

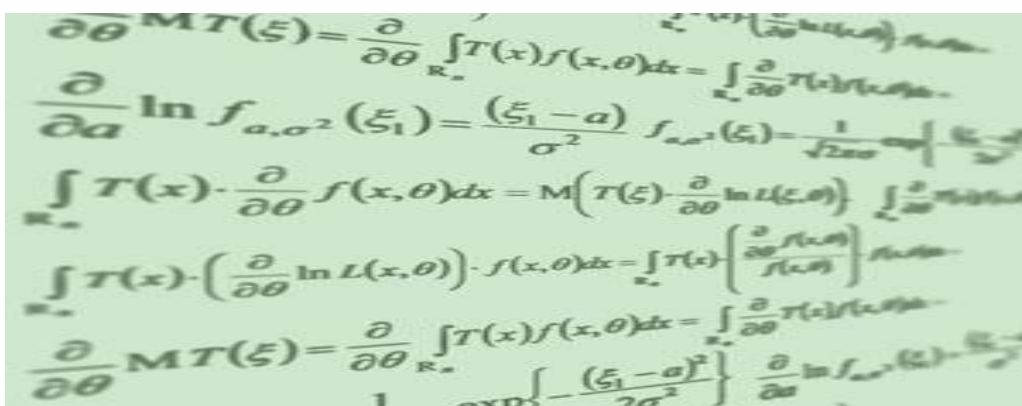


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



**«Η Μέθοδος Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη
και Αλγοριθμικές Παραλλαγές της»**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Χρήστος Κουκουβίνος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΦΟΙΤΗΤΗ

Ιωάννης Διαμαντής (Α.Μ.09411005)

ΑΘΗΝΑ 2015

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη (*Exponentially Weighted Moving Average – EWMA*), ως εξελικτική τεχνική μεθοδολογία για την εφαρμογή Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών ως βέλτιστο εργαλείο για τον έλεγχο ποιότητας της παραγωγής. Όπως είναι γνωστό από την εκτενή βιβλιογραφία η οποία έχει ανακύψει στο συγκεκριμένο πεδίο έρευνας, η μέθοδος *EWMA* βρίσκει ευρύτερη εφαρμογή στην παρακολούθηση διεργασιών παραγωγής για την διασφάλιση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Η μέθοδος, συμπληρωματικά έχει βελτιωθεί με διαφορετικές παραλλαγές, οι οποίες στοχεύουν στην γενικότερη βελτίωση της απόδοσης της καθώς και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών αυτής. Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος *EWMA* έχει εμπλουτισθεί με την χρήση μονόπλευρων ή αμφίπλευρων ορίων ελέγχου, τα οποία μπορεί να είναι σταθερά και ορισμένα κατά την φάση εκκίνησης της μεθόδου (κλασσική εφαρμογή της *EWMA*), είτε αντίστοιχα με την χρήση μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου, τα οποία μπορεί να προκύπτουν ως χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ή εναλλακτικά με χρήση μεθοδολογίας που προσδίδει το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (*Fast Initial Response - FIR*). Η μέθοδος που προσδίδει το χαρακτηριστικό *FIR* προκύπτει από επέκταση της εφαρμογής της από την αρχική μέθοδο *CUSUM* στην οποία και πρωτοξεκίνησε να εφαρμόζεται. Η μέθοδος *FIR* σε συνδυασμό με άλλα χαρακτηριστικά που μπορούν να προστεθούν στην μέθοδο παρακολούθησης διεργασιών *EWMA*, στοχεύει στην αποκόμιση βέλτιστων ιδιοτήτων για την διαδικασία παρακολούθησης μιας διεργασίας, μεταβάλλοντας τις ελεύθερες παραμέτρους της μεθόδου *EWMA*. Επιπλέον των παραμετρικών τεχνικών *EWMA* συνεπικουρικά έρχονται να προστεθούν οι μη παραμετρικές μέθοδοι. Οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν είναι υποκείμενες στην βασική υπόθεση της «Κανονικότητας» για μία διεργασία υπό έλεγχο, γεγονός το οποίο αποτελεί θεμελιώδη βάση για την εφαρμογή ενός μεγάλου πλήθους παραλλαγών των μεθόδων *EWMA*.

Στα χρόνια όπου αυτές οι μέθοδοι γίνονται αντικείμενο μελέτης, ένας σημαντικός αριθμός ερευνητών έχει μελετήσει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους, συμβάλλοντας στην δημιουργία εκτενούς βιβλιογραφίας. Οι παραλλαγές της βασικής μεθόδου *EWMA* στοχεύει σε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, όπως είναι η γρήγορη εκτός ελέγχου ανίχνευση της διεργασίας, οι οποίες αφορούν τις φάσεις εκκίνησης ή

επανεκκίνησης του συστήματος ελέγχου, διασφάλιση μεγάλων μέσων μηκών ροής (ARL) για τις εντός ελέγχους φάσεις, διασφάλιση όσον το δυνατόν ελάχιστου μέσου μήκους ροής για την διεργασία όταν αυτή βρίσκεται σε φάσεις εκτός ελέγχου, κλιμακούμενα όρια ελέγχου, συνδυασμός μεθόδων για την συνολική βελτιστοποίηση της παρακολούθησης διεργασιών, κλπ.

Στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι η παρουσίαση και συγκέντρωση όλων των ανωτέρω περιγραφόμενων μεθόδων, η κατάδειξη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους και τέλος η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την χρήση τους ως εξειδικευμένα εργαλεία παρακολούθησης διεργασιών παραγωγής, όταν στοχεύουμε σε βελτιστοποιήσεις ποιότητας ειδικού τύπου. Για την παρουσίαση και την προσέγγιση των μεθόδων θα χρησιμοποιηθεί το ιστορικό πλαίσιο της δημιουργίας αυτών των μεθόδων δηλ. τα χρονικά πλαίσια στα οποία οι μεθοδολογίες δημιουργήθηκαν και εμπλουτίστηκαν στην πορεία των χρόνων εξέλιξης των μεθόδων.

ABSTRACT

The purpose of the current thesis is the introduction and analytical overview of the *Exponentially Weighted Moving Average* method – *EWMA*, as an evolutionary technical methodology for the application of *Statistical Process Control* – *SPC* - an optimal tool for quality production management issues. Based on current literature that has been produced over this section, *EWMA* method has been exploited for the management and verification of production quality. This method has been overall improved by using modifications, target onto the general enhancements of method as well as tuneup of special characteristics revealed through algorithms application. Specifically, *EWMA* method has been enriched using one-side or two-side control limit schemes, that can be set either constantly from startup phase of the process monitoring (an essential application of the *EWMA* algorithm), or using varying control limits coming through time variation of process characteristics, or else alternatively coming by the induction of *FIR* characteristics. Alteration of *EWMA* method using *FIR* characteristic has been induced onto current method from corresponding implementation of this feature over *CUSUM* method. *FIR*, in conjunction with other characteristics of the *EWMA* algorithm, focuses to the introduction of general enhancements over method altering degrees of freedom (tunable parameters of method). Assistively to the *EWMA* parametric methodologies proposed, non-parametric *EWMA* techniques have been introduced recently. Non-parametric methods eliminate an underlying hypothesis related to the under control process following the Normality assumption. The latter defines a fundamental distribution-free basis for the deployment of new non-parametric *EWMA* techniques

Over the past years these methods have been studied thoroughly since an increased number of researchers have exploited special characteristics contributing significantly to corresponding literature. *EWMA* method investigation focus onto special characteristics such as prompt out-of-control detection of process during startup or restart phases, large *ARLs* for in-control phase, short *ARLs* for out-of- control phase, scalable and varying control limits, combination of current and other methods for optimal results, etc.

The purpose of current thesis is to gather and highlight special characteristics for all the aforementioned algorithms, deployment of special characteristics of methods as well as extraction of conclusions referred to these methods as special tools for application of

optimal control for the production process. A basis for this investigation of methods is the time frame as these methods introduced, expanded enriched and finalized through time by researchers.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Χρήστο Κουκουβίνο, για την ανάθεση της εργασίας, την καθοδήγηση, τις αλάνθαστες υποδείξεις και την ευκαιρία μίας εποικοδομητικής συνεργασίας πάνω σε ένα γνωστικό αντικείμενο το οποίο με ενθουσίασε ιδιαίτερος την περίοδο που το διδάχθηκα. Οι επιστημονικές γνώσεις του στον τομέα αυτό, η εμπειρία, ο επαγγελματισμός, η αφοσίωση και η διάθεση του για εποικοδομητική συνεργασία συνέβαλαν καθοριστικά στη θετική μου στάση και ενδιαφέρον ως προς την αποτελεσματική και δημιουργική προετοιμασία του συγκεκριμένου θέματος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα Ανδρουλάκη Εμμανουήλ, για την καθοδήγηση και πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης και προετοιμασίας της συγκεκριμένης εργασίας, όπως επίσης και για τις πολύ εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις που συνέβαλαν στην άρτια παρουσίαση της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ανεκτίμητη βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχαν με κάθε δυνατό τρόπο, ηθικά και ψυχολογικά, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Για την αγάπη, την αφοσίωση, την κατανόηση, την υπομονή, την υποστήριξη και γενικώς για όλα όσα μου προσέφεραν τους οφείλω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου και όλη μου την αγάπη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	2 -
ABSTRACT.....	4 -
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	6 -

ΚΕΦΑΛΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	9 -
Η μεθοδολογία του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη – <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> – <i>EWMA</i> . Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου.....	9 -
1.1. Εισαγωγή.....	9 -
1.1.1. Ιστορικό πλαίσιο της εμφάνισης της μεθόδου <i>EWMA</i>	10 -
1.1.2. Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου <i>EWMA</i>	13 -
1.1.3. Θέματα Κατανομών που αφορούν σε μέσα μήκη (<i>ARLs</i>).....	15 -
1.1.4. Διεργασία Σχεδιασμού Μεθοδολογίας Ελέγχου <i>EWMA</i>	19 -
1.1.5. Περαιτέρω εμπλουτισμός και επεκτάσεις της μεθόδου <i>EWMA</i>	21 -
1.2. Η χρήση του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη και η επίδραση των Χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου.....	26 -
1.2.1. <i>EWMA</i> Μέθοδος και Χρονικά Μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου.....	29 -
1.2.2. Ιδιότητες των Μηκών ροής (<i>RL</i>) για διαγράμματα <i>EWMA</i> με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου.....	31 -
1.2.3. Διαγράμματα Ελέγχου <i>EWMA</i> και <i>FIR</i>	36 -
1.3. Η χρήση δύο διαγραμμάτων <i>EWMA</i> μονής πλευρικής ζώνης για την αντικατάσταση μίας μεθοδολογίας <i>EWMA</i> ελέγχου αμφίπλευρης ζώνης.....	40 -
1.3.1. Τα διαγράμματα Ελέγχου <i>HHW1</i> , <i>HHW2</i> και <i>HHW-C</i>	40 -
1.3.2. Σύγκριση Επιδόσεων.....	48 -
1.3.3. Σχεδιασμός των διαγραμμάτων ελέγχου.....	55 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	61 -
Το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (<i>Fast Initial Response</i> – <i>FIR</i>) για την <i>EWMA</i> μέθοδο ελέγχου. Συγκριτικοί έλεγχοι των οικογενειών <i>EWMA</i> για διαφορετικούς τύπους ορίων ελέγχου.....	61 -
2.1. Εισαγωγή.....	61 -
2.1.1. <i>EWMA</i> μέθοδος και χαρακτηριστικό <i>FIR</i> με μοντέλο αλλαγής σημείου.....	62 -
2.1.2. Μοντέλο σημείων αλλαγής και Μετρικές Απόδοσης.....	64 -
2.1.3. Παρουσίαση των <i>EWMA</i> σχημάτων.....	65 -
2.1.4. Συγκριτική Μελέτη.....	68 -

2.2. Το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (FIR) και η ευαισθησία στην ανίχνευση συνθηκών εκτός ελέγχου.....	72 -
2.2.1. Διαγράμματα <i>TNEWMA</i>	73 -
2.2.2. Σύγκριση των Μηκών ροής για τα διαγράμματα <i>NEWMA</i> και <i>TNEWMA</i>	75 -
2.2.3. Επίδραση του χαρακτηριστικού της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (<i>FIR</i>) στην μεταβλητότητα του διαγράμματος <i>EWMA</i>	79 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	83 -
<i>EWMA</i> και παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης σ_0^2 μιας διεργασίας όταν οι παράμετροι της διεργασίας δεν είναι εξαρχής γνωστές αλλά προκύπτουν από εκτιμήσεις	83 -
3.1. Εισαγωγή.....	83 -
3.1.1. <i>EWMA</i> τεχνική και παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης	84 -
3.1.2. Οι ιδιότητες του μήκους ροής (RL) του διαγράμματος <i>EWMA</i> για την τυπική απόκλιση με εκτιμώμενες παραμέτρους για την διεργασία	86 -
3.1.3. Η προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.....	87 -
3.1.4. Η προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας	89 -
3.1.5. Η απόδοση του <i>EWMA</i> διαγράμματος για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης με εκτιμημένες τις παραμέτρους της διεργασίας.....	91 -
3.1.6. Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου.....	96 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	100 -
Βελτίωση των μετρικών απόδοσης της τεχνικής <i>EWMA</i> με χρήση ειδικών μεθόδων δειγματοληψίας από την διεργασία προς έλεγχο.....	100 -
4.1. Εισαγωγή.....	100 -
4.1.1. Μέθοδοι Δειγματοληψίας Διεργασιών.....	101 -
4.1.2. Εφαρμογή των μεθόδων δειγματοληψίας στην κλασσική <i>EWMA</i>	106 -
4.1.3. Σχεδιασμός ενός συστήματος <i>EWMA</i> με χρήση κατηγοριοποίησης μέσου (ranked median).....	108 -
4.1.4. Εξέταση της απόδοσης των προτεινόμενων σχημάτων	110 -
4.1.5. Συγκριτικά αποτελέσματα	118 -
4.1.6. Σύγκριση με την κλασσική <i>EWMA</i>	119 -
4.1.7. Σύγκριση με την μέθοδο <i>FIR EWMA</i>	119 -
4.1.8. Σύγκριση με την διπλή μέθοδο <i>EWMA</i>	120 -
4.1.9. Σύγκριση με την μέθοδο <i>EWMA</i> με χρήση κανόνων	123 -
4.1.10. Σύγκριση με την υβριδική <i>EWMA</i>	123 -
4.1.11. Σύγκριση με τα διαγράμματα <i>Shewart-EWMA</i> με κατάταξη δειγμάτων	124 -
4.1.12. Σύγκριση των τριών προτεινόμενων σχημάτων.....	124 -
4.1.13. Χειρότερες συνθήκες σύγκρισης – Μη σωστή κατάταξη των δεδομένων.....	125 -
4.2. Εφαρμογή των προηγούμενων μεθόδων κατηγοριοποίησης στον έλεγχο του περιεχόμενου όγκου στην βιομηχανία αναψυκτικών	129 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	133 -
Η χρήση του μη παραμετρικού διαγράμματος προσήμου <i>EWMA-SN (Sign - SN Chart)</i> για διεργασίες που ακολουθούν ανεξάρτητες κατανομές	133 -
5.1. Εισαγωγή στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου	133 -
5.1.1. Σύγκριση παραμετρικών και μη παραμετρικών τεχνικών: Η τρέχουσα κατάσταση	134 -
5.2. Το μη παραμετρικό διάγραμμα <i>EWMA-SN</i>	139 -
5.3. Η κατανομή του Μήκους (RL).....	141 -

5.4. Εφαρμογή του διαγράμματος με κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων σχεδιασμού... -	144 -
5.5. Παράδειγμα Εφαρμογής του Μη Παραμετρικού EWMA-SN διαγράμματος -	147 -
5.6. Μελέτη Απόδοσης..... -	149 -
5.6.1. Ευστάθεια για την φάση εντός ελέγχου -	152 -
5.6.2. Απόδοση για την εκτός ελέγχου φάση -	154 -
5.7. Συμπεράσματα από την χρήση και τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων EWMA-SN..... -	159 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6..... -	161 -
Η χρήση του μη παραμετρικού διαγράμματος «επερχόμενων» στατιστικών <i>EWMA-EX</i> (<i>EWMA Exceeded Chart</i>) για διεργασίες που ακολουθούν ανεξάρτητες κατανομές..... -	161 -
6.1. Απόπειρες Βελτίωσης των χαρακτηριστικών και των αποδόσεων των μη παραμετρικών μεθόδων EWMA. Το διάγραμμα EWMA-EX..... -	161 -
6.2. Τεχνικό υπόβαθρο της μεθόδου EWMA-EX..... -	164 -
6.3. Η Κατανομή του Μήκους Ροής (RL)..... -	165 -
6.3.1. Εκλογή των παραμέτρων σχεδιασμού..... -	166 -
6.4. Παραδείγματα της εφαρμογής της μεθόδου EWMA-EX -	168 -
6.5. Σύγκριση των επιδόσεων..... -	173 -
6.5.1. Σύγκριση των χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων σε φάση εκτός ελέγχου..... -	174 -
6.6. Επίδραση του μεγέθους των δειγμάτων -	190 -
6.7. Συμπεράσματα από την μη παραμετρική μέθοδο EWMA-EX..... -	192 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7..... -	196 -
Συμπεράσματα από την εφαρμογή των ειδικών τεχνικών <i>EWMA</i> -	196 -
7.1. Ιδιότητες και Χαρακτηριστικά των ιδιαίτερων μεθόδων EWMA που παρουσιάστηκαν..... -	196 -
7.2.Γενικά Συμπεράσματα..... -	200 -
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..... -	203 -

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η μεθοδολογία του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη – *Exponentially Weighted Moving Average* – *EWMA*. Ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μεθόδου

1.1. Εισαγωγή

Η μέθοδος του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη – *Exponentially Weighted Moving Average* – *EWMA*, πρωτοεισήχθη στην μελέτη του ελέγχου στατιστικών διεργασιών από τον Roberts το 1959, ως ένα αμιγές εργαλείο ελέγχου. Ο συγκεκριμένος ερευνητής χρησιμοποίησε τεχνικές προσομοίωσης διεργασιών για να εξακριβώσει τις ιδιότητες του *EWMA* ως εργαλείο ελέγχου για την ανίχνευση μεταβολών του μέσου μιας διεργασίας. Η αναγνώριση ότι ένα εργαλείο ελέγχου βασισμένο στις τεχνικές του *EWMA* μπορεί να αντιπροσωπευθεί από μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα (M.A.), επιτρέπει την πλέον λεπτομερή ανίχνευση και αναγνώριση των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών της μεθόδου, περισσότερο εύκολα αλλά και σε μεγαλύτερο βάθος απ'ότι αρχικά είχαν εντοπισθεί για την εν λόγω μέθοδο. Οι ιδιότητες της μεθόδου *EWMA* ως εργαλείο ελέγχου για την μέση τιμή μιας διεργασίας, η οποία βιώνει αλλαγές (*shifts*) από την επιθυμητή τιμή και ακολουθεί την Κανονική κατανομή (*Normal Distribution*), είναι από τις πλέον διαδεδομένες εφαρμογές της μεθόδου. Οι αλγοριθμικές μέθοδοι και παραλλαγές που αναπτύχθηκαν πρωταρχικά στον τομέα αυτό χρησιμοποιούν τιμές παραμέτρων, οι οποίες με κατάλληλη εκλογή διευκολύνουν την ανίχνευση ακόμα και μικρών αλλαγών από την επιθυμητή τιμή/τιμή στόχο. Τέτοια σχήματα παραλλαγών περιλαμβάνουν τις τεχνικές: της μεθόδου Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης– *FIR*, η οποία είναι αρκετά ευαίσθητη σε προβλήματα ελέγχου της διεργασίας κατά την αρχική φάση (*startup phase*), της συνδυασμένης μεθόδου *Shewart* – *EWMA* η οποία παρέχει προστασία για την έγκαιρη ανίχνευση τόσο μικρών όσο και μεγαλύτερων μεταβολών από την επιθυμητή τιμή, τις εύρωστες *EWMA* μεθόδους (*robust*

EWMA) που προστατεύουν από σποραδικές εμφανίσεις σημείων εκτός λειτουργίας των διεργασιών και οι οποίες γενικά με άλλα συστήματα ελέγχου θα οδηγούσαν σε δημιουργία εκτός ελέγχου σημάτων εκτός ελέγχου (*out of control signals*). Τα αποτελέσματα από την σύγκριση των διεργασιών αναφέρονται επίσης σε σύγκριση των χαρακτηριστικών του μέσου μήκους ροής εντός ελέγχου των διεργασιών (*Average Run Length - ARL*) όσον αφορά στην *EWMA* και τις παραδοσιακά πιο εφαρμόσιμες διεργασίες ελέγχου όπως είναι η *CUSUM*.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία στόχος είναι η παρουσίαση τέτοιων τεχνικών και ειδικών μεθόδων οι οποίες ανέκλυαν με βάση την αρχική μεθοδολογία *EWMA*, τονίζοντας την βελτίωση καθώς και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που αυτές επιτυγχάνουν σε σχέση με την αρχική (*enhancements*). Ως προϋπόθεση για την παρακολούθηση του υλικού που παρουσιάζεται θεωρείται, ότι ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με τα βασικά χαρακτηριστικά καθώς και με τις βασικές τεχνικές του ελέγχου διεργασιών που βασίζονται στην *EWMA*. Για την διευκόλυνση της παρουσίασης των χαρακτηριστικών, των επεκτάσεων καθώς και των επιπρόσθετων χαρακτηριστικών που οι παραλλαγές της μεθόδου δημιουργούν, θεωρείται η χρονικά εξελικτική παρουσίαση των μεθόδων αυτών όπως δηλ. αναπτύχθηκαν ιστορικά από τους ερευνητές – μελετητές των μεθόδων αυτών.

1.1.1. Ιστορικό πλαίσιο της εμφάνισης της μεθόδου *EWMA*

Από την εποχή που ο Walter Shewart εισήγαγε την μέθοδο του ως εργαλείο ελέγχου των διεργασιών παραγωγής το 1924, τα διαγράμματα ελέγχου έχουν βρει ευρύτατη εφαρμογή στην βελτίωση της ποιότητας των προϊόντων που παράγονται από βιομηχανικές διεργασίες. Αν και η μέθοδος Κινητού μέσου με εκθετικά βάρη (*EWMA*) είναι γνωστό ότι εμφανίζει καλές προβλεπτικές ιδιότητες στην ανίχνευση εκτός ελέγχου συνθηκών (Muth – 1960, Box, Jenkins, MacGregor - 1974, κ.α.), στην μέθοδο δεν έχουν αποδοθεί όλες οι εκφάνσεις και ευρύτερες εφαρμογές της ως γενικότερο εργαλείο ποιοτικού ελέγχου. Στην κατεύθυνση αυτή καταβάλλεται ευρύτατη και γενικότερη προσπάθεια από έναν μεγάλο αριθμό ερευνητών για την ενίσχυση αυτών των ιδιαίτερων εφαρμογών και την εξαγωγή βελτιστοποιημένων χαρακτηριστικών που αφορούν στον ακριβέστερο έλεγχο των βιομηχανικών διεργασιών παραγωγής (Crowder – 1987, Lucas and Saccucci, Montgomery, κ.α.).

Όπως στα διαγράμματα Shewart και *CUSUM*, ένα-διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στην *EWMA* μέθοδο, μπορεί να εφαρμοστεί και να ερμηνευτεί εύκολα, βασισμένο στην στατιστική εξίσωση:

$$Z_i = \lambda Y_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

σε συνδυασμό με την χρήση άνω και κάτω ορίων ελέγχου για την διεργασία (*Upper & Lower Control Limits – UCL/LCLs*). Η αρχική τιμή Z_0 της μεθόδου, θα αποτελέσει γενικότερα αντικείμενο καθορισμού, συνήθως εκλέγεται στην επιθυμητή μέση τιμή της διεργασίας. Οι ακολουθιακά προκύπτουσες τιμές μετρήσεων Y_i , μπορούν να προκύψουν απευθείας με εποπτεία της διεργασίας παραγωγής, αν και πολλές φορές αποτελούν εκτιμήσεις μέσω τιμών ως τιμές δειγματοληψίας από το σύστημα που επιθυμούμε να ελέγξουμε. Μία διεργασία θεωρείται ως εκτός ελέγχου, και στην περίπτωση αυτή θα πρέπει πιθανώς να εφαρμοστούν ενέργειες, όταν η τιμή της παραμέτρου Z , βρεθεί εκτός των καθορισμένων ορίων.

Η μέθοδος *EWMA* έχει εφαρμοσθεί εναλλακτικά από μία εφαρμογή για την εξαγωγή ενός γεωμετρικού μέσου όρου, λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεταβλητή Z , μπορεί να γραφεί ως μέσος όρος των παροντικών και παρελθοντικών τιμών μίας διεργασίας, επιλύοντας την εξίσωση ορισμού της στην μορφή:

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j Y_{i-j} + (1 - \lambda)^i Z_0,$$

όπου οι συντελεστές βαρύτητας λ για την επίδραση των παρελθοντικών τιμών του μεγέθους, απορρέουν σε γεωμετρική μορφή όπως σε μία εκθετική σειρά. Επιπρόσθετα πολλές από τις ιδιότητες της *EWMA*, από τις ιδιότητες που εμφανίζει ο τύπος φόρμουλα για την εκτίμηση του αθροίσματος μιας γεωμετρικής σειράς.

Όταν οι τιμές των μετρήσεων είναι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με κοινή διασπορά σ_Y^2 , τότε η διασπορά της διεργασίας δίνεται από την σχέση:

$$\sigma^2(Z_i) = \{[1 - (1 - \lambda)^{2i}] \lambda / (2 - \lambda)\} \sigma_Y^2.$$

Η αρχική τιμή που χρησιμοποιείται για την εκκίνηση της μεθόδου, εάν δεν είναι μικρή μπορεί να έχει σημαντικές επιδράσεις. Στην περίπτωση που αυτή είναι μικρή, τότε η μέθοδος συγκλίνει σχετικά γρήγορα στην ασυμπτωτική εκτίμηση του παραπάνω τύπου:

$$\sigma_Z^2 = \{\lambda / (2 - \lambda)\} \sigma_Y^2$$

Τα όρια ελέγχου της διεργασίας συνήθως επιλέγονται βασισμένα στην παραπάνω ασυμπτωτική τιμή:

$$LCL = \text{Target} - L_1\sigma_z$$

$$UCL = \text{Target} + L_2\sigma_z$$

Γενικότερα τα όρια ελέγχου επιλέγονται συμμετρικά σε σχέση με την επιθυμητή κεντρική τιμή της διεργασίας με $L=L_1=L_2$. Κατάλληλες τροποποιήσεις στην εκλογή αυτών των παραμέτρων μπορούν να γίνουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου με μόνο άνω ή κάτω πλευρική διεργασία ελέγχου (Robinson, Ho - 1978).

Ο Roberts το 1959 περιέγραψε την χρήση τέτοιων *EWMA* μεθόδων. Χρησιμοποιώντας διαδικασίες προσομοίωσης δημιούργησε διαγράμματα για μέσα μήκη της διεργασίας (*ARLs*) για την περίπτωση κανονικά κατανομημένων μετρήσεων. Σε ένα δεύτερο άρθρο του ο Roberts το 1966, συνέκρινε την απόδοση της μεθόδου με την *CUSUM* και τα διαγράμματα *Shewart*. Το 1978 οι Roberts και Ho επαλήθευσαν αριθμητικά τα αποτελέσματα των διεργασιών προσομοίωσης για διαγράμματα ελέγχου βασισμένα στην *EWMA* χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Edgeworth* ανάπτυξης σε σειρά. Παρά το γεγονός ότι αυτοί χρησιμοποίησαν ένα μεγαλύτερο διάστημα μεταβολής για τις παραμέτρους από ότι οι Roberts και Ho, τα αποτελέσματα στα οποία κατέληξαν τελικά δεν ήταν ακριβή. Για μικρές τιμές της παραμέτρου λ ο Crowder το 1987 καθόρισε τα χαρακτηριστικά εξάρτησης της μεθόδου *EWMA* για την εξάρτηση που αυτή εμφανίζει ως προς την παράμετρο λ , σχηματίζοντας και επιλύοντας ένα σύστημα από ολοκληρωτικές εξισώσεις. Πίνακες εκτίμησης της παραμέτρου καθώς και ροπές για τα μήκη ροής (*run lengths*), δίνονται στο αντίστοιχο άρθρο του.

Η επαλήθευση των συγκεκριμένων τιμών έγινε επιπλέον και με την χρήση μοντέλου Μαρκοβιανής Αλυσίδας συνεχούς χρόνου για την περιγραφή της διεργασίας. Οι ιδιότητες της διεργασίας μπορούν να βασιστούν σε ένα περιορισμό των καταστάσεων της περιγραφής της αλυσίδας ακολουθώντας μία προσέγγιση ανάλογη των Brook και Evans (1972). Στην συνέχεια θα δοθούν μέσω ενός παραδείγματος εφαρμογής της μεθόδου *EWMA*, τα προκύπτοντα μήκη ροής (*RLs*) που προκύπτουν από την μοντελοποίηση με χρήση μίας Μαρκοβιανής Αλυσίδας συνεχούς χρόνου πεπερασμένων καταστάσεων, και θα εξαχθούν συμπεράσματα για τα μέσα μήκη (*ARLs*) με βάση τους πίνακες της μεθόδου.

Εκτιμήσεις για τα *ARLs* μπορούν να εξαχθούν και αριθμητικά από τις τιμές που προκύπτουν από τα διαγράμματα ελέγχου των διεργασιών, αλλά οι μέθοδοι των θεωρητικών προβλέψεων βασίζονται στην Κανονική Κατανομή. Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου *EWMA* με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων για τα μέσα μήκη εντός ορίων της διεργασίας.

1.1.2. Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου EWMA

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου EWMA με χρήση καθορισμένων τιμών για τις παραμέτρους λ και Z_0 . Οι παρατηρήσεις που παρουσιάζονται στον πίνακα αποτελούν δεδομένα προσομοίωσης της διεργασίας από τους Lucas και Crosier (1982). Τα δεδομένα μαζί με τις προκύπτουσες τιμές για την μέθοδο EWMA παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Πίνακας 1: Διάγραμμα Δεδομένων για εφαρμογή στην κλασσική μέθοδο EWMA

<i>i</i>	Observed value	EWMA ^a	FIR EWMA ^a (50% HS)	
			Z_0^-	Z_0^+
0	—	.0	.567	.567
1	1.0	.250	-.175	.675
2	-.5	.063	-.256	.381
3	.0	.047	-.192	.286
4	-.8	-.165	-.344	.015
5	-.8	-.324	-.458	-.189
6	-1.2	-.543	-.644	-.442
7	1.5	-.032	-.108	.044
8	-.6	-.174	-.231	-.117
9	1.0	.119	.077	.162
10	-.9	-.135	-.167	-.103
11	1.2	.198	.175	.222
12	.5	.274	.256	.292
13	2.6	.855	.842	.869
14	.7	.817	.806	.827
15	1.1	.887	.880	.895
16	2.0	1.166 ^b	1.160	1.171 ^b
17	1.4	1.224 ^b	1.220	1.228 ^b
18	1.9	1.393 ^b	1.390	1.396 ^b
19	.8	1.245 ^b	1.242	1.247 ^b

^a $\lambda = .25$; $L = 3.00$; $CL = \pm 1.134$.

^bOut-of-control signal.

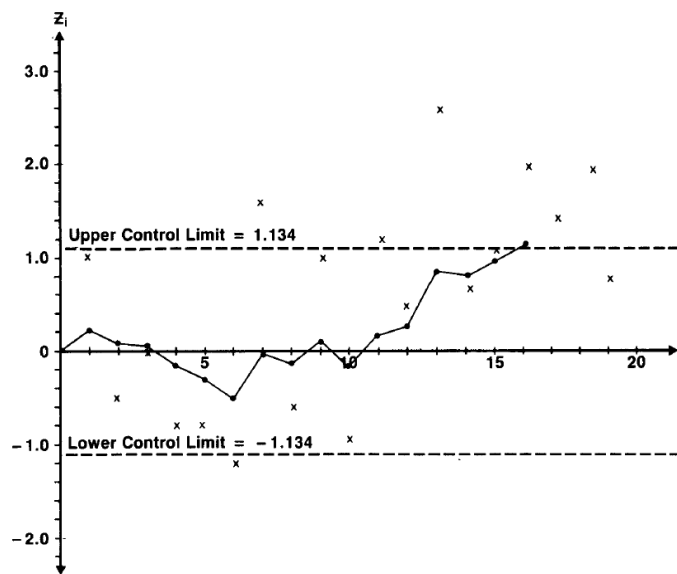
Η επιθυμητή τιμή - στόχος έχει εκλεγεί να είναι το 0 ($\mu=0$), για να είναι η διεργασία εντός ελέγχου. Η πειραματική εκτίμηση της μέσης τιμής μεταβλήθηκε κατά ένα επίπεδο σχεδόν μιας μονάδας τυπικής απόκλισης για τα τελευταία 9 δείγματα της διεργασίας. Οι παράμετροι για την εφαρμογή της EWMA που έχουν εκλεγεί να είναι $\lambda=0.25$, και $L=3.0$ χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου ± 1.134 (όπως προκύπτει από τον τύπο ασυμπτωτικού

υπολογισμού) και $\sigma_Y=1$. Για παρατηρήσεις που υπόκεινται σε κανονική κατανομή δεδομένων, το μέσο μήκος ροής *ARL* έφτασε την τιμή 500.

Η Τρίτη στήλη του Πίνακα 1 περιλαμβάνει τις τιμές της μεθόδου *EWMA* που υπολογίζονται από την σχέση:

$$Z_i=0.25Y_i+0.75Z_{i-1}$$

Η στατιστική αυτή σχέση εκτίμησης για την μεταβλητή Z_i παραμένει κοντά στην επιθυμητή τιμή στόχο για τις πρώτες 10 παρατηρήσεις τιμών της διεργασίας του πίνακα, ενώ μετά οι προκύπτουσες τιμές αρχίζουν να αυξάνουν καθώς η διολίσθηση των τιμών της διεργασίας έχει αρχίσει να συμβαίνει. Όπως και στην περίπτωση της εφαρμογής ελέγχου *CUSUM* για αυτά τα δεδομένα, η μέθοδος *EWMA* δίνει ένα σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου στην 16η παρατήρηση. Ένα σύστημα ελέγχου που βασίζεται στην μέθοδο Shewart για το ίδιο μέσο μήκος *ARL*, εμφανίζει όρια άνω και κάτω ελέγχου της τάξης των ± 3.09 .



Σχήμα 1: Γραφική απεικόνιση του διαγράμματος *EWMA* για τα δεδομένα του πίνακα

Το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο αντίστοιχο διάγραμμα *Shewart* δεν σηματοδοτεί εκτός ελέγχου κατάσταση παρά μόνον στο 19^ο δείγμα παρατήρησης της διεργασίας. Στην πράξη για μία μονάδα τυπικής απόκλισης, μεταβολής των δειγμάτων, το σύστημα ελέγχου που βασίζεται στην μέθοδο *EWMA*, θα δώσει ένα σήμα εκτός ελέγχου για την διεργασία σε ένα μέσο της τάξης των 10.9 παρατηρήσεων από την στιγμή που θα συμβεί, ενώ το αντίστοιχο σήμα ελέγχου για ένα σύστημα που βασίζεται στην μέθοδο

Shewart απαιτεί κατά μέσο όρο τουλάχιστον 54.6 δείγματα παρατήρησης αφότου η συνθήκη συμβεί.

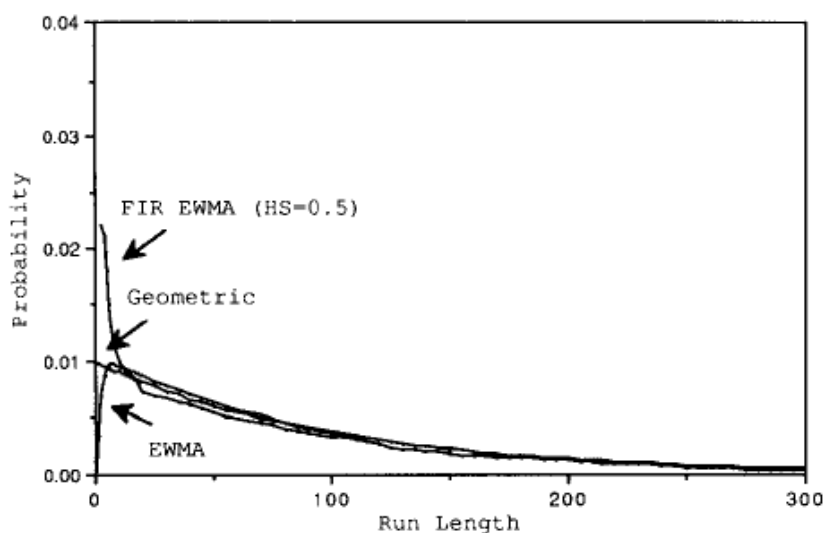
Σε εφαρμογές ποιότητας ελέγχου, είναι συχνά χρήσιμη η γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται η αντίστοιχη γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων από την μέθοδο *EWMA*. Η συνεχής γραμμή συνδέει τις προκύπτουσες τιμές μετά την επεξεργασία οι οποίες παρουσιάζονται στο διάγραμμα με χρήση σημείων X. Ο Roberts το 1959 πρότεινε μία μέθοδο απλού σχεδιασμού η οποία δεν απαιτεί αναλυτικές εκτιμήσεις των τιμών της *EWMA*. Ο Hunter το 1986 πρότεινε ότι οι τιμές που ανακύπτουν από την μέθοδο *EWMA* μπορούν να αναλυθούν ως άθροισμα της προηγούμενης εκτίμησης *EWMA* συν ένα κλάσμα της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας παρατήρησης και της προηγούμενης τιμής της *EWMA*. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην επίλυση της εξίσωσης στην μορφή που ακολουθεί:

$$Z_i = Z_{i-1} + \lambda(Y_i - Z_{i-1})$$

Σε αυτήν την μορφή η μέθοδος *EWMA*, μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλεψη ενός βήματος σε σχέση με την τρέχουσα τιμή της παραμέτρου Z_i .

1.1.3. Θέματα Κατανομών που αφορούν σε μέσα μήκη (*ARLs*)

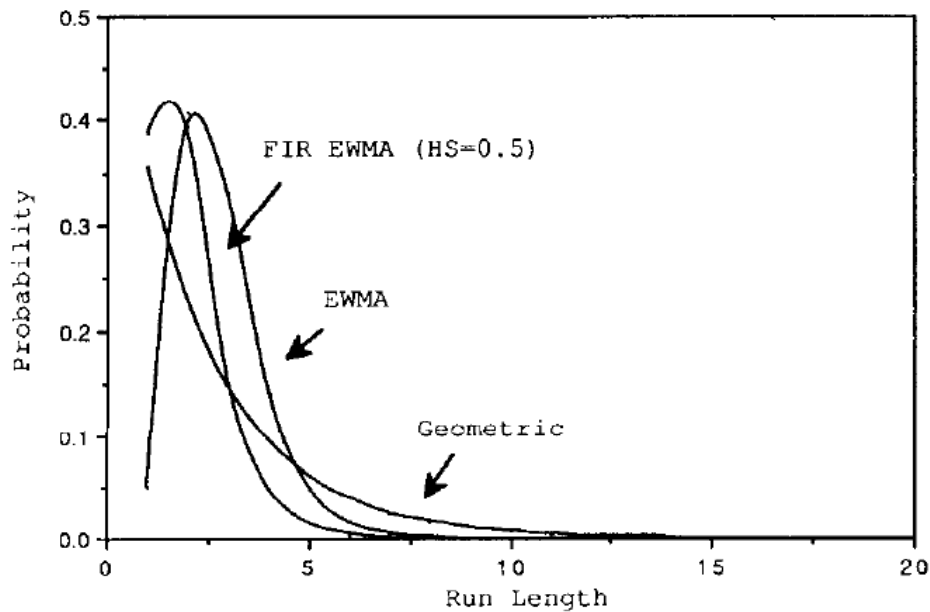
Το Σχήμα 2 που ακολουθεί παρουσιάζει την κατανομή του μέσου μήκους ροής μίας διεργασίας για ένα διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στην *EWMA* με παραμέτρους $\lambda=0.25$ και $L=2.414$.



Σχήμα 2: Γραφική απεικόνιση της κατανομής μήκους ροής για εντός ελέγχου διεργασία που βασίζεται στην *EWMA*

Αυτό το διάγραμμα ελέγχου έχει μία μέση αλυσίδα στην αρχική φάση ίση με 100. Τα μήκη αρχικής κατάστασης αναφέρονται σε μήκη ροής διαγραμμάτων ελέγχου που αρχικοποιούνται στην τιμή στόχο. Το σχήμα 2 επίσης παρουσιάζει την κατανομή του μήκους ροής για μία μεταβλητή γεωμετρικά κατανομημένη για *ARL* με τιμή 100 και ένα διάγραμμα ελέγχου *EWMA* με ένα χαρακτηριστικό Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (*FIR*). Η κατανομή για το μήκος για ένα σχήμα ελέγχου *EWMA*, προέκυψε με χρήση του μοντέλου προσέγγισης με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας πεπερασμένων καταστάσεων συνεχούς χρόνου για το μοντέλο της διεργασίας. Η κατανομή του μήκους ροής για ένα διάγραμμα *FIR-EWMA* βασίζεται σε διαδικασία προσομοίωσης. Μια προσεκτική εξέταση του Σχήματος 2, δείχνει ότι εκτός από μικρά μήκη ροής η κατανομή του μήκους ροής είναι κατά προσέγγιση γεωμετρική. Κατά συνέπεια για ένα εντός ελέγχου σύστημα, η κατανομή του μήκους ροής για την μέθοδο *EWMA* μπορεί να χαρακτηριστεί από τις μέσες αλυσίδες μηκών ροής (*ARLs*).

Στο Σχήμα 3 που ακολουθεί, η κατανομή για μήκη ροής μιας διεργασίας που έχει περιθώριο διεργασίας 2 μονάδες τυπικής απόκλισης σ . Η μέθοδος *EWMA* χρησιμοποιεί τις ίδιες παραμέτρους όπως και στο προηγούμενο σχήμα και μέτωπα εκκίνησης (*HeadStarts - HS*) όπως στο σχήμα 2. Σε αυτό το σχήμα η γεωμετρική κατανομή έχει επιλεγεί για να ταιριάζει στα επίπεδα μήκους ροής της αντίστοιχης *EWMA* με μηδενικές αρχικές τιμές (εκκίνησης). Οι κατανομές μηκών που ανακύπτουν στην περίπτωση αυτή είναι καθαρά μη γεωμετρικής υφής μιας και συγκεντρώνονται κοντά στις μέσες τιμές 2.81 και 1.93 αντίστοιχα.



Σχήμα 3: Γραφική απεικόνιση της κατανομής μηκών για διεργασία ελεγχόμενη από *EWMA* με διολίσθηση 2 μονάδων τυπικής απόκλισης

Αποδεικνύεται σε όλες τις περιπτώσεις ότι το χαρακτηριστικό *ARL* χαρακτηρίζει την κατάσταση εκτός ελέγχου για την διεργασία.

Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μοντέλο Μαρκοβιανής Αλυσίδας συνεχούς χρόνου, υπολογίστηκαν οι μέσες αλυσίδες μηκών ροής για μηδενικές αρχικές συνθήκες και αντίστοιχα για ένα πλήθος μεταβαλλόμενων παραμέτρων. Οι αλυσίδες που αναφέρονται στην μόνιμη κατάσταση ανακλύπτουν αφού από την διαδικασία της προσομοίωσης το σύστημα έχει περιέλθει στην μόνιμη κατάσταση για την δεδομένη μεταβλητή – παράμετρο. Ένα στατιστικό χαρακτηριστικό θεωρείται σε μόνιμη κατάσταση όταν το σύστημα έχει παραμείνει εντός ελέγχου για όλη την διάρκεια όπου αυτό το χαρακτηριστικό μεταβάλλεται μέχρι ώστε να καταλήξει να έχει αμελητέα τιμή.

Συνήθως τυπικοί πίνακες δίνονται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων λ και L . Ο λόγος για την ύπαρξη αυτού του τύπου πινάκων είναι ότι αυτοί είναι βολικοί διότι συνδυάζουν τις παραμέτρους της διεργασίας ελέγχου με την παράμετρο *ARL*. Ο πίνακας 2 δίνει τιμές *ARL* για κατάλληλες παραμέτρους για σχήματα ελέγχου που βασίζονται σε μεθόδους *EWMA*.

Πίνακας 2: Πίνακας Μέσων Μηκών για διεργασίες εντός ελέγχου με χρήση της μεθόδου *EWMA*

Shift	Type	$L =$ $\lambda =$	3.090 1.00	3.087 .75	3.071 .50	3.054 .40	3.023 .30	2.998 .25	2.962 .20	2.814 .10	2.615 .05	2.437 .03
.00	Zero state		500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
	Steady state		500	500	499	498	497	496	496	492	487	480
.25	Zero state		374	321	255	224	189	170	150	106	84.1	76.7
	Steady state		374	321	254	223	188	169	149	104	81.7	74.1
.50	Zero state		201	140	88.8	71.2	55.4	48.2	41.8	31.3	28.8	29.3
	Steady state		201	140	88.4	70.7	54.9	47.7	41.2	30.6	28.0	28.6
.75	Zero state		103	62.5	35.9	28.4	22.5	20.1	18.2	15.9	16.4	17.6
	Steady state		103	62.4	35.7	28.1	22.2	19.8	17.8	15.5	16.0	17.3
1.00	Zero state		54.6	30.6	17.5	14.3	12.0	11.1	10.5	10.3	11.4	12.6
	Steady state		54.6	30.5	17.3	14.1	11.8	10.9	10.3	10.1	11.2	12.5
1.50	Zero state		17.9	9.90	6.53	5.88	5.53	5.46	5.50	6.09	7.12	8.08
	Steady state		17.9	9.86	6.44	5.79	5.43	5.37	5.40	5.99	7.03	8.00
2.00	Zero state		7.26	4.54	3.63	3.52	3.54	3.61	3.74	4.36	5.23	5.99
	Steady state		7.26	4.52	3.58	3.47	3.49	3.56	3.69	4.31	5.18	5.95
2.50	Zero state		3.60	2.69	2.50	2.54	2.65	2.74	2.88	3.44	4.17	4.80
	Steady state		3.60	2.67	2.47	2.50	2.61	2.71	2.84	3.41	4.14	4.78
3.00	Zero state		2.15	1.88	1.93	2.02	2.16	2.26	2.38	2.87	3.50	4.03
	Steady state		2.15	1.87	1.91	1.99	2.12	2.22	2.35	2.85	3.48	4.02
3.50	Zero state		1.52	1.46	1.58	1.69	1.85	1.95	2.07	2.47	3.04	3.49
	Steady state		1.52	1.46	1.58	1.68	1.82	1.91	2.03	2.47	3.02	3.49
4.00	Zero state		1.22	1.22	1.34	1.44	1.61	1.73	1.86	2.19	2.69	3.11
	Steady state		1.22	1.23	1.36	1.46	1.60	1.69	1.80	2.20	2.68	3.09
5.00	Zero state		1.03	1.04	1.07	1.12	1.22	1.32	1.48	1.94	2.16	2.55
	Steady state		1.03	1.04	1.10	1.17	1.29	1.38	1.49	1.83	2.22	2.55

NOTE: L values are based on zero-state in-control ARL = 500.

Από τον πίνακα δίνεται έμφαση σε μικρές τιμές λ μιας και μικρές τιμές απαιτούνται για την ικανότητα ανίχνευσης μικρών μεταβολών από την διεργασία. Οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου L προέκυψαν έτσι ώστε οι αλυσίδες μέσου μήκους για μηδενική αρχική κατάσταση να έχουν τιμή $ARL = 500$. Οι ίδιες τιμές των λ και L για την εξαγωγή $ARLs$ μηδενικής αρχικής κατάστασης καθώς επίσης και αντίστοιχης μόνιμης κατάστασης, για να υπάρχει ένα κοινό σύστημα σύγκρισης.

Επίσης οι Lucas και Saccucci το 1987 παρείχαν πίνακες για $ARLs$ της τάξης των 100, 300, 1000, 2000 και 5000. Το πλήρες σύνολο των πινάκων μας δείχνει ότι οι διαφορές μεταξύ $ARLs$ μηδενικής αρχικής κατάστασης και μόνιμης κατάστασης εξαρτώνται από τις μεταβλητές λ και το εντός ελέγχου τμήμα της μεταβλητής ARL . Για μεγάλες τιμές του λ κλασσικά δεν παρουσιάζονται διαφορές επί αυτών των αλυσίδων. Για μικρές τιμές του λ όμως, το ποσοστό των διαφορών αυξάνει καθώς το ποσοστό της αλυσίδας ARL που είναι εντός ελέγχου μειώνεται. Για τιμές των παραμέτρων εντός περιοχής, οι διαφορές που παρουσιάζονται στην παράμετρο ARL για μηδενική αρχική και μόνιμη κατάσταση είναι μικρότερη του 2% για ένα σύστημα ελέγχου *EWMA* με αλυσίδα εντός ελέγχου της τάξης των 5000 ενώ το αντίστοιχο ποσοστό αυξάνει σε 10% για αλυσίδες εντός ελέγχου της

τάξεως του 100. Για πιο πρακτικές εφαρμογές, η διαφορά για αλυσίδες *ARLs* μηδενικής και μόνιμης κατάστασης δεν είναι σημαντική και όποια από τις δύο έχουμε στην διάθεση μας είναι αρκετή. Για ουσιαστική σύγκριση, όπως αυτές που συντελούνται σε συγκρίσεις των μεθόδων *EWMA* και *CUSUM* σχήματα ελέγχου, είναι βοηθητικό να έχουμε στην διάθεση μας και τους δύο τύπους αλυσίδων *ARLs*.

1.1.4. Διεργασία Σχεδιασμού Μεθοδολογίας Ελέγχου *EWMA*

Επιπρόσθετα για τον χαρακτηρισμό των κατανομών μηκών ενός *EWMA* διαγράμματος ελέγχου, η τιμή του *ARL* είναι ανάλογη του ποσού της παραγωγής από την διεργασία. Κατά συνέπεια οι διαδικασίες ελέγχου βασίζονται στις ιδιότητες του *ARL* των σχημάτων ελέγχου. Η τιμή της παραμέτρου *ARL* θα πρέπει να είναι μεγάλη όταν η διεργασία λειτουργεί κοντά στην επιθυμητή τιμή – στόχο και μικρές όταν η διεργασία ολισθαίνει σε μη αποδεκτά επίπεδα. Βασισμένοι στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και τις ανάγκες του αναλυτή, τα σχήματα ελέγχου θα πρέπει να αξιολογούν χρησιμοποιώντας και αλυσίδες μηδενικής αλλά και μόνιμης κατάστασης.

Πίνακας 3: Βέλτιστες Εκλογές παραμέτρων για σχήματα ελέγχου βασισμένα στην μέθοδο *EWMA*

Shift	100	300	500	1,000	2,000	5,000
.5						
λ	.07-.06	.06-.05	.05	.04	.04-.03	.03
L	2.015-1.954	2.462-2.399	2.616	2.817	3.069-2.989	3.299
ARL_{min}	17.3	24.9	28.7	34.3	40.1	47.7
1.0						
λ	.19-.16	.15-.14	.15-.12	.13-.10	.12-.10	.09
L	2.346-2.298	2.723-2.707	2.907-2.858	3.113-3.059	3.317-3.283	3.538
ARL_{min}	6.97	9.14	10.2	11.7	13.2	15.2
2.0						
λ	.52-.47	.42-.38	.37-.36	.35-.31	.32-.28	.29-.26
L	2.538-2.526	2.895-2.885	3.047-3.044	3.253-3.241	3.445-3.433	3.686-3.677
ARL_{min}	2.62	3.23	3.51	3.90	4.29	4.81
3.0						
λ	.81-.77	.74-.71	.70-.66	.66-.59	.61-.53	.53-.47
L	2.572-2.569	2.931-2.930	3.086-3.084	3.286-3.283	3.477-3.473	3.714-3.711
ARL_{min}	1.45	1.72	1.86	2.06	2.26	2.51
4.0						
λ	1.00-.85	.97-.84	.95-.82	.91-.80	.91-.75	.84-.72
L	2.576-2.573	2.935-2.934	3.090-3.089	3.290-3.289	3.480-3.480	3.719-3.718
ARL_{min}	1.03	1.16	1.21	1.29	1.39	1.53

NOTE: The in-control average run length is based on zero-state average run lengths.

Για την διευκόλυνση του σχεδιασμού ενός συστήματος που βασίζεται στην *EWMA*, ο Πίνακας 3 παρουσιάζει μία λίστα από βέλτιστες επιλογές παραμέτρων. Για ένα καθορισμένο εντός ελέγχου *ARL* (ARL_{in}) και αντίστοιχη μεταβολή στην διεργασία αυτές οι παράμετροι θα δώσουν σε ένα σύστημα ελέγχου βασισμένο σε *EWMA* έχοντας ένα ελάχιστο *ARL* στην καθορισμένη ολίσθηση. Ότι τα προκύπτοντα *ARLs* ήταν συγκρίσιμα για ένα μεγάλο εύρος τιμών λ , δίνεται ως αποδεκτή ολόκληρη η περιοχή τιμών του λ . Ένα *EWMA* σχήμα ελέγχου που σχεδιάζεται βασισμένο στην μικρότερη τιμή του λ θα παρέχει μεγαλύτερη προστασία εναντίον μικρών μεταβολών της διεργασίας, ενώ ένα σύστημα *EWMA* βασισμένο στις μεγαλύτερες τιμές του λ θα παρέχει μεγαλύτερη προστασία ενάντια σε μεγάλες μεταβολές της διεργασίας.

Η Εξέταση του προηγούμενου πίνακα παρουσιάζει ότι για ένα δεδομένο μήκος αλυσίδας εντός ελέγχου *ARL*, η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου λ αυξάνει καθώς η μεταβολή στην διεργασία αυξάνει. Ο Lucas (1979) απέδειξε ότι ένα διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στα διαγράμματα *Shewart*, σε σύγκριση με ένα διάγραμμα βασισμένο σε *EWMA* με $\lambda=1$, είναι βέλτιστο για την ανίχνευση μεγάλων μεταβολών της διεργασίας. Κατά συνέπεια εάν $\sigma_Y^2 = \sigma^2/n$ και δεν υπάρχει περιορισμός στην εκλογή του n , δεν υπάρχει μεγάλη ανάγκη για να καθορίσουμε εναλλακτικά συστήματα ελέγχου από τα διαγράμματα *Shewart*. Τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στα διαγράμματα *Shewart* μπορούν να βελτιστοποιηθούν για την ανίχνευση μιας αλλαγής αυξάνοντας τον αριθμό των δειγμάτων που συμπεριλαμβάνονται σε κάθε παρατήρηση. Από την άλλη πλευρά είναι συχνά κατάλληλο να θεωρήσουμε πιο πολύπλοκες δομές για τον έλεγχο του σφάλματος. Για πολλές χημικές διεργασίες, η δομή σφάλματος μπορεί να προσεγγισθεί καθώς $\sigma_Y^2 = \sigma_{av}^2 + \sigma_{ev}^2/n$. Σε αυτήν την περίπτωση μόνο διασπορές μικρής κλίμακας μειώνονται όταν πολλά δείγματα λαμβάνονται, και το σχήμα ελέγχου *EWMA* είναι χρήσιμο για την ανίχνευση μικρών μεταβολών της διεργασίας. Για μεγαλύτερη αναφορά στα θέματα αυτά βλ. Goel (1968) και Lucas (1976).

Για τον σχεδιασμό ενός συστήματος ελέγχου βασισμένο σε *EWMA*, συστήνεται η ακόλουθη διεργασία:

- Καθορισμός του εντός ελέγχου μήκους αλυσίδας *ARL* και η διολίσθηση της διεργασίας που επιθυμούμε να ανιχνευτεί άμεσα.

- Με χρήση του πίνακα βέλτιστων παραμέτρων (Πίνακας 3) εκλέγονται οι παράμετροι για το σχήμα *EWMA* που θα δώσουν το ελάχιστο *ARL* για την δεδομένη διολίσθηση της διεργασίας.
- Τέλος το συνολικό προφίλ για την αλυσίδα *ARL* θα πρέπει να αξιολογηθεί για να διαπιστωθεί κατά πόσον παρέχει ικανοποιητική προστασία εναντίον διαφορετικού τύπου διολισθήσεων. Το προφίλ αυτό για την αλυσίδα *ARL* μπορεί να προκύψει από τους παρεχόμενους πίνακες οι οποίοι δίνονται από τους Lucas και Saccucci (1987).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι προτεινόμενες τιμές του λ για την ανίχνευση μεταβολών μιας τυπικής μονάδας απόκλισης 1-σ, είναι μικρές σε σύγκριση με τις τιμές μεταξύ των 0.25 και 0.50 οι οποίες γενικότερα έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία. Ο Πίνακας 3 δείχνει ότι ενδείκνυται η χρήση αυτών των παραμέτρων για μεταβολές της τάξης των 2-σ. Επιπρόσθετα η πρόταση σχεδιασμού για το σύστημα έλεγχου διαφέρει από την αντίστοιχη του Hunter (1986). Η εν λόγω τεχνική επέλεγε την παράμετρο λ για να ελαχιστοποιήσει την πρόβλεψη του σφάλματος επόμενου βήματος χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρελθοντική ιστορία των δεδομένων μέτρησης. Αν και οι τιμές από την προϊστορία των διεργασιών παρέχουν καθοδήγηση, είναι πιο σημαντικό να σχεδιάζεται το σύστημα *EWMA* με στόχο την διαφύλαξη της διεργασίας εναντίον πιθανών μελλοντικών διολισθήσεων της μέσης τιμής.

1.1.5. Περαιτέρω εμπλουτισμός και επεκτάσεις της μεθόδου *EWMA*

Χαρακτηριστικά Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης – (*FIR*)

Οι Lucas και Crosier (1982) έδειξαν ότι ένα χαρακτηριστικό για την ενίσχυση της ταχύτητας της απόκρισης του συστήματος ελέγχου είναι χρήσιμο για διαγράμματα ελέγχου *CUSUM*, διότι οι διεργασίες τείνουν να εγκατασταθούν εντός του επιθυμητού σημείου λειτουργίας – στόχου όταν ένα σχήμα ελέγχου αρχικοποιείται εξαιτίας θεμάτων εκκίνησης ή εξαιτίας μη αποτελεσματικών ενεργειών ελέγχου μετά την εμφάνιση συνθηκών λειτουργίας εκτός ελέγχου. Το χαρακτηριστικό *FIR* είναι ιδιαίτερος χρήσιμο στα συστήματα ελέγχου που βασίζονται σε τεχνικές *EWMA* και τα οποία βασίζουν την λειτουργία τους σε μικρές τιμές της παραμέτρου λ . Όταν η παράμετρος λ έχει μικρή τιμή η διασπορά των στατιστικών ελέγχου συγκλίνει αργά στην ασυμπτωτική τους τιμή έτσι ώστε τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στην ασυμπτωτική τιμή των τυπικών αποκλίσεων τείνουν να μην είναι και τόσο ευαίσθητα κατά την φάση εκκίνησης του συστήματος ελέγχου.

Το χαρακτηριστικό *FIR* για ένα σύστημα ελέγχου βασισμένο σε *EWMA* μπορεί να προκύψει με ταυτόχρονη εφαρμογή δύο συστημάτων παρακολούθησης *EWMA* μιας πλευρικής ζώνης, το καθένα εκ των οποίων έχει ένα αρχικό προβάδισμα ($HeadStart - HS$). Κάθε μια μέθοδος *EWMA* έχει ένα αντίστοιχο προβάδισμα ή αρχική τιμή, πάνω από την τιμή στόχο και η άλλη *EWMA* έχει μία αρχική τιμή επίσης κάτω από το επιθυμητό επίπεδο της τιμής στόχου. Εάν η διεργασία είναι εκτός κατά την φάση εκκίνησης, η αντίστοιχη πλευρική *EWMA* με κατάλληλο προβάδισμα θα δώσει ένα σήμα εκτός ελέγχου πιο γρήγορα. Από την άλλη πλευρά εάν η διεργασία είναι αρχικά εντός ελέγχου και οι δύο πλευρικές *EWMA* θα τείνουν να συγκλίνουν. Στην πράξη ένα από τα σχήματα ελέγχου μπορεί να μην ληφθεί υπόψη όταν και τα δύο βρίσκονται αρκετά κοντά, για παράδειγμα όταν οι αποστάσεις από την μέση τιμή – στόχο είναι μικρότερη από $0.1\sigma_Z$.

Ο Πίνακας 1 που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα δίνει επίσης ένα χαρακτηριστικό *FIR* για την διεργασία στην περίπτωση που αυτή είναι αρχικά εντός ελέγχου. Οι δύο ταυτόχρονοι και ανεξάρτητοι μηχανισμοί ελέγχου *EWMA* παρίστανται από τις μεταβλητές Z^+ και Z^- αντίστοιχα. Για λόγους ευκρίνειας της παρουσίασης της μεθόδου οι αρχικές τιμές του προβαδίσματος λαμβάνονται στα μισά της επιθυμητής τιμής και των ορίων ελέγχου ($50\% HS$). Καθώς αρχικά η διεργασία είναι εντός ελέγχου και οι δύο μηχανισμοί *EWMA* παραμένουν σταθερά εντός των ορίων ελέγχου καθώς συγκλίνουν το ένα προς το άλλο. Κατά την λήψη του $12^{ου}$ δείγματος και τα δύο σχήματα είναι εντός της ζώνης του $0.1\sigma_Z$ και το Z^- θα μπορούσε να απενεργοποιηθεί. Αν και η τιμή προβαδίσματος (HS) ποτέ δεν εξαφανίζει την επίδραση της η απόδοση του μηχανισμού *EWMA* και του *FIR-EWMA* είναι σχεδόν πανομοιότυπες μετά τις πρώτες 7 παρατηρήσεις.

Για να δείξουμε το πλεονέκτημα της μεθόδου *FIR* όταν η διεργασία είναι αρχικά εκτός ελέγχου, ο Πίνακας 4 περιλαμβάνει τις τελευταίες 9 παρατηρήσεις από τον πίνακα 1. Αν και οι δύο μηχανισμοί *EWMA* αρχίζουν να αυξάνουν η μέθοδος ελέγχου με *FIR-EWMA* με προβάδισμα $50\% HS$ δίνει σήμα για συνθήκη εκτός ελέγχου στην $3^{η}$ παρατήρηση, ενώ η απλή μέθοδος *EWMA* δίνει αντίστοιχο σήμα στην $6^{η}$ παρατήρηση.

Πίνακας 4: Παράδειγμα δειγμάτων εκτός ελέγχου για την εφαρμογή της μεθοδολογίας

FIR-EWMA

<i>i</i>	Observed value	EWMA ^a	FIR EWMA ^a (50% HS)	
			$Z_{\bar{0}}$	$Z_{\bar{0}}$
0	—	.0	-.567	.567
1	1.2	.300	-.125	.725
2	.5	.350	.031	.669
3	2.6	.913	.673	1.152 ^b
4	.7	.859	.680	1.039 ^c
5	1.1	.920	.785	1.054 ^c
6	2.0	1.190 ^b	1.089	1.291 ^b
7	1.4	1.242 ^b	1.167	1.318 ^b
8	1.9	1.407 ^b	1.350	1.463 ^b
9	.8	1.255 ^b	1.212	1.298 ^b

^a $\lambda = .25$; $L = 3.00$; $CL = \pm 1.134$.

^bOut-of-control signal.

^cObservations after an out-of-control signal can drop the EWMA statistic below the control limits.

Ο Πίνακας 5 δίνει τα *ARL* για διαγράμματα ελέγχου *EWMA* με ένα μήκος αλυσίδας *ARL* της τάξης των 500 με προβάδισμα (HS) 0%, 25% 50% και 75%. *ARLs* για άλλες τιμές προβαδίσματος (HS) οι οποίες μπορούν να προκύψουν μέσω παρεμβολής των τιμών.

Πίνακας 5: *ARLs* για *FIR-EWMA* μέθοδο ελέγχου

Shift	%HS	$L =$ $\lambda =$	3.090	3.087	3.071	3.054	3.023	2.998	2.962	2.814	2.615	2.437
			1.00	.75	.50	.40	.30	.25	.20	.10	.05	.03
.00	0		500	500	500	500	500	500	500	500	500	500
	25		500	498	497	497	495	491	491	487	470	465
	50		500	496	487	487	485	483	475	468	434	406
	75		500	495	478	471	456	444	429	382	312	258
.50	0		201	140	88.8	71.2	55.4	48.2	41.8	31.3	28.8	29.3
	25		201	140	87.8	70.0	53.9	46.5	39.7	28.3	24.7	24.3
	50		201	139	86.1	67.8	51.2	43.6	36.6	24.2	19.5	18.4
	75		201	138	82.7	63.5	48.2	38.2	30.8	17.9	12.9	11.4
1.00	0		54.6	30.6	17.5	14.3	12.0	11.1	10.5	10.3	11.4	12.6
	25		54.6	30.2	16.9	13.5	11.1	10.1	9.40	8.75	9.30	10.1
	50		54.6	29.7	15.9	12.4	9.82	8.79	7.93	6.87	6.93	7.36
	75		54.6	29.1	14.5	10.8	7.99	6.86	5.91	4.56	4.28	4.37
2.00	0		7.26	4.54	3.63	3.52	3.54	3.61	3.74	4.36	5.23	5.99
	25		7.26	4.33	3.29	3.13	3.08	3.11	3.17	3.57	4.19	4.74
	50		7.26	4.09	2.87	2.64	2.52	2.50	2.51	2.72	3.08	3.43
	75		7.26	3.81	2.41	2.11	1.90	1.82	1.76	1.76	1.90	2.07
3.00	0		2.15	1.88	1.93	2.02	2.16	2.26	2.38	2.87	3.50	4.03
	25		2.15	1.75	1.69	1.73	1.83	1.90	2.01	2.35	2.80	3.20
	50		2.15	1.63	1.45	1.44	1.46	1.49	1.54	1.80	2.11	2.34
	75		2.15	1.51	1.26	1.21	1.18	1.17	1.16	1.19	1.29	1.41
5.00	0		1.03	1.04	1.07	1.12	1.22	1.32	1.48	1.94	2.16	2.55
	25		1.03	1.02	1.03	1.04	1.07	1.09	1.15	1.50	1.93	2.05
	50		1.03	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.07	1.27	1.57
	75		1.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01

NOTE: L values are based on zero-state in-control $ARL = 500$.

Γενικά βρίσκουμε ότι το χαρακτηριστικό *FIR* είναι περισσότερο χρήσιμο για διαγράμματα βασισμένα σε *EWMA* με τιμές λ μικρότερες ή ίσες του 0.25. Σε αντίθεση με τα διαγράμματα που βασίζονται σε έλεγχο *CUSUM*, δεν υπάρχει θεωρία η οποία να προτείνει κατάλληλες τιμές προβαδίσματος, η οποία να προκύπτει με εξέταση των ισορροπιών (*trade-offs*) μεταξύ του ποσοστού μείωσης στην *ARL* εντός ελέγχου και τα ποσοστά της μείωσης σε αλυσίδες *ARL* εκτός ελέγχου (ARL_{out}). Μία τιμή για προβάδισμα HS της τάξης του 50% αποτελεί μία καλή εκλογή για καταστάσεις ανάλογες με αυτές που εξετάστηκαν.

Ένα μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι για την εφαρμογή της απαιτεί δύο ανεξάρτητα *EWMA* σχήματα ελέγχου για κάθε πλευρά ελέγχου. Αυτό το χαρακτηριστικό μπορεί να είναι επίπονο όταν ο αριθμός των διεργασιών που είναι υπό παρακολούθηση μεγαλώνει. Επιπλέον αυτού του τύπου, ο έλεγχος γενικεύεται εύκολα σε διεργασίες *EWMA* οι οποίες είναι πολυμεταβλητές. Ένα εναλλακτικό χαρακτηριστικό *FIR* μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πιο αυστηρά όρια ελέγχου για μερικές πρώτες παρατηρήσεις.

Συνδυασμός Μεθόδων ελέγχου Shewart και *EWMA*

Αν και τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στην μέθοδο *EWMA* μπορούν να σχεδιασθούν με τρόπο έτσι ώστε να ανιχνεύουν γρήγορες μεταβολές της διεργασίας σε στάθμες, ο Lucas (1973) έδειξε ότι τα διαγράμματα που βασίζονται στα διαγράμματα Shewart είναι ανώτερα στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Ένας συνδυασμός των διαγραμμάτων Shewart και *EWMA* συχνά παρέχει βελτιωμένα χαρακτηριστικά όταν μικρές και μεγάλες διολισθήσεις θα πρέπει να ανιχνευθούν. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου που προέρχονται από τα διαγράμματα Shewart εφαρμοζόμενα όμως σε ένα σύστημα που βασίζεται σε ένα *EWMA* σύστημα ελέγχου, έτσι ώστε να προκύψει ένα σήμα ελέγχου όταν τα όρια της διεργασίας είναι εκτός των άνω και κάτω ορίων ή εάν η τρέχουσα παρατήρηση είναι εκτός των ορίων για το διάγραμμα Shewart.

Πίνακες με *ARL* διαδρομές μέσου μήκους για τα συνδυασμένα Shewart – *EWMA* διαγράμματα δόθηκαν από τους Lucas και Saccucci (1987). Η εξέταση αυτών των πινάκων δείχνει ότι τα συνδυασμένα Shewart – *EWMA* διαγράμματα καταλήγουν σε βελτιωμένες τιμές για την παράμετρο *ARL*, ίδια με αυτή την ακολουθία που προκύπτει για συνδυασμένα Shewart – *CUSUM* διαγράμματα (Lucas 1982). Γενικότερα προτείνεται να εκλέγονται τα όρια Shewart μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα τα οποία θα χρησιμοποιούνταν σε ένα

αποκλειστικό διάγραμμα Shewart έτσι ώστε να προλάβουν το ενδεχόμενο να προκληθεί μία σημαντική μείωση του μέσου μήκους *ARL* για την εντός ελέγχου φάση του συστήματος. Αν και τα προτεινόμενα όρια Shewart, θα πρέπει να τονιστεί, εξαρτώνται από την εντός ελέγχου τιμή του *ARL* και την τιμή της παραμέτρου λ , όρια Shewart ανάμεσα σε τιμές 4.0 – 4.5σ_γ εργάζονται ικανοποιητικά για ένα σύστημα ελέγχου *EWMA* με *ARL* εντός ελέγχου της τάξης του 500.

Εύρωστος αλγόριθμος *EWMA* (*robust-EWMA*)

Αποδεικνύεται χρήσιμο να θεωρήσουμε ένα τύπο εύρωστου αλγορίθμου *EWMA* όποτε η διεργασία προς έλεγχο παράγει δείγματα εκτός ορίων. Τα συνδυασμένα Shewart – *EWMA* διαγράμματα δεν θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε αυτές τις περιπτώσεις διότι η πρόσθεση των ορίων Shewart δημιουργεί στον συνδυασμό Shewart – *EWMA* ευαισθησία στον χαρακτηρισμό των παραγόμενων δειγμάτων ως εκτός ελέγχου.

Επίσης θα πρέπει να ληφθεί αρκετά σοβαρά υπόψη ο κανόνας των δύο συνεχόμενων δειγμάτων σε σειρά (*two-in-a-row rule*), ο οποίος φαίνεται να δουλεύει αρκετά καλά στα *CUSUM* σχήματα ελέγχου (Lucas και Crosier 1982). Αυτή η διαδικασία απαιτεί τον καθορισμό των ορίων ελέγχου για τα παρατηρούμενα δείγματα που εισάγονται στον έλεγχο *EWMA* (Y_i). Στην πράξη αυτά τα όρια συχνά τίθενται σε επίπεδα $\pm 4.0\sigma_{\gamma}$ ως προς την κεντρική μέση τιμή στόχο. Μία απλή παρατήρηση εκτός των ορίων δεν εισάγεται στο σύστημα ελέγχου *EWMA*, αλλά δύο δείγματα συνεχόμενα εκτός ελέγχου θεωρούνται ότι παράγουν ένα σήμα για εκτός ελέγχου κατάσταση. Πιο πολύπλοκοι κανόνες από αυτόν γενικότερα στην πράξη δεν αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμοι αλλά αντίθετα φαίνεται να μειώνουν την ευαισθησία του συστήματος ελέγχου ιδιαίτερα όταν εμφανίζονται μεγάλες τιμές μετατοπίσεων.

Η απόδοση του κανόνα των δύο συνεχόμενων τιμών εκτός ελέγχου ελέγχθηκε χρησιμοποιώντας μία «μολυσμένη» κανονική κατανομή δειγμάτων η οποία σχηματίστηκε με συνδυασμό δύο κανονικών τυχαίων μεταβλητών με κοινό μέσο. Η τυπική απόκλιση της πρώτης κανονικής τ.μ. εκλέχθηκε σε τιμή $(1+8a)^{-1/2}\sigma_{\gamma}$ όπου η παράμετρος a συνιστά την αναλογία επιμόλυνσης της δεύτερης κανονικής τ.μ. Η τυπική απόκλιση της δεύτερης κανονικής τ.μ. εκλέχθηκε ώστε να είναι 3 φορές από την προηγούμενη τιμή. Αν και η συνολική τυπική απόκλιση της επιμολυσμένης κατανομής παραμένει σταθερή, οι ουρές των κατανομών γίνονται «βαρύτερες» καθώς το ποσοστό της επιμόλυνσης αυξάνει. Οι ιδιότητες της *ARL* για την εύρωστη *EWMA* μέθοδο εξετάστηκαν για κατανομές με 0%, 1%,

3% και 10% όσον αφορά στα επίπεδα επιμόλυνσης. Αυτό είναι ταυτόσημο στην προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε από τους Lucas και Crosier (1982) στην εξέταση εύρωστων *CUSUM* μεθόδων ελέγχου, συγκρίνοντας το παρόν με αυτό το διάγραμμα ελέγχου.

Πίνακες για την παράμετρο *ARL* για τον κανόνα των δύο συνεχόμενων δειγμάτων εκτός ελέγχου με χρήση εύρωστου *EWMA* δόθηκαν από τους Lucas και Saccucci (1987). Η εξέταση των εύρωστων *ARL* πινάκων αποδεικνύει ότι αυτά είναι πάντοτε υψηλότερα από ότι τα *ARL* για την *EWMA* για τα ίδια επίπεδα επιμόλυνσης. Κατά συνέπεια το φαινόμενο επιλογής των ορίων εξαρτάται επίσης και από το επίπεδο της επιμόλυνσης και από τις παραμέτρους του *EWMA* διαγράμματος ελέγχου. Για μεγάλες τιμές της παραμέτρου λ , α τα μήκη ροής *ARL* μειώνονται σημαντικά καθώς το επίπεδο της επιμόλυνσης αυξάνει, αποδεικνύοντας ότι τα διαγράμματα ελέγχου *Shewart* είναι εξαιρετικά ευαίσθητα στα όρια. Για μικρές τιμές της παραμέτρου λ , τα μήκη των αλυσίδων τείνουν να αυξηθούν καθώς το επίπεδο της επιμόλυνσης αυξάνει.

Γενικότερα οι μέθοδοι εύρωστων *EWMA* είναι εφαρμόσιμες για καταστάσεις στις οποίες τα όρια είναι προκαθορισμένα καθώς αυτές συμπεριλαμβάνουν δύσκολες αναλυτικές διαδικασίες υπολογισμού. Παρόλα αυτά η εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου δεν συστήνεται. Η επιλογή των ορίων ελέγχου συνιστά ένα σημαντικό πρόβλημα για τον ποιοτικό έλεγχο της διεργασίας και θα πρέπει να καταβληθεί σημαντική προσπάθεια για τον καθορισμό και την μείωση αυτών των προβλημάτων.

1.2. Η χρήση του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη και η επίδραση των Χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε η μέθοδος του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη (*EWMA*) καθώς και μικρές παραλλαγές όσον αφορά στην εφαρμογή της μεθόδου για τον έλεγχο μίας διεργασίας. Σημαντική όπως έχει φανεί ως τώρα, είναι η εκλογή των ορίων ελέγχου τα οποία συνιστούν ένα πρόβλημα πολυπαραμετρικό και επιπλέον εξαρτάται από τον τύπο της διεργασίας προς έλεγχο. Μικρές τιμές των ορίων ελέγχου δίνουν σημαντική ευαισθησία στην παραγωγή σημάτων για εκτός ελέγχου καταστάσεις ενώ σημαντικά μεγάλες τιμές των ορίων ελέγχου μπορούν να οδηγήσουν σε τάσεις μεταβολής την διεργασία οι οποίες μπορούν να αργήσουν να ανιχνευθούν.

Όπως έδειξε και ο Montgomery (1991), τα όρια ελέγχου των διαγραμμάτων *EWMA* θα πρέπει να είναι χρονικά μεταβαλλόμενα δεδομένου ότι η μεταβλητότητα της μεταβλητής Z_i εξαρτάται από τον χρόνο t , εξαιτίας του φαινομένου της εκλογής της αρχικής κατάστασης Z_0 για την μεταβλητή ελέγχου. Παρόλα αυτά όλη η αναλυτική μελέτη των ιδιοτήτων των διαγραμμάτων *EWMA* έχει κατά κύριο λόγο χρησιμοποιήσει σταθερά (ασυμπτωτικά) όρια ελέγχου για να διευκολυνθεί η μελέτη και ανάλυση των αποτελεσμάτων. Στόχος και της μελέτης των τεχνικών ελέγχου *EWMA* με χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων είναι ο καθορισμός των προσδοκώμενων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων για τις μέσες τιμές μηκών ροής (*ARL*). Στόχος είναι η παραγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων για την μέση τιμή, δειγμάτων που προέρχονται από μία Κανονική Κατανομή. Τα αποτελέσματα όπως θα δούμε όσον αφορά στα μέσα μήκη ροής (*ARL*) είναι μικρότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα προκύπτοντα για την μέθοδο *EWMA* με σταθερά όρια ελέγχου. Έμφαση θα δοθεί στο φαινόμενο που αφορά στις εκτός ελέγχου μέσες τιμές σε σχέση με τις εντός ελέγχου τιμές, ειδικότερα για μεγάλες μεταβολές της διεργασίας. Ως αποτέλεσμα, τα διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι κατάλληλα για όλες τις καταστάσεις όπου η αρχική ποιότητα των προϊόντων της διεργασίας είναι αμφισβητούμενη. Αυτό είναι χρήσιμο γιατί οι διεργασίες παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα από την μέση επιθυμητή τιμή στόχο, όταν ένα σχήμα ελέγχου αρχικοποιείται ή εξαιτίας μη αποδοτικών ενεργειών ελέγχου μετά την εφαρμογή τους από ένα σήμα εκτός ελέγχου. Επιπρόσθετα, συχνά μετά από μία αλλαγή σε μία διεργασία ή ρύθμιση, επιθυμούμε γρήγορη αλλαγή στα αποτελέσματα της διεργασίας.

Χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου έχει επίδραση ανάλογη με την χρήση τεχνικών Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (*FIR*), μέθοδος η οποία προτάθηκε από τους Lucas και Crosier (1982) για διαγράμματα ελέγχου *CUSUM*, δεδομένου ότι βοηθά στην ανίχνευση προβλημάτων που σχετίζεται με θέματα εκκίνησης του συστήματος ελέγχου επί της διεργασίας. Για την μέθοδο *CUSUM* το χαρακτηριστικό *FIR* μειώνει σημαντικά το μέσο μήκος ροής (*ARL*) για την εκτός ελέγχου κατάσταση, μειώνοντας σε ένα όρια και τα αντίστοιχα *ARL* για την εντός ελέγχου φάση της διεργασίας. Μία μέθοδος *CUSUM* μονής πλευρικής ζώνης ελέγχου η οποία σχεδιάστηκε για να ελέγχει τα άνω όρια των προϊόντων της διεργασίας αποτελείται από τις τιμές του διαγράμματος:

$$Y_i = \max(0, Y_{i-1} + \bar{x}_i - (\mu_0 + k)),$$

όπου $Y_0=0$ και μ_0 είναι ο εντός ελέγχου μέσος και k είναι η τιμή αναφοράς (Montgomery 1991). Η διεργασία υποτίθεται ότι είναι εντός ελέγχου καθόσον $Y_i < h$ και θεωρείται ότι έχει μετατοπισθεί εάν σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t ισχύει ότι $Y_i \geq h$. Το χαρακτηριστικό *FIR* θέτει την αρχική τιμή Y_0 σε κάποια μη μηδενική τιμή τυπικά $Y_0=h/2$. Ένα σύστημα ελέγχου δύο πλευρικών ζωνών *CUSUM* διαγραμμάτων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ασχολούμενο με τις ολισθήσεις είτε των άνω είτε των κάτω ορίων.

Για διαγράμματα ελέγχου *EWMA*, οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν την ταυτόχρονη χρήση δύο μονών διαγραμμάτων πλευρικού ελέγχου για την προσομοίωση του συνολικού αμφίπλευρου, με αρχικές καταστάσεις τιμών διαφορετικές από το μηδέν για την εφαρμογή του χαρακτηριστικού *FIR*. Το ένα πλευρικό διάγραμμα *EWMA* παρακολουθεί τις άνω διολισθήσεις της διεργασίας ενώ το άλλο παρακολουθεί τις κάτω. Οι Rhoads, Montgomery και Mastrangelo (1996), υιοθέτησαν την προσέγγιση των Lucas και Saccucci επιτρέποντας στα πλευρικά διαγράμματα μιας ζώνης να έχουν χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Οι Rhoads et al (1996), συνέκριναν τις ιδιότητες των μηκών όπως αυτές προέκυψαν από προσομοιώσεις. Και οι δύο υλοποιήσεις των *FIR-EWMA* διαγραμμάτων απαιτούν παρακολούθηση ταυτόχρονα δύο διαγραμμάτων για την παρακολούθηση αμφίπλευρων ολισθήσεων.

