



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής  
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και Επεξεργασίας  
Σημάτων

**Αραιές Αναπαραστάσεις και Εφαρμογές**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

**Λάμπρου Φλόκα**

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2015





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής  
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας  
Λόγου και Επεξεργασίας Σημάτων

## Αραιές Αναπαραστάσεις και Εφαρμογές

### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

**Λάμπρου Φλόκα**

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23η Ιουλίου 2015.

.....  
Πέτρος Μαραγκός  
Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

.....  
Κωνσταντίνος Τζαφέστας  
Επίκουρος Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

.....  
Γεράσιμος Ποταμιάνος  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Παν/μίου Θεσσαλίας

Αθήνα, Ιούλιος 2015.

.....

**Λάμπρος Φλόκας**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών  
Ε.Μ.Π.

© (2015) Λάμπρος Φλόκας. Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# Περίληψη

Οι αραιές αναπαραστάσεις είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για ένα εύρος από πρακτικές εφαρμογές. Την αποτελεσματική αξιοποίηση τους επέτρεψε η έρευνα που έγινε στον ερευνητικό χώρο που είναι γνωστός ως Συμπιεστική Δειγματοληψία (Compressive Sampling). Η εργασία αυτή ασχολείται αρχικά με την παρουσίαση των κεντρικών εννοιών σχετικά με τις αραιές αναπαραστάσεις. Επίσης ασχολείται με την διατύπωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης που προκύπτουν στην περιοχή της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας καθώς και με τις σχετικές θεωρητικές εγγυήσεις για τα προβλήματα αυτά. Στη συνέχεια παρουσιάζει διαδεδομένους αλγόριθμους της βιβλιογραφίας όπως τον Basis Pursuit, Lasso, Matching Pursuit για την στατική εκτίμηση αραιών αναπαραστάσεων. Δεν παραλείπονται όμως και οι δυναμικοί εκτιμητές αραιών αναπαραστάσεων. Σε πρώτη φάση παρουσιάζονται οι γενικότεροι αλγόριθμοι RLS και LMS. Σε αυτούς προστίθενται ένας αλγόριθμος βασισμένος σε μεταβολική Μπεϋζιανή ανάλυση και ένας νέος αλγόριθμος που τροποποιεί τον αλγόριθμο LMS με αυστηρή κατωφλίωση για την εκτίμηση αραιών αναπαραστάσεων. Τέλος γίνεται παρουσίαση δύο σημαντικών εφαρμογών. Η πρώτη έχει να κάνει με εντοπισμό ακουστικών πηγών και αντιμετωπίζεται με δύο τρόπους, την εκτίμηση της χρονικής καθυστέρησης σε ένα ζεύγος μικροφώνων και την εκτίμηση της γωνίας άφιξης σε γραμμική συστοιχία μικροφώνων. Η δεύτερη έχει να κάνει με εκτίμηση φάσματος με συχνότητα δειγματοληψίας μικρότερη του Nyquist rate σε συσκευές γνωστικού ραδιοδικτύου.

**Λέξεις-κλειδιά:** αραιές αναπαραστάσεις, γραμμική παλινδρόμηση, εντοπισμός ακουστικής πηγής, εκτίμηση φάσματος, γνωστικά ραδιοδίκτυα.

# Abstract

Sparse representations are a useful tool in a wide range of practical applications. Scientific work in the domain known as Compressive Sampling has allowed the efficient exploitation of sparse representations. This work firstly presents the central notions relative to sparse representations. Additionally, it discusses the formulation of optimization problems which arise in Compressive Sampling and the theoretical guarantees for these problems. Moreover it presents widespread algorithms in the bibliography such as Basis Pursuit, Lasso and Matching Pursuit for the static estimation of sparse representations. This work also includes algorithms for dynamic estimation of sparse representations. Firstly, the general algorithms RLS and LMS are presented. An algorithm for sparse representations based on the variational bayes framework is also presented. Then we introduce a variation of the classical LMS algorithm which adds hard thresholding to estimate sparse representations. Finally, two practical applications are studied. The first one has to do with the localization of sound sources through two different ways, by estimating the time difference between a pair of microphones and by estimating the angle of arrival in a linear array of microphones. The second application has to do with spectrum estimation with sampling rates below the Nyquist rate for devices used for cognitive radios.

**Key-words:** sparse representations, linear regression, acoustic source localization, spectrum estimation, cognitive radios.

# Ευχαριστίες

Πρώτον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Π. Μαραγκό για τον χρόνο που διέθεσε κάτω από δύσκολες συνθήκες για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Χωρίς την συνδρομή του καθώς και την κατανόησή του η εργασία μπορεί να μην έφτανε στην σημερινή της μορφή.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σέργιο Θεοδωρίδη , Καθηγητή του τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Αθηνών καθώς χωρίς την συνδρομή του βιβλίου του [19], η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής θα ήταν σαφώς πιο δύσκολη.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές μου , που τα πέντε αυτά χρόνια με υποστήριξαν στις προσπάθειες μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που όλα τα χρόνια της ζωής μου μου στάθηκαν με το δικό τους μοναδικό τρόπο ώστε να φτάσω στο σημείο που βρίσκομαι σήμερα.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>13</b>
1.1	Η ανάγκη για αραιές αναπαραστάσεις . . . . .	14
1.2	Εφαρμογές αραιών αναπαραστάσεων . . . . .	15
1.3	Κεντρική ερευνητική κατεύθυνση και συμβολές της εργασίας . .	16
<b>2</b>	<b>Θεωρία και αλγόριθμοι στατικών αραιών αναπαραστάσεων</b>	<b>18</b>
2.1	Εισαγωγικές έννοιες . . . . .	19
2.2	Η προσέγγιση της $\ell_0$ νόρμας . . . . .	21
2.3	Η γραμμική παλινδρόμηση ως πρόβλημα μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας (maximum likelihood) . . . . .	23
2.3.1	Το μοντέλο του λευκού γκαουσιανού θορύβου . . . . .	24
2.4	Εκτίμηση εκ των υστέρων μεγιστοποίησης πιθανότητας (maximum a posteriori probability estimate) . . . . .	27
2.4.1	Ανακατασκευή με $\ell_2$ νόρμα . . . . .	27
2.4.2	Κατανομές με βαριές ουρές . . . . .	31
2.4.3	Ανακατασκευή με $\ell_1$ νόρμα . . . . .	32
2.5	Γιατί $\ell_1$ νόρμα; . . . . .	35
2.6	Θεωρητικές εγγυήσεις για την ανακατασκευή μέσω $\ell_1$ νόρμας . .	38
2.7	Κατασκευή κατάλληλων πινάκων . . . . .	40
2.8	Ο αλγόριθμος του Basis Pursuit . . . . .	41
2.9	Ο αλγόριθμος Lasso . . . . .	44
2.10	Οι αλγόριθμοι Matching Pursuit . . . . .	47
2.10.1	Matching Pursuit . . . . .	48
2.10.2	Orthogonal Matching Pursuit . . . . .	49
2.10.3	Compressed Sensing Matching Pursuit . . . . .	52
2.11	Αλγόριθμοι επαναληπτικής συρρίκνωσης (Iterative Shrinkage) . .	55
2.11.1	Αυστηρή κατωφλίωση (Hard Thresholding) . . . . .	56
2.11.2	Ελαστική κατωφλίωση (Soft Thresholding) . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Θεωρία και αλγόριθμοι προσαρμοστικών αραιών αναπαραστάσεων</b>	<b>61</b>
3.1	Προσαρμοστική παλινδρόμηση . . . . .	62
3.2	Ο αλγόριθμος Recursive Least Squares . . . . .	64
3.3	Ο αλγόριθμος Least Mean Squares . . . . .	66



3.4	Συνεργατική ή Κατανεμημένη Μάθηση . . . . .	70
3.5	Προσαρμογή βασισμένη σε μεθόδους μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης (Variational Bayes) . . . . .	72
3.6	Ο αλγόριθμος NLMS με αυστηρό κατώφλι . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές</b>	<b>86</b>
4.1	Εντοπισμός ακουστικής πηγής . . . . .	87
4.1.1	Εύρεση καθυστέρησης μέσω αραιότητας . . . . .	88
4.1.2	Εύρεση γωνίας έλευσης σε γραμμικές συστοιχίες . . . . .	91
4.2	Γνωστικά ραδιοδίκτυα και αραιές αναπαραστάσεις . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>100</b>
5.1	Βασική συνεισφορά εργασίας . . . . .	101
5.2	Πιθανοί προσανατολισμοί μελλοντικής έρευνας . . . . .	102

# Κατάλογος σχημάτων

2.1	Ελάχιστα τετράγωνα και υπερπροσαρμογή . . . . .	26
2.2	Εκτίμηση αραιής κρουστικής απόκρισης με $\ell_2$ νόρμα . . . . .	29
2.3	Σύγκριση κατανομής Student με κανονική . . . . .	33
2.4	Σύγκριση κατανομής Laplace με κανονική . . . . .	34
2.5	Γεωμετρική σύγκριση $\ell_2$ και $\ell_1$ νόρμας . . . . .	36
2.6	Σύγκριση των $\ell_p$ νορμών . . . . .	37
2.7	Παράδειγμα ανακατασκευής με τον αλγόριθμο Basis Pursuit . . .	42
2.8	Μελέτη ανακατασκευής με τον αλγόριθμο Basis Pursuit . . . . .	43
2.9	Μελέτη ανακατασκευής με τον αλγόριθμο Lasso . . . . .	46
2.10	Μελέτη ανακατασκευής με τον αλγόριθμο Orthogonal Matching Pursuit . . . . .	51
2.11	Μελέτη ανακατασκευής με Compressed Sensing Matching Pursuit	54
2.12	Μελέτη ανακατασκευής με τον αλγόριθμο επαναληπτικής συρρίκνωσης με αυστηρή κατωφλίωση . . . . .	58
2.13	Σύγκριση αυστηρής και ελαστικής κατωφλίωσης . . . . .	59
3.1	Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος του Adaptive Filtering	63
3.2	Η σημασία της παραμέτρου $\lambda$ του RLS υπό θόρυβο . . . . .	67
3.3	Η σημασία της παραμέτρου $\lambda$ του RLS για μεταβαλλόμενα συστήματα . . . . .	68
3.4	Η σημασία της παραμέτρου $\mu$ του NLMS . . . . .	70
3.5	Το Μπεϋζιανό δίκτυο εξαρτήσεων για την εύρεση αραιών διανυσμάτων μέσω μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης . . . . .	73
3.6	Σύγκριση επίδοσης προσαρμοστικών αλγορίθμων μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης . . . . .	76
3.7	Σύγκριση NLMS με NLMS με αυστηρή κατωφλίωση . . . . .	77
3.8	Σύγκριση NLMS με NLMS με καθυστερημένη αυστηρή κατωφλίωση	80
3.9	Σύγκριση NLMS με NLMS με αυστηρή κατωφλίωση που υποεκτιμά την αραιότητα . . . . .	82
3.10	Σύγκριση συνεργατικού NLMS με συνεργατικού NLMS με αυστηρή κατωφλίωση . . . . .	85
4.1	Εύρεση καθυστέρησης μέσω αραιότητας . . . . .	90

4.2	Εύρεση καθυστέρησης μέσω αραιότητας με πολυδιαδρομική διάδοση . . . . .	91
4.3	Εύρεση κατανομής ισχύος πηγών σε γραμμική συστοιχία μέσω αραιότητας . . . . .	94
4.4	Εντοπισμός φάσματος επαλληλίας ημίτονων μέσω αραιότητας . .	97
4.5	Εντοπισμός φάσματος Gabor σημάτων μέσω αραιότητας . . . . .	98
4.6	Εντοπισμός φάσματος Gabor σημάτων μέσω αραιότητας υποεκτιμώντας την αραιότητα . . . . .	99

## Κατάλογος πινάκων

3.1	Συγκεντρωτική σύγκριση αλγορίθμων αυστηρής κατωφλίωσης . .	84
4.1	Επίδοση εύρεσης καθυστέρησης με αραιότητα . . . . .	92

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

## 1.1 Η ανάγκη για αραιές αναπαραστάσεις

Πολλές επιστημονικές περιοχές ασχολούνται με την μοντελοποίηση των φαινομένων που συμβαίνουν γύρω μας. Μια από τις πιο μοντέρνες είναι η περιοχή της Μηχανικής Μάθησης (Machine Learning) που προσπαθούν να μοντελοποιήσουν τα φαινόμενα του κόσμου μας με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κατανοητά από μια υπολογιστική μηχανή. Τα μοντέλα αυτά για να αντιμετωπίσουν όλο ένα και πιο δύσκολες εφαρμογές γίνονται πολλές φορές όλο ένα πιο δύσκολα. Για να είναι δυνατή λοιπόν η εκμάθηση τέτοιων μοντέλων από υπολογιστικές μηχανές συνήθως απαιτείται ένας μεγάλος όγκος δεδομένων για τον προσδιορισμό ενός μεγάλου πλήθους παραμέτρων που αφορούν το προς εξέταση περίπλοκο μοντέλο. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό και ως κατάρρα της διαστατικότητας (Curse of Dimensionality).

Μια άμεση λύση είναι οι μέθοδοι που έχουν κατά καιρούς προταθεί στην βιβλιογραφία για την μείωση του πλήθους των διαστάσεων. Αν και πολύ επιτυχές το σκεπτικό αυτό γενικά είναι εγγυημένο ότι θα χάσουμε μέρος των δυνατοτήτων του μοντέλου μας κάνοντας χρήση τέτοιων μεθόδων. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού έχει αναδειχθεί ένα ακόμα σκεπτικό. Σύμφωνα με το σκεπτικό αυτό, το μοντέλο θα πρέπει να κατασκευαστεί ώστε να επιτρέπει την ύπαρξη πολλών παραμέτρων αλλά κάθε παρατήρηση του υπό εξέταση φαινομένου θα πρέπει να μπορεί να εξηγηθεί κάνοντας χρήση μόνο ενός μικρού μέρους του συνόλου των παραμέτρων. Αυτό το σκεπτικό οδήγησε στην ανάδειξη των αραιών αναπαραστάσεων (*sparse representations*).

Αλλά και σε άλλες περιοχές όπως η Επεξεργασία Σήματος (Signal Processing) οι αραιές αναπαραστάσεις έχουν αρκετές εφαρμογές στην μοντελοποίηση και επεξεργασία σημάτων είτε μονοδιάστατων όπως φωνή είτε διδιάστατων όπως εικόνα. Με την μοντελοποίηση αυτή η επεξεργασία και λήψη σημάτων ειδικών εφαρμογών γίνεται πιο εύρωστη από την γενική περίπτωση.

Ένα κίνητρο για αυτή την προσέγγιση των αραιών αναπαραστάσεων είναι μια θεωρία γνωστή ως ξυράφι του Όκαμ (Occam's Razor). Πολλές ερμηνείες της αρχής του William of Ockham εξηγούν ότι αν έχουμε ένα απλό και ένα πιο σύνθετο μοντέλο που εξηγούν πλήρως τις παρατηρήσεις μας, πιο πιθανό είναι το απλούστερο να είναι ορθότερο. Οπότε έχουμε λοιπόν ένα λόγο να αναζητούμε τις πιο οικονομικές αναπαραστάσεις. Θεωρητικά θα μπορούσε να πει κάποιος βασιζόμενος στα παραπάνω ότι αν για κάθε φαινόμενο φτιάχναμε τον χώρο με όλες τις δυνατές εξηγήσεις των παρατηρήσεων του τότε κάθε παρατήρηση θα έπρεπε να αντιστοιχίζεται στην πιο αραιή αναπαράσταση που την εξηγεί. Εν δυνάμει δηλαδή οι αραιές αναπαραστάσεις βρίσκονται παντού γύρω μας απλά περιμένουν υπομονετικά να ανακαλυφθούν.

Το πρόβλημα αυτό λοιπόν είχε κάθε λόγο να απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα. Το ενδιαφέρον αυτό οδήγησε στην δημιουργία της ξεχωριστής κοινότητας που ασχολείται με τις τεχνικές της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας (Compressive Sampling) ή της Συμπιεσμένης Αίσθησης (Compressed Sensing)

όπως είναι επίσης γνωστή η περιοχή.

## 1.2 Εφαρμογές αραιών αναπαραστάσεων

Στην προηγούμενη ενότητα σχιαγραφήσαμε μερικούς από τους τομείς όπου οι αραιές αναπαραστάσεις έχουν εφαρμογές. Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε μερικές σημαντικές εφαρμογές των αραιών αναπαραστάσεων.

Η εφαρμογή που είναι συνδεδεμένη με την θεωρία του της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας είναι η ανακατασκευή εικόνων Μαγνητικής Τομογραφίας (Magnetic Resonance Imaging-MRI). Στην εφαρμογή αυτή μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ικανοποιητικά την εικόνα της Μαγνητικής Τομογραφίας παίρνοντας δείγματα του χωρικού Διακριτού Μετασχηματισμού Φουριέ (Discrete Fourier Transform - DFT) μόνο σε μερικές διευθύνσεις της εικόνας. Η ειδική τεχνική ανακατασκευής που χρησιμοποιείται μας επιτρέπει να παίρνουμε λιγότερα δείγματα από όσα προβλέπει ο ρυθμός δειγματοληψίας του Nyquist.

Η εφαρμογή αυτή είναι ένα μόνο παράδειγμα από ένα σύνολο εφαρμογών που έχουν ως στόχο την μείωση των απαιτούμενων δειγμάτων για την ανακατασκευή ενός σήματος. Το σκεπτικό που ακολουθούν είναι ότι αν το λαμβανόμενο σήμα γενικά είναι με κάποιο τρόπο συμπιέσιμο τότε δεν χρειάζεται να δειγματοληπτηθεί πλήρως εξ αρχής. Παρόμοιες ιδέες μπορούν να εφαρμοστούν και σε άλλα είδη απεικονίσεων όπως δεδομένα από ραντάρ.

Μια ακόμη ιατρική εφαρμογή των αραιών αναπαραστάσεων είναι ο εντοπισμός της εγκεφαλικής δραστηριότητας από συσκευές Ηλεκτρονικού Εγκεφαλογράφηματος (ElectroEnceelography - EEG). Η συσκευή τοποθετείται πάνω στο κεφάλι ενός ατόμου και μετρά την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου σε ορισμένα σημεία. Το πλήθος των αισθητήρων είναι πολύ μικρό για να εντοπιστεί στο σύνολο του όγκου του εγκεφάλου ποια περιοχή έχει ενεργοποιηθεί αλλά πιθανολογούμε ότι σε απλές δραστηριότητες το πλήθος των περιοχών θα είναι μικρό. Οπότε οδηγούμαστε άμεσα στις αραιές αναπαραστάσεις και στην δυνατότητα μείωσης των απαιτούμενων δειγμάτων.

Οι αραιές αναπαραστάσεις έχουν εφαρμογές και σε πολλά τηλεπικοινωνιακά προβλήματα. Η πιο άμεση εφαρμογή είναι στη διόρθωση σφαλμάτων. Για την πιο εύρωστη μετάδοση μετάδοση πληροφοριών τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα τείνουν να στέλνουν περισσότερα δείγματα από όσα είναι απαραίτητα για την ανακατασκευή του σήματος υπό ιδανικές συνθήκες. Στο μεγάλο πλήθος δειγμάτων λοιπόν αναμένουμε να έχουμε ένα μικρό πλήθος σφαλμάτων. Δηλαδή αυτό που αναπαρίσταται με αραιό τρόπο είναι το σφάλμα των δειγμάτων και όχι το ίδιο το σήμα που μεταδίδεται. Οπότε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε καλύτερα το σφάλμα μπορούμε να εκτιμήσουμε αντίστοιχα μετά και το σήμα.

Οι εφαρμογές στον τομέα των τηλεπικοινωνιών δεν τελειώνουν εκεί. Ένα πολύ σημαντικό ζητούμενο στις ασύρματες τηλεπικοινωνιακές ζεύξεις είναι ο

προσδιορισμός της κατάστασης του καναλιού της ζεύξης (Chanel State Information - CSI). Πολλές φορές η κατάσταση του καναλιού επηρεάζεται από σχετικά λίγους παράγοντες όπως ανακλάσεις πάνω σε εμπόδια. Οπότε μας δίνεται κίνητρο να εκτιμήσουμε την κρουστική απόκριση του καναλιού με μια τεχνική αραιής αναπαράστασης. Το αποτέλεσμα είναι οι εκτιμήσεις μας να είναι πιο εύστοχες και να προσαρμόζονται σχετικά γρήγορα στην μεταβαλλόμενη φύση του προβλήματος.

Τέλος οι αραιές αναπαραστάσεις δεν βοηθούν μόνο στην επισκόπηση της κατάστασης μόνο μιας ζεύξης αλλά και πολλών ζεύξεων μαζί ή καλύτερα ενός ασύρματου δικτύου. Τώρα το πρόβλημα είναι ο εντοπισμός των καθυστερήσεων σε ένα δίκτυο από συσκευές που επικοινωνούν με ασύρματο τρόπο. Επειδή η άμεση επικοινωνία κάθε συσκευής με κάθε άλλη δεν είναι πάντα εφικτή οι συσκευές στέλνουν τα μηνύματα που απευθύνονται στους μακρινούς τους γείτονες στους άμεσους γείτονες τους ώστε αυτοί εκ νέου να το στείλουν στους δικούς τους γείτονες μέχρι να φτάσουν στον τελικό παραλήπτη. Άρα μια καθυστέρηση σε μια σύνδεση μπορεί να προκαλέσει μια συνολική καθυστέρηση σε ένα αρκετά μεγάλο μέρος του δικτύου. Κάνοντας πάλι χρήση της αρχής του ξυραφιού του Όκαμ αναμένουμε και πάλι σχετικά λίγες καθυστερήσεις να είναι η πιο πιθανή εξήγηση για μια γενική συμφόρηση μέσα στο δίκτυο. Οπότε και πάλι οδηγούμαστε σε αραιές αναπαραστάσεις. Ως εκ τούτου εκμεταλλευόμενοι τις διαθέσιμες τεχνικές μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος των δοκιμαστικών πακέτων για την εξαγωγή της κατάστασης του δικτύου.

Οι παραπάνω εφαρμογές αποτελούν μερικά ενδεικτικά παραδείγματα του συνόλου των εφαρμογών που αφορούν την περιοχή της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας που με τον καιρό έχει γίνει αρκετά διεπιστημονική.

### **1.3 Κεντρική ερευνητική κατεύθυνση και συμβολές της εργασίας**

Η εργασία αυτή έχει ως σκοπό να καλύψει ένα εύρος από θέματα που αφορούν την περιοχή των αραιών αναπαραστάσεων. Θα ξεκινήσουμε από την θεωρητική βάση πίσω από τις αραιές αναπαραστάσεις και τις σχετικές τεχνικές. Δεν θα περιοριστούμε σε στατικά προβλήματα αλλά θα προχωρήσουμε και σε τεχνικές επίλυσης δυναμικών - προσαρμοστικών προβλημάτων. Δεν θα παραλείψουμε όμως να εξετάσουμε αναλυτικότερα μερικές εφαρμογές της θεωρίας. Συγκεκριμένα

1. Στο Κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία για την ανάλυση που θα ακολουθήσει καθώς και μερικούς από τους αλγορίθμους που χρησιμοποιούνται για την ανακατασκευή των αραιών αναπαραστάσεων για στατικά προβλήματα.
2. Στο Κεφάλαιο 3 θα συνεχίσουμε την ανάλυση μας σε προσαρμοστικά



προβλήματα αναλύοντας την σχετική θεωρία και επιδεικνύοντας τα αποτελέσματα ενός επιτυχημένου αλγορίθμου και προτείνοντας έναν καινούργιο.

3. Στο Κεφάλαιο 4 θα αναλύσουμε σε περισσότερο βάθος δύο εφαρμογές της περιοχής. Η πρώτη είναι ο εντοπισμός ακουστικών πηγών και η δεύτερη είναι η εκτίμηση φάσματος για εφαρμογές σε γνωστικά ραδιοδίκτυα.
4. Στο Κεφάλαιο 5 θα γίνει μια εκ νέου σύνοψη της συνεισφοράς της εργασίας και θα αναλυθούν πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

## Κεφάλαιο 2

Θεωρία και αλγόριθμοι  
στατικών αραιών  
αναπαραστάσεων

## 2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Τον χώρο  $\mathbb{R}^N$  μπορούμε να τον δούμε ως έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο Hilbert με το γνωστό εσωτερικό γινόμενο και πολλαπλασιασμό με πραγματικό βαθμωτό. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε σε αυτόν νόρμες με τις γνωστές ιδιότητες. Η νόρμα που αντιστοιχεί άμεσα στο εσωτερικό γινόμενο του χώρου είναι η  $\ell_2$  νόρμα που αποτελεί την γενίκευση της Ευκλείδειας απόστασης στις περισσότερες διαστάσεις. Έστω λοιπόν  $\mathbf{x}$  ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$ . Τότε η  $\ell_2$  νόρμα ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (2.1)$$

όπου  $x_i$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{x}$ .

Η παραπάνω νόρμα δεν είναι η μοναδική καθώς και άλλες συναρτήσεις μπορούν να ικανοποιήσουν τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια συνάρτηση για να είναι νόρμα για έναν χώρο. Συγκεκριμένα μπορούμε να δούμε την παραπάνω νόρμα σαν μια ειδική περίπτωση της  $\ell_p$  νόρμας όπου  $p$  ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Έστω και πάλι  $\mathbf{x}$  ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$ . Τότε η  $\ell_p$  νόρμα ορίζεται ως:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

Είναι προφανές ότι η  $\ell_2$  είναι ειδική περίπτωση της  $\ell_p$  για  $p = 2$ . Μια ακόμη ειδική περίπτωση της  $\ell_p$  είναι η  $\ell_1$ . Έστω  $\mathbf{x}$  ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$ . Τότε η  $\ell_1$  νόρμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (2.3)$$

Αν στον τύπο της  $\ell_p$  νόρμας θέσουμε για  $p$  έναν αριθμό μικρότερο της μονάδας αλλά θετικό δεν θα πάρουμε νόρμα καθώς η συνάρτηση που θα προκύπτει δεν θα σέβεται την τριγωνική ιδιότητα. Ούτε αν θέσουμε όπου  $p$  το 0 θα πάρουμε κάποια νόρμα. Καθώς όμως θα μας χρειαστεί αργότερα θα γράψουμε τον τύπο που προκύπτει. Για ακόμη μια φορά έστω ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$ , τότε η  $\ell_0$  νόρμα (καταχρηστικά) ενός διανύσματος  $\mathbf{x}$  μπορεί να γραφτεί ως:

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \#\{i | x_i \neq 0\} \quad (2.4)$$

δηλαδή ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων ενός διανύσματος.

Με βάση την τελευταία νόρμα μπορούμε να ορίσουμε μια πολύ σημαντική έννοια που θα μας απασχολήσει, την αραιότητα ενός διανύσματος. Συγκεκριμένα θα λέμε ότι ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^N$  είναι  $s$ -αραιό με  $s$  φυσικό αριθμό αν ισχύει ότι

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq s \quad (2.5)$$

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει διαισθητικά ότι ένα διάνυσμα είναι αραιό αν πολλές συνιστώσες του είναι μηδενικές. Επίσης θα μας απασχολήσει μια πιο ευρεία κατηγορία διανυσμάτων, αυτά που είναι αραιά σε μια βάση του χώρου  $\mathbb{R}^N$ . Έστω  $\Phi$  ένας πίνακας με  $N$  γραμμές και  $N$  στήλες, του οποίου οι στήλες αποτελούνται από τα διανύσματα μιας βάσης του χώρου  $\mathbb{R}^N$ . Τότε λέμε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^N$  είναι  $s$ -αραιό στην βάση που αντιστοιχεί στον πίνακα  $\Phi$  αν  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{u}$  και το  $\mathbf{u}$  είναι  $s$ -αραιό.

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει διαισθητικά ότι ένα διάνυσμα είναι αραιό σε μια βάση αν μπορεί να εκφραστεί σαν μια γραμμική επαλληλία από λίγα από τα διανύσματα βάσης. Επίσης είναι προφανές ότι η απλή περίπτωση αραιότητας αντιστοιχεί στην επιλογή του ταυτοτικού πίνακα ως πίνακα  $\Phi$  οπότε αποτελεί μια υποπερίπτωση.

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την λήψη μετρήσεων από διανύσματα με σκοπό την ανακατασκευή τους και ειδικά με την περίπτωση όπου το πλήθος των μετρήσεων θα είναι μικρότερο από την διάσταση του διανύσματος. Θα περιοριστούμε όμως σε γραμμικές διαδικασίες δειγματοληψίας οπότε πρακτικά στην γενικότερη περίπτωση αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί με έναν πολλαπλασιασμό του διανύσματος με έναν πίνακα  $\Psi$ . Οπότε αν έχουμε  $M$  μετρήσεις ενός διανύσματος  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^N$  με έναν πίνακα  $\Psi$  με  $M$  γραμμές και  $N$  στήλες (και τις περισσότερες φορές θα ισχύει  $M < N$ ) θα ισοδυναμεί με την λήψη του διανύσματος που ακολουθεί την εξής εξίσωση

$$\mathbf{y} = \Psi \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Θα μας ενδιαφέρει γενικά η δειγματοληψία αραιών διανυσμάτων ή αραιών διανυσμάτων σε κάποια βάση του χώρου. Για τα διανύσματα που είναι αραιά από μόνα τους το παραπάνω μοντέλο θα μας είναι αρκετό. Εύκολα όμως μπορούμε να ενσωματώσουμε και την γενικότερη περίπτωση στο ίδιο μοντέλο αφού

$$\mathbf{y} = \Psi \mathbf{x} = (\Psi \Phi) \mathbf{u} \quad (2.7)$$

οπότε έχουμε πάλι πολλαπλασιασμό πίνακα με αραιό διάνυσμα. Στη συνέχεια λοιπόν δεν θα κάνουμε καμία διάκριση μεταξύ των δύο προβλημάτων τις περισσότερες φορές οπότε θα αναφερόμαστε και στα δύο προβλήματα με μια κοινή εξίσωση

$$\mathbf{y} = A \mathbf{x} \quad (2.8)$$

όπου ο πίνακας  $A$  θα είναι είτε ίσος με  $\Psi$  είτε με  $\Psi \Phi$  κατά περίπτωση.

Καθώς δεν είναι ρεαλιστικό να υποθέτουμε πάντα ιδανικές διαδικασίες το πρόβλημα μας θα πρέπει να γενικευθεί για να μπορεί να προβλέπει θόρυβο στις μετρήσεις μας. Για αυτό θα προσθέσουμε έναν όρο θορύβου στην διατύπωση του προβλήματος μας. Έστω λοιπόν  $\mathbf{e}$  ένα διάνυσμα στήλη του  $\mathbb{R}^M$  τότε το πρόβλημα μας έχει ως κεντρική εξίσωση την

$$\mathbf{y} = A \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.9)$$

Η εκτίμηση του διανύσματος  $\mathbf{x}$  με γνωστό πίνακα  $A$  και μετρήσεις  $\mathbf{y}$  όταν τα μεγέθη αυτά ακολουθούν την εξίσωση (2.9) είναι γνωστό ως πρόβλημα γραμμικής παλινδρόμησης.

Τέλος καθώς θα μας ενδιαφέρουν αρκετά οι ιδιότητες των πινάκων όταν εφαρμόζονται πάνω σε αραιά διανύσματα θα ορίσουμε την ιδιότητα της περιορισμένης ισομετρίας (Restricted Isometry Property) που θα την αναφέρουμε με τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης ως RIP. Θα λέμε λοιπόν ότι ο πίνακας  $A$  ικανοποιεί την ιδιότητα RIP με μια σταθερά  $\delta_s$  για  $s$ -αραιά διανύσματα αν η  $\delta_s$  είναι η ελάχιστη τιμή για την οποία ισχύει για όλα τα  $s$ -αραιά διανύσματα  $\mathbf{x}$  το εξής

$$(1 - \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|A\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.10)$$

Η έννοια της RIP εμφανίζεται και στο άρθρο [4]. Την χρησιμότητα της έννοιας αυτής θα την δούμε στην συνέχεια. Προς το παρόν θα αρκεστούμε στην διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας αυτής. Αν ένας πίνακας ικανοποιεί την ιδιότητα RIP με μια μικρή σταθερά  $\delta_s$  για  $s$ -αραιά διανύσματα τότε πρακτικά για αυτά τα διανύσματα έχει την συμπεριφορά ενός ορθογώνιου πίνακα που βοηθά στον διαχωρισμό των αραιών διανυσμάτων μεταξύ τους.

## 2.2 Η προσέγγιση της $\ell_0$ νόρμας

Στην προσπάθεια μας να εξειδικεύσουμε τι ιδιότητες θα πρέπει να έχει ο πίνακας της εξίσωσης (2.8) ώστε να επιτρέπει την ανακατασκευή αραιών σημάτων θα προσεγγίσουμε το ζητούμενο υπό το πρίσμα της  $\ell_0$  νόρμας.

Καθώς το διάλυμα λύση θα πρέπει να είναι αραιό θα πρέπει να απαιτήσουμε η  $\ell_0$  να είναι μικρή. Γενικά στις περισσότερες εφαρμογές είναι δύσκολο να ξέρει κανείς την αραιότητα του προς εκτίμηση διανύσματος. Για αυτό μια προοπτική είναι να ζητήσουμε το αραιότερο διάλυμα που ικανοποιεί την εξίσωση (2.8). Συνοπτικά λοιπόν μπορούμε να γράψουμε την απαίτηση μας αυτή ως εξής:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_0 : \mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad (2.11)$$

Αν και το πρόβλημα απέκτησε μια πιο σαφή διατύπωση, δεν είναι απαραίτητα καλώς ορισμένο γιατί μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις που ελαχιστοποιούν την  $\ell_0$  νόρμα και δίνουν και τις μετρήσεις που έχουμε. Θα θέλαμε λοιπόν να βρούμε μια συνθήκη που να μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης του παραπάνω προβλήματος.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν την προσπάθεια μας : Μια λογική προσπάθεια είναι να επιχειρήσουμε να πάμε με άτοπο οπότε έστω δύο λύσεις του παραπάνω προβλήματος  $\mathbf{x}_1$  και  $\mathbf{x}_2$ . Δεν είναι δύσκολο να κατανοήσουμε ότι

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y} = 0 \quad (2.12)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι τα δύο διανύσματα έχουν κοινή  $\ell_0$  νόρμα έστω  $s$ . Όμοια με παραπάνω θα δείξουμε κάτι αντίστοιχο για την  $\ell_0$  νόρμα της διαφοράς τους. Δεδομένου ότι η  $\ell_0$  νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε ότι

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_0 \leq \|\mathbf{x}_1\|_0 + \|\mathbf{x}_2\|_0 = 2s$$

Έχουμε λοιπόν ένα διάνυσμα που ικανοποιεί την εξίσωση  $\mathbf{x} = 0$  και έχει  $\ell_0$  νόρμα το πολύ  $2s$ . Για να καταλήξουμε σε άτοπο αρκεί να δώσουμε στον πίνακα μας την ιδιότητα να απαγορεύει να συμβαίνει κάτι τέτοιο δηλαδή

$$\forall \mathbf{x} \neq 0 : A\mathbf{x} = 0 \rightarrow \|\mathbf{x}\|_0 > 2s \quad (2.13)$$

Ας ορίσουμε ένα βοηθητικό μέγεθος για τον πίνακα μας που θα μας βοηθήσει για την ανάλυση στην συνέχεια. Θα ορίσουμε πρακτικά το άνω φράγμα για την τιμή του  $2s$  στην παραπάνω εξίσωση δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό συνιστωσών που πρέπει να έχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα έτσι ώστε να απεικονίζεται μέσω του πίνακα  $A$  στο μηδενικό διάνυσμα. Ας το ονομάσουμε το μέγεθος  $\text{spark}$  του πίνακα  $A$  και ας το γράψουμε πιο φορμαλιστικά ως

$$\text{spark}(A) = \min_{\mathbf{x} \neq 0} \|\mathbf{x}\|_0 : A\mathbf{x} = 0 \quad (2.14)$$

Το  $\text{spark}$  με άλλα λόγια ισούται με το ελάχιστο πλήθος στηλών του πίνακα  $A$  που είναι γραμμικά εξαρτημένες. Ας δούμε πως αυτό το μέγεθος διαφοροποιείται από ένα άλλο γνωστό μέγεθος της γραμμικής άλγεβρας, το  $\text{rank}$ . Το  $\text{rank}$  ενός πίνακα είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του πίνακα. Οπότε για τον πίνακα

$$A_{ex} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

έχουμε ότι  $\text{rank}(A_{ex}) = 3$  καθώς ο πίνακας έχει τις πρώτες τρεις στήλες γραμμικά ανεξάρτητες ενώ το  $\text{spark}(A_{ex}) = 2$  καθώς η πρώτη και η τέταρτη στήλη ταυτίζονται άρα έχουμε δύο γραμμικά εξαρτημένες στήλες οπότε το  $\text{spark}(A_{ex})$  είναι το πολύ 2 αλλά καθώς δεν υπάρχουν μηδενικές στήλες είναι ακριβώς 2.

Οπότε καταλήγουμε λοιπόν σε μια ικανή συνθήκη για την ανάκτηση του διανύσματος μας ύστερα από τον πολλαπλασιασμό του με ένα πίνακα .

**Θεώρημα 1.** Έστω ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$  που είναι  $s$ -αραιό και ένας πίνακας  $A$  με  $\text{spark}(A) > 2s$ . Τότε το αρχικό διάνυσμα μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο από το  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  λύνοντας το πρόβλημα :

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \|\mathbf{x}\|_0 : \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

Με το θεώρημα αυτό βρήκαμε μια ικανή συνθήκη για την ανακατασκευή του αραιού διανύσματος μας. Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μια εξάρτηση από την λύση του προβλήματος. Αυτό ίσως να το περιμέναμε και ίσως είναι και επιθυμητό αφού θέλουμε όσο πιο ισχυρά ισχύει η υπόθεση μας για την αραιότητα του σήματος να έχουμε πιο εύκολη ανάκτηση. Αν έχουμε ένα ζεύγος τιμών  $N, M$  για το μέγεθος του διανύσματος και το επιθυμητό πλήθος μετρήσεων αντίστοιχα πρακτικά το θεώρημα μας μας προτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα σχετικών διαστάσεων με το μεγαλύτερο spark για να έχουμε βέλτιστα αποτελέσματα.

