Μη-Αντιμεταθετικη Θεωρια Πιθανοτητων, Ελευθερια και Εφαρμογες

Άλκης Γεωργιάδης-Harris

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Λουλάκης

Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Ιούλιος 2015

Εισηγητής:

Μηχάλης Λουλάκης

Μέλη Επιτροπής:

Δημήτρης Χελλιώτης

Βασίλης Παπανικολάου

Ευχαριστίες

Πέραν των προφανών ευχαριστιών στους ανθρώπους που συνέβαλλαν και συμβάλλουν στην ύπαρξή μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω, πρώτα και κύρια, τον κ. Μιχάλη Λουλάκη για την ουσιώδη υποστήριξη που μου παρείχε (και παρέχει) και για τις ευκαιρίες που μου έδωσε. Συνολικά του οφείλω καθοριστικά την προετοιμασία μου ως μελλοντικού διδακτορικού φοιτητή. Αναμφίβολα, μια μικρή αναφορά στις Ευχαριστίες δεν είναι ικανή να εκφράσει τον σεβασμό μου και το χρέος μου προς εκείνον.

Επίσης, ευχαριστώ τον κ. Δημήτρη Χελλιώτη και όσους παρακολούθησαν το σεμηνάριο Πιθανοτήτων, που οργανώνει στο ΕΚΠΑ και στο οποίο παρουσιάστηκε η παρούσα εργασία. Η συμβολή τους στην εμπρόθεσμη εκπόνηση της εργασίας μου ήταν σημαντική, όπως και το ότι για μια ακόμη φορά επιβεβαιώθηκαν τα ρητά, περί του πόσο μαθαίνεις όταν εξηγείς. Είμαι βέβαιος ότι εισέπραξα περισσότερα από όλους από αυτή την εμπειρία και τους ευχαριστώ βαθύτατα.

Ευχαριστώ τον Νίκο Σταμάτη, για την σοβαρότητα και επιμέλεια με την οποία απαντάει στις (συχνά 'ασόβαρες') απορίες μου. Του οφείλω μεγάλο κομμάτι της μαθηματικής σκέψης που καλλιέργησα τα τελευταία τρία χρόνια, μέσα από τις μακροσκελείς συζητήσεις μας, αλλά και επειδή μου έδειξε την 'απλότητα' των Μαθηματικών.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την ΣΕΜΦΕ στο σύνολό της, για την ευκαιρία που μου δόθηκε να μελετήσω Μαθηματικά σε μεταπτυχιακό επίπεδο, χωρίς τις απαραίτητες προαπαιτούμενες γνώσεις. Το ρίσκο ήταν όλο δικό τους.

Τέλος, θα ήθελα να αναγνωρίσω τη στάση εκείνων που με αβέβαιο το εργασιακό τους μέλλον συνέχιζαν να παράγουν το, αναγκαίο για την λειτουργία της σχολής, έργο. Έδειξαν την ποιότητα της ακαδημαϊκής κοινότητας της Ελλάδας, που μπορεί να υστερεί σε πόρους, άλλα όχι σε ήθος και πίστη για το έργο τους.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία είναι μια παρουσίαση της Μη-Αντιμεταθετικής Θεωρίας Πιθανοτήτων και της επιμέρους έννοιας της Ελεύθερης Ανεξαρτησίας (ή ελευθερίας), μεταξύ μη-αντιμεταθετικών τυχαίων μεταβλητών. Οι Μη-αντιμεταθετικοί Χώροι Πιθανότητας κατασκευάζονται σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο, θεωρώντας άλγεβρες τυχαίων μεταβλητών. Η μη-αντιμεταθετικότητα εμφανίζεται απαλείφοντας οποιαδήποτε αναφορά σε κάποιον χώρο μέτρου στο παρασκήνιο, και ορίζοντας τις εν λόγω άλγεβρες αξιωματικά. Ένα απλό παράδειγμα είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε πίνακες, όπου η μη-αντιμεταθετικότητα είναι εμφανής.

Δείχνεται πως η ελεύθερη ανεξαρτησία είναι η 'σωστή' ανάλογη έννοια της κλασικής ανεξαρτησίας, καθώς παράγει ένα Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Συγκεκριμένα, αν $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από Αυτοσυζυγείς, ισόνομες (κεντραρισμένες) και 'ελεύθερες' τυχαίες μεταβλητές, τότε έχουμε:

$$\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{dist.}} s$$

όπου το s ακολουθεί την Semicircular κατανομή του Wigner,

$$d\mu_s(t) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt$$

που φέρεται στο $[-r, r]$ όπου $\sigma^2 = \frac{r^2}{4}$ η κοινή διασπορά των στοιχείων. Υπό αυτήν την έννοια, η semicircular κατανομή είναι το 'ελεύθερο ανάλογο' της κανονικής κατανομής.

Η εργασία ξεκινά με την παράθεση των βασικών αποτελεσμάτων σε C^*-άλγεβρες, συμπεριλαμβανομένων και των βασικών κατασκευών (π.χ.: Συνεχής Συναρτησιακός Λογισμός), οι οποίες παρέχουν τα θεμέλια για την ανάλυση και κατανόηση των Μη-Αντιμεταθετικών Χώρων Πιθανότητας. Μετά από ένα σύντομο φυσικό έναυσμα από την Κβαντική Μηχανική, δίνονται οι ακριβείς ορισμοί των Μη-Αντιμεταθετικών Χώρων Πιθανότητας μαζί με τις έννοιες των 'κατανομών' των μεταβλητών. Εν συνεχεία, παρουσιάζεται η έννοια της ελεύθερης ανεξαρτησίας, οδηγώντας στην απόδειξη του 'Ελεύθερου Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.' Το τελικό κεφάλαιο, αναζητεί παραδείγματα ελεύθερης ανεξαρτησίας σε μοντέλα τυχαίων πινάκων. Δείχνεται πως οι ανεξάρτητοι Gaussian Τυχαίοι $n \times n$ Πίνακες, είναι ασυμπτωτικά ελεύθεροι στο $n \to +\infty$ όριο.

Abstract

This paper is an exposition of Non-Commutative Probability Theory and the particular notion of Free Independence (or freeness) of non-commutative random variables. Non-Commutative Probability Spaces are constructed in an algebraic framework by considering algebras of random variables. In particular, non-commutativity manifests by suppressing any reference to an ambient measure space, and abstractly defining these algebras. A simple example of such algebras are matrix-valued random variables, where non-commutativity is evident.

It is shown that free independence is the “correct” analogue of classical independence, in that it generates a Central Limit Theorem. That is, if $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a sequence of self-adjoint, identically distributed (centered) “free” random variables, then we have:

$$\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{dist.}} s$$

where s is distributed according to Wigner’s Semicircle Law,

$$d\mu_s(t) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt$$

supported on $[-r, r]$ where $\sigma^2 = \frac{r^2}{4}$, is the common variance of the elements. In this respect, the semicircle law is the “free analogue” of the normal distribution.

The paper starts with a review of basic results on C^*-algebras, including some fundamental constructions (e.g.: Continuous Functional Calculus) which provide foundations for understanding and analysing Non-Commutative Probability Spaces. Following a brief physical motivation from Quantum Mechanics, Non-Commutative Probability Spaces are formally defined, together with the exact notions of “distributions” of the variables. The notion of free independence is subsequently defined and analysed leading to the proof of the “Free Central Limit Theorem.” The final chapter, seeks to find instances of free independence in random matrix models. It is shown that independent Gaussian Random $n \times n$ Matrices are asymptotically free in the $n \to +\infty$ limit.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

2 Άλγεβρες Τελεστών **2**

3 Μη-Αντιμεταθετικοί Χώροι Πιθανότητας **26**
3.1 Η Σημασία της Μη-Αντιμεταθετικότητας στην Κβαντική Φυσική 26
3.2 Ο Φορμαλισμός 32
3.3 Παραδείγματα 35
3.4 Η Αναγκαιότητα του Συναρτησιακού Λογισμού 40
3.5 Κατανομές Μη-Αντιμεταθετικών Τυχαίων Μεταβλητών 45

4 'Ελεύθερες' Τυχαίες Μεταβλητές **51**
4.1 Κλασική Ανεξαρτησία 51
4.2 Ελευθερία: Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες 52
4.3 Αλγεβρική Σύνδεση με το Ελεύθερο Γινόμενο 54

5 'Ελεύθερο' Κεντρικό Οριακό Θεώρημα **57**

6 Η 'Ελευθερία' στους Τυχαίους Πίνακες **72**

Α΄ Προαπαιτούμενα Θεωρήματα **83**

1 Εισαγωγή

Η μη-αντιμεταθετικότητα έχει ιστορικούς δεσμούς με την Κβαντική Μηχανική, στην οποία η αντικατάσταση αντιμεταθετικών μεταβλητών από μη-αντιμεταθετικές πρωτοεμφανίστηκε από τον Heisenberg και την 'Αρχη της Απροσδιοριστίας' και αργότερα θεμελιώθηκε από τον Von-Neumann, έως ότου ο ίδιος εξελίξει την θεωρία του σε αυτό που τώρα καλούμε Von-Neumann άλγεβρες.

Όπως αναφέρουν οι Voiculescu *et al.* (1992, σ. 11) η μετάβαση από την αντιμεταθετική στην μη-αντιμεταθετική κατάσταση είναι η ακόλουθη. Σε έναν χώρο (τοπολογικό, μέτρου, κλπ) προσάπτουμε μια άλγεβρα συναρτήσεων επί του χώρου, η οποία είναι αντιμεταθετική (περιοριζόμενη από την δομή του χώρου). Έτσι, οι διάφορες ιδιότητες του χώρου μεταφράζονται σε ιδιότητες της εν λόγω άλγεβρας. Αντίστροφα, εάν ξεκινήσουμε από μια αφηρημένη, μη-αντιμεταθετική άλγεβρα, τότε οι διάφορες ιδιότητες της άλγεβρας μπορούν να ερμηνευθούν ως ιδιότητες ενός μη-αντιμεταθετικού 'χώρου' στο παρασκήνιο. Δηλαδή, ενώ δεν έχουμε πρόσβαση σε μη-αντιμεταθετικούς 'χώρους,' μπόρουμε έμμεσα να τους μελετήσουμε μέσω αλγεβρών.

Η άσκηση αυτή έχει αποδώσει τις C^*-άλγεβρες ως το μη-αντιμεταθετικό 'ανάλογο' των τοπολογικών χώρων και τις Von-Neumann (W^*) άλγεβρες ως το μη-αντιμεταθετικό 'ανάλογο' των χώρων μέτρου. Σημειώνεται, πως ενώ οι W^*-άλγεβρες είναι υποκλάση των C^*-αλγεβρών, περιέχουν 'αρκετές' προβολές ώστε να είναι δυνατή η αντιστοιχία με χώρους μέτρου, ενώ οι C^*-άλγεβρες, συχνά δεν περιέχουν μη-τετριμμένες προβολές.

Κατά τα παραπάνω δομείται και η μη-αντιμεταθετική θεωρία πιθανοτήτων, κατασκευάζοντας αρχικά τους Μη-Αντιμεταθετικούς Χώρους Πιθανότητας (Κεφάλαιο 3). Κεντρική έννοια σε αυτήν, είναι η 'ελεύθερη ανεξαρτησία' (Κεφάλαιο 4) μεταξύ μη-αντιμεταθετικών τυχαίων μεταβλητών, η οποία σε αντίθεση με την κλασική ανεξαρτησία, είναι καθαρά μη-αντιμεταθετική έννοια. Όμως, κατά κάποιο τρόπο συνδέονται από το ότι οδηγούμαστε να θεωρήσουμε την 'ελεύθερη ανεξαρτησία' ως το μη-αντιμεταθετικό ανάλογο της κλασικής ανεξαρτησίας. Ο λόγος είναι το 'Ελεύθερο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα' (Κεφάλαιο 5), το οποίο πρωτοαποδείχθηκε από τον Voiculescu.

Το αρχικό έναυσμα του Voiculescu για τον ορισμό της ελευθερίας (όπως και το όνομα) ήταν το (ακόμα ανοιχτό) πρόβλημα του ισομορφισμού μεταξύ των W^*-αλγεβρών που παράγονται από ελεύθερες ομάδες με διαφορετικά πλήθη από γεννήτορες. Συνεπώς η αρχική στόχευση της θεωρίας ήταν στην Θεωρία Τελεστών. Αργότερα ανακαλύφθηκαν συνδέσεις με τυχαίους πίνακες (Κεφάλαιο 6), καθώς και η συνδυαστική σκοπιά των εργαλείων της θεωρίας, τα οποία χρησιμοποιούνται εδώ.

2 Άλγεβρες Τελεστών

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η περιγραφή των βασικών ιδιοτήτων των C^*-αλγεβρών. Οι ιδιότητες αυτές θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια ως εργαλεία για την βαθύτερη κατανόηση των μη-αντιμεταθετικών χώρων πιθανότητας, καθώς οι άλγεβρες τελεστών αποτελούν θεμέλιο, όπως ένας χώρος μέτρου στην κλασική θεωρία.

Μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ είναι ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με μια επιπλέον (*συνεχή*) πράξη ('πολλαπλασιασμό'), $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ως προς την οποία είναι κλειστή, $x \cdot y \in \mathcal{A}, \forall x, y \in \mathcal{A}$, $\|\mathbf{e}\| = 1$, αν υπάρχει μονάδα $\mathbf{e} \in \mathcal{A}$ και ισχύει:

$$\|x \cdot y\| \leqslant \|x\|\|y\| \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{A}$$

Η συνέχεια του πολλαπλασιασμού εξασφαλίζεται από την παραπάνω σχέση. Όταν δεν προκαλείται σύγχυση θα γράφουμε το $x \cdot y$ ως xy.

Αφήνεται στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει ότι οι παρακάτω χώροι είναι άλγεβρες Banach:

Παραδείγματα 2.1. *1) Έστω $S \neq \emptyset$ και $\ell^\infty(S)$ ο χώρος των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων επί του S, με τις προφανείς κατά σημείο πράξεις και νόρμα:*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in S\}$$

2) Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} |\ T \text{ γραμμικός και φραγμένος}\}$, με νόρμα:

$$\|T\|_{op} = \sup\{\|T\xi\| :\ \xi \in \mathcal{H},\ \text{με } \|\xi\| \leqslant 1\}$$

και 'πολλαπλασιασμό' την σύνθεση $\circ$.

Από εδώ και στο εξής οι άλγεβρες θα είναι ορισμένες πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών, για λόγους που θα φανούν παρακάτω (βλ. Πρόταση 2.1).

Ορισμός 2.1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια (μιγαδική) άλγεβρα Banach. Μια απεικόνιση $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\mathbf{a} \to \mathbf{a}^*$, θα καλείται* ***ενέλιξη*** *(involution) αν για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $(\mathbf{a}^*)^* := \mathbf{a}^{**} = \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})^* = \mathbf{a}^* + \bar{\lambda}\mathbf{b}^*$
3. $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a}^*$

Για παράδειγμα αν $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ τότε η $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ με $z \to z^* = \bar{z}$ το μιγαδικό συζυγές είναι ενέλιξη. Μια άλγεβρα με ενέλιξη '$*$', ονομάζεται $*$-άλγεβρα ('star άλγεβρα'). Μια $*$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται αυτοσυζυγής αν είναι κλειστή ως προς την ενέλιξη.

Σε μια αυτοσυζυγή $*$-άλγεβρα με μονάδα, διακρίνουμε τα εξής σημαντικά στοιχεία $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$:

1. **Αυτοσυζυγή** (self-adjoint): αν $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$
2. **Φυσιολογικά** (normal): αν $\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a}$
3. **Ορθομοναδιαία** (unitary): αν $\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{e} = \mathbf{a}^*\mathbf{a}$
4. **Προβολές** (projections): αν $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} = \mathbf{a}^*$

Παρατηρούμε πως κάθε στοιχείο $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathbf{a} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγή· θέτοντας $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a}^*}{2}$ και $\mathbf{y} = \frac{i(\mathbf{a}^*-\mathbf{a})}{2}$.

Τώρα έχουμε τα απαραίτητα συστατικά για να ορίσουμε την σημαντικότερη γενική υποκλάση αλγεβρών Banach, για την μελέτη των μη-αντιμεταθετικών χώρων πιθανότητας· τις C^*-άλγεβρες.

C^*-Άλγεβρες

Ορισμός 2.2. *Μια $*$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ καλείται C^*-Άλγεβρα αν η νόρμα της ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη για κάθε $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$:*

$$\|\mathbf{a}^*\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|^2 \qquad (C^*\text{-συνθήκη})$$

Παραδείγματα 2.2.

1. *Αν (X, τ) είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdroff τότε ο $C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής}\}$ είναι μια C^*-Άλγεβρα, ως προς την $\|\cdot\|_\infty$. Πράγματι, έχουμε $\|f^*f\|_\infty = \sup_t\{|f^*(t)f(t)|\} = \sup_t\{|\overline{f(t)}f(t)|\} = \sup_t\{|f(t)|^2\} = \|f\|_\infty^2$.*

2. *Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ με ενέλιξη τον τελεστή που προκύπτει μοναδικά από την σχέση $\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A^*\eta\rangle$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και την $\|\cdot\|_{op}$ είναι μια C^*-Άλγεβρα.*

   Εύκολα δείχνεται πως η $*$ είναι ενέλιξη, οπότε μένει να επιβεβαιωθεί η C^*-συνθήκη. Έστω $\xi \in \mathcal{H}$ με $\|\xi\| \leqslant 1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\|A\xi\|^2 &= \langle A\xi, A\xi\rangle = \langle \xi, A^*A\xi\rangle \\ &= \langle \xi, (AA^*)^*\xi\rangle = \langle AA^*\xi, \xi\rangle = \langle A^*\xi, A^*\xi\rangle = \|A^*\xi\|^2\end{aligned}$$

Αφού το $\xi \leqslant 1$ ήταν τυχόν, παίρνοντας supremum και στις δύο πλευρές, προκύπτει ότι $\|A\|_{op} = \|A^*\|_{op}$. Τώρα έστω πάλι $\|\xi\| \leqslant 1$.

$$\|A\xi\|^2 = \langle A\xi, A\xi\rangle = \langle A^*A\xi, \xi\rangle \leqslant \|A^*A\xi\|\|\xi\| \leqslant \|A^*A\xi\|$$

Παίρνοντας supremum έχουμε $\|A\|_{op}^2 \leqslant \|A^*A\|_{op}$. Τέλος, επειδή ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι άλγεβρα Banach, έχουμε ότι $\|A^*A\|_{op} \leqslant \|A^*\|_{op}\|A\|_{op} = \|A\|_{op}\|A\|_{op} = \|A\|_{op}^2$. Συνεπώς $\|A\|_{op}^2 = \|A^*A\|_{op}$· η C^*-συνθήκη.

Παρακάτω θα ορισθεί το φάσμα ενός στοιχείου μιας άλγεβρας και θα αποδειχθούν διάφορες ιδιότητες και φαινόμενα που είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στο θέμα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

Το φάσμα ενός μιγαδικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$, είναι όλες οι ιδιοτιμές του. Οι μιγαδικοί $\lambda \in \mathbb{C}$, δηλαδή, για τους οποίους $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = \mathbf{0}$, δηλαδή τα $\lambda \in \mathbb{C}$, για τα οποία το $A - \lambda I$ **δεν αντιστρέφεται**. Συνεπώς οι ιδιοτιμές ικανοποιούν $\det(A - \lambda I) = 0$. Παρατηρούμε επίσης, πως το $\det(A - \lambda I)$ είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο και άρα έχει πάντα ρίζες, που σημαίνει ότι το φάσμα ενός μιγαδικού πίνακα είναι μη-κενό.

Σε απόλυτη αντιστοιχία με τα παραπάνω δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{e}$. Το φάσμα $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$ ενός στοιχείου $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, ορίζεται ως:*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{e} - \mathbf{a} \ \text{ δεν αντιστρέφεται στην } \mathcal{A}\} \tag{Φάσμα}$$

Γενικά το φάσμα *εξαρτάται* από την άλγεβρα (και απο την μονάδα) και ισχύει ότι όσο ‘μεγαλώνουμε’ την άλγεβρα το φάσμα ‘μικραίνει’.

Πρόταση 2.1. *Έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ και $\mathbf{a} \in \mathcal{B}$. Τότε $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$, δηλ. το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ αντιστρέφεται στην $\mathcal{B}$ και άρα αντιστρέφεται και στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$ και άρα $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$. □

Όταν δεν προκαλείται σύγχυση ως προς την άλγεβρα, θα γράφουμε απλά $\sigma(.)$. Όπως θα δούμε παρακάτω σε μια C^*-άλγεβρα το φάσμα μένει σταθερό όταν περιοριζόμαστε σε μια C^*-υπάλγεβρα, γεγονός που γίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο όταν περιοριζόμαστε στη C^*-άλγεβρα που παράγει ένα στοιχείο και η μονάδα.

Παρακάτω δίνονται οι τοπολογικές ιδιότητες του φάσματος ενός στοιχείου ως υποσυνόλου του $\mathbb{C}$.

Πρόταση 2.2. *Για κάθε $\lambda \in \sigma(\mathbf{a})$, $|\lambda| \leqslant \|\mathbf{a}\|$. Δηλαδή $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq B(0, \|\mathbf{a}\|)$ και άρα το φάσμα είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με ένα λήμμα:

Λήμμα 2.1. *Αν* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, *με* $\|\mathbf{a}\| < 1$, *τότε το* $\mathbf{e} - \mathbf{a}$ *αντιστρέφεται στην* $\mathcal{A}$, *με* $(\mathbf{e} - \mathbf{a})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}^n$.

Απόδειξη λήμματος. Επειδή $\|\mathbf{a}\| < 1$ και $\|\mathbf{a}^n\| \leqslant \|\mathbf{a}\|^n$, ως Banach άλγεβρα, έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}^n\| < +\infty$ και άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}^n$, συγκλίνει *απολύτως*, άρα και *απλώς*. Έπεται ότι $\mathbf{b} := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}^n \in \mathcal{A}$, και $\mathbf{a}^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{0}$. Έχουμε:

$$\mathbf{e} - \mathbf{a}^{n+1} = (\mathbf{e} - \mathbf{a})(\mathbf{e} + \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 + \cdots + \mathbf{a}^n) = (\mathbf{e} + \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 + \cdots + \mathbf{a}^n)(\mathbf{e} - \mathbf{a})$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το ότι κάθε στοιχειο αντιμετατίθεται με τον εαυτό του και την μονάδα. Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$, έχουμε $\mathbf{e} = (\mathbf{e} - \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{e} - \mathbf{a})$. Άρα, $\mathbf{b} = (\mathbf{e} - \mathbf{a})^{-1}$.

□

Έστω τώρα $\lambda \in \sigma(\mathbf{a})$ με $|\lambda| > \|\mathbf{a}\|$. Συνεπάγεται πως $\|\frac{1}{\lambda}\ \mathbf{a}\| < 1$ και άρα από το παραπάνω λήμμα το $\mathbf{e} - \frac{1}{\lambda}\ \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})$ αντιστρέφεται, άρα και το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ αντιστρέφεται. Συνεπώς $\lambda \notin \sigma(\mathbf{a})$, άτοπο.

□

Θεώρημα 2.1. *Για κάθε* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ *το* $\sigma(\mathbf{a})$ *είναι ένα μη-κενό, συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. 1) Από την Πρόταση 2.2, έχουμε ότι το $\sigma(\mathbf{a})$ είναι φραγμένο. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστό, άρα και συμπαγές. Αρκεί να δείξουμε πως το $\rho(\mathbf{a}) := \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{a})$ είναι ανοιχτό. Γενικά αν $G(\mathcal{A})$ είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων τότε $G(\mathcal{A})$ ανοιχτό. Πράγματι αν $\mathbf{a} \in G(\mathcal{A})$ τότε για ακτίνα $1/\|\mathbf{a}^{-1}\|$, $B(\mathbf{a}, 1/\|\mathbf{a}^{-1}\|) \subseteq G(\mathcal{A})$, αφού αν $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, 1/\|\mathbf{a}^{-1}\|)$ τότε $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < 1/\|\mathbf{a}^{-1}\| \Rightarrow \|\mathbf{b}\| < 1$ και από το παραπάνω λήμμα το $\mathbf{b}$ αντιστρέφεται.

Οπότε αν $\lambda \in \rho(\mathbf{a})$ το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a} \in G(\mathcal{A})$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}, \varepsilon) \subseteq G(\mathcal{A})$. Οπότε για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ με $|\lambda - \mu| < \varepsilon$, $\|\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a} - (\mu\mathbf{e} - \mathbf{a})\| \leqslant \varepsilon$, οπότε $\mu\mathbf{e} - \mathbf{a}$ αντιστρέφεται και άρα $\mu \in \rho(\mathbf{a})$. Συνεπώς, $B(\lambda, \varepsilon) \subseteq \rho(\mathbf{a})$.

2) $\sigma(\mathbf{a}) \neq \varnothing$ (ιδέα): Για αυτό το κομμάτι η απόδειξη χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$f : \rho(\mathbf{a}) \to \mathbb{C} : f(\lambda) = \phi((\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})^{-1})$$

για ϕ στον δυϊκό της $\mathcal{A}$ είναι αναλυτική συνάρτηση. Έπειτα χρησιμοποιείται το Θεώρημα Liouville με την υπόθεση $\sigma(\mathbf{a}) = \varnothing$ για την κατάληξη σε άτοπο.

□

Το ότι το φάσμα είναι πάντα μη-κενό έχει την παρακάτω ενδιαφέρουσα συνέπεια.

Πρόταση 2.3 (Θεώρημα Gelfand-Mazur)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα όπου κάθε μη-μηδενικό στοιχείο αντιστρέφεται (division algebra). Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Έστω $0 \neq \mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Επειδή $\sigma(\mathbf{a}) \neq \emptyset$, υπάρχει $\lambda_{\mathbf{a}} \in \sigma(\mathbf{a})$, ώστε το $\lambda_{\mathbf{a}}\mathbf{e} - \mathbf{a}$ δεν αντιστρέφεται. Συνεπώς από υπόθεση, $\lambda_{\mathbf{a}}\mathbf{e} - \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \lambda_{\mathbf{a}}\mathbf{e}$.

Προκύπτει ότι η απεικόνιση:

$$\mathbf{a} \to \lambda_{\mathbf{a}} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \;\; \mathbf{a} = \lambda_{\mathbf{a}}\mathbf{e}$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Το ότι είναι ισομετρία προκύπτει απ' το:

$$\|\mathbf{a}\| = \|\lambda_{\mathbf{a}}\mathbf{e}\| = |\lambda_{\mathbf{a}}|\|\mathbf{e}\| = |\lambda_{\mathbf{a}}|$$

□

Πρόταση 2.4 (Θ. Φασματικής Απεικόνισης για Πολυώνυμα)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, και p μιγαδικό πολυώνυμο. Τότε: $\sigma\big(p(\mathbf{a})\big) = p\big(\sigma(\mathbf{a})\big) := \big\{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathbf{a})\big\}$*

Απόδειξη. ι) Έστω $\mu \in \sigma\big(p(\mathbf{a})\big)$, άρα το $\mu\mathbf{e} - p(\mathbf{a})$ δεν αντιστρέφεται. Παραγοντοποιούμε το $q(z) = \mu - p(z)$ ως:

$$q(z) = c(\lambda_1 - z)(\lambda_2 - z)\dots(\lambda_n - z)$$

όπου τα λ_i είναι οι ρίζες του $q(z)$. Πηγαίνοντας πίσω στην $\mathcal{A}$ έχουμε:

$$q(\mathbf{a}) = \mu\mathbf{e} - p(\mathbf{a}) = c(\lambda_1\mathbf{e} - \mathbf{a})(\lambda_2\mathbf{e} - \mathbf{a})\dots(\lambda_n\mathbf{e} - \mathbf{a})$$

Συνεπώς, αν το $\mu\mathbf{e} - p(\mathbf{a})$ δεν αντιστρέφεται, τότε θα υπάρχει λ_i τέτοιο ώστε το $\lambda_i\mathbf{e} - \mathbf{a}$ δεν αντιστρέφεται. Άρα $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{a})$. Τέλος, $\mu - p(\lambda_i) = q(\lambda_i) = 0$, αφού λ_i ρίζα του του $q(z)$. Συνεπώς, $\mu = p(\lambda_i)$ και άρα $\sigma\big(p(\mathbf{a})\big) \subseteq p\big(\sigma(\mathbf{a})\big)$.

ιι) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε

$$p(\lambda)\mathbf{e} - p(\mathbf{a}) = (\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})q(\mathbf{a}) = q(\mathbf{a})(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})$$

επειδή το $\mathbf{a}$ αντιμετατίθεται με τον εαυτό του και την μονάδα $\mathbf{e}$. Συνεπώς αν η αριστερή πλευρά της παραπάνω ισότητας αντιστρέφεται τότε και το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ θα αντιστρέφεται, δηλαδή $p(\lambda) \notin \sigma\big(p(\mathbf{a})\big)$ συνεπάγεται πως $\lambda \notin \sigma(\mathbf{a})$. Άρα $p\big(\sigma(\mathbf{a})\big) \subseteq \sigma\big(p(\mathbf{a})\big)$.

□

Πρόταση 2.5. *Σε μια C^*- Άλγεβρα ισχύει ότι αν* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, **αυτοσυζυγές** $(\mathbf{a} = \mathbf{a}^*)$ *τότε* $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές. Θα δείξουμε ότι, αν $\lambda = \mu + i\nu$, με $\nu \neq 0$, το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ αντιστρέφεται στην $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε πως αρκεί να δείξουμε ότι, κάθε στοιχείο της μορφής $i\mathbf{e} + \mathbf{x}$, με $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ αντιστρέφεται.

Πράγματι, αν $\nu \neq 0$ τότε:

$$(\mu + i\nu)\mathbf{e} - \mathbf{a} = \mu\mathbf{e} + i\nu\mathbf{e} - a = i\nu\mathbf{e} + \mu\mathbf{e} - a = \nu\Big(i\mathbf{e} + \frac{\mu\mathbf{e} - \mathbf{a}}{\nu}\Big)$$

Θέτουμε $\mathbf{x} = \frac{\mu\mathbf{e} - \mathbf{a}}{\nu}$, και παρατηρούμε πως, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, επειδή $\mathbf{a}$ αυτοσυζυγές, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι το $i\mathbf{e} + \mathbf{x}$ δεν αντιστρέφεται. Επειδή $i\mathbf{e} + \mathbf{x} = -(-i\mathbf{e} - \mathbf{x})$ ούτε το $-i\mathbf{e} - \mathbf{x}$ αντιστρέφεται και άρα $-i \in \sigma(\mathbf{x})$. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης για Πολυώνυμα (2.4), για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\gamma + 1 = \gamma + i(-i) \in \sigma(\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x})$$

Όμως το φασμα είναι φραγμένο απ' την νόρμα του στοιχείου (βλ. Λήμμα 2.1) και άρα $|\gamma + 1| \leqslant \|\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x}\|$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |\gamma + 1|^2 &\leqslant \|\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x}\|^2 & \\ &= \|(\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x})^*(\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x})\| & (C^*\text{-συνθ.}) \\ &= \|(\gamma\mathbf{e} - i\mathbf{x})(\gamma\mathbf{e} + i\mathbf{x})\| & \\ &= \|\gamma^2\mathbf{e} + \mathbf{x}^2\| \leqslant |\gamma^2| + \|\mathbf{x}^2\| & (\text{τριγωνική}) \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε $\gamma^2 + 2\gamma + 1 \leqslant \gamma^2 + \|\mathbf{x}^2\| \Rightarrow 2\gamma + 1 \leqslant \|\mathbf{x}^2\|$, για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η νόρμα είναι πραγματικός αριθμός.

□

Το Θεωρημα Gelfand–Naimark

Αν $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα, τότε το $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ καλείται **αριστερό ιδεώδες**, αν είναι γραμμικός υπόχωρος και $\mathbf{x} \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ για κάθε $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.[1] Από αυτά, τα **μεγιστικά ιδεώδη** είναι τα γνήσια ($\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{A}$) που δεν περιέχονται σε κανένα άλλο γνήσιο ιδεώδες. Από το Λήμμα του Zorn έχουμε ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες.

[1] Αντίστοιχα ορίζονται και τα δεξιά και δίπλευρα ιδεώδη.

Πρόταση 2.6. *Τα μεγιστικά ιδεώδη είναι κλειστά.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ γνήσιο ιδεώδες. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\overline{\mathcal{I}}$ είναι γνήσιο ιδεώδες. Το ότι είναι ιδεώδες προκύπτει από το ότι οι αλγεβρικές πράξεις είναι συνεχείς. Επίσης έχουμε ότι $\mathbf{e} \notin \mathcal{I}$ αλλιώς $\mathcal{I} = \mathcal{A}$ που δεν γίνεται γιατί το $\mathcal{I}$ είναι γνήσιο. Συνεπώς το $\mathcal{I}$ δεν περιέχει αντιστρέψιμα στοιχεία. Επειδή το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathcal{A}$, $G(\mathcal{A})$, είναι ανοιχτό και $\mathbf{e} \in G(\mathcal{A})$, θα υπάρχει ανοιχτή περιοχή της μονάδας $V_{\mathbf{e}}$, που περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο $G(\mathcal{A})$. Έχουμε $\mathcal{I} \bigcap V_{\mathbf{e}} = \varnothing$ και άρα $\mathcal{I} \subseteq V_{\mathbf{e}}^{\complement}$. Επειδή το $V_{\mathbf{e}}^{\complement}$ είναι κλειστό έχουμε $\overline{\mathcal{I}} \subseteq V_{\mathbf{e}}^{\complement}$. Συνεπώς το $\overline{\mathcal{I}}$ είναι και γνήσιο.

