



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΡΟΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ - ΑΝΑΛΥΣΗΣ

**Βελτιστοποίηση παραγωγής
σε βιομηχανία παραγωγής συσκευασίας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΚΟΥΔΟΥΝΑ ΒΑΣΙΛΗ

Επιβλέπων: Κολέτσος Ιωάννης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Τριμελής επιτροπή:

Κοκκίνης Βασίλειος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Κολέτσος Ιωάννης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Λουλάκης Μιχαήλ
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Ευχαριστώ πολύ τον καθηγητή μου
Ιωάννη Κολέτσο για τη βοήθεια του
κατά την διάρκεια της εκπόνησης της
διπλωματικής μου εργασίας, την
οικογένεια μου για την υποστήριξη
και την Γεωργία που ήταν πάντα
δίπλα μου...

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή.....	3
1.2 Ιστορική αναδρομή.....	4
1.3 Ορισμοί Επιχειρησιακής Έρευνας (ΕΕ).....	10
1.4 Βασικά στάδια ΕΕ.....	11
1.4.1 Ανάλυση συστήματος.....	11
1.4.2 Διατύπωση στόχων.....	11
1.4.3 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	11
1.4.4 Επίλυση.....	12
1.4.5 Αξιολόγηση και υλοποίηση επίλυσης.....	13
1.5 Εφαρμογές ΕΕ.....	13
1.6 Χαρακτηριστικά μοντέλα – πρότυπα επεξεργασίας.....	14

Κεφάλαιο 2 - Γραμμικός Προγραμματισμός

2.1 Γενικά.....	15
2.2 Μορφοποίηση προβλημάτων.....	16
2.3 Ορισμοί.....	16
2.4 Μορφή Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού.....	17
2.4.1 Κανονική μορφή.....	17
2.4.2 Πρότυπη μορφή.....	17
2.5 Προϋποθέσεις του προβλήματος Γ.Π.....	18
2.6 Γραφική Μέθοδος Επίλυσης Προβλημάτων Γ.Π.....	19
2.6.1 Γραφική επίλυση Γ.Π. σε 2 διαστάσεις.....	19
2.6.2 Παραδείγματα.....	19
2.7 Μέθοδος Simplex.....	25
2.7.1 Εισαγωγή.....	25
2.7.2 Έννοιες – ορισμοί.....	26
2.7.3 Βασικά Θεωρήματα.....	28
2.7.4 Βασικά στάδια - βήματα αλγορίθμου Simplex.....	30

Κεφάλαιο 3 – Βιομηχανία παραγωγής συσκευασίας εξωτερικού

3.1 Ανάλυση Συστήματος.....	32
3.1.1 Περιγραφή του συστήματος.....	32
3.1.2 Εντοπισμός παραγόντων – παραμέτρων του συστήματος	36
3.2 Διατύπωση στόχων.....	46
3.2.1 Ανάλυση προβλήματος.....	46
3.2.2 Χρήσιμοι υπολογισμοί.....	48
3.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση.....	54
3.3.1 Δεδομένα.....	54
3.3.2 Ορισμός μεταβλητών.....	61
3.3.3 Αντικειμενική συνάρτηση.....	63
3.3.4 Περιορισμοί.....	66
4 Βιβλιογραφία.....	70

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μία μελέτη των πραγματικών δεδομένων μίας βιομηχανίας παραγωγής συσκευασίας με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους.

Αρχικά, παραθέτουμε μια ιστορική αναδρομή στο κομμάτι της επιχειρησιακής έρευνας και τα βασικά στοιχεία της διαδικασίας επίλυσης των προβλημάτων. Προσθέτουμε ένα κεφάλαιο με το μαθηματικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται το πρόβλημα και στη συνέχεια κάνουμε πλήρη περιγραφή της λειτουργίας της βιομηχανίας.

Προκειμένου να επιτύχουμε το στόχο αυτό, αναλύουμε τα δεδομένα που διαθέτουμε, έτσι ώστε να εντοπίσουμε τους παράγοντες εκείνους που επηρεάζουν τη βιομηχανική διαδικασία και κατ' επέκταση το στόχο μας. Παράγοντες όπως η χωρητικότητα των αποθεμάτων, η ζήτηση, η συνδεσμολογία μεταξύ παραγωγής και συσκευασίας, η αξία των προϊόντων αλλά και το κόστος, το οποίο παρατηρείται κατά τη λειτουργία των μηχανών παραγωγής και συσκευασίας, είναι μερικοί από αυτούς που μελετούμε.

Τέλος, αναπτύσσοντας ένα μοντέλο για την επίτευξη του στόχου, ορίζουμε μεταβλητές οι οποίες, αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους, περιγράφουν πλήρως το πρόβλημα. Παρόλα αυτά, το μεγάλο πλήθος των μεταβλητών αλλά και τα περιορισμένα εργαλεία που διαθέτουμε, δεν μπορούν να μας δώσουν μία ρεαλιστική λύση.

Abstract

This thesis is a study of the facts of a packaging industry in order to maximize profit.

First, we present a throwback to the track operations research and the key elements of the problem-solving process. Firstly we add a section with the mathematical background underlying the problem and then do a full description of the operation of the industry.

To achieve this goal, we analyze the data we have, so to identify those factors that affect the industrial process and hence our goal. Factors such as the capacity of stocks, demand, the connection between production and packaging, the value of the product and the cost, which occurs during operation of the machinery of production and packaging, are seem very important.

Finally, by developing a model to achieve the objective, we define variables that fully describe the problem. However, the large number of variables and the limited tools available to us, they can not give us a realistic solution.

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή

Ο όρος **Επιχειρησιακή Έρευνα** αναφέρεται στην επιστήμη που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση της απόδοσης ενός "συστήματος", είτε αυτό μπορεί να είναι ένα εργοστάσιο που παράγει τρόφιμα, μία επένδυση ενός κεφαλαίου, είτε μία κατανομή εργατικού δυναμικού κ.ο.κ. Για την μελέτη της απόδοσης ενός συστήματος, λοιπόν, χρησιμοποιείται ένα σύνολο από τεχνικές, οι οποίες χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, δημιουργούν μια ποσοτική και ορθολογιστική βάση για τη λήψη αποφάσεων που θα βελτιστοποιήσουν τη *λειτουργία* του υπό μελέτη συστήματος. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζεται συχνά και με τους όρους **Διοικητική Επιστήμη** (Management Science), **Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων** (Decision Making), ή **Ποσοτική Ανάλυση** (Quantitative Analysis).

Η βέλτιστη λειτουργία του εκάστοτε συστήματος "μεταφράζεται" διαφορετικά, με τρόπο ώστε ν' ανταποκρίνεται στα δεδομένα του προβλήματος. Κατά συνέπεια το βέλτιστο της λύσης ορίζεται ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια (στόχους) όπως για παράδειγμα, το ελάχιστο κόστος, το μέγιστο κέρδος, ο ελάχιστος χρόνος αναμονής ή διεκπεραίωσης, η μέγιστη ευστάθεια, ο συνδυασμός κέρδους με ρίσκο κ.τ.λ. Ωστόσο η διαδικασία επίτευξης του επιθυμητού στόχου ακολουθεί κάποια βήματα τα οποία, αν και συγκεκριμένα, παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο στόχος που τίθεται θα πρέπει να πάρει τη μορφή ενός προβλήματος το οποίο θα πρέπει να διατυπωθεί σωστά για να μπορέσει στη συνέχεια να μοντελοποιηθεί και να επιλυθεί σωστά, δίνοντας έτσι μια ρεαλιστική λύση.

Μερικά παραδείγματα επιχειρησιακής έρευνας είναι ο προγραμματισμός προσωπικού ενός νοσοκομείου σε βάρδιες, η ελάχιστη μεταφορά καυσίμων από το διυλιστήριο στα πρατήρια βενζίνης ή ακόμα η ελαχιστοποίηση της ποσότητας των ελαττωματικών προϊόντων ενός εργοστασίου που προκύπτει κατά την διαδικασία παραγωγής. Τα προβλήματα περιπλέκονται όσο αυξάνονται οι μεταβλητές καθιστώντας απαραίτητη τη χρήση υπολογιστή.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Τα πρώτα χνάρια της Επιχειρησιακής Έρευνας (ΕΕ) εντοπίζονται στην Αγγλία το 1840, από τον Charles Babbage (1791-1871), ο οποίος χαρακτηρίστηκε ως "πατέρας της ΕΕ", επειδή η έρευνά του για το κόστος μεταφοράς και ταξινόμησης της αλληλογραφίας οδήγησε στη δημιουργία του γενικού αγγλικού ταχυδρομείου: "Penny Post" (ταχυδρομείου της πέννας). Ακολουθούν, σταδιακά, αρκετοί επιστήμονες οι οποίοι με τις έρευνες και τις μελέτες τους επεκτείνουν τον τομέα της ΕΕ σε πολλές διαφορετικές εφαρμογές.

Στα επόμενα πρώτα στάδια εξέλιξης της ΕΕ, ο Frederick Taylor το 1893 εφάρμοσε επιστημονικές προσεγγίσεις (scientific management) για την παραγωγή βιομηχανικών προϊόντων (industrial engineering), το 1900 ο Andrey A. Markov μελέτησε τη διαχρονική εξέλιξη συστημάτων (markov processes) και το 1903 ο Henry L. Gantt πρότεινε τα ομώνυμα διαγράμματα για την αναπαράσταση της χρονικής δραστηριότητας διαφόρων μηχανών (project scheduling).

Στη συνέχεια, σημαντική συνεισφορά στον τομέα πραγματοποιείται το 1913 από το Ford W. Harris, ο οποίος προσδιόρισε τη βέλτιστη ποσότητα παραγωγής και αποθήκευσης προϊόντων με τρόπο ώστε να ικανοποιείται μια δεδομένη ζήτησή τους (inventory theory) και το 1917 από τον Anger Krarup Erlang που βρήκε μια σχέση για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου αναμονής των κλήσεων προς ένα τηλεφωνικό κέντρο (queueing theory).

Αξίζει ακόμη να αναφερθούν, πως οι John von Neuman & Oscar Morgenstern το 1928 διατύπωσαν τεχνικές για την αξιολόγηση ανταγωνιστικών καταστάσεων (game theory) και οι Harold F. Dodge & Harold G. Roming, το 1929, ανέπτυξαν την ιδέα της δειγματοληψίας αποδοχής (quality control).

Ωστόσο, οι πιο πάνω επιστημονικές ανακαλύψεις δεν ήταν αρκετές για την καθιέρωση της ΕΕ ως νέα επιστήμη. Η επίσημη αρχή της Επιχειρησιακής Έρευνας (ΕΕ) γίνεται στην Μεγάλη Βρετανία, ως νέος επιστημονικός κλάδος, και χρονολογείται το 1940, όπου συνδέεται άμεσα με τις στρατιωτικές υπηρεσίες στις αρχές του Β' Παγκοσμίου Πολέμου.

Κατά την έναρξη του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, το Σεπτέμβριο του 1939, επιστρατεύθηκαν όλες οι δυνάμεις της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων και επιστημόνων (όπως μαθηματικών, φυσικών, ψυχολόγων, βιολόγων κ.α) με σκοπό την εύρεση βέλτιστων λύσεων σε πολλά επιχειρησιακά κυρίως θέματα.

Συγκεκριμένα, στο Ηνωμένο Βασίλειο οι επιστήμονες Patrick Blackett (1897-1974), Conrad Hal Waddington (1905-1975), Owen Wansbrough-Jones (1906-1983) και Frank Yates (1902-1994) αλλά και στις Ηνωμένες Πολιτείες ο George Dantzig (1914-2005) έψαχναν τρόπους ώστε να λαμβάνουν καλύτερες αποφάσεις σε προγράμματα διοικητικής μέριμνας και εκπαίδευσης.

Χαρακτηριστική, είναι η περίπτωση στην Μεγάλη Βρετανία όπου οι διοικητές των ενόπλων δυνάμεων αναζητούσαν πιο αποτελεσματικές μεθόδους για τον εντοπισμό των εχθρικών αεροσκαφών, με την νέα τεχνολογία για την εποχή, την χρήση των ραντάρ. Επομένως, κατά την περίοδο 1936-1945 πραγματοποιούνται μία σειρά γεγονότων προετοιμασίας ενόψει και κατά την διάρκεια του πολέμου σε Βρετανία και Η.Π.Α, που παίζουν καθοριστικό ρόλο στην έκβαση του πολέμου, αλλά και στην καθιέρωση της Επιχειρησιακής Έρευνας (ΕΕ) ως νέος επιστημονικός κλάδος.

Έτσι, το 1936 στη Βρετανία ιδρύονται το ερευνητικό κέντρο Bawdsey Research Station στο οποίο γίνονται έρευνες και πειράματα που αφορούσαν τα ραντάρ και εξυπηρετούσαν το Βρετανικό στρατό και αεροπορία, αλλά και η RAF (Royal Air Force) στην οποία υπήρχαν τα αεροσκάφη, όχι και τόσο ικανά για την ώρα, που χρησιμοποιούνταν και για την συλλογή δεδομένων για το σύστημα προειδοποίησης και ελέγχου των ραντάρ.

Επιπλέον, το 1937, πραγματοποιούνται οι 3 πρώτες, επίσημες ασκήσεις με χρήση ραντάρ κατά τις οποίες τα στοιχεία των ραντάρ τροφοδότησαν το γενικό σύστημα προειδοποίησης και ελέγχου της Βρετανικής αεροπορίας. Τα αποτελέσματα των ασκήσεων ήταν θετικά ως προς την έγκαιρη προειδοποίηση αλλά απογοητευτικά στις πληροφορίες εντοπισμού (tracking information) μετά το φιλτράρισμα και την μετάδοση των στοιχείων από το δίκτυο.

Ένα χρόνο μετά (1938), γίνεται νέα άσκηση με την προσθήκη τεσσάρων σταθμών ραντάρ η οποία, παρά τις προσδοκίες, απέτυχε. Η αποτυχία αυτή οφειλόταν στο συντονισμό και συνδυασμό συχνά αντικρουόμενων πληροφοριών από τους διαφορετικούς σταθμούς. Ενώ τεχνικά τα συστήματα ραντάρ λειτουργούσαν αποτελεσματικά, υπήρχε πρόβλημα στο λειτουργικό (operational) κομμάτι, οπότε και αποφασίστηκε έρευνα (research) σε αυτόν τον τομέα.

Μπροστά στην απειλή του πολέμου, κάτι δραστικό θα έπρεπε να πραγματοποιηθεί. Έτσι, πραγματοποιείται η τελευταία άσκηση πριν τον πόλεμο η οποία περιελάμβανε: 33,000 άντρες, 1,300 αεροσκάφη, 110 αντιαεροπορικά όπλα, 700 προβολείς. Σαν αποτέλεσμα αυτής ήταν η βελτίωση στη λειτουργία της αεράμυνας σε έλεγχο και εντοπισμό αλλά ταυτόχρονα γίνεται αναγνώριση των υπηρεσιών της ΕΕ αφού ο αρχηγός της RAF ζήτησε την ενσωμάτωση της ομάδας ΕΕ στο αρχηγείο του κατά τη διάρκεια του πολέμου και έτσι ιδρύεται το Stanmore

Research Section (1939) και αργότερα το Operational Research Section (1941) έχοντας ως αντικείμενο τις πτήσεις αεροσκαφών με στόχο τον εντοπισμό και εξολόθρευση γερμανικών υποβρυχίων.

Από την έναρξη του πολέμου και μετά, πραγματοποιούνται αρκετές Επιχειρησιακές Έρευνες για την επιλογή της βέλτιστης απόφασης κάτω από τις συνθήκες κάθε αποστολής. Συγκεκριμένα, το 1940 στην Βρετανία ζητήθηκε από την ομάδα της ΕΕ να εκτιμήσει αν συμφέρει η αποστολή 10 επιπρόσθετων αεροπορικών μοιρών στη Γαλλία. Πραγματοποιήθηκε, λοιπόν, μελέτη που λάμβανε υπόψη τους ρυθμούς απωλειών και αντικατάστασης η οποία πρόβλεπε απώλεια 3 μοιρών κάθε 2 μέρες. Συνεπώς, αποφασίστηκε να μην σταλεί βοήθεια και να ανακληθούν οι ήδη εμπλεκόμενες μοίρες, με αποτέλεσμα η απόφαση αυτή να θεωρηθεί ως μία από τις μεγαλύτερες της ΕΕ, αφού οι μοίρες που δεν στάλθηκαν υποστήριξαν σημαντικά την επιτυχημένη αναχαίτιση των Γερμανών στη μάχη της Βρετανίας.

Στην άλλη πλευρά του ατλαντικού, το 1942 στις Ηνωμένες Πολιτείες ο P.M.S Blackett οργάνωσε σχέδιο για τη δημιουργία του U.S. Navy Antisubmarine Warfare Operatios Research Group (ASWORG). Οι εργασίες της ομάδας αυτής επίλυσαν σημαντικά προβλήματα ΕΕ με κυριότερο αυτό του προσδιορισμού του βέλτιστου μεγέθους των νηοπομπών (πλήθος φορτηγών πλοίων συνοδευόμενων από πολεμικά) το οποίο και καθόρισε την νίκη στην μάχη του Ατλαντικού.

Την ίδια περίοδο, φτάνει στη Βρετανία η πρώτη ομάδα ΕΕ από τις ΗΠΑ για να συνεργαστεί με την 8η Μονάδα Βομβαρδιστικών, με στόχο την βελτιστοποίηση της ακρίβειας πλήξης στόχων. Κατόπιν μελέτης, η ομάδα αυτή, πρότεινε τα αεροσκάφη να πετούν σε σχηματισμούς ακριβείας (μειώνοντας με αυτόν το τρόπο τη διασπορά των βομβών), όπου το πιο αποτελεσματικό πλήρωμα να ρίχνει πρώτο τις βόμβες του και όλες οι βόμβες να ρίχνονται ταυτόχρονα (in salvo). Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής ήταν θεαματικά αφού η αποτελεσματικότητα της πλήξης στόχων αυξήθηκε κατά 1000%.

Ειδικότερα, την περίοδο 1941 -1945 στην Βρετανία, εντοπίστηκαν συγκεκριμένα λειτουργικά προβλήματα τα οποία λύνονται μέσω ΕΕ. Ένα από αυτά ήταν η οργάνωση της συντήρησης και της επιθεώρησης των αεροσκαφών. Το πρόβλημα ήταν ότι, κάθε 350 ώρες πτήσης, ένα αεροσκάφος απαιτούσε 7 μικρές επιθεωρήσεις (διάρκειας 2-5 ημερών) και μία μεγάλη (διάρκειας 15 ημερών) από συγκεκριμένο συνεργείο. Υπήρχε, επομένως, δυσκολία στο πως θα κατανέμονταν τα αεροσκάφη στα συνεργεία, ώστε να επιταχύνεται η διαδικασία. Η λύση που δόθηκε ήταν κάθε συνεργείο να εξυπηρετεί όλα τα αεροσκάφη. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να αυξηθούν οι ώρες πτήσεων κατά 61% (σε μία περίοδο δοκιμής 5 μηνών).

Ακόμη ένα πρόβλημα, ήταν αυτό της σύγκρισης τύπων αεροσκαφών. Υπήρχαν διαφορετικών τύπων αεροσκαφών με διαφορετικές ιδιότητες σε ζητήματα όπως μίλια πτήσης ανά αριθμό συντηρητών ανά μήνα, φονικότητα φορτίου, διάρκεια εξόρμησης και πιθανότητας εντοπισμού υποβρυχίου. Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε επιτυχώς χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο αεροσκάφους στην κατάλληλη πολεμική επιχείρηση (βέλτιστη κατανομή).