Βέβαια το μέγεθος spark δεν μας επιτρέπει να δούμε ξεκάθαρα πόσο μεγάλη δυνατότητα μείωσης της δειγματοληψίας μπορούμε να έχουμε. Για αυτό θα θέσουμε ένα άνω φράγμα για το spark. Δεδομένου ότι οι στήλες του πίνακα  $A$  είναι διανύσματα του  $\mathbb{R}^M$ , με  $M$  το πλήθος των μετρήσεων, είναι προφανές ότι δεν μπορούν να υπάρχουν  $M + 1$  ανεξάρτητα τέτοια οπότε παίρνουμε άμεσα ένα άνω φράγμα

$$\text{spark}(A) \leq M + 1 \quad (2.16)$$

Δυστυχώς όμως η αναζήτηση μας τελειώνει κάπου εδώ γιατί φτάνουμε σε ένα πρακτικό πρόβλημα. Αν και η ανακατασκευή είναι θεωρητικά δεδομένη, η διαδικασία ανακατασκευής είναι υπολογιστικά ασύμφορη αν όχι αδύνατη. Δεν υπάρχουν γρήγοροι αλγόριθμοι για την εύρεση του spark ενός πίνακα οπότε είναι πρακτικά αδύνατο να επιβεβαιώσουμε με κάποιο τρόπο την δυνατότητα ανακατασκευής. Επίσης ακόμα και αν είχαμε κάποιο σχετικά καλό πίνακα η επίλυση του προτεινόμενου προβλήματος είναι πρακτικά αδύνατη για μεγέθη προβλημάτων που είναι χρήσιμα στις διάφορες εφαρμογές. Ακόμα και να γνωρίζαμε εκ των προτέρων την αραιότητα του σήματος το πρόβλημα θα παρέμενε συνδυαστικής φύσης αφού στην πράξη θα καλούμασταν να ελέγξουμε όλους τους συνδυασμούς μη μηδενικών συνιστωσών που έχουν την ζητούμενη αραιότητα.

Η αποτυχία μας δεν πρέπει να μας αποθαρρύνει ιδιαίτερα καθώς ακόμα και με αυτή την προσέγγιση μπορέσαμε να δούμε ότι η αραιότητα του σήματος είναι μια ιδιότητα που μπορεί να επιφέρει την αντιστρεψιμότητα σε μια κατά τα άλλα μη αντιστρέψιμη διαδικασία. Η πληροφορία δηλαδή υπάρχει κάπου μέσα στις μετρήσεις μας απλά προς το παρόν είναι πολύ καλά κρυμμένη για να την βρούμε αποτελεσματικά.

## 2.3 Η γραμμική παλινδρόμηση ως πρόβλημα μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας (maximum likelihood)

Αν παρατηρήσουμε το πρόβλημα που περιγράφει η εξίσωση (2.8) ίσως θα δυσκολευόμασταν να φανταστούμε πως μια στατιστική προσέγγιση να ήταν

χρήσιμη καθώς δεν μπορούμε να δούμε κάποια σύνδεση με την τυχαιότητα. Όλα τα μεγέθη που εμπλέκονται είναι ντετερμινιστικά. Οι μετρήσεις μας  $y$ , ο πίνακας δειγματοληψίας  $A$  καθώς και το διάνυσμα  $x$  που θέλουμε να ανακατασκευάσουμε είναι είτε σταθερά και γνωστά είτε έχουμε θεωρητικές εγγυήσεις όπως αυτές της προηγούμενης ενότητας ότι είναι σαφώς προσδιορισμένα ως λύσεις ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Όταν φτάσουμε όμως στο πρόβλημα της γραμμικής παλινδρόμησης και στην εξίσωση (2.9) η σύνδεση με τις πιθανότητες είναι πολύ πιο σαφής καθώς ο θόρυβος που εμπλέκεται είναι προφανώς μη ντετερμινιστικός. Φυσικά η αντιμετώπιση της τυχαιότητας του θορύβου θα πρέπει να είναι μόνο η αρχή καθώς ακόμα και χωρίς αυτόν δεν μπορούσαμε να ανακατασκευάσουμε το διάνυσμα μας αποτελεσματικά. Στην ενασχόληση μας με το πρόβλημα της γραμμικής παλινδρόμησης με την στατιστική οπτική γωνία βασική πηγή μας είναι το βιβλίο [20].

Σημαντικό εργαλείο λοιπόν στην αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι η μέθοδος της μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας. Στην μέθοδο αυτή πρακτικά έχουμε μια ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κάποιες γνωστές παραμετρικές κατανομές αλλά οι τιμές των παραμέτρων αυτών δυστυχώς μας είναι άγνωστες. Για αντιμετωπίσουμε όμως το πρόβλημα παίρνουμε μετρήσεις μιας συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής και ελπίζουμε να μας βοηθήσουν στην εύρεση των παραμέτρων. Η τεχνική της μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας πρακτικά επιδιώκει να βρει τις τιμές των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την πιθανότητα να έχουμε τις δεδομένες μετρήσεις.

Η μέθοδος αυτή φαίνεται να ταιριάζει με όσα επιζητούμε. Η παράμετρος της μετρούμενης τυχαίας μεταβλητής θα πρέπει να είναι το προς ανακατασκευή διάνυσμα μας  $x$ . Επίσης δεν φαίνεται να αποκλίνουμε σε σχέση με τα προηγούμενα καθώς και πάλι οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αυτό που θα κάνουμε λοιπόν είναι να δοκιμάζουμε διάφορα μοντέλα για τις τυχαίες μεταβλητές μας και να υπολογίζουμε με βάση αυτά την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων μας  $y$  που θα έχει ως παράμετρο το διάνυσμα  $x$  ή κάποια συνάρτηση αυτού.

### 2.3.1 Το μοντέλο του λευκού γκαουσιανού θορύβου

Το πιο γνωστό μοντέλο για της περισσότερες εφαρμογές είναι το μοντέλο του λευκού γκαουσιανού θορύβου όπου το διάνυσμα των σφαλμάτων  $e$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με τις συνιστώσες του να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κοινή διακύμανση και μέση τιμή 0.

Οπότε έχοντας το παραπάνω μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των σφαλμάτων σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$f_E(\mathbf{e}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_e^2})^M} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{e}\|_2^2}{2\sigma_e^2}\right) \quad (2.17)$$

Για το  $y$  δεδομένου ότι έχουμε απλά μια πρόσθεση με την σταθερά  $Ax$  η μόνη



αλλαγή είναι ότι παύουμε να έχουμε μηδενική μέση τιμή. Η νέα μέση τιμή είναι προφανώς  $A\mathbf{x}$  και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι ίση με

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_e^2})^M} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_e^2}\right) \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση των συνεχών κατανομών το μέγεθος που επιλέγουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί στις πραγματικές παρατηρήσεις μας, δηλαδή θέλουμε να βρούμε την τιμή του  $\mathbf{x}$  που μεγιστοποιεί την ποσότητα  $f_Y(\mathbf{y})$  όταν θέσουμε για  $\mathbf{y}$  τις μετρήσεις που λάβαμε. Αυτό ισοδυναμεί με το να πάρουμε ως εκτίμηση

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (2.19)$$

Το καλό σε σχέση με αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ότι μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα αναλυτικά και μας δίνει ότι οι λύσεις που ελαχιστοποιούν την νόρμα  $\ell_2$  του σφάλματος είναι λύσεις του συστήματος:

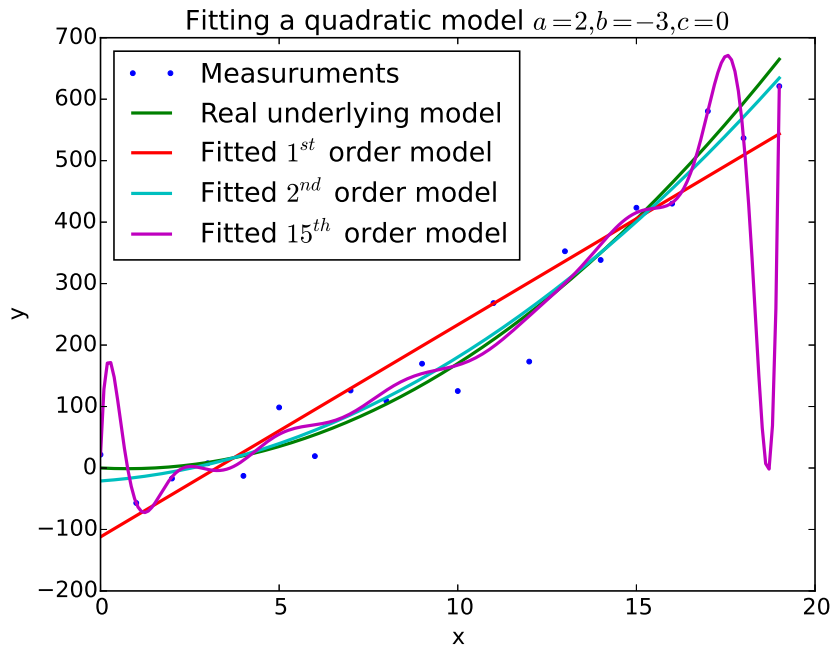
$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{y} \quad (2.20)$$

οπότε αν ο πίνακας  $A^T A$  είναι αντιστρέψιμος η εκτίμηση μας θα είναι μοναδική και θα μπορεί να γραφθεί ως

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} \quad (2.21)$$

Δεν χρειάζεται να διερευνήσουμε πάρα πολύ την κατάσταση για να δούμε ότι το μοντέλο αυτό δεν αποτελεί λύση για το πρόβλημα μας. Είναι προφανές ότι για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει δηλαδή  $M < N$  το σύστημα είναι υποορισμένο. Έτσι θα υπάρχουν άπειρα διανύσματα που θα ικανοποιούν την εξίσωση  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  και άρα θα δίνουν μηδενική νόρμα σφάλματος.

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι όταν η τιμή της νόρμας του σφάλματος βγαίνει πολύ μικρή δεν είναι απαραίτητο ότι η εκτίμηση μας θα είναι και πολύ καλή. Όπως παραπάνω υπάρχουν άπειρα βέλτιστα διανύσματα, μπορούμε να δούμε ότι γενικά υπάρχει ένα σημαντικό πρόβλημα με αυτή την μέθοδο. Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να βοηθήσει αν το πλήθος των μετρήσεων μας δεν είναι αρκετά μεγαλύτερο του πλήθους των προς εύρεση παραμέτρων. Μπορούμε να δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στο Σχήμα 2.1. Εκεί παρατηρούμε το φαινόμενο της υπερπροσαρμογής (*overfitting*). Ενώ το πραγματικό μας μοντέλο είναι δευτέρου βαθμού προσπαθούμε να το προσεγγίσουμε ως ένα μοντέλο δεκάτου πέμπτου με μόνο 20 μετρήσεις με θόρυβο. Οι ισχυρές διακυμάνσεις των όρων μεγάλης τάξης που χρησιμοποιούνται για την μείωση του σφάλματος οδηγούν σε αποκλίσεις από το πραγματικό μοντέλο σε σημεία ανάμεσα στις θορυβώδεις μετρήσεις μας. Αν δούμε το πρόβλημα υπό το σκεπτικό της αραιότητας τότε το μοντέλο δευτέρου βαθμού θα ήταν μια αραιή



Σχήμα 2.1: Το πραγματικό μας μοντέλο είναι της μορφής  $y = ax^2 + bx + c$ . Έχουμε συνολικά 20 μετρήσεις που τους έχει προστεθεί λευκός γκαουσιανός θόρυβος με τυπική απόκλιση 50. Για την εκτίμηση αυτού του μοντέλου χρησιμοποιούμε μοντέλα διαφόρων βαθμών. Στην περίπτωση του μοντέλου δεκάτου πέμπτου βαθμού, χρησιμοποιούνται οι επιπλέον βαθμοί ελευθερίας για την μείωση του σφάλματος αλλά αυτό δεν οδηγεί σε καλύτερη εκτίμηση του μοντέλου δευτέρου βαθμού καθώς ανάμεσα στις μετρήσεις μας οι αποκλίσεις λόγω των όρων ανώτερου βαθμού είναι τεράστιες.

λύση για το πρόβλημα δεκάτου πέμπτου βαθμού, την οποία όμως δεν βρίσκουμε ακόμα και με περισσότερες μετρήσεις από ότι το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων.

Εν τέλει το συμπέρασμα μας δεν είναι συγκλονιστικό αφού όλα τα συστήματα διόρθωσης σφαλμάτων δουλεύουν όταν υπάρχει πλεονασμός. Για να οδηγηθούμε στην αντίθετη κατεύθυνση είναι απαραίτητο να υποκαταστήσουμε την πληροφορία που μας παρείχε ο πλεονασμός των δεδομένων με κάποια πληροφορία για την προς εκτίμηση ποσότητα την οποία έχουμε εκ των προτέρων, ανεξάρτητα από τις μετρήσεις. Η ενότητα αυτή δεν μας έφερε αμέσως πιο κοντά στην επίτευξη του στόχου της ανακατασκευής αραιών διανυσμάτων. Το έκανε όμως εμμέσως καθώς μας υπέδειξε πως μια κατανομή για το σφάλμα των μετρήσεων μας δεν μας αρκεί. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια θα χρειαστεί να εισάγουμε περισσότερη εκ των προτέρων γνώση στους αλγόριθμους μας.

## 2.4 Εκτίμηση εκ των υστέρων μεγιστοποίησης πιθανότητας (maximum a posteriori probability estimate)

Στην μέθοδο αυτή προσπαθούμε να ενσωματώσουμε την εκ των προτέρων γνώση που έχουμε για την προς εκτίμηση ποσότητα. Ενώ στην προηγούμενη παράγραφο το  $\mathbf{x}$  είχε αντιμετωπιστεί ως μια σταθερά που ήταν άγνωστη σε μας τώρα το  $\mathbf{x}$  θα γίνει το ίδιο τυχαία μεταβλητή και ο στόχος της μεθόδου είναι να βρει την πιο πιθανή τιμή της αξιοποιώντας και την εκ των προτέρων γνώση μας αλλά και τις μετρήσεις. Εύκολα μπορούμε να βρούμε ποια είναι η έκφραση που θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε για να πετύχουμε τον σκοπό μας

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{P(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{P(\mathbf{y})} = \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})}{P(\mathbf{y})} \quad (2.22)$$

Οπότε η εκτίμηση μας μπορεί να γραφθεί πιο απλά δεδομένου ότι το  $P(\mathbf{y})$  δεν εξαρτάται από το  $\mathbf{x}$  ως

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmax}} P(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

Αν παρατηρήσουμε τους όρους που πήραμε μπορούμε να δούμε πρακτικά πως ο καθένας αντιστοιχεί σε μια πηγή γνώσης που έχουμε για το σήμα. Προφανώς ο όρος  $P(\mathbf{x})$  είναι αυτός που αντιστοιχεί στην εκ των προτέρων γνώση και απουσίαζε από την μέθοδο μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας καθώς εκεί το  $\mathbf{x}$  ήταν μια σταθερά. Από την άλλη πλευρά ο άλλος όρος αντιστοιχεί στην γνώση που αποκομίσαμε από τις μετρήσεις. Ο όρος αυτός ήταν εκείνος που εμφανιζόταν στην μέθοδο μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας. Οπότε για να αλλάξουμε την προσέγγιση μας σε σχέση με πριν απλά θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον επιπλέον όρο  $P(\mathbf{x})$  και να πολλαπλασιάσουμε με ότι είχαμε μέχρι τώρα πριν την προχωρήσουμε στο βήμα της μεγιστοποίησης.

Η μέθοδος για ακόμη μια φορά είναι γενική και δεν έχει κάποια συγκεκριμένη διασύνδεση με την αραιότητα των διανυσμάτων οπότε και πάλι θα πρέπει να κάνουμε μια καλή επιλογή για την  $P(\mathbf{x})$  ώστε να το πρόβλημα βελτιστοποίησης να οδηγήσει σε επιτυχή ανακατασκευή.

### 2.4.1 Ανακατασκευή με $\ell_2$ νόρμα

Χωρίς μεγάλη σκέψη θα μπορούσαμε άμεσα να προτείνουμε και για το διάνυσμα μας την κανονική κατανομή. Το κυριότερο μας επιχείρημα είναι ότι όσο εμπλέκονται μόνο  $\ell_2$  νόρμες δεν θα υπάρξει μεγάλη υπολογιστική δυσκολία. Ας πάρουμε λοιπόν πρώτα την περίπτωση χωρίς θόρυβο για να δούμε αν η μέθοδος μας είναι κατάλληλη. Πρακτικά μπορούμε εύκολα να δούμε ότι χωρίς θόρυβο

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

οπότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmax}} \delta(\mathbf{y} - A\mathbf{x}) \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma_x})^M} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (2.25)$$

Είναι προφανές ότι ζητάμε το  $\mathbf{x}$  που ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  αλλά έχει την ελάχιστη  $\ell_2$  νόρμα. Δηλαδή

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_2 : \mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad (2.26)$$

Χρησιμοποιώντας τελεστές Lagrange είναι σχετικά εύκολο να αποδείξουμε ότι αν ο πίνακας έχει πλήρη βαθμό και το σύστημα  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  είναι υποορισμένο, το οποίο στην δική μας περίπτωση ισχύει καθώς  $M < N$  η λύση του προηγούμενου προβλήματος γίνεται

$$\hat{\mathbf{x}} = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{y} \quad (2.27)$$

Άρα τώρα μπορούμε να πάρουμε λιγότερα δείγματα αλλά να έχουμε ταυτόχρονα και μοναδική λύση. Όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 2.2 δεν φαίνεται η ανακατασκευή ενός αραιού διανύσματος να πηγαίνει ικανοποιητικά.

Αν επιτρέπαμε ταυτόχρονα και θόρυβο τα πράγματα θα γινόταν λίγο πιο δύσκολα καθώς με την ύπαρξη δύο όρων στον εκθέτη του φυσικού λογαρίθμου οι διασπορές των δύο κανονικών κατανομών παίζουν σημαντικό ρόλο. Εύκολα μπορούμε να δούμε πως η προς ελαχιστοποίηση ποσότητα γίνεται

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_e^2} + \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{2\sigma_x^2} \quad (2.28)$$

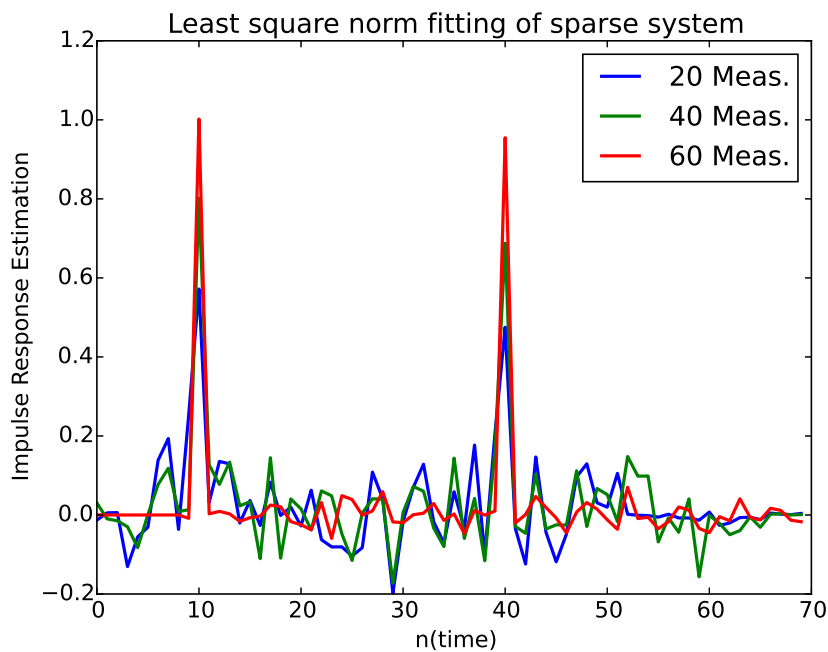
Το μόνο που διευκολύνει την κατάσταση είναι ότι για την εκτίμηση δεν είναι απαραίτητη η γνώση και των δύο διασπορών αλλά μόνο του λόγου τους καθώς και το πρόβλημα βελτιστοποίησης που ακολουθεί δίνει ακριβώς την ίδια λύση

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.29)$$

όπου

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \quad (2.30)$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα κανονικοποίησης (*regularization*). Τέτοια προβλήματα θα συναντούμε πολύ συχνά στη συνέχεια. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε μη καλώς ορισμένα προβλήματα αντιστροφής (όπως το δικό μας αν δεν είχαμε την εκ των προτέρων γνώση της αραιότητας). Μια άλλη χρήση του είναι για την αποφυγή της υπερπροσαρμογής των παραμέτρων στα δεδομένα μας που όπως είδαμε και πιο πριν οδηγεί σε λανθασμένα



Σχήμα 2.2: Εδώ γίνεται εκτίμηση μιας αραιής κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος μήκους 70 από τους οποίους μόνο δύο, στην θέση είκοσι και σαράντα είναι μη μηδενικοί με τιμή 1. Η εκτίμηση γίνεται δίνοντας μια γνωστή είσοδο λευκού γκαουσιανού θορύβου τυπικής απόκλισης 1. Για την εκτίμηση παίρνουμε τυχαία δείγματα της εξόδου του συστήματος. Όσο αυξάνεται το πλήθος των μετρήσεων η ομοιότητα με το ιδεατό αποτέλεσμα βελτιώνεται αλλά για να φτάσουμε σε ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμα και χωρίς θόρυβο πρέπει να φτάσουμε στα 60 δείγματα

αποτελέσματα. Αν και όλα αυτά είναι χρήσιμα στην θεωρία, η σταθερά ή οι σταθερές που προκύπτουν σε προβλήματα κανονικοποίησης μας δημιουργούν επιπλέον προβλήματα. Αν και ο τρόπος με τον οποίο φτάσαμε στις εξισώσεις υποδεικνύει ένα πιθανό τρόπο υπολογισμού της σταθεράς  $\lambda$ , αυτός απαιτεί πρακτικά περισσότερα δεδομένα για την εκ των προτέρων εκτίμηση των διασπορών που εμφανίζονται τα οποία ανάλογα με την εφαρμογή μπορεί να μην είναι διαθέσιμα.

Αυτό που γίνεται συχνότερα είναι η δοκιμή πάνω σε δεδομένα για τα οποία γνωρίζουμε με κάποιο τρόπο τις ιδανικές τιμές των παραμέτρων και στη συνέχεια επιλέγεται η τιμή που δίνει, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο πάλι, τα καλύτερα αποτελέσματα. Αν δούμε το πρόβλημα στην πιο γενική του σκοπιά, στα προβλήματα κανονικοποίησης έχουμε πρακτικά δύο στόχους να βελτιστοποιήσουμε αλλά οι στόχοι είναι συχνά αντικρουόμενοι σε ένα βαθμό, με την έννοια ότι δεν μπορούμε να τους πετύχουμε βέλτιστα και τους δύο. Αυτό που επιχειρούμε με τα προβλήματα κανονικοποίησης είναι να συμβιβάσουμε αυτούς τους δύο στόχους. Η παράμετρος  $\lambda$  πρακτικά εκφράζει τον συσχετισμό της σημαντικότητας των δύο στόχων. Για παράδειγμα στο πρόβλημα που μόλις είδαμε αν θέσουμε στο  $\lambda$  μια πολύ μεγάλη τιμή τότε ο στόχος της ελαχιστοποίησης της νόρμας του διανύσματος θα αποκτήσει πολύ μεγάλη σημασία. Αν αφήναμε το  $\lambda$  να πάει στο άπειρο τότε ο στόχος της ελαχιστοποίησης της νόρμας του σφάλματος θα γινόταν αδιάφορος και το  $\mathbf{x}$  θα γινόταν  $\mathbf{0}$  προς ικανοποίηση του άλλου στόχου μας. Το ανάποδο θα συμβεί αν η παράμετρος  $\lambda$  πάρει μια πολύ μικρή θετική τιμή.

Για να κλείσουμε αυτή την ενότητα μπορούμε να δούμε ότι το πρόβλημα στο οποίο καταλήξαμε είναι μια ειδική περίπτωση της κανονικοποίησης Tikhonov οπότε εύκολα μπορούμε και πάλι να βρούμε αναλυτικά την λύση του ως:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A + \lambda I_N)^{-1} A^T \mathbf{y} \quad (2.31)$$

όπου  $I_n$  ο ταυτοτικός  $N \times N$  πίνακας.

Προφανώς δεν χρειάζεται να τρέξουμε κάποια προσομοίωση για να αποδείξουμε ότι ούτε το μοντέλο αυτό οδηγεί σε επιτυχή ανακατασκευή του σήματος αφού και χωρίς θόρυβο το βασικό σκεπτικό της ελαχιστοποίησης της  $l_2$  νόρμας απέτυχε. Η αλήθεια είναι ότι η ευρεία χρήση της κανονικής κατανομής για τα σφάλματα σε διάφορες εφαρμογές δεν έχουν να κάνουν μόνο με την δυνατότητα αναλυτικής λύσης. Η άλλη βασική αιτία που γίνεται χρήση της κανονικής κατανομής είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα: Επειδή γενικά τα σφάλματα είναι συνήθως αθροιστικές διαδικασίες το κεντρικό οριακό θεώρημα μας υποδεικνύει να χρησιμοποιήσουμε μια κανονική κατανομή. Στην περίπτωση μας αυτό δεν ισχύει οπότε θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιο άλλο χαρακτηριστικό που θα επιβάλλει την αραιότητα στις προς εύρεση παραμέτρους.

## 2.4.2 Κατανομές με βαριές ουρές

Ας επιτρέψουμε στο λάθος της προηγούμενης ενότητας να μας δώσει ένα ακόμα μάθημα. Η κανονική κατανομή πρακτικά επιβάλλει μια ποινή σε λύσεις όπου το διάνυσμα των παραμέτρων έχει μεγάλη  $\ell_2$  νόρμα. Ας σκεφτούμε λοιπόν τι θα περιμέναμε για την  $\ell_2$  νόρμα ενός αραιού διανύσματος. Ένα αραιό διάνυσμα γενικά έχει λίγες κορυφώσεις οι οποίες μπορεί να είναι και σχετικά μεγάλες. Δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε ότι ένα τέτοιο διάνυσμα δεν έχει γενικά μικρή  $\ell_2$  νόρμα. Ας μελετήσουμε με ένα μικρό παράδειγμα στην δισδιάστατη περίπτωση. Έστω ότι έχουμε δύο θετικούς αριθμούς  $a, b$  και ορίζουμε τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1 = [a + b, 0]^T$  και  $\mathbf{x}_2 = [a, b]^T$ . Τότε παίρνουμε ότι

$$\|\mathbf{x}_1\|_2^2 - \|\mathbf{x}_2\|_2^2 = 2ab \quad (2.32)$$

Αμέσως φαίνεται ότι παίρνοντας την  $\ell_2$  νόρμα κατά την βελτιστοποίηση μπορούμε να μειώσουμε την προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση αν κάνουμε το διάνυσμα λιγότερο αραιό με την προϋπόθεση ότι αυτό δεν διογκώνει πολύ το σφάλμα των μετρήσεων. Δηλαδή βλέπουμε ότι όταν χρησιμοποιούμε την  $\ell_2$  νόρμα θα έχουμε την τάση να εξομαλύνουμε τις κορυφώσεις προτιμώντας διανύσματα όπως το  $\mathbf{x}_2$  έναντι αραιών διανυσμάτων όπως το  $\mathbf{x}_1$ . Ως ένα βαθμό κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο γιατί η  $\ell_2$  νόρμα επιβάλλει τετραγωνικό και όχι γραμμικό κόστος οπότε είναι φυσικό να αποφεύγονται οι πολύ μεγάλες τιμές αν μπορεί να μοιραστεί σε όλες τις συνιστώσες το κόστος. Για ακόμη μια φορά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι καθόλου αρνητικό στην περίπτωση του θορύβου καθώς δεν θα θέλαμε να είναι δυνατό όλα τα λάθη να συσσωρεύονται σε μια μέτρηση καθώς θα ήταν σαν να θεωρούσαμε ότι όλες οι άλλες μετρήσεις ήταν σχεδόν αθόρυβες ενώ αυτή για κάποιο μυστήριο λόγο συγκέντρωσε όλο το σφάλμα. Απλά στην δική μας περίπτωση είναι ένα ακατάλληλο μοντέλο.

Αυτό που ψάχνουμε δηλαδή είναι μια συνάρτηση κόστους που δεν τιμωρεί πολύ τις μεγάλες συνιστώσες έτσι ώστε η σύγκριση να είναι ευνοϊκή για τα αραιά σήματα. Στην γλώσσα των πιθανοτήτων αυτό σημαίνει ότι ψάχνουμε για κατανομές που η πυκνότητα πιθανότητας για πολύ μεγάλες τιμές να μην είναι πολύ μικρή. Στην θεωρία πιθανοτήτων υπάρχει μια οικογένεια από κατανομές που λέγονται κατανομές με βαριές ουρές. Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  έχει δεξιά βαριά ουρά αν:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp^{\lambda x} P(X > x) = \infty \quad (2.33)$$

για κάθε θετικό  $\lambda$ . Τελείως όμοια μπορούμε να πάρουμε και την αριστερή ουρά. Μια ειδική υποκατηγορία των παραπάνω είναι οι υποεκθετικές κατανομές για τις οποίες ισχύει ότι αν οι ανεξάρτητες  $X_1, \dots, X_n$  ακολουθούν μια κοινή υποεκθετική κατανομή τότε

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i > x\right) \sim P\left(\max_{i=1, \dots, n} X_i > x\right) \quad \text{για } x \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

δηλαδή το όριο του λόγου των δύο πλευρών τείνει σε μια σταθερά όταν το  $x$  τείνει στο άπειρο. Ένα παράδειγμα τέτοιας κατανομής είναι η λογαριθμική κανονική κατανομή δηλαδή αν  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή τότε η  $Y = \log(X)$  ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή. Η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.35)$$

Οι κατανομές αυτές φαίνονται πολύ χρήσιμες. Αν πάρουμε τα απόλυτα των συνιστωσών των αραιών διανυσμάτων ακολουθούν υποεκθετικές κατανομές τότε με την παραπάνω ιδιότητα εξασφαλίζουμε ότι δεν θα υπάρχει μια τάση προς ισοκατανομή όπως στην κανονική κατανομή αλλά θα κυριαρχούν λίγες συνιστώσες. Το καλό είναι ότι οι περισσότερες κατανομές με βαριές ουρές που χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι και υποεκθετικές οπότε έχουμε μια μεγάλη γκάμα να επιλέξουμε. Η πιο γνωστή κατανομή που έχει διπλές βαριές ουρές είναι η Student όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.3. Ο τύπος της κατανομής πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Student με  $\nu$  βαθμούς ελευθερίας είναι

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}B(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (2.36)$$

όπου  $B(x, y)$  η γνωστή συνάρτηση Βήτα.

Αν λοιπόν θέλαμε μια καλή κατανομή για τα αραιά διανύσματα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μια κατανομή Student με λίγους βαθμούς ελευθερίας. Το πρόβλημα όμως είναι ότι και πάλι δεν καταλήγουμε σε ένα εύκολα επιλύσιμο πρόβλημα, ιδιαίτερα όταν έχουμε συνδυασμό με λευκό γκαουσιανό θόρυβο. Οπότε θα πρέπει να κάνουμε για ακόμη μια φορά έναν συμβιβασμό.

### 2.4.3 Ανακατασκευή με $\ell_1$ νόρμα

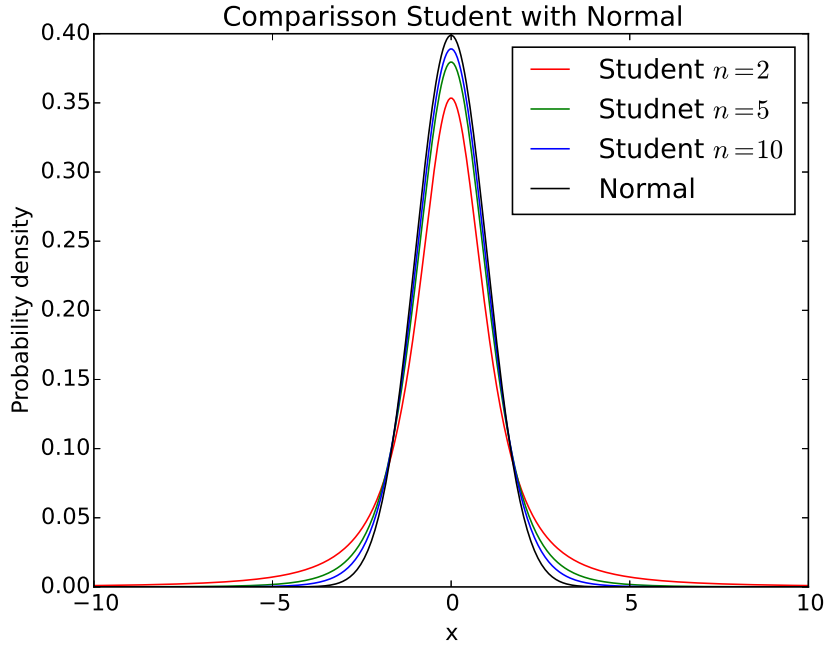
Όπως για την  $\ell_2$  νόρμα αντιστοιχεί η κανονική κατανομή έτσι αντιστοιχεί στην  $\ell_1$  η κατανομή Laplace που για την βαθμωτή περίπτωση ορίζεται για ένα  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right) \quad (2.37)$$

Η σύνδεση με την  $\ell_1$  νόρμα γίνεται αισθητή στην περίπτωση όπου έχουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  που ανήκει στο  $\mathbb{R}^N$  και του οποίου οι συνιστώσες ακολουθούν μια κατανομή Laplace με την ίδια παράμετρο  $b$ . Στην περίπτωση αυτή αν πάρουμε τις μέσες τιμές των συνιστωσών και σχηματίσουμε ένα διάνυσμα  $\boldsymbol{\mu}$  η πυκνότητα πιθανότητας του διανύσματος  $\mathbf{x}$  γράφεται ως

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, b) = \left(\frac{1}{2b}\right)^N \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\|_1}{b}\right) \quad (2.38)$$





Σχήμα 2.3: Εδώ γίνεται η σύγκριση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student για διάφορους βαθμούς ελευθερίας με την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Παρατηρούμε ότι οι ουρές των κατανομών Student είναι όντως πιο βαριές ιδιαίτερα για μικρό βαθμό ελευθερίας κάτι που το αναμέναμε καθώς όταν  $n \rightarrow \infty$  η κατανομή Student γίνεται κανονική

Από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορούμε να συνάγουμε ότι η Laplace είναι απλά μια αμφίπλευρη εκθετική κατανομή οπότε δεν ανήκει στις κατανομές που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Παρόλα αυτά έχει πιο βαριές ουρές από ότι η κανονική κατανομή όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.4

Αν κάνουμε μια τελείως ανάλογη διαδικασία με πριν μπορούμε να καταλήξουμε πάλι στα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης. Το πρώτο αντιστοιχεί στην περίπτωση άνευ θορύβου που διατυπώνεται ως εξής:

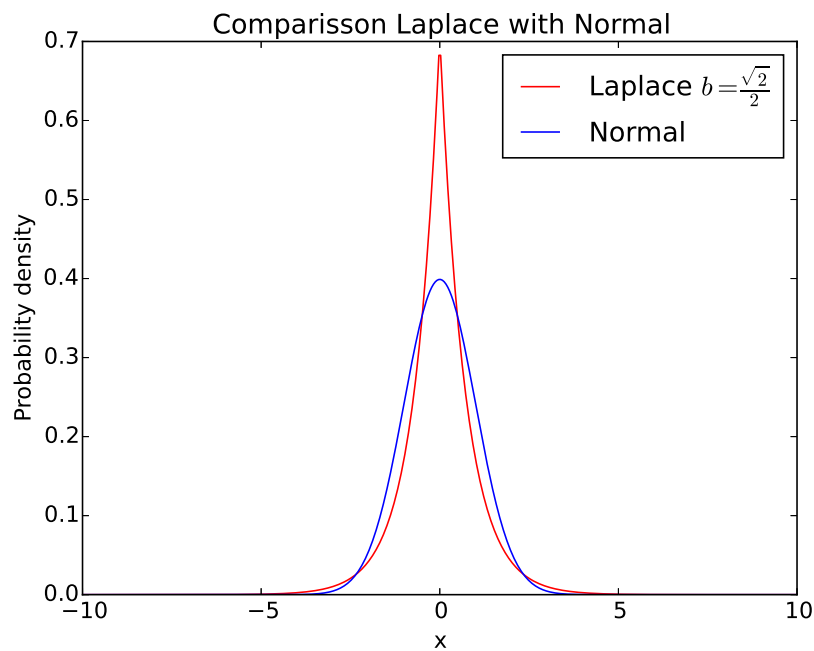
$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.39)$$

ενώ το δεύτερο αντιστοιχεί σε λευκό γκαουσιανό θόρυβο έχοντας

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (2.40)$$

όπου

$$\lambda = \frac{2\sigma_e^2}{b} \quad (2.41)$$



Σχήμα 2.4: Εδώ γίνεται η σύγκριση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Laplace με μέση τιμή 0 και  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  με την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η παράμετρος  $b$  έχει επιλεγεί ώστε οι δύο κατανομές να έχουν την ίδια διασπορά. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι μπορεί η κατανομή Laplace να έχει μεγαλύτερη πυκνότητα πιθανότητας στο 0 αλλά φθίνει αρκετά γρήγορα ώστε η κανονική κατανομή να την ξεπερνά για ένα διάστημα αλλά στο τέλος όπου και μας ενδιαφέρει η κατανομή Laplace υπερτερεί με τις πιο βαριές ουρές της.

