ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Έλεγχος αποθεμάτων με ντετερμινιστικά και στοχαστικά μοντέλα

Διπλωματική Εργασία

του φοιτητή

Μπαρδάκα Ευάγγελου

Επιβλέπων: Κολέτσος Ιωάννης

Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής επιτροπή: Κολέτσος Ιωάννης — Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος — Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Χρυσαφίνος Κωνσταντίνος — Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα Μάρτιος 2015

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με ενέπνευσαν όλα αυτά τα χρόνια. Ιδιαίτερα, την οικογένεια μου που ήταν πάντα κοντά μου και με υποστήριξε τόσο ηθικά, όσο και υλικά, σε όλη τη διάρκεια της ζωής μου. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου Ιωάννη Κολέτσο για την άριστη συνεργασία που αναπτύξαμε και για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου που με ανέχτηκαν όλα αυτά τα χρόνια και ήταν πάντα δίπλα μου όποτε τους χρειαζόμουν.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει στον αναγνώστη τις βασικές αρχές του ελέγχου αποθεμάτων. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή στην επιχειρησιακή έρευνα και αναφέρονται οι βασικές μέθοδοι και εφαρμογές της. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες ώστε να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με τις βασικές συνιστώσες και τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων καθώς και με τον διαχωρισμό των μοντέλων ανάλογα με τη δυνατότητα πρόβλεψης της ζήτησης. Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται τα ντετερμινιστικά μοντέλα συνεχούς ανανέωσης ξεκινώντας με το βασικό μοντέλο EOQ, και στη συνέχεια αφαιρώντας τους βασικούς περιορισμούς του. Στη συνέχεια στο κεφάλαιο τέσσερα εξετάζονται τα στοχαστικά μοντέλα μιας περιόδου και αναλύεται το γνωστό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Στο κεφάλαιο πέντε επανερχόμαστε στο μοντέλο EOQ με αβέβαιη, πλέον, ζήτηση και εξετάζονται τρόποι εύρεσης του βέλτιστου σημείου παραγγελίας. Στο κεφάλαιο έξι αναλύεται η πολιτική περιοδικής ανανέωσης (R, S) και στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση ABC, η οποία κατατάσσει τα προϊόντα μιας επιχείρησης ανάλογα με κάποιο μέτρο σημαντικότητας.

Abstract

This diploma thesis presents the general theory of inventory control. In chapter one we present a brief history of operations research and some applications in order to understand its use. In chapter two we introduce inventory theory with its basic principles and categorize the models. In chapter three we analyze the basic economic order quantity model (EOQ) and then we relax our assumptions and see some other derivations of the EOQ model. In chapter four we analyze the classic news vendor problem with discrete and then with continuous demand. In chapter five we analyze the EOQ model with uncertain demand and we find alternative methods to determine the reorder point. In chapter six we analyze the periodic review policy (R, S) and in the final chapter we present the ABC analysis.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Τι είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα;

Η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operational Research) αποτελεί έναν σημαντικό κλάδο των μαθηματικών και χαρακτηρίζεται συνήθως ως η επιστήμη της λήψης αποφάσεων. Με τον όρο "Επιχειρησιακή" προσδιορίζεται η έννοια της λειτουργίας και όχι της εταιρίας καθ' αυτής. Σκοπός της, σαν επιστημονικός κλάδος, είναι η αποφυγή κινδύνων που προέρχονται από την τυχαία λήψη αποφάσεων.

Η γενική προσέγγιση της επιχειρησιακής έρευνας είναι η ανάλυση ενός προβλήματος και η εύρεση της βέλτιστης λύσης εκμεταλλευόμενη βασικές τεχνικές των μαθηματικών όπως η μαθηματική μοντελοποίηση και η στατιστική. Η βέλτιστη λύση ορίζεται ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια τα οποία μπορεί να είναι το μέγιστο κέρδος, το ελάχιστο κόστος, ο ελάχιστος χρόνος αναμονής ή ακόμα και ο συνδυασμός κέρδους με το μικρότερο δυνατό ρίσκο.

Οι ρίζες της Επιχειρησιακής Έρευνας βρίσκονται αρκετές δεκαετίες πίσω και συγκεκριμένα κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου, όπου δημιουργήθηκε η ανάγκη κατανομής του υλικού και ανθρώπινου δυναμικού στις πολεμικές επιχειρήσεις. Οι πρώτες ομάδες επιστημόνων, κλήθηκαν από Αμερικανικές και Βρετανικές στρατιωτικές διαχειρίσεις ώστε να μπορέσουν να εφαρμόσουν κάποιου είδους επιστημονικής προσέγγισης σε θέματα τακτικής και στρατηγικής. Τα αποτελέσματα τους, συνέβαλαν σημαντικά στη νίκη των συμμάχων. Οι πρώτες μελέτες έγιναν από τον Patrick Blackett (1897-1974) και τον George Dantzig (1914-2005). Ο πρώτος ασχολήθηκε με τη μελέτες για τις εφοδιοπομπές των Βρετανών και τα σημεία στα οποία έπρεπε να ενισχυθούν τα αεροπλάνα της RAF, ενώ ο δεύτερος ασχολήθηκε με την εφοδιαστική αλυσίδα.

Με την έκβαση του πολέμου και τη συνεισφορά που είχε η Επιχειρησιακή Έρευνα σε αυτόν, κινήθηκε το ενδιαφέρον της εφαρμογής της, σε άλλες δραστηριότητες εκτός του στρατού. Με την άνθηση της βιομηχανίας και την γρήγορη εξέλιξη της τεχνολογίας, δημιουργήθηκαν και πάλι προβλήματα πολυπλοκότητας και ανάγκης για εξειδίκευση. Έγινε άμεσα αντιληπτό ότι η ρίζα πίσω από τα προβλήματα, ήταν η ίδια με αυτή που είχαν να αντιμετωπίσουν οι επιστήμονες κατά τη διάρκεια του πολέμου. Έτσι, στις αρχές του 1950, σύμβουλοι επιχειρήσεων που ήταν μέλη των ομάδων της Επιχειρησιακής Έρευνας κατά τη διάρκεια του πολέμου, εισήγαγαν τη χρήση της σε επιχειρήσεις, στη βιομηχανία ακόμα και στις ίδιες τις κυβερνήσεις του. Από τότε, ξεκίνησε η ραγδαία εξέλιξη της Επιχειρησιακής Έρευνας. Υπήρξαν πολλοί και σημαντικοί παράγοντες που συνεισέφεραν στην τόσο άμεση εξάπλωσή της. Μερικοί από αυτούς είναι:

1. Η μέθοδος Simplex που αναπτύχθηκε το 1947 από τον George Dantzig και ήταν ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
2. Ο δυναμικός προγραμματισμός
3. Η ανάγκη του ελέγχου αποθεμάτων.
4. Η θεωρία των ουρών αναμονής.

Σε όλα αυτά, ασφαλώς, βοήθησε η επανάσταση της πληροφορικής, που οδήγησε σε γρηγορότερους υπολογισμούς, αλλά και σε διαχείριση μεγάλου όγκου δεδομένων. Ιδιαίτερα από τη δεκαετία του 1980 και μετά, με την ανάπτυξη πολύ πιο ισχυρών υπολογιστών και πακέτων λογισμικού, δόθηκε η δυνατότητα ευκολότερης πρόσβασης στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

Σήμερα, η Επιχειρησιακή Έρευνα αποτελεί το πιο διαδεδομένο εργαλείο στο πλαίσιο της ανάλυσης αποφάσεων και παρότι βασίζεται σε στοιχεία οικονομικών επιστημών, δεν περιορίζεται μόνο εκεί. Η δυνατότητα χρήσης της παρέχεται μέσω ελεύθερων προγραμμάτων και ως εκ τούτου οποιοσδήποτε έχει τη δυνατότητα να επιλύσει τα προβλήματά του.

1.2 Η μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Έχοντας ως σκοπό να εφαρμόσει τη σύγχρονη επιστήμη πάνω σε πολύπλοκα συστήματα, η Επιχειρησιακή Έρευνα αναπτύσσει ένα μοντέλο του υπό μελέτη συστήματος και το χρησιμοποιεί με σκοπό να προβλέψει διάφορες εναλλακτικές στρατηγικές, πολιτικές και αποφάσεις. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. **<u>Διατύπωση του προβλήματος</u>**

    Το στάδιο αυτό είναι το πιο σημαντικό και το πιο δύσκολο. Απαιτούνται όλα τα δεδομένα του προβλήματος, προκειμένου να αναζητηθούν τα αίτια και να καθοριστούν οι στόχοι με ρεαλιστικό και αντικειμενικό τρόπο. Στο συγκεκριμένο στάδιο το παραμικρό λάθος θα οδηγήσει σε αποτυχία τα επόμενα στάδια και για το λόγο αυτό απαιτείται μεγάλη προσοχή και συνεχής επανεξέταση.

2. **<u>Μαθηματική διατύπωση του μοντέλου</u>**

    Στο στάδιο αυτό χρειάζεται να εντοπιστούν οι παράγοντες αυτοί οι οποίοι θα επηρεάσουν τη λύση του προβλήματος, και τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται. Στη συνέχεια, θα πρέπει να καθοριστεί ο στόχος του προβλήματος, να διατυπωθεί η αντικειμενική συνάρτηση, οι μεταβλητές, καθώς και το είδους του μοντέλου ως προς τον τρόπο με τον θα περιγραφεί (στοχαστικό ή ντετερμινιστικό).

3. **<u>Επίλυση του μοντέλου</u>**

    Η επίλυση που θα δώσει τη βέλτιστη λύση του μοντέλου μπορεί να είναι είτε αναλυτική, με χρήση διαφορικών εξισώσεων ή κάποιου αλγορίθμου, είτε προσεγγιστική. Στη συνέχεια θα πρέπει να γίνει μια μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων στη λύση, να γίνει δηλαδή μια ανάλυση ευαισθησίας του μοντέλου (sensitivity analysis).

4. **<u>Επαλήθευση του τελικού μοντέλου και της λύσης</u>**

    Στο στάδιο αυτό, το οποίο είναι και το τελευταίο, γίνεται έλεγχος για σφάλματα ή τυχόν παραλείψεις. Ο έλεγχος πραγματοποιείται με επαναλαμβανόμενες εφαρμογές του μοντέλου, προκειμένου να παρατηρηθούν μεταβολές στο χρόνο, με σύγκριση των δεδομένων με παλαιότερα μοντέλα που θεωρούνται αξιόπιστα, καθώς και εφαρμογή του μοντέλου ώστε να φανεί αν τα αποτελέσματά του είναι ρεαλιστικά.

Μέσα από αυτά τα στάδια, σκοπός του μελετητή είναι να επιλέξει από όλες τις πιθανές λύσεις, εκείνη που θεωρεί ότι ανταποκρίνεται καλύτερα στο πρόβλημά του, και άρα είναι η **βέλτιστη λύση**.

1.3 Μέθοδοι και εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας

Υπάρχουν πολλοί τρόποι και μέθοδοι για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος. Οι βασικότερες μέθοδοι και εφαρμογές που χρησιμοποιεί ή χρησιμοποιείται η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι επιγραμματικά:

- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)
- Ο Δυναμικός Προγραμματισμός (Dynamic Programming)
- Ο Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming)
- Ο Μη γραμμικός Προγραμματισμός (Non Linear Programming)
- Το πρόβλημα μεταφοράς (Transportation problem)
- Το πρόβλημα καταμερισμού (Assignment problem)
- Η διαχείριση έργων με PERT/CPM
- Η Θεωρία Παιγνίων
- Η Ανάλυση Αποφάσεων
- Οι Ουρές αναμονής
- Ο Έλεγχος Αποθεμάτων

2 Έλεγχος αποθεμάτων

2.1 Εισαγωγή

Αποθέματα είναι ποσότητες προϊόντων, που φυλάσσονται σε αποθήκες για μελλοντική χρήση. Τα προϊόντα αυτά μπορεί να είναι πρώτες ύλες, έτοιμα προϊόντα, μηχανές, ανθρώπινοι πόροι και δυνατότητες, χρηματικά κεφάλαια κ.τ.λ. Τα αποθέματα, αν διατηρούνται, συμβάλλουν σημαντικά στη σωστή λειτουργία των επιχειρήσεων. Επομένως, αποτελούν για τις διοικήσεις των επιχειρήσεων μια συνεχή πηγή προβλημάτων, τα οποία πρέπει να αντιμετωπιστούν με τον πιο συμφέροντα για την επιχείρηση τρόπο. Οι επιχειρήσεις χρησιμοποιούν την επιχειρησιακή έρευνα για να βελτιώσουν την *πολιτική απογραφής* τους για το <u>πότε</u> και το κατά <u>πόσο</u> πρέπει να αναπληρώσουν το απόθεμά τους. Χρησιμοποιούν **επιστημονική διαχείριση αποθεμάτων** ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- Διατυπώνουν ένα μαθηματικό μοντέλο περιγράφοντας τη συμπεριφορά του συστήματος απογραφής.
- Αναζητούν μια βέλτιστη πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων που σέβεται το συγκεκριμένο μοντέλο.
- Χρησιμοποιώντας το αρχείο του τρέχοντος επιπέδου της αποθήκης, εφαρμόζουν τη βέλτιστη στρατηγική για να σηματοδοτήσουν το πότε και πόσο θα αναπληρώσουν την αποθήκη.

Τα μαθηματικά μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων που χρησιμοποιούν αυτή την προσέγγιση μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα **ντετερμινιστικά** μοντέλα και τα **στοχαστικά** μοντέλα, ανάλογα με την δυνατότητα πρόβλεψης της ζήτησης που εμπλέκεται.

2.2 Χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων

Οι σπουδαιότερες έννοιες που παρατηρούνται σε ένα σύστημα αποθεμάτων είναι οι παρακάτω:

2.2.1 Ζήτηση

Η ζήτηση αντιπροσωπεύει την επιθυμία των πελατών να αγοράσουν τα προϊόντα μια επιχείρησης.

Σε κάποιες περιπτώσεις, το μέγεθος της ζήτησης για μια συγκεκριμένη μελλοντική χρονική περίοδο, είναι δυνατό να είναι εκ των προτέρων γνωστό ή να μπορεί να εκτιμηθεί αρκετά καλά. Στην περίπτωση αυτή τα συστήματα αποθεμάτων ονομάζονται **ντετερμινιστικά (προσδιοριστικά)**. Στα ντετερμινιστικά συστήματα, το μέγεθος της ζήτησης μπορεί να είναι σταθερό για ίσα χρονικά διαστήματα, οπότε λέμε ότι υπάρχει στατική ζήτηση, είτε να είναι γνωστός ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται οπότε λέμε ότι υπάρχει δυναμική ζήτηση. Υπάρχουν, όμως, πολλές περιπτώσεις στις οποίες το μέγεθος της ζήτησης δεν μπορεί να προβλεφθεί, αλλά να μπορεί να προσδιοριστεί η κατανομή πιθανότητάς της. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται **στοχαστικά**.

Για να γίνει καλύτερο κατανοητός ο διαχωρισμός των συστημάτων, δίνονται τα παρακάτω παραδείγματα:

1. Βιοτεχνία ρούχων είναι υποχρεωμένη να παραδίδει στα καταστήματα 150 παντελόνια την εβδομάδα. Η ζήτηση είναι στατική.
2. Βιοτεχνία ρούχων είναι υποχρεωμένη να παραδώσει στα καταστήματα 50 παντελόνια την πρώτη εβδομάδα, 100 τη δεύτερη, 150 την τρίτη κ.τ.λ. Η ζήτηση είναι δυναμική.
3. Η ζήτηση ενός ανταλλακτικού αυτοκινήτου έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο 1/20. Η ζήτηση είναι στοχαστική.

2.2.2 Αναπλήρωση ή ανεφοδιασμός της αποθήκης

Με τον όρο αναπλήρωση ή ανεφοδιασμό εννοούμε την ποσότητα ενός προϊόντος που προστίθεται στο απόθεμα μετά από μια παραγγελία. Η ποσότητα αυτή συμβολίζεται με q. Η κάθε επιχείρηση μπορεί να προμηθευτεί μια ποσότητα q είτε με αγορά είτε με παραγωγή. Το μέγεθος της παραγγελίας μπορεί να είναι σταθερό αλλά μπορεί και να μεταβάλλεται.

2.2.3 Χρόνος αναπλήρωσης ή ανεφοδιασμού (lead time)

Με τον όρο αυτό εννοούμε το διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που μια παραγγελία τοποθετείται, μέχρι τη στιγμή που η παραγγελία παραλαμβάνεται και προστίθεται στο απόθεμα. Ο χρόνος αναπλήρωσης μπορεί να είναι σταθερός ή μεταβαλλόμενος και συμβολίζεται με το γράμμα L.

2.2.4 Χρονική στιγμή ανεφοδιασμού – Συχνότητα

Η χρονική στιγμή και η συχνότητα δηλώνουν το πότε και το πόσο συχνά πρέπει να γίνεται η αναπλήρωση, αντίστοιχα. Ο υπεύθυνος για την λήψη αποφάσεων σε μια επιχείρηση είναι σε θέση να ελέγξει και τις δυο αυτές μεταβλητές ταυτόχρονα, ή την κάθε μια ξεχωριστά. Για παράδειγμα όταν ένα προϊόν παράγεται σε παρτίδες, δεν χρειάζεται να ελεγχθεί η ποσότητα αλλά μόνο η συχνότητα παραγωγής.

2.2.5 Κύκλος παραγωγής ή παραγγελίας

Με τον όρο αυτό εννοούμε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών παραγωγών ή παραγγελιών.

2.2.6 Πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων

Με τον όρο πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων εννοούμε μια σειρά από κανόνες τους οποίους ακολουθεί η επιχείρηση. Με βάση αυτούς αποφασίζεται το πότε και το με ποια ποσότητα πρέπει να αναπληρωθεί το απόθεμα.

Μια ιδιαίτερα διαδεδομένη πολιτική αποθεμάτων είναι η $\boldsymbol{(r, q)}$. Όποτε το επίπεδο αποθέματος ενός προϊόντος πέσει στις r μονάδες, να δίδεται μια παραγγελία για q επιπλέον μονάδες για την τροφοδότηση του αποθέματος.

2.3 Βασικές συνιστώσες ενός συστήματος αποθεμάτων (Είδη κόστους αποθεμάτων)

Οι στρατηγικές απογραφής επηρεάζουν την κερδοφορία των επιχειρήσεων και γι' αυτό πρέπει να εξεταστούν ξεχωριστά οι οικονομικοί παράμετροι που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην κερδοφορία αυτή. Μερικές από τις παραμέτρους είναι:

- το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης των αποθεμάτων (ενοίκιο αποθήκης, ασφάλεια εμπορευμάτων κτλ) (holding cost ή storage cost)
- το κόστος παραγγελίας και εγκατάστασης (ordering and setup cost)
- το κόστος από τα διαφυγόντα κέρδη σε περίπτωση εξαντλήσεως των αποθεμάτων (shortage cost)
- η τιμή αγοράς της μονάδας προϊόντος (μοναδιαίο κόστος)

Οι παράγοντες αυτοί θα περιγραφούν παρακάτω.

1. Το **κόστος αποθήκευσης και διατήρησης αποθεμάτων** αποτελείται από όλα τα κόστη που σχετίζονται με την αποθήκευση των αποθεμάτων μέχρι να πουληθούν ή να χρησιμοποιηθούν. Συμπεριλαμβάνονται τα κόστη ενοικίασης χώρου, ασφάλειας των αποθεμάτων, προστασίας των αποθεμάτων καθώς και οι φόροι που αποδίδονται στην αποθήκευση. Το συγκεκριμένο κόστος δεν είναι σταθερό, αλλά κυμαίνεται ανάλογα με τον όγκο των προϊόντων που είναι αποθηκευμένα και, κατά περίπτωση, με το μήκος του χρονικού διαστήματος που ένα προϊόν διατηρείται στην αποθήκη. Όσο μεγαλύτερος ο όγκος των προϊόντων που είναι αποθηκευμένα (**επίπεδο αποθέματος**), τόσο μεγαλύτερο το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης των αποθεμάτων.

2. Το **κόστος παραγγελίας και εγκατάστασης** μιας ποσότητας q (είτε μέσα αγοράς είτε μέσω παραγωγής αυτής της ποσότητας) περιλαμβάνει τα κόστη που προκύπτουν κατά την τοποθέτησης μια παραγγελίας ή την έναρξη μιας παραγωγικής διαδικασίας.

3. Το **κόστος από τα διαφυγόντα κέρδη σε περίπτωση εξάντλησης των αποθεμάτων**. Το κόστος αυτό προκύπτει όταν η ζήτηση ξεπεράσει το διαθέσιμο απόθεμα και μπορεί να ερμηνευτεί με τις δυο παρακάτω περιπτώσεις:

   Στην πρώτη περίπτωση, που επιτρέπονται εκκρεμότητες, η υπερβάλλουσα ζήτηση δεν χάνεται, αλλά αντίθετα εκκρεμεί μέχρις ότου να μπορεί να ικανοποιηθεί όταν πραγματοποιηθεί η επόμενη αναπλήρωση του αποθέματος. Για μια εταιρία που παρουσιάζει αδυναμία στο να καλύψει την ζήτηση, το κόστος εξάντλησης μπορεί να ερμηνευτεί σαν την απώλεια της καλής διάθεσης των πελατών και τον επακόλουθο δισταγμό τους στο να ξανά συνεργαστούν με την επιχείρηση. Για έναν κατασκευαστή, το να υποστεί προσωρινή έλλειψη σε υλικά που χρειάζονται για την παραγωγή, το κόστος εξάντλησης γίνεται το κόστος που σχετίζεται με την καθυστέρηση της ολοκλήρωσης της παραγωγικής διαδικασίας.

Στην δεύτερη περίπτωση, όπου δεν επιτρέπονται εκκρεμότητες, εάν προκύψει υπερβάλλουσα ζήτηση, η εταιρία δεν μπορεί να περιμένει μέχρι την επόμενη παραγγελία για να ανταποκριθεί. Η υπερβάλλουσα ζήτηση:

- θα καλυφθεί από έκτακτη παραγγελία.
- δεν θα καλυφθεί καθόλου και οι παραγγελίες θα ακυρωθούν.

Στη μια περίπτωση, σαν κόστος εξάντλησης θεωρείται το κόστος της έκτακτης παραγγελίας, ενώ στην άλλη, το κόστος εξάντλησης θα είναι η απώλεια των τρεχόντων εσόδων από τη μη κάλυψη της ζήτησης, καθώς και η απώλεια μελλοντικών συνεργασιών με τους δυσαρεστημένους πελάτες.

4. Η **τιμή αγοράς** είναι το κόστος που σχετίζεται με την αγορά μιας μονάδας προϊόντος. Σε περίπτωση που οι παραγγελίες γίνονται από εξωτερικό προμηθευτή, στην τιμή αυτή θα πρέπει να περιλαμβάνονται και τα μεταφορικά έξοδα.

2.4 Συστήματα ελέγχου αποθεμάτων

Με τον όρο συστήματα ελέγχου αποθεμάτων εννοούμε μια δομή, που δημιουργείται με σκοπό να ελέγχει το επίπεδο των αποθεμάτων με τον προσδιορισμό της ποσότητας που παραγγέλλεται, καθώς και του χρόνου που η ποσότητα αυτή παραγγέλλεται. Γίνεται η εξής διάκριση:

- Συνεχή συστήματα (ή ορισμένης παραγγελίας) και
- Περιοδικά συστήματα (ή ορισμένης χρονικής παραγγελίας)

Η βασική διαφορά μεταξύ των δυο συστημάτων είναι, ότι σε ένα συνεχές σύστημα, μια παραγγελία δίνεται για το ίδιο σταθερό μέγεθος, όταν το απόθεμα ελαττωθεί και βρεθεί σε ένα ορισμένο επίπεδο, ενώ σε ένα περιοδικό σύστημα η παραγγελία δίνεται για ένα διαφορετικό μέγεθος κάθε φορά, μετά την παρέλευση ορισμένου χρόνου.

2.4.1 Συστήματα συνεχούς ανανέωσης

Σε ένα σύστημα συνεχούς ανανέωσης υπάρχει συνεχής παρακολούθηση του επιπέδου των αποθεμάτων. Όταν το διαθέσιμο απόθεμα μειωθεί σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο, το οποίο λέγεται **σημείο παραγγελίας (reorder point)**, μια νέα παραγγελία δίνεται για να αναπληρώσει τα τεμάχια του αποθέματος.

2.4.2 Συστήματα περιοδικής ανανέωσης

Σε ένα σύστημα περιοδικής ανανέωσης, το επίπεδο των αποθεμάτων ελέγχεται κατά ορισμένες περιόδους π.χ. κάθε εβδομάδα ή κάθε μήνα. Μετά τον προσδιορισμό του επιπέδου των αποθεμάτων δίνεται μια παραγγελία, διαφορετικού μεγέθους κάθε φορά, η οποία φέρει το απόθεμα στο επιθυμητό επίπεδο.

Τα πλεονεκτήματα των συστημάτων αυτών είναι ότι δεν χρειάζονται τη συνεχή διατήρηση καταστάσεων για το επίπεδο των αποθεμάτων και συνεχή απασχόληση ανθρώπων.

Το μειονέκτημα είναι ότι υπάρχει λιγότερος κατευθείαν έλεγχος του αποθέματος και συνήθως διατηρείται μεγαλύτερο απόθεμα απ’ ότι διατηρείται στα συστήματα συνεχούς ανανέωσης.

3 Ντετερμινιστικά μοντέλα συνεχούς ανανέωσης

3.1 Εισαγωγή

Το πιο συνηθισμένο πρόβλημα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι κατασκευαστές, οι χονδρέμποροι και γενικά οι επιχειρήσεις, όσον αφορά στον έλεγχο του επιπέδου των αποθεμάτων τους, είναι οι αντίθετες πιέσεις που δέχονται. Από τη μια πλευρά προσπαθούν να διατηρήσουν το απόθεμα σε χαμηλά επίπεδα, ώστε να μειώσουν το κόστος διατήρησής τους και από την άλλη πλευρά προσπαθούν να διατηρήσουν το απόθεμα τους σε υψηλά επίπεδα, ώστε να μπορούν να καλύψουν τη ζήτηση εγκαίρως.

Μια απλή μέθοδος εξισορρόπησης των πιέσεων αυτών είναι η εύρεση της **βέλτιστης (οικονομικότερης) ποσότητας παραγγελίας** $(\mathrm{Economic\ Order\ Quantity} - \mathrm{EOQ})$. Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι σχετικά απλό και σπάνια οι προϋποθέσεις του ανταποκρίνονται πλήρως σε πραγματικά προβλήματα, αλλά είναι ένα πολύ καλό μοντέλο για να ξεκινήσει κανείς την μελέτη του.

3.2 Βασικό μοντέλο EOQ

Το μοντέλο EOQ είναι ένα σύστημα συνεχούς ανανέωσης στο οποίο παραγγέλλεται μια ορισμένη ποσότητα αποθέματος (economic order quantity) τη χρονική στιγμή που ορίζει το σημείο παραγγελίας (reorder point). Στο σύστημα αυτό υπάρχει συνεχής παρακολούθηση του επιπέδου των αποθεμάτων και τοποθετούνται παραγγελίες όταν το επίπεδο των αποθεμάτων φτάσει ένα προκαθορισμένο σημείο. Θα ξεκινήσουμε κάνοντας κάποιες υποθέσεις, τις οποίες σιγά σιγά θα αρχίσουμε να αναιρούμε στα επόμενα μοντέλα, ώστε να καταλήξουμε σε μοντέλα που ανταποκρίνονται καλύτερα σε ρεαλιστικά προβλήματα. Υποθέτουμε τα εξής:

1. Η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή.
2. Κάθε φορά που τοποθετείται μια παραγγελία για την αναπλήρωση του αποθέματος (έστω q μονάδων), δημιουργείται ένα **κόστος παραγγελίας Κ (ordering cost)**.
3. Ο χρόνος αναπλήρωσης (**lead time**) από τη στιγμή που γίνεται μια παραγγελία, μέχρι τη στιγμή που παραλαμβάνεται και προστίθεται στο απόθεμα, είναι μηδέν.

4. Οι παραγγελίες παραλαμβάνονται μονομιάς.
5. Δεν επιτρέπονται ελλείψεις.
6. Το κόστος αποθήκευσης και διατήρησης αποθεμάτων ανά μονάδα/έτος συμβολίζεται με h.

Ορίζουμε με D τον αριθμό των μονάδων που απαιτούνται ανά έτος, δηλαδή την ετήσια ζήτηση. Τότε, η υπόθεση 1 συνεπάγεται ότι κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε χρονικής περιόδου μεγέθους t ετών, απαιτούνται Dt μονάδες προϊόντος. Σημειώνεται ότι στο βασικό αυτό μοντέλο, υποθέτουμε ότι το κόστος αγοράς (purchasing cost) δεν εξαρτάται από το μέγεθος της παραγγελίας. Έτσι, αποκλείονται πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπως εκπτώσεις που προκύπτουν λόγω παραγγελιών μεγάλου μεγέθους. Σε επόμενη ενότητα θα αναφερθούμε σε μοντέλο όπου υπάρχουν διαβαθμίσεις στις τιμές.

Η υπόθεση 3 συνεπάγεται ότι κάθε παραγγελία παραλαμβάνεται αμέσως μόλις τοποθετηθεί. Σε επόμενη ενότητα θα αναιρέσουμε αυτή την υπόθεση.