Σημαντική λύση, δόθηκε και στη βελτίωση της πιθανότητας επιτυχίας της επίθεσης των αεροσκαφών προς τα υποβρύχια. Το 1941 η πιθανότητα επιτυχίας της επίθεσης (όπου επιτυχία δεν σήμαινε απαραίτητα την βύθιση του υποβρυχίου) ήταν γύρω στο 2-3%. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς της ομάδας της ΕΕ, οι απαιτούμενες ανθρωπόωρες για μία επιτυχή επίθεση με αυτό το ποσοστό, ήταν 1,100,000 περίπου. Το πρόβλημα αυτό αφορούσε κυρίως, τον τρόπο της χρήσης των πυρομαχικών όπου ενέπλεκε επιπλέον παραμέτρους, όπως η ακτίνα δράσης, τα λάθη σκόπευσης, ο προσανατολισμός βόμβας και το ύψος απελευθέρωσης της βόμβας. Η λύση που δόθηκε ήταν η βελτιστοποίηση των παραμέτρων έτσι ώστε το 1945 η πιθανότητα επιτυχίας της επίθεσης να αυξηθεί στο 40%. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα, εκτός από την προφανή του σημασία, να μειωθούν και οι απαιτούμενες ανθρωπόωρες για την επιτυχία της αποστολής στις 85,000, με εξοικονόμηση $1,100,000 - 85,000 = 1,015,000$ ωρών.

Οι πιο πάνω εφαρμογές της ΕΕ, ενόψει και κατά την διάρκεια του πολέμου είναι από τις πιο σημαντικές και καθοριστικές, όμως αποτελούν ένα μέρος της συνολικής προσφοράς τους την περίοδο αυτή.

Μετά τον πόλεμο, δημιουργήθηκε η ανάγκη για την καλύτερη δυνατή αξιοποίηση των περιορισμένων διαθέσιμων πόρων. Παράλληλα η βιομηχανική έκρηξη, που ακολούθησε το τέλος του πολέμου, έφερε στην επιφάνεια πολύπλοκα προβλήματα διοίκησης, παραγωγής, εμπορίου προϊόντων, κλπ. Σύντομα, πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν στις στρατιωτικές ομάδες επιχειρησιακών ερευνητών και τώρα απασχολούνταν σε θέσεις κλειδιά στον ιδιωτικό ή τον ερευνητικό τομέα, διαπίστωσαν ότι τα νέα προβλήματα ήταν σε γενικές γραμμές αυτά που είχαν αντιμετωπίσει και κατά τη διάρκεια του πολέμου, απλά το πεδίο εφαρμογής είχε αλλάξει.

Νέες μεθοδολογίες αναπτύχθηκαν γρήγορα, παρέχοντας έτσι νέα εργαλεία για την αξιοποίηση της ΕΕ σε ακόμα μεγαλύτερη εμβέλεια. Η αρχή έγινε από τον George Dantzig ο οποίος ανέπτυξε το 1947 τον αλγόριθμο Simplex για την εύρεση της βέλτιστης λύσης του γραμμικού μοντέλου κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος (linear programming). Ακολουθούν το 1951 οι H. Kuhn και A.W. Tucker όπου καθορίζουν τις συνθήκες εύρεσης της βέλτιστης λύσης σε μη-γραμμικά προβλήματα (nonlinear programming).

Από την κατηγορία αυτή δεν θα μπορούσε να λείπει ο Richard Bellman όπου το 1953 παρουσίασε μια μεθοδολογία επίλυσης πολυσταδιακών προβλημάτων στα οποία λαμβάνεται μια ακολουθία αλληλοσυνδεόμενων αποφάσεων (dynamic programming) αλλά και ο Ralph Gomory που ανέπτυξε, το 1958, έναν αλγόριθμο επίλυσης του μοντέλου στον οποίο κάποιες μεταβλητές πρέπει να έχουν ακέραιες τιμές (integer programming).

Εντωμεταξύ, το 1952 και 1953 αντίστοιχα ιδρύονται στην Αμερική τα επιστημονικά σωματεία: Operational Research Society, Operations Research Society of America (ORSA) και The Institute of Management Science (TIMS), ενώ πιο μετά, το 1968 ιδρύεται και το Decision Sciences Institute (DSI). Το 1957 δημοσιεύεται το πρώτο βιβλίο Επιχειρησιακής Έρευνας με τίτλο: "Introduction to Operations Research" (John Wiley & Sons) από τους C.W. Churchman, R.L. Ackoff & E.L. Arnoff.

Επιπλέον, το 1961 ο John D.C. Little, αποδεικνύει τη σχέση μεταξύ του μέσου πλήθους πελατών στην ουρά αναμονής και του μέσου χρόνου αναμονής ενός πελάτη σ' αυτή (queueing theory). Μέσα στην δεκαετία αυτή, αναπτύσσονται και εξειδικευμένες γλώσσες προγραμματισμού, όπως οι SIMSCRIPT και GPSS, για την πραγματοποίηση διαδικασιών προσομοίωσης.

Στη συνέχεια, αφενός μεν η γρήγορη ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών (πολλά από τα πιο γνωστά εργαλεία της Επιχειρησιακής Έρευνας αναπτύχθηκαν πριν το 1960), αφετέρου δε η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οδήγησαν στη ραγδαία διάδοση της Επιχειρησιακής Έρευνας. Έτσι, ξεκινά τα πρώτα βήματα και στη χώρα μας ένας νέος τρόπος σκέψης στο χώρο του management. Το 1963, μια ομάδα πρωτοπόρων επιστημόνων ιδρύει την "Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών" (ΕΕΕΕ), μια επιστημονική, μη κερδοσκοπική εταιρία που έχει ως σκοπό να προαγάγει και να διαδώσει την ΕΕ στην Ελλάδα.

Κατά την διάρκεια, της δεκαετίας του 1980 άρχισε η ευρεία διάθεση και εξαπλωση των προσωπικών ηλεκτρονικών υπολογιστών (PCs) αλλά και η εμφάνιση των εξειδικευμένων λογισμικών ΕΕ (Pcs). Ο N. Karmarkar το 1984 παρουσίασε μια νέα μεθοδολογία επίλυσης του γραμμικού μοντέλου, με αξιοσημείωτη ταχύτητα σε μεγάλου μεγέθους προβλήματα.

Δυστυχώς η ΕΕ ξεκίνησε μέσω στρατιωτικών επιχειρήσεων, ως μία μέθοδος εξολόθρευσης όσο το δυνατόν περισσότερων ανθρώπων. Ωστόσο, στις μέρες μας εξελίχθηκε ως μία επιστήμη λειτουργική για τον άνθρωπο. Σήμερα, είναι απίθανο να υπάρχει επιχείρηση, βιομηχανία, κρατική υπηρεσία και οργανισμός παροχής υπηρεσιών, ανεξαρτήτως του μεγέθους της, που να μην κάνει χρήση κάποιας/ων τεχνικής/κών Επιχειρησιακής Έρευνας.

1.3 Ορισμοί ΕΕ

"Η Επιχειρησιακή Έρευνα αποσκοπεί στο να ερευνήσει ποσοτικά εάν ένας οργανισμός παίρνει από τη λειτουργία του εξοπλισμού του, τη βέλτιστη δυνατή συνεισφορά σε σχέση με τον ολικό αντικειμενικό σκοπό του, ποιες αλλαγές σε εξοπλισμό και μεθόδους απαιτούνται για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων με το μικρότερο δυνατό κόστος σε προσπάθεια και χρόνο και τέλος σε ποιο βαθμό μεταβολές στους επιμέρους αντικειμενικούς σκοπούς θα συνεισέφεραν στη πιο οικονομική και έγκαιρη εκτέλεση του ολικού στρατηγικού αντικειμενικού σκοπού".

Ορισμός των R. Watson και A.P. Rowe

"Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι: η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από μικτές ομάδες σε προβλήματα που αφορούν τον έλεγχο οργανωμένων συστημάτων (αποτελουμένων από ανθρώπους και μηχανές) κατά τρόπο, ώστε να παρέχουν λύσεις που εξυπηρετούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους σκοπούς του οργανισμού ως συνόλου"

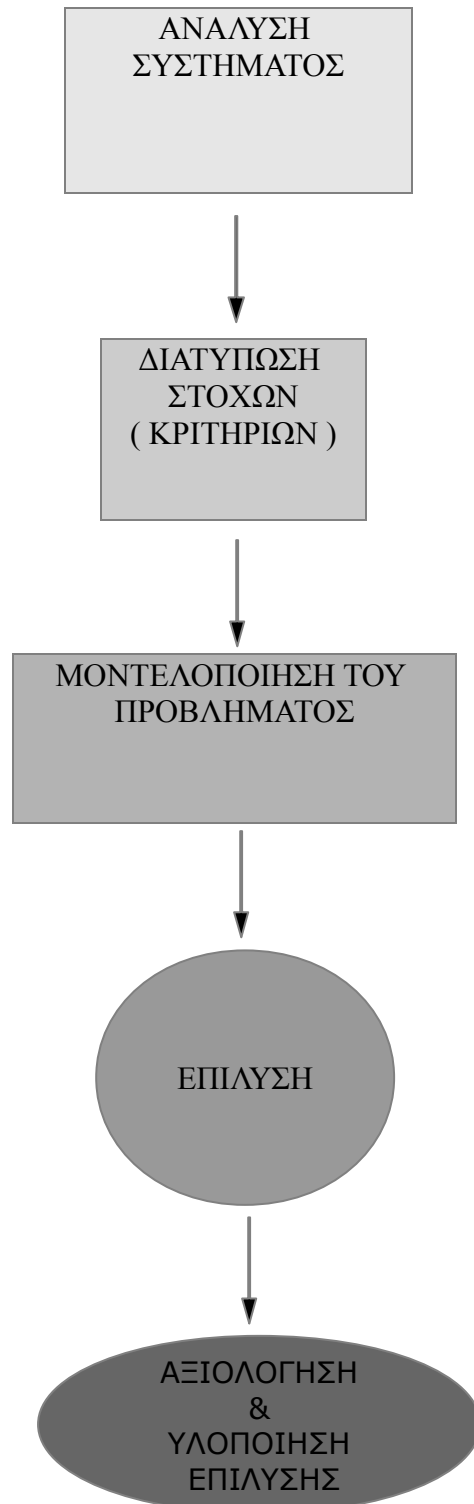
Ορισμός των Russell Lincoln Ackoff και Maurice W. Sasieni

"Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων)"

Ορισμός της E.E.E.E

1.4 **Βασικά στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας**

Η επιστημονική προσέγγιση των προβλημάτων ΕΕ ακολουθεί σχεδόν πάντα την ίδια μεθοδολογία ανεξαρτήτως του πεδίου εφαρμογής ή του μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί. Τα στάδια αυτά είναι τα εξής:



Σχήμα 1.1

1.4.1 Ανάλυση του συστήματος

Σε πρώτο στάδιο, επιχειρείται κατανόηση του συστήματος μέσα από την ανάλυση του. Προσδιορίζουμε τη δομή και τον τρόπο λειτουργίας του αναλύοντας το παράλληλα σε υποσυστήματα, το οποίο συμβαίνει συνήθως σε περίπλοκα συστήματα με πολλούς παράγοντες που δρουν στο σύστημα. Ακολουθώντας εντοπίζουμε τα σημεία – παράγοντες τα οποία επηρεάζουν το σύστημα σημαντικά και προσδιορίζουμε τρόπους (στρατηγικές) τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε προκειμένου να επηρεάσουμε το υπό μελέτη σύστημα. Η σημασία της ανάλυσης αυτής είναι η κατανόηση του προβλήματος που έχουμε να αντιμετωπίσουμε και ο εντοπισμός των μεταβλητών και παραμέτρων του συστήματος καθώς και των διάφορων περιορισμών ανάλογα με τη “φύση” της λειτουργίας του.

1.4.2 Διατύπωση στόχων (κριτηρίων)

Στο στάδιο αυτό θέτουμε τους στόχους που θέλουμε να πετύχουμε πχ να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος, να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος, να βελτιώσουμε την ποιότητα ενός προϊόντος. Η φάση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική και χρειάζεται προσοχή. Αν για παράδειγμα μια επιχείρηση με πολλά τμήματα θέτει σε κάθε τμήμα της κάποιους στόχους, θα πρέπει οι στόχοι αυτοί να συμπτυχθούν και να ιεραρχηθούν κατά τρόπο ώστε να αποδίδει ολόκληρη η επιχείρηση καλύτερα και όχι κάθε τμήμα ξεχωριστά. Ενδεχομένως όλοι αυτοί οι στόχοι να μην επιτυγχάνονται με την ίδια στρατηγική και θα πρέπει να υπάρξει κάποια σειρά προτεραιότητας.

1.4.3 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Σε αυτό το στάδιο δημιουργούμε μία αναπαράσταση του συστήματος (μαθηματικές σχέσεις) με σκοπό την ανάλυση της επίδρασης των διαφόρων παραγόντων στους στόχους. Συνήθως λόγω της πολυπλοκότητας των προβλημάτων δίνεται μια απλουστευμένη μορφή του πραγματικού προβλήματος. Αυτό αποσκοπεί στη γρηγορότερη μελέτη και εξαγωγή μίας πρώτης λύσης η οποία σταδιακά μπορεί να βελτιωθεί με την αύξηση της πολυπλοκότητας του μοντέλου.

Αναλυτικά:

Η διαδικασία μοντελοποίησης χωρίζεται σε τρεις φάσεις:

- I. Διατύπωση των μεταβλητών και παραγόντων του προβλήματος, προκειμένου να κατανοήσουμε αυτό που ψάχνουμε και να του δώσουμε μαθηματική υπόσταση.
- II. Διατύπωση εκείνων των μαθηματικών σχέσεων ή εντολών στον υπολογιστή οι οποίες συνδέουν τις μεταβλητές, τους στόχους και τους συντελεστές του συστήματος με το περιβάλλον.
- III. Επιβεβαίωση του μοντέλου με δοκιμαστική του χρήση σε ένα «απλό» πρόβλημα. Αυτό γίνεται για να ελέγξουμε την ακρίβεια των υποθέσεών μας και τις σχέσεις που διατυπώθηκαν παραπάνω. Σε περίπτωση που τα αποτελέσματα δεν είναι τα επιθυμητά, οι φάσεις (I και II) επαναλαμβάνονται.

Ο αναλυτής ενός συστήματος πρέπει να είναι πολύ προσεκτικός στην επιλογή και τη διαμόρφωση του μοντέλου, διότι διατρέχει τον κίνδυνο να υπολογίσει σωστά τη λύση σε λάθος πρόβλημα (λανθασμένη αναπαράσταση του συστήματος).

1.4.4 Επίλυση του Μοντέλου

Για να επιλυθεί ένα μαθηματικό μοντέλο χρησιμοποιούμε πολλές τεχνικές για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης του προβλήματος. Η πιο χαρακτηριστική τεχνική της επιχειρησιακής έρευνας είναι ο γραμμικός προγραμματισμός (***linear programming***), ο οποίος σχεδιάστηκε για προβλήματα με αυστηρά γραμμικούς περιορισμούς. Άλλες τεχνικές είναι ο ακέραιος προγραμματισμός (***integer programming***), στον οποίο οι μεταβλητές θεωρούνται ακέραιες, ο δυναμικός προγραμματισμός (***dynamic programming***), στον οποίο το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερα υπό- προβλήματα και ο μη - γραμμικός προγραμματισμός (***non – linear programming***).

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται φυσικά από τον τύπο και την πολυπλοκότητα του μαθηματικού μοντέλου. Για παράδειγμα, στον γραμμικό προγραμματισμό η εφικτή λύση υπολογίζεται με τη χρήση αλγορίθμων και επαναληπτικών μεθόδων. Σε αντίθετες περιπτώσεις όμως, που οι μαθηματικές σχέσεις είναι περίπλοκες, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε ευριστικές τεχνικές ή μεθόδους προσομοίωσης (***simulation***).

Πρέπει να τονίσουμε ότι οι παραπάνω τεχνικές δεν είναι παρά μόνο ένα μικρό κομμάτι από τα διαθέσιμα εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας.

1.4.5 **Αξιολόγηση – Υλοποίηση της λύσης**

Το τελικό στάδιο της αξιολόγησης - υλοποίησης της λύσης περιλαμβάνει 2 στάδια. Το στάδιο της Ανάλυσης Ευαισθησίας (Sensitivity Analysis) και της Υλοποίησης.

Αναλυτικά:

I. Ανάλυση Ευαισθησίας

Είναι η μέθοδος στην οποία το μοντέλο υποβάλλεται σε μεταβολές των παραμέτρων του για να προσδιοριστεί η ευαισθησία της λύσης. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται όταν οι παράμετροι του μοντέλου δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Σε αυτές τις περιπτώσεις μελετούμε τη συμπεριφορά της λύσης σε μία “γειτονιά” των παραμέτρων.

II. Υλοποίηση

Περιλαμβάνει τη μετατροπή των αποτελεσμάτων σε λειτουργικές οδηγίες, παρουσιασμένες με κατανοητό τρόπο στα άτομα που θα διαχειριστούν τη προτεινόμενη λύση, έτσι ώστε η βελτίωση που επιτεύχθηκε να υλοποιηθεί σύμφωνα με το μοντέλο.

Στο παρόν στάδιο ενδέχεται να προκύψουν προβλήματα τα οποία δεν είχαν προβλεφθεί κατά την διάρκεια της έρευνας.

1.5 **Εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας (ΕΕ)**

Κατηγοριοποιώντας διάφορα προβλήματα ως προς το περιεχόμενο τους παραθέτουμε μερικές εφαρμογές ΕΕ.

◆ Βιομηχανία – Παραγωγή

Χωροθέτηση Εργοστασίου, προγραμματισμός προμηθειών ή παραγωγής, έλεγχος αποθεμάτων πρώτων υλών ή προϊόντων, έλεγχος ποιότητας, ανανέωση μηχανολογικού εξοπλισμού, ανάλυση αξιοπιστίας, εξισορρόπηση γραμμής παραγωγής, ελαχιστοποίηση της απώλειας προϊόντος κατά την παραγωγική διαδικασία στις μηχανές.

◆ Εμπόριο

Καθορισμός βέλτιστης σύνθεσης παραγωγής, βέλτιστη στρατηγική διαφημίσεως και τιμολογήσεως προϊόντων, προγραμματισμός πωλήσεων, προγραμματισμός μεταφοράς και διανομής προϊόντων, προσδιορισμός θέσεως και αριθμού αποθηκών.

◆ Οικονομικά

Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός, καθορισμός πιστωτικής πολιτικής, προϋπολογισμός, βελτιστοποίηση χρηματοροών.

◆ Προσωπικό – Εργατικό δυναμικό

Αξιολόγηση προσωπικού, προγραμματισμός προσωπικού, ανάλυση αιτιών απουσίας, πρόληψη ατυχημάτων.

1.6 Χαρακτηριστικά μοντέλα – πρότυπα επεξεργασίας

- Γραμμικός Προγραμματισμός
- Μη γραμμικός Προγραμματισμός
- Ακέραιος Προγραμματισμός
- Ουρές αναμονής
- Έλεγχος αποθεμάτων
- Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα – Δένδρα αποφάσεων

Κεφάλαιο 2

Γραμμικός Προγραμματισμός

2.1 Γενικά

Η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού κατατάσσεται μεταξύ των πιο σημαντικών επιστημονικών ανακαλύψεων του 20^{ου} αιώνα. Ο αντίκτυπος του στην κοινωνία των επιστημών, δεδομένου ότι μόλις το 1950 δημοσιεύτηκε, είναι αξιοσημείωτος. Σήμερα είναι ένα σύνηθες εργαλείο που έχει σώσει πολλές χιλιάδες ή εκατομμύρια δολάρια για τις περισσότερες εταιρείες ή επιχειρήσεις, ακόμη και μετρίου μεγέθους. Η χρήση του σε άλλους τομείς της κοινωνίας εξαπλώνεται ραγδαία. Ένα σημαντικό ποσοστό του συνόλου των επιστημονικών υπολογισμών σε υπολογιστές είναι αφιερωμένο στην χρήση του γραμμικού προγραμματισμού. Δεκάδες βιβλία έχουν γραφτεί σχετικά με γραμμικό προγραμματισμό, και εκατοντάδες άρθρα που περιγράφουν σημαντικές εφαρμογές.