## 2.5 Γιατί $\ell_1$ νόρμα;

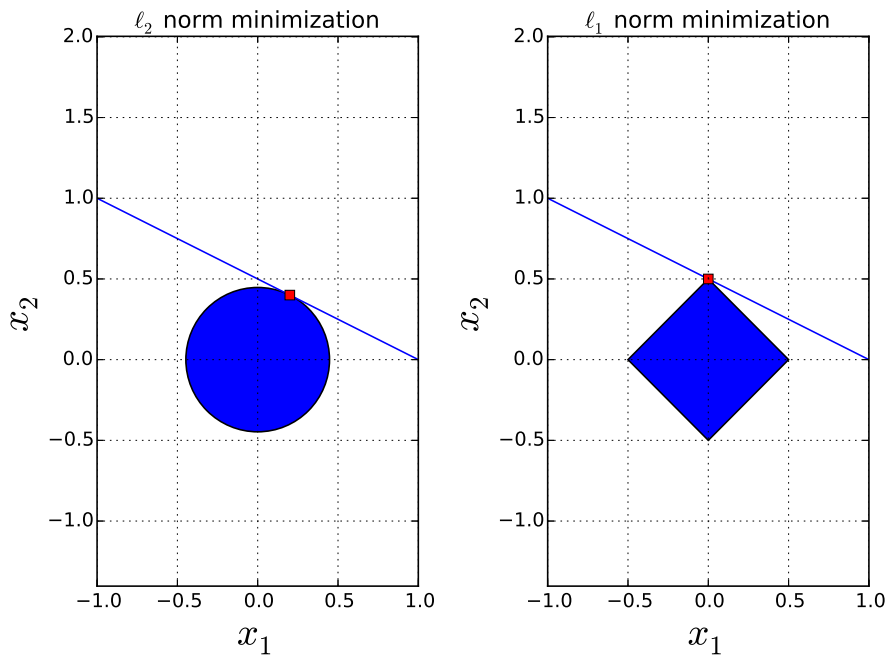
Στην προηγούμενη παράγραφο κάναμε μια υποχώρηση από τις κατανομές με βαριές ουρές και καταλήξαμε σε ένα διαφορετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης που απλά η διαφορά που είχε από την προηγούμενη μας προσέγγιση είναι ότι ο όρος κανονικοποίησης (regularization) άλλαξε από την  $\ell_2$  στην  $\ell_1$  νόρμα. Από στατιστικής άποψης είδαμε ότι έχουμε κέρδος από την αλλαγή αυτή. Αλλά υπάρχουν και άλλα επιχειρήματα που υποστηρίζουν την επιλογή αυτή.

Για την διευκόλυνση μας μέσω της οπτικοποίησης θα περιοριστούμε στο διδιάστατο χώρο  $\mathbb{R}^2$  όπου τα αραιά μας διανύσματα πρακτικά βρίσκονται πάνω στους άξονες. Στον χώρο αυτό ο περιορισμός  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  με τον  $\mathbf{A}$  να έχει περισσότερες στήλες από ότι γραμμές ανάγεται πρακτικά σε μια ευθεία με την εξίσωση  $y = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$  όπου το  $y$  είναι η γνωστή σε μας μέτρηση και τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι προς προσδιορισμό μεταβλητές. Ας σκεφτούμε επιπλέον την μορφή που έχουν οι εξισώσεις  $\|\mathbf{x}\|_2 = c$  και  $\|\mathbf{x}\|_1 = c$  για μια θετική σταθερά  $c$ . Η πρώτη εξίσωση είναι ένας κύκλος με ακτίνα  $c$  και η δεύτερη είναι ένας ρόμβος που οι διαγώνιοι του είναι οι άξονες και έχουν μήκος  $2c$ .

Ένας πολύ απλός τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της νόρμας είναι να πάρουμε το  $c$  των παραπάνω εξισώσεων και ξεκινώντας από το 0 να αρχίζουμε να το μεγαλώνουμε μέχρι να έχουμε τομή με τη ευθεία. Καθώς αυξάνουμε το  $c$  για την  $\ell_2$  νόρμα μεγαλώνει ο κύκλος και για μια τιμή του  $c$  η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και σταματάμε. Η λύση είναι απλά η προβολή της αρχής των αξόνων στην ευθεία. Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε στο Σχήμα 2.5 είναι ότι η λύση είναι πάντα μοναδική αλλά αν εξαιρέσουμε ευθείες που είναι παράλληλες σε κάποιο άξονα η λύση μας είναι σίγουρο ότι δεν θα είναι αραιή.

Τα πράγματα είναι διαφορετικά για την  $\ell_1$  νόρμα και το τετράγωνο που μεγαλώνει. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.5 το πιο πιθανό σημείο τομής με την ευθεία είναι μια από τις κορυφές του τετραγώνου που βρίσκονται στους άξονες και άρα αντιστοιχούν σε αραιά διανύσματα. Υπάρχει όμως και η περίπτωση η ευθεία να είναι παράλληλη σε μια πλευρά του τετραγώνου και η λύση όχι μόνο να μην είναι αραιή αλλά να μην είναι καν μοναδική. Η πιθανότητα αυτή δεν φαίνεται πολύ σημαντική αλλά όταν οι διαστάσεις αυξάνονται και ο πίνακας  $\mathbf{A}$  μπορεί να έχει πολύ λιγότερες γραμμές από ότι στήλες το πρόβλημα μπορεί να είναι πολύ σημαντικό. Αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι η επιλογή του πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι πολύ σημαντική για την επιτυχία της ανακατασκευής.

Στην εξίσωση (2.2) είδαμε τον ορισμό της  $\ell_p$  νόρμας για  $p \geq 1$  ενώ για την περίπτωση του  $p$  να είναι μεταξύ του 0 και του 1 σχολιάσαμε ότι δεν ορίζει αυτός ο τύπος κάποια νόρμα. Η επιλογή μιας άλλης νόρμας προς ελαχιστοποίηση θα μπορούσε να είναι και αυτή μια αξιολογη πρόταση προς εξέταση. Διαισθητικά όμως μπορούμε να καταλάβουμε ότι οποιαδήποτε επιλογή του  $p$  που θα είναι μεγαλύτερη του 1 θα επέφερε χειρότερα αποτελέσματα. Όπως

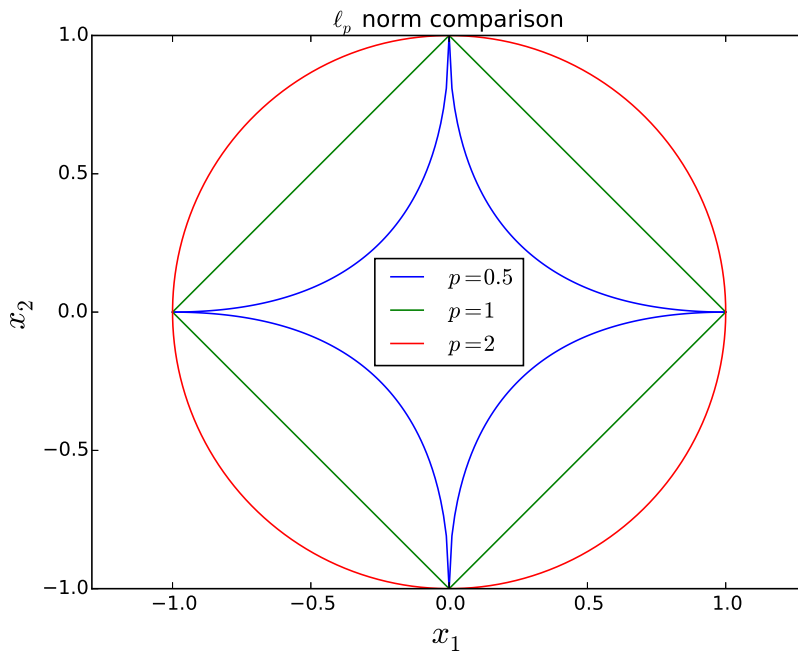


Σχήμα 2.5: Ο κύκλος που παρουσιάζεται στα δεξιά αντιστοιχεί στην εξίσωση  $\|x\|_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$  που εφάπτεται στην ευθεία  $x_2 = \frac{1-x_1}{2}$  που αντιστοιχεί στην μια και μοναδική γραμμική μέτρηση των  $x_1, x_2$  όπου  $y = x_1 + 2x_2 = 1$ . Η ίδια μέτρηση και άρα ευθεία μελετάται και στο αριστερό διάγραμμα αλλά εδώ έχουμε τον ρόμβο που αντιστοιχεί στην εξίσωση  $\|x\|_1 = \frac{1}{2}$ . Και γραφικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στο αριστερό πρόβλημα βελτιστοποίησης πήραμε μια πιο αραιή λύση από ότι στο δεξί

είδαμε και με την  $\ell_2$  νόρμα έτσι και μια οποιαδήποτε νόρμα  $\ell_p$  με  $p > 1$  θα είχε την τάση να εξαφανίζει τις υψηλές κορυφές.

Οπότε μας μένει η περίπτωση του θετικού  $p$  μικρότερου του 1. Η επιλογή αυτή δεν είναι πάντα πολύ εύκολη όμως. Το αρνητικό μιας τέτοιας επιλογής έχει να κάνει με το ότι οι συναρτήσεις που προκύπτουν από μια τέτοια επιλογή δεν είναι κυρτές. Ως εκ τούτου δεν είναι εγγυημένο ότι στα αντίστοιχα προβλήματα βελτιστοποίησης τα τοπικά ακρότατα είναι και ολικά. Έτσι είτε θα πρέπει να καταφύγουμε στην εύρεση ενός τοπικού ακρότατου κοντά σε ένα καλό σημείο εκκίνησης που θα επιλέξουμε εμείς ή να σπαταλήσουμε περισσότερους πόρους για την εύρεση ενός ολικού ακρότατου με την βοήθεια κάποιου εξειδικευμένου αλγορίθμου.

Από την άλλη όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.6 καθώς το  $p$  μειώνεται η προώθηση της αραιότητας μέσω των κορυφών στα άκρα γίνεται εντονότερη. Φυσικά το όριο είναι το  $p = 0$  που πρακτικά είναι αυτό που επιζητούμε αλλά σύμφωνα με όσα είδαμε προηγουμένως τα προβλήματα που προκύπτουν είναι αδύνατο να τα λύσουμε για ρεαλιστικά μεγέθη.



Σχήμα 2.6: Στο Σχήμα βλέπουμε την σύγκριση των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν στις εξισώσεις  $\|\mathbf{x}\|_{0.5} = 1, \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \|\mathbf{x}\|_2 = 1$ . Από την μια πλευρά είναι φανερό ότι για  $p = 0.5$  ούτε καν τα επιπεδοσύνολα της συνάρτησης είναι κυρτά σε αντίθεση με τις άλλες δύο περιπτώσεις. Από την άλλη βλέπουμε ότι με τις πιο μυτερές κορυφές της στους άξονες η  $\ell_{0.5}$  προωθεί την αραιότητα περισσότερο από τις άλλες νόρμες

## 2.6 Θεωρητικές εγγυήσεις για την ανακατασκευή μέσω $\ell_1$ νόρμας

Στις προηγούμενες ενότητες διατυπώσαμε αρκετά προβλήματα ανακατασκευής διανυσμάτων και σε μερικά από αυτά προσπαθήσαμε να εξετάσουμε την δυνατότητα τους να λύσουν το πρόβλημα της ανακατασκευής αραιών διανυσμάτων. Από αυτά, η ελαχιστοποίηση της  $\ell_2$  νόρμας όπως την είδαμε στην εξίσωση (2.26) απέτυχε πλήρως καθώς δεν μπόρεσε να οδηγήσει στην ανακατασκευή αραιών διανυσμάτων με σχετικά λίγες μετρήσεις όπως είδαμε στο Σχήμα 2.2 και δεν θα μας απασχολήσει στην συνέχεια. Από την άλλη η ελαχιστοποίηση της  $\ell_0$  νόρμας όπως την είδαμε στην εξίσωση (2.11) αναμένουμε να είναι αυτή που μας ενδιαφέρει. Βέβαια όπως είπαμε και προηγουμένως το πρόβλημα αυτό δεν είναι πρακτικά επιλύσιμο για τα μεγέθη που αφορούν τις σύγχρονες εφαρμογές.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού παρουσιάσαμε σαν εργαλείο την  $\ell_1$  νόρμα και το αντίστοιχο πρόβλημα βελτιστοποίησης στην εξίσωση (2.39) καθώς και την εξίσωση (2.40) για την θορυβώδη περίπτωση. Αυτά τα προβλήματα θα δούμε ότι είναι εύκολα επιλύσιμα σε σχέση με τα προβλήματα της  $\ell_0$  νόρμας αλλά δεν έχουν την ευκολία της αναλυτικής λύσης των προβλημάτων της  $\ell_2$  νόρμας. Παρουσιάσαμε επίσης λόγους για τους οποίους θα μπορούσαν να προσεγγίζουν καλύτερα το πρόβλημα της  $\ell_0$  νόρμας αλλά ήταν κυρίως διαισθητικοί.

Ευτυχώς όμως το πρόβλημα έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές και έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν ικανές συνθήκες ώστε τα προβλήματα των εξισώσεων (2.11) και (2.39) να είναι ισοδύναμα. Η δουλειά αυτή έχει εμφανιστεί στην πιο γενική περίπτωση στην εργασία του [7] καθώς και στην εργασία του [8]

Ας ορίσουμε λοιπόν ένα νέο μέγεθος την *αμοιβαία συμφωνία* (*mutual coherence*) ενός πίνακα  $A$  διαστάσεων  $M \times N$  του οποίου η  $i$ -οστή στήλη συμβολίζεται ως  $\mathbf{a}_i$ . Ο ορισμός αυτός εμφανίστηκε για πρώτη φορά στην εργασία του [13] και ορίζει την αμοιβαία συμφωνία  $\mu(A)$  του πίνακα  $A$  ως

$$\mu(A) = \max_{1 \leq i < j \leq N} \frac{|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \|\mathbf{a}_j\|_2} \quad (2.42)$$

Το παραπάνω μέγεθος εκφράζει πρακτικά πόσο ανεξάρτητες είναι οι στήλες του πίνακα  $A$  οπότε έχει μια σύνδεση με το  $\text{spark}(A)$  όπως το ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην εξίσωση (2.14). Στο [7] αποδεικνύεται ότι

$$\text{spark}(A) \geq 1 + \frac{1}{\mu(A)} \quad (2.43)$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι για μικρή αμοιβαία συσχέτιση των στηλών το  $\text{spark}$  είναι αρκετά μεγάλο. Οπότε αν αξιοποιήσουμε το θεώρημα του πρώτου κεφαλαίου για την ανακατασκευή μέσω της  $\ell_0$  νόρμας μπορούμε να πάρουμε

μια άλλη ικανή συνθήκη. Αν υπάρχει διάνυσμα  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^N$  και πίνακας για τα οποία ισχύει ότι

$$\|\mathbf{x}\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)}\right) \quad (2.44)$$

τότε αυτό το διάνυσμα μπορεί να ανακατασκευαστεί από τις μετρήσεις  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  κάνοντας χρήση του προβλήματος της εξίσωσης (2.11). Προφανώς το όριο αυτό είναι πιο αυστηρό αλλά τουλάχιστον είναι πρακτικά υπολογίσιμο.

Αυτό που είναι όμως πιο σημαντικό είναι ότι έχει αποδειχθεί στην εργασία του [7] καθώς και του [8] ότι η απαίτηση της ανίσωσης (2.44) μας αρκεί για να ανακατασκευάσουμε το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  και με την βοήθεια του ευκολότερου προβλήματος της εξίσωσης (2.39). Δηλαδή ισχύει το θεώρημα

**Θεώρημα 2.** Αν  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  ένα σύστημα και υπάρχει λύση του  $\mathbf{x}_*$  για την οποία ισχύει

$$\|\mathbf{x}_*\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)}\right)$$

τότε το  $\mathbf{x}_*$  μπορεί να βρεθεί και από το πρόβλημα της εξίσωσης (2.11) και της εξίσωσης (2.39)

Στην βιβλιογραφία έχουν γίνει και άλλες προσπάθειες για την εύρεση των συνθηκών για τις οποίες τα προβλήματα των εξισώσεων (2.11) και (2.39) είναι ισοδύναμα.

Αυτό που θέλουμε από τον πίνακα μας είναι να μπορεί να ξεχωρίζει τα αραιά διανύσματα μεταξύ τους. Δηλαδή πρακτικά αν δύο αραιά  $\mathbf{x}_1$  και  $\mathbf{x}_2$  πολλαπλασιασθούν με τον πίνακα  $A$  οι εικόνες τους να είναι πολύ μακριά μεταξύ τους. Όταν εργαζόμασταν με την  $\ell_0$  νόρμα το μόνο που μας ένοιαζε ήταν οι εικόνες να μην ταυτίζονται πράγμα το οποίο μας εξασφάλιζε ή συνθήκη του θεωρήματος που είχαμε διατυπώσει για την  $\ell_0$  νόρμα.

Τώρα που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ασθενέστερο εργαλείο, την  $\ell_1$  νόρμα δεν μας αρκεί αυτό. Αυτό που θα βοηθούσε είναι ένας πίνακας που όσο πιο πολύ απέχουν τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  τόσο πιο πολύ να απέχουν και οι αντίστοιχες εικόνες τους  $A\mathbf{x}_1$  και  $A\mathbf{x}_2$ . Την ιδιότητα αυτή την έχουν οι ορθογώνιοι πίνακες, οι οποίοι καταφέρνουν να διατηρούν επακριβώς τις αποστάσεις. Προφανώς όμως όταν ένας πίνακας έχει λιγότερες γραμμές από στήλες δεν θα μπορούσε να είναι στην γενικότερη περίπτωση ορθογώνιος. Αν όμως ζητήσουμε να ισχύει αυτή η ιδιότητα προσεγγιστικά για τα αραιά διανύσματα τότε ίσως να ήταν αρκετό.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε χρήση της ιδιότητας RIP. Αν τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1$  και  $\mathbf{x}_2$  είναι  $s$ -αραιά τότε η διαφορά τους θα είναι το πολύ  $2s$ -αραιή και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα RIP παίρνουμε ότι ισχύει

$$(1 - \delta_{2s})\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2 \leq \|A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2s})\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2 \quad (2.45)$$

Αν λοιπόν η  $\delta_{2s}$  είναι αρκετά μικρή τότε θα έχουμε ισχυρό διαχωρισμό μεταξύ των  $s$ -αραιών διανυσμάτων μέσω του πίνακα  $A$  και άρα οι αλγόριθμοι

που αξιοποιούν την  $\ell_1$  νόρμα θα μπορούν να έχουν καλύτερα αποτελέσματα. Στην εργασία του [4] αποδεικνύεται ότι τα προβλήματα των εξισώσεων (2.11) και (2.39) είναι ισοδύναμα αν για τον πίνακα έχουμε ότι  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$  όπου  $s$  η  $\ell_0$  νόρμα της πιο αραιής λύσης του συστήματος. Προφανώς για να έχει μοναδική λύση το πρόβλημα της  $\ell_0$  νόρμας αρκεί  $\delta_{2s} < 1$ .

Βέβαια για ακόμη μια φορά το πρόβλημα της εύρεσης της σταθεράς αυτής για έναν πίνακα  $A$  δεν είναι εύκολα επιλύσιμο οπότε δεν είναι προφανές με ποιο τρόπο θα διαλέξουμε τον πίνακα μας. Μόνο ο μοναδιαίος πίνακας είναι προφανές ότι έχει την ελάχιστη δυνατή τιμή της σταθεράς, δηλαδή 0, για όλα τα διανύσματα αλλά είναι επίσης προφανές ότι δεν μας είναι πολύ ενδιαφέρον αυτό γιατί ο μοναδιαίος πίνακας είναι τετραγωνικός οπότε οι στήλες και οι γραμμές τους είναι ίσες κατά πλήθος και άρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υποδειγματοληψία.

## 2.7 Κατασκευή κατάλληλων πινάκων

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη ενότητα δεν μας δίνει μια διαισθητική προσέγγιση για την κατασκευή πινάκων και όπως είδαμε και πριν είναι αρκετά χρονοβόρο ακόμα και να επιβεβαιώσουμε κατά πόσο ένας πίνακας ικανοποιεί την RIP ιδιότητα. Για αυτό λοιπόν έχουν βρεθεί τρόποι ώστε να κατασκευάζονται τέτοιοι πίνακες τυχαία με τον περιορισμό ότι οι πίνακες έχουν την ιδιότητα με μεγάλη πιθανότητα αλλά όχι πάντα. Η πιο συνήθης μέθοδος είναι τα στοιχεία του πίνακα να λαμβάνονται παίρνοντας τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα από μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη γκαουσιανή κατανομή  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{M})$ . Τα ίδια δείγματα δηλαδή που μοντελοποιούν στις περισσότερες εφαρμογές τον θόρυβο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την υποδειγματοληψία αραιών διανυσμάτων!

Άλλες κατανομές που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι η Bernoulli αλλά και η επιλογή των γραμμών με τυχαία επιλογή διανυσμάτων της μοναδιαίας σφαίρας του  $\mathbb{R}^M$ . Για την τελευταία επιλογή έχει διατυπωθεί ότι ένας πίνακας ικανοποιεί την ιδιότητα RIP για  $s$ -αραιά διανύσματα με μια σταθερά  $\delta_s$  που δεν είναι πολύ κοντά στην μονάδα αν ισχύει ότι

$$M \geq Cs \ln(N/s) \quad (2.46)$$

με την σταθερά  $C$  να εξαρτάται από την  $\delta_s$ .

Βέβαια η επιλογή ενός τυχαίου πίνακα μερικές φορές είναι απαγορευτική καθώς μερικές φορές απαιτούνται αρκετοί πολλαπλασιασμοί με τον πίνακα  $A$  για την πλήρη ανακατασκευή του διανύσματος. Για αυτό αν και μερικές φορές δεν ικανοποιούν τόσο καλά την RIP όσο οι τυχαίοι πίνακες επιλέγονται πίνακες για τους οποίους είναι γνωστό ότι ο πολλαπλασιασμός μπορεί να υλοποιηθεί πολύ πιο αποδοτικά όπως γραμμές του πίνακα Fourier ή πίνακες που προκύπτουν από κάποιο μετασχηματισμό Wavelet ή DCT.



## 2.8 Ο αλγόριθμος του Basis Pursuit

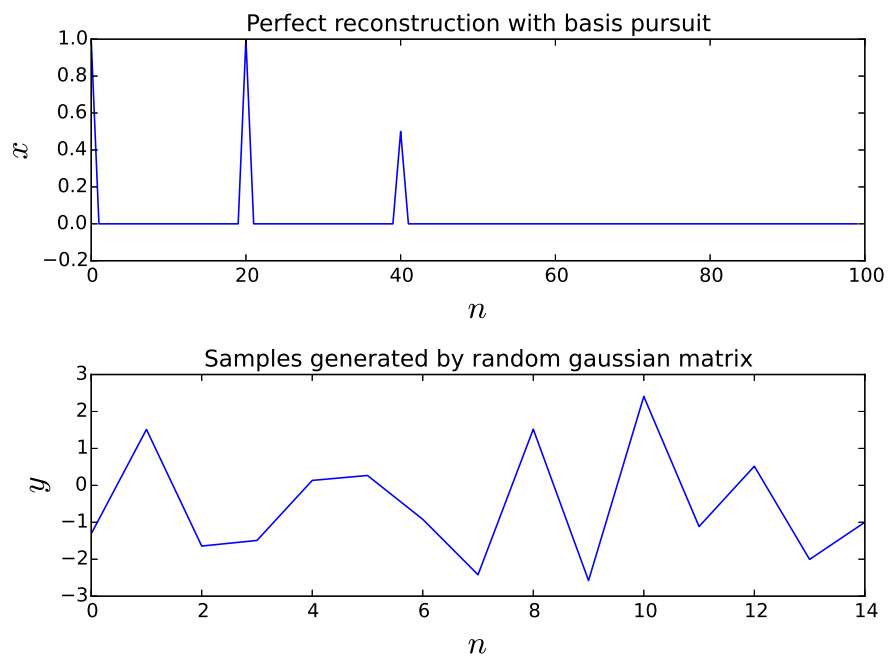
Ο αλγόριθμος του Basis Pursuit παρουσιάζεται στην εργασία του [6]. Ο σκοπός του είναι η επίλυση του προβλήματος της εξίσωσης (2.39). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μην έχει την αναλυτική λύση του αντίστοιχου προβλήματος της  $l_2$  νόρμας αλλά μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και να επιλυθεί αποδοτικά. Συγκεκριμένα η αναγωγή είναι αρκετά απλή καθώς αν ορίσουμε επιπλέον μεταβλητές  $u_i$  ως συνιστώσες ενός διανύσματος  $\mathbf{u}$  που θα παίξουν το ρόλο της απόλυτης τιμής των στοιχείων του προς εύρεση διανύσματος έχουμε το εξής ισοδύναμο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N u_i : \\ -\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Ας κάνουμε μια εφαρμογή της ιδέας αυτής στην ανακατασκευή σήματος. Μια πολύ απλή εφαρμογή θα ήταν η ανακατασκευή ενός σήματος που αποτελείται από μια αλληλουχία από παλμούς. Για παράδειγμα: Έχουμε ένα σήμα με τρεις κορυφές στα σημεία 0, 20 και 40 με ύψος 1, 1 και 0.5 αντίστοιχα ενώ τα υπόλοιπα 97 δείγματα είναι μηδενικά και μέσω ενός τυχαίου πίνακα που τα στοιχεία του προέρχονται από ανεξάρτητα δείγματα κανονικής κατανομής  $\mathcal{N}(0, 1)$  παίρνουμε 15 μετρήσεις. Το γεγονός ότι δεν παίρνουμε την κατανομή  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{M})$  δεν παίζει ρόλο εδώ καθώς η μόνη διαφορά είναι ένας πολλαπλασιασμός κατά μέλη της εξίσωσης  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  με μια σταθερά που δεν αλλάζει τίποτα. Με τον αλγόριθμο που είδαμε παραπάνω βλέπουμε την τέλεια ανακατασκευή του στο Σχήμα 2.7.

Βέβαια η ανακατασκευή είναι πιθανοτική αφού ο πίνακας μας θα μπορούσε να μην ικανοποιεί την RIP σε ικανοποιητικό βαθμό ώστε να είναι επιτυχής η ανακατασκευή. Αξίζει λοιπόν να δούμε ποιο είναι το σφάλμα της ανακατασκευής για διαφορετικό πλήθος μετρήσεων και για διαφορετική αραιότητα. Τα διανύσματα έχουν συνολικά 100 στοιχεία και περιέχουν κορυφές ύψους 1. Εξετάζουμε την δυνατότητα ανακατασκευής καθώς μεταβάλλεται το πλήθος των κορυφών. Για αυτό θα ορίσουμε ένα νέο μέγεθος sparsity( $\mathbf{x}$ ) ως εξής

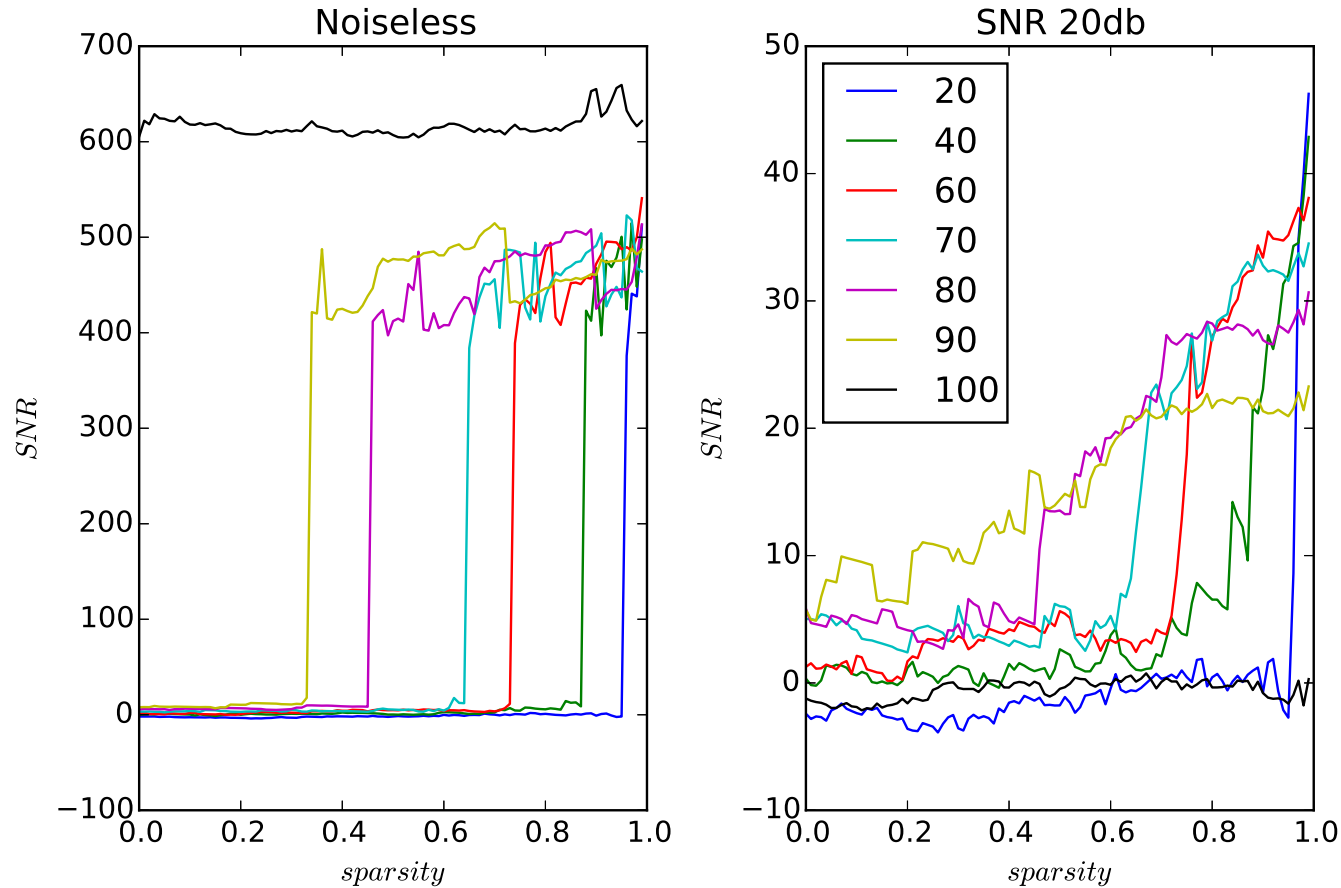
$$\text{sparsity}(\mathbf{x}) = \frac{N - \|\mathbf{x}\|_0}{N} \tag{2.48}$$



Σχήμα 2.7: Ένα αραιό σήμα (επάνω) ανακατασκευάζεται πλήρως μέσα από τις μετρήσεις τυχαίου γκαουσιανού πίνακα (κάτω).

SNR vs sparsity with varying number of measurements

43



Σχήμα 2.8: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνουμε το SNR της ανακατασκευής από τον αλγόριθμο Basis Pursuit. Τα διανύσματα έχουν μήκος 100 και μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων τους. Οι μη μηδενικές τιμές έχουν τιμή 1. Ο πίνακας  $A$  που χρησιμοποιείται αποτελείται από ανεξάρτητα δείγματα γκαουσιανής κατανομής. Στα αριστερά οι μετρήσεις είναι αθόρυβες ενώ δεξιά έχουν SNR 20db. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλήθη μετρήσεων  $M$ .

Τα αποτελέσματα στο Σχήμα 2.8 χρησιμοποιούν τυχαίους πίνακες οπότε με την επιλογή διαφορετικών πινάκων τα αποτελέσματα θα μπορούσαν να ήταν διαφορετικά. Η τάση που παρατηρούμε όμως είναι εμφανής. Όσο λιγότερο αραιό είναι το σήμα μας τόσο περισσότερες μετρήσεις χρειάζεται για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Επίσης παρατηρούμε και ότι η μετάβαση από μια αποτυχημένη ανακατασκευή σε μια επιτυχημένη δεν είναι σταδιακή αλλά συμβαίνει απότομα στην αθόρυβη περίπτωση. Τέλος, παρατηρούμε ότι όταν φτάνουμε στις 100 μετρήσεις δηλαδή έχουμε τόσα δείγματα όσο και το μέγεθος του διανύσματος τότε και μόνο τότε είναι η ανακατασκευή τέλεια για όλο το εύρος της αραιότητας του διανύσματος. Ας πάμε όμως να δούμε τα αποτελέσματα με θόρυβο: Ως ένα βαθμό αναμέναμε αυτά τα αποτελέσματα. Το μοντέλο που έχουμε δεν προβλέπει κανέναν θόρυβο οπότε δεν αναμέναμε να έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα για 20 db θόρυβο στις μετρήσεις μας. Παρατηρούμε ότι η ανακατασκευή είναι δεν είναι τόσο καλή αλλά βλέπουμε και μερικά πράγματα που δεν ήταν τόσο αναμενόμενα. Όταν φτάνουμε σε μεγάλο αριθμό μετρήσεων η δυνατότητα ανακατασκευής είναι μειωμένη για τα αραιά διανύσματα. Αυτό έχει να κάνει με την ελευθερία που δίνουμε στον αλγόριθμο να οδηγήσει την λύση μέσω της πρότερης γνώσης μας για την αραιότητα. Όταν του δίνουμε πολλές μετρήσεις μειώνουμε την ελευθερία κινήσεων καθώς το σύστημα χάνει βαθμούς ελευθερίας. Αν δε οι μετρήσεις είναι θορυβώδεις έχουν την δυνατότητα να μας οδηγήσουν προς μια λανθασμένη κατεύθυνση.

## 2.9 Ο αλγόριθμος Lasso

Ο αλγόριθμος του Lasso προσπαθεί να αντιμετωπίσει την αδυναμία που επιδεικνύει ο αλγόριθμος του Basis Pursuit στον θόρυβο. Αντί λοιπόν να λύσουμε το πρόβλημα της εξίσωσης (2.39) προσπαθούμε να λύσουμε το πρόβλημα της εξίσωσης (2.40). Ο αλγόριθμος αυτός πρωτοεμφανίστηκε στο [23].

Στην προηγούμενη παράγραφο οδηγηθήκαμε στην διατύπωση του προβλήματος ύστερα από μια στατιστική προσέγγιση και καταλήξαμε σε μια διατύπωση του προβλήματος ως ένα πρόβλημα κανονικοποίησης. Η αλήθεια είναι όμως ότι η διατύπωση του προβλήματος δεν είναι μοναδική με την έννοια ότι υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να παρουσιαστεί το πρόβλημα με λίγο διαφορετικές διατυπώσεις που οδηγούν στις ίδιες λύσεις.

Για παράδειγμα μπορούμε να το δούμε σαν μια γενίκευση του προβλήματος του Basis Pursuit που είδαμε πριν. Στο Basis Pursuit οι μετρήσεις που έχουμε μέσω του πίνακα  $A$  λαμβάνονται επακριβώς με την έννοια ότι δεν επιτρέπονται σφάλματα. Ας χαλαρώσουμε λίγο τον περιορισμό μας αυτό και ας επιτρέψουμε στην  $\ell_2$  νόρμα του σφάλματος να είναι μη μηδενική αλλά φραγμένη. Οπότε καταλήγουμε στο πρόβλημα

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 : \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon^2 \quad (2.49)$$

Στην παραπάνω διατύπωση του προβλήματος βλέπουμε ότι δεν υπάρχει πια η σταθερά κανονικοποίησης  $\lambda$  αλλά η σταθερά  $e$  που φράσσει το σφάλμα. Τα προβλήματα δεν μοιάζουν εκ πρώτης όψης ισοδύναμα αλλά είναι γιατί για κάθε τιμή του  $\lambda$  στην διατύπωση της εξίσωσης (2.40) μπορώ να βρω ένα αντίστοιχο  $e$  για την διατύπωση της εξίσωσης (2.49). Αν λύσω το πρόβλημα της εξίσωσης (2.40) και πάρω την νόρμα  $\|\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}\|$  της λύσης τότε αυτή ισούται με το  $e$  που πρέπει να βάλω στην διατύπωση της εξίσωσης (2.49) για να πάρω την ίδια λύση.

Τελείως παρόμοια με παραπάνω μπορούμε να κάνουμε με την  $\ell_1$  νόρμα του προς εύρεση διανύσματος και να καταλήξουμε σε ακόμη μια εναλλακτική διατύπωση

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 : \|\mathbf{x}\|_1 \leq \ell \quad (2.50)$$

Επίσης όμοια με παραπάνω το πρόβλημα της εξίσωσης (2.40) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εξίσωσης (2.50) και η ισοδυναμία των συντελεστών προκύπτει όπως και παραπάνω.

Συμπερασματικά οι τρεις παράμετροι που είδαμε παραπάνω στις εξισώσεις επιλύουν με διαφορετικό τρόπο τον συμβιβασμό που θέσαμε παραπάνω. Η  $\ell$  είναι η ανώτατη  $\ell_1$  νόρμα που επιτρέπουμε, το  $e$  είναι το άνω όριο της  $\ell_2$  νόρμας σφάλματος ενώ η παράμετρος  $\lambda$  εκφράζει πόσο βάρος δίνουμε στην αραιότητα εις βάρος του τετραγωνικού σφάλματος. Η επιλογή των παραμέτρων είναι αρκετά σημαντική και δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν πέραν κάποιων εφαρμογών.

