ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Γενικευμένοι Αντίστροφοι Τελεστών

Διπλωματική Εργασία

Μπουκουβάλα Αγγέλα

Επιβλέπων Καθηγητής: Σωτήρης Καρανάσιος

Αθήνα, Ιούλιος 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Γενικευμένοι Αντίστροφοι Τελεστών

Διπλωματική Εργασία

Μπουκουβάλα Αγγέλα

Τριμελής επιτροπή

Σωτήρης Καρανάσιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Ιωάννης Πολυράκης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2015

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Σωτήρη Καρανάσιο, Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την βοήθεια και την καθοδήγηση που μου προσέφερε καθόλη τη διάρκεια της εργασίας.
Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και του φίλους μου για την υποστήριξη που μου παρείχαν όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε το θέμα των γενικευμένων αντίστροφων πινάκων και τελεστών, και θα ασχοληθούμε κυρίως με τον Moore-Penrose γενικευμένο αντίστροφο φραγμένων τελεστών με κλειστό σύνολο τιμών.

Οι χώροι Hilbert θεωρούνται ως το κατάλληλο “όχημα” για την μελέτη πολλών γραμμικών προβλημάτων. Για το λόγο αυτό έχουμε συμπεριλάβει ένα κεφάλαιο που θα χρησιμεύσει ως μια σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των χώρων Hilbert, και θα εξασφαλίσει την εννοιολογική συνοχή της παρουσίασης.

Επίσης παραθέτουμε μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά της θεωρίας των γραμμικών τελεστών, δίνουμε μια σύντομη περιγραφή της φασματικής θεωρίας ενός αυτο-συζυγή τελεστή, και αναφέρουμε ορισμένες πτυχές της διαφορισιμότητας απεικονίσεων σε γραμμικούς χώρους.

Στο επόμενο κεφάλαιο εξετάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των γενικευμένων αντίστροφων σε χώρους Banach και δίνονται οι ορισμοί για το πότε ένας τελεστής καλείται εσωτερικός ή εξωτερικός κανονικός.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τον variational ορισμό του γενικευμένου αντίστροφου ενός τελεστή $T \in L(H_1, H_2)$, όπου H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert, με σύνολο τιμών $R(T)$ κλειστό, και δείχνουμε την ισοδυναμία του με άλλους ορισμούς του γενικευμένου αντίστροφου, όπως τον ορισμό του E. H. Moore.

Οι γενικευμένοι αντίστροφοι μη αντιστρέψιμων γραμμικών τελεστών έχουν χρήση σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, όπως στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, σε ηλεκτρικά κυκλώματα, στην ελαχιστοποίηση τετραγωνικών μορφών εφαρμοσμένων σε κυκλώματα.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Έστω ένας πίνακας $A.$ Ο πίνακας A αντιστρέφεται αν είναι τετραγωνικός και οι στήλες (ή οι γραμμές) του είναι γραμμικά ανεξάρτητες $(|A| \neq 0)$.
Σε διάφορα προβλήματα στα εφαρμοσμένα Μαθηματικά έχει εμφανιστεί η ανάγκη για ένα είδος "μερικής αντιστροφής" ενός μη αντιστρέψιμου ή μη τετραγωνικού πίνακα.
Γενικά, όταν λέμε "γενικευμένο αντίστροφο" ενός πίνακα A εννοούμε έναν πίνακα X ο οποίος να συνδέεται με κάποιο τρόπο με τον A ώστε :

i. Να ανήκει σε ένα σύνολο πινάκων ευρύτερο του συνόλου των αντιστρέψιμων πινάκων,
ii. Να έχει μερικές από τις ιδιότητες του αντίστροφου πίνακα,
iii. Να ταυτίζεται με τον αντίστροφο του $A,$ όταν ο A αντιστρέφεται.

Αντί για "γενικευμένο αντίστροφο", χρησιμοποιείται και η έννοια του "ψευδοαντίστροφου".

Για παράδειγμα, μια σχέση που συνδέει τον X με τον A είναι $AXA = A,$ και όταν ο αντίστροφος A^{-1} υπάρχει, τότε με πολλαπλασιασμό και στις δύο μεριές με A^{-1} θα μας δώσει $X = A^{-1}$.

Ας ξεκινήσουμε με το κλασικό παράδειγμα επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος:

$$Ax = b \qquad (1)$$

με b ένα δοσμένο διάνυσμα και x άγνωστο διάνυσμα.

- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, θα υπάρχει μοναδική λύση $x = A^{-1}b.$
- Αν ο A είναι μη αντιστρέψιμος (με τον A να είναι τετραγωνικός πίνακας ή μη), τότε η (1) έχει λύση αν και μόνο αν ο b είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $A.$

Στην περίπτωση αυτή θα υπάρχει ένα διάνυσμα h τέτοιο ώστε:

$$Ah=b \qquad (2)$$

Ας θεωρήσουμε ένα πίνακα X τέτοιο ώστε :

$$AXA=A \qquad (3)$$

Τότε το διάνυσμα $x=Xb$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης (1)

$$Ax=AXb=AXAh=Ah=b \quad .$$

Στην γενική περίπτωση, αν η εξίσωση (1) έχει πάνω από μια λύση, μπορεί να επιζητούμε ένα χαρακτηρισμό όλων των λύσεων.

Αποδείχθηκε (Penrose, Bjierhammar) ότι, αν υπάρχει ένας πίνακας που να ικανοποιεί την σχέση (3), τότε η εξίσωση (1) έχει λύση αν και μόνο αν

$$AXb=b$$

και στην περίπτωση αυτή η γενική λύση είναι:

$$x=Xb+(I-XA)y,$$ με y ένα αυθαίρετο διάνυσμα.

Ιστορικά, η έννοια του γενικευμένου αντίστροφου φαίνεται να έχει πρωτοεμφανιστεί γραπτά από τον Fredholm το 1903, ο οποίος όρισε τον γενικευμένο αντίστροφο ενός ολοκληρωτικού τελεστή τον οποίο και κάλεσε ψευδοαντίστροφο.

Γενικευμένους αντίστροφους διαφορικών τελεστών όρισε επίσης και ο Hilbert, μελετώντας τις γενικευμένες συναρτήσεις Green.

Ακολούθησαν μετά, οι Myller (1906), Westfall (1909), Bounitzky το 1909, Elliot (1928), και Reid (1931), οι οποίοι μελέτησαν τις διαλέξεις του Hilbert.

Όπως φαίνεται, ορσμοί για γενικευμένους αντίστροφους διαφορικών και ολοκληρωτικών τελεστών έχουν προηγηθεί χρονολογικά από τους ορισμούς των γενικευμένων αντίστροφων πινάκων. Ο πρώτος που έδωσε τέτοιο ορισμό ήταν ο E. H. Moore, ο οποίος όρισε έναν μοναδικό αντίστροφο (αποκαλούμενο από εκείνον ως “general reciprocal”) για κάθε πίνακα πεπερασμένης διάστασης, τετραγωνικό ή μη. Οι πρώτες του δημοσιεύσεις πάνω σε αυτό το θέμα έμφανίστηκαν το 1920, αλλά λέγεται ότι τα συμπεράσματα του είχαν ληφθεί νωρίτερα, από το 1906.

Μικρή σημασία δόθηκε στην έννοια αυτή του Moore για 30 περίπου χρόνια από την πρώτη έκδοση της. Την περίοδο εκείνη ορισμοί για γενικευμένους αντίστροφους για πίνακες δίνονταν από τον Siegel το 1937, και για τελεστές από τους Tseng το 1933,1949, Murray και von Neumann το 1936, από τον Atkinson το 1953 και άλλους.

Τη δεκαετία του 50 έγινε αναβίωση του ενδιαφέροντος για το θέμα, γύρω από τις ιδιότητες των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτές οι ιδιότητες αναγνωρίστηκαν από τον Bjerhammar το 1951, ο οποίος ξανα-ανακάλυψε τον γενικευμένο αντίστροφο του Moore και παρατήρησε την σχέση τους ως προς την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Το 1955 ο Penrose επέκτεινε τα αποτελέσματα του Bjerhammar στα γραμμικά συστήματα και έδειξε ότι ο αντίστροφος του Moore, για κάποιο πίνακα A, είναι ο μοναδικός πίνακας X που ικανοποιεί τις παρακάτω τέσσερις εξισώσεις:

$$AXA = A\,,$$
$$XAX = X\,,$$
$$(AX)^* = AX\,,$$
$$(XA)^* = XA\,,$$

όπου A^* ο συζυγής του A. Τις εξισώσεις αυτές τις καλούμε Penrose εξισώσεις.

Αυτή η τελευταία ανακάλυψη υπήρξε σημαντική και καρποφόρα, και για αυτό το λόγο, αυτός ο μοναδικός τελεστής ονομάζεται Moore-Penrose αντίστροφος, τον οποίο θα δούμε και στο κεφάλαιο 3.

Κεφάλαιο 1

Χώροι Hilbert και τελεστές σε χώρους Hilbert

1.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.1.1 Γραμμικό χώρο με νόρμα θα λέμε ένα γραμμικό χώρο E εφοδιασμένο με μια συνάρτηση $\|\cdot\|$ με πραγματικές τιμές η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

i. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0,$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

όπου x και y είναι αυθαίρετα στοιχεία του E και το α είναι ένας οποιοδήποτε πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός.

Ορισμός 1.1.2 Χώρος με εσωτερικό γινόμενο καλείται ένας γραμμικός χώρος E εφοδιασμένος με μια βαθμωτή συνάρτηση $(\cdot, \cdot),$ η οποία καλείται εσωτερικό γινόμενο στον $E,$ και ικανοποιεί για κάθε $x, y, z \in E$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τα παρακάτω:

i. $(x, y) = \overline{(y, x)},$

ii. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$

iii. $(x, x) \geq 0,$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x = 0.$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.1.1 μπορούμε να δείξουμε ότι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι και γραμμικός χώρος με νόρμα, όπου η νόρμα ορίζεται από

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}.$$

Θεώρημα 1.1.1 (Ανισότητα Schwarz) Σ' ένα διανυσματικό χώρο E με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει:

$$|(x+y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad .$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Θεώρημα 1.1.2 Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ισχύουν:

i. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ ο κανόνας του παραλληλογράμμου,

ii. $(x,y)=(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)/4$ για πραγματικό εσωτερικό γινόμενο,

iii. $(x,y)=(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)/4$ για μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.1.3 Μια ακολουθία $\{x_n\}$ σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα λέγεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n, m>N(\varepsilon)$ να ισχύει

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

Ορισμός 1.1.4 Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα E λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy του E συγκλίνει σε κάποιο σημείο του E.

