Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Διπλωματική Εργασία

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ ΩΣ ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ

Ιωάννης Αδάμου

Επιβλέπων Καθηγητής: Σωτήρης Καρανάσιος
Τριμελής Επιτροπή :Σ. Καρανάσιος, Ι. Πολυράκης, Π. Ψαράκος

Αθήνα
Ιούλιος 2015

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Σωτήρη Καρανάσιο για την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια του καθ΄ όλη την διάρκεια της εκπόνησης της. Ήταν πάντα διαθέσιμος να μου προσφέρει τις γνώσεις , την εμπειρία και τις συμβουλές του στα θέματα που με απασχολούσαν τόσο στα πλαίσια της εργασίας όσο και στις μετέπειτα επιλογές μου, δείχνοντας μου ότι πέρα από ένας εξαιρετικός καθηγητής είναι και ένας εξαίρετος άνθρωπος.

Έπειτα θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέδραμαν έστω και λίγο στην εκπόνηση και βελτίωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Έστω X χώρος Banach με dimX $< \infty$ και T$\in$B(X) αντιστρέψιμος τελεστής τότε υπάρχει πολυώνυμο P έτσι ώστε $T^{-1} = P(T)$.
Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα Cayley-Hamilton (θεώρημα 13.4.1 [8]) και από το ότι σε κάθε διανυσματικό χώρο με νόρμα πεπερασμένης διάστασης X κάθε T $\in B(X)$ αντιστοιχεί ακριβώς σε ένα πίνακα ως προς μια βάση
(Παραδείγματα 2.2.5,2.8.1 [9]).

Αν τώρα X χώρος Banach άπειρης διάστασης το αντίστοιχο δεν ισχύει. Ακόμα δεν ισχύει ότι αν ο X χώρος Banach άπειρης διάστασης και T$\in B(X)$ αντιστρέψιμος ο T^{-1} γράφεται σαν weak όριο (όριο στην weak operator topology)πολυωνύμων του T.

Το πιο κάτω παράδειγμα θεωρείται το συνηθέστερο που μας το αποδεικνύει.

Παράδειγμα 1. *Έστω ο* $l_2(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ *θέτουμε* $T : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ *με* $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = ((x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}})$ *τότε ο* $T \in B(l_2(\mathbb{Z}))$ *και είναι αντιστρέψιμος με* $T^{-1}((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = ((x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}})$ *.*
Ο T^{-1} *όμως δεν μπορεί να είναι weak όριο πολυωνύμων του* T *όπως αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τα (θεώρημα 2.1 και 2.5 [15]).*

Εδώ να τονίσουμε ότι σε αυτή την εργασία λόγω συντομίας με τον όρο χώρο Banach θα εννοούμε μιγαδικό χώρο Banach , με τον όρο τελεστή σε ένα χώρο με νόρμα θα εννοούμε γραμμικό και φραγμένο τελεστή στον χώρο αυτό και με τον υπόχωρο ενός τυπολογικού διανυσματικού χώρου θα εννοούμε κλειστό υπόχωρο. Επίσης αν X χώρος με νόρμα θα συμβολίζουμε με X^* τον δυϊκό του X,με $B(X)$ το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων τελεστών στον X και με $S(X)$ την μοναδιαία σφαίρα του X.

Με βάση λοιπόν αυτά που προαναφέραμε γεννάται το πρόβλημα εύρεσης ικανών και αναγκαίων συνθηκών έτσι ώστε σε ένα άπειρης διάστασης χώρο Banach X ένας αντιστρέψιμος τελεστής $T \in B(X)$ να έχει αντίστροφο που γράφετε σαν όριο πολυωνύμων του T. Στην εργασία ασχολούμαστε κυρίως με το πρόβλημα εύρεσης αναγκαίων και ικανών συνθηκών έτσι ώστε ο αντίστροφος του τελεστή να γράφετε σαν weak όριο πολυωνύμων του. Συγκεκριμένα στηριζόμενοι στο άρθρο του Σ. Καρανάσιου [11] θα δώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα αντιστρέψιμο τελεστή σε ένα uniformly convex Banach χώρο έτσι ώστε ο αντίστροφος του να γράφεται σαν weak όριο πολυωνύμων του.

Το πρόβλημα αυτό σε χώρους Hilbert απασχόλησε πολλούς μαθηματικούς με πρώτους τους A. Feintuch και J.A. Erdos εκ των οποίων ο πρώτος ήταν αυτός που έθεσε κιόλας το πρόβλημα [3, 2, 1])και ο δεύτερος αυτός που κατάφερε να δώσει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να γράφεται ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου τελεστή σε ένα χώρο Hilbert σαν weak όριο πολυωνύμων του τελεστή. Τα εργαλεία που χρησιμοποίησε ο Erdos για να δώσει απαντήσεις στο πρόβλημα τον βοήθησαν να απλοποιήσει και τις υποθέσεις του Brodski (σελίδα 16.[4]) για ένα τελεστή T σε ένα χώρο Hilbert έτσι ώστε κάθε μεγιστικό nest T-αναλοίωτων υποχώρων να είναι συνεχές. Με βάση την δουλειά του J.A. Erdos ,ο Σ. Καρανάσιος [11] μετέφερε το πρόβλημα σε χώρους Banach , έδωσε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να γράφετε ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου τελεστή σε ένα uniformly convex Banach χώρο σαν weak όριο πολυωνύμων του καθώς και τις υποθέσεις για τον τελεστή T σε ένα uniformly convex Banach χώρο, έτσι ώστε κάθε μεγιστικό nest T-αναλλοίωτων υποχώρων να είναι συνεχές.

Ορισμός 1. *Έστω X χώρος με νόρμα ο X καλείται strictly convex αν $x, y \in X$ γραμμικά εξαρτημένα $\Leftrightarrow \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.*

Ορισμός 2. *Έστω X χώρος με νόρμα ο X καλείται uniformly convex αν για κάθε $\epsilon \in \mathbb{R}$ με $0 < \epsilon \leq 2$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\|x - y\| \geq \epsilon \Rightarrow \|\frac{1}{2}(x + y)\| \leq 1 - \delta$.*

Πρόταση 1. *Έστω X χώρος Banach. Ο X είναι strictly convex αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\frac{\|x+y\|}{2} = 1 \Rightarrow x = y$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω X strictly convex αν $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\frac{\|x+y\|}{2} = 1$ τότε $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Επειδή X strictly convex έπεται ότι τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$x = \lambda y$. Όμως από το $\|x\| = \|y\|$ έπεται $x = y$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\frac{\|x+y\|}{2} = 1 \Rightarrow x = y$.

Για να δείξουμε ότι ο X είναι strictly convex αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in X \setminus \{0\}$ με $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$.

Πραγματι θα δείξουμε ότι είναι $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$

Έστω ότι $\frac{x}{\|x\|} \neq \frac{y}{\|y\|}$. Θέτουμε $f(t) = \|\frac{x}{\|x\|} + (1 - t)\frac{y}{\|y\|}\|, t \in [0, 1]$.

