



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Απλοποίηση της Παρακολούθησης Δρόμου σε Μη  
Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα με Ισοδυναμία  
Ανάδρασης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Παναγιώτη Β. Κυριάκη

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Τζαφέστας  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2015





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Απλοποίηση της Παρακολούθησης Δρόμου σε Μη  
Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα με Ισοδυναμία  
Ανάδρασης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Παναγιώτη Β. Κυριάκη

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Τζαφέστας

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24η Ιουλίου 2015.

.....  
Κωνσταντίνος Τζαφέστας  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Νικόλαος Μαράτος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Χαράλαμπος Ψυλλάκης  
Λέκτορας Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούνιος 2015

.....

**Παναγιώτης Β. Κυριάκης**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π

© Παναγιώτης Β. Κυριάκης, 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Η πλοήγηση ενός μη επανδρωμένου εναέριου οχήματος, όπως και κάθε άλλου αυτόνομου ρομποτικού συστήματος, αποτελείται από τρία διαφορετικά υπο-προβλήματα: τον σχεδιασμό δρόμου, την χωροθέτηση και τον έλεγχο. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας επικεντρωνόμαστε στον τελευταίο από αυτά και συγκεκριμένα προτείνουμε μία μέθοδο που απλοποιεί τον σχεδιασμό ελεγκτών. Εισάγουμε αρχικά έναν μετασχηματισμό ο οποίος μεταφέρει την καμπύλη ή επιφάνεια αναφοράς του συστήματος σε ευθεία ή επίπεδο αντίστοιχα. Αφού τον επεκτείνουμε σε όλον τον χώρο κατάστασης, δείχνουμε ότι οι κινηματικές εξισώσεις του συστήματος μένουν αναλλοίωτες. Επομένως, το πρόβλημα απλοποιείται στο σχεδιασμό ελεγκτή για έναν αρκετά απλούστερο δρόμο.

Αφού δείξουμε την εν λόγω συμμετρία, εφαρμόζουμε την μέθοδο αρχικά στην παρακολούθηση συνεχώς παραγωγίσιμων καμπυλών και επιφανειών. Και στις δύο περιπτώσεις εξάγουμε τις συνθήκες αντιστροφής και βλέπουμε πως αυτές επηρεάζουν τις καμπύλες ή επιφάνειες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν με την μέθοδο. Ανάλογα αναπτύσσουμε και την πιο ενδιαφέρουσα πρακτικά περίπτωση όπου ο δρόμος αναφοράς είναι πολυγωνική καμπύλη ή τριγωνοποιημένη επιφάνεια. Το κύριο μέλημά μας στην τελευταία περίπτωση είναι η ισομετρική παραμετροποίηση της τριγωνοποιημένης επιφάνειας και για αυτόν τον σκοπό παρουσιάζουμε μία κατάλληλη μέθοδο. Τέλος, για όλες τις περιπτώσεις παραθέτουμε αποτελέσματα προσομοιώσεων στα οποία δείχνεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

## Λέξεις Κλειδιά

παρακολούθηση δρόμου, μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα, μετασχηματισμός χώρου κατάστασης, ισοδυναμία ανάδρασης, παραμετροποίηση τριγωνοποίησης



# Abstract

The navigation of an unmanned aerial vehicle, like the navigation of any other autonomous robotic system, can be partitioned into three subproblems: path planning, localization and control. This diploma thesis focuses on the last one and more specifically proposes a method that simplifies the controller design process. We introduce a transformation that maps the reference curve or surface of the system to a straight line or a plane, respectively. After the extension to the whole state space, it is shown that the kinematic equations are invariant. Therefore, the problem is reduced to the controller design for a simpler path.

After the above symmetry is shown, the method is applied to the path tracking of continuously differentiable curves and surfaces. For both cases, we extract the invertibility conditions and show how they affect the class of paths for which the method is applicable. We also develop the case with more practical interest, where the path is a polygonal line or a triangulated surface. In this case, our main concern is the isometric parametrization of the triangulated surface and for that purpose an appropriate parametrization method is presented. Finally, all the above cases are accompanied with simulation results which confirm the effectiveness of the proposed method.

## Keywords

path tracking, unmanned aerial vehicles, state space transformation, feedback equivalence, triangulation parametrization





## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κ. Κωνσταντίνο Τζαφέστα για την ανάθεση και την επίβλεψη ενός εξαιρετικά ενδιαφέροντος θέματος. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον Γεώργιο Μούστρο για την συνεχή και πολύτιμη καθοδήγηση καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Παναγιώτης Κυριάκης,  
Αθήνα, Ιούλιος 2015



# Περιεχόμενα

Περίληψη	5
Abstract	7
Ευχαριστίες	9
Κατάλογος Σχημάτων	13
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>15</b>
1.1 Γενικό Πλαίσιο . . . . .	15
1.2 Κίνητρο της εργασίας . . . . .	16
1.3 Συνεισφορά της διπλωματικής . . . . .	17
1.4 Δομή του κειμένου . . . . .	18
<b>2 Τα Μη Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα</b>	<b>21</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	21
2.2 Το Κινηματικό Μοντέλο του UAV . . . . .	21
2.3 Ορισμός της Πλοήγησης . . . . .	23
2.4 Έλεγχος Πλοήγησης . . . . .	25
2.5 Σύνοψη . . . . .	26
<b>3 Ισοδυναμία Ανάδρασης Δυναμικών Συστημάτων</b>	<b>27</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	27
3.2 Ο Μετασχηματισμός του Χώρου Κατάστασης . . . . .	28

3.3	Ο Μετασχηματισμός του Δυναμικού Συστήματος . . . . .	32
3.4	Ο Ελεγκτής Παρακολούθησης Ευθείας . . . . .	34
3.5	Σύνοψη . . . . .	37
	Παράρτημα . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Παρακολούθηση Καμπυλών στον Χώρο</b>	<b>41</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	41
4.2	Η Ομαλή Καμπύλη . . . . .	42
4.3	Πολυγωνική Αλυσίδα . . . . .	45
4.4	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων . . . . .	49
4.5	Σύνοψη . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Παρακολούθηση Επιφανειών</b>	<b>53</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	53
5.2	Η Ομαλή Επιφάνεια . . . . .	54
5.3	Τριγωνοποιημένη Επιφάνεια . . . . .	55
5.4	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων . . . . .	62
5.5	Σύνοψη . . . . .	68
	Παράρτημα . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>73</b>
6.1	Σύνοψη Εργασίας . . . . .	73
6.2	Θέματα για Μελλοντική Μελέτη . . . . .	74
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>77</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

2-1	Το μοντέλο του <i>UAV</i> . . . . .	22
3-1	Ο βρόχος ελέγχου . . . . .	34
3-2	Η ευθεία αναφοράς του κανονικού χώρου [25] . . . . .	36
4-1	Η καμπύλη αναφοράς και η παραμετροποίηση . . . . .	42
4-2	Μονότονη ως προς ευθεία καμπύλη . . . . .	44
4-3	Παραμετροποίηση πολυγωνικής αλυσίδας . . . . .	45
4-4	Εύρεση ενεργής ακμής . . . . .	48
4-5	Ομαλή καμπύλη - φυσικός χώρος . . . . .	49
4-6	Ομαλή καμπύλη - κανονικός χώρος . . . . .	50
4-7	Πολυγωνική αλυσίδα - φυσικός χώρος . . . . .	51
4-8	Πολυγωνική αλυσίδα - κανονικός χώρος . . . . .	52
5-1	Η επιφάνεια αναφοράς και η παραμετροποίηση [29] . . . . .	54
5-2	Η τριγωνοποιημένη επιφάνεια αναφοράς [8] . . . . .	56
5-3	Παραμετροποίηση επιφάνειας . . . . .	58
5-4	Επέκταση της τριγωνοποίησης σε όλον τον χώρο . . . . .	60
5-5	Εύρεση του ενεργού τριγώνου . . . . .	62
5-6	Ομαλή επιφάνεια - φυσικός χώρος . . . . .	63
5-7	Ομαλή επιφάνεια - κανονικός χώρος . . . . .	64
5-8	Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - φυσικός χώρος . . . . .	65
5-9	Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - κανονικός χώρος . . . . .	66

5-10	Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - φυσικός χώρος - $PI$ . . . . .	67
5-11	Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - κανονικός χώρος - $PI$ . . . . .	67
5-12	Απόσταση από την επιφάνεια . . . . .	68
5-13	Περίπτωση απειρισμού της $D$ . . . . .	70

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Γενικό Πλαίσιο

Τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει μία σαφής τάση αντικατάστασης του ανθρώπινου δυναμικού με ρομπότ. Οι λόγοι που το επιβάλλουν αυτό είναι, μεταξύ άλλων, οι ακρίβεια των ρομπότ, η δυνατότητα τους να εκτελούν επαναλαμβανόμενες και προγραμματισμένες διαδικασίες καθώς και η ευκολία με την οποία προσεγγίζουν περιβάλλοντα δυσπρόσιτα ή επικίνδυνα για τον άνθρωπο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι τα μη επανδρωμένα οχήματα, όπως τα κινητά ρομπότ, τα ιπτάμενα ρομπότ και τα υποθαλάσσια ρομπότ. Το ενδιαφέρον, τόσο από ερευνητική όσο και από πρακτική σκοπιά, για τους παραπάνω τύπους οχημάτων είναι αναμενόμενο, καθώς έχουν ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών. Τα κινητά ρομπότ, είτε κινούνται με τροχούς είτε με άκρα (bipeds, quadrupeds, hexapods κτλ), έχουν δεκάδες πρακτικές εφαρμογές, όπως η εξερεύνηση δυσπρόσιτων περιοχών, ο απεγκλωβισμός ανθρώπων μετά από φυσικές καταστροφές και ο χειρισμός επικίνδυνων υλικών. Τα ιπτάμενα ρομπότ, από την άλλη χρησιμοποιούνται στην επιτήρηση περιοχών (γραμμών μεταφοράς, εγκαταστάσεων), σε επιχειρήσεις αναζήτησης και διάσωσης ανθρώπων και στην παράδοση προϊόντων (πχ φάρμακα) σε δυσπρόσιτες περιοχές. Τέλος, τα υποβρύχια ρομπότ χρησιμοποιούνται στην εξερεύνηση και χαρτογράφηση υποθαλάσσιων περιοχών, στην εκτέλεση εργασιών σε υποθαλάσσιες εγκαταστάσεις καθώς και για ερευνητικούς σκοπούς στη μελέτη των ωκεανών.

Όλοι οι παραπάνω τύποι οχημάτων μπορούν να είναι είτε αυτόνομοι, δηλαδή να λειτουργούν

χωρίς καμία επέμβαση του ανθρώπου, είτε τηλεχειριζόμενοι, δηλαδή να μεταφέρουν πληροφορίες για το περιβάλλον σε έναν απομακρυσμένο χειριστή και να δέχονται από αυτόν τις εντολές κίνησης. Στην πρώτη περίπτωση το όχημα πρέπει να είναι εφοδιασμένο με αισθητήρες ή/και κάμερες ώστε να χαρτογραφεί και να αναγνωρίζει τον περιβάλλον του. Στη συνέχεια πρέπει να λαμβάνει αποφάσεις για το πως θα κινηθεί χωρίς να παραβιάζει όποιους περιορισμούς ή να συγκρούεται με πιθανά εμπόδια, εκτελώντας παράλληλα το όποιο έργο καλείται να εκτελέσει. Στη δεύτερη περίπτωση, οι πληροφορίες για το περιβάλλον μεταφέρονται σε έναν απομακρυσμένο χειριστή, δηλαδή σε έναν άνθρωπο, ο οποίος λαμβάνει όλες τις παραπάνω αποφάσεις.

Μια άλλη σημαντική εφαρμογή, η οποία επιβάλλεται από τις απαιτήσεις για υψηλή ακρίβεια, είναι η ρομποτική χειρουργική. Σε αυτήν την περίπτωση ο ιατρός αντικαθίσταται από ένα ή περισσότερα ρομποτικά χέρια, τα οποία χαρακτηρίζονται από πολύ μεγάλη αξιοπιστία και ακρίβεια - πολύ μεγαλύτερη από αυτή που θα μπορούσε να πετύχει ένας άνθρωπος. Η διαφορά με τα προηγούμενα βέβαια είναι ότι ένα σύστημα ρομποτικής χειρουργικής είναι κατά κανόνα τηλεχειριζόμενο και όχι αυτόνομο. Δηλαδή, δεν τοποθετείται ένα σύστημα χωρίς επίβλεψη πάνω σε έναν ασθενή. Πάντα θα υπάρχει ο αντίστοιχος επαγγελματίας υγείας που θα παρακολουθεί τη διαδικασία και θα δίνει τις κατάλληλες εντολές στο ρομπότ.

## 1.2 Κίνητρο της εργασίας

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με αυτόνομα συστήματα, συγκεκριμένα με μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα (*unmanned aerial vehicles - UAVs*). Βέβαια, οι μεθοδολογίες που θα αναπτύξουμε δεν περιορίζονται μόνο σε αυτού του τύπου τα συστήματα.

Πολλές φορές στην πράξη έχουμε ένα δυναμικό σύστημα και καλούμαστε να το μεταφέρουμε με κατάλληλο έλεγχο από ένα σημείο του χώρου στον οποίον κινείται σε ένα άλλο. Αν θεωρήσουμε ότι ο χώρος αυτός καθώς και το κινηματικό μοντέλο του συστήματος είναι πλήρως γνωστά τότε το παραπάνω πρόβλημα διασπάται σε τρία επιμέρους στάδια: στον σχεδιασμό δρόμου, τη χωροθέτηση και τέλος τον έλεγχο.

Το πρώτο στάδιο συνίσταται, δοσμένων των παραπάνω ακραίων σημείων και του χώρου, στην εύρεση εκείνου του δρόμου που θα πρέπει να ακολουθήσει το σύστημα. Εδώ θα πρέπει να



ληφθούν υπόψιν οι κινηματικοί περιορισμοί καθώς και τα εμπόδια του χώρου, ενώ συνήθως ο σχεδιασμός είναι τέτοιος ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο κριτήριο, όπως ο χρόνος ή η ενέργεια. Η χωροθέτηση, από την άλλη, είναι η εύρεση της θέσης του ρομπότ μέσα στον χώρο. Είναι σαφές ότι πριν την εκτέλεση οποιασδήποτε εργασίας πρέπει να γνωρίζουμε με υψηλή ακρίβεια τη θέση του συστήματος, καθώς είναι απαραίτητη στον έλεγχο.

Η παρακολούθηση δρόμου, η οποία είναι το κύριο αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής, συνίσταται στην εύρεση του κατάλληλου ελέγχου που θα οδηγήσει το σύστημα στο επιθυμητό δρόμο. Τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων σταδίων είναι ουσιαστικά είσοδοι στον αλγόριθμο παρακολούθησης δρόμου. Η έννοια δρόμος (η πορεία, όπως αλλιώς αναφέρεται) χρησιμοποιείται εδώ τελείως γενικευμένα και υπονοεί έναν οποιοδήποτε υπόχωρο του χώρου κατάστασης του συστήματος. Στην περίπτωση των *UAVs*, τα οποία κινούνται στο Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  το σύστημα μπορεί να κληθεί να παρακολουθήσει μία καμπύλη ή μία επιφάνεια. Σε κάθε περίπτωση, με τον δρόμο θα εννοούμε την αντίστοιχη γεωμετρική έννοια.

Πολλές φορές στην πράξη ένα *UAV* θα κληθεί να παρακολουθήσει έναν αρκετά πολύπλοκο δρόμο. Δεδομένου αυτού δρόμου αναφοράς, μπορούμε, υπό κάποιες συνθήκες, να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό του χώρου που κινείται το σύστημα. Υπάρχει μία κλάση συστημάτων τα οποία, με κατάλληλο μετασχηματισμό των εισόδων, μένουν αναλλοίωτα κάτω από έναν τέτοιο μετασχηματισμό. Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με την κατασκευή αυτού του μετασχηματισμού καθώς και τη μελέτη της επίδρασής του στο κινηματικό μοντέλο ενός *UAV*.

### 1.3 Συνεισφορά της διπλωματικής

Η συνεισφορά της παρούσας διπλωματικής είναι κατά κύριο λόγο θεωρητικής φύσεως. Ωστόσο, παρουσιάζονται και θέματα τα οποία είναι πρακτικά υλοποιήσιμα και αρκετά χρήσιμα στην πράξη. Όλο το κείμενο ασχολείται και εξετάζει το θέμα της παρακολούθησης δρόμου των μη-επανδρωμένων εναέριων οχημάτων.

Η πρώτη συνεισφορά έχει καθαρά θεωρητικό ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, ξεκινάμε από το κινηματικό μοντέλο ενός *UAV* και εισάγουμε έναν γενικό μετασχηματισμό του χώρου που κινείται το σύστημα. Εξετάζουμε πώς επιδρά αυτός σε όλον τον χώρο κατάστασης του συστήματος και συμπεραίνουμε ότι με κατάλληλο μετασχηματισμό των εισόδων αυτό παραμένει

αναλλοίωτο. Αν και η μόνη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι η αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού, πρέπει να επιβάλουμε ένα περιορισμό στο σύστημα.

Η δεύτερη συνεισφορά έχει και αυτή θεωρητικό χαρακτήρα. Υποθέτουμε ότι το σύστημα καλείται να παρακολουθήσει συνεχώς παραγωγίσιμες καμπύλες ή επιφάνειες. Εισάγεται ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται ο παραπάνω μετασχηματισμός και μελετούνται οι συνθήκες αντιστρεψιμότητάς του. Παρότι η ανάλυση εδώ είναι αρκετά απλή, η πρακτική εφαρμογή είναι περιορισμένη καθώς ρεαλιστικοί δρόμοι δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν.

Η τρίτη και τελευταία συνεισφορά είναι η περίπτωση που ο δρόμος αναφοράς είναι πολυγωνικές αλυσίδες και τριγωνοποιημένες επιφάνειες. Εδώ οι συνθήκες αντιστροφής του μετασχηματισμού τροποποιούνται κατάλληλα. Ωστόσο, η πρόκληση είναι η παραμετροποίηση της πολυγωνικής γραμμής και, κυρίως, της τριγωνοποιημένης επιφάνειας. Αν και στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα είναι τετριμμένο, στην τριγωνοποιημένη επιφάνεια έχουμε την απαίτηση η παραμετροποίηση να εισάγει την ελάχιστη παραμόρφωση. Για αυτό τον σκοπό παρουσιάζεται μία μέθοδος, η οποία προσαρμόζεται κατάλληλα και παράγει μία προσεγγιστικά ισομετρική παραμετροποίηση.

## 1.4 Δομή του κειμένου

Το κείμενο της εργασίας οργανώνεται σύμφωνα με τα ακόλουθα.

- Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται το κινηματικό μοντέλο του με επανδρωμένου εναέριου οχήματος. Με βάση αυτό ορίζονται τα διάφορα προβλήματα της πλοήγησης γίνεται αναφορά σε μερικούς από τους ελεγκτές που χρησιμοποιούνται.
- Στο **Κεφάλαιο 3** εισάγεται γενικός ένας μετασχηματισμός του χώρου που κινείται το σύστημα. Ο μετασχηματισμός αυτός επεκτείνεται σε όλον τον χώρο κατάστασης και μελετάται η επίδρασή του πάνω στο σύστημα. Τέλος, προσαρμόζεται ένας κατάλληλος ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας που χρησιμοποιείται στις προσομοιώσεις.
- Στο **Κεφάλαιο 4** κατασκευάζεται ο μετασχηματισμός για την περίπτωση όπου ο δρόμος αναφοράς είναι καμπύλη (ομαλή ή πολυγωνική αλυσίδα). Εξάγονται οι συνθήκες αντιστρεψιμότητας και παρουσιάζονται αποτελέσματα προσομοιώσεων στα οποία αναδεικνύεται η

αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

- Στο **Κεφάλαιο 5** ασχολούμαστε με την περίπτωση που ο δρόμος αναφοράς είναι ομαλή ή τριγωνοποιημένη επιφάνεια και παρόμοια με πριν βρίσκουμε συνθήκες αντιστρεψιμότητας. Στην περίπτωση της τριγωνοποίησης παρουσιάζουμε μία μέθοδο που την παραμετροποιεί κατά προσέγγιση ισομετρικά. Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα προσομοιώσεων και για τις δύο περιπτώσεις.
- Στο **Κεφάλαιο 6** γίνεται μία συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και προτείνονται θέματα για μελλοντική μελέτη.



## Κεφάλαιο 2

# Τα Μη Επανδρωμένα Εναέρια Οχήματα

### 2.1 Εισαγωγή

Η πλοήγηση είναι σημαντικό κομμάτι των αυτόνομων ρομποτικών συστημάτων. Ως εκ τούτου, ένα σημαντικό όγκος έρευνας έχει αφιερωθεί σε αυτό το αντικείμενο. Βασικός στόχος είναι η κατασκευή αποδοτικών ελεγκτών που θα επιτυγχάνουν παρακολούθηση των επιθυμητών δρόμων. Έχουν προταθεί πολλοί διαφορετικοί τύποι ελεγκτών, καθένας από τους οποίους έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε το κινηματικό μοντέλο ενός *UAV*, ορίσουμε τα διάφορα προβλήματα της πλοήγησης και τέλος περιγράφουμε ορισμένους ελεγκτές για αυτόν τον σκοπό.