Ορισμός 1.1.5 Ένας πλήρης γραμμικός χώρος ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert.

Παραδείγματα : 1. Ο πραγματικός χώρος

$$l_2=\left\{\{x_i\} : x_i \in R \text{ και } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2<\infty\right\}$$

όπου το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $x=\{x_i\}$ και $y=\{y_i\}$ ορίζεται από τη σχέση

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

2. Ο χώρος $L^2[a, b]$ που αποτελείται από όλες τις τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ με το εσωτερικό γινόμενο να ορίζεται ως εξής:

$$(f, g)=\int_a^b f(t) g(t) dt$$

Προφανώς οι πεπερασμένοι χώροι R^n και $\mathbb{C}^n$ είναι χώροι Hilbert με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.1.6 Μια βαθμωτή γραμμική συνάρτηση ορισμένη σε γραμμικό χώρο E ονομάζεται γραμμικό συναρτησοειδές στον E.
Για παράδειγμα η $f: E \to \mathbb{C}$, όπου το $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, είναι γραμμικό συναρτησοειδές, αν

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \text{ για } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ και } x, y \in E$$

Το σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων με πράξεις την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό αντίστοιχα τις:

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x) \quad ,$$

$$(\alpha\varphi)(x)=\alpha\varphi(x)$$

είναι ένας γραμμικός χώρος.

Ο γραμμικός χώρος που αποτελείται από όλα τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή ενός γραμμικού χώρου E με νόρμα, συμβολίζεται με E^* και καλείται ο δυϊκός χώρος του E.

Ο E^* είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα , όπου η νόρμα ορίζεται για $\varphi \in E^*$ ως εξής:

$$\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(x)|: x \in E, \|x\|=1\}.$$

Εάν ο χώρος E είναι πλήρης τότε είναι πλήρης και ο E^*.

Θεώρημα 1.1.3 (Riesz) Έστω φ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές σε ένα χώρο Hilbert H, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ ώστε $\varphi(x)=(x, y)$ για κάθε $x \in H.$

Ορισμός 1.1.7 Ένα υποσύνολο S ενός γραμμικού χώρου E λέγεται υπόχωρος του E αν το S είναι γραμμικός χώρος. Εάν ο E είναι γραμμικός χώρος με νόρμα τότε το υποσύνολο S καλείται κλειστός υπόχωρος αν το S είναι κλειστό ως προς την νορμ τοπολογία (norm topology) του $E.$

Ας σημειωθεί ότι ένας κλειστός υπόχωρος ενός πλήρους γραμμικού χώρου είναι πλήρης.

Ορισμός 1.1.8 Ένα υποσύνολο C ενός γραμμικού χώρου με νόρμα λέγεται κυρτό αν ισχύει $tx+(1-t)y \in C$ για κάθε $x, y \in C$ και $t \in [0,1]$.

Θεώρημα 1.1.4 Ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο C ενός χώρου Hilbert περιέχει μοναδικό διάνυσμα με ελάχιστη νόρμα.

Απόδειξη Έστω $M = inf\{\|x\| : x \in C\}$. Επιλέγουμε ακολουθία $\{x_n\} \subset C$ τέτοια ώστε $\lim_n \|x_n\| = M$. Επειδή το C είναι κυρτό, έχουμε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\|(x_n + x_m)/2\|^2 \\ &\leq 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\mathrm{M}^2\end{aligned}$$

το οποίο συγκλίνει στο 0 καθώς $n, m \to \infty$. Άρα η $\{x_n\}$ είναι Cauchy ακολουθία με όριο το $x \in C$ (αφού το C είναι κλειστό).
Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το x είναι το μοναδικό διάνυσμα στο C με ελάχιστη νόρμα.
Πράγματι, αν y είναι ένα διάνυσμα στο C με νόρμα M διαφορετική από το x, τότε

$$0<\|x-y\|^2=4M^2-4\|(x-y)/2\|^2 \quad .$$

Συνεπώς $\|(x+y)/2\|<M$

το οποίο είναι άτοπο.

Το παρακάτω πόρισμα είναι συνέπεια του θεωρήματος 1.1.4

Πόρισμα 1.1.5 Έστω C είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του χώρου Hilbert $H.$ Τότε για κάθε $u\in H$ υπάρχει μοναδικό $x\in C$ τέτοιο ώστε

$$\|u-x\|=inf\{\|u-y\|:y\in C\} \quad .$$

Ορισμός 1.1.9 Δυο διανύσματα x και y σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο λέγονται ορθογώνια, συμβολισμός $x\perp y,$ αν $(x,y)=0.$ Αν S είναι υπόχωρος ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο τότε ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμά του ως

$$S^{\perp}=\{y\in E:x\perp y \text{ για κάθε } x\in S\}$$

Ας σημειωθεί ότι αν τα x και y είναι ορθογώνια τότε ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \quad .$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια συνεχής απεικόνιση, άρα για κάθε υπόχωρο S το ορθογώνιο συμπλήρωμά του θα είναι ένας κλειστός υπόχωρος.

Σε ένα χώρο Hilbert ένας κλειστός υπόχωρος και το ορθογώνιο συμπλήρωμά του έχουν ευθύ άθροισμα τον χώρο όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.6 Έστω H χώρος Hilbert και S κλειστός υπόχωρός του. Τότε το H μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ άθροισμα των S και $S^{\perp},$ συμβολισμός $H=S\oplus S^{\perp}.$ Αυτό σημαίνει ότι κάθε $x\in H$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{όπου} \quad x_1 \in S \text{ και } x_2 \in S^{\perp} \;.$$

Απόδειξη Από το πόρισμα 1.1.5, για $x \in H$ υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $x_1 \in S$ τέτοιο ώστε το $\|x - x_1\|$ να είναι ελάχιστο.

Έστω $x_2 = x - x_1$. Για κάθε $y \in S$ με $\|y\| = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|x_2\|^2 &= \|x - x_1\|^2 \\ &\leq \|x - x_1 - (x_2, y)\, y\|^2 \\ &= \|x_2\|^2 - |(x_2, y)|^2 \\ &\leq \|x_2\|^2 \;. \end{aligned}$$

Συνεπώς $(x_2, y) = 0$ δηλαδή $x_2 \in S^{\perp}$.

Άρα βλέπουμε ότι $x = x_1 + x_2 \in S \oplus S^{\perp}$.

1.2 Γραμμικοί τελεστές

Ορισμός 1.2.1 Έστω μια συνάρτηση T ορισμένη σε μιγαδικό γραμμικό χώρο E_1 με τιμές σε γραμμικό χώρο E_2. Θα λέγεται γραμμικός τελεστής αν ισχύει

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \text{ για κάθε } x,y\in E_1 \text{ και για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

Αν E_1, E_2 είναι γραμμικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ αντίστοιχα, θα λέμε ότι ο γραμμικός τελεστής $T:E_1\to E_2$ είναι φραγμένος αν

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|_2:\|x\|_1=1\}<\infty \qquad (1)$$

Ο αριθμός $\|T\|$ που ορίσαμε παραπάνω καλείται η νόρμα του T.
Το σύνολο $L(E_1,E_2)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών από το E_1 στο E_2 εφοδιασμένο με την πρόσθεση τελεστών και τον πολλαπλασιασμό τελεστή με αριθμό όπως ορίζονται παρακάτω

$$(T+S)x=Tx+Sx \text{ και } (\alpha T)x=\alpha Tx,$$

είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα που ορίζεται από τη σχέση (1).

Ορισμός 1.2.2 Έστω E_1, E_2 γραμμικοί χώροι με νόρμα και $\{T_n\}$ ακολουθία γραμμικών τελεστών στο $L(E_1,E_2)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{T_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε $T\in L(E_1,E_2)$ αν

$$\lim_n\|T_n-T\|=0 \quad ,$$

και συγκλίνει ισχυρά (strongly) σε $T\in L(E_1,E_2)$ αν

$$\lim_n\|T_nx-Tx\|_2=0$$

για κάθε $x\in E_1$.

Σημείωση Για κάθε $x \in E_1$ ισχύει $\|Tx\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$, άρα αν η ακολουθία $\{T_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο T, θα συγκλίνει και ισχυρά στο T. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Ορισμός 1.2.3 Έστω $T \in L(E_1, E_2)$. Ονομάζουμε

i. Εικόνα ή σύνολο τιμών τον υπόχωρο $R(T) = \{y \in E_2 : y = Tx \text{ για } x \in E_1\}$,
ii. Πυρήνα τον κλειστό υπόχωρο $N(T) = \{x \in E_1 : Tx = 0\}$.

Έστω H_1 και H_2 χώροι Hilbert με εσωτερικά γινόμενα $(\cdot,\cdot)_1$ και $(\cdot,\cdot)_2$ αντίστοιχα και $T \in L(H_1, H_2)$. Για $y \in H_2$ το γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στον H_1 από την σχέση

$$\varphi(x) = (Tx, y)_2, \ x \in H_1$$

είναι συνεχές, και συνεπώς από το θεώρημα Riesz θα υπάρχει διάνυσμα $z_y \in H_1$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x) = (x, z_y)_1 \ .$$

Η απεικόνιση $y \to z_y$ είναι γραμμική. Επίσης είναι συνεχής, καθώς αν θέσουμε $x = z_{y_1} - z_{y_2}$ στην ταυτότητα

$$(x, z_{y_1} - z\, y_2)_1 = (Tx, y_1 - y_2)_2 \ ,$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwarz προκύπτει

$$\|z_{y_1} - z_{y_2}\|_1 \leq \|T\| \|y_1 - y_2\| \ .$$

Ορισμός 1.2.4 Έστω H_1 και H_2 χώροι Hilbert με εσωτερικά γινόμενα $(\cdot,\cdot)_1$ και $(\cdot,\cdot)_2$ αντίστοιχα και $T \in L(H_1, H_2)$. Ο συζυγής του T, συμβολίζεται T^*, είναι ο μοναδικός γραμμικός τελεστής στο $L(H_2, H_1)$ που ικανοποιεί την σχέση

$$(Tx, y)_2 = (x, T^* y)_1$$

για κάθε $x \in H_1$ και $y \in H_2$.

Ένας τελεστής $T \in L(H, H) \equiv L(H)$ καλείται αυτοσυζυγής εάν $T = T^*$.

