



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΑ ΦΟΡΤΙΑ

Διπλωματική Εργασία

Ευάγγελος Κ. Μόσαλος

Επιβλέπων: Ε.Ε Θεοτόκογλου

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2015

Copyright © Ευάγγελος Κ. Μόσαλος, 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία ολοκληρώθηκε υπό την καθοδήγηση του καθηγητή του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου κυρίου Ευστάθιου Θεοτόκογλου, τον οποίο ευχαριστώ για την αμέριστη βοήθεια και στήριξη μέχρι την ολοκλήρωση της εργασίας.

Τόσο το θεωρητικό όσο και το αριθμητικό μέρος της εργασίας ολοκληρώθηκαν στο Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο υπό την επίβλεψη του κυρίου Ευστάθιου Θεοτόκογλου.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την καθηγήτρια του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου κυρία Ευαγγελία Κοντού – Δρούγκα και τον επίκουρο καθηγητή του Εθνικού Μετσόβειου Πολυτεχνείου κύριο Αιμίλιο Σιδερίδη για τη συμμετοχή τους στην παρουσίαση και την αξιολόγηση αυτής της εργασίας.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	3
Εισαγωγή	6
Abstract	9
1. Διατύπωση Προβλήματος – Γενικεύσεις	10
1.1. Ιδιομορφίες λόγω Συγκεντρωμένων Φορτίων ή Ροπών	13
1.1.1. Η περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου	13
1.1.2. Η περίπτωση συγκεντρωμένης ροπής	14
1.2. Επεκτάσεις στην περίπτωση της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων	15
2. Ολοκληρωτικές Εξισώσεις	17
2.1. Τύποι ολοκληρωτικών Εξισώσεων – Εισαγωγή	17
2.2. Θεωρήματα <i>Fredholm</i>	18
2.3. Ιδιόμορφες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις	24
3. Συνοριακά Στοιχεία	32
3.1. Βασικές Έννοιες	32
3.2. Θεμελιώδης λύση	33
3.3. Βασικές Εξισώσεις της Μηχανικής	39
3.4. Εξαγωγή των τύπων Συνοριακού Ολοκληρώματος	44
3.4.1. Συνοριακά σημεία	46
3.4.2. Διατύπωση Εξισώσεων Συνοριακών Στοιχείων	47
3.5. Συνοριακά Στοιχεία έναντι πεπερασμένων	53
4. Στοιχεία Αριθμητικής Ανάλυσης – Αριθμητικές Τεχνικές	54
4.1. Αριθμητικές τεχνικές άρσης των ιδιομορφιών	54
4.2. Τύπος Ολοκλήρωσης <i>Gauss</i>	55
4.2.1. Μερικές Βασικές Εξισώσεις	56
5. Συμπεράσματα	70
Βιβλιογραφία	72
Παράρτημα	74

Εισαγωγή

Με την πρόοδο της Επιστήμης των Υλικών, τα σύνθετα υλικά είναι μια κατηγορία που έχει εμφανιστεί σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Πλάκες από σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται σε πολλών ειδών κατασκευές. Είναι σκόπιμο λοιπόν να μελετηθεί η συμπεριφορά τους σε διάφορα είδη φόρτισης. Καθώς τα υλικά αυτά δε συμπεριφέρονται όπως κλασικά ισότροπα ή ορθότροπα υλικά, το πρόβλημα υπολογισμού του πεδίου των τάσεων εντός αυτών των πλακών δεν μπορεί να προσδιοριστεί με την χρήση μόνο της κλασικής θεωρίας της ελαστικότητας. Αν και οι περιπτώσεις σύνθετων πλακών με κατανεμημένα φορτία έχουν μελετηθεί αρκετά, η περίπτωση της συγκεντρωμένης φόρτισης δεν έχει μελετηθεί καθώς παρουσιάζει ιδιαιτερότητες που εξαρτώνται από τη φόρτιση και την ίδια την πλάκα. Αναλυτικές λύσεις στην περίπτωση αυτή δεν είναι εύκολο να δωθούν (*Chyanbin*, 2006) και οι αριθμητικές προσεγγίσεις είναι η μόνη επιλογή.

Η μαθηματική προσέγγιση του προβλήματος της Ελαστικότητας σε περιπτώσεις απλώς και πολλαπλώς συνεκτικών πεδίων έχει προταθεί από το *Muskhelisvili* (*Muskhelisvili*, 2008, *Muskhelisvili*, 2010) κυρίως για τις περιπτώσεις ρηγματωμένων πλακών. Η μελέτη έχει γίνει με την χρήση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Το πρόβλημα το οποίο εμφανίζεται είναι ότι οι πυρήνες αυτών των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων δεν είναι ομαλοί στις περισσότερες περιπτώσεις δημιουργώντας δυσχέρεια στην επίλυση τους (*Tsamaspkyros and Theotokoglou*, 2008). Η ζητούμενη άγνωστη ποσότητα είναι οι μετατοπίσεις τόσο στο σύνορο της πλάκας όσο και εσωτερικά, για τον προσδιορισμό του τασικού πεδίου της πλάκας, αφού στην πλειονότητα των προγραμμάτων χρησιμοποιεί το μοντέλο των μετατοπίσεων.

Η μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων έχει αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο αριθμητικής επίλυσης πολλών προβλημάτων της Μηχανικής, χρησιμότερο δε στις περιπτώσεις πλακών με περίπλοκη μορφολογία.

Η λύση των αντίστοιχων ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων με την χρήση συνοριακών στοιχείων έχει μελετηθεί συστηματικά στην περίπτωση των κατανεμημένων φορτίων, των φορτίων δηλαδή στο σύνορο του χωρίου με ομαλή συμπεριφορά. Οι πυρήνες των αντίστοιχων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων είναι μη

ομαλοί ωστόσο αντιμετωπίσιμοι, με βάση τη βιβλιογραφία (*Sladek and Sladek, 1998, Theocaris and Ioakimidis, 1977*).

Ταυτόχρονα, υπάρχουν φορτίσεις των οποίων η επίδραση δεν μπορεί να προσεγγιστεί αναλυτικά. Οι συγκεντρωμένες φορτίσεις μπορούν όμως να προσεγγιστούν μέσω των μεθόδων που ακολουθούνται για τα κατανεμημένα φορτία αν ο όρος κατανομής ακολουθεί την κατανομή Δέλτα του Dirac. Το πρόβλημα της φόρτισης σε αυτήν την περίπτωση λύνεται με την χρήση ολοκληρωμάτων Gauss για τον προσδιορισμό του μεγέθους της τάσης σε συγκεκριμένα σημεία στο σύνορο της πλάκας. (*Ioakimidis, 1985, Lifanov and Lifanov, 2004, Lifanov and Nenashev, 2007*)

Ένα ακόμα πρόβλημα εμφανίζεται στον προσδιορισμό των μηχανικών σταθερών που θα χρησιμοποιηθούν για την πλάκα. Πλάκες από σύνθετα υλικά μπορούν να παρουσιάσουν ιδιομορφίες ως προς τη μηχανική συμπεριφορά καταπονούμενες εμε συγκεντρωμένο φορτίο καθώς οι μηχανικές τους ιδιότητες μεταβάλλονται κατά τη μετάβαση από ένα στρώμα σε ένα άλλο. Στην προσέγγιση που θα γίνει σε αυτήν την εργασία δε θα ληφθεί υπόψη η μεταβολή των ιδιοτήτων της πλάκας κατά το πάχος της κάτι που είναι σημαντικό για τις σύνθετες πλάκες. Θα εξαχθούν συμπεράσματα όμως για τη συμπεριφορά του τασικού πεδίου τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς πλακών με μεταβαλλόμενες ιδιότητες αφού το πρόβλημα θα λυθεί πιο γενικά. Τα συμπεράσματα αυτά είναι ωφέλιμα στην πρόβλεψη της συμπεριφοράς πλακών από σύνθετα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται σε κατασκευές υψηλής επικινδυνότητας όπως αεροκατασκευές αλλά και συνήθεις κατασκευές αφού η εξάπλωση της χρήσης των σύνθετων υλικών το επιτάσσει. Τα αποτελέσματα θα είναι ιδιαίτερος χρήσιμα σε προβλήματα όπου οι φορτίσεις μπορούν να θεωρηθούν σημειακές όπως περιπτώσεις επαφών μεταξύ τμημάτων κατασκευών, στηρίξεων ή συνδέσεων.

Σε αυτήν την εργασία, το πρόβλημα θα τοποθετηθεί αρχικά θεωρητικά, προσεγγίζοντας την Ολοκληρωτική Εξίσωση που το περιγράφει. Στο τμήμα αυτό, θα χρησιμοποιηθούν τόσο Θεωρήματα για την εξαγωγή της ολοκληρωτικής εξίσωσης, για τον προσδιορισμό δηλαδή του πυρήνα και της φόρτισης, όσο και θεωρήματα για τη μελέτη της λύσης, εφόσον υπάρχει (*Muskhelisvili, 2008, Tsamasphyros and Theotokoglou, 2008, Ioakimidis, 1985*). Στη συνέχεια, αφού περιγραφεί η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων, γίνεται μια προσπάθεια εξαγωγής της αντίστοιχης εξίσωσης που δίνει την προσεγγιστική λύση για τις άγνωστες μετατοπίσεις στο σύνορο (*Brebbia et al., 1984, Chen and Zhou, 1992, Sladek and Sladek, 1998, Katsikadelis, 2002*). Περιγράφονται οι ποσότητες που είναι αναγκαίο να υπολογιστούν για να διατυπωθεί το τελικό σύστημα για τα Συνοριακά Στοιχεία. Τέλος, περιγράφεται μια μέθοδος άρσης

των ιδιομορφιών (*Tsamasphyros and Theocaris, 1980, Tsamasphyros and Theotokoglou, 2008*).

Μετά την περιγραφή του προβλήματος και την περιγραφή της λύσης, επιχειρείται η επίλυση παραδειγμάτων για την χρήση της μεθόδου και την αξιολόγηση της (*Tahan et al., 1993*). Ένα παράδειγμα αφορά την αριθμητική προσέγγιση του τασικού πεδίου μιας ορθογωνικής πλάκας υπό συμμετρική συγκεντρωμένη φόρτιση. Τα αποτελέσματα βοηθούν στην αξιολόγηση της μεθόδου, αφού μπορούν να συγκριθούν τόσο με πειραματικά αποτελέσματα όσο και με αποτελέσματα από τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Η αριθμητική επίλυση έγινε με την χρήση του Matlab.

Στο τέλος της εργασίας σχολιάζεται η δυνατότητα επέκτασης της μεθόδου και της αντίστοιχης λύσης στην περίπτωση μιας σύνθετης πλάκας καταπονούμενης με συγκεντρωμένο φορτίο. Εντοπίζονται επίσης τα σημεία τα οποία θα μπορούσαν να προκαλέσουν πρόβλημα σε αυτήν την επέκταση. Αναφέρονται καποιες περιπτώσεις φόρτισης από συγκεντρωμένα φορτία και γίνεται μια πρόβλεψη για τη μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων πλακών.

Abstract

Composite materials have had a wide expansion in their uses in late years. Even though we have studied their mechanical properties and how to design specific materials for specific uses, there are very few studies concerning their behavior when loaded with concentrated loads. In this essay, we are going to try and extract the necessary equations which govern this problem. This will be done with the use of equations of Linear Elasticity but also with the use of Integral Equations which result from Linear Elasticity equations. The governing Integral Equations will be shown to be singular.

The extraction of the governing equation of a plate under concentrated load at its boundary starts with the equations of Linear Elasticity in their Integral Form. This leads to the use of Boundary Elements so as to calculate the necessary displacement field on the plate's boundary. The singularities exist not only in the left hand side of these singular equations but most importantly on right hand side, the side of the loading that describes the loading of the plate. A fact that handicaps our efforts to solve the governing equations or their Boundary Elements counterparts.

Two methods are then proposed to extract the singularities and calculate the necessary boundary integrals. Also a numerical example of the use of the methods is given, in order to evaluate the efficiency of the method. The example is an isotropic plate loaded with two concentrated collinear compressive forces. The results are evaluated and compared with the results expected.

Finally, the results are used to extrapolate on the behavior of composite plates and the problems and prerequisites of such an extrapolation are stated giving a starting point for further study on the subject.

1. Διατύπωση Προβλήματος – Γενικεύσεις

Θεωρούμε το πρώτο βασικό πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας και υποθέτουμε ότι η φυσική περιοχή οριοθετείται από το $L_0 \cup L$, όπου L είναι η ένωση λείων μη τεμνόμενων τόξων και κλειστών καμπυλών L_i ($i=1, \dots, n$) στην περιοχή που έχει σύνορο το L_0 .

Η λύση αυτού του προβλήματος με την χρήση μιγαδικών δυναμικών μπορεί να γραφτεί ως ολοκληρώματα πάνω στο L συναρτήσει μιας άγνωστης συνάρτησης πυκνότητας $g(t)$ ($t \in L$) για τις μετατοπίσεις.

$$2 \int_L \frac{g(t)}{t-t_0} dt - \int_L \left(1 - \frac{d\bar{t}_0}{dt_0} \frac{t-t_0}{t-t_0} \right) \frac{g(t)}{t-t_0} dt - \int_L \left(1 - \frac{d\bar{t}_0}{dt_0} \frac{t-t_0}{t-t_0} \right) \frac{\bar{g}(\bar{t})}{\bar{t}-t_0} d\bar{t} = 2\pi i p(t_0), \quad t_0 \in L \quad (1.1)$$

όπου $p(t_0) = p_1(t_0) + p_2(t_0)$ είναι η μιγαδική κατανομή των τάσεων κατά μήκος του L .

Η παραπάνω ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί επίσης να γραφτεί με τη μορφή:

$$2 \int_L \frac{g(t)}{t-t_0} dt - \int_L \frac{d}{dt_0} \left(\ell n \frac{t-t_0}{t-t_0} \right) g(t) dt - \int_L \frac{d}{dt_0} \left(\ell n \frac{t-t_0}{t-t_0} \right) \bar{g}(\bar{t}) d\bar{t} = 2\pi i p(t_0), \quad t_0 \in L \quad (1.2)$$

ή

$$2 \int_L \frac{g(t)}{t-t_0} dt - \int_L k_1(t, t_0) g(t) dt - \int_L k_2(t, t_0) \bar{g}(\bar{t}) d\bar{t} = 2\pi i p(t_0), \quad t_0 \in L \quad (1.3)$$

όπου k_1 και k_2 είναι οι αντίστοιχοι ομαλοί πυρήνες όπως ορίζονται από τη σχέση (1.2).

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφτεί με την χρήση κατάλληλων ολοκληρωτικών τελεστών ως:

$$K_0 g + K_1 g + K_2 \bar{g} = 2\pi i p(t_0), \quad t_0 \in L$$

όπου K_0 είναι το κυρίαρχο μέρος της Ιδιόμορφης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης (IOE) δηλαδή ο ιδιόμορφος τελεστής, ενώ K_1 και K_2 είναι οι ομαλοί τελεστές που αντιστοιχούν στους ομαλούς πυρήνες k_1 και k_2 .

Η λύση της Ιδιόμορφης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης στην περίπτωση που η συνάρτηση φόρτισης $p(t_0)$ είναι συνάρτηση *Hölder* έχει μελετηθεί εκτενώς από πολλούς μελετητές. Αξίζει επίσης να αναφέρουμε ότι ακόμη κι η σύγκλιση κάποιων από τις μεθόδους που προτείνονται αποδεικνύεται. Η περίπτωση στην οποία η

συνάρτηση φόρτισης είναι μία γενικευμένη συνάρτηση (*κατανομή*) δεν έχει μελετηθεί συστηματικά. Σε αυτήν την εργασία, όπως προαναφέραμε, γίνεται μια προσπάθεια να μελετηθεί η επίδραση της γενικευμένης συνάρτησης στη συμπεριφορά της λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Για να επιτευχθεί αυτό, θα αποδειχθεί η ύπαρξη ολοκληρωμάτων *Cauchy* στην περίπτωση που η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει μια γενικευμένη συνάρτηση. Τέσσερις μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης τέτοιων Ιδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων προτείνονται και δίνονται αριθμητικά παραδείγματα, για να αποδειχτεί η σημασία των προτεινόμενων μεθόδων.

Προφανώς υπάρχουν πολλές άλλες μορφές Ιδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων ή Υπεριδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων, με την κύρια διαφορά να έγκειται στην ύπαρξη ενός σταθερού όρου όπως στην ακόλουθη εξίσωση:

$$ag(x) + \frac{b}{\pi_L} \int_{t-x}^L g(t) dt + \lambda \int_L k(t,x)g(t) dt = f(x), \quad x \in L \quad (1.4)$$

όπου a, b, λ είναι γνωστές σταθερές και $k(t,x), f(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις.

Η τελευταία εξίσωση (1.4) είναι η πιο γενική μορφή μιας Ιδιόμορφης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης. Στην περίπτωση που ισχύει $a=0$ η εξίσωση (1.4) συμπίπτει με την εξίσωση (1.3).

Η εξίσωση (1.4) σε μορφή τελεστών μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$K_0 g + \lambda K g = f \quad (1.5)$$

όπου K_0 είναι το κυρίαρχο μέρος και K είναι το ομαλό μέρος της IOE, λ είναι μια γνωστή σταθερά και f είναι μια γνωστή συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το εξωτερικό φορτίο. Για να απλοποιηθεί η μελέτη υποθέτουμε ότι τα n τμήματα καμπύλης και κλειστές καμπύλες μπορούν να καταλήξουν σε ένα και μόνο τμήμα καμπύλης (όπως στην περίπτωση μιας ρωγμής σε σώμα άπειρης διάστασης). Αυτό το τμήμα μπορεί να απεικονιστεί στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ και το κυρίαρχο και το ομαλό μέρος της εξίσωσης (1.4) μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$K_0 g = ag(x) + \frac{b}{\pi_L} \int_{t-x}^L g(t) dt \quad (1.6)$$

$$Kg = \int_L k(t,x)g(t) dt, \quad (1.7)$$

όπου ως τιμή για το πρώτο ολοκλήρωμα λαμβάνεται η κύρια τιμή του ολοκληρώματος κατά *Cauchy*, a και b είναι γνωστές σταθερές, και $k(t,x)$ και $f(x)$ είναι γνωστές

συναρτήσεις που ικανοποιούν μια συνθήκη Hölder τάξης μ $[k, f \in H_{\mu}]$. Η λύση της εξίσωσης (1.4) εξαρτάται από τον υπολογισμό της άγνωστης συνάρτησης g .

Ακολουθώντας τη μέθοδο του *Muskhelishvili* (*Muskhelishvili*, 2008) πρέπει να ψάξουμε για μια λύση της μορφής:

$$g(t) = w(t)\varphi(t) \quad (1.8)$$

με

$$w(t) = (1-t)^a (1+t)^b \quad (1.9)$$

να είναι η βασική συνάρτηση που χαρακτηρίζει την ιδιόμορφη συμπεριφορά της $g(t)$. Οι εκθέτες a και b εκφράζονται ως εξής:

$$a = \frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{a-ib}{a+ib} \right) + \mu', \quad \beta = -\frac{1}{2\pi i} \ln \left(\frac{a-ib}{a+ib} \right) + \mu'', \quad (1.10)$$

όπου μ' και μ'' είναι ακέραιοι επιλεγμένοι κατά τρόπο ώστε η συμπεριφορά της βασικής συνάρτησης w στα σημεία $t = \pm 1$ να είναι συμβατή με την αναμενόμενη συμπεριφορά της άγνωστης συνάρτησης φ . Αν ο δείκτης $\kappa = -(\alpha + \beta)$ είναι μεγαλύτερος του μηδενός τότε η συνάρτηση g πρέπει εκτός από την εξίσωση (4) να ικανοποιεί και μια επιπλέον συνθήκη της μορφής:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = c, \quad (1.11)$$

όπου το c είναι μια σταθερά. Στην ειδική περίπτωση που το L είναι μια κλειστή καμπύλη τότε $a=0$ και η κατανομή g δεν παρουσιάζει ασυνέχειες στα άκρα.

Η λύση των IOE μπορεί να επιτευχθεί αριθμητικά. Μέχρι τώρα πολλές μέθοδοι και διαδικασίες έχουν προταθεί, οι οποίες μπορούν να αντιμετωπίσουν την ιδιομορφία τύπου *Cauchy* του πυρήνα. Ακολουθώντας τη μέθοδο *Muskhelishvili* (*Muskhelishvili*, 2008) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.8), η εξίσωση (1.5) μπορεί να μετασχηματιστεί στην ακόλουθη Ολοκληρωτική εξίσωση τύπου *Fredholm*:

$$\varphi + \lambda M \varphi = F \quad \text{με} \quad M = K^* K, \quad F = K^* f + \frac{b}{\pi} P_{\kappa-1}(t) = \varphi_0 + \frac{b}{\pi} P_{\kappa-1}(t) \quad (1.12)$$

Εφαρμόζοντας στη σχέση (5) τον τελεστή ομαλοποίησης

$$K^* \omega = a^* \frac{\omega(x)}{w(x)} - \frac{b^*}{\pi} - \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{w(t)(t-x)} dt, \quad (1.13)$$

όπου

$$a^* = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad b^* = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (1.14)$$

Στη σχέση (12), ο M είναι ένας ομαλός τελεστής *Fredholm* και $P_{\kappa-1}$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(\kappa-1)$, αν $\kappa > 0$ τότε:

$$P_{\kappa-1} = \frac{\pi}{b} \frac{c}{h_0}, \quad h_0 = 2^{1-\kappa} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \quad (1.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.12), συμπεραίνουμε ότι μία IOE έχει λύση σε κλειστή μορφή μόνο όταν δεν έχει ομαλό μέρος δηλαδή $K=0$. Όπως είναι γνωστό η λύση της εξίσωσης (12) δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi(t_0) = F(t_0) + \int_{-1}^1 \Gamma(t, t_0) F(t) dt \quad (1.16)$$

όπου $\Gamma(t, t_0)$ είναι η *resolventa* της Ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου *Fredholm*. Είναι προφανές ότι η $\varphi(t)$ κυριαρχείται από τη συμπεριφορά της $\varphi_0(t)$.

Αν αντί των m τμημάτων και n καμπυλών το σύνορο είναι μια κλειστή καμπύλη L τότε $a=0$ και $b=1$ και έτσι ο τελεστής ομαλοποίησης μπορεί να αντικατασταθεί από το ανάστροφο τελεστή:

$$K^* \omega = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (1.17)$$

και επίσης η σχέση (16) ισχύει με τον K^* να ορίζεται από τη σχέση (1.17). Προφανώς αυτή είναι η πιο σημαντική περίπτωση για τις εφαρμογές.

1.1. Ιδιομορφίες λόγω Συγκεντρωμένων Φορτίων ή Ροπών

Από τη σχέση (1.12) συμπεραίνουμε ότι η λύση φ της IOE εξαρτάται από τη συνάρτηση f . Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τη συμπεριφορά του τελεστή K^* (από τις σχέσεις (1.13) ή (1.17)), μπορούμε να πούμε ότι οποιαδήποτε ιδιομορφία της f προκαλεί ιδιομορφίες στην F και επομένως στη φ . Παρακάτω εξετάζονται οι περιπτώσεις συγκεντρωμένων φορτίων ή ροπών.

1.1.1. Η περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου

Έστω ότι η f είναι μια συνάρτηση Δέλτα ή περιέχει μια συνάρτηση Δέλτα (*Ioakimidis*, 1985). Η περίπτωση αυτή συναντάται όταν η $f(x)$ αντιπροσωπεύει συγκεντρωμένο φορτίο P στο $x_0 \in (-1, 1)$, τότε η $f(x) = P\delta(x-x_0)$. Λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 1 και εφαρμόζοντας τον τελεστή ομαλοποίησης K^* στην $f(x)$, το αποτέλεσμα τελικά είναι:

$$\varphi_0(x) = \frac{a^* P \delta(x-x_0)}{w(x)} - \frac{b^* P}{\pi w(x_0)(x-x_0)} \quad (1.18)$$

Επομένως η φ εμφανίζει πόλο στο σημείο $x=x_0$ και αν $a^* \neq 0$ έχει κι ένα μέρος που συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση Δέλτα. Για να γίνει πιο κατανοητό το παραπάνω, θεωρούμε την περίπτωση μιας ευθείας ρωγμής μήκους $2a$ η οποία φορτίζεται στο $x=x_0$ με συγκεντρωμένο φορτίο P . Η Ιδιόμορφη Ολοκληρωτική Εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση είναι (Ioakimidis, 1985, Lifanov and Lifanov, 2004):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} \frac{\varphi(\xi)}{\xi-\xi_0} d\xi = P \delta(\xi-\xi_0), \quad \xi=x/a, \xi_0=x_0/a, \xi_0 \in (-1,1) \quad (1.19)$$

Η λύση της IOE δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_0(x) = \frac{P}{\pi(x-x_0)} (a^2-x_0^2)^{1/2} \quad (1.20)$$

η οποία, όπως φαίνεται, έχει έναν πόλο στο $x=x_0$. Το αποτέλεσμα προκύπτει και απευθείας από τον τύπο (23) αν θέσουμε $a^*=0$. Επομένως όταν η φόρτιση είναι μια συγκεντρωμένη δύναμη στο $x=x_0$, στο σημείο αυτό η λύση $\varphi_0(x)$ εμφανίζει πόλο. Έτσι η λύση (1.20) δεν ορίζεται αφού τείνει στο άπειρο. Για να επιτευχθεί η λύση της εξίσωσης (1.19) είναι αναγκαίο να απαλειφθεί ο πόλος στο $x=x_0$. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν αριθμητικές τεχνικές άρσης της ασυνέχειας (του πόλου).