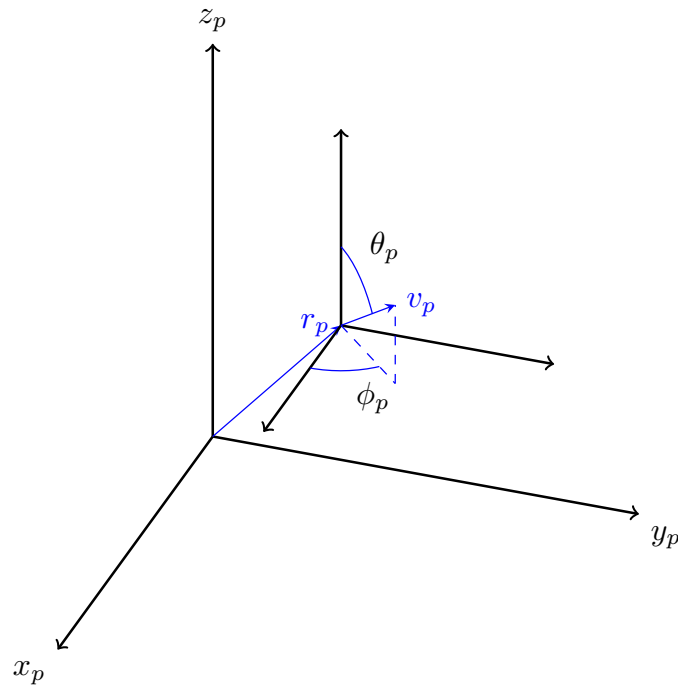
### 2.2 Το Κινηματικό Μοντέλο του *UAV*

Ένα συχνά χρησιμοποιούμενο κινηματικό μοντέλο για τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα είναι το λεγόμενο *Dubin's airplane*[5]. Ως διάνυσμα κατάστασης λαμβάνεται το  $\mathbf{q} = (x_p, y_p, z_p, \phi_p)$ , όπου  $(x_p, y_p, z_p)$  η θέση του συστήματος στο σταθερό σύστημα αναφοράς και  $\phi_p$  η αζιμούθια γωνία. Επίσης ως διάνυσμα εισόδων λαμβάνεται το  $\mathbf{u}_p = (u_p^1, u_p^2)$ . Με βάση

αυτά οι κινηματικές εξισώσεις του συστήματος γράφονται

$$\dot{\mathbf{q}}_p = f(\mathbf{q}_p)\mathbf{u}_p = \begin{pmatrix} V \cos \phi_p \\ V \sin \phi_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_p^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_p^2 \quad (2.1)$$

όπου  $V$  είναι η γραμμική ταχύτητα του συστήματος. Θεωρώντας ότι η  $V$  είναι σταθερή, οι είσοδοι του συστήματος ελέγχουν την παράγωγο της αξιμούθιας γωνίας  $\dot{\phi}_p$  και τον ρυθμό ανόδου  $\dot{z}_p$ . Ένα τέτοιο σύστημα όμως δεν είναι πολύ ρεαλιστικό, καθώς δεν επιτρέπει την κίνηση κατά την πολική γωνία. Ως εκ τούτου, θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας μία ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή, [25], που φαίνεται στο Σχήμα 2-1. Με  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$  συμβολίζεται η θέση του συστήματος στον χώρο, ενώ με  $\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}$  η ταχύτητά του. Το σύστημά έχει διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{q}_p = (x_p, y_p, z_p, \phi_p, \theta_p)$  ενώ το διάνυσμα των εισόδων είναι  $\mathbf{u}_p = (u_p^1, u_p^2, u_p^3)$ . Οι



Σχήμα 2-1: Το μοντέλο του UAV

κινηματικές του εξισώσεις φαίνονται παρακάτω

$$\dot{\mathbf{q}}_p = f(\mathbf{q}_p)\mathbf{u}_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \cos\phi_p \\ \sin\theta_p \sin\phi_p \\ \cos\theta_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_p^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_p^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_p^3 \quad (2.2)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα είναι γραμμικό ως προς την είσοδο και αυτό είναι μία χρήσιμη ιδιότητα όπως θα δούμε στην Παράγραφο 3.3. Επίσης, συγκριτικά με το προηγούμενο μοντέλο, προστέθηκε μία επιπλέον μεταβλητή που επιτρέπει τον έλεγχο της ταχύτητας του συστήματος. Το διάνυσμα κατάστασης του βρίσκεται στον χώρο κατάστασης  $\mathbb{E}_p = \mathbb{D}_p \times \mathbb{S}^1 \times [0, \pi]$ . Ο  $\mathbb{E}_p$  ονομάζεται και *φυσικός χώρος κατάστασης (physical state space)*. Ο  $\mathbb{D}_p \equiv \mathbb{R}^3$ , στον οποίον ανήκει το  $\mathbf{r}_p$ , ονομάζεται *φυσικός χώρος (physical space)* και είναι ουσιαστικά ο υπόχωρος του  $\mathbb{E}_p$  στον οποίον κινείται το σύστημα. Φραγμοί στα διανύσματα εισόδου μπορούν να εκφραστούν με τις παρακάτω ανισότητες

$$\begin{aligned} u_p^1 &\leq |u_{p,max}^1| \\ u_p^2 &\leq |u_{p,max}^2| \\ u_p^3 &\leq |u_{p,max}^3| \end{aligned} \quad (2.3)$$

λαμβάνοντας υπόψιν τους φυσικούς περιορισμούς που εμφανίζονται στα πραγματικά συστήματα.

## 2.3 Ορισμός της Πλοήγησης

Τα διάφορα προβλήματα πλοήγησης μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων μπορούν να χωριστούν στις ακόλουθες περιπτώσεις. Έστω αρχικά ότι η τροχιά αναφοράς στον φυσικό χώρο  $(x_p, y_p, z_p)$  που κινείται το ρομπότ είναι μία καμπύλη που παραμετροποιείται από τον χρόνο

$$\mathbf{p}_{pd}(t) = (x_{pd}(t), y_{pd}(t), z_{pd}(t)), t \geq 0 \quad (2.4)$$

Η παρακολούθηση τροχιάς (*trajectory tracking*) ζητά την κατασκευή ενός ελεγκτή ανάδρασης  $\mathbf{u}_p(\mathbf{q}_p, \mathbf{p}_{pd}(t))$  έτσι ώστε η θέση του συστήματος  $\mathbf{q}_p(\mathbf{t}) = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))$  να συγκλίνει στην επιθυμητή καμπύλη, δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}_{pd}(t) - \mathbf{q}_p(t)\| = 0 \quad (2.5)$$

Με  $\|\cdot\|$  συμβολίζεται η Ευκλείδεια νόρμα, η οποία μπορεί φυσικά να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε κατάλληλη συνάρτηση μέτρου. Στην παρακολούθηση δρόμου (*path tracking*) έχουμε μία καμπύλη αναφοράς  $\mathbf{p}_{pd}(s), s \in \mathbb{R}$  που δεν παραμετροποιείται από τον χρόνο, αλλά από μία αυθαίρετη παράμετρο  $s$ . Δηλαδή, δεν υπάρχει απαίτηση το σύστημα να βρίσκεται σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο, αλλά απλά στην εικόνα της  $\mathbf{p}_{pd}(s)$ . Θεωρώντας μία κατάλληλη συνάρτηση απόστασης  $d$ , η Σχέση 2.5 θα είναι τώρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{p}_{pd}(s) - \mathbf{q}_p(t)) = 0 \quad (2.6)$$

Τέλος, κατά την σταθεροποίηση σημείου (*point stabilization*) ζητάμε την σταθεροποίηση του συστήματος από ένα αρχικό σημείο  $q_0$  σε ένα σημείο ισορροπίας  $q_e$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{p}_d(s) - \mathbf{q}_e) = 0 \quad (2.7)$$

Η ταχύτητα σύγκλισης όπως και άλλα χαρακτηριστικά της απόκρισης (πχ overshoot, damping κτλ) είναι προδιαγραφές που πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν κατά τον σχεδιασμό του ελεγκτή. Πρέπει να προσέξουμε ότι κάθε ελεγκτής που σχεδιάζεται θα πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς εισόδου του συστήματος. Ακόμη, κάθε προκύπτουσα τροχιά  $\mathbf{q}_p(t)$  στον φυσικό χώρο κατάστασης θα πρέπει να ικανοποιεί, δεδομένων των περιορισμών του ελέγχου, τις εξισώσεις κίνησης 2.2. Οι δύο αυτές απαιτήσεις επιβάλλουν σημαντικούς περιορισμούς, καθώς πολλές φορές οι επιθυμητές καμπύλες δεν μπορούν εγγενώς να είναι λύσεις των εξισώσεων του συστήματος. Συγκεκριμένα, ένας αλγόριθμος σχεδιασμού δρόμου επιστρέφει συνήθως ένα διατεταγμένο σύνολο σημείων  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^2, k = 1, 2, \dots, n$ . Στα σημεία αυτά γίνεται μία γραμμική παρεμβολή και προκύπτει μία πολυγωνική αλυσίδα (*polygonal chain*). Τέτοιες καμπύλες είναι προφανώς πολύ χρήσιμες στην πράξη καθώς μπορούν πολύ εύκολα να τις χειριστούν οι ηλεκτρο-



νικοί υπολογιστές. Ωστόσο, λόγω όμως των παραπάνω περιορισμών το σύστημα δεν μπορεί να παρακολουθήσει μία τέτοια καμπύλη. Συνεπώς θα υπάρχουν σφάλματα τα οποία πρέπει να ελαχιστοποιούμε με κατάλληλη σχεδίαση του ελεγκτή.

## 2.4 Έλεγχος Πλοήγησης

Όπως αναφέραμε πριν, η πλοήγηση των μη επανδρωμένων εναέριων οχημάτων είναι ένα θέμα που προσελκύει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Ως εκ τούτου έχουν προταθεί πάρα πολλοί ελεγκτές για τον σκοπό αυτό. Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένοι ελεγκτές, σχετικά με την παρακολούθηση δρόμου (τροχίας).

Η απλούστερη προσέγγιση είναι η γραμμικοποίηση του συστήματος[14]. Συγκεκριμένα, δεδομένης μίας αναφοράς  $\mathbf{q}_p(s) = (x_{pd}(s), y_{pd}(s), z_{pd}(s), \phi_{pd}(s), \theta_{pd}(s))$  (όπου το  $s = s(t)$  είναι μία εξαρτώμενη από τον χρόνο παράμετρος) μπορούμε να ορίσουμε το σφάλμα ως  $\mathbf{q}_e = \mathbf{q} - \mathbf{q}_p$ . Στην συνέχεια γραμμικοποιείται γύρω από το μηδέν και προκύπτει ένα απλό, γραμμικό σύστημα της μορφής  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_e = A(t)\hat{\mathbf{q}}_e + B(t)\hat{\mathbf{u}}$  το οποίο είναι ελέγξιμο, και μπορείς να προσεγγιστεί με αργός μεταβαλλόμενα γραμμικά συστήματα. Επομένως, η σχεδίαση καταλήγει σε απλή επιλογή κερδών ώστε το κλειστό σύστημα να έχει τις ιδιοτιμές που θέλουμε. Ωστόσο, η μέθοδος ισχύει μόνο για μικρές αρχικές αποκλίσεις από την αναφορά και δεν θα ήταν αποτελεσματική σε ένα πραγματικό σύστημα.

Μία άλλη τεχνική που μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί είναι η *γραμμικοποίηση μέσω α-νάδρασης* (*feedback linearization*), μια συνήθης τεχνική ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων [12, 13]. Σε πολύ γενικές γραμμές, θεωρούμε μία έξοδο της μορφής  $z = h(\mathbf{q})$  και αναζητούμε έναν μετασχηματισμό  $\mathbf{u} = a(\mathbf{q}) + B(\mathbf{q})\mathbf{r}$  έτσι ώστε το σύστημα  $(z, \mathbf{r})$  να είναι γραμμικό. Η σχεδίαση ελεγκτή γίνεται σε αυτό το σύστημα και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μετασχηματισμό βρίσκουμε τον ελεγκτή  $\mathbf{u}$ . Ενδεικτικές εφαρμογές σε παρόμοια κινηματικά μοντέλα (*Dubin's Car*) μπορούν να αναζητηθούν στα [14, 24].

Τέλος, μία κατηγορία που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά είναι οι ελεγκτές *ασαφής λογικής* (*fuzzy logic*). Σε αυτήν την περίπτωση ο δρόμος αναφοράς αλλά και το σύστημα διακριτοποιούνται. Στην συνέχεια ορίζονται κάποιες μεταβλητές σφάλματος που αντιπροσωπεύουν την απόκλιση του συστήματος από την επιθυμητή καμπύλη. Με βάση αυτά κατασκευάζεται ένα

σύνολο ασαφών κανόνων το οποίο για κάθε θέση του συστήματος δίνει την κίνηση που πρέπει αυτό να κάνει ώστε να προσεγγίσει την αναφορά. Ενδεικτικές υλοποιήσεις για τα κινητά ρομπότ μπορούν να αναζητηθούν στα [18, 19].

## 2.5 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκε ένα κινηματικό μοντέλο για τα μη επανδρωμένα εναέρια οχήματα, το οποίο θα μας απασχολήσει κατά κύριο λόγο σε αυτήν την διπλωματική. Ορίσαμε τα διάφορα προβλήματα της πλοήγησης, έναν εκ των οποίων (η παρακολούθηση δρόμου) θα είναι το κύριο αντικείμενό μας. Τέλος, αναφερθήκαμε επιγραμματικά σε ορισμένους τύπους ελεγκτών που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων.

# Κεφάλαιο 3

## Ισοδυναμία Ανάδρασης Δυναμικών Συστημάτων

### 3.1 Εισαγωγή

Παρακινούμενοι από την εγγενή δυσκολία της παρακολούθησης δρόμου, θα εισάγουμε σε αυτό το κεφάλαιο μία μεθοδολογία που αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα. Ο σκοπός μας δεν είναι ο σχεδιασμός κάποιου συγκεκριμένου ελεγκτή, αλλά η ανάπτυξη μιας γενικής μεθοδολογίας με την οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε υπάρχοντας.

Οι συγγραφείς των [1, 20] εισήγαγαν έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων του φυσικού χώρου που κινείται το ρομπότ, ο οποίος χρησιμοποιεί σαν βάση του τον δρόμο αναφοράς. Στην συνέχεια τον επέκτειναν στον χώρο κατάστασης του *Dubin's car*. Τελικά απέδειξαν ότι, με κατάλληλο μετασχηματισμό των εισόδων, οι κινηματικές εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό. Τέτοια συστήματα είναι γνωστά ως *συστήματα με ισοδυναμία ανάδρασης (feedback-equivalent)*[31].

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, θα επεκτείνουμε αυτό τον μετασχηματισμό στο τρισδιάστατο κινηματικό μοντέλο ενός *UAV*. Στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου δεν θα μας απασχολήσει ο ακριβής ορισμός του μετασχηματισμού. Αυτός θα γίνει για τους διάφορους δρόμους αναφοράς στα δύο επόμενα κεφάλια. Αντιθέτως, εδώ θα επικεντρωθούμε στο πως ο εν λόγω μετασχηματισμός επεκτείνεται στον χώρο κατάστασης του *UAV* και στην απόδειξη της προαναφερθείσας

συμμετρίας των εξισώσεων.

Το κεφάλαιο ακολουθεί την εξής δομή: Αρχικά εισάγουμε έναν μετασχηματισμό του φυσικού χώρου στον οποίο κινείται το UAV. Μελετάμε την επίδραση του μετασχηματισμού στο σύστημα και δείχνουμε ότι με κατάλληλο μετασχηματισμό των εισόδων οι κινηματικές εξισώσεις μένουν ίδιες. Τέλος, παρουσιάζεται ο ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις, με τις οποίες αναδεικνύεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

## 3.2 Ο Μετασχηματισμός του Χώρου Κατάστασης

Έστω ότι το σύστημα 2.2 στον φυσικό χώρο βρίσκεται στην θέση  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ . Ορίζουμε τον μετασχηματισμό  $\phi : \mathbb{D}_c \rightarrow \mathbb{D}_p$  ως εξής

$$\mathbf{r}_p = \phi(\mathbf{r}_c) \quad (3.1)$$

όπου  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c) \in \mathbb{D}_c$ . Ο  $\mathbb{D}_c \equiv \mathbb{R}^3$  ονομάζεται *κανονικός χώρος (canonical space)*. Όπως θα δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στα Κεφάλαια 4,5 ο μετασχηματισμός  $\phi$  ορίζεται με βάση τον δρόμο αναφοράς που καλείται να παρακολουθήσει το σύστημα στον φυσικό χώρο. Συγκεκριμένα, ο δρόμος αναφοράς, είτε είναι καμπύλη είτε επιφάνεια, απεικονίζεται μέσω του  $\phi$  σε ευθεία και επίπεδο, αντίστοιχα (flattening). Ωστόσο, στο παρόν κεφάλαιο δεν θα αναπτυχθεί ο ακριβής ορισμός του  $\phi$ , αλλά θα δοθεί έμφαση στο πως ο μετασχηματισμός επεκτείνεται στο χώρο κατάστασης του συστήματος 2.2. Επομένως, στην γενική περίπτωση η Ιακωβιανή μήτρα και ορίζουσά του  $\phi$  γράφονται

$$\mathbf{J}_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$|\mathbf{J}_\phi| = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) \quad (3.3)$$

όπου τα  $\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_c}$ ,  $\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y_c}$ ,  $\mathbf{n}_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z_c}$  είναι τρία διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  τα οποία εξαρτώνται από την ακριβή μορφή του  $\phi$ . Μη μηδενική ορίζουσα σημαίνει πως αυτά τα  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  δεν είναι

παράλληλα και τα  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  δεν είναι συνεπίεδα. Εδώ υποθέτουμε ότι αυτό πράγματι ισχύει σε όλον τον φυσικό χώρο. Παραγωγίζοντας τη Σχέση 3.1 έχουμε

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{J}_\phi \mathbf{v}_c \quad (3.4)$$

όπου  $\mathbf{v}_p = \dot{\mathbf{r}}_p = \|\mathbf{v}_p\| \mathbf{c}_p$ ,  $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \|\mathbf{v}_c\| \mathbf{c}_c$ , είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα στον φυσικό και στον κανονικό χώρο αντίστοιχα. Τα  $\mathbf{c}_p = (\cos a_p, \cos b_p, \cos c_p)$ ,  $\mathbf{c}_c = (\cos a_c, \cos b_c, \cos c_c)$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα στην κατεύθυνση των αντίστοιχων εφαπτόμενων και εκφράζονται χρησιμοποιώντας συνημίτονα κατεύθυνσης.

Εξετάζουμε τώρα πως μετασχηματίζονται τα μέτρα και οι πολικές γωνίες αυτών των διανυσμάτων μέσω του  $\phi$ . Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τη Σχέση 3.4 με  $\mathbf{v}_p$  και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πολικές μορφές παίρνουμε τον λόγο μηκών στους δύο χώρους

$$\gamma^2 = \frac{\|\mathbf{v}_p\|^2}{\|\mathbf{v}_c\|^2} = \|\mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c\|^2 = \mathbf{c}_c^T \mathbf{g} \mathbf{c}_c \quad (3.5)$$

όπου  $\mathbf{g} = \mathbf{J}_\phi^T \mathbf{J}_\phi$  είναι ο μετρικός τανυστής στον φυσικό χώρο. Με παρόμοια διαδικασία, λύνοντας πρώτα ως προς  $\mathbf{v}_c$  και στην συνέχεια πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με  $\mathbf{v}_c$ , βρίσκουμε μία άλλη έκφραση για το  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\|\mathbf{J}_\phi^{-1} \mathbf{c}_p\|} \quad (3.6)$$

Αντίστοιχα, για τις γωνίες χρησιμοποιώντας πάλι τη Σχέση 3.4 παίρνουμε

$$\mathbf{c}_p = \frac{\mathbf{J}_\phi}{\gamma} \mathbf{c}_c = \frac{\mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}{\|\mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c\|} \quad (3.7)$$

Από αυτήν της σχέσης μπορούμε να λύσουμε ως προς  $\mathbf{c}_c$ . Χρησιμοποιώντας τη Σχέση 3.6, παίρνουμε

$$\mathbf{c}_c = \frac{\mathbf{J}_\phi^{-1} \mathbf{c}_p}{\|\mathbf{J}_\phi^{-1} \mathbf{c}_p\|} \quad (3.8)$$

Έχοντας αυτά είναι δυνατή η εύρεση των μετασχηματισμών των γωνιών  $\phi, \theta$  που εμφανίζονται στο κινηματικό μοντέλο 2.2. Αρχικά, είναι απαραίτητοι οι γνωστοί μετασχηματισμοί μεταξύ

πολικών συντεταγμένων και συνημίτονων κατεύθυνσης

$$\begin{aligned} \sin\theta\cos\phi &= \cos a \\ \sin\theta\sin\phi &= \cos b \\ \cos\theta &= \cos c \end{aligned} \tag{3.9}$$

οι οποίοι προφανώς ισχύουν και στους δύο χώρους και για αυτό παραλείπονται οι δείκτες. Διαιρώντας τις δύο πρώτες σχέσεις παίρνουμε την γωνία  $\phi_p$  του φυσικού χώρου <sup>1</sup>

$$\tan\phi_p = \frac{\cos b_p}{\cos a_p} = \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{c}_p}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{c}_p} = \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c} \tag{3.10}$$

όπου με  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$  συμβολίζουμε τις βάσεις του  $\mathbb{R}^3$ . Είναι εμφανές από την παραπάνω σχέση ότι μπορεί να υπάρξει απροσδιοριστία στο κλάσμα, οπότε εισάγεται ο παρακάτω περιορισμός του συστήματος στον φυσικό χώρο

$$0 < \theta_p < \pi \tag{3.11}$$

Ο περιορισμός αυτός εξασφαλίζει ότι  $\mathbf{c}_p \neq (0, 0, \pm 1)$  και άρα δεν υπάρχει περίπτωση απροσδιοριστίας στη Σχέση 3.10. Αντίστοιχα για την γωνία  $\theta_p$

$$\cos\theta_p = \cos c_p = \mathbf{e}_3^T \mathbf{c}_p = \frac{\mathbf{e}_3^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}{\gamma} \tag{3.12}$$

Παρατηρούμε ότι για την  $\theta_p$  δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα απροσδιοριστίας. Μπορούμε επομένως να επεκτείνουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων σε όλον στον χώρο κατάστασης του 2.2. Έστω  $\mathbf{q}_c = (x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c) \in \mathbb{E}_c$ . Ο χώρος  $\mathbb{E}_c = \mathbb{D}_c \times \mathbb{S}^1 \times [0, \pi]$  ονομάζεται *κανονικός χώρος κατάστασης* (*canonical state space*). Ορίζουμε τον μετασχηματισμό  $\psi : \mathbb{E}_c \rightarrow \mathbb{E}_p$  ως εξής

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_p \\ \phi_p \\ \theta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{r}_c) \\ \tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}\right) \\ \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{e}_3^T \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c}{\gamma}\right) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

---

<sup>1</sup>Το εσωτερικό γινόμενο το συμβολίζουμε τώρα ως  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$

Η Ιακωβιανή μήτρα και η ορίζουσα του  $\psi$  είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{J}_\psi = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_\phi & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$|\mathbf{J}_\psi| = |\mathbf{J}_\phi| |\mathbf{D}| \quad (3.15)$$

Όπως φαίνεται, ο  $\mathbf{J}_\psi$  είναι ένας σύνθετος πίνακας, η ορίζουσα του οποίου προκύπτει από την γνωστή ιδιότητα. Οι υπο-πίνακες  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  φαίνονται παρακάτω

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_p}{\partial x_c} & \frac{\partial \phi_p}{\partial y_c} & \frac{\partial \phi_p}{\partial z_c} \\ \frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} & \frac{\partial \theta_p}{\partial y_c} & \frac{\partial \theta_p}{\partial z_c} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_p}{\partial \phi_c} & \frac{\partial \phi_p}{\partial \theta_c} \\ \frac{\partial \theta_p}{\partial \phi_c} & \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στον παράρτημα του κεφαλαίου. Παρατηρούμε από τη Σχέση 3.15, δεδομένης της αντιστρεψιμότητας του  $\phi$ , ο  $\psi$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν μηδενίζεται η ορίζουσα του  $\mathbf{D}$ . Ο πίνακας αυτός ουσιαστικά είναι η Ιακωβιανή του παρακάτω συστήματος

$$\begin{aligned} \phi_p &= \phi_p(\phi_c, \theta_c) \\ \theta_p &= \theta_p(\phi_c, \theta_c) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Το σύστημα αυτό όμως, όπως φαίνεται από τις Σχέσεις 3.7,3.8, έχει λύση. Βέβαια, εκεί χρησιμοποιήθηκαν συνημίτονα κατεύθυνσης, ενώ εδώ το σύστημα είναι γραμμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες. Λαμβάνοντας υπόψιν την ιδιομορφία που παρουσιάζει ο μετασχηματισμός από το ένα σύστημα στο άλλο πάνω στον άξονα  $z$ , κάτι το οποίο είδαμε είδη στη Σχέση 3.10, αναμένουμε το σύστημα 3.17 να έχει πάντα λύση εκτός αν  $\mathbf{c}_p = (0, 0, \pm 1)$  ή  $\mathbf{c}_c = (0, 0, \pm 1)$ . Πράγματι, όπως αποδεικνύεται μετά από αρκετή άλγεβρα (Παράρτημα), η ορίζουσα του είναι

$$|\mathbf{D}| = \frac{|\mathbf{J}_\phi|}{\gamma^2} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{c}_c}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c} \right)^{1/2} = \frac{|\mathbf{J}_\phi|}{\gamma^3} \frac{\sin \theta_c}{\sin \theta_p} \quad (3.18)$$

όπου με  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$  συμβολίζουμε τις βάσεις του Καρτεσιανού τανυστή. Για να μην υπάρξει μηδενισμός της  $|\mathbf{D}|$  πρέπει να εισαχθεί ο ακόλουθος περιορισμός

$$0 < \theta_c < \pi \quad (3.19)$$

Ο περιορισμός αυτός εξασφαλίζει τόσο την αντιστρεψιμότητα της  $|\mathbf{D}|$  όσο και, από τη Σχέση 3.15, την αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού  $\psi$  (έχουμε βέβαια υποθέσει ότι  $|\mathbf{J}_\phi| \neq 0$ ). Τέλος, λόγω του περιορισμού της Σχέσης 3.11, δεν μπορεί να υπάρξει απειρισμός της  $|\mathbf{D}|$ .