Η υπόθεση 5 συνεπάγεται ότι όλη η ζήτηση πρέπει να ικανοποιηθεί αμέσως. Δεν επιτρέπεται να υπάρξει αρνητικό απόθεμα σε καμία στιγμή.

Λαμβάνοντας υπ' όψη αυτές τις υποθέσεις, το βασικό μοντέλο EOQ καθορίζει μια πολιτική παραγγελιών που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος παραγγελίας, αγοράς, αποθήκευσης και διατήρησης των αποθεμάτων.

3.3 Τα παράγωγα του βασικού μοντέλου EOQ

Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνηση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελιών κάνοντας κάποιες απλές παρατηρήσεις. Από τη στιγμή που οι παραγγελίες παραλαμβάνονται αμέσως, δεν χρειάζεται να τοποθετήσουμε μια παραγγελία εάν το επίπεδο του αποθέματος, I, είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Ο λόγος είναι ότι δημιουργείται ένα περιττό κόστος αποθήκευσης. Από την άλλη μεριά, εάν $I = 0$, πρέπει να τοποθετήσουμε μια παραγγελία για να αποφύγουμε τυχόν ελλείψεις. Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι η πολιτική που ελαχιστοποιεί τα ετήσια κόστη, είναι αυτή για την οποία οι παραγγελίες τοποθετούνται όταν το επίπεδο των αποθεμάτων είναι $I = 0$. Έτσι, κάθε φορά που τοποθετείται μια παραγγελία είμαστε αντιμέτωποι με την ίδια κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παραγγέλνουμε κάθε φορά την ίδια ποσότητα. Ορίζουμε ως q την ποσότητα που θα παραγγείλουμε κάθε φορά που το επίπεδο των αποθεμάτων είναι $I = 0$.

Στη συνέχεια, θα καθορίσουμε την τιμή της μεταβλητής q που ελαχιστοποιεί το ετήσιο κόστος (ας την πούμε q^*). Υποθέτουμε ότι $TC(q)$ είναι η μεταβλητή που αναπαριστά το συνολικό κόστος που προκύπτει, εάν τοποθετείται μια παραγγελία q μονάδων, κάθε φορά που ισχύει $I = 0$. Θα είναι:

$TC(q) =$ ετήσιο κόστος τοποθέτησης παραγγελιών + ετήσιο κόστος αγοράς ή παραγωγής παραγγελιών + ετήσιο κόστος αποθήκευσης αποθεμάτων

Από τη στιγμή που κάθε φορά παραγγέλνουμε q μονάδες, θα πραγματοποιούνται $\frac{D}{q}$ παραγγελίες ανά έτος, μέχρις ότου η ζήτηση D να καλυφθεί. Ως εκ τούτου θα είναι:

$$\text{Ετήσιο Κόστος παραγγελίας} = \left(\frac{\text{Κόστος παραγγελίας}}{\text{Παραγγελία}}\right)\left(\frac{\text{\# παραγγελιών}}{\text{Έτος}}\right) = \frac{KD}{q}$$

Για όλες τις τιμές της q, το κόστος αγοράς ανά μονάδα είναι p. Από τη στιγμή που αγοράζουμε πάντα D μονάδες ανά έτος, το συνολικό κόστος αγοράς θα είναι:

$$\text{Ετήσιο κόστος αγοράς} = \left(\frac{\text{Κόστος αγοράς}}{\text{Μονάδα}}\right)\left(\frac{\text{\# μονάδων που αγοράστηκαν}}{\text{Έτος}}\right) = pD$$

Για τον υπολογισμό του ετήσιου κόστους αποθήκευσης των αποθεμάτων σημειώνουμε ότι, εάν αποθηκεύουμε I μονάδες για μια περίοδο ενός έτους, προκύπτει ένα κόστος αποθήκευσης $(I \text{ μονάδες})(1 \text{ έτος})(h$ €/μονάδα/έτος$) = hI$ €.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι το επίπεδο των αποθεμάτων δεν είναι σταθερό και μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Εάν το μέσο απόθεμα κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου T, είναι $\bar{I}$, τότε το κόστος αποθήκευσης για τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο θα είναι $hT\bar{I}$. Η ιδέα αυτή διατυπώνεται στο διάγραμμα 1. Εάν ορίσουμε ως $I(t)$ να είναι το επίπεδο των αποθεμάτων τη χρονική στιγμή t, τότε κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου $[0, T]$, το συνολικό κόστος δίνεται από τη σχέση

$$h(\text{περιοχή } [0,T] \text{κάτω από την καμπύλη } I(t)) = hT\bar{I}$$

Με πιο αυστηρά μαθηματικά κριτήρια, το μέσο επίπεδο των αποθεμάτων από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι τη χρονική στιγμή T, θα είναι

$$\bar{I}(t) = \frac{\int_0^T I(t)dt}{T}$$

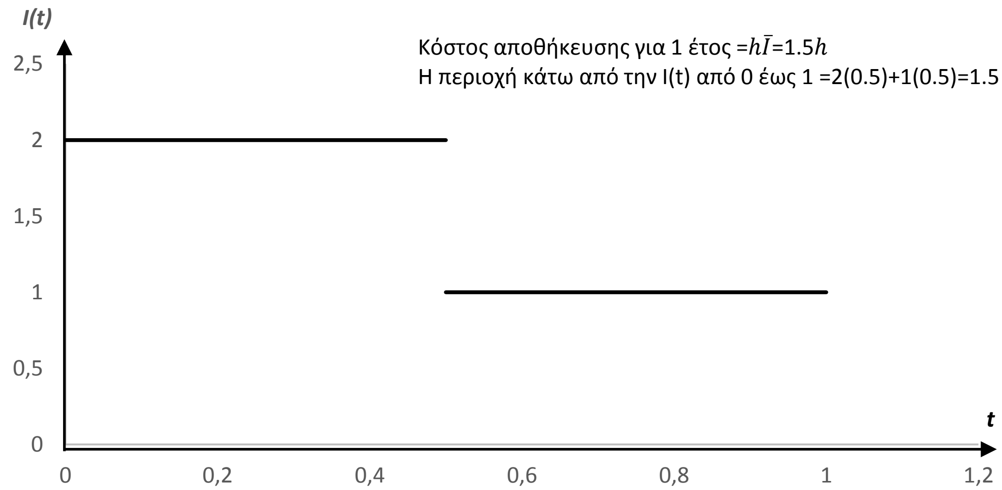
και το συνολικό κόστος αποθήκευσης που προκύπτει από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι τη χρονική στιγμή T, θα είναι

$$\int_0^T hI(t)dt = hT\bar{I}(t)$$

Για να προσδιορίσουμε το ετήσιο κόστος αποθήκευσης, πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του I σε βάθος χρόνου. Υποθέτουμε ότι μια παραγγελία μεγέθους q παραλαμβάνεται τη χρονική στιγμή 0. Από τη στιγμή που η ζήτηση προκύπτει με ρυθμό D μονάδες/έτος, θα χρειαστούν $\frac{q}{D}$ έτη για να ξαναφτάσει το επίπεδο αποθεμάτων την τιμή μηδέν. Επίσης, αφού η ζήτηση κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε χρονικής περιόδου t, είναι Dt, τότε το επίπεδο το αποθεμάτων θα φθίνει κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, κλίσης – D.

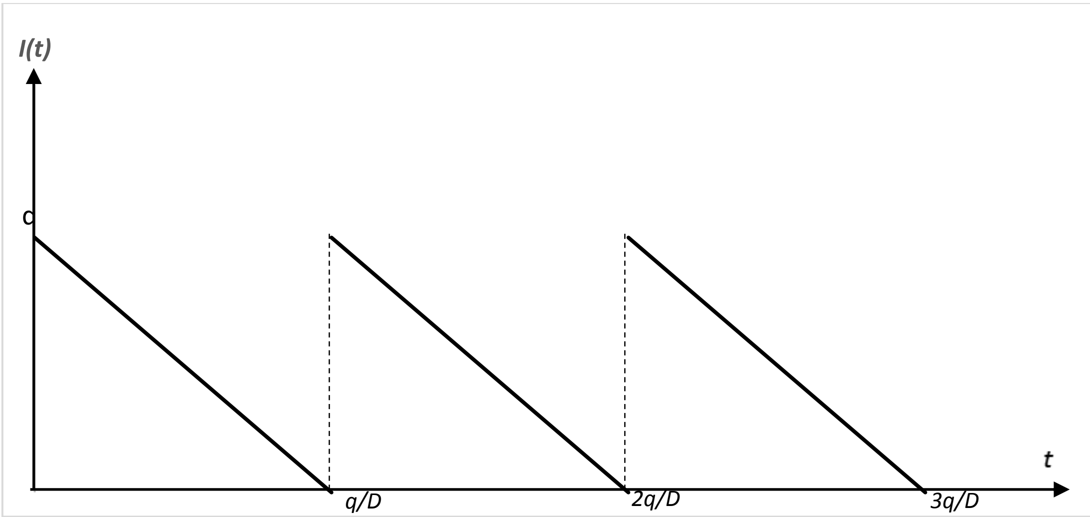
Όταν το απόθεμα φτάσει στο μηδέν, μια παραγγελία μεγέθους q τοποθετείται και παραλαμβάνεται αμέσως, φτάνοντας το επίπεδο των αποθεμάτων πάλι σε επίπεδο q. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, το διάγραμμα 2 περιγράφει τη συμπεριφορά του I σε βάθος χρόνου.

Διάγραμμα 1α : Κόστος αποθήκευσης και μέσο επίπεδο του αποθέματος



Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια πολύ σημαντική έννοια για τον έλεγχο αποθεμάτων είναι η ιδέα του **κύκλου παραγγελίας**. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι το διάγραμμα 2α αποτελείται από επαναλαμβανόμενους κύκλους μήκους $\frac{q}{D}$. Έτσι, κάθε έτος θα περιέχει $\frac{D}{q}$ κύκλους. Το μέσο απόθεμα κατά τη διάρκεια ενός κύκλου είναι απλώς το μισό του μέγιστου επιπέδου του αποθέματος που επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια του κύκλου. Το αποτέλεσμα αυτό διατηρεί την ισχύ του σε κάθε μοντέλο όπου η ζήτηση προκύπτει με σταθερό ρυθμό και δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Έτσι, για το μοντέλο μας, το μέσο επίπεδο αποθέματος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου θα είναι $\frac{q}{2}$ μονάδες.

Διάγραμμα 2α: Η συμπεριφορά του επιπέδου των αποθεμάτων *I(t)* στο βασικό μοντέλο EOQ



Είμαστε πλέον σε θέση να προσδιορίσουμε το ετήσιο κόστος αποθήκευσης. Θα είναι:

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \left(\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}}\right)\left(\frac{\text{Κύκλοι παραγγελίας}}{\text{Έτος}}\right)$$

Από τη στιγμή που το μέσο επίπεδο αποθέματος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου θα είναι $\frac{q}{2}$ μονάδες και κάθε κύκλος έχει μήκος $\frac{q}{D}$,

$$\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}} = \frac{q}{2}\left(\frac{q}{D}\right)h = \frac{q^2 h}{2D}$$

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \frac{q^2 h}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{hq}{2}$$

Συνδυάζοντας το κόστος παραγγελίας, με το κόστος αγοράς και το κόστος αποθήκευσης, καταλήγουμε στο ότι:

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

Για να βρούμε την τιμή της q που ελαχιστοποιεί την $TC(q)$, θέτουμε την παράγωγο $TC'(q)$ ίση με μηδέν.

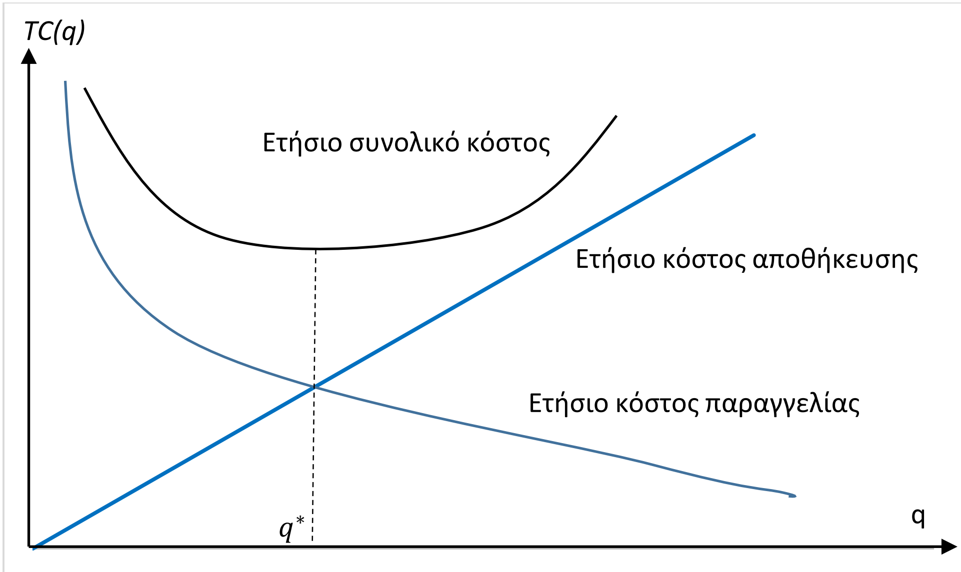
$$TC'(q) = -\frac{KD}{q^2} + \frac{h}{2} = 0 \quad (1)$$

Η σχέση (1) ικανοποιείται για $q = \pm\sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Η τιμή $-\sqrt{\frac{2KD}{h}}$ απορρίπτεται, διότι δεν έχει κάποιο νόημα, επομένως η **βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (EOQ)** που ελαχιστοποιεί την $TC(q)$ θα είναι:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \quad (2)$$

Από τη στιγμή που $TC''(q) = \frac{2KD}{q^3} > 0$ για κάθε $q > 0$, είμαστε βέβαιοι ότι η $TC(q)$ είναι κυρτή συνάρτηση. Επομένως η q^* όντως ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος.

Διάγραμμα 2β: Η χρυσή τομή ανάμεσα στο ετήσιο κόστος αποθήκευσης και παραγγελίας



3.3.1 Εφαρμογή στο μοντέλο EOQ

Μια εταιρία χρησιμοποιεί 500 λαμπτήρες ανά έτος. Κάθε φορά που τοποθετείται μια παραγγελία για λαμπτήρες, προκύπτει ένα κόστος παραγγελίας 5€. Κάθε λαμπτήρας κοστίζει 0.40€ και το κόστος αποθήκευσης είναι 0.08€/ λαμπτήρα/έτος. Υποθέτουμε ότι η ζήτηση προκύπτει με ένα σταθερό ρυθμό και δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Ποια είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας; Πόσες παραγγελίας πρέπει να γίνονται κάθε έτος; Πόσος χρόνος θα μεσολαβήσει ανάμεσα στην τοποθέτηση δύο παραγγελιών;

Δοθέντος ότι $K = 5€$, $h = 0.08€/λαμπτήρα/έτος$ και $D = 500\,λαμπτήρες/έτος$, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα είναι:

$$q^* = \sqrt{\frac{2(5)(500)}{0.08}} = 250$$

Επομένως, η εταιρία θα πρέπει να τοποθετεί παραγγελίες μεγέθους 250 λαμπτήρων, κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος πέφτει στο μηδέν.

Βέλτιστος # $παραγγελιών = \frac{D}{q^*} = \frac{500}{250} = 2\ παραγγελίες$

Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές παραγγελίες είναι ένας κύκλος παραγγελίας. Από τη στιγμή που το μήκος κάθε κύκλου είναι $\frac{q^*}{D}$, ο χρόνος ανάμεσα στις παραγγελίες θα είναι:

$$\frac{q^*}{D} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2} \text{ έτη}$$

άρα θα τοποθετούνται παραγγελίες κάθε 6 μήνες.

3.4 Μεταβολές του συνολικού κόστους σε μικρές αλλαγές στην ποσότητα παραγγελίας

Στις περισσότερες περιπτώσεις, μικρές αποκλίσεις από την EOQ, θα επιφέρουν μια μικρή αύξηση στο κόστος. Ας δούμε στην παραπάνω εφαρμογή, πως μικρές αλλαγές στην EOQ αλλάζουν το συνολικό ετήσιο κόστος. Από τη στιγμή που το ετήσιο κόστος αγοράς δεν επηρεάζεται από την ποσότητα παραγγελίας, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στον τρόπο με τον οποίο το ετήσιο κόστος αποθήκευσης και το ετήσιο κόστος παραγγελίας, επηρεάζονται από αλλαγές στην ποσότητα παραγγελίας. Υποθέτουμε ότι:

$$HC(q) = \text{ετήσιο κόστος αποθήκευσης εάν η ποσότητα παραγγελίας είναι } q \text{ μονάδες}$$

$$OC(q) = \text{ετήσιο κόστος παραγγελίας εάν η ποσότητα παραγγελίας είναι } q \text{ μονάδες}$$

Πίνακας 1: Υπολογισμός κόστους του διαγράμματος 3

q	HC(q)	OC(q)	HC(q)+OC(q)
50	2.0	50.00	52.00
100	4.0	25.00	29.00

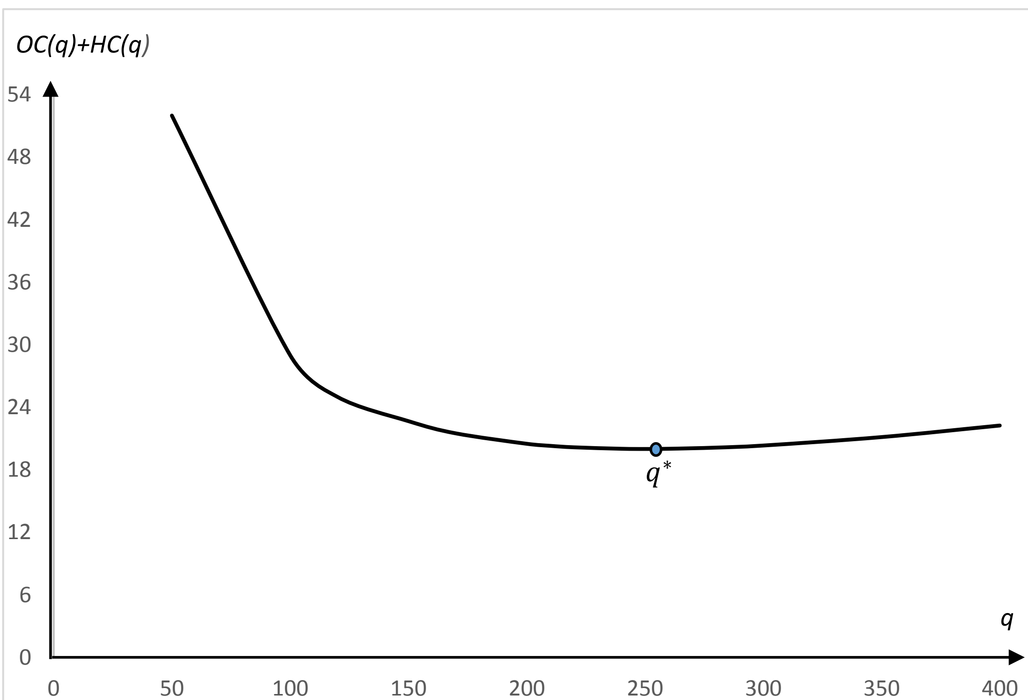
150	6.0	16.67	22.67
200	8.0	12.50	20.50
220	8.8	11.36	20.16
240	9.6	10.42	20.02
250	10.0	10.00	20.00
260	10.4	9.62	20.02
280	11.2	8.93	20.13
300	12.0	8.33	20.33
350	14.0	7.14	21.14
400	16.0	6.25	22.25

Θα είναι: $HC(q) = \frac{1}{2}(0.08q) = 0.04q$ και $OC(q) = 5\left(\frac{500}{q}\right) = \frac{2500}{q}$

Χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τον πίνακα 1, δημιουργούμε το διάγραμμα 3 $OC(q) + HC(q)$. Στο διάγραμμα 3 φαίνεται ότι η καμπύλη είναι πολύ ομαλή κοντά στην q^*. Για παράδειγμα, παραγγέλνοντας 20% παραπάνω από την EOQ $(q = 300)$, η $OC(q) + HC(q)$ πηγαίνει από 20 σε 20.33 (αυξάνεται δηλαδή λιγότερο από 2%).

Η ομαλότητα της καμπύλης είναι πολύ σημαντική, επειδή συχνά είναι ιδιαίτερα δύσκολο να υπολογιστούν οι ποσότητες h και K. Ανακριβείς εκτιμήσεις των h και K μπορεί να οδηγήσουν σε τιμές της q που διαφέρουν ελαφρώς από την υπολογισμένη EOQ. Η ομαλότητα της καμπύλης υποδεικνύει ότι ακόμα και ένα ασήμαντο λάθος στον προσδιορισμό της EOQ, θα επιφέρει μια πολύ μικρή αύξηση στο κόστος.

Διάγραμμα 3: Υπολογισμός του $HC(q) + OC(q)$ για την Εφαρμογή 1



3.5 Η επίδραση του χρόνου αναπλήρωσης (lead time)

Στην ενότητα αυτή θα υποθέσουμε ότι ο χρόνος αναπλήρωσης, L, είναι μεγαλύτερος του μηδενός. Με την προσθήκη του χρόνου αναπλήρωσης, οι μεταβλητές του ετήσιου κόστους αποθήκευσης και παραγγελίας, παραμένουν ανεπηρέαστες. Έτσι, η

EOQ εξακολουθεί να ελαχιστοποιεί τα συνολικά κόστη. Για την αποφυγή ελλείψεων, κάθε παραγγελία θα πρέπει να τοποθετείται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν παραλαμβάνεται, το επίπεδο των αποθεμάτων να είναι μηδέν.

Το επίπεδο των αποθεμάτων, κατά το οποίο πρέπει να τοποθετηθεί μια παραγγελία, ονομάζεται **σημείο παραγγελίας (reorder point)**. Για τον προσδιορισμό του σημείου παραγγελίας, για το βασικό μοντέλο EOQ, θα εξεταστούν δύο περιπτώσεις.

3.5.1 Περίπτωση 1

Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, δεν ξεπερνάει την EOQ (δηλαδή $LD \leq EOQ$). Στην περίπτωση αυτή, το σημείο παραγγελίας προκύπτει όταν το επίπεδο των αποθεμάτων ισοδυναμεί με LD. Τότε, η παραγγελία θα παραδοθεί σε L χρόνο αργότερα και κατά την παράδοσή της, το επίπεδο των αποθεμάτων θα ισοδυναμεί με $LD - LD = 0$. Επιστρέφουμε στην Εφαρμογή της ενότητας 3.3.1, υποθέτοντας πλέον ότι χρειάζεται ένας μήνας για την παράδοση μιας παρτίδας λαμπτήρων από τη στιγμή της παραγγελίας. Τότε θα είναι $L = \frac{1}{12}$ έτους και το σημείο παραγγελίας της εταιρίας θα είναι $\left(\frac{1}{12}\right)(500) = 41.67$ λαμπτήρες. Έτσι, όταν απομένουν 41.67 λαμπτήρες στο απόθεμα της εταιρία, θα τοποθετείται μια νέα παραγγελία.

3.5.2 Περίπτωση 2

Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, ξεπερνάει την EOQ (δηλαδή $LD \geq EOQ$). Σε αυτή την περίπτωση, το σημείο παραγγελίας δεν ισοδυναμεί με LD. Υποθέτουμε ότι στην Εφαρμογή της ενότητας 3.3.1, $L = 15$ μήνες. Τότε $L = \left(\frac{15}{12}\right)(500) = 625$ λαμπτήρες. Γιατί δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε μια παραγγελία κάθε φορά που επίπεδο των αποθεμάτων φτάσει τους 625 λαμπτήρες; Διότι, από τη στιγμή που βέλτιστη ποσότητα παραγγελία είναι EOQ=250, το επίπεδο των αποθεμάτων δεν θα φτάσει ποτέ στις 625 μονάδες. Για τον προσδιορισμό του σωστού σημείου παραγγελίας, παρατηρούμε ότι οι παραγγελίες τοποθετούνται κάθε 6 μήνες. Υποθέτουμε ότι μια παραγγελία παραλήφθηκε, μόλις, στην χρονική στιγμή 0. Τότε, θα έπρεπε να έχει τοποθετηθεί μια παραγγελία, $L = 15$ μήνες πριν (τη χρονική στιγμή $T = -15$ μήνες).

Από τη στιγμή που οι παραγγελίες καταφθάνουν κάθε 6 μήνες, θα πρέπει να τοποθετούνται στις περιόδους $T = -9$ μήνες, $T = -3$ μήνες, $T = 3$ μήνες, $T = 9$ μήνες κτλ. Από τη στιγμή που τη χρονική στιγμή $T = 0$ καταφθάνει μια παραγγελία, το επίπεδο των αποθεμάτων της εταιρίας θα ανέβει στις 250 μονάδες. Τότε, τη χρονική στιγμή , $T = 3$ (ή οποιαδήποτε άλλη στιγμή όπου τοποθετείται μια παραγγελία) το επίπεδο των αποθεμάτων θα ισοδυναμεί με $250 - \left(\frac{3}{12}\right)(500) = 125$. Άρα το σημείο παραγγελίας θα είναι 125 λαμπτήρες.

Γενικά, το σημείο παραγγελίας, ισοδυναμεί με το υπόλοιπο της διαίρεσης του LD με την EOQ. Έτσι, στην Εφαρμογή της ενότητας 3.3.1, το σημείο παραγγελίας είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 625 με το 250, που είναι πράγματι 125.

Ο προσδιορισμός του σημείου παραγγελίας γίνεται εξαιρετικά σημαντικός, όταν η ζήτηση είναι τυχαία και μπορεί να προκύψουν **εξαντλήσεις των αποθεμάτων (stockouts)**. Τις περιπτώσεις αυτές θα τις δούμε σε επόμενες ενότητες.

3.6 Πολιτικές παραγγελίας Power-of-two

Υποθέτουμε ότι μια εταιρία παραγγέλνει τρία διαφορετικά προϊόντα, και η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για κάθε ένα από αυτά, έχει ως αποτέλεσμα να γίνονται παραγγελίες κάθε 3.5 ημέρες, 5.6 ημέρες και 9.2 ημέρες αντίστοιχα. Σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις, παραγγελίες για διαφορετικά προϊόντα θα συμπέσουν την ίδια ημέρα. Θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορέσουμε να συγχρονίσουμε με κάποιο τρόπο τα διαστήματα παραγγελίας που μεσολαβούν σε διαφορετικά προϊόντα, ώστε να μειώσουμε σημαντικά τα συντονιστικά κόστη μας. Για παράδειγμα, θα χρειάζονταν πολύ λιγότερα μεταφορικά έξοδα, εάν μπορούσαμε να έχουμε ταυτόχρονες παραγγελίες.

Αρχίζουμε επιλέγοντας μια τυχαία ποσότητα παραγγελίας, q', και καθορίζοντας το συνολικό κόστος για την ποσότητα αυτή.

$$TC(q') = \frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}$$

Τότε

$$\frac{TC(q')}{TC(q^*)} = \frac{\frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}}{\sqrt{2KhD}} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KDh}} + \frac{1}{q'}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KDh}}$$

$$= \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{1}{2q'}\sqrt{\frac{2KD}{h}} = \frac{q'}{2q^*} + \frac{q^*}{2q'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{q^*} + \frac{q^*}{q'}\right)$$

Αφού $t^* = \frac{q^*}{D}$ και $t' = \frac{q'}{D}$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{TC(t')}{TC(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t^*} + \frac{t^*}{t'}\right) \qquad (3)$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε χρήση του θεωρήματος του Roundy. Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή t^* είναι τουλάχιστον 1 ημέρα. Τότε, για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο m θα ισχύει $2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$. Το θεώρημα λέει το εξής:

Εάν $t^* \leq 2^m(\sqrt{2})$, τότε η πολιτική παραγγελίας για το ελάχιστο κόστος power-of-two θα είναι $t = 2^m$. Εάν $t^* \geq 2^m(\sqrt{2})$, τότε η πολιτική παραγγελίας για το ελάχιστο κόστος power-of-two θα είναι 2^{m+1}. Σε κάθε περίπτωση, το συνολικό κόστος της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας, θα είναι το πολύ 6% περισσότερο από το συνολικό κόστος της EOQ.

Από τη στιγμή που είναι $TC''(q) > 0$, γνωρίζουμε ότι η $TC(q)$ είναι κυρτή συνάρτηση του q. Η κυρτότητα της $TC(q)$ υποδηλώνει ότι ο βέλτιστος χρόνος παραγγελίας θα είναι είτε 2^m είτε 2^{m+1}. Από την προηγούμενη σχέση, ο χρόνος 2^m θα είναι ο βέλτιστος αν και μόνο αν

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2^m}{t^*}+\frac{t^*}{2^m}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2^{m+1}}{t^*}+\frac{t^*}{2^{m+1}}\right)$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{t^*}{2^{m+1}} \le \frac{2^m}{t^*}$$

ή ισοδύναμα $t^* \le \sqrt{2}(2^m)$. Εάν $t^* \ge \sqrt{2}(2^m)$, τότε η πολιτική παραγγελίας για το ελάχιστο cost-power-of-two θα είναι 2^{m+1}. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι η βέλτιστη πολιτική πρέπει να διαλέξει ένα σημείο παραγγελίας στο διάστημα $\left[\frac{t^*}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\, t^*\right]$. Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη διαφορά στο συνολικό κόστος για την power-of-two πολιτική παραγγελίας και το συνολικό κόστος για t^* προκύπτει, εάν το διάστημα παραγγελίας είναι είτε $\sqrt{2}\, t^*$ είτε $\frac{t^*}{\sqrt{2}}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\frac{TC(\sqrt{2}\, t^* \text{ ή } \frac{t^*}{\sqrt{2}}}{TC(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right) = 1.06$$

Επομένως, η πολιτική power-of-two δεν μπορεί να επιφέρει, στο συνολικό κόστος, αύξηση πάνω από 6%.