Τέλος, αν $\mathcal{I}$ μεγιστικό ιδεώδες που δεν είναι κλειστό τότε το $\overline{\mathcal{I}}$ είναι γνήσιο ιδεώδες που το περιέχει αντικρούοντας την υπόθεση ότι το $\mathcal{I}$ είναι μεγιστικό.

□

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να διατηρούμε την δομή μιας αρχικής άλγεβρας $\mathcal{A}$ όταν παίρνουμε το πηλίκο της $\mathcal{A}/M$ ως προς ένα μεγιστικό ιδεώδες M. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A}$ Banach άλγεβρα, και $\mathcal{I}$ κλειστό τότε η $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ είναι επίσης Banach άλγεβρα. Επίσης αν $\mathcal{A}$ C^*-άλγεβρα, και $\mathcal{I}$ κλειστό ιδεώδες της, τότε το $\mathcal{I}$ είναι αυτοσυζυγές άρα και C^*-υπάλγεβρα, και η $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ είναι C^*-άλγεβρα.

Πρόταση 2.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια αντιμεταθετική Banach άλγεβρα με μονάδα και M μεγιστικό ιδεώδες. Τότε η $\mathcal{A}/M$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}/M$ είναι division algebra, δηλαδή, οτι κάθε μη-μηδενικό στοιχείο αντιστρέφεται. Παρατηρούμε πως η $\mathcal{A}/M$ δεν περιέχει γνήσια ιδεώδη. Πράγματι, αν $I \subsetneq \mathcal{A}/M$ γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε το $N = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} : [\mathbf{a}] \in I\}$ θα ήταν γνήσιο ιδεώδες αφού για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ και $\mathbf{a} \in N$, $[\mathbf{xa}] = [\mathbf{x}][\mathbf{a}] \in I$ οπότε $\mathbf{xa} \in N$ και θα υπάρχει $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ ώστε $[\mathbf{y}] \notin I \Rightarrow \mathbf{y} \notin N$. Επίσης, θα είχαμε και $M \subsetneq N$. Πράγματι, επειδή το I είναι μη-τετριμμένο θα υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ με $[\mathbf{x}] \neq [\mathbf{0}]$ και $[\mathbf{x}] \in I$, δηλαδή, $\mathbf{x} + M \in I$. Επειδή $[\mathbf{x}] \neq [\mathbf{0}]$ έχουμε $\mathbf{x} \notin M$ όμως $\mathbf{x} + M \in I$ οπότε $\mathbf{x} \in N$. Άρα $M \subsetneq N$ το οποίο είναι άτοπο αφού το M είναι μεγιστικό.

Παίρνουμε ένα $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Τότε το $[\mathbf{a}](\mathcal{A}/M)$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}/M$ και από τα παραπάνω προκύπτει ότι $[\mathbf{a}](\mathcal{A}/M) = \mathcal{A}/M$. Συνεπώς, επειδή $[\mathbf{e}] \in \mathcal{A}/M$ και $[\mathbf{a}](\mathcal{A}/M)$ ιδεώδες, θα υπάρχει $[\mathbf{b}] \in \mathcal{A}/M$ με $[\mathbf{b}][\mathbf{a}] = [\mathbf{e}]$, δηλαδή, το $[\mathbf{a}]$ αντιστρέφεται.

□

Παρακάτω θα γίνει η απαραίτητη προετοιμασία για την παρουσίαση του θεωρήματος Gelfand–Naimark. Έστω:

$$\mathbf{M} := \Big\{ M \subseteq \mathcal{A} \mid M \text{ μεγιστικό ιδεώδες} \Big\}$$

και
$$\Phi := \Big\{\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \ \phi \neq \mathbf{0} \ \text{ ομομορφισμός}\Big\}$$
Το Φ ονομάζεται *φορέας* (ή και φάσμα) της $\mathcal{A}$ και τα στοιχεία του *χαρακτήρες*. Το M ονομάζεται *χώρος των μεγιστικών ιδεωδών* της $\mathcal{A}$. Η παρακάτω πρόταση μας δίνει την σύνδεση των δύο αυτών συνόλων.

Πρόταση 2.8. *Υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση από το* M *στο* Φ.

Απόδειξη. α) Έστω $M \in \mathrm{M}$. Από την Πρόταση 2.7 έχουμε ότι η $\mathcal{A}/M$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$. Θέτοντας $\phi_M := [.] \circ \tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ με
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "{[.]}"] \arrow[dr, "\phi_M"'] & \mathcal{A}/M \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$
ταυτίζουμε το M με κάποιο $\phi_M \in \Phi$. Επίσης, έχουμε ότι $\phi_M^{-1}(0) = M$ αφού $\mathbf{x} \in M \iff [\mathbf{x}] = [\mathbf{0}]$ και άρα $\phi_M(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} \in M$.

β) Έστω τώρα $\phi \in \Phi$. Θα δείξουμε ότι ο $\phi^{-1}(0)$ είναι μεγιστικό ιδεώδες. Αν $\psi \in \Phi$ με $\phi^{-1}(0) \subseteq \psi^{-1}(0)$, τότε $\mathbf{a} - \phi(\mathbf{a})\mathbf{e} \in \phi^{-1}(0) \subseteq \psi^{-1}(0)$, για κάθε $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, οπότε και $\psi(\mathbf{a} - \phi(\mathbf{a})\mathbf{e}) = 0 \Rightarrow \psi(\mathbf{a}) = \phi(\mathbf{a})$ και συνεπώς $\psi = \phi$.

Υποθέτουμε ότι το $\phi^{-1}(0)$ δεν είναι μεγιστικό και άρα θα περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες M. Ταυτίζοντάς το M με τον αντίστοιχο ομομορφισμό ϕ_M, έχουμε $\phi^{-1}(0) \subsetneq \phi_M^{-1}(0) = M$ και από τα παραπάνω $\phi_M = \phi$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\phi^{-1}(0) \subsetneq M$.

Τέλος, η απεικόνιση που αναζητούμε είναι η
$$\Phi \ni \phi \to \phi^{-1}(0) \in M$$
η οποία είναι επί από το α) και 1-1 από το ότι $\phi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0) \Rightarrow \phi = \psi$ (βλ. β).

$\square$

Ορισμός 2.4. *Έστω $\mathcal{A}$ Banach άλγεβρα με μονάδα. Για κάθε $\mathrm{a} \in \mathcal{A}$ ορίζουμε τον* **μετασχηματισμό Gelfand** $\widehat{\mathrm{a}}$ *του στοιχείου* a *ως:*
$$\widehat{\mathbf{a}} : \Phi \to \mathbb{C}, \ \ \widehat{\mathbf{a}}(\phi) = \phi(\mathbf{a})$$
Η απεικόνιση $\mathrm{a} \to \widehat{\mathrm{a}}$ *καλείται* **απεικόνιση Gelfand**. *Επίσης εφοδιάζουμε τον* Φ, *με την* **τοπολογία Gelfand**, *που ορίζεται ως η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει τις συναρτήσεις* $\widehat{\mathrm{a}} : \Phi \to \mathbb{C}$ *συνεχείς για κάθε* $\mathrm{a} \in \mathcal{A}$. *Δηλαδή, μια βάση της είναι σύνολα της μορφής*
$$V^G(\phi, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \varepsilon) = \{\psi \in \Phi : |\widehat{\mathbf{a}}_i(\phi) - \widehat{\mathbf{a}}_i(\psi)| < \varepsilon, \ \ \forall i \leqslant n\}$$

Εύκολα φαίνεται πως η απεικόνιση Gelfand $\mathcal{A} \ni \mathbf{a} \to \widehat{\mathbf{a}} \in C(\Phi)$ είναι ομομορφισμός ως προς την δομή της άλγεβρας Banach. Πράγματι, επειδή τα στοιχεία του Φ είναι ομομορφισμοί, έχουμε για κάθε $\phi \in \Phi$:

$$\widehat{\mathbf{ab}}(\phi) = \phi(\mathbf{ab}) = \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}) = \widehat{\mathbf{a}}(\phi)\widehat{\mathbf{b}}(\phi)$$

Το Θεώρημα Gelfand–Naimark επεκτείνει αυτήν την παρατήρηση και λέει ότι μια αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά $*$-ισόμορφη με την C^*-άλγεβρα $C(\Phi)$, όπου Φ συμπαγής.

Πρόταση 2.9. *Έστω $\mathcal{A}$ αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα και Φ ο φορέας της. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
$i)$ $\sigma(\mathbf{a}) = \{\widehat{\mathbf{a}}(\phi) : \phi \in \Phi\}$
$ii)$ $|\widehat{\mathbf{a}}(\phi)| \leqslant \|\mathbf{a}\|$ και άρα $\|\phi\| \leqslant 1$.
$iii)$ Αν $\phi_1 \neq \phi_2$ τότε υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ με $\widehat{\mathbf{a}}(\phi_1) \neq \widehat{\mathbf{a}}(\phi_2)$
$iv)$ Ο Φ με την τοπολογία Gelfand είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.

Απόδειξη. $i)$ $\underline{\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \{\widehat{\mathbf{a}}(\phi) : \phi \in \Phi\}}$: Έστω $\lambda \in \sigma(\mathbf{a})$. Τότε το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ δεν αντιστρέφεται και συνεπώς το $(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})\mathcal{A}$ είναι ένα γνήσιο ιδεώδες και άρα θα περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες M. Από την παραπάνω πρόταση (2.8), θα υπάρχει κάποιο $\phi_M \in \Phi$ με $M = \phi_M^{-1}(0)$. Συνεπώς, $\phi_M(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \lambda = \phi_M(\mathbf{a})$, από όπου έχουμε $\lambda = \widehat{\mathbf{a}}(\phi_M)$.

$\underline{\{\widehat{\mathbf{a}}(\phi) : \phi \in \Phi\} \subseteq \sigma(\mathbf{a})}$: Έστω $\lambda \notin \sigma(\mathbf{a})$. Τότε το $\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}$ αντιστρέφεται και για κάθε $\phi \in \Phi$, το $\phi(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a})$ αντιστρέφεται στο $\mathbb{C}$ αφού ο ϕ είναι ομομορφισμός. Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι division algebra έχουμε ότι για κάθε $\phi \in \Phi$, $\phi(\lambda\mathbf{e} - \mathbf{a}) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq \phi(\mathbf{a})$ και άρα $\lambda \neq \widehat{\mathbf{a}}(\phi)$ για κάθε $\phi \in \Phi$. Συνεπώς, $\lambda \notin \{\widehat{\mathbf{a}}(\phi) : \phi \in \Phi\}$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

$ii)$ Από το (i) και την Πρόταση 2.2, έχουμε $|\widehat{\mathbf{a}}(\phi)| \leqslant \|\mathbf{a}\|$ για κάθε $\phi \in \Phi$. Για σταθεροποιημένο $\phi \in \Phi$, έχουμε $|\phi(\mathbf{a})| = |\widehat{\mathbf{a}}(\phi)| \leqslant \|\mathbf{a}\|$ οπότε $\|\phi\| \leqslant 1$ (διαιρώντας με την νόρμα του $\mathbf{a}$).

$iii)$ Αν $\phi_1 \neq \phi_2$ θα υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ με $\phi_1(\mathbf{a}) \neq \phi_2(\mathbf{a})$. Δηλαδή, $\widehat{\mathbf{a}}(\phi_1) \neq \widehat{\mathbf{a}}(\phi_2)$.

$iv)$ <u>Hausdorff</u>: Έστω $\phi_1 \neq \phi_2$. Από το (ii) θα υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ με $\phi_1(\mathbf{a}) \neq \phi_2(\mathbf{a})$ και άρα $\delta := |\phi_1(\mathbf{a}) - \phi_2(\mathbf{a})| > 0$. Θέτοντας $\varepsilon := \frac{1}{2}\delta$ και παίρνοντας τις υποβασικές περιοχές των ϕ_1 και ϕ_2 αντιστοίχως:

$$V_{\phi_1}^G = \{\phi \in \Phi : |\phi_1(\mathbf{a}) - \phi(\mathbf{a})| < \varepsilon\} \quad \text{και} \quad V_{\phi_2}^G = \{\phi \in \Phi : |\phi_2(\mathbf{a}) - \phi(\mathbf{a})| < \varepsilon\}$$

έχουμε $V_{\phi_1}^G \bigcap V_{\phi_2}^G = \varnothing$. Άρα η τοπολογία Gelfand είναι Hausdorff.

Συμπάγεια: Από το (ii) έχουμε ότι $\|\phi\| \leqslant 1$, για κάθε $\phi \in \Phi$. Συνεπώς, $\Phi \subseteq B_{\mathcal{A}^*}(\mathbf{0}, 1)$. Επιπλέον, η τοπολογία Gelfand ταυτίζεται με την ασθενή-$*$ τοπολογία στον Φ, αφού κατασκευάζονται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο και κάνουν τις ίδιες συναρτήσεις συνεχείς (στον Φ). Από το Θεώρημα Alaoglou (Α΄.5) έχουμε ότι η $B_{\mathcal{A}^*}(\mathbf{0}, 1)$ είναι ασθενώς-$*$ συμπαγής και συνεπώς αρκεί να δείξουμε πως ο Φ είναι ασθενώς-$*$ κλειστό υποσύνολο της $B_{\mathcal{A}^*}(\mathbf{0}, 1)$.

Αυτό προκύπτει παρατηρώντας πως ένα $f \in B_{\mathcal{A}^*}(\mathbf{0}, 1)$, ανήκει στον Φ αν και μόνο αν ισχύει $f(\mathbf{ab}) = f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) \Rightarrow f(\mathbf{ab}) - f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = 0$. Δηλαδή, αν $f \in \bigcap_{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}} \operatorname{Ker}\left\{h : g \xrightarrow{h} g(\mathbf{ab}) - g(\mathbf{a})g(\mathbf{b})\right\}$. Συνεπώς,

$$\Phi = \bigcap_{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}} \operatorname{Ker}\left\{h : g \xrightarrow{h} g(\mathbf{ab}) - g(\mathbf{a})g(\mathbf{b})\right\}$$

το οποίο είναι κλειστό ως τομή κλειστών και από την συνέχεια των αλγεβρικών πράξεων.

□

Πρόταση 2.10. *Αν $\mathcal{A}$ η Banach άλγεβρα που παράγεται από ένα στοιχείο* $\mathbf{a}$ *και την μονάδα, τότε ο φορέας της Φ είναι* **ομοιομορφικός** *με το φάσμα του* $\mathbf{a}$, $\sigma(\mathbf{a})$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το μετασχηματισμός Gelfand $\widehat{\mathbf{a}} : \Phi \to \mathbb{C}$ είναι ομοιομορφισμός. Από την Πρόταση 2.9 (iii), έχουμε ότι $\widehat{\mathbf{a}}[\Phi] = \sigma(\mathbf{a})$ οπότε ο $\widehat{\mathbf{a}}$ είναι **επί**. Από τον ορισμό της τοπολογίας Gelfand είναι και **συνεχής**. Η $\mathcal{A}$ ορίζεται ως:[2]

$$\mathcal{A} = \operatorname{cls}\{p(\mathbf{a}) : p \ \text{ μιγαδικό πολυώνυμο}\}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{a}}(\phi_1) = \widehat{\mathbf{a}}(\phi_1) &\Rightarrow \phi_1(\mathbf{a}) = \phi_2(\mathbf{a}) \\
&\xRightarrow{\phi_i \text{ ομομορφ.}} \phi_1(p(\mathbf{a})) = \phi_2(p(\mathbf{a})), \quad \text{για κάθε πολυώνυμο } p \\
&\xRightarrow[\text{ορισμός } \mathcal{A}]{\phi_i \text{ συνεχείς}} \phi_1(\mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}), \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathcal{A} \\
&\Rightarrow \phi_1 = \phi_2
\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο $\widehat{\mathbf{a}}$ είναι και **1-1**. Τέλος, παίρνοντας ένα υποβασικό στον Φ, είναι προφανές ότι ο $\widehat{\mathbf{a}}$ είναι και ανοιχτή απεικόνιση, οπότε και ο αντίστροφος είναι συνεχής και άρα θα είναι και ομοιομορφισμός.

□

[2]Το σύμβολο cls σημαίνει κλειστή γραμμική θήκη (closed linear span).

Πρόταση 2.11. *Άν $\mathcal{A}$ η C^*-άλγεβρα που παράγεται από ένα στοιχείο* $\mathbf{a}$ *και την μονάδα, τότε ο φορέας της* Φ *είναι* **ομοιομορφικός** *με το φάσμα του* $\mathbf{a}$, $\sigma(\mathbf{a})$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι αντίστοιχη της περίπτωσης όπου η $\mathcal{A}$ είναι απλώς Banach άλγεβρα (βλ. Πρόταση 2.10), δηλαδή ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ομοιομορφισμός. Όλα τα βήματα της απόδειξης είναι ίδια εκτός από το ότι είναι 1-1. Εδώ θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και την **ενέλιξη**. Συγκεκριμένα, η $\mathcal{A}$ έχει την μορφή

$$\mathcal{A} = \mathrm{cls}\big\{p(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) : p \text{ μιγαδικό πολυώνυμο δύο μεταβλητών}\big\}$$

Έστω $\widehat{\mathbf{a}}(\phi_1) = \widehat{\mathbf{a}}(\phi_2)$ και θα δείξουμε πως και $\widehat{\mathbf{a}^*}(\phi_1) = \widehat{\mathbf{a}^*}(\phi_2)$, οπότε θα έχουμε πως ο $\widehat{\mathbf{a}}$ είναι 1-1. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{a}^*}(\phi_1) &= \phi_1(\mathbf{a}^*) = (\phi_1(\mathbf{a}))^* \\ &= (\widehat{\mathbf{a}}(\phi_1))^* = (\widehat{\mathbf{a}}(\phi_2))^* \\ &= \widehat{\mathbf{a}^*}(\phi_2)\end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε πως από την μορφή μιας C^*-άλγεβρας που παράγεται από ένα στοιχείο a και την μονάδα, ως

$$\mathcal{A} = \mathrm{cls}\big\{p(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) : p \text{ μιγαδικό πολυώνυμο δύο μεταβλητών}\big\}$$

η $\mathcal{A}$ είναι αντιμεταθετική αν και μόνο αν το a αντιμετατίθεται με το $\mathbf{a}^*$. Δηλαδή, αν και μόνο αν το a είναι **φυσιολογικό** (aa* = a*a).

Λήμμα 2.2. *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια* C^**-άλγεβρα και* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ *φυσιολογικό. Αν* $r(\mathbf{a}) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{a})\}$ *(φασματική ακτίνα). Τότε* $\|\mathbf{a}\| = r(\mathbf{a})$.

Ιδέα Απόδειξης. Η απόδειξη χρησιμοποιεί τον τύπο

$$r(\mathbf{a}) = \lim_n \|\mathbf{a}^n\|^{1/n}$$

την C^* συνθήκη και τους ορισμούς των αυτοσυζυγών και φυσιολογικών στοιχείων.

□

Θεώρημα 2.2 (Gelfand–Naimark για αντιμεταθετικές C^*-άλγεβρες με μονάδα)**.** *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια* **αντιμεταθετική** C^**-άλγεβρα με μονάδα. Τότε η* $\mathcal{A}$ *είναι ισομετρικά,* $*$*-ισόμορφη με την άλγεβρα* $C(\Phi)$ *των συνεχών συναρτήσεων επί ενός συμπαγούς Hausdorff χώρου* Φ.

Απόδειξη. Έπειδη η $\mathcal{A}$ είναι αντιμεταθετική κάθε στοιχείο της είναι φυσιολογικό, οπότε $\|\mathbf{a}\| = \|\widehat{\mathbf{a}}\|$. Πράγματι, από το Λήμμα 2.2 έχουμε

$$\|\mathbf{a}\| = r(\mathbf{a}) = \sup \sigma(\mathbf{a}) = \sup \widehat{\mathbf{a}}[\Phi] = \|\widehat{\mathbf{a}}\|$$

Συνεπώς η απεικόνιση Gelfand είναι ισομετρία. Από αυτό έχουμε πως το $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq C(\Phi)$, είναι ένα πλήρες υποσύνολο, άρα και κλειστό. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Stone–Weierstrass (Α΄.4), για να πάρουμε το $\widehat{\mathcal{A}} = C(\Phi)$.

Έχουμε ότι Φ συμπαγής και ότι το $\widehat{\mathcal{A}}$ διαχωρίζει τον Φ (Πρόταση 2.9, iv και iii). Επίσης, $\mathbf{1} = \widehat{\mathbf{e}} \in \widehat{\mathcal{A}}$ και $\widehat{\mathbf{a}} \in \widehat{\mathcal{A}} \Rightarrow \overline{\widehat{\mathbf{a}}} = \widehat{\mathbf{a}^*} \in \widehat{\mathcal{A}}$. Συνεπώς πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Stone–Weierstrass.

□

Το αντίστοιχο θεώρημα για αντιμεταθετικές C^*-άλγεβρες χωρίς μονάδα, ταυτίζει μια αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα όχι με κάποιον $C(\Phi)$ με Φ συμπαγή, αλλά με κάποιον $C_0(\Phi)$ με Φ τοπικά συμπαγη.

Λήμμα 2.3. *Έστω X και Y τοπολογικοί χώροι και $h : X \to Y$ ομοιομορφισμός. Τότε οι $C(X)$ και $C(Y)$ είναι ισόμορφοι.*

Ιδέα Απόδειξης. Εύκολα δείχνεται πως η απεικόνιση $T : C(X) \to C(Y)$ που ορίζεται κατα σημείο από το $T_f(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)$ είναι ισομορφισμός αλγεβρών.

□

Θεώρημα 2.3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα και $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, φυσιολογικό ($\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a}$). Τότε η C^*-υπάλγεβρα $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$, που παράγεται από το $\mathbf{a}$ και την μονάδα, είναι ισομετρικά, $*$-ισόμορφη με την άλγεβρα $C(\sigma(\mathbf{a}))$ των συνεχών συναρτήσεων επί του φάσματος του $\mathbf{a}$.*

Απόδειξη. Επειδή το $\mathbf{a}$ είναι φυσιολογικό, η $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$ είναι αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα, οπότε εφαρμόζονται τα αποτελέσματα της παραπάνω ενότητας. Αρκεί να δείξουμε πως υπάρχει ένας ισομετρικός $*$-ισομορφισμός από το $C(\Phi)$ στο $C(\sigma(\mathbf{a}))$ (βλ. παρακάτω διάγραμμα).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} \arrow[r, "\mathbf{x} \to \hat{\mathbf{x}}"] \arrow[dr, "\mathbf{x} \to f_{\mathbf{x}}"'] & C(\Phi) \arrow[d, "\hat{\mathbf{x}} \to f_{\mathbf{x}}"] \\
& C(\sigma(\mathbf{a}))
\end{tikzcd}$$

Από την Πρόταση 2.11 έχουμε ότι τα Φ και $\sigma(\mathbf{a})$ είναι ομοιομορφικά, οπότε από το Λήμμα 2.3 έχουμε οι $C(\Phi)$ και $C(\sigma(\mathbf{a}))$ είναι ισόμορφοι.

□

Θεώρημα 2.4 (Φασματικής Απεικόνισης). *Έστω $\mathcal{A}$ C^*-άλγεβρα και $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, φυσιολογικό. Τότε: $\sigma\big(f(\mathbf{a})\big) = f\big(\sigma(\mathbf{a})\big) := \big\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathbf{a})\big\}$, για κάθε $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχή.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Φασματικής απεικόνισης για πολυώνυμα και τον συναρτησιακό λογισμό.

□

Von Neumann (W^*) Άλγεβρες

Οι Von Neumann άλγεβρες είναι άλγεβρες γραμμικών και φραγμένων τελεστών επί χώρων Hilbert και υποκλάση των C^*-αλγεβρών. Συγκεκριμένα, επιπλέον από το ότι είναι κλειστές στην τοπολογία της νόρμας, είναι κλειστές και ως προς άλλες σημαντικές τοπολογίες.

Όπως επισημαίνει ο Averson, δεν είναι ιδιαίτερα παραγωγικό να βλέπουμε τις W^*-άλγεβρες, απλά σαν C^*-άλγεβρες: 'Ενώ είναι σύνηθες να βλέπουμε της C^*-άλγεβρες ως μη-αντιμεταθετικούς *τοπολογικούς* χώρους, θεωρούμε τις W^*-άλγεβρες ως μη-αντιμεταθετικούς χώρους *μέτρου*' (Averson, 1976 σ. 221). Αυτή η αντίληψη προκύπτει απ' το ότι όλες οι **αντιμεταθετικές** C^*-άλγεβρες είναι ισόμορφες με τον $C_0(X)$, για κάποιον (X, τ) τοπικά συμπαγή, ενώ οι **αντιμεταθετικές** W^*-άλγεβρες είναι ισόμορφες με τον $L^\infty(Y, \nu)$, για κάποιον (Y, ν) σ-πεπερασμένου μέτρου. Η παραπάνω αντίληψη γίνεται εμφανής εγκαταλείποντας την υπόθεση της αντιμεταθετικότητας.

Ορισμός 2.5. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ οι φραγμένοι τελεστές επί του $\mathcal{H}$. Ορίζουμε τρεις τοπολογίες στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, στις οποίες η σύγκλιση ενός δικτύου $(T_i)_{i\in I}$, σε ένα στοιχείο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ χαρακτηρίζεται ως εξής:*

1. *Στην* **Norm Topology** *στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ως:*

$$T_i \xrightarrow{\|\cdot\|_{op}} T \quad \Longleftrightarrow \quad \|T_i\|_{op} \to \|T\|_{op}$$

2. *Στην* **Strong Operator Topology** *(SOT) στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ως:*

$$T_i \xrightarrow{SOT} T \quad \Longleftrightarrow \quad T_i\xi \to T\xi, \ \ \forall \xi \in \mathcal{H}$$

3. *Στην* **Weak Operator Topology** *(WOT) στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ως:*

$$T_i \xrightarrow{WOT} T \quad \Longleftrightarrow \quad \langle T_i\xi, \eta\rangle \to \langle T\xi, \eta\rangle, \ \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Παρατήρηση 2.1. *Οι βασικές περιοχές των παραπάνω τοπολογιών, για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ δίνονται από:*

$$V^{SOT}(T, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon) = \left\{ S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \; \|(S-T)\xi_i\| < \varepsilon, \; \forall i \leqslant n \right\}$$

$$V^{WOT}(T, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_i, \ldots, \eta_m, \varepsilon) = \left\{ S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \; |\langle (T-S)\xi_i, \eta_j \rangle| < \varepsilon, \; \forall i \leqslant n, \; j \leqslant m \right\}$$

Πρόταση 2.12. *Αν $\tau_1 \prec \tau_2$ σημαίνει ότι η τοπολογία τ_1 είναι αθενέστερη της τ_2, τότε έχουμε:*

WOT ≺ SOT ≺ Norm

και οι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι στην απειροδιάστατη περίπτωση.

Απόδειξη. ι) WOT ≺ SOT: Έστω $V \in \mathrm{WOT}$. Για $F := \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus V$ συνεπάγεται ότι, $F = \overline{F}^{\mathrm{WOT}}$.[3] Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $F = \overline{F}^{\mathrm{SOT}}$, δηλαδή ότι αν $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq F$ ένα συγκλίνον δίκτυο, με $T_\lambda \xrightarrow{SOT} T_0$, τότε $T_0 \in F$. Έχουμε:

$$T_\lambda \xrightarrow{SOT} T_0 \iff \|(T_\lambda - T_0)\xi\| \to 0, \;\; \forall \xi \in \mathcal{H}$$

Επειδή $\|\xi\| = \sup_{\eta \neq 0} \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\eta\|}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$, έχουμε:[4]

$$\frac{|\langle (T_\lambda - T_0)\xi, \eta \rangle|}{\|\eta\|} \leqslant \sup_{\eta \neq 0} \frac{|\langle (T_\lambda - T_0)\xi, \eta \rangle|}{\|\eta\|} = \|(T_\lambda - T_0)\xi\| \to 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $\langle (T_\lambda - T_0)\xi, \eta \rangle \to 0$ και άρα $T_\lambda \xrightarrow{WOT} T_0$. Συνεπώς από υπόθεση έχουμε ότι $T_0 \in F$.

ιι) SOT ≺ Norm: Αντίστοιχα παίρνουμε ένα F κλειστό στην SOT και θα δείξουμε ότι είναι κλειστό στην $\|\cdot\|_{op}$-τοπολογία. Έστω ένα δίκτυο $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq F$, με $T_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|_{op}} T_0$. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς για κάθε $\eta \in \mathcal{H}$ έχουμε:

$$\left\| (T_\lambda - T_0) \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\| \leqslant \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \|(T_\lambda - T_0)\xi\| \to 0$$

Συνεπώς για κάθε $\eta \in \mathcal{H}$, $\|(T_\lambda - T_0)\eta\| \to 0$, και άρα $T_\lambda \xrightarrow{SOT} T_0 \in F$.

□

[3] Η κλειστότητα (κλειστή θήκη) του F ως προς την WOT.

[4] Το αποτέλεσμα $\|\xi\| = \sup_{\eta \neq 0} \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\eta\|}$ επαληθεύεται εύκολα με την χρήση της ανισότητας Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky, για την μια κατεύθυνση, και θέτοντας $\eta = \xi$ για την άλλη.

Με κάθε μια από τις παραπάνω τοπολογίες ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, δηλαδή η πρόσθεση $+ : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και ο *βαθμωτός* πολλαπλασιασμός $\cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι συνεχείς. Ο πολλαπλασιασμός $\cdot : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $(T, S) \to TS$ **δεν** είναι συνεχής ως πρός τις SOT και WOT. Οι πολλαπλασιασμοί (από δεξιά και αριστερά) με ένα στοιχείο είναι όμως συνεχείς και με τις δύο τοπολογίες.

Λήμμα 2.4. *Σταθεροποιούμε ένα $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Έστω $R_T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, με $R_T(S) = ST$ και $L_T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, με $L_T(S) = TS$. Τότε οι R_T, L_T είναι WOT-συνεχείς.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε μόνο για τον L_T. Έστω $S_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και ένα WOT-υποβασικό $\mathcal{U}_{S_0} = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (S - S_0)\xi, \eta\rangle| < \varepsilon\}$. Τότε:

$$\begin{aligned} L_T^{-1}[\mathcal{U}_{S_0}] &= \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle T(S - S_0)\xi, \eta\rangle| < \varepsilon\} \\ &= \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (S - S_0)\xi, T^*\eta\rangle| < \varepsilon\} \\ &= \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : |\langle (S - S_0)\xi, \tilde{\eta}\rangle| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

το οποίο είναι υποβασικό της WOT. Συνεπώς ο L_T είναι WOT-συνεχής.

□

Τώρα μπορούμε να δώσουμε τον ('αναλυτικό') ορισμό των W^*-αλγεβρών.

Ορισμός 2.6 (Von Neumann Άλγεβρες)**.** *Μια $*$-υπάλγεβρα $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, με μονάδα, καλείται Von Neumann Άλγεβρα αν είναι κλειστή στην WOT τοπολογία.*

Προφανώς (βλ. Πρόταση 2.12) αν η $\mathcal{M}$ είναι κλειστή στην WOT είναι και κλειστή στην SOT. Επίσης είναι κλειστή και στην τοπολογία της νόρμας και άρα και C^*-άλγεβρα.

Το παρακάτω θεώρημα του J. Von Neumann δίνει έναν (αντιδιαισθητικό) χαρακτηρισμό των W^*-αλγεβρών, ως προς τις καθαρά αλγεβρικές τους ιδιότητες. Ορίζουμε για $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τον μεταθέτη (commutator) του A ως:

$$A' := \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \; TS = ST, \; \forall T \in A\}$$

και συμβολίζουμε με $A'' := (A')'$ τον δεύτερο μεταθέτη του A.