### 3.3 Ο Μετασχηματισμός του Δυναμικού Συστήματος

Εφόσον βρέθηκε ο  $\psi$  που μετασχηματίζει τον χώρο κατάστασης και δείχθηκε ότι με τους περιορισμούς των Σχέσεων 3.11, 3.19 είναι παντού αντιστρέψιμος, μπορούμε να εξετάσουμε τώρα πως το κινηματικό μοντέλο εκφράζεται στον κανονικό χώρο. Παίρνοντας το διαφορικό της σχέσης  $\mathbf{q}_p = \psi(\mathbf{q}_c)$  και αντικαθιστώντας στη Σχέση 2.2 βρίσκουμε την έκφραση των κανονικών μεταβλητών κατάστασης

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{J}_\psi^{-1} f(\psi(\mathbf{q}_c)) \mathbf{u}_p \quad (3.20)$$

Αντιστρέφοντας την Ιακωβιανή  $\mathbf{J}_\psi$  κατά υπο-πίνακες (*blokwise inversion*) βρίσκουμε

$$\mathbf{J}_\psi^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_\phi^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{J}_\phi^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ο δεύτερος όρος του γινομένου της Σχέσης 3.20 προκύπτει από τη Σχέση 2.2 λαμβάνοντας υπόψιν τις 3.7, 3.9, ως εξής

$$f(\psi(\mathbf{q}_c)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις Σχέσεις 3.21, 3.22 προκύπτουν τελικά οι κανονικές μεταβλητές κατάστασης

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \mathbf{c}_c & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ -\frac{1}{\gamma} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{c}_c & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{u}_p \quad (3.23)$$



Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η είσοδος δεν επηρεάζεται από τον μετασχηματισμό. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό εισόδων.

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{M}(\mathbf{q}_c)\mathbf{u}_c = \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{C}\mathbf{c}_c & \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}_c \quad (3.24)$$

όπου  $\mathbf{u}_c = (u_c^1, u_c^2, u_c^3)$  το διάνυσμα εισόδων στον κανονικό χώρο. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{M}(\mathbf{q}_c)$  είναι αντιστρέψιμος, επειδή η  $\mathbf{D}$  είναι αντιστρέψιμη. Τελικά, αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση πίσω 3.23, βρίσκουμε

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \begin{pmatrix} \sin\theta_c \cos\phi_c \\ \sin\theta_c \sin\phi_c \\ \cos\theta_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_c^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_c^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_c^3 \quad (3.25)$$

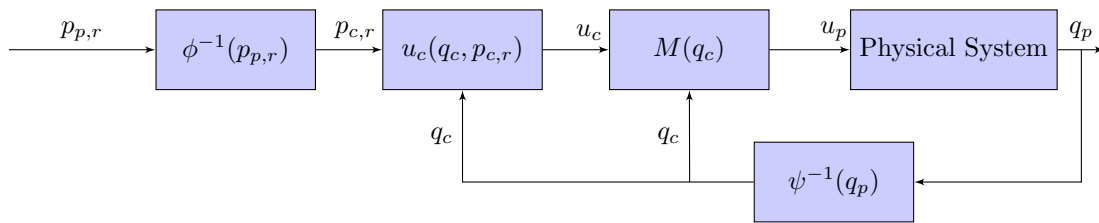
Όπως φαίνεται λοιπόν, το σύστημα στον κανονικό χώρο καταστάσεων έχει τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις με το αντίστοιχο στον φυσικό. Τα δύο συστήματα λέμε ότι βρίσκονται σε *ισοδυναμία ανάδρασης (feedback equivalent)* [27]. Πρέπει να ξανά τονίσουμε ότι η γραμμικότητα ως προς την είσοδο είναι πολύ σημαντική ιδιότητα καθώς η είσοδος  $\mathbf{u}_p$  δεν επηρεάστηκε από τον  $\psi$  και μπορέσαμε να βρούμε τον μετασχηματισμό εισόδων της 3.24 ο οποίος ουσιαστικά *αναίρεσε* την επίδραση του  $\psi$  πάνω στο σύστημα.

Εξετάζουμε τώρα πως μεταφέρεται ο έλεγχος από τον ένα χώρο στον άλλο. Έστω ένας δρόμος αναφοράς  $\mathbf{p}_{p,r}$  στον φυσικό χώρο (έχει παραληφθεί η παραμετροποίηση). Ο δρόμος αυτός απεικονίζεται στον κανονικό χώρο μέσω του  $\phi$  ως  $\mathbf{p}_{c,r} = \phi^{-1}(\mathbf{p}_{p,r})$ . Ακόμη, το κανονικό διάνυσμα κατάστασης προκύπτει μέσω του  $\psi$ , δηλαδή  $\mathbf{q}_c = \psi^{-1}(\mathbf{q}_p)$ . Τελικά, χρησιμοποιώντας και τον μετασχηματισμό εισόδων της 3.24, βρίσκουμε τον ελεγκτή στον φυσικό χώρο

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{M}(\mathbf{q}_c)\mathbf{u}_c(\psi^{-1}(\mathbf{q}_p), \phi^{-1}(\mathbf{p}_{p,r})) \quad (3.26)$$

Αυτή η εξίσωση φαίνεται και στον βρόχο ελέγχου του Σχήματος 3-1. Με βάση αυτόν τον βρόχο ελέγχου, καλούμαστε πια να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή στον κανονικό χώρο καταστά-

σεων, πράγμα όμως που δεν έχει καμία διαφορά από το να τον σχεδιάζαμε στον φυσικό, αφού το σύστημα έχει τις ίδιες εξισώσεις και στους δύο χώρους. Ωστόσο, αναφέραμε στην Παράγραφο 3.2 ότι ο  $\phi$  ορίζεται με βάση τον δρόμο αναφοράς του φυσικού χώρου και τον απεικονίζει σε ευθεία ή επίπεδο στον κανονικό. Δηλαδή, ο ελεγκτής του κανονικού χώρου θα είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας ενώ το σύστημα στον φυσικό χώρο θα παρακολουθεί δοσμένο δρόμο αναφοράς. Η συμμετρία των εξισώσεων, δηλαδή, επιτρέπει να πάρουμε ένα οποιοδήποτε υπάρχοντα ελεγκτή, να τον τροποποιήσουμε ώστε να παρακολουθεί ευθεία και με χρήση του παραπάνω βρόχου ελέγχου να οδηγήσουμε το σύστημα στην παρακολούθηση πολύπλοκων δρόμων στον φυσικό χώρο. Βέβαια, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, υπάρχουν και περιορισμοί στην μέθοδο.



Σχήμα 3-1: Ο βρόχος ελέγχου

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν έχει αναφερθεί κάποιος περιορισμός στην μορφή που μπορεί να έχει ο  $\phi$ , παρά μόνο ο μη μηδενισμός της ορίζουσάς του. Δηλαδή, η αποδειχθείσα συμμετρία ισχύει για οποιονδήποτε  $\phi$  με  $|\mathbf{J}_\phi| \neq 0$ . Στη Παράγραφο 3.2 υποχρεωθήκαμε βέβαια να εισάγουμε τους περιορισμούς των Σχέσεων 3.11, 3.19 ώστε να είναι δυνατή η επέκταση του μετασχηματισμού  $\phi$  στον χώρο κατάστασης και στην συνέχεια η αντιστροφή του  $\psi$ . Στα Κεφάλαια 4,5 θα εισάγουμε την προαναφερθείσα ειδική μορφή του  $\phi$  που έχει σαν βάση τον δρόμο αναφοράς. Σε αυτήν την περίπτωση όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα του Κεφαλαίου 5, ο εν λόγω περιορισμός του συστήματος μπορεί να αφαιρεθεί.

### 3.4 Ο Ελεγκτής Παρακολούθησης Ευθείας

Εφόσον το σύστημα στον κανονικό χώρο πρέπει να παρακολουθήσει μία ευθεία, θα περιγράψουμε σε αυτό το σημείο έναν κατάλληλο ελεγκτή, ο οποίος είναι απαραίτητος για τις προσομοιώσεις που θα παρουσιάσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Δεν θα κάνουμε κάποιον ιδιαί-

τερο σχεδιασμό, αλλά, όπως είπαμε παραπάνω, ένας υπάρχοντας ελεγκτής θα τροποποιηθεί. Επειδή οτιδήποτε αναπτύσσεται σε αυτήν την παράγραφο αναφέρεται στον κανονικό χώρο, ο σχετικός δείκτης παραλείπεται.

Ο ελεγκτής που επιλέχθηκε βασίζεται σε διανυσματικά πεδία [25]. Συγκεκριμένα, έστω δύο επιφάνειες του χώρου,  $a_1(\mathbf{r}) = 0$  και  $a_2(\mathbf{r}) = 0$ , όπου  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ . Υποθέτουμε ότι ο δρόμος που παρακολουθεί το σύστημα δίνεται από την τομή αυτών των επιφανειών. Ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}a_1^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}a_2^2(\mathbf{r}) \quad (3.27)$$

Θεωρώντας ότι η είσοδος είναι  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  παίρνουμε τον ακόλουθο ελεγκτή

$$\mathbf{v} = -K_1 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + K_2 \frac{\partial a_1}{\partial \mathbf{r}} \times \frac{\partial a_2}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.28)$$

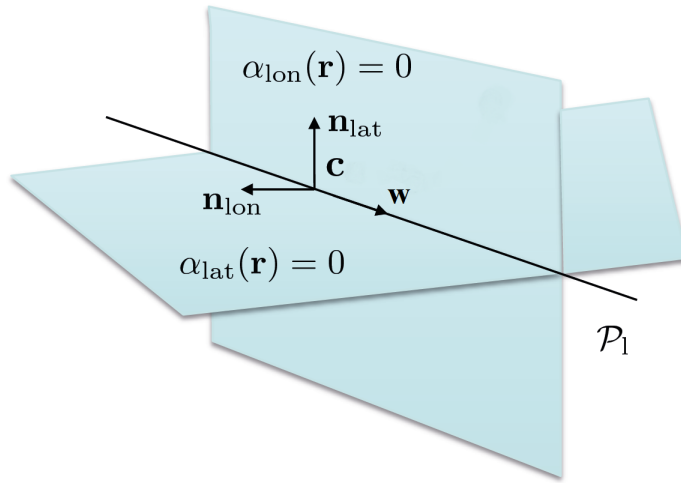
Όπου οι  $K_1, K_2$  είναι δύο συμμετρικοί πίνακες κερδών. Ο πρώτος όρος οδηγεί το σύστημα στην τομή των  $a_1(\mathbf{r}), a_2(\mathbf{r})$  και μηδενίζεται όταν αυτό βρίσκεται πάνω της, ενώ ο δεύτερος το οδηγεί κατά μήκος αυτής της τομής. Ο δεύτερος όρος είναι απαραίτητος καθώς χωρίς αυτόν η είσοδος θα μηδενίζονταν όταν το σύστημα έφτανε στην τομή. Αποδεικνύεται ότι για το σύστημα  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  και θετικά ορισμένους πίνακες  $K_1, K_2$  ο παραπάνω ελεγκτής είναι ασυμπτωτικά ευσταθής [10]. Από τις εξισώσεις του κινηματικού μοντέλου 3.25 προκύπτουν οι κανονικές είσοδοι

$$\begin{aligned} u^1 &= \|\mathbf{v}\| \\ u^2 &= \text{atan2}(v_2, v_1) \\ u^3 &= \cos^{-1}\left(\frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Βέβαια, η ευθεία που πρέπει να παρακολουθήσει το σύστημα στον κανονικό χώρο μπορεί πολύ εύκολα να γραφτεί σαν τομή δύο επιφανειών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1. Έστω ότι η ευθεία ορίζεται από ένα σημείο  $\mathbf{c}_l$  και ένα διάνυσμα  $\mathbf{w}$ , η οποία φαίνεται στο σχήμα 3-2

$$\mathbf{p}_l = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{c}_l + \lambda \mathbf{w}, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (3.30)$$

Έστω  $\mathbf{n}_{lat}, \mathbf{n}_{lon}$  δύο ορθοκανονικά διανύσματα του επιπέδου που ορίζει το διάνυσμα  $\mathbf{w}$ . Τα



Σχήμα 3-2: Η ευθεία αναφοράς του κανονικού χώρου [25]

δύο αυτά διανύσματα ορίζουν τα επίπεδα η τομή των οποίων μας δίνει την ευθεία  $\mathbf{p}_l$

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{n}_{lat}^T (\mathbf{r} - \mathbf{c}_l) \\ a_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{n}_{lon}^T (\mathbf{r} - \mathbf{c}_l) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας στη Σχέση 3.28 βρίσκουμε τον ζητούμενο ελεγκτή

$$\mathbf{v} = -K_1(\mathbf{n}_{lat}^T \mathbf{n}_{lat} + \mathbf{n}_{lon}^T \mathbf{n}_{lon})(\mathbf{r} - \mathbf{c}_l) + K_2(\mathbf{n}_{lon} \times \mathbf{n}_{lat}) \quad (3.32)$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι οι είσοδοι του συστήματος δίνονται από την 3.29. Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε την απλότητα αυτού του ελεγκτή. Συγκεκριμένα, το μόνο που χρειάζεται είναι την θέση του συστήματος, δηλαδή το διάνυσμα κατάστασης, και κανένα άλλο μέγεθος (πχ ολοκλήρωμα ή παράγωγο του σφάλματος). Βέβαια, χωρίς την μεθοδολογία που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, οι δυνατότητες του είναι περιορισμένες, καθώς δεν μπορούμε, γενικά, μία καμπύλη του χώρο να την εκφράσουμε σαν τομή δύο επιφανειών. Όμως, με την ισοδυναμία ανάδρασης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα μεγάλο εύρος καμπυλών.

## 3.5 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγαμε έναν αυθαίρετο μετασχηματισμού του φυσικού χώρου που κινείται το σύστημα. Έπειτα, τον επεκτείναμε στον χώρο κατάστασης του κινηματικού μοντέλου και αποδείξαμε ότι, με ένα περιορισμό του συστήματος, είναι παντού αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια, μετασχηματίσαμε το κινηματικό μοντέλο και δείξαμε ότι, με κατάλληλο μετασχηματισμό των εισόδων, παραμένει αναλλοίωτο. Τέλος, παρουσιάσαμε τον ελεγκτή παρακολούθησης ευθείας ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις.

## Παράρτημα

Εδώ θα εξάγουμε τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στην 3.16 και θα αποδείξουμε τη Σχέση 3.18. Για απλότητα παραλείπουμε τον δείκτη από την  $\mathbf{J}_\phi$ . Για  $w = \{x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c\}$ , από την 3.10 έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tan \phi_p}{\partial w} &= \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial \phi_p}{\partial \phi_c} = \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \right) = \frac{\mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c \mathbf{e}_2^T - \mathbf{e}_2^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c \mathbf{e}_1^T}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \frac{\partial \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\partial w} = \\ &= \frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} = \mathbf{c}_c^T \mathbf{J} \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \frac{\partial \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\partial w} = \\ &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \frac{\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21}}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \frac{\partial \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\partial w} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ακόμη για το συνημίτονο έχουμε

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi_p &= \frac{\cos^2 a_p}{\cos^2 a_p + \cos^2 b_p} = \frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T (\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}) \mathbf{J} \mathbf{c}_c} = \\ &= \frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις βρίσκονται τελικά όλες οι παραγώγοι της  $\phi_p$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial w} = \mathbf{A}_\phi \frac{\partial \mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\partial w} \quad (3.35)$$

όπου ορίστηκε ο ακόλουθος συντελεστής

$$\mathbf{A}_\phi = \frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21})}{\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c} \quad (3.36)$$

Αντίστοιχα, για την γωνία  $\theta_p$  έχουμε από τη Σχέση 3.12

$$\sin \theta_p = \sin c_p = (1 - \cos^2 c_p)^{1/2} = \frac{(\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_{33} \mathbf{J} \mathbf{c}_c)^{1/2}}{\gamma} \quad (3.37)$$

Τελικά παίρνουμε

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial w} = \mathbf{A}_\theta \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\mathbf{J} \mathbf{c}_c}{\gamma} \right) \quad (3.38)$$

όπου ορίστηκε ο αντίστοιχος συντελεστής  $\mathbf{A}_\theta$

$$\mathbf{A}_\theta = \frac{-\gamma \mathbf{e}_3^T}{(\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_{33} \mathbf{J} \mathbf{c}_c)^{1/2}} \quad (3.39)$$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην εύρεση της ορίζουσας της μήτρας  $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}| &= \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \phi_c} \mathbf{A}_\theta \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \theta_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c}{\gamma} \right) - \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c} \mathbf{A}_\theta \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \phi_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c}{\gamma} \right) = \\ &\mathbf{A}_\phi \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \phi_c} \frac{\partial}{\partial \theta_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T}{\gamma} \right) - \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c} \frac{\partial}{\partial \phi_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T}{\gamma} \right) \right\} (\mathbf{A}_\theta \mathbf{J})^T \end{aligned} \quad (3.40)$$

Οι μερικές παράγωγοι των συνημίτονων κατεύθυνσης υπολογίζονται εύκολα από τις εξισώσεις 3.9, ενώ οι όλοι δύο όρο μέσα στις αγκύλες γράφονται, χρησιμοποιώντας παράλληλα για το  $\gamma$  και τη Σχέση 3.5

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T}{\gamma} \right) &= \frac{\gamma \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} - \frac{\partial \sqrt{\mathbf{c}_c^T \mathbf{g} \mathbf{c}_c} \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c}}{\gamma^2} = \frac{2 \mathbf{c}_c^T \mathbf{g} \mathbf{c}_c \mathbf{c}_c^T \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} - 2 \mathbf{c}_c^T \mathbf{g} \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} \mathbf{c}_c^T}{2 \gamma^3} = \\ &\frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{g}}{\gamma^3} \left( \mathbf{c}_c \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} - \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c} \mathbf{c}_c^T \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Όμοια προκύπτει και ο άλλος όρος

$$\frac{\partial}{\partial \phi_c} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T}{\gamma} \right) = \frac{\mathbf{c}_c^T \mathbf{g}}{\gamma^3} \left( \mathbf{c}_c \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \phi_c} - \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \phi_c} \mathbf{c}_c^T \right) \quad (3.42)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο τελευταίες σχέσεις πάνω στη Σχέση 3.40 προκύπτει, μετά από λίγες στοιχειώδεις πράξεις, ότι η ορίζουσα μπορεί να διασπαστεί στην ακόλουθη μορφή

$$|\mathbf{D}| = \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} \mathbf{B} \mathbf{\Gamma} (\mathbf{A}_\theta \mathbf{J})^T \quad (3.43)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{\gamma^3} \left( \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \phi_c} \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} - \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c} \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \phi_c} \right) \\ \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{c}_c^T \mathbf{g} \mathbf{c}_c \mathbf{I}_3 - \mathbf{g} \mathbf{c}_c \mathbf{c}_c^T = \gamma^2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c \mathbf{c}_c^T \end{aligned} \quad (3.44)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος μέσα στην παρένθεση του  $\mathbf{B}$  είναι ουσιαστικά ο μεταθέτης (*commutator*) του διανύσματος

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \phi_c} \times \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c} = -\sin\theta_c \mathbf{c}_c \quad (3.45)$$

Με βάση αυτό η Σχέση 3.43 γράφεται, χρησιμοποιώντας και τον παραπάνω ορισμό της  $\mathbf{\Gamma}$ , ως εξής

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}| &= \frac{1}{\gamma^3} \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} [\mathbf{a}]_x \mathbf{\Gamma} \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\theta^T = \frac{1}{\gamma^3} \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} (\mathbf{a} \times \mathbf{\Gamma} \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\theta^T) = \\ &= \frac{1}{\gamma^3} \mathbf{a}^T (\mathbf{\Gamma} \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\theta^T \times \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\phi^T) = \\ &= \frac{1}{\gamma^3} \mathbf{a}^T (\gamma^2 \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\theta^T \times \mathbf{A}_\phi \mathbf{J} - \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{c}_c \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\theta^T \times \mathbf{J}^T \mathbf{A}_\phi^T) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $\mathbf{M} \mathbf{a} \times \mathbf{M} \mathbf{b} = |\mathbf{M}| \mathbf{M}^{-T} \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  στους δύο όρους της παρένθεσης, αλλά και την σχέση  $\mathbf{J} \mathbf{c}_c \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T = \gamma^2 \mathbf{c}_p \mathbf{c}_p^T$  παίρνουμε

$$|\mathbf{D}| = \frac{|\mathbf{J}| \mathbf{a}^T \mathbf{J}^{-1}}{\gamma} \{ (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}_p \mathbf{c}_p^T) \mathbf{A}_\theta^T \times \mathbf{A}_\phi^T \} \quad (3.47)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε τους δύο προηγούμενους ορισμούς των συντελεστών  $\mathbf{A}_\theta, \mathbf{A}_\phi$  για να πάρουμε

$$|\mathbf{D}| = -\frac{|\mathbf{J}| \mathbf{a}^T \mathbf{J}^{-1}}{\sqrt[3]{\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_{33} \mathbf{J} \mathbf{c}_c}} \left\{ \left( (\mathbf{I}_3 - \mathbf{c}_p \mathbf{c}_p^T) \mathbf{e}_3 \right) \times \left( (\mathbf{e}_{12} - \mathbf{e}_{21}) \gamma \mathbf{c}_p \right) \right\} \quad (3.48)$$

