Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Εμπροσθοδρομικες και Οπισθοδρομικες Στοχαστικες Διαφορικες Εξισωσεις και εφαρμογες στα Χρηματοοικονομικα

Αθανάσιος Ε. Γεωργίου

Πτυχιακή Διπλωματική

Αθηνα 2014

Περιεχόμενα

Εισαγωγη

Στην εν λόγω διπλωματική θα ασχοληθούμε με τον πολύ σημαντικό χώρο της στοχαστικής ανάλυσης, των Εμπροσθοδρομικών - Οπισθοδρομικών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Κατ΄ αρχήν στοχαστική ονομάζεται μια διαφορική εξίσωση με άγνωστο μια στοχαστική διαδικασία, και που εμπλέκει λευκό θόρυβο (white noise) ο οποίος εκφράζεται όπως θα περιγράψουμε στη συνέχεια μέσω της κίνησης Brown ή διαδικασίας Wiener. Εμπροσθοδρομική ονομάζεται μια ΣΔΕ όταν μας δίνεται η αρχική συνθήκη, έστω $X(0)$ αντιθέτως οπισθοδρομική ονομάζεται μια ΣΔΕ που στα δεδομένα του προβλήματος μας δίνεται η τελική συνθήκη, έστω $X(T)$, δηλαδή η τιμή της άγνωστης στοχαστικής διαδικασίας σε μια χρονική στιγμή T που μπορεί να τείνει και στο άπειρο.

Στο πρώτο κεφάλαιο αρχίζουμε με την παρουσίαση των στοχαστικών διαδικασιών. Παραθέτουμε ορισμούς και βασικά θεωρήματα καθώς και ανισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν στον ορισμό και τη θεμελίωση των ΕΟΣΔΕ, ξεκινώντας από τον πολύ σημαντικό ορισμό της σ-άλγεβρας στον $\mathbb{R}^n$, αν και στο μεγαλύτερο μέρος της διπλωματικής ασχολούμαστε με στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια ορίζουμε την κίνηση Brown (διαδικασία Wiener) και τα πιο σημαντικά θεωρήματα που προκύπτουν. Επίσης μέσα σε όλη τη θεωρία παραθέτουμε πρώτα στο $\mathbb{R}$ και μετά στον $\mathbb{R}^n$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô για να καταλήξουμε μετά σε μια από τις βασικότερες αρχές της στοχαστικής ανάλυσης που είναι η φόρμουλα του Itô. Στη συνέχεια παραθέτουμε μια ευρεία εισαγωγή πάνω στις ΣΔΕ και υπό ποιες προϋποθέσεις έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης. Τελειώνουμε το εισαγωγικό κεφάλαιο με τους σημαντικότερους στοχαστικούς χώρους που χρησιμοποιούμε και με την εισαγωγή στη θεωρία των Εμπροσθοδρομικών Οπισθοδρομικών ΣΔΕ δίνοντας παράλληλα τη σύνδεση ΕΟΣΔΕ και στοχαστικού Βέλτιστου Ελέγχου, τις γενικές μη γραμμικές ΕΟΣΔΕ κ.α.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με γραμμικές ΕΟΣΔΕ, δηλαδή ΕΟΣΔΕ που έχουν τη γενική μορφή:

$$\begin{cases} dX(t) = [AX(t) + BY(t) + CZ(t) + Db(t)]\, dt + [A_1X(t) + B_1Y(t) + C_1Z(t) + D_1\sigma(t)]\, dW(t), \\ dY(t) = [\widehat{A}X(t) + \widehat{B}Y(t) + \widehat{C}Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t)]\, dt + [\widehat{A}_1X(t) + \widehat{B}_1Y(t) + \widehat{C}_1Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t)]\, dW(t), \\ X(0) = x, \quad Y(T) = GX(T) + Fg. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Αρχικά αναφερόμαστε στις συνθήκες συμβατότητας του γενικού γραμμικού προβλήματος, δίνοντας τους κατάλληλους ορισμούς και προτάσεις. Έπειτα παραθέτουμε τα κατάλληλα εργαλεία και θεωρήματα που αποσκοπούν στην επιλυσιμότητα των γραμμικών ΕΟΣΔΕ, στην απλούστευση του γενικού γραμμικού προβλήματος, δηλαδή στην αναγωγή του προβλήματος από την αρχική και γενική περίπτωση σε απλούστερες μορφές όπου και εφαρμόζουμε βασικά κριτήρια επιλυσιμότητας. Καταλήγουμε τέλος στις εξισώσεις τύπου Ricati και στην επίλυσή τους βάσει πάλι κάποιων κριτηρίων επιλυσιμότητας και εφ'οσων ικανοποιούνται γενικές συνθήκες Lipshitz. Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την πολύ σημαντική μέθοδο του βέλτιστου ελέγχου και πως αυτή εμπλέκεται στην επίλυση μη γραμμικών πλέον ΕΟΣΔΕ της μορφής:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = h(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + Z(t)dW(t) \\ X(0) = x, \quad Y(T) = g(X(T)), \end{cases} \tag{0.0.2}$$

σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Αφού κάνουμε μια εισαγωγή στην επιλυσιμότητα της παραπάνω ΕΟΣΔΕ, αναφέρουμε δυο πολύ βασικά προβλήματα ελεγξιμότητας. Στη συνέχεια περιγράφουμε τη μέθοδο δυναμικού προγραμματισμού, όπως επίσης και την πολύ βασική εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman και καταλήγουμε σε μια ειδική περίπτωση προβλημάτων ΕΟΣΔΕ παραθέτοντας μια τεκμηριωμένη μέθοδο επίλυσης.
Τέλος στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, καταλήγουμε στην εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύξαμε στα προηγούμενα και ιδίως στο τρίτο κεφάλαιο. Ασχολούμαστε με την επίλυση πλέον, ενός τετριμμένου προβλήματος ΕΟΣΔΕ αρχικά, καθώς και του πολύ γνωστού και συνάμα σημαντικού μοντέλου των Black-Scholes για την αποτίμηση option (option pricing), με πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.
Κλείνοντας την εισαγωγή θα ήθελα να ευχαριστήσω από τα βάθη της καρδιάς μου τον πατέρα μου, για όλη τη στήριξη και τη συμπαράσταση που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια και να του αφιερώσω την εν λόγω διπλωματική εργασία. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Μιχάλη Λουλάκη για την καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, τον Κώστα, το Λευτέρη και το Γιάννη, τον Ηλία και τη Μάρα. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Μελισάρη που σε μικρή ηλικία με εισήγαγε στον κόσμο τον μαθηματικών.

Κεφάλαιο 1

Εννοιες απο τη στοχαστικη Αναλυση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε βασικούς ορισμούς και θεωρήματα της Στοχαστικής Ανάλυσης, τα οποία και θα χρησιμοποιηθούν για τη θεμελίωση των εμπροσθοδρομικών - οπισθοδρομικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Στοχαστικες διαδικασιες στον $\mathbb{R}^n$

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες και ιδιότητες που αφορούν σε στοχαστικές διαδικασίες με τιμές στον $\mathbb{R}^n$.

<u>Ορισμος</u> **1.1.1. (σ-άλγεβρα)**
Έστω Ω δειγματικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathscr{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται σ-άλγεβρα αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$

(ii) Αν $A \in \mathscr{F}$, τότε και $A^c \in \mathscr{F}$, όπου A^c είναι το συμπλήρωμα του A ως προς τον Ω

(iii) Αν $A_n \in \mathscr{F},\ n \in \mathbb{N}$, τότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Εύκολα προκύπτει ότι το $\emptyset \in \mathscr{F}$ καθώς και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$. Στην περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^n$, μπορούμε να ορίσουμε τη Borel σ-άλγεβρα, η οποία συμβολίζεται με $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ και παράγεται από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ της μορφής $\{(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] :\ a_i < b_i,$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{\emptyset\}$. Η Borel σ-άλγεβρα είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, μονοσύνολα, ενώσεις και τομές των παραπάνω. Αποτελεί μια ευρεία κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και αυτό την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη.

Το ζεύγος $(\Omega, \mathscr{F})$ καλείται μετρήσιμος χώρος. Π.χ. ο $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ είναι ο μετρήσιμος χώρος $\mathbb{R}^n$ με τα μετρήσιμα Borel υποσύνολά του.

<u>Ορισμος</u> **1.1.2. (Χώρος πιθανότητας)**
Έστω $(\Omega, \mathscr{F})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{P}$ ένα μέτρο πιθανότητας πάνω στην σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$. Η τριάδα $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας.

Ορισμος **1.1.3. (Τυχαία μεταβλητή)**
Έστω μια απεικόνιση $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ μεταξύ των μετρήσιμων χώρων $(\Omega, \mathscr{F})$ και $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Η $\mathcal{X}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, αν είναι μετρήσιμη, δηλαδή αν

$$\text{για κάθε } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \ \mathcal{X}^{-1}(B) \in \mathscr{F}.$$

Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ ένας χώρος πιθανότητας, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ και έστω τυχαία μεταβλητή $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Μπορούμε να ορίσουμε στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ μέτρο πιθανότητας $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ μέσω της τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{X}$ ως εξής:

$$\text{για κάθε } B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \text{ να ισχύει: } \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(B) = \mathcal{P}(\mathcal{X}^{-1}(B))$$

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι οποιαδήποτε πιθανοθεωρητική μελέτη στον $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ μπορεί να αναχθεί σε "αντίστοιχη"μελέτη στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$. Γι' αυτό το λόγο συχνά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathcal{P}(\mathcal{X} \in B)$, αντί του ορθού $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(B)$ ή $\mathcal{P}(\mathcal{X}^{-1}(B))$, για κάποιο $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Ως γνωστόν η συνάρτηση κατανομής $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μιας τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, ..., \mathcal{X}_n)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ δίνεται από τον τύπο:

$$F_{\mathcal{X}}(x) = \mathcal{P}(\mathcal{X}_1 \leq x_1, \ \mathcal{X}_2 \leq x_2, \ ..., \ \mathcal{X}_n \leq x_n), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Μια από τις σπουδαιότερες και ιδιαίτερα χρήσιμες κατανομές είναι η κανονική κατανομή, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) την

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Sigma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

όπου μ το διάνυσμα των μέσων τιμών και Σ ο πίνακας συνδιακύμανσης των $\mathcal{X}_i, \ i \in \mathbb{N}$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που $\mu = 0$ και $\Sigma = I_n$ η ποία ονομάζεται τυποποιημένη κανονική κατανομή και έχει σ.π.π. την

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

όπου με $|\cdot|$, συμβολίζουμε την ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμος **1.1.4. (Δεσμευμένη μέση τιμή)** *Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{X}$ ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $E[|\mathcal{X}| \ ] < \infty$. Έστω επίσης σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$. Ορίζουμε ως δεσμευμένη μέση τιμή της $\mathcal{X}$ δεδομένης της $\mathscr{A}$ την τυχαία μεταβλητή $\mathcal{Y} = E[\mathcal{X} \mid \mathscr{A}]$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:*

(i) $E[|\mathcal{Y}|] < \infty$

(ii) *Η τ.μ. $\mathcal{Y}$ είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη*

(iii) $\int_A \mathcal{Y} dP(\omega) = \int_A \mathcal{X} dP(\omega)$ *για κάθε $A \in \mathscr{A}$.*

Για τη δεσμευμένη μέση τιμή εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) $E[E[\mathcal{X} \mid \mathscr{A}]] = E[\mathcal{X}]$.

(ii) Αν η τ.μ. $\mathcal{X}$ είναι και $\mathscr{A}$-μετρήσιμη τότε $E[\mathcal{X} \mid \mathscr{A}] = \mathcal{X}$, $\mathcal{P} - \sigma.\beta.$

(iii) Αν $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ τότε $E[E[\mathcal{X} \mid \mathscr{F}] \mid \mathscr{G}] = E[\mathcal{X} \mid \mathscr{G}] = E[E[\mathcal{X} \mid \mathscr{G}] \mid \mathscr{F}]$.

Ορισμος **1.1.5. (Στοχαστική διαδικασία)**
Έστω I ένα σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{\mathcal{X}_t,\ t \in I\}$ ορισμένων σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, λέγεται στοχαστική διαδικασία με τιμές στον $\mathbb{R}^n$.

Αν το I είναι διακριτό σύνολο (π.χ. $\mathbb{N}$ ή $\mathbb{Z}$) έχουμε στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου, ενώ αν I είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ έχουμε στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου. Παρατηρούμε ότι μια στοχαστική διαδικασία είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών (t, ω). Αν σταθεροποιήσουμε το t λαμβάνουμε την τυχαία μεταβλητή $\mathcal{X}_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, ενώ αν σταθεροποιήσουμε το ω λαμβάνουμε μια συνάρτηση του $t \in I$ την $\mathcal{X}(\cdot, \omega)$ η οποία λέγεται και τροχιά του συγκεκριμένου ω ή μια πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας.

Έστω στοχαστικές διαδικασίες $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t, t \in I\}$ και $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_t\ t \in I\}$. Οι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ λέγονται εκδοχή ή τροποποίηση η μια της άλλης, όταν για κάθε συγκεκριμένο $t \in I$ ισχύει:

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{Y}_t,\ \mathcal{P} - \text{σχεδόν βεβαίως},$$

δηλαδή $\mathcal{P}(\omega \in \Omega : \mathcal{X}_t(\omega) \neq \mathcal{Y}_t(\omega)) = 0$, ενώ οι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ λέγονται μη διακρινόμενες, αν

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{Y}_t,\ \text{για κάθε } t \in I,\ \ \mathcal{P} - \text{σχεδόν βεβαίως},$$

δηλαδή $\mathcal{P}(\omega \in \Omega : \mathcal{X}_t(\omega) \neq \mathcal{Y}_t(\omega)\ \ \text{για κάθε}\ \ t \in I) = 0$.

Ορισμος **1.1.6. (Διύλιση)**
Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathscr{F}_t,\ t \in I$ μια οικογένεια σ-αλγεβρών στον Ω. Η οικογένεια $\mathscr{F}_t$ λέγεται διύλιση (filtration) στον $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ ή λέμε οτι ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\mathscr{F}_t$ όταν για κάθε $t \in I$, η $\mathscr{F}_t$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω με $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$ και $t_1 < t_2 \Rightarrow \mathscr{F}_{t_1} \subset \mathscr{F}_{t_2}$.

Η διύλιση που παράγεται από μια στοχαστική διαδικασία $X_t,\ t \geq 0$, λέγεται η φυσική διύλιση της διαδικασίας X_t. Στην περίπτωση αυτή $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$.

Ορισμος **1.1.7. (Κανονική διύλιση)**
Μια διύλιση ονομάζεται κανονική αν

(i) Η $\mathscr{F}_0$ περιέχει όλα τα $A \in \mathscr{F}$ για τα οποία ισχύει ότι $\mathcal{P}(A) = 0$.

(ii) Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t^+} := \bigcap_{r>t} \mathscr{F}_r$

Ορισμος **1.1.8. (Προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία)**
Έστω στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t,\ t \in I\}$ ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathscr{F}_t,\ t \in I\}$. Η διαδικασία $\mathcal{X}$ λέγεται προσαρμοσμένη ή $\mathscr{F}_t$-προσαρμοσμένη στην διύλιση $\{\mathscr{F}_t,\ t \in I\}$ όταν για κάθε $t \in I$ η τυχαία μεταβλητή $\mathcal{X}_t$ είναι $\mathscr{F}_t$-μετρήσιμη. Μια στοχαστική διαδικασία είναι πάντα προσαρμοσμένη στη φυσική της διύλιση.

