ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Ισοτιμίες modulo n και εφαρμογές Χρονοπρογραμματισμού

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δαρβίρα Βασιλική

Α.Μ. 09107131

Επιβλέπων: Φελλούρης Αργύρης

Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Ανάργυρος Φελλούρης	Ψαρράκος Παναγιώτης	Στεφανέας Πέτρος
Αναπληρωτής Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Λέκτορας

Αθήνα, Ιούλιος 2015

1. <u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</u>

Θα ήθελα κατ’ αρχάς να ευχαριστήσω όλους όσοι με τον τρόπο τους συνέβαλαν στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας . Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Αργύρη Φελλούρη για την επίβλεψη αλλά και την συστηματική βοήθεια που μου προσέφερε.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον συμμαθητή και στενό μου φίλο Σιούρα Δημήτρη ,του οποίου η συμβολή και η στήριξη ήταν πολύτιμη στην διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας παρά την χιλιομετρική απόσταση που μας χωρίζει.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ όμως, το οφείλω στην οικογένεια μου, τους γονείς και την αδερφή μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και την πίστη που δείχνουν σε μένα, τους στόχους και τα όνειρά μου. Τους ευχαριστώ γιατί με ανέθρεψαν χωρίς καμία στέρηση υλική ή συναισθηματική και μου παρείχαν το πιο ζεστό περιβάλλον ώστε να μπορώ να αφιερώνομαι στο αντικείμενο που έχω επιλέξει και αγαπώ.

Την διπλωματική μου εργασία ,την αφιερώνω στους γονείς μου.

Πίνακας περιεχομένων

2. <u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>

Εισαγωγικές έννοιες

2.1. <u>Διαιρετότητα και πρώτοι αριθμοί</u>

Η θεωρία αριθμών ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων του $\mathbb{N}=\{0,1,2,.....\}$. Με δεδομένο το σύνολο $\mathbb{N}$ και ορίζοντας την πρόσθεση ,τον πολλαπλασιασμό καθώς και την διάταξη των φυσικών αριθμών μπορούμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

<u>Θεώρημα-Αρχή του Ελαχίστου</u>

Υπάρχει $a \in S$ (όπου S είναι το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων) τέτοιο ώστε: $a \leq b, \forall b \in S$.

<u>Αρχιμήδεια ιδιότητα</u>

Αν $a,b \in \mathbb{N}$ τότε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n \bullet a \geq b$

<u>Αρχή της μαθηματικής επαγωγής</u>

Έστω S το σύνολο των θετικών ακεραίων με τις ιδιότητες :

i. $1 \in S$
ii. Αν $k \in S$ τότε $k+1 \in S$,
 τότε το $S=\mathbb{N}^*$

Η χρησιμότητα της πεπερασμένης επαγωγής έγκειται στο να αποδεικνύουμε ότι κάποια πρόταση P(n) που αφορά το σύνολο των φυσικών αριθμών , ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω S το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων με τις εξής ιδιότητες : $1 \in S$ και αν $1,....,k \in S$ τότε $k+1 \in S$. Τότε $S=\mathbb{N}$

<u>Διαίρεση</u>

Έστω $a,b \in \mathbb{Z}$,τότε γράφουμε ότι $a \mid b$ δηλαδή ο a διαιρεί τον b, αν υπάρχει $x \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $b=a \bullet x$

Συνέπειες του ορισμού :

i. $a \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$
ii. $a \mid 0, \forall a \in \mathbb{Z}$
iii. αν $a \mid b$, τότε και $-a \mid b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$
iv. $\pm 1 \mid a, \forall a \in \mathbb{Z}$
v. $0 \mid a$, αν, και μόνο αν, $a = 0$
vi. αν $a \mid b$ και $\mathrm{b} \mid \mathrm{c}$, τότε $a \mid \mathrm{c}$
vii. αν $a \mid b$ και $a \mid \mathrm{c}$, τότε $a \mid b \cdot x + c \cdot y$
viii. αν $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ και $a \mid b$ τότε $|a| \leq |b|$
ix. $a \mid \pm 1$, αν, και μόνο αν, $a = \pm 1$

<u>Ταυτότητα Διαίρεσης</u>: Έστω $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{b} \in \mathbb{Z}$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί $q, r \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $b = a \cdot q + r,\ 0 \leq r < a$.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω ακέραιος $m \geq 2$. Κάθε φυσικός αριθμός n μπορεί να αναπαρίσταται μοναδικά με τον εξής τρόπο : $n = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots . a_k m^k$, όπου k μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο $m^k \leq n < m^{k+1}$ και $a_0, a_1, \ldots . a_k$ ακέραιοι για τους οποίους $1 \leq a_k \leq m-1$ και $0 \leq a_i \leq m-1,\ \forall i = 0, 1, \ldots ..., k-1$.Αυτή είναι η λεγόμενη m-αδική αναπαράσταση του n. Και γράφουμε, $n = \overline{a_k \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0}_m$

<u>Λήμμα</u>

Έστω m ακέραιος $m \geq 2$,τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος k, τέτοιος ώστε : $m^k \leq n \leq m^{k+1}$

Παράδειγμα: η δυαδική(2-αδική) αναπαράσταση του 100 είναι:

$100 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = \overline{111}_2$

Παράδειγμα : η τριαδική(3-αδική) αναπαράσταση του 100 είναι:

$100 = 1 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^4 = \overline{121}_3$

Μέγιστος κοινός διαιρέτης (*<u>Μ.Κ.Δ)</u>*)

Έστω $a,b \in \mathbb{N}$.Υπάρχει μοναδικός $d \in \mathbb{N}^*$ ο οποίος ικανοποιεί τα εξής :

i. $d \mid a$ και $d \mid \mathrm{b}$
ii. αν για $k \in \mathbb{N}$ έχω $\mathrm{k} \mid a$ και $\mathrm{k} \mid \mathrm{b}$, τότε $\mathrm{k} \mid \mathrm{d}$. Συγκεκριμένα θα είναι $\mathrm{k} \leq \mathrm{d}$.

Επιπλέον υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $d = a \cdot x + b \cdot y$.

<u>Χρήσιμη παρατήρηση:</u> ο Μ.Κ.Δ των $a,b \in \mathbb{N}$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος συνδυασμός

$$(a,b) = \min\left\{a \cdot u + b \cdot v : u, v \in \mathbb{Z}\right\} \cap \mathbb{N}^*$$

<u>Αλγόριθμος του Ευκλείδη για υπολογισμό Μ.Κ.Δ</u>

Έστω $a,b \in \mathbb{N}$, με $a < b$. Η ταυτότητα διαίρεσης δίνει $b = a \cdot q_1 + r_1$ για, $0 \leq r_1 < a$. Αν $r_1 = 0$ ΣΤΑΜΑΤΑΩ αλλιώς συνεχίζω την ταυτότητα διαίρεσης του α με τον r_1 , δηλαδή $a = r_1 \cdot q_2 + r_2$, για $0 \leq r_2 < r_1$ και συνεχίζω έτσι την ίδια διαδικασία μέχρι να καταλήξω σε υπόλοιπο $r_{n+1} = 0$.

Τα πηλίκα $q_1, q_2, \dots$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα και ο Μ.Κ.Δ είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο ,κάτι το οποίο γίνεται φανερό και απ' το παρακάτω θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $a,b \in \mathbb{N}$ και $a < b$. Έστω ότι απ' τον αλγόριθμο του Ευκλείδη έχω βρει $q_1, q_2, \dots\dots, q_{n+1} \in \mathbb{N}$ και $r_1, \mathrm{r}_2, \dots\dots, \mathrm{r}_n \in \mathbb{N}$ με $0 < r_n < r_{n-1} < \dots\dots < r_1 < a$ και:

$$\begin{aligned}
b &= a \cdot q_1 + r_1 \\
a &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\
\dots &= \dots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \\
r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1}
\end{aligned}$$

Τότε $(a,b) = r_n$

Δηλαδή, κάθε φορά ο νέος διαιρετέος είναι ο προηγούμενος διαιρέτης και κάθε νέος διαιρέτης είναι το προηγούμενο υπόλοιπο.

Παράδειγμα : θα υπολογίσουμε τον Μ.Κ.Δ (391 , 2533). Με διαδοχικές διαιρέσεις

$$2533 = 391 \cdot 6 + 187$$
$$391 = 187 \cdot 2 + 17$$
$$187 = 17 \cdot 11$$

Επομένως (391, 2533) = 17

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία μπορούν να βρεθούν οι ακέραιοι x , y για τους οποίους $17 = 391 \cdot x + 2533 \cdot y$

Από τις προηγούμενες ισότητες παίρνουμε:

$$17 = 391 - 187 \cdot 2$$
$$17 = 391 - (2533 - 391 \cdot 6) \cdot 2$$
$$17 = 391 + 391 \cdot 12 - 2533 \cdot 2$$
$$17 = 391 \cdot 13 + 2533 \cdot (-2)$$

Άρα $x = 13$ και $y = -2$

Θεώρημα

Έστω *a, b* δυο σχετικά πρώτοι φυσικοί αριθμοί. Ας υποθέσουμε ότι $w \mid a \cdot b$ για $w \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχουν μοναδικοί $u, w \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $u \mid a$, $\mathrm{v} \mid \mathrm{b}$ και $w = u \cdot v$.

Βασικά λήμματα διαιρετότητας

Λήμμα 1

Αν $a, b, c \in \mathbb{N}$ τότε $(c \cdot a,\ c \cdot \mathrm{b}) = c \cdot (a, b)$.

Λήμμα 2

Έστω $r_1, \mathrm{r}_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2) = 1$. Αν $r_1 \mid r_2 \cdot m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,τότε $r_1 \mid m$.

Λήμμα 3

Έστω $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ με $(r_1, r_2)=1$. Αν $r_1 | m$ και $r_2 | m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,τότε $r_1 \cdot r_2 | m$.

Επομένως, για να δείξω λόγου χάριν ότι $24 | m$,αρκεί να δείξω ότι $8 | m$ και $3 | m$.

Λήμμα 4

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με $(a,b)=1$. Αν $w | a \cdot b$ τότε ο w γράφεται ως : $w = u \cdot v$ όπου $u | a$, $v | b$ και $(u,v)=1$.

Γραμμική Διοφαντική Εξίσωση

Διοφαντική είναι μια (συνήθως πολυωνυμική) εξίσωση της μορφής $f\left(x_1, ..., x_k\right)=b$ για την οποία ψάχνουμε λύσεις στους ακεραίους ή τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $\left(\mathbb{Z} \text{ ή } \mathbb{Z}^{+}\right)$.

Θεώρημα

Έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$. Αν $b \in \mathbb{Z}$ τότε υπάρχουν ακέραιοι $\left(x_1, x_2\right)$ τέτοιοι ώστε $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$, αν, και μόνο αν, ο b είναι πολλαπλάσιο του $\left(a_1, a_2\right)$. Ειδικότερα η εξίσωση έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{Z}$ αν και μόνο αν $\left(a_1, a_2\right)=1$.

Το παραπάνω θεώρημα δίνει απάντηση στο αν υπάρχουν λύσεις της $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$.

Πρώτοι αριθμοί

Ορισμός:

Έστω $a > 1$ ένας φυσικός αριθμός. Ο α θα ονομάζεται **πρώτος,** αν οι μόνοι του θετικοί διαιρέτες του είναι ο 1 και ο ίδιος ο α . Όταν ο α δεν είναι πρώτος , καλείται **σύνθετος**. Τον 1 δεν τον κατατάσσουμε ούτε στη μια ούτε στην άλλη κατηγορία.

Ορισμός:

Δυο αριθμοί $a, b \in \mathbb{N}$ ονομάζονται σχετικά πρώτοι, αν ο Μ.Κ.Δ τους ισούται με τη μονάδα.

Θεώρημα

Έστω $a,b \in \mathbb{N}$ και p ένας πρώτος αριθμός. Αν $p \mid a \cdot b$, τότε: είτε $p \mid a$ είτε $p \mid \mathrm{b}$.

Θεώρημα

Έστω $a_1,.....a_k \in \mathbb{N}$ και $\boldsymbol{p}$ ένας πρώτος αριθμός. Αν $p \mid a_1,....\alpha_\kappa$, τότε $p \mid a_j$ για τουλάχιστον ένα $j \in \{1,........,k\}$.

Θεώρημα – (Θεμελιώδες Θεώρημα της αριθμητικής)

Κάθε φυσικός αριθμός , αναλύεται μονοσήμαντα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Θεώρημα

Κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ αναπαρίσταται μονοσήμαντα στη μορφή $n = p_1^{k_1}........p_r^{k_r}$ όπου $p_i < ...... < p_r$ είναι πρώτοι αριθμοί και $k_1,......,\mathrm{k}_r \in \mathbb{N}$. Αυτή είναι η λεγόμενη κανονική αναπαράσταση ενός φυσικού αριθμού *n*.

Θεώρημα

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί, όπως πρώτος απέδειξε ο Ευκλείδης περί τα 300 π.Χ.

2.2. Ισοτιμίες

Ορισμός:

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αν $a,b \in \mathbb{Z}$, θα λέμε ότι ο α είναι ισότιμος (ή ισοδύναμος ή ισοϋπόλοιπος) με τον *b* modulo *m* και θα συμβολίζουμε $a \equiv b(\bmod m)$, αν $m \mid \alpha - b$.

Παραδείγματα:

$3 \equiv 24(\bmod 7)$, $-31 \equiv 11(\bmod 7)$, $-15 \equiv -64(\bmod 7)$

Η ισοτιμία (mod *m*) είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{Z}$, αφού, για

$m \in \mathbb{N}$ και $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ισχύουν:

i. $a \equiv a \pmod{m}$, ανακλαστική ιδιότητα.

ii. $a \equiv b \pmod{m}$, τότε $b \equiv a \pmod{m}$, συμμετρική ιδιότητα.

iii. $a \equiv b \pmod{m}$ και $b \equiv c \pmod{m}$, τότε $a \equiv c \pmod{m}$, μεταβατική ιδιότητα.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης, $a = m \cdot q + r, 0 \le r < m$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $a, q, r \in \mathbb{Z}$ σύμφωνα και με τον ορισμό της ισοτιμίας που δόθηκε παραπάνω, προκύπτει ότι οι α και r είναι ισότιμοι ως προς m, διότι $a = m \cdot q + r \Rightarrow a - r = m \cdot q \Rightarrow m \mid (a - r)$

Ο r είναι το <u>ελάχιστο υπόλοιπο</u> του α ως προς m. Επίσης ο α ανήκει στην <u>κλάση</u> του r ως προς m (αλλιώς ο α ανήκει στην κλάση $r \pmod{m}$. Υπάρχουν m κλάσεις $\bmod m$, οι $r(\bmod m)$ με $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1$.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $m \in \mathbb{Z}$ και έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ τότε $a \equiv b \pmod{m}$, αν, και μόνο αν, οι α και b ανήκουν στην ίδια κλάση υπολοίπων ως προς m.

Επομένως, κάθε φυσικός αριθμός m ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$, την $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Και οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ακριβώς οι κλάσεις που αποτελούνται από όλους τους ακεραίους που η διαίρεσή τους με m αφήνει υπόλοιπο r, για $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots m-1$.

<u>Πρόταση-Ιδιότητες ισοτιμιών</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. Αν $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$ και $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$ τότε

i. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}$

ii. $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}$

iii. $a_1^k \equiv b_1^k \pmod{m}, \forall k \in \mathbb{N}^*$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a,b,c \in \mathbb{Z}$ με $c \neq 0$

i. Αν $\alpha c \equiv bc (\bmod m)$, τότε $\alpha \equiv b(\bmod m/(c,m))$

ii. Αν $\alpha c \equiv bc (\bmod m)$ και $(c,m) = 1$, τότε $\alpha \equiv b(\bmod m)$

Πολύ βασική για τις ισοτιμίες είναι η συνάρτηση Euler. Η Euler είναι μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι για δυο φυσικούς αριθμούς *m, n* με $(m,n)=1$ ισχύει: Για κάθε θετικό ακέραιο n , η φ(*n*) δίνει το πλήθος των φυσικών αριθμών οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι με το *n* αλλά και σχετικά πρώτοι μαζί του.

Για παράδειγμα φ(6) =2 αφού απ' τους φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι το 6, ακριβώς δύο οι 1 και 5 είναι πρώτοι με το 6.

Όμως, αν n πρώτος αριθμός, τότε όλοι οι φυσικοί που είναι μικρότεροι απ' αυτόν είναι πρώτοι με το *n* (δηλαδή σχετικά πρώτοι). Και τότε ισχύει:

$$\varphi(n) = n - 1$$

Γενικότερα , αν $n = p_1^{k_1} \ldots\ldots p_r^{k_r}$ όπου p_j διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί και $k_j \in \mathbb{N}^*$ τότε :

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

<u>***Συστήματα υπολοίπων***</u>

<u>***Ορισμός***</u>

Θεωρούμε το σύνολο *S* ακεραίων που έχει *m* στοιχεία. Αυτό το σύνολο θα λέγεται <u>πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς *m*</u> , αν για κάθε ακέραιο *α* υπάρχει μοναδικό $x \in$ S με την ιδιότητα $x \equiv a(\bmod m)$.

<u>Παράδειγμα</u>: το σύνολο *S* = {2 , 4 , 6} είναι ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς 3.

<u>***Ορισμός***</u>

Θεωρούμε το σύνολο $M^{*}=\{a \in M=\{0,1,...,m-1\}:(a,m)=1\}$. Το M^{*} έχει φ(m) στοιχεία. Ένα σύνολο T ακεραίων το οποίο έχει φ(m) στοιχεία λέγεται <u>ανηγμένο σύστημα υπολοίπων</u> <u>ως προς *m*</u> αν για κάθε ακέραιο $a \in M^{*}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathrm{T}$ με την ιδιότητα $x \equiv a(\bmod m)$.

<u>Παράδειγμα</u>: το σύνολο T={1, 15} είναι ένα ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς 4.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ με (k , m) =1. Τότε,

i. Όταν ο x διατρέχει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς m, ο $k \cdot x$ διατρέχει και αυτός ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς m.
ii. Όταν ο x διατρέχει ένα ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς m, ο $k \cdot x$ διατρέχει και αυτός ένα ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς m.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $m,n \in \mathbb{N}$ με (m,n) = 1. Τότε,

i. Όταν ο x διατρέχει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς m και ο y διατρέχει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς n, ο $n \cdot x+m \cdot y$ διατρέχει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς $n \cdot m$.

ii. Όταν ο x διατρέχει ένα ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς m και ο y διατρέχει ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων ως προς n, ο $n \cdot x+m \cdot y$ διατρέχει ένα ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς $n \cdot m$.

<u>Θεώρημα Fermat-Euler</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{Z}-\{0\}$ τέτοια ώστε (α,m)=1. Τότε:

$$\alpha^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m),$$

όπου φ(m) η συνάρτηση Euler.

Θεώρημα-Μικρό Θεώρημα του Fermat

Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $a \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε ο p να μην διαιρεί τον $α$. Τότε:

$$\alpha^{p-1} \equiv 1 (\bmod\, p)$$

Γραμμικές ισοτιμίες

Δίνεται ένα πολυώνυμο $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με ακέραιους συντελεστές και ένας $m \in \mathbb{N}$. Έχουμε την ισοτιμία $f(x) \equiv 0 (\bmod\, m)$ και μας ενδιαφέρει να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων x ενός πλήρους συστήματος υπολοίπων ως προς m τα οποία ικανοποιούν την ισοτιμία.