Οι όροι μέσα στην αγκύλη προκύπτουν με απλές πράξεις, και παίρνουμε

$$|\mathbf{D}| = -\frac{\gamma \sin^2 \theta_p |\mathbf{J}| \mathbf{a}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{c}_p}{\sqrt[3]{\gamma^2 - \mathbf{c}_c^T \mathbf{J}^T \mathbf{e}_{33} \mathbf{J} \mathbf{c}_c}} \quad (3.49)$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα τις Σχέσεις 3.37, 3.45, 3.7 βρίσκουμε

$$|\mathbf{D}| = \frac{|\mathbf{J}_\phi|}{\gamma^2} \left( \frac{\mathbf{c}_c^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{c}_c}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c} \right)^{1/2} = \frac{|\mathbf{J}_\phi| \sin\theta_c}{\gamma^3 \sin\theta_p} \quad (3.50)$$



## Κεφάλαιο 4

# Παρακολούθηση Καμπυλών στον Χώρο

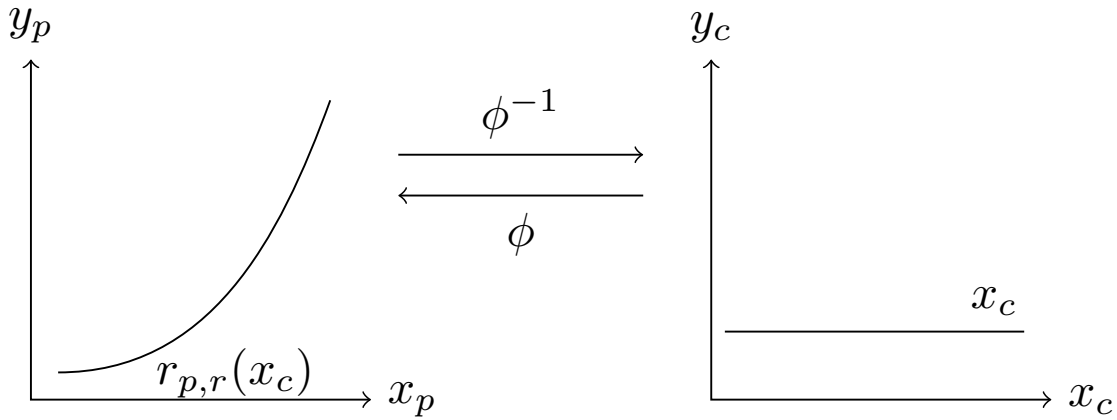
### 4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισάγαμε τον μετασχηματισμό  $\phi$  και αναφέραμε ότι ορίζεται με βάση τον δρόμο αναφοράς του φυσικού χώρου. Ωστόσο, δεν ασχοληθήκαμε με τον τυπικό ορισμό, αλλά εξετάσαμε πως αυτός επεκτείνεται στον χώρο κατάστασης και πως επηρεάζει το σύστημα. Εφόσον καταλήξαμε ότι η αντιστρεψιμότητα του  $\phi$  είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι αντιστρέψιμος ο  $\psi$ , μπορούμε να επικεντρωθούμε τώρα στον ορισμό του  $\phi$ .

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μας απασχολήσει αυτός ακριβώς ο ορισμός για δύο διαφορετικές περιπτώσεις δρόμων αναφοράς. Στην πρώτη περίπτωση, η οποία έχει κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον, ο δρόμος αναφοράς στον φυσικό χώρο είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Στην δεύτερη περίπτωση, που έχει περισσότερο πρακτικό ενδιαφέρον, ο δρόμος είναι μία πολυγωνική αλυσίδα. Και για τις δύο περιπτώσεις, παρουσιάζονται στο τέλος αποτελέσματα προσομοιώσεων.

## 4.2 Η Ομαλή Καμπύλη

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναπτύξουμε την πρώτη από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, έστω ότι ο δρόμος αναφοράς που πρέπει να παρακολουθήσει το σύστημα 2.2 στον φυσικό χώρο είναι μία αναλυτική, συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη  $\mathbf{r}_{p,r}(x_c) = (x_{p,r}(x_c), y_{p,r}(x_c), z_{p,r}(x_c)) \in \mathbb{D}_p$  η οποία παραμετροποιείται από την παράμετρο  $x_c$ , όπως φαίνεται για απλότητα σε δύο διαστάσεις στο Σχήμα 4-1. Η παράμετρος  $x_c$  δεν είναι απαραίτητο να είναι το μήκος τόξου.



Σχήμα 4-1: Η καμπύλη αναφοράς και η παραμετροποίηση

Έστω ακόμη δύο διανύσματα  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z \in \mathbb{D}_p$ . Ορίζουμε τον ζητούμε μετασχηματισμό  $\phi : \mathbb{D}_c \rightarrow \mathbb{D}_p$  σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{p,r}(x_c) + y_c \mathbf{u}_y + z_c \mathbf{u}_z \quad (4.1)$$

όπου  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p) \in \mathbb{D}_p$ ,  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c) \in \mathbb{D}_c$  είναι οι θέσεις του συστήματος στον φυσικό χώρο και στον κανονικό χώρο αντίστοιχα. Αυτό που κάνει ουσιαστικά ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι να ολισθαίνει τη καμπύλη αναφοράς κατά μήκος των διανυσμάτων  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ . Ως εκ τούτου, αυτά ονομάζονται διανύσματα ολίσθησης (*shifting vectors*). Η Ιακωβιανή μήτρα

και ορίζουσα του μετασχηματισμού προκύπτουν ως εξής

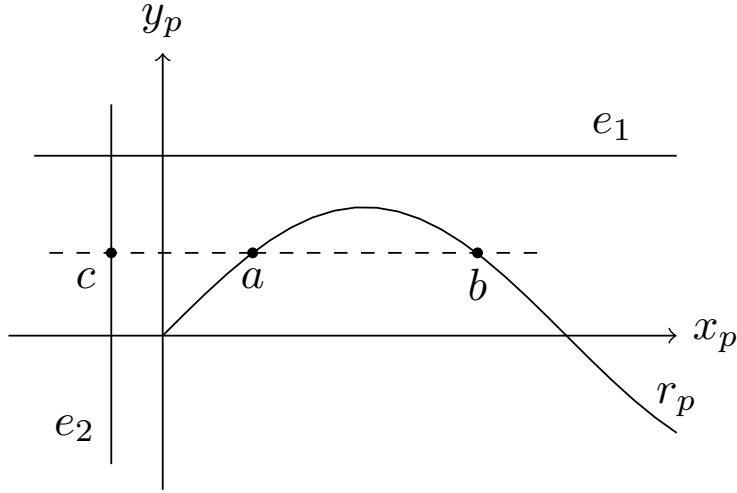
$$\mathbf{J}_\phi = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{p,r} & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$|\mathbf{J}_\phi| = \mathbf{u}_{p,r} \cdot (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z) = \mathbf{u}_{p,r} \cdot \mathbf{n}_s \quad (4.3)$$

Οι στήλες τις Ιακωβιανής είναι ουσιαστικά τα  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης,  $\mathbf{u}_{p,r} = \mathbf{r}'_{p,r}(x_c)$  είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης (ουσιαστικά η ταχύτητα αναφοράς) και  $\mathbf{n}_s = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z$  είναι το κάθετο των διανυσμάτων ολίσθησης. Αυτό το διάνυσμα ορίζει ένα επίπεδο το οποίο ονομάζουμε *επίπεδο ολίσθησης* (*shifting plane*). Η παραπάνω ορίζουσα δεν πρέπει να μηδενίζεται πουθενά και επομένως πρέπει να περιοριστούν τα διανύσματα ολίσθησης. Φαίνεται ότι το επίπεδο ολίσθησης δεν μπορεί να είναι παράλληλο σε οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα και φυσικά τα διανύσματα ολίσθησης δεν πρέπει να είναι παράλληλα. Άρα η επιλογή τους πρέπει να γίνει έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι δύο αυτές συνθήκες.

Κάθε καμπύλη, επομένως, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αυτήν την μεθοδολογία. Συγκεκριμένα, οι κλειστές καμπύλες είναι μία κλάση που δεν αντιστρέφεται. Αν επιλέξουμε δύο οποιοδήποτε διανύσματα ολίσθησης και σαρώσουμε με το αντίστοιχο επίπεδο ολίσθησης τον χώρο, τότε αναγκαστικά κάπου θα συναντήσουμε μια κλειστή καμπύλη σε δύο σημεία. Επομένως θα υπάρχει κάποιο εφαπτόμενο διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο ολίσθησης, πράγμα που μηδενίζει την ορίζουσα.

Βέβαια, το να μην είναι κλειστή μία καμπύλη δεν αρκεί. Αυτό που αρκεί είναι μια γενικευμένη έννοια μονοτονίας [26]. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4-2, η καμπύλη  $\mathbf{r}_p$  λέγεται μονότονη ως προς την ευθεία  $e_1$  επειδή η προβολή της σε αυτήν είναι αμφιμονοσήμαντη. Αντίθετα, ως προς την ευθεία  $e_2$  δεν είναι μονότονη επειδή, όπως φαίνεται, τα σημεία  $a, b$  προβάλλονται στο  $c$ . Δηλαδή σε αυτήν την διδιάστατη περίπτωση αρκεί η εύρεση μίας τέτοιας ευθείας  $e_1$ . Η επέκταση αυτού στις τρεις διαστάσεις είναι άμεση. Αρκεί να βρεθεί ένα επίπεδο  $\pi$  στο οποίο η προβολή, έστω  $\mathbf{r}'_p$ , της  $\mathbf{r}_p$  να είναι αμφιμονοσήμαντη. Στην συνέχεια είναι απαραίτητη, ανάλογα με την  $e_1$ , μία ευθεία του  $\pi$  τέτοια ώστε η προβολή της  $\mathbf{r}'_p$  πάνω σε αυτήν να είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη. Αν αυτά υπάρχουν, το  $\pi$  είναι το ζητούμενο επίπεδο ολίσθησης.



Σχήμα 4-2: Μονότονη ως προς ευθεία καμπύλη

Εφόσον εξασφαλιστεί με κατάλληλη επιλογή των διασμάτων ολίσθησης ο μηδενισμός της ορίζουσας, είναι δυνατή η αντιστροφή του μετασχηματισμού. Από τη Σχέση 4.1 πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με το  $\mathbf{u}_s$  παίρνουμε

$$\mathbf{u}_s \mathbf{r}_p = \mathbf{u}_s \mathbf{r}_{p,r} \quad (4.4)$$

Ορίζουμε σαν νέες μεταβλητές την  $\hat{x}_p = \mathbf{u}_s \mathbf{r}_p$  και  $\hat{x}_{p,r}(x_c) = \mathbf{u}_s \mathbf{r}_{p,r}(x_c)$ . Παρατηρούμε ότι  $\frac{\partial \hat{x}_{p,r}}{\partial x_c} = \mathbf{u}_s \mathbf{v}_{p,r} = |\mathbf{J}_\phi| \neq 0$ , άρα

$$x_c = \hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p) \quad (4.5)$$

Θεωρώντας ότι τα  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$  είναι κάθετα και πολλαπλασιάζοντας την 4.1 εσωτερικά με  $\mathbf{u}_y$  λαμβάνουμε

$$y_c = \mathbf{u}_y (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p,r}(x_c)) = \mathbf{u}_y (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p,r}(\hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p))) \quad (4.6)$$

Με παρόμοια διαδικασία βρίσκεται και η τρίτη κανονική μεταβλητή. Τελικά, ο αντίστροφος μετασχηματισμός γράφεται

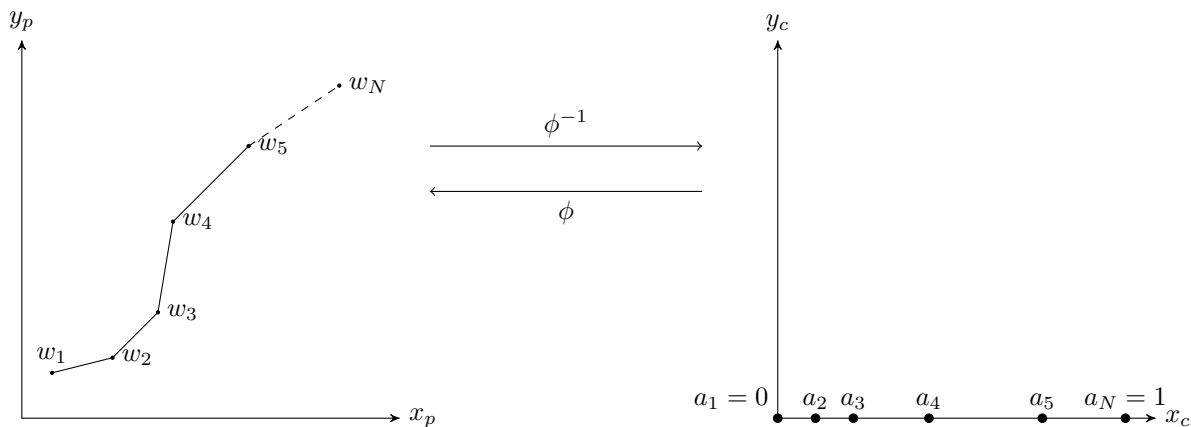
$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p) \\ \mathbf{u}_y (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p,r}(\hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p))) \\ \mathbf{u}_z (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p,r}(\hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p))) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Η παραπάνω υπόθεση ότι τα  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$  είναι κάθετα δεν είναι απολύτως απαραίτητη. Αν δεν ήταν κάθετα θα προέκυπτε ένα γραμμικό σύστημα για να ως προς  $y_c, z_c$ . Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι όταν στον φυσικό χώρο το σύστημα πάνω στην καμπύλη αναφοράς δηλαδή  $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{p,r}$ , τότε στον κανονικό χώρο βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x_c$ .

Αν και η ανάπτυξη ήταν πολύ απλή, διαφαίνονται δύο περιορισμοί. Αρχικά, δεν είναι γενικά εύκολο να εκφράσουμε κάθε πιθανό δρόμο που μπορεί να κληθεί να παρακολουθήσει το σύστημα σαν μία απλή, συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Αλλά, ακόμη και το κάνουμε η έκφραση της θα πρέπει να είναι αρκετά απλή ώστε να είναι δυνατή η αντιστροφή της 4.5. Μια πολύπλοκη, λόγω χάρη, πολυωνυμική συνάρτηση που προέρχεται από μία παρεμβολή είναι μεν εύκολο να την εξάγουμε αλλά δεν ήταν πρακτικά χρήσιμη.

### 4.3 Πολυγωνική Αλυσίδα

Θα προχωρήσουμε σε αυτό το σημείο σε μία πιο πρακτική περίπτωση, όπου υποθέτουμε ότι ο δρόμος αναφοράς είναι μία πολυγωνική αλυσίδα που αποτελείται από τα σημεία  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{D}_p, n = 1..N$ . Πριν κατασκευαστεί ο μετασχηματισμός είναι απαραίτητη η παραμετροποίηση της πολυγωνικής αλυσίδας. Έστω ότι κάθε σημείο  $\mathbf{w}_k$  της αλυσίδας απεικονίζεται στο σημείο  $a_k$  του κανονικού άξονα  $x_c$  σύμφωνα με το σχετικό μήκος της αντίστοιχης ακμής, όπως φαίνεται στο  $x_p y_p$  επίπεδο στο Σχήμα 4-3, δηλαδή



Σχήμα 4-3: Παραμετροποίηση πολυγωνικής αλυσίδας

$$a_k = \sum_{k=0}^N \frac{S_k}{S} \quad (4.8)$$

όπου ορίζεται ως  $S_k$  το μήκος της κάθε ακμής και  $S$  το μήκος όλη της γραμμής

$$S_k = \|\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_{k-1}\|, S = \sum_{k=0}^N S_k \quad (4.9)$$

Επειδή είναι απαραίτητη μία αρχικοποίηση για  $k = 1$ , επιλέγεται  $S_1 = 0$ . Επομένως, όλη η πολυγωνική αλυσίδα απεικονίζεται στο τμήμα  $[0, 1]$  του κανονικού άξονα  $x_c$ . Για την κατασκευή της παραμετροποίησης, ορίζεται αρχικά το μοναδιαίο διάνυσμα από το  $\mathbf{w}_k$  στο  $\mathbf{w}_{k+1}$ , δηλαδή

$$\mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{w}_k\|} \quad (4.10)$$

Έστω ένα σημείο  $x_c \in [a_k, a_{k+1})$  η προβολή του οποίου στον φυσικό χώρο κείται στην ακμή  $[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1})$  και βρίσκεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση  $\mathbf{f}_k(x_c) = \mathbf{w}_k + S(x_c - a_k)\mathbf{v}_k$ . Ορίζοντας επομένως την δείκτρια συνάρτηση του τμήματος  $[a_k, a_{k+1})$

$$\psi_k(x_c) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_c \in [a_k, a_{k+1}) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.11)$$

επεκτείνεται η παραπάνω συνάρτηση  $\mathbf{f}_k(x_c)$  σε όλη την αλυσίδα

$$\mathbf{f}(x_c) = \sum_{k=0}^N \mathbf{f}_k(x_c)\psi_k(x_c) = \sum_{k=0}^N (\mathbf{w}_k + S(x_c - a_k)\mathbf{v}_k)\psi_k(x_c) \quad (4.12)$$

Παρατηρούμε ότι για να συμπεριληφθεί όλη την αλυσίδα είναι απαραίτητοι μόνο οι όροι από  $k = 1 \dots N - 1$ . Ωστόσο, η πολυγωνική αλυσίδα, σε αντίθεση με την καμπύλη της προηγούμενης παραγράφου, δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Άρα, προκειμένου να συμπεριληφθεί όλος ο φυσικός χώρος, είναι απαραίτητη η επέκταση της. Αυτό ακριβώς εξυπηρετούν οι δύο επιπλέον όροι του αθροίσματος, για τους οποίους ισχύει  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_N = \mathbf{v}_{N-1}$  και  $a_0 = -\infty, a_{N+1} = +\infty$ . Ουσιαστικά δηλαδή με αυτόν τον τρόπο επεκτείνεται η πρώτη και η τελευταία ακμή.

Έχοντας την παραμετροποίηση, μπορεί να κατασκευαστεί ο μετασχηματισμός  $\phi$ , ακολουθώ-

ντας παρόμοια διαδικασία με την προηγούμενη παράγραφο, ολισθαίνοντας δηλαδή την αλυσίδα. Έστω  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ ,  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$  δύο σημεία του φυσικού και κανονικού χώρου αντίστοιχα καθώς και  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$  τα δύο διανύσματα ολίσθησης. Τότε

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{f}(x_c) + y_c \mathbf{u}_y + z_c \mathbf{u}_z \quad (4.13)$$

Η Ιακωβιανή μήτρα και ορίζουσα είναι αντίστοιχα, θεωρώντας ότι  $x_c \neq a_k$

$$\mathbf{J}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'(x_c) & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$|\mathbf{J}_\phi| = \mathbf{f}'(x_c) \cdot (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z) = \mathbf{f}'(x_c) \cdot \mathbf{n}_s \quad (4.15)$$

όπου

$$\mathbf{f}'(x_c) = \sum_{k=0}^N S \mathbf{v}_k \psi_k(x_c) \quad (4.16)$$

Ο περιορισμός  $x_c \neq a_k$  είναι απαραίτητος καθώς φαίνεται από τη Σχέση 4.12, η πολυγωνική καμπύλη δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα των ακμών. Αυτό βέβαια το γεγονός επηρεάζει το σύστημα στον κανονικό χώρο καθώς το κάνει χρουστικό. Η μελέτη αυτή ξεφεύγει όμως από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας και μπορεί να αναζητηθεί για ένα παρόμοιο κινηματικό μοντέλο στο [21]. Όπως φαίνεται από τη Σχέση 4.15, η συνθήκη αντιστροφής της  $\mathbf{J}_\phi$  παραμένει ίδια με πριν, δηλαδή το επίπεδο ολίσθησης δεν πρέπει να είναι παράλληλο σε κάποιο εφαπτόμενο διάνυσμα. Βέβαια, σε αυτήν την περίπτωση τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι ουσιαστικά οι ακμές τις αλυσίδας. Λαμβάνοντας υπόψιν τη Σχέση 4.12 η Σχέση 4.13 γράφεται ως εξής

$$\mathbf{r}_p = \sum_{k=0}^N S \mathbf{v}_k \psi_k(x_c) + y_c \mathbf{u}_y + z_c \mathbf{u}_z + \sum_{k=0}^N (\mathbf{w}_k - S a_k \mathbf{v}_k) \psi_k(x_c) \quad (4.17)$$

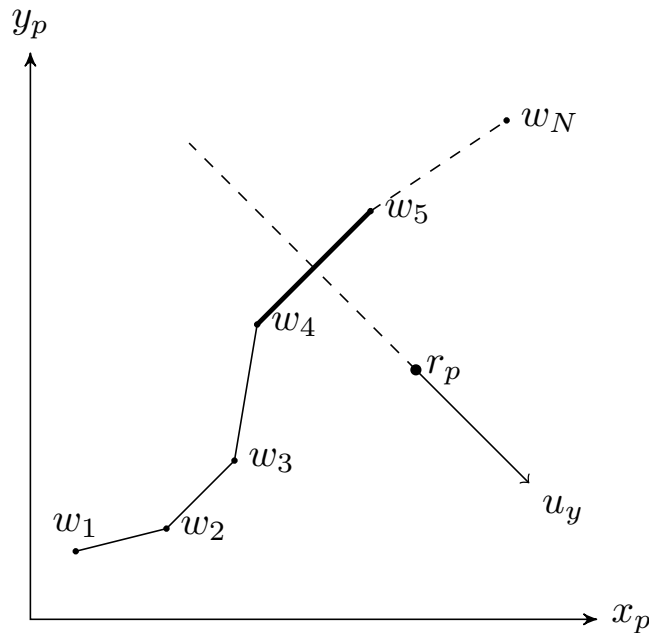
χρησιμοποιώντας τη Σχέση (4.14) η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{J}_\phi \mathbf{r}_c + \sum_{k=0}^N (\mathbf{w}_k - S a_k \mathbf{v}_k) \psi_k(x_c) \quad (4.18)$$

και από αυτήν την σχέση λύνοντας ως προς  $r_c$

$$r_c = \mathbf{J}_\phi^{-1} \left( r_p - \sum_{k=0}^N (w_k - S a_k v_k) \psi_k(x_c) \right) \quad (4.19)$$

Φυσικά, η παραπάνω δεν είναι πραγματική λύση καθώς το δεξιό μέρος εξαρτάται μέσω της δείκτηρας συνάρτησης από το  $x_c$ . Ωστόσο, μπορούμε, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4-4, σε κάθε σημείο  $r_p$  να βρούμε αλγοριθμικά ποιά ακμή είναι ενεργή. Συγκεκριμένα, το  $r_p$  και τα δύο διανύσματα ολίσθησης ορίζουν ένα επίπεδο (το επίπεδο ολίσθησης) το οποίο τέμνει την πολυγωνική αλυσίδα στην ακμή μεταξύ των  $w_k$  και  $w_{k+1}$  και μας δίνει το ζητούμενο  $k$ . Έτσι το άθροισμα εκφυλίζεται σε έναν μόνο όρο.