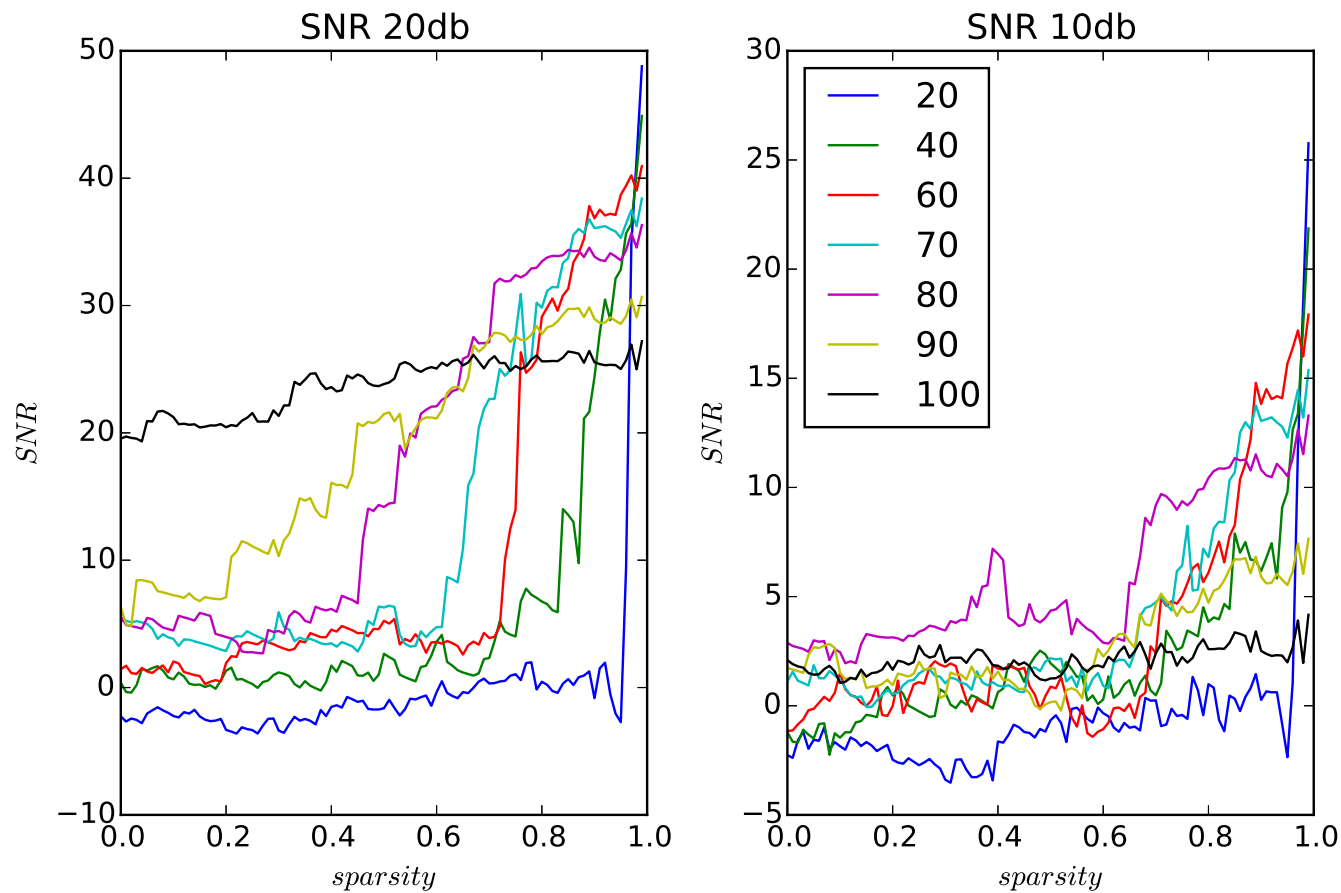
Και οι τρεις μορφές του προβλήματος μπορούν να αναχθούν σε προβλήματα κυρτού προγραμματισμού και ειδικότερα σε τετραγωνικά προγράμματα ή και σε προγράμματα κώνου δευτέρου βαθμού ανάλογα με την διατύπωση.

Το ερώτημα λοιπόν που μένει είναι τι εγγυήσεις έχουμε για την ανακατασκευή από θορυβώδη δεδομένα. Και πάλι εδώ υπεισέρχεται η ιδιότητα RIP. Στην εργασία του [5] αποδεικνύεται ότι αν  $\mathbf{x}_*$  είναι η λύση του προβλήματος μέσω της εξίσωσης (2.49) και  $\mathbf{x}$  είναι η ιδανική λύση που έδωσε τις μετρήσεις καθώς και  $\mathbf{x}_s$  το διάνυσμα που κρατά τις  $s$  μεγαλύτερες κατά απόλυτη τιμή συνιστώσες του  $\mathbf{x}$  τότε αν  $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$  ισχύει ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|_2 \leq C_0 s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1 + C_1 e \quad (2.51)$$

Αν το προς εύρεση σήμα έχει όντως αραιότητα  $s$  τότε ο πρώτος όρος μπορεί να αγνοηθεί άμεσα και μας μένει ο δεύτερος που είναι ανάλογος του θορύβου των μετρήσεων. Αυτό είναι αρκετά ικανοποιητικό καθώς δεν επιτρέπει την υπερβολική ενίσχυση του θορύβου στην εκτίμηση μας.

SNR vs sparsity with varying number of measurements



Σχήμα 2.9: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνουμε το SNR της ανακατασκευής από τον αλγόριθμο Lasso χρησιμοποιώντας ως άνω φράγμα για το σφάλμα των μετρήσεων την γνωστή ισχύ του θορύβου. Τα διανύσματα έχουν μήκος 100 και μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων τους. Οι μη μηδενικές τιμές έχουν τιμή 1. Ο πίνακας  $A$  που χρησιμοποιείται αποτελείται από ανεξάρτητα δείγματα γκαουσιανής κατανομής. Στα αριστερά οι μετρήσεις έχουν SNR 20db ενώ δεξιά 10db. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλήθη μετρήσεων  $M$ .

Τα αποτελέσματα που έχουμε στο Σχήμα 2.9 προέρχονται και πάλι από μια εκτέλεση του αλγορίθμου για κάθε συνδυασμό πλήθους μη μηδενικών συνιστωσών, μετρήσεων και θορύβου οπότε μπορεί να μην είναι απαραίτητα ενδεικτικά. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος Lasso μπορεί να οδηγήσει σε ανακατασκευή αραιών σημάτων ακόμα και με θορυβώδης μετρήσεις αν το προς εκτίμηση διάνυσμα είναι αρκετά αραιό. Ακόμη παρατηρούμε ότι για ακόμη μια φορά ότι επιπλέον μετρήσεις δεν είναι απαραίτητο ότι οδηγούν σε καλύτερο αποτέλεσμα ανακατασκευής αν και με τον αλγόριθμο Lasso τα αποτελέσματα είναι λίγο καλύτερα.

Παραπάνω είδαμε κάποια ενδιαφέροντα αποτελέσματα για αραιά σήματα με την χρήση της  $\ell_1$  νόρμας. Αν και διατυπωμένα αυστηρά σαν προβλήματα βελτιστοποίησης τα προβλήματα αυτά απαιτούν πολύ χρόνο για την επίλυση τους. Για αυτό τον λόγο έγινε προσπάθεια για την εύρεση αλγορίθμων που προσεγγίζουν πιο γρήγορα την αραιή λύση.

Κάποιοι αλγόριθμοι θα έχουν μια άπληστη προσέγγιση. Άλλοι θα προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα της  $\ell_0$  νόρμας ενώ άλλοι θα προσεγγίσουν τα προβλήματα που έχουμε ήδη δει παραπάνω κάνοντας χρήση πιο εξειδικευμένων εργαλείων από τον γραμμικό ή τετραγωνικό προγραμματισμό. Τους αλγόριθμους αυτούς θα μελετήσουμε στις επόμενες ενότητες.

## 2.10 Οι αλγόριθμοι Matching Pursuit

Οι αλγόριθμοι τύπου Matching Pursuit εισήχθησαν πρώτη φορά από την εργασία του [13]. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι έχουν μια άπληστη (greedy) συμπεριφορά παίρνοντας τοπικά βέλτιστες αποφάσεις οι οποίες δεν απαραίτητο ότι οδηγούν πάντα σε ένα καθολικά βέλτιστο αποτέλεσμα. Η προσέγγιση τους δεν εμπλέκει την  $\ell_1$  νόρμα και πρακτικά οι τοπικά βέλτιστες αποφάσεις λαμβάνονται με το κριτήριο της  $\ell_2$  νόρμας. Αν και δεν ήταν αυτό το αρχικό τους σκεπτικό καθώς δημιουργήθηκαν για την επίλυση ενός διαφορετικού προβλήματος, υπό το σκεπτικό της αραιότητας διανυσμάτων μπορούμε να πούμε ότι προσπαθούν να λύσουν προβλήματα σαν και αυτά της  $\ell_0$  νόρμας. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα τα προβλήματα αυτά γενικά είναι δυσεπίλυτα λόγω του συνδυαστικού χαρακτήρα. Το πρόβλημα είναι ότι δεν ξέρουμε τις συνιστώσες που το προς εύρεση διάνυσμα είναι μη μηδενικό.

Οι αλγόριθμοι αυτοί λειτουργούν επαναληπτικά. Σε κάθε επανάληψη ξεκινούν από ένα σύνολο από συνιστώσες όπου πιστεύετε ότι το διάνυσμα είναι μη μηδενικό και προσπαθούν να προσθέσουν και άλλες συνιστώσες με σκοπό να μειώσουν την απόκλιση από τις μετρήσεις που έχουμε πάρει. Έχει ενδιαφέρον να δούμε πως επιλέγουν οι αλγόριθμοι τους μη μηδενικούς συντελεστές. Το σκεπτικό έχει να κάνει με την RIP που οφείλει να ικανοποιεί ο πίνακας  $A$ . Αν ο πίνακας ικανοποιεί την RIP τότε αν  $x_*$  είναι η ζητούμενη αραιή λύση του

συστήματος δηλαδή ισχύει  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}_*$  τότε θα έχουμε ότι ισχύει

$$A^T \mathbf{y} = A^T A \mathbf{x}_* \approx \mathbf{x}_* \quad (2.52)$$

οπότε είναι πολύ λογικό να διαλέξουμε ως συντελεστές τις θέσεις όπου το  $A^T \mathbf{y}$  μεγιστοποιείται. Ας δούμε έναν έναν τους αλγορίθμους

### 2.10.1 Matching Pursuit

Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί την κλασική έκδοση του αλγορίθμου που προτάθηκε στην εργασία του [13]. Ο αλγόριθμος έχει τα εξής βήματα

1. Αρχικά έχουμε ότι η εκτίμηση μας είναι  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  και ως εκ τούτου το σφάλμα που έχουμε είναι  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}$ .
2. Για κάθε επανάληψη  $i$  παίρνουμε το  $\mathbf{e}_i$  και το προβάλλουμε στις στήλες του πίνακα και επιλέγουμε την στήλη για την οποία η προβολή έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Αν  $\mathbf{a}_k$  είναι η  $k$  στήλη επιλέγουμε στην  $i$  επανάληψη να προσθέσουμε την συνιστώσα

$$j_i = \operatorname{argmax}_{1 \leq k \leq N} |\mathbf{a}_k^T \mathbf{e}_{i-1}| \quad (2.53)$$

3. Με βάση αυτή την επιλογή ανανεώνουμε το σφάλμα μας

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1} - (\mathbf{a}_{j_i}^T \mathbf{e}_{i-1}) \mathbf{a}_{j_i} \quad (2.54)$$

καθώς και η εκτίμηση μας αλλάζει παίρνοντας ως τιμή της  $j_i$  συνιστώσας την τιμή της προβολής δηλαδή

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{a}_{j_i}^T \mathbf{e}_{i-1} \boldsymbol{\delta}_N(j_i) \quad (2.55)$$

όπου  $\boldsymbol{\delta}_N(j_i)$  το διάνυσμα του  $\mathbb{R}^N$  που έχει ως μόνη μη μηδενική τιμή την μονάδα στην θέση  $j_i$ .

4. Αν το σφάλμα είναι ικανοποιητικό σταματάμε αλλιώς προχωρούμε στην επόμενη επανάληψη του αλγορίθμου στο βήμα 2.

Προφανώς στο βήμα 2 η επιλογή είναι ισοδύναμη με το να επιλέξουμε την συνιστώσα του  $A\mathbf{e}_{i-1}$  όπως είπαμε πριν. Το μόνο που μας μένει για τον αλγόριθμο αυτό είναι να εξηγήσουμε γιατί δεν πρόκειται να επιλεγεί η ίδια συνιστώσα από τον αλγόριθμο στο βήμα 2 στην επόμενη επανάληψη. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα προβολής του Hilbert που μας εξηγεί ότι εάν έχουμε δύο διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{z}$  τότε αν προβάλλουμε το πρώτο στο δεύτερο μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{z}) \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.56)$$



και να γνωρίζουμε ότι  $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}$  δηλαδή

$$\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 0 \quad (2.57)$$

Έτσι αφού το σφάλμα έχει προβληθεί σε μια στήλη και έχουμε πάρει το υπόλοιπο η προβολή του υπολοίπου στην στήλη θα είναι πάντα 0 και άρα δεν πρόκειται να επιλεγεί ξανά η στήλη αυτή στην επόμενη επανάληψη. Βέβαια στις επόμενες επαναλήψεις δεν είναι εγγυημένο ότι το σφάλμα θα είναι κάθετο σε οποιαδήποτε στήλη που επιλέχθηκε προηγουμένως. Οπότε θεωρητικά μπορεί να επιλεγεί και πάλι μια στήλη. Μια παραλλαγή θα ήταν να το απαγορεύουμε αυτό επιλέγοντας μια καινούργια στήλη έτσι κι αλλιώς. Έτσι η αραιότητα του διανύσματος είναι άμεσα συνδεδεμένη με το πλήθος επαναλήψεων. Με ένα διαφορετικό τρόπο επιλύει το πρόβλημα ο επόμενος αλγόριθμος γνωστός ως Orthogonal Matching Pursuit.

## 2.10.2 Orthogonal Matching Pursuit

Ο αλγόριθμος αυτός εμφανίζεται στην εργασία του [24]. Στον κλασικό αλγόριθμο του Matching Pursuit οι τιμές των συνιστωσών γενικά δεν επιλέγονται βέλτιστα. Το πρόβλημα είναι ότι σε κάθε επανάληψη το σφάλμα δεν είναι εγγυημένο ότι θα είναι κάθετο σε όλες τις επιλεγμένες στήλες. Αυτό μπορούμε να το επιλύσουμε προσαρμόζοντας τις τιμές των επιλεγμένων συντελεστών σε κάθε επανάληψη λύνοντας ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων στο τέλος κάθε επανάληψης παίρνοντας μόνο τις επιλεγμένες στήλες του πίνακα  $A$ . Με αυτό τον τρόπο πάλι από το θεώρημα προβολής του Hilbert είναι εγγυημένο ότι το σφάλμα είναι κάθετο σε όλες τις προηγουμένως επιλεγμένες στήλες.

Έχουμε δηλαδή

1. Όπως στον κλασικό αλγόριθμο Matching Pursuit κάνουμε την αρχικοποίηση μας. Αυτή την φορά όμως κρατούμε ένα σύνολο από τις επιλεγμένες στήλες το οποίο αρχικά προφανώς είναι άδειο δηλαδή  $S_0 = \emptyset$ .
2. Για κάθε επανάληψη  $i$  κάνουμε την επιλογή μας πάλι σύμφωνα με την εξίσωση (2.53) και την προσθέτουμε στο σύνολο που κρατούμε δηλαδή  $S_i = S_{i-1} \cup \{j_i\}$ .
3. Σχηματίζουμε έναν πίνακα  $A_{S_i}$  ο οποίος αποτελείται από τις στήλες του  $A$  που ανήκουν στο σύνολο  $S_i$  και ως εκτίμηση και υπολογίζουμε τις βέλτιστες τιμές

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \underset{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^i}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - A_{S_i} \mathbf{z}\|_2 \quad (2.58)$$

και τις τιμές που παίρνουμε τις θέτουμε στις ανάλογες θέσεις στο  $\mathbf{x}_i$  βάζοντας παντού αλλού 0. Μετά υπολογίζουμε το σφάλμα ως

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y} - A \mathbf{x}_i \quad (2.59)$$

4. Τέλος επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2 μέχρι το σφάλμα να γίνει ικανοποιητικά μικρό.

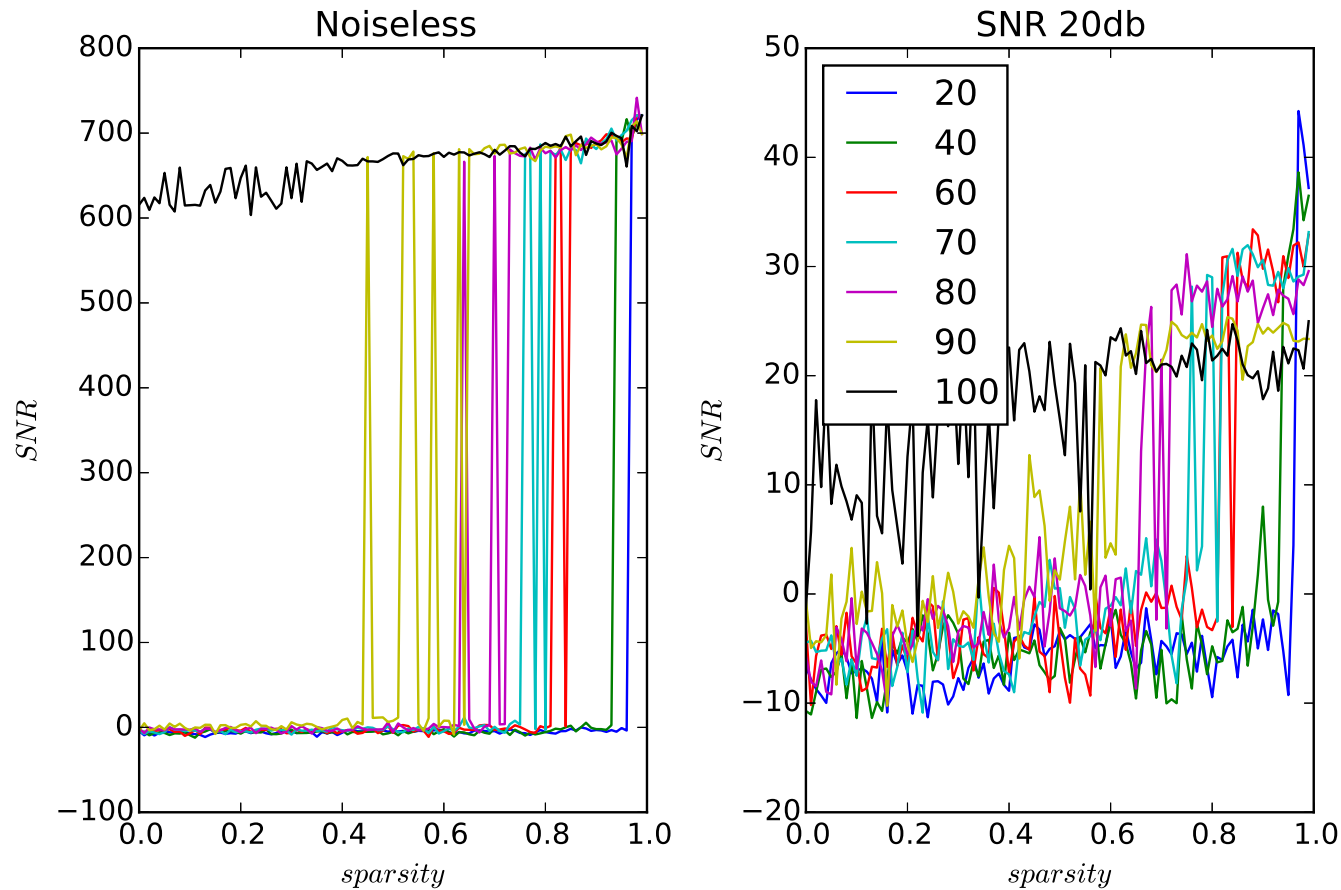
Όπως είπαμε στην αρχή οι αλγόριθμοι της οικογένειας Matching Pursuit είναι άπληστοι και οι αποφάσεις τους είναι μόνο τοπικά βέλτιστες. Ακόμα και αν επιτρέπουμε στον αλγόριθμο αυτό να τροποποιεί τις αποφάσεις του λίγο, συνολικά δεν υπάρχει κάποιο κριτήριο που να ελαχιστοποιείται από την διαδικασία. Παρόλα αυτά αποδεικνύεται στην εργασία του [24] ότι υπό κάποιες συνθήκες ο αλγόριθμος μπορεί να εντοπίσει την πιο αραιή λύση του συστήματος. Οι συνθήκες αυτές είναι ίδιες με αυτές της  $\ell_1$  νόρμας και του Basis Pursuit δηλαδή αν το διάνυσμα  $\mathbf{x}_*$  είναι αυτό που παράγαγε τις μετρήσεις  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}_*$  τότε ο αλγόριθμος του Orthogonal Matching Pursuit θα το βρει αν ισχύει ότι

$$\|\mathbf{x}_*\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(A)}\right) \quad (2.60)$$

Στο Σχήμα 2.10 βλέπουμε την επίδοση του αλγορίθμου όμοια με πριν. Εδώ παρατηρούμε ότι η επίδοση είναι ελαφρώς χειρότερη και ίσως όχι τόσο ευσταθής όσο του Basis Pursuit. Παρατηρούμε ότι γενικά χρειάζονται λίγο παραπάνω μετρήσεις σε σχέση με τον Basis Pursuit όταν δεν υπάρχει θόρυβος. Στην θορυβώδη περίπτωση τα πράγματα είναι σαφώς πιο δύσκολα καθώς το SNR σε πολλά σημεία γίνεται ακόμα και αρνητικό αλλά γενικότερα βλέπουμε τις ίδιες τάσεις με τους προηγούμενους αλγορίθμους.

### SNR vs sparsity with varying number of measurements

51



Σχήμα 2.10: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνουμε το SNR της ανακατασκευής από τον αλγόριθμο *Orthogonal Matching Pursuit*. Τα διανύσματα έχουν μήκος 100 και μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων τους. Οι μη μηδενικές τιμές έχουν τιμή 1. Ο πίνακας  $A$  που χρησιμοποιείται αποτελείται από ανεξάρτητα δείγματα γκαουσιανής κατανομής. Στα αριστερά οι μετρήσεις είναι αθόρυβες ενώ δεξιά έχουν SNR 20db. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλήθη μετρήσεων  $M$ .

### 2.10.3 Compressed Sensing Matching Pursuit

Στους δύο προηγούμενους αλγόριθμους είδαμε ότι οι επιλογές των συνιστωσών γίνονται μια μια και οι επιλογές είναι χωρίς επιστροφή με την έννοια ότι δεν γίνεται στους αλγόριθμους αυτούς να αναιρεθεί η επιλογή μιας συνιστώσας. Και τους δύο περιορισμούς τους αναιρεί ο αλγόριθμος του Compressed Sensing Matching Pursuit που παρουσιάζεται στην εργασία του [14].

Ο αλγόριθμος σε κάθε επανάληψη έχει διαθέσιμο ένα σύνολο από τους επιλεγμένους συντελεστές αλλά σε κάθε βήμα αντί να προσθέσει μόνο τον δείκτη που προκύπτει από την εξίσωση (2.53) επιλέγει τους  $t$  δείκτες που έχουν την μεγαλύτερη τιμή στο σχετικό κριτήριο ή ισοδύναμα όπως είπαμε στην εισαγωγή των Matching Pursuit αλγόριθμων τους δείκτες με της  $t$  μεγαλύτερες τιμές του  $A^T \mathbf{e}_{i-1}$  κατά απόλυτη τιμή.

Στη συνέχεια προσδιορίζει όμοια με τον Orthogonal Matching Pursuit αλγόριθμο τις βέλτιστες τιμές των συντελεστών. Η διαφοροποίηση του αλγόριθμου του Compressed Sensing Matching Pursuit εμφανίζεται στο επόμενο βήμα. Αντί να κρατήσει όλους τους συντελεστές κρατά μόνο αυτούς που έχουν ισχυρές τιμές από το προηγούμενο βήμα. Αυτό το κάνει επιλέγοντας τους  $s$  δείκτες με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στην τρέχουσα εκτίμηση. Για να το κάνει αυτό βέβαια θα πρέπει να του δοθεί ο αριθμός  $s$  εκ των προτέρων. Δηλαδή θα πρέπει να έχουμε μια εκ των προτέρων εκτίμηση για την αραιότητα του διανύσματος.

Ας δούμε αναλυτικά λοιπόν τα βήματα του αλγόριθμου

1. Η αρχικοποίηση είναι ίδια με αυτή του αλγόριθμου του Orthogonal Matching Pursuit.
2. Για κάθε επανάληψη  $i$  παίρνει ως  $S_i$  τους δείκτες όπου η τρέχουσα εκτίμηση  $\mathbf{x}_{i-1}$  είναι μη μηδενική μαζί με τους δείκτες των  $t$  μεγαλύτερων κατά απόλυτη τιμή στοιχείων του  $A^T \mathbf{e}_{i-1}$ .
3. Πάλι όπως στο Orthogonal Matching Pursuit φτιάχνουμε έναν πίνακα  $A_{S_i}$  και λύνουμε το πρόβλημα όπως στην εξίσωση (2.58) αλλά αυτή την φορά βάζουμε τις τιμές που βρίσκουμε σε ένα προσωρινό  $\hat{\mathbf{x}}_i$  στις ανάλογες θέσεις.
4. Δεν κρατούμε όμως όλους τους συντελεστές. Ως νέα εκτίμηση θεωρούμε την

$$\mathbf{x}_i = H_s(\hat{\mathbf{x}}_i) \quad (2.61)$$

όπου ο τελεστής  $H_s$  διατηρεί τις  $s$  συνιστώσες με τις μεγαλύτερες απόλυτες τιμές και τις υπόλοιπες τις θέτει στο 0. Τέλος το σφάλμα ενημερώνεται αναλόγως

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y} - A\mathbf{x}_i \quad (2.62)$$

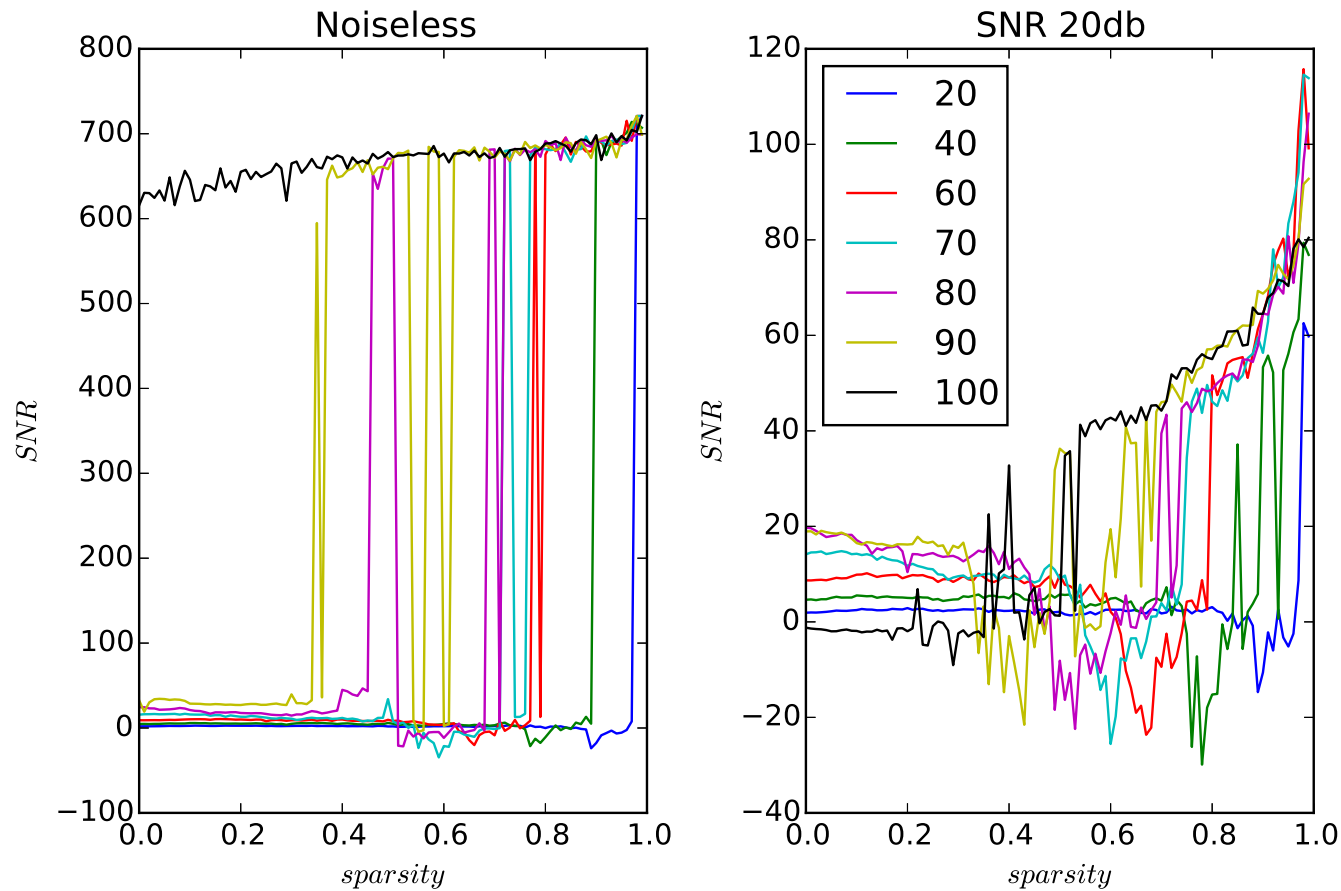
5. Τέλος αν το σφάλμα είναι ικανοποιητικό ή έχουμε φτάσει σε επαρκή αριθμό επαναλήψεων τερματίζουμε τον αλγόριθμο αλλιώς συνεχίζουμε από το βήμα 2 για την επόμενη επανάληψη.

Για να γίνει πιο κατανοητό τι κάνει ο τελεστής  $H_s$  θα δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω  $\mathbf{x} = [1, -8, 9, 0]^T$  ένα διάνυσμα. Τότε  $H_2(\mathbf{x}) = [0, -8, 9, 0]^T$ .

Ένα σημαντικό ζήτημα που προκύπτει είναι πια θα πρέπει να είναι η επιλογή του  $t$ . Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί 2 επιλογές: είτε  $t = s$  είτε  $t = 2s$  όπου  $s$  η εκτιμώμενη αραιότητα του σήματος.

Στο Σχήμα 2.11 φαίνεται η επίδοση του αλγορίθμου στα ίδια πειράματα που είχαμε και πριν. Για τα πειράματα χρησιμοποιήθηκε  $t = s$ . Στην αθόρυβη περίπτωση είχαμε συμπεριφορά παρόμοια με του Orthogonal Matching Pursuit. Στην περίπτωση του θορύβου τα αποτελέσματα είναι πιο ενδιαφέροντα. Μέχρι οι μη μηδενικοί συντελεστές να φτάσουν στους μισούς τα πράγματα είναι δύσκολα καθώς σε κάθε επανάληψη είναι πρακτικά όλες οι συνιστώσες υποψήφιες (αφού προϋπάρχουν  $s$  συντελεστές και μπαίνουν άλλοι τόσοι στην διαλογή δεδομένου ότι  $t = s$ ). Τέλος όταν φτάνουμε στα αραιά σήματα γίνεται φανερή η αξία του αλγορίθμου και φτάνουμε σε υψηλές επιδόσεις. Βέβαια δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα με τους άλλους αλγόριθμους καθώς εδώ η ακριβής αραιότητα των διανυσμάτων ήταν γνωστή εκ των προτέρων.

SNR vs sparsity with varying number of measurements



Σχήμα 2.11: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνουμε το SNR της ανακατασκευής από τον αλγόριθμο Compressed Sensing Matching Pursuit με εκ των προτέρων γνωστή την πραγματική αραιότητα. Τα διανύσματα έχουν μήκος 100 και μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων τους. Οι μη μηδενικές τιμές έχουν τιμή 1. Ο πίνακας  $A$  που χρησιμοποιείται αποτελείται από ανεξάρτητα δείγματα γκαουσιανής κατανομής. Στα αριστερά οι μετρήσεις είναι αθόρυβες ενώ δεξιά έχουν SNR 20db. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλήθη μετρήσεων  $M$ .

## 2.11 Αλγόριθμοι επαναληπτικής συρρίκνωσης (Iterative Shrinkage)

Το σκεπτικό των αλγορίθμων επαναληπτικής συρρίκνωσης διαφέρει από το σκεπτικό των προηγούμενων αλγορίθμων. Το σκεπτικό του προσεγγίζει περισσότερο το σκεπτικό των επαναληπτικών μεθόδων στάσιμου σημείου της αριθμητικής ανάλυσης. Πρακτικά αυτό που κάνουν οι μέθοδοι αυτοί είναι να ανάγουν τις εξισώσεις προς επίλυση που συνήθως είναι της μορφής  $g(x) = 0$  σε μια μορφή  $f(x) = x$  έτσι ώστε οι εξισώσεις να έχουν τις ίδιες λύσεις. Αν επιλεγεί μια κατάλληλη συνάρτηση  $f$  τότε η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να γίνει πολύ απλά: Ξεκινώντας από ένα κατάλληλα επιλεγμένο σημείο τότε η εκτίμηση γίνεται επαναληπτικά σύμφωνα με την εξίσωση

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad (2.63)$$

Η διαφορά των διαφόρων μεθόδων έγκειται στην επιλογή της συνάρτησης  $f$ . Για την επίλυση των γραμμικών εξισώσεων της μορφής  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι όπως η Gauss Seidel και Jacobi αλλά προφανώς δεν μπορούμε να κάνουμε χρήση τέτοιων μεθόδων σε συστήματα όπως αυτά που έχουμε στον πρόβλημα μας καθώς από μόνα τους δεν έχουν μοναδική λύση.

Παρόλα αυτά η αλλαγή που πρέπει να γίνει για να προσαρμόσουμε την τεχνική αυτή στην προσέγγιση αραιών λύσεων του συστήματος δεν είναι αρκετά πολύπλοκη. Αυτό που έχει προταθεί στην βιβλιογραφία είναι η εναλλαγή της γνωστής διαδικασίας όπως είναι παραπάνω με μια διαδικασία συρρίκνωσης που θα ωθεί την προσέγγιση του προηγούμενου βήματος να είναι αραιή. Άρα οι διάφοροι μέθοδοι μπορούν συνολικά να διαφέρουν και στα δύο στάδια : την ανανέωση της προσέγγισης και τον τρόπο συρρίκνωσης της.

Στο βήμα της ανανέωσης πολλές μέθοδοι συμφωνούν γιατί κάνουν χρήση της ιδιότητας RIP. Αν  $\mathbf{q}_i$  είναι η εκτίμηση μετά το πρώτο βήμα της  $i$  επανάληψης τότε αυτή προκύπτει από την προσέγγιση της προηγούμενης επανάληψης  $\mathbf{x}_i$  ως:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i + \mu \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i \quad (2.64)$$

όπου  $\mu$  μια θετική σταθερά και

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i \quad (2.65)$$

το σφάλμα της προηγούμενης προσέγγισης. Πρώτον είναι προφανές ότι σαν επαναληπτικό σχήμα χωρίς το βήμα της συρρίκνωσης όταν συγκλίνει αναγκαστικά συγκλίνει σε μια λύση της εξίσωσης  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Και δεύτερον λόγω της ιδιότητας RIP, αμέσως η πρώτη προσέγγιση πηγαίνει πολύ κοντά στη λύση μας, γιατί αν  $\mathbf{x}_*$  η ζητούμενη λύση τότε αν ξεκινήσουμε από μια μηδενική εκτίμηση

$$\mathbf{q}_1 = \mu \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mu \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x}_*) \quad (2.66)$$

οπότε λόγω της ιδιότητας RIP αν η λύση είναι αραιή έχουμε

$$\mathbf{q}_1 \approx \mu \mathbf{x}_* \quad (2.67)$$

οπότε για  $\mu$  κοντά στην μονάδα η προσέγγιση μας πηγαίνει πολύ γρήγορα κοντά στη λύση.

Αν στο βήμα της ανανέωσης προσθέσουμε το βήμα της συρρίκνωσης θα πάρουμε το συνολικό σχήμα. Έστω  $T$  ο τελεστής συρρίκνωσης τότε η πιο συνηθισμένη μορφή για το συνολικό μοντέλο του αλγόριθμου επαναληπτικής συρρίκνωσης είναι

$$\mathbf{x}_{i+1} = T(\mathbf{x}_i + \mu A^T \mathbf{e}_i) \quad (2.68)$$

Βέβαια δεν είναι δεσμευτικό να διατηρήσουμε τον τελεστή συρρίκνωσης απαραίτητα σταθερό σε όλες τις επαναλήψεις οπότε μπορούμε να γράψουμε μια πιο γενική μορφή της προηγούμενης εξίσωσης που δηλώνει την δυνατότητα αλλαγής του τελεστή

$$\mathbf{x}_{i+1} = T_i(\mathbf{x}_i + \mu A^T \mathbf{e}_i) \quad (2.69)$$

Μια ακόμη πιο γενική έκδοση του αλγόριθμου επιτρέπει και τη μεταβολή της παραμέτρου  $\mu$  οπότε παίρνουμε

$$\mathbf{x}_{i+1} = T_i(\mathbf{x}_i + \mu_i A^T \mathbf{e}_i) \quad (2.70)$$

Προφανώς η σύγκλιση επιτυγχάνεται μόνο για άπειρες επαναλήψεις στις περισσότερες φορές οπότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το σφάλμα μας να είναι ικανοποιητικά μικρό. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά σχήματα τέτοιων αλγορίθμων.