Θεώρημα

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{Z}$. Η ισοτιμία $ax \equiv b(\bmod\, m)$ έχει λύσεις αν και μόνο αν $(a, m) | b$. Τότε, το πλήθος των λύσεων ισούται με $d = (a, m)$ και όλες οι λύσεις ανήκουν στην ίδια κλάση υπολοίπων ως προς m/d.

Παράδειγμα: Για να λυθεί η ισοτιμία $5x \equiv 2(\bmod\, 26)$

Παρατηρούμε ότι $d = (5\ , 26) = 1$ και $1 | 2$. Επομένως η ισοτιμία έχει μια και μοναδική λύση , η οποία θα βρεθεί λύνοντας τη γραμμική διοφαντική εξίσωση $5x – 26y = 2$

Γράφουμε $1 = 5(-5) – 26(-1)$ και πολλαπλασιάζοντας επί 2

Έχουμε $2 = 5(-10)- 26(-2)$

συνεπάγεται $5(-10) \equiv 2(\bmod\ 26)$,

δηλαδή η μοναδική λύση της ισοτιμίας είναι $-10(\bmod\ 26)$

Πρόταση-Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων

Έστω $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και έστω $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_r$ φυσικοί αριθμοί σχετικά πρώτοι ανά δύο. Αν $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot m_r$ τότε κάθε λύση της $f(x) \equiv 0(\bmod\, m)$ είναι λύση του συστήματος

$$f(x) \equiv 0(\bmod\, m_1)$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m_2}$$

$$\ldots \equiv \ldots$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m_r}$$

και αντιστρόφως.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $m_1, m_2, \ldots, m_r$ φυσικοί αριθμοί με $(m_i, m_j) = 1$, αν $i \neq j$. Αν $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots\ldots \cdot m_r$,τότε $\forall c_1, c_2, c_r \in \mathbb{Z}$ το σύστημα:

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv c_2 \pmod{m_2}$$

$$\ldots \equiv \ldots$$

$$x \equiv c_r \pmod{m_r}$$

έχει μοναδική λύση $x \pmod{m}$

<u>Πολυωνυμικές ισοτιμίες</u>

Έστω $f(x) = c_n \cdot x^n + \ldots\ldots + c_1 \cdot x + c_0$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ με ακέραιους συντελεστές c_i ($c_n \neq 0$). Έστω $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots\ldots \cdot p_r^{k_r}$ ένας φυσικός μεγαλύτερος ή ίσος του 2. Για να λύσουμε την ισοτιμία $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ αρκεί να λύσουμε σύμφωνα με τα παραπάνω τις $f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{k_i}}$, i=1,.......,r .

<u>Λήμμα</u>

Έστω $f(x) = c_n \cdot x^n + \ldots\ldots + c_1 \cdot x + c_0$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ με ακέραιους συντελεστές c_i $(c_n \neq 0)$. Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$ έχουμε $f(a+b) = f(a) + b \cdot f'(a) + b^2 \cdot s$, όπου $s \in \mathbb{Z}$ και $f'(a)$ η παράγωγος της *f* στο *α*.

Θεώρημα

Έστω $f\left(x\right)=c_n\cdot x^n+.....+c_1\cdot x+c_0$ πολυώνυμο βαθμού $n\geq 2$ με ακέραιους συντελεστές c_i ($c_n \neq 0$). Και έστω p πρώτος αριθμός και $k\geq 2$. Τότε, η κλάση $x\left(\bmod p^k\right)$ είναι λύση της $f\left(x\right)\equiv 0\left(\bmod p^k\right)$ αν και μόνο αν $x=z+y\cdot p^{k-1}$ για κάποιους ακέραιους $0\leq z<p^{k-1}$ και $0\leq y<p$ οι οποίοι ικανοποιούν τις:

$$f(z)\equiv 0(\bmod p^{k-1}) \quad \text{και} \quad \frac{f(z)}{p^{k-1}}+yf'(z)\equiv 0(\bmod p)$$

Επομένως με διαδοχικές εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να ανάγουμε την ισοτιμία σε επίλυση της απλούστερης $f\left(x\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$.

Πρόταση

Έστω $f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές .Υπάρχει πολυώνυμο $g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}$ με ακέραιους συντελεστές και βαθμό μικρότερο από p τέτοιο ώστε $f\left(x\right)\equiv g\left(x\right)\left(\bmod p\right)$, $\forall x\in\mathbb{Z}$.

Θεώρημα Lagrange

Έστω $f\left(x\right)=c_n\cdot x^n+.....+c_1\cdot x+c_0$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και έστω p ένας πρώτος αριθμός. Υποθέτουμε ότι ο p δεν διαιρεί τον συντελεστή c_n . Τότε η ισοτιμία $f\left(x\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$ έχει το πολύ n λύσεις.

Θεώρημα

Έστω $f\left(x\right)=c_n\cdot x^n+.....+c_1\cdot x+c_0$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και έστω p ένας πρώτος αριθμός. Υποθέτουμε ότι η ισοτιμία $f\left(x\right)\equiv 0\left(\bmod p\right)$ έχει περισσότερες από n λύσεις. Τότε $p\mid c_j \;\; \forall \; j=0,\, 1\, ,\ldots,\, n$

Θεώρημα

Για κάθε πρώτο αριθμό p ισχύει η: $(p-1)! \equiv -1 (\bmod p)$

2.3. Ο τετραγωνικός νόμος αντιστροφής

Η τάξη ενός ακεραίου ως προς n

Έστω $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$ από Θεώρημα Euler αν $a \in \mathbb{Z}$ και $(a,n) = 1$

τότε $a^{\varphi(\mathrm{n})} \equiv 1(\bmod n)$ όπου φ(n) η γνωστή μας συνάρτηση Euler.

Ορισμός

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Η τάξη του *α* ως προς *n* είναι ο μικρότερος φυσικός *κ* για τον οποίο $a^{\kappa} \equiv 1(\bmod n)$. Δηλαδή ο 1 έχει τάξη 1 ως προς κάθε *n*.

Θεώρημα

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Αν ο *α* έχει τάξη *κ* ως προς *n* τότε $a^{s} \equiv 1(\bmod n)$ αν και μόνο αν $\kappa \mid s$. Ειδικότερα $\kappa \mid \varphi(n)$.

Θεώρημα

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Αν ο *α* έχει τάξη *κ* ως προς *n*, τότε $\alpha^{\iota} \equiv \alpha^{j} (\bmod n)$ αν και μόνο αν $i \equiv j (\bmod k)$.

Πόρισμα

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Αν ο α έχει τάξη *κ* ως προς *n*, τότε οι $a, a^{2}, \ldots\ldots a^{k}$ είναι ανισότιμοι $\bmod n$.

Θεώρημα

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Αν ο *α* έχει τάξη k ως προς n ,τότε η τάξη του a^{s} ως προς n ισούται με $k/(k,s)$.

Πρωταρχικές ρίζες

Έστω $n > 1$ και $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n) = 1$. Ο α λέγεται πρωταρχική ρίζα του n αν η τάξη του α ως προς n είναι ίση με $\varphi(n)$.

Πρόταση

Αν $(a,n) = 1$ και ο α είναι πρωταρχική ρίζα του n, τότε οι ακέραιοι $a, a^2, ..., a^{\varphi(n)}$ σχηματίζουν ένα πλήρες ανηγμένο σύστημα υπολοίπων ως προς n.

Λήμμα

Έστω p περιττός πρώτος και $d \mid (p-1)$. Τότε , η ισοτιμία $x^d - 1 \equiv 0 \pmod p$ έχει ακριβώς d λύσεις.

Θεώρημα

Έστω p περιττός πρώτος και έστω $d \mid (p-1)$. Τότε, υπάρχουν $\varphi(d)$ ακέραιοι ανισότιμοι ως προς p οι οποίοι έχουν τάξη ίση με d.

Θεώρημα

Κάθε περιττός πρώτος p έχει πρωταρχικές ρίζες.

Θεώρημα

Αν ο n>1 έχει πρωταρχικές ρίζες, τότε $n = 2$ ή $n = 4$ ή $n = p^k$ ή $n = 2p^k$,όπου p περιττός πρώτος και $k \geq 1$.

Τετραγωνικά υπόλοιπα και το σύμβολο του Legendre

Ορισμός

Έστω p ένας περιττός πρώτος και έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,p) = 1$. Λέμε ότι ο α είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του p αν η $x^2 \equiv a \pmod p$ έχει (δύο) λύσεις. Αλλιώς λέμε ότι ο α δεν είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του p.

Θεώρημα

Έστω p ένας περιττός πρώτος. Υπάρχουν ακριβώς (p-1)/2 ανισότιμα ως προς p τετραγωνικά υπόλοιπα του p τα οποία αναπαρίστανται από τους:

$$1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

Θεώρημα-Κριτήριο του Euler

Έστω p ένας περιττός πρώτος και έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $(\alpha,p) = 1$.Τότε, ο α είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του p αν και μόνο αν

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(\text{mod } p)$$

σε αντίθετη περίπτωση ισχύει αναγκαστικά η :

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(\text{mod } p)$$

Ορισμός

Έστω p περιττός πρώτος και έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $(\alpha,p) = 1$. Το σύμβολο του Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ ορίζεται ως εξής :

$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, αν ο α είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του p ή

$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, αν ο α δεν είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του p

Εάν δε $p \mid a$, θέτουμε $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$. Με αυτή τη σύμβαση για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ο αριθμός $1+\left(\frac{a}{p}\right)$ ισούται με το πλήθος των λύσεων της:

$$x^2 \equiv \alpha(\text{mod } p)$$

Πρόταση

Έστω p ένας περιττός πρώτος και έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $(a,p) = (b,p) =1$.Ισχύουν τα εξής :

i. Αν $a \equiv b \pmod p$, τότε $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

ii. $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$

iii. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$

iv. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$

v. $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ και $\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Παράδειγμα: θέλουμε να ελέγξουμε εάν η ισοτιμία $x^2 \equiv -38 \pmod{13}$ έχει λύσεις.

Αρχικά, εφόσον (-38,13) = 1 υπολογίζουμε το:

$$\left(-\frac{38}{13}\right) \overset{(iv)}{=} \left(-\frac{1}{13}\right)\left(\frac{38}{13}\right) \overset{(v)}{=} (-1)^{\frac{13-1}{2}} \left(\frac{38}{13}\right) = \left(\frac{38}{13}\right)$$

με χρήση των iv και v του παραπάνω Θεωρήματος. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το i έχουμε :

$\left(\frac{38}{13}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)$,διότι η ταυτότητα διαίρεσης δίνει: $38 = 13 \cdot 2+12$ δηλαδή b =12

Επιπλέον, από ii και iv λαμβάνουμε :

$$\left(\frac{12}{13}\right) = \left(\frac{4 \cdot 3}{13}\right) = \left(\frac{2^2 \cdot 3}{13}\right) \overset{iv}{=} \left(\frac{2^2}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) \overset{ii}{=} \left(\frac{3}{13}\right)$$

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το $\left(\frac{3}{13}\right)$.

Από κριτήριο του Euler :

$3^6 = 27^2 = 1\left(\mathrm{mod}13\right)$ δηλαδή ο 3 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο του 13 άρα $\left(\dfrac{3}{13}\right)=1$ και οι λύσεις της $x^2 \equiv -38\left(\mathrm{mod}13\right)$ θα είναι σε αριθμό ίσες με $1+\left(\dfrac{3}{13}\right)=1+1=2$.

Θεώρημα-Λήμμα του Gauss-Ένας άλλος τρόπος να «βλέπουμε» το σύμβολο Legendre

Έστω p περιττός πρώτος και α ένας ακέραιος με $(\alpha,p) = 1$. Θεωρούμε το σύνολο:

$$S = \left\{ a, 2\cdot a, ..., \frac{p-1}{2}\cdot a \right\}$$

Αν n ,είναι το πλήθος των στοιχείων του S που αφήνουν υπόλοιπο μεγαλύτερο από $p/2$ στη διαίρεσή τους με τον p, τότε:

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = (-1)^n$$

Θεώρημα

Έστω p ένας περιττός πρώτος. Τότε, $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ δηλαδή,

$\left(\dfrac{2}{p}\right)=1$,αν $p = 8\cdot k \pm 1$ και, $\left(\dfrac{2}{p}\right)=-1$ αν $p = 8\cdot k \pm 3$

Ο τετραγωνικός νόμος αντιστροφής

Έστω p και q δυο περιττοί πρώτοι. Τότε, τα σύμβολα του Legendre $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ και $\left(\dfrac{q}{p}\right)$ορίζονται και τα δύο. Ο τετραγωνικός νόμος αντιστροφής, μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ένα από τα δύο αν γνωρίζουμε την τιμή του άλλου.

Ισχύει πάντα η ισότητα: $$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Λήμμα

Αν p είναι ένας περιττός πρώτος και α είναι ένας περιττός ακέραιος με $(a,p)=1$,

τότε $\left(\dfrac{a}{p}\right)=(-1)^N$ όπου $N=\sum_{k-1}^{(p-1)/2}\left[\dfrac{k\cdot a}{p}\right]$

Θεώρημα-Τετραγωνικός νόμος αντιστροφής του Gauss

Αν p και q είναι διακεκριμένοι περιττοί πρώτοι τότε:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Παράδειγμα :Θέλουμε να υπολογίσουμε το σύμβολο Legendre $\left(\dfrac{196}{23}\right)$

Από την ταυτότητα διαίρεσης έχουμε $196=23\cdot 8+12$ άρα,

$\left(\dfrac{196}{23}\right)=\left(\dfrac{12}{23}\right)$ και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του Legendre έχουμε τα εξής:

$\left(\dfrac{12}{23}\right)=\left(\dfrac{2^2}{23}\right)\left(\dfrac{3}{23}\right)=\left(\dfrac{3}{23}\right)$,άρα αρκεί να υπολογίσουμε το $\left(\dfrac{3}{23}\right)$ και από τον τετραγωνικό νόμο αντιστροφής προκύπτει: $\left(\dfrac{3}{23}\right)\left(\dfrac{23}{3}\right)=(-1)^{11}=-1$.

Επίσης $\left(\dfrac{23}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)\equiv 2\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, (κριτήριο Euler), οπότε $\left(\dfrac{196}{23}\right)=1$.

3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εφαρμογή των διακεκριμένων κλάσεων υπολοίπων στον πίνακα δρομολογίων του μετρό.

Περίληψη

Θεωρούμε ένα πρόβλημα συνδυαστικής , το οποίο υπαγορεύεται από το ειδικά απλοποιημένο πρόβλημα δρομολογίων για τα δίκτυα του μετρό. Μαθηματικά, το πρόβλημα είναι να βρεθούν ζεύγη από διακεκριμένες κλάσεις υπολοίπων modulo συγκεκριμένων δοθέντων ακεραίων. Κάθε τέτοια κλάση αντιστοιχεί στις ώρες αφίξεως μιας γραμμής του μετρό με συγκεκριμένη συχνότητα. Για μια ευρεία κατηγορία περιπτώσεων, χαρακτηρίζουμε πότε τέτοιες διακεκριμένες κλάσεις υπολοίπων υπάρχουν και με ποιο τρόπο μπορούν να ευρεθούν. Μελετάμε επιπλέον μια γενίκευση η οποία περιλαμβάνει την ελάχιστη απαίτηση απόστασης μεταξύ των κλάσεων υπολοίπων και μια σύγκριση διαφορετικών οικογενειών από συχνότητες όσο αφορά στη αποδοτικότητά τους. Τέλος, θα συζητηθεί μια γενική μέθοδος βασισμένη στον ακέραιο προγραμματισμό.

3.1. Εισαγωγή και το κύριο πρόβλημα

Θεωρούμε ένα συνδυαστικό πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει διακεκριμένες κλάσεις υπολοίπων. Το πρόβλημα υπαγορεύεται από μια εφαρμογή για τα δρομολόγια του μετρό. Παρόλο , που το μοντέλο μας είναι απλοποιημένο, δεν παύει να έχει πρακτικό ενδιαφέρον. Παρακάτω συζητούνται ρεαλιστικά προβλήματα δρομολογίων.

Κίνητρο

Θεωρείστε ένα δίκτυο του μετρό ,όπου κορυφές και ακμές αντιστοιχούν σε στάσεις και απευθείας συνδέσεις μεταξύ τους. Κάθε γραμμή του μετρό αντιστοιχεί σ’ ένα μονοπάτι μεταξύ δυο κορυφών σε αυτό το δίκτυο. Έχουμε επομένως μια προέλευση και έναν προορισμό. Θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα δρομολογίου σε απλό δίκτυο. Σε αντίστοιχα προβλήματα για σύνθετα δίκτυα πρέπει να ληφθούν υπόψη και απαιτήσεις οι οποίες αφορούν και τα δρομολόγια των άλλων μέσων μαζικής μεταφοράς με τα οποία συνδέεται το μετρό. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε απλουστευμένο πρόβλημα που εμπλέκει την στρατηγική απόφαση, ποιές συχνότητες να χρησιμοποιηθούν για διαφορετικές γραμμές. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συμφόρηση στο δίκτυο. Έστω ότι για παράδειγμα υπάρχει ένα τούνελ στο κέντρο της πόλης, μέσα απ' το οποίο πρέπει να περάσουν όλες οι γραμμές του δικτύου. Στο Όσλο παραδείγματος χάριν ένα τούνελ συνδέει την ανατολικές με την δυτικές πλευρές της πόλης(σε αυτό το τούνελ υπάρχουν διάφοροι σταθμοί κατά μήκος ενός μονοπατιού).

Θεωρούμε μόνο τις προς τη δύση γραμμές ,αφού οι προς την ανατολή μπορούν να επεξεργαστούν ομοίως (και ξεχωριστά χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη στάση στους τερματικούς σταθμούς). Υποθέτουμε επιπλέον συγκεκριμένους «χρόνους ταξιδίου» μεταξύ των σταθμών. Με αυτές τις υποθέσεις ένα χρονοδιάγραμμα κάποιας γραμμής είναι εντελώς καθορισμένο από τις ώρες αφίξεων στον κεντρικό σταθμό ,ο οποίος αποτελεί μια απ' τις στάσεις του τούνελ. Εξαιτίας της σταδιακής αύξησης της κίνησης, παρουσιάζει ενδιαφέρον για τις αρμόδιες αρχές που ρυθμίζουν την κυκλοφορία, να προστεθούν νέες γραμμές ή να αλλαχθούν συχνότητες των υπαρχουσών γραμμών. Αυτή η σκέψη προκαλεί το ερώτημα: Ποιοι συνδυασμοί γραμμών και συχνοτήτων είναι εφικτοί; Αυτό είναι το πρόβλημα που θα αναλύσουμε από μαθηματική οπτική γωνία. Για να είμαστε δίκαιοι , θα έπρεπε να πούμε ότι δίκτυο του Όσλο έχει υπεραπλουστευτεί ,με όλες τις γραμμές του μετρό να λειτουργούν σε περιόδους των 15 λεπτών. Προσφάτως, η συχνότητα μίας εκ των γραμμών διπλασιάστηκε ώστε να αντιμετωπιστεί η πρωινή αυξημένη κίνηση (γνωστή ως «7/8 min line»). Σε κάθε περίπτωση το προαναφερθέν πρόβλημα εμπεριέχει ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες και γι' αυτό αξίζει να μελετηθεί.

