



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**Αριθμητικός υπολογισμός τροχιών σωμάτων στη
γεωμετρία Schwarzschild**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΚΟΥΛΟΥΡΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος

Αθήνα, Ιούλιος 2015

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη υπολογιστικού κώδικα με σκοπό τον αριθμητικό υπολογισμό των τροχιών δοκιμαστικών σωμάτων σε χώρο που χαρακτηρίζεται από γεωμετρία Schwarzschild. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν τρία διαφορετικά προγράμματα. Το πρώτο αφορά τον υπολογισμό των τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων στις συντεταγμένες Schwarzschild. Το δεύτερο αφορά τον υπολογισμό των τροχιών φωτεινών ακτινών στις συντεταγμένες Schwarzschild. Το τρίτο αφορά τον υπολογισμό των τροχιών δοκιμαστικών σωματιδίων στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Στο παρόν κείμενο γίνεται μια συνοπτική εισαγωγή στην ειδική και γενική σχετικότητα και περιγράφονται οι συντεταγμένες Schwarzschild και Eddington-Finkelstein. Στη συνέχεια γίνεται περιγραφή των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης και ειδικά των μεθόδων Runge-Kutta. Τέλος, παραθέτονται και αναλύονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα.

Abstract

The scope of this thesis is the development of computer code with the purpose of the numerical calculation of the trajectories of test particles in a Schwarzschild geometry. To that end, three different programs were developed. The first concerns the calculation of massive body trajectories in the Schwarzschild coordinates. The second concerns the calculation of the trajectories of light beams in the Schwarzschild coordinates. The third concerns the calculation of massive body trajectories in the Eddington-Finkelstein coordinates. Initially, a brief introduction is made in the subject of special and general relativity, and the Schwarzschild and Eddington-Finkelstein coordinates are described. Subsequently, an introduction in numerical integration methods is done, with a focus on the Runge-Kutta numerical integration methods. Finally, the computational results are presented and analyzed.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	iii
Abstract.....	v
Περιεχόμενα.....	vii
1 Ειδική θεωρία της σχετικότητας	1
1.1 Χωροχρόνος	1
1.2 Γεωμετρία του επίπεδου χωροχρόνου	1
1.3 Ιδιόχρονος.....	3
1.4 Μετασχηματισμός Lorentz.....	4
1.5 Μηχανική της ειδικής σχετικότητας	6
1.5.1 Τετρανύσματα.....	6
1.5.2 Τετραταχύτητα και τετραεπιτάχυνση	7
1.5.3 Ορμή και ενέργεια.....	7
1.5.4 Αρχή των μεταβολών	8
1.6 Φωτεινές ακτίνες	9
2 Γενική θεωρία της σχετικότητας.....	11
2.1 Καμπύλωση του χωροχρόνου.....	11
2.2 Περιγραφή του καμπύλου χωροχρόνου	13
2.3 Η γεωμετρία Schwarzschild.....	13
2.3.1 Γεωδαιτικές εξισώσεις.....	14
2.3.2 Διατηρούμενες ποσότητες και ενεργό δυναμικό.....	18
2.3.3 Τροχιές ακτινικής πτώσης	20
2.3.4 Δέσμιες τροχιές	21
2.3.5 Τροχιές των ακτινών φωτός	23
2.4 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein	24

3	Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta	28
3.1	Μέθοδοι Euler	28
3.2	Μέθοδοι Runge-Kutta.....	29
4	Υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων κίνησης στη γεωμετρία	
	Schwarzschild	35
4.1	Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Schwarzschild	36
4.2	Φωτεινές ακτίνες στις συντεταγμένες Schwarzschild.....	39
4.3	Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein	40
	Παράρτημα.....	42
	Παράρτημα.1 Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Schwarzschild.....	42
	Παράρτημα.2 Φωτεινές ακτίνες στις συντεταγμένες Schwarzschild	46
	Παράρτημα.3 Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein.....	49
	Βιβλιογραφία	54

Κεφάλαιο 1

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθούν οι βασικές έννοιες της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας όσων αφορά την σύνδεση χώρου και χρόνου και την περιγραφή της κίνησης φυσικών σωμάτων στον επίπεδο χωροχρόνο.

1.1 Χωροχρόνος

Αντίθετα με την κλασική Νευτώνεια θεωρία όπου ο χρόνος είναι απόλυτος για κάθε παρατηρητή, η ειδική θεωρία της σχετικότητας που προτάθηκε από τον Albert Einstein το 1905 χρησιμοποίησε τα εξής παρακάτω αξιώματα για να περιγράψει την σχέση μεταξύ αδρανειακών παρατηρητών:

1. Πανομοιότυπα πειράματα που διεξάγονται σε πανομοιότυπα αδρανειακά συστήματα παράγουν πανομοιότυπα αποτελέσματα. Δηλαδή οι φυσικοί νόμοι είναι ίδιοι σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Όταν, με έμπνευση τα πειράματα των Michelson και Morley, η παραπάνω λεγόμενη αρχή της σχετικότητας εφαρμόστηκε στις εξισώσεις του Maxwell, προέκυψε το παρακάτω αξίωμα:

2. Για οποιονδήποτε αδρανειακό παρατηρητή, το φως διαδίδεται πάντα με μια καθορισμένη ταχύτητα στο κενό, ανεξάρτητη από την ταχύτητα της πηγής.

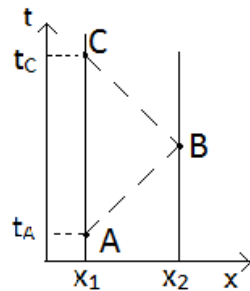
Ένας μεγάλος αντίκτυπος των παραπάνω αξιωμάτων είναι η αμφισβήτηση της έννοιας του απόλυτου χρόνου. Εφόσον η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή, η χρονική αλληλουχία δύο γεγονότων δύναται να αλλάξει ανάλογα με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο παρατηρούνται.

Συνέπεια της εγκατάλειψης της ιδέας του απόλυτου χρόνου ήταν πως ο χρόνος δεν μπορούσε πια να χειριστεί ως μια ανεξάρτητη μεταβλητή όπως στην τρισδιάστατη γεωμετρία της Νευτώνειας φυσικής, αλλά έπρεπε να ενταχθεί σε μια τετραδιάστατη γεωμετρία όπου ο χώρος και ο χρόνος συνδυάζονται σε ένα ενιαίο συνεχές γνωστό ως χωροχρόνο.

1.2 Γεωμετρία του επίπεδου χωροχρόνου

Όπως και στην Νευτώνεια φυσική, η περιγραφή της γεωμετρίας ενός χώρου μπορεί να γίνει ορίζοντας το στοιχείο μήκους dS^2 που δίνει την απειροστή απόσταση dS μεταξύ δύο γειτονικών σημείων στον χώρο. Στην Νευτώνεια φυσική η γεωμετρία του χώρου καθορίζεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες από το στοιχείο μήκους $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Η επέκταση του τρισδιάστατου χώρου στον τετραδιάστατο χωροχρόνο στην ειδική σχετικότητα

σημαίνει πως, για να περιγράψει το παραπάνω στοιχείο μήκους πλήρως τη γεωμετρία του χωροχρόνου, χρειάζεται ένας όρος που θα περιγράψει τη χρονική απόσταση dt μεταξύ δύο γεγονότων. Αυτό μπορεί να γίνει θεωρώντας το παρακάτω νοητικό πείραμα.



Σχ. 1.1

Έστω μια ακτίνα φωτός ξεκινά από το σημείο x_1 την χρονική στιγμή t_A , ανακλάται σε ένα κάτοπτρο στο $x = x_2 = x_1 + L$ και επιστρέφει στο ίδιο σημείο την χρονική στιγμή t_B , όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1. Για έναν ακίνητο παρατηρητή ως προς το κάτοπτρο, εφόσον το φως διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα c , η μεταβολή συντεταγμένων του φωτός είναι:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \text{ και } \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \quad (1.2.1)$$

Για έναν αδρανειακό παρατηρητή ο οποίος κινείται με ταχύτητα $V = -V\hat{y}$ παράλληλα στο κάτοπτρο, τα παραπάνω γεγονότα έχουν διαφορετικές συντεταγμένες (t', x', y', z') , ενώ η μεταβολή τους είναι:

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta y'}{2}\right)^2}, \quad \Delta x' = 0, \quad \Delta y' = V\Delta t', \quad \Delta z' = 0 \quad (1.2.2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2) προκύπτει ότι:

$$-(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

Δηλαδή, προκύπτει μια ποσότητα της μορφής $(\Delta S)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, η οποία παραμένει αναλλοίωτη σε οποιοδήποτε νοητικό πείραμα που περιλαμβάνει διαστήματα μεταξύ δύο γεγονότων και μπορεί να γενικευθεί ως το στοιχείο μήκους που ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών χωροχρονικών γεγονότων:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Στοιχείο μήκους} \\ \text{επίπεδου χωροχρόνου} \end{array} \quad (1.2.3)$$

Η παραπάνω ποσότητα, λοιπόν, περιγράφει τη γεωμετρία ενός επίπεδου χωροχρόνου, γνωστού και ως χώρος Minkowski.

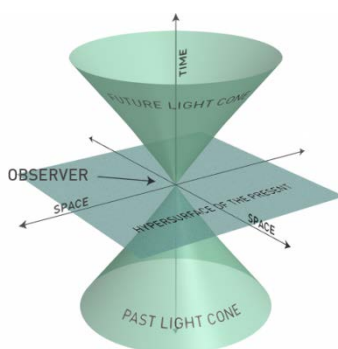
Για το φως ισχύει ότι $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = c$. Με αυτή τη συνθήκη, η σχέση (1.2.3) γίνεται $ds^2 = 0$. Συνεπώς, εάν λάβουμε σημείο στον χωροχρόνο σαν σημείο

αναφοράς, όλα τα γεγονότα από τα οποία το φως μπορεί να φτάσει στο σημείο αυτό, αλλά και όλα τα γεγονότα στα οποία μπορεί να φτάσει φως από αυτό το σημείο χαρακτηρίζονται από $ds^2 = 0$, και αναπαριστούνται στα χωροχρονικά διαγράμματα ως κώνοι. Αυτοί οι κώνοι φωτός διαχωρίζουν τον χωροχρόνο περεταίρω. Τα γεγονότα που βρίσκονται στο εσωτερικό τους, για τα οποία ισχύει $ds^2 < 0$, είναι χρονοειδώς χωρισμένα από το σημείο και μπορεί να υπάρξει μετάδοση πληροφορίας μεταξύ τους με μικρότερη ταχύτητα από εκείνη του φωτός. Τα γεγονότα που βρίσκονται εκτός των κώνων, για τα οποία ισχύει $ds^2 > 0$, είναι χωροειδώς χωρισμένα από το σημείο και δεν είναι δυνατή η άμεση μετάδοση πληροφορίας μεταξύ τους, μιας και αυτό θα απαιτούσε μετάδοση πληροφορίας σε ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός.

$$ds^2 < 0 \text{ χρονοειδής}$$

$$ds^2 = 0 \text{ φωτοειδής}$$

$$ds^2 > 0 \text{ χωροειδής}$$



Σχ. 1.2 Κώνος φωτός (Πηγή: wikipedia.org)

1.3 Ιδιόχρονος

Χρησιμοποιώντας το στοιχείο μήκους του επίπεδου χωροχρόνου μπορεί να οριστεί η ποσότητα:

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2$$

Η ποσότητα τ είναι γνωστή ως ιδιόχρονος και μετρά την χρονική απόσταση κατά μήκος μιας χρονοειδούς καμπύλης, δηλαδή τον χρόνο που περνάει για έναν παρατηρητή ο οποίος ταξιδεύει πάνω σε αυτή την κοσμική γραμμή.

Ο ιδιόχρονος τ_{AB} μεταξύ δύο σημείων A και B κατά μήκος μιας χρονοειδούς κοσμικής γραμμής στον επίπεδο χωροχρόνο είναι:

$$\begin{aligned}
\tau_{AB} &= \int_A^B d\tau = \int_A^B \left[dt^2 - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \left[1 - \frac{V^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.3.1)
\end{aligned}$$

και θεωρώντας μια απειροστή ποσότητα χρόνου:

$$d\tau = dt \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma \quad (1.3.2)$$

Εφόσον η ταχύτητα V είναι πάντα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός c για τα σώματα με μάζα, η ποσότητα γ είναι πάντα μεγαλύτερη της μονάδας. Ως αποτέλεσμα ο ιδιόχρονος τ_{AB} είναι πάντα μικρότερος από την ποσότητα $t_A - t_B$, με τη διαφορά τους αυτή να αυξάνεται όσο η ταχύτητα V προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως διαστολή του χρόνου.

1.4 Μετασχηματισμός Lorentz

Ένα πιο πρακτικό πρόβλημα που προέκυψε λόγω του δεύτερου αξιώματος της ειδικής σχετικότητας αφορούσε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου που περιέγραφαν τη σχέση μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων με σχετική ταχύτητα u , έστω κατά τον άξονα x :

$$\begin{aligned}
x' &= x - ut \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί δεν ήταν συνεπείς με τη θεώρηση πως η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα και έπρεπε να αντικατασταθούν.

Μια αντιστοιχία με την ανάλογη κλασική περίπτωση είναι η χρήση στροφής του επιπέδου t - x για την περιγραφή του μετασχηματισμού. Αντίθετα με την κλασική περίπτωση όμως, χρήση των απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν αφήνει το στοιχείο μήκους (1.2.3) αναλλοίωτο, μιας και η χρήση γωνιών Euler απαιτεί χώρο Ευκλείδειας γεωμετρίας. Παρόλα αυτά, το στοιχείο μήκους μπορεί να μείνει αναλλοίωτο με τη χρήση των υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι, οι συντεταγμένες (t, x, y, z) μπορούν να μετασχηματιστούν στο σύστημα συντεταγμένων (t', x', y', z') ενός διαφορετικού αδρανειακού συστήματος το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα u κατά τον άξονα x ως προς το πρώτο σύμφωνα με τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$ct' = (\cosh\theta)(ct) - (\sinh\theta)x \quad (1.4.1a)$$

$$x' = (-\sinh\theta)(ct) + (\cosh\theta)x \quad (1.4.1b)$$

$$y' = y \quad (1.4.1c)$$

$$z' = z \quad (1.4.1d)$$

όπου $\theta \in (-\infty, +\infty)$ είναι μια κατάλληλη παράμετρος.