### 2.11.1 Αυστηρή κατωφλίωση (Hard Thresholding)

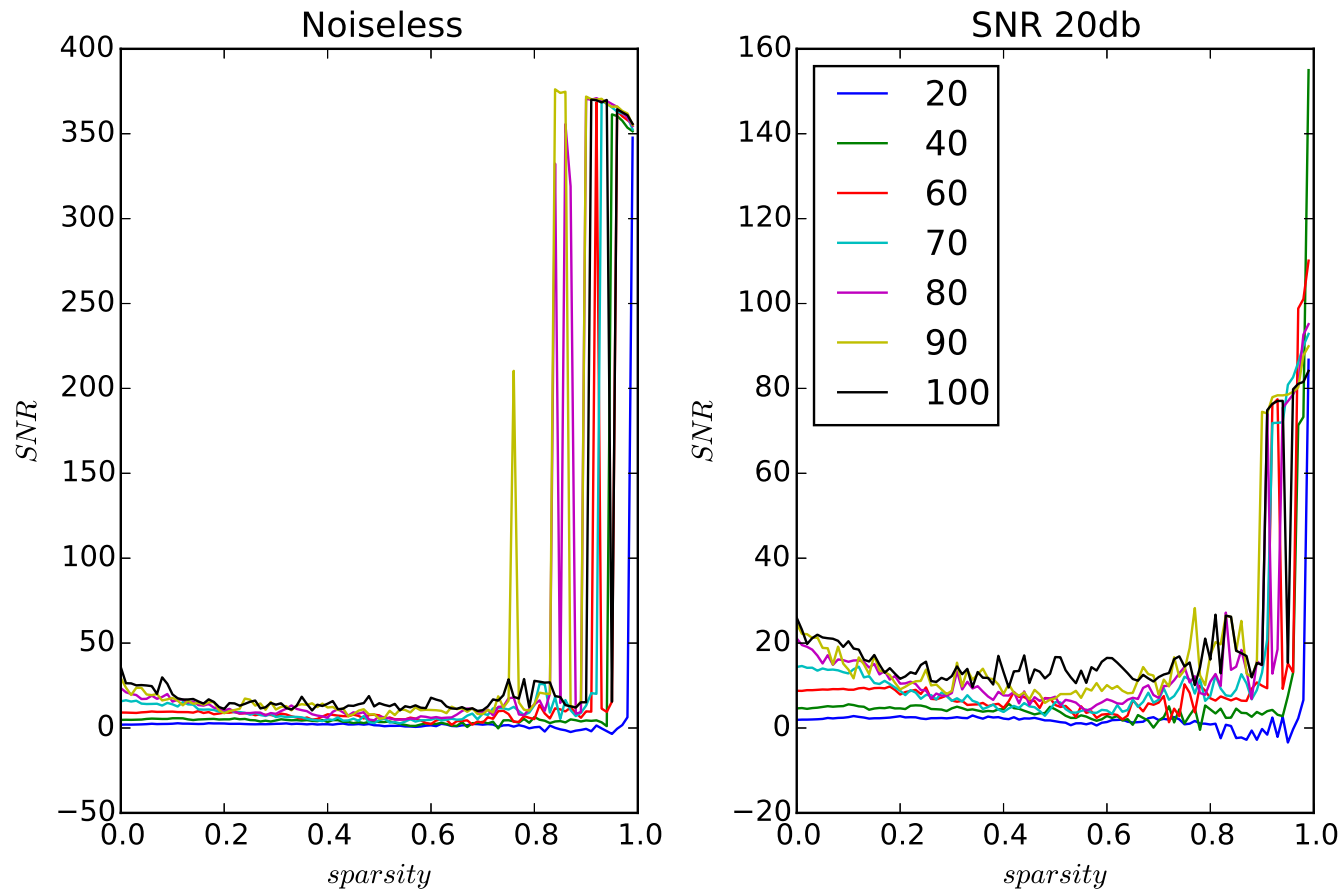
Η αυστηρή κατωφλίωση ακολουθεί το σκεπτικό της  $\ell_0$  νόρμας και πρακτικά προσπαθεί σε κάθε επανάληψη να κρατά μόνο τους μεγαλύτερους κατά απόλυτη τιμή όρους ενώ τους άλλους τους θέτει στο μηδέν. Με άλλα λόγια χρησιμοποιεί ως τελεστή τον  $H_s$  που είδαμε και στην παράγραφο του Compressed Sensing Matching Pursuit. Στο Σχήμα 2.13 παρουσιάζεται και ένα παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή. Ο αλγόριθμος λοιπόν θα πρέπει να έχει επίσης ως είσοδο το πλήθος των μη μηδενικών επιθυμητών στοιχείων. Σαν ιδέα έχει εμφανιστεί για πρώτη φορά στην εργασία του [2] όπου η σταθερά  $\mu$  του αλγορίθμου μένει σταθερή για όλες τις επαναλήψεις ίση με τη μονάδα. Για να μπορεί όμως η μέθοδος να συγκλίνει με την επιλογή αυτή πρέπει  $\|A\|_2 < 1$  το οποίο σημαίνει ότι η μέγιστη ιδιοτιμή του  $A^T A$  πρέπει να είναι μικρότερη της μονάδας. Στην συνέχεια στην εργασία του [3] προτάθηκε μια εκδοχή με προσαρμοστική αλλαγή της παραμέτρου  $\mu$  σε κάθε επανάληψη με εγγυήσεις για την σύγκλιση.

Στο διάγραμμα 2.12 βλέπουμε την επίδοση του αλγορίθμου με το σταθερό βήμα ίσο με την μονάδα οπότε έπρεπε να κάνουμε την αντίστοιχη κανονικοποίηση για να μην έχουμε απόκλιση. Σαν κριτήριο τερματισμού έχουμε θέσει τις



200 επαναλήψεις ή την μείωση του θορύβου κάτω από ένα κατώφλι που αντιστοιχεί στο θόρυβο των μετρήσεων. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αυτή χρειάζεται έντονη αραιότητα για να συγκλίνει αλλά μόλις επιτευχθεί η σύγκλιση τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά ακόμα και με θόρυβο κάτι που δεν μας εκπλήσσει απαραίτητα αφού ο αλγόριθμος γνωρίζει την ακριβή αραιότητα του διανύσματος.

SNR vs sparsity with varying number of measurements

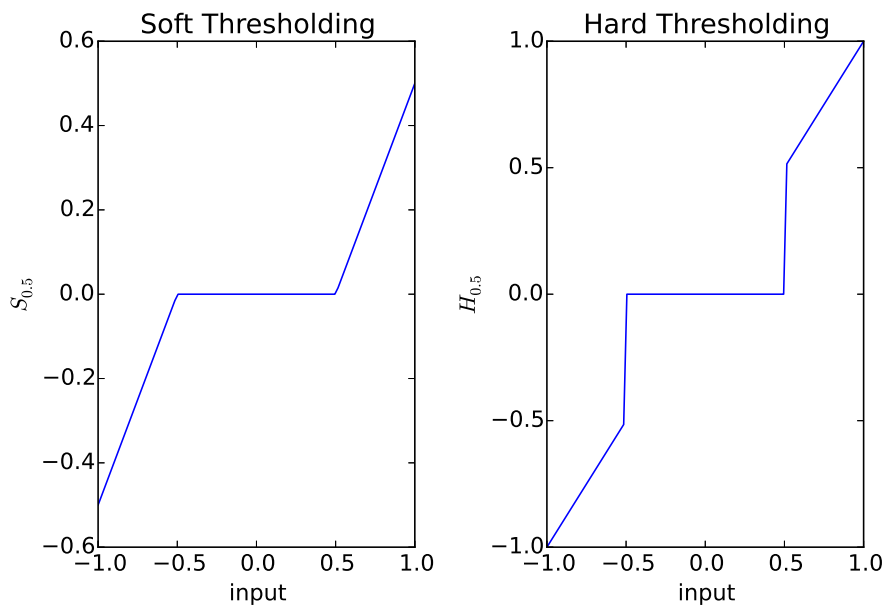


Σχήμα 2.12: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνουμε το SNR της ανακατασκευής από τον αλγόριθμο επαναληπτικής συρρίκνωσης με αυστηρή κατωφλίωση με εκ των προτέρων γνωστή την πραγματική αραιότητα. Τα διανύσματα έχουν μήκος 100 και μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων τους. Οι μη μηδενικές τιμές έχουν τιμή 1. Στα αριστερά οι μετρήσεις είναι αθόρυβες ενώ δεξιά έχουν SNR 20db. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλήθη μετρήσεων  $M$ .

## 2.11.2 Ελαστική κατωφλίωση (Soft Thresholding)

Ο αλγόριθμος της ελαστικής κατωφλίωσης τροποποιεί το σκεπτικό με το οποίο παίρνουμε το κατώφλι. Στον αλγόριθμο αυτό δίνεται και πάλι έμφαση στις μεγάλες τιμές του σήματος αλλά γίνεται η κατωφλίωση πιο δίκαια σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ο αλγόριθμος λαμβάνει ως είσοδο ένα θετικό αριθμό  $\alpha$ . Όλες οι τιμές που είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες από το  $\alpha$  μέσα στο διάνυσμα πηγαίνουν κατευθείαν στο 0. Σε αυτό το στάδιο μας θυμίζει αρκετά τον αλγόριθμο της Αυστηρής κατωφλίωσης. Η διαφορά όμως εδώ έγκειται στο γεγονός ότι οι τιμές που επιβιώνουν δεν μένουν αλώβητες. Οι τιμές τους μειώνονται και αυτές κατά απόλυτη τιμή κατά το  $\alpha$ . Στο Σχήμα 2.13 συγκρίνεται η αυστηρή και η Ελαστική κατωφλίωση με σταθερά κατωφλίωσης το 0.5. Είναι σαφές ότι η ελαστική κατωφλίωση είναι πιο ομαλή και ότι σε μεγάλες τιμές θα συμπεριφέρεται σαν την αυστηρή κατωφλίωση αφού η αφαίρεση του  $\alpha$  δεν θα παίζει τόσο σημαντικό ρόλο. Ας ονομάσουμε  $S_\alpha$  τον τελεστή ελαστικής κατωφλίωσης με σταθερά  $\alpha$ .

Soft vs Hard Thresholding



Σχήμα 2.13: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνονται η ελαστική κατωφλίωση με την αυστηρή κατωφλίωση. Είναι πολύ εύκολο να παρατηρήσει ότι η συμπεριφορά της αυστηρής κατωφλίωσης είναι πολύ πιο απότομη.

Ας πάρουμε λοιπόν τον εξής κανόνα ανανέωσης της εκτίμησης

$$\mathbf{x}_{i+1} = S_{\lambda\mu}(\mathbf{x}_i + \mu A^T \mathbf{e}_i) \quad (2.71)$$

τότε η παραπάνω πολιτική ανανέωσης αποδεικνύεται ότι συγκλίνει στην εκτίμηση του προβλήματος του Lasso με την κλασική διατύπωση κανονικοποίησης της εξίσωσης (2.40) αν το  $\mu$  είναι ένας θετικός αριθμός μικρότερος του αντιστρόφου της μέγιστης ιδιοτιμής του πίνακα  $A^T A$ . Περισσότερες πληροφορίες μπορούν να αναζητηθούν στο [16]. Η σύγκλιση όμως μπορεί να είναι αρκετά αργή. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζει η μέθοδος FISTA (Fast Iterative Soft Thresholding Algorithm) που αλλάζει το σκεπτικό των κλασικών αλγορίθμων συρρίκνωσης που είδαμε μέχρι τώρα. Αρχικά σαν πρώτο βήμα κάνουμε το εξής

$$\mathbf{x}_i = S_{\lambda\mu}(\mathbf{z}_i + \mu A^T(\mathbf{y} - A\mathbf{z}_i)) \quad (2.72)$$

όπου  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0$  και ορίζεται στη συνέχεια αναδρομικά από την σχέση

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \frac{t_i - 1}{t_{i+1}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) \quad (2.73)$$

ενώ τα  $t_i$  προκύπτουν από την αναδρομή

$$t_{i+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_i^2}}{2} \quad (2.74)$$

με βάση της αναδρομής το  $t_1 = 1$ . Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται στην εργασία του [15].

## Κεφάλαιο 3

Θεωρία και αλγόριθμοι  
προσαρμοστικών αραιών  
αναπαραστάσεων

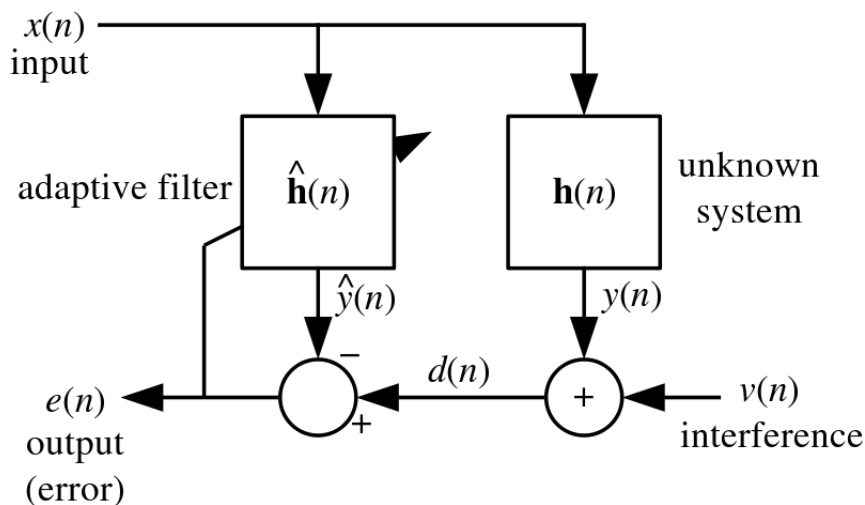
### 3.1 Προσαρμοστική παλινδρόμηση

Στις προηγούμενες παραγράφους ασχοληθήκαμε με την διατύπωση του προβλήματος όπου όλα τα δεδομένα είναι διαθέσιμα εξ αρχής και η ζητούμενη λύση είναι μοναδική και σταθερή. Πολλές φορές δεν μας είναι αρκετό να παίρνουμε μια εκτίμηση αφού έχουμε όλες τις μετρήσεις. Επίσης πολλά συστήματα είναι χρονικά μεταβαλλόμενα οπότε και η ζητούμενη λύση μπορεί να μεταβάλλεται οπότε μια μοναδική εκτίμηση στο τέλος βασισμένη στο σύνολο των μετρήσεων δεν θα είναι πολύ καλή αν η λύση μεταβάλλεται έντονα. Μια προφανής αντιμετώπιση είναι να μαζεύουμε ένα σχετικά μικρό σύνολο από παρατηρήσεις (σε σχέση με την ταχύτητα μεταβολής της ζητούμενης λύσης) και να κάνουμε όσα προβλέπονται από τους προηγούμενους αλγορίθμους για να βρούμε μια εκτίμηση για αυτό το διάστημα. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε σύνολο δεδομένων και να αποκτήσουμε έτσι μια δυναμική προσέγγιση της λύσης. Στην λογική αυτή μπορούμε να κάνουμε και μερικές βελτιώσεις όπως οι εξής:

- Επικάλυψη μεταξύ συνεχόμενων συνόλων δεδομένων ώστε η εκτίμηση να είναι πιο ομαλή
- Πρόσθεση ενός όρου αδράνειας που να τραβά την εκτίμηση για το τρέχον σύνολο πιο κοντά στην προηγούμενη ώστε και πάλι η εκτίμηση να μεταβάλλεται ομαλά

Αυτές οι μέθοδοι γενικά είναι πολύ συχνές σε πολλά είδη προβλημάτων. Φυσικά έχουν και μειονεκτήματα. Πρώτον, λόγω της επικάλυψης που χρησιμοποιούν αναγκάζονται να περνούν πολλές φορές τα ίδια δεδομένα πράγμα το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση των απαιτούμενων πόρων ιδιαίτερα για εφαρμογές πραγματικού χρόνου. Δεύτερον, μέσα σε ένα σύνολο από δεδομένα όλες οι μετρήσεις έχουν αναγκαστικά την ίδια σημασία ανεξάρτητα πόσο πρόσφατες είναι με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις μας να μην εκμεταλλεύονται την πληροφορία για την σειρά των μετρήσεων. Το σημαντικότερο μειονέκτημα είναι ότι τα σύνολα δεδομένων θα πρέπει από την μια πλευρά πρέπει να είναι αρκετά πρόσφατα ώστε να λαμβάνουν υπόψη τους κυρίως την τρέχουσα κατάσταση του εκτιμώμενου διανύσματος αλλά από την άλλη πρέπει να είναι αρκετά ώστε να μπορούν να προσδιορίσουν το προς εκτίμηση διάνυσμα αφού σε κάθε επανάληψη ξεκινάμε πρακτικά από το μηδέν.

Είναι λοιπόν προφανές ότι το πρόβλημα της προσαρμοστικής παλινδρόμησης δεν είναι τόσο εύκολο και για αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι για την επίλυση του προβλήματος. Δύο από αυτούς θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό μελετώντας τους μέσα από το πρόβλημα της προσέγγισης δυναμικών Finite Impulse Response (FIR) συστημάτων. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως Adaptive filtering στην βιβλιογραφία. Βασικό σχετικό σύγγραμμα είναι το [9]. Το σκεπτικό του προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1. Στο πρόβλημα αυτό υπάρχει ένα πραγματικό σύστημα με κρουστική απόκριση



Σχήμα 3.1: Στο Σχήμα αυτό παρουσιάζεται το πρόβλημα του Adaptive filtering σχηματικά. Πηγή: [25]

$\mathbf{h}(n) = [h_0(n), \dots, h_{p-1}(n)]$  όπου  $p$  το μήκος της κρουστικής απόκρισης. Για αυτό το σύστημα γνωρίζουμε την είσοδο του κάθε στιγμής  $x(n)$  και μια παραμόρφωση της πραγματικής εξόδου του  $y(n)$ , την  $d(n) = y(n) + v(n)$  όπου  $v(n)$  ο προσθετικός παράγοντας παραμόρφωσης. Το ζητούμενο σε αυτό το πρόβλημα είναι να προσεγγίσουμε την κρουστική απόκριση  $\mathbf{h}(n)$  κάθε χρονική στιγμή με μια εκτίμηση μας  $\hat{\mathbf{h}}$  η οποία θα έχει στην διάθεση της τις ακολουθίες  $x(n)$  και  $d(n)$ .

Αυτό που γνωρίζουμε από την θεωρία συστημάτων είναι ότι αν το σύστημα ήταν χρονικά αμετάβλητο τότε η έξοδος του συστήματος θα ήταν η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος δηλαδή με μια εξίσωση

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} * \mathbf{h} \quad (3.1)$$

Προφανώς αυτό δεν μας είναι αρκετό για την περίπτωση του μεταβαλλόμενου συστήματος. Για μια χρονική στιγμή όμως θα μπορούσαμε να γράψουμε μια εξίσωση που θα είναι και απλούστερη αλλά και θα ισχύει στην περίπτωση του μεταβαλλόμενου συστήματος. Κάθε χρονική στιγμή το σύστημα λαμβάνει υπόψη για την έξοδο του τις τελευταίες  $p$  τιμές της εισόδου. Οπότε έχουμε ένα διάνυσμα

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), \dots, x(n-p+1)]^T \quad (3.2)$$

Οπότε για την χρονική στιγμή αυτή μπορούμε να γράψουμε τον εξής τύπο για την έξοδο του συστήματος

$$y(n) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (3.3)$$

Τελείως όμοια με παραπάνω το ίδιο μπορεί να γραφτεί και για το σύστημα που προσεγγίζει το  $\mathbf{h}(n)$  δηλαδή το  $\hat{\mathbf{h}}(n)$ . Βέβαια καθώς όμως η εκτίμηση  $\hat{\mathbf{h}}(n)$

είναι διαθέσιμη αφού ληφθεί υπόψη η τρέχουσα είσοδος αναγκαστικά θα συμβιβαστούμε με την  $\hat{\mathbf{h}}(n-1)$ . Έτσι η εκτιμώμενη έξοδος  $\hat{y}(n)$  μπορεί να γραφτεί

$$\hat{y}(n) = \hat{\mathbf{h}}^T(n-1)\mathbf{x}(n) \quad (3.4)$$

Οπότε το σφάλμα που υπολογίζεται μεταξύ της θορυβώδους εξόδου του πραγματικού συστήματος και της εκτίμησης του δικού μας συστήματος μπορεί να γραφτεί άμεσα

$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^T(n-1)\mathbf{x}(n) \quad (3.5)$$

Ως αυτό το σημείο τα πράγματα είναι κοινά για τις περισσότερες μεθόδους του Adaptive Filtering. Το σημείο στο οποίο διαφέρουν είναι η ποσότητα που θέλουν να ελαχιστοποιήσουν. Η ποσότητα είναι μια συνάρτηση των σφαλμάτων που εμφανίζονται κάθε χρονική στιγμή.

## 3.2 Ο αλγόριθμος Recursive Least Squares

Ο αλγόριθμος Recursive Least Squares (RLS) αλλάζει σε κάθε χρονική στιγμή το μέγεθος που θέλει να βελτιστοποιήσει. Σε κάθε επανάληψη επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει την ποσότητα

$$J(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} e^2(i) \quad (3.6)$$

όπου  $\lambda$  ένας αριθμός που ανήκει στο  $(0, 1]$ . Αυτό που αποσκοπεί η επιλογή αυτή είναι η τρέχουσα λύση να δίνει σε κάθε επανάληψη περισσότερο βάρος στα σφάλματα που προκύπτουν στις πιο πρόσφατες εξόδους και λιγότερο στις πιο παλιές. Αυτό εκφράζεται μέσω της παραμέτρου  $\lambda$ . Όταν το  $\lambda$  είναι κοντά στην μονάδα ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται η σημασία των σφαλμάτων είναι πολύ μικρός. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που έχουμε  $\lambda = 1$  όλα τα σφάλματα μετρούν το ίδιο και αυτή η επιλογή είναι σαν να υποθέτουμε ότι το προς προσέγγιση σύστημα είναι σταθερό.

Σε κάθε περίπτωση η βελτιστοποίηση των συντελεστών του φίλτρου σε κάθε επανάληψη οδηγεί σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που παίρνει την μορφή

$$R_{xx}(n)\hat{\mathbf{h}}(n) = \mathbf{r}_{dx}(n) \quad (3.7)$$

όπου ο πίνακας  $R_{xx}(n)$  στο αριστερό μέλος είναι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης υπολογισμένος πάνω στα παρελθόντα δείγματα και κατάλληλα προσαρμοσμένο με την σταθερά  $\lambda$ . Ο πίνακας δίνεται άμεσα από την εξίσωση

$$R_{xx}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^T(i) \quad (3.8)$$



ενώ στο δεξί μέλος το  $\mathbf{r}_{dx}(n)$  που αντιστοιχεί στην προσαρμοσμένη ετεροσυσχέτιση των ακολουθιών  $x(n)$  και  $d(n)$  δίνεται αντίστοιχα από την εξίσωση

$$\mathbf{r}_{dx}(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} \mathbf{x}(i)d(i) \quad (3.9)$$

Τυπικά το αποτέλεσμα είναι καθορισμένο από την εξίσωση (3.8) οπότε δεν χρειάζονται άλλες επεξηγήσεις. Το πρόβλημα όμως που παραμένει είναι ότι η επίλυση του συστήματος της εξίσωσης (3.8) απαιτεί αρκετή υπολογιστική προσπάθεια. Αν και η αναδρομική εύρεση του  $R_{xx}(n)$  και  $\mathbf{r}_{dx}$  είναι πολύ απλή υπόθεση με τις εξισώσεις

$$R_{xx}(n) = \lambda R_{xx}(n-1) + \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) \quad (3.10)$$

καθώς και

$$\mathbf{r}_{dx}(n) = \lambda \mathbf{r}_{dx}(n-1) + \mathbf{x}(n)d(n) \quad (3.11)$$

το κυρίως πρόβλημα παραμένει ότι η ίδια η επίλυση του συστήματος της εξίσωσης (3.8) απαιτεί υπολογιστικό χρόνο της τάξης του  $\mathcal{O}(p^3)$  όπου  $p$  είναι και πάλι το μήκος της κρουστικής απόκρισης. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ο αναδρομικός υπολογισμός του  $P(n) = R_{xx}(n)^{-1}$ . Μετά από αρκετή μαθηματική εργασία φτάνουμε στην συνολική λύση

$$e(n) = d(n) - \mathbf{h}^T(n-1)\mathbf{x}(n) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{g}(n) = \frac{P(n-1)\mathbf{x}(n)}{\lambda + \mathbf{x}^T(n)P(n-1)\mathbf{x}(n)} \quad (3.13)$$

$$P(n) = \lambda^{-1}(P(n-1) - \mathbf{g}(n)\mathbf{x}^T(n)P(n-1)) \quad (3.14)$$

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + e(n)\mathbf{g}(n) \quad (3.15)$$

Οπότε με το νέο σχήμα ανανέωσης η ίδια διαδικασία μπορεί να γίνει με υπολογιστικό χρόνο της τάξης του  $\mathcal{O}(p^2)$ . Βέβαια υπάρχει ένα ακόμα σημείο που πρέπει να σχολιασθεί και είναι η αρχικοποίηση του αλγορίθμου μας. Γενικά όσο καλύτερη είναι η αρχικοποίηση με την έννοια οι αρχικές τιμές να είναι όσο πιο κοντά στις πραγματικές τιμές τόσο το καλύτερο. Ελλείψει κάποιας άλλης πληροφορίας συνηθίζεται να τίθεται

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

καθώς και

$$P(0) = \delta^{-1}I_p \quad (3.17)$$

με  $\delta$  μια μικρή σταθερά πολύ μικρότερη της μονάδας και  $I_p$  ο  $p \times p$  ταυτοτικός πίνακας.

Αυτό που πρέπει να τονίζουμε εδώ είναι ότι ακόμα και για στατικά προβλήματα δεν μπορεί να υπάρχει κάποια έννοια της υποδειγματοληψίας όπως

στους προηγούμενους αλγορίθμους. Τα δείγματα εδώ μπορεί να είναι αρκετά παραπάνω από το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων του συστήματος. Το αντίστοιχο μέγεθος στους προσαρμοστικούς αλγορίθμους είναι η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου δηλαδή πόσο γρήγορα φτάνει κοντά στην επιθυμητή λύση.

Προηγουμένως κάναμε λόγο για την δυνατότητα της παραμέτρου  $\lambda$  να διαφοροποιεί την σημασία παλαιότερων και νεότερων σφαλμάτων. Δηλαδή κύριο μέλημα μας σύμφωνα με τα παραπάνω είναι το  $\lambda$  να αντιπροσωπεύει την εκτίμηση μας για το πόσο ευμετάβλητο είναι το προς εκτίμηση σύστημα. Θα πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας και τον παράγοντα του θορύβου. Όταν υπάρχει θόρυβος, δηλαδή η παρεμβολή  $v(n)$  είναι ισχυρή θα πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Αν ο θόρυβος είναι αρκετά ισχυρός τότε ένα μικρό  $\lambda$  μπορεί να είναι μια κακή επιλογή. Ένα μικρό  $\lambda$  ισοδυναμεί με το να λαμβάνουμε πρακτικά υπόψη πολύ λιγότερα δείγματα και όταν αυτά μπορεί να είναι θορυβώδη η εκτίμηση μας μπορεί να μην είναι αρκετά καλή όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.2.

Αντίθετα αν το σύστημα μεταβάλλεται με τον χρόνο η ακριβής σύγκλιση στην λύση σε πεπερασμένο χρόνο είναι αδύνατη γιατί παλαιά δείγματα έχουν μη μηδενική συνεισφορά στην τρέχουσα εκτίμηση. Πρακτικά όμως η συνεισφορά αυτή γίνεται πολύ γρήγορα αμελητέα όταν το  $\lambda$  είναι μικρότερο του 1. Στην περίπτωση που το  $\lambda$  είναι 1, τότε η σύγκλιση θα έρθει μόνο αν έρθουν πολλά δείγματα για τη τρέχουσα κατάσταση ώστε να υπερκεράσουν την συνεισφορά όλων των προηγούμενων. Μια σύγκριση σε δεδομένα χωρίς θόρυβο στο Σχήμα 3.3 μας δείχνει ότι μικρά  $\lambda$  είναι ιδανικά για μεταβαλλόμενα συστήματα όταν ο θόρυβος είναι αμελητέος. Στην πράξη όμως ούτε έχουμε συνήθως τόσο μεγάλες μεταβολές ούτε ο θόρυβος είναι τόσο αμελητέος οπότε χρησιμοποιείται μια τιμή μεταξύ του 0.97 και 0.995.

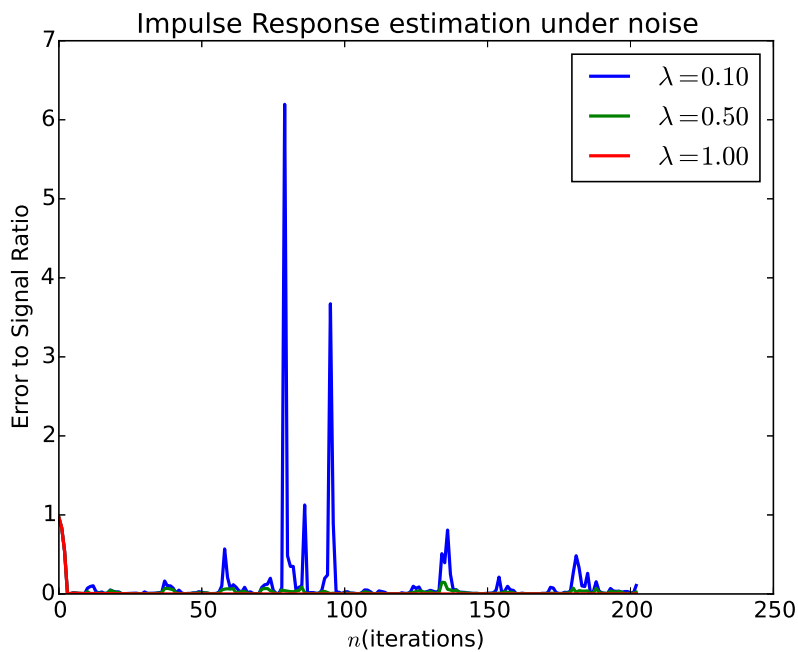
### 3.3 Ο αλγόριθμος Least Mean Squares

Ο αλγόριθμος Least Mean Squares (LMS), που εφευρέθηκε από τους συγγραφείς του [26], ακολουθεί ένα διαφορετικό σκεπτικό για την επίλυση του προβλήματος της προσαρμοστικής παλινδρόμησης. Το μέγεθος που προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει είναι το τετράγωνο της αναμενόμενη τιμή του σφάλματος της τρέχουσας επανάληψης. Δηλαδή

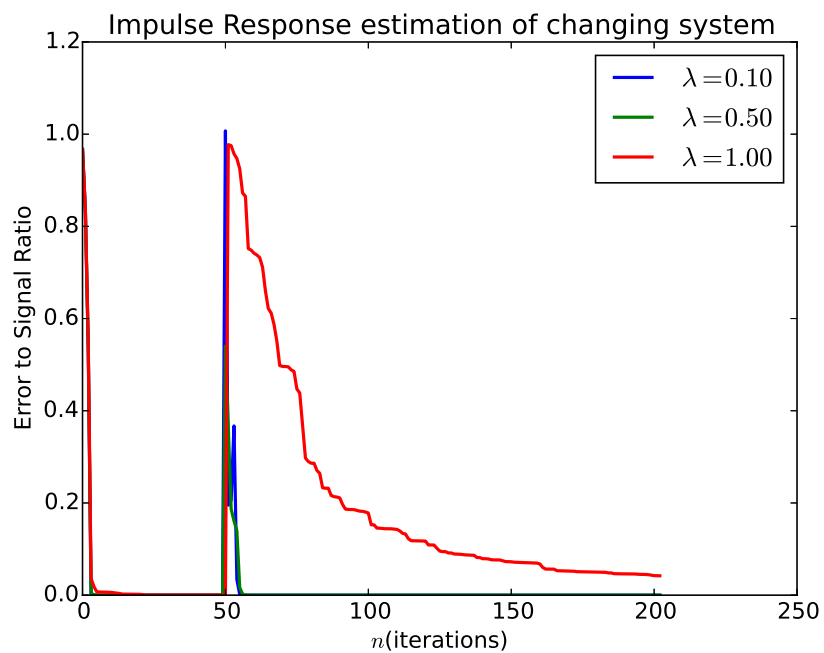
$$J(n) = E\{e^2(n)\} \quad (3.18)$$

Για την επίτευξη αυτού του στόχου ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την μέθοδο της βαθύτατης καθόδου. Δηλαδή σε κάθε επανάληψη ανανεώνει την εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης προσθέτοντας έναν όρο παράλληλο στην κλίση της  $J(n)$ . Με άλλα λόγια αν  $\mu$  μια σταθερά ο αλγόριθμος LMS ακολουθεί τον κανόνα

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) - \frac{\mu}{2} \nabla_{\hat{\mathbf{h}}} J(n) \quad (3.19)$$



Σχήμα 3.2: Στο διάγραμμα αυτό παρουσιάζεται ο λόγος της ισχύος του σφάλματος της εκτίμησης της κρουστικής απόκρισης προς την ισχύ της κρουστικής απόκρισης για διάφορες τιμές του  $\lambda$ . Η κρουστική απόκριση είναι σταθερή και ίση με  $[1, 2, 3, 4]$ . Οι μετρήσεις της εξόδου έχουν λευκό θόρυβο με SNR 20db. Εύκολα παρατηρούμε ότι όταν το  $\lambda$  είναι μικρό τα σφάλματα υπό θόρυβο μπορεί να είναι μεγάλα. Μεγαλύτερες σε μήκος κρουστικές αποκρίσεις θα δυσκόλευαν ακόμα περισσότερο τα μικρά  $\lambda$  καθώς θα απαιτούνταν περισσότερα δείγματα για μια καλύτερη εκτίμηση ενώ το μικρό  $\lambda$  πρακτικά αγνοεί ακόμα και σχετικά πρόσφατα δεδομένα



Σχήμα 3.3: Στο Σχήμα αυτό παρουσιάζεται όμοια με παραπάνω το σχετικό σφάλμα στην προσέγγιση της κρουστικής απόκρισης για διάφορες τιμές του  $\lambda$  σε ένα σύστημα που αλλάζει απότομα στην επανάληψη 50. Η κρουστική απόκριση αλλάζει από  $[1, 2, 3, 4]^T$  σε  $[-3, 4, -7, 8]^T$ . Οι μετρήσεις μας δεν έχουν θόρυβο. Παρατηρούμε ότι για  $\lambda = 1$  η σύγκλιση είναι πιο αργή από τις άλλες επιλογές

Με λίγη μαθηματική εργασία μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στον εξής τύπο

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu E\{\mathbf{x}(n)e(n)\} \quad (3.20)$$

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην εκτίμηση της μέσης τιμής  $E\{\mathbf{x}(n)e(n)\}$ . Η πιο απλή προσέγγιση θα ήταν να πάρουμε τον δειγματικό μέσο όρο κάνοντας χρήση  $\nu$  δειγμάτων από τις πιο πρόσφατες επαναλήψεις δηλαδή

$$\hat{E}\{\mathbf{x}(n)e(n)\} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathbf{x}(n-i)e(n-i) \quad (3.21)$$

Ο υπολογισμός εκ νέου των σφαλμάτων για  $\nu$  τελευταία δείγματα μπορεί να πάρει αρκετό χρόνο. Για αυτό επιλέγεται συνήθως ένα αρκετά μικρό  $\nu$ . Στην βιβλιογραφία όταν γίνεται αναφορά στον αλγόριθμο LMS γίνεται αναφορά κυρίως στην πιο απλή περίπτωση όπου το  $\nu = 1$  και ο τύπος της ανανέωσης γίνεται πολύ απλά

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n)e(n) \quad (3.22)$$

Αυτό που εύκολα μπορούμε να δούμε είναι ότι η υλοποίηση αυτού του αλγορίθμου είναι μια απλή υπόθεση και ότι η πολυπλοκότητα του είναι μικρή καθώς απαιτεί  $\mathcal{O}(p)$  πράξεις ανά επανάληψη.

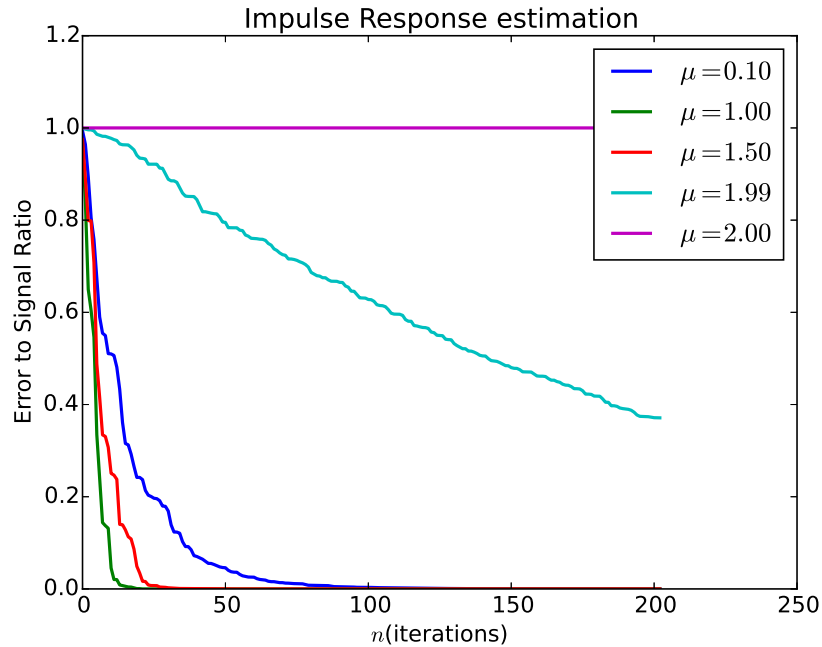
Όπως και στον αλγόριθμο RLS έτσι και στον αλγόριθμο LMS η επιλογή των παραμέτρων είναι πολύ σημαντική για την σύγκλιση της εκτίμησης. Για τον αλγόριθμο LMS η σύγκλιση δεν είναι εγγυημένη. Ο αλγόριθμος αυτός συγκλίνει μόνο κατά μέση τιμή. Δηλαδή η εκτίμηση μας με μια κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου  $\mu$  θα έχει μέση τιμή μετά από αρκετές επαναλήψεις την ζητούμενη τιμή. Δυστυχώς όμως η εκτίμηση μπορεί να είναι αρκετά μακριά από την βέλτιστη τιμή και ταυτόχρονα να ικανοποιεί τον περιορισμό αυτό. Αυτό οφείλεται στην απλοϊκή εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής μόνο μέσω ενός δείγματος. Η συνθήκη σύγκλισης κατά μέση τιμή για την αθόρυβη περίπτωση έχει να κάνει με τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα αυτοσυσχέτισης της εισόδου  $R_{xx}$ . Η συνθήκη είναι:

$$0 < \mu < \frac{2}{\max_i \lambda_i} \quad (3.23)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι δεν πρέπει να ξεπεράσουμε ένα όριο για να πετύχουμε σύγκλιση κατά μέση τιμή, την οποία τιμή δεν μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων. Μια ασφαλής τακτική θα ήταν να θέσουμε μια πολύ χαμηλή τιμή για να αποφύγουμε την απόκλιση. Δυστυχώς όμως αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μια πιο αργή σύγκλιση του αλγορίθμου.