<u>Το μαθηματικό μοντέλο</u>

Θεωρούμε περιοδικά δρομολόγια και την περίοδο p μιας γραμμής ,το χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικά τρένα της ίδιας γραμμής. Έστω ότι το p είναι διαιρέτης του 60 ,έτσι ώστε να υπάρξει επανάληψη στη διάρκεια μιας ώρας. Η συχνότητα μιας γραμμής με περίοδο p είναι : $f = 60/p$, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων στη διάρκεια μιας ώρας. Για παράδειγμα, εάν η περίοδος μιας γραμμής είναι 15 , τότε οι ώρες άφιξης της στον κεντρικό σταθμό θα μπορούσαν να είναι :

$$\ldots \bullet 14.01 - 14.16 - 14.31 - 14.46 \bullet 15.01 - 15.16 - 15.31 - 15.46 \bullet \ldots$$

Έστω ότι P είναι οι πιθανές περίοδοι (διαιρέτες του 60)

$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Θεωρούμε *n* γραμμές, τις: 1,2,…,*n* και το αντίστοιχο διάνυσμα- περιόδων έστω $p = (p_1, p_2, ...p_n) \in P^n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το *p* δεν φθίνει ,

Επομένως έχουμε: $p_1 \le p_2 \le .... \le p_n$. *<u>Θα ήταν σωστό να αποτυπώναμε το διάνυσμα αυτό διαφορετικά ως εξής :</u>*

$$p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ...p_k^{(n_k)} \right),$$

έτσι ώστε να φαίνονται καλύτερα οι ίσες συνιστώσες, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η πρώτη συνιστώσα του διανύσματος *p* είναι p_1 (n_1 φορές) , η δεύτερη συνιστώσα είναι το p_2 (n_2 φορές) κ.τ.λ. ,όπου $p_1 \le p_2 \le .... \le p_n$. Φυσικά εάν $n_i = 1$, ο εκθέτης μπορεί να παραλειφθεί.

Οι πιθανές ώρες αφίξεως κατά τη διάρκεια μιας ώρας είναι το σύνολο $\mathbb{Z}_{60} = \{0,1,.....,59\}$,το οποίο βλέπουμε σαν κυκλική ομάδα εφοδιασμένη με την πρόσθεση (modulo 60).

Για παράδειγμα, έστω $0 \le s < q$ δυο ακέραιοι και ορίζουμε :

$$C_q^s = \{x \in \mathbb{Z}_{60} : x \equiv s (\mathrm{mod}\, q)\}$$

Έτσι, $C_q^0, ..., C_q^{q-1}$ είναι οι κλάσεις υπολοίπων (modulo *q*) στον $\mathbb{Z}_{60}$. Καλούμε C_q^s μια *q*-κλάση (ή απλά κλάση) και αυτή αντιστοιχεί στις ώρες αφίξεως μιας γραμμής του μετρό με περίοδο *q* ,όπου το «αρχικό» τρένο φτάνει την χρονική στιγμή *s* .Για παράδειγμα $C_{10}^3 = \{3,13,23,33,43,53\}$.

Μια *q*-κλάση θα συμβολίζεται συχνά ως C_q (δηλαδή $C_q = C_q^s$ για κάποιο *s*). Λέμε ότι ένα διάνυσμα περιόδων $p \in P^n$ είναι <u>αποδεκτό</u> αν υπάρχουν ξένες ανά δυο p_i – κλάσεις $(i \le n)$. Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να υπάρχουν ακέραιοι $0 \le s_i \le p_i$, $(i \le n)$, έτσι ώστε οι κλάσεις $C_{p_i}^{s_i}, ..., C_{p_n}^{s_n}$, να είναι ανά δυο διακεκριμένες. Μια τέτοια οικογένεια από κλάσεις p_i θα αποτελεί ένα δρομολόγιο (schedule).

Το βασικό πρόβλημα το οποίο θεωρούμε είναι :

Για δοθέν $p \in P^n$ αποφασίστε αν το p περιλαμβάνει αποδεκτές τιμές περιόδου, και αν ναι κατασκευάστε το αντίστοιχο δρομολόγιο. Το παραπάνω, ονομάζεται πρόβλημα δρομολογίων των γραμμών του μετρό και είναι ένα πρόβλημα συνδυαστικής ,του οποίου η βασική δυσκολία είναι να δομήσουμε διακεκριμένες p_i – κλάσεις έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι δεν θα φτάνουν περισσότερα από ένα τρένα σε κάθε δοθείσα χρονική στιγμή. Απαιτείται η ύπαρξη μιας ελάχιστης χρονικής απόστασης μεταξύ δυο συνεχόμενων αφίξεων (headway) ενός λεπτού ακριβώς ώστε να μην φθάνουν ταυτόχρονα δυο συρμοί. Εν συνεχεία μπορούμε να χαλαρώνουμε αυτήν την υπόθεση και να θεωρήσουμε την γενικότερη περίπτωση στην οποία η χρονική απόσταση (headway) θα είναι μεγαλύτερη του ενός λεπτού.

<u>Ενδιαφέρον είναι το εξής σύνολο:</u> $\aleph\left(p_1, p_2, ...p_k\right)$,το σύνολο των μέγιστων $\left(n_1, n_2, ...n_k\right)$ έτσι ώστε το διάνυσμα $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ...p_k^{(n_k)}\right)$ να είναι αποδεκτό. Ο όρος «μέγιστος» εδώ αναφέρεται στην σωστή διάταξη των συνιστωσών. Έτσι, ένα διάνυσμα της μορφής $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ...p_k^{(n_k)}\right)$ είναι αποδεκτό αν και μόνο αν το $\aleph\left(p_1, p_2, ...p_k\right)$ περιλαμβάνει διάνυσμα εκθετών $\left(m_1, m_2, ...m_k\right)$ με $n_i \le m_i$, $\left(i \le k\right)$. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο πως μια γραμμή i με περίοδο $p_i = 1$ ή $p_i = 60$ είναι εύκολη να προγραμματιστεί , επομένως δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία , διάνυσμα περιόδου με κάποια από αυτές τις δυο συνιστώσες.

3.2. <u>Μερικά βασικά αποτελέσματα</u>

Η συχνότητα ενός διανύσματος περιόδων $p \in P^n$ ορίζεται ως το άθροισμα των συχνοτήτων των συνιστωσών του ,δηλαδή $freq(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i$, (όπου $f_i = 60 / p_i$). Μια απλή και αναγκαία συνθήκη για ένα διάνυσμα περιόδων p παρατίθεται στη συνέχεια.

Λήμμα 1

Εάν $p \in P^n$ είναι αποδεκτό, τότε για την συχνότητα του διανύσματος αυτού θα έχουμε $freq(p) \leq 60$.

Απόδειξη

Εάν το p αποδεκτό, τότε θα ορίζει ένα χρονοδιάγραμμα (schedule) του οποίου η συχνότητα θα είναι ο συνολικός αριθμός αφίξεων στη διάρκεια μιας ώρας.

Θα λέμε ότι το p είναι πλήρες εάν $freq(p) = 60$. Στη συνέχεια ,με τα επόμενα παραδείγματα θα καταστεί σαφές ότι η συνθήκη του Λήμματος 1 είναι κάθε άλλο παρά επαρκής ώστε να είναι το p αποδεκτό. Το επόμενο Λήμμα θα χρησιμοποιείται επανειλημμένα και χαρακτηρίζει το πότε δυο κλάσεις τέμνονται (intersect).

Λήμμα 2

Θεωρούμε ακεραίους $0 \leq s < p$ και $0 \leq t < q$. Τότε οι κλάσεις C_p^s και C_q^t τέμνονται (δηλαδή η τομή ,να είναι μη κενό σύνολο) αν και μόνο αν $s \equiv t \left(\bmod d\right)$, όπου d = Μ.Κ.Δ(p,q).

Απόδειξη

Αφού d = Μ.Κ.Δ(p,q) ,θα υπάρχουν ακέραιοι α,b τέτοιοι ώστε $a \cdot d = p$ και $b \cdot d = q$.Υποθέτουμε πρώτον ότι $C_p^s \bigcap C_q^t$ είναι μη κενή και $x \in C_p^s \bigcap C_q^t$. Έτσι $x \equiv s\left(\bmod p\right)$ και $x = t\left(\bmod q\right)$,δηλαδή $x = s + k \cdot p = t + l \cdot q$ για κατάλληλους ακεραίους k και l . Ως εκ τούτου $s + k \cdot a \cdot d = t + l \cdot b \cdot d$, δηλ $s = t + d\left(l \cdot b - k \cdot a\right)$ και $s \equiv t\left(\bmod d\right)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $s \equiv t\left(\bmod d\right)$, άρα $s - t = k \cdot d$, $k \in \mathbb{Z}$. Προκύπτει απ' τον ευκλείδειο αλγόριθμο (για εύρεση Μ.Κ.Δ(p,q)=d) ότι υπάρχουν ακέραιοι α και b τέτοιοι ώστε $d = a \cdot p + b \cdot q$, άρα $s - t = k \cdot d = k \cdot \left(a \cdot p + b \cdot q\right)$ και $s - \left(k \cdot a\right) \cdot p = t + \left(k \cdot b\right) \cdot q$. Έτσι $C_p^s \bigcap C_q^t$ είναι μη κενό.

Αναφορικά με το <u>Λήμμα 2</u> ενδιαφερόμαστε κυρίως για την περίπτωση στην οποία *p* και *q* είναι διαιρέτες του 60 (περιοδικά χρονοδιαγράμματα). Σε αυτή την περίπτωση, δυο κλάσεις υπολοίπων τέμνονται αν και μόνο αν τέμνονται στον $\mathbb{Z}_{60}$.

Κατά συνέπεια το Λήμμα δείχνει ότι μπορούμε να εξετάσουμε εάν οι κλάσεις C_p^s και C_q^t τέμνονται, κάνοντας απλά τη διαίρεση $(s-t)/d$,όπου $d = M.K.\Delta(p,q)$.

Για παράδειγμα, οι κλάσεις υπολοίπων C_{10}^2 και C_{15}^7 τέμνονται, αφού Μ.Κ.Δ(10,15)=5 και επιπλέον $2 \equiv 7 \pmod 5$. Όντως, $C_{10}^2 = \{2,12,22,32,42,52\}$ και $C_{15}^7 = \{7,22,37,52\}$. Άρα η τομή γίνεται στο 22 και στο 52.

<u>Σημείωση:</u> Επομένως,το παραπάνω (Line scheduling problem) μπορεί να αναχθεί, αν βασιστούμε στο Λήμμα 2 σε πρόβλημα εύρεσης ακεραίων $0 \le s_i < p_i (i \le n)$, τέτοιους ώστε:

$$0 \le s_i < p_i (i \le n),$$

$$s_i \not\equiv s_j (\bmod d_{ij}), (i, j \le n, i \ne j).$$

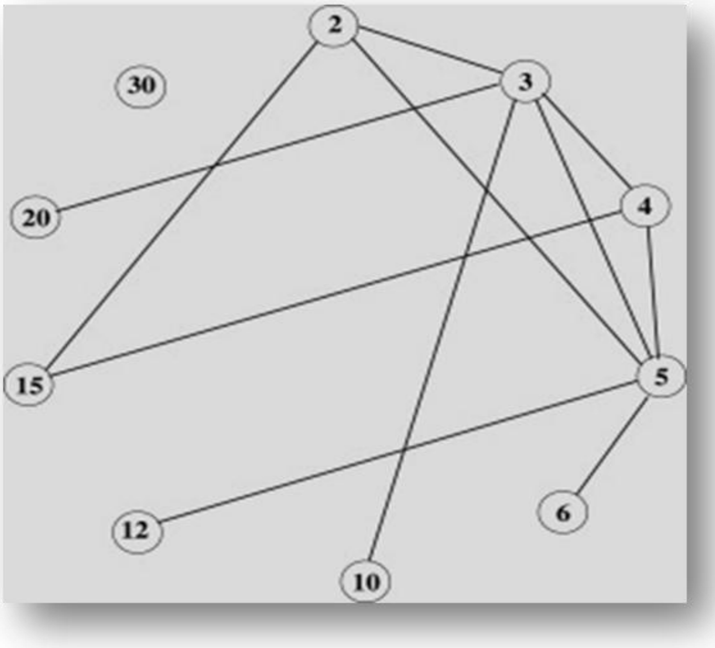
<u>Πόρισμα 3</u>

Αν $p \in P^n$ είναι αποδεκτό, τότε $M.K.\Delta(p_i, p_j) > 1$ για κάθε $i, j \le n$, $(i \ne j)$.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτοντας ότι $d = M.K.\Delta(p_i, p_j) = 1$ για ένα ζεύγος i , j , τότε από το Λήμμα 2, οι κλάσεις $C_{p_i}^{s_i}$ και $C_{p_j}^{s_j}$ τέμνονται για κάθε s_i και s_j όσο ισχύει $s_i \equiv s_j \pmod 1$. Αυτό, συνεπάγεται ότι το *p* είναι μη αποδεκτό.

<u>Σημείωση:</u> Το Πόρισμα αυτό ,λέει ότι κάθε αποδεκτό διάνυσμα περιόδων, δεν μπορεί να περιλαμβάνει δυο συνιστώσες οι οποίες να είναι σχετικά πρώτες. Στο παρακάτω Γράφημα 1 απεικονίζονται οι κορυφές που αντιστοιχούν στο *P* (εκτός από 1 και 60) καθώς και οι ακμές ,οι οποίες συνδέουν τα ζευγάρια των σχετικά πρώτων περιόδων. Επομένως, το σύνολο $\{p_i : i \le n\}$ πρέπει να είναι <u>ευσταθές σύνολο</u> σε αυτό το γράφημα ώστε να αποδεχτούμε το *p*.(Ένα ευσταθές σύνολο (<u>stable set</u>) είναι ένα υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος ,στο οποίο ανά δυο οι κόμβοι δεν είναι γείτονες). Παραδείγματος χάριν στο δικό μας γράφημα, τα : (i) (3,4) , (ii) (5,12) , (iii) (2,15) , (iv) (3,20) είναι μη αποδεκτά παραδείγματα διανυσμάτων περιόδου.



Γράφημα 1. Απεικονίζονται οι κορυφές που αντιστοιχούν στο *P*.

<u>Πόρισμα 4</u>

Έστω $p \in P^n$ αποδεκτό. Τότε για κάθε θετικό ακέραιο *d*, το διάνυσμα *p* περιλαμβάνει το πολύ *d* στοιχεία τέτοια ώστε $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = d$ για κάθε *i*, *j* ζεύγος ανάμεσα σ' αυτά τα στοιχεία.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ τέτοιο ώστε $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = d$ για κάθε ζεύγος $i, j \in I$.Θεωρούμε δρομολόγιο για το διάνυσμα *p* (το οποίο ισχύει όσο το *p* αποδεκτό) και έστω ότι η γραμμή του μετρό *i* εκχωρείται στην κλάση $C_{p_i}^{s_i}, i \in I$.Τώρα $\forall i \in I$ το s_i είναι υπόλοιπο modulo *d* για κάποιο απο τα $\{0, 1, ..., d-1\}$ καθώς $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = d$, $\forall$ i, j$\in$I .

<u>Προκύπτει απο το Λήμμα 2 ότι:</u>

s_i και s_j είναι ανισοϋπόλοιποι ως προς d ,για κάθε ζεύγος $i, j \in I$ έτσι ώστε το διάνυσμα p αποδεκτό και άρα $|I| \leq d$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Εξαιτίας του Πορίσματος 4, όλα τα παρακάτω διανύσματα περιόδου είναι μη αποδεκτά:

(i) $p = (2,10,12), \mu\varepsilon(d = 2)$

(ii) $p = \left(5^{(4)}, 10^{(1)}, 15^{(1)}\right), \mu\varepsilon(d = 5)$

(iii) $p = (q^{(q+1)}), \mu\varepsilon(d = q)$ για κάποιο q

Το *(i)* είναι μη αποδεκτό, διότι Μ.Κ.Δ(10,12)=2 , Μ.Κ.Δ(2,10)=2 και Μ.Κ.Δ(2,12)=2, δηλαδή το p περιλαμβάνει 3 στοιχεία με $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = 2$.Αντίστοιχα και το διάνυσμα στο παράδειγμα *(ii)* δεν είναι αποδεκτό αφού περιέχει 6 στοιχεία με $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = 5$.Το διάνυσμα του παραδείγματος *(iii)* αποτελεί ουσιαστικά μια γενίκευση των προηγούμενων παραδειγμάτων. Το διάνυσμα αυτό έχει q+1 συνιστώσες με $M.K.\Delta\left(p_i, p_j\right) = q$.

<u>Λήμμα 5</u>

Έστω $d \mid p$ και θεωρώ μια p-κλάση υπολοίπων C_p και μια d-κλάση C_d οι οποίες τέμνονται. Τότε $C_p \subseteq C_d$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $y \in C_p \cap C_d$.Τότε η C_p αποτελείται απ' όλους τους ακεραίους x (του $\mathbb{Z}_{60}$) οι οποίοι είναι υπόλοιπα $y \bmod p$. Όμως ,κάθε τέτοιος αριθμός x είναι επίσης υπόλοιπο $y \bmod d$ αφού $d \mid p$. Ως εκ τούτου $C_p \subseteq C_d$.

3.3. <u>Χαρακτηρισμός και επέκταση</u>

Θα ήταν πολύ εύχρηστο να είχαμε έναν πιο γενικό χαρακτηρισμό για τα αποδεκτά διανύσματα περιόδου. Το επόμενο θεώρημα προσδίδει στα διανύσματα αυτά έναν χαρακτηρισμό , ο οποίος καλύπτει ευρύ φάσμα των περιπτώσεων.

Θεώρημα 6

Έστω $p \in P^n$ διάνυσμα περιόδου της μορφής: $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ..., p_k^{(n_k)} \right)$. Υποθέτουμε ότι $p_i = d \cdot q_i$, $(i \le k)$ για κάποιον ακέραιο d και ότι κάθε ζευγάρι αριθμών ανάμεσα στα $q_1, q_2, ..., q_k$ είναι σχετικά πρώτοι. Τότε το p είναι αποδεκτό αν και μόνο αν: $\sum_{i=1}^{k} \left\lceil n_i / q_i \right\rceil \le d$ $\quad (*)$

Το σύνολο $\aleph(p_1, p_2, ...p_k)$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(m_1 \cdot q_1, m_2 \cdot q_2, ...m_k \cdot q_k)$, όπου $m_1, m_2, ..., m_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $\sum_{i=1}^{k} m_i = d$. Επιπλέον ,εάν η $(*)$ ισχύει, τότε μπορεί να παραχθεί δρομολόγιο με περίοδο p , μεταβιβάζοντας γραμμές με περίοδο p_i ,σε $\left\lceil n_i / q_i \right\rceil$ κλάσεις (σε κάθε κλάση μπορούν να εκχωρηθούν q_i γραμμές) modulo d , i=1,2,...,k.

Σημειώσεις σχετικές με το θεώρημα:

1) Το θεώρημα δεν χρησιμοποιεί τον ισχυρισμό ότι p_i είναι διαιρέτης του 60 άρα ισχύει για αυθαίρετους ακέραιους p_i (της προαναφερθείσας μορφής)
2) Ο αριθμός d που εμφανίζεται στο θεώρημα είναι ο Μ.Κ.Δ των συνιστωσών του p .Η υπόθεση για το p στο θεώρημα σημαίνει ότι Μ.Κ.Δ(p_i , p_j)=d για κάθε $i \neq j$.
3) Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των διανυσμάτων περιόδων ,όπως αυτά παρουσιάζονται στο θεώρημα είναι ότι τα αντίστοιχα δρομολόγια έχουν απλή δομή.

4) Θεωρούμε ένα διάνυσμα περιόδου p , το οποίο αντιστοιχεί στο $\aleph\left(p_1, p_2, ...p_k\right)$, όπου τα $p_1, p_2, ...p_k$ είναι της μορφής που περιγράφεται στο θεώρημα. Τότε, η συχνότητα του διανύσματος είναι $freq\left(p\right) = 60$, τότε το p είναι πλήρες.