Ορισμος **1.1.9. (Διαδικασίες martingale)**
Μια στοχαστική διαδικασία $\{\mathcal{X}_t,\ t \in I\}$ με τιμές στον $\mathbb{R}$, ορισμένη στον $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, με $\{\mathscr{F}_t,\ t \in I\}$ μια διύλιση του χώρου πιθανότητας λέγεται ότι είναι $\mathscr{F}_t -$ submartingale (αντίστοιχα $\mathscr{F}_t -$ supermartingale) όταν και μόνο όταν ισχύουν τα εξής:

(i) Η στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X}_t,\ t \in I$ είναι $\mathscr{F}_t -$ προσαρμοσμένη

(ii) $E[|\mathcal{X}_t|] < \infty$ για κάθε $t \in I$

(iii) $E[\mathcal{X}_t|\mathscr{F}_s] \geq \mathcal{X}_s$ (αντίστοιχα $E[\mathcal{X}_t|\mathscr{F}_s] \leq \mathcal{X}_s$) $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως, για οποιαδήποτε $s, t \in I$ με $s < t$.

Μια στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X}_t,\ t \in I$, λέγεται $\mathscr{F}_t -$ martingale αν είναι συγχρόνως $\mathscr{F}_t -$ submartingale και $\mathscr{F}_t -$ supermartingale.

Ορισμος **1.1.10. (Ιδιότητα Markov)**
Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διύλιση $\mathscr{F}_t,\ t \in I$. Μια στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X}_t,\ t \in I$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, η οποία είναι $\mathscr{F}_t -$ προσαρμοσμένη, λέμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα Markov, αν για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $s, t \in I$ με $s < t$, ισχύει ότι:

$$P(\mathcal{X}_t \in B|\mathscr{F}_s) = P(\mathcal{X}_t \in B|\mathcal{X}_s)\ , \mathcal{P}\text{-σχεδόν βεβαίως}$$

ή ισοδύναμα

$$E[f(\mathcal{X}_t)|\mathscr{F}_s] = E[f(\mathcal{X}_t)|\mathcal{X}_s]\ , \mathcal{P}\text{-σχεδόν βεβαίως}$$

για κάθε $0 \leq s \leq t$ και για κάθε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη και Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Μια πολύ χρήσιμη έννοια μετρησιμότητας είναι αυτή της προοδευτικής μετρησιμότητας (progressive measurability). Η προοδευτική μετρησιμότητα αναφέρεται στη μετρησιμότητα της στοχαστικής διαδικασίας $\mathcal{X}$ ως προς το ζεύγος $(t, \omega),\ t \in I,\ \omega \in \Omega$, ενώ όπως έχουμε δει η έννοια της προσαρμοστικότητας αναφέρεται στη μετρησιμότητα της τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{X}_t$ (με t σταθεροποιημένο) ως προς $\omega \in \Omega$. Συγκεκριμένα, έστω $I = [0, T]$ ή $I = [0, \infty]$. Για τον παρακάτω ορισμό θα χρειαστούμε το μετρήσιμο χώρο ($[0, s] \times \Omega$, $\mathscr{B}([0, s]) \times \mathscr{F}_s$) και έστω $(t, \omega) \in [0, s] \times \Omega$, όπου $s \geq 0$.

Ορισμος **1.1.11. (Προοδευτική μετρησιμότητα)**
Έστω $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διύλιση $\mathscr{F}_t,\ t \in I$. Έστω επίσης ο μετρήσιμος χώρος ($[0, s] \times \Omega$, $\mathscr{B}([0, s]) \times \mathscr{F}_s$) όπου $s \geq 0$. Μια στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X}(t, \omega),\ (t, \omega) \in I \times \Omega$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, λέγεται προοδευτικά μετρήσιμη αν η απεικόνιση $\mathcal{X}$, μεταξύ των μετρήσιμων χώρων ($[0, s] \times \Omega$, $\mathscr{B}([0, s]) \times \mathscr{F}_s$) και $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$, είναι μετρήσιμη για οποιοδήποτε $s \geq 0$.

Μια πρόταση η οποία συνδέει τις έννοιες της προσαρμοστικότητας και της προοδευτικής μετρησιμότητας είναι η εξής:

Προταση **1.1.12. (Προσαρμοστικότητα-προοδευτική μετρησιμότητα)**

(i) Κάθε προοδευτικά μετρήσιμη στοχαστική διαδικασία είναι προσαρμοσμένη.

(ii) Αν μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία έχει συνεχείς από δεξιά τροχιές, τότε είναι προοδευτικά μετρήσιμη.[3](p.24)

Για την εναλλαγή του ολοκληρώματος μιας στοχαστικής διαδικασίας με τη μέση τιμή μας πληροφορεί το επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα **1.1.13. (Fubini για στοχαστικές διαδικασίες)**
Έστω στοχαστική διαδικασία $\mathcal{X}(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, η οποία είναι $(\mathscr{B}[0,T] \times \mathscr{F})-$μετρήσιμη. Αν ισχύει ότι

$$\int_\Omega \int_0^T |\mathcal{X}(t,\omega)| dt\ dP(\omega) < \infty \quad \text{ή} \quad \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{X}(t,\omega)| dP(\omega)\ dt < \infty,$$

τότε

$$\int_\Omega \int_0^T \mathcal{X}(t,\omega) dt\ dP(\omega) = \int_0^T \int_\Omega \mathcal{X}(t,\omega) dP(\omega)\ dt,$$

ή αλλιώς

$$E\left[\int_0^T \mathcal{X}(t,\omega)dt\right] = \int_0^T E[\mathcal{X}(t,\omega)]dt.$$

[3](p.268)

1.2 Η κινηση Brown (διαδικασια Wiener) στον $\mathbb{R}^n$

Η κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener είναι μια από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες. Η ονομασία της οφείλεται στον Σκώτο βοτανολόγο Robert Brown ο οποίος το 1827 παρατήρησε μία αδιάκοπη και άτακτη κίνηση λεπτότατων, αλλά ορατών στο μικροσκόπιο, σωματιδίων (κόκκων γύρης), που αιωρούνταν στο νερό. Η διαδικασία Brown είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει την κίνηση αυτή, ενώ παράλληλα παίζει ένα πολύ σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμος **1.2.1. (Κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener)**
Η n-διάστατη κίνηση Brown B_t, $t \geq 0$, είναι μια στοχαστική διαδικασία με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν $t_0 < t_1 < ... < t_k$, τότε οι διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ...,$ $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητες (ανεξάρτητες προσαυξήσεις),

(ii) Αν $t \geq s \geq 0$, τότε

$$\mathcal{P}(B_t - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{[2\pi(t-s)]^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}\ dx\ ,$$

όπου $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ και με $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ συμβολίζουμε τη σ-άλγεβρα Borel στο $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή οι προσαυξήσεις της n-διάστατης κίνησης Brown ακολουθούν την n-διάστατη κανονική κατανομή, με μέση τιμή 0 και πίνακα συνδιακύμανσης $(t-s)I_n$.

(iii) *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η συνάρτηση $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $\omega \in K$, όπου $K \subseteq \Omega$ με $P(K) = 1$.*

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι η κίνηση Brown n-διαστάσεων είναι μια διανυσματική στοχαστική διαδικασία $B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n)$, όπου κάθε μια από τις B_t^i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι μονοδιάστατες κινήσεις Brown ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν $B_0 = 0$ τότε η κίνηση Brown λέγεται τυπική (standard). Η τυπική κίνηση Brown συνήθως αναφέρεται ως διαδικασία Weiner. Οι ιδιότητες της πολυδιάστατης κίνησης Brown μπορούν να συναχθούν από τις ιδιότητες των μονοδιάστατων κινήσεων Brown που την αποτελούν.

Ορισμος **1.2.2. (Μέση τιμή και συνδιακύμανση της κίνησης Brown)**
Αν $B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n)$ είναι μια n-διάστατη κίνηση Brown τότε ορίζουμε ως μέση τιμή της B_t το διάνυσμα μ του $\mathbb{R}^n$ ώστε:

$$E[B_t] = \mu \text{ όπου } \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n \text{ με } \mu_i = E[B_t^i], i = 1, 2, \ldots, n$$

ενώ ως πίνακα συνδιακύμανσης τον $n \times n$ πίνακα $\Sigma = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^n$ όπου:

$$\sigma_{ij} = E[(B_t^i - \mu_i)(B_t^j - \mu_j)] \ , \ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Αν η B_t είναι τυπική κίνηση Brown, τότε $B_0^i = 0$. Αποδεικνύεται ότι $E[B_t^i] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, άρα τελικά $E[B_t] = 0$. Επίσης, για τον πίνακα συνδιακύμανσης, λόγω ανεξαρτησίας των B_t^i, B_t^j , $i \neq j$, προκύπτει ότι $\sigma_{ij} = 0$ για $i \neq j$, ενώ για τα διαγώνια στοιχεία αποδεικνύεται ότι $\sigma_{ii} = E[(B_t^i)^2] = t$, δηλαδή $\Sigma = tI_n$.

Συνοψίζοντας τις ιδιότητες της μονοδιάστατης κίνησης Brown, οι οποίες γενικεύονται και στις n-διαστάσεις, αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση:

Προταση **1.2.3.** *Έστω B_t, $t \geq 0$ μια κίνηση Brown στον $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\mathscr{F}_t$, $t \geq 0$. Τότε:*

(i) *Για $0 \leq s \leq t$ η $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathscr{F}_s$.*

(ii) *Η B_t, $t \geq 0$, είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη.*

(iii) *Η B_t, $t \geq 0$, είναι $\mathscr{F}_t - martingale$.*

(iv) *Η $B_t^2 - t$, $t \geq 0$, είναι $\mathscr{F}_t - martingale$.*

(v) *Για οποιαδήποτε $s, t \geq 0$, ισχύει ότι $Cov(B_s - B_t) = min\{s, t\}$.*

(vi) *Η B_t, $t \geq 0$, ικανοποιεί την ιδιότητα Markov.[3](p.32)*

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα σημαντικό θεώρημα (Levy) το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ισοδύναμος ορισμός της κίνησης Brown.

Θεωρημα **1.2.4. (Levy)**
Έστω $X_t = (X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^n)$, $t \geq 0$, μια στοχαστική διαδικασία στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathscr{F}_t = \sigma(X_t,\ s \leq t)$ η διύλιση που παράγεται από αυτή. Η X_t είναι μια τυπική $n-$διάστατη διαδικασία Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής συνθήκες:

(i) $X_0 = 0$ *$\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως.*

(ii) *Η X_t έχει συνεχείς τροχιές.*

(iii) *Η X_t είναι $\mathscr{F}_t$ − martingale.*

(iv) *Η στοχαστική διαδικασία $X_t^i X_t^j - \delta_{ij} t,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ είναι μια $\mathscr{F}_t$ − martingale, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.[4](p.9)*

Η κίνηση Brown $B_t,\ t \geq 0$, ενώ έχει συνεχείς τροχιές $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως, είναι μη παραγωγίσιμη για κάθε $t \geq 0$ $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως. Μια ιδέα για την "παθολογική"συμπεριφορά της κίνησης Brown μας δίνει το επόμενο θεώρημα:

Θεωρημα **1.2.5. (Khinchin ή επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου)** *Για την κίνηση Brown $B_t,\ t \geq 0$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις με πιθανότητα 1:*

(i) $$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{\ln(\ln(\frac{1}{t}))t}} = \limsup_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{\ln(\ln(t))t}} = 1$$

(ii) $$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{\ln(\ln(\frac{1}{t}))t}} = \liminf_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{\ln(\ln(t))t}} = -1$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι τροχιές της κίνησης Brown αν και συνεχείς δεν είναι φραγμένης κύμανσης ούτε παραγωγίζονται πουθενά. Για το λόγο αυτό, το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε μια κίνηση Brown (δηλαδή με ολοκληρωτή την κίνηση Brown) δεν μπορεί να οριστεί ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes, αλλά πρέπει να βρεθεί ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού του, βασισμένος στις ιδιότητες της κίνησης Brown.

1.3 Το Στοχαστικο Ολοκληρωμα Itô

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, δηλαδή το ολοκλήρωμα μιας στοχαστικής διαδικασίας με ολοκληρωτή την κίνηση Brown. Τα ολοκληρώματα πάνω σε μια κίνηση Brown βρίσκουν εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως στη χρηματοοικονομική, στη Φυσική, στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και γενικότερα στις επιστήμες που μελετούν φαινόμενα στα οποία υπεισέρχονται τυχαίοι όροι. Τον τρόπο που μπορούμε να ορίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα, που εξαιτίας της παθολογικής συμπεριφοράς των τροχιών της κίνησης Brown δεν μπορούν να είναι ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes, τον υπέδειξε στα τέλη της δεκαετίας του 1940 ο Ιάπωνας μαθηματικός Kyoshi Itô. Όπως θα δούμε παρακάτω, η βασική ιδέα για τον ορισμό του ολοκληρώματος Itô προκύπτει από τις ιδιότητες των μεταβολών της κίνησης Brown. Αρχικά θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για στοχαστικές διαδικασίες βήματος (step functions) και στη συνέχεια, μέσω αυτών, για «κατάλληλες» στοχαστικές διαδικασίες.

Ορισμος **1.3.1. (Διαδικασίες βήματος)**
Μία στοχαστική διαδικασία $\Phi_t,\ t \in [a,b]$, λέγεται διαδικασία βήματος αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία αριθμών $a = t_0 < t_1 ... < t_k = b$, και αντίστοιχα πεπερασμένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\Phi_0, \Phi_1, ...\Phi_{k-1}$, όπου Φ_i είναι $\mathscr{F}_{t_i}$-μετρήσιμη, με $E[\Phi_i^2] < \infty$, $i = 1, 2, ..., k-1$, ώστε $\Phi_t = \Phi_i$, αν $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $\ i = 1, 2, ..., k-1$.

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε την τυπική κίνηση Brown με W_t (διαδικασία Wiener) αντί για B_t, ενώ με $M_{step}([a,b])$ θα συμβολίζουμε το σύνολο διαδικασιών βήματος στο $[a,b]$.

Ορισμος **1.3.2. (Το στοχαστικό ολοκλήρωμα για διαδικασίες βήματος)**
Έστω μια στοχαστική διαδικασία βήματος $\Phi \in M_{step}([a,b])$. Το ορισμένο στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô της Φ στο $[a,b]$ ορίζεται ως

$$I(\Phi_t) = \int_a^b \Phi_t \, dW_t = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Θεωρημα **1.3.3. (Ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος)**
Το ολοκλήρωμα Itô μιας διαδικασίας βήματος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Είναι γραμμικό, δηλαδή αν Φ_1 και Φ_2 είναι δυο διαδικασίες βήματος ισχύει ότι

$$I(\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2) = \lambda_1 I(\Phi_1) + \lambda_2 I(\Phi_2), \text{ όπου } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) $E\left[I(\Phi_t)\right] = E\left[\int_a^b \Phi_t \, dW_t\right] = 0$

(iii) $E\left[\,|I(\Phi_t)|^2\right] = E\left[\left|\int_a^b \Phi_t \, dW_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b |\Phi_t|^2 \, dt\right]$

Η ιδιότητα (iii) ονομάζεται ισομετρία Itô για διαδικασίες βήματος.[4](p.23)

Για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε διαδικασίες γενικότερες των διαδικασιών βήματος είναι σκόπιμο να αναφέρουμε τα εξής:

Ορισμος **1.3.4. (Ο χώρος $M^2([a,b])$)**
Μία στοχαστική διαδικασία $f(t)$, $t \in [a,b]$, λέμε ότι ανήκει στο χώρο $M^2([a,b])$ αν είναι προοδευτικά μετρήσιμη και ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$E\left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right] < \infty$$

Η σημαντική ιδιότητα του χώρου $M^2([a,b])$ είναι ότι οι διαδικασίες βήματος είναι πυκνές σε αυτόν. Συγκεκριμένα, για κάθε $f \in M^2([a,b])$ υπάρχει ακολουθία διαδικασιών βήματος $\Phi_n(t) \in M_{step}([a,b]),\ n \in \mathbb{N}$, ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t) - \Phi_n(t)\|_{M^2([a,b])} = \lim_{n\to\infty} \left(E\left[\int_a^b |f(t) - \Phi_n(t)|^2 \, dt\right]\right)^{1/2} = 0$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μια $f \in M^2([a,b])$.