3.7 Μοντέλο EOQ με διαβαθμίσεις των τιμών

Μέχρι στιγμής υποθέσαμε ότι το ετήσιο κόστος αγοράς δεν εξαρτάται από το μέγεθος της παραγγελίας. Στην ενότητα 3.1 η υπόθεση αυτή μας επέτρεψε να αγνοήσουμε το ετήσιο κόστος αγοράς κατά τον υπολογισμό της ποσότητας παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος. Στην πραγματικότητα, όμως, αρκετά συχνά οι προμηθευτές μειώνουν το κόστος αγοράς ανά μονάδα, σε περίπτωση μεγάλης παραγγελίας. Έτσι λοιπόν, το ετήσιο κόστος αγοράς εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το μέγεθος της παραγγελίας. Εάν το κόστος αποθήκευσης εκφραστεί σαν ένα ποσοστό επί του κόστους αγοράς ενός προϊόντος, τότε και το ετήσιο κόστος αποθήκευσης θα επηρεάζεται επίσης από το μέγεθος της παραγγελίας. Επομένως, δεν μπορούμε πλέον να αγνοούμε το ετήσιο κόστος αγοράς και άρα χρειαζόμαστε μια νέα προσέγγιση.

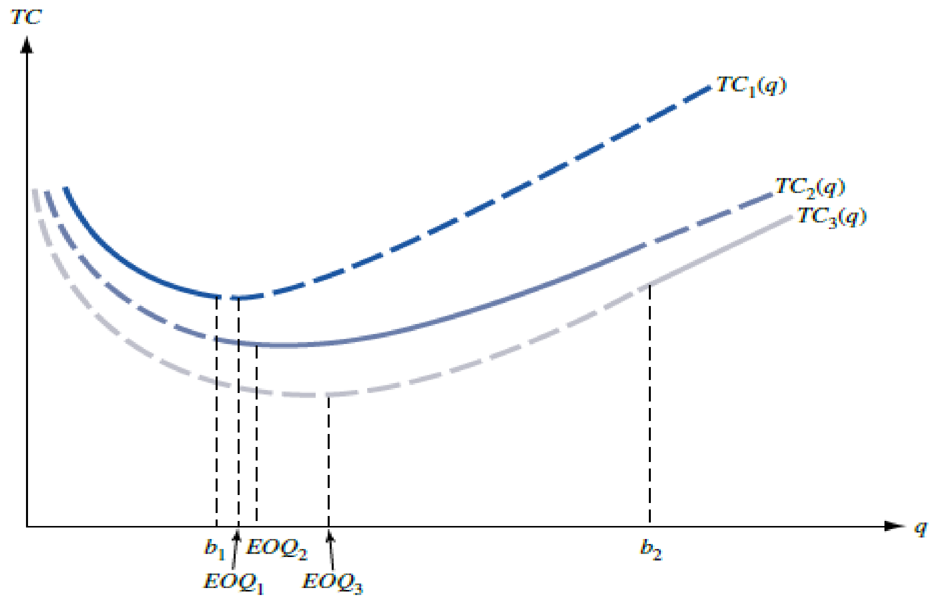
Εάν υποθέσουμε ότι q είναι ο αριθμός μονάδων σε κάθε τοποθέτηση παραγγελίας, τότε το γενικότερο μοντέλο διαβάθμισης τιμών εκφράζεται ως εξής:

- Εάν $q < b_1$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει p_1 €.
- Εάν $b_1 \leq q < b_2$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει p_2 €.
- Εάν $b_{k-2} \leq q < b_{k-1}$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει p_{k-1} €.
- Εάν $b_{k-1} \leq q < b_k = \infty$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει p_k €.

Από τη στιγμή που τα $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ είναι σημεία στα οποία δημιουργούνται διαβαθμίσεις στις τιμές, θα καλούμε τα $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ σημεία αλλαγής της τιμής (price break points). Εφόσον μεγαλύτερες ποσότητες παραγγελίας οδηγούν σε χαμηλότερες τιμές, θα είναι $p_k < p_{k-1} < \dots p_2 < p_1$. Προτού εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα βρούμε την ποσότητα της παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος, χρειάζεται να ορίσουμε τις παρακάτω έννοιες:

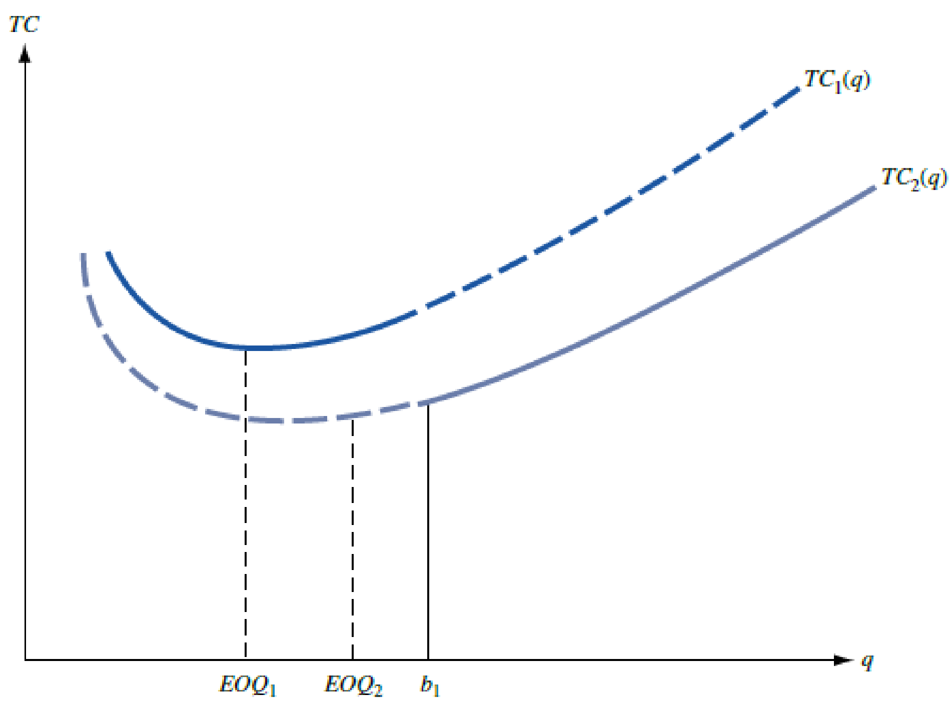
1. $TC_i(q) =$ το συνολικό ετήσιο κόστος (συμπεριλαμβανομένου του κόστους αποθήκευσης, αγοράς και τοποθέτησης παραγγελίας), εάν κάθε παραγγελία έχει μέγεθος q μονάδες και κόστος p_i.
2. $EOQ_i =$η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος, εάν για κάθε ποσότητα παραγγελίας, το κόστος αγοράς είναι p_i.
3. Η ποσότητα EOQ_i είναι αποδεκτή, εάν $b_{i-1} \leq EOQ_i \leq b_i$.
4. $TC(q) =$ το ακριβές ετήσιο κόστος, εάν κάθε φορά που τοποθετείται μια παραγγελία, περιλαμβάνει q τεμάχια (καθορίζουμε το $TC(q)$ χρησιμοποιώντας κόστος p_i, εάν $b_{i-1} \leq q \leq b_i$.).

Διάγραμμα 4α : Επεξήγηση των εννοιών $TC_i(q)$ και EOQ_i



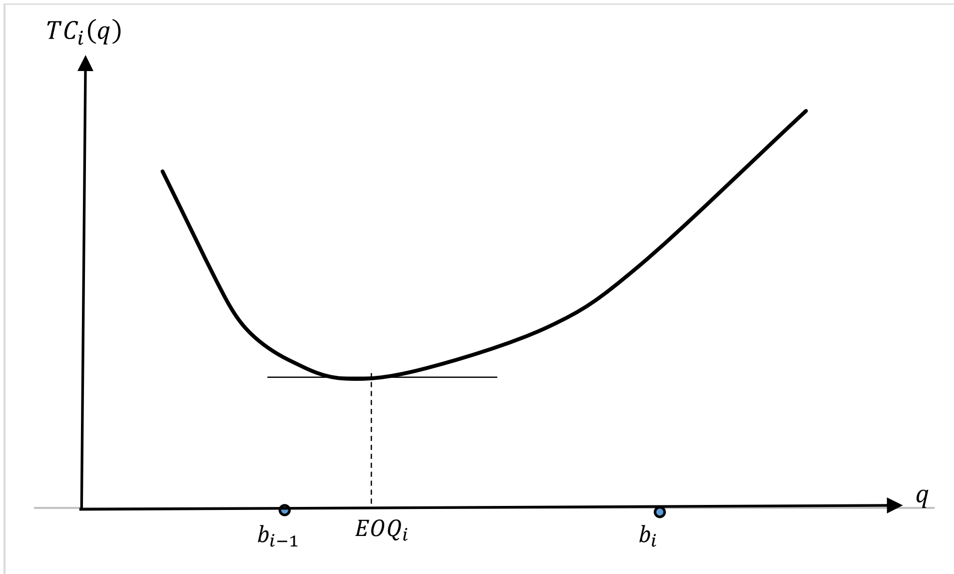
Πηγή: Operations research applications and algorithms by Waye L. Winston

Διάγραμμα 4β : Επεξήγηση των εννοιών $TC_i(q)$ και EOQ_i



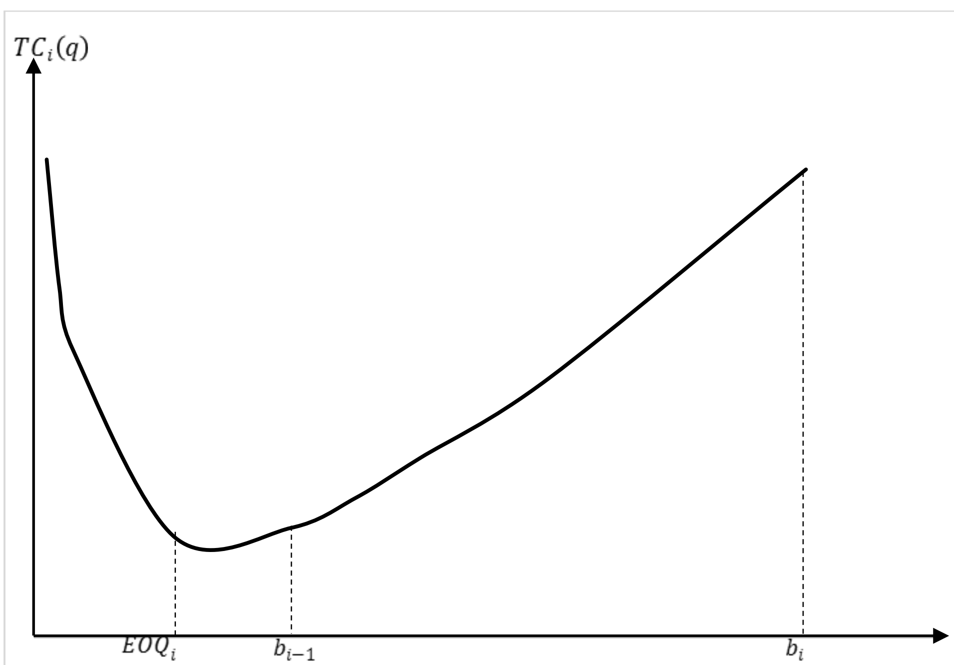
Πηγή: Operations research applications and algorithms by Waye L. Winston

Διάγραμμα 5α : Η τιμή της μεταβλητής q που ελαχιστοποιεί την $TC_i(q)$



Η EOQ_i ελαχιστοποιεί την $TC_1(q)$

Διάγραμμα 5β : Η τιμή της μεταβλητής q που ελαχιστοποιεί την $TC_i(q)$



Η b_{i-1} ελαχιστοποιεί την $TC_1(q)$

Στόχος μας είναι να βρούμε την τιμή q εκείνη, που θα ελαχιστοποιήσει την $TC(q)$. Στα διαγράμματα 4α και 4β φαίνονται αυτοί οι ορισμοί. Παρατηρούμε ότι στο διάγραμμα 4α η τιμή EOQ_2 είναι επιτρεπτή διότι $b_1 \leq EOQ_2 \leq b_2$, ενώ οι EOQ_1 και EOQ_3 δεν είναι αποδεκτές. Σε κάθε διάγραμμα, η συνάρτηση $TC(q)$ είναι το συμπαγές κομμάτι της καμπύλης. Το διακεκομμένο κομμάτι κάθε καμπύλης αναπαριστά τα ανέφικτα κόστη. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα 4β, η $TC_2(q)$ είναι διακεκομμένη για $q < b_1$, διότι το κόστος δεν είναι p_2 για $q < b_1$. Για $q < b_1$, το ετήσιο συνολικό κόστος δίνεται από το συμπαγές κομμάτι της $TC_1(q)$, αφού το κόστος είναι p_1, και για $q \geq b_1$, το ετήσιο συνολικό κόστος δίνεται από το συμπαγές κομμάτι της $TC_2(q)$.

Σε γενικές γραμμές, η τιμή q που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $TC(q)$ μπορεί να είναι είτε ένα σημείο αλλαγής της τιμής (διάγραμμα 4β), είτε κάποια ποσότητα EOQ_i (διάγραμμα 4α).

Οι παρακάτω παρατηρήσεις είναι πολύ χρήσιμες για τον προσδιορισμό του σημείου ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $TC(q)$.

1. Για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής q θα ισχύει:

$$TC_k(q) < TC_{k-1}(q) < \cdots < TC_2(q) < TC_1(q)$$

Ο λόγος είναι ότι για κάθε ποσότητα παραγγελίας q, η ποσότητα $TC_k(q)$ θα έχει το χαμηλότερο κόστος αποθήκευσης και αγοράς, εφόσον η ποσότητα p_k είναι το χαμηλότερο δυνατό κόστος. Έτσι από το διάγραμμα 4α βρίσκουμε ότι $TC_3(q) < TC_2(q) < TC_1(q)$.

2. Εάν η τιμή EOQ_i είναι αποδεκτή, τότε το ελάχιστο κόστος για $b_{i-1} \leq q \leq b_i$ προκύπτει για $q = EOQ_i$ (διάγραμμα 5α). Εάν $EOQ_i < b_{i-1}$, τότε το ελάχιστο κόστος για $b_{i-1} \leq q \leq b_i$ προκύπτει για $q = b_{i-1}$ (διάγραμμα 5β). Η παρατήρηση αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι η $TC_i(q)$ φθίνει για $q < EOQ_i$ και αυξάνει για $q > EOQ_i$.

3. Εάν η τιμή EOQ_i είναι αποδεκτή, τότε η $TC(q)$ δεν είναι δυνατόν να ελαχιστοποιείται από μια ποσότητα παραγγελίας, το κόστος της οποίας ξεπερνάει την τιμή p_i. Έτσι, εάν η EOQ_i είναι αποδεκτή, τότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα προκύπτει για κάποια από τις τιμές $p_i, p_{i+1},\ldots, p_k$.

Για να γίνει πιο κατανοητή η υπόθεση 3, ας υποθέσουμε ότι η τιμή EOQ_i είναι αποδεκτή. Θα δείξουμε ότι μια ποσότητα παραγγελίας με κόστος $p_j > p_i$ δεν γίνεται να έχει μικρότερο κόστος από την EOQ_i. Σημειώνουμε ότι η EOQ_i ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος εάν η τιμή είναι p_i και η EOQ_j δεν ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος εάν η τιμή είναι p_i. Έτσι,

$$TC_i(EOQ_i) < TC_i\big(EOQ_j\big)$$

εφόσον είναι $p_j > p_i$,

$$TC_i\big(EOQ_j\big) < TC_j\big(EOQ_j\big)$$

από τις 2 ανισότητες προκύπτει ότι

$$TC_i(EOQ_i) < TC_j\big(EOQ_j\big)$$

Από τον ορισμό του EOQ_j γνωρίζουμε ότι για όλα τα q ισχύει

$$TC_j\big(EOQ_j\big) \leq TC_j(q)$$

Έτσι,

$$TC_i(EOQ_i) < TC_j\big(EOQ_j\big) \leq TC_j(q)$$

και άρα παραγγέλνοντας ποσότητα EOQ_i με κόστος p_i, είναι καλύτερο από το να παραγγείλουμε οποιαδήποτε άλλη ποσότητα σε υψηλότερο κόστος p_j.

Οι παρατηρήσεις αυτές μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη μέθοδο για αν καθορίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας σε περίπτωση διαβαθμίσεων των τιμών. Αρχίζοντας με το χαμηλότερο κόστος, καθορίζουμε για κάθε κόστος την ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος για $b_{i-1} \leq q \leq b_i$. Την ποσότητα παραγγελίας θα την ονομάζουμε q_i^*. Στη συνέχεια καθορίζουμε τις ποσότητες $q_k^*, q_{k-1}^*, q_{k-2}^*$, ... Μέχρις ότου να βρούμε μια τιμή που να είναι αποδεκτή. Από την παρατήρηση 2, θα ισχύει $q_i^* = EOQ_i$. Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα ανήκει στην $\{q_k^*, q_{k-1}^*, q_{k-2}^*, \dots, q_i^*\}$ με την μικρότερη τιμή της μεταβλητής του συνολικού κόστους $TC(q)$.

Η εφαρμογή που ακολουθεί παρουσιάζει τη χρήση του παραπάνω μοντέλου.

3.7.1 Εφαρμογή στο μοντέλο EOQ με διαβαθμίσεις των τιμών

Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών στη Λάρισα παραγγέλνει συσκευασίες με δίσκους blue ray (κάθε συσκευασία έχει 10 δίσκους) από ένα κατάστημα στην Αθήνα. Το κόστος κάθε συσκευασίας εξαρτάται από το μέγεθος της κάθε παραγγελίας, όπως φαίνεται και στον πίνακα 2. Το κατάστημα ηλεκτρονικών χρησιμοποιεί 10.000 δίσκους κάθε έτος. Το κόστος τοποθέτησης μια παραγγελίας είναι 100€. Το μοναδικό κόστος αποθήκευσης είναι η χαμένη δυνατότητα επένδυσης του συγκεκριμένου κεφαλαίου, που υπολογίζεται στο 20% ανά έτος. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι: $b_1 = 100$, $b_2 = 300$, $p_1 = 50€$, $p_2 = 49€$, $p_3 = 48.5€$. Θα βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, τον βέλτιστο αριθμό ετησίων παραγγελιών και το συνολικό ετήσιο κόστος.

Πίνακας 2: Κόστος αγοράς των δίσκων

Μέγεθος παραγγελίας (αριθμός συσκευασιών)	Τιμή ανά συσκευασία
$0 \leq q < 100$	50.00€
$100 \leq q < 300$	49.00€
$q \geq 300$	48.50€

Αρχικά έχουμε ότι $K = 100€$ και $D = 1000$ συσκευασίες ανά έτος. Θα καθορίσουμε την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για $p_3 = 48.50€$ και $q \geq 300$. Θα είναι:

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2(100)(1000)}{0.2(48.50)}} = 143.59$$

Εφόσον $EOQ_3 < 300$, συμπεραίνουμε ότι δεν είναι αποδεκτή. Άρα, βρισκόμαστε στην περίπτωση που περιγράφει το διάγραμμα 5β και για $q \geq 300$, η συνάρτηση $TC_3(q)$ ελαχιστοποιείται για $q_3^* = 300$. Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση όπου $p_2 = 49.00€$ και $100 \leq q < 300$. Τότε θα είναι:

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2(100)(1000)}{0.2(49.00)}} = 142.86$$

Εφόσον $100 \leq EOQ_2 < 300$, η τιμή αυτή είναι αποδεκτή και άρα για κόστος $p_2 = 49.00€$, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιλέξουμε την τιμή $q_2^* = 142.86$. Το διάγραμμα 5α είναι το αντίστοιχο. Από τη στιγμή που η τιμή q_2^* είναι αποδεκτή, το κόστος $p_1 = 50.00€$ και $0 \leq q < 100$ δεν μπορεί να επιφέρει την ποσότητα παραγγελίας που να ελαχιστοποιεί την $TC(q)$ (από την παρατήρηση 3). Έτσι, η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $TC(q)$ θα είναι είτε η $q_2^* = 142.86$ είτε η $q_3^* = 300$. Για να καθορίσουμε ποια από τις 2 είναι η βέλτιστη, θα πρέπει να βρούμε την μικρότερη εκ των $TC_3(300)$ και $TC_2(142.86)$. Για $q_3^* = 300$, το ετήσιο κόστος αποθήκευσης ανά αντικείμενο και έτος είναι $0.20(48.50) = 9.70€$. Άρα για την $q_3^* = 300$ θα είναι:

$$\text{Ετήσιο κόστος παραγγελίας} = 100\left(\frac{1000}{300}\right) = 333{,}33€$$

$$\text{Ετήσιο κόστος αγοράς} = 1000(48.50) = 48.500€$$

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \left(\frac{1}{2}\right)(300)(0.2)(48.50) = 1.455€$$

$$TC_3(300) = 50.288{,}33€$$

Αντίστοιχα, για $q_2^* = 142.86$, το κόστος αποθήκευσης είναι $0.20(49.00) = 9.80€$, άρα:

$$\text{Ετήσιο κόστος παραγγελίας} = 100\left(\frac{1000}{142.86}\right) = 699.99€$$

$$\text{Ετήσιο κόστος αγοράς} = 1000(49) = 49.000€$$

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \left(\frac{1}{2}\right)(142.86)(0.2)(49) = 700.01€$$

$$TC_2(300) = 50.400€$$

Επομένως, η τιμή $q_3^* = 300$ θα ελαχιστοποιεί την $TC(q)$.

Από την ανάλυση που έγινε, φαίνεται ότι κάθε παραγγελία θα πρέπει να περιλαμβάνει 300 συσκευασίες. Ως εκ τούτου, θα τοποθετούνται κάθε έτος $\frac{1000}{300} = 3.33$ παραγγελίες. Όπως είδαμε και νωρίτερα το ελάχιστο ετήσιο κόστος θα είναι $50.288{,}33€$

3.8 Μοντέλο EOQ με συνεχή ρυθμό παραγωγής

Σε πολλές περιπτώσεις οι εταιρίες, εάν έχουν τη δυνατότητα, προτιμούν να παράγουν οι ίδιες κάποια προϊόντα, παρά να τα αγοράζουν από εξωτερικούς προμηθευτές. Στις περιπτώσεις αυτές η υπόθεση του μοντέλου EOQ, ότι κάθε παραγγελία παραλαμβάνεται αμέσως, δεν είναι ρεαλιστική. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται το μοντέλο EOQ με συνεχή ρυθμό παραγωγής. Όπως και στα προηγούμενα μοντέλα EOQ, υποθέτουμε ότι η ζήτηση προκύπτει με ένα σταθερό ρυθμό και επίσης υποθέτουμε ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις και εξαντλήσεις των αποθεμάτων.

Το μοντέλο EOQ με συνεχή ρυθμό παραγωγής χρησιμοποιεί την υπόθεση ότι μια εταιρία μπορεί να παράγει ένα προϊόν με ρυθμό r μονάδες ανά χρονική περίοδο (υποθέτουμε ότι η χρονική περίοδος είναι ένα έτος). Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε χρονικής περιόδου μήκους t, η εταιρία μπορεί να παράγει rt μονάδες. Ορίζουμε τα εξής:

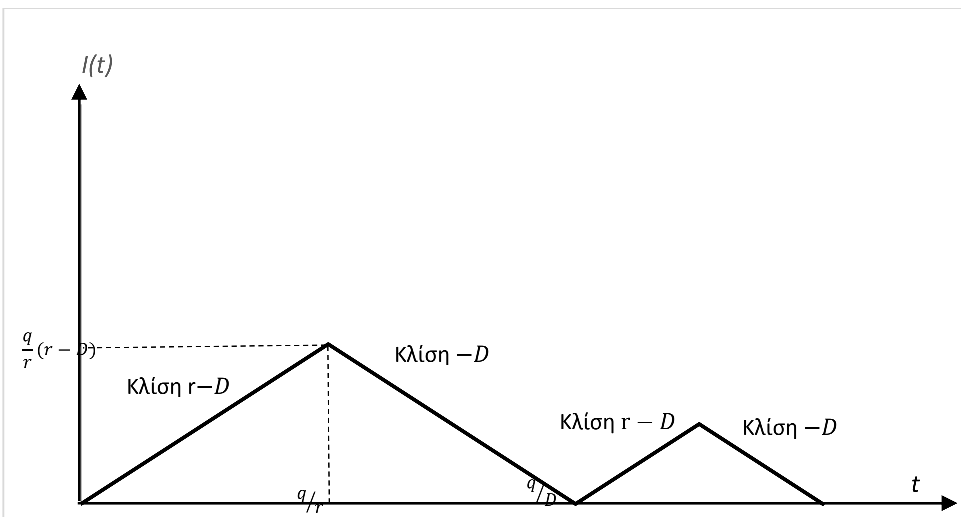
$q =$ # μονάδων που παράγονται κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου παραγωγής.

$K =$ το κόστος εγκατάστασης που προκύπτει σε κάθε κύκλο παραγωγής.

$h =$ το κόστος αποθήκευσης μια μονάδας στο απόθεμα, για ένα έτος.

$D =$ η ετήσια ζήτηση για το προϊόν.

Διάγραμμα 6: Οι διαφοροποιήσεις του επιπέδου αποθεμάτων στο μοντέλο EOQ με συνεχή ρυθμό παραγωγής



Στο διάγραμμα 6 περιγράφεται η διακύμανση του επιπέδου των αποθεμάτων συναρτήσει του χρόνου, υποθέτοντας ότι ένας κύκλος παραγωγής αρχίζει τη χρονική στιγμή 0. Κατά την έναρξη ενός κύκλου παραγωγής, ο ρυθμός παραγωγής είναι r μονάδες ανά έτος, και η ζήτηση προκύπτει με ένα ρυθμό D ανά έτος. Έτσι, μέχρις ότου παραχθούν q μονάδες, το απόθεμα αυξάνει με ρυθμό $r-D$ μονάδες ανά έτος. Προφανώς $r \geq D$, γιατί σε διαφορετική περίπτωση η ζήτηση δεν πρόκειται να καλυφθεί. Τη χρονική στιγμή $\frac{q}{r}$, θα έχουν παραχθεί q μονάδες προϊόντος. Στο σημείο αυτό, ο κύκλος παραγωγής ολοκληρώνεται και το απόθεμα αρχίζει να φθίνει με ρυθμό D μονάδες/έτος, μέχρις ότου να μηδενιστεί. Αυτό θα συμβεί, σε χρόνο $\frac{q}{D}$. Τότε, θα ξεκινήσει ένας νέος κύκλος παραγωγής.

Υποθέτοντας ότι το κόστος παραγωγής ανά μονάδα είναι ανεξάρτητο του μεγέθους της παραγωγής, χρειάζεται να προσδιορίσουμε την τιμή της μεταβλητής q που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος (όπου σαν συνολικό ετήσιο κόστος θεωρούμε το ετήσιο κόστος αποθήκευσης + το ετήσιο κόστος εγκατάστασης). Από τη στιγμή που η ζήτηση προκύπτει με σταθερό ρυθμό, γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Μέσο επίπεδο αποθέματος} = \frac{1}{2}(\text{Μέγιστο επίπεδο αποθέματος})$$

Από το διάγραμμα 6 βλέπουμε ότι το μέγιστο επίπεδο αποθέματος προκύπτει σε χρόνο $\frac{q}{r}$. Από τη στιγμή που στο διάστημα μεταξύ 0 και $\frac{q}{r}$, το επίπεδο του αποθέματος αυξάνει με ρυθμό $r - D$ μονάδες ανά έτος, σε χρόνο $\frac{q}{r}$ θα είναι $\frac{q}{r}(r - D)$. Τότε, το μέσο επίπεδο του αποθέματος θα είναι $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{q}{r}\right)(r - D)$ και τα κόστη θα είναι αντίστοιχα:

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = h(\text{μέσο απόθεμα})(1\ \text{έτος}) = \frac{h(r-D)q}{2r}$$

$$\text{Ετήσιο κόστος παραγγελίας} = (\text{κόστος παραγγελίας})(\#\ \text{κύκλων παραγωγής}) = \frac{KD}{q}$$

Παρατηρούμε ότι το ετήσιο κόστος αποθήκευσης για το συγκεκριμένο μοντέλο, είναι το ίδιο ακριβώς με το συμβατικό μοντέλο EOQ στο οποίο το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα είναι $\frac{h(r-D)}{r}$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι:

$$\boxed{\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} + \text{Ετήσιο κόστος παραγγελίας} = \frac{h(r-D)q}{2r} + \frac{KD}{q}}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των ετήσιων κοστών αποθήκευσης και παραγγελίας για το μοντέλο EOQ με συνεχή ρυθμό παραγωγής, είναι ισοδύναμο με την επίλυση ενός απλού EOQ μοντέλου με κόστος αποθήκευσης $\frac{h(r-D)}{r}$, κόστος παραγγελίας K και ετήσια ζήτηση D.

