N$ είναι ομοιόμορφα συνεχής επί του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος $x, y \in A$ που ικανοποιεί

$\|x - y\| \leq n(\varepsilon)$ ισχύει: $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

Πράγματι, για την χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(\vec{u})$ έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi(\vec{u}+\vec{h})-\varphi(\vec{u})\right\| &= \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i<\vec{x},\vec{u}+\vec{h}>} dF_{\vec{X}}(\vec{x}) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dF_{\vec{X}}(\vec{x})\right\| = \\
&= \left\|\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)e^{i<\vec{x},\vec{u}>} dF_{\vec{X}}(\vec{x})\right\| \le \\
&\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\| \left\|e^{i<\vec{x},\vec{u}>}\right\| dF_{\vec{X}}(\vec{x}) = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\| dF_{\vec{X}}(\vec{x}) \\
&= \mathrm{E}\left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\|
\end{aligned}$$

Όπου το άνω όριο είναι ανεξάρτητο του $\vec{u}$.

Προφανώς, $\lim\limits_{\vec{h}\to 0}\left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\| = 0$ και $\left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\| \le 2$. Από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι $g(\vec{h}) = \mathrm{E}\left\|(e^{i<\vec{x},\vec{h}>}-1)\right\| \to \mathrm{E}(0) = 0$, καθώς $\vec{h}\to 0$. Άρα έχουμε ότι $\left\|\varphi(\vec{u}+\vec{h})-\varphi(\vec{u})\right\| \le g(\vec{h}) \to 0$ καθώς $\vec{h}\to 0$ και αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.

3.2) Το Θεώρημα Bochner στον $\mathbb{R}^N$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Bochner</u>: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ είναι η συνάρτηση g να είναι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση, συνεχής και για την οποία να ισχύει $g(0) = 1$.

<u>Απόδειξη</u>: Το θεώρημα Bochner αποτελεί ένα πολύ βαθύ αποτέλεσμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Γα την απόδειξη του βασιστήκαμε στους Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, σελίδα 138, στον Gnedenko Boris V., 1997, Theory of Probability, σελίδες 243-247, στον LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I, σελίδες 220-222 και στον Lukacs Eugene, 1970, Characteristic Functions, σελίδες 71-73. Έχουμε ότι:

Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε το ότι είναι θετικά ορισμένη προκύπτει πολύ εύκολα καθώς υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι θετικά ορισμένη αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $T_n \subset T$ (με $\#T_n = n \in \mathbb{N}$) και κάθε συνάρτηση $h: T_n \equiv \{t_1, t_2, ..., t_n\} \to \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} g(u-v)h(u)\bar{h}(v) \geq 0$.

Επομένως, αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} g(u-v)h(u)\bar{h}(v) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{u}\sum_{v}\exp\left[i(u-v)x\right]h(u)\bar{h}(v)\right)dF(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{u}\exp(iux)h(u)\right)\left(\sum_{v}\exp(-ivx)\bar{h}(v)\right)dF(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{u}\exp(iux)h(u)\right|^2 dF(x) \geq 0\end{aligned}$$

Για το αντίστροφο έχουμε το εξής:

Έστω ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μη αρνητικά ορισμένη και συνεχής. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι και η χαρακτηριστική συνάρτηση και αυτό συμβαίνει σε ένα σύνολο S_r το οποίο είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και αποτελείται από όλους του ρητούς αριθμούς της μορφής $k/2^n, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,\ n = 1, 2, ...$. Για κάθε ακέραιο n, έστω S_n να είναι το αντίστοιχο υποσύνολο όλων των ρητών της μορφής $k/2^n$ έτσι ώστε να ισχύει $S_n \uparrow S_r$. Αφού η συνάρτηση g είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}$, είναι θετικά ορισμένη και σε κάθε σύνολο S_n. Από το Λήμμα του Herglotz έχουμε ότι μία συνάρτηση g ορισμένη σε ένα σύνολο $D_S = \{... -2c, -c, 0, +c, +2c, ...\}$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνον αν συμπίπτει σε αυτό το σύνολο με μία χαρακτηριστική συνάρτηση $f(u) = \int_{-\pi/c}^{+\pi/c} e^{iux}\, dF(x)$ (για την απόδειξη βλέπε LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I, σελίδα 220). Επομένως, στην περίπτωση μας υπάρχει μία χαρακτηριστική συνάρτηση f_n τέτοια ώστε να ισχύει $g(k/2^n) = f_n(k/2^n)$ για οποιαδήποτε επιλογή k και n. Αφού $S_n \uparrow S_r$ προκύπτει ότι $f_n \to g$ στο σύνολο S_r. Έστω τώρα ότι $0 \leq \theta, \theta_n \leq 1$. Από το Λήμμα του Herglotz έχουμε ότι:

$$1-\operatorname{Re} f_n\left(\theta/2^n\right)=\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\cos\theta x)\,dF_n\left(2^n x\right)\leq$$

$$\leq\int_{-\pi}^{+\pi}(1-\cos x)\,dF_n\left(2^n x\right)=1-\operatorname{Re} g\left(1/2^n\right).$$

Έτσι, λόγω της ανισότητας $|a+b|^2\leq 2|a|^2+2|b|^2$ και της ανισότητας των προσαυξήσεων $|\varphi(u)-\varphi(u+h)|^2\leq 2\{1-\operatorname{Re}\varphi(h)\}$ για κάθε σταθερό $h=\left(k_n+\theta_n\right)/2^n$ έχουμε ότι:

$$\left|1-f_n(h)\right|^2\leq 2\left|1-f_n\left(k_n/2^n\right)\right|^2+4\left(1-\operatorname{Re} f_n\left(\theta^n/2^n\right)\right)\leq$$
$$\leq 2\left|1-g\left(k_n/2^n\right)\right|+4\left(1-\operatorname{Re} g\left(1/2^n\right)\right)$$

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κέντρο προκύπτει ότι η ακολουθία f_n από χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι ισοσυνεχής. Επομένως, από το θεώρημα Ascoli έχουμε ότι περιέχει μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε μία συνεχή συνάρτηση f τέτοια ώστε $g=f$ στο σύνολο S_r και συνεπώς και στο $\mathbb{R}$. Αφού από το θεώρημα συνέχειας η f είναι μία χαρακτηριστική συνάρτηση, δείξαμε αυτό που θέλαμε.

Για την αναγκαιότητα του θετικά ορισμένου και συνεχούς ούτως ώστε να είναι χαρακτηριστική συνάρτηση έχουμε ότι:

Για κάθε $T>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$p_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T g(u-v)e^{-i(u-v)x}\,du\,dv\geq 0$$

Και αφού η συνάρτηση g στο σύνολο $\mathbb{R}$ είναι θετικά ορισμένη και συνεχής το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί ως το όριο από μη αρνητικά αθροίσματα Riemann. Θέτουμε $u=v+t$, ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς v και θέτουμε $g_T(t)=\left(1-\frac{|t|}{T}\right)g(t)$ ή μηδέν ανάλογα με το αν $|t|\leq T$ ή $|t|\geq T$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$p_T(x)=\int e^{-itx}g_T(t)\,dt\geq 0\ .$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)e^{iux}$ και ολοκληρώνουμε ως προς x στο διάστημα $(-X,+X)$. Τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-X}^{+X}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)p_T(x)e^{iux}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin^2 \frac{1}{2}X(t-u)}{\frac{1}{4}X(t-u)^2} g_T(t)\,dt$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μία χαρακτηριστική συνάρτηση καθώς η ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι είναι ένα γινόμενο της εκθετικής συνάρτησης e^{iux} με μία μη αρνητική συνάρτηση και το δεξιά μέλος συγκλίνει στο $g_T(u)$ όταν $X \to \infty$. Επομένως, η συνάρτηση g_T είναι το όριο μίας ακολουθίας από χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Αφού είναι συνεχής στο κέντρο μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα συνέχειας και έτσι η g_T είναι μία χαρακτηριστική συνάρτηση. Αφού $g_T \to g$ όταν $T \to \infty$ εφαρμόζοντας το θεώρημα συνέχειας προκύπτει το ζητούμενο.

3.3) Το Θεώρημα Αντιστροφής της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι στη περίπτωση που υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(\vec{x})$, αυτή ορίζεται μονοσήμαντα με τη χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4:</u> Εάν η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_f(\vec{u})$ ενός τυχαίου διανύσματος $\vec{X}(\theta)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^N$, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής είναι απόλυτα συνεχής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \vec{x},\vec{u}\rangle}\varphi_f(\vec{u})d\vec{u} \tag{4}$$

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι ότι αν τη γνωρίζουμε μπορούμε να πάρουμε την αρχική συνάρτηση κατανομής $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ του τυχαίου διανύσματος $\vec{X}(\theta)$. Σε αυτή τη κατεύθυνση μας διευκολύνει το ακόλουθο θεώρημα. Θα το παρουσιάσουμε αρχικά για $n=1$ και στη συνέχεια θα επεκταθούμε στις πιο πολλές διαστάσεις.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5 (Τύπος Αντιστροφής της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης)</u>: Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$. Αν τα a,b είναι σημεία συνέχειας της $F_X(x)$ με $a<b$ ισχύει ότι:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u)\, du \tag{5}$$

<u>Απόδειξη</u>: Για $U>0$ έχουμε:

$$I_U = \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF(x) du\,. \tag{6}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε αν το I_U είναι πεπερασμένο έτσι ώστε να εφαρμόσουμε στη συνέχεια το θεώρημα Fubini για την εναλλαγή των ολοκληρωμάτων.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x,t\in\mathbb{R}$, $|e^{itx}| = |e^{-itx}| = 1$, οπότε έχουμε:

$$\left| \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} e^{iux} \right| = \left| \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \right| = \left| \int_a^b e^{-iux} du \right| \le \int_a^b dx = b-a\,,$$

Και τελικά:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} e^{iux} \right| dF(x) du \le \frac{c}{\pi} (\mathrm{b}-\mathrm{a}) < \infty$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fubini μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή ολοκλήρωσης στη σχέση (6) και έχουμε:

$$I_U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} e^{iux} du \right) dF(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J(U) dF(x)\ ,\ \text{όπου:}$$

$$J(U) = \int_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} e^{iux} du\ .$$

Έχουμε:

$$\frac{e^{-iua}-e^{-iub}}{iu}\,e^{iux} = \frac{e^{-iu(x-a)}-e^{-iu(x-b)}}{iu} =$$

$$= \frac{1}{iu}\left[\cos[u(x-a)]-\cos[u(x-b)]\right]+\frac{1}{u}[\sin u(x-a)-\sin u(x-b)]$$

Επειδή η $\frac{1}{u}[\cos u(x-a)-\cos u(x-b)]$ είναι περιττή συνάρτηση και η $\frac{1}{u}[\sin u(x-a)-\sin u(x-b)]$ είναι άρτια συνάρτηση προκύπτει ότι :

$$J(\mathrm{U}) = 2\int_0^U \frac{1}{u}[\sin u(x-a)-\sin u(x-b)]du$$

και κάνοντας αντικατάσταση $u(x-a) = \mathrm{v}$ και $u(x-b) = \mathrm{v}$ έχουμε:

$$J(\mathrm{U}) = 2\left[Sgn(x-a)\int_0^{U|x-a|}\frac{\sin v}{v}dv - Sgn(x-b)\int_0^{U|x-b|}\frac{\sin v}{v}dv\right],$$

όπου,

$$Sgnx = \begin{cases} =+1, x>0 \\ =0,\ x=0 \\ =-1, x<0 \end{cases}$$, η συνάρτηση προσήμου.

Αφού $a<b$ έχουμε: $(x-a)>(x-b)$. Θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο των διαφορών $x-a$ και $x-b$. Έχουμε:

I) $x-a>0,\ x-b>0.$ Τότε

$$\frac{1}{2}J(U) = \int_{U(\mathrm{x-b})}^{U(x-a)}\frac{\sin v}{v}dv$$. Όμως

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv = \frac{\pi}{2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{\sin v}{v}dv.$ Υπάρχει A_0 τέτοιο ώστε για $t_1, t_2 > A_0$ και $\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sin v}{v}dv\right| < \varepsilon$,και για $t<A_0$, χωρίζοντας τον χώρο ολοκλήρωσης σε πολλαπλάσια του

π προκύπτει το εξής: $\left|\int_0^t \frac{\sin v}{v} dv\right| \leq H = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v} dv < \infty$. Για $t > A_0$ όπως και στην περίπτωση $t < A_0$ έχουμε ότι: $\left|\int_0^t \frac{\sin v}{v} dv\right| \leq H + \varepsilon < \infty$. Έτσι για κάθε $t_1, t_2 > 0$ το ολοκλήρωμα $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin v}{v} dv$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και τείνει στο μηδέν για $t_1, t_2 \to \infty$

. Επομένως προκύπτει ότι για $x > b$, $\lim_{U \to \infty} \frac{1}{2} J(U) = 0$.

II) $x - a > 0$, $x - b < 0$. Τότε καθώς $U \to \infty$,

$$\frac{1}{2} J(U) = \int_0^{U(\mathrm{x-a})} \frac{\sin v}{v} dv - \int_0^{-U(x-b)} \frac{\sin v}{v} dv =$$

$$\int_{U(x-b)}^{U(\mathrm{x-a})} \frac{\sin v}{v} dv \to 2\int_0^\infty \frac{\sin v}{v} dv = \pi$$

III) Για $x < a$ τότε όπως και στην περίπτωση I) όταν το $U \to \infty$ έχουμε $\frac{1}{2} J(U) \to 0$.

IV) Για $x = a$ ή $x = b$ τότε όταν το $U \to \infty$ έχουμε: $\frac{1}{2} J(U) \to \int_0^\infty \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$.

Τότε, συγκεντρωτικά καθώς το $U \to \infty$ έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi} J(U) \to \frac{1}{2\pi} J(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & (x < a) \cup (x > b) \\ 1/2, & (x = a) \cup (x = b) \\ 1, & a < x < b \end{array} \right\} =$$

$$= I_{(a,b)}(x) + \frac{1}{2}[I_{\{a\}}(x) + I_{\{\mathrm{b}\}}(x)] = g(x)$$

Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση $J(U)$ είναι φραγμένη για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και να καταλήξουμε στο ζητούμενο.

Επειδή η συνάρτηση $x \to \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u} du$, $x \in [0,+\infty)$, είναι συνεχής, με τιμές 0 και π/2 αντίστοιχα για $x = 0$ και $x = \infty$ αντίστοιχα έπεται ότι $\sup\limits_{x \geq 0} \left| \int\limits_0^x \frac{\sin u}{u} du \right| = m < \infty$.

Άρα,

$\sup\limits_x \left| \frac{1}{2\pi} J(U) \right| \leq 2m \big/ \pi < +\infty$ και επομένως

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{\pi} dF_X(x) = \frac{2m}{\pi} < +\infty .$$

Άρα αφού $\lim\limits_{U \to \infty} \frac{1}{2\pi} J(U) = g(x)$ και $\sup\limits_x \left| \frac{1}{2\pi} J(U) \right| \leq 2m \big/ \pi$

με $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{\pi} dF_X(\mathrm{x}) < +\infty$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι :

$$\lim_{U \to +\infty} I_U = \lim_{U \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} J(U) \mathrm{dF}_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(\mathrm{x}) \mathrm{dF}_X(x) = .$$
$$= E[g(X)] = F_X(b) - F_X(a)$$

<u>**ΛΗΜΜΑ 3.6**</u>**:** Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα για το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2} J(\mathrm{U}) = \frac{1}{2} \int\limits_{-U}^{U} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} e^{iux} du$ καθώς το $U \to \infty$ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi} J(U) \to \frac{1}{2\pi} J(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & (x < a) \cup (x > b) \\ 1\!/\!2, & (x = a) \cup (x = b) \\ 1, & a < x < b \end{array} \right\} =$$

$$= I_{(a,b)}(x) + \frac{1}{2}[I_{\{a\}}(x) + I_{\{\mathrm{b}\}}(x)] = g(x)$$

Στις n διαστάσεις το θεώρημα της αντιστροφής γίνεται:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΤΟΝ</u> $\mathbb{R}^N$: Έστω **X** ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής P και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_P(\vec{u})$. Θεωρούμε το n διάστατο διάστημα

$$(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}] = (a_1,a_1+h_1]\times(a_2,a_2+h_2]\times\ldots\times(a_N,a_N+h_N].$$

Τότε:

$$P_{\mathrm{x}}[(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}]] = \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\ldots\int_{-T}^{T}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1-e^{-iu_n h_n}}{ih_n}\right)e^{-i\langle\vec{a},\vec{u}\rangle}\varphi_P(\vec{u})d\vec{u}.$$

<u>Απόδειξη</u>: Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη μας με την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$. Στην περίπτωση αυτή το διάστημά μας είναι το $(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}] = (a_1,a_1+h_1]\times(a_2,a_2+h_2]$ και ο τύπος γράφεται στη μορφή

$$P_{\mathrm{x}}[(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}]] = \frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(\vec{u})d\vec{u} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(u_1,u_2)du_1du_2 \qquad (7)$$

Για $T>0$ έχουμε:

$$I_T = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(u_1,u_2)du_1du_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\int_{\mathbb{R}^N}e^{i<\mathbf{x},\mathbf{u}>}dF(\boldsymbol{x})du_1du_2 = \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)e^{-i(a_1u_1)}\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_2u_2)}\int_{\mathbb{R}^N}e^{i<\mathbf{x},\mathbf{u}>}dF(\boldsymbol{x})du_1du_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-i(a_1u_1)}-e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right)\left(\frac{e^{-i(a_2u_2)}-e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}e^{i(x_1u_1+x_2u_2)}dF(\boldsymbol{x})du_1du_2$$

Αρχικά θα εξετάσουμε αν το I_T είναι πεπερασμένο έτσι ώστε να εφαρμόσουμε στη συνέχεια το θεώρημα Fubini για την εναλλαγή των ολοκληρωμάτων.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_1, x_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $\left|e^{ix_1 u_1}\right| = \left|e^{-ix_1 u_1}\right| = \left|e^{ix_2 u_2}\right| = \left|e^{-ix_2 u_2}\right| = 1$, οπότε έχουμε:

$$\left|\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1} \frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right| \left|\frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right| \left|e^{i(x_1 u_1)}\right| \left|e^{i(x_2 u_2)}\right| =$$

$$= \left|\int_{a_1}^{a_1+h_1} e^{-i\vec{u}\vec{x}} d\vec{u}\right| \left|\int_{a_2}^{a_2+h_2} e^{-i\vec{u}\vec{x}} d\vec{u}\right| \le \int_{a_1}^{a_1+h_1} dx \int_{a_2}^{a_2+h_2} dx = h_1 \cdot h_2$$

Και τελικά:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1} \frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)}\right| dF(\vec{x}) d\vec{u}$$

$$\le \frac{c}{\pi^2}(h_1 h_2) < \infty$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Fubini μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή ολοκλήρωσης στη σχέση (8) και έχουμε:

$$I_T =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right) \left(\frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right) e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} du_1 du_2 dF(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} J(T) dF(\vec{x})$$

, όπου:

$$J(T) =$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right)\left(\frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right)e^{i(x_1u_1+x_2u_2)}du_1du_2 =$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right)e^{i(x_1u_1)}\left(\frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right)e^{i(x_2u_2)}du_1du_2 =$$

$$= \int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-i(a_1 u_1)} - e^{-iu_1(a_1+h_1)}}{ih_1}\right)e^{i(x_1u_1)}du_1\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-i(a_2 u_2)} - e^{-iu_2(a_2+h_2)}}{ih_2}\right)e^{i(x_2u_2)}du_2$$

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα 3.6 καθώς το $T \to \infty$ έχουμε:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}J(T) \to \frac{1}{(2\pi)^2}J(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & (\vec{x} < \vec{a}) \cup (\vec{x} > \vec{a} + \vec{h}) \\ 1/4, & (\vec{x} = \vec{a}\ ) \cup (\vec{x} = \vec{a} + \vec{h}) \\ 1, & \vec{a} < x < \vec{a} + \vec{h} \end{array}\right\} =$$

$$= I_{(\vec{a},\vec{b})}(x) + \frac{1}{4}[I_{\{\vec{a}\}}(x) + I_{\{\vec{b}\}}(x)] = g(x)$$

Μένει να δείξουμε ότι η συνάρτηση $J(T)$ είναι φραγμένη για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και να καταλήξουμε στο ζητούμενο.

Επειδή η συνάρτηση $x \to \int_0^x \frac{\sin u}{u}du$, $x \in [0,+\infty)$, είναι συνεχής, με τιμές 0 και π/2 αντίστοιχα για x=0 και $x = \infty$ αντίστοιχα έπεται ότι $\sup_{x \geq 0}\left|\int_0^x \frac{\sin u_1}{u_1}du_1\right| = m < \infty$ και

$$\sup_{x \geq 0}\left|\int_0^x \frac{\sin u_2}{u_2}du_2\right| = m < \infty$$

Άρα,

$\sup\limits_{x} \left| \frac{1}{(2\pi)^2} J(T) \right| \leq 4m^2 \big/ \pi^2 < +\infty$ και επομένως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4m^2}{\pi^2} dF_X(x) = \frac{4m^2}{\pi^2} < +\infty \ .$$

Άρα αφού $\lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} J(T) = g(x)$ και $\sup\limits_{x} \left| \frac{1}{(2\pi)^2} J(T) \right| \leq 4m^2 \big/ \pi^2 < +\infty$ με $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4m^2}{\pi^2} dF_X(\mathrm{x}) < +\infty$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι :

$$\lim_{T \to +\infty} I_T = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} J(T) \mathrm{dF}_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{g}(x) \mathrm{dF}_{\vec{X}}(\vec{x}) = .$$
$$= E[g(\vec{X})] = P_{\mathbf{x}}\left[(\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}]\right]$$

Επαγωγικά αν θεωρήσουμε το n διάστατο διάστημα

$$(\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}] = (a_1, a_1 + h_1] \times (a_2, a_2 + h_2] \times \ldots \times (a_N, a_N + h_N].$$

Τότε προκύπτει ότι:

$$P_{\mathbf{x}}\left[(\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}]\right] = \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}}} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \ldots \int_{-T}^{T} \left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1 - e^{-i u_n h_n}}{i h_n} \right) e^{-i \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle} \varphi_P(\vec{u}) d\vec{u}$$

3.3.1) Βασικές συνέπειες του θεωρήματος αντιστροφής

Το θεώρημα της αντιστροφής είναι ένα πάρα πολύ βασικό θεώρημα καθώς μας εξασφαλίζει ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μοναδική όπως βλέπουμε στο παρακάτω πόρισμα:

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 3.8</u>: Αν οι $\vec{X}(\theta)$ και $\vec{Y}(\theta)$ είναι τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ και $F_{\vec{Y}}(\vec{x})$ και χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_{\vec{\mathrm{X}}}(\vec{u})$ και $\varphi_{\vec{Y}}(\vec{u})$ αντίστοιχα, τότε: $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{\vec{Y}}(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν $\varphi_{\vec{\mathrm{X}}}(\vec{u}) = \varphi_{\vec{Y}}(\vec{u})$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι το μέτρο P_x ορισμένο πάνω σε σύνολα της μορφής $J = (\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}] = (a_1, a_1 + h_1] \times (a_2, a_2 + h_2] \times \ldots \times (a_N, a_N + h_N]$ ορίζεται μονοσήμαντα από την χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_P(\vec{u})$. Στην περίπτωση που το σύνορο ∂J του J έχει μηδενικό μέτρο τότε το αποτέλεσμα έπεται αμέσως από το θεώρημα της αντιστροφής. Διαφορετικά, θεωρούμε την ακολουθία των συνόλων

$$J_\varepsilon = (\vec{a} + \varepsilon, \vec{a} + \vec{h} - \varepsilon] =$$
$$= (a_1 + \varepsilon, a_1 + h_1 - \varepsilon] \times (a_2 + \varepsilon, a_2 + h_2 - \varepsilon] \times \ldots \times (a_N + \varepsilon, a_N + h_N - \varepsilon]$$

με $\varepsilon > 0$.Εάν $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ τότε $\partial J_{\varepsilon_1} \bigcap \partial J_{\varepsilon_2} = \emptyset$. Αφού το μέτρο P_x είναι ένα πεπερασμένο μέτρο το σύνολο $\left\{\varepsilon > 0 : P_{\mathbf{X}}\left(\partial J_\varepsilon\right) \neq 0\right\}$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, υπάρχει μία ακολουθία $\left\{\varepsilon_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $P_{\mathbf{X}}\left(\partial J_{\varepsilon_n}\right) = 0$ και $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{\varepsilon_n}$. Και έτσι προέκυψε το ζητούμενο.