Στην ειδική περίπτωση όπου το L είναι μια κλειστή καμπύλη έχουμε:

$$\varphi_0(x) = \frac{P}{\pi(x-x_0)}, \quad (1.21)$$

αυτό σημαίνει ότι η συμπεριφορά της $\varphi(x)$ καθορίζεται από την $\varphi_0(x)$ δηλαδή η $\varphi(x)$ εμφανίζει πόλο στο $x=x_0$.

1.1.2. Η περίπτωση συγκεντρωμένης ροπής

Έστω ότι η f είναι η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα ή περιέχει την παράγωγο της συνάρτησης Δέλτα (Ioakimidis, 1985). Η περίπτωση αυτή συναντάται όταν η $f(x)$ αντιπροσωπεύει συγκεντρωμένο ροπή M στο $x_0 \in (-1,1)$.

Θεωρώντας $f(x) = M \delta'(x-x_0)$ και ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία όπως για το συγκεντρωμένο φορτίο η λύση που εξάγεται είναι (Ioakimidis, 1985, Lifanov and Lifanov, 2004):

$$\varphi_0(x) = \frac{a^* M \delta'(x-x_0)}{w(x)} - \frac{b^* M}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w(t)(t-x)} \right)_{t=x_0} \quad (1.22)$$

Επομένως η φ εμφανίζει πόλο δευτέρας τάξης στο σημείο $x=x_0$ και αν $a^* \neq 0$ έχει κι ένα μέρος που συμπεριφέρεται όπως η παράγωγος της συνάρτησης Δέλτα.

Και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση της ρωγμής μήκους $2a$ όμως αντί για συγκεντρωμένο φορτίο έχουμε συγκεντρωμένη ροπή στο $x=x_0$. Η λύση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι:

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{M}{\pi}\right) \frac{(a^2 - x_0 x)}{(a^2 - x_0^2)^{1/2} (x - x_0)^2}, \quad (1.23)$$

η οποία συμφωνεί με την ασυμπτωτική λύση (1.22) όταν $a^* = 0$ και $b^* = 1$ κι εμφανίζει πόλο δευτέρας τάξης στο $x=x_0$ (Lifanov and Lifanov, 2004). Επομένως όταν εφαρμόζεται συγκεντρωμένη ροπή εμφανίζεται πόλος δευτέρας τάξης στο σημείο εφαρμογής της. Παρακάτω θα παρουσιαστούν αριθμητικές μέθοδοι απαλοιφής του πόλου.

Στην ειδική περίπτωση όπου το L είναι μια κλειστή καμπύλη έχουμε:

$$\varphi_0(x) = \frac{M}{\pi(x-x_0)^2}, \quad (1.24)$$

αυτό σημαίνει ότι η συμπεριφορά της $\varphi(x)$ καθορίζεται από την $\varphi_0(x)$ δηλαδή η $\varphi(x)$ εμφανίζει πόλο 2^{ας} τάξης στο $x=x_0$.

Από όλα τα προηγούμενα γίνεται προφανές ότι απαιτούνται εξειδικευμένες μέθοδοι ολοκλήρωσης στην περίπτωση που η $f(x)$ (συνάρτηση φόρτισης) περιέχει συγκεντρωμένα φορτία ή συγκεντρωμένες ροπές.

1.2. Επεκτάσεις στην περίπτωση της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.1) Αυτή η ολοκληρωτική εξίσωση διαφέρει από τη βασική Συνοριακή Ολοκληρωτική Εξίσωση (Brebbia et al., 1984 Brebbia and Dominguez, 1989)

$$\frac{1}{2}t_i(y) = \int_L D_{kij}(x,y)n_j(y)t_k dL(x) - \int_L S_{kij}(x,y)u_k(x)dL(x) \quad (1.25)$$

όπου u_k είναι το άνυσμα των μετατοπίσεων, $n_j(y)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω και

$$D_{kij}(x,y) = \frac{C_1}{4ar^a} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + br_{,i}r_{,j}r_{,k} \right]$$

$$S_{kij}(x,y) = \frac{\mu C_1}{2ar^{(a+1)}} \left\{ \beta r_n \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,j}) - (\beta+2) r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \right. \\ \left. + \nu \beta (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) [\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_i \delta_{jk} + n_j \delta_{ik}] - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (1.26)$$

με $a=2$ και $i,j,k=1,2,3$ για την τρισδιάστατη ελαστικότητα και $a=1$ και $i,j,k=1,2$ για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης και $\beta=a+1$.

Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται με την χρήση μιγαδικών μεταβλητών στην ακόλουθη:

$$\frac{1}{2\pi i_L} \left\{ 2u \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} - u \frac{\partial}{\partial t} dk_1(\tau,t) - \bar{u} \frac{\partial}{\partial t} dk_2(\tau,t) - (\kappa-1) \frac{\sigma}{2\mu} \frac{d\tau}{\tau-t} - \right. \\ \left. - \kappa \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial k_1}{\partial t} d\tau + \frac{\bar{\sigma}}{2\mu} \frac{\partial k_2}{\partial t} d\bar{\tau} \right\} = \frac{1}{2} (\kappa-1) \frac{\sigma(t)}{2\mu}, \quad t \in L \quad (1.27)$$

Η εξίσωση (1.27) ολοκληρώνοντας κατά μέρη δίνει:

$$\frac{1}{2\pi i_L} \left\{ 2u' \frac{d\tau}{\tau-t} - u' \frac{\partial k_1}{\partial t} d\tau - \bar{u}' \frac{\partial k_2}{\partial t} d\bar{\tau} - (\kappa-1) \frac{\sigma}{2\mu} \frac{d\tau}{\tau-t} - \right. \\ \left. - \kappa \frac{\sigma}{2\mu} \frac{\partial k_1}{\partial t} d\tau + \frac{\bar{\sigma}}{2\mu} \frac{\partial k_2}{\partial t} d\bar{\tau} \right\} = \frac{1}{2} (\kappa-1) \frac{\sigma(t)}{2\mu}, \quad t \in L \quad (1.28)$$

με

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) + i\sigma_n(t), \quad k_1(\tau,t) = \ell n \left(\frac{\tau-t}{\tau-t} \right) \\ k_2(\tau,t) = \ell n \left(\frac{\tau-t}{\tau-t} \right) \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \gamma \gamma \text{ επίπεδη παραμόρφωση} \\ (3-\nu)(1+\nu) & \gamma \gamma \text{ επίπεδη ένταση} \end{cases} \quad (1.29)$$

Η τελευταία εξίσωση ως προς το u μοιάζει πολύ με την εξίσωση (1.1) κι επίλυση της ακολουθεί παρόμοιες διαδικασίες (Lifanov and Lifanov, 2004, Theocaris and Ioakimidis, 1977, Tsamasphyros and Theotokoglou 2008).

2. Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

2.1. Τύποι ολοκληρωτικών Εξισώσεων – Εισαγωγή

Η μελέτη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων γίνεται απαραίτητη γνωρίζοντας ότι πολλά προβλήματα της Μηχανικής μπορούν να διατυπωθούν με την χρήση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Μια τάξη Ολοκληρωτικών Εξισώσεων η οποία εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές είναι οι Ολοκληρωτικές Εξισώσεις τύπου Fredholm 1ου και 2ου είδους οι οποίες έχουν τη μορφή (Muskhelishvili, 2008, Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998):

$$\text{1}^{\text{ου}} \text{ είδους: } f(x) = \int_a^b \mathbf{K}(x,s)\varphi(s) ds \quad (2.1)$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση $\varphi(x)$ καλείται να υπολογιστεί γνωρίζοντας τον πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$ και της γνωστής συνάρτησης $f(x)$.

A. Αν $f(x) \equiv 0$ τότε η εξίσωση καλείται ομογενής.

B. Η (2.1) καλείται μη ομογενής σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η επίλυση της διευκολύνεται στην περίπτωση που ο πυρήνας γράφεται ως συνάρτηση της διαφοράς $x-s$ δηλαδή $\mathbf{K}(x,s) = \mathbf{K}(x-s)$. Αν αλλάξουμε το ένα άκρο ολοκλήρωσης με τη μεταβλητή x παίρνουμε την εξίσωση *Volterra* 1^{ου} είδους η οποία μπορεί να περιγράψει προβλήματα με ένα μεταβλητό άκρο (Muskhelishvili, 2008, Sladek and Sladek, 1998).

$$f(x) = \int_a^x \mathbf{K}(x,s)\varphi(s) ds \quad (2.2)$$

Αντίστοιχα οι εξισώσεις *Fredholm* (ή *Volterra*) 2^{ου} είδους περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση τόσο μέσα στο ολοκλήρωμα όσο κι εκτός, η μορφή τους είναι (Muskhelishvili, 2008, Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998):

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b \mathbf{K}(x,s)\varphi(s) ds \quad (2.3)$$

ή

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \mathbf{K}(x,s)\varphi(s) ds + f(x) \quad (2.4)$$

Με τον ίδιο τρόπο η εξίσωση *Volterra* 2^{ου} είδους γράφεται ως (Muskhelishvili, 2008, Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998):

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^x \mathbf{K}(x,s)\varphi(s) ds \quad (2.5)$$

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις $2^{ου}$ είδους ομοίως με αυτές του $1^{ου}$ χωρίζονται σε:

- A. Ομογενείς αν $f(x) \equiv 0$
- B. Μη ομογενείς αν η $f(x)$ δεν είναι παντού μηδέν.

Για το πρόβλημα του χωρίου δεδομένων διαστάσεων υπό σημειακή φόρτιση αρκεί η μελέτη των εξισώσεων *Fredholm*.

2.2. Θεωρήματα *Fredholm*

Η μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων απλοποιείται στην περίπτωση που ο πυρήνας είναι εκφυλισμένος. Εκφυλισμένος καλείται ο πυρήνας $\mathbf{K}(x,s)$ μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης όταν μπορεί να εκφραστεί ως πεπερασμένο άθροισμα γινομένων ζευγών συναρτήσεων, όπου η μία εξαρτάται αποκλειστικά από το x ενώ η δεύτερη από την s (*Muskhelisvili*, 2008, *Muskhelisvili*, 2010, *Sladek and Sladek*, 1998), δηλαδή:

$$\mathbf{K}(x,s) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(s) \quad (2.6)$$

Θεωρώντας τώρα ότι οι συναρτήσεις $a_i(x)$ και $b_i(s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και συνεχείς, όπως και ο πυρήνας $\mathbf{K}(x,s)$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο $Q\{a \leq x, s \leq b\}$, η παραπάνω ολοκληρωτική συνάρτηση (2.4) θα πάρει τη μορφή (*Muskhelisvili*, 2008, *Sladek and Sladek*, 1998) :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (2.7)$$

Έστω ότι η ολοκληρωτική εξίσωση έχει λύση $\varphi(x)$, τότε θέτουμε:

$$C_i = \int_a^b \varphi(s) b_i(s) ds \quad (2.8)$$

Επομένως η (2.7) παίρνει τη μορφή:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x) + f(x) \quad (2.9)$$

οπότε για να υπολογιστεί η λύση $\varphi(x)$ είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι σταθερές C_i (*Sladek and Sladek*, 1998).

Αλλάζοντας στη συνέχεια το δείκτη i με j , πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη με $b_j(x)$ και ολοκληρώνοντας τελικά ως προς x με όρια ολοκλήρωσης από a έως b προκύπτει η παρακάτω έκφραση

$$\int_a^b \varphi(x) b_i(x) dx = \lambda \sum_{j=1}^n C_j \int_a^b a_j(x) b_i(x) dx + \int_a^b f(x) b_i(x) dx \quad (2.10)$$

Αν θέσουμε :

$$\int_a^b a_j(x)b_i(x)dx = k_{ij} \quad (2.11)$$

και

$$\int_a^b f(x)b_i(x)dx = f_i \quad (2.12)$$

Καταλήγουμε σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τις C_i το οποίο έχει τη μορφή:

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} C_j = f_i \quad (2.13)$$

Κατά συνέπεια η ολοκληρωτική εξίσωση έχει λύση μόνο την περίπτωση που το παραπάνω σύστημα έχει λύση (*Sladek and Sladek, 1998, Tsamasphyros and Theotokoglou, 2008*).

Η ορίζουσα του συστήματος (2.13) είναι συνάρτηση της παραμέτρου λ και υπολογίζεται ως εξής:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Η ορίζουσα όπως υπολογίζεται από τη σχέση (2.14) καλείται ορίζουσα Fredholm της ολοκληρωτικής εξίσωσης (*Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998*). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ορίζουσα αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ ως προς λ . Επίσης διαπιστώνεται εύκολα ότι $D(0) = 1 \neq 0$. Συνεπώς η $D(\lambda)$ δεν έχει πάνω από n διαφορετικές ρίζες. Οι ρίζες αυτές ονομάζονται χαρακτηριστικές τιμές του πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$ ή της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης, αναλόγως λοιπόν με τις τιμές της παραμέτρου λ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. Εάν η λ δε συμπίπτει με καμία από τις χαρακτηριστικές τιμές της εξίσωσης τότε $D(\lambda) \neq 0$ και το γραμμικό σύστημα επιλύεται μονοσήμαντα, ανεξαρτήτως των τιμών f_i . Έτσι διατυπώνεται το **πρώτο Θεώρημα του Fredholm**:

Θεώρημα: Εάν η λ δεν είναι χαρακτηριστική τιμή, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση (2.7) έχει μοναδική λύση $\varphi(x)$ που δίνεται από τον τύπο (2.9), για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f(x)$. (*Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998*)

Στην περίπτωση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης δηλαδή όταν $f(x) \equiv 0$ με $D(\lambda) \neq 0$ η λύση είναι η $\varphi(x) \equiv 0$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα δεδομένου ότι για $f(x) \equiv 0 \Rightarrow f_i = 0$ κι έτσι το σύστημα που προκύπτει από την (2.14) είναι ομογενές με ορίζουσα μη μηδενική. Επομένως $C_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$

Ισοδύναμα λοιπόν το πρώτο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η ολοκληρωτική (2.7) μοναδική λύση είναι η αντίστοιχη ομογενής ολοκληρωτική να έχει μόνο τη μηδενική λύση $\varphi(x) \equiv 0$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μέθοδο του *Cramer* μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές C_i :

$$C_i = \frac{1}{D(\lambda)} D_{ik}(\lambda) f_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

όπου $D_{ik}(\lambda)$ είναι ορίζουσες πολώνυμα ως προς λ βαθμού $\leq n-1$ που το ανάπτυγμα τους γίνεται ως προς τα στοιχεία της στήλης των ελεύθερων όρων.

Αντικαθιστώντας τώρα τις σταθερές C_i στη σχέση (2.9) μέσω της σχέσης (2.15) και της (2.12) έχουμε:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n D_{ik}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s) dx \quad (2.16)$$

ή

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{R}(x, s; \lambda) f(s) dx \quad (2.17)$$

Το μέγεθος που ορίστηκε στην παραπάνω σχέση ως:

$$\mathbf{R}(x, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) a_i(x) b_k(s) \quad (2.18)$$

ονομάζεται επιλύουσα της ολοκληρωτικής εξίσωσης και είναι μια συνάρτηση συνεχής ως προς x και s .

- ii. Εάν η λ δε συμπίπτει με καμία από τις χαρακτηριστικές τιμές της εξίσωσης, τότε $D(\lambda) \neq 0$.

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα από τη σχέση (2.13) είναι:

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} C_j = 0 \quad (2.19)$$

Το σύστημα αυτό έχει p (με $1 \leq p < n$) πεπερασμένο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων μη μηδενικών διανυσμάτων λύσεων:

$$\{C_1^{(l)}, \dots, C_n^{(l)}\}, \quad l=1, \dots, p$$

Επομένως οι συναρτήσεις

$$\varphi_l(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i^{(l)} a_i(x) \quad (2.20)$$

θα είναι μη μηδενικές λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds \quad (2.21)$$

Όπως και στην γενική περίπτωση της εξίσωσης με εκφυλισμένο πυρήνα, οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις ή θεμελιακές συναρτήσεις, που αντιστοιχούν στη δεδομένη χαρακτηριστική τιμή. Ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων που αντιστοιχούν στη δεδομένη χαρακτηριστική τιμή ονομάζεται βαθμός (τάξη) ή πολλαπλότητα (rank). (Μπαρτζώκας, 2004, Sladek and Sladek, 1998)

Ο γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην ίδια χαρακτηριστική τιμή είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση. Άρα οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε μια χαρακτηριστική τιμή, σχηματίζουν έναν γραμμικό χώρο διάστασης p (με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις).

Γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης που αντιστοιχεί στον χαρακτηριστικό αριθμό λ θα είναι:

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^p a_l \varphi_l(x) \quad (2.22)$$

με a_l αυθαίρετες σταθερές (Sladek and Sladek, 1998).

Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για το συζυγή πυρήνα του $\mathbf{K}(x,s)$.

Ο πυρήνας $\mathbf{K}^*(x,s)$ προερχόμενος από τον πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$ με αλλαγή της μεταβλητής x με την s και αντίστροφα, ονομάζεται συζυγής ως προς τον πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$ δηλαδή:

$$\mathbf{K}^*(x,s) = \mathbf{K}(s,x) \quad (2.23)$$

Εάν ο $\mathbf{K}(x,s)$ είναι μιγαδική συνάρτηση με πραγματικές μεταβλητές x και s τότε βάσει του ορισμού ισχύει:

$$\mathbf{K}^*(x,s) = \overline{\mathbf{K}(s,x)} \quad (2.24)$$

Η εξίσωση

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \mathbf{K}^*(x,s) \psi(s) ds + g(x) \quad (2.25)$$

ονομάζεται συζυγής της (2.4). Για την περίπτωση του εκφυλισμένου πυρήνα η συζυγής εξίσωση της (2.7) γράφεται:

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(x) \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds + g(x) \quad (2.26)$$

ή

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i^* b_i(x) + g(x) \quad (2.27)$$

με
$$C_i^* = \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds \quad (2.28)$$

(Sladek and Sladek, 1998, Lifanov and Lifanov, 2004, Tsamasphyros and Theotokoglou, 2008)

Εάν η $g(x) \equiv 0$ τότε η εξίσωση (2.25) γίνεται ομογενής και για τον προσδιορισμό των C_i^* έχουμε το παρακάτω σύστημα:

$$C_i^* - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ji} C_j^* = 0 \quad (2.29)$$

συζυγές του συστήματος (2.19).

Γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα ότι όταν η ορίζουσα ενός συστήματος είναι μηδέν τότε το ομογενές σύστημα $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ και το συζυγές του $A^*Y = \mathbf{0}$ έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων, σε πλήθος ίσο με $p = n - r$, όπου r ο βαθμός του πίνακα A του συστήματος.

Έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην χαρακτηριστική τομή λ για την ομογενή εξίσωση

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(x) \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds \quad (2.30)$$

συζυγούς της (2.21) γράφονται αντίστοιχα:

$$\psi_l(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i^{*(l)} a_i(x) \quad (2.31)$$

Κατ' επέκταση διατυπώνεται το Δεύτερο Θεώρημα του Fredholm ως εξής:

Θεώρημα: Εάν η λ δεν είναι χαρακτηριστική τιμή του πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$, τότε τόσο η ομογενής ολοκληρωτική συνάρτηση (2.21) και η συζυγής ως προς αυτήν (2.30) έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοσυναρτήσεων .

iii. Για να συμπεράνουμε αν η μη ομογενής εξίσωση στην περίπτωση που το λ είναι χαρακτηριστική τιμή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το μη ομογενές σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων λύση είναι το διάνυσμα ελεύθερων όρων να είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα λύσεις του συζυγούς προς αυτό ομογενούς συστήματος.

Δηλαδή για να έχει λύση το μη ομογενές σύστημα (2.13) (και κατ' επέκταση η ολοκληρωτική εξίσωση (2.9)) θα πρέπει το κάθε διάνυσμα $\{C_1^{*(l)}, \dots, C_n^{*(l)}\}$, $l=1, \dots, p$ να είναι ορθογώνιο με το f_1, \dots, f_n , να ισχύει έτσι:

$$\sum_{i=1}^n f_i C_i^{*(l)} = 0, \quad \forall l \quad (2.32)$$

και εισάγοντας τη (2.12) στη (2.32) η συνθήκη γράφεται ως:

$$\int_a^b f(x) \sum_{i=1}^n C_i^{*(l)} b_i(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_l(x) dx = 0 \quad (2.33)$$

Η συνθήκη διατυπώνεται μέσω του Τρίτου Θεωρήματος του Fredholm:

Θεώρημα: Η μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση (2.7) με εκφυλισμένο πυρήνα όταν το λ παίρνει χαρακτηριστική τιμή, θα έχει λύση τότε και μόνο τότε όταν ο ελεύθερος όρος $f(x)$ είναι ορθογώνιος σε όλες τις λύσεις της συζυγούς ως προς την ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση. [12, 16, 17]

Συμπεραίνουμε ότι όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες (2.33) η μη ομογενής εξίσωση έχει άπειρες λύσεις οι οποίες γράφονται ως:

$$\varphi(x) = \varphi_o(x) + \varphi_\mu(x) \quad (2.34)$$

όπου $\varphi_o(x)$ η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης και $\varphi_\mu(x)$ μία εκ των μερικών λύσεων.

Συμπερασματικά διατυπώνεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Εάν η ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση του Fredholm με εκφυλισμένο πυρήνα έχει μόνο τη μηδενική λύση τότε η αντίστοιχη μη ομογενής έχει μοναδική λύση. Εάν όμως η ομογενής έχει μη μηδενική λύση τότε αναλόγως με τον ελεύθερο όρο $f(x)$, η μη ομογενής θα έχει ή άπειρες ή καμία λύση [14].

Βοηθητικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πρόταση:

Έστω η ολοκληρωτική εξίσωση (2.4) με τυχαίο συνεχή πυρήνα $\mathbf{K}(x,s)$ και συνεχή συνάρτηση $f(x)$. Αν ο εκφυλισμένος πυρήνας $\mathbf{H}(x,s)$ συγκλίνει στον $\mathbf{K}(x,s)$ τότε και η λύση της ολοκληρωτικής με εκφυλισμένο πυρήνα $\mathbf{H}(x,s)$ είναι πολύ «κοντά» στη λύση της (2.4) [2, 14]. Ακόμη περισσότερο αν κατασκευάσουμε μια ακολουθία εκφυλισμένων πυρήνων $\mathbf{H}_n(x,s)$ που συγκλίνει ομαλά στον $\mathbf{K}(x,s)$ τότε οι λύσεις $\{z_n(x)\}$ με τους εκφυλισμένους πυρήνες θα συγκλίνουν ομαλά στη λύση της (2.4).