Ιδιότητες του συζυγούς τελεστή

i. $(ST)^* = T^* S^*$,

ii. $(T^*)^* = T$,

iii. $(T+S)^* = T^* + S^*$,

iv. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$,

v. $\|T^*\| = \|T\|$,

vi. $\|T^* T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

Θεώρημα 1.2.1 Έστω $T \in L(H_1, H_2)$ όπου H_1 και H_2 είναι χώροι Hilbert. Τότε ισχύουν:

i. $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$,

ii. $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$,

iii. $R(T)^\perp = N(T^*)$,

iv. $R(T^*)^\perp = N(T)$.

Έστω $T \in L(E_1, E_2)$ ένας 1-1 τελεστής $(N(T) = \{0\})$, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $T^{-1} : R(T) \to E_1$ είναι γραμμική.

Θεώρημα 1.2.2 Έστω E_1 και E_2 πλήρεις γραμμικοί χώροι με νόρμα, και $T \in L(E_1, E_2)$ είναι 1-1 και επί. Τότε ο αντίστροφος T^{-1} είναι συνεχής.

Στο εξής θα λέμε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος αν ο T^{-1} υπάρχει και είναι συνεχής.

Έστω T γραμμικός τελεστής ορισμένος σε γραμμικό χώρο E, και S ένας υπόχωρος του E, τότε με $T|S$ θα συμβολίζουμε τον περιορισμό του T στο S.

Θεώρημα 1.2.3 Έστω E_1 και E_2 πλήρεις γραμμικοί χώροι και υποθέτουμε ότι ο $T \in L(E_1, E_2)$ έχει κλειστό σύνολο τιμών. Τότε υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \text{ για κάθε } x \in N(T)^{\perp}.$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι ο $N(T)^{\perp}$ είναι πλήρης και ο τελεστής $T \mid N(T)^{\perp}$ είναι ένα-προς-ένα και απεικονίζει το $N(T)^{\perp}$ στον πλήρη χώρο $R(T)$. Συνεπώς από το θεώρημα 1.2.2 έχουμε ότι $[T|N(T)^{\perp}]^{-1} \in L(R(T), N(T)^{\perp})$ και μας μένει μόνο να θέσουμε

$$m = \left\|[T|N(T)^{\perp}]^{-1}\right\|^{-1} \quad .$$

Έστω H χώρος Hilbert και S ένας κλειστός υπόχωρός του. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1.1.6 κάθε $x \in H$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως

$$x = x_1 + x_2 \in S \oplus S^{\perp}.$$

Ο τελεστής $P \in L(H, S)$ ο οποίος ορίζεται ως $Px = x_1$ ονομάζεται η προβολή του H στον S.
Ας σημειωθεί ότι ο P ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$P = P^*, P = P^2 \text{ και } \|P\| = 1 \quad .$$

Αν ο P προβάλει τον H στο S, τότε ο $I - P$ είναι η προβολή του H στον $S^{\perp}$, όπου ο I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στο H. Πολλές φορές την προβολή του H επί του S τη συμβολίζουμε ως $P = P_S$ για να φαίνεται η συσχέτιση της P με τον υπόχωρο S.
Κάθε τελεστής $T \in L(H, H)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $T = T^*$ και $T = T^2$ είναι η ορθή προβολή (orthogonal projection) του H στον κλειστό υπόχωρο που ορίζεται από $\{x \in H : Tx = x\} = R(T)$. Η ορθή προβολή του H επί του κλειστού υπόχωρου S θα ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\|x - P_S x\| = inf\{\|x - y\| : y \in S\} \quad .$$

Θεώρημα 1.2.4 Έστω H_1 και H_2 χώροι Hilbert και $T\in L(H_1, H_2),$ τότε το $R(T)$ είναι κλειστό αν και μόνο αν το $R(T^*)$ είναι κλειστό.

Απόδειξη Έστω το $R(T)$ είναι κλειστό, τότε από το θεώρημα 1.2.3 υπάρχει $m>0$ τέτοιο ώστε

$$\|Tx\|\geq m\|x\|, \text{ για } x\in N(T)^{\perp} \quad .$$

Συνεπώς αν P είναι η προβολή του H_1 πάνω στο $N(T)^{\perp},$ τότε

$$\|Tx\|\geq m\|Px\|, \text{ για } x\in H_1 \quad .$$

Έστω $y\in\overline{R(T^*)}=N(T)^{\perp}$ τότε το γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στο $R(T)$ ως $\varphi(Tx)=(x, y)$ είναι φραγμένο :

$$\begin{aligned}|\varphi(Tx)| &= |(x, y)| \\ &\leq \|Px\|\|y\| \\ &\leq m^{-1}\|Tx\|\|y\| \quad .\end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Riesz υπάρχει διάνυσμα $Tz\in R(T)$ τέτοιο ώστε

$$(x, y)=\varphi(Tx)=(Tx, Tz)$$

για κάθε $x\in H_1,$ αλλά αυτό συνεπάγεται στο ότι

$$y=T^* Tz\in R(T^*) \quad .$$

Το αντίστροφο ισχύει διότι $T^{**}=T$.

1.3 Φασματική Θεωρία

Ορισμός 1.3.1 Έστω $T \in L(H, H)$ όπου H είναι χώρος Hilbert. Ο μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του T αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in H$ τέτοιο ώστε

$$Tx = \lambda x \quad .$$

Οποιοδήποτε τέτοιο διάνυσμα x λέγεται ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην λ ιδιοτιμή.

Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή του T τότε η αντίστροφη απεικόνιση $(T - \lambda I)^{-1}$ ορίζεται στο $R(T - \lambda I)$. Αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική αλλά όχι απαραίτητα φραγμένη.

Ορισμός 1.3.2 Έστω $T \in L(H, H)$ όπου H είναι χώρος Hilbert. Τότε ονομάζουμε επιλύων σύνολο του T το ανοικτό σύνολο

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in L(H, H)\} \quad .$$

Φάσμα του τελεστή T ονομάζουμε το συμπλήρωμα του $\rho(T)$, δηλαδή

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T) \quad .$$

Ως φασματική ακτίνα ορίζουμε τον αριθμό

$$|\sigma(T)| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \quad .$$

Προφανώς κάθε ιδιοτιμή του T είναι στοιχείο του $\sigma(T)$.

Το φάσμα ενός τελεστή $T \in L(H, H)$ είναι συμπαγές και ισχύει ότι $|\sigma(T)| \leq \|T\|$.

Ορισμός 1.3.3 Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in L(H, H)$ λέγεται μη αρνητικός, συμβολισμός $T \geq 0$, αν ισχύει $(Tx, x) \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

Αν η αυστηρή ανίσωση ισχύει για κάθε μη αρνητικό x, λέμε ότι ο τελεστής T είναι θετικός, με συμβολισμό $T>0$.

Έστω A και T αυτοσυζυγείς τελεστές. Τότε ισχύει

$$A\geq T \text{ αν } A-T\geq 0 \text{ και } A>T \text{ αν } A-T>0 \quad .$$

Θεώρημα 1.3.1 Το φάσμα ενός αυτοσυζυγή τελεστή T είναι πραγματικο (υποσύνολο του $\mathbb{R}$). Επίσης για a,b πραγματικούς αριθμούς με $aI\leq T\leq bI$, τότε $\sigma(T)\subset[a,b]$.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $\lambda=\alpha+\beta i$ με $\beta\neq 0$. Έχουμε για κάθε $x\in H$,

$$\begin{aligned}\|Tx-\lambda x\|^2 &= (Tx-\alpha x-\beta ix, Tx-\alpha x-\beta ix)\\ &= \|Tx-\alpha x\|^2+\beta^2\|x\|^2, \text{ διότι } T=T^*\\ &\geq \beta^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς $N(T-\lambda I)=\{0\}$.

Παρόμοια προκύπτει ότι $N(T-\bar{\lambda} I)=\{0\}$, και άρα από το 1.2.1 έχουμε ότι

$$\overline{R(T-\lambda I)}=N(T-\lambda I)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=H \quad .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο $T-\lambda I$ είναι ένας ένα-προς-ένα τελεστής με πυκνό σύνολο τιμών.

Έστω $y\in H$, τότε υπάρχει ακολουθία $Tx_n-\lambda x_n\in R(T-\lambda I)$ τέτοια ώστε

$$Tx_n-\lambda x_n\to y \text{ καθώς } n\to\infty \quad .$$

Αν θέσουμε στην παραπάνω ανισότητα $x=x_n-x_m$ προκύπτει

$$\|(T-\lambda I)(x_n-x_m)\|^2\geq\beta^2\|x_n-x_m\|^2.$$

Αφού η $\{(T-\lambda I)x_n\}$ είναι συγκλίνουσα συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy και ως εκ τούτου θα έχει όριο $x\in H.$ Από τη συνέχεια του T θα ισχύει $Tx-\lambda x=y$, δηλαδή $(T-\lambda I)x=y$ και άρα $R(T-\lambda I)=H.$

Ο τελεστής $T-\lambda I$ είναι ένα-προς-ένα και επί άρα και αντιστρέψιμος από το θεώρημα 1.2.2 και συνεπώς $\lambda\in\rho(T)$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι αν $\lambda\in\sigma(T)$ τότε ο λ πρέπει να είναι πραγματικός.

Αν $aI\leq T$ και $\lambda<a$ έχουμε

$$\|Tx-\lambda x\|\|x\|\geq((T-\lambda I)x\,,x)\geq(a-\lambda)\|x\|^2.$$

Το επιχείρημα παραπάνω δείχνει ότι $\lambda\in\sigma(T)$.

Όμοια εάν ισχύει ότι $T\leq bI$ και $b<\lambda$ τότε προκύπτει ξανά $\lambda\in\sigma(T)$.
Συνεπώς για $aI\leq T\leq bI$ θα ισχύει $\sigma(T)\subset[a,b]$.