Το εύλογο ερώτημα που τίθεται σ' αυτό το σημείο είναι ως προς το ποια είναι η φύση αυτού του αξιόλογου εργαλείου, και τι είδους προβλήματα έχει να αντιμετωπίσει. Εν συντομία, ο πιο κοινός τύπος εφαρμογής περιλαμβάνει το γενικό πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων σε ένα καλύτερο δυνατό (βέλτιστο) τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα αυτό αφορά την επιλογή του επιπέδου ορισμένων δραστηριοτήτων που ανταγωνίζονται για τους λιγοστούς πόρους που είναι απαραίτητοι για την εκτέλεση των εν λόγω δραστηριοτήτων. Η επιλογή των επιπέδων δραστηριότητας τότε υπαγορεύει την ποσότητα κάθε πόρου που θα πρέπει να καταναλώνεται από κάθε δραστηριότητα.

Η ποικιλία των καταστάσεων στις οποίες εφαρμόζεται κυμαίνεται από την *κατανομή των εγκαταστάσεων παραγωγής προϊόντων, την κατανομή των εθνικών πόρων για τις εγχώριες ανάγκες, την επιλογή χαρτοφυλακίου, την επιλογή των ναυτιλιακών προτύπων, το σχεδιασμό γεωργικής καλλιέργειας μέχρι και το κατάλληλο σχεδιασμό της θεραπείας για το καρκίνο μέσω ακτινοβολίας*, κτλ. Ωστόσο, το ένα κοινό συστατικό σε κάθε μία από αυτές τις καταστάσεις είναι η αναγκαιότητα για την κατανομή των πόρων σε δραστηριότητες με την επιλογή των επιπέδων αυτών των δραστηριοτήτων.

Το επίθετο "Γραμμική" δηλώνει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις σε αυτό το μοντέλο απαιτείται να είναι γραμμικές συναρτήσεις. Η λέξη "Προγραμματισμός" δεν αναφέρεται εδώ στον προγραμματισμό υπολογιστών αλλά στον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων για την επίτευξη ενός βέλτιστου αποτελέσματος, δηλαδή, ένα αποτέλεσμα που φτάνει το επιθυμητό στόχο.

Τέλος αξίζει να αναφερθούμε στη **μέθοδο Simplex**, την οποία θα αναλύσουμε εκτενέστερα σε μετέπειτα στάδιο, η οποία είναι σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ακόμη και πολύ μεγάλου μεγέθους.

2.2 Μορφοποίηση Προβλημάτων

Το γραμμικό μοντέλο περιέχει τα εξής βασικά συστατικά:

1. **Μεταβλητές απόφασης** (decision variables)
2. **Αντικειμενική συνάρτηση**
3. **Περιορισμούς**

Αναλυτικά:

1. Οι μεταβλητές απόφασης ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε και θα αποτελέσουν τη λύση του προβλήματος μας.
2. Η αντικειμενική συνάρτηση η οποία εκφράζει με μετρήσιμο τρόπο το στόχο – κριτήριο του προβλήματος, όπου τελικά βελτιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης που θέτουμε. Ψάχνουμε δηλαδή να βρούμε τις τιμές εκείνες των μεταβλητών της συνάρτησης οι οποίες βελτιστοποιούν το στόχο που θέτουμε.
3. Οι περιορισμοί συμβολίζουν την οριοθέτηση του προβλήματος. Είναι οι εξισώσεις ή ανισώσεις οι οποίες επιβάλλουν όρια στις τιμές των μεταβλητών απόφασης και κατά συνέπεια στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

2.3 Ορισμοί

- **Ορισμός 2.3.1** (Γραμμική συνάρτηση)
Μια πραγματική συνάρτησης n μεταβλητών
 $f: \mathbf{X}^n \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
είναι **γραμμική** αν και μόνον αν για κάποιο σύνολο πραγματικών σταθερών αριθμών c_1, c_2, \dots, c_n ισχύει
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
- **Ορισμός 2.3.2** (Κυρτό σύνολο)
Έστω ένα S ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Τότε το S λέγεται **κυρτό** όταν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$, όπου $\lambda \in [0, 1]$.

2.5 Προϋποθέσεις του προβλήματος Γ.Π

Για να είναι δυνατό να εφαρμοστεί η θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση ενός οποιουδήποτε προβλήματος βελτιστοποίησης θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις – συνθήκες:

- **Γραμμικότητα (Linearity)**

Η αντικειμενική συνάρτηση και οι διάφοροι περιορισμοί πρέπει να είναι 1^{ου} βαθμού συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές απόφασης $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

- **Αναλογικότητα (Proportionality)**

Τα προβλήματα τα οποία είναι μη γραμμικά, οφείλονται συνήθως στο ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η χρησιμοποίηση των διαθέσιμων μέσων δεν είναι ανάλογα ποσά ως προς τις ποσότητες της κάθε μίας μεταβλητής. Η συνθήκη της αναλογικότητας ικανοποιείται εάν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι το άθροισμα των ατομικών συνεισφορών κάθε μεταβλητής και αν το αριστερό μέλος κάθε περιορισμού ισούται με το άθροισμα της συμβολής κάθε μεταβλητής στο μοντέλο.

- **Προσθετικότητα (Additivity)**

Η απαίτηση της προσθετικότητας προϋποθέτει πως το συνολικό κέρδος από τις δραστηριότητες $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ισούται με το συνολικό άθροισμα των επιμέρους κερδών κάθε δραστηριότητας. Το αντίστοιχο ισχύει για τους διάφορους περιορισμούς.

- **Διαιρετότητα (Divisibility)**

Η προϋπόθεση αυτή μας εξασφαλίζει την ύπαρξη κλασματικών τιμών για τις μεταβλητές του προβλήματος. Εκφράζει την ικανότητα κατανομής των δραστηριοτήτων σε τέτοια επίπεδα, ώστε να είναι δυνατή η επίτευξη μη ακέραιων τιμών των μεταβλητών απόφασης. Αν δεν ισχύει η υπόθεση της διαιρετότητας συχνά καταφεύγουμε σε τεχνικές του Ακέραιου Προγραμματισμού.

- **Βεβαιότητα (Certainty)**

Μια βασική προϋπόθεση γραμμικού προγραμματισμού, είναι η βεβαιότητα για τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος ότι είναι γνωστές σταθερές και μάλιστα με απόλυτη βεβαιότητα. Εάν η προϋπόθεση αυτή δεν ισχύει, μία συνήθης τακτική είναι η Ανάλυση Ευαισθησίας, η οποία μας δείχνει τις επιπτώσεις αλλαγής της τιμής μιας παραμέτρου στη λύση του προβλήματος.

2.6 Γραφική Μέθοδος Επίλυσης Προβλημάτων Γ.Π

2.6.1 Γραφική επίλυση Γ.Π. σε 2 διαστάσεις

Γενικά για την επίλυση ενός Γ.Π απαιτείται χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και κατάλληλου λογισμικού ειδικά για προβλήματα αυξημένης πολυπλοκότητας (μεγάλος αριθμός περιορισμών και μεταβλητών απόφασης). Όταν όμως ένα Γ.Π. είναι δισδιάστατο, έχει δηλαδή 2 μεταβλητές απόφασης ή το πολύ τρισδιάστατο μπορεί να επιλυθεί γραφικά.

Για το σκοπό αυτό, αρκεί να σχεδιαστεί προσεκτικά το σύνολο των περιορισμών του Γ.Π., ώστε να οριοθετηθεί το σύνολο των δυνατών λύσεων X και να καθοριστεί η έννοια βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Βασικό ρόλο στη μέθοδο αυτή παίζει η εποπτεία.

Η μέθοδος περιλαμβάνει τρία διαδοχικά βήματα:

- 1) Σχεδίαση όλων ανεξαιρέτα των περιορισμών ώστε να καθοριστεί απόλυτα το σύνολο X των δυνατών λύσεων (**Εφικτή περιοχή λύσεων**).
- 2) Σχεδίαση της αντικειμενικής συνάρτησης z για μια συγκεκριμένη τιμή του z και καθορισμός της έννοιας βελτιστοποίησης.
- 3) Παράλληλη μετατόπιση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την έννοια βελτιστοποίησης, βελτιώνοντας προοδευτικά την τιμή του z μέχρις ότου προσδιοριστεί η βέλτιστη ή οι βέλτιστες λύσεις.

2.6.2 Παραδείγματα

Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα τα οποία αποτελούν το σύνολο των περιπτώσεων ως προς το είδος των λύσεων σε προβλήματα Γ.Π

Παράδειγμα 2.1 (Μοναδική λύση)

Έστω λοιπόν η μαθηματική μορφή ενός προβλήματος Γ.Π:

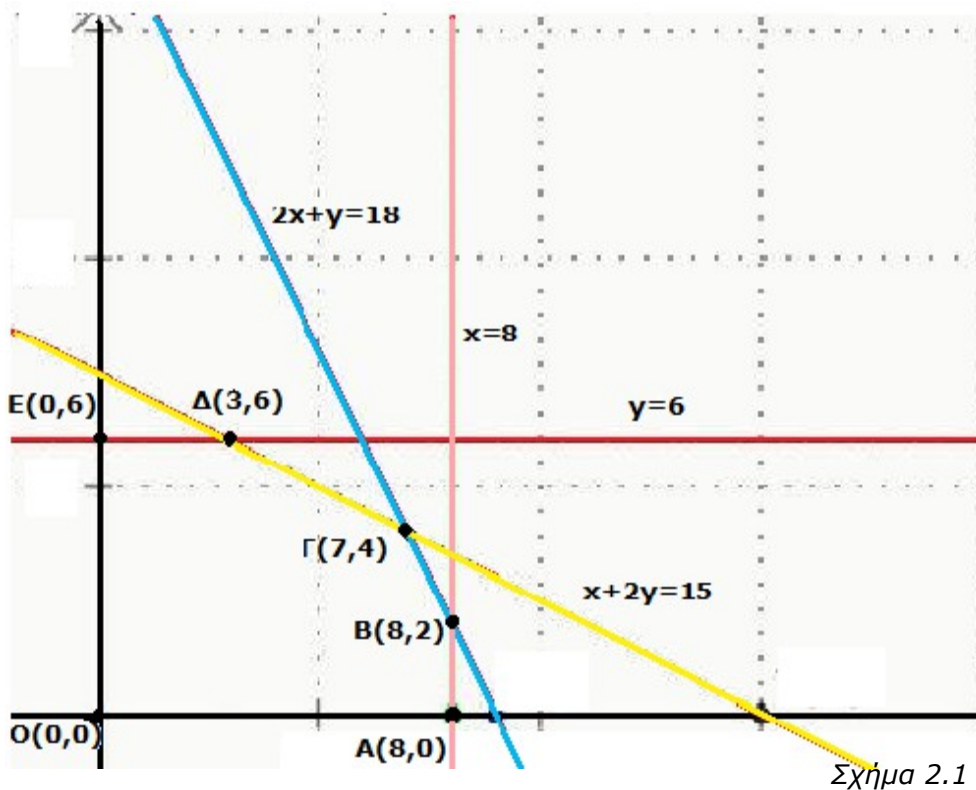
Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max [z] = 4x + 3y$$

υπό τους περιορισμούς:

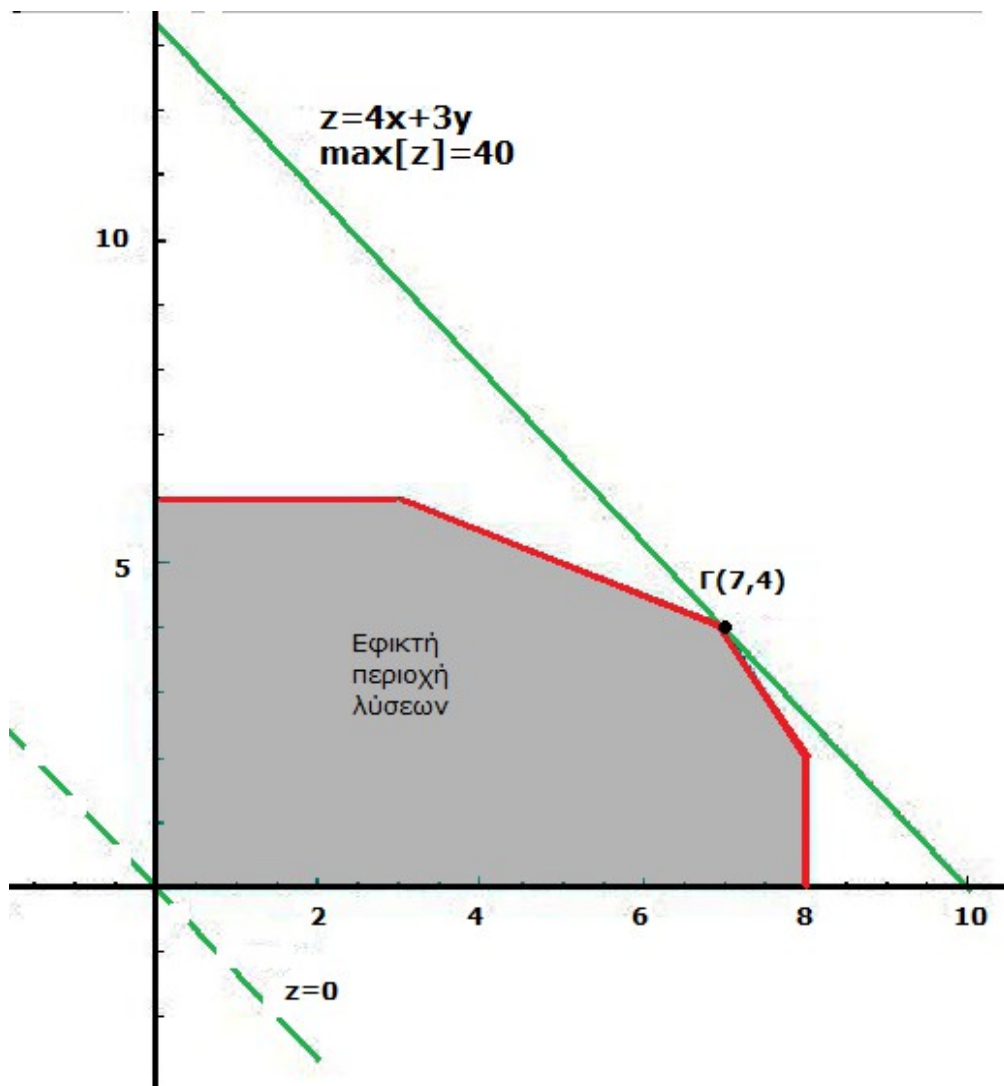
$$x \leq 8, y \leq 6, x+2y \leq 15, \\ 2x+y \leq 18, x \geq 0, y \geq 0$$

Μετατρέπουμε όλους τους περιορισμούς σε ισότητα και τους σχεδιάζουμε σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων στο επίπεδο. Η αντίστοιχη ανισότητα διαιρεί το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, εκείνο το οποίο επαληθεύει την ανισότητα και εκείνο το οποίο δεν την επαληθεύει. Στο πιο κάτω σχήμα έχουν χαραχθεί οι 6 περιορισμοί του παραδείγματος. Το τμήμα του επιπέδου το οποίο επαληθεύει ταυτόχρονα και τους 6 περιορισμούς είναι το πολύγωνο **ΟΑΒΓΔΕ** και δίνεται στο σχήμα. Οι συντεταγμένες των κορυφών του υπολογίστηκαν από την επίλυση των συστημάτων των εξισώσεων των ευθειών (ανά δύο) που ορίζουν τις κορυφές αυτές.



Το τμήμα του επιπέδου που επαληθεύει όλους τους περιορισμούς είναι το πολύγωνο **ΟΑΒΓΔΕ**. Τώρα παίρνουμε την αντικειμενική συνάρτηση $z=4x+3y$ και ξεκινώντας από το σημείο **Ο**(0,0) και τη μετατοπίζουμε προς τα δεξιά έως ότου συναντήσει μία κορυφή ή μία πλευρά του συνόρου του πολυγώνου.

Αφού πραγματοποιήσουμε την πιο πάνω διαδικασία καταλήγουμε στη βέλτιστη λύση $\max[z] = 40$ η οποία επιτυγχάνεται στο σημείο **Γ**(7,4), όπως φαίνεται και πιο κάτω σχήμα (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2

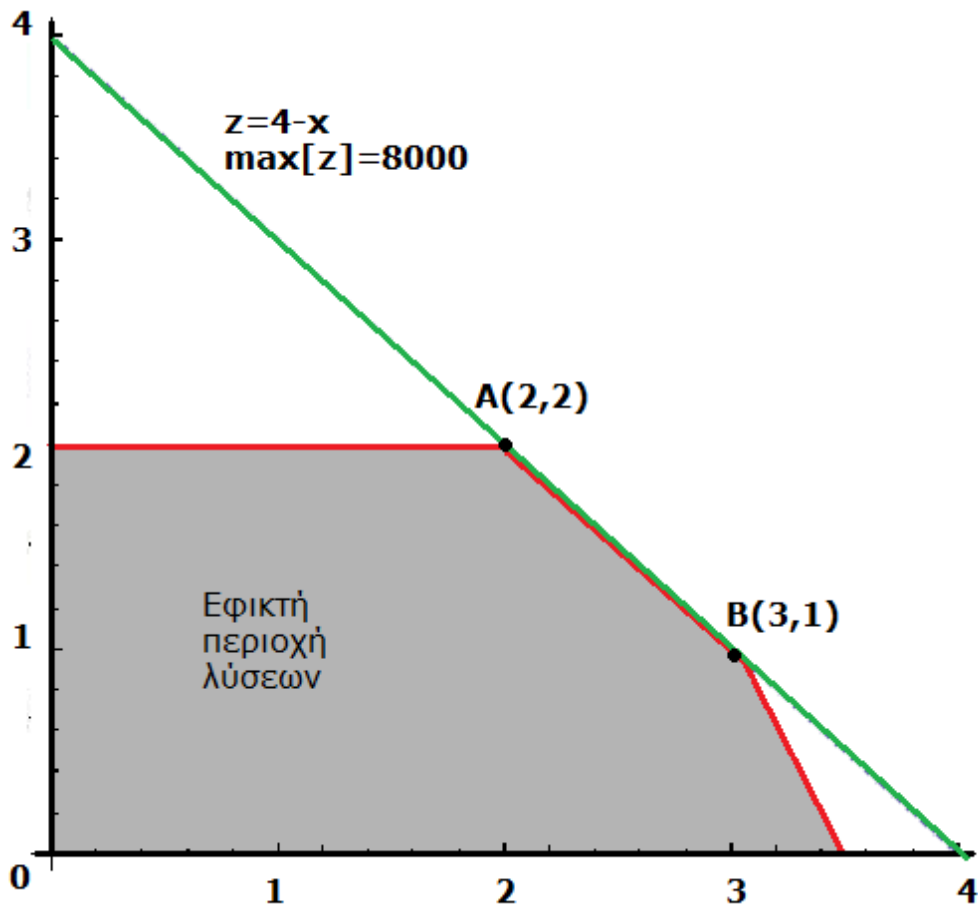
Παράδειγμα 2.2 (Άπειρες λύσεις)

Αντικειμενική συνάρτηση $\max [z] = 2000x + 2000y$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 4 \\ 2x + y &\leq 7 \\ y &\leq 2 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Εκτελώντας αντίστοιχη διαδικασία με το προηγούμενο Παράδειγμα1, από την γραφική επίλυση το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις αφού με παράλληλη μεταφορά της z , παρατηρούμε ότι συμπίπτει με την πλευρά **AB** (**A**(2,2) , **B**(3,1)) του πολυγώνου (το οποίο ορίζει την εφικτή περιοχή των λύσεων), με $\max [z] = 8000$.