Σχήμα 4-4: Εύρεση ενεργής ακμής

Από αυτό είναι σαφές ότι το επίπεδο αυτό θα πρέπει να τέμνει την αλυσίδα σε ένα μόνο σημείο για να είναι αντιστρέψιμος ο μετασχηματισμός. Αν την τέμνει σε περισσότερα δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιά ακμή είναι ενεργή. Σε αυτήν την περίπτωση, επομένως, η συνθήκη αντιστροφής του μετασχηματισμού δεν δίνεται από την ορίζουσα. Συγκεκριμένα, για μία κλειστή καμπύλη μπορούμε να βρούμε ένα επίπεδο που δεν είναι παράλληλο στις ακμές τις (πράγμα που μας δίνει παντού μη μηδενική ορίζουσα), αλλά οποιοδήποτε επίπεδο ολίσθησης θα την τέμνει



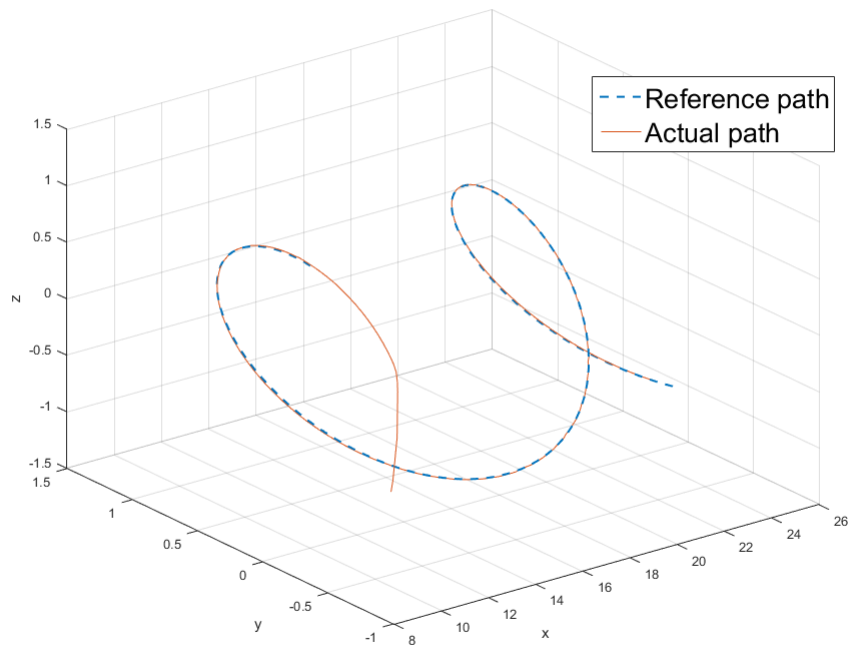
περισσότερες από μία φορές.

## 4.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την παράγραφο αποτελέσματα προσομοιώσεων της μεθόδου που αναπτύξαμε. Ο ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας που χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις προσομοιώσεις είναι αυτός της Παραγράφου 3.5, ενώ ο βρόχος ελέγχου που υλοποιήθηκε είναι αυτός του Σχήματος 3-1. Αρχικά για την πρώτη περίπτωση ως αναφοράς επιλέχθηκε η ακόλουθη ελικοειδής καμπύλη

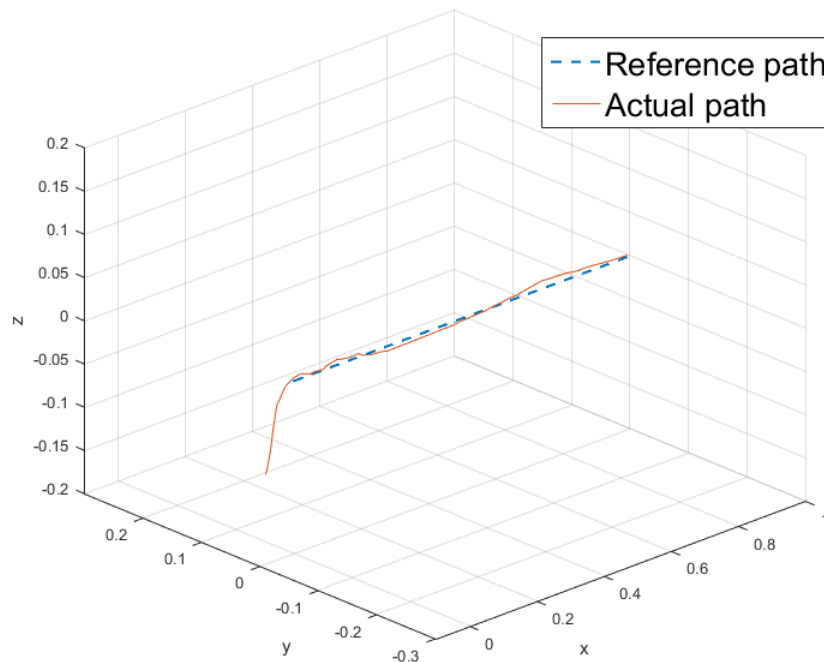
$$\mathbf{r}_{p,r}(x_c) = (10e^{0.1x_c}, \sin x_c, \cos x_c) \quad (4.20)$$

Τα διανύσματα ολίσθησης είναι  $\mathbf{u}_y = \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{u}_z = \mathbf{e}_3$  και μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης παράλληλο στο επίπεδο ολίσθησης που ορίζουν.



Σχήμα 4-5: Ομαλή καμπύλη - φυσικός χώρος

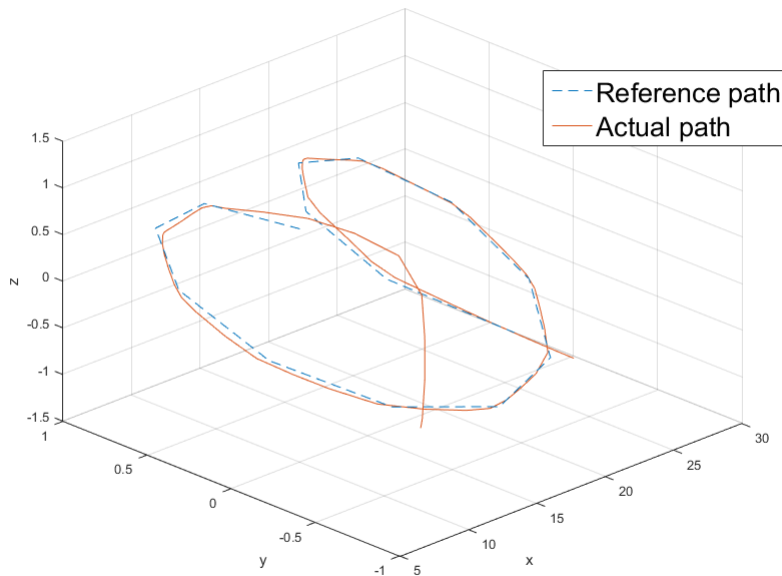
Η έξοδος στον φυσικό χώρο φαίνεται στο Σχήμα 4-5. Παρατηρούμε ότι, μετά από ένα μικρό μεταβατικό διάστημα, το σύστημα συγκλίνει στον επιθυμητό δρόμο. Δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο σφάλμα μόνιμης κατάστασης ούτε κάποιο έντονο μεταβατικό φαινόμενο. Ο αντίστοιχος κανονικός χώρος, που φαίνεται στο Σχήμα 4-6, επιβεβαιώνει πράγματι τα προηγούμενα. Το σύστημα συγκλίνει γρήγορα στον άξονα  $x_c$  και δεν φαίνεται να αποκλίνει από αυτόν.



Σχήμα 4-6: Ομαλή καμπύλη - κανονικός χώρος

Προχωράμε τώρα στην περίπτωση της πολυγωνικής αλυσίδας. Για να είναι δυνατή η σύγκριση των δύο περιπτώσεων, η πολυγωνική αλυσίδα της προσομοίωσης εξήχθη δειγματοληπτώντας την παραπάνω συνεχή καμπύλη. Η μόνη ουσιαστική διαφοροποίηση στον βρόγχο ελέγχου είναι η εύρεση της ενεργής ακμής. Για την εύρεση της γίνεται μία γραμμική αναζήτηση σε όλες τις ακμές της πολυγωνικής αλυσίδας, όπου τα διανύσματα  $\mathbf{r}_p - \mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{r}_p - \mathbf{w}_{k+1}$  προβάλλονται στο διάνυσμα  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z$ . Η ενεργή ακμή είναι αυτή για την οποία έχουμε αλλαγή πρόσημου σε αυτές τις δύο προβολές. Η χρονική πολυπλοκότητα αυτού του αλγορίθμου είναι γραμμική και για μερικές δεκάδες ακμές δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα. Ωστόσο, αν οι ακμές γίνουν μερικές εκατοντάδες και σε συνδυασμό με την περίοδο δειγματοληψίας, μπορεί να εμφανιστεί πρόβλημα

σε μία πειραματική υλοποίηση. Βέβαια, εφόσον προφανώς υπάρχει συνέχεια, σε κάθε χρονικό σημείο η ενεργή ακμή θα είναι ένα από τους δύο γείτονες της προηγούμενης ενεργής ακμής. Άρα η σάρωση ολόκληρης της αλυσίδας πρέπει να γίνει μόνο μία φορά.

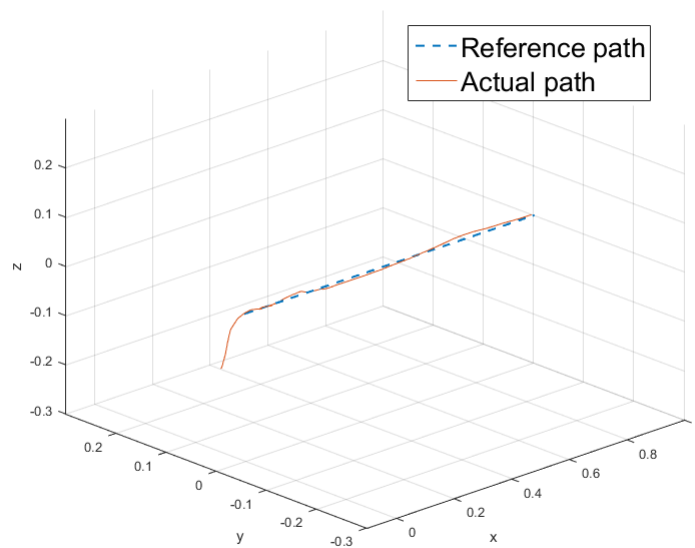


Σχήμα 4-7: Πολυγωνική αλυσίδα - φυσικός χώρος

Στο Σχήμα 4-7 φαίνεται το αποτέλεσμα της προσομοίωσης στον φυσικό χώρο. Μετά την μεταβατική κατάσταση το σύστημα φαίνεται και συγκλίνει στην αναφορά. Ωστόσο δεν την παρακολουθεί ακριβώς, πράγμα που ήταν αναμενόμενο σύμφωνα καθώς το σύστημα δεν μπορεί να παρακολουθήσει για περιορισμένο έλεγχο καμπύλες που δεν είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Μπορούμε βέβαια με καλύτερη σχεδίαση ελεγκτή (ή με κάποιον άλλο ελεγκτή) να βελτιώσουμε πολύ την απόκριση. Ωστόσο, το ζητούμενο εδώ δεν είναι η βέλτιστη σχεδίαση ελεγκτή, αλλά να καταδείξουμε ότι η μεθοδολογία επιτυγχάνει και στην πράξη το προβλεπόμενο από την θεωρία αποτέλεσμα. Τέλος, στο Σχήμα 4-8 φαίνεται ο αντίστοιχος κανονικός χώρος.

## 4.5 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε τον μετασχηματισμό  $\phi$ , ο οποίος είχε αναφερθεί στο προηγούμενο, για δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση υποθέσαμε ότι ο δρόμος



Σχήμα 4-8: Πολυγωνική αλυσίδα - κανονικός χώρος

αναφοράς στον φυσικό χώρο είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Με την χρήση δύο διανυσμάτων ολισθήσαμε αυτήν την καμπύλη και καλύψαμε όλον τον φυσικό χώρο. Βρήκαμε την συνθήκη αντιστροφής της Ιακωβιανής και είδαμε πως αυτής επηρεάζει την επιλογή των διανυσμάτων ολίσθησης. Τα ίδια εφαρμόσαμε και στην πολυγωνική αλυσίδα, αφού βέβαια πρώτα την παραμετροποιήσαμε. Η σημαντική διαφορά εδώ ήταν ότι η συνθήκη αντιστροφή του μετασχηματισμού δεν δίνεται από την Ιακωβιανή. Τέλος, παρουσιάσαμε αποτελέσματα προσομοιώσεων και για τις δύο περιπτώσεις, στα οποία χρησιμοποιήσαμε τον ελεγκτή που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

# Κεφάλαιο 5

## Παρακολούθηση Επιφανειών

### 5.1 Εισαγωγή

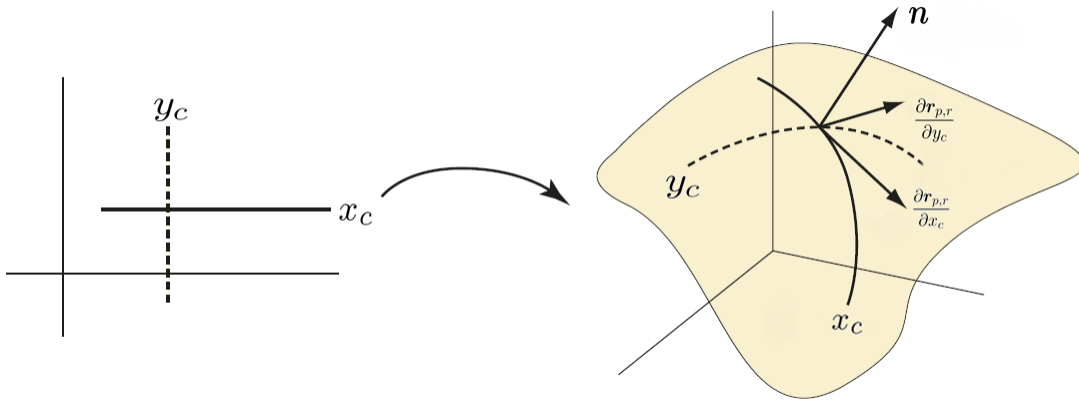
Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων για τις περιπτώσεις όπου το σύστημα καλείται να παρακολουθήσει καμπύλες στον χώρο. Ωστόσο, αρκετές φορές στην πράξη αυτό δεν αρκεί. Συγκεκριμένα, ίσως να χρειάζεται το σύστημα να παρακολουθεί καμπύλες που ανήκουν σε μία επιφάνεια του χώρου. Σε αυτήν την περίπτωση είναι πιο απλό να σχεδιάσουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων με βάση την επιφάνεια, από το να επαναλαμβάνουμε την σχεδίαση του προηγούμενου κεφαλαίου για κάθε διαφορετική καμπύλη της επιφάνειας.

Ωστόσο, τώρα έχουμε μία επιπλέον παράμετρο που πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας: την παραμόρφωση που εισάγει ο μετασχηματισμός. Πολύ απλοϊκά, αν ένα συγκεκριμένο μήκος απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού σε ένα πολύ διαφορετικό μήκος τότε αυτό θα πρέπει να το λάβουμε υπόψιν στον σχεδιασμό του ελεγκτή, πράγμα που θα αυξήσει πάρα πολύ την πολυπλοκότητά του. Δηλαδή, ιδανικά θέλουμε η επιφάνεια να παραμετροποιείται ισομετρικά.

Το κεφάλαιο ακολουθεί την δομή του προηγούμενου. Αρχικά παρουσιάζεται ένα θεωρητικό θέμα, όπου υποθέτουμε ότι η επιφάνεια είναι αναλυτική και συνεχώς παραγωγίσιμη. Έπειτα, αναπτύσσουμε μία περισσότερο πρακτική περίπτωση, όπου η επιφάνειά είναι ένα σύνολο ενωμένων τριγώνων. Τέλος, παρουσιάζουμε αποτελέσματα προσομοιώσεων και για τις δύο περιπτώσεις.

## 5.2 Η Ομαλή Επιφάνεια

Θα ξεκινήσουμε σε αυτήν την παράγραφο με την πρώτη από τις δύο περιπτώσεις. Υποθέτουμε ότι το σύστημα 2.2 καλείται στον φυσικό χώρο να παρακολουθεί καμπύλες που ανήκουν σε μία επιφάνεια  $\mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c) = (x_{p,r}(x_c, y_c), y_{p,r}(x_c, y_c), z_{p,r}(x_c, y_c))$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-1, η οποία υποθέτουμε ότι έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης. Οι κανονικές μεταβλητές  $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$  είναι αυτές που παραμετροποιούν την επιφάνεια. Η διαδικασία για την κατασκευή του μετασχηματισμού  $\phi$  παραμένει ίδια με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Έστω  $z_c$  η τρίτη κανονική μεταβλητή και  $\mathbf{u}_z$  το διάνυσμα ολίσθησης. Για κάθε σημείο  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$  του φυσικού χώρου έχουμε



Σχήμα 5-1: Η επιφάνεια αναφοράς και η παραμετροποίηση [29]

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c) + z_c \mathbf{u}_z \quad (5.1)$$

Η Ιακωβιανή μήτρα και η ορίζουσά του είναι

$$\mathbf{J}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{p,r}}{\partial x_c} & \frac{\partial \mathbf{r}_{p,r}}{\partial y_c} & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$|\mathbf{J}_\phi| = \mathbf{u}_z \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{p,r}}{\partial x_c} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{p,r}}{\partial y_c} \right) = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{n} \quad (5.3)$$

Προφανώς, το παραπάνω εξωτερικό γινόμενο είναι διαφορετικό του μηδενός, καθώς σε κάθε σημείο της επιφάνειας τα δύο αυτά διανύσματα εκτείνουν το εφαπτόμενο επίπεδο, το οποίο ορίζεται από το διάνυσμα  $\mathbf{n}$ . Αυτό δεν θα πρέπει να συγχέεται με το επίπεδο ολίσθησης στην

περίπτωση της καμπύλης. Είναι εμφανές για να ότι κανένα εφαπτόμενο επίπεδο δεν πρέπει να είναι παράλληλο στο διάνυσμα ολίσθησης. Σε αυτήν την περίπτωση αν η επιφάνεια  $\mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c)$  προβληθεί στο επίπεδο που ορίζει το  $\mathbf{u}_z$  θα εκφράζει τον γράφο μίας συνάρτησης. Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην αντιστροφή του μετασχηματισμού. Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τη σχέση ορισμού του με δύο μη συγγραμικά διανύσματα  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  τα οποία είναι κάθετα στο  $\mathbf{u}_z$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 \mathbf{r}_p &= \mathbf{u}_1 \mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c) \Rightarrow \hat{x}_{p1} = \hat{x}_{p,r1}(x_c) \\ \mathbf{u}_2 \mathbf{r}_p &= \mathbf{u}_2 \mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c) \Rightarrow \hat{x}_{p2} = \hat{x}_{p,r2}(y_c)\end{aligned}\quad (5.4)$$

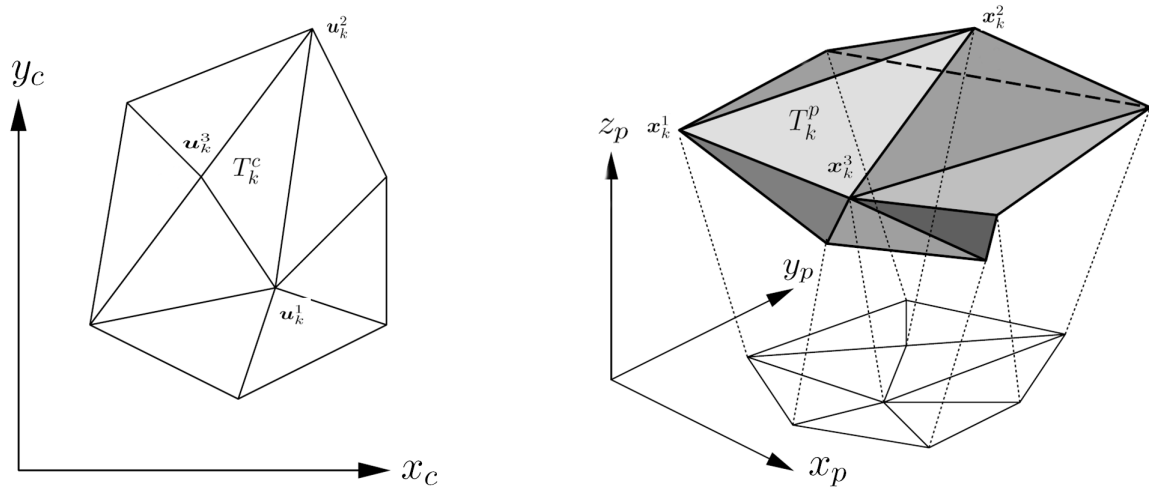
Όπου, όπως φαίνεται, έχουμε ορίσει τις αντίστοιχες νέες μεταβλητές. Υποθέσαμε επίσης, για απλότητα, ότι οι μεταβλητές  $x_c, y_c$  μετά τον παραπάνω πολλαπλασιασμό χωρίζονται. Το παραπάνω σύστημα είναι ένα υποσύστημα του  $\mathbf{r}_p = \phi(\mathbf{r}_c)$ , και όταν  $|\mathbf{J}_\phi| \neq 0$  θα έχει και αυτό λύση. Η  $z_c$  προκύπτει αντίστοιχα πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την 5.1 με  $\mathbf{u}_z$ . Τελικά έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{p,r1}^{-1}(\hat{x}_{p1}) \\ \hat{x}_{p,r2}^{-1}(\hat{x}_{p2}) \\ \mathbf{u}_z(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c)) \end{pmatrix}\quad (5.5)$$

### 5.3 Τριγωνοποιημένη Επιφάνεια

Παρόμοια με την πολυγωνική αλυσίδα, θα αναπτύξουμε την αντίστοιχη πιο πρακτική τριγωνοποιημένη επιφάνεια. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η επιφάνεια αναφοράς στον φυσικό χώρο είναι ένα σύνολο  $T_k^p, k = 1..N$  ενωμένων τριγώνων, με κορυφές  $\mathbf{x}_k^1, \mathbf{x}_k^2, \mathbf{x}_k^3$ . όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-2. Τα τρίγωνα εδώ θα τα θεωρήσουμε γνωστά, ωστόσο πρακτικά προκύπτουν από τις παραπάνω κορυφές στις οποίες εφαρμόζεται κάποια μέθοδος ανακατασκευής επιφάνειας [2, 6].

