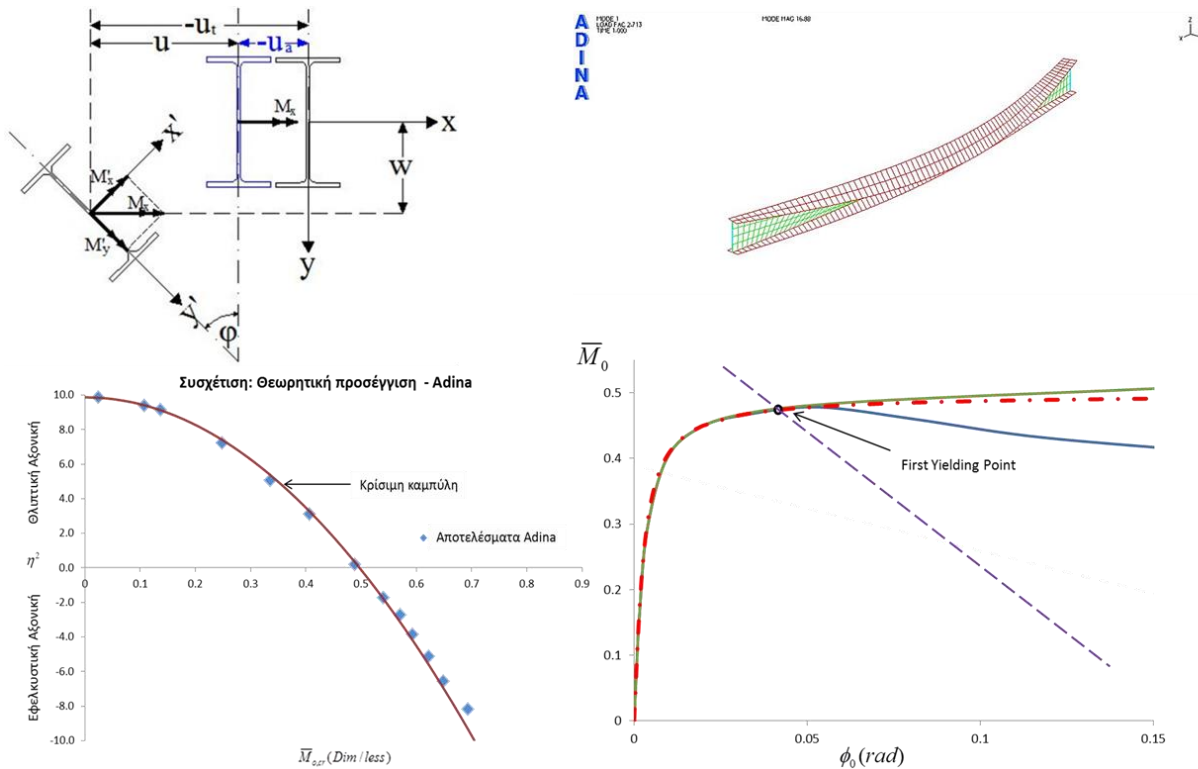




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών”
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Γραμμική και Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικά μη Εξασφαλισμένων Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό Φορτίο



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Ε. Βαονάκης, Πολιτικός Μηχανικός ΕΜΠ

Επιβλέπων: Τάσος Π. Αβραάμ

Αθήνα, Ιούνιος 2015

ΕΜΚ ΜΕ 2015/06

Βαονάκης Ν. Ε. (2015).
Γραμμική και μη γραμμική ανάλυση πλευρικά με εξασφαλισμένων δοκών υπό κάμψη και
αξονικό φορτίο.
Μεταπτυχιακή Εργασία ΕΜΚ ΜΕ 2015/06
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Vaonakis N. E. (2015).
Linear and non – linear analysis of laterally unsupported beams under bending and axial load
Master Thesis ΕΜΚ ΜΕ 2015/06
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ”
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία
Νικόλαος Ε. Βαονάκης

Επιβλέπων: Τάσος Π. Αβραάμ

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΜΗ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΜΕΝΩΝ
ΔΟΚΩΝ ΥΠΟ ΚΑΜΨΗ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ**

Περίληψη

Κύρια επιδίωξη σήμερα στα δομικά έργα είναι η οικονομικότητα των κατασκευών. Συγκεκριμένα, στα σιδηρά δομικά έργα, ο οικονομικός σχεδιασμός είναι άμεσα συνυφασμένος με τη χρήση λεπτών μεταλλικών στοιχείων. Δεδομένου ότι σε μια μεταλλική κατασκευή ο συνηθέστερος τρόπος αστοχίας είναι η απώλεια της ευστάθειας της και ότι ο κίνδυνος αυτός αυξάνεται με τη χρήση λεπτών μεταλλικών ελασμάτων, καταλαβαίνουμε ότι ο Πολιτικός Μηχανικός κατά το σχεδιασμό πρέπει να λάβει σοβαρά υπ’ όψιν του το γεγονός ότι η ευστάθεια και η οικονομικότητα συνδέονται ανταγωνιστικά σε μια μεταλλική κατασκευή.

Ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός αποτελεί τη συνήθη μορφή αστοχίας των πλευρικά μη εξασφαλισμένων καμπτόμενων δοκών. Η παρουσία αξονικής θλιπτικής δύναμης περιορίζει περαιτέρω την αντοχή σε κάμψη ενώ αντίθετα η παρουσία εφελκυστικής αξονικής δύναμης έχει ευνοϊκή επιρροή.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τον πλευρικό λυγισμό αμφιέριστων μεταλλικών δοκών, διατομής διπλού ταυ. Η φόρτιση των δοκών είναι ροπή περί τον ισχυρό άξονά της διατομής με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης (θλιπτικής ή εφελκυστικής). Αρχικά γίνεται γραμμική ανάλυση λυγισμού και υπολογίζεται η κρίσιμη (ελαστική) καμπτική ροπή καθώς επίσης και το σχετικό μέγεθος της εφελκυστικής αυτής αξονικής δύναμης άνω του οποίου ο στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δεν αποτελεί πιθανή μορφή αστοχίας, δε μπορεί δηλαδή να υπάρξει ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση. Επίσης, πραγματοποιείται μη γραμμική ανάλυση λυγισμού με, ή χωρίς, αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Σε κάθε περίπτωση φόρτισης

παρουσιάζονται δρόμοι ισορροπίας των φορέων με σκοπό να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την προλυγισμική αλλά και μεταλυγισμική συμπεριφορά τους. Προφανώς, η μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας και υλικού σε ένα φορέα είναι η ανάλυση που προσομοιάζει καλύτερα την πραγματική κατάσταση μιας κατασκευής. Έτσι λοιπόν, στην περίπτωση της γεωμετρικής μη γραμμικής ανάλυσης, δημιουργείται η ανάγκη για την εύρεση πάνω στο δρόμο ισορροπίας του σημείου εκείνου πέρα από το οποίο η διατομή έχει εισέλθει οριακά στη διαρροή.

Τέλος, για κάθε περίπτωση ανάλυσης (γραμμική ή μη γραμμική), έγινε η αντίστοιχη προσομοίωση και ανάλυση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων που εφαρμόσαμε.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING
MASTER OF SCIENCE
“ANALYSIS AND DESIGN OF EARTHQUAKE RESISTANT STRUCTURES”
DIVISION OF STRUCTURAL ENGINEERING
LABORATORY OF STEEL STRUCTURES

Master Thesis
By Nikolaos E. Vaonakis

Supervisor: Tassos P. Avraam

**LINEAR AND NON – LINEAR ANALYSIS OF LATERALLY UNSUPPORTED BEAMS UNDER
BENDING AND AXIAL LOAD**

Abstract

One of the main goals in the construction industry nowadays is the production of highly economical structures, which meet the set standards and codes of practice.

For the case of steelwork construction, “economical” is usually linked to the extensive use of light metal sections, which can slash costs by considerably reducing self-weights. However, slender steel elements are often susceptible to buckling effects unless extra care is taken at the design stage to avert this danger. Civil engineers are challenged to resolve this contradiction, and find the right balance in each case.

Lateral-torsional buckling is the failure mode of laterally unsupported beams or beam-columns. The presence of an axial tensile force has a favorable influence on the bending capacity which usually is not taken into account.

The present thesis deals with the lateral buckling of simply supported metal beams with I-shape cross-section. Bending moment about the strong axis of the cross – section is implemented with simultaneous action of axial force (compressive or tensile). Initially, a linear buckling analysis takes place. The critical (elastic) bending moment as well as the relative magnitude of this tensile axial load, above which lateral buckling is not the case of failure, are calculated. Additionally, a non - linear buckling analysis, with or without initial geometric imperfections, is performed. Equilibrium paths for all the load cases are established, in order to investigate prebuckling and postbuckling behaviour.

Obviously, a more realistic simulation is adopted by the geometrically and materially non - linear analysis (GMNIA). Therefore, as far as the geometric non - linear analysis (GNIA) is

concerned, it seems really important to determine the cross section's first yielding point on the equilibrium path.

Finally, each analysis case (linear or non – linear) is properly simulated via the F.E.M. package Adina in order to compare the results and check the reliability of methods presented herein.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας κ. Τάσο Αβραάμ, Λέκτορα του τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθεια που προσέφερε, τη στήριξη και καθοδήγηση που επέδειξε κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Ζαχαρία Φασουλάκη για τη συνεχή καθοδήγηση που επέδειξε κατά την εκπόνηση της εργασίας, τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε και τη βοήθειά που μου παρείχε στην επίλυση προβλημάτων που ανέκυψαν κατά τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Adina.

Περιεχόμενα

	Σελ.
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	I
ABSTRACT	III
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	V
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
Εισαγωγή – Σκοπός και Δομή της Εργασίας	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
Βασικές Εισαγωγικές Έννοιες	3
2.1 Γενικά	3
2.2 Είδη Λυγισμού Μεταλλικής Δοκού	4
2.3 Τεχνική Θεωρία Κάμψης	10
2.4 Ελαστική και Πλαστική Ανάλυση	13
2.5 Μέθοδοι Ανάλυσης και Ελέγχου	16
2.6 Βασικές Έννοιες της Ελαστικής Ευστάθειας	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
Μεθοδολογία Προσέγγισης του Φαινομένου του Πλευρικού Λυγισμού	25
3.1 Γενικά	25
3.2 Βασικές Παραδοχές	26
3.3 Μόρφωση της Διαφορικής Εξίσωσης Ισορροπίας	28
3.4 Αντιμετώπιση του Προβλήματος – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές Μεθόδων - Σύγκριση με Adina (FEM)	33
4.1 Γενικά	33
4.2 Περίπτωση Σταθερής Ροπής σε Όλο το Μήκος της Δοκού	34
4.2.1 Εισαγωγή	34
4.2.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	35
4.2.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	38
4.3 Περίπτωση Συγκεντρωμένου Εγκάρσιου Φορτίου στο Μέσον της Δοκού	55
4.3.1 Εισαγωγή	55
4.3.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	56
4.3.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	60
4.4 Περίπτωση Ομοιόμορφα Κατανεμημένου Φορτίου στο Μήκος της Δοκού	74
4.4.1 Εισαγωγή	74
4.4.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	75
4.4.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα	93
---------------------	-----------

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	95
---------------------	-----------

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εύρεση Πρώτου Σημείου Διαρροής	97
---------------------------------------	-----------

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Προσομοίωση στο Adina (FEM)	103
------------------------------------	------------

1.Εισαγωγή – Σκοπός και Δομή της Εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι να μελετηθεί το φαινόμενο του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού σε μέλη από χάλυβα. Σε πολλές περιπτώσεις φόρτισης του μέλους με κάμψη περί τον ισχυρό άξονα αδράνειας του και ταυτόχρονη ή μη επιβολή αξονικού θλιπτικού φορτίου, αυτό ενδέχεται να χάσει την ευστάθειά του προτού εξαντληθεί η αντοχή του.

Η προσπάθειά μας για ακριβή μαθηματική λύση των φαινομένων του πλευρικού λυγισμού είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Αυτό οφείλεται στο ότι χρειάζεται να επιλύσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων των οποίων η ολοκλήρωση για την κατάληξη σε κλειστές μαθηματικές σχέσεις είναι μια εξαιρετικά δυσχερής διαδικασία. Καλούμαστε λοιπόν να αναπτύξουμε και να αναζητήσουμε διάφορες προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες βέβαια να μας οδηγήσουν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Στην παρούσα διπλωματική, γίνεται η προσπάθεια θεωρητικής προσέγγισης των φαινομένων του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Θα μελετηθεί ένα πλήθος συνδυασμών φορτίσεων σε αμφιέριστη μεταλλική δοκό. Στη συνέχεια, θα προσομοιωθούν και θα μελετηθούν τα στατικά αυτά προσομοιώματα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων που εφαρμόσαμε.

Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο επεξηγείται η δομή του λυγισμού και η μεγάλη σημασία του για την οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τον σχεδιασμό μιας κατασκευής από χάλυβα. Διακρίνονται τα είδη του λυγισμού από τα οποία κινδυνεύει να αστοχήσει ένα μέλος. Γίνεται μια σύντομη αναφορά στη τεχνική θεωρία κάμψης και στις παραδοχές που τις διέπουν, πράγμα χρήσιμο για την θεωρητική αντιμετώπιση και επίλυση των εξισώσεων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι μέθοδοι ανάλυσης και ελέγχου σύμφωνα με την ορολογία που αναφέρεται και στον Ευρωκώδικα 3. Τέλος, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της ελαστικής ευστάθειας επειδή θα αναφερθούμε σε αυτές εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας αυτής.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές παραδοχές που αφορούν στο πρόβλημα του πλευρικού λυγισμού. Αναφέρεται η διαφορική εξίσωση ισορροπίας του πλευρικού λυγισμού και γίνεται εισαγωγή των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν. Επίσης, γίνεται μια σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση σε δημοσιεύσεις σχετικές το παρών αντικείμενο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται η εφαρμογή των μεθόδων σε διάφορους συνδυασμούς φορτίσεων που δρουν σε αμφιέριστη μεταλλική δοκό, διατομής διπλού ταυ. Οι φορτίσεις είναι είτε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, είτε κάμψη και ταυτόχρονη αξονική δύναμη. Για κάθε συνδυασμό φορτίσεων, πραγματοποιείται σε θεωρητικό επίπεδο γραμμική ανάλυση λυγισμού, μη γραμμική ανάλυση χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και μη γραμμική ανάλυση με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Ταυτόχρονα, για κάθε μια από τις αναλύσεις γίνεται και σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Adina.

Στο Παράρτημα Α, παρουσιάζεται η μεθοδολογία με την οποία γίνεται ο προσδιορισμός του πρώτου σημείου διαρροής του φορέα πάνω στους δρόμους ισορροπίας.

Στο Παράρτημα Β, παρουσιάζεται βήμα προς βήμα η μεθοδολογία με την οποία έγινε η προσομοίωση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Επίσης, παρουσιάζονται και οι απαιτούμενες ρυθμίσεις που πρέπει να γίνουν στο πρόγραμμα, ώστε να πραγματοποιήσουμε τα επιθυμητά είδη αναλύσεων (γραμμική ελαστική ανάλυση, μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας κ.τ.λ.).

2. Βασικές Εισαγωγικές Έννοιες

2.1 Γενικά

Το κυριότερο δομικό στοιχείο θεωρείται η δοκός, η οποία αποτελείται από ευθύγραμμο άξονα, με μήκος πολύ μεγαλύτερο συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής. Γίνεται χρήση της δοκού διότι υποκείμενη σε εγκάρσια φόρτιση προβάλλει καμπτική, διατμητική, και σε κάποιες περιπτώσεις και στρεπτική αντίσταση.

Ο σχεδιασμός των δοκών προσανατολίζεται για την ασφαλή ανάληψη της καμπτικής έντασης από την οποία καταπονείται συνήθως. Εκτός όμως από κάμψη, μία δοκός μπορεί να καταπονείται από θλίψη, διάτμηση και στρέψη ή ένα συνδυασμό αυτών. Σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή της διατομής καθορίζει και την αντοχή ολόκληρου μέλους (π.χ. εφελκυσμός, κάμψη πλευρικά προστατευόμενων δοκών. Δεν είναι λίγες οι φορές όπου μια δοκός αναλόγως την εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται δεν εξαντλεί την αντοχή της ως διατομή αλλά προηγούνται φαινόμενα αστάθειας των μελών όπως τοπικός λυγισμός, πλευρικός λυγισμός, στρεπτοκαμπτικός λυγισμός κ.ά.

Είναι γνωστό ότι για την αύξηση της φέρουσας ικανότητας μιας διατομής σε κάμψη, διαμορφώνουμε διατομές με συγκεντρωμένο το μεγαλύτερο μέρος του εμβαδού τους, όσο το δυνατόν πιο μακριά από τον ουδέτερο άξονα της κάμψης. Κατά την προσπάθεια μας αυτή, καταλήγουμε να διαμορφώνουμε υψίκορμες διατομές και διατρέχουμε μεγαλύτερο κίνδυνο να μην μπορέσει η διατομή αυτή να εξαντλήσει την φέρουσα ικανότητά της σε κάμψη διότι πριν φτάσει σε αυτή την κατάσταση, το θλιβόμενο πέλμα χάνει την ευστάθειά του, με αποτέλεσμα να εκτραπεί εκτός του επιπέδου του.

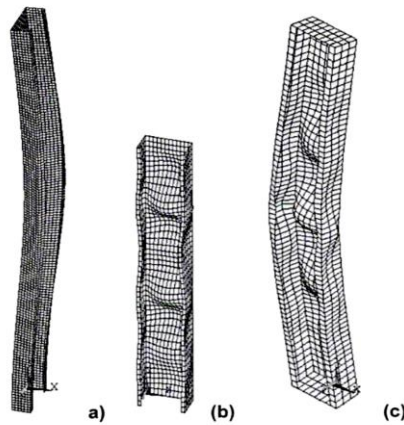
Μετά την εκτροπή αυτή, η δοκός, εκτός από την αρχική καμπτική παραμόρφωση περί τον κύριο άξονα αδρανείας, έχει επιπλέον υποστεί στρόφη (με παράλληλη καμπτική παραμόρφωση περί του κύριου άξονα αδρανείας).

Για τον αναλυτικό προσδιορισμό του λυγισμού, εξετάζεται η ισορροπία του μέλους στην παραμορφωμένη κατάσταση αμέσως μετά το λυγισμό. Η μικρότερη στάθμη φόρτισης για την οποία η ισορροπία είναι εφικτή αποτελεί τη φόρτιση λυγισμού, η οποία, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, εκφράζει την αντοχή του μέλους. Το φορτίο λυγισμού μπορεί να υπολογιστεί επίσης πειραματικά. Στις μεταλλικές κατασκευές, ειδικότερα, μια τέτοια ανάλυση είναι αυξημένης σημασίας, δεδομένου ότι σε πολλές περιπτώσεις η αντοχή των μελών δεν προκύπτει από την αντοχή των διατομών τους, αλλά απαιτείται η θεώρηση όλου του μέλους ως στοιχείο αναφοράς.

2.2 Είδη Λυγισμού Μεταλλικής Δοκού

Σε αυτό το σημείο, είναι χρήσιμο να γίνει μία σύντομη αναφορά στα είδη λυγισμού, όπου η κατηγοριοποίηση τους προκύπτει με κριτήριο στην έκταση του φαινομένου του λυγισμού.

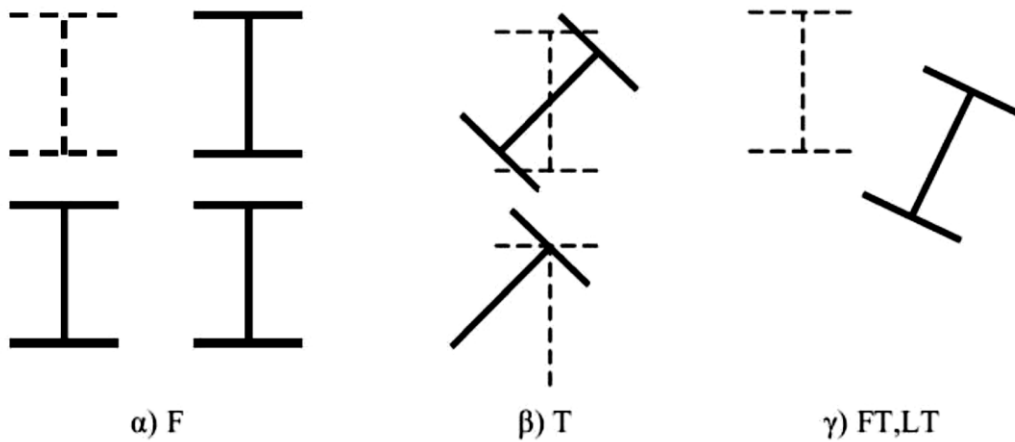
- **Καθολικός λυγισμός:** Χαρακτηρίζεται από φαινόμενα καθολικής αστάθειας, τα οποία υποβιβάζουν την αντοχή των μελών. Κατά τις αστάθειες αυτές, παρατηρείται το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια της φόρτισης, οι διατομές υπόκεινται σε παραμορφώσεις στερεού σώματος (ως διαφράγματα), οι οποίες αποτελούνται από μετατοπίσεις γύρω από τους κύριους άξονες και από στροφές. Καθολικός λυγισμός εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους χωρίς ενδιάμεσες στηρίξεις (Σχ 2.1a).
- **Τοπικός λυγισμός:** Τα μέλη ενός φορέα διατρέχουν γενικά τον κίνδυνο να υποστούν λυγισμό μέλους βάσει της ολικής λυγηρότητάς τους. Υπάρχει, όμως, συγχρόνως ο κίνδυνος κάποια επιμέρους στοιχεία της διατομής του φορέα να λυγίσουν τοπικά πριν την εμφάνιση καθολικού λυγισμού για μικρότερη τιμή φορτίου. Η εμφάνιση τοπικού λυγισμού σε μείωση της αντοχής του μέλους με την εμφάνιση ανομοιομορφων τάσεων και πολύ συχνά στην αστοχία του. Κατά τον τοπικό λυγισμό, οι διατομές παραμορφώνονται με μεταβολή του γεωμετρικού σχήματός, ενώ ο άξονας του μέλους παραμένει απαραμόρφωτος. Ο τοπικός λυγισμός εμφανίζεται συνήθως στις λεπτότοιχες διατομές κατηγορίας 4. Στις διατομές αυτές εμφανίζεται τοπικός λυγισμός πριν προλάβει να αναπτυχθεί η τάση διαρροής. Το πολύ μειωμένο πάχος τους σε σχέση με το πλάτος τους, καθιστά τους αντίστοιχους φορείς και ασταθείς με ιδιαίτερη μη γραμμική συμπεριφορά. Σε μια αμφιέριστη δοκό διπλού ταυ, τοπικός λυγισμός εμφανίζεται στο θλιβόμενο άνω πέλμα και στο άνω θλιβόμενο τμήμα του κορμού, όταν ο λόγος πλάτος πέλματος προς πάχος πέλματος είναι μεγάλος. Στην περίπτωση αυτή, ο τοπικός λυγισμός είναι αποτέλεσμα των ορθών τάσεων λόγω της κάμψης. Ως μορφή τοπικού λυγισμού θεωρείται και η εμφάνιση διατμητικού λυγισμού σε υψίκορμες δοκούς με μειωμένο πάχος κορμού. Στις περιπτώσεις αυτές, ο τοπικός λυγισμός εντοπίζεται στον κορμό της δοκού, στις θέσεις μέγιστης τέμνουσας. (Σχ 2.1b).
- **Καθολικός και τοπικός λυγισμός:** Αποτελεί συνδυασμό των δυο παραπάνω ειδών λυγισμού και εμφανίζεται σε ράβδους μεγάλου μήκους και λεπτότοιχες διατομές (Σχ 2.1c)



Σχήμα 2.1 Είδη λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις

Ο καθολικός λυγισμός είναι αυτός, όπου ανάλογα με τη θέση της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση διακρίνεται στις εξής μορφές λυγισμού:

- **Καμπτικός λυγισμός (Flexural buckling):** Οι διατομές υπόκεινται σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, χωρίς να εμφανίζονται στροφές (Σχ 2.2α).
- **Στρεπτικός λυγισμός (Torsional buckling):** Οι διατομές υπόκεινται μόνο σε στροφές, χωρίς να εμφανίζονται μετατοπίσεις (Σχ 2.2β).
- **Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός (FT ή LT):** Οι διατομές υπόκεινται τόσο σε μετατοπίσεις περί τους κύριους άξονες, όσο και σε στροφές (Σχ 2.2γ).



Σχήμα 2.2 Μορφές καθολικού λυγισμού και αντίστοιχες παραμορφώσεις.

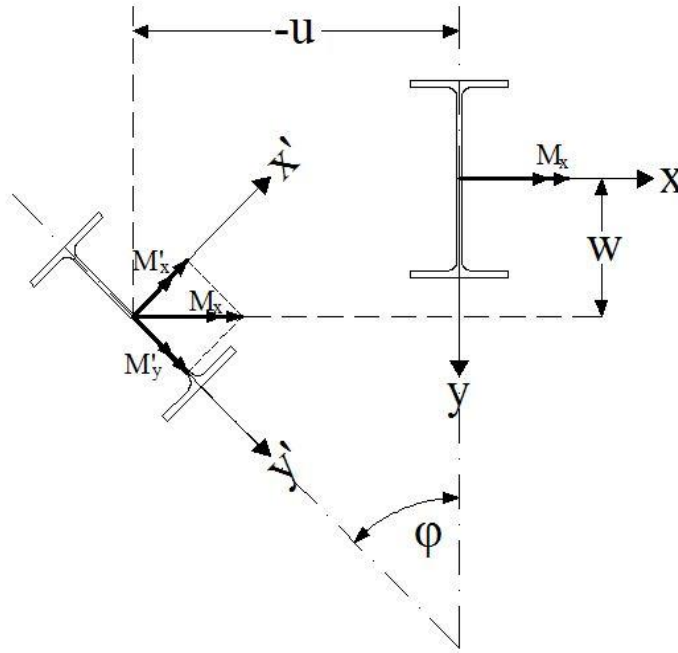
Πίνακας 2.1 Είδη και παραμορφώσεις καθολικού λυγισμού.

Είδος Καθολικού Λυγισμού	Φόρτιση	Είδη διατομών	Παραμορφώσεις
Καμπτικός λυγισμός	N N + M _x N + M _y N + M _x + M _y	όλες	u w u u,w
Στρεπτικός λυγισμός	N	ανοικτές	φ
Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός	N M _x N + M _x N + M _x + M _y	ανοικτές	u, w, φ

Λόγω του αντικειμένου ενασχόλησης της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, θα αναπτύξουμε περαιτέρω την έννοια του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, και θα διακρίνουμε τις εξής τρεις κατηγορίες αυτού.

Πλευρικός λυγισμός είναι η μορφή αστάθειας ενός καμπτόμενου μέλους, κατά την οποία, οι διατομές υπόκεινται μετά το λυγισμό σε στροφή περί το κέντρο διάτμησης και σε ταυτόχρονη πλευρική μετατόπιση. Εάν το μέλος υπόκειται όχι μόνο σε εγκάρσια φορτία, αλλά και σε αξονική θλίψη, κίνδυνος πλευρικού λυγισμού είναι μεγαλύτερος και τότε ονομάζεται στρεπτοκαμπτικός λυγισμός. Διατομές οι οποίες είναι ευαίσθητες σε πλευρικό λυγισμό είναι διατομές διπλού ταν ή U καθώς διαθέτουν μικρή στρεπτική δυσκαμψία και είναι ευαίσθητες σε στρέβλωση. Οι κλειστές διατομές, όπως οι κοίλες κυκλικές και οι κοίλες ορθογωνικές, διαθέτουν μεγάλη στρεπτική δυσκαμψία και δεν είναι ευπαθείς σε πλευρικό λυγισμό.

Το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχει την εξής ποιοτική περιγραφή: Εάν μία δοκός μη προστατευόμενη έναντι πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, το ένα πέλμα της διατομής θλίβεται και αναπτύσσονται λόγω κάμψης ορθές θλιπτικές τάσεις. Το πέλμα αυτό ως θλιβόμενο έχει την τάση να λυγίσει, όμως ο κορμός παρεμποδίζει το λυγισμό του θλιβόμενου πέλματος περί τον ασθενή άξονα του πέλματος, λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού κατά τον άξονα αυτό. Τελικά, το θλιβόμενο πέλμα λυγίζει περί τον ισχυρό άξονα του πέλματος για αρκετά υψηλότερες τιμές φορτίου, εκτρέπεται πλευρικά. Το εφελκόμενο πέλμα δεν έχει την τάση να λυγίσει, συνδέεται όμως μέσω του κορμού με το θλιβόμενο πέλμα, το οποίο εκτρέπεται πλευρικά. Αποτέλεσμα είναι η στροφή της διατομής περί τον διαμήκη άξονα (Σχ 2.3).



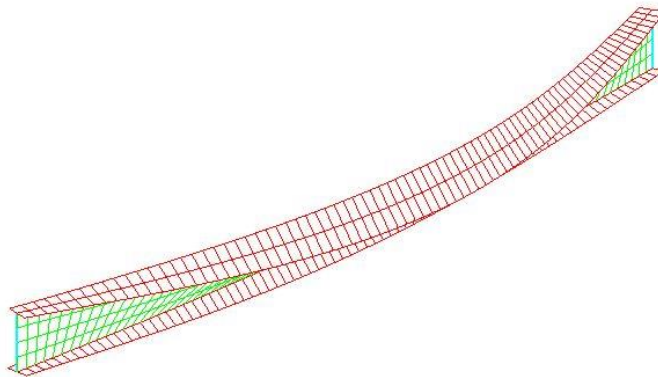
Σχήμα 2.3 Εκτροπή διατομής κατά τον πλευρικό λυγισμό.

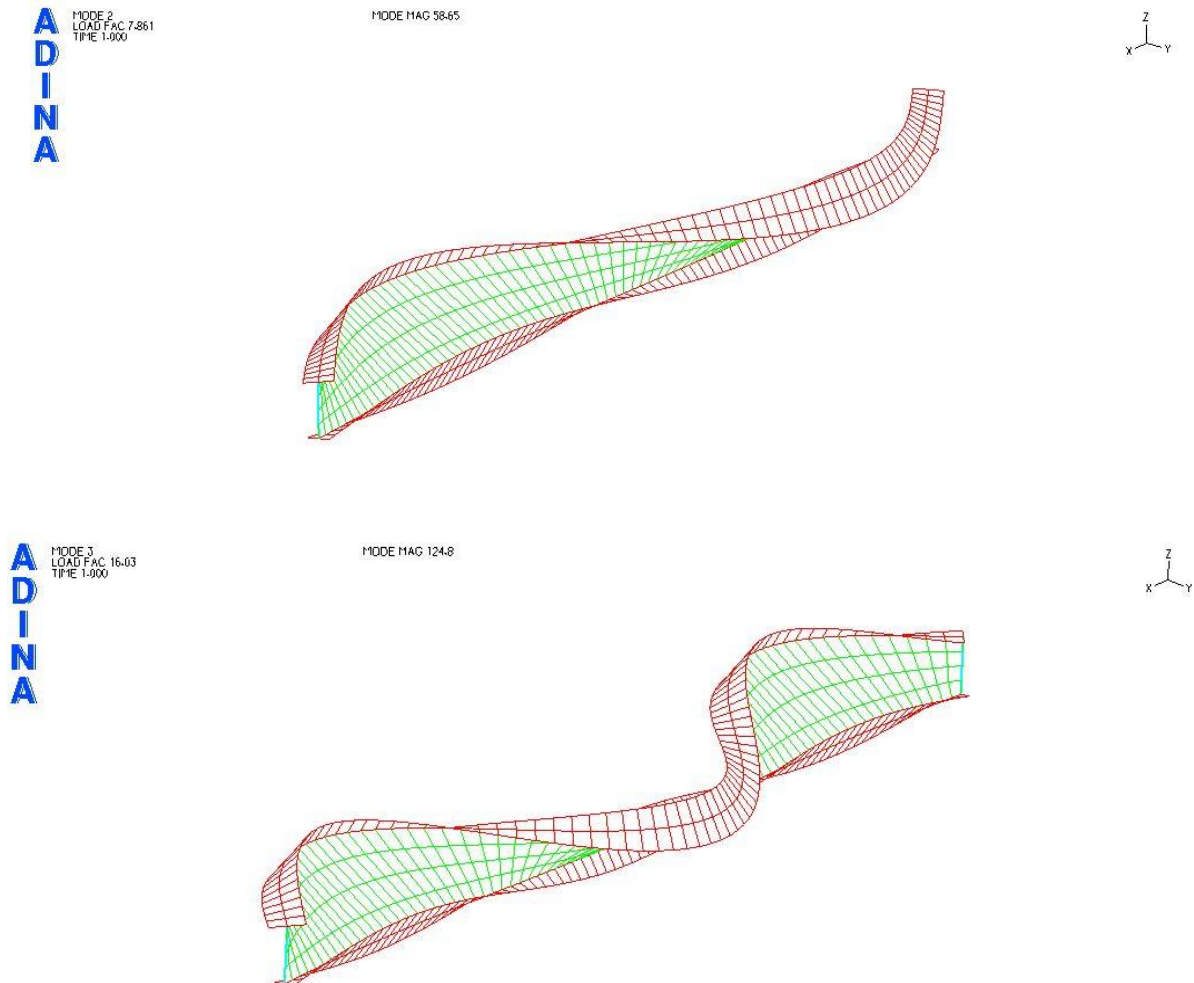
Στο παρακάτω σχήμα, διακρίνονται οι πρώτες τρεις ιδιομορφές του πλευρικού λυγισμού, όπως προέκυψαν από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού μιας αμφίρρευστης μεταλλικής δοκού με διχαλωτή στήριξη στα άκρα.

**A
D
I
N
A**
MODE 1
LOAD FAC 2.713
TIME 1.000

MODE 11AG 16.88

Z
X Y





Σχήμα 2.4 Οι τρεις πρώτες ιδιομορφές πλευρικού λυγισμού.

Διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις βασικές περιπτώσεις με τις οποίες συναντάται συνήθως το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού σε μια μεταλλική συμπαγή δοκό:

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη και κάμψη.

Μέλη σταθερής διατομής που καταπονούνται ταυτόχρονα από αξονική θλιπτική δύναμη και ροπές κάμψης περί τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα της διατομής, αποτελούν τη γενική περίπτωση καταπόνησης, ιδιαίτερα σε ότι αφορά κατακόρυφα μέλη πλαισιωτών χωρικών φορέων. Η ανάλυση της φέρουσας συμπεριφοράς είναι εξαιρετικά δύσκολη ακόμα και για την απλή ελαστική συμπεριφορά, καθιστώντας κλειστές μαθηματικές σχέσεις όπου η επίλυση αυτών είναι πολύ δύσκολη και πολλές φορές αδύνατη. Έτσι καταφεύγουμε στην ανάπτυξη και χρήση διάφορων προσεγγιστικών μεθόδων ώστε να οδηγηθούμε σε μια αποδεκτή λύση.

Στρεπτοκαμπτικός (ή πλευρικός) λυγισμός δοκών σταθερής διατομής υπό κάμψη περί τον ισχυρό άξονα.

Όταν μια δοκός μη προστατευόμενη περί πλευρικής εκτροπής υποβάλλεται σε κάμψη, λόγω ροπών ή λόγω εγκάρσιων φορτίων, περί τον ισχυρό άξονα της διατομής της, τότε αναλόγως τον προσανατολισμό των δρώντων φορτίων, ένα από τα από τα πέλματά της θλίβεται και καθίσταται επομένως επιρρεπές σε λυγισμό. Ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος στο επίπεδο του κορμού παρεμποδίζεται λόγω της μεγάλης δυσκαμψίας του κορμού στο επίπεδο του, ενώ το υπόλοιπο μισό της διατομής χαρακτηρίζεται, ως εφελκόμενο στοιχείο ευσταθές. Ως συνέπεια, ο λυγισμός του θλιβόμενου πέλματος εκδηλώνεται εκτός του επιπέδου του κορμού (περί τον ισχυρό άξονα του θλιβόμενου πέλματος), με ταυτόχρονη στροφή των κύριων αξόνων της διατομής σε σχέση με την αρχική τους θέση. Η παραμόρφωση που προκύπτει, είναι επομένως, συνδυασμός στρέψης και πλευρικής κάμψης (πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός ή απλώς πλευρικός λυγισμός). Βέβαια, εάν εφαρμοστεί ταυτόχρονα και αξονική θλιπτική δύναμη στη δοκό, αυτή θα επιτείνει το φαινόμενο, διότι συμβάλλει στην κάμψη (κατά τον λυγισμό) περί τον ασθενή άξονα της διατομής. Η αντιμετώπιση των φαινομένων αυτών αστάθειας είναι πολύπλοκη διαδικασία, όπως προαναφέραμε στο κεφάλαιο 2.3.1 .

Κατά την μελέτη και την αντιμετώπιση των φαινομένων του τοπικού λυγισμού, έχει μεγάλη σημασία να παρουσιάσουμε από ποιους παράγοντες εξαρτάται η κρίσιμη τιμή της μέγιστης ροπής κάμψης, σε μια δοκό, η οποία φορτίζεται κατά την ισχυρή διεύθυνση κάμψης.

Οι κυριότεροι παράγοντες είναι οι εξής:

- Το είδος και η θέση των φορτίων, τα οποία επηρεάζουν την κατανομή της ροπής κατά μήκος της δοκού (δηλαδή τη μορφή του διαγράμματος των καμπτικών ροπών).
- Το σημείο εφαρμογής των φορτίων καθ' ύψος της διατομής (κέντρο βάρους, άνω πέλμα, κάτω πέλμα κ.α.).
- Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού και σε ενδιάμεσες θέσεις της (περιορισμός κάμψης, στρέψης και στρέβλωσης).
- Η ύπαρξη ή όχι συνέχειας στις στηρίξεις.
- Η μορφή της διατομής.
- Οι τυχόν ασυνέχειες στη διατομή (π.χ. αλλαγή διατομής, ανοίγματα κλπ).
- Οι ιδιότητες του υλικού.
- Οι γεωμετρικές ατέλειες και οι παραμένουσες τάσεις.

Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός μελών σταθερής διατομής υπό θλίψη.

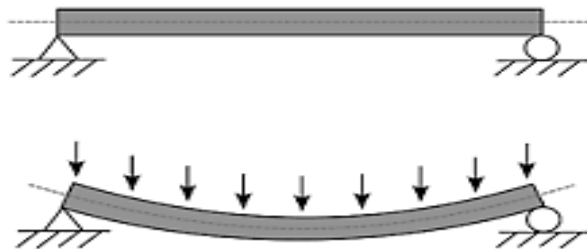
Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται ουσιαστικά όπως ο στρεπτικός λυγισμός. Παρουσιάζεται δηλαδή μια μορφή αστάθειας ενός θλιβόμενου μέλους σταθερής διατομής με ευθύγραμμο διαμήκη άξονα, κατά οποία οι διατομές στρέφονται περί τον άξονα του μέλους, ο οποίος παραμένει ευθύγραμμος και μετά την παραμόρφωση. Ο κίνδυνος αστοχίας λόγω

στρεπτικού λυγισμού παρατηρείται σε ανοιχτές διατομές, ενώ δεν υφίστανται σε κλειστές διατομές λόγω της μεγάλης δυστροπίας που διαθέτουν. Επιπλέον σημαντικό ρόλο παίζουν οι συνθήκες δέσμευσης των άκρων του μέλους σε στρέψη και στρέβλωση.

2.3 Τεχνική Θεωρία Κάμψης

Βασικό αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η θεωρητική μελέτη του φαινομένου του πλευρικού λυγισμού συμπαγών μεταλλικών δοκών. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτή η θεωρητική προσέγγιση γίνεται με την χρήση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την ισορροπία της μεταλλικής δοκού στην οποία δρουν εγκάρσια φορτία. Προφανώς, η εγκάρσια φόρτιση της δοκού έχει ως αποτέλεσμα την κάμψη αυτής. Ο πλευρικός λυγισμός έχει άμεση σχέση με την κάμψη της δοκού. Έτσι, οι δύο από τις τρεις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο αυτό, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, βασίζονται στην κάμψη της διατομής περί τους δυο κύριους κεντροβαρικούς άξονες αυτής. Επομένως, είναι σημαντικό να εισάγουμε και να περιγράψουμε εν συντομία την έννοια της κάμψης.

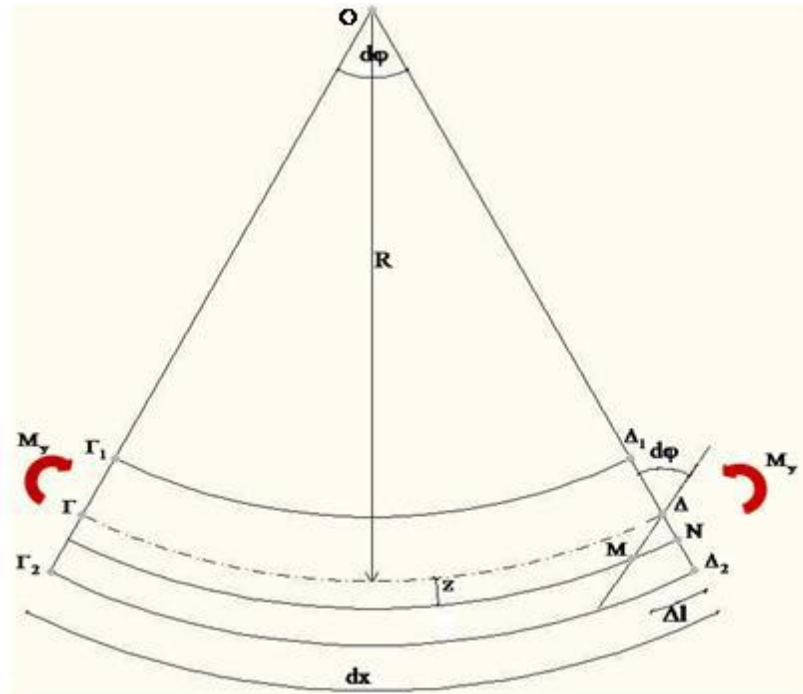
Η εντατική κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια δοκός που υποβάλλεται σε εγκάρσια φόρτιση ονομάζεται κάμψη. Αν για παράδειγμα, σε μια αμφιέριστη δοκό επιβληθεί ένα εγκάρσιο φορτία, τότε η δοκός θα παραμορφωθεί κατά τη διεύθυνση του επιβαλλόμενου και ο άξονάς της θα καμφθεί όπως φαίνεται στο Σχ.2.5.



Σχήμα 2.5 Κάμψη δοκού υπό εγκάρσια φόρτιση.

Κατά την καταπόνηση σε κάμψη αναπτύσσονται καμπτικές ροπές, οι οποίες προκαλούν τόσο την καμπύλωση της δοκού, όσο και τη δημιουργία τάσεων εντός του υλικού της. Επομένως, με την έννοια κάμψη αναφερόμαστε τόσο στις αναπτυσσόμενες τάσεις όσο και στις προκαλούμενες παραμορφώσεις που ονομάζονται βέλη κάμψης.

Έστω η αμφιέριστη δοκός του σχήματος 2.5 υπό τη δράση εγκάρσιου φορτίου. Η φόρτιση της δοκού πραγματοποιείται κατά τον άξονα z και η δοκός κάμπτεται περί τον κεντροβαρικό άξονα y . Αποκόπτοντας από τη δοκό ένα στοιχειώδες τμήμα dx και με βάση την παραδοχή Bernoulli, έχουμε τα εξής:



Σχήμα 2.6 Καμπύλωση στοιχειώδους τμήματος καμπτόμενης δοκού.

Ο κεντροβαρικός άξονας Ox παραμορφώνεται σε τόξο κύκλου ακτίνας R . Οι διατομές $\Gamma_1\Gamma_2$ και $\Delta_1\Delta_2$ έχουν στραφεί κατά γωνία $d\phi/2$ καθεμιά ως προς την κάθετη διεύθυνση. Από την ομοιότητα των τριγώνων $O\Gamma\Delta$ και ΔMN ισχύει:

$$\frac{\Delta \ell}{dx} = \frac{z}{R} \tag{2.1}$$

Ο λόγος $\frac{\Delta \ell}{dx}$ εκφράζει την ανοιγμένη παραμόρφωση ϵ , η οποία σύμφωνα με τον νόμο του Hooke

δίνεται από τη σχέση: $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει: $\sigma = \frac{E}{R} \cdot z$ (2.2)

Ο λόγος E/R είναι για όλα τα σημεία της κάθε ίνας και επομένως η σχέση (2.2) αποκτά τη μορφή: $\sigma = C \cdot z$

Η ουδέτερη γραμμή μιας διατομής είναι το ίχνος του ουδέτερου επιπέδου στη συγκεκριμένη διατομή και σε αυτήν οι ορθές τάσεις λόγω κάμψης είναι μηδενικές, ταυτίζεται δε με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής. Διαιρεί τη διατομή σε θλιβόμενη και σε εφελκυστική ζώνη.

Με βάση την ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος, πρέπει το άθροισμα των ροπών των στοιχειωδών δυνάμεων $\sigma \cdot dA$ ως προς τον άξονα y να είναι ίση με την καμπτική ροπή M_y .

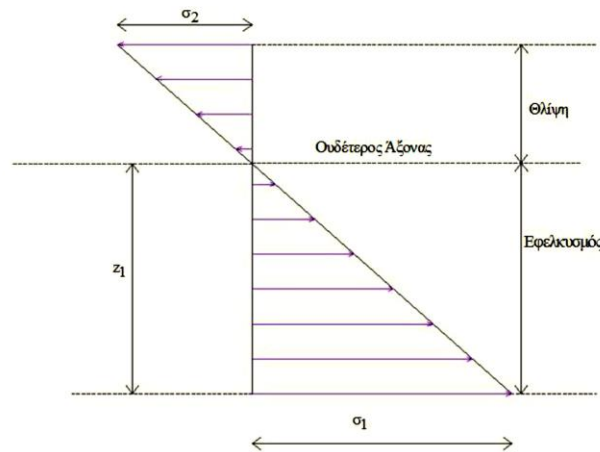
Ισχύει δηλαδή:

$$M_y = \int z \sigma dA = \frac{E}{R} \int z^2 dA = \frac{E}{R} I_y \quad (2.3)$$

η οποία με βάση τη σχέση (2.2) δίνει τελικά:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (2.4)$$

Άρα η κατανομή τάσεων καθορίζεται πλήρως από τη ροπή κάμψης και τη ροπή αδράνειας της διατομής.



Σχήμα 2.7 Κατανομή ορθών τάσεων λόγω ορθής τάσης σε τυχαία διατομή.

Ως ροπή αντίστασης της διατομής ως προς τον άξονα y ορίζεται ο λόγος της ροπής αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα y , προς την απόσταση της πιο απομακρυσμένης ίνας από τον ίδιο άξονα. Όμοια ορίζεται και η ελαστική ροπή αντίστασης ως προς τον άξονα z .

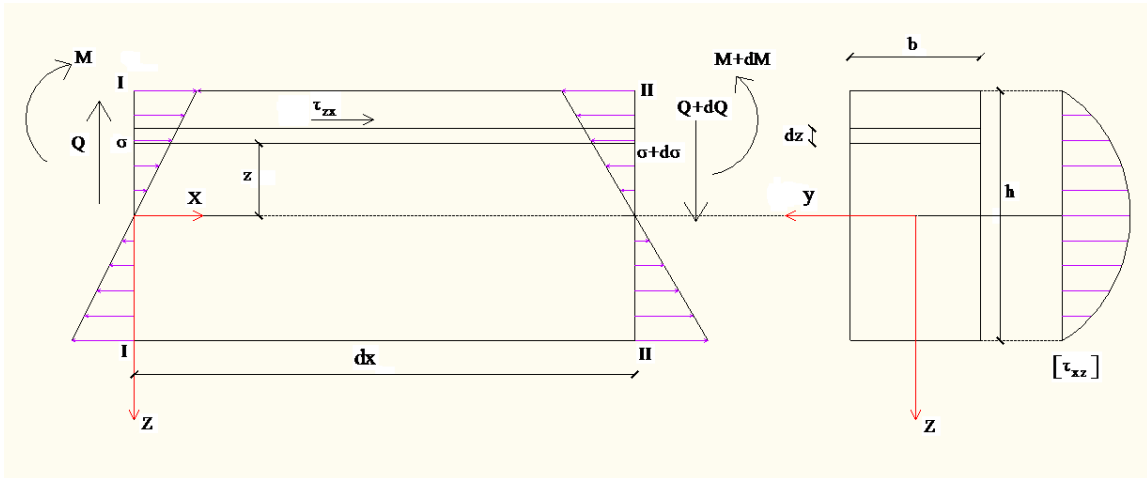
Δηλαδή:

$$Wel_y = \frac{I_y}{y} \quad \text{και} \quad Wel_z = \frac{I_z}{z} \quad (2.5)$$

Αν η ουδέτερη γραμμή ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας της διατομής, τότε οι ακραίες ίνες της θλιβόμενης και εφελκυσόμενης ζώνης απέχουν την ίδια απόσταση από τον άξονα y , συνεπώς ισχύει: $Wel_y^o = Wel_y^u$.