Ένα ακίνητο σωματίδιο στις συντεταγμένες (ct', x', y', z') με $x' = 0$, θα κινείται με σταθερή ταχύτητα v στις συντεταγμένες (ct, x, y, z) :

$$x = vt \quad (1.4.2)$$

Για $x' = 0$, η σχέση (1.4.1b) δίνει:

$$x = c \tanh\theta t \xrightarrow{(1.4.2)} v = c \tanh\theta \quad (1.4.3)$$

Άρα, από τις σχέσεις (1.4.1b) και (1.4.3), έχουμε:

$$x' = \cosh(x - vt) \quad (1.4.4)$$

Απαιτώντας το αναλλοίωτο του στοιχείου μήκους ds^2 στις δύο βάσεις, έχουμε τελικά:

$$-(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(c dt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \Rightarrow$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές στην παραπάνω εξίσωση έχουμε τελικά:

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad \text{και} \quad \sinh\theta = \gamma \frac{v}{c} \quad (1.4.6)$$

Τελικά, οι σχέσεις (1.4.1) γίνονται:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (1.4.7\alpha)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1.4.7\beta)$$

$$y' = y \quad (1.4.7\gamma)$$

$$z' = z \quad (1.4.7\delta)$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως Lorentz boost και αποτελούν την ειδική περίπτωση των μετασχηματισμών Lorentz μεταξύ των συντεταγμένων δύο αδρανειακών συστημάτων στην περίπτωση που το ένα κινείται με σταθερή ταχύτητα u κατά τον άξονα x .

1.5 Μηχανική της Ειδικής Σχετικότητας

Για την μαθηματική περιγραφή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι απαραίτητη η επαναδιατύπωση των νόμων της Νευτώνειας μηχανικής ώστε να είναι συμβατοί με την έννοια του τετραδιάστατου χωροχρόνου.

1.5.1 Τετρανύσματα

Κατά αναλογία με τον ορισμό ενός τρισδιάστατου διανύσματος ως ενός προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, μπορεί να οριστεί το τετρανύσμα (four-vector) ως ένα ευθύγραμμο τμήμα στον τετραδιάστατο χωροχρόνο:

$$\mathbf{a} = a^t \mathbf{e}_t + a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z \quad (1.5.1.1)$$

Όπου $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ή ισοδύναμα $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι τα τετρανύσματα βάσης. Οπότε, το παραπάνω τετρανύσμα μπορεί να γραφεί και ως:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^3 a^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i \quad (1.5.1.2)$$

Παραπάνω φαίνεται η σύμβαση άθροισης, κατά την οποία η ύπαρξη διαδοχικών εκθετών-δεικτών σε κάποια έκφραση υπονοεί την άθροισή τους.

Κατά αναλογία με τα τρισδιάστατα διανύσματα, μπορεί να οριστεί το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο τετρανυσμάτων του επίπεδου χωροχρόνου:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (b^\beta \mathbf{e}_\beta) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) a^\alpha b^\beta = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \quad (1.5.1.3)$$

Η ποσότητα $\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ ονομάζεται μετρική του επίπεδου χωροχρόνου και ορίζεται απαιτώντας το εσωτερικό γινόμενο του τετρανύσματος μετατόπισης με τον εαυτό του να δίνει το τετράγωνο της απόστασης των σημείων που συνδέει. Δηλαδή:

$$(\Delta s)^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.5.1.4)$$

όπου $dx^\alpha = (c dt, dx, dy, dz)$.

Από την σχέση (1.2.3) και την ιδιότητα της μετρικής $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$, προκύπτει ότι το $\eta_{\alpha\beta}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν διαγώνιο συμμετρικό πίνακα:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5.1.5)$$

Χρησιμοποιώντας την μετρική αυτή, το στοιχείο μήκους του επίπεδου χωροχρόνου μπορεί να γραφεί ως:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.5.1.6)$$

1.5.2 Τετραταχύτητα και τετραεπιτάχυνση

Όπως είδαμε παραπάνω, το τετράνυσμα της μετατόπισης x^α ορίζεται ως:

$$\mathbf{x} = (ct, x, y, z) \quad (1.5.2.1)$$

Το τετράνυσμα αυτό μπορεί να εξαρτάται από μια παράμετρο, με την φυσικότερη επιλογή τον ιδιόχρονο τ . Έτσι, μια κοσμική γραμμή μπορεί να περιγραφεί από μια σειρά εξισώσεων $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$.

Οπότε, μπορεί να οριστεί η τετραταχύτητα ως η μεταβολή του χωρικού τετρανύσματος $\mathbf{x}^\alpha(\tau)$ ως προς το τ :

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{V}) \quad (1.5.2.2)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2 (V^2 - c^2) = -c^2 \quad (1.5.2.3)$$

Η $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ σε φυσικές μονάδες ($c=1$). Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως η σχέση κανονικοποίησης της τετραταχύτητας.

Παρομοίως μπορεί να οριστεί η τετραεπιτάχυνση ως η μεταβολή της τετραταχύτητας $\mathbf{u}(\tau)$ ως προς το τ :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}$$

1.5.3 Ορμή και ενέργεια

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα παραμένει σε ισχύ στην σχετικιστική μηχανική:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = 0 \quad (1.5.3.1)$$

Στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα μπορεί να δοθεί η παρακάτω μορφή ώστε να διατηρεί την ίδια μορφή σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.5.3.2)$$

Μια σημαντική παρατήρηση σε αυτές τις εξισώσεις αποτελεί το γεγονός πως, παρότι οι αρχικές εξισώσεις είναι τέσσερις, λόγω της κανονικοποίησης της τετραταχύτητας προκύπτει ότι $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0$, κάτι που μειώνει τις ανεξάρτητες εξισώσεις σε τρεις, όσες και στην Νευτώνεια μηχανική.

Από την εξίσωση (1.5.3.2) φαίνεται λογικός ο ορισμός της τετραορμής ως:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = (\gamma mc, \gamma m\vec{V}) \quad (1.5.3.3)$$

Ο ορισμός αυτός σε συνδυασμό με την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας οδηγεί στη σχέση:

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 c^2 \quad (1.5.3.4)$$

Για $V \ll 1$ η τετραορμή γίνεται $\mathbf{p} = (m + \frac{1}{2}mV^2 + \dots, m\vec{V} + \dots)$. Οι συνιστώσες της προσεγγίζουν δηλαδή την κινητική ενέργεια συν τη μάζα ηρεμίας και την κλασική ορμή αντίστοιχα. Συνεπώς, το τετράνυσμα μπορεί να θεωρηθεί σαν τετράνυσμα ενέργειας-ορμής και να γραφεί ως:

$$\mathbf{p} = (E, \vec{p}) \quad (1.5.3.5)$$

και σε συνδυασμό με την σχέση (1.5.3.4) προκύπτει:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Η σχέση αυτή δίνει την συνολική ενέργεια ενός σχετικιστικού σωματιδίου.

1.5.4 Αρχή των μεταβολών

Κατά αναλογία με την μέθοδο της ελάχιστης δράσης στην Νευτώνεια μηχανική, η κίνηση ενός ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί από μια αρχή μεταβολών, κατά την οποία η κοσμική γραμμή του μεταξύ δύο χρονοειδώς διαχωρισμένων σημείων παρουσιάζει ακρότατο στον ιδίοχρονο μεταξύ τους. Πρακτικά, θεωρώντας δύο τέτοια σημεία, για μια τυχαία χρονοειδής κοσμική γραμμή που τα ενώνει ισχύει:

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.5.4.1)$$

Έστω τώρα μια παράμετρος σ τέτοια ώστε η κοσμική γραμμή από το A έως το B να αντιστοιχεί στο διάστημα της παραμέτρου $\sigma \in [0,1]$:

$$\tau_{AB} = \int_0^1 \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma \quad (1.5.4.2)$$

Η εύρεση της κοσμικής γραμμής για την οποία ο ιδιόχρονος τ_{AB} παρουσιάζει ακρότατο ισοδυναμεί με την εύρεση της καμπύλης για την οποία μια απειροστή μεταβολή $\delta x^\alpha(\sigma)$ συνεπάγεται μηδενική μεταβολή του ιδιόχρονου. Το πρόβλημα αυτό είναι το ανάλογο της Λαγκρανζιανής στην κλασική μηχανική, με την σχέση (1.5.4.2) να αντιστοιχεί στην δράση.

Η εξίσωση Lagrange είναι:

$$-\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (1.5.4.3)$$

όπου:

$$L = \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.5.4.4)$$

Επιλύοντας την (1.5.4.3) για τα διάφορα x^α προκύπτουν οι χωρικές εξισώσεις κίνησης ενός ελεύθερου σωματιδίου στον επίπεδο χωροχρόνο:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.5.4.5)$$

1.6 Φωτεινές ακτίνες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια συνοπτική αναφορά σε σωματίδια με μηδενική μάζα, τα οποία κινούνται στον επίπεδο χωροχρόνο με την ταχύτητα του φωτός, και πιο συγκεκριμένα στα φωτόνια.

Στην περίπτωση των φωτεινών ακτινών η χρήση του ιδιόχρονου σαν παράμετρο δεν ενδείκνυται εφόσον, όπως προκύπτει από την μετρική του επίπεδου χωροχρόνου, η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημείων της είναι μηδενικό. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να γίνει επιλογή μιας κατάλληλης παραμέτρου λ .

Αν για παράδειγμα πάρουμε την καμπύλη $x = t$ (σε φυσικές μονάδες), μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής:

$$x^\alpha = u^\alpha \lambda$$

ώστε $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$.

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $\frac{du}{d\lambda} = 0$ και η εξίσωση κίνησης των φωτεινών ακτινών θα είναι όμοια με αυτή των σωμάτων με μάζα. Αντιθέτως, η κανονικοποίηση της ταχύτητας στην περίπτωση των φωτονίων είναι:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.6.1)$$

Η ενέργεια των φωτονίων συνδέεται με την συχνότητά τους μέσω της σχέσης $E = \hbar\omega$. Επειδή $\vec{V} = \vec{p}/E$, για τα φωτόνια θα ισχύει $|\vec{p}| = E$ σε φυσικές μονάδες. Οπότε $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, το οποίο σε μορφή τετρανύσματος θα είναι:

$$p^\alpha = (E, \vec{p}) = (\hbar\omega, \hbar\vec{k}) = \hbar k^\alpha \quad (1.6.2)$$

Όπου η ποσότητα k^α είναι το τετρακυματόνυσμα του φωτονίου, για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (1.6.3)$$

η οποία είναι αντίστοιχη της σχέσης (1.5.3.4) με την αναμενόμενη διαφορά ότι στην περίπτωση των φωτονίων η μάζα ηρεμίας είναι μηδενική.

Κεφάλαιο 2

Γενική θεωρία της σχετικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισαχθούν οι βασικές έννοιες της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Επιπλέον, θα περιγραφεί η μετρική Schwarzschild και θα υπολογιστούν οι αντίστοιχες γεωδαιτικές εξισώσεις κίνησης ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση.

2.1 Καμπύλωση του χωροχρόνου

Η ουσία της γενικής θεωρίας της σχετικότητας μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά μέσω της αρχής της ισοδυναμίας και της καμπύλωσης του χωροχρόνου.

Η αρχή της ισοδυναμίας προκύπτει από την πειραματική επιβεβαίωση ότι η βαρυτική μάζα και η αδρανειακή μάζα είναι ίσες ποσότητες. Από αυτή την ιδιότητα συνεπάγεται πως η κίνηση ενός σώματος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε κάποιο βαρυτικό πεδίο είναι ισοδύναμη με αυτή σε ένα μη αδρανειακό σύστημα εφόσον η επιτάχυνσή του είναι ανάλογη του βαρυτικού πεδίου στην πρώτη περίπτωση.

Κοιτώντας αυτή την αρχή από μια άλλη οπτική, μπορεί κανείς να την αναδιατυπώσει ως: Φαινόμενα τα οποία παρατηρούνται σε κάποιο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς πρέπει να αναπαράγονται σε ένα ακίνητο σύστημα που βρίσκεται σε ισοδύναμο βαρυτικό πεδίο.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα επιταχυνόμενο εργαστήριο και έναν παρατηρητή A ο οποίος στέλνει μια σειρά φωτεινών παλμών αντίθετα από τη φορά της επιτάχυνσης προς έναν παρατηρητή B. Εάν η απόσταση μεταξύ τους είναι h , τότε οι θέσεις τους είναι $z_A(t) = \frac{1}{2}gt^2$ και $z_B(t) = \frac{1}{2}gt^2 + h$ αντίστοιχα. Εάν ο πρώτος παλμός εκπέμπεται τη χρονική στιγμή $t=0$ και λαμβάνεται την στιγμή t_1 , τότε η απόσταση που διένυσε είναι $z_A(0) - z_B(t_1) = ct_1$. Αντίστοιχα, η απόσταση που θα διανύσει ο δεύτερος παλμός αν εκπέμπεται τη στιγμή Δt_A και λαμβάνεται την $t_1 + \Delta t_B$ είναι $z_A(\Delta t_A) - z_B(t_1 + \Delta t_B) = c(t_1 + \Delta t_B - \Delta t_A)$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει τελικά πως $\Delta t_B = \Delta t_A(1 - gh/c^2)$.

Ένα άλλο παράδειγμα αφορά την πορεία μια φωτεινής ακτίνας κάθετη ως προς την επιτάχυνση ενός επιταχυνόμενου εργαστηρίου παρόμοιου με το προηγούμενο παράδειγμα. Παρόλο που η διαδρομή της ακτίνας είναι ευθύγραμμη, το εργαστήριο συνεχίζει να κινείται κατακόρυφα ενώ η φωτεινή ακτίνα το διασχίζει, με αποτέλεσμα το σημείο εξόδου της ακτίνας να είναι χαμηλότερα από το σημείο εισόδου της. Για έναν παρατηρητή μέσα στο εργαστήριο η πορεία της φωτεινής ακτίνας θα φαίνεται καμπύλη, σαν να εκτελούσε ελεύθερη πτώση.