Θεώρημα 2.5 (Double Commutant Theorem του Von Neumann)**.** *Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια $*$-υπάλγεβρα με μονάδα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *$\mathcal{M} = \mathcal{M}''$*

2. *Η $\mathcal{M}$ είναι WOT κλειστή*

3. *Η $\mathcal{M}$ είναι SOT κλειστή*

Απόδειξη. Το $(2) \Rightarrow (3)$ έχει δεχθεί. Για το $(1) \Rightarrow (2)$, παρατηρούμε πως για κάθε $A \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$A' = \bigcap_{T \in A} \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS - ST = \mathbf{0}\}$$

οπότε για $A = \mathcal{M}'$, έχουμε:

$$\mathcal{M}'' = \bigcap_{T \in \mathcal{M}'} \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS - ST = \mathbf{0}\}$$

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{M}''$ είναι WOT-κλειστό, για το οποίο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $T \in M'$, το $\{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS - ST = \mathbf{0}\}$ είναι WOT κλειστό. Παρατηρούμε πως

$$\{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS - ST = \mathbf{0}\} = F_T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$$

όπου $F_T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, με $F_T(S) = TS - ST$. Από το Λήμμα **2.4** προκύπτει ότι η F_T είναι WOT-συνεχής και άρα επειδή το $\{\mathbf{0}\}$ είναι κλειστό και το $F_T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$ θα είναι κλειστό. Συνεπώς $\mathcal{M}'' = \overline{\mathcal{M}''}^{WOT}$ από όπου έχουμε $(1) \Rightarrow (2)$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Αυτή είναι η δύσκολη συνεπαγωγή. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $*$-υπάλγεβρα $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, η $\mathcal{M}$ είναι SOT-πυκνή στον $\mathcal{M}''$. Θα δείξουμε πρώτα πως αν $T_0 \in \mathcal{M}''$, τότε κάθε SOT-**υποβασικό** που περιέχει το T_0 τέμνει την $\mathcal{M}$. Θέτουμε για $\varepsilon > 0$ και $\xi \in \mathcal{H}$:

$$U^{SOT} = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|(S - T_0)\xi\| < \varepsilon\}$$

το οποίο είναι υποβασικό. Αναζητούμε, $Q \in \mathcal{M}$ με $Q \in U^{SOT}$. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι $T_0\xi \in \overline{\mathcal{M}\xi}^{\|\cdot\|}$. Πράγματι, αν $T_0\xi \in \overline{\mathcal{M}\xi}^{\|\cdot\|}$, τότε Θέτοντας $V(T_0\xi, \varepsilon) = \{\eta \in \mathcal{H} : \|T_0\xi - \eta\| < \varepsilon\|\}$, έχουμε $V(T_0\xi, \varepsilon) \bigcap \mathcal{M}\xi \neq \varnothing$, οπότε υπάρχει $Q \in \mathcal{M}$, με $\|T_0\xi - Q\xi\| < \varepsilon$, δηλαδή $Q \in U^{SOT}$.

Έστω $W := \overline{\mathcal{M}\xi}^{\|\cdot\|}$, και $P_W : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, η ορθή προβολή στο W. Επειδή $\mathcal{M}W \subseteq W$ ($\mathcal{M}$-αναλλοίωτο) και $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$, έχουμε ότι και το $W^\perp$ είναι $\mathcal{M}$-αναλλοίωτο. Συνεπώς, $P_W\mathcal{M} = \mathcal{M}P_W$ δηλαδή $P_W \in \mathcal{M}'$.

Επειδή $T_0 \in \mathcal{M}''$ έχουμε ότι,

$$W \overset{\text{ορ.} P_W}{\ni} P_W(T_0\xi) \overset{P_W \in \mathcal{M}'}{=} T_0(P_W\xi) \overset{\xi \in W}{=} T_0\xi$$

συνεπώς $T_0\xi \in \overline{\mathcal{M}\xi}^{\|\cdot\|}$. Προφανώς αυτό δεν αρκεί για την SOT-πυκνότητα της $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{M}''$, αφού σκοπός είναι να το δείξουμε για το τυχόν SOT-**βασικό**,

$$V^{SOT} = \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|(S - T_0)\xi_i\| < \varepsilon,\ i = 1, ..., n\}$$

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο βασικό. Το κόλπο είναι να πάρουμε n αντίγραφα του $\mathcal{H}$, και να κατασκευάσουμε το ευθύ άθροισμα

$$\oplus_n \mathcal{H} = \left\{ \eta \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{H} : \sum_{i=1}^{n} \|\eta(i)\|^2 < \infty \right\}$$

Τότε η άλγεβρα $\mathcal{M}$ δρά στον $\oplus_n \mathcal{H}$ ως:

$$T(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (T\xi_1, \ldots, T\xi_n), \qquad \forall T \in \mathcal{M} \tag{*}$$

Η σχέση (*) ορίζει μια εμφύτευση της $\mathcal{M}$ στον $\mathcal{B}(\oplus_n \mathcal{H})$,

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{M}(n) \subseteq \mathcal{B}\left(\oplus_n \mathcal{H}\right)$$

Επίσης, ο $\mathcal{B}(\oplus_n \mathcal{H})$ μπορεί να προσδιορισθεί ως η άλγεβρα $M_n\big(\mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$ των $n \times n$ πινάκων με τιμές στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Με αυτόν τον προσδιορισμό ο $\mathcal{M}'(n)$ αντιστοιχεί σε εκείνους τους $n \times n$ πίνακες με τιμές στον $\mathcal{M}'$ και έχουμε επίσης $(\mathcal{M}(n))'' = \mathcal{M}''(n)$.

Εφαρμόζοντας το επιχείρημα που δώθηκε παραπάνω για το υποβασικό U^{SOT}, στο $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \oplus_n \mathcal{H}$, έχουμε ότι

$$T_0(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (T_0\xi_1, \ldots, T_0\xi_n) \in \overline{\mathcal{M}(n)(\xi_1, \ldots, \xi_n)}^{\|\cdot\|}$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $Q \in \mathcal{M}$, ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \|Q\xi_i - T_0\xi_i\|^2 < \varepsilon^2$$

οπότε και για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $\|Q\xi_i - T_0\xi_i\| < \varepsilon$. Άρα $Q \in U^{SOT}$ και το θεώρημα αποδείχθηκε.

$\square$

Άμεσο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι το ότι **οι Von Neumann Άλγεβρες ισούνται με τον δεύτερο μεταθέτη τους**.

Παραδείγματα 2.3. *1. Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι Von Neumann άλγεβρα. Πράγματι αν $T_i \xrightarrow{WOT} T_0$, θα δείξουμε ότι $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο T_0 είναι γραμμικός τελεστής επειδή ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση είναι WOT-συνεχείς:*

$$\begin{aligned} T_0(\lambda\xi + \eta) &= {\scriptstyle WOT} - \lim_i T_i(\lambda\xi + \eta) \\ &= \lambda {\scriptstyle WOT} - \lim_i T_i\xi + {\scriptstyle WOT} - \lim_i T_i\eta \\ &= \lambda T_0\xi + T_0\eta \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε, $\|T_i\xi\| \leqslant M_i\|\xi\|$ *για κάθε* $i \in I$. *Οπότε Θέτοντας,* $M = \sup_i\{M_i\}$, *έχουμε:*

$$\|T_0\xi\| = \lim_i \|T_i\xi\| \leqslant M\|\xi\|$$

οπότε $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

2. *Αν* (Ω, Σ, μ) *χώρος πεπερασμένου μέτρου, τότε ο* $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \cong \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(L^2)$ *όπου*

$$\mathcal{M} := \left\{M_g : L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \mid M_g(f) = gf, \ \ \forall g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\right\}$$

είναι Von Neumann άλγεβρα. Από τον ορισμό της $\mathcal{M}$ *έχουμε ότι ο* $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ *είναι ισόμορφος με την* $\mathcal{M}$. *Θα δείξουμε ότι* $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, *οπότε και* $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. *Έχουμε* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$. *Θα δείξουμε* $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$. *Έστω* $\mathbf{0} \neq T \in \mathcal{M}'$ *και* $f = T\mathbf{1} \in L^2$. *Δείχνουμε ότι* $f \in L^\infty$ *και συγκεκριμένα ότι* $\|f\|_\infty \leqslant \|T\|_{op}$. *Αν όχι, τότε υπάρχει* $Y \subseteq \Omega$ *ώστε* $\mu(Y) > 0$ *και* $|f| > \|T\|_{op}$ *στο* Y. *Θέτουμε*

$$g(x) = \begin{cases} 1/f(x), & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Τότε $g \in L^\infty$ *αφού* $|g| < 1/\|T\|_{op}$. *Επίσης*

$$\|g\|_2^2 = \int |g|^2 d\mu = \int_Y |g|^2 d\mu \leqslant \frac{\mu(Y)}{\|T\|_{op}^2} \tag{*}$$

Επειδή $T \in \mathcal{M}'$ *έχουμε*

$$Tg = Tg\mathbf{1} = gT\mathbf{1} = gf \tag{**}$$

Επίσης παρατηρούμε πως η $gf = \chi_Y$. *Οπότε:*

$$\mu(Y) = \|gf\|_2^2 \overset{(**)}{=} \|Tg\|_2^2 \leqslant \|T\|_{op}^2\|g\|_2^2 \tag{***}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (*) και (***) προκύπτει ότι $\mu(Y) < \mu(Y)$, *πράγμα άτοπο. Συνεπώς,* $f \in L^\infty$ *με* $\|f\|_\infty \leqslant \|T\|_{op}$. *Επίσης, από την (**) έχουμε ότι* $Tg = gf$ *για κάθε* $g \in L^\infty$. *Επειδή, ο* L^∞ *είναι πυκνός στον* L^2 *και ο πολλαπλασιαμός με* f *καθώς και ο* T *είναι συνεχείς έχουμε* $Tg = gf$ *για κάθε* $g \in L^2$, *δηλαδή* $T \in \mathcal{M}$.

Το Παράδειγμα 2 δείχνει ότι ο L^∞ ενός χώρου (πεπερασμένου) μέτρου είναι αντιμεταθετική Von-Neumann άλγεβρα. Παρατείθετεται χωρίς αποδειξη και μια μορφή του αντίστροφου:

Πρόταση 2.13. *Έστω $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μια αντιμεταθετική Von-Neumann άλγεβρα. Τότε η $\mathcal{M}$ είναι $*$-ισόμορφη με τον $L^\infty(X, \mu)$ για κατάλληλο (X, μ) χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου.*

Απόδειξη. Θεώρημα 4.4.4 στον Murphy (1990, σ. 136)

□

Καταστάσεις μιας C^*-άλγεβρας

Οι καταστάσεις στην θεωρία C^*-αλγεβρών, είναι συναρτησιακά από μια C^*-άλγεβρα στο $\mathbb{C}$. Ο όρος κατάσταση (state) δεν είναι τυχαίος, καθώς οι καταστάσεις χρησιμοποιούνται στον C^*-αλγεβρικό φορμαλισμό της Κβαντικής Φυσικής για να προσδιορίσουν την 'κατάσταση' ενός συστήματος, δηλαδή την αναμενόμενη (μέση) τιμή κάθε φυσικής μεταβλητής που περιγράφει το σύστημα.

Αν πάρουμε έναν μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ), που περιγράφει την 'γνώση' μας για ένα φυσικό σύστημα, τότε τα πιθανά πειράματα που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε, περιγράφονται από Σ-μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Κάθε ένα μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο κατάλληλα στον (Ω, Σ), προσδιορίζει τις αναμενόμενες τιμές των πειραμάτων—παίρνοντας ολοκλήρωμα ως προς αυτό, και άρα των **λογικών προτάσεων** που ο εκάστοτε φορμαλισμός επιτρέπει—μέσω συνδυασμών χαρακτηριστικών συναρτήσεων, των συνόλων που αντιπροσωπεύουν τις λογικές προτάσεις.

Στην κλασική αυτή περίπτωση, η κατάσταση προσδιορίζεται πλήρως από κάποιο μέτρο και έτσι μπορούμε να καταλάβουμε ποιοτικά την φυσική της σημασία.

Επιπλέον, στον φορμαλισμό τις Κβαντικής Μηχανικής μέσω χώρων Hilbert, οι (pure) καταστάσεις ενός συστήματος περιγράφονται από μοναδιαία διανύσματα $\|\xi\| = 1$ του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Εκεί τα πειράματα περιγράφονται από Αυτοσυζυγείς τελεστές και κυρίως στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε η αναμενόμενη τιμή ενός $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ στην κατάσταση ξ, δίνεται από το $\langle T\xi, \xi \rangle$, από όπου φαίνεται και η απαίτηση να είναι $\|\xi\| = 1$, αφού ο ταυτοτικός τελεστής $\mathbf{1}$, δηλαδή το 'να συμβεί κάτι' (ταυτολογία) θα πρέπει να είναι βέβαιο, $\langle \mathbf{1}\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 = 1$. Οι λογικές προτάσεις στον φορμαλισμό αυτόν περιγράφονται από **ορθογώνιες προβολές** επί του $\mathcal{H}$, που είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με κλειστούς υποχώρους του $\mathcal{H}$ και οι οποίες γενικέυουν τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Παρ' όλα αυτά η 'Λογική' που προκύπτει από αυτήν την αντιστοίχιση είναι πολύ διαφορετική από την κλασική, συνολοθεωρητική λογική που συνδέεται με τις χαρακτηριστικές σε έναν χώρο μέτρου. Ένας κλάδος που μελετάει τα παραπάνω είναι η Κβαντική Λογική.

Οι καταστάσεις C^*-αλγεβρών γενικεύουν κατάλληλα την παραπάνω ιδέα και κατ' επέκταση είναι απαραίτητες στην μελέτη μη-αντιμεταθετικών χώρων πιθανότητας.

Ορισμός 2.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ένα γραμμικό συναρτησιακό.*

ι) Το ϕ καλείται **θετικό** *αν $\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) \geqslant 0$, για κάθε $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.*

ιι) Ένα θετικό, γραμμικό συναρτησιακό ϕ, καλείται **κατάσταση** *αν $\|\phi\| = 1$.*

Παράδειγμα 2.1. *Έστω X συμπαγής χώρος και $C(X)$ η C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων επί του X. Τότε τα θετικά, γραμμικά συναρτησιακά επί της $C(X)$ αντιστοιχούν στα θετικά μέτρα επί του X και οι καταστάσεις της $C(X)$, στα* **μέτρα πιθανότητας** *επί του X.*

Πράγματι, από το Θεώρημα Riesz, Markov, Kakutani (Α'.1), έχουμε ότι για κάθε θετικό, γραμμικό συναρτησιακό στον $C(X)$,[5] έστω ϕ, υπάρχει σ-άλγεβρα Σ_ϕ στον X και (θετικό) μέτρο μ_ϕ επί της Σ_ϕ ώστε:

$$\phi(f) = \int_X f d\mu_\phi$$

Τώρα αν ϕ κατάσταση θα αποδείξουμε στην Πρόταση 2.15 παρακάτω, πως $\|\phi\| = \phi(\mathbf{e})$. Συνεπώς η απαίτηση $\|\phi\| = 1$ για μια κατάσταση μεταφράζεται ως:

$$1 = \|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = \int_X \mathbf{1} d\mu_\phi = \mu_\phi(X)$$

και συνεπώς το μ_ϕ είναι μέτρο πιθανότητας.

Πρόταση 2.14. *Αν $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ κατάσταση τότε $\phi(\mathbf{a}^*) = \overline{\phi(\mathbf{a})}$, για κάθε $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Τότε γράφουμε κατα μοναδικό τρόπο $\mathbf{a} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ όπου $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγή. Οπότε $\mathbf{a}^* = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$ και από την γραμμικότητα έχουμε

$$\overline{\phi(\mathbf{a})} = \phi(\mathbf{x}) \overline{+ i\phi}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) - i\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x} - i\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{a}^*)$$

□

[5] Έχουμε υποθέσει τον X να είναι συμπαγής και όχι απλώς τοπικά συμπαγής.

Ενώ οι καταστάσεις δεν έχουν ορισθεί να είναι και συνεχείς, η παρακάτω πρόταση μας δίνει το ότι η θετικότητα και η γραμμικότητα εξασφαλίζουν τη συνέχεια.

Πρόταση 2.15. *Έστω ϕ ένα θετικό, γραμμικό συναρτησιακό επί μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Τότε το ϕ είναι συνεχές με $\|\phi\| = \phi(\mathbf{e})$.*

Πρωτού αποδειχθεί η παραπάνω προταση χρειάζονται ορισμένα λήμματα.

Λήμμα 2.5. *Έστω ϕ θετικό γραμμικό συναρτησιακό επί μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι :*

$$|\phi(\mathbf{a})|^2 \leqslant \phi(\mathbf{e})\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a})$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $|\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a})|^2 \leqslant \phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b})$. Από αυτό το ζητούμενο προκύπτει Θέτοντας $\mathbf{b} = \mathbf{e}$. Για $\lambda \in \mathbb{C}$, από την γραμμικότητα και θετικότητα του ϕ έχουμε:

$$\phi\big((\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b})^*(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b})\big) = |\lambda|^2\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) + \lambda\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a}) + \bar{\lambda}\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) + \phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b}) \geqslant 0$$

Για $\lambda = ke^{-i\theta}$, με $\theta = \arg\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a})$ και $k \in \mathbb{R}$ έχουμε (εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του τύπου του Euler):

$$k^2\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) + 2k|\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a})| + \phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b}) \geqslant 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς η διακρίνουσα του τρίωνύμου πρεπει να είναι αρνητική:

$$4|\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a})|^2 - 4\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b}) \leqslant 0 \Rightarrow |\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{a})|^2 \leqslant \phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b})$$

□

Λήμμα 2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα και $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές, με $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ ώστε $\mathbf{x}$ αυτοσυζυγές, $\sigma(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $\mathbf{x}^2 = \mathbf{a}$. Το $\mathbf{x}$ καλείται 'τετραγωνική ρίζα' του $\mathbf{a}$ και μπορεί να συμβολιστεί ως $\mathbf{a}^{1/2}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$ η C^*-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathbf{a}$ και την μονάδα η οποία είναι προφανώς αντιμεταθετική αφού το $\mathbf{a}$ είναι αυτοσυζυγές. Από το Θεώρημα 2.3 έχουμε ότι υπάρχει ένας ισομετρικός $*$-ισομορφισμός μεταξύ του $C(\sigma(\mathbf{a}))$ και της $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$:

$$\zeta : C(\sigma(\mathbf{a})) \to \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}, \quad f \mapsto \zeta(f)$$

και ισχύει ότι $\zeta^{-1}(\mathbf{a})(t) = t$, για κάθε $t \in \sigma(\mathbf{a})$, δηλαδή το $\mathbf{a}$ ταυτίζεται με την ταυτοτική συνάρτηση.

Επειδή το $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^+$ η ταυτοτική συνάρτηση πάνω σε αυτό θα είναι θετική, οπότε η $g : \sigma(\mathbf{a}) \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, με $g(t) = t^{1/2}$ είναι καλώς ορισμένη, μοναδική και ισχύει $(g(t))^2 = (t^{1/2})^2 = t$ για κάθε $t \in \sigma(\mathbf{a})$, οπότε $g^2 = \zeta^{-1}(\mathbf{a})$. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{a} = \zeta(\zeta^{-1}(\mathbf{a})) = \zeta(g^2) \overset{\text{ισομορφ.}}{=} \zeta(g)^2$$

Οπότε Θέτοντας, $\mathbf{x} = \zeta(g) \in \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} \subseteq \mathcal{A}$, έχουμε $\mathbf{x}^2 = \mathbf{a}$. Επιπλέον, από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης (2.4) έχουμε:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{a}^{1/2}) \overset{\text{Θ.Φ.Α.}}{=} (\sigma(\mathbf{a}))^{1/2} := \{\lambda^{1/2} : \lambda \in \sigma(\mathbf{a})\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

αφού $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^+$. Το ότι το $\mathbf{x}$ είναι αυτοσυζυγές προκύπτει από το ότι η $g : \sigma(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση και άρα $g^*(t) = \overline{g(t)} = g(t) \Rightarrow g = g^*$. Επειδή ο ζ είναι $*$-ισομορφισμός έχουμε $\mathbf{x} = \zeta(g) = \zeta(g^*) = \zeta(g)^* = \mathbf{x}^*$.

Τέλος, η μοναδικότητα του $\mathbf{x}$. Έστω ότι υπάρχει $\mathbf{z} \in \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$ με τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας. Το $\mathbf{z}$ θα αντιμετατίθεται με το $\mathbf{a}$ και άρα $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} \subseteq \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{z},\mathbf{e})}$ η οποία είναι αντιμεταθετική. Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση Gelfand έχουμε

$$\widehat{\mathbf{x}}^2 = \widehat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{z}}^2$$

και επειδή η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1, έχουμε $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

□

Απόδειξη Πρότασης 2.15. Έστω $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές με $\|\mathbf{a}\| \leqslant 1$. Τότε το $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq [-1, 1]$ και από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης το $\sigma(\mathbf{e}-\mathbf{a}) \subseteq [0, 2]$. Άρα από το Λήμμα 2.6 έχουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές με $\mathbf{x}^2 = \mathbf{e} - \mathbf{a}$. Από την γραμμικότητα και θετικότητα του ϕ και το $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$, έχουμε

$$\phi(\mathbf{e} - \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{x}^*\mathbf{x}) \geqslant 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{a}) \leqslant \phi(\mathbf{e})$$

οπότε για $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}^*\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}^*\mathbf{b}\|}$ έχουμε

$$\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b}) \leqslant \phi(\mathbf{e})\|\mathbf{b}^*\mathbf{b}\|$$

Επίσης εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.5 για το $\mathbf{b}$ παίρνουμε

$$|\phi(\mathbf{b})|^2 \leqslant \phi(\mathbf{e})\phi(\mathbf{b}^*\mathbf{b})$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες και εφαρμόζοντας την C^* συνθήκη, έχουμε

$$|\phi(\mathbf{b})|^2 \leqslant \phi(\mathbf{e})^2\|\mathbf{b}\|^2 \Rightarrow |\phi(\mathbf{b})| \leqslant \phi(\mathbf{e})\|\mathbf{b}\|$$

Άρα η ϕ είναι συνεχής με $\|\phi\| \leqslant \phi(\mathbf{e})$. Όμως $\|\mathbf{e}\| = 1$ οπότε $\phi(\mathbf{e}) = |\phi(\mathbf{e})| \leqslant \|\phi\|$. Συνεπώς. $\|\phi\| = \phi(\mathbf{e})$.

□

Για μια δεδομένη C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ μπορεί να ορισθεί ο **χώρος καταστάσεων** (state-space) $\mathcal{S}$ της $\mathcal{A}$ ως:

$$\mathcal{S} := \big\{\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \ \phi \ \text{κατάσταση}\big\}$$

Αν η ϕ δεν γράφεται ως κυρτός συνδυασμός $\phi = t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ για $\omega_i \in \mathcal{S}$, θα καλείται **pure**.

Πρόταση 2.16. *Το $\mathcal{S}$ αποτελείται από w^*-όρια κυρτών συνδυασμών από pure καταστάσεις.*

Απόδειξη. Αρχικά, το $\mathcal{S}$ είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, έστω $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ και $t \in [0,1]$. Τότε προφανώς το $\omega := t\phi + (1-t)\psi$ είναι γραμμικό και θετικό:

$$\big(t\phi + (1-t)\psi\big)(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) = t\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) + (1-t)\psi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) \geqslant 0$$

Επίσης, από την Πρόταση 2.15 έχουμε

$$\|\omega\| = \omega(\mathbf{e}) = t\phi(\mathbf{e}) + (1-t)\psi(\mathbf{e}) = 1$$

οπότε $\omega \in \mathcal{S}$. Παρατηρούμε πως οι pure καταστάσεις είναι ακριβώς τα extreme σημεία $\mathcal{E}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$. Επίσης, $\mathcal{S} \subseteq B_{\mathcal{A}^*}$ είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathcal{A}^*$. Πράγματι, έστω $(\phi_\lambda)_\lambda \subseteq \mathcal{S}$ με $\phi_\lambda \xrightarrow{w^*} \phi_0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{x}}(\phi_\lambda) \to \widehat{\mathbf{x}}(\phi_0), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \iff \\ &\phi_\lambda(\mathbf{x}) \to \phi_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{x} \to \widehat{\mathbf{x}}$ η κανονική εμφύτευση. Οπότε και για $\mathbf{y} \in \{\mathbf{a}^*\mathbf{a}, \mathbf{e}\}$, $\phi_\lambda(\mathbf{y}) \to \phi_0(\mathbf{y})$ από όπου προκύπτει ότι $\phi_0 \in \mathcal{S}$. Από το Θεώρημα Alaoglou (Α΄.5) έχουμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι w^*-συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Συνεπώς εφαρμόζουμε το Θεώρημα Krein–Milman (Α΄.6) για να πάρουμε:

$$\mathcal{S} = \bar{co}^{w^*}\big(\mathcal{E}(\mathcal{S})\big)$$

$\square$

Οι καταστάσεις που δεν είναι pure ονομάζονται mixed.

GNS Construction

Θα περιγραφεί χωρίς απόδειξη ένα σημαντικό αποτέλεσμα γνωστό ως Θεώρημα Gelfand–Naimark–Segal και χρησιμοποιεί μια κατασκευή γνωστή ως GNS Construction. Είδαμε παραπάνω πως ο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ πληροί τον αξιωματικό χαρακτηρισμό των C^*-αλγεβρών. Το θεώρημα Gelfand–Naimark–Segal δίνει και κάτι αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε C^*-άλγεβρα μπορει να 'αναπαραστεί' ως άλγεβρα τελεστών επί ενός χώρου Hilbert.

Θεώρημα 2.6 (GNS Construction)**.** *Για κάθε κατάσταση ϕ μιας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$ υπάρχει μια αναπαράσταση $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ με*

$$\phi(\mathbf{a}) = \langle \pi_\phi(\mathbf{a})\xi, \xi \rangle$$

όπου $\xi \in \mathcal{H}_f$ μοναδιαίο.

Θεώρημα 2.7 (Gelfand–Naimark–Segal)**.** *Κάθε C^*-άλγεβρα είναι ισομετρικά, $*$-ισόμορφη με μία κλειστή $*$-υπάλγεβρα φραγμένων τελεστών επί ενός χώρου Hilbert.*

3 Μη-Αντιμεταθετικοί Χώροι Πιθανότητας

3.1 Η Σημασία της Μη-Αντιμεταθετικότητας στην Κβαντική Φυσική

Η μη-αντιμεταθετικότητα σαν έννοια έχει ως 'φυσικό' έναυσμα την Κβαντική Μηχάνικη στην οποία υπάρχουν φυσικές ποσότητες οι οποίες δεν δύναται να μετρηθούν ταυτόχρονα, με συνέπεια οι τελεστές στους οποίους αντιστοιχούν, να μην αντιμετατίθονται.

Παρακάτω θα δούμε πως η απλούστερη Von Neumann άλγεβρα των 2×2 μιγαδικών πινάκων μπορεί να περιγράψει την **κβαντική ρίψη νομίσματος**.

Έστω $\mathcal{M}_2 := \big\{(a_{ij})_{i,j} : a_{ij} \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad i,j \in \{1,2\}\big\}$, η οποία είναι Von Neumann άλγεβρα επειδή όλες οι τοπολογίες που κάνουν έναν γραμμικό χώρο, *τοπολογικό γραμμικό χώρο* ταυτίζονται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, οπότε $\overline{\mathcal{M}_2}^{\|\cdot\|} = \overline{\mathcal{M}_2}^{WOT}$ και οι γραμμικοί τελεστές είναι αυτομάτως και φραγμένοι, οπότε $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. Η ενέλιξη ορίζεται με φυσικό τρόπο ως:

$$A = (a_{ij})_{i,j} \longmapsto A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j}$$

Ορίζουμε την 'Δίκαιη Κβαντική Ρίψη Νομίσματος' να είναι το ζεύγος $\left(\mathcal{M}_2, \frac{1}{2}\text{tr}\ \right)$ (μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας). Οι λογικές προτάσεις (events) σε αυτόν τον χώρο αντιστοιχούν στις (ορθογώνιες) προβολές E (βλ. Ενότητα 2).

Η συνθήκη $E = E^*$ αναγκάζει τις E να έχουν δύο πραγματικές ιδιοτιμές, και επειδή $E = E^2$ έχουμε τρείς περιπτώσεις:

(0) Και οι δύο είναι 0, δηλ. $E = 0$

(1) Μια είναι 0, και η άλλη 1

(2) Και οι δύο είναι 1, δηλ. $E = 1$

Συνεπώς μόνο στην περίπτωση (1) είναι μη-τετριμμένη. Σε αυτήν την περίπτωση, η E ικανοποιεί:

$$\text{tr}\, E = 0 + 1 = 1 \quad \text{και} \quad \det E = 0 \cdot 1 = 0$$

Από το $E = E^*$, μπορούμε να γράψουμε:

$$E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

Επίσης:

$$\det E = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\Big((1-z^2) - (x^2+y^2)\Big) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

και άρα παραμετροποιούμε τις (μη-τετριμμένες) προβολές με διανύσματα στην μοναδιαία σφαίρα $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Συμβολίζοντας, για $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\theta(a) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

και έχουμε επίσης

$$\theta(a)\theta(b) = \langle a, b \rangle \cdot \mathbf{1} + i\theta(a \times b)$$

Οπότε για $\|a\| = 1$ γράφουμε

$$E(a) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{1} + \theta(a)\Big)$$

Αντίστοιχα, για τις καταστάσεις προκύπτει:

$$\phi(A) = \mathbf{tr}\ \rho A \quad \text{όπου} \quad \rho = \rho(b) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{1} + \theta(b)\Big), \quad \|b\| \leqslant 1$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι η πιθανότητα του $E(a)$ στην κατάσταση $\rho(b)$ είναι:

$$\mathbf{tr}\ \Big(\rho(b)E(a)\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \langle a, b \rangle\Big)$$

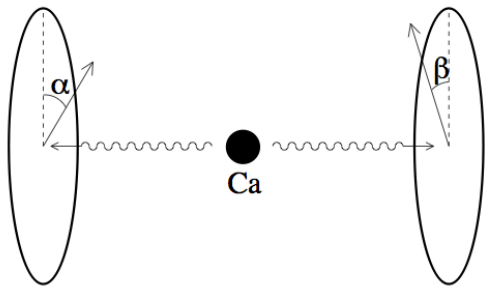
Δύο προτασες $E(a), E(a')$ είναι συμβατές, αν και μόνο αν $a = \pm a'$. Τέλος,

$$E(a) + E(-a) = \mathbf{1} \quad \text{και} \quad E(a)E(-a) = \mathbf{0}$$

Η ερμηνεία είναι η ακόλουθη: η κατανομή της κβαντικής ρίψης νομίσματος δίνεται από ένα διάνυσμα $b \in S_2$. Για κάθε $a \in S_2$, ακριβώς ένα από τα $E(a), E(-a)$ συμβαίνει, το καθένα με πιθανότητα $\frac{1}{2}\Big(1 + \langle a, b \rangle\Big)$, δηλαδή έχουμε ένα 'κλασικό νόμισμα' για κάθε κατεύθυνση στον $\mathbb{R}^3$ και οι ρίψεις σε διαφορετικές κατευθύνσεις δεν είναι συμβατές (επειδή $b \times a = -(a \times b)$). Τέλος, σημειώνεται ότι η κβαντική ρίψη νομίσματος εμφανίζεται στην φύση, ως η κατεύθυνση του spin ενός σωματιδίου με ολικό spin 1/2.

Από τα παραπάνω, δεν γίνεται εμφανής η αναγκαιότητα για μη-αντιμεταθετικούς χώρους πιθανότητας. Για να δούμε γιατί δεν αρκεί η κλασική θεωρία πιθανοτήτων θα περιγράψουμε το πείραμα του A. Aspect που πραγματοποιήθηκε το 1982 στο Orsay κοντά στο Παρίσι, όπως αυτό αναφέρεται στον Maassen (2003).

Στο πείραμα, μια κατασκευή παράγει ζεύγη από φωτόνια, εξιτάροντας ένα άτομο ασβεστίου. Τα φωτόνια εκτοξεύονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Έστω ότι στα 'αριστερά' και 'δεξιά' μετριέται η *πόλωση* (polarization) μέσω δυο *φίλτρων*. Όταν τα φίλτρα δεξιά και αριστερά, κάνουν γωνίες α και β, αντίστοιχα, με την κάθετη κατεύθυνση (βλ. διάγραμμα), διαπιστώνεται πειραματικά πως η πιθανότητα για τα δυο φωτόνια του ίδιου ζεύγους να περάσουν απ' τα δύο φίλτρα είναι $\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)$. Δηλαδή, όταν $\alpha=\beta$, κανένα ζεύγος δεν περνάει, ενώ όταν είναι σε ορθές γωνίες μεταξύ τους ($\alpha-\beta=\pi/2$) τότε τα μισά ζεύγη περνάνε. Παρακάτω, θα περιγραφεί η στοχαστική προτυποποίηση του πειράματος.



Σχήμα 1: Το πείραμα του Aspect.

Σε έναν 'χώρο πιθανότητας' $(\mathcal{A},\phi)$ όπου $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα τυχαίων μεταβλητών και $\phi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ με $\phi(X)=\mathbb{E}[X]$ η μέση τιμή του X ως προς κάποιο 'μέτρο πιθανότητας,'[6] ορίζουμε για κάθε γωνίες (α,β) ένα ζεύγος από προτάσεις,

$$L(\alpha,\beta) \quad \text{και} \quad R(\alpha,\beta)$$

όπου το $L(\alpha,\beta)$ = 'με την ρύθμιση (α,β) το φωτόνιο στα αριστερά περνάει από το φίλτρο στα αριστερά.' Αντίστοιχα, για τα δεξιά και το $R(\alpha,\beta)$.[7] Επειδή μετριούνται ταυτοχρόνως, τα $R(\alpha,\beta)$ και $L(\alpha,\beta)$ πρέπει να είναι συμβατά.