Επομένως η κατανομή ορθών τάσεων μπορεί να γραφεί ως εξής: $\sigma_x = \frac{M_y}{Wel}$

Υπό την επίδραση των εγκάρσιων φορτίων, εκτός από την καμπτική ροπή εμφανίζεται και τέμνουσα δύναμη. Επομένως, στη δοκό εκτός από ορθές τάσεις σ εμφανίζονται και διατμητικές τάσεις τ . Καθώς η συμπεριφορά της δοκού είναι ελαστική και επειδή ισχύει η αρχή της ανεξαρτησίας των ελαστικών παραμορφώσεων, η παρουσία των διατμητικών τάσεων δεν επηρεάζει την κατανομή των ορθών τάσεων κατά μήκος της διατομής.



Σχήμα 2.8 Κατανομή διατμητικών τάσεων σε διατομή δοκού λόγω κάμψης.

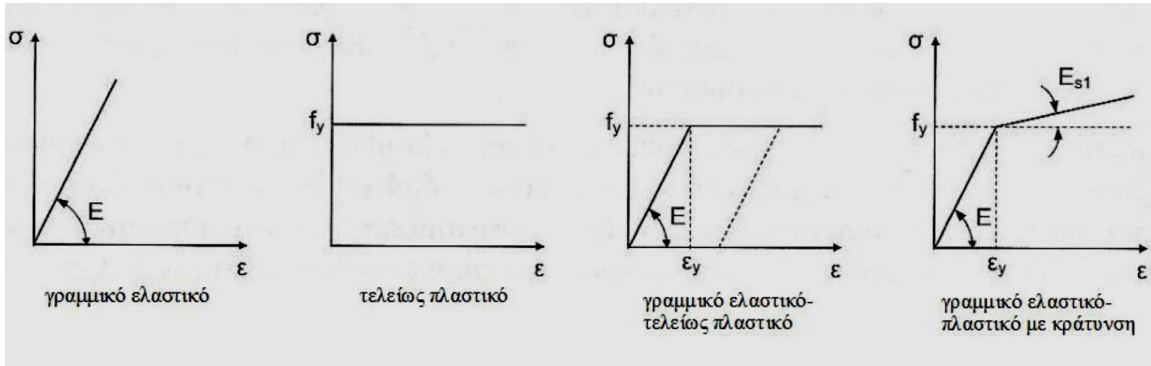
Σε αυτήν την παράγραφο εξετάστηκε φόρτιση κατά τον κατακόρυφο άξονα z και συνεπώς κάμψη της δοκού περί τον κεντροβαρικό άξονα y. Προφανώς, ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για φόρτιση κατά y και συνεπώς κάμψη κατά z.

2.4 Ελαστική και Πλαστική Ανάλυση

Η τεχνική θεωρία κάμψης αναφέρεται στην ελαστική συμπεριφορά του φορέα και βασίζεται στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων. Προκύπτει επομένως για θεωρία 1^{ης} τάξεως. Η ελαστική ανάλυση μπορεί να εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις διατομών, ανεξαρτήτως αν η αντοχή τους προσδιορίζεται με βάση την ελαστική ή την πλαστική αντοχή τους. Αντιθέτως η πλαστική ανάλυση. Αντιθέτως η πλαστική ανάλυση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις και για να είναι δυνατή η εφαρμογή της πρέπει να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Στην παράγραφο αυτή γίνεται αναφορά στις δυο μεθόδους ανάλυσης και στα χαρακτηριστικά τους.

Ελαστική Ανάλυση

Κατά την ελαστική ανάλυση υποτίθεται ελαστική συμπεριφορά του φορέα και η σχέση τάσης-παραμόρφωσης του υλικού θεωρείται ότι είναι γραμμική για οποιαδήποτε στάθμη των τάσεων. Η παραμόρφωση είναι επομένως ανάλογη με την τάση, δηλαδή το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά καθ' όλη τη φόρτιση.



Σχήμα 2.9 Διαγράμματα τάσεων-ανοιγμένων παραμορφώσεων.

Κατά την ελαστική ανάλυση στατικώς ορισμένων φορέων, τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας, ενώ στους υπερστατικούς φορείς τα εντατικά μεγέθη πρέπει να ικανοποιούν συνθήκες ισορροπίας και να προκαλούν μετακινήσεις που είναι συμβατές με την ελαστική συνέχεια του φορέα και τις συνθήκες στήριξης. Οι εξισώσεις ισορροπίας δεν επαρκούν για να προσδιορισθούν τα άγνωστα μεγέθη και πρέπει να συμπληρωθούν με απλές γεωμετρικές σχέσεις που συνδέουν τις μετακινήσεις του φορέα. Αυτές οι σχέσεις ονομάζονται εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων και εξασφαλίζουν τη συμβατότητα των μετακινήσεων στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Για τον υπολογισμό των εντατικών και παραμορφωσιακών μεγεθών και των αντιδράσεων, χρησιμοποιούνται κυρίως δυο γενικές μέθοδοι προσέγγισης. Αυτές είναι η μέθοδος των δυνάμεων και η μέθοδος των παραμορφώσεων.

Η ελαστική ανάλυση διακρίνεται σε δυο κατηγορίες. Αυτές είναι οι εξής:

- Ελαστική ανάλυση 1^{ης} τάξεως, σύμφωνα με την οποία οι εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων και του συμβιβαστού των παραμορφώσεων αναφέρονται στην αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία του φορέα. Χρησιμοποιείται όταν οι μετατοπίσεις των διατομών του φορέα και οι ανηγμένες παραμορφώσεις των ακραίων ινών κάθε διατομής είναι μικρές, ώστε η συμπεριφορά του φορέα να θεωρείται ελαστική. Ισχύει η αρχή της επαλληλίας κατά την οποία το αποτέλεσμα μιας συνολικής δράσης είναι ίσο με το άθροισμα των συνόλων των αποτελεσμάτων των επιμέρους δράσεων που συνιστούν την ολική δράση. Η αρχή της επαλληλίας ισχύει μόνο όταν το υλικό είναι ελαστικό και η γεωμετρία της κατασκευής δεν μεταβάλλεται λόγω μη γραμμικής συμπεριφοράς.
- Ελαστική ανάλυση 2^{ης} τάξεως, σύμφωνα με την οποία οι εξισώσεις ισορροπίας αναφέρονται στην παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα. Λαμβάνεται επομένως υπόψη η επίδραση των παραμορφώσεων του φορέα στα εντατικά μεγέθη του. Σε αυτήν την περίπτωση δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας, ενώ για την επίλυση του φορέα χρησιμοποιούνται κυρίως κατάλληλα προγράμματα ηλεκτρονικού υπολογιστή, λόγω ανάγκης υλοποίησης μεγάλου αριθμού υπολογισμών. Συγκεκριμένα, η ελαστική θεωρία 2^{ης} τάξεως συντίθεται από τη διαδοχική επίλυση αναλύσεων 1^{ης} τάξεως του φορέα, του οποίου η γεωμετρία μεταβάλλεται σε κάθε, με βάση την προηγούμενη ιστορία φόρτισης.

Αξίζει να υπογραμμιστεί ότι η υπόθεση της γραμμικής συμπεριφοράς φορτίου-παραμορφώσεων είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί είτε για 1^{ης} είτε για 2^{ης} τάξεως ελαστικής ανάλυσης, ακόμα και όταν η αντοχή της διατομής βασίζεται στην πλαστική αντοχή.

Πλαστική Ανάλυση

Η πλαστική ανάλυση λαμβάνει υπόψη τις επιδράσεις της μη γραμμικότητας του υλικού κατά τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων των δράσεων, ενώ χρησιμοποιείται μόνο εφόσον τα μέλη της κατασκευής διαθέτουν επαρκή στρωφική ικανότητα στις θέσεις που δημιουργείται πλαστική άρθρωση.

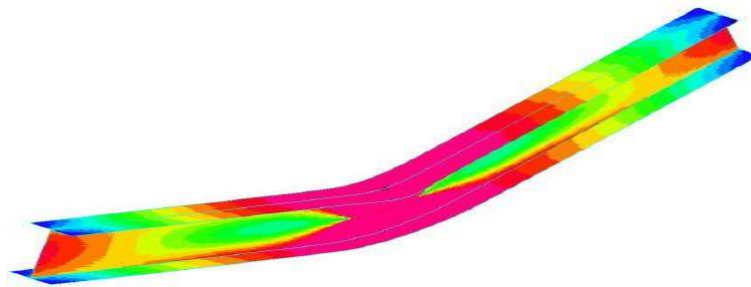
Οι προϋποθέσεις εφαρμογής της πλαστικής ανάλυσης είναι οι ακόλουθες:

- Ο χάλυβας πρέπει να διαθέτει επαρκή ολκιμότητα, ώστε να μπορέσει να αναπτυχθεί η πλαστική αντοχή των διατομών.
- Μετά τη δημιουργία της πλαστικής άρθρωσης, αυτή πρέπει να έχει την ικανότητα να στραφεί υπό σταθερή ροπή, ίση με την πλαστική ροπή της διατομής.
- Η πλαστική άρθρωση πρέπει να έχει αρκετή στρωφική ικανότητα, χωρίς να προηγηθεί τοπικός ή πλευρικός λυγισμός, έτσι ώστε να μπορεί να δημιουργηθεί μηχανισμός κατάρρευσης με ανακατανομή ροπών.

Είναι απαραίτητη η γνώση του διαγράμματος τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων του υλικού για την πραγματοποίηση γραμμικής ανάλυσης. Εάν η τάση μειωθεί σε οποιοδήποτε σημείο της πλαστικής περιοχής, η καμπύλη αποφόρτισης είναι ευθεία γραμμή παράλληλη με τον ελαστικό κλάδο του διαγράμματος σ-ε. Υποθέτοντας απόλυτη πλαστικότητα μετά την υπέρβαση του ορίου διαρροής, αμελούνται τα αποτελέσματα της κράτυνσης, γεγονός που είναι υπέρ της ασφαλείας.

Η πλαστική ανάλυση βασίζεται στη μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού ακόμα και αν αγνοούνται τα φαινόμενα 2ας τάξεως. Οι πλαστικές αναλύσεις 2^{ης} τάξεως απαιτούν γενικά τη χρήση προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αξίζει να υπογραμμισθεί ότι επειδή η πλαστική ανάλυση είναι βασικά μη γραμμική, η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει.

Ο σχεδιασμός δοκών με τη μέθοδο πλαστικής ανάλυσης συνεπάγεται οικονομία της κατασκευής, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο αυξάνεται η υπερστατικότητα του φορέα.



Σχήμα 2.10 Σχηματισμός πλαστικής άρθρωσης στο μέσον αμφιέριστης μεταλλικής δοκού

2.5 Μέθοδοι Ανάλυσης και Ελέγχου

Σκοπός του σχεδιασμού των κατασκευών είναι ο προσδιορισμός των εντατικών μεγεθών και των παραμορφώσεων των μελών του φορέα και ο έλεγχος ότι η ένταση και οι παραμορφώσεις βρίσκονται εντός των αποδεκτών ορίων. Οι θεωρίες ανάλυσης που χρησιμοποιούνται κάθε φορά πρέπει να είναι τόσο προσεγγιστικές όσο επιτρέπεται και τόσο ακριβείς όσο επιβάλλεται. Αυτό εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τα γεωμετρικά και αδρανειακά μεγέθη του φορέα και των μελών του, καθώς και από το είδος και την ένταση που του επιβάλλεται.

Όπως προαναφέρθηκε, η τεχνική θεωρία κάμψης αναφέρεται στην ελαστική συμπεριφορά του φορέα και βασίζεται στη θεωρία μικρών μετατοπίσεων (ελαστική ανάλυση 1^{ης} τάξεως). Η ελαστική ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις διατομών, ανεξαρτήτων αν η αντοχή τους προσδιορίζεται με βάση την ελαστική ή πλαστική αντοχή τους. Αντιθέτως, η πλαστική ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις και για να είναι δυνατή η εφαρμογή της, θα πρέπει να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Η πλαστική ανάλυση αναφέρεται στη *μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού* λόγω διαρροής του χάλυβα. Επίσης, υπάρχει και η *γεωμετρική μη γραμμικότητα* λόγω μεγάλων μετατοπίσεων. Τις περισσότερες φορές η πραγματική γεωμετρία αποκλίνει από την ιδεατή λόγω ατελειών κατά τη διαδικασία παραγωγή και ανέγερσης των δομικών μελών, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται παραμένουσες τάσεις στην αφόρτιστη κατάσταση. Οι μέθοδοι ανάλυσης σύμφωνα με την ορολογία του Ευρωκώδικα 3 περί σχεδιασμού κελυφών, είναι οι εξής:

Γραμμική Ελαστική Ανάλυση (Linear Analysis, LA)

Οι παραμορφώσεις w και οι ανηγμένες παραμορφώσεις ε είναι μικρές, ώστε η συμπεριφορά να είναι ελαστική και η επίλυση να γίνεται με βάση την αρχική, απαραμόρφωτη γεωμετρία του φορέα. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και ελαστική ανάλυση με βάση τη θεωρία 1^{ης} τάξης.

Όταν επιβάλλεται να ληφθούν φαινόμενα 2^{ης} τάξεως (γεωμετρική μη γραμμικότητα), χρησιμοποιείται η θεωρία 2^{ης} τάξης, η οποία απαιτεί επαναληπτικές διαδικασίες επίλυσης, επειδή σε αυτή περίπτωση δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας, γίνεται αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη κατανομή των φορτίων, τα οποία αυξάνονται βήμα-βήμα, χρησιμοποιώντας ένα πολλαπλασιαστή φόρτισης. Κάθε βήμα επιλέγεται αρκετά μικρό ώστε να μπορεί να υποθεθεί ότι η συμπεριφορά του είναι γραμμική κατά τη διάρκεια του βήματος. Η κατάσταση παραμόρφωσης στο τέλος ενός βήματος φόρτισης, χρησιμοποιείται ως γεωμετρία αναφοράς για το επόμενο βήμα. Επομένως η ελαστική θεωρία 2^{ης} τάξης συντίθεται από τη διαδοχική επίλυση αναλύσεων 1^{ης} τάξης του φορέα, του οποίου η γεωμετρία μεταβάλλεται σε κάθε βήμα, με βάση την προηγούμενη ιστορία φόρτισης.

Πλαστική Ανάλυση (Materially non-linear Analysis, MNA)

Οι παραμορφώσεις w είναι μικρές, αλλά οι ανηγμένες παραμορφώσεις ϵ μεγάλες. Η επίλυση γίνεται με βάση την απαραμόρφωτη γεωμετρία του φορέα. Εδώ γίνεται διάκριση ως προς το τι θεωρούνται παραμορφώσεις, δεδομένου ότι ο όρος w έχει μια γενικευμένη σημασία.

Αν είναι μικρές οι μετατοπίσεις w αλλά μεγάλες οι στροφές $\phi = dw/dx$, τότε η σχέση μεταξύ ροπών-καμπυλοτήτων είναι γραμμική και η μη γραμμικότητα αφορά μόνο την ανάλυση στο παραμορφωμένο σύστημα. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και γραμμική θεωρία ευστάθειας ή ανάλυση με θεωρία 2^{ης} τάξης. Η εφαρμογή της δίνει λύσεις μόνο μέχρι το φορτίο λυγισμού. Αν οι μετατοπίσεις w είναι μεγάλες, τότε η σχέση μεταξύ ροπών-καμπυλοτήτων είναι μη γραμμική. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και μη γραμμική θεωρία ευστάθειας ή ανάλυση με τη θεωρία 3^{ης} (ή ανώτερης) τάξης, δίνει δε λύσεις και πέραν του φορτίου του λυγισμού. Η εφαρμογή με γραμμικής ευστάθειας δεν αφορά ραβδόμορφους φορείς, δεδομένου ότι στα έργα του πολιτικού μηχανικού οι μετατοπίσεις είναι περιορισμένες για λόγους λειτουργικότητας. Αντιθέτως σε επιφανειακούς φορείς (πλάκες, κελύφη) είναι αναγκαία η εφαρμογή της όταν αναζητείται το οριακό φορτίο, όπου σημαντικό ρόλο παίζει η μεταλυγισμική συμπεριφορά.

Γεωμετρικώς μη γραμμική Ελαστική Ανάλυση (Geometrically non-linear Analysis, GNA)

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις είναι μικρές, αλλά οι παραμορφώσεις του φορέα είναι μεγάλες. Η ανάλυση είναι ελαστική, αλλά η επίλυση γίνεται με βάση την παραμορφωμένη γεωμετρία του φορέα. Εδώ πρέπει να γίνει διάκριση με βάση τη σημασία του όρου “παραμορφώσεις” του φορέα. Εάν οι μετατοπίσεις είναι μικρές, αλλά οι στροφές μεγάλες, τότε η σχέση ροπών-καμπυλοτήτων είναι γραμμική και η μη γραμμική αφορά μόνο την ανάλυση στο παραμορφωμένο σύστημα. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και γραμμική θεωρία ευστάθειας ή ανάλυση με θεωρία 2^{ης} τάξεως. Δίνει αποτελέσματα μόνο μέχρι το φορτίο λυγισμού.

Αν οι μετατοπίσεις είναι μεγάλες, τότε η σχέση ροπών-καμπυλοτήτων είναι μη γραμμική. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται και μη γραμμική θεωρία ευστάθειας ή ανάλυση με θεωρία 3^{ης} (ή ανώτερης) τάξεως, ενώ δίνει λύσεις και πέραν του φορτίου λυγισμού. Σε επιφανειακούς φορείς.

Γεωμετρικώς μη γραμμική Πλαστική Ανάλυση (Geometrically and Materially non-linear Analysis, GMNA)

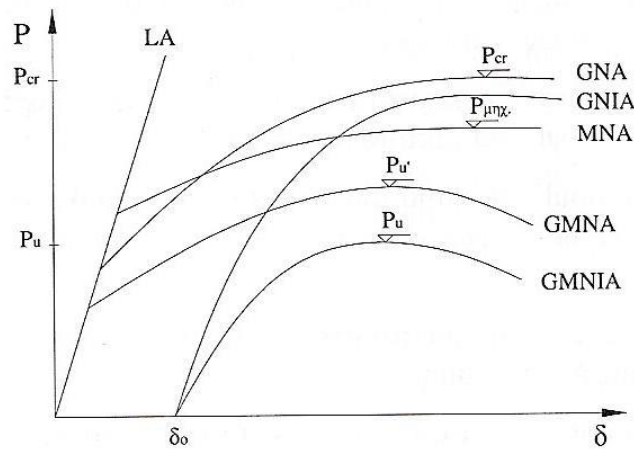
Οι παραμορφώσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις είναι μεγάλες.

Γεωμετρικώς μη γραμμική Ελαστική Ανάλυση με αρχικές ατέλειες (GNIA)

Είναι ίδια με την GNA με την παρουσία γεωμετρικών ατελειών.

Γεωμετρικώς μη γραμμική πλαστική ανάλυση με αρχικές ατέλειες (GMNIA)

Αποτελεί συνδυασμό των προηγούμενων και δίνει τα πραγματικά οριακά φορτία του εξεταζόμενου μέλους.



Σχήμα 2.11 Καμπύλες P-δ για τα είδη αναλύσεων

Κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας (δηλαδή του διαγράμματος φορτίου – μετατοπίσεως) αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας. Υπάρχουν δύο είδη λυγισμού που εκφράζονται με διαφορετική μορφή των δρόμων ισορροπίας τους:

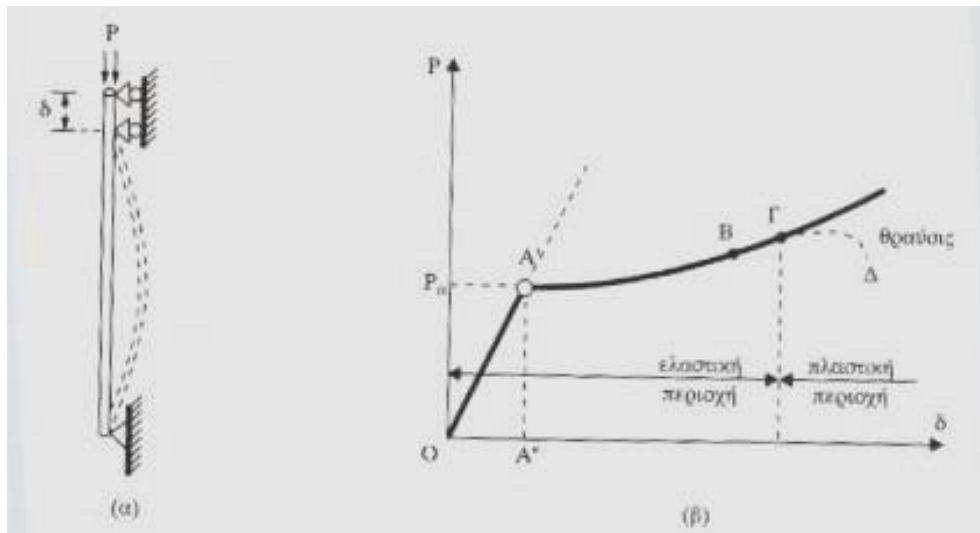
- **Λυγισμός με οριακό σημείο:** Η δυσκαμψία της κατασκευής (κλίση του διαγράμματος $P - \delta$) μειώνεται με την αύξηση του επιβαλλόμενου φορτίου. Όταν το φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο φορτίο αστοχίας επέρχεται η αστοχία του μέλους ή της κατασκευής.
- **Λυγισμός με σημείο διακλαδώσεως:** Όταν το φορτίο φτάσει την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στον αντίστοιχο δρόμο ισορροπίας, οι μετατοπίσεις συνεχίζουν να αυξάνονται ακολουθώντας διαφορετική πορεία από αυτή του προλυγισμικού σταδίου.

Υπάρχει και η περίπτωση λυγισμού με σημείο διακλαδώσεως κατά την οποία ο φορέας μπορεί να φέρει φορτίο μεγαλύτερο από το φορτίο λυγισμού, έχει επομένως μεταλυγισμική αντοχή. Για το λυγισμό με οριακό σημείο και σημείο διακλαδώσεως θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στα επόμενα υποκεφάλαια.

2.6 Βασικές Έννοιες της Ελαστικής Ευστάθειας

Λυγισμός – Φορτίο λυγισμού – Κρίσιμο φορτίο

Στο παρακάτω Σχ. 2.12(α) βλέπουμε ένα επίμηκες δοκίμιο σωληνωτής διατομής στηριζόμενο σε ακλόνητες στηρίξεις. Το δοκίμιο αυτό δέχεται αξονική φόρτιση P η τιμή της οποίας αυξάνεται σταδιακά. Στην περίπτωση που η αξονική φόρτιση είναι σχετικά μικρή, η αύξηση της συνεπάγεται αξονική βράχυνση δ του δοκιμίου και η λεπτή ευθύγραμμη ράβδος διατηρείται απολύτως ευθύγραμμη (βλέπε Σχ 2.12(β)). Όταν όμως καθώς αυξάνεται το φορτίο P και αυτό φτάσει σε κάποια συγκεκριμένη τιμή P_α η ράβδος εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας της και παίρνει μια απείρως γειτονική μορφή ισορροπίας σχηματίζοντας βέλος κάμψης. Το φαινόμενο αυτό, κατά το οποίο η ράβδος από μια ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας μεταπίπτει σε κάποια καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας, ονομάζεται **λυγισμός**.



Σχ. 2.12 Επίμηκες δοκίμιο σωληνωτής διατομής

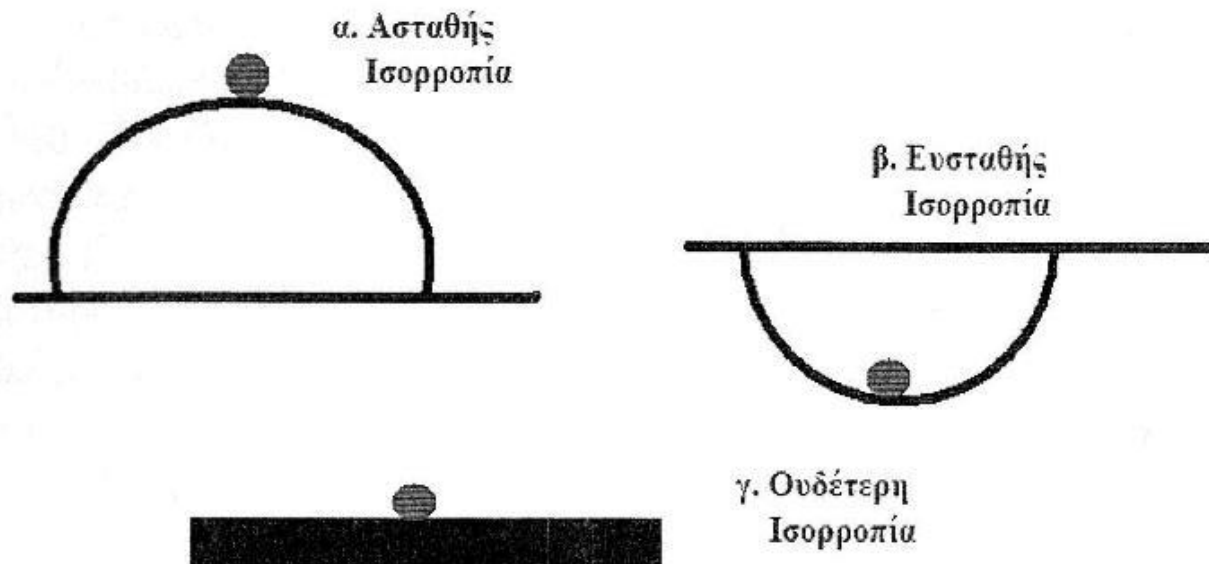
Στην τιμή αυτή του φορτίου P_α που έχουμε λυγισμό αντιστοιχούν δυο σχηματισμοί ισορροπίας, που έχουν το ίδιο μήκος. Ο ένας με ευθύγραμμο άξονα και ο άλλος με καμπυλωμένο άξονα. Περαιτέρω αύξηση της τιμής του φορτίου συνεπάγεται δυσαναλόγως μεγαλύτερες ροπές κάμψης και παραμορφώσεις που τελικώς θα προκαλέσουν την αστοχία του δοκιμίου. Η μέγιστη τιμή του φορτίου για την οποία η ράβδος διατηρεί την ευθύγραμμη μορφή της ονομάζεται **κρίσιμο φορτίο (critical load)** ή **φορτίο λυγισμού (buckling load)**. Βέβαια, θα μπορούσε να γίνει μια περαιτέρω διαφοροποίηση μεταξύ κρίσιμου φορτίου το οποίο προκύπτει από τη επίλυση των μαθηματικών προτύπων, ενώ το φορτίο λυγισμού προκύπτει όταν αναφερόμαστε στην φόρτιση μιας πραγματικής ράβδου στα πλαίσια μιας εργαστηριακής δοκιμής.

Παρατηρούμε από στο Σχ 2.12 ότι μετά το σημείο A' η ράβδος παρουσιάζει μεταλυγισμική αντοχή (postbuckling strength), που αντιστοιχεί στο ελαστικό μη γραμμικό τμήμα του διαγράμματος $A'B\Gamma$. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, η ράβδος δεν κινδυνεύει να αστοχήσει από ελαστικό λυγισμό αλλά λόγω πλαστικής παραμόρφωσης (πλαστικός λυγισμός), που αναπτύσσεται αμέσως μετά από το σημείο Γ στο οποίο αντιστοιχεί η τάση διαρροής.

Ο προσδιορισμός της συμπεριφοράς Α'ΒΓ μπορεί να γίνει μόνο με την εφαρμογή της ακριβής έκφρασης της σχέσης ροπής κάμψεως-καμπυλότητας (θεωρίας 3^{ης} τάξης). Η τιμή του φορτίου που αντιστοιχεί στο σημείο Α' (δηλαδή στην κατάσταση λυγισμού) λαμβάνεται ως άνω όριο, το οποίο καθορίζει την φέρουσα ικανότητα της ράβδου.

Ευσταθής, ασταθής και ουδέτερη ισορροπία

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια διάκριση των εννοιών *ευσταθής*, *ουδέτερη* και *ασταθής* ισορροπία. Αυτό θα γίνει με την βοήθεια του σχήματος 2.13, όπου παρουσιάζεται η ισορροπία μιας τελείως άκαμπτης σφαίρας σε τρεις διαφορετικές θέσεις μιας ομαλής επιφάνειας.

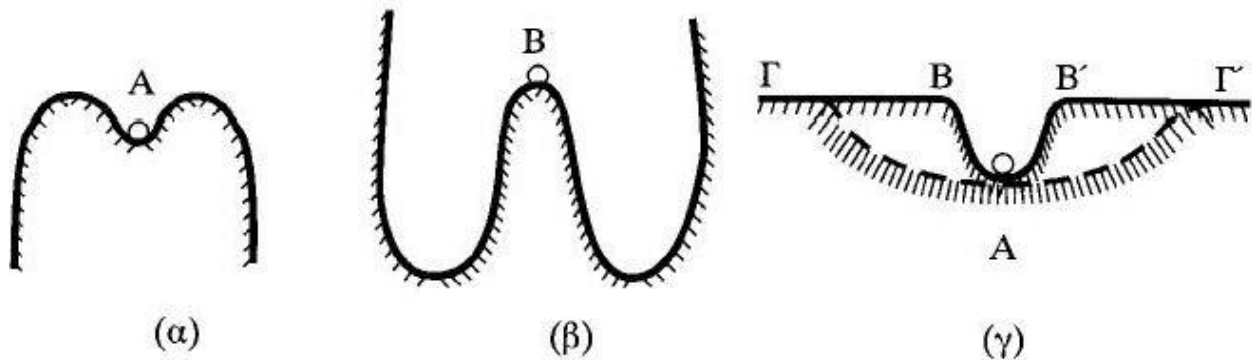


Σχήμα 2.13 Κύριες μορφές ισορροπίας.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ενώ η σφαίρα ισορροπεί και στις τρεις θέσεις, υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των τριών καταστάσεων ισορροπίας. Συγκεκριμένα, στο Σχ.2.13α αν η σφαίρα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας της τότε δε θα επιστρέψει στη θέση αυτή ακόμα και όταν αφαιρεθεί η δύναμη που την μετακίνησε, αλλά αντίθετα θα συνεχίσει να κινείται απομακρυνόμενη από την αρχική της θέση. Η συμπεριφορά αυτή χαρακτηρίζεται ως *ασταθής ισορροπία*. Στο Σχ.2.13β, βλέπουμε ότι αν η σφαίρα μετακινηθεί από τη θέση ισορροπίας της, θα επιστρέψει σε αυτή μόλις αφαιρεθεί η δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση (αφού πρώτα εκτελέσει κάποιες συνεχώς μειωμένου εύρους, παλινδρομήσεις). Αυτή η συμπεριφορά χαρακτηρίζεται ως *ευσταθής ισορροπία*. Τέλος η Τρίτη μορφή ισορροπίας (Σχ.2.13γ) ονομάζεται *ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία* και σε αυτή την περίπτωση, η σφαίρα, μόλις αφαιρεθεί η δύναμη που της ασκήθηκε, δεν επιστρέφει στην αρχική της θέση, αλλά ούτε και συνεχίζει να απομακρύνεται, παρά, μένει στη θέση στην οποία τη μετακίνησε η εφαρμοσθείσα δύναμη.

Έτσι, καθώς μία αμφιέριστη δοκός περνάει από την ασταθή (ευθύγραμμη) μορφή ισορροπίας στην ευσταθή (ελαφρώς καμπυλωμένη λόγω λυγισμού), υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μεταβατική ισορροπία, η οποία καλείται ουδέτερη ή αδιάφορη ισορροπία. Ο προσδιορισμός της κρίσιμης φόρτισης γίνεται με βάση την ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή ισορροπίας.

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση του Σχ. 2.14 έχουμε ευσταθή ισορροπία με μικρού μεγέθους διαταραχή (stability in the “small”) και ασταθή ισορροπία για μεγάλου μεγέθους διαταραχή (instability in the “large”). Αντίθετα, στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ευσταθή ισορροπία σε μεγάλου μεγέθους διαταραχή και ασταθή σε μικρού μεγέθους. Στο Σχ 2.14(γ) φαίνονται δυο καμπύλες (BAB') και (ΓΑΓ') με κοινή ευσταθή θέση στο κατώτερο σημείο A. Παρατηρούμε ότι η θέση A είναι πλέον ευσταθής στην καμπύλη (BAB') απ' ότι στην καμπύλη (ΓΑΓ'). Επίσης, όσο τα σημεία Γ και Γ' απομακρύνονται μεταξύ του, τόσο περισσότερο η θέση A τείνει περισσότερο στην κατάσταση ουδέτερης ισορροπίας.

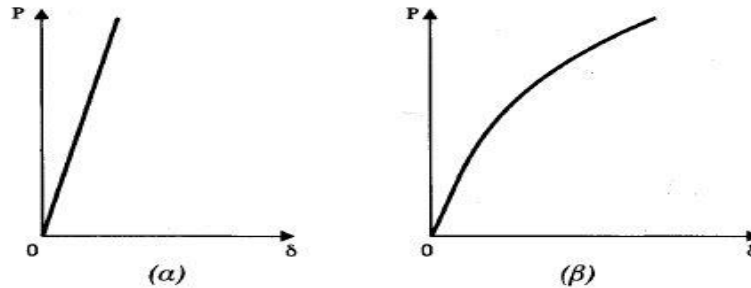


Σχήμα 2.14 Αστάθεια και ευστάθεια σε διαταραχή μικρού και μεγάλου μεγέθους (α,β) και βαθμός ευστάθειας θέσεως (γ).

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι τα παραπάνω ισχύουν, μετά από εύλογες προσαρμογές και στα ελαστικά συστήματα είτε συνεχή είτε διακεκριμένα. Ειδικότερα στην περίπτωση ευσταθούς (ασταθούς) ισορροπίας με μικρού (μεγάλου) μεγέθους διαταραχών αντιστοιχεί η ευσταθής (ασταθής) ισορροπία με μικρές (μεγάλες) μετατοπίσεις (βέλη, στροφές).

Σημείο διακλαδώσεως, οριακό σημείο – Ακαριαίος και συνήθης λυγισμός

Τα διαγράμματα φόρτισης-μετατόπισης αποτελούνται από γραμμικά και μη γραμμικά τμήματα. Τα διαγράμματα αυτά καλούνται και δρόμοι ισορροπίας (equilibrium paths). Κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας παριστά μια συγκεκριμένη κατάσταση ισορροπίας (equilibrium state) ενός συστήματος ή αλλιώς ένα συγκεκριμένο σχηματισμό ισορροπίας (equilibrium configuration). Το σύνολο όλων των καταστάσεων ισορροπίας συνιστά τον δρόμο ισορροπίας. Στη γραμμική θεωρία της κλασσικής στατικής όλοι οι δρόμοι ισορροπίας είναι ευθείες γραμμές (Σχ. 2.15(α)).



Σχ. 2.15 Ευθύγραμμος και καμπύλος δρόμος ισορροπίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στη γραμμική θεωρία των δοκών οι στροφές dw/dx δεν είναι μηδενικές, διότι αυτό σημαίνει ότι δεν αναπτύσσονται βέλη κάμψεως, πράγμα που δεν ισχύει. Απλώς τα τετράγωνα των στροφών θεωρούνται τόσο μικρά, ώστε συγκριτικά με τον όρο du/dx της σχέσεως (2.6) να μπορούν να αμεληθούν, ώστε να μην υπάρχει μη γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ γωνιών στροφής και αξονικής φόρτισης.

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.6)$$

Αντιθέτως, όταν η μη γραμμική αυτή αλληλεπίδραση λαμβάνεται υπ' όψιν, ο δρόμος ισορροπίας μεταξύ φόρτισης και μετατόπισης είναι μη γραμμικός (Σχ. 2.15(β)), όπως άλλωστε φαίνεται και στη σχέση (2.7).

$$N(x) = EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} w'^2 \right] \quad (2.7)$$

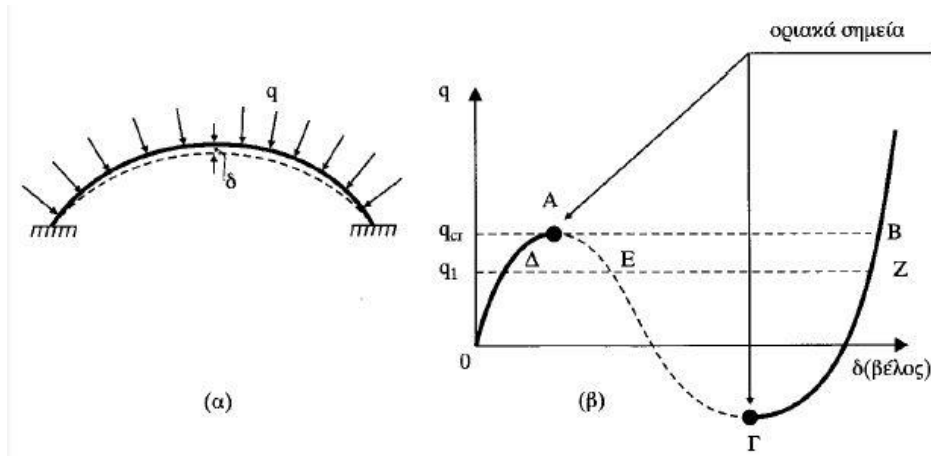
Οι μη γραμμικοί δρόμοι ισορροπίας εμφανίζονται και στην γραμμική θεωρία ευστάθειας. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα δοκού με έκκεντρη θλίψη ή δοκού με κεντρική θλίψη και ταυτόχρονη δράση εγκάρσιας φόρτισης ή ακόμα και στην περίπτωση ράβδων με αρχική καμπυλότητα, πράγμα το οποίο αποτελεί το κύριο αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια τυπικά παραδείγματα στατικών συστημάτων (φορέας και η φόρτιση που υποβάλλονται), η δρόμοι ισορροπίας των οποίων μας βοηθούν να περιγράψουμε έννοιες όπως οριακό σημείο και σημείο διακλαδώσεως.

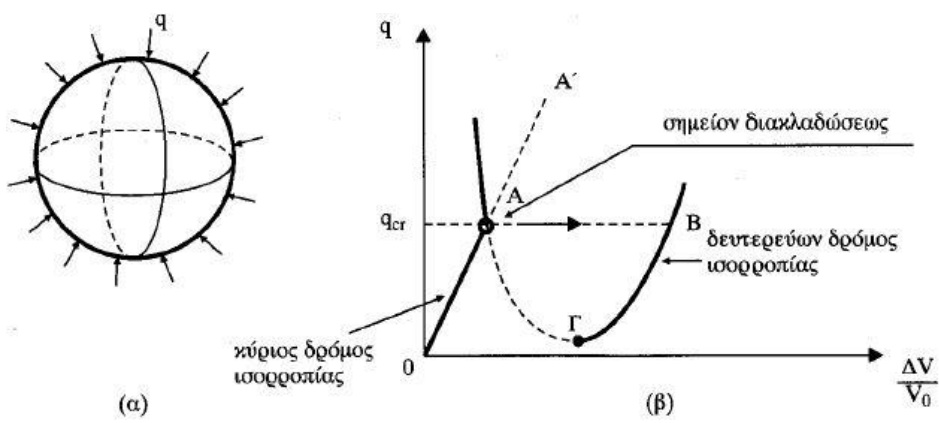
Στο Σχ. 2.16(β) ο δρόμος ισορροπίας αντιστοιχεί στην περίπτωση ενός χαμηλού τόξου υπό ομοιόμορφο εγκάρσιο φορτίο. Παρατηρούμε ότι στο σημείο Α η τιμή της φόρτισης λαμβάνει τοπικό μέγιστο και καλείται οριακό σημείο (limit point). Ομοίως το σημείο Γ είναι οριακό σημείο και αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο. Στο Σχ. 2.17 φαίνεται μια άλλη μορφή ισορροπίας. Χαρακτηριστικό της περίπτωσης αυτής είναι ότι το διάγραμμα φορτίσεως-μετατοπίσεως δεν είναι συνεχές αλλά αποτελείται από δυο κλάδους που τέμνονται στο σημείο Α. Ο πρώτος κλάδος που έχει ως αφετηρία την αρχή των αξόνων καλείται κύριος (ή θεμελιώδης) δρόμος (ή κλάδος) ισορροπίας (primary or fundamental path). Ο δεύτερος κλάδος ονομάζεται δευτερεύων κλάδος (secondary path). Ο κύριος δρόμος ισορροπίας μέχρι το κρίσιμο σημείο

λέγεται προλυγισμικός (prebuckling path), ενώ ο δευτερεύον κλάδος ονομάζεται μεταλυγισμικός (postbuckling path). Το σημείο τομής των δυο κλάδων ισορροπίας καλείται σημείο διακλαδώσεως (bifurcation point) Ο τύπος λυγισμού στις περιπτώσεις των Σχ. 2.16 και Σχ. 2.17 καλείται ακαριαίος ή βίαιος λυγισμός (snap – through or violent buckling).

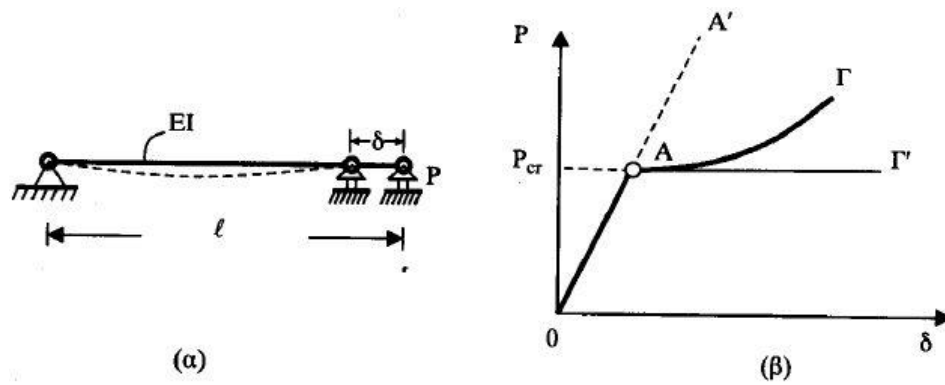
Εκτός όμως από την περίπτωση του ακαριαίου λυγισμού που λαμβάνει χώρα μέσω είτε οριακού σημείου είτε σημείου διακλαδώσεως, υπάρχει και ο τύπος του συνήθους λυγισμού, κατά τον οποίο μια κατασκευή μπορεί να φέρει φορτίο μεγαλύτερο από το κρίσιμο χωρίς να υπάρχει κίνδυνος να αστοχήσει. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η κατασκευή παρουσιάζει μεταλυγισμική αντοχή (post – buckling strength) που σημαίνει ότι η φέρουσα ικανότητα της κατασκευής δεν εξαντλείται στην τιμή του κρίσιμου φορτίου. Η μεταλυγισμική αντοχή μιας κατασκευής μπορεί να εκδηλωθεί μόνο μέσω σημείου διακλαδώσεως. Κλασικό παράδειγμα αυτού του τύπου λυγισμού είναι η περίπτωση του υποστυλώματος Euler υπό τη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης P (βλέπε Σχ. 2.18).



Σχήμα 2.16 Δρόμοι ισορροπίας χαμηλού τόξου.



Σχήμα 2.17 Δρόμοι ισορροπίας σφαιρικού κελύφους.



Σχήμα 2.18 Δρόμοι ισοροπίας υποστρώματος Euler.

3. Μεθοδολογία προσέγγισης του φαινομένου του Πλευρικού Λυγισμού

3.1 Γενικά

Ο πλευρικός λυγισμός είναι ένα κλασσικό πρόβλημα ευστάθειας όπου για την θεωρητική προσέγγιση των προβλημάτων αυτών έχουν εφαρμοσθεί επιτυχώς διάφορες μεθοδολογίες, οι οποίες θα μπορούσαν να διαχωριστούν στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

- Κλασσική μέθοδος ισορροπίας του Euler (Euler's classical approach) ή στατική μέθοδος ισορροπίας (static equilibrium approach) ή μέθοδος γειτονικής ισορροπίας (adjacent equilibrium approach).
- Ενεργειακή μέθοδος (energy approach) ή μέθοδος δυναμικής ενέργειας (potential energy approach), η οποία είναι επίσης στατική μέθοδος.
- Δυναμική ή Κινηματική μέθοδος (dynamic or kinetic approach).

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία χρησιμοποιείται η μέθοδος στατικής ισορροπίας για την προσέγγιση του φαινομένου του πλευρικού λυγισμού. Επομένως προτού προχωρήσουμε παρακάτω θεωρείται σκόπιμο γίνει μια εισαγωγική περιγραφή της μεθόδου αυτής.

Μέθοδος στατικής ισορροπίας ή μέθοδος Euler.

Στη μέθοδο αυτή, κύριος στόχος είναι να προσδιορίσουμε κατά πόσο, καθώς η επιβαλλόμενη φόρτιση αυξάνεται στατικά, είναι δυνατόν για κάποια συγκεκριμένη τιμή του φορτίου να υπάρξει εκτός από την αρχική παραμορφωσιακή κατάσταση του συστήματος που αντιστοιχεί στον κύριο δρόμο ισορροπίας, και άλλη παραμορφωσιακή κατάσταση του συστήματος που αντιστοιχεί στον δευτερεύοντα δόμο ισορροπίας, απείρως γειτονική της πρώτης. Ένας τέτοιος γειτονικός σχηματισμός ισορροπίας υπάρχει και ανήκει στον δευτερεύοντα κλάδο ισορροπίας. Πρέπει να τονισθεί ότι πάντοτε ο προσδιορισμός του κρίσιμου φορτίου πραγματοποιείται με βάση την παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, πάνω στην οποία μορφώνονται και οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που περιγράφουν το εκάστοτε πρόβλημα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε σε θεωρητικό επίπεδο το πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού (ή πλευρικού) λυγισμού μίας δοκού καταπονούμενης σε κάμψη, είτε λόγω συγκεντρωμένων ροπών στα άκρα είτε λόγω εγκάρσιων φορτίων, με την ταυτόχρονη δράση αξονικού θλιπτικού ή εφελκυστικού φορτίου.

Θεωρώντας ότι η κάμψη γίνεται περί τον ισχυρό άξονα της διατομής, αφού πρώτα κάνουμε τις κατάλληλες παραδοχές θα προχωρήσουμε στη μόρφωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας. Σκοπός μας, να φανεί η δυσχέρεια επίλυσης του προβλήματος που ανάγεται στην προσπάθεια μας να επιλύσουμε πολύπλοκα συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Επίσης στο κεφάλαιο αυτό θα μορφώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας για την περίπτωση μεταλλικής δοκού, αμφιέρειστης με διχαλωτή στήριξη στα άκρα, στην οποία ασκείται ομοιόμορφη ροπή σε όλο της το μήκος, με σκοπό να γίνει μια εισαγωγική αναφορά για τον τρόπο με τον οποίο καταλήγουμε στις διαφορικές εξισώσεις αυτές. Στην περίπτωση αυτή, όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω, δεν παρουσιάζεται κάποιο ουσιαστικό πρόβλημα για την επίλυση των συγκεκριμένων διαφορικών εξισώσεων, καθώς είναι ίσως και η μοναδική περίπτωση όπου οι εξισώσεις αυτές επιδέχονται κάποια κλειστή μαθηματική λύση και δεν χρειάζεται κάποιο “τέχνασμα” για να μπορέσουμε τις επιλύσουμε. Το πρόβλημα δυσχεραίνεται όταν η ροπή δεν είναι ομοιόμορφη σε όλο το μήκος της δοκού, πόσο μάλλον όταν έχουμε ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης. Στο κεφάλαιο 4 θα ασχοληθούμε με πιο σύνθετες περιπτώσεις φόρτισης αμφιέρειστης δοκού, όπου θα γίνει και αναλυτική περιγραφή για τον τρόπο με τον οποίο τις αντιμετωπίζουμε. Επίσης, εκτός από την γραμμική ανάλυση που έχει ως σκοπό την εύρεση του κρίσιμου φορτίου, θα γίνει και θα παρουσιασθεί και μη γραμμική ανάλυση με σκοπό να εξάγουμε τους δρόμους ισορροπίας για να βρούμε τη μεταλυγισμική συμπεριφορά στην εκάστοτε περίπτωση.

3.2 Βασικές Παραδοχές

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές, στην στάθμη της εξωτερικής φόρτισης, αντιστοιχούν δυο διακεκριμένες απείρως γειτονικές θέσεις ισορροπίας. Το μικρότερο φορτίο που ικανοποιεί το κριτήριο γειτονικής ισορροπίας είναι το κρίσιμο φορτίο πλευρικού λυγισμού.