Ορισμος **1.3.5. (Στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô)**
Έστω $f \in M^2([a,b])$. Το ολοκλήρωμα Itô της f ορίζεται ως το L^2 όριο:

$$I(f(t)) = \int_a^b f(t)dW_t := \lim_{n\to\infty} I(\Phi_n(t)) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t)dW_t$$

όπου $\lim_{n\to\infty} \|f(t) - \Phi_n(t)\|_{M^2([a,b])} = 0.$

Όπως παρατηρούμε το $I(f(t)) = \int_a^b f(t)dW_t$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που είναι το L^2 όριο της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών $I_n = \int_a^b \Phi_n(t)dW_t$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} E\left[|I(f(t)) - I_n|^2\right] = 0.$ Η ύπαρξη του παραπάνω ορίου εξασφαλίζεται από τη διαχωρισημότητα του $M^2([a,b])$, την πληρότητα του $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ και την ισομετρία του Itô για διαδικασίες βήματος. Δηλαδή τελικά το $I(f(t))$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στον $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$.

Οι ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος για διαδικασίες βήματος του θεωρήματος 1.3.2 επεκτείνονται και στα στοχαστικά ολοκληρώματα για διαδικασίες $f \in M^2([a,b])$. Ειδικότερα η ισομετρία του Itô μας υποδεικνύει ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα ως απεικόνιση από τον $M^2([a,b])$ στον $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ είναι ισομετρία, δηλαδή

$$\|f\|_{M^2([a,b])} = \|I(f)\|_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathcal{P})}$$

Μια επέκταση της ισομετρίας του Itô είναι η ιδιότητα του γινομένου. Δηλαδή έστω $f, g \in M^2([a,b])$, τότε:

$$E[I(f)I(g)] = E\left[\int_a^b f(t)dB_t \cdot \int_a^b g(t)dB_t\right] = E\left[\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt\right]$$

ή αλλιώς:

$$< I(f), I(g) >_{L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathcal{P})} = < f, g >_{M^2([a,b])}$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα Itô με όρια ολοκλήρωσης τα a, b όπως είδαμε, είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Το αόριστο ολοκλήρωμα Itô όμως, το οποίο προκύπτει όταν ένα από τα όρια ολοκλήρωσης περιέχει μεταβλητή, π.χ. $\int_0^t f(s)dW_s,\ f \in M^2([0,T]),\ 0 \le t \le T$, είναι στοχαστική διαδικασία, αφού για κάθε τιμή παίρνουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα Itô (τυχαία μεταβλητή).

Θεωρημα **1.3.7.** *Έστω στοχαστική διαδικασία $I_t = \int_0^t f(s)dW_s,\ f \in M^2([0,T]),\ 0 \le t \le T$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Η I_t είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale, δηλαδή $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |I_t|^2\right] < \infty$.

(ii) Η διαδικασία της τετραγωνικής μεταβολής της I_t είναι η:

$$< I >_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

[4](p.30)

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες Itô, οι οποίες όπως θα δούμε παρακάτω παίζουν σημαντικό ρόλο στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμος **1.3.8. (Η στοχαστική διαδικασία Itô)**
Στοχαστική διαδικασία Itô ονομάζεται μια διαδικασία της μορφής:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s$$

όπου X_0 τυχαία μεταβλητή $\mathscr{F}_0-$μετρήσιμη και u, v προοδευτικά μετρήσιμες στοχαστικές διαδικασίες με $v \in M^2([0,T])$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty \ , \ \int_0^t v^2(s,\omega)ds < \infty, \ \mathcal{P} - \text{σχεδόν βεβαίως}$$

Η διαδικασία Itô μπορεί να γραφεί και σε διαφορική μορφή ως εξής:

$$dX_t = udt + vdW_t$$

Από τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι μια διαδικασία Itô αποτελείται από δυο μέρη. Ένα ολοκλήρωμα Riemann, $\int_0^t u(s,\omega)ds$, που είναι μια διαδικασία πεπερασμένης μεταβολής, και ένα αόριστο ολοκλήρωμα Itô, $\int_0^t v(s,\omega)dW_s$, που είναι μια διαδικασία martingale.

Θεωρημα **1.3.9. (Τύπος του Itô)**
Έστω μια διαδικασία Itô, $X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s$. Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $g(t,X_t)$, όπου $g(t,x) \in C^{1,2}$, είναι επίσης διαδικασία Itô με μορφή:

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)(s,X_s)ds + \int_0^t \left(v\frac{\partial g}{\partial x} \right)(s,X_s)dW_s$$

ή την ισοδύναμη διαφορική μορφή:

$$dg(t,X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)(t,X_t)dt + \left(v\frac{\partial g}{\partial x} \right)(t,X_t)dW_t.$$

[4](p.32)

Στη συνέχεια θα δούμε πως επεκτείνονται τα παραπάνω στον $\mathbb{R}^n$. Ας θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία $f(t), t \in [0,T]$ με τιμές στον $\mathbb{R}^{n\times k}$, όπου $f_{ij}(t) \in M^2([0,T])$ για $i = 1,2,\ldots,n$ και $j = 1,2,\ldots,k$. Έστω επίσης μια $k-$διάστατη $\mathscr{F}_t-$διαδικασία Wiener $W_t, t \in [0,T]$.

Ορισμος **1.3.10. (Το n-διάστατο ολοκλήρωμα Itô)**
Το αόριστο n-διάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô $I(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)dW(s)$ *είναι μια στοχαστική διαδικασία με τιμές στον* $\mathbb{R}^n$, *δηλαδή* $I(t) = (I_1(t), I_2(t), \ldots, I_n(t))^T$ *όπου:*

$$I_i(t) = \sum_{j=1}^{k} \int_0^t f_{ij}(s)dW_j(s),\ i = 1,2,\ldots,n \text{ και} \int_0^t f_{ij}(s)dW_j(s)$$

το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα Itô που ορίσαμε προηγουμένως.

Ο παραπάνω ορισμός παρουσιάζεται με μορφή πινάκων ως εξής:

$$I(t) = I(t) = \int_0^t f(s)dW(s) = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \ldots & f_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1(s) \\ \vdots \\ dW_k(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \int_0^t f_{1j}(s)dW_j(s) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \int_0^t f_{nj}(s)dW_j(s) \end{pmatrix}$$

Όπως γίνεται φανερό, οι ιδιότητες του n-διάστατου ολοκληρώματος Itô μπορούν να προκύψουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες του μονοδιάστατου.

Ορισμος **1.3.11. (Μονοδιάστατη διαδικασία Itô πάνω σε k-διάστατη διαδικασία Weiner)**
Η X_t *είναι μια μονοδιάστατη διαδικασία Itô πάνω σε n-διάστατη διαδικασία Weiner αν*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t v_j(s,\omega)dW_j(s),$$

όπου X_0 *πραγματική τυχαία μεταβλητή* $\mathscr{F}_0-$*μετρήσιμη,* u, $v_j, j = 1,2,\ldots,k$ *πραγματικές και προοδευτικά μετρήσιμες στοχαστικές διαδικασίες με* $v_j \in M^2([0,T]), j = 1,2,\ldots,k$, *οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:*

$$\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty \ , \ \int_0^t v_j^2(s,\omega)ds < \infty \, j = 1,2,\ldots,k \ \ , \mathcal{P} - \text{σχεδόν βεβαίως}$$

Η παραπάνω διαδικασία Itô μπορεί να γραφεί και σε διαφορική μορφή ως εξής:

$$dX_t = udt + \sum_{j=1}^{k} v_j dW_j(t)$$

Αφού έχουμε ορίσει την μονοδιάστατη διαδικασία Itô πάνω σε k-διάστατη διαδικασία Weiner, μπορούμε να κάνουμε και τη γενίκευση για n διαστάσεις ως εξής:

Ορισμος **1.3.12. (Η n-διάστατη διαδικασία Itô πάνω σε k-διάστατη διαδικασία Weiner)**
Η n-διάστατη διαδικασία Itô είναι μια στοχαστική διαδικασία $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))^T$, *όπου:*

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t u_i(s,\omega)ds + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t v_{ij}(s,\omega)dW_j(s),\ i = 1,2,\ldots,n$$

δηλαδή κάθε συνιστώσα $X_i(t)$ *είναι μια μονοδιάστατη διαδικασία Itô πάνω σε k-διάστατη διαδικασία Weiner. Σε διαφορική μορφή η n-διάστατη διαδικασία Itô γράφεται:*

$$dX_i(t) = u_i dt + \sum_{j=1}^{k} v_{ij} dW_j(t),\ i = 1,2,\ldots,n$$

Θεωρημα **1.3.13. (Ο τύπος του Itô για n-διαστάσεις)**
Έστω μια n-διάστατη διαδικασία Itô $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))^T$, *με διαφορική μορφή:*

$$dX_i(t) = u_i dt + \sum_{j=1}^{k} v_{ij} dW_j(t),\ i = 1,2,\ldots,n$$

και $g(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *μια* $C^{1,2}$ *συνάρτηση. Τότε η στοχαστική διαδικασία* $g(t, X_t)$ *είναι διαδικασία Itô της οποίας η διαφορική μορφή εκφράζεται με τη χρήση πινάκων ως εξής:*

$$dg(t,X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \nabla_x g \cdot u + \frac{1}{2} trace(v^T \cdot \nabla_{xx} g \cdot v)\right)(t,X_t)dt + \nabla_x g \cdot v(t,X_t) \cdot dW(t)$$

όπου $\nabla_x g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$, $\nabla_{xx} g = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $i,j = 1,\ldots,n,\ u \in \mathbb{R}^{1\times n},\ v \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *και* $dW(t) = (dW_1(t), \ldots, dW_k(t))^T$.

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της στοχαστικής ανάλυσης είναι το παρακάτω:

Θεωρημα **1.3.14. (Αναπαράστασης Martingale)**
Έστω W_t *μια k-διάστατη διαδικασία Wiener ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, *ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση* $\mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, *η οποία είναι η φυσική διύλιση της διαδικασίας Wiener στην οποία έχουμε ενσωματώσει τα σύνολα* $\mathcal{P}-$*μέτρου μηδέν (δηλαδή* $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\{B_s : s \leq t\} \cup \mathcal{F}_0\right)$*). Έστω επίσης μια* $\mathscr{F}_t -$ *martingale στοχαστική διαδικασία* $Y(t)$ *με τιμές στον* $\mathbb{R}^n$, *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (δηλαδή* $E[|Y(t)|^2] < \infty$*).*
Τότε υπάρχει μια μοναδική (με την έννοια του μέτρου $dt \otimes dP$*) τετραγωνικά ολοκληρώσιμη* $\mathscr{F}_t -$ *martingale στοχαστική διαδικασία* $Z(t)$, *η οποία ικανοποιεί ότι:*

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t Z(s)dW(s), \quad t \in [0,T], \quad \text{σχεδόν βεβαίως.}$$

[3](p.125)

1.4 Στοχαστικες Διαφορικες Εξισωσεις

Τα παραδείγματα που μπορεί να αναφέρει κανείς για τις εφαρμογές των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων είναι πάρα πολλά και αφορούν ένα μεγάλο κομμάτι των φυσικών επιστημών. Η μοντελοποίηση με βάση ντετερμινιστικές εξισώσεις έχει το μειονέκτημα ότι δε μπορεί να συμπεριλάβει παράγοντες που μπορεί να εμφανιστούν "τυχαία" στο χώρο και το χρόνο και να επηρεάσουν είτε τη δημιουργία είτε την εξέλιξη ενός φυσικού φαινομένου. Αυτό, έχει ως συνέπεια μια απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα, άλλες φορές μικρή κι άλλες φορές σημαντική. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ντετερμινιστικά μοντέλα περιγράφουν φυσικά φαινόμενα τα οποία γεννιούνται και αναπτύσσονται σε συνθήκες ιδανικότερες των φυσικών. Στα Στοχαστικά Μοντέλα γίνεται συνήθως μια προσπάθεια εισαγωγής στο ντετερμινιστικό μοντέλο, ενός διορθωτικού "τυχαίων ιδιοτήτων" όρου (προσθετικός ή πολλαπλασιαστικός θόρυβος), με την βοήθεια του οποίου ελπίζουμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του φαινομένου σε πραγματικές συνθήκες. Στην πράξη διαπιστώθηκε ότι πολλά ντετερμινιστικά μαθηματικά μοντέλα για σωρεία προβλημάτων (πληθυσμιακά, βιολογικά, χημείας, επικοινωνιών κ.α.) γίνονται ρεαλιστικότερα με τη βοήθεια ενός "λευκού θορύβου" ξ_t, δηλαδή μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας Gauss η οποία έχει ως κύριο γνώρισμα ότι $Cov(\xi_t, \xi_{t+h}) = \delta(h)$, όπου δ η συνάρτηση Dirac. Η παραπάνω απαίτηση για την ξ_t, αν λάβουμε την φασματική της ανάλυση, εκφράζει κατά κάποιο τρόπο, την ύπαρξη όλων των συχνοτήτων με την ίδια ένταση (όμοια με το λευκό φως). Η κατασκευή μιας διαδικασίας ξ_t με τα παραπάνω γνωρίσματα είναι δύσκολη και προβληματική, αν όμως $W(t)$ είναι μια διαδικασία Weiner, τότε η διαδικασία $\dfrac{W(t+\varepsilon)-W(t)}{\varepsilon}$ κατά κάποιον τρόπο προσεγγίζει την ξ_t, για ε αρκετά μικρό.