Τότε λόγω της υπόθεσης μας η $f(t) < 1$, για κάθε $t \in (0, 1)$. Όμως

$f(\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}) = 1$, άτοπο.

Άρα $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω X χώρος Banach. Αν ο X είναι uniformly convex τότε είναι και strictly convex.*

Απόδειξη. Έστω X uniformly convex από πρόταση 1 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\frac{\|x+y\|}{2} = 1 \Rightarrow x = y$.

Θα το αποδείξουμε με άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι υπάρχει $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$, $\frac{\|x+y\|}{2} = 1$ και $x \neq y$.

Τότε υπάρχει $\epsilon \in (0, 2]$ με $\|x - y\| \geq \epsilon$

και επομένως, επειδή X uniformly convex,

υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ έτσι ώστε $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta < 1$ άτοπο.

Επομένως ο X είναι strictly convex . $\square$

Πρόταση 3. *Έστω X πεπερασμένης διάστασης χώρος Banach. Αν ο X είναι strictly convex τότε είναι και uniformly convex.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με άτοπο απαγωγή.

Έστω X strictly convex και όχι uniformly convex

$\Rightarrow$ υπάρχει $\epsilon \in (0, 2]$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon$ και $\|\frac{1}{2}(x + y)\| > 1 - \delta$

$\Rightarrow$ υπάρχει $\epsilon \in (0, 2], x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon$

και $1 \geq \|\frac{1}{2}(x + y)\| \geq 1$

$\Rightarrow$ υπάρχει $\epsilon \in (0, 2], x, y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon$ και

$\|x + y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$ όμως X strictly convex

$\Rightarrow$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$ όμως $\|x\| = \|y\|$

$\Rightarrow x = y \quad \Rightarrow \|x - y\| = 0$ άτοπο.

Άρα ο X είναι uniformly convex . $\square$

Ορισμός 3. *Έστω X χώρος με νόρμα και X^{**} ο δεύτερος δυϊκός του X, ο X θα καλείται αυτοπαθής (reflective) αν η κανονική εμφύτευση $J : X \to X^{**}$ με $J(x)(f) = f(x)$, για κάθε $f \in X^*, x \in X$ εκτός από ισομετρία είναι και επί.*

Θεώρημα 1 (Milman). *Έστω X χώρος Banach .Αν ο X είναι uniformly convex τότε είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. [13]

Πρόταση 4. *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $f \in X^*$ τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $f(x) = \|f\|$.*

Απόδειξη. Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach από θεώρημα

Hahn-Banach υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ με

$\|x^{**}\| = 1$ και $x^{**}(f) = \|f\|$

επιπλέον ο X είναι αυτοπαθής άρα υπάρχει $x \in X$ με

$J(x) = x^{**}, \|x\| = \|J(x)\| = \|x^{**}\| = 1$ και $f(x) = x^{**}(f) = \|f\|$. □

Πόρισμα 1. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $f \in X^*$ τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $f(x) = \|f\|$.*

Απόδειξη. Από Θεώρημα 1 ο X είναι αυτοπαθής και άρα από Πρόταση 4 υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $f(x) = \|f\|$. □

Ορισμός 4. *Έστω X χώρος με νόρμα και $T\in B(X)$. Καλούμε spatial numerical range του T το σύνολο*

$V(T) = \{f(T(x)) : f \in S(X^*), \|x\| = 1, f(x) = 1\}$

και numerical range του T το σύνολο

$V(B(X), T) = \{f(TA) : f \in S(B(X)^*), A \in S(B(X)), f(A) = 1\}.$

Πρόταση 5. *Έστω X χώρος Banach και $T\in B(X)$ με $0 \notin V(T)$ τότε ο T είναι $1 - 1$.*

Απόδειξη. Θα δειχθεί με άτοπο απαγωγή.

Έστω ότι ο T δεν είναι 1-1

τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \neq 0$ και $T(x) = 0$.

Άρα για $y = \frac{x}{\|x\|} = 1$ είναι $T(y) = 0$.

Από γνωστό πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1, f(y) = 1$ τότε όμως $f(T(y)) = f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in V(T)$ άτοπο. □

Ορισμός 5. *Έστω X χώρος με νόρμα, $T\in B(X)$ και $M \subseteq X$ υπόχωρος του X, ο M θα καλείται T-αναλλοίωτος (ή αναλλοίωτος ως προς T) αν $T(M) \subseteq M$, όπου $T(M) = \{T(x) : x \in M\}$. Θα συμβολίζουμε με $LatT$ το σύνολο που περιέχει τους αναλλοίωτους υπόχωρους ως προς T*

$LatT = \{M \subseteq X : M \ T\text{-αναλλοίωτος } \}.$

Ορισμός 6. *Έστω X χώρος με νόρμα και $T \in B(X)$ ο T καλείται Full αν $\overline{T(M)} = M$, για κάθε $M \in LatT$.*

Ορισμός 7. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $N \subseteq X$ θα καλούμε γραμμική θήκη του N ($cls(N)$) το σύνολο*

$cls(N) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,..,n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 8. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $N \subseteq X$. Θα καλούμε κυρτή θήκη του N ($co(N)$) το σύνολο*

$co(N) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, i = 1,..,n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 9. *Έστω X χώρος με νόρμα και $T \in B(X)$. Ο T λέγεται quasinilpotent αν $\sigma(T) = \{0\}$, όπου $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ μη αντιστρέψιμος $\}$ το φάσμα του T.*

Ορισμός 10. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$, όπου $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Το $\mathcal{N}$ θα καλείται nest αν $(\mathcal{N}, \subseteq)$ ολικά διατεταγμένο .*

Αν $N \in \mathcal{N}$ θα συμβολίζουμε με N_- το σύνολο $N_- = \overline{\bigcup_{\{M \in \mathcal{N}, M \subsetneq N\}} M}$

Το nest $\mathcal{N}$ θα καλείται μεγιστικό αν για κάθε U με $U \subseteq X, \mathcal{N} \cup \{U\}$ δεν είναι nest

Επιπλέον αν X διανυσματικός χώρος,

το nest $\mathcal{N}$ θα καλείται complete αν $\{0\}, X \in \mathcal{N}$.

Το nest $\mathcal{N}$ θα καλείται συνεχές αν είναι complete και $N_- = N$, για κάθε $N \in \mathcal{N}$.