Σχήμα 2.3

Παράδειγμα 2.3 (Αδύνατη λύση)

Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε την περίπτωση όπου υπάρχουν ασυμβίβαστοι περιορισμοί, το οποίο συνεπάγεται σε αδύνατο πρόβλημα Γ.Π.

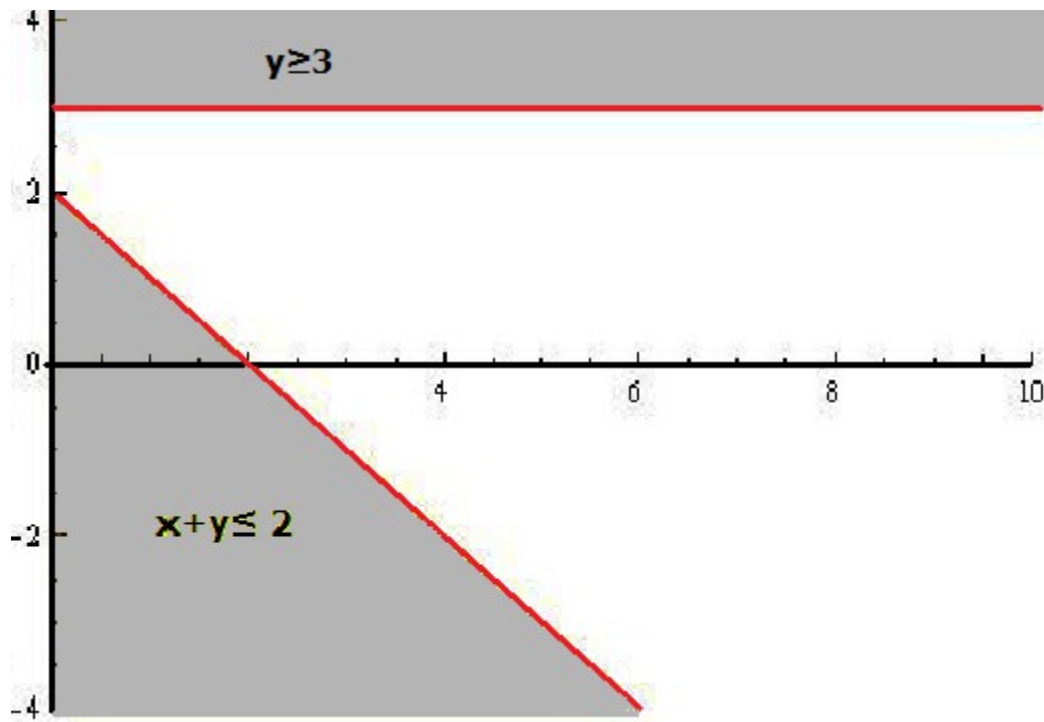
Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max[z] = 10x + 8y$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 2 \\ y &\geq 3 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Από το πιο κάτω σχήμα φαίνεται ότι οι 2 πρώτοι περιορισμοί είναι ασυμβίβαστοι, δηλαδή δεν έχουν κοινή περιοχή ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.



Σχήμα 2.4

Παράδειγμα 2.4 (Μη φραγμένο πεδίο λύσεων)

Σ' αυτό το παράδειγμα μελετάμε την περίπτωση όπου το σύνολο των δυνατών λύσεων δεν είναι φραγμένο, το οποίο συνεπάγεται ότι η αντικειμενική συνάρτηση βελτιώνεται ανεξέλεγκτα (απειρίζεται).

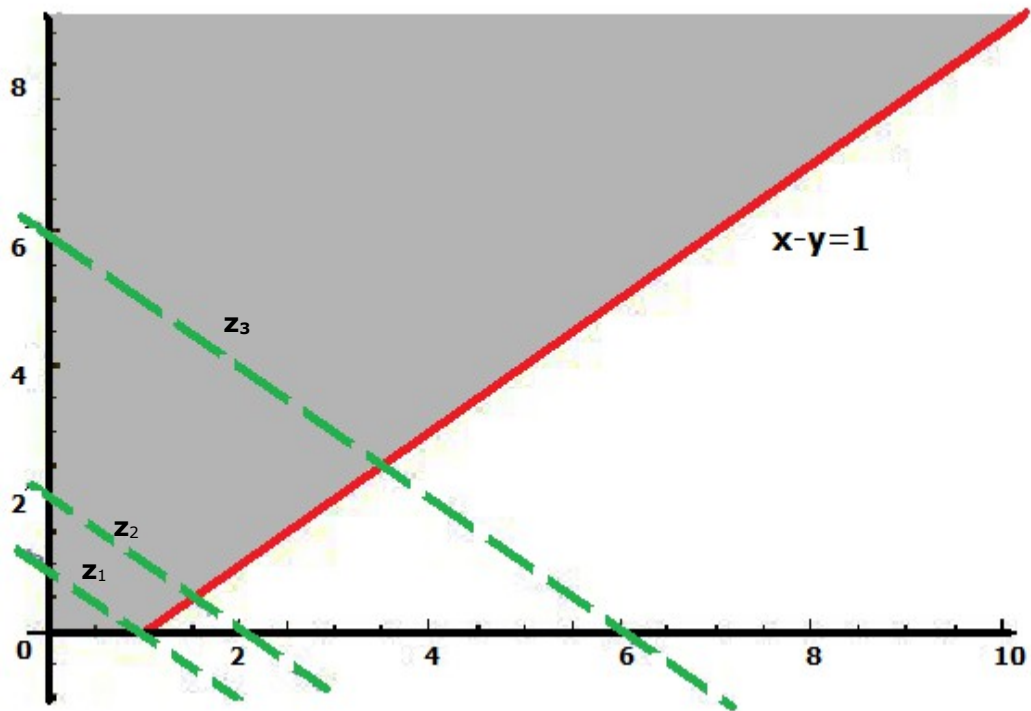
Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max[\mathbf{z}] = 1000x + 1000y$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x - y &\leq 1 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η z αυξάνεται συνεχώς ($\mathbf{z}_1 < \mathbf{z}_2 < \mathbf{z}_3 < \dots$) δηλαδή έχει **μη φραγμένο σύνολο δυνατών λύσεων**



Σχήμα 2.5

Παράδειγμα 2.5 (Μη φραγμένη μεταβλητή)

Η διαφορά σ' αυτή την περίπτωση είναι ότι μόνο η μία εκ των δύο μεταβλητών μπορεί να λάβει ανεξέλεγκτες τιμές.

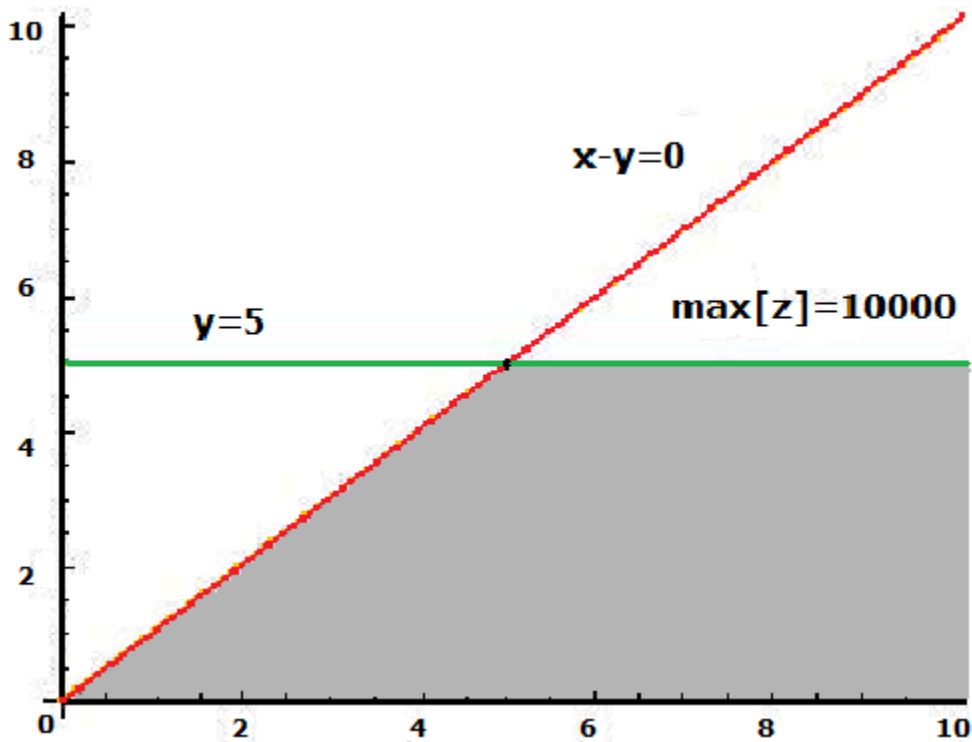
Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max[z]=2000y$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x-y &\geq 0 \\ y &\leq 5 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως λόγω του ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι συναρτήσεως μόνο ως προς τη μεταβλητή y και μπορεί να λάβει μέγιστη τιμή αφού η μεταβλητή y είναι φραγμένη. Επομένως η $\max[z]=1000$ για $y=5$ και $x \geq 5$. Η μεταβλητή x είναι μη φραγμένη και κυμαίνεται από το 0 μέχρι έως το $+\infty$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6

2.7 Μέθοδος Simplex

2.7.1 Εισαγωγή

Το 1947 ο Αμερικανός μαθηματικός George Dantzig ανέπτυξε την μέθοδο Simplex ως μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Δουλεύοντας τότε για το πεντάγωνο των Η.Π.Α χρησιμοποιούσε τη μέθοδο αυτή για την επίλυση προβλημάτων Γ.Π της Πολεμικής Αεροπορίας. Σήμερα αποτελεί ένα σημαντικό αλγεβρικό αλγόριθμο για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με περισσότερες από 2 μεταβλητές και γι' αυτό το λόγο η επιστημονική κοινότητα τον έχει συμπεριλάβει μέσα στους 10 πιο σημαντικούς αλγορίθμους του 20^{ου} αιώνα.

Το κλειδί για την ανάπτυξη της γενικής αλγεβρικής μεθόδου Simplex είναι, όπως είδαμε και στην γραφική επίλυση, πως η βέλτιστη λύση συνδέεται πάντοτε με ένα ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων. Κάθε επανάληψη της μεθόδου μετακινεί τη λύση σε ένα νέο ακρότατο σημείο στο οποίο βελτιώνεται η αξία της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία αυτή τελειώνει όταν καμία βελτίωση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Η μέθοδος Simplex είναι πολύ αποτελεσματική στην πράξη, σε γενικές γραμμές, λαμβάνοντας $2m$ έως $3m$ επαναλήψεις, (όπου m είναι ο αριθμός των περιορισμών ισότητας), και συγκλίνουν σε αναμενόμενο πολυωνυμικό χρόνο για ορισμένες κατανομές τυχαίων εισόδων (Nocedal και Wright 1999, Forsgren 2002). Ωστόσο, στη χειρότερη περίπτωση χρειάζεται εκθετικό χρόνο.

2.7.2 Έννοιες - ορισμοί

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση της μεθοδολογίας Simplex, αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες έννοιες και ορισμούς.

- **Ορισμός 2.7.1 (Κανονική μορφή προβλημάτων Γ.Π)**

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται στην κανονική μορφή όταν:

- i) Η αντικειμενική συνάρτηση ζητείται να βελτιστοποιηθεί (μεγιστοποιηθεί ή ελαχιστοποιηθεί)
- ii) Οι μεταβλητές είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή, μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.
- iii) Όλοι οι περιορισμοί (με εξαίρεση των περιορισμών μη αρνητικότητας) είναι ισότητες με μη αρνητικό δεξιό μέλος.

Κανονική μορφή υπό μορφή πινάκων

$$\max(\text{ή } \min) z=f(\mathbf{x})=\mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}, (\mathbf{b}\geq 0) \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{x}\geq 0 \quad (2.6.3)$$

Για την αναγωγή ενός προβλήματος στην κανονική του μορφή θα χρειαστούμε τη συμβολή κάποιων μη αρνητικών μεταβλητών οι οποίες θα μετατρέπουν τις ανισότητες των περιορισμών σε ισότητες. Αυτές οι μεταβλητές λοιπόν λέγονται **περιθώριες** για τις οποίες δίνουμε τον σχετικό ορισμό.

- **Ορισμός 2.7.2 (Περιθώρια μεταβλητή)**

Μία μεταβλητή ονομάζεται περιθώρια, όταν είναι μη αρνητική και ανάλογα με την προσθήκη της ή την αφαίρεσή της από το αριστερό μέλος της ανίσωσης (του περιορισμού) τη μετατρέπει σε ισότητα.

Αν για παράδειγμα η \mathbf{s} μεταβλητή είναι περιθώρια και προστίθεται στο αριστερό μέλος της ανίσωσης τότε ονομάζεται **χαλαρή μεταβλητή** ενώ στην αντίθετη περίπτωση που αφαιρείται ονομάζεται **πλεονασματική μεταβλητή**.

Παράδειγμα χαλαρής μεταβλητής :

Δίνεται η ανισότητα $2x+y \leq 10$

Θα ορίσουμε τη χαλαρή μεταβλητή s_1 έτσι ώστε $2x+y+s_1 = 10$

Παράδειγμα πλεονασματικής μεταβλητής :

Δίνεται η ανισότητα $x+4y+6z \geq 24$

Ορίζουμε την πλεονασματική μεταβλητή s_2 έτσι ώστε $x+4y+6z -s_2=24$

2.7.2.1 Είδη λύσεων

- **Δυνατή ή εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π καλείται κάθε λύση του συστήματος 2.6.2 που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη αρνητικότητας 2.6.3.
- **Βέλτιστη εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π καλείται κάθε εφικτή λύση αυτού που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

Η φύση των προβλημάτων που μελετούμε στο Γ.Π είναι προβλήματα στα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε n μεταβλητές μέσα από m ($m < n$) εξισώσεις. Αν θέσουμε σε $n-m$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν τότε η λύση που προκύπτει, αν είναι μοναδική, πρέπει να αντιστοιχεί σε ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων.

2.7.2.2 Βασικές και μη βασικές μεταβλητές

Έστω ο πίνακας $\mathbf{A}_{m \times n}$ του συστήματος (2.6.2), όπου n ο αριθμός των μεταβλητών και m ο αριθμός των περιορισμών. Ο τετραγωνικός $\mathbf{B}_{m \times m}$ πίνακας που προκύπτει από τον \mathbf{A} και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες καλείται **βάση του συστήματος**. Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες της βάσης $\mathbf{B}_{m \times m}$ καλούνται **βασικές** (ή εξαρτημένες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή. Οι υπόλοιπες $n-m$ μεταβλητές που αντιστοιχούν στις $n-m$ στήλες του $\mathbf{A}_{m \times n}$ που δεν περιλαμβάνονται στη βάση $\mathbf{B}_{m \times m}$ καλούνται **μη βασικές** (ή ανεξάρτητες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.

Έστω λοιπόν $\mathbf{B}_{m \times m} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$, $\{\text{όπου } \mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T\}$ η βάση του συστήματος, και $\mathbf{N}_{m \times (n-m)} = (\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \dots, \mathbf{a}_n)$ ο υποπίνακας των μη βασικών διανυσμάτων του $\mathbf{A}_{m \times n}$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{x}_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ το διάνυσμα στήλης των βασικών μεταβλητών και τέλος με $\mathbf{x}_N = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)^T$ το διάνυσμα στήλης των μη βασικών μεταβλητών, τότε το σύστημα (2.6.2) γράφεται:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B},\mathbf{N}] [\mathbf{x}_B,\mathbf{x}_N]^T=\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{b} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N} \quad (2.6.4)$$

Από τη σχέση (2.6.4) συμπεραίνουμε πως με αυθαίρετες ($n-m$) τιμές στα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x}_N (εξαρτημένες μεταβλητές) μπορούν να προσδιοριστούν από αυτές τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x}_B (ανεξάρτητες μεταβλητές).

Η λύση που προκύπτει από την (2.6.4) αν δοθούν μηδενικές τιμές σε όλες τις μη βασικές (ανεξάρτητες) μεταβλητές ($\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$), δηλαδή:

$$\boxed{\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}$$

καλείται **βασική λύση** του συστήματος.

- **Ορισμός 2.7.3** (Ακραίο σημείο)

Ένα $\mathbf{x}^a \in K$ (κυρτό) υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Το \mathbf{x}^a θα λέγεται **ακραίο σημείο** (extreme point), αν το σημείο αυτό δεν μπορεί να εκφραστεί σαν κυρτός συνδυασμός σημείων του συνόλου K . Δηλαδή για κάθε $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}^a$ τότε το \mathbf{x}^a δεν ανήκει στο σύνολο που ορίζει ο κυρτός συνδυασμός των \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 .

2.7.3 Βασικά Θεωρήματα

Δίνουμε μερικά χρήσιμα θεωρήματα τα οποία θα ολοκληρώσουν το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται η μέθοδος Simplex. Σε κάποια από αυτά δίνουμε και τη σχετική απόδειξη για να δείξουμε τη σημασία και την αλληλεπίδραση κάποιων ορισμών όπως η κυρτότητα και το ακραίο σημείο ενός συνόλου.

Θεώρημα 2.7.1

Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος.

Απόδειξη:

Προφανώς ο αριθμός των εφικτών λύσεων του συστήματος ισούται με το πλήθος των δυνατών διαφορετικών βάσεων που μπορούν να δημιουργηθούν. Συνεπώς ισούται με τον αριθμό των υποσυνόλων που περιέχουν m ανεξάρτητα διανύσματα τα οποία σχηματίζονται από τις n στήλες του πίνακα A . Επομένως ο αριθμός αυτός δεν ξεπερνά τους

$$\binom{n}{m} = n!/(m!(n-m)!), \text{ ο οποίος είναι πεπερασμένος.}$$

□

Θεώρημα 2.7.2

Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γ.Π είναι ένα κυρτό σύνολο.

Απόδειξη:

Έστω το σύνολο των εφικτών λύσεων $X_C = \{\mathbf{x}: \mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$. Υπενθυμίζουμε πως το X_C είναι κυρτό αν για κάθε \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 , κάθε κυρτός συνδυασμός αυτών είναι επίσης σημείο του X_C .

Έστω λοιπόν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X_C$ και $\mathbf{x}_c = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ με $0 \leq \lambda \leq 1$

Παρατηρούμε πως $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \lambda, (1-\lambda) \geq 0$ εξ' ορισμού.

$$\text{Επομένως } \mathbf{x}_c = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \geq 0 \quad (2.6.5)$$

Αφού $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$ και $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}$ τότε

$$\mathbf{Ax}_c = \mathbf{A}[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] = \lambda\mathbf{Ax}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Ax}_2 = \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{Ax}_c = \mathbf{b}} \quad (2.6.6)$$

Συνεπώς αφού λόγω (2.6.5) και (2.6.6) τότε το $\mathbf{x}_c \in X_C$ και το X_C κυρτό.

□

Θεώρημα 2.7.3

Η αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος Γ.Π έχει τη βέλτιστη τιμή της σε ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.

Απόδειξη:

Έστω το πλήθος των ακραίων σημείων είναι πεπερασμένο και έστω ότι αυτά είναι. Συμβολίζουμε το διάνυσμα της βέλτιστης λύσης με \mathbf{x}_m .

Αν το \mathbf{x}_m είναι ακραίο τότε το προφανώς το θεώρημα ισχύει.