Το πρόβλημα λύνεται μερικώς με μια τροποποίηση του αλγορίθμου γνωστή ως Normalised LMS. Σε αυτήν την τροποποίηση η εξίσωση ανανέωσης γίνεται

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)} \quad (3.24)$$



Σχήμα 3.4: Όπως στα προηγούμενα Σχήματα του RLS εδώ παρουσιάζεται το σφάλμα της εκτίμησης μιας κρουστικής απόκρισης κανονικοποιημένο με την ισχύ της ιδανικής εκτίμησης. Η προς εκτίμηση κρουστική απόκριση είναι  $[1, 2, 3, 4]^T$ . Οι μετρήσεις είναι αθόρυβες. Η βέλτιστη σύγκλιση είναι για  $\mu = 1$  ενώ για μικρότερες έχουμε πιο αργή σύγκλιση. Για μεγαλύτερες τιμές αρχικά έχουμε πάλι πιο αργή σύγκλιση αλλά μετά μπορεί η μέθοδος να μην συγκλίνει καν όπως για  $\mu = 2$ .

Το θετικό αυτού του κανόνα είναι ότι στην περίπτωση χωρίς θόρυβο η βέλτιστη ταχύτητα σύγκλισης είναι δυνατή για  $\mu = 1$ , μια τιμή ανεξάρτητη των δεδομένων εισόδου. Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζεται η σύγκλιση του παραπάνω αλγορίθμου για διάφορες τιμές του  $\mu$ .

### 3.4 Συνεργατική ή Κατανεμημένη Μάθηση

Στις προηγούμενες ενότητες οι εκτιμήσεις μας γίνονταν από μόνο μια ροή δεδομένων. Δηλαδή το προς εκτίμηση σύστημα είχε μια είσοδο και μια έξοδο. Μια γενίκευση της παραπάνω ιδέας είναι να έχουμε πολλές ανεξάρτητες ροές δεδομένων και αντίστοιχες εξόδους. Σε ένα στατικό περιβάλλον είναι πολύ εύκολο να τα μαζέψουμε όλα μαζί και να κάνουμε μια συλλογική εκτίμηση του μεγέθους. Προφανώς σε προσαρμοστικά περιβάλλοντα αυτό δεν είναι πραγματοποιήσιμο. Το ερώτημα είναι πως θα μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε αυτή

την πλεονάζουσα πληροφορία για να κάνουμε την προσέγγιση μας καλύτερη. Αυτό πρέπει να το σκεφτούμε ιδιαίτερα όταν οι ανεξάρτητες αυτές ροές βρίσκονται σε χωριστά και μακρινά περιβάλλοντα οπότε δεν είναι δυνατό να έχουμε πλήρη ανταλλαγή πληροφορίας.

Έχουμε λοιπόν μια τοπολογία γράφου όπου υπάρχουν κόμβοι οι οποίοι συνδέονται με γειτονικούς κόμβους με τους οποίους μπορούν να ανταλλάξουν πληροφορίες ενώ με τους υπόλοιπους όχι. Το σκεπτικό είναι ότι αν υπάρχει μια αλυσίδα γειτνίασης μεταξύ οποιοδήποτε ζεύγους κόμβου, με άλλα λόγια ο γράφος είναι συνεκτικός αν θεωρήσουμε ως ακμή την δυνατότητα σύνδεσης και ανταλλαγής πληροφορίας τότε οποιαδήποτε σφάλματα θα διαχυθούν σε όλο το δίκτυο και θα μειωθεί έτσι το τελικό σφάλμα της εκτίμησης.

Έχουμε έστω λοιπόν ένα σύνολο από  $\nu$  εκτιμητές. Κάθε εκτιμητής  $i$  είναι συνδεδεμένος με ένα μέγεθος που επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει έστω  $J_i^n(\hat{\mathbf{h}})$  το οποίο είναι μια κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία μπορεί να αλλάζει με το χρόνο. Για να έχει νόημα η συνεργασία βέβαια θα πρέπει να έχουν το ελάχιστο τους σε μια κοινή τιμή του διανύσματος  $\hat{\mathbf{h}}$  αλλιώς δεν θα είχε νόημα η συνεργασία.

Μια τέτοια προσέγγιση γίνεται στο [17]. Αν ο κάθε εκτιμητής χρησιμοποιεί μια μέθοδο ελάχιστης καθόδου τότε έχει νόημα να μοιραστεί την κλίση της προς ελαχιστοποίησης συνάρτησης με τους γείτονες του. Επίσης έχει νόημα να μοιραστεί και την ίδια την εκτίμηση του. Αν λοιπόν ο  $i$ -οστός εκτιμητής έχει ως γειτονιά ένα σύνολο κόμβων  $\mathcal{N}_i$  τότε η αλληλεπίδραση με τους γείτονες μπορεί να γίνει σε δύο βήματα. Στο πρώτο γίνεται η ανταλλαγή των κλίσεων.

$$\psi_i(n) = \hat{\mathbf{h}}_i(n-1) - \mu_i \sum_{\ell \in \mathcal{N}_i} c_{\ell,i} \nabla_{\hat{\mathbf{h}}} J_{\ell}^n(\hat{\mathbf{h}}_{\ell}(n-1)) \quad (3.25)$$

Στην εξίσωση (3.25) τα  $\mu_i$  είναι οι συντελεστές της καθόδου όπως είδαμε και στο LMS ενώ οι συντελεστές  $c_{\ell,i}$  εκφράζουν την αλληλεπίδραση των κόμβων  $\ell$  και  $i$  και είναι προφανώς 0 αν ο  $\ell$  δεν ανήκει στην γειτονιά του  $i$  την  $\mathcal{N}_i$ . Προφανώς οι συντελεστές αυτοί πρέπει να είναι μη αρνητικοί. Επιπλέον απαιτούμε να ισχύει

$$\sum_{\ell \in \mathcal{N}_i} c_{\ell,i} = 1 \quad (3.26)$$

για όλους τους κόμβους το οποίο δεν μας περιορίζει καθώς πάντα μπορούμε να μεταφέρουμε την επίδραση της μη κανονικοποίησης στον παράγοντα  $\mu_i$ . Σε επόμενη φάση μένει η διάδοση των εκτιμήσεων των γειτόνων που για τον κόμβο  $i$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\hat{\mathbf{h}}_i(n) = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_i} a_{\ell,i} \psi_{\ell}(n) \quad (3.27)$$

Και πάλι στην εξίσωση (3.27) οι συντελεστές  $a_{\ell,i}$  εκφράζει την αλληλεπίδραση των κόμβων  $\ell$  και  $i$  και ισχύουν ότι και για τους συντελεστές  $c_{\ell,i}$ , δηλαδή

είναι μη αρνητικοί και έχουν άθροισμα 1 στην γειτονιά του κάθε κόμβου δηλαδή

$$\sum_{\ell \in \mathcal{N}_i} a_{\ell,i} = 1 \quad (3.28)$$

ώστε να αποτελεί η εξίσωση (3.27) ένας σταθμισμένος μέσος όρος. Προφανώς δεν είναι απαραίτητο να έχουμε και τις δύο ανταλλαγές πληροφοριών. Θέτοντας  $c_{i,i} = 1$  ή  $a_{i,i} = 1$  πρακτικά ακυρώνουμε τις αντίστοιχες συνεργασίες και έτσι μειώνεται η επικοινωνία μεταξύ των κόμβων. Επίσης αν θέλουμε μπορούμε να αντιστρέψουμε την σειρά με την οποία γίνεται η ανταλλαγή των πληροφοριών σε κάθε επανάληψη κάνοντας πρώτα το στάδιο της διάδοσης των εκτιμήσεων και μετά το στάδιο της ανταλλαγής των κλίσεων.

Στην εργασία του [17] αναφέρονται οι συνθήκες με τις οποίες η ανταλλαγή πληροφοριών οδηγούν σε μια ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου από ότι θα είχαμε αν κάθε εκτιμητής δούλευε μόνος του.

### 3.5 Προσαρμογή βασισμένη σε μεθόδους μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης (Variational Bayes)

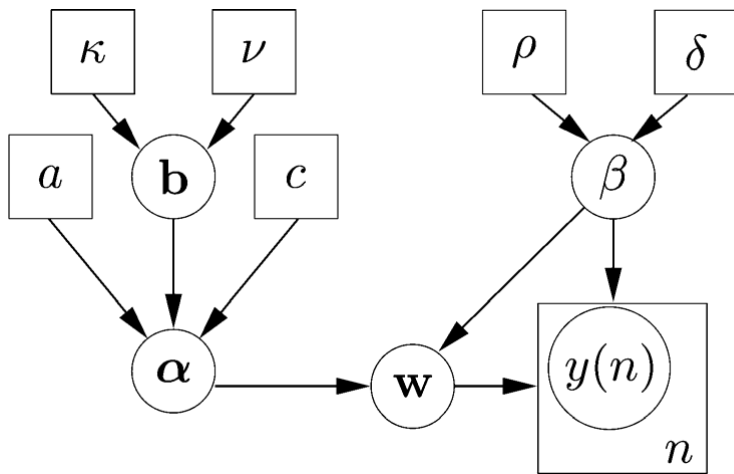
Έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες για την ανάπτυξη προσαρμοστικών αλγορίθμων που εκμεταλλεύονται την αραιότητα. Πολλοί από τους αλγορίθμους που έχουν παρουσιαστεί βασίζονται άμεσα σε αντίστοιχους μη προσαρμοστικούς αλγορίθμους όπως αυτούς που είδαμε πριν.

Μια πρωτότυπη αντιμετώπιση πάνω στο θέμα γίνεται στην εργασία του [18]. Στην εργασία αυτή πρώτα παρουσιάζεται ένας μη προσαρμοστικός αλγόριθμος που βασίζεται στη Μπεϋζιανή ανάλυση. Στη συνέχεια γίνεται προσαρμογή των τύπων ώστε να είναι συμβατοί με το προσαρμοστικό περιβάλλον.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε δύο στατιστικές μεθόδους για την επίλυση του προβλήματος της γραμμικής παλινδρόμησης, την μέθοδο μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας και την μέθοδο της εκ των υστέρων μεγιστοποίησης πιθανότητας. Στο πρώτο μοντέλο οι παράμετροι που είχαμε δεν ήταν συνδεδεμένοι με κάποια κατανομή ή μοντέλο. Στην εκ των υστέρων μεγιστοποίηση πιθανότητας υπήρχε μια κατανομή συνδεδεμένη με την κάθε παράμετρο που εξέφραζε την εκ των προτέρων πεποίθησή μας για την τιμή της παραμέτρου. Στο τέλος όμως και πάλι επιλέγουμε μια μοναδική τιμή για την παράμετρο μας.

Όλα αυτά ήταν αρκετά για την ανάλυση που είχαμε κάνει. Εν τέλει όταν η μοναδική άγνωστη παράμετρος του μοντέλου μας είναι το άγνωστο σε μας  $x$  της εξίσωσης (2.9) δεν θα μπορούσαν τα πράγματα να είναι πολύ πιο σύνθετα. Τα πράγματα γίνονται πολύ διαφορετικά όταν υπάρχουν πολλές παράμετροι που έχουν θεωρηθεί τυχαίες μεταβλητές οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με





Σχήμα 3.5: Το δίκτυο εξαρτήσεων που προτείνεται στην εργασία του [18]. Μια σημαντική διαφορά είναι ότι στην συγκεκριμένη εργασία το προς εκτίμηση διάνυσμα είναι το  $\mathbf{w}$ . Επίσης τα τετράγωνα αντιστοιχούν σε κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές και στις δεδομένες μετρήσεις  $y(n)$ . Πηγή:[18]

την μια να εμφανίζεται στην κατανομή της άλλης. Τότε σχηματίζονται δίκτυα εξαρτήσεων μεταξύ των μεταβλητών όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 3.5.

Στο σχήμα 3.5 κάθε σύνδεση είναι κατευθυνόμενη. Η τυχαία μεταβλητή ή σταθερά από την οποία ξεκινά η σύνδεση φτάνει σε μια τυχαία μεταβλητή στην κατανομή της οποίας εμφανίζεται. Τώρα που οι συνδέσεις είναι πιο πολύπλοκες έχουμε δύο επιλογές. Η πρώτη είναι να επιλέξουμε και πάλι την τιμή που δίνει την μέγιστη εκ των υστέρων πιθανότητα για όλες τις μεταβλητές. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ επιρρεπής σε λάθη. Επειδή έχουμε ένα πλέγμα από μεταβλητές ένα λάθος στην μια μπορεί να οδηγήσει σε συσσωρευτικά λάθη σε άλλες. Η άλλη οπτική γωνία είναι να μην επιλέξουμε μια μοναδική τιμή για όλες τις ενδιαμέσες παραμέτρους εκτός από αυτές που πραγματικά θέλουμε να εκτιμήσουμε. Αν στο πρόβλημα της γραμμικής παλινδρόμησης πάρουμε ένα διάνυσμα  $\theta$  με όλες τις ενδιαμέσες παραμέτρους εκτός του  $\mathbf{x}$  και πάρουμε ως μετρήσεις τις τιμές  $\mathbf{y}$  τότε μπορούμε να πάρουμε ως εκ των υστέρων κατανομή του  $\mathbf{x}$

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta|\mathbf{y})d\theta \quad (3.29)$$

Ο όρος  $p(\theta|\mathbf{y})$  είναι γενικά δύσκολος να υπολογιστεί αναλυτικά στις περισσότερες περιπτώσεις. Για αυτό χρησιμοποιούνται τεχνικές μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης για τον υπολογισμό του όρου αυτού. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να αναζητηθούν στην σχετική βιβλιογραφία όπως στην εργασία του [10]. Στο τέλος δεδομένης της παραπάνω κατανομής μπορούμε να πάρουμε την μέση τιμή της ως τελική μας εκτίμηση.

Οπότε το μόνο ζητούμενο που μας μένει είναι να δούμε πως το συγκεκριμένο μοντέλο προωθεί την αραιότητα. Το μυστικό βρίσκεται στο πως συνδέονται οι τυχαίες μεταβλητές μεταξύ τους το σχήμα 3.5. Το διάνυσμα  $x$  ( δηλαδή το  $w$  της εικόνας κατά την σύμβαση του άρθρου ) έχει μια κανονική κατανομή. Αυτό μπορεί μετά την συζήτηση μας στο προηγούμενο κεφάλαιο να μην είναι διαισθητικά σωστό. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι το διάνυσμα  $a$  είναι μια τυχαία μεταβλητή. Οπότε με μια κατάλληλη επιλογή της κατανομής του διανύσματος  $a$  μπορούμε να καταλήξουμε σε κατανομές που γενικά προωθούν την αραιότητα όπως την κατανομή Laplace ή την κατανομή Student.

Οπότε βασιζόμενη στο μοντέλο και τις μεθόδους της μεταβολικής Μπεϋζιανής ανάλυσης μπορούμε να καταλήξουμε σε επαναληπτικούς τύπους που συγκλίνουν στην επιθυμητή εκτίμηση μας για το διάνυσμα  $x$ .

Για να οδηγηθούμε όμως σε μια λύση που κινείται προσρμοστικά πρέπει να κάνουμε λίγη εργασία ακόμη. Πρακτικά αυτό που γίνεται στην εργασία του [18] είναι η προσθήκη ενός όρου κανονικοποίησης στην διαδικασία του κλασικού RLS. Το ρόλο που έπαιξε στην στατική περίπτωση το διάνυσμα  $a$  παίζει εδώ ένας διαγώνιος πίνακας  $A_s(n)$  που ωθεί το διάνυσμα να είναι αραιό. Έτσι παίρνουμε έναν νέο πίνακα  $R_s(n)$  που υπολογίζεται από τον κλασικό πίνακα αυτοσυσχέτισης  $R(n)$  του RLS και τον πίνακα  $A_s(n - 1)$  μέσω της σχέσης

$$R_s(n) = R(n) + A_s(n - 1) \quad (3.30)$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A_s$  αντιστοιχούν στο διάνυσμα  $a$  της στατικής περίπτωσης οπότε ανάλογοι τύποι υπολογισμού των τιμών μπορούν να προκύψουν. Τους αναλυτικούς τύπους καθώς και περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να τους βρει στην εργασία του [18].

Στη συνέχεια θα εξοικειωθούμε με τις δυνατότητες των προτεινόμενων αλγορίθμων μέσω μιας προσομοίωσης. Το αντικείμενο της προσομοίωσης είναι και πάλι στο πλαίσιο του Adaptive Filtering . Η παράμετρος  $\lambda$  έχει επιλεγεί 0.99. Το προς εκτίμηση διάνυσμα είναι ένα FIR σύστημα του οποίου η κρουστική απόκριση έχει μήκος 64 δείγματα αλλά μόνο 8 από αυτά τυχαία επιλεγμένα είναι μη μηδενικά. Τα πλάτη των μη μηδενικών στοιχείων ακολουθούν την κανονική κατανομή. Για την εκτίμηση του συστήματος έχουμε μια είσοδο που αποτελείται από 1000 δείγματα πάλι κανονικής κατανομής. Για να γίνει εμφανής η δυνατότητα χρήσης του αλγορίθμου σε θορυβώδη περιβάλλοντα οι μετρήσεις της εξόδου έχουν SNR 15db. Η σύγκριση γίνεται ανάμεσα στους εξής αλγορίθμους που όπως είπαμε αντιστοιχούν σε διαφορετικά μοντέλα για τις εξαρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών στο δίκτυο:

- Ο κλασικός αλγόριθμος RLS.
- Ο αλγόριθμος Genie-aided-RLS που δια μαγείας γνωρίζει την θέση των μη μηδενικών συντελεστών οπότε προσπαθεί να προσεγγίσει μόνο αυτούς.
- Ο αλγόριθμος AVLSBL που πρακτικά οδηγεί σε Laplacian a-priori για το προς εκτίμηση αραιό διάνυσμα.

- Ο αλγόριθμος AVMLSBL στον οποίο αν και κάθε συνιστώσα ακολουθεί Laplacian κατανομή η παράμετρος  $b$  που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι κοινή οπότε ο αλγόριθμος μπορεί να προσαρμόζει τα βάρη αυτά για να προωθεί την αραιότητα σε συγκεκριμένους συντελεστές περισσότερο από ότι σε άλλους.
- Ο αλγόριθμος AVSSBL που οδηγεί σε a-priori κατανομές Student για το προς εκτίμηση αραιό διάνυσμα που όπως είδαμε έχει πιο βαριές ουρές από την Laplacian.

Τα αποτελέσματα ακολουθούν στο σχήμα 3.6 σε ένα διάγραμμα και είναι ο μέσος όρος 50 εκτελέσεων.

### 3.6 Ο αλγόριθμος NLMS με αυστηρό κατώφλι

Στο κλασικό LMS είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αραιότητα του υπό εκτίμηση διανύσματος  $\mathbf{h}(n)$  ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση ή να επιτευχθεί μικρότερο σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση. Για να το εκμεταλλευτούμε αυτό θα χρειαστεί να κάνουμε κάποιες τροποποιήσεις.

Ένας εύκολος τρόπος να εκμεταλλευτούμε την a-priori γνώση μας για το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων είναι να κάνουμε αυστηρή κατωφλίωση στο τέλος κάθε επανάληψης. Με άλλα λόγια αν γνωρίζουμε ότι έχουμε  $s$  μη μηδενικά στοιχεία, μετά από κάθε επανάληψη κρατάμε τα  $s$  στοιχεία με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και τα άλλα τα θέτουμε στο 0 δηλαδή τον τελεστή  $H_s$  που είδαμε και σε προηγούμενη ενότητα. Αν πάρουμε την εκτίμηση του κλασικού NLMS

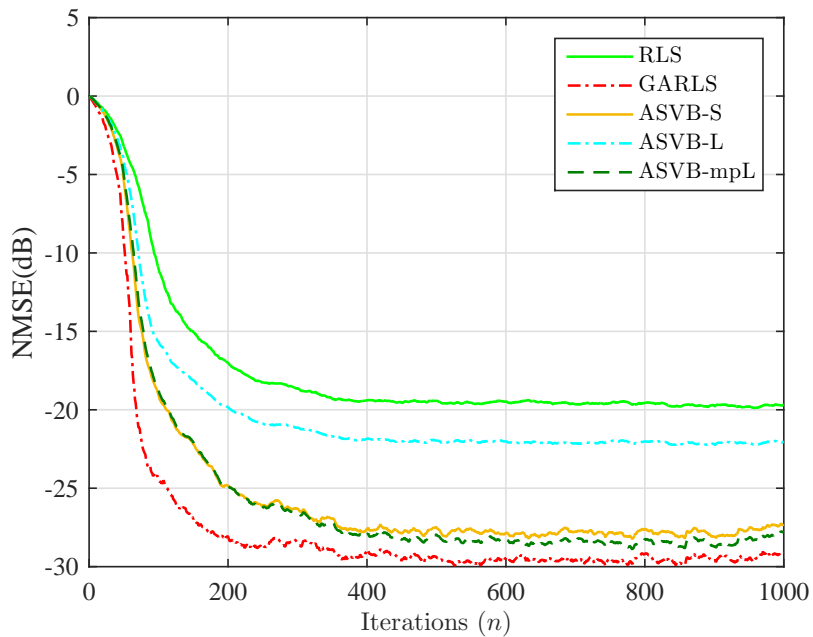
$$\mathbf{u}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n) + \frac{e(n)\mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (3.31)$$

και ως εφαρμοσόσουμε τον τελεστή  $H_s$  πάνω στο  $\mathbf{u}(n)$ . Τότε η προτεινόμενη μέθοδος δίνει ως εκτίμηση το εξής

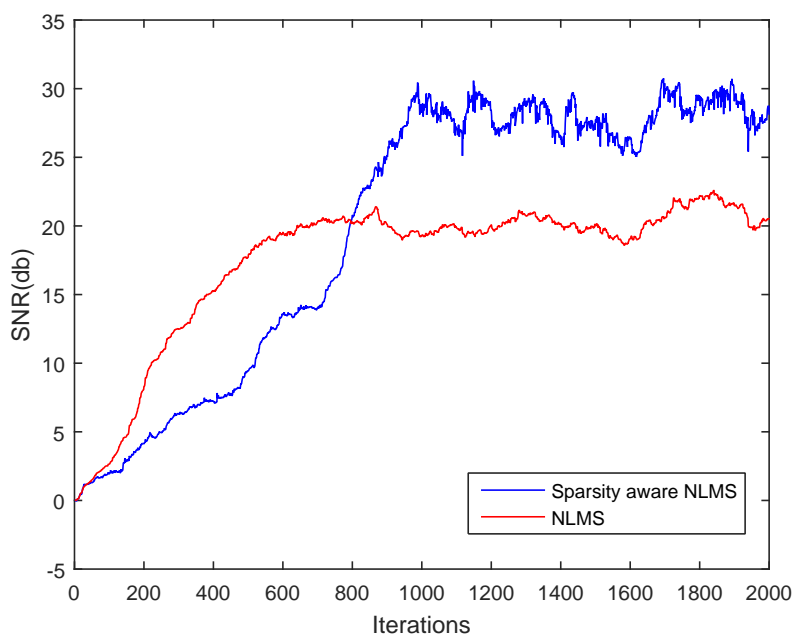
$$\hat{\mathbf{h}}(n+1) = H_s(\mathbf{u}(n)) \quad (3.32)$$

Δυστυχώς όμως το σκεπτικό αυτό μπορεί να μην είναι πολύ καλό γιατί τα αρχικά στάδια όπου η εκτίμηση μας μπορεί να είναι αρκετά λανθασμένη μπορεί να μην κρατάμε τους σωστούς συντελεστές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, όπου από μηδενική εκτίμηση η μέθοδος μας αργεί να συγκλίνει αλλά όταν το καταφέρνει φτάνει σε υψηλότερα SNR, φαίνεται στο σχήμα 3.7.

Μια λύση θα ήταν να κάνουμε μερικές επαναλήψεις με τον NLMS μέχρι να βρούμε το σωστό στήριγμα για το προς εκτίμηση διάνυσμα. Την επιτυχία του εγχειρήματος αυτού παρουσιάζει το σχήμα 3.8. Επίσης υπάρχει και λόγος να προτιμήσουμε να κάνουμε κάτι τέτοιο σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα. Στο παρακάτω θεώρημα υποθέτουμε ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι σταθερή στο χρόνο και ίση με  $\mathbf{h}$  για όλες τις χρονικές στιγμές.



Σχήμα 3.6: Στο διάγραμμα αυτό συγκρίνονται οι πέντε αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Έχουμε ένα Adaptive Filtering πρόβλημα με μια σταθερή κρουστική απόκριση μήκους 64 με 8 μη μηδενικά στοιχεία των οποίων τα πλάτη προέρχονται από δείγματα γκαουσιανής κατανομής. Η παράμετρος  $\lambda$  έχει επιλεγεί 0.99. Οι μετρήσεις της εξόδου έχουν SNR 15db. Η είσοδος αποτελείται από δείγματα κανονικής κατανομής. Τα αποτελέσματα όλων των αλγορίθμων που εκμεταλλεύονται την αραιότητα είναι καλύτερα του RLS. Η επίδοση της AVLSBL είναι η χειρότερη και αμέσως καλύτερη είναι η AVSSBL και λίγο καλύτερη απόδοση έχει η AVMLSBL. Τέλος ήταν αναμενόμενο ότι η καλύτερη επίδοση είναι του Genie-aided-RLS αφού γνωρίζει ποια είναι τα μη μηδενικά στοιχεία. Ο κώδικας παρέχεται από τους συγγραφείς του [18]



Σχήμα 3.7: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνονται ο NLMS και ο προτεινόμενος αλγόριθμος με αυστηρή κατωφλίωση. Το πρόβλημα είναι αυτό του Adaptive Filtering και έχουμε ένα σύστημα με κρουστική απόκριση μήκους 100 και 30 μη μηδενικά στοιχεία ύψους 1. Η είσοδος του συστήματος είναι λευκός γκαουσιανός θόρυβος και οι μετρήσεις έχουν επηρεαστεί από λευκό γκαουσιανό θόρυβο με  $SNR=20db$

**Θεώρημα 3.** Έστω  $\hat{\mathbf{h}}(n)$  η εκτίμηση του κλασικού NLMS αλγορίθμου κατά την επανάληψη  $n$  και  $\mathbf{h}$  το σταθερό προς εκτίμηση αραίο διάνυσμα με  $s$  μη μηδενικά στοιχεία. Έστω  $q = \min \{|h_i| | h_i \neq 0\}$ . Αν  $\|\hat{\mathbf{h}}(n) - \mathbf{h}\|_2^2$  συγκλίνει σε μια τιμή η οποία είναι μικρότερη του  $\frac{q^2}{2}$ , τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε

$$\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n))) = \text{support}(\mathbf{h}) \quad \forall n \geq n_0$$

όπου  $\text{support}$  το σύνολο των δεικτών των μη μηδενικών συνιστωσών.

*Απόδειξη.* Στην απόδειξη καταλήγουμε με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε

$$\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n))) = \text{support}(\mathbf{h}) \quad \forall n \geq n_0$$

Τότε αφού τα δύο σύνολα είναι ισάριθμα δηλαδή έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του  $\text{support}(\mathbf{h})$  που δεν υπάρχει στο  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$ . Έστω  $z$  αυτός ο δείκτης αυτός. Τότε γνωρίζουμε ότι ανήκει στο  $\text{support}(\mathbf{h})$  άρα άμεσα συμπεραίνουμε ότι  $|h_z| \geq q$  σύμφωνα με τον ορισμό του  $q$ . Από την άλλη καθώς δεν ανήκει στο  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  γνωρίζουμε ότι  $\phi(n) > |\hat{h}_z(n)|$  όπου  $\phi(n)$  είναι η  $s$ -ιοστή μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στο  $\hat{\mathbf{h}}(n)$ .

Ομοίως ισχύει και το ανάποδο δηλαδή υπάρχει ένα στοιχείο του  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  που δεν ανήκει στο  $\text{support}(\mathbf{h})$ . Έστω  $r$  ο δείκτης αυτός. Τότε γνωρίζουμε ότι δεν ανήκει στο  $\text{support}(\mathbf{h})$  άρα άμεσα συμπεραίνουμε ότι  $|h_r| = 0$ . Επιπλέον αφού ανήκει στο  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  έχουμε ότι  $|\hat{h}_r(n)| \geq \phi(n)$ .

Ως εκ τούτου είναι προφανές ότι  $|\hat{h}_r(n)| > |\hat{h}_z(n)|$  οπότε μπορούμε να βρούμε  $\epsilon$  μη μηδενικό ώστε

$$\hat{h}_r(n)^2 = \hat{h}_z(n)^2 + \epsilon^2$$

Ας πάρουμε το σφάλμα  $g(n) = \|\hat{\mathbf{h}}(n) - \mathbf{h}\|_2^2$  και ας αγνοήσουμε τα σφάλματα που δεν αφορούν τους δυο παραπάνω συντελεστές τότε

$$g(n) \geq |\hat{h}_r(n) - h_r|^2 + |\hat{h}_z(n) - h_z|^2$$

και κάνοντας τις πράξεις και αντικαθιστώντας  $h_r = 0$  καθώς και την εξίσωση  $\hat{h}_r(n)^2 = \hat{h}_z(n)^2 + \epsilon^2$  παίρνουμε

$$g(n) \geq 2\hat{h}_z(n)^2 - 2\hat{h}_z(n)h_z + h_z^2 + \epsilon^2$$

ας προσδιορίσουμε λοιπόν την ελάχιστη τιμή του δεξιού μέλους. Ας πάρουμε την συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - 2h_zx + (h_z^2 + \epsilon^2)$  και προφανώς είναι μια παραβολή με μια ελάχιστη τιμή που δίνεται στο σημείο μηδενισμού της παραγώγου όπου  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  δηλαδή  $x = h_z/2$  και άρα η ελάχιστη τιμή του δεξιού μέλους είναι  $\frac{h_z^2}{2} - h_z^2 + h_z^2 + \epsilon^2 = \epsilon^2 + \frac{h_z^2}{2}$  οπότε παίρνουμε ότι για όσο μεγάλο  $n$  θέλουμε ισχύει

$$g(n) \geq \epsilon^2 + \frac{h_z^2}{2} > \frac{h_z^2}{2} \geq \frac{q^2}{2}$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς το σφάλμα  $g(n) = \|\hat{h}(n) - h\|_2^2$  συγκλίνει από υπόθεση σε μια τιμή μικρότερη του  $\frac{q^2}{2}$   $\square$

Στην απόδειξη υποστηρίξαμε ότι τα δύο σύνολα είναι πάντα ισάριθμα. Υπάρχει μια περίπτωση να υπάρχουν πολλές τιμές του  $\hat{\mathbf{h}}(n)$  ίσες με το όριο κατωφλίσωσης  $\phi(n)$  και άρα το  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  να έχει ως αποτέλεσμα περισσότερα στοιχεία από  $s$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις θα μας αρκούσε να ισχύει

$$\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n))) \supset \text{support}(\mathbf{h})$$

καθώς τότε πάλι θα έχουμε τουλάχιστον όλους τους σωστούς συντελεστές. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει κάτι τέτοιο πάλι μπορούμε να βρούμε τους σχετικούς δείκτες  $r, z$  και να οδηγηθούμε πάλι σε άτοπο. Ο δείκτης  $r$  προκύπτει χωρίς καμία τροποποίηση του σκεπτικού. Ο  $z$  προκύπτει καθώς το  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  δεν είναι υπερσύνολο του  $\text{support}(\mathbf{h})$  ούτε ίσο μαζί του άρα κάποιος δείκτης του  $\text{support}(\mathbf{h})$  λείπει και πάλι από το  $\text{support}(H_s(\hat{\mathbf{h}}(n)))$ .

Το θεώρημα μας δίνει λοιπόν την εγγύηση ότι αν επικρατούν αρκετά καλές συνθήκες θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε επακριβώς ποιες είναι οι σωστές μη μηδενικές συνιστώσες. Το όριο που αποδείξαμε δεν είναι πολύ ισχυρό καθώς συνδέει το συνολικό σφάλμα με το ύψος μιας μόνο κορυφής. Βέβαια η απόδειξη παίρνει σωστά το χειρότερο δυνατό σενάριο. Στην πράξη πιθανότατα η εύρεση του σωστού στηρίγματος μπορεί να είναι δυνατή και με μεγαλύτερα σφάλματα.

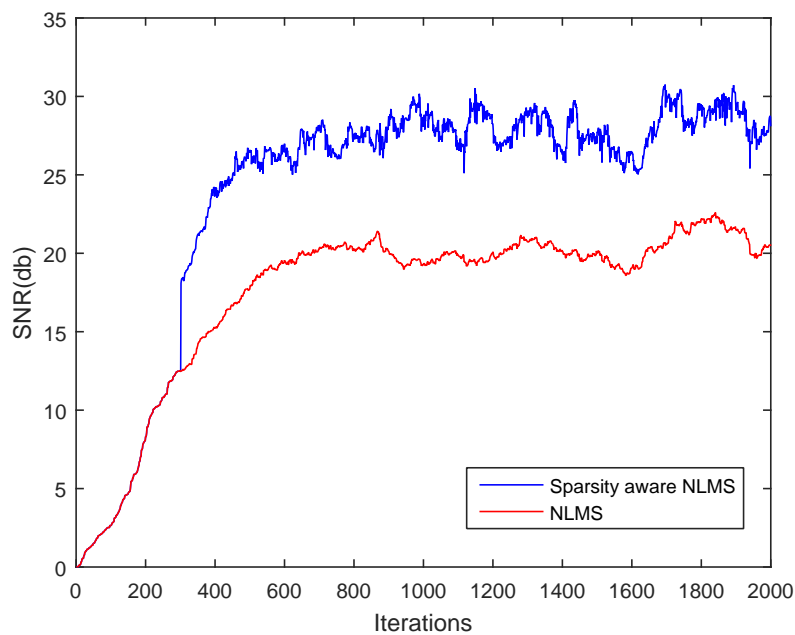
Μια άλλη λύση θα μπορούσε να ήταν να επιτρέπουμε μικρότερη αραιότητα ώστε πρακτικά ο αλγόριθμος να έχει μεγαλύτερη ευελιξία κινήσεων και να συγκλίνει γρηγορότερα. Βέβαια εδώ δεν εκμεταλλευόμαστε πλήρως την αραιότητα. Στο σχήμα 3.9 φαίνεται ότι θεωρώντας μικρότερη αραιότητα το τελικό SNR είναι μεν βελτιωμένο σε σχέση με το να μην την λαμβάναμε υπόψη αλλά χειρότερο από αυτό του σχήματος 3.8 όπου λάβαμε υπόψη την πραγματική αραιότητα. Βέβαια και εδώ μπορούμε να αποδείξουμε ανάλογα όρια.

Ας ορίσουμε όμοια με πριν μια ποσότητα  $\xi(n)$  που αντιστοιχεί στο  $\phi(n)$  που είχαμε πριν αν αντί για το  $s$ -ιοστό πάροουμε το  $k$ -ιοστό στοιχείο με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή μέσα στο  $\mathbf{u}(n)$  με  $k > s$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε μια γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος. Εδώ θα αποδείξουμε ότι αν δεν θέλουμε να βρούμε επακριβώς τις μη μηδενικές συνιστώσες αλλά απλά ένα υπερσύνολό τους μπορούμε να το κάνουμε και με μεγαλύτερα σφάλματα.

**Θεώρημα 4.** Έστω  $\hat{\mathbf{h}}(n)$  η εκτίμηση του κλασικού NLMS αλγορίθμου κατά την επανάληψη  $n$  και  $\mathbf{h}$  το σταθερό προς εκτίμηση αραιό διάνυσμα με  $s$  μη μηδενικά στοιχεία. Έστω  $q = \min \{|h_i| | h_i \neq 0\}$ . Αν  $\|\hat{h}(n) - h\|_2^2$  συγκλίνει σε μια τιμή η οποία είναι μικρότερη του  $q^2(1 - \frac{1}{\tau+2})$  όπου  $\tau = k - s$ , τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε

$$\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n))) \supset \text{support}(\mathbf{h}) \quad \forall n \geq n_0$$

όπου  $\text{support}$  το σύνολο των δεικτών των μη μηδενικών συνιστωσών.