Όπως προκύπτει η χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου κάνει ένα *EWMA* διάγραμμα ελέγχου πιο ευαίσθητο στα προβλήματα ελέγχου ποιότητας που σχετίζονται με την εκκίνηση από τα παραδοσιακά συστήματα που λειτουργούν με τα κλασσικά ασυμπτωτικά όρια. Εάν είναι επιθυμητή επιπλέον προστασία για προβλήματα εκκίνησης, περαιτέρω «στένεμα» των ορίων ελέγχου σύμφωνα με μία εκθετική συνάρτηση βάρους μιμείται το χαρακτηριστικό *FIR*. Η εξαγωγή χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου για την μέθοδο *EWMA* παρουσιάζεται στην συνέχεια, και η επίδραση των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων παρουσιάζεται στην συνέχεια, καθώς εφαρμόζεται σε πραγματικά δεδομένα. Η επόμενη ενότητα χρησιμοποιεί αριθμητικά αποτελέσματα και συγκρίνει την κλασσική *EWMA* με την χρονικά μεταβαλλόμενη *EWMA*. Επίσης ελέγχεται το χαρακτηριστικό *FIR* για *EWMA* διαγράμματα με δύο πλευρικές ζώνες δείχνοντας ότι αυτή η μέθοδος πλεονεκτεί σε σχέση με την προτεινόμενη από τους Lucas, Saccucci (1990) και την αντίστοιχη των Rhoads et al (1996). Η προσέγγιση των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου μπορεί να εκτιμηθεί και με αναλυτικούς υπολογισμούς κάνοντας χρήση προσεγγιστικών μη ομογενών Μαρκοβιανών Αλυσίδων (M.A).

1.2.1. EWMA Μέθοδος και Χρονικά Μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

Από την περιγραφική σχέση της EWMA για την μεταβλητή Z_i η μέση τιμή και η διασπορά της, μπορούν να υπολογισθούν σχετικά εύκολα (Montgomery 1991).

Υποθέτοντας ότι \bar{X}_i είναι ανεξάρτητες τ.μ. με μέση τιμή μ_x και τυπική απόκλιση σ_x^2/n , όπου n είναι το πλήθος δειγμάτων που χρησιμοποιούνται σε κάθε διάστημα για τον υπολογισμό των \bar{X}_i προκύπτει:

$$\mu_{z_i} = \mu_x, \quad \text{and}$$
$$\sigma_{z_i}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[1 - (1-\lambda)^{2t} \right].$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η διασπορά της μεταβλητής Z_i της μεθόδου EWMA αποτελεί συνάρτηση του χρόνου. Αυτό έπρεπε να αναμένεται διότι ο αριθμός των δειγμάτων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των EWMA στατιστικών μεταβάλλεται με τον χρόνο και η επίδραση της αρχικής τιμής της μεταβλητής Z_0 μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Τα όρια ελέγχου για το σχήμα ελέγχου EWMA, εξάγονται με τυπικές (ασυμπτωτικές) μεθόδους βασισμένα στα $\pm L$ σίγμα όρια, όπου το L συνήθως εκλέγεται σε μία τιμή 3 όπως και στον σχεδιασμό των διαγραμμάτων ελέγχου Shewart. Οπότε τα άνω και κάτω όρια $UCL(t)$ και $LCL(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

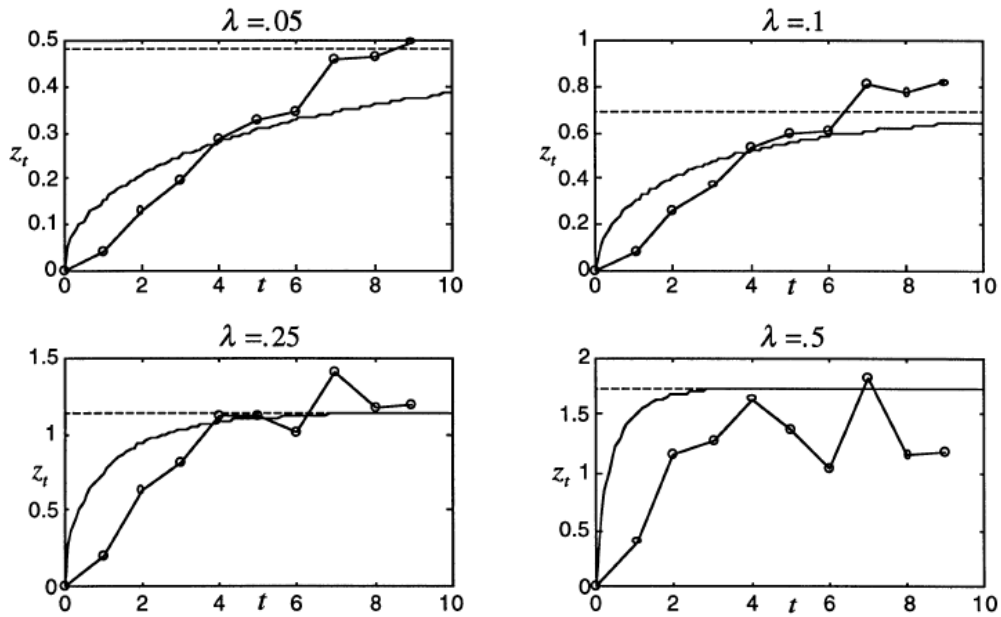
$$UCL(t) = \mu_x + L\sigma_x \sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2t}]}{(2-\lambda)n}}$$
$$LCL(t) = \mu_x - L\sigma_x \sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2t}]}{(2-\lambda)n}}$$

όπου σε εφαρμογές μ_x και σ_x εκλέγονται τυπικά από βασικά δεδομένα βασισμένα σε υπολογισμούς από τις τιμές των παραγόμενων δειγμάτων από την διεργασία. Καθώς ο χρόνος t αυξάνει τα όρια ελέγχου $UCL(t)$ και $LCL(t)$ συγκλίνουν στα αντίστοιχα ασυμπτωτικά όρια τα οποία συμβολίζονται με UCL και LCL και τα οποία δίνονται από την σχέση:

$$\mu_x \pm L\sigma_x \sqrt{\lambda/(2-\lambda)n}$$

Η ταχύτητα σύγκλισης στις αντίστοιχες ασυμπτωτικές τιμές εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την τιμή της παραμέτρου λ και γίνεται πιο αργή καθώς η τιμή της παραμέτρου λ γίνεται μικρότερη.

Για την παρουσίαση της επίδρασης των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου θεωρούμε το ακόλουθο παράδειγμα το οποίο χρησιμοποιήθηκε από τους Lucas και Crosier (1982) για την επίδειξη των επιδράσεων του χαρακτηριστικού *FIR* στα αντίστοιχα διαγράμματα *CUSUM*. Τα προκύπτοντα δείγματα ως ακολουθία στο χρόνο είναι [0,8, 1.9, 1.4, 2.0, 1.1, 0.7, 2.6, 0.5, 1.2] και αντιπροσωπεύουν δείγματα μίας διεργασίας η οποία αρχικά είναι εκτός ελέγχου. Το επόμενο σχήμα δείχνει το προκύπτον διάγραμμα *EWMA*, για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ με όρια ελέγχου τα οποία υπολογίζονται βασισμένα σε αρχικές εκτιμήσεις των $\mu_x=0$ και $\sigma_x=1$ για $L=3.0$. Το χρονικά μεταβαλλόμενο άνω όριο *UCL(t)* παριστάνεται ως μια συμπαγής γραμμή ενώ το αντίστοιχο ασυμπτωτικό όριο *UCL* παριστάνεται ως διακεκομμένη. Το σχήμα δείχνει μόνο τα άνω όρια ελέγχου για να διευκολύνει την παρουσίαση. Κανονικά στα διαγράμματα θα πρέπει να παρουσιάζονται και τα άνω αλλά και τα κάτω όρια ελέγχου. Ο αριθμός των δειγμάτων χρειάζονται για να δημιουργήσουν ένα σήμα εκτός ελέγχου, το οποίο εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ καθώς και τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια. Όταν η παράμετρος λ παίρνει τιμές 0.05, 0.1, και 0.25, ένα διάγραμμα ελέγχου *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια χρειάζεται μόνο τέσσερα δείγματα εκεί όπου χρησιμοποιώντας τα ασυμπτωτικά όρια για να παραχθεί ένα σήμα, θα χρειάζονταν τουλάχιστον επτά δείγματα για τιμές $\lambda=0.1$ και $\lambda=0.25$, ενώ χρειάζονται εννέα δείγματα για τιμή $\lambda=0.05$. Όταν $\lambda=0.5$ τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου γρήγορα συγκλίνουν στην ασυμπτωτική τιμή τους κι έχουν μικρή επίδραση στην μέθοδο. Όταν $\lambda=0.5$ ένα σήμα εκτός ελέγχου απαιτεί επτά δείγματα για τα *UCL(t)* ή *UCL* ως άνω όριο ελέγχου.



Σχήμα 4: Σχεδίαση των δειγμάτων της μεθόδου *EWMA* για ασυμπτωτικά και χρονικά μεταβαλλόμενα όρια άνω ελέγχου

Όπως φαίνεται από το σχήμα 4, χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά όρια σε σχέση με χρονικά μεταβαλλόμενα, κάνει το διάγραμμα *EWMA* λιγότερο ευαίσθητο στην ανίχνευση ολισθήσεων στα πρώτα δείγματα από την διεργασία. Αυτό αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα εάν μια μεγάλη ολίσθηση συμβεί στην διεργασία από νωρίς ή εάν μία διεργασία δεν αποκατασταθεί πλήρως μετά την εφαρμογή μιας διορθωτικής ενέργειας από το σύστημα ελέγχου.

1.2.2. Ιδιότητες των Μηκών ροής (RL) για διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου

Σε αυτήν την παράγραφο οι ιδιότητες των μηκών ροής των διαγραμμάτων *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια καθώς και επίσης το μέσο μήκος ροής *ARL* συγκρίνονται με τα αντίστοιχα ποσά που αφορούν στην *EWMA* μέθοδο με ασυμπτωτικά όρια. Όπως θα αποδειχθεί καθώς η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου τα *ARL* των *EWMA* διαγραμμάτων με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, παραμένουν σχεδόν ταυτόσημα με την *ARL* των παραδοσιακών *EWMA* διαγραμμάτων με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου. Όμως ενώ η αρχική διεργασία είναι εκτός ελέγχου η *ARL* των δύο διαγραμμάτων μπορούν να διαφέρουν σημαντικά εξαρτώμενες από την τιμή λ της μεθόδου *EWMA*.

Είναι σημαντικό να ποσοτικοποιήσουμε την επίδραση χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, δεδομένου ότι τα σχήματα ελέγχου *EWMA* συνήθως σχεδιάζονται για να επιτυγχάνουν συγκεκριμένα *ARL* υπό λειτουργικές συνθήκες. Για το σχήμα *EWMA* οι παράμετροι σχεδιασμού συμπεριλαμβάνουν τις λ και L . Όμως δεδομένου ότι τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου συγκλίνουν στις σταθερές ασυμπτωτικές τιμές καθώς αυξάνει ο χρόνος, για μετατοπίσεις οι οποίες θα συμβούν στο μέλλον και τα δύο διαγράμματα θα έχουν παρόμοιες ιδιότητες για την παράμετρο του μήκους ροής. Ως αποτέλεσμα, τα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια μπορούν να σχεδιασθούν με ανάλογο τρόπο όπως τα *EWMA* με τα αντίστοιχα ασυμπτωτικά όρια. (Για περισσότερες και λεπτομερέστερες οδηγίες για τον σχεδιασμό βλέπε Crowder (1987)).

Οι ιδιότητες της παραμέτρου μήκους ροής (*RL*) για διαγράμματα *EWMA* ελέγχου με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου, καθορίστηκαν από τον Crowder (1987) χρησιμοποιώντας μία προσέγγιση ολοκληρωτικής εξίσωσης. Δυστυχώς η μέθοδος για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δεν είναι εφαρμόσιμη για διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια. Όμως οι ιδιότητες της παραμέτρου *RL* για τα διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου μπορεί να προσεγγισθεί χρησιμοποιώντας μία μη ομογενή αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου. Χρησιμοποιώντας μία τέτοια Markovιανή Αλυσίδα ο χώρος κατάστασης προσεγγίζεται με μία διακριτοποίηση και η πιθανότητα μετάβασης από την μία κατάσταση σε άλλες καθορίζεται σε βάση μίας χρονικής περιόδου. Με την αύξηση περαιτέρω του πλήθους των καταστάσεων της αλυσίδας η προσέγγιση για την παράμετρο *RL* μπορεί να γίνει περισσότερο ακριβής.

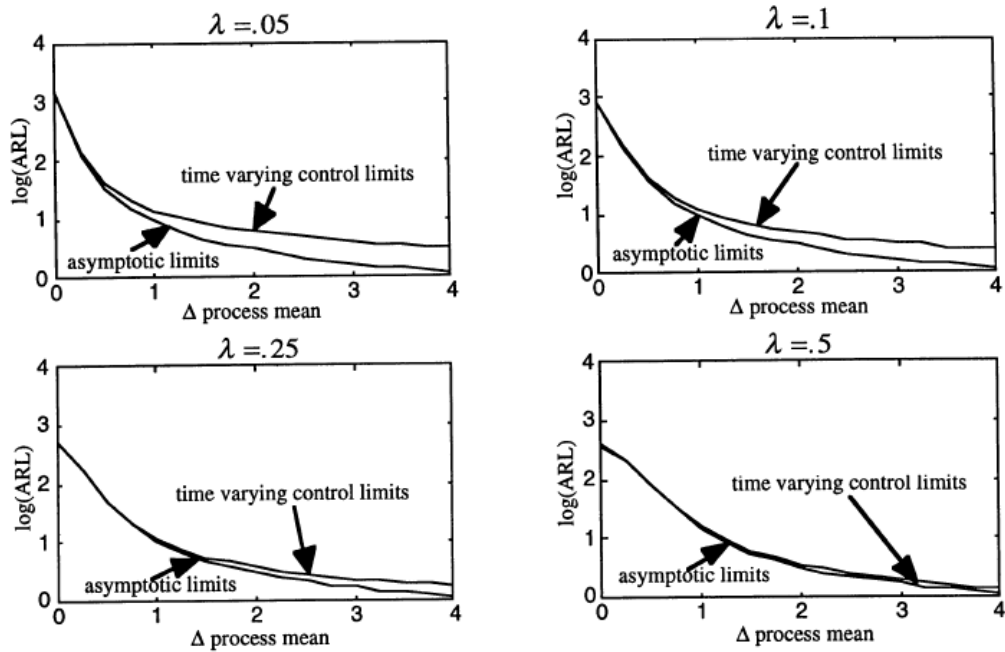
Η επίδραση των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου στην παράμετρο *ARL* παρουσιάζεται στο Σχήμα 5. Τα αποτελέσματα καθορίστηκαν με τιμή $L=3.0$ σταθερά ελέγχου και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτοντας μία εντός ελέγχου μέση τιμή ίση με το μηδέν και τυπική απόκλιση ίση με ένα. Στο σχήμα, ο οριζόντιος άξονας δίνει την πραγματική αρχική μέση τιμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης s_x που αποτελεί την στάνταρ τιμή της τυπικής απόκλισης. Τα αποτελέσματα δίνονται μόνο για θετικές μετατοπίσεις, αλλά δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι συμμετρικό το ίδιο μοτίβο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τις αρνητικές μετατοπίσεις. Οι τιμές *ARL* για την ασυμπτωτική περίπτωση λήφθηκαν από τον Crowder (1987) ενώ τα αποτελέσματα για την *ARL* της μεθόδου *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, καθορίστηκαν χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία που θα παρουσιαστεί στην συνέχεια. Το Σχήμα 5 δείχνει ότι η επίδραση της χρησιμοποίησης χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων για την παράμετρο *ARL* στην μέθοδο *EWMA* είναι σημαντική όταν αρχικά η διεργασία δεν είναι εντός ελέγχου και ειδικότερα

όταν η παράμετρος λ είναι μικρή. Το Σχήμα χρησιμοποιεί την παράσταση $\log(ARL)$ για την διευκόλυνση της γραφικής αναπαράστασης των δεδομένων.

Για παράδειγμα από τον πίνακα δεδομένων χρησιμοποιώντας αρχική μέση τιμή της τάξης των $2.0\sigma_x$ μονάδων μεγαλύτερη από την εντός ελέγχου τιμή που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του διαγράμματος *EWMA*, και για $\lambda=0.05$ η παράμετρος *ARL* για την μέθοδο *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι 2.8, τιμή η οποία είναι πολύ μικρότερη από την *ARL* των 6.0 που απαιτείται για την *EWMA* μέθοδο με ασυμπτωτικά όρια ελέγχου. Όμως αυτό έχει πολύ μικρή επίδραση στο εντός ελέγχου μήκος όπως φαίνεται από το σχήμα 5. Καθώς χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου συστήνονται για όλα τα διαγράμματα *EWMA* και δεδομένου ότι η απόδοση τους είναι σημαντικά καλύτερη από τα αντίστοιχα ασυμπτωτικά όρια ελέγχου καθώς υπάρχει σημαντική πιθανότητα μία διεργασία να εκκινήσει από εκτός ελέγχου κατάσταση.

Πίνακας 6: *ARL* παράμετρος για διάγραμμα *EWMA* διπλής πλευρικής ζώνης ελέγχου με μηδενική αρχική κατάσταση και $L=3.0$

μ_x/σ_x	$\lambda=.50$	$\lambda=.25$	$\lambda=.10$	$\lambda=.05$	$\lambda=.50$	$\lambda=.25$	$\lambda=.10$	$\lambda=.05$
.00	398	503	842	1379	382	500	828	1353
.25	209	171	145	135	207	170	140	127
.50	75.4	48.5	37.4	37.4	74.5	47.6	34.5	32.5
.75	31.5	20.2	17.9	20.0	30.8	19.5	15.3	15.6
1.00	15.7	11.2	11.4	13.5	15.2	10.2	9.1	9.0
1.50	6.1	5.5	6.6	8.3	5.7	4.7	4.5	4.5
2.00	3.5	3.6	4.7	6.0	3.2	2.9	2.8	2.8
2.50	2.4	2.8	3.7	4.8	2.2	2.1	2.0	2.0
3.00	1.9	2.3	3.1	4.0	1.6	1.6	1.6	1.6
3.50	1.5	2.0	2.6	3.4	1.3	1.3	1.3	1.3
4.00	1.3	1.7	2.3	3.0	1.2	1.2	1.2	1.1



Σχήμα 5: Διαγράμματα της παραμέτρου ARL για σχήματα ελέγχου EWMA με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια

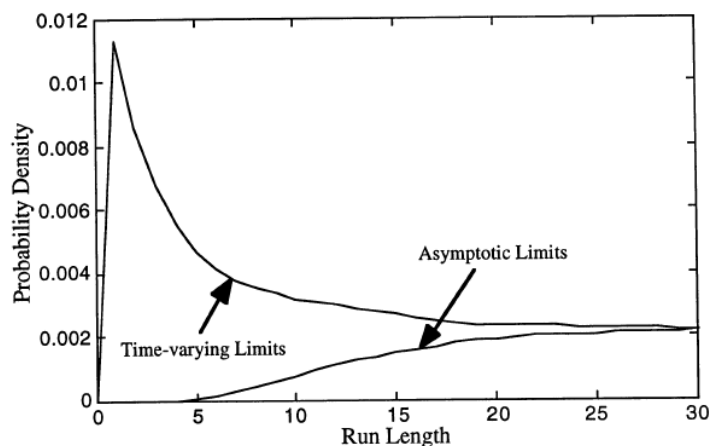
Οι τιμές τυπικής απόκλισης για την EWMA μέθοδο με ασυμπτωτικά όρια δίνονται στον Crowder (1987). Ο Πίνακας 7 αναπαράγει τα αποτελέσματα του Crowder και δίνει την τυπική απόκλιση για την περίπτωση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων χρησιμοποιώντας για τον υπολογισμό τους την μη ομογενή Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Ο πίνακας δείχνει ότι η τυπική απόκλιση για την παράμετρο μήκους ροής (RL) είναι σχεδόν ταυτόσημη και για τις δύο EWMA με ασυμπτωτικά αλλά και χρονομεταβλητά όρια ελέγχου.

Πίνακας 7: Τυπικές αποκλίσεις για την παράμετρο RL για διαγράμματα EWMA διπλής πλευρικής ζώνης ορίων ελέγχου για μηδενική αρχική κατάσταση και $L=3.0$

μ_x/σ_x	Asymptotic Control Limits				Time-varying Control Limits			
	$\lambda=.50$	$\lambda=.25$	$\lambda=.10$	$\lambda=.05$	$\lambda=.50$	$\lambda=.25$	$\lambda=.10$	$\lambda=.05$
.00	396	499	833	1363	396	499	834	1364
.25	207	167	133	113	207	167	133	113
.50	73.2	43.8	27.6	22.0	73.2	43.8	28.0	23.0
.75	29.3	15.9	10.2	8.8	29.2	16.0	10.6	9.7
1.00	13.6	7.5	5.3	4.9	13.6	7.4	5.7	5.5
1.50	4.3	2.7	2.3	2.3	4.2	2.8	2.5	2.6
2.00	1.9	1.4	1.3	1.4	1.9	1.5	1.5	1.5
2.50	1.1	0.9	0.9	1.0	1.1	1.0	1.0	1.0
3.00	0.8	0.6	0.7	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7
3.50	0.6	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5
4.00	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4

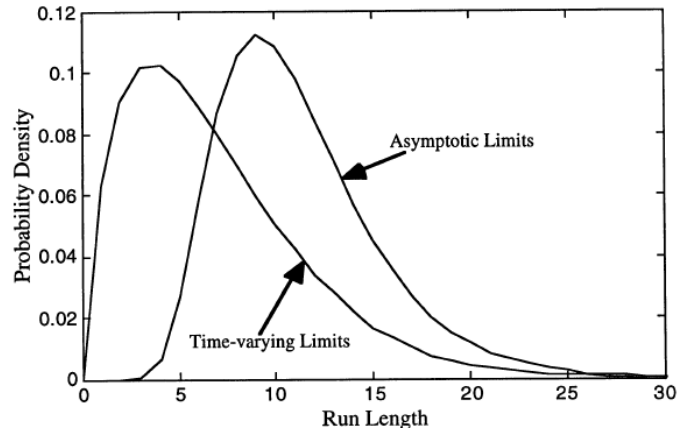
Είναι επίσης ενδιαφέρον να εξετασθεί πως η κατανομή των μηκών ροής των διαγραμμάτων *EWMA* μεταβάλλεται όταν υιοθετούνται χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Η κατανομή των μηκών ροής μπορεί να καθορισθεί μέσω συγκεκριμένων εξισώσεων. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν την κατανομή της παραμέτρου *RL* για διαγράμματα *EWMA* για χρονικά μεταβαλλόμενα όρια και ασυμπτωτικά όρια ελέγχου, όταν η αρχική διεργασία είναι εντός ελέγχου και ολισθαίνει κατά μία τυπική μονάδα απόκλισης σ_x .

Το Σχήμα 6 δείχνει μία αρχική αιχμή στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) για την παράμετρο *RL* για την μέθοδο *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και με τις αντίστοιχες δύο σ.π.π. να συγκλίνουν καθώς τα *RL* μεγαλώνουν. Αυτή η μεγαλύτερη τιμή πιθανότητας για την σ.π.π. στα μικρά μήκη ροής είναι μη επιθυμητή δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση της διεργασίας είναι εντός ελέγχου και για τον λόγο αυτό θα επιθυμούσαμε τα μήκη να είναι αρκετά μεγαλύτερα. Όμως δεδομένων των πιθανοτήτων που συμπεριλαμβάνονται και οι οποίες είναι σημαντικά μικρές αυτή η εμφανιζόμενη αιχμή έχει μια πολύ μικρή επίδραση στην παράμετρο *ARL*.



Σχήμα 6: Εντός ελέγχου κατανομή της παραμέτρου *RL* για διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα και ασυμπτωτικά όρια $\lambda=0.05$ $L=2.587$

Στο Σχήμα 7 αντιθέτως, το μεγαλύτερο μέρος της σ.π.π. για τις 2 περιπτώσεις είναι εντελώς διαφορετικές και η παράμετρος *ARL* για την περίπτωση των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων είναι σημαντικά μικρότερη. Φυσικά δοσμένης μίας αρχικής εκτός ελέγχου κατάστασης μία μικρότερου μήκους *ARL* είναι επιθυμητή.



Σχήμα 7: Εκτός ελέγχου κατανομή της παραμέτρου RL για διαγράμματα *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα και ασυμπτωτικά όρια αι αρχική μεταβολή μέσης τιμής ίση με μία τυπική μονάδα απόκλισης

Συγκρίνοντας τις κατανομές της παραμέτρου RL οι οποίες παρουσιάζονται στα παραπάνω σχήματα με σχεδόν όμοιες γραφικές παραστάσεις για την μέθοδο *CUSUM* και την μέθοδο *FIR-CUSUM* από τους Lucas και Crosier (1982) και τα διαγράμματα από τους Lucas και Sacucci (1990), καταλήγουμε ότι το φαινόμενο των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων είναι ίδια με αυτό που προκύπτει από το χαρακτηριστικό *FIR*. Το φαινόμενο των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων εμφανίζει μικρότερη επίδραση από την μέθοδο *FIR-CUSUM* γεγονός το οποίο υποδεικνύει ότι ένα επιπρόσθετο «στένεμα» των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου για μικρές τιμές χρόνου, ίσως απαιτείται για να καταστήσει τα διαγράμματα *EWMA* ακόμα πιο ευαίσθητα σε θέματα εκκίνησης της διεργασίας.

1.2.3. Διαγράμματα Ελέγχου *EWMA* και *FIR*

Τα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους εμφανίζοντας ιδιότητες ανάλογες του χαρακτηριστικού *FIR*. Όμως χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια δεν είναι ακριβώς το ίδιο όπως με την χρήση του χαρακτηριστικού *FIR* για την μέθοδο *CUSUM*, δεδομένου ότι ρύθμιση των ορίων ελέγχου απλά διορθώνει τα όρια ελέγχου για να συμπεριλάβουν την χρονικά εξαρτώμενη φύση των στατιστικών της μεθόδου *EWMA*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια να μην προκαλούν ανίχνευση ποιοτικών προβλημάτων στην φάση εκκίνησης της διεργασίας περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή.

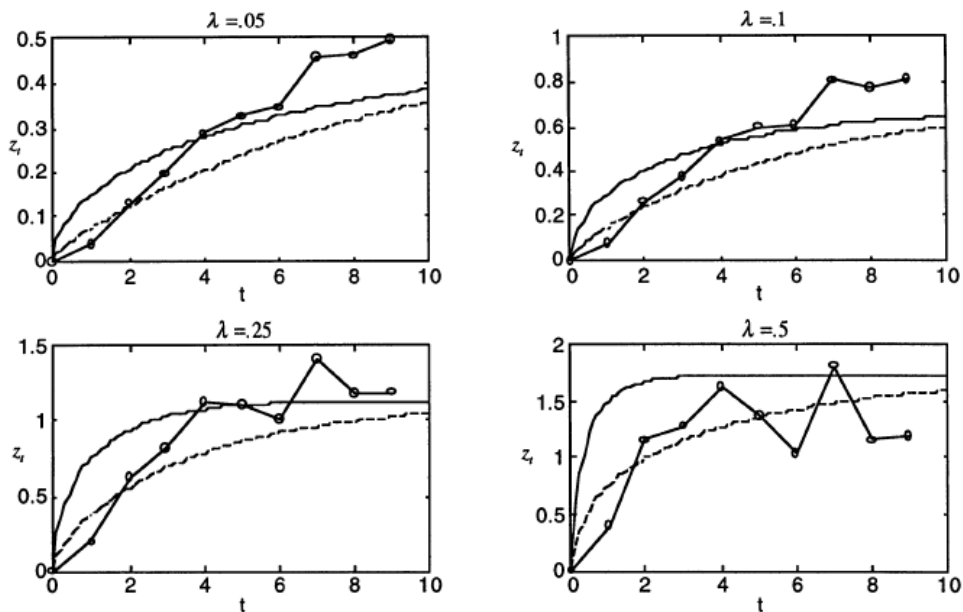
Μερικοί ερευνητές έχουν προτείνει προσαρμογές στο διάγραμμα ελέγχου *EWMA* έτσι ώστε να οικοδομήσουν ένα αντίστοιχο του *FIR* χαρακτηριστικού. Όπως αρχικά παρουσιάστηκε για την δημιουργία ενός διαγράμματος *EWMA* που να εμφανίζει γρήγορη αντίδραση, οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν την χρήση δύο αντίστοιχων μονών πλευρικών ζωνών διαγραμμάτων *EWMA* με αρχικές συνθήκες οι οποίες δεν είναι υποχρεωτικά μηδενικές. Οι Rhoads, Montgomery και Mastrangelo (1996), υιοθέτησαν την πρόταση τους, επιτρέποντας κάθε ένα από αυτά τα μονόπλευρα διαγράμματα να έχουν χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου. Και οι δύο αυτές μέθοδοι έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα να μετατρέπουν τα διαγράμματα ελέγχου σε πιο ευαίσθητα σε προβλήματα ποιότητας κατά την φάση της εκκίνησης, αλλά επιπλέον προκαλούν κάποια προβλήματα δεδομένου ότι απαιτούν την ταυτόχρονη χρήση δύο *EWMA* διαγραμμάτων για να επιτύχουν το αποτέλεσμα του συνολικού ελέγχου που σε άλλη περίπτωση επιτυγχάνεται με την χρήση ενός αμφίπλευρου διαγράμματος.

Μία διαφορετική προσέγγιση προτείνεται, η οποία διατηρεί την απλότητα ενός απλού διαγράμματος ελέγχου. Για να προσδώσουμε στα *EWMA* διαγράμματα με τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου ένα χαρακτηριστικό *FIR*, τα όρια ελέγχου «στενεύονται» περαιτέρω για τα πρώτα δείγματα της διεργασίας. Αυτή η απαίτηση μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα, δεδομένου ότι τα όρια ελέγχου που επιβάλλονται είναι ήδη χρονομεταβλητά. Αφού τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου προσεγγίζουν εκθετικά τα ασυμπτωτικά όρια, είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε ένα αποσβέννον εκθετικό μοντέλο για το επιπλέον «στένεμα» αυτών. Ας θεωρήσουμε ως $FIR_{adj} = 1 - 0.5^{1+a(t-1)}$. Με αυτήν την τιμή η μεταβλητή του *FIR* κάνει τα όρια ελέγχου για το πρώτο δείγμα ($t=1$) στην μισή απόσταση από το αρχικό σημείο. Η μισή απόσταση επελέγη για να μιμηθεί την 50% προβάδισμα (HS) τυπικά προτεινόμενη για την *FIR-CUSUM* μέθοδο. Η επίδραση της διόρθωσης του *FIR* μειώνεται με τον χρόνο για να διασφαλίσει ότι οι ιδιότητες της παραμέτρου RL της *EWMA* θα παραμείνει ιδεατά απaráλλακτη. Μία λογική ρύθμιση θα ήταν να τεθεί η παράμετρος a έτσι ώστε η ρύθμιση της *FIR* να έχει πολύ μικρή επίδραση μετά το 20^ο δείγμα. Αυτό είναι ικανό για να επιτρέψει την ανίχνευση προβλημάτων ποιότητας της διεργασίας κατά την φάση εκκίνησης. Χρησιμοποιώντας $a=0.3$ συνεπάγεται ότι η ρύθμιση για τα όρια ελέγχου στο 20^ο δείγμα είναι 0.9% και η διαφορά ανάμεσα στο ρυθμιζόμενο όριο και στο χρονικά μεταβαλλόμενο όριο είναι πλέον αμελητέα. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον παράγοντα διόρθωσης τα όρια για την μέθοδο *FIR-EWMA* θα είναι:

$$\mu_x \pm L\sigma_x \left(1 - (1/2)^{0.7+0.3t}\right) \sqrt{\frac{\lambda [1 - (1-\lambda)^{2t}]}{(2-\lambda)n}}$$

Τα προκύπτοντα όρια ελέγχου από την παραπάνω σχέση είναι χρονικά μεταβαλλόμενα έτσι ώστε η παράμετρος RL για την προτεινόμενη $FIR-EWMA$ μπορεί να καθορισθεί χρησιμοποιώντας την μη ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα για την αναπαράσταση της διεργασίας.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται η επίδραση των προηγούμενων ορίων στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Στο σχήμα το πλεονέκτημα του επιπλέον περιορισμού των ορίων ελέγχου για την ανίχνευση προβλημάτων ποιότητας στην παραγωγή της διεργασίας κατά την φάση εκκίνησης παρουσιάζονται ξεκάθαρα. Για όλες τις διαφορετικές τιμές του λ η μέθοδος $FIR-EWMA$ δίνει σήμα εκτός ελέγχου στα πρώτα δύο δείγματα της διεργασίας. Αυτό είναι σημαντική βελτίωση επί των ιδιοτήτων της παραμέτρου RL κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μόνο με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια, ειδικά για μεγάλες τιμές του λ .



Σχήμα 8: Διαγράμματα $EWMA$ με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια με διακεκομμένες γραμμές που δείχνουν τα χρονικά μεταβαλλόμενα FIR όρια ελέγχου. Οι συμπαγείς γραμμές δείχνουν τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου χωρίς την επίδραση του χαρακτηριστικού FIR

Ο πίνακας που παρουσιάζεται στην συνέχεια συγκρίνει τα *ARL* από την μέθοδο των Lucas και Saccucci (1990) *FIR-EWMA* που συμβολίζεται ως *L-FIR*, των Rhoads et al (1996), *FIR-EWMA* που συμβολίζεται ως *R-FIR* και της *FIR-EWMA* μεθόδου με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως. Τα αποτελέσματα για την *L-FIR* και την *R-FIR* προκύπτουν από τα αποτελέσματα προσομοίωσης που δημοσιεύτηκαν από τους Rhoads et al (1996) και τα αποτελέσματα *RL* για την προτεινόμενη *FIR-EWMA* προσεγγίστηκαν υπολογιστικά. Για όλες τις μεθοδολογίες *FIR-EWMA* και όριο ελέγχου πολλαπλάσιο του *L* έχει ρυθμιστεί έτσι ώστε ενώ η διεργασία είναι υπό έλεγχο όλες οι μέθοδοι δίνουν το ίδιο σχεδόν *ARL*.

Πίνακας 8: Σύγκριση των *ARL* για όλες τις *FIR-EWMA* μεθόδους

μ_x/σ_x	$\lambda=0.25$			$\lambda=0.1$		
	L-FIR <i>L=2.81</i>	R-FIR <i>L= 3.0</i>	FIR <i>L=3.07</i>	L-FIR <i>L=2.81</i>	R-FIR <i>L= 3.0</i>	FIR <i>L=2.91</i>
0.0	483	452	468	463	466	459
0.5	42.1	39.3	33.5	24.2	22.2	19.6
1.0	8.5	7.6	5.2	6.9	5.4	4.5
1.5	3.9	3.2	2.3	3.7	2.4	2.1
2.0	2.5	1.9	1.5	2.7	1.6	1.4
3.0	1.5	1.1	1.1	1.8	1.1	1.1
4.0	1.1	1.0	1.0	1.3	1.0	1.0

μ_x/σ_x	$\lambda=0.05$			$\lambda=0.03$		
	L-FIR <i>L=2.62</i>	R-FIR <i>L=2.72</i>	FIR <i>L=2.69</i>	L-FIR <i>L=2.44</i>	R-FIR <i>L=2.54</i>	FIR <i>L=2.55</i>
0.0	421	417	419	383	384	391
0.5	19.7	17.0	16.5	18.6	14.9	13.8
1.0	7.0	4.4	4.2	7.4	3.9	3.6
1.5	4.1	2.2	2.0	4.6	2.0	1.8
2.0	3.1	1.5	1.4	3.4	1.4	1.3
3.0	2.1	1.1	1.1	2.4	1.1	1.0
4.0	1.7	1.0	1.0	1.9	1.0	1.0

Τα αποτελέσματα από τον Πίνακα 8 καταλήγουν ότι οι προτεινόμενες *FIR-EWMA* είναι σαφώς ανώτερη από τις προηγούμενες προσεγγίσεις. Για παράδειγμα για $\lambda=0.1$ και μία μέση ολίσθηση με μία μετατόπισης μίας τυπικής μονάδας απόκλισης η προτεινόμενη μέθοδος *FIR-EWMA* απαιτεί κατά μέσο όρο μόνο 4.5 δείγματα προτού να δώσει σήμα για εκτός ελέγχου κατάσταση ενώ η αντίστοιχη των Lucas, Saccucci και των Rhoads et al, απαιτούν 6.9 και 5.4 δείγματα αντίστοιχα. Η αντίστοιχη μείωση στην παράμετρο *ARL* για την εκτός ελέγχου φάση εμφανίζεται να λαμβάνει μεγάλες τιμές καθώς η παράμετρος λ είναι μικρή. Επιπρόσθετα στην βελτίωση του μήκους οι *EWMA* μέθοδοι με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια, επίσης παρέχουν προστασία διπλής πλευρικής ζώνης από

προβλήματα ποιότητας κατά την φάση εκκίνησης με χρήση μόνο ενός διαγράμματος για την επιβολή του ελέγχου. Αυτό είναι ένα σημαντικότερο πλεονέκτημα από πλευράς υλοποίησης.

1.3. Η χρήση δύο διαγραμμάτων EWMA μονής πλευρικής ζώνης για την αντικατάσταση μίας μεθοδολογίας EWMA ελέγχου αμφίπλευρης ζώνης

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας, ελέγχεται η αντικατάσταση μίας αμφίπλευρης μεθόδου ελέγχου EWMA με χρήση δύο αντίστοιχων EWMA μεθόδου μονής πλευρικής ζώνης, για την καλύτερη ανίχνευση των τάσεων αύξησης/μείωσης που εμφανίζει μια διεργασία. Το διάγραμμα EWMA που ασχολείται με το άνω όριο ελέγχου βασίζεται στην αντίστροφη σ.π.π. κανονικής κατανομής μίας χ^2 κατανομής, ενώ η EWMA μέθοδος, η οποία ασχολείται με τον έλεγχο του κάτω ορίου της διεργασίας, βασίζεται σε μία κανονική προσέγγιση του λογαρίθμου των σταθμισμένων αθροισμάτων των χ^2 τυχαίων μεταβλητών. Επιπλέον προτείνεται ο συνδυασμός των δύο αυτών διαγραμμάτων EWMA μονής πλευρικής ζώνης για την κατασκευή ενός συνολικού αμφίπλευρου διαγράμματος EWMA για ταυτόχρονη άνω ή κάτω ολίσθηση της διεργασίας. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ότι το διάγραμμα ελέγχου του άνω ορίου είναι πιο αποδοτικό από το αντίστοιχο που προτείνουν οι Crowder και Hamilton (1992a) και οι Shu και Jiang (2008) για την ανίχνευση αυξήσεων στην διεργασία. Από την άλλη πλευρά, το προτεινόμενο σχήμα για τον έλεγχο του κάτω ορίου είναι σημαντικά αποδοτικότερο από αυτές που αναπτύχθηκαν με όμοιο τρόπο με τα προτεινόμενα διαγράμματα των Crowder και Hamilton (1992a).

Επίσης διερευνάται, η σχέση ανάμεσα σε σηματοθορυβικούς λόγους (*Signal-to-noise ratio* - *SN*), για μία αλλαγή στην διεργασία και την απόδοση ανίχνευσης. Στην συνέχεια συγκρίνεται η απόδοση των προτεινόμενων διαγραμμάτων σε όρους μηδενικής κατάστασης και μόνιμης κατάστασης αλυσίδων μέσων μηκών (*ARL*).

1.3.1. Τα διαγράμματα Ελέγχου *HHW1*, *HHW2* και *HHW-C*

Έστω ότι την χρονική στιγμή t , προκύπτουν τα τυχαία δείγματα $X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tm}$ από μία διεργασία της οποίας κάθε παρατήρηση ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Στο σημείο αυτό ενδιαφερόμαστε για την παρακολούθηση της αλλαγής της διασποράς της

διεργασίας. Ονομαστικά $\sigma_t^2 = \sigma_0^2$ όταν $t < \tau$ και $\sigma_t^2 \neq \sigma_0^2$ όταν $t \geq \tau$ για κάποια χρονική στιγμή τ όπου σ_0^2 είναι η διασπορά της διεργασίας όταν αυτή είναι εντός ελέγχου. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η μ_t ισούται με 0. Έστω $\delta_t = \sigma_t / \sigma_0$ και

$$S_t^2 = \sum_{i=1}^n (X_{ti} - \bar{X}_t)^2 / (n-1) \text{ για } t=1,2,\dots, \text{ να είναι αντίστοιχα ο λόγος της τυπικής απόκλισης}$$

της διεργασίας για την φάση εντός ελέγχου, και η διασπορά δειγμάτων η οποία βασίζεται στα $X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn}$. Οι Crowder και Hamilton (1992a) πρότειναν την ακόλουθη μέθοδο *EWMA*:

$$Q_t = \max[(1 - \lambda)Q_{t-1} + \lambda Y_t, 0],$$

όπου $0 < \lambda \leq 1$ αποτελεί την παράμετρο εξομάλυνσης, $Y_t = \ln(S_t^2 / \sigma_0^2)$ και $Q_0 = 0$. Είναι γνωστό ότι ο λόγος S_t^2 / σ_0^2 ακολουθεί μία Γάμμα Κατανομή με παράμετρο σχήματος $\alpha = (n-1)/2$ και παράμετρο κλίμακας $\theta = 2\delta_t^2 / (n-1)$. Κατά συνέπεια η Y_t ακολουθεί κατά προσέγγιση μία κανονική κατανομή (βλέπε Lawless - 2003), με μέση τιμή και διασπορά που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_Y \approx \ln(\delta_t^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4},$$

και

$$\sigma_Y^2 \approx \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}.$$

Για να ανιχνεύσει μία αύξηση στην διασπορά της διεργασίας, η μέθοδος *EWMA* σηματοδοτεί για κατάσταση εκτός ελέγχου εάν η Q_t είναι μεγαλύτερη από την τιμή:

$$h_Q = L_Q \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sigma_Y,$$

όπου L_Q μπορεί να καθορισθεί για την επίτευξη ενός επιθυμητού ARL_0 . Ομοίως στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για την ανίχνευση μίας μείωσης στην διασπορά της διεργασίας, τότε η μέθοδος *EWMA* μπορεί να βασιστεί στην σχέση:

$$Q'_t = \min[(1 - \lambda)Q'_{t-1} + \lambda Y_t, 0],$$

όπου $Q'_0 = 0$ και το διάγραμμα σηματοδοτεί μία κατάσταση εκτός ελέγχου εάν Q'_t είναι μικρότερο από την τιμή:

$$h'_Q = -L'_Q \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sigma_Y,$$

όπου L'_Q μπορεί να εκλεγεί για την επίτευξη ενός επιθυμητού ARL_0 . Για διευκόλυνση, τα διαγράμματα που προτάθηκαν από τους Crowder και Hamilton (192a) δηλώνονται στην συνέχεια ως διαγράμματα CH για το υπόλοιπο του κεφαλαίου.

Ορίζουμε επίσης την κανονικοποιημένη ποσότητα:

$$Z_t = \frac{Y_t - \mu_{Y|\sigma_t=\sigma_0}}{\sigma_Y},$$

όπου $\mu_{Y|\sigma_t=\sigma_0}$ αποτελεί τον κατά προσέγγιση για τον μέσο σε φάση ελέγχου της ποσότητας Y_t . Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατά προσέγγιση διασπορά της Y_t είναι μια συνάρτηση του πλήθους δειγμάτων n και για τον λόγο αυτό οποιεσδήποτε αλλαγές της σ_t^2 θα αντανakλασθεί στην προσέγγιση του μέσου μ_Y της Y_t . Ορίζουμε ως $Z_{t+} = \max(Z_t, 0)$. Εάν η Z_t ακολουθεί μία ακριβή κανονική κατανομή, οι Barr και Sherrill (1999), έδειξαν ότι $E(Z_{t+}) = 1/(2\pi)^{0.5}$ και $\sigma_{Z_{t+}} = 1/2 - 1/2\pi$. Κατά συνέπεια οι Shu και Jiang (2008) πρότειναν ένα διάγραμμα *EWMA* βασισμένο στην σχέση:

$$W_t = \lambda \left(Z_t^+ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + (1 - \lambda)W_{t-1},$$

όπου $W_0=0$. Το διάγραμμα δηλώνει μία κατάσταση εκτός ελέγχου όπου W_t ξεπερνά το άνω όριο ελέγχου

$$h_N = L_N \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sigma_{Z_t^+},$$

όπου το L_N μπορεί να εκλεγεί για την επίτευξη της επιθυμητής ARL_0 . Κατά αναλογία εφόσον το ενδιαφέρον της μεθόδου επικεντρώνεται στην ανίχνευση μιας μείωσης της διασποράς της διεργασίας, τότε το διάγραμμα *EWMA* μπορεί να βασιστεί στην σχέση:

$$W'_t = \lambda \left(Z_t^- + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + (1 - \lambda)W'_{t-1},$$

όπου $Z_t^- = \min(0, Z_t)$ και $W'_0=0$. Κατά συνέπεια το ελάχιστο όριο του διαγράμματος δίνεται από την σχέση:

$$h'_N = -L'_N \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sigma_{Z_t^-},$$

όπου το L_N' μπορεί να καθορισθεί για την επίτευξη του επιθυμητού ARL_0 και $\sigma_{z_t^-} = \sigma_{z_t^+}$. Τα διαγράμματα *EWMA* που προτάθηκαν από τους Shu και Jiang (2008) δηλώνονται με το χαρακτηριστικό *SJ* στο υπόλοιπο του κεφαλαίου. Οπότε προκύπτει απευθείας το στατιστικό χαρακτηριστικό για την *EWMA*:

$$V_t = \lambda \frac{S_t^2}{\sigma_0^2} + (1 - \lambda)V_{t-1} = \sum_{i=1}^t \lambda(1 - \lambda)^{t-i} \frac{S_i^2}{\sigma_0^2} + (1 - \lambda)^t V_0,$$

με τιμή για το $V_0=1$. Βασισμένοι στην ανεξαρτησία των S_i^2 , $i=1,2,\dots,t$ και χρησιμοποιώντας την ροπή δεύτερης τάξης της κατανομής χ^2 (Box – 1954):

$$V_t - (1 - \lambda)^t V_0 = \sum_{i=1}^t \lambda(1 - \lambda)^{t-i} \frac{S_i^2}{\sigma_0^2} \approx \text{gamma}(\beta_1, \beta_2),$$

όπου:

$$\beta_1 = \frac{(n - 1) \left[\sum_{i=1}^t \lambda(1 - \lambda)^{t-i} \right]^2}{2 \sum_{i=1}^t [\lambda(1 - \lambda)^{t-i}]^2} = \frac{(n - 1)(2 - \lambda)[1 - (1 - \lambda)^t]^2}{2\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2t}]},$$

και

$$\beta_2 = \frac{2\delta_t^2 \sum_{i=1}^t [\lambda(1 - \lambda)^{t-i}]^2}{(n - 1) \sum_{i=1}^t \lambda(1 - \lambda)^{t-i}} = \frac{2\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2t}]}{(n - 1)(2 - \lambda)[1 - (1 - \lambda)^t]}$$

Εάν $\sigma_t = \dots = \sigma_1$. Κατά συνέπεια λογαριθμίζοντας την ποσότητα $V_t - (1 - \lambda)^t V_0$, προκύπτει:

$$\ln[V_t - (1 - \lambda)^t V_0] \approx N(\mu_R, \sigma_R^2)$$

όπου:

$$\mu_R = \ln(\beta_1 \beta_2) - \frac{1}{2\beta_1} - \frac{1}{12\beta_1^2} + \frac{1}{120\beta_1^4},$$

και

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2\beta_1^2} + \frac{1}{6\beta_1^3} - \frac{1}{30\beta_1^5}.$$

Η διαφορά ανάμεσα σε αυτήν την προσέγγιση και στην αντίστοιχη των Shu και Jiang είναι ότι στην χρονική στιγμή t , αυτή η προσέγγιση έχει κάνει χρήση μόνο δύο προσεγγίσεων: της προσέγγισης του Box – 1954 για την χρήση της χ^2 κατανομής για να

καταλήξει στην γάμμα κατανομή και την προσέγγιση του λογαρίθμου της γάμμα κατανομής ως κανονικής, ενώ οι Shu και Jiang έχουν κάνει χρήση της κανονικής κατανομής για κάθε χρονική στιγμή. Η κατανομή $\ln(S_t^2/\sigma_0^2)$ σκεδάζεται προς τα αριστερά με αρνητικό μέσο όταν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, και μπορεί να παραμείνει αρνητική καθώς η διασπορά της διεργασίας αυξάνει ελαφρά. Για την εξαγωγή των στατιστικών W_t και W_t' για τα SJ διαγράμματα και τα δύο αυτά στατιστικά περιλαμβάνουν την προσθήκη της χρονικής μεταβλητής για τις αποκομμένες κατανομές των Z_{t+} και Z_{t-} για $i=1,2,\dots,t$, αντίστοιχα. Αν και μπορεί να προσδοκάται υψηλή απόδοση στην παρακολούθηση του στατιστικού μεγέθους W_t για την ανίχνευση μιας αύξησης στην διασπορά της διεργασίας, αποδεικνύεται ότι η ικανότητα παρακολούθησης του στατιστικού W_t' για την ανίχνευση μιας μείωσης στην διασπορά της διεργασίας εξασθενεί δραματικά. Σε αντίθεση, η κατανομή της ποσότητας $V_t - (1-\lambda)^t V_0$ η οποία συνιστά ένα γραμμικό συνδυασμό από t το πλήθος ανεξάρτητες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την χ^2 κατανομή, προσεγγίζεται από μία κατανομή Γάμμα, και έτσι ο λογάριθμος αυτής της Γάμμα Κατανομής περαιτέρω προσεγγίζεται με χρήση της Κανονικής Κατανομής. Αυτό καταλήγει ώστε η ποσότητα $\ln[V_t - (1-\lambda)^t V_0]$ να ακολουθεί προσεγγιστικά μία Κανονική κατανομή. Κατά συνέπεια τα όρια ελέγχου της $\ln[V_t - (1-\lambda)^t V_0]$ είναι πιο συμμετρικά και αυτό δίνει την δυνατότητα ανίχνευσης μίας αύξησης ή μίας μείωσης στην διασπορά της διεργασίας η οποία θα είναι η ίδια. Στην βάση της $\ln[V_t - (1-\lambda)^t V_0]$ ορίζεται η Κανονικοποιημένη μεταβλητή παρακολούθησης:

$$U_t = \frac{\ln[V_t - (1 - \lambda)^t V_0] - \mu_R}{\sigma_R}.$$

Κατά συνέπεια το άνω όριο ελέγχου για ένα μονόπλευρο σύστημα ελέγχου L_U ή το κάτω όριο ελέγχου $-L_U$ της U_t μπορούν να εκλεγούν αντίστοιχα, έτσι ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό ARL_0 . Αυτά τα διαγράμματα ελέγχου θα αναφέρονται ως HHW1 διαγράμματα στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αντίθετα με τα διαγράμματα CH και SJ όπου τα στατιστικά χαρακτηριστικά προς παρακολούθηση χρησιμοποιούν μία σταθερά (ανεξάρτητη του χρόνου t) τυπική απόκλιση για τον καθορισμό των ορίων ελέγχου. Στην εξαγωγή των ορίων ελέγχου για την μέθοδο HHW1 το χαρακτηριστικό παρακολούθησης U_t ισούται με $\ln[V_t - (1-\lambda)^t V_0] - \mu_R$ διά την τυπική απόκλιση σ_R , το οποίο αποτελεί μια αποκλειστική συνάρτηση του χρόνου t . Ο Montgomery (2008) συνιστά ισχυρά την χρήση της μεταβλητής της τυπικής απόκλισης στην εγκατάσταση των ορίων ελέγχου για ένα

διάγραμμα *EWMA* διότι βελτιώνει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μίας κατάστασης εκτός ελέγχου άμεσα, αφότου η *EWMA* μέθοδος εκκινήσει. Η χρησιμοποίηση για μεταβλητή μίας τυπικής απόκλισης αποδεικνύεται ότι είναι πλεονέκτημα για το διάγραμμα *HHW1* έναντι των αντιστοίχων για τα *CH* και *SJ*. Από τον ορισμό της μεταβλητής U_t μπορεί να αποδειχθεί ότι η U_{t+10} και η $U_{t,10} \geq 1$, ακολουθούν την ίδια κατανομή εάν θεωρήσουμε την V_{10} ως αρχική τιμή για την V_{10} όπως ακριβώς χρησιμοποιείται η V_0 για την V_t . Ως αποτέλεσμα το διάγραμμα *HHW1* εμφανίζει μία αλυσίδα *ARL* μόνιμης κατάστασης, την οποία συμβολίζουμε ως *S-ARL*, το ίδιο για την *ARL* μηδενικής κατάστασης την οποία συμβολίζουμε ως *Z-ARL* για κάθε τιμή της τυπικής απόκλισης σ . Η *Z-ARL* υπολογίζεται υποθέτοντας ότι η αλλαγή στην διεργασία συμβαίνει ως αρχική παρατήρηση του διαγράμματος ελέγχου. Το *S-ARL* συχνά θεωρείται να απομακρύνει το φαινόμενο της αρχικής παρατήρησης στην απόδοση του διαγράμματος ελέγχου. Η παράμετρος *S-ARL* αναφέρεται στην *ARL* που υπολογίζεται από την παρακολούθηση της διεργασίας θεωρώντας ότι αυτή έχει φτάσει στην μόνιμη κατάσταση πριν να συμβεί μία αλλαγή στην διεργασία. Σε αντίθεση, εξαιτίας της σταθερής τυπικής απόκλισης που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των ορίων ελέγχου για τα διαγράμματα *CH* και *SJ*, προκύπτουν αξιοσημείωτες διαφορές στις τιμές των *Z-ARL* και *S-ARL* για οποιαδήποτε τιμή της τυπικής απόκλισης σ .

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την ανίχνευση μιας αλλαγής στην διασπορά της διεργασίας είναι ο καθορισμός μιας στατιστικής μεταβλητής της *EWMA* σε όρους ενός ακριβούς κανονικού μετασχηματισμού της S_t^2/σ_0^2 . Έστω $F(\cdot)$ να παριστά την συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. που ακολουθεί την χ^2 με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Είναι γνωστό ότι όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου το στατιστικό χαρακτηριστικό $M_t = \Phi^{-1}[F[(n-1)S_t^2/\sigma_0^2]]$ ακολουθεί την τυπική Κανονική Κατανομή, όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής για την τυπική Κανονική Κατανομή. Βασισμένοι σε αυτό, το στατιστικό παρακολούθησης για την *EWMA* μέθοδο ορίζεται ως :

$$H_t = \lambda M_t + (1 - \lambda)H_{t-1},$$

όπου $H_0=0$. Μπορεί να δειχθεί ότι η H_t ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\lambda[1-(1-\lambda)^{2t}]/(2-\lambda)$ όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Δεδομένου ότι μία αλλαγή στην διασπορά της διεργασίας μπορεί να καταλήξει σε αμφίπλευρες αλλαγές της μέσης τιμής και της διασποράς της M_t , αντίστοιχα, είναι εφαρμόσιμο να χρησιμοποιηθεί το κανονικοποιημένο στατιστικό μέγεθος:

$$D_t = \frac{H_t}{\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}}$$

για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας. Τα δύο διαγράμματα μονής πλευρικής ζώνης *EWMA*, τα οποία θα συμβολίζονται στην συνέχεια ως διαγράμματα *HHW2* για την συνέχεια του κεφαλαίου, μπορούν αντίστοιχα να οριστούν για το άνω όριο ελέγχου L_D και το κάτω όριο ελέγχου $-L_D$ για την επίτευξη της επιθυμητής *ARL₀*.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Quesenberry (1995) και οι Chen et al (2001) επίσης πρότειναν χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό M_t , για να εξαγάγουν *EWMA* διαγράμματα. Όμως αντίθετα, με το δεξιό σκέλος του ορισμού της M_t χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή την τυπική απόκλιση στον παρονομαστή, αυτοί χρησιμοποίησαν σταθερές τυπικές αποκλίσεις για τον προσδιορισμό των ορίων ελέγχου. Ως αποτέλεσμα, τα διαγράμματα *EWMA* έχουν *Z-ARL* αξιοσημείωτα διαφορετική από την *S-ARL* εξαιτίας του φαινομένου της αρχικής τιμής.

Τα διαγράμματα *CH* και *SJ* αναπτύσσονται αντίστοιχα βασισμένα στην $Y_t = \ln(S_t^2/\sigma_0^2)$ και Z_t^+ . Από την άλλη πλευρά τα διαγράμματα *HHW1* και *HHW2* βασίζονται στις S_t^2/σ_0^2 και M_t , αντίστοιχα. Οι Shu και Jiang (2008) συνέκριναν τους σηματοθορυβικούς λόγους *SN* των Y_t και Z_t^+ όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνει, και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όσο υψηλότερος είναι ο *SN* λόγος των Z_t^+ από ότι του Y_t αυτός μπορεί να είναι ο λόγος γιατί τα διαγράμματα *SJ* έχουν καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με τα διαγράμματα *CH*. Στην συνέχεια, συγκρίνονται οι σηματοθορυβικοί λόγοι των Y_t , S_t^2/σ_0^2 , και των M_t όταν υπάρχει μία αύξηση στην διασπορά της διεργασίας από σ_0^2 σε σ^2 . Ο *SN* λόγος της Y_t προσεγγίζεται ως ακολούθως:

$$SN(Y_t) = \frac{Y_t - \mu_{Y|\sigma_t=\sigma_0}}{\sigma_Y} = \frac{\ln(\sigma_t^2/\sigma_0^2)}{\sigma_Y} \equiv \gamma_t.$$

Ο μέσος της Z_t^+ όπου η Z_t ακολουθεί την $N(\gamma_t, 1)$ είναι:

$$E(Z_t^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\gamma_t^2/2} + \gamma_t \Phi(\gamma_t).$$

Κατά συνέπεια ο *SN* λόγος της Z_t^+ μπορεί να υπολογισθεί προσεγγιστικά ως:

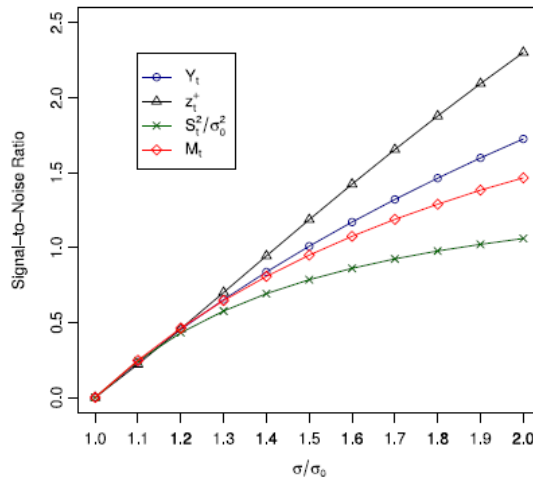
$$SN(Z_t^+) = \frac{E(Z_t^+) - E(Z_t^+|\sigma_t = \sigma_0)}{\sigma_{Z_t^+}} = \frac{(e^{-\gamma_t^2/2} - 1)/\sqrt{2\pi} + \gamma_t \Phi(\gamma_t)}{\sqrt{1/2 - 1/(2\pi)}}.$$

Με *SN* λόγο για την S_t^2/σ_0^2 είναι:

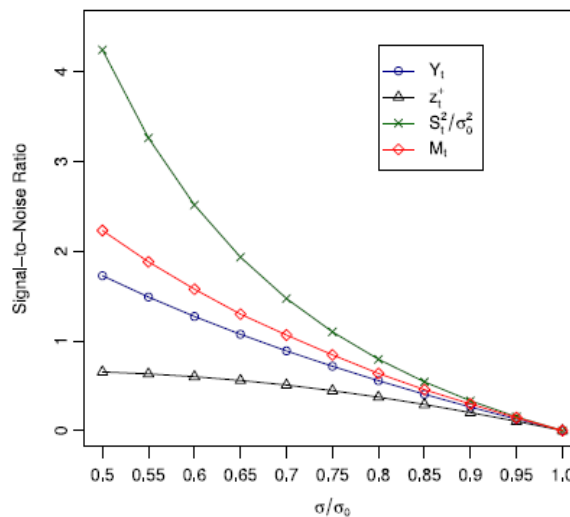
$$SN\left(\frac{S_t^2}{\sigma_0^2}\right) = \frac{E(S_t^2/\sigma_0^2) - E(S_t^2/\sigma_0^2|\sigma_t = \sigma_0)}{\sqrt{\text{Var}(S_t^2/\sigma_0^2)}} = \frac{\sigma_t^2/\sigma_0^2 - 1}{\sqrt{2/(n-1)\sigma_t^2/\sigma_0^2}} = \frac{\delta_t^2 - 1}{\sqrt{2/(n-1)\delta_t^2}}.$$

Τελικά, ο SN λόγος για την M_t είναι:

$$SN(M_t) = \frac{E(M_t) - E(M_t|\sigma_t = \sigma_0)}{\sqrt{\text{Var}(M_t)}} = \frac{E(\Phi^{-1}\{F[(n-1)S_t^2/\sigma_0^2]\})}{\sqrt{\text{Var}(\Phi^{-1}\{F[(n-1)S_t^2/\sigma_0^2]\})}}.$$



Σχήμα 9: Ο σηματοθορυβικός λόγος SN των Y_t , Z_t^+ , S_t^2/σ_0^2 και M_t μεταβλητών όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνεται



Σχήμα 10: Ο σηματοθορυβικός λόγος SN των Y_t , Z_t^+ , S_t^2/σ_0^2 και M_t μεταβλητών όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται

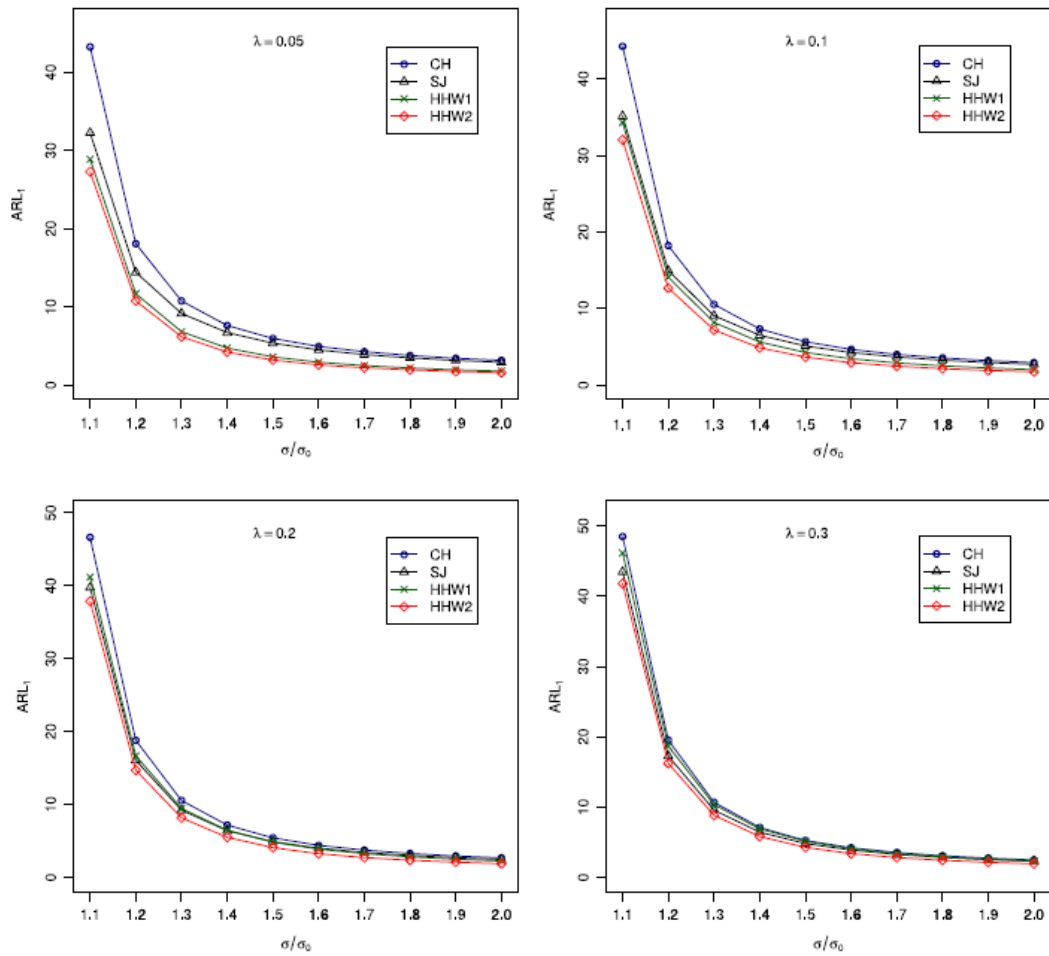
Στο Σχήμα 9, σχεδιάζεται ο SN λόγος των Y_i , Z_{i+} , S_i^2/σ_0^2 και M_i για $n=5$ όταν υπάρχει μία αύξηση στην διασπορά της διεργασίας. Αν και η Z_{i+} έχει τον υψηλότερο σηματοθορυβικό λόγο ανάμεσα στις τέσσερις ποσότητες. Στο επόμενο τμήμα είναι εμφανές ότι το διάγραμμα *HHW2* είναι ισχυρότερο από το διάγραμμα *SJ* για την ανίχνευση της αύξησης στην διασπορά της διεργασίας. Στο Σχήμα 10, έχουν παρασταθεί οι απόλυτες τιμές των SN λόγων για τις Y_i , Z_{i+} , S_i^2/σ_0^2 και M_i για $n=5$ όταν υπάρχει μία μείωση στην διασπορά της διεργασίας. Είναι φανερό ότι το διάγραμμα *CH* έχει μια υψηλότερη απόλυτη τιμή SN λόγου από ότι το διάγραμμα *SJ* παρά το ότι δείχνεται παρακάτω από το διάγραμμα *SJ* δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από το *CH* διάγραμμα για την ανίχνευση της μείωσης της διασποράς της διεργασίας. Από τα παραπάνω δύο σχήματα, καταλήγουμε ότι η ανίχνευση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου ίσως να μην συνδέεται με τα επίπεδα του σηματοθορυβικού λόγου SN.

1.3.2. Σύγκριση Επιδόσεων

Σε αυτό το τμήμα συγκρίνονται οι επιδόσεις των διαγραμμάτων *CH*, *SJ*, *HHW1* και *HHW2* βασισμένη στην παράμετρο *ARL*. Η σύγκριση βασίζεται σε υπο-ομάδες διαστάσεων $n=5$. Για άλλα διαφορετικά μεγέθη τα αποτελέσματα παραμένουν ποιοτικά τα ίδια και για τον λόγο αυτό παραλείπονται.

Όπως περιγράφεται από τους Shu και Jiang (2008) και τα δύο στατιστικά στοιχεία παρακολούθησης Q_i και W_i για τα άνω άκρα των *CH* και *SJ* διαγραμμάτων αναφέρονται σε μία φραγμένη εντός ελέγχου περιοχή. Όμως διακριτές Μαρκοβιανές Αλυσίδες μπορούν αντίστοιχα να αναπτυχθούν για να προσεγγίσουν τις κατανομές μήκους εκτέλεσης για διαγράμματα με άνω όριο *CH* και *SJ*. Αντιθέτως, το στατιστικό χαρακτηριστικό παρακολούθησης $U_i(D_i)$ για το άνω όριο των διαγραμμάτων *HHW1*(*HHW2*) έχει μία μη φραγμένη περιοχή εντός ελέγχου εξαιτίας της μη επιβολής αρχικοποίησης που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή του $U_i(D_i)$. Ως αποτέλεσμα είναι πολύπλοκο να εξαχθεί μία διακριτή Μαρκοβιανή Αλυσίδα η οποία να προσεγγίζει την κατανομή του μήκους για τα άνω όρια των διαγραμμάτων *HHW1*(*HHW2*). Επιπλέον, για την έκφραση της παραμέτρου *Z-ARL* για το άνω όριο του διαγράμματος *HHW1* ως λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης, μπορεί να ακολουθηθεί η προσέγγιση που συστήνεται από τους Crowder και Hamilton (1992b). Έστω $\delta^2 = \sigma^2/\sigma_0^2$ και $L(\delta^2)$ να είναι η *Z-ARL* του άνω ορίου του διαγράμματος *HHW1* εκκινώντας με $V_0 = \delta^2$. Τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι:

$$L(\delta^2) = 1 \cdot P_r(U_1 > L_U) + \int_R \{1 + L[\lambda g + (1 - \lambda)\delta^2]\}f(g)dg,$$



Σχήμα 11: Η παράμετρος Z-ARL για τα διαγράμματα CH, SJ, HHW1 και HHW2 όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνεται

όπου $R = \{g : [\ln(\lambda g) - \mu_R] / \sigma_R \leq L_U\}$ και $f(g)$ είναι η σ.π.π. για την τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή Γάμμα $G = S_i^2 / \sigma_0^2 = e^{Yt}$ με κλίση $(n-1)/2$ και παράμετρο κλίμακας $2\delta^2 / (n-1)$. Βασισμένοι στο γεγονός ότι:

$$\{U_1 > L_U\} = \left\{ \frac{\ln[V_1 - (1 - \lambda)\delta^2] - \mu_R}{\sigma_R} > L_U \right\} = \left\{ G > \frac{1}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R L_U} \right\},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
L(\delta^2) &= P_r \left(G > \frac{1}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R L_U} \right) + \int_0^{\frac{1}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R L_U}} \{1 + L[\lambda g + (1 - \lambda)\delta^2]\} f(g) dg \\
&= 1 - F_G \left(\frac{1}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R L_U} \right) + \int_{-\infty}^{L_U} \{1 + L[e^{\mu_R + \sigma_R h} + (1 - \lambda)\delta^2]\} \cdot f \left(\frac{1}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R h} \right) \frac{\sigma_R}{\lambda} e^{\mu_R + \sigma_R h} dh,
\end{aligned}$$

όπου $F_G(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της G . Η παράμετρος $Z-ARL$ για το άνω όριο διάγραμμα $HHW1$ και η $L(\delta^2)$ μπορεί προσεγγιστικά να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική εξίσωση. Όμως, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης αυτού του τύπου είναι δύσκολη, διότι το ολοκλήρωμα συμπεριλαμβάνει ολοκλήρωση σε ένα μη φραγμένο διάστημα $(-\infty, L_U)$. Εξαιτίας των προαναφερόμενων λόγων στην συνέχεια χρησιμοποιούνται στατιστικές προσομοιώσεις, οι οποίες συνήθως παράγουν πιο ακριβή αποτελέσματα σε σύγκριση με την μεθοδολογία με τις Μαρκοβιανές Αλυσίδες και την προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης, για να υπολογιστεί η $Z-ARL$ για όλα τα διαγράμματα ελέγχου που είναι επιθυμητό να συγκριθούν. Όλα τα αποτελέσματα προσομοίωσης χρησιμοποιούν 200,000 επαναλήψεις.

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις τιμές της $Z-ARL$ για τα τέσσερα διαγράμματα για $n=5$ και αρκετά διαφορετικές τιμές του λ ($\leq 0,3$) όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνει. Και τα τέσσερα διαγράμματα τίθενται έτσι ώστε να έχουν τιμή $ARL_0=200$. Είναι εμφανές ότι ανάμεσα στα τέσσερα διαγράμματα ελέγχου, το διάγραμμα $HHW2$ έχει την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση μιας αύξησης στην διασπορά της διεργασίας. Για μία δεδομένη τιμή του λ , οι τιμές των $Z-ARL_1$, για το διάγραμμα $HHW2$ είναι ομοιόμορφα μικρότερα καθώς το λ έρχεται πιο κοντά στην τιμή 0.3. Στο προηγούμενο σχήμα σχεδιάστηκαν τα $Z-ARL_1$ και για τους τέσσερις τύπους διαγραμμάτων για $\lambda=0.05, 0.1, 0.2$ και 0.3 . Πρέπει να παρατηρηθεί ότι για μικρές τιμές του λ τόσο περισσότερο το διάγραμμα $HHW2$ επιτυγχάνει καλύτερη απόδοση σε σχέση με τα άλλα τρία διαγράμματα ελέγχου. Επιπλέον, για μικρές τιμές του λ , η ανωτερότητα του διαγράμματος $HHW2$ γίνεται πιο σημαντική όταν το ποσοστό της αύξησης του σ είναι μικρό.

Πίνακας 9: Z-ARLγια τα διαγράμματα CH, SJ, HHW1 και HHW2 όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνεται

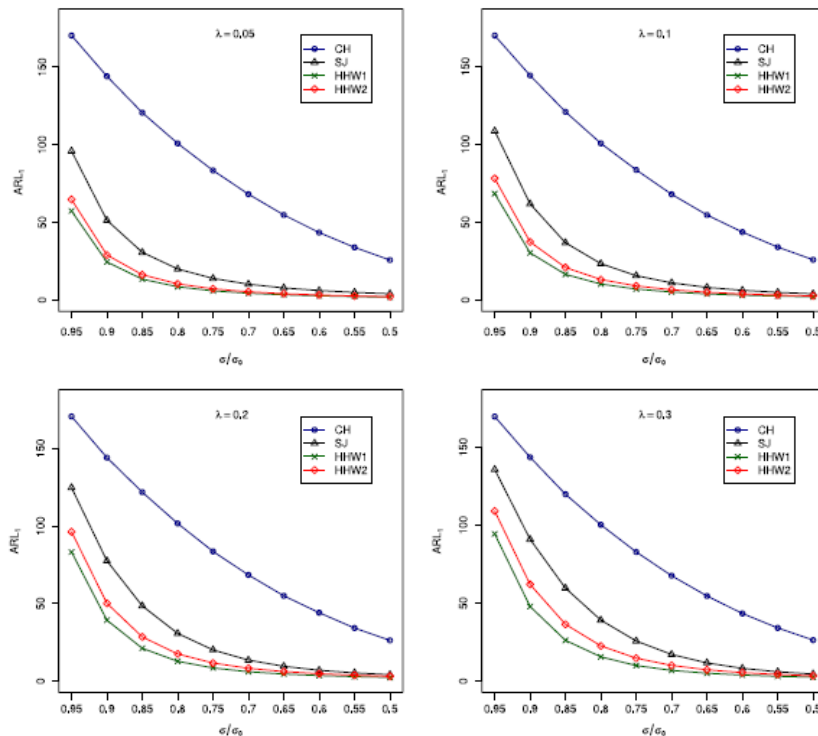
$\lambda = 0.05$		CH	SJ	HHW1	HHW2	$\lambda = 0.1$		CH	SJ	HHW1	HHW2
σ/σ_0	$L = 1.055$					σ/σ_0	$L = 1.303$				
1.0	200.33 (0.44)	200.75 (0.45)	200.92 (0.47)	199.57 (0.49)	1.0	200.02 (0.44)	200.36 (0.44)	199.51 (0.44)	200.35 (0.46)		
1.1	43.24 (0.09)	32.26 (0.06)	28.89 (0.06)	27.28 (0.06)	1.1	44.26 (0.09)	35.15 (0.07)	34.32 (0.07)	32.05 (0.07)		
1.2	18.09 (0.03)	14.43 (0.02)	11.69 (0.02)	10.78 (0.02)	1.2	18.23 (0.03)	14.96 (0.02)	14.10 (0.03)	12.69 (0.03)		
1.3	10.77 (0.02)	9.17 (0.01)	6.85 (0.01)	6.20 (0.01)	1.3	10.56 (0.02)	9.09 (0.01)	8.20 (0.01)	7.21 (0.01)		
1.4	7.63 (0.01)	6.73 (0.01)	4.75 (0.01)	4.24 (0.01)	1.4	7.35 (0.01)	6.53 (0.01)	5.65 (0.01)	4.89 (0.01)		
1.5	5.98 (0.01)	5.38 (0.01)	3.62 (0.01)	3.22 (0.01)	1.5	5.68 (0.01)	5.13 (0.01)	4.28 (0.01)	3.68 (0.01)		
1.6	4.96 (0.01)	4.51 (0.00)	2.94 (0.00)	2.61 (0.00)	1.6	4.68 (0.01)	4.27 (0.00)	3.46 (0.01)	2.95 (0.00)		
1.7	4.29 (0.00)	3.92 (0.00)	2.51 (0.00)	2.23 (0.00)	1.7	4.02 (0.00)	3.69 (0.00)	2.91 (0.00)	2.49 (0.00)		
1.8	3.80 (0.00)	3.50 (0.00)	2.20 (0.00)	1.96 (0.00)	1.8	3.56 (0.00)	3.27 (0.00)	2.53 (0.00)	2.16 (0.00)		
1.9	3.44 (0.00)	3.17 (0.00)	1.96 (0.00)	1.76 (0.00)	1.9	3.22 (0.00)	2.96 (0.00)	2.25 (0.00)	1.93 (0.00)		
2.0	3.18 (0.00)	2.93 (0.00)	1.80 (0.00)	1.62 (0.00)	2.0	2.95 (0.00)	2.72 (0.00)	2.03 (0.00)	1.76 (0.00)		
$\lambda = 0.2$		CH	SJ	HHW1	HHW2	$\lambda = 0.3$		CH	SJ	HHW1	HHW2
σ/σ_0	$L = 1.513$					σ/σ_0	$L = 1.598$				
1.0	200.64 (0.44)	199.48 (0.44)	199.43 (0.44)	200.65 (0.45)	1.0	199.40 (0.44)	199.67 (0.44)	200.22 (0.44)	199.45 (0.45)		
1.1	46.63 (0.10)	39.73 (0.08)	41.18 (0.08)	37.87 (0.08)	1.1	48.48 (0.10)	43.45 (0.09)	46.14 (0.10)	41.79 (0.09)		
1.2	18.79 (0.04)	16.05 (0.03)	16.66 (0.03)	14.70 (0.03)	1.2	19.52 (0.04)	17.25 (0.03)	18.65 (0.04)	16.20 (0.03)		
1.3	10.54 (0.02)	9.21 (0.02)	9.45 (0.02)	8.16 (0.02)	1.3	10.67 (0.02)	9.56 (0.02)	10.35 (0.02)	8.82 (0.02)		
1.4	7.16 (0.01)	6.40 (0.01)	6.45 (0.01)	5.49 (0.01)	1.4	7.09 (0.01)	6.43 (0.01)	6.90 (0.01)	5.81 (0.01)		
1.5	5.41 (0.01)	4.89 (0.01)	4.83 (0.01)	4.07 (0.01)	1.5	5.24 (0.01)	4.80 (0.01)	5.11 (0.01)	4.26 (0.01)		
1.6	4.38 (0.01)	3.99 (0.01)	3.86 (0.01)	3.24 (0.01)	1.6	4.20 (0.01)	3.88 (0.01)	4.06 (0.01)	3.38 (0.01)		
1.7	3.73 (0.00)	3.41 (0.00)	3.25 (0.00)	2.71 (0.00)	1.7	3.53 (0.00)	3.26 (0.00)	3.39 (0.00)	2.81 (0.00)		
1.8	3.27 (0.00)	3.00 (0.00)	2.81 (0.00)	2.34 (0.00)	1.8	3.06 (0.00)	2.83 (0.00)	2.91 (0.00)	2.42 (0.00)		
1.9	2.92 (0.00)	2.69 (0.00)	2.48 (0.00)	2.08 (0.00)	1.9	2.73 (0.00)	2.53 (0.00)	2.57 (0.00)	2.14 (0.00)		
2.0	2.67 (0.00)	2.45 (0.00)	2.24 (0.00)	1.88 (0.00)	2.0	2.47 (0.00)	2.30 (0.00)	2.32 (0.00)	1.93 (0.00)		

Πίνακας 10: Z-ARLγια τα διαγράμματα CH, SJ, HHW1 και HHW2 όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται

$\lambda = 0.05$					$\lambda = 0.1$				
σ/σ_0	CH	SJ	HHW1	HHW2	σ/σ_0	CH	SJ	HHW1	HHW2
	$L = 1.086$	2.209	1.889	1.872		$L = 1.517$	2.843	2.145	2.140
1.00	199.80 (0.45)	199.10 (0.45)	200.97 (0.52)	199.60 (0.49)	1.00	199.38 (0.45)	200.23 (0.44)	200.08 (0.49)	199.95 (0.46)
0.95	170.45 (0.38)	95.99 (0.21)	57.37 (0.14)	64.80 (0.15)	0.95	169.87 (0.38)	108.56 (0.23)	68.33 (0.16)	78.08 (0.17)
0.90	144.19 (0.32)	51.43 (0.10)	24.56 (0.05)	29.10 (0.06)	0.90	144.25 (0.32)	61.77 (0.13)	30.33 (0.07)	37.34 (0.08)
0.85	120.73 (0.27)	30.77 (0.06)	13.51 (0.03)	16.34 (0.03)	0.85	120.89 (0.27)	36.83 (0.07)	16.51 (0.03)	20.91 (0.04)
0.80	100.93 (0.23)	20.06 (0.03)	8.59 (0.02)	10.47 (0.02)	0.80	100.65 (0.22)	23.41 (0.04)	10.32 (0.02)	13.22 (0.02)
0.75	83.51 (0.19)	13.95 (0.02)	5.96 (0.01)	7.26 (0.01)	0.75	83.60 (0.19)	15.69 (0.03)	7.10 (0.01)	9.10 (0.01)
0.70	68.25 (0.15)	10.25 (0.01)	4.42 (0.01)	5.35 (0.01)	0.70	67.95 (0.15)	11.07 (0.02)	5.19 (0.01)	6.62 (0.01)
0.65	54.86 (0.12)	7.83 (0.01)	3.42 (0.00)	4.12 (0.01)	0.65	54.67 (0.12)	8.17 (0.01)	3.97 (0.01)	5.04 (0.01)
0.60	43.50 (0.10)	6.16 (0.01)	2.74 (0.00)	3.26 (0.00)	0.60	43.66 (0.10)	6.28 (0.01)	3.16 (0.00)	3.97 (0.00)
0.55	33.96 (0.08)	4.96 (0.00)	2.26 (0.00)	2.65 (0.00)	0.55	34.03 (0.08)	4.98 (0.01)	2.57 (0.00)	3.21 (0.00)
0.50	25.82 (0.06)	4.09 (0.00)	1.90 (0.00)	2.20 (0.00)	0.50	25.92 (0.06)	4.03 (0.00)	2.14 (0.00)	2.64 (0.00)
$\lambda = 0.2$					$\lambda = 0.3$				
σ/σ_0	CH	SJ	HHW1	HHW2	σ/σ_0	CH	SJ	HHW1	HHW2
	$L = 2.097$	3.525	2.346	2.354		$L = 2.500$	3.959	2.434	2.447
1.00	200.53 (0.45)	200.64 (0.44)	199.80 (0.47)	200.24 (0.45)	1.00	199.74 (0.45)	200.88 (0.45)	200.07 (0.46)	199.36 (0.45)
0.95	170.58 (0.38)	124.67 (0.27)	83.21 (0.19)	96.26 (0.21)	0.95	169.65 (0.38)	135.65 (0.30)	94.35 (0.22)	109.05 (0.24)
0.90	144.05 (0.32)	77.53 (0.17)	39.29 (0.09)	50.10 (0.11)	0.90	143.54 (0.32)	90.92 (0.20)	47.82 (0.11)	61.98 (0.13)
0.85	121.77 (0.27)	48.45 (0.10)	21.13 (0.04)	28.48 (0.06)	0.85	119.83 (0.27)	59.59 (0.13)	26.13 (0.06)	36.41 (0.08)
0.80	101.61 (0.23)	30.73 (0.06)	12.76 (0.02)	17.49 (0.03)	0.80	100.22 (0.22)	39.10 (0.08)	15.54 (0.03)	22.58 (0.04)
0.75	83.59 (0.19)	20.07 (0.04)	8.47 (0.01)	11.65 (0.02)	0.75	82.81 (0.19)	25.71 (0.05)	9.96 (0.02)	14.68 (0.03)
0.70	68.43 (0.15)	13.53 (0.02)	6.02 (0.01)	8.23 (0.01)	0.70	67.56 (0.15)	17.08 (0.03)	6.86 (0.01)	10.05 (0.02)
0.65	54.97 (0.12)	9.53 (0.01)	4.54 (0.01)	6.14 (0.01)	0.65	54.57 (0.12)	11.64 (0.02)	5.03 (0.01)	7.24 (0.01)
0.60	44.07 (0.10)	6.97 (0.01)	3.56 (0.00)	4.76 (0.01)	0.60	43.36 (0.10)	8.17 (0.01)	3.85 (0.01)	5.43 (0.01)
0.55	34.18 (0.08)	5.27 (0.01)	2.86 (0.00)	3.78 (0.00)	0.55	34.09 (0.08)	5.96 (0.01)	3.06 (0.00)	4.24 (0.01)
0.50	26.25 (0.06)	4.14 (0.00)	2.37 (0.00)	3.08 (0.00)	0.50	26.29 (0.06)	4.49 (0.01)	2.49 (0.00)	3.38 (0.00)

Ο Πίνακας 10 παρουσιάζει την Z-ARL για τα τέσσερα διαγράμματα ελέγχου με τις ίδιες ρυθμίσεις όπως και στον Πίνακα 9 όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι για μια δεδομένη τιμή του λ , η Z-ARL₁ για το διάγραμμα ελέγχου HHW1 είναι ομοιόμορφα μικρότερη σε σχέση με τα άλλα τρία διαγράμματα. Η βελτίωση της απόδοσης του διαγράμματος HHW1 είναι προφανής ειδικότερα όταν η τιμή της παραμέτρου λ είναι μικρή. Επιπλέον, για μικρές τιμές της παραμέτρου λ , η διαφορά στην Z-ARL₁ ανάμεσα στο διάγραμμα της HHW1 και στα άλλα διαγράμματα γίνεται σημαντική όταν ο βαθμός της μείωσης της τυπικής απόκλισης σ είναι μικρός. Όλη η προαναφερόμενη περίληψη μπορεί εύκολα να ειπωθεί στο σχήμα που ακολουθεί, με γραφικές παραστάσεις για τις αλυσίδες Z-ARL₁ για τα τέσσερα διαγράμματα για $\lambda=0.05, 0.1, 0.2$ και 0.3 .