Θα καλούμε το πείραμα *τοπικό* (local) αν

$$L(\alpha,\beta)=L(\alpha) \quad \text{και} \quad R(\alpha,\beta)=R(\beta)$$

δηλαδή αν το $L(\alpha,\beta)$ δεν εξαρτάται από το β και αντίστροφα. Το πείραμα θα καλείται *κλασικό*, αν τα L και R αντιμετατίθονται.

Τέλος, απαιτούμε να έχουν πιθανότητα $\frac{1}{2}$, και η πιθανότητα να περάσουν και τα δύο είναι:

$$\phi\Big(R(\alpha,\beta)L(\alpha,\beta)\Big)=\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) \tag{*}$$

[6]Αν η $\mathcal{A}$ είναι μη-αντιμεταθετική, τότε δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για κάποιον χώρο μέτρου στο παρασκήνιο, γι' αυτό και τα εισαγωγικά γύρω από τους παραπάνω όρους.

[7]Ειδικότερα, εάν μπορούσαμε να μιλήσουμε για έναν κλασικό χώρο πιθανότητας, τα R και L θα ήταν χαρακτηριστικές των συνόλων μιας σ-άλγεβρας που εκφράζουν τις παραπάνω προτάσεις.

Πρόταση 3.1. *Δεν υπάρχει κλασικό, τοπικό πρότυπο για το πείραμα του Aspect.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με ένα λήμμα, γνωστό ως Ανισότητα του Bell.

Λήμμα 3.1. *Έστω P_1, P_2, Q_1, Q_2 κλασικές τυχαίες μεταβλητές πάνω στο $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ με τιμές στο $\{0, 1\}$ (δηλ. χαρακτηριστικές μετρήσιμων). Τότε,*

$$\mathbb{P}(P_1 = Q_1) \leqslant \mathbb{P}(P_1 = Q_2) + \mathbb{P}(P_2 = Q_2) + \mathbb{P}(P_2 = Q_1)$$

Απόδειξη. Για κάθε $\omega \in \Omega$, επειδή $P_i(\omega), Q_i(\omega) \in \{0, 1\}$ έχουμε

$$P_1(\omega) = Q_1(\omega) \Rightarrow P_1(\omega) = Q_2(\omega) \text{ είτε } P_2(\omega) = Q_2(\omega) \text{ είτε } P_2(\omega) = Q_1(\omega)$$
$$[P_1 = Q_1] \subseteq [P_1 = Q_2] \cup [P_2 = Q_2] \cup [P_2 = Q_1]$$

(στην σ-άλγεβρα)

$$\mathbb{P}(P_1 = Q_1) \leqslant \mathbb{P}(P_1 = Q_2) + \mathbb{P}(P_2 = Q_2) + \mathbb{P}(P_2 = Q_1)$$

(υποπροσθετικότητα)

□

Έστω τωρα πως υπάρχει ένα τοπικό κλασικό πρότυπο $(\mathcal{A}, \phi)$ για το πείραμα, με προτάσεις $L(\alpha)$ και $R(\beta)$, $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ που ικανοποιούν το $\phi(L(\alpha)) = \phi(R(\beta)) = \frac{1}{2}$ και την (*). Από την Πρόταση 2.13, μπορούμε να αναπαραστήσουμε την $\mathcal{A}$ ως κάποιον L^∞, (αφού είναι αντιμεταθετική) και τις $L(\alpha)$ και $R(\beta)$ ως χαρακτηριστικές συνόλων.

Επειδή,

$$\mathbb{P}\Big(L(\alpha) = R(\beta) = 0\Big) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}\Big(L(\alpha) = 1 \text{ και } R(\beta) = 0\Big) = \mathbb{P}\Big(L(\alpha) = R(\beta) = 1\Big)$$

έχουμε:

$$\mathbb{P}\Big(L(\alpha) = R(\beta)\Big) = \mathbb{P}\Big(L(\alpha) = R(\beta) = 0\Big) + \mathbb{P}\Big(L(\alpha) = R(\beta) = 1\Big) = \sin^2(\alpha - \beta)$$

Από το παραπάνω Λήμμα, για γωνίες α_1, α_2 για αριστερά και β_1, β_2 στα δεξιά, έχουμε:

$$\sin^2(\alpha_1 - \beta_1) \leqslant \sin^2(\alpha_1 - \beta_2) + \sin^2(\alpha_2 - \beta_2) + \sin^2(\alpha_2 - \beta_1)$$

Η παραπάνω ανισότητα παραβιάζεται για $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{2}{3}\pi, \beta_1 = \pi, \beta_2 = \frac{1}{3}\pi$ $(1 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Δηλαδή, η κλασική θεωρία πιθανοτήτων δεν μπορεί να περιγράψει το πείραμα του Aspect, εκτός αν δεν είναι τοπικό. Εαν δηλαδή η ρύθμιση στο ένα φίλτρο επηρεάζει τα φωτόνια που περνούν από το άλλο. Για παράδειγμα το πρότυπο $\Omega = [0,1]$ με την Borel σ-άλγεβρα, και το μέτρο Lebesgue και:

$$R(\alpha,\beta) = \chi_{[\frac{1}{2},1]} \quad \text{και} \quad L(\alpha,\beta) = \chi_{[\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta),\frac{1}{2}(1+\sin^2(\alpha-\beta))]}$$

Το ζήτημα της 'τοπικότητας' (locality) χρησιμοποιήθηκε και από τους Einstein, Podolsky, Rosen (1935), για την υπόθεση πως η Κβαντική Μηχανική πρέπει να είναι ατελεής και να είναι αναγκαίες συμπληρωματικές ('κρυμμένες') μεταβλητές, που να εξηγούν τις στοχαστικές συσχετίσεις μεταξύ των παρατηρήσεων (Bell, 1964). Όμως, η ανισότητα του Bell και γενικότερα η ανάλυση στον Bell (1964), απορρίπτει αυτήν την ιδέα.

Θέτουμε:

$$F(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \tag{**}$$

η οποία είναι η μονοδιάστατη προβολή στην ευθεία στον $\mathbb{C}^2$ με πραγματική κλίση $\tan\alpha, \alpha \in [0,\pi)$.

Πρόταση 3.2. *Υπάρχει τοπικό, κβαντικό πρότυπο για το πείραμα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{A} = M_2 \otimes M_2$ και $\phi(A) = \text{Tr}\,(\rho A)$ όπου:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το $\otimes$ συμβολίζει το τανυστικό γινόμενο, που στην περίπτωση των 2×2 πινάκων είναι εύκολο. Το τανυστικό γινόμενο είναι σύνηθες στην περιγραφή συστημάτων που αποτελούνται από υποσυστήματα.

Για $\alpha, \beta \in [0,\pi)$, θέτουμε:

$$L(\alpha) = F(\alpha) \otimes \mathbf{1} \quad \text{και} \quad R(\beta) = \mathbf{1} \otimes F(\beta)$$

για F όπως ορίζεται στην (**). Το $L(\alpha)$ δρα σε διανύσματα αφήνοντας τα 'κομμάτια' του δεξιού υποσυστήματος (δηλ. του δεξιού φίλτρου), αναλλοίωτα· και το $R(\beta)$, αντίστοιχα.

Έχουμε:[8]

[8] Χρησιμοποιούμε τον τύπο για το Kronecker Product: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$

$$\rho L(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & \cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha & 0 & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & 0 & \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\sin\alpha & 0 & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς έχουμε,

$$\phi\Big(L(\alpha)\Big) = \mathbf{Tr}\ (\rho L(\alpha)) = \frac{1}{2}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}$$

Αντίστοιχα και για το $R(\beta)$, οπότε το πρώτο κομμάτι του πειράματος ικανοποιείται. Επίσης για κάθε $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} L(\alpha)R(\beta) - R(\beta)L(\alpha) &= \Big(F(\alpha)\otimes\mathbf{1}\Big)\Big(\mathbf{1}\otimes F(\beta)\Big) - \Big(\mathbf{1}\otimes F(\beta)\Big)\Big(F(\alpha)\otimes\mathbf{1}\Big) \\ &= \Big(F(\alpha)\mathbf{1}\Big)\otimes\Big(\mathbf{1}F(\beta)\Big) - \Big(\mathbf{1}F(\alpha)\Big)\otimes\Big(F(\beta)\mathbf{1}\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή, τα L, R αντιμετατίθονται. Τέλος, έχουμε:[9]

$$\begin{aligned} \phi\Big(L(\alpha)R(\beta)\Big) &= \phi\Big(F(\alpha)\otimes F(\beta)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Συνεπώς αναπαράχθηκε ολόκληρο το πείραμα.

□

Η κατάσταση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ **δεν** είναι κυρτός συνδυασμός από καταστάσεις 'γινόμενο' και καλείται entangled.

[9] Μετά από πολλές πράξεις.

3.2 Ο Φορμαλισμός

Ορισμός 3.1. *Ένας* **μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας**, *είναι ένα ζεύγος* $(\mathcal{A}, \phi)$, *όπου* $\mathcal{A}$ *μια άλγεβρα με μονάδα* $\mathbf{e}$, *ορισμένη πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, και* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, *γραμμικό και θετικό με* $\phi(\mathbf{e}) = 1$.

- *Τα στοιχεία της* $\mathcal{A}$ *καλούνται (και ερμηνεύονται ως)* **τυχαίες μεταβλητές**.
- *Το* $\phi(\mathbf{a})$, *καλείται (και ερμηνεύεται ως) η* **μέση τιμή** *του* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$
- *Το* $\phi(\mathbf{a}^n)$ *ονομαζεται* n*-οστή* **ροπή** *(moment) του* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.
- *Το* ϕ *καλείται* **trace**, *αν για κάθε* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$, $\phi(\mathbf{ab}) = \phi(\mathbf{ba})$.
- *Αν* $\phi(\mathbf{a}^*\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0$ *τότε η* ϕ *ονομάζεται* **πιστή**.
- *Αν η* $\mathcal{A}$ *είναι* C^**- Άλγεβρα και το* ϕ *είναι* **κατάσταση** *τότε ο χώρος ονομάζεται* C^**-Χώρος Πιθανότητας.*
- *Αν η* $\mathcal{A}$ *είναι* W^**- Άλγεβρα και το* ϕ *είναι* **ασθενώς συνεχής κατάσταση** *τότε ο χώρος ονομάζεται* W^**-Χώρος Πιθανότητας.*

Για να κινητοποιήσουμε περαιτέρω την χρήση αλγεβρών και συναρτησιακών πάνω σε αυτές, για την μελέτη 'Πιθανοτήτων,' θα δείξουμε πώς κανείς μπορεί από κάθε κλασικό χώρο πιθανότητας να κατασκευάσει έναν αντίστοιχο του παραπάνω ορισμού.

Αν (Ω, Σ, μ) ένας κλασικός χώρος πιθανότητας, θεωρούμε τον χώρο (Hilbert) $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, μ-μετρήσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{C}$, με

$$\int_\Omega |f|^2 \, d\mu < +\infty$$

και έπειτα τον χώρο $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, θεωρούμενος ως χώρος τελεστών δρώντας πολλαπλασιαστικά πάνω στον $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$· τον ταυτίζουμε δηλαδή με τον $\mathcal{M} := \{M_g : g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\}$. Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ορίζει τελεστή:

$$M_g : L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^2(\Omega, \Sigma, \mu), \text{ με } M_g f = gf, \ \forall f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$$

Πρόταση 3.3. *Έστω* (Ω, Σ, μ) *ένας κλασικός χώρος πιθανότητας. Τότε ο* $\Big(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \phi\Big)$, *όπου*

$$\phi : L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{C}, \quad \textit{με } \phi(f) := \int_\Omega f \, d\mu$$

είναι ένας W^**-Χώρος Πιθανότητας.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό (βλ. Παράδειγμα 2.3 (2)) ότι ο $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ταυτισμένος με τον $\mathcal{M} := \{M_g : g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)\}$ είναι μια $*$-Άλγεβρα, και πιο συγκεκριμένα μια Von Neumann Άλγεβρα. Συνεπώς μένει να δείξουμε ότι η ϕ πληροί τις προϋποθέσεις της ασθενώς συνεχούς κατάστασης:

α) $\phi(\mathbf{1}) = 1$: $\phi(\mathbf{1}) = \int_\Omega \mathbf{1} \, d\mu = 1\mu(\Omega) = 1$
β) Θετικότητα: Έστω $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Τότε:

$$\phi(f^* f) = \phi(\bar{f} f) = \int_\Omega \bar{f} f \, d\mu = \int_\Omega |f|^2 \, d\mu \geqslant 0$$

γ) Η γραμμικότητα προκύπτει άμεσα από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue.

δ) Ασθενής συνέχεια: Έστω $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ δίκτυο με $f_\lambda \xrightarrow{WOT} f_0$. Δηλαδή, για κάθε $g, h \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\langle f_\lambda g, h \rangle \to \langle f_0 g, h \rangle$.

Οπότε και $\langle f_\lambda \mathbf{1}, g \rangle \to \langle f_0 \mathbf{1}, g \rangle, \quad \forall g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz (Α΄.3), έχουμε ότι

$$\psi(f_\lambda) \to \psi(f_0), \quad \forall \psi \in \big(L^2(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^{*}\text{[10]} \tag{*}$$

Από την Πρόταση 2.15, έχουμε ότι τα θετικά και γραμμικά συναρτησιακά g πάνω σε C^*-άλγεβρες είναι συνεχή, με $\|g\| = g(\mathbf{e})$. Ο $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι προφανώς και C^*-άλγεβρα αφού είναι W^*-άλγεβρα, συνεπώς ϕ συνεχής και γραμμική άρα $\phi \in \big(L^2(\Omega, \Sigma, \mu)\big)^*$. Εφαρμόζοντας την (*) προκύπτει το ζητούμενο.

□

Παρατηρούμε πως ο χώρος αυτός **είναι** αντιμεταθετικός. Συνεπώς δεν φαίνεται γόνιμη η μελέτη αυτού σε μια θεωρία μη-αντιμεταθετικών τυχαίων μεταβλητών. Παρ' όλα αυτά, δείχνει την σύνδεση των αλγεβρών με την κλασική θεωρία, αφού ο χώρος αυτός περιέχει ακριβώς τις ίδιες πληροφορίες με τον (Ω, Σ, μ).

[10] Ο τοπολογικός δυϊκός του $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Είναι σαφές πως η τριπλέτα (Ω, Σ, μ) προσδιορίζει κατά μοναδικό τρόπο τον $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Αντίστροφα, μπορούμε να ανακτήσουμε μια σ-άλγεβρα, $\widetilde{\Sigma}$, θέτοντας:

$$\widetilde{\Sigma} := \{p \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) |\ p = p^2 = p^*\}$$

παίρνοντας δηλαδή όλες τις προβολές του $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Η $\widetilde{\Sigma}$ δεν είναι ισόμορφη με την Σ καθώς τα στοιχεία του $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι κλάσεις συναρτησεων που συμφωνούν μ-σχεδόν παντού. Όμως η $\widetilde{\Sigma}$ είναι ισόμορφη (ως προς την δομή της σ-άλγεβρας) με το πηλίκο της Σ ως προς την ισοδυναμία $E \sim F \iff \mu\Big(E \triangle F\Big) = 0.$[11] Τα παραπάνω συνοψίζονται στην ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.1. *Η $\widetilde{\Sigma}$ είναι ισόμορφη με το πηλίκο της Σ ως προς την ισοδυναμία*

$$E \sim F \iff \mu\Big(E \triangle F\Big) = 0$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\iota : \mathbf{\Sigma} \to \widetilde{\Sigma}$, με $\iota([E]) = \chi_E$, όπου $\mathbf{\Sigma} := \Sigma/\sim$. Θα δείξουμε ότι ο ι είναι ισομορφισμός:

1) Ένα-πρός-ένα και επί: Έστω $[E], [F] \in \mathbf{\Sigma}$, με $\iota([E]) = \iota([F]) \Rightarrow \chi_E = \chi_F$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \mu\Big(E \triangle F\Big) &= \mu\Big(E \bigcup F \setminus E \bigcap F\Big) \\
&\leqslant \mu(E \bigcup F) \\
&= \int \chi_{E \bigcup F}\, d\mu \\
&= \int \big(\max\{\chi_E, \chi_F\} - \min\{\chi_E, \chi_F\}\big) d\mu \\
&= \int (\chi_E - \chi_E) d\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

Συνεπώς $F \in [E]$ και άρα $[F] = [E]$. Έστω τώρα $p \in \widetilde{\Sigma}$. Εύκολα δείχνει κανείς πως η συνθήκη $p = p^2$, υποχρεώνει όλες τις απλές που παράγουν τον $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ (και άρα προσεγγίζουν την p) να έχουν σταθερές $\alpha_k = 0$ είτε $\alpha_k = 1$, στην 'κανονική' τους μορφή: $S = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$, $A_k \bigcap A_l = \varnothing, \forall k \neq l$.

Θέτοντας $M := \{k \leqslant n |\ \alpha_k = 1\}$ και $E := \bigcup_{m \in M} A_m$, έχουμε ότι $p = \chi_E$. Συνεπώς ο ι είναι 1-1 και επί.

[11] $E \triangle F := E \setminus F \bigcup F \setminus E$, η συμμετρική διαφορά τους.

2) Από την μετάφραση των συνολοθεωρητικών πράξεων $\bigcup, \bigcap, \complement$ σε $+$ και $\times$ χαρακτηριστικών, και το γεγονός ότι η $\widetilde{\Sigma}$ είναι κλειστή σε αυτές τις πράξεις, προκύπτει η διατήρηση ολόκληρης της δομής της σ-άλγεβρας.

$\square$

Τέλος, αν θέσουμε $\widetilde{\mu} : \widetilde{\Sigma} \to [0,1] : \ p \mapsto \phi(p)$, ανακτούμε (σχεδόν) και το μέτρο μ.

3.3 Παραδείγματα

Η Κλασική Άλγεβρα Μεταβλητών με Φραγμένες Ροπές

Παρατηρούμε πως ο $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, επειδή περιέχει μόνο (ουσιωδώς) φραγμένες τυχαίες μεταβλητές, δεν περιέχει μεταβλητές με *κανονική κατανομή*, αφού η κανονική κατανομή φέρεται σε όλο το $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) ενώ οι φραγμένες τυχαίες μεταβλητές έχουν κατανομές ν με $\text{supp}\nu \subsetneq \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$). Υπο αυτήν την έννοια, ο $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ αποτυγχάνει να 'αναπαράξει' την κλασική θεωρία πιθανοτήτων.

Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται παίρνοντας τον χώρο

$$L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu) := \bigcap_{1 \leqslant p < \infty} L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

με κατάσταση ϕ την ολοκλήρωση ως προς μ, όπως και στον $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Τα στοιχεία του $L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$, έχουν φραγμένες ροπές οποιασδήποτε τάξης και συνεπώς περιέχονται και τυχαίες μεταβλητές με κανονική 'κατανομή.'

Η κατανομή δεν έχει ορισθεί αυστηρά ακόμα (βλ. Ενότητα 3.5), αλλά κατανοείται σε αυτό το παράδειγμα ως ένα μέτρο ν στο $\mathbb{C}$ (με την Borel σ-άλγεβρα) τέτοιο ώστε, για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\phi(f^k \bar{f}^{\,l}) = \int_{\mathbb{C}} t^k \bar{t}^{\,l} d\nu, \quad \text{για} \quad f \in L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$$

δηλαδή η κλασική κατανομή τυχαίων μεταβλητών. Μένει να δειχθεί πως ο $L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι πράγματι $*$-άλγεβρα και άρα ικανοποιεί τον ορισμό του μη-αντιμεταθετικού χώρου πιθανότητας.

Πρόταση 3.4. *Ο $L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι $*$-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Το ότι είναι κλειστή ως προς το $*$ προκύπτει άμεσα από το $|f| = |\bar{f}| = |f^*|$. Μένει να δειχθεί ότι $fg \in L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$ για $f, g \in L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky έχουμε ότι:

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

οπότε για κάθε $p \in [0, +\infty)$, θεωρώντας τις συναρτήσεις f^p, g^p έχουμε

$$\int |fg|^p \, d\mu \leqslant \underbrace{\left(\int |f|^{2p} d\mu\right)^{\frac{1}{2}}}_{<+\infty} \underbrace{\left(\int |g|^{2p} d\mu\right)^{\frac{1}{2}}}_{<+\infty} < +\infty$$

αφού $f, g \in L^{2p}(\Omega, \Sigma, \mu)$ για κάθε $p \in [0, +\infty)$.

□

$n \times n$ **Τυχαίοι Πίνακες**

Έστω $M_n(\mathbb{C})$ ο χώρος των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων. Δηλαδή:

$$M_n(\mathbb{C}) := \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in \mathbb{C}\}$$

και $A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j}$. Θεωρούμε και το κανονικοποιημένο trace

$$\text{tr}_n : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \text{tr}_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ο $(M_n(\mathbb{C}), \text{tr}_n)$ είναι μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας. Το ότι το tr_n είναι κατάσταση, προκύπτει ακριβώς από την κανονικοποίηση αφού $\text{tr}(I) = n$. Ενδιαφερόμαστε να εντάξουμε 'τυχαιότητα' στον παραπάνω χώρο και τελικώς να κατασκευάσουμε τον χώρο των $n \times n$ τυχαίων πινάκων.

Αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας τον $M_n(\mathbb{C})$, 'πάνω' απο τον $L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Δηλαδή, την $*$-άλγεβρα:

$$\mathcal{A} = M_n\Big(L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)\Big) := \Big\{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu), \forall i, j \leqslant n\Big\}$$

και κατάσταση:[12]

$$\phi_n : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \phi_n(A) = \int \text{tr}_n\big(A(\omega)\big) d\mu(\omega)$$

Επιπλέον έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας φυσιολογικός πίνακας με (όχι αναγκαστικά διαφορετικές ?) ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Τότε ο A διαγωνοποιείται ως:

$$A = U\Lambda U^*$$

όπου $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ και U ορθομοναδιαίο $(UU^* = I)$. Συνεπώς έχουμε

$$A^* = (U\Lambda U^*)^* = U(U\Lambda)^* = U\Lambda^* U^*$$

[12]Η εξάρτηση στο $\omega \in \Omega$ προστέθηκε στο ολοκλήρωμα για να δώσει έμφαση στο ότι ο πίνακας είναι τυχαία μεταβλητή.

όπου $\Lambda^* = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$. Επίσης έχουμε

$$A^k(A^*)^l = U\Lambda^k U^* U \Lambda^{*l} U^* = U\Lambda^k \Lambda^{*l} U^* = U\widetilde{\Lambda} U^*$$

όπου $\widetilde{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1^k \bar{\lambda}_1^l, \ldots, \lambda_n^k \bar{\lambda}_n^l)$. Επειδή το trace είναι αναλλοίωτο σε κυκλικές μεταθέσεις, έχουμε:

$$\operatorname{tr}_n\Big(A^k(A^*)^l\Big) = \operatorname{tr}_n(U\widetilde{\Lambda}U^*) = \operatorname{tr}_n(U^*U\widetilde{\Lambda}) = \operatorname{tr}_n(\widetilde{\Lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \bar{\lambda}_i^l \qquad (*)$$

Παρατηρούμε πως η (*) μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\operatorname{tr}_n\Big(A^k(A^*)^l\Big) = \int z^k \bar{z}^l d\nu \quad \text{όπου} \quad \nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$$

Πράγματι, για S απλή με κανονική μορφή $S = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int S d\nu \overset{\text{ορ.}}{=} \sum_j \beta_j \nu(B_j) &= \sum_j \beta_j \Big(\frac{1}{n}\sum_i \delta_{\lambda_i}(B_j)\Big) \\
&= \sum_j \beta_j \Big(\frac{1}{n}\sum_i \chi_{B_j}(\lambda_i)\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_i \Big(\sum_j \beta_j \chi_{B_j}(\lambda_i)\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_i S(\lambda_i)
\end{aligned}$$

Οπότε και για κάθε f μετρήσιμη, $\int f d\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Περνώντας τώρα στον χώρο των $n \times n$ τυχαίων πινάκων, $\mathcal{A}$, όπως ορίστηκε παραπάνω με κατάσταση ϕ_n, έχουμε ότι,

$$\phi_n\Big(A^k(A^*)^l\Big) = \int z^k \bar{z}^l d\nu \quad \text{όπου} \quad \nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \delta_{\lambda_i(\omega)} d\mu(\omega)$$

Η κατανομή $\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \delta_{\lambda_i(\omega)} d\mu(\omega)$ ονομάζεται **Empirical Spectral distribution** του πίνακα A και αποτελεί το βασικό αντικείμενο ενδιαφέροντος στην θεωρία των τυχαίων πινάκων.

Η Reduced C^*-άλγεβρα μιας Ομάδας

Έστω G μια διακριτή ομάδα και $\mathbb{C}G$ η άλγεβρα της ομάδας, δηλαδή

$$\mathbb{C}G := \Big\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in \mathbb{C} \quad \text{και μόνο πεπ/σμένα} \;\; \alpha_g \neq 0 \Big\}$$

με

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) := \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g,h : gh = k} \alpha_g \beta_h \right) k$$

και

$$\Big(\sum_{g \in G} \alpha_g g \Big)^* := \sum_{g \in G} \bar{\alpha}_g g^{-1}$$

Αν $e \in G$ η μονάδα της G, ορίζουμε το $\tau_G : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$, με $\tau_G \left(\sum_g \alpha_g g \right) = \alpha_e$. Τότε ο $(\mathbb{C}G, \tau_G)$ είναι μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας, με τ_G trace. Αρκεί να δείξουμε ότι το τ_G είναι κατάσταση με $\tau_G(xy) = \tau_G(yx)$. Έφαρμόζοντας τους ορισμούς εχουμε ότι ?:

$$\tau_G(x^* x) = \tau_G \Big(\sum_g \bar{\alpha}_g \alpha_g e \Big) = \tau_G \Big(\sum_g |\alpha_g|^2 e \Big) = \sum_g |\alpha_e|^2 \geqslant 0$$

Επίσης, εύκολα δείχνεται ότι το τ_G είναι γραμμικό. Προφανώς, $\tau_G(\mathbf{1}) = 1$ αφού $\mathbf{1} = 1 \cdot e$. Τέλος,

$$\tau_G(xy) = \tau_G \left[\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) \right] =$$

$$= \tau_G \left(\sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (gh) \right) = \alpha_e \beta_e = \beta_e \alpha_e = \tau_G(yx)$$

Έστω $\{\xi_h : h \in G\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\ell^2(G)$. Δηλαδή τα ξ_h ορίζονται από το ότι για κάθε $x \in \ell^2(G)$, $\langle x, \xi_h \rangle = x(h)$.

Ορίζουμε σημειακά για κάθε $g \in G$, $\lambda(g)\xi_h = \xi_{gh}$, δηλαδή ο λ μετασχηματίζει την βάση του $\ell^2(G)$ κατά g. Η παραπάνω απεικόνιση $\lambda : G \to B(\ell^2(G))$ καλείται *left regular representation.*

Πρόταση 3.5. *Οι $(\lambda(g))_{g \in G}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, με span$(\lambda(g))_{g \in G}$ μια *-υπάλγεβρα του $B(\ell^2(G))$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι $\lambda(g)$ είναι ορθομοναδιαίοι, δηλ. $\lambda(g)^*\lambda(g) = \mathbf{1} = \lambda(g)\lambda(g)^*$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle\lambda(g)x, \lambda(g)y\rangle = \langle x, y\rangle$. Για δύο τυχαία στοιχεία της βάσης ξ_h, ξ_k έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda(g)\xi_h, \lambda(g)\xi_k\rangle = \langle\xi_{gh}, \xi_{gk}\rangle = \xi_{gk}(gh) &= \begin{cases} 1, & \text{αν } \; gk = gh \\ 0, & \text{αν } \; gk \neq gh \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{αν } \; k = h \\ 0, & \text{αν } \; k \neq h \end{cases} \\
&= \xi_k(h) = \langle\xi_h, \xi_k\rangle
\end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα, το ότι είναι ορθομοναδιαίος συνεπάγεται $\lambda^*(g)\xi_h = \xi_{g^{-1}h}$. Τώρα για $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda(g_i) \in B(\ell^2(G))$, έχουμε,

$$\|T\xi_e\|^2 = \langle T\xi_e, T\xi_e\rangle = \langle T^*T\xi_e, \xi_e\rangle = \langle\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i\alpha_i\mathbf{1}\xi_e, \xi_e\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\langle\xi_e, \xi_e\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

Συνεπώς αν $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda(g_i) = \mathbf{0}$ τότε και

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda(g_i)\xi_e\right\| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 0$$

από την παραπάνω σχέση. Οπότε $\alpha_i = 0$ για κάθε i αφού το άθροισμα αποτελείται από μη-αρνητικά στοιχεία. Άρα τα $\{\lambda(g) : g \in G\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επίσης, $\lambda(g)^* \in \{\lambda(g) : g \in G\}$ αφού $\lambda(g)^* = \lambda(g^{-1})$. Οπότε το $\text{span}(\lambda(g))_{g\in G}$ είναι *-υπάλγεβρα του $B(\ell^2(G))$.

Τέλος, παρατηρούμε πως η απεικόνιση

$$g \longmapsto \lambda(g)$$

είναι ισομορφισμός της $\mathbb{C}G$ με την $\text{span}(\lambda(g))_{g\in G}$ αφού στέλνει την μια βάση στην άλλη.

$\square$

Παίρνουμε την πλήρωση του $\text{span}(\lambda(g))_{g\in G}$ ως προς την $\|\cdot\|_{op}$,

$$C^*_{red} := cl\Big(\text{span}(\lambda(g))_{g\in G}\Big)$$

η οποία καλείται η reduced C^*-άλγεβρα της ομάδας G. Επίσης, ορίζουμε $\tau : C^*_{red} \to \mathbb{C}$ με

$$\tau(T) = \langle T\xi_e, \xi_e\rangle, \;\; T \in C^*_{red}$$

Τότε ο $(C^*_{red}\ ,\tau)$ είναι μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας. Επίσης, το $\tau_G : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ (βλ. παραπάνω) ταυτίζεται με αυτό το τ πάνω στην εικόνα $\lambda[\mathbb{C}G] \subseteq C^*_{red}$.

Εντελώς αντίστοιχα αν πληρώσουμε τον υπόχωρο $\text{span}(\lambda(g))_{g\in G}$ ως προς την ασθενέστερη τοπολογία WOT στον $B(\ell^2(G))$, παίρνουμε την Von Neumann Άλγεβρα της ομάδας G, $\mathcal{L}(G)$.

3.4 Η Αναγκαιότητα του Συναρτησιακού Λογισμού

Είναι λογικό σε μια θεωρία τυχαίων μεταβλητών στο πνεύμα της κλασικής θεωρίας πιθανοτήτων, να επιθυμούμε μια **συνάρτηση** μιας τυχαίας μεταβλητής, να είναι πάλι τυχαία μεταβλητή.

Στην κλασική θεωρία, αυτό είναι άμεσο (μέχρι και) για Borel συναρτήσεις.[13] Αν (Ω, Σ, μ) χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{C}$ τυχαία μεταβλητη, και $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση, τότε για να είναι η $f(X) := f \circ X$ τυχαία μεταβλητή, θα πρέπει η αντίστροφη είκονα Borel υποσυνόλου του $\mathbb{C}$ να ανήκει στην Σ. Δηλαδή,

$$(f \circ X)^{-1}[B] = (X^{-1} \circ f^{-1})[B] = X^{-1}(f^{-1}[B]) \in \Sigma,$$

για κάθε $B \subseteq \mathbb{C}$ Borel. Άρα η f πρέπει να αντιστρέφει Borel σε Borel, όπως ισχυριστήκαμε.

Έστω τώρα πως είμαστε σε έναν μη-αντιμεταθετικό χώρο $(\mathcal{A}, \phi)$. Θεωρούμε ένα στοιχείο $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, και μια συνάρτηση f. Ποιά είναι τότε η έννοια του $f(\mathbf{a})$; Αν p πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, τότε το $p(\mathbf{a})$ έχει σαφές νόημα, π.χ.: αν $p(z) = \lambda z^2$, τότε το $p(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}^2 = \lambda \mathbf{a}\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Αν όμως $g(z) = \sqrt{z}$, τότε ποιό είναι το νόημα του $g(\mathbf{a}) = \sqrt{\mathbf{a}}$; Διακρίνουμε το παρακάτω καίριο ερώτημα:

- Για ποιές συναρτήσεις f και για ποιά στοιχεία $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ έχει 'νόημα' το $f(\mathbf{a})$; Πότε δηλαδή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $f(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$;

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το ερώτημα, θα εντάξουμε περισσότερη δομή στους χώρους που θα δουλεύουμε. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να απαντήσουμε το παραπάνω ερώτημα, κάνοντας χρήση του 'συναρτησιακού λογισμου' για C^*-Άλγεβρες και W^*-Άλγεβρες.[14]

[13] Γενικά, για μετρήσιμες συναρτήσεις, όμως εδώ περιοριζόμαστε στην Borel σ-άλγεβρα στο $\mathbb{C}$, με τη συνήθη τοπολογία.

[14] Έτσι λοιπόν βλέπει κανείς και έναν καλο λόγο για να δουλέψουμε σε C^*- ή W^*-Άλγεβρες.