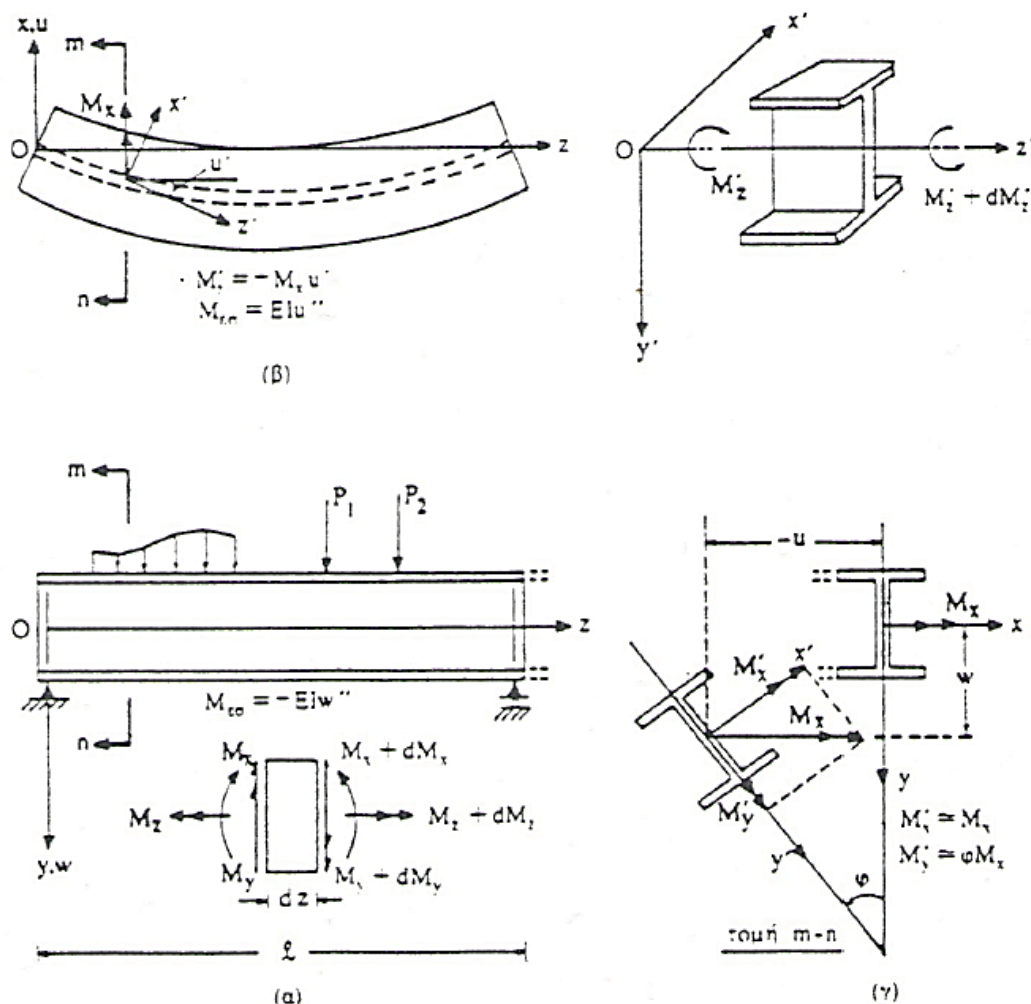
Για την μελέτη της ελαστικής ευστάθειας της επίπεδης μορφής ισορροπίας υψίκορμων δοκών, θα θεωρήσουμε μια αμφιέρειστη δοκό με διατομή που έχει δύο επίπεδα συμμετρίας. Η δοκός υποβάλλεται σε τυχούσα φόρτιση που υποθέτουμε ότι δρά στο επίπεδο zy , ως προς το οποίο έχει τη μέγιστη καμπτική αντίσταση. Θεωρούμε ότι τα άκρα της δοκού δεν μπορούν να στραφούν περί τον κεντροβαρικό άξονα z . Θα εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια στάθμη των εξωτερικών φορτίων για την οποία η δοκός μπορεί να ισορροπήσει σε παραμορφωμένη κατάσταση, εάν δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις παραμορφώσεως $w(z)$, $u(z)$, $\varphi(z)$ που να αποτελούν μη μηδενικές λύσεις του διαφορικού συστήματος ισορροπίας της δοκού.

Στο Σχ 3.1γ που παρουσιάζεται παρακάτω, βλέπουμε τη διατομή $m-n$ που παριστάνει την παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας. Η εξαγωγή των σχετικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας διευκολύνεται με την υιοθέτηση εκτός του σταθερού συστήματος ορθογωνίων αξόνων και ενός κινητού x' , y' , z' που διέρχεται από το κέντρο βάρους της τυχούσας αυτής διατομής $m-n$.

Οι βασικές παραδοχές που αφορούν τα προβλήματα πλευρικού λυγισμού δοκών είναι οι ακόλουθες:

- i. Το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και ακολουθεί το νόμο του Hooke.
- ii. Η δοκός δεν έχει αρχικές παραμορφώσεις (δεν υπάρχει αρχικό βέλος ή στροφή).

- iii. Μέχρι της στάθμης λυγισμού, οι αναπτυσσόμενες τάσεις παραμένουν χαμηλότερες του ορίου αναλογίας.
- iv. Ισχύει η θεωρία των μικρών μετατοπίσεων (βελών και στροφών) κατά την οποία οι μετατοπίσεις είναι αρκετά μικρές συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής, ώστε να ισχύουν οι απλοποιημένοι τύποι καμπυλότητας της τεχνικής θεωρίας της κάμψεως $\pm \frac{d^2w}{dz^2}$ και $\pm \frac{d^2u}{dz^2}$ όπου w και u τα βέλη κάμψεως κατά τους άξονες $y(w)$ και $x(u)$ αντιστοίχως. Για μικρές γωνίες φ δεχόμαστε ότι οι προηγούμενες καμπυλότητες ισχύουν και για τα αντίστοιχα επίπεδα μετά την παραμόρφωση.
- v. Η συνδεόμενη από κάμψη και στρέψη παραμόρφωση της δοκού δεν επιφέρει μεταβολή της γεωμετρίας της διατομής.
- vi. Τα εξωτερικά φορτία (που δρουν στο επίπεδο με την μέγιστη καμπτική αντίσταση) παραμένουν παράλληλα προς την αρχική τους διεύθυνση, όταν τα σημεία εφαρμογής τους μετακινούνται.



Σχήμα 3.1 Δοκός διατομής I σε ελαφρώς παραμορφωμένη κατάσταση λόγω πλευρικού λυγισμού.

Η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας, όπως αναφέραμε, στην παραμορφωμένη κατάσταση διευκολύνεται με την εισαγωγή εκτός του σταθερού συστήματος αξόνων x, y, z και ενός κινητού x', y', z' όπου οι άξονες x', y' είναι οι κύριοι άξονες αδράνειας της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση, ενώ ο άξονας z' είναι εφαπτόμενος της ελαστικής γραμμής της δοκού μετά τον πλευρικό λυγισμό. Η μετατόπιση του κέντρου βάρους της διατομής ορίζεται από τις συνιστώσες w και u κατά τις διευθύνσεις των αξόνων y και x αντιστοίχως (που είναι θετικές όταν έχουν την διεύθυνση των αντίστοιχων αξόνων) και από την γωνία στροφής φ της διατομής περί τον άξονα z (που είναι θετική στην διατομή $z+dz$, εάν η φορά της είναι δεξιόστροφη).

Επειδή υποθέτουμε ότι η δοκός φορτίζεται στο επίπεδο yz , αρχικά υπάρχουν μόνο ροπές κάμψεως M_x . Όταν η δοκός λυγίσει αναπτύσσονται επιπλέον καμπτικές ροπές M_y αλλά και στρεπτικές ροπές M_z λόγω μετατοπίσεως (εκτός επιπέδου φορτίσεως) των σημείων εφαρμογής των κατακόρυφων φορτίων.

3.3 Μόρφωση των Διαφορικών Εξισώσεων Ισορροπίας

Στην ενότητα αυτή, θα μορφώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση μιας αμφιέριστης δοκού στην οποία ασκείται σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της χωρίς την ταυτόχρονη δράση αξονική δύναμης. Αυτή η περίπτωση είναι η πιο απλή καθώς η λύση της δεν απαιτεί χρήση κάποιου “τεχνάσματος”, αλλά προέρχεται καθαρά από μια μαθηματική λύση. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι, μέσω ενός απλού παραδείγματος, να γίνει μια μικρή εισαγωγή για το πώς μορφώνονται οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας, ώστε στο επόμενο κεφάλαιο να μορφώσουμε διαφορικές εξισώσεις για συνθετότερες περιπτώσεις φόρτισης αμφιέριστης δοκών και εν συνεχεία να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές διαχειρίζονται.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια αμφιέριστη δοκό διπλού ταυ στην οποία ασκείται σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της. Θα ασχοληθούμε με μια τυχαία διατομή της παραμορφωμένης – λόγω πλευρικού λυγισμού – δοκού όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2 και θα εξάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που περιγράφουν την ισορροπία στην κατάσταση αυτή.

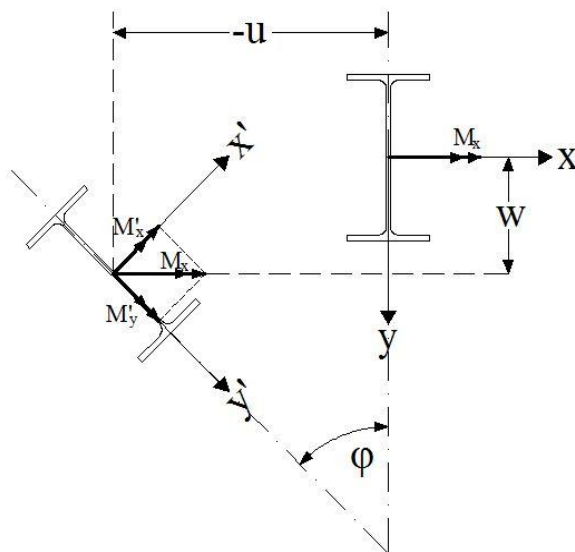
Αν με M'_x, M'_y, M'_z συμβολίζουμε τις ροπές που αντιστοιχούν στην παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας, εφαρμόζοντας την συνθήκη ισορροπίας εξωτερικών-εσωτερικών ροπών μπορούν να διατυπωθούν στο κινητό σύστημα αξόνων - όπως περιγράφηκαν στην ενότητα 3.2 - ως εξής:

$$(\Delta.E. \text{ ισορροπίας κατά τον κινητό άξονα } x'): \quad EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} = -M'_x$$

(Δ.Ε. ισοροπίας κατά τον κινητό άξονα y'): $EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} = M'_y$ (3.1)

(Δ.Ε. ισοροπίας κατά τον κινητό άξονα z'): $GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 w}{dz^3} = M'_z$

Όπου w είναι το βέλος κάμψης λόγω κάμψης περί τον κεντροβαρικό άξονα x , u είναι το βέλος λόγω κάμψης περί τον κεντροβαρικό άξονα y και ϕ είναι η στροφή της τυχούσας διατομής – από την απαραμόρφωτη στη παραμορφωμένη κατάσταση - περί το κέντρο διάτμησης της διατομής διπλού ταυ. Επίσης I_x, I_y , είναι οι κύριες ροπές αδράνειας της διατομής κατά τους άξονες x, y αντιστοίχως για τις οποίες εξ υποθέσεως οι ροπές M'_x, M'_y παριστάνουν ροπές κάμψεως ως προς τους ίδιους άξονες με θετικές τις φορές τους, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Επίσης, οι τιμές των σταθερών στρέψεως J και στρεβλώσεως C_w δίνονται για κάθε διατομή από αντίστοιχους πίνακες.



Σχήμα 3.2 Εκτροπή τυχούσας διατομής διπλού ταυ σε περίπτωση πλευρικού λυγισμού.

Σημειώνεται, ότι η τρίτη των ανωτέρω εξισώσεων ισχύει για δοκούς με λεπτότοιχη ανοικτή διατομή, όπως για δοκούς διατομής I . Ενώ, για λεπτές ορθογωνικές διατομές ή διατομές αποτελούμενες από λεπτά ορθογωνικά στοιχεία που τέμνονται σε ένα σημείο π.χ. $L, V, +$, η σταθερά στρέβλωσης μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν.

Με την βοήθεια των σχημάτων που προστέθηκαν υπολογίζουμε τις ροπές M'_x, M'_y, M'_z . Οι ροπές αυτές, εκφράζονται συναρτήσει της M_x (ροπή της αρχικής της αρχικής καταστάσεως της παραμορφώσεως κατά την οποία η δοκός κάμπτεται μόνο στο επίπεδο του κορμού της).

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} M'_x &= M_x \cos(x', x) = M_x \cos \phi \approx M_x \\ M'_y &= M_x \sin(y', x) = M_x \sin \phi \approx M_x \phi \\ M'_z &= -M_x \sin(z', z) = -M_x \sin \frac{du}{dz} \approx M_x \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των M'_x, M'_y, M'_z στις σχέσεις (3.1) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^2 w}{dz^2} &= -M_x \\ EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= M_x \phi \\ GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 w}{dz^3} &= -M_x \frac{du}{dz} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Από την πρώτη εξίσωση, της παραπάνω ομάδας εξισώσεων, καταλαβαίνουμε ότι το βέλος κάμψεως w στο κύριο επίπεδο κάμψεως zy , δεν επηρεάζει τη γωνία στροφής ϕ . Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις (3.3), φαίνεται η αλληλεξάρτηση των u και ϕ . Παραγωγίζοντας την τελευταία εξίσωση ως προς z και αντικαθιστώντας την έκφραση της ποσότητας $\frac{d^2 u}{dz^2}$ από την δεύτερη των εξισώσεων (3.3) λαμβάνουμε:

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \frac{M_x^2 \cdot \phi}{EI_y} = M'_x(z) \cdot \frac{du}{dz} \quad (3.4)$$

Αν η ροπή M_x είναι σταθερή ποσότητα (ανεξάρτητη του z) - περίπτωση σταθερής κάμψεως, τότε η επίλυση της ομογενούς αυτής διαφορικής εξίσωσης 4^{ης} τάξεως με σταθερούς συντελεστές είναι απλή. Η επίλυση αυτή θα δειχθεί αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Το πρόβλημα δυσχεραίνεται όμως ιδιαίτερα όταν η ροπή αυτή είναι μεταβλητή κατά μήκος της δοκού, οπότε η διαφορική εξίσωση δεν έχει όλους τους συντελεστές της σταθερούς. Η λύση της μπορεί να επιτευχθεί με προσεγγιστικές μεθόδους.

3.4 Αντιμετώπιση του Προβλήματος – Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.

Το θέμα αυτό, της εύρεσης προσεγγιστικών μεθόδων ώστε να οδηγηθούμε σε ικανοποιητικές λύσεις, είχε απασχολήσει τους Timoshenko και Gere (Theory of elastic stability, 1961). Είχε αποδειχθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, ότι το φορτίο λυγισμού σε μια γενική περίπτωση μπορεί να προσδιοριστεί βάσει μιας επαναληπτικής διαδικασίας θεωρώντας για τις παραμορφώσεις, στην παραμορφωμένη κατάσταση ισορροπίας, αυθαίρετες συναρτήσεις ικανοποιούσες τις συνοριακές συνθήκες.

Επίσης, οι καθηγητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Α. Κουνάδης, Γ. Ιωαννίδης και ο λέκτορας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Τ. Αβραάμ με συμμετοχές τους σε επιστημονικά συνέδρια και περιοδικά έχουν ασχοληθεί με αυτό το αντικείμενο, δημοσιεύοντας πολύ χρήσιμες μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα του πλευρικού λυγισμού.

Τέλος, η διπλωματική εργασία Ν.Ε Βαονάκης, ΕΜΚ ΔΕ 2013/82 (επιβλέπων Τ. Αβραάμ) καθώς και η συμμετοχή της εργασίας με τίτλο “Η επιρροή αξονικού εφελκυσμού στην κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού δοκών” στο 8^ο Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τρίπολη Οκτώβριος 2014 (Τ. Αβραάμ, Ζ. Φασουλάκης, Γ. Ιωαννίδης) έχουν ως αντικείμενο και άλλες περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης μιας αμφιέριστης μεταλλικής δοκού διπλής συμμετρίας, αλλά και με ταυτόχρονη δράση αξονικής και εφελκυστικής δύναμης στους υπό μελέτη φορείς.

Δημιουργείται όμως η ανάγκη για προσπάθεια περεταίρω εμβάθυνσης πάνω στο θέμα αυτό, καθώς και η ανάγκη για σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων, πράγμα με το οποίο ασχολείται το επόμενο κεφάλαιο της εργασίας αυτής.

4. Εφαρμογές Μεθόδων – Σύγκριση με Adina (FEM)

4.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου του πλευρικού λυγισμού, καθώς και με την σύγκριση αυτής με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με αμφιέριστες μεταλλικές δοκούς. Η διατομή των δοκών αυτών θα είναι τύπου διπλού ταυ. Οι συνοριακές συνθήκες στήριξης θα είναι αυτές που περιγράφουν τις συνθήκες μιας διχαλωτής στήριξης. Αυτό σημαίνει ότι επιβάλλουμε στα άκρα της δοκού μηδενική στρέψη της διατομής και ταυτόχρονα επιτρέπουμε ελεύθερη στρέβλωση (ελεύθερη κάμψη των πελμάτων στο επίπεδό τους). Οι δοκοί θα υπόκεινται σε εγκάρσια φόρτιση και σε ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης (θλιπτικής ή εφελκυστικής). Θα μελετήσουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης. Αυτές είναι:

- Σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της δοκού με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης (θλιπτικής ή εφελκυστικής)
- Συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσον του μήκους της δοκού με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης (θλιπτικής ή εφελκυστικής)
- Ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο σε όλο το μήκος της δοκού με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης (θλιπτικής ή εφελκυστικής)

Για κάθε περίπτωση φόρτισης (σταθερή ροπή, συγκεντρωμένο φορτίο, ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο) η διαδικασία που ακολουθήθηκε, όσον αφορά τα είδη αναλύσεων και συγκρίσεων με το Adina, ήταν όμοια. Συγκεκριμένα, για κάθε περίπτωση ασχοληθήκαμε με:

- **Γραμμική Ανάλυση Λυγισμού:** Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες, παραγωγή “διαγραμμάτων αλληλεπίδρασης” μεταξύ κρίσιμων ροπών για δεδομένη αξονική δύναμη, σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη γραμμική ανάλυση λυγισμού στο Adina.
- **Μη γραμμική Ανάλυση Λυγισμού χωρίς αρχικές ατέλειες:** Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, παραγωγή δρόμων ισορροπίας, εύρεση σημείων διακλαδώσεως, εύρεση πρώτου σημείου διαρροής σε κάθε δρόμο.
- **Μη γραμμική Ανάλυση Λυγισμού με αρχικές ατέλειες:** Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, παραγωγή δρόμων ισορροπίας για διάφορες τιμές αρχικών ατελειών και αξονικών φορτίων, σύγκριση των δρόμων ισορροπίας με τους αντίστοιχους δρόμους που προκύπτουν από το Adina μετά από ανάλυση GNIA, σύγκριση αναλύσεων GNIA και GMNIA του Adina.

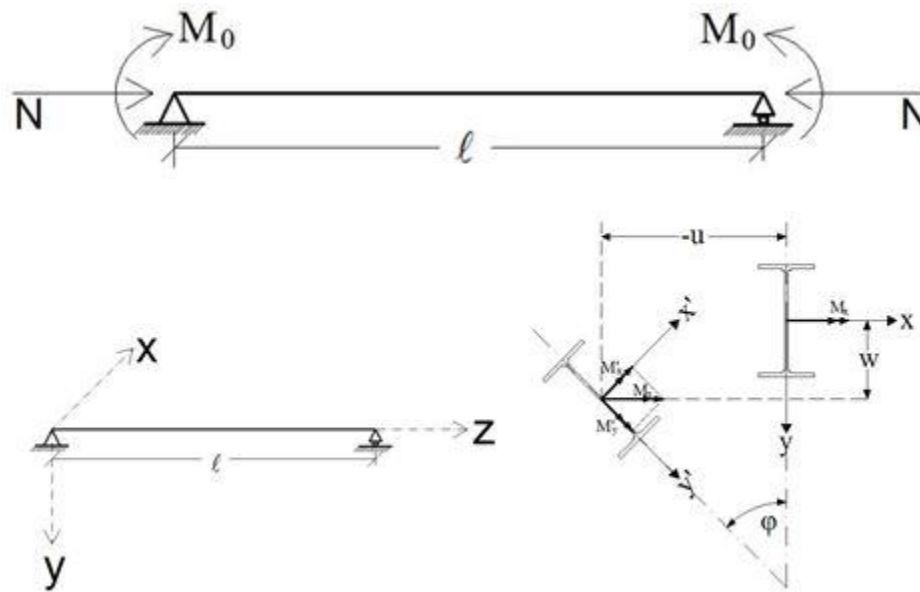
4.2 Περίπτωση Σταθερής Ροπής σε όλο το μήκος της δοκού

4.2.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε μια δοκό διατομής I . Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Η δοκός υπόκειται σε ομοιόμορφη ροπή κάμψης M_0 που ασκείται στα δύο άκρα αυτής, και σε σταθερή αξονική δύναμη που ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Για όσο η M_0 αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η N παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής $M_0 = M_{ocr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη, της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα z και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στρεπτοκαμπτικού λυγισμού αυτού (Σχ.4.1)



Σχήμα 4.1 Περίπτωση αμφιέριστης δοκού με ομοιόμορφη ροπή κάμψης σε όλο το μήκος της. Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x w'' + Nw = -M_0 \cos \phi \quad (4.1a)$$

$$EI_y u'' + Nu = M_0 \sin \phi \quad (4.1b)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -M_0 u' \quad (4.1c)$$

Όπου η παραγωγή είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού, αντιστοίχως.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σχολιάσουμε ότι η εξίσωση (4.1a) είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες εξισώσεις, δηλαδή δεν μπορούν να συνδεθούν με αυτές. Έτσι θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις (4.1b) και (4.1c), από τις οποίες μπορούμε πολύ εύκολα να καταλήξουμε στην αδιαστατοποιημένη μορφή τους:

$$v''(\xi) + \eta^2 v(\xi) = \bar{M}_0 \cdot \sin(\phi(\xi)) \quad (4.2a)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0 \cdot v'(\xi) = 0 \quad (4.2b)$$

όπου

$$v = u/\ell, \quad \xi = z/\ell, \quad \eta^2 = N\ell^2/EI_y, \quad \bar{M}_0 = M_0 \cdot \ell/EI_y, \quad \lambda^2 = GJ\ell^2/EC_w$$

$$\text{και} \quad p^2 = I_y \cdot \ell^2/C_w$$

4.2.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Θεωρητική προσέγγιση

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, η δοκός είναι αμφιέρειστη και η στήριξη στα άκρα είναι διχαλωτή. Αυτό σημαίνει ότι στα άκρα της δοκού, η στρέψη δεν επιτρέπεται – είναι μηδενική, και η στρέβλωση είναι ελεύθερη. Έχουμε επομένως τις εξής συνοριακές συνθήκες: $\phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0$, όπου $\phi(\xi)$ είναι η στροφή της διατομής – κατά την παραμόρφωσή της σε πλευρικό λυγισμό – περί το κέντρο διάτμησης της.

Μετά από απαλοιφή της συνάρτησης $v(\xi)$ μεταξύ των δύο παραπάνω εξισώσεων, λαμβανομένων υπόψη και των συνοριακών συνθηκών, προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση ως προς ϕ

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) = 0$$

ή

$$\phi''''(\xi) - b^2 \cdot \phi''(\xi) - c \cdot \phi(\xi) - d \cdot \sin(\phi(\xi)) = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{όπου } b = \lambda^2 - \eta^2 \text{ και } c = \eta^2 \cdot \lambda^2, d = p^2 \cdot \bar{M}_0^2$$

Η λύση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής : $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$, η δε κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή πλευρικού λυγισμού, με την παραδοχή: $\sin(\phi(\xi)) = \phi(\xi)$ δίδεται από τη σχέση [11,12].

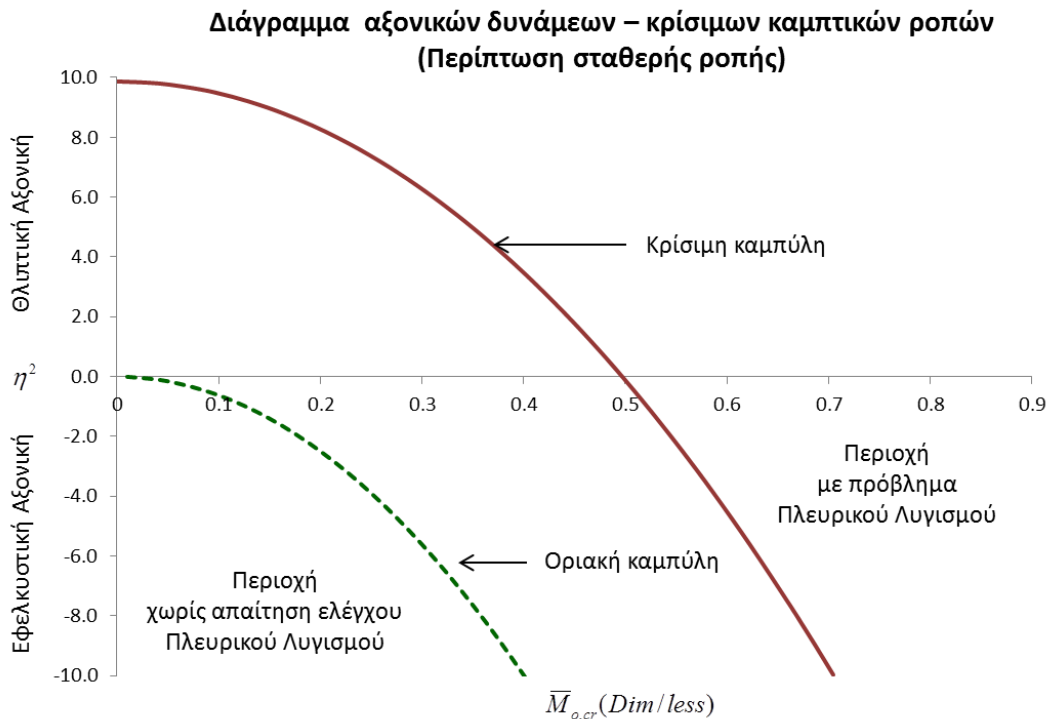
$$\bar{M}_{0,cr} = \frac{1}{p} \cdot \sqrt{(\pi^2 + \lambda^2) \cdot (\pi^2 - \eta^2)} \quad (4.4)$$

Η εξίσωση (4.4) ισχύει για την περίπτωση όπου $\eta^2 < \pi^2$, δηλαδή στην περίπτωση που το αξονικό φορτίο που ασκείται στη δοκό είναι θλιπτικό. Μετά από διερεύνηση της εξίσωσης (4.3) στην περίπτωση του εφελκυστικού αξονικού φορτίου προκύπτει ότι [12] για

$$\eta^2 \geq p^2 \cdot \bar{M}_0^2 / \lambda^2 \quad \text{ή} \quad (4.5)$$

$$N \geq M_0^2 / GJ$$

δεν υπάρχει δυνατότητα ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση δηλαδή κίνδυνος πλευρικού λυγισμού. Μόνη δυνατότητα ισορροπίας είναι η τετριμμένη λύση $\phi(\xi) = 0$.



Σχήμα 4.2 Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων – κρίσιμων ροπών στην περίπτωση σταθερής ροπής σε όλο το μήκος της δοκού.

Στο Σχ.4.2 παρουσιάζεται το διάγραμμα αδιαστατοποιημένων αξονικών δυνάμεων η^2 - αδιαστατοποιημένων κρίσιμων καμπτικών ροπών $\bar{M}_{0,cr}$. Διακρίνεται η “Οριακή Καμπύλη”, πέραν της οποίας έχουμε την περιοχή όπου δεν απαιτείται έλεγχος σε πλευρικό λυγισμό λόγω της ευνοϊκής επιρροής του εφελκυστικού αξονικού φορτίου. Επίσης διακρίνεται και η “Κρίσιμη

Καμπύλη” πάνω στην οποία συγκεντρώνεται το πλήθος των κρίσιμων συνδυασμών $\eta^2 - \bar{M}_{0,cr}$ για τους οποίους ο φορέας αστοχεί σε πλευρικό λυγισμό. Οι συνδυασμοί αυτοί έχουν προέλθει από την εξίσωση (4.4) και αφορούν τη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Σημειώνεται ότι τα παραπάνω διάγραμμα αφορά μια αμφιέρειστη δοκό διατομής IPE 500 με μήκος 8m.

Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

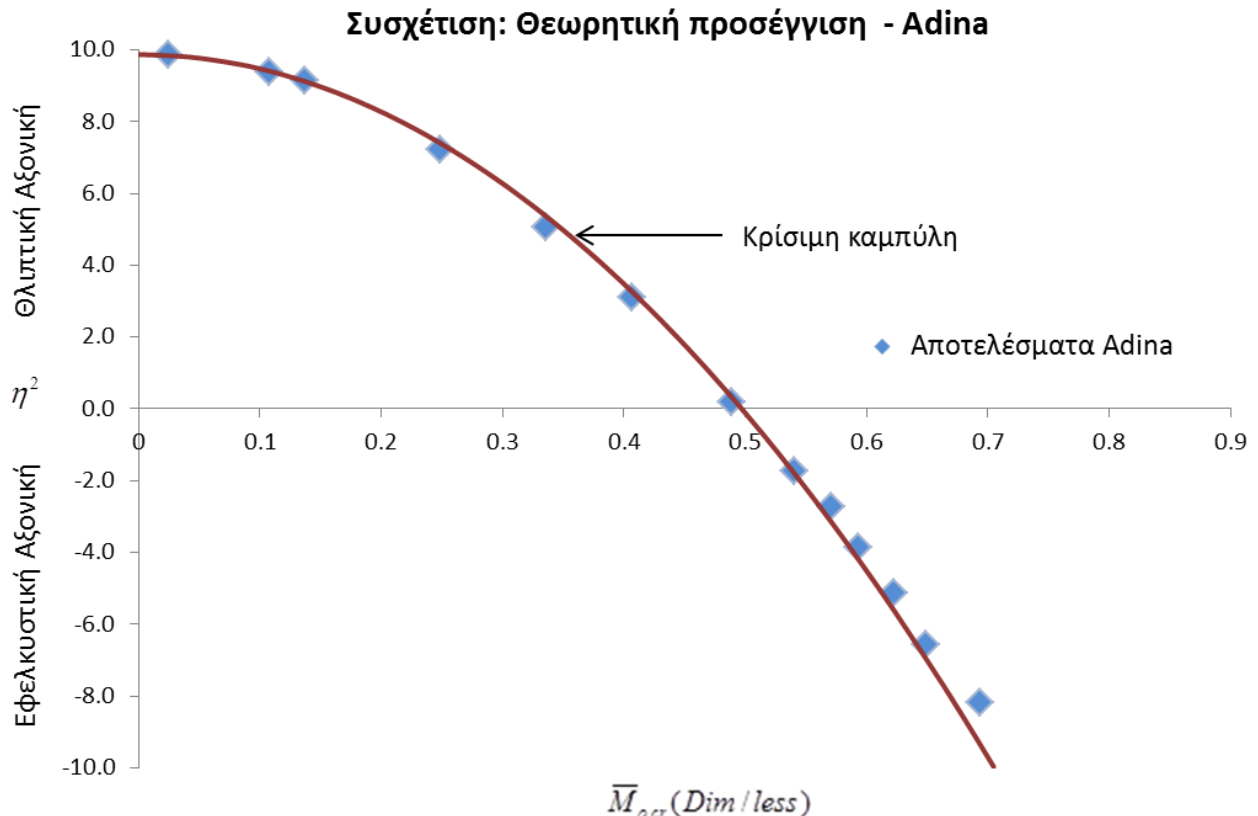
Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που εφαρμόστηκε. Έτσι, θα πραγματοποιήσουμε πλήθος γραμμικών ελαστικών αναλύσεων (Linearized Buckling) σε αμφιέρειστη δοκό με σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της, με ταυτόχρονη δράση εφελκυστικής ή θλιπτικής αξονικής δύναμης. Η δοκός που εξετάζεται έχει μήκος 8m, η διατομή είναι IPE 500 και το υλικό είναι χάλυβας S235.

Πίνακας 4.1 Σύγκριση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina.

Φόρτιση: Σταθερή Ροπή στα άκρα με ταυτόχρονη Αξονική Δύναμη			
η^2 (Dim/less)	$\bar{M}_{0,cr,Theoretical}$	$\bar{M}_{0,cr,Adina}$	Απόκλιση (%)
0.1956	0.4920	0.4891	0.60
3.1017	0.3956	0.4071	2.92
5.0651	0.3467	0.3356	3.22
7.2278	0.2571	0.2485	3.37
9.1485	0.1343	0.1372	2.16
9.3833	0.1103	0.1079	2.18
9.8457	0.0245	0.0246	0.67
-5.1363	0.6128	0.6228	1.63
-6.5613	0.6412	0.6493	1.26
-3.8711	0.5864	0.5928	1.09
-2.7420	0.5618	0.5713	1.68
-1.7295	0.5388	0.5405	0.32
-8.1728	0.6719	0.6932	3.17
M.O. Αποκλίσεων:			1.87
<i>Χάλυβας: S235, Μήκος: 8m, Διατομή: IPE 500</i>			

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα Adina. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε γραμμική ελαστική ανάλυση σε μια δοκό με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (διατομή, μήκος, κατηγορία χάλυβα, συνθήκες στήριξης), όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη αξονική δύναμη, η^2 θλιπτική ή εφελκυστική, που ασκείται στον φορέα. Να σημειώσουμε ότι το πρόσημο “+” αντιστοιχεί σε θλιπτική αξονική δύναμη, ενώ το πρόσημο “-” αντιστοιχεί σε εφελκυστική αξονική δύναμη. Η δεύτερη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη κρίσιμη ροπή

που προκύπτει από την θεωρητική προσέγγιση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα, ενώ η τρίτη στήλη περιέχει την αντίστοιχη κρίσιμη ροπή που προέκυψε από το Adina. Η τέταρτη στήλη περιέχει την απόκλιση % μεταξύ των δυο τιμών των κρίσιμων αδιαστατοποιημένων καμπτικών ροπών (θεωρίας και Adina). Τέλος, ο μέσος όρος των αποκλίσεων υπολογίστηκε στο 1.87%. Η τιμή αυτή, θεωρείται ικανοποιητική, αν ληφθούν υπ' όψιν διάφορες αβεβαιότητες που σχετίζονται με την προσομοίωση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων αλλά και τις απλοποιήσεις που έγιναν κατά τη μόρφωση και την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.



Σχήμα 4.3 Συσχέτιση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina.

Στο Σχ. 4.3 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα με το οποίο φαίνεται η συσχέτιση της θεωρητικής προσέγγισης με το Adina. Συγκεκριμένα, βλέπουμε την “Κρίσιμη καμπύλη” που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο Σχ. 4.2 και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Adina (βλ. Πίνακα 4.1). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο μέσος όρος των αποκλίσεων είναι 1.87%.

4.2.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Μη Γραμμική Ανάλυση χωρίς αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας δεν έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Σκοπός αυτής της

ανάλυσης είναι να βρεθεί το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας καθώς και το σημείο διακλαδώσεως του δρόμου αυτού. Έτσι, από την εξίσωση (4.3) που καταλήξαμε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβανομένων υπόψη ότι η λύση της εξίσωσης είναι της μορφής: $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$ αλλά και τους δυο πρώτους όρους της σειράς Taylor, η οποία είναι:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{\phi^3(\xi)}{6} \right] = 0$$

ή

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0^2 \cdot \phi_0 \cdot \left[\sin(\pi\xi) + \frac{\phi_0^2 \sin^3(\pi\xi)}{6} \right] = 0$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3\sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.6):

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0^2 \cdot \phi_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi\xi) + \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi\xi) \right] = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.6), λαμβάνοντας υπόψη ότι στο μέσον της δοκού η στροφή της διατομής είναι η μέγιστη και ισούται με ϕ_0 , με χρήση των παρακάτω συνοριακών συνθηκών $\phi(0) = 0, \phi''(0) = 0, \phi''(1/2) = 0, \phi'(1/2) = 0$

μας δίνει:

$$\phi_0 = \pm \left\{ \frac{54}{7} \cdot \frac{[(\eta^2 - \pi^2) \cdot \lambda^2 + \bar{M}_0^2 \cdot p^2 + \eta^2 \cdot \pi^2 - \pi^4] \cdot (\lambda^2 - \eta^2 + 9\pi^2)}{\left(\lambda^2 - \eta^2 + \frac{61}{7} \cdot \pi^2 \right) \cdot (\lambda^2 \cdot \eta^2 + \bar{M}_0^2 \cdot p^2)} \right\}^{(1/2)} \quad (4.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.7) μας δίνει το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας (σε όρους στροφών ϕ_0) μιας αμφιέρειστης δοκού υπό σταθερή ροπή κάμψης σε όλο το μήκος της με ταυτόχρονη δράση θλιπτικής αξονικής δύναμης. Ειδικότερα, αν στον παραπάνω τύπο, κρατήσουμε σταθερό τον αδιαστατοποιημένο όρο η^2 της αξονική δύναμης και αυξάνουμε σταδιακά τον όρο της αδιαστατοποιημένης ροπής, τότε η πρώτη τιμή της ϕ_0 (θα ισούται με μηδέν) για την οποία θα ορίζεται η εξίσωση θα αποτελεί και σημείο διακλαδώσεως του συγκεκριμένου προβλήματος ευστάθειας που μελετάμε. Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή της ροπής, τότε το σύνολο των σημείων (ϕ_0, \bar{M}_0^2) που θα προκύψουν, αποτελούν τον μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Ο δρόμος αυτός, προφανώς θα έχει σκοπό να χαρακτηρίσουμε τη μεταλυγισμική συμπεριφορά του φορέα. Βέβαια, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το σημείο

του δρόμου αυτού για το οποίο η μεσαία διατομή (είναι και η δυσμενέστερη) θα παρουσιάσει για πρώτη φορά διαρροή, έτσι ώστε να δούμε μέχρι ποιο σημείο ο δρόμος αυτός έχει νόημα.

Πέραν όμως από τον δρόμο ισορροπίας σε όρους στροφών ϕ_0 που περιγράφεται από την παραπάνω σχέση (4.7) μπορούν να εξαχθούν και δρόμοι ισορροπίας σε όρους οριζόντιων μετακινήσεων ν_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας προσεγγιστικής μεν, ικανοποιητικής δε, συσχέτισης της στροφής ϕ_0 με τη πλευρική εκτροπή ν_0 . Η συσχέτιση αυτή γίνεται ως εξής:

Ολοκληρώνουμε μια φορά τη σχέση (4.2b): $\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi) - p^2 \cdot \bar{M}_0 \cdot \nu(\xi) + c = 0$

Όμως, $c=0$ λόγω του ότι: $\phi''(0) = \phi(0) = \nu(0) = 0$

Επίσης, αν κάνουμε την παραδοχή ότι

$$\phi(\xi) = \phi_0 \sin(\pi \cdot \xi)$$

και

$$\nu(\xi) = \nu_0 \sin(\pi \cdot \xi)$$

Τότε για $\xi=1/2$, προκύπτει η εξής σχέση (4.8): $\nu_0 = \frac{(\pi^2 + \lambda^2)}{\bar{M}_0 \cdot p^2} \phi_0$

Στην περίπτωση όπου σε μια αμφιέριστη δοκό ασκείται μόνο αξονική θλιπτική δύναμη N , τότε η τιμή της αξονικής δύναμης αυτής για την οποία λυγίζει η δοκός τύπου διπλού ταυ περί τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα (κατά Euler) είναι:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$$

ή

$$\eta_{cr,y}^2 = \pi^2 \approx 9.87$$

Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις αυτές έχουν νόημα όταν το μέγεθος της θλιπτικής αξονικής δύναμης που ασκείται στη δοκό δεν υπερβαίνει την τιμή λυγισμού της. Δηλαδή όταν:

$$N \leq N_{cr,y} \text{ ή αλλιώς: } \eta^2 \leq \eta_{cr,y}^2$$

Για τον παραπάνω λόγο, στο παρακάτω διάγραμμα μελετούνται οι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας μιας αμφιέριστης δοκού για διάφορες τιμές της αδιαστατοποιημένης θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 < \eta_{cr,y}^2 \approx 9.87$. Επίσης, μελετάται και η περίπτωση όπου η αξονική δύναμη είναι εφελκυστική και όχι θλιπτική. Καθάρια για λόγους εποπτείας, στην περίπτωση της εφελκυστικής αξονικής δύναμης θα παρουσιασθούν οι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας για απόλυτες τιμές η^2 ίδιες με τις αντίστοιχες της περίπτωσης που έχουμε θλίψη. Προφανώς, λήφθηκε υπόψη ο έλεγχος για τη μη εμφάνιση διαρροής σε καμία ίνα της δοκού για τις διάφορες τιμές των αξονικών δυνάμεων που μελετούνται.

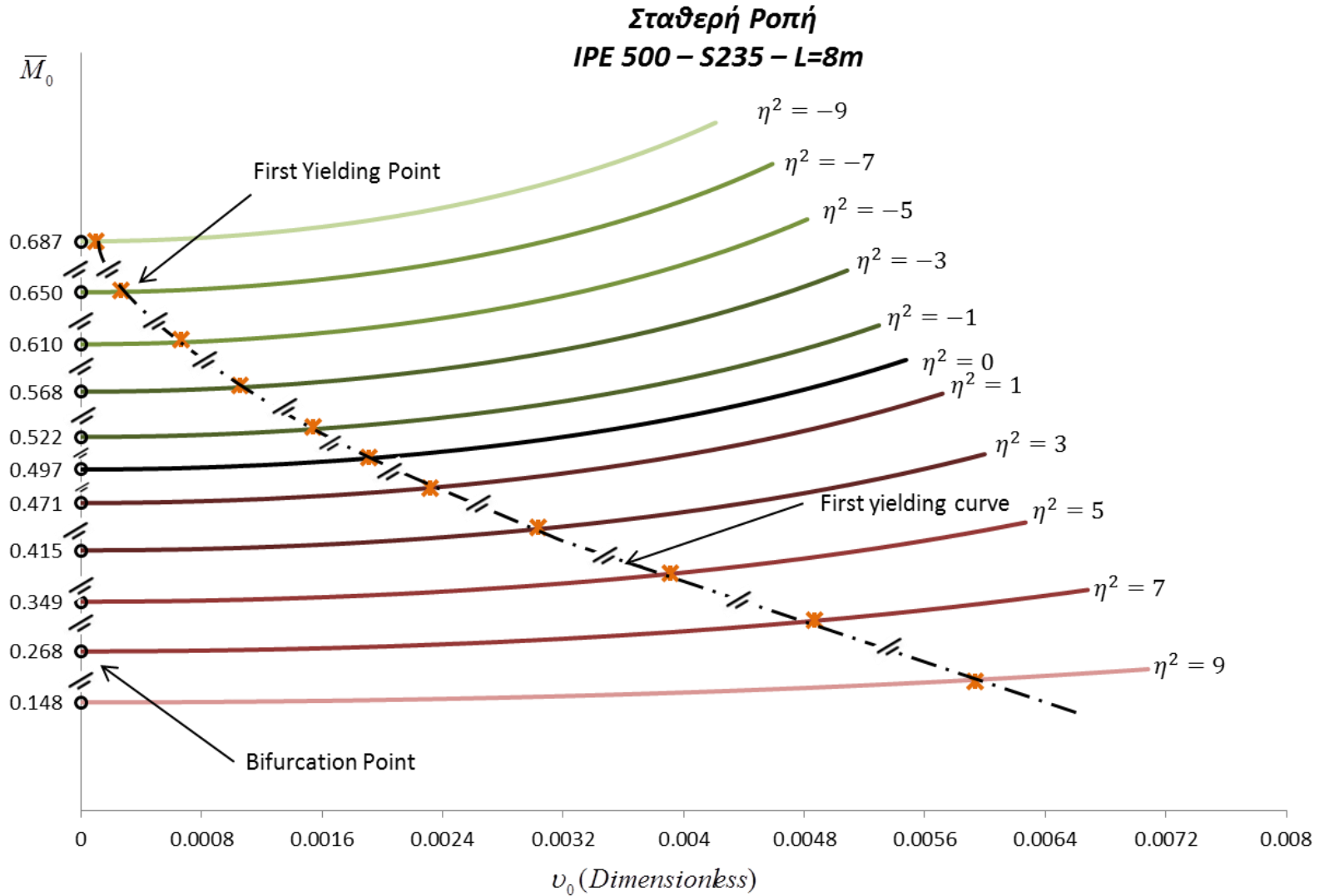
Συγκεκριμένα, στο παρακάτω Σχ.4.4 βλέπουμε τους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση μιας αμφιέριστης δοκού, υπό σταθερή ροπή κατά μήκος της, με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης. Να σημειωθεί ότι η δοκός θεωρείται τέλειος φορέας,

δηλαδή δεν υπάρχουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες σε κανένα σημείο αυτής. Η δοκός έχει διατομή *IPE500*, το μήκος της είναι $l=8m$ και ο χάλυβας είναι κατηγορίας *S235*. Η συνεχής καμπύλη με $\eta^2 = 0$ (μαύρο χρώμα) αντιστοιχεί στο μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας στην περίπτωση όπου δεν ασκείται αξονική δύναμη στη δοκό, παρά μόνο σταθερή ροπή κατά μήκος αυτής. Επίσης οι καμπύλες με $\eta^2 > 0$ (κόκκινη απόχρωση), οι οποίες βρίσκονται κάτω από την καμπύλη $\eta^2 = 0$, αντιστοιχούν στους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση που έχουμε θλιπτικό αξονικό φορτίο και οι καμπύλες με $\eta^2 < 0$ (πράσινη απόχρωση), οι οποίες βρίσκονται πάνω από την καμπύλη $\eta^2 = 0$, αντιστοιχούν στους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση που έχουμε εφελκυστικό αξονικό φορτίο.

Στον κατακόρυφο άξονα $u_0 = 0$ σημειώνονται τα σημεία διακλαδώσεως (bifurcation ή branching points). Από τους δρόμους ισορροπίας παρατηρούμε ότι ο δευτερεύων κλάδος (secondary path) ή αλλιώς μεταλυγισμικός κλάδος (post-buckling path) έχει ανοδική πορεία και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή έχουμε μεταλυγισμική αντοχή. Αυτό σημαίνει ότι πέραν του κρίσιμου σημείου, η δοκός δε χάνει την αντοχή της αλλά διαθέτει κάποια μεγαλύτερη αντοχή πέραν από αυτή που μας υποδεικνύει το σημείο διακλαδώσεως. Μέσω του διαγράμματος αυτού, διαπιστώνουμε την ευεργετική συμβολή του εφελκυστικού φορτίου στο λυγισμό της δοκού. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι όσο η τιμή της εφελκυστικής αξονικής δύναμης μεγαλώνει, τόσο μεγαλώνει και η κρίσιμη τιμή της ροπής για την οποία η δοκός εκτρέπεται πλευρικά. Αντιθέτως, αν η αξονική δύναμη είναι θλιπτική, η συμβολή της είναι δυσμενής. Αυτό σημαίνει ότι όσο η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης αυξάνεται, τόσο μικραίνει η τιμή της κρίσιμης ροπής σε πλευρικό λυγισμό. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο κύριοι δρόμοι ισορροπίας σε όλες τις περιπτώσεις, είναι πάνω στον κατακόρυφο άξονα $u_0 = 0$, ξεκινούν από την αρχή των αξόνων και προφανώς καταλήγουν στην τιμή $\bar{M}_{0,cr}$.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που φαίνονται στο παρακάτω Σχ.4.4 δεν έχουν νόημα από κάποιο σημείο τους και έπειτα. Δηλαδή, σε κάθε δρόμο ισορροπίας υπάρχει ένα σημείο για το οποίο η διατομή της δοκού αρχίζει οριακά να διαρρέει. Αυτό το σημείο αναφέρεται και ως πρώτο σημείο διαρροής (first yielding point) και έχει τετμημένη την πλευρική εκτροπή που θα έχει το κέντρο βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, τη στιγμή που θα παρουσιαστεί για πρώτη φορά διαρροή, και τεταγμένη την κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή που θα ασκείται στη δοκό τη στιγμή εκείνη. Ο αναλυτικός υπολογισμός των σημείων διαρροής παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α της εν λόγω μεταπτυχιακής εργασίας.

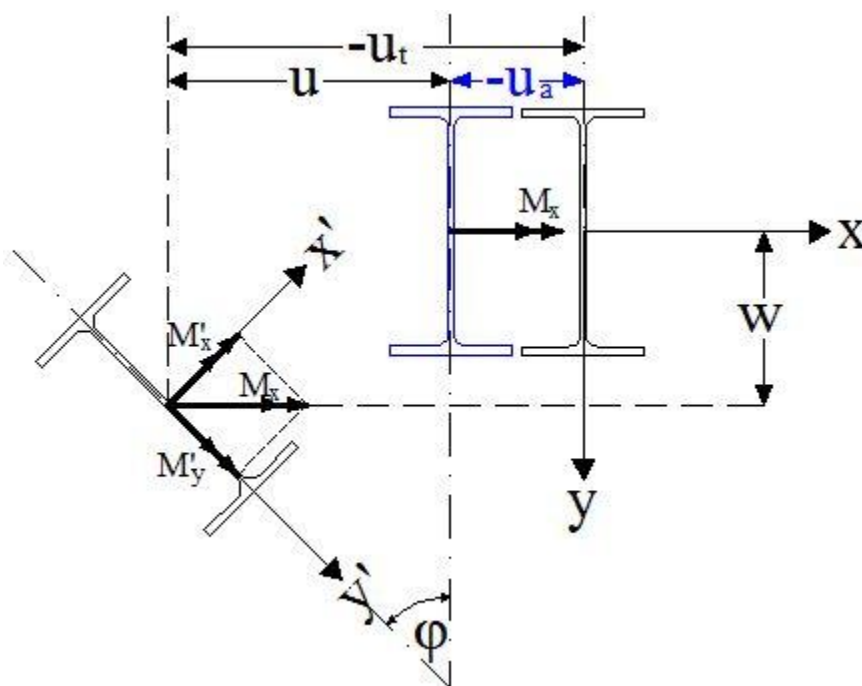
Αν ενωθούν όλα τα σημεία “πρώτης διαρροής” (first yielding points) για τους δρόμους ισορροπίας που απεικονίζονται στο Σχ.4.4, τότε θα μπορούσαμε να χαράξουμε μια καμπύλη η οποία θα μπορούσε να ονομαστεί “καμπύλη πρώτης διαρροής” ή αλλιώς “first yielding curve”. Αυτή η καμπύλη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί πλέον για να βρούμε προσεγγιστικά το πρώτο σημείο διαρροής αν χαράζαμε οποιονδήποτε άλλο δρόμο ισορροπίας για την περίπτωση του παραδείγματος που μελετάμε στο υποκεφάλαιο αυτό.