Έστω ότι οι παραπάνω κορυφές προβάλλονται στα αντίστοιχα σημεία  $\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \mathbf{u}_k^3$  του επιπέδου  $z_c = 0$  του κανονικού χώρου. Τα αντίστοιχα τρίγωνα θα είναι  $T_k^c, k = 1..N$ . Η παραμετροποίηση της παραπάνω επιφάνειας, δηλαδή η εύρεση των σημείων του επιπέδου, δεν είναι ένα τετριμμένο πρόβλημα, όπως στην περίπτωση της πολυγωνικής αλυσίδας. Ο στόχος της παραμετροποίησης είναι συνήθως, όπως και σε αυτήν την περίπτωση, η ισομετρία. Ωστόσο, μία τριγωνοποιημένη επιφάνεια δεν μπορεί να παραμετροποιηθεί ακριβώς ισομετρικά από ένα επίπεδο (εκτός βέβαια αν ανήκει και η ίδια σε ένα επίπεδο), παρά μόνο προσεγγιστικά. Έχουν



Σχήμα 5-2: Η τριγωνοποιημένη επιφάνεια αναφοράς [8]

προταθεί αρκετές μέθοδοι για αυτόν ακριβώς τον σκοπό [8, 7, 11, 17, 34]. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας επιλέχθηκε και χρησιμοποιήθηκε μία από αυτές [17], η οποία προσδιορίζει τα ζητούμενα σημεία μέσω ενός επαναληπτικού αλγορίθμου.

Έστω ότι το τρίγωνο  $T_k^p$  του φυσικού χώρου έχει εμβαδόν  $A_k$  και ότι παραμετροποιείται τοπικά από το δικό του σύστημα συντεταγμένων. Η απεικόνιση του στο αντίστοιχο τρίγωνο του κανονικού χώρου  $T_k^c$  περιγράφεται από την  $2 \times 2$  Ιακωβιανή μήτρα  $\mathbf{J}_k$ . Πρέπει να προσέξουμε ότι αυτή η Ιακωβιανή δεν έχει καμία σχέση με την Ιακωβιανή του  $\phi$ . Χρησιμοποιείται επίσης ένας βοηθητικός μετασχηματισμός  $M_k$ , ο οποίος θα οριστεί στην συνέχεια. Στόχος είναι η εύρεση μίας τμηματικά γραμμικής απεικόνισης από την τριγωνοποιημένη επιφάνεια στο επίπεδο. Για αυτόν τον λόγο ορίζεται η ακόλουθη συνάρτηση ενέργειας

$$E(T^c, M) = \sum_{k=1}^N A_k \|\mathbf{J}_k - M_k\|_F^2 \quad (5.6)$$

όπου  $\|\cdot\|_F$  είναι η νόρμα Frobenius. Το  $T^c$  υπάρχει επειδή η ενέργεια εξαρτάται από τα τρίγωνα (δηλαδή τις κορυφές τους στο επίπεδο) μέσω της  $\mathbf{J}_k$ . Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των κορυφών, ως εξής

$$E(T^c, M) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \cot(\theta_k^i) \|(\mathbf{u}_k^i - \mathbf{u}_k^{i+1}) - M_k(\mathbf{x}_k^i - \mathbf{x}_k^{i+1})\|^2 \quad (5.7)$$



όπου  $\theta_k^i$  είναι η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή  $(\mathbf{x}_k^i, \mathbf{x}_k^{i+1})$ . Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι επομένως το ακόλουθο

$$(T^c, M) = \underset{(T^c, M_k)}{\operatorname{argmin}} E(T^c, M_k) \quad (5.8)$$

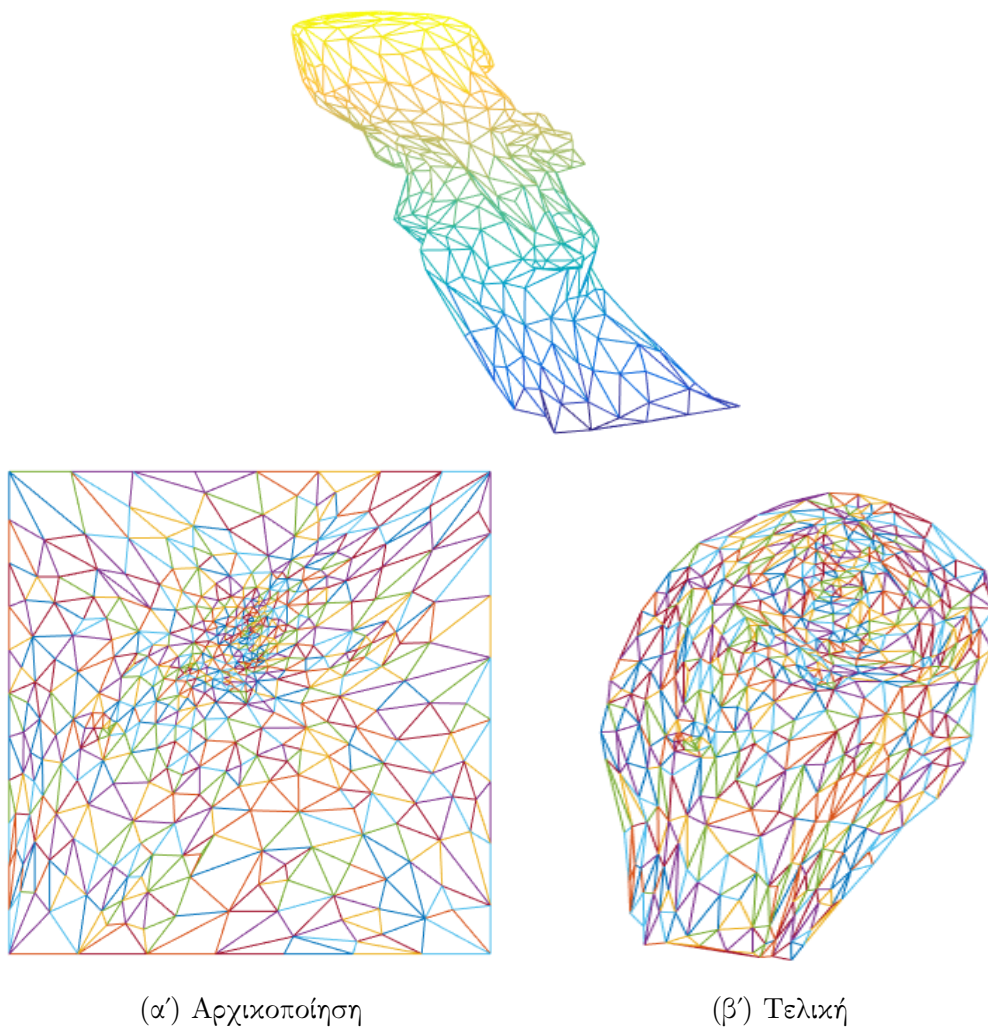
Παρατηρούμε ότι τα ζητούμενα σημεία (δηλαδή τα τρίγωνα  $T^c$ ) δεν είναι το μόνο αποτέλεσμα της παραπάνω βελτιστοποίησης. Αντίθετα, υπάρχει και ο βοηθητικός μετασχηματισμός  $M$ . Παρατηρώντας την πρώτη σχέση της ενέργειας (Σχέση 5.6), αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό που ζητά το παραπάνω πρόβλημα είναι η επιλογή των σημείων  $\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \mathbf{u}_k^3$  του κάθε τριγώνου  $T_k^c$  με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα όλων των αποστάσεων από τον βοηθητικό μετασχηματισμό  $M_k$  να ελαχιστοποιείται. Εφόσον ζητείται ελάχιστη παραμόρφωση, είναι εμφανές ότι ο  $M_k$  θα πρέπει να είναι απλές περιστροφές

$$M_k = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} : \theta_k \in [0, 2\pi) \right\} \quad (5.9)$$

Η εύρεση της λύση δίνεται από έναν επαναληπτικό αλγόριθμο δύο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο υποθέτουμε ότι οι κορυφές  $\mathbf{u}_k^1, \mathbf{u}_k^2, \mathbf{u}_k^3$  του κάθε τριγώνου  $T_k^c$  είναι σταθερές και γνωστές και υπολογίζεται ο βέλτιστος  $M_k$  για κάθε τρίγωνο. Στην συνέχεια, στο δεύτερο στάδιο, για τους  $M_k$  που βρέθηκαν υπολογίζονται οι νέες βέλτιστες κορυφές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να επιτευχθεί κάποια επιθυμητή ακρίβεια.

Απαιτείται, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, μια αρχική παραμετροποίηση της επιφάνειας. Αν και πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει ακόμη και για μία τυχαία αρχικοποίηση, η ταχύτητα σύγκλισης δεν είναι καθόλου καλή. Αντιθέτως, αν η αρχικοποίηση προσεγγίζει καλά την τελική παραμετροποίηση, ο αλγόριθμος συγκλίνει ταχύτατα (μετά από λίγες επαναλήψεις) και μάλιστα με πολύ υψηλή ακρίβεια.

Μια καλή αρχικοποίηση, η οποία είναι πολύ εύκολο να εξαχθεί, δίνεται από την μέθοδο του Floater [8]. Η μέθοδος αυτή, εν συντομία, υποθέτει ότι οι συνοριακές ακμές τις επιφάνειας απεικονίζονται στο επίπεδο σε γνωστό σχήμα και θεωρεί πως κάθε άλλη κορυφή του επιπέδου είναι ο σταθμισμένος μέσος όλων των γειτόνων της. Προκύπτει έτσι ένα αραιό, γραμμικό σύστημα του οποίου ο πίνακας εξαρτάται από την επιλογή των βαρών. Τα βάρη αυτά προκύπτουν



(α) Αρχικοποίηση

(β) Τελική

Σχήμα 5-3: Παραμετροποίηση επιφάνειας

προβάλλοντας για κάθε κορυφή το σύνολο των τριγώνων που πρόσκεινται σε αυτήν στο επίπεδο.

Στο Σχήμα 5-3 φαίνεται μια πειραματική εκτέλεση των παραπάνω, όπου όπως φαίνεται το σύνορο της αρχικοποίησης είναι ένα τετράγωνο. Αν και δεν είναι εμφανές στο σχήμα (η αρχική επιφάνεια είναι αρκετά πολύπλοκη), η αρχικοποίηση παρουσιάζει σημαντική παραμόρφωση, ειδικά στα άκρα. Με αυτήν την αρχικοποίηση όμως ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε παραπάνω συνέκλινε πολύ γρήγορα (7 επαναλήψεις, με ακρίβεια  $10^{-3}$ ). Αυτή η ταχύτητα είναι και ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη μέθοδος παραμετροποίησης. Σε μία πρακτική εφαρμογή είναι πολύ πιθανόν η τριγωνοποιημένη επιφάνεια να μην είναι σταθερή (λόγου χάρη στην αντιστάθμιση κίνησης στην ρομποτική χειρουργική [22, 23]). Σε αυτήν την περίπτωση, για να λειτουργήσει

ο εν λόγω μετασχηματισμός σε πραγματικό χρόνο, πρέπει η παραμετροποίηση της τριγωνοποίησης να παράγεται ταχύτατα. Υποθέτοντας ότι η μεταβολή της επιφάνειας είναι αρκετά ομαλή, μπορούμε σε κάθε χρονική στιγμή δειγματοληψίας να λάβουμε στον παραπάνω αλγόριθμο ως αρχική παραμετροποίηση την έξοδο του αμέσως προηγούμενου χρονικού σημείου. Με αυτόν τον αναδρομικό τρόπο, ο αλγόριθμος θα συγχλίνει πολύ γρήγορα και θα παρακολουθεί την μεταβολή της επιφάνειας.

Εφόσον παραμετροποιήθηκε η τριγωνοποίηση, μπορούμε να προχωρήσουμε τώρα στην κατασκευή του μετασχηματισμού  $\phi$ . Έστω ένα σημείο  $\mathbf{p}_c = (x_c, y_c)$  του κανονικού επιπέδου (του επιπέδου  $z_c = 0$  που παραμετροποιεί την επιφάνεια) το οποίο υποθέτουμε ότι ανήκει στο τρίγωνο  $T_k^c$ . Το σημείο αυτό πρέπει να μεταφερθεί στο αντίστοιχο  $\mathbf{p}_p = (x_p, y_p)$  της τριγωνοποιημένης αναφοράς στον φυσικό χώρο. Το  $\mathbf{p}_p$  ανήκει προφανώς στο αντίστοιχο τρίγωνο  $T_k^p$ . Χρησιμοποιώντας βαρυκεντρικές συντεταγμένες το  $\mathbf{p}_c$  μπορεί να γραφτεί

$$\mathbf{p}_c = \lambda_1 \mathbf{u}_k^1 + \lambda_2 \mathbf{u}_k^2 + \lambda_3 \mathbf{u}_k^3 \quad (5.10)$$

όπου για τους συντελεστές έχουμε

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (5.11)$$

Λύνοντας ως προς  $\lambda_3$  και αντικαθιστώντας πίσω στη Σχέση 5.10 παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{ck}^{-1}(\mathbf{p}_c - \mathbf{u}_k^3) \quad (5.12)$$

όπου ορίστηκε ο πίνακας  $\mathbf{T}_{ck} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^3 & \mathbf{u}_k^2 - \mathbf{u}_k^3 \end{pmatrix}$ . Παρατηρούμε ότι είναι πράγματι αντιστρέψιμος αφού τα τρία σημεία δεν είναι συγγραμμικά (αλλιώς δεν θα σχημάτιζαν τρίγωνο). Το ζητούμενο σημείο  $\mathbf{p}_p$  δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_p = f_k(\mathbf{p}_c) &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^1 & \mathbf{x}_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \mathbf{x}_k^3(1 - \lambda_1 - \lambda_2) = \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^1 & \mathbf{x}_k^2 \end{pmatrix} \left( \mathbf{T}_{ck}^{-1}(\mathbf{p}_c - \mathbf{u}_k^3) \right) + \mathbf{x}_k^3 \left( 1 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_{ck}^{-1}(\mathbf{p}_c - \mathbf{u}_k^3) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ορίζοντας τον αντίστοιχο πίνακα στο φυσικό χώρο  $\mathbf{T}_{pk} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^1 - \mathbf{x}_k^3 & \mathbf{x}_k^2 - \mathbf{x}_k^3 \end{pmatrix}$  παίρνουμε από την τελευταία σχέση

$$\mathbf{p}_p = f_k(\mathbf{p}_c) = \mathbf{T}_{pk} \mathbf{T}_{ck}^{-1} (\mathbf{p}_c - \mathbf{u}_k^3) + \mathbf{x}_{pk} \quad (5.14)$$

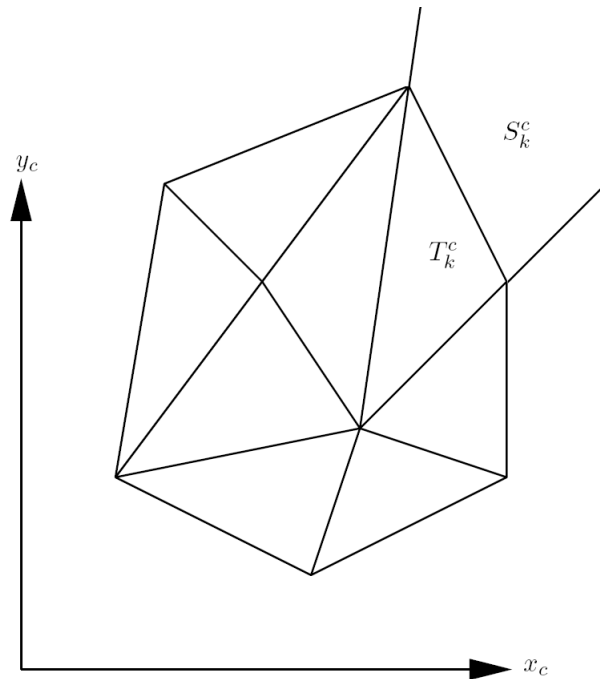
Βέβαια η τελευταία σχέση καλύπτει μόνο το τρίγωνο  $T_k^p$  και πρέπει επομένως να επεκταθεί σε όλην την επιφάνεια ως εξής

$$\mathbf{p}_p = f(\mathbf{p}_c) = \sum_{k=1}^N f(\mathbf{p}_c) \psi_k(\mathbf{p}_c) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{T}_{pk} \mathbf{T}_{ck}^{-1} (\mathbf{p}_c - \mathbf{u}_k^3) + \mathbf{x}_{pk}) \psi_k(\mathbf{p}_c) \quad (5.15)$$

όπου η δείκτρια συνάρτηση  $\psi_k(\mathbf{p}_c)$  ορίζεται κατά πλήρη αντιστοιχία με τη Σχέση 4.11 ως

$$\psi_k(x_c) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \mathbf{p}_c \in T_k^c \text{ ή } \mathbf{p}_c \in S_k^c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.16)$$

Εδώ η επέκταση σε όλον το χώρο είναι λίγο πιο πολύπλοκη σε σχέση με την πολυγωνική



Σχήμα 5-4: Επέκταση της τριγωνοποίησης σε όλον τον χώρο

αλυσίδα και αυτό ακριβώς εξυπηρετεί ο όρος  $\mathbf{p}_c \in S_k^c$ . Παρατηρούμε ότι δεν προσθέτουμε κάποιον όρο στο άθροισμα, αλλά όταν το  $\mathbf{p}_c$  ανήκει στην λωρίδα  $S_k^c$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-4, τότε επιβιώνει ο όρος του  $T_k^c$  και οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι ως προς αυτό το τρίγωνο. Το αντίστοιχο σημείο στον φυσικό χώρο μεταφέρεται στον επίπεδο που ορίζει το τρίγωνο  $T_k^p$ .

Παρόμοια με τα προηγούμενα, έστω  $z_c$  η τρίτη κανονική μεταβλητή και  $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$  το σημείο στον φυσικό χώρο. Ολισθαίνοντας την επιφάνεια της Σχέσης 5.15 κατά ένα διάνυσμα  $\mathbf{u}_z$  έχουμε

$$\mathbf{r}_p = f(\mathbf{p}_c) + z_c \mathbf{u}_z \quad (5.17)$$

Έστω  $V_k, k = 1..K$  το σύνολο των  $K$  ακμών της επιφάνειας στον κανονικό χώρο. Τότε για κάθε  $\mathbf{p}_c \notin V_k$  η Ιακωβιανή μήτρα και η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι

$$\mathbf{J}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_c} & \frac{\partial f}{\partial y_c} & \mathbf{u}_z \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

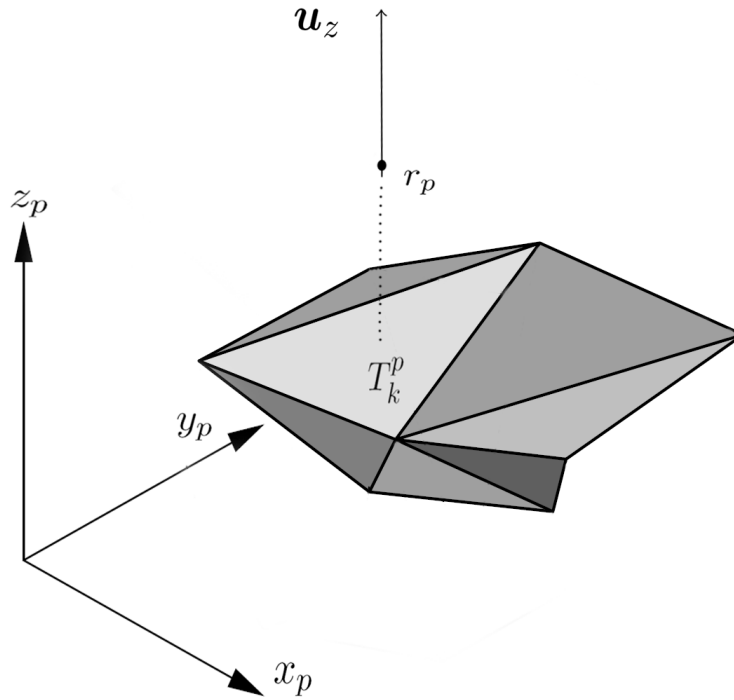
$$|\mathbf{J}_\phi| = \mathbf{u}_z \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_c} \times \frac{\partial f}{\partial y_c} \right) \quad (5.19)$$

Είναι σαφές ότι ο περιορισμός προστέθηκε λόγω της έλλειψης παραγωγισιμότητας στις ακμές. Για το σύστημα ισχύουν ίδιες παρατηρήσεις με αυτές για την περίπτωση της πολυγωνικής αλυσίδας στην Παράγραφο 4.3. Το εξωτερικό γινόμενο είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κάθε τριγώνου (αυτό φαίνεται και τις σχέσεις ορισμού των δύο πινάκων  $\mathbf{T}_{pk}, \mathbf{T}_{ck}$  και την 5.15). Επομένως, για να είναι αντιστρέψιμη Ιακωβιανή δεν πρέπει η ολίσθηση της επιφάνειας να γίνει κατά μήκους κάποιου τριγώνου της. Ανάλογα με την πολυγωνική αλυσίδα, αναμένεται ότι αυτή η συνθήκη δεν αρκεί για την αντιστροφή του  $\phi$ . Θεωρώντας ως  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$  το σημείο του κανονικού χώρου, μπορεί η Σχέση 5.17 χρησιμοποιώντας και την 5.15, να γραφτεί ως

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{J}_\phi \mathbf{r}_c + \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^3 - \mathbf{T}_{pk} \mathbf{T}_{ck}^{-1} \mathbf{u}_k^3) \psi_k(\mathbf{p}_c) \quad (5.20)$$

Άρα η αντιστροφή προκύπτει άμεσα ως

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{J}_\phi^{-1} \left( \mathbf{r}_p - \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^3 - \mathbf{T}_{pk} \mathbf{T}_{ck}^{-1} \mathbf{u}_k^3) \psi_k(\mathbf{p}_c) \right) \quad (5.21)$$

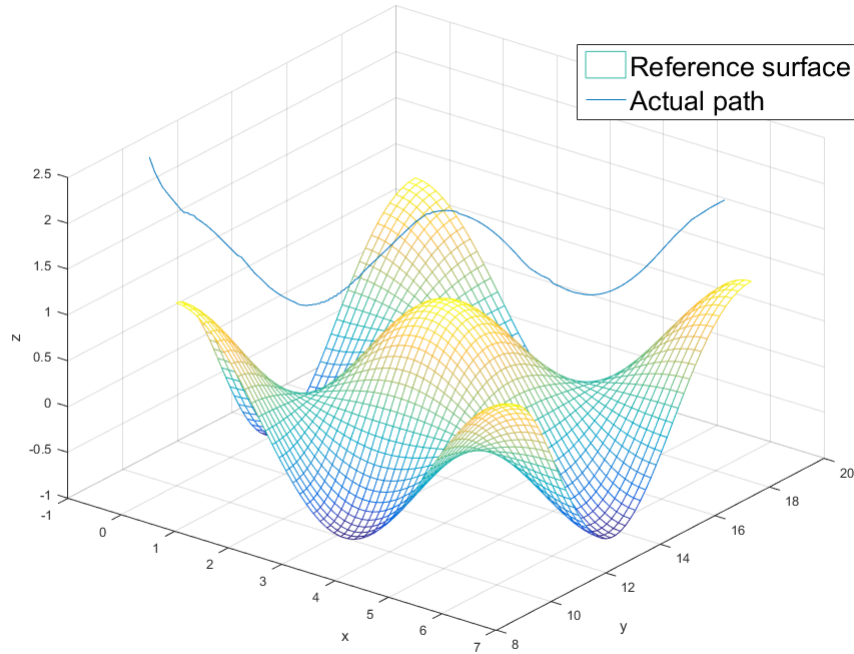


Σχήμα 5-5: Εύρεση του ενεργού τριγώνου

Αυτή η τελευταία σχέση δίνει την πραγματική συνθήκη αντιστροφής του  $\phi$ . Συγκεκριμένα, εδώ θα πρέπει να βρεθεί το ενεργό τρίγωνο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-5, ώστε το άθροισμα να εκφυλιστεί σε έναν όρο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-5, το σημείο  $r_p$  και το διάνυσμα ολίσθησης  $u_z$  ορίζουν σε κάθε σημείο μία ευθεία η οποία τέμνει την επιφάνεια στο ζητούμενο ενεργό τρίγωνο. Αν δεν τέμνει την επιφάνεια τότε πρέπει να βρεθεί η αντίστοιχη ενεργή λωρίδα  $S_k^p$ , από την οποία και πάλι θα επιβιώσει ένας όρος. Για να είναι δυνατό αυτό βέβαια, πρέπει να υπάρχει το πολύ μία τομή με την τριγωνοποιημένη επιφάνεια. Σε αυτήν την περίπτωση η τριγωνοποιημένη επιφάνεια, ανάλογα με την ομαλή, θα εκφράζει στο επίπεδο που ορίζει το  $u_z$  τον γράφο μίας συνάρτησης.