Αν υποθέσουμε ότι το \mathbf{x}_m δεν είναι ακραίο τότε:

$$\mathbf{opt}[z] \text{ (βελτιστοποιημένη αντικειμενική συνάρτηση)} = z_m = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m$$

Επειδή το \mathbf{x}_m δεν είναι ακραίο σημείο, μπορεί να εκφραστεί σαν κυρτός συνδυασμός ακραίων σημείων (ορισμός 2.6.2.5) :

$$\mathbf{x}_m = \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{x}_k^a, \text{ όπου } \lambda_k, k=1,2,\dots,r \text{ και } \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1.$$

Η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται:

$$z_m = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m = \mathbf{c}^T \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{x}_k^a = \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k^a \quad (2.6.7)$$

Ορίζουμε: $c^T x_p^a = \max(c^T x_k^a)$

τότε η (2.6.7) γίνεται

$$z_m = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m = \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k^a \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p^a = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p^a \sum_{k=1}^r \lambda_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p^a = z_p$$

Δηλαδή:

$$z_m \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p^a = z_p \quad (2.6.8)$$

Όμως το $z_m = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_m$ ορίζει τη μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή $z_m \geq z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, για κάθε \mathbf{x} .

$$\text{Επομένως } z_m \geq z_p \quad (2.6.9)$$

άρα από (2.6.8) και (2.8.9) $\Rightarrow z_m = z_p$ άρα υπάρχει \mathbf{x}_p^a ακραίο το οποίο βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

□

2.7.4 Βασικά στάδια - βήματα αλγορίθμου Simplex

1. Υπολογίζουμε μία αρχική βασική λύση \mathbf{x}_B επιλέγοντας τη βάση \mathbf{B} από τις στήλες του πίνακα \mathbf{A} , με κατάλληλη επιλογή μεταξύ των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του πίνακα \mathbf{A} .
2. Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα \mathbf{A} που δεν ανήκουν στην βάση συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα \mathbf{y}_j σύμφωνα με την σχέση:
 $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$, όπου \mathbf{A}_j η j στήλη του πίνακα \mathbf{A} .
3. Υπολογίζουμε τις τιμές \mathbf{z}_j για τα διανύσματα εκτός βάσης εφαρμόζοντας τη σχέση $\mathbf{z}_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j$.
4. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j$. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση.
5. Αν ένα ή περισσότερα $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j < 0$, επιλέγουμε ένα διάνυσμα \mathbf{a}_k από τα εκτός βάσης για να εισέλθει στη βάση, εφαρμόζοντας το επόμενο κριτήριο: $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k = \min\{\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j \mid \mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j < 0\}$. Η στήλη που αντιστοιχεί σε αυτή τη διαφορά ονομάζεται **οδηγός στήλη**, και το στοιχείο της στήλης που βρίσκεται στην ίδια γραμμή με το \mathbf{a}_k ονομάζεται **οδηγός στοιχείο**.
6. Αν όλα τα $\mathbf{y}_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση. Αν ένα τουλάχιστον $\mathbf{y}_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα \mathbf{b}_r που θα φύγει από τη βάση σύμφωνα με το κριτήριο:
 $\mathbf{x}_{Br} / \mathbf{y}_{rk} = \min\{\mathbf{x}_{Bi} / \mathbf{y}_{ik} \mid \mathbf{y}_{ik} > 0\} = \theta$.
7. Υπολογίζουμε τη νέα βάση \mathbf{B} , η οποία προκύπτει από την προηγούμενη αντικαθιστώντας το διάνυσμα \mathbf{b}_r με το νέο \mathbf{a}_k . Υπολογίζουμε την **νέα βασική εφικτή** λύση \mathbf{x}'_B , με τις σχέσεις:

$$\mathbf{x}'_{Bi} = \mathbf{x}_{Bi} - \mathbf{x}_{Br}(\mathbf{y}_{ij} / \mathbf{y}_{rj}), \quad i \neq r$$

$$\mathbf{x}'_{Br} = \mathbf{x}_{Br} / \mathbf{y}_{rj}$$

και τις νέες τιμές των \mathbf{y}_{ij} , $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j$ και \mathbf{z} .

8. Επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Κεφάλαιο 3

Βιομηχανία παραγωγής συσκευασίας εξωτερικού

3.1 Ανάλυση Συστήματος

Στην προκειμένη περίπτωση το σύστημα που επιδιώκουμε να αναλύσουμε – περιγράψουμε είναι η διαδικασία λειτουργίας που ακολουθείται στο τμήμα παραγωγής και συσκευασίας.

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο υπάρχει πληθώρα προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού σε βιομηχανίες που σχετίζονται με την παραγωγική διαδικασία αλλά και συσκευασία. Πριν περάσουμε σε τέτοιου είδους προβλήματα, καλούμαστε πρώτα να περιγράψουμε τη διαδικασία που εφαρμόζεται στο τμήμα παραγωγής και συσκευασίας συγκεκριμένης **X** βιομηχανίας του εξωτερικού (παγκοσμίου βεληνεκούς). Η διάταξη μεταξύ μηχανημάτων παραγωγής, μηχανημάτων συσκευασίας, αποθηκευτικών χώρων καθώς και η ποικιλία των προϊόντων σε παραγωγή και συσκευασία είναι μερικά από τα χαρακτηριστικά τα οποία πρέπει να θίξουμε για περαιτέρω ανάλυση.

3.1.1 Περιγραφή του συστήματος

Βρισκόμαστε λοιπόν σε **X** βιομηχανία τροφίμων του εξωτερικού στην οποία το τμήμα παραγωγής και συσκευασίας ακολουθεί την εξής διαδικασία:

1. Εισαγωγή πρώτων υλών

Το στάδιο αυτό το αναφέρουμε ως σημείο αναφοράς όπου δεχόμαστε την εισαγωγή των πρώτων υλών (πχ κρέας, αλεύρι, ζάχαρη κλπ) στη βιομηχανία χωρίς να μας απασχολεί όμως η διαδικασία αποθήκευσης και μεταφοράς.

2. Επεξεργασία πρώτων υλών - Παραγωγικές γραμμές

Το τμήμα παραγωγής και συσκευασίας της **X** βιομηχανίας αποτελείται από **3 παραγωγικές γραμμές (P_1, P_2, P_3)**. Κάθε γραμμή αποτελείται από μία γραμμή – σειρά μηχανημάτων που επεξεργάζεται τις πρώτες ύλες σύμφωνα με καθορισμένη συνταγή, με αποτέλεσμα να έχουμε το λεγόμενο **παραγόμενο προϊόν**. Επισημαίνουμε πως το προϊόν αυτό δεν είναι κατ' ανάγκη το τελικό προϊόν που βγαίνει στην αγορά, γιατί όπως θα δούμε και στη συνέχεια, υπάρχουν τελικά προϊόντα που αποτελούνται από συνδυασμό δύο παραγόμενων προϊόντων.

Αξίζει να σημειωθεί πως κάθε παραγωγική γραμμή παράγει ένα προϊόν κάθε φορά, μέσα από μία ποικιλία προϊόντων τα οποία θεωρούμε ως διαφορετικό είδος το κάθε ένα, κάτι το οποίο θα μας απασχολήσει στην πορεία.

Πιο κάτω δίνουμε το σχετικό πίνακα στον οποίο καταγράφουμε τους κωδικούς των παραγόμενων προϊόντων σε κάθε γραμμή.

Παραγωγικές γραμμές	P_1	P_2	P_3
Κωδικοί παραγόμενων προϊόντων	W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 U_1	E_1 E_2 E_3 E_4	T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9 N

Πίνακας 3.1

3. Αποθήκευση παραγόμενου προϊόντος

Στο στάδιο αυτό γίνεται αποθήκευση του παραγόμενου προϊόντος σε 25 τανκ ($\{B_1, B_2, \dots, B_{25}\}$ διαφορετικών χωρητικότητων) μέσω αγωγών οι οποίοι ακολουθούν συγκεκριμένες διαδρομές (συνδεσμολογία I)

Ακολουθεί σχετικός πίνακας 3.2.

Συνδεσμολογία I	
Χωρητικότητα τανκ (T)	Κωδικοί τανκ (B_1, B_2, \dots, B_{25})
7	$B_3, B_4, B_5, B_7, B_8, B_9, B_{11}, B_{13}, B_{14}$
8.5	$B_1, B_2, B_6, B_{10}, B_{12}$
12	$B_{15}, B_{16}, B_{17}, B_{18}, B_{19}, B_{20}, B_{21}, B_{22}$
20	B_{23}, B_{24}, B_{25}

Πίνακας 3.2

4. Συσκευασία - Γραμμές συσκευασίας

Σε αντιστοιχία με τις γραμμές παραγωγής στις οποίες αναφερθήκαμε πιο πριν, κάθε γραμμή συσκευασίας αποτελείται από μία γραμμή - σειρά από μηχανές οι οποίες συσκευάζουν (κυρίως) συνδυασμούς παραγόμενων προϊόντων (το πολύ 2 προϊόντων). Κάθε γραμμή αντλεί μέσω αγωγών παραγόμενο προϊόν από συγκεκριμένα τανκ του αποθηκευτικού χώρου μέσω καθορισμένων διαδρομών από τα τανκ στις γραμμές συσκευασίας (συνδεσμολογία II).

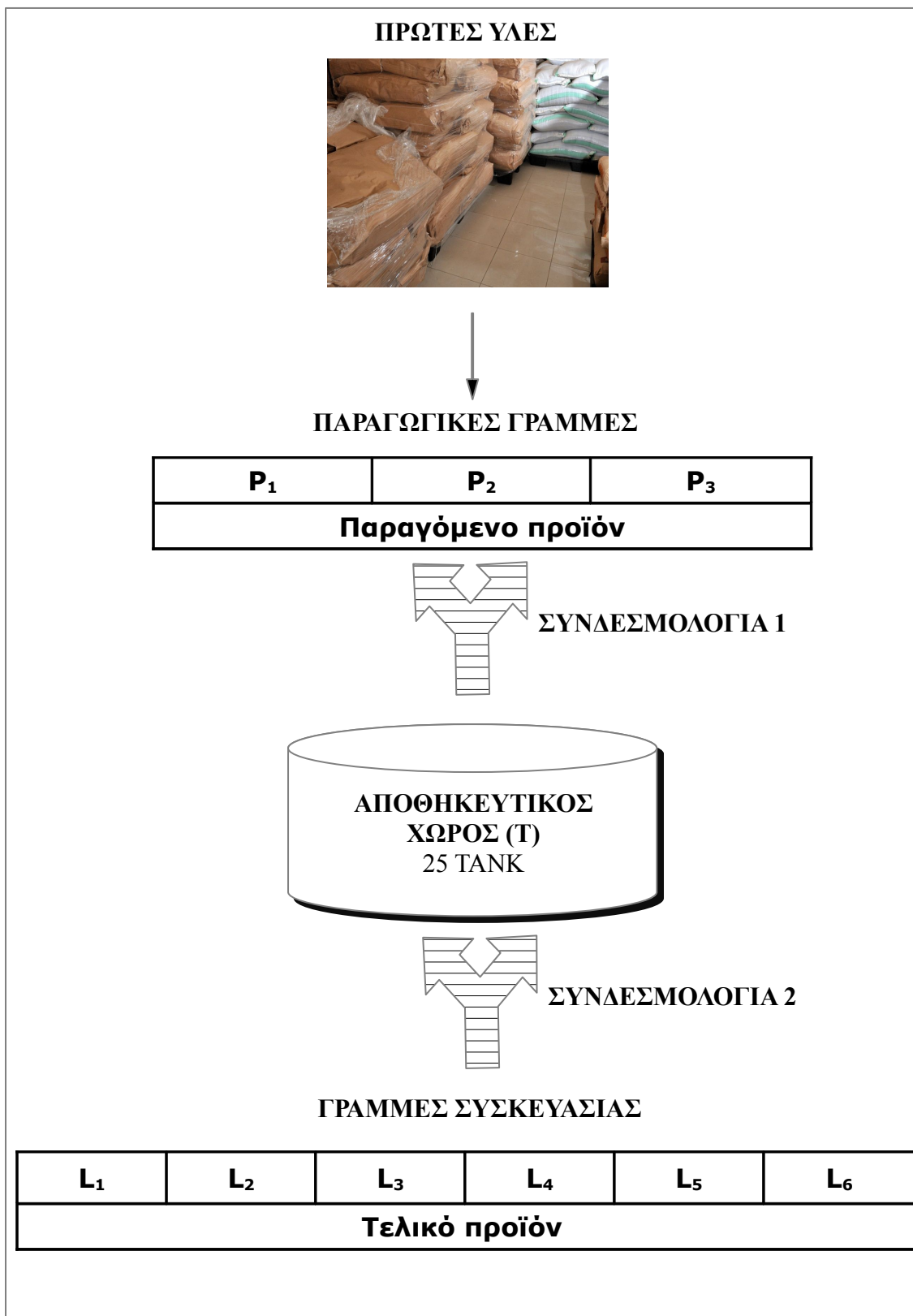
Οι γραμμές συσκευασίας στο σύνολό τους είναι 6 (L_1, L_2, \dots, L_6) και κάθε γραμμή συσκευάζει τα δικά της προϊόντα τα οποία χαρακτηρίζονται ως **τελικά προϊόντα**, δηλαδή αυτά που είναι έτοιμα να απορροφηθούν από την αγορά.

Δίνουμε το σχετικό πίνακα 3.3

ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥ/ΣΙΑΣ	ΤΕΛΙΚΟ ΠΡΟΙΟΝ	ΣΥΣΤ/ΚΟ 1	ΠΕΡΙΕΚΤ/ΤΑ 1	ΣΥΣΤ/ΚΟ 2	ΠΕΡΙΕΚΤ/ΤΑ 2
L₁	$W_i N,$ ($i=1,2,\dots,5$)	W_i ($i=1,2,\dots,5$)	85.00%	N	15.00%
	$E_j D,$ ($j=1,2,3,4$)	E_j ($j=1,2,3,4$)	90.00%	D	10.00%
	$T_k,$ ($k=1,2,\dots,9$)	T_k ($k=1,2,\dots,9$)	100.00%	---	---
	U_1	U_1	100.00%	---	---
L₂	$W_i N,$ ($i=1,2,\dots,5$)	W_i ($i=1,2,\dots,5$)	85.00%	N	15.00%
	$E_j D,$ ($j=1,2,3,4$)	E_j ($j=1,2,3,4$)	90.00%	D	10.00%
L₃	$W_i N,$ ($i=1,2,\dots,5$)	W_i ($i=1,2,\dots,5$)	85.00%	N	15.00%
	$E_j D,$ ($j=1,2,3,4$)	E_j ($j=1,2,3,4$)	90.00%	D	10.00%
L₄	$T_k,$ ($k=1,2,\dots,9$)	T_k ($k=1,2,\dots,9$)	100.00%	---	---
L₅	$T_k,$ ($k=1,2,\dots,9$)	T_k ($k=1,2,\dots,9$)	100.00%	---	---
L₆	$T_k,$ ($k=1,2,\dots,9$)	T_k ($k=1,2,\dots,9$)	100.00%	---	---

Πίνακας 3.3

Παρακάτω δίνουμε όλα τα στάδια που περιγράψαμε, σε ένα διάγραμμα - σχήμα.



Σχήμα 3.1

3.1.2 Εντοπισμός παραγόντων – παραμέτρων του συστήματος

Στο στάδιο αυτό, καταγράφουμε τους παράγοντες – σημεία που επηρεάζουν σημαντικά το σύστημα και προσδιορίζουμε τρόπους (στρατηγικές) με τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε προκειμένου να το επηρεάσουμε.

Δίνονται οι εξής υπό μελέτη παράγοντες – παράμετροι:

(1) Scrap product

Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω, κάθε γραμμή παραγωγής αλλά και συσκευασίας παράγουν και συσκευάζουν αντίστοιχα διαφορετικά προϊόντα. Η εναλλαγή από τη παραγωγή (ή αντίστοιχα συσκευασία) ενός προϊόντος σε κάποιο άλλο έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή του λεγόμενου **scrap product** το οποίο είναι ένα μείγμα δύο διαφορετικών προϊόντων και θεωρείται ως μη αξιοποιήσιμο.

Για παράδειγμα στη παραγωγική γραμμή **P₁** παράγουμε αρχικά το **W₁** προϊόν (χρώμα κόκκινο) και θέλουμε κάποια στιγμή να παράγουμε το **W₂** προϊόν (χρώμα άσπρο). Κατά την παραγωγή του **W₂**, με δεδομένο ότι θα παραμείνουν υπολείμματα του **W₁** στη **P₁**, για 200kg (δεδομένο) περίπου, το προϊόν που παράγει η γραμμή θα είναι “αρχικά” ροζ μέχρι να αρχίσει να παράγεται “καθαρό” άσπρο. Το προϊόν αυτό λέγεται **scrap product** και είναι 100% μη εκμεταλλεύσιμο, το οποίο θεωρείται ως ζημιά.

Σημειώνουμε πως η ποσότητα του scrap product που παράγεται διαφέρει από προϊόν σε προϊόν με αποτέλεσμα το κόστος που δημιουργείται λόγω scrap να έχει διαφορετική αξία σε κάθε μετάβαση.

Ακολουθούν οι σχετικοί πίνακες 3.4 και 3.5 οι οποίοι μας δίνουν την ανάλογη ποσότητα scrap product που παράγεται για κάθε εναλλαγή παραγωγής και συσκευασίας προϊόντων αντίστοιχα σε κάθε παραγωγική γραμμή.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ			
Παραγωγικές γραμμές	Παραγόμενο προϊόν	Εναλλαγή	Ποσότητα Scrap product (T)
P₁	W _i (i=1,2,..,5)	W _i σε W _j i,j =1,2,..,5 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j
	U ₁	W _i σε U ₁ (και αντίστροφα)	1.60
P₂	E _j (j=1,2,3,4)	E _i σε E _j i,j =1,2,..,4 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j
P₃	T _k (k=1,2,..,9)	T _i σε T _j i,j =1,2,..,9 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j
	N	T _i σε N (και αντίστροφα) i=1,2,..,9	0.80
	D	T _i σε D (και αντίστροφα) i=1,2,..,9	0.40
		D σε N (και αντίστροφα)	1.75

Πίνακας 3.4

ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ		
Γραμμές συσκευασίας	Εναλλαγή	Ποσότητα Scrap product (T)
L₁	W _i N σε U1 (και αντίστροφα) i=1,2,...,5	0.80
	W _i N σε T _k (και αντίστροφα) k=1,2,...,9, i=1,2,...,5	0.29
	T _k σε U1 (και αντίστροφα) k=1,2,...,9	0.30
	U1 σε E _j D (και αντίστροφα) j =1,2,...,4	0.90
	T _k σε E _j D (και αντίστροφα) k=1,2,...,9, j =1,2,...,4	0.50
L₁,L₂,L₃	W _i N σε E _j D (και αντίστροφα) i=1,2,...,5, j =1,2,...,4	0.83
	W _i N σε W _j N i,j =1,2,...,5 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j
	E _i D σε E _j D i,j =1,2,3,4 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j
L₄,L₅,L₆	T _i σε T _j i,j =1,2,...,9 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j

Πίνακας 3.5

(2) Ρυθμός και αξιοπιστία παραγωγής

Προφανώς ο ρυθμός της παραγωγικής διαδικασίας είναι σημαντική παράμετρος και μετρείται σε T/h, (τόνους ανά ώρα). Κάθε προϊόν σε μία παραγωγική γραμμή, ενδέχεται να παρουσιάζει διαφορετικό ρυθμό παραγωγής από ένα άλλο αλλά και κάθε γραμμή ενδέχεται να "τρέχει" με διαφορετικό ρυθμό το ίδιο προϊόν από μία άλλη γραμμή.