2.3. Ιδιόμορφες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Έστω L λεία καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου. Ο χώρος (το πεδίο) που βρίσκεται εντός της L ονομάζεται εσωτερικός και συμβολίζεται με D^+ και ο συμπληρωματικός προς τον $D^+ + L$ που περιέχει και το απομακρυσμένο σημείο $z = \infty$ ονομάζεται εξωτερικός και συμβολίζεται με D^- . (Muskhelishvili, 2008)

Έστω μια $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο D^+ και συνεχής στο $D^+ + L$ τότε το ολοκλήρωμα *Cauchy* είναι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \quad (2.35)$$

Ομοίως αν $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο D^- και συνεχής στο $D^- + L$ τότε [1, 2]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \quad (2.36)$$

Αν τώρα έχουμε μια λεία κλειστή (ή μη) καμπύλη που βρίσκεται, πλήρως εντός πεπερασμένου χώρου του μιγαδικού επιπέδου, τ είναι η μιγαδική συντεταγμένη των σημείων της καμπύλης και η $\varphi(\tau)$ συνεχής επί της L τότε το ολοκλήρωμα:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.37)$$

ονομάζεται ολοκλήρωμα τύπου *Cauchy*, η $\varphi(\tau)$ ονομάζεται πυκνότητα ενώ η $\frac{1}{\tau - z}$ πυρήνας του ολοκληρώματος. Η $\Phi(z)$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία της L .

Αν η καμπύλη είναι κλειστή τότε η $\Phi(z)$ αναλύεται σε δύο τμηματικώς συνεχείς συναρτήσεις:

- i. την $\Phi^+(z)$ που ορίζεται εντός του D^+ και
- ii. την $\Phi^-(z)$ που ορίζεται εντός του D^-

χωρίς να είναι εν γένει η μία αναλυτική προέκταση της άλλης.

Επίσης ισχύει ότι η τιμή της στο άπειρο είναι μηδέν, η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα (*Muskhelisvili*, 2008).

Έστω μια συνάρτηση η οποία ορίζεται πάνω στη λεία καμπύλη L , αν η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda, \quad \forall t_1, t_2 \in L \quad (2.38)$$

λέμε ότι ικανοποιεί τη **συνθήκη Hölder** με τον αριθμό $A > 0$ να ονομάζεται σταθερά Hölder και τον λ δείκτη Hölder, με $0 < \lambda \leq 1$.

Παρατηρούμε ότι αν $|t_2 - t_1| \leq 1$ και ικανοποιείται η συνθήκη Hölder για κάποιο δείκτη λ τότε ικανοποιείται και για κάθε λ' με $0 < \lambda' < \lambda \leq 1$.

Η συνθήκη Hölder επεκτείνεται και για την περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών αλλά και για γραμμικούς συνδυασμούς συναρτήσεων, γινόμενα συναρτήσεων αλλά και σύνθετες συναρτήσεις.

Έστω τώρα το ολοκλήρωμα :

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b \quad (2.39)$$

Έχουμε:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left[- \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.40)$$

Αν τώρα θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ παίρνουμε την κύρια τιμή του Ολοκληρώματος *Cauchy*, η οποία ορίζεται ως:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (2.41)$$

Αν τώρα έχουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx,$$

όπου η $\varphi(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Hölder για το διάστημα (a, b) .

Έτσι για το παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx \right]$$

Επίσης

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

Το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} dx$ συγκλίνει αφού:

$$\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}$$

λόγω της συνθήκης *Hölder*.

Τελικά χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (2.41):

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (2.42)$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε την κύρια τιμή του ιδιόμορφου καμπυλόγραμμου ολοκληρώματος. Έστω L μια λεία καμπύλη, τ και t οι μιγαδικές συντεταγμένες των σημείων της. Με κέντρο $t \in L$ γράφεται κύκλος ακτίνας ρ και τα σημεία τομής του κύκλου με την καμπύλη είναι τα t_1, t_2 ($t_1 t_2 = \ell \in L$) και μόνο αυτά επιλέγοντας αρκετά μικρή ακτίνα ρ . Έτσι η κύρια τιμή του ιδιόμορφου ολοκληρώματος ορίζεται ως:

Το όριο του ολοκληρώματος $\int_{L-\ell} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$ καθώς $\rho \rightarrow 0$ ονομάζεται κύρια τιμή του ιδιόμορφου ολοκληρώματος $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \quad (2.43)$$

Αρκεί τώρα να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} &= \ln(\tau-t) \Big|_{t_2}^{t_1} + \ln(\tau-t) \Big|_{t_2}^b = \ln \frac{b-t}{a-t} + \ln \frac{t_1-t}{t_2-t} \\ &= \ln \frac{b-t}{a-t} + \ln \left| \frac{t_1-t}{t_2-t} \right| + i [\text{Arg}(t_1-t) - \text{Arg}(t_2-t)] \\ &= \ln \frac{b-t}{a-t} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \frac{t_1-t}{t_2-t} = \ln \frac{b-t}{a-t} + ia \end{aligned} \quad (2.44)$$

Επομένως η (2.43) για μη γωνιακά σημεία γράφεται:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \left(\ln \frac{b-t}{a-t} + \pi i \right) \quad (2.45\alpha)$$

ή

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b-t}{a-t} \quad (2.45\beta)$$

Στην περίπτωση όμως που η καμπύλη L είναι κλειστή έχουμε:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + i\pi\varphi(t) \quad (2.46)$$

Αν η $\varphi(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και το σημείο t δε συμπίπτει με τα άκρα της $L(a,b)$ τότε ισχύει:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = i\pi\varphi(t) + \varphi(b) \ln(b-t) - \varphi(a) \ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau-t) d\tau \quad (2.47)$$

Ή εάν η καμπύλη είναι κλειστή (*Muskhelisvili*, 2008):

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau-t) d\tau \quad (2.48)$$

Για οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση η καμπύλη ολοκλήρωσεως θεωρείται ιδιάζουσα γραμμή και το παρακάτω λήμμα μας βοηθά στη μελέτη της συμπεριφοράς του ολοκληρώματος επί της καμπύλης.

Λήμμα: Εάν η πυκνότητα $\varphi(\tau)$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Hölder* και το σημείο z δε συμπίπτει με τα άκρα της καμπύλης L τότε η συνάρτηση:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(z)}{\tau - z} d\tau \quad (2.49)$$

συμπεριφέρεται κατά το πέρασμα της από το σημείο $z = t, t \in L$ ως συνεχής συνάρτηση δηλαδή έχει δεδομένη οριακή τιμή όταν $z \rightarrow t$, από οποιαδήποτε πλευρά της L :

$$\lim_{z \rightarrow t} [\psi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \psi(t) \quad (2.50)$$

Επιστρέφοντας στη (2.37), αν υποθέσουμε ότι η $\varphi(\tau)$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Hölder* (*Hills et al.*, 1989) και η καμπύλη ολοκλήρωσης L είναι κλειστή και λεία τότε η μελέτη της (2.37) εξαρτάται από την (2.49). Παίρνοντας τις οριακές τιμές των $\Phi(z)$ και $\psi(z)$ για $z \rightarrow t^\pm$ και γνωρίζοντας ότι:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \\ \pi i, & z \in D \end{cases} \quad (2.51)$$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \psi^+(z) &= \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-z} \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t) \\ \psi^-(z) &= \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-z} \right] = \Phi^-(t) \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-z} = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Από το λήμμα όμως έχουμε:

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi^+(t) = \Phi(t) + \frac{1}{2} \varphi(t) \\ \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) \end{cases}$$

Τελικά καταλήγουμε στους τύπους που ονομάζονται *Sohotsky-Plemelj*

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Εναλλακτικά οι τύποι γράφονται:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= \varphi(t) \\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Πολύ χρήσιμο είναι και το παρακάτω θεώρημα (στην περίπτωση καμπυλών που δεν είναι παντού λείες όπως στις περιπτώσεις ρηγματωμένων πλακών κλπ)

Θεώρημα: Εάν το ολοκλήρωμα τύπου *Cauchy* δίδεται επί της καμπύλης L , η οποία περιέχει πεπερασμένο πλήθος «γωνιακών» σημείων, τότε οι οριακές τιμές του ολοκληρώματος υπάρχουν, για τα μεν μη «γωνιακά» σημεία δίνονται από τους τύπους *Sohotsky – Plemelj* ενώ για τα «γωνιακά» από τους τύπους:

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) &= \left(1 - \frac{a}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \\ \Phi^-(t) &= -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau\end{aligned}\quad (2.56)$$

Επίσης είναι απαραίτητο να αναφερθούμε και στην παράγωγο της $\Phi(t)$, $\Phi'(t)$.

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2}\varphi'(t) - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{L-L_\delta} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \\ &= \frac{1}{2}\varphi'(t) - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int_{L-L_\delta} \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau + \varphi'(t_2) \ln(\tau - t_2) - \varphi'(t_1) \ln(\tau - t_1) \right] \\ &= \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L-L_\delta} \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} [\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)] \ln(\tau - t_2) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi'(t_1) [\ln(\tau - t_2) - \ln(\tau - t_1)] \right]\end{aligned}\quad (2.57)$$

Επειδή η $\varphi'(t)$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Hölder* το πρώτο όριο είναι μηδέν [1] ενώ το δεύτερο συγκλίνει στο $\pi i \varphi'(t)$ λόγω του ότι $\lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln(\tau - t_2) - \ln(\tau - t_1)] = i\pi$

Τελικά από τη σχέση (2.57):

$$\Phi'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.58)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία κι εφόσον εξακολουθεί να ικανοποιείται η συνθήκη *Hölder*:

$$[\Phi^\pm(t)]^m = [\Phi^m(t)]^\pm = \pm \frac{1}{2}\varphi^m(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^m(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.59)$$

Και για το ολοκλήρωμα *Cauchy* πάνω στην κλειστή καμπύλη L καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Phi^m(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{m+1}} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^m(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.60)$$

Μέχρι τώρα υπολογίσαμε ολοκληρώματα *Cauchy* όπου η άγνωστη συνάρτηση φ είναι τμηματικά *Hölder* συνεχής συνάρτηση πάνω στο L . Παρακάτω θα δείξουμε την ύπαρξη ενός ολοκληρώματος *Cauchy* αν η φ είναι μια γενικευμένη συνάρτηση (*μια*

κατανομή) και ειδικότερα όταν η φ είναι μια συνάρτηση δέλτα $\delta(x-x_0)$ ή η παράγωγος της $\delta'(x-x_0)$.

Γι' αυτόν το σκοπό αποδεικνύουμε το παρακάτω Θεώρημα (*Muskhelisvili*, 2008).

Θεώρημα 1

«Τα ολοκληρώματα *Cauchy* μιας συνάρτησης Δέλτα $\delta(x-x_0)$ και της παραγώγου της $\delta'(x-x_0)$ είναι ίσα με $1/(t-x_0)$ και $1/(t-x_0)^2$ αντίστοιχα.»

Λήμμα 2

« Η συνάρτηση Δέλτα μπορεί να θεωρηθεί ως το παρακάτω όριο»

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x-x_0-i\varepsilon} - \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} \right\}, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (2.57)$$

(Η απόδειξη του λήμματος βασίζεται στον τύπο του *Plemelj* και δίνεται στο παράρτημα).

i. Η περίπτωση της συνάρτησης Δέλτα $\delta(x-x_0)$.

Επειδή από τη σχέση (2.57) φαίνεται ότι η $\delta(x-x_0)$ προκύπτει ως το όριο δύο *Hölder* συνεχών συναρτήσεων, έτσι το ολοκλήρωμα *Cauchy* της συνάρτησης Δέλτα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$I(\delta, t) = \int_{-1}^1 \frac{\delta(x-x_0)}{x-t} dx = \int_{-1}^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x-x_0-i\varepsilon} - \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} \right\} \frac{dx}{x-t} \quad (2.58)$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω σχέσης υπάρχει εφόσον $1/(x-x_0 \pm i\varepsilon)$ είναι *Hölder* συνεχείς συναρτήσεις.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t-x)(t-x_0+i\varepsilon)} &= \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x_0+i\varepsilon} dt \right\} \\ &= \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} \{Q_0(x) - Q_0(x_0-i\varepsilon)\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

και

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t-x)(t-x_0-i\varepsilon)} &= \frac{1}{x-x_0-i\varepsilon} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x_0-i\varepsilon} dt \right\} \\ &= \frac{1}{x-x_0-i\varepsilon} \{Q_0(x) - Q_0(x_0+i\varepsilon)\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Όπου

$$2Q_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{Q_0(x_0 + i\varepsilon) + Q_0(x_0 - i\varepsilon)\} = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} dt \quad (2.61)$$

και

$$Q_0(x \pm i\varepsilon) = \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x \pm i\varepsilon} dt. \quad (2.62)$$

Από τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_0(x \pm i\varepsilon) = \pm \frac{1}{2} + Q_0(x_0), \quad (2.63)$$

επιτυγχάνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 1.

- ii. Στην περίπτωση της $\delta'(x-x_0)$ η απόδειξη επιτυγχάνεται με την ίδια μέθοδο όπως προηγουμένως.
- iii. Τα προηγούμενα αποτελέσματα δεν διαφέρουν αν τα όρια ολοκλήρωσης μεταβληθούν μιας και κάθε διάστημα που περιέχεται στο διάστημα (a,b) μπορεί να μετασχηματιστεί σε διάστημα που ανήκει στο $(-1,1)$.
- iv. Το Θεώρημα 1 μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση ενός σταθμισμένου ολοκληρώματος όπου το αποτέλεσμα είναι:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x) \delta(x-x_0)}{x-t} dx = \frac{w(x_0)}{x_0-t}$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει μετά από μια αυστηρή εφαρμογή του ιδιόμορφου τελεστή στη συνάρτηση Δέλτα.

- v. Το **Θεώρημα 1** μπορεί επίσης να γενικευθεί στην περίπτωση που το σύνορο L είναι κλειστό. Αρκεί να χαράξουμε την εφαπτομένη στο t_0 και να πάρουμε πάνω της ένα μικρό διάστημα (t_1, t_2) γύρω από το t_0 , όπου t_0 είναι η μιγαδική συντεταγμένη του σημείου όπου εφαρμόζεται η δύναμη ή η ροπή. Αν πάρουμε το όριο του τμήματος καθώς τα t_1, t_2 τείνουν στο t_0 τότε τα t_1, t_2 τείνουν στο σύνορο L και μπορεί να επιτευχθεί η απόδειξη του θεωρήματος 1.

3. Συνοριακά Στοιχεία

3.1. Βασικές Έννοιες

Μια πολύ σημαντική εξίσωση στη Μηχανική είναι η αποκαλούμενη εξίσωση *Poisson* (*Muskhelisvili*, 2010) η οποία για τις δύο διαστάσεις γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = b \text{ στο χωρίο } \Omega \quad (3.1)$$

ή

$$\nabla^2 u = b \text{ στο χωρίο } \Omega \quad (3.1')$$

Όπου $\nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\)}{\partial x_2^2}$ είναι ο τελεστής *Laplace* και x_1, x_2 είναι οι συντεταγμένες ορισμένες πάνω στο χωρίο Ω και b είναι μια γνωστή συνάρτηση των x_1, x_2 . Ω είναι το χωρίο πάνω στο οποίο εφαρμόζεται η συνάρτηση και έχει ως σύνορο την καμπύλη Γ . Η εξίσωση *Poisson* και η ομογενής μορφή της, που είναι η εξίσωση *Laplace* περιγράφουν πολλά προβλήματα της Μηχανικής.

Προσπαθώντας λοιπόν να επιλύσουμε τη βασική εξίσωση *Laplace* η οποία είναι :

$$\nabla^2 u = 0 \text{ στο χωρίο } \Omega \quad (3.2)$$

Με δεδομένες συνοριακές συνθήκες της μορφής :

- i. Ουσιώδεις συνθήκες δηλ. δεσμεύσεις του τύπου $u = \bar{u}$ επί του συνόρου Γ_1
- ii. Φυσικές συνθήκες δηλ. δεσμεύσεις του τύπου $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ επί του συνόρου Γ_2

όπου n είναι το κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο με φορά προς τα έξω, $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ και οι παύλες υποδεικνύουν δεδομένα μεγέθη. Οι συνοριακές συνθήκες μπορούν επίσης να περιλαμβάνουν και πιο περίπλοκες περιπτώσεις (όπως γραμμικούς συνδυασμούς των παραπάνω συνθηκών) κάτι που δε θα εξετάσουμε (*Chen and Zhou*, 1992, *Katsikadelis* 2002).

Κατά βάση το σφάλμα που εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση αν οι ακριβείς (άγνωστες όμως) τιμές των u και q αντικατασταθούν με κάποια προσέγγιση τους μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αν τις ορθογωνοποιήσουμε ως προς μια σταθμισμένη συνάρτηση u^* της οποίας οι παράγωγοι πάνω στο σύνορο είναι $q^* = \partial u^* / \partial n$.

Δηλαδή αν τα υπόλοιπα είναι \mathbf{R} τότε γενικά ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{aligned} R &= \nabla^2 u \neq 0 \\ R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \\ R_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου u και q είναι οι προσεγγιστικές τιμές (το γεγονός ότι ένα ή περισσότερα υπόλοιπα μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν δεν επηρεάζει την γενικότητα) (Brebbia and Dominguez, 1989)

Παίρνοντας τώρα τις σχέσεις σταθμικών υπολοίπων έχουμε:

$$\int_{\Omega} Ru^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad (3.4)$$

Ισοδύναμα

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (3.5)$$

Και ολοκληρώνοντας κατά μέρη το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης:

$$-\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right\} d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (3.6)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας και πάλι το αριστερό μέλος κατά μέρη καταλήγουμε σε μία βασική σχέση των συνοριακών στοιχείων:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (3.7)$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια ισοδύναμη μορφή του Θεωρήματος του Green μετά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (Katsikadelis 2002).

3.2. Θεμελιώδης λύση

Η κατάλληλη συνάρτηση u^* ονομάζεται θεμελιώδης λύση και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, αναπαριστά δε το πεδίο που δημιουργείται όταν εφαρμοστεί μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στο σημείο i . Το αποτέλεσμα αυτού του φορτίου μπορεί να επεκταθεί από το i στο άπειρο χωρίς την χρήση συνοριακών συνθηκών. Έτσι η λύση γράφεται :

$$\nabla^2 u^* + \delta(x - x_0) = 0 \quad (3.8)$$

όπου $\delta(x - x_0)$ είναι η συνάρτηση Δέλτα του Dirac για την οποία ισχύουν:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} +\infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (3.10)$$

Επομένως μπορεί εύκολα να εξαχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u(-\delta(x-x_0)) d\Omega = -u(x_0) \quad (3.11)$$

Επομένως η εξίσωση (3.7) γράφεται ως εξής:

$$u(x_0) + \int_{\Gamma_2} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q}u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} qu^* d\Gamma \quad (3.12)$$

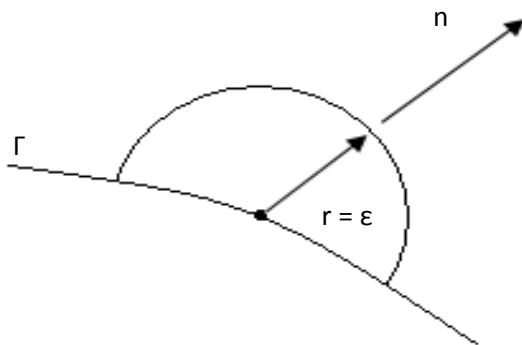
Πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η (3.12) ισχύει για συγκεντρωμένο φορτίο στο σημείο x_0 κι ότι οι τιμές που υπολογίζονται για τα u^* και q^* ισχύουν για την παραπάνω περίπτωση. Για διαφορετικές θέσεις (ή συνδυασμούς) φορτίου προκύπτει μια διαφορετική εξίσωση (Lifanov and Lifanov, 2004).

Για ένα ισότροπο 2 – διάστατο χωρίο, όπως αυτό του προβλήματος που θα εξεταστεί, η θεμελιώδης λύση είναι:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.13)$$

όπου r είναι η απόσταση από το σημείο εφαρμογής του φορτίου.

Έχοντας εξάγει τη βασική εξίσωση για την περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου σε ένα σημείο εντός του χωρίου Ω , προχωράμε για να εξάγουμε την αντίστοιχη εξίσωση στην περίπτωση που το σημείο βρίσκεται επάνω στο σύνορο του χωρίου. Για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι ενώ το σημείο βρίσκεται πάνω στο σύνορο του χωρίου, το χωρίο επεκτείνεται κατά ένα ημικύκλιο γύρω από το x_0 με κέντρο το ίδιο το σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να διαφοροποιήσουμε μεταξύ των δύο ειδών συνοριακών ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στην (3.12), εφόσον η θεμελιώδης λύση και η παράγωγος της έχουν διαφορετική συμπεριφορά. Ας θεωρήσουμε χάριν απλότητας ότι έχουμε την (3.12) πριν την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, δηλαδή

$$u(x_0) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \quad (3.14)$$

Στην παραπάνω σχέση θεωρούμε ολόκληρο το σύνορο Γ κι επιπλέον δεν επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες.

Ολοκληρωτικές Εξισώσεις της μορφής του 2ου μέλους παρουσιάζουν μικρότερο βαθμό ομοιομορφίας και έτσι αντιμετωπίζονται ευκολότερα.

Στην περίπτωση των 2 διαστάσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q u^* d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) d\Gamma = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ q \frac{\pi\varepsilon}{2\pi} \ln\varepsilon \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{q\varepsilon \ln\varepsilon\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

και μετά από κάποιες πράξεις διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω όριο είναι μηδέν. (Ολόκληρη η απόδειξη ότι το όριο είναι μηδέν δίνεται στο παράρτημα)

Το ολοκλήρωμα 1^{ου} μέλους υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* u d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) d\Gamma = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} u(x_0) \quad (3.16)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω υπολογισμός (3.16) εμφανίζει λοιπόν μια διαφορά από τον (3.15) όταν γίνεται στο σύνορο του χωρίου, παρουσιάζεται ο ελεύθερος όρος $-\frac{1}{2}u(x_0)$.

Επομένως η σχέση (3.14) τελικά καταλήγει σε μια πολύ βασική σχέση για τη μελέτη των πεπερασμένων στοιχείων :

$$\frac{1}{2}u(x_0) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (3.17)$$

οι τιμές των παραπάνω ολοκληρωμάτων νοούνται με την Κύρια Τιμή τους κατά *Cauchy*.

Ένα πολύ σημαντικό βήμα για τη συνέχεια της μεθόδου είναι η διαδικασία της διακριτοποίησης του συνόρου του χωρίου [4] για να απλοποιηθεί ο υπολογισμός των αγνώστων μεγεθών u^* και q^* . Τα συνοριακά στοιχεία μπορεί να είναι σταθερά δηλαδή οι τιμές των u και q μπορεί να είναι σταθερές κατά μήκος του κάθε στοιχείου και ίσες με τις τιμές στο μέσο του εκάστοτε στοιχείου που είναι ο κόμβος που θα θεωρήσουμε. Άλλο είδος είναι γραμμικά στοιχεία με τους κόμβους τα άκρα τους, τέλος υπάρχουν και τα μη γραμμικά (καμπύλες 2^{ου} βαθμού) στοιχεία που απαιτούν ένα πρόσθετο κόμβο στο μέσο εκτός από τους κόμβους στα άκρα του στοιχείου (*Sladek and Sladek, 1998, Lifanov and Lifanov, 2004*).

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.17), αφού έχουμε διακριτοποιήσει το σύνορο σε N στοιχεία του πρώτου είδους συνοριακών στοιχείων, πριν εφαρμόσουμε τις

αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες και απαιτώντας το σημείο στο οποίο εφαρμόζεται η θεμελιώδης λύση να είναι ένας από τους θεωρούμενους κόμβους, έστω ο x_i , το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι:

$$\frac{1}{2}u(x_i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (3.18)$$

Γ_j είναι το σύνορο για το κάθε στοιχείο, ενώ ο συντελεστής του $u(x_i)$ είναι 1/2 αφού το σύνορο θεωρείται λείο (μιας και ο κόμβος βρίσκεται στο μέσο του στοιχείου).

Εισάγουμε εδώ το συμβολισμό $u(x_j) = u_j$ και $q(x_j) = q_j$ για λόγους απλότητας [4].

Παρατηρώντας τώρα ότι τα μεγέθη $u(x_j)$ και $q(x_j)$ είναι σταθερά κατά μήκος κάθε στοιχείου μπορούν να βγουν από τα παραπάνω ολοκληρώματα, καταλήγοντας έτσι στη σχέση:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right) q_j \quad (3.19)$$

Έτσι τα ολοκληρώματα που πρέπει να υπολογίσουμε πάνω στα στοιχεία απλοποιούνται αρκετά. Τα δύο αυτά ολοκληρώματα συσχετίζουν τον κόμβο i όπου εφαρμόζεται η θεμελιώδης λύση με οποιονδήποτε άλλο κόμβο j . Αυτά τα ολοκληρώματα αναφέρονται καμιά φορά ως συντελεστές επιρροής [9]. Θα τους ονομάσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.20)$$

Και η εξίσωση (3.19) γράφεται τελικά:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N (\hat{H}_{ij}) u_j = \sum_{j=1}^N (G_{ij}) q_j \quad (3.21)$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την (3.21) με το i να εναλλάσσεται από το 1 ως το N παίρνουμε ένα σύστημα εξισώσεων.