Ορισμός 11. *Έστω X διανυσματικός χώρος η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ καλείται ημινόρμα στο X αν για κάθε $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει:*

$i)\|x\| \geq 0$

$ii)\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$iii)\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Ορισμός 12. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathcal{P}$ οικογένεια ημινορμών του X. Η $\mathcal{B} = \{\{u \in X : p_i(u-x) < \epsilon,$ για κάθε $i \in (1, ..., n)\} : x \in X, n \in (N), \epsilon > 0, p_i \in \mathcal{P}$, για κάθε $i \in (1, ..., n)\}$ είναι βάση για μια τοπολογία (πράγματι $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ και αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ τότε για κάθε $u \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_u \in \mathcal{B}$ με $u \in B_u \subseteq B_1 \cap B_2$) την τοπολογία αυτή ονομάζουμε τοπολογία του X επαγόμενη από την οικογένεια ημινορμών (P) και τη συμβολίζουμε με $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.*

Ορισμός 13. *Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και $\mathcal{T}$ τοπολογία επί του X. Η $\mathcal{T}$ καλείται γραμμική (ή τοπολογία διανυσματικού χώρου) αν $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.*

Πρόταση 6. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε* $+ : X\times X \to X, \cdot : \mathbb{C}\times X \to X$

Απόδειξη. (1.2 πρόταση 1 [6])

Παρατήρηση 1. *Από πρόταση 6 σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα η επαγόμενη τοπολογία από την νόρμα είναι γραμμική τοπολογία.*

Πρόταση 7. *Έστω X διανυσματικός χώρος και* $\mathcal{P}$ *οικογένεια ημινορμών επι του X τότε η* $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ *είναι γραμμική τοπολογία .*

Απόδειξη. (Πρόταση 2.3.1 και σελίδα 88 [6])

Ορισμός 14. *Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα. Καλούμε uniform (ή norm) τοπολογία στον B(X)την τοπολογία που επάγεται απο την νόρμα* $\|\cdot\| : B(X) \to \mathbb{R}$ *με* $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ *του B(X) (UT).*

Παρατήρηση 2. *Εξ ορισμού αν* $A_n, A \in B(X)$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε*

$A_n \to A$ *στην uniform τοπολογία*

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|A_n(x) - A(x)\| = 0$ *ομοιόμορφα για κάθε* $x \in X$

$\Leftrightarrow A_n(x) \to A(x)$ *ομοιόμορφα για κάθε* $x \in X$.

Ορισμός 15. *Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και η οικογένεια ημινορμών*

$\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_x : B(X) \to R : \|A\|_x = \|A(x)\|, x \in X\}$ *στο B(X),τότε η τοπολογία που επάγεται απο την $\mathcal{P}$ επί της B(X) καλείται strong τοπολογία στο B(X)(SOT)*

Παρατήρηση 3. *Εξ ορισμού αν $A_n, A \in B(X)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Τότε*

$A_n \to A$ στην strong τοπολογία

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|A_n(x) - A(x)\| = 0$, *για κάθε* $x \in X$

$\Leftrightarrow A_n(x) \to A(x)$, *για κάθε* $x \in X$.

Ορισμός 16. *Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_{x,f} : B(X) \to R : \|A\|_{x,f} = |f(A(x))|, x \in X, f \in X^*\}$ στο B(X. Τότε η τοπολογία που επάγεται απο την $\mathcal{P}$ επί της B(X) καλείται weak τοπολογία στο B(X) (WOT).*

Παρατήρηση 4. *Εξ ορισμού αν $A_n, A \in B(X)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$A_n \to A$ στην WOT τοπολογία

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |f(A_n(x)) - f(A(x))| = 0$, *για κάθε* $x \in X, f \in X^*$

$\Leftrightarrow f(A_n(x)) \to f(A(x))$, *για κάθε* $x \in X, f \in X^*$

Παρατήρηση 5. $WOT \subseteq SOT \subseteq UT$.

Ορισμός 17. *Έστω* $A \neq \emptyset$ *σύνολο το* A *λέγεται άλγεβρα αν είναι εφοδιασμένο με 3 πράξεις* $"+", "\cdot", "\circ"$ *έτσι ώστε* $(A, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος ,* $(A, +, \circ)$ *δακτύλιος και* $\lambda(a \circ b) = (\lambda a) \circ b = a \circ (\lambda b),$ *για κάθε* $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$

Ορισμός 18. *Έστω* A *άλγεβρα και* $F \subseteq A$ *τότε η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει το* F *καλείται άλγεβρα παραγόμενη από το* F *(*$a(F)$ *).*

Ορισμός 19. *Έστω* B *σύνολο. Το* B *θα καλείται άλγεβρα με νόρμα αν ο* B *είναι χώρος με νόρμα , άλγεβρα και επιπλέον για κάθε* $x, y \in B$ *ισχύει* $\|x \circ y\| = \|x\|\|y\|.$

Ορισμός 20. *Έστω* X *χώρος με νόρμα , η άλγεβρα με νόρμα B(X) και η υποάλγεβρα της* $\mathcal{A}$*. Καλούμε weak (αντίστοιχα strong ,uniformly) κλειστότητα της* $\mathcal{A}$ *την κλειστότητα της* $\mathcal{A}$ *ως προς την* WOT *(αντίστοιχα* SOT*,* UT *) και την συμβολίζουμε με* $\overline{\mathcal{A}}(wot)$ *(αντίστοιχα* $\overline{\mathcal{A}}(sot), \overline{\mathcal{A}}(ut)$*).*

Παρατήρηση 6. *Έστω* X *χώρος με νόρμα , η άλγεβρα με νόρμα B(X) και η υποάλγεβρα της* $\mathcal{A}$*. Τότε*

$\overline{\mathcal{A}}(ut) \subseteq \overline{\mathcal{A}}(sot) \subseteq \overline{\mathcal{A}}(wot).$

Παρατήρηση 7. *Έστω X χώρος Banach και M ένα κυρτό υποσύνολο του B(X). Τότε*

$\overline{M}(sot) = \overline{M}(wot)$.

Πόρισμα 2. *Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{M}$ υποάλγεβρα του B(X). Τότε*

$\overline{\mathcal{M}}(sot) = \overline{\mathcal{M}}(wot)$

Ορισμός 21. *Έστω H χώρος Hilbert και $T \in B(X)$. Ο T καλείται strictly positive αν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in H$ ισχύει $\Re < T(x), x > \geq \delta\|x\|^2$.*

Κεφάλαιο 2

Προσέγγιση του αντιστρόφου

2.1 Συνέχεια μεγιστικού nest από T-αναλλοίωτους υπόχωρους

Σε αυτή την πρώτη ενότητα του κεφαλαίου θα παραθέσουμε καταρχάς δύο λήμματα και ένα θεώρημα ιδιαίτερα σημαντικά, μιας και θα χρησιμοποιηθούν ουκ ολίγες φορές στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας . Έπειτα χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία θα βρούμε ικανές συνθήκες για ένα τελεστή T σε ένα uniformly convex Banach χώρος έτσι ώστε κάθε μεγιστικό nest από T-αναλλοίωτους υπόχωρους να είναι συνεχές.Αξίζει να σημειωθεί ότι συνθήκες αυτές είναι ασθενέστερες απο αυτές που αναφέρει ο Brodski (σελίδα 16.[4]).

Λήμμα 1. *Έστω* X *uniformly convex Banach χώρος. Αν* $T \in B(X)$ *με* $0 \notin V(T)$ *τότε ο* T *είναι full τελεστής.*

Απόδειξη. Θα δειχθεί με άτοπο απαγωγή .