Στο σχήμα 11 οι αλυσίδες $S-ARL$ παρουσιάζονται για τα τέσσερα διαγράμματα ελέγχου όταν υπάρχει μία αύξηση της διασποράς της διεργασίας. Οι $S-ARL$ προκύπτουν όταν τα στατιστικά τα οποία βρίσκονται υπό παρακολούθηση γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας, για 25 εντός ελέγχου παρατηρήσεις πριν τα μήκη ροής συσσωρευτούν για την σηματοδότηση. Συγκρίνοντας τους Πίνακες 9 και 10, παρατηρείται ότι για το CH διάγραμμα η $S-ARL$ είναι σημαντικά μικρότερη από την $Z-ARL$ όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνει, και η διαφορά γίνεται πιο σημαντική για μικρότερα λ . Όσον αφορά στο SJ διάγραμμα, η $S-ARL_1$ είναι μεγαλύτερη από την $Z-ARL_1$, σε μία αύξηση της διασποράς της διεργασίας όταν το $\lambda=0.05$ και 0.1 αλλά η κατεύθυνση αυτής της ασυμφωνίας δεν είναι ξεκάθαρη και δεν είναι σημαντικά διαφορετική καθώς το $\lambda \geq 0.2$. Σε αντίθεση, όπως έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη ενότητα, τα διαγράμματα HHW1 και HHW2 έχουν την ίδια $S-ARL_1$, όπως και η $Z-ARL_1$ καθώς η διασπορά της διεργασίας αυξάνει. Η αριθμητική διαφορά ανάμεσα στις $S-ARL_1$ και $Z-ARL_1$ αλυσίδες για τα διαγράμματα HHW1 και HHW2 σε μία αύξηση της διασποράς της διεργασίας, οφείλεται ξεκάθαρα σε σφάλματα προσομοίωσης. Επιπρόσθετα έχουν επίσης προσομοιωθεί οι αλυσίδες $S-ARL_1$ για τα τέσσερα διαγράμματα ελέγχου όταν υπάρχει μία μείωση στην διασπορά της διεργασίας. Δεδομένου ότι τα συμπεράσματα είναι όμοια με εκείνα όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνει, για τον λόγο αυτό τα συμπεράσματα παραλείπονται.



Σχήμα 12: Η παράμετρος $Z-ARL_1$ για τα διαγράμματα CH , SJ , $HHW1$ και $HHW2$ όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, το διάγραμμα $HHW2$ δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα ανάμεσα στα τέσσερα διαγράμματα για την ανίχνευση μίας αύξησης στην διασπορά της διεργασίας. Από την άλλη πλευρά, το διάγραμμα $HHW1$ είναι πολύ πιο ισχυρό από τα άλλα τρία διαγράμματα για την ανίχνευση μιας μείωσης στην διασπορά της διεργασίας. Διαισθητικά, αντί να χρησιμοποιηθεί είτε ένα αμφίπλευρο διάγραμμα $HHW1$ ή ένα αμφίπλευρο διάγραμμα $HHW2$, συνδυάζοντας ένα διάγραμμα $HHW1$ με κάτω όριο με ένα διάγραμμα $HHW2$ με άνω όριο μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα, καλύτερη απόδοση για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας, εφόσον δεν γνωρίζουμε εάν υφίσταται μία αύξηση ή μία μείωση στην διασπορά της διεργασίας. Σε αυτό το κεφάλαιο τα αμφίπλευρα διαγράμματα ελέγχου, αποτελούμενα από ένα κάτω $HHW1$ διάγραμμα ελέγχου και ένα διάγραμμα $HHW2$ με άνω όριο ελέγχου θα συμβολίζονται ως διαγράμματα $HHW-C$.

Το σχήμα 12 συνοψίζει τις αλυσίδες $Z-ARL$ για τα αμφίπλευρα διαγράμματα CH , SJ , $HHW1$, $HHW2$ και $HHW-C$ για $n=5$ και $\lambda=0.05, 0.1, 0.2, 0.3$ όταν η διασπορά της διεργασίας αλλάζει. Για κάθε ένα από τα πέντε αμφίπλευρα διαγράμματα ελέγχου, χρησιμοποιήθηκαν 200,000 προσομοιώσεις Monte Carlo για να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου L για κάθε ένα από τα μονόπλευρα διαγράμματα με ίσες και ανεξάρτητες αλυσίδες $Z-ARL_0$ έτσι ώστε η συνολική $Z-ARL_0$ των αμφίπλευρων διαγραμμάτων να είναι προσεγγιστικά ίση με 200. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 12 όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται, το $Z-ARL_1$ του διαγράμματος $HHW-C$ είναι πρακτικά ισοδύναμο σε αυτό του διαγράμματος $HHW1$ το οποίο έχει την καλύτερη απόδοση για την ανίχνευση μιας μείωσης στην διασπορά της διεργασίας. Από την άλλη πλευρά, όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνει, τα αποτελέσματα του διαγράμματος $HHW-C$ δεν είναι σημαντικά διαφορετικά από αυτά του διαγράμματος $HHW2$ το οποίο εμφανίζει την καλύτερη επίδοση από τα άλλα διαγράμματα για την ανίχνευση μιας αύξησης στην διασπορά της διεργασίας. Συνολικά, το διάγραμμα $HHW-C$ συστήνεται προς χρήση όταν κάποιος δεν γνωρίζει εάν υπάρχει αύξηση ή μείωση στην διασπορά της διεργασίας. Επιπλέον, βλέπουμε εύκολα ότι όσο είναι μικρότερο το λ τόσο καλύτερες επιδόσεις έχει το διάγραμμα $HHW-C$.

1.3.3. Σχεδιασμός των διαγραμμάτων ελέγχου

Ο σχεδιασμός των διαγραμμάτων ελέγχου που μελετήθηκε στο παρόν κεφάλαιο, συμπεριλαμβάνει τον καθορισμό και την επιλογή των παραμέτρων λ και L για ένα δεδομένο πλήθος δειγμάτων n . Η προσέγγιση για τον σχεδιασμό που συστήνεται από τους Lucas και Saccucci (1990) και από τους Crowder και Hamilton (1992a) θα ακολουθηθεί στην συνέχεια. Η προσέγγιση συμπεριλαμβάνει την από κοινού εκλογή των λ και L η οποία καταλήγει στο επιθυμητό $Z-ARL_0$ με την επιθυμητή μεταβλητότητα ($\sigma=\sigma_0$) και επίσης εγκαθιστά το μικρότερο $Z-ARL_1$ για μία καθορισμένη αλλαγή στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Για απλότητα, εδώ μελετάται η ανάπτυξη συστήματος για την αύξηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας ενώ τα αντίστοιχα συστήματα για μειώσεις μπορούν να αναπτυχθούν ανάλογα.

Πίνακας 11: Z-ARL για τα μονόπλευρα διαγράμματα CH, SJ, HHW1 και HHW2 όταν η διασπορά της διεργασίας μειώνεται

$\lambda = 0.05$		CH	SJ	HHW1	HHW2	$\lambda = 0.1$		CH	SJ	HHW1	HHW2
σ/σ_0	$L = 1.086$					σ/σ_0	$L = 1.517$				
1.00	199.80 (0.45)	199.10 (0.45)	200.97 (0.52)	199.60 (0.49)	1.00	199.38 (0.45)	200.23 (0.44)	200.08 (0.49)	199.95 (0.46)		
0.95	170.45 (0.38)	95.99 (0.21)	57.37 (0.14)	64.80 (0.15)	0.95	169.87 (0.38)	108.56 (0.23)	68.33 (0.16)	78.08 (0.17)		
0.90	144.19 (0.32)	51.43 (0.10)	24.56 (0.05)	29.10 (0.06)	0.90	144.25 (0.32)	61.77 (0.13)	30.33 (0.07)	37.34 (0.08)		
0.85	120.73 (0.27)	30.77 (0.06)	13.51 (0.03)	16.34 (0.03)	0.85	120.89 (0.27)	36.83 (0.07)	16.51 (0.03)	20.91 (0.04)		
0.80	100.93 (0.23)	20.06 (0.03)	8.59 (0.02)	10.47 (0.02)	0.80	100.65 (0.22)	23.41 (0.04)	10.32 (0.02)	13.22 (0.02)		
0.75	83.51 (0.19)	13.95 (0.02)	5.96 (0.01)	7.26 (0.01)	0.75	83.60 (0.19)	15.69 (0.03)	7.10 (0.01)	9.10 (0.01)		
0.70	68.25 (0.15)	10.25 (0.01)	4.42 (0.01)	5.35 (0.01)	0.70	67.95 (0.15)	11.07 (0.02)	5.19 (0.01)	6.62 (0.01)		
0.65	54.86 (0.12)	7.83 (0.01)	3.42 (0.00)	4.12 (0.01)	0.65	54.67 (0.12)	8.17 (0.01)	3.97 (0.01)	5.04 (0.01)		
0.60	43.50 (0.10)	6.16 (0.01)	2.74 (0.00)	3.26 (0.00)	0.60	43.66 (0.10)	6.28 (0.01)	3.16 (0.00)	3.97 (0.00)		
0.55	33.96 (0.08)	4.96 (0.00)	2.26 (0.00)	2.65 (0.00)	0.55	34.03 (0.08)	4.98 (0.01)	2.57 (0.00)	3.21 (0.00)		
0.50	25.82 (0.06)	4.09 (0.00)	1.90 (0.00)	2.20 (0.00)	0.50	25.92 (0.06)	4.03 (0.00)	2.14 (0.00)	2.64 (0.00)		

$\lambda = 0.2$		CH	SJ	HHW1	HHW2	$\lambda = 0.3$		CH	SJ	HHW1	HHW2
σ/σ_0	$L = 2.097$					σ/σ_0	$L = 2.500$				
1.00	200.53 (0.45)	200.64 (0.44)	199.80 (0.47)	200.24 (0.45)	1.00	199.74 (0.45)	200.88 (0.45)	200.07 (0.46)	199.36 (0.45)		
0.95	170.58 (0.38)	124.67 (0.27)	83.21 (0.19)	96.26 (0.21)	0.95	169.65 (0.38)	135.65 (0.30)	94.35 (0.22)	109.05 (0.24)		
0.90	144.05 (0.32)	77.53 (0.17)	39.29 (0.09)	50.10 (0.11)	0.90	143.54 (0.32)	90.92 (0.20)	47.82 (0.11)	61.98 (0.13)		
0.85	121.77 (0.27)	48.45 (0.10)	21.13 (0.04)	28.48 (0.06)	0.85	119.83 (0.27)	59.59 (0.13)	26.13 (0.06)	36.41 (0.08)		
0.80	101.61 (0.23)	30.73 (0.06)	12.76 (0.02)	17.49 (0.03)	0.80	100.22 (0.22)	39.10 (0.08)	15.54 (0.03)	22.58 (0.04)		
0.75	83.59 (0.19)	20.07 (0.04)	8.47 (0.01)	11.65 (0.02)	0.75	82.81 (0.19)	25.71 (0.05)	9.96 (0.02)	14.68 (0.03)		
0.70	68.43 (0.15)	13.53 (0.02)	6.02 (0.01)	8.23 (0.01)	0.70	67.56 (0.15)	17.08 (0.03)	6.86 (0.01)	10.05 (0.02)		
0.65	54.97 (0.12)	9.53 (0.01)	4.54 (0.01)	6.14 (0.01)	0.65	54.57 (0.12)	11.64 (0.02)	5.03 (0.01)	7.24 (0.01)		
0.60	44.07 (0.10)	6.97 (0.01)	3.56 (0.00)	4.76 (0.01)	0.60	43.36 (0.10)	8.17 (0.01)	3.85 (0.01)	5.43 (0.01)		
0.55	34.18 (0.08)	5.27 (0.01)	2.86 (0.00)	3.78 (0.00)	0.55	34.09 (0.08)	5.96 (0.01)	3.06 (0.00)	4.24 (0.01)		
0.50	26.25 (0.06)	4.14 (0.00)	2.37 (0.00)	3.08 (0.00)	0.50	26.29 (0.06)	4.49 (0.01)	2.49 (0.00)	3.38 (0.00)		

Οι Shu και Jiang (2008) χρησιμοποίησαν μία αριθμητική μέθοδο εύρεσης με χρήση της προσέγγισης Μαρκοβιανής Αλυσίδας για να ευρεθούν οι βέλτιστες τιμές για τα λ και L για τα διαγράμματα τα SJ, για μήκη δειγμάτων $n=3, 5, 8, 15$. Για μία εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση $\sigma(>\sigma_0)$ και ένα δεδομένο μήκος n , βρήκαν τις αντίστοιχες τιμές για το L οι οποίες αναλογούν σε μία ευρεία περιοχή τιμών για το λ ($\lambda=0.01, 0.02, \dots, 1.0$) για την εγκατάσταση του επιθυμητού μήκους Z-ARL₀. Το ζεύγος (λ, L) θα θεωρείται βέλτιστο εάν ανάμεσα σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των λ και L , παράγει το μικρότερο μήκος Z-ARL₁ στην περίπτωση τυπικής απόκλισης σ εκτός ελέγχου. Η ίδια μέθοδος και με χρήση Monte Carlo προσομοιώσεων για την εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων ακολουθήθηκε για την μέθοδο διαγραμμάτων HHW2 για δείγματα μήκους $n=5$ και 15 (τα αποτελέσματα για μήκη $n=3$ και 8 παραλείπονται). Στον πίνακα 12 συγκρίνονται τα αποτελέσματα με εκείνα των διαγραμμάτων SJ.

Όπως μπορούμε να δούμε από τον πίνακα 12, για δεδομένο $Z-ARL_0$, αντίθετα με το διάγραμμα SJ του οποίου η βέλτιστη λ τιμή αυξάνεται για μεγαλύτερη τιμή του σ σε εκτός ελέγχου κατάσταση, το βέλτιστο λ για την μέθοδο $HHW2$ παραμένει στην τιμή του 0.01 για όλα τα σ που αναλογούν σε καταστάσεις εκτός ελέγχου και εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο. Το να παραμένει η βέλτιστη τιμή του λ στην ίδια τιμή αποτελεί ένα πλεονέκτημα του διαγράμματος $HHW2$ το οποίο μπορεί να βοηθήσει έτσι ώστε να εντοπιστεί μία τιμή του λ για πρακτική χρήση, διότι στην πράξη δεν έχουμε κάποια γνώση σχετικά με την τιμή του σ για κατάσταση εκτός ελέγχου. Από τον πίνακα 12 μπορούμε να δούμε ότι η ελάχιστη τιμή του $Z-ARL_1$ για την κατασκευή του βέλτιστου διαγράμματος $HHW2$ είναι ομοιόμορφα μικρότερα από εκείνα που αναλογούν στα διαγράμματα SJ. Επιπλέον, η απόδοση και των δύο βέλτιστων διαγραμμάτων SJ και $HHW2$ βελτιώνεται όσο το μέγεθος των δειγμάτων n αυξάνεται.

Πίνακας 12: ARL μόνιμης κατάστασης για τα μονόπλευρα διαγράμματα CH , SJ , $HHW1$ και $HHW2$ όταν η διασπορά της διεργασίας αυξάνεται

$\lambda = 0.05$					$\lambda = 0.1$				
σ / σ_0	CH $L = 1.055$	SJ 1.568	HHW1 1.828	HHW2 1.872	σ / σ_0	CH $L = 1.303$	SJ 1.943	HHW1 2.079	HHW2 2.139
1.0	195.19 (0.43)	201.75 (0.45)	200.66 (0.47)	199.68 (0.49)	1.0	196.54 (0.44)	200.03 (0.44)	199.69 (0.44)	200.12 (0.46)
1.1	40.72 (0.09)	33.75 (0.06)	28.66 (0.06)	27.02 (0.06)	1.1	42.34 (0.09)	35.58 (0.07)	34.52 (0.07)	32.11 (0.07)
1.2	16.73 (0.03)	15.65 (0.02)	11.76 (0.02)	10.82 (0.02)	1.2	17.10 (0.03)	15.35 (0.03)	14.09 (0.03)	12.72 (0.03)
1.3	9.76 (0.02)	10.03 (0.01)	6.85 (0.01)	6.18 (0.01)	1.3	9.72 (0.02)	9.43 (0.01)	8.20 (0.01)	7.22 (0.01)
1.4	6.84 (0.01)	7.42 (0.01)	4.73 (0.01)	4.23 (0.01)	1.4	6.69 (0.01)	6.83 (0.01)	5.64 (0.01)	4.90 (0.01)
1.5	5.34 (0.01)	5.97 (0.01)	3.62 (0.01)	3.22 (0.01)	1.5	5.12 (0.01)	5.39 (0.01)	4.28 (0.01)	3.67 (0.01)
1.6	4.40 (0.01)	5.01 (0.01)	2.93 (0.00)	2.60 (0.00)	1.6	4.21 (0.01)	4.51 (0.01)	3.46 (0.01)	2.96 (0.00)
1.7	3.80 (0.00)	4.37 (0.00)	2.50 (0.00)	2.22 (0.00)	1.7	3.60 (0.00)	3.89 (0.00)	2.91 (0.00)	2.48 (0.00)
1.8	3.37 (0.00)	3.89 (0.00)	2.19 (0.00)	1.95 (0.00)	1.8	3.18 (0.00)	3.46 (0.00)	2.53 (0.00)	2.16 (0.00)
1.9	3.05 (0.00)	3.52 (0.00)	1.96 (0.00)	1.76 (0.00)	1.9	2.87 (0.00)	3.13 (0.00)	2.25 (0.00)	1.93 (0.00)
2.0	2.81 (0.00)	3.25 (0.00)	1.80 (0.00)	1.62 (0.00)	2.0	2.64 (0.00)	2.88 (0.00)	2.05 (0.00)	1.77 (0.00)
$\lambda = 0.2$					$\lambda = 0.3$				
σ / σ_0	CH $L = 1.513$	SJ 2.270	HHW1 2.253	HHW2 2.355	σ / σ_0	CH $L = 1.598$	SJ 2.433	HHW1 2.302	HHW2 2.447
1.0	197.72 (0.44)	198.46 (0.44)	199.44 (0.44)	200.75 (0.45)	1.0	198.16 (0.44)	199.61 (0.44)	200.47 (0.44)	199.95 (0.45)
1.1	45.15 (0.10)	39.32 (0.08)	41.03 (0.08)	37.62 (0.08)	1.1	47.54 (0.10)	43.17 (0.09)	46.36 (0.10)	41.80 (0.09)
1.2	17.93 (0.04)	15.97 (0.03)	16.62 (0.03)	14.65 (0.03)	1.2	18.72 (0.04)	17.10 (0.03)	18.60 (0.04)	16.14 (0.03)
1.3	9.84 (0.02)	9.23 (0.02)	9.43 (0.02)	8.15 (0.02)	1.3	10.12 (0.02)	9.52 (0.02)	10.33 (0.02)	8.81 (0.02)
1.4	6.60 (0.01)	6.42 (0.01)	6.43 (0.01)	5.46 (0.01)	1.4	6.64 (0.01)	6.42 (0.01)	6.88 (0.01)	5.81 (0.01)
1.5	4.95 (0.01)	4.95 (0.01)	4.83 (0.01)	4.07 (0.01)	1.5	4.88 (0.01)	4.82 (0.01)	5.11 (0.01)	4.26 (0.01)
1.6	4.00 (0.01)	4.06 (0.01)	3.87 (0.01)	3.24 (0.01)	1.6	3.88 (0.01)	3.89 (0.01)	4.06 (0.01)	3.38 (0.01)
1.7	3.39 (0.00)	3.48 (0.00)	3.25 (0.00)	2.71 (0.00)	1.7	3.25 (0.00)	3.30 (0.00)	3.39 (0.00)	2.81 (0.00)
1.8	2.95 (0.00)	3.05 (0.00)	2.80 (0.00)	2.34 (0.00)	1.8	2.82 (0.00)	2.89 (0.00)	2.92 (0.00)	2.42 (0.00)
1.9	2.64 (0.00)	2.75 (0.00)	2.48 (0.00)	2.08 (0.00)	1.9	2.50 (0.00)	2.57 (0.00)	2.57 (0.00)	2.14 (0.00)
2.0	2.41 (0.00)	2.52 (0.00)	2.24 (0.00)	1.88 (0.00)	2.0	2.27 (0.00)	2.34 (0.00)	2.31 (0.00)	1.94 (0.00)

Δύο σημεία όσον αφορά τις βέλτιστες τιμές των λ και L , οι οποίες συζητήθηκαν ανωτέρω, αξίζουν κάποιας ιδιαίτερης προσοχής. Πρώτα, οι αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω μπορούν να εντοπίσουν μόνο κατά προσέγγιση βέλτιστες τιμές για τα λ και L διότι τα πραγματικά βέλτιστα λ μπορεί να προκύψουν σε ευκρίνεια διαφορετική από το βήμα μεταβολής του λ από 0.01, ..., 0.99, 1.00. Για παράδειγμα ο πίνακας 16 παρουσιάζει τα $Z-ARL$ για τα διαγράμματα SJ βασισμένα σε τιμές $(\lambda, L) = (0.001, 0.0345)$, $n=5$ και $Z-ARL_0=200$. Τα αντίστοιχα $Z-ARL_1$ είναι σημαντικά μικρότερα από εκείνα που αντιστοιχούν στις προσεγγιστικά βέλτιστες παραμέτρους για τα διαγράμματα SJ με $n=5$ και $Z-ARL_0=200$ παρουσιάζονται στον πίνακα 14. Κατά συνέπεια, οι προσεγγιστικά βέλτιστοι παράμετροι στον πίνακα 14 δεν είναι οι πραγματικά βέλτιστοι παράμετροι. Σε δεύτερο λόγο ίσως φαίνεται λογικότερο να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές του λ σε ένα υποδιάστημα που απέχει από την τιμή 0, π.χ. $[0.005, 1]$, αντί να χρησιμοποιήσουμε πρακτικά το $[0, 1]$. Για ένα δεδομένο $Z-ARL_0$, μικρότερες τιμές του λ δίνουν μικρότερα $Z-ARL_1$, αλλά όταν χρησιμοποιούνται πολύ μικρές τιμές για το λ , η τυπική απόκλιση της κατανομής για τα μήκη ροής που σχετίζεται με την $Z-ARL_0$ είναι συνήθως πολύ μεγάλη για ένα διάγραμμα ελέγχου. Για παράδειγμα, για ένα διάγραμμα HHW2, όταν $\lambda=0.01$, η τυπική απόκλιση του μήκους ροής που σχετίζεται με την τιμή του $Z-ARL_0=200$ ισούται με 315.5 τιμή η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από την προκύπτουσα τιμή 219.1 όταν το $\lambda=0.05$. Μεγάλη μεταβλητότητα στην κατανομή του μήκους ροής για μικρές τιμές του λ συνήθως δεσμεύει την πρακτική χρήση για την εκλογή της σαν παράμετρο εξομάλυνσης λ σε πρακτική χρήση.

Πίνακας 14: Βέλτιστες παράμετροι για τα διαγράμματα SJ και HHW2 οι οποίες βασίζονται σε ομάδες δειγμάτων n=5 και 15

n = 5	Z-ARL ₀ = 100		Z-ARL ₀ = 200		Z-ARL ₀ = 500		Z-ARL ₀ = 1000	
	SJ	HHW2	SJ	HHW2	SJ	HHW2	SJ	HHW2
L1								
G _c (L)	(0.03, 0.785)	(0.01, 0.884)	(0.03, 1.270)	(0.01, 1.209)	(0.03, 1.766)	(0.01, 1.650)	(0.03, 2.096)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	19.48	10.43	29.89	16.00	47.86	27.58	64.20	40.33
L2								
G _c (L)	(0.03, 0.785)	(0.01, 0.884)	(0.03, 1.270)	(0.01, 1.209)	(0.04, 1.917)	(0.01, 1.650)	(0.04, 2.235)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	9.66	4.58	13.91	6.33	20.11	9.86	24.77	13.54
L3								
G _c (L)	(0.03, 0.785)	(0.01, 0.884)	(0.11, 1.989)	(0.01, 1.209)	(0.12, 2.454)	(0.01, 1.650)	(0.10, 2.658)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	6.40	2.95	9.06	3.81	11.86	5.51	14.08	7.23
L4								
G _c (L)	(0.03, 0.785)	(0.01, 0.884)	(0.20, 2.27)	(0.01, 1.209)	(0.16, 2.476)	(0.01, 1.650)	(0.14, 2.795)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	4.84	2.24	6.37	2.77	8.04	3.77	9.37	4.77
L5								
G _c (L)	(0.03, 0.785)	(0.01, 0.884)	(0.37, 2.502)	(0.01, 1.209)	(0.27, 2.766)	(0.01, 1.650)	(0.21, 2.941)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	3.93	1.86	4.80	2.22	5.95	2.88	6.84	3.55
L6								
G _c (L)	(0.49, 2.294)	(0.01, 0.884)	(0.48, 2.573)	(0.01, 1.209)	(0.38, 2.859)	(0.01, 1.650)	(0.33, 3.066)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	3.21	1.63	3.80	1.89	4.65	2.36	5.31	2.82
L7								
G _c (L)	(0.56, 2.334)	(0.01, 0.884)	(0.55, 2.604)	(0.01, 1.209)	(0.52, 2.915)	(0.01, 1.650)	(0.43, 3.113)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	2.70	1.48	3.14	1.67	3.78	2.02	4.29	2.38
L8								
G _c (L)	(0.68, 2.385)	(0.01, 0.884)	(0.67, 2.642)	(0.01, 1.209)	(0.67, 2.940)	(0.01, 1.650)	(0.64, 3.140)	(0.01, 1.996)
Z-ARL _{min}	1.89	1.24	2.10	1.34	2.41	1.52	2.66	1.69
n = 15	Z-ARL ₀ = 100		Z-ARL ₀ = 200		Z-ARL ₀ = 500		Z-ARL ₀ = 1000	
σ/σ ₀	SJ	HHW2	SJ	HHW2	SJ	HHW2	SJ	HHW2
L1								
G _c (L)	(0.03, 1.012)	(0.01, 0.875)	(0.03, 1.463)	(0.01, 1.202)	(0.04, 2.175)	(0.01, 1.656)	(0.04, 2.529)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	10.61	4.53	15.27	6.38	21.91	10.11	27.08	13.98
L2								
G _c (L)	(0.03, 1.012)	(0.01, 0.875)	(0.18, 2.506)	(0.01, 1.202)	(0.14, 2.843)	(0.01, 1.656)	(0.13, 3.125)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	5.04	2.11	6.56	2.66	8.30	3.70	9.69	4.72
L3								
G _c (L)	(0.36, 2.477)	(0.01, 0.875)	(0.35, 2.828)	(0.01, 1.202)	(0.26, 3.134)	(0.01, 1.656)	(0.24, 3.401)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	3.21	1.51	3.82	1.75	4.66	2.23	5.31	2.69
L4								
G _c (L)	(0.50, 2.629)	(0.01, 0.875)	(0.48, 2.957)	(0.01, 1.202)	(0.42, 3.319)	(0.01, 1.656)	(0.37, 3.562)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	2.27	1.26	2.62	1.39	3.11	1.65	3.50	1.91
L5								
G _c (L)	(0.63, 2.723)	(0.01, 0.875)	(0.62, 3.048)	(0.01, 1.202)	(0.57, 3.413)	(0.01, 1.656)	(0.53, 3.663)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	1.77	1.14	1.99	1.22	2.30	1.37	2.56	1.54
L6								
G _c (L)	(0.70, 2.758)	(0.01, 0.875)	(0.69, 3.080)	(0.01, 1.202)	(0.66, 3.451)	(0.01, 1.656)	(0.63, 3.703)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	1.48	1.08	1.62	1.13	1.83	1.23	2.00	1.33
L7								
G _c (L)	(0.75, 2.781)	(0.01, 0.875)	(0.77, 3.112)	(0.01, 1.202)	(0.72, 3.473)	(0.01, 1.656)	(0.71, 3.728)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	1.31	1.05	1.40	1.08	1.54	1.14	1.66	1.20
L8								
G _c (L)	(0.92, 2.828)	(0.01, 0.875)	(0.90, 3.145)	(0.01, 1.202)	(0.87, 3.512)	(0.01, 1.656)	(0.85, 3.763)	(0.01, 1.995)
Z-ARL _{min}	1.08	1.01	1.11	1.02	1.16	1.03	1.20	1.05

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (Fast Initial Response – FIR) για την EWMA μέθοδο ελέγχου. Συγκριτικοί έλεγχοι των οικογενειών EWMA για διαφορετικούς τύπους ορίων ελέγχου

2.1. Εισαγωγή

Η μέθοδος του Κινητού Μέσου με Εκθετικά Βάρη (*EWMA*) έχει καταστεί ιδιαίτερα δημοφιλής την τελευταία δεκαετία. Η συγκεκριμένη μέθοδος χαρακτηρίζεται από τον απλό χειρισμό των δεδομένων πετυχαίνοντας πολύ καλή απόδοση. Αποδεικνύεται όμως, ότι τα πιο δημοφιλή συστήματα ελέγχου που βασίζονται σε σταθερά όρια ελέγχου για την *EWMA* (ασυμπτωτικά όρια τα οποία τίθενται εξαρχής και δεν μεταβάλλονται καθ' όλη την διάρκεια εφαρμογής του μηχανισμού ελέγχου), ανιχνεύει αλλαγές που συμβαίνουν στην φάση έναρξης του συστήματος σχετικά αργά. Για την αντίστοιχη μέθοδο που βασίζεται στην *CUSUM* ένα χαρακτηριστικό αρχικής απόκρισης (head start – προβάδισμα), έχει αναπτυχθεί για να βοηθήσει αυτήν την μέθοδο επιτρέποντας άμεση απόκριση σε καταστάσεις εκτός ελέγχου οι οποίες εμφανίζονται στην αρχική φάση λειτουργίας του συστήματος. Στο μεταξύ μία ανάλογη τροπή έχει αρχίσει να εφαρμόζεται σε πολλές δημοσιεύσεις για το *EWMA* διάγραμμα ελέγχου. Αυτές οι τεχνικές συγκρίνονται στο παρόν κεφάλαιο με χρήση ακριβών αναλυτικών συμπερασμάτων, τα οποία βασίζονται σε αριθμητικά αποτελέσματα και κανόνες λήψης απόφασης, επιτρέποντας υψηλότερη ακρίβεια από τις προηγούμενες μεθόδους. Επιπροσθέτως αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι προηγούμενες συγκρίσεις περιορίζοντα στην αξιολόγηση της ταχύτητας ανίχνευσης αυτών, συγκρίνοντας την παράμετρο του μέσου μήκους ροής (*ARL*), η οποία συνήθως αποτελεί την κυριότερη παράμετρο ενδιαφέροντος η οποία παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της παρακολούθησης της διεργασίας. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι επιπλέον έλεγχος της απόδοσης αφορά σε συγκεκριμένα σημεία ελέγχου γεγονός που δίνει στο

σχήμα *EWMA* μία καλύτερη εποπτεία στην απόδοση του σχήματος για την ανίχνευση αλλαγών στην διεργασία που αναφέρεται στα αρχικά στάδια.

2.1.1. *EWMA* μέθοδος και χαρακτηριστικό *FIR* με μοντέλο αλλαγής σημείου

Είναι γενικότερα γνωστό, ότι τα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* με σταθερά – ασυμπτωτικά όρια ελέγχου συμπεριφέρονται με «αδράνεια» στην αρχική φάση της διαδικασίας παρακολούθησης. Επιπρόσθετα μερικές φορές είναι αναγκαίο να δημιουργηθούν σχήματα ανίχνευσης πιο ευαίσθητα για τα πρώτα δείγματα της διεργασίας, όπως έχει συστηθεί και από τους Lucas και Crosier (1982) για τα αντίστοιχα συστήματα ελέγχου που βασίζονται σε διαγράμματα *CUSUM*. Για παράδειγμα αφότου επανεκκινηθούν τα συστήματα ελέγχου μετά από την δημιουργία ενός εκτός ελέγχου σήματος και αφού ελεγχθεί το σύστημα παρακολούθησης, συνήθως θέλουμε να γνωρίζουμε σχετικά γρήγορα εάν η διεργασία επέστρεψε σε φάση εντός στατιστικού ελέγχου. Για αυτόν τον λόγο οι Lucas και Saccucci (1990), εισήγαγαν ένα παρόμοιο χαρακτηριστικό Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (*FIR*), το οποίο τώρα εισάγεται και στην μεθοδολογία ελέγχου *EWMA*. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μορφή του *FIR* που εισήγαγαν οι Lucas και Saccucci (1990), αποτελεί ένα σύνθετο σχήμα που βασίζεται στην χρήση δύο διαγραμμάτων *EWMA* μονής πλευρικής ζώνης ελέγχου καταλήγει σε αποτέλεσμα ισοδύναμο όπως σε ένα μονομεταβλητό σχήμα *EWMA* αμφίπλευρης πλευρικής ζώνης ελέγχου. Σε μία δημοσίευση των MacGregor και Harris (1990), υπέδειξαν ότι θα ήταν εξίσου λογικό να χρησιμοποιηθούν οι διασπορές απόκλισης των ορίων ελέγχου. Επιπλέον ο Montgomery (1991) συνιστά ότι τα όρια ελέγχου θα πρέπει να είναι ρυθμιζόμενα από την διασπορά της διεργασίας, εξαιτίας της ισχυρότερης επίδρασης του σημείου Z_0 στην αρχική φάση (η επίδραση του οποίου μειώνεται καθώς ο χρόνος αυξάνει). Ο συνήθης τρόπος για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα είναι να εφαρμόσουμε ένα μεταβαλλόμενο σχήμα για τον καθορισμό των ορίων ελέγχου με παραμέτρους οι οποίες εξάγονται από τα αντίστοιχα σχήματα που βασίζονταν σε σταθερά όρια. Προσομοιώσεις έδειξαν ότι η επίδραση της αντικατάστασης των ορίων με τα μεταβλητά για την φάση που το σύστημα είναι εντός ελέγχου είναι μικρή τουλάχιστον για λ μεγαλύτερα από 0.1. Τελικά από τους Chandrasekaran, English και Disney (1995), Rhoads, Montgomery και Mastrangelo (1996) και από τον Steiner (1999), το πρόβλημα έχει τεθεί και επιλυθεί αποκλειστικά εφαρμόζοντας τεχνικές προσέγγισης. Σε μερικές από τις μεθοδολογίες χρησιμοποιείται η προσέγγιση του συστήματος με Μαρκοβιανή Αλυσίδα πεπερασμένων καταστάσεων ενώ σε άλλες χρησιμοποιούνται

τεχνικές προσομοίωσης Monte CARLo. Η ακρίβεια αυτών των προσεγγίσεων είναι χειρότερη περισσότερο για μεταβλητά όρια από ότι για σταθερά.

Δυστυχώς οι πιο ακριβείς αριθμητικές μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται σε αριθμητικούς τετραγωνικούς κανόνες (Crowder 1987, Waldmann 1986), δεν μπορούν να εφαρμοσθούν απευθείας στην περίπτωση των μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου. Από τον Knoth (2002) οι ιδέες του Woodall (1983) και του Waldmann (1986), επεκτάθηκαν έτσι ώστε να μπορούν να χειριστούν και τις περιπτώσεις με μεταβλητά όρια. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν οι ιδιότητες διαφορετικών *EWMA* σχημάτων με χαρακτηριστικό *FIR* με αρκετή ακρίβεια. Και στις τρεις προηγούμενες προσεγγίσεις χρησιμοποιείται η παράμετρος *ARL* αποκλειστικά για την αξιολόγηση των *EWMA* διαγραμμάτων ελέγχου. Αυτό γίνεται διότι οι προσεγγίσεις δίνουν έμφαση εκεί όπου η παράμετρος του ενδιαφέροντος (κυρίως οι μέσες τιμές) δεδομένου ότι παραμένουν σταθερές σε ολόκληρη την διάρκεια παρακολούθησης της διεργασίας. Η διαδικασία αξιολόγησης θεωρώντας τυχαία χρονικά σημεία για να μελετήσουμε τις αλλαγές μίας παραμέτρου, είναι η τεχνική η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια.

Στην επόμενη παράγραφο, το μοντέλο των σημείων αλλαγής διασαφηνίζεται περαιτέρω καθώς επιπλέον μετρικές της απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζονται. Μετά στις επόμενες παραγράφους εισάγονται και αξιολογούνται 6 διαφορετικά σχήματα για τεχνικές ελέγχου *EWMA*. Οι μέθοδοι συγκρίνονται βασισμένοι στα αποτελέσματα που αυτές παράγουν για εκλογή παραμέτρου $\lambda=0.1$ η οποία αποτελεί μία αρκετά διαδεδομένη τιμή «βάρους» για την εφαρμογή της μεθόδου *EWMA*.

Γενικότερα μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει απόλυτα βέλτιστο σχήμα. Για χρήστες οι οποίοι ενδιαφέρονται για γρήγορη ανίχνευση αλλαγών στα πρώτα χρονικά στάδια της διεργασίας και μόνο, οι προτεινόμενες αλλαγές από τον Steiner (1999), μπορούν να αποτελέσουν την καλύτερη εκλογή. Εάν η έννοια της αρχικής θέσης ανίχνευσης μπορεί να αφορά την 10^1 θέση των δειγμάτων, τότε τα *FIR* χαρακτηριστικά των Lucas, Sacucci (1990) και των Rhoads et al (1996) αποτελούν την καλύτερη εκλογή. Εάν δεν ενδιαφερόμαστε για συγκεκριμένη περιοχή δείγματος όπου μπορεί να συμβεί ανίχνευση τότε αυτές που καλούνται στάσιμες ή οι τεχνικές με σταθερά όρια *EWMA*, μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Όμως κάποιος θα πρέπει να είναι ενήμερος ότι πιο ευαίσθητα *FIR* σχήματα από τους Rhoads et al (1996) και τον Steiner (1999) παρέχουν λανθασμένα σήματα ελέγχου για τις αρχικές περιόδους με πολύ υψηλούς ρυθμούς, με πιθανότητα πλέον του 10%, ότι το σήμα ελέγχου που παράγεται στα πρώτα δείγματα αναφέρεται λανθασμένα σε διεργασία εντός ελέγχου. Το αρχικό σχήμα *EWMA* τελικά

φαίνεται να δίνει έναν καλό συμβιβασμό για όλες αυτές τις απαιτήσεις. Για τους παραπάνω λόγους είναι αποκλειστική ευθύνη του συγκεκριμένου χρήστη του συστήματος ελέγχου που βασίζεται στην *EWMA*, για να επιλέξει την κατάλληλη παραλλαγή του αλγορίθμου. Γενικά εάν κάποιος χρησιμοποιεί εξαρχής πληροφορία (π.χ. μια δεδομένη κατανομή για την μορφή του σημείου των αλλαγών – Frisen και Wessman 1999), τα αποτελέσματα είναι αρκετά αντιπροσωπευτικά.

2.1.2. Μοντέλο σημείων αλλαγής και Μετρικές Απόδοσης

Για να μπορούμε να βασιστούμε σε διαγράμματα ελέγχου, θα πρέπει να γνωρίζουμε εξαρχής πιο μοντέλο αλλαγής σημείων χρησιμοποιούμε. Ας υποθέσουμε ανεξάρτητες και κανονικά κατανεμημένες τ.μ. X_i , $i=1,2,\dots$. Για διευκόλυνση της παρουσίασης χρησιμοποιούμε το ακόλουθο μοντέλο αλλαγών σημείων:

$$X_i \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mu_0 = 0, \sigma^2 = 1) & i < m \\ \mathcal{N}(\mu_1 \neq 0, \sigma^2 = 1) & i \geq m \end{cases}$$

Η παράμετρος m δηλώνει το άγνωστο σημείο αλλαγής. Βασισμένοι στην ακολουθία των παρατηρούμενων δειγμάτων, το σχήμα ελέγχου θα πρέπει να ανιχνεύσει το σημείο αλλαγής το συντομότερο δυνατόν. Συνήθως, η ακολουθία πριν το χρονικό σημείο m καλείται εντός ελέγχου ενώ μετά από αυτό καλείται εκτός. Στην τρέχουσα προσέγγιση αναλύονται 6 διαφορετικές τεχνικές *EWMA*. Ξεκινώντας από το αρχικό σχήμα θεωρούμε κάποιες παραλλαγές, οι οποίες επιτρέπουν βελτιωμένη ανίχνευση κάθε αλλαγής που συμβαίνει σε αρχικά χρονικά σημεία $m \in [1,2,\dots,M]$, $M \ll \infty$. Είναι γενικά γνωστό ότι το πιο δημοφιλές *EWMA* σχήμα δηλ. αυτό με σταθερά όρια ελέγχου, συμπεριφέρεται με σχετική «αδράνεια» για τις πρώτες παρατηρήσεις που προκύπτουν από την διεργασία ιδιαίτερα όταν η παράμετρος λ είναι μικρή. Αυτό οφείλεται στην μεγάλη επίδραση της μη τυχαίας αρχικής τιμής Z_0 που χρησιμοποιείται στην εκκίνηση της διεργασίας.

Συμβολίζοντας ως $E_m\{\cdot\}$ και $P_m\{\cdot\}$ τον προσδόκιμο μέσο και το μέτρο πιθανότητας αντίστοιχα για τυχαίες ακολουθίες $\{X_n\}$ με σημείο αλλαγής m . Τότε:

- Το μέσο μήκος ροής (*ARL*), - το εκτός ελέγχου *ARL* $E_1(L)$ (για σημείο αλλαγής $m=1$) και η εντός ελέγχου *ARL* $E_\infty(L)$ – που αποτελεί το πλέον κοινό μέτρο

Μερικές ακόμα ενδιαφέρουσες μετρικές απόδοσης είναι:

- Οι συμβατικές καθυστερήσεις $D_m = E_m(L-m+1|L \geq m)$, $m=1,2,\dots$. Το οποίο αναφέρεται σε (πεπερασμένα) σημεία αλλαγής εκτός από τα πρώτα χρονικά σημεία και μέτρα της μέσης καθυστέρησης ανίχνευσης ενός διαγράμματος το οποίο δεν έχει δώσει σήμα ενός ψεύτικου συναγερμού ακόμη,
- Η καλούμενη μόνιμη κατάσταση $ARL D = \lim(m \rightarrow \infty) D_m$, ως εκπρόσωπος της ανωτέρω ακολουθίας των υπό συνθήκη καθυστερήσεων, το οποίο έχει νόημα ως ανίχνευση σε μεγάλης διάρκειας χρονικές εκτελέσεις,
- Η αθροιστική συνάρτηση $P_m(L \leq n)$ και η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.μ.π.) $P_m(L=n)$, $m \in [1, \infty]$, ως κατάλληλος εκπρόσωπος του συνολικού νόμου πιθανοτήτων για το μήκος για τις πιο κατάλληλες αλλαγές σημείων για την διεργασία.

2.1.3. Παρουσίαση των *EWMA* σχημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε παραλλαγές της κλασσικής μεθόδου *EWMA* οι οποίες επιτρέπουν την ανίχνευση αρχικών σημείων της εκτός ελέγχου διεργασίας. Για διευκόλυνση της παρουσίασης ορίζουμε ως:

$$c_* = c \sqrt{\lambda/(2-\lambda)}.$$

Για την ακολουθία, η εντός ελέγχου προσδοκία της X_n τίθεται σε $\mu_0=0$, έτσι ώστε η παρουσίαση να γίνει απλούστερη. Όλα τα διαγράμματα *EWMA* χρησιμοποιούν τον κλασσικό ορισμό για την ακολουθία Z_n .

1. *EWMA* Μέθοδος με σταθερά όρια ελέγχου (fcl). Η πιο διαδεδομένη μορφή με την ευκολότερη εφαρμογή.

$$L_{fcl} = \inf \{ n \in \mathbb{N} : |Z_n| > c_* \}.$$

συνήθως Z_0 τίθεται για $\mu_0=0$.

2. *EWMA* Μέθοδος με όρια ελέγχου καθοριζόμενα από την διασπορά της διεργασίας (vaci). Η μέθοδος είναι περισσότερο γνωστή ως μέθοδος *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου με τις περισσότερες εφαρμογές για την αξιολόγηση του σχήματος. Ο σχετιζόμενος χρόνος διακοπής (stopping time) L_{vaci} είναι ο ίδιος όπως η παράμετρος L . Επίσης και εδώ Z_0 τίθεται σε τιμή $\mu_0=0$.

3. *FIR-EWMA* Μέθοδος (*FIR*) – η μέθοδος πρωτοεισήχθη από τους Lucas και Saccucci (1990) ως μέθοδος για την σύζευξη 2 *EWMA* μονής πλευρικής ζώνης ελέγχου με κατάλληλη εκλογή του Z_0 ($=\mu_0+c_0/2=c_0/2$ πιο συχνή επιλογή). Ακριβέστερα έστω Z_n^u και Z_n^l δηλώνουν τα στατιστικά της *EWMA* για το άνω και κάτω σχήμα, αντίστοιχα όπου συνήθως $Z_0^u=Z_0^l=0$. Τότε:

$$L_{fir} = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : \max \{ Z_n^u, -Z_n^l \} > c_* \right\}$$

Στην πράξη το διάγραμμα *FIR-EWMA* είναι ένα μονομεταβλητό σχήμα όπως και τα προηγούμενα. Η ακόλουθη σύνδεση ανάμεσα στις ακολουθίες Z_n^u και Z_n^l μπορεί να προκύψει ως:

$$\Delta_0 = z_0^u - z_0^l \geq 0$$

$$Z_n^l = Z_n^u - (1 - \lambda)^n \Delta_0,$$

$$L_{fir} = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : Z_n^u \notin [-c_* + (1 - \lambda)^n \Delta_0, c_*] \right\}$$

Με αυτόν τον τρόπο το διάγραμμα *FIR-EWMA* είναι ισοδύναμο με μία μονομεταβλητή *EWMA* μέθοδο με ένα σταθερό και ένα μεταβλητό όριο ελέγχου.

4. Διάγραμμα *FIR-EWMA* με ρυθμιζόμενο όρια από την διασπορά (*fvacl*) – η μέθοδος εισήχθη από τον Rhoads et al (1996). Χρησιμοποιώντας τα ευρήματα από τον προηγούμενο ορισμό το σχήμα μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$L_{fvacl} = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : Z_n^u \notin [-c_* \sqrt{1 - (1 - \lambda)^{2n}} + (1 - \lambda)^n \Delta_0, c_* \sqrt{1 - (1 - \lambda)^{2n}}] \right\}$$

Μία φυσική εκλογή για το Z_0 μπορεί να είναι:

$$\mu_0 + \frac{c_*}{2} \sqrt{1 - (1 - \lambda)^2} = \frac{c_*}{2} \sqrt{\lambda(2 - \lambda)},$$

π.χ. στην μέση απόσταση από το μ_0 έως το πρώτο άνω όριο ελέγχου.

5. Διάγραμμα ρυθμιζόμενο από *FIR* και μεταβλητά όρια ελέγχου *EWMA* (*fadj*) – μέθοδος η οποία παρουσιάστηκε από τον Steiner (1999).

$$L_{fadj} = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : |Z_n| > c_* \sqrt{1 - (1 - \lambda)^{2n}} \left(1 - (1 - f)^{1+a(n-1)} \right) \right\}$$

Οι ποσότητες a και f αποτελούν επιπλέον παραμέτρους του σχήματος, όπου ο Steiner έχει επιλέξει τιμές:

$$a = (-2 \log(1 - f) - 1)/19$$

$$f = 0.5 \ (\rightarrow a = 0.3)$$

Η παράμετρος Z_0 εκλέγεται όπως για τις μεθόδους fcl και $vac1$ για διαγράμματα $EWMA$ όπου έχει τεθεί $\mu_0=0$.

6. Στάσιμη Μέθοδος $EWMA$ (stat) – απλή μέθοδος η οποία μερικές φορές υλοποιείται χωρίς την εισαγωγή ενός νέου $EWMA$ διαγράμματος. Η μόνη διαφορά από την fcl είναι ο διαφορετικός χειρισμός της πρώτης παρατήρησης.

$$Z_n = \begin{cases} X_1 \sqrt{\lambda/(2-\lambda)} & , n = 1 \\ (1-\lambda)Z_{n-1} + \lambda X_n & , n > 1 \end{cases}$$

$$L_{stat} = \inf \{n \in \mathbb{N} : |Z_n| > c_*\}.$$

$$var(Z_n) = \lambda/(2-\lambda) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το εν λόγω διάγραμμα ελέγχου δεν έχει προβάδισμα (*Head-Start* - HS) τιμή Z_0 , και κατέχει όρια ελέγχου σταθερού πλάτους και είναι στάσιμη ως προς την διασπορά.

Φυσικά, υπάρχουν περαιτέρω μεταβολές, π.χ. η σύζευξη των δύο $EWMA$ διαγραμμάτων μονής πλευρικής ζώνης με ένα όριο ανάκλασης (Yashchin – 1989) για το σχήμα $EWMA$, το οποίο επιτρέπει την χρήση προβαδίσματος (HS). Όμως τα αντίστοιχα συνδυασμένα σχήματα εμφανίζονται πιο πολύπλοκα από τα προηγούμενα παραπάνω και είναι σχετικά δύσκολο να διερευνήσουμε την απόδοση της χωρίς την χρήση προσομοίωσης Monte Carlo ή εναλλακτικά χρήση μιας διδιάστατης Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Περαιτέρω παραλλαγές όπως τα διπλά διαγράμματα $EWMA$ ή συνδυασμένα Shewart – $EWMA$ διαγράμματα (τα οποία εισήχθησαν έτσι ώστε να παρέχουν καλύτερη απόδοση για μία συνολική περιοχή μεταβολής γύρω από μέσες μεταβολές). Αυτές καθώς και άλλες παραλλαγές διαγραμμάτων non-FIR δεν εξετάζονται στα πλαίσια της παρούσας διερεύνησης.

2.1.4. Συγκριτική Μελέτη

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ακόλουθοι υπολογισμοί βασίζονται στα αποτελέσματα του Knoth (2002). Κλασικά, η απαιτούμενη αναδρομή για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της *EWMA* για την μεταβλητή Z_n υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα Gauss-Legendre (ελαχιστοποίηση τετραγωνικού σφάλματος), έως ότου προσεγγισθεί η μόνιμη κατάσταση (τουλάχιστον προσεγγιστικά). Για λεπτομέρειες και λίστα αναφορών που σχετίζονται με ανάλογα θέματα βλέπε Knoth (2002). Υπάρχει επίσης μία υπόθεση όπου οι προτεινόμενες *EWMA* μέθοδοι θα πρέπει να ικανοποιούν τα ασυμπτωτικά σταθερά όρια ελέγχου. Αυτή η υπόθεση θεωρείται ότι ικανοποιείται.

Θα πρέπει επίσης να κρατήσουμε ότι η παράμετρος της μέσης τιμής μ_0 τίθεται στο 0. Η σταθερά εξομάλυνσης λ εκλέγεται σε τιμή 0.1, η οποία παρέχει σημαντικά γρήγορη ανίχνευση σε μικρές ολισθήσεις για όλα τα σχήματα. Η παράμετρος προβαδίσματος (HS) στα σχήματα *FIR* τίθενται σε τιμές $Z_0^u = c_0/2$ και $Z_0^l = c_0/2[\lambda(2-\lambda)]^{1/2}$ για τα διαγράμματα *EWMA* (Lucas και Saccucci 1990) και το διάγραμμα *fvacl EWMA* (Rhoads et al 1996), αντίστοιχα. Για τις εναπομείνουσες παράμετροι στο σχήμα στην περίπτωση της μεθόδου *EWMA* του Steiner (*fadj*), οι αλλαγές γίνονται όπως και παραπάνω. Τελικά το τελευταίο σχήμα και οι παράμετροι που αυτό χρησιμοποιεί, δηλ. η κρίσιμη τιμή c , καθορίζεται με στόχο να παρέχει εντός ελέγχου *ARL* $E_\infty(L)$ σε τιμή 500. Για τις μεθόδους που θα αξιολογηθούν χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες παράμετροι που παρουσιάζονται στον πίνακα:

Πίνακας 14: Παράμετρος c για την ομάδα *EWMA* μεθόδων

EWMA scheme	fcl	vacl	fir	fvacl	fadj	stat
c	2.8143	2.8239	2.8415	2.8858	2.9131	2.8215

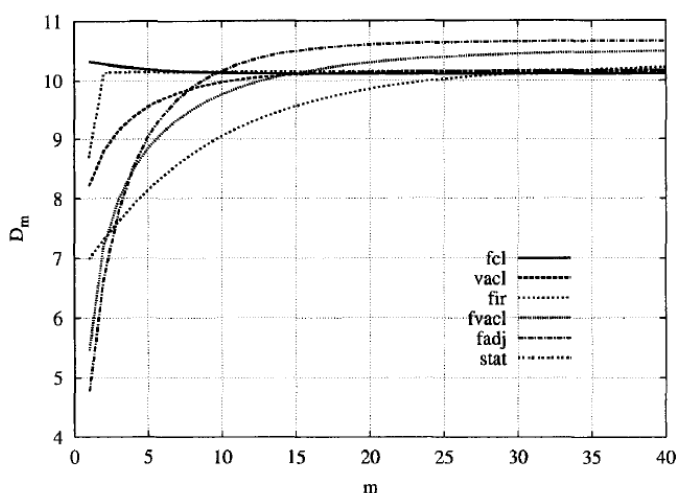
Σε πρώτη φάση υπολογίζουμε την εκτός ελέγχου *ARL* $E_1(L)$ και οι αντίστοιχες της μόνιμης κατάστασης *ARL* D ως μετρικές απόδοσης για ένα σημείο αλλαγής $m=1$ και $m \gg 1$, αντίστοιχα. Στον επόμενο πίνακα παρατηρούμε ότι οι τιμές είναι η πρώτη και η τελευταία στήλη (*fcl* και *stat*) οι οποίες παρέχουν τις μέγιστες *ARL*, ενώ οι τιμές μειώνονται

για $vacl \rightarrow FIR \rightarrow fvacl \rightarrow fadj$. Για παράδειγμα η προσέγγιση του Steiner έχει την καλύτερη συμπεριφορά για εκτός ελέγχου συμπεριφορά για $m=1$.

Πίνακας 15: Συγκριτικά αποτελέσματα από τις μεθόδους *EWMA*

μ_1	EWMA scheme					
	fcl	vacl	fir	fvacl	fadj	stat
0.5	31.3	28.8	24.8	22.9	21.6	29.3
	30.6	30.9	31.4	32.8	33.6	30.8
1.0	10.3	8.21	6.98	5.46	4.78	8.69
	10.1	10.2	10.3	10.5	10.7	10.2
1.5	6.08	4.17	3.90	2.52	2.19	4.56
	5.99	6.01	6.06	6.17	6.24	6.01
2.0	4.36	2.66	2.75	1.60	1.45	2.91
	4.31	4.32	4.35	4.42	4.47	4.32
3.0	2.87	1.51	1.81	1.09	1.07	1.57
	2.85	2.86	2.87	2.91	2.94	2.85
4.0	2.19	1.12	1.34	1.01	1.01	1.13
	2.20	2.20	2.21	2.24	2.26	2.20

Εναλλακτικά για μεγάλα m τα διαγράμματα με σταθερά όρια (fcl και stat) και η μέθοδος $vacl$ *EWMA* επιτυγχάνουν τα καλύτερα αποτελέσματα. Όμως, η διαφορά ανάμεσα στα σχήματα, γίνεται μικρότερη καθώς μετράμε την απόδοση μακράς διάρκειας.



Σχήμα 14: Υπό συνθήκη καθυστερήσεις D_m , $m=1,2,\dots,40$ για τα *EWMA* σχήματα με $\lambda=0.1$ εντός ελέγχου $ARL E_m(L)=500$ και εκτός ελέγχου με μεση τιμή $\mu_1=1$

Εξετάζουμε την περίπτωση για $1 < m < \infty$, για παράδειγμα την συμπεριφορά σύντομης ή μέσης κλίμακας. Κατά συνέπεια θεωρούμε τις υπό συνθήκη καθυστερήσεις $D_m = E_m(L-m+1|L \geq m)$. Στο σχήμα που ακολουθεί D_m παρίσταται για $m=1,2,\dots,40$. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η μικρότερη τιμή του D_m εκφράζει την πιο γρήγορη αλλαγή σε ένα χρονικό σημείο m όπου ανιχνεύεται. Για $m=1$ και $m=40$ παρατηρούμε ότι παρουσιάζεται η ίδια σειρά όπως στα σχήματα των μεθόδων ελέγχου που παρουσιάζονται στον πίνακα για την παράμετρο ARL και για την μόνιμη κατάσταση ARL , αντίστοιχα. Εάν κοιτάξουμε στο σχήμα $fadj$ του Steiner, όμως τότε παρατηρούμε ότι η καλύτερη εκλογή συμβαίνει για $m=1$ και $m=2$, δεύτερη καλύτερη για $m=3$, Τρίτη για $m=4$ και τελικά το χειρότερο σχήμα για $m \geq 10$. Εναλλακτικά το σχήμα $FIR EWMA$ παρέχεται για μία σημαντικά ευρεία κλίμακα ($4 \leq m \leq 25$) για καλύτερη απόδοση. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι το διάγραμμα $FIR EWMA$ είναι ειδική περίπτωση του $fadj$ ($j=0$) έτσι ώστε με την μείωση της παραμέτρου f (η οποία είναι η μία από τις τρεις παραμέτρους του σχήματος Steiner), να βελτιώσει την απόδοση του σχήματος. Εάν μειώσουμε την παράμετρο f όμως τότε η απόδοση για $m=1$ γίνεται χειρότερη. Επιπλέον, τα σχήματα με την καλύτερη συμπεριφορά μεγάλου μήκους, fcl , $vacl$ και $stat$, χρειάζονται τον περισσότερο χρόνο ανάμεσα σε όλα τα σχήματα για την ανίχνευση πρώιμων αλλαγών. Ενώ για την κλασσική fcl και για την $stat EWMA$ μέθοδο (με εξαίρεση για $m=1$), το D_m είναι σχεδόν σταθερό, το σχήμα $vacl$ ανιχνεύει γρηγορότερα τις αλλαγές πριν από το $m=17$ και το $m=23$ από ότι τα σχήματα fcl και $stat$ αντίστοιχα.

Κατά συνέπεια, καταλήγουμε ότι οι τροποποιήσεις της μεθόδου του Steiner παρέχουν την καλύτερη ευαισθησία για $m=1$, η μέθοδος $FIR EWMA$ για $1 < m < \infty$ και οι μέθοδοι $stat$ καθώς και τα σταθερών ορίων $EWMA$ σχήματα για μεγάλες τιμές του m .

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι την χειρότερη συμπεριφορά από τα σχήματα $EWMA$ καθορίζεται από το συνολικό μέγιστο πλάτος για την περιοχή συνέχισης του διαγράμματος. Αυτό είναι σύμφωνα με τις κρίσιμες τιμές του προηγούμενου πίνακα αλλά θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, ότι τώρα η μέθοδος $fcl EWMA$ είναι το καλύτερο σχήμα και η μέθοδος του Steiner $fadj$ είναι η χειρότερη δυνατή.

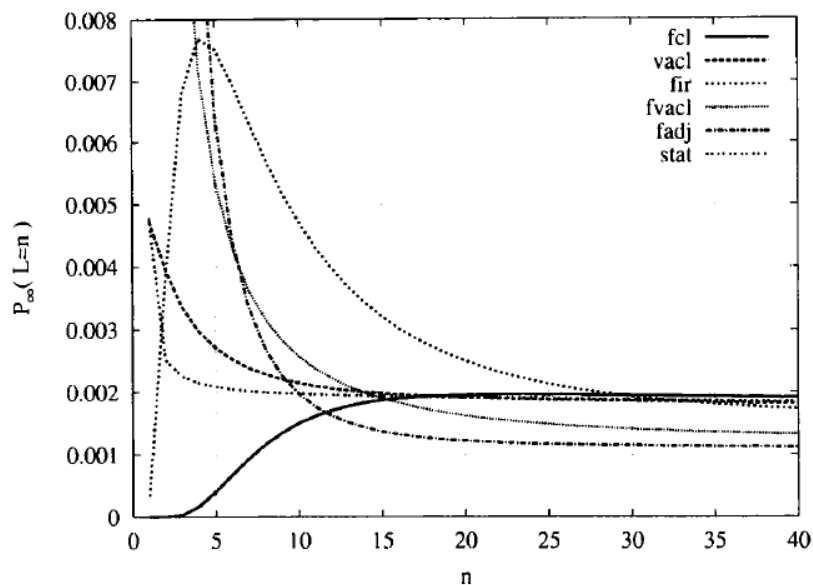
Οι τροποποιήσεις των διαγραμμάτων $EWMA$ επηρεάζουν την εντός ελέγχου συμπεριφορά των σχημάτων επίσης. Υψηλότερη ευαισθησία για την ανίχνευση πρώιμων αλλαγών στην διεργασία αυξάνει επίσης την πιθανότητα δημιουργία εσφαλμένων σημάτων. Προκαλεί έκπληξη ότι ούτε οι Rhoads et al (1996) αλλά ούτε και ο Steiner (1999), ανέφεραν την υψηλή πιθανότητα για εσφαλμένους πρώιμους συναγερμούς. Είναι πολύ απλό να υπολογίσουμε την $P_m(L=1)$ όπου ακόμα και αυτές οι τιμές είναι πολύ

υψηλές. Στον επόμενο πίνακα και στο αντίστοιχο σχήμα οι σχετιζόμενες τιμές $P_{\infty}(L=n)$ της σ.μ.π. παρουσιάζονται γραφικά και αριθμητικά.

Πίνακας 16: Πίνακας υπολογισμού πιθανοτήτων για λανθασμένη παραγωγή σήματος - $E_{\infty}(L)=500$

EWMA scheme	fcl	vacl	fir	fvacl	fadj	stat
$P_{\infty}(L = 1)$	0.0000	0.0047	0.0003	0.1125	0.1452	0.0048
$P_{\infty}(L = 2)$	0.0000	0.0040	0.0038	0.0217	0.0435	0.0025
$P_{\infty}(L = 3)$	0.0000	0.0034	0.0068	0.0109	0.0190	0.0022
$P_{\infty}(L \leq 10)$	0.0063	0.0293	0.0551	0.1742	0.2391	0.0238

Τα πιο ευαίσθητα σχήματα, fvacl και fadj, κατέχουν $P_{\infty}(L=1)=11\%$ και 14% και $P_{\infty}(L \leq 10)=17\%$ και 24% αντίστοιχα, εκφράζοντας μεγάλη τιμή πιθανότητας για λανθασμένη παραγωγή σήματος στην αρχική φάση παρατήρησης της διεργασίας.



Σχήμα 15: Εντός ελέγχου σ.μ.π. $P_{\infty}(L=n)$ για σχήματα *EWMA* με $\lambda=0.1$ και εντός ελέγχου *ARL* $E_{\infty}(L)=500$

Εναλλακτικά οι σχετιζόμενες τιμές των σχημάτων *EWMA* με σταθερά όρια ελέγχου είναι πολύ μικρές. Σημειωτέον ότι το *stat EWMA* σχήμα παρέχει τιμές κοντά σε μία πραγματικά γεωμετρική κατανομή. Επιπλέον, για $n=1$, τα σχήματα *vacl* και *stat EWMA* είναι ισοδύναμα, έτσι ώστε και οι δύο τιμές $P_{\infty}(L=1)$ σχεδόν συμπίπτουν (η μικρή διαφορά

οφείλεται σε μικρή διαφορά στις κρίσιμες τιμές). Παρόμοια αποτελέσματα δημοσιεύτηκαν από τους Morgavin, Conerly, Woodall και Drake (1995), όπου τα σταθερού εύρους όρια και τα μεταβαλλόμενα όρια με την διασπορά σχήματα *EWMA* εξετάζονται χρησιμοποιώντας τον ρυθμό ενεργοποίησης λανθασμένων σημάτων $P_{\infty}(L=n|L \geq n)$ για διαφορετικά χρονικά σημεία n .

Κλείνοντας θα πρέπει να αναφέρουμε το περίεργο σχήμα για το διάγραμμα της σ.μ.π. για το σχήμα *FIR EWMA*. Η κορυφή του παρατηρείται για $n=4$ και όχι για $n=1$ (όπως μπορεί κάποιος να περίμενε εξετάζοντας τις άλλες περιπτώσεις των *EWMA* σχημάτων). Για μεγαλύτερες τιμές του λ , (0.4 και μεγαλύτερες) η εν λόγω κορυφή τοποθετείται σχετικά γρήγορα στην τιμή για $n=1$.

2.2. Το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (*FIR*) και η ευαισθησία στην ανίχνευση συνθηκών εκτός ελέγχου

Σκοπός αυτού του τμήματος είναι η διερεύνηση της μεταβλητότητας της απόδοσης των *EWMA* διαγραμμάτων χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικά, χρονικά μεταβαλλόμενα όρια αλλά και το *FIR* χαρακτηριστικό. Η σύγκριση αυτών των μεθόδων γίνεται και πάλι στην βάση του μήκους ροής (RL) και ειδικότερα με χρήση του μέσου μήκους ροής - *ARL* του μεσαίου (median) μήκους ροής - *MDRL*, και της τυπικής απόκλισης του μήκους ροής - *SDRL*.

Για τον έλεγχο της απόδοσης των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων και του χαρακτηριστικού *FIR* στην μεταβλητότητα της απόδοσης της μεθόδου *EWMA*, χρησιμοποιείται το προτεινόμενο από τους Shu και Jiang αποδοτικό διάγραμμα *NEWMA* όπως η μέθοδος του παρουσιάστηκε στο Journal of Quality Technology. Ο σχεδιασμός του διαγράμματος *NEWMA* χρησιμοποιεί χρονικά μεταβαλλόμενα όρια και το χαρακτηριστικό *FIR* και η απόδοση της μεθόδου συγκρίνεται με την αντίστοιχη του *NEWMA* διαγράμματος το οποίο όμως χρησιμοποιεί σταθερά ασυμπτωτικά όρια ελέγχου. Το υπόλοιπο της συγκεκριμένης μελέτης στο παρόν κεφάλαιο οργανώνεται ως ακολούθως:

Η επόμενη παράγραφος εισάγει σύντομα μία περιγραφή για την μέθοδο *NEWMA* και επιπλέον παρουσιάζει τον σχεδιασμό του *NEWMA* διαγράμματος, χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια (*TNEWMA* διαγράμματα). Το υπόλοιπο της παρουσίασης συγκρίνει τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής για τα διαγράμματα *NEWMA* και

TNEWMA. Η επίδραση του χαρακτηριστικού *FIR* διερευνάται και συγκρίνεται με τα ασυμπτωτικά και χρονικά μεταβαλλόμενα σχήματα *EWMA*. Για καλύτερη εποπτεία στην κατανομή των μηκών ροής σε αυτά τα διαγράμματα επιπλέον παρουσιάζονται καμπύλες και για τα μήκη ροής.

2.2.1. Διαγράμματα *TNEWMA*

Σε αυτό το τμήμα παρουσιάζεται σε συντομία η δομή των διαγραμμάτων *NEWMA* όπως προτάθηκε από τους Shu και Jiang. Επιπλέον παρουσιάζονται τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια και η προσθήκη τους στα διαγράμματα *NEWMA*.

Ας υποθέσουμε ότι η παράμετρος ποιότητας X ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή μ_t και διασπορά σ_t^2 δηλ η X τ.μ. ακολουθεί την $N(\mu_t, \sigma_t^2)$. Έστω ότι η ποσότητα S_t^2 αντιπροσωπεύει την διασπορά των δειγμάτων και δ_t αντιπροσωπεύει το λόγο της τυπικής απόκλισης σ_t ως προς την αρχική του τιμή σ_0 σε μία τυχαία χρονική στιγμή t δηλ. $\delta_t = \sigma_t / \sigma_0$. Έστω $Y_t = \ln(S_t^2 / \sigma_0^2)$ για την φάση εντός ελέγχου της διεργασίας δηλ. όταν $\sigma_t = \sigma_0$. Η Y_t προσεγγιστικά ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_Y και διασπορά σ_Y^2 όπως δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mu_Y = \ln(\delta_t^2) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{2}{15(n-1)^4}$$

και

$$\sigma_Y^2 = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}$$

Σημειωτέον ότι όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου το στατιστικό:

$$Z_t = \frac{Y_t - \mu_Y | \sigma_t = \sigma_0}{\sigma_Y}$$

αποτελεί μία τυπική κανονικοποιημένη μεταβλητή. Όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου η Z_t ακολουθεί την $N(\gamma_t, 1)$, όπου $\gamma_t = [\ln(S_t^2 / \sigma_0^2)] / \sigma_Y$. Το *EWMA* στατιστικό που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διεργασίας βασίζεται στον μηδενισμό της Z_t όταν η παράμετρος αυτή γίνεται αρνητική δηλ. $Z_t^+ = \max(0, Z_t)$. Το διάγραμμα *NEWMA* βασίζεται στον σχεδιασμό της *EWMA* στατιστικής συνάρτησης:

$$W_t = \lambda \left(Z_t^+ - \frac{1}{2\pi} \right) + (1 - \lambda)W_{t-1}$$

και η μέθοδος δίνει ένα σήμα ελέγχου όταν $W_t > UCL_\alpha$ όπου:

$$UCL_a = L_a \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \sigma_{Z_t^+}$$

Οι Barr και Sherrill έδειξαν ότι:

$$\sigma_{Z_t^+}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right)$$

Θα δούμε ότι η ακριβής τιμή της διασποράς της W_t είναι χρονικά εξαρτώμενη και έτσι το ακριβές όριο ελέγχου θα πρέπει και αυτό να εξαρτάται από τον χρόνο τείνοντας στο UCL_a καθώς το $t \rightarrow \infty$. Ορίζουμε $Z_t^1 = Z_t^+ - 1/2\pi$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε την W_t ως:

$$W_t = \lambda Z_t^1 + (1 - \lambda)W_{t-1}$$

Με συνεχή αντικατάσταση των W_{t-i} για $i=1,2,\dots,t$. Το $EWMA$ στατιστικό W_t μπορεί να γραφεί ως:

$$W_t = \lambda \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \lambda)^i Z_{t-i}^1 + (1 - \lambda)^t W_0$$

Υπολογίζοντας την διασπορά της W_t προκύπτει:

$$Var(W_t) = \lambda^2 \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \lambda)^{2i} Var(Z_{t-i}^1) + (1 - \lambda)^{2t} Var(W_0)$$

Για ανεξάρτητες τυχαίες παρατηρήσεις Z_t^1 τότε $var(Z_t^1) = var(Z_{t-i}^1) = \sigma_{Z_t^+}^2$. Μετά από την ολοκλήρωση των υπολογισμών:

$$Var(W_t) = \sigma_{Z_t^+}^2 \left(\lambda^2 \left[\frac{1 - (1 - \lambda)^{2t}}{1 - (1 - \lambda)^2} \right] \right)$$

η οποία περαιτέρω απλοποιείται:

$$Var(W_t) = \sigma_{Z_t^+}^2 \left(\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2t} \right] \right)$$

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου θα αναφερόμαστε στην μεταβλητότητα του διαγράμματος $EWMA$ βασισμένη στην ακριβή τιμή της διασποράς W_t από την προηγούμενη εξίσωση. Το διάγραμμα της $TNEWMA$ θα δώσει ένα σήμα εκτός ελέγχου όταν $W_t > UCL_t$ όπου:

$$UCL_t = L_t \sqrt{\frac{\lambda [1 - (1 - \lambda)^{2t}]}{2 - \lambda}} \sigma_{Z_t^+}$$

όπου η ποσότητα UCL_t συγκλίνει στην τιμή UCL_α καθώς το $t \rightarrow \infty$. Η σύγκλιση είναι τόσο αργή όσο πιο μικρή είναι η τιμή του λ .

2.2.2. Σύγκριση των Μηκών ροής για τα διαγράμματα *NEWMA* και *TNEWMA*

Για την αξιολόγηση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου, η μέση τιμή του μήκους ροής – *ARL* είναι η πιο σημαντική και ευρέως χρησιμοποιούμενη παράμετρος. Η *ARL* συνιστά τον μέσο αριθμό παρατηρήσεων μετά τις οποίες ένα σήμα εκτός ελέγχου ανιχνεύεται από το διάγραμμα ελέγχου. Για την μελέτη έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo με 10,000 επαναλήψεις για την προσέγγιση των κατανομών για τα μήκη ροής για τα διαγράμματα *NEWMA* και *TNEWMA*. Από την βιβλιογραφία συνίσταται τουλάχιστον η χρήση 5,000 επαναλήψεων για την εύρεση ικανοποιητικού πλήθους δειγμάτων για την υλοποίηση του *ARL* μειώνοντας έτσι το αποδεκτό ποσοστό σφαλμάτων. Για μία καλύτερη εποπτεία της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων, χρησιμοποιούνται και οι άλλες δύο μετρικές δηλ. η διάμεσος και η τυπική απόκλιση του μέσου μήκους ροής. Οι πίνακες που ακολουθούν δίνουν τα χαρακτηριστικά των *NEWMA* και *TNEWMA* για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης λ . Στους πίνακες που ακολουθούν η παράμετρος *ARL* δηλώνει την μέση τιμή του μήκους ροής, το *SDRL* δηλώνει την τυπική απόκλιση του μήκους ροής και η *MDRL* δηλώνει το μέσο (median) της κατανομής του μήκους ροής. Οι πολλαπλασιαστές των ορίων ελέγχου L_α και L_t έχουν εκλεγεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να δίνουν το ίδιο μέσο μήκος ροής $ARL_0=200$ και στα δύο διαγράμματα. Τα αποτελέσματα στον Πίνακα 16 και 17 δείχνουν ότι για μικρές τιμές του λ (οι οποίες είναι και οι πιο συνήθεις στα διαγράμματα ελέγχου *EWMA*), τα ARL_1 που συνιστούν τα μέσα μήκη ροής για εκτός ελέγχου φάσεις στα διαγράμματα *TNEWMA*, είναι σημαντικά μικρότερες από τις αντίστοιχες για τα διαγράμματα *NEWMA*. Για παράδειγμα βλέπουμε ότι $ARL_1=9.93$ για την *TNEWMA* με $\lambda=0.05$ και $\delta=1.2$ ενώ για τα αντίστοιχα διαγράμματα *NEWMA* δίνουν $ARL_1=14.52$ για ίδιες τιμές των λ και δ . Φαίνεται ότι τα διαγράμματα *TNEWMA* απαιτούν κατά μέσο μέχρι και πέντε φορές λιγότερες παρατηρήσεις από αυτές που χρησιμοποιούνται για να συνθέσουν την αντίστοιχη *NEWMA* με στόχο την ανίχνευση μιας ολίσθησης 1.2σ της μεταβλητότητας της διεργασίας όταν $\lambda=0.05$. Η τιμή *MDRL* για το διάγραμμα *TNEWMA* είναι επίσης χαμηλότερη από το αντίστοιχη για το *NEWMA* ενώ παρατηρείται μια μικρή αύξηση στην παράμετρο *SDRL* για το διάγραμμα *TNEWMA* συγκρινόμενη με το *NEWMA* για χαμηλές τιμές των λ και δ .