Η εφαρμογή της αρχής της ισοδυναμίας στα δύο παραπάνω παραδείγματα σημαίνει πως σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται

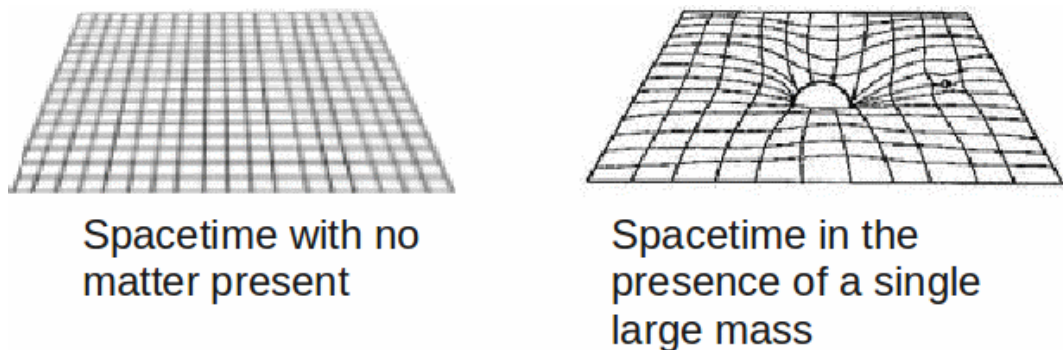
στην επιφάνεια της Γής, θα πρέπει να υπάρχει διαφορά μεταξύ του ρυθμού εκπομπής και λήψης σημάτων ανάλογα με το βαρυτικό δυναμικό, ενώ το φως θα πρέπει να εκτελεί ελεύθερη πτώση υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου της Γής. Δηλαδή, η βαρύτητα θα πρέπει να έλκει ένα φωτόνιο που δεν έχει μάζα.

Η λύση που δόθηκε για την επεξήγηση αυτών των φαινομένων ήταν κατ' αναλογία του πως φαίνονται αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας της Γής σε έναν δισδιάστατο χάρτη. Μια ευθεία γραμμή που συνδέει τα δύο σημεία στον χάρτη φαίνεται σαν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους στην θεωρία, αλλά στην πραγματικότητα, λόγω της σφαιρικότητας της Γής, η πορεία ενός αεροπλάνου που θα ταξίδευε ανάμεσα στα σημεία αυτά ακολουθώντας την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα φαινόταν σαν καμπύλη στον δισδιάστατο χάρτη. Η πορεία αυτή ονομάζεται και γεωδαιτική γραμμή.



Σχ. 2.1 Γεωδαιτική γραμμή (κόκκινο) στην επιφάνεια της Γής (Πηγή: arcgis.com)

Η προτεινόμενη λύση ήταν πως η επίδραση των βαρυτικών πεδίων καμπυλώνουν τον χωροχρόνο, και πως η φαινομενικά καμπύλη πορεία των σωμάτων και των φωτεινών ακτίνων πρόκειται ουσιαστικά για την πορεία με την ελάχιστη δυνατή απόσταση μέσα σε αυτόν.



Σχ. 2.2 Αναπαράσταση επίπεδου και καμπυλωμένου χωροχρόνου (πηγή:astarmathsandphysics.com)

2.2 Περιγραφή του καμπύλου χωροχρόνου

Η πιο λεπτομερής περιγραφή της καμπύλωσης του χωροχρόνου δόθηκε το 1915 από τον Albert Einstein με τη μορφή της γνωστής εξίσωσης Einstein. Πρόκειται για μια θεμελιώδη εξίσωση που συσχετίζει την καμπυλότητα του χωροχρόνου με την πυκνότητα μάζας-ενέργειας που περιέχει και μπορεί να δοθεί με τη μορφή:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad \text{Εξίσωση Einstein (2.2.1)}$$

Εφόσον, η παρούσα εργασία δεν έχει σκοπό την ανάλυση της εξίσωσης αυτής, αλλά μιας ειδικής της λύσης, δεν πρόκειται να δοθούν άλλες λεπτομέρειες όσων αφορά την ερμηνεία και τον τρόπο λύσης της.

Όπως και στην ειδική σχετικότητα, η περιγραφή του χωροχρόνου μπορεί να γίνει μέσω του ορισμού της απειροστής απόστασης μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta \quad (2.2.2)$$

Όπου $g_{\alpha\beta}(x)$ ονομάζεται μετρική και είναι ένας συμμετρικός πίνακας που εξαρτάται από την εκάστοτε θέση στον χωροχρόνο. Στην περίπτωση του επίπεδου χωροχρόνου η μετρική ήταν $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1)$. Για παράδειγμα, δίνεται η μετρική ενός στατικού ασθενούς βαρυτικού πεδίου:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(x^i)}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.2.3)$$

όπου $\Phi(x^i)$ το βαρυτικό δυναμικό.

2.3 Η γεωμετρία Schwarzschild

Το 1916 δημοσιεύθηκε μια λύση της εξίσωσης Einstein από τον Karl Schwarzschild, η οποία περιέγραφε τη μετρική του χωροχρόνου γύρω από μια σφαιρικά συμμετρική μάζα, η οποία έχει μηδενικό φορτίο και σφαιρική ταχύτητα. Η μετρική αυτή είναι:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.3.1)$$

με

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

Από την παραπάνω μετρική προκύπτουν ορισμένες άμεσες παρατηρήσεις:

Αρχικά, η μετρική είναι χρονικά ανεξάρτητη και σφαιρικά συμμετρική. Οι συμμετρίες αυτές είναι χρήσιμες στην απλούστευση των εξισώσεων κίνησης.

Επιπλέον, για $r=2GM/c^2$ μηδενίζονται οι συντελεστές των dt^2 και dr^2 , το οποίο οδηγεί σε μία μαθηματική ανωμαλία. Αυτή η ακτίνα είναι γνωστή ως ακτίνα Schwarzschild και, ενώ στην περίπτωση των άστρων είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα τους, στην περίπτωση των μελανών οπών το σύνολο της μάζας τους περιέχεται μέσα στην ακτίνα αυτή. Ένας πιο πρακτικός ορισμός είναι πως η ακτίνα Schwarzschild είναι η ακτίνα μιας σφαίρας τέτοιας ώστε, εάν ολόκληρη η μάζα ενός σώματος συμπιεστεί μέσα της, τότε η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια αυτής της σφαίρας θα είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός.

Μία ακόμη παρατήρηση είναι πως εάν ο λόγος $GM/c^2 r$ γίνει αρκετά μικρός η μετρική μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3.3)$$

η οποία είναι ίδια με την μετρική στατικού ασθενούς βαρυτικού πεδίου (2.2.3) για $\Phi = -GM/r$, δείχνοντας το κλασικό όριο της μετρικής.

2.3.1 Γεωδαιτικές εξισώσεις

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η κίνηση ελεύθερων σωμάτων ακολουθεί την ελάχιστη διαδρομή στον καμπυλωμένο χωροχρόνο. Η αρχή αυτή συνοψίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο στην αρχή των μεταβολών, κατά την οποία η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου σωματιδίου μεταξύ δύο χρονοειδώς διαχωρισμένων σημείων του χωροχρόνου παρουσιάζει τοπικό ακρότατο του ιδιόχρονου μεταξύ τους. Η αρχή αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση της μετρικής Schwarzschild κατά τον τρόπο που εφαρμόστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην περίπτωση του επίπεδου χωροχρόνου.

Η Λαγκρανζιανή της μετρικής Schwarzschild είναι:

$$L = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2.3.1.1)$$

Ο τύπος που δίνει τις γεωδαιτικές εξισώσεις στην αρχή των μεταβολών είναι:

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.3.1.2)$$

Άμεσα προκύπτει ότι για $x^\alpha = t$,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{t}}\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow -\frac{d}{d\tau}\left[2c^2\dot{t}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)\right] + 0 = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{d\tau}\left[2c^2\dot{t}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)\right] &= 0 \quad (2.3.1.3) \end{aligned}$$

και για $x^\alpha = \varphi$,

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(2r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}) = 0 \quad (2.3.1.4)$$

Για $x^\alpha = r$,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right) + \frac{\partial L}{\partial r} = 0 &\Rightarrow \\ \frac{d}{d\tau}\left[2\dot{r}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\right] + \left(\frac{2GM}{r^2}\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-2}\frac{2GM}{c^2r^2}\dot{r}^2 - 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)\right) &= 0 \quad (2.3.1.5) \end{aligned}$$

Για $x^\alpha = \theta$,

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow$$

Χρησιμοποιώντας την σφαιρική συμμετρία του προβλήματος, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να απλοποιηθούν ορίζοντας κάθε φορά το επίπεδο της κίνησης του ελεύθερου σώματος ως το επίπεδο $\theta = \pi/2$. Έτσι, η εξίσωση (2.3.1.6) ικανοποιείται πάντα, ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις απλουστεύονται. Τελικά:

$$\frac{d}{d\tau}\left[2c^2\dot{t}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)\right] = 0 \quad (2.3.1.7\alpha)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[2\dot{r}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}\right] + \left(\frac{2GM}{r^2}\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-2}\frac{2GM}{c^2r^2}\dot{r}^2 - 2r\dot{\varphi}^2\right) = 0 \quad (2.3.1.7\beta)$$

$$\frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (2.3.1.7\gamma)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των γεωδαιτικών εξισώσεων είναι μέσω της χρήσης των συμβόλων Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Τα σύμβολα αυτά δίνονται από τον τύπο:

$$g_{\alpha\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (2.3.1.8)$$

Για τα οποία ισχύει ότι $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$, ενώ οι γεωδαιτικές εξισώσεις προκύπτουν ύστερα από τον τύπο:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \frac{dx^{\gamma}}{d\tau} \quad (2.3.1.9)$$

Στην περίπτωση της μετρικής Schwarzschild, τα σύμβολα Christoffel είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2g_{tt}} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{2GM}{r^2} \right) \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{1}{2g_{rr}} \left(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \\ \Gamma_{\theta r}^{\theta} &= \frac{1}{2g_{\theta\theta}} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= \frac{1}{2g_{\theta\theta}} \left(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} &= \frac{1}{2g_{\varphi\varphi}} \left(\frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} &= \frac{1}{2g_{\varphi\varphi}} \left(\frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} \right) = \cot \theta \end{aligned}$$

Όλα τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται.

Οι γεωδαιτικές εξισώσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι οι εξής:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (2.3.1.10\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{2GM}{r^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &\quad + r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3.1.10\beta)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} \quad (2.3.1.10\gamma)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \quad (2.3.1.10\delta)$$

Θεωρώντας την ίδια σύμβαση με πριν, δηλαδή ότι $\theta = \frac{\pi}{2}$, οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right) \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (2.3.1.11\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} = & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \left(\frac{2GM}{r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ & + r \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.3.1.11\beta)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad (2.3.1.11\gamma)$$

Όλες οι προηγούμενες εξισώσεις υπολογίστηκαν για την περίπτωση σωμάτων με μάζα που ακολουθούν χρονοειδείς γεωδαιτικές. Γενικεύοντας την διαδικασία που διατυπώθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, θεωρώντας μια κατάλληλη παράμετρο ολοκλήρωσης τέτοια ώστε $u^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$ και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, στην περίπτωση του καμπυλωμένου χωροχρόνου, θα έχουμε για τις φωτεινές ακτίνες ότι:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \quad (2.3.1.12)$$

και οι γεωδαιτικές εξισώσεις του φωτός, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με πριν, θα είναι τελικά:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right) \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \quad (2.3.1.13\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\lambda^2} = & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2r^2}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \left(\frac{2GM}{r^2}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \\ & + r \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.3.1.13\beta)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \quad (2.3.1.13\gamma)$$

2.3.2 Διατηρούμενες ποσότητες και ενεργό δυναμικό

Ένα χρήσιμο εργαλείο που προκύπτει από τις συμμετρίες ενός προβλήματος είναι τα διανύσματα Killing. Γενικά οι συμμετρίες αντιστοιχούν σε ύπαρξη κάποιας διατηρούμενης ποσότητας. Έστω, για παράδειγμα, πως μια μετρική είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης x^1 έτσι ώστε να παραμένει αναλλοίωτη από έναν μετασχηματισμό

$$x^1 \rightarrow x^1 + \text{const.}$$

Τότε το διάνυσμα $\xi^\alpha = (0,1,0,0)$, το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση εκείνη στην οποία η μετρική παραμένει αμετάβλητη, ονομάζεται διάνυσμα Killing και χαρακτηρίζει την συμμετρία αυτή.

Εφόσον η μετρική, και κατά συνέπεια η Λαγκρανζιανή, μένει αναλλοίωτη από μεταβολές του x^1 , τότε $\partial L / \partial x^1 = 0$ και η αρχή της ελάχιστης δράσης γίνεται:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^1}{d\tau} \right)} \right] = 0$$

Όμως:

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^1}{d\tau} \right)} = -g_{1\beta} \frac{1}{L} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta = -\xi \cdot \mathbf{u}$$

και προκύπτει, τελικά, η παρακάτω αναλλοίωτη ποσότητα:

$$\xi \cdot \mathbf{u} = \text{const.} \quad (2.3.2.1)$$

Στην περίπτωση της μετρικής Schwarzschild υπάρχουν δύο ειδών συμμετρίες. Η χρονική ανεξαρτησία της μετρικής ορίζει ένα διάνυσμα Killing $\xi^\alpha = (1,0,0,0)$. Η σφαιρική συμμετρία της μετρικής αφήνει αμετάβλητη τη μετρική για την κατεύθυνση κατά φ , λαμβάνοντας υπόψη την σύμβαση ότι η κίνηση γίνεται πάντα στο επίπεδο $\theta = \pi/2$. Οπότε, το διάνυσμα Killing που σχετίζεται με αυτή τη συμμετρία είναι το $\eta^\alpha = (0,0,0,1)$.