Το θεώρημα της αντιστροφής μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών αναφορικά με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Στην κατεύθυνση αυτή υπάρχει το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.9: Έστω $\mathbf{X}(\theta) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_n(\theta)\right)$ ένα τυχαίο διάνυσμα με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ και θεωρούμε $\varphi_j(u_j)$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση της συνιστώσας $X_j(\theta)$. Οι συνιστώσες $X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_n(\theta)$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνον αν η σχέση $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)$ ισχύει για κάθε $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι αν οι $X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_n(\theta)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και η κάθε μία από αυτές έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε και το γινόμενο τους έχει πεπερασμένη μέση τιμή και ισχύει $E\left(X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_n(\theta)\right) = E\left(X_1(\theta)\right)E\left(X_2(\theta)\right)\ldots E\left(X_n(\theta)\right)$. Επομένως, η συνθήκη $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)$ είναι αναγκαία για να είναι οι συνιστώσες $X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_n(\theta)$ ανεξάρτητες καθώς γνωρίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μία μέση τιμή. Το γεγονός ότι είναι και ικανή συνθήκη προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\varphi(u_1,u_2,...,u_n) = \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)...\varphi_n(u_n)$ στον τύπο αντιστροφής. Ενδεικτικά για $n=2$,ο χώρος στον οποίο βρισκόμαστε είναι ο $\mathbb{R}^2$, το διάστημά μας είναι το $(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}] = (a_1,a_1+h_1]\times(a_2,a_2+h_2]$ και ο τύπος από το Θεώρημα της αντιστροφής γράφεται στη μορφή

$$P_{\rm x}\left[(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}]\right]=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(\vec{u})d\vec{u}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(u_1,u_2)du_1du_2 \quad (9)$$

Γνωρίζουμε ότι όταν μια συνάρτηση είναι χωριζομένων μεταβλητών μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(x_1,x_2,...,x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n)$ η οποία για $n=2$ γράφεται στη μορφή $f(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$. Επίσης, αν η συνάρτηση $f(x_1,x_2)$ είναι ολοκληρώσιμη τότε έχουμε: $\int f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int f_1(x_1)dx_1\cdot\int f_2(x_2)dx_2$

Επομένως, η σχέση (9) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$P_{\rm x}\left[(\vec{a},\vec{a}+\vec{h}]\right]=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1+a_2u_2)}\varphi_P(u_1,u_2)du_1du_2=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_1u_1)}e^{-i(a_2u_2)}\varphi_P(u_1)\varphi_P(u_2)du_1du_2=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)e^{-i(a_1u_1)}\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_2u_2)}\varphi_P(u_1)\varphi_P(u_2)du_1du_2=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_1h_1}}{ih_1}\right)e^{-i(a_1u_1)}\varphi_P(u_1)du_1\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iu_2h_2}}{ih_2}\right)e^{-i(a_2u_2)}\varphi_P(u_2)du_2=$$

$$= \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iu_1 h_1}}{ih_1} \right) e^{-i(a_1 u_1)} \varphi_P(u_1) du_1 \right) \cdot$$

$$\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iu_2 h_2}}{ih_2} \right) e^{-i(a_2 u_2)} \varphi_P(u_2) du_2 \right)$$

και δεδομένου ότι από το θεώρημα αντιστροφής στη μία διάσταση ισχύει ότι:

$$P_{X_1}\left[\left(a_1, a_1 + h_1\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2\pi)} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iu_1 h_1}}{ih_1} \right) e^{-i(a_1 u_1)} \varphi_P(u_1) du_1$$

Προκύπτει ότι για $n = 2$ έχουμε :

$$P_{\mathbf{X}}[(\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}]] = P_{X_1}\left[(a_1, a_1 + h_1]\right] \cdot P_{X_2}\left[(a_2, a_2 + h_2]\right].$$

Που σημαίνει ότι οι δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1(\theta)$ και $X_2(\theta)$ είναι ανεξάρτητες. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι αν ισχύει η σχέση $\varphi(u_1, u_2, ..., u_n) = \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)...\varphi_n(u_n)$ προκύπτει ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_n(\theta)$ είναι ανεξάρτητες.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το ακόλουθο θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.10</u>:

Έστω $\mathbf{X}(\theta) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_n(\theta)\right)$ και $\mathbf{Y}(\theta) = \left(\mathrm{Y}_1(\theta), \mathrm{Y}_2(\theta), ..., \mathrm{Y}_m(\theta)\right)$ να είναι δύο τυχαία διανύσματα με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, ..., t_n)$ και $\varphi_{\mathbf{Y}}(u_1, u_2, ..., u_m)$ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{Z}(\theta) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_n(\theta), \mathrm{Y}_1(\theta), \mathrm{Y}_2(\theta), ..., \mathrm{Y}_m(\theta)\right)$ με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1, t_2, ..., t_n, u_1, u_2, ..., u_m)$. Τα διανύσματα $\mathbf{X}(\theta)$ και $\mathbf{Y}(\theta)$ είναι ανεξάρτητα αν και μόνον αν η σχέση:

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1, t_2, ..., t_n, u_1, u_2, ..., u_m) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, ..., t_n)\varphi_{\mathbf{Y}}(u_1, u_2, ..., u_m)$$

ισχύει για κάθε $t_1, t_2, ..., t_n, u_1, u_2, ..., u_m \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι στους γραμμικούς ή στους σχεδόν γραμμικούς μετασχηματισμούς οι χειρισμοί διευκολύνονται σημαντικά με τη χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Θέλουμε να βρούμε τις χαρατηριστικές συναρτήσεις των στοχαστικών μεταβλητών:

$$Y(\theta) = \sum_{n=1}^{N} a_n X_n(\theta) + \beta$$

$$\left(\mathbf{Y}(\theta)\right)_m = \sum_{n=1}^{N} A_{mn} X_n(\theta) + B_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

καθώς και ο προσδιορισμός της από κοινού πιθανοθεωρητικής δομής των στοχαστικών μεταβλητών

$$\left(\mathbf{X}(\theta), Y(\theta)\right) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_N(\theta), Y(\theta)\right),$$

$$\left(\mathbf{X}(\theta), \mathbf{Y}(\theta)\right) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), \ldots, X_N(\theta), Y_1(\theta), Y_2(\theta), \ldots, Y_M(\theta)\right)$$

όπου a_n, β, A_{mn}, B_m είναι ντετερμινιστικές ποσότητες.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $Y \;\theta$ κατασκευάζεται άμεσα, ως εξής:

$$\varphi_Y(\upsilon) = \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\upsilon Y \;\theta}] = \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\upsilon\left(\sum_{n=1}^{N} a_n X_n(\theta) + \beta\right)}] =$$

$$= e^{i\upsilon\beta} \cdot \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{n=1}^{N}(\upsilon a_n) X_n(\theta)}] = e^{i\upsilon\beta} \cdot \varphi_{\mathbf{X}}(\upsilon a_1, \upsilon a_2, \ldots, \upsilon a_N).$$

Ομοίως, βρίσκουμε

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_M) = \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m Y_m(\theta)}] = \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m \left(\sum_{n=1}^{N} A_{mn} X_n(\theta) + B_m\right)}] =$$

$$= e^{i\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m B_m} \cdot \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \upsilon_m A_{mn} X_n(\theta)}] = e^{i\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m B_m} \cdot \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m A_{mn}\right) X_n(\theta)}] =$$

$$= e^{i\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m B_m} \cdot \varphi_{\mathbf{X}}\left(\sum_{m=1}^{M} \upsilon_m A_{m1}, \sum_{m=1}^{M} \upsilon_m A_{m2}, \ldots, \sum_{m=1}^{M} \upsilon_m A_{mN}\right).$$

Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε

$$\varphi_{\boldsymbol{X},Y}(\boldsymbol{u},\upsilon) = \varphi_{X_1 X_2 \ldots X_N, Y}(u_1,u_2,\ldots,u_N,\upsilon) = \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{n=1}^{N} u_n X_n(\theta) + i\upsilon Y(\theta)}] =$$

$$= \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{n=1}^{N} u_n X_n(\theta) + i\upsilon\left(\sum_{n=1}^{N} a_n X_n(\theta) + \beta\right)}] = e^{i\upsilon\beta}\cdot \mathrm{E}^{\theta}[e^{i\sum_{n=1}^{N}(u_n + \upsilon a_n) X_n(\theta)}],$$

δηλαδή,

$$\varphi_{\boldsymbol{X},Y}(\boldsymbol{u},\upsilon) = e^{i\upsilon\beta}\cdot\varphi_{\boldsymbol{X}}(u_1 + \upsilon a_1, u_2 + \upsilon a_2, \ldots, u_N + \upsilon a_N),$$

και

$$\varphi_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\upsilon}) = \varphi_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(u_1,u_2,\ldots,u_N,\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_M) =$$
$$= e^{i\sum_{m=1}^{M}\upsilon_m B_m}\cdot\varphi_{\boldsymbol{X}}\left(u_1 + \sum_{m=1}^{M}\upsilon_m A_{m1}, u_2 + \sum_{m=1}^{M}\upsilon_m A_{m2}, \ldots, u_N + \sum_{m=1}^{M}\upsilon_m A_{mN}\right).$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2,\ldots, \mathrm{Y}_n)$ δύο n-διάστατα τυχαία διανύσματα. Το διάνυσμα $\mathbf{Z} = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2,\ldots, X_n + Y_n)$ καλείται το άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2,\ldots, \mathrm{Y}_n)$ και μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Όπως θα δούμε στο ακόλουθο θεώρημα η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ δίνεται από το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των επιμέρους.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.11</u>: Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2,\ldots, \mathrm{Y}_n)$ να είναι δύο ανεξάρτητα τυχαία n-διάστατα διανύσματα με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ και $\varphi_{\mathbf{Y}}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ αντίστοιχα. Το άθροισμα τους $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση την $\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \varphi_{\mathbf{XY}}(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ και στην περίπτωση που οι X,Y είναι ανεξάρτητες έχουμε ότι:
$\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1,t_2,\ldots,t_n)\varphi_{\mathbf{Y}}(u_1,u_2,\ldots,u_n)$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $w = (t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Έχουμε ότι:

$$\varphi_{Z = X + Y}(w) = E^{\theta}[e^{iw(X+Y)}] = E^{\theta}[e^{iw(X)+iw(Y)}] = \varphi_{XY}(w, w)$$

Δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z είναι η από κοινού συνάρτηση των X και Y και στην περίπτωση που οι X και Y είναι ανεξάρτητες έχουμε ότι:

$$\varphi_{Z = X + Y}(w) = \varphi_{XY}(w, w) = \varphi_{X}(w) \cdot \varphi_{Y}(w) .$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικέυεται και για περισσότερες τυχαίες μεταβλητές.

Περισσότερα για τις από κοινού χαρακτηριστικές συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών μπορεί να βρει κανείς στον Γ.Α.Αθανασούλη, Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

3.4) Βασικές Ανισότητες για τη Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζουμε κάποιες βασικές ανισότητες για την χαρακτηριστική συνάρτηση, οι οποίες θα μας είναι πολύ χρήσιμες στη συνέχεια. Η ανάλυση μας βασίστηκε στον Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory σελίδες 137-138, και στον LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I σελίδες 208-211, όπου ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει και να βρει περισσότερα για τις ανισότητες καθώς και εφαρμογές αυτών.

Για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u)$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $1 - \mathrm{Re}\,\varphi(2u) \leq 4\left(1 - \mathrm{Re}\,\varphi(u)\right)$ ή $\mathrm{Re}\left(1 - \varphi(u)\right) \geq \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(1 - \varphi(2u)\right)$

ii) **ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΟΣΑΥΞΗΣΩΝ**: Για κάθε $u, h \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$\left|\varphi(u) - \varphi(u + h)\right|^2 \leq 2\left\{1 - \mathrm{Re}\,\varphi(h)\right\}$ όπου το δεξιά μέλος της ανισότητας είναι ανεξάρτητο από το u .

iii) **TRUNCATION INEQUALITY:** Για $u > 0$ έχουμε ότι:

$$\int_{|x| \leq u^{-1}} (x)^2 \, dF(x) \leq \frac{3}{u^2}\left\{1 - \mathrm{Re}\,\varphi(u)\right\}$$

Όπου με $\mathrm{Re}\,\varphi(u)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\varphi(u)$.

<u>Απόδειξη:</u> i)

$$\begin{aligned} 1-\operatorname{Re}\varphi(2u) &= \int (1-\cos 2ux)\,dF(x) = \\ &= 2\int (1-\cos ux)(1+\cos ux)\,dF(x) = \\ &\le 4\int (1-\cos ux)\,dF(x) = \\ &\le 4\big(1-\operatorname{Re}\varphi(u)\big) \end{aligned}$$

Καθώς από την τριγωνομετρία έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2(1-\cos ux)(1+\cos ux) &= 2\left(1-\cos^2 ux\right) = \\ = 2\left(1-\frac{1+\cos 2ux}{2}\right) &= \frac{\cancel{2}\,(2-1\cos 2ux)}{\cancel{2}} = 1-\cos 2ux \end{aligned}$$

και επιπλέον $(1+\cos ux) \le 2$ καθώς $|\cos ux| \le 1$.

Β΄ τρόπος: Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να προκύψει και από τη σχέση:

$$\begin{aligned} 1-\cos ux &= 2\sin^2\frac{ux}{2} \ge 2\sin^2\frac{ux}{2}\cos^2\frac{ux}{2} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{ux}{2} = \\ &= \frac{1}{4}(1-\cos 2ux) \end{aligned}$$

ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |\varphi(u)-\varphi(u+h)|^2 &= \left[\int e^{iux}\left(1-e^{ihx}\right)dF(x)\right]^2 \\ &\le \int dF(x)\int \left|1-e^{ihx}\right|^2 dF(x) \\ &\le 2\varphi(0)\int (1-\cosh x)\,dF(x) \\ &\le 2\{1-\operatorname{Re}\varphi(h)\} \end{aligned}$$

iii) Δεδομένου ότι $1-\cos x \ge (1/2)x^2\left(1-(1/12)x^2\right)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{Re}\varphi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos ux)\, dF(x) = \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(ux)^2 \left(1 - \frac{1}{12}(ux)^2\right) dF(x) = \\ &\geq \frac{11u^2}{24} \int_{|x| < u^{-1}} x^2\, dF(x) = \\ &\geq \frac{u^2}{3} \int_{|x| < u^{-1}} x^2\, dF(x) \end{aligned}$$

Και επομένως $\int_{\|x\| \leq u^{-1}} (x)^2\, dF(x) \leq \frac{3}{u^2}\left\{1 - \operatorname{Re}\varphi(u)\right\}$.

3.5) Το Θεώρημα Συνέχειας του Levy

Στο παρόν εδάφιο θα δώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ασθενή σύγκλιση των συναρτήσεων κατανομής αναφορικά με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις τους. Σε αυτή τη κατεύθυνση μας βοηθάει το θεώρημα συνέχειας του Levy η σημαντικότητα του οποίου έπεται στο γεγονός ότι μας εξασφαλίζει ότι αν συγκλίνουν οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι σημειακές συναρτήσεις, τότε συγκλίνουν και οι αρχικές συναρτήσεις κατανομής για τη σύγκλιση των οποίων δεν είναι εύκολο να μιλήσουμε εξ αρχής. Επίσης το θεώρημα συνέχειας του Levy μας δείχνει ότι η ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων κατανομής και των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι συνεχής. Η ανάλυση μας βασίστηκε στους Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course σελίδες 179,202-203,225,238, Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure σελίδες 333-337 , Lukacs Eugene, 1970, Characteristic Functions σελίδες 42-55 , Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions σελίδες 38-41, και Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων σελίδες 270-275.

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας με μια ιδιότητα μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών αντίστοιχη με την ιδιότητα του φραγμένου για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3.12</u>: Η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ ή η αντίστοιχη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ θα καλείται ***<u>tight</u>*** όταν έχει την εξής ιδιότητα:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν x και y τέτοια ώστε:

$$F_n(x) < \varepsilon \text{ και } F_n(y) > 1 - \varepsilon \text{ για } n \text{ ικανοποιητικά μεγάλο.}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο διάστημα $(\alpha, b]$ έτσι ώστε $P\left(X_n \in (a,b]\right) > 1 - \varepsilon$, για κάθε n . Αυτό μας εξασφαλίζει ότι δεν θα «χαθεί» κάποιο μέρος της πιθανότητας στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$. Είναι δηλαδή ουσιαστικά μια ιδιότητα αντίστοιχη του φραγμένου για τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ (HELLY) 3.13: Για κάθε ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ υπάρχει μια υπακολουθία $\left\{ F_{n_k}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ και μία μη φθίνουσα, δεξιά συνεχής συνάρτηση $F_X(x)$ (η οποία δεν είναι απαραίτητα αθροιστική συνάρτηση κατανομής) τέτοια ώστε:

$$\lim_{k \to \infty} F_{n_k}(x) = F_X(x)$$

για κάθε σημείο συνέχειας της $F_X(x)$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure σελίδα 336.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.14: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η συνάρτηση όριο $F_X(x)$ στο θεώρημα Helly 3.13 αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_{n_k}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ να είναι tight .

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure σελίδες 336-337.

Θα αναφέρουμε τώρα ένα είδος ειδικής σύγκλισης που μας είναι απαραίτητη για την παράθεση και του θεωρήματος του Levy καθώς και των προτάσεων που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη αυτού. Για την ανάλυση αυτής της σύγκλισης στηριχτήκαμε στον Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course σελίδες 202-203 και 225. Ξεκινάμε παραθέτοντας του ακόλουθους δύο ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.15: Έστω $C(F_X)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της $F_X(x)$. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X όταν το $n \to \infty$ αν και μόνον αν

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x) \text{ όταν } n \to \infty \text{ για όλα τα } x \in C(F_X).$$

Θα συμβολίζουμε με : $X_n \xrightarrow{d} X$ όταν $n \to \infty$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3.16</u>: Η $X_n \xrightarrow{d} X$ όταν $n \to \infty$ αν και μόνον αν για κάθε $h \in C_B$ έχουμε ότι:

$$Eh\left(X_n\right) \to Eh\left(X\right) \text{ όταν } n \to \infty$$

όπου C_B είναι το σύνολο όλων των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.17</u>: Οι ορισμοί 3.15 και 3.16 είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course σελίδα 225.

Η συγκεκριμένη σύγκλιση θα καλείται σε αυτή την ενότητα ως ***<u>ασθενής σύγκλιση</u>***.

Οι ακόλουθες τρεις προτάσεις θα μας χρησιμεύσουν στην απόδειξη του θεωρήματος συνέχειας του Levy στην περίπτωση που είμαστε στη μία διάσταση.Η ανάλυση τους στηρίχτηκε στους Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων σελίδες 272-274 και Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course Λήμμα 4.1 σελίδα 179 και Λήμμα 9.1 σελίδα 238.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 3.18</u>: Αν η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight, και αν κάθε υπακολουθία $\left\{ F_{n_k}\left(x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ της $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει ασθενώς, συγκλίνει προς την ίδια συνάρτηση κατανομής $F_X\left(x\right)$, τότε:

$$F_n(x) \xrightarrow{d} F_X(x)$$

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $F_n(x) \overset{d}{\not\to} F_X(x)$.Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ένα σημείο συνέχειας x της $F_X\left(x\right)$ έτσι ώστε

$$\left|F_n(x) - F_X(x)\right| \geq \varepsilon \text{ για άπειρα } n$$

Κατασκευάζουμε την υπακολουθία $\left\{n_1, n_2, \ldots\right\}$ από όλα αυτά τα άπειρα n για τα οποία ισχύει η παραπάνω ανισότητα. Τότε για την υπακολουθία $\left\{ F_{n_k}\left(x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ έχουμε ότι :

$$\left|F_{n_k}(x) - F_X(x)\right| \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Αφού η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight, τότε και η υπακολουθία $\left\{ F_{n_k}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ της $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει μια συνάρτηση κατανομής $F'(x)$ και μια υπακολουθία $\left\{ F_{n_{k_j}}(x) \right\}_{j=1}^{\infty}$ της $\left\{ F_{n_k}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ έτσι ώστε

$$F_{n_{k_j}}(x) \xrightarrow{d} F'_X(x) \text{ καθώς } j \to \infty$$

Επειδή όμως η $\left\{ F_{n_{k_j}}(x) \right\}_{j=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\left\{ F_{n_k}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ και η $\left\{ F_{n_{k_j}}(x) \right\}_{j=1}^{\infty}$ συγκλίνει ασθενώς έπεται ότι :

$$F_{n_{k_j}}(x) \xrightarrow{d} F_X(x) \text{ καθώς } j \to \infty$$

Επομένως αφού το x είναι σημείο συνέχειας της $F_X(x)$ θα ισχύει ότι $F_{n_{k_j}}(x) \to F_X(x)$ καθώς $j \to \infty$. Αυτό είναι άτοπο διότι από την σχέση (10) έχουμε ότι:

$$\left| F_{n_{k_j}}(x) - F(x) \right| \geq \varepsilon \qquad k = 1, 2, \ldots$$

<u>**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.19**</u>: Έστω $\left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές με ακολουθία συνάρτησεων κατανομής $\left\{ F_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ και με αντίστοιχη ακολουθία χαρακτηριστικών συνάρτησεων $\left\{ \varphi_n(u) \right\}_{n=1}^{\infty}$. Για $t > 0$ έχουμε ότι:

$$P\left(\left| X_n \right| > 2/t \right) \leq \frac{1}{t} \int_{|u|<t} \left(1 - \varphi_n(u) \right) du \tag{11}$$

<u>**Απόδειξη**</u>**:** Λόγω των ανισοτήτων :

$$\frac{\sin tx}{tx} \leq \left| \frac{\sin tx}{tx} \right| \leq 1 \text{ διότι } \left| \sin t \right| \leq \left| t \right|$$

$$\frac{\sin tx}{tx} \leq \frac{1}{tx} = \frac{1}{|tx|} \text{ για } x \geq 2/t \text{ και}$$

$\dfrac{\sin tx}{tx} = \dfrac{\sin\left(t(-x)\right)}{t(-x)} \leq \dfrac{1}{t(-x)} = \dfrac{1}{|tx|}$ για $x \leq 2/t$

και $\dfrac{\sin tx}{tx} \leq \dfrac{1}{2}$ για $|tx| \geq 2$ και επομένως $2\left(1 - \dfrac{\sin tx}{tx}\right) \geq 1$

και $\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1 - e^{iux}\right| dF_n(x)du \leq 4t < \infty$ μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα Fubini να κάνουμε εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης στη σχέση:

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi_n(u))du = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos ux - i\sin ux)dF_n(x)du$$

και έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi_n(u))du &= \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos ux - i\sin ux)dF_n(x)du = \\
&= \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t - \frac{2}{t}\sin tx)dF_n(x) = \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}(1 - \frac{\sin tx}{tx})dF_n(x) = \\
&\geq 2\int_{|x|\geq \frac{2}{t}}(1 - \frac{\sin tx}{tx})dF_n(x) = \\
&\geq 2\int_{|x|\geq \frac{2}{t}}(1 - \frac{1}{|tx|})dF_n(x) = \\
&\geq \int_{|x|\geq \frac{2}{t}} dF_n(x) = P\left(\left|X_n\right| \geq \frac{2}{t}\right)
\end{aligned}$$

<u>**ΠΡΟΤΑΣΗ 3.20**</u>**:** Έστω Έστω $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομής στον $\mathbb{R}^d$ και συμβολίζουμε με $\left\{\varphi_n(u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ την αντίστοιχη ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Τότε αν η ακολουθία των χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\left\{\varphi_n(u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει για κάθε $u \in \mathbb{R}$ σε μια συνάρτηση $\varphi(u)$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight.

Απόδειξη: Επειδή η φ ως χαρακτηριστική συνάρτηση είναι συνεχής στο μηδέν (αλλά και γενικα είναι συνεχής παντού) και $\varphi(0)=1$, έπεται ότι για δοθέν $\varepsilon>0$ υπάρχει $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ (αρκετά μικρό) για το οποίο $\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi(u))du<\varepsilon$ για $t<t_0$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $\varphi_n(u)\to\varphi(u)$ άρα και $\left(1-\varphi_n(u)\right)\to\left(1-\varphi(u)\right)$ και ισχύει πάντα ότι $\left|1-\varphi_n(u)\right|\le 2$ και $\int_{-t}^{t}2du=4t<\infty$. Άρα από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι: $\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi_n(u))du\to\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi(u))du$ όταν $n\to\infty$.

Δηλαδή, υπάρχει $n_0\left(\varepsilon,t(\varepsilon)\right)$ τέτοιο ώστε $\sup\frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi_n(u))du\le\varepsilon$ όταν $n>n_0\left(\varepsilon,t(\varepsilon)\right)$.

Επομένως, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι για δοθέν $\varepsilon>0$ υπάρχει $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ τέτοιο ώστε $P\left(\left|X_n\right|\ge\frac{2}{t}\right)\le\varepsilon$, όταν $n>n_0\left(\varepsilon,t(\varepsilon)\right)$. Επομένως, αν μεγαλώσουμε και άλλο το $\frac{2}{t}$, μπορούμε να βρούμε ένα $\mathrm{M}>0$ τέτοιο ώστε $P\left(\left|X_n\right|\ge\mathrm{M}\right)\le\varepsilon$ για $n>n_0\left(\varepsilon,t(\varepsilon)\right)$.Άρα η ακολουθία συναρτήσεων $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΟΥ LEVY 3.21: Έστω $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομής στον $\mathbb{R}^d$ και συμβολίζουμε με $\left\{\varphi_n(u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ την αντίστοιχη ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η ακολουθία συναρτήσεων $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ασθενώς σε μια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ αν και μόνον αν η ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\left\{\varphi_n(u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει για κάθε $u\in\mathbb{R}$ σε μια συνάρτηση $\varphi(u)$ η οποία είναι συνεχής στο $u=0$. Τότε η συνάρτηση όριο $\varphi(u)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής $F(x)$. Σχηματικά έχουμε ότι:

$$F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\varphi_n(u) \to \varphi(u) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη: Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη μας με το ευθύ του θεωρήματος δηλαδή αν $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$ τότε συνεπάγεται ότι $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_n και X με συναρτήσεις κατανομής $F_n(x)$ και $F(x)$ αντίστοιχα. Πράγματι, αν $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$, τότε για κάθε σταθερό $u \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\cos uX_n \xrightarrow{d} \cos uX$ και $\sin uX_n \xrightarrow{d} \sin uX$ διότι οι συναρτήσεις $x \mapsto \cos ux$ και $x \mapsto \sin ux$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τότε αν $X_n \xrightarrow{d} X$ τότε $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $\cos uX_n$ και $\sin uX_n$ είναι φραγμένες καθώς γνωρίζουμε ότι $\left|\cos uX_n\right| \le 1$ και $\left|\sin uX_n\right| \le 1$.

Επομένως, από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $E(\cos uX_n) \to E(\cos uX)$ και $E(\sin uX_n) \to E(\sin uX)$.

Δηλαδή,

$$E(e^{iuX_n}) = E(\cos uX_n) + i\,E(\sin uX_n) \to$$
$$\to E(\cos uX) + i\,E(\sin uX) = E(e^{iuX})$$

Αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο του θεωρήματος, δηλαδή αν $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$ τότε συνεπάγεται ότι $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$. Από την πρόταση 3.20 έχουμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\left\{\varphi_n(u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ προς τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u)$,που όπως κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση είναι συνεχής στο μηδέν, συνεπάγεται ότι η ακολουθία των αντίστοιχων συναρτήσεων κατανομής $\left\{F_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι tight. Επομένως, υπάρχει μια υπακολουθία $\left\{F_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ και μία συνάρτηση κατανομής F' έτσι ώστε

$$F_{n_k}(x) \xrightarrow{d} F'(x) \text{ καθώς } k \to \infty$$

Λόγω της πρότασης 3.18 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία $\left\{ F_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει ασθενώς, συγκλίνει προς την $F(x)$. Πράγματι, έστω $\left\{ F_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ μία υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς, και έστω ότι συγκλίνει στην F'. Τότε θα έχουμε ότι

$$\varphi_{n_k}(u) \to \varphi'(u) \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

Όπου $\varphi'(u)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της F' .Ταυτόχρονα, όμως επειδή $\left\{ \varphi_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $\left\{ \varphi_n \right\}_{k=1}^{\infty}$ και έχουμε υποθέσει ότι $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$ θα έχουμε ότι και

$$\varphi_{n_k}(u) \to \varphi(u) \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

καθώς από τη μαθηματική ανάλυση γνωρίζουμε ότι αν μία ακολουθία συγκλίνει, τότε και κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο με την αρχική ακολουθία. Άρα λόγω της μοναδικότητας του ορίου έχουμε ότι $\varphi'(u) = \varphi(u)$ και λόγω του μονοσήμαντου της χαρακτηριστικής συνάρτησης προκύπτει ότι $F'(x) = F(x)$.

Σημείωση 3.22: Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει για χρήσιμα πορίσματα του θεωρήματος συνέχειας του Levy στον Lukacs Eugene, 1970, Characteristic Functions σελίδες 50-53.

3.6) Το Θεώρημα Συνέχειας του Levy στις n διαστάσεις.