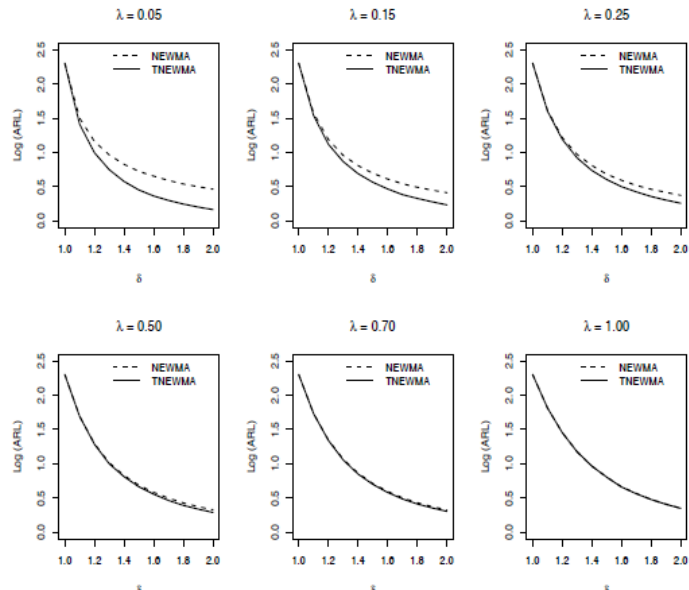
Πίνακας 16: Μήκη ροής για διαγράμματα *NEWMA* όταν $ARL_0=200$

Delta	L	λ				
		0.05	0.15	0.3	0.7	1
		<i>1.569</i>	<i>2.148</i>	<i>2.432</i>	<i>2.650</i>	<i>2.693</i>
1.0	ARL	199.69	200.24	201.39	199.82	199.52
	MDRL	136.00	139.00	142.00	139.00	137.00
	SDRL	197.62	200.98	203.09	196.87	202.39
1.1	ARL	31.68	37.69	43.26	54.11	65.19
	MDRL	24.00	28.00	31.00	38.00	46.00
	SDRL	26.26	34.30	41.50	55.14	64.62
1.2	ARL	14.52	15.48	17.30	22.22	28.44
	MDRL	12.00	12.00	13.00	16.00	20.00
	SDRL	10.05	12.12	15.41	21.10	27.88
1.3	ARL	9.21	9.07	9.57	11.73	14.97
	MDRL	8.00	7.00	7.00	8.00	10.00
	SDRL	5.49	6.43	7.55	11.04	14.43
1.4	ARL	6.72	6.45	6.47	7.31	9.23
	MDRL	6.00	5.00	5.00	5.00	7.00
	SDRL	3.67	4.09	4.71	6.43	8.85
1.5	ARL	5.30	4.98	4.78	5.15	6.38
	MDRL	5.00	4.00	4.00	4.00	5.00
	SDRL	2.69	2.89	3.26	4.32	5.93
1.6	ARL	4.52	4.10	3.87	3.95	4.61
	MDRL	4.00	4.00	3.00	3.00	3.00
	SDRL	2.15	2.25	2.42	3.10	4.03
1.7	ARL	3.91	3.50	3.27	3.19	3.69
	MDRL	4.00	3.00	3.00	2.00	3.00
	SDRL	1.74	1.81	1.95	2.40	3.16
1.8	ARL	3.47	3.11	2.85	2.70	3.01
	MDRL	3.00	3.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	1.46	1.52	1.63	1.90	2.48
1.9	ARL	3.17	2.83	2.51	2.37	2.58
	MDRL	3.00	3.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	1.30	1.34	1.38	1.62	2.00
2.0	ARL	2.92	2.59	2.29	2.12	2.24
	MDRL	3.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	1.13	1.18	1.21	1.41	1.69

Πίνακας 17: Μήκη ροής για διαγράμματα *TNEWMA* όταν $ARL_0=200$

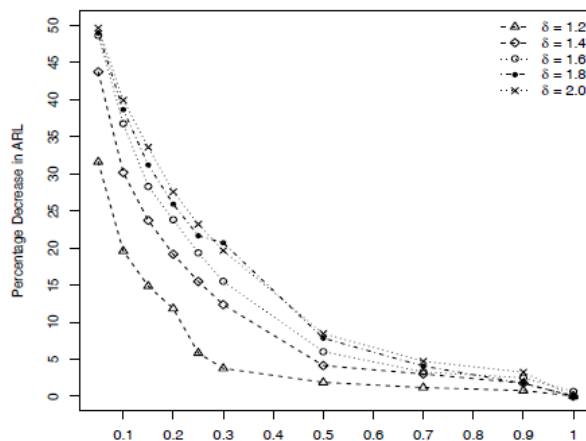
Delta	L	λ				
		0.05 1.649	0.15 2.164	0.3 2.440	0.7 2.652	1 2.693
1.0	ARL	199.85	202.30	201.37	201.63	199.73
	MDRL	124.00	136.50	137.00	141.00	140.00
	SDRL	233.87	212.73	202.42	199.74	194.83
1.1	ARL	25.80	34.71	42.42	54.01	65.18
	MDRL	16.00	25.00	30.00	38.00	45.00
	SDRL	28.83	34.31	41.58	53.70	63.66
1.2	ARL	9.93	13.18	16.65	21.96	28.43
	MDRL	6.00	10.00	12.00	15.00	20.00
	SDRL	10.36	12.53	15.26	21.30	28.12
1.3	ARL	5.61	7.37	8.66	11.39	14.94
	MDRL	4.00	6.00	6.00	8.00	11.00
	SDRL	5.64	6.54	7.73	10.90	14.40
1.4	ARL	3.78	4.92	5.67	7.09	9.23
	MDRL	3.00	4.00	4.00	5.00	7.00
	SDRL	3.49	4.21	4.69	6.26	8.67
1.5	ARL	2.84	3.68	4.14	5.01	6.38
	MDRL	2.00	3.00	3.00	4.00	5.00
	SDRL	2.49	3.01	3.28	4.40	5.82
1.6	ARL	2.32	2.94	3.27	3.82	4.58
	MDRL	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00
	SDRL	1.90	2.25	2.48	3.16	4.17
1.7	ARL	2.00	2.43	2.68	3.07	3.65
	MDRL	1.00	2.00	2.00	2.00	3.00
	SDRL	1.50	1.81	1.95	2.41	3.08
1.8	ARL	1.77	2.14	2.26	2.59	3.01
	MDRL	1.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	1.23	1.53	1.64	1.92	2.47
1.9	ARL	1.60	1.91	2.03	2.27	2.56
	MDRL	1.00	1.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	1.04	1.28	1.35	1.60	2.06
2.0	ARL	1.47	1.72	1.84	2.02	2.24
	MDRL	1.00	1.00	1.00	2.00	2.00
	SDRL	0.91	1.09	1.17	1.33	1.64

Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει συγκρίσεις των *ARL* για τα διαγράμματα *NEWMA* και *TNEWMA* για συγκεκριμένες επιλογές του λ . Στο κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα η μετατόπιση δ παριστάνεται στον οριζόντιο άξονα ενώ η τιμή για την παράμετρο *ARL* παριστάνεται στον κατακόρυφο άξονα σε λογαριθμική κλίμακα για καλύτερη εποπτεία του διαγράμματος. Η επίδραση της χρήσης των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων φαίνεται στο σχήμα ειδικότερα για μικρές τιμές της παραμέτρου λ . Όπως ήταν αναμενόμενο, το *ARL* της *TNEWMA* ξεκινά να συγκλίνει προς την αντίστοιχη τιμή του διαγράμματος *NEWMA* καθώς το λ αυξάνει. Για $\lambda=1$ η απόδοση των *ARL* και για τα δύο διαγράμματα είναι σχεδόν η ίδια.



Σχήμα 16: Σύγκριση των ARL για διαγράμματα $NEWMA$ και $TNEWMA$ για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ όταν $ARL_0=200$

Επιπλέον στο σχήμα 17, δείχνει τις επί τοις εκατό αυξήσεις των ARL_1 για το διάγραμμα $TNEWMA$ όπως συγκρίνεται με την $NEWMA$ για δεδομένες τιμές των λ και δ . Η διαφορά των ARL_1 και για τα δύο διαγράμματα εμφανίζεται μεγαλύτερη για μικρές τιμές του λ και υψηλότερες τιμές της παραμέτρου δ . Η διαφορά αυτή τείνει να μειωθεί καθώς το λ αυξάνει και το δ μειώνεται. Έτσι η χρήση των ακριβώς υπολογισμένων ορίων ελέγχου επίσης βελτιώνει την μεταβλητότητα του διαγράμματος $EWMA$ για την ανίχνευση ολισθήσεων μεγαλύτερου πλάτους.



Σχήμα 17: Επί τοις εκατό μείωση των εκτός ελέγχου ARL για το διάγραμμα $TNEWMA$ συγκρινόμενο με το διάγραμμα $NEWMA$ για $ARL_0=200$

2.2.3. Επίδραση του χαρακτηριστικού της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (*FIR*) στην μεταβλητότητα του διαγράμματος *EWMA*

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου συγκρινόμενη με τα ασυμπτωτικά όρια, βελτιώνει την συμπεριφορά στις φάσεις εκτός ελέγχου των διαγραμμάτων *EWMA* όσον αφορά την μεταβλητότητα της διεργασίας. Περαιτέρω αύξηση της ευαισθησίας του διαγράμματος *EWMA* με στόχο να ανιχνεύσει διολισθήσεις μπορεί επίσης να επιτευχθεί με την χρησιμοποίηση του χαρακτηριστικού *FIR*. Το χαρακτηριστικό *FIR* εισήχθη αρχικά στα διαγράμματα *CUSUM* για την ανίχνευση εκτός ελέγχου καταστάσεων, πιο γρήγορα κατά τις φάσεις εκκίνησης δίνοντας στην ακολουθία παρακολούθησης μη μηδενική αρχική τιμή. Η ιδέα προτάθηκε για εφαρμογή και στα διαγράμματα *EWMA* χρησιμοποιώντας δύο μονόπλευρα διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά ακόμα και με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια έδειξαν ανώτερη απόδοση συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα *FIR*. Και τα δύο αυτά σχήματα έχουν υποστεί αρκετή κριτική δεδομένου ότι απαιτούν την χρήση δύο διαγραμμάτων αντί για ένα αμφίπλευρο για την παρακολούθηση της διεργασίας.

Ένα άλλο σχήμα που έχει προταθεί για την χρήση της *FIR* στα διαγράμματα *EWMA*, βασίζεται σε περαιτέρω «στένεμα» των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων χρησιμοποιώντας μείωση εκθετικού τύπου όπως ορίζεται από την σχέση:

$$FIR_{adj} = 1 - (1 - f)^{1+a(t-1)}$$

όπου η a είναι γνωστή ως παράμετρος ρύθμισης και εκλέγεται έτσι ώστε ο έλεγχος του χαρακτηριστικού *FIR* να έχει πολύ μικρή επίδραση μετά από μια καθορισμένη χρονική περίοδο π.χ. $t=20$, οπότε έχουμε $FIR_{adj}=0.99$. Η επίδραση αυτής της ρυθμιζόμενης *FIR* μειώνεται με τον χρόνο και κάνει τα όρια ελέγχου αναλογικά της παραμέτρου f δηλ. από την απόσταση από το αρχικό χρονικό σημείο εφαρμογής. Συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά των μηκών ροής φαίνεται ότι το τροποποιημένο σχήμα *FIR* αποδίδει πολύ καλύτερα από το κλασσικό *FIR*. Το ρυθμιζόμενο σχήμα *FIR* φαίνεται αρκετά ελκυστικό και χρησιμοποιείται επίσης για την εφαρμογή ότι *FIR* χαρακτηριστικού γενικότερα σε διαγράμματα βαρών που προορίζονται για έλεγχο. Στο σημείο αυτό εξετάζουμε την επίδραση του χαρακτηριστικού *FIR* στην μεταβλητότητα της απόδοσης των διαγραμμάτων *EWMA*. Η μεταβλητότητα των χρονικά μεταβαλλόμενων *EWMA* με χρήση *FIR* συμβολίζεται με $FNEWMA$ και σηματοδοτεί μία εκτός ελέγχου συνθήκη όταν το W_t ξεπερνά το όριο UCL_t όπου το UCL_t δίνεται από την σχέση:

$$UCL_f = L_f \left(1 - (1 - f)^{1+a(t-1)}\right) \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2t}]}{2 - \lambda}} \sigma_{Z_t^+}$$

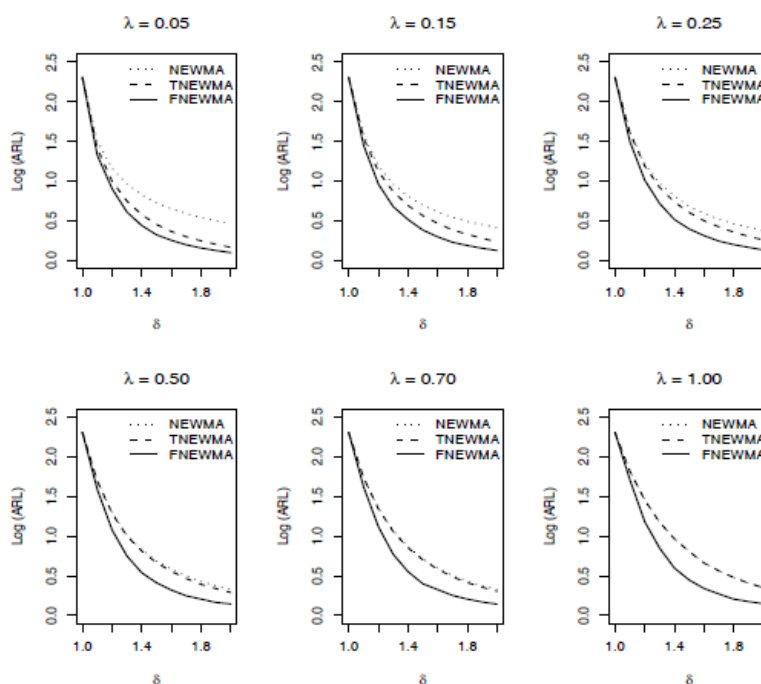
Για να εξαγάγουμε ένα σημαντικό όφελος από το *FIR* χαρακτηριστικό, το *f* θα πρέπει να εκλεγεί σχετικά μικρό. Σε αυτήν την μελέτη χρησιμοποιείται *f*=0.5 περιορίζοντας έτσι την επίδραση του χαρακτηριστικού *FIR* μέχρι την χρονική στιγμή των *t*=20. Τα χαρακτηριστικά για το διάγραμμα *FNEWMA* παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Πίνακας 18: Μήκη ροής για διαγράμματα *FNEWMA* όταν *ARL*₀=200

Delta	<i>L</i>	λ				
		0.05	0.15	0.3	0.7	1
1.0	ARL	199.24	199.63	201.74	200.29	199.61
	MDRL	94.00	117.00	122.00	114.00	109.00
	SDRL	263.25	244.59	242.92	249.86	251.52
1.1	ARL	21.17	28.27	34.36	41.54	50.85
	MDRL	7.00	14.00	15.00	14.50	16.00
	SDRL	29.33	36.66	46.10	58.65	74.19
1.2	ARL	8.02	9.16	10.72	13.07	15.19
	MDRL	4.00	4.00	5.00	4.00	4.00
	SDRL	10.14	12.57	14.46	20.49	27.47
1.3	ARL	4.08	4.77	5.29	5.88	7.07
	MDRL	2.00	2.00	3.00	3.00	3.00
	SDRL	5.15	5.83	6.68	8.35	11.57
1.4	ARL	2.76	3.28	3.39	3.56	3.96
	MDRL	1.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	3.18	3.60	3.84	4.31	5.63
1.5	ARL	2.11	2.42	2.54	2.51	2.80
	MDRL	1.00	1.00	2.00	2.00	2.00
	SDRL	2.07	2.38	2.51	2.56	3.34
1.6	ARL	1.80	1.99	2.06	2.12	2.19
	MDRL	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	SDRL	1.57	1.74	1.83	1.90	2.16
1.7	ARL	1.58	1.70	1.80	1.79	1.87
	MDRL	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	SDRL	1.20	1.32	1.44	1.38	1.57
1.8	ARL	1.44	1.55	1.58	1.61	1.61
	MDRL	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	SDRL	0.96	1.10	1.11	1.12	1.16
1.9	ARL	1.34	1.43	1.46	1.48	1.50
	MDRL	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	SDRL	0.79	0.91	0.93	0.93	0.98
2.0	ARL	1.26	1.34	1.38	1.39	1.41
	MDRL	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	SDRL	0.66	0.79	0.81	0.80	0.84

Τα *ARL*₀ για την *FNEWMA* έχουν επίσης κρατηθεί σε τιμή 200 χρησιμοποιώντας κατάλληλους πολλαπλασιαστές *L_f* για τα όρια για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τους πίνακες 16 και 17 μπορεί να παρατηρηθεί η ανωτερότητα των μηκών για το διάγραμμα *FNEWMA* σε σχέση με τα *NEWMA* και *TNEWMA*. Για παράδειγμα, για το διάγραμμα *FNEWMA* *ARL*₁=10.72 χρησιμοποιώντας λ=0.3 και δ=1.2, όπου το αντίστοιχο *ARL*₁ για το *TNEWMA* και *NEWMA* διαγράμματα είναι 16.65 και 17.30 αντίστοιχα. Αυτό δεικνύει ότι το διάγραμμα *FNEWMA* απαιτεί κατά

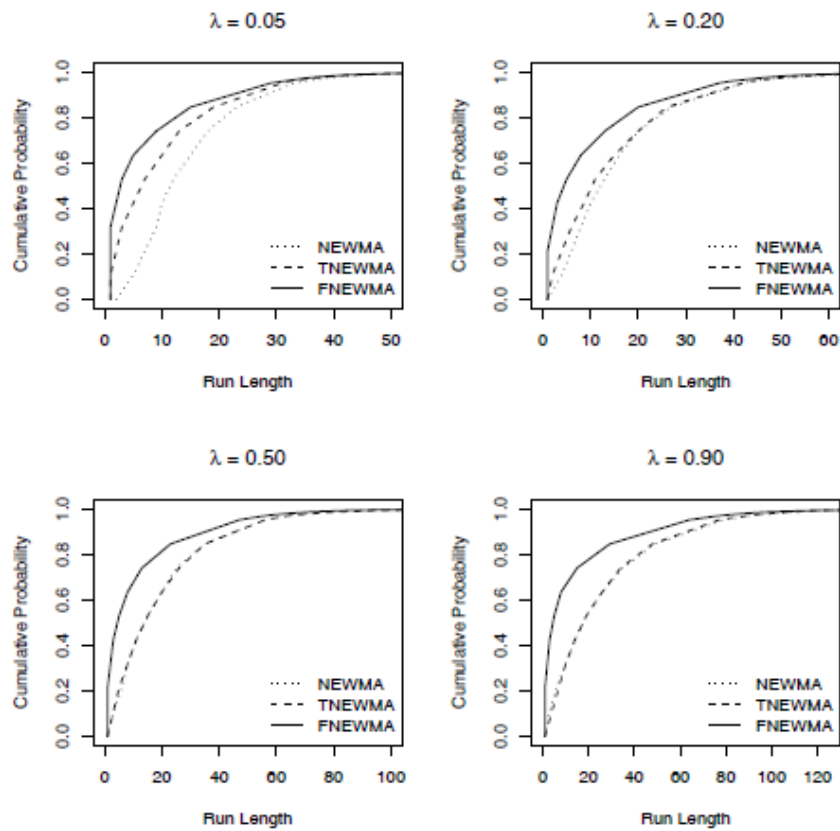
μέσον 6 φορές λιγότερες παρατηρήσεις από τα *NEWMA* και *TNEWMA* για την ανίχνευση μιας μετατόπισης 1.2σ στην μεταβλητότητα της διεργασίας για $\lambda=0.3$. Το επόμενο σχήμα παρουσιάζει την σύγκριση των *ARL* για τα διαγράμματα των *NEWMA*, *TNEWMA* και *FNEWMA* για μερικές επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου λ . Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι η ARL_1 για το *FNEWMA* διάγραμμα είναι χαμηλότερη συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες των *NEWMA* και *TNEWMA* για κάθε εκλογή της παραμέτρου λ . Η διαφορά αυτή γίνεται μεγαλύτερη για υψηλότερες τιμές της παραμέτρου λ . Οι χαμηλές τιμές για το ARL_1 στο διάγραμμα *FNEWMA* βοηθά στην ταχύτερη ανίχνευση των ολισθήσεων της μεταβλητότητας της διεργασίας.



Σχήμα 18: Σύγκριση των *ARL* για διαγράμματα *NEWMA*, *TNEWMA* και *FNEWMA* για διαφορετικές τιμές του λ για $ARL_0=200$

Για καλύτερη εποπτεία στην κατανομή των μηκών για τα διαγράμματα *NEWMA*, *TNEWMA* και *FNEWMA*, το σχήμα 19 παρουσιάζει τις καμπύλες μηκών ροής (*Run Length Curves - RLCs*) για αυτά τα διαγράμματα για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου λ και $\delta=1.2$. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι για μικρές τιμές των λ , τα *RLC* του διαγράμματος *TNEWMA* είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα του *NEWMA* υποδεικνύοντας ότι το διάγραμμα *TNEWMA* εμφανίζει υψηλότερη πιθανότητα για μικρότερα μήκη ροής για τις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου λ . Η ανωτερότητα του διαγράμματος *FNEWMA* επί των *NEWMA* και *TNEWMA* είναι ξεκάθαρη για όλες τις τιμές του λ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η

υψηλότερη πιθανότητα για μικρότερα μήκη ροής βοηθά σημαντικά στην γρήγορη ανίχνευση των ολισθήσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας.



Σχήμα 19: Καμπύλες μηκών ροής (*RLCs*) για διαγράμματα *NEWMA*, *TNEWMA* και *FNEWMA* για διαφορετικές τιμές του λ , $\delta=1.2$ και $ARL_0=200$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

EWMA και παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης σ_0^2 μιας διεργασίας όταν οι παράμετροι της διεργασίας δεν είναι εξαρχής γνωστές αλλά προκύπτουν από εκτιμήσεις

3.1. Εισαγωγή

Συνήθως στην εφαρμογή της τεχνικής *EWMA* το μέγεθος που παρακολουθείται από την διεργασία είναι η μέση τιμή των προϊόντων της διεργασίας. Στην προκειμένη περίπτωση η τεχνική *EWMA* θα χρησιμοποιηθεί για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Επιπλέον όμως στην προσέγγιση του προβλήματος ελέγχου θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά της διεργασίας δεν είναι εξαρχής γνωστά και για τον λόγο αυτό θα πρέπει να εκτιμηθούν με βάση τα δείγματα που προκύπτουν από την ίδια την διεργασία. Αυτό συμπεριλαμβάνει τον κίνδυνο της «εκτίμησης» των στατιστικών χαρακτηριστικών και των παραμέτρων της διεργασίας, αλλά προσδίδει ρεαλιστικότητα στην εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου επί μίας διεργασίας πραγματικής παραγωγής. Η τεχνική αυτή αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο παρακολούθησης της τυπικής απόκλισης της διεργασίας για τον χαρακτηρισμό της ποιότητας επίδοσης του συστήματος. Η απόδοση του προκύπτοντος διαγράμματος αξιολογείται κάτω από την υπόθεση της εκτίμησης των στατιστικών παραμέτρων της διεργασίας. Η εκτίμηση αυτή συνίσταται από την κατασκευή αντιστοίχων εκτιμητριών στην αρχική φάση όπου η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Αυτό συνιστά την κατασκευή ενός τροποποιημένου διαγράμματος σε σχέση με τα «κλασσικά» διαγράμματα της *EWMA*. Οι ιδιότητες του μήκους του διαγράμματος μελετώνται υπό το νέο πρίσμα προσέγγισης και τα προκύπτοντα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που θα προέκυπταν αν οι παράμετροι θεωρούνταν εξαρχής γνωστές.

3.1.1. EWMA τεχνική και παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης

Για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας η άγνωστη εντός ελέγχου τιμή της διασποράς σ_0^2 θα πρέπει να εκτιμηθεί από την συλλογή m υπο-ομάδων δειγμάτων από την διεργασία (Φάση 1 – Phase 1) διαστάσεων n δηλ. x_{ij} $i=1, \dots, m$ και $j=1, \dots, n$. Εάν υποθέσουμε ότι η X_{ij} ακολουθεί την Κανονική Κατανομή $N(\mu_0, \sigma_0)$ όπου μ_0 είναι η εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας και σ_0^2 είναι η αντίστοιχη εντός ελέγχου διασπορά, θεωρώντας τα δείγματα ως απλές τ.μ. οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Μία μη πολωμένη εκτιμήτρια $\hat{\sigma}_0^2$ της διασποράς σ_0^2 της διεργασίας. Όπου:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

και \bar{X}_i είναι η μέση τιμή που αντιστοιχεί στο i -δείγμα.

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}.$$

Έστω $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,n}$ τα δείγματα που αντιστοιχούν στην επόμενη φάση μετά την κατασκευή των εκτιμητριών (Φάση 2 – Phase 2) για τις χρονικές στιγμές $i=1, 2, \dots$. Ας υποθέσουμε ότι και αυτά τα δείγματα ακολουθούν την Κανονική Κατανομή όπου $\tau > 0$ είναι μια σταθερά η οποία αντανακλά την τάση διολίσθησης. Όταν $\tau=1$ η μεταβλητότητα της διεργασίας θεωρείται εντός ελέγχου αλλιώς θεωρούμε ότι τα χαρακτηριστικά της διεργασίας έχουν αλλάξει. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν $\tau < 1$ η συνθήκη εκτός ελέγχου της διεργασίας αντιστοιχεί σε μία μείωση της μεταβλητότητας της διεργασίας η οποία συνήθως είναι το αποτέλεσμα μιας διορθωτικής ενέργειας επί της διεργασίας. Από την άλλη πλευρά, όταν $\tau > 1$ η κατάσταση εκτός ελέγχου της διεργασίας μπορεί να αποτελεί το αποτέλεσμα ενός περιορισμού της απόδοσης της διεργασίας, η οποία τελικά αυξάνει την διασπορά αυτής. Έστω \bar{Y}_i και S_i^2 αποτελούν τις τιμές μέσου του δείγματος και της διασποράς των $Y_{i,1}, \dots, Y_{i,n}$ όπου:

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \text{with} \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}.$$

Οι Crowder και Hamilton (1992) εισήγαγαν ένα EWMA διάγραμμα για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις:

$$T_0 = \ln(\sigma_0^2),$$

$$T_i = \max(\lambda \ln(S_i^2) + (1 - \lambda)T_{i-1}, \ln(\sigma_0^2)), \quad i = 1, 2, \dots$$

όπου $0 < \lambda \leq 1$ αποτελεί την παράμετρο εξομάλυνσης. Το άνω όριο ελέγχου (*UCL*) στην περίπτωση ανεξάρτητων δειγμάτων δίνεται από την σχέση:

$$UCL = K\sigma = K\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\left(\frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}\right)},$$

όπου K είναι μία σταθερά η οποία εκλέγεται μαζί με την παράμετρο λ έτσι ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή απόδοση του διαγράμματος, ενώ σ είναι η ασυμπτωτική τυπική απόκλιση των Y_i χωρίς να έχει επανεκκινηθεί η διεργασία. Το διάγραμμα ελέγχου που ορίζεται από τις ανωτέρω εξισώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για τα υποπλαισιωμένα δεδομένα (δηλ. για $n > 1$), αυτές οι συνθήκες θα αποτελέσουν περιορισμούς που εφαρμόζονται στην συνέχεια. Ένα ακόμα χαρακτηριστικό αυτού του διαγράμματος είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πιστοποιήσει μόνο διολισθήσεις προς τα άνω της μεταβλητότητας. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι μειώσεις στην μεταβλητότητα δεν είναι σημαντικές για ένα σύστημα ελέγχου. Όμως η μείωση στην μεταβλητότητα συνήθως συμβαίνει μόνο μετά από μία διορθωτική ενέργεια στην διεργασία. Για αυτόν τον λόγο η χρονική στιγμή αλλαγής της μεταβλητότητας γίνεται γνωστή και δεν χρειάζεται ένα διάγραμμα ελέγχου για να το ανιχνεύσει αυτό.

Ένα τροποποιημένο *EWMA* διάγραμμα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$Z_0 = z_0,$$

$$Z_i = \max(\lambda \ln(S_i^2/\hat{\sigma}_0^2) + (1 - \lambda)Z_{i-1}, 0), \quad i = 1, 2, \dots$$

όπου $0 \leq Z_0 \leq UCL$ είναι μια σταθερά η οποία χρησιμοποιείται ως αρχική συνθήκη. Εάν το $Z_0 > 0$ τότε το διάγραμμα έχει ένα προβάδισμα (*Head-Start* - HS) (βλέπε Lucas, Crosier 1992 και Lucas, Saccucci 1990). Το άνω όριο ελέγχου της τελευταίας εξίσωσης προέκυψε από τους Crowder και Hamilton (1992) χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\ln(S_i^2)$ ακολουθεί μία λογαριθμική Γάμμα κατανομή και

$$V(\ln(S_i^2)) \simeq \frac{2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{4}{3(n-1)^3} - \frac{16}{15(n-1)^5}.$$

Χειριζόμενοι την σ_0^2 σαν μία σταθερά καταλήγουμε:

$$V(\ln(S_i^2/\hat{\sigma}_0^2)) = V(\ln(S_i^2) - \ln(\hat{\sigma}_0^2)) = V(\ln(S_i^2))$$

και τότε συνάγουμε ότι το άνω όριο ελέγχου UCL για το προτεινόμενο διάγραμμα είναι το ίδιο όπως αυτό των εξισώσεων.

Ορίζοντας και $Q = S_i^2 / \sigma_0^2$ και $W = \bar{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2$. Είναι γενικά γνωστό (Chen 1998) ότι οι παράμετροι Q και W είναι και οι δύο τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $((n-1)/2, 2\tau^2/(n-1))$ και $(m(n-1)/2, 2/m(n-1))$. Κατά συνέπεια η σ.π.π. $f_Q(q)$ και $f_W(w)$ των Q και W είναι ίσες με:

$$f_Q(q) = f_\gamma \left(q \mid \frac{n-1}{2}, \frac{2\tau^2}{n-1} \right),$$

$$f_W(w) = f_\gamma \left(w \mid \frac{m(n-1)}{2}, \frac{2}{m(n-1)} \right),$$

όπου:

$$f_\gamma(x|a, b) = \frac{e^{-x/b} x^{a-1}}{b^a \Gamma(a)}.$$

Γίνεται επίσης εμφανές ότι:

$$Q_i/W = S_i^2 / \hat{\sigma}_0^2$$

οπότε οι προηγούμενες εξισώσεις μπορούν να ξαναγραφούν στην μορφή:

$$Z_0 = z_0,$$

$$Z_i = \max(\lambda \ln(Q_i/W) + (1 - \lambda)Z_{i-1}, 0), \quad i = 1, 2, \dots$$

Από την στιγμή που γνωρίζουμε τις συναρτήσεις κατανομής των στατιστικών που σχεδιάζονται, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ακριβή κατανομή για την μεταβλητή του μήκους του προτεινόμενου $EWMA$ διαγράμματος καθώς και τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης. Οι υπολογισμοί για το θέμα αυτό παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

3.1.2. Οι ιδιότητες του μήκους ροής (RL) του διαγράμματος $EWMA$ για την τυπική απόκλιση με εκτιμώμενες παραμέτρους για την διεργασία

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να ελεγχθούν γενικά με χρήση της κατανομής της μεταβλητής του μήκους ροής (RL). Η μεταβλητή RL ορίζεται ως ο αριθμός των δειγμάτων μέχρις ότου το διάγραμμα ελέγχου να αγγίξει ένα από τα όρια ελέγχου. Έστω ότι L δηλώνει την τ.μ. που αντιπροσωπεύει το RL για το διάγραμμα $EWMA$. Για παράδειγμα:

$$L = \inf\{\ell \geq 1 | Z_\ell > UCL\},$$

και έτσι:

$$f_L(\ell|w, z_0) = P(L = \ell | W = w, Z_0 = z_0),$$

να είναι η περιθώρια σ.μ.π. της L δοθείσης μιας μεταβλητής w για την τ.μ. W και την αρχική τιμή Z₀ της διεργασίας. Για απλότητα ο όρος W=w θα αφαιρεθεί στο υπόλοιπο των συμβολισμών για διευκόλυνση. Σε αυτό το τμήμα θα εξαχθούν οι βασικές ιδιότητες της παραμέτρου RL, π.χ. η σ.μ.π., η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή (ARL) και η τυπική απόκλιση (SDRL). Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί η προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και η αντίστοιχη προσέγγιση Μαρκοβιανής Αλυσίδας ως προσεγγίσεις που υπολογίζουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά με αριθμητικές μεθόδους.

3.1.3. Η προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Οι Jones et al (2001) εξέτασαν την απόδοση του διαγράμματος EWMA για μέσες τιμές όταν έχουν εκτιμηθεί οι παράμετροι. Θα χρησιμοποιήσουμε μία ανάλογη προσέγγιση έτσι ώστε να ελέγξουμε την απόδοση της τροποποιημένης EWMA για τον έλεγχο της μεταβλητότητας. Για l=1 προκύπτει:

$$f_L(1|w, z_0) = 1 - F_Q \left(w \exp \left(\frac{UCL - (1 - \lambda)z_0}{\lambda} \right) \right),$$

και για l=2,3,...

$$f_L(\ell|w, z_0) = f_L(\ell - 1|w, 0)F_Q \left(w \exp \left(\frac{-(1 - \lambda)z_0}{\lambda} \right) \right) + \frac{w}{\lambda} \int_0^{UCL} f_L(\ell - 1|w, z) \exp \left(\frac{z - (1 - \lambda)z_0}{\lambda} \right) f_Q \left(w \exp \left(\frac{z - (1 - \lambda)z_0}{\lambda} \right) \right) dz,$$

όπου F_Q είναι η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της Q. Η περιθώρια σ.μ.π. f_L(l|Z₀) όπου το L δίνεται από την σχέση:

$$f_L(\ell|z_0) = \int_0^\infty f_L(\ell|w, z_0) f_W(w) dw,$$

και η χωρίς δεσμεύσεις αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F_L(l|Z₀) του L μπορεί άμεσα να εξαχθεί από τον προηγούμενο τύπο:

$$F_L(\ell|z_0) = \sum_{i=1}^{\ell} f_L(i|z_0).$$

Το $ARL(w, Z_0) = E(L|w, Z_0)$ είναι η υπό συνθήκη ARL του διαγράμματος. Μπορεί να δειχθεί ότι η $ARL(w, Z_0)$ μπορεί να εξαχθεί από την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$ARL(w, z_0) = 1 + ARL(w, 0)F_Q\left(w \exp\left(\frac{-(1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) + \frac{w}{\lambda} \int_0^{UCL} ARL(w, z) \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right) f_Q\left(w \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) dz.$$

Αν θεωρήσουμε την $E2RL(w, Z_0) = E(L^2|w, Z_0)$ να είναι η υπό συνθήκη 2^{ης} τάξης μη κεντρική ροπή της παραμέτρου μήκους L . Η $E2RL(w, Z_0)$ μπορεί να προκύψει από την λύση της ακόλουθης ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$E2RL(w, z_0) = 1 + 2 \left[ARL(w, 0)F_Q\left(w \exp\left(\frac{-(1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) + \frac{w}{\lambda} \int_0^{UCL} ARL(w, z) \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right) f_Q\left(w \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) dz \right] + E2RL(w, 0)F_Q\left(w \exp\left(\frac{-(1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) + \frac{w}{\lambda} \int_0^{UCL} E2RL(w, z) \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right) f_Q\left(w \exp\left(\frac{z - (1-\lambda)z_0}{\lambda}\right)\right) dz.$$

Η χωρίς συνθήκη $ARL(Z_0)$ και η 2^{ης} τάξης μη κεντρική ροπή $E2RL(Z_0)$ του L είναι ίσες:

$$ARL(z_0) = \int_0^{\infty} ARL(w, z_0) f_W(w) dw, \\ E2RL(z_0) = \int_0^{\infty} E2RL(w, z_0) f_W(w) dw,$$

και η $SDRL(Z_0)$ του διαγράμματος:

$$SDRL(z_0) = \sqrt{E2RL(z_0) - ARL^2(z_0)}.$$

Οι ακριβείς λύσεις των ολοκληρωτικών εξισώσεων για τα $ARL(w, Z_0)$ και $E2RL(w, Z_0)$ μπορούν να εκτιμηθούν προσεγγιστικά με αριθμητική ολοκλήρωση για συγκεκριμένες τιμές του W (βλέπε για παράδειγμα την μεθοδολογία που παρουσιάζεται από τους Hamilton και Crowder 1992). Τότε οι εξισώσεις για τα $ARL(Z_0)$ και $E2RL(Z_0)$ επιλύονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας μία Gaussian τετραγωνική μορφή για την μεταβλητή W .

3.1.4. Η προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια διακριτή Μαρκοβιανή Αλυσίδα με $p+2$ καταστάσεις όπου οι καταστάσεις $0,1,2,\dots,p$ είναι μεταβατικές και η κατάσταση $p+1$ είναι απορροφητική. Η μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης P αυτής της διακριτής Μαρκοβιανής Αλυσίδας είναι:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & \cdots & Q_{0,p} & r_0 \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & \cdots & Q_{1,p} & r_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Q_{p,0} & Q_{p,1} & \cdots & Q_{p,p} & r_p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου Q είναι μία $(p+1) \times (p+1)$ μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης όπου $\mathbf{0}^T = (0,0,\dots,0)$ και το διάνυσμα \mathbf{r} το οποίο είναι $(p+1) \times 1$ ικανοποιεί την σχέση $\mathbf{r} = \mathbf{1} - Q\mathbf{1}$ (για παράδειγμα οι πιθανότητες αθροιζόμενες κατά γραμμή θα πρέπει να κάνουν 1) με $\mathbf{1}^T = (1,1,\dots,1)$. Εάν το \mathbf{q} είναι ένα διάνυσμα $(p+1) \times 1$ των αρχικών πιθανοτήτων που σχετίζονται με τις $(p+1)$ μεταβατικές καταστάσεις για παράδειγμα $\mathbf{q}^T = (q_0, q_1, \dots, q_p)$.

Ο αριθμός των βημάτων L μέχρις ότου η διεργασία να μεταβεί στην απορροφητική κατάσταση είναι μία διακριτής Φάσης (Phase-type-DPH) τ.μ. των παραμέτρων (Q, \mathbf{q}) *Βλέπε Latouche και Ramaswami – 1999). Στην ορολογία διαγραμμάτων, η τ.μ. L , επίσης καλείται μήκος. Η σ.μ.π. $f_{DPH}(Q, \mathbf{q})$ και η αθροιστική συνάρτηση $F_{DPH}(Q, \mathbf{q})$ της DPH τ.μ. L ορίζονται για $l=1,2,\dots$ και είναι ίσες με:

$$f_{DPH}(l|Q, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T Q^{l-1} \mathbf{r},$$

$$F_{DPH}(l|Q, \mathbf{q}) = \mathbf{1} - \mathbf{q}^T Q^l \mathbf{1}.$$

Εάν δεν υπάρχει απλουστευμένος τύπος για την κεντρική ροπή

$$\mu_i = E((L - E(L))^i | Q, \mathbf{q})$$

για τάξη $i \geq 1$ μιας DPH τ.μ. L υπάρχει παρ'όλα αυτά μια απλή φόρμουλα για την παραγοντική ροπή

$$v_i = E(L(L-1) \cdots (L-i+1) | Q, \mathbf{q})$$

για τάξη $i \geq 1$ ίση με:

$$v_i = i! \mathbf{q}^T (\mathbf{I} - Q)^{-i} Q^{i-1} \mathbf{1}.$$

και ειδικότερα:

$$\begin{aligned}v_1 &= \mathbf{q}^T(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{1}, \\v_2 &= 2\mathbf{q}^T(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-2}\mathbf{Q}\mathbf{1},\end{aligned}$$

και εύκολα καταλήγουμε στην μέση $E(L)$ και την τυπική απόκλιση $\sigma(L)$ της μεταβλητής L :

$$\begin{aligned}E(L) &= v_1, \\ \sigma(L) &= \sqrt{v_2 - v_1^2 + v_1}.\end{aligned}$$

Οι ιδιότητες της σ.μ.π. $f_L(l|w, Z_0)$, η αθροιστική $F_L(l|w, Z_0)$, η $ARL(w, Z_0)=E(L)$, η $SDRL(w, Z_0)=\sigma(L)$ του μήκους ροής L του διαγράμματος μπορούν να υπολογισθούν αριθμητικά χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Αυτή η ευέλικτη και σχετικά εύκολη διαδικασία, προτάθηκε από τους Brook και Evans (1972) για την ARL , και συμπεριλαμβάνει διαίρεση του διαστήματος ανάμεσα στα $LCL=0$ και UCL όπως στο σχήμα σε p το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους 2δ , όπου $\delta=UCL/(2p)$. Από τον ορισμό $H_j, j=1, \dots, p$ αντιπροσωπεύει το τέλος του j -υποδιαστήματος και $H_0=0$ αντιστοιχεί στην φάση επανεκκίνησης (ειδικό χαρακτηριστικό του διαγράμματος). Όταν ο αριθμός p των υποδιαστημάτων είναι ικανοποιητικά μεγάλος, αυτή η πεπερασμένη προσέγγιση παρέχει μία ικανοποιητική μέθοδο η οποία επιτρέπει στις ιδιότητες της παραμέτρου RL να εκτιμηθούν με ακρίβεια. Στην δική μας ειδική περίπτωση το γενικό στοιχείο $Q_{i,j}, i=0, 1, \dots, p$ της μήτρας Q των πιθανοτήτων μετάβασης είναι ίση με:

- if $j = 0$

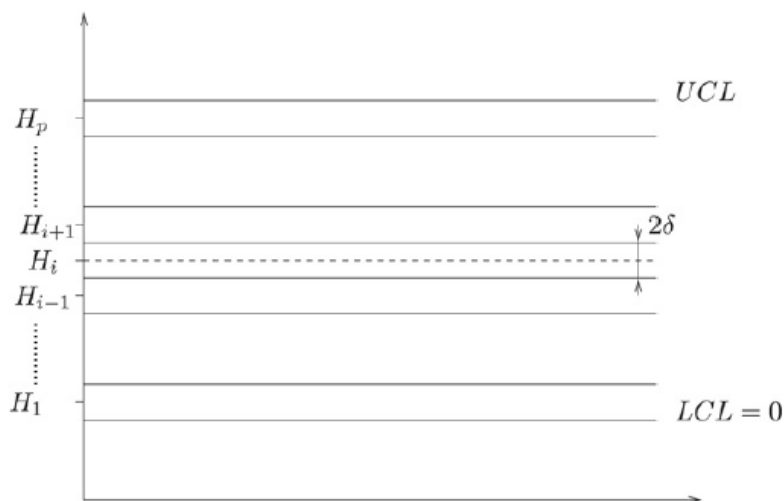
$$Q_{i,0} = F_Q \left(w \exp \left(\frac{-(1-\lambda)H_i}{\lambda} \right) \right).$$
- if $j = 1, 2, \dots, p$

$$Q_{i,j} = F_Q \left(w \exp \left(\frac{H_j + \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda} \right) \right) - F_Q \left(w \exp \left(\frac{H_j - \delta - (1-\lambda)H_i}{\lambda} \right) \right),$$

και το γενικό στοιχείο q_i του διανύσματος ; των αρχικών πιθανοτήτων ισούται με:

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{if } H_j - \delta < z_0 < H_j + \delta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Η χωρίς συνθήκη σ.μ.π. $f_L(l|Z_0)$ και όλα τα υπόλοιπα μεγέθη μπορούν να προκύψουν από τις αντίστοιχες συναρτήσεις υπό συνθήκη χρησιμοποιώντας την ίδια φόρμουλα που παρουσιάστηκε προηγουμένως.



Σχήμα 20: Υποδιαίρεση του διαστήματος ελέγχου $LCL - UCL$ σε $2p$ υποδιαστήματα

3.1.5. Η απόδοση του *EWMA* διαγράμματος για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης με εκτιμημένες τις παραμέτρους της διεργασίας

Η μέση τιμή ARL και η τυπική απόκλιση $SDRL$ της κατανομής της μεταβλητής RL αποτελούν τις συνήθεις μετρικές για την αξιολόγηση της απόδοσης των διαγραμμάτων ελέγχου. Όταν μία διεργασία είναι εντός ελέγχου περιμένουμε ότι σε κάποιο σημείο το διάγραμμα ελέγχου της θα δώσει σήμα εξαιτίας της εγγενούς μεταβλητότητας (λανθασμένος συναγερμός). Η παράμετρος ARL σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζεται ως ARL_0 και η τυπική απόκλιση της ως $SDRL_0$. Από την άλλη πλευρά, η ARL όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου θα συμβολίζεται ως ARL_1 και η τυπική της απόκλιση θα συμβολίζεται ως $SDRL_1$. Προφανώς ένα διάγραμμα ελέγχου θεωρείται καλύτερο από τους ανταγωνιστές του εάν παρουσιάζει την μικρότερη ARL_1 για μια συγκεκριμένη ολίσθηση τ και όταν η ARL_0 του είναι ίδια με τα υπόλοιπα διαγράμματα.

Τώρα λοιπόν είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε αρκετά αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία δικαιολογούν την επίδραση του υπολογισμού για την κύρια τιμή της τυπικής απόκλισης σ_0^2 του διαγράμματος *EWMA*. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η ARL και η $SDRL$ για τις περιπτώσεις εκτός ελέγχου (ARL_1 και $SDRL_1$ αντίστοιχα). Αυτές οι τιμές υπολογίζονται θεωρώντας γνωστή την περίπτωση της διασποράς ($m=\infty$) και στην περίπτωση εκτιμήσεως της εν λόγω παραμέτρου ($\mu=10,20,40,80$) για διαφορετικά δείγματα και εύρη αυτών $n=3,5,7,9$. Η ARL_0 τιμή είναι 370.4 για όλες τις περιπτώσεις που

θεωρήθηκαν στον πίνακα ενώ η αρχική τιμή Z_0 είχε τεθεί ίση με μηδέν. Οι τιμές για τα ARL_1 και το $SDRL_1$ είχαν υπολογισθεί χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας, η οποία παρουσιάστηκε σε προηγούμενες παραγράφους (ο αριθμός των καταστάσεων της Μαρκοβιανής Αλυσίδας είχε τεθεί σε 400 όταν $\tau = 1.1$ και $p = 100$ όταν $\tau \geq 1.2$). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι είτε χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις είτε την Μαρκοβιανή αλυσίδα για να υπολογίσουμε τις τιμές των ARL_1 και το $SDRL_1$ αυτό οδηγούσε στην ίδια εξίσωση. Το αποτέλεσμα αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι και στις δύο περιπτώσεις οι εξισώσεις για το $ARL(w, Z_0)$ και το $E2RL(w, Z_0)$ υπολογίζονται διαιρώντας το διάστημα μεταξύ του 0 και του UCL (είτε χρησιμοποιώντας προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων Gauss ή την μεθοδολογία της Μαρκοβιανής Αλυσίδας όπως περιγράφηκε προηγουμένως).

Η πρώτη στήλη του πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζει την διολίσθηση στην διασπορά $\tau = 1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$. Στην δεύτερη στήλη παρέχεται η βέλτιστη $EWMA$ παράμετρος (λ^*, K^*) για την μέθοδο των Crowder και Hamilton (1992) (π.χ. σ_0 γνωστό) αντίστοιχα με την ορισθείσα διολίσθηση τ . Για παράδειγμα εάν $n=5$ και $\tau=1.2$ οι βέλτιστες παράμετροι της $EWMA$ για την προσέγγιση των Crowder και Hamilton (1992) είναι ($\lambda^*=0.013, K^*=0.705$). Σε αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη τιμή εννοεί ότι για την συγκεκριμένη εκλογή των (λ^*, K^*) δίνει την χαμηλότερη τιμή για το ARL_1 , δεδομένου ότι το σ_0 ήταν γνωστό εξαρχής, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς (λ, K) για την δεδομένη ολίσθηση τ και όταν η τιμή για το ARL_0 έχει ορισθεί για 370.4. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι για υπολογιστικούς λόγους η τιμή του λ δεν πρέπει να εκλεγεί πολύ μικρή (σε αυτήν την περίπτωση και η προσέγγιση του ολοκληρώματος αλλά και της Μαρκοβιανής Αλυσίδας δίνουν μη αξιόπιστα αποτελέσματα). Αυτό το γεγονός έχει επισημανθεί σε πολλές ερευνητικές εργασίες και για αυτόν τον λόγο έχει επιλεγεί το $\lambda^* \geq 0.01$.

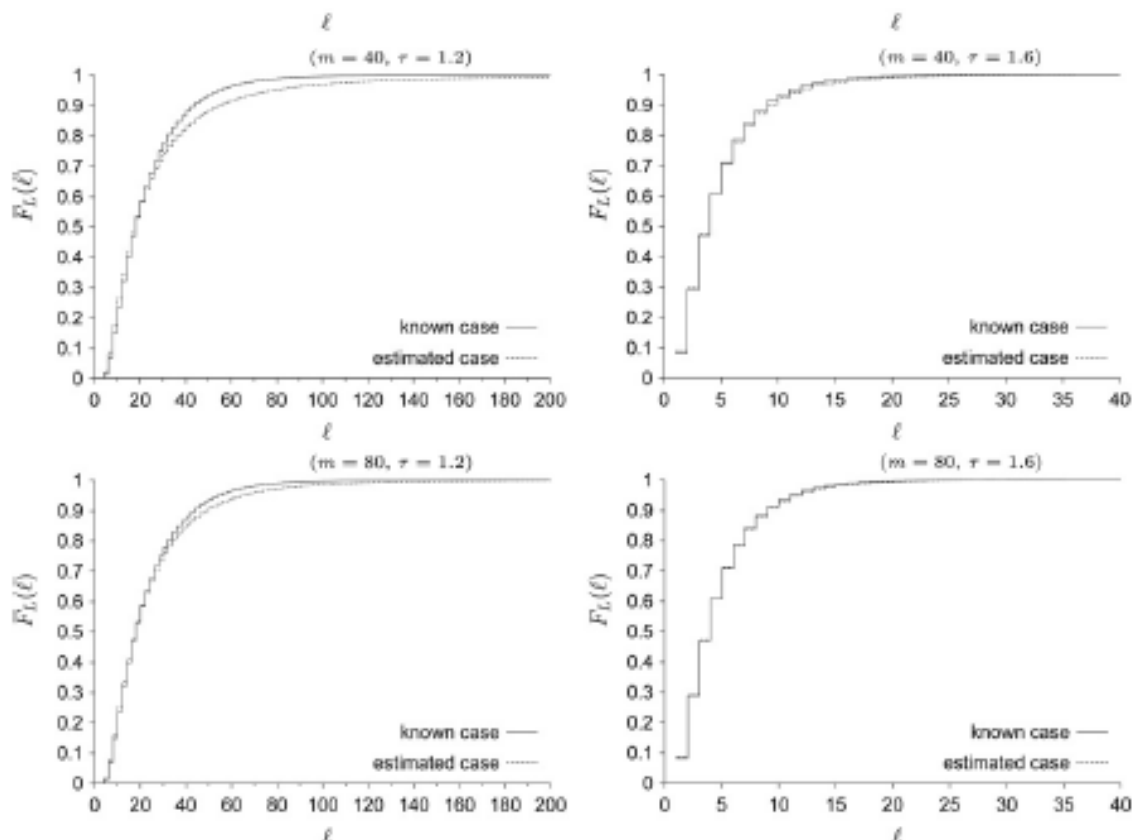
Πίνακας 14: Πίνακας τιμών ARL_1 και $SDRL_1$ για βέλτιστες εκλογές (λ, K)

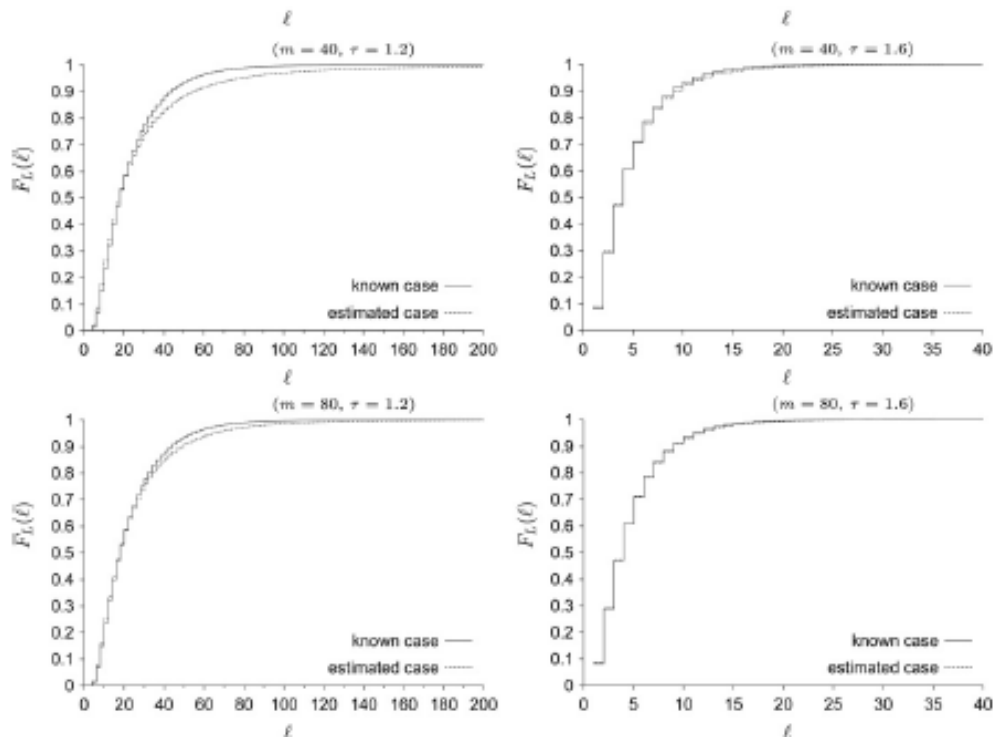
ARL_1 and $SDRL_1$ when $n = 3, 5, 7, 9$ and $m = 10, 20, 40, 80, \infty$.

τ	(λ^*, K^*)	$m = \infty$	$m = 10$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 80$
$n = 3$						
1.10	(0.010, 0.446)	(96.9, 91.4)	(183 844.1, 183 838.8)	(597.8, 592.4)	(184.6, 179.1)	(128.3, 122.8)
1.20	(0.010, 0.446)	(40.9, 35.9)	(1798.1, 1793.3)	(97.2, 92.3)	(56.8, 51.8)	(47.4, 42.4)
1.40	(0.147, 1.211)	(15.1, 12.4)	(31.3, 28.6)	(19.6, 16.9)	(17.0, 14.2)	(16.0, 13.2)
1.60	(0.474, 1.408)	(8.2, 6.8)	(11.2, 9.8)	(9.4, 8.0)	(8.7, 7.4)	(8.5, 7.1)
1.80	(0.566, 1.414)	(5.4, 4.3)	(6.3, 5.3)	(5.8, 4.7)	(5.6, 4.5)	(5.5, 4.4)
$n = 5$						
1.10	(0.010, 0.636)	(58.6, 51.1)	(604 394.1, 647 755.0)	(332.1, 324.8)	(103.5, 96.1)	(74.5, 67.1)
1.20	(0.013, 0.705)	(22.6, 16.4)	(541.2, 535.2)	(38.4, 32.3)	(27.5, 21.4)	(24.6, 18.5)
1.40	(0.219, 1.683)	(8.4, 5.9)	(11.6, 9.1)	(9.5, 7.1)	(8.9, 6.5)	(8.6, 6.2)
1.60	(0.487, 1.782)	(4.7, 3.4)	(5.3, 4.0)	(5.0, 3.7)	(4.8, 3.5)	(4.7, 3.4)
1.80	(0.616, 1.784)	(3.1, 2.2)	(3.4, 2.4)	(3.3, 2.3)	(3.2, 2.2)	(3.2, 2.2)
$n = 7$						
1.10	(0.010, 0.750)	(42.5, 33.9)	(376 390.4, 602 699.2)	(199.7, 191.4)	(68.1, 59.7)	(51.6, 43.2)
1.20	(0.056, 1.421)	(16.3, 11.2)	(72.9, 67.8)	(23.0, 17.9)	(18.7, 13.6)	(17.4, 12.3)
1.40	(0.304, 1.927)	(6.0, 4.0)	(7.4, 5.4)	(6.6, 4.6)	(6.3, 4.3)	(6.2, 4.2)
1.60	(0.552, 1.966)	(3.4, 2.3)	(3.7, 2.6)	(3.5, 2.4)	(3.5, 2.3)	(3.4, 2.3)
1.80	(0.690, 1.963)	(2.3, 1.5)	(2.4, 1.6)	(2.4, 1.6)	(2.4, 1.5)	(2.3, 1.5)
$n = 9$						
1.10	(0.010, 0.830)	(34.0, 24.9)	(93 634.3, 342 261.84)	(128.2, 119.3)	(49.8, 40.7)	(39.8, 30.7)
1.20	(0.091, 1.724)	(13.1, 8.7)	(31.6, 27.2)	(16.8, 12.3)	(14.5, 10.1)	(13.7, 9.3)
1.40	(0.377, 2.063)	(4.8, 3.1)	(5.6, 3.9)	(5.1, 3.4)	(5.0, 3.3)	(4.9, 3.2)
1.60	(0.613, 2.077)	(2.7, 1.8)	(2.9, 1.9)	(2.8, 1.8)	(2.8, 1.8)	(2.8, 1.8)
1.80	(0.760, 2.069)	(1.9, 1.2)	(2.0, 1.2)	(1.9, 1.2)	(1.9, 1.2)	(1.9, 1.2)

Η τρίτη στήλη του πίνακα παρουσιάζει τα ARL_1 και $SDRL_1$ για σ_0 εξαρχής γνωστό. Οι υπόλοιπες στήλες (4-7) παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για ARL_1 και $SDRL_1$ όταν η μεταβλητότητα θα πρέπει να εκτιμηθεί. Θα πρέπει να εξετασθεί ότι τα αποτελέσματα στις στήλες 4-7 υπολογίστηκαν για τους δεδομένους συνδυασμούς των (λ^*, K^*) οι οποίοι αναφέρονται στην δεύτερη στήλη. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί στον πίνακα οι τιμές των ARL_1 και $SDRL_1$ είναι πολύ μεγάλες στην περίπτωση για $\tau=1.1$ και $m=10$ και πράγματι διαφέρουν από τις αντίστοιχες τιμές τους για την περίπτωση $m=\infty$ (π.χ. το σ_0 γνωστό). Φυσικά όπως διαισθητικά αναμένεται η διαφορά ανάμεσα στις τιμές της ARL_1 σε σχέση με το εκτιμώμενο και το γνωστό σ_0 μειώνονται καθώς το m αυξάνεται για κάθε συγκεκριμένη ολίσθηση. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για τις τιμές του $SDRL_1$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές ολισθήσεων ($\tau \geq 1.8$) η διαφορά γίνεται αμελητέα, ακόμα και για μικρές τιμές των m και n . Είναι επίσης προφανές ότι η διαφορά μειώνεται καθώς το n αυξάνεται. Ένα αξιοσημείωτο σχόλιο σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 14 είναι ότι καθώς η ολίσθηση αυξάνει για ένα δεδομένο n , με τον ίδιο τρόπο μετακινείται και το λ^* , κρατώντας υπόψη ότι το βέλτιστο λ^* και K^* σχετίζονται με το διάγραμμα με γνωστές παραμέτρους. Αυτό το αποτέλεσμα επικυρώνει τα πολύ γνωστά συμπεράσματα ότι μικρές τιμές του λ χρειάζονται για να ανιχνεύσουν μικρές ή μεσαίες ολισθήσεις και μεγάλες τιμές του λ πρέπει να χρησιμοποιηθούν για μεγάλες ολισθήσεις όταν οι παράμετροι της διεργασίας είναι γνωστές.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζουμε την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_L(l)$ της RL με L για $n=5$, $t= 1.2, 1.6$ και για τις δύο περιπτώσεις γνωστών παραμέτρων ($m=\infty$) και εκτιμώμενων για $m=10,20,40,80$. Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας έχει επίσης υπολογισθεί με χρήση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα όταν η μεταβλητότητα αυξάνει, εκτιμώντας την διασπορά καταλήγει στην αρχή σε μεγαλύτερη πιθανότητα για να δώσει σήμα και στην συνέχεια δίνει μικρότερη πιθανότητα για να δώσει σήμα εκτός ελέγχου από ότι στην περίπτωση του να είχαμε γνωστή την διασπορά. Προφανώς το λιγότερο τουλάχιστον $m=80$ δείγματα μεγέθους $n=5$ χρειάζονται για την Φάση 1 έτσι ώστε το διάγραμμα EWMA για την τυπική απόκλιση προσεγγιστικά να πλησιάζει την απόδοση του αντίστοιχου για γνωστή εξαρχής διασπορά. Για άλλα μεγέθη δειγμάτων ο αριθμός αυτών θα πρέπει να μεταβληθεί κατάλληλα (για μικρά n χρειάζονται μεγάλα m και αντίστροφα).





Σχήμα 21: Αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας για $n=5$, $m=20,30,40,80,\infty$ και $\tau=1.2, 1.6$

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τις τιμές των ARL_1 και $SDRL_1$ για $m=10,20,40,80$, $n=3,5,7,9$ και $\tau=1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ για τις βέλτιστες παραμέτρους λ^* και K^* για κάθε περίπτωση. Για παράδειγμα όταν το $n=5$, $m=40$ και $\tau=1.4$ παρατηρούμε ότι οι βέλτιστες τιμές είναι $\lambda^*=0.152$ και $K^*=1.416$ και για αυτές τις τιμές υπολογίζουμε $ARL_1=7.4$ και $SDRL_1=5.0$. Παρατηρήστε ότι η τιμή $ARL_0=370.4$ για όλες τις εισόδους στον πίνακα και η αρχική τιμή Z_0 έχει τεθεί ίση με μηδέν. Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι το λ^* αυξάνει καθώς το m αυξάνει εκτός από την περίπτωση για $\tau=1.2$ όπου το λ^* είναι σχεδόν σταθερό και παντού ίσο με 0.01 εξαιτίας της δέσμευσης που είχε επιβληθεί για $\lambda^*\geq 0,01$. Επιπρόσθετα το λ^* γίνεται μεγαλύτερο καθώς η ολίσθηση αυξάνει εκτός από τους συνδυασμούς με μικρές τιμές για n , m και τ . Το K^* προσαρμόζει την συμπεριφορά του λ^* δεδομένου αυξάνει καθώς το m αυξάνει. Επιπλέον καθώς το τ αυξάνει το ίδιο συμβαίνει και για το K^* εκτός από λίγες εξαιρέσεις για $\tau=2$.

Βοηθητικά για μηχανικούς που θα εφαρμόσουν τον έλεγχο από το ανάλογο διάγραμμα $EWMA$ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για μικρές έως μεσαίες διολισθήσεις ($\tau\leq 1.4$) το λ^* θα πρέπει να είναι μικρότερο από 0.35 και αν $n\leq 5$ τότε η παράμετρος λ^* θα πρέπει να είναι χαμηλότερα από 0.2. Για το λ^* τιμή μικρότερη του 0.1 θα πρέπει να εκλεγεί για μικρές ολισθήσεις. Για όλες τις άλλες περιπτώσεις η παράμετρος λ^* ποικίλλει μεταξύ

0.01 έως 0.9 με μεγαλύτερες τιμές να αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες διολισθήσεις. Από την άλλη πλευρά η παράμετρος K^* βρίσκεται μεταξύ 0.2 και 2 αλλά η παράμετρος τείνει να συγκλίνει γρήγορα σε μεγαλύτερες τιμές. Τιμές χαμηλότερες από την μονάδα θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μόνο για μικρές ολισθήσεις ή μεσαίες ολισθήσεις με μικρό αριθμό δειγμάτων m .

Πίνακας 15: Πίνακας τιμών ARL_1 και $SDRL_1$ για βέλτιστες εκλογές (λ^*, K^*)

<i>ARL₁ and SDRL₁ when n = 3, 5, 7, 9 and m = 10, 20, 40, 80.</i>				
τ	$m = 10$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 80$
<i>n = 3</i>				
1.2	(0.010, 0.233) (22.0, 20.0)	(0.010, 0.310) (29.0, 26.0)	(0.010, 0.367) (34.2, 30.4)	(0.010, 0.404) (37.3, 33.0)
1.4	(0.010, 0.233) (8.3, 6.5)	(0.010, 0.310) (10.9, 8.3)	(0.061, 0.808) (12.8, 10.0)	(0.103, 1.035) (13.9, 11.1)
1.6	(0.257, 0.917) (5.0, 3.9)	(0.365, 1.176) (6.3, 5.1)	(0.420, 1.297) (7.2, 5.9)	(0.447, 1.353) (7.7, 6.3)
1.8	(0.358, 1.000) (3.6, 2.7)	(0.469, 1.218) (4.3, 3.3)	(0.519, 1.319) (4.8, 3.8)	(0.543, 1.367) (5.1, 4.0)
2.0	(0.420, 1.037) (2.9, 2.0)	(0.533, 1.237) (3.3, 2.5)	(0.583, 1.329) (3.6, 2.7)	(0.606, 1.373) (3.8, 2.9)
<i>n = 5</i>				
1.2	(0.010, 0.316) (13.1, 10.7)	(0.010, 0.422) (16.3, 12.8)	(0.010, 0.508) (18.9, 14.4)	(0.010, 0.564) (20.5, 15.3)
1.4	(0.010, 0.316) (5.2, 3.3)	(0.085, 1.053) (6.5, 4.2)	(0.152, 1.416) (7.4, 5.0)	(0.186, 1.559) (7.8, 5.4)
1.6	(0.292, 1.259) (3.3, 2.2)	(0.395, 1.542) (3.9, 2.7)	(0.443, 1.667) (4.3, 3.0)	(0.465, 1.725) (4.4, 3.2)
1.8	(0.423, 1.371) (2.4, 1.5)	(0.529, 1.595) (2.7, 1.8)	(0.574, 1.693) (2.9, 2.0)	(0.595, 1.740) (3.0, 2.1)
2.0	(0.519, 1.428) (2.0, 1.2)	(0.622, 1.618) (2.1, 1.4)	(0.666, 1.703) (2.3, 1.5)	(0.687, 1.743) (2.3, 1.5)
<i>n = 7</i>				
1.2	(0.010, 0.361) (9.6, 7.2)	(0.010, 0.482) (11.8, 8.2)	(0.010, 0.585) (13.6, 9.0)	(0.023, 0.943) (15.0, 9.9)
1.4	(0.078, 0.916) (4.1, 2.4)	(0.192, 1.510) (4.9, 3.0)	(0.249, 1.737) (5.5, 3.5)	(0.277, 1.836) (5.7, 3.8)
1.6	(0.370, 1.501) (2.6, 1.6)	(0.469, 1.754) (3.0, 1.9)	(0.512, 1.864) (3.2, 2.1)	(0.533, 1.916) (3.3, 2.2)
1.8	(0.516, 1.603) (1.9, 1.1)	(0.613, 1.797) (2.1, 1.3)	(0.653, 1.883) (2.2, 1.4)	(0.673, 1.924) (2.3, 1.4)
2.0	(0.633, 1.655) (1.6, 0.8)	(0.722, 1.816) (1.7, 1.0)	(0.760, 1.888) (1.7, 1.0)	(0.777, 1.922) (1.8, 1.1)
<i>n = 9</i>				
1.2	(0.010, 0.390) (7.8, 5.4)	(0.010, 0.522) (9.6, 6.0)	(0.027, 0.980) (11.1, 6.8)	(0.059, 1.422) (12.1, 7.7)
1.4	(0.188, 1.351) (3.5, 2.0)	(0.284, 1.744) (4.1, 2.5)	(0.332, 1.913) (4.4, 2.8)	(0.354, 1.990) (4.6, 2.9)
1.6	(0.441, 1.666) (2.2, 1.3)	(0.535, 1.889) (2.5, 1.5)	(0.576, 1.987) (2.6, 1.6)	(0.595, 2.033) (2.7, 1.7)
1.8	(0.605, 1.757) (1.7, 0.9)	(0.690, 1.924) (1.8, 1.0)	(0.727, 1.999) (1.8, 1.1)	(0.744, 2.035) (1.9, 1.1)
2.0	(0.737, 1.798) (1.4, 0.7)	(0.812, 1.935) (1.4, 0.7)	(0.845, 1.997) (1.5, 0.8)	(0.861, 2.026) (1.5, 0.8)

3.1.6. Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

Με στόχο να επιδειχθούν οι δυνατότητες του διαγράμματος $EWMA \ln(S^2)$ θεωρούμε τον σχεδιασμό μιας διεργασίας με σκοπό την παρακολούθηση της μεταβλητότητας στα επίπεδα γεμίσματος ενός δοχείου (κυπέλλου) με γιαούρτι. Σημαντική παράμετρο για την διεργασία είναι οι τυπικές αποκλίσεις της διαδικασίας στο επίπεδο γεμίσματος από μία επιθυμητή μέση τιμή $\mu_0=125\text{gr}$. Θέλουμε να παρακολουθήσουμε την διάχυση της

διεργασίας με χρήση ενός διαγράμματος $EWMA \ln(S^2)$. Επίσης προτείνεται η παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας χρησιμοποιώντας την κλασσική μέθοδο $EWMA$. Τα δεδομένα στην Φάση 1 της διεργασίας που χρησιμοποιούνται σε αυτό το παράδειγμα αποτελούνται από $m=10$ υπο-ομάδες με μέγεθος $n=5$ οι οποίες σχεδιάζονται στο αριστερό τμήμα του επόμενου σχήματος με χρήση του συμβόλου 'ο'. Από τα δεδομένα από την φάση 1 εξάγουμε ότι $\mu_0=124,982$ και $\sigma_0^2=0,0766$. Εάν η εκτιμώμενη διασπορά είναι γνωστή αποτελώντας μία μη πολωμένη εκτιμήτρια για την σ_0^2 . Η δεδομένη εκτίμηση αποτελεί μία πολωμένη εκτιμήτρια της διασποράς. Μία μη πολωμένη εκτιμήτρια σ_0 είναι γνωστή ότι μπορεί να προκύψει με χρήση του τύπου:

$$\hat{\sigma}_0/c_4(n),$$

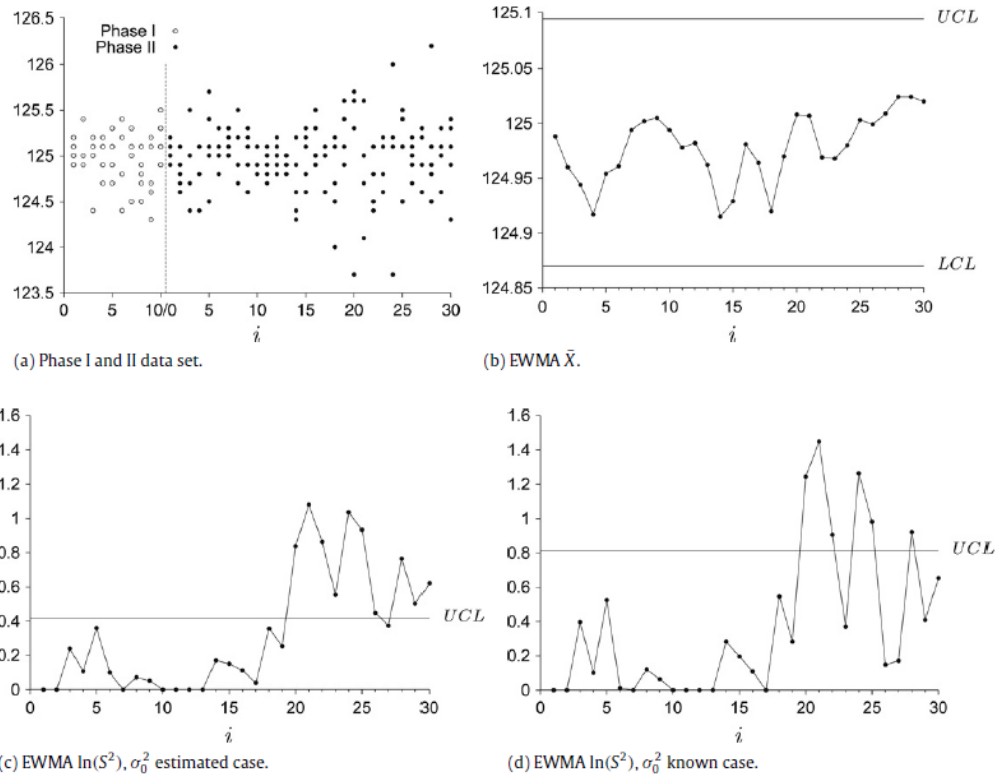
όπου η σταθερά $c_4(n)$ ισούται με:

$$c_4(n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση $c_4(5)=0.94$ και μία μη πολωμένη εκτιμήτρια για το $\sigma_0=0.294$. Όσον αφορά στην κλασσική $EWMA \bar{X}$, έχει επιλεγεί η βέλτιστη παράμετρος $\lambda^*=0.106$ και $K^*=0.380$ για διάγραμμα βέλτιστα σχεδιασμένα να ανιχνεύει μία τυπική μέση ολίσθηση $|\mu_0-\mu_1|/\sigma_0=0.5$ όταν η εντός ελέγχου $ARL=370.4$. Αυτό καταλήγει στα παρακάτω όρια για την κλασσική $EWMA$:

$LCL=124.982-0.380 \times 0.294=124.82$ και $UCL=124.982+0.380 \times 0.294=125.094$ όσον αφορά στην $EWMA \ln(S^2)$ έχουν επιλεγεί τα ακόλουθα:

- Οι βέλτιστες παράμετροι $\lambda^*=0.292$ και $K^*=1.259$ οι οποίες επιλέχθηκαν για να ανιχνεύσουν μία ολίσθηση $\tau=1.6$ όταν το σ_0 αποτελεί εκτίμηση από συλλογή δεδομένων στην Φάση 1 που οργανώθηκαν σε $m=10$ υπο-ομάδες των $n=5$ δειγμάτων. Αυτή η επιλογή εγκαθιστά άνω όριο για την $EWMA \ln(S^2)$ μέθοδο στο επίπεδο $UCL=0.418$.
- Οι βέλτιστες παράμετροι $\lambda^*=0.487$ και $K^*=1.782$ οι οποίες βέλτιστα επελέγησαν για να ανιχνεύσουν μία ολίσθηση $\tau=1.6$ όταν το σ_0 υποτίθεται ότι είναι εξαρχής γνωστό. Αυτό εγκαθιστά για την $EWMA \ln(S^2)$ μέθοδο ένα άνω όριο στο επίπεδο $UCL=0.812$.



Σχήμα 22: Δείγματα από τις Φάσεις 1 και 2 της διεργασίας. Διαγράμματα ελέγχου *EWMA*

\bar{X} και *EWMA* $\ln(S^2)$

Για την Φάση 2 τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το παράδειγμα αποτελούνται από υπο-ομάδες $m=30$ των $n=5$ δειγμάτων όπως αυτά σχεδιάζονται στο δεξιό τμήμα του σχήματος 14 όπου οι τρέχουσες τιμές συμβολίζονται με 'ο'. Οι πρώτες 15 υπο-ομάδες υποτίθενται ότι παραμένουν εντός ελέγχου ενώ οι τελευταίες 15 υπο-ομάδες υποτίθενται ότι έχουν μία μεγαλύτερη μεταβλητότητα και καταλήγουν να είναι εκτός ελέγχου. Στο σχήμα σχεδιάστηκε και το κλασικό διάγραμμα *EWMA* της μέσης τιμής που αντιστοιχεί στα δεδομένα που συλλέχθηκαν στην Φάση 2. Όπως μπορούμε να δούμε δεν υπάρχει κανένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου σε όρους μέσης εκτίμησης το σύστημα θεωρείται ότι είναι εντός ελέγχου. Στα τμήματα του σχήματος 22(c-d) σχεδιάζεται το *EWMA* $\ln(S^2)$ διάγραμμα ελέγχου που και αυτό αντιστοιχεί στα δείγματα κατά την Φάση 2 της διεργασίας. Στο σχήμα (c) χρησιμοποιήθηκαν οι βέλτιστες παράμετροι $\lambda^*=0.292$, $K^*=1.259$ και όριο ελέγχου $UCL=0.418$ όπως υπολογίστηκε προηγουμένως για την τυπική απόκλιση η οποία εκτιμήθηκε (δεν ήταν γνωστή εξ αρχής), ενώ στο σχήμα (d) χρησιμοποιήσαμε τις βέλτιστες παραμέτρους $\lambda^*=0.487$, $K^*=1.782$ και όριο ελέγχου

$UCL=0.812$ όπως καθορίστηκε από τους παραπάνω υπολογισμούς για τυπική απόκλιση η οποία είναι εξαρχής γνωστή. Και στις δύο περιπτώσεις τα διαγράμματα ελέγχου σηματοδοτούν αρκετές φορές για καταστάσεις εκτός ελέγχου (η πρώτη περίπτωση για την 20^η υπο-ομάδα). Αλλά σε αυτό το παράδειγμα θα πρέπει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα ελέγχου $EWMA \ln(S^2)$ στο σχήμα (c) ανιχνεύει πιο συστηματικά καταστάσεις εκτός ελέγχου από ότι η ίδια μέθοδος στο διάγραμμα (d) στο οποίο αφήνει μερικά σημεία κάτω από το άνω όριο ελέγχου, μη ανιχνεύοντας έτσι αυτά τα σημεία ως εν δυνάμει πιθανούς κινδύνους εκτός ελέγχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βελτίωση των μετρικών απόδοσης της τεχνικής *EWMA* με χρήση ειδικών μεθόδων δειγματοληψίας από την διεργασία προς έλεγχο

4.1. Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την επίδραση της διαδικασίας δειγματοληψίας στις μετρικές απόδοσης του *EWMA* διαγράμματος ελέγχου. Ένα διάγραμμα ελέγχου αποτελεί ένα γραφικό εργαλείο για την παρακολούθηση μιας διαδικασίας παραγωγής και την βελτίωση της ποιότητας αυτής. Η εμπειρία από την μελέτη των μεθόδων έχει δείξει ότι τα διαγράμματα Shewart είναι κυρίως ευαίσθητα σε μεγάλες διολισθήσεις της διεργασίας, ενώ για την έγκαιρη ανίχνευση μικρών διολισθήσεων τα διαγράμματα *CUSUM* καθώς και τα διαγράμματα *EWMA* είναι προτιμότερα. Για την περαιτέρω επέκταση των διαγραμμάτων *EWMA* με στόχο την έγκαιρη ανίχνευση αλλαγών που συντελούνται στην διεργασία, θα εξετασθεί η τεχνική *EWMA* σε συνδυασμό διαδικασιών δειγματοληψίας για την λήψη και κατηγοριοποίηση δειγμάτων (sub-grouping) από την διεργασία. Οι διαδικασίες δειγματοληψίας αναφέρονται στις μεθόδους καταταγμένης δειγματοληψίας μέσου (median ranked sampling - RSS), κατάταξης μέσου διπλής δειγματοληψίας (median double RSS) και διπλή δειγματοληψία μέσου (double median RSS). Τα ευρήματα δείχνουν ότι οι προτεινόμενες κατατάξεις μέσου αυξάνουν ουσιαστικά την ευαισθησία των διαγραμμάτων *EWMA*. Αυτά τα διαγράμματα νέου τύπου, επιδρούν σημαντικά στην παράμετρο μήκους ροής, στην Μέση Τετραγωνική Απώλεια (Average Extra Quadratic Loss - AEQL), και στον Δείκτη Σύγκρισης Απόδοσης (Performance Comparison Index - PCI). Οι παραλλαγές δειγματοληψίας συμπεριλαμβάνουν κλασσικά διαγράμματα *EWMA*, διαγράμματα *EWMA* εμπλουτισμένα με το χαρακτηριστικό της Γρήγορης Αρχικής Απόκρισης (*FIR*), διπλά και τριπλά

διαγράμματα *EWMA*, διαγράμματα *EWMA* που επηρεάζονται από δυναμικούς κανόνες κατά την διάρκεια εκτέλεσης (runs-rules *EWMA*), διαγράμματα μέγιστης *EWMA* για την μέση τυπική απόκλιση της διεργασίας (max *EWMA* with mean-squared deviation), διαγράμματα μικτού τύπου *CUSUM-EWMA* (mixed *EWMA-CUSUM*), διαγράμματα υβριδικής *EWMA* (hybrid *EWMA*) και τέλος συνδυαστικά διαγράμματα *Shewart-EWMA* βασισμένα σε κατάταξη των δειγμάτων (combined *Shewart-EWMA* based on ranks). Η εφαρμογή αυτών των διαγραμμάτων αφορά σε πραγματικά δείγματα διεργασιών, διότι στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιαστεί παράδειγμα εφαρμογής των μεθόδων επί πραγματικών δεδομένων.

4.1.1. Μέθοδοι Δειγματοληψίας Διεργασιών

Μέθοδος RSS

Η μέθοδος RSS προτάθηκε από τον McIntyre για την εκτίμηση των μέσων ενός πληθυσμού, βασισμένη στην ακόλουθη διεργασία:

Βήμα 1: Τυχαία επιλογή ενός δείγματος διαστάσεων n^2 από την διεργασία στόχο.

Βήμα 2: Χωρισμός των δειγμάτων σε n σύνολα, όπου το καθένα έχει πλήθος n .

Βήμα 3: Κατάταξη των δειγμάτων κάθε συνόλου με οπτικό έλεγχο ή κάποια λιγότερο ευαίσθητη μέθοδο (χωρίς ακριβείς μετρήσεις), ως προς την μεταβλητή κατάταξης που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 4: Διαλέγουμε το μικρότερο δείγμα κατάταξης από το πρώτο σύνολο, το δεύτερο μικρότερο δείγμα από το δεύτερο σύνολο κατάταξης, κ.ο.κ. μέχρι να καταλήξουμε στο μεγαλύτερο κατηγοριοποιημένο δείγμα από το τελευταίο σύνολο.

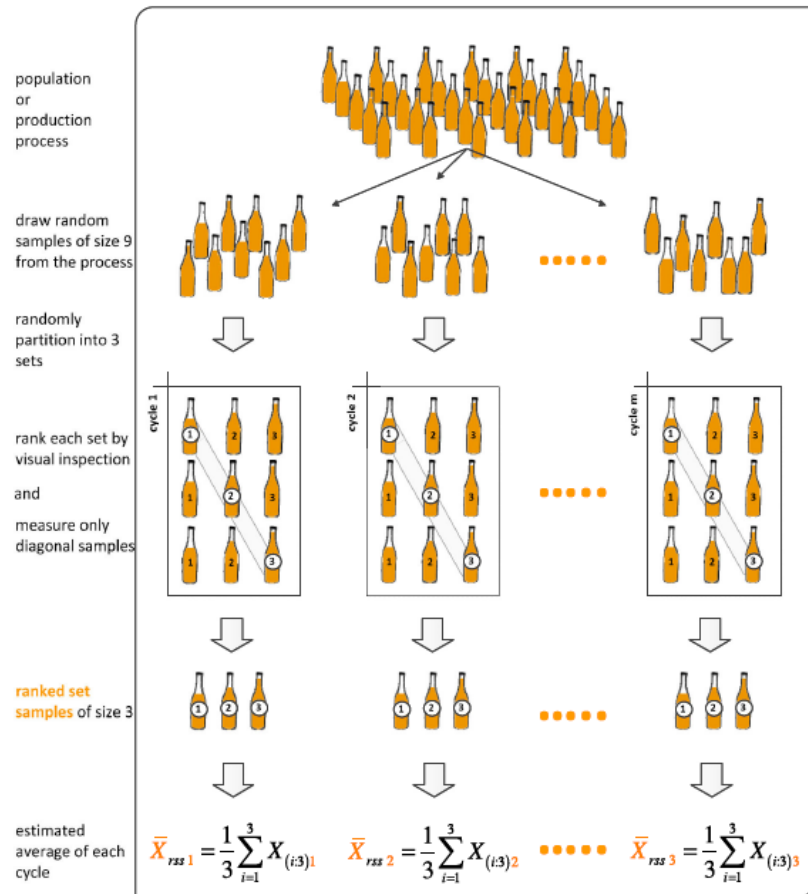
Βήμα 5: Ο παραπάνω κύκλος μπορεί να επαναληφθεί μέχρι και m -φορές έτσι ώστε συνολικά να προκύψει ένα σύνολο διάστασης nm από RSS δεδομένα.