Ας θεωρήσουμε το γνωστό παράδειγμα του πληθυσμιακού μοντέλου:

$$\frac{dX(t)}{dt} = a_t X(t),\ X_0 = x > 0,$$

όπου $X(t)$ το μέγεθος του πληθυσμού και a_t ο συντελεστής του μοντέλου. Στην περίπτωση που υπεισέρχεται τυχαιότητα στον συντελεστή a_t και θεωρήσουμε ότι εξελίσσεται τυχαία στο χρόνο π.χ. με μορφή $a_t = r + \beta\xi_t$, όπου ξ_t λευκός θόρυβος που ορίσαμε παραπάνω ο οποίος μοντελοποιεί την τυχαιότητα, η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t + \beta X_t \xi_t,\ X_0 = x$$

ή σε ολοκληρωτική μορφή:

$$X_t = x + \int_0^t rX_s ds + \int_0^t \beta X_s \xi_s ds.$$

Αντικαθιστώντας το $\xi_t dt$ με dW_t λαμβάνουμε πλέον τη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση:

$$dX_t = rX_t dt + \beta X_t dW_t,$$

και σε ολοκληρωτική μορφή:

$$X_t = x + \int_0^t rX_s ds + \int_0^t \beta X_s dW_s.$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η διαδικασία Weiner, ενώ είναι συνεχής για κάθε t P-σχεδόν βέβαια, είναι μη παραγωγίσιμη για κάθε t P-σχεδόν βέβαια. Για το λόγο αυτό με τον όρο Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, ουσιαστικά εννοούμε την αναζήτηση μιας στοχαστικής διαδικασίας X_t η οποία ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

η οποία γράφεται εναλλακτικά σε διαφορική μορφή ως εξής:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,\ X_0 = x.$$

Οι b και σ είναι κατάλληλες συναρτήσεις και λέγονται τροπή (drift) και συντελεστής διάχυσης αντίστοιχα. Στην παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του στοχαστικού όρου σ εξαρτάται από τη ζητούμενη διαδικασία X_t, είναι δηλαδή εν γένει μη γραμμικός. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις στον $\mathbb{R}^n$ της μορφής:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = \xi, \quad t \in [0, T] \tag{1.4.1}$$

όπου:

(i) $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(ii) $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times k}$

(iii) W_t μια k-διάστατη διαδικασία Wiener ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση $\mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, η οποία είναι η φυσική διύλιση της διαδικασίας Wiener στην οποία έχουμε ενσωματώσει τα σύνολα $\mathcal{P}-$μέτρου μηδέν.

(iv) Η ξ είναι μια $n-$διάστατη και $\mathscr{F}_0-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

Για την ακρίβεια, η παραπάνω μορφή είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για τη ΣΔΕ.

<u>Ορισμος</u> **1.4.1. (Ισχυρή λύση)**
Μια στοχαστική διαδικασία $X_t, t \in [0, T]$ ονομάζεται ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (1.4.1) αν ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

(i) Η X_t είναι συνεχής και $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη

(ii) $X_0 = \xi$ $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως

(iii) $\int_0^t (|b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s))ds < \infty$ $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως για κάθε $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, k$

(iii) Ισχύει για κάθε $t \in [0, T]$ $\mathcal{P}$-σχεδόν βεβαίως ότι:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Στα παραπάνω αν $T = \infty$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $[0, T]$ με $t \in [0, \infty)$.

Ορισμος **1.4.2. (Ισχυρή μοναδικότητα της λύσης)**
Για τη ΣΔΕ (1.4.1) λέμε ότι έχουμε ισχυρή μοναδικότητα της λύσης αν δυο οποιεσδήποτε ισχυρές λύσεις της X_t, Y_t είναι μη διακρινόμενες, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη ξ $\mathscr{F}_0-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποια θεωρήματα για την ύπαρξη και μοναδικότητα ισχυρής λύσης για την (1.4.1).

Θεωρημα **1.4.3. (Itô)**
Έστω ότι για τη (1.4.1) ισχύουν οι παρακάτω απαιτήσεις:

(i) $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2)$, *για κάποιο* $C > 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|$, *για κάποιο* $D > 0,\ t \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) Η τ.μ. ξ *είναι* $\mathscr{F}_0-$*μετρήσιμη με* $E[|\xi|^2] < \infty$.

Τότε υπάρχει μοναδική ισχυρή λύση X_t *της* (1.4.1) *η οποία για τυχόν* $T > 0$ *ικανοποιεί ότι:*

$$E[|X_t|^2] \leq N(1 + E[|\xi|^2])e^{Nt},\ 0 \leq t \leq T$$

όπου $N > 0$ *εξαρτάται από τα* D, T*.[3](p.169)*

Η έννοια της ισχυρής λύσης ορίζεται αναφορικά με τους συντελεστές b, σ αλλά και με μια εκ των προτέρων δοσμένη διαδικασία Weiner W_t στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$. Η ισχυρή λύση είδαμε ότι είναι $\mathscr{F}_t^{\xi}-$προσαρμοσμένη. Στην περίπτωση όμως που μας δοθούν μόνο οι συντελεστές b, σ και εμείς αναζητούμε μια στοχαστική διαδικασία X_t και μια διαδικασία W_t (μέσω της οποίας κατασκευάζεται ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ και η διύλιση $\mathscr{F}_t$), ώστε η X_t να είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη και η W_t να είναι $\mathscr{F}_t-$διαδικασία Weiner, τότε το ζεύγος (X_t, W_t) ονομάζεται **ασθενής λύση** της (1.4.1).
Η επίλυση των ΣΔΕ στηρίζεται κυρίως στην εφαρμογή της φόρμουλας του Itô για κατάλληλες συναρτήσεις, ανάλογα με τη μορφή της ΣΔΕ.

1.5 Σημαντικοι συναρτησιακοι χωροι και ανισοτητες της Στοχαστικης Αναλυσης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποιους σημαντικούς συναρτησιακούς χώρους και μερικές βασικές ανισότητες που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη στοχαστική ανάλυση. Στο εξής θα συμβολίζουμε με $|\cdot|$ και με $< \cdot, \cdot >$ τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα και το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Τον ίδιο συμβολισμό θα χρησιμοποιήσουμε και για το χώρο πινάκων $\mathbb{R}^{m \times d}$ με το εσωτερικό γινόμενο:

$$< A, B >= tr(AB^T), \quad A, B \in \mathbb{R}^{m \times d}$$

και την αντίστοιχη νόρμα:

$$|A| = \sqrt{tr(AA^T)}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times d}$$

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω νόρμα είναι ισοδύναμη με τη φασματική νόρμα στον $\mathbb{R}^{m\times d}$, δηλαδή την

$$\|A\| = \sqrt{\max_{\lambda_i \in \ \sigma(AA^T)} |\lambda_i|}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times d}$$

όπου $\sigma(AA^T)$ είναι το φάσμα του $m \times m$ συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα AA^T.
Θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση $\mathscr{F}_t,\ t \geq 0$. Ορίζουμε και συμβολίζουμε με:

- $L^2_{\mathscr{G}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ το χώρο των $\mathscr{G}-$μετρήσιμων και τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στον $\mathbb{R}^m$, για κάθε σ-υποάλγεβρα $\mathscr{G}$ της $\mathscr{F}$.

- $L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; L^2([0,T]; \mathbb{R}^n))$ το χώρο των $\mathscr{F}_t-$προοδευτικά μετρήσιμων στοχαστικών διαδικασιών $X(t)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ για τις οποίες ισχύει

  $$\int_0^T E[|X(t)|^2]dt < \infty.$$

  Για ευκολία και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, θα συμβολίζουμε τον παραπάνω χώρο με $L^2_{\mathscr{F}}([0,T]; \mathbb{R}^n)$

- $L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^n))$ το χώρο των $\mathscr{F}_t-$προοδευτικά μετρήσιμων και συνεχών στοχαστικών διαδικασιών $X(t)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ για τις οποίες ισχύει

  $$E[(\sup_{t\in[0,T]} |X(t)|)^2] < \infty.$$

- $L^2_{\mathscr{F}_t}([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ το χώρο όλων των συναρτήσεων $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε σταθεροποιημένο $x \in \mathbb{R}^n$, η στοχαστική διαδικασία $(t,\omega) \to f(t,x,\omega)$ είναι $\mathscr{F}_t-$προοδευτικά μετρήσιμη με $f(t,0,\omega) \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T]; \mathbb{R}^m)$ και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς x δηλαδή ότι υπάρχει $L > 0$ έτσι ώστε

  $$|f(t,x_1,\omega) - f(t,x_2,\omega)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\ \sigma.\pi. \text{ στο } [0,T],\ \mathcal{P}-\sigma.\beta.$$

- $L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ το χώρο όλων των συναρτήσεων $g : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, για τις οποίες ισχύει ότι για κάθε σταθεροποιημένο $x \in \mathbb{R}^n$, η τυχαία μεταβλητή $\omega \to g(x,\omega)$ είναι $\mathscr{F}_T-$μετρήσιμη με $g(0,\omega) \in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ και ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz ως προς x δηλαδή ότι υπάρχει $L > 0$ έτσι ώστε

  $$|g(x_1,\omega) - g(x_2,\omega)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{P}-\sigma.\beta.$$

Ειδικότερα για το χώρο των λύσεων μιας ΕΟΣΔΕ ιδιαίτερα χρήσιμος είναι ο:

$$\mathcal{M}[0,T] = L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^n)) \times L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; \mathcal{C}([0,T]; \mathbb{R}^m)) \times L^2_{\mathscr{F}}([0,T]; \mathbb{R}^l),$$

ο οποίος εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$\|(X(\cdot),Y(\cdot),Z(\cdot))\|_{\mathcal{M}[0,T]} = \left\{ E[(\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|)^2] + E[(\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|)^2] + \int_0^T E[|Z(t)|^2]dt \right\}^{1/2},$$

για κάθε τριάδα $(X(\cdot),Y(\cdot),Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$, καθίσταται χώρος Banach.

Θα αναφέρουμε τώρα κάποιες σημαντικές ανισότητες που αφορούν τυχαίες μεταβλητές και στοχαστικές διαδικασίες και οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλές αποδείξεις θεωρημάτων.

Ανισοτητα 1.5.1. **(Cauchy-Schwarz)**
Έστω $X, Y \in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Τότε ισχύει:

$$E[| < X, Y > |] \leq \sqrt{E[|X|^2]E[|Y|^2]}$$

Ανισοτητα 1.5.2. **(Jensen)**
Έστω ξ ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $E[|\xi|] < \infty$, σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$ και έστω επίσης σ-άλγεβρα $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$. Τότε για κάθε κυρτή συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$f(E[\xi \mid \mathscr{A}]) \leq E[f(\xi) \mid \mathscr{A}],\ \mathcal{P} - \sigma.\beta.$$

Ειδικότερα ισχύει ότι:

$$f(E[\xi]) \leq E[f(\xi)].$$

Ανισοτητα 1.5.3. **(Gronwall)**
Έστω α, β και u μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}_+$. Αν η u ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική ανισότητα:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_c^t \beta(s)u(s)\,ds, \qquad c,t \in I,$$

τότε

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_c^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,dr\right)ds, \qquad c,t \in I.$$

Αν επιπλέον η α είναι μη φθίνουσα τότε ισχύει ότι:

$$u(t) \leq \alpha(t)\exp\left(\int_c^t \beta(s)\,ds\right), \qquad c,t \in I.$$

Ανισοτητα 1.5.4. **(Burkholder-Davis-Gundy)**
Έστω $f \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^n)$. Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχει $C_p < \infty$ το οποίο εξαρτάται μόνο από το p, έτσι ώστε για κάθε $T > 0$ να ισχύει ότι:

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t f(s)dW(s)\right|^p\right] \leq C_p\ E\left[\left(\int_0^T |f(s)|^2\right)^{p/2}\right].$$

Ανισοτητα 1.5.5. **(Doob)**
Έστω X_t στοχαστική διαδικασία η οποία είναι $\mathscr{F}_t -$ martingale με δεξιά συνεχείς τροχιές και $X_t \in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, για οποιοδήποτε $t > 0$.
Τότε για $K > 0, p \geq 1$, ισχύει ότι:

$$\mathcal{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \geq K\right) \leq \frac{1}{K^p}\ E[|X_t|^p]$$

Αν επιπλέον $p > 1$ τότε ισχύει ότι:

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p]$$

1.6 Εμπροσθοδρομικες-Οπισθοδρομικες Στοχαστικες Διαφορικες Εξισωσεις

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια εισαγωγή στις Εμπροσθοδρομικές - Οπισθοδρομικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (Forward-Backward Stochastic Differential Equations, εν συντομία FBSDEs). Οι παραπάνω εξισώσεις, όπως έχουμε ήδη αναφέρει έχουν εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά, στη θεωρία ελέγχου και βέλτιστου ελέγχου, στη Φυσική και αλλού. Καταρχήν θα αναφέρουμε κάποια βασικά παραδείγματα που αφορούν την οπισθοδρομική εξίσωση η οποία παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς παρουσιάζεται πρόβλημα μετρησιμότητας στη λύση της, σε αντίθεση με τις εμπροσθοδρομικές στις οποίες η λύση είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη. Από εδώ και στο εξής για τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις θα θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση $\mathscr{F}_t,\ t \geq 0$, η οποία, όπως έχουμε πει, είναι η φυσική διύλιση της διαδικασίας Wiener στην οποία έχουμε ενσωματώσει τα σύνολα $\mathcal{P}-$μέτρου μηδέν.

1.6.1 Οπισθοδρομικες Στοχαστικες Διαφορικες Εξισωσεις

Το παρακάτω παράδειγμα μας δίνει μια καλή ιδέα για το πρόβλημα μετρησιμότητας το οποίο εμφανίζεται στις οπισθοδρομικές ΣΔΕ. Ας θεωρήσουμε την ντετερμινιστική εξίσωση:

$$dY(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

η οποία, είτε μας δοθεί η αρχική τιμή $Y(0) = \xi$ είτε η τελική τιμή $Y(T) = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, έχει προφανή λύση την $Y(t) = \xi$ για κάθε $t \in [0, T]$. Αν όμως θεωρήσουμε το πρόβλημα τελικών τιμών:

$$\begin{cases} dY(t) = 0, & t \in [0, T] \\ Y(T) = \xi, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

όπου $\xi \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$, δηλαδή το σύνολο των $\mathscr{F}_T-$μετρήσιμων τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών, τότε ενώ η μοναδική λύση $Y(t) = \xi,\ t \in [0, T]$ της (1.6.1) είναι $\mathscr{F}_T-$μετρήσιμη, δεν είναι απαραίτητα και $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη (αφού $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_T$, για $t < T$), εκτός αν η τ.μ. ξ είναι $\mathscr{F}_0-$ μετρήσιμη.