Όμως, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, οι συμμετρίες αυτές αντιστοιχούν σε ορισμένες διατηρούμενες ποσότητες. Συγκεκριμένα, οι ποσότητες αυτές είναι οι:

$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.3.2.2)$$

η οποία εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας ανά μονάδα μάζας ηρεμίας, και:

$$l = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.3.2.3)$$

η οποία εκφράζει τη διατήρηση της στροφορμής ανά μονάδα μάζας ηρεμίας. Η διατήρηση αυτή της στροφορμής επιβεβαιώνει την θεώρηση ότι οι τροχιές των ελεύθερων σωμάτων στην μετρική Schwarzschild βρίσκονται σε ένα επίπεδο.

Έστω η σχέση κανονικοποίησης της τετραταχύτητας σε φυσικές μοναδες:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$$

Για την μετρική Schwarzschild έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\varphi)^2 &= -1 \Rightarrow \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} &= -1 \Rightarrow \\ \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right] &\quad (2.3.2.4) \end{aligned}$$

Ορίζοντας τις ποσότητες:

$$E \equiv \frac{e^2 - 1}{2} \quad (2.3.2.5)$$

και

$$V_{eff}(r) \equiv \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right] = -\frac{M}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{Ml^2}{r^3} \quad (2.3.2.6)$$

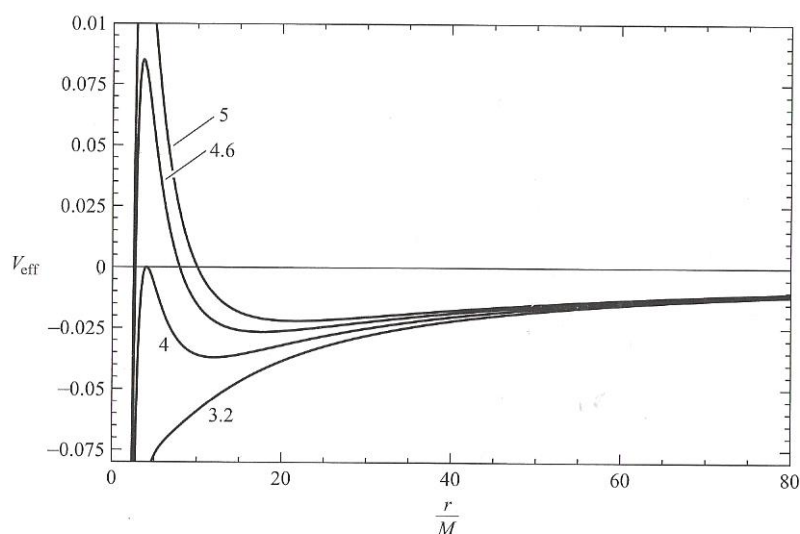
Όπου V_{eff} ορίζεται ως το ενεργό δυναμικό.

Η σχέση (2.3.2.4) γίνεται:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}(r) \quad (2.3.2.7)$$

Φαίνεται η αντιστοιχία των παραπάνω σχέσεων με το ολοκλήρωμα ενέργειας στην Νευτώνεια μηχανική, κάτι που οδηγεί στο συμπέρασμα πως οι τεχνικές υπολογισμού των ενεργών δυναμικών στη Νευτώνεια μηχανική θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση της γεωμετρίας

Schwarzschild. Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα του ενεργού δυναμικού V_{eff} για διάφορες τιμές του l .



Σχ. 2.3 Ενεργό δυναμικό για διάφορες τιμές του l (Πηγή: [1])

Επιλύοντας την εξίσωση $dV_{\text{eff}}/dr = 0$ μπορούν να βρεθούν οι ακτίνες στις οποίες παρουσιάζονται τα ακρότατα του ενεργού δυναμικού:

$$r_{\min}^{\max} = \frac{l^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{l} \right)^2} \right] \quad (2.3.2.8)$$

Εάν $l/M > \sqrt{12}$, τότε το ενεργό δυναμικό δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και είναι αρνητικό για όλες τις τιμές του r . Εάν $l/M < \sqrt{12}$, το ενεργό δυναμικό παρουσιάζει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο όπως προκύπτει από τον παραπάνω τύπο.

2.3.3 Τροχίες ακτινικής πτώσης

Η πιο απλή περίπτωση τροχιάς είναι η ακτινική ελεύθερη πτώση ενός σωματιδίου από το άπειρο. Η έλλειψη γωνιακής ταχύτητας σημαίνει πως $l = 0$. Στην ειδική περίπτωση που το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία, ισχύει επιπλέον σαν αρχικές συνθήκες ότι $dt/d\tau = 1$ και $e = 1$, ή ισοδύναμα $E = 0$. Από την εξίσωση (2.3.2.4) προκύπτει ότι:

$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{M}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\tau} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \quad (2.3.3.1)$$

Λόγω της διατήρησης της ποσότητας e , προκύπτει από την (2.3.2.2) ότι:

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (2.3.3.2)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει τελικά το διάνυσμα της τετραταχύτητας του σώματος:

$$u^\alpha = \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, -\left(\frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right) \quad (2.3.3.3)$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση (2.3.3.1) προκύπτει η συνάρτηση της ακτίνας r ως προς τον ιδιόχρονο τ :

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (2M)^{\frac{1}{3}} (\tau_* - \tau)^{\frac{2}{3}} \quad (2.3.3.4)$$

όπου τ_* μια σταθερά ολοκλήρωσης που ορίζει τον ιδιόχρονο όταν $r=0$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της διατηρούμενης ποσότητας e (2.3.2.2) για $e=1$ σε συνδυασμό με την (2.3.3.1) προκύπτει ότι:

$$\frac{dt}{dr} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (2.3.3.5)$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι:

$$t = t_* + 2M \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \log \left| \frac{\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}{\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right| \right] \quad (2.3.3.6)$$

όπου t_* η σταθερά ολοκλήρωσης.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η εξής παρατήρηση: Ενώ ο ιδιόχρονος που χρειάζεται ένα σώμα για να φτάσει ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή του r μέχρι την ακτίνα $r = 2M$ είναι πεπερασμένος, το αντίστοιχο διάστημα στην χρονική συντεταγμένη t είναι άπειρο. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνει την ιδιαιτερότητα της ακτίνας $r = 2M$ στην μετρική Schwarzschild, η οποία φαίνεται να αποτυγχάνει σε αυτή την περιοχή.

2.3.4 Δέσμιες τροχιές

Για την μελέτη των δέσμιων τροχιών είναι χρήσιμη η εύρεση της συνάρτησης της ακτίνας r ως προς τη γωνία φ . Αρχικά, επιλύοντας τις εξισώσεις (2.3.2.7) και (2.3.2.3) ως προς dr/dt και $d\varphi/dt$ αντίστοιχα και στη συνέχεια διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\frac{l}{r^2} 1}{\left[2\left(E - V_{eff}(r)\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{l}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.4.1)$$

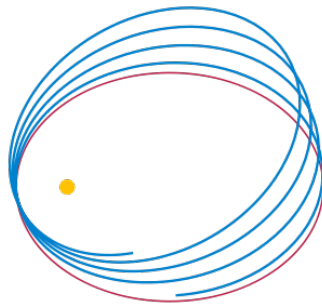
Το πρόσημο εξαρτάται από την φορά κατά φ που κινείται το σώμα ενώ αυξάνεται η ακτίνα r . Παρότι η συνάρτηση $\varphi(r)$ μπορεί να βρεθεί με την ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης, η μορφή του τελικού αποτελέσματος δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Μια πιο χρήσιμη ποσότητα είναι η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών εσωτερικών σημείων καμπής r_1 (ή ισοδύναμα δύο διαδοχικών εξωτερικών σημείων καμπής r_2) $\Delta\varphi$, όπου τα σημεία καμπής r_1 και r_2 είναι οι θέσεις κατά μήκος της ακτίνας για τις οποίες ισχύει ότι $dr/d\tau = 0$. Εάν η τιμή της γωνίας αυτής είναι 2π , τότε η δέσμια τροχιά είναι κλειστή. Αλλιώς, τα αντίστοιχα σημεία καμπής προηγούνται κάθε τροχιά κατά $\delta\varphi_{prec}$ σε σχέση με την προηγούμενη, με

$$\delta\varphi_{prec} = \Delta\varphi - 2\pi \quad (2.3.4.2)$$

Εφόσον η γωνία $\Delta\varphi$ που διανύει ένα σώμα για να περάσει μεταξύ δύο διαδοχικών εσωτερικών σημείων καμπής στο r_1 (ή αντίστοιχα δύο διαδοχικών εξωτερικών σημείων καμπής r_2) είναι διπλάσια της αντίστοιχης γωνίας που χρειάζεται για μια πορεία μεταξύ των r_1 και r_2 , έχουμε ότι:

$$\Delta\varphi = 2l \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.3.4.3)$$

Η γωνιακή μετατόπιση των σημείων καμπής των δέσμιων τροχιών στην γενική σχετικότητα είναι γνωστή ως μετάπτωση του περιηλίου.



Σχ. 2.4 Μετάπτωση περιηλίου της σχετικιστικής τροχιάς (μπλε) σε αντίθεση με την κλασική τροχιά (κόκκινο) (Πηγή: wikipedia.org)

2.3.5 Τροχιές των ακτινών φωτός

Ο υπολογισμός των τροχιών φωτεινών ακτίνων στην μετρική Schwarzschild δεν διαφέρει πολύ από την περίπτωση των σωμάτων με μάζα. Αρχικά, η ανεξαρτησία της μετρικής από τα t και φ συνεπάγεται την ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων και στην περίπτωση των φωτεινών ακτίνων:

$$e \equiv -\xi \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (2.3.5.1)$$

$$l \equiv \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (2.3.5.2)$$

Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε πως η κίνηση της φωτεινής ακτίνας γίνεται στο επίπεδο $\theta = \pi/2$. Από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 &= 0 \Rightarrow \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{eff}(r) \end{aligned} \quad (2.3.5.3)$$

Όπου:

$$b^2 \equiv \frac{l^2}{e^2} \quad (2.3.5.4)$$

και

$$W_{eff}(r) \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (2.3.5.5)$$

Η εξίσωση (2.3.5.3) είναι ανάλογη της εξίσωσης (2.3.2.7) με το b^{-2} να παίζει τον ρόλο της ενέργειας και το $W_{eff}(r)$ αυτόν του ενεργού δυναμικού, ενώ μπορεί να γίνει ανάλογη χρήση της εξίσωσης για την ανάλυση των τροχιών των φωτεινών ακτίνων.

Σημαντική ποσότητα είναι η γωνία κάμψης μιας ακτίνας φωτός λόγω ενός βαρυτικού πεδίου. Αν επιλύσουμε τις εξισώσεις (2.3.5.1) και (2.3.5.2) ως προς $dr/d\lambda$ και $d\varphi/d\lambda$ αντίστοιχα και στη συνέχεια διαιρέσουμε κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - W_{eff}(r) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3.5.6)$$

Η συνολική γωνία που διαγράφεται καθώς μια ακτίνα έρχεται από το άπειρο και πηγαίνει πάλι προς το άπειρο είναι:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.3.5.7)$$

όπου η ακτίνα r_1 είναι η ακτίνα εκείνη για την οποία ισχύει:

$$W_{eff}(r_1) = \frac{1}{b^2} \quad (2.3.5.8)$$

2.4 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Ένα ιδιαίτερο σημείο των συντεταγμένων Schwarzschild ήταν η ιδιομορφία τους στις ακτίνες $r = 2M$ και $r = 0$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο ιδιόχρονος που απαιτείται για να διανύσει κάποιο σώμα την απόσταση μεταξύ ενός οποιουδήποτε εξωτερικού σημείου και της ακτίνας Schwarzschild είναι πεπερασμένος, ενώ η αντίστοιχη απόσταση στον χρόνο t είναι άπειρη. Η ιδιομορφία όμως αυτή της μετρικής στο $r = 2M$ δεν οφείλεται σε κάποια ιδιαιτερότητα του χωροχρόνου, αλλά στην επιλογή των συντεταγμένων με τις οποίες περιγράφεται. Μπορεί να γίνει κατάλληλη αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων τέτοια ώστε η ιδιομορφία αυτή να ξεπεραστεί, και ένα από αυτά είναι οι συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Στις συντεταγμένες αυτές γίνεται αντικατάσταση της χρονικής συντεταγμένης t με μία νέα v χρησιμοποιώντας τον παρακάτω μετασχηματισμό των συντεταγμένων Schwarzschild (t, r, θ, φ) :

$$t = v - r - 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (2.4.1)$$

Η μετασχηματισμένη μετρική που προκύπτει έχει τη μορφή:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.4.2)$$

με

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$g_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

Η παραπάνω μετρική δεν περιγράφει μια διαφορετική γεωμετρία. Ο μετασχηματισμός εισάγει απλά ένα εναλλακτικό σύστημα συντεταγμένων για τον προσδιορισμό των σημείων. Ως αποτέλεσμα, η μετρική διατηρεί όλες τις ιδιότητες της γεωμετρίας Schwarzschild, όπως η χρονική ανεξαρτησία και η σφαιρική συμμετρία.

Υπολογίζοντας τα σύμβολα Christoffel για την παραπάνω μετρική έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^v &= \frac{g_{rv}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{rv}}{\partial v} + \frac{\partial g_{rv}}{\partial v} - \frac{\partial g_{vv}}{\partial r} \right) = \frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{\theta\theta}^v &= \frac{g_{rv}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -r \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^v &= \frac{g_{rv}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = -r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{vv}^r &= \frac{g_{rr}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{rv}}{\partial v} + \frac{\partial g_{rv}}{\partial v} - \frac{\partial g_{vv}}{\partial r} \right) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{rv}^r &= \frac{g_{vr}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{vv}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rv}}{\partial v} - \frac{\partial g_{rv}}{\partial v} \right) = -\frac{M}{r^2} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{g_{rr}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = 2M - r \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{g_{rr}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = (2M - r) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{g_{\theta\theta}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{g_{\theta\theta}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{g_{\varphi\varphi}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \frac{g_{\varphi\varphi}^{-1}}{2} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} \right) = \cot \theta \end{aligned}$$

Όλα τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται.