Για να παρουσιαστεί πως η μέθοδος κατάταξης RSS μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την συλλογή ενός καλύτερα αντιπροσωπευτικού συνόλου δειγμάτων από μία διεργασία, μπορούμε να θεωρήσουμε για παράδειγμα το επίπεδο (στάθμη) γεμίματος ενός δοχείου (μπουκαλιού), όπου το χαρακτηριστικό ποιότητας το οποίο μας ενδιαφέρει, είναι ο όγκος του περιεχόμενου υγρού. Το υγρό σε αυτήν την περίπτωση μπορεί για παράδειγμα να είναι

μεταλλικό νερό, αναψυκτικό, χυμός, ελαιόλαδο, φαρμακευτικό σιρόπι, κλπ. Θεωρώντας ένα σύνολο με διάσταση τριών δειγμάτων, τυχαία επιλέγουμε 9 δείγματα από μία διεργασία και χωρίζουμε αυτά σε 3 σύνολο το καθένα εκ των οποίων έχει τρία μέλη, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί. Στην συνέχεια κατηγοριοποιούμε οπτικά τα μπουκάλια κάθε συνόλου, βασιζόμενοι στο επίπεδο του περιεχόμενου υγρού, και τα δείγματα της διαδικασίας RSS είναι τελικά το σύνολο των διαγωνίων μπουκαλιών σε κάθε κύκλο επανάληψης της διαδικασίας όπως παρουσιάζεται στο σχήμα. Συνθέτουμε κατά τον τρόπο αυτό το μέσο δείγματος από τα 3 μπουκάλια και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία m φορές. Χρησιμοποιούμε τον εκτιμώμενο μέσο για να προκύψει το στατιστικό δείγμα του στατιστικού ελέγχου.

Μπορούν να βρεθούν πολλές εφαρμογές όπου η παραπάνω διαδικασία RSS έχει ένα σημαντικό ρόλο στην δημιουργία του διαγράμματος ελέγχου. Αυτό μπορεί να αναφέρεται ακόμα και σε ετερογενείς μακροσκοπικά τομείς όπως π.χ. ένα πολυμερές υλικό. Σε ένα πολυμερές υλικό η πυκνότητα του υλικού μπορεί να προκύψει και να κατηγοριοποιηθεί κατατάσσοντας την δύναμη τάνυσης σε μία διεργασία γυαλίσματος, το πάχος φινιρίσματος των οποίων μπορεί να ταξινομηθεί από το συνολικό χρόνο που απαιτείται για να αφαιρεθούν μεγάλα εξογκώματα (για να καταστεί η επιφάνεια του πολυμερούς υλικού λεία).

Έστω $X_{(i:n)j}$ με $i=1,2,\dots,n$ και $j=1,2,\dots,m$ να δηλώνουν το i -τάξης στατιστικό για το i -δείγμα της υπο-ομάδας με διάσταση n στον j -κύκλο επιλογής, οπότε μία μη πολωμένη εκτιμήτρια για την μέση τιμή του πληθυσμού, χρησιμοποιώντας δεδομένα από δειγματοληψία RSS καθορίζεται από την σχέση (από τους Takahasi και Wakimoto):



Σχήμα 23: Παρουσίαση της διαδικασίας Κατάταξης Μέσου Συνόλου (Ranked Set Sampling - RSS) για μία διεργασία με δείγμα $n=3$

$$\bar{X}_{RSSj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i:n)j}$$

και η διασπορά του \bar{X}_{RSSj} να δίνεται από την σχέση::

$$\text{var}(\bar{X}_{RSSj}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{(i:n)j}^2 = \frac{1}{n} \left[\sigma^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_{(i:n)j} - \mu)^2 \right]$$

όπου σ^2 είναι η διασπορά του πληθυσμού και $\mu_{(i:n)}$ αποτελεί την μέση τιμή της i -τάξης το οποίο ορίζεται από την σχέση:

$$\mu_{(i:n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i} f(x) dx$$

όπου $f(x)$ και $F(x)$ είναι η σ.π.π. και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας αντίστοιχα για την διαδικασία δειγματοληψίας.

Μέθοδος MRSS

Η μέθοδος αυτή μελετήθηκε από τον Muttlak για την εκτίμηση της μέσης τιμής ενός πληθυσμού, η οποία μπορεί να προκύψει με την εφαρμογή της ακόλουθης διεργασίας:

Βήμα 1: Επιλέγουμε τυχαία ένα σύνολο n^2 δειγμάτων, από τον πληθυσμό της διεργασίας που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 2: Χωρίζουμε τα δείγματα σε n το πλήθος σύνολα το καθένα εκ των οποίων περιλαμβάνει n δείγματα.

Βήμα 3: Ταξινομούμε τα δείγματα σε κάθε σύνολο με οπτική επισκόπηση ή κάποια απλή μέθοδο σε σχέση με την μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

Βήμα 4: Εάν το πλήθος δειγμάτων που εμφανίζονται σε μία υπο-ομάδα είναι περιττό, επιλέγουμε το μέσο δείγμα από την τρέχουσα κατάταξη, ενώ εάν το πλήθος είναι άρτιο επιλέγουμε τα δύο δείγματα που γειτονεύουν στην μέση θέση από το σύνολο.

Εάν συμβολίσουμε με $X_{i((n+1)/2)}$ το μέσο του i -δείγματος ($i=1,2,\dots,n$) για περιττό πλήθος δειγμάτων στο σύνολο. Για άρτιο πλήθος έστω $X_{i(n/2)}$ και $X_{i((n+2)/2)}$ να δηλώνουν την κατάταξη των $(n/2)$ και $((n+2)/2)$ στατιστικών δειγμάτων για το i -δείγμα όπου $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$ αντίστοιχα. Οι εκτιμήτριες για τους μέσους του πληθυσμού για κάθε j -κύκλο για τις περιπτώσεις περιττού και άρτιου πλήθους αντίστοιχα (ορισμός από τον Muttlak), δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{X}_{mrssj,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i((n+1)/2)j}$$
$$\bar{X}_{mrssj,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} X_{i(n/2)j} + \sum_{i=n/2+1}^n X_{i((n+2)/2)j} \right)$$

Μέθοδος MDRSS

Η διεργασία για την μέθοδο MDRSS, μελετήθηκε από τους Abujiya και Muttlak για την εκτίμηση του μέσου ενός πληθυσμού συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Επιλέγουμε n το πλήθος τυχαία δείγματα το καθένα εκ των οποίων αποτελείται από n^2 το πλήθος μονάδες από τον πληθυσμό στόχο.

Βήμα 2: Εφαρμόζουμε την μέθοδο RSS σε κάθε ένα σύνολο για να προκύψουν n κατηγοριοποιημένα σύνολα το καθένα με πλήθος n -στοιχείων.

Βήμα 3: Εφαρμόζουμε την μεθοδολογία $MRSS$ στα δεδομένα που προκύπτουν από την προηγούμενη εφαρμογή της RSS στο προηγούμενο βήμα.

Βήμα 4: Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m -φορές μέχρις ότου να προκύψουν nm το πλήθος δείγματα από την $MDRSS$ διεργασία.

Έστω $Y_{i((n+1)/2)}$ δηλώνουν τον μέσο στο i -τάξης κατηγοριοποιημένο δείγμα $i=1,2,\dots,n$ όταν η διάσταση του συνόλου είναι περιττή. Για άρτιας διάστασης σύνολο έστω $Y_{i(n/2)}$ και $Y_{i((n+2)/2)}$ να δηλώνουν τα $(n/2)$ και $((n+2)/2)$ τάξης στατιστικό αποτέλεσμα για το i -τάξης κατηγοριοποιημένο σύνολο δειγμάτων για $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$, αντίστοιχα. Οι εκτιμήτριες MDRSS για τους μέσους των πληθυσμών για τον j -τάξης κύκλο που αφορά σε άρτια ή περιττά δείγματα αντίστοιχα, να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{Y}_{mdrssj,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i((n+1)/2)j}$$
$$\bar{Y}_{mdrssj,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} Y_{i(n/2)j} + \sum_{i=n/2+1}^n Y_{i((n+2)/2)j} \right)$$

Μέθοδος DMRSS

Η μέθοδος $DMRSS$ προτάθηκε από τους Abujiya και Muttlak, για την εκτίμηση του μέσου πληθυσμού μπορεί να παρουσιαστεί συνοπτικά στα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Επιλέγουμε n το πλήθος τυχαία δείγματα το καθένα εκ των οποίων αποτελείται από n^2 το πλήθος μονάδες από τον πληθυσμό στόχο.

Βήμα 2: Εφαρμόζουμε την μέθοδο *MRSS* σε κάθε ένα σύνολο για να προκύψουν n κατηγοριοποιημένα σύνολα το καθένα με πλήθος n -στοιχείων.

Βήμα 3: Εφαρμόζουμε την μεθοδολογία *MRSS* στα δεδομένα που προκύπτουν από την προηγούμενη εφαρμογή της *MRSS* στο προηγούμενο βήμα.

Βήμα 4: Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί m -φορές μέχρις ότου να προκύψουν nm το πλήθος δείγματα από την *DMRSS* διεργασία.

Έστω $Y_{i((n+1)/2)}$ δηλώνουν τον μέσο στο i -τάξης κατηγοριοποιημένο δείγμα $i=1,2,\dots,n$ όταν η διάσταση του συνόλου είναι περιττός αριθμός το οποίο για $((n+2)/2)$ τάξης στατιστικό για την i -τάξης *MRSS*. Για άρτιας διάστασης σύνολο έστω $Y_{i(n/2)}$ και $Y_{i((n+2)/2)}$ να δηλώνουν τα $(n/2)$ και $((n+2)/2)$ τάξης στατιστικό αποτέλεσμα για το i -τάξης κατηγοριοποιημένο σύνολο δειγμάτων για $i=1,2,\dots,k=n/2$ και $i=k+1,k+2,\dots,n$, αντίστοιχα. Οι εκτιμήτριες *DMRSS* για τους μέσους των πληθυσμών για τον j -τάξης κύκλο που αφορά σε περιττά ή άρτια δείγματα αντίστοιχα, να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\bar{Y}_{dmrssl,o} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i((n+2)/2)j}^*$$

$$\bar{Y}_{dmrssl,e} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n/2} Y_{i(n/2)j}^* + \sum_{i=n/2+1}^n Y_{i((n+2)/2)j}^* \right)$$

4.1.2. Εφαρμογή των μεθόδων δειγματοληψίας στην κλασική *EWMA*

Το διάγραμμα ελέγχου της κλασικής *EWMA* εισήχθη στην μελέτη της ποιότητας των διεργασιών από τον Roberts για την παρακολούθηση των δειγμάτων της διεργασίας με χρήση ενός σχήματος *SRS*. Η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με χρήση ανεξάρτητων παρατηρήσεων ή λογικών υπο-ομάδων. Έστω $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj}$ για $j=1,2,\dots,m$ να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για υπο-ομάδες διαστάσεως n , για δείγματα μιας διεργασίας που ακολουθεί την Κανονική Κατανομή. Τότε ο μέσος για το j -τάξης δείγμα

$$\bar{X}_{srsj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}$$

είναι κανονικά κατανομημένος με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2/n . Η κλασική μέθοδος *EWMA* για τον έλεγχο της μέσης τιμής μιας διεργασίας βασίζεται στην σχέση:

$$Z_j = \lambda \bar{X}_{srsj} + (1 - \lambda)Z_{j-1}$$

όπου η παράμετρος λ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης με $0 < \lambda \leq 1$ και οι ποσότητες \bar{X}_{srsj} και Z_{j-1} να αντιστοιχούν σε παρούσα και παρελθοντική πληροφορία, αντίστοιχα. Η αρχική τιμή για την Z_j τίθεται ίση με την επιθυμητή μέση τιμή όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου δηλ. $Z_0 = \mu_0$. Δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες τ.μ. η διασπορά της Z_j δίνεται από την σχέση:

$$\text{var}(Z_j) = (\sigma^2/n) \left\{ \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2j}] \right\}$$

όπου για την εφαρμογή, η διασπορά σ^2 θεωρείται γνωστή ή ότι μπορεί να εκτιμηθεί από αρχικά δείγματα της διεργασίας παραγωγής. Έτσι τα άνω και κάτω χρονικά μεταβαλλόμενα όρια για την *EWMA* (*UCL* και *LCL*) ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L(\sigma/\sqrt{n}) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2j}]} \\ LCL &= \mu_0 - L(\sigma/\sqrt{n}) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2j}]} \end{aligned}$$

όπου L είναι ένας πολλαπλασιαστής για τον καθορισμό των ορίων, και η τιμή του οποίου εξαρτάται από την εκλογή της σταθεράς λ και από την επιθυμητή εντός ελέγχου μέση τιμή του μήκους ροής (ARL_0). Τα όρια ελέγχου λαμβάνονται ίσα με την μέση τιμή μ_0 . Καθώς το j λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές ο παράγοντας $(1-(1-\lambda)^{2j})$ τείνει στην μονάδα. Έτσι τα σταθερά *EWMA* όρια ελέγχου, βασίζονται στην ασυμπτωτική τιμή για την τυπική απόκλιση της διεργασίας (Montgomery), και δίνονται από την σχέση:

$$\{UCL, LCL\} = \mu_0 \pm L(\sigma/\sqrt{n}) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Στον ανωτέρω καθορισμό, η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου εάν τα στατιστικά μεγέθη Z_j προκύπτουν εκτός του διαστήματος που ορίζουν τα όρια ελέγχου δηλ. Όταν $Z_j > UCL$ ή $Z_j < LCL$. Αν και μερικοί μελετητές όπως οι Lucas και Saccucci έχουν συστήσει την χρήση των σταθερών ορίων ελέγχου, τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, δεδομένου ότι είναι επιθυμητό ένα πιο ευαίσθητο σχήμα ελέγχου το οποίο έχει πιο στενά όρια κατά την φάση της εκκίνησης του διαγράμματος, επίσης τυγχάνουν διαδεδομένης χρήσης. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν τόσο τα σταθερά όσο και τα χρονικά μεταβλητά όρια ελέγχου για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

4.1.3. Σχεδιασμός ενός συστήματος *EWMA* με χρήση κατηγοριοποίησης μέσου (ranked median)

Στις εφαρμογές, ο υπολογισμός των μέσων κατηγοριοποίησης υπόκειται σε μικρότερο αριθμό λαθών από τον αναλυτικό υπολογισμό, καθώς δεν απαιτεί την ακριβή μέτρηση κάθε ανεξάρτητης παρατήρησης. Επιπροσθέτως, είναι μία μέθοδος ανθεκτική σε «εισβολή» δεδομένων που παίρνουν ακραίες τιμές και έτσι μία ευσταθής εκτιμήτρια μπορεί να προκύψει ακόμα και για τέτοιου τύπου τιμές (Alwan). Για να βελτιωθεί η ευαισθησία της μεθόδου *EWMA* σε μεγαλύτερη κλίμακα διολισθήσεων, προτείνεται η κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου *EWMA* για την παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας, χρησιμοποιώντας κατηγοριοποιήσεις μέσου με την μέθοδο *RSS*. Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι η χρήση των σχημάτων *RSS* και οι σχετιζόμενες με αυτά μεταβολές της μεθόδου έχουν ουσιαστικά βελτιωτική συμπεριφορά για τα διαγράμματα ελέγχου σε σχέση με την παραδοσιακή μέθοδο *SRS* η οποία χρησιμοποιεί μη πλαισιωμένα και ακατηγοριοποίητα δείγματα. (βλέπε Muttlak, AL-Sabah, Abujiya και Muttlak, Al-Sabah, Jafari και Mirkamali, Al Omnari και Haq, Abujiya et al).

Για απλούστευση των συμβολισμών που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, έστω

$$\bar{X}_{\text{median}j} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_{(i:n/2)j}$$

όπου οι εκτιμήτριες του μέσου αφορούν είτε για την *MRSS* είτε για την *MDRSS* και για την *DMRSS* μέσω των προηγούμενων εξισώσεων. Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος στην διεργασία είναι γνωστός αρχικά με τιμή μ_0 , ή ότι μπορεί να εκτιμηθεί από αρχικά δεδομένα εντός ελέγχου της διεργασίας και ότι η διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή και σταθερή. Ακολουθώντας τις κλασσικές ρυθμίσεις για την *EWMA* ορίζεται ένα νέο διάγραμμα *EWMA* ελέγχου. Χρησιμοποιώντας δεδομένα κατηγοριοποιημένα ως προς το μέσο προκύπτει:

$$Z_{(j:n)} = \lambda \bar{X}_{\text{median}j} + (1 - \lambda) Z_{(j-1:n)}$$

με $0 < \lambda \leq 1$ και την διασπορά $Z_{(j:n)}$ ορίζεται από την σχέση:

$$\text{var}(Z_{(j:n)}) = \sigma_{\bar{X}_{\text{median } j}}^2 \left\{ \frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2j} \right] \right\}$$

όπου:

$$\sigma_{\bar{X}_{\text{median } j}}^2 = (1/n^2) \sum_{j=1}^n \sigma_{(i:n/2)j}^2$$

και

$$\sigma_{(i:n/2)j}^2 = \text{var}(X_{(i:n/2)j})$$

να αποτελεί την διασπορά του μέσου i -τάξης για το πρώτη και δεύτερη αντίστοιχα υποομάδα με n το πλήθος δείγματα. Χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση για την μέσης τάξης κατηγοριοποιημένη *EWMA*, μπορούν να οριστούν τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, ως ακολούθως:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma_{\bar{X}_{\text{median}}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2j} \right]}$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma_{\bar{X}_{\text{median}}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2j} \right]}$$

όπου:

$$\sigma_{\bar{X}_{\text{median}}} = (1/n) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{(i:n/2)}^2}$$

και

$$\sigma_{(i:n/2)}^2 = E \left[(X_{(i:n/2)} - E(X_{(i:n/2)}))^2 \right]$$

να είναι η i -τάξης διασπορά για τα ενοποιημένα κατηγοριοποιημένα δεδομένα μέσης τιμής, τα οποία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το γνωστό σχήμα κατηγοριοποιημένων δεδομένων για μία τυπική κανονική κατανομή ή μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης. Το διάγραμμα ελέγχου *EWMA* παράγει σήμα όταν τα στατιστικά $Z_{(j:n)}$ από τα κατηγοριοποιημένα δείγματα εξέλθουν του διαστήματος $[LCL, UCL]$. Η εκλογή για τις παραμέτρους του διαγράμματος L και της παραμέτρου λ , βασίζονται στην επιθυμητή τιμή εντός ελέγχου ARL_0 . Στην συνέχεια παρέχονται τιμές (λ, L) για $ARL_0=200, 370, 500$ για τις μεθόδους *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS*, χρησιμοποιώντας τα χρονικά μεταβαλλόμενα και τα σταθερά όρια. Αυτά τα ζεύγη μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάσεις για άλλες επιλογές των τεχνικών δειγματοληψίας των δεδομένων και για την εντός ελέγχου ARL_0 .

4.1.4. Εξέταση της απόδοσης των προτεινόμενων σχημάτων

Η στατιστική απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου εξετάζεται συχνά χρησιμοποιώντας την παράμετρο του μέσου μήκους ροής (*ARL*), το οποίο αντιπροσωπεύει το μέσο πλήθος δειγμάτων της διεργασίας τα οποία πρέπει να σχεδιασθούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι που να προκύψει ένα σήμα για κατάσταση εκτός ελέγχου της διεργασίας. Η χρήση της τυπικής απόκλισης του *RL* (*SDRL*), συμπληρωματικά με την παράμετρο *ARL* προτείνεται στην βιβλιογραφία. Και οι δύο παράμετροι προσμετρούν την ικανότητα ενός διαγράμματος ελέγχου να ανταποκριθούν σε διολισθήσεις της διεργασίας. Τυπικά η παράμετρος *ARL*, μίας διεργασίας εντός ελέγχου θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη για να αποφευχθούν ανεπιθύμητα σήματα συναγερμού, και ικανοποιητικά μικρή στην περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε φάση εκτός ελέγχου, για να επιτρέψει γρήγορη επανείσοδο της ολίσθησης στην περιοχή εντός ελέγχου. Η παράμετρος *ARL* ενός διαγράμματος *EWMA* μπορεί να επιτευχθεί αριθμητικά, χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων, Μαρκοβιανές Αλυσίδες ή με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Για χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, η προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης δεν είναι εφαρμόσιμη (βλέπε Steiner), οπότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο οι άλλες δύο μέθοδοι. Σε αυτήν την προσέγγιση για το παρόν κεφάλαιο, χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo προσομοίωσης με χρήση ενός αλγόριθμου ο οποίος αναπτύχθηκε με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Fortran. Όμως, δεδομένου οι παράμετροι *ARL* και *SDRL*, μετρούν μόνο την αποτελεσματικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου σε κάποια συγκεκριμένα σημεία, για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ως μετρική απόδοσης την παράμετρο Average Error Quadratic Loss – AEQL, για να μετρήσουμε την συνολική αποτελεσματικότητα των προτεινόμενων τεχνικών και διαγραμμάτων ελέγχου (Reynolds και Stoumbos, Wu et al, Ou et al). Ο δείκτης AEQL βασίζεται στην τετραγωνική συνάρτηση απωλειών, ως ένα μέτρο των προσδοκώμενων απωλειών η οποία προέρχεται από «φτωχή» ποιότητα στην απόδοση της διεργασίας (Wu et al). Όσο μικρότερη είναι η τιμή του δείκτη AEQL, τόσο καλύτερη η απόδοση του διαγράμματος στην ανίχνευση των αλλαγών στην διεργασία και αντιστρόφως.

Η μελέτη της παραμέτρου *ARL* προϋποθέτει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου με τιμή μέσου μ_0 και τυπική απόκλιση σ_0 , ενώ σε κάποιο χρονικό σημείο η διεργασία μπορεί

να περιέλθει σε κατάσταση εκτός ελέγχου με μία ολίσθηση της μέσης της τιμής από μ_0 σε τιμή $\mu_{out}=\mu_0+\delta(\sigma_0/n^{0.5})$ (Βλέπε Montgomery). Για τον υπολογισμό της παραμέτρου ARL του προτεινόμενου διαγράμματος $EWMA$ με κατηγοριοποίηση μέσου, υποθέτουμε ότι η διεργασία ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με μέση τιμή $\mu_0=0$ και διασπορά $\sigma_0^2=1$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας), όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Χρησιμοποιώντας ένα μέγεθος υπο-ομάδας με $n=5$, έγινε προσομοίωση 100,000 επαναλήψεων χρησιμοποιώντας διαφορετικούς συνδυασμούς των L και λ για κάθε μέση ολίσθηση, $\delta=n^{0.5}(\mu_{out}-\mu_0)/\sigma_0$, υποθέτοντας τέλεια (χωρίς σφάλματα) κατηγοριοποίηση. Μία εντός ελέγχου διεργασία χαρακτηρίζεται από $\delta=0$ ενώ όταν $\delta>0$ η διεργασία χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου. Η εντός ελέγχου παράμετρος ARL_0 για τα τρία προτεινόμενα σχήματα έχει τεθεί σε τιμές 200, 370 και 500. Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες τιμές για τον υπολογισμό της παραμέτρου $AEQL$ με αριθμητική ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση υπολογισμού (βλέπε Reynolds και Stoumbos, Wu et al):

$$AEQL = \frac{1}{\delta_{\max} - \delta_{\min}} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \delta^2 ARL(\delta) d\delta$$

όπου $ARL(\delta)$ είναι η τιμή της παραμέτρου ARL για ένα διάγραμμα ελέγχου με παράμετρο δ , όπου δ_{\min} και δ_{\max} είναι το κάτω και το άνω όριο αντίστοιχα για την ολίσθηση της διεργασίας. Οι προκύπτουσες τιμές για τις παραμέτρους ARL , $SDRL$ και $AEQL$ για τα προτεινόμενα σχήματα $EWMA$, για περιοχή ολίσθησης $0 \leq \delta \leq 2$, χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου δίνονται στους πίνακες που ακολουθούν. Για επαλήθευση των αλγορίθμων προσομοιώσεων Monte CARLO, τα αποτελέσματα για τις παραμέτρους ARL και $SDRL$ επαληθεύτηκαν για όρια ελέγχου σταθερά ή χρονικά μεταβαλλόμενα και τα αποτελέσματα βρέθηκαν σε συμφωνία με τα αντίστοιχα παραγόμενα από τους Lucas και Saccucci και από τον Steiner. Για λόγους σύγκρισης, επιπλέον υπολογίστηκαν οι παράμετροι ARL , $SDRL$ και $AEQL$ για τα προτεινόμενα $EWMA$ σχήματα χρησιμοποιώντας όρια ελέγχου για $ARL_0=500$, και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα IV. Επιπλέον, παρέχονται οι εκτιμήσεις στον πίνακα V για τα σημεία που αντιστοιχούν στο 10, 50 και 90% για την κατανομή των μηκών (RL) για τα προτεινόμενα σχήματα με κατηγοριοποίηση μέσου.

Βασισμένοι στα αποτελέσματα που συνοψίζονται στους πίνακες, περιγράφονται συνοπτικά τα ευρήματα για τα προτεινόμενα σχήματα ελέγχου $EWMA$ με κατηγοριοποίηση μέσου:

- (1). Η μέθοδος *EWMA* είναι πολύ ευσταθής σε κατηγοριοποιημένα δεδομένα υπό την έννοια ότι δεν αυξάνει το ρυθμό λανθασμένων συναγερμών σε μία διεργασία η οποία βρίσκεται υπό έλεγχο, σε αντίθεση με τα διαγράμματα ελέγχου *Shewart*. Για παράδειγμα βλέπε τις τιμές ARL_0 για τιμές εντός ελέγχου για διάγραμμα *Shewart* το οποίο βασίζεται σε κατηγοριοποιημένα δεδομένα από τους *Muttlak* και *Al-Sabah* και τους *Abujya* και *Muttlak*.
- (2). Όλες οι προτεινόμενες μέθοδοι ανιχνεύουν αποδοτικά πολύ μικρές, μεσαίας κλίμακας και μέχρι κάποιο όριο μεγάλες μεταβολές στην μέση τιμή της διεργασίας. (βλέπε πίνακες).
- (3). Οι τιμές για την παράμετρο *SDRL* για όλες τις μεθόδους είναι σχεδόν οι ίδιες με αυτές που αντιστοιχούν στην παράμετρο *ARL* όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου..
- (4). Καθώς η διεργασία περιέρχεται σε εκτός ελέγχου κατάσταση ($\delta > 0$) οι τιμές των *ARL* και *SDRL* μειώνονται απότομα για όλα τα προτεινόμενα σχήματα.
- (5). Τα σημεία που αντιστοιχούν σε ποσοστάσεις (%) για την κατανομή της παραμέτρου *RL* δεικνύουν ότι τα προτεινόμενα σχήματα ελέγχου έχουν κατανομές *RL* οι οποίες τείνουν να έχουν εξάπλωση προς τα δεξιά.
- (6). Τα προτεινόμενα *EWMA* σχήματα με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια έχουν ανώτερη ικανότητα απόκρισης σε σχέση με αυτά με σταθερά όρια, για μικρές τιμές του λ , δηλ. όταν $\lambda < 0.5$ (βλέπε πίνακες III και IV).
- (7). Τα προτεινόμενα σχήματα έχουν σημαντικά μειωμένο το σφάλμα *AEQL* για όλα τα προτεινόμενα *EWMA* σχήματα που καλύπτονται από τους προηγούμενους πίνακες.
- (8). Η προτεινόμενη μέθοδος *EWMA* η οποία βασίζεται στο *DMRSS* σχήμα, εμφανίζεται να αποτελεί την καλύτερη δυνατή επιλογή η οποία επιδεικνύει την καλύτερη απόδοση σε όρους *ARL*, *SDRL* και *AEQL*, απ'ότι οι μέθοδοι που βασίζονται σε *MDRSS* ή *MRSS* σχήματα, για τις ίδιες σχεδιαστικές παραμέτρους.
- (9). Γενικότερα, υπάρχει περισσότερο κέρδος στην απόδοση των προτεινόμενων σχημάτων ελέγχου όπου χρησιμοποιούνται μικρότερες τιμές της παραμέτρου λ .

Table I. RL properties for the proposed median-ranked EWMA scheme at $ARL_0 = 200$ with time-varying limits

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ											AEQL
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.05	2.256	MRSS	ARL	200.31	20.25	7.13	4.04	2.77	2.12	1.73	1.47	1.27	3.101		
			SDRL	206.85	15.35	4.35	2.07	1.23	0.85	0.66	0.56	0.45			
			ARL	200.40	11.47	4.21	2.49	1.79	1.41	1.17	1.05	1.01	2.096		
0.10	2.255	DMRSS	SDRL	207.77	7.87	2.22	1.06	0.69	0.53	0.38	0.22	0.10	1.783		
			cARL	200.28	7.85	3.00	1.86	1.36	1.10	1.02	1.00	1.00			
			SDRL	207.06	4.92	1.38	0.72	0.51	0.30	0.13	0.04	0.00	0.00		
0.25	2.468	MRSS	ARL	200.29	23.48	7.92	4.38	3.00	2.27	1.85	1.56	1.35	3.338		
			SDRL	199.91	18.35	4.77	2.20	1.31	0.89	0.69	0.58	0.49			
			ARL	200.64	12.97	4.59	2.69	1.92	1.50	1.23	1.08	1.02	2.206		
0.50	2.684	DMRSS	SDRL	201.44	8.95	2.35	1.13	0.72	0.56	0.43	0.27	0.13	1.833		
			ARL	200.56	8.70	3.25	1.99	1.45	1.15	1.03	1.00	1.00			
			SDRL	202.31	5.41	1.47	0.74	0.54	0.35	0.16	0.05	0.01	0.01		
0.50	2.684	MRSS	ARL	200.16	33.18	9.36	4.78	3.14	2.36	1.89	1.59	1.36	3.534		
			SDRL	198.10	29.74	6.50	2.64	1.45	0.96	0.72	0.59	0.50			
			ARL	199.72	16.87	5.03	2.81	1.97	1.53	1.24	1.08	1.02	2.266		
0.50	2.684	DMRSS	SDRL	197.59	13.62	2.80	1.23	0.75	0.57	0.44	0.28	0.14	1.854		
			ARL	200.09	10.50	3.44	2.03	1.47	1.15	1.03	1.00	1.00			
			SDRL	199.07	7.57	1.63	0.78	0.55	0.36	0.17	0.06	0.01	0.01		
0.50	2.780	MRSS	ARL	200.35	52.22	13.44	5.72	3.35	2.34	1.81	1.49	1.28	3.773		
			SDRL	199.26	50.17	11.57	4.08	1.95	1.15	0.79	0.61	0.47			
			ARL	200.23	26.27	6.12	2.92	1.90	1.43	1.17	1.05	1.01	2.285		
0.50	2.779	DMRSS	SDRL	197.62	24.25	4.46	1.60	0.85	0.57	0.39	0.22	0.11	1.856		
			ARL	199.89	15.37	3.76	1.98	1.38	1.10	1.02	1.00	1.00			
			SDRL	198.03	13.51	2.30	0.91	0.54	0.31	0.13	0.04	0.01	0.01		

Table II. RL properties for the proposed median-ranked EWMA scheme at $ARL_0 = 370$ with time-varying limits

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ											AEQL
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.05	2.511	MIRSS	ARL	370.57	25.21	8.42	4.64	3.15	2.38	1.93	1.63	1.41	3.507		
		SDRL	375.42	18.41	4.93	2.29	1.34	0.91	0.70	0.59	0.51	2.287			
		ARL	370.71	13.87	4.86	2.82	2.01	1.57	1.28	1.10	1.03	2.287			
	2.510	DMIRSS	SDRL	377.63	8.99	2.44	1.17	0.73	0.57	0.46	0.30	0.16	1.869		
		ARL	370.23	9.31	3.42	2.08	1.51	1.18	1.04	1.00	1.00	1.869			
		SDRL	373.91	5.52	1.52	0.76	0.55	0.39	0.19	0.06	0.01	3.746			
0.10	2.709	MIRSS	ARL	370.48	30.04	9.27	5.00	3.36	2.53	2.05	1.72	1.48	3.746		
		SDRL	368.65	23.64	5.43	2.43	1.42	0.95	0.72	0.60	0.53	2.401			
		ARL	370.00	15.74	5.23	3.01	2.13	1.66	1.34	1.14	1.04	2.401			
	2.708	DMIRSS	SDRL	369.46	10.59	2.60	1.23	0.75	0.58	0.48	0.35	0.20	1.922		
		ARL	370.29	10.26	3.65	2.20	1.60	1.23	1.05	1.01	1.00	1.922			
		SDRL	368.82	6.15	1.60	0.79	0.56	0.43	0.23	0.09	0.02	3.964			
0.25	2.900	MIRSS	ARL	370.66	46.97	11.37	5.45	3.49	2.57	2.06	1.72	1.48	3.964		
		SDRL	367.46	43.16	8.14	3.01	1.60	1.02	0.75	0.62	0.54	2.455			
		ARL	370.43	21.83	5.80	3.12	2.15	1.66	1.34	1.13	1.04	2.455			
	2.900	DMIRSS	SDRL	369.20	17.94	3.28	1.35	0.79	0.59	0.49	0.34	0.19	1.940		
		ARL	369.77	12.93	3.84	2.22	1.60	1.23	1.05	1.01	1.00	1.940			
		SDRL	368.53	9.53	1.84	0.83	0.57	0.42	0.22	0.08	0.02	4.428			
0.50	2.982	MIRSS	ARL	369.85	81.88	18.06	6.94	3.83	2.60	1.98	1.61	1.36	4.428		
		SDRL	368.71	80.28	15.91	5.09	2.27	1.29	0.87	0.65	0.52	2.511			
		ARL	371.07	38.60	7.48	3.31	2.07	1.55	1.24	1.08	1.02	2.511			
	2.982	DMIRSS	SDRL	369.82	36.76	5.60	1.84	0.92	0.62	0.45	0.27	0.14	1.948		
		ARL	369.53	20.99	4.35	2.18	1.48	1.15	1.03	1.00	1.00	1.948			
		SDRL	366.55	18.80	2.74	0.99	0.59	0.36	0.16	0.05	0.01				

Table III. RL properties for the proposed median-ranked EWMA scheme at $ARL_0 = 500$ with time-varying limits													
λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ								AEQL	
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75		2.00
0.05	2.630	MRSS	ARL	500.02	27.74	9.06	4.93	3.32	2.51	2.03	1.71	1.48	3.702
		SDRL	501.42	20.00	5.17	2.39	1.41	0.94	0.71	0.60	0.53	0.53	
	2.630	MDRSS	ARL	500.74	15.21	5.19	2.99	2.12	1.65	1.34	1.13	1.04	2.386
		SDRL	502.66	9.68	2.55	1.21	0.75	0.58	0.48	0.34	0.19	0.19	
0.10	2.628	DMRSS	ARL	500.48	10.05	3.63	2.19	1.59	1.23	1.05	1.01	1.00	1.916
		SDRL	503.86	5.91	1.58	0.79	0.57	0.42	0.22	0.08	0.02	0.02	
	2.820	MRSS	ARL	500.96	33.68	9.93	5.31	3.54	2.65	2.13	1.80	1.55	3.944
		SDRL	498.48	26.66	5.80	2.56	1.48	0.99	0.73	0.60	0.54	0.54	
0.25	2.819	MDRSS	ARL	500.02	17.27	5.58	3.17	2.22	1.73	1.40	1.17	1.05	2.498
		SDRL	498.01	11.63	2.73	1.28	0.77	0.59	0.51	0.38	0.22	0.22	
	2.819	DMRSS	ARL	501.07	11.09	3.86	2.30	1.67	1.28	1.07	1.01	1.00	1.969
		SDRL	497.48	6.68	1.68	0.81	0.57	0.45	0.26	0.10	0.03	0.03	
0.50	3.000	MRSS	ARL	500.36	55.13	12.47	5.81	3.67	2.69	2.14	1.79	1.53	4.190
		SDRL	497.87	50.95	9.02	3.23	1.68	1.06	0.77	0.62	0.55	0.55	
	3.000	MDRSS	ARL	499.45	24.97	6.15	3.25	2.23	1.72	1.39	1.16	1.05	2.551
		SDRL	494.00	20.87	3.50	1.41	0.81	0.60	0.50	0.37	0.22	0.22	
0.50	3.000	DMRSS	ARL	499.97	14.33	4.05	2.32	1.65	1.27	1.07	1.01	1.00	1.985
		SDRL	499.62	10.73	1.94	0.85	0.58	0.45	0.25	0.10	0.03	0.03	
	3.075	MRSS	ARL	500.17	101.87	20.96	7.62	4.09	2.74	2.07	1.67	1.41	4.810
		SDRL	497.29	99.53	18.69	5.71	2.46	1.37	0.90	0.68	0.54	0.54	
3.075	MDRSS	ARL	500.14	46.24	8.21	3.48	2.17	1.60	1.28	1.10	1.03	2.630	
	SDRL	495.97	43.79	6.22	1.94	0.96	0.64	0.47	0.30	0.16	0.16		
3.075	DMRSS	ARL	499.45	24.75	4.67	2.28	1.53	1.18	1.04	1.00	1.00	2.000	
		SDRL	497.49	22.50	2.96	1.04	0.61	0.39	0.19	0.06	0.02	0.02	

Table IV. RL properties for the proposed median-ranked EWMA scheme at $ARL_0 = 500$ with constant limits

λ	L	Sampling techniques	RL properties	δ											AEQL
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.05	2.615	MRSS	ARL	500.14	31.73	12.37	7.68	5.61	4.47	3.73	3.23	2.87	6.436		
		SDRL	483.80	19.07	4.80	2.32	1.43	1.00	0.77	0.61	0.54	4.465			
	2.614	MDRSS	ARL	500.23	18.85	7.98	5.14	3.85	3.14	2.66	2.27	2.05	4.465		
		SDRL	483.48	8.97	2.46	1.24	0.81	0.58	0.53	0.44	0.23	3.669			
	2.614	DMRSS	ARL	500.82	13.43	6.02	3.98	3.04	2.46	2.09	1.99	1.91	3.669		
		SDRL	485.32	5.45	1.59	0.84	0.56	0.29	0.13	0.28	5.401				
0.10	2.815	MRSS	ARL	499.96	35.32	11.38	6.63	4.71	3.70	3.07	2.64	2.33	5.401		
		SDRL	490.24	26.31	5.50	2.41	1.42	0.97	0.73	0.61	0.50	3.793			
	2.814	MDRSS	ARL	499.96	18.77	6.92	4.28	3.17	2.55	2.17	1.99	1.85	3.793		
		SDRL	492.16	11.28	2.58	1.22	0.77	0.58	0.40	0.27	0.36	3.007			
	2.814	DMRSS	ARL	500.82	12.56	5.08	3.28	2.47	2.07	1.89	1.63	1.30	3.007		
		SDRL	490.95	6.37	1.60	0.80	0.56	0.32	0.32	0.48	0.46	4.642			
0.25	2.999	MRSS	ARL	500.18	55.50	12.79	6.12	3.97	2.97	2.42	2.08	1.85	4.642		
		SDRL	496.81	50.82	8.98	3.17	1.63	1.02	0.72	0.55	0.49	2.945			
	3.000	MDRSS	ARL	499.15	25.28	6.45	3.55	2.51	2.01	1.70	1.42	1.19	2.945		
		SDRL	492.51	20.82	3.43	1.36	0.77	0.53	0.50	0.50	0.39	2.209			
	2.999	DMRSS	ARL	499.97	14.66	4.36	2.60	1.96	1.57	1.24	1.06	1.01	2.209		
		SDRL	498.34	10.69	1.88	0.81	0.51	0.51	0.51	0.43	0.23	0.08	4.888		
0.50	3.075	MRSS	ARL	500.32	101.97	20.99	7.67	4.14	2.79	2.12	1.72	1.46	4.888		
		SDRL	497.31	99.49	18.66	5.69	2.45	1.36	0.89	0.67	0.56	2.680			
	3.075	MDRSS	ARL	500.34	46.32	8.27	3.53	2.22	1.65	1.31	1.12	1.03	2.680		
		SDRL	495.94	43.77	6.23	1.93	0.96	0.64	0.48	0.33	0.18	2.024			
	3.076	DMRSS	ARL	499.61	24.81	4.71	2.33	1.58	1.21	1.04	1.01	1.00	2.024		
		SDRL	497.53	22.49	2.95	1.03	0.61	0.41	0.21	0.07	0.02				

Table V. Percentile points for the proposed median-ranked EWMA scheme at $ARL_0 = 500$ with time-varying limits

λ	L	Sampling techniques	Percentiles	δ											
				0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00			
0.10	2.820	MIRSS	P_{10}	54	9	4	3	2	1	1	1	1	1	1	1
			P_{50}	348	26	9	5	3	2	2	2	2	2	2	2
			P_{90}	1149	68	18	9	5	4	3	2	2	2	2	2
	2.819	MDIRSS	P_{10}	53	6	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1
			P_{50}	348	14	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2
			P_{90}	1147	33	9	5	3	2	2	2	2	2	2	2
0.25	3.000	MIRSS	P_{10}	54	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
			P_{50}	348	10	4	2	2	1	1	1	1	1	1	
			P_{90}	1153	20	6	3	2	2	2	2	2	2	2	
	3.075	MDIRSS	P_{10}	54	10	4	3	2	2	2	2	2	2	2	
			P_{50}	348	40	10	5	3	3	3	2	2	2	2	
			P_{90}	1147	121	24	10	6	4	3	2	2	2	2	
0.50	3.000	MIRSS	P_{10}	55	6	3	2	1	1	1	1	1	1	1	
			P_{50}	347	19	5	3	2	2	2	2	2	2		
			P_{90}	1147	52	11	5	3	2	2	2	2	2		
	3.075	MDIRSS	P_{10}	54	4	2	1	1	1	1	1	1	1		
			P_{50}	345	11	4	2	2	2	2	2	2	2		
			P_{90}	1145	28	7	3	2	2	2	2	2	2		
3.075	MIRSS	P_{10}	53	13	4	2	2	2	2	2	2	2	2		
		P_{50}	347	71	15	6	3	3	2	2	2	2	2		
		P_{90}	1150	232	45	15	7	4	3	2	2	2	2		
	3.075	MDIRSS	P_{10}	54	7	2	2	1	1	1	1	1	1	1	
			P_{50}	349	33	6	3	2	2	2	2	2	2		
			P_{90}	1145	103	16	6	3	2	2	2	2	2		
3.075	MDIRSS	P_{10}	54	5	2	1	1	1	1	1	1	1			
		P_{50}	344	18	4	2	1	1	1	1	1	1			
		P_{90}	1159	54	9	4	2	2	2	2	2	2			

4.1.5. Συγκριτικά αποτελέσματα

Στην παράγραφο αυτή, παρέχεται μία συγκριτική ανάλυση για τα προτεινόμενα σχήματα που σχετίζονται μεταξύ τους. Για να συγκριθεί η απόδοση των προτεινόμενων σχημάτων με κάποια από τα υπάρχοντα *EWMA* διαγράμματα για τα ίδια αποτελέσματα, έχουν χρησιμοποιηθεί οι παράμετροι *ARL* και *AEQL* με χρήση δύο επιπλέον ενδεικτών όπως ο Μέσος Λόγος Μέσου Μήκους ροής (Average Ratio of *ARL*s - *ARARL*) (Wu et al), ο οποίος ορίζεται από την σχέση:

$$ARARL = \frac{1}{\delta_{\max} - \delta_{\min}} \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \frac{ARL(\delta)}{ARL_{\text{benchmark}}(\delta)} d\delta$$

και ο Συγκριτικός Δείκτης Απόδοσης (Performance Comparison Index - *PCI*) (Ou et al), ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$PCI = \frac{AEQL}{AEQL_{\text{benchmark}}}$$

όπου $ARL_{\text{benchmark}}(\delta)$ και $AEQL_{\text{benchmark}}$ προκύπτουν από το διάγραμμα ελέγχου απόδοσης (benchmark), το οποίο στην μελέτη συγκρίνει με το προτεινόμενο *EWMA* διάγραμμα που βασίζεται στην *DMRSS*. Οι οκτώ τύποι σχημάτων ελέγχου που χρησιμοποιούνται για σύγκριση, συμπεριλαμβάνουν την κλασική μέθοδο *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου, *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου και *FIR*, διπλό *EWMA*, το *EWMA* που βασίζεται στον κανόνα των δύο δειγμάτων εκτός σε δύο εκτελέσεις (κανόνας), η τροποποιημένη *EWMA* με δύο δείγματα εκτός ελέγχου σε τρεις εκτελέσεις, η υβριδική *EWMA*, και οι συνδυασμένες *Shewart-EWMA* μέθοδοι που βασίζονται στα *RSS* και *MRSS*. Επίσης έχουν χρησιμοποιηθεί επιπρόσθετα τρία επιπλέον σχήματα: τα μικτά *EWMA-CUSUM* διαγράμματα ελέγχου, το τριπλό *EWMA* και το μέγιστο *EWMA* για την σύγκριση των καμπυλών *ARL*.

Για να μετρηθεί η απόδοση αυτών των διαγραμμάτων ελέγχου, χρησιμοποιήθηκαν προσομοιώσεις των τιμών *ARL* διατηρώντας ίδιες τιμές για τις υπόλοιπες παραμέτρους, όταν επίσης οι κατανομές παραμένουν κανονικές για ένα εντός ελέγχου $ARL_0=500$. Όμοια όπως στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου έχει επιλεγεί τιμή $n=5$ με διαφορετικές μέσες ολισθήσεις δ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας οι εντός ελέγχου μέση τιμή και διασπορά της διεργασίας, υποτίθενται μηδενικές και μοναδιαίες αντίστοιχα. Οι τιμές για την παράμετρο *ARL* που προκύπτουν χρησιμοποιώντας την *SRS* είναι ανεξάρτητες του πλήθους δειγμάτων (Salazar και Sinha). Αυτό καθίσταται προφανές από τα αποτελέσματα

τα οποία βασίζονται σε δείγματα μεγέθους για $n=5$ (πίνακας V για την ανίχνευση αλλαγών μικρής κλίμακας) και πίνακας VII (για την ανίχνευση μεσαίας κλίμακας αλλαγών), οι οποίες είναι σε συμφωνία με τις τιμές *ARL* για διαφορετικές παρατηρήσεις από την βιβλιογραφία. Ο λόγος είναι ο τρόπος που ορίζεται η παράμετρος δ ως συνάρτηση του n , δηλ. $\delta=n^{0.5}(\mu_{out}-\mu_0)/\sigma_0$.

4.1.6. Σύγκριση με την κλασσική *EWMA*

Ο έλεγχος διεργασιών που βασίζεται στην κλασσική μέθοδο *EWMA* παρουσιάστηκε αρχικά από τον Roberts. Θέλοντας να μειωθεί το μήκος της *ARL* ο Steiner πρότεινε αργότερα την χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου επί της *EWMA*. Συγκρίνοντας τις τιμές της *ARL* που αφορούν στην κλασσική *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου με τα προτεινόμενα σχήματα, όταν η παράμετρος $\lambda=0.1$ (βλέπε Πίνακα VI) και $\lambda=0.5$ (βλέπε Πίνακα VII), παρατηρούμε ότι τα προτεινόμενα σχήματα είναι ανώτερα της κλασσικής *EWMA* για την ανίχνευση διαφορετικών μέσων ολισθήσεων. Από συνολικής άποψης, η κλασσική *EWMA* είναι λιγότερα αποτελεσματική από τα προτεινόμενα σχήματα ως προς τις τιμές *AEQL*, *PCI* και *ARARL*. Για παράδειγμα το διάγραμμα ελέγχου *EWMA* που βασίζεται σε δειγματοληψία *MRSS* ξεπερνά σε απόδοση την κλασσική *EWMA* σε ποσοστό λιγότερο από 58.2% για τους δείκτες *AEQL* και *PCI* (βλέπε Πίνακες VI και VII).

4.1.7. Σύγκριση με την μέθοδο *FIR EWMA*

Η μέθοδος *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια και το χαρακτηριστικό *FIR* προτάθηκε από τον Steiner, έχει δημιουργήσει υπόβαθρο μελέτης το οποίο βελτιώνει σημαντικά την κλασσική *EWMA* και στα περισσότερες από τις υπόλοιπες μεθοδολογίες ελέγχου, όταν αναφερόμαστε σε ανίχνευση μικρών ολισθήσεων (βλέπε Πίνακα VI). Αυτό αναδεικνύει το όφελος που αποκομίζεται από τις επιπρόσθετες παραμέτρους αλλά σε βάρος της αύξησης του εσφαλμένου ρυθμού σημάτων (alerts). Σύγκριση με τα προτεινόμενα σχήματα δεικνύει ότι το διάγραμμα *FIR EWMA* έχει χαμηλότερες τιμές *ARL* απ'ότι η μέθοδος *EWMA-MRSS*, για ανίχνευση μέσων περιοχών μετατόπισης $1.0 < \delta \leq 3.0$ όταν $\lambda=0.1$, αλλά η απόδοση γίνεται φτωχότερη από αυτές που επιτυγχάνονται για τα

σχήματα *MDRSS* και *DMRSS*. Ο Πίνακας VII επίσης αποκαλύπτει ότι τα προτεινόμενα διαγράμματα *EMWA* που βασίζονται σε *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS* αποδίδουν πολύ καλύτερα από την χρονικά μεταβαλλόμενη *FIR EWMA* μέθοδο κατά 13.1%, 35.4% και 42.3% αντίστοιχα.

4.1.8. Σύγκριση με την διπλή μέθοδο *EWMA*

Η διπλή μέθοδος *EWMA*, προτάθηκε από τους Zhang et al και περιλαμβάνει τον συνδυασμό δύο διαγραμμάτων ελέγχου *EWMA* για την ανίχνευση ολισθήσεων της μέσης τιμής. Το διάγραμμα έχει σχεδιαστεί για να ελαχιστοποιήσει την αλυσίδα *ARL* εκτός ελέγχου κατά την διάρκεια μεγάλης κλίμακας μεταβολών των ολισθήσεων της μέσης τιμής. Αν και η αρχική διπλή μέθοδος *EWMA* που προτάθηκε από τους Zhang et al βασίζεται σε σταθερά όρια ελέγχου, η μέθοδος εφαρμόζεται στον Πίνακα VI και για χρονικά μεταβαλλόμενα όρια. Συγκρίνοντας τις τιμές της *ARL* παραμέτρου με τις αντίστοιχες της διπλής *EWMA*, δείχνει ότι τα προτεινόμενα σχήματα είναι ικανά να ανιχνεύσουν διολισθήσεις της μέσης τιμής μιας διεργασίας, καλύτερα από την τελευταία. Στην πραγματικότητα, όλα τα προτεινόμενα σχήματα μπορούν να ανιχνεύσουν ολισθήσεις της μέσης τιμής της διεργασίας τουλάχιστον δύο φορές γρηγορότερα απ'ότι η διπλή *EMWA*, σε όρους της παραμέτρου *ARL* όταν αλλαγές μέσης κλίμακας μας ενδιαφέρουν και $0 < \delta < 2.5$. Η συνολική απόδοση αυτού του διαγράμματος είναι καλύτερη από την κλασική *EWMA* αλλά λιγότερο αποτελεσματική από τα προτεινόμενα διαγράμματα ελέγχου (βλέπε Πινάκες VI και VII).

Table VI. ARL comparison among the control charts ($n=5, ARL_0=500$) for the detection of small-sized changes												
δ	Classical EWMA	FIR EWMA	Double EWMA	2/2 RR EWMA	2/3 RR EWMA	Hybrid EWMA	X&EWMA RSS	X&EWMA MRSS	EWMA MRSS	EWMA MDRSS	EWMA DMRSS	
	$\lambda=0.1$ $L=2.820$	$\lambda=0.1$ $L=3.000$ $f=0.390$	$\lambda_1=1.0$ $\lambda_2=0.010$ $L_1=3.290$ $L_2=2.440$	$\lambda=0.1$ $L=2.556$	$\lambda=0.1$ $L=2.300$	$\lambda_1=0.1$ $\lambda_2=0.101$ $L=7.230$	$\lambda=0.1$ $L=3.050$ $k=3.310$	$\lambda=0.1$ $L=3.021$ $k=3.310$	$\lambda=0.1$ $L=2.820$	$\lambda=0.1$ $L=2.819$	$\lambda=0.1$ $L=2.819$	
0.00	503.93	503.25	502.56	499.70	501.71	502.39	500.67	500.34	500.96	500.02	501.07	
0.25	103.00	81.11	66.42	103.51	69.80	86.09	52.44	40.21	33.68	17.27	11.09	
0.50	28.54	16.92	21.18	29.49	22.72	27.95	13.83	11.11	9.93	5.58	3.86	
0.75	13.62	6.58	10.56	14.21	11.90	15.90	7.00	5.76	5.31	3.17	2.30	
1.00	8.23	3.61	6.50	8.90	7.71	11.23	4.48	3.73	3.54	2.22	1.67	
1.25	5.66	2.35	4.47	6.39	5.61	8.79	3.21	2.69	2.65	1.73	1.28	
1.50	4.18	1.78	3.36	4.94	4.37	7.24	2.46	2.06	2.13	1.40	1.07	
1.75	3.24	1.47	2.65	4.02	3.64	6.10	1.96	1.65	1.80	1.17	1.01	
2.00	2.66	1.29	2.20	3.43	3.14	5.33	1.61	1.37	1.55	1.05	1.00	
2.25	2.23	1.17	1.87	3.05	2.80	4.74	1.37	1.20	1.35	1.01	1.00	
2.50	1.92	1.10	1.63	2.76	2.57	4.25	1.21	1.09	1.19	1.00	1.00	
2.75	1.69	1.06	1.45	2.54	2.39	3.84	1.10	1.03	1.09	1.00	1.00	
3.00	1.51	1.04	1.33	2.38	2.27	3.52	1.05	1.01	1.04	1.00	1.00	
3.25	1.37	1.02	1.22	2.27	2.17	3.25	1.02	1.00	1.01	1.00	1.00	
3.50	1.26	1.01	1.15	2.18	2.12	3.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	
3.75	1.18	1.01	1.10	2.12	2.07	2.82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
4.00	1.12	1.00	1.06	2.08	2.04	2.64	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
AEQL	11.3519	7.1274	9.6485	16.3375	15.1820	22.8937	7.5937	7.0037	7.1715	6.1605	5.9025	
PCI	1.9232	1.2075	1.6346	2.7679	2.5721	3.8786	1.2865	1.1866	1.2150	1.0437	1.0000	
ARARL	3.2529	1.8136	2.5784	3.9432	3.4282	5.0999	1.8847	1.6188	1.6054	1.1539	1.0000	

Table VII. ARL comparison among the control charts ($n=5$, $ARL_0=500$) for the detection of moderate-sized changes												
δ	Classical EWMA	FIR EWMA	Double EWMA	RR (2/2) EWMA	RR (2/3) EWMA	Hybrid EWMA	X&EWMA RSS	X&EWMA MRSS	EWMA MRSS	EWMA MDRSS	EWMA DMRSS	
	$\lambda=0.5$ $L=3.071$	$\lambda=0.5$ $L=3.231$ $f=0.390$	$\lambda_1=1.0$ $\lambda_2=0.150$ $L_1=3.290$ $L_2=3.108$	$\lambda=0.5$ $L=2.358$	$\lambda=0.5$ $L=2.157$	$\lambda_1=0.1$ $\lambda_2=0.500$ $L=4.340$	$\lambda=0.5$ $L=3.192$ $k=3.310$	$\lambda=0.5$ $L=3.166$ $k=3.310$	$\lambda=0.5$ $L=3.075$	$\lambda=0.5$ $L=3.075$	$\lambda=0.5$ $L=3.075$	
0.00	502.88	500.09	499.71	503.71	503.26	501.30	500.58	500.75	500.17	500.14	499.45	
0.25	254.91	214.63	159.28	233.67	133.41	100.46	151.23	118.11	101.87	46.24	24.75	
0.50	89.50	52.95	42.44	76.56	47.64	28.61	33.56	23.80	20.96	8.21	4.67	
0.75	35.54	13.31	17.86	30.79	21.39	14.28	11.47	8.27	7.62	3.48	2.28	
1.00	17.36	4.76	10.11	15.28	11.57	8.99	5.63	4.29	4.09	2.17	1.53	
1.25	9.65	2.58	6.70	9.01	7.27	6.50	3.49	2.80	2.74	1.60	1.18	
1.50	6.30	1.86	4.88	6.13	5.15	5.11	2.50	2.06	2.07	1.28	1.04	
1.75	4.50	1.51	3.77	4.59	4.00	4.14	1.95	1.64	1.67	1.10	1.00	
2.00	3.38	1.33	3.05	3.68	3.30	3.51	1.60	1.36	1.41	1.03	1.00	
2.25	2.70	1.19	2.50	3.12	2.87	3.07	1.36	1.19	1.23	1.00	1.00	
2.50	2.26	1.12	2.17	2.75	2.59	2.70	1.20	1.09	1.11	1.00	1.00	
2.75	1.91	1.08	1.89	2.50	2.39	2.46	1.10	1.03	1.04	1.00	1.00	
3.00	1.70	1.04	1.68	2.34	2.26	2.23	1.05	1.01	1.01	1.00	1.00	
3.25	1.51	1.02	1.51	2.22	2.16	2.05	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00	
3.50	1.37	1.01	1.38	2.15	2.10	1.91	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	
3.75	1.27	1.01	1.28	2.08	2.06	1.78	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
4.00	1.18	1.00	1.19	2.05	2.04	1.65	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
AEQL	16.1274	8.4215	13.1240	18.9448	16.7344	15.3441	8.3981	7.5141	7.4415	6.2153	5.9167	
PCI	2.7258	1.4234	2.2182	3.2020	2.8284	2.5934	1.4194	1.2700	1.2577	1.0505	1.0000	
AARL	5.7808	2.6287	3.7968	5.6424	4.3812	3.6939	2.4074	1.9402	1.8575	1.1900	1.0000	

4.1.9. Σύγκριση με την μέθοδο *EWMA* με χρήση κανόνων εκτέλεσης

Οι Abbas et al, προτείνουν τις μεθόδους που βασίζονται στον κανόνα δύο αποτελέσματα από δύο εκτελέσεις' για την μέθοδο *EWMA* (2/2-RR *EWMA*) και την τροποποιημένη '2 αποτελέσματα σε τρεις εκτελέσεις' μέθοδο *EWMA* (2/3-RR *EWMA*). Ο Πίνακας VII αποκαλύπτει ότι και τα δύο σχήματα έχουν μικρότερη αλυσίδα *ARL* εκτός ελέγχου, από τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στην κλασσική *EWMA* στην ανίχνευση ολισθήσεων για περιοχή $0 < \delta \leq 1.5$ αλλά περισσότερο από δύο φορές μεγαλύτερη από τα προτεινόμενα σχήματα. Οι ενδείκτες σύγκρισης *PCI* και *ARARL* δεικνύουν ότι η μέθοδος *EWMA* που βασίζεται σε κανόνες καταλήγουν να είναι από τα σχήματα που αποδίδουν ελάχιστα, όταν αλλαγές μεσαίας κλίμακας μας ενδιαφέρουν (βλέπε Πίνακα VII). Παρόλα αυτά, ένα από τα κυρίαρχα διαγράμματα καταλήγει να είναι η υβριδική *EWMA* όταν ενδιαφερόμαστε για μικρής κλίμακας αλλαγές στις διεργασίες (βλέπε Πίνακα VI). Συνολικά εκτιμώντας, τα προτεινόμενα σχήματα είναι περισσότερο από 100% αποδοτικά, από τα διαγράμματα *EWMA* που βασίζονται σε κανόνες (βλέπε Πίνακες VI και VII).

4.1.10. Σύγκριση με την υβριδική *EWMA*

Η υβριδική *EWMA* προτάθηκε από τον Haq και αποτελεί ένα μίγμα από δύο διαγράμματα ελέγχου *EWMA* τα οποία παρακολουθούν την μέση τιμή της διεργασίας. Αυτό το σχήμα είναι όμοιο με την διπλή *EWMA* μέθοδο αλλά προσφέρει καλύτερη προστασία σε μία μικρή περιοχή κλίμακας όπου η ολίσθηση της μέσης τιμής ανήκει στην περιοχή $0 < \delta < 1.5$, όταν δηλ. μεσαίας κλίμακας αλλαγές αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος (βλέπε Πίνακα VII). Μία σύγκριση της παραμέτρου *ARL* για τιμές εκτός ελέγχου στην υβριδική μέθοδο *EWMA* με τα προτεινόμενα σχήματα, δεικνύει ότι τα προτεινόμενα σχήματα είναι περισσότερο αποδοτικά στον χειρισμό ολισθήσεων μέσω των τιμών μιας διεργασίας από την πρώτη μέθοδο. Οι τιμές των ενδεικτών *AEQL*, *PCI* και *ARARL* στους πίνακες VI και VII επίσης αποδεικνύουν ότι η συνολική απόδοση της υβριδικής μεθόδου *EWMA* είναι γενικότερα φτωχή. Στην πραγματικότητα, είναι ουσιαστικά λιγότερο αποδοτική από τα άλλα διαγράμματα κατά ποσοστό 40.1% για τους ενδείκτες *AEQL* και *PCI* εφόσον μόνο μεσαίας κλίμακας αλλαγές αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος (βλέπε Πίνακα VII).

4.1.11. Σύγκριση με τα διαγράμματα Shewart-*EWMA* με κατάταξη δειγμάτων

Τα συνδυαστικά Shewart-*EWMA* διαγράμματα (*X&EWMA*), βασίζονται σε καταταγμένα δεδομένα και μελετήθηκαν από τους Abujiya et al, στοχεύοντας να προσφέρουν καλύτερη προστασία ως προς αλλαγές ολίσθησης του μέσου των διεργασιών. Ο αρχικός σχεδιασμός βασιζόταν σε *RSS* και *MRSS* χρησιμοποιώντας σταθερά όρια ελέγχου, αλλά επίσης παρουσιάζονται και αποτελέσματα για χρονικά μεταβαλλόμενα όρια στους Πίνακες VI και VII. Τα διαγράμματα *X&EWMA* έχουν πολύ μικρές αλυσίδες *ARL* για φάσεις εκτός ελέγχου, και έχουν αποδεδειγμένα δείξει σημαντική βελτίωση στην συνολική απόδοση από περισσότερα άλλα διαγράμματα, αλλά φτωχότερη απόδοση από τα προτεινόμενα *MDRSS* και *DMRSS* διαγράμματα, στην ανίχνευση διαφορετικού πλάτους ολισθήσεις της μέσης τιμής. Συγκρίνοντας τους δείκτες *AEQL* και *ARARL* για το προτεινόμενο *EWMA MRSS* διάγραμμα με το *X&EWMA MRSS* τροποποιημένο διάγραμμα, υποδεικνύει ότι η προσθήκη των ορίων ελέγχου της μεθοδολογίας Shewart σε ένα διάγραμμα ελέγχου *EWMA* δεν αυξάνει αναγκαστικά την συνολική απόδοση του διαγράμματος *EWMA* στην ανίχνευση μεγάλης κλίμακας ολίσθησης για την μέση τιμή (βλέπε Πίνακες VI και VII). Δεν είναι δύσκολο να φανεί ο λόγος για αυτήν την συμπεριφορά, διότι τα στατιστικά που αφορούν σε κατηγοριοποίηση δεδομένων του τύπου *MRSS* αποτελούν ανθεκτικές και ευσταθείς εκτιμήτριες περιοχών για δείγματα που βρίσκονται εκτός των περιοχών ελέγχου (βλέπε Alwan).

4.1.12. Σύγκριση των τριών προτεινόμενων σχημάτων

Τα προτεινόμενα διαγράμματα *EWMA* ελέγχου που βασίζονται στις μεθοδολογίες κατηγοριοποίησης δεδομένων *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS* ξεπερνούν σε απόδοση όλα τα άλλα διαγράμματα στην ανίχνευση μιας μεγάλης κλίμακας αλλαγών όταν μας ενδιαφέρει μιας μεσαίας κλίμακας αλλαγή (βλέπε Πίνακα VII). Για μικρής κλίμακας αλλαγές, η μέθοδος *EWMA MRSS* είναι σχεδόν τόσο αποδοτική όσο και η *X&EWMA MRSS* μέθοδος, σε σύγκριση που βασίζεται στους δείκτες *AEQL* και *ARARL*. Το διάγραμμα ελέγχου καλύτερης απόδοσης βασίζεται στην *DMRSS* η οποία είναι πιο αποδοτική σε σύγκριση με

τις *MRSS* και *MDRSS* κατά 21.5% και 4.3% αντίστοιχα, για $\lambda=0.1$ και 25.7% και 5.0% αντίστοιχα, όταν το $\lambda=0.5$.

Για την αποκόμιση μίας καθαρότερης εικόνας για την απόδοση των προτεινόμενων σχημάτων για την παράμετρο *RL*, παρουσιάζονται οι καμπύλες *RL* για τα νέου τύπου διαγράμματα χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ όταν $\delta=0.25$ και για $ARL_0=200$ (Βλέπε σχήματα που ακολουθούν). Στατιστικά όσο υψηλότερη είναι η καμπύλη *RL* στο διάγραμμα, τόσο υψηλότερη είναι η πιθανότητα συντομότερων *RL* και γρήγορης ανίχνευσης για μικρές διολισθήσεις της διεργασίας. Η αθροιστική πιθανότητα ανίχνευσης για τα προτεινόμενα σχήματα είναι σχετικά υψηλή για όλες τις τιμές της παραμέτρου λ , ειδικότερα για συντομότερες αλυσίδες *RL*, δεικνύει ότι όλα τα προτεινόμενα διαγράμματα έχουν μία αυξημένη τάση να ανιχνεύουν γρήγορα μικρές ολισθήσεις της μέσης τιμής της διεργασίας. Αξίζει να παρατηρηθεί για άλλη μία φορά, ότι το βασισμένο στην μέθοδο κατηγοριοποίησης *DMRSS* έχει υψηλότερη πιθανότητα για ταχύτερη ανίχνευση μικρών μεταβολών της μέσης τιμής, επίδοση η οποία ακολουθείται αρκετά κοντά από τις αντίστοιχες μεθόδους *MDRSS* και *MRSS*.

4.1.13. Χειρότερες συνθήκες σύγκρισης – Μη σωστή κατάταξη των δεδομένων

Η σχεδιαστική δομή των προτεινόμενων σχημάτων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, βασίζονται σε ορθή κατάταξη των δειγμάτων, για τα αναφερόμενα δείγματα που ανήκουν σε μία υπο-ομάδα αλλά στην περίπτωση όπου τα δείγματα εντός μιας υπο-ομάδας για το κύριο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει, είναι δύσκολη να μετρηθεί ή να καταταχθεί, αυτό εγγενώς θα μπορούσε να γίνει ως φυσική συνέπεια του χαρακτηριστικού κατάταξης. Σε αυτήν την περίπτωση η ακρίβεια της διεργασίας εξαρτάται από την γραμμική σχέση ανάμεσα στο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει και του άμεσου χαρακτηριστικού που μεταβάλλεται από την διεργασία. Αυτό το φαινόμενο καλείται ‘μη σωστή κατάταξη’ (imperfect ranking) στην μελέτη, και χρησιμοποιείται το χειρότερο σχήμα *MRSS* που συνδυάζεται με αυτό το φαινόμενο, για να επιδειχθούν οι επιδράσεις του. Για τα υπόλοιπα σχήματα, προσδοκάται μια ακόμη καλύτερη ικανότητα ανίχνευσης σχετικά με την *MRSS* για την περίπτωση μιας μη σωστής κατηγοριοποίησης σε σχέση με την ήδη διαπιστωμένη ανωτερότητα που οι μέθοδοι αυτές επιδεικνύουν στην περίπτωση των τέλεια κατηγοριοποιημένων δειγμάτων.

Έστω (X, Y) να ορίζουν ένα διμεταβλητό κανονικά κατανομημένο τυχαίο διάνυσμα και έστω ότι η σχέση σύνδεσης μεταξύ των μεταβλητών X, Y είναι γραμμική. Έστω επίσης

ότι $Y_{(i:n/2)j}$ και $X_{(i:n/2)j}$ για $i=1,2,\dots,n$ και $j=1,2,\dots,m$ να είναι οι i -τάξης μεσαίες τιμές κατηγοριοποίησης (median) των παραμέτρων Y και X αντίστοιχα, στο i -τάξης δείγμα του j -τάξεως κύκλου. Η στατιστική παράμετρος μέσης κατηγοριοποίησης με βάση την γραμμική σχέση (Muttalak) δίνεται από την σχέση:

$$X_{[i:n/2]j} = \mu_x + \frac{\rho_{xy}\sigma_x}{\sigma_y} (Y_{(i:n/2)j} - \mu_y) + \varepsilon_{ij}$$

όπου μ_x , μ_y , σ_x και σ_y , είναι οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των X, Y αντίστοιχα, ρ_{xy} είναι η συνάρτηση συσχέτισης των X και Y , ε_{ij} είναι όρος σφάλματος με μηδενική μέση τιμή και διασπορά $\sigma_x^2(1-\rho_{xy}^2)$. Η εκτιμήτρια για την μέση τιμή της X , με κριτική κατηγοριοποίηση η οποία βασίζεται στην Y χρησιμοποιώντας μία μη σωστή MRSS (*imperfect MRSS - IMRSS*), δίνεται από την σχέση:

$$\bar{X}_{IMRSSj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{[i:n/2]j}$$

και την διασπορά της \bar{X}_{IMRSSj} να δίνεται από την φόρμουλα:

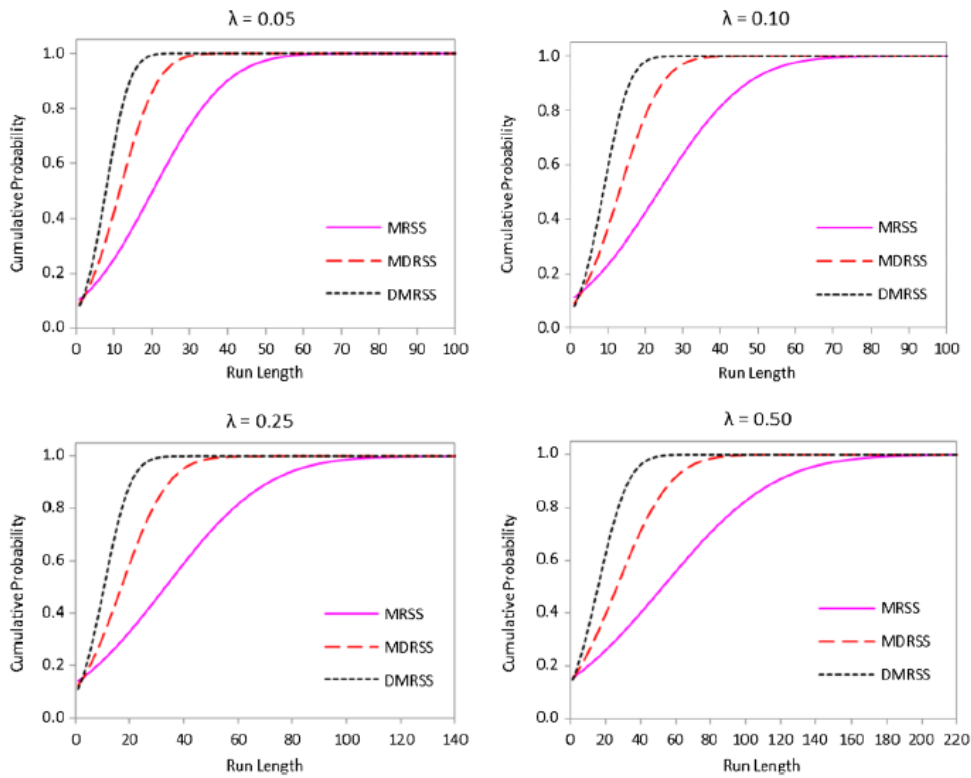
$$\sigma_{\bar{X}_{IMRSSj}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2} \left(n(1 - \rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{z(i:n/2)}^2 \right)$$

όπου $\sigma_{z(i:n/2)}^2$ είναι η διασπορά για το i -τάξης κατηγοριοποιημένο μέσο για το i -τάξης δείγμα της τυπικής κανονικής κατανομής (Muttalak). Τα μεσαίες τιμές κατηγοριοποιημένα στατιστικά από τα διαγράμματα *EWMA*, βασίζονται σε ορθή κατηγοριοποίηση των δειγμάτων. Για να συμπεριλάβουμε την μη σωστή κατηγοριοποίηση αντικαθιστούμε την

\bar{X}_{median} με \bar{X}_{IMRSSj} . Οπότε προκύπτει η φόρμουλα:

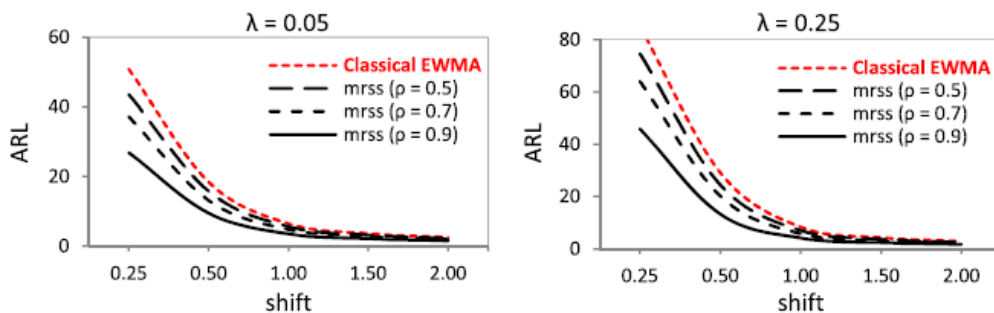
$$\sigma_{\bar{X}_{IMRSSj}} = \frac{\sigma_x}{n} \sqrt{n(1 - \rho_{xy}^2) + \rho_{xy}^2 \sum_{i=1}^n \sigma_{z(i:n/2)}^2}$$

η οποία δίνει την τυπική απόκλιση για την *IMRSS*. Προσομοίωση *Monte Carlo* διενεργήθηκε χρησιμοποιώντας κατάταξη μέσου από ομάδες δειγμάτων οι οποίες προήλθαν από μία διμεταβλητή κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά μονάδα.

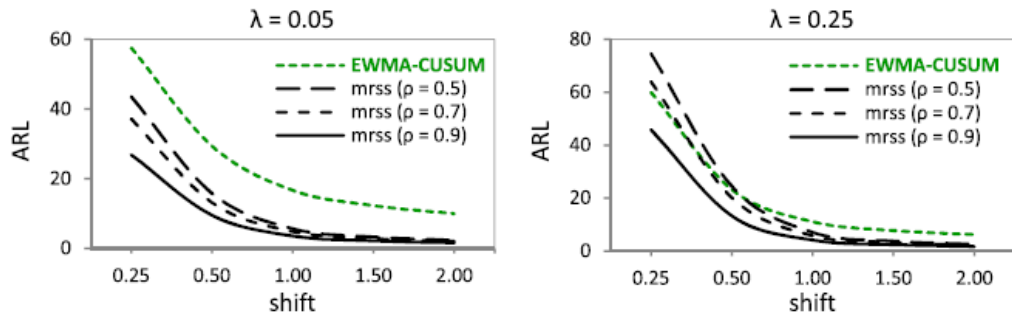


Σχήμα 24: Καμπύλες Μηκών ροής (RL) για διαφορετικά σχήματα και παραμέτρους λ , όταν $\delta=0.25$ και $ARL_0=200$

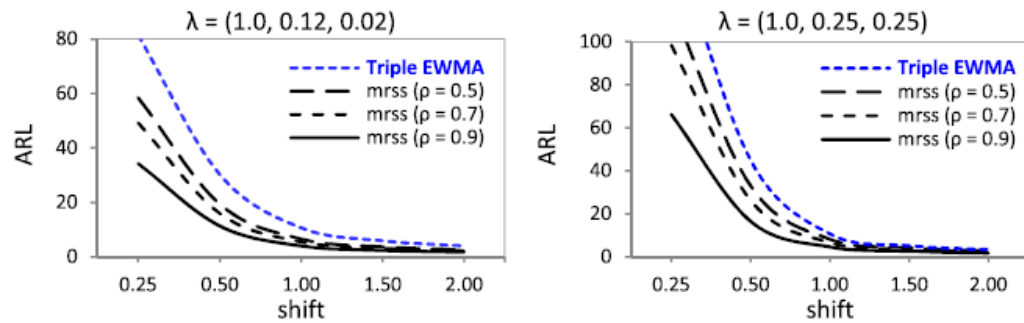
Χρησιμοποιούμε μία υπο-ομάδα $n=5$ με συντελεστή συσχέτισης της τάξης $\rho_{XY}=0.5, 0.7$ και 0.9 και τα αποτελέσματα από την *IMRSS* συγκρίνονται με την κλασική *EWMA*, τα μικτά διαγράμματα *EWMA-CUSUM* (Abbas et al), την τριπλή *EWMA* (Zhang et al) και την μέγιστη *EWMA* (Ostadsharif και Niaki) χρησιμοποιώντας γραφικές αναπαραστάσεις των *ARL* καμπυλών, οι οποίες παρουσιάζονται στα σχήματα 25 έως 19, προκύπτει:



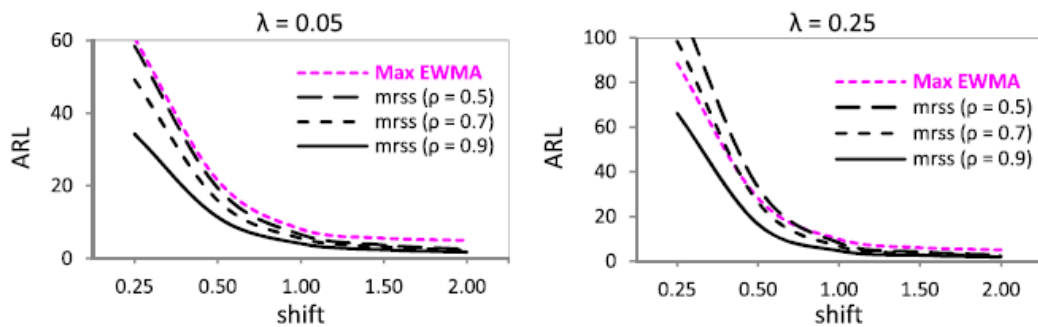
Σχήμα 25: Καμπύλες Μέσων Μηκών ροής (*ARL*) για μη σωστή κατηγοριοποίηση *IMRSS* και κλασική *EWMA* για $ARL_0=200$



Σχήμα 26: Καμπύλες Μέσων Μηκών (ARL) για μη σωστή κατάταξη *IMRSS* και την μικτή *EWMA-CUSUM* για $ARL_0=200$



Σχήμα 27: Καμπύλες Μέσων Μηκών ροής (ARL) για μη σωστή κατάταξη *IMRSS* και την τριπλή *EWMA* για $ARL_0=370$



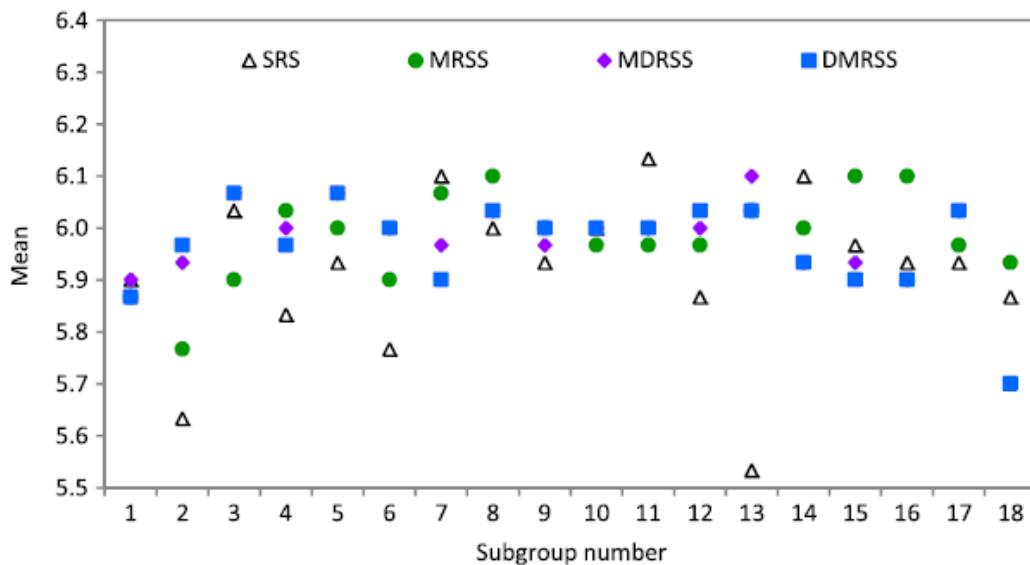
Σχήμα 28: Καμπύλες Μέσων Μηκών ροής (ARL) για μη σωστή κατάταξη *IMRSS* και την μέγιστη *EWMA* για $ARL_0=370$

Από τα σχήματα 25-28 είναι εμφανές ότι τα προτεινόμενα MRSS σχήματα δεν έχουν «φτωχή» απόδοση ακόμα και παρουσία σφαλμάτων κατάταξης. Στην πραγματικότητα, στα προτεινόμενα σχήματα για $\rho_{XY}=0.9$ αυτό είναι κυρίαρχο και για τα τέσσερα διαγράμματα για όλες τις δυνατές ολισθήσεις της διεργασίας. Για την περίπτωση όπου $\rho_{XY}=0.5$ τα προτεινόμενα σχήματα είναι πιο αποδοτικά από το διάγραμμα της κλασικής *EWMA*

(βλέπε σχήμα 25), και το διάγραμμα της τριπλής *EWMA* (βλέπε σχήμα 27), αλλά λιγότερο ευαίσθητο από το μικτό *EWMA-CUSUM* διάγραμμα (βλέπε σχήμα 26) και τη μέγιστη-*EWMA* (βλέπε σχήμα 28) μόνο για μεσαίας και μεγάλης κλίμακας ολίσθησης του μέσου της διεργασίας ($\delta > 0.5$). Επιπρόσθετα τα προτεινόμενα σχήματα για $\rho_{XY} = 0.7$ είναι περισσότερο αποδοτικά από τα αντίστοιχα της μικτής *EWMA-CUSUM* (βλέπε σχήμα 26) και της μέγιστης-*EWMA* (βλέπε σχήμα 27) για μεσαίας κλίμακας διολίσθησης της διεργασίας ($\delta \geq 0.4$).