Συνεχής Συναρτησιακός Λογισμός

Στην εισαγωγική ενότητα είδαμε στην Πρόταση 2.3 πως αν $\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$ η αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα που παράγεται από ένα στοιχείο και την μονάδα, με φορέα Φ υπάρχει ένας $*$-ισομορφισμός $\tau : C(\Phi) \to C(\sigma(\mathbf{a}))$ και κατ' επέκταση ένας $*$-ισομορφισμός $\zeta : C(\sigma(\mathbf{a})) \to A_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να αντιμετατίθεται.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} \arrow[r, "\mathbf{x} \to \hat{\mathbf{x}}"] \arrow[dr, "\zeta^{-1}"'] & C(\Phi) \arrow[d, "\tau"] \\
& C(\sigma(\mathbf{a}))
\end{tikzcd}$$

Υπενθυμίζεται πως αντιμεταθετικές C^*-υπάλγεβρες παράγουν μόνο τα **φυσιολογικά** στοιχεία, αφού απαιτείται $\mathbf{a}^*\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{a}^*$. Επιπλέον, έχουμε $\zeta^{-1}(\mathbf{a})(t) = t$ για κάθε $t \in \sigma(\mathbf{a})$, δηλαδή η εικόνα του στοιχείου $\mathbf{a}$ στον $C(\sigma(\mathbf{a}))$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Συνεπώς, αν $f \in C(\sigma(\mathbf{a}))$ τότε $f = f(\zeta^{-1}(\mathbf{a}))$ οπότε έχει νόημα να ονομάσουμε το $\zeta(f) := f(\mathbf{a})$. Ο ζ καλείται **συνεχής συναρτησιακός λογισμός** για το στοιχείο $\mathbf{a}$. Έχουμε την ακόλουθη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα:

Αν $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό και $f : \sigma(\mathbf{a}) \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε $f(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}$

Για παράδειγμα, στο Λήμμα 2.6 εφαρμόζεται ισχυρά η παραπάνω κατασκευή για την απόδειξη της ύπαρξης της 'τετραγωνικής ρίζας' ενός αυτοσυζυγούς στοιχείου με θετικό φάσμα.

Borel Συναρτησιακός Λογισμός

Γενικα, για $\mathbf{a}$ φυσιολογικό στοιχείο της τυχαίας C^*-άλγεβρας $\mathcal{A}$, $f(\mathbf{a}) \notin \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$, για f φραγμένη Borel. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A}$ μια αντιμεταθετική C^*-άλγεβρα που είναι ισόμορφη με την $C([0,1])$, τότε η χ_E για $E \subseteq [0,1]$ είναι φραγμένη Borel συνάρτηση με $\chi_E = \chi_E^2 = \chi_E^*$ (δηλαδή προβολή), αλλά προφανώς $\chi_E \notin C([0,1])$. Αν $\theta : \mathcal{A} \to C([0,1])$ ο $*$-ισομορφισμός του Θεωρήματος Gelfand–Naimark, επειδή είναι επί,

$$\theta^{-1}(\chi_E)^2 = \theta^{-1}(\chi_E^2) = \theta^{-1}(\chi_E^*) = \theta^{-1}(\chi_E)^* = \theta^{-1}(\chi_E) \notin \mathcal{A}$$

Επειδή οι προβολές στον $C([0,1])$ είναι ακριβώς οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις και οι μόνες που είναι συνεχείς είναι οι 'τετριμμένες' $\chi_\varnothing$ και $\chi_{[0,1]}$, καταλήγουμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει μη-τετριμμένες προβολές. Συνεπώς, για $\varnothing \neq S \subsetneq \sigma(\mathbf{a})$ Borel, $\chi_S(\mathbf{a}) \notin \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} \subseteq \mathcal{A}$.

Σκοπός είναι να δείξουμε ότι αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός και f φραγμένη Borel τότε το $f(T)$ ορίζεται στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ και ανήκει στην Von-Neumann άλγεβρα που παράγει ο T, δηλαδή $f(T) \in \mathcal{A}''_{(T,\mathbf{1})}$.

Θα συμβολίζουμε με $B(X)$ την C^*-άλγεβρα των φραγμένων Borel συναρτήσεων επί του X. Ο συνεχής συναρτησιακός λογισμός που περιγράφεται παραπάνω μας δίνει έναν $*$-ισομορφισμό $\zeta : C(\sigma(T)) \to \mathcal{A}_{(T,\mathbf{1})}$. Σκοπός είναι να επεκτείνουμε κατά μοναδικό τρόπο τον ζ σε έναν $*$-ομομορφισμό

$$\widetilde{\zeta} : B(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Ορίζουμε και την παρακάτω τοπολογία στον $B(X)$, που θα καλούμε μ-τοπολογία:

$$f_\lambda \xrightarrow{\mu\text{-τοπ.}} f_0 \iff \int f_\lambda d\nu \to \int f_0 d\nu \quad \forall \nu \text{ μέτρο επί του } X$$

Η τοπολογία αυτή είναι ακριβώς η weak-$*$ τοπολογία στον $M(X)^*$. Πράγματι, ορίζοντας για κάθε $f \in B(X)$, $\tilde{f} : M(X) \to \mathbb{C}$, με $\tilde{f}(\nu) = \int_X f d\nu$ ($\tilde{f} \in M(X)^*$), έχουμε

$$\begin{aligned} f_\lambda \xrightarrow{\mu\text{-τοπ.}} f_0 &\iff \int f_\lambda d\nu \to \int f_0 d\nu \quad \forall \nu \in M(X) \\ &\iff \tilde{f}_\lambda(\nu) \to \tilde{f}_0(\nu) \quad \forall \nu \in M(X) \\ &\iff \hat{\nu}(\tilde{f}_\lambda) \to \hat{\nu}(\tilde{f}_0) \quad \forall \nu \in M(X) \end{aligned}$$

όπου $\hat{\nu} : M(X)^* \to \mathbb{C}$, με $\hat{\nu}(\phi) = \phi(\nu), \forall \phi \in M(X)^*$, η κανονική εμφύτευση. Συνεπώς, η σχέση

$$f_\lambda \xrightarrow{\mu\text{-τοπ.}} f_0 \iff \tilde{f}_\lambda \xrightarrow{w^*} \tilde{f}_0$$

ορίζει την μ-τοπολογία στον $B(X)$.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός και $\zeta : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ο $*$-ομομορφισμός που προκύπτει από τον συνεχή συναρτησιακό λογισμό. Τότε ο ζ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε έναν $*$-ομομορφισμό*

$$\widetilde{\zeta} : B(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

που είναι συνεχής από την μ-τοπολογία στην WOT-τοπολογία. Θα συμβολίζουμε $\widetilde{\zeta}(f) := f(T)$

Ιδέα Απόδειξης. 1) Ύπαρξη: Ορίζουμε για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\phi_{\xi,\eta} : C(\sigma(T)) \to \mathbb{C} \text{ με } \phi_{\xi,\eta}(f) := \langle \zeta(f)\xi, \eta \rangle$$

η οποία είναι φραγμένη με $\|\phi_{\xi,\eta}(f)\| \leqslant \|f\|\|\xi\|\|\eta\|$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz–Markov–Kakutani (Α΄.1), υπάρχει μοναδικό μέτρο $\mu_{\xi,\eta}$ στο $\sigma(T)$ ώστε:

$$\langle \zeta(f)\xi, \eta\rangle = \phi_{\xi,\eta}(f) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{\xi,\eta}$$

για κάθε $f \in C(\sigma(T))$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to M(\sigma(T)) : (\xi, \eta) \longmapsto \mu_{\xi,\eta}$$

η οποία είναι γραμμική ως προς την πρώτη συντεταγμένη και αντι-γραμμική ως προς την δεύτερη συντεταγμένη. Επιπλέον ισχύουν $\mu_{\xi,\eta} = \overline{\mu_{\eta,\xi}}$ και $g \cdot \mu_{\xi,\eta} = \mu_{\zeta(g)\xi,\eta}$ για κάθε $g \in C(\sigma(T))$. Οπότε η απεικόνιση που ορίζεται για κάθε $f \in B(\sigma(T))$ από την σχέση

$$[\xi, \eta] := \int_{\sigma(T)} f d\mu_{\xi,\eta}$$

είναι μια **φραγμένη ημι-αντιδιγραμμική μορφή** στον $\mathcal{H}$. Συνεπώς, από την Πρόταση Α΄.1 υπάρχει μοναδικός τελεστής που θα συμβολίζουμε με $\widetilde{\zeta}(f)$ ώστε:

$$\langle \widetilde{\zeta}(f)\xi, \eta\rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{\xi,\eta} = [\xi, \eta] \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{\zeta} : B(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ με } f \longmapsto \widetilde{\zeta}(f)$$

είναι ένας $*$**-ομομορφισμός που επεκτείνει** τον ζ.

2) <u>Συνέχεια</u>: Έστω ένα δίκτυο $(f_\lambda)_\lambda$ με $f_\lambda \xrightarrow{\mu\text{-τοπ.}} f_0$. Δηλαδή έχουμε για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$|\langle \widetilde{\zeta}(f_\lambda - f_0)\xi, \eta\rangle| = \Big| \int_{\sigma(T)} (f_\lambda - f_0) d\mu_{\xi,\eta} \Big| \xrightarrow{\text{υπόθεση}} 0 \Rightarrow \widetilde{\zeta}(f_\lambda) \xrightarrow{WOT} \widetilde{\zeta}(f_0)$$

Για την μοναδικότητα του $\widetilde{\zeta}$ (όπως και για τις λεπτομέρειες της απόδειξης) ο αναγνώστης παραπέμπεται στην βιβλιογραφία (π.χ. Arveson).

$\square$

Πρόταση 3.6. *Η εικόνα $\widetilde{\zeta}(f)$ για κάθε $f \in B(\sigma(T))$ ανήκει στην Von-Neumann άλγεβρα που παράγεται από τον T.*

Απόδειξη. Έστω $S \subseteq \sigma(T)$ και $K \subseteq S \subseteq U$, K συμπαγές και U ανοιχτό. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Urysohn στον συμπαγή και Hausdorff $\sigma(T)$, βρίσκουμε $f_{U,K}$ συνεχή με supp$f_{U,K} \subseteq U$ και $f_{U,K}|K = 1$. Θέτουμε για σύνολο δεικτών το

$$\mathcal{W} := \{W = (U, K) : S \subseteq U \text{ ανοιχτό και } K \subseteq S \text{ συμπαγές}\}$$

με μερική διάταξη

$$(U_0, K_0) \leqslant (U_1, K_1) \iff U_1 \subseteq U_0 \text{ και } K_0 \subseteq K_1$$

Δηλαδή, προσεγγίζουμε το S με συμπαγή από 'μέσα' και ανοιχτά από 'έξω.'

Αν κατασκευάσουμε το δίκτυο $(f_W)_{W \in \mathcal{W}}$ κατά τα παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε πως για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $W_0 \in \mathcal{W}$ έτσι ώστε για κάθε $W \geqslant W_0$,

$$\Big| \int_{\sigma(T)} (f_W - \chi_S)\, d\nu \Big| \leqslant \varepsilon \quad \forall \nu \in M(\sigma(T))$$

Δηλαδή $f_W \xrightarrow{\mu-\text{τοπ.}} \chi_S$. Από την συνέχεια του $\widetilde{\zeta}$ έχουμε ότι

$$\widetilde{\zeta}(f_W) \xrightarrow{WOT} \widetilde{\zeta}(\chi_S)$$

???? Επειδή $\zeta(f) \in \mathcal{A}_{(T,\mathbf{1})} = \overline{\mathcal{A}_{(T,\mathbf{1})}}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{\mathcal{A}_{(T,\mathbf{1})}}^{SOT}$ και από το Bicommutant Theorem του Von-Neumann (Θεώρημα 2.5) $\overline{\mathcal{A}_{(T,\mathbf{1})}}^{SOT} = \mathcal{A}''_{(T,\mathbf{1})}$ έχουμε ότι $\zeta(f) \in \mathcal{A}''_{(T,\mathbf{1})}$ για κάθε $f \in C(\sigma(T))$. ????

Οπότε αν $R \in \mathcal{A}'_{(T,\mathbf{1})}$ τότε για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\langle \widetilde{\zeta}(\chi_S) R\xi, \eta \rangle \longleftarrow \langle \widetilde{\zeta}(f_W) R\xi, \eta \rangle = \langle R\widetilde{\zeta}(f_W)\xi, \eta \rangle \longrightarrow \langle R\widetilde{\zeta}(\chi_S)\xi, \eta \rangle$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $R \in \mathcal{A}'_{(T,\mathbf{1})}$, $\widetilde{\zeta}(\chi_S)R = R\widetilde{\zeta}(\chi_S)$, δηλαδή οι εικόνες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων υποσυνόλων του $\sigma(T)$ ανήκουν στο $\mathcal{A}''_{(T,\mathbf{1})}$. Επειδή η τυχαία φραγμένη Borel συνάρτηση προσεγγίζεται ομοιόμορφα από απλές που είναι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών και από την συνέχεια του $\widetilde{\zeta}$, προκύπτει ότι $f(T) \in \mathcal{A}''_{(T,\mathbf{1})}$ για κάθε $f \in B(\sigma(T))$.

□

Συνοψίζοντας έχουμε την ακόλουθη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα:

Αν $\mathcal{M}$ μια W^*-άλγεβρα, $T \in \mathcal{M}$ φυσιολογικός και $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ φραγμένη Borel, τότε $f(T) \in \mathcal{M}$

3.5 Κατανομές Μη-Αντιμεταθετικών Τυχαίων Μεταβλητών

Σε έναν κλασικό χώρο (Ω, Σ, μ), κάθε τυχαία μεταβλητή X ορίζει μια *κατανομή* (αλλιώς *νόμο*, probability law/distribution), Θέτοντας

$$\tau_X : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to [0,1], \text{ με: } \tau_X(B) = \mu(X^{-1}[B]) = \mu([X \in B])$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Συνεπώς μπορουμε να γράφουμε και

$$\mu([X \in B]) = \int_B d\tau_X$$

Σε αντιστοιχία με τα παραπάνω σε έναν μη-αντιμεταθετικό χώρο $(\mathcal{A}, \phi)$, μπορούμε να ορίσουμε την 'κατανομή,' ενός στοιχείου $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, και υπο ποία έννοια;

'Αναλυτική' Κατανομή

Η 'αναλυτική κατανομή' προσδιορίζεται για φυσιολογικά στοιχεία ενός μη-αντιμεταθετικού χώρου πιθανότητας και θυμίζει τις κατανομές κλασικών τυχαίων μεταβητών. Συγκεκριμένα, για τα αυτοσυζυγή στοιχεία, η αναλυτική κατανομή είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με φορέα το φάσμα του στοιχείου. Υπό αυτήν την έννοια, τα αυτοσυζυγή στοιχεία συχνά ταυτίζονται με τις πραγματικές τυχαίες μεταβητές.

Οι Nica and Speicher [REF] δίνουν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας μη-αντιμετιαθετικός χώρος πιθανότητας και $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό.* **Αν** *υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{C}$ ώστε:*

$$\int z^k \bar{z}^l d\mu(z) = \phi(\mathbf{a}^k \mathbf{a}^{*l}) \quad \text{για κάθε } k, l \in \mathbb{N}$$

τότε το μ προσδιορίζεται μοναδικά και το καλούμε αναλυτική $*$-κατανομή.

Εδώ θα περιοριστούμε σε C^*-χώρους πιθανότητας, όπου αναλυτική κατανομή υπάρχει πάντα. Σταθεροποιούμε έναν C^*-χώρο πιθανότητας $(\mathcal{A}, \phi)$.

Φυσιολογικά Στοιχεία

Έστω $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Τότε η C^*-άλγεβρα που παράγει το $\mathbf{a}$ και η μονάδα $\mathbf{e}$, είναι αντιμεταθετική με μορφή

$$\mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})} = \text{cls}\{p(z, \bar{z}) : \ p \text{ πολυώνυμο δύο μεταβλητών}\}$$

Ο συναρτησιακός λογισμός $\zeta : C(\sigma(\mathbf{a})) \to \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$ είναι ένας $*$-ισομορφισμός αλγεβρών (βλ. Πρόταση 2.3). Ορίζουμε

$$\widetilde{\phi} : C(\sigma(\mathbf{a})) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \widetilde{\phi}(f) = \phi(\zeta(f))$$

Τότε η $\widetilde{\phi}$ είναι ένα **θετικό**, **γραμμικό** (επειδή ζ $*$-ισομορφισμός) συναρτησιακό στον $C(\sigma(\mathbf{a}))$ με $\widetilde{\phi}(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{e}) = 1$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz-Markov-Kakutani (βλ. Θεώρημα Α΄.1 και Παράδειγμα 2.1) έχουμε ότι υπάχει **μοναδικό** μέτρο πιθανότητας μ στο $\sigma(\mathbf{a})$ που αναπαριστά το $\widetilde{\phi}$, δηλαδή

$$\widetilde{\phi}(f) = \int f d\mu, \quad \text{για κάθε} \quad f \in C(\sigma(\mathbf{a}))$$

Επειδή, ο ζ απεικονίζει πολυώνυμα $p(z, \bar{z}) \in C(\sigma(\mathbf{a}))$ σε πολυώνυμα $p(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) \in \mathcal{A}_{(\mathbf{a},\mathbf{e})}$, έχουμε

$$\phi(\mathbf{a}^k \mathbf{a}^{*l}) = \widetilde{\phi}(z^k \bar{z}^l) = \int z^k \bar{z}^l d\mu$$

για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$. Τέλος, επειδή το $\sigma(\mathbf{a})$ είναι συμπαγές (βλ. Θεώρημα 2.1) και το μ συγκεντρώνεται στο $\sigma(\mathbf{a})$, το μ έχει συμπαγή φορέα.

Συνεπώς, σε C^*-χώρους πιθανότητας η αναλυτική κατανομή μ υπάρχει πάντα και από τα παραπάνω γίνεται αισθητή η απαίτηση τα στοιχεία για τα οποία ορίζεται να είναι φυσιολογικά, αφού χρησιμοποιούμε ισχυρά, την θεωρία των αντιμεταθετικών C^*-αλγεβρών.

Αυτοσυζυγή Στοιχεία

Έστω τώρα $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές. Προφανώς το $\mathbf{a}$ είναι φυσιολογικό, οπότε από τα παραπάνω υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στο $\sigma(\mathbf{a})$ ώστε

$$\phi(f(\mathbf{a})) = \int f d\mu, \quad \text{για κάθε} \quad f \in C(\sigma(\mathbf{a}))$$

Όμως από την Πρόταση 2.5, έχουμε ότι το $\sigma(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}$. Άρα η κατανομή του $\mathbf{a}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Επίσης, για κάθε πολυώνυμο p έχουμε $p(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*) = q(\mathbf{a})$. Κατ΄ επέκταση, για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$

$$\phi(\mathbf{a}^k \mathbf{a}^{*l}) = \phi(\mathbf{a}^{(k+l)}) = \int z^{(k+l)} d\mu(z)$$

Συνεπώς οι κατανομές (και ροπές) αυτοσυζυγών στοιχείων C^*-χώρων πιθανότητας έχουν την κλασική ερμηνεία.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε πως η απαίτηση η αναλυτική κατανομή να έχει συμπαγή φορέα είναι περιοριστική και ειδικότερα αποκλείει τυχαίες μεταβλητές με κανονική κατανομή, αφού η κανονική κατανομή φέρεται σε όλο το $\mathbb{R}$ που δεν είναι συμπαγές.

Όμως, η κανονική κατανομή χαρακτηρίζεται μοναδικώς από τις ροπές της. Συνεπώς, είναι σκόπιμο να επεκτείνεται (όπου είναι χρήσιμο) ο ορισμός της αναλυτικής κατανομής σε μέτρα πιθανότητας τα οποία χαρακτηρίζονται πλήρως από τις ροπές τους, δηλαδή

$$\int p(z,\bar{z})d\mu = \int p(z,\bar{z})d\nu, \quad \forall p \text{ πολυώνυμο } \quad \Rightarrow \mu = \nu$$

χωρίς κατ' ανάγκη να έχουν συμπαγή φορέα.

'Αλγεβρική' Κατανομή

Όπως παρατηρούν οι Nica and Speicher [REF] για το αυθαίρετο στοιχείο $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ δεν υπάρχει 'βολική αναλυτική δομή για την περιγραφή της κατανομής του.' Συνεπώς αυτή ορίζεται ως καθαρά αλγεβρικό αντικείμενο.

Άρχικά θα ορίσουμε την άλγεβρα (με μονάδα) $\mathbb{C}[X, X^*]$, που παράγεται από δύο μη-αντιμεταθετικές μεταβλητές X και X^*. Πιο συγκεκριμένα, η $\mathbb{C}[X, X^*]$ έχει ως βάση μονώνυμα, της μορφής $X^{\alpha(1)} \dots X^{\alpha(k)}$, $k \geqslant 0$ και $\alpha(1), \dots, \alpha(k) \in \{1, *\}$. Ο πολλαπλασιασμός γίνεται με παραθέτιση και το $*$ απλά πάει το X στο X^*.

Ορισμός 3.3. *Έστω* $\mathbf{a}$ *μια τυχαία μεταβλητή σε έναν μη-αντιμεταθετικό χώρο* $(\mathcal{A}, \phi)$*. Η αλγεβρική* $*$*-κατανομή του* $\mathbf{a}$ *είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό*

$$\mu : \mathbb{C}[X, X^*] \to \mathbb{C}$$

που ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu(X^{\alpha(1)} \dots X^{\alpha(k)}) = \phi(\mathbf{a}^{\alpha(1)} \dots \mathbf{a}^{\alpha(k)})$$

για κάθε $k \geqslant 0$ *και* $\alpha(1), \dots, \alpha(k) \in \{1, *\}$.

Συνεπώς έχουμε ότι ο χώρος των (αλγεβρικών) $*$-κατανομών είναι το σύνολο τον γραμμικών συναρτησιακών $\mu : \mathbb{C}[X, X^*] \to \mathbb{C}$, με $\mu(\mathbf{1}) = 1$, και άρα παίζει τον ρόλο του $M_1(\Omega)$ στην κλασική θεωρία.

Παρατηρούμε πως ο παραπάνω ορισμός μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις κατανομές μεταβλητών που ανήκουν σε **διαφορετικές** άλγεβρες αφού οι (αλγεβρικές) κατανομές ορίζονται πάνω στον ίδιο χώρο $\mathbb{C}[X, X^*]$.

Κοινές Κατανομές (Joint Distributions)

Σταθεροποιούμε μια οικογένεια $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s\} \subseteq \mathcal{A}$ και θεωρούμε τον χώρο

$$\mathbb{C}[X_1, X_1^*, \ldots, X_s, X_s^*]$$

των μη-αντιμεταθετικών πολυωνύμων, ο οποίος είναι ίδιος με τον $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{2s}]$ με βάση μονώνυμα της μορφής $X_{r_1} \ldots X_{r_n}, 1 \leqslant r_i \leqslant s$, και πολλαπλασιασμό με παραθέτιση. Υπάρχει, μοναδικός αλγεβρικός ομομορφισμός,

$$h : \mathbb{C}[X_1, X_1^*, \ldots, X_s, X_s^*] \to \mathcal{A}, \quad P \longmapsto P(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_s)$$

που ορίζεται (μοναδικώς) από το $h(X_r) = \mathbf{a}_r$, και $h(X_r^*) = \mathbf{a}_r^*, r \leqslant s$.

Ορισμός 3.4. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας και $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s\} \subseteq \mathcal{A}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών. Ορίζουμε την κοινή κατανομή των $\mathbf{a}_i, i \leqslant s$ ως το γραμμικό συναρτησιακό $\mu : \mathbb{C}[X_1, X_1^*, \ldots, X_s, X_s^*] \to \mathbb{C}$ με*

$$\mu(P) = \phi(P(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_s)), \quad P \in \mathbb{C}[X_1, X_1^*, \ldots, X_s, X_s^*]$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύτεται κατάλληλα για άπειρες οικογένειες (αριθμήσιμες ή μη). Όπως και για της απλές κατανομές, που περιγράφηκαν στην παραπάνω ενότητα, η κοινή κατανομή αυτοσυζυγών στοιχείων ταυτίζεται με την αντίστοιχη έννοια από την κλασική θεωρία.

Σύγκλιση ως προς την Κατανομή

Ορισμός 3.5. *Έστω $(\mathcal{A}_N, \phi_N)$, $N \in \mathbb{N}$ και $(\mathcal{A}, \phi)$ μη-αντιμεταθετικοί χώροι πιθανότητας. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το στοιχείο $\mathbf{a}_N \in \mathcal{A}_N$. Τότε η $(\mathbf{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς την $*$-κατανομή ($N \to +\infty$) στο στοιχείο $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$*

$$\mathbf{a}_N \xrightarrow{*\text{-}dist} \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{N \to +\infty} \phi_N(\mathbf{a}_N^n {\mathbf{a}^*}_N^m) = \phi(\mathbf{a}^n \mathbf{a}^{*m}), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε πως επειδή το ϕ είναι γραμμικό, η παραπάνω συνθήκη επεκτείνεται σε όλα τα πολυώνυμα p, δηλαδή

$$\mathbf{a}_N \xrightarrow{*\text{-dist}} \mathbf{a} \ \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \phi_N(p(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_N^*)) = \phi(p(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*))$$

Αν η ακολουθία $(\mathbf{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ αποτελείται από αυτοσυζυγή στοιχεία, τότε η παραπάνω σύγκλιση απλοποιείται σε

$$\mathbf{a}_N \xrightarrow{\text{dist}} \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{N \to +\infty} \phi_N(\mathbf{a}_N^n) = \phi(\mathbf{a}^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Πρόταση 3.7. *Έστω $(\mathbf{a}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από φυσιολογικά στοιχεία με $\mathbf{a}_N \xrightarrow{*\text{-}dist} \mathbf{a}_0$. Τότε $\mu_N \xrightarrow{\text{ασθενώς}} \mu_0$, όπου τα μ είναι αναλυτικές κατανομές.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Έχουμε ότι για κάθε πολυώνυμο $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\int p\ d\mu_N \to \int p\ d\mu_0$$

και θα δείξουμε ότι

$$\int f d\mu_N \to \int f d\mu_0$$

Για κάθε $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές και μέτρο μ έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{C}} f d\mu = \int_K f d\mu + \int_{K^{\complement}} f d\mu$$

Έστω πως $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πολυωνύμων που να προσεγγίζει ομοιόμορφα την f πάνω στο K. Τέτοια ακολουθία υπάρχει πάντα από το Θεώρημα Stone–Weierstrass (Α΄.4). Προσθαφαιρώντας το $\int_{\mathbb{C}} p^k d\mu$ και συλλέγοντας τους όρους κατάλληλα, έχουμε:

$$\int_{\mathbb{C}} f d\mu = \int_K (f - p^k) d\mu + \int_K p^k d\mu + \int_{K^{\complement}} f d\mu$$

Συνεπώς,

$$\left|\int f d\mu_N - \int f d\mu_0\right| =$$
$$\left|\int_K (f - p^k) d\mu_N + \int_K p^k d\mu_N + \int_{K^{\complement}} f d\mu_N - \int_K (f - p^k) d\mu_0 - \int_K p^k d\mu_0 - \int_{K^{\complement}} f d\mu_0\right| \leqslant$$
$$\underbrace{\left|\int_K (f - p^k) d\mu_N\right|}_{\text{(I)}} + \underbrace{\left|\int_K (f - p^k) d\mu_0\right|}_{\text{(II)}} + \underbrace{\left|\int_K p^k d\mu_N - \int_K p^k d\mu_0\right|}_{\text{(III)}} + \underbrace{\left|\int_{K^{\complement}} f d\mu_N\right|}_{\text{(IV)}} + \underbrace{\left|\int_{K^{\complement}} f d\mu_0\right|}_{\text{(V)}}$$

(*)

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $N \geqslant N_0$ το άθροισμα της (*) να είναι μικρότερο από ε. Θα ελέγξουμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Οι (I) και (II) γίνονται αυθαίρετα μικροί προσεγγίζοντας όσο κοντά θέλουμε την f με την ακολουθία $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$, ανεξαρτήτως του N. Ο παράγοντας (III) ελέγχεται από το ότι $\mathbf{a}_N \xrightarrow{*\text{-dist}} \mathbf{a}_0$. Τα παραπάνω ισχύουν για οποιαδήποτε επιλογή του συμπαγούς K.

Μένουν οι παράγοντες

$$\text{(IV)} = \left| \int_{K^{\complement}} f d\mu_N \right| \quad \text{και} \quad \text{(V)} = \left| \int_{K^{\complement}} f d\mu_0 \right|$$

Η απόδειξη τελειώνει αν για κάθε $\delta_1, \delta_2 > 0$, μπορούμε να βρούμε $K \subseteq \mathbb{C}$ ώστε

$$\sup_N \mu_N(K^{\complement}) < \delta_1 \quad \text{και} \quad \mu_0(K^{\complement}) < \delta_2$$

Για το πρώτο, από την Ανισότητα Markov έχουμε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $\alpha > 0$:

$$\mu_N\left([|z|^2 > \alpha]\right) < \frac{1}{\alpha} \int |z|^2 d\mu < +\infty$$

Το ότι είναι πεπερασμένο προκύπτει από την ύπαρξη όλων των ροπών. Θέτουμε $K_\alpha := [|z|^2 \leqslant \alpha]$ το οποίο είναι συμπαγές ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Συνεπώς, για δεδομένο δ_1, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε K_α συμπαγές και $\sup_N \mu_N(K^{\complement}) < \delta_1$. Το δεύτερο προκύπτει άμεσα από το ότι το μ_0 είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{C}$.

□

Παρατηρούμε πως αν η ακολουθία αποτελείται από αυτοσυζυγή στοιχεία τότε έχουμε

$$\mathbf{a}_N \xrightarrow{\text{dist}} \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \lim_N \int_{\mathbb{R}} f d\mu_N = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

δηλαδή τον κλασικό ορισμό της σύγκλισης ως προς την κατανομή μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών.

Για $(\mathcal{A}, \phi)$ C^*- και W^*-χώρο πιθανότητας, οι παρακάτω πρόταση δείχνει την σχέση της τοπολογίας της άλγεβρας $\mathcal{A}$ με την σύγκλιση ως προς την κατανομή.

Πρόταση 3.8. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας C^* (ή W^*)-χώρος πιθανότητας και $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ μια $\|\cdot\|$-(ή WOT)-συγκλίνουσα ακολουθία, $\mathbf{a}_n \xrightarrow{\|\cdot\| \ (\text{ή } WOT)} \mathbf{a}_0$. Τότε, $\mathbf{a}_n \xrightarrow{*-dist} \mathbf{a}_0$.*

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ με $\|\mathbf{a}_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|\mathbf{a}_0\|$, και $k, l \in \mathbb{N}$. Επειδή, η $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα, έχουμε ότι $\|\mathbf{a}_n^k \mathbf{a}^{*l}_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|\mathbf{a}_0^k \mathbf{a}^{*l}_0\|$. Τέλος, επειδή μια κατάσταση είναι $\|\cdot\|$-συνεχής έχουμε:

$$\mathbf{a}_n^k \mathbf{a}^{*l}_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbf{a}_0^k \mathbf{a}^{*l}_0 \Rightarrow \phi(\mathbf{a}_n^k \mathbf{a}^{*l}_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \phi(\mathbf{a}_0^k \mathbf{a}^{*l}_0)$$

□

4 ‘Ελεύθερες’ Τυχαίες Μεταβλητές

4.1 Κλασική Ανεξαρτησία

Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ οικογένεια υπαλγεβρών. Θα καλούμε την οικογένεια **ανεξάρτητη**, αν $[\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l] = 0$[15] για κάθε $k \neq l \in I$ (δηλ. αντιμετατίθονται) και:

$$\phi(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n) = \phi(\mathbf{a}_1) \dots \phi(\mathbf{a}_n), \qquad \mathbf{a}_k \in \mathcal{A}_{i_k}$$

και $k \neq l$ συνεπάγεται $i_k \neq i_l$.

Παρατήρηση 4.1. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ και $(\mathcal{B}, \psi)$ δύο μη-αντιμεταθετικοί χώροι πιθανότητας. Τότε το*

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \phi \otimes \psi)$$

περιέχει τις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ ως ανεξάρτητες υπάλγεβρες.

Απόδειξη. Ταυτίζουμε την $\mathcal{A}$ με την υπάλγεβρα $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \otimes \mathbf{1} = \{\mathbf{a} \otimes \mathbf{e} : \ \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{e} \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, και την $\mathcal{B}$ με την $\mathcal{B}' := \mathbf{1} \otimes \mathcal{B}$, ορισμένη αντίστοιχα. Το οτι οι $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ είναι υπάλγεβρες προκύπτει απ' τις ιδιότητες του τανυστικού γινομένου. Έχουμε:

α) $\underline{[\mathcal{A}', \mathcal{B}'] = 0}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'\mathcal{B}' - \mathcal{B}'\mathcal{A}' &= \Big((\mathcal{A} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \mathcal{B})\Big) - \Big((\mathbf{1} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{A} \otimes \mathbf{1})\Big) \\
&= \Big(\mathcal{A}\mathbf{1}\Big) \otimes \Big(\mathbf{1}\mathcal{B}\Big) - \Big(\mathbf{1}\mathcal{A}\Big) \otimes \Big(\mathcal{B}\mathbf{1}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

β) $\underline{\phi \otimes \psi(\mathbf{a}'\mathbf{b}') = \phi(\mathbf{a})\psi(\mathbf{b})}$: Έστω $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{1} \otimes \mathbf{b}$, για κάποια $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ και $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi \otimes \psi(\mathbf{a}'\mathbf{b}') &= \phi \otimes \psi\Big((\mathbf{a} \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \mathbf{b})\Big) \\
&= \phi \otimes \psi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \\
&\overset{\text{ορ.}}{=} \phi(\mathbf{a})\psi(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

□

[15] Το $[.,.]$ είναι ο μεταθέτης, $[A, B] = AB - BA$.