Για να αντιμετωπιστεί το παραπάνω πρόβλημα μετρησιμότητας χρειάζεται μια επαναδιατύπωση του προβλήματος (1.6.1). Καταρχήν παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία:

$$Y(t) = E[\xi|\mathscr{F}_t], \quad t \in [0,T] \tag{1.6.2}$$

είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη και ικανοποιεί την $Y(T) = \xi$. Πράγματι, λόγω του ότι η ξ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz μπορούμε να δείξουμε ότι και $E[|\xi|] < \infty$, άρα η δεσμευμένη μέση τιμή $E[\xi|\mathscr{F}_t]$ είναι καλώς ορισμένη. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι $dY(t) = 0$, μάλιστα επειδή η $E[\xi|\mathscr{F}_t]$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale $dY(t) = Z(t)dW(t)$ και $Y(T) = E[\xi|\mathscr{F}_T] = \xi$. Από τον ορισμό και τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής, με χρήση της ανισότητας Jensen για την κυρτή συνάρτηση $f(x) = |x|^2$ προκύπτει ότι:

$$|E[\xi \mid \mathscr{F}_t]|^2 \leq E[|\xi|^2 \mid \mathscr{F}_t], \quad \mathcal{P} - \sigma.\beta.$$

άρα και

$$E[|Y(t)|^2] \leq E[E[|\xi|^2 \mid \mathscr{F}_t]] = E[|\xi|^2] < \infty.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$E[Y(t) \mid \mathscr{F}_s] = E[E[\xi|\mathscr{F}_t] \mid \mathscr{F}_s] = E[\xi \mid \mathscr{F}_s] = Y(s), \quad \text{αφού } \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $Y(t)$ είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη $\mathscr{F}_t-$martingale. Στόχος είναι να βρούμε μια ΣΔΕ της οποίας η (1.6.2) να είναι η $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη λύση της. Το θεώρημα αναπαράστασης Martingale μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης $\mathscr{F}_t-$προοδευτικά μετρήσιμης στοχαστικής διαδικασίας $Z(t)$, η οποία ικανοποιεί ότι:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t Z(s)dW(s), \quad t \in [0,T], \quad \text{σχεδόν βεβαίως.} \tag{1.6.3}$$

Γράφοντας την (1.6.3) σε διαφορική μορφή και συνδυάζοντάς την με την (1.6.2), λαμβάνουμε το παρακάτω πρόβλημα τελικών τιμών:

$$\begin{cases} dY(t) = Z(t)dW(t), & t \in [0,T] \\ Y(T) = \xi, \end{cases} \tag{1.6.4}$$

Επαναδιατυπώνοντας λοιπόν το πρόβλημα (1.6.1) στο (1.6.4), αναζητούμε πλέον ένα ζεύγος στοχαστικών διαδικασιών $(Y(t), Z(t))$ οι οποίες είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένες. Προφανώς η ζητούμενη στοχαστική διαδικασία είναι η $Y(t)$ η οποία, αν υπάρχει, θα δίνεται μέσω της βοηθητικής άγνωστης διαδικασίας $Z(t)$.
Από την (1.6.3) για $t = T$ έχουμε:

$$Y(0) = Y(T) - \int_0^T Z(s)dW(s) = \xi - \int_0^T Z(s)dW(s). \tag{1.6.5}$$

Λόγω της (1.6.5) η (1.6.3) γίνεται:

$$Y(t) = Y(T) - \int_t^T Z(s)dW(s) = \xi - \int_t^T Z(s)dW(s). \quad t \in [0,T], \tag{1.6.6}$$

η οποία είναι η ολοκληρωτική μορφή της (1.6.4) και ονομάζεται Οπισθοδρομική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (BSDE). Όσων αφορά τη μοναδικότητα της λύσης, έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:
Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Itô πάνω στην:

$$Y(t) = \xi + \int_T^t Z(s)dW(s)$$

για την $g(Y(t)) = |Y(t)|^2$ λαμβάνουμε:

$$g(Y(t)) = |Y(t)|^2 = g(Y(T)) + \int_T^t |Z(s)|^2 ds + \int_T^t 2Y(s)Z(s)dW(s).$$

Λαμβάνοντας μέσες τιμές και επειδή η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι 0, προκύπτει:

$$E[|Y(t)|^2] = E[|\xi|^2] + E\left[\int_T^t |Z(s)|^2 ds\right]$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, τελικά έχουμε:

$$E[|\xi|^2] = E[|Y(t)|^2] + \int_t^T E[|Z(s)|^2]ds, \quad t \in [0,T].$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι, αν $\xi = 0$ τότε $Y(t) = 0$ και $Z(t) = 0$, το οποίο σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα της (1.6.4) μας δίνει τη μοναδικότητα της $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένης λύσης $(Y(t), Z(t))$.

1.6.2 ΕΟΣΔΕ και Στοχαστικος Βελτιστος Ελεγχος

Ας δούμε τώρα την αντιμετώπιση ενός προβλήματος στοχαστικού βέλτιστου ελέγχου με τη χρήση εμπροσθοδρομικών-οπισθοδρομικών ΣΔΕ. Θεωρούμε το παρακάτω στοχαστικό πρόβλημα ελέγχου:

$$\begin{cases} dX(t) = [aX(t) + bu(t)]dt + dW(t), \quad t \in [0,T] \\ X(0) = x \end{cases} \tag{1.6.7}$$

όπου η $X(t)$ ονομάζεται διαδικασία κατάστασης και η $u(t)$ διαδικασία ελέγχου, από τις οποίες έχουμε την απαίτηση να είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένες και τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Επίσης υποθέτουμε ότι X, u και W είναι μονοδιάστατες και a, b σταθερές. Στη συνέχεια εισάγουμε το συναρτησιακό κόστους το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$J(u) = \frac{1}{2}E\left[\int_0^T [|X(t)|^2 + |u(t)|^2]dt + |X(T)|^2\right].$$

Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου έγκειται στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού κόστους, δηλαδή αναζητούμε μια διαδικασία $u^\star$ (βέλτιστος έλεγχος), η οποία ελαχιστοποιεί την $J(u)$.
Έστω $u^\star$ ο βέλτιστος έλεγχος και X η αντίστοιχη διαδικασία βέλτιστης κατάστασης. Τότε

για κάθε κατάλληλη συνάρτηση ελέγχου v (δηλαδή $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη) με αντίστοιχη διαδικασία κατάστασης X_v και για $\varepsilon > 0$, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$0 \leq \frac{J(u^\star + \varepsilon v) - J(u^\star)}{\varepsilon} \to E\left[\int_0^T [X(t)\xi(t) + u^\star(t)v(t)]dt + X(T)\xi(T)\right], \quad \varepsilon \to 0, \quad (1.6.8)$$

όπου η ξ ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} d\xi(t) = [a\xi(t) + bv(t)]dt, \quad t \in [0,T] \\ \xi(0) = 0. \end{cases} \quad (1.6.9)$$

Η εισαγωγή της ξ έγινε κατά την ανάπτυξη του λόγου μεταβολής του συναρτησιακού κόστους της (1.6.8) θέτοντας

$$\xi(t) = \frac{X_v(t) - X(t)}{\varepsilon}.$$

Προκειμένου να αντλήσουμε περισσότερες πληροφορίες για το βέλτιστο έλεγχο $u^\star$ από τις (1.6.8) και (1.6.9), θεωρούμε τη συζυγή εξίσωση, η οποία εισάγεται μέσω της Χαμιλτονιανής του στοχαστικού συστήματος (1.6.7) (βλ. [2]):

$$\begin{cases} dY(t) = -[aY(t) + X(t)]dt + Z(t)dW(t), \quad t \in [0,T] \\ Y(T) = X(T) \end{cases} \quad (1.6.10)$$

και έτσι καταλήγουμε σε μια πιο γενικής μορφής οπισθοδρομικής ΣΔΕ. Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Itô πάνω στην $Y(t)$, για τη συνάρτηση $g(t,y) = \xi(t)y$, έχουμε:

$$Y(T)\xi(T) = \int_0^T \left[Y(t)(a\xi(t) + bv(t)) + \xi(t)(-aY(t) - X(t))\right] dt + \int_0^T Z(t)\xi(t)dW(t).$$

Λαμβάνοντας μέσες τιμές στην παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} &E[X(T)\xi(T)] = \\ &E[Y(T)\xi(T)] = E\left[\int_0^T \left[Y(t)(a\xi(t) + bv(t)) + \xi(t)(-aY(t) - X(t))\right] dt\right] = \\ &E\left[\int_0^T \left[-X(t)\xi(t) + bY(t)v(t)\right] dt\right]. \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας την παραπάνω στην (1.6.8) και για να είναι $J(u^* + \varepsilon v) \geq J(u^*) \quad \forall v$, θα πρέπει η Gateaux παράγωγος στην κατεύθυνση θ : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{J(u^* + \varepsilon v) - J(u^*)}{\varepsilon} = 0$, άρα $E[\int\limits_0^T X_t\xi_t + u_t^* v_t dt + X_T\xi_T] = 0$, συνεπώς καταλήγουμε στην:

$$E\left[\int_0^T [bY(t) + u^\star(t)]v(t)dt\right] = 0$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε συνάρτηση ελέγχου v προκύπτει ότι:

$$bY(t) + u^\star(t) = 0 \Rightarrow u^\star(t) = -bY(t), \text{ σχεδόν παντού στο } [0,T], \ \mathcal{P} - \sigma.\beta. \quad (1.6.12)$$

Προφανώς, αφού η $Y(t)$ είναι $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη, η $u^\star$ είναι κατάλληλη διαδικασία ελέγχου η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό κόστους. Δηλαδή χρησιμοποιώντας την οπισθοδρομική ΣΔΕ προσδιορίσαμε το βέλτιστο έλεγχο για την (1.6.7). Αντικαθιστώντας την (1.6.12) στην (1.6.7), τελικά καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα, η λύση του οποίου μας δίνει την βέλτιστα ελεγχόμενη $X(t)$ καθώς και τον βέλτιστο έλεγχο $u^\star(t) = -bY(t)$:

$$\begin{cases} dX(t) = [aX(t) - b^2Y(t)]dt + dW(t) \\ dY(t) = -[aY(t) + X(t)]dt + Z(t)dW(t), \quad t \in [0,T] \\ X(0) = x, \quad Y(T) = X(T). \end{cases} \tag{1.6.13}$$

Όπως παρατηρούμε για την εξίσωση της $X(t)$, έχουμε πρόβλημα αρχικών τιμών, ενώ για την εξίσωση της $Y(t)$ έχουμε πρόβλημα τελικών τιμών. Το παραπάνω σύστημα ονομάζεται Εμπροσθοδρομική-Οπισθοδρομική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΕΟΣΔΕ). Είναι προφανές ότι αν υπάρχει λύση $(X(t), Y(t), Z(t))$ $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη, τότε η (1.6.12) μας δίνει το βέλτιστο έλεγχο. Αν η τριάδα λύσης είναι μοναδική, τότε και ο βέλτιστος έλεγχος είναι μοναδικός. Στο 3ο κεφάλαιο θα δούμε αναλυτικά τη σχέση των ΕΟΣΔΕ και τη στοχαστική θεωρία ελέγχου.

1.6.3 ΕΟΣΔΕ και Χρηματοοικονομικα

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα από τα χρηματοοικονομικά στο οποίο εμπλέκονται οι ΕΟΣΔΕ. Θεωρούμε ένα τίτλο αγοράς που περιέχει ένα ομόλογο και μια μετοχή, οι τιμές των οποίων, $P_0(t)$ και $P(t)$, αντίστοιχα δίνονται από το παρακάτω σύστημα ΣΔΕ:

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt \\ dP(t) = P(t)b(t)dt + P(t)\sigma(t)dW(t) \end{cases} \tag{1.6.14}$$

όπου $r(t)$ το επιτόκιο (*interest rate*) του ομολόγου και $b(t), \sigma(t)$ το ποσοστό ανατίμησης (*appreciation rate*) και η μεταβλητότητα (*volatility*) της μετοχής, αντίστοιχα.

Ένα δικαίωμα αγοράς/πώλησης επί της μετοχής είναι εξ΄ ορισμού ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αγοράς ή πώλησής της. Το συμβόλαιο πρέπει να περιέχει τα παρακάτω στοιχεία:

(i) Μια προκαθορισμένη τιμή άσκησης q (*strike price*)

(ii) Ένα τελικό χρόνο T, στον οποίο λήγει το συμβόλαιο

Όταν πρόκειται για οψιόν αγοράς (*call option*), ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να αγοράσει από τον πωλητή της οψιόν τη μετοχή στην προκαθορισμένη τιμή q (αν $q < P(T)$) ή να παραιτηθεί του δικαιώματος αγοράς της μετοχής στην προκαθορισμένη τιμή q (αν $q > P(T)$) και να αγοράσει τη μετοχή απευθείας απ΄ την αγορά. Αν ο κάτοχος αποφασίσει, στον τελικό χρόνο T, αγορά της μετοχής από τον πωλητή της οψιόν, τότε ο πωλητής θα υποστεί ζημία (*payoff*) $P(T)-q$, η οποία είναι μια τυχαία μεταβλητή $\mathscr{F}_T-$μετρήσιμη. Το πρόβλημα αποτίμησης της οψιόν (*option pricing problem*) είναι ο προκαθορισμός, μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή, της τιμής της οψιόν σε χρόνο $t = 0$. Γενικά, ένα συμβόλαιο με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, καλείται Ευρωπαϊκό

παράγωγο, όταν η εξόφληση εκ μέρους του πωλητή, από την εξάσκηση του συμβολαίου από τον κάτοχο, είναι συνάρτηση του $P(T)$ (π.χ. $(P(T) - q$».
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο πωλητής πουλάει την οψιόν σε y ποσό, το οποίο και επενδύει στην αγορά. Συμβολίζουμε με $Y(t)$ το συνολικό πλούτο του πωλητή τη χρονική στιγμή t. Προφανώς $Y(0) = y$. Έστω ότι ο πωλητής επενδύει ένα μέρος του πλούτου του $\pi(t)$ στην μετοχή (*portfolio*), και το υπόλοιπο του πλούτου του $Y(t) - \pi(t)$ στο ομόλογο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συνολικός πλούτος $Y(t)$ ακολουθεί την παρακάτω ΣΔΕ:

$$\begin{cases} dY(t) = [r(t)Y(t) + Z(t)\theta(t)]dt + Z(t)dW(t) \\ Y(0) = y \end{cases} \tag{1.6.15}$$

όπου $Z(t) = \pi(t)\sigma(t)$ και $\theta(t) = \sigma^{-1}(t)[b(t) - r(t)]$. Ο σκοπός του πωλητή είναι να επιλέξει μια στρατηγική π ώστε να υπερκαλύψει την εξόφληση $g(P(T))$. Τότε μπορεί να επιλέξει κατάλληλο $\pi(t)$ (μέσω της $Z(t)$) έτσι ώστε $Y(T) = g(P(T))$. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με την επίλυση του παρακάτω συστήματος ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dP(t) = P(t)b(t)dt + P(t)\sigma(t)dW(t) \\ dY(t) = [r(t)Y(t) + Z(t)\theta(t)]dt + Z(t)dW(t) \\ P(0) = p, \quad Y(T) = g(P(T)). \end{cases} \tag{1.6.16}$$

Από την $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη λύση $(Y(t), Z(t))$ προκύπτει, αφενός μεν η $\pi(t) = Z(t)\sigma^{-1}(t)$ η οποία είναι η βέλτιστη στρατηγική αντιστάθμισης της εξόφλησης (*optimal hedging strategy*), αφετέρου δε για $t = 0$ μια "δίκαιη" τιμή πώλησης της οψιόν $Y(0) = y$ η οποία πρέπει να συμφωνηθεί μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή.
Στο κεφάλαιο 4 θα μελετήσουμε την επίλυση ενός πιο πολύπλοκου προβλήματος αποτίμησης της οψιόν-βέλτιστης στρατηγικής αντιστάθμισης της εξόφλησης.