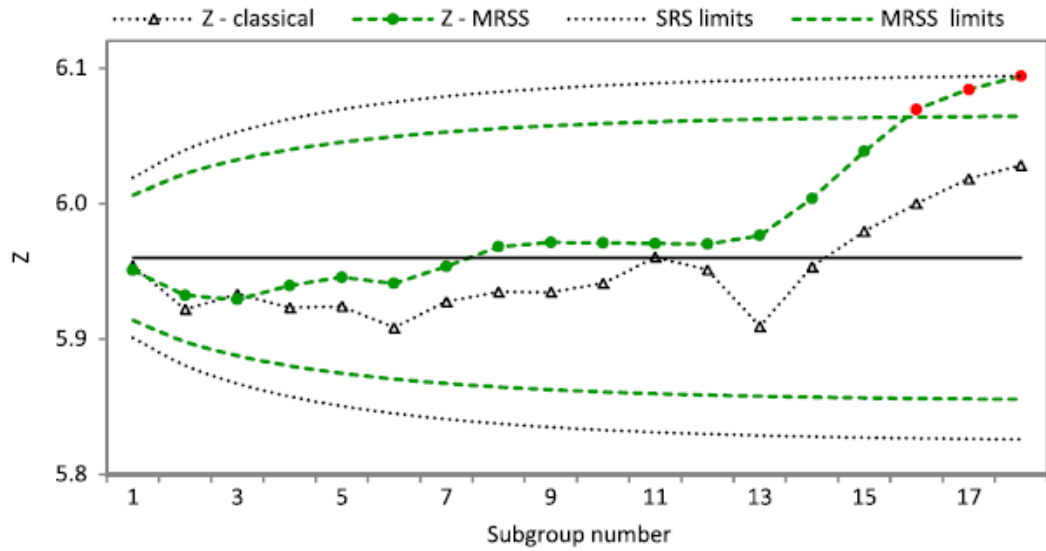
4.2. Εφαρμογή των προηγούμενων μεθόδων κατηγοριοποίησης στον έλεγχο του περιεχόμενου όγκου στην βιομηχανία αναψυκτικών

Σε αυτό το τμήμα παρουσιάζεται ένα πρακτικό παράδειγμα για την εφαρμογή των προτεινόμενων σχημάτων χρησιμοποιώντας ένα πραγματικό σύνολο δειγμάτων βασισμένο στον όγκο γεμίσματος μπουκαλιών με αναψυκτικό, όπως τα δεδομένα συλλέχθηκαν από τους Muttlak και Al-Sabah. Το σύνολο δειγμάτων προέκυψε από την γραμμή παραγωγής της Pepsi-Cola, στο Al-Khobar της Σαουδικής Αραβίας μετρώντας το επίπεδο του τμήματος του μπουκαλιού που είναι άδειο. Τα δεδομένα συμπεριλαμβάνουν 54 τυχαία δείγματα, και οργάνωση τους σε υπο-ομάδες μεγέθους $n=3$ όταν η παραγωγική διεργασία βρισκόταν εντός ελέγχου, διεργασία η οποία δικαιολογημένα μπορεί να υποθεθεί ότι ακολουθεί την υπόθεση της Κανονικής Κατανομής. Σε αυτήν την μελέτη, χρησιμοποιούνται τα κατηγοριοποιημένα δεδομένα που βασίστηκαν στην προσέγγιση των Takahasi και Wakimoto και των Abujiya και Muttlak, όπως τα δεδομένα πλαισιώθηκαν χρησιμοποιώντας τις μεθόδους *SRS*, *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS* με ορθή (τέλεια) κατηγοριοποίηση. Τα μέσα των 18 δειγμάτων, όπου είναι οργανωμένα σε υπο-ομάδες των 3, λαμβάνονται με επανα-δειγματοληψία και παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:

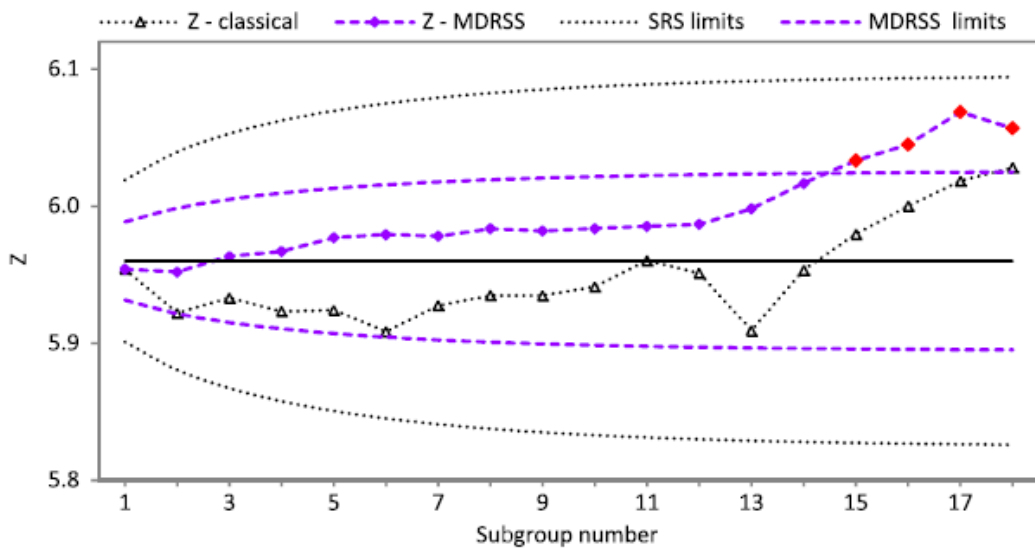


Σχήμα 29: Μέσες τιμές των επανα-δειγματοληπτημένων ομάδων που συλλέχθηκαν με χρήση *SRS*, *MRSS*, *MDRSS* και *DMRSS*

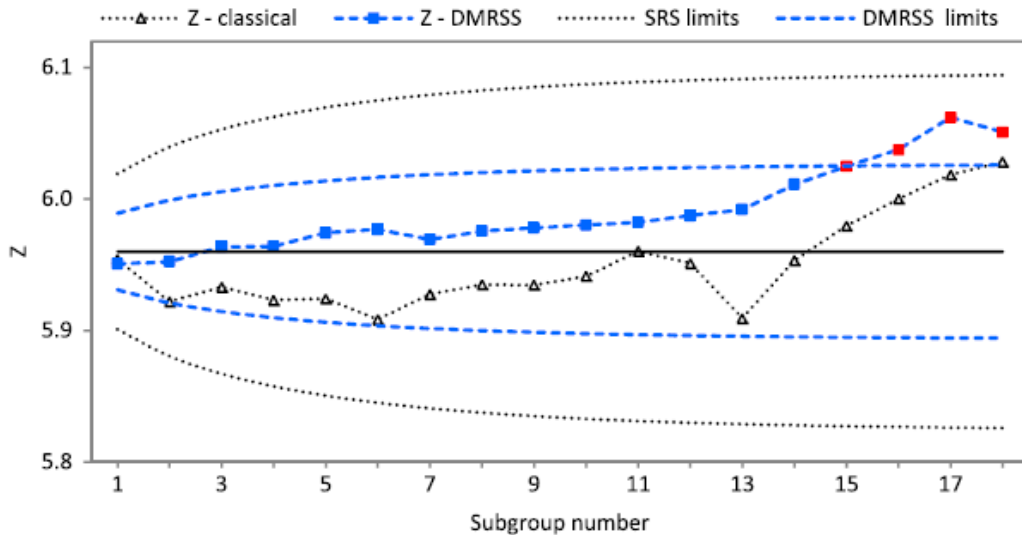
Για να ελεγχθεί η ευαισθησία των προτεινόμενων σχημάτων σε ολισθήσεις της μέσης τιμής της διεργασίας, τα υπάρχοντα δείγματα «επιμολύνονται» στα τελευταία 5 σημεία προσθέτοντας σε κάθε ένα από αυτό επιπλέον τιμή 0.25 μονάδων όγκου. Έτσι τα πρώτα 13 δείγματα είναι εντός ελέγχου ενώ τα 5 τελευταία δεδομένα έχουν θέσει την διεργασία εκτός ελέγχου. Τα στατιστικά στοιχεία για τα 19 δεδομένα της μεθόδου *EWMA* υπολογίστηκαν βασισμένα και με χρήση κλασσικής αλλά και με τα προτεινόμενα σχήματα κατηγοριοποίησης *EWMA* για μία αλυσίδα $ARL_0=500$ όταν $\lambda=0.1$ και $L=2.820$ για την κλασσική μέθοδο, 2.820 για την *MRSS* και 2.819 για τις μεθόδους *MDRSS* και *DMRSS*. Τα γραφικά αποτελέσματα από τα αντίστοιχα διαγράμματα δίνονται στα σχήματα 30 έως 32:



Σχήμα 30: EWMA διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας SRS (κλασσική) και MRSS για πραγματικά δεδομένα



Σχήμα 31: EWMA διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας SRS (κλασσική) και MDRSS για πραγματικά δεδομένα



Σχήμα 32: *EWMA* διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιώντας *SRS* (κλασσική) και *DMRSS* για πραγματικά δεδομένα

Οπότε από τα διαγράμματα των ανωτέρω σχημάτων , προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

(1). Ακόμα και για την επιμόλυνση των τελευταίων 5 δειγμάτων των πραγματικών δεδομένων, τα διαγράμματα της κλασσικής *EWMA* δείχνουν μία τάση αλλά όχι βέβαιη σηματοδότηση για κατάσταση εκτός ελέγχου. Δηλ. το διάγραμμα δεν είναι ικανό να ανιχνεύσει μία μικρή διολίσθηση για την μέση τιμή της διεργασίας.

(2). Το διάγραμμα *EWMA* που βασίζεται σε καταταγμένα *MRSS* δεδομένα, δίνει τρία σημεία εκτός ελέγχου στις υπο-ομάδες των δειγμάτων 16, 17 και 18 (βλέπε σχήμα 30), το οποίο ξεκάθαρα δεικνύει ότι τα προτεινόμενα σχήματα δίνουν σήμα για κατάσταση εκτός ελέγχου πολύ νωρίτερα από την κλασσική μέθοδο *EWMA*.

(3). Στο σχήμα 31, το σχήμα ελέγχου *EWMA* που βασίζεται σε κατάταξη *MDRSS* των δειγμάτων δίνει 4 σημεία σε επίπεδο εκτός έλεγχου στα συνεχόμενα δείγματα 15, 16, 17 και 18 το οποίο αποτελεί μία ένδειξη ότι η κατηγοριοποίηση *MDRSS* είναι πιο αποδοτική από την *MRSS*.

(4). Το διάγραμμα που βασίζεται σε *EWMA* με κατάταξη *DMRSS* επίσης δεν αποδίδει τελείως μη ικανοποιητικά. Το συγκεκριμένο διάγραμμα αποδίδει καλύτερα από το καταταγμένο σχήμα με *MRSS* στην ανίχνευση μικρών διολισθήσεων της διεργασίας, και όπως και η *MDRSS*, δίνει 4 σημεία εκτός ελέγχου στην υπο-ομάδα των σημείων 15, 16, 17 και 18 (βλέπε σχήμα 32).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η χρήση του μη παραμετρικού διαγράμματος προσήμου *EWMA-SN* (*Sign - SN Chart*) για διεργασίες που ακολουθούν ανεξάρτητες κατανομές

5.1. Εισαγωγή στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των μη παραμετρικών διαγραμμάτων προσήμου που βασίζονται στην τεχνική *EWMA* για την εφαρμογή των τεχνικών ελέγχου στατιστικής επεξεργασίας σε διεργασίες.

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου είναι χρήσιμα όταν υπάρχει περιορισμένη ή παντελής έλλειψη πληροφορίας σχετικά με την μορφή και την κατανομή που ακολουθούν τα δεδομένα μιας διεργασίας. Οι παραδοσιακές τεχνικές Στατιστικού Έλεγχου Διεργασιών - Σ.Ε.Δ. που βασίζονται σε διαγράμματα ελέγχου συμπεριλαμβάνουν ομαδοποιημένα δεδομένα, ως εξέλιξη των αρχικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιούσαν δεδομένα απλών μετρήσεων χωρίς άλλη επεξεργασία, όπως αυτά προκύπτουν στον χρόνο από την χρονική εξέλιξη της διεργασίας. Ένα αμφίπλευρο διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στην *EWMA* τεχνική μπορεί να παραλλαχθεί από τις προηγούμενες παραδοσιακές μεθόδους, προτείνοντας την συλλογή των ακολουθιών προσήμου και δημιουργώντας ένα νέου τύπου διάγραμμα (*sign-SN chart*). Το διάγραμμα αυτού του τύπου, υποβοηθείται από μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα που χρησιμοποιείται για να καθορίσει την κατανομή του Μήκους ροής (RL) του διαγράμματος, συσχετίζοντας επίσης και άλλα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του νέου *EWMA SN* διαγράμματος είναι η εγγενώς ευσταθής συμπεριφορά του, για καταστάσεις εντός ελέγχου της διεργασίας. Στην πραγματικότητα, η εντός ελέγχου κατανομή των μηκών ροής και κατά συνέπεια και όλα τα εκπορευόμενα χαρακτηριστικά από αυτό, (π.χ. ποσοστό

εσφαλμένων συναγερμών, μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις, μεσαίες τιμές, κλπ), παραμένουν ίδιες για όλες τις άγνωστου τύπου συνεχείς κατανομές που αφορούν στα δεδομένα της διεργασίας. Το ανωτέρω πλεονέκτημα, στοχεύοντας στην υποβοήθηση των πρακτικών τεχνικών που αναφέρονται στις μεθοδολογίες ελέγχου στατιστικών διεργασιών, καταλήγει σε δεδομένους πίνακες οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν τα χαρακτηριστικά και τις παραμέτρους σχεδιασμού, διευκολύνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την εφαρμογή της μεθόδου. Εκτεταμένη επεξεργασία της μεθόδου με την διεξαγωγή προσομοιώσεων κατέδειξε ότι στην βάση ελαχίστων αρχικών υποθέσεων, η ευστάθεια των κατανομών μήκους ροής της διεργασίας σε εντός ελέγχους φάσεις, καθώς και η απόδοση της μεθόδου σε καταστάσεις εκτός ελέγχου, συνηγορούν ότι το νέο διάγραμμα *EWMA-SN* μπορεί να αποτελέσει ένα συμπαγή φορέα σε πολλές εφαρμογές, εκτοπίζοντας τις αντίστοιχες παραμετρικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό με εξίσου σημαντικά αποτελέσματα.

5.1.1. Σύγκριση παραμετρικών και μη παραμετρικών τεχνικών: Η τρέχουσα κατάσταση

Οι τεχνικές *CUSUM* και *EWMA* έχουν γνωρίσει μία πολύ μεγάλη αποδοχή στον Σ.Ε.Δ. η οποία γίνεται ακόμη πιο έντονη στα τελευταία χρόνια. Οι μέθοδοι έχουν αποδειχθεί αποδοτικές στην ανίχνευση μικρών και διατηρήσιμων διολισθήσεων μιας διεργασίας σε σύντομο χρονικό διάστημα και για τον λόγο αυτό έχουν καθιερωθεί για τον έλεγχο ανίχνευσης «διευθύνσεων/τάσεων» της διεργασίας και εξάπλωσης των τιμών αυτής, με μονοπαραμετρικούς ή πολυπαραμετρικούς καθορισμούς. Η ανωτερότητα αυτών, των «μέσης τιμής» βασιζόμενων διαγραμμάτων, ανακύπτει από το γεγονός ότι σε αντίθεση με τα διαγράμματα Shewart, χρησιμοποιούν την προκύπτουσα πληροφορία συσσωρευτικά, μέχρι το τρέχον χρονικό σημείο. Η απόδοση των διαγραμμάτων *CUSUM* και *EWMA* είναι παρόμοια αλλά οι περισσότεροι που κάνουν χρήση των εμπειρικών αποτελεσμάτων των μεθόδων, προτιμούν τα διαγράμματα *EWMA* λόγω της ευκολίας στον χειρισμό τους. Τα κλασσικά διαγράμματα *EWMA* βασίζονται στην μέση τιμή της διεργασίας και συμπεριλαμβάνουν τα διαγράμματα Shewart ως ειδικές περιπτώσεις τους. Η βιβλιογραφία στα διαγράμματα ελέγχου *EWMA* είναι εκτενής και συνεχίζει να μεγαλώνει κατά σημαντικές συνεισφορές (Ruggeri et al, 2007).

Σε τυπικές εφαρμογές των κλασικών παραμετρικών διαγραμμάτων *EWMA* με χρήση του μέσου της διεργασίας τα οποία βασίζονται σε ανεξάρτητου τύπου μετρήσεις, αποτελεί προϋπόθεση, ότι η κατανομή της υποκείμενης διεργασίας είναι κανονική ή κατ'ελάχιστον αυτό θα πρέπει να ισχύει κατά προσέγγιση. Εάν αυτό δεν αληθεύει, οι ιδιότητες που εκπορεύονται από το διάγραμμα επηρεάζονται σημαντικά, π.χ. ο ρυθμός εμφάνισης λανθασμένου συναγερμού για κατάσταση εκτός ελέγχου της διεργασίας συνήθως αυξάνεται περαιτέρω από την αντίστοιχη τιμή που θα είχε για μία κανονική κατανομή. Όμως η παραδοχή της κανονικής κατανομής μπορεί να μην είναι υποστηρίξιμη σε πολλές εφαρμογές και ειδικότερα στην περίπτωση των ανεξάρτητων μετρήσεων, εκεί όπου το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα προσφέρει μικρή προστασία. Αυτό κάνει τα παραδοσιακά *EWMA* διαγράμματα που βασίζονται σε αυτήν την παραδοχή αμφισβητήσιμα. Ο Borro et al (1999) διερεύνησαν την ευστάθεια των παραδοσιακών διαγραμμάτων *EWMA* ως προς την παραδοχή της Κανονικής Κατανομής και πρότειναν ότι μπορούν να σχεδιασθούν/ρυθμιστούν για να είναι ευσταθή ως προς την λειτουργία τους, για έναν συγκεκριμένο τύπο κατανομών. Ο παραπάνω χειρισμός όμως μπορεί να είναι προβληματικός, εξαιτίας της γνώσης που προϋποθέτει για το σχήμα των δεδομένων της διεργασίας έτσι ώστε να αποτελέσει την βάση για ρύθμιση, γεγονός όμως που μπορεί να μην είναι αρχικά διαθέσιμο. Οι Human et al (2011) πρόσφατα κατέδειξαν ότι τα παραδοσιακά διαγράμματα *EWMA* μπορούν να μην έχουν ευσταθή συμπεριφορά για καταστάσεις εντός ελέγχου για μερικές κατανομές που δεν είναι κανονικές, όπως η συμμετρική διπολική (*symmetric modal*) και η «επιμολυσμένη» κανονική κατανομή (*contaminated normal distribution*). Οι παρατηρήσεις τους θέτουν υπό αμφισβήτηση τις συνήθεις εφαρμογές των παραδοσιακών διαγραμμάτων *EWMA* όπως αυτά εφαρμόζονται στην πράξη.

Έτσι λοιπόν, εάν η «υπόθεση της Κανονικής κατανομής» είναι υπό αμφισβήτηση ή δεν μπορεί να δικαιολογηθεί λόγω έλλειψης πληροφορίας ή πλήθους δεδομένων, ένα μη-παραμετρικό διάγραμμα αποτελεί έναν καλό εναλλακτικό τρόπο για να προχωρήσουμε στην επεξεργασία αυτών. Για μία παρουσίαση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου βλέπε Chakraborti et al (2001) και Chakraborti και Graham (2007). Τα εν λόγω διαγράμματα, εμφανίζουν το πλεονέκτημα ότι η απόδοση τους, καθώς η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου (μετρικές όπως το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής– *ARL*, ο ρυθμός εμφάνισης εσφαλμένων συναγερμών, κλπ), παραμένουν στα ίδια επίπεδα για όλες τις συνεχείς κατανομές ασχέτως της κανονικής. Αρκετά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου έχουν προταθεί για τις περιπτώσεις όπου: (1) οι παράμετροι της διεργασίας

υποτίθενται γνωστές και καθορισμένες, δηλ. στην περίπτωση γνωστών παραμέτρων – standard known case και (2) οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστες ή ακαθόριστες δηλ. στην περίπτωση αγνώστων παραμέτρων – standard unknown case. βλέπε Bakir και Reynolds – 1979, Famum και Stanton – 1986, Amin και Searcy – 1991, Amin et al – 1995, Amin και Widmaier – 1999, Bakir 2004, Chakraborti και Eryilmaz – 2007 και Human et al – 2010, όπου δίνεται έμφαση στην περίπτωση γνωστών παραμέτρων και την ερευνητική εργασία των McDonald – 1990, Hackl και Ledolter – 1991/1992, και του Bakir – 2006, με έμφαση στην περίπτωση των αγνώστων παραμέτρων. Αυτά τα μη παραμετρικά διαγράμματα βασίζονται είτε σε πρόσημα (signs), κατηγορίες μετρήσεων (ranks) ή προσημικές κατατάξεις (signed-ranks) επί των παρατηρήσεων. Οι Albers και Kallenberg – 2004/2008/2009 μελέτησαν (α) συνθήκες υπό τις οποίες τα μη παραμετρικά διαγράμματα δίνουν βιώσιμες εναλλακτικές των αντιστοίχων παραμετρικών διαγραμμάτων και (β) πρότειναν το MIN διάγραμμα χρησιμοποιώντας την ελάχιστη τιμή μιας υπο-ομάδας και (γ) μία συσσωρευτική ή ακολουθιακή προσαρμογή του διαγράμματος MIN (η οποία καλείται διάγραμμα CUMIN) αντίστοιχα. Άλλες πρόσφατες εργασίες σε μη παραμετρικά διαγράμματα συμπεριλαμβάνουν π.χ. τους Chakraborti και Van de Wiel – 2008 και τους Li et al – 2010, οι οποίοι πρότειναν ένα διάγραμμα τύπου *Shewart*, *CUSUM* και *EWMA* βασισμένα στο ευρέως γνωστό Mann-Whitney στατιστικό έλεγχο για την παρακολούθηση της κατεύθυνσης μιας διεργασίας στην περίπτωση αγνώστων παραμέτρων. Οι Hawkins et al – 2003 έφεραν μία νέα προοπτική στην περίπτωση αγνώστων παραμέτρων με την εισαγωγή του μοντέλου αλλαγής-σημείου (*change-point model*). Αν και θεώρησαν ότι τα δεδομένα τους ακολουθούσαν κανονική κατανομή υπάρχουν πρόσφατες αναπτύξεις στην περιοχή του μη παραμετρικού μοντέλου σημείου για την παρακολούθηση των τάσεων (κατευθύνσεων) της διεργασίας από τους Zhou et al – 2009 και τους Hawkins και Deng – 2010, αντίστοιχα.

Ένα απλό για χρήση διάγραμμα ελέγχου, το οποίο συνδυάζει τις ιδιότητες ανίχνευσης του διαγράμματος *EWMA* με την ευστάθεια του μη παραμετρικού διαγράμματος είναι πάντοτε επιθυμητό. Ένας τρόπος για να κατασκευαστεί ένα τέτοιο διάγραμμα είναι να χρησιμοποιήσουμε μη παραμετρικά ή στατιστικά δεδομένα που δεν ανήκουν σε καμία κατανομή ως δομική βάση και να τα συνδυάσουμε χρησιμοποιώντας την φόρμουλα της *EWMA* σε ένα σχεδιαστικό διάγραμμα. Δίνουμε έμφαση στην περίπτωση των ανεξάρτητων μετρήσεων, γεγονός το οποίο αποτελεί τυπική συνθήκη στα σύγχρονα περιβάλλοντα που είναι πλούσια σε δεδομένα (τα διαγράμματα *EWMA* σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας βλ.

Montgomery – 2005). Όπως όμως αναφέρθηκε και νωρίτερα, αυτό αποτελεί μία κατάσταση όπου η προστασία από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δεν επαρκεί. Επιπλέον τα περισσότερα διαθέσιμα μη παραμετρικά διαγράμματα, αναφέρονται σε πλαισιωμένα δεδομένα σε ομάδες και το προηγούμενο διάγραμμα που προτείνεται μπορεί εύκολα να επεκταθεί και σε αυτά. Οι Amin και Searcy – 1991, ήταν ανάμεσα στους πρώτους ερευνητές που θεώρησαν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA* βασισμένο στον Wilcoxon στατιστικό έλεγχο με καταταγμένα δεδομένα προσήμου (βλ. Gibbons και Chakraborti – 2003). Το διάγραμμα ήταν βασισμένο σε υπο-ομαδοποιημένα δεδομένα, και διερεύνησαν τις ιδιότητες του χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις και συνέκριναν το προκύπτον διάγραμμα με τα παραδοσιακά παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου *EWMA*. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα μη παραμετρικά διαγράμματα είναι κατά πολύ πιο αποδοτικά για κατανομές δεδομένων που συγκεντρώνουν τις μετρήσεις προς τα άκρα τους (*heavy-tailed distributions*). Η ερευνητική τους εργασία παρέχει αποδείξεις ότι μία μη παραμετρική εναλλακτική στις παραμετρικές μεθόδους *EWMA*, μπορεί να είναι ωφέλιμη. Με κίνητρο τα ευρήματα τους, θεωρούμε ένα μη παραμετρικό *EWMA* διάγραμμα που βασίζεται στο στατιστικό στοιχείο του προσήμου για την παρακολούθηση της κατεύθυνσης μιας συνεχούς χρονικά διεργασίας. Αυτό το νέου τύπου διάγραμμα ονομάζεται μη παραμετρικό *EWMA* διάγραμμα προσήμου (*EWMA-SN chart*). Δύο σημαντικά σημεία που αξίζει να αναφερθούν είναι: (1) το προτεινόμενο διάγραμμα είναι ένα διάγραμμα δεδομένων στην Phase II και (2) η τιμή στόχος της διεργασίας υποτίθεται εξαρχής γνωστή ή καθορισμένη.

Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η μέθοδοι του Σ.Ε.Δ. εφαρμόζονται σε δύο φάσεις ή επίπεδα: Στην Phase I, η φάση με εποπτεία του παρελθόντος και στην Phase II δηλ. στην φάση προοπτικής ή παρακολούθησης. Το μεγαλύτερο μέρος από την στατιστική ανάλυση γίνεται κατά την Phase I, η οποία συμπεριλαμβάνει τον σχεδιασμό, την διαχείριση, τον σχεδιασμό της μελέτης, την συλλογή των δεδομένων, την διαχείριση των δεδομένων και την εργασία διερεύνησης (η οποία συμπεριλαμβάνει την γραφική και αριθμητική επεξεργασία, την ανάλυση και το ταίριασμα των δεδομένων, κλπ), για να διασφαλιστεί ότι η διεργασία είναι σε κατάσταση στατιστικού ελέγχου. Η κατάσταση του στατιστικού ελέγχου αναφέρεται σε μία διεργασία, η οποία βρίσκεται ακριβώς ή κοντά στα αποδεκτά επίπεδα στόχο υπό την επίδραση κάποιων φυσικών αιτίων ή διασποράς χωρίς να υπάρχουν ειδικού τύπου ή άλλες εμφανείς αιτίες. Μία αναλυτική παρουσίαση των διαγραμμάτων ελέγχου για την Phase I μπορεί να βρεθεί στους Chakraborti et al – 2009.

Κατά τον τρόπο αυτό, όταν οι τιμές στόχος των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν καθορισθούν (όπως στην περίπτωση που περιγράφεται εδώ), το κέρδος είναι η διασφάλιση ότι η διεργασία λειτουργεί επί ή κοντά στο σημείο στόχος που έχει καθορισθεί, υποκείμενη μόνο σε τυχαίες μεταβολές ή φυσικές διαταραχές. Εάν, από την άλλη πλευρά, οι παράμετροι είναι μη καθορισμένες ή άγνωστες, η εγκαθίδρυση στατιστικού ελέγχου (στην Phase II), περιλαμβάνει μία πρωταρχική ανάλυση στην Phase I, η οποία οδηγεί σε υπολογισμό των ζητούμενων παραμέτρων καθώς επίσης και σε υπολογισμό των ορίων ελέγχου. Το τελευταίο δεν αποτελεί την περίπτωση την οποία διαπραγματευόμαστε στην παρουσίαση και εφαρμογή της μεθόδου στο παρόν κεφάλαιο.

Μερικά από τα πλεονεκτήματα του μη παραμετρικού διαγράμματος *EWMA-SN* μπορούν να αναφερθούν περιληπτικά ως ακολούθως:

1. Η υπόθεση της συμμετρίας δεν απαιτείται (όπως στην περίπτωση του κατηγοριοποιημένου διαγράμματος Wilcoxon).
2. Το διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παρακολούθηση οποιουδήποτε ποσοστιαίου εύρους (percentile) της κατανομής, χρησιμοποιώντας την μεσαία τιμή (ενώ μόνο η μεσαία τιμή – median – μπορεί να γίνει αντικείμενο παρακολούθησης από τον έλεγχο Wilcoxon).
3. Το διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ανεξάρτητες μετρήσεις ($n=1$) και για κατηγοριοποιημένα δεδομένα ($n>1$), ενώ το Wilcoxon διάγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για κατηγοριοποιημένα δεδομένα.
4. Το διάγραμμα είναι ένα σχετικά εύκολο διάγραμμα (από ότι το αντίστοιχο του Wilcoxon) όταν η υποκείμενη κατανομή δεδομένων είναι αποκεντρωμένη στα άκρα όπως στην περίπτωση της διπλής Εκθετικής (βλ. Gibbons και Chakraborti – 2003).
5. Το διάγραμμα δεν απαιτεί τις πραγματικές αριθμητικές τιμές από τις παρατηρήσεις. Η μόνη πληροφορία που χρειάζεται είναι μόνο εάν η παρατήρηση είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη σε σχέση με το μέγεθος που μας ενδιαφέρει. Κατά συνέπεια το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο με διχοτομημένα δεδομένα (το διάγραμμα Wilcoxon απαιτεί κατ'ελάχιστον την κατηγοριοποίηση και τα πρόσημα).
6. Η διασπορά της διεργασίας δεν χρειάζεται να καθορισθεί (το οποίο επίσης ισχύει και για το διάγραμμα Wilcoxon).
7. Οι εντός και εκτός ελέγχου κατανομές για τον στατιστικό έλεγχο προσήμου είναι εύκολο να καθορισθούν (είναι και οι δύο διωνυμικές).

Στην συνέχεια η παρουσίαση της μεθόδου οργανώνεται ως ακολούθως: Το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* ορίζεται και παρουσιάζεται η εφαρμογή και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του, κάνοντας χρήση παραδείγματος. Στην συνέχεια καθορίζεται η κατανομή του μήκους ροής (RL) και συγκρίνονται οι αποδόσεις εντός και εκτός ελέγχου με τις αντίστοιχες που παρουσιάζουν τα παραδοσιακά παραμετρικά διαγράμματα *EWMA*. Το κεφάλαιο κλείνει με την περιληπτική παρουσίαση συμπερασμάτων καθώς και τα ανοικτά θέματα που θα πρέπει να τύχουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας και επέκτασης για την μεθοδολογία.

5.2. Το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN*

Έστω ότι με X_i δηλώνουμε την ανεξάρτητη μέτρηση από μία άγνωστης κατανομής συνεχή διεργασία, με αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F με μεσαία τιμή θ η οποία αποτελεί και το μέγεθος προς παρακολούθηση.

Ορίζουμε το στατιστικό μέγεθος του προσήμου:

$$SN_i = \text{sign}(X_i - \theta_0) \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots$$

όπου:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

και θ_0 είναι η γνωστή ή καθορισμένη τιμή στόχος της μεταβλητής θ , η οποία τυγχάνει αντικείμενο παρακολούθησης για την περίπτωση γνωστών παραμέτρων για την διεργασία. Αξίζει να σημειωθεί ότι το στατιστικό προσήμου θα λαμβάνει τιμή 1 ή -1 για κάθε παρατήρηση (κατά συνέπεια ο έλεγχος προσήμου μπορεί να εφαρμοσθεί και σε δυαδικά – binary – δεδομένα όταν η μόνη πληροφορία που είναι διαθέσιμη για κάθε μονάδα που ελέγχεται, είναι εάν και μόνο η μετρούμενη τιμή είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την τιμή στόχο) και κατά συνέπεια το διάγραμμα βασίζεται στο στατιστικό προσήμου δηλ. σχετίζεται με δεδομένα τύπου Bernoulli με 100% παρακολούθηση (βλ. Reynolds και Stoumbos – 1999 και Spliid – 2010 για διαγράμματα *CUSUM* και *EWMA* που βασίζονται σε παρατηρήσεις Bernoulli, αντίστοιχα). Προς την ανίχνευση ανεξάρτητων δεδομένων θα

πρέπει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα *CUSUM* και *EWMA* μπορούν να βασιστούν σε διωνυμική κατανομή χρησιμοποιώντας ομάδες δεδομένων ($n > 1$). Ο σχεδιασμός του προτεινόμενου στατιστικού για το διάγραμμα της μη παραμετρικής *EWMA-SN* προκύπτει με την ακολουθιακή συσσώρευση των στατιστικών προσήμου, SN_1, SN_2, SN_3, \dots και καθορίζεται ως:

$$Z_i = \lambda SN_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \quad Z_0 = 0$$

όπου $0 < \lambda \leq 1$ είναι η σταθερά εξομάλυνσης που θα συζητηθεί στην συνέχεια.

Αν και το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* μπορεί να θεωρηθεί για την παρακολούθηση οποιουδήποτε ποσοστού από την συνεχή κατανομή (percentile), βασιζόμαστε στο 50% percentile που αποτελεί και την «μεσαία τιμή», έτσι ώστε η θ_0 να δηλώνει την γνωστή ή καθορισμένη τιμή από ένα μεσαίο δείγμα για μία διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου. Οι λόγοι για τους οποίους η προσέγγιση του διαγράμματος επικεντρώνει στην μεσαία τιμή είναι ξεκάθαροι. Η μεσαία τιμή είναι ο καλύτερος εκπρόσωπος γενικά της κεντρικής τιμής. Επιπλέον είναι πιο ευσταθής από την μέση τιμή και ισούται με την μέση τιμή στην περίπτωση που η κατανομή είναι συμμετρική. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο εντός ελέγχου μέσος και η τυπική απόκλιση για το στατιστικό του διαγράμματος Z_i , δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις, $E(Z_i) = 0$ και

$$\sigma_{Z_i} = \sqrt{\lambda / (2 - \lambda) (1 - (1 - \lambda)^{2i})}$$

(βλ. Graham et al – 2009 για τον αναλυτικό υπολογισμό).

Κατά συνέπεια τα ακριβή όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του προτεινόμενου διαγράμματος ελέγχου *EWMA-SN* για την μεσαία τιμή δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} UCL &= L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})}, \\ CL &= 0, \\ LCL &= -L \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})} \end{aligned}$$

όπου $L > 0$ είναι η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή.

Τα μη χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου – μόνιμης κατάστασης (που χρησιμοποιούνται τυπικά όταν το διάγραμμα *EWMA* έχει εκτελεσθεί ήδη για αρκετό χρονικό διάστημα), βασίζονται στην ασυμπτωτική τυπική απόκλιση του στατιστικού ελέγχου (Lucas και Saccucci – 1990) και δίνονται από την σχέση:

$$UCL = L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}, \quad CL = 0, \quad LCL = -L\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}.$$

Το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* είναι ένα διάγραμμα των Z_i τιμών μαζί με την κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου στον κατακόρυφο άξονα ως προς την χρονική στιγμή παρατήρησης του δείγματος i , στον οριζόντιο άξονα. Εάν κάποια από τις τιμές των Z_i είναι έξω από τα δύο όρια ελέγχου, τότε η διεργασία θεωρείται ως εκτός ελέγχου και αυτό εκκινεί έναν έλεγχο για την ανίχνευση της αιτίας. Στην άλλη περίπτωση, η διεργασία θεωρείται ως εντός ελέγχου και η καταγραφή του διαγράμματος συνεχίζεται.

Στην συνέχεια, μελετώνται αμφίπλευρα διαγράμματα διότι τέτοιου τύπου διαγράμματα αποτελούν την τυπική εκδοχή παραδοσιακών διαγραμμάτων *EWMA*. Σε εφαρμογές όπου χρειάζεται διάγραμμα μονής πλευρικής ζώνης, οι μεθοδολογίες μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν. Στην συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά η εξαγωγή της κατανομής μήκους ροής (RL).

5.3. Η κατανομή του Μήκους (RL)

Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας για την εξαγωγή της κατανομής του μήκους για το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN*. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου μόνιμης κατάστασης, τα οποία απλοποιούν σημαντικά την θεωρία και την εφαρμογή των διαθέσιμων αποτελεσμάτων από την βιβλιογραφία σχετικά με Μαρκοβιανές Αλυσίδες. Αυτή η προσέγγιση θα παρουσιαστεί με περισσότερες λεπτομέρειες στην συνέχεια που ακολουθεί. Στην συνέχεια υπολογίζονται και εξομοιώνονται μερικά διαγράμματα σχετιζόμενα με τα χαρακτηριστικά απόδοσης (όπως το μέσο μήκος – *ARL*, η τυπική απόκλιση του – *SDRL*, η μεσαία τιμή του – *MDRL*, κάποια άνω και κάτω ποσοστά κλίμακας, κλπ). Τα ποσοστά κλίμακας (percentiles), μαζί με την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, παρέχουν μια πληρέστερη εικόνα της κατανομής του μήκους (βλ. Radson και Boyd – 2005 και Chakraborti – 2007).

Η προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας (βλ. Brook και Evans – 1972 και Lucas και Saccucci – 1990) για τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους ροής συνεπάγεται ότι η σχεδίαση του στατιστικού θα πρέπει να ειδωθεί όπως σαν να ακολουθεί μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα, η οποία χαρακτηρίζεται από έναν χώρο κατάστασης S και μία μήτρα

πιθανοτήτων μετάβασης M . Για το στατιστικό μέγεθος $EWMA$ ορίζουμε μία συνεχή Μαρκοβιανή Αλυσίδα (με μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης άπειρης διάστασης), και οι τιμές του μεγέθους διακριτοποιούνται σε μία αλυσίδα πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων έτσι ώστε τα προσεγγιστικά αποτελέσματα να μπορούν να προκύψουν σχετικά εύκολα. Ο χώρος κατάστασης αποτελείται από δύο τύπους κατάστασης: (1) μία απορροφητική κατάσταση (στην κατάσταση αυτή εισέρχεται το σύστημα όταν το διάγραμμα σηματοδοτεί ότι βρίσκεται σε κατάσταση εκτός ελέγχου, δηλ. ότι η διεργασία έχει περιέλθει σε κατάσταση πάνω από το UCL ή χαμηλότερα από το LCL) και (2) r το πλήθος μεταβατικές ή μη απορροφητικές καταστάσεις, οπότε το σύνολο των καταστάσεων της αλυσίδας είναι $(r+1)$. Οι r μεταβατικές καταστάσεις αντιστοιχούν σε r ίσου μήκους υποδιαστήματα τα οποία προκύπτουν διαιρώντας το διάστημα ανάμεσα στο πάνω και στο κάτω όριο ελέγχου της διεργασίας. Η εκλογή του πλήθους r είναι σημαντική διότι η εκλογή του απευθείας επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων (π.χ. όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του r τόσο πιο ακριβή τα προσεγγιστικά αποτελέσματα). Είναι γενικότερα βολικό το r να εκλεγεί ως περιττός αριθμός, ισοδύναμος της ποσότητας $2m+1$ με την παράμετρο $m \geq 1$ έτσι ώστε να προκύπτει μία μοναδική μεσαία τιμή του πλήθους των καταστάσεων, για κάθε υποδιάστημα. Η μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης με διαστάσεις $(r+1) \times (r+1)$ γράφεται σε μία διαχωρίσιμη σε υποπίνακες μορφή:

$$M_{(r+1) \times (r+1)} = \begin{bmatrix} Q_{r \times r} & P_{r \times 1} \\ 0'_{1 \times r} & 1_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

όπου ο υποπίνακας $Q_{r \times r}$, περιλαμβάνει όλες τις πιθανότητες μετάβασης για τις μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας και καλείται κλασσική μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης. Το διάνυσμα στήλη $P_{r \times 1}$ περιλαμβάνει όλες τις πιθανότητες για μετάβαση από οποιαδήποτε μεταβατική κατάσταση προς την απορροφητική. Το διάνυσμα γραμμή $0'_{1 \times r}$ ένα διάνυσμα που περιλαμβάνει μηδενικά που αναλογούν στις πιθανότητες μεταβάσεις από την απορροφητική κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη μεταβατική της αλυσίδας, ενώ το βαθμωτό μέγεθος 1 είναι η πιθανότητα μετάβασης από την απορροφητική κατάσταση στην απορροφητική κατάσταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι σημείο κλειδί στην χρησιμοποίηση της προσέγγισης της Μαρκοβιανής Αλυσίδας είναι η εξαγωγή της υπομήτρας πιθανοτήτων μετάβασης $Q_{r \times r}$.

Η τ.μ. N μήκους ροής του διαγράμματος ελέγχου αποτελεί τον χρόνο αναμονής για την Μαρκοβιανή Αλυσίδα έως ότου να εισέλθει στην απορροφητική κατάσταση για πρώτη φορά. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω αναλογία και υποθέτοντας ότι η διεργασία ξεκινά

υπό έλεγχο όταν εφαρμόζουμε το διάγραμμα ελέγχου, η σ.μ.π., η προσδοκητή τιμή ARL , η $SDRL$, και η συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας της τ.μ. N δίνονται από τις σχέσεις:

$$P(N = t; \lambda, L, r, \theta) = \underline{\xi} Q^{t-1} (I - Q) \underline{1}$$

for $t = 1, 2, 3, \dots$

$$E(N; \lambda, L, r, \theta) = \underline{\xi} (I - Q)^{-1} \underline{1}$$

$$SD(N; \lambda, L, r, \theta) = \sqrt{\underline{\xi} (I + Q) (I - Q)^{-2} \underline{1} - (E(N))^2}$$

$$P(N \leq t; \lambda, L, r, \theta) = 1 - \underline{\xi} Q^t \underline{1} \quad \text{for } t = 1, 2, 3, \dots$$

βλέπε Fu και Lou – 2003, με έμφαση στα θεωρήματα 5.2 και 7.4.

όπου $I=I_{rxr}$ είναι η μοναδιαία μήτρα, $Q=Q_{rxr}$ είναι η κλασσική μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης, $\underline{1}=I_{rx1}$ είναι ένα διάνυσμα στήλη με όλα του τα στοιχεία να ισούνται με την μονάδα και $\underline{\xi}=\xi_{1xr}$ είναι ένα διάνυσμα γραμμή το οποίο καλείται αρχικό διάνυσμα πιθανότητας και περιλαμβάνει τις πιθανότητες ότι η Μαρκοβιανή Αλυσίδα εκκινεί σε μία δεδομένη κατάσταση. Το διάνυσμα $\underline{\xi}=(\xi_{-m}, \dots, \xi_m)$ συνήθως εκλέγεται έτσι ώστε $\sum_{i=-m}^m \xi_i = 1$. Για μία πιο λεπτομερή συζήτηση στην εκλογή του αρχικού διανύσματος πιθανοτήτων βλέπε το παράρτημα της εργασίας των Lucas και Saccucci (1990). Θεωρούμε $\xi_0=1$ και $\xi_i=0$ για όλα τα $i \neq 0$ γεγονός το οποίο συνεπάγεται ότι η Μαρκοβιανή Αλυσίδα εκκινεί από την κατάσταση 0 ($Z_0=0$) με πιθανότητα μονάδα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι ιδιότητες, οι εντός ελέγχου του διαγράμματος αποτελούν συναρτήσεις και εξαρτώνται από τις παραμέτρους σχεδιασμού λ και L , και τον αριθμό των μεταβατικών καταστάσεων r αλλά όχι από τον τύπο της υποκείμενης κατανομής για τα δεδομένα. Όμως αυτό δεν αληθεύει για την περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση εκτός ελέγχου.

5.4. Εφαρμογή του διαγράμματος με κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων σχεδιασμού

Ο Montgomery (2005) εξέφρασε την άποψη ότι: «Η διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού θα πρέπει να αποτελείται από τον καθορισμό των επιθυμητών μέσων μηκών για τις καταστάσεις εντός και εκτός ελέγχου του συστήματος, από το πλάτος ολίσθησης της διεργασίας στο οποίο βασίζονται και στην συνέχεια αφού αυτά καθορισθούν να επιλέγεται ο καθορισμός των λ και L ο οποίος παρέχει την επιθυμητή απόδοση για την παράμετρο ARL ». Το διάγραμμα ελέγχου $EWMA$ σχεδιάζεται βασισμένο στον καθορισμό των λ και L παραμέτρων για τις οποίες επιτυγχάνεται ένα επιθυμητό εντός μέσο μήκος ροής ARL_0 σε κατάσταση εντός ελέγχου της διεργασίας. Η σταθερά λ ($0 < \lambda \leq 1$) αποτελεί την παράμετρο εξομάλυνσης (η οποία για τιμή $\lambda=1$ δίνει το διάγραμμα *Shewart*) και επιλέγεται εξαρτώμενη από το πλάτος της διολίσθησης που το σύστημα καλείται να ανιχνεύσει, ενώ η σταθερά $L > 0$ καθορίζει την απόσταση από τα όρια ελέγχου από την κεντρική γραμμή (όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της παραμέτρου L , τόσο μεγαλύτερη η απόσταση από τα όρια ελέγχου και αντιστρόφως) και η οποία επιλέγεται σε συνδυασμό με την τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης λ .

Η κατανομή του μήκους ροής και κατά συνέπεια η μέση της τιμή, η τυπική απόκλιση και τα ποσοστιαία όρια (percentiles) της κατανομής υπολογίζονται για διάφορες τιμές των παραμέτρων λ και L με $r=1001$ (αν και χρησιμοποιήθηκαν αρκετές τιμές για αυτήν την παράμετρο, η τιμή 1001 επελέγη διότι οδηγεί σε αρκετά ακριβή αποτελέσματα τα οποία χρειάζονται κατάλληλα ισορροπημένο και λογικό χρόνο για να προσομοιωθούν) και τα αποτελέσματα από αυτές τις προσομοιώσεις παρουσιάζονται στον πίνακα 1 που ακολουθεί. Πέντε τιμές για την παράμετρο λ που αντιστοιχούν σε μικρές (χονδρικά έως 0.5 μονάδες τυπικής απόκλισης ή και λιγότερο), μεσαίας τάξης (χονδρικά κυμαινόμενες ανάμεσα σε 0.5 έως 1.5 μονάδα τυπικής απόκλισης) και μεγάλες διολισθήσεις (χονδρικά από 1.5 μονάδα τυπικής απόκλισης και πάνω), χρησιμοποιήθηκαν με συνδυασμούς τιμών για την παράμετρο L από 2 έως 3 σε προσαυξήσεις της τάξης του 0.1. Αξίζει να σημειωθεί ότι η πρώτη γραμμή από κάθε κελί του πίνακα 1 δεικνύει τις τιμές ARL_0 και $SDRL_0$ αντίστοιχα, ενώ η δεύτερη γραμμή δείχνει ότι τα ποσοστά 5^{ης}, 25^{ης}, 50^{ης}, 75^{ης}, και 95^{ης} τάξης (percentiles), όπου αυτά τα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία βοηθούν στην συμπερίληψη

των εντός ελέγχου κατανομών μηκών ροής, σε όρους σχήματος, τυπικής τιμής (με την έννοια της κατεύθυνσης – τάσης) και εξάπλωσης. Από τον πίνακα 1 παρατηρούμε ότι για μία καθορισμένη τιμή της παραμέτρου λ , η εντός ελέγχου ARL καθώς και τα άλλα χαρακτηριστικά για την εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής, όλα φαίνονται να αυξάνουν καθώς το L αυξάνει. Επίσης η εντός ελέγχου κατανομή του μήκους ροής είναι θετικά διεσπαρμένη (όπως αναμενόταν άλλωστε) καθόσον $ARL_0 > MDRL_0$ για όλους τους συνδυασμούς (λ, L) .

Όσον αφορά στην υλοποίηση του μη παραμετρικού διαγράμματος $EWMA-SN$, το πρώτο βήμα είναι η εκλογή της παραμέτρου λ . Περαιτέρω υπολογισμοί (οι οποίοι δεν συμπεριλαμβάνονται εδώ, βλέπε τον Graham et al – 2009 για περισσότερες λεπτομέρειες) και παρουσίαση αυτών σε πίνακες (επιπρόσθετα του πίνακα 1) έδειξαν ότι για μικρές διολισθήσεις, η σύσταση είναι να εκλεγεί ένα σχετικά μικρό λ , π.χ. ίσο με 0.01, 0.025 ή 0.05. Για μεσαίες ολισθήσεις εφόσον κάτι τέτοιο ενδιαφέρει εκλέγεται $\lambda=0.10$, ενώ για τιμή $\lambda=0.20$ εάν επιθυμείται η ανίχνευση μεγαλύτερων διολισθήσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι συστάσεις θεωρούνται σε συνάφεια με αυτές που αναφέρονται στο κλασικό $EWMA$ διάγραμμα. (βλέπε για παράδειγμα Montgomery – 2005). Οι επιλογές $\lambda=0.01$ και $\lambda=0.025$ προτάθηκαν από τους ερευνητές Stoumbos και Reynolds (2000) και Stoumbos και Sullivan (2002) για το κλασικό διάγραμμα $EWMA$ αλλά φαίνεται ότι οι ανωτέρω μεθοδολογίες μπορούν να εφαρμοσθούν εξίσου καλά και για το μη παραμετρικό διάγραμμα $EWMA-SN$. Μετά την εκλογή της παραμέτρου λ , το επόμενο βήμα συμπεριλαμβάνει την εκλογή της παραμέτρου L έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ένα επιθυμητό ARL_0 .

Θέλοντας η μέθοδος να βοηθήσει τους πρακτικούς χρήστες της, στον σχεδιασμό του μη παραμετρικού διαγράμματος $EWMA-SN$, στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται μερικοί συνδυασμοί (λ, L) για γενικότερα επιθυμητές τιμές ARL_0 της τάξης του 370 και 500 αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση οι τιμές για το ARL_0 προκύπτουν χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας, και για τον λόγο αυτό καλούνται επιτευχθείσες τιμές ARL_0 (*attained ARL_0 values*), και οι οποίες επίσης παρέχονται. Αξίζει να σημειωθεί ότι εξαιτίας των διακριτών τιμών που λαμβάνει η στατιστική τιμή του προσήμου, η επιθυμητή τιμή για την παράμετρο ARL δεν κατορθώνεται επακριβώς.

Έτσι για παράδειγμα, θέλοντας να ανιχνεύσουμε μία μικρή διολίσθηση με το μη παραμετρικό διάγραμμα $EWMA-SN$ με μία τιμή για την παράμετρο ARL_0 γύρω στο 500, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο συνδυασμός για τα $(\lambda, L)=(0.05, 2.583)$. Ο πίνακας 2 είναι εξαιρετικά χρήσιμος για την πρακτική εφαρμογή του διαγράμματος ελέγχου $EWMA-SN$.

Πίνακας 1

TABLE 1 Characteristics of the In-Control Run-Length Distribution for the Nonparametric EWMA-SN Chart*

L	λ					
	Small shifts			Moderate shifts		
	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	Large shifts
2.0	509.21 (467.66)	223.43 (205.36)	123.00 (113.05)	72.74 (67.34)	52.92 (49.69)	5, 17, 38, 72, 152
2.1	64, 177, 366, 690, 1442	28, 77, 161, 303, 633	15, 43, 88, 167, 349	9, 25, 52, 99, 207	73.84 (69.03)	8, 25, 53, 100, 212
2.2	627.83 (581.99)	272.59 (252.99)	151.82 (141.14)	93.78 (86.78)	104.63 (100.29)	9, 33, 74, 143, 305
2.3	74, 214, 450, 853, 1789	32, 93, 195, 370, 777	18, 51, 109, 206, 433	11, 32, 67, 127, 267	157.08 (151.13)	14, 49, 111, 215, 459
2.4	771.41 (721.35)	338.96 (317.49)	192.64 (180.74)	118.77 (111.94)	254.90 (247.71)	20, 78, 179, 351, 749
2.5	86, 258, 551, 1050, 2211	37, 113, 242, 462, 972	21, 64, 137, 262, 553	13, 39, 84, 162, 342	444.74 (436.71)	30, 134, 311, 613, 1316
2.6	957.35 (902.83)	416.61 (393.34)	243.29 (230.53)	156.91 (148.70)	883.01 (873.93)	54, 260, 615, 1221, 2627
2.7	100, 315, 681, 1306, 2759	43, 137, 296, 569, 1201	24, 79, 173, 332, 703	16, 51, 111, 214, 454	2143.60 (2133.50)	120, 624, 1489, 2968, 6401
2.8	1185.34 (1126.50)	528.27 (502.92)	310.64 (296.68)	208.58 (200.28)	*	*
2.9	116, 384, 840, 1621, 3433	51, 170, 374, 723, 1532	29, 99, 220, 425, 903	19, 66, 147, 286, 608	798.32 (787.09)	*
3.0	1491.34 (1427.74)	664.08 (636.76)	396.36 (381.58)	281.06 (271.63)	52, 238, 557, 1102, 2369	*
3.1	136, 475, 1054, 2043, 4340	60, 211, 469, 910, 1935	34, 125, 279, 544, 1158	23, 88, 198, 386, 823	1170.49 (1158.06)	*
3.2	1878.95 (1810.96)	857.79 (828.80)	514.42 (498.32)	376.57 (366.84)	72, 346, 815, 1618, 3482	*
3.3	161, 590, 1324, 2579, 5493	72, 268, 604, 1178, 2512	42, 160, 362, 707, 1509	29, 115, 264, 518, 1109	1820.61 (1807.21)	*
3.4	2401.43 (2328.63)	1110.88 (1079.59)	688.49 (671.00)	544.25 (533.21)	106, 533, 1266, 2519, 5427	*
3.5	192, 743, 1687, 3301, 7048	87, 342, 780, 1528, 3265	52, 211, 483, 948, 2028	38, 164, 381, 750, 1608	*	*
3.6	3091.46 (3014.00)	1443.37 (1410.33)	914.52 (896.17)	798.32 (787.09)	*	*
3.7	232, 945, 2167, 4256, 9106	106, 439, 1011, 1988, 4258	64, 276, 640, 1261, 2703	52, 238, 557, 1102, 2369	*	*
3.8	3986.80 (3904.81)	1925.38 (1890.15)	1262.27 (1242.56)	1170.49 (1158.06)	*	*
3.9	283, 1206, 2789, 5495, 11780	132, 579, 1345, 2656, 5698	83, 377, 881, 1742, 3742	72, 346, 815, 1618, 3482	*	*
4.0	5288.28 (5201.63)	2568.15 (2530.87)	1722.6 (1701.96)	1820.61 (1807.21)	*	*
4.1	354, 1583, 3692, 7298, 15669	167, 765, 1792, 3546, 7619	108, 510, 1200, 2380, 5119	106, 533, 1266, 2519, 5427	*	*

The first row of each cell shows the ARL_0 and $SDRL_0$ values, respectively, and the second row shows the values of the in-control 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).
*For the nonparametric EWMA-SN chart to signal one must have that $L^2(\frac{\lambda}{\sigma}) \leq 1$. Also, the closer $L^2(\frac{\lambda}{\sigma})$ gets to one, the larger the ARL_0 (and the other characteristics of the in-control run-length distribution) get. Hence, these values are omitted because they are not considered useful in practice.

Πίνακας 2

TABLE 2 (λ, L) Combinations for the Nonparametric EWMA-SN Chart for Nominal $ARL_0 = 370$ and 500

Shift to be detected	Nominal $ARL_0 = 370$		Nominal $ARL_0 = 500$	
	(λ, L)	Attained ARL_0	(λ, L)	Attained ARL_0
Small	(0.01, 1.835)	370.54	(0.01, 1.990)	501.03
	(0.025, 2.240)	371.05	(0.025, 2.373)	499.27
	(0.05, 2.472)	369.49	(0.05, 2.583)	497.75
Moderate	(0.10, 2.585)	370.74	(0.10, 2.667)	500.15
Large	(0.20, 2.471)	364.61	(0.20, 2.521)	497.61

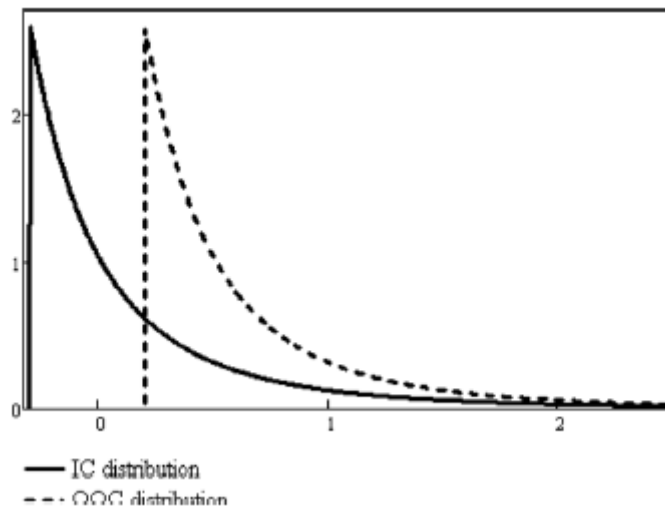
5.5. Παράδειγμα Εφαρμογής του Μη Παραμετρικού EWMA-SN διαγράμματος

Για την παρουσίαση των ιδιοτήτων και της εφαρμογής του προτεινόμενου μη παραμετρικού διαγράμματος, θεωρούμε δεδομένα που ανήκουν σε μία «δεξιά σκεδασμένη» κατανομή με αρκετά σημαντικό φαινόμενο συγκέντρωσης των δεδομένων της, στα άκρα του διαστήματος της κατανομής με βαριές ουρές (*heavy tailed*). Τα πρώτα 20 δεδομένα δημιουργήθηκαν με χρήση της μεθόδου Pareto για την ανάλογη με παραμέτρους $(2/\sqrt{3}, 3)$ κατανομή. Η παραπάνω κατανομή έχει μια μεσαία τιμή ίση με $(2/\sqrt{3})(\sqrt[3]{2})=1.455$ και διασπορά ίση με την μονάδα. Κάθε ένα από τα σημεία της διεργασίας που ακολουθούν την παραπάνω κατανομή μετασχηματίστηκε (μετατοπίστηκε) αφαιρώντας την μεσαία τιμή έτσι ώστε οι μετασχηματισμένες παρατηρήσεις να έχουν μία μεσαία τιμή κοντά στο μηδέν και μία τυπική απόκλιση στην μονάδα. Παρομοίως οι 10 τελευταίες παρατηρήσεις σχηματίστηκαν με μετασχηματισμό από μία μέθοδο Pareto με παραμέτρους $(2/\sqrt{3}, 3)$ κατανομής έτσι ώστε οι προκύπτουσες παρατηρήσεις να έχουν μία μεσαία τιμή στο 0.5 και μία τυπική απόκλιση που ισούται με μονάδα. Κατά συνέπεια αυτές οι τελευταίες 10 παρατηρήσεις μπορούν να ειπωθούν σαν να έχουν ανακύψει από μία διεργασία η οποία είναι εκτός ελέγχου σε σχέση με την παράμετρο της μεσαίας τιμής. Αυτές οι δύο Pareto σ.π.π. παρουσιάζονται στο σχήμα 1.

Για το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου EWMA-SN χρησιμοποιήθηκε τιμή $\lambda=0.10$ και $L=2.585$ από τον πίνακα 2 για ένα μέσο $ARL_0=370.74$. Οι τιμές των στατιστικών προσήμου SN_i και το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου EWMA-SN υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες αναφορές, και τα αποτελέσματα της επεξεργασίας δίνονται στον πίνακα 3 μαζί με τις αρχικές προσομοιωμένες παρατηρήσεις. Για το

παραδοσιακό *EWMA* διάγραμμα χρησιμοποιούμε $\lambda=0.10$ και $L=2.703$ για ARL_0 περίπου ίσο με 370 (βλ. Montgomery 2005). Τα κλασσικά *EWMA* και τα μη παραμετρικά *EWMA-SN* διαγράμματα δίνονται στα τμήματα (a) και (b) του σχήματος 2.

Από το σχήμα 2 παρατηρούμε ότι το μη παραμετρικό *EWMA-SN* διάγραμμα δίνει σήμα συναγερμού στην παρατήρηση 29, ενώ το παραδοσιακό *EWMA* διάγραμμα δεν δίνει καθόλου σήμα. Στην πραγματικότητα, τα σχεδιασμένα στατιστικά και στα δύο διαγράμματα, ξεκινούν να παρουσιάζουν μία «τάση» προς τα πάνω από το χρονικό σημείο 20, αλλά αυτή η τάση για το μη παραμετρικό διάγραμμα γίνεται ακόμη πιο εμφανής και πιο έντονη.



Σχήμα 1: Οι εντός και εκτός ελέγχου καντανομές για τις Pareto σ.π.π. που χρησιμοποιούνται στο παράδειγμα

Επιπρόσθετα το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* εμφανίζει το πρακτικό πλεονέκτημα διότι δεν απαιτεί μία κανονικότητα ή οποιαδήποτε άλλη παραμετρική υπόθεση για το μοντέλο για την υποκείμενη κατανομή της διεργασίας. Κατά την προσέγγιση αυτή, ένα μη παραμετρικό διάγραμμα είναι ευσταθές στις φάσεις εντός ελέγχου εξ ορισμού. Όμως, αν και σε θέματα αρχής το κλασσικό *EWMA* διάγραμμα μπορεί να σχεδιασθεί για μία συγκεκριμένη εφαρμογή η οποία επιθυμούμε να παραμείνει ευσταθής για την υπόθεση της υποκείμενης κατανομής, (βλ. Borror et al – 1999). Το τελευταίο μπορεί να καταστεί επίπονα δεσμευτικό και κατά συνέπεια δεν αναμένεται να είναι ικανοποιητικό για όλες τις πρακτικές εφαρμογές (βλ. Human et al – 2011). Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής, το οποίο χρησιμοποιεί δεδομένα που προέκυψαν από προσομοίωση, ξεκάθαρα δεικνύει ότι παρουσιάζονται

καταστάσεις στην πράξη, όπου το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* μπορεί να προσφέρει μία πολύτιμη εναλλακτική αυτής του κλασσικού *EWMA* διαγράμματος.

5.6. Μελέτη Απόδοσης

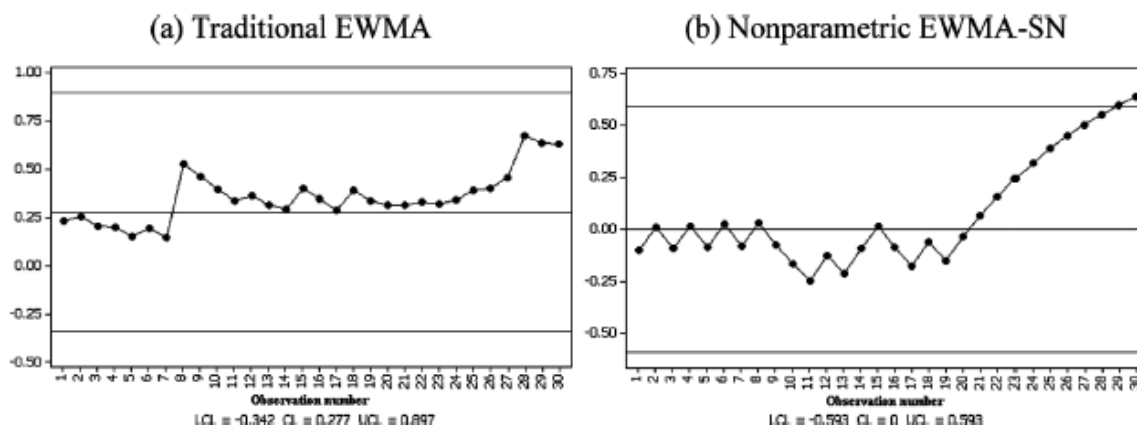
Αν και τα μη παραμετρικά διαγράμματα είναι χρήσιμα στην πράξη, εξαιτίας της ευσταθούς συμπεριφοράς τους σε φάσεις εντός ελέγχου,, έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον να συγκριθεί η απόδοση του προτεινόμενου μη παραμετρικού *EWMA-SN* διαγράμματος με το κλασσικό *EWMA* (βλ. Montgomery – 2005). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα όρια ελέγχου μόνιμης κατάστασης χρησιμοποιήθηκαν και για τα δύο διαγράμματα (όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2), διότι κατά αυτόν τον τρόπο η σύγκριση των δύο διαγραμμάτων είναι δίκαιη έτσι. Όπως επισημάνθηκε και νωρίτερα υπάρχουν αρκετά μη παραμετρικά διαγράμματα διαθέσιμα στην βιβλιογραφία, αλλά τα περισσότερα από αυτά χρησιμοποιούν για την κατασκευή τους, ομαδοποιημένα δεδομένα (Amin και Searcy – 1991, Bakir – 2004, 2006, Bakir και Reynolds – 1979, Chakraborti και Eryilmaz – 2007, Chakraborti και Van de Wiel – 2008 και αρκετοί άλλοι). Παρόλα αυτά δεν υπάρχει διαθέσιμο μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA* για την περίπτωση των γνωστών αρχικά παραμέτρων (standard known case). Αυτό περιλαμβάνει το CUMIN διάγραμμα από τους Albers και Kallenberg (2009), το οποίο είναι εφαρμόσιμο για διάφορες μετρήσεις χωρίς να αποτελεί ένα τυπικό *CUSUM* ή ένα *EWMA* τύπου διάγραμμα.

Η απόδοση σε συνθήκες εντός ελέγχου ενός διαγράμματος τυπικά χρησιμοποιείται για την διερεύνηση της ευστάθειας της διεργασίας (π.χ. για την ευαισθησία ή την αλλαγή των ιδιοτήτων για την κατανομή του μήκους ροής), κάτω από διαφορετικές υποθέσεις για τις υποκείμενες κατανομές, ενώ η απόδοση σε φάση εκτός ελέγχου του διαγράμματος εξετάζεται ως προς την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας στην ανίχνευση της διολίσθησης στην υποκείμενη διεργασία.

Πίνακας 3

TABLE 3 Observations, SN_i Statistics, and Nonparametric EWMA-SN Plotting Statistics

Observation number (i)	X_i	SN_i	Nonparametric EWMA-SN	Observation number (i)	X_i	SN_i	Nonparametric EWMA-SN
1	-0.184	-1	-0.100	16	-0.129	-1	-0.083
2	0.453	1	0.010	17	-0.278	-1	-0.175
3	-0.234	-1	-0.091	18	1.320	1	-0.058
4	0.152	1	0.018	19	-0.117	-1	-0.152
5	-0.287	-1	-0.084	20	0.116	1	-0.037
6	0.578	1	0.025	21	0.310	1	0.067
7	-0.300	-1	-0.078	22	0.472	1	0.160
8	3.948	1	0.030	23	0.201	1	0.244
9	-0.111	-1	-0.073	24	0.523	1	0.320
10	-0.228	-1	-0.166	25	0.871	1	0.388
11	-0.177	-1	-0.249	26	0.475	1	0.449
12	0.626	1	-0.124	27	0.933	1	0.504
13	-0.154	-1	-0.212	28	2.614	1	0.554
14	0.112	1	-0.091	29	0.323	1	0.598
15	1.349	1	0.018	30	0.589	1	0.639



Σχήμα 2: Κλασικό EWMA και μη παραμετρικό διάγραμμα EWMA-SN για το παράδειγμα

Η μελέτη συμπεριλαμβάνει μία ευρεία συλλογή για κανονικές και μη κατανομές θεωρώντας τόσο ελαφρά αλλά και βαρύτερη συγκέντρωση στις ουρές αυτών των κατανομών, ομοίως για συμμετρικές και ασύμμετρες κατανομές, μονοπολικές ή διπολικές, θετικά διεσπαρμένες όπως οι επιμολυσμένες Κανονικές Κατανομές, οι οποίες είναι ειδικότερα χρήσιμες στην μελέτη των επιδράσεων των ορίων των διεργασιών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλες οι κατανομές έχουν διολισθήσει και κλιμακωθεί κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1 (έτσι ώστε τα αποτελέσματα να είναι εύκολα συγκρίσιμα). Ειδικότερα οι κατανομές οι οποίες μετέχουν στην μελέτη είναι (α) η τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, (β) η κατανομή Student $t(v)$ με βαθμούς ελευθερίας 4 και 8 αντίστοιχα, η οποία είναι συμμετρική αλλά με βαρύτερες συγκεντρώσεις ως προς τα άκρα σε σχέση με την κανονική (γ) η συνάρτηση κατανομής

Γάμμα $GAM(\alpha,\beta)$ με παραμέτρους $(\alpha,\beta)=(0.5,1)$, $(1,1)$ και $(3,1)$ αντίστοιχα, οι οποίες δίνουν τιμές θετικά διασκορπισμένες.

Πίνακας 4

TABLE 4 In-Control Performance Characteristics of the Run-Length Distribution for the Nonparametric EWMA-SN and the Traditional EWMA Chart for Selected (λ, L) Combinations*						
Nonparametric EWMA-SN chart						
(λ, L)	(0.01, 1.990)	(0.025, 2.373)	(0.05, 2.583)	(0.10, 2.667)	(0.20, 2.521)	
For all distributions	501.03 (459.68) 63, 174, 361, 679, 1418	499.27 (474.65) 49, 161, 354, 683, 1446	497.75 (481.72) 41, 155, 350, 684, 1459	500.15 (489.29) 36, 152, 350, 689, 1477	497.61 (489.44) 33, 149, 347, 687, 1474	
Traditional EWMA chart						
Dist	(λ, L)	(0.025, 2.368)	(0.05, 2.613)	(0.10, 2.820)		
$N(0,1)$	500.73 (460.49)	499.25 (476.72)	496.80 (481.23)	500.84 (496.97)	497.21 (491.12)	
	61, 173, 360, 678, 1424	47, 161, 353, 682, 1447	39, 154, 349, 683, 1456	34, 151, 352, 698, 1507	30, 147, 346, 689, 1473	
$t(4)$	524.98 (485.57)	497.84 (479.58)	439.19 (428.37)	336.80 (332.23)	219.01 (217.18)	
	61, 180, 376, 712, 1500	44, 158, 352, 678, 1447	32, 133, 308, 605, 1298	22, 100, 234, 465, 1000	13, 64, 153, 303, 651	
$t(8)$	508.37 (469.60)	497.66 (474.17)	471.89 (457.49)	428.78 (420.63)	325.68 (323.01)	
	61, 175, 366, 688, 1437	46, 160, 353, 682, 1437	37, 146, 332, 649, 1383	28, 128, 301, 593, 1265	20, 96, 228, 451, 969	
Laplace	512.94 (471.37)	493.12 (470.21)	443.87 (432.60)	360.35 (353.91)	236.91 (234.55)	
	62, 176, 369, 698, 1457	45, 158, 350, 677, 1431	34, 136, 311, 609, 1305	24, 108, 251, 496, 1071	15, 70, 164, 327, 706	
Logistic	506.92 (467.73)	498.93 (475.23)	477.10 (464.89)	432.79 (424.59)	331.57 (328.54)	
	62, 175, 364, 687, 1443	47, 159, 353, 684, 1446	37, 146, 335, 655, 1411	29, 130, 305, 597, 1276	21, 98, 231, 457, 987	
$Gam(.5,1)$	536.25 (497.39)	536.14 (520.87)	429.69 (425.65)	266.00 (263.73)	146.25 (146.08)	
	61, 183, 385, 731, 1529	41, 164, 375, 739, 1578	27, 127, 298, 594, 1273	16, 78, 185, 367, 793	8, 42, 101, 202, 439	
$Gam(1,1)$	519.50 (478.88)	518.70 (500.20)	464.97 (457.19)	325.51 (323.16)	185.76 (184.71)	
	62, 180, 375, 704, 1473	45, 163, 364, 711, 1515	31, 139, 324, 643, 1376	19, 95, 226, 449, 970	11, 54, 130, 256, 555	
$Gam(3,1)$	504.79 (464.49)	504.63 (484.23)	487.45 (473.27)	419.24 (415.31)	282.46 (279.81)	
	62, 174, 363, 684, 1430	47, 162, 355, 691, 1470	36, 149, 343, 673, 1430	26, 124, 292, 580, 1244	17, 83, 195, 391, 842	
CN	332.72 (436.21)	431.71 (475.43)	450.23 (467.54)	434.59 (442.18)	357.60 (355.41)	
	2, 22, 163, 481, 1221	4, 89, 281, 611, 1379	9, 116, 305, 632, 1385	15, 120, 300, 605, 1311	16, 101, 247, 497, 1078	

*The first row of each cell shows the ARL₀ and SDRLO values, respectively, and the second row shows the values of the in-control 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Η διασπορά των δεδομένων της κατανομής Γάμμα αυξάνει καθώς η παράμετρος α μειώνεται, (δ) η κατανομή Laplace (ή η διπλά εκθετική) $DE(0,1/\sqrt{2})$ με παράμετρο κατεύθυνσης 0 και την παράμετρο κλίμακας ίση με $1/\sqrt{2}$, (ε) η λογιστική κατανομή (logistic) με παράμετρο κατεύθυνσης 0 και παράμετρο κλίμακας ίση με $\sqrt{3}/\pi$ και (στ) η επιμολυσμένη κανονική κατανομή (CN) η οποία αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό δύο τ.μ. κανονικά κατανομημένων με την ίδια κατεύθυνση αλλά διαφορετική διασπορά $(1-\alpha)N(0,\sigma_1^2)+\alpha N(0,\sigma_2^2)$, όπου οι διασπορές σ , εκλέγονται έτσι ώστε η τυπική απόκλιση της συνολικής κατανομής να ισούται με την μονάδα. $(1-\alpha)\sigma_1^2+\alpha\sigma_2^2=1$. Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\sigma_1/\sigma_2=2$ και το επίπεδο της επιμόλυνσης $\alpha=0.05$.

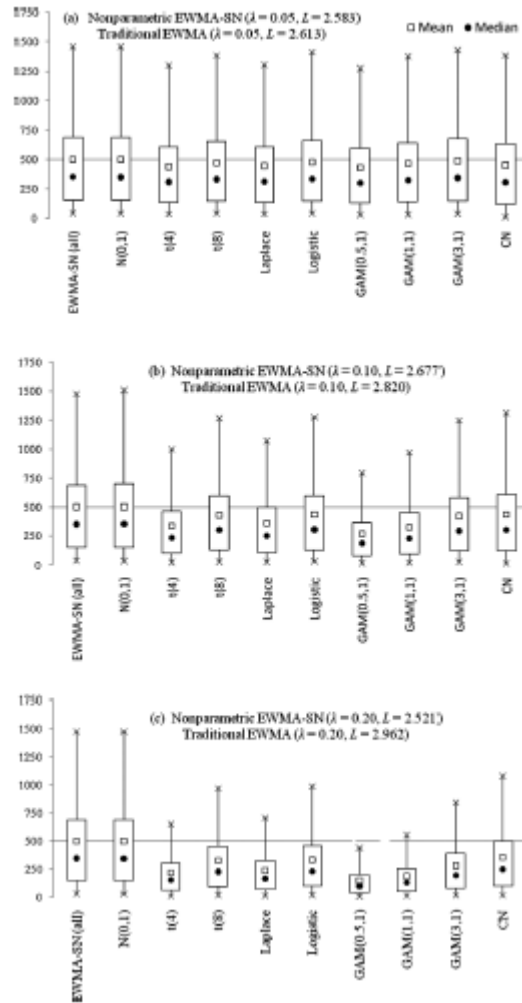
5.6.1. Ευστάθεια για την φάση εντός ελέγχου

Δεδομένου ότι το διάγραμμα *EWMA-SN* είναι μη παραμετρικό, η κατανομή του μήκους για την φάση εντός ελέγχου και τα συσχετιζόμενα χαρακτηριστικά θα πρέπει να παραμείνουν τα ίδια για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή. Παρόλα αυτά, αυτό δεν είναι αληθές για την κλασσική μέθοδο *EWMA*. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 4 για $\lambda=0.01, 0.025, 0.05, 0.10$ και 0.20 αντίστοιχα για τις προαναφερόμενες κατανομές. Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι τιμές του L επιλέγησαν έτσι ώστε το ARL_0 να είναι περίπου ίσο με 500 για κάθε διάγραμμα και ότι στην περίπτωση του διαγράμματος του κλασσικού *EWMA*, οι τιμές της παραμέτρου L επελέγησαν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ότι το ARL_0 παραμένει στην τιμή 500 όταν η υποκείμενη κατανομή στην περίπτωση αυτή είναι κανονική $N(0,1)$.

Για καλύτερη κατανόηση της κατανομής του μήκους στην εντός-ελέγχου φάση της διεργασίας, οι τιμές του πίνακα 4 που αντιστοιχούν σε $\lambda=0.05, 0.10$ και 0.20 παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων πλαισίων (boxplots) όπως οι γραφικές παραστάσεις (βλ. Radson και Boyd 2005) σε τμήματα (a), (b) και (c) στο σχήμα 3, αντίστοιχα (για την διατήρηση χώρου, τα διαγράμματα για $\lambda=0.01$ και 0.025 παραλείπονται). Κάθε διάγραμμα πλαισίου δεικνύει την μέση τιμή της κατανομής ως τετράγωνο και την μεσαία τιμή ως κυκλάκι εσωτερικά του ορθογωνικού τμήματος.

Από το σχήμα 3 μπορούν να γίνουν αρκετές παρατηρήσεις. Όπως αναμενόταν, οι κατανομές των μηκών είναι όλες σκεδασμένες προς τα δεξιά. Το κλασσικό διάγραμμα

EWMA δεν παρουσιάζει τόσο έντονα τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας στην φάση εντός ελέγχου όπως το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* δοθέντος υπόψη ότι οι τιμές του ARL_0 μεταβάλλονται (καθώς οι υποκείμενες κατανομές αλλάζουν) και μερικές φορές ποικίλουν δραματικά. Για παράδειγμα, για $\lambda=0.20$ (βλ. Το τμήμα (c) του σχήματος 3 σε συνδυασμό με τις τιμές από τον πίνακα 4) η τιμή ARL_0 του κλασσικού διαγράμματος *EWMA* ποικίλει από 497.21 (όταν η υποκείμενη κατανομή είναι η κανονική $N(0,1)$) σε 146.25 (όταν η υποκείμενη κατανομή είναι η $GAM(0.5,1)$). Επιπροσθέτως, για μερικές από τις κατανομές, οι τιμές της ARL_0 για το κλασσικό διάγραμμα *EWMA* είναι σημαντικά μικρότερες από 500, το οποίο είναι καθαρά προβληματικό διότι κάτι τέτοιο δεικνύει αύξηση του αριθμού των λανθασμένων συναγερμών. Αν και ίσως είναι πιθανό το κλασσικό διάγραμμα *EWMA* να ρυθμιστεί σε αυτές τις κατανομές, γενικά το φαινόμενο αυτό εγείρει λόγους ανησυχίας όσον αφορά λανθασμένους συναγερμούς ενώ αυτό το διάγραμμα χρησιμοποιείται σε καταστάσεις όπου οι υποκείμενες κατανομές δεν είναι γνωστές κατά ικανοποιητικό τρόπο ή είναι σημαντικά αποκλίνουσες από την κανονική. Το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* δεν φαίνεται να υποφέρει από αυτό το δυναμικό φαινόμενο.



Σχήμα 3: Διαγράμματα πλαισίων (boxplots) για την κατανομή του μήκους σε φάση εντός ελέγχου της διεργασίας για το μη παραμετρικό *EWMA-SN* διάγραμμα (το πρώτο διάγραμμα πλαισίου στα αριστερά) και το κλασικό διάγραμμα *EWMA* (τα υπολειπόμενα εννέα διαγράμματα πλαισίου στα δεξιά) για ARL_0 περίπου ίσο με 500

5.6.2. Απόδοση για την εκτός ελέγχου φάση

Αν και η φάση εντός ελέγχου απόδοση εγείρει ανησυχίες όσον αφορά την αύξηση του αριθμού των λανθασμένων συναγερωμών για το κλασικό διάγραμμα *EWMA*, είναι σημαντικό να εξετασθεί επίσης η απόδοση σε φάση εκτός ελέγχου για να κατορθωθεί κατά τον τρόπο αυτό μια πιο πλήρης σύγκριση. Σημειωτέον ότι όλες οι ιδιότητες που αφορούν στην εκτός ελέγχου φάση του προτεινόμενου διαγράμματος, εξαρτώνται από τις υποκείμενες κατανομές που ακολουθεί η διεργασία, διαμέσου της πιθανότητας ότι μια παρατήρηση ξεπερνά ή όχι την μεσαία τιμή ($P(X_i > \theta_0)$). Θέλοντας να συγκρίνουμε τα κλασικά και τα μη παραμετρικά διαγράμματα *EWMA-SN* (1) οι τιμές της ARL_0 όλων των

διαγραμμάτων καθορίζονται ή θεωρούνται κοντά στην τιμή 500 (για το μη παραμετρικό διάγραμμα EWMA-SN χρησιμοποιούμε την ίδια τιμή για την παράμετρο L για όλες τις κατανομές, ενώ για το κλασικό διάγραμμα EWMA έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές τιμές για την παράμετρο L καθώς οι κατανομές διαφοροποιούνταν) και (2) οι τιμές της ARL για τις φάσεις εκτός ελέγχου δηλώνονται ως ARL_{δ} υπολογίζονται και συγκρίνονται για ειδικές τιμές ολίσθησης της παραμέτρου δ ως προς την μεσαία τιμή, αν και τα διαγράμματα με την μικρότερη τιμή ARL_{δ} είναι γενικότερα προτιμώμενα.