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Έστω $p = \left(2^{(n_1)}, 4^{(n_2)}, 6^{(n_3)}, 10^{(n_4)}\right)$,δηλαδή το p έχει τη μορφή $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ..., p_k^{(n_k)}\right)$,με d=2 αφού Μ.Κ.Δ(2,4,6,10)=2 και $q_1 = 1,\ q_2 = 2,\ q_3 = 3,\ q_4 = 5$ (τα q_i σχετικά πρώτοι ανά δύο). Επομένως, όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 6 πληρούνται και αυτό σημαίνει ότι το p θα είναι αποδεκτό αν και μόνο αν: $n_1 + \lceil n_2 / 2 \rceil + \lceil n_3 / 3 \rceil + \lceil n_4 / 5 \rceil \leq 2$

Ειδικότερα, το πολύ δυο απ τα n_i είναι θετικά ,όταν το το διάνυσμα περιόδου αποδεκτό. Για παράδειγμα τα $p = \left(2^{(0)}, 4^{(2)}, 6^{(0)}, 10^{(5)}\right)$ και $p = \left(2^{(0)}, 4^{(0)}, 6^{(3)}, 10^{(5)}\right)$ είναι αποδεκτά διότι 0+1+0+1=2 και αντίστοιχα 0+0+1+1=2, ενώ το $p = \left(2^{(0)}, 4^{(1)}, 6^{(1)}, 10^{(1)}\right)$ είναι μη αποδεκτό αφού 0+1/2+1/3+1/5>2. Επίσης, $freq(p) = \frac{60}{4} + \frac{60}{6} + \frac{60}{10} = 31$

***<u>Παράδειγμα 2</u>*:**

Έστω, $p = \left(5^{(n_1)}, 10^{(n_2)}, 15^{(n_3)}\right)$ διάνυσμα της μορφής $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, ..., p_k^{(n_k)}\right)$ με $d = 5$ αφού Μ.Κ.Δ(5,10 ,15)=5 και με $q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$. Επίσης τα q_i είναι σχετικά πρώτοι ανά δυο. Τότε, από Θεώρημα 6, το p είναι αποδεκτό αν και μόνο αν $n_1 + \lceil n_2 / 2 \rceil + \lceil n_3 / 3 \rceil \leq 5$. Από αυτό προκύπτει ότι για παράδειγμα το $p = \left(5^{(1)}, 10^{(4)}, 15^{(6)}\right)$ είναι αποδεκτό, διότι 1+2+2=5 ,όμως το $p = \left(5^{(1)}, 10^{(3)}, 15^{(7)}\right)$ είναι μη αποδεκτό διότι 1+3/2+7/3 >5 .

Παράδειγμα 3:

Έστω $p=\left(4^{(n_1)},12^{(n_2)},20^{(n_3)}\right)$,άρα και σε αυτό το παράδειγμα το p έχει την επιθυμητή από το θεώρημα μορφή με $d=4, q_1=1, q_2=3, q_3=5$.Τα q_i είναι ανά δυο σχετικά πρώτοι άρα από το Θεώρημα 6 το p είναι αποδεκτό αν και μόνο αν $n_1+\lceil n_2/3\rceil+\lceil n_3/5\rceil\le 4$. Έτσι για παράδειγμα $p=\left(4^{(2)},12^{(3)},20^{(5)}\right)$ είναι αποδεκτό ,διότι 2+1+1=4 και η αντίστοιχη συχνότητα είναι $freq(p)=60$, διότι $\frac{60}{4}\cdot 2+\frac{60}{12}\cdot 3+\frac{60}{20}\cdot 5=60$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την ειδική περίπτωση του Θεωρήματος ,όπου $k\le 2$, άρα θα υπάρχουν το πολύ 2 διαφορετικές περίοδοι. Έστω την απλούστερη περίπτωση όπου, $k=1$, p=$\left(p_1^{(n_1)}\right)$ για κάποιο $p_1\in P$. Τότε το p είναι αποδεκτό αν και μόνο αν $n_1\le p_1$, διότι ο d=Μ.Κ.Δ(p_1)=p_1 και τότε q_1=1.

Παράδειγμα 4:

Απο τον Ιανουάριο του 2007, το δίκτυο του μετρό του Όσλο, αποτελείται από 6 γραμμές, κάθε μια με περίοδο 15 και το χρονοδιάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (το χρονοδιάγραμμα επαναλαμβάνεται σε κάθε επόμενο τέταρτο της ώρας).

Λεπτό	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Γραμμή	0	0	1	0	2	0	0	3	0	0	4	0	5	0	6

Εδώ, όπως και στην γενική περίπτωση μπορεί να υπάρχουν κάμποσα διαφορετικά δρομολόγια-χρονοδιαγράμματα που να αντιστοιχούν σε ένα αποδεκτό διάνυσμα περιόδου *p*.Το παραπάνω δρομολόγιο, έχει την επιθυμητή ιδιότητα ότι οι ακολουθίες των μηδενικών έχουν μήκος το πολύ δυο. Αυτό μειώνει τις επιπτώσεις πιθανών καθυστερήσεων. Στην πραγματικότητα, χρειάζεται μια χρονική απόσταση το λιγότερο δυο λεπτών μεταξύ διαδοχικών αφίξεων. Θεωρούμε αυτό το πρόβλημα λεπτομερώς παρακάτω.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση $k=2$ στην οποία έχουμε δυο διαφορετικές περιόδους .

<u>Πόρισμα 7</u>

Έστω $p=\left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}\right)$.Ορίζουμε d=Μ.Κ.Δ(p_1, p_2) και $q_1 = p_1 / d$, $q_2 = p_2 / d$. Τότε το p αποδεκτό αν και μόνο αν $\lceil n_1 / q_1 \rceil + \lceil n_2 / q_2 \rceil \le d$. Επιπλέον, το σύνολο $\aleph(p_1, p_2)$ δίνεται από: $\aleph(p_1, p_2) = \left\{\left(r \cdot q_1, (d-r) \cdot q_2\right) : 0 \le r \le d,\ r \in \mathbb{Z}\right\}$. Ένα δρομολόγιο για ένα αποδεκτό διάνυσμα περιόδου παράγεται, εκχωρώντας γραμμές με περίοδο p_1 σε r κλάσεις υπολοίπων C_d (κάθε κλάση μπορεί να «λάβει» q_1 γραμμές) και οι εναπομείνασες γραμμές στις εναπομείνασες d - r κλάσεις υπολοίπων C_d (κάθε κλάση μπορεί να «λάβει» q_2 γραμμές).

<u>Απόδειξη</u>

Εάν στο Θεώρημα 6 το k πάρει την τιμή k =2 , το πόρισμα έχει αποδειχθεί.

<u>Παράδειγμα 5:</u>

Έστω $p_1 = 10, p_2 = 15$. Τότε d = Μ.Κ.Δ(10,15)=5 και q_1 = 10/5 = 2 , q_2 = 15/5 = 3. Επομένως έχουμε το σύνολο: $\aleph(10,15) = \{(0,15),(2,12),(4,9),(6,6),(8,3),(10,0)\}$ διότι απ' το Πόρισμα 7 το r παίρνει τις τιμές r = 0,1,2,3,4,5. Ως εκ τούτου, έχουμε ολοκληρωτικά λύσει την περίπτωση των δυο διαφορετικών περιόδων $(k=2)$.

Στο τελευταίο μέρος αυτής της ενότητας, θα θεωρήσουμε μια γενίκευση του Πορίσματος 7 το οποίο παρέχει μεγαλύτερη απόσταση ασφαλείας από 1 λεπτό ανάμεσα σε διαδοχικά τρένα. Αρχικά, θα συζητήσουμε την έννοια της απόστασης όσο αφορά αυτή τη ρύθμιση. Δοθέντος ενός θετικού ακεραίου d, ορίζουμε μα συγκεκριμένη απόσταση $\delta_d(x, y)$ μεταξύ δυο ακεραίων x, y ως:

$$\delta_d(x, y) := \min\left\{\left|\bar{x} - \bar{y}\right|, d - \left|\bar{x} - \bar{y}\right|\right\}$$

όπου $\bar{x}$ συμβολίζει το υπόλοιπο του x διαιρούμενο από το d.(αντίστοιχα το $\bar{y}$ συμβολίζει το υπόλοιπο του y διαιρούμενο από το d). Η παραπάνω λοιπόν, συμβολίζει την απόσταση μεταξύ $\bar{x}, \bar{y}$ σε έναν κύκλο μήκους d. Για παράδειγμα $\delta_{60}(3,58) = 5$ και $\delta_5(9,16) = \delta_5(4,1) = 2$. Επίσης, ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δυο κλάσεων C_p^s και C_q^t ως:

$$\delta\left(C_p^s, C_q^t\right) = \min\left\{\delta_{60}(x,y) : x \in C_p^s, y \in C_q^t\right\}.$$

Επομένως αν δυο γραμμές χρησιμοποιούν κλάσεις C_p^s και C_q^t αντίστοιχα, τότε $\delta\left(C_p^s, C_q^t\right)$ είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών τρένων από διαφορετικές γραμμές. Όπου ο κύκλος έχει μήκος 60 (λεπτά). Το επόμενο Λήμμα γενικεύει το Λήμμα 2 και δείχνει πως να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δυο κλάσεων με απλό τρόπο.

<u>Λήμμα 8</u>

Θεωρούμε ακέραιους $0 \le s < p$ και $0 \le t < q$ και έστω d = Μ.Κ.Δ(p,q). Τότε,. $\delta\left(C_p^s, C_q^t\right) = \delta_d(s,t)$.

Ορίζουμε ένα διάνυσμα περιόδου $p \in P^n$.Αυτό θα ονομάζεται <u>ν-αποδεκτό</u> εάν παράγει δρομολόγιο κλάσεων $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(n)}$ τέτοιο ώστε: $\delta\left(C^{(i)}, C^{(j)}\right) \ge v,\ \forall i,j \le \mathrm{n}, i \ne j$. Ορίζουμε επίσης $\aleph_v(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, το σύνολο των μέγιστων $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, έτσι ώστε το $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}, \ldots, p_k^{(n_k)}\right)$ να είναι <u>ν-αποδεκτό.</u>

.

Θεώρημα 9

Έστω ακέραιος $v \geq 1$

(i) Αν $p = \left(p_1^{(n_1)}\right)$.Τότε το *p* είναι *v*-αποδεκτό, αν και μόνο αν $n_1 \leq \lfloor p_1 / v \rfloor$.

(ii) Αν $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}\right)$,όπου $n_1, n_2 \geq 1$. Ορίζουμε $d = M.K.\Delta(p_1, p_2)$, $q_1 = p_1 / d$ και $q_2 = p_2 / d$.Τότε το *p* είναι *v*-αποδεκτό, αν και μόνο αν:
$\lceil n_1 / q_1 \rceil + \lceil n_2 / q_2 \rceil \leq \lfloor d/v \rfloor$.Επιπλέον , το σύνολο $\aleph_v(p_1, p_2)$ είναι ίσο με
$\{(\lfloor p_1 / v \rfloor, 0), (0, \lfloor p_2 / v \rfloor)\} \bigcup \{(r \cdot q_1, (\lfloor d / v \rfloor - r) \cdot q_2) : 0 < r < \lfloor d / v \rfloor, r \in \mathbb{Z}\}$

Σημειώσεις σχετικές με το θεώρημα:

1) Η περίπτωση (*ii*) του Θεωρήματος, είναι εφαρμόσιμη μόνο όταν τα n_1 , n_2 είναι θετικά.
2) Η απόδειξη του Θεωρήματος περιγράφει ένα εφικτό δρομολόγιο για ένα *v*-αποδεκτό διάνυσμα περιόδου *p* (για το οποίο θεωρούνται το πολύ δυο διαφορετικές περίοδοι)

Παράδειγμα 6:

Το παράδειγμα αυτό παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στην μελέτη του δικτύου του μετρό στο Όσλο. Έχουμε p_1=10 , p_2=15 και *v*=2. Έτσι η μικρότερη απόσταση μεταξύ συνεχόμενων τρένων είναι 2 λεπτά. Επομένως (10,15)=5=*d* και $\lfloor d / v \rfloor = 2$. Άρα απο το *Θεώρημα 9* υπολογίζουμε τα επόμενα διανύσματα που ανήκουν στο $\aleph_2$. Δηλαδή τα: (5,0) ,(0,7) ,(2,3) όπου το *r*=1 $(0 \leq r \leq \lfloor d / v \rfloor)$.

Είναι στην πραγματικότητα, ιδιαίτερα ενδιαφέρον να συγκρίνουμε διαφορετικά, υποψήφια διανύσματα περιόδου ως προς την «αποδοτικότητά» τους . Θεωρούμε ένα φυσικό μέτρο αποτελεσματικότητας το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό των τρένων τα οποία φτάνουν στον κεντρικό σταθμό. Για ένα *v*-αποδεκτό διάνυσμα περιόδου $p \in p^n$ ορίζουμε την πυκνότητα (ή την *v*-πυκνότητα) ως :

$$dens_v(p) = \frac{freq(p)}{\frac{60}{v}} = \frac{v \cdot freq(p)}{60}$$

Αυτό είναι δηλαδή το ποσοστό των πιθανών «χρονικών σχισμών-στιγμών» κατά τη διάρκεια μιας ώρας που χρησιμοποιούνται από το *p*. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι $0 \le dens_v(p) \le 1$, αφού ένα *v*-αποδεκτό διάνυσμα περιόδου δεν μπορεί να δώσει περισσότερες από 60/*v* αφίξεις στη διάρκεια μιας ώρας. Έχει σημασία να συγκρίνουμε λοιπόν, την πυκνότητα διαφορετικών διανυσμάτων περιόδου.

<u>Θεώρημα 10</u>

Έστω η υπόθεση του Θεωρήματος 9. Για $i = 1, 2$ εάν $p = \left(p_i^{(n_i)}\right)$ όπου $n_i = \lfloor p_i / v \rfloor$,τότε $k_i := dens_v(p) = \lfloor p_i / v \rfloor \cdot v / p_i$.Εάν $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}\right)$, όπου $n_1 = r \cdot q_1$,$\mathrm{n}_2 = \left(\lfloor d / v \rfloor - r\right) \cdot q_2$ και $0 < r < \lfloor d / v \rfloor$, τότε $k_3 := dens_v(p) = \lfloor d/v \rfloor \cdot v / d$ (ανεξάρτητο του *r*). Επιπλέον, αυτές οι πυκνότητες ικανοποιούν την σχέση $k_3 \le \min\{k_1, k_2\}$.

Το περιεχόμενο του Θεωρήματος 10 θα γίνει πιο κατανοητό με το επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 7:</u>

Θεωρούμε περιόδους 5, 6, 10 και 15. Ο επόμενος πίνακας δείχνει τις πυκνότητες για τα αντίστοιχα διανύσματα περιόδου. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του *v*. Η στήλη η οποία ονοματίζεται 5 δείχνει $dens_v\left(5^{(n_1)}\right)$ όπου $n_1 = \lfloor 5 / v \rfloor$. Οι επόμενες στήλες, δείχνουν τις αντίστοιχες πυκνότητες για τις τιμές 6, 10 και 15 της περιόδου. Οι τελευταίες έξι στήλες δείχνουν τις πυκνότητες για τα διανύσματα περιόδου της μορφής $p = \left(p_1^{(n_1)}, p_2^{(n_2)}\right)$. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο(αναφορικά με το Θεώρημα 10) ότι διανύσματα αυτής της μορφής υπάρχουν μόνο όταν $d = M.K.\Delta(p_1, p_2) \ge 2 \cdot v$. Αυτό θα φανεί και στον παρακάτω πίνακα. Όπως δείχνει το παράδειγμα, η πυκνότητα φθίνει πολύ γρήγορα καθώς αυξάνει το *v*. Στην πράξη μπορεί να απαιτείται τελικά να κατασκευάσουμε δρομολόγια με μικρότερο v (headway –the distance between consecutive trains).Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να έχουμε άφιξη κάθε 30΄΄. Όλα τα αποτελέσματά μας θα μπορούν να αποδοθούν σε μια τέτοια κατάσταση θεωρώντας ένα χρονικό διάστημα 120 μονάδων χρόνου(στη διάρκεια μιας ώρας).

v	**5**	**6**	**10**	**15**	**(5,6)**	**(5,10)**	**(6,10)**	**(5,15)**	**(6,15)**	**(10,15)**
1	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	0.80	1.00	1.00	0.93	0.00	0.80	0.00	0.80	0.00	0.80
3	0.60	1.00	0.90	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Σύγκριση πυκνοτήτων

3.4. Μια υπολογιστική προσέγγιση για Line Scheduling Problem (LS)

Σ’ αυτό το τελευταίο τμήμα του Κεφαλαίου , παρουσιάζουμε μια υπολογιστική μέθοδο για να λύνουμε LS στην γενική περίπτωση. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στον Ακέραιο Γραμμικό Προγραμματισμό .Η ιδέα είναι να θεωρήσουμε μια βελτιστοποιημένη έκδοση του LS προβλήματος όπου ο στόχος είναι να αποφασίσουμε για κάθε γραμμή του δρομολογίου εάν πρέπει να ενταχθεί τελικά στο προγραμματισμένο δρομολόγιο ή όχι.

Η αντικειμενική συνάρτηση(objective function-δηλώνει τη συσχέτιση των μεταβλητών ενός προβλήματος ώστε να καθορίζουν την τιμή του τελικού μεγέθους) αφορά στο να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό αριθμό αφίξεων (στον κεντρικό σταθμό) ,δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα των συχνοτήτων των επιλεγμένων γραμμών. Θεωρούμε το ακόλουθο zero-one ILP(Integer Linear Programming) πρόβλημα. Σε αυτά τα προβλήματα οι μεταβλητές ακέραιων αριθμών είναι περιορισμένες να είναι ίσες είτε με το μηδέν είτε με το ένα(zero-one).

Επομένως έχουμε:

$$\max \sum_{i,k} x_{ik}$$

υπό την υπόθεση ότι :

$$(i) \sum_{i} x_{ik} \leq 1, \forall k$$

$$(ii) \sum_{j=k}^{k+p_i-1} x_{ik} \leq 1, \forall i,k$$

$$(iii) x_{ik} = x_{ij}, \acute{o}\tau\alpha\nu \; k \equiv j (\mathrm{mod}\, p_i)$$

$$(iv) x_{ik} \in \{0,1\}, \forall i,k$$

Στο παραπάνω μοντέλο η δυαδική μεταβλητή $x_{i,k}$ λαμβάνει την τιμή 1 αν η *i* γραμμή φτάνει τη στιγμή $k\left(i \leq n, k \leq 60\right)$.Ο περιορισμός (*i*) εξηγεί ότι το πολύ μια γραμμή μπορεί να φτάνει σε κάθε χρονική στιγμή *k* . Ο περιορισμός (*ii*) αντανακλά το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου p_i λεπτών η γραμμή *i* φτάνει το πολύ μια φορά. Σημειώνουμε ότι η ισότητα στον περιορισμό ισχύει οποτεδήποτε γίνεται χρήση της γραμμής *i* .Ο περιορισμός (*iii*) αφορά στην περιοδικότητα. Συγκεκριμένα αν χρησιμοποιηθεί η γραμμή *i* , τότε θα φτάνει κάθε p_i λεπτά, ξεκινώντας από κάποια χρονική στιγμή *k* με $0 \leq k \leq p_i$.