Υποθέτουμε ότι ο T είναι ένας πραγματικός συμμετρικός $n\times n$ πίνακας και ότι οι $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του T (ας υποθέσουμε ότι οι τιμές είναι διακεκριμένες). Εύκολα δείχνουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα των διακεκριμένων αυτών ιδιοτιμών είναι ορθογώνια.
Πράγματι, αν u_1 και u_2 είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, επειδή ο T είναι αυτό-συζυγής, οι ιδιοτιμές του λ_1 και λ_2 θα είναι πραγματικές και

$$\lambda_1(u_1,u_2)=(Tu_1,u_2)=(u_1,Tu_2)=\lambda_2(u_1,u_2),$$

από όπου προκύπτει ότι τα ιδιοδιανύμστα u_1 και u_2 πρέπει να είναι ορθογώνια.
Έστω τα ιδιοδιανύσματα $u_1,\dots,u_n$ νόρμας 1 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Τότε το $\{u_1,\dots,u_n\}$ αποτελεί μία ορθοκανονική βάση για τον R^n και κάθε $x\in R^n$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$x=(x,u_1)u_1+\dots+(x,u_n)u_n\quad.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιοτιμές έχουν την παρακάτω διάταξη

$$\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n\quad.$$

Αν θεωρήσουμε τη φασματική προβολή E_λ της πραγματικής μεταβλητής λ με τις ιδιότητες:

$$E_\lambda x=0 \text{ για } \lambda\leq\lambda_1,$$

$$E_\lambda=P_{S_i} \text{ για } \lambda_i<\lambda\leq\lambda_{i+1},$$

$$E_\lambda=I \text{ για } \lambda_n<\lambda,$$

όπου S_i είναι ο υπόχωρος $\{u_{1,}\dots,u_i\}$.
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση E_λ είναι αριστερά συνεχής, δηλαδή $\lim_{\lambda\to\mu^-}E_\lambda=E_\mu$.

Αν ορίσουμε την προβολή $\Delta_i E$ ως $\Delta_1 E = P_{S_1}$ και

$$\Delta_i Ex = (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})x = (x, u_i)u_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

τότε βλέπουμε ότι για κάθε x στο $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$Tx = \lambda_1(x, u_1)u_1 + \lambda_2(x, u_2)u_2 + \dots + \lambda_n(x, u_n)u_n,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta_i Ex.$$

Γενικότερα:

Ορισμός 1.3.4 Έστω H χώρος Hilbert. Μια οικογένεια προβολικών τελεστών $\{E_\lambda\}$ με δείκτη την πραγματική παράμετρο λ ονομάζεται ανάλυση της μονάδας εάν ισχύουν τα παρακάτω:

i. $\lambda < \mu$ συνεπάγεται $E_\lambda \leq E_\mu$,

ii. $\lambda \to -\infty$ συνεπάγεται $E_\lambda \to 0$ ισχυρά ,

iii. $\lambda \to \infty$ συνεπάγεται $E_\lambda \to I$ ισχυρά ,

iv. $\lim_{\lambda \to \mu^-} E_\lambda = E_\mu$ ισχυρά.

Θεώρημα 1.3.2 Κάθε αυτο-συζυγής τελεστής $T \in L(H, H)$ παράγει ανάλυση της μονάδας $\{E_\lambda\}$ για το H τέτοια ώστε :

i. αν $C \in L(H, H)$ και $CT = TC$, τότε $CE_\lambda = E_\lambda C$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ,

ii. αν $aI \leq T \leq bI$, τότε $E_\lambda = 0$ για $\lambda \leq a$ και $E_\lambda = I$ για $\lambda > b$,

iii. $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$,

όπου το ολοκλήρωμα (ερμηνεύεται ως το όριο του αθροίσματος της μορφής $\sum \lambda_i \Delta_i E$, όπου $\Delta_i E = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$ και $\{\lambda_i\}$ είναι μια διαμέριση διαστήματος που περιέχει το $\sigma(T)$) συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας τελεστών.

Θεώρημα 1.3.3 Έστω $T \in L(H, H)$ και p είναι ένα πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} .$$

Σημείωση Αν το p είναι πολυώνυμο από το φασματικό θεώρημα πεπερασμένης διάστασης για κάθε συμμετρικό $n\times n$ πίνακα T,

$$p(T)x=p(\lambda_1)(x,u_1)u_1+\ldots+p(\lambda_n)(x,u_n)u_n \quad ,$$

$$\text{δηλαδή} \quad p(T)x=\sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i)\Delta_i E \quad .$$

Βλέπουμε ότι αν ο $T\in L(H,H)$ είναι αυτο-συζυγής και αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές ορισμένη στο $\sigma(T)$, το φασματικό θεώρημα μας επιτρέπει να ορίσουμε τον τελεστή $f(T)\in L(H,H)$ ως

$$f(T)=\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,dE_\lambda$$

όπου το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας τελεστών.
Συγκεκριμένα, εάν ο T είναι αντιστρέψιμος $(0\notin\sigma(T))$ τότε μπορεί να δειχθεί ότι ο αντίστροφος του T δίνεται από την σχέση

$$T^{-1}=\int_{\sigma(T)} \lambda^{-1}\,dE_\lambda \quad .$$

Τέλος, να αναφέρουμε ότι, επειδή το φάσμα $\sigma(T)$ είναι συμπαγές και η οικογένεια $\{E_\lambda\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, αν $\{f_\beta(\lambda)\}_{\beta>0}$ είναι μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων με πραγματικές τιμές στο $\sigma(T)$ τέτοια ώστε

$$\lim_\beta f_\beta(\lambda)=f(\lambda)$$

ομοιόμορφα στο $\sigma(T)$, τότε

$$\lim_\beta f_\beta(T)=f(T)$$

στην τοπολογία της νόρμας τελεστών στο $L(H,H)$.

1.4 Διαφόριση (Differentiation)

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε εν συντομία ορισμένες πτυχές της διαφόρισης απεικονίσεων σε γραμμικούς χώρους. Η βασική ιδέα του διαφορικού λογισμού των απεικονίσεων σε γραμμικούς χώρους είναι η τοπική προσέγγιση των μη γραμμικών απεικονίσεων από γραμμικούς τελεστές (παράγωγοι Frechet). Αυτό μας επιτρέπει να μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας μη γραμμικής απεικόνισης χρησιμοποιώντας τη θεωρία γραμμικών τελεστών.

Ορισμός 1.4.1 Έστω E_1 και E_2 είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα, και έστω X είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του E_1. Μια συνάρτηση $f: X \to E_2$ λέγεται Frechet διαφορίσιμη στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει τελεστής $f'(x_0) \in L(E_1, E_2)$ τέτοιος ώστε:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0 \quad .$$

Θεώρημα 1.4.1 Έστω $f: X \to E_2$ είναι μια συνάρτηση Frechet διαφορίσιμη στο $x_0 \in X$, τότε ο τελεστής $f'(x_0) \in L(E_1, E_2)$ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό είναι μοναδικός.

Απόδειξη Έστω ο τελεστής $T \in L(E_1, E_2)$ επίσης ικανοποιεί τον ορισμό του Frechet διαφορίσιμου στο $x_0 \in X.$ Τότε για κάθε μη αρνητικό $x \in E_1$ θα ισχύει

$$\frac{\|Tx-f'(x_0)x\|}{\|x\|}=\lim_{t\to 0}\frac{\|Ttx-f'(x_0)tx\|}{\|tx\|}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\|Ttx-f(x_0+tx)+f(x_0)+f(x_0+tx)-f(x_0)-f'(x_0)tx\|}{\|tx\|}$$
$$\leq\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x_0+tx)-f(x_0)-Ttx\|}{\|tx\|}+\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x_0+tx)-f(x_0)-f'(x_0)tx\|}{\|tx\|}$$
$$=0\quad .$$

Συνεπώς $\|Tx-f'(x_0)x\|=0$ για κάθε $x\in E_1$, δηλαδή $T=f'(x_0)$.

Σημείωση Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0 διότι
$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leq\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\|+\|f'(x_0)\|\|h\|\to 0 \text{ καθώς } \|h\|\to 0$$

Φαίνεται επίσης ενδεδειγμένο να επισημανθεί ότι για μια πραγματική συνάρτηση $f:R\to R$ ο παραπάνω ορισμός συμπίπτει με την παραδοσιακή έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης αν θεωρήσουμε το $f'(x_0)$ όχι ως αριθμό, αλλά ως τον αντίστοιχο τελεστή στο $L(R,R)$, που ορίζεται από τη σχέση $x\to f'(x_0)x$.

Αν ο τελεστής $f:E_1\to E_2$ είναι φραγμένος και γραμμικός τότε προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι $f'(x_0)=f$ για κάθε $x_0\in E_1$.

Η πράξη της Frechet διαφόρισης είναι γραμμική. Δηλαδή έστω $f,g:E_1\to E_2$ είναι διαφορίσιμες στο $x_0\in E_1$ τότε
$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)\quad ,$$
και $$(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)\quad .$$

Θεώρημα 1.4.2 Έστω $g:E_1\to E_2$ είναι Frechet διαφορίσιμη στο $x_0\in E_1$ και $f:E_2\to E_3$ είναι Frechet διαφορίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η συνάρτηση $F:E_1\to E_3$, η οποία ορίζεται ως $F(x)=f(g(x))$, είναι Frechet διαφορίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0) \quad .$$

Απόδειξη Θέτουμε

$$\gamma(h)=g(x_0+h)-g(x_0)-g'(x_0)h$$

και

$$\varphi(h)=f(g(x_0)+h)-f(g(x_0))-f'(g(x_0))h$$

Τότε $\gamma(0)=\varphi(0)=0$ και

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\gamma(h)\|}{\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}=0 \quad .$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
&F(x_0+h)-F(x_0)-f'(g(x_0))g'(x_0)h\\
&=f(g(x_0)+g'(x_0)h+\gamma(h))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))g'(x_0)h\\
&=f'(g(x_0))\gamma(h)+\varphi(g'(x_0)h+\gamma(h))
\end{aligned}$$

και

$$\frac{\|f'(g(x_0))\gamma(h)\|}{\|h\|}\leq\|f'(g(x_0))\|\frac{\|\gamma(h)\|}{\|h\|}\to 0 \quad \text{καθώς} \quad \|h\|\to 0 \quad .$$

Επίσης από τον ορισμό της φ βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε

$$\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|<\delta_1 \quad ,$$

συνεπάγεται ότι

$$\|\varphi(g'(x_0)h+\gamma(h))\|<\varepsilon\|g'(x_0)h+\gamma(h)\| \quad .$$

Αλλά επειδή $g'(x_0)$ και $\gamma(h)$ είναι συνεχείς στο $0,$ θα υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε $\|h\|<\delta_2,$ συνεπάγεται ότι

$$\|g'(x_0)h+\gamma(h)\|<\delta_1 \quad .$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για $\|h\|<\delta_2$ ισχύει

$$\|\varphi(g'(x_0)h+\gamma(h))\|<\varepsilon(\|g'(x_0)\|\|h\|+\|\gamma(h)\|)$$

και συνεπώς

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\varphi(g'(x_0)h+\gamma(h))\|}{\|h\|}=0 \quad .$$

Επίσης συνεπάγεται ότι

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-f'(g(x_0))g'(x_0)h\|}{\|h\|}=0 \quad ,$$

δηλαδή $F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Σημείωση Έστω H χώρος Hilbert και $f: H\to R$ είναι μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές διαφορίσιμη κατά Frechet. Τότε για κάθε $x_0\in H$, το $f'(x_0)$ θα είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον H και συνεπώς από το θεώρημα Riesz θα υπάρχει μοναδικό διάνυσμα στο H, το οποίο θα συμβολίζουμε ως $\nabla f(x_0)$, και θα ονομάζεται ανάδελτα του f στο x_0, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)h=(h,\nabla f(x_0)) \qquad (1)$$

για κάθε $h\in H$.