Έστω ότι ο T δεν είναι full. Τότε υπάρχει $M \subseteq X$ T-αναλλοίωτος έτσι ώστε $\overline{T(M)} = N \subsetneq M$.

Επομένως θα υπάρχει $x_0 \in M \setminus N$

Άρα υπάρχει $x_0 \notin N$ και δ με $\delta = d(x_0, N) > 0$.

Τότε η συνάρτηση $f_1 :< N \cup x_0 >\to \mathbb{R}$ με $f_1(y + \lambda x_0) = \lambda\delta$ είναι γραμμική,

επίσης $|f_1(y + \lambda x_0)| \leq \|y + \lambda x_0\| \Rightarrow \|f_1\| \leq 1$

και επειδή $f_1(\frac{x_0}{\delta}) = 1 \Rightarrow \|f_1\| = 1$.

Απο θεώρημα Hahn-Banach έπεται ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ με

$f(N) = 0, f \in S(X^*)$.

Επιπλέον ο X uniformly convex άρα και ο M uniformly convex επομένως από

Πόρισμα 1 θα υπάρχει $y \in M$ με $\|y\| = 1$ και $f(y) = 1$

όμως $f(T(y)) = 0$ και άρα $0 \in V(T)$ άτοπο.

Επομένως ο είναι full τελεστής. □

Λήμμα 2. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $T \in B(X)$ αντιστρέψιμος τελεστής με $0 \notin V(T)$ τότε $LatT \subseteq LatT^{-1}$.*

Απόδειξη. $M \in LatT, M$κλειστός $\Rightarrow (T^{-1})^{-1}(M)$κλειστός

$\Rightarrow T(M)$κλειστός $\Rightarrow T(M) = \overline{T(M)}$. Όμως από λήμμα 1 ο T είναι full άρα

$\overline{T(M)} = M \Rightarrow T(M) = M$ επίσης από πρόταση 5 $T^{-1}(M) \subseteq M$.

Επομένως $M \in LatT^{-1}$. □

Θεώρημα 2. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $T \in B(X)$ quasinilpotent τελεστής με $0 \notin V(T)$. Αν $M, N \in LatT$ με $M \subseteq N$ τότε $dim(N \setminus M) \neq 1$.*

Απόδειξη. Θα δειχθεί με άτοπο απαγωγή .

Έστω $M, N \in LatT$ με $M \subseteq N$ και $dim(N \setminus M) = 1$.

Τότε υπάρχει $x \in N \setminus M$ έτσι ώστε $< x + M >= N$.

Επειδή $N \in LatT \Rightarrow T(x) \in N$. Άρα $T(x) = \alpha x + y, \alpha \in \mathbb{C}, y \in M$

έπεται για κάθε $a \in \mathbb{C}, x \in N, (T - \alpha I)x \in M \Rightarrow (T - \alpha I)N \subseteq M$. Επομένως αν α=0, $T(N) \subseteq M \Rightarrow \overline{T(N)} \subseteq M$ και επειδή $0 \notin V(T)$, από λήμμα 1, ο T είναι Full έπεται $N \subseteq M \Rightarrow N = M \Rightarrow dim(N \setminus M) = 0$, άτοπο.

Αν όμως $\alpha \neq 0$ τότε επειδή T quasinilpotent υπάρχει ο $(T - \alpha I)^{-1}$ και είναι όριο πολυωνύμων του T στην uniform τοπολογία.

Τότε $N \subseteq (T - \alpha I)^{-1}M \subseteq M$ και άρα $N = M, dim(N \setminus M = 0)$ άτοπο. □

Λήμμα 3. *Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{N}$ nest από υποχώρους του X. Τότε το $\mathcal{N}$ είναι μεγιστικό αν και μόνο αν $\mathcal{N}$ είναι complete και για κάθε $N \in \mathcal{N}$ ισχύει*

$dim(N \setminus N_{-}) \leq 1.$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{N}$ μεγιστικό και το X(αντίστοιχα το $\{0\}$) δεν ανήκει στο $\mathcal{N}$. Τότε το $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{X\}$(αντίστοιχα το $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{\{0\}\}$)είναι nest με $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$.

Άρα το $\mathcal{N}$ δεν είναι μεγιστικό , άτοπο. Επομένως $\mathcal{N}$ complete .

Επιπλέον αν υπάρχει $N \in \mathcal{N}$τέτοιο ώστε $dim(N \setminus N_{-}) > 1$ τότε υπάρχει $x, y \in \mathcal{N}$ γραμμικά ανεξάρτητα με $x, y \notin N_{-} = \overline{\bigcup_{\{M \in \mathcal{N}, M \subsetneq N\}} M}$

ορίζουμε λοιπόν $N^* = \overline{< N_{-} + x >}$ και θεωρούμε $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \{N^*\}$.

Τότε το $\mathcal{M}$ είναι nest και $N_{-} \subsetneq N^* \subsetneq N. \Rightarrow \mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$

Επομένως το $\mathcal{N}$ δεν είναι μεγιστικό , άτοπο. Άρα για κάθε $N \in \mathcal{N}$ ισχύει $dim(N \setminus N_{-}) \leq 1$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το $\mathcal{N}$ δεν είναι μεγιστικό. Τότε θα υπάρχει υπόχωρος N^* με $\{0\} \subsetneq N^* \subsetneq X$ με $N^* \notin \mathcal{N}$.Έτσι το $\mathcal{N} \cup \{N^*\}$ θα είναι nest .

$\Rightarrow$ υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε $N_{-} \subsetneq N^* \subsetneq N$. Οπότε $N \setminus N^* \subsetneq N \setminus N_{-}$ Άρα $dim(N \setminus N^*) < dim(N \setminus N_{-}) \leq 1 \Rightarrow N = N^*$, άτοπο.

Επομένως $\mathcal{N}$ μεγιστικό. $\square$

Πρόταση 8. *Έστω X uniformly convex Banach χωρος και $T \in B(X)$ quasinilpotent τελεστής με $0 \notin V(T)$.*

Τότε κάθε μεγιστικό nest από T-αναλλοίωτους υπόχωρους είναι συνεχές.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{N}$ ένα μεγιστικό nest από T-αναλλοίωτους υπόχωρους. Τότε από λήμμα 3 $\mathcal{N}$complete και για κάθε $N \in (N)$ είναι $dim(N \setminus N_{-}) \leq 1$. Επιπλέον επειδή για κάθε $N \in \mathcal{N}$ T-αναλλοίωτο ο N_{-} είναι T-αναλλοίωτος με $N_{-} \subseteq N$,

από θεώρημα 2, θα είναι $dim(N \setminus N_{-}) \neq 1$ οπότε $dim(N \setminus N_{-}) = 0$ και άρα $N = N_{-}$. □

2.2 Ο χώρος $(X^{(n)})^*$ και ο ισομορφισμός του με τον $(X^*)^{(n)}$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα έτσι και σε αυτή θα αναφέρουμε και θα αποδείξουμε προτάσεις που αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για την εργασία αυτή. Συμβολίζουμε με $X^{(n)}$ το ευθύ άθροισμα από n χώρους X. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν ο X uniformly convex Banach χώρος το ευθύ αθροισμα απο n χώρους X^* , $(X^*)^{(n)}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_q$ είναι ισομετρικό με τον χώρο $(X^{(n)})^*$ όπου ό $X^{(n)}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_p$. Το αποτέλεσμα αυτό θα μας δώσει σημαντικές σχέσεις για τα spatial numerical range $V(T), V(T^{(n)})$ όπου ο T ένας τελεστής στον uniformly convex Banach X και ο $T^{(n)} = \sum_{i=1}^n \oplus T$.