Σχήμα 4.4 Μεταλυστικοί δρόμοι ισορροπίας στην περίπτωση αμφιέρειστης δοκού υπό σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της με ταυτόχρονη αξονική δύναμη, χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στον φορέα

Μη Γραμμική Ανάλυση με αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Μια αρχική γεωμετρική ατέλεια θα μπορούσε να είναι μια μετατόπιση πάνω σε έναν – οποιονδήποτε άξονα της διατομής του φορέα ή κάποια στροφή περί οποιονδήποτε άξονα της διατομής. Στην περίπτωση όμως του πλευρικού λυγισμού, η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, περιγράφεται από δυο μετατοπίσεις u και w κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, αλλά και από μια στροφή ϕ περί τον κεντροβαρικό άξονα z του φορέα. Έτσι, μια αρχική ατέλεια στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού θα μπορούσε να αποδοθεί με τρόπο τέτοιο, ώστε η διατομή να έχει την ίδια παραμορφωσιακή εικόνα με την παραμόρφωση της διατομής (στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει αρχική ατέλεια σε όλους τους άξονες της διατομής. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού. Παρακάτω, επιλέγεται να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχοντας εισάγει ως αρχική ατέλεια στο φορέα μόνο οριζόντια - πλευρική εκτροπή του κέντρου βάρους της διατομής u_a (κατά τον άξονα x). Ο λόγος που επιλέχθηκε να εισαχθεί η συγκεκριμένη αρχική ατέλεια καθ' αυτόν τον άξονα κατά την κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων είναι να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Adina. Στο παρακάτω Σχ.4.5 παρουσιάζεται μια τυχαία διατομή της δοκού στην απαραμόρφωτη, παραμορφωμένη κατάσταση καθώς και στην κατάσταση αρχικών ατελειών (μπλε χρώμα).



Σχήμα 4.5 Κατάσταση αρχικών ατελειών της διατομής σε τυχαία θέση της δοκού.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η αρχική ατέλεια που εισάγεται στην διατομή για να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού είναι:

- $u_a(z)$: Αρχική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Επίσης έχουμε:

- $u(z)$: Οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $w(z)$: Κατακόρυφη μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $\phi(z)$: Στροφή της διατομής περί το κέντρο διάτμησης λόγω πλευρικού λυγισμού.

Επομένως:

- $u_t(z) = u_a(z) + u(z)$: Ολική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ισορροπία της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$EI_x w''(z) + Nw(z) = -\bar{M}_0 \quad (4.9)$$

$$EI_y u''(z) + Nu_t(z) = \bar{M}_0 \cdot \sin(\phi(z)) \quad (4.10)$$

$$GJ\phi'(z) - EC_w \phi'''(z) = -\bar{M}_0 u_t'(z) \quad (4.11)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.9) είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες δυο εξισώσεις, μετά από αδιαστατοποίηση αυτών έχουμε:

$$v''(\xi) + \eta^2 v_t(\xi) = \bar{M}_0 \cdot \sin(\phi(\xi))$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = p^2 \cdot \bar{M}_0 \cdot v_t'(\xi)$$

όπου

$$v_t = u_t / \ell, \quad \xi = z / \ell, \quad \eta^2 = N\ell^2 / EI_y, \quad \bar{M}_0 = M_0 \cdot \ell / EI_y, \quad \lambda^2 = GJ\ell^2 / EC_w$$

και $p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$

ή

$$v''(\xi) + \eta^2 (v(\xi) + v_a(\xi)) = \bar{M}_0 \cdot \sin(\phi(\xi)) \quad (4.12)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = p^2 \cdot \bar{M}_0 \cdot (v'(\xi) + v_a'(\xi)) \quad (4.13)$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (4.13), τότε προκύπτει:

$$v''(\xi) = \frac{\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{\bar{M}_0 \cdot p^2} - v''_\alpha(\xi)$$

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (4.13), τότε προκύπτει:

$$v(\xi) = \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{\bar{M}_0 \cdot p^2} - v_\alpha(\xi) + C$$

Όμως $C = 0$, επειδή $v(0) = \phi''(0) = \phi(0) = v''_\alpha(0) = 0$

Μετά από αντικατάσταση των δυο παραπάνω εκφράσεων στην εξίσωση (4.12), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{p^2 \cdot \bar{M}_0} - v''_\alpha(\xi) + \eta^2 \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{p^2 \cdot \bar{M}_0} &= \bar{M}_0 \cdot \sin(\phi(\xi)) \\ \text{ή} \\ \phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi) + \eta^2 (\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)) &= \bar{M}_0^2 \cdot p^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) + \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot v''_\alpha(\xi) \\ \text{ή} \\ \phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) &= \bar{M}_0^2 \cdot p^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) + \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot v''_\alpha(\xi) \quad (4.14) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση, εκφρασμένη σε όρους στροφών. Παρατηρούμε επίσης ότι η εξίσωση αυτή, περιέχει τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που εισήχθησαν στον υπό μελέτη φορέα. Χαρακτηρίζεται ως μη ομογενής διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξεως. Είναι προφανές ότι η επίλυση της, με την παρούσα μορφή που έχει, είναι σχεδόν αδύνατη. Σκοπός μας είναι να εξαχθεί μια σχέση που να περιγράφει τον δρόμο ισορροπίας, που να περιγράφει τη συμπεριφορά σε πλευρικό λυγισμό, του παρόντος στατικού συστήματος (φορές – φόρτιση), λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές ατέλειες που εισήχθησαν. Ο τρόπος επίλυσης της εξίσωσης που θα ακολουθήσει, βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- $v_\alpha(\xi) = v_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$
- $\sin(\phi(\xi)) \cong \phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{3!}$ (Χρήση σειράς Taylor) με $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$

Άρα, η εξίσωση (4.14) γίνεται:

$$\begin{aligned} \phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) &= \\ &= \bar{M}_0^2 \cdot p^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{6} \right] + \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot \pi^2 \cdot v_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3\sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.15):

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) &= \\ &= \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot \phi_0 \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi\xi) + \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi\xi) \right] - \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών $\phi(0) = \phi''(0) = \phi(1) = \phi''(1) = 0$, οι οποίες βασίζονται στην παραδοχή της μηδενικής στρέψης και ταυτόχρονα ελεύθερης στρέβλωσης της διατομής στα άκρα της αμφιέριστης δοκού, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου Maple, καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής: $\phi(\xi) = g(p^2, \lambda^2, \eta^2, \phi_0, \nu_\alpha, \bar{M}_0, \xi)$. Αν βασιστούμε στο γεγονός ότι κατά τον πλευρικό λυγισμό μιας αμφιέριστης δοκού, η μέγιστη στροφή της διατομής εμφανίζεται στο μέσον της, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι $\phi(1/2) = \phi_0$, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση (4.16), η οποία αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, στην περίπτωση αμφιέριστης δοκού υπό ομοιόμορφη ροπή σε όλο το μήκος της, ταυτόχρονη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης και επιρροή αρχικών ατελειών που θα μπορούσε να έχει ο φορέας.

$$\bar{M}_0 = \sqrt{\frac{A(\lambda^2, \eta^2, p^2, \phi_0, \nu_\alpha)}{\Pi(p^2, \eta^2, \lambda^2, \phi_0)}} \quad (4.16)$$

ή αλλιώς

m

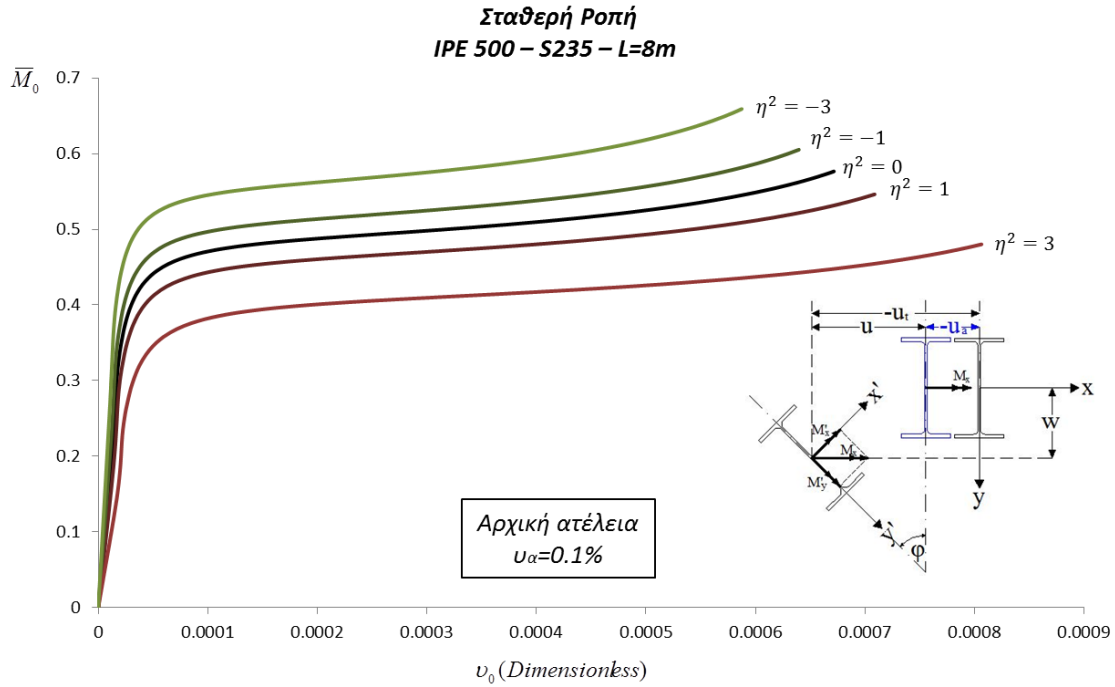
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c(7c^2l^2 - 7c^2n^2 + 61c^2\pi^2 - 54l^2 + 54n^2 - 486\pi^2)p} \left(3\sqrt{42} \left((l^2 - n^2 + 9\pi^2) \left(\left(\frac{243}{14} p^2 \nu_\alpha^2 - \frac{61}{7} c^4 + \frac{486}{7} c^2 \right) \pi^6 - \frac{68}{7} (l+n)(l-n) \left(c^4 - \frac{27}{136} p^2 \nu_\alpha^2 - \frac{135}{17} c^2 \right) \pi^4 - \left(\left(n^4 + l^4 - \frac{75}{7} l^2 n^2 \right) c^2 + \frac{594}{7} l^2 n^2 - \frac{54}{7} n^4 - \frac{54}{7} l^4 \right) c^2 \pi^2 + (l+n)(l-n) \left(c^2 - \frac{54}{7} \right) l^2 c^2 n^2 \right) \right)^{1/2} \\ &- 243 p \pi^4 \nu_\alpha + (-27l^2 + 27n^2) \nu_\alpha p \pi^2 \end{aligned}$$

Όπως προαναφέρθηκε, η παραπάνω εξίσωση (4.16) αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, μιας αμφιέριστης δοκού στην οποία ασκείται σταθερή ροπή σε όλο το μήκος της και ταυτόχρονα ασκείται αξονική δύναμη. Η διαφορά της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση (4.7) έγκειται στο γεγονός ότι λαμβάνονται υπόψη οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που πιθανώς να έχει το υπό μελέτη στατικό σύστημα (φορέας – φορτίο).

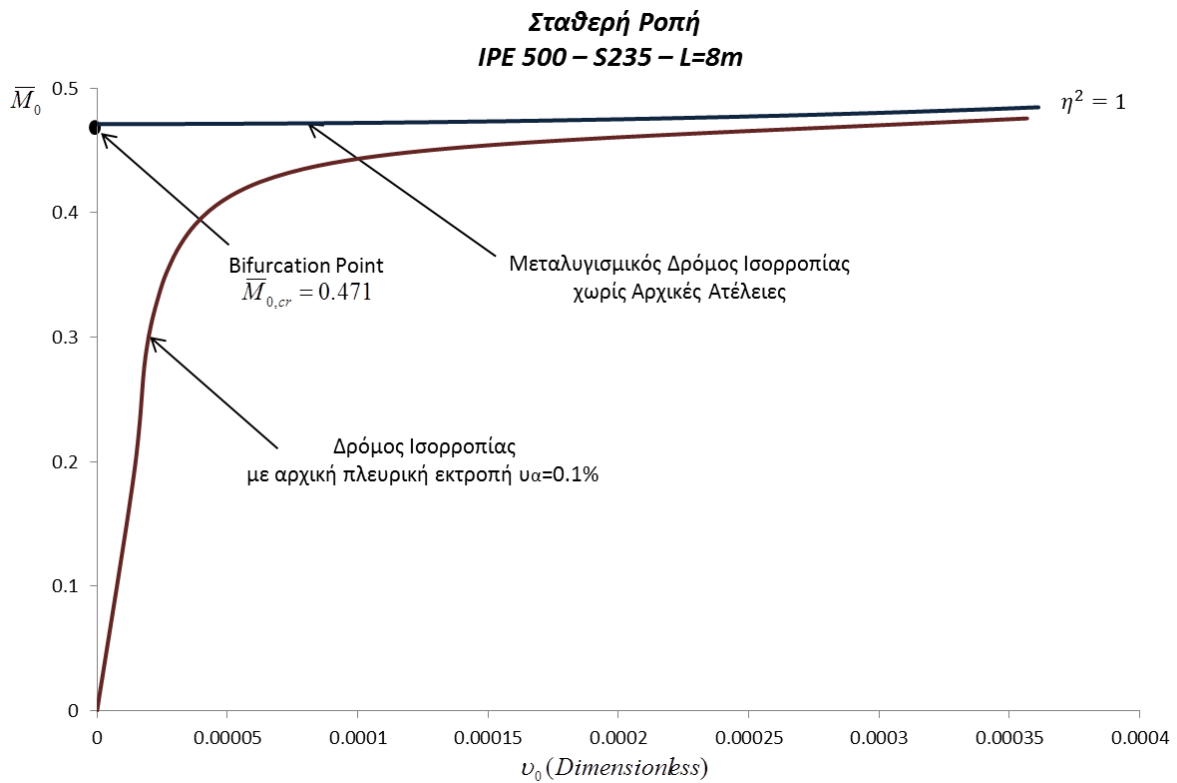
Στα παρακάτω σχήματα, παρουσιάζονται κάποια διαγράμματα μέσω των οποίων γίνεται προσπάθεια για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων, όσον αφορά την επιρροή των αρχικών ατελειών στην συμπεριφορά του φορέα. Ταυτόχρονα, με τα παρακάτω διαγράμματα, εκτός από τα χρήσιμα συμπεράσματα, επιβεβαιώνονται τα ήδη αναμενόμενα αποτελέσματα.

Στο Σ.χ.4.6, παρουσιάζονται οι δρόμοι ισορροπίας για τον υπό μελέτη φορέα για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης. Για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής ατέλειας που εισάγεται στο σύστημα είναι ίδια και για τους πέντε δρόμους ισορροπίας που παρουσιάζονται. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από το συγκεκριμένο σχήμα είναι ότι οι δρόμοι ισορροπίας δεν παρουσιάζουν κάποιο σημείο διακλαδώσεως (bifurcation point), δηλαδή δε διακρίνονται σε πρωτεύοντες και δευτερεύοντες δρόμοι, αλλά είναι ενιαίοι. Παρατηρούμε επίσης, ότι οι δρόμοι ισορροπίας, από κάποια τιμή της κρίσιμης ροπής \bar{M}_0 και μετά, παρουσιάζουν έντονη αλλαγή της κλίσης τους. Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει αστοχία σε πλευρικό λυγισμό. Βέβαια, μετά το σημείο αυτό, οι δρόμοι παρουσιάζουν ανοδική πορεία, πράγμα που υποδηλώνει την μεταλυγισμική αντοχή των φορέων. Τέλος, είναι εμφανής η επιρροή του μεγέθους καθώς και της φοράς της δρώσας αξονικής δύναμης (θλιπτική ή εφελκυστική) στην αντοχή της δοκού. Όσο μεγαλώνει η τιμή της θλιπτικής δύναμης, τόσο μικρότερη αντοχή παρουσιάζει ο φορέας. Ενώ, όσο μεγαλώνει η τιμή της εφελκυστικής αξονικής δύναμης, τόσο πιο ευεργετική επιρροή έχει στη συμπεριφορά του φορέα.

Στο Σχ.4.7 παρουσιάζεται ο μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας (σε όρους πλευρικής εκτροπής v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής) για την περίπτωση που θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 = 1$. Ο δρόμος αυτός περιγράφεται από τη σχέση (4.7) που αναπτύχθηκε για τις περιπτώσεις που δεν έχουμε αρχικές ατέλειες στον φορέα. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται και ο δρόμος ισορροπίας του ίδιου στατικού συστήματος (φορέα – φόρτισης) με μια εισηγμένη αρχική ατέλεια στο σύστημα. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από αυτούς τους δυο δρόμους είναι ότι στην περίπτωση χωρίς αρχικές ατέλειες έχουμε σημείο διακλαδώσεως στο δρόμο ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση με αρχικές ατέλειες, ο δρόμος ισορροπίας είναι ενιαίος. Όπως φαίνεται, η μεταλυγισμική συμπεριφορά και των δυο φορέων, σχεδόν ταυτίζεται. Παρουσιάζεται και στις δυο περιπτώσεις, δηλαδή, μεταλυγισμική συμπεριφορά στον φορέα (post buckling strength).

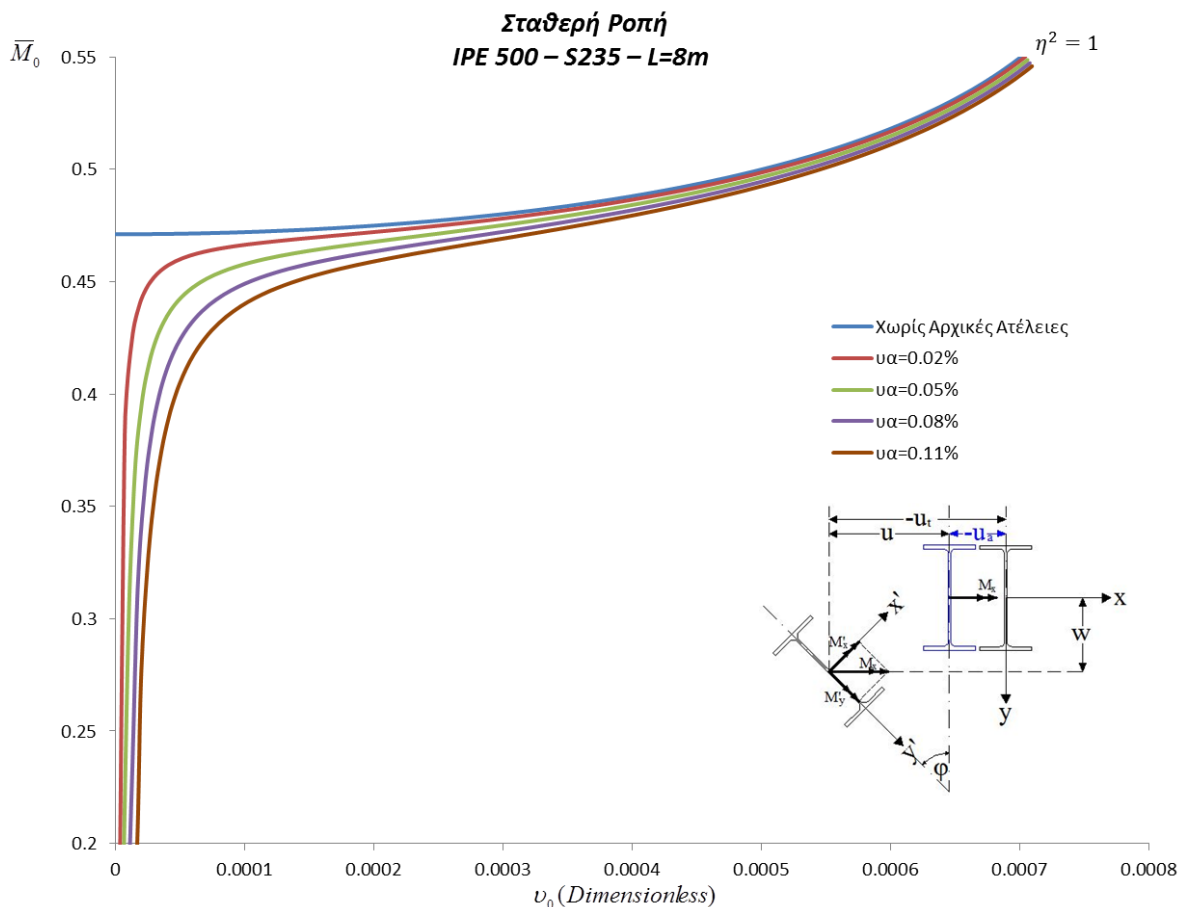


Σχήμα 4.6 Δρόμοι ισορροπίας δοκού με αρχικές ατέλειες για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης.



Σχήμα 4.7 Δρόμος ισορροπίας με αρχικές ατέλειες του φορέα και μεταλυσιμικός δρόμος ισορροπίας χωρίς αρχικές ατέλειες στο φορέα για ίδια αξονική δύναμη.

Στο Σχ. 4.8, εμφανίζονται οι δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές της αρχικής ατέλειας που εισάγεται αρχικά στο φορέα. Στα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής πλευρικής εκτροπής μεταβάλλεται, ενώ η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης είναι ίδια σε για όλες τις περιπτώσεις και είναι $\eta^2 = 1$. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί είναι η επιρροή της αρχικής ατέλειας στη συμπεριφορά του φορέα. Παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή της αρχικής εκτροπής v_α αυξάνεται, τόσο πιο μικρή είναι η τιμή της ροπής \bar{M}_0 για την οποία ο εκάστοτε δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει έντονη αλλαγή στην κλίση του. Αυτό μας οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι αρχικές ατέλειες που εισάγονται στο σύστημα, τόσο νωρίτερα χάνει την αντοχή του ο φορέας.



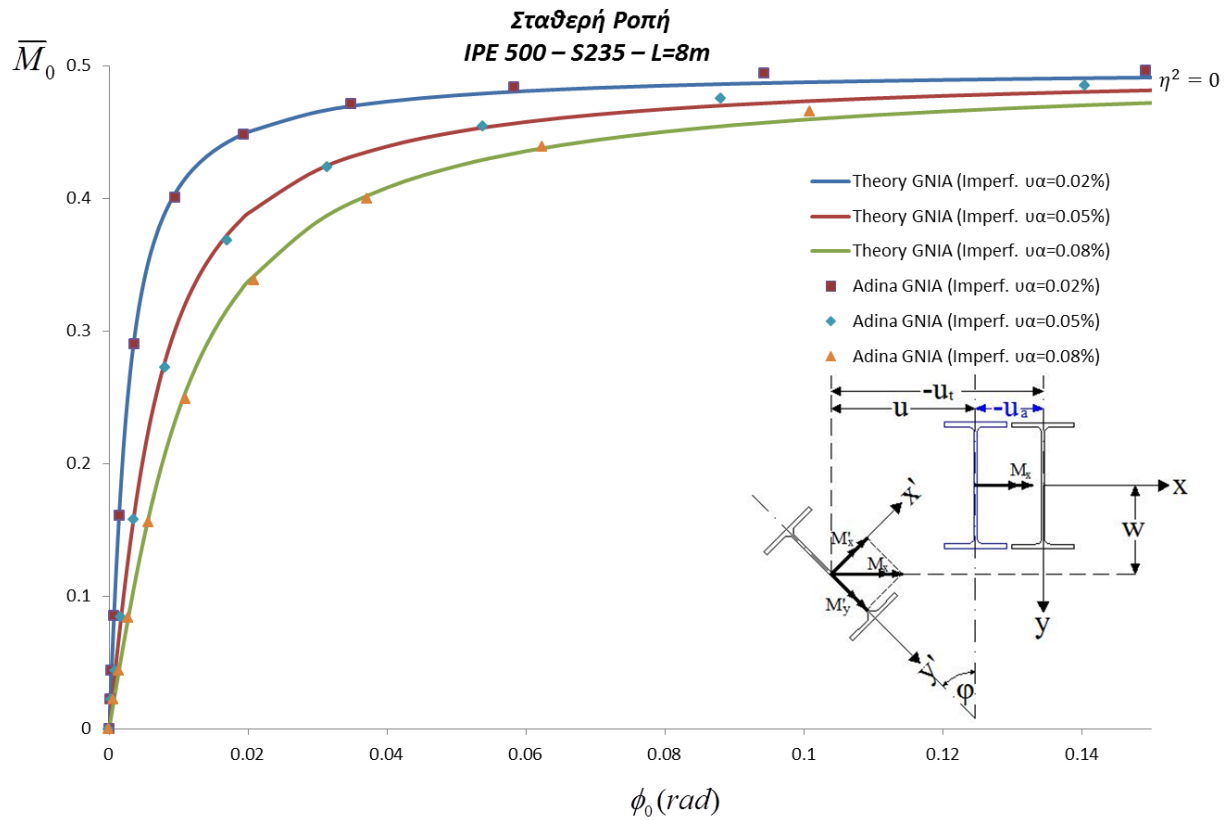
Σχήμα 4.8 Δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές του v_α .

Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

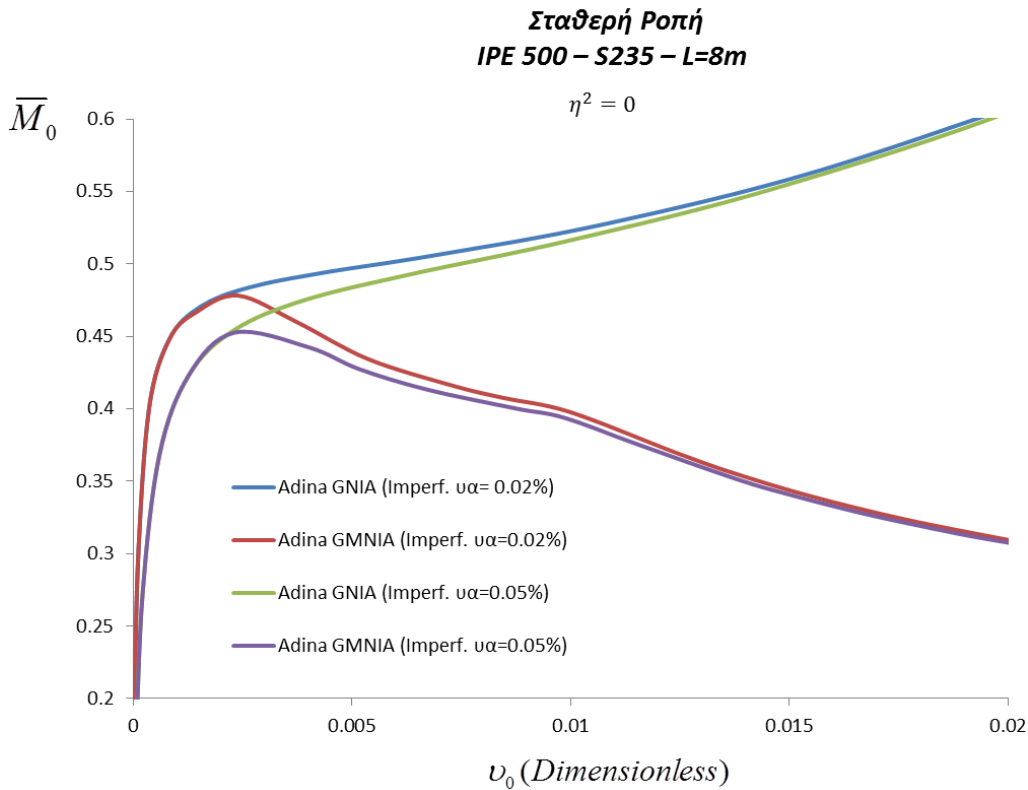
Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που αναπτύχθηκε. Έτσι λοιπόν, στη συνέχεια παρουσιάζεται πλήθος μη γραμμικών αναλύσεων. Η μη γραμμικότητα των αναλύσεων αυτών, μπορεί να παρουσιάζεται στη γεωμετρία του φορέα ή στο υλικό, ή ακόμα, και στον συνδυασμό αυτών των δυο μεταξύ τους.

Στο Σχ.4.9, οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται αφορούν μια αμφιέριστη δοκό με διχαλωτή στήριξη στα άκρα (ελεύθερη στρέβλωση – μηδενική στρέψη). Οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται είναι εκφρασμένοι σε όρους στροφών ϕ (όπου ϕ_0 είναι η στροφή της μεσαίας διατομής της δοκού κατά την εκτροπή σε πλευρικό λυγισμό). Η δοκός είναι μήκους 8m, διατομής IPE 500 και ο χάλυβας είναι κατηγορίας S235. Οι συνεχείς γραμμές αποτελούν τρεις δρόμους ισορροπίας που έχουν προκύψει από τη θεωρητική προσέγγιση που αναπτύχθηκε προηγουμένως και αφορά τη γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα με αρχική γεωμετρική ατέλεια. Η διαφορά μεταξύ των τριών δρόμων ισορροπίας έγκειται στο μέγεθος της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας που εισήχθηκε στον φορέα πριν την ανάλυση. Εκτός από τις συνεχείς γραμμές που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση, παρουσιάζονται και οι αντίστοιχοι δρόμοι ισορροπίας, όπως προκύπτουν από μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το Adina, παρουσιάζονται μέσω κάποιων σημείων τους, ώστε να διακρίνονται από τους αντίστοιχους συνεχείς. Παρατηρούμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων, είναι αρκετά κοντά ή αλλιώς συμπίπτουν ικανοποιητικά με τους αντίστοιχους που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση.

Στο Σχ.4.10 διακρίνονται τέσσερεις δρόμοι ισορροπίας σε όρους πλευρικών μετακινήσεων v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, όπως προέκυψαν από αναλύσεις που έγιναν από το Adina. Οι δύο από αυτούς αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.02\%$ και οι υπόλοιποι αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.05\%$. Για κάθε περίπτωση αρχικών ατελειών, πραγματοποιήθηκε μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση (GNIA) και μια μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας και υλικού (GMNIA). Ένα συμπέρασμα είναι η επιρροή του μεγέθους της αρχικής ατέλειας στην συμπεριφορά του φορέα. Στην περίπτωση της μικρότερης εκ των δυο αρχικών ατελειών, ο φορέας χάνει την αντοχή του για μεγαλύτερες τιμές της ροπής \bar{M}_0 . Ακόμη, η ανάλυση GMNIA προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική συμπεριφορά του φορέα, καθώς εκτός από τη μη γραμμικότητα της γεωμετρίας λαμβάνει υπόψη και τη διαρροή του υλικού. Τέλος, μέσω της κλίσης των διαγραμμάτων, βλέπουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας E του φορέα είναι μεγαλύτερο όσο η αρχική ατέλεια πλησιάζει στο μηδέν.

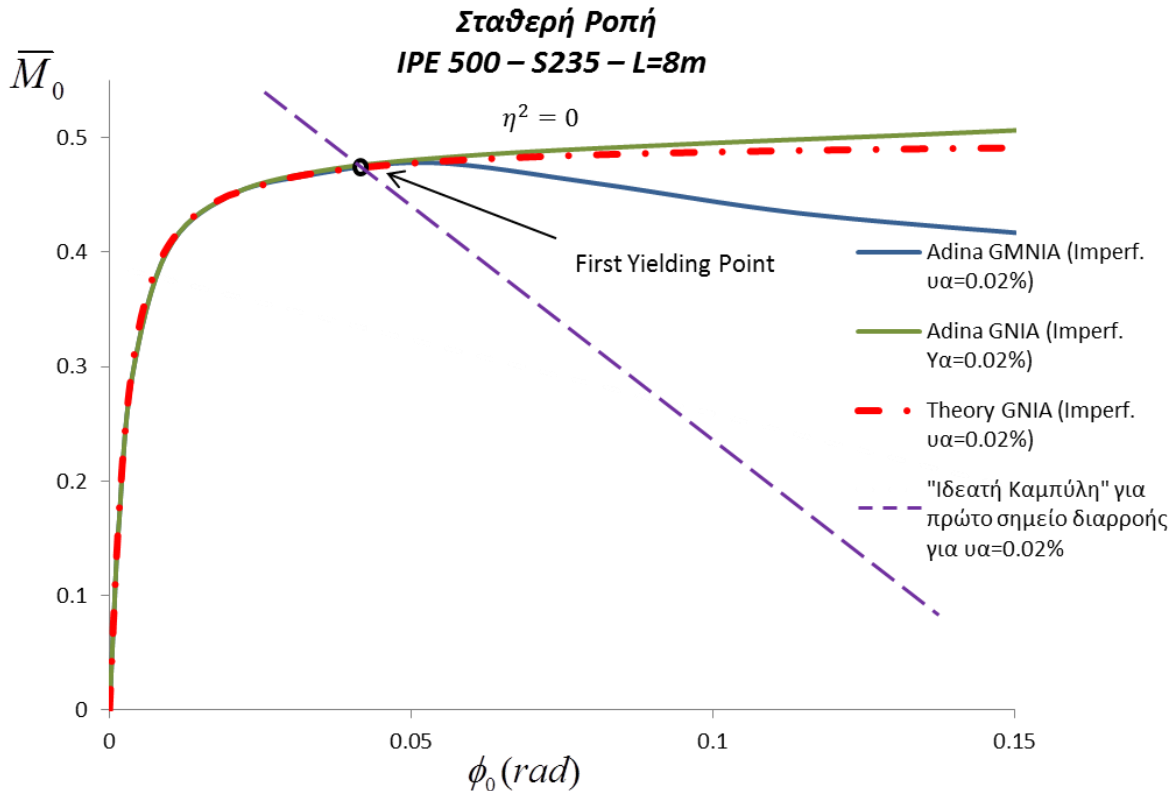


Σχήμα 4.9 Δρόμοι ισοροπίας ανάλυσης GNIA. Σύγκριση Adina με θεωρητική προσέγγιση



Σχήμα 4.10 Αναλύσεις GMNIA και GNIA στο Adina

Στο Σχ.4.11, παρουσιάζονται μη γραμμικές αναλύσεις για αρχική ατέλεια δοκού $\nu_\alpha = 0.02\%$. Η πράσινη καμπύλη αφορά γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση στο Adina. Η διακεκομμένη κόκκινη καμπύλη αφορά γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση όπως αυτή προέκυψε από τη θεωρητική προσέγγιση. Η μπλε καμπύλη είναι ο δρόμος ισορροπίας που προκύπτει από ανάλυση GMNIA του Adina. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η πραγματική συμπεριφορά του φορέα μπορεί να προσεγγισθεί αν ληφθεί υπόψη και η διαρροή του υλικού. Υπάρχει, επομένως, η ανάγκη να βρούμε μέχρι πιο σημείο του θεωρητικού δρόμου ισορροπίας GNIA (κόκκινη απόχρωση) η καμπύλη αυτή έχει νόημα.



Σχήμα 4.11 Εύρεση πρώτου σημείου διαρροής σε ανάλυση GNIA.

Έτσι λοιπόν, γνωρίζοντας το όριο διαρροής του χάλυβα που χρησιμοποιείται καθώς και τις εσωτερικές τάσεις που αναπτύσσονται στη διατομή κατά τον πλευρικό λυγισμό, είμαστε σε θέση να εντοπίσουμε για ποια τιμή της αδιαστατοποιημένης ροπής \bar{M}_0 καθώς και το μέγεθος της πλευρικής εκτροπής ν_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής ή το μέγεθος της γωνίας στροφής ϕ_0 της διατομής για τα οποία επέρχεται διαρροή στην πρώτη ίνα της διατομής. Για τον λόγο αυτό, καταστρώνουμε μια εξίσωση $\nu_0 = f(p^2, \lambda^2, \eta^2, \nu_\alpha, \bar{M}_0)$ η οποία ουσιαστικά απεικονίζει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (\bar{M}_0, ν_0) ή (\bar{M}_0, ϕ_0) για τα οποία η μεσαία διατομή της δοκού οριακά αρχίζει να διαρρέει. Ο γεωμετρικός τόπος αυτός στο εξής θα ονομάζεται “Ιδεατή Καμπύλη Διαρροής”. Το σημείο τομής της καμπύλης αυτής με τον εκάστοτε δρόμο ισορροπίας GNIA θα αποτελεί και το πρώτο σημεία διαρροής της δοκού (First Yielding

Point). Να σημειωθεί ότι η καμπύλη αυτή εξαρτάται και από τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της δοκού, από το είδος φόρτισης της καθώς και από το μέγεθος της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας που εισάγεται στο σύστημα. Ο αναλυτικός υπολογισμός των σημείων διαρροής παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α της εν λόγω μεταπτυχιακής εργασίας.

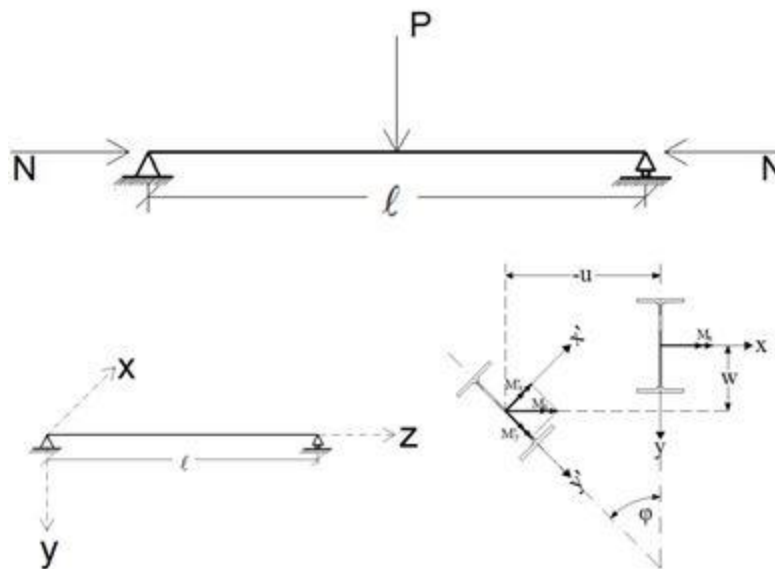
4.3 Περίπτωση Συγκεντρωμένου Εγκάρσιου Φορτίου στο μέσον της δοκού.

4.3.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε μια δοκό διατομής I . Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Η δοκός υπόκειται σε εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο P που ασκείται στο μέσον της, και σε σταθερή αξονική δύναμη που ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Για όσο η τιμή του φορτίου P αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η N παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- i. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- ii. Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής $M_{c,max} = M_{c,max,cr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη, της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα z και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ.4.12)



Σχήμα 4.12 Περίπτωση συγκεντρωμένης εγκάρσιας φόρτισης στο μέσον της δοκού

Η ροπή κάμψης στο επίπεδο x - y για το διάστημα $0 \leq z \leq \frac{\ell}{2}$ δίδεται από τη σχέση:

$$M_x = \frac{P}{2} z \quad 0 \leq z \leq \frac{\ell}{2}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x w'' + Nw = -\frac{2M_{c,\max} z}{\ell} \cdot \cos \phi \approx -\frac{2M_{c,\max} z}{\ell} \quad (4.17a)$$

$$EI_y u'' + Nu = \frac{2M_{c,\max} z}{\ell} \cdot \sin \phi \approx \frac{2M_{c,\max} z}{\ell} \phi \quad (4.17b)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -\frac{2M_{c,\max} z}{\ell} u' + \frac{2M_{c,\max}}{\ell} (u - u(\ell/2)) \quad (4.17c)$$

Όπου $M_{c,\max} = P \frac{\ell}{4}$ η μέγιστη καμπτική ροπή στο μέσον της δοκού.

Επίσης, η παραγωγή είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού, αντιστοίχως.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σχολιάσουμε ότι η εξίσωση (4.17a) είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες εξισώσεις, δηλαδή δεν μπορούν να συνδεθούν με αυτές. Έτσι θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις (4.17b) και (4.17c), από τις οποίες μπορούμε πολύ εύκολα να καταλήξουμε στην αδιαστατοποιημένη μορφή τους:

$$v''(\xi) + \eta^2 \cdot v(\xi) = 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot \phi(\xi) \cdot \xi \quad (4.18a)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \cdot \phi'(\xi) = 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'(\xi) - 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot (v(\xi) - v_m) \quad (4.18b)$$

όπου

v_m : αδιάστατο βέλος στο μέσον της δοκού

$$v = u / \ell, \quad \xi = z / \ell, \quad \eta^2 = N\ell^2 / EI_y, \quad \bar{M}_{c,\max} = M_{c,\max} \cdot \ell / EI_y, \quad \lambda^2 = GJ\ell^2 / EC_w$$

$$\text{και} \quad p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$$

4.3.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Θεωρητική προσέγγιση

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, η δοκός είναι αμφιέρειστη και η στήριξη στα άκρα είναι διχαλωτή. Αυτό σημαίνει ότι στα άκρα της δοκού, η στρέψη δεν επιτρέπεται – είναι μηδενική, και η στρέβλωση είναι ελεύθερη. Επίσης, στο μέσον της δοκού η στρέψη είναι η μέγιστη και η στρέβλωση μηδενική. Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις

περιγράφουν την ισορροπία της δοκού μέχρι το μέσον του μήκους της. Για τους παραπάνω λόγους, οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής: $\phi(0) = \phi''(0) = \phi'(l/2) = \phi'''(l/2) = 0$.

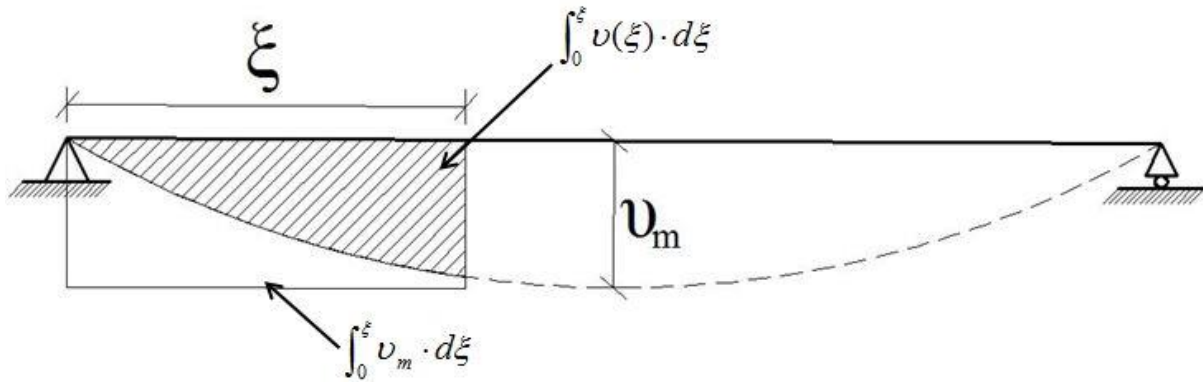
Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (4.18b) μια φορά τότε έχουμε:

$$\phi'' - \lambda^2 \cdot \phi = 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \left[\xi \cdot v - \int_0^\xi v \cdot d\xi - \int_0^\xi v \cdot d\xi + v_m \cdot \xi \right] + C$$

Για $\xi=0$: $\phi''(0) = \phi(0) = v(0) = 0$, έχουμε $C=0$

Επίσης, όπως φαίνεται στο Σχ.4.13, κάνουμε την παρακάτω θεώρηση:

$$2 \cdot \int_0^\xi v(\xi) \cdot d\xi = \int_0^\xi v_m \cdot d\xi = v_m \cdot \xi$$



Σχήμα 4.13 Ελαστική γραμμή αμφίερεστης δοκού υπό συγκεντρωμένο φορτίο

Με την βοήθεια των παραπάνω παραδοχών, η παραπάνω εξίσωση γίνεται ως εξής:

$$\phi'' - \lambda^2 \cdot \phi = 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v \quad (4.19)$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (4.18b) μια φορά τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi''' - \lambda^2 \cdot \phi'' &= 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot v' + 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'' - 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot v' \\ &\quad \text{ή} \\ \phi''' - \lambda^2 \cdot \phi'' &= 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'' \end{aligned} \quad (4.20)$$

Από την εξίσωση (4.18a), μέσω των εξισώσεων (4.19) και (4.20), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\phi''' - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi'' - (\eta^2 \cdot \lambda^2 + 4 \cdot \bar{M}_{c,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2) \cdot \phi = 0$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση δεν επιδέχεται κλειστή λύση. Για την επίλυσή της χρησιμοποιούμε μια προσεγγιστική τεχνική. Μεταφέρουμε τον μη γραμμικό όρο στο δεύτερο μέρος, οπότε έχουμε:

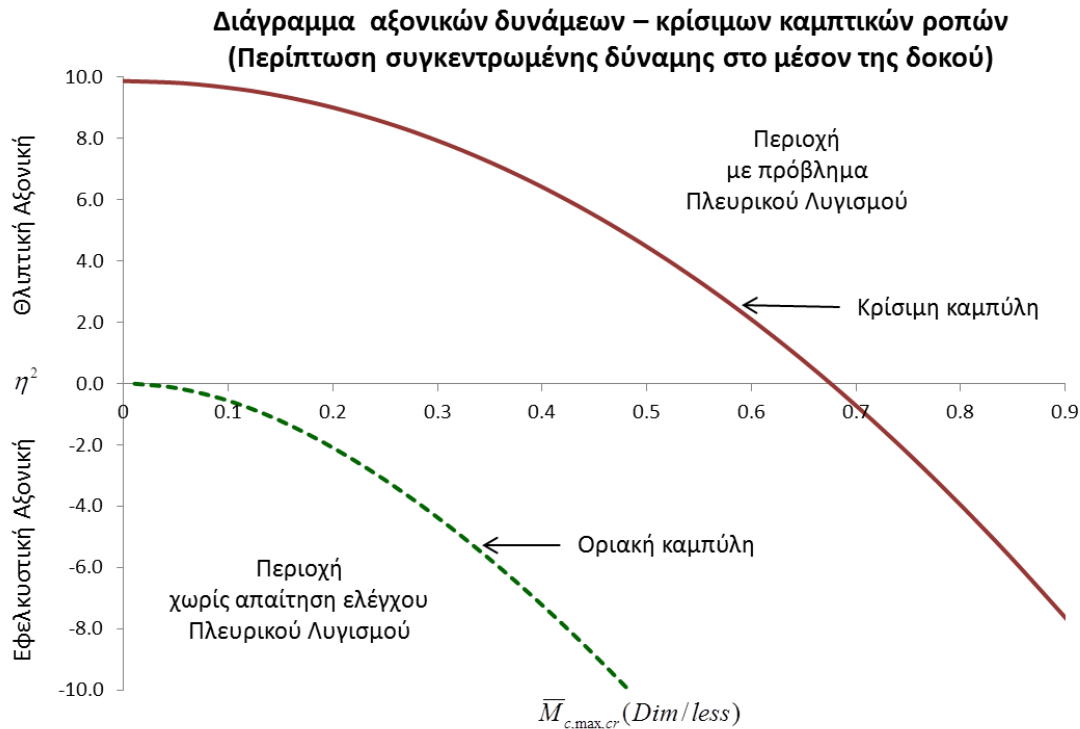
$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = 4 \cdot \bar{M}_{c,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \phi(\xi) \quad (4.21)$$

Για τη γωνία φ του δεύτερου μέλους της τελευταίας εξίσωσης εισάγεται η συνάρτηση σχήματος $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$, που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και η οποία οδηγεί προσεγγιστικά σε πολύ καλά αποτελέσματα.

Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$\phi(\xi) = C_1 \cdot \sin(m \cdot \xi) + C_2 \cdot \cos(m \cdot \xi) + C_3 \cdot \sinh(\bar{m} \cdot \xi) + C_4 \cdot \cosh(\bar{m} \cdot \xi) + \phi_p \quad (4.22)$$

όπου ϕ_p είναι η μερική λύση που θα προκύψει από το δεξιό μέλος και οι σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες που είναι: $\phi(0) = \phi''(0) = \phi'(1/2) = \phi'''(1/2) = 0$. Λόγω περιορισμού χώρου δεν θα παρουσιάσουμε την πλήρη έκφραση της εξ. (4.22). Από τη σχέση $\phi_0 = \phi(1/2)$ προκύπτει η σχέση αξονικής δύναμης η^2 , μέγιστων κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού $\bar{M}_{c,\max,cr}$ ενώ από τη σχέση $\phi(\xi) = 0$ (μόνο στη περίπτωση εφελκυσμού, αφού για θλίψη η $\phi(\xi) = 0$ ισχύει μόνο για την αφόρτιστη κατάσταση), προκύπτει η ελάχιστη εφελκυστική αξονική δύναμη $\eta_{c,\min}^2$ σε σχέση με την μέγιστη καμπτική ροπή $\bar{M}_{c,\max}$ για την οποία η δοκός δεν κινδυνεύει να αστοχήσει από στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.