Πίνακας 5

L	Traditional EWMA chart with $\lambda = 0.05$ and L such that $ARL_{0.05} = 500$					Nonparametric EWMA-SN chart with $\lambda = 0.05$ and L such that $ARL_{0.05} = 500$				
	0.5	1	1.5	2	2.5	0.5	1	1.5	2	2.5
M(0,1)	28.68 (16.62)	11.37 (4.23)	7.10 (2.05)	5.22 (1.28)	4.17 (0.90)	42.19 (24.46)	18.03 (6.38)	13.16 (2.73)	11.65 (1.35)	11.17 (0.67)
t(4)	10, 17, 25, 35, 61	6, 8, 11, 14, 19	4, 6, 7, 8, 11	3, 4, 5, 6, 7	3, 4, 4, 5, 6	14, 23, 35, 53, 94	11, 13, 16, 21, 30	11, 11, 13, 14, 19	11, 11, 11, 14	11, 11, 11, 13
	30.94 (17.73)	11.76 (4.21)	7.29 (2.01)	5.34 (1.25)	4.26 (0.89)	29.70 (15.61)	15.34 (4.38)	12.56 (2.23)	11.68 (1.38)	11.34 (0.95)
t(8)	11, 18, 27, 39, 65	6, 9, 11, 14, 20	5, 6, 7, 8, 11	4, 5, 5, 6, 8	3, 4, 4, 5, 6	13, 19, 26, 37, 60	11, 11, 14, 17, 24	11, 11, 11, 14, 17	11, 11, 11, 14	11, 11, 11, 14
	29.53 (16.99)	11.50 (4.22)	7.18 (2.05)	5.27 (1.27)	4.20 (0.90)	36.53 (21.45)	16.82 (5.46)	12.93 (2.54)	11.72 (1.42)	11.28 (0.86)
Laplace	10, 18, 25, 37, 62	6, 9, 11, 14, 19	4, 6, 7, 8, 11	4, 4, 5, 6, 8	3, 4, 4, 5, 6	13, 21, 31, 46, 79	11, 13, 16, 19, 27	11, 11, 14, 18	11, 11, 11, 14	11, 11, 11, 14
	30.48 (17.58)	11.68 (4.27)	7.24 (2.05)	5.32 (1.27)	4.23 (0.89)	27.52 (13.81)	15.68 (4.64)	12.90 (2.52)	11.86 (1.58)	11.40 (1.05)
Logistic	11, 18, 26, 38, 65	6, 9, 11, 14, 20	4, 6, 7, 8, 11	4, 4, 5, 6, 8	3, 4, 4, 5, 6	13, 18, 24, 34, 54	11, 13, 14, 18, 25	11, 11, 14, 18	11, 11, 13, 15	11, 11, 11, 14
	29.46 (17.00)	11.47 (4.22)	7.17 (2.05)	5.26 (1.27)	4.20 (0.90)	35.79 (20.80)	16.80 (5.47)	12.97 (2.57)	11.75 (1.45)	11.29 (0.88)
Gam(5,1)	10, 17, 25, 37, 62	6, 8, 11, 14, 19	4, 6, 7, 8, 11	4, 4, 5, 6, 8	3, 4, 4, 5, 6	13, 21, 30, 45, 77	11, 13, 16, 19, 27	11, 11, 13, 14, 18	11, 11, 11, 13, 14	11, 11, 11, 14
	33.75 (20.97)	12.57 (4.56)	7.52 (1.97)	5.45 (1.19)	4.32 (0.83)	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11
Gam(1,1)	9, 19, 29, 43, 74	6, 9, 12, 15, 21	4, 6, 8, 9, 11	3, 5, 6, 6, 7	3, 4, 4, 5, 5	19, 46 (7.45)	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11
	31.29 (19.13)	12.03 (4.45)	7.31 (2.01)	5.31 (1.21)	4.23 (0.85)	11, 14, 18, 23, 34	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11
Gam(3,1)	9, 18, 27, 40, 68	6, 9, 12, 15, 20	4, 6, 7, 9, 11	3, 5, 5, 6, 7	3, 4, 4, 5, 5	32.43 (17.91)	13.31 (2.84)	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11
	29.78 (17.73)	11.66 (4.35)	7.21 (2.05)	5.26 (1.24)	4.19 (0.87)	13, 20, 28, 40, 67	11, 11, 13, 14, 19	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11, 11	11, 11, 11, 11
CN	10, 17, 26, 38, 64	6, 9, 11, 14, 20	4, 6, 7, 8, 11	4, 4, 5, 6, 7	3, 4, 4, 5, 6	39.43 (24.00)	17.39 (5.90)	12.98 (2.57)	11.63 (1.33)	11.22 (0.77)
	24.49 (18.25)	7.42 (4.73)	3.82 (2.20)	2.45 (1.28)	1.78 (0.85)	14, 22, 33, 46, 87	11, 13, 16, 20, 29	11, 11, 14, 18	11, 11, 11, 14	11, 11, 11, 13
	3, 11, 20, 33, 59	2, 4, 6, 10, 16	1, 2, 3, 5, 8	1, 2, 2, 3, 5	1, 2, 2, 3					

*The first row of each cell shows the ARL and SNR values, respectively, and the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Ο πίνακας 5 δίνει τα χαρακτηριστικά για φάσεις εκτός ελέγχου για τις κατανομές μηκών για διάφορες κατανομές και ολισθήσεις της παραμέτρου δ στο διάστημα από 0.5 έως 2.5 με αυξήσεις σε ποσά της τάξης του 0.5, το οποίο αναμένεται να επιδράσει σε όρους τυπικής απόκλισης του πληθυσμού (χαρακτηριστικό το οποίο στην περίπτωση μας έχει τεθεί σε τιμή μονάδα), και για την κλασσική μέθοδο *EWMA* αλλά και για την μη παραμετρική *EWMA-SN* για $\lambda=0.025$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και οι θετικές αλλά και οι αρνητικές διολισθήσεις εξετάστηκαν για την κατανομή Γάμμα. Για συμμετρικές κατανομές η κατεύθυνση της διολίσθησης δεν φαίνεται να επηρεάζει την ανιχνευτική ικανότητα των διαγραμμάτων, όπου για την δεξιά σκεδαζόμενη κατανομή Γάμμα αυτό συμβαίνει. Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι για να επιτραπεί η εμφάνιση ενός σήματος μετά από μία παρατήρηση, το μέγιστο επιτρεπτό άνω όριο *UCL* ελέγχου για το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* είναι ίσα με την ποσότητα της παραμέτρου λ και γενικά θέλοντας να επιτραπεί η δημιουργία ενός σήματος συναγερμού μετά την παρατήρηση i -τάξης το μέγιστο επιτρεπτό όριο για την παράμετρο *UCL* είναι $(1-(1-\lambda)^i)$. Αυτό μπορεί να επιδειχθεί σχετικά εύκολα με αντικατάσταση της μέγιστης τιμής για την παρατήρηση SN_i (η οποία ισούται με 1) στην προηγούμενη εξίσωση ορισμού της *EWMA* και ξαναγράφοντας το στατιστικό χαρακτηριστικό ως:

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j SN_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0.$$

Όμως, η πρώτη στιγμή όπου το διάγραμμα θα δώσει σήμα συναγερμού είναι στην πρώτη i -παρατήρηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη:

$$i \geq \frac{\ln(1 - UCL)}{\ln(1 - \lambda)}.$$

Όπως επισημάνθηκε, όταν εξετάζεται η εκτός ελέγχου απόδοση των *EWMA* διαγραμμάτων, το πρόβλημα της «αδράνειας» που αυτά εμφανίζουν θα πρέπει πάντα να τίθεται υπόψη. Ο όρος «αδράνεια» αναφέρεται σε μέτρηση της αντίστασης του διαγράμματος να σηματοδοτήσει μία κατάσταση διολίσθησης. Για παράδειγμα, εάν το στατιστικό στο διάγραμμα *EWMA*, συμβαίνει να είναι κοντά στο κάτω όριο ελέγχου *LCL* στην χρονική στιγμή όπου μία προς τα πάνω διολίσθηση συμβαίνει, ο χρόνος που θα απαιτείται για να φτάσει η διεργασία στο *UCL* θα είναι μεγαλύτερος από ότι στην αντίστοιχη περίπτωση όπου το στατιστικό μέγεθος της *EWMA* θα είναι στην κεντρική γραμμή ελέγχου. Έχει αποδειχθεί ότι (Woodall και Mahmoud – 2005) τα διαγράμματα *EWMA* εμφανίζουν κάτι επιπλέον από το πρόβλημα της αδράνειας, ειδικότερα όταν

κάποιος ενδιαφέρεται για την ανίχνευση άνω και κάτω μετατοπίσεων (δηλ. διαγράμματα αμφίπλευρου ελέγχου) διότι η μεθοδολογία για το διάγραμμα *EWMA* εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας μέσες τιμές ενός μονόπλευρα σχεδιαζόμενου στατιστικού μεγέθους σε αντίθεση με την διαδικασία ελέγχου *CUSUM* που χρησιμοποιεί δύο ανεξάρτητα (άνω και κάτω) στατιστικά διαγράμματα. Για τον λόγο αυτό, αν και η μέθοδος *EWMA* είναι ευκολότερη να εφαρμοστεί στην πράξη, η χειρότερη περίπτωση για την απόδοση της σε φάσεις εκτός ελέγχου καταλήγει να είναι χειρότερη από την αντίστοιχη ενός διαγράμματος *CUSUM*, στο οποίο τουλάχιστον ένα από τα δύο σχήματα θα ανιχνεύσει την διολίσθηση, διότι η τιμή για το άνω όριο ελέγχου σε μονό διάγραμμα πλευρικής ζώνης *CUSUM* δεν πέφτει ποτέ χαμηλότερα από την τιμή μηδέν, ενώ η τιμή για το κάτω όριο ελέγχου σε ένα διάγραμμα *CUSUM* πάλι μονής πλευρικής ζώνης, ποτέ δεν ανέρχεται σε τιμή μεγαλύτερη από την τιμή του μηδενός. Πολλοί μελετητές έχουν συζητήσει πιθανές λύσεις για το πρόβλημα της αδράνειας των διαγραμμάτων. Ο Spliid (2010) πρότεινε μία διεργασία *EWMA* μονής πλευρικής ζώνης με εφαρμογή μηδενισμού (reset). Οι Woodall και Mahmoud (2005) συνέστησαν ότι τα διαγράμματα *EWMA* θα πρέπει να χρησιμοποιούνται σε συνάφεια με τα όρια Shewart, και οι Capizzi και Masarotto (2003) πρότειναν μία προσαρμοζόμενο – Adaptive *EWMA* (*AEWMA*) προσέγγιση. Η προσέγγιση τους συνδύασε τα διαγράμματα *EWMA* και Shewart σε μία πιο εξομαλυμένη έκδοση από ότι να χρησιμοποιούσαν ένα διάγραμμα *EWMA* σε συνάφεια με τα όρια Shewart. Όμοιες προσαρμογές για τα μη παραμετρικά διαγράμματα *EWMA* είναι πιθανές και κάτι τέτοιο αναπτύσσεται σε ανάλογη βιβλιογραφία. Όμως, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν μερικοί μελετητές οι οποίοι δεν νομίζουν ότι η αδράνεια είναι σημαντικό πρόβλημα, βλ. για παράδειγμα Yaschin (1993) όπου προτείνουν το ακόλουθο επιχείρημα: «Αυτό το ελάττωμα της αδράνειας για την μεθοδολογία *EWMA* μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο μερικώς εισάγοντας συμπληρωματικά τα όρια της μεθόδου Shewart, καθώς μεγάλες ακολουθίες από δεδομένα αντιστοιχούν σε μη αποδεκτά επίπεδα της διεργασίας (χωρίς να παραβιάζονται τα όρια Shewart) και τα οποία ακόμα παραμένουν μη ανιχνεύσιμα για μεγάλο χρονικό διάστημα». Ο Ryan (2000) αντέτεινε ότι είναι προς συζήτηση πόσο συχνά αυτό το πρόβλημα φαίνεται να εμφανίζεται στην πράξη.

Για τις συγκρίσεις στις φάσεις εκτός ελέγχου της διεργασίας τα αποτελέσματα σε μορφή πινάκων μπορούν επίσης να παρασταθούν δίνοντας τα δεδομένα και σε διαγράμματα πλαισίων (boxplots) όπως στο σχήμα 2. Για οικονομία χώρου αυτά τα διαγράμματα παραλείπονται.

Μία περίληψη των παρατηρήσεων από τις συγκρίσεις σε φάσεις εκτός έλεγχου ακολουθεί στις επόμενες παραγράφους. Για συμμετρικές κατανομές οι τάσεις της διολίσθησης δεν επιδρούν στην ανιχνευτική ικανότητα των διαγραμμάτων και από αυτό το σημείο και στην συνέχεια, θεωρούμε μόνο θετικές διολισθήσεις. Για μικρότερες μετατοπίσεις και υπό την προϋπόθεση μίας κανονικής κατανομής, το κλασσικό διάγραμμα *EWMA* ανιχνεύει τις μετατοπίσεις γρηγορότερα από το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN*, το οποίο δεν αποτελεί μη αναμενόμενη κατάσταση. Επιπροσθέτως, το κλασσικό διάγραμμα *EWMA* φαίνεται να ανιχνεύει μετατοπίσεις γρηγορότερα για τις κατανομές $t(8)$, λογιστική και επιμολυσμένη κανονική. Για την με ισχυρότερη συγκέντρωση των δεδομένων στα άκρα (ουρά) κατανομή $t(4)$ και στην σκεδαζόμενη $GAM(3,1)$, οι αποδόσεις των κλασσικών και μη παραμετρικών *EWMA-SN* διαγραμμάτων είναι παρόμοιες. Όμως, το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* ξεπερνά σε απόδοση την κλασσική *EWMA* μέθοδο για την ισχυρά σκεδαζόμενη κατανομή $GAM(1,1)$ και $GAM(0.5,1)$ και την ακόμη πιο «βαριά» σε φαινόμενο ουράς κατανομή Laplace. Αυτό δεν συμβαίνει για τις αρνητικές μετατοπίσεις όλων των πλατών για την δεξιά σκεδαζόμενη Γάμμα κατανομή, όπου η κλασσική μέθοδος *EWMA* φαίνεται να ξεπερνά σε απόδοση το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN*.

Για μεσαίας έως μεγαλύτερης κλίμακας μετατοπίσεις, τα χαρακτηριστικά του μήκους για το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* τείνουν στην τιμή 11 καθώς η ολίσθηση αυξάνει, εξαιτίας περιορισμών, όπου τα αντίστοιχα διαγράμματα *EWMA* μπορούν και τελικά παίρνουν μικρότερες τιμές. Όμοια συμπεράσματα μπορούν να σχεδιασθούν για $\lambda=0.01, 0.025, 0.10$ και 0.20 όπου το χαρακτηριστικό του μήκους ροής για το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* τείνει στις τιμές 16, 13, 9 και τέλος 9, αντιστοίχως καθώς η διολίσθηση αυξάνει. Ως αποτέλεσμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα κλασσικά διαγράμματα *EWMA* ανιχνεύουν μετατοπίσεις ταχύτερα από τα μη παραμετρικά διαγράμματα *EWMA-SN* κάτω από την υπόθεση των κατανομών $N(0,1)$ $t(8)$, λογιστική και επιμολυσμένη κανονική για μετατοπίσεις ανεξαρτήτως των πλατών αυτών, αν και αυτή η παρατήρηση δεν αποτελεί την περίπτωση όπου η υποκείμενη διεργασία είναι ισχυρότερα σκεδαζόμενη ή πιο συγκεντρωμένη σε φαινόμενα με βαριές ουρές (*heavy tailed*).

5.7. Συμπεράσματα από την χρήση και τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων *EWMA-SN*

Τα διαγράμματα *EWMA* είναι ανάμεσα στις πιο δημοφιλείς τεχνικές ελέγχου που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Τα εν λόγω διαγράμματα εκμεταλλεύονται την ακολουθιακή συσσώρευση της απόδειξης που προκύπτει από ένα Σ.Ε.Δ. περιβάλλον και είναι γνωστό ότι είναι πιο αποδοτικά από τα διαγράμματα Shewart στην ικανότητα ανίχνευσης μικρότερων μετατοπίσεων. Όμως, τα κλασσικά διαγράμματα ελέγχου *EWMA* μπορούν να εμφανίζουν έλλειψη ευστάθειας σε φάσεις εντός ελέγχου και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ότι η εμφάνιση κυμαινόμενου αριθμού λανθασμένων συναγερμών αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα *EWMA* προσφέρουν μία ελκυστική εναλλακτική σε τέτοιες καταστάσεις, καθώς συνδυάζουν τα εγγενή πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων (ευστάθεια σε φάσεις εντός ελέγχου) με την βελτιωμένη ικανότητα ανίχνευσης μικρών διολισθήσεων σε σχέση με τα *EWMA* διαγράμματα. Η πρόταση για χρήση μη παραμετρικών διαγραμμάτων *EWMA* για ανεξάρτητες τ.μ. τα οποία βασίζονται στο πρόσημο και η μελέτη των ιδιοτήτων τους για φάσεις εντός και εκτός ελέγχου για μια διεργασία ως προς την παράμετρο του μήκους ροής χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας, αποτέλεσαν το αντικείμενο του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Διαφαίνεται ότι αν και το μη παραμετρικό *EWMA-SN* διάγραμμα είναι ευσταθές κατά τις φάσεις εντός ελέγχου γενικά παρουσιάζει χαμηλότερη απόδοση για φάσεις εκτός ελέγχου συγκρινόμενο με τα κλασσικά *EWMA* διαγράμματα για ελαφρά σκεδασμένες ως προς τοις ουρές τους κατανομές όπως είναι η κανονική, η λογιστική και η επιμολυσμένη κανονική. Παρόλα αυτά όταν η υποκείμενη κατανομή που αφορά στην διεργασία είναι βαριά σκεδαζόμενη ως προς τα άκρα της, όπως είναι η κατανομή Laplace (για θετικές αλλά και αρνητικές μετατοπίσεις) ή ισχυρότερα δεξιά σκεδαζόμενες όπως η κατανομή Γάμμα (μόνο για θετικές μετατοπίσεις), το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-SN* έχει σαφώς ανώτερη απόδοση. Επιπλέον το μη παραμετρικό διάγραμμα αναμένεται να είναι λιγότερο ευαίσθητο ως προς τον καθορισμό των ορίων ελέγχου του καθώς και ότι η γνώση ή ο καθορισμός της διασποράς της διεργασίας δεν είναι αναγκαία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σημαντικό στην μελέτη των χαρακτηριστικών των μη παραμετρικών μεθόδων όπως διερευνήθηκαν στο παρόν κεφάλαιο, αναφέρεται σε διεργασίες όπου οι παράμετροι και τα χαρακτηριστικά τους είναι γνωστά. Προσαρμογές

των μεθόδων που παρουσιάστηκαν σε περίπτωση όπου τα χαρακτηριστικά της διεργασίας είναι άγνωστα ή ακαθόριστα, αποτελεί αντικείμενο έρευνας τα αποτελέσματα της οποίας θα παρουσιαστούν στο άμεσο μέλλον. Επιπλέον προσαρμογές και επεκτάσεις όπως η χρησιμοποίηση τιμών προβαδίσματος (HeadStart) και η μελέτη των επιδράσεων της αδράνειας παραμένουν ανοικτά θέματα για τους μελλοντικούς ερευνητές των μεθόδων του Σ.Ε.Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η χρήση του μη παραμετρικού διαγράμματος «επερχόμενων» στατιστικών *EWMA-EX* (*EWMA Exceeded Chart*) για διεργασίες που ακολουθούν ανεξάρτητες κατανομές

6.1. Απόπειρες Βελτίωσης των χαρακτηριστικών και των αποδόσεων των μη παραμετρικών μεθόδων *EWMA*. Το διάγραμμα *EWMA-EX*

Τα ελεύθερα από κατανομές μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου παρέχουν όπως είδαμε μία ευσταθή εναλλακτική για κάθε αναλυτή δεδομένων, όταν υπάρχει έλλειψη πληροφορίας για τις υποκείμενες κατανομές που αφορούν στην διεργασία. Ένα μη παραμετρικό αμφίπλευρο *EWMA* διάγραμμα ελέγχου σε Phase II για την λήψη μετρήσεων, που βασίζεται σε «επερχόμενα στατιστικά» μεγέθη ορίζει ένα νέου τύπου διάγραμμα ελέγχου το οποίο καλείται *EWMA-EX* διάγραμμα. Το διάγραμμα αυτό προτείνεται ως μέθοδος για την ανίχνευση μιας διολίσθησης για μία παράμετρο που ανήκει σε μία διεργασία και ακολουθεί κάποια ενδεχομένως μη γνωστή κατανομή. Το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων (γνωστά για την ευσταθή συμπεριφορά τους σε φάσεις εντός ελέγχου), με την καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση διολισθήσεων που εμφανίζουν τα διαγράμματα *EWMA*.

Σημαντικό είναι να προκύπτουν από κάθε μεθοδολογία που προτείνεται, καθοδηγήσεις και συστάσεις οι οποίες να είναι χρήσιμες σε αυτούς που προορίζονται για πρακτική εφαρμογή των μεθόδων, συνδυαζόμενες με παραδείγματα τα οποία να καταδεικνύουν τις λεπτομέρειες μιας τέτοιας εφαρμογής. Στην συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου θα δοθούν τέτοια παραδείγματα εφαρμογής, διαλευκάνοντας τα σημεία εφαρμογής της μεθόδου που προτείνεται. Επιπλέον, στην συνέχεια θα γίνει μία προσπάθεια σύγκρισης των προτεινόμενων μη παραμετρικών διαγραμμάτων σε σχέση με τα κλασσικά

EWMA για υποομάδες μέσω των τιμών, συνδυαζόμενα με μία σχετικά πρόσφατη μη παραμετρική εφαρμογή του μη παραμετρικού διαγράμματος, με το κριτήριο Wilcoxon-Mann-Whitney.

Όπως επισημάνθηκε και προηγουμένως από τον Human et al (2011) μελέτες έδειξαν ότι η παραμετρική μέθοδος *EWMA* η οποία τυπικά χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου οι παράμετροι της διεργασίας είναι εξ αρχής γνωστές μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευσταθώς μόνο υπό την υπόθεση της κανονικότητας της υποκείμενης κατανομής της διεργασίας. Στην πραγματικότητα όταν οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστες και χρειάζεται να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας κάποια δείγματα αναφοράς, η κλασική μέθοδος *EWMA* έχει επίσης αποδειχθεί ότι δεν παραμένει ευσταθής για ένα μεγάλο αριθμό από κατανομές που διαφέρουν της κανονικής. Όμως η ανάπτυξη και η εφαρμογή διαγραμμάτων *EWMA* ελέγχου σε παραμετρική ή μη μορφή που δεν εξαρτώνται από τις υποκείμενες κατανομές της διεργασίας, είναι επιθυμητό καθώς υπάρχει διπλό όφελος δεδομένου ότι αφενός δεν εξαρτώνται από τις κατανομές και κατά δεύτερο λόγο παραμένουν ευσταθείς ανεξαρτήτως παραμέτρων σε φάσεις εντός ελέγχου. Για μία εκτενή βιβλιογραφία μη παραμετρικών διαγραμμάτων βλέπε Chakraborti και Graham (2007), Chakraborti et al (2001, 2011) και Graham et al (2011a,b), τα οποία αποτέλεσαν μη παραμετρικές προσεγγίσεις *EWMA* διαγραμμάτων που βασίζονται στο πρόσημο ή στο πρόσημο από κατηγοριοποιημένο δεδομένα, αντίστοιχα, σε καταστάσεις που βασίζονταν στην μεσαία τιμή όπως αυτή καθορίζεται ή θεωρείται γνωστή.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, η μεσαία τιμή της διεργασίας μπορεί να μην είναι γνωστή και κατά πάσα πιθανότητα θα πρέπει να εκτιμηθεί, χρησιμοποιώντας δεδομένα από την Phase I της διεργασίας. Είναι ευρέως γνωστό ότι αγνοώντας τα φαινόμενα της εκτίμησης των παραμέτρων, κάτι τέτοιο μπορεί να είναι δαπανηρά καθώς τα δεδομένα των μηκών επηρεάζονται σημαντικά, γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει, για παράδειγμα, σε μία σημαντική αύξηση εσφαλμένων συναγερωμένων σε αυτήν την περίπτωση. Στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε ένα μη παραμετρικό *EWMA* διάγραμμα για την παρακολούθηση μιας διεργασίας με άγνωστη μεσαία τιμή χρησιμοποιώντας δείγματα αναφοράς. Το προτεινόμενο διάγραμμα είναι ανάλογο του διαγράμματος *EWMA-SN* και βασίζεται σε έλεγχο σε δείγματα της διεργασίας που μπορούν να χαρακτηρισθούν ως «αρχικά» ή «επερχόμενα» σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς στις μετρήσεις της διεργασίας.

Ο έλεγχος των πρωταρχικών δειγμάτων της διεργασίας είναι ένας μη παραμετρικός έλεγχος που βασίζεται στον αριθμό παρατηρήσεων από ένα από τα δείγματα τα οποία

προηγούνται ενός καθορισμένου (r -τάξης), δείγματος. Τα «προηγούμενα» στατιστικά είναι γραμμικά σχετιζόμενα με τα «επερχόμενα» στατιστικά τα οποία αποτελούν τον αριθμό των παρατηρήσεων, από ένα από τα δείγματα τα οποία ξεπερνούν την r -τάξη δείγματος, έτσι ώστε οι έλεγχοι προηγούμενων και επερχόμενων δειγμάτων να είναι είναι ισοδύναμοι. Οι έλεγχοι προηγούμενων ή επερχόμενων δειγμάτων έχουν αποδειχθεί πολλοί χρήσιμοι σε ένα σημαντικό αριθμό από εφαρμογές οι οποίες περιλαμβάνουν ελέγχους ποιότητας και μελέτες αξιοπιστίας για δεδομένα διάρκειας ζωής προϊόντων από μια διεργασία. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε Balakrishnan και Ng (2006) για εκτενή βιβλιογραφία σχετιζόμενη με τέτοιου τύπου ελέγχων. Ειδικότερα επισημαίνεται ότι ο έλεγχος Wilcoxon για κατηγοριοποιημένα αθροίσματα αποδίδει καλύτερα από τον έλεγχο «προηγούμενων» δειγμάτων εφόσον οι υποκείμενες κατανομές για την διεργασία εμφανίζουν χαρακτηριστικά συμμετρίας, όπως οι κατανομές κανονική, Γάμμα με μεγάλες τιμές των παραμέτρων σχήματος, Λογαριθμικό-Κανονική με μικρές τιμές για τις παραμέτρους σχήματος. Παρόλα αυτά, υπό το καθεστώς δεξιά σκεδαζόμενων κατανομών όπως είναι η εκθετική, η Γάμμα κατανομή με παράμετρο σχήματος 2.0 και η Λογαριθμικό-κανονική με παράμετρο σχήματος 0.5, οι έλεγχοι «προηγούμενων» δειγμάτων εμφανίζουν υψηλότερες τιμές δυνάμεων από το Wilcoxon έλεγχο του κατηγοριοποιημένου αθροίσματος για μικρές τιμές του r . Είναι εμφανές ότι όσο περισσότερο οι κατανομές σκεδιάζονται προς τα δεξιά τόσο περισσότερο πιο ισχυρός καθίσταται ο έλεγχος των «προηγούμενων» δεδομένων. Με κίνητρο τις παραπάνω παρατηρήσεις οι Chakraborti et al (2004) μελέτησαν μία κλάση μη παραμετρικών διαγραμμάτων Shewart με δεδομένα από Phase II που βασίζονται σε στατιστικό έλεγχο «προηγούμενου» τα οποία καλούνται στην βιβλιογραφία ως διαγράμματα Shewart για «προηγούμενα» δεδομένα. Η συγκεκριμένη ερευνητική εργασία έχει αποτελέσει το εναρκτήριο σημείο για ένα αριθμό από ακόλουθες εργασίες σε αυτήν την θεματική περιοχή. Τα διαγράμματα Shewart είναι αρκετά δημοφιλή σε πρακτικές εφαρμογές εξαιτίας της απλότητας τους και της ευκολίας στην εφαρμογή τους και είναι καλά για την ανίχνευση μεγάλων διολισθήσεων. Τα συγκεκριμένα είναι γνωστό ότι είναι λιγότερο ικανά να ανιχνεύσουν μικρές και επίμονες διολισθήσεις μιας διεργασίας οι οποίες εμφανίζονται αρκετά γρήγορα (βλέπε για παράδειγμα, Montgomery – 2009, Mukherjee et al). Οι τελευταίοι πρότειναν ένα Phase II μη παραμετρικό CUSUM διάγραμμα που βασίζεται σε «επερχόμενα» στατιστικά, δημιουργώντας έτσι ένα διάγραμμα το οποίο καλείται διάγραμμα CUSUM «επερχόμενων» δειγμάτων, χρησιμοποιούμενο για την ανίχνευση δεξιών ολισθήσεων στην αγνώστου κατανομής διεργασία. Στην ίδια εργασία ένα αμφίπλευρο μη παραμετρικό Phase II διάγραμμα EWMA, που βασίζεται σε «επερχόμενα»

δεδομένα (συμβολιζόμενο ως διάγραμμα *EWMA-EX*) χρησιμοποιείται για την ανίχνευση διολισθήσεων σε μία παράμετρο μιας συνεχούς κατανομής.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν: το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-EX*, η μελέτη του μήκους της μεθόδου, καθώς και αναλυτικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου *EWMA-EX*. Τα εντός και εκτός ελέγχου διαγράμματα απόδοσης για την μέθοδο *EWMA-EX* μελετώνται και συγκρίνονται σε μορφή τόσο παραμετρικών όσο και μη παραμετρικών διαγραμμάτων. Στην συνέχεια διερευνάται η επίδραση του δείγματος αναφοράς μετά από το οποίο ολοκληρώνεται η μελέτη με μία περίληψη των χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων.

6.2. Τεχνικό υπόβαθρο της μεθόδου *EWMA-EX*

Αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε διαθέσιμη μία αναφορά δειγμάτων X_1, X_2, \dots, X_m για μία διεργασία εντός ελέγχου με αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F(x)$. Έστω $Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jn}$ για $j=1, 2, \dots$ να δηλώνουν την j -ομάδα δεδομένων μεγέθους n εξερχόμενα από Phase II με μία αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $G(y)$. Και οι δύο συναρτήσεις F και G αποτελούν άγνωστες συνεχείς συναρτήσεις κατανομών, θεωρώντας ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου όταν $F=G$. Για την ανίχνευση μίας αλλαγής στην τάση της διεργασίας χρησιμοποιούμε το μοντέλο κατεύθυνσης $G_Y(x)=F(x-\theta)$ όπου $\theta \in [0, \infty)$ να είναι η παράμετρος κατεύθυνσης.

Έστω $U_{j,r}$ να δηλώνει τον αριθμό των «επερχόμενων» δειγμάτων όπου ο αριθμός των Y παρατηρήσεων στην φάση j για δείγματα Phase II τα οποία έρχονται μετά το $X_{(r)}$ που συνιστά την r -τάξης δείγμα, που είναι βάση του σημείου αναφοράς. Το στατιστικό $U_{j,r}$ καλείται «επερχόμενο» δείγμα και η πιθανότητα $p_r=P[Y > X_{(r)} | \mathbf{X}_{(r)}]$ καλείται πιθανότητα «επερχόμενων» δεδομένων. Ο αριθμός των Y παρατηρήσεων στο j -δείγμα Phase II το οποίο προηγείται του $X_{(r)}$ και τα οποία καλούνται «προηγούμενα» δεδομένα είναι αυτά που χρησιμοποιήθηκαν από τους Chakraborti et al (2004) για την μελέτη των Shewart διαγραμμάτων με «προηγούμενα» δεδομένα. Μπορεί να δειχθεί ότι (βλέπε αποτέλεσμα A.3 στην εργασία των Mukherjee et al) η αδέσμευτη από κοινού κατανομή των «επερχόμενων» στατιστικών είναι ελεύθερη από κατανομή και κατά συνέπεια το προτεινόμενο *EWMA-EX* διάγραμμα είναι και αυτό αδέσμευτο από κατανομές.

Η κατασκευή του διαγράμματος *EWMA-EX* αποτελεί μία σχετικά εύκολη διαδικασία. Αξίζει να σημειωθεί ότι δοθείσης μία τιμής για το στατιστικό $X_{(r)} = \mathbf{X}_{(r)}$ η μεταβλητή $U_{j,r}$

ακολουθεί την διωνυμική (n, p_r) κατανομή υπό συνθήκη στο δείγμα $X_{(r)}$ και κατασκευάζουμε με τον τρόπο αυτό ένα διωνυμικό *EWMA* διάγραμμα χρησιμοποιώντας τα $U_{j,r}$ για την παρακολούθηση της τάσης της διεργασίας. Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση του στατιστικού δίνεται από την σχέση:

$$Z_j = \lambda U_{j,r} + (1 - \lambda)Z_{j-1} \quad \text{for } j = 1, 2, 3, \dots$$

όπου το σημείο έναρξης της διεργασίας είναι το $Z_0 = E(U_{j-k,r} | X_{(r)}) = np_r$ και $0 < \lambda \leq 1$ η παράμετρος εξομάλυνσης της διεργασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα Shewart με «προηγούμενα» δεδομένα των Chakraborti et al (2004) προκύπτει για $\lambda=1$.

Για να υπολογίσουμε τα όρια ελέγχου για το προτεινόμενο διάγραμμα στην φάση εντός ελέγχου είναι αναγκαία η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των δειγμάτων Z_j . Μπορεί να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της διεργασίας για εντός ελέγχου φάση δίνονται από τις σχέσεις:

$$E(Z_j) = n(1 - a) (1 - (1 - \lambda)^j) \quad \text{and}$$

$$STDEV(Z_j) = \sqrt{\left(\frac{na(1-a)}{m+2}\right) \left\{ n(1 - (1 - \lambda)^j)^2 + \frac{\lambda(m+1)}{2-\lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2j}) \right\}},$$

όπου $a=r/(m+1)$. Κατά συνέπεια το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-EX* με στατιστικό προς γραφική σχεδίαση Z_j με $Z_0 = n(1-a)$ και τα ακριβή χρονικά μεταβαλλόμενα άνω και κάτω όρια (*UCL/LCL*) και κεντρική γραμμή (*CL*) να δίνονται από τις σχέσεις $CL = E(Z_j)$ και $UCL/LCL = E(Z_j) \pm L \times STDEV(Z_j)$ όπου η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση δίνονται από τις γνωστές φόρμουλες.

Τα αντίστοιχα χωρίς συνθήκη όρια ελέγχου μόνιμης κατάστασης δίνονται από τις σχέσεις:

$$CL = n(1 - a) \quad \text{and} \quad UCL/LCL = n(1 - a) \pm L \sqrt{\left(\frac{na(1-a)}{m+2}\right) \left\{ n + \frac{\lambda(m+1)}{2-\lambda} \right\}}.$$

Αυτά τα όρια χρησιμοποιούνται τυπικά όταν το διάγραμμα ελέγχου *EWMA-EX* έχει εκκινήσει την λειτουργία του αρκετές χρονικές περιόδους πριν, και προκύπτουν καθώς $j \rightarrow \infty$ οπότε οι ποσότητες $(1 - (1 - \lambda)^j)$ και $(1 - (1 - \lambda)^{2j})$ τείνουν στην μονάδα.

6.3. Η Κατανομή του Μήκους Ροής (RL)

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου μπορεί να μελετηθεί με χρήση της κατανομής του μήκους του. Η μέση τιμή της παραμέτρου *ARL* και η τυπική απόκλιση *SDRL* της

κατανομής του μήκους είναι δημοφιλείς δείκτριες απόδοσης, δεδομένου ότι η υποκείμενη κατανομή για την διεργασία δεν είναι δεξιά σκεδαζόμενη. Αρκετοί ερευνητές τώρα συστήνουν την εξέταση ενός αριθμού από ενδείκτριες ποσοστώσεις (percentiles) συμπεριλαμβανομένων των 5, 25, μεσαίας τιμής, 75, και 95 για καλύτερο χαρακτηρισμό της κατανομής του μήκους ροής. Οι Lucas και Saccucci (1990) υιοθέτησαν την μέθοδο όπως παρουσιάζεται από τους Brook και Evans (1972) για τον καθορισμό της κατανομής του μήκους ροής, για ένα διάγραμμα μέσης τιμής *EWMA* χρησιμοποιώντας την θεωρία των Μαρκοβιανών Αλυσίδων (βλέπε την μεθοδολογία της Μαρκοβιανής Αλυσίδας στις προηγούμενες παραγράφους). Όμως, ένα πρακτικό μειονέκτημα της προσέγγισης της Μαρκοβιανής Αλυσίδας για το προτεινόμενο διάγραμμα, είναι η αργή ταχύτητα, δεδομένου ότι ένας μεγάλος αριθμός καταστάσεων χρειάζεται για να προκύψουν ακριβή αποτελέσματα και με την σειρά του αυτό συνεπάγεται την αντιστροφή μιας μήτρας με μεγάλη διάσταση, γεγονός το οποίο είναι χρονικά και υπολογιστικά απαιτητικό. Αν και μερικά από τα χαρακτηριστικά του μήκους (ειδικότερα τα υψηλά ποσοστιαία όρια – percentiles) δεν μπορούν να υπολογισθούν με αρκετή ακρίβεια σε ένα λογικό χρονικό πλαίσιο χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Εκτεταμένη υπολογιστική προσομοίωση χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων.

6.3.1. Εκλογή των παραμέτρων σχεδιασμού

Η εκλογή των παραμέτρων σχεδιασμού (λ, L) γενικά συνεπάγεται δύο βήματα: Αρχικά, βρίσκεται ο συνδυασμός (λ, L) ο οποίος δίνει την επιθυμητή μέση τιμή *ARL* που συμβολίζεται με ARL_0 . Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας ένα αλγόριθμο για την εύρεση του ARL_0 για δεδομένα m, n, λ και L . Αυτό προκύπτει σχεδιάζοντας διαγράμματα του L ως προς το ARL_0 για την εύρεση του ακριβούς L για δοθέντα τα m, n και λ . Κατά δεύτερον χρειάζεται να εκλεγεί από τους συνδυασμούς των (λ, L) εκείνος, ο οποίος παρέχει την καλύτερη απόδοση π.χ. το μικρότερο μήκος ροής σε φάση εκτός ελέγχου *ARL* (το οποίο συμβολίζεται με ARL_δ) για ολίσθηση επιπέδου δ που έχει ανιχνευθεί. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παράμετρος εξομάλυνσης $0 < \lambda \leq 1$ συνήθως εκλέγεται πρώτη (τυπικά εξαρτάται από το πλάτος της μεταβολής που είναι επιθυμητό να ανιχνευθεί) και μετά επιλέγεται στην συνέχεια η σταθερά $L > 0$ (η οποία καθορίζει το πλάτος των ορίων ελέγχου π.χ. όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του L τόσο μεγαλύτερη η απόσταση των ορίων ελέγχου και αντίστροφα).

Οι πίνακες 1a και 1b παρουσιάζουν μερικούς συνδυασμούς (λ, L) για δημοφιλείς τιμές μέσου μήκους ροής σε φάση εντός ελέγχου ARL_0 με τιμές 370 και 500 για μικρές έως και μεσαίες τιμές δειγμάτων $m=49, 99$ και 149 και μεγέθη υποομάδων $n=5$ και 10 , αντίστοιχα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν $X_{(r)}$ εκληφθεί να είναι η μεσαία τιμή, είναι ευκολότεροι οι υπολογισμοί για αυτήν όταν το m είναι περιττός. Σε μια τέτοια περίπτωση τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής υπολογίζονται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις και καλούνται διατηρήσιμες (ή επιτεύξιμες) τιμές. Η πρώτη στήλη από κάθε κελί των πινάκων 1a και 1b δείχνουν την ARL_0 ακολουθούμενη από την αντίστοιχη τιμή για το $SDRL_0$ σε παρενθέσεις ενώ η δεύτερη γραμμή δεικνύει τις τιμές που επιτεύχθηκαν σε εντός ελέγχου φάση για ποσοστιαίες περιοχές του 5, 25, 50, 75 και 95 επί τοις εκατό (με αυτήν την σειρά).

Πίνακας 1a: Συνδυασμοί παραμέτρων (λ, L) για το διάγραμμα *EWMA-EX* για προσδοκητή τιμή $ARL_0=370$ και 500 αντίστοιχα για $n=5$

Table 1a
(λ, L)-combinations for the *EWMA-EX* chart for nominal $ARL_0 = 370$ and 500 , respectively, for $n = 5$.

m	Shift	Nominal $ARL_0 = 370$		Nominal $ARL_0 = 500$			
		(λ, L)	Attained values	(λ, L)	Attained values		
49	Small	(0.01, 0.570)	377.86 (7 37.57) 30, 57, 117, 326, 1690	(0.01, 0.615)	501.50 (1102.85) 34, 64, 133, 392, 2298		
		(0.025, 0.964)	368.09 (7 14.73) 21, 46, 106, 343, 1700	(0.025, 1.015)	499.46 (1037.62) 23, 51, 119, 438, 2327		
		(0.05, 1.351)	372.86 (667.30) 17, 42, 110, 379, 1692	(0.05, 1.411)	499.94 (925.83) 19, 48, 136, 507, 2250		
		Moderate	(0.10, 1.816)	369.39 (605.82) 14, 43, 131, 415, 1522	(0.10, 1.884)	501.49 (849.82) 16, 51, 168, 552, 2174	
			Large	(0.20, 2.255)	369.16 (555.17) 12, 50, 160, 457, 1421	(0.20, 2.319)	504.22 (756.62) 14, 64, 208, 622, 2028
		(0.25, 2.365)		374.26 (531.26) 12, 55, 171, 468, 1425	(0.25, 2.429)	503.62 (734.34) 14, 70, 224, 625, 1958	
	99	Small	(0.01, 0.736)	374.78 (619.80) 37, 73, 150, 374, 1554	(0.01, 0.794)	500.56 (901.65) 41, 84, 174, 486, 2094	
			(0.025, 1.222)	370.20 (583.49) 27, 63, 149, 418, 1496	(0.025, 1.289)	498.82 (823.42) 30, 74, 180, 542, 2107	
			(0.05, 1.669)	368.29 (546.03) 22, 61, 160, 442, 1406	(0.05, 1.743)	499.61 (804.97) 24, 70, 188, 560, 2115	
			Moderate	(0.10, 2.132)	372.93 (519.76) 18, 63, 176, 460, 1387	(0.10, 2.211)	500.07 (698.94) 21, 77, 231, 630, 1861
				Large	(0.20, 2.499)	371.69 (474.05) 16, 73, 199, 483, 1303	(0.20, 2.577)
			(0.25, 2.579)		369.88 (457.96) 16, 76, 207, 485, 1281	(0.25, 2.655)	501.47 (631.49) 19, 98, 275, 659, 1758
149		Small	(0.01, 0.846)	370.79 (534.05) 40, 83, 172, 417, 1418	(0.01, 0.914)	502.33 (785.51) 45, 97, 207, 541, 1979	
			(0.025, 1.381)	371.71 (529.02) 30, 74, 170, 439, 1408	(0.025, 1.465)	500.03 (750.52) 34, 87, 209, 574, 1992	
			(0.05, 1.847)	379.76 (519.83) 25, 73, 187, 467, 1411	(0.05, 1.927)	501.17 (715.41) 28, 84, 229, 621, 1884	
			Moderate	(0.10, 2.289)	371.18 (471.05) 21, 75, 200, 481, 1292	(0.10, 2.375)	499.46 (649.81) 24, 95, 256, 648, 1784
				Large	(0.20, 2.599)	369.58 (436.17) 19, 84, 217, 491, 1240	(0.20, 2.684)
			(0.25, 2.638)		373.83 (479.07) 18, 76, 217, 488, 1111	(0.25, 2.752)	499.95 (579.65) 8, 159, 314, 679, 1508

Note that the first row of each cell shows the ARL , followed by the corresponding $SDRL$ in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Για το παράδειγμα που ακολουθεί στόχος είναι να ανιχνευθεί μία μικρή διολίσθηση στην μεσαία τιμή με το μη παραμετρικό διάγραμμα *EWMA-EX* με ARL_0 τιμή σχεδόν 500 και $m=49$ και $n=5$ με συνδυασμό $(\lambda, L)=(0.05, 1.411)$. Οι Πίνακες 1a και 1b θα είναι χρήσιμοι για την υλοποίηση της *EWMA-EX* στην πράξη.

6.4. Παραδείγματα της εφαρμογής της μεθόδου *EWMA-EX*

Παράδειγμα 1. Αρχικά παρουσιάζεται το διάγραμμα ελέγχου *EWMA-EX* χρησιμοποιώντας μία γνωστή ομάδα δεδομένων από πίνακες που παρατίθενται από τον Montgomery (2001) (5.1 και 5.2) για το εσωτερικό διαμέτρημα δακτυλίων πιστονιών τα

οποία κατασκευάζονται από μία μεταλλευτική διεργασία. Τα δεδομένα δίνονται στον πίνακα 5.1 ο οποίος περιλαμβάνει 25 δεδομένα στην αρχική Phase I με κάθε κατηγορία να διαθέτει 5 δεδομένα, τα οποία συλλέχθηκαν όταν η διεργασία εθεωρείτο ότι βρίσκεται εντός ελέγχου με τιμή $m=125$. Αυτά τα δεδομένα θεωρούνται ως δεδομένα της Phase I και σε αυτά εφαρμόστηκε ένας έλεγχος για το αν ακολουθούν την κανονική κατανομή (και κάτι τέτοιο δεν απέτυχε). Το δείγμα αναφοράς έχει μια μεσαία τιμή ίση με 74.001 οπότε εκλέγονται π.χ. $r=61$ και $X_{(r)}=74.001$. Ο πίνακας 5.2 από την εργασία του Montgomery (2001) περιλαμβάνει 15 «επερχόμενα» δείγματα (Phase II) όπου το καθένα αποτελείται από 5 παρατηρήσεις ($n=5$).

Στην συγκεκριμένη ερευνητική εργασία σε μία εποπτεία των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου οι Chakraborti et al (2011) παρουσίασαν και συνέκριναν δύο παραμετρικά και μη παραμετρικά διαγράμματα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα.

Αρχικά θεώρησαν (i) ένα παραμετρικό διάγραμμα $EWMA$ μέσης τιμής ($EWMA - \bar{X}$)(ii)

ένα παραμετρικό διάγραμμα $CUSUM - \bar{X}$ (iii) ένα μη παραμετρικό διάγραμμα $EWMA$

βασισμένο στην κατηγοριοποίηση αθροίσματος Wilcoxon (το οποίο συμβολίζεται ως διάγραμμα $EWMA$ -Rank) και (iv) ένα μη παραμετρικό $CUSUM$ διάγραμμα βασισμένο και πάλι στην κατηγοριοποίηση αθροίσματος Wilcoxon (το οποίο συμβολίζεται ως $CUSUM$ -Rank). Για περισσότερες λεπτομέρειες για τα διαγράμματα $EWMA$ -Rank και $CUSUM$ -Rank βλέπε Li et al (2010). Οι παράμετροι σχεδιασμού των μεθόδων επελέγησαν έτσι ώστε η ARL_0 να είναι στην περιοχή του 500 για κάθε διάγραμμα. Στην εργασία των Chakraborti et

al (2011) βρέθηκε ότι το παραμετρικό διάγραμμα $EWMA - \bar{X}$ και το $CUSUM - \bar{X}$ έδωσαν πρώτα σήμα συναγερμού στο δείγμα 12, ενώ τα διαγράμματα $EWMA$ -Rank και $CUSUM$ -Rank έδωσαν σήμα συναγερμού αργότερα στο δείγμα 13 (βλ. Σχήματα 3 και 4 από την εργασία των Chakraborti et al – 2011) αντίστοιχα.

Πίνακας 1b: Συνδυασμοί παραμέτρων (λ, L) για το διάγραμμα *EWMA-EX* για προσδοκητή τιμή $ARL_0=370$ και 500 αντίστοιχα για $n=10$

Table 1b
(λ, L)-combinations for the EWMA-EX chart for nominal $ARL_0 = 370$ and 500, respectively, for $n = 10$.

m	Shift	Nominal $ARL_0 = 370$		Nominal $ARL_0 = 500$		
		(λ, L)	Attained values	(λ, L)	Attained values	
49	Small	(0.01, 0.439)	371.73 (968.91) 23, 43, 83, 232, 1774	(0.01, 0.467)	505.47 (1394.73) 25, 47, 94, 278, 2436	
		(0.025, 0.738)	371.73 (897.38) 17, 33, 73, 253, 1856	(0.025, 0.771)	505.61 (1315.01) 17, 36, 81, 309, 2590	
		(0.05, 1.060)	369.96 (818.33) 13, 29, 73, 294, 1836	(0.05, 1.100)	499.59 (1164.46) 14, 31, 86, 381, 2516	
		(0.10, 1.466)	369.85 (737.47) 10, 27, 86, 346, 1771	(0.10, 1.516)	499.08 (1036.26) 11, 31, 103, 454, 2430	
			370.80 (656.18) 9, 33, 114, 396, 1672		501.73 (904.94) 9, 37, 144, 540, 2240	
		Large	(0.20, 2.074)	370.28 (619.28) 8, 35, 127, 425, 1570	(0.20, 1.991)	499.48 (876.21) 9, 41, 156, 554, 2175
	(0.25, 2.074)		371.25 (750.94) 29, 57, 113, 315, 1676	(0.25, 2.135)	503.98 (1119.20) 32, 63, 129, 381, 2375	
	99	Small	(0.01, 0.571)	368.36 (713.91) 21, 46, 105, 341, 1669	(0.01, 0.610)	499.54 (1033.34) 24, 52, 124, 446, 2380
			(0.025, 0.959)	370.29 (664.74) 17, 42, 113, 385, 1640	(0.025, 1.010)	504.63 (967.66) 18, 48, 137, 493, 2320
			(0.05, 1.355)	373.22 (617.30) 14, 43, 133, 426, 1553	(0.05, 1.413)	503.75 (857.94) 15, 50, 166, 561, 2164
			(0.10, 1.812)	369.89 (542.58) 12, 51, 161, 455, 1456	(0.10, 1.880)	500.76 (756.93) 14, 63, 207, 611, 1997
				369.52 (519.03) 12, 55, 171, 464, 1412		503.83 (728.69) 14, 70, 224, 629, 1944
Large			(0.20, 2.266)	368.83 (642.38) 34, 68, 137, 357, 1542	(0.20, 2.338)	507.72 (986.88) 37, 74, 156, 449, 2302
		(0.25, 2.390)	369.96 (634.85) 24, 55, 131, 388, 1570	(0.25, 2.463)	498.48 (926.18) 27, 61, 152, 476, 2198	
149		Small	(0.025, 1.114)	369.08 (585.76) 19, 52, 138, 424, 1509	(0.025, 1.166)	498.30 (850.32) 21, 58, 167, 549, 2132
			(0.05, 0.541)	371.881 (630.48) 17, 49, 148, 425, 1364	(0.05, 1.604)	503.22 (751.75) 18, 66, 204, 610, 2009
			(0.10, 2.010)	372.19 (494.57) 14, 64, 184, 479, 1377	(0.10, 2.082)	508.27 (691.98) 17, 83, 241, 644, 1919
				372.30 (482.97) 15, 69, 195, 489, 1335		500.23 (659.88) 17, 87, 259, 649, 1808
			Moderate	(0.20, 2.434)	372.30 (482.97) 15, 69, 195, 489, 1335	(0.20, 2.508)
	(0.25, 2.534)			372.30 (482.97) 15, 69, 195, 489, 1335	(0.25, 2.613)	500.23 (659.88) 17, 87, 259, 649, 1808
	Large	(0.20, 2.434)	372.30 (482.97) 15, 69, 195, 489, 1335	(0.20, 2.508)	500.23 (659.88) 17, 87, 259, 649, 1808	
		(0.25, 2.534)	372.30 (482.97) 15, 69, 195, 489, 1335	(0.25, 2.613)	500.23 (659.88) 17, 87, 259, 649, 1808	

Note that the first row of each cell shows the *ARL* followed by the corresponding *SDRL* in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Για το προτεινόμενο *EWMA-EX* διάγραμμα έχει επιλεγεί $\lambda=0.10$ (όμοιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε και για τα προηγούμενα διαγράμματα στην εργασία) και $L=2.311$ έτσι ώστε $ARL_0=500$. Το διάγραμμα *EWMA-EX* δίνει σήμα συναγερμού στο δείγμα 14 (βλέπε σχήμα 1). Αυτό δεν είναι κάτι μη αναμενόμενο, καθώς οι μέθοδοι που βασίζονται στην κλασσική θεωρία συνήθως δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με της μη παραμετρικές μεθόδους, όταν η υπόθεση για κανονική υποκείμενη κατανομή ικανοποιείται. Όμως θα πρέπει να σημειωθεί ότι η υπόθεση της κανονικής κατανομής μπορεί να τεθεί υπό αμφισβήτηση ή απλά μπορεί να μην μπορεί να αιτιολογηθεί λόγω ελλείψεως πληροφορίας από τα δεδομένα και για τον λόγο αυτό μία μη παραμετρική μέθοδος μπορεί να κριθεί πιο επιθυμητή για την «κατάλληλη περίπτωση». Το επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει μία τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 2. Στην πράξη, η υποκείμενη κατανομή της διεργασίας είναι συχνά άγνωστη ή διαφέρει από την κανονική και αυτό αποτελεί την περίπτωση όπου τα μη παραμετρικά διαγράμματα μπορούν να φανούν πραγματικά χρήσιμα. Για να παρουσιασθεί μία τέτοια εφαρμογή του *EWMA-EX* διαγράμματος όταν τα δεδομένα ακολουθούν μία συμμετρική κατανομή αλλά με βαρύτερη επίδραση των άκρων (από ότι η κανονική) χρησιμοποιούμε μερικά προσομοιωμένα δεδομένα από κατανομή Laplace (ή διπλά εκθετική), $DE(0,1)$ η οποία είναι γνωστό ότι έχει μεσαία τιμή στο μηδέν και τυπική απόκλιση η οποία ισούται με $2^{0.5}$. Ένα εντός ελέγχου δείγμα αναφοράς μεγέθους 100 ($m=100$) δημιουργήθηκε από αυτήν την κατανομή και κάθε σημείο δεδομένων επεξεργάστηκε, έτσι ώστε η μετασχηματισμένη παρατήρηση να έχει τυπική απόκλιση ίση με την μονάδα. Για τα δεδομένα αναφοράς βρίσκουμε μία μεσαία τιμή που ισούται με -0.023 . Στην συνέχεια τα δεδομένα της Phase II όπου το κάθε ένα έχει μέγεθος 5 ($n=5$) ήταν ανεξάρτητα και ακολουθιακά παραγόμενα από μετασχηματισμό των παρατηρούμενων μετρήσεων που βασίζονταν στην $DE(0,1)$ κατανομή, έτσι ώστε οι προκύπτουσες μετρήσεις να έχουν μία μεσαία τιμή $\gamma/n^{0.5}=0.2236$ όπου $\gamma=0.5$ και $n=5$ και τυπική απόκλιση ίση με την μονάδα. Κατά συνέπεια τα δεδομένα από την Phase II μπορούν να θεωρηθούν ότι προέκυψαν από μία διεργασία η οποία είναι εκτός ελέγχου ως προς την μεσαία τιμή.

Για τα διαγράμματα *EWMA-EX*, *EWMA* – \bar{X} και *EWMA-Rank* έχει εκλεγεί $\lambda=0.05$ και κατά συνέπεια τα αντίστοιχα όρια ελέγχου βρέθηκαν να είναι $(1.991, 3.058)$, $(-0.449, 0.449)$ και $(234.2, 295.8)$ αντίστοιχα, έτσι ώστε το ARL_0 να είναι περίπου ίσο με 500 για κάθε διάγραμμα. Από τα τμήματα (a) και (c) στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι και τα δύο διαγράμματα *EWMA-EX* και *EWMA-Rank* δίνουν σήματα συναγερμού στο δείγμα 24, αντίστοιχα. Αυτό δεν αποτελεί αντικείμενο που να προκαλεί έκπληξη καθώς η απόδοση των διαγραμμάτων *EWMA-EX* και *EWMA-Rank* είναι παρόμοια για την κατανομή Laplace (βλέπε πίνακα 4). Αν και τα δύο διαγράμματα δίνουν σήματα συναγερμού στο δείγμα 24, θα πρέπει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα *EWMA-EX* δίνει αντίστοιχο σήμα συναγερμού και στο δείγμα 24 αλλά και στο δείγμα 25 ενώ το διάγραμμα *EWMA-Rank* δίνει σήμα μόνο στο δείγμα 24.

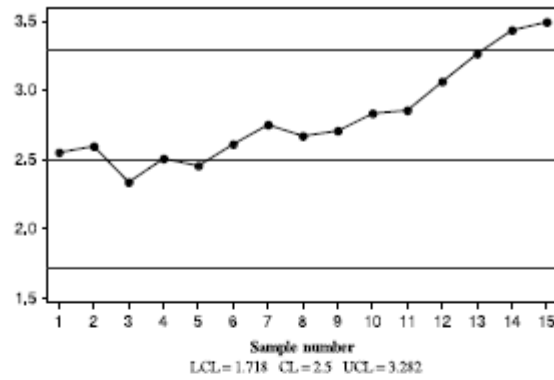


Fig. 1. The EWMA-EX control chart for Example 1.

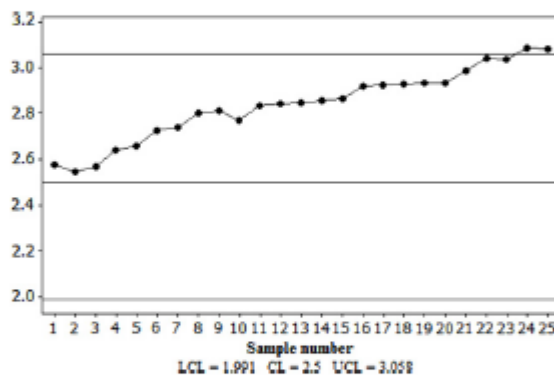


Fig. 2a. The EWMA-EX control chart for Example 2.

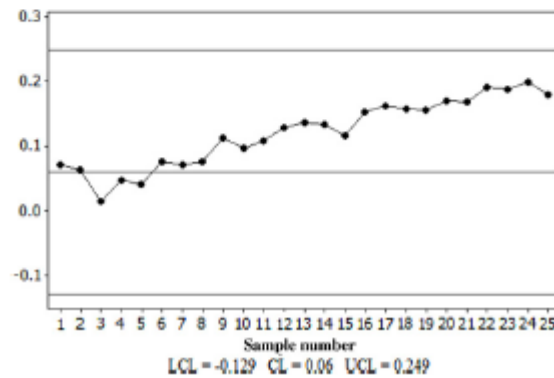


Fig. 2b. The EWMA- \bar{X} control chart for Example 2.

Σχήμα 1/2a/2b: Διαγράμματα EWMA-EX για το παράδειγμα 1-2 και διάγραμμα EWMA μέσης τιμής (2b)

Από το τμήμα (b) στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι αν και το διάγραμμα EWMA- \bar{X} εμφανίζει μία απότομη κλίση δεν δίνει τελικά σήμα συναγερμού. Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει ότι υπάρχουν περιπτώσεις στην πράξη όπου το διάγραμμα

ελέγχου *EWMA-EX* προσφέρει μια αποδοτική εναλλακτική σε σχέση με άλλες διαθέσιμες παραμετρικές και μη παραμετρικές μεθόδους.

M.A. Graham et al. / Computational Statistics and Data Analysis 56 (2012) 2539–2561

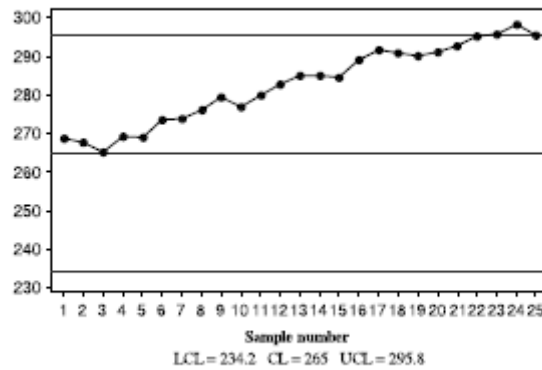


Fig. 2c. The EWMA-Rank control chart for Example 2.

Σχήμα 2c: Διάγραμμα *EWMA-Rank* για το παράδειγμα 2

6.5. Σύγκριση των επιδόσεων

Η εντός ελέγχου απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου δεικνύει πόσο ευσταθές είναι το διάγραμμα, όσον αφορά στην τυπική τιμή ARL_0 που έχει επιλεγεί, ενώ η απόδοση ενός διαγράμματος σε φάση εκτός ελέγχου θα πρέπει να εξετασθεί για να καθορίσει την αποδοτικότητα του διαγράμματος η οποία είναι η ικανότητα του διαγράμματος να διακρίνει μία διολίσθηση. Από πρακτικής απόψεως είναι επίσης ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την απόδοση σε φάση εκτός ελέγχου του προτεινόμενου *EWMA-EX* διαγράμματος με τα ήδη υπάρχοντα. Συγκρίνουμε λοιπόν το προτεινόμενο διάγραμμα με το *EWMA-X* και το διάγραμμα *EWMA-Rank* αντίστοιχα. Για το διάγραμμα *EWMA-X* οι παράμετροι καθορίστηκαν από μία Phase I με δείγματα αναφοράς, λαμβάνοντας υπόψη δεόντως των θεμάτων που σχετίζονται με την εκτίμηση.

Η μελέτη συμπεριλαμβάνει μία συλλογή από μη κανονικές κατανομές καθώς επίσης μετέχουν ισχυρά φορτωμένες στα άκρα τους, συμμετρικές και δισκορπισμένες κατανομές. Ειδικότερα οι κατανομές που υπεισέρχονται στην τρέχουσα μελέτη είναι: (α) η κλασική Κανονική κατανομή $N(0,1)$, (β) η εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1, η οποία ταυτίζεται με την $GAM(1,1)$, (γ) η Laplace (ή διπλά εκθετική κατανομή $DE(0,1)$) η οποία είναι κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 2, τυπική και ομοιάζουσα με την κανονική, αλλά με βαρύτερες συγκεντρώσεις στα άκρα, (δ) Η συμμετρική Μικτή Κανονική κατανομή

$[0.6N(\mu_1=0.25, \sigma_1=0.25)+0.4N(\mu_2=0, \sigma_2=4)]$ και $[0.6N(\mu_1=-0.25, \sigma_1=0.25)+0.4N(\mu_2=0, \sigma_2=4)]$, αντίστοιχα και (στ) η λογαριθμική λογιστική (log-logistic) με $(\alpha, \beta)=(1, 2.5)$. Η λογαριθμική λογιστική κατανομή προκύπτει ως η κατανομή μίας θετικής τ.μ. της οποίας ο λογάριθμος ακολουθεί την κλασσική λογιστική κατανομή. Το σχήμα της μοιάζει με αυτό της Λογαριθμικό-κανονικής αλλά με βαρύτερες συγκεντρώσεις στα άκρα. Αυτή η κατανομή χρησιμοποιείται για να προσομοιάσει μία κατανομή με ισχυρή συγκέντρωση στο δεξιό της άκρο. Στην βιβλιογραφία για τον έλεγχο ποιότητας οι Kantam και Rao (2005) θεώρησαν διαγράμματα *CUSUM* για λογαριθμικά λογιστικά δεδομένα.

Εξαιτίας του ότι η *EWMA-EX* είναι μη παραμετρική, η κατανομή του μήκους ροής σε φάση εντός ελέγχου και τα συσχετιζόμενα χαρακτηριστικά παραμένουν τα ίδια για όλες τις συνεχείς κατανομές. Με άλλα λόγια, η κατανομή του μήκους ροής για φάση εντός ελέγχου είναι εξ ορισμού ευσταθής και κατά συνέπεια όλα τα χαρακτηριστικά σε φάση εντός ελέγχου, όπως ο ρυθμός εσφαλμένων συναγερωμών (*False Alarm Ration - FAR*) και η παράμετρος *ARL*, όλες θα παραμείνουν ίδιες για όλες τις συνεχείς κατανομές.

6.5.1. Σύγκριση των χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων σε φάση εκτός ελέγχου

Για την σύγκριση της απόδοσης ενός διαγράμματος σε φάση εκτός ελέγχου είναι συνήθεια να διασφαλιστούν ότι οι τιμές ARL_0 των συγκρινόμενων διαγραμμάτων είναι καθορισμένες σε (ή πολύ κοντά σε) μία αποδεκτά υψηλή τιμή, όπως η τιμή 500 σε αυτή την περίπτωση, και μετά να συγκρίνονται τα *ARL* για φάση εκτός ελέγχου δηλ. τις τιμές ARL_δ για καθορισμένες τιμές της παραμέτρου μεταβολής δ . Το διάγραμμα με την μικρότερη τιμή ARL_δ είναι γενικότερα αυτό που προτιμάται. Οι πίνακες 2 έως 8 δείχνουν τα χαρακτηριστικά για τις φάσεις εντός και εκτός ελέγχου της κατανομής του μήκους ροής για διάφορες κατανομές και μεταβολές $\delta = \gamma/\sigma/n^{0.5}$, όπου η παράμετρος σ δηλώνει την τυπική απόκλιση της διεργασίας, $\gamma = 0.00(0.05)0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.50, 2.00$ και 3.00 να αντιστοιχεί στην μεταβολή της μεσαίας τιμής για $m=100$ και $n=5$, για το *EWMA-EX*, *EWMA-X*, και *EWMA-Rank* διαγράμματα αντίστοιχα. Η πρώτη γραμμή από κάθε κελί στους πίνακες 2-8 δεικνύει ότι η ARL_0 ακολουθούμενη από την παράμετρο $SDRL_0$ σε παρενθέσεις, ενώ η δεύτερη γραμμή δεικνύει τις τιμές για φάση εντός ελέγχου σε ποσοστά 5, 25, 50, 75 και 95 επί τοις εκατό (με αυτήν την σειρά).

Μία περίληψη των παρατηρήσεων από τις συγκρίσεις σε φάσεις εκτός ελέγχου για την τυπική κανονική κατανομή χρησιμοποιώντας τον πίνακα 2 και τα σχήματα 3a και 3b παρουσιάζονται ως ακολούθως:

- Για όλες τις μεταβολές που λήφθηκαν υπόψη τα διαγράμματα $EWMA-\bar{X}$ και $EWMA-Rank$ αποδίδουν ανάλογα ενώ και τα δύο διαγράμματα ξεπερνούν σε απόδοση το προτεινόμενο διάγραμμα. Δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι το διάγραμμα $EWMA-\bar{X}$ ξεπερνά σε απόδοση το προτεινόμενο. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι τυπικό για τις παραμετρικές μεθόδους να ξεπερνούν σε απόδοση τα αντίστοιχα των μη παραμετρικών μεθόδων όταν όλες οι βασικές υποθέσεις για το σύστημα ικανοποιούνται.

Μία περίληψη των παρατηρήσεων για συγκρίσεις σε φάσεις εκτός ελέγχου για την εκθετική κατανομή χρησιμοποιώντας τους πίνακες 3 και 4 και 4b δίνεται ως ακολούθως:

- Για όλες τις μεταβολές που τέθηκαν υπόψη το διάγραμμα $EWMA-\bar{X}$ συμπεριφέρεται χειρότερα εκτός από μεγάλες μεταβολές ($\gamma=1.50, 2.00$ και 3.00) όπου η απόδοση των άλλων τριών διαγραμμάτων εμφανίζεται να είναι σχεδόν όμοια.
- Αν και το διάγραμμα $EWMA-Rank$ ξεπερνά σε απόδοση το προτεινόμενο διάγραμμα για μεταβολές του $\gamma=0.50, 0.75$ και 1.00 οι αποδόσεις είναι σχετικά όμοιες για διολισθήσεις $\gamma=0.20$ και 0.25 και το προτεινόμενο διάγραμμα αποδίδει καλύτερα για μικρές διολισθήσεις $\gamma=0.20$.

Πίνακας 2

Table 2
Control chart performance comparison under the $N(0, 1)$ distribution for $m = 100$ and $n = 5$.

Shift (γ)	EWMA-EX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
Control limits	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	17.35; 3.314 with $L = 2.22$	± 0.462 with $L = 2.855$	± 0.682 with $L = 2.945$	2.94, 2; 29.5, 8	219.5; 310.5
0.00	508.45 (795.41) 24, 7, 2, 200, 590, 2106	51077 (748.45) 21, 78, 226, 624, 1970	512.42 (1009.21) 22, 64, 177, 534, 2065	512.30 (947.37) 19, 68, 198, 554, 1988	503.99 (87.465) 23, 68, 189, 551, 2046	512.69 (85.132) 19, 7, 3, 215, 593, 1998
0.05	507.91 (795.12) 24, 7, 2, 201, 589, 2046	510.31 (730.32) 21, 80, 233, 632, 1948	499.63 (998.64) 22, 62, 172, 515, 2034	490.05 (919.96) 18, 64, 186, 529, 1929	490.07 (863.99) 23, 64, 181, 535, 2000	501.66 (82.3191) 19, 70, 206, 581, 1951
0.10	495.49 (778.53) 23, 68, 199, 573, 2015	495.01 (720.90) 21, 75, 223, 609, 1915	467.07 (1040.25) 21, 56, 153, 471, 1910	468.48 (909.72) 16, 58, 171, 497, 1869	462.83 (828.64) 21, 59, 161, 489, 1930	473.97 (791.54) 18, 64, 189, 539, 1874
0.15	468.66 (765.37) 22, 62, 176, 531, 1938	477.07 (706.56) 19, 69, 205, 584, 1875	435.25 (941.97) 19, 50, 133, 415, 1810	428.09 (892.92) 15, 49, 146, 438, 1722	427.94 (803.86) 20, 52, 140, 439, 1815	437.01 (778.45) 16, 54, 161, 487, 1772
0.20	438.12 (738.95) 21, 56, 151, 477, 1853	446.35 (687.68) 17, 61, 182, 537, 1771	371.67 (822.70) 17, 41, 105, 337, 1608	381.96 (814.08) 13, 41, 119, 377, 1590	375.46 (748.86) 18, 44, 113, 360, 1614	391.61 (733.35) 15, 46, 134, 413, 1624
0.25	398.98 (687.24) 20, 49, 130, 417, 1738	418.13 (670.26) 16, 51, 153, 480, 1766	312.72 (695.72) 15, 35, 82, 262, 1367	324.52 (734.68) 12, 34, 99, 294, 1389	326.08 (705.73) 16, 37, 88, 287, 1453	335.53 (660.36) 13, 37, 105, 334, 1434
0.50	185.97 (463.32) 14, 26, 49, 129, 860	197.19 (429.69) 11, 25, 55, 164, 886	93.36 (305.26) 10, 18, 31, 62, 307	102.24 (325.86) 8, 16, 31, 72, 375	98.77 (306.09) 11, 19, 32, 66, 348	112.62 (325.32) 9, 17, 34, 80, 441
0.75	62.22 (189.51) 10, 17, 27, 48, 176	7073 (205.42) 8, 15, 26, 54, 238	2676 (537.8) 8, 12, 18, 27, 64	28.45 (87.72) 6, 10, 16, 27, 78	30.18 (84.12) 9, 13, 19, 29, 70	31.53 (84.31) 6, 11, 17, 29, 87
1.00	24.76 (34.77) 9, 13, 18, 26, 59	28.14 (63.53) 7, 11, 16, 27, 76	14.81 (11.84) 6, 9, 12, 17, 30	13.53 (13.12) 5, 7, 10, 16, 32	15.90 (14.64) 7, 10, 13, 18, 32	14.83 (19.69) 5, 8, 11, 17, 34
1.50	12.73 (6.13) 7, 9, 11, 15, 23	11.33 (6.90) 5, 7, 10, 13, 23	8.40 (3.11) 5, 6, 8, 10, 14	7.02 (3.18) 4, 5, 6, 8, 13	9.06 (3.16) 5, 7, 8, 10, 15	7.57 (3.33) 4, 5, 7, 9, 14
2.00	9.20 (2.64) 6, 7, 9, 10, 14	7.69 (2.73) 5, 6, 7, 9, 13	6.00 (1.71) 4, 5, 6, 7, 9	4.85 (1.63) 3, 4, 5, 6, 8	6.60 (1.68) 4, 5, 6, 7, 10	5.34 (1.62) 3, 4, 5, 6, 8
3.00	6.66 (1.08) 5, 6, 7, 7, 9	5.37 (1.04) 4, 5, 5, 6, 7	3.95 (0.85) 3, 3, 4, 4, 5	3.12 (0.78) 2, 3, 3, 4, 4	4.61 (0.76) 4, 4, 5, 5, 6	3.64 (0.71) 3, 3, 4, 4, 5

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDRL in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 3

Table 3
Control chart performance comparison under the EXP(1) distribution for $m = 100$ and $n = 5$.

Shift (γ)	EWMA-EX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
Control limits	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	1.735; 3.314 with $L = 2.22$	± 0.444 with $L = 2.745$	± 0.640 with $L = 2.764$	234.2; 295.8	219.5; 310.5
0.00	503.27 (78.458) 24.71, 198, 57.8, 2000	501.01 (713.38) 21.78, 230, 630, 1881	501.57 (1217.83) 20.58, 156, 456, 1982	486.29 (1536.20) 14.50, 145, 42.2, 1805	497.86 (85.189) 23.66, 185, 5.48, 2003	498.52 (817.35) 19.71, 206, 584, 1913
0.05	493.73 (78.430) 24.69, 190, 57.2, 2003	501.15 (718.26) 20.76, 225, 623, 1923	594.59 (2362.45) 18.55, 154, 486, 2224	542.13 (2195.01) 13.47, 144, 44.3, 1973	539.44 (1006.62) 22.62, 175, 558, 2309	564.45 (1018.23) 19.69, 210, 625, 2256
0.10	465.72 (757.07) 22.61, 171, 52.5, 1958	467.30 (695.29) 19.66, 197, 569, 1848	626.89 (2342.87) 16.49, 142, 484, 2445	568.88 (2322.94) 11.42, 132, 430, 2122	535.78 (1134.54) 19.50, 139, 495, 2408	584.85 (1255.91) 16.54, 172, 583, 2459
0.15	424.85 (732.02) 20.52, 141, 45.9, 1821	437.76 (683.18) 17.57, 175, 521, 1783	647.13 (2488.89) 15.42, 122, 448, 2587	594.16 (2716.43) 10.35, 112, 398, 2245	466.16 (1177.47) 16.38, 94, 35.0, 2172	521.53 (1279.31) 14.39, 119, 447, 2306
0.20	384.42 (702.73) 18.44, 115, 387, 1700	390.20 (641.21) 15.46, 137, 439, 1666	672.79 (3214.85) 13.36, 100, 376, 2558	562.16 (2650.41) 9.30, 90, 334, 2138	385.49 (1209.37) 14.30, 64, 21.8, 1809	439.17 (1269.71) 12.29, 7.9, 30.2, 2013
0.25	317.06 (641.13) 16.36, 86, 292, 1405	341.02 (619.71) 13.36, 104, 359, 1476	588.82 (2131.56) 12.30, 76, 292, 2441	510.79 (2293.24) 8.25, 69, 257, 1946	285.71 (1263.33) 13.24, 44, 117, 1153	360.68 (1456.22) 10.23, 5.6, 18.8, 1553
0.50	109.14 (320.47) 10.17, 28, 64, 494	113.82 (317.98) 8.15, 28, 70, 503	240.42 (1440.65) 8.16, 29, 67, 639	242.38 (1893.71) 6.13, 27, 67, 559	48.25 (410.08) 9.12, 18, 28, 81	59.77 (434.05) 7.11, 16, 30, 122
0.75	29.89 (105.11) 7.11, 15, 23, 65	28.59 (87.85) 6.9, 13, 22, 79	58.22 (578.88) 7.11, 17, 28, 90	47.76 (550.19) 5.9, 15, 27, 105	14.81 (80.81) 7.9, 11, 15, 26	13.68 (50.90) 5.7, 10, 14, 28
1.00	127.4 (19.09) 6.8, 10, 1.3, 26	11.85 (36.27) 5.6, 8, 12, 25	18.10 (141.41) 5.8, 12, 18, 36	16.08 (49.40) 4.7, 10, 16, 39	9.36 (3.69) 6.7, 9, 11, 15	8.14 (14.79) 4.6, 7, 9, 15
1.50	6.06 (1.94) 5.5, 5, 6, 9	4.86 (1.64) 4.4, 4, 5, 8	8.36 (4.22) 4.6, 7, 10, 15	6.87 (4.27) 3.4, 6, 8, 14	6.37 (1.38) 5.5, 6, 7, 9	5.15 (1.30) 4.4, 5, 6, 8
2.00	5.02 (0.23) 5.5, 5, 5, 5	4.02 (0.21) 4.4, 4, 4, 4	5.86 (2.08) 3.4, 5, 7, 10	4.61 (1.88) 2.3, 4, 5, 8	5.14 (0.82) 4.5, 5, 6, 7	4.08 (0.74) 3.4, 4, 4, 5
3.00	5.00 (0.00) 5.5, 5, 5, 5	4.00 (0.00) 4.4, 4, 4, 4	3.81 (0.99) 2.3, 4, 4, 6	2.95 (0.85) 2.2, 3, 3, 4	4.11 (0.37) 4.4, 4, 4, 5	3.16 (0.37) 3.3, 3, 3, 4

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDR in parentheses, where as the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 4

Table 4
Control chart performance comparison under the $DE(0, 1)$ distribution for $m = 100$ and $n = 5$.

Control limits	EWMA-IX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
Shift (γ)	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	17.35; 3.314 with $L = 2.22$	± 0.449 with $L = 2.774$	± 0.666 with $L = 2.875$	2.94, 2; 29.5, 8	219.5; 310.5
0.00	499,65 (784,93) 24,70, 197, 586, 2017	5007,5 (735,73) 19,76, 222, 618, 1937	498,47 (1367,32) 20,57, 150, 443, 1962	499,84 (1655,17) 16,58, 159, 448, 1812	458,75 (859,89) 23,68, 187, 551, 2026	511,47 (829,81) 20,7, 3, 215, 593, 2003
0.05	498,83 (787,98) 24,68, 194, 572, 2033	500,62 (723,67) 20,76, 222, 617, 1938	490,13 (1475,96) 20,56, 147, 427, 1890	486,51 (855,26) 16,55, 157, 449, 1855	486,51 (855,26) 22,64, 177, 530, 1987	492,63 (806,30) 19,69, 204, 569, 1944
0.10	452,16 (748,64) 22,61, 166, 502, 1867	458,28 (682,42) 19,68, 196, 554, 1796	461,25 (1291,09) 19,51, 135, 403, 1801	482,16 (1520,52) 15,51, 146, 427, 1805	446,37 (815,47) 20,56, 152, 473, 1852	465,12 (799,44) 17,60, 178, 528, 1847
0.15	392,14 (688,25) 20,51, 130, 408, 1699	396,03 (639,04) 17,54, 153, 449, 1628	425,17 (1354,14) 17,45, 115, 357, 1711	433,35 (1472,35) 14,44, 125, 373, 1676	391,53 (765,37) 18,45, 120, 387, 1688	400,77 (737,86) 15,48, 141, 429, 1650
0.20	310,62 (612,46) 18,40, 94, 281, 1396	328,86 (576,85) 15,42, 114, 345, 1409	374,56 (1220,86) 16,38, 93, 289, 1505	398,09 (1491,81) 12,38, 104, 320, 1537	330,57 (727,18) 16,37, 88, 282, 1482	343,04 (686,23) 13,38, 105, 339, 1473
0.25	236,07 (500,18) 16,34, 70, 192, 1083	257,51 (516,17) 13,33, 82, 243, 1117	324,82 (1009,33) 15,33, 75, 235, 1353	327,31 (1053,01) 12,31, 82, 260, 1284	257,97 (620,30) 14,31, 66, 197, 1159	279,22 (614,79) 12,30, 76, 245, 1245
0.50	507,2 (155,31) 11,17, 25, 43, 126	53,04 (129,29) 9,15, 25, 47, 161	96,56 (466,12) 10,17, 29, 58, 290	107,21 (494,73) 8,15, 29, 66, 355	56,48 (209,38) 10,16, 24, 42, 147	62,42 (218,48) 7,13, 23, 45, 196
0.75	20,06 (40,58) 9,12, 16, 22, 39	1870 (21,53) 7,10, 14, 21, 43	29,81 (139,13) 7,12, 17, 26, 61	29,36 (89,69) 6,10, 15, 27, 81	18,68 (49,11) 7,11, 14, 20, 39	18,14 (39,01) 6,9, 12, 19, 44
1.00	13,57 (8,86) 7,10, 12, 16, 24	11,94 (6,38) 6,8, 10, 14, 23	14,26 (11,63) 6,9, 12, 16, 29	13,17 (15,31) 5,7, 10, 15, 30	11,75 (6,62) 6,8, 10, 14, 21	10,26 (6,70) 5,7, 9, 12, 21
1.50	9,34 (2,41) 6,8, 9, 11, 14	7,79 (2,47) 5,6, 7, 9, 13	8,01 (3,11) 4,6, 7, 9, 14	6,79 (3,21) 3,5, 6, 8, 12	7,39 (2,15) 5,6, 7, 8, 11	6,07 (2,14) 4,5, 6, 7, 10
2.00	7,66 (1,48) 6,7, 7, 8, 10	6,35 (1,53) 5,5, 6, 7, 9	5,81 (1,74) 4,5, 6, 7, 9	4,65 (1,60) 3,4, 4, 5, 8	5,70 (1,27) 4,5, 5, 6, 8	4,56 (1,21) 3,4, 4, 5, 7
3.00	6,37 (0,89) 5,6, 6, 7, 8	5,12 (0,85) 4,5, 5, 6, 7	3,81 (0,89) 3,3, 4, 4, 5	3,04 (0,80) 2,3, 3, 3, 4	4,30 (0,66) 3,4, 4, 5, 5	3,39 (0,59) 3,3, 3, 4, 4

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDR in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 5

Table 5
Control chart performance comparison under the symmetric mixture normal distribution $[0.6N(\mu_1 = 0, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$.