Ορισμός 1.4.2 Η παράγωγος ενός συναρτησοειδούς $f: H\to R$ στο x_0 κατά κατεύθυνση $h\neq 0$ συμβολίζεται με $Df(x_0,h)$ και είναι το μέγεθος

$$Df(x_0,h)=\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \qquad (2)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

Σημείωση Έστω $f: H\to R$ είναι Frechet διαφορίσιμη στο x_0. Τότε η f έχει παράγωγο κατά κατεύθυνση στο x_0 ως προς κάθε κατεύθυνση $h\neq 0$.

Πράγματι, έστω η f είναι Frechet διαφορίσιμη στο x_0. Τότε για κάθε $h\neq 0$,

$$f(x_0+th)-f(x_0)=f'(x_0)th+r(x_0,th) \quad ,$$

όπου

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|r(x_0,th)\|}{\|th\|}=0 \quad .$$

Συνεπώς,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

$$= f'(x_0)h + \lim_{t \to 0^+} r\frac{(x_0, th)}{t}$$

$$= f'(x_0)h \quad .$$

Από τα (1) και (2) προκύπτει ότι

$$Df(x_0, h) = (h, \nabla f(x_0)) \quad .$$

Κεφάλαιο 2

Γενικευμένοι αντίστροφοι σε χώρους Banach

Έστω X, Y μιγαδικοί χώροι Banach. Θα χρησιμοποιούμε το $L(X, Y)$ για να δηλώσουμε το σύνολο όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών από το X στο $Y.$ Επίσης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $L(X)=L(X, X).$ Για $A\in L(X, Y),$ θα συμβολίζουμε με $N(A)$ και $R(A)$ τον πυρήνα και το σύνολο τιμών αντίστοιχα του $A.$

Ορισμός 2.1 Έστω $A\in L(X, Y).$ Αν υπάρχει $B\in L(Y, X)$ τέτοιος ώστε $ABA=A,$ τότε ο B καλείται εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του $A,$ και ο τελετής A είναι εσωτερικός κανονικός.
Εάν ισχύει ότι $CAC=C$ για κάποιο $C\in L(Y, X),$ με $C\neq 0,$ τότε ο C καλείται εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του $A.$ Τότε ο A είναι εξωτερικός κανονικός.
Ένας τελεστής $D\in L(Y, X)$ καλείται ανακλαστικός (reflexive) γενικευμένος αντίστροφος του $A,$ αν ο D είναι και εσωτερικός και εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του $A.$

Λήμμα 2.1 Έστω $A\in L(X, Y).$ Ισχύουν τα παρακάτω :

(1) Έστω ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^{-1} είναι ο μοναδικός εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του $A.$

(2) Έστω $B, C\in L(Y, X)$ είναι εσωτερικοί γενικευμένοι αντίστροφοι του $A,$ τότε ο BAC είναι ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος του $A.$

(3) Έστω $B\in L(Y, X)$ είναι εσωτερικός ή εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A τότε ο AB είναι μια προβολή στον $L(Y),$ και ο BA είναι μια προβολή στον $L(X).$

Από το παραπάνω λήμμα φαίνεται ότι ο A έχει ανακλαστικό γενικευμένο αντίστροφο αν και μόνο αν ο A είναι εσωτερικός κανονικός. Τέτοιοι τελεστές ονομάζονται σχετικά κανονικοί (relatively regular).

Θεώρημα 2.2 Έστω $B \in L(Y, X)$ είναι ένας εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A, τότε ο AB είναι μια προβολή από το Y στο $R(A)$, και ο $I - BA$ είναι μια προβολή από το X στο $N(A)$. Συνεπώς οι $R(A), N(A)$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι των Y και X αντίστοιχα.

Απόδειξη Προφανώς ισχύει ότι $R(AB) \subset R(A)$.

Για να αποδείξουμε την αντίθετη έγκλιση υποθέτουμε ότι $x \in R(A)$. Τότε θα υπάρχει κάποιο $y \in X$, τέτοιο ώστε

$$x = Ay = ABAy = AB\,x$$

Συνεπώς $x \in R(AB)$.

Έστω $x \in N(A)$, τότε $(I - BA)x = x$. Άρα $N(A) \subset R(I - BA)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in R(I - BA)$. Επειδή ο $I - BA$ είναι προβολή, συνεπάγεται ότι $x = (I - BA)x$, υπονοώντας ότι $BAx = 0$.

Ως εκ τούτου $Ax = ABAx = 0$ και $x \in N(A)$.

Θεώρημα 2.3 Έστω $A \in L(X, Y)$. Αν οι $R(A)$ και $N(A)$ είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί υπόχωροι των Y και X αντίστοιχα, τότε ο A είναι εσωτερικός κανονικός.

Απόδειξη Έστω ότι υπάρχουν τα κλειστά υποσύνολα T του X και S του Y, τέτοια ώστε $X = T \oplus N(A)$ και $Y = R(A) \oplus S$.

Γενικά, ο τελεστής A έχει την ακόλουθη μορφή πίνακα σε σχέση με αυτήν την ανάλυση των συνόλων:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix} .$$

Βλέπουμε ότι το A_{12} αποτελεί την αναγωγή του A από το σύνολο $N(A)$ στο $R(A)$,

και το A_{22} είναι η αναγωγή του A από το $N(A)$ στο S, άρα συνεπάγεται ότι $A_{12}=0$ και $A_{22}=0$. Επίσης το A_{21} είναι η αναγωγή του A από το σύνολο T στο S, και ο S είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $R(A)$. Συνεπώς $A_{21}=0$.
Άρα ο τελεστής A θα έχει της εξής μορφή:

$$\text{(2.3.1)} \qquad A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix} .$$

Ισχύει ότι $N(A)=N(A_1)\oplus N(A)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $N(A_1)=\{0\}$. Η ισότητα $R(A)=R(A_1)$ είναι προφανής. Συνεπώς ο A_1 είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής από το υποσύνολο T στο $R(A)$.
Έστω ένας αυθαίρετος τελεστής $B\in L(Y,X)$. Ο B θα έχει την ακόλουθη μορφή :

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} .$$

Με ένα πολλαπλασιασμό πινάκων βλέπουμε ότι ο B είναι ένας εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A αν και μόνο αν $B_{11}=A_1^{-1}$, καθώς ο A_1 είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς υπάρχουν εσωτερικοί γενικευμένοι αντίστροφοι του A και όλοι έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\text{(2.3.2)} \qquad B=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} ,$$

όπου οι B_{12}, B_{21}, B_{22} είναι αυθαίρετοι γραμμικοί τελεστές σε αντίστοιχους υπόχωρους.

Πόρισμα 2.4 Ένας τελεστής $A\in L(X,Y)$ είναι εσωτερικός κανονικός, αν και μόνο αν οι $N(A)$ και $R(A)$ είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.

Θέλουμε να εξετάσουμε τους εσωτερικούς γενικευμένους αντίστροφους που σχετίζονται με δοσμένους συμπληρωματικούς υπόχωρους $N(A)$ και $R(A)$. Ισοδύναμα, αν ο B είναι ένας εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A, θέλουμε να βρούμε της μορφές πίνακα των A και B, σε σχέση με τις αναλύσεις

$$X=R(BA)\oplus N(A) \ \text{ και } \ Y=R(A)\oplus N(AB) .$$

Αποδεικνύουμε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 2.5 Έστω ο τελεστής $A \in L(X, Y)$ ο οποίος είναι εσωτερικός κανονικός, και έστω T και S είναι κλειστοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε

$$X = T \oplus N(A) \text{ και } Y = R(A) \oplus S .$$

Τότε ο A θα έχει την παρακάτω μορφή πίνακα:

$$\text{(2.5.1)} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix}$$

όπου ο A_1 είναι αντιστρέψιμος.

Επίσης, αν ο B είναι εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A τέτοιος ώστε $R(BA) = T$ και $N(AB) = S$, τότε ο B έχει την μορφή

$$\text{(2.5.2)} \quad B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix}$$

όπου $W \in L(S, N(A))$ είναι αυθαίρετος.

Απόδειξη Στο θεώρημα 2.3 έχουμε ήδη αποδείξει την μορφή πίνακα για τον A, όπως μπορούμε να δούμε και από την σχέση 2.3.1.

Από την σχέση 2.3.2 βλέπουμε ότι ο B έχει την μορφή

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} .$$

Αν ισχύει ότι $R(BA) = T$, συνεπάγεται ότι ο BA είναι η προβολή του X επί του T παράλληλα προς τον $N(A)$.

Άρα $BA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix}$

Όμως έχουμε ότι $BA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ VA_1 & 0 \end{bmatrix}$ ως προς την ίδια ανάλυση των χώρων. Άρα $V = 0$.

Όμοια, ο AB είναι η προβολή του Y επί του $R(A)$ παράλληλα προς τον S.

Άρα $U = 0$.

Από την απόδειξη του θεωρήματος 2.5 βλέπουμε ότι ένας εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος δεν είναι μοναδικός.

Πόρισμα 2.6 Υποθέτουμε ότι συνθήκες του θεωρήματος 2.5 ικανοποιούνται, όπου ο τελεστής A έχει την μορφή που δίνεται από την σχέση (2.5.1) και ο B έχει την μορφή όπως φαίνεται στην σχέση (2.5.2). Τότε ο B είναι ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος του A αν και μόνο αν $W=0$.

Απόδειξη Προκύπτει άμεσα από την σχέση $BAB=B$.

Σημείωση Θα συμβολίζουμε με $A\{1\}$ το σύνολο όλων των εσωτερικών γενικευμένων αντιστροφών και με $A\{1,2\}$ το σύνολο των αντανακλαστικών γενικευμένων αντίστροφων ενός εσωτερικού κανονικού τελεστή A .

Πόρισμα 2.7 Έστω ο τελεστής $A\in L(X,Y)$ να είναι εσωτερικός κανονικός. Έστω P το σύνολο όλων των προβολών από το X στο $N(A)$, και Q το σύνολο των προβολών από το Y στο $R(A)$. Τότε

ο πληθικός αριθμός του $P\times Q$ είναι ίσος με τον πληθικό αριθμό του $A\{1,2\}$.