Σχήμα 4.14 Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων – κρίσιμων ροπών στην περίπτωση συγκεντρωμένης εγκάρσιας φόρτισης στο μέσον της δοκού.

Στο Σχ.4.14 παρουσιάζεται το διάγραμμα αδιαστατοποιημένων αξονικών δυνάμεων η^2 - αδιαστατοποιημένων κρίσιμων καμπτικών ροπών $\bar{M}_{c,max,cr}$. Διακρίνεται η “Οριακή Καμπύλη”, πέραν της οποίας έχουμε την περιοχή όπου δεν απαιτείται έλεγχος σε πλευρικό λυγισμό λόγω της ευνοϊκής επιρροής του εφελκυστικού αξονικού φορτίου. Επίσης διακρίνεται και η “Κρίσιμη Καμπύλη” πάνω στην οποία συγκεντρώνεται το πλήθος των κρίσιμων συνδυασμών $\eta^2 - \bar{M}_{c,max,cr}$ για τους οποίους ο φορέας αστοχεί σε πλευρικό λυγισμό. Οι συνδυασμοί αυτοί έχουν προέλθει από την εξίσωση (4.21) και αφορούν τη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Σημειώνεται ότι τα παραπάνω διάγραμμα αφορά μια αμφιέριστη δοκό διατομής IPE 500 με μήκος 8m.

Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

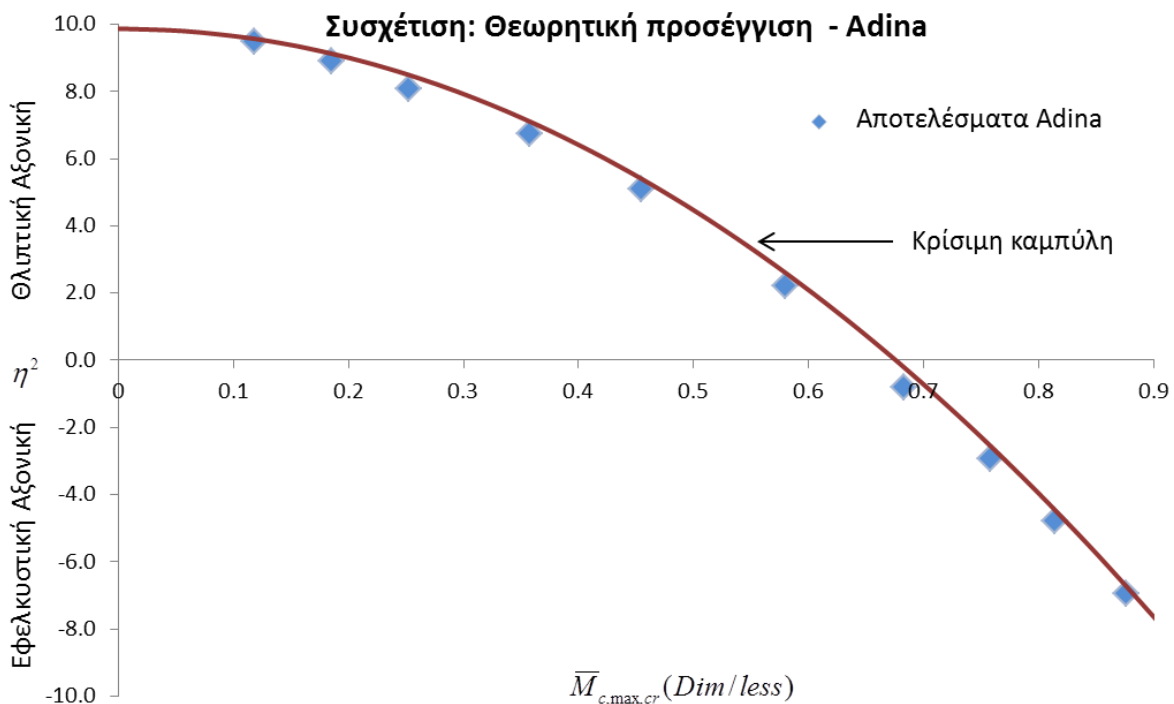
Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που εφαρμόστηκε. Έτσι, θα πραγματοποιήσουμε πλήθος γραμμικών ελαστικών αναλύσεων (Linearized Buckling) σε αμφιέριστη δοκό με συγκεντρωμένη εγκάρσια φόρτιση στο μέσον του μήκους της, με ταυτόχρονη δράση εφελκυστικής ή θλιπτικής αξονικής δύναμης. Η δοκός που εξετάζεται έχει μήκος 8m, η διατομή είναι IPE 500 και το υλικό είναι χάλυβας S235.

Πίνακας 4.2 Σύγκριση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina.

Φόρτιση: Συγκεντρωμένη δύναμη στο μέσον της δοκού με σταθερή αξονική			
η^2 (Dim/less)	$\bar{M}_{c,max,cr,Theoretic}$	$\bar{M}_{c,max,cr,Adin}$	Απόκλιση (%)
9.4758	0.1249	0.1184	3.07
8.8987	0.1918	0.1854	1.97
8.0860	0.2670	0.2527	1.18
6.7540	0.3492	0.3577	3.31
5.0922	0.4395	0.4543	3.44
2.1996	0.5545	0.5799	2.58
-2.9509	0.7478	0.7577	0.01
-6.9318	0.8784	0.8765	0.22
-4.7912	0.8208	0.8142	2.71
-0.7956	0.6806	0.6830	5.36
M.O. Αποκλίσεων:			2.39
<i>Χάλυβας: S235, Μήκος: 8m, Διατομή: IPE 500</i>			

Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα Adina. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε γραμμική ελαστική ανάλυση σε μια δοκό με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (διατομή, μήκος, κατηγορία χάλυβα, συνθήκες στήριξης), όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη αξονική δύναμη, η^2 θλιπτική ή εφελκυστική, που ασκείται στον φορέα. Να σημειώσουμε ότι το πρόσημο

“+” αντιστοιχεί σε θλιπτική αξονική δύναμη, ενώ το πρόσημο “-“ αντιστοιχεί σε εφελκυστική αξονική δύναμη. Η δεύτερη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη κρίσιμη ροπή που προκύπτει από την θεωρητική προσέγγιση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα, ενώ η τρίτη στήλη περιέχει την αντίστοιχη κρίσιμη ροπή που προέκυψε από το Adina. Η τέταρτη στήλη περιέχει την απόκλιση % μεταξύ των δυο τιμών των κρίσιμων αδιαστατοποιημένων καμπτικών ροπών (θεωρίας και Adina). Τέλος, ο μέσος όρος των αποκλίσεων υπολογίστηκε στο 2.39%. Η τιμή αυτή, θεωρείται ικανοποιητική, αν ληφθούν υπ’ όψιν διάφορες αβεβαιότητες που σχετίζονται με την προσομοίωση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων αλλά και τις απλοποιήσεις που έγιναν κατά τη μόρφωση και την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.



Σχήμα 4.15 Συσχέτιση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina

Στο Σχ. 4.15 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα με το οποίο φαίνεται η συσχέτιση της θεωρητικής προσέγγισης με το Adina. Συγκεκριμένα, βλέπουμε την “Κρίσιμη καμπύλη” που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο Σχ. 4.14 και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Adina (βλ. Πίνακα 4.2). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο μέσος όρος των αποκλίσεων είναι 2.39%.

4.3.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Μη Γραμμική Ανάλυση χωρίς αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας δεν έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Σκοπός αυτής της

ανάλυσης είναι να βρεθεί το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας καθώς και το σημείο διακλαδώσεως του δρόμου αυτού. Έτσι, από την εξίσωση (4.21) που καταλήξαμε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβανομένων υπόψη ότι η λύση της εξίσωσης είναι της μορφής: $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$ αλλά και τους δυο πρώτους όρους της σειράς Taylor, η οποία είναι:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) - 4 \cdot M_{c,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{\phi^3(\xi)}{6} \right] = 0$$

ή

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \phi(\xi) - 4 \bar{M}_{c,\max}^2 p^2 \xi^2 \phi_0 \left[\sin(\pi \cdot \xi) - \frac{\phi_0^3 \cdot \sin^3(\pi \cdot \xi)}{6} \right] = 0$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.23):

$$\phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \phi(\xi) - 4 p^2 \bar{M}_{c,\max}^2 \xi^2 \phi_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi \xi) - \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi \xi) \right] = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.23), λαμβάνοντας υπόψη ότι στο μέσον της δοκού η στροφή της διατομής είναι η μέγιστη και ισούται με ϕ_0 , προχωράμε στην επίλυση με χρήση των παρακάτω συνοριακών συνθηκών:

$$\phi(0) = 0, \phi''(0) = 0, \phi'''(1/2) = 0, \phi'(1/2) = 0$$

Με τη χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple επιλύουμε την τελευταία διαφορική εξίσωση μέσω της διαδικασίας που αναφέρθηκε. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην εξίσωση του δρόμου ισορροπίας σε όρους στροφών (4.23a). Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής:

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{A(\lambda^2, \eta^2, p^2, \bar{M}_{c,\max})}{\Pi(p^2, \eta^2, \lambda^2, \bar{M}_{c,\max})}}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας (σε όρους στροφών ϕ_0) μιας αμφιέρειστης δοκού υπό συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του μήκους της με ταυτόχρονη δράση θλιπτικής αξονικής δύναμης. Ειδικότερα, αν στον παραπάνω τύπο, κρατήσουμε σταθερό τον αδιαστατοποιημένο όρο η^2 της αξονική δύναμης και αυξάνουμε σταδιακά τον όρο της αδιαστατοποιημένης ροπής, τότε η πρώτη τιμή της ϕ_0 (θα ισούται με μηδέν) για την οποία θα ορίζεται η εξίσωση θα αποτελεί και σημείο διακλαδώσεως του συγκεκριμένου προβλήματος ευστάθειας που μελετάμε. Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή της ροπής, τότε το σύνολο των σημείων $(\phi_0, \bar{M}_{c,\max})$ που θα προκύψουν, αποτελούν τον

μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Ο δρόμος αυτός, προφανώς θα έχει σκοπό να χαρακτηρίσουμε τη μεταλυγισμική συμπεριφορά του φορέα. Βέβαια, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το σημείο του δρόμου αυτού για το οποίο η μεσαία διατομή (είναι και η δυσμενέστερη) θα παρουσιάσει για πρώτη φορά διαρροή, έτσι ώστε να δούμε μέχρι ποιο σημείο ο δρόμος αυτός έχει νόημα.

Πέραν όμως από τον δρόμο ισορροπίας σε όρους στροφών ϕ_0 που περιγράφεται από την παραπάνω σχέση μπορούν να εξαχθούν και δρόμοι ισορροπίας σε όρους οριζόντιων μετακινήσεων ν_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας προσεγγιστικής μεν, ικανοποιητικής δε, συσχέτισης της στροφής ϕ_0 με τη πλευρική εκτροπή ν_0 . Η συσχέτιση αυτή γίνεται ως εξής:

Η σχέση (4.19), γράφεται ως εξής: $\phi''(\xi) - \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot \nu(\xi)$

Αν κάνουμε την παραδοχή ότι

$$\phi(\xi) = \phi_0 \sin(\pi \cdot \xi)$$

και

$$\nu(\xi) = \nu_0 \sin(\pi \cdot \xi)$$

Τότε για $\xi=1/2$, προκύπτει η εξής σχέση (4.24): $\nu_0 = \frac{(\pi^2 + \lambda^2)}{\bar{M}_0 \cdot p^2} \phi_0$

Στην περίπτωση όπου σε μια αμφιέριστη δοκό ασκείται μόνο αξονική θλιπτική δύναμη N , τότε η τιμή της αξονικής δύναμης αυτής για την οποία λυγίζει η δοκός τύπου διπλού ταυ περί τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα (κατά Euler) είναι:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$$

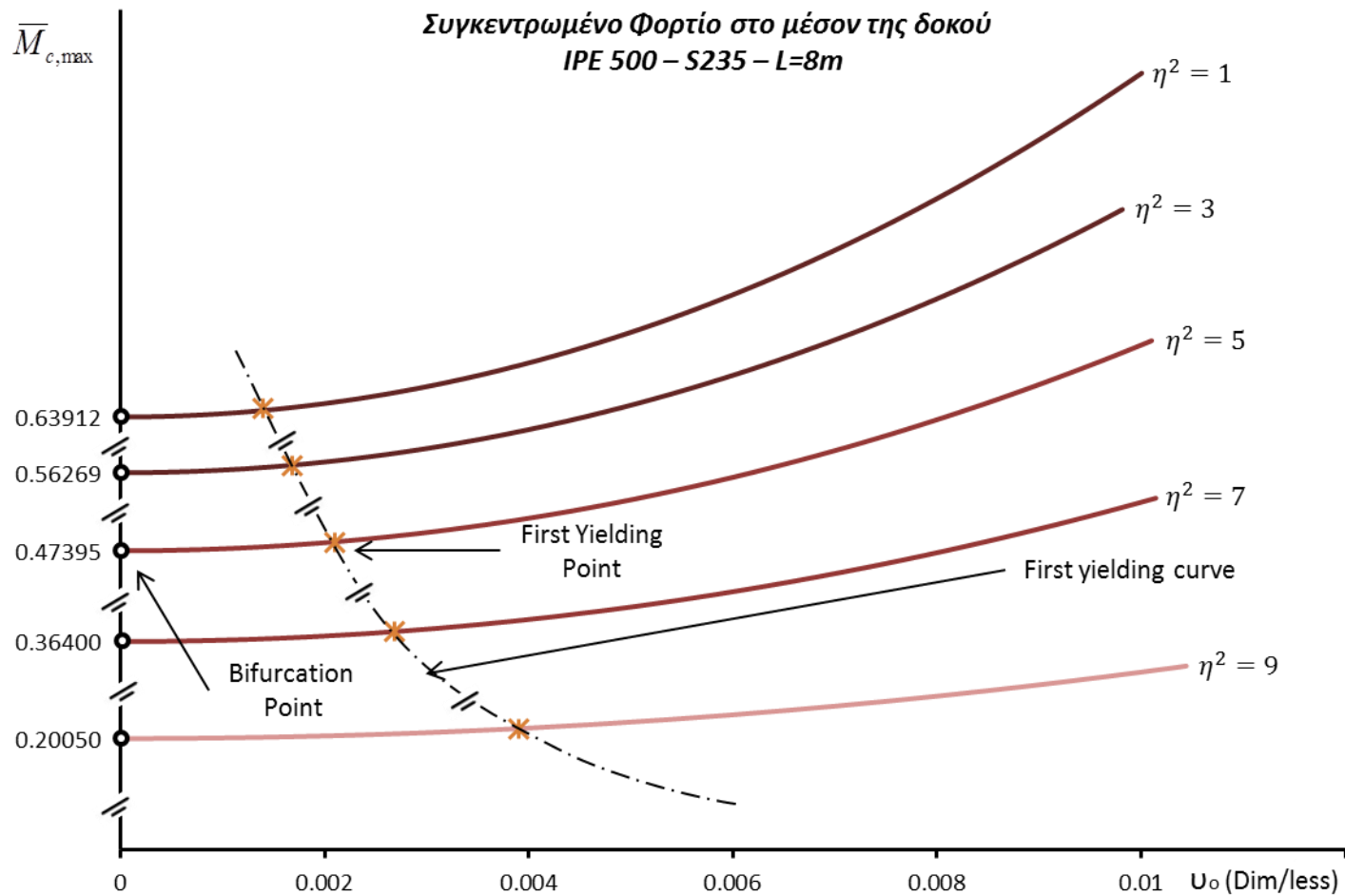
ή

$$\eta_{cr,y}^2 = \pi^2 \approx 9.87$$

Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις αυτές έχουν νόημα όταν το μέγεθος της θλιπτικής αξονικής δύναμης που ασκείται στη δοκό δεν υπερβαίνει την τιμή λυγισμού της. Δηλαδή όταν:

$$N \leq N_{cr,y} \quad \text{ή αλλιώς:} \quad \eta^2 \leq \eta_{cr,y}^2$$

Για τον παραπάνω λόγο, στο παρακάτω διάγραμμα μελετούνται οι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας μιας αμφιέριστης δοκού για διάφορες τιμές της αδιαστατοποιημένης θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 < \eta_{cr,y}^2 \approx 9.87$. Προφανώς, λήφθηκε υπόψη ο έλεγχος για τη μη εμφάνιση διαρροής σε καμία ίνα της δοκού για τις διάφορες τιμές των αξονικών δυνάμεων που μελετούνται.



Σχήμα 4.16 Μεταλυσιμικοί δρόμοι ισορροπίας στην περίπτωση αμφιέρειστης δοκού υπό συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του μήκους της με ταυτόχρονη αξονική δύναμη, χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στον φορέα

Συγκεκριμένα, στο Σχ.4.16 βλέπουμε τους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση μιας αμφιέριστης δοκού, υπό συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσον του μήκους της, με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης. Να σημειωθεί ότι η δοκός θεωρείται τέλειος φορέας, δηλαδή δεν υπάρχουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες σε κανένα σημείο αυτής. Η δοκός έχει διατομή *IPE500*, το μήκος της είναι $l=8m$ και ο χάλυβας είναι κατηγορίας *S235*. Οι συνεχείς καμπύλες (κόκκινη απόχρωση) αντιστοιχούν στους μεταλυγισμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση που έχουμε θλιπτικό αξονικό φορτίο.

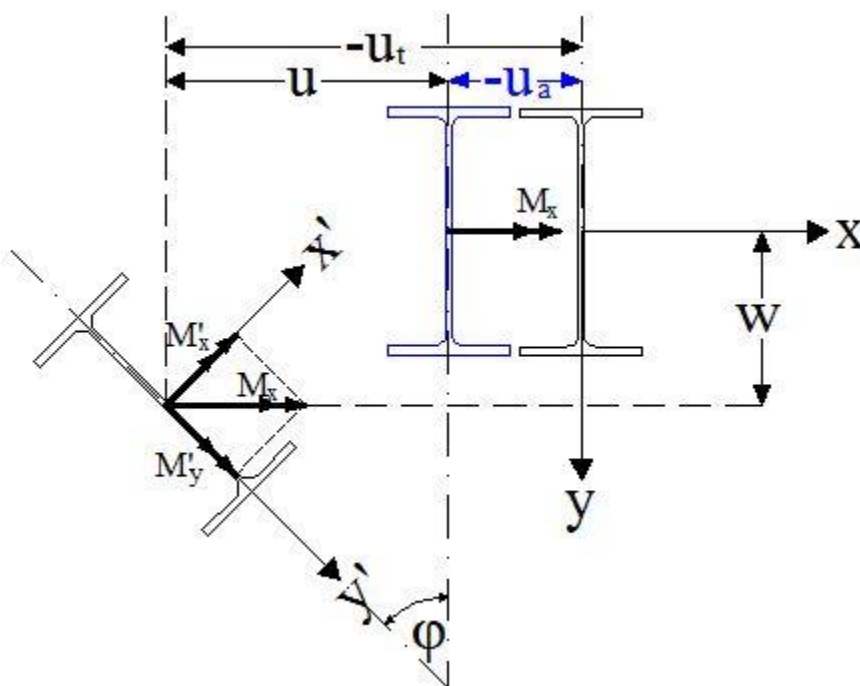
Στον κατακόρυφο άξονα $v_0 = 0$ σημειώνονται τα σημεία διακλαδώσεως (bifurcation ή branching points). Από τους δρόμους ισορροπίας παρατηρούμε ότι ο δευτερεύων κλάδος (secondary path) ή αλλιώς μεταλυγισμικός κλάδος (post-buckling path) έχει ανοδική πορεία και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή έχουμε μεταλυγισμική αντοχή. Αυτό σημαίνει ότι πέραν του κρίσιμου σημείου, η δοκός δε χάνει την αντοχή της αλλά διαθέτει κάποια μεγαλύτερη αντοχή πέραν από αυτή που μας υποδεικνύει το σημείο διακλαδώσεως. Μέσω του διαγράμματος αυτού, διαπιστώνουμε τη δυσμενή συμβολή του θλιπτικού φορτίου στο λυγισμό της δοκού. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι όσο η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης μεγαλώνει, τόσο μειώνεται και η κρίσιμη τιμή της ροπής για την οποία η δοκός εκτρέπεται πλευρικά. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο κύριοι δρόμοι ισορροπίας σε όλες τις περιπτώσεις, είναι πάνω στον κατακόρυφο άξονα $v_0 = 0$, ξεκινούν από την αρχή των αξόνων και προφανώς καταλήγουν στην τιμή $\bar{M}_{c,max,cr}$.

Επίσης, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που φαίνονται στο παρακάτω Σχ.4.16 δεν έχουν νόημα από κάποιο σημείο τους και έπειτα. Δηλαδή, σε κάθε δρόμο ισορροπίας υπάρχει ένα σημείο για το οποίο η διατομή της δοκού αρχίζει οριακά να διαρρέει. Αυτό το σημείο αναφέρεται και ως πρώτο σημείο διαρροής (first yielding point) και έχει τετμημένη την πλευρική εκτροπή που θα έχει το κέντρο βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, τη στιγμή που θα παρουσιαστεί για πρώτη φορά διαρροή, και τεταγμένη την κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή που θα ασκείται στη δοκό τη στιγμή εκείνη. Ο αναλυτικός υπολογισμός των σημείων διαρροής παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α της εν λόγω μεταπτυχιακής εργασίας.

Αν ενωθούν όλα τα σημεία “πρώτης διαρροής” (first yielding points) για τους δρόμους ισορροπίας που απεικονίζονται στο Σχ.4.16, τότε θα μπορούσαμε να χαράξουμε μια καμπύλη η οποία θα μπορούσε να ονομαστεί “καμπύλη πρώτης διαρροής” ή αλλιώς “first yielding curve”. Αυτή η καμπύλη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί πλέον για να βρούμε προσεγγιστικά το πρώτο σημείο διαρροής αν χαράζαμε οποιονδήποτε άλλο δρόμο ισορροπίας για την περίπτωση του παραδείγματος που μελετάμε στο υποκεφάλαιο αυτό.

Μη Γραμμική Ανάλυση με αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Μια αρχική γεωμετρική ατέλεια θα μπορούσε να είναι μια μετατόπιση πάνω σε έναν – οποιονδήποτε άξονα της διατομής του φορέα ή κάποια στροφή περί οποιονδήποτε άξονα της διατομής. Στην περίπτωση όμως του πλευρικού λυγισμού, η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, περιγράφεται από δυο μετατοπίσεις u και w κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, αλλά και από μια στροφή ϕ περί τον κεντροβαρικό άξονα z του φορέα. Έτσι, μια αρχική ατέλεια στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού θα μπορούσε να αποδοθεί με τρόπο τέτοιο, ώστε η διατομή να έχει την ίδια παραμορφωσιακή εικόνα με την παραμόρφωση της διατομής (στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει αρχική ατέλεια σε όλους τους άξονες της διατομής. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού. Παρακάτω, επιλέγεται να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχοντας εισάγει ως αρχική ατέλεια στο φορέα μόνο οριζόντια - πλευρική εκτροπή του κέντρου βάρους της διατομής u_a (κατά τον άξονα x). Ο λόγος που επιλέχθηκε να εισαχθεί η συγκεκριμένη αρχική ατέλεια καθ' αυτόν τον άξονα κατά την κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων είναι να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Adina. Στο παρακάτω Σχ.4.17 παρουσιάζεται μια τυχαία διατομή της δοκού στην απαραμόρφωτη, παραμορφωμένη κατάσταση καθώς και στην κατάσταση αρχικών ατελειών (μπλε χρώμα).



Σχήμα 4.17 Κατάσταση αρχικών ατελειών της διατομής σε τυχαία θέση της δοκού.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η αρχική ατέλεια που εισάγεται στην διατομή για να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού είναι:

- $u_a(z)$: Αρχική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Επίσης έχουμε:

- $u(z)$: Οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $w(z)$: Κατακόρυφη μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $\phi(z)$: Στροφή της διατομής περί το κέντρο διάτμησης λόγω πλευρικού λυγισμού.

Επομένως:

- $u_t(z) = u_a(z) + u(z)$: Ολική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ισορροπία της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$EI_x w''(z) + Nw(z) = -2 \frac{M_{c,\max} \cdot z}{\ell} \quad (4.25)$$

$$EI_y u''(z) + Nu_t(z) = 2 \frac{M_{c,\max} \cdot z}{\ell} \cdot \sin(\phi(z)) \quad (4.26)$$

$$GJ\phi'(z) - EC_w\phi'''(z) = -2 \frac{M_{c,\max} \cdot z}{\ell} u_t'(z) + 2 \frac{M_{c,\max} \cdot z}{\ell} (u(z) + u_a(z) - u(\ell/2) - u_a(\ell/2)) \quad (4.27)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.25) είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες δυο εξισώσεις, μετά από αδιαστατοποίηση αυτών έχουμε:

$$\begin{aligned} v''(\xi) + \eta^2 v_t(\xi) &= 2\bar{M}_{c,\max} \cdot \xi \cdot \sin(\phi(\xi)) \\ \phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) &= 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v_t'(\xi) - 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (v_t(\xi) - v_{t,m}) \end{aligned}$$

όπου

v_m : αδιάστατο βέλος στο μέσον της δοκού,

$v_{m,\alpha}$: αδιάστατο βέλος στο μέσον της δοκού λόγω αρχική γεωμετρικής ατέλειας v_a ,

$v_t = u_t / \ell$, $\xi = z / \ell$, $\eta^2 = N\ell^2 / EI_y$, $\bar{M}_{c,\max} = M_{c,\max} \cdot \ell / EI_y$, $\lambda^2 = GJ\ell^2 / EC_w$

και $p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$

ή

$$v''(\xi) + \eta^2(v(\xi) + v_\alpha(\xi)) = 2\bar{M}_{c,max} \cdot \xi \cdot \sin(\phi(\xi)) \quad (4.28)$$

$$\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) = 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v'_i(\xi) - 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (v(\xi) + v_\alpha(\xi) - v_m - v_{m,\alpha}) \quad (4.29)$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (4.29), τότε προκύπτει:

$$v''(\xi) = \frac{\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi} - v''_\alpha(\xi)$$

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (4.29), τότε προκύπτει:

$$v(\xi) = \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi} - v_\alpha(\xi) + C$$

Όμως $C = 0$, επειδή $v(0) = \phi''(0) = \phi(0) = v''_\alpha(0) = 0$

Μετά από αντικατάσταση των δυο παραπάνω εκφράσεων στην εξίσωση (4.28), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση (4.30):

$$\frac{\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{2 \cdot p^2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot \xi} - v''_\alpha(\xi) + \eta^2 \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{2 \cdot p^2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot \xi} = 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot \xi \cdot \sin(\phi(\xi))$$

ή

$$\phi''''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi) + \eta^2 (\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)) = 4 \cdot \bar{M}_{c,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) + 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v''_\alpha(\xi)$$

ή

$$\phi'''' - (\lambda^2 - \eta^2) \phi'' - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi = 4 \cdot \bar{M}_{c,max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) + 2 \cdot \bar{M}_{c,max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot v''_\alpha$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση, εκφρασμένη σε όρους στρωφών. Παρατηρούμε επίσης ότι η εξίσωση αυτή, περιέχει τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που εισήχθησαν στον υπό μελέτη φορέα. Χαρακτηρίζεται ως μη ομογενής διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξεως. Είναι προφανές ότι η επίλυση της, με την παρούσα μορφή που έχει, είναι σχεδόν αδύνατη. Σκοπός μας είναι να εξαχθεί μια σχέση που να περιγράφει τον δρόμο ισορροπίας, που να περιγράφει τη συμπεριφορά σε πλευρικό λυγισμό, του παρόντος στατικού συστήματος (φορές – φόρτιση), λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές ατέλειες που εισήχθησαν. Ο τρόπος επίλυσης της εξίσωσης που θα ακολουθήσει, βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- $v_\alpha(\xi) = v_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$

- $\sin(\phi(\xi)) \cong \phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{3!}$ (Χρήση σειράς Taylor) με $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$

Άρα, η εξίσωση (4.30) γίνεται:

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = \\ = 4 \cdot \bar{M}_{c,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{6} \right] - 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot \pi^2 \cdot \nu_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3\sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.31):

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = \\ = 4 \cdot \bar{M}_{c,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot \phi_0 \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi\xi) + \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi\xi) \right] - 2 \cdot \bar{M}_{c,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot \pi^2 \cdot \nu_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών $\phi(0) = \phi''(0) = \phi'(1/2) = \phi'''(1/2) = 0$, οι οποίες βασίζονται στην παραδοχή της μηδενικής στρέψης και ταυτόχρονα ελεύθερης στρέβλωσης της διατομής στα άκρα της αμφιέρειστης δοκού, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου Maple, καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής: $\phi(\xi) = g(p^2, \lambda^2, \eta^2, \phi_0, \nu_\alpha, \bar{M}_{c,\max}, \xi)$. Αν βασιστούμε στο γεγονός ότι κατά τον πλευρικό λυγισμό μιας αμφιέρειστης δοκού, η μέγιστη στροφή της διατομής εμφανίζεται στο μέσον της, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι $\phi(1/2) = \phi_0$, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση (4.32), η οποία αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, στην περίπτωση αμφιέρειστης δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένη φορτία σε όλο το μήκος της, ταυτόχρονη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης και επιρροή αρχικών ατελειών που θα μπορούσε να έχει ο φορέας.

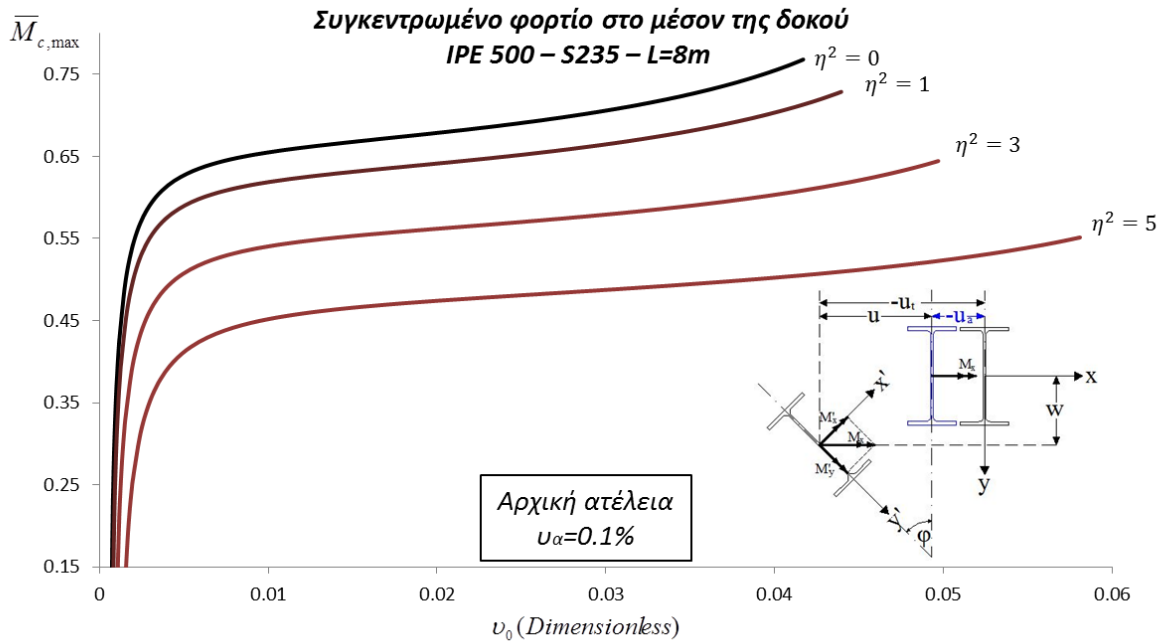
$$\bar{M}_{c,\max} = \sqrt{\frac{A(\lambda^2, \eta^2, p^2, \phi_0, \nu_\alpha)}{\Pi(p^2, \eta^2, \lambda^2, \phi_0)}} \quad (4.32)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η παραπάνω εξίσωση (4.32) αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, μιας αμφιέρειστης δοκού στην οποία ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του μήκος της και ταυτόχρονα ασκείται αξονική δύναμη. Η διαφορά της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση (4.23a) έγκειται στο γεγονός ότι λαμβάνονται υπόψη οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που πιθανώς να έχει το υπό μελέτη στατικό σύστημα (φορέας – φορτίο).

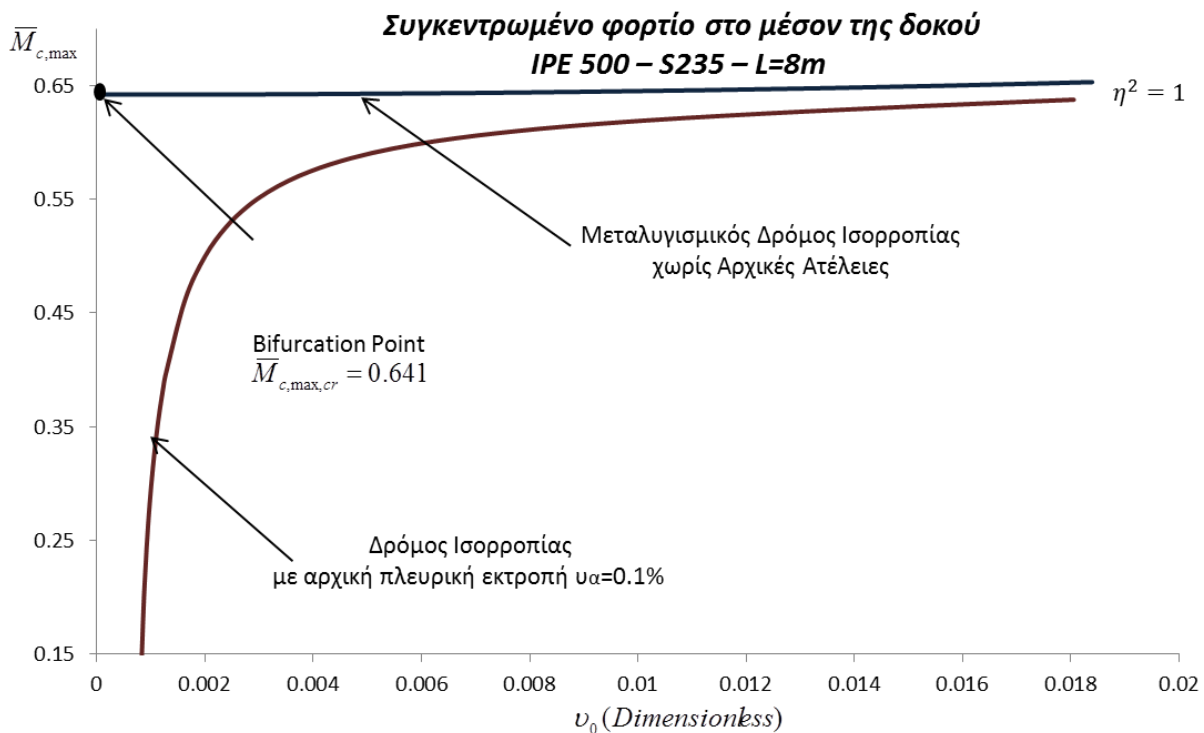
Στα παρακάτω σχήματα, παρουσιάζονται κάποια διαγράμματα μέσω των οποίων γίνεται προσπάθεια για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων, όσον αφορά την επιρροή των αρχικών ατελειών στην συμπεριφορά του φορέα. Ταυτόχρονα, με τα παρακάτω διαγράμματα, εκτός από τα χρήσιμα συμπεράσματα, επιβεβαιώνονται τα ήδη αναμενόμενα αποτελέσματα.

Στο Σχ.4.18, παρουσιάζονται οι δρόμοι ισορροπίας για τον υπό μελέτη φορέα για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης. Για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής ατέλειας που εισάγεται στο σύστημα είναι ίδια και για τους πέντε δρόμους ισορροπίας που παρουσιάζονται. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από το συγκεκριμένο σχήμα είναι ότι οι δρόμοι ισορροπίας δεν παρουσιάζουν κάποιο σημείο διακλαδώσεως (bifurcation point), δηλαδή δε διακρίνονται σε πρωτεύοντες και δευτερεύοντες δρόμοι, αλλά είναι ενιαίοι. Παρατηρούμε επίσης, ότι οι δρόμοι ισορροπίας, από κάποια τιμή της κρίσιμης ροπής $\bar{M}_{c,max}$ και μετά, παρουσιάζουν έντονη αλλαγή της κλίσης τους. Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει αστοχία σε πλευρικό λυγισμό. Βέβαια, μετά το σημείο αυτό, οι δρόμοι παρουσιάζουν ανοδική πορεία, πράγμα που υποδηλώνει την μεταλυγισμική αντοχή των φορέων. Τέλος, είναι εμφανής η επιρροή του μεγέθους καθώς και της φοράς της δρώσας αξονικής δύναμης στην αντοχή της δοκού. Όσο μεγαλώνει η τιμή της θλιπτικής δύναμης, τόσο μικρότερη αντοχή παρουσιάζει ο φορέας.

Στο Σχ.4.19 παρουσιάζεται ο μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας (σε όρους πλευρικής εκτροπής v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής) για την περίπτωση που θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 = 1$. Ο δρόμος αυτός περιγράφεται από τη σχέση (4.23a) που αναπτύχθηκε για τις περιπτώσεις που δεν έχουμε αρχικές ατέλειες στον φορέα. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται και ο δρόμος ισορροπίας του ίδιου στατικού συστήματος (φορέα – φόρτισης) με μια εισηγμένη αρχική ατέλεια στο σύστημα. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από αυτούς τους δυο δρόμους είναι ότι στην περίπτωση χωρίς αρχικές ατέλειες έχουμε σημείο διακλαδώσεως στο δρόμο ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση με αρχικές ατέλειες, ο δρόμος ισορροπίας είναι ενιαίος. Όπως φαίνεται, η μεταλυγισμική συμπεριφορά και των δυο φορέων, σχεδόν ταυτίζεται. Παρουσιάζεται και στις δυο περιπτώσεις, δηλαδή, μεταλυγισμική συμπεριφορά στον φορέα (post buckling strength).

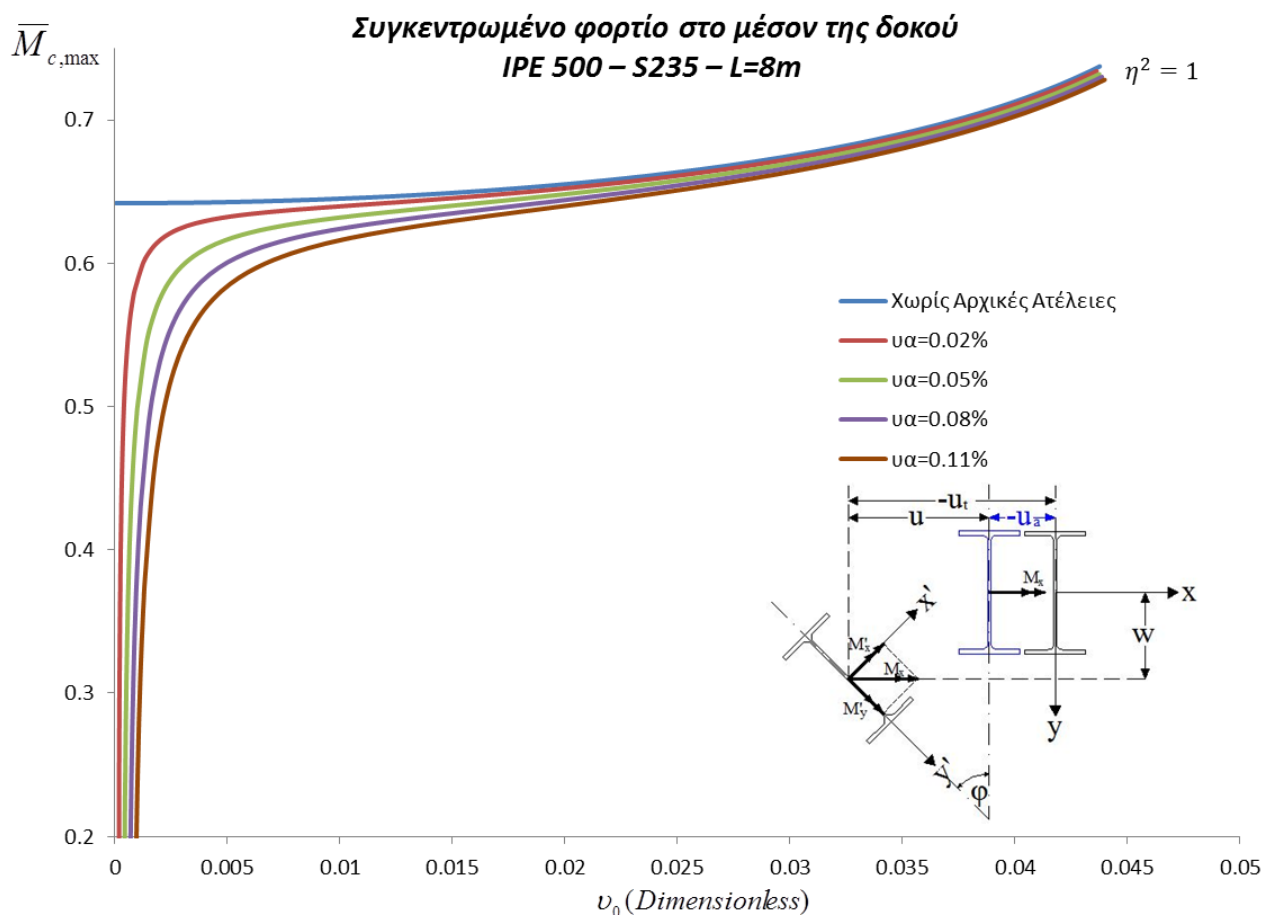


Σχήμα 4.18 Δρόμοι ισορροπίας δοκού με αρχικές ατέλειες για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης.



Σχήμα 4.19 Δρόμος ισορροπίας με αρχικές ατέλειες του φορέα και μεταλυσιμικός δρόμος ισορροπίας χωρίς αρχικές ατέλειες στο φορέα για ίδια αξονική δύναμη.

Στο Σχ. 4.20, εμφανίζονται οι δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές της αρχικής ατέλειας που εισάγεται αρχικά στο φορέα. Στα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής πλευρικής εκτροπής μεταβάλλεται, ενώ η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης είναι ίδια σε για όλες τις περιπτώσεις και είναι $\eta^2 = 1$. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί είναι η επιρροή της αρχικής ατέλειας στη συμπεριφορά του φορέα. Παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή της αρχικής εκτροπής v_α αυξάνεται, τόσο πιο μικρή είναι η τιμή της ροπής $\bar{M}_{c,max}$ για την οποία ο εκάστοτε δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει έντονη αλλαγή στην κλίση του. Αυτό μας οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι αρχικές ατέλειες που εισάγονται στο σύστημα, τόσο νωρίτερα χάνει την αντοχή του ο φορέας.



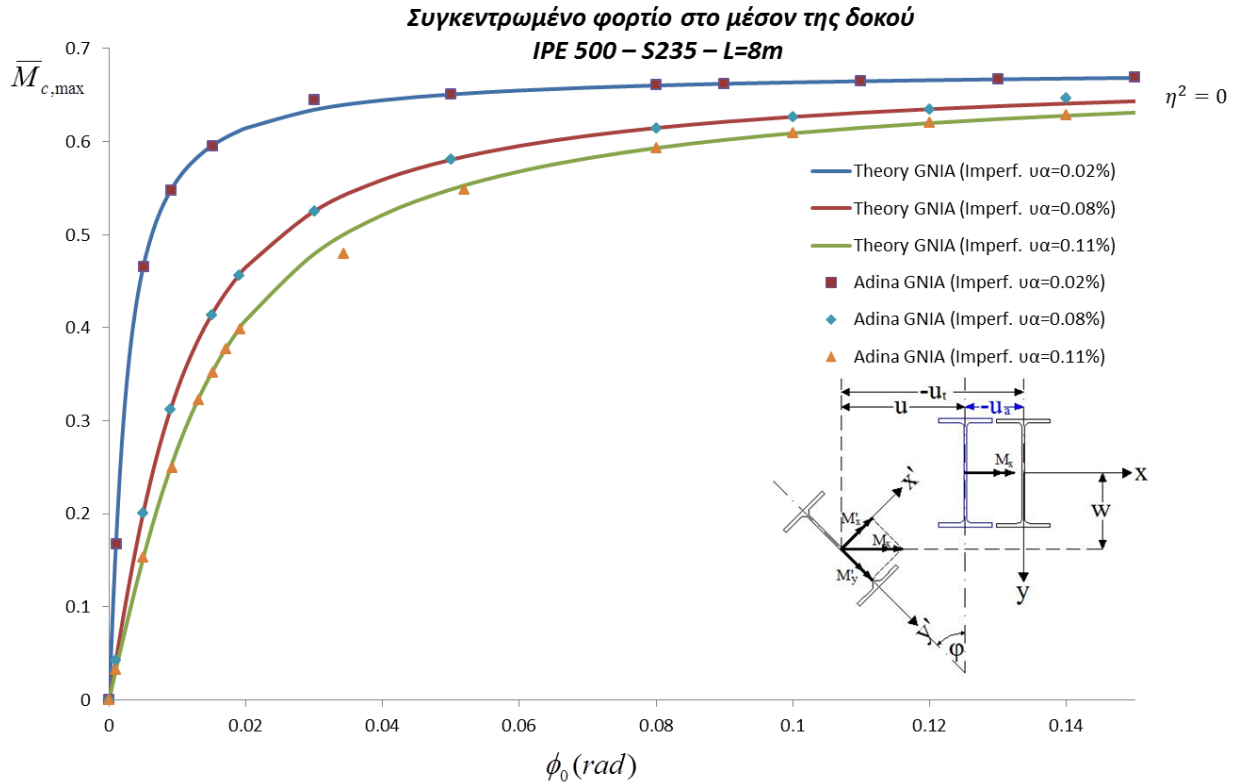
Σχήμα 4.20 Δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές του v_α .

Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

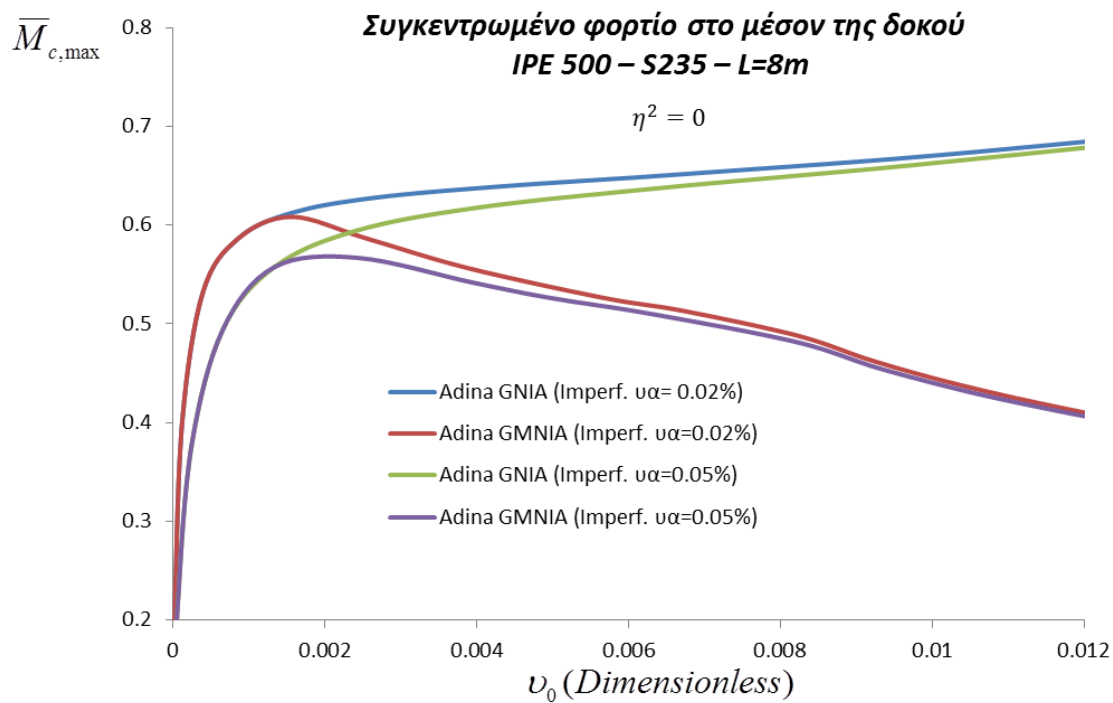
Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που αναπτύχθηκε. Έτσι λοιπόν, στη συνέχεια παρουσιάζεται πλήθος μη γραμμικών αναλύσεων. Η μη γραμμικότητα των αναλύσεων αυτών, μπορεί να παρουσιάζεται στη γεωμετρία του φορέα ή στο υλικό, ή ακόμα, και στον συνδυασμό αυτών των δυο μεταξύ τους.