1.6.4 Γενικη μη Γραμμικη Μορφη των ΕΟΣΔΕ

Έχοντας πλέον ορίσει τους συναρτησιακούς χώρους που θα μας χρειαστούν στην επίλυση των ΕΟΣΔΕ, μπορούμε να δώσουμε την πιο γενική, μη γραμμική μορφή ενός προβλήματος ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = h(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \hat{\sigma}(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ X(0) = x, \quad Y(T) = g(X(T)). \end{cases} \tag{1.6.17}$$

όπου $(X(t), Y(t), Z(t)) \in M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$, ενώ για τους συντελεστές του προβλήματος $b, \sigma, h, \hat{\sigma}, x, g$, λαμβάνουμε τις παρακάτω γενικές υποθέσεις:

$$\begin{cases} b \in L^2_{\mathscr{F}_t}([0,T]; W^{1,\infty}(M; \mathbb{R}^n)), \quad \sigma \in L^2_{\mathscr{F}_t}([0,T]; W^{1,\infty}(M; \mathbb{R}^{n\times d})), \\ h \in L^2_{\mathscr{F}_t}([0,T]; W^{1,\infty}(M; \mathbb{R}^m)), \quad \hat{\sigma} \in L^2_{\mathscr{F}_t}([0,T]; W^{1,\infty}(M; \mathbb{R}^{m\times d})), \\ g \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)), \quad x \in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{1.6.18}$$

Ορισμος **1.6.1.** *Η τριάδα $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ λέγεται προσαρμοσμένη λύση του προβλήματος* (1.6.17)*, αν για κάθε $t \in [0,T]$ ισχύει P-σ.β. ότι:*

$$\begin{cases} X(t) = x + \displaystyle\int_0^t b(s, X(s), Y(s), Z(s))\ ds + \int_0^t \sigma(s, X(s), Y(s), Z(s))\ dW(s), \\ Y(t) = g(X(T)) - \displaystyle\int_t^T h(s, X(s), Y(s), Z(s))\ ds - \int_t^T \hat{\sigma}(s, X(s), Y(s), Z(s)) dW(s). \end{cases}$$

Το ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι το κατά πόσο οι γενικές, αλλά και ισχυρές από την άποψη των ΣΔΕ, συνθήκες (1.6.18) μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα προσαρμοσμένης λύσης του προβλήματος (1.6.17). Παρακάτω θα δούμε μια πρόταση, όπου οι υποθέσεις για τους συντελεστές του προβλήματος, ενώ μπορεί να είναι αρκετά ισχυρές για να εξασφαλίσουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα λύσης σε εμπροσθοδρομικά προβλήματα, εν τούτοις αποτυγχάνουν στην περίπτωση των ΕΟΣΔΕ. Αυτό συμβαίνει γιατί μια ΕΟΣΔΕ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δυο σημείων (two-point boundary value problem), το οποίο ακόμα και στην ντετερμινιστική περίπτωση δεν επιδέχεται πάντα λύση, πόσο μάλλον όταν στην στοχαστική περίπτωση επιζητούμε η λύση να είναι και $\mathscr{F}_t-$προσαρμοσμένη.

Πρόταση **1.6.2.** *Ας υποθέσουμε ότι το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών δυο σημείων για ένα ντετερμινιστικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b_1X(t) + b_2Y(t) \\ \dot{Y}(t) = h_1X(t) + h_2Y(t) \\ X(0) = x, \quad Y(T) = GX(T), \end{cases} \tag{1.6.19}$$

όπου $t \in [0,T]$, b_1, b_2, h_1, h_2 συνεχείς στο $[0,T]$ και $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, δεν έχει λύση. Τότε και η αντίστοιχη ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dX(t) = (b_1X(t) + b_2Y(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = (h_1X(t) + h_2Y(t))\ dt + \hat{\sigma}(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ X(0) = x, \quad Y(T) = GX(T), \end{cases} \tag{1.6.20}$$

με $\sigma, \hat{\sigma}$ κατάλληλες συναρτήσεις, δηλαδή για κάθε $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ να ισχύει $\sigma(t, X(t), Y(t), Z(t)) \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{n\times d})$ και $\hat{\sigma}(t, X(t), Y(t), Z(t)) \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{m\times d})$, δεν έχει επίσης προσαρμοσμένη λύση.

Απόδειξη.
Έστω ότι η (1.6.20) έχει προσαρμοσμένη λύση. Τότε αυτή θα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} X(t) = x + \displaystyle\int_0^t (b_1X(t) + b_2Y(t))\ ds + \int_0^t \sigma(s, X(s), Y(s), Z(s))\ dW(s), \\ Y(t) = GX(T) - \displaystyle\int_t^T (h_1X(t) + h_2Y(t))\ ds - \int_t^T \hat{\sigma}(s, X(s), Y(s), Z(s)) dW(s). \end{cases}$$

Λαμβάνοντας μέσες τιμές προκύπτει:

$$E[X(t)] = x + \int_0^t (b_1E[X(t)] + b_2E[Y(t)])\ ds + E\left[\int_0^t \sigma(s, X(s), Y(s), Z(s))\ dW(s)\right],$$

$$E[Y(t)] = GE[X(T)] - \int_t^T (h_1E[X(t)] + h_2E[Y(t)])\ ds - E\left[\int_t^T \hat{\sigma}(s, X(s), Y(s), Z(s)) dW(s)\right],$$

και επειδή η μέση τιμή ενός στοχαστικού ολοκληρώματος ισούται με μηδέν, έχουμε τελικά ότι:

$$E[X(t)] = x + \int_0^t (b_1E[X(t)] + b_2E[Y(t)])\ ds$$

$$E[Y(t)] = GE[X(T)] - \int_t^T (h_1E[X(t)] + h_2E[Y(t)])\ ds.$$

Δηλαδή το ζεύγος $(E[X(t)], E[Y(t)])$ είναι λύση του ντετερμινιστικού προβλήματος (1.6.19). Άτοπο, άρα η (1.6.20) δεν έχει προσαρμοσμένη λύση. $\square$

Θα αναφέρουμε τώρα χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα το οποίο στην περίπτωση που $\hat{\sigma}(t,x,y,z) = z$ μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικής προσαρμοσμένης λύσης για μικρούς χρόνους. Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος στηρίζεται στο θεώρημα συστολής του Banach στο χώρο $\mathcal{M}[0,T]$. Βλ.[1](p.20)

Θεωρημα **1.6.3.** *Ας θεωρήσουμε ότι για την ΕΟΣΔΕ:*

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = h(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + Z(t)\ dW(t) \\ X(0) = x, \quad\ Y(T) = g(X(T)). \end{cases} \tag{1.6.21}$$

ισχύουν οι υποθέσεις (1.6.18)*, καθώς επίσης και ότι:*

(i) $\|\sigma(t,x,y,z_1;\omega) - \sigma(t,x,y,z_2;\omega)\| \leq L_0\|z_1 - z_2\|$*, για κάθε* $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*,* $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{m\times d}$*, σ.π. για* $t \geq 0$*,* $\mathcal{P} - \sigma.\beta.$

(ii) $\|g(x_1,\omega) - g(x_2,\omega)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\|$*, για κάθε* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathcal{P} - \sigma.\beta.$

(iii) $L_0 L_1 < 1$.

Τότε υπάρχει $T_0 > 0$*, τέτοιο ώστε για κάθε* $T \in (0, T_0]$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$*, η* (1.6.21) *έχει μοναδική προσαρμοσμένη λύση* $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικες ΕΟΣΔΕ

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την επιλυσιμότητα των γραμμικών ΕΟΣΔΕ. Ως συνήθως, θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathcal{P})$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη διύλιση $\{\mathscr{F}_t,\ t \geq 0\}$, η οποία είναι η φυσική διύλιση της διαδικασίας Wiener στην οποία έχουμε ενσωματώσει τα σύνολα $\mathcal{P}-$μέτρου μηδέν. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση της μονοδιάστατης διαδικασίας Wiener.

2.1 Συνθηκες Συμβατοτητας του Γενικου Γραμμικου Προβληματος

Στην ενότητα αυτή, θα δούμε κάποιες συνθήκες συμβατότητας για τους συντελεστές του γενικού προβλήματος, οι οποίες προκύπτουν από τη μορφή του, και οι οποίες προφανώς θα πρέπει να ισχύουν εκ των προτέρων, ώστε να μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη της επιλυσιμότητας. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα ΕΟΣΔΕ:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX(t) = [AX(t) + BY(t) + CZ(t) + Db(t)]\, dt + [A_1X(t) + B_1Y(t) + C_1Z(t) + D_1\sigma(t)]\, dW(t), \\ dY(t) = [\widehat{A}X(t) + \widehat{B}Y(t) + \widehat{C}Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t)]\, dt + [\widehat{A}_1X(t) + \widehat{B}_1Y(t) + \widehat{C}_1Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t)]\, dW(t), \\ X(0) = x, \quad Y(T) = GX(T) + Fg. \end{array} \right. \tag{2.1.1}$$

όπου $t \in [0, T]$, ενώ $X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)$ είναι οι ζητούμενες στοχαστικές διαδικασίες με τιμές στον $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ αντίστοιχα. Επίσης υποθέτουμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες $b, \sigma, \widehat{b}, \widehat{\sigma}$ λαμβάνουν τιμές στον $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$, αντίστοιχα. Για την τυχαία μεταβλητή g υποθέτουμε ότι λαμβάνει τιμές στον $\mathbb{R}^k$, ενώ προφανώς η τυχαία μεταβλητή x λαμβάνει τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Για τους ντετερμινιστικούς πίνακες $A, B, C, \ldots, G, F$, για τις στοχαστικές διαδικασίες $b, \sigma, \widehat{b}, \widehat{\sigma}$ καθώς και για τις τυχαίες μεταβλητές g, x, λαμβάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

$$\begin{cases} A, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}^{n\times l}, \\ \widehat{A}, \widehat{A_1}, G \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \widehat{B}, \widehat{B_1} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \widehat{C}, \widehat{C_1} \in \mathbb{R}^{m\times l}, \\ D \in \mathbb{R}^{n\times n_1}, \quad D_1 \in \mathbb{R}^{n\times n_2}, \quad \widehat{D} \in \mathbb{R}^{m\times m_1}, \\ \widehat{D_1} \in \mathbb{R}^{m\times m_2}, \quad F \in \mathbb{R}^{m\times k}, \\ b \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{n_1}), \quad \sigma \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{n_2}), \\ \widehat{b} \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{m_1}), \quad \widehat{\sigma} \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{m_2}), \\ g \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^k), \quad x \in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega;\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.1.2}$$

<u>Ορισμος</u> **2.1.1.** *Μια τριάδα $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ λέγεται προσαρμοσμένη λύση του προβλήματος* (2.1.1)*, αν για κάθε $t \in [0,T]$ ισχύει $\mathcal{P}-\sigma.\beta.$ ότι:*

$$\begin{cases} X(t) = x + \int_0^t [AX(s) + BY(s) + CZ(s) + Db(s)]\, ds \\ \qquad\qquad + \int_0^t [A_1X(s) + B_1Y(s) + C_1Z(s) + D_1\sigma(s)]\, dW(s), \\ Y(t) = GX(T) + Fg - \int_t^T [\widehat{A}X(s) + \widehat{B}Y(s) + \widehat{C}Z(s) + \widehat{D}\widehat{b}(s)]\, ds \\ \qquad\qquad - \int_t^T [\widehat{A_1}X(s) + \widehat{B_1}Y(s) + \widehat{C_1}Z(s) + \widehat{D_1}\widehat{\sigma(s)}]\, dW(s). \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Θα αναφέρουμε τώρα ένα θεώρημα συμβατότητας των συντελεστών του προβλήματος (2.1.1) οι οποίες προφανώς θα πρέπει να ισχύουν εκ των προτέρων, ώστε να μπορούμε να προχωρήσουμε στην επιλυσιμότητά του.

<u>Θεωρημα</u> **2.1.2.** *Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $T > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $b, \sigma, \widehat{b}, \widehat{\sigma}, g, x$ που ικανοποιούν τις συνθήκες* (2.1.2)*, η* (2.1.1) *επιδέχεται μια προσαρμοσμένη λύση $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0,T]$.*
Τότε

$$\mathcal{R}(\widehat{C_1} - GC_1) \supseteq \mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\widehat{D_1}) + \mathcal{R}(GD_1), \tag{2.1.4}$$

όπου $\mathcal{R}(S)$ είναι το πεδίο τιμών ή ο χώρος στηλών (range) του πίνακα S. Συγκεκριμένα, αν

$$\mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\widehat{D_1}) + \mathcal{R}(GD_1) = \mathbb{R}^m, \tag{2.1.5}$$

τότε $\widehat{C_1} - GC_1 \in \mathbb{R}^{m\times l}$ είναι επί του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή $\mathcal{R}(\widehat{C_1} - GC_1) = \mathbb{R}^m$ άρα και $l \geq m$.

<u>*Απόδειξη.*</u>
Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τη βοήθεια του παρακάτω λήμματος:

<u>Λημμα</u> **2.1.3.** *Υποθέτουμε ότι για κάθε $\overline{\sigma} \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^{\overline{k}})$ και για κάθε $g \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^k)$, υπάρχουν $h \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^m)$ και $f \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m))$, τέτοια ώστε η ακόλουθη ΟΣΔΕ να έχει προσαρμοσμένη λύση $(\overline{Y}, Z) \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega;\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^m)) \times L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^l)$:*

$$\begin{cases} d\overline{Y}(t) = h(t)\, dt + [f(t) + \overline{C}_1Z(t) + \overline{D}\overline{\sigma}(t)]\, dW(t), \quad t \in [0,T], \\ \overline{Y}(T) = Fg. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

όπου $\overline{C}_1 \in \mathbb{R}^{m\times l}$ *και* $\overline{D} \in \mathbb{R}^{m\times \bar{k}}$. *Τότε,*

$$\mathcal{R}(\overline{C}_1) \supseteq \mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\overline{D}). \tag{2.1.7}$$

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε το λήμμα με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι η (2.1.7) δεν ισχύει. Τότε μπορούμε να βρούμε $\eta \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε:

$$\eta^T\overline{C}_1 = 0, \quad \text{αλλά} \;\; \eta^T F \neq 0 \;\; \text{ή} \;\; \eta^T\overline{D} \neq 0.$$

Πράγματι, αν η (2.1.7) δεν ισχύει, τότε

$$\mathcal{R}(\overline{C}_1) \subset \mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\overline{D}) \Leftrightarrow coker(\overline{C}_1) \supset (\mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\overline{D}))^{\perp}, \tag{2.1.8}$$

όπου $coker(\overline{C}_1)$ ο αριστερός πυρήνας του $\overline{C}_1$ και $(\mathcal{R}(F)+\mathcal{R}(\overline{D}))^{\perp}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\overline{D})$. Από την (2.1.8), υπάρχει $\eta \neq 0$ τέτοιο ώστε $\eta \in coker(\overline{C}_1)$ και $\eta \notin (\mathcal{R}(F) + \mathcal{R}(\overline{D}))^{\perp}$.