Απόδειξη Κάθε προβολή από το P καθορίζεται μοναδικά από ένα κλειστό υπόχωρο T, ο οποίος ικανοποιεί την σχέση $X=T\oplus N(A)$. Επίσης κάθε προβολή από το Q καθορίζεται μοναδικά από ένα κλειστό υπόχωρο S, ο οποίος ικανοποιεί την σχέση $Y=R(A)\oplus S.$ Συνεπώς, ένας εσωτερικά κανονικός τελεστής A και ένα ζευγάρι προβολών $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in(P,Q)$ καθορίζουν μοναδικά τον ανακλαστικό γενικευμένο αντίστροφο B του A ως:

$$B=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} R(A) \\ S \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} T \\ N(A) \end{bmatrix} .$$

Έτσι έχουμε κατασκευάσει την απεικόνιση $F: P\times Q \to A\{1,2\}$.

Αντίστροφα, αν $B\in A\{1,2\}$, τότε οι προβολές $\mathrm{Q}=I-BA\in Q$ και $\mathrm{P}=AB\in P$ είναι μοναδικά ορισμένες. Άρα κατασκευάζουμε την απεικόνιση $G: A\{1,2\}\to P\times Q$.
Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση $G=F^{-1}$ ικανοποιείται, οπότε τα $P\times Q$ και $A\{1,2\}$ έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

Θα συμβολίζουμε τη γραμμική θήκη που παράγεται από τα διανύσματα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ως:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Θεώρημα 2.8 Έστω $A\in L(X,Y)$. Θα υπάρχει ένας εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος $B\in L(Y,X)$ του A, $(B\neq 0)$ αν και μόνο αν $A\neq 0$.

Απόδειξη Αν ισχύει ότι $BAB=B$ και $B\neq 0$, τότε προφανώς θα έχουμε ότι $A\neq 0$.
Αντίστροφα, για $A\neq 0$, θα υπάρχει κάποιο $x_0\in X$ τέτοιο ώστε $Ax_0=y_0\neq 0$.
Θεωρούμε τις εξής αναλύσεις των χώρων :

$$X=[x_0]\oplus M \text{ και } Y=[y_0]\oplus N,$$

για κάποιους κλειστούς υπόχωρους M του X και N του Y .
Τότε ο τελεστής A θα έχει την μορφή πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} [x_0] \\ M \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} [y_0] \\ N \end{bmatrix} .$$

Θα ισχύει ότι $A_{11}x_0=Ax_0=y_0$ και ο A_{11} είναι αντιστρέψιμος.
Θεωρούμε τον τελεστή

$$B=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} [y_0] \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} [x_0] \\ M \end{bmatrix}$$

Προφανώς $B\neq 0$, και εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση $BAB=B$ ισχύει.

Σημείωση Το σύνολο όλων των εξωτερικών γενικευμένων αντιστρόφων ενός τελεστή A, το συμβολίζουμε με $A\{2\}$.

Αν ο B είναι ένας εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A, τότε ο A είναι ένας εσωτερικος γενικευμένος αντίστροφος του B .

Θεώρημα 2.9 Έστω $A\in L(X,Y)$ ένας μη μηδενικός τελεστής, και έστω T και S υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(1) Υπάρχει κάποιος μη μηδενικός $B\in L(Y,X)$ τέτοιος ώστε $BAB=B$, και ισχύουν ότι $R(B)=T$ και $N(B)=S$.

(2) Οι T και S είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα, το $A(T)$ είναι κλειστό, ισχύει $A(T)\oplus S=Y$, και η απεικόνιση $A|_T:T\to A(T)$ είναι αντιστρέψιμη.

Αν κάποια από της δύο συνθήκες ικανοποιείται, τότε ο τελεστής B όπως παρουσιάζεται στην συνθήκη (1) είναι μοναδικός.

Απόδειξη $(1)\Rightarrow(2)$: Έστω $BAB=B\neq 0$, $R(B)=T$ και $N(B)=S.$ Από τη στιγμή που ο A είναι εσωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του B, συνεπάγεται από το θεώρημα 2.2, ότι ο BA είναι μια προβολή από τον X στον $R(B)=T$, και ο $I-AB$ είναι μια προβολή του X στον $N(B)=S.$ Συνεπάγεται επίσης ότι ο $A(T)=R(AB)$ είναι ένας κλειστός υπόχωρος συμπληρωματικός του S στο Y .

Η απεικόνιση $A|_T:T\to A(T)$ είναι επί.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $x\in T$ τέτοιο ώστε $Ax=0.$ Τότε θα υπάρχει κάποιο $y\in Y$ τέτοιο ώστε $By=x$.

Συνεπώς, έχουμε ότι $0=BAx=BABy=By$, από το οποίο προκύπτει ότι $x=0$.

Συνεπάγεται ότι ο τελεστής $A|_T$ είναι ένα-προς-ένα στο $T.$

Τέλικά, ο $A|_T:T\to A(T)$ είναι αντιστρέψιμος.

$(2)\Rightarrow(1)$: Υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος T_1 του X τέτοιος ώστε $X=T\oplus T_1$.

Επίσης ικανοποιείται και η σχέση $Y=A(T)\oplus S$.

Θεωρούμε την μορφή πίνακα του A ως προς την συγκεκριμένη ανάλυση των χώρων :

$$(2.9.1)\qquad A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} T \\ T_1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix}$$

Ο τελεστής A απεικονίζει τον χώρο T στο $A(T)$, άρα θα έχουμε ότι $A_4=0$.

Από τη στιγμή που η απεικόνιση $A_1=A|_T:T\to A(T)$ είναι αντιστρέψιμη, ο τελεστής

$$(2.9.2)\qquad B_1=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ T_1 \end{bmatrix} ,$$

ικανοποιεί την συνθήκη (1).

Ας υποθέσουμε ότι κάποια από τις δύο συνθήκες (1) ή (2) ισχύει.

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο τελεστή $B\in L(Y,X)$, που να ικανοποιεί την συνθήκη (1).

Τότε ο B θα έχει την μορφή

$$B=\begin{bmatrix} L & U \\ V & W \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ T_1 \end{bmatrix} ,$$

για κάποιους γραμμικούς και φραγμένους τελεστές L, U, V, W .

Η απαίτηση να ισχύει ότι $R(B)=T$, οδηγεί στο ότι $V=0$ και $W=0$.

Αν $N(B)=S$ τότε $U=0$ και ο L πρέπει να είναι αντιστρέψιμος.

Από τη συνθήκη $BAB=B$ συνεπάγεται ότι $LA_1L=L$, και από τη στιγμή που ο L είναι αντιστρέψιμος, τότε θα έχουμε $L=A_1^{-1}$.

Συνεπώς $B=B_1$.

Από κατασκευή λοιπόν, ο B είναι μοναδικός.

Σημείωση Αν οι συνθήκες του θεωρήματος 2.9 ικανοποιούνται, τότε συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδικός εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος B του A, με το καθορισμένο σύνολο τιμών T και πυρήνα S .

Θα συμβολίζουμε ένα τέτοιο B ως $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$.

Πόρισμα 2.10 Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 2.9, και έστω ο $B=A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$ αντίστοιχος εξωτερικός γενικευμένος αντίστροφος του A. Τότε ο A έχει την αντίστοιχη μορφή πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} T \\ N(BA) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix}$$

όπου ο A_1 είναι αντιστρέψιμος.

Επίσης ο $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} A(T) \\ S \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ N(BA) \end{bmatrix} .$$

Απόδειξη Στην απόδειξη του θεωρήματος ορίζουμε $T_1=N(BA)$ και παίρνουμε το A να έχει την μορφή όπως φαίνεται από την σχέση (2.9.1) με $A_4=0.$ Επίσης το $B=B_1$ έχει την μορφή (2.9.2) .

Άρα,

$$BA=\begin{bmatrix} I & A_1^{-1}A_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}:\begin{bmatrix} T \\ N(BA) \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} T \\ N(BA) \end{bmatrix} .$$

Το BA είναι η προβολή στο $R(BA)=R(B)=T$, η οποία είναι παράλληλη προς το $N(BA)$, άρα προκύπτει ότι $A_3=0$.

Τα υπόλοιπα προκύπτουν από την απόδειξη του θεωρήματος 2.9 .

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένοι αντίστροφοι φραγμένων γραμμικών τελεστών με κλειστή εικόνα

3.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Έστω H_1 και H_2 Hilbert χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε το θεμελιώδες πρόβλημα επίλυσης γραμμικής εξίσωσης του τύπου

$$Tx=b \qquad (1)$$

όπου $b\in H_2$ και $T\in L(H_1, H_2)$.

Το πιο διαδεδομένο παράδειγμα μιας εξίσωσης τύπου (1) είναι εκείνο για το οποίο έχουμε ως:

$H_1=R^n, H_2=R^m$ και T έναν $m\times n$ πίνακα.

Επίσης για $H_1=H_2=L^2[0,1],$ και ως T έχουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή που ορίζεται ως:

$$(Tx)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt,\ \ s\in[0,1]$$

όπου $k(s,t)\in L^2([0,1]x[0,1])$.

Αν ο τελεστής T έχει αντίστροφο τότε η εξίσωση (1) έχει πάντα την μοναδική λύση $x=T^{-1}b$.

Σε γενικές γραμμές μια τέτοια γραμμική εξίσωση μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις $(N(T)\neq\{0\})$ ή μπορεί να μην έχει καθόλου λύση.

Για παράδειγμα, αν x_1 είναι μία λύση της (1) και $u\in N(T)$ τότε και η x_1+u είναι λύση της (1), αφού

$$T\left(x_1+u\right)=Tx_1+Tu=b+0=b$$

Ακόμη και αν η εξίσωση δεν έχει καμία λύση με την παραδοσιακή έννοια, είναι ακόμα δυνατό να ορίσουμε την καλύτερη δυνατή λύση στο πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, αν P χαρακτηρίζει την προβολή του H_2 στο $R(T)$ (το οποίο υποθέτουμε ότι είναι κλειστό), τότε Pb είναι το διάνυσμα στο $R(T)$ το οποίο είναι πλησιέστερο στο b. Φαίνεται λογικό να θεωρήσουμε ως μια γενικευμένη λύση του (1) κάθε λύση $u\in H_1$ της εξίσωσης

$$Tx=Pb \qquad (2)$$

Ας εξετάσουμε ένα απλό δισδιάστατο παράδειγμα.