Από τα παραπάνω σύμβολα προκύπτουν οι εξής γεωδαιτικές εξισώσεις:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 + r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \quad (2.4.5\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} = & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + \frac{2M}{r^2} \frac{dv}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - (2M - r) \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \\ & - (2M - r) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.4.5\beta)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.4.5\gamma)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.4.5\delta)$$

Όπως και στην περίπτωση των συντεταγμένων Schwarzschild, θεωρούμε πως η κίνηση γίνεται πάντα στο επίπεδο $\theta = \pi/2$. Επομένως, οι γεωδαιτικές εξισώσεις παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + r \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.4.6\alpha)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 + \frac{2M}{r^2} \frac{dv}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - (2M - r) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.4.6\beta)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.4.6\gamma)$$

Η μετρική Eddington-Finkelstein είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής v και του θ . Συνεπώς, υπάρχουν αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες που περιγράφονται από τα διανύσματα Killing $\xi = (1,0,0,0)$ και $\eta = (0,0,1,0)$. Αυτές είναι:

$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{d\tau} - \frac{dr}{d\tau} \quad (2.4.7)$$

$$l = \eta \cdot \mathbf{u} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (2.4.8)$$

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης Runge-Kutta

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει εισαγωγή στις μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες και μελέτης συγκεκριμένα της μεθόδου Runge-Kutta για την επίλυση εξισώσεων κίνησης.

3.1 Μέθοδοι Euler

Έστω σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση δυνάμεων, με την εξίσωση κίνησής του να είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t, x, v) \quad (3.1.1)$$

και με αρχικές συνθήκες

$$x(t_0) = x_0 \quad v(t_0) = v_0 \quad (3.1.2)$$

Που να προσδιορίζουν μια μοναδική λύση της συνάρτησης $\vec{x}(t)$. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι δευτέρας τάξης, όμως θα διευκολύνει την επίλυση η αναγωγή της σε ένα σύστημα που αποτελείται από τον διπλάσιο αριθμό εξισώσεων πρώτου βαθμού:

$$\frac{dv}{dt} = a(t, x, v) \quad \frac{dx}{dt} = v \quad (3.1.3)$$

Για να είναι δυνατή η υπολογιστική επίλυση του παραπάνω συστήματος, οι εξισώσεις πρέπει να γραφούν σε διακριτή μορφή. Ο πιο απλός τρόπος να γίνει αυτό είναι να διαχωριστεί το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης $t_f - t_0$ των εξισώσεων, όπου $t_0 = 0$ ο αρχικός και t_f ο τελικός χρόνος, σε $N - 1$ ίσα διαστήματα πλάτους $\Delta t \equiv h = (t_f - t_0)/(N - 1)$. Τότε, εάν $x(t_n) = x_n$ και $x(t_n + \Delta t) = x_{n+1}$, αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις $x(t_n + \Delta t)$ και $v(t_n + \Delta t)$ κατά Taylor γύρω από το 0, έχουμε ότι:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t + O(h^2) \quad (3.1.4\alpha)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + O(h^2) \quad (3.1.4\beta)$$

Η παραπάνω μέθοδος ονομάζεται μέθοδος Euler. Όπως φαίνεται, στον υπολογισμό κάθε βήματος εισάγεται ένα σφάλμα της τάξης του $(\Delta t)^2$, και, επειδή τα σφάλματα από κάθε βήμα προστίθενται και ο αριθμός των βημάτων είναι $N \sim 1/\Delta t$, το συνολικό σφάλμα είναι $\sim \Delta t^2 \cdot (1/\Delta t) = \Delta t$. Είναι φανερό η

περιορισμένη ακρίβεια της μεθόδου αυτής. Επιπλέον, η μέθοδος Euler τείνει να μην είναι ιδιαίτερα ευσταθής, ειδικά σε προβλήματα που έχουν κάποιου είδους περιοδικότητα.

Μια βελτίωση της μεθόδου Euler είναι η μέθοδος Euler-Cromer, η οποία, παρόλο που παραμένει πρώτης τάξης με συνολικό σφάλμα $\sim(\Delta t)$, είναι πιο ευσταθής σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο. Η διαφορά είναι πως χρησιμοποιείται η καινούργια τιμή της ταχύτητας για τον υπολογισμό της θέσης σε κάθε βήμα:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t + O(h^2) \quad (3.1.5\alpha)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \Delta t + O(h^2) \quad (3.1.5\beta)$$

Μια άλλη μέθοδος που προκύπτει από τις προηγούμενες και βελτιώνει το σφάλμα διακριτοποίησης είναι η μέθοδος Euler-Verlet:

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n (\Delta t)^2 \quad (3.1.6\alpha)$$

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.1.6\beta)$$

Ενώ, στο τελευταίο βήμα θα πρέπει να πάρουμε $v_n = (x_n - x_{n-1})/\Delta t$.

Η μέθοδος αυτή δίνει ολικό σφάλμα $\sim(\Delta t)^2$, αλλά έχει το μειονέκτημα ότι σε κάθε βήμα χρησιμοποιεί τιμές από τα δύο προηγούμενα βήματα, το οποίο σημαίνει πως πρέπει να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες για τα πρώτα δύο βήματα. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την μέθοδο Euler για τον προσδιορισμό των δεύτερων αρχικών συνθηκών πριν την χρήση της μεθόδου Euler-Verlet. Επιπλέον, παρά το μικρότερο σφάλμα, η μέθοδος είναι ασταθής λόγω του κλάσματος δύο μικρών αριθμών που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της ταχύτητας.

3.2 Μέθοδοι Runge-Kutta

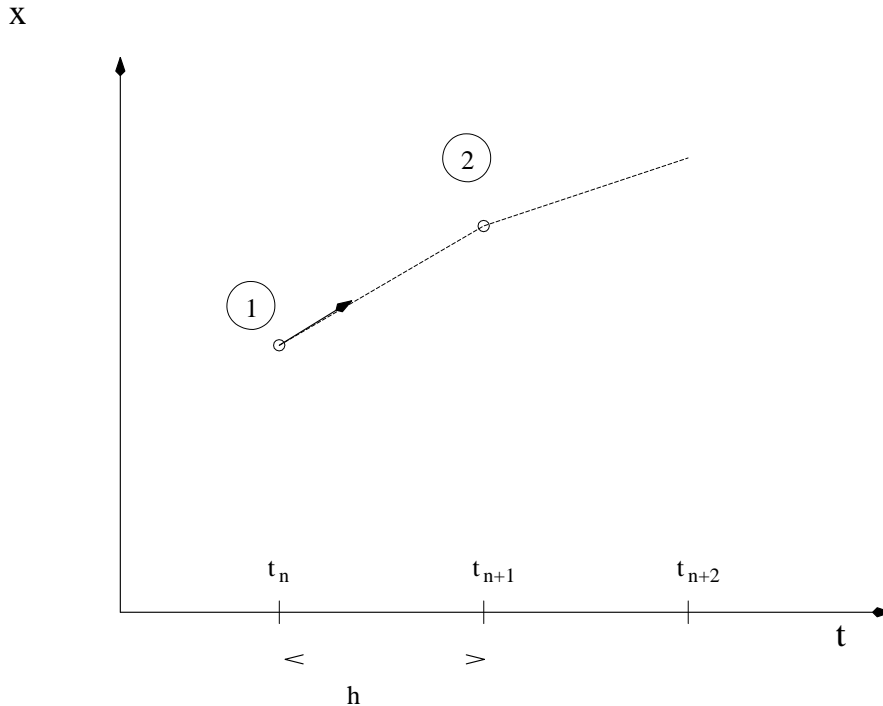
Οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta είναι επαγωγικοί ενός βήματος, δηλαδή για τον υπολογισμό κάθε βήματος απαιτείται μόνο η γνώση του προηγούμενου, με σφάλματα τα οποία είναι ανώτερης τάξης από την μέθοδο Euler. Συγκεκριμένα, η μέθοδος Runge-Kutta τάξης n εισάγει σφάλμα διακριτοποίησης τάξης $\sim O(h^{n+1})$ σε κάθε βήμα, που σημαίνει συνολικό σφάλμα ολοκλήρωσης της τάξης $\sim O(h^n)$.

Οι μέθοδοι Runge-Kutta προκύπτουν από το ανάπτυγμα Taylor των εξισώσεων πρώτου βαθμού που προκύπτουν από τις εξισώσεις κίνησης. Κατά συνέπεια, η μέθοδος Runge-Kutta πρώτης τάξης συμπίπτει με την μέθοδο Euler. Για μια εξίσωση πρώτου βαθμού

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

θα έχουμε:

$$x_{n+1} = x_n + hf_{n+1} + O(h^2)$$



Σχ. 3.1 Αναπαράσταση του βήματος στη μέθοδο Runge-Kutta (Πηγή: [2])

Για την μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης υπολογίζουμε το ανάπτυγμα Taylor όπως πριν, αλλά κρατάμε και του όρους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (t_{n+1} - t_n) \frac{dx_n}{dt} + \frac{1}{2} (t_{n+1} - t_n)^2 \frac{d^2 x_n}{dt^2} + O(h^3) = \\ &= x_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \frac{df_n}{dt} + O(h^3) = \\ &= x_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} \frac{dx_n}{dt} \right) + O(h^3) = \\ &= x_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} f_n \right) + O(h^3) \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

Ορίζουμε:

$$k_1 = f(t_n, x_n) = f_n$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

Αναπτύσσουμε το k_2 :

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) = \\
 &= f\left(t_n, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}\left(t_n, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) + O(h^2) = \\
 &= f(t_n, x_n) + \frac{h}{2}k_1 \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x_n) + O(h^2) = \\
 &= f_n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + k_1 \frac{\partial f_n}{\partial x} \right) + O(h^2) = \\
 &= f_n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial x} \right) + O(h^2) \quad (3.2.3)
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.2.3) στην (3.2.2), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} f_n \right) + O(h^3) = \\
 &= x_n + h \left[f_n + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial t} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial x} \right) \right] + O(h^3) = \\
 &= x_n + hk_2 + O(h^3) \quad (3.2.4)
 \end{aligned}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μεθόδου Runge-Kutta δεύτερης τάξης προκύπτει από την σχέση:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x) dx \quad (3.2.5)$$

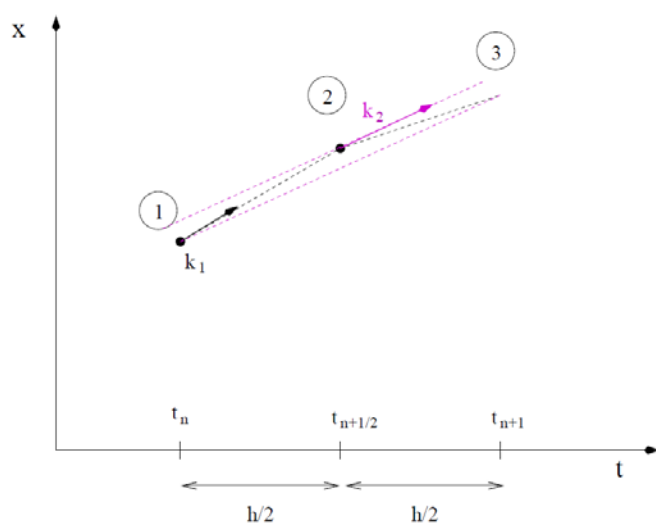
Αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το σημείο $\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right)$ έχουμε:

$$f(t, x) = f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right) + \left(t - t_{n+\frac{1}{2}}\right) \frac{df}{dt}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) + O(h^2) \quad (3.2.6)$$

Συνοπώς,

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x) dx = \\
 & = f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right)(t_{n+1} - t_n) + \frac{df}{dt}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{(t - t_{n+\frac{1}{2}})^2}{2}\right)_{t_n}^{t_{n+1}} + O(h^2)(t_{n+1} - t_n) \\
 & = \\
 & = f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right)h + \frac{df}{dt}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \left[\frac{(t_{n+1} - t_{n+\frac{1}{2}})^2}{2} - \frac{(t_n - t_{n+\frac{1}{2}})^2}{2}\right] + O(h^2)h = \\
 & = f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right)h + \frac{df}{dt}\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \left[\frac{h^2}{2} - \frac{(-h)^2}{2}\right] + O(h^3) = \\
 & = f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}\right)h + O(h^3) \quad (3.2.7)
 \end{aligned}$$

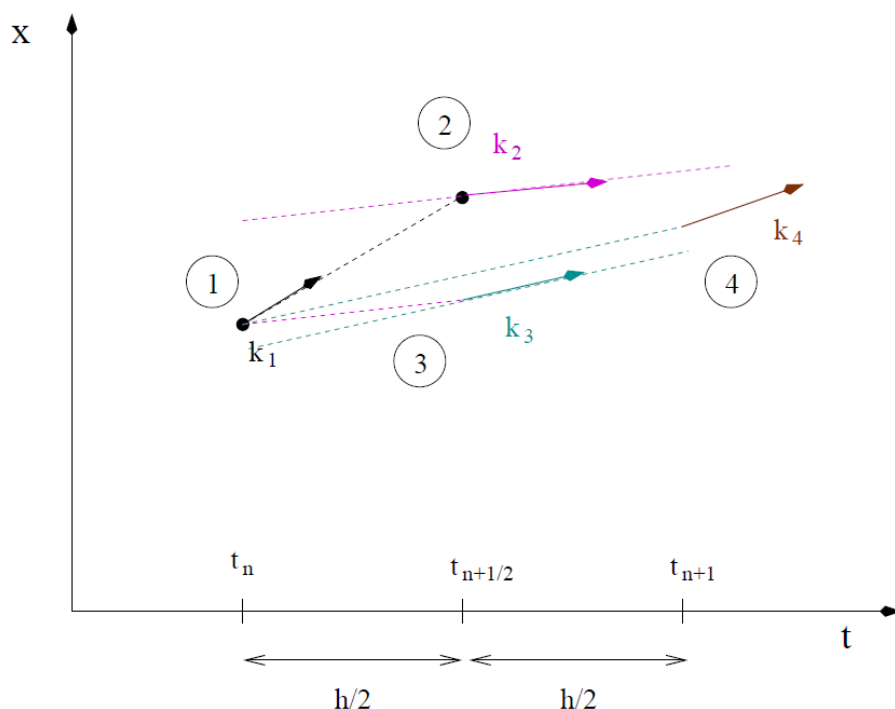
Ενώ στην απλή περίπτωση γίνεται υπολογισμός της ταχύτητας και θέσης σε κάθε βήμα t_n , στην μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης, ουσιαστικά γίνεται επιλογή ενός σημείου στο ενδιάμεσο του χρονικού διαστήματος ($t_{n+1} - t_n$) με θέση $x_{n+1/2}$, η οποία υπολογίζεται από την παράγωγο στο x_n . Η κλίση από το ενδιάμεσο σημείο είναι αυτή που χρησιμοποιείται τελικά για τον υπολογισμό του σημείου x_{n+1} .