Το ILP πρόβλημα που παρατέθηκε μόλις, θα μπορούσε να επεκταθεί έτσι ώστε να βρεθεί *v*-αποδεκτό δρομολόγιο χρησιμοποιώντας την ίδια αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό είναι εφικτό, αν αντικατασταθεί ο περιορισμός (*i*) με τον εξής περιορισμό:

$(i') \sum_{i \leq n, p \in I(k;v)} x_{ip} \leq 1, \forall k$, όπου $I(k;v) = \{k, k+1, ..., k+v-1\}$, οι δείκτες είναι υπολογισμένοι modulo 60.

Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί πολύ γρήγορα (για την ακρίβεια σε λιγότερο από 1΄΄) από αποτελεσματικούς κώδικες για ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό. Χρησιμοποιώντας το ILOG GPLEX στην προκειμένη, ο οποίος είναι εξαιρετικά γρήγορος επιλυτής προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με branch-and-bound αλγόριθμο(αλγόριθμος για διακριτά και συνδυαστικά προβλήματα βελτιστοποίησης) για επίλυση ILP προβλημάτων. Όλα τα παραδείγματα που παρατίθενται παρακάτω ,λύθηκαν μέσα σε περίπου 0.3΄΄ σε ένα τυπικό φορητό υπολογιστή.

Παράδειγμα 1:

Θεωρούμε n=9 , v=1 και p = (5,5,5,10,10,15,15,30,30). Η βέλτιστη λύση x η οποία βρέθηκε είναι ένας (0-1)- πίνακας μεγέθους 9x60 και οι πρώτες 30 στήλες φαίνονται παρακάτω. Το δρομολόγιο επαναλαμβάνεται για τα επόμενα 30΄αφού όλες οι περίοδοι είναι διαιρέτες του 30.

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας δεν έχει μηδενικές γραμμές, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι στην περίπτωσή μας όλες οι γραμμές του δικτύου είναι σε χρήση. Η βέλτιστη λύση είναι ως εκ τούτου, το άθροισμα όλων των συχνοτήτων το οποίο είναι 60, επομένως το αντίστοιχο διάνυσμα περιόδου p είναι πλήρες.

Παράδειγμα 2 :

Το ίδιο ακριβώς παράδειγμα, με τη μόνη διαφορά ότι v =2 λύθηκε ως εξής. Η βέλτιστη λύση (δηλαδή το άθροισμα των συχνοτήτων) είναι 24. Η βέλτιστη λύση στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι να χρησιμοποιηθούν δυο από τις γραμμές με περίοδο $p_i = 5$. Άρα για v =2, το p δεν είναι πλήρες, αφού σε αυτή την περίπτωση για να χαρακτηριστεί πλήρες , θα έπρεπε το άθροισμα των συχνοτήτων να είναι 30 (διότι v =2).

Παράδειγμα 3 :

Θεωρούμε p =(5,6,6,6,10,10,12,15,15,15,30,30). Αρχικά, έστω v =1.Εδώ n =12 και $freq(p)=75$. Άρα το p μη αποδεκτό. Παρ' όλα αυτά, το πρόβλημα εξακολουθεί να είναι λογικό .Σε αυτή την περίπτωση το CPLEX βρήκε μια βέλτιστη λύση στην οποία χρησιμοποιούνται μόνο οι γραμμές περιόδου 6 , 6, 6, 12, 15, 15, 15, 30, 30. Τότε η βέλτιστη λύση είναι 51.

Παράδειγμα 4 :

Θεωρούμε το Παράδειγμα 3 με τη μόνη διαφορά ότι v =2, και τότε λαμβάνουμε μια βέλτιστη λύση , στην οποία όλες οι γραμμές περιόδου 6 χρησιμοποιήθηκαν και τότε η βέλτιστη λύση είναι 30. Άρα για v =2 το p είναι πλήρες.

3.5. Συμπέρασμα

Μετά από εκτεταμένες δοκιμές, μπορούμε να πούμε ότι αυτή η μάλλον απλή προσέγγιση στην βελτιστοποίηση του προβλήματος δρομολογίων (LS), βασισμένη στον ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό, λύνει τέτοιου είδους προβλήματα σε πολύ σύντομο χρόνο. Άρα, από πρακτικής απόψεως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σε διαδικασίες σχεδιασμού δρομολογίων. Επιπλέον, όπως αναλύσαμε στο 3^{ο} μέρος της εφαρμογής αυτής των κλάσεων υπολοίπων modulo n , διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων χρονοδιαγράμματος, μπορούν να λυθούν αναλυτικά χρησιμοποιώντας απευθείας το Θεώρημα 6 ή κάνοντας συνδυαστική συζήτηση βασισμένη σε αυτό το Θεώρημα.

4. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Έρευνα για την κατάρτιση ωρολογίου προγράμματος σε Πανεπιστήμια.

Περίληψη: Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο προσαρμοστικής περιορισμένης αναζήτησης(Adaptive Tabu Search), που στο εξής θα συμβολίζουμε ATS , ο οποίος αφορά τη λύση του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού στην εκπαίδευση. Ο αλγόριθμος που προτείνεται , ακολουθεί ένα γενικό πλαίσιο τριών φάσεων : της αρχικοποίησης, της εμβάθυνσης και της απόκλισης. Στην φάση της αρχικοποίησης χτίζουμε ένα εφικτό αρχικό πρόγραμμα χρησιμοποιώντας μια γρήγορη άπληστη ευρετική μέθοδο. Στη συνέχεια, μια προσαρμοστική συνδυαστική φάση εντατικοποίησης και απόκλισης χρησιμοποιούνται ώστε να μειωθεί ο αριθμός των παραβιάσεων των εύκαμπτων περιορισμών ,καθώς θα ικανοποιούνται οι αυστηροί περιορισμοί. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου ATS αλγόριθμου, συγκριτικά με πέντε αλγόριθμους αναφοράς, αλλά και με τα ήδη γνωστά αποτελέσματα. Θα παρουσιάσουμε επιπλέον ανάλυση των βασικών συστατικών αυτού του αλγόριθμου.

4.1. Εισαγωγή

Η κατάρτιση ωρολογίου προγράμματος είναι ένα πεδίο υψηλού και συνεχώς αυξανόμενου ενδιαφέροντος στις ερευνητικές κοινότητες αλλά και της πρακτικής , τις τελευταίες 10-ετίες. Το πρόβλημα μπορεί ουσιαστικά να οριστεί ως ένα πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού, όπου ένας συγκεκριμένος αριθμός διαλέξεων ,κάθε μια από τις οποίες μπορεί να ανήκει σε διαφορετικές ομάδες μαθημάτων ,πρέπει να ανατεθεί στο χρόνο. Κάθε διάλεξη απαιτεί κάποιους πόρους , οι οποίοι με τη σειρά τους υπόκεινται σε συγκεκριμένους περιορισμούς(αυστηρούς και εύκαμπτους). Τυπικές περιπτώσεις σε αυτό τον τομέα, αποτελούν τα εκπαιδευτικά προγράμματα, τα προγράμματα για αθλοπαιδιές, τα ωράρια των εργαζομένων, δρομολόγια μέσων μεταφοράς κλπ. Σε αυτή το κεφάλαιο της εργασίας , θεωρούμε ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Τα εκπαιδευτικά προγράμματα εντάσσονται σε δυο επιμέρους κατηγορίες: ωρολόγιο πρόγραμμα εξετάσεων και ωρολόγιο πρόγραμμα διαλέξεων. Εμείς θα εστιάσουμε σε ωρολόγιο πρόγραμμα βασισμένο στο πρόγραμμα σπουδών (Curriculum-based course timetabling που θα συμβολίζουμε ως CB-CTT). Ένας εκ των βασικότερων στόχων μας είναι να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ έρευνας και πρακτικής.

Όσο αφορά στα πανεπιστήμια ,στα βασισμένα σε πρόγραμμα σπουδών χρονοδιαγράμματα , ένα σύνολο διαλέξεων πρέπει να ανατεθεί μέσα σε ώρες και αίθουσες (πόροι), υπό την προϋπόθεση ενός συνόλου περιορισμών. Συνήθως, δυο είδη περιορισμών μπορούν να οριστούν : αυτοί οι οποίοι πρέπει να ικανοποιούνται κάτω από οποιαδήποτε συνθήκη (αυστηροί) και αυτοί οι οποίοι δεν ικανοποιούνται απαραιτήτως, όμως οι παραβιάσεις αυτών πρέπει κατά προτίμηση να ελαχιστοποιούνται (εύκαμπτοι).Ένα ωρολόγιο πρόγραμμα καλείται <u>εφικτό</u> όταν ικανοποιεί όλους τους αυστηρούς περιορισμούς. Ο αντικειμενικός στόχος του προβλήματος CB-CTT είναι να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των παραβιάσεων των εύκαμπτων περιορισμών σ’ ένα εφικτό πρόγραμμα. Το γενικό πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού θεωρείται σύνθετο και δύσκολο. Σε αυτό το πλαίσιο, ακριβείς λύσεις θα μπορούσαν να είναι εφικτές μόνο για προβλήματα περιορισμένου μεγέθους.

<u>Ο αντικειμενικός στόχος αυτής της μελέτης είναι διπλός :</u> να περιγραφεί η λύση των τριών φάσεων, δηλαδή ο αλγόριθμος που θα λύσει το CB-CTT πρόβλημα, καθώς και ανακαλυφθούν κάποια βασικά συστατικά του προτεινόμενου αλγόριθμου (ATS).

4.2. Curriculum –based course timetabling

4.2.1. Περιγραφή του προβλήματος

Το CB-CTT πρόβλημα συνίσταται στον προγραμματισμό διαλέξεων από ένα σύνολο μαθημάτων, σε ένα εβδομαδιαίο πρόγραμμα, όπου κάθε διάλεξη πρέπει να ανατεθεί σε μια χρονική περίοδο και μια αίθουσα, σύμφωνα με ένα δεδομένο σύνολο περιορισμών. Ένα εφικτό πρόγραμμα είναι εκείνο κατά το οποίο όλες οι διαλέξεις έχουν προγραμματιστεί σε μια χρονοθυρίδα και μια αίθουσα, έτσι ώστε οι αυστηροί περιορισμοί (H_1-H_4) να ικανοποιούνται.

Επιπλέον, ένα εφικτό πρόγραμμα που ικανοποιεί τους τέσσερις αυστηρούς περιορισμούς « τιμωρείται» με ποινή για τις παραβιάσεις των τεσσάρων εύκαμπτων περιορισμών (S_1-S_4). Έτσι ο αντικειμενικός στόχος του CB-CTT προβλήματος είναι να ελαχιστοποιήσει τον αριθμό των παραβιάσεων των εύκαμπτων περιορισμών σε μια εφικτή λύση. Ακολουθεί η λίστα των αυστηρών και των εύκαμπτων περιορισμών.

- ***H_1* :** (Διαλέξεις)Κάθε διάλεξη ενός μαθήματος θα πρέπει να προγραμματιστεί σε ξεχωριστή χρονική περίοδο και αίθουσα.

- ***H_2*:** (Χωρητικότητα αίθουσας) Κάθε δύο διαλέξεις δεν μπορούν να συμπίπτουν σε περίοδο και αίθουσα.

- ***H_3*:** (Συγκρούσεις) Διαλέξεις μαθημάτων του ιδίου προγράμματος σπουδών που διδάσκονται απ' τον ίδιο καθηγητή, δεν μπορούν να προγραμματιστούν κατά την ίδια περίοδο

- ***H_4*:** (Διαθεσιμότητα) Εάν ο καθηγητής ενός μαθήματος δεν είναι διαθέσιμος μια δεδομένη χρονική περίοδο, τότε σε εκείνη την περίοδο δεν μπορούν να του ανατεθούν διαλέξεις.

- ***S_1*:** (Χωρητικότητα αίθουσας) Για κάθε διάλεξη, ο αριθμός των σπουδαστών που παρακολουθεί το μάθημα δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερος από την χωρητικότητα της αίθουσας η οποία φιλοξενεί την διάλεξη.

- ***S_2*:** (Σταθερότητα του χώρου) Όλες οι διαλέξεις ενός μαθήματος θα πρέπει να προγραμματίζονται στην ίδια αίθουσα. Σε περίπτωση που αυτό είναι αδύνατο, ο αριθμός των κατειλημμένων αιθουσών, θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό μικρότερος.

- ***S_3*:** (Ελαχιστοποίηση των εργάσιμων ημερών) Οι διαλέξεις ενός μαθήματος θα πρέπει να ανατεθούν μέσα στον ελάχιστο αριθμό εργάσιμων ημερών.

- ***S_4*:** (Συμπαγές πρόγραμμα σπουδών) Για ένα δεδομένο πρόγραμμα σπουδών, υπολογίζεται ως παραβίαση αν υπάρχει διάλεξη που δεν πρόσκειται σε καμία άλλη διάλεξη (του ιδίου προγράμματος σπουδών) εντός της ίδιας ημέρας. Αυτό, σημαίνει ότι η ατζέντα των μαθημάτων θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό πιο συμπαγής.

4.2.2. Διατύπωση του προβλήματος.

Το CB-CTT πρόβλημα ,περιλαμβάνει ένα σύνολο *n* μαθημάτων $C = \{c_1, c_2, ...c_n\}$ για να προγραμματιστούν σε ένα σύνολο περιόδων $T = \{t_1, t_2, ..., t_p\}$ καθώς και σε ένα σύνολο αιθουσών $R = \{r_1, r_2, ...r_m\}$. Κάθε μάθημα c_i, αποτελείται από l_i ίδιες διαλέξεις, οι οποίες χρειάζονται προγραμματισμό. Μια περίοδος είναι ένα ζεύγος αποτελούμενο από μια ημέρα και μια διακεκριμένη χρονική περίοδο (χρονοθυρίδα), *p* περίοδοι διανέμονται σε *d* ημέρες και *h* ημερήσιες χρονοθυρίδες δηλαδή $p = d \cdot h$. Επίσης υπάρχει ένα σύνολο από *s* προγράμματα σπουδών $CR = \{C_{r1}, C_{r2}, ...C_{rs}\}$.

Κάθε ένα απο αυτά τα προγράμματα, είναι μια ομάδα μαθημάτων που μοιράζονται κοινούς σπουδαστές.

Επιλέγουμε μια απευθείας αναπαράσταση της λύσης για λόγους ευκολίας .Μια υποψήφια λύση αναπαρίσταται από έναν *p x m* πίνακα *X* , όπου τα $x_{i,j}$ αντιστοιχούν στην «ετικέτα» του μαθήματος, η οποία αποδίδεται σε περίοδο t_i και αίθουσα r_j. Εάν δεν υπάρχει μάθημα να ανατεθεί σε περίοδο t_i και αίθουσα r_j,τότε το $x_{i,j}$λαμβάνει την τιμή «-1».Με αυτή την αναπαράσταση εξασφαλίζουμε ότι δεν θα υπάρξουν περισσότερες από μια διαλέξεις την ίδια ώρα στην ίδια αίθουσα, δηλαδή ο 2ος αυστηρός περιορισμός H_2, πάντα θα ικανοποιείται. Για μαθήματα, αίθουσες, προγράμματα σπουδών και αναπαράσταση λύσης *X* ,ένας αριθμός συμβόλων και καθορισμοί μεταβλητών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα .

πίνακας 1

Σύμβολα	Περιγραφή
n	Συνολικός αριθμός μαθημάτων
m	Συνολικός αριθμός αιθουσών
d	Συνολικός αριθμός εργάσιμων ημερών ανά εβδομάδα
h	Συνολικός αριθμός «χρονοθυρίδων» ανά εργάσιμη ημέρα
p	Συνολικός αριθμός περιόδων, $p = d \cdot h$
s	Συνολικός αριθμός προγραμμάτων σπουδών
C	Το σύνολο των μαθημάτων, $C = \{c_1, c_2, ...c_n\},\ \lvert C \rvert = n$
R	Το σύνολο των αιθουσών, $R = \{r_1, r_2, ...r_m\},\ \lvert R \rvert = m$
T	Το σύνολο των περιόδων, $T = \{t_1, t_2, ..., t_p\},\ \lvert T \rvert = p$
CR	Το σύνολο των προγραμμάτων σπουδών, $CR = \{C_{r_1}, C_{r_2}, ..., C_{r_s}\},\ \lvert CR \rvert = s$
CRk	Το k-οστό πρόγραμμα σπουδών που περιλαμβάνει ένα σύνολο μαθημάτων
li	Ο αριθμός των διαλέξεων του μαθήματος c_i
l	Ο συνολικός αριθμός όλων των διαλέξεων, $I = \sum_{l}^{n} l_i$
stdi	Ο αριθμός των φοιτητών που συμμετέχουν στο μάθημα c_i
tci	Ο καθηγητής που διδάσκει το c_i μάθημα
mdi	Ο αριθμός των ελάχιστων εργάσιμων ημερών για το μάθημα c_i
capj	Η χωρητικότητα της αίθουσας r_j
uavi,j	Εάν το μάθημα c_i είναι μη διαθέσιμο στην περίοδο t_j . uavi,j= 1 εάν είναι μη διαθέσιμο, uavi,j= 0 αλλιώς.

conij	Εάν τα μαθήματα c_i και c_j συμπίπτουν. $con_{ij} = \begin{cases} 0, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\, (tc_i \neq tc_j) \wedge (\forall Cr_q, c_i \notin Cr_q \vee c_j \notin Cr_q), \\ 1, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$
xi,j	Το μάθημα που έχει εκχωρηθεί σε περίοδο t_i και αίθουσα r_j
nri(X)	Ο αριθμός των αιθουσών που καταλαμβάνονται απο το μάθημα c_i για μια υποψήφια λύση X $nr_i(X) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(X)$, όπου $\sigma_{ij} = (X) = \begin{cases} 1 \text{ εάν } \forall x_{k,j} \in X,\ x_{k,j} = C_i \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$
ndi(X)	Ο αριθμός των εργάσιμων ημερών στις οποίες το μάθημα c_i λαμβάνει χώρα σε υποψήφια λύση X: $nd_i(X) = \sum_{j=1}^{d} \beta_{ij}(X)$,όπου $\beta_{ij}(X) = \begin{cases} 1, \varepsilon\acute{\alpha}\nu \forall x_{u,v} \in X, x_{u,v} = c_i \wedge \left[u/h \right] = j, \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$
appk,i(X)	Εάν το πρόγραμμα σπουδών Cr_k εμφανίζεται κατά την περίοδο t_i στις υποψήφιες λύσεις. $app_{k,i}(X) = \begin{cases} 1, \varepsilon\acute{\alpha}\nu \forall x_{i,j} \in X, x_{i,j} = c_u \wedge c_u \in Cr_k \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$

Δεδομένων αυτών των συμβολισμών, μπορούμε να περιγράψουμε πιο επίσημα την υποψήφια λύση *X* του προβλήματος. Οι τέσσερις αυστηροί περιορισμοί και οι ποινές για τις παραβιάσεις των εύκαμπτων περιορισμών είναι :

- *H₁* (Διαλέξεις) : $\forall c_k \in C, \sum_{i=1,\dots,p,\, j=1,\dots,m} \chi\left\{x_{i,j} = c_k\right\} = l_k$,
  όπου χ είναι δείκτρια συνάρτηση που λαμβάνει την τιμή 1 εάν η δεδομένη πρόταση αληθεύει και 0 σε αντίθετη περίπτωση.