Πρόταση 9. *Έστω X uniformly convex Banach. χώρος . Η συνάρτηση $F : (X^*)^{(n)} \to (X^{(n)})^*$ με $F(\sum_{i=1}^n \oplus f_i) = \Lambda$ όπου $\Lambda(\sum_{i=1}^n \oplus x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός και άρα οι $(X^*)^{(n)}, (X^{(n)})^*$ είναι ισομετρικοί, όπου $(X^{(n)}, \|\cdot\|_p), ((X^*)^{(n)}, \|\cdot\|_q)$ και $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η F είναι $1-1$, επί και ισομετρία.

$(1-1)$: Πράγματι έστω $f = \sum_{i=1}^n \oplus f_i, g = \sum_{i=1}^n \oplus g_i$ με $f \neq g$

και $F(f) = F(g)$.

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, ...x_n \in X$ ισχύει

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$

Επομένως αν για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\} \setminus \{j\}$ επιλέξουμε

$x_i = 0$ τότε έχουμε

$f_j(x_j) = g_j(x_j)$ για κάθε $x_j \in X$ και άρα έπεται ότι

$f_j = g_j$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$.

Άρα $f = g$

(Επί): Έστω $\Psi \in (X^{(n)})^*$. Θέτουμε $f_i : X \to \mathbb{R}$ με $f_i(x) = \Psi(\sum_{j=1}^{n} \oplus \delta_{ij}(x))$.

Τότε η $f_i \in X^*$ και άρα από τον ορισμό της F είναι $F(\sum_{i=1}^{n} \oplus f_i) = \Psi$.

(Ισομετρία): Έστω $f = \sum_{i=1}^{n} \oplus f_i \in (X^*)^{(n)}$ και$F(f) = \Lambda$.

Για κάθε $x \in X^{(n)}$ είναι

$\|\Lambda(x)\| = |\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\|x_i\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} =$

$(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\| \Rightarrow \|\Lambda\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} = \|f\|$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $y \in X^{(n)}$ έτσι ώστε $\Lambda(y) = \|f\|$ με $\|y\| = 1$

Ο X είναι uniformly convex Banach χώρος και άρα, από Πόρισμα 1 έχουμε ότι

για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ υπάρχει $x_i \in X$ τέτοιο ώστε $\|x_i\| = 1$ και $f_i(x_i) = \|f\|$

θέτουμε $y = \sum_{i=1}^{n} \oplus (\|f_i\|^{\frac{q}{p}} x_i)$ τότε

$\|y\| = (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{p}}$

και $\Lambda(y) = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^{\frac{q}{p}} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^{\frac{q}{p}+1} = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q =$

$(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{p}} = \|f\|\|y\|$

$\Rightarrow \Lambda(\frac{y}{\|y\|}) = \|f\|$. □

Λήμμα 4. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $T \in B(X)$ τότε $V(T^{(n)}) \subseteq co(V(T))$, όπου $T^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \oplus T$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in V(T^{(n)})$. Τότε υπάρχει $g \in S((X^{(n)})^*)$ και $x \in S(X^{(n)})$, $x = x_1 \oplus .. \oplus x_n$ έτσι ώστε $g(x) = 1$ και $g(T^{(n)}(x)) = \lambda$.

Από πρόταση 9, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$ υπάρχει $f_i \in X^*$ με

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = g(x) = 1, (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} = 1,$

$(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} = 1, \sum_{i=1}^{n} f_i(T(x_i)) = \lambda$

Άρα,

$1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\|x_i\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$
$= 1.$

Επομένως ισχύει ότι,

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\|x_i\| = 1.$

Θέτουμε $G = \{i \in \{1, ..., n\} : \|f_i\|\|x_i\| \neq 0\}$.

Τότε το $G \neq 0$ και $\frac{f_i}{\|f_i\|}(T(\frac{x_i}{\|x_i\|})) \in V(T)$, για κάθε $i \in G$.

Πράγματι $\|\frac{f_i}{\|f_i\|}\| = \|\frac{x_i}{\|x_i\|}\| = \frac{f_i(x_i)}{\|f_i\|\|x_i\|} = 1$ και επειδή

$\sum_{i \in G} \frac{\|f_i\|\|x_i\| f_i(T(x_i))}{\|f_i\|\|x_i\|} = \sum_{i \in G} f_i(T(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(T(x_i)) = \lambda,$

έπεται $\lambda \in co(V(T))$. $\square$

Πόρισμα 3. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $T \in B(X)$ τότε $co(V(T)) = co(V(T^{(n)}))$.*

Απόδειξη. Από λήμμα 4, προκύπτει ότι $co(V(T^{(n)})) \subseteq co(V(T))$.

Έστω τώρα $\lambda \in V(T)$. Τότε υπάρχει $f \in S(X^*), x \in S(X)$ με $f(x) = 1$ τέτοια ώστε $f(T(x)) = \lambda$.

Θέτουμε $y = x \oplus 0 \oplus ... \oplus 0$ και $g = f \oplus 0... \oplus 0$.

Τότε $\|g\| = 1, \|y\| = 1$ και $g(y) = f(x) = 1$ οπότε $g(T^{(n)}(y)) \in V(T^{(n)})$.

Όμως $g(T^{(n)}(y)) = f(T(x)) = \lambda$.

Επομένως $V(T) \subseteq V(T^{(n)})$

και άρα $co(V(T)) \subseteq co(V(T^{(n)}))$. □

2.3 Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες του προβλήματος

Η ενότητα αυτή περιέχει τα κύρια θεωρήματα της εργασίας αυτής και τα οποία μας δίνουν τις απαντήσεις στο πρόβλημα εύρεσης των αναγκαίων και ικανών συνθηκών έτσι ώστε ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου τελεστή σε ένα uniformly convex Banach χώρο να γράφεται σαν να γράφεται σαν weak όριο πολυωνύμων του τελεστή αυτού.

Θεώρημα 3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathcal{A} \subseteq B(X)$ άλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$. Τότε $\overline{\mathcal{A}}(sot) = \{B \in B(X) : Lat\mathcal{A}^{(n)} \subseteq LatB^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$.*

Απόδειξη. θα δείξουμε ότι

α) $\overline{\mathcal{A}}(sot) \subseteq \{B \in B(X) : Lat\mathcal{A}^{(n)} \subseteq LatB^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\} := \mathcal{C}$

β) $\{B \in B(X) : Lat\mathcal{A}^{(n)} \subseteq LatB^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\} := \mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{A}}(sot)$

Έστω $B \in \overline{\mathcal{A}}(sot)$, τότε υπάρχει $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, με

$A_n \underrightarrow{sot} B$ για $n \to \infty$.