Με βάση αυτή την παρατήρηση και τον τύπο της EOQ που βρήκαμε στο συμβατικό μοντέλο, συμπεραίνουμε ότι:

$$\text{Βέλτιστος κύκλος παραγωγής} = \sqrt{\frac{2KDr}{h(r-D)}} = \text{EOQ}\sqrt{\frac{r}{(r-D)}}$$

Όπως και στα προηγούμενα, χρειάζεται να γίνουν $\frac{D}{q}$ κύκλοι παραγωγής ανά έτος, προκειμένου να καλυφθεί η ετήσια ζήτηση των D μονάδων. Όσο το r αυξάνει, η παραγωγή συντελείται με ταχύτερους ρυθμούς. Έτσι, για μεγάλα r, ο ρυθμός του μοντέλου θα πρέπει να προσεγγίζει τη στιγμιαία παράδοση του συμβατικού EOQ μοντέλου. Πράγματι, αυτό συμβαίνει, διότι για μεγάλα r, η σχέση $\frac{r}{(r-D)}$ τείνει στο 1.

3.9 Μοντέλο EOQ με ελλείματα και καθυστερήσεις στην παράδοση

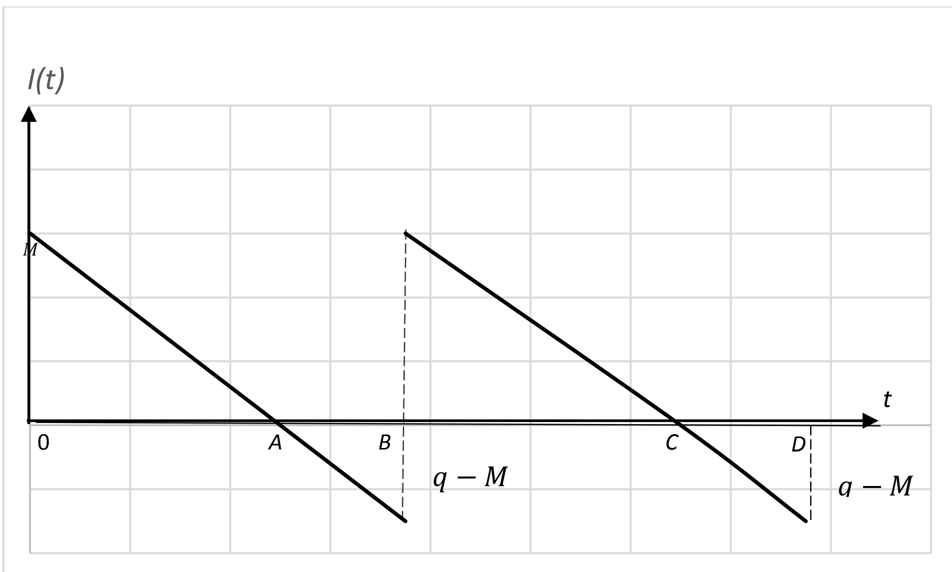
Στο βασικό μοντέλο EOQ υποθέσαμε ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις, επομένως το απόθεμα δεν γίνεται να εξαντληθεί. Εντούτοις, υπάρχουν περιπτώσεις όπου το να επιτρέπονται κάποιες περιορισμένες και προγραμματισμένες ελλείψεις, είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα. Η πιο σημαντική προϋπόθεση για να συμβεί αυτό, είναι ότι οι πελάτες είναι διατεθειμένοι να δεχθούν μια εύλογη καθυστέρηση στην παραλαβή της παραγγελίας τους, αν παραστεί ανάγκη. Στην περίπτωση αυτή, το κόστος εξάντλησης αποθεμάτων δεν πρέπει να είναι παράλογο. Εάν το κόστος διατήρησης αποθέματος είναι υψηλό σε σχέση με αυτό το κόστος εξάντλησης, τότε η μείωση του μέσου επιπέδου αποθέματος μοιάζει μια λογική απόφαση.

Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι s είναι το κόστος που προκύπτει όταν δημιουργείται έλλειψη μιας μονάδας για ένα έτος. Οι μεταβλητές K, D και h είναι ίδιες όπως και στα προηγούμενα μοντέλα. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μεταβλητή s είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί. Υποθέτουμε ότι όλη η ανικανοποίητη ζήτηση μπαίνει σε αναμονή και άρα δεν υπάρχουν χαμένες πωλήσεις. Για να καθορίσουμε μια πολιτική που να ελαχιστοποιεί τα ετήσια κόστη, ορίζουμε:

$q =$ το μέγεθος της παραγγελίας.

$q - M =$ η μέγιστη πιθανή έλλειψη που μπορεί να προκύψει με βάση την πολιτική παραγγελίας.

Διάγραμμα 7: Η εξέλιξη του αποθέματος συναρτήσει του χρόνου στο μοντέλο EOQ με ελλείματα και καθυστερήσεις στην παράδοση



Ισοδύναμα, μια επιχείρηση θα έχει $q - M$ μονάδες έλλειψη κάθε φορά που θα τοποθετεί μια παραγγελία. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος αναπλήρωσης είναι μηδέν. Από τη στιγμή που οι παραγγελίες τοποθετούνται κάθε φορά που η επιχείρηση έχει $q - M$ μονάδες έλλειψη, το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων της επιχείρησης θα είναι $M - q + q = M$. Για παράδειγμα, εάν $q = 500$ και $q - M = 100$, γνωρίζουμε ότι μια παραγγελία 500 μονάδων θα χρησιμοποιηθεί για να καλύψει την ανικανοποίητη ζήτηση 100 μονάδων και άρα θα οδηγήσει σε ένα επίπεδο αποθεμάτων ίσο με $500 - 100 = 400$ μονάδες.

Υποθέτοντας ότι μια παραγγελία τοποθετείται τη χρονική στιγμή 0, η εξέλιξη του επιπέδου των αποθεμάτων συναρτήσει του χρόνου, περιγράφεται στο διάγραμμα 7.

Από τη στιγμή που το κόστος αγοράς δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές q και M, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό ετήσιο κόστος, καθορίζοντας τις τιμές των q και M που ελαχιστοποιούν το ετήσιο κόστος αποθήκευσης + το ετήσιο κόστος εξάντλησης + το ετήσιο κόστος παραγγελιών.

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 7, η συμπεριφορά του επιπέδου των αποθεμάτων είναι ακριβώς ίδια στο χρονικό διάστημα μεταξύ 0 και B και στο χρονικό διάστημα μεταξύ B και D. Για το λόγο αυτό, οι χρονικές περίοδοι $0B$ και BD καλούνται **κύκλοι παραγγελιών**. Είναι, δηλαδή, όπως και στις προηγούμενες ενότητες, το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα σε δυο διαδοχικές παραγγελίες. Για να καθορίσουμε το συνολικό ετήσιο κόστος, θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας τα επιμέρους κόστη ανά κύκλο παραγγελίας. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει να υπολογίσουμε το μήκος των ευθειών $0A$ και AB του διαγράμματος 7. Από τη στιγμή που το μηδενικό επίπεδο προκύπτει αμέσως μόλις υπάρξει ζήτηση για M μονάδες, συμπεραίνουμε ότι $0A = \frac{M}{D}$. Επίσης, από τη στιγμή που ένας κύκλος ολοκληρώνεται μόλις υπάρξει ζήτηση για q μονάδες, συμπεραίνουμε ότι $0B = \frac{q}{D}$. Τότε θα είναι:

$$\text{Μήκος του AB} = \text{Μήκος του 0B} - \text{Μήκος του 0A} = \frac{q - M}{D}$$

Τέλος, από τη στιγμή που κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου παράγονται q μονάδες προϊόντος, κατά τη διάρκεια ενός έτους θα τοποθετούνται $\frac{D}{q}$ κύκλοι (άρα και παραγγελίες). Είμαστε πλέον σε θέση να εκφράσουμε τα επιμέρους ετήσια κόστη.

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \left(\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}}\right)\left(\frac{\text{Κύκλοι παραγγελίας}}{\text{Έτος}}\right)$$

και

$$\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}} = \text{το κόστος αποθήκευσης που προκύπτει στο διάστημα } 0A$$

Από το διάγραμμα 7, το μέσο επίπεδο των αποθεμάτων στο διάστημα $0A$ είναι $\frac{M}{2}$. Εφόσον το $0A$ έχει μήκος $\frac{M}{D}$ θα είναι:

$$\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}} = \left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{M}{D}\right)h = \frac{M^2 h}{2D}$$

Επειδή όπως είπαμε, υπάρχουν $\frac{D}{q}$ κύκλοι ανά έτος,

$$\text{Ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = \left(\frac{M^2 h}{2D}\right)\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{M^2 h}{2q}$$

Με το ίδιο σκεπτικό,

$$\text{Ετήσιο κόστος εξάντλησης } = \left(\frac{\text{Κόστος εξάντλησης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}}\right)\left(\frac{\text{Κύκλοι παραγγελίας}}{\text{Έτος}}\right)$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι το κόστος εξάντλησης ανά κύκλο είναι το κόστος που προκύπτει κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου AB. Εφόσον η ζήτηση προκύπτει με σταθερό ρυθμό, το μέσο επίπεδο λόγω εξάντλησης κατά τη διάρκεια της AB, είναι απλώς το μισό του μέγιστου επιπέδου που μπορεί να προκύψει, στην περίοδο αυτή, δηλαδή $\frac{q-M}{2}$. Αφού η AB έχει μήκος $\frac{q-M}{D}$,

$$\frac{\text{Κόστος εξάντλησης}}{\text{Κύκλο παραγγελίας}} = \frac{1}{2}(q-M)\left(\frac{q-M}{D}\right)s = \frac{(q-M)^2 s}{2D}$$

και από τη στιγμή που υπάρχουν $\frac{D}{q}$ κύκλοι ανά έτος,

Ετήσιο $\text{Κόστος εξάντλησης} = \frac{(q-M)^2 s}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{(q-M)^2 s}{2q}$

Όπως και στις προηγούμενες ενότητες, το ετήσιο κόστος παραγγελίας είναι $\frac{KD}{q}$. Ορίζουμε την μεταβλητή $TC(q, M)$ να είναι το συνολικό ετήσιο κόστος (στο οποίο όμως δεν περιλαμβάνεται το κόστος αγοράς). Ο σκοπός μας είναι να επιλέξουμε τις μεταβλητές q και M ώστε να ελαχιστοποιείται η $TC(q, M)$. Είναι:

$$TC(q, M) = \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q - M)^2 s}{2q} + \frac{KD}{q}$$

Η ελάχιστη τιμή της $TC(q, M)$ προκύπτει στο σημείο όπου:

$$\frac{\partial TC}{\partial q} = \frac{\partial TC}{\partial M} = 0$$

Αποδεικνύεται ότι η $TC(q, M)$ ελαχιστοποιείται για τα παρακάτω q^* και M^*:

$$q^* = \left[\frac{2KD(h + s)}{hs}\right]^{1/2} = \mathrm{EOQ}\left(\frac{h + s}{s}\right)^{1/2}$$

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h + s)}\right]^{1/2} = \mathrm{EOQ}\left(\frac{s}{h + s}\right)^{1/2}$$

$\text{Μέγιστη έλλειψη} = q^* - M^*$

Όσο η μεταβλητή s τείνει στο άπειρο, τα q^* και M^* πλησιάζουν την EOQ, και η μέγιστη έλλειψη τείνει στο μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό είναι απολύτως λογικό, διότι για μεγάλες τιμές της s, το κόστος εξάντλησης καθίσταται απαγορευτικό, και αναμένουμε από την βέλτιστη πολιτική να επιτρέψει ελάχιστες ή και καθόλου ελλείψεις. Με άλλα λόγια, εάν η μεταβλητή s πάρει μεγάλες τιμές έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα EOQ που δεν επιτρέπονται ελλείψεις, δηλαδή είμαστε πάλι στην περίπτωση της ενότητας 3.2.

3.9.1 Εφαρμογή στο μοντέλο EOQ με ελλείματα

Κάθε χρόνο η εταιρία οπτικών SOC πουλάει 10.000 σκελετούς για γυαλιά οράσεως. Η εταιρία παραγγέλνει τους σκελετούς από έναν τοπικό προμηθευτή, ο οποίος χρεώνει 15€ το τεμάχιο. Κάθε τοποθέτηση παραγγελίας, δημιουργεί ένα κόστος της τάξης των 50€. Η SOC πιστεύει ότι η ζήτηση των σκελετών μπορεί αντέξει κάποιες καθυστερήσεις και κοστολογεί την έλλειψη ενός σκελετού, για ένα έτος, με 15€. Το κόστος αυτό ισοδυναμεί με την απώλεια μελλοντικών συνεργασιών με τους δυσαρεστημένους καταναλωτές. Το ετήσιο κόστος αποθήκευσης είναι 0.30€ για κάθε 1€ που βρίσκεται στο απόθεμα. Ποια είναι η EOQ; Ποια είναι η μέγιστη έλλειψη που μπορεί να προκύψει; Ποιο είναι το μέγιστο επίπεδο αποθέματος που μπορεί να προκύψει;

Τα δεδομένα μας είναι τα εξής:

$K =$50€

$D =$10.000 σκελετοί ανά έτος

$h =$ 0.3(15) $=$ 4.50€ ανά σκελετό/έτος

$s =$ 15€ ανά σκελετό/έτος

Με βάση τους τύπους που βρήκαμε στο μοντέλο EOQ με ελλείματα και καθυστερήσεις στην παράδοση έχουμε:

$$q^* = \left(\frac{2(50)(10.000)(19.50)}{15(4.5)}\right)^{1/2} = 537.48$$

$$M^* = \left(\frac{2(50)(10.000)(15)}{4.5(19.50)}\right)^{1/2} = 413.45$$

Τότε, η μέγιστη έλλειψη που μπορεί να προκύψει θα είναι $q^* - M^* = 124.03$ σκελετοί και κάθε παραγγελία που τοποθετείται, θα πρέπει να είναι για 537 ή 538 σκελετούς. Το μέγιστο επίπεδο των αποθεμάτων που μπορεί να προκύψει, θα είναι $M^* = 413.45$ σκελετοί.

3.10 Σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιούνται τα μοντέλα EOQ

Η ζήτηση είναι συχνά ακανόνιστη και δύσκολο να προσδιοριστεί με ακρίβεια. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες, όπως πχ η εποχικότητα κάποιων προϊόντων. Σε περιπτώσεις όπου η ζήτηση είναι ακανόνιστη, η υπόθεση που κάναμε στα μοντέλα EOQ, ότι η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή, δεν ικανοποιείται.

Για να προσδιορίσουμε εάν η υπόθεση της σταθερής ζήτησης είναι λογική ή όχι, υποθέτουμε ότι κατά τη διάρκεια n χρονικών περιόδων, παρατηρείται ζήτηση $d_1, d_2, \ldots d_n$. Επίσης, υποθέτουμε ότι έχουμε αρκετή πληροφορία για τη μελλοντική ζήτηση, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε με βεβαιότητα ότι είναι ντετερμινιστική. Προκειμένου να αποφασίσουμε εάν η ζήτηση είναι επαρκώς κανονική, ώστε να δικαιολογήσουμε τη χρήση ενός μοντέλου EOQ, θα ακολουθήσουμε την τακτική των Peterson και Silver (1998) .

1. Προσδιορίζουμε την εκτίμηση $\bar{d}$ της μέσης ζήτησης ανά περίοδο από τη σχέση:

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n} d_t$$

2. Προσδιορίζουμε μια εκτίμηση της διασποράς της ζήτησης ανά περίοδο από τη σχέση:

$$\overline{Var\,\boldsymbol{D}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n} d^2{}_t - \bar{d}^2$$

3. Προσδιορίζουμε μια εκτίμηση της σχετικής μεταβλητότητας της ζήτησης (**variability coefficient**). Θα τη συμβολίζουμε με VC, όπου:

$$VC = \frac{Var\,\boldsymbol{D}}{\bar{d}^2}$$

   Σημειώνουμε ότι εάν όλα τα d_t είναι ίσα, τότε η εκτίμησης της διασποράς της ζήτησης θα ισούται με μηδέν. Άρα θα είναι και $VC = 0$. Έτσι, εάν η εκτίμηση VC είναι μικρή, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η υπόθεση της σταθερής ζήτησης είναι λογική. Από τις μελέτες που έχουν γίνει, έχει κριθεί αποδεκτή, για τα μοντέλα EOQ, τιμή της $VC < 0.20$.

   Εάν $VC > 0.20$, τότε χρησιμοποιούνται μέθοδοι δυναμικού προγραμματισμού.

Σαν παράδειγμα για γίνει κατανοητή η χρήση της εκτίμησης VC, θεωρούμε τη ζήτηση κατά τη διάρκεια των 4 τετάρτων ενός έτους: 80 μονάδες, 100 μονάδες, 130 μονάδες, 90 μονάδες. Υποθέτοντας ότι η μελλοντική ζήτηση ακολουθεί ένα παρόμοιο μοτίβο, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο EOQ;

Από τη στιγμή που $\bar{d} = \frac{400}{4} = 100$ και $Var\,\boldsymbol{D} = \left(\frac{1}{4}\right)(80^2 + 100^2 + 130^2 + 90^2) - 100^2 = 350$, έχουμε ότι $VC = \frac{350}{100^2} = 0.035$. Εφόσον είναι $VC < 0.20$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο EOQ.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα, οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι τα μοντέλα EOQ που εξετάσαμε χρειάζονται την σιωπηρή παραδοχή ότι η ζήτηση είναι ανεξάρτητη κατά τη διάρκεια διαφορετικών χρονικών περιόδων. Με άλλα λόγια τα μοντέλα EOQ απαιτούν ότι κάθε γνώση σχετικά με τη ζήτηση κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου, δεν πρέπει να δίνει καμία πληροφορία για τη ζήτηση σε οποιαδήποτε άλλη χρονική περίοδο. Εάν οι ανάγκες των αποθεμάτων μιας επιχείρησης καλύπτονται μέσω εσωτερικής παραγωγής, η παραδοχή αυτή, είναι συνήθως μη ρεαλιστική. Για παράδειγμα υποθέτουμε μια εταιρία που χρειάζεται να παράγει 5 μονάδες προϊόντος Α μέχρι τις 11 Δεκεμβρίου, και κάθε μονάδα Α για να παραχθεί, χρειάζεται 2 μονάδες προϊόντος Β και 3 μονάδες προϊόντος Γ. Από τη στιγμή που τα προϊόντα Β και Γ είναι διαθέσιμα, απαιτούνται 10 ημέρες για να κατασκευαστεί μια μονάδα προϊόντος Α. Τότε, με βάση το γεγονός ότι απαιτούνται 5 μονάδες του προϊόντος Α μέχρι τις 11 Δεκεμβρίου, δημιουργείται η ανάγκη να υπάρχουν διαθέσιμες 10 μονάδες του προϊόντος Β και 15 μονάδες του προϊόντος Γ, μέχρι την 1η Δεκεμβρίου. Έτσι η ζήτηση της 1ης Δεκεμβρίου εξαρτάται από τη ζήτηση της 11ης Δεκεμβρίου. Στα μοντέλα EOQ που εξετάσαμε, δεν λάβαμε υπόψιν μας την εξάρτηση της ζήτησης που παίζει σημαντικό ρόλο, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις εσωτερικής παραγωγής προϊόντων, σε μια επιχείρηση.

3.11 Μοντέλο EOQ για παραγγελία πολλών προϊόντων

Υποθέτουμε ότι μια εταιρία κρατάει στο απόθεμά της διαφόρων ειδών προϊόντα. Κάθε φορά που παραλαμβάνεται μια παραγγελία, θα περιλαμβάνει τεμάχια ενός προϊόντος, πολλών προϊόντων ή ακόμα και όλων των προϊόντων που υπάρχουν στο απόθεμα. Για κάθε παραγγελία δημιουργείται ένα προκαθορισμένο κόστος που σχετίζεται με την αποστολή της παραγγελίας και ένα άλλο προκαθορισμένο κόστος που σχετίζεται με τα τεμάχια που απαρτίζουν την παραγγελία. Ο σκοπός της κάθε εταιρίας είναι να βρει έναν τρόπο ώστε να ελαχιστοποιήσει το ετήσιο κόστος των παραγγελιών της και ταυτόχρονα να μην αντιμετωπίζει ελλείψεις στο απόθεμά της.

Οι Chopra και Meindl (2001) επινόησαν μια μέθοδο που βρίσκει βέλτιστη λύση σε τέτοιου είδους προβλήματα. Αρχικά, επιλέγεται το προϊόν για το οποίο τοποθετούνται πιο συχνά παραγγελίες. Υποθέτουμε ότι είναι το προϊόν 1 και θα περιλαμβάνεται σε κάθε παραγγελία. Στη συνέχεια δημιουργείται ένα μοντέλο Solver το οποίο θα καθορίζει τα παρακάτω μεταβαλλόμενα κελιά:

- Τον αριθμό των παραγγελιών που παραλαμβάνονται ανά έτος. Σημειώνεται ότι σε κάθε παραγγελία θα περιλαμβάνεται κάποια ποσότητα του προϊόντος 1.
- Για όλα τα προϊόντα εκτός του 1, το αντίστοιχο κελί θα μεταβάλλεται ανάλογα με το ανά πόσες παραγγελίες θα περιλαμβάνεται το αντίστοιχο προϊόν. Για παράδειγμα, εάν το προϊόν 2 πρέπει να περιλαμβάνεται ανά 3 παραγγελίες, τότε το μεταβαλλόμενο κελί για το προϊόν 2, θα παίρνει την τιμή 3.

Δίνοντας δοκιμαστικές τιμές στα μεταβαλλόμενα κελία, μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε το συνολικό προκαθορισμένο κόστος (δηλαδή το άθροισμα των προκαθορισμένων κοστών για κάθε προϊόν + το προκαθορισμένο κόστος κάθε παραγγελίας) καθώς και το συνολικό κόστος αποθήκευσης για κάθε προϊόν. Το άθροισμα αυτών των κοστών θα είναι το κελί «στόχος» του Solver. Το μοντέλο αυτό είναι μη γραμμικό και για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθεί Evolutionary Solver για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Ακολουθεί μια εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου:

3.11.1 Εφαρμογή

Η εταιρία Web Electric προμηθεύεται 3 τύπους τηλεοράσεων από μια συγκεκριμένη κατασκευάστρια εταιρία. Στον πίνακα 3 φαίνεται η ετήσια ζήτηση, το κόστος αγοράς ανά μονάδα, το ετήσιο κόστος αποθήκευσης (σαν ποσοστό του κόστους αγοράς), το προκαθορισμένο κόστος τοποθέτησης μιας παραγγελίας και το προκαθορισμένο κόστος που προκύπτει από την παραγγελία ενός προϊόντος. Θα καθορίσουμε την πολιτική παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των κοστών.

Πίνακας 3: Υπολογισμός του συνολικού ετήσιου κόστους της εφαρμογής της ενότητας 3.11.1

	A	B	C	D	E
1		Προϊόν 1	Προϊόν 2	Προϊόν 3	
2	Ετήσια Ζήτηση	5000	1000	400	
3	Κόστος ανά μονάδα	500 €	500 €	500 €	
4	Κόστος αποθήκευσης	0,2	0,2	0,2	
5	Κόστος παραγγελίας	1000	1000	1000	
6	EOQ	316,2277660	141,4214	89,4427	
7	Παραγγελίες ανά έτος	15,8113883	7,071068	4,472136	
8	Κόστος τοποθέτησης παραγγελίας	4000			
9					
10	Παραγγελίες ανά έτος Π1	9,3256			
11	Παραγγελίες του Π1 πριν παραληφθεί για πρώτη φορά το Π2	4			
12	Παραγγελίες του Π1 πριν παραληφθεί για πρώτη φορά το Π3	8			
13	Παραγγελίες ανά έτος Π2	2,3314			
14	Παραγγελίες ανά έτος Π3	1,16570000			
15					
16	Βασικό ετήσιο κόστος παραγγελίας	37.302,40 €			
17					
18	Ποσότητα παραγγελίας	536,1585314	428,9268	343,1415	
19	Μέσο απόθεμα	268,0792657	214,4634	171,5707	
20	Ετήσιο κόστος αποθήκευσης	26.808 €	21.446 €	17.157 €	
21	Ετήσιο κόστος παραγγελιών των προϊόντων	9325,6	2331,4	1165,7	
22					
23					
24	Συνολικό ετήσιο κόστος	115.536,44			
25					

- Στα κελιά B6:D6, υπολογίζουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας EOQ για κάθε προϊόν, υπολογίζοντας για κάθε κολώνα τη σχέση:

  $$= \mathrm{SQRT}(2 * \mathrm{B2} * \mathrm{B5})/(\mathrm{B3} * \mathrm{B4}))$$

  Στη συνέχεια στα κελιά B7:D7 υπολογίζουμε τον αριθμό των φορών που κάθε προϊόν παραγγέλνεται, κατά τη διάρκεια ενός έτους από τη σχέση

  $$= \mathrm{B2}/\mathrm{B6}$$

  Βρίσκουμε ότι το προϊόν 1 είναι αυτό που παραγγέλνεται πιο συχνά.
- Στο κελί B10 βάζουμε μια δοκιμαστική τιμή (όχι απαραίτητα ακέραιο αριθμό) για τον αριθμό των παραγγελιών που θα τοποθετηθούν ανά έτος. Στο κελί

B11 βάζουμε μια δοκιμαστική τιμή (η οποία πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός) για τον αριθμό των παραγγελιών που θα μεσολαβήσουν (και θα περιέχουν σίγουρα το προϊόν 1), προτού παραληφθεί μια παραγγελία που να περιέχει το προϊόν 2. Αντίστοιχα, στο κελί B12 βάζουμε μια δοκιμαστική τιμή (η οποία πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός) για τον αριθμό των παραγγελιών που θα μεσολαβήσουν, προτού παραληφθεί μια παραγγελία που να περιέχει το προϊόν 3.

- Στο κελί B16 υπολογίζουμε το συνολικό προκαθορισμένο κόστος που σχετίζεται με τις παραγγελίες ως (αριθμός παραγγελιών ανά έτος)*(κόστος τοποθέτησης παραγγελίας), με τη σχέση

$$= \mathrm{B8} * \mathrm{B10}$$

- Στα κελιά B13 και B14 υπολογίζουμε το αριθμό των φορών όπου το προϊόν I ($\mathrm{I} = 2$ ή 3) παραγγέλνεται κάθε χρόνο, από τη σχέση (παραγγελίες ανά έτος)*(μέρος των παραγγελιών που περιέχουν το προϊόν I).

$$= \$\mathrm{B}\$10/\mathrm{B11}$$

$$= \$\mathrm{B}\$10/\mathrm{B12}$$

- Στο κελί B18 υπολογίζουμε το μέγεθος κάθε παραγγελίας που περιλαμβάνει το προϊόν 1 ως: (ετήσια ζήτηση για το προϊόν 1)/(αριθμό παραγγελιών που παραλαμβάνονται ανά έτος).

$$= \mathrm{B2}/\mathrm{B10}$$

Με το ίδιο σκεπτικό υπολογίζουμε το μέγεθος των παραγγελιών των προϊόντων 2 και 3 στα κελιά C18 και D18.