Ως αξιοπιστία θεωρούμε το ποσοστό του ρυθμού αυτού που εκμεταλλεύεται η γραμμή παραγωγής κατά μέσο όρο (μ) με την αντίστοιχη τυπική απόκλιση (σ) αυτού. Το χαμηλό σχετικά ποσοστό, όπως φαίνεται και στον πιο κάτω πίνακα, οφείλεται σε ένα συνδυασμό από αίτια όπως το *μη εκπαιδευμένο κατάλληλα προσωπικό*, το οποίο να καθυστερεί με τη διαχείριση των υλικών στις γραμμές, τη *διαδικασία συντήρησης και απολύμανσης των μηχανών*, που γίνεται 2-3 φορές τη βδομάδα για 2 ώρες, αλλά και σε *τυχόν εμπλοκή των μηχανών*. Δίνουμε τον σχετικό πίνακα 3.5.

Παραγωγικές γραμμές	Παραγόμενο προϊόν	Ρυθμός παραγωγής PR (T/h)	Αξιοπιστία (μ, σ)
P₁	W ₁ W ₂ W ₃ W ₄ W ₅	6	$\mu=68\%$ $\sigma=9.7\%$
	U ₁	3.7	$\mu=62\%$, $\sigma=10.3\%$
P₂	E ₁ E ₂ E ₃ E ₄	10	$\mu=64\%$, $\sigma=9.6\%$
P₃	T ₁ T ₂ ... T ₉	5	$\mu=82\%$, $\sigma=7.6\%$
	N	5	
	D	4.6	$\mu=75\%$, $\sigma=8.3\%$

Πίνακας 3.5

(3) Ρυθμός και αξιοπιστία συσκευασίας

Σε αντιστοιχία με τις παραγωγικές γραμμές δίνουμε τον εξής πίνακα 3.6.

Γραμμές Συσκευασίας	Τελικό προϊόν	Ρυθμός συσκευασίας - LR (T/h)	Αξιοπιστία - LRel (μ,σ)
L₁	$W_i N ,$ ($i=1,2,\dots,5$)	14.4	$\mu=45\%,$ $\sigma=9.3\%$
	$E_j D ,$ ($j=1,2,3,4$)		
	$T_k ,$ ($k=1,2,\dots,9$)		
	U_1		
L₂	$W_i N ,$ ($i=1,2,\dots,5$)	6	$\mu=50\%,$ $\sigma=6.7\%$
	$E_j D ,$ ($j=1,2,3,4$)		
L₃	$W_i N ,$ ($i=1,2,\dots,5$)	10.8	$\mu=50\%,$ $\sigma= 9.1\%$
	$E_j D ,$ ($j=1,2,3,4$)		
L₄	$T_k ,$ ($k=1,2,\dots,9$)	0.6	$\mu=56\%,$ $\sigma= 9\%$
L₅	$T_k ,$ ($k=1,2,\dots,9$)	0.5	$\mu=56\%,$ $\sigma= 9\%$
L₆	$T_k ,$ ($k=1,2,\dots,9$)	0.64	$\mu=62\%,$ $\sigma= 8.1\%$

Πίνακας 3.6

(4) **Αξία προϊόντος**

Η αξία κάθε προϊόντος τόσο στη διαδικασία παραγωγής όσο και στη διαδικασία συσκευασίας (συνδυασμός παραγόμενων προϊόντων) είναι καθοριστικής σημασίας και την καταγράφουμε στον πιο κάτω πίνακα.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ		ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ	
Παραγόμενο Προϊόν	Αξία (\$/Τ)	Τελικό Προϊόν	Αξία (\$/Τ)
T_i ($i=1,2,\dots,9$)	2000	T_i ($i=1,2,\dots,9$)	2000
W_k ($k=1,2,\dots,5$)	1500	$W_i N$, ($i=1,2,\dots,5$)	1455
N	1200		
U_1	1600	U_1	1600
E_j ($j=1,2,3,4$)	1000	$E_j D$ ($j=1,2,3,4$)	1050
D	1500		

Πίνακας 3.7

Παρατήρηση 3.1:

Με τη βοήθεια του πίνακα 3.3 ο οποίος μας δίνει την περιεκτικότητα των τελικών προϊόντων σε παραγόμενα παρατηρούμε ότι το τελικό προϊόν $E_i D$, είναι συνδυασμός των E_i (90%) και D (10%) με ($i=1,2,3,4$) (πίνακας 3.3). Επομένως από τον πίνακα 3.7 έχουμε ότι η αξία των E_i ($i=1,2,3,4$) είναι \$1000 και του D \$1500.

Για τον υπολογισμό της αξίας του $E_i D$ ($i=1,2,3,4$) έχουμε:

$$\text{Value}(E_i D) = 0.9 \times 1000 + 0.1 \times 1500 = 1050$$

Άρα η αξία του για κάθε $E_i D$ είναι \$1050.

Αντίστοιχα για τον υπολογισμό $W_j D$ ($j=1,2,\dots,5$) έχουμε:

$$\text{Value}(W_j D) = 0.85 \times 1500 + 0.15 \times 1200 = 1455$$

Άρα η αξία του για κάθε $W_j N$ είναι \$1455.

□

(5) Κόστος Scrap product

Το κόστος του scrap υπολογίζεται προφανώς αναλόγως της ποσότητας του scrap κάθε εναλλαγής και της αξίας των προϊόντων που το αποτελούν. Επίσης θεωρούμε ότι περιεκτικότητα των αναμειγνυόμενων προϊόντων είναι στο 50% έκαστος. Δίνουμε τους σχετικούς πίνακες.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ					
Παρ/κές γραμμές	Παραγόμενο προϊόν	Εναλλαγή	Ποσότητα Scrap product (T)	Κόστος Scrap (\$)	
P₃	W_i ($i=1,2,\dots,5$)	W_i σε W_j $i,j = 1,2,\dots,5$ και $i \neq j$	$0.1+0.1* i-j $	$C_{W_iW_j}$	$150+150* i-j $
	U_1	W_i σε U_1 (και αντίστροφα)	1.6	C_{W_iU}	2480
P₂	E_j ($j=1,2,3,4$)	E_i σε E_j $i,j = 1,2,\dots,4$ και $i \neq j$	$0.1+0.1* i-j $	$C_{E_iE_j}$	$100+100* i-j $
P₃	T_k ($k=1,2,\dots,9$)	T_i σε T_j $i,j = 1,2,\dots,9$ και $i \neq j$	$0.1+0.1* i-j $	$C_{T_iT_j}$	$200+200* i-j $
	N	T_i σε N (και αντίστροφα) $i=1,2,\dots,9$	0.8	C_{T_iN}	1280
	D	T_i σε D (και αντίστροφα) $i=1,2,\dots,9$	0.4	C_{T_iD}	700
		D σε N (και αντίστροφα)	1.75	C_{DN}	2362.5

Πίνακας 3.8

ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ				
Γραμμές συσκευασίας	Εναλλαγή	Ποσότητα Scrap product (T)	Κόστος Scrap (\$)	
L₁	W _i N σε U1 (και αντίστροφα) i=1,2,..,5	0.80	C _{W_iU}	1222.00
	W _i N σε T _k (και αντίστροφα) k=1,2,..,9, i=1,2,..,5	0.29	C _{W_iT_k}	500.98
	T _k σε U1 (και αντίστροφα) k=1,2,..,9	0.30	C _{T_kU}	540.00
	U1 σε E _j D (και αντίστροφα) j =1,2,..,4	0.90	C _{E_jU}	1192.50
	T _k σε E _j D (και αντίστροφα) k=1,2,..,9, j =1,2,..,4	0.50	C _{T_kE_j}	762.50
L₁,L₂,L₃	W _i N σε E _j D (και αντίστροφα) i=1,2,..,5, j =1,2,..,4	0.83	C _{W_iE_j}	1039.58
	W _i N σε W _j N i,j =1,2,..,5 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j	C _{W_iW_j}	145.5+145.5* i-j
	E _i D σε E _j D i,j =1,2,3,4 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j	C _{E_iE_j}	105+105* i-j
L₄,L₅,L₆	T _i σε T _j i,j =1,2,..,9 και i ≠ j	0.1+0.1* i-j	C _{T_iT_j}	200+200* i-j

Πίνακας 3.9

Παρατήρηση 3.2:

Η αξία του Scrap προκύπτει με τον τύπο:
 $\text{Value}(\text{Scrap}) = Q_s(p_1, p_2) * (0.5 * \text{Value}(p_1) + 0.5 * \text{Value}(p_2))$

όπου $\text{Value}()$, $Q_s()$ η αξία και η ποσότητα του Scrap αντίστοιχα, και p_1, p_2 τα προϊόντα που αποτελούν το Scrap.

(6) Ζήτηση τελικού προϊόντος

Η ζήτηση θα μπορούσαμε να πούμε πως αποτελεί ίσως το σημαντικότερο παράγοντα της ανάλυση μας. Αναφέρεται στην ποσότητα του τελικού προϊόντος ανά εβδομάδα το οποίο ζητείται για την κάλυψη των αναγκών των καταναλωτών. Ακολουθεί σχετικός πίνακας.

Τελικό Προϊόν	Ζήτηση (Τ/εβδομάδα)
$W_i N$ ($i=1,2,\dots,5$)	110
U_1	115
$E_1 D$	400
$E_2 D$	250
$E_3 D$	200
$E_4 D$	100
T_i ($i=1,2,\dots,9$)	95

Πίνακας 3.10

(7) Σύνδεση παραγωγικών γραμμών – τανκ

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο στάδιο, κατά την παραγωγή, το παραγόμενο προϊόν αποθηκεύεται σε καθορισμένα τανκ μέσω αγωγών, ανάλογα με το ποια παραγωγική γραμμή ακολουθείται. Δίνουμε το σχετικό πίνακα 3.10.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	TANK
P_1	B_1, B_2, \dots, B_{13}
P_2	$B_{15}, B_{17}, B_{19}, B_{21}$
P_3	$B_4, B_6, B_8, B_{10}, \dots, B_{22}, B_{23}, B_{24}, B_{25}$

Πίνακας 3.11

(8) Απόθεμα

Παρατηρούμε ότι από τους πίνακες 3.2 και 3.10 έχουμε για κάθε παραγωγική γραμμή τη δυνατότητα αποθέματος ως εξής:

ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	ΑΠΟΘΕΜΑ-S (Storage) (T)
P_1	$59 + 7a + 8.5b,$ όπου $a \leq 2, b \leq 3$
P_2	48
P_3	$115 + 7(2-a) + 8.5(3-b),$ όπου $a \leq 2, b \leq 3$

Πίνακας 3.12

Λόγω του ότι οι γραμμές P_1 και P_3 συνδέονται και οι δύο με τα τανκ B_4, B_6, B_8, B_{10} και B_{12} (πίνακας 3.10) έχουν κοινό απόθεμα $7 \times 2 + 8.5 \times 3 = 39.5T$ το οποίο μπορεί να διαμοιραστεί σε ακέραιες μονάδες των 0-2 και 0-3 για τανκ χωρητικότητας 7 και 8.5T αντίστοιχα.

(9) Σύνδεση τανκ – γραμμών συσκευασίας

Με ανάλογο τρόπο παρατηρείται σύνδεση τανκ και γραμμών συσκευασίας σύμφωνα με τον πίνακα 3.12.

ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑΣ	TANK
L_1	B_1, B_2, \dots, B_{21}
L_2	
L_3	
L_4	$B_8, B_{10}, B_{12}, B_{14}, B_{16}, B_{18}, B_{20}$
L_5	B_{23}, B_{24}
L_6	B_{22}, B_{25}

Πίνακας 3.13

3.2 Διατύπωση στόχων

Στόχος της βιομηχανίας που μελετούμε είναι η μεγιστοποίηση των κερδών της, με τον συνυπολογισμό του κόστους λόγω scrap που παρατηρείται τόσο στην παραγωγική όσο και στη συσκευαστική διαδικασία.

3.2.1 Ανάλυση προβλήματος

Στη βιομηχανία που μελετούμε, όλη η παραγωγική και συσκευαστική διαδικασία επιδιώκεται να "τρέχει" σχεδόν όλο το 24ωρο με όσο το δυνατόν λιγότερα διαλείμματα. Με χρονικό ορίζοντα μία βδομάδα (168 ώρες) παράγεται η μέγιστη δυνατή ποσότητα από τις γραμμές παραγωγής που ανταποκρίνεται στη ζήτηση, και στη συνέχεια συσκευάζεται.

Το πρόβλημα που επιδιώκουμε να αναλύσουμε είναι το πως θα μπορέσουμε να συμπεριλάβουμε το κόστος του **scrap product** σαν "μεταβλητή" για την επίτευξη του στόχου. Για να μπορέσουμε λοιπόν να δώσουμε μία πιο γενική εικόνα, θα καταγράψουμε μερικές παρατηρήσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν στη διατύπωση του προβλήματος.

Παρατήρηση I

Με δεδομένη την παραγωγή scrap product στην παραγωγική διαδικασία, παρατηρούμε πως με μεγάλη συχνότητα εναλλαγής της παραγωγής από ένα προϊόν σε άλλο έχουμε περισσότερη ποσότητα **scrap product**. Ακόμη, σημαντικό ρόλο φαίνεται να παίζει και η σειρά - διάταξη με την οποία παράγουμε τα προϊόντα, όπως θα δείξουμε και στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.2.1:

Φέρνουμε σαν παράδειγμα την παραγωγική γραμμή P_1 η οποία παράγει τα προϊόντα W_1, W_2, \dots, W_5 και U_1 (πίνακας 3.1). Θεωρούμε απαραίτητο να παραχθούν όλα τα προϊόντα βάση ζήτησης (πίνακας 3.8) και πως η περιεκτικότητα του scrap product είναι μοιρασμένη εξίσου στα αναμειγνυόμενα προϊόντα.

Από πίνακα 3.4 έχουμε ότι αν παράξουμε με τη σειρά $R_1=(W_4, U_1, W_2, W_5, W_3, W_1)$ έχουμε

$$1.6+1.6+0.2+0.4+0.3+0.3 = 4.4T \text{ scrap product.}$$

ενώ αν παράξουμε με τη σειρά $R_2=(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, U_1)$ έχουμε:

$$0.2+0.2+0.2+0.2+0.2+1.6=2.6T \text{ scrap product.}$$

Φυσικά αυτό που μας ενδιαφέρει ουσιαστικά είναι αξία του scrap product η οποία στη κάθε διάταξη υπολογίζεται ως:

Value(R₁)=

$$1.6 \times (0.5 \times 1500 + 0.5 \times 1600) + 1.6 \times (0.5 \times 1500 + 0.5 \times 1600) + 0.2 \times 1500 + 0.4 \times 1500 + 0.3 \times 1500 + 0.3 \times 1500 = 6760$$

Value(R₁)=6760 \$

Value(R₂)=

$$(0.2 \times 1500) \times 5 + 1.6(0.5 \times 1600 + 0.5 \times 1500) = 3980$$

Value(R₂)=3980 \$

□

Παρατήρηση II

Με χαμηλή συχνότητα εναλλαγής της παραγωγής προϊόντων ενδέχεται να καθυστερήσει η διαδικασία της συσκευασίας λόγω του ότι κάποια από τα τελικά προϊόντα είναι το αποτέλεσμα συνδυασμού 2 παραγόμενων και προϋποθέτεται να υπάρχει απόθεμα και των 2 αυτών προϊόντων ή να πραγματοποιείται συσκευασία ταυτόχρονα με την παραγωγή. Επομένως με μικρή σχετικά συχνότητα εναλλαγής, μπορεί για κάποια προϊόντα να μην υπάρχει απόθεμα και έτσι να μην μπορεί το τμήμα συσκευασίας να παράξει το τελικό προϊόν, με αποτέλεσμα να καθυστερείται η διαδικασία. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό με το εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.2.2:

Έστω λοιπόν το τελικό προϊόν E₁D (E₁+D) το οποίο για να παραχθεί σύμφωνα με τον πίνακα 3.3 χρειάζεται 85% του E₁ και 15% του D. Εάν για ένα από τα δύο E₁ και D (ή και τα δύο) δεν υπάρχει σε ικανοποιητική ποσότητα, τότε το προϊόν E₁D δεν μπορεί να παραχθεί μέχρις ότου επανέλθουν οι ποσότητες και των δύο προϊόντων σε απαιτούμενα επίπεδα.

Αυτό συνεπάγεται στο ότι θα πρέπει να περιμένει το τμήμα συσκευασίας μέχρι να παραχθεί η απαιτούμενη ποσότητα του προϊόντος που υπολείπεται. Άρα στόχος μας θα είναι να υπάρχει βέλτιστη παραγωγή τόσο σε ποσότητα όσο και σε διάταξη για να αποφύγουμε όσο το δυνατόν περισσότερη καθυστέρηση της λειτουργίας των γραμμών συσκευασίας.

□

3.2.2 Χρήσιμοι υπολογισμοί

Σε αυτό το στάδιο καλούμαστε να επεξεργαστούμε τις πληροφορίες που έχουμε συλλέξει έτσι ώστε να εξαγάγουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις - παραμέτρους που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα. Αυτό θα αποτελέσει σημαντική βοήθεια για τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Ακολουθούν σχετικοί πίνακες.

ΠΑΡΑΓΩΓΗ						
Παραγ/κές γραμμές	Παραγ/νο προϊόν	Εφικτός ρυθμός παραγωγής (T/h) με σφάλμα (FR)		Απαιτούμενες ώρες παραγωγής (h_d)	Ποσοστό της παραγωγής	Μέσος εφικτός ρυθμός (T/h)
P₁	W ₁ W ₂ W ₃ W ₄ W ₅	4.08	0.58	114.58	0.7	3.47
	U ₁	2.29	0.38	50.13	0.3	
	Σύνολο απαιτούμενων ωρών				164.71	Εργάσιμες ώρες βδομάδας
P₂	E ₁	6.4	0.96	56.25	0.42	5.09
	E ₂			35.16	0.26	
	E ₃			28.13	0.21	
	E ₄			14.06	0.11	
	Σύνολο απαιτούμενων ωρών				133.6	Εργάσιμες ώρες βδομάδας
P₃	T ₁ T ₂ ... T ₉	4.1	0.38	208.54	0.72	3.99
	N			20.12	0.12	
	D	3.45	0.38	27.54	0.16	
	Σύνολο απαιτούμενων ωρών				256.2* (120.24)	Εργάσιμες ώρες βδομάδας
					Ολικός ρυθμός παραγωγής	12.55

Πίνακας 3.14

ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ			
Γραμμές Συσκευασίας	Τελικό προϊόν	Εφικτός ρυθμός συσκευασίας (Τ/h)	
L₁	W _i N (i=1,2,...,5)	6.48	0.6
	E _j D (j=1,2,3,4)		
	T _k (k=1,2,...,9)		
	U ₁		
L₂	W _i N (i=1,2,..,5)	3	0.2
	E _j D (j=1,2,3,4)		
L₃	W _i N (i=1,2,...,5)	5.4	0.49
	E _j D (j=1,2,3,4)		
L₄	T _k k=1,2,...,9)	0.34	0.03
L₅	T _k k=1,2,...,9)	0.28	0.03
L₆	T _k (k=1,2,...,9)	0.40	0.03
Ολικός ρυθμός συσκευασίας		15.9	

Πίνακας 3.15

➤ **Εφικτός ρυθμός παραγωγής/συσκευασίας (FPR)**

Αναφέρεται στο ρυθμό που τελικά αποδίδουν οι γραμμές παραγωγής και συσκευασίας αντίστοιχα. Με τη βοήθεια της αξιοπιστίας των γραμμών (πίνακες 3.5 και 3.6) υπολογίζονται ως το γινόμενο ρυθμού παραγωγής (δυνατότητα γραμμής) και αξιοπιστίας.

$$FPR = PR \times PRel$$

Ενδεικτικό παράδειγμα:

Για τη γραμμή P1 και συγκεκριμένα για το U1 προϊόν έχουμε: 3.7 ρυθμό παραγωγής και 62% αξιοπιστία αυτού επομένως ο εφικτός ρυθμός υπολογίζεται: $FPR=3.7 \times 0.62=2.29$

➤ **Απαιτούμενες ώρες παραγωγής (h_d)**

Αναφέρονται στο χρόνο που απαιτείται για την παραγωγή κάθε προϊόντος συνυπολογίζοντας τη ζήτηση (D) αλλά και τον εφικτό ρυθμό παραγωγής (FR) κάθε προϊόντος. Συγκεκριμένα ορίζεται ως:

$$h_d = D / \text{FPR}$$

➤ **Ποσοστό της παραγωγής (p_i)**

Προσδιορίζει το ποσοστό με το οποίο παράγεται κάθε προϊόν σε κάθε γραμμή. Ορίζεται ως το ηλίκο των απαιτούμενων ωρών παραγωγής (για συγκεκριμένο προϊόν της γραμμής) και του συνολικού αριθμού ωρών ($\sum p h_d$) για όλα τα προϊόντα της γραμμής.

$$p_i = h_d / \sum p h_d$$

➤ **Μέσος εφικτός ρυθμός παραγωγής/συσκευασίας (AFR)**

Αναφέρεται στη μέση τιμή του ρυθμού παραγωγής με τον οποίο παράγονται όλα τα προϊόντα έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση. Ορίζεται ως:

$$\mathbf{AFR} = \sum p_i \text{FR} q_j$$

Ενδεικτικό παράδειγμα:

Για την γραμμή P3 έχουμε:

$$\text{AFR} = (0.72 + 0.12) \times 4.1 + 0.16 \times 3.45 = 3.99 \text{ (T/h)}$$

Παρατήρηση 3.2.1:

Στην παραγωγική γραμμή **P₃** παρατηρούμε ότι οι απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή των **T_i** προϊόντων είναι 208.54 ενώ οι εργάσιμες ώρες της γραμμής είναι 168 (24x7). Από αυτό προκύπτει το ερώτημα για το πως θα κατανεμηθούν οι 168 ώρες στα παραγόμενα προϊόντα της γραμμής.