4.2 Ελευθερία: Βασικοί Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 4.1. *Σταθεροποιούμε έναν μη-αντιμεταθετικό χώρο πιθανότητας* $(\mathcal{A}, \phi)$.

(i) *Έστω* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$, *με* $\mathbf{e} \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$ *οικογένεια υπαλγεβρών της* $\mathcal{A}$. *Η οικογένεια καλείται* ***ελεύθερη*** *ή ελεύθερα ανεξάρτητη, αν*

$$\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n) = 0$$

όποτε $\phi(\mathbf{a}_j) = 0$, *για κάθε* $j \leqslant n$ *και* $\mathbf{a}_j \in \mathcal{A}_{i_j}$, *με* $i_j \neq i_{j+1}$, *για κάθε* $j \leqslant n-1$.

(ii) *Αν* $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$, *τότε η οικογένεια* $(A_i)_{i\in I}$ *είναι ελεύθερη, αν η οικογένεια* $\Big(\mathcal{A}\big(A_i \cup \{\mathbf{e}\}\big)\Big)_{i\in I}$ *είναι ελεύθερη.*[16]

Αν στο (ii) του Ορισμού 4.1 αντικαταστήσουμε τα A_i με τα μονοσύνολα $\{\mathbf{a}_i\}$, παίρνουμε έναν ορισμό της ελευθερίας μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών $(\mathbf{a}_i)_{i\in I}$.

Αντίστοιχα, αν θέλουμε να πάρουμε τις $*$-άλγεβρες που παράγονται από τα στοιχεία έχουμε την έννοια της $*$-ελευθερίας. Δηλαδή, μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών είναι $*$-ελεύθερη αν οι $*$-άλγεβρες που παράγουν είναι ελεύθερες κατά τον παραπάνω ορισμό.

Μερικές παρατηρήσεις είναι αναγκαίες για την κατανόηση της ελευθερίας. Σταθεροποιούμε έναν χώρο $(\mathcal{A}, \phi)$.

Παρατήρηση 4.2. *Έστω* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *ελεύθερες. Τότε* $\phi(\mathbf{ab}) = \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b})$.

Απόδειξη. Από την γραμμικότητα του ϕ, έχουμε $\phi\big(\mathbf{x} - \phi(\mathbf{x})\mathbf{e}\big) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\mathbf{x} - \phi(\mathbf{x})\mathbf{e} \in \mathcal{A}(\{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{e}\})$. Έφαρμόζοντας τους ορισμούς, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi\big((\mathbf{a} - \phi(\mathbf{a})\mathbf{e})(\mathbf{b} - \phi(\mathbf{b})\mathbf{e})\big) &= 0 \Rightarrow \\
\phi\big(\mathbf{ab} - \mathbf{a}\phi(\mathbf{b})\mathbf{e} - \mathbf{b}\phi(\mathbf{a})\mathbf{e} + \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b})\big) &= 0 \Rightarrow \\
\phi(\mathbf{ab}) - \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}) + \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b}) &= 0 \Rightarrow \\
\phi(\mathbf{ab}) &= \phi(\mathbf{a})\phi(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

□

Η παρακάτω παρατήρηση δίνεται σε μορφή λήμματος, καθώς είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

[16] Η $\mathcal{A}\big(A_i \cup \{\mathbf{e}\}\big)$ είναι η μικρότερη άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{A}$ και τη μονάδα $\mathbf{e}$.

Λήμμα 4.1. *Έστω* $\big\{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \mathbf{b}\big\} \subseteq \mathcal{A}$ *ελεύθερα σύνολα στον* $(\mathcal{A}, \phi)$. *Τότε:*

$$\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{b}\mathbf{a}_2) = \phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) \qquad \text{(‘διάσπαση’)}$$

Απόδειξη. ‘Κεντράροντας’ τα στοιχεία και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ελευθερίας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\big(\mathbf{a}_1 - \phi(\mathbf{a}_1)\mathbf{e}\big)\big(\mathbf{b} - \phi(\mathbf{b})\mathbf{e}\big)\big(\mathbf{a}_2 - \phi(\mathbf{a}_2)\mathbf{e}\big)\Big) &= 0 \\
\phi\Big(\mathbf{a}_1\mathbf{b}\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}\phi(\mathbf{a}_2)\mathbf{e} - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\phi(\mathbf{b})\mathbf{e} + {}& \\
+\mathbf{a}_1\phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2)\mathbf{e} - \phi(\mathbf{a}_1)\mathbf{e}\mathbf{b}\mathbf{a}_2 + \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{a}_2)\mathbf{b} + {}& \\
+\mathbf{a}_2\phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2)\mathbf{e}\Big) &= 0 \qquad \text{(μετά από πράξεις)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{b}\mathbf{a}_2) - \phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) - 2\phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) + {}& \\
+\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) + \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b}\mathbf{a}_2) &= 0 \qquad \text{(γραμμικότητα του } \phi\text{)}
\end{aligned}$$

Τώρα επειδή $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ και $\{\mathbf{b}\}$ ελεύθερα μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi(\mathbf{a}_1\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) = \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) = \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b}\mathbf{a}_2)$$

από την Παρατήρηση 4.3 και συνεπώς

$$2\phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) = \phi(\mathbf{a}_1\mathbf{b})\phi(\mathbf{a}_2) + \phi(\mathbf{a}_1)\phi(\mathbf{b}\mathbf{a}_2)$$

Το ζητούμενο προκύπτει με απλή αντικατάσταση.

□

Παρατήρηση 4.3. *Έστω* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *ελεύθερες,* $\phi(\mathbf{a}) = 0 = \phi(\mathbf{b})$ *και* $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ *(δηλ.: δεν αντιμετατίθονται). Τότε* $\phi(\mathbf{abab}) = 0$.

Απόδειξη. Κατ' ευθείαν από τον ορισμό της ελευθερίας. □

Παρατήρηση 4.4. *Έστω* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$ *ελεύθερες,* $\phi(\mathbf{a}) = 0 = \phi(\mathbf{b})$ *και* $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ *(δηλ.: αντιμετατίθονται). Τότε* $\phi(\mathbf{abab}) = \phi(\mathbf{aabb}) = \phi(\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2) = \phi(\mathbf{a}^2)\phi(\mathbf{b}^2)$, *επειδή* $\mathbf{x}^2 \in \mathcal{A}(\{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{e}\})$, *για κάθε* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$.

Οι Παρατηρήσεις 4.3 και 4.4, φανερώνουν πως η ιδέα της ελευθερίας, έχει ουσία **μόνο** για μη-αντιμεταθετικές τυχαίες μεταβλητές. Δηλαδή, **δύο αντιμεταθετικές τυχαίες μεταβλητές είναι ελεύθερες, μόνο αν τουλάχιστον μια έχει μηδενική δεύτερη ροπή**. Συνεπώς η ελευθερία στις κλασικές τυχαίες μεταβλητές είναι ‘τετριμμένη.’

Πρόταση 4.1. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}$ $*$-ελεύθερες, με ϕ πιστή. Τότε $\mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2 = \mathbb{C}\mathbf{e}$.*

Απόδειξη. Για $x \in \mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2$, έχουμε από υπόθεση ότι x ελεύθερο από το x^*. Έχουμε, $\phi\left((x - \phi(x)\mathbf{e})^*(x - \phi(x)\mathbf{e})\right) = 0$ και επειδή η ϕ είναι πιστή, $(x - \phi(x))^*(x - \phi(x)) = 0$, δηλαδή $x = \phi(x)\mathbf{e} \in \mathbb{C}\mathbf{e}$.

□

Τέλος, η παρακάτω πρόταση φανερώνει πως παρ' όλο που ο ορισμός της ελευθερίας αναφέρεται για της άλγεβρες που παράγουν τα στοιχεία, η ελευθερία ανάγεται και στις C^*-άλγεβρες που παράγουν τα στοιχεία.

Πρόταση 4.2. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας C^*-χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$ μια ελεύθερη οικογένεια στον $(\mathcal{A}, \phi)$. Θέτουμε $\mathcal{B}_i = \overline{\mathcal{A}_i}^{\|\cdot\|}$. Τότε η $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια τυχαία οικογέννεια $i(1), \dots i(k) \in I$ και γράφουμε κάθε στοιχείο $\mathbf{b}_j \in \mathcal{B}_{i(j)}$ ως όριο στοιχείων της $\mathcal{A}_{i(j)}$. Επειδή η ϕ είναι $\|\cdot\|$-συνεχής προκύπτει το ζητούμενο.

□

4.3 Αλγεβρική Σύνδεση με το Ελεύθερο Γινόμενο

Η ενότητα αυτή δίνει ένα κίνητρο για τον όρο 'ελευθερία,' συνδέοντας την ελευθερία υποομάδων με την ελευθερία υπαλγεβρών της άλγεβρας της ομάδας (βλ. Παράδειγμα 3.5).

Ορισμός 4.2. *Έστω G ομάδα και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποομάδων της G. Η $(G_i)_{i\in I}$ καλείται* **ελεύθερη** *αν για κάθε $k \geqslant 1$, και $i(j) \neq i(j+1), j \leqslant k-1$, και για κάθε $g_j \in G_{i(j)}$, $g_j \neq e$, έχουμε*

$$g_1 g_2 \dots g_k \neq e$$

Από τον ορισμό φαίνεται πως οι υποομάδες δεν έχουν σχέσεις μεταξύ τους. Πράγματι, αν πάρουμε ένα τυχαίο στοιχείο $w \in \bigcup_i G_i$ και το απλοποιήσουμε βάσει του κανόνα $h_i^j (h_i^j)^{-1} = e$ και μετέπειτα πολλαπλασιάσουμε όλα τα γειτονικά στοιχεία που ανήκουν στην ίδια υποομάδα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (R_i) της υποομάδας G_i (δηλ. $h_i^j h_i^k = g_i \in G_i$), καταλήγουμε στο

$$w = g_1 g_2 \dots g_k$$

όπου $g_j \in G_{i(j)}$ για κάθε $j \leqslant k$ και $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k)$. Οπότε αν οι υποομάδες δεν έχουν σχέσεις μεταξύ τους τότε το w δεν απλοποιείται περαιτέρω και συνεπώς $w = e$ αν και μόνο αν όλα τα $g_i = e$.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε το ελεύθερο γινόμενο μιας οικογένειας ομάδων $G_i, i \in I$.

Ορισμός 4.3. *Έστω $G_i, i \in I$ οικογένεια ομάδων με μονάδες e_i. Το* **ελεύθερο γινόμενο** *των G_i,*

$$G := \star_{i\in I} G_i$$

ορίζεται ως η ομάδα που παράγεται από τις G_i και περιορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις: (i) τις σχέσεις μέσα σε κάθε ομάδα G_i, και (ii) οι μονάδες των G_i, ταυτίζονται με την μονάδα της G: $e_i = e, \forall i \in I$.

Η αρχική μελέτη του Voiculescu, που οδήγησε στον ορισμό της ελεύθερης ανεξαρτησίας και εν συνεχεία στην ανάπτυξη της Ελεύθερης Θεωρίας Πιθανοτήτων, πραγματευόταν τις Von Neumann άλγεβρες $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$ των ελεύθερων ομάδων με m γεννήτορες $\mathbb{F}_m$, για $m \in \mathbb{N}$.

Προφανώς, οι $\mathbb{C}\mathbb{F}_m$ και $\mathbb{C}\mathbb{F}_n$ για $m \neq n$ και $m, n \geqslant 2$ είναι αρκετά διαφορετικά αντικείμενα, όμως πληρώνοντας ως προς την ('πολύ' ασθενή) τοπολογία WOT δεν είναι σαφές αν οι Von Neumann άλγεβρες που προκύπτουν $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$ και $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n)$ είναι ισόμορφες ή όχι. Το πρόβλημα αυτό είναι ακόμα ανοιχτό. Επίσης, δεν είναι σαφές το πώς χτίζεται η $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m \star \mathbb{F}_n)$ από τις επιμέρους $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$ και $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$. Αυτό που ξέρουμε όμως είναι πως οι υπάλγεβρες αυτές είναι ελεύθερα ανεξάρτητες ως προς το trace στην $\mathcal{L}(\mathbb{F}_m \star \mathbb{F}_n)$.

Πρόταση 4.3. *Έστω $(G_i)_{i\in I} \subseteq G$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι* **ομάδες** *$(G_i)_{i\in I}$ είναι ελεύθερες.*

2. *Οι $*$-***άλγεβρες** *$(\mathbb{C}G_i))_{i\in I}$ είναι ελεύθερα ανεξάρτητες, ως υπάλγεβρες της $\mathbb{C}G$, με το τ_G.*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$: Έστω $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}G$, με $x_j \in \mathbb{C}G_{i(j)}$ και $\tau_G(x_j) = 0$, για κάθε $j \leqslant k$. Υποθέτουμε επίσης πως $i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(k)$. Τότε, αν

$$x_j = \sum_{g_j \in G_{i(j)}} \alpha^j_{g_j} g_j, \qquad j \leqslant k$$

έχουμε πως:

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_k &= \left(\sum_{g_1 \in G_{i(1)}} \alpha^1_{g_1} g_1 \right) \dots \left(\sum_{g_k \in G_{i(k)}} \alpha^k_{g_k} g_k \right) \\ &= \sum_{g_1 \in G_{i(1)}, \dots, g_k \in G_{i(k)}} \alpha^1_{g_1} \dots \alpha^k_{g_k} (g_1 \dots g_k) \end{aligned}$$

Από την γραμμικότητα του $\tau_G : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ έχουμε:

$$\tau_G(x_1 \dots x_k) = \sum_{g_1 \in G_{i(1)}, \dots, g_k \in G_{i(k)}} \alpha^1_{g_1} \dots \alpha^k_{g_k} \tau_G\big(g_1 \dots g_k\big)$$

Τώρα, για κάθε $g_1, \dots, g_k$ με $\alpha^1_{g_1} \dots \alpha^k_{g_k} \neq 0$ έχουμε ότι $g_j \neq e$ για κάθε $j \leqslant k$. Πράγματι, επειδή $\tau_G(x_j) = 0$ έχουμε ότι

$$\sum_{g_j \in G_{i(j)}} \alpha^j_{g_j} \tau_G(g_j) = 0$$

και άρα είτε $\alpha^j_{g_j} = 0$, είτε $g_j \neq e$. Οπότε από τον ορισμό μιας ελεύθερης οικογένειας υποομάδων (4.2) προκύπτει ότι $g_1 \dots g_k \neq e$. Συνεπώς $\tau_G\big(g_1 \dots g_k\big) = 0$ και άρα $\tau_G(x_1 \dots x_k) = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Έστω ότι οι $(\mathbb{C}G_i)_{i \in I}$ είναι ελεύθερα ανεξάρτητες στον $(\mathbb{C}G, \tau_G)$. Παίρνουμε $g_j \in \mathbb{C}G_{i(j)}$ με $g_j \neq e, \forall j \leqslant k$ και $i(1) \neq \dots \neq i(k)$. Επειδή $g_j \neq e, \forall j \leqslant k$ έχουμε $\tau_G(g_j) = 0$ για κάθε $j \leqslant k$. Συνεπώς, απο τον ορισμό της ελεύθερης ανεξαρτησίας προκύπτει το $\tau_G(g_1 \dots g_k) = 0$ και άρα $g_1 \dots g_k \neq e$.

□

Όπως σημειώνουν οι Nica και Speicher (2006), προκειμένου να είναι χρήσιμη η 'ελευθερία' θα πρέπει να μπορούμε να βρούμε αρκετές περιπτώσεις όπου να εμφανίζονται ελεύθερες τυχαίες μεταβλητές. Στην κλασική περίπτωση αυτό εξασφαλίζεται από την ύπαρξη και καταστικευή του χώρου γινόμενο με το **μέτρο γινόμενο** (και η γενίκευση στο τανυστικό γινόμενο στο επίπεδο ανεξάρτητων αλγεβρών τυχαίων μεταβλητών). Η αντίστοιχη κατασκευή στην ελεύθερη περίπτωση είναι δυνατή και καλείται 'ελεύθερο γινόμενο μη-αντιμεταθετικών χώρων πιθανότητας.' Το γινόμενο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί ώστε να διατηρείται και η δομή της C^*-άλγεβρας. Για τις λεπτομέρεις ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Nica και Speicher (2006, $\sigma\sigma$. 81–108).

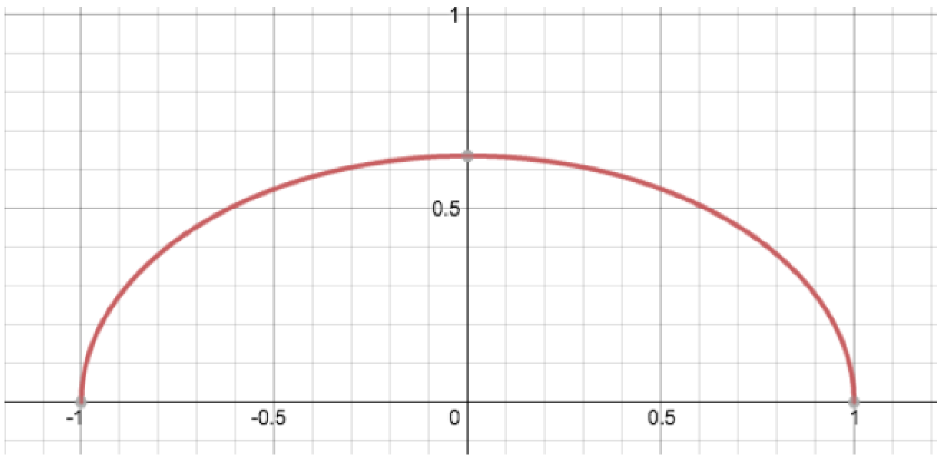
Αν $(\mathcal{A}_i, \phi_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια μη-αντιμεταθετικών χώρων, θα συμβολίζουμε το ελεύθερο γινόμενό τους με

$$(\star_{i \in I} \mathcal{A}_i, \star_{i \in I} \phi_i)$$

Ο χώρος αυτός έχει την ιδιότητα ότι οι υπάλγεβρες $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ είναι ελεύθερες στον $(\star_{i \in I} \mathcal{A}_i, \star_{i \in I} \phi_i)$.

5 ‘Ελεύθερο’ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδειχθεί το ‘Ελεύθερο’ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, με την χρήση συνδυαστικών εργαλείων, κατά τους Nica και Speicher. Το θεώρημα αυτό είναι ανάλογο του κλασικού κεντρικού οριακού θεωρήματος και αποδεικνύει πως η ελευθερία (όπως η ανεξαρτησία) έχει ως συνέπεια μια καθολική οριακή κατανομή για το $\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}$ καθώς το $N \to +\infty$. Η οριακή αυτή κατανομή δεν είναι όμως η κανονική κατανομή, όπως στην κλασική περίπτωση, αλλά η **semicircular** (‘ημι-κυκλική’) κατανομή.



Σχήμα 2: Μια semicircular κατανομή ακτίνας 1.

Από το παραπάνω σχήμα, είναι εμφανές πως η semicircular κατανομή δεν είναι ακριβώς ημι-κυκλική αλλά ημι-ελλειπτική.

Ορισμός 5.1. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας και $s \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές. Το s θα καλείται semicircular στοιχείο ακτίνας $r \in \mathbb{R}$ αν η αναλυτική του κατανομή είναι η*

$$d\mu_s = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}dt \quad \text{στο } [-r, r]$$

Επειδή, Var$(s) = \phi(s^2) - \phi(s)^2 = r^2/4$, αν $r = 2$ η κατανομή του s είναι ‘κανονικοποιημένη’ (Var$(s) = 1$), και το στοιχείο μπορεί να καλείται κανονικοποιημένο ή και ‘κύμανσης 1.’

Τέλος, παρατηρούμε πως στον ορισμό αναγκάζουμε εκ των προτέρων τα semicircular στοιχεία να είναι κεντραρισμένα, $\phi(s) = 0$.

Έστω $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N\}$ οικογένεια **ελεύθερων** και **ισόνομων** (δηλ. αν p πολυώνυμο, $\phi(p(\mathbf{a}_i)) = \phi(p(\mathbf{a}_j))$, για κάθε $i, j \leqslant N$) **αυτοσυζυγών** τυχαίων μεταβλητών με $\phi(\mathbf{a}_i) = 0, \forall i \leqslant N$, για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Η ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε, όπως και στην κλασική θεωρία, είναι το όριο, καθώς $N \to +\infty$, των ροπών του 'κανονικοποιημένου' αθροίσματος $\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N$, δηλαδή το:

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big)$$

Αν αναπτύξουμε το άθροισμα ως προς την δύναμη $k \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\phi\Big((\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N)^k\Big) = \sum_{1\leqslant r(1),\ldots,r(k)\leqslant N} \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)})$$

όπου το $r(i), i \leqslant k$ είναι ο δείκτης που αντιστοιχεί στην θέση i.

Παρατηρούμε αρχικά πως επειδή οι τυχαίες μεταβλητές είναι ισόνομες, αν $r(i) = r(j) \iff p(i) = p(j)$, για κάθε $i, j \leqslant k$, τότε

$$\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) = \phi(\mathbf{a}_{p(1)} \ldots \mathbf{a}_{p(k)})$$

Δηλαδή, η τιμή του $\phi(\cdot)$ εξαρτάται από τα $r(i)$, μόνο ως προς το ποιοι δείκτες είναι διαφορετικοί και ποιοι όχι. Συνεπώς, μπορούμε να κωδικοποιήσουμε αυτήν την πληροφορία ως μια διαμέριση $\pi = \{V_1, \ldots V_s\}$ του $\{1, \ldots, k\}$, με:

$$\Big(r(1), \ldots, r(k)\Big) \triangleq \pi \ \text{ αν και μόνο αν } \ [r(i) = r(j) \iff i, j \in V_s]$$

και άρα θέτουμε $\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) = \kappa_\pi = \phi(\mathbf{a}_{p(1)} \ldots \mathbf{a}_{p(k)})$, όποτε

$$\Big(r(1), \ldots, r(k)\Big) \triangleq \pi \triangleq \Big(p(1), \ldots, p(k)\Big)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε:

$$\phi\Big((\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N)^k\Big) = \sum_{\substack{\pi \text{ διαμέριση} \\ \text{του } \{1,\ldots,k\}}} \kappa_\pi A_\pi^N \tag{1}$$

με $A_\pi^N = \#\Big\{\pi \triangleq \Big(r(1), \ldots, r(k)\Big) : \pi \text{ διαμέριση του } \{1, \ldots, k\}\Big\}$

Στην συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα στην παραπάνω εξίσωση στο όριο $N \to +\infty$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της *ελευθερίας*.

Παρατήρηση 5.1. *Αν η διαμέριση π περιέχει* **μονοσύνολο**, *τότε $\kappa_\pi = 0$. Άρα μόνο για $|\pi| \leqslant k/2$, έχουμε συνεισφορά.*

Απόδειξη. Έστω π διαμέριση του $\{1, \dots k\}$ και $\{r\} = V_s \in \pi$. Από το Λήμμα 4.1 έχουμε:

$$\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \dots \mathbf{a}_r \dots \mathbf{a}_{r(k)}) = \cancelto{0}{\phi(\mathbf{a}_r)}\, \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \dots \mathbf{a}'_r \dots \mathbf{a}_{r(k)}) = 0$$

□

Τώρα θα περάσουμε στο όριο:

$$\lim_{N \to +\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k = \lim_{N \to +\infty} \sum_{\substack{\pi \text{ διαμέριση} \\ \text{του } \{1, \dots, k\}}} \frac{1}{N^{k/2}} \kappa_\pi A_\pi^N$$

Παρατήρηση 5.2. *Οι μόνοι όροι που συνεισφέρουν στο παραπάνω όριο είναι εκείνοι όπου η διαμέριση είναι* **pairing** *(δηλ.: αν κάθε στοιχείο της διαμέρισης είναι δισύνολο).*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως υπάρχουν N επιλογές για το κοινό δείκτη στο πρώτο block της π, $(N-1)$ επιλογές για το δεύτερο (αφού πρέπει να διαφέρουν), και γενικά έχουμε $A_\pi^N = N(N-1)\dots(N-|\pi|+1)$. Ασυμπτωτικά για μεγάλο N, το ότι αφαιρούμε κάποιες σταθερές δεν επηρεάζει την τιμή πολύ και συνεπώς:

$$\lim_{N \to +\infty} A_\pi^N = \lim_{N \to +\infty} N^{|\pi|}$$

Άρα έχουμε:

$$\lim_{N \to +\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{\substack{\pi \text{ διαμέριση} \\ \text{του } \{1, \dots, k\}}} N^{|\pi| - k/2} \kappa_\pi$$

Από την παραπάνω παρατήρηση, έχουμε $|\pi| \leqslant k/2$. Στην περίπτωση που $|\pi| < k/2$, ο όρος $N^{|\pi|-k/2} \kappa_\pi \xrightarrow{N \to \infty} 0$ και άρα δεν συνεισφέρει στο όριο. Συνεπώς οι μόνοι όροι που συνεισφέρουν είναι αυτοί με $|\pi| = k/2$, δηλαδή οι διαμερίσεις που είναι **pairings**.

□

Επιπλέον, στην περίπτωση που $|\pi| = k/2$, ο όρος $N^{|\pi|-k/2} \kappa_\pi \xrightarrow{N \to \infty} \kappa_\pi$ και έτσι έχουμε:

$$\lim_{N \to +\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1, \dots, k\}}} \kappa_\pi \tag{2}$$

Από αυτό έχουμε άμεσα ότι αν k περιττός, το όριο αυτό μηδενίζεται, αφού δεν υπάρχει pairing περιττού αριθμού στοιχείων.

Παρατήρηση 5.3 (Κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)**.** *Από αυτό το σημείο αποδεικνύεται χωρίς παραπάνω κόπο το κλασικό κεντρικό οριακό θεώρημα. Πράγματι, το μόνο που χρησιμοποιήσαμε για να φτάσουμε στην σχέση:*

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\ldots,k\}}} \kappa_\pi$$

ήταν το Λήμμα 4.1, το οποίο ισχύει και για κλασικές ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. 'Εστω π pairing και $k \in \mathbb{N}$ άρτιος (αφού οι περιττές ροπές μηδενίζονται). Επειδή οι μεταβλητές μετατίθονται και υπάρχουν ακριβώς δύο από κάθε 'άλγεβρα' (αφού π pairing), το κ_π σπάει σε $k/2$-το πλήθος γινόμενο από σ^2 και άρα $\kappa_\pi = \sigma^k$. Μένει να βρούμε πόσες τέτοιες διαμερίσεις του $\{1,\ldots,k\}$ υπάρχουν. Αν $\pi = \{V_1,\ldots V_s\}$ pairing του $\{1,\ldots,2m\}$, τότε για το πρώτο block, έχουμε $\frac{2m!}{2!(2m-2)!}$ επιλογές. Για το δεύτερο έχουμε $\frac{(2m-2)!}{2!(2m-4)!}$ και γενικά έχουμε:

$$\frac{2m!}{2!\cancel{(2m-2)}!} \times \frac{\cancel{(2m-2)}!}{2!(2m-4)!} \times \cdots \times 1 = \prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2m-2(i-1)\big)!}{2!(2m-2i)!} = \frac{2m!}{2^m}$$

'Ομως υπάρχουν $m!$ τρόποι να διαλέξουμε τα ζεύγη στα blocks της π οπότε:

$$\#\Big\{\pi = \{V_1,\ldots V_m\} : \ \ \pi \ \ \text{pairing του} \ \ \{1,\ldots 2m\}\Big\} = \frac{2m!}{2^m \cdot m!} =$$

$$= (2m-1)\times(2m-3)\times\cdots\times 5\times 3\times 1 =: (2m-1)!!$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \text{ περιττός} \\ \sigma^k(k-1)!! & \text{αν } p \text{ άρτιος} \end{cases}$$

που είναι ακριβώς οι ροπές της κανονικής κατανομής. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} \xi$$

όπου το ξ έχει κανονική κατανομή.

Όπως παρατήρησε ο R. Speicher, από συνδυαστική σκοπιά, το μόνο που αλλάζει περνώντας από την κλασική στην ‘ελεύθερη’ περίπτωση, είναι το ότι αντί να μετράμε *όλα* τα pairings του $\{1, \ldots, k\}$, μετράμε μόνο κάποια ‘ιδιαίτερα’ pairings, τα οποία και συνεισφέρουν στο όριο.

Εξετάζουμε μια τυχαία ροπή $\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)})$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

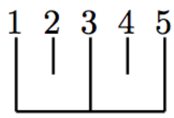
1. Είτε $r(1) \neq r(2) \neq \cdots \neq r(k)$, οπότε από τον ορισμό της ελευθερίας, $\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) = 0$.

2. Είτε υπάρχει κάποιο i, ώστε $r(i) = r(i+1) = r$. Σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) &= \phi(\mathbf{a}_r^2)\ \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) \\ &= \sigma^2\ \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) \end{aligned}$$

   αφού τα $\{\mathbf{a}_r^2\}$ και $\{\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}\}$ είναι ελεύθερα (το $\widehat{\mathbf{a}}_r$ είναι απλά το στοιχείο ακριβώς δίπλα στο $\mathbf{a}_{r(i+1)}$).

Έπειτα εξετάζουμε το $\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)})$, για το οποίο πάλι υπάρχουν οι παραπάνω δυο περιπτώσεις. Συνεχίζοντας διαδοχικά, παρατηρούμε ότι η αρχική ροπή είτε θα είναι 0, δηλαδή σε κάποιο βήμα θα αντιστοιχεί η πρώτη περίπτωση· είτε θα είναι $\underbrace{\sigma^2\ \sigma^2 \ldots \sigma^2}_{k/2\text{-φορές}} = \sigma^k$, δηλαδή σε κάθε βήμα θα καταλήγουμε στην δεύτερη περίπτωση, μέχρι το $\phi(\mathbf{e}) = 1$. Συνεπώς για μια διαμέριση να συνεισφέρει στο όριο ($\kappa_\pi \neq 0$), θα πρέπει να επιτρέπει να καταλήγουμε διαδοχικά στην δεύτερη περίπτωση. Θα δούμε πως η συνθήκη αυτή υπονοεί πως η διαμέριση θα πρέπει να είναι **non-crossing** .



Σχήμα 3: Μια non-crossing διαμέριση: $\pi = \Big\{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4\}\Big\}$

Ορισμός 5.2. *Έστω S ένα πεπερασμένο, ολικά διατεταγμένο σύνολο και $\pi = \{V_1, \ldots, V_s\}$ μια διαμέριση του. Συμβολίζουμε,*

$$p \sim_\pi q \quad \Longleftrightarrow \quad p, q \in V_j, \quad \text{για κάποιο } j \leqslant s$$

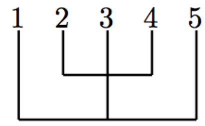
Η π θα καλείται **crossing** *αν υπάρχουν $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ τέτοια ώστε*

$$p_1 \sim_\pi p_2 \not\sim_\pi q_1 \sim_\pi q_2$$

Αν η π δεν είναι crossing καλείται **non-crossing**. *Στην περίπτωση που $S = \{1, \ldots, n\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των non-crossing διαμερίσεων του S με $NC(n)$.*

Οι non-crossing διαμερίσεις ορίζονται και επαγωγικά: Μια $\pi = \{V_1, \ldots, V_s\}$ διαμέριση του $\{1, \ldots, n\}$ είναι non-crossing αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα block V_i ειναι 'διάστημα' (δηλ. $V_i = \{k, k+1, \ldots, k+p\}$) και η $\pi \setminus V$ είναι non-crossing, δηλαδή:

$$\pi \setminus V \in NC\Big(\{1, \ldots, k-1, k+p+1, \ldots, n\}\Big) \cong NC\Big(n - (p+1)\Big)$$



Σχήμα 4: Μια crossing διαμέριση: $\pi = \Big\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\Big\}$

Τέλος παρατηρούμε πως $\#NC(n) = \#NC_2(2n)$, όπου $NC_2(2n)$ τα non-crossing **pairings** του $\{1, \ldots, 2n\}$.

Πρόταση 5.1. *$\kappa_\pi \neq 0$ αν και μόνο αν η π είναι non-crossing.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε τις δύο περιπτώσεις για το τυχαίο pairing $\pi \triangleq (r(1), \ldots, r(k))$:

1. Είτε $r(1) \neq r(2) \neq \cdots \neq r(k)$, οπότε από τον ορισμό της ελευθερίας, $\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) = 0$.