Στο Σχ.4.21, οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται αφορούν μια αμφιέριστη δοκό με διχαλωτή στήριξη στα άκρα (ελεύθερη στρέβλωση – μηδενική στρέψη). Οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται είναι εκφρασμένοι σε όρους στροφών ϕ_0 (όπου ϕ_0 είναι η στροφή της μεσαίας διατομής της δοκού κατά την εκτροπή σε πλευρικό λυγισμό). Η δοκός είναι μήκους 8m, διατομής IPE 500 και ο χάλυβας είναι κατηγορίας S235. Οι συνεχείς γραμμές αποτελούν τρεις δρόμους ισορροπίας που έχουν προκύψει από τη θεωρητική προσέγγιση που αναπτύχθηκε προηγουμένως και αφορά τη γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα με αρχική γεωμετρική ατέλεια. Η διαφορά μεταξύ των τριών δρόμων ισορροπίας έγκειται στο μέγεθος της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας που εισήχθηκε στον φορέα πριν την ανάλυση. Εκτός από τις συνεχείς γραμμές που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση, παρουσιάζονται και οι αντίστοιχοι δρόμοι ισορροπίας, όπως προκύπτουν από μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το Adina, παρουσιάζονται μέσω κάποιων σημείων τους, ώστε να διακρίνονται από τους αντίστοιχους συνεχείς. Παρατηρούμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων, είναι αρκετά κοντά ή αλλιώς συμπίπτουν ικανοποιητικά με τους αντίστοιχους που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση.

Στο Σχ.4.22 διακρίνονται τέσσερεις δρόμοι ισορροπίας σε όρους πλευρικών μετακινήσεων v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, όπως προέκυψαν από αναλύσεις που έγιναν από το Adina. Οι δύο από αυτούς αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.02\%$ και οι υπόλοιποι αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.05\%$. Για κάθε περίπτωση αρχικών ατελειών, πραγματοποιήθηκε μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση (GNIA) και μια μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας και υλικού (GMNIA). Ένα συμπέρασμα είναι η επιρροή του μεγέθους της αρχικής ατέλειας στην συμπεριφορά του φορέα. Στην περίπτωση της μικρότερης εκ των δυο αρχικών ατελειών, ο φορέας χάνει την αντοχή του για μεγαλύτερες τιμές της ροπής $\bar{M}_{c,max}$. Ακόμη, η ανάλυση GMNIA προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική συμπεριφορά του φορέα, καθώς εκτός από τη μη γραμμικότητα της γεωμετρίας λαμβάνει υπόψη και τη διαρροή του υλικού. Τέλος, μέσω της κλίσης των διαγραμμάτων, βλέπουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας E του φορέα είναι μεγαλύτερο όσο η αρχική ατέλεια πλησιάζει στο μηδέν.



Σχήμα 4.21 Δρόμοι ισοροπίας ανάλυσης GNIA. Σύγκριση Adina με θεωρητική προσέγγιση



Σχήμα 4.22 Αναλύσεις GMNIA και GNIA στο Adina

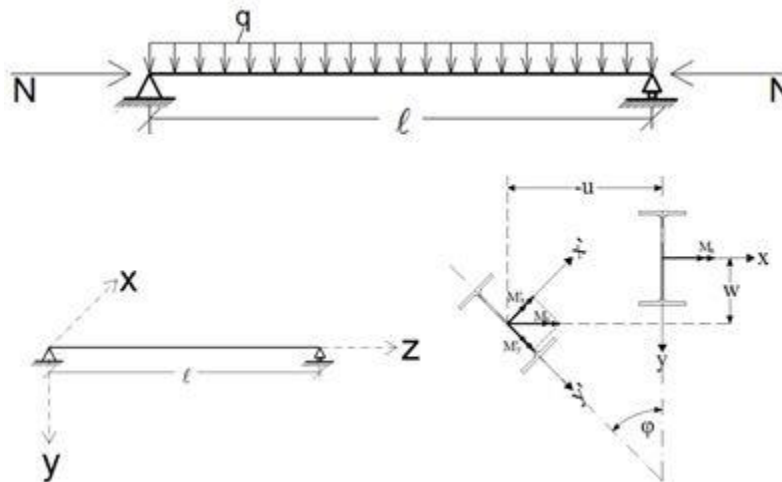
4.4 Περίπτωση Ομοιόμορφα Κατανεμημένου φορτίου στη δοκό.

4.4.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε μια δοκό διατομής I . Το επίπεδο εξωτερικής φόρτισης της δοκού αυτής, το οποίο έχει τη μεγαλύτερη ακαμψία ($I_x > I_y$), ορίζεται από τον κατακόρυφο άξονα y και τον διαμήκη άξονα z (που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής). Η δοκός υπόκειται σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q , και σε σταθερή αξονική δύναμη που ασκείται στο κέντρο βάρους της διατομής. Για όσο η τιμή του φορτίου q αυξάνεται σταδιακά από το μηδέν και η N παραμένει σταθερή, υποθέτουμε ότι:

- i. Η γεωμετρία της διατομής δεν αλλάζει
- ii. Κατά την κρίσιμη τιμή της ροπής $M_{d,max} = M_{d,max,cr}$, η οποία είναι μικρότερη από την ελαστική φέρουσα ικανότητα, σε κάμψη, της δοκού (ροπή διαρροής), η δοκός αναπτύσσει πλάγια κάμψη κατά τον άξονα z και συστροφή.

Η παραμορφωμένη κατάσταση της αρχικά τέλει δοκού, ορίζεται από τις πλευρικές εκτροπές-μετακινήσεις w και u του κέντρου βάρους της διατομής αλλά και από τη γωνία στροφής αυτού (Σχ.4.23).



Σχήμα 4.23 Περίπτωση ομοιόμορφης φόρτισης στη δοκό

Η ροπή κάμψης στο επίπεδο x - y για το διάστημα $0 \leq z \leq l$ δίδεται από τη σχέση:

$$M_x = \frac{q \cdot l}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} = \frac{q \cdot z}{2} (l - z) \quad 0 \leq z \leq l$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στην παραμορφωμένη κατάσταση στο στρεπτοκαμπτικό λυγισμό είναι:

$$EI_x w'' + Nw = -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \cos \phi \approx -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \quad (4.33a)$$

$$EI_y u'' + Nu = \frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \sin \phi \approx \frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \phi \quad (4.33b)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) u' + q \left(\frac{\ell}{2} u - \int_0^{\ell/2} u \cdot dz - u \cdot z + \int_0^z u \cdot dz \right) \quad (4.33c)$$

Όπου $M_{d,\max} = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$ η μέγιστη καμπτική ροπή στο μέσον της δοκού.

Επίσης, η παραγωγή είναι ως προς z και EI_x, EI_y είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ακαμψία της δοκού, αντιστοίχως.

Μετά από αδιαστατοποίηση των τελευταίων εξισώσεων, παράλειψη των αμελητέων (πολύ μικρών) όρων και ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην προηγούμενη περίπτωση (παρ. 4.3.1), καταλήγουμε στη κάτωθι διαφορική εξίσωση ως προς ϕ :

$$\phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - (16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 + \eta^2 \cdot \lambda^2) \cdot \phi(\xi) = 0 \quad (4.34)$$

όπου

$$\nu = u / \ell, \quad \xi = z / \ell, \quad \eta^2 = N\ell^2 / EI_y, \quad \bar{M}_{d,\max} = M_{d,\max} \cdot \ell / EI_y, \quad \lambda^2 = GJ\ell^2 / EC_w$$

και $p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$

4.4.2 Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Θεωρητική προσέγγιση

Όπως προαναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, η δοκός είναι αμφιέρειστη και η στήριξη στα άκρα είναι διχαλωτή. Αυτό σημαίνει ότι στα άκρα της δοκού, η στρέψη δεν επιτρέπεται – είναι μηδενική, και η στρέβλωση είναι ελεύθερη. Έχουμε επομένως τις εξής συνοριακές συνθήκες: $\phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0$, όπου $\phi(\xi)$ είναι η στροφή της διατομής – κατά την παραμόρφωσή της σε πλευρικό λυγισμό – περί το κέντρο διάτμησης της.

Αν εστιάσουμε στην εξίσωση (4.34), παρατηρούμε ότι δεν επιδέχεται κλειστή λύση. Για την επίλυσή της χρησιμοποιούμε μια προσεγγιστική τεχνική. Μεταφέρουμε τον μη γραμμικό όρο στο δεύτερο μέρος, οπότε έχουμε:

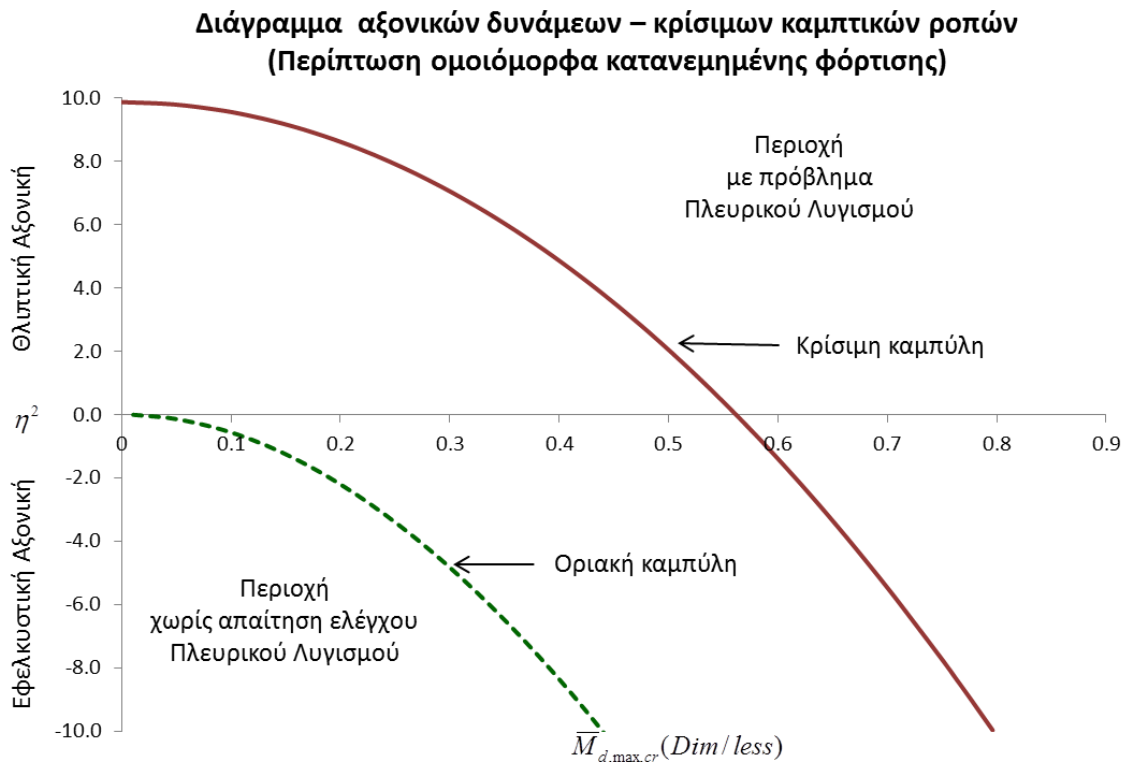
$$\phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 \cdot \phi(\xi)$$

Για τη γωνία φ του δεύτερου μέλους της τελευταίας εξίσωσης εισάγεται η συνάρτηση σχήματος $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$, που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και η οποία οδηγεί προσεγγιστικά σε πολύ καλά αποτελέσματα.

Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$\phi(\xi) = C_1 \cdot \sin(m \cdot \xi) + C_2 \cdot \cos(m \cdot \xi) + C_3 \cdot \sinh(\bar{m} \cdot \xi) + C_4 \cdot \cosh(\bar{m} \cdot \xi) + \phi_p \quad (4.35)$$

όπου ϕ_p είναι η μερική λύση που θα προκύψει από το δεξιό μέλος και οι σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες που είναι: $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi'(1) = \varphi'''(1) = 0$. Λόγω περιορισμού χώρου δεν θα παρουσιάσουμε την πλήρη έκφραση της εξ. (4.35). Από τη σχέση $\varphi_0 = \varphi(1/2)$ προκύπτει η σχέση αξονικής δύναμης η^2 , μέγιστων κρίσιμων ροπών πλευρικού λυγισμού $\bar{M}_{d,\max,cr}$ ενώ από τη σχέση $\varphi(\xi) = 0$ (μόνο στη περίπτωση εφελκυσμού, αφού για θλίψη η $\varphi(\xi) = 0$ ισχύει μόνο για την αφόρτιστη κατάσταση), προκύπτει η ελάχιστη εφελκυστική αξονική δύναμη $\eta_{d,\min}^2$ σε σχέση με την μέγιστη καμπτική ροπή $\bar{M}_{d,\max}$ για την οποία η δοκός δεν κινδυνεύει να αστοχήσει από στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.



Σχήμα 4.24 Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων – κρίσιμων ροπών στην περίπτωση ομοιόμορφα κατανεμημένης φόρτισης σε όλο το μήκος της δοκού.

Στο Σχ.4.24 παρουσιάζεται το διάγραμμα αδιαστατοποιημένων αξονικών δυνάμεων η^2 - αδιαστατοποιημένων κρίσιμων καμπτικών ροπών $\bar{M}_{d,max,cr}$. Διακρίνεται η “Οριακή Καμπύλη”, πέραν της οποίας έχουμε την περιοχή όπου δεν απαιτείται έλεγχος σε πλευρικό λυγισμό λόγω της ευνοϊκής επιρροής του εφελκυστικού αξονικού φορτίου. Επίσης διακρίνεται και η “Κρίσιμη Καμπύλη” πάνω στην οποία συγκεντρώνεται το πλήθος των κρίσιμων συνδυασμών $\eta^2 - \bar{M}_{d,max,cr}$ για τους οποίους ο φορέας αστοχεί σε πλευρικό λυγισμό. Οι συνδυασμοί αυτοί έχουν προέλθει από την εξίσωση (4.34) και αφορούν τη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Σημειώνεται ότι τα παραπάνω διάγραμμα αφορά μια αμφιέριστη δοκό διατομής IPE 500 με μήκος 8m.

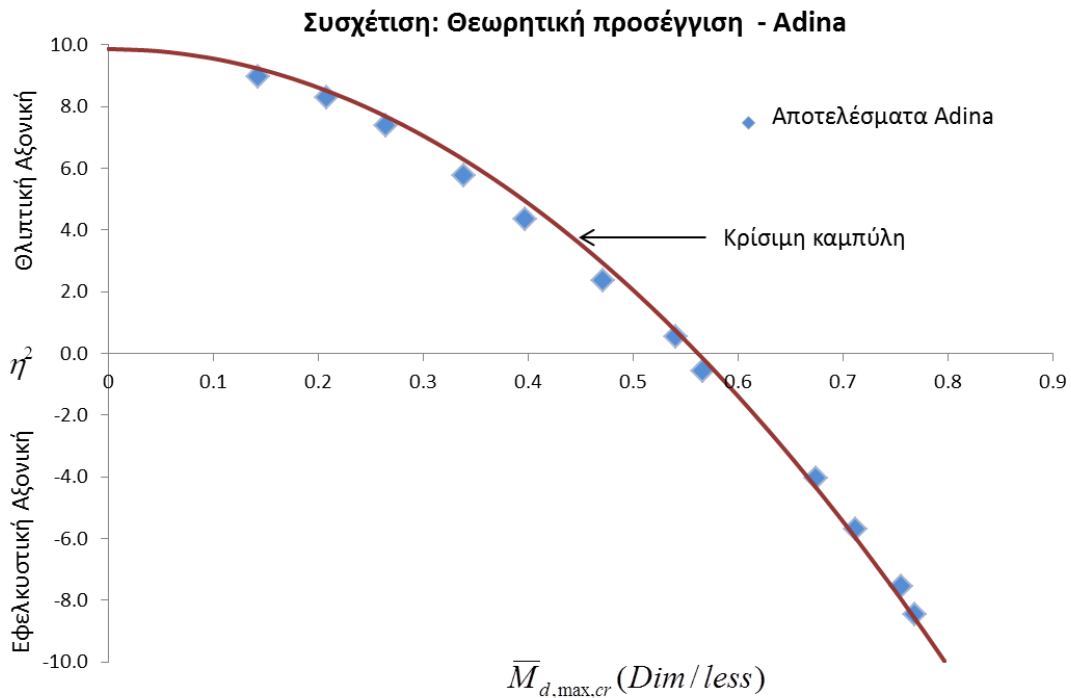
Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που εφαρμόστηκε. Έτσι, θα πραγματοποιήσουμε πλήθος γραμμικών ελαστικών αναλύσεων (Linearized Buckling) σε αμφιέριστη δοκό με ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο σε όλο το μήκος της, με ταυτόχρονη δράση εφελκυστικής ή θλιπτικής αξονικής δύναμης. Η δοκός που εξετάζεται έχει μήκος 8m, η διατομή είναι IPE 500 και το υλικό είναι χάλυβας S235.

Πίνακας 4.3 Σύγκριση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina.

Φόρτιση: Ομοιόμορφα κατανομημένη δύναμη στη δοκό με σταθερή αξονική			
η^2 (Dim/less)	$\bar{M}_{d,max,cr,Theoriti}$	$\bar{M}_{d,max,cr,Adin}$	Απόκλιση (%)
0.5407	0.5364	0.5407	0.80
8.3091	0.2144	0.2077	3.13
2.3547	0.4712	0.4709	0.05
4.3619	0.3928	0.3965	0.95
5.7566	0.3477	0.3386	2.61
8.9725	0.1467	0.1424	2.95
7.3940	0.2619	0.2641	0.82
-0.5657	0.5675	0.5657	0.31
-4.0464	0.6779	0.6744	0.51
-7.5550	0.7965	0.7555	5.14
-5.6946	0.7102	0.7118	0.23
-8.4514	0.8219	0.7683	6.52
Μ.Ο. Αποκλίσεων:			2.00
<i>Χάλυβας: S235, Μήκος: 8m, Διατομή: IPE 500</i>			

Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πρόγραμμα Adina. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε γραμμική ελαστική ανάλυση σε μια δοκό με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (διατομή, μήκος, κατηγορία χάλυβα, συνθήκες στήριξης), όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η πρώτη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη αξονική δύναμη, η^2 θλιπτική ή εφελκυστική, που ασκείται στον φορέα. Να σημειώσουμε ότι το πρόσημο “+” αντιστοιχεί σε θλιπτική αξονική δύναμη, ενώ το πρόσημο “-” αντιστοιχεί σε εφελκυστική αξονική δύναμη. Η δεύτερη στήλη του πίνακα περιέχει την αδιαστατοποιημένη κρίσιμη ροπή που προκύπτει από την θεωρητική προσέγγιση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα, ενώ η τρίτη στήλη περιέχει την αντίστοιχη κρίσιμη ροπή που προέκυψε από το Adina. Η τέταρτη στήλη περιέχει την απόκλιση % μεταξύ των δυο τιμών των κρίσιμων αδιαστατοποιημένων καμπτικών ροπών (θεωρίας και Adina). Τέλος, ο μέσος όρος των αποκλίσεων υπολογίστηκε στο 2.00%. Η τιμή αυτή, θεωρείται ικανοποιητική, αν ληφθούν υπ’ όψιν διάφορες αβεβαιότητες που σχετίζονται με την προσομοίωση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων αλλά και τις απλοποιήσεις που έγιναν κατά τη μόρφωση και την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.



Σχήμα 4.25 Συσχέτιση θεωρητικής προσέγγισης με το πρόγραμμα Adina

Στο Σχ. 4.25 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα με το οποίο φαίνεται η συσχέτιση της θεωρητικής προσέγγισης με το Adina. Συγκεκριμένα, βλέπουμε την “Κρίσιμη καμπύλη” που παρουσιάστηκε προηγουμένως στο Σχ. 4.24 και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το Adina (βλ. Πίνακα 4.3). Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο μέσος όρος των αποκλίσεων είναι 2.00%.

4.4.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Πλευρικού Λυγισμού

Μη Γραμμική Ανάλυση χωρίς αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας δεν έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι να βρεθεί το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας καθώς και το σημείο διακλαδώσεως του δρόμου αυτού. Έτσι, από την εξίσωση (4.34) που καταλήξαμε στην προηγούμενη ενότητα, λαμβανομένων υπόψη ότι η λύση της εξίσωσης είναι της μορφής: $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$ αλλά και τους δυο πρώτους όρους της σειράς Taylor, η οποία είναι:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \text{για όλα τα } x.$$

καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{\phi^3(\xi)}{6} \right]$$

ή

$$\phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \phi(\xi) = 16 \bar{M}_{d,\max}^2 p^2 \xi^2 (1 - \xi)^2 \phi_0 \left[\sin(\pi \cdot \xi) - \frac{\phi_0^3 \cdot \sin^3(\pi \cdot \xi)}{6} \right]$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3\sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.36) :

$$\phi'''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \lambda^2 \phi(\xi) = 16 p^2 \bar{M}_{d,\max}^2 \xi^2 (1 - \xi)^2 \phi_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi \xi) - \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi \xi) \right]$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.36), λαμβάνοντας υπόψη ότι στο μέσον της δοκού η στροφή της διατομής είναι η μέγιστη και ισούται με ϕ_0 , προχωράμε στην επίλυση με χρήση των παρακάτω συνοριακών συνθηκών:

$$\phi(0) = 0, \phi''(0) = 0, \phi'''(1/2) = 0, \phi'(1/2) = 0$$

Με τη χρήση του μαθηματικού εργαλείου Maple επιλύουμε την τελευταία διαφορική εξίσωση μέσω της διαδικασίας που αναφέρθηκε. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην εξίσωση του δρόμου ισορροπίας σε όρους στροφών. Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής (4.36a):

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{A(\lambda^2, \eta^2, p^2, \bar{M}_{d,\max})}{\Pi(p^2, \eta^2, \lambda^2, \bar{M}_{d,\max})}}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει το αρχικό τμήμα του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας (σε όρους στροφών ϕ_0) μιας αμφιέριστης δοκού υπό συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του μήκους της με ταυτόχρονη δράση θλιπτικής αξονικής δύναμης. Ειδικότερα, αν στον παραπάνω τύπο, κρατήσουμε σταθερό τον αδιαστατοποιημένο όρο η^2 της αξονικής δύναμης, αυξάνοντας

σταδιακά τον όρο της αδιαστατοποιημένης ροπής, τότε η πρώτη τιμή της φ_0 (θα ισούται με μηδέν) για την οποία θα ορίζεται η εξίσωση θα αποτελεί και σημείο διακλαδώσεως του συγκεκριμένου προβλήματος ευστάθειας που μελετάμε. Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε την τιμή της ροπής, τότε το σύνολο των σημείων $(\varphi_0, \bar{M}_{d,\max})$ που θα προκύψουν, αποτελούν τον μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Ο δρόμος αυτός, προφανώς θα έχει σκοπό να χαρακτηρίσουμε τη μεταλυγισμική συμπεριφορά του φορέα. Βέβαια, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το σημείο του δρόμου αυτού για το οποίο η μεσαία διατομή (είναι και η δυσμενέστερη) θα παρουσιάσει για πρώτη φορά διαρροή, έτσι ώστε να δούμε μέχρι ποιο σημείο ο δρόμος αυτός έχει νόημα.

Πέραν όμως από το δρόμο ισορροπίας σε όρους στροφών φ_0 που περιγράφεται από την παραπάνω σχέση μπορούν να εξαχθούν και δρόμοι ισορροπίας σε όρους οριζόντιων μετακινήσεων u_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω μιας προσεγγιστικής μεν, ικανοποιητικής δε, συσχέτισης της στροφής φ_0 με την πλευρική εκτροπή u_0 .

Στην περίπτωση όπου σε μια αμφιέριστη δοκό ασκείται μόνο αξονική θλιπτική δύναμη N , τότε η τιμή της αξονικής δύναμης αυτής για την οποία λυγίζει η δοκός τύπου διπλού ταυ περί τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα (κατά Euler) είναι:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2}$$

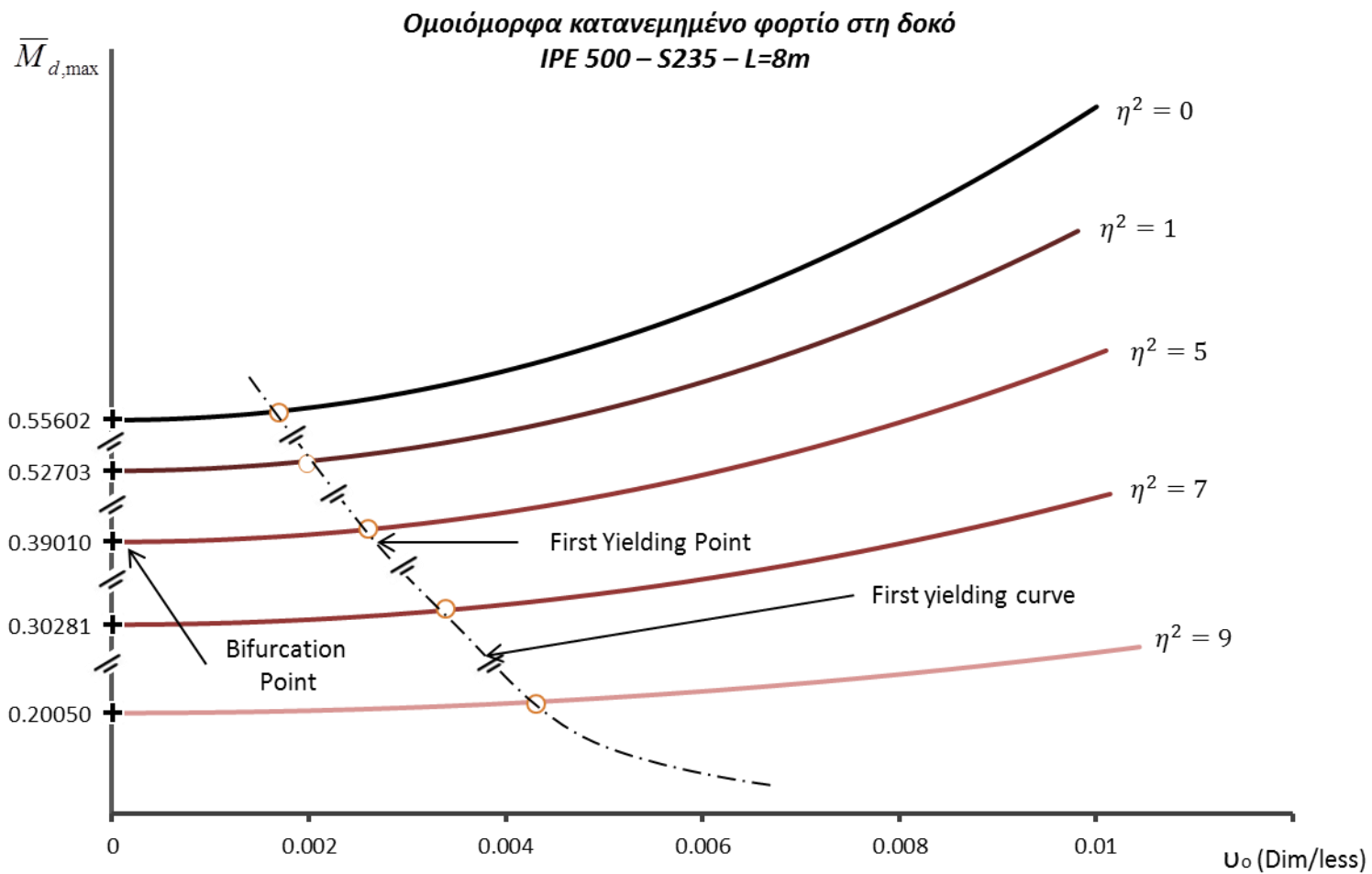
ή

$$\eta_{cr,y}^2 = \pi^2 \approx 9.87$$

Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις αυτές έχουν νόημα όταν το μέγεθος της θλιπτικής αξονικής δύναμης που ασκείται στη δοκό δεν υπερβαίνει την τιμή λυγισμού της. Δηλαδή όταν:

$$N \leq N_{cr,y} \text{ ή αλλιώς: } \eta^2 \leq \eta_{cr,y}^2$$

Για τον παραπάνω λόγο, στο παρακάτω διάγραμμα μελετούνται οι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας μιας αμφιέριστης δοκού για διάφορες τιμές της αδιαστατοποιημένης θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 < \eta_{cr,y}^2 \approx 9.87$. Προφανώς, λήφθηκε υπόψη ο έλεγχος έτσι ώστε να μην εμφανιστεί διαρροή σε καμία ίνα της δοκού για τις διάφορες τιμές των αξονικών δυνάμεων που μελετούνται.



Σχήμα 4.26 Μεταλυσιμικοί δρόμοι ισορροπίας στην περίπτωση αμφιέριστης δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος της με ταυτόχρονη αξονική δύναμη, χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στον φορέα

Συγκεκριμένα, στο Σχ.4.26 βλέπουμε τους μεταλυσμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση μιας αμφιέριστης δοκού, υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε όλο το μήκος της, με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης. Να σημειωθεί ότι η δοκός θεωρείται τέλειος φορέας, δηλαδή δεν υπάρχουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες σε κανένα σημείο αυτής. Η δοκός έχει διατομή *IPE500*, το μήκος της είναι $l=8m$ και ο χάλυβας είναι κατηγορίας *S235*. Οι συνεχείς καμπύλες (κόκκινη απόχρωση) αντιστοιχούν στους μεταλυσμικούς δρόμους ισορροπίας για την περίπτωση που έχουμε θλιπτικό αξονικό φορτίο.

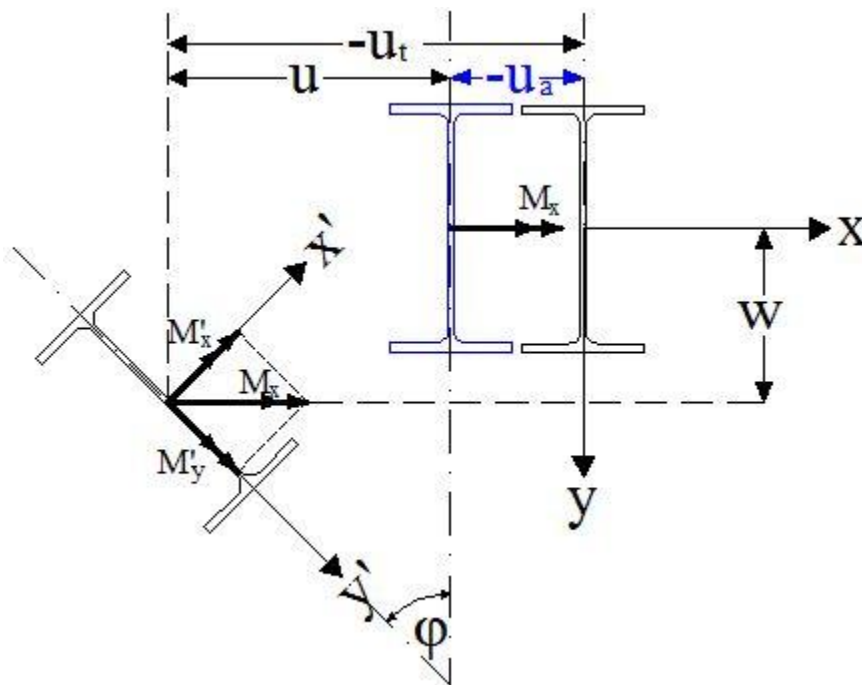
Στον κατακόρυφο άξονα $v_0 = 0$ σημειώνονται τα σημεία διακλαδώσεως (bifurcation ή branching points). Από τους δρόμους ισορροπίας παρατηρούμε ότι ο δευτερεύων κλάδος (secondary path) ή αλλιώς μεταλυσμικός κλάδος (post-buckling path) έχει ανοδική πορεία και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, δηλαδή έχουμε μεταλυσμική αντοχή. Αυτό σημαίνει ότι πέραν του κρίσιμου σημείου, η δοκός δε χάνει την αντοχή της αλλά διαθέτει κάποια μεγαλύτερη αντοχή πέραν από αυτή που μας υποδεικνύει το σημείο διακλαδώσεως. Μέσω του διαγράμματος αυτού, διαπιστώνουμε τη δυσμενή συμβολή του θλιπτικού φορτίου στο λυγισμό της δοκού. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι όσο η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης μεγαλώνει, τόσο μειώνεται και η κρίσιμη τιμή της ροπής για την οποία η δοκός εκτρέπεται πλευρικά. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο κύριοι δρόμοι ισορροπίας σε όλες τις περιπτώσεις, είναι πάνω στον κατακόρυφο άξονα $v_0 = 0$, ξεκινούν από την αρχή των αξόνων και προφανώς καταλήγουν στην τιμή $\bar{M}_{d,max,cr}$.

Επίσης, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που φαίνονται στο παρακάτω Σχ.4.26 δεν έχουν νόημα από κάποιο σημείο τους και έπειτα. Δηλαδή, σε κάθε δρόμο ισορροπίας υπάρχει ένα σημείο για το οποίο η διατομή της δοκού αρχίζει οριακά να διαρρέει. Αυτό το σημείο αναφέρεται και ως πρώτο σημείο διαρροής (first yielding point) και έχει τετμημένη την πλευρική εκτροπή που θα έχει το κέντρο βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, τη στιγμή που θα παρουσιαστεί για πρώτη φορά διαρροή, και τεταγμένη την κρίσιμη αδιαστατοποιημένη ροπή που θα ασκείται στη δοκό τη στιγμή εκείνη. Ο αναλυτικός υπολογισμός των σημείων διαρροής παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α της εν λόγω μεταπτυχιακής εργασίας.

Αν ενωθούν όλα τα σημεία “πρώτης διαρροής” (first yielding points) για τους δρόμους ισορροπίας που απεικονίζονται στο Σχ.4.26, τότε θα μπορούσαμε να χαράξουμε μια καμπύλη η οποία θα μπορούσε να ονομαστεί “καμπύλη πρώτης διαρροής” ή αλλιώς “first yielding curve”. Αυτή η καμπύλη θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί πλέον για να βρούμε προσεγγιστικά το πρώτο σημείο διαρροής αν χαράζαμε οποιονδήποτε άλλο δρόμο ισορροπίας για την περίπτωση του παραδείγματος που μελετάμε στο υποκεφάλαιο αυτό.

Μη Γραμμική Ανάλυση με αρχικές ατέλειες του φορέα

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζεται η μη γραμμική ανάλυση σε πλευρικό λυγισμό στην περίπτωση που ο φορέας έχει αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Μια αρχική γεωμετρική ατέλεια θα μπορούσε να είναι μια μετατόπιση πάνω σε έναν – οποιονδήποτε άξονα της διατομής του φορέα ή κάποια στροφή περί οποιονδήποτε άξονα της διατομής. Στην περίπτωση όμως του πλευρικού λυγισμού, η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα, περιγράφεται από δυο μετατοπίσεις u και w κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, αλλά και από μια στροφή ϕ περί τον κεντροβαρικό άξονα z του φορέα. Έτσι, μια αρχική ατέλεια στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού θα μπορούσε να αποδοθεί με τρόπο τέτοιο, ώστε η διατομή να έχει την ίδια παραμορφωσιακή εικόνα με την παραμόρφωση της διατομής (στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει αρχική ατέλεια σε όλους τους άξονες της διατομής. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού. Παρακάτω, επιλέγεται να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού έχοντας εισάγει ως αρχική ατέλεια στο φορέα μόνο οριζόντια - πλευρική εκτροπή του κέντρου βάρους της διατομής u_a (κατά τον άξονα x). Ο λόγος που επιλέχθηκε να εισαχθεί η συγκεκριμένη αρχική ατέλεια καθ' αυτόν τον άξονα κατά την κατάστρωση των διαφορικών εξισώσεων είναι να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Adina. Στο παρακάτω Σχ.4.27 παρουσιάζεται μια τυχαία διατομή της δοκού στην απαραμόρφωτη, παραμορφωμένη κατάσταση καθώς και στην κατάσταση αρχικών ατελειών (μπλε χρώμα).



Σχήμα 4.27 Κατάσταση αρχικών ατελειών της διατομής σε τυχαία θέση της δοκού.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η αρχική ατέλεια που εισάγεται στην διατομή για να μελετηθεί το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού είναι:

- $u_a(z)$: Αρχική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Επίσης έχουμε:

- $u(z)$: Οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $w(z)$: Κατακόρυφη μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής λόγω πλευρικού λυγισμού.
- $\phi(z)$: Στροφή της διατομής περί το κέντρο διάτμησης λόγω πλευρικού λυγισμού.

Επομένως:

- $u_t(z) = u_a(z) + u(z)$: Ολική οριζόντια μετάθεση του κέντρου βάρους της διατομής.

Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ισορροπία της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι οι εξής:

$$EI_x w'' + Nw = -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \cos \phi \approx -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \quad (4.37a)$$

$$EI_y u'' + Nu_t = \frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \sin \phi \approx \frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \cdot \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \cdot \phi \quad (4.37b)$$

$$GJ\phi' - EC_w \phi''' = -\frac{4M_{d,\max} z}{\ell} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) u_t' + q \left(\frac{\ell}{2} u_t - \int_0^{\ell/2} u_t \cdot dz - u_t \cdot z + \int_0^z u_t \cdot dz \right) \quad (4.37c)$$

Όπου $M_{d,\max} = \frac{q \cdot \ell^2}{8}$ η μέγιστη καμπτική ροπή στο μέσον της δοκού.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.37a) είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες δυο εξισώσεις, μετά από αδιαστατοποίηση αυτών έχουμε:

$$v''(\xi) + \eta^2 v_t(\xi) = 4\bar{M}_{d,\max} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \sin(\phi(\xi)) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi'(\xi) &= 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot v_t'(\xi) - \\ &- 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \left[4v_t - 8 \int_0^{\ell/2} v_t \cdot d\xi - 8v_t \cdot \xi + 8 \int_0^\xi v_t \cdot d\xi \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

όπου

$$v_t = u_t / \ell, \quad \xi = z / \ell, \quad \eta^2 = N\ell^2 / EI_y, \quad \bar{M}_{d,\max} = M_{d,\max} \cdot \ell / EI_y, \quad \lambda^2 = GJ\ell^2 / EC_w$$

$$\text{και} \quad p^2 = I_y \cdot \ell^2 / C_w$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (4.39), τότε προκύπτει:

$$v''(\xi) = \frac{\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1-\xi)} - v''_{\alpha}(\xi)$$

Αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση (4.39), τότε προκύπτει:

$$v(\xi) = \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1-\xi)} - v_{\alpha}(\xi) + C$$

Όμως $C = 0$, επειδή $v(0) = \phi'(0) = \phi(0) = v''_{\alpha}(0) = 0$

Μετά από αντικατάσταση των δυο παραπάνω εκφράσεων στην εξίσωση (4.38), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση (4.40):

$$\frac{\phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi)}{4 \cdot p^2 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot \xi \cdot (1-\xi)} - v''_{\alpha}(\xi) + \eta^2 \frac{\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)}{4 \cdot p^2 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot \xi \cdot (1-\xi)} = 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot \xi \cdot (1-\xi) \cdot \sin(\phi(\xi))$$

ή

$$\begin{aligned} \phi'''(\xi) - \lambda^2 \phi''(\xi) + \eta^2 (\phi''(\xi) - \lambda^2 \phi(\xi)) &= \\ &= 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1-\xi)^2 \cdot \sin(\phi(\xi)) + 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1-\xi) \cdot v''_{\alpha}(\xi) \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \phi''' - (\lambda^2 - \eta^2) \phi'' - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi &= \\ &= 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1-\xi) \cdot \sin(\phi(\xi)) + 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1-\xi) \cdot v''_{\alpha} \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση, εκφρασμένη σε όρους στροφών. Παρατηρούμε επίσης ότι η εξίσωση αυτή, περιέχει τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που εισήχθησαν στον υπό μελέτη φορέα. Χαρακτηρίζεται ως μη ομογενής διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξεως. Είναι προφανές ότι η επίλυση της, με την παρούσα μορφή που έχει, είναι σχεδόν αδύνατη. Σκοπός μας είναι να εξαχθεί μια σχέση που να περιγράφει τον δρόμο ισορροπίας, που να περιγράφει τη συμπεριφορά σε πλευρικό λυγισμό, του παρόντος στατικού συστήματος (φορές – φόρτιση), λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές ατέλειες που εισήχθησαν. Ο τρόπος επίλυσης της εξίσωσης που θα ακολουθήσει, βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- $v_{\alpha}(\xi) = v_{\alpha} \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$
- $\sin(\phi(\xi)) \cong \phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{3!}$ (Χρήση σειράς Taylor) με $\phi(\xi) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$

Άρα, η εξίσωση (4.40) γίνεται:

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = \\ = 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi)^2 \cdot \left[\phi(\xi) - \frac{(\phi(\xi))^3}{6} \right] + 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \pi^2 \cdot \nu_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της εξής τριγωνομετρικής συνάρτησης: $\sin(3x) = 3\sin x - 4 \cdot \sin^3 x$, καταλήγουμε στην εξής διαφορική εξίσωση (4.41):

$$\begin{aligned} \phi''''(\xi) - (\lambda^2 - \eta^2) \cdot \phi''(\xi) - \eta^2 \cdot \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = \\ = 16 \cdot \bar{M}_{d,\max}^2 \cdot p^2 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi) \cdot \phi_0 \left[\left(1 - \frac{\phi_0^2}{8} \right) \sin(\pi\xi) + \frac{\phi_0^2}{24} \sin(3\pi\xi) \right] + \\ + 4 \cdot \bar{M}_{d,\max} \cdot p^2 \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \pi^2 \cdot \nu_\alpha \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών $\phi(0) = \phi''(0) = \phi'(1) = \phi'''(1) = 0$, με τη βοήθεια του μαθηματικού εργαλείου Maple, καταλήγουμε σε μια λύση της μορφής: $\phi(\xi) = g(p^2, \lambda^2, \eta^2, \phi_0, \nu_\alpha, \bar{M}_{d,\max}, \xi)$. Αν βασιστούμε στο γεγονός ότι κατά τον πλευρικό λυγισμό μιας αμφιέρειστης δοκού, η μέγιστη στροφή της διατομής εμφανίζεται στο μέσον της, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι $\phi(1/2) = \phi_0$, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση (4.42), η οποία αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, στην περίπτωση αμφιέρειστης δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένη φορτία σε όλο το μήκος της, ταυτόχρονη δράση αξονικής θλιπτικής δύναμης και επιρροή αρχικών ατελειών που θα μπορούσε να έχει ο φορέας.

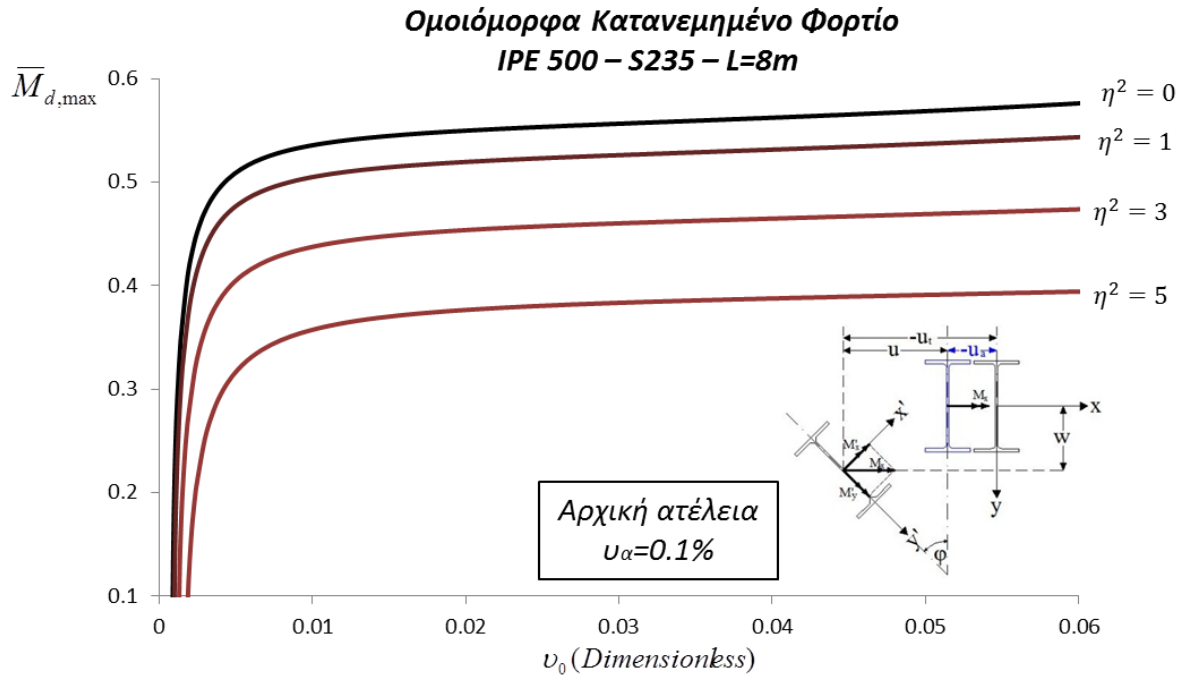
$$\bar{M}_{d,\max} = \sqrt{\frac{A(\lambda^2, \eta^2, p^2, \phi_0, \nu_\alpha)}{\Pi(p^2, \eta^2, \lambda^2, \phi_0)}} \quad (4.42)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η παραπάνω εξίσωση (4.42) αποτελεί την εξίσωση του δρόμου ισορροπίας, σε όρους στροφών, μιας αμφιέρειστης δοκού στην οποία ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον του μήκος της και ταυτόχρονα ασκείται αξονική δύναμη. Η διαφορά της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση (4.36a) έγκειται στο γεγονός ότι λαμβάνονται υπόψη οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που πιθανώς να έχει το υπό μελέτη στατικό σύστημα (φορέας – φορτίο).

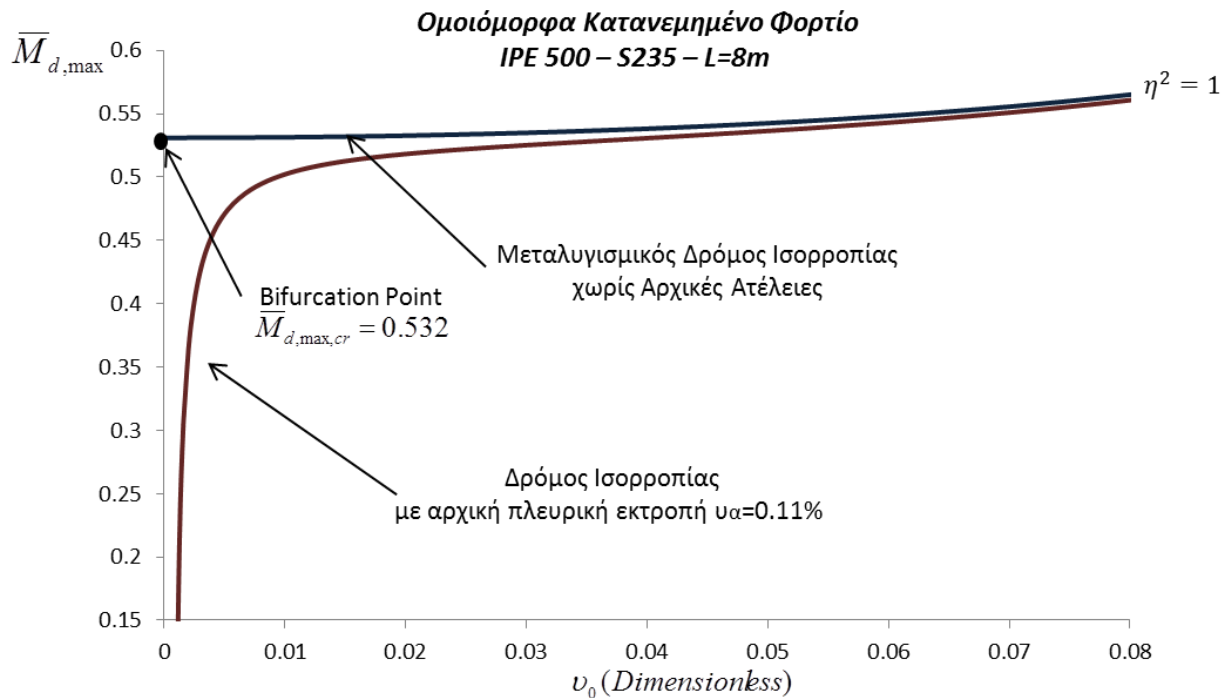
Στα παρακάτω σχήματα, παρουσιάζονται κάποια διαγράμματα μέσω των οποίων γίνεται προσπάθεια για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων, όσον αφορά την επιρροή των αρχικών ατελειών στην συμπεριφορά του φορέα. Ταυτόχρονα, με τα παρακάτω διαγράμματα, εκτός από τα χρήσιμα συμπεράσματα, επιβεβαιώνονται τα ήδη αναμενόμενα αποτελέσματα.