Έστω τώρα $M \in Lat\mathcal{A}$ τότε $M \in Lat\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Επομένως $M \in LatB$(αποδεικνύεται εύκολα) και άρα $Lat\mathcal{A} \subseteq LatB$.

Επιπλέον $(A_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \underrightarrow{sot} B^{(n)}$ για $k \to \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

οπότε $Lat\mathcal{A}^{(n)} \subseteq LatB^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

και άρα $B \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}}(sot) \subseteq \mathcal{C}$

Μένει να δείξουμε το β) .

Έστω $B \in \mathcal{C}$. Τότε $Lat\mathcal{A}^{(n)} \subseteq LatB^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $B \in \overline{\mathcal{A}}(sot)$.

Αρκεί να δειχθεί ότι αν $\mathcal{U} \in SOT$ με $B \in \mathcal{U}, \mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ τότε για κάθε $\mathcal{V}$ βασικό ανοικτό σύνολο στην SOT με $B \in \mathcal{V}$ είναι $\mathcal{V} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\{x_1, ...x_k\} \subseteq X, \epsilon > 0$ ισχύει $\mathcal{V} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, όπου $\mathcal{V} = \{C : \|C(x_i - B(x_i))\| < \epsilon\}$.

Έστω $\{x_1, ...x_k\} \subseteq X, \epsilon > 0$ και το $\mathcal{V} = \{C : \|C(x_i - B(x_i))\| < \epsilon\}$

Θέτουμε M τον μικρότερο υπόχωρο της $\mathcal{A}^{(k)}$ που περιέχει το $x_1 \oplus ... \oplus x_k$. Τότε

$\{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\} \subseteq M \Rightarrow \quad \overline{\{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\}} \subseteq M$

Επιπλέον επειδή $I^{(k)} \in \mathcal{A}^{(k)} \Rightarrow x_1 \oplus ... \oplus x_k \in \{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\}$

$\Rightarrow M \subseteq \overline{\{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\}}$

Άρα $\overline{\{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\}} = M$ όμως από υπόθεση $M \in LatB^{(k)}$, οπότε $B(x_1) \oplus ... \oplus B(x_k) \in M = \overline{\{A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k) : A \in \mathcal{A}\}}$ και άρα υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\|B(x_1) \oplus ... \oplus B(x_k)) - A(x_1) \oplus ... \oplus A(x_k)\| < \epsilon$, από το οποίο έπεται ότι $A \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \overline{\mathcal{A}}(sot)$

Από α) και β)τότε $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{A}}(sot)$. $\square$

Έστω X χώρος Banach. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(A_1, .., A_k)$ την weak κλειστότητα της άλγεβρας που παράγεται από τους τελεστες $A_1, ..., A_k$.

Θεώρημα 4 (Feintuch). *Έστω H χώρος Hilbert και $A \in B(H)$ αντιστρεψιμος τελεστής.*

Τότε $A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$ αν και μόνο αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A, I)$ έτσι ώστε $T^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$ και ο TA είναι strictly possitive .

Πόρισμα 4 (Feintuch). *Έστω H χώρος Hilbert και $A \in B(H)$ αντιστρέψιμος τελεστής.*

Τότε $A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$ αν και μόνο αν υπάρχει $T \in B(H)$ αντιστρέψιμος έτσι ώστε $T, T^{-1} \in \mathcal{A}(A, I), 0 \notin V(TA)$

Θεώρημα 5 (Toeplitz-Hausdorff). *Έστω H χώρος Hilbert και T ένας γραμμικός (όχι απαραίτητα φραγμένος) τελεστής.*

Τότε το numerical range του T

$V(B(X), T) = \{f(TA) : f \in S(B(X)^*), A \in S(B(X)), f(A) = 1\} \equiv \{\langle T(x), x\rangle : x \in S(H)\}$ είναι κυρτό σύνολο.

Απόδειξη. [5]

Το θεώρημα 4, όπως και το πόρισμα του, πόρισμα 4 αποδείχθηκαν από τον A.Feintuch [1] και είναι ασθενέστερα από το θεώρημα που θα ακολουθήσει για το λόγο ότι το spatial numerical range ενός τελεστή σε ένα χώρο Hilbert ταυτίζεται με το numerical range και είναι κυρτό από το θεώρημα 5.

Λήμμα 5. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$. Αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A, I)$ με $0 \notin co(V(TA))$ τότε $Lat\mathcal{A}(A, I) \subseteq LatA^{-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $N \in Lat\mathcal{A}(A, I)$ τότε $N \in LatT \cap Lat(TA)$.

Επιπλέον επειδή ο A αντιστρέψιμος έπεται ότι το $A(N)$ είναι κλειστό και επειδή εξ υποθέσεως $0 \notin V(TA)$ απο λήμμα 1, ο TA είναι full τελεστής.

Επομένως $N = \overline{TA(N)}$.

Όμως $T \in \mathcal{A}(A, I) \Rightarrow TA = AT$

και άρα $N = \overline{TA(N)} = \overline{AT(N)} \subseteq \overline{A(N)}$.

Επιπλέον ο $N \in LatT$ οπότε $N = \overline{TA(N)} = \overline{AT(N)} \subseteq \overline{A(N)}$

και επειδή A(N) κλειστό έπεται $N = \overline{TA(N)} = \overline{AT(N)} \subseteq \overline{A(N)} = A(N)$

Άρα $A^{-1}(N) \subseteq N$ και επομένως $N \in LatA^{-1}$. □

Θεώρημα 6. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$ αντιστρέψιμος τελεστής .Τότε*

$A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$ αν και μόνο αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A, I)$ με $0 \notin co(V(TA))$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$)Έστω ότι $A^{-1} \in \mathcal{A}(A,I)$ τότε για $T = A^{-1}$ είναι

$V(A^{-1}A) = V(I) = \{f(x) : f \in S(X^*), x \in S(X), f(x) = 1\} = \{1\}$.

Άρα $co(V(I)) = \{1\}$ οπότε $0 \notin co(V(I)) = co(V(TA))$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A,I)$ έτσι ώστε $0 \notin V(TA)$. Θα δείξουμε ότι $A^{-1} \in \mathcal{A}(A,I)$ Από Θεώρημα 3 και από παρατήρηση 6 αρκεί να δείξουμε ότι $Lat(\mathcal{A}(A,I))^{(n)} \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$.

Επειδή $\mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)}) = (\mathcal{A}(A,I))^{(n)}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$Lat\mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)}) \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$.