Τα παρακάτω θεωρήματα είναι χρήσιμα για την απόδειξη του θεωρήματος συνέχειας του Levy στις n διαστάσεις. Για την ανάπτυξη τους χρησιμοποιήθηκαν οι Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions σελίδες 38-41 και 339-345, και Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure σελίδες 333-337 .

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.23: Εάν η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f , τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan (Multivariate Characteristic and Correlation Functions σελίδα 38)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.24</u>: Εάν η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ F_n\left(\vec{x}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ στον $\mathbb{R}^d$ συγκλίνει ασθενώς σε μια συνάρτηση κατανομής $F_X\left(\vec{x}\right)$, τότε η ακολουθία $\left\{ \varphi_n\left(\vec{u}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ των αντίστοιχων χαρακτηριστικών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές σύνολο στη χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi\left(\vec{u}\right)$.

<u>Απόδειξη</u>: Από το θεώρημα ασθενής σύγκλισης έχουμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(\vec{u}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>}dF_n(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\vec{x},\vec{u}>}dF(\vec{x})$$

Επομένως, αφού η ακολουθία των συνεχών χαρακτηριστικών συναρτήσεων συναρτήσεων $\left\{ \varphi_n\left(\vec{u}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνεχή χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi\left(\vec{u}\right)$, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

<u>ΛΗΜΜΑ 3.25</u>: Έστω **X** ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με συνάρτηση κατανομής P και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_P(\vec{u})$. Τότε έχουμε:

$$P_{\mathbf{X}}(K_\alpha) \geq 1-7\cdot \sup_{u\in K_{1/a}}[1-\operatorname{Re}\varphi_P(\vec{u})] \tag{12}$$

Όπου $K_a = [-\vec{a},\vec{a}] = (-a_1,a_1]\times(-a_2,a_2]\times\ldots\times(-a_N,a_N]$.

<u>Απόδειξη</u>:

Επειδή η ποσότητα:

$\int_{K_{1/a}}\int_{\mathbb{R}^N}\left[1-\cos\left(\left\langle\vec{u},\vec{x}\right\rangle\right)\right]dF_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)d\vec{u} < \infty$ μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα Fubini να κάνουμε εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης στη σχέση:

$$\int_{K_{1/a}} \left[1 - \operatorname{Re} \varphi_P(\vec{u})\right] d\vec{u} = \int_{K_{1/a}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 - \cos\left(\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle\right)\right] dF_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{u}$$

Έτσι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{a}\right)^N \cdot \sup_{u \in K_{1/a}} \left[1 - \operatorname{Re} \varphi_P(\vec{u})\right] &\geq \int_{K_{1/a}} \left[1 - \operatorname{Re} \varphi_P(\vec{u})\right] d\vec{u} \\
&= \int_{K_{1/a}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 - \cos\left(\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle\right)\right] dF_{\vec{X}}(\vec{x})\, d\vec{u} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{K_{1/a}} \left[1 - \cos\left(\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle\right)\right] d\vec{u}\, dF_{\vec{X}}(\vec{x}) \\
&= \left(\frac{2}{a}\right)^N \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \left[1 - \prod_{j=1}^{N} \frac{\sin\left(x_j / a\right)}{x_j / a}\right] dF_{\vec{X}}(\vec{x}) \\
&\geq \left(\frac{2}{a}\right)^N \cdot \int_{\mathbb{R}^N \setminus K_a} \left[1 - \prod_{j=1}^{N} \frac{\sin\left(x_j / a\right)}{x_j / a}\right] dF_{\vec{X}}(\vec{x})
\end{aligned}$$

Εάν $y \in \mathbb{R}^N \setminus K_a$ τότε $\left|y_j / a\right| \geq 1$ για τουλάχιστον ένα j .Από την τριγωνομετρία έχουμε ότι:

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \qquad x > 0 \tag{13}$$

Και

$$\sin x \leq x \cdot \frac{\sin y}{y}, \qquad 0 < y \leq \frac{\pi}{2}, \;\; x \geq y \tag{14}$$

Αν στη σχέση (14) θέσουμε όπου $y = 1$ και στη συνέχεια εφαρμόσουμε τη σχέση (13) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin 1}{1} < \frac{101}{120} < \frac{6}{7}, \qquad |x| \geq 1 \text{ και } \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Επομένως, το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να είναι μικρότερο από $\frac{1}{7}$ στο σύνολο $\mathbb{R}^N \setminus K_a$ και έτσι προκύπτει η σχέση

$$\sup_{u\in K_{1/a}}\left[1-\operatorname{Re}\varphi_P(\vec{u})\right]\geq\frac{1}{7}\cdot[1-\left[\left(1-\sin 1\right)\cdot\int_{\mathbb{R}^N\setminus K_a} dF_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)]\right]\Leftrightarrow$$

$$\sup_{u\in K_{1/a}}\left[1-\operatorname{Re}\varphi_P(\vec{u})\right]\geq\frac{1}{7}\cdot[1-P_{\mathrm{X}}(K_\alpha)]\Leftrightarrow$$

$$P_{\mathrm{X}}(K_\alpha)\geq 1-7\cdot\sup_{u\in K_{1/a}}[1-\operatorname{Re}\varphi_P(\vec{u})]$$

Προτού προχωρήσουμε στην παράθεση του θεωρήματος Levy στις n διαστάσεις θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε ένα είδος σύγκλισης μέτρων η οποία θα μας είναι χρήσιμη για την απόδειξη του θεωρήματος.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3.26</u>: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff. Ένα μη αρνητικό ***<u>μέτρο Radon</u>*** μ στον X είναι ένα μη αρνητικό μέτρο Borel τέτοιο ώστε:

i) $\mu(K)<\infty$ για κάθε συμπαγές σύνολο $K\subset X$

ii) $\mu(B)=\sup\left\{\mu(K): K\subset B,\, K \text{ συμπαγές}\right\}$ για κάθε σύνολο Borel $B\subset X$.

Θα συμβολίζουμε με $M_+\left(X\right)$ το σύνολο όλων των μη αρνητικών μέτρων Radon και με $M_+^b\left(X\right)$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων μέτρων στον $M_+\left(X\right)$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3.27</u>: Η ασθενής τοπολογία στο σύνολο $M_+^b\left(X\right)$ είναι η τοπολογία με τα λιγότερα ανοιχτά σύνολα, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\mu\mapsto\int f\,d\mu$ να γίνονται από κάτω ημισυνεχείς για κάθε φραγμένη από κάτω ημισυνεχή πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο X .

Στο επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζουμε τη σύγλιση στην ασθενή τοπολογία. Η σύγκλιση αυτή είναι ουσιαστικά η ίδια σύγκλιση με αυτή που ορίσαμε πριν για το θεώρημα του Levy στη μία διάσταση μόνο που τώρα την εκφράζουμε για σύγκλιση μέτρων.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.28</u>: Για $\mu\in M_+^b\left(X\right)$ και για ένα δίκτυο $\left\{\mu_\alpha\right\}$ στο σύνολο $M_+^b\left(X\right)$ οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

i) $\mu_\alpha \to \mu$ ως προς την ασθενή τοπολογία

ii) $\liminf \mu_\alpha(G) \geq \mu(G)$ για όλα τα ανοιχτά $G \subset X$ και $\lim \mu_\alpha(X) = \mu(X)$

iii) $\limsup \mu_\alpha(F) \leq \mu(F)$ για όλα τα κλειστά $F \subset X$ και $\lim \mu_\alpha(X) = \mu(X)$

iv) $\liminf \int f\, d\mu_\alpha \geq \int f\, d\mu$ για όλες τις φραγμένες κάτω ημισυνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$.

v) $\limsup \int f\, d\mu_\alpha \leq \int f\, d\mu$ για όλες τις φραγμένες άνω ημισυνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$.

Εάν οι ιδιότητες (i)-(v) ικανοποιούνται τότε:

vi) $\lim \int f\, d\mu_\alpha = \int f\, d\mu$ για όλες τις συνεχείς και φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$.

Τέλος, εάν ο χώρος X είναι ένας ***completely regular space***, τότε η ιδιότητα vi) συνεπάγεται τις ιδιότητες (i)-(v).

Θα λέμε ότι ένα δίκτυο $\{\mu_\alpha\}$ από μιγαδικά Radon μέτρα ορισμένα πάνω σε έναν completely regular χώρο ***συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μιγαδικό μέτρο*** μ εάν η σχέση vi) ισχύει.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3.29: Οι μετρικοί χώροι καθώς και οι τοπικά συμπαγείς χώροι Hausdorff είναι completely regular χώροι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.30: Η vague τοπολογία στο σύνολο $M_+(X)$ είναι η τοπολογία με τα λιγότερα ανοιχτά σύνολα, έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\mu \mapsto \int f\, d\mu$ να είναι συνεχείς για κάθε συνάρτηση $f \in C_{00}(X)$.

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τη σύγκλιση ως προς την vague τοπολογία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.31: Έστω X να είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος. Για $\mu \in M_+(X)$ και για ένα δίκτυο $\{\mu_\alpha\}$ στο σύνολο $M_+(X)$ οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

i) $\mu_\alpha \to \mu$ ως προς την vague τοπολογία

ii) $\limsup \mu_\alpha(K) \leq \mu(K)$ για όλα τα συμπαγή $K \subset X$ και $\liminf \mu_\alpha(G) \geq \mu(G)$ για όλα τα σχετικά συμπαγή (δηλαδή η κλειστότητα τους είναι συμπαγής) ανοιχτά $G \subset X$

iii) $\lim \mu_a(B) = \mu(B)$ για όλα τα σχετικά συμπαγή σύνολα B που ανήκουν στην σ-άλγεβρα όλων των Borel υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $\mu(\partial B) = 0$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τη σχέση που συνδέει την ασθενή και την vague τοπολογία.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.32</u>: Έστω X να είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος και έστω $\{\mu_\alpha\}$ ένα δίκτυο στο σύνολο $M_+(X)$. Τότε το δίκτυο $\{\mu_\alpha\}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mu \in M_+^b(X)$ αν και μόνον αν συγκλίνει κατά την vague σύγκλιση στο μέτρο μ και ισχύει $\lim \mu_a(X) = \mu(X)$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.33</u>: Έστω X να είναι ένας τοπικά συμπαγής χώρος και έστω $p > 0$. Το σύνολο

$$\{\mu \in M_+^b(X) : \mu(X) \leq p\}$$

είναι συμπαγές ως προς την vague τοπολογία. Εάν ο X είναι συμπαγής, τότε το σύνολο ολών των Radon μέτρων πιθανότητας ορισμένα πάνω στο σύνολο X είναι συμπαγές ως προς την ασθενή τοπολογία.

Ειδική περίπτωση αυτού του θεωρήματος είναι το θεώρημα Helly που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

<u>Σημείωση</u>: Για αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων καθώς και για περισσότερα αποτελέσματα για αυτές τις συγκλίσεις ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο Κεφάλαιο 2 του βιβλίου των Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.,1984, Harmonic Analysis on Semigroups.

Σύμφωνα με τα παραπάνω είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα συνέχειας του Levy στις n διαστάσεις.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΟΥ LEVY 3.34</u>: Έστω $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομής στον $\mathbb{R}^N$ και συμβολίζουμε με $\{\varphi_n(\vec{u})\}_{n=1}^{\infty}$ την αντίστοιχη ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής

$\left\{ P_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ασθενώς σε μια συνάρτηση κατανομής P αν και μόνον αν η ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\left\{ \varphi_n(\vec{u}) \right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει για κάθε u σε μια συνάρτηση $\varphi(\vec{u})$ η οποία είναι συνεχής στο $\vec{u}=\vec{0}$. Τότε η συνάρτηση όριο $\varphi(\vec{u})$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής P. Σχηματικά έχουμε ότι:

$$\boxed{\begin{gathered} P_n \xrightarrow{d} P \\ \Leftrightarrow \\ \varphi_n(\vec{u}) \to \varphi(\vec{u}) \quad \textit{για κάθε } \vec{u} \in \mathbb{R}^N \end{gathered}}$$

<u>Απόδειξη</u>: Σύμφωνα με το θεώρημα 3.33 η ακολουθία συναρτήσεων κατανομής $\left\{ P_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει μία υπακολουθία $\left\{ P_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει κατά την vague σύγκλιση σε κάποιο πεπερασμένο, μη αρνητικό μέτρο P το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $P\left(\mathbb{R}^N\right) \le 1$. Θα δείξουμε ότι $P\left(\mathbb{R}^N\right) = 1$. Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα του Λήμματος 3.25 $P_{\mathbf{X}}(K_\alpha) \ge 1 - 7 \cdot \sup\limits_{u \in K_{1/a}} [1 - \operatorname{Re} \varphi_P(\vec{u})]$ για την υπακολουθία $\left\{ P_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ έχουμε ότι:

$$P_{n_k}(K_m) \ge 1 - 7 \cdot \sup_{u \in K_{1/m}} [1 - \operatorname{Re} \varphi_{n_k}(\vec{u})]$$

Για όλα τα $k, m \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας για την παραπάνω ανισότητα το ελάχιστο άνω φράγμα $\limsup\limits_k$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.31 έχουμε ότι:

$$P\left(K_m\right) \ge \limsup_k P_{n_k}(K_m) \ge 1 - 7 \cdot \sup_{u \in K_{1/m}} [1 - \operatorname{Re} \varphi_P(\vec{u})] .$$

Αν τώρα $m \to \infty$ και δεδομένου ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μια συνεχής συνάρτηση $\varphi_P(\vec{u})$ και επιπλέον $\varphi\left(\vec{0}\right) = 1$, προκύπτει ότι $P\left(\mathbb{R}^N\right) \ge 1$. Όμως, με βάση το θεώρημα 3.33 είχαμε βρει ότι $P\left(\mathbb{R}^N\right) \le 1$ και επομένως ισχύει η ισότητα $P\left(\mathbb{R}^N\right) = 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 3.32, η υπακολουθία $\left\{ P_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει ασθενώς στη συνάρτηση κατανομής P.

Από το θεώρημα 3.24 έχουμε ότι $\varphi(\vec{u})$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της συνάρτησης κατανομής P. Δεδομένου ότι η συνάρτηση κατανομής P ορίζεται μονοσήμαντα από την χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(\vec{u})$, έχουμε ότι κάθε ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της ακολουθίας συναρτήσεων $\left\{ P_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ έχει σαν όριο την ίδια συνάρτηση κατανομής P. Αυτό σημαίνει ότι και ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει ασθενώς στη συνάρτηση κατανομής P.

3.7) Σχέση Χαρακτηριστικής Συνάρτησης και Ροπών

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ της ύπαρξης των ροπών μιας συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ και της διαφορισιμότητας της χαρακτηριστικής της συνάρτησης. Η ανάλυση μας βασίστηκε στους Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory σελίδες 145-148,Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course σελίδες 175-179, LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I σελίδες 212-213 , Lukacs E. and Laha R.G., 1964, Applications of Characteristic Functions, σελίδες 20 και 25, Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδες 11-12 και 267-269, Αθανασούλης Γ.Α., Σημειώσεις για το μάθημα “Προτυποποίηση του Συνεχούς’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών ενότητα 2.3.δ (ii), και Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων σελίδες 276-285.

Γνωρίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και επίσης ικανοποιεί την ιδιότητα $\varphi_X(0) = 1$. Αφού η ποσότητα $\left[\dfrac{e^{ihx} - 1}{h}\right]$ είναι μία φραγμένη ποσότητα έχουμε από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης για $h \to 0$ ότι:

$$
\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{ihx} - 1}{h}\right)dF(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ihx} - 1}{h}\right)dF(x) = \\
&= i\int_{\mathbb{R}} x\,dF(x) = i\mu_1
\end{aligned}
$$

Έτσι βλέπουμε ότι η πρώτη παράγωγος της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\varphi_X(u)$ στο μηδέν υπάρχει και είναι πεπερασμένη, εάν η πρώτη ροπή της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Ώστόσο δεν ισχύει το αντίστροφο. Η διαφορισιμότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της μέσης τιμής.

Έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.35: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$. Εάν $E|X|^n < \infty$ για κάποιο $n = 1, 2, \ldots,$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι k φορές παραγωγίσιμη, δηλαδή οι $\varphi^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχουν και είναι ομοιόμορφα συνεχείς και ισχύουν:

$$\varphi^{(k)}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (ix)^k e^{iux} dF(x) \tag{15}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot E X^k \tag{16}$$

Απόδειξη: Αφού η απόλυτη ροπή n τάξης της συνάρτησης κατανομής $F_X(x)$ είναι πεπερασμένη έχουμε ότι:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{iux} dF(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^n dF(x) < \infty \ .$$

Έχουμε ότι:

$$\varphi'(u) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(u+h) - \varphi(u)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(u+h)x} - e^{iux}}{h} dF(x)$$

Και επειδή η ποσότητα $\left| \dfrac{e^{iux} (e^{ihx} - 1)}{h} \right| \leq |x|$ είναι δηλαδή φραγμένη, έχουμε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ότι:

$$\varphi'(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) dF(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} ix e^{iux} dF(x)$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο έχουμε ότι:

$$\varphi''(u) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi'(u+h)-\varphi'(u)}{h}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} ix\left(\frac{e^{i(u+h)x}-e^{iux}}{h}\right)dF(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} ixe^{iux}\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ihx}-1}{h}\right)dF(x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (ix)^2 e^{iux}\, dF(x)$$

.Επαγωγικά έχουμε ότι $\varphi^{(k)}(u) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{iux} dF(x)$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει απευθείας η σχέση $\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot EX^k$ αν θέσουμε όπου $u = 0$.

Για την ομοιόμορφη συνέχεια της παραγώγου έχουμε :

$$\left|\varphi^{(k+1)}(u+h)-\varphi^{(k+1)}(u)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(ix)^{k+1}e^{iux}(e^{ihx}-1)dF_X(x)\right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{k+1}\left|e^{ihx}-1\right|dF_X(x)$$

Προφανώς, $\lim_{h\to 0}\left|e^{ihx}-1\right| = 0$ και $\left|e^{ihx}-1\right| \leq 2$. Από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $g(h) = \mathrm{E}\left|e^{ihx}-1\right| \to \mathrm{E}(0) = 0$, καθώς $h \to 0$. Άρα προκύπτει ότι $\left|\varphi^{(k+1)}(u+h)-\varphi^{(k+1)}(u)\right| \leq g(h) \to 0$ καθώς $h \to 0$ και αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.

<u>Σημείωση 3.36:</u> i) Από την ιδιότητα $\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot EX^k$ βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση συνδέεται με τις ροπές EX^k της τυχαίας μεταβλητής X κατά τρόπο ανάλογο με τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X ,$M_X(u) = E\left(e^{uX}\right)$. Όμως, για να χαρακτηρίζει η ροπογεννήτρια συνάρτηση την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής πρέπει να υπάρχει κάποια μικρή περιοχή του μηδενός έστω $(-\varepsilon,\varepsilon)$ τέτοια ώστε η ροπογεννήτρια για

$u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ συνάρτηση να είναι πεπερασμένη. Αποδεικνύεται όμως ότι αν υπάρχει τέτοιο ε, τότε και όλες οι ροπές πρέπει να είναι πεπερασμένες χωρίς να ισχύει όμως το αντίστροφο. Από το γεγονός αυτό βλέπουμε την υπεροχή της χαρακτηρισικής συνάρτησης έναντι της ροπογεννητριας καθώς η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζεται για κάθε τυχαία μεταβλητή και για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

ii) Η παραπάνω πρόταση δεν συνεπάγεται ότι οι παράγωγοι της χαρακτηριστικής συνάρτησης υπάρχουν πάντα. Στον αντίποδα, η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να είναι μη διαφορίσιμη ακόμα και όταν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα της μαθηματικής ανάλυσης, τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για το υπόλοιπο Taylor, ο οποίος τύπος θα μας είναι πάρα πολύ χρήσιμος στη συνέχεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.37: Έστω $f = f_1 + i\, f_2$ μία τυχαία μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το α. Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f_1, f_2 έχουν συνεχείς παραγώγους $n+1$ τάξης στο πεδίο ορισμού της f τότε:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)dy \tag{17}$$

Και στην περίπτωση που έχουμε κέντρο $a = 0$ έχουμε ότι:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n f^{(n+1)}(y)dy \ . \tag{18}$$

Επομένως στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης, δηλαδή όταν $f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n (e^{iy})^{(n+1)} dy = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n (i^{n+1} e^{iy}) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!}\int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει τη διαφορά της εκθετικής συνάρτησης e^{ix} από το αντίστοιχο προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor βαθμού n , $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}$.

Αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη την σχέση $e^{ix} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy$ προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-y)^{n-1} e^{iy} dy &= -\frac{(x-y)^n}{n} e^{iy} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n} (ie^{iy}) dy = \\
&= \frac{x^n}{n} + \frac{i}{n} \int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy = \\
&= \int_0^x (x-y)^{n-1} dy + \frac{i}{n} \int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy
\end{aligned}$$

Από την οποία σχέση συνεπάγεται: $\int_0^x (x-y)^{n-1} (e^{iy} - 1) dy = \frac{i}{n} \int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy$ και έτσι προκύπτει ότι συγκεντρωτικά για την διαφορά της εκθετικής συνάρτησης από το αντίστοιχο προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor βαθμού n έχουμε:

$$e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} = \begin{cases} \dfrac{i^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy \\ \dfrac{i^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} (e^{iy} - 1) dy \end{cases}$$

Έτσι για $x \geq 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| &= \begin{cases} \left| \dfrac{i^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^n e^{iy} dy \right| \\ \left| \dfrac{i^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} (e^{iy} - 1) dy \right| \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x \left| (x-y)^n \right| \cdot \left| e^{iy} \right| dy \\ \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x \left| (x-y)^{n-1} \right| \cdot \left| (e^{iy} - 1) \right| dy \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^n dy \\ \dfrac{2}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} dy \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ \dfrac{2x^n}{n!} \end{cases}$$

Άφου $\left|(e^{iy}-1)\right| \leq \left|e^{iy}\right| + 1 = 2$.

Άντίστοιχα για $x < 0$ έχουμε ότι:

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{i^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-y)^n e^{iy}dy\right| \\ \left|\dfrac{i^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1}(e^{iy}-1)\,dy\right| \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_x^0 \left|(x-y)^n\right| \cdot \left|e^{iy}\right| dy \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_x^0 \left|(x-y)^{n-1}\right| \cdot \left|(e^{iy}-1)\right| dy \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_x^0 (x-y)^n dy \\ \dfrac{2}{(n-1)!}\displaystyle\int_x^0 (x-y)^{n-1} dy \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \dfrac{2(-x)^n}{n!} \end{cases}$$

Επομένως συγκεντρωτικά προκύπτει:

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right\} \tag{19}$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει κάποια άνω όρια για τη διαφορά ανάμεσα στην χαρακτηριστική συνάρτηση και τους πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor όταν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός ροπών.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.38</u>: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$.

i) Εάν $E|X|^n < \infty$ για κάποιο $n = 1,2,...,$ τότε:

$$\left|\varphi(u) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iu)^k}{k!}E\left(X\right)^k\right| \le E\ \min\left\{2\frac{|u|^n|X|^n}{n!}, \frac{|u|^{n+1}|X|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}. \qquad (20)$$

Ειδικότερα, $$|\varphi(u) - 1| \le E\ \min\{2, |uX|\}. \qquad (21)$$

Εάν $E|X| < \infty$, τότε: $|\varphi(u) - 1 - iu\,E\,X| \le E\ \min\{2|uX|, u^2X^2/2\}$ (22)

και αν $E\,X^2 < \infty$, τότε $\left|\varphi(u) - 1 - iu\,E\,X + u^2E\left(X\right)^2/2\right| \le E\ \min\left\{u^2X^2, |uX|^3/6\right\}$ (23)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>:

i) Έχουμε ότι

$$\left|\varphi(u) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iu)^k}{k!}E\left(X\right)^k\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{iux}dF(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iu)^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} x^k dF(x)\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}}\left|e^{iux} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iux)^k}{k!}\right|dF(x)$$

Και λόγω της σχέσης

$\left|e^{iux} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iux)^k}{k!}\right| \le \min\left\{\frac{|u|^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|u|^n|x|^n}{n!}\right\}$ προκύπτει ότι:

$$\left|\varphi(u) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iu)^k}{k!}E\left(X\right)^k\right| \le E\ \min\left\{2\frac{|u|^n|X|^n}{n!}, \frac{|u|^{n+1}|X|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}.$$

Η σχέση $|\varphi(u) - 1| \le E\ \min\{2, |uX|\}$ προκύπτει απευθείας από τη σχέση

$\left|\varphi(u) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(iu)^k}{k!}E\left(X\right)^k\right| \le E\ \min\left\{2\frac{|u|^n|X|^n}{n!}, \frac{|u|^{n+1}|X|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}$ για $n = 0$. Αντίστοιχα από την ίδια σχέση προκύπτει για $n = 1$ η σχέση $|\varphi(u) - 1 - iu\,E\,X| \le E\ \min\{2|uX|, u^2X^2/2\}$ και για $n = 2$ η σχέση $\left|\varphi(u) - 1 - iu\,E\,X + u^2E\left(X\right)^2/2\right| \le E\ \min\left\{u^2X^2, |uX|^3/6\right\}$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.39</u>: i) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_X(u)$.) Εάν $E|X|^n < \infty$ για κάποιο $n = 1, 2, \dots$, τότε ισχύει ότι:

$$\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E(X)^k + o(|u|^n) \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; u \to 0 \tag{24}$$

Ειδικότερα, εάν $E\,X = 0$ και $VarX = 1$, τότε

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; u \to 0 \tag{25}$$

ii) Εάν $E|X|^n < \infty$ για όλα τα $n = 1, 2, \dots$ και $\frac{|u|^n}{n!} E|X|^n \to 0$ όταν $n \to \infty$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} E(X)^k \tag{26}$$

(Η σχέση αυτή μας λέει ουσιαστικά ότι όταν έχουμε πεπερασμένες ροπές k τάξης, η χαρακτηριστική συνάρτηση έχει ανάπτυγμα Taylor το οποίο δίνεται από τον τύπο $\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} E(X)^k$).