## 5.4 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

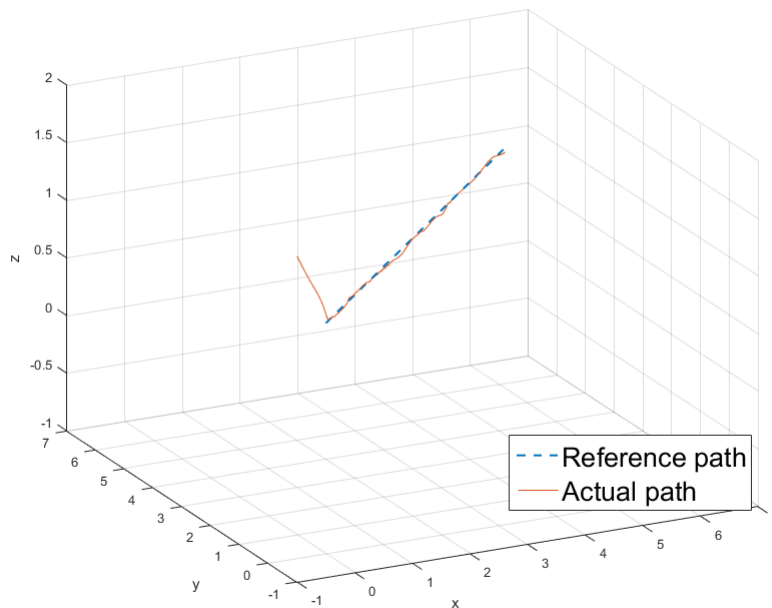
Θα παρουσιάσουμε σε αυτό το σημείο τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ξεκινώντας αρχικά από την ομαλή επιφάνεια. Η αναφορά που επιλέχθηκε είναι η ακόλουθη



Σχήμα 5-6: Ομαλή επιφάνεια - φυσικός χώρος

$$\mathbf{r}_{p,r}(x_c, y_c) = (x_c, 10e^{0.1y_c}, \cos x_c \cos y_c) \quad (5.22)$$

Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι το διάνυσμα  $\mathbf{u}_z = \mathbf{e}_3$  είναι επιτρεπτό διάνυσμα ολίσθησης (δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο σε αυτό), οπότε επιλέγεται αυτό. Επίσης υποθέτουμε σε όλα τα παρακάτω ότι ζητείται η παρακολούθηση της επιφάνειας διατηρώντας μια σταθερή απόσταση  $d = 1$  (η μονάδα μήκους δεν έχει σημασία) από αυτήν, όπως θα έκανε λόγου χάρη ένα UAV επιτήρησης. Αυτό σημαίνει ότι στον κανονικό χώρο η αναφορά δεν είναι στο επίπεδο  $z_c = 0$ , αλλά στο  $z_c = d$ . Το αποτέλεσμα στον φυσικό χώρο φαίνεται στο Σχήμα 5-6. Το σύστημα συγκλίνει σχετικά γρήγορα σε μία σταθερή απόσταση από την αναφορά και φαίνεται να παρακολουθεί πολύ καλά την ημιτονοειδή μορφή της. Ο κανονικός χώρος στο Σχήμα 5-7, όπου δεν φαίνεται το επίπεδο  $z_c = d$  αλλά μόνο η ευθεία αναφοράς, δίνει περισσότερες πληροφορίες από την ποιοτική εκτίμηση του φυσικού. Πράγματι, επιβεβαιώνει ότι το σύστημα συγκλίνει πολύ γρήγορα στην ευθεία αναφοράς και δεν φαίνεται να απομακρύνεται από αυτήν.

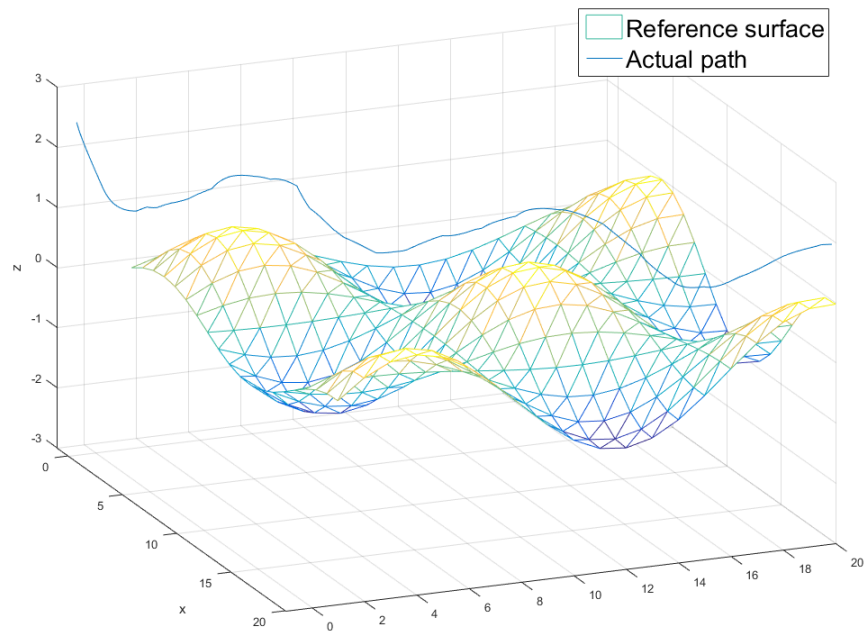


Σχήμα 5-7: Ομαλή επιφάνεια - κανονικός χώρος

Προχωράμε τώρα στη τριγωνοποιημένη επιφάνεια, η αναφορά της οποίας δεν φτιάχτηκε με κάποιον αλγόριθμο ανακατασκευής, αλλά με δειγματοληψία μίας παρόμοιας επιφάνειας με την προηγούμενη περίπτωση. Στην συνέχεια τα δείγματα προβλήθηκαν σε ένα επίπεδο, όπου έγινε τριγωνοποίηση Delaunay [3]. Παρόμοια με την πολυγωνική αλυσίδα, η μόνη ουσιαστική διαφοροποίηση είναι η εύρεση του ενεργού τριγώνου, το οποίο βρίσκεται αλγοριθμικά. Συγκεκριμένα, κάθε σημείο  $\mathbf{r}_p$  του φυσικού χώρου και το διάνυσμα ολίσθησης  $\mathbf{u}_z$  ορίζουν μία ευθεία, η οποία τέμνει το επίπεδο που ορίζει κάθε τρίγωνο  $T_k^p$  σε ένα σημείο  $\pi_k$ . Αφού βρεθεί αυτό το σημείο  $\pi_k$ , βρίσκονται οι βαρυκεντρικές του συντεταγμένες ως προς τις ακμές του τριγώνου  $T_k^p$ , ώστε να ελεγχθεί αν ανήκει μέσα σε αυτό. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί το μοναδικό ενεργό τρίγωνο. Φυσικά, ολόκληρη η επιφάνεια πρέπει να σαρωθεί μόνο μία φορά, καθώς λόγω συνέχειας σε κάθε χρονικό σημείο το ενεργό τρίγωνο θα είναι ένας από τους γείτονες του προηγούμενου.

Από το αποτέλεσμα στον φυσικό χώρο που φαίνεται στο Σχήμα 5-8, παρατηρούμε ότι η ημιτονοειδής μορφή της επιφάνειας παρακολουθείται αρκετά καλά. Ωστόσο, αντίστοιχα με την πολυγωνική αλυσίδα, στα σημεία όπου η επιφάνεια δεν είναι παραγωγίσμη, δεν μπορεί το



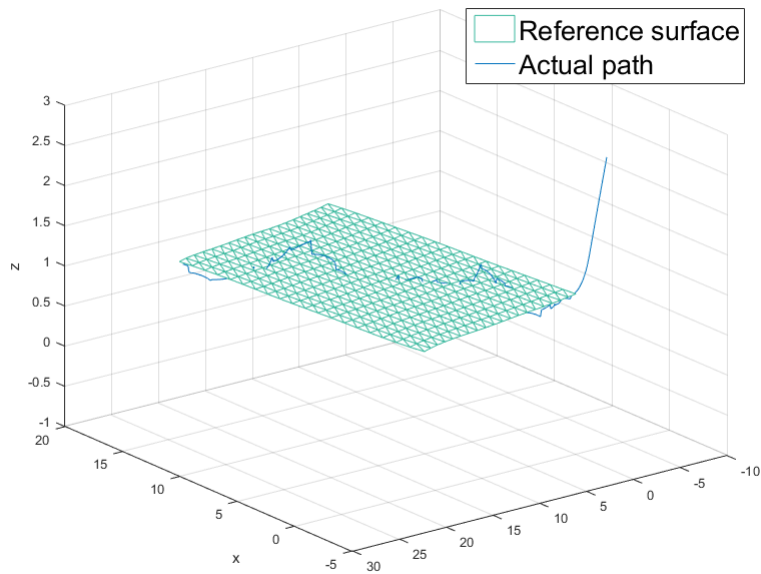


Σχήμα 5-8: Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - φυσικός χώρος

σύστημα να την παρακολουθήσει χωρίς σφάλμα. Είναι εμφανές ότι στην περίπτωση της ομαλής επιφάνειας η έξοδος του συστήματος ήταν πιο ομαλή. Ο αντίστοιχος κανονικός χώρος φαίνεται Σχήμα 5-9. Το επίπεδο που φαίνεται είναι το επίπεδο αναφοράς για  $z_c = d$  και πρόκειται ουσιαστικά για την τριγωνοποίηση που παραμετροποιεί την επιφάνεια αναφοράς και βρέθηκε με την μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου.

Με σκοπό να δείξουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου και να βελτιώσουμε ίσως την έξοδος υλοποιήθηκε για την περίπτωση της τριγωνοποιημένης επιφάνειας και ένας  $PI$  ελεγκτής. Η αναφορά παραμένει ίδια ώστε να μπορεί να γίνει κάποια σύγκριση των αποτελεσμάτων. Στο Σχήμα 5-10 φαίνεται η έξοδος του συστήματος στον φυσικό χώρο. Βλέποντας το αντίστοιχο Σχήμα 5-8, παρατηρούμε ότι ο  $PI$  ελεγκτής βελτίωσε κάπως την απόκριση, καθώς αυτή έγινε λίγο πιο ομαλή. Φαίνεται στο Σχήμα 5-11 και ο αντίστοιχος κανονικός χώρος, ο οποίος το επιβεβαιώνει πράγματι αυτό καθώς παρατηρούμε μικρότερη απόσταση από το επίπεδο αναφοράς και λιγότερα κρουστικά φαινόμενα.

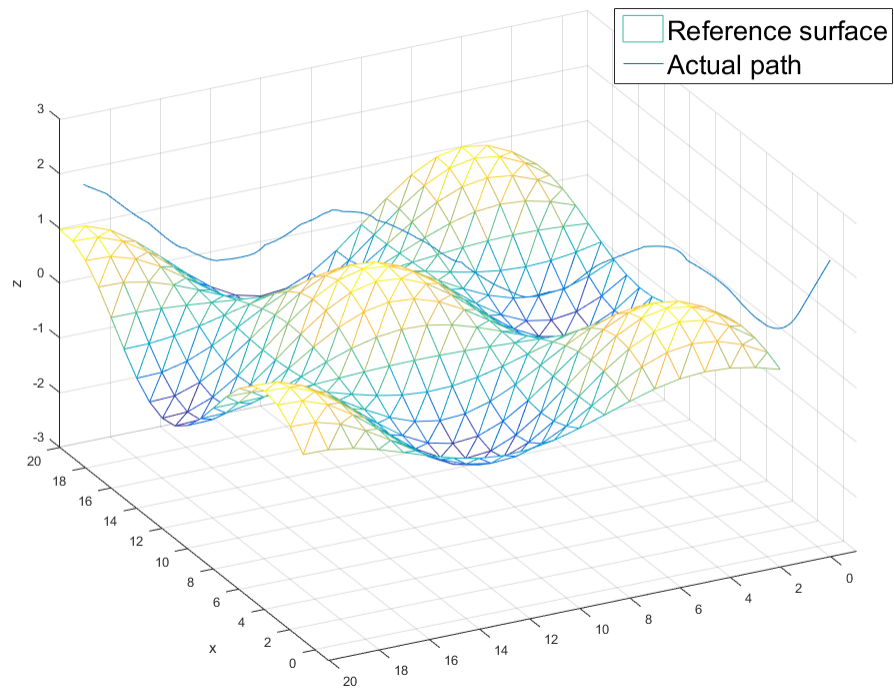
Ένας καλύτερος τρόπος σύγκρισης των δύο αποτελεσμάτων είναι η μέτρηση της απόσταση



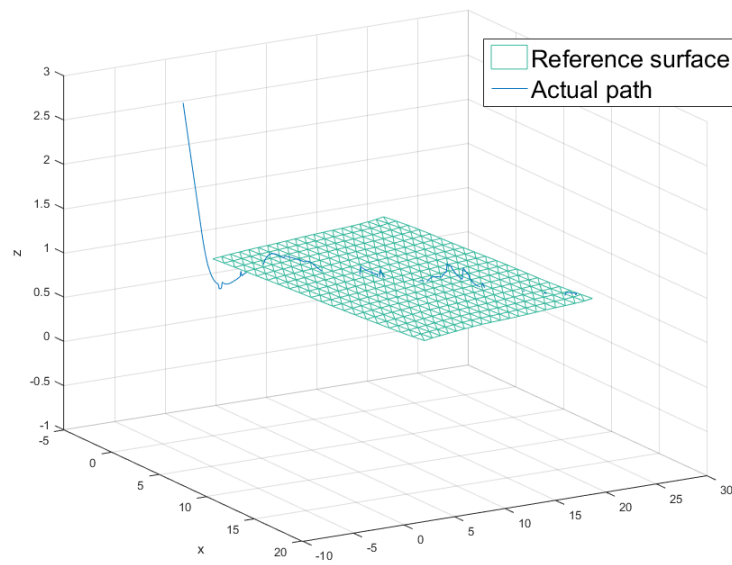
Σχήμα 5-9: Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - κανονικός χώρος

του συστήματος από την επιφάνεια αναφοράς. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-12 ο  $PI$  διατηρεί καλύτερα την επιθυμητή απόσταση  $d = 1$ . Αυτά τα διαγράμματα ίσως να είναι παραπλανητικά, καθώς το σύστημα στον φυσικό χώρο δεν παρουσιάζει τέτοιες απότομες μεταβολές, όπως φαίνεται στα αντίστοιχα σχήματα. Ουσιαστικά αυτά δείχνουν την απόσταση της εξόδου από την προβολή της πάνω στην τριγωνοποιημένη επιφάνεια και είναι αναμενόμενο να υπάρχει έλλειψη παραγωγισιμότητας καθώς το σύστημα μεταβαίνει από ένα τρίγωνο σε ένα άλλο.

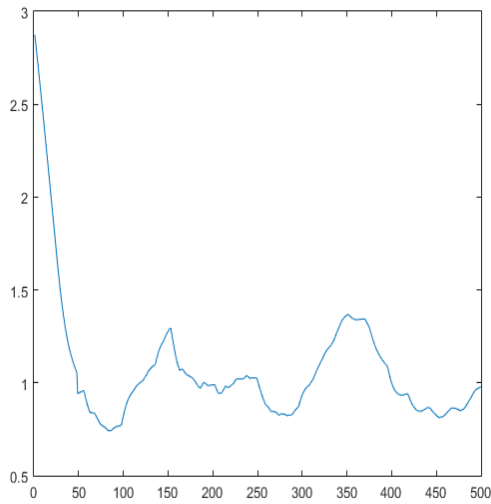
Αυτή ακριβώς η μετάβαση μεταξύ τριγώνων είναι που δημιουργεί τα κρουστικά φαινόμενα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως σημειώθηκε στην Παράγραφο 4.3 για την πολυγωνική αλυσίδα, η έλλειψη παραγωγισιμότητας στις κορυφές (ή εδώ στις ακμές των τριγώνων) κάνει το σύστημα στον κανονικό χώρο κρουστικό. Αυτά τα κρουστικά φαινόμενα είναι αρκετά εμφανή στην περίπτωση της τριγωνοποίησης, όπως φαίνεται στα σχήματα του κανονικού χώρου. Περισσότερα μπορούν να αναζητηθούν στα [1, 21].



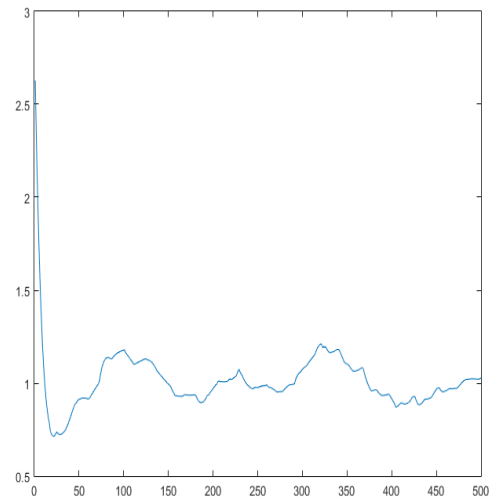
Σχήμα 5-10: Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - φυσικός χώρος - *PI*



Σχήμα 5-11: Τριγωνοποιημένη επιφάνεια - κανονικός χώρος - *PI*



(α') Ελεγκτής 3.5



(β') *PI* Ελεγκτής

Σχήμα 5-12: Απόσταση από την επιφάνεια

## 5.5 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε τον μετασχηματισμό  $\phi$  για την περίπτωση που η αναφορά είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη επιφάνεια αλλά και για την περίπτωση που είναι μία τριγωνοποίηση. Βρήκαμε και στις δύο περιπτώσεις τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το διάνυσμα ολίσθησης ώστε αυτός να είναι αντιστρέψιμος. Στην δεύτερη περίπτωση παρουσιάστηκε μία μέθοδος παραμετροποίησης της τριγωνοποιημένης επιφάνειας που προσεγγίζει την ισομετρία. Τέλος, παρουσιάσαμε αποτελέσματα προσομοιώσεων χρησιμοποιώντας τόσο τον ελεγκτή του Κεφαλαίου 3, αλλά για την περίπτωση της τριγωνοποίησης και έναν *PI* ελεγκτή.

## Παράρτημα

Στην Παράγραφο 3.2 ήταν υποχρεωτική η εισαγωγή των περιορισμών 3.11, 3.12 ώστε να επεκταθεί ο  $\phi$  στον χώρο κατάστασης και να είναι δυνατή η αντιστροφή του  $\psi$ . Στα Κεφάλαια 4,5 παρουσιάστηκε συγκεκριμένη μορφή του  $\phi$ , η οποία όπως θα δειχθεί μπορεί να άρει αυτούς του περιορισμούς του συστήματος. Αρχικά υποθέτουμε για  $\theta_p = 0$  (ή  $\theta_p = \pi$ ) ότι ισχύει

$$\phi_p = s(\phi_c) \quad (5.23)$$

Η συνάρτηση  $s$ , που είναι ουσιαστικά η επέκταση της Σχέσης 3.10, παραμένει άγνωστη προς το παρόν και θα χρησιμοποιηθεί για να αρθεί ο εν λόγω περιορισμός. Θα δειχθεί στην συνέχεια πως ακριβώς προσδιορίζεται.