Ορίζοντας τώρα τον H_{ij} ως εξής [3, 6]:

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & \text{αν } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}, & \text{αν } i = j \end{cases} \quad (3.22)$$

η εξίσωση (3.21) μπορεί να γραφτεί απλούστερα:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (3.23)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GQ} \quad (3.24)$$

Τέλος κάνοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ώστε όλα τα άγνωστα μεγέθη u και q να βρεθούν στο 1^ο μέλος και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που αγνοήσαμε προηγουμένως, και μας δίνουν έναν αριθμό γνωστών τιμών για τα u και q , η μορφή (3.24) καταλήγει στην :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (3.25)$$

Το άγνωστο διάνυσμα \mathbf{X} περιέχει ταυτόχρονα ως αγνώστους το u και την παράγωγο του, q , κάτι που δε συναντάται στα πεπερασμένα στοιχεία, γεγονός που κάνει τη μέθοδο να υπερτερεί έναντι των πεπερασμένων στοιχείων.

Η επίλυση της εξίσωσης (3.25) μπορεί να γίνει εύκολα με διάφορες αριθμητικές μεθόδους και να υπολογιστούν οι άγνωστες συνοριακές τιμές [9]. Έχοντας υπολογίσει τις άγνωστες τιμές μπορούμε να υπολογίσουμε στη συνέχεια την τιμή του u (ή των παραγώγων του) για κάθε εσωτερικό σημείο x_i του χωρίου, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.14) στη μορφή (Brebbia et al., 1998):

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (3.26)$$

Η θεμελιώδης λύση θεωρούμε τώρα ότι ενεργεί στο εσωτερικό σημείο i τώρα κι όλες οι τιμές για τα u και q θεωρούνται γνωστές, οπότε το μόνο που απομένει είναι ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων όπως ορίζονται στη σχέση (3.20).

$$u_i = \sum_{j=1}^N (G_{ij}) q_j - \sum_{j=1}^N (\hat{H}_{ij}) u_j \quad (3.27)$$

Για κάθε διαφορετικό εσωτερικό σημείο τα ολοκληρώματα πρέπει να υπολογίζονται εκ νέου.

Έχοντας υπολογίσει το u για κάποιο εσωτερικό σημείο, ο υπολογισμός των q (διανυσματικών ροών) σε δύο διευθύνσεις x_1, x_2 για κάθε εσωτερικό σημείο γίνεται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} (q_{x_1})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_i = \int_{\Gamma} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right)_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_1} \right)_i d\Gamma \\ (q_{x_2})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_i = \int_{\Gamma} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right)_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_2} \right)_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.28)$$

Οι παράγωγοι υπολογίζονται μόνο για τα u^* και q^* καθώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές γύρω από το ζητούμενο σημείο. Αν τώρα διακριτοποιήσουμε όπως πριν σε στοιχεία οι εκφράσεις που παίρνουμε είναι [4]:

$$\begin{aligned} (q_{x_1})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_i = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right)_i d\Gamma \right) q_j - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_1} \right)_i d\Gamma \right) u_j \\ (q_{x_2})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_i = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right)_i d\Gamma \right) q_j - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_2} \right)_i d\Gamma \right) u_j \end{aligned} \quad (3.29)$$

Λαμβάνοντας τώρα τη θεμελιώδη λύση από την (3.13) για τη δισδιάστατη περίπτωση έχουμε για τα ολοκληρωτέα μεγέθη τις εξής εκφράσεις:

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right)_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (-\ln r) = \frac{1}{2\pi r} r_{,k} \quad (3.30)$$

και

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_1} \right)_i &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{1}{r} (r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2) \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi r^2} \left[(2r_{,1}^2 - 1) n_1 + r_{,1} r_{,2} n_2 \right] \end{aligned} \quad (3.31\alpha)$$

Ομοίως

$$\left(\frac{\partial q^*}{\partial x_2} \right)_i = -\frac{1}{2\pi r^2} \left[(2r_{,2}^2 - 1) n_2 + r_{,1} r_{,2} n_1 \right] \quad (3.31\beta)$$

όπου n_1, n_2 είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος. Η ολοκλήρωση των εκφράσεων (2.31) μπορεί να γίνει αριθμητικά χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Gauss*.

Γενικά ο υπολογισμός των εκφράσεων (3.20) μπορεί να γίνει αριθμητικά χρησιμοποιώντας βασικούς προσεγγιστικούς κανόνες ολοκλήρωσης όπως του *Gauss* για την περίπτωση που $i \neq j$. Όταν όμως $i = j$ λόγω της ιδιομορφίας που δημιουργείται απαιτούνται πιο περίπλοκες προσεγγίσεις ή κανόνες ανώτερης τάξης (*Hills et al.*, 1989, *Tsamaspnyros and Theocharis*, 1980b). Στην περίπτωση όμως των σταθερών στοιχείων η προσέγγιση μπορεί να γίνει με αναλυτικές μεθόδους.

Εξετάζοντας το στοιχείο \hat{H}_{ii} βλέπουμε ότι είναι ταυτοτικά μηδέν λόγω του ότι το μοναδιαίο n είναι κάθετο στην τοπική συντεταγμένη του στοιχείου, έτσι έχουμε:

$$\hat{H}_{ii} = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \equiv 0 \quad (3.32)$$

Το στοιχείο G_{ii} υπολογίζεται ως εξής:

$$G_{ii} = \int_{\Gamma_i} u^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln \left(\frac{1}{r} \right) d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln r d\Gamma \quad (3.33)$$

Μεταφέροντας τον υπολογισμό πάνω στο στοιχείο, παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μια συμμετρία. Επιπλέον για διευκόλυνση κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών χρησιμοποιώντας την τοπική μεταβλητή ξ που κινείται πάνω στο στοιχείο, η οποία ορίζεται ως :

$$r = \left| \xi \frac{l}{2} \right| \quad (3.34)$$

Επομένως η (3.33) γίνεται:

$$\begin{aligned} G_{ii} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{σημείο1}}^{\text{σημείο2}} \ln r \, d\Gamma = -\frac{1}{\pi} \int_{\text{κόμβος i}}^{\text{σημείο2}} \ln r \, dr = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2} \right) \int_0^1 \ln \left(\xi \frac{l}{2} \right) d\xi \\ \Rightarrow G_{ii} &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2} \right) \left(\ln \left(\frac{l}{2} \right) + \int_0^1 \ln \xi \, d\xi \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{l}{2} \right) \left(\ln \left(\frac{l}{2} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.3. Βασικές Εξισώσεις της Μηχανικής

Θεωρώντας τις βασικές εξισώσεις ισορροπίας για το σώμα έχουμε:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.36)$$

όπου b_i είναι οι δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα (*Timoshenko*, 1930).

Επίσης από την ισορροπία των ροπών και εξαιρώντας διαφορικά ανώτερης τάξης διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{21} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Οι συνιστώσες της τάσης προβάλλονται σε ένα διαφορικό του συνόρου $d\Gamma$ και δημιουργούν διατμητικές τάσεις ή τριβές οι οποίες συμβολίζονται με p_i και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ p_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ p_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

με n_i τις συνιστώσες του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος δηλαδή:

$$n_i = \cos(n, x_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

Οι τριβές αποτελούν τις φυσικές συνοριακές συνθήκες και εφαρμόζονται στο τμήμα Γ_2 του συνόρου, με αποτέλεσμα να ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \overline{p_1} \\ p_2 = \overline{p_2} \\ p_3 = \overline{p_3} \end{array} \right\} \text{πάνω στο τμήμα } \Gamma_2. \quad (3.40)$$

Οι τροπές ορίζονται μέσω των μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.41)$$

των οποίων οι κατανομές κατά κανόνα είναι άγνωστες στο εσωτερικό της πλάκας.

Με $i = j$ να μας δίνουν τις αξονικές τροπές κατά τη διεύθυνση των τριών αξόνων και με $i \neq j$ να μας δίνουν τις γωνιακές τροπές, για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Άρα και ο τανυστής των τροπών είναι συμμετρικός όπως και αυτός των τάσεων.

Είναι εύκολο όμως να κατανοήσουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι πιο εύκολο να διατυπωθούν και να εφαρμοστούν σε όρους μετατοπίσεων παρά τροπών. Επομένως, στο τμήμα Γ_1 οι «ουσιώδεις» συνοριακές συνθήκες διατυπώνονται ως εξής:

$$u_j = \overline{u_j}, \quad j=1,2,3 \quad (3.43)$$

Έχουμε έτσι διατυπώσει τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στα δύο τμήματα Γ_1, Γ_2 που αποτελούν το σύνορο Γ . Οι διατυπώσεις είναι αντίστοιχες και για τα δισδιάστατα προβλήματα.

Πρέπει επίσης να λάβουμε υπόψη και τις καταστατικές εξισώσεις για την γραμμική ελαστικότητα, με χρήση των σταθερών του *Lamé* (*Timoshenko*, 1930) οι οποίες είναι:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.44)$$

$$\text{όπου } \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \quad (3.45)$$

Με αντιστροφή της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (3.46)$$

Η σταθερά του *Lamé* μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας \mathbf{E} , του μέτρου διάτμησης \mathbf{G} και του μέτρου *Poisson* ν με βάση τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbf{G} = \frac{\mathbf{E}}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu\mathbf{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\end{aligned}\quad (3.47)$$

Ως αποτέλεσμα οι εκφράσεις για τις τάσεις και τις τροπές μετασχηματίζονται στις

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathbf{E}}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (3.48)$$

ή

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (3.48')$$

και

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{\mathbf{E}} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{\mathbf{E}} \sigma_{ij} \quad (3.49)$$

Για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε τις απαιτούμενες ολοκληρωτικές εξισώσεις για την ελαστικότητα απαιτείται η γνώση της λύσης του ελαστικού προβλήματος με τις ίδιες ιδιότητες υλικού αλλά λυμένο για χωρίο άπειρης διάστασης στο οποίο επιδρά σημειακό (συγκεντρωμένο) μοναδιαίο φορτίο. Η εύρεση της λύσης αυτής οφείλεται στον *Kelvin*.

Εκφράζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων από την (3.36) και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k}$ παίρνουμε [5]:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.50)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην προηγούμενη σχέση τις τάσεις από τη σχέση τάσεων-τροπών (3.48'):

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ij} \right]$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (3.41):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

παίρνουμε τελικά την έκφραση των εξισώσεων ισορροπίας ή αλλιώς εξισώσεις *Navier* (*Muskhelisvili*, 2010) που είναι:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{j,jl}+u_{l,jj}+\frac{1}{\mu}b_l=0 \quad (3.51)$$

Η λύση που πρότεινε ο *Kelvin* επιτυγχάνεται στην περίπτωση που εφαρμόζεται ένα συγκεντρωμένο φορτίο κατά τη φορά του μοναδιαίου διανύσματος e_l στο σημείο x_i , δηλαδή:

$$b_l = \delta^i e_l. \quad (3.52)$$

Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη λύση είναι το διάνυσμα του *Galerkin* ως αναπαράσταση των μετατοπίσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα \mathbf{G} τέτοιο ώστε να μπορούν να υπολογιστούν από αυτό οι μετατοπίσεις ως εξής:

$$u_j = \mathbf{G}_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)}\mathbf{G}_{m,jm} \quad (3.53)$$

Αντικαθιστώντας τελικά τις (3.52), (3.53) στην (3.51) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{G}_{l,mmjj} + \frac{1}{\mu}\delta^i e_l = 0 \quad (3.54)$$

ή

$$\nabla^2(\nabla^2 \mathbf{G}_l) + \frac{1}{\mu}\delta^i e_l = 0 \quad (3.54')$$

$$\text{Ορίζοντας το μέγεθος } F_l = \nabla \mathbf{G}_l \quad (3.55)$$

η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην:

$$\nabla^2(F_l) + \frac{1}{\mu}\delta^i e_l = 0 \quad (3.56)$$

Η σχέση (3.56) μοιάζει πολύ με τη σχέση (3.9) που δίνει τη θεμελιώδη λύση επομένως η λύση της για τη δισδιάστατη περίπτωση είναι η:

$$F_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad (3.57)$$

κατ' αναλογία με τη θεμελιώδη λύση (3.13) (*Chen and Zhou, 1992, Brebbia et al., 1984*).

Τελικά, η ζητούμενη λύση για το \mathbf{G} γνωρίζοντας ότι:

$$\mathbf{G}_l = \mathbf{G} \cdot e_l \quad (3.58)$$

καταλήγει να είναι:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.59)$$

Θεωρώντας τώρα κάθε φορτίο ως ανεξάρτητο μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{G}_{lk} = \mathbf{G}\delta_{lk} \quad (3.60)$$

με \mathbf{G}_{lk} να είναι η k συνιστώσα του διανύσματος \mathbf{G} σε οποιοδήποτε σημείο όταν το φορτίο εφαρμόζεται στο σημείο "l" κατά τη διεύθυνση l [9]. Η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο για το σημειακό φορτίο και θεωρώντας κάθε διεύθυνση ως ανεξάρτητη γράφεται ως:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad (3.61)$$

Επομένως, ορίζουμε την παρακάτω ποσότητα:

$$u_{lk}^* = \mathbf{G}_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \mathbf{G}_{lm,km} \quad (3.62)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (3.59) και (3.60) στη σχέση (3.62) παίρνουμε τη θεμελιώδη λύση συναρτήσεων των μετατοπίσεων η οποία είναι:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\ell n\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (3.63)$$

όπου κατά τον γνωστό συμβολισμό:

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} \quad (3.64)$$

που όμως λόγω του ότι αποτελούν τις προβολές του r στις 2 διευθύνσεις (αφού μιλάμε για το δισδιάστατο πρόβλημα), έτσι είναι προφανές:

$$r_{,l} = \frac{r_l}{r} \quad (3.65)$$

Οι τάσεις σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο μπορούν να εκφραστούν από τις σχέσεις τάσεων-τροπών (3.48) και τροπών-μετατοπίσεων (3.41) ως εξής:

$$\sigma_{kj}^* = S_{lkj}^* e_l \quad (3.66)$$

Με τον πυρήνα S_{lkj}^* να έχει προσδιοριστεί με τη βοήθεια του u_{lk}^* [6].

Οι τριβές ή οι επιφανειακές δυνάμεις πάνω στο σύνορο Γ με κάθετο διάνυσμα \vec{n} με χρήση της σχέσης (3.66) και της εξίσωσης (3.40) (γραμμικής με την χρήση δεικτών) γράφονται με τη μορφή [12]:

$$p_k^* = p_{lk}^* e_l \quad (3.67)$$

όπου στη δισδιάστατη περίπτωση έχουμε:

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (3.68)$$

3.4. Εξαγωγή των τύπων Συνοριακού Ολοκληρώματος

Οι εξισώσεις που διέπουν την Ελαστικότητα θα εξαχθούν σε αυτή την παράγραφο χρησιμοποιώντας σταθμισμένα υπόλοιπα. Το γεγονός ότι κάποιοι όροι που θεωρούμε ότι προσεγγίζουν την αληθή τιμή μπορεί να μην προσεγγίζουν δεν αφαιρεί από την αξιοπιστία της χρήσης αυτής της μεθόδου σε μια γενική μέθοδο εξαγωγής των εν λόγω εκφράσεων. Οι θεωρήσεις είναι παρόμοιες με αυτές στην περίπτωση των δυνατών έργων.

Λαμβάνοντας υπόψη καταρχάς ότι επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα που ενέχονται στην αριθμητική προσέγγιση των βασικών εξισώσεων της Ελαστικότητας δηλαδή:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \text{ εντός του χωρίου } \Omega \quad (3.70)$$

οι οποίες συνήθως πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες [4]:

i. Ουσιώδεις συνθήκες (περιορισμοί στις μετατοπίσεις)

$$u_k = \bar{u}_k \text{ πάνω στην καμπύλη } \Gamma_1 \quad (3.71)$$

ii. Φυσικές συνθήκες

$$p_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{p}_k \text{ πάνω στην καμπύλη } \Gamma_2 \quad (3.72)$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει μόνο η ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (3.70) μπορούμε να εισάγουμε εξισώσεις βάρους u_k^* (παρόμοιες με τις μετατοπίσεις) και να ορθογωνοποιήσουμε το αποτέλεσμα ως εξής [3]:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad (3.73)$$

Αν στην παραπάνω σχέση ολοκληρώσουμε κατά μέρη στον 1^ο όρο και ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (3.74)$$

Ολοκληρώνοντας επίσης κατά μέρη μπορεί κάποιος να βρει τη συζυγή έκφραση της (3.70) δηλαδή:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma \quad (3.75)$$

Αυτή η έκφραση αντιστοιχεί στο Θεώρημα του *Betti* (*Chen and Zhou, 1992*) (παρατηρούμε ότι $\sigma_{kj,j}^* = -b_k$ που χρησιμοποιείται ως εφαλτήριο για τη διατύπωση του Συνοριακού Ολοκληρώματος).

Παρατηρείται ότι στην παραπάνω εξίσωση οι όροι του δεξιού μέρους υπολογίζονται πάνω στο σύνορο Γ . Υποθέτοντας τώρα ότι στο σύνορο χωρίζεται σε δύο τμήματα Γ_1, Γ_2 , [9] τέτοια ώστε σε καθένα από αυτά να ισχύουν οι συνθήκες που

διατυπώνονται στις εκφράσεις (3.71) και (3.72) αντίστοιχα, η εξίσωση (3.75) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.76)$$

Τα μεγέθη με την παύλα δείχνουν γνωστές τιμές.

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε ξανά κατά μέρη προσπαθώντας να φτάσουμε στην εξίσωση (3.73) αλλά το αποτέλεσμα είναι λίγο διαφορετικό έχοντας εφαρμόσει τις συνοριακές συνθήκες. Ολοκληρώνοντας δύο φορές το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.76) παίρνουμε (Katsikadelis, 2002):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (3.77)$$

Αυτή η έκφραση είναι μια γενική σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιτευχθεί η εξαγωγή των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Έχοντας τώρα θέσει ένα αρχικό σημείο για τη μελέτη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση βάρους για την εξίσωση (3.75) τη θεμελιώδη λύση όπως έχει παρουσιαστεί προηγουμένως στην περίπτωση $b_l = \delta^i$ ενός σημειακού φορτίου συγγραμμικού με το κάθετο διάνυσμα e_l δηλαδή:

$$\sigma_{lj,j} + \delta^i e_l = 0 \quad (3.78)$$

Η θεμελιώδης λύση γράφεται όπως και πριν:

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_{lk}^* e_l \\ p_k^* &= p_{lk}^* e_l \end{aligned}$$

Έτσι το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.75) για μια συγκεκριμένη διεύθυνση e_l του μοναδιαίου φορτίου παίρνει τη μορφή:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lj,j}^* u_l d\Omega = - \int_{\Omega} \delta^i u_l e_l d\Omega = -u_l^i e_l \quad (3.79)$$

όπου u_l^i είναι η τιμή της μετατόπισης στο σημείο i κατά τη διεύθυνση l .

Η εξίσωση (3.75) μπορεί να γραφεί τώρα ώστε να συμπεριλάβει τις 3 συνιστώσες της μετατόπισης στο σημείο i παίρνοντας τις 3 διευθύνσεις του σημειακού φορτίου στο i ξεχωριστά δίνοντας:

$$u_l^i + \int_{\Gamma_1} p_{lk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{lk}^* u_k d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_1} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_{lk}^* \bar{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.80)$$

Όταν εφαρμόζουμε ένα μοναδιαίο σημειακό φορτίο κατά μια συγκεκριμένη διεύθυνση l , οι τριβές και οι μετατοπίσεις σε οποιοδήποτε σημείο του χωρίου έχουν 2 ή 3 συνιστώσες ενώ οι όροι της μορφής $\sigma_{lj,j}$ είναι διάφοροι του μηδενός μόνο κατά τη διεύθυνση του φορτίου. Έτσι για μια δεδομένη κατεύθυνση l στο σημείο εφαρμογής του φορτίου ο 1^{ος} όρος της (3.75) δίνει μόνο μετατοπίσεις κατά τη διεύθυνση του φορτίου, ωστόσο οι υπόλοιποι όροι περιέχουν γινόμενα όλων των συνιστωσών. Η εξίσωση (3.80) μπορεί να γραφεί με ένα πιο περιεκτικό τρόπο αν εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες σε επόμενο στάδιο, παίρνοντας τη μορφή:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.81)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται ταυτότητα του *Somigliana* (*Hills et al*, 1989, *Chen and Zhou*, 1992, *Brebbia et al*, 1984) και περιγράφει τις μετατοπίσεις και τις τριβές σε κάθε εσωτερικό σημείο συναρτήσει των συνοριακών τιμών.

3.4.1. Συνοριακά σημεία

Η εξίσωση (3.81) μπορεί να δώσει τις μετατοπίσεις σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο μόνο εφόσον έχουν προσδιοριστεί οι τιμές στο σύνορο (*Brebbia and Doinguez*, 1989, *Chen and Zhou*, 1992). Μολαταύτα η εξίσωση (3.81) ισχύει για κάθε εσωτερικό σημείο οπότε αρκεί να την οδηγήσουμε στο σύνορο. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένα σύστημα εξισώσεων από τις οποίες προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις στο σύνορο.

Αν το σύνορο είναι λείο στο σημείο i μπορούμε να επεκτείνουμε το χωρίο κατά ένα ημισφαίριο με ακτίνα ε και κέντρο το i , το οποίο ημισφαίριο θα το πάρουμε στο όριο δηλαδή με $\varepsilon \rightarrow 0$. Παίρνοντας πρώτα το 1ο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (3.81) έχουμε :

$$\int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} \quad (3.82)$$

Στο 2ο μέλος, το 1ο ολοκλήρωμα οριακά μας δίνει ένα ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο Γ ενώ το 2ο μπορεί να γραφεί ως:

$$p_k^i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (3.83)$$

Γνωρίζοντας όμως ότι η θεμελιώδης λύση είναι τάξης $1/\varepsilon$ ενώ το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι τάξης ε^2 καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ το παραπάνω ολοκλήρωμα μηδενίζεται κι έτσι δεν επηρεάζεται από την ιδιομορφία του i (*Tsamaphyros and Theotokoglou*, 2008).

Γράφοντας με παρόμοιο τρόπο το 1ο μέλος της (3.81) έχουμε:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} \quad (3.84)$$

Παίρνοντας τώρα το 2ο ολοκλήρωμα του 2ου μέλους και γράφοντας το ως:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} = u_k^i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* d\Gamma \right\} \quad (3.85)$$

παρατηρούμε ότι οι τιμές της p_{lk}^* είναι τάξης $1/\varepsilon^2$ ενώ το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι τάξης ε^2 δίνοντας όχι μηδέν αλλά ένα σταθερό όρο. Για να τον προσδιορίσουμε αντικαθιστούμε την p_{lk}^* από την εξίσωση (3.68) κι ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} \delta_{lk} \quad (3.86)$$

Επομένως οριακά το αριστερό μέλος της (3.84) δίνει:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{lk} u_k^i = \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_k^i \quad (3.87)$$

με το ολοκλήρωμα πάνω στο Γ να ορίζεται με την έννοια της Κύριας Τιμής κατά *Cauchy*.

Τελικά, για σημεία πάνω στο σύνορο η (3.81) μετασχηματίζεται στην:

$$c_{lk}^i u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.88)$$

$$\text{όπου } c_{lk}^i = \frac{1}{2} \delta_{lk}.$$

3.4.2. Διατύπωση Εξισώσεων Συνοριακών Στοιχείων

Για να επιλύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση αριθμητικά, το σύνορο θα διακριτοποιηθεί σε μια σειρά στοιχείων κατά μήκος των οποίων οι μετατοπίσεις κι οι τριβές γράφονται συναρτήσει των τιμών τους στους κόμβους. Έτσι επιτυγχάνεται η δημιουργία ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με την επίλυση των οποίων μπορούν ακολούθως να προσδιοριστούν (κατά προσέγγιση) οι συνοριακές τιμές.

Ορίζουμε τώρα τα μεγέθη u και p , για τα στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε, ως:

$$\begin{aligned} u &= \Phi u^j \\ p &= \Phi p^j \end{aligned} \quad (3.89)$$

με τις τιμές στους κόμβους να είναι u^j και p^j διάστασης $3 \times Q$ (ή $2 \times Q$) όπου Q ο αριθμός των κόμβων (Katsikadelis, 2002).