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: i) Από το Θεώρημα 3.38 έχουμε ότι:

$$\left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E(X)^k \right| \le E \min\left\{ 2\frac{|u|^n |X|^n}{n!}, \frac{|u|^{n+1}|X|^{n+1}}{(n+1)!} \right\} =$$

$$= |u|^n E \min\left\{ 2\frac{|X|^n}{n!}, \frac{|u||X|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

Η ποσότητα $\min\left\{ 2\frac{|X|^n}{n!}, \frac{|u||X|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$ καθώς το $u \to 0$ συγκλίνει στο μηδέν και είναι επίσης φραγμένη από την ποσότητα $2\frac{|X|^n}{n!}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη και έτσι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$E \min\left\{ 2\frac{|X|^n}{n!}, \frac{|u||X|^{n+1}}{(n+1)!} \right\} \to 0 \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; n \to \infty$$

Και αυτό σημαίνει ότι το άνω όριο ισούτε με $o(|u|^n) \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; u \to 0$ και επομένως έχουμε

$$\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E\left(X\right)^k + o(|u|^n) \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; u \to 0 \,.$$

Η σχέση $\varphi(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ $\acute{o}\tau\alpha\nu$ $u \to 0$ με $E\,X = 0$ και $VarX = 1$ προκύπτει αμέσως από τη σχέση $\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E\left(X\right)^k + o(|u|^n)$ για $n = 2$ δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} &VarX = E\left(X\right)^2 - \left(EX\right)^2 \Leftrightarrow \\ &E\left(X\right)^2 = VarX + \left(EX\right)^2 \Leftrightarrow \\ &E\left(X\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = 1 + \frac{(iu)^2}{2!} E\left(X\right)^2 + o(|u|^2) \Leftrightarrow \\ &\varphi(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \end{aligned} .$$

ii) Έχουμε ότι:

$$\left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E\left(X\right)^k \right| \le E \,\min\left\{ 2\frac{|u|^n |X|^n}{n!}, \frac{|u|^{n+1} |X|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

Επομένως,

$$\left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} E\,(X^k) \right| \le \frac{2|u|^n}{n!} E|X|^n \to 0 \qquad \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \;\; n \to \infty$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} &\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} E\,(X^k) \Leftrightarrow \\ &\varphi(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} E\,(X^k) \end{aligned}$$

3.8) Το ανάπτυγμα Taylor της Χαρακτηριστικής Συνάρτησης στις n διαστάσεις.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα από τον λογισμό πολλών μεταβλητών, που θα μας βοηθήσει στη συνέχεια να βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της χαρακτηριστικής συνάρτησης στις n διαστάσεις. Περισσότερα για το ανάπτυγμα Taylor στις n διαστάσεις μπορεί να βρει κανείς στους Δανίκας Ν., Μαριάς Μ., 2003, Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού Πολλών Μεταβλητών, Κεφάλαιο 5, σελίδες 117-161.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ 3.40</u>: Έστω f να είναι μία πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα ανοιχτό, κυρτό σύνολο $S \subset \mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε για έναν θετικό ακέραιο n, όλες οι μερικές παράγωγοι $D^a f$ $, a \in N_0^N$, $|a| \leq n$ να υπάρχουν και να είναι συνεχείς. Τότε, για όλα τα $t, a \in S$ έχουμε:

$$f(t) = \sum_{|a| \leq n} \frac{D^a f(a)}{a!} \cdot (t-a)^a + \sum_{|a|=n} R_a(t) \cdot (t-a)^a \tag{27}$$

όπου:

$$R_a(t) = \frac{n}{a!} \cdot \int_0^1 \left(D^a f\left(a + x(t-a)\right) - D^a f(a) \right) \cdot (1-x)^{n-1} dx \tag{28}$$

Οι όροι του υπολοίπου $R_a(t)$ ικανοποιούν την ανισότητα :

$$\left| R_a(t) \right| \leq \frac{1}{a!} \cdot \sup_{y \in L} \left| D^a f(y) - D^a f(a) \right| \tag{29}$$

όπου L συμβολίζει τη γραμμή που εννώνει το a με το t .

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδα 268.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.41</u>: Έστω f να είναι μία πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα ανοιχτό, κυρτό σύνολο $S \subset \mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε για έναν θετικό ακέραιο n, όλες οι μερικές παράγωγοι $D^a f$ $, a \in N_0^N$, $|a| \leq n$ να υπάρχουν και να είναι συνεχείς. Τότε, για όλα τα $t, a \in S$ υπάρχουν $\theta, \eta \in (0,1)$ που εξαρτόνται από το t τέτοια ώστε:

$$f(t) = \sum_{|a| \leq n-1} \frac{D^a f(a)}{a!} \cdot (t-a)^a + \sum_{|a|=n} Q_a(t) \cdot (t-a)^a \tag{30}$$

όπου:

$$Q_a(t) = \frac{1}{a!}\cdot\left[\operatorname{Re} D^a f\left(a+\theta\cdot(t-a)\right) + i\cdot \operatorname{Im} D^a f\left(a+\eta\cdot(t-a)\right)\right] \qquad (31)$$

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδα 269.

Από το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και από την Πρόταση 3.35 προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.42</u>: Έστω $\vec{X}$ ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$ και όλες οι ροπές α τάξης υπάρχουν, έχουμε ότι:

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \sum_{|a|\le n} \frac{E(\vec{X}^{a})}{a!}\cdot\left(i\vec{u}\right)^a + \sum_{|a|=n} R_a(\vec{u})\cdot(\vec{u})^a, \quad \vec{u}\in\mathbb{R}^N \qquad (32)$$

όπου:

$$R_a(\vec{u}) = \frac{n}{a!}\cdot\int_0^1 \left(D^a\varphi\left(\langle\vec{x},\vec{u}\rangle\right) - D^a\varphi(0)\right)\cdot\left(1-\vec{x}\right)^{n-1} d\vec{x} \qquad (33)$$

Αν αντί για το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.42 σε συνδυασμό με την πρόταση 3.35 έχουμε το ακόλουθο, πιο βολικό στη χρήση, Θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.43</u>: Έστω $\vec{X}$ ένα τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση κατανομής $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$ και όλες οι ροπές α τάξης υπάρχουν. Τότε, υπάρχουν $\theta,\eta\in(0,1)$ που εξαρτόνται από το $\vec{u}$ τέτοια ώστε:

$$\varphi(\vec{u}) = \sum_{|a|\le n-1} \frac{E(X^{a})}{a!}\cdot\left(i\vec{u}\right)^a + \sum_{|a|=n} Q_a(\vec{u})\cdot(\vec{u})^a \qquad (34)$$

όπου:

$$Q_a(\vec{u}) = \frac{1}{a!}\cdot\left[\operatorname{Re} D^a f\left(\theta\vec{u}\right) + i\cdot \operatorname{Im} D^a f\left(\eta\vec{u}\right)\right] \qquad (35)$$

Πολύ συχνά χρησιμοποιείται και το ακόλουθο πόρισμα:

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 3.44</u>: Έστω $\mathbf{X}(\theta) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_N(\theta)\right)$ ένα τυχαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $E\left(X_j^2\right) \leq \infty$ για όλα τα j. Για τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi_{\vec{X}}(\vec{u})$ του τυχαίου διανύσματος έχουμε ότι:

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{u}) = 1 + i\sum_{j=1}^{N} E\left(X_j\right)u_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left[E\left(X_i X_j\right) + R_{i,j}(\vec{u})\right]u_i u_j \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^N \tag{36}$$

όπου $\left|R_{i,j}(\vec{u})\right| \leq 2E\left(\left|X_i X_j\right|\right)$ και $\lim\limits_{\vec{u} \to \vec{0}} R_{i,j}(\vec{u}) = 0$.

Επιπλέον, υπάρχουν $\theta, \eta \in (0,1)$ που εξαρτόνται από το $\vec{u}$ τέτοια ώστε:

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{u}) = 1 + i\sum_{j=1}^{N} E\left(X_j\right)u_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left[\mathrm{Re}\,\varphi_{u_i,u_j}(\theta\vec{u}) + i\,\mathrm{Im}\,\varphi_{u_i,u_j}(\eta\vec{u})\right]u_i u_j \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^N \tag{37}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3.45</u>: Έστω $\mathbf{X}(\theta) = \left(X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_N(\theta)\right)$ ένα τυχαίο διάνυσμα με χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi\left(u_1, u_2, ..., u_N\right)$. Υποθέτουμε ότι κάθε συνιστώσα $X_j(\theta)$ του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}(\theta)$ έχει πεπερασμένες ροπές μέχρι τάξης m. Τότε όλες οι ροπές γινόμενο τάξης m του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{X}(\theta)$ υπάρχουν. Επιπλέον ισχύει ότι:

$$\left[\frac{\partial^m \varphi\left(u_1, u_2, ..., u_N\right)}{\partial t_1^{j_1}\partial t_2^{j_2} ... \partial t_N^{j_N}}\right]_{t_1 = t_2 = ... t_N = 0} = i^m E\left(X_1^{j_1} X_2^{j_2} ... X_N^{j_N}\right) \tag{38}$$

με $j_1 + j_2 + ... + j_N = m$.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Lukacs E. and Laha R.G., 1964, Applications of Characteristic Functions, σελίδα 25.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.,1984, Harmonic Analysis on Semigroups, Springer-Verlag New York Inc.

Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, Wiley Eastern Limited

Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure, John Wiley & Sons, Inc

Gnedenko Boris V., 1997, Theory of Probability, Gordon and Breach Science Publishers

Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course, Springer

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I, Springer

Lukacs Eugene, 1970, Characteristic Functions, Charles Griffin and Company Limited.

Lukacs E. and Laha R.G. (1964).Applications of Characteristic Functions. Charles Griffin and Company Limited.

Sasvari Zoltan (2013). Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

Vakhania N.N. ,Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A. (1987). Probability Distributions on Banach Spaces. D Reidel Publishing Company.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημειώσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημειώσεις για το μάθημα "Προτυποποίηση του Συνεχούς'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Δανίκας Ν., Μαριάς Μ., 2003, Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού Πολλών Μεταβλητών, Εκδόσεις Ζήτη

Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων, Αθήνα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

4.1) Εισαγωγή και Βασικοί Ορισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια κατηγορία θετικά ορισμένων συναρτήσεων, τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης. Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής συνάρτησης δευτέρας τάξεως $X(t,\theta)$, η οποία είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση δύο μεταβλητών και θα τη συμβολίζουμε με $R_{XX}(t,t')$. Η ανάλυση μας βασίστηκε στον LOÈVE, M., 1977, Probability Theory 2, Springer σελίδες 131 -139 και στον Γ.Α. Αθανασούλη, Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’,Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Έχουμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1: Έστω $X(t,\theta), t \in T$ στοχαστική συνάρτηση δευτέρας τάξεως**.** Η ***συνάρτηση αυτοσυσχέτισης*** της $X(t,\theta)$ είναι η ντετερμινιστική συνάρτηση δύο μεταβλητών $R_{XX}(t,t')$ που ορίζεται στο $T \times T$,όπου $T \subset \mathbb{R}^N$, ως εξής:

$$R_{XX}(t,t') = E^{\theta}\left[X(t,\theta)\overline{X(t',\theta)}\right]. \qquad (1)$$

Επομένως, από κάθε στοχαστική συνάρτηση δετέρας τάξεως $X(t,\theta)$, ορίζεται με μονοσήμαντο τρόπο η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $X(t,\theta)$**.**

Μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwartz έχουμε ότι

$$R_{XX}(t,t') = E^{\theta}\left[\left|X(t,\theta)\overline{X(t',\theta)}\right|\right] \overset{Cauchy-Schwarz}{\leq}$$

$$\leq E^{\theta}\left[X(t,\theta)\overline{X(t,\theta)}\right]^{1/2} E^{\theta}\left[X(t',\theta)\overline{X(t',\theta)}\right]^{1/2} < +\infty$$

Αντιστρόφως, αν η $R_{XX}\left(t,t'\right)$ ορίζεται και είναι πεπερασμένη, τότε για κάθε $t \in T$

$$E^{\theta}\left[\left|X\left(t,\theta\right)\right|^{2}\right] = R_{X}\left(t,t'\right) < +\infty$$

Μπορούμε συνεπώς να ορίσουμε εναλλακτικά μια στοχαστική συνάρτηση δευτέρας τάξεως ως μια στοχαστική συνάρτηση η οποία έχει συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

Σε αυτό το σημείο θα δούμε ορισμένες βασικές ιδιότητες που πληροί κάθε συνάρτηση $R_{X}\left(t,t'\right)$ ορισμένη στο $T \times T$, η οποία είναι συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής συνάρτησης δευτέρας τάξεως $X\left(t,\theta\right), t \in T$. Ας σημειωθεί ότι για χάρη συντομίας όταν θα αναφέρεται αυθαίρετα μια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, θα εννοείται ότι πρόκειται για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης κάποιας στοχαστικής συνάρτησης δευτέρας τάξεως. Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης έχουν την σημαντική ιδιότητα ότι είναι θετικά ορισμένες συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2: Λέμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση $R\left(t,t'\right)$ με $\left(t,t'\right) \in T \times T$ είναι ***μη αρνητικά ορισμένη*** αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $T_n \subset T$ (με $\# T_n = n \in \mathbb{N}$) και κάθε συνάρτηση $h : T_n \equiv \left\{t_1, t_2, \ldots, t_n\right\} \to \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R\left(t_i, t_j\right) h\left(t_i\right) \bar{h}\left(t_j\right) \geq 0 \tag{2}$$

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι κάθε συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μη αρνητικά ορισμένη. Έχουμε συνεπώς την πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3: Έστω $X\left(t,\theta\right), t \in T$ μια στοχαστική συνάρτηση δεύτερης τάξης και $R\left(t,t'\right)$, $\left(t,t'\right) \in T \times T$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής της. Τότε η $R\left(\cdot,\cdot\right)$ είναι μη αρνητικά ορισμένη.

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $T_n \equiv \left\{t_1, t_2, \ldots, t_n\right\} \subset T$ και κάθε συνάρτηση $h : T_n \to \mathbb{C}$ ισχύει $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R\left(t_i, t_j\right) h\left(t_i\right) \bar{h}\left(t_j\right) \geq 0$.

Έστω λοιπόν $T_n \equiv \{t_1, t_2, ..., t_n\} \subset T$ και $h : T_n \to \mathbb{C}$. Τότε:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_i, t_j) h(t_i) \bar{h}(t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E^{\theta}\left[X(t_i, \theta)\overline{X(t_j, \theta)}\right] h(t_i)\bar{h}(t_j) =$$

$$= E^{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_i, \theta)\overline{X(t_j, \theta)} h(t_i)\bar{h}(t_j)\right] =$$

$$= E^{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \theta) h(t_i) \sum_{j=1}^{n} \overline{X(t_j, \theta)}\bar{h}(t_j)\right] =$$

$$= E^{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n} X(t_i, \theta) h(t_i) \overline{\sum_{j=1}^{n} X(t_j, \theta) h(t_j)}\right] = E^{\theta}\left[\left| \sum_{i=1}^{n} X(t_i, \theta) h(t_i) \right|^2 \right] \geq 0$$

Ας σημειώσουμε ότι ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4:</u> Μία συνάρτηση $R(t,t')$, $(t,t') \in T \times T$ είναι μη αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν είναι συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

<u>Απόδειξη:</u> Βλέπε LOEVE, 1978, Probability Theory II, σελίδες 132-133.

Ας δούμε τώρα ορισμένες σημαντικές ιδιότητες που έχει μια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5:</u> Έστω $R(t,t')$, $(t,t') \in T \times T$ μια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $R(t,t) \geq 0$

(2) Η $R(\cdot,\cdot)$ είναι ερμιτιανή, δηλαδή $R(t_1,t_2) = \overline{R(t_1,t_2)}$

(3) $R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t_1,t_1) \geq 0$

(4) $\left|R(t,t_1) - R(t,t_2)\right|^2 \leq R(t,t)\big(R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t,t_1)\big)$,

$\left|R(t_1,t) - R(t_2,t)\right|^2 \leq R(t,t)\big(R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t,t_1)\big)$

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον η $R(\cdot,\cdot)$ είναι συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, υπάρχει μια στοχαστική συνάρτηση δεύτερης τάξης στοχαστική συνάρτηση δεύτερης τάξης $X(t,\theta), t\in T$ τέτοια ώστε $R(t,t') = E^{\theta}\left[X(t,\theta)\overline{X(t',\theta)}\right]$. Συνεπώς οι ιδιότητες προκύπτουν ως εξής:

(1) $R(t,t) = E^{\theta}\left[X(t;\theta)\overline{X(t;\theta)}\right] = E^{\theta}\left[\left|X(t;\theta)\right|^2\right] \geq 0$. Προκύπτει από το μη αρνητικά ορισμένη αν θεωρήσουμε $T_1 = \{t\}$ και $h: T_1 \to \mathbb{C}$ με $h(t)=1$.

(2) $R(t_1,t_2) = E^{\theta}\left[X(t_1;\theta)\overline{X(t_2;\theta)}\right] = \overline{E^{\theta}\left[\overline{X(t_1;\theta)}X(t_2;\theta)\right]} = \overline{R(t_1,t_2)}$.

(3) $R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t_1,t_1) = E^{\theta}\left[X(t_2;\theta)\overline{X(t_2;\theta)}\right]$

$$- E^{\theta}\left[X(t_2;\theta)\overline{X(t_1;\theta)}\right] - E^{\theta}\left[X(t_1;\theta)\overline{X(t_2;\theta)}\right] + E^{\theta}\left[X(t_1;\theta)\overline{X(t_1;\theta)}\right] =$$
$$E^{\theta}\left[X(t_2;\theta)\left(\overline{X(t_2;\theta)} - \overline{X(t_1;\theta)}\right)\right] - E^{\theta}\left[X(t_1;\theta)\left(\overline{X(t_2;\theta)} - \overline{X(t_1;\theta)}\right)\right] =$$
$$E^{\theta}\left[\left(X(t_2;\theta) - X(t_1;\theta)\right)\left(\overline{X(t_2;\theta)} - \overline{X(t_1;\theta)}\right)\right] = E^{\theta}\left[\left|\left(X(t_2;\theta) - X(t_1;\theta)\right)\right|^2\right] \leq 0$$

Προκύπτει από το μη αρνητικά ορισμένη αν θεωρήσουμε $T_2 = \{t_1,t_2\}$ και $h: T_2 \to \mathbb{C}$ με $h(t_1) = 1,\ h(t_2) = 1$.

(4) $\left|R(t,t_1) - R(t,t_2)\right|^2 = \left|E^{\theta}\left[X(t;\theta)\overline{X(t_1;\theta)}\right] - E^{\theta}\left[X(t;\theta)\overline{X(t_2;\theta)}\right]\right|^2 =$

$$\left|E^{\theta}\left[X(t;\theta)\left(\overline{X(t_1;\theta)} - \overline{X(t_2;\theta)}\right)\right]\right|^2 \overset{C-S}{\leq} \left|E\left[X(t;\theta)\overline{X(t;\theta)}\right]\right|^2 \cdot$$
$$\cdot\left|E\left[\left(\overline{X(t_1;\theta)} - \overline{X(t_2;\theta)}\right)\left(X(t_1;\theta) - X(t_2;\theta)\right)\right]\right| =$$
$$R(t,t)\left(R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t,t_1)\right)$$

Ομοιώς προκύπτει και ότι

$$\left|R(t_1,t) - R(t_2,t)\right|^2 \leq R(t,t)\left(R(t_2,t_2) - R(t_2,t_1) - R(t_1,t_2) + R(t,t_1)\right).$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 4.6:</u> Έστω $X(t,\theta), t\in T$ στοχαστική συνάρτηση δευτέρας τάξεως**.** Η ***<u>συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης</u>*** της $X(t,\theta)$ είναι η ντετερμινιστική συνάρτηση δύο μεταβλητών $C_{X\bar{X}}(t_1,t_2)$ που ορίζεται στο $T\times T$ ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right) &= E^{\theta}\left[\left(X\left(t_1;\theta\right)-m_X\left(t_1\right)\right)\left(\overline{X\left(t_2;\theta\right)-m_X\left(t_2\right)}\right)\right] = \\ &= R_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right)-m_X\left(t_1\right)\overline{m_X\left(t_2\right)} \end{aligned} \tag{3}$$

Η δευτεροτάξια αυτή ροπή αποτελεί ουσιαστικά ένα μέτρο της συσχέτισης των τιμών της στοχαστικής διαδικασίας $X\left(t,\theta\right)$ για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι αν η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με το μηδέν, τότε οι συναρτήσεις $C_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right)$ και ταυτίζονται. Επιπλέον, στην περίπτωση που έχουμε $t_1=t_2=t$ η σχέση (3) γίνεται:

$$\begin{aligned} C_{X\bar{X}}\left(t,t\right) &= E^{\theta}\left[\left|X\left(t;\theta\right)-m_X\left(t\right)\right|^2\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-m_X\left(t\right)\right]^2 f\left(x\right)dx = \sigma_X^2\left(t\right) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $C_{X\bar{X}}\left(t,t\right)=\sigma_X^2\left(t\right)$ ονομάζεται ***συνάρτηση διακύμανσης*** της στοχαστικής διαδικασίας $X\left(t,\theta\right)$ και η συνάρτηση $\sigma_X\left(t\right)=\sqrt{C_{X\bar{X}}\left(t,t\right)}$ ονομάζεται ***συνάρτηση τυπικής απόκλισης***. Για τη μέτρηση του βαθμού συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $X\left(t_1;\theta\right)$ και $X\left(t_2;\theta\right)$ χρησιμοποιούμε τον ***συντελεστή συσχέτισης*** $\rho_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right)$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\rho_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right)=\frac{C_{X\bar{X}}\left(t_1,t_2\right)}{\sigma_X\left(t_1\right)\sigma_X\left(t_2\right)} \tag{4}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι ένα αδιάστατο μέγεθος και συνεπώς μας ενδιαφέρει μόνο το πρόσημο του για να συμπεράνουμε αν οι τυχαίες μεταβλητές είναι θετικά η αρνητικά συσχετισμένες.

Πρέπει να τονίσουμε ότι όλες οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές μίας Gaussian random process είναι πλήρως ορισμένες αν γνωρίζουμε τη μέση τιμή και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7: Μία μιγαδική (πραγματική) συνάρτηση K ορισμένη στο $T\times T$ είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ή συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης μίας δεύτερης τάξης μιγαδικής (πραγματικής) τυχαίας συνάρτησης αν και μόνον αν για κάθε πεπερασμένη επιλογή $\{t_1, t_2, ..., t_N\} \in T$ ο πίνακας:

$$\left(K\left(t_i, t_j\right)\right)_{i,j}^{n}$$

Είναι θετικά ημιορισμένος (και συμμετρικός αντίστοιχα).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι η $K{:}T\times T\to\mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης μιας μιγαδικής τυχαίας συνάρτησης $X(t,\theta), t\in T$. Έχουμε ότι:

$$\sum_{i,j=1}^{n} K\left(t_i, t_j\right) c_i \overline{c_j} = \sum_{i,j=1}^{n} E^{\theta}\left[\left(X\left(t_i;\theta\right) - m_X\left(t_i\right)\right)\left(\overline{X\left(t_j;\theta\right) - m_X\left(t_j\right)}\right)\right] c_i \overline{c_j} =$$

$$= E^{\theta}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j\left(X\left(t_j;\theta\right) - m_X\left(t_j\right)\right)\right|^2 \geq 0$$

Για κάθε $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $K{:}T\times T\to\mathbb{C}$ είναι μία θετικά ημιορισμένη συνάρτηση. Στην περίπτωση που η τυχαία συνάρτηση είναι πραγματική, η συνάρτηση $K{:}T\times T\to\mathbb{R}$ είναι συμμετρική και η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και η περίπτωση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

4.2) Στοιχεία από τον μέσο τετραγωνικό λογισμό

Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια και τη διαφορισιμότητα των δεύτεροτάξιων τυχαίων συναρτήσεων. Θα δούμε ότι ο μέσος τετραγωνικός λογισμός ανάγει την παραγωγισιμότητα (ολοκληρωσιμότητα) μίας στοχαστικής διαδικασίας $X(t,\theta)$ στην παραγωγισιμότητα (ολοκληρωσιμότητα) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης αυτής. Για περισσότερα για τη μέση τετραγωνική συνέχεια και παραγωγισιμότητα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις σημειώσεις του Γ.Α. Αθανασούλη για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Να σημειωθεί ότι για τις στοχαστικές συναρτήσεις $X(t,\theta),\ t\in T$ το σύνολο T είναι είτε το $\mathbb{R}$ είτε κάποιο διάστημα του, τα οποία με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ μας επιτρέπουν να διατυπώνουμε έννοιες ορίου.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8</u>: Θα λέμε ότι μία στοχαστική διαδικασία δευτέρας τάξεως $X(t,\theta)$, όταν $t \to t_0$, ***<u>συγκλίνει κατά μέση τετραγωνική έννοια</u>*** προς την τυχαία μεταβλητή $A_0(\theta)$, εάν και μόνον εάν

$$\lim_{t \to t_0} E^{\theta}\left[\left|X(t;\theta) - A_0(\theta)\right|^2\right] = 0 \qquad (5)$$

Η μέση τετραγωνική σύγκλιση της διαδικασίας $X(t,\theta)$ αναφέρεται και ως L^2 σύγκλιση δεδομένου ότι αντιστοιχεί στη σύγκλιση στον χώρο Hilbert των στοχαστικών διαδικασιών δευτέρας τάξεως.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 4.9:</u> Μία στοχαστική διαδικασία δευτέρας τάξεως $X(t,\theta)$ θα λέγεται ***<u>συνεχής κατά μέση τετραγωνική έννοια</u>*** στο σημείο $t_0 \in T$ αν και μόνον αν το μέσο τετραγωνικό όριο $\underset{t \to t_0}{ms.lim}\, X(t;\theta)$ υπάρχει και ισούται με $X(t_0;\theta)$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχής κατά μέση τετραγωνική έννοια και μας δείχνει επίσης πως ο μέσος τετραγωνικός λογισμός συνδέεται με τη συνάρτηση αυτόσυσχέτισης.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.10:</u> Μία στοχαστική συνάρτηση $X(t,\theta)$ είναι μέσο- τετραγωνικά συνεχής στο σημείο $t_0 \in T$, αν και μόνον αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αυτής, $R_{XX}(t_1,t_2)$, είναι συνεχής (κατά τη συνήθη έννοια) στο σημείο (t_0,t_0) , δηλαδή εάν

$$\lim_{h_1,h_2 \to 0} R_{XX}(t_0 + h_1, t_0 + h_2) = R_{XX}(t_0, t_0) \qquad (6)$$

<u>Απόδειξη:</u> Για την απόδειξη βλέπε Γ.Α. Αθανασούλη, σημειώσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα

Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Κεφάλαιο 7, σελίδα 12.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4.11:</u> Αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(t_1,t_2)$ της στοχαστικής διαδικασίας $X(t,\theta)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο (t,t) της διαγωνίου του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι συνεχής και σε κάθε σημείο $(t_1,t_2)\in T$ του πεδίου ορισμού της.

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Γ.Α. Αθανασούλη, σημειώσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Κεφάλαιο 7, σελίδα 13.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.12: Η στοχαστική συνάρτηση $X(t,\theta)$ είναι μέσο-τετραγωνικά συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, εάν και μόνον εάν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αυτής $R_{XX}(t_1,t_2)$ είναι συνεχής (κατά τη συνήθη έννοια) στο διάστημα $[a,b]\times[a,b]$.

Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο ενδιαφέρον θεώρημα για τη συνέχεια της συνάρτησης μέσης τιμής και το πώς συνδέεται αυτή με τη μεσοτετραγωνική συνέχεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.13: Εάν η στοχαστική συνάρτηση $X(t,\theta)$ είναι μέσο-τετραγωνικά συνεχής σε ένα διάστημα $[a,b]$, τότε και η συνάρτηση μέσης τιμής αυτής, $m_X(t)$, θα είναι συνεχής (κατά τη συνήθη έννοια στο ίδιο διάστημα).

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.14: Μία στοχαστική διαδικασία δευτέρας τάξεως $X(t,\theta)$ θα ονομάζεται ***παραγωγίσιμη κατά μέση τετραγωνική έννοια*** στο σημείο $t_0\in T$, αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $\Pi_X(t_0,\theta)$ τέτοια ώστε:

$$ms.\lim_{h\to 0}\frac{X(t_0+h;\theta)-X(t_0;\theta)}{h}=\Pi_X(t_0,\theta) \tag{7}$$

Η $\Pi_X(t_0,\theta)$ ονομάζεται μέση τετραγωνική παράγωγος της $X(t,\theta)$ στο σημείο $t_0\in T$ και θα συμβολίζεται με $X'(t_0,\theta)$.

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της μέσης τετραγωνικής παραγωγισιμότητας και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι η σχέση αυτή αναφέρεται στις αναλυτικές ιδιότητες των στοχαστικών διαδικασιών χωρίς να δίνει πληροφορία για την πιθανοθεωρητική δομή τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.15: Η στοχαστική διαδικασία $X(t,\theta)$ είναι μέσο-τετραγωνικά παραγωγίσιμη στο σημείο $t_0 \in T$, αν και μόνον αν υπάρχει η μικτή παράγωγος $\dfrac{\partial^2 R_{XX}(t_0,t_0)}{\partial t_1 \partial t_2}$.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε λίγα πράγματα για το Riemann – Stieltjes ολοκλήρωμα και για την ολοκλήρωση κατά μέση τετραγωνική έννοια.

Έστω $D_I : a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$ να είναι μία διαμερίση του διαστήματος $I = [a,b)$ και ορίζουμε $|D_I| = \max\limits_{k \le n}(t_{k+1} - t_k)$ τη λεπτότητα της διαμέρισης. Εάν $X_{D_I}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k I_{[t_k, t_{k+1})}(t)$ είναι μία τυχαία συνάρτηση βήματος, θέτουμε

$$\int_I X_{D_I}(t,\theta) dY(t,\theta) = \sum_{k=1}^{n} X_k \left\{ Y(t_{k+1},\theta) - Y(t_k,\theta) \right\} \tag{8}$$

Στη γενική περίπτωση όπου $X(t,\theta)$ είναι μία δέυτερης τάξης τυχαία συνάρτηση,θετουμε

$X_k = X(t'_k)$, $t_k \le t'_k \le t_{k+1}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_I X(t,\theta) dY(t,\theta) &= \underset{|D_I \to 0|}{ms\lim} \int_I X_{D_I}(t,\theta) dY(t,\theta) \\ \int X(t,\theta) dY(t,\theta) &= \underset{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}}{ms\lim} \int_I X(t,\theta) dY(t,\theta) \end{aligned} \tag{9}$$

Δεδομένου ότι το δεύτερο όριο υπάρχει, τότε και το πρώτο όριο υπάρχει για την ακολουθία των διαμερίσεων $|D_I|$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των αντίστοιχων t_k .

Στη συνέχεια ακολουθεί ο ορισμός της μέσης τετραγωνικής ολοκληρωσιμότητας. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο ακόλουθος ορισμός δεν εξαρτάται από την τυχαία συνάρτηση $Y(t,\theta)$ αλλά από τις προσαυξήσεις αυτής $\Delta Y(t,\theta)$. Αντίστοιχα, δεν μας απασχολεί η συνάρτηση διακύμανσης $R_Y(t,t')$ της $Y(t,\theta)$ αλλά οι προσαυξήσεις αυτής $\Delta\Delta' R_Y(t,t') = E\Delta Y(t,\theta)\Delta\overline{Y(t',\theta)}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.16: Έστω ότι η τυχαία συνάρτηση δεύτερης τάξης $X(t,\theta)$ είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερης τάξης συνάρτηση προσαυξήσεων $\Delta Y(t',\theta)$ στο διάστημα $I \times I$ το οποίο είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Τότε:

Το ολοκλήρωμα $\int X(t,\theta)dY(t,\theta)$ υπάρχει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα $\int\limits_I\int\limits_I R_Y(t,t')d\,d'R_Y(t,t')$ υπάρχει και αν τα παρακάτω ολοκληρώματα υπάρχουν κατά μέση τετραγωνική έννοια, τότε:

$$\begin{aligned} E\left\{\int\limits_I X^s(t,\theta)dY(t,\theta)\int\limits_I \overline{X^{s'}(t',\theta)}d\overline{Y(t',\theta)}\right\} &= \\ = \int\limits_I\int\limits_{I'} E\left\{X^s(t,\theta),\overline{X^{s'}(t',\theta)}\right\}d\,d'R_Y(t,t') & \end{aligned} \tag{10}$$

όπου τα διπλά ολοκληρώματα είναι Riemann – Stieltjes ολοκληρώματα.

Τέλος, παραθέτουμε την έννοια της συνάρτησης φραγμένης κύμανσης, η οποία θα μας χρειαστεί σε επόμενη ενότητα.

Έστω $D: a = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$ και $D': a = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_{n'+1} = b$ να είναι δύο διαφορετικές διαμερίσεις του διαστήματος $I = [a,b)$ και έστω $\Delta Y(t) = Y(t_{k+1}) - Y(t_k)$ και $\Delta' Y(t') = Y(t'_{k'+1}) - Y(t'_{k'})$ οι αντίστοιχες προσαυξήσεις της $Y(t)$ για $t = t_k \in D$ και $t' = t'_k \in D$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $R_Y(t,t')$

είναι ***φραγμένης κύμανσης*** στο σύνολο $I \times I$ αν και μόνον αν υπάρχει μία σταθερά c_I τέτοια ώστε

$$\sum_{t\in D}\sum_{t'\in D'}\left|E\Delta Y(t)\Delta'\overline{Y(t')}\right| = \sum_{t\in D}\sum_{t'\in D'}\left|\Delta\Delta' R_Y(t,t')\right| \le c_I < \infty \tag{11}$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των D και D' και γράφουμε ότι $\int\left|d\,d'R_Y(t,t')\right| < \infty$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.17: Εάν η τυχαία συνάρτηση $X(t,\theta)$ είναι:

- συνεχής κατά μέση τετραγωνική έννοια στο διάστημα $I \times I$
- ανεξάρτητη από τη τυχαία συνάρτηση των προσαυξήσεων $\Delta Y(t')$ και
- αν η συνάρτηση διακύμανσης $R_X(t,t')$ είναι φραγμένη είναι φραγμένη ενώ η συνάρτηση διακύμανσης $R_Y(t,t')$ είναι φραγμένης κύμανσης , τότε

το ολοκλήρωμα $\int_I X(t,\theta)\,dY(t,\theta)$ υπάρχει.

Περισσότερα για της συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης καθώς και για τη στοχαστική ολοκλήρωση μπορεί να βρει κανείς πολύ αναλυτικά στις σημειώσεις του Γ.Α. Αθανασούλη για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Κεφάλαιο 2, σελίδες 23-54.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory II, Springer.

Sasvari Zoltan (2013). Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume I: Basic Results, Springer-Verlag.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume II: Supplementary Notes and References, Springer-Verlag.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ MERCER ΚΑΙ KARHUNEN-LOEVE

5.1) Στοιχεία από τη Θεωρία Τελεστών

5.1.1) Βασικοί Ορισμοί και αποτελέσματα

Προτού προχωρήσουμε στην παράθεση των θεωρημάτων Mercer και Karhunen-Loeve θα αναφέρουμε κάποιες έννοιες από την συναρτησιακή ανάλυση οι οποίες θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στη συνέχεια. Για την ανάλυση μας βασιστήκαμε κυρίως στις σημειώσεις του Γ.Α. Αθανασούλη για το μάθημα "Προτυποποίηση του Συνεχούς'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, στον Vulikh B.Z., 1976, A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable (An Itroduction to the Theory of the Integral), Mir Publishers Moscow σελίδες 237-256, στον Χ.Γ. Καρυοφύλλη, 1995, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη σελίδες 84-134. Στον Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδες 67-92, στον John B. Conway, 1985, A Course in Functional Analysis, Κεφάλαιο 5, σελίδες 47-50, στον J.R. Retherford, 1993, Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem, κεφάλαιο VII, σελίδες 60-64, στις σημειώσεις του Γ.Α. Αθανασούλη για τα φάσματα και για χώρους με εσωτερικό γινόμενο, στους Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company , κεφάλαιο 5 αλλά και σε πολλές άλλες πηγές οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά στη βιβλιογραφία στο τέλος της ενότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1: Γραμμικοί χώροι εφοδιασμένοι με εσωτερικό γινόμενο θα ονομάζονται ***χώροι εσωτερικού γινομένου.*** Κάθε εσωτερικό γινόμενο παράγει κατά φυσικό τρόπο μια νόρμα και μια μετρική. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια δεδομένη νόρμα μπορεί να παράγεται ή να μην παράγεται από εσωτερικό γινόμενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2: Ένας χώρος εσωτερικού γινομένου ο οποίος είναι πλήρης (με την επαγόμενη νόρμα) ονομάζεται ***χώρος Hilbert.***

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε τους ακόλουθους ορισμούς για την ορθογωνιότητα και την ορθοκανονικότητα ενός συνόλου.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3</u>: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο S μη μηδενικών διανυσμάτων του V θα λέγεται ***<u>ορθογώνιο</u>*** όταν οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα του S είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή για $\forall\ x, y \in V$ ισχύει ότι $\langle x, y \rangle = 0$.

Σημειώνουμε επίσης ότι στη περίπτωση που δύο διαφορετικά διανύσματα του S είναι ορθογώνια, δηλαδή για $x, y \in V$, ισχύει ότι:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \quad \textbf{(ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)}$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \\ &\overset{x \perp y}{=} \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Επιπλέον, εντελώς ανάλογα, αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} &\left[x_n \perp x_m ,\ \forall\ n \neq m \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\| x_1 + x_2 + \dots + x_N \right\|^2 = \left\| x_1 \right\|^2 + \left\| x_2 \right\|^2 + \dots + \left\| x_N \right\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4</u>: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο S του V θα λέγεται ***<u>ορθοκανονικό</u>*** όταν είναι ορθογώνιο και επιπλέον ισχύει $\|x\| = 1,\ \forall\ x \in S$.

Επίσης, αν $S = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_N \right\}$ είναι ένα σύστημα διανυσμάτων του χώρου V, το S θα είναι ορθοκανονικό αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\left\langle x_i , x_j \right\rangle = \delta_{ij} \tag{2}$$

Όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

είναι το δέλτα του Kronecker.

Στη συνέχεια θα υπενθυμίσουμε την έννοια του ορθογώνιου συμπληρώματος. Ξεκινάμε με την έννοια της προβολής ενός διανύσματος πάνω σε έναν χώρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5: Για έναν αυθαίρετο χώρο Hilbert H και για ένα αυθαίρετο διάνυσμα $x \in H$ υπάρχει μία μοναδική αναπαράσταση της μορφής:

$$x = x_F + x_N \tag{3}$$

όπου $x_F \in F$ και $x_N \perp F$. Το διάνυσμα x_F καλείται ***προβολή*** του διανύσματος x στον υποχώρο F. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων y τα οποία είναι ορθογώνια ως προς τον υποχώρο F σχηματίζουν έναν υποχώρο ο οποίος καλείται ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** του F και συμβολίζεται με N. Στη περίπτωση αυτή γράφουμε $H = F \oplus N$ και λέμε ότι ο χώρος H είναι το ορθογώνιο άθροισμα των υποχώρων F και N.

Η σχέση:

$$H_1 = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n \oplus \ldots \quad , \tag{4}$$

όπου H_1 και F_k, $k = 1, 2, \ldots$ είναι υποχώροι του χώρου H, σημαίνει i) ότι οι υποχώροι F_i και F_j είναι ορθογώνιοι για αυθαίρετη επιλογή i, j με $i \neq j$ και ii) ότι ένα αυθαίρετο διάνυσμα $x \in H$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$ όπου $x_n \in F_n$ για $n = 1, 2, \ldots$. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι ο χώρος H_1 είναι το ορθογώνιο άθροισμα των υποχώρων F_n .

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.6: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε υποχώρο W του V ισχύει η ισότητα

$$V = W \oplus W^{\perp} \tag{5}$$

Δηλαδή υπάρχει το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W στον χώρο V. Όπου $W^{\perp}$ είναι το σύνολο:

$$W^{\perp} = \left\{ x \in V \;/\; \left\langle x, w \right\rangle = 0, \; \text{για κάθε } w \in W \right\} \tag{6}$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Ψωμόπουλος Ευάγγελος, 2007, Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Εκδόσεις Ζήτη σελίδα 100.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο $W^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υποχώρος του V. Πράγματι, αν ονομάσουμε $w^{*}:V\to K$ (όπου K είναι είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών, είτε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών) την απεικόνιση $w^{*}(x)=\langle x,w\rangle$ παρατηρούμε ότι η w^{*} είναι γραμμική και επομένως ο πυρήνας της $\ker\left(w^{*}\right)$ είναι γραμμικός χώρος. Επιπλέον, η w^{*} είναι συνεχής και συνεπώς ο πυρήνας της είναι κλειστός. Επειδή ο $W^{\perp}$ είναι η τομή $\cap\left\{\ker\left(w^{*}\right):w\in W\right\}$ των κλειστών γραμμικών υποχώρων $\ker\left(w^{*}\right)$, $w\in W$ του χώρου V, είναι κλειστός γραμμικός υποχώρος.

Περισσότερα για χώρους με εσωτερικό γινόμενο και για χώρους Hilbert ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στις σημειώσεις του Γ.Α. Αθανασούλη, Σημειώσεις για το μάθημα ‘‘Προτυποποίηση του Συνεχούς’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Για το υπόβαθρο γραμμικής άλγεβρας που απαιτείται για την κατανόηση των χώρων Hilbert, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του Ευάγγελου Ψωμόπουλου, Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Εκδόσεις Ζήτη, στο κεφάλαιο 3, Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο.

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποιες βασικές έννοιες από τον κλάδο της μαθηματικής ανάλυσης και τη θεωρία τελεστών που είναι απαραίτητες για την ανάλυση που θα ακολουθήσει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7: Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται ***παντού πυκνό*** στο X αν για κάθε $x\in X$ και κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $y\in A$ τέτοιο ώστε $d(x,y)<\varepsilon$.
Αν ένας μετρικός χώρος X έχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο το οποίο είναι παντού πυκνό σε αυτόν, ονομάζεται ***διαχωρίσιμος***.

Με το σύμβολο $L^{2}\left(\left[a,b\right]\to\mathbb{C}\right)$ εννοούμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ των οποίων το τετράγωνο είναι ολοκληρώσιμο κατά Lebesgue στο $\left[a,b\right]$, δηλαδή $\int_{a}^{b}\left|f(x)\right|^{2}dx<+\infty$.

Το σύνολο $L^{2}\left(a,b\right)=L^{2}\left(\left[a,b\right]\to\mathbb{C}\right)$ είναι γραμμικός χώρος (με τις συνήθεις πράξεις της κατά σημείο πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού) και καθίσταται επίσης χώρος εσωτερικού γινομένου μέσω της απεικόνισης

$$\langle \bullet,\bullet \rangle_{L^2} = L^2(a,b) \times L^2(a,b) \to \mathbb{C} \quad \text{με } \langle f,g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \ . \tag{7}$$

Στη συνέχεια γράφοντας $L^2(a,b)$ ή $L^2([a,b] \to \mathbb{C})$ θα εννοούμε το χώρο $\left(L^2(a,b), \langle \bullet,\bullet \rangle_{L^2}\right)$, δηλαδή το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων κατά Lebesgue, εφοδιασμένο με τη γραμμική δομή και το εσωτερικό γινόμενο όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Ο χώρος $L^2([a,b] \to \mathbb{C})$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης, είναι δηλαδή ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Η απόδειξη της πληρότητας του $L^2([a,b] \to \mathbb{C})$ έγινε το 1907 από τον Fischer. Περισσότερα για τους χώρους $L^2(a,b)$ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στον Vulikh B.Z., 1976, A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable (An Itroduction to the Theory of the Integral), Mir Publishers Moscow σελίδες 237-256.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8</u>: Μία απεικόνιση $T : X \to Y$, όπου X και Y είναι δύο γραμμικοί χώροι πάνω στο ίδιο σωμα K, όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ονομάζεται ***<u>τελεστής</u>***.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.9</u> : Ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται ***<u>γραμμικός</u>*** αν:

i) $\forall\ x_1, x_2 \in X,\ T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

ii) $\forall\ k \in K,\ \ \forall\ x \in X,\ T(kx) = kT(x)$

Είναι φανερό ότι ο τελεστής $T : X \to Y$ είναι γραμμικός αν και μόνον αν ισχύει ότι

$$\forall k,l \in K,\ \forall\ x_1, x_2 \in X,\ T(kx_1 + lx_2) = kT(x_1) + lT(x_2)\ .$$

Η έννοια του τελεστή είναι πάρα πολύ χρήσιμη καθώς συνδέει την αλγεβρική έννοια της γραμμικότητας με τις τοπολογικές έννοεις του φραγμένου και της συνέχειας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι έννοιες του συνεχή και του φραγμένου τελεστή.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.10</u>: Έστω $\left(X, \|\ \|_1\right), \left(Y, \|\ \|_2\right)$ δύο νορμικοί χώροι ορισμένοι ή στο σύνολο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$ και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο τελεστής T είναι ***<u>συνεχής</u>***, αν και μόνον αν:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in X,\ \|x\|_1 < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_2 < \varepsilon$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σημείων του X ισχύει ότι:

$$\lim x_n = \theta \Rightarrow \lim T(x_n) = \theta$$

<u>Απόδειξη:</u> Για την απόδειξη βλέπε Χ.Γ. Καρυοφύλλης, 1995, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη σελίδα 130.

Όπως είδαμε στο Θεώρημα 5.10 ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας γραμμικός τελεστής ***<u>συνεχής</u>*** είναι η νόρμα του να είναι πεπερασμένη. Τελεστές που έχουν πεπερασμένη νόρμα καλούνται ***<u>φραγμένοι</u>***. Συχνά στη βιβλιογραφία ταυτίζεται η έννοια της συνέχειας του τελεστή με την έννοια του φραγμένου τελεστή. Όπως θα δούμε στο ακόλουθο θεώρημα αυτό δεν σημαίνει ότι ο τελεστής είναι φραγμένος κατά τη συνήθη έννοια.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.11</u>: Αν ο τελεστής $T : (X, \|\ \|_1) \to (Y, \|\ \|_2)$ είναι γραμμικός, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i) Ο T είναι συνεχής.

ii) $\exists\ M > 0,\ \forall\ x \in X,\ \|T(x)\|_2 \le M \|x\|_1$

iii) Ο T είναι φραγμένος στην κλειστή μοναδιαία σφαιρική περιοχή $\overline{B(\theta,1)}$ του $(X, \|\ \|_1)$.

<u>Απόδειξη:</u> Για την απόδειξη βλέπε Χ.Γ. Καρυοφύλλης, 1995, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη σελίδα 131.

Έστω T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος στον χώρο Hilbert H. Η νόρμα του τελεστή δίνεται από τη σχέση:

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \le 1\} \tag{8}$$

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις έννοιες της «ιδιοτιμής» και του ιδιοδιανύσματος ενός τελεστή οι οποίες θα μας φανούν πολύ χρήσιμες.

Έστω X ένας μιγαδικός χώρος και T ένας γραμμικός τελεστής. Θα συμβολίζουμε το πεδίο ορισμού του τελεστή με $D(T)$ και το σύνολο τιμών του με $R(T)$, τα οποία θα είναι και γραμμικοί υποχώροι του χώρου X.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.12: Ένας μιγαδικός αριθμός λ θα λέμε ότι είναι μια ***ιδιοτιμή (eigenvalue)*** **του τελεστή** T όταν υπάρχει $x = x(\lambda) \in D(T) \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$T x = \lambda x \tag{9}$$

ή ισοδύναμα

$$(\lambda I - T) \cdot x = 0 \tag{10}$$

Θέτουμε $T_\lambda = \lambda I - T$.

Κάθε μη μηδενικό $x = x(\lambda) \in D(T) \setminus \{0\}$ για το οποίο ισχύει η σχέση (9) ή η σχέση (10) ισοδύναμα, θα λέμε ότι είναι ένα ***ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)*** **του τελεστή** T **που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.**

Σε κάθε ιδιοτιμή λ του τελεστή T αντιστοιχεί ένας γραμμικός υποχώρος V_λ του X που ορίζεται ως εξής:

$$V_\lambda = \{x \in D(T) : (\lambda I - T) \cdot x = 0\} \tag{11}$$

και ονομάζεται **ο *ιδιοχώρος (eigenspace)* του τελεστή** T που αντιστιχεί στην ιδιοτιμή λ. Η διάσταση του ιδιοχώρου V_λ είναι και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι ένας μιγαδικός αριθμός λ αποτελεί μία ιδοτιμή ενός τελεστή T αν και μόνον αν ισχύει κάποια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i) Η εξίσωση $(\lambda I - T) \cdot x = 0$ έχει και μη μηδενικές λύσεις.

ii) Ο ιδιοχώρος V_λ είναι διάφορος του μηδενός.

iii) Ο $T_\lambda = \lambda I - T$ δεν είναι εερριπτική απεικόνιση, δηλαδή δεν είναι αμφιμονοσή-μαντη.

iv) Δεν ορίζεται ο T_λ^{-1}.

Αν περάσουμε τώρα στις n διαστάσεις, ο χώρος X θα είναι τώρα ο χώρος $\mathbb{C}^n$. Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής T θα παριστάνεται από έναν $n \times n$ πίνακα μιγαδικών αριθμών, έστω $A = \left(a_{ij}\right)$. Επομένως η σχέση $Tx = \lambda x$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\left(A - \lambda I\right)x = 0 \tag{12}$$

όπου $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathbb{C}^n$. Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το παραπάνω αποτελεί ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων, το οποίο για να έχει μη μηδενικές λύσεις θα πρέπει η ορίζουσα του να είναι ίση με το μηδέν. Αν αναπτύξουμε τη σχέση $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$ προκύπτει ένα n βαθμού πολυώνυμο ως προς λ το οποίο θα ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A .Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A οι οποίες είναι και οι ιδιοτιμές του τελεστή T. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Αλγεβρας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει n το πλήθος ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ (όσο δηλαδή είναι και ο βαθμός του πολυωνύμου), οι οποίες μπορεί να έιναι και ίδιες μεταξύ τους.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός ιδιοδιανύσματος x με τον πίνακα A δεν μεταβάλλει τη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος, δηλαδή ο τελεστής αφήνει κατά την εφαρμογή του αναλλοίωτη τη διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος x πάνω στο οποίο επιδρά. Από την παρατήρηση αυτή προκύπτουν τα ακόλουθα:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.13</u>: Έστω M ένας γραμμικός υπόχωρος ενός γραμμικού χώρου X και T ένας τελεστής ορισμένος πάνω στον χώρο X. Θα λέμε ότι ο M ***είναι*** ή ***<u>παραμένει αναλλοίωτος</u> από τον*** τελεστή T όταν ισχύει

$$T\left(M\right) \subseteq M \tag{13}$$

δηλαδή όταν είναι $Tx \in M$ για κάθε $x \in M$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 5.14:</u> Για κάθε ιδιοτιμή λ ενός γραμμικού τελεστή T ο αντίστοιχος ιδιοχώρος V_λ παραμένει αναλλοίωτος από τον τελεστή T.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $x \in V_\lambda$ και $y = Tx$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$Ty = T\left(Tx\right) = T\left(\lambda x\right) = \lambda Tx = \lambda y$$

Άρα $Tx = y \in V_\lambda$ και επομένως ο V_λ παραμένει αναλλοίωτος από τον T.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.15: Έστω T ένας φραγμένος τελεστής ορισμένος σε έναν χώρο Hilbert H. Ένας κλειστός υποχώρος M του χώρου Hilbert H παραμένει αναλλοίωτος από τον τελεστή T όταν και μόνον όταν ο $M^{\perp}$ παραμένει αναλλοίωτος από τον τελεστή T^*.

Απόδειξη: Έστω $T(M) \subseteq M$ και $x \in M$, $y \in M^{\perp}$. Τότε είναι

$$0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

δηλαδή $T^* y \in M^{\perp}$ και επομένως $T^*\left(M^{\perp}\right) \subseteq M^{\perp}$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.16: Για έναν τυχαίο φραγμένο γραμμικό τελεστή T σε έναν χώρο Hilbert H υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής T^* επίσης ορισμένος στον χώρο Hilbert H, τέτοιος ώστε

$$\langle Th, g \rangle = \langle h, T^* g \rangle, \qquad h, g \in H \tag{14}$$

Ο τελεστής αυτός ονομάζεται ***συζυγής τελεστής*** του T.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.17: Ένας τελεσής T θα καλείται ***self-adjoint (αυτοσυζυγής τελεστής)*** εάν ισχύει ότι $T^* = T$.

Στην ακόλουθη πρόταση παρουσιάζονται οι ιδιότητες ενός αυτοσυζυγή τελεστή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.18: Έστω T ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής ορισμένος σε έναν χώρο Hilbert H.

Τότε :

i) Οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές.
ii) Ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.
iii) Ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
iv) Αν $\dim R(T) < +\infty$ τότε το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών του T είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη:

i) Έστω ότι λ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή T και $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ όπου V_λ ο ιδιοχώρος του τελεστή T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε, δεδομένου ότι ο τελεστής T είναι αυτοσυζυγής, έχουμε:

$$\begin{aligned}(\lambda - \bar{\lambda})\|x\|^2 &= (\lambda - \bar{\lambda})\langle x, x\rangle = \\ &= \langle \lambda x, x\rangle - \langle x, \lambda x\rangle = \\ &= \langle Tx, x\rangle - \langle x, Tx\rangle = 0\end{aligned}$$

Άρα $\lambda = \bar{\lambda}$ και επομένως $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_i, x_j δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i και λ_j του τελεστή T αντίστοιχα. Τότε έχουμε ότι:

$$\lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = \langle \lambda_i x_i, x_j\rangle = \langle Tx_i, x_j\rangle = \langle x_i, Tx_j\rangle = \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle$$

Συνεπώς $(\lambda_i - \lambda_j)\langle x_i, x_j\rangle = 0$ και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$ από την υπόθεση , έπεται ότι $\langle x_i, x_j\rangle = 0$,δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα x_i, x_j είναι κάθετα μεταξύ τους.

iii) Άμεση συνέπεια του ii).

iv) Θεωρούμε ότι ο τελεστής T έχει άπειρο πλήθος διαφορετικών ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$. και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ η ακολουθία των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε i. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα x_i , $i = 1,2,\ldots$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπως προκύπτει από την ιδιότητα iii) , το ίδιο θα συμβαίνει και για τα διανύσματα $y_i = \lambda_i^{-1} x_i$, $i = 1,2,\ldots$. Αλλά τότε, από τις σχέσεις $T y_i = x_i$, $i = 1,2,\ldots$ προκύπτει ότι $x_i \in R(T)$ και επομένως το $R(T)$ δεν έχει πεπερασμένη διάσταση, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση της πρότασης.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δύο έννοιες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για να ορίσουμε την έννοια του συμπαγή τελεστή. Την έννοια του προσυμπαγή συνόλου και την έννοια του ολικά φραγμένου συνόλου. Θα δούμε ότι στην περίπτωση που δουλεύουμε σε πλήρεις μετρικούς χώρους οι δύο αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5,19: Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο A ονομάζεται ***προσυμπαγές*** σύνολο στον μετρικό χώρο (X,ρ) αν η κλειστότητα του $\overline{A}$ είναι συμπαγής στον X .