Είναι σαφές από τα δύο προηγούμενα κεφάλαια ότι υπάρχει μία ελευθερία στην επιλογή του  $\mathbf{u}_z = \mathbf{n}_3$  οπότε επιλέγεται  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$ . Παρατηρώντας τον παρονομαστή της ρίζας της Σχέσης 3.18 βλέπουμε ότι, με αυτήν την επιλογή, μηδενίζεται και αυτός για  $\theta_c = 0, \pi$  (δηλαδή όταν  $\mathbf{c}_c = (0, 0, \pm 1)$ ). Ουσιαστικά, με αυτόν τον τρόπο δημιουργήθηκε μία απροσδιοριστία στο κλάσμα. Παρατηρώντας ότι ο όρος  $\mathbf{J}_\phi/\gamma^2$  δεν εμφανίζει κάποια απροσδιοριστία, ορίζουμε

$$A = \frac{\mathbf{c}_c^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{c}_c}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \mathbf{c}_c} \quad (5.24)$$

και βρίσκουμε το όριο του  $A$  για  $\theta_c \rightarrow 0$  (ή  $\theta_c \rightarrow \pi$ ) εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_c \rightarrow 0} A &= \lim_{\theta_c \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}_c^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c}}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c}} = \\ & \lim_{\theta_c \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}_c^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \frac{\partial^2 \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c^2} + \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c}}{\mathbf{c}_c^T \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \frac{\partial^2 \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c^2} + \frac{\partial \mathbf{c}_c^T}{\partial \theta_c} \mathbf{J}_\phi^T (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_{33}) \mathbf{J}_\phi \frac{\partial \mathbf{c}_c}{\partial \theta_c}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Με στοιχειώδεις πράξεις βρίσκουμε ότι οι πρώτοι όροι αριθμητή και παρονομαστή μηδενίζονται, ενώ οι δεύτεροι δίνουν

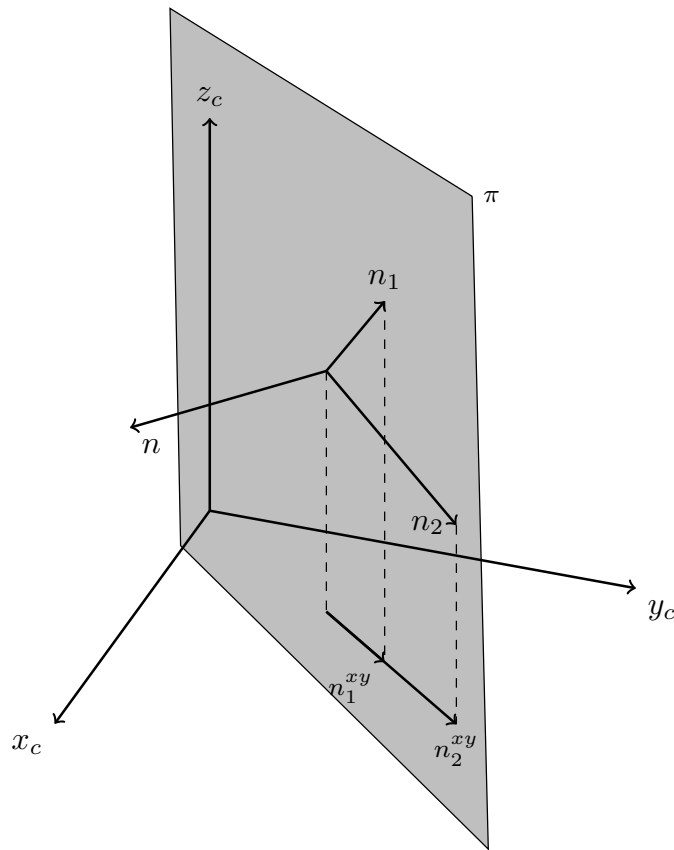
$$\lim_{\theta_c \rightarrow 0} A = \frac{1}{\|\mathbf{n}_1^{xy} \cos \phi_c + \mathbf{n}_2^{xy} \sin \phi_c\|^2} \quad (5.26)$$

Όπου το  $xy$  δείχνει την προβολή του αντίστοιχου διανύσματος στο  $xy$ -επίπεδο. Τελικά, αντικαθιστώντας πίσω στη Σχέση 3.18, αγνοώντας το πρόσημο εφόσον μας ενδιαφέρει ο μη

μηδενισμός, έχουμε

$$|\mathbf{D}| = \frac{|\mathbf{J}_\phi|}{\gamma^2} \frac{1}{\|\mathbf{n}_1^{xy} \cos\phi_c + \mathbf{n}_2^{xy} \sin\phi_c\|} \quad (5.27)$$

Για να υπάρχει κάποια γωνία  $\phi_c$  που να μηδενίζει τον παρονομαστή της  $\mathbf{D}$  πρέπει οι δύο προβολές  $\mathbf{n}_1^{xy}, \mathbf{n}_2^{xy}$  να είναι συγγραμμικές. Αυτό με την σειρά του συνεπάγεται, όπως φαίνεται στο Σχήμα



Σχήμα 5-13: Περίπτωση απειρισμού της  $\mathbf{D}$

5-13, ότι τα δύο διανύσματα  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  ανήκουν σε κάποιο επίπεδο  $\pi \parallel z_c$ . Δηλαδή το κάθετό τους διάνυσμα  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$  είναι κάθετο στο  $\mathbf{e}_3$ . Άρα  $\mathbf{e}_3^T \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0$ . Αφού έχουμε επιλέξει  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$ , η τελευταία αυτή σχέση δεν είναι τίποτα άλλο από την ορίζουσα του  $\phi$ , όπως φαίνεται από τη Σχέση 3.3. Το τελικό συμπέρασμα είναι επομένως ότι μηδενισμό ή απειρισμό της  $\mathbb{D}$  έχουμε όταν και μόνο όταν μηδενίζεται η  $|\mathbf{J}_\phi|$ .

Μπορούμε να εξηγήσουμε και γεωμετρικά τι σημαίνει η επιλογή  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$  και για ποίο λόγο λύνει το πρόβλημα. Από τη Σχέση 3.7 βλέπουμε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{c}_c = (0, 0, 1)$  (όμοια

ισχύουν και για το  $\mathbf{c}_c = (0, 0, -1)$  απεικονίζεται στο  $\mathbf{c}_p = \mathbf{n}_3 / \|\mathbf{n}_3\|$ . Επειδή όμως το  $\phi_c$  είναι απροσδιόριστο, αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι απεικονίζεται ένας ολόκληρος υπόχωρος του  $\mathbb{E}_c$  (για κάθε  $\phi_c \in [0, 2\pi]$  έχουμε  $\mathbf{c}_c = (0, 0, 1)$ ) σε ένα μοναδικό σημείο του  $\mathbb{E}_p$ . Φυσικά ένας τέτοιος μετασχηματισμός δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος. Με την παραπάνω επιλογή όμως αυτός ο υπόχωρος του  $\mathbb{E}_c$  θα απεικονίζεται σε έναν αντίστοιχο υπόχωρο του  $\mathbb{E}_p$  και απροσδιοριστία στο  $\phi_c$  θα συνεπάγεται και αντιστρόφως απροσδιοριστία στο  $\phi_p$ . Από αυτές τις άπειρες λύσεις θα πρέπει να γίνει η επιλογή μίας, να βρεθεί δηλαδή η συνάρτηση της Σχέσης 5.23. Η συνθήκη που την δίνει είναι η απαίτηση ο  $\psi$  να είναι συνεχής παντού. Παίρνοντας το όριο της 3.10 για  $\theta_c \rightarrow 0, \pi$  βρίσκουμε

$$\lim_{\theta_c \rightarrow 0} \tan \phi_p = \frac{\mathbf{e}_2^T (\mathbf{n}_1 \cos \phi_c + \mathbf{n}_2 \sin \phi_c)}{\mathbf{e}_1^T (\mathbf{n}_1 \cos \phi_c + \mathbf{n}_2 \sin \phi_c)} \quad (5.28)$$

Εξετάζουμε υπό ποιες συνθήκες αυτό το όριο υπάρχει. Αρχικά για την περίπτωση όπου  $\sin \phi_c = 0$  από τη Σχέση 5.28 έχουμε

$$\tan \phi_p = \frac{\mathbf{e}_2^T \mathbf{n}_1}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{n}_1} \quad (5.29)$$

Απροσδιοριστία στο κλάσμα εμφανίζεται όταν το  $\mathbf{n}_1$  είναι κάθετο στα  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , δηλαδή όταν  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$ . Λαμβάνοντας υπόψιν την επιλογή  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$  αλλά και τη Σχέση 3.3, βλέπουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τον μηδενισμό της  $|\mathbf{J}_\phi|$ . Εφόσον ορίζουσα αυτή δεν μηδενίζεται, συμπεραίνουμε ότι η Σχέση 5.29 δεν είναι ποτέ απροσδιόριστη. Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση  $\sin \phi_c \neq 0$ . Ανάλογα με πριν, απροσδιοριστία στη Σχέση 5.28 μπορούμε να έχουμε μόνο όταν ο όρος της παρένθεσης είναι κάθετος στα  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , δηλαδή

$$\mathbf{e}_2^T (\mathbf{n}_1 \cos \phi_c + \mathbf{n}_2 \sin \phi_c) = \mathbf{e}_3 \quad (5.30)$$

Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά αυτήν την σχέση αρχικά εξωτερικά με  $\mathbf{e}_3$  και μετά εσωτερικά με  $\mathbf{n}_1$  και χρησιμοποιώντας την 3.3 παίρνουμε

$$\sin \phi_c |\mathbf{J}_\phi| = 0 \quad (5.31)$$

Εφόσον  $|\mathbf{J}_\phi| \neq 0$  και  $\sin \phi_c \neq 0$  καταλήγουμε, και σε αυτήν την περίπτωση, ότι το όριο της

Σχέσης 5.28 υπάρχει πάντα και θέτοντας

$$s(\phi_c) = \tan^{-1} \frac{\mathbf{e}_2^T (\mathbf{n}_1 \cos \phi_c + \mathbf{n}_2 \sin \phi_c)}{\mathbf{e}_1^T (\mathbf{n}_1 \cos \phi_c + \mathbf{n}_2 \sin \phi_c)} \quad (5.32)$$

εξασφαλίζεται η απαιτούμενη συνέχεια του  $\psi$  σε όλον τον χώρο καταστάσεων.

Μπορεί να φαίνεται, από τις Σχέσεις 4.3, 4.15, 5.3, 5.19, ότι η επιλογή  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{y}_z = \mathbf{e}_3$  εκείνους τους δρόμους που έχουν εφραπτόμενο διάνυσμα στον  $z_p$ . Ωστόσο, για έναν τέτοιο δρόμο δεν έχουμε παρά να επιλέξουμε, αν υπάρχουν βέβαια, δύο διαφορετικά  $\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ , να κάνουμε μία στροφή συντεταγμένων  $(x_p, y_p, z_p) \rightarrow (x'_p, y'_p, z'_p)$  τέτοια ώστε  $z'_p = \mathbf{u}_z$  και να χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια το νέο σύστημα. Στις προσομοιώσεις οι δρόμοι επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μην χρειάζεται αυτός ο μετασχηματισμός.



# Κεφάλαιο 6

## Επίλογος

### 6.1 Σύνοψη Εργασίας

Η διπλωματική εργασία αυτή ασχολήθηκε με το πρόβλημα παρακολούθησης δρόμου των μη-επανδρωμένων εναέριων οχημάτων. Παρακινούμενοι από προηγούμενα αποτελέσματα, προτείναμε μία μεθοδολογία για το εν λόγω πρόβλημα, η οποία βασίζεται στην κατασκευή ενός μετασχηματισμού του χώρου στον οποίον κινείται το σύστημα (ο λεγόμενος φυσικός χώρος). Ο μετασχηματισμός αυτός βασίζεται στον δρόμο αναφοράς που καλείται να παρακολουθήσει το όχημα.

Σε πρώτη φάση, εισάγαμε ένα απλοποιημένο κινηματικό μοντέλο του οχήματος. Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάσαμε την επέκταση του μετασχηματισμού σε όλον το χώρο κατάστασης του. Ακολούθως, μελετήσαμε πως ο μετασχηματισμός αυτός επηρεάζει το σύστημα και καταλήξαμε ότι με κατάλληλο μετασχηματισμό της εισόδου οι κινηματικές εξισώσεις του παραμένουν αναλλοίωτες. Αυτό ήταν ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα καθώς μας επέτρεψε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα παρακολούθησης δρόμου στο πρόβλημα παρακολούθησης απλών ευθειών και επομένως να προσαρμόζουμε υπάρχοντες ελεγκτές ώστε αυτοί να παρακολουθούν ευθεία στον κανονικό χώρο ενώ το σύστημα παρακολουθεί τον δρόμο αναφοράς στον φυσικό.

Στην συνέχεια κατασκευάσαμε τον εν λόγω μετασχηματισμό για την περίπτωση που ο δρόμος αναφοράς είναι είτε μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη είτε μία πολυγωνική αλυσίδα. Συμπεράναμε ότι δεν είναι δυνατή η χρήση αυτής της μεθοδολογίας για κάθε πιθανή καμπύλη,

καθώς οι συνθήκες αντιστρεψιμότητας μας περιορίζουν το εύρος τους. Για τις περιπτώσεις που είναι όμως δυνατή η εφαρμογή βρήκαμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν να διανύσματα ολίσθησης και αντιστρέψαμε στον μετασχηματισμό. Παρουσιάσαμε επίσης, χρησιμοποιώντας έναν απλοϊκό ελεγκτή ευθείας στον κανονικό χώρο, αποτελέσματα προσομοιώσεων στα οποία το σύστημα παρακολουθεί μία ομαλή ελικοειδή καμπύλη και μία δειγματοληπτημένη εκδοχή αυτής.

Έπειτα, επεκτείναμε τα παραπάνω στην περίπτωση που το σύστημα καλείται να παρακολουθήσει καμπύλες που ανήκουν σε μία επιφάνεια του φυσικού χώρου. Μας απασχόλησαν και πάλι δύο περιπτώσεις: μία ομαλή και μία τριγωνοποιημένη επιφάνεια. Τα αποτελέσματα περί αντιστρεψιμότητας και επιλογής του διανύσματος ολίσθησης διαφοροποιήθηκαν σε αυτήν την περίπτωση, καθώς η ορίζουσα δεν ακούσε για την αντιστροφή του μετασχηματισμού. Πριν κατασκευάσουμε τον μετασχηματισμό για την τριγωνοποιημένη επιφάνεια, την παραμετροποιήσαμε χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη μέθοδο. Η απαίτηση ήταν η παραμετροποίηση να προσεγγίζει την ισομετρία. Παρουσιάσαμε επίσης αποτελέσματα προσομοιώσεων χρησιμοποιώντας τον ίδιο ελεγκτή με την προηγούμενη περίπτωση. Ωστόσο, στην περίπτωση της τριγωνοποιημένης επιφάνειας υλοποιήθηκε και ένας *PI* ελεγκτής με σκοπό να δείξουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου και σε έναν διαφορετικό ελεγκτή αλλά και να βελτιώσουμε κατά κάποιον τρόπο την έξοδο.

## 6.2 Θέματα για Μελλοντική Μελέτη

Η παρούσα εργασία αφήνει αρκετά περιθώρια για περαιτέρω μελέτη και έρευνα. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα προτεινόμενα θέματα.

- Ένα πρώτο θεωρητικό θέμα θα μπορούσε να είναι ο χαρακτηρισμός και η περιγραφή της κλάσης των συστημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, θα ήταν πολύ ενδιαφέρουσα η εξαγωγή συνθηκών υπό τις οποίες ένα σύστημα μένει αναλλοίωτο
- Ένα πιο πρακτικό θα ήταν η εφαρμογή σε διαφορετικά κινηματικά μοντέλα συστημάτων ή/και σε συστήματα περισσότερων διαστάσεων, όπου ο δρόμος αναφοράς θα είναι μία πολυδιάστατη καμπύλη ή επιφάνεια.

- Επίσης, καθώς σε αυτήν την εργασία αγνοήσαμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος, χρήσιμο θα ήταν να εξεταστεί αν και τα δυναμικά μοντέλα παρόμοιων συστημάτων παραμένουν αναλλοίωτα.
- Επίσης σημαντικό θα ήταν ο περιορισμός του ελέγχου ή/και του χώρου κατάστασης, για να λάβουμε υπόψιν φυσικούς περιορισμούς και εμπόδια που εμφανίζονται στην πράξη, και η μελέτη πως αυτά μεταφέρονται στο κανονικό χώρο. Ακόμη, ο φυσικός χώρος θα μπορούσε να επεκταθεί στην περίπτωση που δεν έχει Ευκλείδεια δομή.
- Πολύ χρήσιμη πρακτικά θα ήταν η αυτοματοποίηση της εύρεσης των διανυσμάτων ολίσθησης ώστε ένα σύστημα να μπορούσε να λειτουργήσει αυτόνομα καθώς εύκολα να επιβεβαιώσουμε ένα ένα διάνυσμα ολίσθησης είναι επιτρεπτό, αλλά δεν μπορούμε εύκολα να το βρούμε δεδομένης της καμπύλης.



# Βιβλιογραφία

- [1] Μούστρης, Γ. Π.: *Έλεγχος Πλόησης Κινητών Ρομποτικών Συστημάτων Μέσω Ευφύων Ελεγκτών και Μη-Γραμμικών Μετασχηματισμών Ισοδυναμίας Ανάδρασης*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, Ελλάδα, 2010.
- [2] Amenta, N., S. Choi, T. K. Dey, and N. Leekha: *A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction*. In *Proceedings of the Sixteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '00, pages 213–222. ACM, 2000.
- [3] Berg, M., O. Cheong, M. Kreveld, and M. Overmars: *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 3rd ed. edition, 2008.
- [4] Brockett, R. W.: *Asymptotic stability and feedback stabilization*. In R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann (editors): *Differential Geometric Control Theory*, Boston, 1983. Birkhauser.
- [5] Chitsaz, H. and S.M. LaValle: *Time-optimal paths for a Dubins airplane*. Dec 2007.
- [6] Dey, T.K., J. Giesen, and J. Hudson: *Delaunay based shape reconstruction from large data*. In *Proceedings of the IEEE 2001 Symposium on Parallel and Large-data Visualization and Graphics*, pages 19–146. IEEE Press, Oct 2001.
- [7] Floater, M.: *Parametrization and smooth approximation of surface triangulations*. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3):231 – 250, 1997.
- [8] Floater, M. and K. Hormann: *Parameterization of triangulations and unorganized points*. In Iske, A., E. Quak, and M. Floater (editors): *Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling*, Mathematics and Visualization, pages 287–316. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [9] Fomenko, A.T. and A.S. Mishchenko: *A course in differential geometry and topology*. Mir Publishers, 1988, ISBN 9781904868323.
- [10] Goncalves, V.M., L.C.A. Pimenta, C.A. Maia, B.C.O. Dutra, and G.A.S. Pereira: *Vector fields for robot navigation along time-varying curves in  $n$ -dimensions*. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):647–659, Aug 2010.

- [11] Hormann, K. and G. Greiner: *MIPS: An efficient global parametrization method*. In Laurent, P. J., P. Sablonnière, and L. L. Schumaker (editors): *Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999*, Innovations in Applied Mathematics, pages 153–162. Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2000.
- [12] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 3rd edition, 1995, ISBN 3540199160.
- [13] Khalil, H. and J.W. Grizzle: *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [14] Laumond, J. P.: *Robot Motion Planning and Control*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1998, ISBN 3540762191.
- [15] LaValle, S. M.: *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006. Available at <http://planning.cs.uiuc.edu/>.
- [16] Lee, J.M.: *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002, ISBN 9780387954950.
- [17] Liu, L., L. Zhang, Y. Xu, C. Gotsman, and S. J. Gortler. *Computer Graphics Forum*, 27(5):1495–1504, 2008, ISSN 1467-8659.
- [18] Maalouf, E., M. Saad, and H. Saliyah: *A higher level path tracking controller for a four-wheel differentially steered mobile robot*. *Robotics and Autonomous Systems*, 54(1):23 – 33, 2006.
- [19] Moustris, G. and S. G. Tzafestas: *A robust fuzzy logic path tracker for non-holonomic mobile robots*. *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, 14:935–966, 2005.
- [20] Moustris, G. and S. G. Tzafestas: *Reducing a class of polygonal path tracking to straight line tracking via nonlinear strip-wise affine transformation*. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(2):133–148, November 2008, ISSN 0378-4754.
- [21] Moustris, G. and S. G. Tzafestas: *Switching fuzzy tracking control for mobile robots under curvature constraints*. *Control Engineering Practice*, 19(1):45 – 53, 2011, ISSN 0967-0661.
- [22] Moustris, G. P., A. I. Mantelos, and C. S. Tzafestas: *Active motion compensation in robotic cardiac surgery*. In *European Control Conference (ECC)*, pages 2311–2316, July 2013.
- [23] Moustris, G. P., A. I. Mantelos, and C. S. Tzafestas: *Shared control for motion compensation in robotic beating heart surgery*. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 5819–5824, May 2013.
- [24] Novel, B. d’Andréa, G. Campion, and G. Bastin: *Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization*. *International Journal of Robotics Research*, 14(6):543–559, December 1995, ISSN 0278-3649.

- [25] Owen, M., R. Beard, and T. McLain: *Implementing dubins airplane paths on fixed-wing uavs*. In Valavanis, K. P. and G. J. Vachtsevanos (editors): *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, pages 1677–1701. Springer Netherlands, 2014, ISBN 978-90-481-9706-4.
- [26] Preparata, F.P and K.J Supowit: *Testing a simple polygon for monotonicity*. Information Processing Letters, 12(4):161 – 164, 1981.
- [27] Respondek, W.: *Geometry of Static and Dynamic Feedback*. Summer Schools on Mathematical Control Theory Trieste, Italy, September 2001 and Bedlewo-Warsaw, Poland, September 2002.
- [28] Richa, R., P. Poignet, and C. Liu: *Efficient 3d tracking for motion compensation in beating heart surgery*. In Metaxas, D., L. Axel, G. Fichtinger, and G. Szekely (editors): *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, volume 5242 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 684–691. Springer Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 978-3-540-85989-5.
- [29] Shifrin, T.: *Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces*. Lecture Notes Collection, University of Georgia, 2015.
- [30] Sorkine, Olga and Marc Alexa: *As-rigid-as-possible surface modeling*. In *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing, SGP '07*, pages 109–116, Aire-la-Ville, Switzerland, 2007. Eurographics Association, ISBN 978-3-905673-46-3.
- [31] Tall, I.A. and W. Respondek: *Chaos in Automatic Control*, chapter Feedback Equivalence of Nonlinear Control Systems, pages 137–262. Automation and Control Engineering. CRC Press, 2005.
- [32] Waner, S: *Introduction to Differential Geometry and General Relativity*. Lecture Notes, Department of Mathematics, Hofstra University, 2014.
- [33] Yoshizawa, S., A. Belyaev, and H. Seidel: *A fast and simple stretch-minimizing mesh parameterization*. In *Proceedings of the Shape Modeling International, SMI '04*, pages 200–208, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society, ISBN 0-7695-2075-8.
- [34] Zigelman, G., R. Kimmel, and N. Kiryati: *Texture mapping using surface flattening via multidimensional scaling*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 8(2):198–207, Apr 2002.