Πριν προχωρήσουμε όμως σημειώνουμε ότι θα πρέπει η βιομηχανία, λόγω **σύμβασης**, να παράξει όλα της τα προϊόντα τουλάχιστον στο **50%**.

■ Σύμβαση 50%

Για την παραγωγή των **N, D** και **T_i** απαιτούνται σίγουρα 10, 14 και 104 ώρες (περίπου) αντίστοιχα. Άρα στο σύνολο τους είναι $10+14+104=128$ ώρες με υπόλοιπο $168-128=40$ ώρες που πρέπει να εκμεταλλευτούμε με το "καλύτερο δυνατό τρόπο", πράγμα που σημαίνει πως θα πρέπει να τις κατανέμουμε έτσι ώστε να είναι μεγαλύτερο το κέρδος ή μικρότερη ζημιά το οποίο στη περίπτωση μας έχει την ίδια σημασία (γιατί το χαμένο κέρδος μπορούμε να το θεωρήσουμε και ως ζημιά).

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε για κάθε ώρα παραγωγής για το κάθε ένα προϊόν εκ των **N, D** και **T_i** τι κέρδος επιφέρουν.

- Για κάθε ώρα παραγωγής των **T_i** παράγουμε 4.1T το οποίο μπορεί να επιφέρει κέρδος $4.1 \times 2000 = 8200\$$, μιας και πωλείται χωρίς την ανάμειξη με κάποιο άλλο προϊόν.
- Για κάθε ώρα παραγωγής του **N** προϊόντος παράγουμε 4.1T το οποίο όμως αποτελεί το 15% των **W_{iN}** προϊόντων (πίνακες 3.12 & 3.3). Έτσι για 4.1T του **N** ισοδυναμεί με $(100/15) \times 4.1 = 27.33T$ των **W_{iN}** με ενδεχόμενο κέρδος $27.33 \times 1455 = 39765.15\$$.
- Για κάθε ώρα παραγωγής του **D** παράγουμε 3.45T προϊόν το οποίο αποτελεί το 10% των **E_{iD}**. Άρα ισοδυναμεί με την ποσότητα των $(100/10) \times 3.45 = 34.5T$ των **E_{iD}** αξίας $34.5 \times 1050 = 35910\$$

Συμπέρασμα

Από το υπόλοιπο των 40h παράγουμε και το υπόλοιπο 50% των **N** και **D** ($10h + 14h = 24h$) και 16h οποιοδήποτε προϊόν **T_i**.

Αυτό συνεπάγεται πως με δεδομένη την παραγωγή των **N** και **D** συνολικά 20.12h και 27.54h αντίστοιχα, η παραγωγή των **T_i** αντιστοιχεί σε $168 - (20.12 + 27.54) = 120.34h$. Επομένως η παραγωγή αυτή αντιστοιχεί σε $120.34 \times 4.1 = 493.40T$ **T_i**.

Παρατήρηση 3.2.2:

Το ποσοστό της παραγωγής των προϊόντων στη **P₃** παραγωγική γραμμή και κατά συνέπεια και ο μέσος εφικτός ρυθμός (AFR) προσαρμόζονται στο συμπέρασμα της προηγούμενης παρατήρησης.

Παρατήρηση 3.2.3:

Κάθε προϊόν, αν χρειαστεί, μπορεί να συνδεθεί με περισσότερες από μία γραμμές συσκευασίας. Κατά συνέπεια για κάθε τελικό προϊόν υπάρχει η δυνατότητα συσκευασίας του με ένα πλήθος από συνδυασμούς των γραμμών συσκευασίας. Φυσικά αυτό για να γίνει στις περισσότερες των περιπτώσεων θα πρέπει να υπάρχει απόθεμα προϊόντος. Αναλυτικά έχουμε:

Τελικό προϊόν	Γραμμές Συσκευασίας
$W_i N$ και $E_j D$	L1
	L1,L2
	L1,L3
	L1,L2,L3
	L2
	L2,L3
	L3
T_k	L1
	L4,L5,L6
	...
U1	L1,L4,L5,L6
	L1

Πίνακας 3.16

Παρατήρηση 3.2.4:

Με τη βοήθεια του πίνακα 3.8 παρατηρούμε ότι η βέλτιστη διάταξη (μικρότερο κόστος σε scrap) για την παραγωγή των W_i ($i=1,2,\dots,5$), E_i ($i=1,2,3,4$), και T_i ($i=1,2,\dots,9$) είναι $\mathbf{R}_1=(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5)$, $\mathbf{R}_2=(E_1, E_2, E_3, E_4)$ και $\mathbf{R}_3=(T_1, T_2, \dots, T_9)$ αντίστοιχα.

Παρατήρηση 3.2.5:

Συνδέοντας την παρατήρηση 3.2.5 μαζί με τα δεδομένα του πίνακα 3.5 όπου τα προϊόντα \mathbf{W}_i , \mathbf{E}_j και \mathbf{T}_k παράγονται με σταθερό ρυθμό και έχουν την ίδια αξία αντίστοιχα, τότε συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να τα θεωρήσουμε σαν ένα προϊόν αντίστοιχα. Με αυτό το τρόπο μειώνουμε σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό των μεταβλητών που θα χρειαστούμε για τη μοντελοποίηση του προβλήματος, χωρίς παράλληλα να αλλοιώσουμε το πρόβλημα. Αυτό το αποδίδουμε στο ότι αφού επιτευχθεί κάποια λύση, που μας δίνει τόσο τη διάταξη σε παραγωγή αλλά και τη διάταξη στη συσκευασία των προϊόντων,

μπορούμε να ορίσουμε βάση αυτής και της βέλτιστης διάταξης της προηγούμενης παρατήρησης, ποιο προϊόν παράγεται κάθε φορά και με ποιο τρόπο συσκευάζεται.

Για παράδειγμα τα προϊόντα W_i θα τα θεωρούμε σαν ένα προϊόν με το κωδικό W και με σταθερό κόστος scrap, λόγω της παραγωγικής διαδικασίας, όσο το κόστος της βέλτιστης αυτής διάταξης της προηγούμενης παρατήρησης. Με αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε και για τα E_j (E) και T_k (T), και δίνουμε τον πίνακα 3.17 συνοπολογίζοντας τα συμπεράσματα των δύο τελευταίων παρατηρήσεων.

Παραγωγικές γραμμές	Παραγόμεν ο προϊόν	Εναλλαγή	Κόστος Scrap (\$)	
P_3	W	W_i σε W_j $i, j = 1, 2, \dots, 5$ και $i \neq j$	C_{WW}	1200 (4*300)
	U_1	W_i σε U_1 (και αντίστροφα)	C_{WU}	2480
P_2	E	E_i σε E_j $i, j = 1, 2, \dots, 4$ και $i \neq j$	C_{EE}	600 (3*200)
P_3	T	T_i σε T_j $i, j = 1, 2, \dots, 9$ και $i \neq j$	C_{TT}	2400 (8*300)
	N	T_i σε N (και αντίστροφα) $i = 1, 2, \dots, 9$	C_{TN}	1280
	D	T_i σε D (και αντίστροφα) $i = 1, 2, \dots, 9$	C_{TD}	700
		D σε N (και αντίστροφα)	C_{DN}	2362.5

Πίνακας 3.17

Παρατήρηση 3.2.6:

Με τη βοήθεια του πίνακα 3.15 παρατηρούμε ότι οι γραμμές συσκευασίας **L4**, **L5** και **L6** συσκευάζουν αποκλειστικά το προϊόν **T** με συνολικό ρυθμό 1.02 T/h. Στην προσπάθεια μας να μειώσουμε όσο περισσότερο την πολυπλοκότητα του προβλήματος, και δεδομένου ότι ο ρυθμός αυτός είναι σχετικά μικρός, αντικαθιστούμε τις γραμμές αυτές με την **L4** η οποία έχει ρυθμό συσκευασίας ίσο με το άθροισμα αυτών.

Παρατήρηση 3.2.7:

Σύμφωνα με τους πίνακες 3.14 και 3.15 παρατηρούμε ότι ο συνολικός ρυθμός συσκευασίας είναι μεγαλύτερος από ότι ο συνολικός ρυθμός παραγωγής. Αυτή η διαφορά μπορεί να αξιοποιηθεί, σε κάποιο βαθμό, εφόσον υπάρχει απόθεμα για κάποιο παραγόμενο προϊόν. Αν δεν υπάρχει απόθεμα σε κάποιο προϊόν τότε η συσκευασία του θα έχει ρυθμό το πολύ ίσο με το ρυθμό της παραγωγής του.

Παράδειγμα 3.2.3:

Έστω λοιπόν ότι παράγουμε το προϊόν **T** με δεδομένο ρυθμό παραγωγής $PR=4.1T/h$ για $t=10h$ και το συσκευάζουμε με την γραμμή L1 ($6.48T/h$) με μηδενικό απόθεμα ($S_T=0$). Τότε ο ρυθμός συσκευασίας LR θα είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής PR με αποτέλεσμα κατά κάποιο τρόπο να καθυστερείται η συσκευασία κατά $6.48-4.1=2.28T/h$.

Σε περίπτωση όμως που έχουμε απόθεμα $S_T=50T$ τότε στο διάστημα των $t=10h$ αξιοποιείται στο 100% ο ρυθμός συσκευασίας, αφού για το διάστημα αυτό μπορεί να συσκευάσει $2.28 \times 10 = 22.8T$ από το απόθεμα, με συνολική συσκευασία $6.48 \times 10 = 64.8T$ προϊόντος **T**.

□

3.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση:

3.3.1 Δεδομένα

Παραθέτουμε τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε για τη μοντελοποίηση σύμφωνα και με και τις τελευταίες μας παρατηρήσεις.

→ Αξία προϊόντων

ΠΑΡΑΓΩΓΗ		ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ	
Παραγόμενο Προϊόν	Αξία (\$/T)	Τελικό Προϊόν	Αξία (\$/T)
T_i ($i=1,2,\dots,9$)	2000	T_i ($i=1,2,\dots,9$)	2000
W_k ($k=1,2,\dots,5$)	1500	$W_i N$, ($i=1,2,\dots,5$)	1455
N	1200		
U_1	1600	U_1	1600
E_j ($j=1,2,3,4$)	1000	$E_j D$ ($j=1,2,3,4$)	1050
D	1500		

→ Το κόστος παραγωγής, το οποίο οφείλεται στην εναλλαγή της παραγωγής των προϊόντων (scrap product), διαμορφώνεται με βάση τον παρακάτω πίνακα ως εξής:

ΠΑΡΑΓΩΓΗ			
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ	ΕΝΑΛΛΑΓΗ	ΚΟΣΤΟΣ (\$)	
P₁	W_i σε W_j $i, j = 1, 2, \dots, 5$ και $i \neq j$	C_{WW}	300,00
	W_i σε U_1 (και αντίστροφα)	C_{WU}	2480,00
P₂	E_i σε E_j $i, j = 1, 2, \dots, 4$ και $i \neq j$	C_E	200,00
P₃	T_i σε T_j $i, j = 1, 2, \dots, 9$ και $i \neq j$	C_{TT}	300,00
	T_i σε N (και αντίστροφα) $i=1,2,\dots,9$	C_{TN}	1280,00
	T_i σε D (και αντίστροφα) $i=1,2,\dots,9$	C_{TD}	700,00
	D σε N (και αντίστροφα)	C_{DN}	2362,50

→ Το κόστος συσκευασίας, το οποίο οφείλεται στην εναλλαγή μεταξύ των επιλογών σύνδεσης της παραγωγής με τη συσκευασία, διαμορφώνεται με βάση τον παρακάτω πίνακα ως εξής:

ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ			
ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑΣ	ΕΝΑΛΛΑΓΗ	ΚΟΣΤΟΣ (\$)	
L₁	W _i N σε U ₁ (και αντίστροφα) i=1,2,...,5	C _{WU}	1222,00
	W _i N σε T _k (και αντίστροφα) k=1,2,...,9, i=1,2,...,5	C _{WT}	501,00
	T _k σε U ₁ (και αντίστροφα) k=1,2,...,9	C _{TU}	540,00
	U ₁ σε E _j D (και αντίστροφα) j =1,2,...,4	C _{EU}	1192,50
	T _k σε E _j D (και αντίστροφα) k=1,2,...,9, j =1,2,...,4	C _{ET}	762,50
L₁,L₂,L₃	W _i N σε E _j D (και αντίστροφα) i=1,2,...,5, j =1,2,...,4	C _{WE}	1036,50
	W _i N σε W _j N i,j =1,2,...,5 και i ≠ j	C _{WW}	300,00
	E _i D σε E _j D i,j =1,2,3,4 και i ≠ j	C _{EE}	200,00
L₁,L₄	T _i σε T _j i,j =1,2,...,9 και i ≠ j	C _{TT}	300,00

→ Ο ρυθμός συσκευασίας, και κατά συνέπεια το κέρδος ανά ώρα, για κάθε προϊόν επηρεάζεται άμεσα από τη διαφορά μεταξύ ρυθμού παραγωγής και συσκευασίας αλλά και από τη δυνατότητα αποθέματος για κάθε προϊόν. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας.

ΠΡΟΙΟΝ	ΡΥΘΜΟΣ ΠΑΡ/ΓΗΣ (PR) (T/h)	ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΥΝΔΕΣΗΣ ΜΕ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑ	ΡΥΘΜΟΣ ΑΠΘ/ΣΗΣ (SR) (T/h)	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΘ/ΣΗΣ (T/h)		ΡΥΘΜΟΣ Σ/ΣΙΑΣ (LR) (T/h)	ΚΕΡΔΟΣ ΑΝΑ ΩΡΑ (K) (\$/h)		
				XW_{C1}	\leq				
W	4.80 (WN)	$C1 = 1,2,\dots,8$	L1	0	$XW_{C1} = XWN_{C1} * 0.85$	\leq	1.43	$4.08 + XW_1$	$KW_{C1} = RL_{C1} * 1500$
			L1,L2	0			3.98	$4.08 + XW_2$	
			L1,L3	0			6.02	$4.08 + XW_3$	
			L1,L2,L3	0			8.57	$4.08 + XW_4$	
	4.08 (W)		L2	1.53			2.55	2.55	
			L2,L3	0			3.06	$4.08 + XW_6$	
			L3	0			0.51	$4.08 + XW_7$	
			L0	4.08			0	0	
U₁	2.29	$C2 = 1,2,3$	L1	0	XU_{C2}	\leq	4.19	$2.29 + XU_1$	$KU_{C2} = RL_{C2} * 1600$
			L0	2.29			0	0	
E	7.11 (ED)	$C3 = 1,2,\dots,8$	L1	0.57	$XE_{C3} = XED_{C3} * 0.9$	\leq	5.83	5.83	$KE_{C3} = RL_{C3} * 1000$
			L1,L2	0			2.13	$6.4 + XE_2$	
			L1,L3	0			4.29	$6.4 + XE_3$	
			L1,L2,L3	0			6.99	$6.4 + XE_4$	
	6.4 (E)		L2	3.7			2.7	2.7	
			L2,L3	0			1.16	$6.4 + XE_6$	
			L3	0.57			4.86	4.86	
			L0	6.4			0	0	

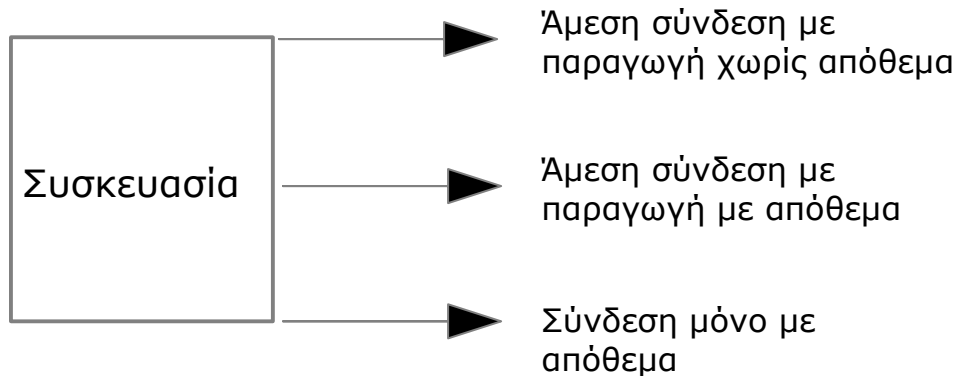
T	4.1	C4= 1,2,3,5	L1	0	XT _{C4}	≤	2.38	4.1+XT ₁	KT _{C4} = RL _{C4} *2000
			L1,L4	0			3.4	4.1+XT ₂	
			L4	3.08			1.02	1.02	
			L0	4.1			0	0	
N	4.8 (WN)	C5= 1,2,...,9	L1	3.38	XN _{C5} = XWN _{C1} * 0.15	≤	0.25	0.72+XN ₁	KN _{C5} = RL _{C5} *1200
			L1,L2	3.38			0.7	0.72+XN ₂	
			L1,L3	3.38			1.06	0.72+XN ₃	
			L1,L2,L3	3.38			1.51	0.72+XN ₄	
			L2	3.65			0.45	0.45	
			L2,L3	3.38			0.54	0.72+XN ₆	
			L3	3.38			0.90	0.72+XN ₇	
			L0	4.1			0	0.00	
D	7.11 (ED)	C6= 1,2,...,9	L1	2.8	XD _{C6} = XED _{C3} * 0.1	≤	0.65	0.65	RL _{C6} *1500
			L1,L2	2.74			0.24	0.71+XD ₂	
			L1,L3	2.74			0.48	0.71+XD ₃	
			L1,L2,L3	2.74			0.78	0.71+XD ₄	
	3.45 (D)		L2	3.15			0.3	0.30	
			L2,L3	2.74			0.13	0.71+XD ₆	
			L3	2.91			0.54	0.54	
			L0	3.45			0	0.00	

Παρατήρηση 3.3.1:

Ο συμβολισμός L_0 συμβολίζει το ενδεχόμενο όπου το παραγόμενο προϊόν δεν συνδέεται με καμία γραμμή συσκευασίας και καταλήγει στο απόθεμα.