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.20: Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$.Το σύνολο A ονομάζεται ***ολικά φραγμένο*** εάν $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο $F \subset A$ τέτοιο ώστε $A \subset \bigcup_{x \in F} S(x,\varepsilon)$ (δηλαδή το σύνολο A καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών σφαιρών με κέντρο στο σύνολο A και ακτίνα ε) . Στην περίπτωση που $A = X$, ο (X,ρ) θα καλείται ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.

Παρατήρηση 5.21: 1) Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$ είναι συμπαγές. Τότε το σύνολο A είναι και ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τότε η ανοικτή κάλυψη $A \subset \bigcup_{x \in A} S(x,\varepsilon)$ του συνόλου A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη και άρα υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο έτσι ώστε $A \subset \bigcup_{x \in F} S(x,\varepsilon)$.

2) Εάν το σύνολο A είναι προσυμπαγές τότε είναι και ολικά φραγμένο. Επιπλέον, στην περίπτωση που ο X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος, ισχύει και το αντίστροφο. (Για την απόδειξη βλέπε Αργυρός Σπύρος, 2011, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη Έκδοση, σελίδα 114).

Για περισσότερα για τα ολικά φραγμένα σύνολα καθώς και για τη σχέση τους με τη συμπάγεια ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον Αργυρός Σπύρος, 2011, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη Έκδοση, σελίδες 112 - 116 και στους Νεγρεπόντης et.al ,1997, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση , Εκδόσεις Συμμετρία, κεφάλαιο 14.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον συμπαγή τελεστή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.22: Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι με νόρμα και έστω $T : X \to Y$ να είναι μία γραμμική απεικόνιση από τον X στον Y . Ο T θα καλείται ***συμπαγής τελεστής*** αν

για όλα τα φραγμένα σύνολα $E \subseteq X$, η εικόνα $T(E)$ είναι προσυμπαγής στον Y.
Συνεπώς, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, εάν το $E \subseteq X$ είναι ένα φραγμένο σύνολο, τότε η $\overline{T(E)}$ είναι συμπαγής στον Y. Ένας άλλος τρόπος για να ορίσουμε τους συμπαγείς τελεστές είναι ο ακόλουθος:

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.23: Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής T σε έναν χώρο Hilbert H καλείται ***συμπαγής*** εάν η ακολουθία $\left\{T\left(x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ περιέχει μια συγκλίσουσα υπακολουθία για όλες τις φραγμένες ακολουθίες $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ που ανήκουν στον χώρο Hilbert H. Δηλαδή, υπάρχει υπακολουθία $\left\{x_{n_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ της $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε η $\left\{T\left(x_{n_m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ να συγκλίνει.

Οι συμπαγείς τελεστές αποτελούν ουσιαστικά έναν υποχώρο του συνόλου όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών, ορισμένων σε έναν γραμμικό χώρο X εφοδιασμένο με νόρμα.

ΛΗΜΜΑ 5.24: i) Εάν οι T_1 και T_2 είναι συμπαγείς τελεστές, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους $a_1 T_1 + a_2 T_2$ είναι γραμμικός τελεστής για κάθε $a_1, a_2 \in T$.
ii) Εάν ο T είναι συμπαγής και ο A είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, τότε οι AT και TA είναι συμπαγείς.

Μία ειδική κατηγορία των συμπαγών τελεστών είναι οι Hilbert- Schmidt τελεστές .

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.25: Έστω $D \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο. Μία συνάρτηση $k : D \times D \to \mathbb{R}$ θα καλείται ***πυρήνας Hilbert- Schmidt*** όταν

$$\iint_D \left|k(x,y)\right|^2 dx\, dy < \infty ,$$

Δηλαδή όταν $k \in L^2\left(D \times D\right)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή

$$K : L^2(D) \to L^2(D),$$
$$u \to Ku\ , \quad \mu\varepsilon \quad u \in L^2(D)$$

Ως εξής:

$$[Ku](x) = \int_D k(x,y)u(y)\,dy \tag{15}$$

Η απεικόνιση αυτή K ονομάζεται ***Hilbert-Schmidt τελεστής***.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για τον ολοκληρωτικό τελεστή K ισχύει ότι $K : L^2(D) \to L^2(D)$. Έστω $u \in L^2(D)$. Τότε:

$$\int_D \left|(Ku)(x)\right|^2 dx = \int_D \left|\int_D k(x,y)u(y)\,dy\right|^2 dx \le$$
$$\le \int_D \left(\int_D \left|k(x,y)\right|^2 dy\right)\left(\int_D \left|u(y)\right|^2 dy\right) dx \quad (Cauchy-Schwarz)$$
$$\|k\|_{L^2(D\times D)} \|u\|_{L^2(D)} < \infty$$

και επομένως $Ku \in L^2(D)$.

5.1.2) Το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς και self-adjoint τελεστές

Προτού παρουσιάσουμε το φασματικό Θεώρημα για τελεστές θα αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο θα μας χρειαστεί στη συνέχεια. Έχουμε ότι:

ΛΗΜΜΑ 5.26: Θεωρούμε τον χώρο Hilbert H και έστω $T : H \to H$ ένας φραγμένος, αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε ισχύει ότι

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\langle Th,h\rangle\right| : h \in H, \|h\| = 1\right\}.$$

Απόδειξη: Έστω $a = \sup\left\{\left|\langle Th,h\rangle\right| : h \in H, \|h\| = 1\right\}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι ισχύει ότι $a \le \|T\|$. Εχουμε ότι $\left|\langle Th,h\rangle\right| \le a$ για κάθε $h \in H$ με $\|h\| = 1$. Επίσης, αν το $\|h\| = 1$ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι ισχύει

$$\left|\langle Th,h\rangle\right| \le \|Th\|\,\|h\| = \|Th\|$$

Και συνεπώς ισχύει ότι $a \leq \| T \|$.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι ισχύει η αντίστροφη φορά της ανισότητας, δηλαδή ότι ισχύει $a \geq \| T \|$. Έχουμε ότι:

Θεωρούμε $h \in H$ με $Th \neq 0$ και θέτουμε $w_0 = Th / \|Th\|$ και συνεπώς έχουμε $\left|\left\langle Th, w_0 \right\rangle\right| = \|Th\|$. Συνεπώς,

$$\|T\| = \sup_{\substack{h \in H ,\\ \|h\| = 1}} \left|\left\langle Th, w_0 \right\rangle\right| \leq \sup_{\substack{h,w \in H ,\\ \|h\| = \|w\| = 1}} \left|\left\langle Th, w \right\rangle\right|$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\left\langle Th, w \right\rangle\right| \leq a\|h\| \, \|w\|$ για κάθε $h, w \in H$. Χωρίς άρση της γενικότητας μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον w με έναν μοναδιαίο μιγαδικό αριθμό έτσι ώστε η ποσότητα $\left\langle Th, w \right\rangle$ να είναι πραγματική και θετική. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \left\langle T(h+w), h+w \right\rangle &= \left\langle Th, h \right\rangle + \left\langle Th, w \right\rangle + \left\langle Tw, h \right\rangle + \left\langle Tw, w \right\rangle = \\ &= \left\langle Th, h \right\rangle + 2\left\langle Th, w \right\rangle + \left\langle Tw, w \right\rangle \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} \left\langle T(h-w), h-w \right\rangle &= \left\langle Th, h \right\rangle - \left\langle Th, w \right\rangle - \left\langle Tw, h \right\rangle + \left\langle Tw, w \right\rangle = \\ &= \left\langle Th, h \right\rangle - 2\left\langle Th, w \right\rangle + \left\langle Tw, w \right\rangle \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$4\left\langle Th, w \right\rangle = \left\langle T(h+w), h+w \right\rangle - \left\langle T(h-w), h-w \right\rangle$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα του παραλληλογράμμου προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \left\langle Th, w \right\rangle &\leq \frac{\alpha}{4}\left(\|h+w\|^2 + \|h-w\|^2\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\left(\|h\|^2 + \|w\|^2\right) \end{aligned}$$

Χωρίς άρση της γενικότητας θεωρούμε ότι $h, w \neq 0$. Αν αντικαταστήσουμε το h με $\sqrt{a}\,h$ και το w με $\sqrt{a}^{-1} w$, όπου $a = \|w\| \,/\, \|h\|$ το δεξιά μέλλος της παραπάνω σχέσης γίνεται:

$$\frac{a}{2}\left(\left(\|w\| / \|h\|\right)\|h\|^{2}\right)+\left(\left(\|h\| / \|w\|\right)\|w\|^{2}\right)=a\|h\|\|w\|$$

Δηλαδή αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.27</u>: Έστω T να είναι ένας self-adjoint συμπαγής τελεστής ορισμένος στον χώρο Hilbert H. Τότε ο τελεστής T έχει μία πραγματική ιδιοτιμή λ τέτοια ώστε να ισχύει

$$|\lambda| = \|T\| \tag{16}$$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε ότι $\|T\| \neq 0$ (η περίπτωση όπου $\|T\| = 0$ προκύπτει απευθείας). Ξέρουμε ότι $\|T\| = \sup\left\{\left|\langle Tx, x\rangle\right| : x \in H, \|x\| \leq 1\right\}$. Επομένως, υπάρχει μια ακολουθία x_n με $\|x_n\| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε να ισχύει $\left|\langle T x_n, x_n\rangle\right| \to \|T\|$. Η ακολουθία πραγματικών (καθώς ισχύει $T = T^*$) αριθμών $\{T x_n, x_n\}$ είναι φραγμένη. Επομένως, έχει μια υπακολουθία $\{T y_n, y_n\}$ που συγκλίνει . Έστω ότι συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει ότι $|\lambda| = \|T\|$. Θα δείξουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του τελεστή T. Για $T = T^*$ και $\lambda = \bar{\lambda}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\|Ty_n - \lambda y_n\right\|^2 = \langle Ty_n, Ty_n\rangle - \langle Ty_n, \lambda y_n\rangle - \langle \lambda y_n, Ty_n\rangle + \langle \lambda y_n, \lambda y_n\rangle = \\ &= \|Ty_n\|^2 - 2\lambda\langle Ty_n, y_n\rangle + \lambda^2\|y_n\|^2 \leq \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle Ty_n, y_n\rangle + \lambda^2 = 2\lambda\left(\lambda - \langle Ty_n, y_n\rangle\right) \to 0\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim\limits_{n\to\infty}(T - \lambda I)y_n = 0$.

Η ακολουθία $\{y_n\}$ ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα του χώρου Hilbert H και ο τελεστής T είναι συμπαγής. Επομένως, η ακολουθία $\{y_n\}$ έχει μια υπακολουθία $\{z_n\}$ τέτοια ώστε η $\{T z_n\}$ να συγκλίνει έστω στο z . Θα δείξουμε ότι $Tz = \lambda z$. Πράγματι, επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\left(T z_n - \lambda z_n\right) = 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(T z_n - z\right) = 0$ από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda z_n = z$ και αφού ο τελεστής T είναι συνεχής έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda T z_n = T z$$

Αλλά,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda T z_n = \lambda \lim_{n\to\infty} T z_n = \lambda z$$

Επομένως, $T z = \lambda z$. Τέλος, επειδή

$$\langle z, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz_n, \lambda z_n \rangle = \lambda \lim_{n\to\infty} \langle Tz_n, z_n \rangle = \lambda^2 \neq 0$$

Προκύπτει ότι $z \neq 0$ και άρα το z είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή T .

<u>ΛΗΜΜΑ 5.28</u>: Έστω $T: H \to H$ ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής ορισμένος σε έναν χώρο Hilbert H . Έστω $Y \subset H$ υποχώρος του χώρου Hilbert τέτοιος ώστε να ισχύει: $T(Y) \subset Y$. Τότε, $T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$ και $T_{|Y^{\perp}} : Y^{\perp} \to Y^{\perp}$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής στον χώρο Hilbert $Y^{\perp}$ με νόρμα $\left\| T_{|Y^{\perp}} \right\| \leq \|T\|$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $z \in Y^{\perp}$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι:

$$\langle T z, y \rangle = \langle z, T y \rangle = 0$$

αφού $Ty \in T(Y) \subset Y$ και $z \in Y^{\perp}$. Προκύπτει επομένως ότι $T z \in Y^{\perp}$ και συνεπώς $T(Y^{\perp}) \subset Y^{\perp}$. Δηλαδή ο χώρος $Y^{\perp}$ παραμένει αναλλοίωτος από τον τελεστή T και συνεπώς ο περιορισμός του τελεστή T στον χώρο $Y^{\perp}$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής με νόρμα το πολύ $\|T\|$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.29</u>: Έστω H <u>απειροδιάστατος</u> χώρος Hilbert, και $T: H \to H$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής, ορισμένος σε ολόκληρο το χώρο H. Έστω, επίσης, $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\subset \mathbb{R}$ οι ιδιοτιμές του T και $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ οι αντίστοιχες (κανονικοποιημένες) ιδιο-συναρτήσεις. <u>Το σύνολο των ιδιοτιμών υποτίθεται άπειρο</u>, οπότε θα είναι αριθμήσιμο. Τότε, $\lambda_n \to 0$ όταν $n \to \infty$, και για όλα τα $h \in H$, έχουμε ότι

$$h = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n + h_*, \quad \text{όπου} \quad T h_* = 0, \tag{19}$$

και

$$Th = \sum_{n\in S} \lambda_n \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n . \tag{20}$$

Απόδειξη: Επειδή ο T να είναι ένας self-adjoint συμπαγής τελεστής ορισμένος στον χώρο Hilbert H , από το θεώρημα 5.27 υπάρχει μία ιδιοτιμή $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ του τελεστή T για την οποία ισχύει $|\lambda_1| = \|T\|$. Έστω φ_1 το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε $H_0 = H$ και $H_1 = \left(sp(\varphi_1)\right)^{\perp} = \left\{\varphi \in H \ / \ \langle \varphi, \varphi_1 \rangle = 0\right\}$ ο υποχώρος που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα φ_1 . Ο H_1 είναι ένας κλειστός υποχώρος του χώρου H και συνεπώς είναι και αυτός ένας χώρος Hilbert. Θεωρούμε τον T_1 ως τον περιορισμό του τελεστή T στο σύνολο H_1. Εάν θεωρήσουμε $Y = sp(\varphi_1)$ από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι ο χώρος $Y^{\perp}$ παραμένει αναλλοίωτος από τον τελεστή T και συνεπώς ο περιορισμός του τελεστή T στον χώρο $Y^{\perp}$ είναι ένας συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής με νόρμα το πολύ $\|T\|$ ορισμένος στον χώρο Hilbert H_1 και επομένως

$$\|T_1\| = \sup\left\{\left|\langle T\varphi_1, \varphi_1 \rangle\right| : \varphi_1 \in H_1, \|\varphi_1\| = 1\right\}$$

Αν συνεχίσουμε επαγωγικά με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει μία ακολουθία από μη μηδενικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του τελεστή T με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ με νόρμα μονάδα και υποχώρους Hilbert για τους οποίους ισχύει:

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n$$

όπου $H_n = \left[sp(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\right]^{\perp}$ και $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \ldots \leq |\lambda_1|$. Εάν η διαδικασία αυτήσταματήσει μετά από n επαναλήψεις, προκύπτει ότι το range του τελεστή T βρίσκεται στο $sp\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$. Αφού ο τελεστής T είναι συμπαγής και self-adjoint προκύπτει ότι τα ιδιοδιανύσματα του που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους. Επιπλέον, ισχύει ότι $\|\varphi_n\| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα.

Έστω τώρα ότι $\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| \neq 0$. Τότε, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπακολουθία (λ_{n_m}) της (λ_n) με $|\lambda_{n_m}| \geq \varepsilon$. Αφού ο τελεστής T είναι συμπαγής έχουμε ότι η $T\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k} = x_{n_k}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και ισχύει ότι $\left\|\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k}\right\| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Αλλά, για την ορθοκανονική ακολουθία (x_n) λόγω του Πυθαγόρειου Θεωρήματος ισχύει ότι:

$\left\| x_{n_k} - x_{n_l} \right\|^2 = \left\| x_{n_k} \right\|^2 + \left\| x_{n_l} \right\|^2 = 2$. Επομένως, καταλήξαμε σε άτοπο και συνεπώς προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \left| \lambda_n \right| = 0$.

Έστω τώρα $h \in H$.Θεωρούμε ότι $y_n = h - \sum_{n=1}^{k} \left\langle h, \varphi_n \right\rangle \varphi_n$. Τότε, αφού $\left| \lambda_n \right| = \left\| T \right\|_{H_n}$ έχουμε ότι $\left\| T\, y_n \right\| \le \left| \lambda_n \right| \left\| y_n \right\|$ και αφού δείξαμε ότι ισχύει $\lim_{n\to\infty} \left| \lambda_n \right| = 0$ προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} T\, y_n = 0$.

Συνεπώς,

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle h, \varphi_n \right\rangle T\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle h, \varphi_n \right\rangle \lambda_n\, \varphi_n \,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.30: Έστω X ένας μιγαδικός χώρος με νόρμα και T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος πάνω στο σύνολο X . Θα ονομάζουμε το ***επιλύον σύνολο (resolvent set)*** του τελεστή T και θα συμβολίζουμε με $\rho\left(T \right)$ το σύνολο όλων των μιγαδικών λ για τα οποία υπάρχει το $\left(\lambda I - T \right)^{-1}$.

Το συμπλήρωμα του $\rho\left(T \right)$ ως προς το $\mathbb{C}$ ονομάζεται ***φάσμα (spectrum)*** του T και συμβολίζεται με $\sigma\left(T \right)$. Δηλαδή : $\sigma\left(T \right) = \mathbb{C} \setminus \rho\left(T \right)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.31: Για το φάσμα ενός τελεστή έχουμε την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα:

Έστω H ένας πεπερασμένος χώρος Hilbert και T ένας φραγμένος τελεστής ορισμένος πάνω σε αυτόν τον χώρο. Τότε $\sigma\left(T \right) \neq \emptyset$. Επιπλέον, $\lambda \in \sigma\left(T \right)$ αν και μόνον αν η λ είναι μία ιδιοτιμή του τελεστή T. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε το φάσμα του τελεστή ως το σύνολο των ιδιοτιμών του.

5.1.3) Υπενθύμιση βασικών εννοιών

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε κάποιες έννοιες από τη συναρτησιακή ανάλυση οι οποίες θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.32</u>: Μία οικογένεια μιγαδικών συναρτήσεων F ορισμένων σε ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X, d), ονομάζεται ***<u>ισοσυνεχής</u>*** στο E εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η ανισότητα:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

να ισχύει για κάθε $x, y \in E$ με $d(x, y) < \delta$ και κάθε $f \in F$, όπου με d συμβολίζουμε τη μετρική του χώρου X.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Arzela 5.33</u>: Έστω $\{f_a\}$ να είναι ένα ισοσυνεχές δίκτυο μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων σε έναν τοπολογικό χώρο X που συγκλίνει σημειακά σε μια συνάρτηση f. Τότε το σύνολο αυτό συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές σύνολο και η συνάρτηση f είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη:</u> Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδα 259.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.34</u>: Έστω F να είναι ένα σύνολο μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων πάνω στο σύνολο $X \neq \emptyset$ και εφοδιάζουμε το F με την τοπολογία της σημειακής συγκλισης. Εάν

$$\sup\{|f(x)| : f \in F\} < \infty$$

για κάθε $x \in X$, τότε η κλειστότητα του F είναι συμπαγής.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδα 260.
Από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Arzela-Ascoli 5.35</u>: Έστω $\{f_a\}$ να είναι ένα ισοσυνεχές δίκτυο μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων σε έναν τοπολογικό χώρο X τέτοιο ώστε:

$$\sup\{|f(x)| : f \text{ ισοσυνεχής}\} < \infty$$

για κάθε $x \in X$. Τότε αυτό το δίκτυο περιέχει ένα υποδίκτυο το οποίο συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή σύνολα σε μία συνεχή συνάρτηση.

Σημείωση 5.36: Περισσότερα για την ενδιαφέρουσα έννοια της ισοσυνέχειας καθώς και για τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ αυτής και της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών συνεχών συναρτήσεων μπορεί να βρει κανείς στον Walter Rudin, 2000, Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, σελίδες 236 – 242 , στον Κυβεντίδη Θωμά,2009, Τοπολογία Μετρικών Χώρων, σελίδες 187 – 188, στους Νεγρεπόντης et.al ,1997, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση , Κεφάλαιο 14, σελίδες 379-408 και στον Αργυρό Σπύρο, 2011, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη Έκδοση, Σελίδες 128-133.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια του πυρήνα ενός τελεστή T . Έστω $X = C([a,b])$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$. Έστω επίσης $C(t,s)$ μία συνεχής μιγαδική συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη στο σύνολο $[a,b]\times[a,b]$. Τότε υπάρχει το κατά Riemann ολοκλήρωμα :

$$y(t) = \int_a^b C(t,s)\cdot x(s)\,ds \tag{21}$$

και η $y(t)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση. Με τη βοήθεια αυτού του ολοκληρώματος ορίζεται ο ολοκληρωτικός τελεστής :

$$\begin{aligned} &T: C([a,b]) \to C([a,b]), \\ &x \to y = Tx \in C([a,b]), \qquad \mu\varepsilon \quad x \in C([a,b]) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $C(t,s)$ ονομάζεται ***<u>πυρήνας</u>*** του τελεστή T και ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές σύνολο είναι και φραγμένη στο σύνολο $[a,b]\times[a,b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.37: Η συνάρτηση $\varphi \in L^2(a,b)$ καλείται ***<u>ιδιοσυνάρτηση</u>*** του συνεχή πυρήνα $C(t,s)$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ εάν

$$\lambda\varphi(t) = \int_a^b C(t,s)\varphi(s)\,ds, \qquad t \in [a,b] \tag{22}$$

ΛΗΜΜΑ 5.38: Έστω $h \in L^2(a,b)$. Η συνάρτηση g που ορίζεται ως

$$g(t) := \int_a^b C(t,s)h(s)\,ds, \qquad t \in [a,b] \tag{23}$$

είναι συνεχής. Ειδικότερα, εάν η φ είναι μία ιδιοσυνάρτηση του $C(t,s)$ με ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$, τότε η φ είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>: Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για $t, t_0 \in I$ έχουμε ότι:

$$\left|g(t) - g(t_0)\right| = \left|\int_a^b \left(C(t,s) - C(t_0,s)h(s)\right)\right|^2 \leq$$
$$\leq \int_a^b \left|C(t,s) - C(t_0,s)\right|^2 ds \cdot \int_a^b |h(s)|^2 ds$$

Ο πυρήνας $C(t,s)$ είναι συνεχής και επομένως είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $I \times I$, καθώς συνέχεια σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα συνεπάγεται την ομοιόμορφη συνέχεια. Επομένως, στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι το δεξιά μέλος θα τείνει στο μηδέν καθώς $t \to t_0$ αφού ισχύει ότι $\lim_{t \to t_0} C(t,s) = C(t_0,s)$. Άρα $\lim_{t \to t_0} g(t) = g(t_0)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής. Ειδικότερα, εάν η φ είναι μία ιδιοσυνάρτηση του $C(t,s)$ με ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$ έχουμε ότι ισχύει $\lambda\varphi(t) = \int_a^b C(t,s)\varphi(s)ds$ και επομένως η συνάρτηση φ είναι συνεχής.

<u>ΛΗΜΜΑ 5.39</u>: Η απεικόνιση T η οποία ορίζεται ως:

$$Th(t) := \int_a^b C(t,s)h(s)ds \qquad h \in L^2(a,b),\ t \in [a,b] \tag{24}$$

Είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής στον $L^2(a,b)$.

<u>Απόδειξη:</u> Δεδομένου ότι ο πυρήνας $C(t,s)$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο σύνολο $[a,b] \times [a,b]$, για την απεικόνιση T έχουμε ότι:

$$\|Th\|_\infty \leq \|C\|_\infty \|h\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|C\|_\infty \|h\|_2$$

και έτσι προκύπτει ότι ο T είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στον $L^2(a,b)$. Για να δείξουμε τώρα ότι ο T είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής στον $L^2[a,b]$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{h_n\}$ η ακολουθία $\{th_n\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θεωρούμε ότι $g_n = th_n$. Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz όπως στο προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι η ακολουθία $\{g_n\}$ είναι ισοσυνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη. Επομένως, από το θεώρημα των Arzela και Ascoli η ακολουθία

$\{g_n\}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,b]$ σε μία συνεχή συνάρτηση. Συνεπώς, ο τελεστής T είναι πράγματι συμπαγής.

Τέλος, θα αναφέρουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα από την μελέτη της ομοιόμορφης συνέχειας συνεχών συναρτήσεων το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ DINI 5.40:</u> Θεωρούμε ένα συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου. Υποθέτουμε ότι:

i) Η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο K

ii) Η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο προς μία συνεχή συνάρτηση f στο K.

iii) $f_n \geq f_{n+1}$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$

Τότε η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f στο K.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Walter Rudin, 2000, Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, σελίδα229.

5.2) Τα θεωρήματα των Mercer και Karhunen-Loeve

5.2.1) Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα θεωρήματα των Mercer και Karhunen-Loeve. Το θεώρημα Karhunen-Loeve έχει πολύ χρήσιμες εφαρμογές όπως για παράδεγμα η ανάλυση εικόνας. Θα δούμε επίσης ότι το ανάπτυγμα του Karhunen-Loeve λαμβάνεται από μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του φασματικού θεωρήματος για τελεστές σε συνδυασμό με το θεώρημα Mercer, το οποίο συνδέει τη φασματική αναπαράσταση ενός ολοκληρωτικού Hilbert- Schmidt τελεστή με τον αντίστοιχο Hilbert- Schmidt πυρήνα.