Πράγματι, έστω $T \in \mathcal{A}(A,I)$ τότε

$T^{(n)} \in \mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)})$ από Λήμμα 5, μένει να δείξουμε ότι

$0 \notin co(V(T^{(n)}A^{(n)}))$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, επειδή $0 \notin co(V(TA))$, από Πόρισμα 3 έπεται

$0 \notin co(V(T^{(n)}A^{(n)}))$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Λήμμα 6. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$ αντιστρέψιμος τελεστής. Αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A,I)$ quasinilpotent τελεστής με $0 \notin co(V(T))$ τότε $Lat\mathcal{A}(A,I) \subseteq LatA^{-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $N \in Lat\mathcal{A}(A,I)$.

Ο A είναι αντιστρέψιμος οπότε ο $A(N)$ είναι κλειστός υπόχωρος.

Επιπλέον $A(N) = N$.

Πράγματι έστω ότι $A(N) \subsetneq N$. Τότε υπάρχει $x \in N \setminus A(N)$.

Θέτουμε $L = cls\{A^{n-1}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ και $M = cls\{A^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Τότε $L, M \in Lat\mathcal{A}(A, I)$ επομένως $L, M \in LatT$ με

$M \subsetneq L$ και $dim(L \setminus M) = 1$.

Όμως ο T είναιquasinilpotent με $0 \notin coV(T)$ και άρα από Θεώρημα 2, είναι

$dim(L \setminus M) \neq 1$ άτοπο.

Επομένως $A(N) = N$ και άρα $A^{-1}(N) = N$,

οπότε $N \in LatA^{-1}$ άρα $Lat\mathcal{A}(A, I) \subseteq LatA^{-1}$. □

Θεώρημα 7. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$ αντιστρέψιμος τελεστής. Αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A, I)$ quasinilpotent τελεστής με $0 \notin co(V(T))$ τότε $A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$.*

Απόδειξη. Αν $T \in \mathcal{A}(A, I)$ quasinilpotent τότε ο $T^{(n)} \in \mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)})$ και είναι quasinilpotent .

Επιπλέον αν $0 \notin co(V(T))$ τότε από Πόρισμα 3, $0 \notin co(V(T^{(n)}))$.

Άρα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6, έχουμε

$Lat\mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)}) \subseteq Lat(A^{(n)})^{-1} = Lat(A^{-1})^{(n)}$.

Επιπλέον, επειδή $Lat\mathcal{A}(A^{(n)}, I^{(n)}) = Lat(\mathcal{A}(A, I))^{(n)}$,

συνεπάγεται ότι $Lat(\mathcal{A}(A, I))^{(n)} \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$

Από παρατήρηση 6 και από θεώρημα 3 έπεται $A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$. □

Παρατήρηση 8. *Είναι εύκολα αντιληπτό ότι για τον αντιστρέψιμο τελεστή A σε ένα uniformly convex χώρο Banach η συνθήκη $LatA \subseteq LatA^{-1}$ είναι αναγκαία για να ανήκει ο αντίστροφος του , A^{-1} στην $\mathcal{A}(A, I)$*

Το αν η συνθήκη αυτή είναι και ικανή αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα και δεν θα αναφερθεί περαιτέρω σε αυτή την εργασία.

Αντίθετα η συνθήκη $LatA^{(n)} \subseteq Lat((A^{-1}))^{(n)}$ απο το θεώρημα 3 και από το πόρισμα 2 είναι ικανή και αναγκαία δηλαδή

$A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I)$ αν και μόνο αν $LatA^{(n)} \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$.

Πρόταση 10. *Έστω X χώρος Banach και $A \in B(X)$. Αν $\mathcal{A}(A)$ είναι η weak κλειστότητα της άλγεβρας που παράγεται από τον A τότε*

$A^{(n)}$ full για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν $I \in \mathcal{A}(A)$.

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Αν $I \in \mathcal{A}(A)$ θα δείξουμε ότι ο $A^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Αρκεί να δείξουμε ότι ο A είναι full .

Έστω $M \in LatA$ τότε $\overline{A(M)} \subseteq M$, μένει να δείξουμε ότι $M \subseteq \overline{A(M)}$.

Έστω $x \in M$. Επειδή $I \in \mathcal{A}(A)$ έπεται ότι υπάρχει P_n ακολουθία πολυωνύμων έτσι ώστε $P_n(A)\underrightarrow{wot}I$

Από Παρατήρηση 3 και από Πόρισμα 2 όμως έπεται ότι$P_n(A)(x) \to x$.

Άρα υπάρχει Q_n πολυώνυμο έτσι ώστε $A(Q_n(A))(x) \to x$. Όμως $Q_n(A)(x) \in M$ άρα $x \in \overline{A(M)}$ και επομένως $\overline{A(M)} = M$

$(\Rightarrow)$Αν ο $A^{(n)}$ είναι full θα δείξουμε ότι $I \in \mathcal{A}(A)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι

για κάθε U weak βασικό ανοικτό σύνολο με $I \in U$ η ένωση $U \cap \alpha(\{A\}) \neq \emptyset$

Από παρατήρηση 5, αρκεί να δείξουμε ότι

για κάθε U strong βασικό ανοικτό με $I \in U$ η ένωση $U \cap \alpha(\{A\}) \neq \emptyset$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας αρκεί να δείξουμε ότι

για κάθε $\{x_1, .., x_k\} \subseteq X$με $x_i \in X$, για κάθε $i \in \{1, ..., k\}, k \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ το σύνολο $U = \{B \in B(X) : \|B(x_i) - x_i\| < \epsilon$, για κάθε $i \in \{1, ..., k\}\}$ έχει $U \cap \alpha(\{A\}) \neq \emptyset$.

Έστω $N = \{T(x_1) \oplus ... \oplus T(x_k) : T \in \alpha(\{A\})\}$, M ο μικρότερος αναλλοίωτος υπόχωρος της $\alpha(\{A^{(k)}\})$ που περιέχει το $x_1 \oplus ... \oplus x_k$ και $L = cls\{x_1 \oplus x_k, N\}$.

Επειδή $M \in Lat\alpha(\{(\{A^{(k)}\})\})$ και $x_1 \oplus ... \oplus x_k \in M$ έπεται

$T(x_1) \oplus ... \oplus T(x_k) \in M$, για κάθε $t \in \alpha(A)$,οπότε

$N \subseteq M$ και επομένως $L = M$. Επίσης εξ ορισμού, $A^{(k)}L \subseteq \overline{N}$.

Από υπόθεση έχουμε ότι ο $A^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα $M = \overline{A^{(k)}(M)} = \overline{A^{(k)}(L)} \subseteq \overline{N} \Rightarrow M = \overline{N}$ και άρα

$x_1 \oplus ... \oplus x_k \in \overline{N}$.

Επομένως υπάρχει $T \in \alpha(A)$ έτσι ώστε

$\|T(x_1) \oplus ... \oplus T(x_k) - x_1 \oplus ... \oplus T(x_k) - x_1 \oplus ... \oplus x_k\| < \epsilon$,

Άρα $T \in U$ και επομένως $I \in \mathcal{A}(A)$. $\square$

Πρόταση 11. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$. Τότε ο $A^{(n)}$ είναι full τελεστής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιος ώστε $0 \notin co(V(T))$.*

Απόδειξη.