Ο πίνακας παρεμβολής Φ περιέχει συναρτήσεις σχήματος όμοιες με τις βασικές των δισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και είναι της μορφής:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_Q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_Q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_Q \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε τις σωματικές δυνάμεις με τη μορφή διανύσματος:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

Τέλος γράφοντας τις συνιστώσες της θεμελιώδους λύσης σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

και

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (3.88) σε τανυστική μορφή:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* p d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* b d\Omega \quad (3.94)$$

όπου $c^i = \frac{1}{2}$ για τα σημεία που το σύνορο είναι λείο. Σε αντίθετη περίπτωση, το c^i είναι ένας 3×3 (ή 2×2) πίνακας.

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην (3.94) έχουμε την αντίστοιχη έκφραση για έναν κόμβο:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right) u^j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right) p^j + \sum_{s=1}^M \left(\int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* b d\Omega \right) \quad (3.95)$$

με N τον αριθμό των συνοριακών στοιχείων, M τον αριθμό των εσωτερικών στοιχείων για τον υπολογισμό των σωματικών δυνάμεων και u^j, p^j οι τιμές των αντιστοίχων μεγεθών στο στοιχείο j .

Στην περίπτωση όπου εκτός από το καρτεσιανό εκφράσουμε τις συντεταγμένες και σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων είναι απαραίτητο να εκφραστούν και τα αντίστοιχα μεγέθη της (3.95) στις τοπικές συντεταγμένες. Αν το τοπικό σύστημα είναι το $\xi_1 \xi_2 \eta$ τότε έχουμε:

$$i. \quad d\Omega = |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \quad (3.96)$$

$$ii. \quad d\Gamma = |\mathbf{G}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.97)$$

όπου $|\mathbf{J}|, |\mathbf{G}|$ οι αντίστοιχες Ιακωβιανές. Γνωρίζοντας ότι ισχύει:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (3.98)$$

όπου \mathbf{x}^j οι συντεταγμένες των κόμβων, η τελική μορφή της (3.95) είναι:

$$\begin{aligned} c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi |\mathbf{G}| d\xi_1 d\xi_2 \right) \mathbf{u}^j \\ = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi |\mathbf{G}| d\xi_1 d\xi_2 \right) \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left(\int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \right) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε κάποια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης για να προσδιορίσουμε τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση.

$$\begin{aligned} c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{p}^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{u}^j \\ = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{m=1}^r w_m (\mathbf{u}^* \mathbf{b})_m |\mathbf{J}| \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

όπου w_k είναι οι συναρτήσεις – «βάρη» της μεθόδου που αντιστοιχούν στα σημεία ολοκλήρωσης, l ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης πάνω στο σύνορο ενώ r ο αριθμός των εσωτερικών σημείων ολοκλήρωσης. Επίσης ξεχωριστά πρέπει να υπολογιστούν τα μεγέθη $(\mathbf{p}^* \Phi)$, $(\mathbf{u}^* \Phi)$ και $(\mathbf{u}^* \mathbf{b})$ σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης.

Ισοδύναμα στη μορφή (3.100) μπορούμε να γράψουμε [4]:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{N'} \widehat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^{M'} \mathbf{B}^{is} \quad (3.101)$$

με N' να είναι ο αριθμός των κόμβων, ενώ οι πίνακες \mathbf{H}, \mathbf{G} και \mathbf{B} ορίζονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}
\widehat{H}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{p}^* \Phi_q d\Gamma \\
\mathbf{G}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^* \Phi_q d\Gamma \\
\mathbf{B}^{is} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* b d\Omega
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Το άθροισμα περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία στα οποία ανήκει ο κόμβος j και q είναι ο αριθμός της σειράς του κόμβου μέσα στο στοιχείο t . Τα αποτελέσματα απλοποιούνται για σταθερά στοιχεία αφού $t \equiv j$ και Φ_q είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Ορίζοντας τώρα:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^{ij} &= \widehat{H}^{ij}, \quad \alpha \nu \ i \neq j \\
\mathbf{H}^{ij} &= \widehat{H}^{ij} + c^i, \quad \alpha \nu \ i = j
\end{aligned} \tag{3.103}$$

η εξίσωση (1.101) παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j=1}^{N'} \mathbf{H}^{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{G}^{ij} p_j + \sum_{s=1}^{M'} \mathbf{B}^{is}$$

ή σε μορφή πινάκων για όλους τους κόμβους:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{B} \tag{3.104}$$

Αναδιατάσσοντας τώρα τις στήλες των πινάκων που περιέχουν μετατοπίσεις και τριβές μπορούμε να εισάγουμε τις συνοριακές συνθήκες. Έτσι μπορούμε να βάλουμε όλους τους αγνώστους σε ένα διάνυσμα \mathbf{X} καταλήγοντας σε ένα σύστημα εξισώσεων:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{3.105}$$

(στο διάνυσμα \mathbf{F} ενσωματώνεται και το διάνυσμα \mathbf{B}).

Επιστρέφοντας στον πίνακα \mathbf{H} παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του περιέχουν σταθερές c ο υπολογισμός των οποίων είναι αρκετά δύσκολος αλλά επιτυγχάνεται αν λάβουμε υπόψη παραδοχές για το άκαμπτο σώμα. Αν θεωρήσουμε σε ένα άκαμπτο σώμα τη μετατόπιση κατά μια διεύθυνση q τότε οι τριβές καθώς και οι σωματικές δυνάμεις θα είναι μηδέν άρα η (3.104) μας δίνει:

$$\mathbf{H}\mathbf{I}^q = \mathbf{0} \tag{3.106}$$

με το διάνυσμα \mathbf{I}^q να συμβολίζει μοναδιαία μετατόπιση στη διεύθυνση q και μηδενική σε όλες τις άλλες. Εφόσον πρέπει η παραπάνω σχέση να ικανοποιείται για κάθε μετατόπιση του άκαμπτου σώματος καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{H}^{ii} = - \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{H}^{ij}, \text{ με } j \neq i \tag{3.107}$$

από όπου μπορούν να υπολογιστούν οι ζητούμενες σταθερές. Οι παραπάνω παραδοχές ισχύουν σε κλειστό χωρίο και αλλάζουν σημαντικά για τα άπειρα χωρία (Katsikadelis, 2002).

Έχοντας υπολογίσει τις μετατοπίσεις στο σύνορο μπορούμε από την (3.95) να υπολογίσουμε τη μετατόπιση ενός εσωτερικού σημείου γράφοντας την ως:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right) p^j - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right) u^j + \sum_{s=1}^M \left(\int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right) \quad (3.108)$$

ή εκφράζοντας τη μετατόπιση συναρτήσει των τιμών στους κόμβους μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{G}^{ij} p^j - \sum_{j=1}^{N'} \widehat{\mathbf{H}}^{ij} u^j + \sum_{s=1}^{M'} \mathbf{B}^{is} \quad (3.109)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η μόνη δυσκολία συνίσταται στους υπολογισμούς των όρων \mathbf{B}^{is} που περιέχουν ιδιομορφίες αφού είναι ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο το οποίο περιέχει το σημείο i . Οι ιδιομορφίες παρόλα αυτά είναι μικρότερης τάξης από τα συνοριακά ολοκληρώματα και μπορούν να υπολογιστούν με μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης.

Για ένα ισότροπο μέσο οι εσωτερικές τάσεις μπορούν να υπολογιστούν εισάγοντας τις εκφράσεις των τροπών (συναρτήσει των μετατοπίσεων) στις σχέσεις τάσεων – τροπών. Έτσι οι σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.110)$$

Αντικαθιστώντας την u από την (3.108) το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} p_k d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} \mathbf{b}_k d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3.111)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί πιο περιεκτικά με τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} \mathbf{b}_k d\Omega - \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma \quad (3.112)$$

όπου οι D_{kij}, S_{kij} είναι τανυστές 3^{ης} τάξης [4, 9]:

$$D_{kij} = \frac{1}{r\alpha} \left\{ (1-2\nu) \left(\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right) + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (3.113)$$

$$D_{kij} = \frac{\mu}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \gamma_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\ \left. \beta \nu (n_{i,r} r_{,j} r_{,k} + n_{,j} r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (\beta n_{k,r} r_{,i} r_{,j} + n_{,j} \delta_{ik} + n_{,i} \delta_{jk}) \right. \\ \left. - (1-4\nu) n_{,k} \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (3.114)$$

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και για 2 και για 3 διαστάσεις με κατάλληλες τριάδες α, β, γ ((1,2,4) για τις 2 διαστάσεις, (2,3,5) για τις 3). Η εξίσωση (3.112) διακριτοποιείται χωρίζοντας το σύνορο Γ και αθροίζοντας πάνω στις επιφάνειες των στοιχείων, θεωρώντας τις αντίστοιχες παρεμβολές για τα u_k και p_k . Η δυσκολία εμφανίζεται όταν προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τις τάσεις στο σύνορο καθώς και μεν οι μετατοπίσεις και οι τριβές στο σύνορο έχουν προσδιοριστεί από την άλλη όμως αν προσπαθήσουμε να εξάγουμε τις τάσεις στο σύνορο από τους παραπάνω τύπους απλώς με το να τους υπολογίσουμε οριακά «κοντά» στο σύνορο εμφανίζονται ιδιομορφίες της μορφής: $1/r^2$ ή $1/r^3$ που δυσχεραίνουν αρκετά τον υπολογισμό και πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην αντιμετώπιση τους.

Για να παρακάμψουμε την εν λόγω δυσκολία επιστρέφουμε στη βασική σχέση τάσεων τροπών χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τον υπολογισμό των συνοριακών τιμών των μετατοπίσεων και των τριβών.

Για την περίπτωση των τριών διαστάσεων και ανάγοντας τον υπολογισμό σε ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma'_{13} &= \sigma'_{31} = p'_1 \\ \sigma'_{23} &= \sigma'_{32} = p'_2 \\ \sigma'_{33} &= p'_3 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι η επέκταση των συνοριακών τιμών πάνω σε όλο το στοιχείο μπορεί να γραφεί (ως προς τις τοπικές συντεταγμένες) με τη μορφή:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{R}^T \Phi \mathbf{u}_j \quad (3.116)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{R} είναι ο πίνακας μετατροπής συντεταγμένων από το καθολικό στο τοπικό σύστημα.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις τροπές από τους τύπους:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} \right), \quad i, j = 1, 2 \quad (3.117)$$

Η τιμή της ε'_{ij} εξαρτάται από τις παραγώγους των συναρτήσεων σχήματος καθώς και από τις μετατοπίσεις στους κόμβους.

Υπολογίζουμε τώρα τις τάσεις:

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = 2\mu\varepsilon'_{12} \\ \sigma'_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\sigma'_{33} + 2\mu(\varepsilon'_{11} + \nu\varepsilon'_{22})] \\ \sigma'_{22} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\sigma'_{33} + 2\mu(\varepsilon'_{22} + \nu\varepsilon'_{11})]\end{aligned}\quad (3.118)$$

ενώ για δισδιάστατα προβλήματα οι αντίστοιχες σχέσεις είναι:

$$\begin{aligned}\sigma'_{12} &= \sigma'_{21} = p'_1 \\ \sigma'_{22} &= p'_2 \\ \varepsilon'_{11} &= \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\end{aligned}\quad (3.119)$$

και

$$\sigma'_{22} = \frac{1}{1-\nu} (\nu\sigma'_{22} + 2\mu\varepsilon'_{11}) \quad (3.121)$$

3.5. Συνοριακά Στοιχεία έναντι πεπερασμένων

Σε πάρα πολλές εφαρμογές τα πεπερασμένα στοιχεία δημιουργούσαν προβλήματα όπως μεγάλο υπολογιστικό κόστος κάτι που έκανε τους υπολογισμούς πολύ χρονοβόρους και δυσκόλευε την ανάπτυξη κατάλληλων κωδίκων για το κάθε ξεχωριστό πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση η κατάτμηση σε στοιχεία έπρεπε να μεταβάλλεται, δημιουργώντας επιπλέον δυσκολίες. Ακόμη τα στοιχεία που χρησιμοποιούνταν έπρεπε να είναι ίδιας διάστασης με το πρόβλημα κάτι που δημιουργεί μεγάλη πολυπλοκότητα στους υπολογισμούς εισάγοντας ένα μεγάλο πλήθος μεταβλητών που πρέπει να υπολογιστούν στο προς επίλυση πρόβλημα. Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί την ανάγκη είτε μικρότερης ακρίβειας στη λύση, είτε υπολογισμούς για μικρότερα τμήματα της κατασκευής. Το γεγονός αυτό μπορεί να δυσχεράνει τη σύγκριση αποτελεσμάτων πρακτικών πειραματικών μεθόδων με αυτά των προσεγγιστικών υπολογιστικών μεθόδων, ή ακόμη να καλύψει το σφάλμα ή την αδυναμία μιας υπολογιστικής μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

Ένα άλλο πρόβλημα που παρατηρείται είναι η αδυναμία να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων σε κάποιες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα φορείς άπειρης διάστασης ή συγκέντρωσης τάσεων μέσα στο χωρίο καθώς λόγω των παραδοχών που γίνονται σε αυτές τις μεθόδους το αποτέλεσμα απέχει αρκετά τόσο από το πραγματικό όσο και από το θεωρητικό αποτέλεσμα.

Πολλές φορές βέβαια ένας κατάλληλος συνδυασμός των δύο μεθόδων μπορεί να είναι πιο «επικερδής», εκμεταλλευόμενοι τη δυνατότητα επίλυσης διαφορετικών ειδών προβλημάτων που εμφανίζονται μέσα την ίδια κατασκευή.

4. Στοιχεία Αριθμητικής Ανάλυσης – Αριθμητικές Τεχνικές

4.1. Αριθμητικές τεχνικές άρσης των ιδιομορφιών

Είναι γνωστό ότι η ύπαρξη ιδιομορφιών (ασυνεχειών) περιπλέκει την αριθμητική επίλυση των ΙΟΕ σε σχέση με την κλασική μέθοδο ολοκλήρωσης. Σε αυτήν την παράγραφο δίνονται δύο αριθμητικές μέθοδοι για να αρθούν οι ιδιομορφίες εξαιτίας συγκεντρωμένων φορτίων ή ροπών. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η λύση μιας εξίσωσης της μορφής (1.5) περιέχει ιδιομορφίες (πόλους). Βλέπουμε ότι οι ιδιομορφίες εμφανίζονται ακόμη και στην περίπτωση που η ΙΟΕ είναι της μορφής (1.4) δηλαδή όταν περιέχει έναν ομαλό όρο Kg . Σε αυτήν την περίπτωση η ΙΟΕ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$K_0(g_0 + g_1 + g_2 + \dots) + \lambda K(g_0 + g_1 + g_2 + \dots) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad (4.1)$$

με $g_i = w\varphi_i$, ($i=0,1,2,\dots$) να είναι οι λύσεις των κυρίαρχων εξισώσεων:

$$K_0 g_i = f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.2)$$

Επομένως οι g_i υπολογίζονται από τους τύπους (1.23) ή (1.27) με $a^* = 0$ και $w(x) = 1$ στην περίπτωση που το σύνορο L είναι κλειστή καμπύλη. Υποθέτοντας επίσης ότι:

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad (4.3)$$

όπου $f_0(x)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση και f_i , ($i=1,2,\dots,n$) είναι γενικευμένες συναρτήσεις οφειλόμενες στα συγκεντρωμένα φορτία ή στις συγκεντρωμένες ροπές σε διαφορετικά σημεία του συνόρου L . Η συνάρτηση διόρθωσης g_0 δίνεται από τη λύση της παρακάτω εξίσωσης (*Tsamaphyros and Theocaris, 1980*):

$$K_0 g_0 + \lambda K g_0 = f_0^* \quad (4.4)$$

με

$$g_0 = g_0 - (g_1 + g_2 + \dots + g_n) = g - g^* \quad (4.5)$$

και

$$f_0^* = f_0 - \lambda K g^* \quad (4.6)$$

Η συνάρτηση f_0^* στην εξίσωση (4.6) είναι μια τελείως ομαλή συνάρτηση έτσι η επίλυση της εξίσωσης (4.6) δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα ως προς τον υπολογισμό της g_0 . Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να αφαιρεθούν όλες οι συναρτήσεις f_i που εκφράζουν τις ιδιομορφίες λόγω συγκεντρωμένων φορτίων ή ροπών.

Η αριθμητική λύση της εξίσωσης (4.6) μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας κατάλληλους κανόνες quadrature. Επομένως με την προτεινόμενη διαδικασία αίρονται οι ιδιομορφίες λόγω καταπόνησης από συγκεντρωμένο φορτίο από τη λύση της ΙΟΕ. Επιπλέον, η προτεινόμενη διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για σώματα με καμπυλόγραμμα σύνορα (*Tsamaspnyros and Theocaris, 1980, Hills et al., 1989*).

Μία πολύ χρήσιμη παραλλαγή της προηγούμενης διαδικασίας είναι η ακόλουθη. Επιλέγουμε την g_i ως τη λύση σε κλειστή μορφή μιας ΙΟΕ της μορφής:

$$K_0 g_i + K_1 g_i = f_i \quad (4.7)$$

με K_1 έναν κατάλληλο ομαλό πυρήνα, έτσι ώστε μια λύση κλειστής μορφής για την εξίσωση (4.7) μπορεί να επιτευχθεί στο L . Η συνάρτηση διόρθωσης g_0 δίνεται από τη λύση της παρακάτω εξίσωσης:

$$K_0 g_0 + \lambda K g_0 = f_0^* + K_1 g^* = f_0^{**} \quad (4.8)$$

όπου f_0^{**} είναι ένας απολύτως ομαλός πυρήνας.

Μια ειδική περίπτωση της προηγούμενης παραλλαγής είναι να θεωρήσουμε τις g_1, g_2, \dots, g_n ως λύσεις ενός ημιεπιπέδου φορτισμένου με f_1, f_2, \dots, f_n . Σε αυτήν την περίπτωση η f_0^{**} μπορεί να υπολογιστεί και με τη μέθοδο που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, δηλαδή f_0^{**} είναι οι τάσεις όπως υπολογίζονται από τη λύση του προβλήματος του ημιεπιπέδου κατά μήκος του τμήματος που ανήκει στο σύνορο L (*Tsamaspnyros and Theotokoglou, 2008, Tsamaspnyros and Theocaris, 1980*).

Αντί για τη λύση της Ιδιόμορφης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης που καταπονείται με συγκεντρωμένα φορτία ή συγκεντρωμένες ροπές, η εξίσωση (4.8) μπορεί να δώσει και την Ιδιόμορφη Ολοκληρωτική Εξίσωση που διέπει το πρόβλημα ενός κύκλου, μιας έλλειψης, μιας παραβολής ή μιας ρωγμής που καταπονείται επίσης με συγκεντρωμένα φορτία ή συγκεντρωμένες ροπές (*Chyanbin, 2006*). Προφανώς στην περίπτωση αυτή η ολοκληρωτική εξίσωση θεωρείται κατά μήκος ενός συνόρου L^* το οποίο διαφέρει από το αρχικό L του μέσου που εξετάζεται.

4.2. Τύπος Ολοκλήρωσης Gauss

Έστω $\{y_i\}_{i=1}^p$ τα σημεία στα οποία εφαρμόζονται τα συγκεντρωμένα φορτία. Επομένως η άγνωστη συνάρτηση $g(x)$ εμφανίζει πόλους στα σημεία $\{y_i\}_{i=1}^p$. Έτσι η $g(x)$ μπορεί να γραφεί ως :

$$g(x) = \frac{w(x)p(x)}{R(x)} \quad (4.9)$$

με $R(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\ell - 2 = 1 + p$:

$$R(x)=(x-t)r(x) \text{ και } r(x)=\prod_{i=1}^n(x-y_i) \quad (4.10)$$

Είναι αναγκαίο λοιπόν να βρεθεί ένας τύπος quadrature προσέγγισης για το παρακάτω ιδιόμορφο ολοκλήρωμα:

$$I(f)=\int_{-1}^1 \frac{w(x)p(x)}{R(x)} dx \quad (4.11)$$

4.2.1. Μερικές Βασικές Εξισώσεις

$$\text{Έστω } \pi_n(x)=k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots [7, 11] \quad (4.12)$$

ένα σύνολο ορθογωνίων πολυωνύμων τέτοια ώστε:

$$\int_{-1}^1 w(x)\pi_n(x)\pi_m(x)dx=h_n \delta_{nm} \quad (4.13)$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$\int_{-1}^1 w(x)x^m \pi_n(x)dx, \quad m=1,2,\dots,n-1 \quad (4.14)$$

Αυτά τα πολυώνυμα ικανοποιούν τον επαναληπτικό τύπο τριών όρων (*Tsamaspnyros and Ioakimidis, 1977*):

$$\pi_{n+1}(x)=(A_n x+B_n)\pi_n(x)-C_n \pi_{n-1}(x), \quad x>0 \quad (4.15)$$

$$A_n=\frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n=A_n\left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}}\frac{k'_n}{k_0}\right), \quad C_n=\frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}, \quad C_0=0, \quad n>0 \quad (4.16)$$

με

$$\pi_{-1}=0, \quad \pi_0=1. \quad (4.17)$$

Ορισμός 1. Οι συναρτήσεις $\psi_n(z)$, $n=0,1,2,\dots$ εξ ορισμού περιορίζονται κατά μήκος του πραγματικού άξονα από το -1 ως το 1 .

$$\psi_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{w(x)\pi_n(x)}{x-z} dx, \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.18)$$

Οι συναρτήσεις $\psi_n(z)$ είναι συνεχείς στο $(-1,1)$ και από αριστερά και από δεξιά δηλαδή υπάρχουν οι συνοριακές τιμές

$$\psi_n^\pm(x)=\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \psi_n(x \pm iy). \quad (4.20)$$

Οι σχέσεις που ακολουθούν κατά μήκος του $(-1,1)$ εύκολα αποδεικνύονται με την χρήση των τύπων του *Plemelj* (*Muskhelisvili*, 2008, *Hills et al.*, 1989, *Lifanov and Lifanov*, 2004, *Tahan et al.*, 1993)

$$\psi_n^+(x) - \psi_n^-(x) = \pi i w(x) \pi_n(x), \quad -1 < x < 1 \quad (4.21\alpha)$$

$$\psi_n^+(x) + \psi_n^-(x) = \int_{-1}^1 \frac{w(t) \pi_n(t)}{t-x} dt, \quad -1 < x < 1 \quad (4.21\beta)$$

Απόδειξη: Αρκεί να θέσουμε στους τύπους των *Sohotsky-Plemelj*

$\phi(x) = \pi i w(x) \pi_n(x)$ και το αποτέλεσμα προκύπτει απευθείας

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\pi i w(x) \pi_n(x)}{z-x} dx \quad (4.22)$$

Ορισμός 2. Οι συναρτήσεις $\psi_n(x)$, $n=0,1,2,\dots$ ορίζονται στο $(-1,1)$ ως

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{w(t) \pi_n(t)}{x-t} dt, \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.23)$$

Από τους προηγούμενους ορισμούς διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις $\psi_n(z)$ ικανοποιούν τον ίδιο επαναληπτικό τύπο με την $\pi_n(x)$:

$$\psi_{n+1}(z) = (A_n z + B_n) \psi_n(z) - C_n \psi_{n-1}(z), \quad n > 0 \quad (4.24)$$

Για $n=0$ ο επαναληπτικός τύπος είναι λίγο διαφορετικός, παίρνει τη μορφή:

$$\psi_1(z) = (A_0 z + B_0) \psi_0(z) - \frac{A_0 h_0}{2} \quad (4.25)$$

Τώρα θα πρέπει να βρούμε τα πολυώνυμα $\phi_n(x)$ βαθμού n ως προς x τέτοια ώστε:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{R(x)} \phi_n(x) x^s dx = 0, \quad s < n \quad (4.26)$$

ή

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{R(x)} \phi_n(x) p_s(x) dx = 0 \quad (4.27)$$

για κάθε $p_s(x)$ βαθμού $s < n$. [8, 12]

Έστω ότι μια πρώτη επιλογή $p_s(x)$ είναι:

$$p_s(x) = \frac{R(x)}{x-y_i}, \quad i=1,2,\dots,p \quad (4.28)$$

Αντικαθιστώντας το $p_s(x)$ από τη σχέση (4.28), η σχέση ορθογωνιότητας (4.27) παίρνει τη μορφή:

$$d_{n-l}\psi_{n-l}(y_i) + \dots + d_n\psi_n(y_i) = 0, \quad i=1,2,\dots,p \quad (4.29)$$

Μια δεύτερη επιλογή $p_s(x)$ θα μπορούσε να είναι:

$$p_s(x) = \frac{R(x)}{(x-t)^{q+1}}, \quad q=0,1,2,\dots,k-1 \quad (4.30)$$

Κι αντικαθιστώντας το $p_s(x)$ από τη σχέση (4.30), η σχέση (4.27) παίρνει τη μορφή:

$$d_{n-l}\psi_{n-l}^{(q)}(y_i) + \dots + d_n\psi_n^{(q)}(y_i) = 0, \quad q=0,1,2,\dots,k-1 \quad (4.31)$$

Από τις σχέσεις (4.30) και (4.31) προκύπτει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα: Τα ορθογώνια πολυώνυμα $\varphi_n(x)$ πάνω στο $[-1,1]$ ως προς το $\frac{w(x)}{R(x)}$

δίνονται από:

$$\varphi_n(x) = \begin{vmatrix} \psi_{n-l}(y_1) & \dots & \dots & \dots & \psi_n(y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n-l}(y_p) & \dots & \dots & \dots & \psi_{n-l}(y_p) \\ \psi_{n-l}(t) & \dots & \dots & \dots & \psi_{n-l}(t) \\ \psi_{n-l}^{(q)}(t) & \dots & \dots & \dots & \psi_n^{(q)}(t) \\ \psi_{n-l}(x) & \dots & \dots & \dots & \psi_{n-l}(x) \end{vmatrix} \quad (4.32)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για να προσδιοριστούν τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα στην περίπτωση που:

$$r(x) = \prod_{i=1}^n (x-y_i)^{k_i} (x-t)^k \quad (4.33)$$

Ορισμός: Οι συσχετιζόμενες συναρτήσεις $\Psi_n(z)$ με $n=0,1,2,\dots$ ορίζονται κατά μήκος του τμήματος του πραγματικού άξονα από -1 έως 1 από τον τύπο:

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{w(x)\varphi_n(x)}{(z-x)R(x)} dx, \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.34)$$

Συνεχίζοντας, συμβολίζουμε με D ένα απλό συνεκτικό πεδίο που περιέχει το $(-1,1)$ και το εσωτερικό του και με $p(z)$ την αναλυτική επέκταση της $p(t)$ στο D .