- H_2 (Χωρητικότητα αίθουσας) :Αυτός ο αυστηρός περιορισμός πάντα ικανοποιείται χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα αναπαράσταση λύσης.
- H_3(Συγκρούσεις) : $\forall x_{i,j}, x_{i,k} \in X, x_{i,j} = c_u, x_{i,k} = c_v, con_{uv} = 0$
- H_4(Διαθεσιμότητα) : $\forall x_{i,j} = c_k \in X,\ uav_{k,i} = 0$

- S_1 (Χωρητικότητα αίθουσας)

$$\forall x_{i,j} = c_k \in X,\ f_1(x_{i,j}) = \begin{cases} std_k - cap_j, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\, std_k > cap_j \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$
:

- S_2 (Σταθερότητα του χώρου) : $\forall c_i \in C, f_2(c_i) = nr_i(X) - 1$
- S_3 (Ελαχιστοποίηση των εργάσιμων ημερών) :

$$\forall c_i \in C,\ f_3(c_i) = \begin{cases} md_i - nd_i(X), \varepsilon\acute{\alpha}\nu\, nd_i(X) < md_i \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

- S_4 (Συμπαγές πρόγραμμα σπουδών)

$$\forall x_{i.j} = c_k \in X,\ f_4(x_{i,j}) = \sum_{Cr_q \in CR} \chi\{c_k \in C_{rq}\} \cdot iso_{q,i}(X)$$
:, όπου

$$iso_{q,i}(X) = \begin{cases} 1, \varepsilon\acute{\alpha}\nu\, (i \bmod h = 1 \vee app_{q,i-1}(X) = 0), \wedge (i \bmod h = 0 \vee app_{q,i+1}(X) = 0) \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Με την ανωτέρω σύνθεση μπορούμε εν συνεχεία να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος παραβίασης των εύκαμπτων περιορισμών για μια δοσμένη υποψήφια εφικτή λύση X ,σύμφωνα με την συνάρτηση κόστους *f(X)* που θα ορίσουμε. Ο στόχος είναι να βρεθεί μια εφικτή λύση X^* τέτοια ώστε $f(X^*) \leq f(X)$. Η συνάρτηση κόστους *f(X)* δίνεται από :

$$f(X) = \sum_{x_{i,j} \in X} a_1 f_1(x_{i,j}) + \sum_{c_i \in C} a_2 f_2(c_i) + \sum_{c_i \in C} a_3 f_3(c_i) + \sum_{x_{i,j} \in X} a_4 f_4(x_{i,j})$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ είναι οι ποινές που σχετίζονται με καθέναν απ' τους εύκαμπτους περιορισμούς. Στη σύνθεση του CB-CTT έχουν οριστεί ως εξής : α_1=1, α_2=1, α_3=5, α_4=2.

4.3.Μέθοδος Επίλυσης

Ο αλγόριθμος ATS ακολουθεί ένα γενικό πλαίσιο το οποίο συντίθεται από τρεις φάσεις : αρχικοποίηση, εμβάθυνση και απόκλιση. Η φάση της αρχικοποίησης (3.3.1) χτίζει ένα εφικτό αρχικό ωρολόγιο πρόγραμμα χρησιμοποιώντας μια γρήγορη ευρετική μέθοδο. Μόλις αυτό επιτευχθεί ,ακολουθούν η εμβάθυνση και η απόκλιση ώστε να μειωθούν οι παραβιάσεις των εύκαμπτων περιορισμών. Η φάση της εμβάθυνσης (3.3.2) χρησιμοποιεί έναν Αλγόριθμο Περιορισμένης Αναζήτησης (Tabu Search algorithm) ,ενώ η φάση της απόκλισης (3.3.3.1) βασίζεται στη χρήση μιας μεθόδου διαταραχών δανεισμένη από τον Αλγόριθμο Επαναληπτικής Τοπικής

Αναζήτησης(Iterated Local Search algorithm). Επιπλέον, θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια (3.3.3.2) δυο μηχανισμοί οι οποίοι θα παρέχουν αντίστροφη σχέση μεταξύ εμβάθυνσης και απόκλισης.

4.3.1. Αρχική Λύση

Η αρχική φάση του αλγόριθμού μας δημιουργεί μια αρχική λύση που ικανοποιεί τους αυστηρούς περιορισμούς (H_1-H_4).Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ενός ακολουθιακού άπληστου ευρετικού αλγόριθμου (sequential greedy heuristic)[1]. Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινάει από ένα άδειο ωρολόγιο πρόγραμμα, στο οποίο ξεκινούν οι εκχωρήσεις των κρινόμενων ως κατάλληλων διαλέξεων. Σε κάθε βήμα δυο διακριτές διαδικασίες έρχονται εις πέρας : η επιλογή μη εκχωρημένης διάλεξης κάποιου μαθήματος καθώς και ο καθορισμός του ζεύγους περίοδος-αίθουσα για αυτή τη διάλεξη.

Στην επιλογή διαλέξεων, τα μαθήματα με μικρό αριθμό διαθέσιμων περιόδων και μεγάλο αριθμό μη εκχωρημένων διαλέξεων στο πρόγραμμα έχουν προτεραιότητα. Όταν επιλεχθεί κάποια διάλεξη η οποία πρέπει να εκχωρηθεί, πρέπει να επιλέξουμε και μια περίοδο ανάμεσα στις διαθέσιμες, που να είναι η λιγότερο πιθανό να χρησιμοποιηθεί από άλλα μη ολοκληρωμένα μαθήματα σε μεταγενέστερα στάδια. Γ' αυτό το σκοπό, όταν προσπαθούμε να κάνουμε μια εφικτή κίνηση εκχώρησης, οφείλουμε να καταμετρήσουμε τον συνολικό αριθμό των μη τελειωμένων μαθημάτων τα οποία είναι μη διαθέσιμα την συγκεκριμένη περίοδο. Οι εφικτές διαλέξεις με μικρότερη τιμή προτιμώνται. Τα δεσμά σπάνε σύμφωνα με τις ποινές (των εύκαμπτων περιορισμών) που επιβάλλονται.

Δεν έχουμε καμία απόδειξη ότι η άπληστη ευρετική μέθοδος εγγυάται να βρεί εφικτή λύση για την δοθείσα περίπτωση. Παρ' όλα αυτά, στην παρούσα εργασία, βρέθηκε εφικτή λύση σε όλες τις περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι το μη εφικτό της αρχικής λύσης δεν αλλάζει την γενική προσέγγιση του ATS , καθώς οι ισχυροί περιορισμοί που δεν θα έχουν ικανοποιηθεί μπορούν να χαλαρώσουν και να ενσωματωθούν στην συνάρτηση αξιολόγησης(κόστους) του αλγόριθμου.

[1] άπληστοι είναι οι αλγόριθμοι που προσπαθούν να οδηγήσουν σε μια βέλτιστη λύση του προβλήματος ,επιλέγοντας αυτό που φαίνεται καλύτερο με βάση την τρέχουσα κατάσταση κ ένα (απλό) κριτήριο .Λειτουργούν με την ελπίδα η τοπικά βέλτιστη επιλογή να οδηγεί σε μια ολικά βέλτιστη λύση, κάτι το οποίο είναι εφικτό σε μερικά προβλήματα.

4.3.2. Αλγόριθμος Περιορισμένης Αναζήτησης(Tabu Search algorithm)

Σε αυτό το κομμάτι, εστιάζουμε στην βασική μηχανή αναζήτησης του αλγόριθμού μας. Η διαδικασία εκμεταλλεύεται δυο περιοχές (N1,N2). Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε την έρευνα με μια περιοχή(γειτονιά). Όταν η περιορισμένη αναζήτηση σταματήσει στον καλύτερο τοπικό βέλτιστο, ξαναρχίζουμε απ' τον βέλτιστο την αναζήτηση ,όμως τώρα σε άλλη περιοχή. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μην είναι δυνατή κάποια περεταίρω βελτίωση της λύσης. Στην περίπτωσή μας ξεκινάμε από μια βασική περιοχή $N_1 : N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 ...$

4.3.2.1. Χώρος Αναζήτησης και συνάρτηση κόστους

Καθώς ένας εφικτό ωρολόγιο πρόγραμμα που ικανοποιεί όλους τους ισχυρούς περιορισμούς έχει δομηθεί, η φάση της εμβάθυνσης βελτιώνει την συνάρτηση κόστους για τους εύκαμπτους περιορισμούς, χωρίς να σπάει πλέον τους ισχυρούς περιορισμούς. Γ' αυτό το λόγο, ο χώρος αναζήτησης περιορίζεται στα εφικτά προγράμματα μαθημάτων. Η συνάρτηση κόστους αφορά απλώς τις παραβιάσεις των εύκαμπτων περιορισμών και ο τύπος της είναι αυτός που ορίστηκε νωρίτερα.

4.3.2.2. Δομή της περιοχής

Είναι ευρέως παραδεκτό ,ότι ένα απ' τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά ενός αλγόριθμου τοπικής αναζήτησης είναι ο καθορισμός της περιοχής του. Σε μια διαδικασία τοπικής αναζήτησης, εφαρμόζουμε μια κίνηση *mv* σε μια υποψήφια λύση *X* και αυτό οδηγεί σε νέα λύση που συμβολίζεται ως: $X \oplus mv$. Έστω *M(X)* το σύνολο όλων των πιθανών κινήσεων οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν στην *X* (διατηρώντας την εφικτή λύση). Τότε η περιοχή *N* του *X* ορίζεται ως: $N(X) = \{X \oplus mv | mv \in M(X)\}$ [2]. Για το CB-CTT πρόβλημα, γίνεται χρήση δυο διακριτών κινήσεων. Αυτές είναι η Απλή Εναλλαγή (Simpleswap) και η Εναλλαγή Kempe (Kempeswap).

<u>ΒΑΣΙΚΗ ΓΕΙΤΟΝΙΑ N_1</u>

Η N_1 αποτελείται απ' όλες τις εφικτές κινήσεις απλής εναλλαγής. Μια κίνηση απλής εναλλαγής συνίσταται στην ανταλλαγή των περιόδων και των αιθουσών στις οποίες

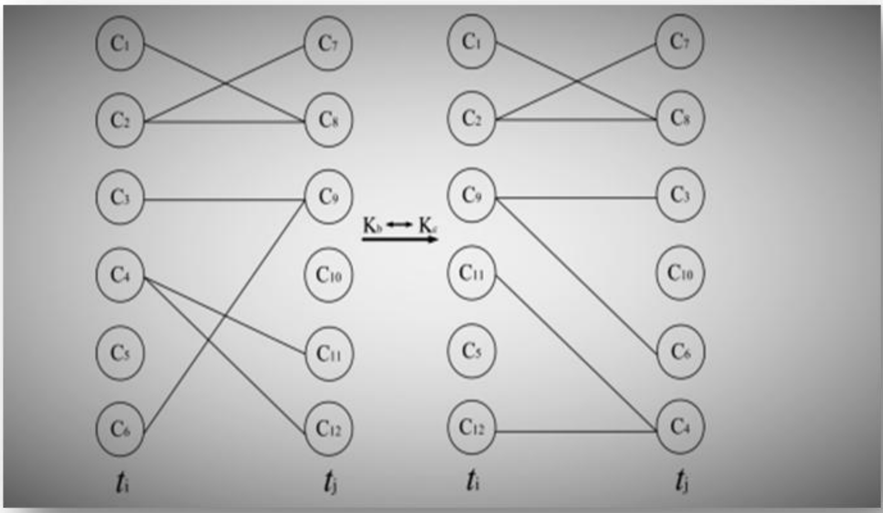
[2] αποκλειστική διάζευξη ($\oplus$).Το αποτέλεσμα είναι αληθές αν-ν ακριβώς ένας απ' τους όρους είναι αληθής.

έχουν ανατεθεί δυο διαλέξεις διαφορετικών μαθημάτων. Εφαρμόζοντας, κίνηση απλής εναλλαγής σε δυο διαφορετικά μαθήματα $x_{i,j}$ και $x_{i',j'}$ στην λύση X ,η τιμή του $x_{i,j}$ τοποθετείται στο $x_{i',j'}$ και αντίστροφα. Σημειώνουμε ότι μετακινώντας κάποια διάλεξη ενός μαθήματος σε κενή θέση αποτελεί ειδική περίπτωση απλής εναλλαγής στην οποία μια απ' τις διαλέξεις είναι κενή και περιλαμβάνεται στη N_1. Ως εκ τούτου, το μέγεθος της περιοχής N_1 οριοθετείται απο το $O(l \cdot p \cdot m)$. Όπου $l = \sum_{i=o}^{n-1} l_i$ επειδή υπάρχουν l διαλέξεις και ο αριθμός των εναλλασσόμενων διαλέξεων (συμπεριλαμβανομένων των κενών θέσεων) οριοθετείται από το $O(p \cdot m)$.

<u>ΠΡΟΗΓΜΕΝΗ ΓΕΙΤΟΝΙΑ N_2</u>

Η N_2 αποτελείται από όλες τις εφικτές κινήσεις της εναλλαγής Kempe. Μια τέτοια εναλλαγή (Kempeswap) ορίζεται ως ανταλλαγή δυο αλυσίδων Kempe. Εάν εστιάσουμε αποκλειστικά σε μαθήματα και συγκρούσεις αυτών, κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος μπορεί να εξεταστεί ως ένας γράφος G του οποίου οι κόμβοι αντιστοιχούν σε μαθήματα και οι ακμές συνδέουν μαθήματα που έχουν κοινούς σπουδαστές ή καθηγητή. Σε ένα εφικτό χρονοπρόγραμμα μια αλυσίδα Kempe είναι το σύνολο των κόμβων το οποίο συνθέτει ένα ενωμένο δομικό στοιχείο στον υπογράφο του G που επάγεται απ' τους κόμβους που ανήκουν σε δύο περιόδους. Μια εναλλαγή Kempe παράγει μια νέα εφικτή εκχώρηση (στο ωρολόγιο πρόγραμμα) από την εναλλαγή των ετικετών περιόδου οι οποίες αποδίδονται στα μαθήματα που ανήκουν σε μια ή δυο αλυσίδες Kempe.

Σημειώνουμε ότι στον ορισμό της N_2 εμπλέκονται τουλάχιστον τρία μαθήματα δηλαδή $|K_1 + K_2| \geq 3$. Για παράδειγμα στο Γράφημα2 απεικονίζεται ένας υπογράφος συνεπαγόμενος από δυο περιόδους t_i και t_j και υπάρχουν πέντε αλυσίδες Kempe: $K_a = \{c_1, c_2, c_7, c_8\}, K_b = \{c_3, c_6, c_9\}, K_c = \{c_4, c_{11}, c_{12}\}, K_d = \{c_5\}, K_e = \{c_{10}\}$



Γράφημα 2

Σ' αυτό το παράδειγμα κάθε αίθουσα στις περιόδους t_i και t_j έχει μια διάλεξη. Μια εναλλαγή Kempe λοιπόν των K_b και K_c παράγει μια νέα εκχώρηση μετακινώντας τα $\{c_3, c_4, c_6\}$ στο t_j και τα $\{c_9, c_{11}, c_{12}\}$ στο t_i όπως φαίνεται στο γράφημα. Σημειώνουμε εδώ ότι στην εναλλαγή Kempe, μια απ' τις αλυσίδες που εναλλάσσονται μπορεί να είναι κενή. Για παράδειγμα, προσθέτουμε μια νέα κενή αλυσίδα Kempe $K_f = \varnothing$. Σε αυτή την περίπτωση, η κίνηση της εναλλαγής εκφυλίζεται σε μια μονή ανταλλαγή. Για παράδειγμα στην παραπάνω περίπτωση εάν ανταλλάξουμε τα μαθήματα της αλυσίδας K_a, παράγεται μια εκχώρηση, μετακινώντας τα $\{c_1, c_2\}$ στο t_j και τα $\{c_7, c_8\}$ στο t_i. Είναι αξιοσημείωτο να προσέξουμε ότι οι διπλές εναλλαγές των αλυσίδων Kempe μπορούν να θεωρηθούν γενίκευση των μονών εναλλαγών.

Καθώς τα μαθήματα προγραμματίζονται σε περιόδους, η εκχώρηση αίθουσας μπορεί να γίνει λύνοντας ένα διμερές πρόβλημα αντιστοίχησης, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο ευρετικοί, όσο και ακριβείς αλγόριθμοι. Σε αυτή την εργασία θα εφαρμόσουμε έναν ακριβή αλγόριθμο.

Εφόσον η εναλλαγή Kempe μπορεί να θεωρηθεί σαν μια εκτενής έκδοση της εναλλαγής δυο διαλέξεων(και κατόπιν αυτού διάφορες άλλες συναφείς διαλέξεις μετακινούνται στην συγκεκριμένη/ες αλυσίδα/ες), το μέγεθος της περιοχής N_2 οριοθετείται από το $\mathrm{O}\left(l \cdot (l + p)\right)$, όπου το μέγεθος των ανταλλαγών των διπλών αλυσίδων οριοθετείται απο το $O\left(l^2\right)$ και το μέγεθος των αντίστοιχων μονών αλυσίδων, οριοθετείται απ' το $O(l \cdot p)$.

Προκειμένου να διατηρηθεί η σκοπιμότητα της λύσης, μια ακόμη ιδιότητα πρέπει να επαληθεύεται: ο αριθμός των μαθημάτων σε κάθε περίοδο(μετά από εναλλαγή αλυσίδας Kempe) δεν μπορεί να ξεπερνά τον αριθμό των διαθέσιμων αιθουσών. Για παράδειγμα στο Γράφημα2 σε σχέση με την μονή εναλλαγή Kempe, μόνο μια εφικτή κίνηση μπορεί να παραχθεί, ανταλλάσσοντας τις διαλέξεις στην K_α , σε αντίθεση με τις K_b, K_c , K_d και K_e ,στις οποίες μονές εναλλαγές Kempe δεν μπορούν να προσδώσουν εφικτές λύσεις. Αυτό συμβαίνει διότι θα καταργούσαμε την προαναφερθείσα ιδιότητα. Στην πραγματικότητα, αυτή η ιδιότητα, περιορίζει σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό των αποδεκτών λύσεων ανάμεσα στις υποψήφιες. Ονομάζουμε τον περιορισμό αυτό παραβίαση της κατανομής αιθουσών.

Ωστόσο, μόλις οι διπλές εναλλαγές των αλυσίδων επιτευχθούν, η παραβίαση της κατανομής αιθουσών χαλαρώνει και έτσι ένας μεγάλος αριθμός εφικτών κινήσεων μπορεί να παραχθεί. Για παράδειγμα στο Γράφημα2 τρεις διπλές εναλλαγές μπορούν να επιτευχθούν, ανταλλάσσοντας τις K_b με K_e , K_c με K_d καθώς και K_b με K_c .

Θα δείξουμε αργότερα ότι οι προτεινόμενες διπλές εναλλαγές Kempe των αλυσίδων, είναι πολύ πιο ισχυρές από άλλες υπάρχουσες κινήσεις για την επίτευξη χρονοπρογραμματισμού.

4.3.2.3. Σταδιακή αξιολόγηση και μείωση της περιοχής (γειτονιάς)

Προκειμένου να αξιολογήσουμε την περιοχή με έναν αποδοτικό τρόπο, χρησιμοποιούμε μια σταδιακή τεχνική αξιολόγησης. Η κεντρική ιδέα, είναι να διατηρήσουμε σε μια ειδική δομή δεδομένων το κόστος, της κάθε πιθανής κίνησης της τρέχουσας λύσης. Κάθε φορά που πραγματοποιείται μια κίνηση, τα στοιχεία αυτής της δομής δεδομένων που επηρεάζονται απ' την κίνηση, ενημερώνονται ανάλογα.