Σχήμα 3.8: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνονται ο NLMS και ο προτεινόμενος αλγόριθμος με αυστηρή κατωφλίωση αλλαγμένος ώστε στις 300 πρώτες επαναλήψεις να αποφεύγεται η κατωφλίωση. Το πρόβλημα είναι αυτό του Adaptive Filtering και έχουμε ένα σύστημα με κρουστική απόκριση μήκους 100 και 30 μη μηδενικά στοιχεία ύψους 1. Η είσοδος του συστήματος είναι λευκός γκαουσιανός θόρυβος και οι μετρήσεις έχουν επηρεαστεί από λευκό γκαουσιανό θόρυβο με  $SNR=20db$



Απόδειξη. Στην απόδειξη καταλήγουμε με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε

$$\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n))) \supset \text{support}(\mathbf{h}) \quad \forall n \geq n_0$$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του  $\text{support}(\mathbf{h})$  που δεν υπάρχει στο  $\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n)))$ . Έστω  $z$  αυτός ο δείκτης αυτός. Τότε γνωρίζουμε ότι ανήκει στο  $\text{support}(\mathbf{h})$  άρα άμεσα συμπεραίνουμε ότι  $|h_z| \geq q$  σύμφωνα με τον ορισμό του  $q$ . Από την άλλη καθώς δεν ανήκει στο  $\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  γνωρίζουμε ότι  $\xi(n) > |\hat{h}_z(n)|$

Είναι επίσης προφανές ότι υπάρχουν  $\tau + 1$  στοιχεία που ανήκουν στο  $\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  που δεν ανήκουν στο  $\text{support}(\mathbf{h})$ . Έστω  $r_i$  οι δείκτες αυτοί. Τότε γνωρίζουμε ότι δεν ανήκουν στο  $\text{support}(\mathbf{h})$  άρα άμεσα συμπεραίνουμε ότι  $|h_{r_i}| = 0$ . Επιπλέον αφού γνωρίζουμε ότι ανήκουν στο  $\text{support}(H_k(\hat{\mathbf{h}}(n)))$  έχουμε ότι  $|\hat{h}_{r_i}(n)| \geq \xi(n)$ .

Ως εκ τούτου είναι προφανές ότι  $|\hat{h}_{r_i}(n)| \geq |\hat{h}_z(n)|$  οπότε μπορούμε να βρούμε  $\epsilon_i$  μη μηδενικά ώστε

$$\hat{h}_{r_i}(n)^2 = \hat{h}_z(n)^2 + \epsilon_i^2$$

Ας πάρουμε το σφάλμα  $g(n) = \|\hat{\mathbf{h}}(n) - \mathbf{h}\|_2^2$  και ας αγνοήσουμε τα σφάλματα που δεν αφορούν τους παραπάνω  $\tau + 2$  συντελεστές τότε

$$g(n) \geq \sum_{i=1}^{\tau+1} |\hat{h}_{r_i}(n) - h_{r_i}|^2 + |\hat{h}_z(n) - h_z|^2$$

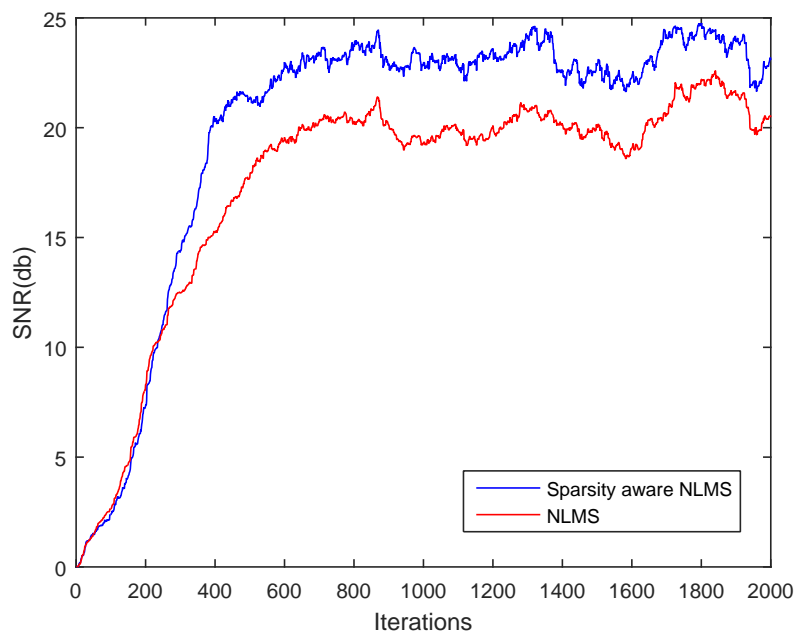
και κάνοντας τις πράξεις και αντικαθιστώντας  $h_{r_i} = 0$  καθώς και την εξίσωση  $\hat{h}_{r_i}(n)^2 = \hat{h}_z(n)^2 + \epsilon_i^2$  καθώς και ορίζοντας  $\epsilon_t^2 = \sum_{i=1}^{\tau+1} \epsilon_i^2$  παίρνουμε

$$g(n) \geq (\tau + 2)\hat{h}_z(n)^2 - 2\hat{h}_z(n)h_z + h_z^2 + \epsilon_t^2$$

ας προσδιορίσουμε λοιπόν την ελάχιστη τιμή του δεξιού μέλους. Ας πάρουμε την συνάρτηση  $f(x) = (\tau + 2)x^2 - 2h_zx + (h_z^2 + \epsilon_t^2)$  και προφανώς είναι μια παραβολή με μια ελάχιστη τιμή που δίνεται στο σημείο μηδενισμού της παραγώγου όπου  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  δηλαδή  $x = h_z/(\tau + 2)$  και άρα η ελάχιστη τιμή του δεξιού μέλους είναι  $\frac{h_z^2}{\tau+2} - 2\frac{h_z^2}{\tau+2} + h_z^2 + \epsilon_t^2 = \epsilon_t^2 + h_z^2(1 - \frac{1}{\tau+2})$  οπότε παίρνουμε ότι για όσο μεγάλο  $n$  θέλουμε ισχύει

$$g(n) \geq \epsilon_t^2 + h_z^2(1 - \frac{1}{\tau+2}) > h_z^2(1 - \frac{1}{\tau+2}) \geq q^2(1 - \frac{1}{\tau+2})$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς το σφάλμα  $g(n) = \|\hat{\mathbf{h}}(n) - \mathbf{h}\|_2^2$  συγκλίνει από υπόθεση σε μια τιμή μικρότερη του  $q^2(1 - \frac{1}{\tau+2})$   $\square$



Σχήμα 3.9: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνονται ο NLMS και ο προτεινόμενος αλγόριθμος με αυστηρή κατωφλίωση αλλαγμένος ώστε να επιτρέπει μικρότερη αραιότητα από την πραγματική. Το πρόβλημα είναι αυτό του Adaptive Filtering και έχουμε ένα σύστημα με κρουστική απόκριση μήκους 100 και 30 μη μηδενικά στοιχεία ύψους 1. Έτσι εδώ επιτρέπουμε 60 μη μηδενικούς συντελεστές. Η είσοδος του συστήματος είναι λευκός γκαουσιανός θόρυβος και οι μετρήσεις έχουν επηρεαστεί από λευκό γκαουσιανό θόρυβο με  $SNR=20db$

Τις ισοπαλίες μπορούμε να τις χειριστούμε όμοια με πριν.

Τέλος μια χρήσιμη εναλλακτική είναι η χρήση σε περιβάλλοντα συνεργατικής μάθησης. Ο αλγόριθμος NLMS είναι ένας αλγόριθμος βαθύτατης καθόδου αν και η κλίση όπως είδαμε υπολογίζεται προσεγγιστικά. Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα το σκεπτικό της συνεργατικής μάθησης στον αλγόριθμο NLMS για να επιταχύνουμε την σύγκλιση. Το επόμενο βήμα που θα κάνουμε εμείς εδώ είναι το συνδυάσουμε με την ιδέα της αυστηρής κατωφλίωσης έτσι ώστε να αυξήσουμε την ταχύτητα σύγκλισης του δικού μας αλγορίθμου και να μετριαστούν τα αρνητικά που είδαμε στην αρχή χωρίς να αναμένουμε για ένα πλήθος επαναλήψεων όπως είδαμε πριν. Στην βελτίωση μας αυτή θα κάνουμε χρήση μόνο του διαμοιρασμού των εκτιμήσεων και όχι των κλήσεων για λόγους απλότητας. Επίσης θα θεωρήσουμε πλήρες δίκτυο διασύνδεσης οπότε όλοι διαμοιράζονται τις εκτιμήσεις με όλους. Έστω  $\nu$  το πλήθος εκτιμητές. Καθώς δεν έχουμε κάτι στο οποίο να διαφέρουν οι εκτιμητές οι συντελεστές συνεργασίας  $a_{i,j}$  για  $i \neq j$  θα είναι ίσοι μεταξύ τους όπως και οι συντελεστές  $a_{i,i}$  οπότε για να εξασφαλιστεί η ιδιότητα των συντελεστών να αθροίζουν σε ένα έχουμε

$$a_{i,j} = \frac{a}{\nu - 1} \quad \text{για } i \neq j \quad (3.33)$$

και

$$a_{i,i} = 1 - a \quad (3.34)$$

όπου  $a$  μια κατάλληλα επιλεγμένη θετική σταθερά μικρότερη του ένα που εκφράζει την συσχέτιση δυνάμεων μεταξύ της ίδιας εκτίμησης και της εκτίμησης των γειτόνων.

Έστω  $x_j(n)$  η είσοδος για τον εκτιμητή  $j$  την χρονική στιγμή  $n$ . Αυτή μπορούμε να την οργανώσουμε σε διανύσματα όμοια με τον κλασικό αλγόριθμο  $\mathbf{x}_j(n) = [x_j(n), \dots, x_j(n-p+1)]^T$ . Προφανώς για την εκτίμηση ο εκτιμητής παίρνει και την έξοδο του συστήματος αφού της έχει προστεθεί θόρυβος οπότε για τον  $j$  εκτιμητή έχουμε κάθε χρονική στιγμή ένα  $d_j(n)$  και ως εκ τούτου μπορούμε να υπολογίσουμε ένα σφάλμα για την εκτίμηση της εξόδου  $e_j(n)$ .

$$\mathbf{u}_j(n) = \hat{\mathbf{h}}_j(n) + \frac{e_j(n)\mathbf{x}_j(n)}{\mathbf{x}_j^T(n)\mathbf{x}_j(n)}$$

$$\mathbf{c}_j(n) = (1 - a)\mathbf{u}_j(n) + a \frac{\sum_{q \neq j} \mathbf{u}_q(n)}{\nu - 1}$$

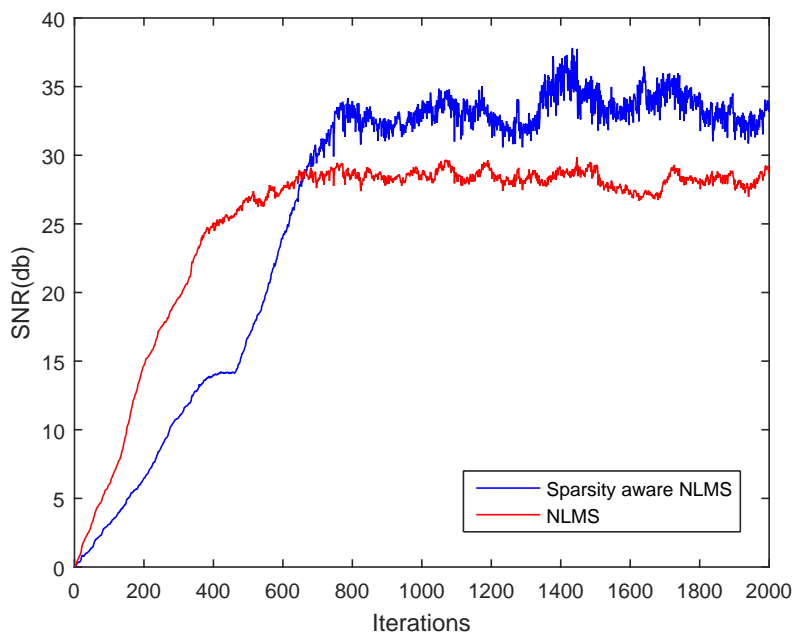
$$\hat{\mathbf{h}}_j(n+1) = H_s(\mathbf{c}_j(n))$$

Αυτό φαίνεται και παρακάτω όπου προσομοιώνεται το εξής: Η διαδικασία είναι ίδια με πριν απλά υπάρχουν 4 ανεξάρτητοι εκτιμητές και η σταθερά  $a$  έχει επιλεγεί να είναι 0.4 σύμφωνα με τα παραπάνω. Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το SNR της εκτίμησης του διανύσματος. Αν και η σύγκλιση είναι λίγο πιο αργή σε σχέση με την κλασική λύση που αγνοεί την αραιότητα το τελικό SNR είναι αρκετά μεγαλύτερο.

Στον πίνακα 3.1 έχουμε μερικές επιπλέον προσομοιώσεις. Εδώ παρατηρούμε τα συνολικά αποτελέσματα των αλγορίθμων σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα. Τώρα έχουμε ένα πρόβλημα 1000 συντελεστών και 20000 επαναλήψεις. Όπως φαίνεται στον πίνακα δοκιμάζουμε 100, 300 και 500 μη μηδενικά στοιχεία. Ο θόρυβος παραμένει στα 20db. Αυτό που καταγράφεται στον πίνακα είναι το τελικό SNR της εκτίμησης σε db. Οι αλγόριθμοι που συγκρίνονται είναι οι τροποποιήσεις του αλγορίθμου του NLMS με αυστηρή κατωφλίωση με τους κλασικούς NLMS αλγορίθμους. Στην πρώτη γραμμή είναι ο αρχικός αλγόριθμος που προτείναμε με τα προβλήματα ταχύτητας σύγκλισης που φαίνονται από την κακή επίδοση του. Στην δεύτερη είναι που επιτρέπουμε την εκκίνηση των κατωφλίωσεων 1000 επαναλήψεις μετά και βλέπουμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Στην τρίτη γραμμή είναι που υποθέτουμε ότι έχουμε την μισή αραιότητα. Όταν το πλήθος μη μηδενικών στοιχείων είναι μικρό τότε το σκεπτικό αυτό λειτουργεί αρκετά εύστοχα αλλά στη συνέχεια εκφυλίζεται στο κλασικό NLMS πολύ γρήγορα. Στην τέταρτη γραμμή χρησιμοποιούμε την συνεργατική μάθηση με συντελεστή  $\alpha = 0.4$  και παρατηρούμε αρκετά μεγάλη βελτίωση και σε σχέση με τους προηγούμενους αλγορίθμους αλλά και σε σχέση με τον κλασικό συνεργατικό NLMS. Τέλος, παρουσιάζουμε και τα αποτελέσματα και των κλασικών αλγορίθμων ως μέτρο σύγκρισης. Για λόγους σύγκρισης και ισχύει  $\alpha = 0.4$  και στον συνεργατικό κλασικό αλγόριθμο. Αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι όσο αυξάνονται οι μη μηδενικοί συντελεστές τόσο μειώνεται η απόδοση των προτεινόμενων αλγορίθμων ενώ οι κλασικοί αλγόριθμοι παραμένουν σταθεροί. Αυτό άλλωστε το αναμέναμε γιατί συμβαίνει για όλους τους αλγορίθμους εκτίμησης αραιών αναπαραστάσεων.

Αλγόριθμος	100	300	500
NLMS με αυστηρή κατωφλίωση	19.8	21.5	18.9
Με καθυστερημένη εκκίνηση	32.6	22.3	20.3
Λαμβάνοντας υπόψη την μισή αραιότητα	29.0	22.6	19.2
Χρησιμοποιώντας συνεργασία	38.9	34.2	31.6
Κλασικό NLMS	19.8	19.5	19.2
Συνεργατικό κλασικό NLMS	28.5	28.4	28.4

*Πίνακας 3.1: Στον πίνακα αυτό παρουσιάζονται τα αναλυτικά αποτελέσματα των τροποποιήσεων που προτείναμε σε σχέση με τους κλασικούς αλγορίθμους καθώς μεταβάλλεται το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων. Συγκεκριμένα έχουμε τρεις στήλες για 100, 300 και 500 μη μηδενικά στοιχεία από σύνολο 1000. Τα αποτελέσματα είναι το SNR σε db της τελικής εκτίμησης ύστερα από 20000 επαναλήψεις. Οι μετρήσεις της εξόδου του εκτιμώμενου συστήματος είχαν SNR 20db. Η είσοδος του συστήματος ήταν λευκός γκαουσιανός θόρυβος.*



Σχήμα 3.10: Στο Σχήμα αυτό συγκρίνονται ο συνεργατικός NLMS και ο προτεινόμενος αλγόριθμος με αυστηρή κατωφλίωση και αυτός σε συνεργατικό περιβάλλον. Οι εκτιμητές είναι τέσσερις και ο συντελεστής  $\alpha$  έχει επιλεγεί 0.4. Το πρόβλημα είναι αυτό του Adaptive Filtering και έχουμε ένα σύστημα με κρουστική απόκριση μήκους 100 και 30 μη μηδενικά στοιχεία ύψους 1. Η είσοδος του συστήματος είναι λευκός γκαουσιανός θόρυβος και οι μετρήσεις έχουν επηρεαστεί από λευκό γκαουσιανό θόρυβο με  $SNR=20db$

## Κεφάλαιο 4

### Εφαρμογές

## 4.1 Εντοπισμός ακουστικής πηγής

Στο πρόβλημα του εντοπισμού ακουστικής πηγής έχουμε μια ακουστική πηγή η οποία εκπέμπει από μια άγνωστη θέση σε ένα χώρο και το ζητούμενο είναι να βρεθεί η θέση της αυτή. Στην πιο απλή περίπτωση η πηγή είναι σε μια και σταθερή θέση ενώ σε πιο δύσκολα προβλήματα η θέση μπορεί να μεταβάλλεται. Στην διάθεση μας έχουμε πολλαπλά μικρόφωνα μέσα στον χώρο εκπομπής τα οποία βρίσκονται σε γνωστές και σταθερές θέσεις.

Το σκεπτικό των περισσότερων αλγορίθμων είναι να εντοπιστεί η θέση της πηγής μέσω της καθυστέρησης άφιξης του ηχητικού σήματος στις πηγές. Το μοντέλο μας λοιπόν λέει στην απλούστερη περίπτωση ότι αν  $x(t)$  είναι η τιμή που αντιστοιχεί στον πηγαίο ήχο την χρονική στιγμή  $t$  και  $x_j(t)$  ο ήχος που αντιστοιχεί σε αυτό που λαμβάνει το  $j$  μικρόφωνο την χρονική στιγμή  $t$  τότε θα έχουμε

$$x_j(t) = x(t - t_{d_j}) \quad \text{για } t > t_{d_j} \quad (4.1)$$

όπου  $t_{d_j}$  ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το σήμα από την πηγή στο μικρόφωνο  $j$ . Προφανώς όμως το μοντέλο μας είναι αρκετά ιδανικό. Από την άλλη δεν έχουμε και μεγάλα περιθώρια να προσαρμόσουμε το μοντέλο μας αν δεν έχουμε κάποια γνώση για το περιβάλλον εκπομπής της πηγής μας οπότε το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε έναν παράγοντα λευκού γκαουσιανού θορύβου στην σχέση αυτή ο οποίος θα υποθέσουμε ότι είναι ασυσχέτιστος με το σήμα που εκπέμπει η πηγή μας. Δηλαδή

$$x_j(t) = x(t - t_{d_j}) + w_j(t) \quad \text{για } t > t_{d_j} \quad (4.2)$$

Βέβαια σε πολλές εφαρμογές δεν μπορεί να είναι γνωστό το σήμα της πηγής εκ των προτέρων. Οπότε οι εκφράσεις αυτές δεν μας είναι τόσο χρήσιμες. Ας επικεντρωθούμε όμως σε ένα ζεύγος μικροφώνων. Αν και τα δύο μικρόφωνα λαμβάνουν σήματα τα οποία είναι μια καθυστερημένη εκδοχή του ίδιου πηγαίου σήματος τότε και θα μπορούμε να εντοπίσουμε μια χρονική καθυστέρηση μεταξύ τους δηλαδή για δύο μικρόφωνα  $i$  και  $j$  θα έχουμε

$$x_i(t) = x_j(t - t_{d_{i,j}}) + w_{i,j}(t) \quad (4.3)$$

όπου  $t_{d_{i,j}}$  η χρονική καθυστέρηση που λέγαμε και  $w_{i,j}$  ο όρος που έχει να κάνει με τον θόρυβο στα δύο μικρόφωνα. Προφανώς ισχύει ότι

$$t_{d_{i,j}} = t_{d_i} - t_{d_j} \quad (4.4)$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ομογενή ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Ας υποθέσουμε επίσης ότι τα μικρόφωνα δέχονται το σήμα μόνο καθώς αυτό διαδίδεται στην ευθεία γραμμή μεταξύ του μικροφώνου και πηγής. Τότε η πληροφορία για την χρονική διαφορά στα δύο σήματα μπορεί να μεταφραστεί σε πληροφορία

για την διαφορά του μήκους της διαδρομής από την πηγή στο εκάστοτε μικρόφωνο. Αν  $d_i$  η απόσταση του μικροφώνου  $i$  από την πηγή παίρνουμε αμέσως ότι

$$d_i - d_j = t_{d_{i,j}} c \quad (4.5)$$

όπου  $c$  η ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Αν περιοριστούμε στο δισδιάστατο χώρο τότε η εξίσωση αυτή περιγράφει τον ένα κλάδο μας υπερβολής που έχει ως εστίες τις θέσεις των μικροφώνων. Για απλούστευση των διαδικασιών στην συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πηγή βρίσκεται πολύ μακριά οπότε μπορούμε να πάρουμε ότι η πηγή βρίσκεται στην ασύμπτωτο του σχετικού κλάδου της υπερβολής. Οπότε το γινόμενο  $\cos(\theta_{i,j})$  όπου  $\theta_{i,j}$  η γωνία που σχηματίζει η πηγή με την ευθεία που ενώνει τα δύο μικρόφωνα ισχύει

$$\cos(\theta_{i,j}) = \frac{t_{d_{i,j}} c}{d_{i,j}} \quad (4.6)$$

με  $d_{i,j}$  την απόσταση των δύο μικροφώνων.

Οπότε λοιπόν αν έχουμε πολλά μικρόφωνα μπορούμε να πάρουμε πολλές τέτοιες ασύμπτωτες και άρα να εντοπίσουμε πιθανώς με ακρίβεια την ακριβή θέση της πηγής σε ένα σημείο που συμφωνούν οι ευθείες που προκύπτουν.

Άρα το κύριο μέλημα μας είναι να βρεθούν οι καθυστερήσεις ανάμεσα στα σήματα που λαμβάνουμε από ένα ζεύγος μικροφώνων.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην βιβλιογραφία βρίσκουν την καθυστέρηση μέσω της ετεροσυσχέτισης των σημάτων των μικροφώνων. Η εκτίμηση τους είναι ότι η ετεροσυσχέτιση των δύο σημάτων μεγιστοποιείται για  $t = t_{d_{i,j}}$  οπότε είναι εύκολο να βρεθεί η καθυστέρηση υπολογίζοντας την ετεροσυσχέτιση και παίρνοντας το σημείο που μεγιστοποιείται. Βέβαια δεν είναι πάντοτε αποτελεσματικό και για αυτό έχουν προταθεί και πολλές τροποποιήσεις αλλά και διαφορετικές προσεγγίσεις. Περισσότερες πληροφορίες μπορούν να αναζητηθούν στο [1].

Στην ενότητα αυτή θα δούμε δύο αλγόριθμους που προσπαθούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό υπό το πρίσμα της αραιότητας.

#### 4.1.1 Εύρεση καθυστέρησης μέσω αραιότητας

Στην μέθοδο αυτή αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της εύρεσης της καθυστέρησης ως ένα πρόβλημα προσδιορισμού FIR συστήματος. Πρακτικά αν πάρουμε τις μετρήσεις του μικροφώνου  $i$  και θέλουμε να πάρουμε το σήμα του μικροφώνου  $j$  αρκεί να το περάσουμε από ένα σύστημα χρονικής καθυστέρησης. Αυτό το σύστημα έχει προφανώς μια πάρα πολύ αραιή κρουστική απόκριση που στην ιδανική περίπτωση αποτελείται από μόλις ένα παλμό. Οπότε είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για να εκτιμήσουμε την κρουστική απόκριση αυτή.

Για να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους που αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια πρέπει να ανάγουμε το πρόβλημα στην μορφή του προβλήματος



γραμμικής παλινδρόμησης της εξίσωσης (2.9). Αφού λοιπόν το σήμα του μικροφώνου  $i$  είναι το αποτέλεσμα της συνέλιξης του σήματος του μικροφώνου  $j$  με μια κρουστική απόκριση  $\mathbf{h}_{i,j}$  μήκους  $N_h$  μπορούμε να γράψουμε την σχετική εξίσωση του συστήματος ως ένα γινόμενο πινάκων. Η εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{x}_j = X_i \mathbf{h}_{i,j} \quad (4.7)$$

όπου το  $\mathbf{x}_j$  είναι το διάνυσμα με  $h$  μετρήσεις του  $j$  μικροφώνου και  $X_i$  ο πίνακας συνέλιξης που προκύπτει από τις αντίστοιχες μετρήσεις του μικροφώνου  $i$ .

Βέβαια όπως έχουμε το σύστημα είναι πλήρως ορισμένο. Οπότε οι μέθοδοι που έχουμε αναπτύξει ίσως δεν είναι πολύ αποτελεσματικοί. Οπότε με κάποιο τρόπο θα πρέπει να το ανάγουμε σε ένα σύστημα που δεν είναι πλήρως ορισμένο και βέβαια η διαδικασία αυτή να μπορέσει να μας φέρει κάποιο όφελος. Η πιο απλή μέθοδος είναι να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με έναν κατάλληλα επιλεγμένο πίνακα  $Q$  με σωστά επιλεγμένες διαστάσεις ώστε το σύστημα να είναι πια μη ορισμένο. Δηλαδή

$$Q\mathbf{x}_j = QX_i \mathbf{h}_{i,j} \quad (4.8)$$

Ο πίνακας  $Q$  πρέπει να βοηθά έτσι ώστε ο συνολικός πίνακας  $QX_i$  να ικανοποιεί την RIP σε ικανοποιητικό βαθμό. Εδώ θα επιλέξουμε πίνακα που προκύπτει από δείγματα κανονικής κατανομής όπως κάναμε και στα προηγούμενα κεφάλαια. Αν ο τρόπος αυτός δειγματοληψίας μπορούσε να ενσωματωθεί στο ίδιο το μικρόφωνο τότε θα είχαμε άμεσα οφέλη από την λήψη λιγότερων μετρήσεων. Αν δεν είναι εφικτό αυτό τουλάχιστον κερδίζουμε σε υπολογιστικούς πόρους συμπιέζοντας τις μετρήσεις τοπικά και στέλνοντας για επεξεργασία τις σαφώς λιγότερες συμπιεσμένες μετρήσεις. Βέβαια, για κάθε ζεύγος μικροφώνων το σήμα από ένα μικρόφωνο πρέπει να ληφθεί και να αποσταλεί κανονικά για την δημιουργία του πίνακα  $X_i$ .

Για την ανακατασκευή των σημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του Lasso προσαρμοσμένος για την δική μας περίπτωση δηλαδή

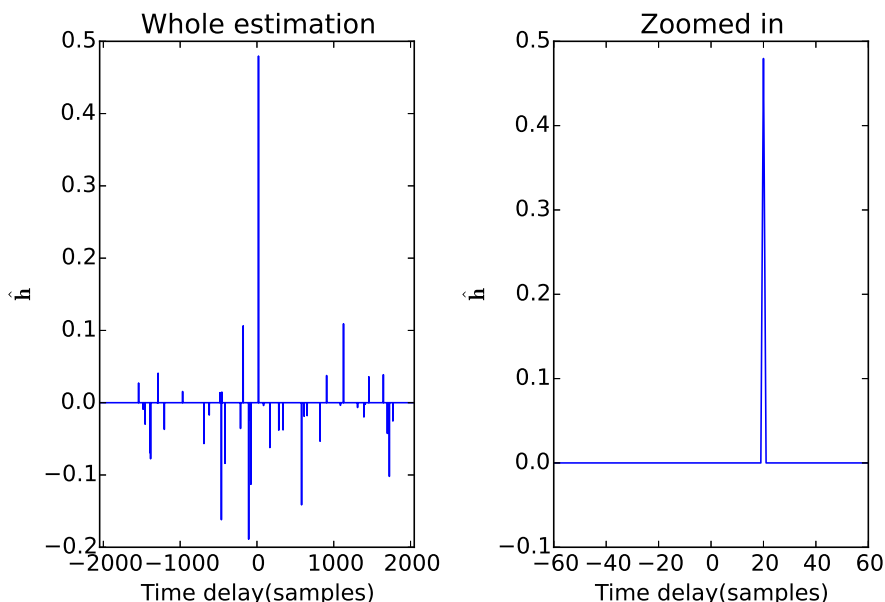
$$\hat{\mathbf{h}}_{i,j} = \underset{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N_h}}{\operatorname{argmax}} \|\mathbf{Q}\mathbf{x}_j - \mathbf{Q}X_i \mathbf{h}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{h}\|_1 \quad (4.9)$$

Για την εκτίμηση της χρονικής καθυστέρησης μπορούμε να πάρουμε τον χρονικό δείκτη του μεγαλύτερου στοιχείου του  $\hat{\mathbf{h}}_{i,j}$ .

Περισσότερες πληροφορίες μπορούν να αναζητηθούν στην εργασία του [11], στην οποία βασίστηκε η περιγραφή αυτή.

Για την προσομοίωση μας έχουν εν μέρη βάση πραγματικά σήματα. Χρησιμοποιούμε πραγματικά σήματα από ηχογραφήσεις για το ένα μικρόφωνο και μετά επεξεργαζόμαστε τα πραγματικά σήματα για την εξαγωγή του σήματος του άλλου. Συγκεκριμένα παίρνουμε τα πραγματικά σήματα και τους κάνουμε μια ολίσθηση και τους προσθέτουμε λευκό θόρυβο.

### Delay estimation via sparsity

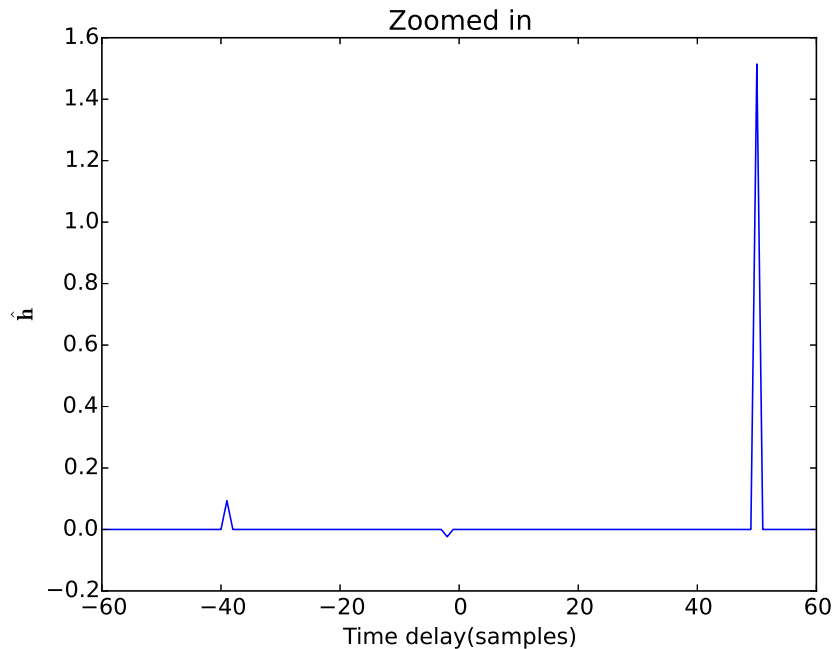


Σχήμα 4.1: Εδώ η εύρεση της καθυστέρησης είναι επιτυχής καθώς βρέθηκε η δημιουργημένη καθυστέρηση των 20 δειγμάτων. Έχουμε πάρει μόλις 40 δείγματα από τα συνολικά 4097 και ο θόρυβος των μετρήσεων μας είναι λευκός γκαουσιανός με SNR μόλις 5 db. Στα αριστερά έχουμε ολόκληρη την εκτίμηση ενώ στα δεξιά έχουμε μόνο ένα μέρος ώστε να επιβεβαιώσουμε το καλό αποτέλεσμα.

Για την προσομοίωση επιλέξαμε  $N_h = 4097$  ενώ οι μετρήσεις που παίρνουμε είναι μόλις 40. Ο λευκός θόρυβος που έχει προστεθεί είναι τέτοιος ώστε το τελικό SNR να είναι μόλις 5 db.

Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε μια επιτυχία της μεθόδου αυτής. Στη συνέχεια για να δοκιμάσουμε τις δυνατότητες της μεθόδου βάζουμε μια δευτερεύουσα καθυστέρηση και μια πιο ισχυρή συνιστώσα που μοντελοποιεί το φαινόμενο της πολυδιαδρομικής διάδοσης που έχουμε σε κλειστούς χώρους δεν είναι εφικτό να εντοπίσουμε και τις δύο καθυστερήσεις αλλά η πιο ισχυρή εντοπίζεται σωστά όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Πιθανώς απαιτείται λιγότερη συμπίεση για να βρεθεί σωστά η πιο ακριβής λύση.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται επιπλέον προσομοιώσεις που έχουν να κάνουν με το πόσο καλά γίνεται η εκτίμηση υπό θόρυβο. Καθώς μειώνεται το SNR είναι λογικό η τιμή της κορυφής που αντιστοιχεί στην χρονική καθυστέρηση να απομακρύνεται από την ιδανική τιμή του 1. Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση είναι αρκετά καλή ακόμα και για πολύ μικρά SNR με την σημείωση ότι εκεί μπορεί να υπάρχουν και αρνητικές τιμές που έχουν μεγαλύτερη



Σχήμα 4.2: Εδώ η εύρεση της καθυστέρησης είναι επιτυχής καθώς βρέθηκε η κύρια δημιουργημένη καθυστέρηση των 50 δειγμάτων. Έχουμε πάρει μόλις 40 δείγματα από τα συνολικά 4097 και ο θόρυβος των μετρήσεων μας είναι λευκός γκαουσιανός με SNR μόλις 5 db. Δεν βρέθηκε όμως η δευτερεύουσα καθυστέρηση μισής ισχύος στα 20 δείγματα

απόλυτη τιμή αλλά τις αγνοούμε.

#### 4.1.2 Εύρεση γωνίας έλευσης σε γραμμικές συστοιχίες

Στην μέθοδο αυτή έχουμε μια γραμμική συστοιχία και μια ή περισσότερες πηγές στο μακρινό πεδίο. Αν τα σήματα ήταν στενής ζώνης μπορούμε να γράψουμε τις καθυστερημένες εκδοχές που λαμβάνουν τα μικρόφωνα θα προκύπτουν με ένα πολλαπλασιασμό με ένα μιγαδικό εκθετικό που αντιστοιχεί στην συχνότητα και στην καθυστέρηση που έχουν υποστεί. Δηλαδή αν  $\omega_0$  είναι η κεντρική συχνότητα της στενής ζώνης μπορούμε να γράψουμε στο χώρο των συχνοτήτων

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_i)(\omega_0) = e^{-j\omega_0 t_{d_i}} \mathcal{F}_\omega(\mathbf{x})(\omega_0) \quad (4.10)$$

όπου  $\mathcal{F}_\omega$  ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier τον οποίο υπολογίζουμε στην κεντρική συχνότητα. Την χρονική καθυστέρηση που εμφανίζεται στο μιγαδικό εκθετικό μπορούμε να την εκφράσουμε ως προς την κοινή για όλη την συστοιχία γωνία άφιξης  $\theta$ . Ας πάρουμε ένα μικρόφωνο αναφοράς που θα του δώσουμε

SNR(db)	Ύψος κορυφής
50	0.997
40	0.990
30	0.970
20	0.907
10	0.707
5	0.479
2	0.364
1	0.175

Πίνακας 4.1: Στον πίνακα αυτό παρουσιάζεται το ύψος της υψηλότερης κορυφής της εκτίμησης  $\hat{\mathbf{h}}$ . Το ύψος αυτό ιδανικά θα έπρεπε να είναι 1 αλλά λόγω του θορύβου είναι μικρότερο. Για SNR ίσο με 0db η μέθοδος αυτή δεν βρίσκει την σωστή καθυστέρηση

τον αριθμό 0. Τότε είναι απλό να γράψουμε:

$$t_{d_i} = t_{d_0} + t_{d_{i,0}} = t_{d_0} + \frac{d_{i,0} \cos(\theta)}{c} \quad (4.11)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_i)(\omega_0) = \alpha_i(\theta) \mathcal{F}_\omega(\mathbf{x})(\omega_0) \quad (4.12)$$

όπου  $\alpha_i(\theta)$  ένας παράγοντας που εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης και την συχνότητα αλλά κυρίως την γωνία άφιξης  $\theta$  του σήματος.