- Στα κελιά B19:D19 υπολογίζουμε το μέσο επίπεδο του αποθέματος για κάθε προϊόν ως το μισό του μεγέθους παραγγελίας. Η σχέση είναι:

$$= 0.5 * \mathrm{B19}$$

- Στα κελιά B20:D20 υπολογίζουμε το ετήσιο κόστος αποθήκευσης για κάθε προϊόν ως: (μέσο επίπεδο αποθέματος για κάθε προϊόν)*(ετήσιο κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος στο απόθεμα). Η σχέση θα είναι:

$$= \mathrm{B3} * \mathrm{B4} * \mathrm{B19}$$

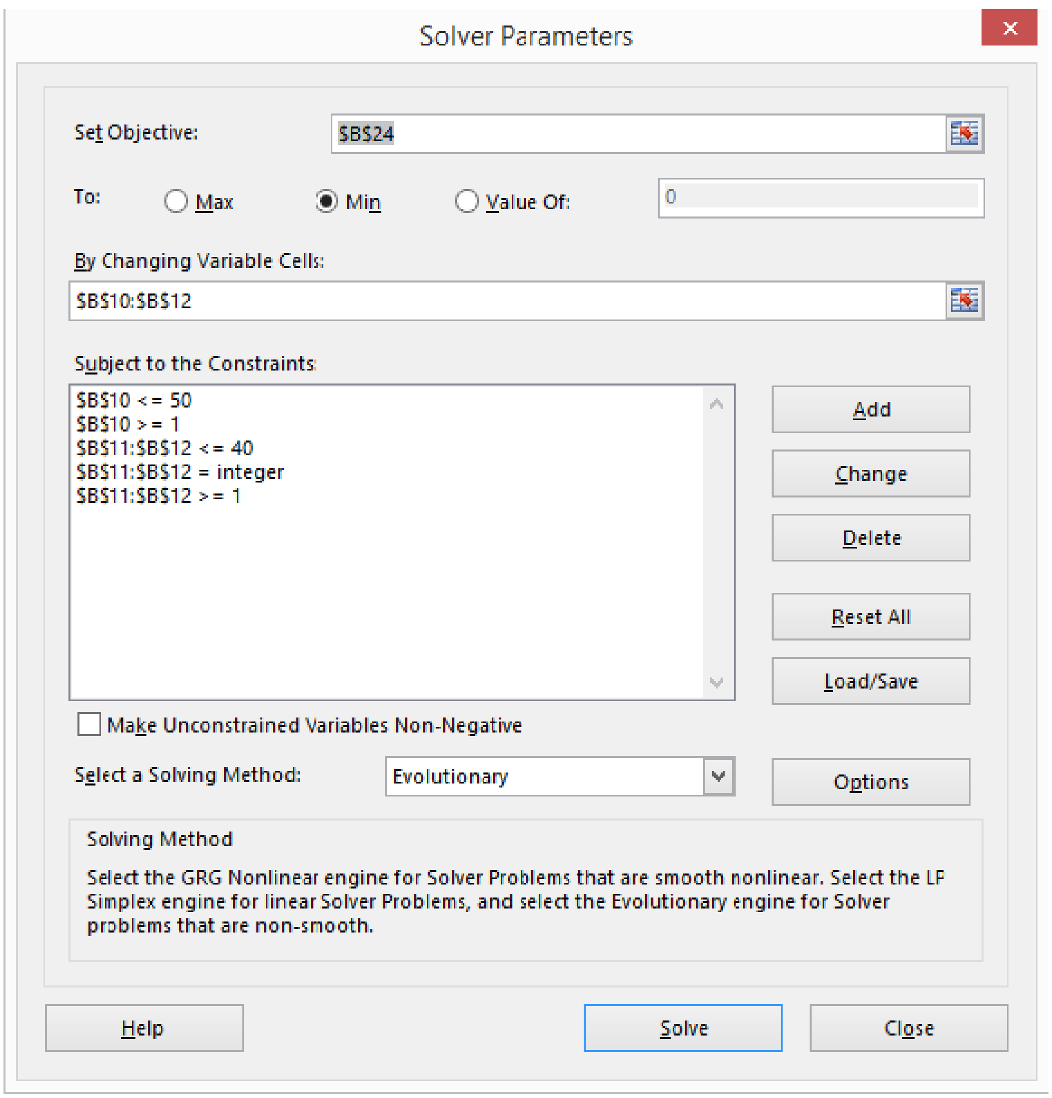
- Στα κελιά B21:D21 υπολογίζουμε το ετήσιο κόστος παραγγελίας για κάθε προϊόν ως: (το κόστος ανά παραγγελία για κάθε προϊόν)*(αριθμό φορών που το προϊόν παραγγέλνεται, ανά έτος). Για παράδειγμα στο κελί B21 θα είναι:

$$= \mathrm{B5} * \mathrm{B10}$$

- Στο κελί B24 υπολογίζουμε το συνολικό ετήσιο κόστος (εξαιρείται το κόστος αγοράς το οποίο δεν εξαρτάται από την πολιτική παραγγελίας) με τον τύπο

$$= \mathrm{SUM(B20{:}\,E21)} + \mathrm{B16}$$

Πίνακας 4: Οι παράμετροι του Solver της εφαρμογής της ενότητας 3.11.1



- Κάνοντας χρήση του Solver θα βρούμε την πολιτική παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το ετήσιο κόστος. Στον πίνακα 4 φαίνεται το παράθυρο του Solver.

  Ελαχιστοποιούμε το συνολικό κόστος (B24) αλλάζοντας τον αριθμό των παραγγελιών ανά έτος (B10) και τον αριθμό των παραγγελιών που πρέπει να τοποθετηθούν προτού τοποθετηθούν παραγγελίες για τα προϊόντα με τη λιγότερη ζήτηση (B25 και B26). Ζητάμε ο αριθμός των παραγγελιών για τα προϊόντα με λιγότερη ζήτηση να είναι ακέραιος. Περιλαμβάνονται άνω και κάτω όρια που απαιτούνται από τη μέθοδο Evolutionary Solver, για κάθε μεταβαλλόμενο κελί.

Βρίσκουμε ότι κάθε έτος θα πρέπει να παραλαμβάνονται 7,23 παραγγελίες. Κάθε παραγγελία θα περιλαμβάνει 691,33 τεμάχια του προϊόντος 1 και 138,26 τεμάχια του προϊόντος 2. Το 50% όλων των παραγγελιών θα περιλαμβάνει 110,61 τεμάχια του προϊόντος 3. Το συνολικό ετήσιο κόστος θα είναι 94.021,27 €.

4 Στοχαστικά μοντέλα μιας περιόδου

4.1 Εισαγωγή

Σε πολλές περιπτώσεις ο υπεύθυνος για την λήψη αποφάσεων σε μια επιχείρηση έρχεται αντιμέτωπος με τον προσδιορισμό της τιμής μιας συγκεκριμένης μεταβλητής q. Η μεταβλητή q μπορεί να είναι μια ποσότητα παραγγελίας ή η προσφορά σε ένα συμβόλαιο. Αφού καθοριστεί η τιμή της q, πρέπει να καθοριστεί η τιμή d, η οποία εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{D}$. Ανάλογα με τις τιμές των q και d υπολογίζεται ένα κόστος $c(d, q)$. Υποθέτουμε ότι ο υπεύθυνος δεν παίρνει κάποιο ρίσκο και θέλει να επιλέξει την q με σκοπό να ελαχιστοποιήσει το αναμενόμενο κόστος της επιχείρησης. Απ' τη στιγμή που η συγκεκριμένη επιλογή γίνεται μία μόνο φορά, το μοντέλο αυτό ονομάζεται μοντέλο μιας περιόδου.

4.2 Η έννοια της ανάλυσης οριακού κόστους (Marginal Analysis)

Για το μοντέλο μιας περιόδου που περιγράψαμε παραπάνω, υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{D}$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που παίρνει ακέραιες τιμές, με $P(\boldsymbol{D} = d) = p(d)$. Υποθέτουμε ότι $E(q)$ είναι το αναμενόμενο κόστος αν επιλεγεί η q. Τότε

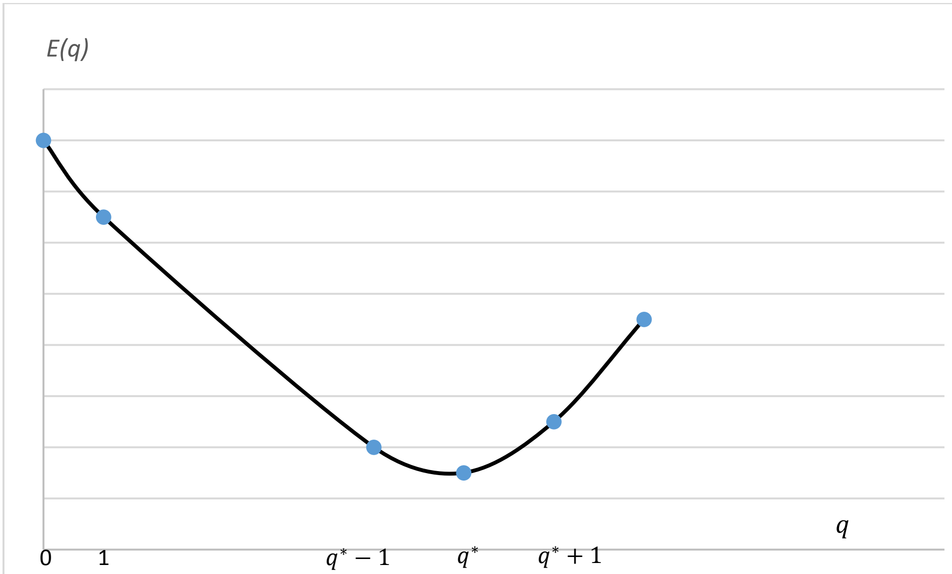
$$E(q) = \sum_{d} p(d) c(d, q)$$

Στις πιο πολλές εφαρμογές η συνάρτηση $E(q)$ είναι κυρτή. Υποθέτουμε ότι q^* είναι η τιμή της q που ελαχιστοποιεί την $E(q)$. Στις περιπτώσεις που η $E(q)$ είναι κυρτή, το γράφημα της $E(q)$ πρέπει να μοιάζει με το διάγραμμα 8 . Παρατηρούμε ότι η q^* είναι η μικρότερη τιμή της q για την οποία ισχύει:

$$E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0 \tag{4}$$

Έτσι, αν η $E(q)$ είναι κυρτή συνάρτηση, μπορούμε να βρούμε την τιμή της q που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος, βρίσκοντας την μικρότερη τιμή της q που ικανοποιεί την ανισότητα (4). Σημειώνουμε ότι η ποσότητα $E(q + 1) - E(q)$ είναι η αλλαγή που προκύπτει στο αναμενόμενο κόστος εάν αυξήσουμε την μεταβλητή q σε $q + 1$.

Διάγραμμα 8: Καθορισμός του q^* με χρήση ανάλυσης οριακού κόστους



Για τον προσδιορισμό της q^* ξεκινάμε υποθέτοντας ότι $q = 0$. Εάν $E(1) - E(0) \leq 0$, μπορούμε να επωφεληθούμε αυξάνοντας την q από 0 σε 1. Στη συνέχεια ελέγχουμε εάν $E(2) - E(1) \leq 0$. Σε περίπτωση που ισχύει, τότε αυξάνοντας την q από 1 σε 2 θα έχουμε μείωση του αναμενόμενου κόστους. Συνεχίζοντας με την ίδια λογική, παρατηρούμε ότι αυξάνοντας την q κατά 1, θα οδηγούμαστε σε μείωση του αναμενόμενου κόστους μέχρι το σημείο που θα προσπαθήσουμε να αυξήσουμε την q από q^* σε $q^* + 1$. Στην περίπτωση αυτή, η αύξηση του q κατά 1 θα οδηγήσει στην αύξηση του αναμενόμενου κόστους. Από το διάγραμμα 8 (που όπως είπαμε, είναι ιδανικό αν η $E(q)$ είναι κυρτή συνάρτηση), παρατηρούμε ότι $E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0$, επομένως για $q \geq q^*$, $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Έτσι, η τιμή q^* πρέπει να είναι η τιμή της q που ελαχιστοποιεί την $E(q)$. Σε περίπτωση που η $E(q)$ δεν είναι κυρτή, το επιχείρημά μας μπορεί να μην ισχύει.

Η προσέγγισή αυτή, προσδιορίζει την q^* υπολογίζοντας κατ' επανάληψη την επίδραση της προσθήκης μιας **οριακής τιμής** στην τιμή της q. Για το λόγο αυτό, συχνά καλείται ανάλυση οριακού κόστους. Η χρήση της ενδείκνυται, εάν είναι εύκολο να προσδιοριστεί μια απλή έκφραση για τη σχέση $E(q + 1) - E(q)$. Στην επόμενη ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση οριακού κόστους για να επιλύσουμε το κλασικό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη.

4.3 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (news vendor problem): διακριτή ζήτηση

Οι επιχειρήσεις συχνά έρχονται αντιμέτωπες με αποθεματικά προβλήματα όπου συμβαίνει η εξής αλληλουχία γεγονότων:

1. Η επιχείρηση αποφασίζει πόσες μονάδες να παραγγείλει. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι q.
2. Με πιθανότητα $p(d)$, προκύπτει ζήτηση d μονάδων. Στην ενότητα αυτή θα υποθέσουμε ότι ο αριθμός d είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Ορίζουμε ως $\boldsymbol{D}$ την τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τη ζήτηση.
3. Προκύπτει ένα κόστος $c(d,q)$ που εξαρτάται από τις μεταβλητές d και q.

Προβλήματα με αυτή την αλληλουχία καλούνται, συχνά, **προβλήματα του εφημεριδοπώλη.** Για να καταλάβουμε το γιατί, υποθέτουμε έναν εφημεριδοπώλη που πρέπει να αποφασίσει πόσες εφημερίδες θα παραγγείλει κάθε μέρα. Εάν παραγγείλει μεγάλο αριθμό εφημερίδων μπορεί να μείνει στο τέλος της ημέρας με πολλές εφημερίδες που δεν θα έχουν πλέον καμία αξία. Απ' την άλλη μεριά, εάν παραγγείλει μικρό αριθμό εφημερίδων μπορεί να χάσει τα έσοδα που θα είχε εάν είχε περισσότερες εφημερίδες και επιπλέον θα έχει να αντιμετωπίσει την δυσαρέσκεια των καταναλωτών.

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πως η ανάλυση οριακού κόστους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος του εφημεριδοπώλη όταν η ζήτηση είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και το κόστος $c(d,q)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

a) $c(d,q) = c_0 q + (\text{όροι που δεν περιλαμβάνουν την } q) \qquad (d \leq q)$

b) $c(d,q) = -c_u q + (\text{όροι που δεν περιλαμβάνουν την } q) \qquad (d \geq q+1)$

Στην σχέση (a) , ο όρος c_0 είναι το μοναδιαίο κόστος που προκύπτει όταν έχουμε πολύ περισσότερα αποθέματα από όσα απαιτούνται λόγω της ζήτησης (**overstocked**). Εάν $d \leq q$, βρισκόμαστε σ' αυτή την περίπτωση. Εάν το μέγεθος της παραγγελίας αυξηθεί από q σε $q + 1$, η σχέση (a) δείχνει ότι το κόστος αυξάνεται κατά c_0. Έτσι, το c_0 είναι το κόστος που προκύπτει εάν στην παραγγελία υπάρχει μια μονάδα προϊόντος παραπάνω από το μέγεθος της ζήτησης. Το κόστος c_0 καλείται πλεονασματικό κόστος (overstocking cost). Αντίστοιχα, εάν $d \geq q + 1$ έχουμε λιγότερα αποθέματα από όσα απαιτεί η ζήτηση (understocked). Εάν $d \geq q + 1$ και αυξήσουμε το μέγεθος της παραγγελίας κατά μια μονάδα, τότε έχουμε έλλειψη (understocked) κατά μια μονάδα λιγότερη. Τότε, η σχέση (b) υποδηλώνει ότι το κόστος ελαττώνεται κατά c_u, άρα c_u είναι το κόστος έλλειψης για κάθε μονάδα προϊόντος. Το κόστος c_u καλείται ελλειματικό κόστος (understocking cost).

Για να βρούμε την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας με χρήση της ανάλυσης οριακού κόστους, υποθέτουμε ότι $E(q)$ είναι το αναμενόμενο κόστος που προκύπτει αν τοποθετηθεί μια παραγγελία q μονάδων. Θεωρούμε ότι ο βασικός στόχος είναι η εύρεση της τιμής q^* που ελαχιστοποιεί την $E(q)$. Σε περίπτωση που το κόστος $c(d, q)$ μπορεί να περιγραφεί από τις σχέσεις (a) και (b), τότε η $E(q)$ είναι κυρτή και άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση οριακού κόστους για την εύρεση της q^*.

Ακολουθώντας την ανισότητα (4), πρέπει να καθορίσουμε την μικρότερη τιμή της q για την οποία ισχύει η σχέση $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Για τον υπολογισμό της $E(q + 1) - E(q)$ πρέπει να λάβουμε υπόψιν δύο περιπτώσεις:

1. $d \leq q$. Στην περίπτωση αυτή η παραγγελία $q + 1$ μονάδων αντί για q, οδηγεί σε πλεόνασμα κατά μια μονάδα. Ως εκ τούτου το κόστος αυξάνεται κατά c_0. Η πιθανότητα να προκύψει η περίπτωση αυτή, είναι $P(\boldsymbol{D} \leq q)$, όπου $\boldsymbol{D}$ είναι η τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά την ζήτηση.
2. $d \geq q + 1$. Στην περίπτωση αυτή η παραγγελία $q + 1$ μονάδων αντί για q, μας οδηγεί σε έλλειμα μιας μονάδας λιγότερης, γεγονός που οδηγεί σε μείωση του κόστους κατά c_u. Η πιθανότητα να προκύψει η περίπτωση αυτή, είναι $P(\boldsymbol{D} \geq q + 1) = 1 - P(\boldsymbol{D} \leq q)$.

Συνοψίζοντας, στο κλάσμα $P(\boldsymbol{D} \leq q)$ του χρόνου, η παραγγελία $q + 1$ μονάδων θα κοστίσει c_0 παραπάνω, από την παραγγελία q μονάδων. Αντίστοιχα, στο κλάσμα

$1 - P(\boldsymbol{D} \leq q)$ του χρόνου, η παραγγελία $q + 1$ μονάδων θα κοστίσει c_u λιγότερο, από την παραγγελία q μονάδων. Έτσι, κατά μέσο όρο, η παραγγελία $q + 1$ μονάδων θα κοστίσει

$$c_0\, P(\boldsymbol{D} \leq q) - c_u[1 - P(\boldsymbol{D} \leq q)]$$

περισσότερο, από την παραγγελία q μονάδων.

Πιο συγκεκριμένα, δείξαμε ότι

$$\begin{aligned} E(q+1) - E(q) &= c_0\, P(\boldsymbol{D} \leq q) - c_u[1 - P(\boldsymbol{D} \leq q)] \\ &= (c_0 + c_u)P(\boldsymbol{D} \leq q) - c_u \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που η $P(\boldsymbol{D} \leq q)$ αυξάνει όσο η q αυξάνει, τότε και η $E(q + 1) - E(q)$ θα αυξάνει όσο η q. Έτσι, εάν $c_0 + c_u \geq 0$, η $E(q)$ θα είναι κυρτή και άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ανάλυση οριακού κόστους.

Τότε, η σχέση $E(q + 1) - E(q) \geq 0$ θα ισχύει εάν

$$(c_0 + c_u)P(\boldsymbol{D} \leq q) - c_u \geq 0 \qquad \text{ή αντίστοιχα } P(\boldsymbol{D} \leq q) \geq \frac{c_u}{c_0 + c_u}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της ζήτησης, έστω $F(q) = P(\boldsymbol{D} \leq q)$. Από τη στιγμή που η ανάλυση οριακού κόστους εφαρμόζεται, δείξαμε ότι η μεταβλητή $E(q)$ θα ελαχιστοποιείται από την μικρότερη τιμή της q (που θα την καλούμε q^*) που ικανοποιεί τη σχέση:

$$F(q^*) \geq \frac{c_u}{c_0 + c_u} \tag{5}$$

Η παρακάτω εφαρμογή εξηγεί τη χρήση της σχέσης που βρήκαμε.

4.3.1 Εφαρμογή

Κατά τον μήνα Αύγουστο, το βιβλιοπωλείο Προπομπός πρέπει να αποφασίσει πόσα ημερολόγια του επόμενου έτους θα παραγγείλει. Κάθε ημερολόγιο κοστίζει στο βιβλιοπωλείο 2€ και πωλείται προς 4.50€. Μετά την $1^{\underline{\eta}}$ Ιανουαρίου όσα ημερολόγια δεν πωλήθηκαν επιστρέφονται στον προμηθευτή προς 0.75€ το ένα. Ο ιδιοκτήτης πιστεύει ότι ο αριθμός των ημερολογίων που θα πωληθούν μέχρι την $1^{\underline{\eta}}$ Ιανουαρίου ακολουθεί την κατανομή που φαίνεται στον πίνακα 5. Σκοπός του είναι η μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους από την πώληση των ημερολογίων. Πόσα ημερολόγια πρέπει να παραγγείλει το βιβλιοπωλείο τον Αύγουστο;

Υποθέτουμε ότι:

$q = \#\,\text{ημερολογίων που θα παραγγελθούν τον Αύγουστο}.$

$d = \#\,\text{ημερολογίων που θα απαιτήσει η ζήτηση μέχρι την } 1^{\underline{\eta}} \text{ Ιανουαριου}$.

Εάν $d \leq q$, τη κόστη που προκύπτουν φαίνονται στον πίνακα 6 (τα κέρδη θεωρούνται αρνητικά έξοδα). Από τη σχέση (a) προκύπτει ότι $c_0 = 1.25$.

Εάν $d \geq q + 1$, τα κόστη που προκύπτουν φαίνονται στον πίνακα 7. Από τη σχέση (b) προκύπτει ότι $-c_u = -2.5$, ή αντίστοιχα $c_u = 2.5$. Τότε

$$\frac{c_u}{c_0 + c_u} = \frac{2.50}{3.75} = \frac{2}{3}$$

Πίνακας 5: Η συνάρτηση πιθανότητας για την πώληση των ημερολογίων

# ημερολογίων που θα πωληθούν	Πιθανότητα
100	0,30
150	0,20
200	0,30
250	0,15
300	0,05

Πίνακας 6: Υπολογισμός του συνολικού κόστους, εάν $d \leq q$

Υπολογισμός κόστους εάν $d \leq q$	Κόστος
Αγορά q ημερολογίων προς 2€ το ένα	$2q$
Πώληση d ημερολογίων προς 4.5€ το ένα	$-4.50d$
Επιστροφή $q-d$ ημερολογίων προς 0.75€ το ένα	$-0.75(q-d)$
Συνολικό κόστος	$1.25q - 3.75d$

Πίνακας 7: Υπολογισμός του συνολικού κόστους, εάν $d \geq q+1$

Υπολογισμός κόστους εάν $d \geq q+1$	Κόστος
Αγορά q ημερολογίων προς 2€ το ένα	$2q$
Πώληση d ημερολογίων προς 4.5€ το ένα	$-4.50q$
Συνολικό κόστος	$-2.5q$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι ο ιδιοκτήτης πρέπει να παραγγείλει q^* ημερολόγια, όπου q^* είναι η μικρότερη τιμή για την οποία $P(\boldsymbol{D} \leq q^*) \geq \frac{2}{3}$. Σαν συνάρτηση του q, η

$P(\boldsymbol{D} \leq q)$ αυξάνει μόνο όταν q = 100, 150, 200, 250 ή 300. Σημειώνουμε επίσης ότι $P(\boldsymbol{D} \leq 100) = 0.30$, $P(\boldsymbol{D} \leq 150) = 0.50$, $P(\boldsymbol{D} \leq 200) = 0.80$. Απ' τη στιγμή που η $P(\boldsymbol{D} \leq 200)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{2}{3}$, $q^* = 200$, επομένως πρέπει να γίνει παραγγελία για 200 ημερολόγια.

4.4 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη: συνεχής ζήτηση

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι η ζήτηση $\boldsymbol{D}$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\varphi_D(d)$. Προσαρμόζοντας το επιχείρημα της ανάλυσης οριακού κόστους της προηγούμενης ενότητας, μπορεί να δειχθεί ότι το αναμενόμενο κόστος ελαχιστοποιείται παραγγέλνοντας q^* μονάδες, όπου q^* είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί τη σχέση:

$$P(\boldsymbol{D} \leq q^*) \geq \frac{c_u}{c_0 + c_u} \tag{6}$$

Απ' τη στιγμή που η ζήτηση είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να βρούμε μια τιμή q^* για την οποία στη σχέση (6) να ισχύει η ισότητα. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας μπορεί να καθοριστεί βρίσκοντας την τιμή q^* που ικανοποιεί τη σχέση

$$P(\boldsymbol{D} \leq q^*) = \frac{c_u}{c_0+c_u} \text{ ή αντίστοιχα } P(\boldsymbol{D} \geq q^*) = \frac{c_0}{c_0+c_u} \tag{7}$$

Από τη σχέση (7) βλέπουμε ότι το ιδανικό είναι να παραγγέλνουμε μονάδες μέχρι το σημείο εκείνο όπου η τελευταία μονάδα της παραγγελίας να έχει πιθανότητα $\frac{c_0}{c_0+c_u}$ να πωληθεί. Τα παρακάτω παραδείγματα επεξηγούν τη χρήση της σχέσης (6).

4.4.1 Εφαρμογή

Η Ένωση Κέντρων Συνεστίασης (ΕΚΣ) διοργανώνει το ετήσιο συνέδριο της στην Αθήνα. Έξι μήνες πριν το συνέδριο, η ΕΚΣ πρέπει να αποφασίσει πόσα δωμάτια θα κλείσει στο ξενοδοχείο που θα γίνει το συνέδριο. Σε εκείνη τη χρονική στιγμή, η ΕΚΣ μπορεί να κλείσει δωμάτιο στο κόστος των 50€ το δωμάτιο, αλλά δεν γνωρίζει με βεβαιότητα τον ακριβή αριθμό ατόμων που θα παρευρεθούν στο συνέδριο. Η ΕΚΣ πιστεύει, εντούτοις, ότι ο αριθμός των δωματίων που χρειάζεται, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 5000 δωμάτια και τυπική απόκλιση 2000 δωμάτια. Σε περίπτωση που ο αναγκαίος αριθμός δωματίων ξεπεράσει τον αριθμό των δωματίων που κλείστηκαν, υπάρχει δυνατότητα κράτησης δωματίων σε γειτονικά ξενοδοχεία, προς 80€ το δωμάτιο. Επειδή η διαμονή σε γειτονικά ξενοδοχεία είναι άβολη για τους συμμετέχοντες, η ΕΚΣ κοστολογεί την ταλαιπωρία αυτή, προς 10€ επιπλέον, για κάθε δωμάτιο που κλείνεται σε γειτονικό ξενοδοχείο. Εάν ο στόχος της ΕΚΣ είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου κόστους, πόσα δωμάτια πρέπει να κλείσει η ΕΚΣ στο ξενοδοχείο που θα γίνει το συνέδριο;

Ορίζουμε τα παρακάτω μεγέθη:

$$q = \#\ \text{δωματίων που κλείστηκαν}$$

$$d = \#\ \text{δωματίων που πραγματικά χρειάστηκαν.}$$

Εάν $d \leq q$, τότε το μόνος κόστος που προκύπτει είναι το κόστος των δωματίων που κλείστηκαν εκ των προτέρων, δηλαδή το συνολικό κόστος είναι 50 q. Έτσι, $c_0 = 50$. Εάν $d \geq q + 1$, προκύπτουν τα ακόλουθα κόστη:

Κόστος κράτησης q δωματίων = 50q.

Κόστος κράτησης $d - q$ δωματίων σε γειτονικά ξενοδοχεία = 80$(d - q)$.

Κόστος λόγω ταλαιπωρίας των συμμετεχόντων = 10$(d - q)$.

Συνολικό κόστος = $90d - 40q$ και $c_u = 40$.

Από τη στιγμή που $\frac{c_u}{c_0+c_u} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$, βλέπουμε από τη σχέση (6) ότι ο βέλτιστος αριθμός δωματίων που πρέπει να κρατηθούν, είναι η ποσότητα q^* που ικανοποιεί τη σχέση $P(\boldsymbol{D} \le q^*) = \frac{4}{9}$.

Ο υπολογισμός της q^* θα γίνει με χρήση της συνάρτησης του Excel, NORMINV. Εισάγοντας τα δεδομένα =NORMINV(4/9,5000,2000) προκύπτει το αποτέλεσμα 4720,58, επομένως η ΑΕΜ πρέπει να κρατήσει 4720 ή 4721 δωμάτια.

4.4.2 Εφαρμογή

Η τιμή εισιτηρίου για την πτήση Αθήνα – Βρυξέλλες είναι 200€. Κάθε αεροπλάνο έχει χωρητικότητα 100 ατόμων. Συνήθως, κάποιοι από τους επιβάτες που έχουν αγοράσει εισιτήριο για την πτήση, δεν εμφανίζονται (no-shows). Η αεροπορική εταιρία προκειμένου να είναι καλυμμένη σε αυτές τις περιπτώσεις, θα προσπαθήσει να πουλήσει περισσότερα από 100 εισιτήρια για κάθε πτήση. Ο ομοσπονδιακός νόμος προβλέπει ότι κάθε επιβάτης με αγορασμένο εισιτήριο που δεν καταφέρνει να επιβιβαστεί στην πτήση του, δικαιούται αποζημίωση (έστω 100€). Δεδομένα προηγούμενων ετών υποδηλώνουν ότι ο αριθμός των επιβατών που δεν εμφανίζονται σε κάθε πτήση που ακολουθεί τη διαδρομή Αθήνα – Βρυξέλλες, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 20 και τυπική απόκλιση 5. Πόσα εισιτήρια πρέπει να πουλήσει η αεροπορική εταιρία σε κάθε πτήση, προκειμένου να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος της; Υποθέτουμε ότι οποιοσδήποτε επιβάτης δεν κάνει χρήση του εισιτηρίου του, λαμβάνει επιστροφή 200€.

Ορίζουμε:

$$q = \#\ \text{εισιτηρίων που πωλήθηκαν από την αεροπορική εταιρία.}$$
$$d = \#\ \text{ατόμων που δεν εμφανίστηκαν στην πτήση τους.}$$

Παρατηρούμε ότι $q - d$ θα είναι ο αριθμός των επιβατών που εμφανίστηκαν στην πτήση τους. Εάν $q - d \le 100$, τότε όλοι οι επιβάτες που εμφανίστηκαν θα επιβιβαστούν στην πτήση, και έτσι το κόστος για την αεροπορική εταιρία θα είναι $-200(q-d)=200d-200q$. Εάν $q-d \geq 100$ τότε 100 επιβάτες θα επιβιβαστούν στο αεροπλάνο (πληρώνοντας την εταιρία $200(100)=20.000€$) και $q-d-100$ επιβάτες δεν θα επιβιβαστούν. Αυτοί οι $q-d-100$ θα λάβουν αποζημίωση $100(q-d-100)€$. Έτσι, εάν $q-d \geq 100$, το συνολικό κόστος για την αεροπορική εταιρία δίνεται από τη σχέση $100(q-d-100)-200(100)=100(q-100)-100d-20.000$. Συνολικά, το καθαρό κόστος της αεροπορικής εταιρίας μπορεί να εκφραστεί με τον τρόπο που φαίνεται στον πίνακα 8.