Έστω C μια απλή κλειστή καμπύλη μέσα στο D και $\{t_j\}_{j=1}^n$ οι ρίζες του $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - t_j) \quad (4.35)$$

με αυτές τις ρίζες να ανήκουν (ή όχι) στο διάστημα $(-1,1)$. Αυτά τα σημεία t_j θα χρησιμοποιηθούν ως σημεία παρεμβολής, δηλαδή:

$$p(t_j) = p_n(t_j), \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.36)$$

Όπου το $p_n(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $(n-1)$ που συμπίπτει με το $p(z)$ στα σημεία t_j . Χρησιμοποιώντας τώρα τη διαδικασία παρεμβολής και λαμβάνοντας υπόψη τη διαδικασία του *Lagrange* θα έχουμε [7, 16]:

$$p(t) = p_n(t) + R_n(t) \quad (4.37)$$

$$\text{με } p_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_n(x)}{(x-t_j)\varphi_n'(t_j)} p(t_j) \quad (4.38)$$

$$\text{και } R_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2\pi i} \oint_C \frac{p(z)}{(z-x)\varphi_n(z)} dz \quad (4.39)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4.37) με $\frac{w(x)}{R(x)}$ και ολοκληρώνοντας στο $[-1,1]$ θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{R(x)} p(x) dx = Q_n(f) + E_n(p) \quad (4.40)$$

$$\text{όπου } Q_n(f) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j p(t_j) \quad (4.41)$$

είναι ο τύπος ολοκλήρωσης και

$$\Lambda_j = \frac{-2\Psi_n(t_j)}{\varphi_n'(t_j)} \quad (4.42)$$

και οι συναρτήσεις βάρους του τύπου ολοκλήρωσης, ενώ:

$$E_n(f) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{p(z)}{\varphi_n(z)} \Psi_n(z) dz \quad (4.43)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ανάπτυξη σε σειρά *Taylor* της $\frac{1}{z-x}$ για μεγάλο z και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη σχέση:

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} m_k \int_C \frac{f(z)}{z^{k+1} \varphi_n(z)} dz \quad (4.44)$$

$$\text{με } m_k = \int_{-1}^1 \frac{w(x) \varphi_n(x) x^k}{R(x)} dx \quad (4.45)$$

να ορίζονται οι ροπές οι οποίες είναι ίσες με μηδέν για $k \leq (n-l-1)$.

Αν ληφθεί υπόψη τώρα ότι:

$$\int_C \frac{p(z)}{z^{k+1} \varphi_n(z)} dz = \frac{p^{(n+k+1)}(\rho_k)}{(n+k+1)!} \quad (4.46)$$

όπου ρ_k είναι ένα σημείο του διαστήματος $(-1,1)$ το οποίο όμως δε συμπίπτει με το x_j και με $f^{(p)}$ συμβολίζεται η παράγωγος τάξης p της συνάρτησης f .

Επομένως ο όρος σφάλματος παίρνει τη μορφή:

$$E_n(t) = \sum_{k=n-2}^{\infty} \frac{m_k}{(n+k+1)!} p^{(n+k+1)}(\rho_k) \quad (4.47)$$

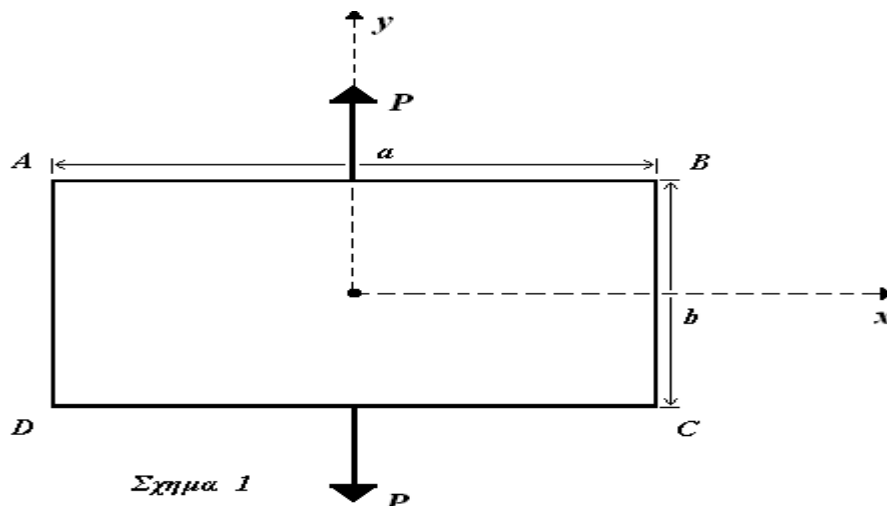
κι έτσι προκύπτει ότι:

$$E_n(p) = 0 \quad (4.48)$$

για κάθε πολώνυμο $p(x) \in P_{2n-1}$ όπου P_{2n-1} είναι η κλάση πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο από $2n-1$. Συμπεραίνουμε τελικά ότι η προτεινόμενη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι τύπου *Gauss* εφόσον είναι ακριβής για πολώνυμα βαθμού $(2n-1)$ (*Tahan et al.*, 1993, *Tsamaspheos and Theocaris*, 1980).

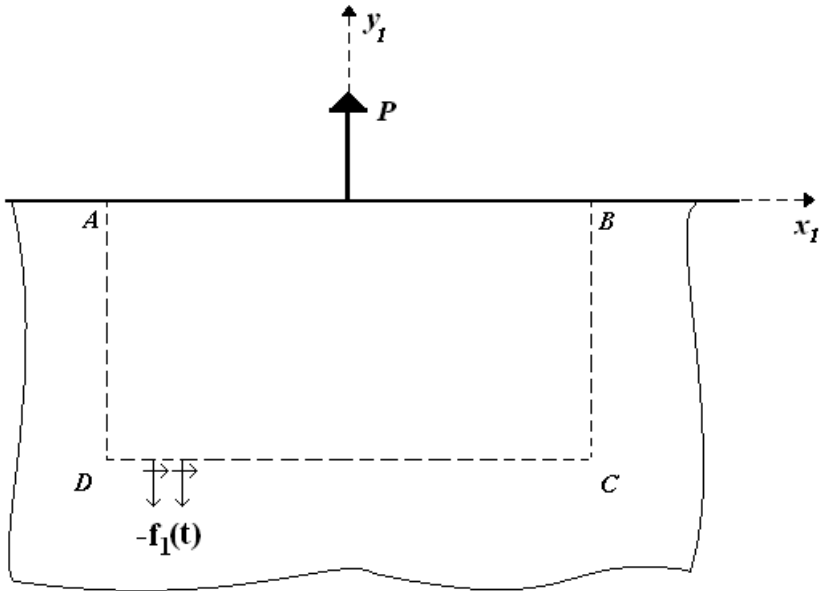
Το πρόβλημα του οποίου θα αναζητήσουμε τη λύση με την χρήση της παραπάνω θεωρίας και της μεθόδου που προτείνεται είναι το εξής:

Έστω μια ορθογώνια πλάκα $(ABCD)$ η οποία φορτίζεται από δύο ίσα και αντίθετης φοράς συγκεντρωμένα φορτία όπως φαίνεται στο σχήμα.

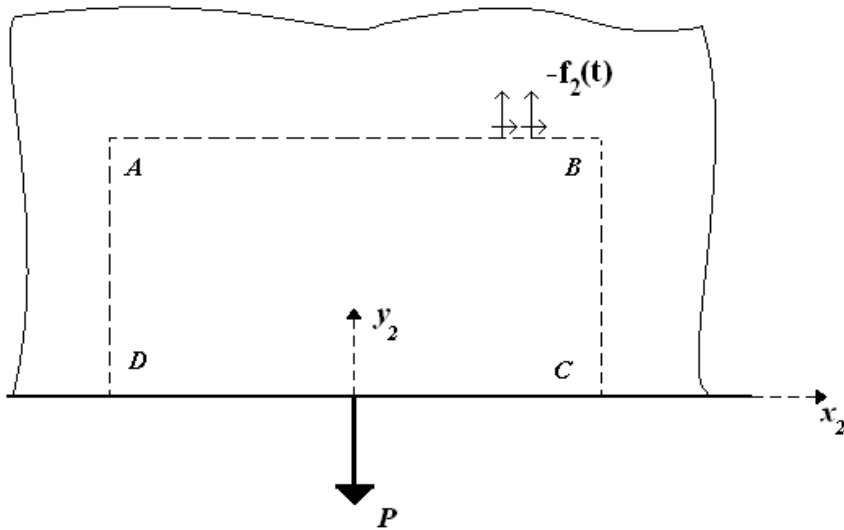


Σχήμα 1

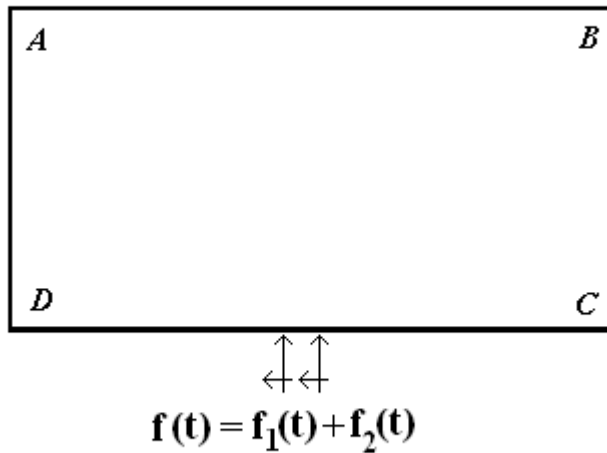
Το σύνορο της εν λόγω πλάκας το συμβολίζουμε με S . Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αντιμετωπίζοντας το ως επαλληλία τριών περιπτώσεων φόρτισης όπως αυτές περιγράφονται από τα τρία επόμενα σχήματα.



Σχημα 2.1



Σχημα 2.2



Σχῆμα 2.3

Οι περιπτώσεις των σχημάτων 2.1 και 2.2 είναι περιπτώσεις φόρτισης ημιεπιπέδου από συγκεντρωμένο φορτίο P . Στην περίπτωση του σχήματος 2.1 η πλευρά AB της πλάκας τονίζεται, στη συνέχεια μπορούμε να δείξουμε το χωρίο $ABCD$ με το νοητό του σύνορο εντός του ημιεπιπέδου. Συμβολίζεται με $-f_1(t)$ η τάση κατά μήκος του νοητού συνόρου του χωρίου δηλαδή κατά μήκος των πλευρών BC, CD και DA . Ομοίως στο σχήμα 2.2 συμβολίζουμε με $-f_2(t)$ τις τάσεις κατά μήκος των πλευρών AB, BC και DA . Έτσι, οι τάσεις στο σχήμα 2.3 πρέπει να είναι $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Δουλεύοντας με τον παραπάνω τρόπο καταφέρνουμε να περάσουμε από ένα πρόβλημα συγκεντρωμένων φορτίων σε ένα πρόβλημα καταναμημένων φορτίων. Τα φορτία $f_1(t)$ και $f_2(t)$ μπορούν να υπολογιστούν από τον τύπο (4.49). Η λύση οποιουδήποτε προβλήματος δισδιάστατης ελαστικότητας μπορεί να εκφραστεί μέσω των τύπων του *Mushkelisvili* [1, 2] με την χρήση μιγαδικών δυναμικών $\Phi_i(z)$ και $\Psi_i(z)$ όπου $z = x + iy$. Κατά αυτόν τον τρόπο η ορθή τάση σ_{nn} και η διατμητική τάση σ_{nt} κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής στην περίπτωση του πρώτου προβλήματος συνοριακών τιμών δίνονται ως εξής:

$$f_i(t) = \Phi_i(t) + \overline{\Phi_i(t)} + \frac{dz/ds}{dz/ds} (z\overline{\Phi_i'(t)} + \overline{\Psi_i(t)}) = \sigma_{nn}^{(i)}(t) + i\sigma_{nt}^{(i)}(t) \quad (4.47)$$

με $z \in L$ και $i=1,2$,

όπου s είναι το μήκος του τόξου ακολουθώντας το σύνορο S , ενώ $\sigma_{nn}^{(i)}(t)$ και $\sigma_{nt}^{(i)}(t)$ είναι αντίστοιχα η ορθή κι η διατμητική συνιστώσα των τάσεων κατά μήκος του συνόρου S .

Τα μιγαδικά δυναμικά $\Phi_i(z)$ και $\Psi_i(z)$ τα οποία αντιστοιχούν στις λύσεις του ημιεπιπέδου όταν αυτό φορτίζεται από ένα συγκεντρωμένο φορτίο, δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}\Phi_i(z) &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{1}{t_i - z} \right) \\ \Psi_i(z) &= -\frac{P}{2\pi i} \frac{1}{(t_i - z)^2}\end{aligned}, \quad i=1,2 \quad (4.48)$$

όπου $t_0 = ib$ και $t_0^* = -ib$ είναι τα σημεία εφαρμογής των συγκεντρωμένων φορτίων στην πλάκα.

Αν εφαρμόσουμε τώρα την εξίσωση (4.48) και τη συνθήκη του μονοσήμαντου των μετατοπίσεων ακολουθώντας τις πλευρές του ορθογωνίου και λαμβάνοντας υπόψη την αριθμητική τεχνική που παρουσιάστηκε στην παράγραφο {4.1} παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \frac{g(t)}{t-z} dt - \int_{S_1} \frac{\overline{g(\bar{t})}}{\bar{t}-\bar{z}} d\bar{t} - z \int_{S_1} \frac{\overline{g(\bar{t})}}{(t-z)^2} dt + \int_{S_1} \frac{g(t)}{\bar{t}-\bar{z}} d\bar{t} + \int_{S_1} \frac{t\overline{g(\bar{t})}}{(t-z)^2} d\bar{t} \\ + \int_{S_2} \frac{g(t)}{t-z} dt - \int_{S_2} \frac{\overline{g(\bar{t})}}{\bar{t}-\bar{z}} d\bar{t} + z \int_{S_2} \frac{\overline{g(\bar{t})}}{(t-z)^2} dt - \int_{S_2} \frac{g(t)}{\bar{t}-\bar{z}} d\bar{t} - \int_{S_2} \frac{t\overline{g(\bar{t})}}{(t-z)^2} d\bar{t} = 2\pi i f(z)\end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\int_S g(t) dt = 0 \quad (4.50)$$

όπου $S = (AB) \cup (BC) \cup (CD) \cup (DA)$, $S_1 = (AB) \cup (CD)$ και $S_2 = (BC) \cup (DA)$, ενώ η συνάρτηση φόρτισης $P_n(z)$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(4.51)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.49) μπορεί να είναι ιδιόμορφα ή όχι και αυτό εξαρτάται από τη θέση του z πάνω στο σύνορο S .

Η λύση του συστήματος (4.49) -(4.50) μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά. Ξεκινάμε με την αλλαγή μεταβλητών που απεικονίζει την καμπύλη L ($t, z \in L$) στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ η οποία διατυπώνεται ως:

$$\begin{aligned}t &= \left(\frac{t_j - t_i}{2} \right) x + \frac{t_j + t_i}{2}, \\ z &= \left(\frac{t_j - t_i}{2} \right) \zeta + \frac{t_j + t_i}{2}, \quad j = b, c, d, a \text{ και } i = a, b, c, d\end{aligned} \quad (4.52)$$

Με t_j ($j = d, c, b, a$) συμβολίζονται οι συντεταγμένες σε μιγαδική μορφή των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων $(AB), (BC), (CD)$ και (DA) .

Επομένως το σύστημα (4.49)–(4.50) μετά την παραπάνω μετατροπή παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx - \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& + \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& + 2 \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx - \left(\frac{t_D - t_C}{t_D - t_C} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& + \left(\frac{t_D - t_C}{t_D - t_C} \right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx + \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx - \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& - \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx + \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)^2} dx - \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \right) \int_{-1}^1 \frac{x g(x)}{(x-\zeta)^2} dx \\
& = 2\pi i f_n(\zeta), \quad \zeta \in (-1, 1)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{t_b - t_a}{2} \right) \int_{-1}^1 g(x) dx + \left(\frac{t_c - t_b}{2} \right) \int_{-1}^1 g(x) dx \\
& + \left(\frac{t_d - t_c}{2} \right) \int_{-1}^1 g(x) dx + \left(\frac{t_a - t_d}{2} \right) \int_{-1}^1 g(x) dx = 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

όπου η συνάρτηση $f(z)$ δίνεται από τον τύπο (4.51) αφού αντικατασταθεί το z μέσω του τύπου (4.52) και έτσι η συνάρτηση φόρτισης παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
f_{AB} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-4bi}{\| -a\zeta - 2ib \|^2} + \frac{-a\zeta - 2ib}{(-a\zeta - 2ib)^2} \right) \\
f_{CD} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{4bi}{\| a\zeta + 2ib \|^2} + \frac{a\zeta + 2ib}{(a\zeta + 2ib)^2} \right) \\
f_{BC} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1+\zeta)}{\| -a + ib(1+\zeta) \|^2} - \frac{-a + ib(1+\zeta)}{(-a + ib(1+\zeta))^2} \right) \\
& \quad - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1-\zeta)}{\| -a - ib(1-\zeta) \|^2} - \frac{-a - ib(1-\zeta)}{(-a - ib(1-\zeta))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$f_{DA} = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1-\zeta)}{\|a+ib(1-\zeta)\|^2} - \frac{a+ib(1-\zeta)}{(a+ib(1-\zeta))^2} \right) - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1+\zeta)}{\|a-ib(1+\zeta)\|^2} - \frac{a-ib(1+\zeta)}{(a-ib(1+\zeta))^2} \right) \quad (4.55)$$

Ο πλήρης υπολογισμός και η μετατροπή παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα που παρατίθεται στο τέλος της εργασίας.

Χωρίζοντας το εσωτερικό του διαστήματος $(-1,1)$ σε N στοιχεία και λαμβάνοντας υπόψη την γραμμική παρεμβολή για τη συνάρτηση $g(x)$ εντός του στοιχείου (i) η οποία έχει τη μορφή:

$$g(x) = v_i(x)g(x_i) + v_{i+1}(x)g(x_{i+1}), \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.56)$$

με τις συναρτήσεις παρεμβολής να δίνονται από τους τύπους:

$$v_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} - \frac{x}{h_i}, \quad v_{i+1}(x) = \frac{x}{h_i} - \frac{x_i}{h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.57)$$

Έτσι τα ολοκληρώματα της σχέσης (4.53) παίρνουν τη μορφή:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x-\zeta} dx = \sum_{i=1}^N [g(x_i)f_3(\zeta) + g(x_{i+1})f_4(\zeta)] \quad (4.58)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\bar{g}(x)}{(x-\zeta)^2} dx = \sum_{i=1}^N [g(x_i)f_7(\zeta) + g(x_{i+1})f_8(\zeta)] \quad (4.59)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x\bar{g}(x)}{(x-\zeta)^2} dx = \sum_{i=1}^N [g(x_i)f_9(\zeta) + g(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] \quad (4.60)$$

Με τις συναρτήσεις $f_3(\zeta), f_4(\zeta), f_7(\zeta), f_8(\zeta), f_9(\zeta)$ και $f_{10}(\zeta)$ να δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$f_3(\zeta) = \left(\frac{x_{i+1} - \zeta}{h_i} \right) \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - 1 \quad (4.61)$$

$$f_4(\zeta) = \left(-\frac{x_i - \zeta}{h_i} \right) \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + 1 \quad (4.62)$$

$$f_7(\zeta) = -\frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{1}{(x_i - \zeta)} \quad (4.63)$$

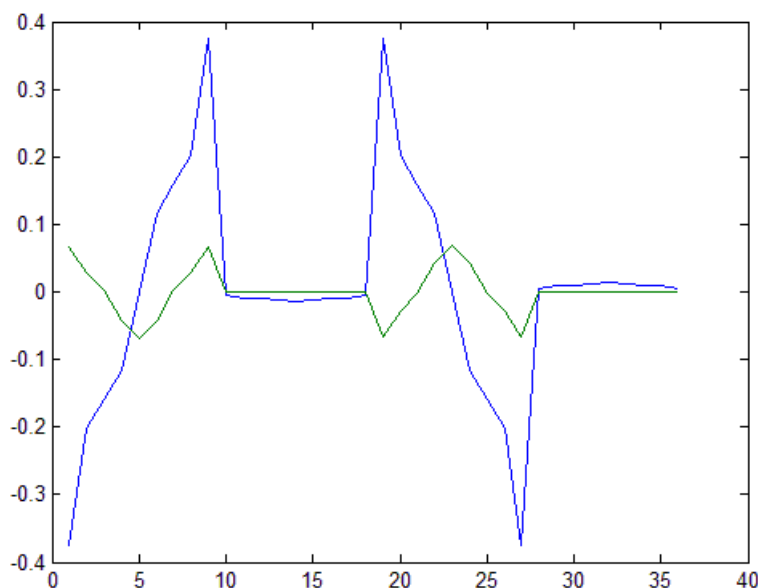
$$f_8(\zeta) = \frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{1}{(x_{i+1} - \zeta)} \quad (4.64)$$

$$f_9(\zeta) = -1 + \frac{(x_{i+1} - 2\zeta)}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{\zeta}{(x_i - \zeta)} \quad (4.65)$$

$$f_{10}(\zeta) = 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{\zeta}{(x_{i+1} - \zeta)} \quad (4.66)$$

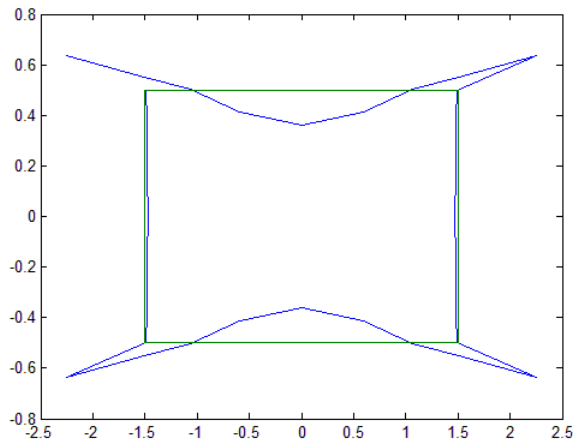
Με αυτό τον τρόπο η ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση (4.53) και η συνθήκη μονοσήμαντου των μετατοπίσεων (4.54) απλοποιούνται αρκετά και μετατρέπονται σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τις διακριτές τιμές $g(x_i)$ της άγνωστης συνάρτησης $g(x)$. Για την αριθμητική επίλυση του συστήματος (4.53) - (4.54) χρησιμοποιούνται συνολικά $4N$ σημεία ολοκλήρωσης στις τέσσερις πλευρές του ορθογωνίου συμπεριλαμβανοντας και τις κορυφές της ορθογωνίας πλάκας. Επιπλέον χρησιμοποιούνται N σημεία ζ_j , $j=1,2,\dots,N$ σε κάθε πλευρά ως σημεία παρεμβολής. Η εξίσωση (4.53) λοιπόν γράφεται ως ένα σύστημα $4N \times 4N$ εξισώσεων και με την προσθήκη της σχέσης (4.54) το εν λόγω σύστημα λύνεται κατά έναν τρόπο που προσομοιάζει τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Επιλέξαμε για την επίλυση του προβλήματος $N=8$ και αφού υπολογιστούν οι τιμές $g(x_i)$, κατά συνέπεια και η άγνωστη συνάρτηση $g(x)$, μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των τάσεων σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του χωρίου.