Ωστόσο, η αξιολόγηση μιας κίνησης της προηγμένης περιοχής N_2 απαιτεί πολύ μεγαλύτερες υπολογιστικές προσπάθειες από αυτές της N_1 εξαιτίας της λειτουργίας του αλγορίθμου. Προκειμένου να εξοικονομηθεί χρόνος απ' τη διαδικασία (CPU)[3] ,προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο που χρειάζεται όσο το δυνατόν λιγότερο.

Σύμφωνα με την διατύπωση του προβλήματος, τα κόστη (παραβιάσεων των εύκαμπτων περιορισμών) ,μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε κόστη σχετιζόμενα με τις αίθουσες (S_1 και S_2) και σε σχετιζόμενα με τις περιόδους (S_3 και S_4). Απ' τον ορισμό της N_2 , είναι φανερό ότι το σχετιζόμενο με την περίοδο κόστος Δf_p , μπορεί να υπολογιστεί χωρίς να καλέσουμε κάποιον σχετικό αλγόριθμο. Αντίθετα, ο υπολογισμός του σχετιζόμενου με τις αίθουσες κόστος Δf_r είναι χρονοβόρος ,εξαιτίας του υψηλότερου υπολογιστικού κόστους του σχετικού αλγόριθμου. Στην εκτέλεσή μας, μόνο καταγράφουμε και ενημερώνουμε το σχετιζόμενο με την περίοδο κόστος των κινήσεων Δf_p για τις λύσεις της N_2 γειτονίας, ενώ για το σχετιζόμενο με τις αίθουσες κόστος των κινήσεων, μια ειδική τεχνική επιστρατεύεται για να αποφασιστεί εάν θα κληθεί σχετικός αλγόριθμος ή όχι.

Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε το Δf_p για να εκτιμήσουμε την κίνηση Kempe (αν ήταν καλή ή όχι). Ειδικότερα, αν το Δf_p είναι πολλά υποσχόμενο (πχ $\Delta f_p \leq \tau$, διότι πρακτικά το τ=2 παράγει ανταγωνιστικά αποτελέσματα σε ευρύ φάσμα περιπτώσεων), τότε καλούμε τον σχετικό αλγόριθμο για να προχωρήσουμε σε καταχωρήσεις αιθουσών και να λάβουμε την συνολική σταδιακή αξιολόγηση κόστους Δf. Διαφορετικά αυτή η υποψήφια λύση απορρίπτεται. Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε επανάληψη, μόνο ένα μικρό υποσύνολο των υποσχόμενων γειτονικών λύσεων αξιολογούνται ενδελεχώς, επιτρέποντάς μας να εξοικονομήσουμε ένα σημαντικό ποσό CPU χρόνου.

4.3.2.4. Λίστα Διαχείρισης

Στον αλγόριθμο περιορισμένης αναζήτησης που χρησιμοποιούμε, όταν μετακινούμε μια διάλεξη από μια θέση(δηλ ζεύγος περίοδος-αίθουσα) σε διαφορετική θέση (περιοχή N_1), ή αλλάζοντας περιόδους (περιοχή N_1) ,η συγκεκριμένη διάλεξη δεν μπορεί να επιστρέψει στην προηγούμενη θέση της (περιοχή N_1) ή να αποκτήσει την παλιά της περίοδο(περιοχή N_2) για τις επόμενες *tt* επαναλήψεις (δηλ, *tt* (tabu tenure)

[3] Central Processing Unit/Process Time

είναι ο αριθμός των βημάτων της αναζήτησης, για τα οποία περιορίζεται κάποια υποψήφια λύση). Ακριβέστερα, στην περιοχή N_1 ,εάν μια διάλεξη ενός μαθήματος c_i μετακινείται από μια θέση $\left(t_j, r_k\right)$ σε άλλη, τότε μετακινώντας κάποια διάλεξη μαθήματος c_i στη θέση $\left(t_j, r_k\right)$, γίνεται δήλωση/καταγραφή της συγκεκριμένης λύσης στην Λίστα Περιορισμένης Αναζήτησης (Tabu List) .Επομένως, η λίστα αυτή ουσιαστικά απαγορεύει την επιστροφή σε προηγούμενες λύσεις. Αντίστοιχα, στην γειτονιά N_2 (είτε μονές είτε διπλές αλυσίδες Kempe), εάν μια διάλεξη μαθήματος c_i αλλάξει από περίοδο t_j σε περίοδο t_k, τότε η περίοδος t_j δηλώνεται στην λίστα. Έτσι δεν θα μπορεί να εκχωρηθεί κάποια διάλεξη του c_i στην περίοδο t_j με χρήση είτε μονής είτε διπλής αλυσίδας Kempe.

Η tabu tenure, $tt(c_i)$ ενός μαθήματος c_i είναι συντονισμένη σύμφωνα με την τρέχουσα ποιότητα λύσης f και την συχνότητα των κινήσεων που αφορούν τις διαλέξεις του c_i και συμβολίζεται ως $tt\left(c_i\right) = f + \varphi \cdot freq\left(c_i\right)$, όπου φ είναι παράμετρος $\left(\varphi \in [0,1]\right)$. Το πρώτο σκέλος αυτής της συνάρτησης μπορεί να εξηγηθεί απ το γεγονός ότι μια λύση με υψηλό κόστος, θα πρέπει να έχει μια μακρά tabu tenure ώστε να αποφευχθεί η παγίδα του τοπικού βέλτιστου. Όσο αφορά το δεύτερο σκέλος της συνάρτησης, η κεντρική ιδέα είναι να επιβληθεί κύρωση σε κίνηση που επαναλαμβάνεται συχνά. Η σταθερά φ εν δυνάμει ορίζεται ως ο λόγος του αριθμού των συγκρουόμενων μαθημάτων c_i επί του συνολικού αριθμού των μαθημάτων. Είναι σημαντικό να σκεφτούμε ότι ένα μάθημα που εμπλέκεται σε μεγάλο αριθμό συγκρούσεων εμπεριέχει μεγαλύτερο ρίσκο μετακίνησης από κάποιο άλλο μάθημα που εμπλέκεται σε λιγότερες συγκρούσεις. Σημειώνουμε ότι $freq\left(c_i\right)$ είναι το ουσιώδες μέρος της παραπάνω συνάρτησης.

4.3.2.5. Κριτήριο Λήξης

Ο αλγόριθμος περιορισμένης αναζήτησης σταματάει όταν η τρέχουσα βέλτιστη λύση, δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω μέσα σε ένα θ αριθμό κινήσεων. Ονομάζουμε τον θ «**βάθος**» της περιορισμένης αναζήτησης.

4.3.3. Συνδυάζοντας την περιορισμένη αναζήτηση με μέθοδο διαταραχών

Η Περιορισμένη Αναζήτηση(Tabu Search) και ο αλγόριθμος Επαναληπτικής Τοπικής Αναζήτησης(Iterated Local Search-ILS) έχουν αποδείξει την αποτελεσματικότητά τους ,λύνοντας ξεχωριστά ευρύ φάσμα προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών καθώς και προβλήματα βελτιστοποίησης. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε την πιθανότητα συνδυασμού των δυο μεθόδων ώστε να επιτευχθούν πολύ υψηλές αποδόσεις για το πρόβλημά μας.

4.3.3.1. Μέθοδος διαταραχών

Στην περίπτωσή μας, όταν η βέλτιστη λύση δε μπορεί να βελτιωθεί απ' τον αλγόριθμο περιορισμένης αναζήτησης, χρησιμοποιούμε μέθοδο διαταραχών ώστε να ανασκευάσουμε την ληφθείσα τοπικά βέλτιστη λύση. Γενικά, εάν η διαταραχή είναι είναι πολύ ισχυρή, μπορεί να συμπεριφερθεί σαν τυχαία επανεκκίνηση. Απ' την άλλη μεριά, αν η διαταραχή είναι πολύ ασθενής, η αναζήτηση θα μπορούσε να ξαναπέσει επάνω στον τοπικό βέλτιστο ,που μόλις επισκέφτηκε και η εξερεύνηση του διαστήματος αναζήτησης θα περιοριστεί σε μια μικρή περιοχή.

Προκειμένου να καθοδηγηθεί αποτελεσματικά η έρευνα και να οδηγηθεί προς νέες υποσχόμενες ερευνητικές περιοχές ,χρησιμοποιούμε έναν καθοδηγούμενο από τις ποινές χειριστή διαταραχών ώστε να καταστρέψουμε τον τοπικό βέλτιστο στον οποίο έχουμε φτάσει. Αυτός ο χειριστής, βασίζεται στην ταυτοποίηση των πρώτων q διαλέξεων με υψηλά κόστη και μια τυχαία επιλογή γειτονικών κινήσεων (στην παρούσα εργασία πειραματικά χρησιμοποιούμε q=30). Καλούμε ,τον συνολικό αριθμό των κινήσεων διαταραχών, <u>ισχύς διαταραχής</u> και συμβολίζουμε με n. Ειδικότερα, όταν η παρούσα φάση τερματίζει, όλες οι διαλέξεις κατατάσσονται σε μη αύξουσα σειρά , σύμφωνα με της ποινές στις οποίες εμπλέκονται. Τότε n διαλέξεις επιλέγονται απ' τις πρώτες q των υψηλότερων ποινών, όπου η διάλεξη της τάξης k επιλέγεται σύμφωνα μέσω κάποιας κατανομή πιθανότητας με την οποία εμείς δεν θα ασχοληθούμε. Στη συνέχεια, n πραγματοποιήσιμες κινήσεις απλής ή Kempe εναλλαγής πραγματοποιούνται τυχαία και διαδοχικά. Κάθε μια από αυτές τις κινήσεις περιλαμβάνει τουλάχιστον μια εκ των n επιλεγμένων διαλέξεων.

Η ισχύς της διαταραχής (*n*) επομένως, είναι ένα από τα σημαντικότερα συστατικά της επαναληπτικής τοπικής έρευνας (ILS). Το *n* διερευνά το χάσμα ποιότητας μεταξύ των δύο λύσεων, δηλαδή της λύσης πριν και της λύσης μετά την διαταραχή). Στην δική μας περίπτωση το *n* είναι προσαρμοσμένο να παίρνει τιμές εντός του διαστήματος $\left[n_{\min}, n_{\max}\right] = \left[4,15\right]$.

4.3.3.2. Οι δυο μηχανισμοί για τον ATS αλγόριθμο

```
1: Input: I: an instance of CB-CTT
2: Output: X*: the best solution found so far
3: % Initialization: line 6-8
4: % Intensification: line 11-17
5: % Diversification: line 10,23
6: X_0 ← feasible initial solution
7: ξ ← 0, θ ← θ_0, η ← η_min
8: X* ← TS(X_0, θ)
9: repeat
10:    X' ← Perturb(X*, η)
       % perturb X* with strength η, get X'
11:    X*' ← TS(X', θ)
12:    if f(X*') ≤ f(X*) + 2 then
13:       repeat
14:          θ ← (1 + μ) · θ
             % gradually increase the depth of TS
15:          X*' ← TS(X*', θ)
16:       until no better solution is obtained
17:    end if
18:    if f(X*') < f(X*) then
19:       X* ← X*'
          % accept X*' as the best solution found so far
20:       θ ← θ_0, η ← η_min
21:    else
22:       θ ← θ_0, ξ ← ξ + 1
23:       η ← max{η_min + λ · ξ, η_max}
24:    end if
25: until (stop condition is met)
```

Ο αλγόριθμος ATS ενσωματώνει στην εμβάθυνση (TS) και την απόκλιση (διαταραχές του ILS). Γίνεται προσπάθεια να συνδυαστούν οι δυο μέθοδοι με ουσιαστικό τρόπο. Το βάθος *θ* του TS και η ισχύς των διαταραχών *n* φαίνεται πως είναι δυο ουσιαστικές παράμετροι οι οποίες ελέγχουν την συμπεριφορά του αλγόριθμου. Όπως φαίνεται πιο πάνω, στην περιγραφή του συνδυασμού των δυο μηχανισμών, μεγαλύτερη τιμή του *θ* διασφαλίζει εντατικότερη έρευνα. Επίσης, μεγαλύτερη τιμή του *n* σημαίνει περισσότερες πιθανότητες να ξεφύγουμε απ’ τον τρέχοντα τοπικό ελάχιστο.

Στην αρχή της έρευνας τρέχουμε τον αλγόριθμο για μικρή τιμή του βάθους (έστω *θ*=10). Όταν ο TS αδυνατεί να βελτιώσει την βέλτιστη λύση, ο αλγόριθμος ανατρέχει στην μέθοδο διαταραχών με μικρή ισχύ (δηλαδή $n = n_{\min}$). Και όσο η έρευνα προχωράει καταγράφουμε τον αριθμό των φάσεων του TS κατά τα οποία δεν προέκυψε βελτίωση στην συνάρτηση κόστους που συμβολίζεται με ξ. Το βάθος θ και η ισχύς *n* δυναμικά προσαρμόζονται ως εξής : όταν ο τοπικός ελάχιστος που λαμβάνεται απ' τον TS είναι υποσχόμενος, δηλαδή κοντινός στην υπάρχουσα καλύτερη λύση $\left(f \leq f_{best} + 2\right)$, τότε το θ σταδιακά αυξάνει ώστε να διασφαλίσει εντατικότερη έρευνα, μέχρι να μην είναι δυνατή η περαιτέρω βελτίωση $(\theta = (1+\mu)\cdot\theta)$ σε κάθε επανάληψη, όπου μ=0.6. Ομοίως , η ισχύς σταδιακά αυξάνει, έτσι ώστε να διαφοροποιηθεί εντονότερα η έρευνα εάν ο αριθμός των φάσεων, στις οποίες δεν υπήρξε βελτίωση, αυξάνει. Επιπρόσθετα, μετά από κάθε διαταραχή, η έρευνα επιστρέφει στον TS, καθώς η ισχύς της διαταραχής είναι n_{min} μόλις βρεθεί μια καλύτερη λύση.

Ως κριτήριο αποδοχής στην διαδικασία διαταραχής, χρησιμοποιούμε μια ισχυρή τεχνική εκμετάλλευσης δηλαδή μόνο η καλύτερη λύση γίνεται αποδεκτή ως η τρέχουσα καλύτερη λύση. Αμέσως μόλις η τοπική βέλτιστη λύση $X^{*'}$, η οποία λαμβάνεται από τον TS είναι καλύτερη από ότι η βέλτιστη X^* που έχει μέχρι στιγμής βρεθεί, αντικαθιστούμε την X^* με την $X^{*'}$ (σειρές 18 και 19 του παραπάνω αλγόριθμου). Στην παρούσα εργασία γίνεται χρήση δυο συνθηκών τερματισμό.

4.4. Πειραματικά αποτελέσματα

4.4.1. Αποτελέσματα συγκρίσεων

Οι πρώτοι μας πειραματικοί στόχοι είναι να αξιολογήσουμε τον Προσαρμοστικό αλγόριθμο Περιορισμένης Αναζήτησης, συγκρίνοντας την επίδοσή του με τα δυο βασικά συστατικά του (TS και ILS). Για να κάνουμε δίκαιη σύγκριση, ορίζουμε τον αλγόριθμο TS, σαν τον ATS ,αλλά με απενεργοποιημένη την μέθοδο διαταραχών. Προκειμένου να δοθεί μεγαλύτερη ερευνητική δύναμη στον TS, το βάθος του θ αυξάνει σταδιακά, μέχρι τη συνθήκη τερματισμού. Ο αλγόριθμος ILS ορίζεται ως ο ATS αλλά με απενεργοποιημένη την λίστα tabu. Τα υπόλοιπα συστατικά του ATS είναι κοινά για τους τρεις συγκρινόμενους αλγόριθμους. Σημειώνεται ότι όλες οι παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν, είναι σταθερές.

πίνακας 2

Παράμετροι	περιγραφή	τιμές
θ_o	Βασικό βάθος του TS	10
Μ	Αύξηση ταχύτητας του θ	0.6
Θ	Βάθος του TS	θ=(*1*+μ)θ
Ξ	Φάσεις του TS που δεν προέκυψε βελτίωση	ξ=ξ+1
n_{min}	Βασική ισχύς διαταραχών	4
n_{max}	Μέγιστη ισχύς διαταραχών	15
Ν	Ισχύς διαταραχών	n=max{n_{min}+$\lambda\xi$,n_{max}}
Λ	Παράγοντας ενημέρωσης του n	0.3
Q	Συνολικός αριθμός των υποψήφιων για διαταραχή διαλέξεων	30
Τα	Εκτίμηση του Δf_p της γειτονιάς N_2	2

ρυθμίσεις των σημαντικών παραμέτρων

Η συνθήκη τερματισμού εδώ είναι χρονική (timeout) διότι τα συγκεκριμένα είναι αποτελέσματα διαγωνισμού και συγκεκριμένα του International Timetabling Competition-2007.

Στον πίνακα 3 οι στήλες 2-7 δίνουν τα υπολογιστικά στατιστικά του αλγόριθμού μας Προσαρμοστικής Περιορισμένης Αναζήτησης σε 25 περιπτώσεις χρονο-προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε τις περιπτώσεις για χρονοπρογραμματισμό τεσσάρων τεστ(test1-test4) και εικοσιένα διαγωνισμών (comp01-comp21). Στον πίνακα 3 οι στήλες 2-7 δίνουν τα υπολογιστικά στατιστικά σύμφωνα με τους εξής δείκτες απόδοσης : την καλύτερη απόδοση (f_{min}) ,την μέση απόδοση (f_{ave}) , την τυπική απόκλιση (σ), το συνολικό αριθμό επαναληπτικών κινήσεων (Iter), τον συνολικό αριθμό διαταραχών (Pert) και τον συνολικό χρόνο CPU στον υπολογιστή που απαιτήθηκε για την εύρεση της βέλτιστης λύσης (Time). Αν υπάρχουν πολλαπλά χτυπήματα για την καλύτερη λύση στα 100 ανεξάρτητα τρεξίματα, οι τιμές που αναφέρονται στον πίνακα 3 είναι ο μέσος όρος αυτών των καλύτερων λύσεων.

πίνακας 3

Instance	f_{min}	f_{ave}	σ	*Iter*	*Pert*	*Time(s)*
test1	224	229.5	1.8	15586	208	189
test2	16	17.1	1.0	35271	406	182
test3	74	82.9	4.1	20549	369	160
test4	74	89.4	6.1	37346	735	208
comp01	5	5.0	0.0	321	5	5
comp02	34	60.6	7.5	15647	545	370
comp03	70	86.6	6.3	8246	102	257
comp04	38	47.9	4.0	5684	68	124
comp05	298	328.5	11.7	35435	54	191
comp06	47	69.9	7.4	13457	245	116
comp07	19	28.2	5.6	15646	368	383
comp08	43	51.4	4.6	17404	190	380
comp09	99	113.2	6.9	20379	238	370
comp10	16	38.0	10.8	16026	160	389
comp11	0	0.0	0.0	236	3	3
comp12	320	365.0	17.5	40760	590	382
comp13	65	76.2	6.1	16779	182	300
comp14	52	62.9	6.4	24427	270	368
comp15	69	87.8	7.3	20666	275	386
comp16	38	53.7	6.4	8512	99	215
comp17	80	100.5	7.8	15009	151	364
comp18	67	82.6	5.3	51612	577	389
comp19	59	75.0	5.9	8788	94	225
comp20	35	58.2	8.5	6188	61	187
comp21	105	125.3	7.6	16566	167	348

Στον πίνακα 4 παρακάτω, βλέπουμε τα καλύτερα αποτελέσματα οκτώ αλγόριθμων, δηλαδή των ATS ,TS ,ILS σε σύγκριση άλλους πέντε αλγόριθμους αναφοράς. Τα αποτελέσματα του πίνακα 4 αφορούν τις ίδιες περιστάσεις με αυτές του πίνακα 3 (δηλαδή 4 τεστ και 21 διαγωνισμοί). Η τελευταία στήλη του, δείχνει τα καλύτερα πιο γνωστά αποτελέσματα των πέντε αλγόριθμων αναφοράς για κάθε περίσταση. Είναι φανερό απ' τον πίνακα ότι ο αλγόριθμος ATS ξεπερνά σε απόδοση τα δυο βασικά του συστατικά TS και ILS, εκτός από τρεις περιστάσεις στις οποίες και οι τρεις αλγόριθμοι έδωσαν το ίδιο αποτελέσματα.. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ο αλγόριθμος ATS αποδίδει τις μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους, όπως επιθυμούμε. Αλλά και όταν συγκρίνουμε με τα καλύτερα αποτελέσματα των υπόλοιπων αλγόριθμων ,παρατηρούμε ότι ο ATS είναι πολύ ανταγωνιστικός.

Σημειώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση , το καλύτερο αποτέλεσμα δίνεται με έντονα γράμματα, και όπου το καλύτερο είναι ίδιο με το αποτέλεσμα του ATS τότε αυτό δίνεται με πλάγια γράμματα.

πίνακας 4

Instance	ATS	TS	ILS	[10]	[25]	[16]	[14]	[9]	Best Known
test1	**224**	230	226	234	—	—	—	—	234
test2	**16**	16	16	17	—	—	—	—	17
test3	**74**	82	79	86	—	—	—	—	86
test4	**74**	92	83	132	—	—	—	—	132
comp01	*5*	5	5	5	5	13	5	9	*5*
comp02	**34**	55	48	75	43	43	108	103	43
comp03	**70**	90	76	93	72	76	115	101	72
comp04	38	45	41	45	35	38	67	55	**35**
comp05	*298*	315	303	326	298	314	408	370	*298*
comp06	47	58	54	62	41	41	94	112	**41**
comp07	19	33	25	38	14	19	56	97	**14**
comp08	43	49	47	50	39	43	75	72	**39**
comp09	**99**	109	106	119	103	102	153	132	102
comp10	16	23	23	27	9	14	66	74	**9**
comp11	*0*	0	0	0	0	0	0	1	*0*
comp12	**320**	330	324	358	331	405	430	393	331
comp13	**65**	71	68	77	66	68	101	97	66
comp14	**52**	55	53	59	53	54	88	87	53
comp15	**69**	78	74	87	—	—	—	—	87
comp16	**38**	48	42	47	—	—	—	—	47
comp17	**80**	85	81	86	—	—	—	—	86
comp18	**67**	78	69	71	—	—	—	—	71
comp19	**59**	65	65	74	—	—	—	—	74
comp20	**35**	42	35	54	—	—	—	—	54
comp21	**105**	115	106	117	—	—	—	—	117

4.4.2. Αποτελέσματα χρησιμοποιώντας περισσότερους υπολογιστικούς πόρους

Στο δεύτερο πείραμα, αξιολογούμε την ερευνητική δυναμική του Προσαρμοστικού Αλγόριθμου Περιορισμένης Αναζήτησης χρησιμοποιώντας μια πιο χαλαρή συνθήκη τερματισμού απ' ότι στο προηγούμενο πείραμα που η συνθήκη τερματισμού ήταν το πέρας του διαγωνιστικού χρόνου (timeout). Γι' αυτό το σκοπό, αυξήθηκε ο χρόνος CPU των υπολογισμών. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη τερματισμού εδώ είναι οι 800.000 επαναλήψεις του αλγόριθμου.

πίνακας 5

Instance	f_{min}	f_{ave}	σ	*Iter*	*Pert*	*Time(s)*
test1	224	227.2	0.5	17845	234	216
test2	16	16.0	0	32416	351	167
test3	73	76.0	2.13	40849	667	2078
test4	73	86.4	4.23	109198	2054	1678
comp01	5	5.0	0.0	321	5	5
comp02	29	50.6	8.78	768334	1032	3845
comp03	66	78.6	6.07	160909	1903	2078
comp04	35	42.3	3.53	23113	266	566
comp05	292	328.5	11.7	35435	54	191
comp06	37	57.3	8.1	562144	3213	5973
comp07	13	29.7	6.48	390912	3508	4035
comp08	39	48.8	3.75	203982	2352	3069
comp09	96	110.3	5.8	215891	2711	1754
comp10	10	28.8	9.0	33971	371	838
comp11	0	0.0	0.0	247	4	3
comp12	310	328.5	11.7	742316	10392	2513
comp13	59	69.9	7.4	793989	10078	4207
comp14	51	56.3	4.95	93549	1165	1320
comp15	68	79.8	5.75	193200	2429	9355
comp16	23	46.8	6.6	264512	1174	10280
comp17	69	91.1	6.7	181977	1995	2812
comp18	65	74.6	4.7	134205	985	7526
comp19	57	69.4	4.6	105983	1320	9835
comp20	22	42.1	6.7	216482	3265	8746
comp21	93	117.8	6.9	184065	1345	4891

Ο πίνακας 5 δείχνει τα υπολογιστικά στατιστικά κάτω από τη νέα συνθήκη τερματισμού. Και στον πίνακα 5 όπως και στον αντίστοιχο πίνακα 3 του προηγούμενου πειράματος, τα αποτελέσματα αφορούν 100 ανεξάρτητα τρεξίματα του ATS αλγόριθμου, και αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δυο πινάκων, γίνεται σαφές, ότι οι καλύτερες λύσεις βρίσκονται με την πιο χαλαρή συνθήκη τερματισμού. Συγκεκριμένα στις 21 απ’ τις 25 περιπτώσεις. Ελαφρώς καλύτερες όμως είναι και οι τιμές των μέσων όρων αλλά και των τυπικών αποκλίσεων του πίνακα 5 από αυτές του πίνακα

πίνακας6

Instance	ATS	Schaerf	Müller	Best Known[2]	Instance	ATS	Schaerf	Müller	Best Known[2]
test1	**224**	234	—	234	comp10	10	19	7	**7**
test2	*16*	16	—	16*	comp11	*0*	0	0	0*
test3	**73**	82	—	82	comp12	**310**	342	320	320
test4	**73**	130	—	130	comp13	**59**	72	61	60
comp01	*5*	5	5	5*	comp14	*51*	57	53	51*
comp02	**29**	56	35	33	comp15	**68**	79	70	70
comp03	*66*	79	66	*66*	comp16	**23**	46	30	28
comp04	*35*	38	35	35*	comp17	**69**	88	70	70
comp05	**292**	316	298	298	comp18	**65**	75	75	75
comp06	*37*	55	37	*37*	comp19	*57*	64	57	57
comp07	13	26	14	**7**	comp20	22	32	22	**17**
comp08	39	42	38	**38**	comp21	93	107	89	**89**
comp09	**96**	104	100	99					

Ο πίνακας 6 δείχνει μια σύγκριση αποτελεσμάτων του ATS με δυο ακόμη αλγόριθμους αλλά και με τα καλύτερα αποτελέσματα που ήταν γνωστά μέχρι το Νοέμβριο του 2008. Στον πίνακα αυτόν τα αποτελέσματα δίνονται κάτω από την χαλαρή συνθήκη . Και σε αυτόν τον πίνακα κανείς βρίσκει αρκετά ανταγωνιστικά αποτελέσματα από τον ATS. Για τις 25 περιστάσεις που καταγράφηκαν, ο ATS φτάνει τα καλύτερα αποτελέσματα στις 12 περιπτώσεις σε σύγκριση με τα καλύτερα των αλγόριθμων αναφοράς. Χειρότερα είναι τα αποτελέσματα του ATS μόνο για τις 5 περιστάσεις Τέλος, στις υπόλοιπες 8 περιστάσεις τα αποτελέσματα του ATS είναι ίδια με τα πιο ανταγωνιστικά αποτελέσματα των συγκρινόμενων αλγόριθμων. Για ακόμα μια φορά λοιπόν ο αλγόριθμος αυτός αποδεικνύει την υψηλή δυναμική του.

4.5. <u>Ανάλυση και Σχόλια</u>

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στον δεύτερο στόχο αυτού του κεφαλαίου, στην ανάλυση δηλαδή μερικών σημαντικών χαρακτηριστικών του προτεινόμενου ,για την κατάρτιση ωρολογίου προγράμματος, αλγόριθμου.

4.5.1. Συνδυασμός των δυο περιοχών

Στο τμήμα (3.3.2.2), παρουσιάστηκαν δυο είδη περιοχών (γειτονιών). Έγιναν πειράματα προκειμένου να καταστεί σαφής η αναγκαιότητα του συνδυασμού των περιοχών αυτών. Οι τρόποι συνδυασμού τους ποικίλλουν, όμως στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε δυο διαφορετικά είδη συνδυασμού των περιοχών.

Το πρώτο είδος είναι η ένωσή τους δηλαδή $N_1 \cup N_2$. Επομένως σε κάθε επανάληψη, η δομή της περιοχής θα περιλαμβάνει όλες τις κινήσεις των δυο περιοχών. Το δεύτερο είδος συνδυασμού, είναι η λεγόμενη token-ring έρευνα, στην οποία γίνεται έρευνα της περιοχής, σε τοπικό ελάχιστο που λαμβάνεται από προηγούμενη περιοχή και αυτή η διαδικασία συνεχίζει έως ότου να μη μπορεί να γίνει άλλη βελτίωση. Για το συνδυασμό token-ring, ξεκινάμε την αναζήτηση με δυο τρόπους. Απ' την N_1 στην N_2 (συμβολίζεται ως : $N_1 \rightarrow N_2$) και αντίστροφα. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα μέσες τιμές της συνάρτησης κόστους στις 14 πρώτες περιπτώσεις διαγωνισμού(comp01-comp14). Επίσης, μέσα στις παρενθέσεις βλέπουμε τον χρόνο CPU σε δευτερόλεπτα. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν 50 ανεξάρτητα τρεξίματα του αλγόριθμου Steepest Descent (SD)[4]. Τα αποτελέσματα του πίνακα 7 καταδεικνύουν ότι οι token-ring αναζητήσεις $(N_1 \rightarrow N_2, N_2 \rightarrow N_1)$ δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα, όχι μόνο απ' ότι δίνουν οι N_1 και N_2 μόνες τους, αλλά και από την ένωσή τους $N_1 \cup N_2$. Όσο αφορά στη σύγκριση των δυο token-ring αναζητήσεων, παρατηρούμε πως όταν η αφετηρία είναι η βασική περιοχή N_1 , ο CPU χρόνος είναι μικρότερος οπότε το προτιμάμε. Τα παρακάτω αποτελέσματα άρα μας ενθαρρύνουν να συνδυάζουμε τις δυο γειτονιές με token-ring τρόπο μέσα στον αλγόριθμό μας ATS, καθώς και να ξεκινάμε από την βασική γειτονιά N_1.

[4] Η Μέθοδος Απότομης Καθόδου είναι αλγόριθμος βελτιστοποίησης.

πίνακας7

Instance	$\bar{f}$				
	N_1	N_2	$N_1 \cup N_2$	$N_1 \rightarrow N_2$	$N_2 \rightarrow N_1$
comp01	31(0.1)	23(0.1)	18(0.2)	**16**(0.2)	18(0.2)
comp02	186(0.4)	143(1.8)	134(2.3)	**120**(1.6)	123(1.7)
comp03	210(0.4)	187(1.2)	177(2.0)	**170**(1.2)	173(1.3)
comp04	152(0.7)	131(3.5)	117(6.7)	105(2.9)	**100**(4.0)
comp05	871(0.4)	627(0.4)	566(0.5)	580(0.9)	**522**(1.0)
comp06	197(0.8)	162(4.7)	151(8.2)	**140**(3.1)	**140**(5.0)
comp07	190(1.2)	141(8.4)	122(15.2)	**111**(5.7)	115(8.0)
comp08	154(0.7)	129(3.4)	112(5.2)	**105**(2.5)	109(3.5)
comp09	231(0.5)	189(2.1)	182(2.1)	**174**(1.7)	175(2.1)
comp10	186(0.9)	147(5.3)	128(9.0)	127(3.0)	**116**(5.1)
comp11	11(0.1)	11(0.1)	6(0.2)	**4**(0.1)	5(0.2)
comp12	774(0.5)	743(0.5)	684(0.8)	667(0.6)	**654**(1.1)
comp13	186(0.8)	151(3.9)	134(7.6)	131(2.7)	**130**(3.7)
comp14	175(0.5)	156(1.3)	132(2.7)	**120**(1.6)	124(2.0)

4.5.2. Σπουδαιότητα της κίνησης των διπλών αλυσίδων Kempe

Προκειμένου να αξιολογήσουμε την ερευνητική ικανότητα της συγκεκριμένης κίνησης, επανακαθορίζουμε τέσσερις γειτονιές ως εξής : η γειτονιά $N_1^{(\alpha)}$ περιλαμβάνει όλες τις εφικτές κινήσεις από μετακίνηση μιας διάλεξης μέσα στο ωρολόγιο πρόγραμμα. Η γειτονιά $N_1^{(b)}$ θα περιλαμβάνει τις εφικτές κινήσεις από την εναλλαγή δυο διαλέξεων. Η γειτονιά $N_2^{(\alpha)}$ αποτελείται από τις εναλλαγές των περιόδων των διαλέξεων σε μια μονή αλυσίδα Kempe και τέλος, η γειτονιά $N_2^{(b)}$ θα αποτελείται από τις εναλλαγές των περιόδων δύο αλυσίδων Kempe. Ισχύουν προφανώς τα εξής : $N_1 = N_1^{(a)} \cup N_1^{(b)}$ και $N_2 = N_2^{(a)} \cup N_2^{(b)}$. Ο πίνακας 8 δίνει τις μέσες τιμές της συνάρτησης κόστους για 50 ανεξάρτητα τρεξίματα του αλγόριθμου Steepest Descent στις 14 περιστάσεις διαγωνισμού, όπως και στον πίνακα 7. Οι μέσοι χρόνοι τρεξίματος δίνονται σε παρενθέσεις. Είναι φανερό στον παρακάτω πίνακα ότι η γειτονιά των διπλών εναλλαγών των αλυσίδων Kempe κυριαρχεί σε επίπεδο ποιότητας λύσης σε σχέση με τις άλλες τρεις γειτονιές. Επιπλέον, η περιοχή $N_2^{(b)}$ και η N_2 δίνουν παρόμοια αποτελέσματα όσο αφορά στην ποιότητα λύσης αλλά και τον χρόνο επεξεργασίας CPU.

Πίνακας 8

Instance	f				
	$N_1^{(a)}$	$N_1^{(b)}$	$N_2^{(a)}$	$N_2^{(b)}$	N_2
comp01	42(0.0)	33(0.1)	49(0.0)	**24**(0.1)	23(0.1)
comp02	194(0.4)	228(0.2)	204(0.4)	**143**(1.4)	143(1.8)
comp03	217(0.4)	248(0.2)	245(0.3)	**193**(1.1)	187(1.2)
comp04	153(0.7)	199(0.4)	194(0.6)	**132**(3.5)	131(3.5)
comp05	1016(0.3)	995(0.2)	847(0.8)	**684**(0.4)	627(0.4)
comp06	207(0.7)	260(0.4)	255(0.7)	**158**(4.6)	162(4.7)
comp07	203(1.1)	247(0.6)	230(1.3)	**140**(8.2)	141(8.4)
comp08	154(0.7)	205(0.3)	185(0.6)	**139**(3.2)	129(3.4)
comp09	238(0.4)	273(0.2)	244(0.4)	**193**(2.0)	189(2.1)
comp10	195(0.8)	250(0.4)	249(0.9)	**145**(5.1)	147(5.3)
comp11	16(0.1)	16(0.1)	25(0.0)	**9**(0.1)	11(0.1)
comp12	807(0.5)	874(0.3)	885(1.6)	**746**(0.5)	743(0.5)
comp13	197(0.7)	233(0.4)	224(0.7)	**151**(3.7)	151(3.9)
comp14	180(0.5)	213(0.2)	206(0.3)	**151**(1.2)	156(1.3)

4.6.Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα κατάρτισης ωρολογίου προγράμματος σε Πανεπιστήμιο. Παραθέσαμε μια μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καθώς και έναν αλγόριθμο Προσαρμοστικής Περιορισμένης Αναζήτησης που λύνει αυτό το πρόβλημα. Ο αλγόριθμος αυτός ακολουθεί ένα γενικό πλαίσιο, αποτελούμενο από τρία στάδια (αρχικοποίηση, εμβάθυνση και απόκλιση).

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος ενσωματώνει διάφορα πρωτότυπα χαρακτηριστικά. Ένα εξ' αυτών είναι η περιοχή που προκύπτει από τις διπλές εναλλαγές των αλυσίδων Kempe. Επίσης, προτάθηκε μέθοδος για την διαταραχή της τρέχουσας λύσης όταν ο αλγόριθμος Περιορισμένης Αναζήτησης φτάνει σε τοπική βέλτιστη λύση. Τέλος, προκειμένου να παρέχουμε στην έρευνα μια διαρκή αντίστροφη σχέση μεταξύ εντατικοποίησης και απόκλισης, προτάθηκε μηχανισμός ο οποίος προσαρμόζει το βάθος της Περιορισμένης Αναζήτησης και την ισχύ των διαταραχών.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αξιολογήθηκε σε αποδοτικότητα σε σύνολο 25 περιπτώσεων. Η αξιολόγηση αυτή ήταν ιδιαίτερα ενθαρρυντική για τον αλγόριθμό μας.

Επιπρόσθετα, ανακαλύφθηκαν διάφορα βασικά συστατικά του αλγόριθμου που προτείνεται. Τα πειραματικά αποτελέσματα απέδειξαν ότι ο token-ring συνδυασμός τους είναι η σοφότερη επιλογή για τις περιοχές N_1 και N_2 .

Οι ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν είναι αρκετά γενικές, κάτι το οποίο επιτρέπει στην προτεινόμενη μέθοδο να εφαρμοστεί σε παρόμοια προβλήματα.

5. **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Γιαννόπουλος, Α.(2003).*Σημειώσεις Θεωρίας Αριθμών*. Ηράκλειο Κρήτης: Πανεπιστήμιο Κρήτης Τμήμα Μαθηματικών

Dahl , G. (2009) . Disjoint congruence classes and a timetabling application. *Discrete Applied Mathematics*, *157*, 1702-1710

Gaspero , L.Di.,& Schaerf, A. (2006). Neighborhood portfolio approach for local search applied to timetabling problems. *Journal of Mathematical Modeling and Algorithms*, *5*, 65-89

Μαρινάκης, Ι.,& Μαρινάκη, Μ.,& Ματσατσίνης, Ν., & Ζαπουνίδης, Κ.(2011). *Μεθευρετικοί και Εξελικτικοί αλγόριθμοι σε προβλήματα διοικητικής επιστήμης.* Αθήνα : Κλειδάριθμος

Παπαϊωάννου, Α.(2006). *Θεωρία Γραφημάτων*. Αθήνα :Εκδόσεις Ε.Μ.Π

Παπαϊωάννου, Α.,& Ρασσιάς, Μ.(2009). *Εισαγωγή στην Θεωρία Αριθμών*. Αθήνα : Εκδόσεις Συμεών

Second International Timetabling Competition (ITC-2007), Track 3: Curriculum-Based Course Timetabling. http://www.cs.qub.ac.uk/itc2007/

Werra, D.(1997). The combinatorics of timetabling. *European Journal of Operational Research*, *96(3)*, 504-513

Zhipeng, Lü.,& Hao, JK.(2008). Adaptive Tabu Search for course timetabling. *European Journal of Operational Research*, *200*, 235-244