Πίνακας 8: Υπολογισμός του συνολικού κόστους

	Συνολικό κόστος
$q-d \geq 100$ (ή $d \leq q-100$)	$100(q-100)-100d-20.000$
$q-d \leq 100$ (ή $d \geq q-100$)	$200d-200(q-100)-200(100)$

Εάν θεωρήσουμε σαν μεταβλητή απόφασης την $q-100$, έχουμε ένα πρόβλημα εφημεριδοπώλη με $-c_u=-200$ ή αντίστοιχα $c_u=200$ και $c_0=100$. Από τη σχέση (6), πρέπει να επιλέξουμε την τη μεταβλητή $q-100$ με τρόπο τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$P(\boldsymbol{D} \leq q-100)=\frac{c_u}{c_0+c_u}=\frac{2}{3}$$

Η επίλυση του προβλήματος θα γίνει με χρήση της μεταβλητής NORMINV του Excel. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι =NORMINV(2/3, 120, 5) =122.15, επομένως συμπεραίνουμε ότι η αεροπορική εταιρία πρέπει να προσπαθήσει να πουλήσει 122 ή 123 εισιτήρια. Αυτό, φυσικά, δεν σημαίνει ότι σε περίπτωση που οι πελάτες είναι λιγότεροι από 122 (ή 123), η εταιρία θα πρέπει να μην πραγματοποιήσει την πτήση.

4.5 Κάποια άλλα μοντέλα μιας περιόδου

Πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα μιας περιόδου στην επιχειρησιακή έρευνα δεν μπορούν να επιλυθούν με χρήση της ανάλυσης οριακού κόστους. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται να εκφράσουμε την ζητούμενη ποσότητα προς βελτιστοποίηση (αναμενόμενο κόστος ή αναμενόμενα έξοδα) ως μια συνάρτηση $f(q)$, της μεταβλητής απόφασης q. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το ελάχιστο ή μέγιστο της $f(q)$ θέτοντας $f'(q) = 0$. Στην ενότητα αυτή θα εξηγήσουμε την ιδέα αυτή με μια σύντομη περιγραφή ενός πλειοδοτικού μοντέλου.

4.5.1 Εφαρμογή

Η Εταιρία Κατασκευής Ακινήτων (ΕΚΑ) πρόκειται να κάνει την προσφορά της σε έναν πλειοδοτικό διαγωνισμό για την ανάθεση ενός σημαντικού έργου. Το έργο θα κοστίσει 2 εκατομμύρια € για να ολοκληρωθεί. Η ΕΚΑ έχει να ανταγωνιστεί άλλη μια εταιρία και πιστεύει ότι η προσφορά της είναι εξίσου πιθανό να είναι οποιοδήποτε ποσό ανάμεσα σε 2 εκατομμύρια και 4 εκατομμύρια €. Εάν ο σκοπός της ΕΚΑ είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της, τι στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει;

Ορίζουμε:

$\boldsymbol{B} = \text{τ.μ}$ που αναπαριστά την προσφορά της αντίπαλης εταιρίας

$b =$ η ακριβής προσφορά της αντίπαλης εταιρίας

Τότε η $\varphi_D(b)$, που είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\boldsymbol{B}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_D(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{2.000.000} & (2.000.000 \le b \le 4.000.000) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $q = \text{η προσφορά της ΕΚΑ}$. Εάν $b > q$, τότε η αντίπαλη εταιρία κερδίζει τον διαγωνισμό και η ΕΚΑ δεν κερδίζει τίποτα. Εάν $b < q$ τότε η ΕΚΑ κερδίζει τον διαγωνισμό και έχει κέρδος ίσο με $q - 2.000.000$ €. Θεωρούμε ότι το ενδεχόμενο $b = q$ έχει πιθανότητα μηδέν να προκύψει και γι' αυτό αγνοείται. Υποθέτουμε ότι $E(q)$ είναι το αναμενόμενο κέρδος της ΕΚΑ εάν κάνει προσφορά q. Τότε:

$$E(q) = \int_{2.000.000}^{q} (0)\varphi_D(b)db + \int_{q}^{4.000.000} (q - 2.000.000)\varphi_D(b)db$$

Από τη στιγμή που $\varphi_D(b) = \frac{1}{2.000.000}$ για $2.000.000 \leq b \leq 4.000.000$, θα είναι

$$E(q) = \frac{(q - 2.000.000)(4.000.000 - q)}{2.000.000}$$

Για να βρούμε την τιμή q που μεγιστοποιεί την $E(q)$ θα βρούμε την παράγωγο

$$E'(q) = \frac{-(q - 2.000.000) + (4.000.000 - q)}{2.000.000} = \frac{6.000.000 - 2q}{2.000.000}$$

Έτσι, για $E'(q) = 0$, προκύπτει ότι $q = 3.000.000$. Αφού $E''(q) = \frac{-2}{2.000.000} < 0$, είμαστε βέβαιοι ότι η $E(q)$ είναι κυρτή συνάρτηση και η τιμή $q = 3.000.000$ όντως μεγιστοποιεί την $E(q)$. Επομένως η ΕΚΑ θα πρέπει να προσφέρει 3 εκατομμύρια € και το αναμενόμενο κέρδος της θα είναι $E(3.000.000) = 500.000$€.

5 Στοχαστικά μοντέλα συνεχούς ανανέωσης

5.1 Το μοντέλο EOQ με αβέβαιη ζήτηση: τα (r,q) και (s,S) μοντέλα

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μια τροποποίηση του κλασικού μοντέλου EOQ που χρησιμοποιήσαμε σε προηγούμενες ενότητες. Αντί να υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι σταθερή, θα θεωρήσουμε γνωστή μόνο την κατανομή της κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης μέχρι την παράδοση της επόμενης παραγγελίας και όχι την ακριβή ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής.

Θέτοντας ένα σημείο παραγγελίας r, υπάρχει πάντα το ενδεχόμενο να εξαντληθεί το απόθεμα και άρα να βρεθούμε αντιμέτωποι με ένα επιπλέον κόστος, που ονομάζεται **κόστος εξάντλησης αποθέματος** (stockout cost or cost of understock).

Αντίστοιχα, υπάρχει και το ενδεχόμενο να περισσέψουν κάποιες μονάδες προϊόντος. Στην περίπτωση αυτή όμως, υποθέτουμε ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά την επόμενη περίοδο.

Το ετήσιο αναμενόμενο κόστος εξάντλησης αποθεμάτων επηρεάζεται από δύο κρίσιμα μεγέθη:

- $r = \text{το σημείο παραγγελίας}$
- $Q = \text{την ποσότητα παραγγελίας}$

Συγκεκριμένα, το κόστος αυτό αυξάνεται με τη μείωση του σημείου παραγγελίας, καθώς και με τη μείωση της ποσότητας παραγγελίας. Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την κατάσταση αυτή, θα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο για να εκτιμήσουμε τα ελλείματα.

Η πρώτη προσέγγιση θα είναι να υποθέσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το <u>κόστος έλλειψης μιας μονάδας προϊόντος</u>. Θα κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- Κάθε εφαρμογή αφορά ένα μοναδικό προϊόν.
- Το επίπεδο των αποθεμάτων βρίσκεται υπό συνεχή επίβλεψη, έτσι ώστε το τρέχον επίπεδο να είναι πάντα γνωστό.
- Ο χρόνος αναπλήρωσης είναι γνωστός και σταθερός.

- Το κόστος έλλειψης είναι ένα υποθετικό κόστος ανά μονάδα προϊόντος, ανεξάρτητο από τη διάρκεια που η επιχείρηση βρίσκεται με μηδενικό απόθεμα.

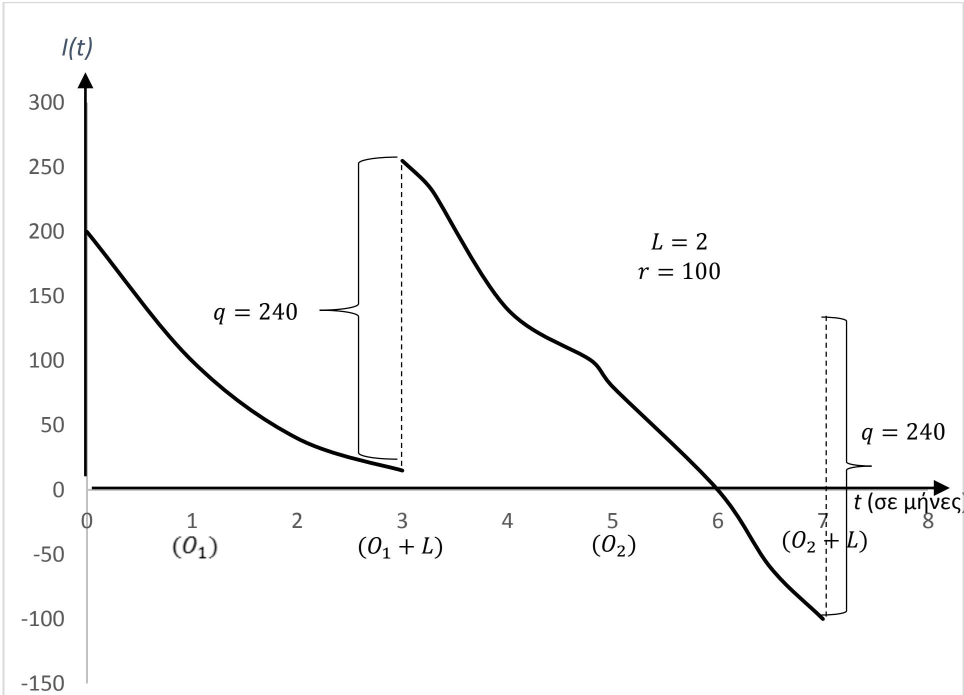
Ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

- $K =$ κόστος μιας παραγγελίας
- $h =$ κόστος αποθήκευσης μια μονάδας ανά έτος
- $L =$ ο χρόνος αναπλήρωσης που μεσολαβεί

ανάμεσα σε δυο παραγγελίες (υποθέτουμε ότι είναι γνωστός με βεβαιότητα)

- $\boldsymbol{D} =$ η τυχαία μεταβλητή (συνεχής) που αναπαριστά την ετήσια ζήτηση
- $q =$ η ποσότητα κάθε παραγγελίας
- $E(\boldsymbol{D}) =$ η μέση τιμή της ζήτησης
- $\sigma_{\boldsymbol{D}} =$ η τυπική απόκλιση της ζήτησης.
- $c_B =$ το κόστος έλλειψης μιας μονάδας
- $OHI(t) =$ το άμεσα διαθέσιμο απόθεμα τη χρονική στιγμη t
- $B(t) =$ ο αριθμός των εκκρεμών παραγγελιών τη χρονική στιγμή t
- $I(t) =$ το καθαρό απόθεμα τη χρονική στιγμη $t = OHI(t) - B(t)$
- $r =$ το σημείο παραγγελίας ($reorder\ point$)

Διάγραμμα 9: Η εξέλιξη του αποθέματος συναρτήσει του χρόνου στο μοντέλο EOQ με αβέβαιη ζήτηση



Στο διάγραμμα 9 είναι $B(t) = 0$ για $0 \leq t \leq 6$ και $B(7) = 100$. Είναι επίσης, $OHI(1) = 100$, $OHI(0) = 200 \; \kappa\alpha\iota \; OHI(6) = OHI(7) = 0$. Το σημείο παραγγελίας είναι 100 μονάδες προϊόντος. Όποτε το επίπεδο του αποθέματος πέσει στο r, τοποθετείται μια παραγγελία για q μονάδες.

Ορίζουμε ως $\mathbf{X}$ την τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τη ζήτηση, κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης. Υποθέτουμε ότι η $\mathbf{X}$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, μέση τιμή $E(\mathbf{X})$, διασπορά ,$\text{var}\mathbf{X}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\boldsymbol{X}}$. Εάν υποθέσουμε ότι η ζήτηση είναι ανεξάρτητη από τη μια χρονική περίοδο στην άλλη, τότε για την τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$ ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$E(\mathbf{X}) = LE(\boldsymbol{D}), \qquad \text{var}\,\mathbf{X} = L(\text{var}\,\mathbf{D}), \qquad \sigma_{\boldsymbol{X}} = \sigma_{\boldsymbol{D}}\sqrt{L}$$

Υποθέτουμε ότι εάν η $\mathbf{D}$ είναι κανονικά κατανεμημένη τότε και η $\mathbf{X}$ θα είναι κανονικά κατανεμημένη. Έστω ότι ο χρόνος αναπλήρωσης L είναι μια τυχαία μεταβλητή (έστω $\boldsymbol{L}$), με μέση τιμή $E(\boldsymbol{L})$, διασπορά var $\boldsymbol{L}$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\boldsymbol{L}}$. Εάν η διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση ανά μονάδα χρόνου, κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης τότε:

$$E(\boldsymbol{X}) = E(\boldsymbol{L})E(\boldsymbol{D}), \qquad \operatorname{var}\mathbf{X} = E(\boldsymbol{L})(\operatorname{var}\mathbf{D}) + E(\boldsymbol{D})^2\operatorname{var}(\mathbf{L})$$

Θέλουμε να επιλέξουμε τις ποσότητες q και r ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τα συνολικά αναμενόμενα ετήσια κόστη (εξαιρείται το κόστος αγοράς). Προτού δείξουμε πως υπολογίζονται οι βέλτιστες τιμές των q και r, θα δώσουμε μια εικόνα του πως εξελίσσεται το απόθεμα συναρτήσει του χρόνου.

Υποθέτουμε ότι μια παραγγελία $q = 240$ τεμαχίων καταφθάνει τη χρονική στιγμή 0. Θεωρούμε, επίσης, ότι $L = 2$. Στο διάγραμμα 9 φαίνεται ότι παραγγελίες μεγέθους q τοποθετούνται στις περιόδους $O_1 = 1$ και $O_2 = 5$. Οι παραγγελίες αυτές παραλαμβάνονται στις χρονικές περιόδους $O_1 + L = 3$ και $O_2 + L = 7$ αντίστοιχα. Από προηγούμενες ενότητες, γνωρίζουμε ότι ένας κύκλος παραγωγής είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο παραγγελιών. Το διάγραμμα 9 περιέχει δύο πλήρεις κύκλους. Ο πρώτος είναι από τη χρονική στιγμή 0 που έφτασε η παραγγελία των 240 τεμαχίων, μέχρι ακριβώς πριν φτάσει η παραγγελία τη χρονική στιγμή $O_1 + L = 3$. Ο δεύτερος κύκλος ξεκινάει τη στιγμή που φτάνει η παραγγελία αυτή, και τελειώνει ακριβώς πριν φτάσει η επόμενη παραγγελία, τη χρονική στιγμή $O_2 + L = 7$. Κατά τη διάρκεια του πρώτου κύκλου, η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι μικρότερη της τιμής r, επομένως δεν προκύπτουν ελλείψεις. Εντούτοις, κατά τη διάρκεια του δεύτερου κύκλου, η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι μεγαλύτερη της τιμής r και έτσι προκύπτουν ελλείψεις στο απόθεμα μεταξύ της χρονικής στιγμής 6 και 7. Είναι ξεκάθαρο ότι αυξάνοντας την τιμή r, μειώνουμε τον αριθμό των ελλείψεων, αλλά ταυτόχρονα αναγκαζόμαστε να έχουμε μεγαλύτερο απόθεμα με αποτέλεσμα να έχουμε υψηλότερα κόστη αποθήκευσης. Έτσι, η βέλτιστη τιμή r πρέπει να βρίσκει μια χρυσή τομή ανάμεσα στο κόστος αποθήκευσης και το κόστος λόγω έλλειψης.

Θα δείξουμε τώρα πως καθορίζονται οι βέλτιστες τιμές των q και r.

5.1.1 Η επιλογή της ποσότητας παραγγελίας q

Θα θεωρήσουμε σαν βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας της τυχαίας ζήτησης, την οικονομική ποσότητα παραγγελίας (EOQ) της σταθερής ζήτησης, δηλαδή $q = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Ο λόγος που μπορούμε να προβούμε σε αυτόν τον ισχυρισμό είναι γιατί το άθροισμα του συνολικού ετήσιου κόστους δεν είναι τόσο ευαίσθητο για μικρές αλλαγές του Q.

5.1.2 Καθορισμός του σημείο παραγγελίας r με εκκρεμότητες

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι όλη η ζήτηση, τελικά, θα ικανοποιηθεί και δεν χάνονται πωλήσεις. Υποθέτουμε ότι κάθε μονάδα προϊόντος αγοράζεται πάντα στην ίδια τιμή, επομένως το κόστος αγοράς είναι προκαθορισμένο. Ορίζουμε τη συνάρτηση $TC(q,r)$ =αναμενόμενα ετήσια κόστη (εξαιρουμένου του κόστους αγοράς) που προκύπτουν εάν κάθε παραγγελία τοποθετείται όταν το σημείο παραγγελίας είναι r και περιλαμβάνει q μονάδες προϊόντος. Τότε θα είναι: $TC(q,r) =$ (αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης) + (αναμενόμενο ετήσιο κόστος παραγγελίας) + (αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης). Για τον καθορισμό του βέλτιστου σημείου παραγγελίας, υποθέτουμε ότι ο μέσος αριθμός των παραγγελιών που εκκρεμούν, είναι σχετικά μικρός σε σχέση με το μέσο επίπεδο του άμεσα διαθέσιμου αποθέματος. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η υπόθεση αυτή είναι λογική, διότι οι ελλείψεις μπορεί να προκύψουν μόνο σε ένα μικρό κομμάτι ενός κύκλου. Τότε από τη σχέση $I(t) = OHI(t) - B(t)$ προκύπτει ότι:

$$\text{Αναμενόμενη τιμή της I(t)} \cong \text{Αναμενόμενη τιμή της OHI}(t)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να προσεγγίσουμε το αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης. Γνωρίζουμε ότι $\text{αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = h(\text{αναμενόμενο άμεσα διαθέσιμο απόθεμα } OHI(t))$. Από την προηγούμενη σχέση θα είναι:

$\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης} = h(\text{αναμενόμενο καθαρό απόθεμα } I(t).$

Η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$, θα ισούται με την αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγωγής. Από τη στιγμή που ο μέσος ρυθμός με τον οποίο προκύπτει η ζήτηση είναι σταθερός, είναι ασφαλές να πούμε ότι:

$$\begin{aligned}&\text{Αναμενόμενη τιμή της } I(t) \text{ κατά τη διάρκεια ενός κύκλου}\\ &\quad = \frac{1}{2}\left[(\text{Αναμενόμενη τιμή της } I(t) \text{ στην αρχή ενός κύκλου})\right.\\ &\quad \left. + (\text{Αναμενόμενη τιμή της } I(t) \text{ στο τέλος ενός κύκλου})\ \right]\end{aligned}$$

Στο τέλος ενός κύκλου (δηλαδή ακριβώς πριν την παραλαβή μιας παραγγελίας), το επίπεδο του αποθέματος θα ισοδυναμεί με το επίπεδο του αποθέματος στο σημείο παραγγελίας (r), μείον τη ζήτηση $\boldsymbol{X}$ κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Έτσι, η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ στο τέλος ενός κύκλου θα είναι $r - E(\boldsymbol{X})$**.** Στην αρχή ενός κύκλου, το επίπεδο του αποθέματος έχει αυξηθεί από την παραλαβή μιας παραγγελίας q μονάδων. Έτσι, η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ στην αρχή ενός κύκλου θα είναι $r - E(\boldsymbol{X}) + q$. Ως εκ τούτου θα είναι:

$$\text{Αναμενόμενη τιμή της κατά τη διάρκεια ενός κύκλου} = \tfrac{1}{2}(r - E(\boldsymbol{X}) + r - E(\boldsymbol{X}) + q) = \tfrac{q}{2} + r - E(\boldsymbol{X}).$$

Επομένως, το <u>αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης</u>$\cong h\left(\frac{q}{2} + r - E(\boldsymbol{X})\right)$.

Για να καθορίσουμε το αναμενόμενο ετήσιο κόστος λόγω ελλείψεων ή εξάντλησης του αποθέματος πρέπει να ορίσουμε την παρακάτω μεταβλητή:

$\mathbf{B}_r =$ τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τον αριθμό των ελλείψεων που προκύπτουν κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, εάν το σημείο παραγγελίας είναι r.

Θα είναι: $\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης αποθεμάτων} = (\text{Αναμενόμενο κόστος έλλειψης αποθεμάτων})(\text{Αναμενόμενος αριθμός κύκλων})$.

Εξ' ορισμού: $\text{Αναμενόμενο κόστος έλλειψης αποθεμάτων} = c_B E(\mathbf{B}_{\boldsymbol{r}})$

Από τη στιγμή που όλη η ζήτηση θα ικανοποιηθεί κάποια στιγμή κάθε χρόνο θα τοποθετούνται κατά μέσο όρο $\frac{E(\boldsymbol{D})}{q}$ παραγγελίες. Άρα το <u>αναμενόμενο ετήσιο κόστος έλλειψης</u> $= \frac{E(\boldsymbol{D}) c_B E(\mathbf{B}_{\boldsymbol{r}})}{q}$.

Τελευταίο, το <u>αναμενόμενο ετήσιο κόστος παραγγελίας</u>$= K\left(\frac{\text{αναμενόμενος \# παραγγελιών}}{\text{έτος}}\right) = \frac{KE(\boldsymbol{D})}{q}$.

Αθροίζοντας όλα τα επιμέρους κόστη έχουμε:

$$\boxed{TC(q,r) = h\left(\frac{q}{2} + r - E(\boldsymbol{X})\right) + \frac{E(\boldsymbol{D}) c_B E(\mathbf{B}_{\boldsymbol{r}})}{q} + \frac{KE(\boldsymbol{D})}{q}}$$

Για να βρούμε τις τιμές των q και r που ελαχιστοποιούν την παραπάνω σχέση, θα πρέπει να βρούμε τα q^* και r^* που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial q} = \frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial r} = 0$$

Δοθείσας μια τιμής q για την ποσότητα παραγγελίας, θα δείξουμε πως με χρήση της ανάλυσης οριακού κόστους μπορούμε να βρούμε ένα σημείο παραγγελίας r^* που να ελαχιστοποιεί την $TC(q,r)$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι το αναμενόμενο ετήσιο κόστος παραγγελίας είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής r. Έτσι, μπορούμε να επικεντρωθούμε στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των ετησίων κοστών αποθήκευσης και έλλειψης αποθεμάτων. Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση για την ανάλυση οριακού κόστους που κάναμε και σε προηγούμενη ενότητα, αυξάνουμε το σημείο παραγγελίας από r σε $r + \Delta$ (για Δ μικρό). Τότε, το αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης θα αυξηθεί κατά:

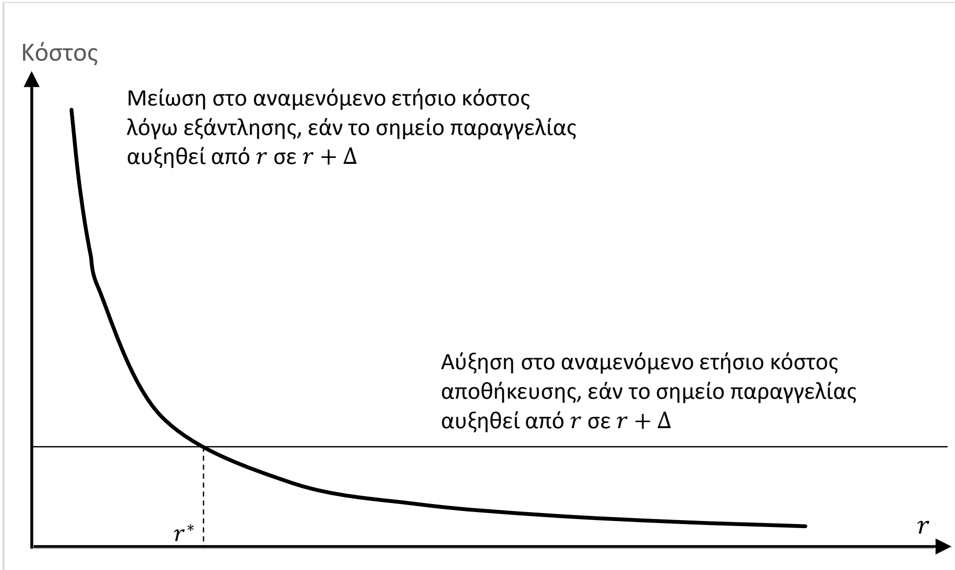
$$h\left(\frac{q}{2} + r + \Delta - E(\boldsymbol{X})\right) - h\left(\frac{q}{2} + r - E(\boldsymbol{X})\right) = h\Delta$$

αυξάνοντας το σημείο παραγγελίας από r σε $r + \Delta$, το αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης θα ελαττωθεί, λόγω του ότι κατά τη διάρκεια οποιουδήποτε κύκλου στο οποίο η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι τουλάχιστον r, ο αριθμός των εξαντλήσεων κατά τη διάρκεια του κύκλου αυτού, θα ελαττωθεί κατά Δ μονάδες. Με άλλα λόγια, αυξάνοντας το σημείο παραγγελίας από r σε $r + \Delta$, ελαττώνεται το κόστος εξάντλησης κατά $c_B\Delta$ για ένα κομμάτι $P(\boldsymbol{X} \geq r)$ όλων των κύκλων. Εφόσον υπάρχουν, κατά μέσο όρο, $\frac{E(\boldsymbol{D})}{q}$ κύκλοι ανά έτος, αυξάνοντας το σημείο παραγγελίας από r σε $r + \Delta$ θα οδηγηθούμε σε μείωση του αναμενόμενου ετήσιου κόστους εξάντλησης κατά

$$\frac{\Delta E(\boldsymbol{D}) c_B P(\boldsymbol{X} \geq r)}{q}$$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το r μεγαλώνει, το $P(\boldsymbol{X} \geq r)$ ελαττώνεται, επομένως μπορούμε να δημιουργήσουμε το διάγραμμα 10.

Διάγραμμα 10: Η «χρυσή τομή» ανάμεσα στο κόστος αποθήκευσης και το κόστος εξάντλησης αποθεμάτων



Έστω ότι r^* είναι η τιμή της μεταβλητής r για την οποία το οριακό κέρδος ισοδυναμεί με το οριακό κόστος, ή ισοδύναμα

$$\frac{\Delta E(\boldsymbol{D})c_B P(\boldsymbol{X} \geq r^*)}{q} = h\Delta$$

$$P(\boldsymbol{X} \geq r^*) = \frac{hq}{E(\boldsymbol{D})c_B}$$

Υποθέτουμε ότι $r < r^*$. Τότε το διάγραμμα 10 δείχνει ότι εάν αυξήσουμε το σημείο παραγγελίας από r σε r^*, μπορούμε να γλυτώσουμε περισσότερα χρήματα σε κόστος εξάντλησης, από όσα θα χάσουμε σε κόστος αποθήκευσης. Στην περίπτωση που $r > r^*$, από το διάγραμμα 10 φαίνεται ότι ελαττώνοντας το σημείο παραγγελίας από r σε r^*, γλυτώνουμε περισσότερα χρήματα σε κόστος αποθήκευσης, από όσα χάνουμε λόγω αυξημένου κόστους εξάντλησης. Έτσι, η τιμή r^*, πράγματι βρίσκει μια χρυσή τομή ανάμεσα στο κόστος αποθήκευσης και το κόστος λόγω εξάντλησης του αποθέματος. Συνοψίζοντας, εάν υποθέσουμε ότι η ποσότητα παραγγελίας μπορεί να προσεγγιστεί από την ποσότητα $EOQ = \sqrt{\frac{2KE(\boldsymbol{D})}{h}}$, τότε προκύπτουν οι παρακάτω βέλτιστες τιμές για την ποσότητα παραγγελίας q^* και το σημείο παραγγελίας r^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KE(\boldsymbol{D})}{h}} \tag{8}$$

$$P(\boldsymbol{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{E(\boldsymbol{D})c_B} \tag{9}$$

Σε περίπτωση που $\frac{hq^*}{E(\boldsymbol{D})c_B} > 1$, τότε η σχέση (8) δεν έχει λύση και το κόστος αποθήκευσης είναι απαγορευτικά υψηλό σε σχέση με το κόστος εξάντλησης του αποθέματος. Είναι ενδεδειγμένο να οριστεί το σημείο παραγγελίας στο μικρότερο επιτρεπτό όριο. Το ίδιο θα πρέπει να γίνει και σε περίπτωση που η σχέση (8) δώσει αρνητική τιμή για την μεταβλητή r^*.

5.1.2.1 Εφαρμογή

Κάθε χρόνο, το κατάστημα υπολογιστών Top Systems πουλάει κατά μέσο όρο 1000 κουτιά με δίσκους dvd. Η ετήσια ζήτηση είναι κανονικά κατανεμημένη με τυπική απόκλιση 40.8 κουτιά. Το κατάστημα δίνει τις παραγγελίες του σε έναν τοπικό προμηθευτή. Κάθε παραγγελία παραλαμβάνεται 2 εβδομάδες μετά την τοποθέτησή της. Το κόστος τοποθέτησης κάθε παραγγελίας είναι 50€ και το ετήσιο κόστος αποθήκευσης ενός κουτιού με δίσκους στο απόθεμα, είναι 10€. Το ανά μονάδα κόστος εξάντλησης (λόγω απώλειας της καλής θέλησης των καταναλωτών και του κόστους τοποθέτησης ειδικής παραγγελίας για την ικανοποίηση των ελλείψεων) υπολογίζεται να είναι 20€. Το κατάστημα θέλει να πιστεύει ότι η υπερβάλλουσα ζήτηση μπορεί να εκκρεμεί.

Θα υπολογίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας EOQ, το σημείο παραγγελίας, το απόθεμα ασφαλείας, καθώς και την πιθανότητα να προκύψει εξάντληση του αποθέματος κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης.