Στην περίπτωση των πολλών σημάτων έστω  $N_s$  από πολλές διευθύνσεις μπορούμε να τροποποιήσουμε τον τύπο μας. Έστω  $\mathbf{x}_{s_k}$  οι πηγές με  $\theta_k$  τις αντίστοιχες διευθύνσεις τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_i)(\omega_0) = \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_i(\theta_k) \mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_{s_k})(\omega_0) \quad (4.13)$$

Αν ομαδοποιήσουμε όλα τα  $\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_{s_k})(\omega_0)$  σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{s}_{(\omega_0)}$  και όλα τα  $\alpha_i(\theta_k)$  σε ένα διάνυσμα  $\alpha_i$  τότε μπορούμε να γράψουμε αυτή την σχέση πιο απλά ως

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_i)(\omega_0) = \alpha_i^T \mathbf{s}_{(\omega_0)} \quad (4.14)$$

Οπότε αν γράψουμε όλες τις εξισώσεις για όλα τα μικρόφωνα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα διάνυσμα από τα  $\mathcal{F}_\omega(\mathbf{x}_i)(\omega_0)$  έστω  $\mathbf{y}_{(\omega_0)}$  και έναν πίνακα από τα  $\alpha_i$  έστω  $A_{(\omega_0)}$ . Το συμπέρασμα είναι ότι καταλήγουμε στην γνωστή μας εξίσωση

$$\mathbf{y}_{(\omega_0)} = A_{(\omega_0)} \mathbf{s}_{(\omega_0)} \quad (4.15)$$

Στην γενικότερη περίπτωση μπορούμε να έχουμε πολλές συχνότητες, έστω  $N_\omega$ , στα σήματα μας οπότε μπορούμε να γράψουμε και πολλά αντίστοιχα συστήματα τα οποία μπορούμε να λύσουμε χωριστά. Μπορούμε όμως να τα γράψουμε όμως και σαν ένα σύστημα. Αν ενώσουμε τα  $\mathbf{y}_{(\omega_\ell)}$  σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{y}$  και αντίστοιχα τα  $\mathbf{s}_{(\omega_\ell)}$  σε ένα  $\mathbf{s}$  και τους πίνακες  $A_{(\omega_\ell)}$  διαγώνια ο ένας του άλλου συμπληρώνοντας μηδενικά μπορούμε να πάρουμε ένα μεγάλο σύστημα. Έτσι ο πίνακας  $A$  είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} A_{(\omega_0)} & & & & \\ & A_{(\omega_1)} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & A_{(\omega_{N_\omega})} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

και το νέο σύστημα γράφεται

$$\mathbf{y} = A\mathbf{s} \quad (4.17)$$

Σε αυτή την εξίσωση έχουμε πρακτικά επιλέξει ένα σύνολο από  $N_\theta$  γωνίες  $\theta_k$  και ένα σύνολο από  $N_\omega$  συχνότητες  $\omega_\ell$ . Οι αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{s}$  μας λένε αν υπάρχει ή όχι πηγή σε αυτή την γωνία και συχνότητα. Μικρές τιμές ή 0 αντιστοιχούν σε μη ύπαρξη και μεγάλες σε ύπαρξη πηγής. Για να λύσουμε αυτό το σύστημα ακριβώς θέλουμε  $N_\theta N_\omega$  δείγματα αλλά εμείς έχουμε πλήθος μικροφώνων επί  $N_\omega$ . Οπότε η ακρίβεια μας θα περιορίζεται από το πλήθος των μικροφώνων.

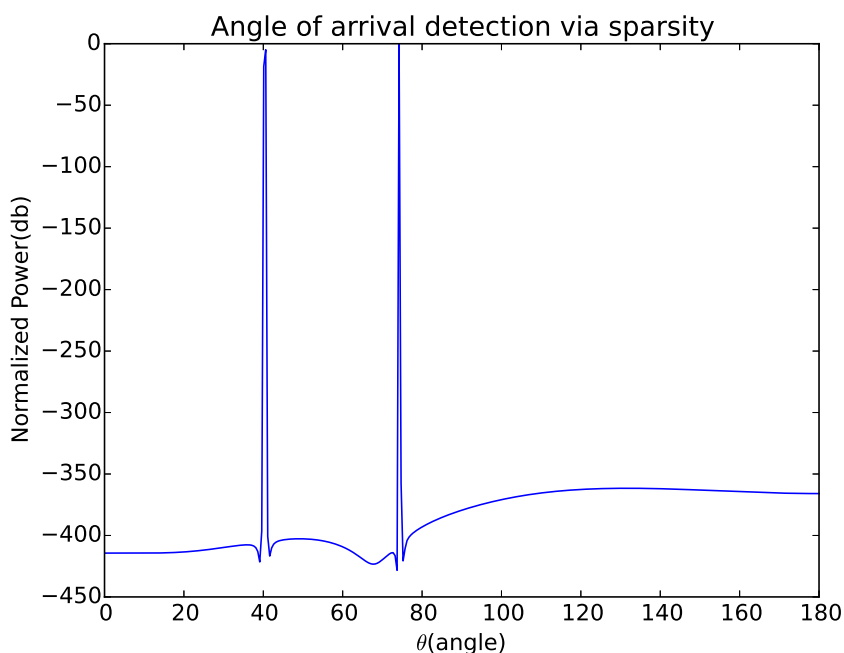
Για να υπερβούμε την δυσκολία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που αναπτύξαμε προηγουμένως. Θα προσπαθήσουμε να επιβάλλουμε μια μορφή αραιότητας στο διάνυσμα  $\mathbf{s}$ . Γενικά το σήμα δεν είναι απαραίτητα αραιό αφού θα μπορούσαν οι πηγές να εκπέμπουν σε πολλές συχνότητες. Οπότε η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι το σήμα είναι αραιό στο χώρο των γωνιών. Δηλαδή αν μαζέψουμε τις συνιστώσες του  $\mathbf{s}$  που συνδέονται με την γωνία  $\theta_k$  σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{s}^{(k)}$  και το κάνουμε για όλες τις γωνίες τότε λίγα από τα διανύσματα  $\mathbf{s}^{(k)}$  θα έχουν μεγάλη νόρμα  $\|\mathbf{s}^{(k)}\|_2$ . Αν δούμε το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  σαν ένα διάνυσμα από διανύσματα τότε πρακτικά αυτό που αντιστοιχεί στην κανονικοποίηση με  $\ell_1$  νόρμα όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια είναι

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{N_\omega N_\theta}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - A\mathbf{s}\|_2^2 + \lambda \sum_{k=1}^{N_\theta} \|\mathbf{s}^{(k)}\|_2^2 \quad (4.18)$$

Το πρόβλημα αυτό αν και αρχικά φαίνεται δύσκολο καθώς εμπλέκει μιγαδικούς αριθμούς μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα κώνου δευτέρου βαθμού και να επιλυθεί.

Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να αναζητηθούν στην εργασία του [12] στο οποίο βασίστηκε η περιγραφή αυτή.

Στην προσομοίωση έχουμε μια συστοιχία από 8 μικρόφωνα. Έχουμε δύο πηγές που εκπέμπουν σε διαφορετικές συχνότητες 1000 και 2000 Hz. Το σήμα των 1000 Hz έρχεται από τις 40 μοίρες ενώ το άλλο έρχεται από τις 70 μοίρες.



Σχήμα 4.3: Στο Σχήμα παρατηρούμε την κατανομή ισχύος που βρέθηκε από τον αλγόριθμο του Lasso. Συνολικά έχουμε 8 μικρόφωνα με απόσταση 0.05 μέτρα μεταξύ τους που δειγματοληπτούν την επαλληλία δύο ισοϋψών ημίτονων συχνότητας 1000 και 2000 Hz με συχνότητα δειγματοληψίας 48000 Hz. Το πρώτο φτάνει με γωνία 40 μοιρών και βρίσκεται σωστά ενώ το άλλο με 70 μοίρες και εντοπίζεται περίπου στις 74 λόγω θορύβου. Το σύνολο των 180 μοιρών χωρίζεται σε 360 ίσα τμήματα και ως συχνότητες επιλέγονται οι 20 συχνότητες με τα μεγαλύτερα πλάτη του DFT στα σήματα των μικροφώνων. Το SNR των μετρήσεων των μικροφώνων είναι 30 db με τον θόρυβο να είναι λευκός και γκαουσιανός.

Οι μετρήσεις γίνονται υπό θόρυβο με SNR 20db. Έχουμε χωρίσει τον χώρο των γωνιών σε 360 τμήματα της μισής μοίρας ενώ έχουμε διαλέξει είκοσι συχνότητες παίρνοντας αυτές που αντιστοιχούν στην μεγαλύτερη ενέργεια στα μικρόφωνα. Τέλος η απόσταση μεταξύ των μικροφώνων πάρθηκε ως 0.05 μέτρα και ο ρυθμός δειγματοληψίας ως 48000 Hz. Στο Σχήμα 4.3 φαίνονται τα ικανοποιητικά αποτελέσματα.

## 4.2 Γνωστικά ραδιοδίκτυα και αραίες αναπαραστάσεις

Οι συσκευές γνωστικού ραδιοδικτύου είναι έξυπνες συσκευές που τα περισσότερα χαρακτηριστικά τους μπορούν να προσδιοριστούν με προγραμματιστικό τρόπο και να αλλάζουν δυναμικά κατά την λειτουργία τους. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό που μπορεί να προσδιορισθεί είναι η συχνότητα με την οποία επικοινωνούν με τις υπόλοιπες συσκευές. Αν μπορούμε να την μεταβάλλουμε τότε θα μπορούμε να βρίσκουμε για κάθε χρονικό διάστημα μια βέλτιστη μπάνα εκπομπής και αν όλες οι συσκευές που εμπλέκονται στην επικοινωνία είναι και αυτές έξυπνες θα μπορούσαν να ακολουθήσουν την εκπομπή στην σωστή συχνότητα. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό μιας μπάνας συχνοτήτων είναι αν είναι κατειλημμένη από κάποια άλλη τηλεπικοινωνιακή ζεύξη, ιδιαίτερα αν το εύρος ζώνης που χρησιμοποιείται έχει πουληθεί για αποκλειστική χρήση. Αυτές οι περιοχές είναι εκ των προτέρων γνωστές έτσι είναι πολύ εύκολο να τις αποφεύγουμε. Δυστυχώς όμως το αξιοποιήσιμο εύρος ζώνης είναι πεπερασμένο (γιατί από μια συχνότητα και πάνω έχουμε προβλήματα στην διάδοση οπότε ακόμα και η ύπαρξη βροχής επηρεάζει την ζεύξη). Οπότε η στατική δέσμευση των συχνοτήτων για κάθε διαφορετική χρήση είναι ένα πρόβλημα. Αυτό που μπορεί να γίνει είναι να εκμεταλλευθούμε το γεγονός ότι οι νόμιμοι κάτοχοι των συχνοτήτων δεν κάνουν συνεχώς χρήση του φάσματος οπότε ευκαιριακές ζεύξεις μπορούν να μεταπηδούν από μια μη χρησιμοποιούμενη μπάνα στην άλλη.

Οπότε ένα σημαντικό πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπίζουν οι συσκευές γνωστικού ραδιοδικτύου είναι η γρήγορη και ακριβής εκτίμηση της χρήσης του φάσματος. Το πρόβλημα είναι ότι το εύρος συχνοτήτων είναι πολύ μεγάλο οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που προβλέπει το θεώρημα Nyquist είναι πολύ μεγάλη με αποτέλεσμα να αυξάνει πολύ το κόστος για μια συσκευή. Η εκτίμηση αυτή δε πρέπει να γίνεται συνεχώς καθώς η χρήση του φάσματος μπορεί να αλλάξει απότομα και η συσκευή μας να βρεθεί να παρεμβάλλεται στην επικοινωνία του κύριου χρήστη του φάσματος.

Σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να βοηθήσει η χρήση των εργαλείων των αραίων αναπαραστάσεων. Για να μπορέσουμε να εντάξουμε την θεωρία στο πρόβλημα μας χρειάζεται να εντοπίσουμε το αραίο μας σήμα μέσα στην εφαρμογή. Αυτό θα είναι το ίδιο το φάσμα καθώς σύμφωνα με τα παραπάνω το συνολικό σήμα που θα παρατηρούμε θα είναι μια ένωση από σήματα στενής ζώνης που απέχουν μεταξύ τους ενώ σπάνια θα χρησιμοποιούνται όλες οι ζώνες από τους κύριους χρήστες οπότε αναμένουμε να υπάρχουν και κενά στο φάσμα μας. Οπότε το μοντέλο του σήματος μας θα είναι

$$\mathbf{w} = \Phi \mathbf{x}$$

όπου  $\mathbf{x}$  είναι ένα αραίο διάνυσμα και  $\Phi$  ο πίνακας του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

Για να έχουμε πραγματικό όφελος όμως θα πρέπει να εισάγουμε και την έννοια της υποδειγματοληψίας ώστε οι συσκευές γνωστικού ραδιοδικτύου να μπορούν να αποκομίσουν κάποιο όφελος από την αραιότητα του φάσματος. Προφανώς η κλασική υποδειγματοληψία δεν μπορεί να είναι η λύση. Αν παίρνουμε ομοιόμορφα χρονικά κατανεμημένα δείγματα με συχνότητα μικρότερη συχνότητα από ότι προβλέπει το θεώρημα του Nyquist θα είναι αδύνατο να ξεχωρίσουμε ένα σήμα υψηλής συχνότητας από ένα χαμηλής. Αν κάνουμε όμως μια τυχαία και ανομοιόμορφη δειγματοληψία τότε το αποτέλεσμα μπορεί να είναι καλό. Οπότε αν συμβολίσουμε με  $U$  τον πίνακα υποδειγματοληψίας τότε οι μετρήσεις μας θα είναι τα  $y$  τέτοια ώστε:

$$\mathbf{y} = U\mathbf{w} = (U\Phi)\mathbf{x}$$

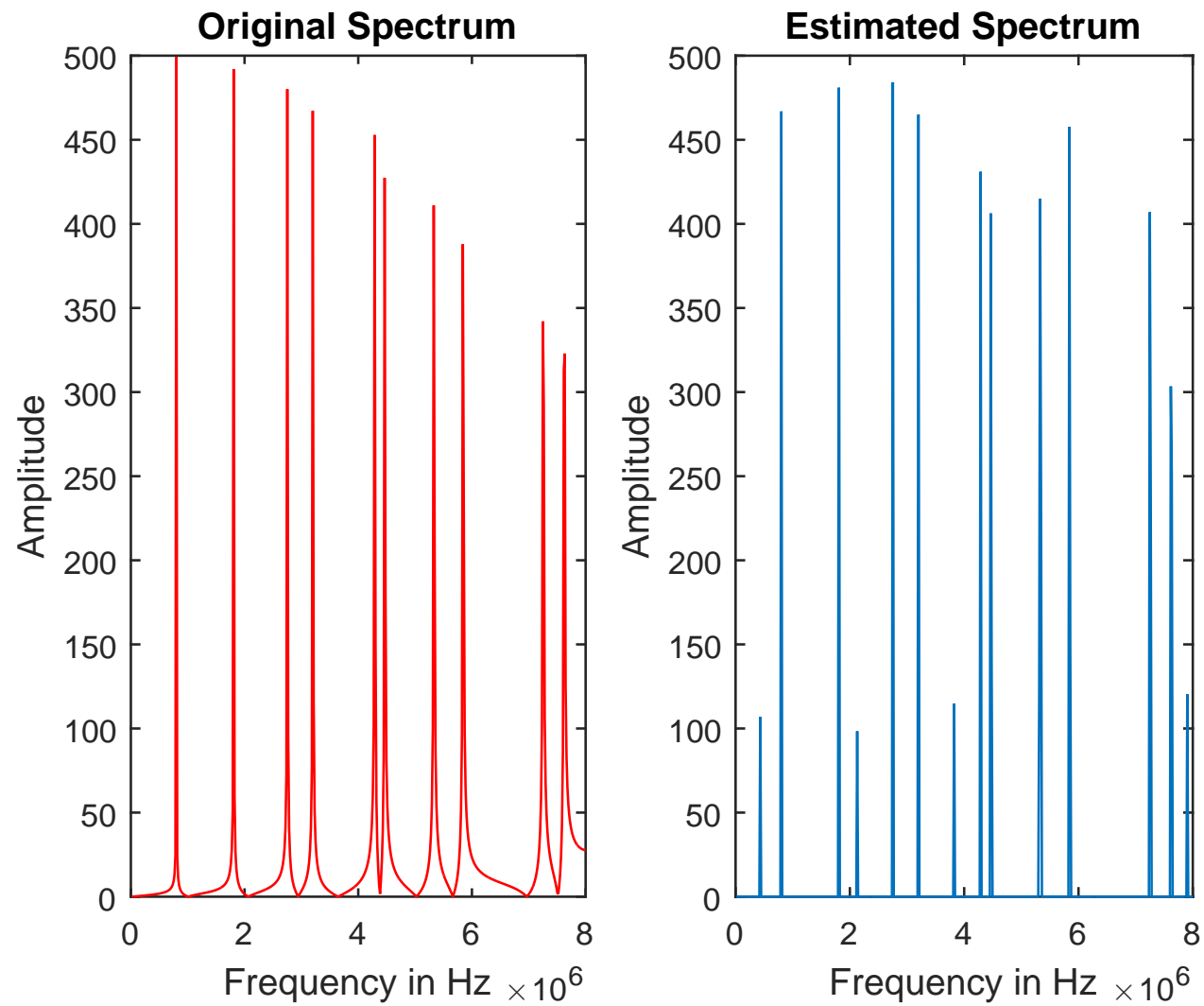
Έχουν γίνει αρκετές εργασίες πάνω στο πρόβλημα αυτό όπως [21] σε περιβάλλοντα συνεργατικής μάθησης και έχουν χρησιμοποιηθεί και άλλα μοντέλα περιγραφής του προβλήματος όπως στο [22].

Στα Σχήματα 4.4 , 4.5 και 4.6 ακολουθούν προσομοιώσεις άνω στο πρόβλημα που διατυπώθηκε παραπάνω.

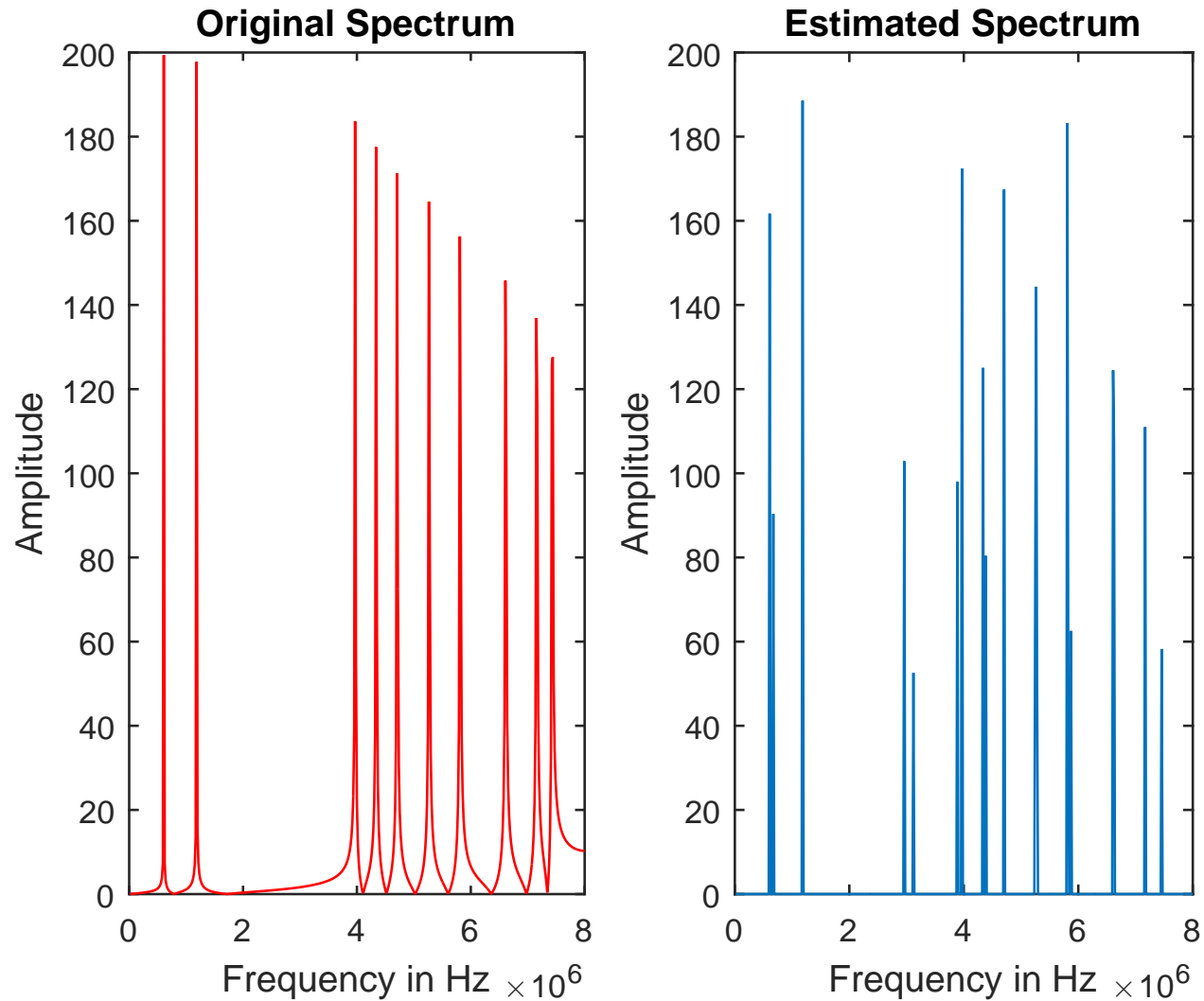
Συγκεκριμένα σε όλες τις προσομοιώσεις έχουμε 200 δείγματα όταν η συχνότητα Nyquist αντιστοιχεί στα 1000 δείγματα δηλαδή υποδειγματοληψία ένα προς πέντε. Οι μετρήσεις μας έχουν θόρυβο με το SNR να είναι 30 db. Στα δεξιά αναπαρίσταται η εκτίμηση του φάσματος ενώ στα δεξιά έχουμε το πραγματικό φάσμα για λόγους σύγκρισης. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτός της επαναληπτικής συρρίκνωσης με αυστηρή κατωφλίωση κάνοντας χρήση προσαρμοστικού βήματος όπως προτάθηκε στην εργασία του [3] και με κώδικα που παρείχε ο συγγραφέας της εργασίας αυτής. Στα πρώτα δύο Σχήματα χρησιμοποιούνται 40 μη μηδενικοί συντελεστές ενώ στο 4.6 έχουμε πάρε 100 μη μηδενικούς συντελεστές.

Στο 4.4 εκτιμούνται σωστά οι θέσεις των 10 ημίτονων. Τα ακριβή πλάτη δεν βρίσκονται αλλά αυτό είναι αρκετό για την συσκευή ραδιοδικτύου. Στο 4.5 προχωρούμε σε πιο ρεαλιστικά φάσματα διαμορφώνοντας γκαουσιανές καμπύλες με ημίτονα. Το  $\sigma$  των καμπυλών έχει επιλεγεί να είναι σχετικά μεγάλο ώστε στην συχνότητα να αντιστοιχεί σε μια λεπτή γκαουσιανή και άρα το φάσμα να είναι αραιό. Συγκεκριμένα επιλέχθηκε  $\sigma = 1$ . Τα αποτελέσματα παραμένουν ικανοποιητικά. Τέλος στο Σχήμα 4.6 έχουμε το ίδιο πρόβλημα με το Σχήμα 4.5 απλά έχουμε επιτρέψει περισσότερους μη μηδενικούς συντελεστές και συγκεκριμένα 100. Το αποτέλεσμα είναι να υπάρχουν σημαντικοί μη μηδενικοί συντελεστές σε τρύπες του πραγματικού φάσματος με αποτέλεσμα η συσκευή ραδιοδικτύου να μην μπορεί μάλλον να εκμεταλλευθεί βέλτιστα το ελεύθερο φάσμα.

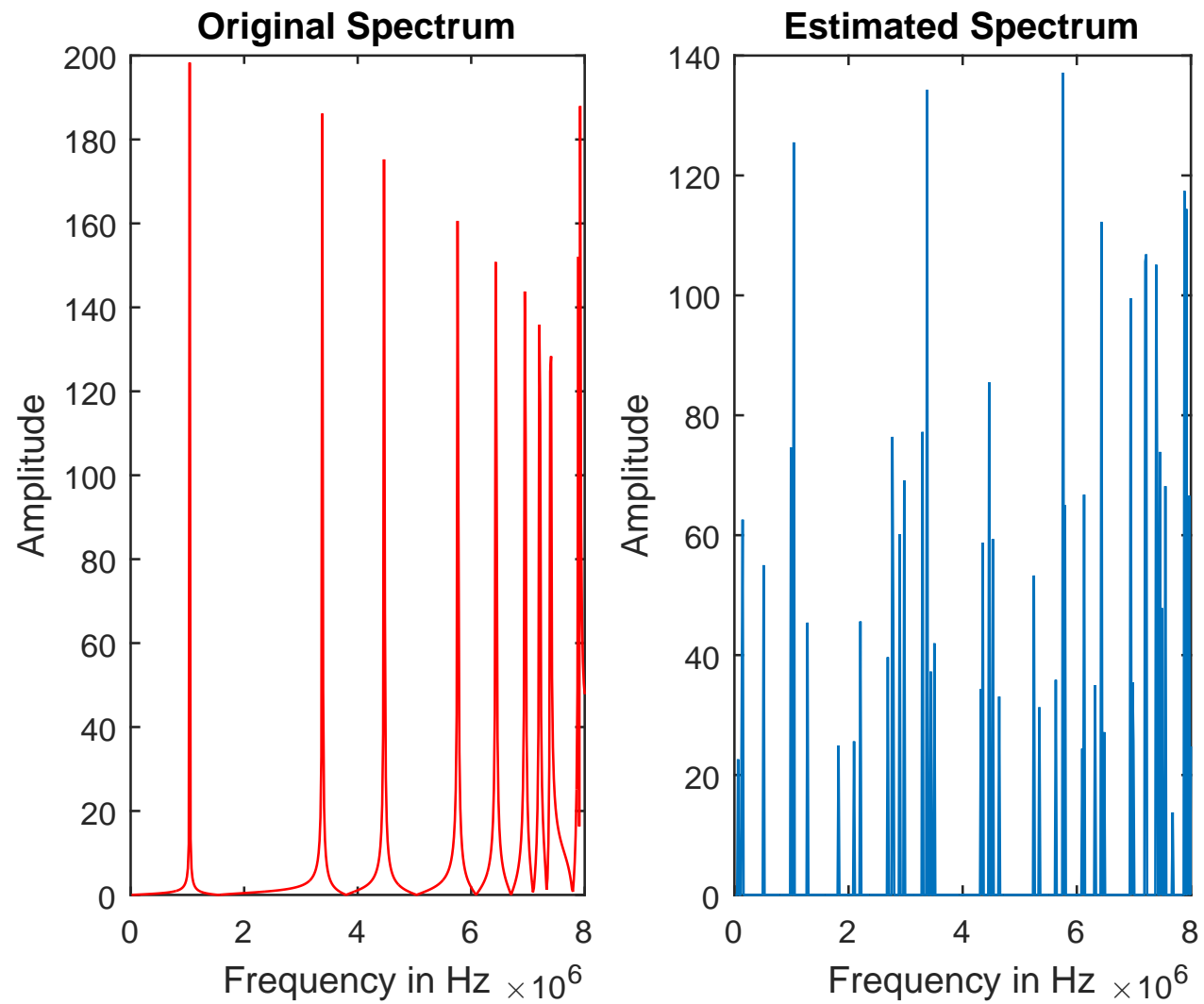




Σχήμα 4.4: Το σήμα μας εδώ είναι η άθροιση 10 ισοϋφών ημίτονων. Αν και τα ακριβή πλάτη ίσως να μην εκτιμώνται βρισκουμε όμως τις σημαντικές, δηλαδή τις κατειλημμένες θέσεις του φάσματος που είναι το ζητούμενο



Σχήμα 4.5: Εδώ αντί για ημίτονα χρησιμοποιήθηκαν Gabor σήματα δηλαδή γκαουσιανές καμπύλες διαμορφωμένες με ημίτονα. Το φάσμα των σημάτων αυτών είναι πιο κοντά στα πραγματικά φάσματα καθώς έχουν μη μηδενικό εύρος.



Σχήμα 4.6: Εδώ έχουμε την ίδια περίπτωση με το Σχήμα 4.5 απλά έχουμε επιτρέψει 100 μη μηδενικούς συντελεστές.

## Κεφάλαιο 5

### Συμπεράσματα

## 5.1 Βασική συνεισφορά εργασίας

Φτάνοντας στο τέλος της εργασίας είναι αρκετά σημαντικό να ανακεφαλαιώσουμε όσα είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Στην πορεία μας ακολουθήσαμε όλα τα σημαντικά βήματα από την διατύπωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης μέχρι και την εφαρμογή τους σε πρακτικές εφαρμογές. Αναλυτικότερα

1. Παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες που αφορούν τις αραιές αναπαραστάσεις και το πρόβλημα της ανακατασκευής τους.
2. Γρήγορα παρατηρήσαμε όμως ότι η ανακατασκευή με  $\ell_0$  νόρμα, αν και είναι πρακτικά το ζητούμενο μας, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές.
3. Είδαμε το πρόβλημα της ανακατασκευής σαν ένα πρόβλημα γραμμικής παλινδρόμησης και προσπαθήσαμε να το λύσουμε με την μέθοδο μεγιστοποίησης πιθανοφάνειας. Εξετάσαμε την περίπτωση του λευκού γκαουσιανού θορύβου και συμπεράναμε ότι θα απαιτούνταν περισσότερες αντί για λιγότερες μετρήσεις για την ανακατασκευή του αραιού σήματος μας.
4. Συνειδητοποιήσαμε την ανάγκη να εντάξουμε στο μοντέλο μας την εκ των προτέρων γνώση που έχουμε για το σήμα. Έτσι στραφήκαμε προς την μέθοδο της εκ των υστέρων μεγιστοποίησης πιθανότητας.
5. Φτάσαμε στο συμπέρασμα ότι η  $\ell_2$  νόρμα και αντίστοιχα η γκαουσιανή κατανομή αποτυγχάνουν να μοντελοποιήσουν ικανοποιητικά αραιά διανύσματα.
6. Καταλάβαμε ότι αυτό που χρειαζόμαστε είναι μια κατανομή με βαριές ουρές για την μοντελοποίηση ενός αραιού διανύσματος.
7. Συμβιβαστήκαμε όμως με την κατανομή Laplace και την κανονικοποίηση με  $\ell_1$  νόρμα. Δεν παραλείψαμε όμως να εξετάσουμε γιατί η επιλογή αυτή έχει αρκετά πλεονεκτήματα σε σχέση με την επιλογή μιας άλλης νόρμας.
8. Ενισχύσαμε όμως την απλή διαίσθηση που είχαμε με θεωρήματα που υπό συνθήκες εγγυώνται την ισοδυναμία της ανακατασκευής με  $\ell_1$  και  $\ell_0$  νόρμα.
9. Παραθέσαμε τους τρόπους κατασκευής πινάκων που με μεγάλη πιθανότητα οδηγούν στην ανακατασκευή των αραιών διανυσμάτων. Με αυτούς τους πίνακες διαπιστώσαμε την δυνατότητα ανακατασκευής με αλγόριθμους που έχουν να κάνουν με την  $\ell_1$  νόρμα δηλαδή Basis Pursuit και Lasso αλλά και Matching Pursuit και επαναληπτικής συρρίκνωσης.

10. Στην συνέχεια προχωρήσαμε στην προσαρμοστική εκτίμηση αραιών αναπαραστάσεων. Αναλύσαμε δύο κλασικούς αλγορίθμους που του γενικότερου προβλήματος της προσαρμοστικής παλινδρόμησης τον RLS και τον LMS. Επίσης για τις ανάγκες των επόμενων αλγορίθμων είδαμε και τις βασικές αρχές της κατανεμημένης ή συνεργατικής μάθησης.
11. Στους προηγούμενους γενικούς αλγορίθμους προσθέσαμε έναν αλγόριθμο για αραιά διανύσματα που βασίζεται στην μεταβολική Μπεϋζιανή ανάλυση.
12. Δεν αρκεστήκαμε όμως στους υπάρχοντες αλγορίθμους οπότε και προχωρήσαμε στην ανάπτυξη του αλγορίθμου LMS με αυστηρό κατώφλι. Προσπαθήσαμε να ενισχύσαμε την διαισθητική ερμηνεία του αλγορίθμου με αποδείξεις θεωρημάτων αλλά και με παραλλαγές για την επιτάχυνση σύγκλησης.
13. Δεν μείναμε όμως μόνο στην θεωρητική ανάλυση των αλγορίθμων. Προχωρήσαμε και σε εφαρμογές της θεωρίας των αραιών αναπαραστάσεων. Συγκεκριμένα είδαμε το πρόβλημα του εντοπισμού ακουστικών πηγών με δύο διαφορετικούς τρόπους, την εύρεση καθυστέρησης σε ένα ζεύγος μικροφώνων καθώς και την εύρεση της γωνίας άφιξης σε μια συστοιχία από μικρόφωνα. Επιπλέον είδαμε και την εφαρμογή των αραιών αναπαραστάσεων στην εκτίμηση φάσματος για συσχευές γνωστικών ραδιοδικτύων.

## 5.2 Πιθανοί προσανατολισμοί μελλοντικής έρευνας

Προφανώς η εργασία αυτή δεν αποτελεί μια πλήρη περιγραφή όλης της βιβλιογραφίας που έχει αναπτυχθεί όλα τα τελευταία χρόνια. Από την άλλη ο τομέας των αραιών αναπαραστάσεων είναι από αυτούς που θα συνεχίσουν να απασχολούν την ερευνητική κοινότητα. Η μελλοντική έρευνα όμως θα πρέπει να αντιμετωπίσει κάποια πολύ σημαντικά ζητήματα

1. Την διεύρυνση του πλήθους των εφαρμογών που μπορούν να εκμεταλλευθούν τις αραιές αναπαραστάσεις. Αυτό μπορεί να κινηθεί σε δύο κατευθύνσεις. Η μια είναι η εύρεση των σχετικών βάσεων και μετασχηματισμών που ανάγουν μια εφαρμογή σε ένα πρόβλημα αραιών αναπαραστάσεων. Η δεύτερη, που έχει ήδη μελετηθεί αλλά πιθανότατα έχει περιθώριο βελτίωσης, είναι η εκμάθηση των μετασχηματισμών αυτών από τα δεδομένα.
2. Την βελτίωση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων ώστε η επίλυση μεγάλων προβλημάτων όπως αυτών που προκύπτουν από δισδιάστατα σή-

ματα , όπως οι εικόνες, να είναι πραγματικού χρόνου. Μια άλλη περιοχή όπου εμφανίζονται πολλά δεδομένα υψηλών διαστάσεων είναι η περιοχή του Big Data που θα μπορούσε να επωφεληθεί από τις αραιές αναπαραστάσεις για την καλύτερη οπτικοποίηση και επεξεργασία των δεδομένων.

3. Την περαιτέρω ενσωμάτωση του σκεπτικού της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας σε συσκευές λήψης δεδομένων ώστε να λαμβάνονται πρωτογενώς οι κατάλληλες μετρήσεις. Έτσι θα αποφεύγεται η πλήρης δειγματοληψία των δεδομένων οδηγώντας σε πραγματικά οφέλη λόγω της εξοικονόμησης πόρων.

# Βιβλιογραφία

- [1] J. Benesty, J. Chen, and Y. Huang. *Microphone Array Signal Processing*. Springer Topics in Signal Processing. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] T. Blumensath and M. E. Davies. Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Appl. Comp. Harm. Anal*, 2009.
- [3] T. Blumensath and M.E. Davies. Normalized iterative hard thresholding: Guaranteed stability and performance. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(2):298–309, April 2010.
- [4] E.J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203–4215, Dec 2005.
- [5] E. J. Candès, J. K. Romberg, and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1207–1223, 2006.
- [6] S. Shaobing Chen, D. L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Rev.*, 43(1):129–159, January 2001.
- [7] D.L. Donoho and M. Elad. *Optimally Sparse Representation in General (non-orthogonal) Dictionaries Via L1 Minimization*. Technical report (Stanford University. Dept. of Statistics). Department of Statistics, Stanford University, 2002.
- [8] R. Gribonval and M. Nielsen. Sparse Representations in Unions of Bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(12):3320–3325, 2003.
- [9] S. S. Haykin. *Adaptive filter theory*. Pearson Education India, 2008.
- [10] T. S. Jaakkola and M. I. Jordan. Bayesian parameter estimation via variational methods. *Statistics and Computing*, 10(1):25–37, 2000.
- [11] H. Jiang, B. Mathews, and P. A. Wilford. Sound localization using compressive sensing. In Marten van Sinderen, Octavian Postolache, and César Benavente-Peces, editors, *SENSORNETS 2012 - Proceedings of the 1st International Conference on Sensor Networks, Rome, Italy, 24-26 February, 2012*, pages 159–166. SciTePress, 2012.



- [12] D. Malioutov, M. Cetin, and A.S. Willsky. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8):3010–3022, Aug 2005.
- [13] S.G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415, Dec 1993.
- [14] D. Needell and J. A. Tropp. Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.
- [15] Y. Nesterov. A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $o(1/k^2)$ . *Soviet Mathematics Doklady*, 27(2):372–376, 1983.
- [16] Y. Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2004.
- [17] A. H. Sayed. Diffusion adaptation over networks. *Academic Press Library in Signal Processing*, 3:323–454, 2013.
- [18] K.E. Themelis, A.A. Rontogiannis, and K.D. Koutroumbas. A variational bayes framework for sparse adaptive estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(18):4723–4736, Sept 2014.
- [19] S. Theodoridis. *Machine Learning: A Signal and Information Processing Perspective*. Academic Press, 2015.
- [20] S. Theodoridis and K. Koutroumbas. *Pattern Recognition, fourth edition*. Elsevier, 2009.
- [21] Z. Tian. Compressed wideband sensing in cooperative cognitive radio networks. In *Global Telecommunications Conference, 2008. IEEE GLOBECOM 2008. IEEE*, pages 1–5, Nov 2008.
- [22] Z. Tian and G. B. Giannakis. Compressed sensing for wideband cognitive radios. In *Acoustics, IEEE International Conference on Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007.*, volume 4, pages IV–1357–IV–1360, April 2007.
- [23] R. Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:267–288, 1994.
- [24] J. A. Tropp and A. C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(12):4655–4666, 2007.

- [25] J. M. Valin. Lms filter. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lms\\_filter.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lms_filter.svg), 2007. File: Lms\_filter.svg.
- [26] B. Widrow and M. E HOFF et al. Adaptive switching circuits. 1960.