Shift (γ)	EWMA-EX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
Control limits	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	1.735; 3.314 with $L = 2.22$	± 0.448 with $L = 2.770$	± 0.656 with $L = 2.833$	234.2; 295.8	219.5; 310.5
0.00	506.89(790.60) 25.71, 198, 597, 2042	506.84(720.55) 21.78, 232, 628, 1942	506.34(1361.96) 21.58, 154, 450, 2010	505.01(1561.21) 16.55, 155, 441, 1913	487.43(795.70) 23, 67, 187, 557, 1969	513.18(774.04) 19, 74, 220, 619, 2006
0.05	313.78(625.87) 17, 38, 91, 284, 1426	356.59(614.11) 15, 44, 122, 385, 1526	505.78(1382.82) 20, 56, 148, 441, 2014	490.08(1397.33) 15, 53, 152, 436, 1906	375.28(711.98) 19, 44, 113, 376, 1655	393.12(704.22) 14, 44, 131, 423, 1655
0.10	95.66(289.98) 12, 21, 33, 65, 310	118.15(299.58) 10, 19, 37, 89, 471	481.62(1421.92) 19, 51, 133, 408, 1922	468.30(1421.11) 15, 49, 138, 408, 1794	177.55(562.09) 12, 23, 43, 107, 750	180.34(459.67) 10, 22, 47, 133, 790
0.15	29.65(56.82) 10, 14, 20, 30, 68	35.05(80.90) 8, 13, 19, 33, 96	430.93(1308.40) 17, 45, 116, 359, 1749	431.68(1323.62) 13, 42, 118, 360, 1704	53.97(176.72) 10, 16, 24, 41, 149	63.70(203.99) 8, 14, 23, 47, 201
0.20	17.19(107.2) 8, 11, 15, 20, 33	17.20(19.95) 7, 10, 13, 19, 38	391.32(1284.17) 16, 38, 95, 300, 1586	387.35(1260.41) 12, 35, 97, 311, 1565	24.40(29.31) 8, 13, 17, 26, 60	26.37(65.03) 6, 10, 15, 26, 70
0.25	13.20(5.28) 7, 10, 12, 15, 22	12.17(67.4) 6, 8, 11, 14, 23	336.02(1217.08) 14, 32, 75, 234, 1369	328.51(1110.10) 11, 30, 78, 248, 1312	17.41(55.75) 7, 10, 14, 19, 34	15.81(23.33) 5, 8, 12, 18, 37
0.50	8.68(1.71) 6, 7, 8, 10, 12	7.46(1.82) 5, 6, 7, 8, 11	107.08(736.18) 10, 17, 29, 58, 299	112.68(531.66) 7, 15, 27, 63, 365	8.34(2.60) 5, 7, 8, 10, 13	6.94(2.66) 4, 5, 6, 8, 12
0.75	8.13(1.47) 6, 7, 8, 9, 11	6.91(1.54) 5, 6, 7, 8, 10	28.56(129.92) 7, 12, 17, 26, 63	28.98(136.86) 5, 9, 15, 25, 73	6.91(1.87) 5, 6, 7, 8, 10	5.62(1.79) 3, 4, 5, 6, 9
1.00	7.83(1.35) 6, 7, 8, 9, 10	6.62(1.41) 5, 6, 6, 7, 9	14.54(54.85) 6, 9, 12, 16, 29	13.03(25.01) 4, 7, 10, 15, 30	6.32(1.49) 4, 5, 6, 7, 9	5.10(1.48) 3, 4, 5, 6, 8
1.50	7.31(1.13) 6, 7, 7, 8, 9	6.14(1.20) 5, 5, 6, 7, 8	8.08(3.07) 4, 6, 7, 9, 14	6.62(3.08) 3, 5, 6, 8, 12	5.52(1.17) 4, 5, 5, 6, 8	4.41(1.12) 3, 4, 4, 5, 6
2.00	6.93(0.99) 6, 6, 7, 7, 9	5.75(1.04) 4, 5, 6, 6, 8	5.79(1.72) 4, 5, 6, 7, 9	4.62(1.60) 3, 4, 4, 5, 8	4.95(0.95) 4, 4, 5, 5, 7	3.92(0.90) 3, 3, 4, 4, 6
3.00	6.34(0.79) 5, 6, 6, 7, 8	5.18(0.80) 4, 5, 5, 6, 7	3.81(0.87) 3, 3, 4, 4, 5	2.99(0.79) 2, 2, 3, 3, 4	4.20(0.67) 3, 4, 4, 5, 5	3.35(0.56) 3, 3, 3, 4, 4

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDR in parentheses, where as the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 6

Table 6
Control chart performance comparison under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0, 0N(\mu_1 = 0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$.

Shift (y)	EWMA-EX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
Control limits	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	17.35; 3.314 with $L = 2.22$	± 0.447 with $L = 2.762$	± 0.657 with $L = 2.835$	2.94; 2; 29.5.8	219.5; 310.5
0.00	511.42 (80.3.11) 25.7, 1.99, 39.3, 20.85	507.79 (723.57) 21.80, 234, 6.28, 19.27	509.61 (14.26.34) 20.57, 153.447, 1991	501.96 (147.57.0) 16.55, 156, 448, 1937	486.59 (788.2.1) 23.67, 187, 550, 1978	516.08 (800.0.9) 20.7, 3, 2.17, 6.18, 20.00
0.05	335.59 (645.5.2) 18, 41, 99, 318, 1503	355.83 (609.91) 15, 43, 122, 383, 1525	488.42 (1278.59) 20, 55, 146, 437, 1941	489.37 (1416.80) 16, 54, 151, 438, 1896	366.78 (691.3.3) 18, 42, 109, 360, 1643	388.37 (691.3.3) 14, 44, 129, 417, 1664
0.10	105.68 (293.99) 13, 22, 36, 74, 388	118.97 (303.57) 10, 20, 38, 89, 471	470.02 (1313.01) 19, 51, 134, 409, 1868	472.32 (1423.44) 15, 48, 137, 408, 1834	161.21 (430.8.2) 12, 23, 49, 105, 699	180.74 (448.3.8) 10, 21, 47, 132, 810
0.15	32.08 (7.277) 10, 15, 21, 31, 74	34.15 (79.42) 8, 13, 19, 33, 92	428.95 (1388.7.3) 17, 44, 114, 352, 1719	428.19 (1310.6.1) 14, 42, 120, 366, 1687	56.69 (197.9.9) 10, 16, 25, 43, 154	64.82 (207.0.0) 7, 14, 23, 47, 204
0.20	17.92 (20.55) 8, 12, 15, 20, 35	17.21 (17.97) 7, 10, 13, 20, 39	379.56 (1170.30) 16, 38, 93, 291, 1567	387.71 (125.1.30) 12, 35, 96, 313, 1557	25.18 (51.41) 8, 12, 17, 26, 58	26.20 (58.1.7) 6, 10, 15, 26, 70
0.25	13.59 (8.34) 8, 10, 12, 16, 23	12.15 (6.316) 6, 8, 11, 14, 23	325.57 (1104.5.2) 14, 32, 74, 232, 1335	333.13 (1214.2.2) 11, 30, 78, 249, 1336	16.52 (13.34) 7, 10, 14, 19, 34	15.71 (18.4.3) 5, 8, 12, 18, 37
0.50	8.90 (1.74) 7, 8, 9, 10, 12	7.45 (1.83) 5, 6, 7, 8, 11	97.51 (456.4.5) 10, 17, 28, 56, 294	110.22 (548.2.8) 7, 14, 27, 63, 364	8.36 (2.62) 5, 7, 8, 10, 13	6.93 (2.67) 4, 5, 6, 8, 12
0.75	8.32 (1.47) 6, 7, 8, 9, 11	6.91 (1.53) 5, 6, 7, 8, 10	28.22 (150.07) 7, 12, 17, 26, 64	29.71 (151.6.4) 5, 9, 14, 25, 73	6.93 (1.81) 5, 6, 7, 8, 10	5.61 (1.7.8) 3, 4, 5, 6, 9
1.00	8.00 (1.34) 6, 7, 8, 9, 10	6.62 (1.41) 5, 6, 6, 7, 9	14.17 (12.7.1) 6, 9, 12, 16, 29	13.03 (22.8.9) 4, 7, 10, 15, 30	6.32 (1.54) 4, 5, 6, 7, 9	5.10 (1.4.8) 3, 4, 5, 6, 8
1.50	7.49 (1.17) 6, 7, 7, 8, 10	6.13 (1.20) 5, 5, 6, 7, 8	8.04 (3.0.9) 4, 6, 7, 9, 14	6.64 (3.0.8) 3, 5, 6, 8, 12	5.52 (1.1.9) 4, 5, 5, 6, 8	4.41 (1.1.3) 3, 4, 4, 5, 6
2.00	7.08 (1.03) 6, 6, 7, 8, 9	5.75 (1.04) 4, 5, 6, 6, 8	5.76 (1.7.2) 4, 5, 5, 7, 9	4.61 (1.6.0) 4, 4, 5, 8	4.96 (0.9.5) 4, 4, 5, 7	3.93 (0.8.9) 3, 3, 4, 4, 6
3.00	6.42 (0.84) 5, 6, 6, 7, 8	5.18 (0.80) 4, 5, 5, 6, 7	3.79 (0.8.7) 3, 3, 4, 4, 5	2.98 (0.7.9) 2, 2, 3, 3, 4	4.20 (0.6.7) 3, 4, 4, 5, 5	3.34 (0.5.6) 3, 3, 3, 4, 4

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDARL in parentheses, where as the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 7

Table 7
Control chart performance comparison under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = -0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$.

Control limits	EWMA-EX		EWMA-X		EWMA-Rank	
	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	± 0.446 with $L = 2.22$	± 0.833 with $L = 2.833$	234.2; 295.8	219.5; 310.5
Shift (γ)			$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.10$
0.00	506.54(78.923) 25, 71, 198, 590, 2071	509.83(73.22) 21, 79, 231, 634, 1964	504.13(1373.32) 21, 57, 150, 451, 1999	502.99(1490.60) 16, 55, 156, 449, 1903	490.32(782.31) 23, 68, 191, 558, 2006	507.55(781.94) 20, 73, 218, 612, 1972
0.05	341.38(644.00) 18, 42, 102, 325, 1541	356.11(613.31) 15, 43, 122, 384, 1516	495.23(1465.10) 20, 55, 143, 429, 1938	499.77(1545.90) 15, 52, 151, 436, 1930	369.61(701.62) 18, 43, 110, 361, 1639	382.40(673.41) 14, 44, 128, 411, 1630
0.10	105.59(297.14) 13, 22, 36, 73, 380	117.28(300.19) 10, 19, 37, 88, 464	468.68(1325.81) 19, 50, 132, 398, 1878	474.33(1384.43) 14, 46, 137, 404, 1837	161.74(433.80) 13, 23, 43, 104, 699	180.95(446.87) 10, 22, 46, 130, 825
0.15	32.27(77.15) 10, 15, 21, 31, 74	34.46(87.92) 8, 13, 19, 33, 94	420.51(1169.44) 17, 44, 113, 346, 1721	427.88(1294.19) 13, 42, 120, 365, 1668	56.96(203.68) 10, 16, 24, 43, 158	64.42(203.50) 7, 14, 24, 48, 205
0.20	17.84(11.87) 9, 12, 15, 20, 35	17.05(17.00) 10, 13, 19, 38	379.08(1251.18) 16, 38, 92, 294, 1540	386.42(1291.41) 12, 35, 96, 302, 1518	24.99(52.06) 8, 12, 17, 26, 58	26.09(62.84) 6, 10, 16, 26, 68
0.25	13.52(5.33) 8, 10, 12, 16, 23	12.17(6.46) 6, 8, 11, 14, 23	320.87(1068.66) 14, 32, 72, 225, 1314	331.96(1083.49) 11, 30, 78, 249, 1314	16.60(14.00) 7, 10, 14, 19, 34	15.69(22.94) 5, 8, 12, 17, 36
0.50	8.90(1.73) 7, 8, 9, 10, 12	7.47(1.84) 5, 6, 7, 8, 11	103.26(504.63) 10, 17, 29, 58, 312	113.37(703.62) 7, 14, 27, 63, 364	8.35(2.60) 5, 7, 8, 10, 13	6.92(2.66) 4, 5, 6, 8, 12
0.75	8.31(1.46) 6, 7, 8, 9, 11	6.91(1.54) 5, 6, 7, 8, 10	27.65(100.01) 7, 12, 17, 26, 63	30.19(199.36) 5, 9, 15, 25, 74	6.92(1.82) 5, 6, 7, 8, 10	5.63(1.78) 3, 4, 5, 6, 9
1.00	8.00(1.35) 6, 7, 8, 9, 10	6.62(1.39) 5, 6, 6, 7, 9	14.25(22.46) 6, 9, 12, 16, 29	13.17(37.73) 4, 7, 10, 15, 30	6.33(1.54) 4, 5, 6, 7, 9	5.11(1.48) 3, 4, 5, 6, 8
1.50	7.48(1.17) 6, 7, 7, 8, 10	6.14(1.20) 5, 5, 6, 7, 8	8.03(3.07) 4, 6, 7, 9, 14	6.64(3.19) 3, 5, 6, 8, 12	5.53(1.19) 4, 5, 5, 6, 8	4.41(1.12) 3, 4, 4, 5, 6
2.00	7.07(1.03) 6, 6, 7, 8, 9	5.75(1.03) 4, 5, 6, 6, 8	5.77(1.72) 4, 5, 6, 7, 9	4.61(1.61) 3, 4, 4, 5, 7	4.96(0.95) 4, 4, 5, 5, 7	3.93(0.90) 3, 3, 4, 4, 6
3.00	6.42(0.84) 5, 6, 6, 7, 8	5.18(0.80) 4, 5, 5, 6, 7	3.79(0.87) 3, 3, 4, 4, 5	2.97(0.78) 2, 2, 3, 3, 4	4.20(0.67) 3, 4, 4, 5, 5	3.35(0.57) 3, 3, 3, 4, 4

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDRL in parentheses, where as the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

Πίνακας 8

Table 8
Control chart performance comparison under the Log-Logistic distribution ($\alpha = 1, \beta = 2.5$) for $m = 100$ and $n = 5$.

Shift (γ)	EWMA-EX		BWMMA-X		BWMMA-Rank	
	1.991; 3.058 with $L = 1.75$ $\lambda = 0.05$	17.35; 3.314 with $L = 2.22$ $\lambda = 0.10$	**	**	234.2; 295.8	219.5; 310.5
0.00	503.26 (788.70) 25.71, 196, 585, 2045	506.94 (724.35) 21.78, 229, 628, 1939			501.83 (860.25) 23, 68, 191, 553, 2038	507.54 (830.23) 20.73, 215, 590, 1948
0.05	473.42 (766.54) 22.63, 174, 537, 1978	479.55 (711.66) 19.68, 204, 584, 1884			494.88 (921.98) 21, 57, 156, 513, 2120	530.73 (994.48) 17.61, 188, 572, 2157
0.10	380.59 (686.69) 18.45, 117, 386, 1683	389.53 (640.46) 15.47, 141, 440, 1622			406.28 (1046.49) 16, 37, 89, 318, 1874	442.28 (1009.91) 14, 38, 111, 399, 1974
0.15	274.79 (584.13) 15.32, 70, 227, 1283	291.19 (557.32) 12.31, 84, 284, 1307			261.16 (847.56) 13, 25, 49, 140, 1188	313.50 (940.90) 11, 24, 57, 197, 1434
0.20	182.17 (448.29) 12.23, 44, 121, 855	196.86 (440.25) 10, 22, 49, 154, 935			156.65 (724.44) 11, 19, 32, 69, 515	187.53 (809.01) 9, 17, 34, 92, 715
0.25	108.91 (326.17) 11, 18, 31, 66, 424	117.08 (315.08) 8, 16, 31, 78, 500			79.30 (511.05) 10, 15, 23, 41, 174	105.04 (718.96) 8, 13, 23, 49, 277
0.50	1431 (22.17) 7, 9, 11, 15, 28	1320 (26.20) 5, 7, 9, 14, 29			11.46 (7.31) 6, 8, 10, 13, 21	10.31 (9.16) 5, 7, 9, 12, 21
0.75	776 (2.60) 5, 6, 7, 8, 12	637 (2.30) 4, 5, 6, 7, 10			7.19 (1.85) 5, 6, 7, 8, 11	5.87 (1.84) 4, 5, 5, 7, 9
1.00	591 (0.93) 5, 5, 6, 6, 8	476 (0.85) 4, 4, 5, 5, 6			5.60 (1.01) 4, 5, 5, 6, 7	4.46 (0.92) 3, 4, 4, 5, 6
1.50	501 (0.08) 5, 5, 5, 5, 5	401 (0.07) 4, 4, 4, 4, 4			4.30 (0.50) 4, 4, 4, 5	3.35 (0.50) 3, 3, 3, 4, 4
2.00	500 (0.00) 5, 5, 5, 5, 5	400 (0.00) 4, 4, 4, 4, 4			3.91 (0.34) 3, 4, 4, 4, 4	3.03 (0.16) 3, 3, 3, 3, 3
3.00	500 (0.00) 5, 5, 5, 5, 5	400 (0.00) 4, 4, 4, 4, 4			3.25 (0.43) 3, 3, 3, 3, 4	2.96 (0.19) 3, 3, 3, 3, 3

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SDRL in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).
** The run-length characteristics cannot be computed for the BWMMA-X chart based on normal theory, since the run-length characteristics do not converge.

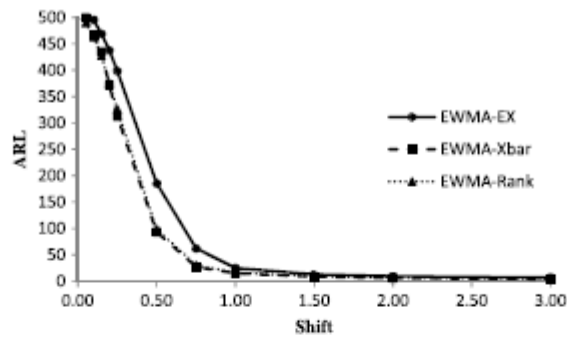


Fig. 3a. ARL performance comparison of the competing charts under the $N(0, 1)$ distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

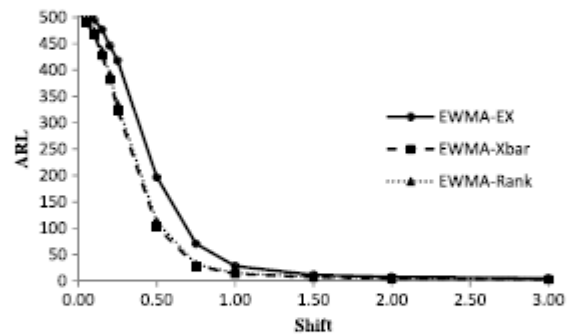


Fig. 3b. ARL performance comparison of the competing charts under the $N(0, 1)$ distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

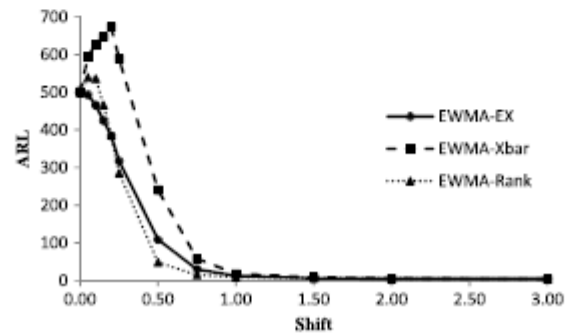


Fig. 4a. ARL performance comparison of the competing charts under the $EXP(1)$ distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

Σχήμα 3a: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Κανονική κατανομή $N(0,1)$ της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Σχήμα 3b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Κανονική κατανομή $N(0,1)$ της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Σχήμα 4a: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Εκθετική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Μία περίληψη των παρατηρήσεων από τις συγκρίσεις των προτεινόμενων διαγραμμάτων σε φάση εκτός ελέγχου για την διπλή εκθετική κατανομή $DE(0,1)$ με χρήση του πίνακα 4 και τα σχήματα 5a και 5b παρουσιάζονται στις ακόλουθες παραγράφους:

- Τα προτεινόμενα διαγράμματα ξεπερνούν σε απόδοση το $EWMA - \bar{X}$ για όλες τις διολισθήσεις που μελετήθηκαν εκτός από $\gamma=0.05$ όπου η απόδοση είναι σχεδόν η ίδια και για $\gamma \geq 1.50$ όπου η απόδοση του διαγράμματος $EWMA - \bar{X}$ είναι σαφώς καλύτερη.
- Αν και η απόδοση για το διάγραμμα $EWMA$ -Rank σε σύγκριση με το προηγούμενο διάγραμμα είναι σχεδόν ίδιες για μεταβολές όπου $\gamma \leq 0.15$ και $\gamma \geq 0.75$, το προτεινόμενο διάγραμμα ανιχνεύει τις μεταβολές ταχύτερα για $\gamma=0.20, 0.25$ και 0.50 .
- Όταν συγκρίνονται δύο διαγράμματα ελέγχου π.χ. το $EWMA - \bar{X}$ με το $EWMA$ -Rank, προκύπτει ότι το διάγραμμα $EWMA$ -Rank αποδίδει καλύτερα από το $EWMA - \bar{X}$ για όλες τις για μεταβολές που μελετήθηκαν εκτός από $\gamma=0.05, 2.00$ και 3.00 όπου η απόδοση είναι σχεδόν ίδια.

Μία περίληψη των παρατηρήσεων από τις συγκρίσεις για τις φάσεις εκτός ελέγχου για την Κατανομή με συμμετρική μίξη δύο κανονικών κατανομών $[0.6N(\mu_1=0.25, \sigma_1=0.25)+0.4N(\mu_2=0, \sigma_2=4)]$ χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 5 και τα σχήματα 6a και 6b παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους:

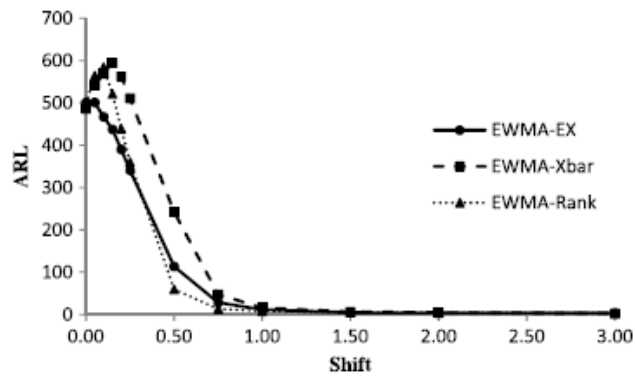


Fig. 4b. ARL performance comparison of the competing charts under the EXP(1) distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

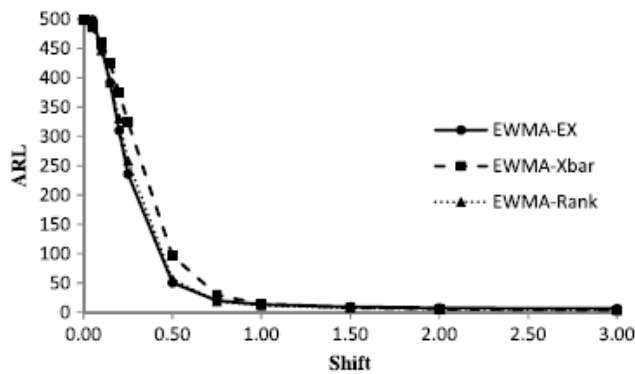


Fig. 5a. ARL performance comparison of the competing charts under the DE(0, 1) distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

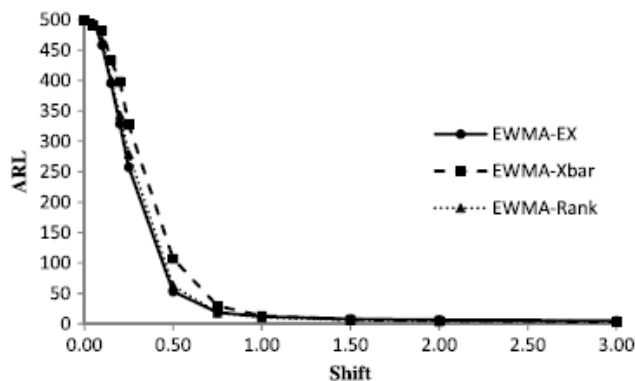


Fig. 5b. ARL performance comparison of the competing charts under the DE(0, 1) distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

Σχήμα 4b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Εκθετική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Σχήμα 5a: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για DE(0,1) κατανομή $N(0,1)$ της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Σχήμα 5b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για DE(0,1) κατανομή $N(0,1)$ της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

- Το προτεινόμενο διάγραμμα αποδίδει καλύτερα από το $EWMA - \bar{X}$ για όλες τις διολισθήσεις που μελετήθηκαν, εκτός από $\gamma=3.00$ όπου η απόδοση και των δύο διαγραμμάτων είναι συγκρίσιμη.
- Αν και η απόδοση του διαγράμματος $EWMA-Rank$ συγκρινόμενο με το προτεινόμενο διάγραμμα είναι σχεδόν ίδιες για διολισθήσεις με μεγέθη $\gamma \geq 0.50$, το προτεινόμενο διάγραμμα ανιχνεύει διολισθήσεις ταχύτερα για μικρές τιμές διολίσθησης.
- Όταν συγκρίνονται δύο διαγράμματα π.χ. το $EWMA - \bar{X}$ και το $EWMA-Rank$ εμφανίζεται ότι το τελευταίο αποδίδει καλύτερα για όλες τις μελετούμενες διολισθήσεις, εκτός από μεγάλες διολισθήσεις ($\gamma=3.00$) όπου η απόδοση είναι παρόμοια.

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για τις δύο Ασύμμετρες Μικτές Κατανομές που βασίζονται στην Κανονική (βλέπε Πίνακες 6 και 7 και σχήματα 7a, 7b, 8a και 8b). Μία περίληψη των παρατηρήσεων για τις συγκρίσεις σε φάση εκτός ελέγχου για την Λογαριθμική Λογιστική Κατανομή χρησιμοποιώντας τον Πινάκα 8 και τα σχήματα 9a και 9b παρουσιάζονται στην συνέχεια:

- Τα χαρακτηριστικά του μήκους ροής δεν μπορούν να εξαχθούν για το διάγραμμα $EWMA - \bar{X}$ βασισμένοι στις μεθόδους για την κανονική κατανομή, δεδομένου ότι τα χαρακτηριστικά για το μήκος ροής δεν συγκλίνουν. Αυτό αποτελεί ένα κοινό αποτέλεσμα για τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις κλασικές μεθόδους της υπόθεσης Κανονικής Κατανομής. (βλέπε για παράδειγμα Chakraborti et al – 2004 όπου ένα όμοιο πρόβλημα εξετάζεται για την ομοιόμορφη κατανομή σε εργασία που αναφέρεται σε ένα διάγραμμα $Shewart - \bar{X}$
- Αν και η απόδοση για το διάγραμμα $EWMA-Rank$ και το προτεινόμενο διάγραμμα είναι σχεδόν ίδιες, όμως το διάγραμμα $EWMA-Rank$ αποδίδει πολύ καλύτερα από το προτεινόμενο διάγραμμα για $\gamma \geq 0.15$ ενώ έχουμε την ακριβώς αντίθετη κατάσταση για $\gamma < 0.15$.

Κατά συνέπεια σε σύγκριση με το $EWMA - \bar{X}$, όταν ενδιαφερόμαστε για μικρές διολισθήσεις, το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα είναι πολύ καλύτερο μόνο όταν η υποκείμενη κατανομή είναι κανονική. Όμως, ένα αξιοσημείωτο σημείο είναι ότι το διάγραμμα $EWMA - \bar{X}$ μπορεί να μην είναι ευσταθές στην περίπτωση που η υπόθεση της κανονικής κατανομής δεν ικανοποιείται, ενώ το μη παραμετρικό διάγραμμα δεν χρειάζεται καμμία τέτοια προϋπόθεση, γεγονός το οποίο αποτελεί ένα αφάνταστο τεχνικό πλεονέκτημα για πρακτική εφαρμογή. Σε σύγκριση με το διάγραμμα $EWMA$ -Rank η απόδοση του μη παραμετρικού διαγράμματος είναι συγκρίσιμη ή σε ορισμένες περιπτώσεις το προτεινόμενο διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση. Αυτές οι παρατηρήσεις συζεύγνυνται με το γεγονός ότι τα διαγράμματα $EWMA$ είναι γενικότερα ευκολότερα στην χρήση τους στον χώρο πρακτικής εφαρμογής τους και παρέχουν ένα κοινό αμφίπλευρο διάγραμμα ελέγχου (για τα πάνω και κάτω όρια ελέγχου) καθιστώντας το προτεινόμενο διάγραμμα που βασίζεται σε αυτού του τύπου τα διαγράμματα, ένα εύκολο και χρήσιμο εργαλείο για τον αναλυτή.

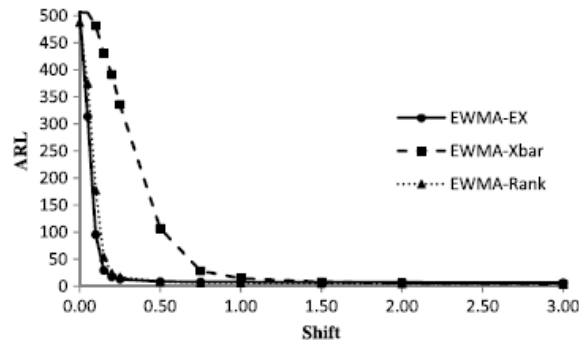


Fig. 6a. ARL performance comparison of the competing charts under the Symmetric Mixture Normal distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

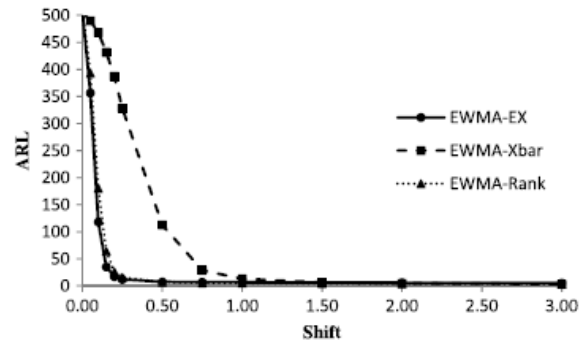


Fig. 6b. ARL performance comparison of the competing charts under the Symmetric Mixture Normal distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

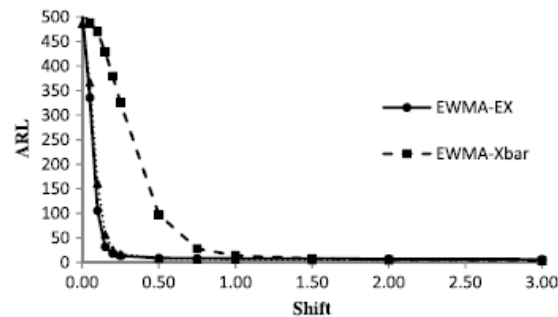


Fig. 7a. ARL performance comparison of the competing charts under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = 0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

Σχήμα 6α: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Συμμετρικά Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Σχήμα 6β: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Συμμετρικά Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Σχήμα 7α: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Ασύμμετρη Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην παράμετρο ARL υπάρχει μία πόλωση (δηλ. η τιμή ARL_δ είναι μεγαλύτερη της τιμής ARL_0) των διαγραμμάτων για την εκθετική κατανομή όταν οι μεταβολές είναι μικρές. Η πόλωση είναι πολλά υποσχόμενη για το διάγραμμα

$EWMA - \bar{X}$ αλλά είναι επίσης ελαφρά παρούσα και στα μη παραμετρικά διαγράμματα. Η πόλωση αυτή, εμφανίζεται σε μικρότερο βαθμό στο προτεινόμενο διάγραμμα. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε πολλές εκτεινόμενες σε μεγάλο μήκος προσομοιώσεις της παραμέτρου ARL , και μπορεί να είναι αποτέλεσμα της δεξιάς σκέδασης τιμών της εκθετικής κατανομής συνδυαζόμενη με το γεγονός ότι η κατανομή του μήκους είναι και αυτή προς τα δεξιά σκεδαζόμενη με μεγάλης έκτασης ουρά στην δεξιά πλευρά.

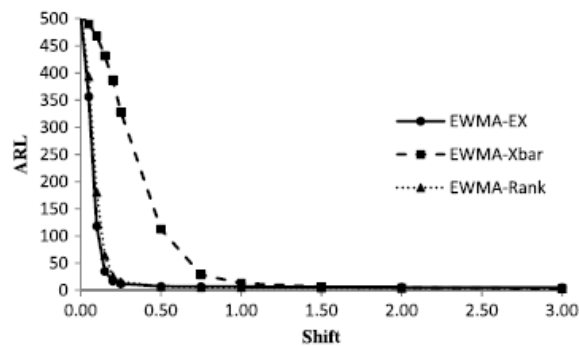


Fig. 6b. ARL performance comparison of the competing charts under the Symmetric Mixture Normal distribution for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

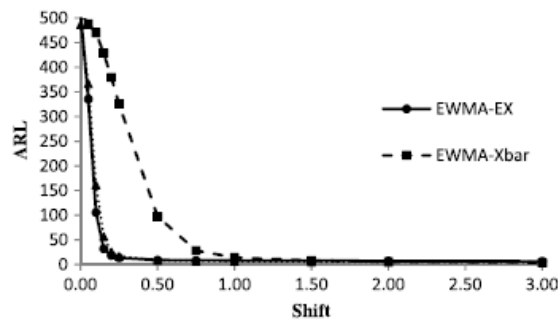


Fig. 7a. ARL performance comparison of the competing charts under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = 0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

Σχήμα 6b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Συμμετρικά Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Σχήμα 7a: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Ασύμμετρη Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Η πόλωση θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα ενός σφάλματος στην προσομοίωση εξαιτίας του ότι οι τιμές για το ARL_δ είναι αρκετά κοντά στις τιμές της παραμέτρου ARL_0 . Μερικοί ερευνητές έχουν καθορίσει μη πολωμένη ARL για παραμετρικά διαγράμματα και αυτό αποτελεί ένα θέμα για περαιτέρω έρευνα στα θέματα που αφορούν τα μη παραμετρικά διαγράμματα. Από την άλλη πλευρά οι Steiner και Jones (2010) ανάμεσα σε άλλους, έχουν συστήσει την εξέταση της μεσαίας τιμής του μήκους αντί για την μέση τιμή,

διότι «είναι ευκολότερο να γίνει προσομοίωση και δίνει κατά γενική συμφωνία μία καλύτερη εικόνα». Αυτή η προσέγγιση αποτελεί επίσης μία εναλλακτική που θα πρέπει περαιτέρω να αξιολογηθεί.

6.6. Επίδραση του μεγέθους των δειγμάτων

Το προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου ρυθμίζεται για να επιτύχει την τιμή στόχο για την παράμετρο ARL_0 να έχει τεθεί περίπου στο 500. Όμως η τιμή αυτή αποτελεί μία κατά συνθήκη μέση τιμή για σύστημα σε φάση εντός ελέγχου (η οποία έχει προκύψει από την μέση τιμή όλων των πιθανών εκτελέσεων εντός ελέγχου που συγκαταλέγονται στα δείγματα της Phase I) και για τον λόγο αυτό οι πρακτικοί μελετητές και αναλυτές μπορούν να ενδιαφέρονται για την τιμή του ARL_0 εξαρτώμενη από τα δείγματα της Phase I. Τα επιτεύξιμα ARL_0 θα ποικίλουν, δεδομένου ότι τα δείγματα που προκύπτουν στην Phase I είναι τυχαία, αν και τα διαγράμματα μπορεί να έχουν σχεδιασθεί για την συμφωνημένη τιμή ARL_0 η οποία ισούται με 500 και τα δείγματα της Phase I θεωρούνται ότι έχουν προκύψει από μία εντός ελέγχου φάση για το σύστημα.

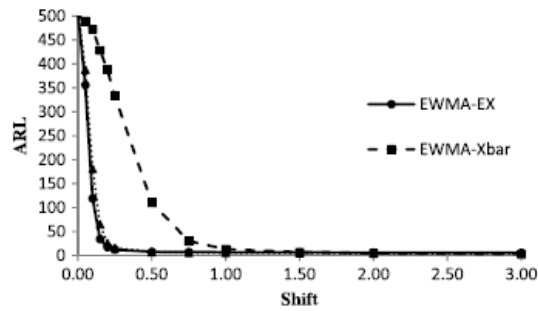


Fig. 7b. ARL performance comparison of the competing charts under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = 0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

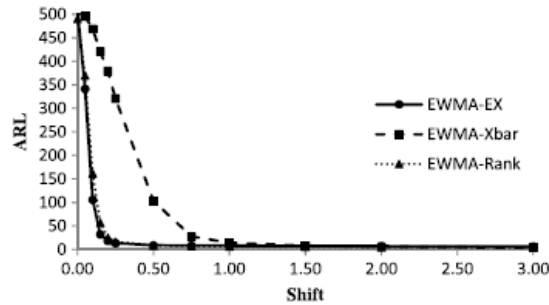


Fig. 8a. ARL performance comparison of the competing charts under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = -0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

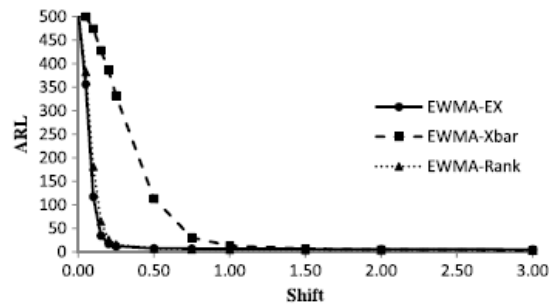


Fig. 8b. ARL performance comparison of the competing charts under the Asymmetric Mixture Normal distribution $[0.6N(\mu_1 = -0.25, \sigma_1 = 0.25) + 0.4N(\mu_2 = 0, \sigma_2 = 4)]$ for $m = 100$ and $n = 5$ and $\lambda = 0.10$.

Σχήμα 7b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Ασύμμετρη Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Σχήμα 8a: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Ασύμμετρη Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.05$

Σχήμα 8b: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για τα συγκρινόμενα διαγράμματα για Ασύμμετρη Μικτή Κανονική κατανομή της διεργασίας για $m=100$, $n=5$ και $\lambda=0.10$

Μία μελέτη προσομοίωσης επίσης διεξήχθη για την διερεύνηση του φαινομένου των δειγμάτων αναφοράς και του μεγέθους που αυτά έχουν στην επίδραση της απόδοσης για το προτεινόμενο διάγραμμα. Το μέγεθος του δείγματος αναφοράς (m) εξελέγη σε τιμές 20, 50, 100, 500 και 1000 αντίστοιχα. Η σταθερά εξομάλυνσης επελέγη σε τιμή 0.05 δηλ. $\lambda=0.05$ και η τιμή για το L επελέγη έτσι ώστε το ARL_0 να καταστεί περίπου 500 για κάθε δείγμα αναφοράς. Το μέγεθος αναφοράς των δειγμάτων με το μικρότερο ARL_δ είναι γενικά

προτιμώμενο. Ο πίνακας 9 δείχνει την απόδοση για φάσεις εντός και εκτός ελέγχου για την κατανομή μηκών ροής για διολισθήσεις κλίμακας $\gamma=0.00(0.25)1.00, 1.50, 2.00$ και 3.00 για την μεσαία τιμή, για διαφορετικού μεγέθους δείγματα ομαδοποιημένα σε ομάδες των $n=5$. Ο έλεγχος έγινε για αυτά τα στοιχεία και το διάγραμμα *EWMA-EX* έγινε υπό την υπόθεση της κανονικής κατανομής $N(0,1)$. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα έδειξαν για το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασίζεται στο στατιστικό προσήμου (*EWMA-SN* Graham et al - 2011) δεδομένου ότι αυτό αποτελεί το ανάλογο του προτεινόμενου διαγράμματος εφόσον οι παράμετροι της διεργασίας είναι γνώστες ή έχουν καθοριστεί. Η πρώτη γραμμή κάθε κελιού στον πίνακα 9 δείχνει την παράμετρο ARL_0 ακολουθούμενη από την αντίστοιχη $SDRL_0$ σε παρενθέσεις, ενώ η δεύτερη γραμμή δείχνει τις τιμές για την εντός ελέγχου φάση για ποσοστιαία επίπεδα (percentiles) της τάξης των 5, 25, 50, 75, και 95 (όπως αναφέρονται με αυτήν την σειρά). Οι τιμές για την παράμετρο ARL παρουσιάζονται στο σχήμα 10.

Από τον Πίνακα 9 και το σχήμα 10, βρίσκουμε ότι όπως αναμενόταν, όσο το δείγμα αναφοράς έχει μεγαλύτερο μέγεθος, τόσο λιγότερη η αβεβαιότητα και καλύτερη η απόδοση του διαγράμματος. Γενικά, όταν το μέγεθος του δείγματος αναφοράς δεν είναι μικρότερο από 100, το προτεινόμενο διάγραμμα έχει καλή απόδοση, το οποίο σημαίνει ότι αποδίδει όπως αναμενόταν χωρίς συνθήκες περιορισμών. Επιπρόσθετα, οι τιμές, όταν οι παράμετροι είναι άγνωστοι, φαίνεται να τείνουν σε τιμές σαν να ήταν γνωστές, γεγονός το οποίο αναμενόταν, δεδομένου ότι η αβεβαιότητα μειώνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος αναφοράς αυξάνει. Ανάλογα συμπεράσματα βρέθηκαν και για άλλες (σκεδασμένες και με βαρύτερη συνεισφορά στις ουρές) κατανομές, αλλά τα προκύπτοντα αποτελέσματα παραλείπονται για συντόμευση της παρουσίασης των αποτελεσμάτων.

6.7. Συμπεράσματα από την μη παραμετρική μέθοδο *EWMA-EX*

Τα διαγράμματα *EWMA* έχουν πλεονέκτημα εξαιτίας της συσσωρευτικής ακολουθιακής φύσης στην επεξεργασία των μετρήσεων που διαθέτουν για την κατασκευή ενός περιβάλλοντος Σ.Ε.Δ. και είναι γνωστό ότι είναι πιο αποδοτικά στην ανίχνευση μικρών διολισθήσεων. Το κλασσικό διάγραμμα *EWMA* μέσης τιμής μπορεί να μην αποδίδει εξίσου καλά σε θέματα ευστάθειας για τις φάσεις εντός ελέγχου ενός συστήματος, και εξαιτίας αυτού ο αντίστοιχος ρυθμός των λανθασμένων συναγερμών μπορεί να

αποτελεί ένα πρακτικό πρόβλημα που είναι σημαντικό. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου προσφέρουν μία εναλλακτική η οποία είναι ελκυστική σε τέτοιου τύπου καταστάσεις, καθώς συνδυάζει τα εγγενή πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών μεθόδων (ευστάθεια σε φάσεις εντός ελέγχου) με καλύτερη ικανότητα ανίχνευσης μικρών διολισθήσεων. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάστηκε ένα μη παραμετρικό αμφίπλευρο διάγραμμα *EWMA* βασισμένο σε δεδομένα της Phase II με χρήση «επερχόμενων» στατιστικών (exceeded statistics) (το οποίο συμβολίζουμε ως *EWMA-EX*) για την ανίχνευση μιας διολίσθησης με άγνωστη την υποκείμενη κατανομή των δειγμάτων της διεργασίας. Στα πλαίσια του κεφαλαίου έγινε μία σύγκριση του μη παραμετρικού διαγράμματος *EWMA-EX* με άλλα διαγράμματα όπως: το κλασικό παραμετρικό *CUSUM*, και τα διαγράμματα *EWMA* για ομαδοποιημένους μέσους και άλλα μη παραμετρικά διαγράμματα όπως τα *CUSUM* και *EWMA* διαγράμματα, που βασίζονται στο στατιστικό κριτήριο Wilcoxon-Mann-Whitney. Προκύπτει λοιπόν ότι το διάγραμμα *EWMA-EX* αποδίδει εξίσου καλά και σε πολλές περιπτώσεις καλύτερα από τα προηγούμενα διαγράμματα ειδικότερα για κατανομές οι οποίες έχουν βαρύτερες συγκεντρώσεις στα όρια των ουρών τους ή εμφανίζουν πιο επικεντρωμένες κορυφώσεις σε σχέση με την Κανονική. Κατά συνέπεια το προτεινόμενο διάγραμμα μπορεί να είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον αναλυτή ελέγχου ποιότητας στην λειτουργία των διεργασιών. Τελικά, όπως προέκυψε από την παραπάνω ανάλυση, η εκλογή του στατιστικού σημείου αναφοράς αποτελεί ένα σημαντικό προς καθορισμό θέμα. Σε αυτήν την προσέγγιση η ανάλυση των αποτελεσμάτων έχει βασιστεί στην μεσαία τιμή, δεδομένου ότι αυτή αποτελεί έναν καλό εκπρόσωπο της κεντρικής τιμής αναφοράς για κατανομές όλων των τύπων και είναι από τα πιο δημοφιλή ποσοστά (percentiles) που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Πίνακας 9

Table 9
Effect of reference sample size on the EWMA-EX chart under the $N(0, 1)$ distribution for $\lambda = 0.05$ and $n = 5$.

m	EWMA-EX					Parameters known or specified
	20	50	100	500	1000	
Control limits	2.039; 3.120 with $L = 1.016$	1.996; 3.102 with $L = 1.42$	1.991; 3.058 with $L = 1.75$	2.010; 3.000 with $L = 2.35$	2.019; 2.986 with $L = 2.47$	-0.931, 0.931 with $L = 2.60$
Shift (γ)						
0.00	500.95 (121.072) 13, 27, 72, 345, 2574	504.69 (953.55) 19, 49, 143, 492, 2277	508.46 (795.41) 24, 72, 200, 590, 2106	498.31 (562.59) 36, 123, 303, 672, 1616	500.58 (526.46) 40, 146, 335, 672, 1554	500.94 (482.31) 39, 156, 352, 689, 1467
0.25	488.98 (1220.19) 13, 29, 75, 327, 2516	458.66 (886.23) 17, 42, 121, 444, 2127	398.98 (687.24) 20, 49, 130, 417, 1738	222.03 (326.81) 21, 53, 111, 246, 820	172.02 (213.16) 21, 51, 102, 207, 557	118.99 (101.86) 20, 47, 89, 158, 322
0.50	430.41 (1139.25) 12, 24, 57, 252, 2266	300.54 (743.68) 13, 26, 56, 198, 1545	185.97 (456.32) 14, 26, 46, 129, 860	57.62 (67.32) 13, 25, 39, 68, 156	48.23 (38.59) 13, 23, 37, 60, 120	40.57 (26.43) 12, 22, 34, 52, 92
0.75	305.57 (938.98) 10, 18, 36, 127, 1631	148.49 (524.62) 11, 18, 30, 70, 596	62.22 (189.51) 10, 17, 27, 48, 176	27.17 (17.90) 10, 16, 23, 33, 59	25.07 (14.28) 10, 15, 22, 31, 52	22.71 (11.52) 9, 15, 20, 28, 45
1.00	223.61 (840.20) 9, 14, 24, 65, 1067	63.25 (271.63) 9, 14, 20, 34, 165	247.6 (347.7) 9, 13, 18, 26, 59	17.68 (8.43) 8, 12, 16, 21, 33	16.73 (7.88) 8, 12, 15, 20, 31	15.62 (6.51) 8, 11, 14, 19, 28
1.50	67.81 (440.12) 7, 10, 14, 22, 113	16.48 (56.58) 7, 10, 12, 17, 32	12.73 (6.13) 7, 9, 11, 15, 23	10.84 (3.49) 7, 8, 10, 13, 17	10.38 (3.27) 6, 8, 10, 12, 17	9.98 (3.05) 6, 8, 9, 12, 16
2.00	16.46 (79.83) 6, 8, 10, 14, 28	10.05 (4.10) 6, 8, 9, 11, 17	9.20 (2.64) 6, 7, 9, 10, 14	8.16 (1.99) 6, 7, 8, 9, 12	7.87 (1.89) 6, 7, 8, 11	7.50 (1.83) 5, 6, 7, 9, 11
3.00	7.83 (2.17) 6, 6, 7, 9, 12	6.84 (1.34) 5, 6, 7, 7, 9	6.66 (1.08) 5, 6, 7, 7, 9	6.03 (0.95) 5, 5, 6, 7, 8	5.90 (0.83) 5, 5, 6, 6, 7	5.55 (0.81) 5, 5, 5, 6, 7

Note that the first row of each cell shows the ARL followed by the corresponding SURL in parentheses, whereas the second row shows the values of the 5th, 25th, 50th, 75th and 95th percentiles (in this order).

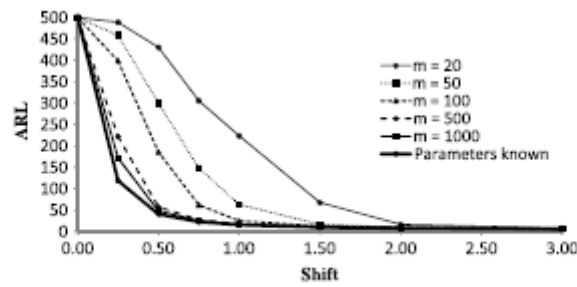


Fig. 10. ARL comparison for different reference sample sizes under the $N(0, 1)$ distribution for $n = 5$ and $\lambda = 0.05$.

Σχήμα 10: Σύγκριση της απόδοσης της παραμέτρου ARL για διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων αναφοράς $n=5$ και $\lambda=0.05$

Παρόλα αυτά, γενικότερα, τα «επερχόμενα» στατιστικά και ως εκ τούτου και το διάγραμμα $EWMA-EX$ μπορεί εξίσου να βασιστεί και σε άλλους ποσοστιαίους ενδείκτες του δείγματος αναφοράς και η ανάπτυξη της ανάλυσης σε αυτήν την περίπτωση θα ακολουθήσει ανάλογες προσεγγίσεις. Το τελευταίο αποτελεί ένα χαρακτηριστικό το οποίο είναι υπό διερεύνηση, η επίδραση του οποίου αποτελεί αντικείμενο μελέτης σε μελλοντικές ερευνητικές εργασίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Συμπεράσματα από την εφαρμογή των ειδικών τεχνικών *EWMA*

7.1. Ιδιότητες και Χαρακτηριστικά των ιδιαίτερων μεθόδων *EWMA* που παρουσιάστηκαν

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών και των ιδιοτήτων της μεθόδου *EWMA* και των παραλλαγών αυτής. Αναλυτικά από την μελέτη των μεθόδων, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

(1). Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των μεθόδων δείχνουν ότι οι ιδιότητες της *EWMA* είναι αρκετά κοντά στις αντίστοιχες γενικές ιδιότητες των *CUSUM* σχημάτων ελέγχου.

(2) Αρκετές παραλλαγές των σχημάτων *EWMA* δίνουν τα παρακάτω ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- Το χαρακτηριστικό *FIR*: κάνει το σχήμα ανίχνευσης περισσότερο «ευαίσθητο» στην ανίχνευση καταστάσεων εκτός ελέγχου στις φάσεις εκκίνησης των διεργασιών (start-ups).
- Ο συνδυασμός *Shewart-EWMA*: παρέχει προστασία και για μικρές αλλά και για μεγάλες διολισθήσεις του μέσου της διεργασίας
- Ευσταθής *EWMA* (*Robust EWMA*): παρέχει επιπλέον προστασία από την ύπαρξη σποραδικών δειγμάτων της διεργασίας εκτός ζώνης ελέγχου.

(3) Κρίσιμες παράμετροι ελέγχου οι οποίες προσδιορίζουν την συμπεριφορά και απόδοση των μεθόδων είναι: το μήκος ροής , το μέσο μήκος ροής (*Average Run Length - ARL*), Μεσαία τιμή του μήκους ροής (*Median Run Length - MDRL*), και η τυπική απόκλιση του μήκους ροής (*Standard Deviation Run Length - SDRL*):

- *EWMA* με χρονικά μεταβαλλόμενα όρια: Δεδομένου ότι όλα τα χαρακτηριστικά μιας διεργασίας αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου είναι αναμενόμενο ότι τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου για την παρακολούθηση μιας διεργασίας, αποδίδουν πολύ καλύτερα στην ανίχνευση ολισθήσεων στην περίπτωση εκκίνησης εκτός ελέγχου, ή στην περίπτωση που η διεργασία καταλήξει να είναι εκτός ελέγχου.
- Το όφελος από την χρήση μεταβαλλόμενων ορίων έναντι ασυμπτωτικών ορίων, εξαρτάται από την παράμετρο εξομάλυνσης λ . Γενικότερα τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια ελέγχου είναι χρήσιμα όταν το λ είναι μικρό δηλ. μικρότερο από 0.3.
- *FIR-EWMA* Μέθοδος: Στην περίπτωση που μια διεργασία εκκινεί σε φάση εκτός έλεγχου η χρήση μεταβαλλόμενων χρονικών ορίων παρέχουν μία συμπεριφορά ανάλογη της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (*FIR*). Η ρύθμιση των ορίων ελέγχου έτσι ώστε να εκκινούν από το μισό της κανονικής τιμής για την διεργασία και στην συνέχεια να αυξάνουν εκθετικά στα κανονικά επίπεδα των χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων δίνει την δυνατότητα της κατασκευής μίας *FIR-EWMA* μεθόδου παρακολούθησης.

(4) Συμβιβασμός μεταξύ ικανότητας γρήγορης ανίχνευσης και ρυθμού εμφάνισης «λανθασμένων» συναγερμών για καταστάσεις εκτός ελέγχου του *EWMA* διαγράμματος:

- Διάγραμμα ελέγχου *EWMA* με μεταβαλλόμενα όρια που βασίζονται στην διασπορά της διεργασίας: Η *stat-EWMA* αποτελεί μία παραλλαγή της κλασσικής μεθόδου, η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα παρέχοντας ισορροπημένη απόδοση. Τα παραπάνω βασίζονται σε φυσικές επιλογές των παραμέτρων του σχήματος.

(5) Διαγράμματα ελέγχου *EWMA* για την παρακολούθηση της διασποράς σ_0^2 της διεργασίας:

- Το μοντέλο διεργασιών βασίστηκε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις και προσεγγίσεις αλυσίδων Markov. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το διάγραμμα που ασχολείται με τον υπολογισμό της τρέχουσας τιμής της διασποράς $\sigma^2(t)$ χρειάζεται περισσότερα δεδομένα κατά μέση εκτίμηση έτσι ώστε να ανιχνεύσει μία κατάσταση εκτός ελέγχου για το σύστημα. Το απαιτούμενο πλήθος δειγμάτων για αυτήν την φάση μπορεί ενδεχόμενα να δημιουργήσει προβλήματα σε πρακτικές εφαρμογές του συστήματος παρακολούθησης της διεργασίας.

(6) Επίδραση των διαδικασιών δειγματοληψίας και κατηγοριοποίησης των δειγμάτων μιας διεργασίας στην χρήση τεχνικών *EWMA* για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της:

- Οι μέθοδοι στατιστικής επεξεργασίας και κατηγοριοποίησης μέσου συνόλου (median ranked sets) επί των δειγμάτων μιας διεργασίας, αποδεικνύεται ότι είναι περισσότερο αποδοτική από την παραδοσιακή σειριακή συλλογή δειγμάτων στην εκτίμηση των παραμέτρων αυτής. Ιδιαίτερα αυτό είναι αληθές σε καταστάσεις όπου η επιβολή μετρήσεων ακριβείας επί των δειγμάτων είναι δύσκολες ή δαπανηρές, αλλά αντίθετα η κατηγοριοποίηση και κατάταξη των δειγμάτων είναι εύκολη. Αυτό βασίζεται στο ότι η εκλογή του μέσου συνόλου αποτελεί μία βοηθητική και ευσταθή εκτιμήτρια της «τάσης κατεύθυνσης» των δειγμάτων.
- Τα συστήματα ελέγχου διεργασιών που βασίζονται σε αυτές τις μεθόδους, αποδεικνύονται πολύ πιο αποδοτικά για ένα σύνολο δεικτών επίδοσης (*ARL*, *MDRL*, *SDRL*, *ARARL*, *PCI*) για την ανίχνευση ολισθήσεων στον μέσο της διεργασίας σε σχέση με τις παραδοσιακές μεθόδους.
- Οι ανωτέρω μέθοδοι δεν αυξάνουν σημαντικά το πλήθος «λανθασμένων» συναγεμίων για την ανίχνευση καταστάσεων εκτός ελέγχου της διεργασίας.
- Οι μέθοδοι παρουσιάζουν ταχύτερη ανίχνευση καταστάσεων ελέγχου από ανάλογα διαγράμματα.
- Συγκεκριμένα η μέθοδος δειγματοληψίας *DMRSS* έχει καλύτερη συνολική απόδοση ακολουθούμενη από τις μεθόδους δειγματοληψίας *MDRRS* και *MRSS*.

(7) Χρήση τεχνικών *EWMA* βασισμένες σε συνδυασμό μονόπλευρων διαγραμμάτων και σύγκριση της απόδοσης τους σε σχέση με συνολικά αμφίπλευρα διαγράμματα ελέγχου:

- Στην βάση αυτής της διαδικασίας παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα *HHW1* και *HHW2* τα οποία εμφανίζουν καλύτερα αποτελέσματα στην διαδικασία παρακολούθησης από τα κλασικά *CH* (Crowdder & Hamilton), *SJ* (Shu & Jiang) και *HHW1* διαγράμματα για την παρακολούθηση των μεταβολών της διεργασίας.
- Συνδυασμός των κάτω ορίων ελέγχου από το *HHW1* και των άνω ορίων ελέγχου από το *HHW2* δίνει ένα συνδυασμένο *HHW-C* διάγραμμα το οποίο τελικά αποδεικνύεται ότι μπορεί να ανιχνεύσει μεταβολές στην διεργασία καλύτερα από όλους τους προηγούμενους τύπους διαγραμμάτων (*CH*, *SJ*, *HHW1* και *HHW2*).
- Τα διαγράμματα *HHW1*, *HHW2* και *HHW-C* εμφανίζουν τα ίδια μήκη αλυσίδων εκτέλεσης *Z-ARL* (μηδενικής κατάστασης) και *S-ARL* (μόνιμης κατάστασης) για οποιαδήποτε μορφή διολίσθησης της διεργασίας.

- Η χρήση αυτού του τύπου των διαγραμμάτων αποδεικνύεται ότι δεν παρουσιάζει ευαισθησία στο επίπεδο του σηματοθορυβικού λόγου SN ratio των δεδομένων, σε αντίθεση με τα κλασσικά διαγράμματα $EWMA$.
- Η παράμετρος ARL_0 θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη για τον καθορισμό των βέλτιστων παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό του συστήματος παρακολούθησης.

(8) Χρήση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου τύπου $EWMA-SN$ και $EWMA-EX$ και εφαρμογή τους σε διεργασίες με άγνωστη κατανομή:

- Τα διαγράμματα $EWMA-SN$ είναι διαγράμματα τύπου $EWMA$ με χρήση του στατιστικού προσήμου και στόχο την διατήρηση των ευσταθών χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων για στατιστικό έλεγχο σε φάσεις εντός ελέγχου.
- Τα διαγράμματα $EWMA-EX$ είναι επίσης μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου $EWMA$, με χρήση του κατηγοριοποιημένου στατιστικού που ανακύπτει από ομαδοποίηση των δεδομένων που ανακύπτουν από την χρονική εξέλιξη της διεργασίας μετά την εκλογή ενός συγκεκριμένου σημείου αναφοράς.
- Το πλεονέκτημα και από τα δύο προηγούμενα διαγράμματα, είναι ότι αφορούν σε μη παραμετρικές μεθόδους γεγονός το οποίο σημαίνει ότι δεν εξαρτώνται από την βασική υπόθεση της «Κανονικότητας» της διεργασίας δηλ. οι υποκείμενες κατανομές τις οποίες ακολουθεί η διεργασία προς έλεγχο, δεν είναι υποχρεωτικό να ακολουθεί την κανονική κατανομή.
- Τα χαρακτηριστικά επιδόσεων για τις εντός ελέγχου φάσεις της διεργασίας είναι εγγενώς ευσταθή, ως χαρακτηριστικό που αναφέρεται στην μη παραμετρική υφή αυτών των μεθόδων.
- Συγκεντρωτικά οι αποδόσεις των παραπάνω διαγραμμάτων φαίνονται ικανοποιητικές και να υπερτερούν των κλασσικών διαγραμμάτων $EWMA$ όταν αναφέρονται σε κατανομές, τα χαρακτηριστικά των οποίων αφορούν σε έντονη συγκέντρωση των δεδομένων (μετρήσεων) σε ακραίες περιοχές δηλ. σε περιοχές σκεδαζόμενες και επικεντρωμένες στην ουρά της κατανομής. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις τα κλασσικά $EWMA$ διαγράμματα φαίνεται ότι δίνουν συγκρίσιμα αποτελέσματα ή ακόμη και να υπερτερούν εφόσον οι κατανομές που διέπουν την διεργασία δεν αποκλίνουν σημαντικά της Κανονικής.

7.2.Γενικά Συμπεράσματα

Από την παρουσίαση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των μεθόδων που αναλύθηκαν διεξοδικά στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, γίνεται εμφανές ότι η πληθώρα των αναπτυγμένων μεθόδων που βασίζεται στα διαγράμματα *EWMA* αφορά κατά κύριο λόγο στην παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας. Μικρές παραλλαγές αυτών των μεθόδων ασχολούνται με την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης και όπως αποδεικνύεται ο έλεγχος μιας διεργασίας ως προς την δεδομένη μεταβλητή καθίσταται πιο δύσκολος δεδομένου ότι απαιτείται ένας μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων για την εκτίμηση των παραμέτρων της. Αυτό καθιστά το σύστημα παρακολούθησης μη ρεαλιστικό σε ορισμένες περιπτώσεις. Το μεγαλύτερο μέρος των μεθόδων όμως ασχολείται με την παρακολούθηση διεργασιών ως προς την μέση τιμή τους.

Η χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων μπορεί να αντισταθμίσει τα φαινόμενα παρακολούθησης της διεργασίας όσον αφορά στην γρήγορη ανίχνευση συνθηκών εκτός ελέγχου του συστήματος. Αυτό το χαρακτηριστικό, μπορεί να επιτευχθεί ισοδύναμα και με την χρήση του χαρακτηριστικού της Γρήγορης Χρονικής Απόκρισης (*FIR*) το οποίο προσδίδει μη μηδενική τιμή στην παράμετρο της διεργασίας κατά τις φάσεις εκκίνησης. Το αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις είναι η ενδεχόμενη εμφάνιση ποσοστού «λανθασμένων» συναγερμών, δηλ. εμφάνιση συναγερμών για τον χαρακτηρισμό καταστάσεων εκτός ελέγχου μιας διεργασίας χωρίς στην πραγματικότητα η διεργασία να έχει περιέλθει μόνιμα σε κατάσταση εκτός ελέγχου, οπότε στην περίπτωση αυτή επανέρχεται εντός ορίων λειτουργίας χωρίς την ανάγκη λήψης μέτρων από το σύστημα ελέγχου. Ο λόγος για την εμφάνιση αυτού του ιδιαίτερου χαρακτηριστικού είναι η αύξηση της «ευαισθησίας» του συστήματος παρακολούθησης. Μπορούμε επιπλέον να διακρίνουμε την αναγνώριση συνθηκών εκτός ελέγχου σε δύο φάσεις λειτουργίας της διεργασίας, (α) όταν το σύστημα βρίσκεται σε φάση εκκίνησης ή επαναφοράς μετά από ανίχνευσης μετάβασης σε κατάσταση εκτός ελέγχου και (β) με διολίσθηση δηλ. όταν το σύστημα ήταν αρχικά εντός ελέγχου και μετά από μεταβολή των χαρακτηριστικών λειτουργίας ότι καταλήγει σε φάση εκτός ελέγχου. Στην προσπάθεια διορθώσεως αυτών των φαινομένων συστήνονται παραλλαγές της μεθοδολογίας οι οποίες χρησιμοποιούν χρονικά μεταβαλλόμενα όρια σε συνδυασμό με *FIR*, ξεκινώντας την διεργασία παρακολούθησης από μικρές τιμές απόκλισης και αυξάνοντας αυτές προοδευτικά έτσι ώστε να λάβουν τις προβλεπόμενες τιμές των ασυμπτωτικών ορίων ελέγχου.

Επιπλέον στα ανωτέρω χαρακτηριστικά υπαισέρχεται η διαδικασία της λήψης δειγμάτων από την διεργασία (δειγματοληψία). Σε όλες τις προαναφερόμενες μεθόδους η διαδικασία δειγματοληψίας είναι σειριακή και αυτό προϋποθέτει ένα ακριβές σύστημα μετρήσεων και επεξεργασίας το οποίο από το κάθε δείγμα εξετάζονται τα μετρητικά χαρακτηριστικά τα οποία αφορούν το σύστημα ελέγχου της διεργασίας. Στην φάση που κάτι τέτοιο είναι δαπανηρό ή δύσκολο να επιτευχθεί, συστήνονται χρήσεις τεχνικών δειγματοληψίας μέσου συνόλου (median ranked set). Αποδεικνύεται ότι αυτές οι μεθοδολογίες επιδρούν θετικά στην εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου *EWMA* διότι κατασκευάζουν πρακτικές και ικανοποιητικές εκτιμήτριες μέσου οι οποίες παρουσιάζουν «αναισθησία» σε μεταβολές στατιστικής φύσεως. Η ικανότητα αυτών των μεθόδων για γρήγορη ανίχνευση των τάσεων μιας διεργασίας αφορά τόσο στην ανίχνευση μικρών αλλά και μεγάλων διολισθήσεων για την διεργασία.

Ένα σημαντικό εργαλείο παρακολούθησης θα μπορούσε λοιπόν να συνδυάσει τα χαρακτηριστικά *FIR* με τις μεθόδους δειγματοληψίας για να συνδυάσει και τα δύο θετικά χαρακτηριστικά των μεθόδων που παρουσιάστηκαν. Μέχρι αυτό το σημείο έχουν αξιολογηθεί τα συστήματα *EWMA* που κάνουν χρήση αμφίπλευρων ορίων ελέγχου σε κοινό διάγραμμα. Επιπλέον η εργασία μελετά και την χρήση μονόπλευρων συστημάτων ελέγχου για την ανίχνευση άνω και κάτω ορίων ελέγχου, δηλ. συνδυασμός δύο διαγραμμάτων για την κατασκευή ενός συνολικά αμφίπλευρου διαγράμματος. Το σημαντικότερο μειονέκτημα αυτής της μεθοδολογίας είναι η αύξηση του επιπέδου πολυπλοκότητας λόγω του συνδυασμού των δύο διαγραμμάτων. Αφετέρου όμως ο συνδυασμός αυτός δίνει έναν μεγαλύτερο βαθμό ελευθερίας ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιήσει κατάλληλα κοινά διαγράμματα στοχεύοντας στην καλύτερη αξιοποίηση των μεθόδων.

Εναλλακτικά στην έως τώρα προσέγγιση που επικεντρώνεται κατά κύριο λόγο σε παραμετρικά διαγράμματα *EWMA*, είναι η χρήση μη παραμετρικών αντιστοιχών διαγραμμάτων τα οποία επίσης βασίζονται σε τεχνικές *EWMA*. Τα διαγράμματα αυτού του τύπου δεν προϋποθέτουν ικανοποίηση της υπόθεσης «Κανονικότητας» για την υποκείμενη σε στατιστικό έλεγχο διεργασία, αλλά δίνουν έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας στον τύπο και την κατανομή που μπορεί να ακολουθείται από την διεργασία. Τα στατιστικά δείγματα των μη παραμετρικών μεθόδων μπορούν να ακολουθούν την εκλογή προσήμων, κατηγοριών ή κατηγοριοποιημένων ομάδων προσήμου. Στην διερεύνηση που έγινε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, παρουσιάστηκαν οι δύο πρώτες παραλλαγές της μεθόδου δηλ. των *EWMA* διαγραμμάτων προσήμου και κατηγοριοποιημένων ομάδων

προσήμου που προέρχονται μετά από μία χρονική στιγμή για την διεργασία, ως βάση αναφοράς. Η ανάλυση των χαρακτηριστικών απέδειξε ότι τα νέου τύπου διαγράμματα παραμένουν ευσταθή για την φάση λειτουργίας ενός συστήματος εντός ελέγχου, οι επιδόσεις όμως αυτών των διαγραμμάτων φαίνεται να ξεπερνά τις κλασσικές μεθόδους μόνο στην βάση που οι υποκείμενες κατανομές των διεργασιών είναι ισχυρά σκεδαζόμενες και επικεντρωμένες στα όρια των ουρών τους. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις τα προκύπτοντα αποτελέσματα και τα χαρακτηριστικά των μεθόδων είναι συγκρίσιμα ή υποδεέστερα των κλασσικών *EWMA* μεθόδων (γεγονός που αναμενόταν). Ένα όμως από τα σημαντικά πλεονεκτήματα αυτού του τύπου μεθοδολογιών που θα πρέπει να επισημανθεί, είναι η μη αναγκαιότητα προσδιορισμού των στατιστικών χαρακτηριστικών της διεργασίας που καλούνται να ελέγξουν.

Κλείνοντας μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εκλογή μιας κατάλληλης παραλλαγής μεθόδου *EWMA* έχει κατά κύριο λόγο να συμπεριλάβει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά που το σύστημα παρακολούθησης επιθυμεί να διατηρήσει επί της διεργασίας, και στην συνέχεια αποτελεί μια διαδικασία η οποία είναι πολυπαραμετρική και απαιτεί ένα σημαντικό αριθμό ρυθμίσεων και συμβιβασμών πριν της εφαρμογή της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Abbas N, Riaz M, Does R. Enhancing the Performance of *EWMA* Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2011; 27(6):821–833.

[2] Abbas N, Riaz M and Does RJMM. Mixed Exponentially Weighted Moving Average–Cumulative Sum Charts for Process Monitoring. *Quality and Reliability Engineering International* 2012: available online with DOI:10.1002/qre.1385.

[3] Abbasi S.A. (2010). On Sensitivity of *EWMA* Control Chart for Monitoring Process Dispersion. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol III WCE 2010*, June 30 – July 2, 2010, London, U.K.

[4] Abujiya MR., Lee MH., Riaz M. (2013). Improving the Performance of Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. [wileyonlinelibrary.com] DOI: 10.1002/qre.1509. Published online 10 April 2013 in Wiley Online Library.

[5] Abujiya MR, Riaz, M, Lee MH. Enhancing the Performance of Combined *Shewhart-EWMA* Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 2012: DOI: 10.1002/qre.1461.

[6] Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle. *Applications of Statistics* (Krishnaiah, P.R., ed.), North Holland: Amsterdam, pp. 27-41.

[7] Alwan, LC (2000). *Statistical Process Analysis*. New York: McGraw-Hill. Διαγράμματα ελέγχου *CUSUM* και *EWMA*: Βασικές ιδιότητες και επεκτάσεις τους (Σελ. 107).

[8] Amin, Reynolds and Bakir (1995). Non parametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic. *Communications in Statistics Theory and Methods* 24, pp 1597-1623.

- [9] Amin and Searcy (1991). A nonparametric exponentially weighted moving average control scheme, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 20:4, 1049-1072.
- [10] Antoniadis, A. (1997). Wavelets in statistics: a review (with discussion). *J. Italian Statist. Assoc.*, **6**, pp. 97-144.
- [11] Bird, J. (2007). *Engineering Mathematics*, 5th edn, Elsevier.
- [12] British Standard Institution. (2000). Part 1: Specification, performance, production and conformity, *EN 206-1*.
- [13] British Standards Institution. (2003). *Guide to data analysis and quality control using CUSUM techniques*, BS 5703:2003.
- [14] British Standards Institution. (2004). *Process control using quality control chart methods and CUSUM techniques*, BS5700, pp. 32-34.
- [15] CEN. (2000). *Product standards and conformity assessment guideline, CEN/BT N6287, 1109*.
- [16] Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables. *J.Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, 34, pp. 187-220.
- [17] Day, K. W. (2006). *Multigrademultivariable CUSUM quality control*, 8th CANMET/ACI International Conference on advances in concrete technology, Montreal, pp. 89-124.
- [18] Delatte, N., Chen S., Davidson J., Sehdev A. Amer N., and Endfinger M. (2001). *Design and Quality Control of Concrete Overlays*, University Transportation Center for Alabama, pp. 3-18.
- [19] Fu, W. J. (1998). Penalized Regression: The Bridge Versus the LASSO. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7, pp. 397–416.

- [20] Gan FF. Designs of one and two-sided exponential *EWMA* control charts. *Journal of Quality Technology* 1998; 30:55–69.
- [21] Gibbons, J.D., Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference*, fourth ed. Marcel Dekker, New York. *Economic Quality Control*.
- [22] Graham M.A., Chakraborti S., Human S.W. A nonparametric *EWMA* Sign Chart for Location Based on Individual Measurements. *Mortiner House, London W1T, Quality Engineering*, 23:227-241, 2011
- [23] Graham M.A., Mukherjee A., Chakraborti S.. Distribution-free exponentially weighted moving average control charts for monitoring unknown location. *Computational Statistics and Data Analysis* 56(2012) 2539-2561
- [24] Haq A. A New Hybrid Exponentially Weighted Moving Average Control Chart for Monitoring Process Mean. *Quality and Reliability Engineering Διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA: Βασικές Ιδιότητες και Επεκτάσεις τους Σελίδα 108 International* 2012: DOI: 10.1002/qre.1453.
- [25] Hardin J. W., and Hilbe, J. M. (2007). *Generalized Linear Models and Extensions*, 2nd Ed., College Station, TX: Stata Press, pp. 82-104.
- [26] Harrison T. et al, (2001). *Guidance on the application of the EN 206-1 conformity rules*, Quarry Products Association, (available for free downloading from the MPA-BRMCA web site), pp. 37–52.
- [27] Hurvich, C. M., and Tsai, C. L. (1989). Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76, pp. 297-307.
- [28] Huwang L, Huang CJ, Wang YHT (2010). New *EWMA* control charts for monitoring process dispersion. *Computational Statistics and Data Analysis* 54 (2010) 2328-2342.
- [29] International Standards Organization. (1993) *Acceptance control charts*, ISO7966.

- [30] International Standards Organization. (1991). *Shewhart control charts*, ISO8258.
- [31] International Standards Organization. (1997). *Cumulative sum charts - Guidance on quality control and data analysis using CUSUM techniques*, ISO/TR 7871, pp. 14-17.
- [32] Jackson, N., and Dhir, R. K. (1997). *Civil Engineering Materials*, 5th Edn, Palgrave, 1997.
- [33] Jensen WA, Jones-Farmer LA, Champ CW, Woodall WH. Effects of parameter estimation on control chart properties: A literature review. *Journal of Quality Technology* 2006; 38:349–364.
- [34] Jones LA, Champ CW. Phase I control charts for time between events. *Quality and Reliability Engineering International* 2002; 18:479–488.
- [35] Koukouvinos, C., Mylona, K., and Vonta, F. (2008). A Comparative study of variable selection procedures applied in high dimensional medical problems. *Journal of Applied Probability & Statistics*, 3, pp. 195-209.
- [36] Linhart, H., and Zucchini, W. (1986). *Model selection*, John Wiley, New York, pp. 37-56.
- [37] Lucas JM, Saccucci MS. Exponentially weighted moving average control schemes - Properties and enhancements. *Technometrics* 1990; 32(1):1–12.
- [38] Machado MAG, Costa AFB. The double sampling and the *EWMA* charts based on the sample variances. *International Journal of Production Economics* 2008; 114(1):134–148. Διαγράμματα ελέγχου *CUSUM* και *EWMA*: Βασικές ιδιότητες και επεκτάσεις τους .
- [39] Mallows, C. L. (1973). Some comments on C_p . *Technometrics*, 15, pp. 661-675.
- [40] Maravelakis PE, Castagliola P. (2009). An *EWMA* chart for monitoring the process standard deviation when parameters are estimated. *Computational Statistics and Data Analysis* 53 (2009) 2653-2664.

- [41] McIntyre GA. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research* 1952; 3(4):385–390.
- [42] Modarres R, Hui TP, Zheng, G. Resampling methods for ranked set samples. *Computational Statistics and Data Analysis* 2006; 51(2):1039–1050.
- [43] Muttlak HA Median ranked set sampling with concomitant variables and a comparison with ranked set sampling and regression estimators. *Environmetrics* 1998; 9(3):255–267.
- [44] NEWMAN, H., and Choo, J. (2003). *Advanced Concrete Technology - Testing and Quality, Chapter 9*, pp. 62-75.
- [45] Ostadsharif MA Niaki STA. The Max *EWMAMS* control chart for joint monitoring of process mean and variance with individual observations. *Quality and Reliability Engineering International* 2011; 27(4):499–514.
- [46] Ou Y, Wen D, Wu Z, Khoo MBC. A comparison study on effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International* 2012; 28(1):3–17.
- [47] Quality Scheme For Ready Mixed Concrete. (2003). *Quality and product conformity regulations*.
- [48] Quiroga, P., and Fowler, D. (2003). The Effects of Aggregates Characteristics on the Performance of Portland Cement Concrete, International Center for Aggregates Research Aggregates Foundation for Technology, Research, and Education, pp. 16-25.
- [49] Rhoads T. R, D. C. Montgomery and C. M. Mastrangelo (1996). Fast initial Response Scheme for the *EWMA* Control Chart. *Quality Engineering*.9,317-
- [50] Roberts S. W (1959) .Control Chart tests on Geometric Moving Averages. *Technometrics*,42,97-102.

- [51] Saccucci MS, Amin RW, Lucas JM. Exponentially weighted moving average control schemes with variable sampling intervals. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 1992; 21:627–657.
- [52] Sear, L. (2010). *A combined CUSUM system for controlling OPC and OPC/PFA concretes*, ACT Project 89.
- [53] Shewart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*.
- [54] Steiner SH. *EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response*. *Journal of Quality Technology* 1999; 31(1):75–86.
- [55] Su, Y, Shu, L, Tsui K-L. Adaptive *EWMA* procedures for monitoring processes subject to linear drifts. *Computational Statistics & Data Analysis* 2011; 55(10):2819–2829.
- [56] Sven Knoth (2005). Fast Initial Response Features for *EWMA* control charts. *Statistical papers* 46, 47-64 (2005).
- [57] Takahasi K, Wakimoto, K. On unbiased estimates of population mean based on sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 1968; 20(1):1–31. Διαγράμματα ελέγχου *CUSUM* και *EWMA*: Βασικές ιδιότητες και επεκτάσεις τους.
- [58] The Royal Academy of Engineering. (2012). *The Mathematics of Material Quality Control*.
- [59] Troy, J. (2010), *Private communication*, pp. 9–40.
- [60] Vanderman S. B. and M. Jobe (1998). *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*. John and Sons, New York.
- [61] Woodland, W. H. (1985). *The Statistical Design of Quality Control Charts*. *The Statistician*. Vol. 34 pp.155-160, pp. 7-14.

- [62] Woodland, W. H., and Adams, B.M. (1993). The Statistical Design of *CUSUM* Charts Quality Engineering, Vol 5, pp.559-570.
- [63] Wrosley, K. J. (1983). The Power of Lilelyhood Ratio and Cummulative Sum Tests for a Change in a Binormal Probability. *Biometrika*, Vol. 70, pp.455-464.
- [64] Yeh, A. B., Lin, D. K. J., and Venkataramani C. (2004). Unified *CUSUM* Charts for Monitoring Process Mean and Variability. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 1, pp.65-86.
- [65] Zhang LY, Bebbington MS, Govindaraju K, Lai CD. Composite *EWMA* control charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 2004;33(4):1133–1158.
- [66] Αντζουλάκος, Δ. (2006). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».
- [67] Βουδικλάρης, Θ. (2004), ΕΛΟΤ EN 206-1, *Δυνατότητες και Προβλήματα εφαρμογής*.
- [68] Δαμιανού, Χ.Χ. (1996). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Αξιοπιστία, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- [69] Κανιτάκη, Ε. (2012). ΕΛΟΤ - ΤΕΕ, *Ευροκώδικας και ΕΛΟΤ EN 206-1*.
- [70] Καρώνη, Χ. (2005). *Μοντέλα Αξιοπιστίας και Επιβίωσης*. Ε.Μ.Π.
- [71] Κουκουβίνος, Χ. (2005). *Γραμμικά μοντέλα και Σχεδιασμοί*, Ε.Μ.Π.
- [72] Κουκουβίνος, Χ. (2008). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας.
- [73] Κούτρας, Μ. Β. (2001). Εισαγωγή στη Συνδυαστική, Εκδόσεις Α.Σταμούλης.
- [74] Κούτρας, Μ. Β. (2002). Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές: Μέρος Ι, Εκδόσεις Α. Σταμούλης.
- [75] Κούτρας, Μ. Β. (2004). Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές: Μέρος ΙΙ, Εκδόσεις Α. Σταμούλης.

[76] Κούτρας, Μ. Β. (2007). Στατιστική Θεωρία αξιοπιστίας και έλεγχοι χρόνων ζωής, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΠΜΣ «Εφαρμοσμένη Στατιστική».

[77] <http://books.google.gr>-*Quality Control Measurements*.