2. Είτε υπάρχει κάποιο i, ώστε $r(i) = r(i+1) = r$. Σε αυτή την περίπτωση:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) &= \phi(\mathbf{a}_r^2)\ \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) \\ &= \sigma^2\ \phi(\mathbf{a}_{r(1)} \ldots \widehat{\mathbf{a}}_r \ldots \mathbf{a}_{r(k)}) \end{aligned}$$

Έστω $\kappa_\pi = 0$, τότε σε κάποιο βήμα αντιστοιχεί αναγκαστικά η πρώτη περίπτωση παραπάνω. Δηλαδή καταλήγουμε σε μια διαμέριση π' του $\{1, ..., k-2p\}$, $p < k/2$ με

$$\kappa_\pi = \sigma^{2p} \cancelto{0}{\phi(\mathbf{a}_{r(1)} \cdots \mathbf{a}_{r(k-2p)})}$$

όπου $r(1) \neq r(2) \neq \cdots \neq r(k-2p)$ και συνεπώς η π' δεν 'ζευγαρώνει' γειτονικά στοιχεία. Άρα θα υπάρχουν $i_1 < j_1 < i_2 < j_2$ με $r(i_1) = r(i_2) \neq r(j_1) = r(j_2)$ δηλαδή τον ορισμό μιας crossing διαμέρισης. Συνεπώς, $\kappa_\pi \neq 0$ συνεπάγεται πως η π είναι non-crossing.

Αντίστροφα, έστω πως η π είναι non-crossing. Από τον επαγωγικό χαρακτηρισμό της ιδιότητας συνεπάγεται πως υπάρχει $V \in \pi$ 'διάστημα' και $\pi \setminus V$ είναι non-crossing. Επειδή η π είναι pairing το $V = \{r(i), r(i+1)\}$ και άρα αν $r(i) = r(i+1) = r$ έχουμε την δεύτερη περίπτωση παραπάνω οπότε παίρνουμε ένα $\sigma^2 = \phi(\mathbf{a}_r^2)$ σπάζοντας την ροπή κατά τα παραπάνω. Όμως και η $\pi \setminus V$ είναι non-crossing οπότε πάλι υπάρχει διάστημα V', και ούτω καθεξής. Οπότε αν η π είναι non-crossing, έχουμε ότι $\kappa_\pi = \sigma^{2 \times \frac{k}{2}} = \sigma^k \neq 0$.

$\square$

Τελικώς έχουμε δείξει πως

$$\lim_{N \to +\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = D_k \sigma^k \tag{3}$$

όπου

$$D_k := \#\Big\{\pi : \ \pi \ \text{ non-crossing pairing του } \ \{1, \ldots, k\}\Big\}$$

Το βήμα που ολοκληρώνει την απόδειξη του ελεύθερου κεντρικού οριακού θεωρήματος είναι η ταύτιση της k-οστής ροπής στον τύπο (3) παραπάνω, με την k-οστή ροπή της semicircular κατανομής. Αυτό επιτυγχάνεται με τους αριθμούς Catalan. Πρώτα δείχνουμε πως το $D_{2m} = C_m$, όπου C_m είναι ο m-οστός αριθμός Catalan και στην συνέχεια πως η k-οστή ροπή της semicircular κατανομής είναι η $\sigma^k C_{k/2}$.

Ορισμός 5.3. *Για κάθε $n \geqslant 0$ ορίζουμε τον n-οστό αριθμό Catalan ως:*

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!} \tag{C1}$$

Θέτοντας $C_0 = 1$. Ο n-οστός αριθμός Catalan ορίζεται επίσης και αναδρομικά από

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i} \tag{C2}$$

με $C_0 = C_1 = 1$.

Πρόταση 5.2. *Αν* D_{2k} *είναι ο αριθμός των non-crossing pairings του συνόλου* $\{1, \ldots, 2k\}$ *τοτε,* $D_{2k} = C_k$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο D_{2k} ικανοποιεί την αναδρομική σχέση C2. Έστω $\pi = \{V_1, \ldots, V_k\}$ ένα non-crossing pairing με $V_1 = (1, m)$ για κάποιο $m \leqslant 2k$. Επειδή η π είναι non-crossing για κάθε $j \neq 1$, έχουμε είτε $1 < V_j < m$, είτε $1 < m < V_j$ (αλλιώς το V_j θα διασταυρωνόταν με το $(1, m)$). Επίσης το m είναι αναγκαστικά άρτιος ($m = 2l$), αφού αλλιώς δεν 'χωράει' pairing ανάμεσα στο $(1, m)$ ή μετά.

Οπότε έχουμε ότι:

1. η π περιορισμένη στο $\{2, \ldots, m-1\}$ είναι non-crossing pairing.

2. η π περιορισμένη στο $\{m+1, \ldots, 2k\}$ είναι non-crossing pairing.

από τον αναδρομικό χαρακτηρισμό των non-crossing διαμερίσεων, αφού τα σύνολα αυτά αποτελούνται από άρτιο αριθμό στοιχείων.

Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν, D_{m-2} τέτοιες διαμερίσεις, ενώ στην δεύτερη υπάρχουν D_{2k-m} και οι επιλογές αυτές είναι ανεξάρτητες. Επίσης, το $m = 2l$ 'τρέχει' σε όλους τους άρτιους μέχρι το $2k$. Συλλέγοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$D_{2k} = \sum_{l=1}^{k} D_{2l-2}D_{2k-2l} = \sum_{l=1}^{k} D_{2(l-1)}D_{2(k-l)}$$

δηλαδή ικανοποιείται η σχέση C2.

□

Συνεπώς έχουμε τον ακόλουθο τύπο για την τυχαία k-οστή ροπή του $\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}$:

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = C_{k/2}\sigma^k \tag{4}$$

Θεώρημα 5.1. *[Ελεύθερο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα] Έστω* $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N\}$ *οικογένεια* **ελεύθερων** *και* **ισόνομων**, **αυτοσυζυγών** *τυχαίων μεταβλητών με* $\phi(\mathbf{a}_i) = 0, \forall i \leqslant N$, *για κάθε* $N \in \mathbb{N}$. *Τότε:*

$$\frac{\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} s$$

όπου $s \in \mathcal{A}$ *semicircular στοιχείο (κάποιας) άλγεβρας.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η τυχαία ροπή του $\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη ροπή της semicircular κατανομής. Με βάση την παραπάνω ανάλυση έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \phi\Big(\Big(\frac{\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_N}{\sqrt{N}}\Big)^k\Big) = C_{k/2}\sigma^k$$

Θα δείξουμε ότι η k-οστή ροπή $\mathbb{E}(s^k)$ της semicircular κατανομής είναι ακριβώς $C_{k/2}\sigma^k$, δηλαδή ότι

$$\int t^k d\mu_s = \int_{[-r,r]} t^k \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-t^2}\ \ dt = C_{k/2}\sigma^k \overset{C1}{=} \frac{1}{k/2+1}\binom{k}{k/2}\sigma^k$$

Επειδή η semicircular κατανομή είναι συμμετρική (βλ Σχήμα 5), υποθέτουμε ότι $k = 2m$ αφού αλλιώς η ροπή μηδενίζεται. Παρατηρούμε πως η $t \mapsto t^{2m}\sqrt{r^2-t^2}$ είναι άρτια συνάρτηση, οπότε

$$\int_{[-r,r]} t^k \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-t^2}\ \ dt = 2\int_{[0,r]} t^k \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-t^2}\ \ dt =$$

Κάνοντας τον μετασχηματισμό $t = r\cos\theta$ και $dt = -r\sin\theta d\theta$, $\theta \in [0,\pi/2]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^{2m}) &= 4\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\pi r^2} r^{2m}\cos^{2m}\theta\sqrt{r^2(1-\cos^2\theta)}(-r\sin\theta)d\theta \\
&= 4\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\pi r^2} r^{2m}\cos^{2m}\theta r\sin\theta(-r\sin\theta)d\theta \\
&= 4\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{\pi r^2} r^{2m}\cos^{2m}\theta r^2\sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{4r^{2m}}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2m}\theta \ \ \sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{4r^{2m}}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2m}\theta d\theta - \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2(m+1)}\theta d\theta\right) \qquad \text{(*)}
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας ανάλογα με τον τύπο

$$\int \cos^n\theta = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\theta\sin\theta + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\theta d\theta$$

έχουμε:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\ \frac{1\times 3\times\cdots\times(2m-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2m} = \frac{\pi}{2}\ \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^{2m}\theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^{2(m+1)}\theta d\theta &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} - \frac{(2m+1)(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m-1)!!(2m+2)-(2m+1)(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!}\right)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$(2m)!! = 2^m \cdot m! \qquad \text{και} \qquad (2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m\cdot m!}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m)!}{(2m+2)\cdot 2^{2m}\cdot m!\cdot m!}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2m+2)\cdot 2^{2m}}\binom{2m}{m}
\end{aligned}$$

Συνεπώς η (*) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^{2m}) &= \frac{4r^{2m}}{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{1}{(2m+2)\cdot 2^{2m}}\binom{2m}{m}\\
&= \left(\frac{r^2}{4}\right)^m \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\\
&= \sigma^{2m}C_m
\end{aligned}$$

Το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

$\square$

Πολυδιάστατη Περίπτωση

Έστω δύο ακολουθίες, $a_1, a_2, \dots$ και $b_1, b_2, \dots$ από Αυτοσυζυγείς, κεντραρισμένες ($\phi(a_i) = 0 = \phi(b_j)$) τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε τα σύνολα, $\{a_j, b_j\}$ να είναι ελέυθερα για κάθε j και έχουν την ίδια κοινή κατανομή, δηλαδή

$$\phi(a_i^k b_i^l) = \phi(a_j^k b_j^l), \quad \forall i \neq j, \ \text{ και } \ \forall k, l \in \mathbb{N}$$

Τότε από το Ελεύθερο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (5.1), έχουμε

$$\frac{a_1 + \dots + a_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N \to +\infty]{dist} s_1$$

και

$$\frac{b_1 + \dots + b_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N \to +\infty]{dist} s_2$$

Πράγματι, θέτοντας $b_j = \mathbf{e}$ για κάθε j έχουμε $\phi(a_i^k) = \phi(a_j^k)$ για κάθε i, j. Οπότε η οικογένεια $(a_1, a_2, \dots)$ είναι ισόνομη. Επίσης είναι και ελεύθερες, αφού τα σύνολα $\{a_1, \mathbf{e}\}, \{a_2, \mathbf{e}\}, \dots$ είναι ελεύθερα. Αντίστοιχα και για τα b. Οπότε για τις ακολουθίες, $a_1, a_2, \dots$ και $b_1, b_2, \dots$ **ξεχωριστά**[17] πληρούνται οι υποθέσεις του Ελεύθερου Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

Η κοινή κατανομή του ζεύγους (s_1, s_2) χαρακτηρίζεται από τον πίνακα συνδιακύμανσης:

$$C = \begin{pmatrix} \phi(a_r a_r) & \phi(a_r b_r) \\ \phi(b_r a_r) & \phi(b_r b_r) \end{pmatrix}$$

Η υπόθεση της κοινής κατανομής των $\{a_j, b_j\}$ σημαίνει πως δεν έχει σημασία ποιον δείκτη θα πάρουμε· τον θέτουμε ίσο με r. Το παρακάτω θεώρημα γενικεύει την παραπάνω συζήτηση από ακολουθίες δύο στοιχείων σε ακολουθίες αυθαίρετα πολλών στοιχείων. Η απόδειξη, είναι ανάλογη της μονοδιάστατης και βρίσκεται στους Nica και Speicher (2006, *σσ.* 127–128).

Θεώρημα 5.2. *Έστω $(\mathcal{A}, \phi)$ ένας μη-αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας και $(a_1^i)_{i \in I}, (a_2^i)_{i \in I}, \dots \subseteq \mathcal{A}$ μια ακολουθία από ελεύθερα σύνολα που περιέχουν αυτοσυζυγή στοιχεία και έχουν την ίδια κοινή κατανομή· δηλαδή αν πάρουμε πεπερασμένα $i(1), \dots, i(n) \in I$, τότε*

$$\phi(a_k^{i(1)} \dots a_k^{i(n)}) = \phi(a_l^{i(1)} \dots a_l^{i(n)}), \quad \forall k \neq l$$

και άρα δεν εξαρτάται από τον δείκτη. Υποθέτουμε επιπλέον πως $\phi(a_k^i) = 0$ για κάθε $k \in N$ και $i \in I$. Τότε, συμβολίζοντας με $c_{ij} = \phi(a_k^i a_k^j)$, έχουμε ότι

[17] Δεν υποθέτουμε πως τα a είναι ελεύθερα από τα b (βλ. Πρόταση 5.3)

$$\left(\frac{a_1^i + \cdots + a_N^i}{\sqrt{N}}\right)_{i\in I} \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} (s_i)_{i\in I}$$

όπου η $(s_i)_{i\in I}$ είναι μια semicircular οικογένεια με συνδιακύμανση $(c_{ij})_{i,j\in I}$.

Δυο σημειώσεις για το Θεώρημα 5.2. Πρώτον, η έννοια της σύγκλισης ως προς την κατανομή που εμφανίζεται είναι η ακόλουθη:

$$(a_N^i)_{i\in I} \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} (a^i)_{i\in I} \iff \lim_{N\to+\infty} \phi(a_N^{i(1)} \dots a_N^{i(n)}) = \phi(a^{i(1)} \dots a^{i(n)}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή, κάθε κοινή ροπή της $(a_N^i)_{i\in I}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη της $(a^i)_{i\in I}$.

Δεύτερον, ο ορισμός μιας semicircular οικογένειας είναι αντίστοιχος αυτού για οικογένειες κανονικών τυχαίων μεταβλητων.[18] Δηλαδή, έστω ότι το $(c_{ij})_{i,j\in I}$ είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Μια οικογένεια $(s_i)_{i\in I}$ αυτοσυζυγών τυχαίων μεταβλητών καλείται semicircular με συνδιακύμανση $(c_{ij})_{i,j\in I}$, αν για κάθε πεπερασμένα $i(1), \dots, i(k) \in I$, έχουμε

$$\phi\big(s_{i(1)} \dots s_{i(k)}\big) = \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \kappa_\pi\big[s_{i(1)}, \dots, s_{i(k)}\big]$$

όπου

$$\kappa_\pi\big[s_{i(1)}, \dots, s_{i(k)}\big] = \prod_{(p,q)\in\pi} c_{i(p)i(q)}$$

Για ένα στοιχείο s, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(s^k) = \phi\Bigg(\underbrace{s \cdot s \dots s}_{k \text{ φορές}}\Bigg) &= \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \prod_{(p,q)\in\pi} c_{i(p)i(q)} \\
&= \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \prod_{(p,q)\in\pi} \phi\big(s_{i(p)}s_{i(q)}\big) \\
&= \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \prod_{(p,q)\in\pi} \phi\big(s^2\big) \\
&= \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \big(\underbrace{\sigma^2 \dots \sigma^2}_{k/2 \text{ φορές}}\big) \\
&= \sigma^k C_{k/2}
\end{aligned}$$

Δηλαδή, η k-οστή ροπή της semicircular κατανομής. Συνεπώς, κάθε στοιχείο μιας semicircular οικογένειας, είναι semicircular στοιχείο.

[18] Για την αντιστοιχία βλ. Λήμμα 6.1, που δίνει τον τύπο του Wick.

Παρακάτω αποδεικνύεται πως μια semicircular οικογένεια είναι ελεύθερη αν και μόνο αν ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι διαγώνιος. Ξεκινάμε με ένα λήμμα:

Λήμμα 5.1. *Έστω $(\mathcal{A}_n, \phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$ και $(\mathcal{A}, \phi)$ μη-αντιμεταθετικοί χώροι πιθανότητας και ακολουθίες στοιχείων $(a_n^i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(a^i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{A}$ ώστε*

$$(a_n^i)_{i\in I} \xrightarrow[n\to+\infty]{dist} (a^i)_{i\in I}$$

Έστω $(I_p)_{p=1}^d$ μια διαμέριση του I σε ξένα ανα δύο σύνολα. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα

$$\{a_n^i : i \in I_1\}, \dots, \{a_n^i : i \in I_d\}$$

είναι ελεύθερα. Τότε τα σύνολα

$$\{a^i : i \in I_1\}, \dots, \{a^i : i \in I_d\}$$

είναι επίσης ελεύθερα. Δηλαδή, η ελευθερία 'περνάει' στο όριο.

Απόδειξη. Έστω $i(1), \dots, i(k) \in \{I_1, \dots, I_d\}$ με $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k)$ και $\phi(a^{i(j)}) = 0$ για κάθε $j \leqslant k$. Θα δείξουμε ότι $\phi(a^{i(1)} \dots a^{i(k)}) = 0$. Επειδή $(a_n^i)_{i\in I} \xrightarrow[n\to+\infty]{dist} (a^i)_{i\in I}$,

$$\lim_n \phi_n(a_n^{i(j)}) = \phi(a^{i(j)}) = 0 \quad \text{για κάθε} \quad j \leqslant k$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_n \phi_n(a_n^{i(1)}) \cdot \lim_n \phi_n(a_n^{i(2)}) \dots \lim_n \phi_n(a_n^{i(k)}) \\
&= \lim_n \left[\phi_n(a_n^{i(1)}) \cdot \phi_n(a_n^{i(2)}) \dots \phi(a_n^{i(k)})\right] \\
&= \lim_n \phi_n(a_n^{i(1)} \cdot a_n^{i(2)} \dots a_n^{i(k)}) && \text{(ελευθερία)} \\
&= \phi(a^{i(1)} \dots a^{i(k)}) && \text{(dist. σύγκλιση)}
\end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση 5.3. *Έστω $(s_i)_{i\in I}$ μια semicircular οικογένεια με συνδιακύμαση $(c_{ij})_{i,j\in I}$. Αν $(I_p)_{p=1}^d$ μια διαμέριση του I σε ξένα ανα δύο σύνολα τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Τα σύνολα $\{s_i : i \in I_1\}, \dots, \{s_i : i \in I_d\}$ είναι ελεύθερα.*

2. *Έχουμε $c_{ij} = 0$ όποτε $i \in I_p$ και $j \in I_q$ με $p \neq q$.*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2)$: Υποθέτουμε πως $\{s_i : i \in I_1\}, \ldots, \{s_i : i \in I_d\}$ είναι ελεύθερα και σταθεροποιούμε $i \in I_p$ και $j \in I_q$ με $p \neq q$. Τότε τα s_i και s_j είναι ελεύθερα. Συνεπώς:

$$c_{ij} = \phi(s_i s_j) \overset{\text{υπόθ.}}{=} \phi(s_i)\phi(s_j) = 0$$

$(2) \Rightarrow (1)$: Υποθέτουμε ότι $c_{ij} = 0$ όποτε $i \in I_p$ και $j \in I_q$ με $p \neq q$. Η ιδέα είναι να προσεγγίσουμε (ως προς την κατανομή) την οικογένεια $(s_i)_{i \in I}$ από μερικά αθροίσματα μιας οικογένεια ελεύθερων τυχαίων μεταβλητών. Τότε επειδή η ελευθερία 'περνάει' στο όριο (Λήμμα 5.1), θα έχουμε ότι η $\left((s_i)_{i \in I_p}\right)_{p=1}^{d}$ θα είναι ελεύθερη.

Κατασκευάζουμε έναν κατάλληλο χώρο $(\mathcal{B}, \psi)$ ως ελεύθερο γινόμενο (βλ. συζήτηση στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου), που να περιέχει ακολουθία ελεύθερων συνόλων τυχαίων μεταβλητών

$$(a_1^i)_{i \in I}, (a_2^i)_{i \in I}, \ldots$$

τέτοια ώστε να έχουν ίδια κοινή κατανομή (δηλ. η κοινή κατανομή των $(a_r^i)_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη από το r) η οποία να δίνεται από τα ακόλουθα:

(i) για κάθε $p = 1, \ldots, d$ η οικογένεια $(a_r^i)_{i \in I_p}$ να έχει την ίδια κοινή κατανομή με την $(s_i)_{i \in I_p}$.

(ii) Τα σύνολα $\{a_r^i : i \in I_1\}, \ldots, \{a_r^i : i \in I_d\}$ να είναι ελεύθερα.

Έστω $i \in I_p$ και $j \in I_q$ με $p \neq q$. Από το (ii), έχουμε ότι τα a_r^i και a_r^j είναι ελεύθερα (στον $(\mathcal{B}, \psi)$) και άρα

$$\psi(a_r^i a_r^j) = \psi(a_r^i)\psi(a_r^j) = 0 = \phi(s_i s_j)$$

Οπότε η οικογένεια $(a_r^i)_{i \in I}$ (και για κάθε r, αφού οι κοινές κατανομές ταυτίζονται) έχει την ίδια συνδιακύμανση με την $(s_i)_{i \in I}$.

Επίσης, από το πολυδιάστατο Ελεύθερο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (5.2) έχουμε:

$$\left(\frac{a_1^i + \cdots + a_N^i}{\sqrt{N}}\right)_{i \in I} \xrightarrow[N \to +\infty]{dist} (\tilde{s}_i)_{i \in I}$$

και από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι $(\tilde{s}_i)_{i \in I} = (s_i)_{i \in I}$ αφού όλες οι κοινές ροπές ταυτίζονται. Τώρα, από την κατασκευή των συνόλων έχουμε πως

$$\left(\left\{\frac{a_1^i+\cdots+a_N^i}{\sqrt{N}}\right\}_{i\in I_p}\right)_{p=1,\dots,d} \qquad \text{ελεύθερα}$$

και

$$\left(\frac{a_1^i+\cdots+a_N^i}{\sqrt{N}}\right)_{i\in I_p} \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} (s_i)_{i\in I_p} \quad p=1,\dots d$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 5.1, προκύπτει ότι τα

$$(s_i)_{i\in I_p} \quad p=1,\dots,d \qquad \text{ελεύθερα}$$

□

Άμεσο πόρισμα της παραπάνω πρότασης είναι ότι μια semicircular οικογένεια είναι ελεύθερη αν και μονο αν ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι διαγώνιος.

Επίσης, εξετάζοντας την τυχαία κοινή ροπή μιας semicircular οικογένειας έχουμε

$$\phi\big(s_{i(1)}\dots s_{i(k)}\big) = \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing}\\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \underbrace{\prod_{(p,q)\in\pi} c_{i(p)i(q)}}_{\kappa_\pi[s_{i(1)},\dots,s_{i(k)}]}$$

Επειδή, από την παραπάνω πρόταση $c_{ij}=0$ για s_i, s_j ελεύθερα, το $\kappa_\pi\big[s_{i(1)},\dots,s_{i(k)}\big]$ μηδενίζεται όταν η π 'ζευγαρώνει' ελεύθερα στοιχεία, δηλαδή αν $(p,q)\in\pi$ με $s_{i(p)}, s_{i(q)}$ ελεύθερα. Συνεπώς, οι μόνοι όροι στο άθροισμα που συνεισφέρουν, προέρχονται από εκείνες τις διαμερίσεις που δεν 'ζευγαρώνουν' ελεύθερα στοιχεία.

Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 5.4. *Έστω $(s_i)_{i\in I}$ μια semicircular οικογένεια. Η $(s_i)_{i\in I}$ καλείται semicircular* ***σύστημα*** *αν είναι ελεύθερη.*

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι κοινές ροπές ενός semicircular συστήματος δίνονται από:

$$\phi\big(s_{i(1)}\dots s_{i(k)}\big) = \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing}\\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \kappa_\pi\big[s_{i(1)},\dots,s_{i(k)}\big]$$
$$\text{και η } \pi \text{ δεν ζευγαρώνει κανένα } s_{i(p)},\ s_{i(p)} \text{ με } i(p)\neq i(q)$$

αφού η συνεισφορά $c_{i(p)i(q)}$ είναι 0 όποτε τα $s_{i(p)}$, $s_{i(q)}$ είναι ελεύθερα, και σε ένα semicircular σύστημα τα s_i είναι όλα ελεύθερα.

6 Η 'Ελευθερία' στους Τυχαίους Πίνακες

Απώτερος σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δειχθεί πως η ελευθερία εμφανίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο σε μοντέλα $N \times N$ τυχαίων πινάκων, καθώς το $N \to +\infty$. Το φαινόμενο αυτό δεν είναι τετριμμένο καθώς δεν αναμένουμε *a priori* την σύνδεση των τυχαίων πινάκων με την ελευθερία. Όπως σημειώνουν οι Nica και Speicher, αυτή η απροσδόκητη σύνδεση είναι ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα της Ελεύθερης Θεωρίας Πιθανοτήτων και συνδέει αρκετά διαφορετικούς τομείς των Μαθηματικών.

Παρακάτω, θα δειχθεί συγκεκριμένα, ότι κάθε οικογένεια αυτοσυζυγών και ανεξάρτητων Gaussian τυχαίων πινάκων (βλ. Ορισμό 6.1) είναι ελεύθερη στο όριο $N \to +\infty$.

Αρχικά υπενθυμίζεται η κατασκευή του χώρου των τυχαίων πινάκων.

Οι $N \times N$ Τυχαίοι Πίνακες

Έστω (X, Σ, μ) κλασικός χώρος πιθανότητας και $\mathcal{M}_N = \{\gamma_{ij}) \in \mathbb{C} : 1 \leqslant i, j \leqslant N, \}$. Ο χώρος $\mathcal{A}_N$ με τυχαίους $N \times N$ μιγαδικούς πίνακες ορίζεται ως:

$$\mathcal{A}_N = \bigcap_{1 \leqslant p < \infty} L^p\Big(X, \mathcal{M}_N\Big)$$

και εφοδιάζεται με συναρτησιακό $\phi_N : \mathcal{A}_N \to \mathbb{C}$, όπου:

$$\phi_N(A) = \frac{1}{N} \int_X \mathrm{tr}\big(A(x)\big) d\mu(x)$$

Εύκολα δείχνεται πως ο $(\mathcal{A}_N, \phi_N)$, είναι ένας μη αντιμεταθετικός χώρος πιθανότητας. Παρατηρούμε πως η απαίτηση να δουλέυουμε στην τομή των $L^p, 1 \leqslant p < \infty$, διασφαλίζει την ύπαρξη *φραγμένων ροπών* οποιασδήποτε τάξης.

Κανονικοί Αυτοσυζυγείς Τυχαίοι Πίνακες

Έστω μια οικογένεια $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu)$ τυχαίων μεταβλητών με φραγμένες ροπές. Η οικογένεια θα καλείται Gaussian αν η κοινή της κατανομή είναι κανονική. Δηλαδή, αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας C έτσι ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $1 \leqslant i(1), \ldots, i(k) \leqslant n$:

$$\mathbb{E}(x_{i(1)} \ldots x_{i(k)}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det C)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} t_{i(1)} \ldots t_{i(k)} e^{-\frac{1}{2}\langle t, C^{-1} t \rangle} dt \qquad (*)$$

Ο C καλείται πίνακας συνδιακύμανσης (covariance matrix). Μια μιγαδική Gaussian οικογένεια έχει $(\Re a_i)_{i \leqslant n}$ και $(\Im a_i)_{i \leqslant n}$ ως ανεξάρτητες Gaussian οικογένειες.

Η σχέση (*) είναι ισοδύναμη με το ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του τυχαίου διανύσματος $x = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι της μορφής:

$$\psi_x(t) = \mathbb{E}\big(e^{i\langle t,x\rangle}\big) = e^{-\frac{1}{2}\langle t,Ct\rangle}$$

Λήμμα 6.1 (Τύπος του Wick). *Έστω $x_1, \ldots, x_n$ μια Gaussian οικογένεια. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant i(1), \ldots, i(k) \leqslant n$ έχουμε:*

$$\mathbb{E}(x_{i(1)} \ldots x_{i(k)}) = \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\ldots,k\}}} \prod_{(r,s)\in\pi} \mathbb{E}(x_{i(r)}x_{i(s)})$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται στον Janson (1997, σ. 12).

□

Ορισμός 6.1. *Ένας Gaussian Αυτοσυζυγείς Τυχαίος $N \times N$ Πίνακας, είναι ένας πίνακας $A \in M_N(L^{\infty-}(\Omega, \Sigma, \mu))$ με $A = A^*$ (δηλ. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$) τέτοιος ώστε τα στοιχεία a_{ij} να είναι μια μιγαδική Gaussian οικογένεια με συνδιακύμανση (covariance):*

$$\mathbb{E}(a_{ij}a_{kl}) = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk} \qquad i,j,k,l \leqslant N$$

Παρατηρούμε πως επειδή ένας Αυτοσυζυγείς πίνακας έχει $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ έχουμε

$$\mathbb{E}(a_{ij}\bar{a}_{kl}) = \mathbb{E}(a_{ij}a_{lk}) = \frac{1}{N}\delta_{ik}\delta_{jl} \qquad i,j,k,l \leqslant N$$

και συνεπώς ο παραπάνω ορισμός προσδιορίζει πλήρως τον πίνακα συνδιακύμανσης C.

Σταθεροποιούμε έναν A αυτοσυζυγή Gaussian $N \times N$ πίνακα και θα εξετάσουμε ασυμπτωτικά την k-οστή ροπή του. Από την γραμμικότητα της $\mathbb{E}$ και αναπτύσσοντας το trace της k-οστής δύναμης έχουμε:

$$\phi(A^k) = \frac{1}{N} \sum_{i(1),\ldots,i(k)=1}^{N} \mathbb{E}\big(a_{i(1)i(2)}a_{i(2)i(3)} \ldots a_{i(k)i(1)}\big)$$

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα είναι μια Gaussian οικογένεια χρησιμοποιώντας τον τύπο του Wick (6.1) έχουμε:

$$\phi(A^k) = \frac{1}{N} \sum_{i(1),\ldots,i(k)=1}^{N} \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\ldots,k\}}} \prod_{(r,s)\in\pi} \mathbb{E}\big(a_{i(r)i(r+1)}a_{i(s)i(s+1)}\big)$$

και επειδή έχουν συνδιακύμανση

$$\mathbb{E}(a_{ij}a_{kl}) = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk} \qquad i,j,k,l \leqslant N$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi(A^k) &= \frac{1}{N}\sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N}\ \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}}\ \prod_{(r,s)\in\pi}\frac{1}{N}\delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N}\ \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}}\ \frac{1}{N^{k/2}}\Big(\prod_{(r,s)\in\pi}\delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)}\Big) \\
&= \frac{1}{N^{1+k/2}}\sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}}\ \sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N}\Big(\prod_{(r,s)\in\pi}\delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)}\Big) \qquad \text{(*)}
\end{aligned}$$

Τώρα, εμφυτεύουμε την διαμέριση π του $\{1,\dots,k\}$ στο σύνολο των μεταθέσεων (permutations) S_k του $\{1,\dots,k\}$, $\pi \longmapsto \tilde{\pi} \in S_k$ Θέτοντας τα blocks της π να είναι *κύκλοι* της $\tilde{\pi}$. Δηλαδή,

$$\tilde{\pi}(r) = s \quad \text{και} \quad \tilde{\pi}(s) = r, \quad \text{για κάθε} \quad (r,s)\in\pi$$

Τότε έχουμε ότι

$$\prod_{(r,s)\in\pi}\delta_{i(r)i(s+1)}\delta_{i(s)i(r+1)} = \prod_{t=1}^{k}\delta_{i(t)i(\tilde{\pi}(t)+1)} \qquad \text{(**)}$$

Πράγματι, $i(r) = i(s+1)$ και $i(s) = i(r+1)$ για κάθε $(r,s)\in\pi$ αν και μόνο αν, $i(r) = i(\tilde{\pi}(r)+1)$ και $i(s) = i(\tilde{\pi}(s)+1)$ για κάθε $(r,s)\in\pi$, δηλαδή, $i(t) = i(\tilde{\pi}(t)+1)$ για κάθε $t \leqslant k$.

Από την (*) και (**) έχουμε:

$$\phi(A^k) = \frac{1}{N^{1+k/2}}\sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}}\ \sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N}\ \prod_{t=1}^{k}\delta_{i(t)i(\tilde{\pi}(t)+1)}$$

και αν $\gamma \in S_k$ η μετάθεση που στέλνει το $l \mapsto l+1 \mod k, l \leqslant k$, (δηλ. η γ έχει έναν κύκλο $\gamma = (12\dots k-1k)$) τότε:

$$\phi(A^k) = \frac{1}{N^{1+k/2}}\sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}}\ \sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N}\ \prod_{t=1}^{k}\delta_{i(t)i(\gamma\,\circ\,\tilde{\pi}(t))}$$

Επίσης, βλέποντας τον $k-$πολυδείκτη $i = (i(1), \ldots, i(k))$ ως συνάρτηση

$$i : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, N\}$$

για να έχουμε $\prod_{t=1}^{k} \delta_{i(t)i(\gamma \circ \tilde{\pi}(t))} = 1$ θα πρέπει $i(t) = i(\gamma \circ \tilde{\pi}(t))$ για κάθε $t \leqslant k$, δηλαδή θα πρέπει η συνάρτηση i να είναι σταθερή στους κύκλους της $\gamma \circ \tilde{\pi}$. Σε κάθε άλλη περίπτωση το γινόμενο είναι 0.