Σχ. 3.2 Αναπαράσταση του βήματος στην Runge-Kutta 2ης τάξης (Πηγή:[2])

Με τη μέθοδο αυτή, υπολογίζεται δύο φορές η συνάρτηση f σε κάθε βήμα, κάτι που διπλασιάζει τον υπολογιστικό χρόνο. Όμως, το σφάλμα σε κάθε βήμα είναι $\sim O(h^3)$, που σημαίνει πως το συνολικό σφάλμα είναι της τάξης $\sim O(h^2)$, μια τάξη μεγέθους μικρότερη από την αντίστοιχη μέθοδο πρώτης τάξης.

Περαιτέρω βελτίωση γίνεται με τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης, με 4 υπολογισμούς της συνάρτησης f σε κάθε βήμα, αλλά ανάλογη μείωση του σφάλματος σε $\sim(h^5)$ σε κάθε βήμα και $\sim(h^4)$ συνολικά. Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούνται τρία ενδιάμεσα σημεία. Το πρώτο σημείο βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος χρησιμοποιώντας την κλίση του σημείου x_n . Το δεύτερο σημείο βρίσκεται στο μέσο του διαστήματος χρησιμοποιώντας την κλίση του πρώτου σημείου στο x_n . Το τρίτο σημείο βρίσκεται στο άκρο του διαστήματος και βρίσκεται χρησιμοποιώντας την κλίση του δεύτερου σημείου στο x_n . Αυτή η διαδικασία φαίνεται διαγραμματικά παρακάτω.



Σχ. 3.3 Γραφική αναπαράσταση του βήματος στη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης (Πηγή: [2])

Για τον υπολογισμό των σημείων αυτών ακολουθείται παρόμοια διαδικασία με πριν, και καταλήγουμε σε:

$$k_1 = f(t_n, x_n) \quad (3.2.8\alpha)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (3.2.8\beta)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (3.2.8\gamma)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3) \quad (3.2.8\delta)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.2.9\epsilon)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, όπως αυτό που συζητήθηκε για την μέθοδο Euler:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2)$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο υπολογισμός των βημάτων θα γίνεται ως εξής:

$$k_{11} = f_1(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}) \quad (3.2.10\alpha)$$

$$k_{21} = f_2(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}) \quad (3.2.10\beta)$$

$$k_{12} = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{11}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{21}\right) \quad (3.2.10\gamma)$$

$$k_{22} = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{11}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{21}\right) \quad (3.2.10\delta)$$

$$k_{13} = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{12}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{22}\right) \quad (3.2.10\epsilon)$$

$$k_{23} = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{12}, x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{22}\right) \quad (3.2.10\sigma\tau)$$

$$k_{14} = f_1(t_n + h, x_{1,n} + hk_{13}, x_{2,n} + hk_{23}) \quad (3.2.10\zeta)$$

$$k_{24} = f_2(t_n + h, x_{1,n} + hk_{13}, x_{2,n} + hk_{23}) \quad (3.2.10\eta)$$

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \quad (3.2.10\theta)$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + \frac{h}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24}) \quad (3.2.10\iota)$$

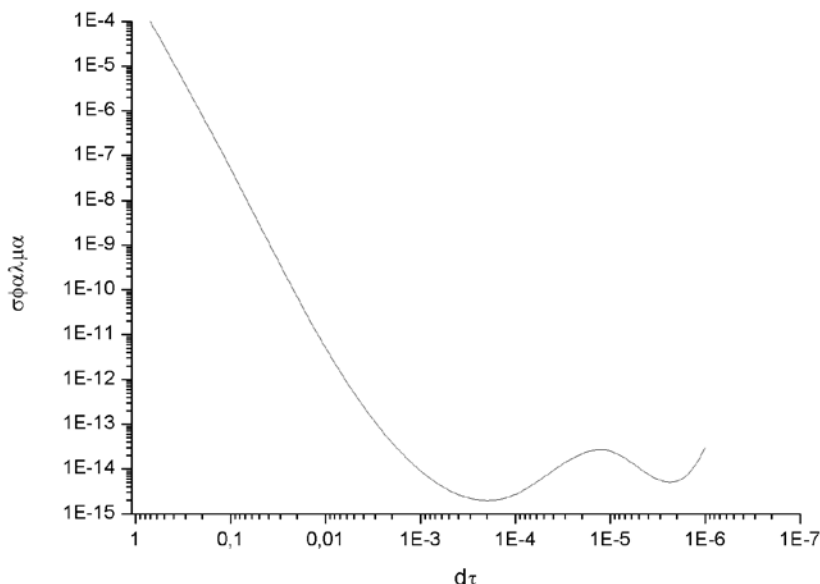
με ανάλογη επέκταση για πιο περίπλοκα συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 4

Υπολογιστική επίλυση των εξισώσεων κίνησης στην γεωμετρία Schwarzschild

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει ανάλυση των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για τον αριθμητικό υπολογισμό των τροχιών στην μετρική Schwarzschild, καθώς και παράθεση των αποτελεσμάτων.

Για όλα τα προγράμματα χρησιμοποιήθηκε στην γλώσσα προγραμματισμού fortran, ενώ η υπολογιστική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις για τον υπολογισμό των τροχιών ήταν η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης. Ως εκ τούτου, το συνολικό σφάλμα διακριτοποίησης ήταν της τάξης $\sim(h^4)$. Μια σημαντική παρατήρηση είναι πως όλες οι πραγματικές μεταβλητές και παράμετροι ορίστηκαν ως double precision, που σημαίνει πως ο υπολογιστής αποθηκεύει 16 σημαντικά ψηφία για αυτούς τους αριθμούς. Λαμβάνοντας υπόψη πως για τα περισσότερα προβλήματα η τάξη μεγέθους των περισσότερων ποσοτήτων είναι 1, συμπεραίνουμε πως μειώνοντας το βήμα ολοκλήρωσης σε λιγότερο από $\sim 10^{-4}$ δεν θα έχουμε κάποιο κέρδος σε ακρίβεια, μιας και το σφάλμα διακριτοποίησης θα είναι μικρότερο απ' όσο μπορεί ο υπολογιστής να αποθηκεύσει, ενώ είναι δυνατόν να προκαλέσει αύξηση του σφάλματος στρογγυλοποίησης στα τελευταία ψηφία των ποσοτήτων.



Σχ. 4.1 Συνολικό σφάλμα συναρτήσει του βήματος ολοκλήρωσης

4.1 Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Schwarzschild

Αρχικά, θα γίνει ανάλυση του βασικού προβλήματος υπολογισμού των τροχιών σωμάτων με μάζα στις συντεταγμένες Schwarzschild. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για αυτόν τον σκοπό μπορεί να βρεθεί στο πρώτο μέρος του παραρτήματος.

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, για την επίλυση των δευτεροβάθμιων διαφορικών εξισώσεων που υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο 2, θα πρέπει να διαχωριστούν σε δύο πρωτοβάθμιες. Αυτό σημαίνει την λύση έξι πρωτοβάθμιων εξισώσεων σε κάθε βήμα. Ένας τρόπος για την μείωση του αριθμού των υπολογισμών σε κάθε βήμα είναι ο συνδυασμός των γεωδαιτικών εξισώσεων (2.3.1.11) με τις σχέσεις των διατηρούμενων ποσοτήτων (2.3.2.2) και (2.3.2.3) για το e και το l αντίστοιχα, και την σχέση (2.3.2.7) που προέκυψε από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας. Έτσι προκύπτουν δύο εξισώσεις πρώτου βαθμού και μία δευτέρου, οι οποίες θα αντιστοιχούν σε επίλυση τεσσάρων εξισώσεων πρώτου βαθμού σε κάθε βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης:

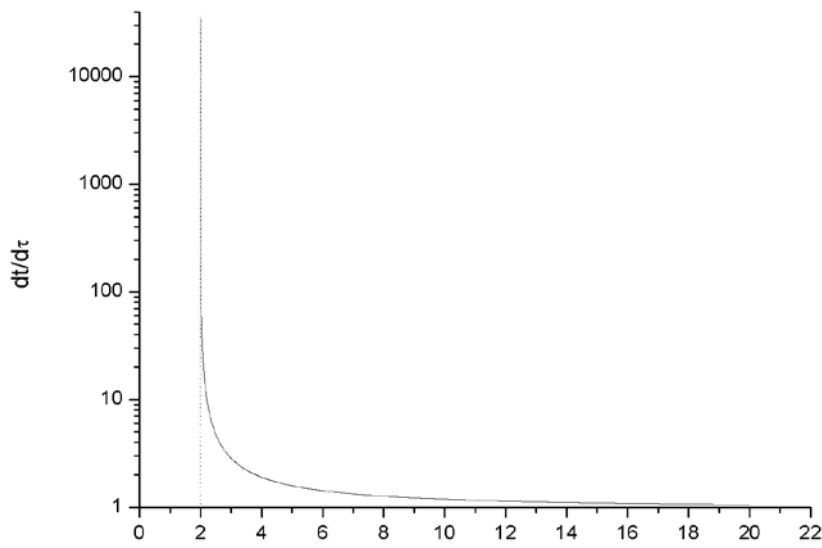
$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (4.1.1\alpha)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{l}{r^2} \quad (4.1.1\beta)$$

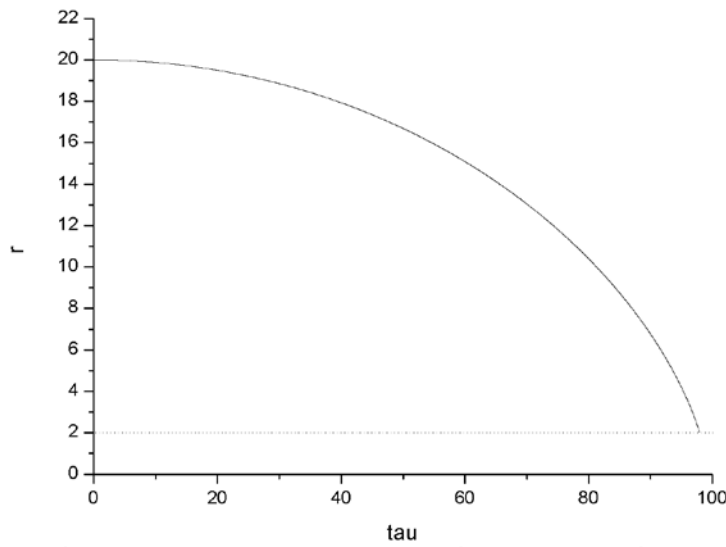
$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 (r - 3M) - \frac{M}{r^2} = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 (r - 3M) - \frac{M}{r^2} \quad (4.1.1\gamma)$$

Επιπλέον, εισάγοντας τις διατηρούμενες ποσότητες στις εξισώσεις σημαίνει πως μπορούν να υπολογίζονται μονάχα στην αρχή του προγράμματος, αποφεύγοντας επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης, καθώς και το αριθμητικό σφάλμα που οι υπολογισμοί αυτοί θα εισήγαγαν.

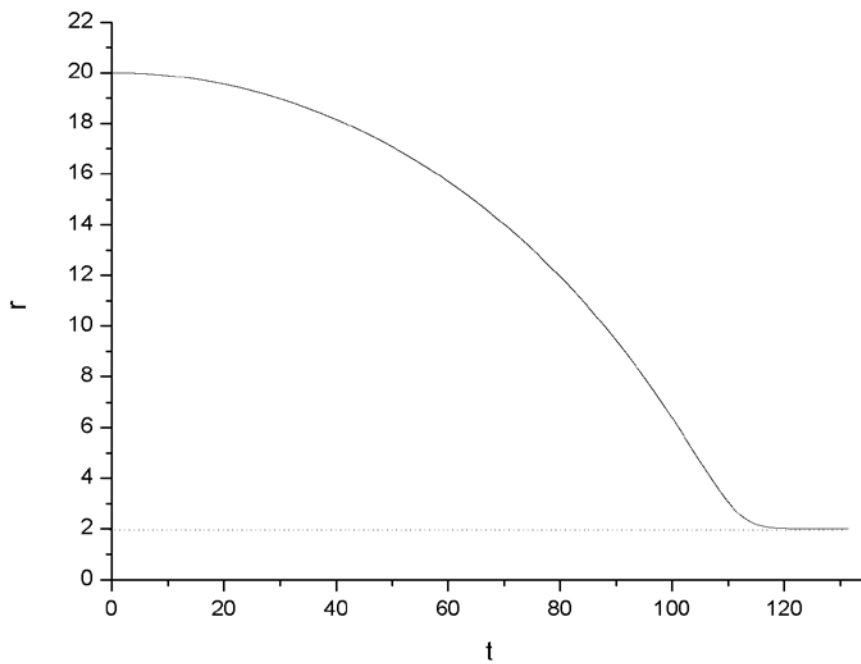
Αρχικά, γίνεται μελέτη τροχιών ακτινικής πτώσης, με το σώμα που μελετάται να ξεκινά ακίνητο σε μια ακτίνα r_0 έξω από τη μαύρη τρύπα και να πέφτει ελεύθερα προς το κέντρο. Παρακάτω φαίνεται η αύξηση του $dt/d\tau$ και το πρόβλημα που συναντάται στις συντεταγμένες Schwarzschild, δηλαδή ότι ενώ η απόσταση μέχρι την ακτίνα Schwarzschild απαιτεί πεπερασμένη απόσταση στον ιδιόχρονο, η απόσταση στον χρόνο t τείνει προς το άπειρο.