Έστω $\zeta(t) = \eta^T\overline{Y}(t)$. Τότε η $\zeta(\cdot)$ ικανοποιεί την:

$$\begin{cases} d\zeta(t) = \overline{h}(t)\; dt + [\overline{f}(t) + \eta^T\overline{D}\overline{\sigma}(t)]\; dW(t), \\ \zeta(T) = \eta^T F g, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

όπου $\overline{h}(t) = \eta^T h(t), \overline{f}(t) = \eta^T f(t)$. Παρακάτω θα δείξουμε ότι υπάρχουν $g, \overline{\sigma}(\cdot)$, ώστε η (2.1.9) να μην έχει προσαρμοσμένη λύση $\zeta(\cdot)$ για οποιαδήποτε επιλογή των $\overline{h} \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R})$ και $\overline{f} \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}))$. Έτσι κατασκευάζουμε μια ντετερμινιστική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση β η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$\begin{cases} \beta(s) = \pm 1, \quad \text{για κάθε } s \in [0,T], \\ |\{s \in [T_i, T] \mid \beta(s) = 1\}| = \dfrac{T - T_i}{2}, \\ |\{s \in [T_i, T] \mid \beta(s) = -1\}| = \dfrac{T - T_i}{2}, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

με $i \geq 1$ για μια ακολουθία $T_i \uparrow T$, όπου με $|\{\ldots\}|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue του $\{\ldots\}$. Η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue. Στη συνέχεια διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

1η Περίπτωση: $\eta^T F \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|F^T\eta| = 1$. Έστω τώρα ότι

$$g = \left(\int_0^T \beta(s) dW(s) \right) F^T\eta, \quad \overline{\sigma}(t) = 0.$$

Στη συνέχεια, ορίζοντας

$$\widehat{\zeta}(t) = \left(\int_0^t \beta(s) dW(s) \right), \quad t \in [0,T]$$

έχουμε

$$\begin{cases} d[\zeta(t) - \widehat{\zeta}(t)] = \overline{h}(t)\ dt + [\overline{f}(t) - \beta(t)]\ dW(t), \quad t \in [0, T], \\ \zeta(T) - \widehat{\zeta}(T) = 0. \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Itô στην $|\zeta(t) - \widehat{\zeta}(t)|^2$, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} &E[|\zeta(t) - \widehat{\zeta}(t)|^2] + E\left[\int_t^T |\overline{f}(s) - \beta(s)|^2 ds\right] \\ &\quad = -2E\left[\int_t^T \langle \zeta(s) - \widehat{\zeta}(s), \overline{h}(s)\rangle ds\right] \\ &\quad = 2E\left[\int_t^T \langle \int_s^T \overline{h}(r)dr + \int_s^T [\overline{f}(r) - \beta(r)]dW(r), \overline{h}(s)\rangle ds\right] \\ &\quad = 2E\left[\int_t^T \langle \int_s^T \overline{h}(r)dr, \overline{h}(s)\rangle ds\right] \\ &\quad = E\left[\left|\int_t^T \overline{h}(s)ds\right|^2\right] \leq (T-t)\int_t^T E[|\overline{h}(s)|^2]ds. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} &E\left[\int_t^T |\overline{f}(T) - \beta(s)|^2 ds\right] \\ &\leq 2E\left[\int_t^T |\overline{f}(s) - \beta(s)|^2 ds\right] + 2E\left[\int_t^T |\overline{f}(T) - \overline{f}(s)|^2 ds\right] \\ &\leq 2(T-t)\int_t^T E[|\overline{h}(s)|^2]ds + 2E\left[\int_t^T |\overline{f}(T) - \overline{f}(s)|^2 ds\right] \\ &= o(T-t). \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Όμως από τον ορισμό της $\beta(\cdot)$, έχουμε

$$\begin{aligned} &E\left[\int_{T_i}^T |\overline{f}(T) - \beta(s)|^2 ds\right] \\ &= \frac{T - T_i}{2}\left(E[|\overline{f}(T) - 1|^2] + E[|\overline{f}(T) + 1|^2]\right), \quad \text{για κάθε } i \geq 1. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Όπως είναι ξεκάθαρο, η (2.1.14) έρχεται σε αντίθεση με την (2.1.13), άρα είναι αδύνατον να ισχύει $\eta^T F \neq 0$.

2η Περίπτωση: $\eta^T F = 0$ και $\eta^T \overline{D} \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\overline{D}^T \eta| = 1$. Στην περίπτωση αυτή, επιλέγουμε $\overline{\sigma}(t) = \beta(t)\overline{D}^T \eta$ με τη $\beta(\ldots)$ να ικανοποιεί την (2.1.10). Έτσι, η (2.1.9) γίνεται:

$$\begin{cases} d\zeta(t) = \overline{h}(t)\ dt + [\overline{f}(t) + \beta(t)]\ dW(t), \quad t \in [0, T], \\ \zeta(T) = 0. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Με παρόμοιο συλλογισμό όπως στην *1η περίπτωση* καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως είναι επίσης αδύνατον $\eta^T\overline{D} \neq 0$, γεγονός που αποδεικνύει τη σχέση (2.1.7). Αποδείξαμε λοιπόν το λήμμα 2.1.2. Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.1.1.
Έστω $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0, T]$ μια προσαρμοσμένη λύση της (2.1.1). Θεωρούμε την $\overline{Y}(t) = Y(t) - GX(t)$ η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη ΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} d\overline{Y}(t) = [(\widehat{A} - GA)X(t) + (\widehat{B} - GB)Y(t) + (\widehat{C} - GC)Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t) - GDb(t)]\, dt \\ \qquad +[(\widehat{A}_1 - GA_1)X(t) + (\widehat{B}_1 - GB_1)Y(t) + (\widehat{C}_1 - GC_1)Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)]\, dW(t) \\ \overline{Y}(T) = Fg. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Αν συμβολίσουμε με

$$\begin{cases} h(t) = (\widehat{A} - GA)X(t) + (\widehat{B} - GB)Y(t) + (\widehat{C} - GC)Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t) - GDb(t), \\ f(t) = (\widehat{A}_1 - GA_1)X(t) + (\widehat{B}_1 - GB_1)Y(t), \end{cases} \tag{2.1.17}$$

παρατηρούμε ότι $h \in L^2_{\mathscr{F}}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ και $f \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega; \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^m))$. Συνεπώς η (2.1.16) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{cases} d\overline{Y}(t) = h(t)\, dt + [f(t) + (\widehat{C}_1 - GC_1)Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)]\, dW(t), \\ \overline{Y}(T) = Fg. \end{cases} \tag{2.1.18}$$

Τότε, από το λήμμα 2.1.2, καταλήγουμε στην (2.1.4) και το τελικό συμπέρασμα είναι προφανές. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος 2.1.1. □

Στη συνέχεια παραθέτουμε χωρίς απόδειξη, άλλη μια πρόταση για τη συμβατότητα που πρέπει να έχουν οι συντελεστές του προβλήματος.

Προταση **2.1.8.** *Έστω ότι για το πρόβλημα* (2.1.1) *ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.1.1. Για όλα τα* $b, \sigma, \widehat{b}, \widehat{\sigma}, g, x$ *που ικανοποιούν τις συνθήκες* (2.1.2), *έστω* $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0, T]$ *μια προσαρμοσμένη λύση του* (2.1.1). *Τότε ισχύει:*

$$[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G]X(T) + (\widehat{B}_1 - GB_1)Fg \in \mathcal{R}(\widehat{C}_1 - GC_1), \quad P - \sigma.\beta.$$

Αν επιπλέον ισχύουν και τα ακόλουθα:

$$\begin{cases} \mathcal{R}(A + BG) + \mathcal{R}(BF) \subseteq \mathcal{R}(D), \\ \mathcal{R}(A_1 + B_1G) + \mathcal{R}(B_1F) \subseteq \mathcal{R}(D_1), \\ \mathcal{R}(\widehat{A} + \widehat{B}G) + \mathcal{R}(\widehat{B}F) \subseteq \mathcal{R}(\widehat{D}), \\ \mathcal{R}(\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1G) + \mathcal{R}(\widehat{B}_1F) \subseteq \mathcal{R}(\widehat{D}_1), \end{cases} \tag{2.1.19}$$

τότε:

$$\mathcal{R}\left(\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G\right) + \mathcal{R}\left((\widehat{B}_1 - GB_1)F\right) \subseteq \mathcal{R}(\widehat{C}_1 - GC_1).$$

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης, στην οποία χρησιμοποιούνται παρόμοιες τεχνικές με την απόδειξη του θεωρήματος 2.1.1, παραπέμπουμε στο [1](p.29).

2.2 Αναγωγη του Γενικου Γραμμικου Προβληματος σε Απλουστερη Μορφη

Στην προηγούμενη ενότητα, παρουσιάσαμε το γενικό πρόβλημα (2.1.1) και αναφέραμε κάποιες γενικές συνθήκες συμβατότητας του προβλήματος. Στην πράξη, σε πολλές εφαρμογές η γραμμική ΕΟΣΔΕ που καλούμαστε να επιλύσουμε έχει αρκετά απλούστερη μορφή. Π.χ. σε αρκετά προβλήματα ισχύει ότι, $F = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$, δηλαδή η υπόθεση (2.1.8) του θεωρήματος 2.1.1 εξασφαλίζεται μόνο από τη μορφή του πίνακα F. Ας υποθέσουμε τώρα, ότι ισχύουν η συνθήκη (2.1.8). Είδαμε ότι για να είναι συμβατό το πρόβλημα (2.1.1), θα πρέπει ο πίνακας $\widehat{C}_1 - GC_1$ να είναι επί και συνεπώς ότι $l \geq m$. Είναι λογικό λοιπόν να λάβουμε την παρακάτω υπόθεση:

Υπόθεση 1. Έστω ότι $l = m$ και $\widehat{C}_1 - GC_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ αντιστρέψιμος πίνακας.

Αν θέσουμε $\overline{Y}(t) = Y(t) - GX(t)$ τότε $\overline{Y}(T) = Fg$ και η $\overline{Y}(t)$ ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
&d\overline{Y}(t) = [\widehat{A}X(t) + \widehat{B}Y(t) + \widehat{C}Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t)]\,dt + [\widehat{A}_1X(t) + \widehat{B}_1Y(t) + \widehat{C}_1Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t)]\,dW(t)\\
&-G[AX(t) + BY(t) + CZ(t) + Db(t)]\,dt - G[A_1X(t) + B_1Y(t) + C_1Z(t) + D_1\sigma(t)]\,dW(t)\\
&\qquad = \Big\{[\widehat{A} - GA + (\widehat{B} - GB)G]X(t) + (\widehat{B} - GB)\overline{Y} + (\widehat{C} - GC)Z(t) + \widehat{D}\widehat{b}(t) - GDb(t)\Big\}\,dt\\
&+\Big\{[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G]X(t) + (\widehat{B}_1 - GB_1)\overline{Y} + (\widehat{C}_1 - GC_1)Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)\Big\}\,dW(t).
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Ας συμβολίσουμε με

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}(t) = {}&[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G]X(t) + (\widehat{B}_1 - GB_1)\overline{Y}(t)\\
&+(\widehat{C}_1 - GC_1)Z(t) + \widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t).
\end{aligned}
\tag{2.2.2}
$$

Επειδή $(\widehat{C}_1 - GC_1)$ είναι αντιστρέψιμος, επιλύοντας την παραπάνω ως προς Z λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
Z(t) = {}&(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}\{\overline{Z}(t) - [\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G]X(t)\\
&-(\widehat{B}_1 - GB_1)\overline{Y}(t) - (\widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t))\}.
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις και υπό την Υπόθεση 1. το πρόβλημα (2.1.1) παίρνει την παρακάτω μορφή

$$
\left\{
\begin{aligned}
&dX(t) = [\overline{A}X(t) + \overline{BY}(t) + \overline{CZ}(t) + \overline{b}(t)]dt + [\overline{A}_1X(t) + \overline{B}_1\overline{Y}(t) + \overline{C}_1\overline{Z}(t) + \overline{\sigma}(t)]dW(t),\\
&d\overline{Y}(t) = [\overline{A}_0X(t) + \overline{B}_0\overline{Y}(t) + \overline{C}_0\overline{Z}(t) + \overline{h}(t)]dt + \overline{Z}(t)dW(t),\\
&X(0) = x, \qquad \overline{Y}(t) = Fg,
\end{aligned}
\right.
\tag{2.2.4}
$$

όπου

$$\begin{cases} \overline{A} = A + BG - C(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G], \\ \overline{B} = B - C(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}(\widehat{B}_1 - GB_1), \\ \overline{C} = C(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}, \\ \overline{b}(t) = Db(t) - C(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)], \\ \overline{A}_1 = A_1 + B_1G - C_1(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G], \\ \overline{B}_1 = B_1 - C_1(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}(\widehat{B}_1 - GB_1), \\ \overline{C}_1 = C_1(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}, \\ \overline{\sigma}(t) = D_1\sigma(t) - C_1(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)], \\ \overline{A}_0 = \widehat{A} - GA + (\widehat{B} - GB)G - (\widehat{C} - GC)(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{A}_1 - GA_1 + (\widehat{B}_1 - GB_1)G], \\ \overline{B}_0 = \widehat{B} - GB - (\widehat{C} - GC)(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}(\widehat{B}_1 - GB_1), \\ \overline{C}_0 = (\widehat{C} - GC)(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}, \\ \overline{h}(t) = \widehat{D}\widehat{b}(t) - GDb(t) - (\widehat{C} - GC)(\widehat{C}_1 - GC_1)^{-1}[\widehat{D}_1\widehat{\sigma}(t) - GD_1\sigma(t)]. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να φέρουμε το πρόβλημα (2.2.4) σε ακόμα πιο απλή μορφή ορίζοντας

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{A}_0 & \overline{B}_0 \end{pmatrix}, \overline{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \overline{C} \\ \overline{C}_0 \end{pmatrix} \\ \overline{\mathcal{A}}_1 = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \overline{B}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{\mathcal{C}}_1 = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 \\ I \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Έστω τώρα ότι $\Psi(\cdot)$ είναι η λύση του ακόλουθου:

$$\begin{cases} d\Psi(t) = \overline{\mathcal{A}}\Psi(t)dt + \overline{\mathcal{A}}_1\Psi(t)dW(t), \qquad t \geq 0, \\ \Psi(0) = I. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Τότε το (2.2.4) είναι ισοδύναμο με το παρακάτω, για κάποιο $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(t) \\ \overline{Y}(t) \end{pmatrix} &= \Psi(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \Psi(t)\int_0^t \Psi(s)^{-1} \left[(\overline{\mathcal{C}} - \overline{\mathcal{A}}_1\overline{\mathcal{C}}_1)\overline{Z}(s) + \begin{pmatrix} \overline{b}(s) \\ \overline{h}(s) \end{pmatrix} - \overline{\mathcal{A}}_1 \begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \right] ds \\ &+ \Psi(t)\int_0^t \Psi(s)^{-1} \left[\overline{\mathcal{C}}_1\overline{Z}(s) + \begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \right] dW(s), \qquad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

με την ιδιότητα ότι:

$$\begin{aligned} Fg &= (0,I)\Psi(T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1} \left[(\overline{\mathcal{C}} - \overline{\mathcal{A}}_1\overline{\mathcal{C}}_1)\overline{Z}(s) + \begin{pmatrix} \overline{b}(s) \\ \overline{h}(s) \end{pmatrix} - \overline{\mathcal{A}}_1 \begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \right] ds \\ &+ (0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1} \left[\overline{\mathcal{C}}_1\overline{Z}(s) + \begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \right] dW(s). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Όπως είναι φανερό η (2.2.9) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω, για κάποια $y \in \mathbb{R}^m$ και $\overline{Z}(\cdot) \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T];\mathbb{R}^m)$, ισχύει:

$$\begin{aligned}\eta &= Fg - (0,I)\Psi(T)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - (0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1}\left[\begin{pmatrix} \overline{b}(s) \\ \overline{h}(s) \end{pmatrix} - \overline{\mathcal{A}}_1 \begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix}\right] ds \\ &\quad -(0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1}\begin{pmatrix} \overline{\sigma}(s) \\ 0 \end{pmatrix} dW(s) \\ &= (0,I)\Psi(T)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + (0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1}(\overline{\mathcal{C}} - \overline{\mathcal{A}}_1\overline{\mathcal{C}}_1)\overline{Z}(s)ds \\ &\quad +(0,I)\Psi(T)\int_0^T \Psi(s)^{-1}\overline{\mathcal{C}}_1\overline{Z}(s)dW(s).\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Συνεπώς, αν μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} d\begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{pmatrix} = \left[\overline{\mathcal{A}}\begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{pmatrix} + \mathcal{C}\widetilde{Z}(t)\right]dt + \left[\overline{\mathcal{A}}_1\begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_1\widetilde{Z}(t)\right]dW(t), \\ \widetilde{X}(0) = 0, \qquad \widetilde{Y}(T) = \eta, \end{cases} \tag{2.2.11}$$

με το η όπως το ορίσαμε παραπάνω, δεδομένου του ζεύγους $y = \widetilde{Y}(0)$ και $\overline{Z}(\cdot) = \widetilde{Z}(\cdot)$, θέτοντας τα $(X, \overline{Y})$ όπως στην (2.2.8), λαμβάνουμε μια προσαρμοσμένη λύση $(X, \overline{Y}, \overline{Z}) \in \mathcal{M}[0,T]$ του προβλήματος (2.2.4). Η παραπάνω διαδικασία είναι αντιστρέψιμη. Συνεπώς από την ισοδυναμία μεταξύ των (2.2.4) και (2.1.1), έχουμε και ισοδυναμία μεταξύ της επιλυσιμότητας των (2.1.1) και (2.2.11).
Η παραπάνω διαδικασία απλοποίησης του προβλήματος (2.1.1) στο ισοδύναμο (υπό την Υπόθεση 1.) πρόβλημα (2.2.11), συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεωρημα **2.2.2.** *Έστω $F = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και $l = m$. Τότε το πρόβλημα (2.1.1) είναι επιλύσιμο για όλα τα $b, \sigma, \widehat{b}, \widehat{\sigma}, x, g$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις (2.1.2) αν και μόνο αν το πρόβλημα (2.2.11) είναι επιλύσιμο για κάθε $\eta \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Λόγω της μετατροπής του προβλήματος (2.1.1) σε απλούστερη μορφή, από εδώ και στο εξής θα επικεντρωθούμε στην επίλυση της παρακάτω ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dX(t) = [AX(t) + BY(t) + CZ(t)]dt + [A_1X(t) + B_1Y(t) + C_1Z(t)]dW(t), \\ dY(t) = [\widehat{A}X(t) + \widehat{B}Y(t) + \widehat{C}Z(t)]dt + Z(t)dW(t), \\ X(0) = x, \qquad Y(T) = g \qquad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Αν ορίσουμε

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ \widehat{A} & \widehat{B} \end{pmatrix}, \overline{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} C \\ \widehat{C} \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ I \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

μπορούμε να γράψουμε την (2.2.12) ως εξής:

$$\begin{cases} d\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \left[\mathcal{A}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \mathcal{C}Z(t)\right]dt + \left[\mathcal{A}_1\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_1 Z(t)\right]dW(t), \\ X(0) = 0, \qquad Y(T) = g. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Προφανώς, τα προβλήματα (2.2.12) και (2.2.14) είναι ισοδύναμα.