($\Rightarrow$)Έστω ότι ο $A^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από Πρόταση 10, έπεται ότι $I \in \mathcal{A}(A)$

και επομένως για $T = I$ έχουμε $0 \notin co(V(T)) = co(V(I)) = \{1\}$.

($\Leftarrow$)Έστω ότι υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιο ώστε $0 \notin co(V(T))$.

Από Πόρισμα 3, έχουμε ότι το $0 \notin co(V(T^{(n)}))$, για κάθε $n \in \mathcal{N}$.

Από Λήμμα 1, έχουμε ότι ο $T^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathcal{N}$

και από Πρόταση 10 ότι $I \in \mathcal{A}(T)$.

Όμως επειδή $\mathcal{A}(T) \subseteq \mathcal{A}(A)$ έπεται ότι $I \in \mathcal{A}(A)$.

Τότε πάλι από Πρόταση 10 συνεπάγεται ότι ο $A^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Πόρισμα 5. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και* $A \in B(X)$ *αντιστρέψιμος τελεστής . Ο* $A^{(n)}$ *είναι full τελεστής για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $T \in \mathcal{A}(A)$ *τέτοιος ώστε* $0 \notin co(V(TA))$.

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω $A^{(n)} full$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $Lat(\mathcal{A}(A))^{(n)} \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$

Επιπλέον από Πρόταση 10,έχουμε $I \in \mathcal{A}(A)$.

Επομένως $Lat(\mathcal{A}(A))^{(n)} = Lat(\mathcal{A}(A, I))^{(n)} \subseteq Lat(A^{-1})^{(n)}$

και άρα από Θεώρημα 3 έπεται ότι $A^{-1} \in \mathcal{A}(A, I) = \mathcal{A}(A)$ οπότε $A^{-1} \in \mathcal{A}(A)$.

Θέτοντας $T = A^{-1}$ έχουμε $0 \notin co(V(TA)) = co(V(I)) = \{1\}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιος ώστε $0 \notin co(V(TA))$.

Τότε από Λήμμα 1, έχουμε ότι ο TA είναι full τελεστής οπότε και ο $T^{(n)}A^{(n)}$ είναι full τελεστής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από Πρόταση 10 τότε έπεται ότι $I \in \mathcal{A}(TA)$ όμως $T \in \mathcal{A}(A)$.

Άρα $I \in \mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(AT)$.

Πάλι από Πρόταση 10 έπεται ότι ο $A^{(n)}$ είναι full για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Διαφορετικά ,έστω ότι υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιος ώστε $0 \notin co(V(TA))$ τότε $TA \in \mathcal{A}(A)$ με $0 \notin co(V(TA))$ από Πρόταση 11 τότε έχουμε ότι $A^{(n)}$ full για κάθε $n \in \mathbb{N}$). $\square$

Πόρισμα 6. *Έστω X uniformly convex Banach χώρος και $A \in B(X)$ αντιστρέψιμος τελεστής. Τ.Ε.Ε.Ι:*

1. *$A^{(n)}$ full για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

2. *$A^{-1} \in \mathcal{A}(A)$*

3. *υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιος ώστε $0 \notin co(V(TA))$*

4. *υπάρχει $T \in \mathcal{A}(A)$ τέτοιος ώστε $0 \notin co(V(T))$*

Απόδειξη. Άμεση από Απόδειξη Πορίσματος 5 και Πρόταση 11 .

Κεφάλαιο 3

Συμπεράσματα και παρατηρήσεις

Τα αποτελέσματα στη συγκεκριμένη εργασία αν και αναφέρθηκαν σε uniformly convex Banach χώρους ισχύουν και γενικότερα σε αυτοπαθής χώρους Banach. Η απόδειξη του γεγονότος αυτού δεν χρίζει ιδιαίτερης δυσκολίας αν κάποιος παρατηρήσει ότι το κύριο εργαλείο μας ήταν το πόρισμα 1 που σε αυτοπαθής χώρους μπορεί να αντικατασταθεί με την πρόταση 4.

Αν κάποιος παρατηρήσει ακόμα πιο προσεκτικά θα ισχυριστεί ότι τα αποτελέσματα μας ισχύουν στους χώρους Banach X που ικανοποιούν την εξής ιδιότητα :

για κάθε $f \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $f(x) = \|f\|$.

Ο ισχυρισμός αυτός αν και ισχύει δεν μας δίνει κάποιο πιο ισχυρό αποτέλεσμα όπως θα φανεί από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 8 (James). *Έστω X χώρος Banach . Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε $f \in X^*$ παίρνει την μεγιστη τιμή της στην μοναδιαία κλειστή μπάλα του X.*

Απόδειξη. [7]

Πράγματι επειδή από το Θεώρημα 8 κάθε χώρος Banach X που ικανοποιεί την ιδιότητα :

για κάθε $f \in X^*$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $f(x) = \|f\|$

είναι και αυτοπαθής ο παραπάνω ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε.

Βιβλιογραφία

[1] A. FEINTUCH, 'Approximability of the inverse of an operator', Proc. Amer. Math. Soc, 69 (1978), 109-110.

[2] A. FEINTUCH, 'On algebras generated by invertible operators', Proc. Amer. Math. Soc, 63 (1977), 66-68.

[3] A. FEINTUCH, 'On invertible operators and invariant subspaces', Proc. Amer. Math. Soc, 43 (1974), 123-126.

[4] I. C. GOHBERG and M. G. KREIN, Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Transl. Math. Monographs 24 (Amer. Math. Soc, Providence R.I., 1970).

[5] K.GUSTAFSON ,'The Toeplitz-Hausdorff theorem for linear operators', University of Colorado Boulder, Colorado 80302 .

[6] J. HARVATH ,'Topological Vector Spaces and Distributions, 1, 1st edition, 1966, ISBN 978-0201029857 .

[7] R.C.JAMES,'Bases and Reflexivity of Banach Spaces'Second Series', 52, No. 3 (1950),518-527 .

[8] Σ.ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ και Ν.ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ, Ύραμμική αλγεβρα, αναλυτική γεωμετρία και εφαρμογες', 3η έκδοση, 2003, ISBN 960-91725-0-4.

[9] Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ , 'Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές', 1η έκδοση, 2009, ISBN 978-960-931122-9.

[10] S.KARANASIOS, 'Contributions to non self-adjoint Algebras', Phd thesis, King's college university of London (1981).

[11] S. KARANASIOS, 'Full operators and approximation of inverses', J.London Math.Soc.(2), 30(1984), 295-304 .

[12] S.KARANASIOS, 'Full operators on reflexive Banach spaces', Bulletin of the Greek Math. Soc. 36 (1994) 81–86.

[13] B. J. PETTIS, 'A proof that every uniformly convex space is reflexive.', Duke Math. J. 5 (1939), no. 2, 249-253.

[14] H. RADJAVI and P. ROSENTHAL, 'Invariant subspaces', (Springer, Berlin, 1973).

[15] J. WERMER, On invariant subspaces of normal operators, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 270-277, MR 14, 55.