Σχ. 4.2 Συνάρτηση του $dt/d\tau$ ως προς r κατά τη διάρκεια ακτινικής πτώσης.
 Αρχικές συνθήκες: $r/M = 20$, $(dr/d\tau)/M = 0$, $l/M = 0$

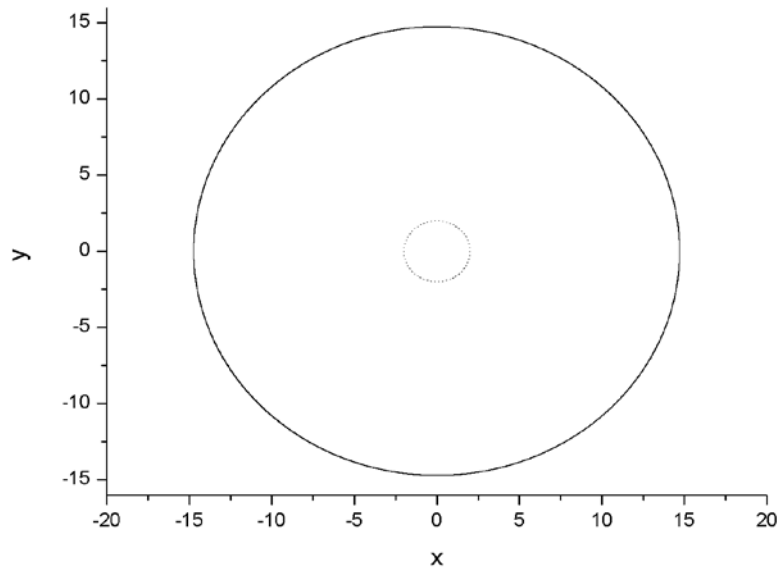


Σχ. 4.3 Συνάρτηση του r ως προς τον ιδιόχρονο τ κατά την ακτινική πτώση.
 Αρχικές συνθήκες: $r/M = 20$, $dr/d\tau = 0$, $l/M = 0$



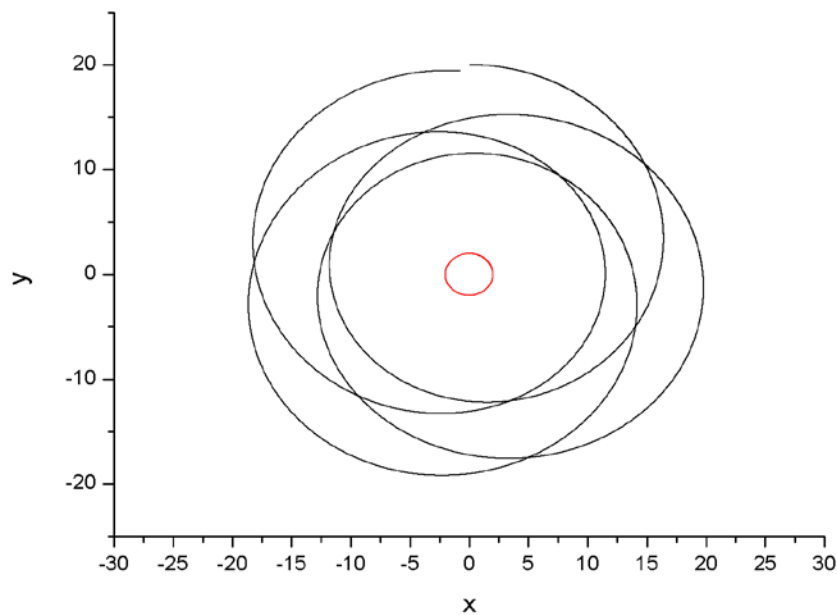
Σχ. 4.4 Συνάρτηση του r ως προς τον χρόνο t κατά την ακτινική πτώση
 Αρχικές συνθήκες: $r/M = 20$, $dr/d\tau = 0$, $l/M = 0$

Στη συνέχεια γίνεται μελέτη των δέσμιων τροχιών. Ένας αρχικός έλεγχος γίνεται για τις ακτίνες όπου παρατηρείται τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο στο ενεργό δυναμικό V_{eff} , όπως αυτές υπολογίστηκαν στην σχέση (2.3.2.8). Η τροχιά ενός σώματος με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες σε αυτές τις ακτίνες θα πρέπει να είναι απολύτως κυκλική.



Σχ. 4.5 Τροχιά σώματος στο τοπικό ελάχιστο του V_{eff}
 Αρχικές συνθήκες: $r/M = 14.72$, $dr/d\tau = 0$, $l/M = 4.3$

Στη συνέχεια μελετήθηκαν τροχιές στις οποίες παρατηρείται το φαινόμενο της μετάπτωσης του περιηλίου. Σε αυτό το φαινόμενο, σημαντικές ποσότητες για έλεγχο είναι οι ακτίνες των σημείων καμπής r_1 και r_2 , οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν θεωρητικά θέτοντας $dr/d\tau = 0$ στην σχέση (2.3.2.7), καθώς και η γωνία της μετάπτωσης $\Delta\phi$.



Σχ. 4.6 Τροχιά σώματος με μετάπτωση του περιηλίου
 Αρχικές συνθήκες: $r/M = 20$, $dr/d\tau = 0$, $l/M = 4.3$

4.2 Φωτεινές ακτίνες στις συντεταγμένες Schwarzschild

Στη συνέχεια θα μελετηθεί η προσομοίωση των τροχιών φωτεινών ακτινών στις συντεταγμένες Schwarzschild. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για αυτόν τον σκοπό μπορεί να βρεθεί στο δεύτερο μέρος του παραρτήματος.

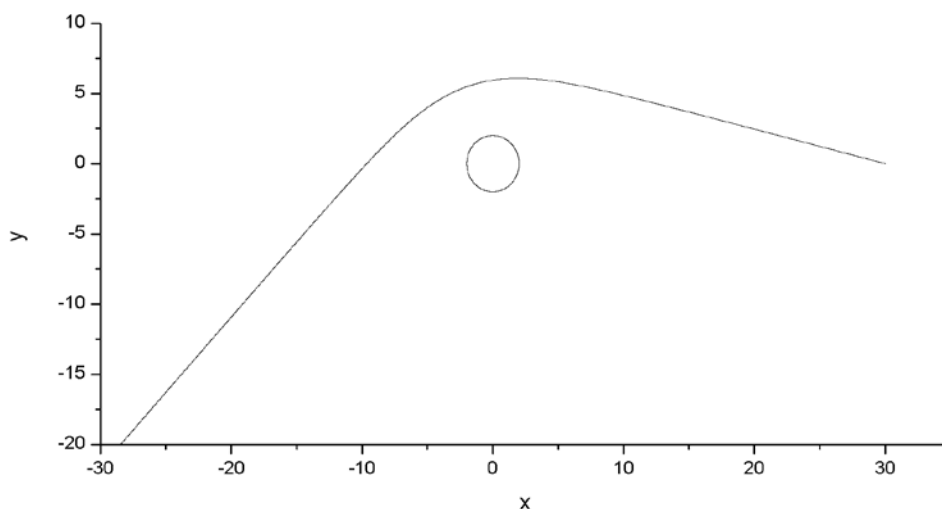
Κατά τον τρόπο που έγινε στην περίπτωση των γεωδαιτικών εξισώσεων των σωμάτων με μάζα, είναι δυνατός ο περιορισμός του αριθμού των εξισώσεων που υπολογίζονται σε κάθε βήμα και στην περίπτωση των γεωδαιτικών εξισώσεων για φωτεινές ακτίνες. Συνδυάζοντας, λοιπόν, τις εξισώσεις (2.3.1.13) με τις σχέσεις των διατηρούμενων ποσοτήτων (2.3.5.1) και (2.3.5.2) για το e και το l αντίστοιχα, και την σχέση (2.3.5.3) που προέκυψε από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας, έχουμε ότι:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (4.2.1\alpha)$$

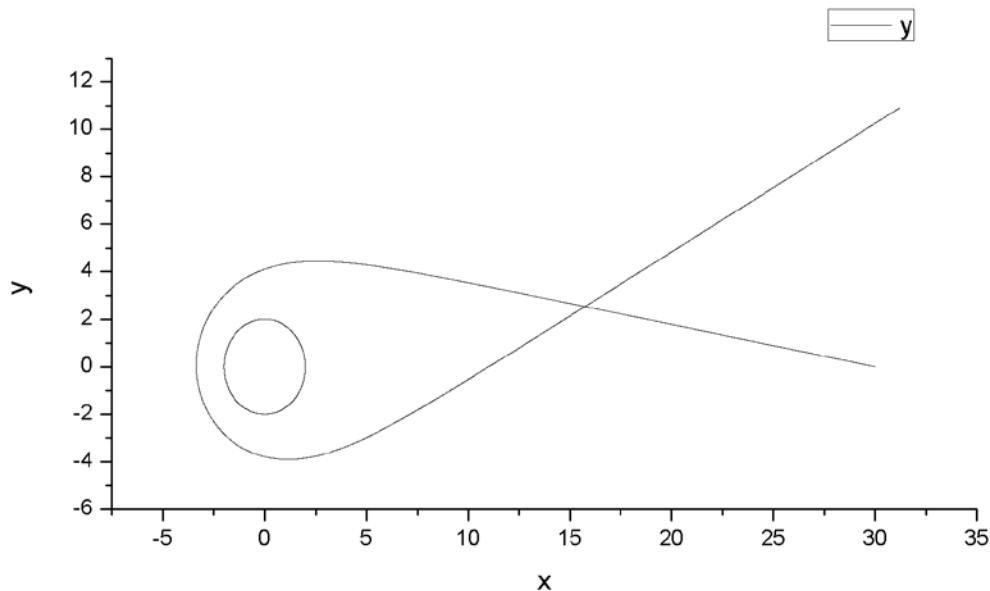
$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{l}{r^2} \quad (4.2.1\beta)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \left(\frac{l}{r^2}\right)^2 (r - 3M) = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 (r - 3M) \quad (4.2.1\gamma)$$

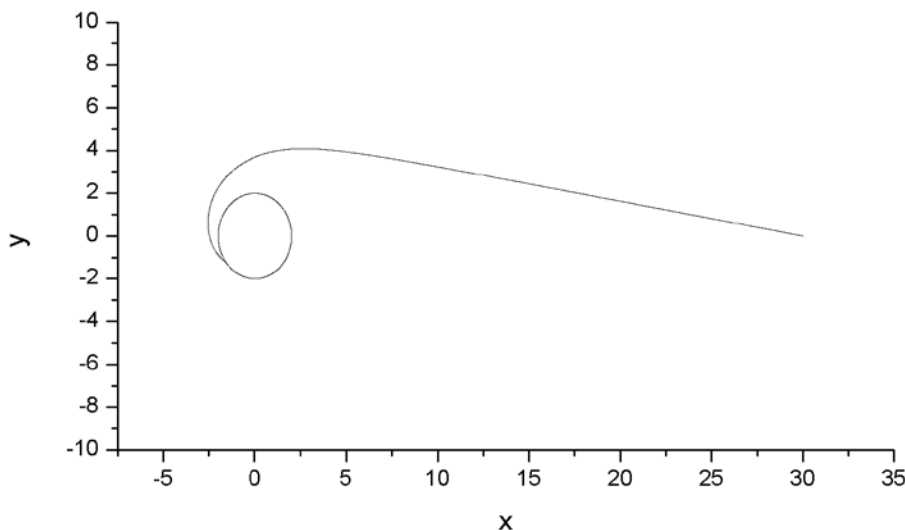
Παρακάτω φαίνονται μερικές τροχιές φωτεινών ακτινών καθώς περνάνε κοντά από το βαρυτικό δυναμικό μιας μαύρης τρύπας. Η κάμψη αυτή του φωτός που παρατηρείται χρησιμοποιείται για την έμμεση ανίχνευση μαύρων τρυπών, μέσω της ανίχνευσης του βαρυτικού τους πεδίου.



Σχ. 4.7 Τροχιά φωτεινής ακτίνας που κάμπτεται από το βαρυτικό δυναμικό
Αρχικές συνθήκες: $r/M = 30$, $\theta = 2,8996$



Σχ. 4.8 Τροχιά φωτεινής ακτίνας που κάμπτεται από το βαρυτικό δυναμικό
Αρχικές συνθήκες: $r/M = 30$, $\theta = 2,965$



Σχ. 4.9 Τροχιά φωτεινής ακτίνας που παγιδεύεται στο βαρυτικό δυναμικό μιας
μαύρης τρύπας. Αρχικές συνθήκες: $r/M = 30$, $\theta = 2,9775$

4.3 Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Τέλος, θα μελετηθούν τροχιές σωμάτων με μάζα τα οποία εισέρχονται σε μια μαύρη τρύπα στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για αυτόν τον σκοπό μπορεί να βρεθεί στο τρίτο μέρος του παραρτήματος.