Παρατήρηση 3.3.2:

Παρατηρούμε ότι η συσκευασία μπορεί να πραγματοποιηθεί ως εξής:



Ο ρυθμός συσκευασίας είναι διαφορετικός σε κάθε μία από τις πιο πάνω περιπτώσεις κάτι το οποίο θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν στη μοντελοποίηση.

Παρατήρηση 3.3.3:

Τα προϊόντα **ED** και **WN** συσκευάζονται εφόσον υπάρχει απόθεμα **E, D** και **W, N** αντίστοιχα ή η παραγωγή τους πραγματοποιείται ταυτόχρονα με την συσκευασία τους.

Παράδειγμα

Παίρνουμε την περίπτωση όπου από την παραγωγή των προϊόντων **W** και **N** έχουμε τη συσκευασία του **WN** από την L_1 (6.48T/h), χωρίς να υπάρχει απόθεμα για κανένα από τα δύο.

Τα **W** και **N** προϊόντα με ρυθμό παραγωγής 4.08T/h και 4.1T/h αντίστοιχα και με το τελικό προϊόν **WN** να αποτελείται από 85% **W** από και 15% **N** παρατηρούμε ότι 4.08T **W** προϊόντος συσκευάζονται σε $4.08/0.85=4.8$ T **WN** ενώ οι 4.1T **N** προϊόντος συσκευάζονται σε $4.1/0.15=27.33$ T **WN** τελικού προϊόντος. Επομένως για τη συσκευασία του **WN** με την L_1 (6.48T/h) έχουμε συσκευασία 4.8T/h με την (πλήρη) αξιοποίηση 4.08T/h **W** και $4.8*0.15=0.72$ T/h του **N** με το υπόλοιπο $4.1-0.72=3.38$ T να αποθηκεύεται στο απόθεμα για κάθε ώρα.

Παρατήρηση 3.3.3:

Από το παράδειγμα της προηγούμενης παρατήρησης συμπεραίνουμε ότι από την άμεση σύνδεση παραγωγής και συσκευασίας **WN** → L1 έχουμε την αξιοποίηση 4.8T/h από την δυνατότητα των 6.48T/h. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρχει περιθώριο 6.48-4.8=1.68T/h το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί στην περίπτωση όπου υπάρχει απόθεμα **W**. Για αυτό το λόγο ορίζουμε το συντελεστή απορρόφησης **XW₁** και **XN₁** ως τον επιπλέον ρυθμό πέραν των 4.8T/h που μπορούμε να αξιοποιήσουμε από κάθε προϊόν. Αναλυτικά έχουμε:

$$0 \leq \mathbf{XW}_1 \leq (6.48-4.8)*0.85=1.43$$

$$0 \leq \mathbf{XN}_1 \leq (6.48-4.8)*0.15=0.25$$

Εύκολα μπορούμε να συμπεραίνουμε ότι γενικά:

$$\mathbf{XN}=\mathbf{XW}*(15/85)=\mathbf{XW}*(3/16)$$

Επομένως ο ρυθμός συσκευασίας για το **WN** προϊόν είναι:

$$\mathbf{RL}_{WN} = \begin{cases} 4.08 + \mathbf{XW}_1 = \mathbf{RL}_W \\ + \\ 0.72 + \mathbf{XN}_1 = \mathbf{RL}_N \end{cases} \Rightarrow \mathbf{RL}_{WN} = 4.8 + \mathbf{XW}_1 + (3/17)\mathbf{XW}_1 = 4.8 + (20/17)*\mathbf{XW}_1$$

Αντίστοιχα για το προϊόν **ED** παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει:

$$\mathbf{XD}=\mathbf{XE}*(10/90)=\mathbf{XE}*(1/9)$$

3.3.2 Ορισμός Μεταβλητών:

Χρονικά διαστήματα

Θεωρούμε t_i ($i=1,2,\dots,n$)

όπου t_i : είναι το i σε διάταξη χρονικό διάστημα στο οποίο έχουμε μια "κατάσταση" σταθερή σε παραγωγή και συσκευασία.

Μεταβλητές Παραγωγής

- **PW_{t_i}** : δυαδικός
 $PW_{t_i}=1$, παραγωγή του W κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PW_{t_i}=0$, μη παραγωγή του W κατά το χρονικό διάστημα t_i
- **PU_{t_i}** : δυαδικός
 $PU_{t_i}=1$, παραγωγή του $U1$ κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PU_{t_i}=0$, μη παραγωγή του $U1$ κατά το χρονικό διάστημα t_i
- **PE_{t_i}** : δυαδικός
 $PE_{t_i}=1$, παραγωγή του E κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PE_{t_i}=0$, μη παραγωγή του E κατά το χρονικό διάστημα t_i
- **PT_{t_i}** : δυαδικός
 $PT_{t_i}=1$, παραγωγή του T κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PT_{t_i}=0$, μη παραγωγή του T κατά το χρονικό διάστημα t_i
- **PN_{t_i}** : δυαδικός
 $PN_{t_i}=1$, παραγωγή του N κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PN_{t_i}=0$, μη παραγωγή του N κατά το χρονικό διάστημα t_i
- **PD_{t_i}** : δυαδικός
 $PD_{t_i}=1$, παραγωγή του D κατά το χρονικό διάστημα t_i
ή
 $PD_{t_i}=0$, μη παραγωγή του D κατά το χρονικό διάστημα t_i

Μεταβλητές Συσσκευασίας

- **LWN_{ti,c1}**: δυαδικός
LWN_{ti,c1}=1, συσκευασία του WN κατά το χρονικό διάστημα ti με την c1=(1,2,...,8) σύνδεση.
ή
LWN_{ti,c1}=0, μη συσκευασία του WN κατά το χρονικό διάστημα ti με την c1=(1,2,...,8) σύνδεση.
- **LU_{ti,c2}**: δυαδικός
LU_{ti,c2}=1, συσκευασία του U1 κατά το χρονικό διάστημα ti με την c2=(1,2) σύνδεση.
ή
LU_{ti,c2}=0, μη συσκευασία του U1 κατά το χρονικό διάστημα ti με την c2=(1,2) σύνδεση.
- **LED_{ti,c3}**: δυαδικός
LED_{ti,c3}=1, συσκευασία του ED κατά το χρονικό διάστημα ti με την c3=(1,2,...,8) σύνδεση.
ή
LED_{ti,c3}=0, μη συσκευασία του ED κατά το χρονικό διάστημα ti με την c3=(1,2,...,8) σύνδεση.
- **LT_{ti,c4}**: δυαδικός
LT_{ti,c4}=1, συσκευασία του T κατά το χρονικό διάστημα ti με την c4=(1,2,3) σύνδεση.
ή
LT_{ti,c4}=0, μη συσκευασία του T κατά το χρονικό διάστημα ti με την c4=(1,2,3) σύνδεση.
- Οι συντελεστές απορρόφησης **XWN_{ti,c1}**, **XU_{ti,c2}**, **XED_{ti,c3}** και **XT_{ti,c4}** (πίνακας 3.3) για κάθε προϊόν είναι μία θετική πραγματική μεταβλητή η οποία για κάθε χρονικό διάστημα ti εξαρτάται από το ενδεχόμενο c της σύνδεσης με τη συσκευασία αλλά και από την ύπαρξη αποθέματος. Γενικά ισχύει:

$$\text{Για } LR > PR \Rightarrow X \leq LR - PR$$

$$\text{Για } LR < PR \Rightarrow X \leq LR$$

- Λόγω της παρατήρησης 3.3.2, εισάγουμε μία παράμετρο λ η οποία θα μας βοηθήσει να ικανοποιήσουμε τη περίπτωση της συσκευασίας όπου γίνεται μόνο με απόθεμα.

3.3.3 Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max \mathbf{NP} = \mathbf{SP} - \mathbf{CP} - \mathbf{CL}$$

όπου, **NP** (net profit): καθαρό κέρδος

SP (selling profit): κέρδος από την ενδεχόμενη πώληση των προϊόντων

CP (cost P: (P1,P2,P3)): κόστος scrap λόγω των P_i (i=1,2,3) παραγωγικών γραμμών

CL (cost L: (L1,L2,L3,L4)): κόστος scrap λόγω των L_j (j=1,2,3,4) γραμμών συσκευασίας

• Κέρδος πωλήσεων (Selling Profit)

$$\mathbf{SP} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{c1=1}^8 \mathbf{LWN}_{ti,c1} * \mathbf{KWN}_{ti,c1} * t_i + \sum_{i=1}^n \sum_{c2=1}^2 \mathbf{LU}_{ti,c2} * \mathbf{KU}_{ti,c2} * t_i + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{c3=1}^8 \mathbf{LED}_{ti,c3} * \mathbf{KED}_{ti,c3} * t_i + \sum_{t=1}^n \sum_{c4=1}^4 \mathbf{Lt}_{ti,c3} * \mathbf{KT}_{ti,c4} * t_i \end{aligned} \right\}$$

το κέρδος **K(x)** ανά ώρα, ενός x από τα προϊόντα της βιομηχανίας ορίζεται ως:

K(x) = LR(x) * Value(x), όμως σύμφωνα με τη παρατήρηση 3.3.2 ο ρυθμός συσκευασίας του x, (**LR(x)**) είναι διαφορετικός σε κάθε περίπτωση. Αναλυτικά:

Άμεση σύνδεση παραγωγής συσκευασίας χωρίς απόθεμα

$$\text{Για } \mathbf{LR} > \mathbf{PR}(x) \Rightarrow \mathbf{LR}(x) = \mathbf{PR}(x)$$

όπου **LR** ρυθμός συσκευασίας γραμμής, **LR(x)** ρυθμός συσκευασίας του x και **PR(x)** ρυθμός παραγωγής του x.

$$\text{Για } \mathbf{LR} < \mathbf{PR}(x) \Rightarrow \mathbf{LR}(x) = \mathbf{LR}$$

Άμεση σύνδεση παραγωγής συσκευασίας με απόθεμα

Για $LR > PR(x) \Rightarrow LR(x) = PR(x) + X(x)$

Για $LR < PR(x) \Rightarrow LR(x) = LR$

Συσκευασία μόνο λόγω αποθέματος

$LR(x) \leq LR$

□

Επομένως ο γενικός τύπος που ικανοποιεί όλες τις πιο πάνω περιπτώσεις είναι:

$$LR(x) = PR(x) * P(x) + X(x) + \lambda_x (1 - P(x)) * X(x)$$

όπου $\lambda_x = [LR / (LR - PR(x))] - 1$, παράμετρος.

- **Κόστος παραγωγής (CP)**

$$CP = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=2}^n [(PW_{t-1} * PU_t + PW_t * PU_{t-1}) * C_{WU}] + 4 * C_{WW} + 3 * C_{EE} + \\ + \sum_{t=2}^n [(PT_{t-1} * PD_t + PT_t * PD_{t-1}) * C_{TD} + (PN_{t-1} * PD_t + PN_t * PD_{t-1}) * C_{ND} + \\ + (PT_{t-1} * PN_t + PT_t * PN_{t-1}) * C_{TN}] + 8 * C_{TT} \end{array} \right\}$$

- **Κόστος συσκευασίας (CL)**

Το κόστος της συσκευασίας οφείλεται στην εναλλαγή των γραμμών συσκευασίας ανάλογα με τα προϊόντα με τα οποία συνδέονται κάθε φορά. Δίνουμε το σχετικό πίνακα:

ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑΣ	ΕΝΑΛΛΑΓΗ
L_1	WN-U1 (και αντίστροφα)
	WN-T (και αντίστροφα)
	ED-U1 (και αντίστροφα)
	U1-T (και αντίστροφα)
	ED-T (και αντίστροφα)
L_1	WN-ED (και αντίστροφα)
L_2	
L_3	

Παρατηρούμε ότι η εναλλαγή WN-ED και αντίστροφα μπορεί να πραγματοποιηθεί από τις L_1, L_2 και L_3 . Τα κόστη της συσκευασίας για κάθε γραμμή συσκευασίας L_1, L_2 και L_3 θα τα συμβολίζουμε CL_1, CL_2 και CL_3 αντίστοιχα.

$CL_1 =$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti-1,c1} \right) \left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti,c4} \right) + \left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti,c1} \right) \left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti-1,c4} \right) \right] * C_{WT} + \\
 & + \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti-1,c1} \right) LU_{ti,1} + \left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti,c1} \right) LU_{ti-1,1} \right] * C_{WU} + \\
 & + \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti-1,c3} \right) \left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti,c4} \right) + \left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti,c3} \right) \left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti-1,c4} \right) \right] * C_{ET} + \\
 & + \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti-1,c4} \right) LU_{ti,1} + \left(\sum_{c4=1}^2 LT_{ti,c4} \right) LU_{ti-1,1} \right] * C_{TU} + \\
 & + \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti-1,c3} \right) LU_{ti,1} + \left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti,c3} \right) LU_{ti-1,1} \right] * C_{EU} + \\
 & + \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti-1,c1} \right) \left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti,c3} \right) + \left(\sum_{c1=1}^4 LWN_{ti,c1} \right) \left(\sum_{c3=1}^4 LED_{ti-1,c3} \right) \right] * C_{WE}
 \end{aligned}$$

CL₂=

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\left(\text{LWN}_{h-1,2} + \text{LWN}_{h-1,4} + \text{LWN}_{h-1,5} + \text{LWN}_{h-1,6} \right) \left(\text{LED}_{h,2} + \text{LED}_{h,4} + \text{LED}_{h,5} + \text{LED}_{h,6} \right) + \left(\text{LWN}_{h,2} + \text{LWN}_{h,4} + \text{LWN}_{h,5} + \text{LWN}_{h,6} \right) \left(\text{LED}_{h-1,2} + \text{LED}_{h-1,4} + \text{YE}_{h-1,5} + \text{YE}_{h-1,6} \right) \right] * C_{WE}$$

CL₃=

$$+ \sum_{i=1}^n \left[\left(\text{LWN}_{ti-1,3} + \text{LWN}_{ti-1,4} + \text{LWN}_{ti-1,6} + \text{LWN}_{ti-1,7} \right) \left(\text{LED}_{ti,3} + \text{LED}_{ti,4} + \text{LED}_{ti,6} + \text{LED}_{ti,6} \right) + \left(\text{LWN}_{ti,3} + \text{LWN}_{ti,4} + \text{LWN}_{ti,6} + \text{LWN}_{ti,7} \right) \left(\text{LED}_{ti-1,3} + \text{LED}_{ti-1,4} + \text{LED}_{ti-1,6} + \text{LED}_{ti,6} \right) \right] * C_{WE} + 4 * C_{WW} + 3 * C_{EE} + 8 * C_{TT}$$

όπου το συνολικό κόστος συσκευασίας είναι:

$$CL = CL_1 + CL_2 + CL_3$$

3.3.4 Περιορισμοί:

1. Όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.
2. Για κάθε χρονικό διάστημα έχουμε παραγωγή ενός προϊόντος από κάθε παραγωγική γραμμή.

$$PW_{ti} + PU_{ti} = 1$$

$$PT_{ti} + PN_{ti} + PD_{ti} = 1$$

} για κάθε $i=1,2,\dots,n$

3. Για κάθε χρονικό διάστημα ti ($i=1,2,\dots,n$) έχουμε συσκευασία ενός προϊόντος από κάθε γραμμή συσκευασίας.

ΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΣΚΕΥΑΣΙΑΣ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ
L1	$(LWN_{ti,1}+LWN_{ti,2}+LWN_{ti,3}+LWN_{ti,4})+(LT_{ti,1}+LT_{ti,2})+(LED_{ti,1}+LED_{ti,2}+LED_{ti,3}+LED_{ti,4})=1$
L2	$(LWN_{ti,2}+LWN_{ti,4}+LWN_{ti,5}+LWN_{ti,6})+(LED_{ti,2}+LED_{ti,4}+LED_{ti,5}+LED_{ti,6})=1$
L3	$(LWN_{ti,3}+LWN_{ti,4}+LWN_{ti,6}+LWN_{ti,7})+(LED_{ti,3}+LED_{ti,4}+LED_{ti,6}+LED_{ti,7})=1$

4. Η δυνατότητα αποθέματος είναι περιορισμένης χωρητικότητας για κάθε γραμμή παραγωγής. Ακολουθεί σχετικός πίνακας.

ΑΠΟΘΕΜΑ S			
	ΠΡΟΙΟΝ	ΤΥΠΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ	ΧΩΡ/ΤΑ (T)
P1	W	$Sw_{t0}=0$ $Sw_{ti}=Sw_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c1=1}^8 LWN_{ti,c1}*(SR_{c1}*PW_{ti}-XW_{c1}-\lambda_w*XW*(1-PW_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	98.5
	U	$Su_{t0}=0$ $Su_{ti}=Su_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c2=1}^2 Lu_{ti,c2}*(SR_{c1}*PU_{ti}-XU_{c2}-\lambda_u*XU*(1-PU_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	
P2	E	$Se_{t0}=0$ $Se_{ti}=Se_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c3=1}^8 LED_{ti,c3}*(SR_{c3}*PE_{ti}-XE_{c1}-\lambda_e*XE*(1-PE_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	48
	T	$St_{t0}=0$ $St_{ti}=St_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c4=1}^4 Lt_{ti,c4}*(SR_{c4}*PT_{ti}-XT_{c4}-\lambda_T*XT*(1-PT_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	
P3	N	$Sn_{t0}=0$ $Sn_{ti}=Sn_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c5=1}^8 LWN_{ti,c5}*(SR_{c5}*PW_{ti}-XN_{c5}-\lambda_n*XN*(1-PN_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	154.5
	D	$Sd_{t0}=0$ $Sd_{ti}=Sd_{ti-1}+$ $\sum_{i=1}^n \sum_{c6=1}^8 LED_{ti,c6}*(SR_{c6}*PD_{ti}-XD_{c6}-\lambda_D*XD*(1-PD_{ti}))*t_i$ (για κάθε $i=1,2,\dots,n$)	

5. Το εύρος των τιμών του συντελεστή απορρόφησης σύμφωνα και με τον πίνακα 3.3 είναι ως εξής:

XWN_{C1}	\leq	1.68	XU_{C2}	\leq	4.19	XED_{C3}	\leq	6,48
		4.68			2.37			
		7.08			0			4.77
		10.08						7.77
		3			2.38			3
		3.6			3.4			1.29
		0.6			1.02			5.4
		0			0			0

6. Σύμφωνα με τη ζήτηση υπολογίσαμε τον χρόνο που χρειάζεται για να παραχθεί η απαιτούμενη ποσότητα για κάθε προϊόν.

ΠΡΟΙΟΝ		ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ			
W	57.5	\leq	$\sum_{i=1}^n PW_{ti} * t_i$	\leq	115
U1	25		$\sum_{i=1}^n PU_{ti} * t_i$		50
E	67		$\sum_{i=1}^n PE_{ti} * t_i$		134
T	60		$\sum_{i=1}^n PT_{ti} * t_i$		120
N	10		$\sum_{i=1}^n PN_{ti} * t_i$		20
D	14		$\sum_{i=1}^n PD_{ti} * t_i$		28

7. Συνολικός χρόνος λειτουργίας

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 168$$

Βιβλιογραφία

- (1) Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, "Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα", 2012, Εκδόσεις Συμεών
- (2) Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman "Introduction to operations research" (seventh edition)
- (3) Taylor and Francis Group, "*Operations Research and Management Science Handbook*", 2008, LIC
- (4) Churchman C. W., Ackoff R. L. and Arnoff E. L. "Introduction to Operations Research", 2nd edition (John Wiley)
- (5) "Επιχειρησιακή Έρευνα (*Operations Research*)", [Online]
Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Operations_research
- (6) www.math.ntua.gr/~coletsos
- (7) Ν.Α.Παναγιώτου, Εισαγωγικά Στοιχεία για τον Επιστημονικό Τομέα της Επιχειρησιακής Έρευνας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο,
http://panayiot.simor.ntua.gr/attachments/032_01MBAOR.pdf