Στο παρακάτω σχήμα 4.1 φαίνονται οι τιμές της συνάρτησης g , όπως υπολογίζονται από τη μέθοδο

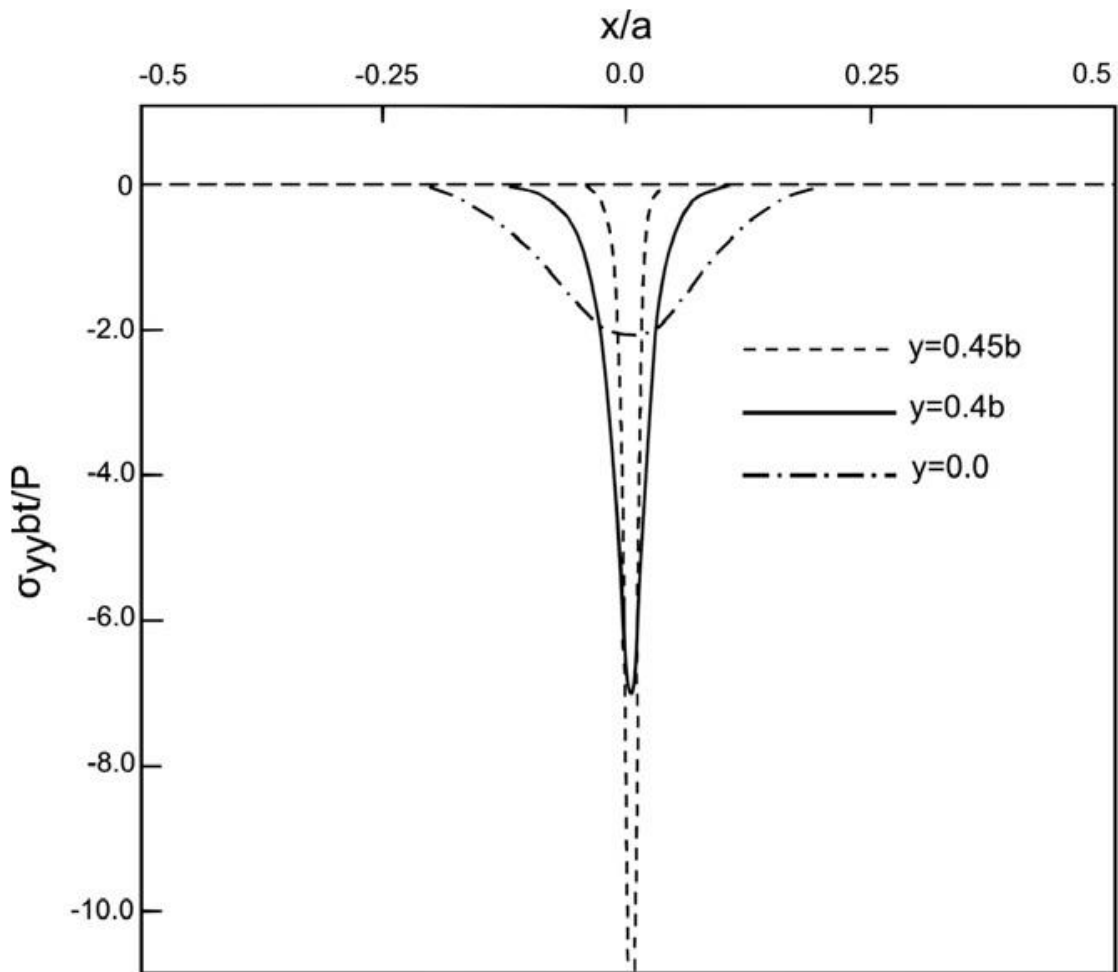


Σχήμα 4.1

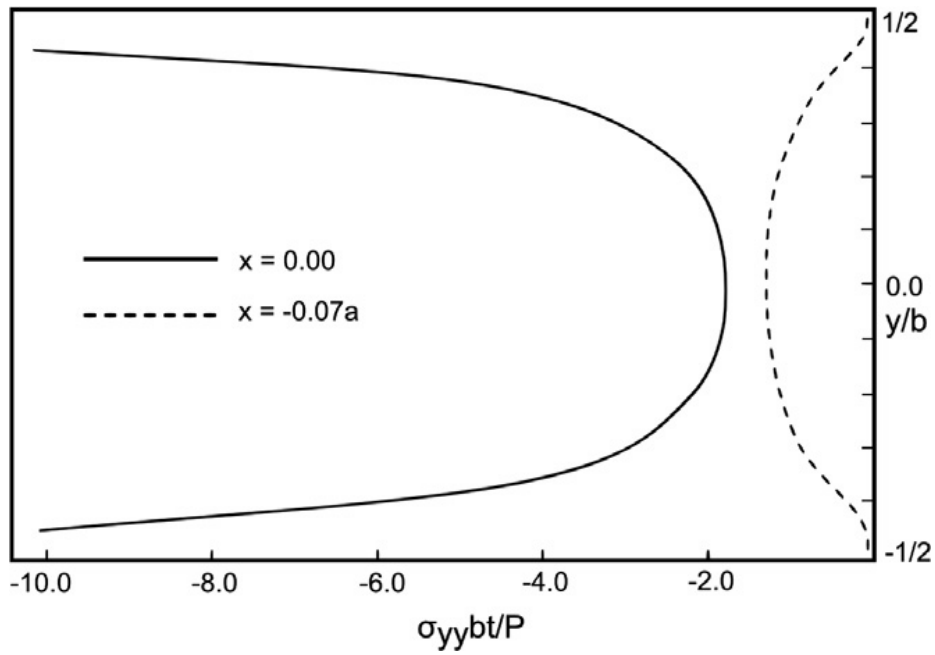
Ενώ στο σχήμα 4.2 φαίνεται η παραμόρφωση της πλάκας με βάση τα αποτελέσματα. Στα γωνιακά σημεία η συμπεριφορά της λύσης δίνει μεγάλες τιμές καθώς ο πίνακας του συστήματος απαιτεί μεγάλες τιμές για να είναι ομαλή η επίλυση.



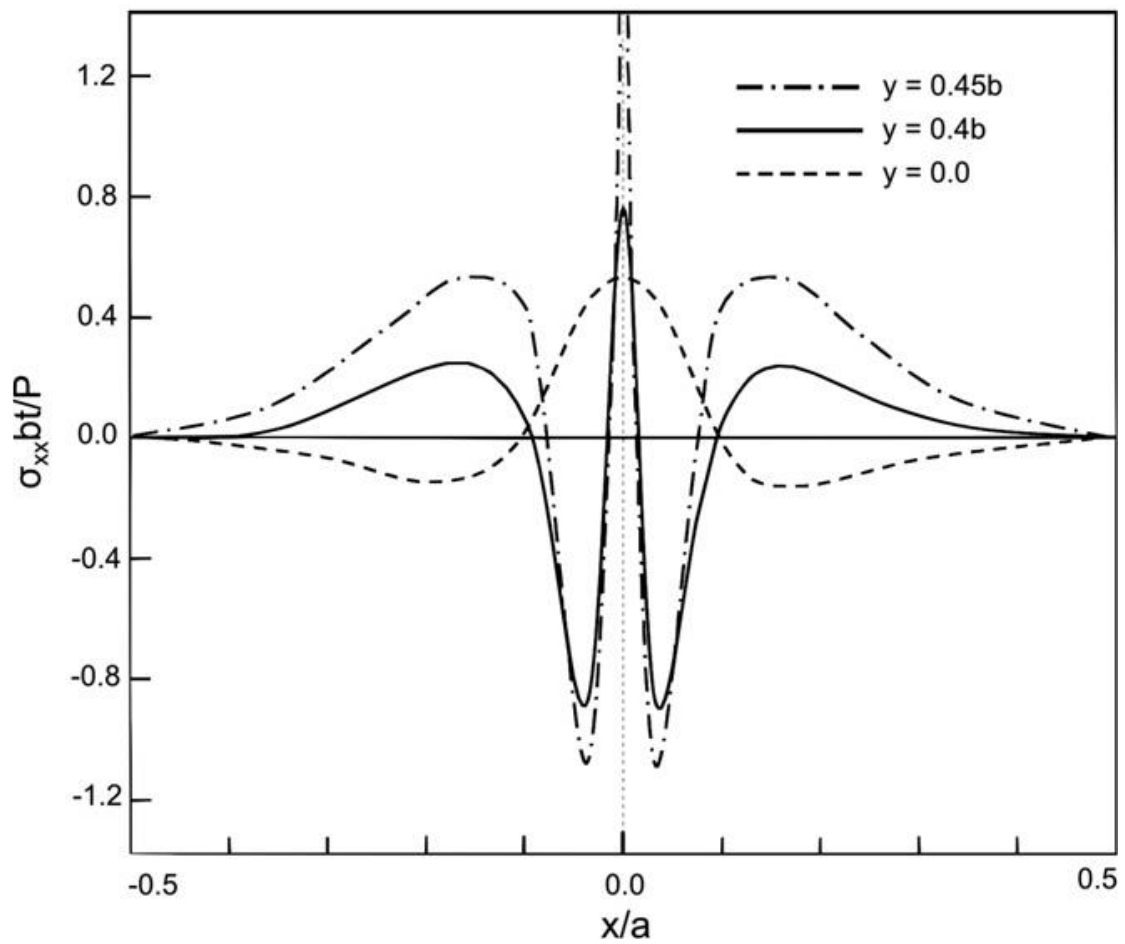
Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5

Στο σχήμα 4.3 φαίνονται οι κατανομές των ορθών τάσεων σ_{yy} κατά μήκος διαφόρων ευθειών που διέρχονται από το μέσο του πλάτους της πλάκας ($y=0$) και από δύο σημεία σε διαφορετικές αποστάσεις από το σύνορο. Παρατηρούμε ότι η ορθή τάση μεγιστοποιείται στην ευθεία που ασκείται το συγκεντρωμένο φορτίο δηλαδή στο $x=0$

με το μικρότερο από αυτά τα μέγιστα να συναντάται στην ευθεία που διέρχεται από το $y=0$. Κάτι αναμενόμενο αφού εκεί η επιρροή της φόρτισης είναι πιο εμφανής.

Στο σχήμα 4.4 φαίνονται οι κατανομές των ορθών τάσεων σ_{yy} κατά μήκος δυο ευθειών κατά το πλάτος της πλάκας. Η μια διέρχεται από το σημείο εφαρμογής της φόρτισης ($x=0$) και η δεύτερη από ένα σημείο λίγο αριστερά από αυτό. Παρατηρούμε ότι όπως είναι αναμενόμενο η ορθή τάση απειρίζεται στο σημείο εφαρμογής ενώ ακόμα και ελάχιστα μακριά από αυτό η επίδραση της φόρτισης αποσβένεται πολύ γρήγορα.

Τέλος, στο σχήμα 4.5 η συμπεριφορά της σ_{xx} επηρεάζεται εξίσου με τη σ_{yy} δηλαδή στο επίπεδο κοντά στο σύνορο μεγαλώνει πάρα πολύ (πολύ κοντα στο σύνορο απειρίζεται).

5. Συμπεράσματα

Σε ένα πλήθος προβλημάτων της Μηχανικής η βασική εξίσωση διατυπώνεται με την χρήση Ιδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Ανάλογα με τη φύση και το είδος του προβλήματος καθώς και τις συνθήκες που εξετάζονται κάθε φορά όπως η γεωμετρία του προβλήματος, οι φυσικές ιδιότητες του σώματος που εξετάζεται, η εξωτερική φόρτιση που δέχεται ή οι συνθήκες του περιβάλλοντος του μπορεί να αλλάξει η μορφή της εξίσωσης που διέπει το πρόβλημα. Η εξίσωση μπορεί να εμφανίσει ιδιομορφίες οι οποίες άλλοτε μπορούν να αρθούν κι άλλοτε μπορεί να είναι ιδιομορφίες ανώτερης τάξης οπότε να δυσχεράνουν την επίλυση της.

Στο πρόβλημα που καλούμαστε να επιλύσουμε σε αυτήν την εργασία, το πρώτο εμπόδιο είναι η μορφή της εξωτερικής φόρτισης καθώς τα συγκεντρωμένα φορτία που εφαρμόζονται στο σύνορο της πλάκας εκφράζονται μέσα από μία *κατανομή*, μια γενικευμένη συνάρτηση που περιέχει μια ιδιομορφία καθώς η $\delta(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Αυτή η ιδιομορφία δυσχεραίνει τον υπολογισμό των ποσοτήτων που εμφανίζονται στη βασική ολοκληρωτική εξίσωση. Οι ιδιομορφίες που οφείλονται σε αυτήν τη μορφή της φόρτισης είναι ισχυρότερες από αυτές που εμφανίζονται εξαιτίας των ακραίων σημείων και από αυτές που χαρακτηρίζουν τα προβλήματα ρωγμών. Οι ιδιομορφίες αυτές δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με την χρήση γνωστών μεθόδων όπως τα ειδικά στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούνται γύρω από την αιχμή μιας ρωγμής στη Μηχανική των Θραύσεων. Επομένως είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν ειδικές μέθοδοι αντιμετώπισης των εν λόγω ιδιομορφιών, όπως η τεχνική χαρτογράφησης (*mapping technique*). Οι ιδιομορφίες που παρουσιάζονται μπορεί να αντιμετωπιστούν με την χρήση υπολογιστικών μεθόδων από την Αριθμητική Ανάλυση, οι οποίες αναπτύσσονται σε αυτήν την εργασία.

Η αντικατάσταση της εν λόγω φόρτισης από μια ισοδύναμη που όμως αντιστοιχεί σε κατανεμημένο φορτίο το οποίο έχει πιο ομαλή συμπεριφορά, είναι μια πρώτη κίνηση για την άρση της ιδιομορφίας. Επίσης η μέθοδος που προτείνεται δεν απαιτεί αλλαγή συντεταγμένων και επομένως βρίσκει εφαρμογή και στην περίπτωση των καμπυλόγραμμων συνόρων όπως επίσης και στην περίπτωση της μικρομηχανικής όπου συγκεντρωμένα φορτία ή συγκεντρωμένες ροπές εμφανίζονται στο σύνορο.

Επομένως τα αποτελέσματα από την επίλυση αυτού του βασικού προβλήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στις περιπτώσεις προβλημάτων επαφής και στηρίξεων όπου οι δυνάμεις ασκούνται σε μια πολύ μικρή περιοχή, δηλαδή σχεδόν σημειακά. Από την άλλη, ένα πρόβλημα όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτή η μέθοδος είναι το πρόβλημα της ρηγματωμένης πλάκας (*Hills et al., 1989*). Σε αυτήν την περίπτωση εκμεταλλευόμενοι συμμετρίες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το τασικό πεδίο προσομοιάζει το αποτέλεσμα που έχουμε εξάγει αφού η τάση στην κορυφή της ρωγμής αντιστοιχεί με σημειακό φορτίο. Με αυτόν τον τρόπο και με την ανάλυση που έχει γίνει παραπάνω μπορούμε να παρακάμψουμε και την ύπαρξη της κορυφής της ρωγμής η οποία αποτελεί γωνιακού μη ομαλό σημείο του συνόρου.

Το πρόβλημα κατ'αρχάς αντιμετωπίζεται για μια ομογενή ισότροπη πεπερασμένη πλάκα, τα αποτελέσματα όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς μια σύνθετης πλάκας όπου οι ελαστικές ιδιότητες μεταβάλλονται κατά το πάχος.

Μια σύνθετη πλάκα συμπεριφέρεται ως ανισότροπο υλικό. Η εσωτερική δομή που διαθέτει επηρεάζει τη λύση της εξίσωσης που περιγράφει το πρόβλημα. Για τη λύση του προβλήματος σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ληφθούν υπόψη οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διαφορετικών στρωμάτων των υλικών που αποτελούν την πλάκα καθώς και η εσωτερική δομή της όπως στην περίπτωση σύνθετων υλικών με ίνες σε διαφορετικούς προσανατολισμούς (*Çömez and Erdöl, 2012*) Σε αυτές τις περιπτώσεις η λύση δεν αλλάζει μόνο κατά το πάχος της πλάκας αλλά και μέσα στο ίδιο στρώμα αφού κάθε στρώμα υλικού θα αντιμετωπιστεί ξεχωριστά, δηλαδή ως μια ξεχωριστή πλάκα καταπονούμενη με συγκεντρωμένο φορτίο, αντιμετωπίζοντας άλλα στρώματα ως ισότροπα και άλλα ως ορθότροπα. Για την επίτευξη της τελικής λύσης θα λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που προκύπτουν ως προς τις μετατοπίσεις και τις παραγώγους από τη σύνδεση των διαφορετικών στρωμάτων καθώς σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστούν και καμπτικές ροπές στο εσωτερικό της πλάκας λόγω της αλληλεπίδρασης των στρωμάτων (*Chyanbin H., 2006*). Για να γίνει βέβαια η προηγούμενη ανάλυση και η αντίστοιχη αριθμητική προσέγγιση είναι αναγκαίο η φόρτιση να περιορίζεται περιορίζεται στις περιπτώσεις κατανεμημένων φορτίων κατά το πάχος. Σε αντίθετη περίπτωση δημιουργούνται διατμητικές τάσεις μεταξύ των στρώσεων του υλικού (*Ma and Korsunsky, 2003*), επίσης σημειακά φορτία στην περιοχή μιας στρώσης δημιουργούν περαιτέρω ιδιομορφίες οι οποίες με τη σειρά τους πρέπει να αρθούν, να αντικατασταθούν με κατανεμημένες φορτίσεις για να είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση που παρουσιάζεται σε αυτήν την εργασία. Τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να αποτελέσουν εφαλτήριο για περαιτέρω μελέτη του θέματος στο μέλλον.

Με τη μέθοδο αυτή το υπολογιστικό κόστος για τον προσδιορισμό του τασικού πεδίου ακόμη και πλακών με πολύπλοκο σύνορο δεν είναι απαγορευτικό, καθιστώντας την προτιμότερη σε σχέση με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων όπου η χρήση πολλών στοιχείων γύρω από την ιδιομορφία δυσχεραίνει τον υπολογισμό.

Βιβλιογραφία

- [1] Muskhelishvili, N.I., 2008. Singular Integral Equations, second ed. Dover Publications.
- [2] Muskhelishvili, N.I., 2010. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Springer.
- [3] Brebbia, C.A., Dominguez, J., 1989. Boundary Elements: An Introductory Course. McGraw-Hill
- [4] Katsikadelis, J., 2002. Boundary Elements: Theory and Applications. Elsevier
- [5] Timoshenko, S.P., 1930. Strength of Materials I & II. Van Nostrand Company
- [6] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., 1984. Boundary Element Techniques – Theory and Applications. Springer, Berlin, Heidelberg, New York
- [7] Sladek, V., Sladek, J., 1998. Singular Integrals in Boundary Element Methods. Computational Mechanics Publications, Southampton
- [8] Theocaris, P.S., Ioakimidis, N.I., 1977. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. Quarterly of Applied Mathematics 35, 173–183.
- [9] Chen, G., Zhou, J., 1992. Boundary Element Methods. Academic Press Ltd., Great Britain.
- [10] Hills, D.A., Nowell, D., Sackfield, A., 1989. Plane cracks near interfaces. Engineering Analysis with Boundary Elements 6, 30–37.
- [11] Ioakimidis, N.I., 1985. Singular loadings in elasticity problems and singular solutions of the corresponding integral equations. Journal of Elasticity 15, 325–332.
- [12] Tsamasphyros, G., Theotokoglou, E.E., 2008. Inmost singularities of S.I.Es influencing their numerical solution in the BEM. Engineering Analysis with Boundary Elements 32, 187–195
- [13] Tsamasphyros, G., Theocaris, P.S., 1980b. Sur une methode generale de quadrature pour des integrals du type Cauchy. Revue Roumaine des Sciences Techniques – Serie de Mecanique Appliquee 25, 839–856.
- [14] Μπαρτζώκας Δ. 2004. Εισαγωγή στη Μηχανική των Σεισμών. ΕΜΠ
- [15] Tahan, N., Pavlovic, M.N., Kotsovos, M.D., 1993. Single Fourier series solutions for rectangular plates under in-plane forces, with particular reference to the basic problem of collinear compression. Part 1: Closed-form solution and convergence study. Thin-Walled Structures 15, 291–303.

- [16] Lifanov, I.K., Lifanov, P.I., 2004. On some exact solutions of singular integral equations in the class of generalized functions and their numerical computation. *Differential Equations* 40, 1770–1780.
- [17] Lifanov, I.K., Nenashev, A.S., 2007. Generalized functions on Hilbert spaces, singular integral equations, and problems of aerodynamics and electrodynamics. *Differential Equations* 43, 862–872.
- [18] Chyanbin H., 2006. Cracks in Laminates Subjected to Concentrated Forces and Moments. *Key Engineering Materials*.
- [19] Çömez I., Erdöl R., 2012. Frictional contact problem of a rigid stamp and an elastic layer bonded to a homogeneous substrate. *Archive of Applied Mechanics Springer – Verlag*.
- [20] Ma L.F., Korsunsky A.M., 2003, Fundamental formulation for frictional contact problems of coated systems, *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier.