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, συνδυάζοντας τις γεωδαιτικές εξισώσεις (2.4.6) που υπολογίστηκαν για τις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein με τις σχέσεις των διατηρούμενων ποσοτήτων (2.4.7) και (2.4.8) για το e και το l αντίστοιχα, έχουμε ότι:

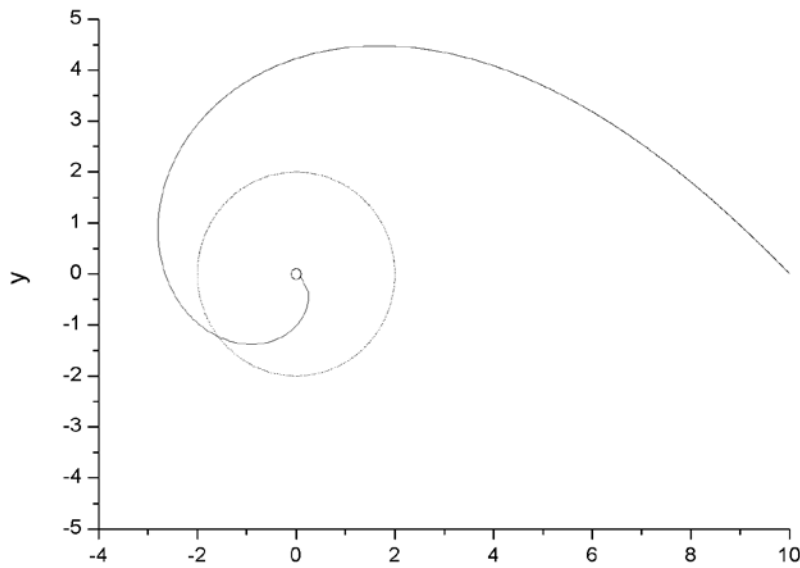
$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = \frac{l^2}{r^3} - \frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 \quad (4.3.1\alpha)$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 - \frac{2Me}{r^2} \frac{dv}{d\tau} - \frac{l^2}{r^4} (2M - r) \quad (4.3.1\beta)$$

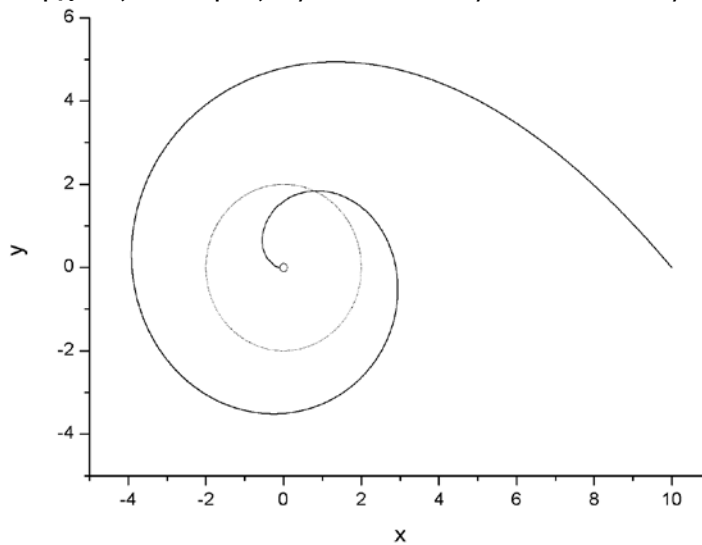
$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{2l}{r^3} \left[e - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{d\tau} \right] \quad (4.3.1\gamma)$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των εξισώσεων που χρειάζεται να υπολογιστούν σε κάθε βήμα δεν μειώθηκε, αλλά η εισαγωγή διατηρούμενων ποσοτήτων στον υπολογισμό τους βελτιώνει την διαδικασία πάραυτα.

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικές τροχιές σωμάτων που υπολογίστηκαν στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein.



Σχ. 4.10 Τροχιά σώματος που εισέρχεται σε μαύρη τρύπα
Αρχικές συνθήκες: $r/M = 10$, $dr/d\tau = -0.4$, $l/M = 4$



Σχ. 4.11 Τροχιά σώματος που εισέρχεται σε μαύρη τρύπα
Αρχικές συνθήκες: $r/M = 10$, $dr/d\tau = -0.4$, $l/M = 4.4$

Παράρτημα

Παράρτημα 1: Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Schwarzschild

```
program Schwarzschild

implicit none
real*8 tau,t,r,th
real*8 vt,vr,vth
real*8 M,A,r0,l,e
real*8 Ep
real*8 dtau,taumax
integer i,cs,q,qp

print *, 'Input black hole mass M'
read (5,*) M
print *, 'Input initial radial position r0'
read (5,*) r0
print *, 'Input initial radial and angular velocity
vr0,vth0'
read (5,*) vr,vth
print *, 'Veff= ', (0.5d0*(r0*vth)**2-M/r0-(M*r0*vth**2))
l=(vth*r0**2)
print *, 'l/M= ', l/M
print *, 'Input simulation time tau_max and step dtau'
read (5,*) taumax,dtau
print *, 'Input number of simulation steps per output'
read (5,*) cs

tau=0.0d0
t=0.0d0
r=r0
th=0.0d0
i=0
q=vr/abs(vr)
qp=q

vt=sqrt((vr**2)/(A(M,r))**2+((vth*r)**2)/A(M,r)+1/A(M,r))
e=A(M,r)*vt

open (unit=12,file='x.dat')
open (unit=13,file='v.dat')
open (unit=14,file='E.dat')
open (unit=15,file='rmin.dat')
open (unit=16,file='rmax.dat')

write (12,*) tau,t,r,th
write (13,*) tau,t,r,vt,vr,vth
write (14,*) tau,t,Ep(r,vr,l,M)

do while (tau.lt.taumax)
```

```

i=i+1
call RK(tau,t,r,th,vt,vr,vth,M,dtau,l,e)
qp=q
q=vr/abs(vr)

if ((qp.gt.0).and.(q.le.0)) then
  write (16,*) r,th
endif

if ((qp.lt.0).and.(q.ge.0)) then
  write (15,*) r,th
endif

if ((r.le.(2.0d0*M).or.(r.ge.(10.0d0*r0)))) then
  exit
endif

if (i.eq.cs) then
  write(12,*) tau,t,r,th
  write(13,*) tau,t,r,vt,vr,vth
  write(14,*) tau,t,Ep(r,vr,l,M)
  i=0
endif

enddo

write(12,*) tau,t,r,th
write(13,*) tau,t,r,vt,vr,vth
write(14,*) tau,t,Ep(r,vr,l,M)

close(12)
close(13)
close(14)
close(15)
close(16)

end

```

C ----- Integration -----

```

subroutine RK(tau,t,r,th,vt,vr,vth,M,dtau,l,e)

implicit none
real*8 tau,t,r,th
real*8 vt,vr,vth
real*8 l,e,M
real*8 h2,h6,dtau
real*8
kt1,kr1,kth1,kt2,kr2,kth2,kt3,kr3,kth3,kt4,kr4,kth4
real*8 kv1,kv2,kv3,kv4,kvth1,kvth2,kvth3,kvth4
real*8 dttau,dvrtau,dthtau
real*8 A,dA

h2=0.5d0*dtau

```



```

real*8 function dthdtau(r,l)

implicit none
real*8 l,r

dthdtau=l/r**2

end

```

C ----- Coefficient Functions -----

```

real*8 function A(M,r)

```

```

implicit none
real*8 M,r

```

```

A=1-(2.0d0*M/r)

```

```

end

```

```

real*8 function dA(M,r)

```

```

implicit none
real*8 M,r

```

```

dA=(2.0d0*M)/(r**2)

```

```

end

```

C -----

```

real*8 function Ep(r,vr,l,M)

```

```

implicit none
real*8 r,vr,l,M

```

```

Ep=0.5d0*vr**2-M/r+0.5d0*(l/r)**2-M*(l**2)/r**3

```

```

end

```

Παράρτημα 2: Φωτεινές ακτίνες στις συντεταγμένες Schwarzschild

```
program Schwarzschild_light

implicit none
real*8 tau,t,r,th
real*8 vt,vr,vth
real*8 M,A,r0,l,e
real*8 Ep,ang
real*8 dtau,taumax
integer i,cs

print *,'Input black hole mass M'
read (5,*) M
print *,'Input initial radial position r0'
read (5,*) r0
print *,'Input photon angle (0:away from M/pi:towards
M) '
read (5,*) ang
vr=cos(ang)
vth=sin(ang)/r0
print *,'Veff= ',(1-2.0d0*M/r0)/r0**2
l=(vth*r0**2)

vt=sqrt((vr**2)/(A(M,r0))**2+((vth*r0)**2)/A(M,r0)+1/A(M,r0))
e=A(M,r0)*vt
print *,'l/M= ',l/M
print *,'e= ',e
print *,'b= ',sqrt((l/e)**2)
print *,'Input simulation time lamda_max and step
dlamda'
read (5,*) taumax,dtau
print *,'Input number of simulation steps per output'
read (5,*) cs

tau=0.0d0
t=0.0d0
r=r0
th=0.0d0
i=0

open (unit=12,file='x.dat')
open (unit=13,file='v.dat')
open (unit=14,file='E.dat')

write (12,*) tau,t,r,th
write (13,*) tau,t,vt,vr,vth
write (14,*) tau,t,Ep(r,vr,l,M)

do while (tau.lt.taumax)
```



```

kt3=dtddtau(A(M,r+h2*kr2),e)
kr3=vr+h2*kvr2
kth3=dthdtau(r+h2*kr2,l)
kvr3=dvrddtau(r+h2*kr2,kth3,dA(M,r+h2*kr2),M)

kt4=dtddtau(A(M,r+dtau*kr3),e)
kr4=vr+dtau*kvr3
kth4=dthdtau(r+dtau*kr3,l)
kvr4=dvrddtau(r+dtau*kr3,kth4,dA(M,r+dtau*kr3),M)

tau=tau+dtau
t=t+h6*(kt1+2.0D0*(kt2+kt3)+kt4)
r=r+h6*(kr1+2.0D0*(kr2+kr3)+kr4)
th=th+h6*(kth1+2.0D0*(kth2+kth3)+kth4)
vr=vr+h6*(kvr1+2.0D0*(kvr2+kvr3)+kvr4)
vth=dthdtau(r,l)
vt=dtddtau(A(M,r),e)

end

```

C ----- Geodesic Functions -----

```

real*8 function dtddtau(s,e)

implicit none
real*8 s,e

dtddtau=e/s

end

real*8 function dvrddtau(r,vth,ds,M)

implicit none
real*8 vt,vr,vth,r
real*8 ds,s,M

dvrddtau=(vth**2)*(r-3*M)

end

real*8 function dthdtau(r,l)

implicit none
real*8 l,r

dthdtau=l/r**2

end

```

C ----- Coefficient Functions -----

```

real*8 function A(M,r)

```

```

implicit none
real*8 M,r

A=1-(2.0d0*M/r)

end

real*8 function dA(M,r)

implicit none
real*8 M,r

dA=(2.0d0*M)/(r**2)

end

```

C

```

-----

real*8 function Ep(r,vr,l,M)

implicit none
real*8 r,vr,l,M

Ep=0.5d0*vr**2-M/r+0.5d0*(l/r)**2-M*(l**2)/r**3

end

```

Παράρτημα 3: Σώματα με μάζα στις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

```

program Eddington_Finkelstein

implicit none
real*8 tau,v,r,th
real*8 vv,vr,vth,vt
real*8 M,A,r0,l,e
real*8 Ep
real*8 dtau,taumax
integer i,cs,q,qp

print *,'Input black hole mass M'
read (5,*) M
print *,'Input initial radial position r0'
read (5,*) r0
print *,'Input initial radial and angular velocity
vr0,vth0'
read (5,*) vr,vth
print *,'Veff= ',(0.5d0*(r0*vth)**2-M/r0-(M*r0*vth**2))

```



```

l=(vth*r0**2)
print *,'l/M= ',l/M
print *,'Input simulation time tau_max and step dtau'
read (5,*) taumax,dtau
print *,'Input number of simulation steps per output'
read (5,*) cs

tau=0.0d0
v=0.0d0
r=r0
th=0.0d0
i=0
q=vr/abs(vr)
qp=q

vt=sqrt((vr**2)/(A(M,r))**2+((vth*r)**2)/A(M,r)+1/A(M,r))
vv=vt+vr/A(M,r)
e=A(M,r)*vv-vr

open (unit=12,file='x.dat')
open (unit=13,file='v.dat')
open (unit=14,file='E.dat')
open (unit=15,file='rmin.dat')
open (unit=16,file='rmax.dat')

write (12,*) tau,v,r,th
write (13,*) tau,v,r,vv,vr,vth
write (14,*) tau,v,Ep(r,vr,l,M)

do while (tau.lt.taumax)

    i=i+1
    call RK(tau,v,r,th,vv,vr,vth,M,dtau,l,e)
    qp=q
    q=vr/abs(vr)

    if (r.le.(0.1)) then
        exit
    endif

    if ((qp.gt.0).and.(q.le.0)) then
        write (16,*) r,th
    endif

    if ((qp.lt.0).and.(q.ge.0)) then
        write (15,*) r,th
    endif

    if (i.eq.cs) then
        write(12,*) tau,v,r,th
        write(13,*) tau,v,r,vv,vr,vth
        write(14,*) tau,v,Ep(r,vr,l,M)
        i=0
    endif
endif

```



```

kth4=vth+dtau*kvth3
kvr4=dvrtau(r+dtau*kr3,vv+dtau*kvv3,l,e,M)
kvv4=dvvdtau(r+dtau*kr3,vv+dtau*kvv3,l,M)
kvth4=dvthdtau(r+dtau*kr3,vv+dtau*kvv3,l,e,M)

tau=tau+dtau
v=v+h6*(kv1+2.0D0*(kv2+kv3)+kv4)
r=r+h6*(kr1+2.0D0*(kr2+kr3)+kr4)
th=th+h6*(kth1+2.0D0*(kth2+kth3)+kth4)
vr=vr+h6*(kvr1+2.0D0*(kvr2+kvr3)+kvr4)
vth=vth+h6*(kvth1+2.0D0*(kvth2+kvth3)+kvth4)
vv=vv+h6*(kvv1+2.0D0*(kvv2+kvv3)+kvv4)

end

```

C ----- Geodesic Functions -----

```

real*8 function dvvdtau(r,vv,l,M)

implicit none
real*8 r,vv,l,M,A

dvvdtau=(l**2)/(r**3)-M*(vv**2)/r**2

end

real*8 function dvrtau(r,vv,l,e,M)

implicit none
real*8 r,vv,l,e,M,A

dvrtau=(A(M,r)*M*(vv**2)/r**2)-(2.0d0*M*e*vv/r**2)-
&      (2.0d0*M-r)*(l/r**2)**2

end

real*8 function dvthdtau(r,vv,l,e,M)

implicit none
real*8 r,vv,l,e,M,A

dvthdtau=(2.0d0*l/(r**3))*(e-A(M,r)*vv)

end

```

C ----- Coefficient Functions -----

```

real*8 function A(M,r)

implicit none
real*8 M,r

A=1-(2.0d0*M/r)

```

```
end
```

```
C
```

```
-----  
real*8 function Ep(r,vr,l,M)
```

```
implicit none
```

```
real*8 r,vr,l,M
```

```
Ep=0.5d0*vr**2-M/r+0.5d0*(l/r)**2-M*(l**2)/r**3
```

```
end
```

Βιβλιογραφία

[1] James B. Hartle - Gravity

[2] Κωνσταντίνος Αναγνωστόπουλος - Computational Physics