Στο Σ.χ.4.28, παρουσιάζονται οι δρόμοι ισορροπίας για τον υπό μελέτη φορέα για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης. Για τα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής ατέλειας που εισάγεται στο σύστημα είναι ίδια και για τους πέντε δρόμους ισορροπίας που παρουσιάζονται. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από το συγκεκριμένο σχήμα είναι ότι οι δρόμοι ισορροπίας δεν παρουσιάζουν κάποιο σημείο διακλαδώσεως (bifurcation point), δηλαδή δε διακρίνονται σε πρωτεύοντες και δευτερεύοντες δρόμοι, αλλά είναι ενιαίοι. Παρατηρούμε επίσης, ότι οι δρόμοι ισορροπίας, από κάποια τιμή της κρίσιμης ροπής $\bar{M}_{d,max}$ και μετά, παρουσιάζουν έντονη αλλαγή της κλίσης τους. Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει αστοχία σε πλευρικό λυγισμό. Βέβαια, μετά το σημείο αυτό, οι δρόμοι παρουσιάζουν ανοδική πορεία, πράγμα που υποδηλώνει την μεταλυγισμική αντοχή των φορέων. Τέλος, είναι εμφανής η επιρροή του μεγέθους καθώς και της φοράς της δρώσας αξονικής δύναμης στην αντοχή της δοκού. Όσο μεγαλώνει η τιμή της θλιπτικής δύναμης, τόσο μικρότερη αντοχή παρουσιάζει ο φορέας.

Στο Σχ.4.29 παρουσιάζεται ο μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας (σε όρους πλευρικής εκτροπής v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής) για την περίπτωση που θλιπτικής αξονικής δύναμης $\eta^2 = 1$. Ο δρόμος αυτός περιγράφεται από τη σχέση (4.36a) που αναπτύχθηκε για τις περιπτώσεις που δεν έχουμε αρχικές ατέλειες στον φορέα. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται και ο δρόμος ισορροπίας του ίδιου στατικού συστήματος (φορέα – φόρτισης) με μια εισηγμένη αρχική ατέλεια στο σύστημα. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί από αυτούς τους δυο δρόμους είναι ότι στην περίπτωση χωρίς αρχικές ατέλειες έχουμε σημείο διακλαδώσεως στο δρόμο ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση με αρχικές ατέλειες, ο δρόμος ισορροπίας είναι ενιαίος. Όπως φαίνεται, η μεταλυγισμική συμπεριφορά και των δυο φορέων, σχεδόν ταυτίζεται. Παρουσιάζεται και στις δυο περιπτώσεις, δηλαδή, μεταλυγισμική συμπεριφορά στον φορέα (post buckling strength).

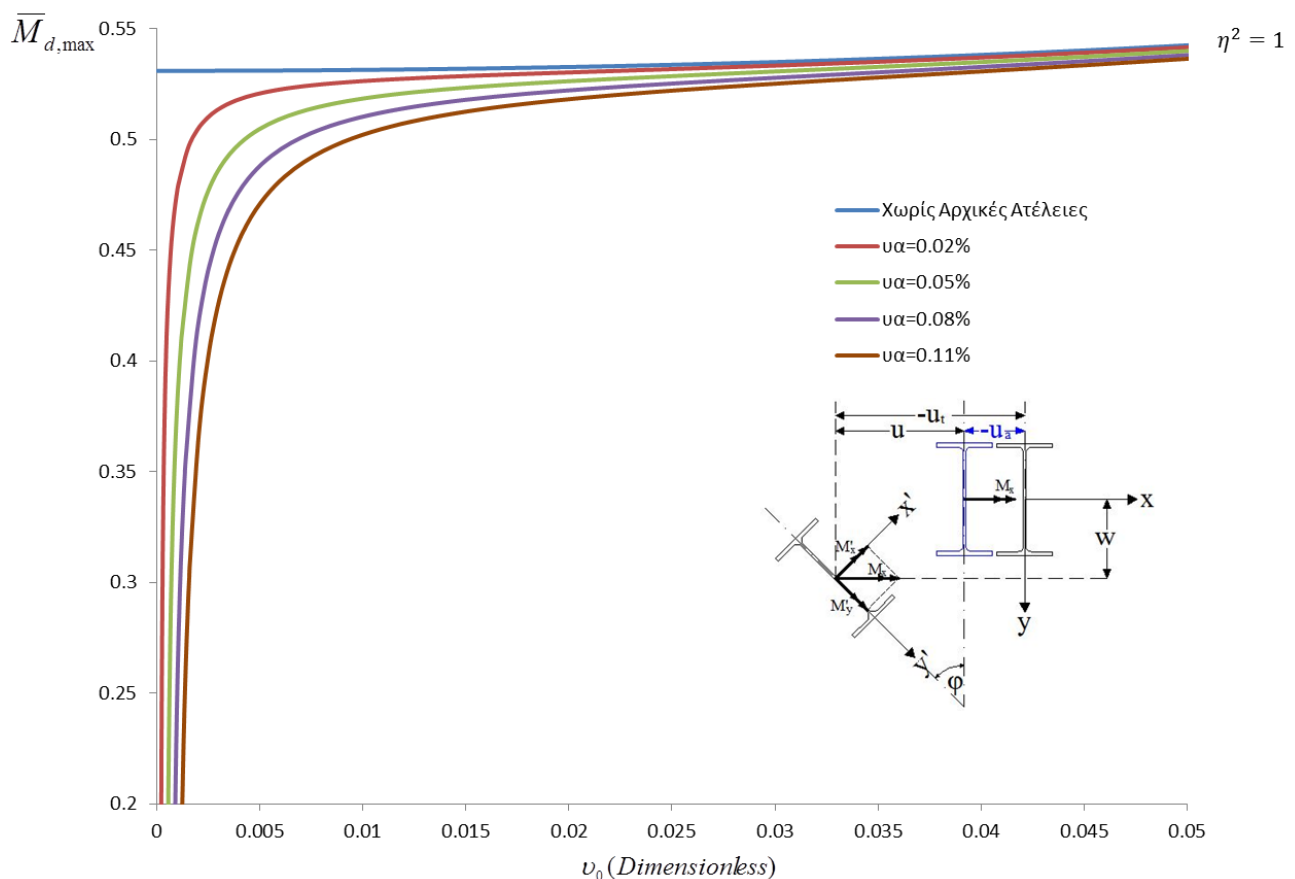


Σχήμα 4.28 Δρόμοι ισορροπίας δοκού με αρχικές ατέλειες για διάφορες τιμές της αξονικής δύναμης.



Σχήμα 4.29 Δρόμος ισορροπίας με αρχικές ατέλειες του φορέα και μεταλυσιμικός δρόμος ισορροπίας χωρίς αρχικές ατέλειες στο φορέα για ίδια αξονική δύναμη.

Στο Σχ. 4.30, εμφανίζονται οι δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές της αρχικής ατέλειας που εισάγεται αρχικά στο φορέα. Στα συγκεκριμένα διαγράμματα, η τιμή της αρχικής πλευρικής εκτροπής μεταβάλλεται, ενώ η τιμή της θλιπτικής αξονικής δύναμης είναι ίδια σε για όλες τις περιπτώσεις και είναι $\eta^2 = 1$. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί είναι η επιρροή της αρχικής ατέλειας στη συμπεριφορά του φορέα. Παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή της αρχικής εκτροπής v_α αυξάνεται, τόσο πιο μικρή είναι η τιμή της ροπής $\bar{M}_{d,max}$ για την οποία ο εκάστοτε δρόμος ισορροπίας παρουσιάζει έντονη αλλαγή στην κλίση του. Αυτό μας οδηγεί στο ασφαλές συμπέρασμα ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι αρχικές ατέλειες που εισάγονται στο σύστημα, τόσο νωρίτερα χάνει την αντοχή του ο φορέας.



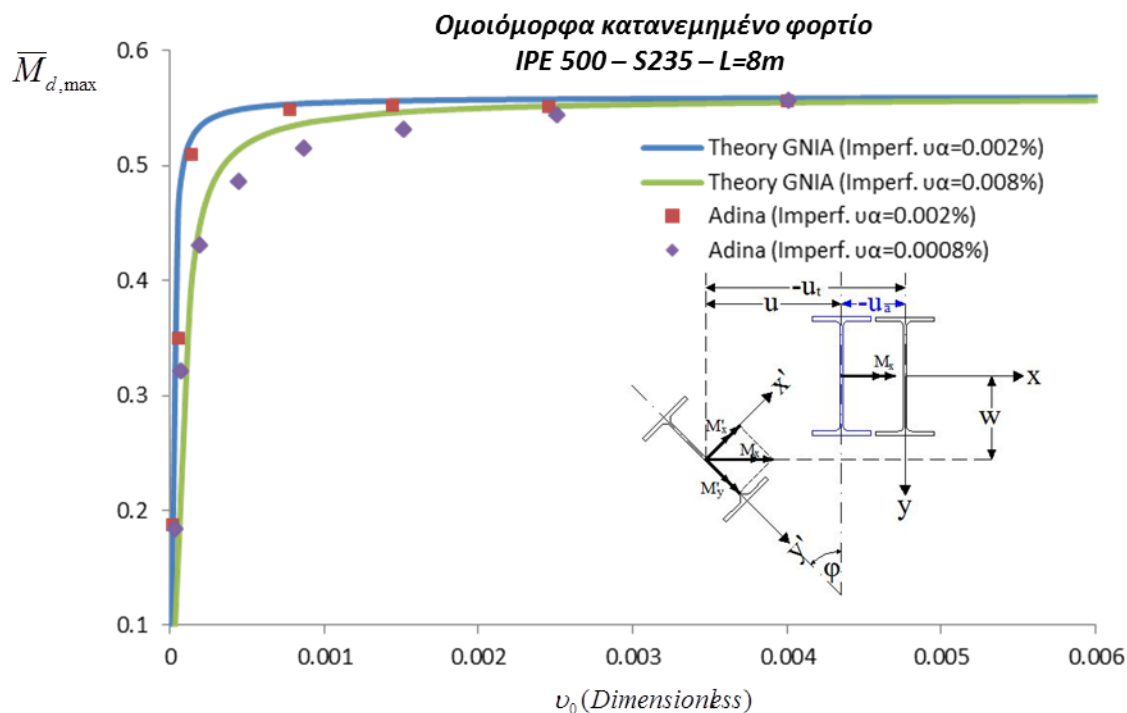
Σχήμα 4.30 Δρόμοι ισορροπίας για διάφορες τιμές του u_α .

Σύγκριση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina.

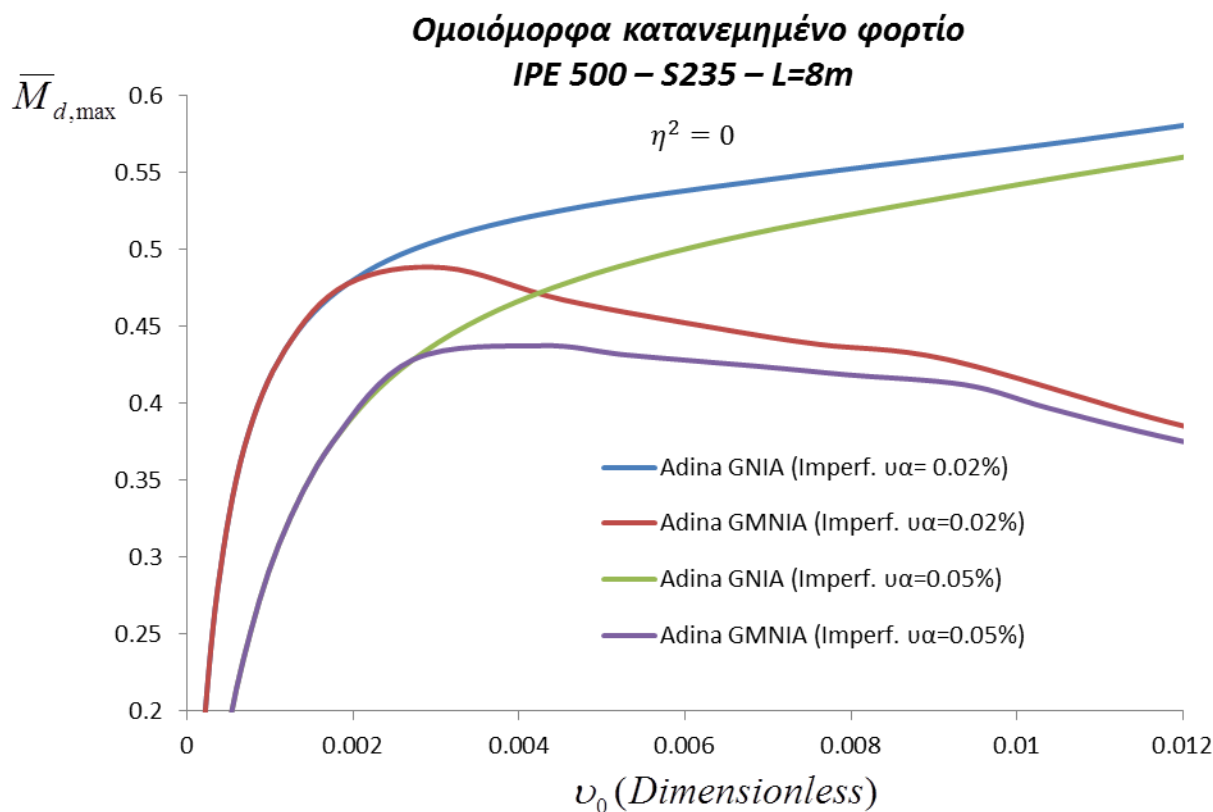
Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω θεωρητική προσέγγιση με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina, ώστε να καταλήξουμε στην αξιοπιστία της μεθόδου που αναπτύχθηκε. Έτσι λοιπόν, στη συνέχεια παρουσιάζεται πλήθος μη γραμμικών αναλύσεων. Η μη γραμμικότητα των αναλύσεων αυτών, μπορεί να παρουσιάζεται στη γεωμετρία του φορέα ή στο υλικό, ή ακόμα, και στον συνδυασμό αυτών των δυο μεταξύ τους.

Στο Σχ.4.31, οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται αφορούν μια αμφιέριστη δοκό με διχαλωτή στήριξη στα άκρα (ελεύθερη στρέβλωση – μηδενική στρέψη). Οι δρόμοι ισορροπίας που παρουσιάζονται είναι εκφρασμένοι σε όρους στροφών ϕ_0 (όπου ϕ_0 είναι η στροφή της μεσαίας διατομής της δοκού κατά την εκτροπή σε πλευρικό λυγισμό). Η δοκός είναι μήκους 8m, διατομής IPE 500 και ο χάλυβας είναι κατηγορίας S235. Οι συνεχείς γραμμές αποτελούν τρεις δρόμους ισορροπίας που έχουν προκύψει από τη θεωρητική προσέγγιση που αναπτύχθηκε προηγουμένως και αφορά τη γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα με αρχική γεωμετρική ατέλεια. Η διαφορά μεταξύ των τριών δρόμων ισορροπίας έγκειται στο μέγεθος της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας που εισήχθη στον φορέα πριν την ανάλυση. Εκτός από τις συνεχείς γραμμές που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση, παρουσιάζονται και οι αντίστοιχοι δρόμοι ισορροπίας, όπως προκύπτουν από μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το Adina, παρουσιάζονται μέσω κάποιων σημείων τους, ώστε να διακρίνονται από τους αντίστοιχους συνεχείς. Παρατηρούμε ότι οι δρόμοι ισορροπίας που προκύπτουν από το πρόγραμμα πεπερασμένων, είναι αρκετά κοντά ή αλλιώς συμπίπτουν ικανοποιητικά με τους αντίστοιχους που προκύπτουν από τη θεωρητική προσέγγιση.

Στο Σχ.4.32 διακρίνονται τέσσερις δρόμοι ισορροπίας σε όρους πλευρικών μετακινήσεων v_0 του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού, όπως προέκυψαν από αναλύσεις που έγιναν από το Adina. Οι δύο από αυτούς αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.02\%$ και οι υπόλοιποι αφορούν δοκό με αρχική ατέλεια $v_\alpha = 0.05\%$. Για κάθε περίπτωση αρχικών ατελειών, πραγματοποιήθηκε μια γεωμετρική μη γραμμική ανάλυση (GNIA) και μια μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας και υλικού (GMNIA). Ένα συμπέρασμα είναι η επιρροή του μεγέθους της αρχικής ατέλειας στην συμπεριφορά του φορέα. Στην περίπτωση της μικρότερης εκ των δυο αρχικών ατελειών, ο φορέας χάνει την αντοχή του για μεγαλύτερες τιμές της ροπής $\bar{M}_{d,max}$. Ακόμη, η ανάλυση GMNIA προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική συμπεριφορά του φορέα, καθώς εκτός από τη μη γραμμικότητα της γεωμετρίας λαμβάνει υπόψη και τη διαρροή του υλικού. Τέλος, μέσω της κλίσης των διαγραμμάτων, βλέπουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας E του φορέα είναι μεγαλύτερο όσο η αρχική ατέλεια πλησιάζει στο μηδέν.



Σχήμα 4.31 Δρόμοι ισοροπίας ανάλυσης GNIA. Σύγκριση Adina με θεωρητική προσέγγιση



Σχήμα 4.32 Αναλύσεις GMNIA και GNIA στο Adina

5. Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο συνοψίζονται οι παρατηρήσεις των προηγούμενων κεφαλαίων με σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την εργασία που πραγματοποιήθηκε.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού. Συγκεκριμένα, όπως αναφερθήκαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, μελετάμε το φαινόμενο αυτό σε αμφιέρειστες μεταλλικές δοκούς, διατομής διπλού ταυ, με διχαλωτή στήριξη στα άκρα. Μελετήθηκαν δοκοί με διαφορετικές φορτίσεις. Ασχοληθήκαμε με αμφιέρειστες δοκούς με ομοιόμορφη ροπή σε όλο το μήκος τους, με συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο στο μέσον του μήκους τους και με ομοιόμορφα καταναμημένο φορτίο σε όλο το μήκος τους. Και στις τρεις περιπτώσεις εγκάρσιας φόρτισης είχαμε ταυτόχρονη δράση αξονικού φορτίου (θλιπτικού ή εφελκυστικού).

Για κάθε περίπτωση φόρτισης, ασχοληθήκαμε σε πρώτη φάση με την κατάσταση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την ισορροπία (και στους τρεις άξονες) στην παραμορφωμένη κατάσταση της δοκού. Έγινε η προσπάθεια μέσω κάποιων απλοποιητικών παραδοχών (ανά περίπτωση) να καταλήξουμε σε κλειστή μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ώστε να μην είναι επίπονη η επίλυση αυτών. Στη συνέχεια έγινε μια θεωρητική προσέγγιση του ελαστικού κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Ακολούθως έγινε γραμμική ανάλυση λυγισμού (LBA) των ίδιων φορέων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina με σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα θεωρητικά

Εκτός από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού, πραγματοποιήθηκε και σε θεωρητικό επίπεδο μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με ή χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στο φορέα. Και στις δυο περιπτώσεις, η μη γραμμικότητα εισήχθηκε μέσω της αντικατάστασης:

$$\sin(\phi(\xi)) = \phi(\xi) - \frac{\phi^3(\xi)}{6}.$$

Παράχθηκαν διάφοροι θεωρητικοί δρόμοι ισορροπίας σε όρους

στροφών και οριζόντιων μετακινήσεων της μεσαίας διατομής. Στη συνέχεια, έγιναν και οι αντίστοιχοι μη γραμμικοί δρόμοι ισορροπίας στο Adina, ώστε να συγκριθούν με τους αντίστοιχους θεωρητικούς. Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε, ποικίλουν ανάλογα με την περίπτωση φόρτισης του φορέα, τα οποία αναφέρονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.

Επίσης, στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, έγινε η προσπάθεια για την εύρεση του πρώτου σημείου διαρροής (πάνω στον εκάστοτε δρόμο ισορροπίας) κατά το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού. Αναπτύχθηκε μια γραφική μέθοδος (χρήση βοηθητικών καμπύλων) ώστε σε κάθε δρόμο ισορροπίας, με ή χωρίς αρχικές ατέλειες, να βρεθεί το σημείο εκείνο για το οποίο η τάση σε κάποια ίνα της διατομής του φορέα έχει φτάσει στην τάση διαρροής του χρησιμοποιούμενου υλικού.

Ένα σημαντικό μέρος της εργασίας αυτής είναι η προσομοίωση του φορέα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Adina. Όπως προαναφέρθηκε, βασικός στόχος αλλά και δυσκολία της προσομοίωσης ήταν οι συνοριακές συνθήκες στήριξης του φορέα. Επιθυμούμε, δηλαδή, οι στηρίξεις στα άκρα της δοκού να είναι διχαλωτές. Αυτό σημαίνει ότι επιθυμούμε μηδενική στρέψη και ελεύθερη στρέβλωση στις ακραίες διατομές. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο

Παράρτημα Β, έγινε χρήση άκαμπτων συνδέσμων που συνδέουν κάποιους κόμβους ή και γραμμές τους μοντέλου (“slave”) με κάποιους άλλους κόμβους ή και γραμμές (“master”) ώστε οι μετακινήσεις αυτών να είναι κοινές προς όλους τους βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν σύνδεσμοι που δεσμεύουν κάποιου συγκεκριμένου βαθμούς ελευθερίας (“Constraint Equations”).

Τέλος, παρόλο που σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα, παρακάτω καταγράφονται κάποια γενικά συμπεράσματα:

- Η σχέση αλληλεπίδρασης κρίσιμης καμπτικής ροπής M -αξονικής δύναμης N για οριακά ζεύγη (M,N) που προκαλούν στρεπτοκαμπτικό λυγισμό μπορεί να αποτυπωθεί ως μια συνεχής καμπύλη καλύπτουσα αμφότερες τις περιοχές θλιπτικού και εφελκυστικού αξονικού φορτίου.
- Σε όρους κρίσιμης ροπής στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, η επιρροή της εφελκυστικής αξονικής δύναμης μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγαλύτερη αντοχή.
- Υπάρχει ένα σχετικό προς τη ροπή μέγεθος της αξονικής εφελκυστικής δύναμης πέραν από το οποίο δεν υπάρχει κίνδυνος αστοχίας από στρεπτοκαμπτικό λυγισμό.
- Μια αρχική ατέλεια της δοκού, θα μπορούσε να εκφραστεί ως αρχική στροφή της διατομής ή ως οριζόντια εκτροπή ή ως κατακόρυφο βέλος ή ως συνδυασμό κάποιων από αυτά. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η εισαγωγή αρχικής ατέλειας ως κάποια αρχική οριζόντια – πλευρική εκτροπή του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής, εκφρασμένη με ημιτονοειδή μορφή: $v_{\alpha}(\xi) = v_{\alpha} \cdot \sin(\pi \cdot \xi)$.
- Οι δρόμοι ισοροπίας που προκύπτουν από τη γεωμετρικώς μη γραμμική ανάλυση, προφανώς, εξαρτώνται από την τιμή της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας. Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ατέλεια, τόσο γρηγορότερα χάνει την αντοχή της η δοκός.
- Οι δρόμοι ισοροπίας που προκύπτουν από τη γεωμετρικώς μη γραμμική ανάλυση παρουσιάζουν ανοδική πορεία. Αυτό σημαίνει ότι ο φορέας διαθέτει κάποια υπεραντοχή. Προφανώς αυτό δεν ισχύει στην πραγματικότητα καθώς όλα τα υλικά έχουν κάποιο όριο, πάνω από το οποίο εισέρχονται στη διαρροή.
- Αν θέλουμε να μελετήσουμε την πραγματική κατάσταση ενός μεταλλικού φορέα, η καταλληλότερη ανάλυση που θα πρέπει να κάνουμε είναι η μη γραμμική ανάλυση υλικού και γεωμετρίας.

Βιβλιογραφία

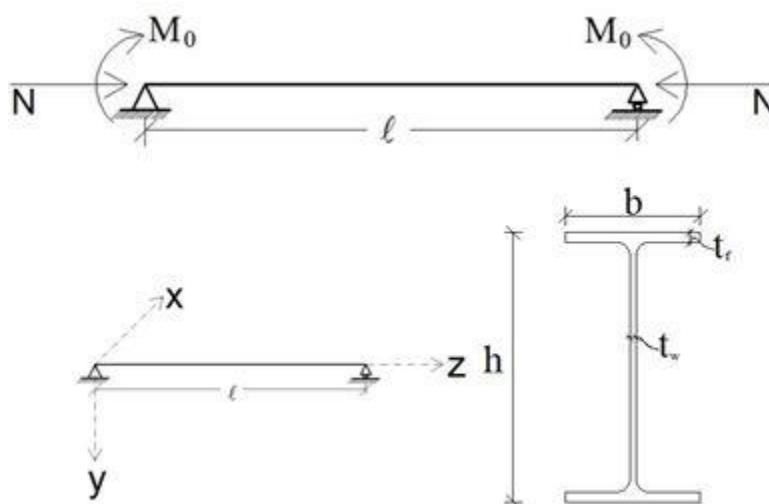
1. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας" , εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση – Αθήνα 1997).
2. Αντωνίου Ν. Κουνάδη: "Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας με στοιχεία από τη Θεωρία Καταστροφών" εκδ. Συμεών (Β' Έκδοση – Αθήνα 2004).
3. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα", εκδ. Κλειδάριθμος, 2011.
4. Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης: "Σιδηρές Κατασκευές – Ανάλυση και Διαστασιολόγηση", εκδ. Κλειδάριθμος, 2009.
5. Χάρης Γαντές: Σημειώσεις διαλέξεων "Μη Γραμμικής Συμπεριφοράς Μεταλλικών Κατασκευών", ΕΜΠ 2012.
6. Ιωάννης Ραυτογιάννης: Σημειώσεις διαλέξεων "Προχωρημένη Στατική και Δυναμική Ευστάθεια", ΕΜΠ 2014.
7. Νικόλαος Ε. Βαονάκης, Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2013/82 "Πλευρικός Λυγισμός Δοκών υπό Κάμψη και Αξονικό Φορτίο", ΕΜΠ, Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Αθήνα Δεκέμβριος 2013.
8. Τάσος Π. Αβραάμ, Ζαχαρίας Χ. Φασουλάκης, Γεώργιος Ι. Ιωαννίδης "Η επιρροή αξονικού εφελκυσμού στην κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού δοκών". 8^ο Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τρίπολη, Οκτώβριος 2014.
9. Timoshenko S. P and Gere J. M. "Theory of Elastic Stability", *McGraw-Hill Book Company*, Second Edition, 1961.
10. Kounadis A. N. "An efficient and simple approximate technique for solving nonlinear initial and boundary-value problems", *Computational Mechanics*, Vol. 9, 1992, pp. 221-231.
11. Kounadis A. N and Ioannides G. I. "Lateral Postbuckling Analysis of Beam Columns", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 4, 1994, 695-706.
12. Ioannides G. I. and Avraam T. P. "Lateral-Torsional buckling of simply supported beams under uniform bending and axial tensile force", *Archive of Applied Mechanics*, Special Issue, Vol. 82, 2012, pp. 1393-1402.
13. Chen W. E. and Lui E. M. "Structural Stability Theory and Implementation", *Elsevier Science Publishing co.*, 1987.
14. Wang Y., El-Khentas M. and Nethercost D. "Lateral-torsional buckling of end-restraints beams", *J. Constr. Steel Res.*, Vol. 7, No. 5, 1987, pp. 335-362.
15. Jian-Xin G., and Siu-Lai C. "A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations", *J. Engineering Structures*. Vol. 27, 2005, pp. 749-759.

16. Jian-Xin G., and Siu-Lai C. “A refined finite element formulation for flexural and torsional buckling of beam-columns with finite rotations”, *J. Engineering Structures*. Vol. 27, 2005, pp. 749-759.
17. G.I. Ioannidis, D.J. Polyzois, A.N. Kounadis. “Elastic limit state flexural – torsional postbuckling analysis of bars with open thin walled cross – sections under axial thrust”, August 1998, *Engineering Structures*, 22 (2000) pp. 472 – 479.
18. Joao Tomas Mello e Silva “I – Steel beams under tension: Lateral torsional buckling, behavior and design”, *Tecnico Lisboa*, October 2013.
19. M. Massound El Sa’adawy, and F.F.F. El Dib, “Inelastic Strength of Laterally Unsupported Top – Loaded Built – Up Slender Beams”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol:7 pp.422-430.
20. Chen WF, Atsutra T. *Theory of beam-columns*. McGraw–Hill, NY. 1977.
21. Trahair NS. *Flexural – torsional buckling of structures*. E.N. Spon, London, 1993.
22. Dourakopoulos J. A. and Sapountzakis E. J. “Post-buckling analysis of beams of arbitrary cross section using BEM”, *Engineering Structures*, Vol. 32, 2010, pp. 3713-3724.
23. *Adina Systems 8.5 Online Manuals*, Adina R&D, Inc (February 2008).

Παράρτημα Α - Εύρεση Πρώτου Σημείου Διαρροής

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι να παρουσιαστεί η μεθοδολογία με την οποία προσδιορίστηκε το πρώτο σημείο διαρροής των δρόμων ισορροπίας που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4. Αρχικά θα γίνει μια σύντομη αναφορά στις εσωτερικές τάσεις που αναπτύσσονται σε μια αμφιέριστη δοκό με διχαλωτή στήριξη και ιδίως στη μεσαία διατομή (ως δυσμενέστερη διατομή) κατά το φαινόμενο του πλευρικού λυγισμού. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία με την οποία αυτές οι εσωτερικές τάσεις μας οδηγούν στην εύρεση του πρώτου σημείου διαρροής (ή first yielding point) και στην ιδεατή καμπύλη (idealized curve) η οποία δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα αλλά είναι βοηθητική για την εύρεση των σημείων διαρροής.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση της ενότητας §4.2, δηλαδή στην περίπτωση αμφιέριστης – με διχαλωτή στήριξη - μεταλλικής δοκού στην οποία ασκείται ομοιόμορφη ροπή σε όλο το μήκος της, με ταυτόχρονη δράση αξονικής δύναμης, θλιπτικής ή εφελκυστικής (Σχ.Α.1). Να σημειωθεί ότι λαμβάνεται υπόψη και η περίπτωση που η δοκός έχει ως αρχική γεωμετρική ατέλεια v_α την πλευρική εκτροπή του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής. Για τις άλλες δύο περιπτώσεις (§4.3 και §4.4) η μεθοδολογία είναι η ίδια.



Σχήμα Α.1 Είδος φόρτισης, άξονες αναφοράς και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη φορέα

Έστω, λοιπόν, μια μεταλλική διατομή διπλής συμμετρίας τύπου διπλού ταυ, με χάλυβα κατηγορίας S235. Τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά, τα οποία θα εισαχθούν στις παρακάτω εκφράσεις των αναπτυσσόμενων τάσεων είναι τα εξής:

l : Μήκος δοκού, h : Ύψος διατομής δοκού, b : Πλάτος πέλματος διατομής, t_w : Πάχος κορμού της διατομής, t_f : Πάχος πέλματος της διατομής, A : Εμβαδόν της διατομής, I_x : Ροπή αδράνειας της

διατομής κατά τον ισχυρό κεντροβαρικό άξονα, I_y : Ροπή αδράνειας της διατομής κατά τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα, $W_{el,x}$: Ελαστική ροπή αντίστασης της διατομής κατά τον ισχυρό κεντροβαρικό άξονα, $W_{el,y}$: Ελαστική ροπή αντίστασης κατά τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα, E : Μέτρο ελαστικότητας του υλικού, G : Μέτρο διάτμησης του υλικού.

Ακόμη, θεωρούμε πως στη δοκό έχει εισαχθεί αρχική πλευρική εκτροπή v_α του κέντρου βάρους της μεσαίας διατομής η οποία αποτελεί ουσιαστικά μια αρχική γεωμετρική ατέλεια για το σύστημα.

Έτσι:

1. Κατά τη δράση της αξονικής δύναμης N , ασκείται ομοιόμορφη θλιπτική τάση στη διατομή, η οποία ισούται:

$$\sigma_{0,axial} = \frac{N}{A} = \frac{\eta^2 EI_y}{\ell^2 A}$$

2. Κατά τη δράση της ομοιόμορφης ροπής M_0 , αναπτύσσεται θλιπτική στο τμήμα πάνω από το κέντρο βάρους της διατομής. Επίσης, κατά την κάμψη της δοκού λόγω της ομοιόμορφης ροπής που ασκείται, δημιουργείται κατακόρυφο βέλος κάμψης w_0 . Λόγω αυτού του βέλους κάμψης και της ταυτόχρονης δράσας αξονικής δύναμης N , αναπτύσσεται πρόσθετη θλιπτική τάση στο άνω τμήμα της διατομής. Η μέγιστα θλιβόμενη ίνα είναι η άνω ίνα της διατομής και η τιμή της ασκούμενης τάσης είναι:

$$\sigma_{bending,x} = \frac{M_0}{W_{el,x}} + \frac{N}{W_{el,x}} w_0$$

Υπολογισμός w_0 :

Κατά την κάμψη της δοκού περί τον άξονα x , όπως είδαμε και στην §4.2, ισχύει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$EI_x \cdot w''(z) + N \cdot w(z) = -M_0$$

Αν υποθέσουμε ότι το κατακόρυφο βέλος κάμψης μπορεί προσεγγιστικά να εκφραστεί με την έκφραση: $w(z) = w_0 \cdot \sin(\pi \cdot \frac{z}{\ell})$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $z = \frac{\ell}{2}$, μας δίνει:

$$w_0 = \frac{-M_0}{N - EI_x \frac{\pi^2}{\ell^2}} = \frac{-\bar{M}_0 \cdot \ell \cdot EI_y}{\eta^2 \cdot EI_y - \pi^2 \cdot EI_x}$$

Οπότε προκύπτει η εξής έκφραση:

$$\sigma_{bending,x} = \frac{\bar{M}_0 \cdot EI_y}{\ell \cdot W_{el,x}} + \frac{\eta^2 \cdot EI_y}{\ell^2 \cdot W_{el,x}} \cdot \left[\frac{-\bar{M}_0 \cdot \ell \cdot EI_y}{\eta^2 \cdot EI_y - \pi^2 \cdot EI_x} \right]$$

ή

$$\sigma_{bending,x} = \frac{\bar{M}_0 \cdot EI_y}{\ell \cdot W_{el,x}} \cdot \left[1 - \frac{\eta^2 \cdot EI_y}{\eta^2 EI_y - \pi^2 EI_x} \right]$$

3. Κατά τον πλευρικό λυγισμό, η ασκούσα ροπή έχει ως συνιστώσα ροπή $M_0 \cdot \phi(z)$ περί τον ασθενή κεντροβαρικό άξονα y . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθής θλιπτικής τάσης με εμφανιζόμενη μέγιστη τιμή στις αριστερές ακραίες ίνες των δυο πελμάτων της διατομής (υποθέτουμε ότι η στροφή της διατομής κατά τον πλευρικό λυγισμό γίνεται με φορά αντί- ωρολογιακή). Επίσης, λόγω του οριζώντιου βέλους κάμψης u_0 αλλά και της οριζόντιας αρχικής εκτροπής u_a , η δρώσα αξονική δύναμη N ασκεί πρόσθετη θλιπτική τάση στη διατομή, με εμφανιζόμενη μέγιστη τιμή στις αριστερές ακραίες ίνες των δυο πελμάτων της διατομής. Η συνολική τιμή της ασκούμενης θλιπτικής τάσης είναι:

$$\sigma_{bending,y} = \frac{N}{W_{el,y}} \cdot u_0 + \frac{M_0}{W_{el,y}} \phi_0 + \frac{N}{W_{el,y}} u_a$$

Σύνδεση $\phi_0 - u_0$:

Από την ισοροπία της διατομής περί τον άξονα z , όπως είδαμε και στην §4.2, ισχύει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\phi''(\xi) - \lambda^2 \cdot \phi(\xi) = \bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot \nu_t$$

Αν υποθέσουμε ότι η στροφή της διατομής μπορεί προσεγγιστικά να εκφραστεί με την έκφραση: $\phi(z) = \phi_0 \cdot \sin(\pi \cdot \frac{z}{\ell})$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $z = \frac{\ell}{2}$, μας δίνει:

$$\phi_0 = -\frac{\bar{M}_0 \cdot p^2 \cdot (u_0 + u_a)}{\ell \cdot (\pi^2 + \lambda^2)}$$

Οπότε προκύπτει η εξής έκφραση:

$$\sigma_{bending,y} = \frac{\eta^2 \cdot EI_y}{\ell^2 \cdot W_{el,y}} \cdot u_0 + \frac{\bar{M}_0^2 \cdot p^2 EI_y}{\ell^2 (\pi^2 + \lambda^2)} \cdot u_0 + \left[\frac{\bar{M}_0^2 \cdot p^2 \cdot EI_y}{\ell^2 \cdot (\pi^2 + \lambda^2)} + \frac{\eta^2 p^2 EI_y}{\ell^2 \cdot W_{el,y}} \right] \cdot u_a$$

4. Από αρχικές παραδοχές που έχουν γίνει στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, οι βασικότερες είναι αυτές που προσομοιάζουν τις συνοριακές συνθήκες στήριξης της δοκού.

Αυτές είναι της μηδενικής στρέψης και της ελεύθερης στρέβλωσης στα άκρα της δοκού. Στη μεσαία διατομή, όμως η οποία είναι και η δυσμενέστερη, αναπτύσσεται ορθή τάση στα πέλματα της που οφείλεται στη στρέβλωση της διατομής. Η τάση αυτή προσδιορίζεται ως εξής:

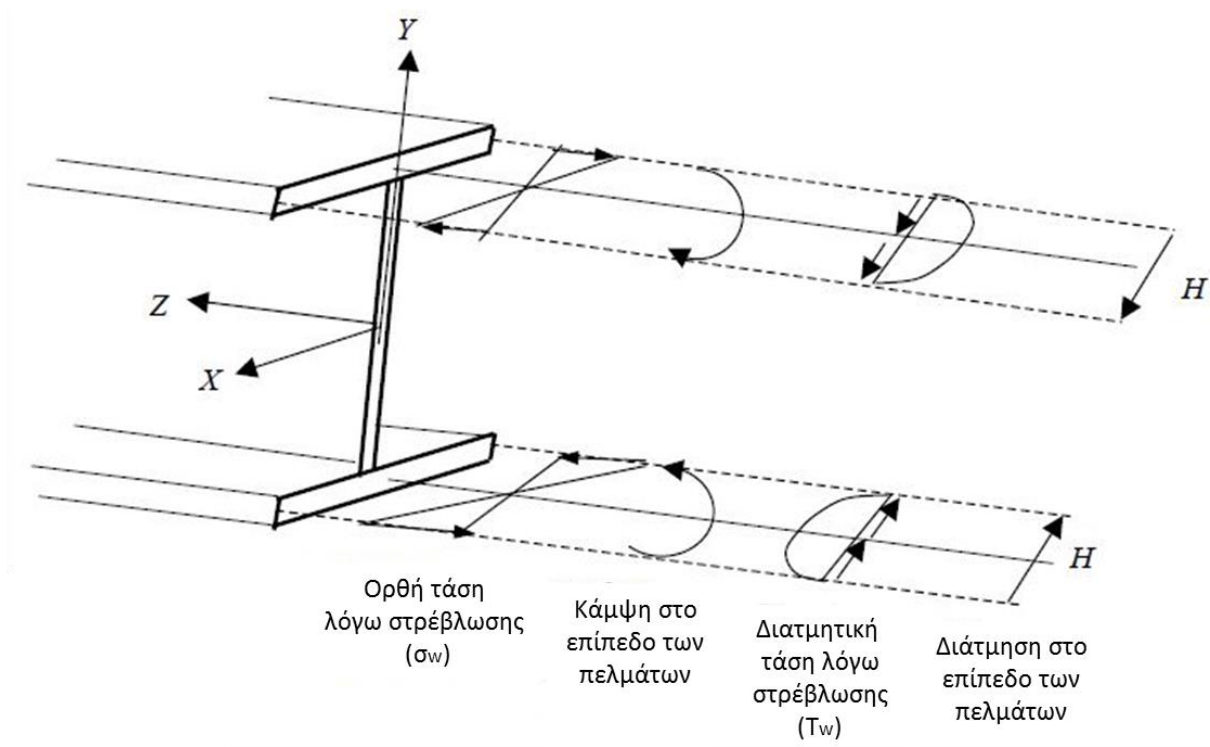
$$\sigma_{warping} = -E \cdot W_{nwfs} \cdot \phi''\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

Όμως:

$$W_{nwfs} = \frac{b \cdot (h - t_f)}{4}, \quad \phi''\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot \phi_0 \quad \text{και} \quad \phi_0 = \frac{\bar{M}_0 \cdot p^2}{\ell \cdot (\pi^2 + \lambda^2)} \cdot (u_0 + u_a)$$

Επομένως:

$$\sigma_{warping} = -E \cdot \frac{b \cdot (h - t_f)}{4} \cdot \frac{\pi^2}{\ell^3} \cdot \frac{\bar{M}_0 \cdot p^2}{(\pi^2 + \lambda^2)} \cdot (u_0 + u_a)$$



Σχήμα Α.2 Εσωτερικές τάσεις σε διατομή διπλού ταυ λόγω στρέβλωσης

Στο σημείο αυτό θα αναζητήσουμε το σημείο πάνω σε κάποιον δρόμο ισορροπίας για το οποίο η διατομή μας έχει αρχίσει οριακά να διαρρέει σε κάποιο πολύ μικρό τμήμα της. Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι δρόμοι ισορροπίας είναι ουσιαστικά ένα διάγραμμα που στον κατακόρυφο άξονα υπάρχει η αδιαστατοποιημένη ροπή που ασκείται στη δυσμενέστερη διατομή (είναι η μεσαία διατομή), και στον οριζόντιο άξονα μπορεί να είναι η

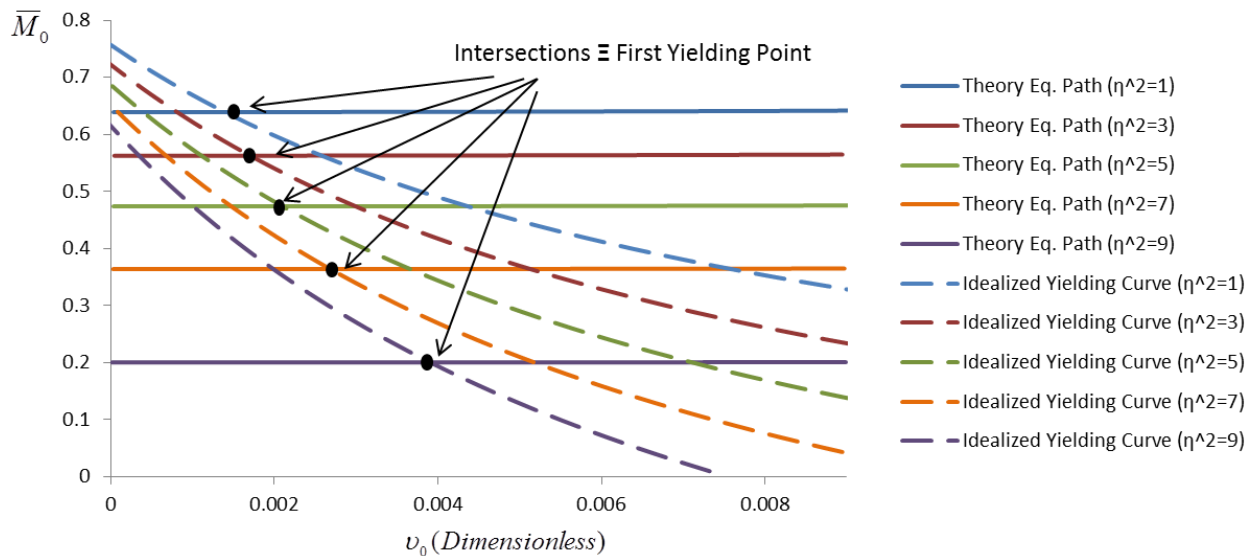
πλευρική εκτροπή ν_0 ή στροφή ϕ_0 της διατομής. Το σύνολο των παραπάνω ορθών τάσεων, δεν θα πρέπει να υπερβεί την τάση διαρροής του υλικού σ_{yield} . Έτσι, έχουμε:

$$\sigma_{yield} = \sigma_{0,axial} + \sigma_{bending,x} + \sigma_{bending,y} + \sigma_{warping}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω έκφραση της αδιαστατοποιημένης πλευρικής εκτροπής ν_0 , ως εξής:

$$\nu_0 = f(\bar{M}_0)$$

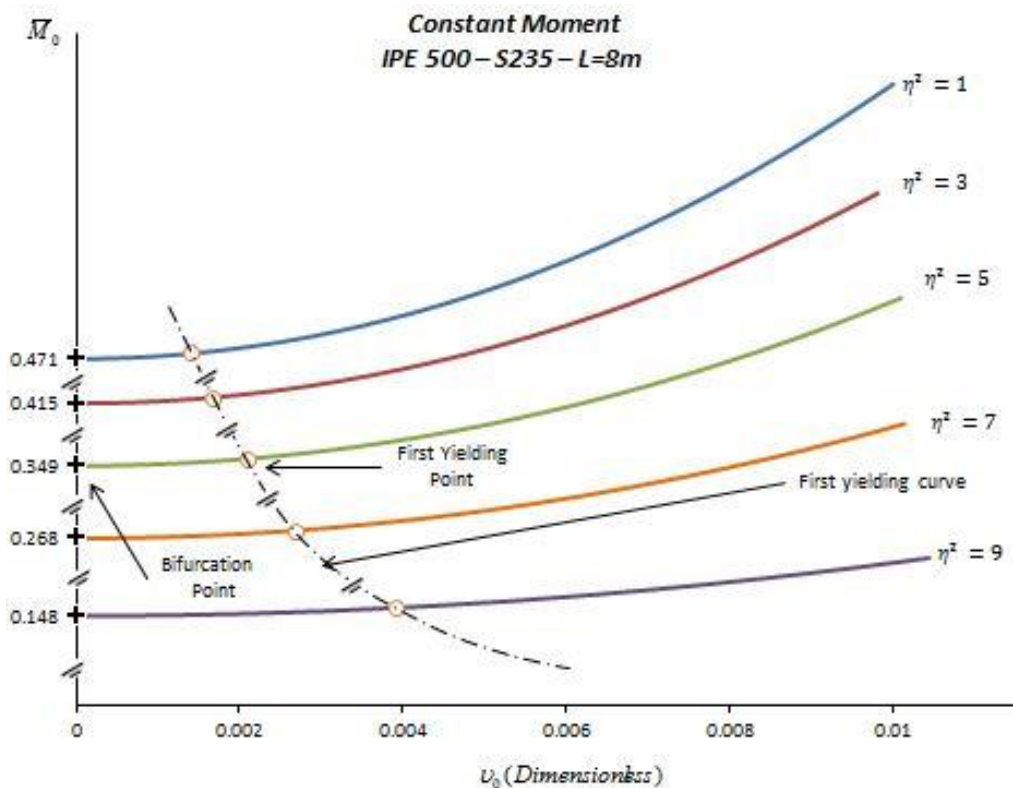
Η παραπάνω περιγράφει την τιμή της πλευρικής εκτροπής τη στιγμή που θα διαρρεύσει η πρώτη ίνα της μεσαίας διατομής, για κάθε τιμή της αδιαστατοποιημένης ροπής. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων αυτών δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα. Φυσικό νόημα έχει μόνο το σημείο τομής του γεωμετρικού τόπου με τον δρόμο ισορροπίας της δοκού. Το σημείο τομής είναι το πρώτο σημείο διαρροής της διατομής. Ο γεωμετρικός τόπος θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και ως “Ιδεατή Καμπύλη Διαρροής” (ή “Idealized Yielding Curve”), για τον λόγο ότι έχει φυσικό νόημα μόνο ένα σημείο της. Είναι ουσιαστικά μια βοηθητική καμπύλη για την εύρεση του πρώτου σημείου διαρροής.



Σχήμα Α.3 Εύρεση σημείου τομής (πρώτου σημείου διαρροής) με τη βοήθεια της ιδεατής καμπύλης διαρροής.

Στο παραπάνω Σχ.Α.3, οι συνεχείς γραμμές αποτελούν τους δρόμους ισορροπίας μιας αμφιέριστης μεταλλικής δοκού χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, μήκους 8m, διατομής IPE500 και χάλυβα κατηγορίας S235. Οι διακεκομμένες γραμμές του ίδιου χρώματος αποτελούν τις αντίστοιχες ιδεατές καμπύλες των συνεχών γραμμών. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το σημείο τομής μεταξύ ιδεατής καμπύλης και δρόμου ισορροπίας αποτελεί το πρώτο σημείο διαρροής. Τέλος, αν ενωθούν τα σημεία πρώτης διαρροής όλων των δρόμων ισορροπίας,

καταλήγουμε στην καμπύλη πρώτης διαρροής (First yielding curve). Στο Σχ.Α.4, η καμπύλη πρώτης διαρροής είναι ενδεικτική, καθώς η κλίμακα των αξόνων έχει συμπυκνωθεί (βλέπε σχεδιαστική ανακοπή), ώστε να διακρίνεται εμφανώς η μορφή των δρόμων ισορροπίας.