Αρχικά θα υπολογίσουμε την ποσότητα EOQ. Εφόσον $h = 10€$ ανά κουτί/έτος, $K = 50€$ και $E(\boldsymbol{D}) = 1000$ βρίσκουμε ότι:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(50)(1000)}{10} = 100}$$

Θα αντικαταστήσουμε την ποσότητα $q^* = 100$ στη σχέση (9) για να καθορίσουμε το σημείο παραγγελίας. Για να το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να καθορίσουμε την κατανομή πιθανότητας της μεταβλητής $\mathbf{X}$, που είναι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης. Εφόσον είναι $L = 2$ εβδομάδες, η $\mathbf{X}$ θα είναι κανονικά κατανεμημένη με:

$E\ (\mathbf{X}) = \frac{E(\boldsymbol{D})}{26} = \frac{1000}{26} = 38.46$ και $\sigma_{\boldsymbol{X}} = \frac{\sigma_{\boldsymbol{D}}}{\sqrt{26}} = \frac{40.8}{\sqrt{26}} = 8$

Από τη στιγμή που $c_B = 20€$, η σχέση (9) αποφέρει:

$$P(\boldsymbol{X} \geq r) = \frac{10(100)}{20(1000)} = 0.05$$

Κάνοντας χρήση της συνάρτησης NORMINV του Excel καταλήγουμε στο ότι:

$$= \mathrm{NORMINV}(0.95{,}38.46{,}8) = 51.62$$

Το απόθεμα ασφαλείας θα είναι $r - E(\mathbf{X}) = 51.62 - 38.46 = 13.16$.

5.1.3 Καθορισμός του σημείο παραγγελίας r χωρίς εκκρεμότητες

Στην ενότητα αυτή θα υποθέσουμε ότι οποιαδήποτε εξάντληση στο απόθεμα οδηγεί σε χαμένες πωλήσεις και άρα θα προκύπτει ένα κόστος εξάντλησης c_{LS} € για κάθε χαμένη πώληση. Όπως και στην περίπτωση όπου επιτρέπονται εκκρεμότητες στις παραγγελίες, θα υποθέσουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας μπορεί προσεγγιστεί επαρκώς από την EOQ και θα προσπαθήσουμε να καθορίσουμε το βέλτιστο σημείο παραγγελίας r^* με χρήση της ανάλυσης οριακού κόστους. Οι βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας και σημείου παραγγελίας στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται εκκρεμότητες είναι:

$$q^* = \sqrt{\frac{2KE(\boldsymbol{D})}{h}}$$

$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(\boldsymbol{D})} \tag{10}$$

Το αναμενόμενο απόθεμα στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται εκκρεμότητες θα ισοδυναμεί με το αναμενόμενο απόθεμα στην περίπτωση που επιτρέπονται εκκρεμότητες + τον αναμενόμενο αριθμό ελλείψεων που προκύπτουν σε κάθε κύκλο παραγωγής. Ο λόγος είναι, ότι στην περίπτωση των χαμένων πωλήσεων, κατά μέσο όρο, θα ικανοποιηθούν λιγότερες παραγγελίες από το απόθεμα, αυξάνοντας έτσι το μέσο επίπεδο του αποθέματος κατά μια ποσότητα που ισοδυναμεί με τον αναμενόμενο αριθμό ελλείψεων ανά κύκλο παραγωγής. Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (10) είναι μικρότερο από το δεξί μέλος της σχέσης (9). Έτσι, η υπόθεση των χαμένων πωλήσεων θα έχει ως συνέπεια να υπάρχει μικρότερη πιθανότητα εξάντλησης του αποθέματος, μεγαλύτερο σημείο παραγγελίας και απόθεμα ασφαλείας, από την υπόθεση όπου επιτρέπονται εκκρεμότητες.

5.1.4 Πολιτικές συνεχούς ανανέωσης (r, q)

Μια πολιτική συνεχούς ανανέωσης του αποθέματος, κατά την οποία τοποθετείται μια παραγγελία q μονάδων κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος φτάνει το σημείο παραγγελίας r, ονομάζεται συχνά **πολιτική** $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q})$. Μια εναλλακτική ονομασία είναι πολιτική two-bin, διότι μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί με τη χρήση δύο αποθηκών. Για παράδειγμα, για να εφαρμόσουμε μια πολιτική (30,500), καλύπτουμε τις παραγγελίες από την αποθήκη 1, για όσο διάστημα η αποθήκη 1 έχει απόθεμα. Στη συνέχεια, μόλις η αποθήκη 1 αδειάσει, γνωρίζουμε έχουμε φτάσει το σημείο παραγγελίας $r = 30$ και έτσι τοποθετούμε μια παραγγελία για $q = 500$ μονάδες προϊόντος. Όταν η παραγγελία φτάσει, τοποθετούμε 30 μονάδες στην αποθήκη 2 και τις υπόλοιπες στην αποθήκη 1. Έτσι, κάθε φορά που η αποθήκη 1 αδειάζει, γνωρίζουμε ότι το σημείο παραγγελίας έχει επιτευχθεί.

5.1.5 Πολιτικές συνεχούς ανανέωσης (s, S)

Στην αναζήτησή μας για την βέλτιστη (r, q) πολιτική, υποθέσαμε ότι μια παραγγελία πρέπει να τοποθετείται κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος φτάσει στο σημείο παραγγελίας r. Χρησιμοποιήσαμε αυτή την υπόθεση για να υπολογίσουμε το αναμενόμενο επίπεδο του αποθέματος στην αρχή και στο τέλος ενός κύκλου παραγωγής. Έστω ότι η ζήτηση μπορεί να προκύψει μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή για περισσότερες από μια, μονάδες προϊόντος. Το αποτέλεσμα θα είναι να δοθεί εντολή για τοποθέτηση παραγγελίας όταν το επίπεδο του αποθέματος είναι μικρότερο από r και έτσι οι υπολογισμοί μας για το αναμενόμενο επίπεδο στην αρχή και το τέλος ενός κύκλου δεν θα είναι σωστοί. Για παράδειγμα, έστω ότι $r = 30$ και το τρέχον επίπεδο του αποθέματος είναι 35. Τότε, εάν υπάρξει ζήτηση για 10 μονάδες, θα τοποθετηθεί στη συνέχεια μια παραγγελία, ενώ το επίπεδο του αποθέματος θα είναι 25. Βλέπουμε, λοιπόν ότι είναι πιθανό, το επίπεδο του αποθέματος να πέσει κάτω από το σημείο παραγγελίας.

Το πρόβλημα αυτό δεν θα μπορούσε να συμβεί αν η ζήτηση πρόκυπτε πάντα για μια μονάδα προϊόντος. Αυτό όμως δεν είναι πάντα ρεαλιστικό. Έτσι, εάν η ζήτηση μπορεί να προκύψει κάποια χρονική στιγμή για μεγάλες ποσότητες, τότε η πολιτική (r, q) δεν επιφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα στην ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου ετήσιου κόστους. Στις περιπτώσεις αυτές, έχει δειχθεί ότι μια πολιτική (s, S) είναι οι βέλτιστη. Η εφαρμογή της συγκεκριμένης πολιτικής προβλέπει τοποθέτηση παραγγελίας κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος είναι μικρότερο ή ίσο από s. Το μέγεθος της παραγγελίας είναι τόσο, ώστε να επαναφέρει το επίπεδο στις S μονάδες (υποθέτοντας ότι ο χρόνος αναμονής είναι μηδέν). Για παράδειγμα, εάν εφαρμόζαμε μια πολιτική (5,40) και το επίπεδο του αποθέματος έπεφτε ξαφνικά από 7 σε 3, τότε ακαριαία θα τοποθετούσαμε μια παραγγελία για $40 - 3 = 37$ μονάδες. Ο ακριβής υπολογισμός της βέλτιστης (s, S) πολιτικής είναι ιδιαίτερα δύσκολος. Εντούτοις, εάν αγνοήσουμε την περίπτωση του να πέσει το επίπεδο του αποθέματος κάτω από το σημείο παραγγελίας, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την βέλτιστη (s, S) πολιτική με τον εξής τρόπο: θέτουμε την ποσότητα $S - s$ ίση με την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας q^*. Στη συνέχεια θέτουμε την μεταβλητή s ίση με το σημείο παραγγελίας r που βρήκαμε από τις σχέσεις (9) ή (10). Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι $S = r + q$. Έτσι, για την εφαρμογή της ενότητας 5.1.2.1, θα θέσουμε $s = 51.62$ και $S = 51.62 + 100 = 151.62$ και θα εφαρμόσουμε μια (51.62 ,151.62) πολιτική.

Το μοντέλο EOQ με αβέβαιη ζήτηση: η προσέγγιση του επιπέδου εξυπηρέτησης για τον καθορισμό του επιπέδου του αποθέματος ασφαλείας

Όπως είδαμε και σε προηγούμενη ενότητα, τις περισσότερες φορές είναι αρκετά δύσκολο να καθοριστεί με ακρίβεια το κόστος που προκύπτει όταν μια εταιρία έχει έλλειψη μιας μονάδας προϊόντος. Για το λόγο αυτό, οι υπεύθυνοι συχνά, αποφασίζουν να ελέγξουν τις ελλείψεις, ικανοποιώντας ένα προκαθορισμένο επίπεδο εξυπηρέτησης. Το επίπεδο εξυπηρέτησης μπορεί να καθοριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1 (Service Level Measure 1 - SLM_1), το αναμενόμενο κομμάτι της ζήτησης που ικανοποιείται στην ώρα του (συνήθως θα εκφράζεται σαν ποσοστό).
- Περίπτωση 2 (Service Level Measure 2 - SLM_2), ο αναμενόμενος αριθμός κύκλων παραγγελιών ανά έτος, κατά τη διάρκεια των οποίων προκύπτει εξάντληση του αποθέματος ενός προϊόντος.

Σε όλη την ενότητα θα θεωρήσουμε ότι όλες οι ελλείψεις ικανοποιούνται στην επόμενη παραγγελία. Η ακόλουθη εφαρμογή επεξηγεί την έννοια των δυο επιπέδων εξυπηρέτησης.

5.1.6 Εφαρμογή στο μοντέλο EOQ με αβέβαιη ζήτηση

Ας υποθέσουμε ότι η ετήσια ζήτηση ενός προϊόντος σε μια εταιρία είναι 1000 μονάδες και η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας EOQ είναι 100 μονάδες. Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι τυχαία και περιγράφεται από την κατανομή πιθανότητας του πίνακα 9. Για σημείο παραγγελίας 30 μονάδων, να καθοριστούν τα επίπεδα εξυπηρέτησης SLM_1 και SLM_2.

Πίνακας 9: Η συνάρτηση πιθανότητας για τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης

Ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης	**Πιθανότητα**
20	1/5
30	1/5
40	1/5
50	1/5
60	1/5

Η αναμενόμενη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι $\frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{5}(40) + \frac{1}{5}(50) + \frac{1}{5}(60) = 40$ μονάδες. Έχοντας ορίσει το σημείο παραγγελίας στις 30 μονάδες, θα δοθεί εντολή παραγγελίας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου, τη στιγμή που το επίπεδο του αποθέματος θα πέσει στις 30 μονάδες. Εάν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι 20 ή 30 μονάδες, τότε η εταιρία δεν θα αντιμετωπίσει ελλείψεις. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας, στον οποίο η ζήτηση στη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι 40, θα προκύψει μια έλλειψη 10 μονάδων. Αντίστοιχα εάν η ζήτηση είναι 50, θα προκύψει έλλειψη 20 μονάδων και στην περίπτωση που η ζήτηση είναι 60 μονάδες, θα προκύψει έλλειψη 30 μονάδων. Ως εκ τούτου, ο αναμενόμενος αριθμός μονάδων έλλειψης κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγωγής θα είναι: $\frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(10) + \frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) = 12$ μονάδες. Εφόσον η EOQ είναι 100 μονάδες και όλη η ζήτηση πρέπει να ικανοποιηθεί, ο μέσος αριθμός παραγγελιών που τοποθετούνται κάθε έτος θα είναι $\frac{E(\boldsymbol{D})}{q} = \frac{1000}{100} = 10$. Τότε, ο μέσος αριθμός ελλείψεων που θα προκύψουν κατά τη διάρκεια ενός έτους θα είναι $10(12) = 120$ μονάδες. Άρα, κάθε χρόνο, κατά μέσο όρο, η ζήτηση $1000 - 120 = 880$ μονάδων του προϊόντος ικανοποιείται στην ώρα της. Στην περίπτωση αυτή το επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_1 θα είναι $SLM_1 = \frac{880}{1000} = 0.88$ ή 88%. Αυτό σημαίνει ότι παρότι το σημείο παραγγελίας είναι μικρότερο από τη μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, είναι δυνατόν να προκύψει ένα σχετικά υψηλό επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_1. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι η εξάντληση του αποθέματος μπορεί να συμβεί μόνο κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, και ο χρόνος αυτός είναι συνήθως ένα μικρό κομμάτι της διάρκειας του κάθε κύκλου παραγγελίας.

Θα καθορίσουμε τώρα το επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_2. Έχοντας ορίσει το σημείο παραγγελίας στις 30 μονάδες παρατηρούμε ότι η εξάντληση του προϊόντος θα προκύψει σε οποιονδήποτε κύκλο παραγγελίας, όπου η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης θα ξεπεράσει τις 30 μονάδες. Επομένως, η πιθανότητας εξάντλησης του προϊόντος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου είναι: $P(\mathbf{X} = 40) + P(\mathbf{X} = 50) + P(\mathbf{X} = 60) = \frac{3}{5}$. Από τη στιγμή που κατά μέσο όρο δημιουργούνται 10 κύκλοι παραγγελίας ανά έτος, ο αναμενόμενος αριθμός κύκλων που θα οδηγήσουν σε έλλειψη θα είναι $10\left(\frac{3}{5}\right) = 6$ κύκλοι ανά έτος. Επομένως, το σημείο παραγγελίας 30 μονάδων, θα οδηγήσει σε επίπεδο εξυπηρέτησης $SLM_2 = 6$.

5.1.7 Καθορισμός του σημείο παραγγελίας και του αποθέματος ασφαλείας για το SLM_1

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε βρει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_1. Πρέπει στη συνέχεια να καθορίσουμε το σημείο παραγγελίας που θα μας παρέχει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης. Υποθέτουμε ότι η ποσότητα παραγγελίας είναι q και το σημείο παραγγελίας είναι r. Από την ενότητα 5.1.2 έχουμε ότι:

$$\text{Αναμενόμενος αριθμός ελλείψεων κατά τη διάρκεια ενός κύκλου} = E(\boldsymbol{B}_r)$$

$$\text{Αναμενόμενος αριθμός ετησίων ελλείψεων} = \frac{E(\boldsymbol{B}_r)E(\boldsymbol{D})}{q}$$

όπου $E(\boldsymbol{D})$ είναι η μέση ετήσια ζήτηση. Ορίζουμε ως SLM_1 να είναι το ποσοστό της ζήτησης που ικανοποιείται στην ώρα της. Τότε για δοθείσες τιμές της q και της r έχουμε:

$$1 - SLM_1 = \text{Αναμενόμενες ελλείψεις ανά έτος} = \frac{E(\boldsymbol{B}_r)E(\boldsymbol{D})}{qE(\boldsymbol{D})} = \frac{E(\boldsymbol{B}_r)}{q} \qquad (11)$$

Από τη σχέση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο παραγγελίας που θα αποφέρει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης. Υποθέτουμε ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή $E(\mathbf{X})$ και τυπική απόκλιση σ_X. Για να κάνουμε χρήση της σχέσης, χρειάζεται να υπολογίσουμε την μεταβλητή $E(\boldsymbol{B}_r)$. Εάν η $\mathbf{X}$ είναι κανονικά κατανεμημένη, πρέπει να γνωρίζουμε την συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $NL(y)$. Ουσιαστικά η $NL(y)$ καθορίζεται από το γεγονός ότι η ποσότητα $\sigma_{\boldsymbol{X}}NL(y)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός ελλείψεων που θα προκύψουν κατά τη διάρκεια ενός χρόνου αναπλήρωσης εάν

1. η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή $E(\mathbf{X})$ και τυπική απόκλιση σ_X και
2. το σημείο παραγγελίας είναι $E(\mathbf{X}) + y\sigma_{\boldsymbol{X}}$.

Με πιο απλά λόγια, εάν διατηρήσουμε y τυπικές αποκλίσεις (σαν μονάδα μέτρησης της ζήτησης) σαν απόθεμα ασφαλείας, τότε η ποσότητα $\sigma_{\boldsymbol{X}} NL(y)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός ελλείψεων που θα προκύψουν κατά τη διάρκεια ενός χρόνου αναπλήρωσης.

Η τυποποιημένη κανονική κατανομή ορίζεται ως

$$NL(y) = \int_{y}^{\infty} (t-y)\varphi(t)dt = \int_{y}^{\infty} t\,\varphi(t)dt - y\big(1-\Phi(y)\big) = \varphi(y) - y\big(1-\Phi(y)\big).$$

όπου $\varphi(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και είναι $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\exp(-0.5y^2)$. Εάν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι κανονικά κατανεμημένη τότε είναι $E(\mathbf{B}_r) = \sigma_{\boldsymbol{X}} NL\left(\frac{r-E(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\boldsymbol{X}}}\right)$. Θα κατασκευάσουμε τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής με χρήση του Excel.

- Δημιουργούμε μια στήλη A με τιμές για τη μεταβλητή y, ξεκινώντας από 0 και αυξάνοντας κατά 0.01.
- Δημιουργούμε μια στήλη B με την $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\exp(-0.5y^2)$. Ο τύπος στο Excel είναι =(1/SQRT(2*PI())*EXP(-0,5*A2^2)).
- Δημιουργούμε μια στήλη C με τη συνάρτηση $NL(y)$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης NORM.S.DIST. Ο τύπος είναι =B2-A2*(1-NORM.S.DIST(A2;TRUE)).

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 10: Ο πίνακας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

y	ϕ(t)	NL(y)	y	ϕ(t)	NL(y)
0	0,39894228	0,3989	0,29	0,382515	0,2706
0,01	0,398922334	0,3940	0,3	0,381388	0,2668
0,02	0,3988625	0,3890	0,31	0,380226	0,2630
0,03	0,398762797	0,3841	0,32	0,379031	0,2592

0,04	0,398623254	0,3793	0,33	0,377801	0,2555
0,05	0,398443914	0,3744	0,34	0,376537	0,2518
0,06	0,39822483	0,3697	0,35	0,37524	0,2481
0,07	0,397966068	0,3649	0,36	0,373911	0,2445
0,08	0,397667706	0,3602	0,37	0,372548	0,2409
0,09	0,397329832	0,3556	0,38	0,371154	0,2374
0,1	0,396952547	0,3509	0,39	0,369728	0,2339
0,11	0,396535966	0,3464	0,4	0,36827	0,2304
0,12	0,396080212	0,3418	0,41	0,366782	0,2270
0,13	0,395585421	0,3373	0,42	0,365263	0,2236
0,14	0,395051741	0,3328	0,43	0,363714	0,2203
0,15	0,394479331	0,3284	0,44	0,362135	0,2169
0,16	0,393868362	0,3240	0,45	0,360527	0,2137
0,17	0,393219015	0,3197	0,46	0,35889	0,2104
0,18	0,392531483	0,3154	0,47	0,357225	0,2072
0,19	0,391805971	0,3111	0,48	0,355533	0,2040
0,2	0,391042694	0,3069	0,49	0,353812	0,2009
0,21	0,390241878	0,3027	0,5	0,352065	0,1978
0,22	0,389403759	0,2986	0,51	0,350292	0,1947
0,23	0,388528585	0,2944	0,52	0,348493	0,1917
0,24	0,387616615	0,2904	0,53	0,346668	0,1887
0,25	0,386668117	0,2863	0,54	0,344818	0,1857
0,26	0,385683369	0,2824	0,55	0,342944	0,1828
0,27	0,384662661	0,2784	0,56	0,341046	0,1799
0,28	0,383606292	0,2745	0,57	0,339124	0,1771

Εφόσον αυξάνοντας το σημείο παραγγελίας οδηγούμαστε σε λιγότερες ελλείψεις, θα περιμέναμε η συνάρτηση $NL(y)$ να είναι φθίνουσα συνάρτηση του y. Πράγματι η διαίσθηση αυτή επιβεβαιώνεται. Για παράδειγμα η τιμή $NL(0) = 0.3989$ σημαίνει ότι εάν το σημείο παραγγελίας ισοδυναμεί με τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης και η τυπική απόκλιση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι σ_X, τότε θα προκύψουν κατά μέσο όρο $0.3989\sigma_X$ ελλείψεις, κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης. Με την ίδια λογική, εφόσον $NL(1) = 0.0833$, θα προκύψουν κατά μέσο όρο $0.0833\sigma_X$ ελλείψεις, κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης. Σημειώνουμε ότι ο πίνακας 10 έγινε μόνο για μη αρνητικές τιμές, διότι για $y \leq 0$ ισχύει ότι $NL(y) = NL(-y) - y$. Παραδείγματος χάριν $NL(-1)= NL(1) + 1 = 1.0833$.

Υποθέτοντας ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης είναι κανονική, προσδιορίζουμε το σημείο παραγγελίας r που θα επιφέρει το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_1.Ένα σημείο παραγγελίας r μας οδηγεί στην διατήρηση

$$y = \frac{r - E(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\boldsymbol{X}}}$$

τυπικών αποκλίσεων του αποθέματος ασφαλείας. Από τον ορισμό της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει ότι κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, ένα σημείο παραγγελίας r θα επιφέρει έναν αναμενόμενο αριθμό ελλείψεων $E(\mathbf{B}_{\boldsymbol{r}})$ που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E(\mathbf{B}_{\boldsymbol{r}}) = \sigma_{\boldsymbol{X}} NL\left(\frac{r - E(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\boldsymbol{X}}}\right) \tag{12}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (12) στη σχέση (11) προκύπτει το σημείο παραγγελίας για την SLM_1 με κανονικά κατανεμημένη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης:

$$1 - SLM_1 = \frac{\sigma_{\boldsymbol{X}} NL\left(\frac{r - E(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\boldsymbol{X}}}\right)}{q}$$

$$NL\left(\frac{r - E(\boldsymbol{X})}{\sigma_{\boldsymbol{X}}}\right) = \frac{q(1 - SLM_1)}{\sigma_{\boldsymbol{X}}} \tag{13}$$

Όλες οι ποσότητες στη σχέση (13) είναι γνωστές, εκτός από την r. Έτσι, από τη σχέση (13) και τον πίνακα 10 μπορεί να προσδιοριστεί το σημείο παραγγελίας που σχετίζεται με ένα δοθέν επίπεδο του επιπέδου εξυπηρέτησης SLM_1.

5.1.7.1 Εφαρμογή

Η εταιρία Αντωνόπουλος πουλάει κατά μέσο όρο 1000 ηλεκτρικά πολυμίξερ κάθε χρόνο. Κάθε παραγγελία που τοποθετείται από την εταιρία έχει κόστος 50€. Ο χρόνος αναπλήρωσης είναι ένας μήνας. Το κόστος αποθήκευσης ενός πολυμίξερ στο απόθεμα, για ένα έτος, είναι 10€. Η ετήσια ζήτηση είναι κανονικά κατανεμημένη, με τυπική απόκλιση 69.28. Θα προσδιορίσουμε το σημείο παραγγελίας για κάθε μια από τις παρακάτω τιμές του επιπέδου εξυπηρέτησης SLM_1: 80%, 90%, 95%, 99%, 99.9%.

Θα είναι $E(\boldsymbol{D}) = 1000$, $K = 50€$ και $h = 10€$, επομένως

$$q^* = \left[\frac{2(50)(1000)}{10}\right]^{\frac{1}{2}} = 100$$

Επίσης είναι,

$$E(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{12}\right)(1000) = 83.33 \qquad \text{και} \qquad \sigma_{\boldsymbol{X}} = \frac{69.28}{\sqrt{12}} = 20$$

Από τη σχέση (13), το σημείο παραγγελίας για την τιμή 80% πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0.80)}{20} = 1$$

Από τον πίνακα 10, παρατηρούμε ότι η τιμή 1 ξεπερνάει όλες τις καταγεγραμμένες τιμές της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Έτσι, η τιμή του σημείου παραγγελίας πρέπει να είναι $\frac{r-83.33}{20}$ ένας αρνητικός αριθμός. Με δοκιμή και σφάλμα βρίσκουμε ότι $NL(-0.9) = NL(0.9) + 0.9 = 1.004$. Επομένως,

$$\frac{r - 83.33}{20} = -0.9$$

$$r = 83.33 - 20(0.9) = 65.33$$

Για $SLM_1 = 0.90$ έχουμε ότι:

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0.90)}{20} = 0.5$$

Και πάλι η τιμή 0.5 ξεπερνάει όλες τις καταγεγραμμένες τιμές του πίνακα, επομένως η σχέση $\frac{r-83.33}{20}$ θα πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός. Βρίσκουμε ότι $NL(-0.19) = NL(0.19) + 0.19 = 0.5011$. Επομένως, το σημείο παραγγελίας για ένα επίπεδο εξυπηρέτησης 90% θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{r - 83.33}{20} = -0.19$$

$$r = 83.33 - 20(0.19) = 79.53$$

Άρα ένα επίπεδο εξυπηρέτησης 90% μπορεί να επιτευχθεί από ένα σημείο παραγγελίας, το οποίο είναι λιγότερο από την αναμενόμενη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης.

Για την επίτευξη ενός επιπέδου εξυπηρέτησης της τάξης του 95%, το σημείο παραγγελίας θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$NL\left(\frac{r - 83.33}{20}\right) = \frac{100(1 - 0.95)}{20} = 0.25$$

Από τον πίνακα 10 βλέπουμε ότι $NL(0.34) = 0.2518$ άρα θα είναι

$$\frac{r - 83.33}{20} = 0.34$$

$$r = 83.33 + 20(0.34) = 90.13$$

Για την επίτευξη ενός επιπέδου εξυπηρέτησης της τάξης του 99%, το σημείο παραγγελίας θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$NL\left(\frac{r-83.33}{20}\right)=\frac{100(1-0.99)}{20}=0.05$$

Από τον πίνακα 10 βλέπουμε ότι $NL(1.25) = 0.0506$ άρα θα είναι

$$\frac{r-83.33}{20}=1.25$$

$$r = 83.33 + 20(1.25) = 108.33$$

Τέλος, για την επίτευξη ενός επιπέδου εξυπηρέτησης της τάξης του 99.9%, το σημείο παραγγελίας θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$NL\left(\frac{r-83.33}{20}\right)=\frac{100(1-0.999)}{20}=0.005$$

Από τον πίνακα 10 βλέπουμε ότι $NL(2.19) = 0.005$ άρα θα είναι

$$\frac{r-83.33}{20}=2.19$$

$$r = 83.33 + 20(2.19) = 127.13$$

Συνοπτικά, τα σημείο παραγγελίας για τις διάφορες διακυμάνσεις του επιπέδου εξυπηρέτησης SLM_1 φαίνονται στον πίνακα 11. Παρατηρούμε ότι για να πάμε από ένα επίπεδο εξυπηρέτησης της τάξης του 80% σε ένα της τάξης του 90%, θα πρέπει να αυξήσουμε το σημείο παραγγελίας κατά 14.20 μονάδες, ενώ για να πάμε από το 90% στο 99.9%, θα πρέπει να το αυξήσουμε κατά 47.60 μονάδες. Το συμπέρασμα είναι ότι για τα υψηλότερα επίπεδα εξυπηρέτησης απαιτείται πολύ μεγαλύτερη αύξηση του σημείου παραγγελίας προκειμένου να προκληθεί ανάλογη αύξηση στο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Πίνακας 11: Τα σημεία παραγγελίας για διάφορες τιμές του επιπέδου εξυπηρέτησης SLM_1

SLM_1	Σημείο παραγγελίας
80%	65.33

90%	79.53
95%	90.13
99%	108.33
99.9%	127.13

5.1.8 Καθορισμός του σημείο παραγγελίας και του αποθέματος ασφαλείας για το SLM_2

Ας υποθέσουμε ότι ο υπεύθυνος της διαχείρισης των αποθεμάτων σε μια εταιρία θέλει να κρατήσει επαρκές απόθεμα ασφαλείας, ώστε να διασφαλίσει ότι κατά μέσο όρο s_0 κύκλοι παραγωγής ανά έτος θα οδηγήσουν σε εξάντληση του αποθέματος. Δοθέντος ενός σημείου παραγγελίας r, ένα $P(\mathbf{X} > r)$ μέρος των κύκλων θα οδηγήσουν σε εξάντληση. Εφόσον κάθε χρόνο προκύπτουν $\frac{E(\boldsymbol{D})}{q}$ κύκλοι (υποθέτουμε ότι υπάρχουν εκκρεμότητες), τότε κατά μέσο όρο θα υπάρξουν $\frac{P(\mathbf{X}>r)\,E(\boldsymbol{D})}{q}$ κύκλοι ανά έτος που θα οδηγήσουν σε εξάντληση του αποθέματος. Έτσι, με βάση την ποσότητα s_0, το σημείο παραγγελίας είναι η μικρότερη τιμή της μεταβλητής r που ικανοποιεί τη σχέση:

$\frac{P(\mathbf{X}>r)\,E(\boldsymbol{D})}{q} \leq s_0$ ή ισοδύναμα $P(\mathbf{X} > r) \leq \frac{s_0 q}{E(\boldsymbol{D})}$

Εάν η $\mathbf{X}$ είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε $P(\mathbf{X} > r) = P(\mathbf{X} \geq r)$. Έτσι, βρίσκουμε το σημείο παραγγελίας r για το επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_2 για συνεχή ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{s_0 q}{E(\boldsymbol{D})} \quad (14)$$

και το σημείο παραγγελίας r για το επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_2 για διακριτή ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης,

$$P(\mathbf{X} > r) \leq \frac{s_0 q}{E(\boldsymbol{D})}$$

Για να απεικονίσουμε τον προσδιορισμό του σημείο παραγγελίας για το επίπεδο εξυπηρέτησης SLM_2, υποθέτουμε ότι η εταιρία Αντωνόπουλος θέλει να διασφαλίσει ότι θα εμφανιστούν κατά μέσο όρο, δύο εξαντλήσεις του αποθέματος κατά τη διάρκεια του χρόνου αναπλήρωσης, ανά έτος. Στην εφαρμογή της ενότητας 5.2.1 είχαμε δει ότι $\mathrm{EOQ} = 100$, $E(\boldsymbol{D}) = 1000$ μονάδες ανά έτος και $\mathbf{X}$ είναι $N(83.33{,}400)$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (14) προκύπτει ότι $P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{2(100)}{1000} = 0.2$. Θα υπολογίσουμε το σημείο παραγγελίας με την συνάρτηση NORMINV του Excel.