Έστω $T\in L\left(R^2,R^2\right)$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ τον

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

και έστω $b=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Τότε $R(T)=span\{(1,-1)\}$ και $Pb=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

και το σύνολο όλων των γενικευμένων λύσεων δίνεται από $\{(x_1,x_2):x_2=1/2+x_1\}$.

Μια άλλη φυσική προσέγγιση για την εύρεση γενικευμένων λύσεων για την εξίσωση (1) είναι να βρεθεί ένα $u\in H_1$ που πλησιάζει περισσότερο στην επίλυση της (1), με την έννοια ότι

$$\|Tu-b\|\leq\|Tx-b\|$$

για κάθε $x\in H_1$.

Θεώρημα 3.1.1 Έστω το $T\in L\left(H_1,H_2\right)$ έχει κλειστό σύνολο τιμών και $b\in H_2$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες για $u\in H_1$ είναι ισοδύναμες

i. $Tu=Pb$,
ii. $\|Tu-b\|\leq\|Tx-b\|$ για κάθε $x\in H_1$,
iii. $T^*Tu=T^*b$.

Απόδειξη

(i) συνεπάγεται (ii) : Έστω $Tu=Pb.$ Τότε για κάθε $x\in H_1,$ με την βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος και το γεγονός ότι $Pb-b\in R(T)^{\perp}$

$$\begin{aligned}\|Tx-b\|^2 &= \|Tx-Pb\|^2+\|Pb-b\|^2 \\ &= \|Tx-Pb\|^2+\|Tu-b\|^2 \\ &\geq \|Tu-b\|^2 \ .\end{aligned}$$

(ii) συνεπάγεται (iii) : Έστω $\|Tu-b\|\leq\|Tx-b\|$ για κάθε $x\in H_1,$ τότε ξανά από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το γεγονός ότι $Tx=Pb$ για κάποιο $x\in H_1,$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|Tu-b\|^2 &= \|Tu-Pb\|^2+\|b-Pb\|^2 \\ &\geq \|Tu-Pb\|^2+\|b-Tu\|^2 \ .\end{aligned}$$

Επομένως

$$Tu-b=Pb-b\in R(T)^{\perp}=N(T^*)$$

(iii) συνεπάγεται (i) : Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (iii). Τότε $Tu-b\in R(T)^{\perp}$ και ως εκ τούτου

$$0=P(Tu-b)=Tu-Pb \ .$$

Ορισμός 3.1.1 Ένα διάνυσμα $u\in H_1$ το οποίο ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες (i)-(iii) του θεωρήματος (3.1.1), λέγεται λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Tx=b$.

Σημείωση Επειδή το $R(T)$ είναι κλειστό, θα υπάρχει μια λύση ελαχίστων τετραγώνων για την εξίσωση (1) για κάθε $b\in H_2$.

Επίσης, αν $N(T)\neq\{0\}$ τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης (1), διότι αν το u είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων, τότε είναι και το $u+v$ για κάθε $v\in N(T)$.

Ιδανικά θα θέλαμε να αντιστρέψουμε τον τελεστή T που σχετίζει με κάθε $b\in H_2$ μια μονοσήμαντα προσδιορισμένη λύση ελαχίστων τετραγώνων $u\in H_1$.

Από το θεώρημα (3.1.1) το σύνολο των λύσεων ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να γραφτεί ως

$$\{u \in H_1 : T^* Tu = T^* b\}$$

το οποίο είναι κλειστό κυρτό σύνολο επειδή οι τελεστές T, T^* είναι συνεχείς και γραμμικοί.
Αυτό το σύνολο περιέχει ένα μοναδικό διάνυσμα ελάχιστης νόρμας από το θεώρημα (1.1.4) και θα επιλέξουμε αυτό το διάνυσμα να είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων που συνδέεται αποκλειστικά με το b μέσω της διαδικασίας γενικευμένης αντιστροφής.

Ορισμός 3.1.2 (V) Έστω $T \in L(H_1, H_2)$ με κλειστό σύνολο τιμών. Η απεικόνιση $T^\dagger : H_2 \to H_1$, η οποία ορίζεται ως $T^\dagger b = u$, όπου u είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων ελάχιστης νόρμας για την εξίσωση $Tx = b$, καλείται ο γενικευμένος αντίστροφος του T.

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στον ορισμό **(V)** παραπάνω ως τον variational ορισμο.
Να σημειώσουμε ότι αν ο τελεστής T είναι αντιστρέψιμος τότε προφανώς έχουμε ότι $T^\dagger = T^{-1}$.

Θεώρημα 3.1.2 Αν ο $T \in L(H_1, H_2)$ έχει κλειστή εικόνα, τότε ισχύει

$$R(T^\dagger) = R(T^*) = R(T^\dagger T)$$

Απόδειξη Έστω $b \in H_2$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $T^\dagger b \in N(T)^\perp = R(T^*)$.
Θεωρούμε ότι

$$T^\dagger b = u_1 + u_2 \in N(T)^\perp \oplus N(T) \quad ,$$

τότε το u_1 είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Tx = b$ διότι

$$Tu_1 = T(u_1 + u_2) = TT^\dagger b = Pb \quad .$$

Επίσης, αν $u_2 \neq 0$, έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|u_1\|^2 < \|u_1 + u_2\|^2 = \|T^\dagger b\|^2$$

το οποίο όμως έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το $T^{\dagger}b$ είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων ελάχιστης νόρμας. Άρα $T^{\dagger}b=u_1\in N(T)^{\perp}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $u\in N(T)^{\perp}$. Έστω $b=Tu$.
Ισχυριζόμαστε ότι $u=T^{\dagger}b.$ Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$Tu=PTu=Pb$$

συνεπώς το u είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων. Αν το x είναι κάποια άλλη λύση ελαχίστων τετραγώνων, τότε

$$Tx=Pb=Tu$$

και άρα $x-u=\bar{u}\in N(T)$. Οδηγούμαστε στο ότι

$$\|x\|^2=\|u\|^2+\|\bar{u}\|^2\geq\|u\|^2$$

και ως εκ τούτου το u είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων ελάχιστης νόρμας, άρα $u=T^{\dagger}b.$
Βλέπουμε δηλαδή ότι $R(T^{\dagger})=R(T^{*})$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $b\in H_2$ ισχύει

$$T^{\dagger}b=T^{\dagger}Pb\in R(T^{\dagger}T)$$

άρα τελικά $R(T^{\dagger})=R(T^{\dagger}T)$.

Πόρισμα 3.1.3 Αν ο $T\in L(H_1,H_2)$ έχει κλειστή εικόνα, τότε $T^{\dagger}\in L(H_2,H_1)$.

Απόδειξη Έστω $b,\bar{b}\in H_2,$ τότε

$$TT^{\dagger}b=Pb \text{ και } TT^{\dagger}\bar{b}=P\bar{b}$$

Επομένως

$$TT^{\dagger}b+TT^{\dagger}\bar{b}=P(b+\bar{b})=TT^{\dagger}(b+\bar{b})$$

και από το θεώρημα (3.1.2)

$$T^{\dagger}b+T^{\dagger}\bar{b}-T^{\dagger}(b+\bar{b})\in N(T)^{\perp}\cap N(T)=\{0\} \quad .$$

Μπορεί να δειχθεί με παρόμοιο τρόπο ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{C}$

$$T^{\dagger}(\alpha b)=\alpha T^{\dagger}b \quad .$$

Επειδή ισχύει ότι $R(T^{\dagger})=R(T^{*})=N(T)^{\perp},$ έχουμε από το θεώρημα (1.2.3) την ύπαρξη ενός θετικού αριθμού m τέτοιου ώστε

$$\|TT^{\dagger}b\| \geq m\|T^{\dagger}b\|$$

για κάθε $b \in H_2$. Καθώς ισχύει ότι $TT^{\dagger}b = Pb$, συνεπάγεται ότι

$$\|b\| \geq \|Pb\| \geq m\|T^{\dagger}b\|$$

και συμπεραίνουμε ότι το $T^{\dagger}$ είναι φραγμένο.

Σημείωση Γνωρίζουμε ότι $R(T^{\dagger}) = N(T)^{\perp}$ και ότι $u+v$ είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων εάν και το u είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων και $v \in N(T)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύνολο των λύσεων ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης (1) έχει την μορφή $T^{\dagger}b + N(T)$.

Παρατηρούμε ότι αν το $R(T)$ είναι κλειστό, τότε και το $R(T^*)$ είναι επίσης κλειστό. Αν θέσουμε $\tilde{T} = T^*T \mid R(T^*)$, συνεπάγεται από το θεώρημα (1.2.3) ότι

$$(\tilde{T}x, x) = \|Tx\|^2 \geq m^2\|x\|^2 \qquad m > 0$$

για $x \in R(T^*)$.

Συνεπώς ο αντίστροφος $\tilde{T}^{-1}$ μπορεί να οριστεί στο $R(\tilde{T})$.

Εύκολα βλέπουμε ότι $R(\tilde{T}) = R(T^*T) = R(T^*)$, και από το θεώρημα (1.2.2) προκύπτει ότι

$$\tilde{T}^{-1} \in L(R(T^*), R(T^*)) \ .$$

Θεώρημα 3.1.4 Έστω ο $T \in L(H_{1,} H_2)$ έχει κλειστή εικόνα. Θέτουμε $\tilde{T} = T^*T \mid R(T^*)$, τότε ισχύει ότι $T^{\dagger} = \tilde{T}^{-1}T^*$.

Η παράσταση που δίνεται στο επόμενο θεώρημα είναι σημαντική από υπολογιστική άποψη. Δείχνει ότι αν κάποιος από τους χώρους H_1, H_2 είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο υπολογισμός του $T^{\dagger}$ όπου $T \in L(H_1, H_2)$ ανάγεται στον υπολογισμό του γενικευμένου αντιστρόφου ενός πίνακα. Διότι αν ο H_1 είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το T^*T μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας πίνακας, ενώ αν ο H_2 είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το TT^* μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας πίνακας.

Θεώρημα 3.1.5 Έστω ο $T\in L(H_1,H_2)$ έχει κλειστή εικόνα. Τότε

$$T^{\dagger}=(T^*T)^{\dagger}T^*=T^*(TT^*)^{\dagger}$$

Απόδειξη Αρχικά να πούμε ότι κάθε $y\in H_2$ μπορεί να γραφτεί σε μορφή $y=y_1+y_2\in R(T)\oplus N(T^*)$, και ότι $R(T^*T)=R(T^*)$.