Η σημαντικότητα των δύο όμως αυτών θεωρημάτων έγκειται στο γεγονός ότι η στοχαστική συνάρτηση $X(t,\theta)$, η οποία είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη στο σύνολο $T\times\Theta$, μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα γινομένων συναρτήσεων μίας μεταβλητής των t και ω αντίστοιχα:

$$X(t,\theta) = \sum_n \varphi_n(t) X_n(\theta) \tag{25}$$

Η σειρά αυτή είναι συγκλίνουσα και η συνάρτηση $\varphi_n(t)$ είναι μία συνάρτηση του χρόνου και η $X_n(\theta)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή για $n \geq 1$. Στο παράρτημα που βρίσκεται στο τέλος της παρούσας εργασίας, θα δούμε ότι εκτός από τα θεωρήματα Mercer και Karhunen – Loeve υπάρχει και μία άλλη έκφραση αυτής της μορφής για τη στοχαστική συνάρτηση $X(t,\theta)$ γνωστή και ως “Sampling Theorem” του Shannon.

5.2.2) Ολοκλήρωση Μιγαδικών Μέτρων

Προτού συνεχίσουμε στην παράθεση των θεωρημάτων Mercer και Karhunen-Loeve, θα αναφέρουμε κάποιες έννοιες από την ολοκλήρωση μιγαδικών μέτρων οι οποίες θα μας χρειαστούν στη συνέχεια. Σημειώνουμε επίσης ότι στην ενότητα αυτή θα σμβολίζουμε με $I := [a,b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ όπου $a,b \in \mathbb{R}^N$ και $-\infty < a_j < b_j < +\infty$. Τέλος, $C : I \times I \to \mathbb{C}$ θα είναι ένας συνεχής πυρήνας.

Θεωρούμε το σύνολο $L^2\left(\Theta,\mathscr{E},P\right)$ όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων. Ο χώρος αυτός είναι ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\left\langle X,Y\right\rangle := \int_{\Theta} X\cdot\overline{Y}\,dP = E\left(X\cdot\overline{Y}\right) \tag{26}$$

Θα συμβολίζουμε με $L^2\left(P\right)$ τον αντίστοιχο χώρο Hilbert. Για τη μέση τιμή ισχύει η ανισότητα Cauchy – Schwarz:

$$\left|E\left(X\cdot Y\right)\right| \le \left\|X\right\|\cdot\left\|Y\right\| \tag{27}$$

Επίσης, η μέση τιμή μπορεί να γραφτεί ως εσωτερικό γινόμενο ως εξής: $E\left(X\right) = \left\langle X,\mathbf{1}_{\Omega}\right\rangle$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν είναι ορθογώνιες αν και μόνον αν είναι ασυσχέτιστες.

Έστω $T\subset\mathbb{R}^n$ ένα μη κενό σύνολο Borel και Z μία μεσο-τετραγωνικά συνεχής συνάρτηση δεύτερης τάξης ορισμένη στο σύνολο T. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Xi(t,\theta):T\to L^2(\Theta,\mathscr{E},P)$ ως την αντίστοιχη τυχαία συνάρτηση ορισμένη στον χώρο $L^2(\Theta,\mathscr{E},P)$.

Θα ορίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_T \Xi\left(t,\theta\right)d\mu\left(t\right) \tag{28}$$

Όπου το $\mu\in M^b\left(T\right)$ είναι δηλαδή ένα μιγαδικό μέτρο Radon ορισμένο στο σύνολο $T\subset\mathbb{R}^n$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 5.41:</u> Έστω $\mu\in M^b\left(T\right)$. Η τυχαία συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ θα καλείται ***<u>μ-ολοκληρώσιμη</u>*** συνάρτηση εάν η απεικόνιση $t\mapsto\left\langle\Xi\left(t,\theta\right),h\right\rangle,\ t\in T$ είναι μ-ολοκληρώσιμη για κάθε $h\in L^2\left(P\right)$ και επιπλέον υπάρχει $I\left(\Xi\right)\in L^2\left(P\right)$ τέτοιο ώστε

$$\int_T\left\langle\Xi\left(t,\theta\right),h\right\rangle d\mu\left(t\right) = \left\langle I\left(\Xi\right),h\right\rangle, \qquad h\in L^2\left(P\right) . \tag{29}$$

<u>Σημείωση 5.42</u>: Με $I\left(\Xi\right)\in L^2\left(P\right)$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα :

$$I\left(\Xi\right) = \int_T \Xi\left(t,\theta\right)d\mu\left(t\right) \tag{30}$$

Το οποίο ορίζεται μονοσήμαντα μέσω της σχέσης

$$\int_T \left\langle \Xi(t,\theta),h \right\rangle d\mu(t) = \left\langle I(\Xi),h \right\rangle, \qquad h \in L^2(P) \ . \tag{31}$$

Από τον ορισμό του παραπάνω ολοκληρώματος προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\int_T \left\langle \Xi(t,\theta),h \right\rangle d\mu(t) = \left\langle \int_T \Xi(t,\theta) d\mu(t),h \right\rangle, \qquad h \in L^2(P)$

ii)

$$\int_T \left(a_1 \Xi_1(t,\theta) + a_2 \Xi_2(t,\theta) \right) d\mu(t) =$$

$$= a_1 \int_T \Xi_1(t,\theta) d\mu(t) + a_2 \int_T \Xi_2(t,\theta) d\mu(t), \ \ a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

$$\int_T \Xi(t,\theta) d\left(\mu_1 + \mu_2\right)(t) = \int_T \Xi(t,\theta) d\mu_1(t) + \int_T \Xi(t,\theta) d\mu_2(t)$$

$\int_{S_1 \cup S_2} \Xi(t,\theta) d\mu(t) = \int_{S_1} \Xi(t,\theta) d\mu(t) + \int_{S_2} \Xi(t,\theta) d\mu(t)$ όπου τα S_1 , $S_2 \subset T$ είναι σύνολα Borel τα οποία δεν τέμνονται μεταξύ τους.

iii) Στην περίπτωση που $\Xi(t,\theta) = h$ για κάποιο $h \in L^2(P)$ και για κάθε $t \in T$ τότε

$$\int_T \Xi(t,\theta) d\mu(t) = \mu(T) \cdot h \ .$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.43</u>: Στην περίπτωση που η συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ είναι μ και ν-ολοκληρώσιμη, τότε η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$ είναι $\mu \times \bar{\nu}$ - ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\left\langle \int_T \Xi(t,\theta) d\mu \, , \int_T \Xi(t,\theta) d\nu \right\rangle = \int_{T\times T} C(t,s) \, d\left(\mu \times \bar{\nu}\right)(t,s) \ . \tag{32}$$

Ειδικότερα,

$$\left\| \int_T \Xi(t,\theta) d\mu \right\|^2 = \int_{T\times T} C(t,s) d\left(\mu \times \bar{\mu}\right)(t,s) \tag{33}$$

<u>Απόδειξη:</u> Αν θέσουμε στην εξίσωση $\int_T \left\langle \Xi(t,\theta),h \right\rangle d\mu(t) = \left\langle I(\Xi),h \right\rangle$ όπου $h = \int_T \Xi(s,\theta) d\nu(s)$ προκύπτει ότι:

$$\int_T \left\langle \Xi(t,\theta), \int_T \Xi(s,\theta)\, d\nu(s) \right\rangle d\mu(t) = \left\langle \int_T \Xi(t,\theta)\, d\mu(t), \int_T \Xi(s,\theta)\, d\nu(s) \right\rangle \qquad (34)$$

Αν θέσουμε τώρα στην εξίσωση $\int_T \langle \Xi(t,\theta), h \rangle d\mu(t) = \langle I(\Xi), h \rangle$ όπου $h = \Xi(t,\theta)$ και αντικαταστήσουμε το μέτρο μ με το μέτρο ν και τη μεταβλητή ολοκλήρωσης t με s προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\left\langle \Xi(t,\theta), \int_T \Xi(s,\theta)\, d\nu(s) \right\rangle = \overline{\int_T \langle \Xi(s,\theta), \Xi(t,\theta) \rangle d\nu(s)} = \int_T C(t,s)\, d\bar{\nu}(s)$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με τη σχέση (34) μας δίνει ότι:

$$\left\langle \int_T \Xi(t,\theta)\, d\mu(t), \int_T \Xi(s,\theta)\, d\nu(s) \right\rangle = \int_T \left[\int_T C(t,s)\, d\bar{\nu}(s) \right] d\mu(t) \,.$$

Και λόγω του θεωρήματος Fubini η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$ είναι $\mu \times \bar{\nu}$ - ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\left\langle \int_T \Xi(t,\theta)\, d\mu \,, \int_T \Xi(t,\theta)\, d\nu \right\rangle = \int_{T \times T} C(t,s)\, d\left(\mu \times \bar{\nu}\right)(t,s) \,.$$

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 5.44:**</u> Η στοχαστική συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ είναι μ-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$ είναι $\mu \times \bar{\mu}$ - ολοκληρώσιμη.

<u>**Απόδειξη:**</u> Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδες 81-82.

<u>**ΠΟΡΙΣΜΑ 5.45**</u>**:** Έστω $K(t,s)$ να είναι ένας συνεχής θετικά ημιορισμένος πυρήνας στο σύνολο T. Τότε η ανισότητα

$$\int_{T \times T} K(t,s)\, d\left(\mu \times \bar{\mu}\right)(t,s) \geq 0 \qquad (35)$$

ισχύει για όλα τα $\mu \in M^b(T)$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $K(t,s)$ να είναι μ-ολοκληρώσιμη.

Ειδικότερα, η ανισότητα

$$\int_T \int_T K(t,s)h(t)\overline{h(s)}\,dt\,ds \geq 0 \tag{36}$$

ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση $h : T \to \mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα.

<u>Απόδειξη</u>: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδα 82.

5.2.3) Το Θεώρημα Mercer

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ MERCER 5.46:</u> Ένας αυθαίρετος συνεχής θετικά ημιορισμένος πυρήνας $C : I \times I \to \mathbb{C}$ δέχεται την decomposition

$$C(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)} \quad t,s \in I \tag{37}$$

Όπου:

i) Κάθε φ_n είναι μια ιδιοσυνάρτηση του $C(t,s)$ με ιδιοτιμή $\lambda_n > 0$.

ii) Η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα.

Όπως βλέπουμε η σημαντικότητα του παραπάνω θεωρήματος είναι ο διαχωρισμός στο δεξία μέλος των μεταβλητών t και s .

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε τον συμπαγή γραμμικό τελεστή :

$$Th(t) := \int_a^b C(t,s)h(s)ds \qquad h \in L^2[a,b],\ t \in [a,b] \tag{38}$$

Δεδομένου ότι για τη συνάρτηση $C(t,s)$ ισχύει ότι $C(t,s) = \overline{C(s,t)}$, προκύπτει ότι $\langle Th, g\rangle = \langle h, Tg\rangle$, δηλαδή ότι ο τελεστής T είναι self-adjoint. Επομένως, αφού ο τελεστής T είναι συμπαγής και self-adjoint, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή T που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους. Επιπλέον, λόγω του πορίσματος 5.45, ο τελεστής T είναι μη αρνητικός και συνεπώς και όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές. Από το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς και self-adjoint τελεστές προκύπτει ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

στον χώρο $L^2(a,b)$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα φ_n του T και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_n. Προκύπτει επίσης ότι κάθε $h \in L^2(a,b)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$h = \sum_{n \in S} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τη συνάρτηση $h : s \mapsto C(s,t)$:

$$C(t,\cdot) = \overline{C(\cdot,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, C(\cdot,t) \rangle \overline{\varphi_n}, \qquad t \in [a,b] \tag{39}$$

Δεδομένου ότι από τα φ_n είναι τα ιδιοδιανύσματα του T με ιδιοτιμές λ_n έχουμε ότι:

$$\langle \varphi_n, C(\cdot,t) \rangle = \int_a^b C(t,s)\varphi_n(s)\,ds = T\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n(t) \tag{40}$$

Και συνεπώς η σχέση (39) γράφεται:

$$C(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \overline{\varphi_n} \tag{41}$$

Από τη σχέση αυτή και λόγω της ορθοκανονικότητας των διανυσμάτων φ_n, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \to \infty} \left\| C(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k} \right\|^2 = \\ &= \lim_{n \to \infty} \left\langle C(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k}, C(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k} \right\rangle \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b |C(t,s)|^2\,ds - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k(t)|^2 \right), \qquad t \in [a,b] \end{aligned}$$

Λόγω του Λήμματος 5.38 έχουμε ότι αν για την ιδιοτιμή λ_k ισχύει ότι $\lambda_k \neq 0$ τότε η ιδιοσυνάρτηση φ_k που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή είναι συνεχής. Η συνάρτηση $t \mapsto \int_a^b |C(t,s)|^2\,ds$ είναι επίσης συνεχής. Επομένως λόγω του θεωρήματος Dini η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k(t)|^2$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,b]$ (καθώς είναι αύξουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο προς μία συνεχή συνάρτηση στο κλειστό και φραγμένο και επομένως συμπαγές διάστημα $[a,b]$).

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy – Schwarz έχουμε ότι:

$$\sum_{k=p}^{q}\left|\lambda_k \varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}\right| \le \left(\sum_{k=p}^{q}\lambda_k\left|\varphi_k(t)\right|^2\right)^{1/2} \bullet \left(\sum_{k=p}^{q}\lambda_k\left|\varphi_k(s)\right|^2\right)^{1/2} \quad (42)$$

Συμπεραίνουμε ότι η σειρά $C(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\overline{\varphi_n}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα καθώς όπως είδαμε οι σειρές που βρίσκονται στο δεξιά μέλος της σχέσης (42) συγκλίνουν ομοιόμορφα.

Τέλος για να δείξουμε τη σχέση (37) θεωρούμε για για σταθερό s τη συνεχή μη αρνητική συνάρτηση

$$t \mapsto \left|C(t,s) - \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)}\right|^2 \quad (43)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (40) βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα σε όλο το σύνολο I είναι ίσο με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι παντού ίση με μηδέν και συνεπώς προκύπτει ότι :

$$C(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)} \quad t,s\in I\ . \quad (44)$$

5.2.4) Το θεώρημα Karhunen-Loeve

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ KARHUNEN-LOEVE 5.47:</u> Έστω $\Xi(t,\theta): I \to L^2(\Theta,\mathscr{E},P)$ να είναι μία μεσοτετραγωνικά συνεχής τυχαία συνάρτηση με συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$. Τότε η $\Xi(t,\theta)$ επιδέχεται το ανάπτυγμα :

$$\Xi(t,\theta) = \sum_{n\in S}\sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t)X_n(\theta) \quad t\in I \quad (45)$$

Όπου:

i) Κάθε φ_n είναι μια ιδιοσυνάρτηση του $C(t,s)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_n > 0$ και θεωρούμε το σύνολο $S = \{n\in\mathbb{N} : \lambda_n > 0\}$ ως το σύνολο των ιδιοτιμών του.

ii) $X_n(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b \Xi(s)\cdot\overline{\varphi_n(s)}ds$.

iii) Τα $X_n(\theta)$ σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον χώρο $L^2(\Theta,\mathscr{E},P)$.

iv) Η σειρά (45) συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο I .

Απόδειξη:

Έχουμε ότι $X_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b \Xi(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)} ds$ στην περίπτωση που $n \in S$ ενώ αν $n \notin S$ το $X_n(\theta) = 0$. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b \Xi(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)} ds$ υπάρχει καθώς η συνάρτηση $s \mapsto \left\| \Xi(s) \cdot \overline{\varphi_n(s)} \right\|$ είναι συνεχής, επομένως και φραγμένη.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.43 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left\langle X_n(\theta), X_m(\theta) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \left\langle \int_a^b \Xi(t) \cdot \overline{\varphi_n(t)} dt, \int_a^b \Xi(s) \cdot \overline{\varphi_m(s)} ds \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \int_a^b \int_a^b C(t,s) \overline{\varphi_n(t)} \varphi_m(s) \, ds \, dt \\
&= \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_n}} \int_a^b \overline{\varphi_n(t)} \, \varphi_m(t) dt \\
&= \delta_{n,m} \qquad n, m \in S
\end{aligned}$$

καθώς ισχύει ότι $\int_a^b C(t,s) \varphi_m(s) ds = T\varphi_m(t) = \lambda_m \varphi_m(t)$.

Συνεπώς τα $X_n(\theta)$ σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα i) του ολοκληρώματος και τον ορισμό της $X_n(\theta)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\left\langle \Xi(t), X_n(\theta) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \left\langle \Xi(t), \int_a^b \Xi(s) \overline{\varphi_n(s)} ds \right\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b C(t,s) \varphi_n(s) ds = \\
&= \sqrt{\lambda_n} \varphi_n(t), \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Καθώς ισχύει ότι $\int_a^b C(t,s) \varphi_n(s) ds = T\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n(t)$.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\left\| \Xi(t,\theta) - \sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t) X_n(\theta) \right\|^2 = \\
&= \left\langle \Xi(t,\theta) - \sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t) X_n(\theta), \Xi(t,\theta) - \sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t) X_n(\theta) \right\rangle = \\
&= \left\langle \Xi(t,\theta), \Xi(t,\theta) \right\rangle - 2\sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\, \overline{\varphi_n(t)} \left\langle \Xi(t,\theta), X_n(\theta) \right\rangle + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \left|\varphi_n(t)\right|^2 \left\langle X_n(\theta), X_n(\theta) \right\rangle = \\
&= C(t,t) - 2\sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\, \overline{\varphi_n(t)} \left\langle \Xi(t,\theta), X_n(\theta) \right\rangle + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \left|\varphi_n(t)\right|^2 \delta_{n,n} = \\
&= C(t,t) - 2\sum_{n=1}^{k} \sqrt{\lambda_n}\, \overline{\varphi_n(t)} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t) + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \left|\varphi_n(t)\right|^2 = \\
&= C(t,t) - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \left|\varphi_n(t)\right|^2, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Mercer το δεξιά μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν στο σύνολο I καθώς το $k \to \infty$. Και αποδείξαμε το ζητούμενο.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το αντίστροφο του θεωρήματος Karhunen-Loeve.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5.48:</u> Έστω $\varnothing \neq S \subset \mathbb{N}$, $n \in S$, λ_n να είναι ένας θετικός αριθμός και $\{X_n\}_{n \in S}$ να είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον χώρο $L^2(\Theta, \mathscr{E}, P)$. Επιπλέον, έστω $\{\varphi_n\}_{n \in S}$ να είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα από συνεχείς συναρτήσεις στον $L^2(a,b)$ τέτοιο ώστε η σειρά

$$\Xi(t,\theta) = \sum_{n \in \mathrm{M}} \sqrt{\lambda_n}\varphi_n(t) X_n(\theta) \quad t \in I \tag{46}$$

να συγκλίνει ομοιόμορφα στο I. Τότε, αυτή η σειρά ορίζει μία μεσοτετραγωνικά συνεχή τυχαία συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ και η συνάρτηση φ_n είναι μία ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμές λ_n της συνάρτησης συσχέτισης της $\Xi(t,\theta)$.

<u>Απόδειξη:</u>

Στα πλαίσια της απόδειξης θεωρούμε ότι $S = \mathbb{N}$ και η γενική περίπτωση αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο. Η συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ είναι μία δεύτερης τάξης στοχαστική συνάρτηση με συνάρτηση συσχέτισης που από το θεώρημα Mercer δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} C(t,s) &= \langle \Xi(t,\theta), \Xi(s,\theta) \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \overline{\varphi_n(s)} \quad t,s \in I \end{aligned} \tag{47}$$

Όπου η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο I. Συνεπώς, η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$ και επομένως και η συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ είναι συνεχείς ως άθροισμα γινομένων συνεχών συναρτήσεων. Δεδομένου ότι η ακολουθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί ένα ορθοκανονικό σύστημα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_a^b C(t,s)\, \varphi_k(s)\, ds &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \overline{\varphi_n(s)} \varphi_k(s)\, ds = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \int_a^b \overline{\varphi_n(s)} \varphi_k(s) ds = \\ &= \lambda_k \varphi_k(t), \qquad t \in I,\ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

<u>**Παράδειγμα 5.49**</u>: Έστω $Y_1(\theta), Y_2(\theta), ..., Y_n(\theta) \in L^2(\Theta, \mathscr{E}, P)$ οι οποίες είναι ασυσχέτιστες με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση $\sigma_j > 0$. Επιπλέον, $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση συσχέτισης της τυχαίας συνάρτησης

$$\Xi(t,\theta) = \sum_{j=1}^{n} e^{itk_j} Y_j(\theta) \quad t \in [0, 2\pi]$$

δίνεται από τη σχέση:

$$C(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 e^{itk_j} \cdot \overline{e^{isk_j}} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 e^{i(t-s)k_j} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_j(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itk_j}$ $t \in [0, 2\pi]$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(0, 2\pi)$. Θεωρούμε τώρα τα $X_j := Y_j / \sigma_j$. Τότε τα $X_1(\theta), X_2(\theta), ..., X_n(\theta)$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον χώρο $L^2(\Theta, \mathscr{E}, P)$ και η τυχαία συνάρτηση

$\Xi(t,\theta)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Xi(t,\theta) = \sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \varphi_j(t) X_j(\theta) \quad t \in [0, 2\pi]$$

όπου φ_j είναι μία ιδιοσυνάρτηση του C με ιδιοτιμές $\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_j^2$.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ 5.50:</u> Ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης τυχαίων συναρτήσεων είναι μέσω του θεωρήματος του Karhunen. Το θεώρημα αυτό μας δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η τυχαία συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ ορισμένη στο σύνολο $T=\{t\}$ με συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)=\left\langle X(t),\overline{X(s)}\right\rangle$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$\Xi(t,\theta) = \int_A \varphi(t,a)\,dZ(a) \tag{48}$$

όπου A είναι ένα σύνολο στοιχείων α, $\varphi(t,a)$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση δύο μεταβλητών και Z είναι ένα ορθογώνιο τυχαίο μέτρο στο σύνολο A. Σύμφωνα με το θεώρημα του Karhunen η τυχαία συνάρτηση $\Xi(t,\theta)$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή (48) αν και μόνον αν η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,s)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$C(t,s) = \int_A \varphi(t,a)\overline{\varphi(s,a)}F(da) \tag{49}$$

όπου F είναι ένα μέτρο στο σύνολο A .

Περισσότερα για τα ορθογώνια μέτρα καθώς και για το θεώρημα Karhunen μπορεί να βρει κανείς στον Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, σελίδες 92 - 102. Επιπλέον, μία αναλυτική παρουσιάση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων τυχαίων συναρτήσεων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει στους Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company ,σελίδες 200-207.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akhiezer N.I., Glazman I.M., 1993, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, Inc. New York.

Alexanderian A., 2013, A brief note on the Karhunen-Loeve expansion.

John B. Conway, 1985, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag

Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory 2, Springer

J.R. Retherford, 1993, Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem, Cambridge University Press

Rozanov Yu. A., 1995, Probability Theory, Random Processes and Mathematical Statistics, Springer Science + Business, B.V.

Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

Vulikh B.Z., 1976, A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable (An Itroduction to the Theory of the Integral), Mir Publishers Moscow.

Walter Rudin, 2000, Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, Leader books.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume I: Basic Results, Springer-Verlag.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume II: Supplementary Notes and References, Springer-Verlag.

Yuichiro Kakihara, Σημειώσεις για στοχαστικές διαδικασίες.

Zarqa W.A., Shamala M.A., Aga S.A., Qitieti K.A., Rashedi R.A., 2008, Karhunen-Loeve Expansion of Some Random Variables

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Προτυποποίηση του Συνεχούς’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για χώρους Hilbert, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αργυρός Σπύρος, 2011, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη Έκδοση

Ευάγγελος Ψωμόπουλος, 2007, Γραμμική Άλγεβρα II, Εκδόσεις Ζήτη

Καρυοφύλλης Χ. Γ., 1995, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη

Κυβεντίδης Θωμάς, 2009, Τοπολογία Μετρικών Χώρων, Εκδόσεις Ζήτη

Νεγρεπόντης et.al ,1997, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση , Εκδόσεις Συμμετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

6.1) Εισαγωγή

Λέγοντας φασματική αναπαράσταση της τυχαίας συνάρτησης $X(t;\theta)$ εννοούμε μία αναπαράσταση αυτής στη μορφή του στοχαστικού ολοκληρώματος Fourier. Η φασματική αναπαράσταση ορίζεται και είναι πολύ σημαντική για μία ευρεία κλάση τυχαίων συναρτήσεων. Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως ορίζεται η φασματική αναπαράσταση της συνάρτησης αυτοσυνδιακύμανσης μιας στάσιμης και συνεχούς τυχαίας συνάρτησης. Οι στάσιμες τυχαίες συναρτήσεις είναι μία κατηγορία συναρτήσεων η οποία συναντάται ευρύτατα στις εφαρμογές και προκύπτει κατά φυσικό τρόπο όταν όταν κάποιος θεωρήσει μία σειρά από παρατηρήσεις $x(t)$ οι οποίες εξαρτόνται από τον χρόνο t και δεν υπόκεινται σε κάποια συστηματική αλλαγή. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο τυχαία συνάρτηση ορισμένη σε ένα αυθαίρετο σύνολο $T=\{t,s,...\}$ εννοούμε μία συνάρτηση $X(t;\theta)$ της οποίας οι τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς, μία τυχαία συνάρτηση στο σύνολο T είναι μία οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές $X(t),X(s),...$ για κάθε στοιχείο $t,s...$ του συνόλου T αντίστοιχα. Στη περίπτωση που το σύνολο T περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, τότε η τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών και αποτελεί την κλασική πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή που μελετάται σε κάθε προπτυχιακό μάθημα θεωρίας πιθανοτήτων. Στην περίπτωση όμως που το σύνολο T είναι άπειρο, τότε η τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ είναι μία άπειρη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών. Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε τον ορισμό της στάσιμης τυχαίας συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1: Μια τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ ονομάζεται ***ισχυρώς στάσιμη*** αν όλες οι οικογένειες των κατανομών πιθανότητας αυτής παραμένουν αναλλοίωτες σε μία οποιαδήποτε μετατόπιση της αρχής των χρόνων, δηλαδή, αν για κάθε $\tau\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_N+\tau,}\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_N,}\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right)$$

και στην περίπτωση που υπάρχει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_N+\tau,}\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right) = f_{t_1, t_2, \ldots, t_N,}\left(x_1, x_2, \ldots, x_N\right)$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $\left(t_1, \ldots, t_N\right) \in \mathbb{R}^N$.

Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι η πιθανοθεωρητική δομή της τυχαίας συνάρτησης $X\left(t;\theta\right)$ και της $X_\tau\left(t;\theta\right) = X\left(t+\tau;\theta\right)$ είναι ακριβώς η ίδια για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$. Συχνά περιοριζόμαστε στη θεώρηση μόνο των πρωτοτάξεων και δευτεροτάξιων χαρακτηριστικών μιας τυχαίας συνάρτησης. Στις πειπτώσεις αυτές η έννοια της στασιμότητας περιορίζεται ως εξής:

<u>**ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2**</u>: Μια τυχαία συνάρτηση $X\left(t;\theta\right)$ ονομάζεται <u>***ασθενώς στάσιμη***</u> αν :

i. Είναι δευτέρας τάξεως, δηλαδη $E^\beta\left[\left|X\left(t;\theta\right)\right|^2\right] < \infty$
ii. Η συνάρτηση μέσης τιμής αυτής είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή, και $m_X\left(t\right) = m_X$.
iii. Η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης αυτής εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των δύο ορισμάτων, δηλαδή: $C_{XX}\left(t+\tau, t\right) = C_{XX}\left(\tau\right)$.

Παρατηρούμε ότι η φυσική ερμηνεία των συνθηκών που ικανοποιούν οι στάσιμες τυχαίες συναρτήσεις είναι ότι κανένας από τους μακροσκοπικούς παράγοντες που επηρεάζουν το φαινόμενο που βρίσκεται σε εξέλιξη δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Με άλλα λόγια η τυχαία συνάρτηση $X\left(t;\theta\right)$ περιγράφει τη χρονική μεταβολή ενός φαινομένου σταθερής κατάστασης για το οποίο η διαφοροποίηση στην επιλογή του χρόνου δεν επιφέρει καμία αλλαγή. Σε πρακτικές εφαρμογές η τυχαία συνάρτηση $X\left(t;\theta\right)$ μπορεί συχνά να θεωρηθεί ως στάσιμη συνάρτηση και αυτό μπορεί να γίνει εμφανές και από την γραφική της αναπαράσταση καθώς δεν θα εμφανίζει κάποια συστηματική αλλαγή κατά την εξέλιξη της στο χρόνο. Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση των Gaussian τυχαίων συναρτήσεων, για τις οποίες η μέση τιμή και η συνάρτηση συσχέτισης προσδιορίζουν πλήρως όλες τις πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, οι έννοιες της ισχυρής και της ασθενής στασιμότητας ταυτίζονται μεταξύ τους. Η Gaussian συνάρτηση έχει πάντα πεπερασμένη πρώτη και δεύτερη ροπή, η μέση τιμή της είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η συνάρτηση συσχέτισης $C(t,\tau)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t-\tau$ και οι αντίστοιχες πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής ικανοποιούν τη σχέση

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_N+\tau,}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right) = F_{t_1, t_2, \dots, t_N,}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right)$$

του ορισμού της στάσιμης συνάρτησης κατανομής.

6.2) Συνάρτηση φασματικής κατανομής

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε δύο σημαντικά θεωρήματα για συνεχείς και θετικά ορισμένες συναρτήσεις τα οποία θα μας είναι πολύ χρήσιμα στη συνέχεια. Υπενθυμίσουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης κάθε στάσιμης και συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής και θετικά ορισμένη. Επιπλέον, σε ολόκληρη την ενότητα θα συμβολίζουμε με ω τη συχνότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ BOCHNER 6.3: Κάθε συνάρτηση $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι θετικά ορισμένη και συνεχής μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega\tau)\, d\mathbf{S}(\omega) \tag{1}$$

όπου $\mathbf{S}(\omega)$ είναι μία μη φθίνουσα συνάρτηση κατανομής. Αντιστρόφως, κάθε συνάρτηση $C(\tau)$ που αναπαρίσταται στη μορφή $C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega\tau)\, d\mathbf{S}(\omega)$ είναι μία θετικά ορισμένη και συνεχής συνάρτηση.

Η συνάρτηση $\mathbf{S}(\omega)$ ονομάζεται ***συνάρτηση φασματικής κατανομής*** της $C(\tau)$.

Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση φασματικής κατανομής είναι μεν πάντοτε μη φθίνουσα αλλά μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη. Στην περίπτωση που η συνάρτηση φασματικής κατανομής είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $C(\tau)$ γράφεται στη μορφή :

$$C(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\omega\tau)S(\omega)d(\omega),\ \textit{όπου}\quad S(\omega)=d\mathbf{S}(\omega)/d\omega\geq 0 \tag{2}$$

Και λέμε ότι η συνάρτηση $C(\tau)$ έχει συνεχές φάσμα. Επιπλέον, η συνάρτηση $S(\omega)$ ονομάζεται ***συνάρτηση φασματικής πυκνότητας*** $C(\tau)$.

Η σχέση (2) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier αντιστρέφεται και μας δίνει τη σχέση:

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega\tau)C(\tau)d\tau \tag{3}$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $C(\tau)$ είναι άρτια συνάρτηση προκύπτει ότι και η συνάρτηση $S(\omega)$ είναι άρτια.

Λόγω λοιπόν της αρτιότητας των συναρτήσεων $C(\tau)$ και $S(\omega)$ μπορούμε να περιορίσουμε την ολοκλήρωση στον θετικό ημιάξονα και έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C(\tau)=\int_{0}^{\infty}S^{+}(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega \quad \text{και} \tag{4}$$

$$S^{+}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}C(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \tag{5}$$

όπου $S^{+}(\omega)=2\,S(\omega)$.

Αν εφαρμόσουμε τα ανωτέρω για τη συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $C_{XX}(t+\tau,t)=C_{XX}(\tau)$ και θέσουμε $S_{XX}(\omega)=S^{+}(\omega)$ προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ WIENER – KHINCHIN 6.4:</u> Η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $C_{XX}(t+\tau,t)=C_{XX}(\tau)$ κάθε στάσιμης και συνεχούς τυχαίας συνάρτησης $X(t;\theta)$ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή:

$$C_{XX}(\tau)=\int_{0}^{\infty}S_{XX}(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega \tag{6}$$

Και με τη βοήθεια του συνιμητονικού μετασχηματισμού Fourier η παραπάνω σχέση μπορεί να αντιστραφεί και έχουμε:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} C_{XX}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \qquad (7)$$

Οι παραπάνω δύο σχέσεις είναι γνωστές ως σχέσεις **Wiener-Khinchin**. Σύμφωνα με αυτές τις σχέσεις, οι συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας $S_{XX}(\omega)$ και αυτοσυνδιακύμανσης $C_{XX}(\tau)$ βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας $S_{XX}(\omega)$ περιέχει την ίδια ακριβώς πληροφορία για την τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $C_{XX}(\tau)$. Ο συνιμητονικός μετασχηματισμός Fourier $S_{XX}(\omega)$ της συνάρτησης αυτοσυνδιακύμανσης $C_{XX}(t+\tau,t) = C_{XX}(\tau)$ μιας στάσιμης τυχαίας συνάρτησης ονομάζεται συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ή φάσμα της $C_{XX}(\tau)$.

Μία πρώτη φασματική αναπαράσταση για τις για συναρτήσεις συσχέτισης στάσιμων υπό την ευρεία έννοια στοχαστικών διαδικασιών δόθηκε το 1934 από τον Khintchine, όπου θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση συσχέτισης $R_{XX}(s,t)$ της στοχαστικής διαδικασίας

$X(t,\theta),\ t\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$R_{XX}(s,t) = R(s-t).$$

Τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(s,t)$ ως θετικά ορισμένη συνάρτηση και δεδομένου ότι είναι συνεχής μπορεί λόγω του θεωρήματος Bochner να αναπαρασταθεί ως:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\, dF(s) \qquad (9)$$

όπου η F είναι μια ***συνάρτηση κατανομής*** η οποία επάγει ένα ***θετικό*** και ***πεπερασμένο μέτρο Borel*** στο σύνολο $\mathbb{R}$. Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση $F(s)$ καλείται ***φασματική πυκνότητα*** της στάσιμης διαδικασίας.

Η φυσική σημασία της φασματικής συνάρτησης είναι η εξής:

Εάν η τυχαία συνάρτηση $\xi(t,\theta)$ αναπαριστά το ηλεκτρικό ρεύμα, τότε μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα συνεχές άθροισμα από απλές αρμονικές ταλαντώσεις με τυχαία πλάτη και η προσαύξηση $F(s_2)-F(s_1)$ με $s_1 < s_2$ είναι ίση με τη μέση ισχύ των αρμονικών συνιστωσών της διαδικασίας της οποίας οι συχνότητες ανήκουν στα ημιανοιχτά διαστήματα $[s_1, s_2)$.

6.3) Φασματικό Θεώρημα

Η φασματική συνάρτηση μπορεί να αποκτηθεί μέσω της συνάρτησης συσχέτισης. Από τη θεωρία των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, την οποία αναπτύξαμε αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο, στη περίπτωση που τα a και b είναι σημεία συνέχειας της συνάρτηση κατανομής $F(s)$ έχουμε ότι:

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} R(t)\,dt \tag{10}$$

Στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτηση κατανομής $F(s)$ η παραπάνω σχέση συνεχίζει να ισχύει με τη διαφορά ότι αντικαθιστούμε τη συνάρτηση F στο αριστερά μέλος της σχέσης με τη συνάρτηση G που ορίζεται ως $G(s) = \left[F(s+0) - F(s)\right]/2$.

Στη περίπτωση που η συνάρτηση συσχέτισης $R(t)$ είναι είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$, δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|R(t)\right| dt < \infty$, τότε η φασματική πυκνότητα υπάρχει και είναι ίση με :

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut}\, R(t)\,dt \tag{11}$$

δηλαδή η φασματική πυκνότητα είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης συσχέτισης $R(t)$.

Με τη λογική που αναπτύξαμε παραπάνω προκύπτει το φασματικό θεώρημα το οποίο παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Τονίζουμε ότι, στο φασματικό θεώρημα, η τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ θεωρείται ότι λαμβάνει μιγαδικές τιμές, δηλαδή γράφεται στη μορφή $X(t;\theta) = X_R(t;\theta) + i\,X_I(t;\theta)$. Συνεπώς, η συνάρτηση $\mathbf{Z}_{XX}(\omega,\theta)$ λαμβάνει και αυτή μιγαδικές τιμές.

ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 6.5: Έστω $X(t;\theta)$, με $t \in (-\infty, +\infty)$ να είναι μία στάσιμη και συνεχής τυχαία συνάρτηση με μέση τιμή μηδέν και συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $C_{XX}(\tau)$. Τότε υπάρχει πάντοτε μία συνάρτηση ορθογώνιων προσαυξήσεων $\mathbf{Z}_{XX}(\omega,\theta)$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $X(t;\theta)$ να αναπαρίσταται ως στοχαστικό ολοκλήρωμα Fourier – Stieltjes της μορφής:

$$X(t,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t)\, d\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta) \qquad (12)$$

Η τυχαία συνάρτηση $\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)$ ονομάζεται ***στοχαστική συνάρτηση φασματικής κατανομής*** της $X(t;\theta)$ και ορίζεται κατά προσέγγιση μίας αθροιστικής τυχαίας μεταβλητής από τη σχέση :

$$\mathbf{Z}_{XX}(\omega_2;\theta) - \mathbf{Z}_{XX}(\omega_1;\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega_2 t) - \exp(-i\omega_1 t)}{-it} X(t;\theta)\, dt \qquad (13)$$

Η συνάρτηση $\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$E^{\beta}\left[\mathbf{Z}_{XX}(\omega_2;\theta) - \mathbf{Z}_{XX}(\omega_1;\theta)\right] = 0 \text{ ή } E^{\beta}\left[d\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)\right] = 0$$

Και για $\omega_1 < \omega_2 \le \omega_3 < \omega_4$,

$$E^{\beta}\left[\mathbf{Z}_{XX}(\omega_2;\theta) - \mathbf{Z}_{XX}(\omega_1;\theta)\right]\overline{\left[\mathbf{Z}_{XX}(\omega_4;\theta) - \mathbf{Z}_{XX}(\omega_3;\theta)\right]} = 0 \text{ ή}$$

για $\omega \ne \omega'$, $E^{\beta}\left[d\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)\overline{d\mathbf{Z}_{XX}(\omega';\theta)}\right] = 0$.

Επειδή η συνάρτηση $\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)$ ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες λέμε ότι είναι τυχαία συνάρτηση ορθογώνιων προσαυξήσεων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για τη ποσότητα $E^{\beta}\left[\left|d\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)\right|^2\right]$ έχουμε ότι:

$$E^{\beta}\left[\left|d\mathbf{Z}_{XX}(\omega;\theta)\right|^2\right] = d\mathbf{S}_{XX}(\omega) = S_{XX}(\omega)\, d(\omega)$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Γ.Α. Αθανασούλη, σημειώσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Κεφάλαιο 2, σελίδες 54-55.

Το 1941 Ο Kolmogorov μελέτησε αναλυτικά τις στοχαστικές διαδικασίες δεύτερης τάξης κάνοντας χρήση μεθόδων από τους χώρους Hilbert.Την ίδια χρονιά ο Cramer επέκτεινε το αποτέλεσμα του Khintchine στον χώρο των διανυσμάτων, ενώ την επόμενη χρονιά βρήκε μία ισοδύναμη αναπαράσταση με την $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\, dF(s)$ για τις στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες. Η αναπαράσταση αυτή είναι γνωστή ως το θεώρημα Cramer – Kolmogorov και μας λέει ότι η τυχαία συνάρτηση $X(t;\theta)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$X(t;\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{its} d\xi(s;\theta) \tag{14}$$

Όπου η $\xi(s;\theta)$ είναι μία στοχαστική συνάρτηση ορθογώνιων προσαυξήσεων αν και μόνον αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(s,t) = R(s-t)$ της τυχαίας συνάρτησης $X(t;\theta)$ έχει φασματική αναπαράσταση η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\, dF(s) \tag{15}$$

Όσον αφορά τις μη στάσιμες στοχαστικές συναρτήσεις δευτέρας τάξεως, η πρώτη φασματική αναπαράσταση τους δόθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1940 από τον Loève με τον όρο “***harmonizable stochastic processes***” τον οποίο εμείς αποδίδουμε ως “***Fourier-Stieltjes αναπαραστάσιμες στοχαστικές διαδικασίες***”. Το 1959 ο Rozanov βρήκε μία φασματική αναπαράσταση αντίστοιχη αυτής του Loeve με τη διαφορά όμως ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $R_{XX}(t,t')$ δεν προκύπτει από τη Riemann-Stieltjes ολοκλήρωση του πυρήνα $e^{-i(st-s't')}$ ως προς μια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αλλά με την ολοκλήρωση του πυρήνα $e^{-i(st-s't')}$ως προς ένα “***bimeasure***”, το οποίο είναι μια συνολοσυνάρτηση από τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, η οποία έχει αρκετές από τις ιδιότητες ενός μιγαδικού μέτρου Borel του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$με τη διαφορά όμως ότι δεν είναι μέτρο. Οι διαφορές στους ορισμούς των Loève και Rozanov αποσαφηνίστηκαν το 1982 στο άρθρο του Rao με τίτλο “Harmonizable Processes: Structure Theory” όπου καλούνται “***strong harmonizability***” και “***weak harmonizability***” αντίστοιχα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους ορισμούς της ***Fourier-Stieltjes*** **αναπαραστάσιμης στοχαστικής συνάρτησης**, και της ***Fourier-Stieltjes*** **αναπαραστάσιμης συνάρτησης αυτοσυσχέτισης** και θα δούμε πως συνδέονται αυτές μεταξύ τους μέσω του **γενικευμένου φασματικού θεωρήματος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.7: Θα λέμε ότι ***η στοχαστική συνάρτηση δευτέρας τάξεως*** $X(t;\theta)$ ***είναι αναπαραστάσιμη μέσω ολοκληρώματος*** (μετασχηματισμού) ***Fourier-Stieltjes*** **εάν** *υπάρχει στοχαστική συνάρτηση* δευτέρας τάξεως $\xi(s;\theta)$, με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{\xi\xi}(s,s')$ φραγμένης κυμάνσεως στο επίπεδο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$X(t;\theta)=\int_{\mathbb{R}} e^{ist} d_s \xi(s;\theta) \text{ με πιθ. 1.} \tag{16}$$

Η $X(t;\theta)$ θα λέγεται επίσης ***Fourier-Stieltjes αναπαραστάσιμη*** ή ***Fourier-Stieltjes στοχαστική συνάρτηση***, ενώ η $\xi(s;\theta)$ θα λέγεται (γενικευμένη) ***φασματική κατανομή της σ.σ.*** $X(t;\theta)$, και η σχέση $X(t;\theta)=\int_{\mathbb{R}} e^{ist} d_s \xi(s;\theta)$ θα αναφέρεται και ως ***φασματική αναπαράσταση*** της $X(t;\theta)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.8: Θα λέμε ότι ***η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης*** $R(t,t')$ ***είναι αναπαραστάσιμη μέσω ολοκληρώματος*** (μετασχηματισμού) **Fourier-Stieltjes** ή, απλούστερα, **Fourier-Stieltjes αναπαραστάσιμης συνάρτησης αυτοσυσχέτισης** (***harmonizable autocorrelation function***) **εάν** *υπάρχει* συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\gamma(s,s')$ φραγμένης κυμάνσεως στο επίπεδο, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$R(t,t') = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(st-s't')} d_s d_{s'}\, \gamma(s,s') \tag{17}$$

Γενικευμένο Φασματικό Θεώρημα 6.9: Έστω $X(t;\theta)$ ***στοχαστική συνάρτηση δευτέρας τάξεως*** με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(t,t')$. Τότε η $X(t;\theta)$ είναι **Fourier-Stieltjes** ***αναπαραστάσιμη αν και μόνο αν*** η $R_{XX}(t,t')$ είναι ***Fourier-Stieltjes αναπαραστάσιμη***.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory 2, Springer

Rao, M.M. , 1982, Harmonizable processes: structure theory, L' Enseign. Math. 28, 295 – 351.

Rozanov, Yu. A. ,1959, Spectral analysis of abstract functions, Theory Probab. Appl. 4, 271 – 287.

Rozanov Yu. A., 1995, Probability Theory, Random Processes and Mathematical Statistics, Springer Science + Business, B.V.

Sasvari Zoltan ,2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume I: Basic Results, Springer-Verlag

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume II: Supplementary Notes and References, Springer-Verlag

Yuichiro Kakihara, Σημειώσεις για στοχαστικές διαδικασίες.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα "Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών'', Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΆΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

SAMPLING THEOREM

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή των θεωρημάτων Mercer και Karhunen Loeve, το sampling theorem είναι ένας άλλος τρόπος αναπαράστασης της στοχαστικής συνάρτησης $X(t,\theta)$ συναρτήσει δύο μοναδιάστατων συναρτήσεων. Εισήχθηκε για πρώτη φορά από τον Shannon to 1949 για συναρτήσεις σημάτων, οι οποίες είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ενώ το 1957 ο Balakrishnan το επέκτεινε για ασθενώς στάσιμες στοχαστικές συναρτήσεις.

Προτού παρουσιάσουμε το θεώρημα πρέπει να ορίσουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις σημάτων, τις "bandlimited" και τις πεπερασμένης ενέργειας (finite energy).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Μία συνάρτηση σήματος $X(t)$ καλείται ***πεπερασμένης ενέργειας*** αν η συνάρτηση αυτή ανήκει στο σύνολο $L^2(\mathbb{R})$.

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της ορίζεται κατά μέση τετραγωνική έννοια ως εξής:

$$(FX)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{iut} dt = ms \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} X(t) e^{iut} dt \ . \qquad (7)$$

Ο τελεστής $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ είναι ένας unitary τελεστής, δηλαδή ισχύει ότι $\langle Fh, Fh \rangle = \langle h, h \rangle$ για κάθε h που ανήκει στον χώρο Hilbert. Υπενθυμίζουμε ότι οι unitary τελεστές έχουν την ιδιότητα ότι για δύο συνάρτησεις h, g του χώρου Hilbert ισχύει ότι: $\langle Fh, Fg \rangle = \langle h, g \rangle$ και $\langle Fh, g \rangle = \langle h, F^{-1}, g \rangle$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Μία συνάρτηση σήματος $X(t)$ καλείται ***"bandlimited"*** αν υπάρχει μία σταθερά $W > 0$ τέτοια ώστε $(FX)(u) = 0$ για κάθε u για το οποίο ισχύει $|u| > W$.

Η σταθερά $W > 0$ καλείται ***bandwidth*** και το διάστημα $[-W, W]$ είναι το διάστημα συχνότητας (frequency interval).

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μία συνάρτηση που είναι bandlimited, τη ***<u>συνάρτηση επιλογής</u>*** (sample function).

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 3:</u> Έστω $W > 0$. Η συνάρτηση S_W η οποία ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και δίνεται από τον τύπο:

$$S_W(t) = \begin{cases} \dfrac{W}{\pi} \dfrac{\sin Wt}{Wt}, & t \neq 0 \\ \dfrac{W}{\pi}, & t = 0 \end{cases} \tag{8}$$

καλείται sample function.

<u>SAMPLING THEOREM 4:</u> Έστω $X(t)$ μία bandlimited συνάρτηση σήματος με bandwidth $W > 0$. Η $X(t)$ επιδέχεται κατά μέση τετραγωνική έννοια το ανάπτυγμα το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$X(t,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{W}\right)\sqrt{\frac{W}{\pi}}\varphi_n(t) \tag{9}$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_n(t)$ ορίζονται από τον τύπο:

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{W}} S_W\left(t - \frac{n\pi}{W}\right), \quad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

Και το σύνολο $\{\varphi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ αποτελεί ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο χώρο όλων των bandlimited συναρτήσεων σημάτων με συνάρτηση bandwidth $W > 0$ και καλείται σύστημα συναρτήσεων επιλογής.

Το sampling theorem ουσιαστικά μας λέει ότι ένα bandlimited σήμα μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από ομοιόμορφα κατανεμημένα διακριτά δείγματα αν και μόνον αν ο ρυθμός επιλογής δεν είναι μικρότερος από δύο φορές το bandwidth. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι το θεώρημα αυτό είναι το ανάπτυγμα Fourier μίας L^2 - συνάρτησης ως προς το σύστημα των συναρτήσεων επιλογής.

Το sampling theorem εφαρμόζεται και στην περίπτωση των στάσιμων στοχαστικών συναρτήσεων, με τις οποίες θα ασχοληθούμε αναλυτικά στη συνέχεια. Θα δούμε ότι η συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t)\, d\mathbf{S}(\omega), \quad t \in \mathbb{R} \tag{11}$$

, όπου $\mathbf{S}(\omega)$ είναι η συνάρτηση φασματικής κατανομής. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η συνάρτηση $\{X(t)\}$ είναι bandlimited αν υπάρχει $W > 0$ τέτοιο ώστε ο φορέας του φάσματος $\mathbf{S}(\omega)$ να ανήκει στο διάστημα $[-W,W]$ και και η στοχαστική συνάρτηση μπορεί να γραφεί λόγω του sampling theorem στη μορφή:

$$X(t,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{W},\theta\right)\frac{\sin\big(W(t-n\pi/W)\big)}{\big(W(t-n\pi/W)\big)} \tag{12}$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη βλέπε Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions, De Gruyter, σελίδα 114 και Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company, σελίδα 204.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balakrishnan, A. V. , 1957, A note on the sampling principle for continuous signals, *IRE Trans. Inform. Theory IT – 3, 143 – 146.*

Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter.

Shannon, C.E., 1949, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE 37, 10 – 21.*

Yuichiro Kakihara, Σημειώσεις για στοχαστικές διαδικασίες.

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akhiezer N.I., Glazman I.M., 1993, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, Inc. New York

Alexanderian A., 2013, A brief note on the Karhunen-Loeve expansion

Balakrishnan, A. V. , 1957, A note on the sampling principle for continuous signals, *IRE Trans. Inform. Theory IT – 3, 143 – 146.*

Berg C., Christensen J.P.R., Ressel P.,1984, Harmonic Analysis on Semigroups, Springer-Verlag New York Inc.

Bhat B.R., 1985, Modern Probability Theory, Wiley Eastern Limited

Billingsley Patrick, 1995, Probability and Measure, John Wiley & Sons, Inc

John B. Conway, 1985, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag

Gikhman I.I., Skorohhod A.V., 1969, Introduction to the Theory of Random Processes, W.B. Saunders Company

Gnedenko Boris V., 1997, Theory of Probability, Gordon and Breach Science Publishers

Gut Allan, 2013, Probability: A Graduate Course, Springer

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory I, Springer

LOÈVE, M., 1977, Probability Theory II, Springer.

Lukacs Eugene, 1970, Characteristic Functions, Charles Griffin and Company Limited.

Lukacs E. and Laha R.G. (1964).Applications of Characteristic Functions. Charles Griffin and Company Limited.

Rozanov Yu. A., 1995, Probability Theory, Random Processes and Mathematical Statistics, Springer Science + Business, B.V.

Rao, M.M. , 1982, Harmonizable processes: structure theory, L’ Enseign. Math. 28, 295 – 351.

J.R. Retherford, 1993, Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem, Cambridge University Press

Rozanov, Yu. A. ,1959, Spectral analysis of abstract functions, Theory Probab. Appl. 4, 271 – 287.

Sasvari Zoltan, 2013, Multivariate Characteristic and Correlation Functions. De Gruyter

Sheney W., Light W., 2000, A Course in the Approximation Theory, Brooks/Cole Publishing Company

Shannon, C.E., 1949, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE 37, 10 – 21.*

Vakhania N.N. ,Tarieladze V.I. and Chobanyan S.A., 1987, Probability Distributions on Banach Spaces. D Reidel Publishing Company.

Vulikh B.Z., 1976, A Brief Course in the Theory of Functions of a Real Variable (An Itroduction to the Theory of the Integral), Mir Publishers Moscow.

Walter Rudin, 2000, Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, Leader books.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume I: Basic Results, Springer-Verlag.

A.M.YAGLOM, 1987, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Volume II: Supplementary Notes and References, Springer-Verlag.

Yuichiro Kakihara, Σημειώσεις για στοχαστικές διαδικασίες.

Zarqa W.A., Shamala M.A., Aga S.A., Qitieti K.A., Rashedi R.A., 2008, Karhunen-Loeve Expansion of Some Random Variables

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Στοχαστική Μοντελοποίηση Μακροσκοπικών Φαινομένων και Διαδικασιών’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για το μάθημα “Προτυποποίηση του Συνεχούς’’, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αθανασούλης Γ.Α., Σημείωσεις για χώρους Hilbert, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Αργυρός Σπύρος, 2011, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη Έκδοση

Δανίκας Ν., Μαριάς Μ., 2003, Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού Πολλών Μεταβλητών, Εκδόσεις Ζήτη

Ευάγγελος Ψωμόπουλος, 2007, Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Εκδόσεις Ζήτη

Καρυοφύλλης Χ. Γ., 1995, Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης, Εκδόσεις Ζήτη

Κυβεντίδης Θωμάς, 2009, Τοπολογία Μετρικών Χώρων, Εκδόσεις Ζήτη

Νεγρεπόντης et.al ,1997, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση , Εκδόσεις Συμμετρία

Παπαδάτος Νικόλαος, 2006, Θεωρία Πιθανοτήτων, Αθήνα