Είναι:

$$= \mathrm{NORMINV}(0{,}8; 83{,}33; 20) = 100.1624$$

Άρα $r = 100.16$. Το επίπεδο του αποθέματος ασφαλείας για το οποίο θα προκύψουν κατά μέσο όρο δυο εξαντλήσεις του αποθέματος ανά έτος, θα είναι $100.16 - E(\mathbf{X}) = 16.83$.

6 Η πολιτική περιοδικής ανανέωσης (R,S)

6.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε την πολιτική περιοδικής ανανέωσης (R,S). Πιο συγκεκριμένα, κάθε R μονάδες χρόνου (ας θεωρήσουμε έτη) επιθεωρούμε το επίπεδο του διαθέσιμου αποθέματος και τοποθετούμε μια παραγγελία για να επαναφέρουμε το επίπεδο στο ανώτατο επίπεδο που θα είναι S μονάδες. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιήσουμε μια πολιτική $(0.25, 100)$ θα πρέπει να επιθεωρούμε το επίπεδο του αποθέματος στο τέλος κάθε τριμήνου. Εάν υπάρχουν $i < 100$ διαθέσιμες μονάδες προϊόντος, θα τοποθετήσουμε μια παραγγελία για $100 - i$ μονάδες. Σε γενικές γραμμές μια πολιτική (R,S) θα επιφέρει υψηλότερα κόστη αποθήκευσης σε σχέση με μια πολιτική (r,q), αλλά είναι πιο βολική στη διαχείρισή της απ' ότι μια πολιτική συνεχούς ανανέωσης. Με μια πολιτική (R,S) μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα τις ακριβείς στιγμές που θα τοποθετούνται οι παραγγελίες. Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα συντονισμού των αναπληρώσεων. Για παράδειγμα, μια εταιρία θα μπορούσε να ορίσει $R = 1$ μήνα για όλα τα προϊόντα που παραγγέλνει από ένα συγκεκριμένο προμηθευτή και στη συνέχεια να ορίσει σαν μέρα παραγγελίας την πρώτη μέρα του κάθε μήνα.

6.2 Προσδιορισμός του διαστήματος επιθεώρησης R

Η πιο συχνή μέθοδος για τον καθορισμό του διαστήματος επιθεώρησης R είναι να το θέσουμε ίσο με την ποσότητα $\frac{EOQ}{E(\boldsymbol{D})}$. Ο λόγος είναι, ότι η ποσότητα αυτή οδηγεί σε αριθμό παραγγελιών ίσο, με ένα απλό μοντέλο EOQ. Από τη στιγμή όμως που για να τοποθετηθεί κάθε παραγγελία έχει προηγηθεί μια επιθεώρηση, θα πρέπει να ορίσουμε ένα επιπλέον κόστος επιθεώρησης ανά παραγγελία J. Ως εκ τούτου θα είναι:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(K+J)E(\boldsymbol{D})}{h}}$$

6.3 Προσδιορισμός του ανώτατου επιπέδου αποθεμάτων S

Υποθέτουμε τώρα ότι η τιμή της μεταβλητής R έχει καθοριστεί και επικεντρωνόμαστε στον προσδιορισμό της τιμής S που θα ελαχιστοποιήσει το αναμενόμενο ετήσιο κόστος. Θα θεωρήσουμε ότι όλες οι ελλείψεις εκκρεμούν και ικανοποιούνται στην επόμενη παραγγελία, και η ζήτηση είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, της οποίας η κατανομή πιθανότητας παραμένει αναλλοίωτη κατά τη διάρκεια του χρόνου. Τέλος, υποθέτουμε ότι το κόστος αγοράς κάθε μονάδας είναι σταθερό, επομένως το <u>ετήσιο κόστος αγοράς</u> δεν εξαρτάται από την επιλογή των μεταβλητών R και S. Ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

$R =$ το χρονικό διάστημα (σε έτη) ανάμεσα σε δύο επιθεωρήσεις του αποθέματος

$\boldsymbol{D} =$ η (τυχαία) ζήτηση κατά τη διάρκεια ενός έτους

$E(\boldsymbol{D}) =$ η μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια ενός έτους

$K =$ το κόστος τοποθέτησης μιας παραγγελίας

$J =$ το κόστος επιθεώρησης του επιπέδου του αποθέματος

$h =$ το κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας στο απόθεμα, για ένα έτος

$c_B =$ το κόστος εξάντλησης για κάθε μονάδα, στην περίπτωση που η ζήτηση εκκρεμεί (υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητο από τη χρονική διάρκεια που μεσολαβεί μέχρι να ικανοποιηθεί τελικά η παραγγελία)

$L =$ ο χρόνος αναπλήρωσης για κάθε παραγγελία(υποθέτουμε ότι είναι σταθερός)

$\boldsymbol{D}_{L+R} =$η (τυχαία) ζήτηση κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου μήκους $L + R$

$E(\boldsymbol{D}_{L+R}) =$ η μέση τιμή της $\boldsymbol{D}_{L+R}$

$\sigma_{\boldsymbol{D}_{L+R}} =$ η τυπική απόκλιση της $\boldsymbol{D}_{L+R}$

Δοθείσας μια τιμής της μεταβλητής R, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια τιμή της μεταβλητής S που να ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο ετήσιο κόστος. Ως αναμενόμενο ετήσιο κόστος ορίζουμε:

$$\begin{aligned}&(\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος αγοράς})\\&\quad+(\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος επιθεώρησης})\\&\quad+(\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος παραγγελίας})\\&\quad+(\text{Αναμενόμενο ετήισιο κόστος αποθήκευσης})\\&\quad+(\text{Αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης})\end{aligned}$$

.

Από τη στιγμή που κάθε χρόνο γίνονται $\frac{1}{R}$ επιθεωρήσεις, το ετήσιο κόστος επιθεώρησης θα είναι $\frac{J}{R}$. Κάθε φορά που θα τοποθετείται μια παραγγελία, το on-order επίπεδο του αποθέματος (δηλαδή του αποθέματος που δημιουργηθεί, όταν τοποθετηθεί η παραγγελία), θα είναι ίσο με S. Ο μόνος τρόπος για να μην τοποθετηθεί παραγγελία στο επόμενο σημείο επιθεώρησης είναι εάν $\boldsymbol{D}_{L+R}=0$. Από τη στιγμή, όμως, που η $\boldsymbol{D}_{L+R}$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, η περίπτωση $\boldsymbol{D}_{L+R}=0$ θα προκύψει με πιθανότητα μηδέν. Έτσι, είναι βέβαιο ότι θα τοποθετηθεί παραγγελία σε κάθε σημείο επιθεώρησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το ετήσιο κόστος παραγγελίας να είναι $\frac{K}{R}$. Παρατηρούμε ότι και το ετήσιο κόστος επιθεώρησης και το ετήσιο κόστος παραγγελίας, είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής S. Επομένως, η τιμή της μεταβλητής S που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο ετήσιο κόστος, θα είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης + το αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης.

Για να προσδιορίσουμε το αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης, αρκεί να βρούμε την αναμενόμενη τιμή του άμεσα διαθέσιμου αποθέματος κατά τη διάρκεια ενός κύκλου παραγωγής και στη συνέχεια να το πολλαπλασιάσουμε με h. Όπως και στην ενότητα 5.1, θα θεωρήσουμε ότι ο μέσος αριθμός των παραγγελιών που εκκρεμούν, είναι σχετικά μικρός, σε σχέση με το μέσο άμεσα διαθέσιμο επίπεδο του αποθέματος. Άρα θα είναι:

$$\text{Αναμενόμενη τιμή της } I(t) \cong \text{Αναμενόμενη τιμή της } OHI(t)$$

Τότε, η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ κατά τη διάρκεια ενός κύκλου $=$ $\frac{1}{2}$[(Αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ στην αρχή ενός κύκλου) + (Αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ στο τέλος ενός κύκλου)]. Ακριβώς πριν φτάσει μια παραγγελία, το μέγιστο on-order επίπεδο του αποθέματος (S) έχει ελαττωθεί κατά ένα μέσο $E(\boldsymbol{D}_{L+R})$**.** έτσι, η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ ακριβώς πριν φτάσει μια παραγγελία, θα είναι $S - E(\boldsymbol{D}_{L+R})$**.** Από τη στιγμή που κάθε χρόνο τοποθετούνται $\frac{1}{R}$ παραγγελίες και υπάρχει μια μέση ζήτηση για $E(\boldsymbol{D})$ μονάδες, το <u>μέσο μέγεθος μιας παραγγελίας</u> θα είναι $E(\boldsymbol{D})R$. Επομένως:

Αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ ακριβώς μόλις φτάνει μια παραγγελία $= S - E(\boldsymbol{D}_{L+R}) + E(\boldsymbol{D})R$.

Τότε, η αναμενόμενη τιμή της $I(t)$ κατά τη διάρκεια ενός κύκλου $= S - E(\boldsymbol{D}_{L+R}) + \frac{E(\boldsymbol{D})R}{2}$**.**

Ως εκ τούτου, το <u>αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης</u> θα είναι $h\left[S - E(\boldsymbol{D}_{L+R}) + \frac{E(\boldsymbol{D})R}{2}\right]$**.**

Από την έκφραση αυτή, συμπεραίνουμε ότι αυξάνοντας τη μεταβλητή S κατά Δ, θα οδηγηθούμε σε αύξηση του αναμενόμενο ετήσιου κόστους αποθήκευσης κατά $h\Delta$.

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στο πως μια αύξηση της μεταβλητής S κατά Δ, επηρεάζει το αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης. Ορίζουμε τις ελλείψεις που σχετίζονται με κάθε παραγγελία ως, τις ελλείψεις που προκύπτουν στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την παραλαβή μιας παραγγελίας, μέχρι την παραλαβή της επόμενης παραγγελίας. Για παράδειγμα, μια παραγγελία τοποθετείται τη χρονική στιγμή 0 και παραλαμβάνεται τη χρονική στιγμή L. Η επόμενη παραγγελία θα φτάσει τη χρονική στιγμή $R + L$. Έτσι, οι ελλείψεις που προκύπτουν μεταξύ L και $R + L$ σχετίζονται με την παραγγελία της χρονικής στιγμής 0. Από τη στιγμή που η επόμενη παραγγελία φτάνει τη χρονική στιγμή $R + L$ και η παραγγελία μας τη χρονική στιγμή 0 έφερε το on-order επίπεδο του αποθέματος στην τιμή S, οι ελλείψεις θα σχετίζονται με τη χρονική στιγμή 0 αν και μόνο αν η ζήτηση στο διάσημα 0 έως $R + L$ ξεπεράσει την τιμή S. Έτσι, εάν προκύψει έλλειψη, το μέγεθος της θα είναι ίσο με $\boldsymbol{D}_{L+R} - S$.

Είμαστε πλέον σε θέση να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση οριακού κόστους για να προσδιορίσουμε την τιμή S που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο ετήσιο κόστος (για δοθείσα τιμή της R). Αυξάνοντας την τιμή S σε $S + \Delta$, το αναμενόμενο ετήσιο κόστος αποθήκευσης αυξάνει κατά $h\Delta$. Η αύξηση της S σε $S + \Delta$ θα μειώσει τις ελλείψεις που σχετίζονται με την παραγγελία, εάν $\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S$. Έτσι, για ένα κομμάτι $P(\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S)$ όλων των παραγγελιών, η αύξηση τις τιμής S σε $S + \Delta$ θα οδηγήσει σε μείωση του κόστους έλλειψης κατά $c_B\Delta$. Εφόσον κάθε χρόνο τοποθετούνται $\frac{1}{R}$ παραγγελίες, το αναμενόμενο ετήσιο κόστος εξάντλησης θα μειωθεί κατά $\left(\frac{1}{R}\right) c_B \Delta\, P(\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S)$. Το συμπέρασμα της ανάλυσης οριακού κόστους είναι, ότι η τιμή S που ελαχιστοποιεί το άθροισμα του αναμενόμενου ετήσιου κόστους αποθήκευσης και εξάντλησης, θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$h\Delta = \left(\frac{1}{R}\right) c_B \Delta\, P(\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S)$$

ή

$$P(\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{c_B}$$

Ας υποθέσουμε ότι όλες οι ελλείψεις οδηγούν σε χαμένες πωλήσεις και για κάθε χαμένη πώληση προκύπτει ένα κόστος c_{LS}. Τότε, η τιμή S που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των ετησίων κοστών θα δίνεται από τη σχέση:

$$P(\boldsymbol{D}_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{Rh + c_{LS}}$$

7 ABC ανάλυση (Activity Based Costing analysis)

7.1 Παρουσίαση της μεθόδου

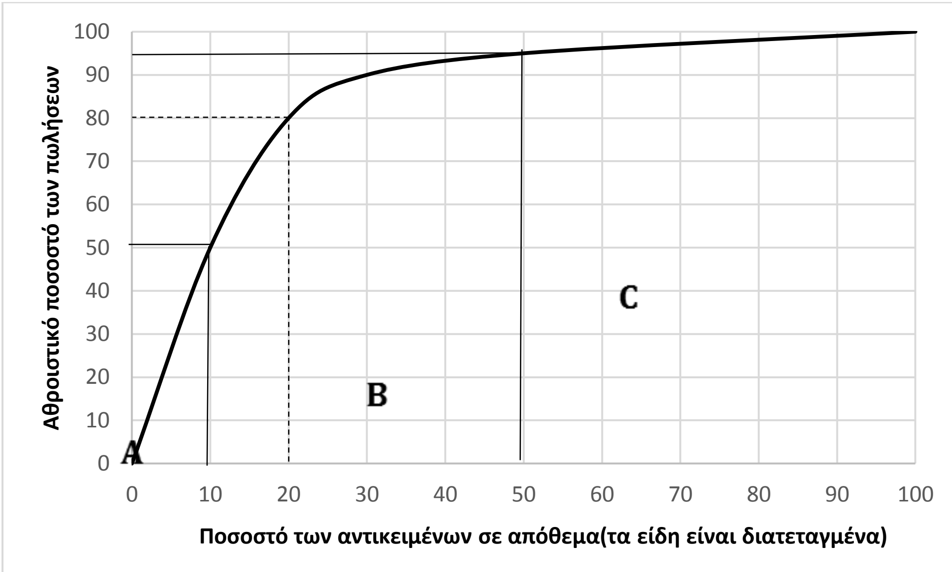
Σε κάθε επιχείρηση, το σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων μπορεί να περιλαμβάνει προϊόντα και είδη χαμηλής αλλά και υψηλής αξίας. Η διαφορετικότητα αυτή των προϊόντων επιβάλλει στο εκάστοτε σύστημα να αφιερώνει χρόνο και πόρους ανάλογα με την αξία τους και συναφές με το ρόλο που κατέχουν στη συνολική παραγωγική μονάδα της εταιρίας.

Η ανάλυση ABC, η οποία επινοήθηκε από την General Electric στη δεκαετία του 1950, βοηθάει την εταιρία να κατατάξει τα αντικείμενα που απαρτίζουν το υπάρχον απόθεμά της σε 3 κατηγορίες (A,B και C). Η κατάταξη αυτή, γίνεται ανάλογα με κάποιο μέτρο σημαντικότητας.

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι για μια εταιρία, δεν είναι όλοι οι τύποι προϊόντων, το ίδιο σημαντικοί. Σαν μέτρο σημαντικότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όγκο των πωλήσεων ή τη χρηματική αξία των πωλήσεων κ.λ.π.

Με βάση την αρχή του Pareto (επίσης γνωστή ως κανόνας 20%-80%), το 20% των σημαντικότερων προϊόντων είναι υπεύθυνο για το 80% περίπου της συνολικής αξίας των πωλήσεων. Αυτό το μικρό ποσοστό προϊόντων, που συνεισφέρει σε τόσο μεγάλο βαθμό στις ετήσιες πωλήσεις, θα καλείται κατηγορία A και θα έχει τη μεγαλύτερη βαρύτητα. Στη συνέχεια, πάντα με την ίδια αρχή, υπάρχει ένα 30% των αντικειμένων που συνεισφέρει σε ποσοστό 15% των ετησίων πωλήσεων και θα είναι η κατηγορία B. Τέλος, υπάρχει ένα 50% των αντικειμένων που συνεισφέρει μόνο σε 5% των πωλήσεων και θα αποτελεί την κατηγορία C.

Διάγραμμα 11: Παράδειγμα της ABC ανάλυσης



Στο διάγραμμα 11 φαίνεται μια τυπική ABC καμπύλη που έχει δημιουργηθεί από την κατάταξη των προϊόντων σύμφωνα με την αξία των πωλήσεών τους σε €, κατά φθίνουσα σειρά. Στη συνέχεια, έγινε ένα γράφημα των αθροιστικών πωλήσεων σε σχέση με τον αριθμό των διαφορετικών τύπων προϊόντων στο απόθεμα. Η μορφή οποιασδήποτε άλλης ABC καμπύλης θα είναι παρόμοια με εκείνη του διαγράμματος 11, επειδή τα προϊόντα έχουν διαταχτεί σύμφωνα με το μέτρο σημαντικότητας πριν τη δημιουργία των αθροιστικών πωλήσεων. Σε σπάνιες περιπτώσεις, όπου υπάρχουν πολλά αντικείμενα με τον ίδιο όγκο πωλήσεων σε €, η μορφή της καμπύλης μπορεί να είναι διαφορετική.

Στην προσπάθεια μιας εταιρίας να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, τα προϊόντα τύπου A πρέπει να τύχουν μέγιστης δυνατής φροντίδας, ανάλυσης και παρακολούθησης, καθώς είναι τα πιο σημαντικά για την εταιρία. Αντίστοιχα, τα προϊόντα τύπου B πρέπει να λάβουν μια φροντίδα, σε βαθμό ικανοποιητικό ώστε να εξακολουθούν να προσφέρουν το αντίστοιχο κέρδος, άλλα όχι το ίδιο μεγάλη με τα προϊόντα τύπου A. Τα προϊόντα τύπου C αντιστοιχούν σε πολλά διαφορετικά προϊόντα, αλλά κάθε προϊόν μεμονωμένο πετυχαίνει τόσο λίγες πωλήσεις, που δεν χρειάζεται να γίνεται ανάλυση του, παρά μόνο περιστασιακά. Στην πράξη, οι τεχνικές ελέγχου αποθεμάτων πρέπει να εστιάζουν στα προϊόντα τύπου Α, διότι κάθε βελτίωση σ' αυτά μπορεί να αποφέρει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος στην εταιρία.

7.2 Ο ορισμός του επιπέδου εξυπηρέτησης στην ABC ανάλυση

Από τη στιγμή που η μεγαλύτερη επένδυση σε αποθέματα θα γίνει σε προϊόντα τύπου Α, τα υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης θα έχουν ως αποτέλεσμα να προκύψουν μεγάλες επενδύσεις σε αποθέματα ασφαλείας. Ως εκ τούτου, οι Hax και Candea (1984) προτείνουν να οριστεί η τιμή της SLM_1 στο 80%-85% για προϊόντα τύπου Α. Ο αυστηρός έλεγχος της διαχείρισης των διαδικασιών παραγγελίας, είναι ζωτικής σημασίας για τα προϊόντα τύπου Α. Για κάθε προϊόν τύπου Α θα πρέπει να γίνεται ξεχωριστή πρόβλεψη της ζήτησής του. Επιπλέον, θα πρέπει να γίνεται κάθε δυνατή προσπάθεια για την μείωση του χρόνου αναπλήρωσης μέχρι την παραλαβή ή παραγωγή της κάθε παραγγελίας. Εάν ακολουθηθεί μια πολιτική (R, S), θα πρέπει το R να είναι μικρό, ίσως μια εβδομάδα. Αυτή η τακτική μας επιτρέπει να έχουμε έναν καλύτερο έλεγχο στο επίπεδο των αποθεμάτων. Παράμετροι όπως η εκτίμησης της ετήσιας μέσης ζήτησης, η διάρκεια του χρόνου αναμονής, η τυπική απόκλιση της ετήσιας ζήτησης, καθώς και τα κόστη λόγω έλλειψης, θα πρέπει να βρίσκονται υπό συχνή επίβλεψη.

Για τα προϊόντα τύπου Β, οι Hax και Candea (1984) προτείνουν να οριστεί η τιμή της SLM_1 στο 95%. Οι πολιτικές απογραφής για προϊόντα τύπου Β μπορούν σε γενικές γραμμές να ελέγχονται από υπολογιστές. Οι παράμετροι για τα προϊόντα τύπου Β θα πρέπει να επιβλέπονται λιγότερο συχνά απ' ότι οι αντίστοιχες παράμετροι στα προϊόντα τύπου Α.

Για τα προϊόντα τύπου C είναι επαρκής η χρήση ενός συστήματος two bin το οποίο έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα. Οι παράμετροι μπορούν να επιβλέπονται μία ή και δύο φορές το χρόνο. Η ζήτηση για τα προϊόντα τύπου C μπορεί να προβλεφθεί με απλές μεθόδους επέκτασης. Θεωρείται αναγκαίο να οριστεί μια υψηλή τιμή της SLM_1, συνήθως 98%-99%. Θα χρειαστεί μια μικρή επένδυση σε απόθεμα ασφαλείας για να διατηρηθούν τα επίπεδα εξυπηρέτησης σε υψηλά επίπεδα.

7.3 Μειονεκτήματα στην εφαρμογή της ABC ανάλυσης

Η ABC ανάλυση θεωρείται αναγκαία για την ορθή λειτουργία μιας επιχείρησης. Εντούτοις, υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις στις οποίες μπορεί η χρήση της να οδηγήσει σε «παγίδες». Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν αντικείμενα τα οποία έχουν μικρό κόστος και άρα μικρό όγκο πωλήσεων σε € και μπορούν εύκολα να καταταγούν στην κατηγορία C, που όμως μπορεί να είναι μεγάλης σημασίας για τους πελάτες της επιχείρησης. Για παράδειγμα σε μια εταιρία που πουλάει αυτοκίνητα, χρηματική αξία ενός αμορτισέρ είναι σχεδόν αμελητέα σε σχέση με την χρηματική αξία ενός αυτοκινήτου. Σε περίπτωση λοιπόν, που η εταιρία τοποθετήσει τα αμορτισέρ στην κατηγορία C, θα μπορούσε να οδηγήσει το αυτοκίνητο κάποιων πελατών στην ακινησία, με αποτέλεσμα να χάσει την καλή θέλησή τους και συνεπώς μελλοντικές πωλήσεις. Για το λόγο αυτό θα πρέπει τα αντικείμενα της κατηγορίας C να εξετάζονται ως προς άλλες παραμέτρους και σε ιδιαίτερες περιπτώσεις, να τους δίνεται η ίδια προσοχή με τα προϊόντα των άλλων 2 κατηγοριών.

7.4 Εφαρμογή

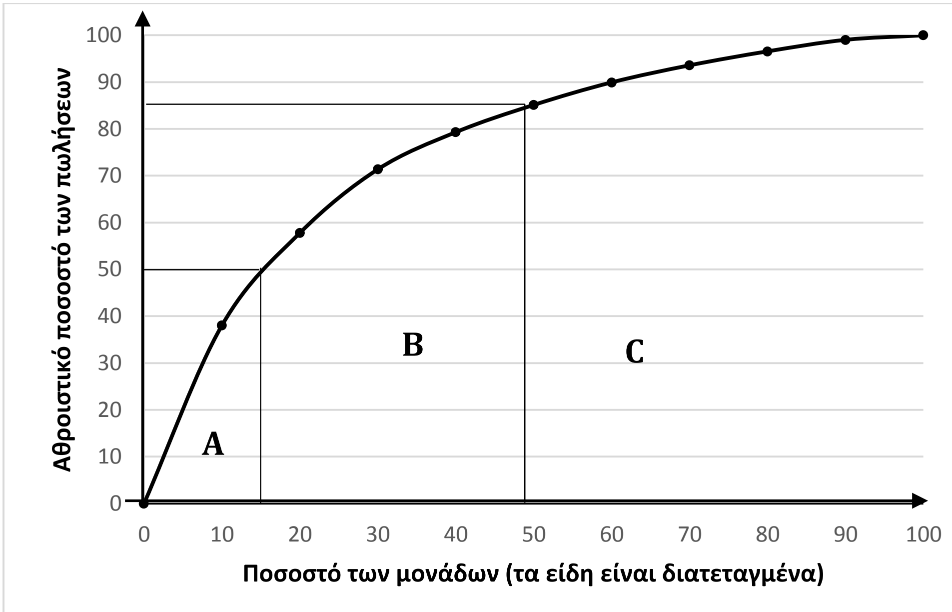
Μια εταιρία ηλεκτρονικών ειδών φυλάει στο απόθεμά της 100 αντικείμενα διατεταγμένα σύμφωνα με κάποιον κωδικό. Επιλέγουμε κάθε 10^{ο} αντικείμενο με βάση τον κωδικό του και καταγράφουμε τις εβδομαδιαίες πωλήσεις του. Στη συνέχεια κατατάσσουμε τα είδη σύμφωνα με μέτρο σημαντικότητα τον εβδομαδιαίο όγκο των πωλήσεών τους και σχηματίζουμε τον πίνακα 12. Θα πραγματοποιήσουμε στη συνέχεια μια ABC ανάλυση.

Πίνακας 12: Δεδομένα της Εφαρμογής της ενότητας 7.4

Είδος	Ποσοστό είδους (%)	Πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις (%)
Β	10	1976	1976	38,06
Η	20	1025	3001	57,80
Κ	30	705	3706	71,38
Γ	40	412	4118	79,31
Ι	50	302	4420	85,13
Δ	60	250	4670	89,95
Α	70	189	4859	93,59
Ζ	80	155	5014	96,57
Θ	90	128	5142	99,03
Ε	100	50	5192	100

Στη συνέχεια, σχηματίζουμε το ABC διάγραμμα. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 12, το 57,8% των πωλήσεων πραγματοποιείται από το 20% των προϊόντων, ενώ το 50% των πιο σημαντικών προϊόντων, είναι υπεύθυνο για το 85,13% των εβδομαδιαίων πωλήσεων της εταιρίας. Προσεγγιστικά, θεωρούμε ότι το τελευταίο προϊόν κατηγορίας Α πραγματοποιεί πωλήσεις περισσότερες από 1000 € ανά εβδομάδα και το τελευταίο προϊόν κατηγορίας Β, πωλήσεις πάνω από 300 € ανά εβδομάδα. Έτσι, κάθε προϊόν με πωλήσεις πάνω από 1000 θεωρείται κατηγορίας Α, κάθε προϊόν με πωλήσεις πάνω από 300 αλλά κάτω από 1000 θα θεωρείται Β, ενώ τα προϊόντα με πωλήσεις κάτω από 300 θα θεωρούνται κατηγορίας C.

Διάγραμμα 12: ABC ανάλυση



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Ασημακόπουλος Ν.** «Επιχειρησιακή Έρευνα», Σταμούλης 1991
2. **Κιόχος Π.-Θάνος Γ.-Σαλαμούρης Δ.** «Επιχειρησιακή Έρευνα», Σύγχρονη Εκδοτική, 2002
3. **Κολέτσος Ι.-Στογιάννης Δ.** «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», έκδοση ΑΡΗΣ ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα 2012.
4. **Υψηλάντης Π.** «Επιχειρησιακή Έρευνα – Λήψη Επιχειρησιακών Αποφάσεων», 2η έκδοση.
5. **Φράγκος Κων/νου Χρ.** «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», έκδοση ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ, Αθήνα 2006.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Baganha M. – Pyke D. – Ferrer G.** «The Undershoot of the Reorder Point: Tests of an approximation», 1995
2. **Chopra S. – Meindl P.** «Supply Chain Management», 5th Edition
3. **Dennis Blumenfeld.** «Operations Research Calculations Handbook», 2nd Edition
4. **Hillier F. and Lieberman G.** «Introduction to Operations Research», 7th Edition, New York, McGraw – Hill
5. **Kaplan A.** «(R,Q) inventory problem with unknown mean demand and learning», USAMC Inventory Research Office
6. **Taha, H.A.** «Operation Research – An introduction», McLillan
7. **Topcu Ilker Y.** «Operations Research Lecture Notes»
8. **Silver E. – Pyke D. – Peterson R.** «Inventory Management and Production Planning and Scheduling», 3rd Edition, 1998
9. **Wayne L. Winston.** «Operations Research Applications and Algorithms»