Συνεπώς

$$T^*y=T^*y_1\in R(T^*T) .$$

Για $b\in H_2$, θα έχουμε

$$T^*T(T^*T)^{\dagger}T^*b=P_{R(T^*T)}T^*b=T^*b$$

άρα το $(T^*T)^{\dagger}T^*b$ είναι λύση της εξίσωσης της συνθήκης (iii) του θεωρήματος (3.1.1), δηλαδή το $(T^*T)^{\dagger}T^*b$ είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων.

Άρα

$$(T^*T)^{\dagger}T^*b=T^*b+v$$

για κάποιο $v\in N(T)$.

Αφού $(T^*T)^{\dagger}T^*b\in R((T^*T)^{\dagger})$, θα έχουμε από το θεώρημα (3.1.2) ότι

$$(T^*T)^{\dagger}T^*b\in R(T^*T)=R(T^*)=N(T)^{\perp}$$

και συνεπάγεται ότι

$$(T^*T)^{\dagger}T^*b=T^{\dagger}b .$$

Για να αποδείξουμε την δεύτερη ισότητα ακολουθούμε παρόμοια μέθοδο.

3.2 Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος

Οι γενικευμένοι αντίστροφοι πινάκων και γραμμικών τελεστών μπορούν να οριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Στην προηγούμενη ενότητα δόθηκε ο variational ορισμός. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός του Moore, ο ποίος ήταν ο πρώτος που διατύπωσε σαφή ορισμό του γενικευμένου αντιστρόφου σε αυθαίρετο πίνακα, καθώς και ο ορισμός του Penrose.

Ορισμός 3.2.1 (M) Έστω ο $T \in L(H_1, H_2)$ με κλειστό σύνολο τιμών. Τότε ο $T^\dagger$ θα είναι ο μοναδικός τελεστής στο $L(H_2, H_1)$, που να ικανοποιεί τα παρακάτω

$$TT^\dagger = P_{R(T)} \text{ και } T^\dagger T = P_{R(T^\dagger)} \quad .$$

Ορισμός 3.2.2. (P) Έστω ο $T \in L(H_1, H_2)$ με κλειστό σύνολο τιμών. Τότε ο $T^\dagger$ θα είναι ο μοναδικός τελεστής στο $L(H_2, H_1)$, που να ικανοποιεί τα παρακάτω

1. $TT^\dagger = (TT^\dagger)^*$,
2. $T^\dagger T = (T^\dagger T)^*$,
3. $TT^\dagger T = T$,
4. $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο $T^\dagger$ είναι μοναδικός.

Θεώρημα 3.2.1 Υπάρχει το πολύ ένας τελεστής $T^\dagger \in L(H_2, H_1)$ που να ικανοποιεί τον ορισμό (P) .

Απόδειξη Αρχικά από τα (4) και (1) έχουμε

$$T^\dagger = T^\dagger (TT^\dagger)^* = T^\dagger T^{\dagger^*} T^* \qquad (5)$$

Από τα (4) και (2) συνεπάγεται

$$T^{\dagger}=\left(T^{\dagger}T\right)^{*}T^{\dagger}=T^{*}T^{\dagger^{*}}T^{\dagger} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις (3) και (1) έχουμε

$$T=\left(TT^{\dagger}\right)^{*}T=T^{\dagger^{*}}T^{*}\,T \qquad (7)$$

και προκύπτει ότι

$$T^{*}=T^{*}\,TT^{\dagger} \qquad (8)$$

Όμοια από τις (3) και (2) έχουμε

$$T=TT^{\dagger}\,T=TT^{*}\,T^{\dagger^{*}} \qquad (9)$$

από όπου προκύπτει

$$T^{*}=T^{\dagger}\,TT^{*} \qquad (10)$$

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν δύο τελεστές $X\,,Y\in L\left(H_{2},H_{1}\right),$ που να ικανοποιούν τον ορισμό $\left(P\right),$ τότε

$X=XX^{*}\,T^{*}$ από την σχέση (5)

$=XX^{*}\,T^{*}\,TY$ από την (8)

$=XTY$ από την (7)

$=XTT^{*}\,Y^{*}\,Y$ από την (6)

$=T^{*}\,Y^{*}\,Y$ από την (10)

$=Y$ από την (6).

Ισοδυναμία των ορισμών Moore-Penrose

Εάν ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί τον ορισμό (M) τότε οι $TT^{\dagger}$ και $T^{\dagger}T$ είναι αυτοσυζυγείς

Επίσης

$$TT^{\dagger}\,T=P_{R(T)}\,T=T$$

και

$$T^{\dagger}\,TT^{\dagger}=P_{R(T^{\dagger})}\,T^{\dagger}=T^{\dagger}$$

άρα ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί και τον ορισμό (P).

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί και τον ορισμό (P), τότε

$$\left(TT^{\dagger}\right)\left(TT^{\dagger}\right)=T\left(T^{\dagger}\,TT^{\dagger}\right)=TT^{\dagger}$$

Άρα ο $T^{\dagger}$ είναι αυτοσυζυγής ταυτοδύναμος τελεστής και συνεπώς είναι ο προβολικός τελεστής πάνω στον υπόχωρο $S=\left\{y:TT^{\dagger}\,y=y\right\}$.

Γνωρίζουμε ότι $TT^{\dagger}\,T=T\,,$ από το οποίο συνεπάγεται ότι $R\left(T\right)\subset S.$

Επίσης, έστω $y \in S$, τότε για κάθε $z \in N(T^*)$ θα έχουμε

$$(y, z) = (TT^\dagger y, z) = (T^\dagger y, T^* z) = 0$$

δηλαδή $S \subset N(T^*)^\perp = R(T)$.

Συνεπάγεται ότι

$$TT^\dagger = P_{R(T)}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ορισμοί (M) και (P) είναι ισοδύναμοι. Θα αναφερόμαστε στους ορισμούς αυτούς ως τον ορισμό Moore-Penrose, με συμβολισμό (M-P).

Θα δείξουμε ότι ο ορισμός Moore-Penrose είναι ισοδύναμος και με τον (V) ορισμό της προηγούμενης ενότητας. Πρώτα όμως θα διατυπώσουμε έναν ακόμα ορισμό για τον $T^\dagger$, που δημοσιεύθηκε από τους Desoer και Whalen το 1963.

Ορισμός 3.2.3 (D-W) Έστω ο $T \in L(H_1, H_2)$ με κλειστό σύνολο τιμών. Τότε ο $T^\dagger$ θα είναι ο μοναδικός τελεστής στο $L(H_2, H_1)$, που να ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$T^\dagger Tx = x \ \text{ για κάθε } x \in N(T)^\perp \qquad (11)$$

$$T^\dagger y = 0 \ \text{ για κάθε } y \in R(T)^\perp \qquad (12).$$

Θεώρημα 3.2.2 Οι ορισμοί (V), (M-P), (D-W) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη

- (D-W) συνεπάγεται (V) : Έστω ο $T^\dagger$ ικανοποιεί τον ορισμό (D-W), και έστω $b = b_1 + b_2 \in R(T) \oplus R(T)^\perp = H_2$. Τότε

$$TT^\dagger b = TT^\dagger b_1$$

και επειδή $b_1 \in R(T)$, έχουμε ότι $b_1 = Tx$ για κάποιο $x \in N(T)^\perp$, συνεπώς

$$TT^\dagger b = T(T^\dagger Tx) = Tx = b_1 = P_{R(T)} b$$

δηλαδή το $T^\dagger b$ είναι λύση ελαχίστων τετραγώνων.

Έστω τώρα ότι το u είναι μια άλλη λύση ελαχίστων τετραγώνων, άρα $u - T^\dagger b \in N(T)$.

Επίσης επειδή $b = b_1 + b_2 \in R(T) \oplus R(T)^\perp$ και $T^\dagger b_2 = 0$, θα έχουμε

$$T^{\dagger} b = T^{\dagger} b_1 = T^{\dagger} T x = x$$

για κάποιο $x \in N(T)^{\perp}$.

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $T^{\dagger} b \in N(T)^{\perp}$ και $T^{\dagger} b \perp (u - T^{\dagger} b)$.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα μας δίνει ότι $\|T^{\dagger} b\|^2 \leq \|u\|^2$, άρα τελικά ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί και τον ορισμό (V).

- (V) συνεπάγεται (M-P) : Έστω $T^{\dagger}$ ικανοποιεί τον ορισμό (V), τότε προφανώς $TT^{\dagger} = P$. Επίσης για κάθε $x \in H_1$ θα έχουμε από το θεώρημα (3.1.2) ότι

$$x = x_1 + x_2 \in N(T)^{\perp} \oplus N(T) = R(T^{\dagger}) \oplus N(T) \quad .$$

Άρα

$$TT^{\dagger} T x = TT^{\dagger} T x_1 = P T x_1 = T x_1$$

και προκύπτει

$$T^{\dagger} T x - x_1 \in N(T) \cap N(T)^{\perp}$$

δηλαδή

$$T^{\dagger} T x = x_1 = P_{R(T^{\dagger})} x$$

- (M-P) συνεπάγεται (D-W) : Έστω $T^{\dagger}$ ικανοποιεί τον ορισμό (M-P) και $y \in R(T)^{\perp}$.

Τότε

$$T^{\dagger} y = T^{\dagger} T T^{\dagger} y = T^{\dagger} P y = 0$$

Απομένει να δείξουμε ότι αν ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί τον ορισμό (M-P), τότε $T^{\dagger} T x = x$ για $x \in N(T)^{\perp}$.

Ισχύει ότι $TT^{\dagger} T = T$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $T^{\dagger} T x - x \in N(T)$ για κάθε $x \in H_1$.

Για $x \in N(T)^{\perp}$ έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\|x\|^2 \geq \|P_{R(T^{\dagger})} x\|^2 = \|T^{\dagger} T x\|^2$$
$$= \|T^{\dagger} T x - x\|^2 + \|x\|^2 \quad .$$

Συνεπώς $T^{\dagger} T x = x$ για $x \in N(T)^{\perp}$, δηλαδή ο $T^{\dagger}$ ικανοποιεί τον ορισμό (D-W).

Βιβλιογραφία

[1] C. W. Groetsch: Generalized Inverses of Linear Operators, Marcel-Dekker, Inc., New York, 1973

[2] D.S Djordjevic: Lectures On Generalized Inverses, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, 2008

[3] A. Ben-Israel and T. N. E. Grenville: Generalized Inverses: Theory and Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2002

[4] Σωτήρης Καρανάσιος: Θεωρία Τελεστών & Εφαρμογές, 2009

[5] Σπύρος Αργυρός: Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, 2004