Συνεπώς το άθροισμα

$$\sum_{i(1),\ldots,i(k)=1}^{N} \prod_{t=1}^{k} \delta_{i(t)i(\gamma \circ \tilde{\pi}(t))}$$

υπολογίζεται ως εξής: για κάθε κύκλο της $\gamma \circ \tilde{\pi}$ διαλέγουμε μία τιμή της i η οποία να είναι σταθερή σε αυτόν τον κύκλο. Υπάρχουν N τέτοιες επιλογές για κάθε κύκλο, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους οπότε:

$$\sum_{i(1),\ldots,i(k)=1}^{N} \prod_{t=1}^{k} \delta_{i(t)i(\gamma \circ \tilde{\pi}(t))} = N^{\#(\gamma \circ \tilde{\pi})}$$

όπου $\#(\gamma \circ \tilde{\pi})$ το πλήθος των κύκλων της $\gamma \circ \tilde{\pi}$. Έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.1. *Έστω A ένας $N \times N$ Gaussian τυχαίος πίνακας. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:*

$$\phi(A^k) = \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\ldots,k\}}} N^{\#(\gamma \circ \tilde{\pi})-1-k/2}$$

Παρατηρούμε πως για $k = 2$ το μόνο pairing είναι το $\tilde{\pi} = (12)$ και έχουμε και $\gamma \circ \tilde{\pi} = (12)(12) = (12)(21) = (1)(2)$ (δύο τετριμμένοι κύκλοι). Συνεπώς από το παραπάνω θεώρημα $\phi(A^2) = 1$, από το οποίο φαίνεται ο ρόλος της 'κανονικοποίησης' της συνδιακύμανσης των στοιχείων του πίνακα με $\frac{1}{N}$ (βλ. Ορισμό 6.1).

Η παρακάτω δύο προτάσεις (6.1 και 6.2) αποδεικνύουν τελικώς το Θεώρημα του Wigner:

Θεώρημα 6.2 (Wigner). *Έστω $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία, όπου για κάθε $N \in \mathbb{N}$, ο A_N είναι αυτοζυζηγής Gaussian $N \times N$ πίνακας. Τότε*

$$A_N \xrightarrow[N\to+\infty]{dist} s$$

όπου s ένα semicircular στοιχείο.

Για να αποδειχθεί το Θεώρημα του Wigner θα πρέπει, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να έχουμε

$$\lim_N \phi_N(A_N^{2k}) = C_k$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1 έχουμε

$$\lim_N \phi_N(A_N^{2k}) = \lim_N \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\ldots,2k\}}} N^{\#(\gamma \circ \tilde{\pi})-1-k}$$

Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\#(\gamma \ \circ \ \tilde{\pi}) \leqslant 1 + k$ με το άνω φράγμα να επιτυγχάνεται αν και μόνο αν η π είναι non-crossing, αφού τότε,

$$\lim_N \phi_N(A_N^{2k}) = 1 \times \#\{\pi : \pi \text{ non-crossing pairing του } \{1,\ldots,2k\}\} = C_k$$

Πρόταση 6.1. *Έστω $\tilde{\pi} \in S_{2k}$ με π pairing. Τότε*

$$\#(\gamma \ \circ \ \tilde{\pi}) \leqslant 1 + k$$

Απόδειξη. Θέτουμε $d : S_n \times S_n \to \mathbb{N}$ με

$$d(\alpha,\beta) = \min\{k \in \mathbb{N} : \alpha \cdot (\tau_1 \ldots \tau_k) = \beta, \ \text{ με } \ \tau_i \ \text{ transpositions}\}^{19}$$

Η d είναι μετρική στο S_n που είναι αναλλοίωτη στις αριστερές και δεξιές μεταθέσεις. Το ότι $d(\alpha,\beta) \geqslant 0$ με $d(\alpha,\beta) = 0$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$ είναι προφανές. Έστω $d(\alpha,\beta) = k$. Τότε:

$$\alpha \cdot (\tau_1 \ldots \tau_k) = \beta \Rightarrow \alpha = \beta \cdot (\tau_1 \ldots \tau_k)^{-1} = \beta \cdot (\tau_k \ldots \tau_1) \Rightarrow d(\beta,\alpha) = k$$

Για την Τριγωνική Ανισότητα, έστω $\alpha,\beta,\gamma \in S_n$ με $d(\alpha,\gamma) = l$ και $d(\beta,\gamma) = m$. Τότε:

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{r} \alpha(\tau_1 \ldots \tau_l) = \gamma \\ \beta(\tau_1 \ldots \tau_m) = \gamma \end{array}\right\} &\Rightarrow \alpha(\tau_1 \ldots \tau_l) = \beta(\tau_1 \ldots \tau_m) \\ &\Rightarrow \alpha(\tau_1 \ldots \tau_l)(\tau_m \ldots \tau_1) = \beta \\ &\Rightarrow \alpha(\tau_1' \ldots \tau_{l+m}') = \beta \end{aligned}$$

Συνεπώς, το $l + m \in \{k \in \mathbb{N} : \alpha \cdot (\tau_1 \ldots \tau_k) = \beta, \ \text{ με } \ \tau_i \ \text{ transpositions}\}$ και άρα $d(\alpha,\beta) \leqslant l + m = d(\alpha,\gamma) + d(\beta,\gamma)$ αφού παίρνουμε το minimum.

[19] Τα transpositions είναι 2-κύκλοι. Κάθε μετάθεση $\alpha \in S_n$ γράφεται σαν γινόμενο από 2-κύκλους. Η d ονομάζεται Cayley Distance, για τον λόγο ότι στο Cayley Graph της S_n με γεννήτορες τα transpositions η d αντιστοιχεί στην καταμέτρηση ακμών από το ένα στοιχείο στο άλλο.

Δείχνουμε ότι η d είναι 'δεξιά αναλλοίωτη,' $d(\alpha,\beta) = d(e,\beta\alpha^{-1})$. Έστω $d(\alpha,\beta) = k \leqslant d(\alpha^{-1},\beta^{-1})$. Οπότε $\beta^{-1} = (\tau_1 \dots \tau_k)\alpha^{-1} \Rightarrow \beta^{-1}\alpha = (\tau_1 \dots \tau_k)$ και άρα $d(\alpha,\beta) = k \leqslant d(e,\beta^{-1}\alpha) = d(e,\alpha^{-1}\beta)$. Αντίστοιχα δίνεται και η άλλη ανισότητα.

Επίσης, είναι σημαντικό ότι $d(\alpha,e) = n - \#(\alpha)$. Ξεκινάμε με ένα λήμμα:

Λήμμα 6.2. *Έστω $\alpha \in S_n$ και $\tau = (ij) \in S_n$, $i \neq j$ ένα transposition. Τότε:*

$$\#(\alpha\tau) = \begin{cases} \#(\alpha) + 1, & \text{αν τα } i,j \text{ ανήκουν στον ίδιο κύκλο της } \alpha \\ \#(\alpha) - 1, & \text{αν τα } i,j \text{ ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους της } \alpha \end{cases}$$

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε τους κύκλους της α που περιέχουν τα i,j αφού οι υπόλοιποι δεν επηρεάζονται από τον πολλαπλασιασμό (σύνθεση) με $\tau = (ij)$. Έστω πως τα i,j ανήκουν στον ίδιο κύκλο της α, $C = (ii_1 \dots i_k jj_1 \dots j_l)$. Τότε:

$$C \cdot (ij) = (ii_1 \dots i_k jj_1 \dots j_l)(ij) = (ji_1 \dots i_k)(ij_1 \dots j_l)$$

συνεπώς, $\#(\alpha\tau) = \#(\alpha) + 1$. Σε αυτήν την περίπτωση ο πολλαπλασιαμός με (ij) σπάει τον κύκλο σε δύο. Διαφορετικά, έστω πως τα i,j ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους της α, $i \in C_1 = (ii_1 \dots i_k)$ και $j \in C_2 = (jj_1 \dots j_l)$. Τότε:

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \tau = (ii_1 \dots i_k)(jj_1 \dots j_l)(ij) = (ij_1 \dots j_l j i_1 \dots i_k)$$

συνεπώς $\#(\alpha\tau) = \#(\alpha) - 1$. Σε αυτήν την περίπτωση ο πολλαπλασιαμός με (ij) ενώνει τους δύο κύκλους.

□

Τώρα θα δείξουμε ότι $d(\alpha,e) = n - \#(\alpha)$:

1. $d(\alpha,e) \geqslant n - \#(\alpha)$: Έστω πως $d(\alpha,e) = k$. Έχουμε $\alpha(\tau_1 \dots \tau_k) = e \Rightarrow \alpha = e(\tau_k \dots \tau_1)$. Από το παραπάνω λήμμα ο πολλαπλασιασμός με k το πλήθος transpositions το πολύ να μειώσει τους κύκλους της e κατα k. Συνεπώς, $\#(\alpha) = \#e(\tau_k \dots \tau_1) \geqslant \#(e) - k = n - k$ (αφού η μονάδα έχει n το πλήθος 1-κύκλους). Άρα, $d(\alpha,e) = k \geqslant n - \#(\alpha)$.

2. $d(\alpha,e) \leqslant n - \#(\alpha)$: Έστω πως η α έχει r κύκλους $C_1, \dots C_r$ καθένας μήκους $p_j, j \leqslant r$. Προφανώς $p_1 + p_2 + \dots + p_r = n$. Παρατηρούμε πως κάθε κύκλος C_j γράφεται ως γινόμενο από $p_j - 1$ transpositions:

$$C_j = (i_1 i_2 \dots i_{p_j}) = \underbrace{(i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{p_{j-1}} i_{p_j})}_{p_{j-1} - \text{όροι}}$$

Συνεπώς, ολόκληρη η α γράφεται ως γινόμενο από

$$p_1-1+p_2-1+\cdots+p_r-1 = p_1+p_2+\cdots+p_r-\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{r-\text{όροι}} = n-r$$

transpositions. Παίρνοντας minimum προκύπτει ότι $d(\alpha,e) \leqslant n-r = n-\#(\alpha)$.

Τέλος, για $\pi \in S_{2k}$ pairing και $\gamma = (12\ldots 2k)$ από την Τριγωνική Ανισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned}
d(\gamma,e) &\leqslant d(\gamma,\tilde{\pi}) + d(\tilde{\pi},e) \Rightarrow \\
d(\gamma,e) &\leqslant d(\gamma\circ\tilde{\pi}^{-1},e) + d(\tilde{\pi},e) \Rightarrow && \text{(αναλλοίωτο)} \\
d(\gamma,e) &\leqslant d(\gamma\circ\tilde{\pi},e) + d(\tilde{\pi},e) \Rightarrow && (\tilde{\pi}=\tilde{\pi}^{-1} \text{ για } \pi \text{ pairing}) \\
2k-\#(\gamma) &\leqslant 2k-\#(\gamma\circ\tilde{\pi}) + 2k-\#(\tilde{\pi}) \Rightarrow && (d(\alpha,e)=n-\#(\alpha)) \\
2k-1 &\leqslant 2k-\#(\gamma\circ\tilde{\pi}) + 2k-k \Rightarrow \\
\#(\gamma\circ\tilde{\pi}) &\leqslant 1+k
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 6.2. *Έστω $\tilde{\pi} \in S_{2k}$ με π pairing. Τότε*

$$\#(\gamma\ \circ\ \tilde{\pi}) = 1+k$$

αν και μόνο αν η π είναι non-crossing.

Απόδειξη. Δεδομένης της απόδειξης της παραπάνω πρότασης, είναι εμφανές ότι

$$\#(\gamma\ \circ\ \tilde{\pi}) = 1+k \iff d(\gamma,e) = d(\gamma,\tilde{\pi}) + d(\tilde{\pi},e)$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $\tilde{\pi}$ βρίσκεται στην 'ευθεία' από την μονάδα e μέχρι το γ. Θέτουμε,

$$\begin{aligned}
S_{NC}(\gamma) := \big\{\alpha \in S_n : d(e,\gamma) = d(\alpha,\gamma) + d(e,\alpha)\big\} = \\
= \big\{\alpha \in S_n : d(e,\alpha) + d(e,\alpha^{-1}\gamma) = n-1\big\}
\end{aligned}$$

και

$$\alpha \preceq \beta \iff d(e,\alpha) + d(\alpha,\beta) = d(e,\beta) \ \ \forall \alpha,\beta \in S_{NC}(\gamma)$$

δηλαδή τα α,β βρίσκονται στην ίδια 'ευθεία' και το α 'προηγείται' του β.

Σκοπός είναι να δείξουμε ότι $\tilde{\pi} \in S_{NC}(\gamma)$ αν και μόνο αν η π είναι non-crossing, όπου $\pi \mapsto \tilde{\pi} \in S_{2k}$ η εμφύτευση των διαμερίσεων στις μεταθέσεις, που περιγράφτηκε παραπάνω. Ειδικότερα, θα δείξουμε πως η εμφύτευση αυτή είναι ισομορφισμός των μερικά διατεταγμένων συνόλων $NC(n)$ και $S_{NC}(\gamma)$ όπου το $NC(n)$ θεωρείται με μερική διάταξη

$$\pi_1 \preceq \pi_2 \iff |\pi_2| \leqslant |\pi_1| \quad \text{δηλ. η } \pi_2 \text{ έχει λιγότερα blocks από την } \pi_1$$

Ξεκινάμε με ένα λήμμα που χαρακτηρίζει το μερικά διατεταγμένο σύνολο $S_{NC}(\gamma)$.

Λήμμα 6.3. *1. Αν $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$ τότε και $\alpha^{-1}\gamma, \gamma\alpha^{-1} \in S_{NC}(\gamma)$.*

2. Το $S_{NC}(\gamma)$ αποτελείται από τα $\alpha \in S_n$ για τα οποία υπάρχουν $n-1$ transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \in S_n$ ώστε:

$$\gamma = \tau_{n-1} \ldots \tau_1 \text{ και } \alpha = \tau_k \ldots \tau_1$$

για κάποιο $k \leqslant n-1$ (τότε το $k = d(e, \alpha)$).

3. $\alpha \preceq \beta$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n-1$ transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \in S_n$ ώστε $\gamma = \tau_{n-1} \ldots \tau_1$ και

$$\alpha = \tau_k \ldots \tau_1 \text{ και } \beta = \tau_l \ldots \tau_{k+1} \underbrace{\tau_k \ldots \tau_1}_{\alpha}$$

για κάποια $k \leqslant l \leqslant n-1$.

Απόδειξη. 1) Θέτουμε $\hat{\alpha} := \alpha^{-1}\gamma$. Τότε, $\alpha = \gamma\hat{\alpha}^{-1}$, οπότε επειδή $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$,

$$d(e,\alpha) + d(e,\alpha^{-1}\gamma) = n-1 \Rightarrow d(e,\gamma\hat{\alpha}^{-1}) + d(e,\hat{\alpha}) = n-1$$

και επειδή η d είναι συμμετρική (ως μετρική) έχουμε

$$d(e,\hat{\alpha}^{-1}\gamma) + d(e,\hat{\alpha}) = n-1$$

οπότε $\hat{\alpha} \in S_{NC}(\gamma)$.

2) Έστω $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1} \in S_n$ με $\gamma = \tau_{n-1} \ldots \tau_1$ και $k \leqslant n-1$ ώστε $\alpha = \tau_k \ldots \tau_1$. Θα δείξουμε ότι $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$. Επειδή $\alpha = \tau_k \ldots \tau_1$ έχουμε ότι $d(e,\alpha) \leqslant k$. Επίσης,

$$\gamma\alpha^{-1} = \underbrace{\tau_{n-1} \ldots \tau_{k+1}\tau_k \ldots \tau_1}_{\gamma} \underbrace{\tau_1 \ldots \tau_k}_{\alpha^{-1}} = \tau_{n-1} \ldots \tau_{k+1}$$

Συνεπώς:

$$d(e, \gamma\alpha^{-1}) \leqslant n - k - 1$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την Τριγωνική Ανισότητα έχουμε:

$$n - 1 = d(e, \gamma) \leqslant d(e, \alpha) + d(e, \gamma\alpha^{-1}) \leqslant n - k - 1 + k = n - 1$$

Συνεπώς, $d(e, \alpha) + d(e, \gamma\alpha^{-1}) = n - 1$ και άρα $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$.

Αντίστροφα, έστω πως $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$. Δηλαδή, $d(e, \alpha) + d(e, \gamma\alpha^{-1}) = n - 1$. Θέτοντας, $d(e, \alpha) = k$ έχουμε $d(e, \gamma\alpha^{-1}) = n - k - 1$. Δηλαδή, το α γράφεται ως γινόμενο k το πλήθος transpositions (έστω $\tau_1, \ldots, \tau_k$) και το $\gamma\alpha^{-1}$ γράφεται ως γινόμενο $n-k-1$ το πλήθος transpositions (έστω $\tau_{n-1}, \ldots, \tau_{k+1}$). Συνεπώς,

$$\gamma = \gamma\alpha^{-1}\alpha = \tau_{n-1} \ldots \tau_{k+1}\tau_k \ldots \tau_1$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Τέλος το (3) αποδεικνύεται με τα ίδια επιχειρήματα όπως το (2).

□

Η απόδειξη της παρούσας πρότασης ολοκληρώνεται δείχνοντας πως η απεικόνιση:

$$\tilde{} : NC(n) \to S_{NC}(\gamma), \quad \pi \mapsto \tilde{\pi}$$

είναι ισομορφισμός μερικά διατεταγμένων συνόλων.

Αρχικά παρατηρούμε πως κάθε $\pi \in NC(n)$ προκύπτει επαγωγικά ξεκινώντας από την 'maximal' (ως προς την σχέση $\preceq$ που ορίστηκε παραπάνω) διαμέριση $\mathbf{1}_n := V = \{1, \ldots, n\}$ (δηλαδή την διαμέριση με ένα block), και 'σπάζοντας' την σε δύο μέρη δημιουργώντας μια $\pi_1 = \{V_1, V_2\}$ με $V_1 < V_2$. Συνεχίζοντας, χωρίζουμε διαδοχικά, κάθε διαμέριση που προκύπτει σε δύο μέρη επίσης (δηλαδή, κάποιο *block* σε δύο μέρη) και ούτω καθεξής. Η διαδικασία τελειώνει όταν φτάσουμε στην 'minimal' διαμέριση, $\mathbf{0}_n := \{V_1, \ldots, V_n\}$, όπου $V_i = \{i\}$ (δηλαδή την διαμέριση με n blocks). Από τον επαγωγικό χαρακτηρισμό των non-crossing διαμερίσεων, δηλαδή:

$$\pi = \{V_1, \ldots, V_s\} \in NC(n) \iff \text{αν τουλάχιστον ένα block } V_i \text{ ειναι 'διάστημα'} \\ \text{και η } \pi \setminus V \text{ είναι non-crossing}$$

έπεται πως κάθε διαμέριση που προκύπτει έτσι θα είναι non-crossing αφού κάθε 'σπάσιμο' σε δύο μέρη δημιουργεί αναγκαστικά 'διαστήματα' και ξεκινάμε από την $\mathbf{1}_n$ που είναι non-crossing. Επίσης, είναι εμφανές πως σε κάθε βήμα προκύπτει μια διαμέριση που είναι 'μικρότερη' από αυτήν που ξεκινίσαμε.

Θα δείξουμε πως η ίδια επαγωγική διαδικασία παράγει όλες της μεταθέσεις του $S_{NC}(\gamma)$. Από τον ορισμό της εμφύτευσης $\widetilde{\ }$ προκύπτει άμεσα πως $\widetilde{\mathbf{1}_n} = \gamma$ και $\widetilde{\mathbf{0}_n} = e$. Από το Λήμμα 6.3 έχουμε ότι το $S_{NC}(\gamma)$ αποτελείται από τα $\alpha \in S_n$ για τα οποία υπάρχουν $n-1$ transpositions $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in S_n$ ώστε:

$$\gamma = \tau_{n-1} \dots \tau_1 \ \text{ και } \ \alpha = \tau_k \dots \tau_1$$

για $k = d(\alpha, \gamma) < n-1$. Δηλαδή, κάθε $\alpha \in S_{NC}(\gamma)$ προκύπτει από διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με transpositions ξεκινώντας πάντα από το γ. Όμως από το Λήμμα 6.2 προκύπτει ότι κάθε πολλαπλασιασμός με $\tau_{i+1}, i \leqslant k-1$ σπάει κάποιον από τους κύκλους της $(\tau_i \tau_{i-1} \dots \tau_l \gamma)$ σε δύο μέρη.

Η παρατήρηση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού έχουμε ταυτίσει τα 'maximal' και 'minimal' στοιχεια των $(NC(n), \preceq)$ και $(S_{NC}(\gamma), \preceq)$ και τις επαγωγικές διαδικασίες που παράγουν κάθε $\pi \in NC(n)$ με $\mathbf{0}_n \preceq \pi \preceq \mathbf{1}_n$ και $\tilde{\pi} \in S_{NC}(\gamma)$, με $e \preceq \tilde{\pi} \preceq \gamma$.

□

Παρατήρηση 6.1. *Ο παραπάνω ισομορφισμός ισχύει και γενικότερα. Δηλαδή, αν $c \in S_n$ ένας οποιοσδήποτε κύκλος και $NC(n, c)$ οι non-crossing διαμερίσεις του κύκλου c, τότε τα $NC(n, c)$ και $S_{NC}(c)$ είναι ισομορφικά. Η απόδειξη βρίσκεται στον Biane, (1997, σ. 44).*

Τελικώς έχουμε δείξει πως

$$\lim_N \phi_N(A_N^{2k}) = \lim_N \sum_{\substack{\pi \text{ non-crossing pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,2k\}}} 1 = C_k$$

δηλαδή το Θεώρημα του Wigner (6.2). Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό από τα 50's και η γενίκευσή του για οικογένειες ανεξάρτητων αυτοσυζυγών Gaussian πινάκων—που πρωτοαποδείχθηκε από τον Voiculescu—αποτελεί την πρώτη εκδήλωση της (ασυμπτωτικής) ελευθερίας στους τυχαίους πίνακες. Αυτό θα αποδειχθεί στη συνέχεια.

Έστω A^1, A^2 δύο ανεξάρτητοι Αυτοσυζυγείς Gaussian πινάκες. Η 'ανεξαρτησία' αναφέρεται στην σχέση μεταξύ των στοιχείων των δύο πινάκων και ενσωματώνεται στην δομή της συνδιακύμανσης ολόκληρης της οικογένειας $\{a_{ij}^1, a_{ij}^2\}_{i,j \leqslant N}$, που δίνεται από το

$$\mathbb{E}(a_{ij}^r a_{kl}^p) = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{rp}, \qquad i,j,k,l \leqslant N, \ \text{ και } \ r,p \in \{1,2\}$$

Εφαρμόζοντας όλα τα επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω για την περίπτωση της ροπής ενός μονο πίνακα A, στην αυθαίρετη κοινή ροπή $\phi(A^{i(1)} \dots A^{i(k)})$, καταλήγουμε στο:

$$\phi_N(A^{i(1)} \dots A^{i(k)}) = \frac{1}{N^{1+k/2}} \sum_{\substack{\pi \text{ pairing} \\ \text{του } \{1,\dots,k\}}} \sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{N} \Big(\prod_{t=1}^{k} \delta_{i(t)i(\gamma\circ\tilde{\pi}(t))} \delta_{p(t)p(\tilde{\pi}(t))} \Big)$$

Ο επιπλέον όρος $\prod_{t=1}^{k} \delta_{p(t)p(\tilde{\pi}(t))}$ υποχρεώνει την π να ζευγαρώνει στοιχεία από τους ίδιους πίνακες. Δηλαδή,

$$p(t) = p(\tilde{\pi}(t)),\ \forall t \leqslant k$$

Βλέποντας, το $p : \{1, \dots, k\} \to \{1, 2\}$ σαν 'χρωματισμό' είναι εμφανές πως η π πρέπει να σέβεται τον χρωματισμό. Ορίζοντας:

$$\mathcal{P}_2^p(k) := \big\{\pi \text{ pairing του } \{1, \dots, k\} \mid \pi(p(t)) = \pi(t),\ \forall t \leqslant k\big\}$$

έχουμε:

$$\phi_N(A^{i(1)} \dots A^{i(k)}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2^p(k)} N^{\#(\gamma\,\circ\,\tilde{\pi})-1-k/2}$$

Παίρνοντας όριο ως προς $N \to +\infty$ έχουμε:

$$\lim_N \phi_N(A^{i(1)} \dots A^{i(k)}) = \sum_{\pi \in NC_2(k) \cap \mathcal{P}_2^p(k)} 1$$

Όμως αυτές είναι ακριβώς οι ροπές ενός semicircular συστήματος με συνδιακύμανση την μονάδα (βλ. Ορισμό 5.4). Συνεπώς, οι A^1, A^2 συγκλίνουν κατά κατανομή σε ένα semicircular σύστημα και άρα είναι ασυμπτωτικά ελεύθεροι.

Η παραπάνω ανάλυση γενικεύεται ακριβώς ανάλογα και για την αυθαίρετη οικογένεια αυτοσυζυγών Gaussian πινάκων· το μόνο που αλλάζει είναι το πλήθος των 'χρωματισμών' που πρέπει να σέβονται οι διαμερίσεις. Συνεπώς έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3. *Έστω $(A^i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αυτοσυζυγών Gaussian πινάκων. Τότε οι $(A^i)_{i\in I}$ είναι ασυμπτωτικά ελεύθεροι καθώς $N \to +\infty$.*

Το Θεώρημα 6.3 είναι ένα πρώτο βήμα προς την αναζήτηση παραδειγμάτων ελεύθερων τυχαίων μεταβλητών. Το επόμενο βήμα είναι η απόδειξη πως οι Αυτοσυζυγείς Gaussian πίνακες είναι ασυμπτωτικά ελεύθεροι από τους 'σταθερούς' (ντετερμινιστικούς) πίνακες, όταν οι τελευταίοι έχουν οριακή 'κατανομή.' Αυτό το παράδειγμα ελευθερίας, ακολουθείται από το αρκετά πιο γενικό παράδειγμα ασυμπτωτικής $*$-ελευθερίας μεταξύ των Haar ορθομοναδιαίων τυχαίων πινάνων και των σταθερών πινάκων. Η απόδειξη μιας περιορισμένης εκδοχής του αποτελέσματος αυτού βρίσκεται στους Nica και Speicher (2006, $\sigma.\sigma.$ 385–393).

Α΄ Προαπαιτούμενα Θεωρήματα

Θεώρημα Α΄.1 (Αναπαράστασης Riesz, Markov, Kakutani)**.** *Έστω X τοπικά συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος και Λ, ένα θετικό, γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $C_c(X) =$'συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.' Τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα Σ στον X που περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του X, και ένα μοναδικό θετικό μέτρο $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, που αναπαριστά το Λ, δηλ.:*

$$\Lambda f = \int_X f d\mu$$

Ιδέα Απόδειξης. Η απόδειξη που βρίσκεται στον Rudin (1970) και κατασκευάζει το μ ορίζοντάς το πάνω σε ανοιχτά υποσύνολα $V \subseteq X$, ως:

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f |\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \text{ και } \mathrm{supp} f \subseteq V\}$$

Από εκεί δείχνει κανείς πως το μ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathcal{P}(X)$ και χρησιμοποιεί το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθοδωρή, για την κατασκευή της Σ.

□

Θεώρημα Α΄.2. *Για κάθε $\phi : B(X) \to \mathbb{C}$ υπάρχει α, φραγμένης κύμανσης και προσθετικό, ώστε*

$$\phi(f) = \int_X f d\alpha$$

Θεώρημα Α΄.3 (Riesz)**.** *Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός χώρος Hilbert και $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ συνεχής και γραμμική. Τότε υπαρχεί $\eta_f \in \mathcal{H}$ ώστε:*

$$f(\xi) = \langle \xi, \eta_f \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

Η παρακάτω πρόταση είναι εφαρμογή του Θεωρήματος Riesz (Α΄.3), και μας επιτρέπει να ανακτούμε φραγμένους τελεστές από **ημιαντι-διγραμμικές μορφές** (sequilinear forms) δηλαδή $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H}' \to \mathbb{C}$ με $\xi \to g(\xi, \eta)$ γραμμική και $\eta \to \overline{g(\xi, \eta)}$ γραμμική, για κάθε $\xi \in \mathcal{H}$ και $\eta \in \mathcal{H}'$. Μια ημιαντι-διγραμμική μορφή είναι φραγμένη αν $|g(\xi, \eta)| \leqslant k\|\xi\|\|\eta\|$.

Πρόταση Α΄.1. *Για κάθε φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή με μιγαδικές τιμές $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τέτοιος ώστε:*

$$g(\xi, \eta) = \langle T\xi, \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $f(\eta) = \overline{g(\xi, \eta)}$, όπου είναι φραγμένη και γραμμική. Από το Θεώρημα του Riesz (Α΄.3), θα υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\widetilde{\xi}$, με $f(\eta) = \langle \eta, \widetilde{\xi} \rangle$. Ορίζουμε τον T ως:

$$\xi \xrightarrow{T} \widetilde{\xi}$$

και έχουμε $f(\eta) = \langle \eta, T\xi \rangle$. Παίρνοντας συζυγές προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα Α΄.4 (Stone–Weierstrass)**.** *Έστω X συμπαγής χώρος και A ένας κλειστός υπόχωρος της άλγεβρας $C(X)$. Αν:*

$i)$ $1 \in A$.

$ii)$ Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $f \in A$ με $f(x) \neq f(y)$ (διαχωρίζει τον X).

$iii)$ $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$, (κλειστός ως προς την ενέλιξη).

Τότε $A = C(X)$

Θεώρημα Α΄.5 (Alaoglou)**.** *Έστω X (μιγαδικός) χώρος Banach και X^* ο (τοπολογικός) δυϊκός του,*

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{C} |\ f \text{ συνεχής}\}$$

Τότε η $B_{X^*}(\mathbf{0}, 1)$ με την ασθενή-$*$ τοπολογία είναι συμπαγής.

Θεώρημα Α΄.6 (Krein–Milman)**.** *Έστω $A \subseteq X$ συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού τοπολογικού γραμμικού χώρου X. Τότε:*

$$A = \bar{co}\big(\mathcal{E}(A)\big)$$

όπου $\mathcal{E}(A)$ τα extremal σημεία του A.

Ένας (X, τ) τοπολογικός χώρος καλείται **κανονικός** (normal) αν για κάθε $A, B \subseteq X$ κλειστά με $A \bigcap B = \varnothing$, υπάρχουν $U, V \subseteq X$ ανοιχτά με $U \bigcap V = \varnothing$ $A \subseteq U$ και $B \subseteq V$. Δηλαδή, μπορούν να διαχωριστούν δυο κλειστά σύνολα με ανοιχτά.

Θεώρημα Α΄.7 (Λήμμα του Urysohn)**.** *Έστω (X, τ) κανονικός. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

$i)$ Για κάθε $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα, υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ συνεχής με $f|_A = 0$ και $f|_B = 1$.

$ii)$ Για κάθε $A \subseteq X$ κλειστό και κάθε ανοιχτή περιοχή U του A, υπάρχουν ανοιχτό V και κλειστό B, ώστε $A \subseteq V \subseteq B \subseteq U$

$iii)$ Για κάθε κλειστό A και κάθε ανοιχτή περιοχή U του A υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, με $\chi_A(x) \leqslant f(x) \leqslant \chi_U(x)$, για κάθε $x \in X$.

Αναφορές

Arveson, W. (1976), 'An Invitation to C^*-Algebras,' *Springer*.

Arveson, W. (2002), 'A Short Course on Spectral Theory,' *Springer*.

Bell, J. S. (1964), 'On the Einstein Podolsky Rosen Paradox,' *Physics* Vol. 1, No. 3.

Biane, P. (1997), 'Some Properties of Crossings and Partitions,' *Discrete Mathematics 175*.

Biane, P. (1998), 'Free Probability for Probabilists,' *Quantum probability communications, Vol. XI (Grenoble)*.

Deza, M. and Huang, T. (1998), 'Metrics on Permutations, a Survey,' *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences*.

Janson, S. (1997), 'Gaussian Hilbert Spaces,' *Cambridge University Press*.

Maassen, H. (2003), 'Quantum Probability Theory,' *Notes*.

Maassen, H. (2010), 'Quantum Probability and Quantum Information,' in Benatti, F., Fannes, M., Floreanini, R., and Petridis, D. (eds.) *Quantum Information, Computation and Cryptography*, Springer Lecture Notes in Physics 808.

Murphy, G. J. (1990), 'C^*-Algebras and Operator Theory,' *Academic Press*.

Nica, A. and Speicher, R. (2006), 'Lectures on the Combinatorics of Free Probability,' *Cambridge University Press*.

Pinch, R. G.E. (2005), 'The Distance of a Permutation from a Subgroup of S_n,' *arXiv:math/0511501v1*.

Rudin (1970), W. 'Real and Complex Analysis,' *McGraw-Hill*.

Voiculescu, D. V., Dykema, K. J. and Nica, A. (1992), 'Free Random Variables,' *AMS, CRM Monograph Series*.

Καρανάσιος, Σ. (2012), 'C^*-Άλγεβρες και Θεωρία Τελεστών,' *Σημειώσεις*.

Κατάβολος, Α. (2003), 'Θεωρία Τελεστών,' *Σημειώσεις*.