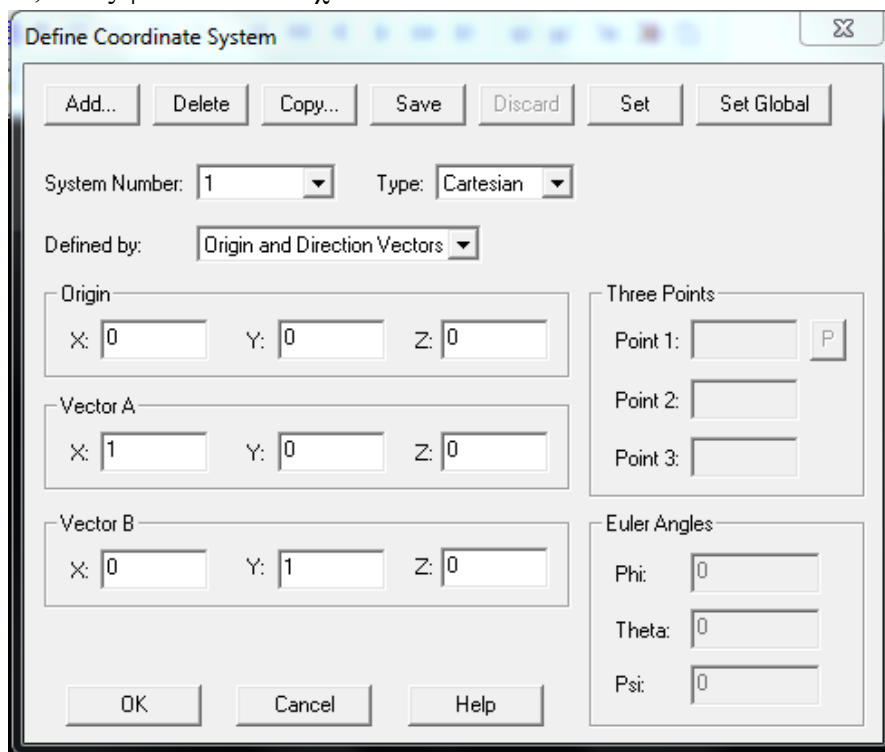
Σχήμα Α.4 Καμπύλη πρώτης διαρροής (First Yielding Curve)

Παράρτημα Β - Προσομοίωση στο Adina (FEM)

Στο παρόν παράρτημα, θα γίνει μια σύντομη περιγραφή για τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε ώστε να γίνει η προσομοίωση του υπό μελέτη φορέα. Όπως φαίνεται και στη συνέχεια, η προσομοίωση των πελμάτων και του κορμού της δοκού έγινε με στοιχεία κελύφους. Ένας από τους βασικότερους λόγους που χρησιμοποιήθηκαν τα στοιχεία κελύφους (shell elements), είναι ότι είναι κατάλληλα για επιφάνειες που είναι πολύ λεπτές προς μια διεύθυνση σε σχέση με τις υπόλοιπες. Επίσης, τα στοιχεία κελύφους, θεωρούνται τρισδιάστατο συνεχές υλικό. Κύριος στόχος κατά την προσομοίωση είναι οι συνοριακές συνθήκες στήριξης της δοκού με τις οποίες μελετήθηκε και θεωρητικά η δοκός. Οι επιθυμητές συνθήκες στήριξης είναι η αμφιέριστη δοκός με διχαλωτές στηρίξεις στα άκρα. Αυτό σημαίνει μηδενική στρέψη και ταυτόχρονα ελεύθερη στρέβλωση στα άκρα της δοκού. Παρακάτω, φαίνεται βήμα προς βήμα η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε.

Καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων

Αρχικά ορίζεται το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα γίνει η προσομοίωση της καμπτόμενης αμφιέριστης δοκού. Αυτό γίνεται με την εντολή Geometry → Coordinate Systems και έτσι ορίζουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (System Number 1), πάνω στο οποίο θα ασχολούμαστε, όπως φαίνεται στο Σχ.Β.1.



Σχήμα Β.1 Καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων.

Μόρφωση της γεωμετρίας

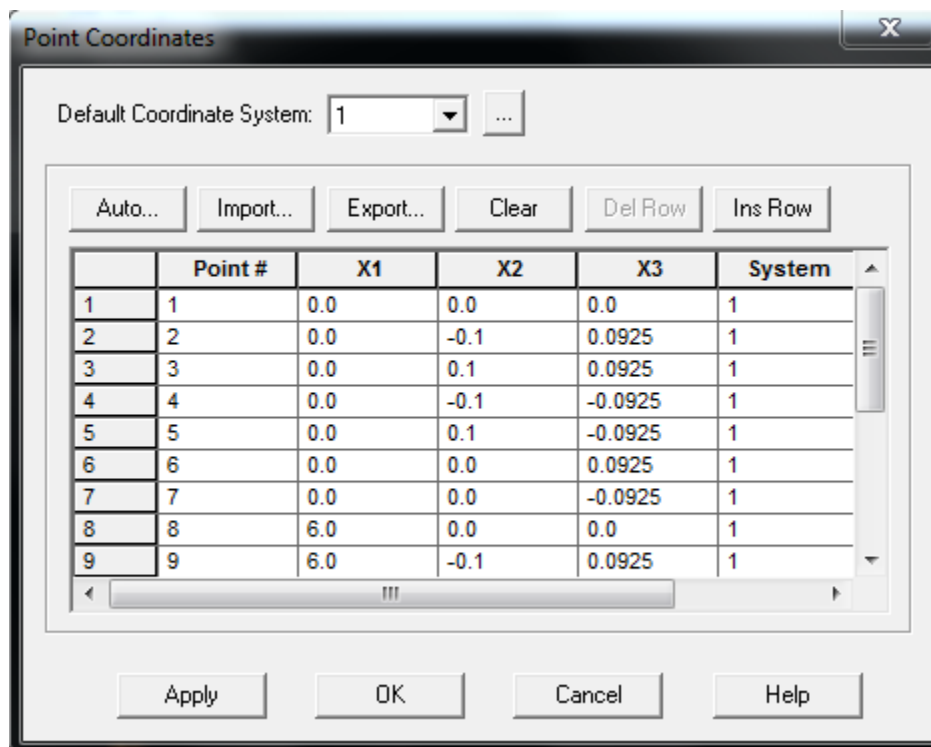
Πρέπει να ορίσουμε τα σημεία της διατομής της δοκού με την εντολή Geometry → Points. Για κάθε ένα σημείο ορίζουμε τις συντεταγμένες x , y , z καθώς και το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο αναφέρονται (το σύστημα συντεταγμένων ορίστηκε προηγουμένως) όπως φαίνεται στο Σχ.Β.2.

Με την εντολή Geometry → Lines → Define → Add ορίζονται οι γραμμές της δοκού, όπως φαίνεται στο Σχ.Β.4

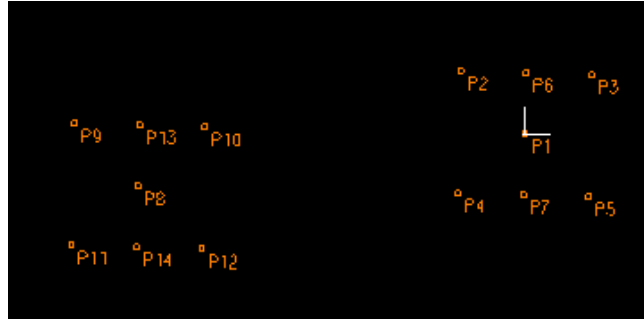
Στη συνέχεια,

Με την εντολή Geometry → Surfaces → Define → Add (Σχ. Β.5) ορίζουμε τις επιφάνειες του κορμού και των πελμάτων της δοκού. Ορίζουμε 2 επιμέρους ίσες επιφάνειες για κάθε πέλμα προκειμένου να είναι πιο ομαλή η διακριτοποίηση που θα ακολουθήσει. Επίσης δημιουργούμε 2 επιφάνειες και για τον κορμό.

Τέλος, για να ολοκληρωθεί η μόρφωση της γεωμετρίας, ορίζουμε το πάχος των επιφανειών που δημιουργήθηκαν μέσω της εντολής Geometry → Surfaces → Thickness, όπως φαίνεται στο Σχ.Β.6.



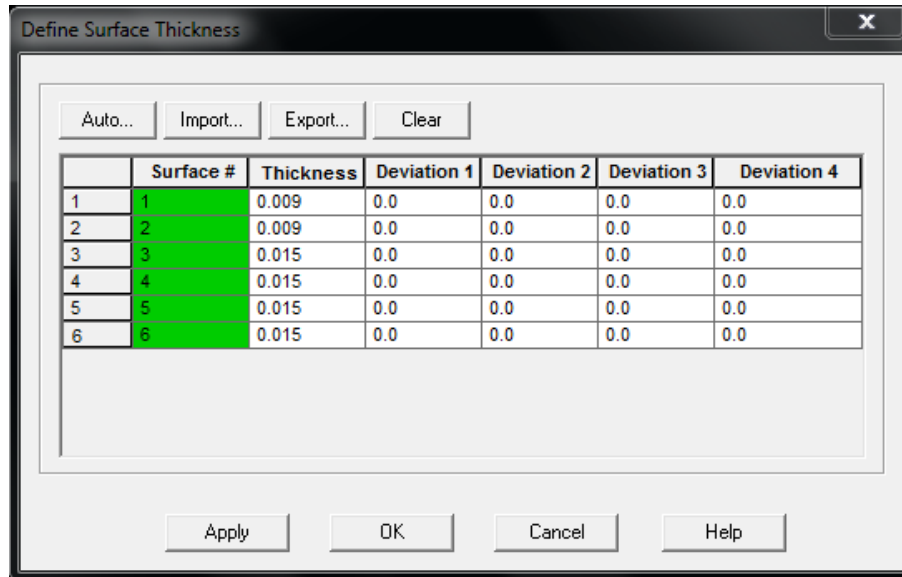
Σχήμα Β.2 Ορισμός σημείων



Σχήμα Β.3 Οι 19 κόμβοι του προσομοιώματος

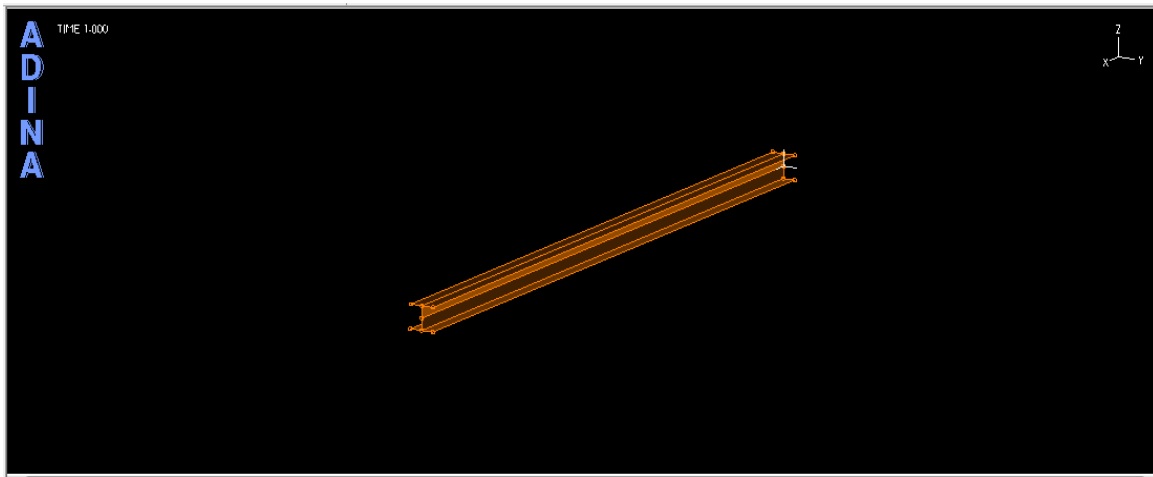
Σχήμα Β.4 Ορισμός των γραμμών

Σχήμα Β.5 Ορισμός των επιφανειών



Σχήμα Β.6 Καθορισμός του πάχους επιφανειών

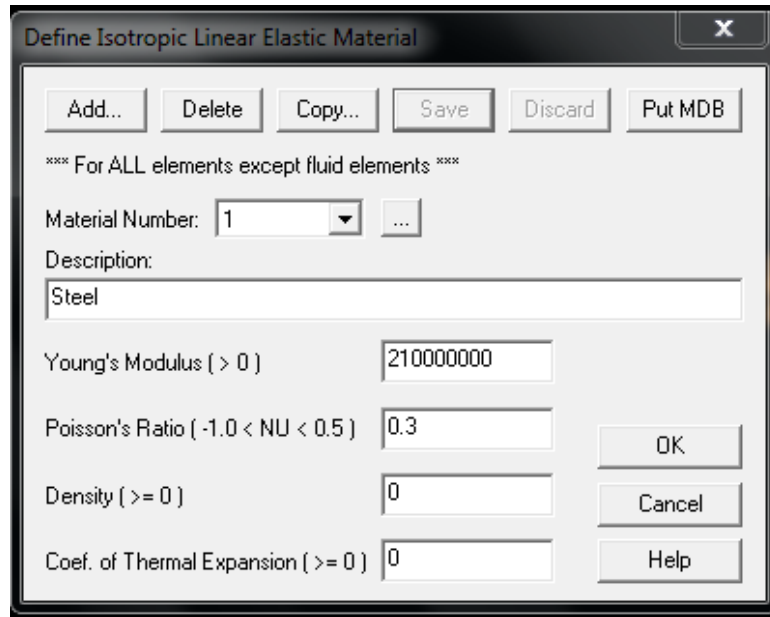
Μετά από τα παραπάνω βήματα, προκύπτει η γεωμετρία του φορέα, η οποία φαίνεται στο παρακάτω Σχ.Β.7.



Σχήμα Β.7 Τελική γεωμετρία του φορέα.

Ορισμός του υλικού του φορέα.

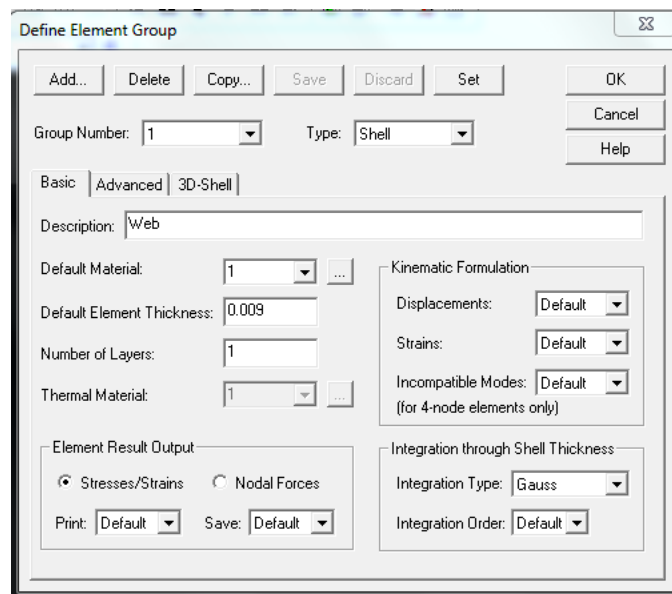
Σε αυτό το σημείο ορίζουμε το μέτρο ελαστικότητας E και τον λόγο Poisson ν . Με την εντολή Model → Materials → Manage Materials → Elastic → Isotropic → Add, όπως φαίνεται και στο Σχ.Β.9.



Σχήμα Β.8 Καθορισμός υλικού

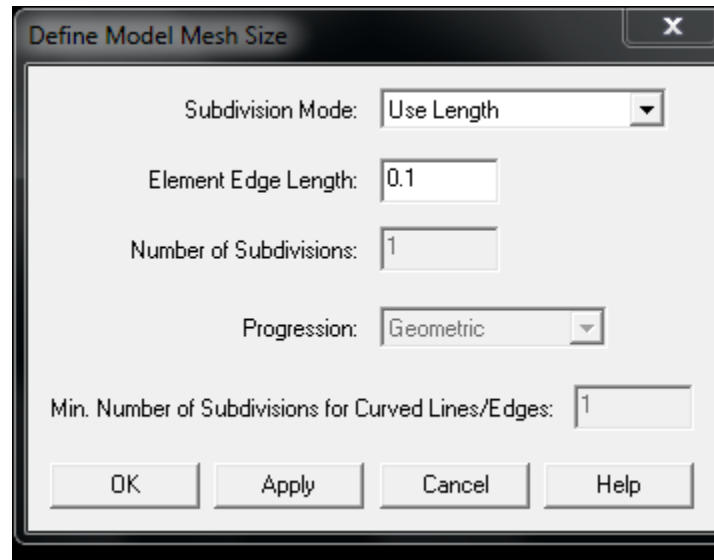
Καθορισμός των πεπερασμένων στοιχείων

Σε αυτό το στάδιο, ορίζουμε τις ιδιότητες του φορέα, καθορίζουμε δηλαδή το είδος των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό είναι τύπου *Shell* (Shell elements-στοιχεία κελύφους), όπως φαίνεται και στο Σχ.Β.9. Καθορίζουμε διαφορετικό “Element Groups” για τα πέλματα και τον κορμό της διατομής. Αυτό γίνεται με την εντολή Meshing → Element Groups → Add (Type:Shell). Επίσης στο κελί ”Default Element Thickness” πληκτρολογούμε το πάχος των επιφανειών που αναφερόμαστε (Web ή Flange).



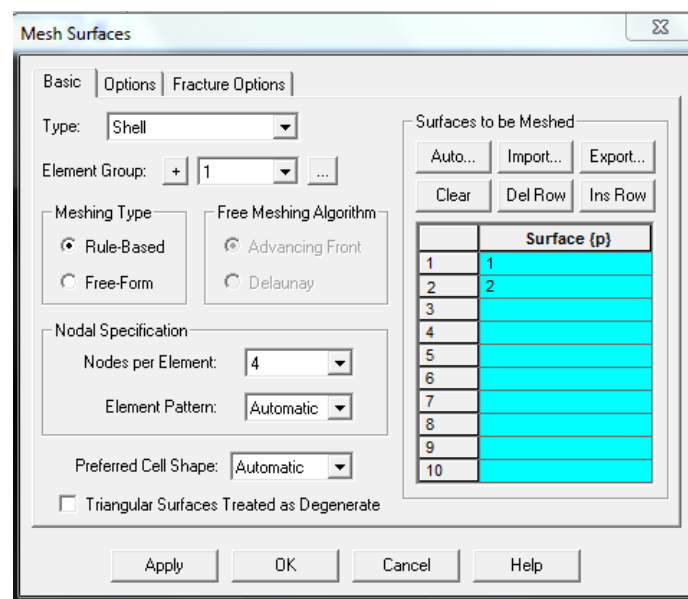
Σχήμα Β.9 Καθορισμός τύπου πεπερασμένων στοιχείων

Ολοκληρώνουμε το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του φορέα. Από το μενού Meshing → Mesh Density → Complete model, επιλέγουμε “Subdivision Mode: Use Length” και πληκτρολογούμε το μέγεθος κάθε στοιχείου (Σχ.Β.10).



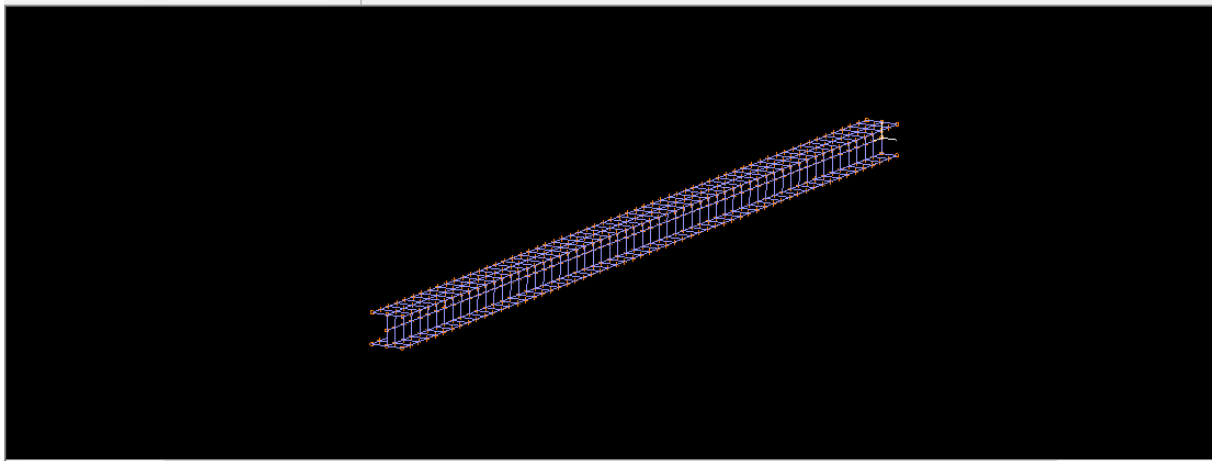
Σχήμα Β.10 Ολοκλήρωση δικτύου πεπερασμένων στοιχείων

Από το μενού Meshing → Create Mesh → Surface επιλέγουμε σε ποιο “Element Group” αντιστοιχεί η κάθε επιφάνεια που ορίσαμε στην αρχή, όπως το Σχ.Β.11.



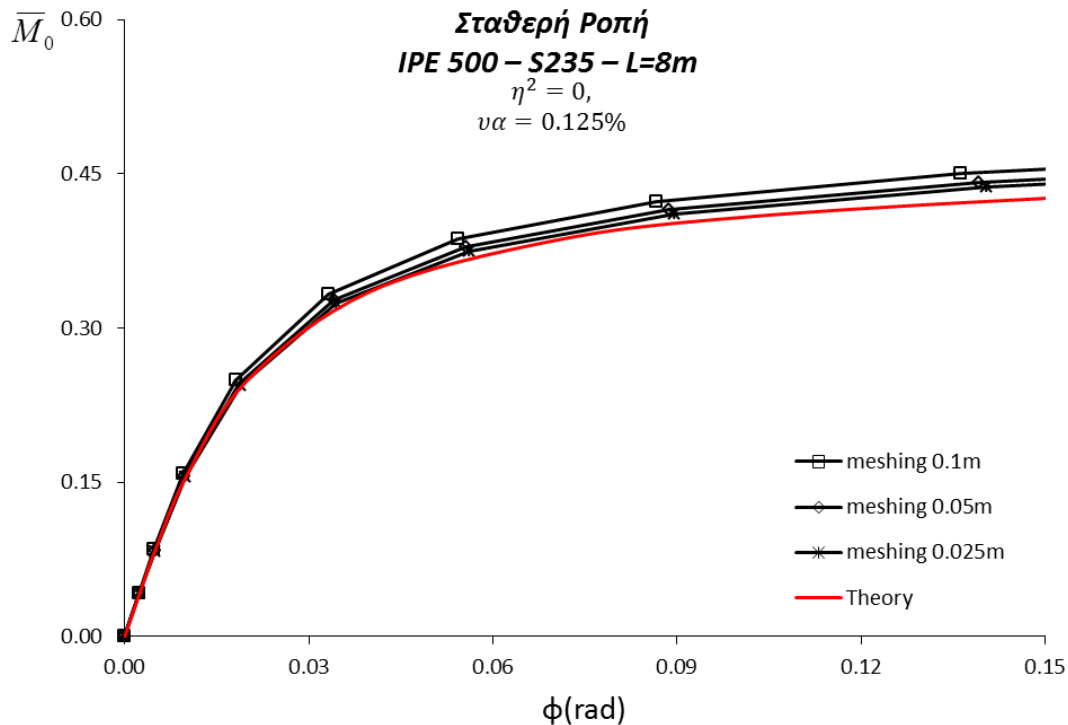
Σχήμα Β.11 Διακριτοποίηση επιφανειών

Μετά την ολοκλήρωση των παραπάνω βημάτων, προκύπτει το αποτέλεσμα του σχήματος Β.12



Σχήμα Β.12 Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων

Όπως φαίνεται στο σχήμα Β.13, στην παρούσα εργασία, έγιναν αναλύσεις με διαφορετική διακριτοποίηση του φορέα, με σκοπό να δούμε σε ποια έχουμε πιο ακριβή αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, μελετήθηκαν οι περιπτώσεις με διακριτοποίηση: 0.1m, 0.05m, 0.025m. Προφανώς, όπως φαίνεται και στο σχήμα, μεγαλύτερη ακρίβεια είχε η πιο “πυκνή” διακριτοποίηση. Έτσι, υιοθετήθηκε για όλες τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν.

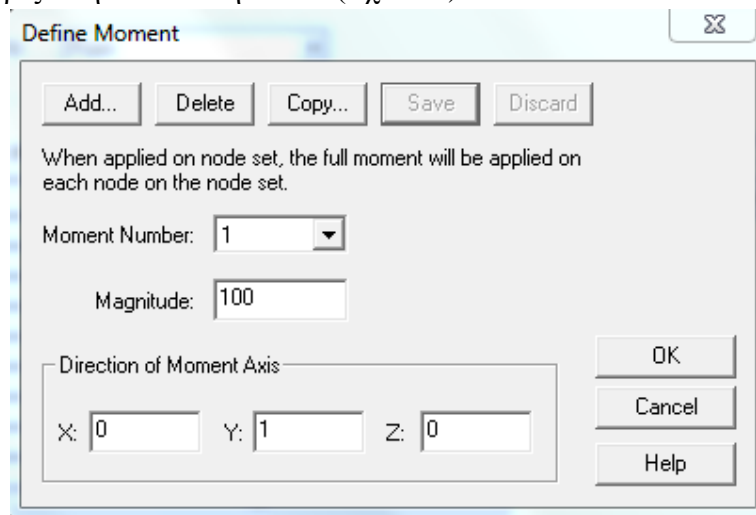


Σχήμα Β.13. Ευαισθησία του φορέα ως προς τη διακριτοποίηση

➤ Φόρτιση του φορέα

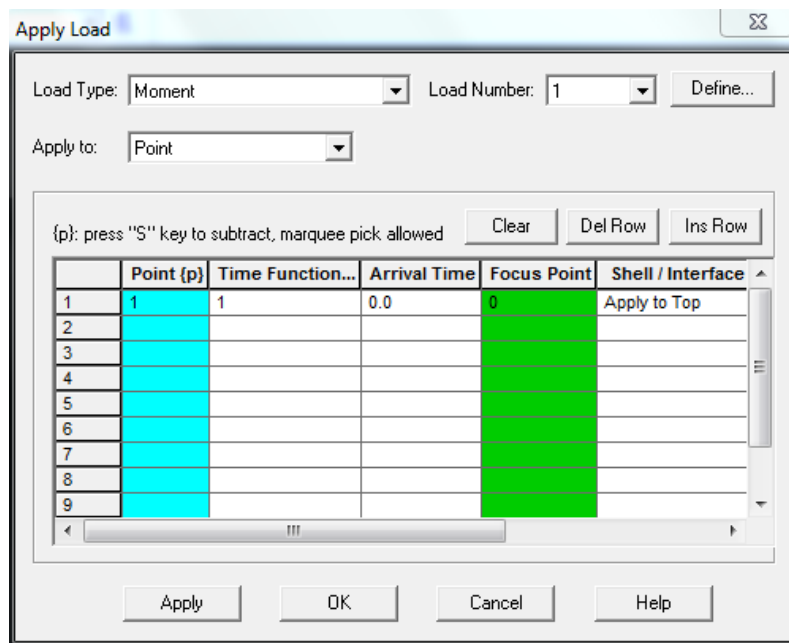
Η επιβολή της φόρτισης του φορέα γίνεται ως εξής: Model → Loading → Apply. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επιβολή σταθερής ροπής στα άκρα της δοκού, έτσι επιλέγουμε στο Load Type: Moment

Με την επιλογή Define → Add επιλέγουμε το μέγεθος του φορτίου καθώς και το διάνυσμα που καθορίζει τη διεύθυνση αυτού (Σχ.Β.14).



Σχήμα Β.14 Μέγεθος και κατεύθυνση επιβολής του φορτίου.

Επιστρέφοντας στο πρώτο παράθυρο, ορίζουμε σε ποιο σημείο “Point” υποβάλλεται το φορτίο που μόλις ορίσαμε.



Σχήμα Β.15 Καθορισμός του σημείου επιβολής του φορτίου.

Στήριξη του φορέα-Συνοριακές συνθήκες

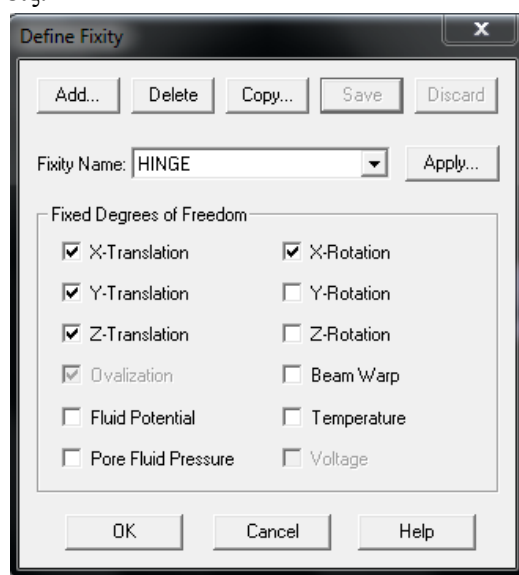
Αρχικά, ορίζουμε τις στηρίξεις του φορέα, ως εξής: Model → Boundary Conditions → Define Fixity και δημιουργούμε τους τύπους στήριξης που έχουμε στον φορέα (μια κύλιση και μία άρθρωση) με τις αντίστοιχες δεσμεύσεις μετακινήσεων και στροφών, σύμφωνα με τις παραδοχές έγιναν στο §3.2 (απαγόρευση στροφής περί τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής), όπως φαίνεται στο σχήματα B.16(α) και B.16(β).

Στη συνέχεια καθορίζουμε σε ποιο σημείο και το είδος της στήριξης (από αυτές που δημιουργήσαμε προηγουμένως) θα τοποθετηθούν (Σχήμα B.17), ως εξής:Model → Boundary Conditions → Apply Fixity.

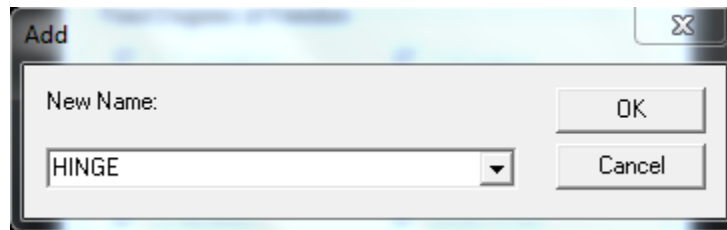
Το πρόβλημά μας όμως είναι όσο γίνεται καλύτερη προσομοίωση, όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες στήριξης της καμπτόμενης δοκού. Παρακάτω, παρουσιάζεται η προσομοίωση που καταλήξαμε μετά από πολλές δοκιμές. Θα γίνει χρήση των rigid links (άκαμπτων συνδέσμων) και “Constraint Equations (One master multiple slaves)”. Θα ορίσουμε δηλαδή, ως “master” ένα κόμβο (αυτόν που περνάει από το κέντρο βάρους της διατομής) και μετά θα ορίσουμε ως “slave” κάποιων “node set” της διατομής που θέλουμε να «υπακούουν» στο “master” και συγκεκριμένα από ποιες κινήσεις του “master” θέλουμε τα “slave” να δεσμευθούν. Η τελική προσομοίωση των συνοριακών συνθηκών που καταλήξαμε είναι τα εξής δυο είδη δεσμεύσεων:

α) Στο Σχ.Β.18 βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η δέσμευση (μέσω rigid links) προς όλες τις διευθύνσεις όλου του κορμού των ακραίων διατομών σε σχέση με την κίνηση του κέντρου βάρους των ακραίων διατομών.

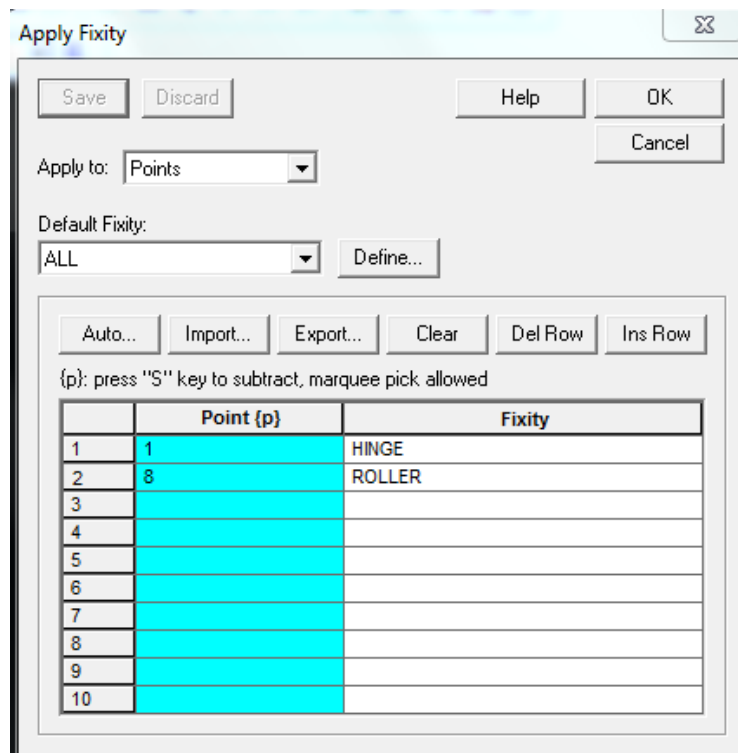
β) Στο Σχ.Β.19 βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η δέσμευση των πελμάτων των ακραίων διατομών (μέσω constraint equations) ,κατά τους καθολικούς άξονες y και z, από το κέντρα βάρους των διατομών έτσι ώστε να ακολουθούν τις κινήσεις των κέντρων βάρους μόνο κατά τις δύο αυτές διευθύνσεις.



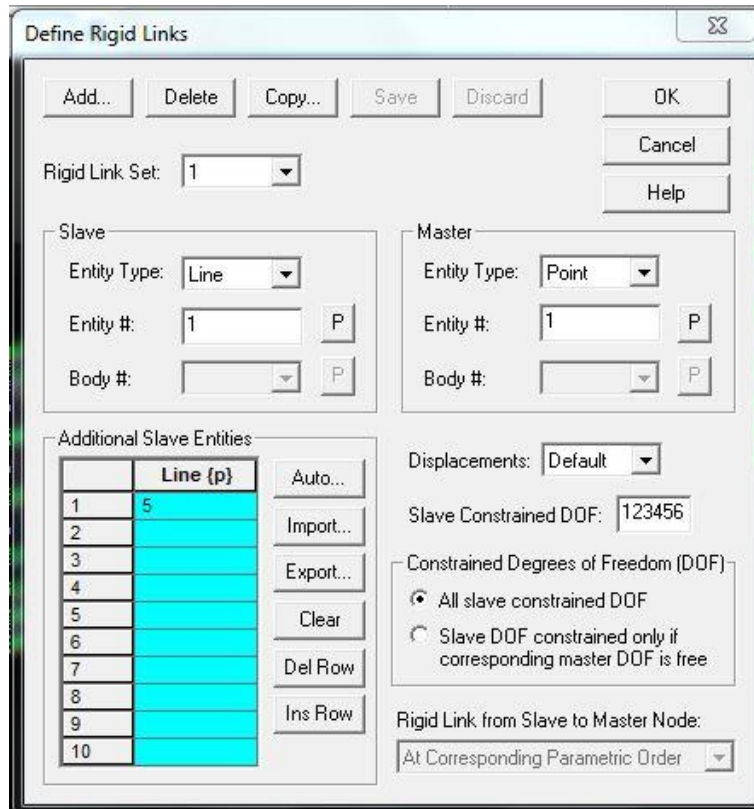
Σχήμα B.16(α) Δημιουργία στήριξης



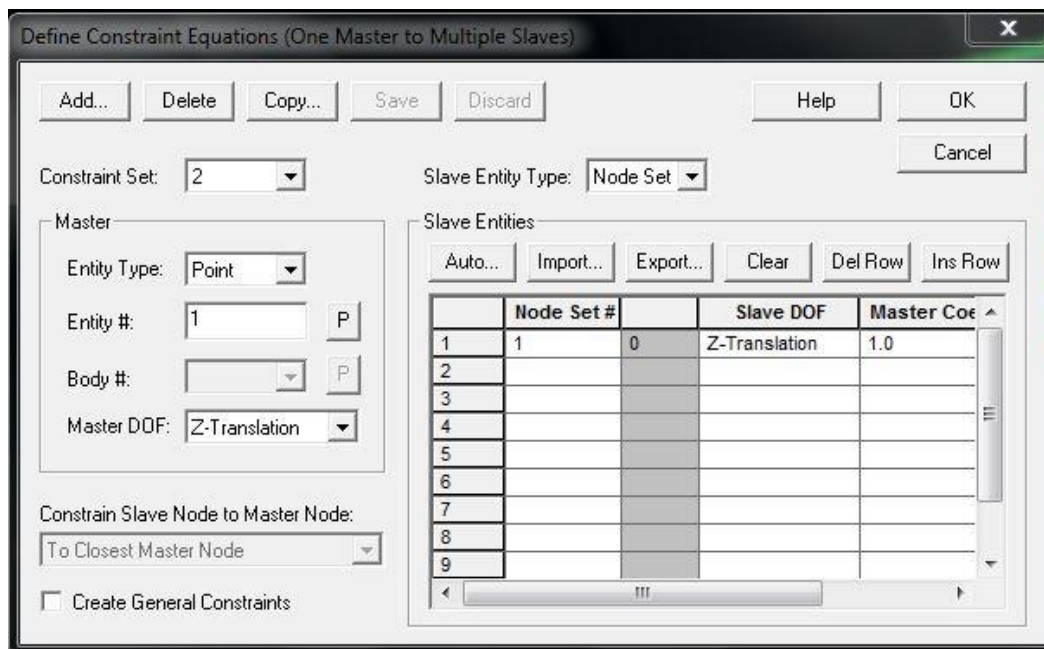
Σχήμα 5.16(β) Δημιουργία στήριξης



Σχήμα Β.17 Ορισμός των στηρίξεων



Σχήμα Β.18 Ορισμός άκαμπτων συνδέσμων (rigid links)

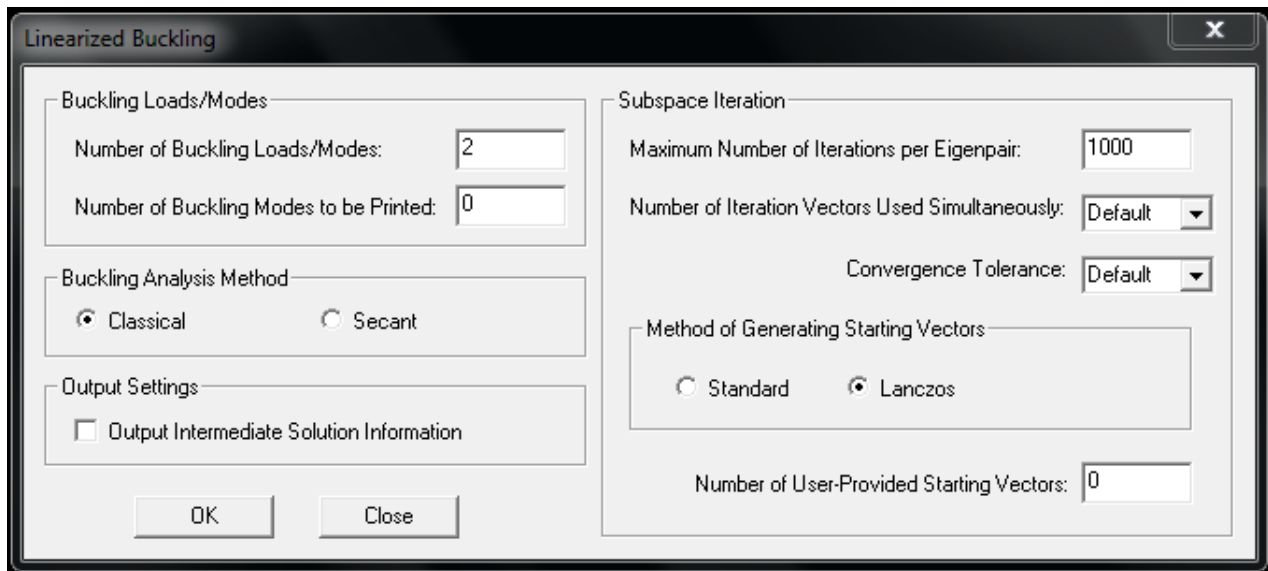


Σχήμα Β.19 Ορισμός “Constraint Equations”

Ανάλυση του φορέα – Είδη αναλύσεων

Γραμμική Ανάλυση Λυγισμού (LBA)

Η γραμμική ανάλυση λυγισμού πραγματοποιείται εάν στη θέση “Analysis Type” επιλέξουμε “Linearized Buckling” και στο εικονίδιο “Analysis Options” ορίσουμε τον αριθμό των απαιτούμενων ιδιομορφών (number of Buckling Loads/Modes) καθώς και τον αριθμό των επαναλήψεων που θα πραγματοποιήσει το πρόγραμμα για την εύρεση τους (number of iterations per Eigenpair), (Σχ. Β.20).



Σχήμα Β.20 Επιλογή αριθμού των ιδιομορφών

Για την πραγματοποίηση γραμμικής ανάλυσης λυγισμού, είναι απαραίτητη η ενεργοποίηση μεγάλων παραμορφώσεων, μέσω της εντολής: Control → Analysis Assumptions → Kinematics και επιλέγοντας στη θέση “Displacements/Rotations”: Large.

Το μοντέλο είναι έτοιμο για ανάλυση, η οποία πραγματοποιείται με την εντολή: Solution → Data File /Run.

Μη γραμμική Ανάλυση Γεωμετρίας

Στη μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας, δίνουμε στο φορέα αρχική ατέλεια παραμετροποιημένη ως προς την πρώτη ιδιομορφή που έχει προκύψει από τη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Αυτό σημαίνει, ότι προκειμένου να κάνουμε μη γραμμική ανάλυση, θα πρέπει να προηγηθεί η γραμμική ανάλυση λυγισμού του φορέα. Στο Analysis Type, ορίζουμε Collapse Analysis. Η ανάλυση γίνεται με τη μέθοδο Arc – Length. Επομένως στη θέση Analysis Options, ορίζουμε τις ρυθμίσεις της μεθόδου Arc – Length. Αυτές είναι:

- Ορίζουμε κόμβο αναφοράς (επιλέγεται να είναι το κέντρο βάρους της μεσαίας διατομής της δοκού) και μια μικρή μετατόπιση – μικρού μεγέθους – κατά τη διεύθυνση της φόρτισης στον κόμβο αυτό.
- Δίνουμε μια τιμή στην παράμετρο alpha, η οποία χρησιμοποιείται για να ορίσει τη μέγιστη μετατόπιση κατά τη διάρκεια κάθε βήματος της μεθόδου.
- Επιλέγουμε να συνεχιστεί η ανάλυση και μετά από την εύρεση του οριακού σημείου, έτσι ώστε να έχουμε εποπτεία για τη μεταλυσιμική συμπεριφορά του φορέα.
- Ορίζουμε το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων μέσα σε κάθε βήμα της μεθόδου arc – length.

Μέσω των εντολών Time function και Time Step, ορίζουμε τη χρονική εφαρμογή του φορτίου καθώς και τα βήματα εφαρμογής του φορτίου, αντίστοιχα.

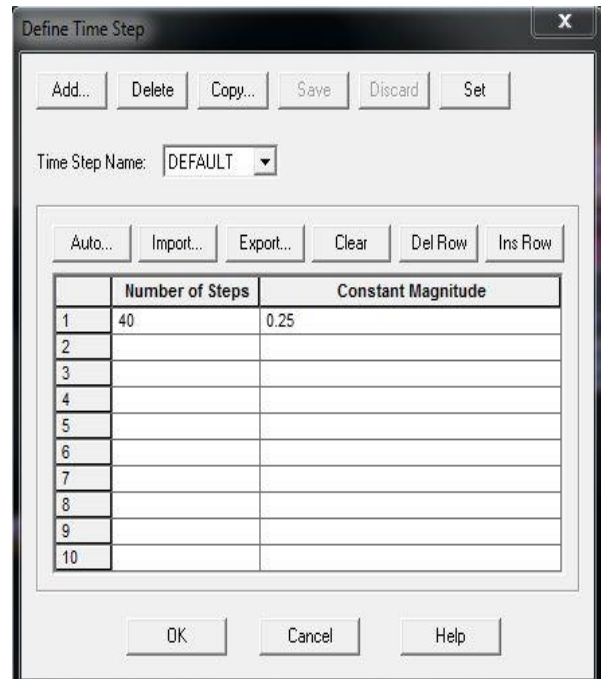
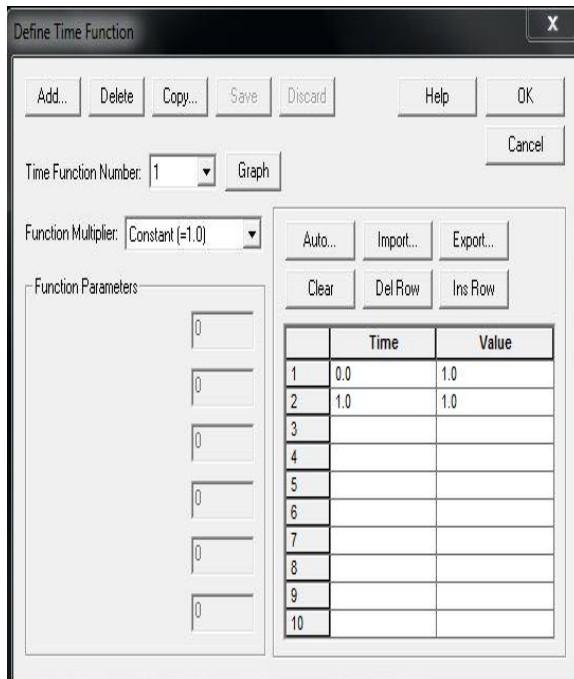
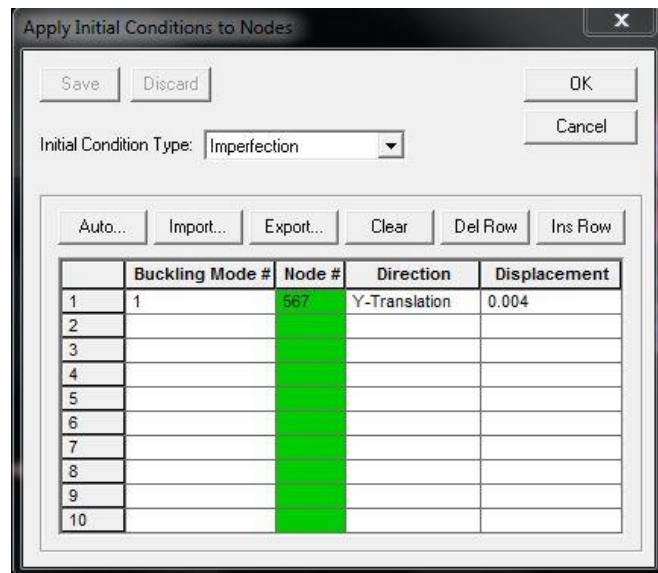
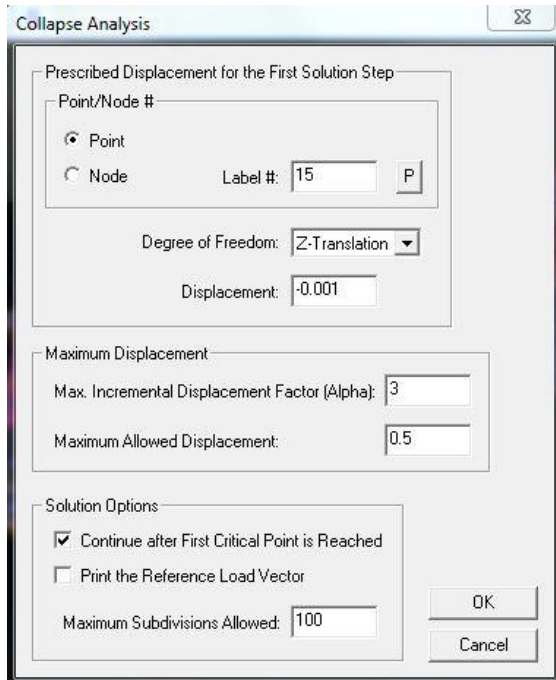
Τέλος, εισάγουμε κάποια γεωμετρική ατέλεια. Αυτό γίνεται μέσω της εντολής Model→Initial Conditions→Imperfection και επιλέγουμε το Initial Condition Type:Node για την εφαρμογή της ατέλειας στον κόμβο, δηλώνουμε με ποια ιδιομορφή της LBA θα παραμετροποιηθεί η αρχικά παραμορφωμένη δοκός. Επίσης δηλώνουμε τον κόμβο στον οποίο θα δοθεί η αρχική γεωμετρική ατέλεια, τη διεύθυνση εφαρμογής της και το μέγεθος της.

Μη γραμμική Ανάλυση Υλικού

Προφανώς, η ανάλυση αυτή θα γίνει με τη χρήση κάποιου ελαστοπλαστικού υλικού ή χάλυβα με κάποιο ποσοστό κράτυνσης. Επίσης, θα πρέπει να επιλέξουμε Displacements/Rotations: Small. Κατά τα άλλα, η ανάλυση αυτή απαιτεί τις ίδιες ρυθμίσεις με τη μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας.

Μη γραμμική Ανάλυση Γεωμετρίας και Υλικού

Είναι ουσιαστικά συνδυασμός των δυο παραπάνω αναλύσεων. Από τη το υλικό του φορέα είναι ελαστοπλαστικό (όπως η μη γραμμική ανάλυση υλικού) και από την άλλη πρέπει να επιλέξουμε Displacements/Rotations:Large καθώς και να δοθεί κάποια αρχική γεωμετρική ατέλεια, όπως περιγράφηκε και παραπάνω (μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας).



Σχήμα Β.21 Ρυθμίσεις μεθόδου Arc-Length (πάνω αριστερά), εισαγωγή γεωμετρικής ατέλειας (πάνω δεξιά), εισαγωγή χρονικής συνάρτησης επιβολής φορτίου (κάτω αριστερά), εισαγωγή χρονικού βήματος επιβολής του φορτίου (κάτω δεξιά).