Παράρτημα

1. Υπολογισμός ορίου της (3.15)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ και τη ακολουθία $x_k = e^{-k}$ η οποία μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι συγκλίνει στο μηδέν. Επομένως $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

αν η ακολουθία $f(x_k)$ συγκλίνει και μάλιστα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$

Όμως $f(x_k) = -\frac{k}{e^k} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$ εφόσον ισχύει το κριτήριο του λόγου δηλαδή

$$\frac{\frac{k+1}{e^{k+1}}}{-\frac{k}{e^k}} = \frac{k+1}{k} \frac{1}{e} < 1, \quad \forall k > 0$$

2. Αλλαγή μεταβλητών στη σχέση (4.49)

$$t = \frac{t_j - t_i}{2} x + \frac{t_j + t_i}{2} \Rightarrow dt = \frac{t_j - t_i}{2} dx$$

$$\bar{t} = \overline{\frac{t_j - t_i}{2} x + \frac{t_j + t_i}{2}} \Rightarrow d\bar{t} = \overline{\frac{t_j - t_i}{2}} dx$$

$$z = \frac{t_j - t_i}{2} \zeta + \frac{t_j + t_i}{2}$$

$$t - z = \frac{t_j - t_i}{2} x + \frac{t_j + t_i}{2} - \left(\frac{t_j - t_i}{2} \zeta + \frac{t_j + t_i}{2} \right) = \frac{t_j - t_i}{2} (x - \zeta)$$

Ομοίως

$$\bar{t} - z = \overline{\frac{t_j - t_i}{2} x + \frac{t_j + t_i}{2}} - \left(\frac{t_j - t_i}{2} \zeta + \frac{t_j + t_i}{2} \right) = \overline{\frac{t_j - t_i}{2}} (x - \zeta)$$

Παίρνοντας το 1^ο μέλος της σχέσης (79) κι αντικαθιστώντας έχουμε:

$$S_{AB} = \int_{-\frac{1}{2} \frac{t_B - t_A}{2} (x - \zeta)}^1 \frac{g(x)}{2} \frac{t_B - t_A}{2} dx - \int_{-\frac{1}{2} \frac{t_B - t_A}{2} (x - \zeta)}^1 \frac{\overline{g(x)}}{2} \frac{\overline{t_B - t_A}}{2} dx -$$

$$- \left(\frac{t_B - t_A}{2} \zeta + \frac{t_B + t_A}{2} \right) \int_{-\frac{1}{2} \left(\frac{t_B - t_A}{2} \right)^2 (x - \zeta)^2}^1 \frac{\overline{g(x)}}{\left(\frac{t_B - t_A}{2} \right)^2} \frac{\overline{t_B - t_A}}{2} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\frac{t_B-t_A}{2}(x-\zeta)} \frac{\overline{t_B-t_A}}{2} dx + \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t_B-t_A}{2}x + \frac{t_B+t_A}{2}\right) \overline{g(x)}}{\left(\frac{t_B-t_A}{2}\right)^2 (x-\zeta)^2} \frac{t_B-t_A}{2} dx \\
& = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx - \left(\frac{t_B-t_A}{t_B-t_A} \zeta\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx - \\
& \quad - \left(\frac{t_B+t_A}{t_B-t_A}\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx + \left(\frac{t_B-t_A}{t_B-t_A}\right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx + \\
& \quad + \left(\frac{t_B+t_A}{t_B-t_A}\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& = 2 \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx - \left(\frac{t_B-t_A}{t_B-t_A} \zeta\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx + \left(\frac{t_B-t_A}{t_B-t_A}\right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{BC} & = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\frac{t_C-t_B}{2}(x-\zeta)} \frac{t_C-t_B}{2} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{\frac{t_C-t_B}{2}(x-\zeta)} \frac{t_C-t_B}{2} dx \\
& \quad + \left(\frac{t_C-t_B}{2} \zeta + \frac{t_C+t_B}{2}\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{\left(\frac{t_C-t_B}{2}\right)^2 (x-\zeta)^2} \frac{t_C-t_B}{2} dx \\
& \quad - \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\frac{t_C-t_B}{2}(x-\zeta)} \frac{t_C-t_B}{2} dx - \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{t_C-t_B}{2}x + \frac{t_C+t_B}{2}\right) \overline{g(x)}}{\left(\frac{t_C-t_B}{2}\right)^2 (x-\zeta)^2} \frac{t_C-t_B}{2} dx \\
& = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx + \left(\frac{t_C-t_B}{t_C-t_B} \zeta\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx + \left(\frac{t_C+t_B}{t_C-t_B}\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& \quad - \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x-\zeta)} dx - \left(\frac{t_C-t_B}{t_C-t_B}\right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx - \left(\frac{t_C+t_B}{t_C-t_B}\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx \\
& = - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)} dx + \left(\frac{t_C-t_B}{t_C-t_B} \zeta\right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx - \left(\frac{t_C-t_B}{t_C-t_B}\right) \int_{-1}^1 \frac{x \overline{g(x)}}{(x-\zeta)^2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{DA} &= \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{t_A - t_D} \frac{t_A - t_D}{2} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{t_A - t_D} \frac{t_A - t_D}{2} dx \\
&+ \left(\frac{t_A - t_D}{2} \zeta + \frac{t_A + t_D}{2} \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{\left(\frac{t_A - t_D}{2} \right)^2 (x - \zeta)^2} \frac{t_A - t_D}{2} dx \\
&- \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{t_A - t_D} \frac{t_A - t_D}{2} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{\left(\frac{t_A - t_D}{2} \right)^2 (x - \zeta)^2} \frac{t_A - t_D}{2} dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x - \zeta)} dx - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)} dx + \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)^2} dx + \left(\frac{t_A + t_D}{t_A - t_D} \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)^2} dx \\
&- \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x - \zeta)} dx - \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \right) \int_{-1}^1 \frac{xg(x)}{(x - \zeta)^2} dx - \left(\frac{t_A + t_D}{t_A - t_D} \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)^2} dx \\
&= - \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)} dx + \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \zeta \right) \int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)^2} dx - \left(\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} \right) \int_{-1}^1 \frac{xg(x)}{(x - \zeta)^2} dx
\end{aligned}$$

(*)

Έχοντας $g(x) = v_i(x)g(x_i) + v_{i+1}(x)g(x_{i+1})$, $i = 1, \dots, N$ με

$$v_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, \quad v_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, \dots, N$$

τα ολοκληρώματα της σχέσης (*) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{(x - \zeta)} dx &= \sum_{i=1}^N [g(x_i)f_3(\zeta) + g(x_{i+1})f_4(\zeta)], \\
\int_{-1}^1 \frac{\overline{g(x)}}{(x - \zeta)^2} dx &= \sum_{i=1}^N [\overline{g(x_i)}f_7(\zeta) + \overline{g(x_{i+1})}f_8(\zeta)] \quad \text{και} \\
\int_{-1}^1 \frac{xg(x)}{(x - \zeta)^2} dx &= \sum_{i=1}^N [g(x_i)f_9(\zeta) + g(x_{i+1})f_{10}(\zeta)]
\end{aligned}$$

με

$$f_3(\zeta) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{v_i(x)}{x - \zeta} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{x - \zeta} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-1 + \frac{x_{i+1} - \zeta}{x - \zeta} \right) dx = \frac{-(x_{i+1} - x_i)}{h_i} + \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x - \zeta} dx \\
&= -1 + \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} (\ln|x_{i+1} - \zeta| - \ln|x_i - \zeta|) = \left(\frac{x_{i+1} - \zeta}{h_i} \right) \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - 1
\end{aligned}$$

και ομοίως

$$\begin{aligned}
f_4(\zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{v_{i+1}(x)}{x - \zeta} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{x - \zeta} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - \frac{x_i - \zeta}{x - \zeta} \right) dx \\
&= \frac{(x_{i+1} - x_i)}{h_i} - \frac{(x_i - \zeta)}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x - \zeta} dx = 1 - \frac{(x_i - \zeta)}{h_i} (\ln|x_{i+1} - \zeta| - \ln|x_i - \zeta|) \\
&= \left(-\frac{x_i - \zeta}{h_i} \right) \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7(\zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{v_i(x)}{(x - \zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{(x - \zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{x - \zeta} + \frac{x_{i+1} - \zeta}{(x - \zeta)^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x - \zeta} dx - \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{(x - \zeta)^2} dx \\
&= -\frac{1}{h_i} (\ln|x_{i+1} - \zeta| - \ln|x_i - \zeta|) - \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \left(\frac{1}{x_{i+1} - \zeta} - \frac{1}{x_i - \zeta} \right) \\
&= -\frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \left(\frac{x_i - \zeta - (x_{i+1} - \zeta)}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \right) \\
&= -\frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \right) \\
&= -\frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{(x_{i+1} - \zeta)}{h_i} \frac{(-h_i)}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \\
&= -\frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{1}{(x_i - \zeta)}
\end{aligned}$$

$$f_8(\zeta) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{v_{i+1}(x)}{(x - \zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{(x - \zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{x - \zeta} - \frac{x_i - \zeta}{(x - \zeta)^2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x-\zeta} dx + \frac{(x_i-\zeta)^{x_{i+1}}}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{(x-\zeta)^2} dx \\
&= \frac{1}{h_i} (\ln|x_{i+1}-\zeta| - \ln|x_i-\zeta|) + \frac{(x_i-\zeta)}{h_i} \left(\frac{1}{x_{i+1}-\zeta} - \frac{1}{x_i-\zeta} \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1}-\zeta}{x_i-\zeta} \right| + \frac{(x_i-\zeta)}{h_i} \left(\frac{x_i-\zeta - (x_{i+1}-\zeta)}{(x_{i+1}-\zeta)(x_i-\zeta)} \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1}-\zeta}{x_i-\zeta} \right| + \frac{(x_i-\zeta)}{h_i} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i+1}-\zeta)(x_i-\zeta)} \right) \\
&= \frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1}-\zeta}{x_i-\zeta} \right| + \frac{(x_i-\zeta)}{h_i} \frac{(-h_i)}{(x_{i+1}-\zeta)(x_i-\zeta)} \\
&= \frac{1}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1}-\zeta}{x_i-\zeta} \right| - \frac{1}{(x_{i+1}-\zeta)} \\
f_9(\zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{xv_i(x)}{(x-\zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x(x_{i+1}-x)}{(x-\zeta)^2} dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{x^2 - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} + \frac{x_{i+1}x - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{(x-\zeta)^2}{(x-\zeta)^2} + \frac{x_{i+1}x - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-1 + \frac{(x_{i+1}-2\zeta)(x-\zeta) + \zeta^2 + \zeta(x_{i+1}-2\zeta)}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= -\frac{(x_{i+1}-x_i)}{h_i} + \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x_{i+1}-2\zeta)(x-\zeta)}{(x-\zeta)^2} + \frac{(x_{i+1}-\zeta)\zeta}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= -1 + \frac{(x_{i+1}-2\zeta)}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x-\zeta)} dx + \frac{(x_{i+1}-\zeta)\zeta}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x-\zeta)^2} dx \\
&= -1 + \frac{(x_{i+1}-2\zeta)}{h_i} (\ln|x_{i+1}-\zeta| - \ln|x_i-\zeta|) - \frac{(x_{i+1}-\zeta)\zeta}{h_i} \left(\frac{1}{x_{i+1}-\zeta} - \frac{1}{x_i-\zeta} \right) \\
&= -1 + \frac{(x_{i+1}-2\zeta)}{h_i} \ln \left| \frac{x_{i+1}-\zeta}{x_i-\zeta} \right| - \frac{(x_{i+1}-\zeta)\zeta}{h_i} \left(\frac{x_i-\zeta - (x_{i+1}-\zeta)}{(x_{i+1}-\zeta)(x_i-\zeta)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \frac{(x_{i+1} - 2\zeta)}{h_i} \ell n \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{(x_{i+1} - \zeta)\zeta}{h_i} \frac{(-h_i)}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \\
&= -1 + \frac{(x_{i+1} - 2\zeta)}{h_i} \ell n \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{\zeta}{(x_i - \zeta)} \\
f_{10}(\zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \frac{xv_{i+1}(x)}{(x-\zeta)^2} dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x(x-x_i)}{(x-\zeta)^2} dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x^2 - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} - \frac{x_i x - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x-\zeta)^2}{(x-\zeta)^2} - \frac{x_i x - 2x\zeta + \zeta^2}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - \frac{(x_i - 2\zeta)(x-\zeta) + \zeta^2 + \zeta(x_i - 2\zeta)}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= \frac{(x_{i+1} - x_i)}{h_i} - \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{(x_i - 2\zeta)(x-\zeta)}{(x-\zeta)^2} + \frac{(x_i - \zeta)\zeta}{(x-\zeta)^2} \right) dx \\
&= 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x-\zeta)} dx - \frac{(x_i - \zeta)\zeta}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x-\zeta)^2} dx \\
&= 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} (\ell n|x_{i+1} - \zeta| - \ell n|x_i - \zeta|) + \frac{(x_i - \zeta)\zeta}{h_i} \left(\frac{1}{x_{i+1} - \zeta} - \frac{1}{x_i - \zeta} \right) \\
&= 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} \ell n \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{(x_i - \zeta)\zeta}{h_i} \left(\frac{x_i - \zeta - (x_{i+1} - \zeta)}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \right) \\
&= 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} \ell n \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| + \frac{(x_i - \zeta)\zeta}{h_i} \frac{(-h_i)}{(x_{i+1} - \zeta)(x_i - \zeta)} \\
&= 1 - \frac{(x_i - 2\zeta)}{h_i} \ell n \left| \frac{x_{i+1} - \zeta}{x_i - \zeta} \right| - \frac{\zeta}{(x_{i+1} - \zeta)}
\end{aligned}$$

Επίσης από τη σχέση (4.50) και με την χρήση του κανόνα του τραπεζίου για την αριθμητική ολοκλήρωση έχουμε :

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} [g(x_i) + g(x_{i+1})]$$

$$g(x) \in \mathfrak{R} \Rightarrow g(x) = g_R(x) + ig_I(x) \Rightarrow \overline{g(x)} = g_R(x) - ig_I(x).$$

Επίσης:

$$\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} = \frac{a + ib - (-a + ib)}{a + ib - (-a + ib)} = \frac{2a}{2a} = 1, a \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{t_D - t_C}{t_D - t_C} = \frac{-a - ib - (a - ib)}{-a - ib - (a - ib)} = \frac{-2a}{-2a} = 1, a \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} = \frac{a - ib - (a + ib)}{a - ib - (a + ib)} = \frac{-2ib}{-2ib} = \frac{ib}{-ib} = -1, b \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{t_A - t_D}{t_A - t_D} = \frac{-a + ib - (-a - ib)}{-a + ib - (-a - ib)} = \frac{2ib}{2ib} = \frac{2ib}{-2ib} = -1, b \in \mathfrak{R}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= 2 \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_4(\zeta)] - \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_4(\zeta)] \\ &\quad - \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \zeta \right) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_7(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_8(\zeta)] \\ &\quad + \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \right) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_9(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_{10}(\zeta)] \\ &\quad + 2i \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_4(\zeta)] - (-i) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_4(\zeta)] \\ &\quad - (-i) \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \zeta \right) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_7(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_8(\zeta)] + \\ &\quad + (-i) \left(\frac{t_B - t_A}{t_B - t_A} \right) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_9(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_{10}(\zeta)] \\ &= \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_4(\zeta)] - \zeta \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_7(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_8(\zeta)] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N [g_R(x_i) f_9(\zeta) + g_R(x_{i+1}) f_{10}(\zeta)] + i \left(3 \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_4(\zeta)] + \right. \\ &\quad \left. + \zeta \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_7(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_8(\zeta)] - \sum_{i=1}^N [g_I(x_i) f_9(\zeta) + g_I(x_{i+1}) f_{10}(\zeta)] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \{g_R(x_i)[f_3(\zeta) - \zeta f_7(\zeta) + f_9(\zeta)] + g_R(x_{i+1})[f_4(\zeta) - \zeta f_8(\zeta) + f_{10}(\zeta)]\} \\
&\quad + i \sum_{i=1}^N \{g_I(x_i)[3f_3(\zeta) + \zeta f_7(\zeta) - f_9(\zeta)] + g_I(x_{i+1})[3f_4(\zeta) + \zeta f_8(\zeta) - f_{10}(\zeta)]\} \\
&= \sum_{i=1}^N \{A_{11}(\zeta)g_R(x_i) + A_{12}(\zeta)g_R(x_{i+1})\} \\
&\quad + i \sum_{i=1}^N \{A_{13}(\zeta)g_I(x_i) + A_{14}(\zeta)g_I(x_{i+1})\}
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}
S_{CD} &= \sum_{i=1}^N \{A_{31}(\zeta)g_R(x_i) + A_{32}(\zeta)g_R(x_{i+1})\} \\
&\quad + i \sum_{i=1}^N \{A_{33}(\zeta)g_I(x_i) + A_{34}(\zeta)g_I(x_{i+1})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{BC} &= - \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_4(\zeta)] + \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \zeta \right) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_7(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_8(\zeta)] \\
&\quad - \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \right) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_9(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] - (-i) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_4(\zeta)] \\
&\quad + (-i) \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \zeta \right) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_7(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_8(\zeta)] \\
&\quad - (-i) \left(\frac{t_C - t_B}{t_C - t_B} \right) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_9(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] \\
&= - \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_4(\zeta)] + (-\zeta) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_7(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_8(\zeta)] \\
&\quad - (-1) \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_9(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] - (-i) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_4(\zeta)] \\
&\quad + (-i)(-\zeta) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_7(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_8(\zeta)] - (-i)(-1) \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_9(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] \\
&= - \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_3(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_4(\zeta)] - \zeta \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_7(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_8(\zeta)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N [g_R(x_i)f_9(\zeta) + g_R(x_{i+1})f_{10}(\zeta)] + i \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_3(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_4(\zeta)] \\
&\quad + i\zeta \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_7(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_8(\zeta)] - i \sum_{i=1}^N [g_I(x_i)f_9(\zeta) + g_I(x_{i+1})f_{10}(\zeta)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \{g_R(x_i)[-f_3(\zeta) - \zeta f_7(\zeta) + f_9(\zeta)] + g_R(x_{i+1})[-f_4(\zeta) - \zeta f_8(\zeta) + f_{10}(\zeta)]\} \\
&\quad + i \sum_{i=1}^N \{g_I(x_i)[f_3(\zeta) + \zeta f_7(\zeta) - f_9(\zeta)] + g_I(x_{i+1})[f_4(\zeta) + \zeta f_8(\zeta) - f_{10}(\zeta)]\} \\
&= \sum_{i=1}^N \{A_{21}(\zeta)g_R(x_i) + A_{22}(\zeta)g_R(x_{i+1})\} + i \sum_{i=1}^N \{A_{23}(\zeta)g_I(x_i) + A_{24}(\zeta)g_I(x_{i+1})\}
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$S_{DA} = \sum_{i=1}^N \{A_{41}(\zeta)g_R(x_i) + A_{42}(\zeta)g_R(x_{i+1})\} + i \sum_{i=1}^N \{A_{43}(\zeta)g_I(x_i) + A_{44}(\zeta)g_I(x_{i+1})\}$$

3. Φόρτιση:

$$\Phi(z) = \frac{P}{2\pi i} \frac{1}{t_i - z} \Rightarrow \overline{\Phi(z)} = -\frac{P}{2\pi i} \frac{1}{t_i - z}$$

$$\Rightarrow \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{1}{t_i - z} - \frac{1}{\overline{t_i - z}} \right) = -\frac{P}{2\pi i} \frac{2i \operatorname{Im}(t_i - z)}{\|t_i - z\|^2}$$

$$\Phi'(z) = \frac{P}{2\pi i} \frac{1}{(t_i - z)^2} \Rightarrow \overline{\Phi'(z)} = \frac{P}{2\pi i} \frac{1}{(\overline{t_i - z})^2} \Rightarrow z \overline{\Phi'(z)} = \frac{P}{2\pi i} \frac{z}{(t_i - z)^2}$$

$$\Psi(z) = \frac{P}{2\pi i} \frac{\overline{t_i}}{(t_i - z)^2} \Rightarrow \overline{\Psi(z)} = -\frac{P}{2\pi i} \frac{t_i}{(t_i - z)^2}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{dt}{dt} (z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \operatorname{Im}(t_i - z)}{\|t_i - z\|^2} - e^{2ia} \left(\frac{z}{(t_i - z)^2} - \frac{t_i}{(t_i - z)^2} \right) \right) \\
&= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \operatorname{Im}(t_i - z)}{\|t_i - z\|^2} + e^{2ia} \frac{t_i - z}{(t_i - z)^2} \right)
\end{aligned}$$

με

$$t_1 = ax_0 + ib$$

$$t_2 = ax_0 - ib$$

$$z \in AB: z = a\zeta + ib$$

$$\Rightarrow t_2 - z = ax_0 - ib - a\zeta - ib = a(x_0 - \zeta) - 2ib$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(t_2 - z) = -2b$$

$$z \in CD: z = -a\zeta - ib$$

$$\Rightarrow t_1 - z = ax_0 + ib + a\zeta + ib = a(x_0 + \zeta) + 2ib$$

$$\Rightarrow \text{Im}(t_1 - z) = 2b$$

$$z \in BC: z = a - ib\zeta$$

$$\Rightarrow t_1 - z = ax_0 + ib - a + ib\zeta = a(x_0 - 1) + ib(1 + \zeta)$$

$$\Rightarrow t_2 - z = ax_0 - ib - a + ib\zeta = a(x_0 - 1) - ib(1 - \zeta)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(t_1 - z) = b(1 + \zeta)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(t_2 - z) = -b(1 - \zeta)$$

$$z \in DA: z = -a + ib\zeta$$

$$\Rightarrow t_1 - z = ax_0 + ib + a - ib\zeta = a(x_0 + 1) + ib(1 - \zeta)$$

$$\Rightarrow t_2 - z = ax_0 - ib - a - ib\zeta = a(x_0 + 1) - ib(1 + \zeta)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(t_1 - z) = b(1 - \zeta)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(t_2 - z) = -b(1 + \zeta)$$

$$f_{AB} = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \text{Im}(t_2 - z)}{\|t_2 - z\|^2} + \frac{t_2 - z}{(t_2 - z)^2} \right) = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-4bi}{\|a(x_0 - \zeta) - 2ib\|^2} + \frac{a(x_0 - \zeta) - 2ib}{(a(x_0 - \zeta) - 2ib)^2} \right)$$

$$f_{CD} = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \text{Im}(t_1 - z)}{\|t_1 - z\|^2} + \frac{t_1 - z}{(t_1 - z)^2} \right) = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{4bi}{\|a(x_0 + \zeta) + 2ib\|^2} + \frac{a(x_0 + \zeta) + 2ib}{(a(x_0 + \zeta) + 2ib)^2} \right)$$

$$f_{BC} = -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \text{Im}(t_1 - z)}{\|t_1 - z\|^2} - \frac{t_1 - z}{(t_1 - z)^2} \right) - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \text{Im}(t_2 - z)}{\|t_2 - z\|^2} - \frac{t_2 - z}{(t_2 - z)^2} \right)$$

$$-\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1 + \zeta)}{\|a(x_0 - 1) + ib(1 + \zeta)\|^2} - \frac{a(x_0 - 1) + ib(1 + \zeta)}{(a(x_0 - 1) + ib(1 + \zeta))^2} \right)$$

$$-\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1 - \zeta)}{\|a(x_0 - 1) - ib(1 - \zeta)\|^2} - \frac{a(x_0 - 1) - ib(1 - \zeta)}{(a(x_0 - 1) - ib(1 - \zeta))^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
f_{DA} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \operatorname{Im}(t_1 - z)}{\|t_1 - z\|^2} - \frac{t_1 - z}{(t_1 - z)^2} \right) - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2i \operatorname{Im}(t_2 - z)}{\|t_2 - z\|^2} - \frac{t_2 - z}{(t_2 - z)^2} \right) \\
&\quad - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1-\zeta)}{\|a(x_0+1)+ib(1-\zeta)\|^2} - \frac{a(x_0+1)+ib(1-\zeta)}{(a(x_0+1)+ib(1-\zeta))^2} \right) \\
&\quad - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1+\zeta)}{\|a(x_0+1)-ib(1+\zeta)\|^2} - \frac{a(x_0+1)-ib(1+\zeta)}{(a(x_0+1)-ib(1+\zeta))^2} \right)
\end{aligned}$$

$x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f_{AB} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-4bi}{\|-a\zeta - 2ib\|^2} + \frac{-a\zeta - 2ib}{(-a\zeta - 2ib)^2} \right) \\
&= \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{4bi}{\|a\zeta + 2ib\|^2} + \frac{a\zeta + 2ib}{(a\zeta + 2ib)^2} \right) \\
&= \frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{4i}{\|r\zeta + 2i\|^2} + \frac{r\zeta + 2i}{(r\zeta + 2i)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{CD} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{4bi}{\|a\zeta + 2ib\|^2} + \frac{a\zeta + 2ib}{(a\zeta + 2ib)^2} \right) \\
&= -\frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{4i}{\|r\zeta + 2i\|^2} + \frac{r\zeta + 2i}{(r\zeta + 2i)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{BC} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1+\zeta)}{\|-a+ib(1+\zeta)\|^2} - \frac{-a+ib(1+\zeta)}{(-a+ib(1+\zeta))^2} \right) - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1-\zeta)}{\|-a-ib(1-\zeta)\|^2} - \frac{-a-ib(1-\zeta)}{(-a-ib(1-\zeta))^2} \right) \\
&= -\frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{2i(1+\zeta)}{\|r-i(1+\zeta)\|^2} + \frac{r-i(1+\zeta)}{(r-i(1+\zeta))^2} \right) + \frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{2i(1-\zeta)}{\|r+i(1-\zeta)\|^2} - \frac{r+i(1-\zeta)}{(r+i(1-\zeta))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{DA} &= -\frac{P}{2\pi i} \left(\frac{2ib(1-\zeta)}{\|a+ib(1-\zeta)\|^2} - \frac{a+ib(1-\zeta)}{(a+ib(1-\zeta))^2} \right) - \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{-2ib(1+\zeta)}{\|a-ib(1+\zeta)\|^2} - \frac{a-ib(1+\zeta)}{(a-ib(1+\zeta))^2} \right) \\
&= -\frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{2i(1-\zeta)}{\|r+i(1-\zeta)\|^2} - \frac{r+i(1-\zeta)}{(r+i(1-\zeta))^2} \right) + \frac{P}{2\pi bi} \left(\frac{2i(1+\zeta)}{\|r-i(1+\zeta)\|^2} + \frac{r-i(1+\zeta)}{(r-i(1+\zeta))^2} \right)
\end{aligned}$$

Το σύστημα που θα λυθεί είναι της μορφής: $A \cdot \begin{bmatrix} g'_R \\ g'_I \end{bmatrix} = F'$, $g' = \frac{b}{P}g$