Παρατηρούμε ότι αν ονομάσουμε το ζεύγος (X, Y) κατάσταση και το Z συνάρτηση ελέγχου, το (2.2.12) αποτελεί ένα γραμμικό στοχαστικό σύστημα ελέγχου. Τότε, η επιλυσιμότητα του (2.2.12) ουσιαστικά ανάγεται στο ακόλουθο πρόβλημα ελέγχου: Για δεδομένο $g \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, αναζητείται διαδικασία ελέγχου $Z \in L^2_{\mathscr{F}}([0,T]; \mathbb{R}^m)$, τέτοια ώστε κάποια αρχική κατάσταση $(X(0), Y(0)) \in \{0\} \times \mathbb{R}^m$ να μπορεί να οδηγηθεί στην τελική κατάσταση $(X(T), Y(T)) \in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \{g\}$ τη χρονική στιγμή $t = T$, $\mathcal{P} - \sigma.\beta$, όπου επισημαίνουμε ότι g είναι μια $\mathscr{F}_T-$μετρήσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή.

2.3 Επιλυσιμοτητα Γραμμικων ΕΟΣΔΕ

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν στην επιλυσιμότητα της γραμμικής ΕΟΣΔΕ (2.2.12). Η βασική ιδέα προέρχεται από τη θεωρία ελέγχου, αφού όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, η επιλυσιμότητα του (2.2.12) ανάγεται σε ένα πρόβλημα ελεγξιμότητας. Χάριν συντομίας, θα συμβολίζουμε με $H = L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ και $\mathcal{H} = L^2_{\mathscr{F}}([0,T]; \mathbb{R}^m)$ τους χώρους Hilbert στους οποίους ανήκουν η τελική τιμή g και η στοχαστική διαδικασία $Z(\cdot)$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα δούμε κάποιες αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος.
Έστω Φ η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} d\Phi(t) = \mathcal{A}\Phi(t)dt + \mathcal{A}_1\Phi(t)dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ \Phi(0) = I. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Τότε ορίζεται η Φ^{-1}, και ικανοποιεί την ακόλουθη γραμμική ΣΔΕ:

$$\begin{cases} d\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}[\mathcal{A} - \mathcal{A}_1^2]dt - \Phi^{-1}\mathcal{A}_1 dW(t), \qquad t \geq 0, \\ \Phi^{-1}(0) = I. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Επιπλέον, $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0,T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση του (2.2.12), αν και μόνον αν ισχύει η ακόλουθη παραλλαγή:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}(\mathcal{C} - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1)Z(s)ds \\ +\Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathcal{C}_1 Z(s)dW(s), \qquad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

για κάποιο $y \in \mathbb{R}^m$ με την ιδιότητα:

$$\begin{aligned} g = (0, I)\{\Phi(T) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \Phi(T) \int_0^t \Phi(s)^{-1}(\mathcal{C} - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1)Z(s)ds \\ + \Phi(T) \int_0^t \Phi(s)^{-1}\mathcal{C}_1 Z(s)dW(s)\}. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ας εισάγουμε έναν τελεστή $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to H$ ως εξής:

$$\mathcal{K}Z = (0, I)\left\{\Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1}(\mathcal{C} - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1)Z(s)ds + \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1}\mathcal{C}_1 Z(s)dW(s)\right\}. \tag{2.3.5}$$

Τότε για δοθέν $g \in H$, η εύρεση μιας προσαρμοσμένης λύσης για την ΕΟΣΔΕ (2.2.12) είναι ισοδύναμη με την εύρεση ενός $y \in \mathbb{R}^m$ και ενός $Z \in \mathcal{H}$, τέτοια ώστε:

$$g = (0, I)\Phi(T) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} y + \mathcal{K}Z \tag{2.3.6}$$

και ορίζοντας ένα ζεύγος (X,Υ) από την (2.3.3). Τότε $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0, T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση της ΕΟΣΔΕ (2.2.12). Συνεπώς η μελέτη των τελεστών Φ(T) και $\mathcal{K}$ είναι κάτι παραπάνω από απαραίτητη για την επιλυσιμότητα της ΕΟΣΔΕ (2.2.12).

Αν η (2.2.12) έχει προσαρμοσμένη λύση, λαμβάνοντας μέσες τιμές στην (2.3.4) έχουμε:

$$E[g] = E[(0, I)\{\Phi(T) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} + \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1}(\mathcal{C} - \mathcal{A}_1)Z(s)ds + \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1}\mathcal{C}_1 Z(s)dW(s)\}]$$

Θα παραθέσουμε τώρα το παρακάτω λήμμα (για την απόδειξη βλ. [1](p.35) :

Λημμα 2.3.1. *Για κάθε $f \in L^1_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{n+m})$ και $h \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^{n+m})$ ισχύουν τα παρακάτω:*

$$E[\Phi(T)] = e^{\mathcal{A}t}$$

$$E[\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)ds] = \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} E[f(s)]ds$$

$$E[\Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} h(s)dW(s)] = \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \mathcal{A}_1 E[h(s)]ds$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$E[\sup_{0 \le t \le T} |\Phi(t)|^{2k}] + E[\sup_{0 \le t \le T} |\Phi(t)^{-1}|^{2k}] < \infty, \quad \text{για κάθε } k \ge 0 \tag{2.3.7}$$

Από την (2.4.1) και τον ορισμό του παρατηρούμε ότι ο τελεστής $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to H$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Έτσι αν (2.2.12) επιδέχεται προσαρμοσμένη λύση, λαμβάνοντας μέσες τιμές βάση του παραπάνω λήμματος προκύπτει ότι:

$$E[g] = (0, I)\left\{e^{\mathcal{A}T}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} y + \int_0^T e^{\mathcal{A}(T-s)}\mathcal{C}E[Z(s)]ds\right\} \tag{2.3.8}$$

για τυχόν $y \in \mathbb{R}^m$ και $E[Z(\cdot)] \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ Έτσι έχουμε την παρακάτω αναγκαία συνθήκη για την επιλυσιμότητα της (2.2.12).

Θεωρημα **2.3.3.** *Ας υποθέσουμε ότι (2.2.12)είναι επιλύσιμη για κάθε $g \in H$.Τότε*

$$rank\left\{(0, I)\left(e^{\mathcal{A}T}\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \mathcal{C}, \mathcal{A}\mathcal{C}, ..., \mathcal{A}^{n+m-1}\mathcal{C}\right)\right\} = m \tag{2.3.9}$$

Για την απόδειξη βλ. [1](p.36)
Επισημαίνουμε ότι σε περίπτωση που $\mathcal{C} = 0$, η (2.3.9) γίνεται:

$$det\left\{(0, I)e^{\mathcal{A}T}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\right\} \neq 0 \tag{2.3.10}$$

και η ΕΟΣΔΕ (2.2.12) είναι επιλύσιμη για κάθε $g \in H$ πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών δυο σημείων για την Συνήθη Διαφορική Εξίσωση:

$$\left\{\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, T] \qquad X(0) = 0, \qquad Y(T) = \bar{g}\right. \tag{2.3.11}$$

επιδέχεται λύση για κάθε $\bar{g} \in \mathbb{R}^m$.

Μια άλλη αναγκαία συνθήκη για την επιλυσιμότητα την ΕΟΣΔΕ (2.2.12) είναι το παρακάτω θεώρημα (για την απόδειξη βλ.[1](p.37)):

Θεωρημα **2.3.4.** *Έστω ότι $\mathcal{C} = 0$ και υποθέτουμε ότι η (2.2.12) είναι επιλύσιμη για κάθε $g \in H$ τότε:*

$$det\{(0, I)e^{\mathcal{A}t}\mathcal{C}_1\} > 0 \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T] \tag{2.3.12}$$

Συμπερασματικά αν $T = inf\{T > 0 \mid det[(0, I)e^{\mathcal{A}T}\mathcal{C}_1] = 0\} < \infty$ τότε, για οποιοδήποτε $T \geq \widehat{T}$, υπάρχει ένα $g \in H$, τέτοιο ώστε η (2.2.12) να μην είναι επιλύσιμη.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα αποκαλύπτει μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ μεταξύ της επιλυσιμότητας των ΕΟΣΔΕ και αυτής των προβλημάτων συνοριακών τιμών των ΣΔΕ από τη στιγμή που η συνάρτηση $t \mapsto det\{(0, I)e^{\mathcal{A}t}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\}$ είναι αναλυτική και ίση με τη μονάδα για $t = 0$.
Το παραπάνω υπονοεί ότι για κάθε $T_0 \in (0, \infty)$,αν συμβαίνει η (2.3.11) να μην είναι επιλύσιμη για $T = 0$ και για κάποιο $g \in \mathbb{R}^m$, τότε σε μεγαλύτερο χρόνο $T > T_0$ η (2.3.11) θα είναι επιλύσιμη πάλι για κάθε $\bar{g} \in \mathbb{R}^m$.

Όμως στην περίπτωση της παραπάνω ΕΟΣΔΕ αν $\hat{T} < \infty$,, τότε για κάθε $T \geq \hat{T}$, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα $g \in H$ τέτοιο ώστε η (2.2.12) με $\mathcal{C} = 0$ να μην είναι επιλύσιμη. Παρόλα αυτά, δεν είναι ξεκάθαρο αν το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει στην περίπτωση που $C \neq 0$ αφού η υπόθεση $\mathcal{C} = 0$ είναι απαραίτητη στην απόδειξη.

2.4 Κριτηρια Επιλυσιμοτητας

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα πάνω στον τελεστή $\mathcal{K}$ τα οποία ελπίζουμε ότι θα οδηγήσουν σε συγκεκριμένες συνθήκες για την επιλυσιμότητα των γραμμικών ΕΟΣΔΕ.

Λημμα **2.4.1.** *Έστω ότι $\mathcal{C} = 0$ και ότι ισχύει η* (2.3.12). *Τότε:*

$$\mathcal{R}(\mathcal{K}) = \{\eta \in \mathcal{H} \mid E[\eta] = 0\} \triangleq \mathcal{N}(E) \tag{2.4.1}$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{K}) \triangleq \{Z \in \mathcal{H} \mid \mathcal{K}Z = 0\} = 0. \tag{2.4.2}$$

Για απόδειξη βλ.[1](p.41)

Απόρροια του παραπάνω λήμματος είναι το ακόλουθο θεώρημα

Θεωρημα **2.4.2.** *Έστω $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 = 0$.Τότε η γραμμική ΕΟΣΔΕ* (2.2.12) *είναι επιλύσιμη για κάθε $g \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν* (2.3.10) *και* (2.3.12) *ισχύουν. Σε αυτή την περίπτωση, η προσαρμοσμένη λύση της* (2.2.12) *είναι μοναδική (για κάθε δοθέν $g \in H$).*

Απόδειξη
Πρώτα από όλα, για κάθε $g \in H$, από την (2.3.10) μπορούμε να βρούμε $y \in \mathbb{R}^m$, τέτοιο ώστε η (2.3.8) να ισχύει. Επισημαίνουμε ότι $\mathcal{C} = 0$.
Στη συνέχεια έχουμε:

$$g - (0, I)\Phi(T)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} y \in \mathcal{N}(E). \tag{2.4.3}$$

Στη συνέχεια, από την (2.4.1), υπάρχει ένα $Z \in \mathcal{H}$, τέτοιο ώστε:

$$g - (0, I)\Phi(T)\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} y = \mathcal{K}Z. \tag{2.4.4}$$

Για το ζεύγος $(y, Z) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{H}$, ορίζουμε ζεύγος (X, Y) από την (2.3.3). Τότε μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι $(X, Y, Z) \in M[0, T]$ είναι προσαρμοσμένη λύση της (2.2.12). Η μοναδικότητα της λύσης προκύπτει εύκολα από τις (2.4.2) και (2.3.10) □
Το παραπάνω αποτέλεσμα δίνει μια ολοκληρωμένη εικόνα όσων αφορά την επιλυσιμότητα της γραμμικής ΕΟΣΔΕ (2.2.12) όμως με τη συνθήκη $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 = 0$. Παρ' όλα αυτά με τα θεωρήματα (2.1.1), (2.2.1) και (2.4.1), μπορούμε να εξασφαλίσουμε αποτελεσματικά και την επιλυσιμότητα της αρχικής ΕΟΣΔΕ (2.2.1).

2.5 Εξισωση τυπου Riccati

Τώρα θα παρουσιάσουμε μια άλλη μέθοδο, η οποία θα μας δώσει με μεγαλύτερη σαφήνεια μια συνθήκη για εύρεση μοναδικής λύσης της (2.2.12). Θα χρειαστούμε μια εξίσωση τύπου Riccati και μια ΟΣΔΕ που σχετίζεται όμως με τη (2.2.12).
Αρχικά υποθέτουμε ότι $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0, T]$ είναι προσαρμοσμένη λύση της (2.2.12). Επιπλέον θεωρούμε ότι οι X, Y σχετίζονται ως εξής:

$$Y(t) = P(t)X(t) + p(t), \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T], \mathcal{P} - \sigma.\beta \tag{2.5.1}$$

όπου $P : [0, T] \to \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι ντετερμινιστική πινακοσυνάρτηση και $p : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ είναι μια $\{F_t\}_{t \geq 0}$-προσαρμοσμένη διαδικασία.
Πρώτα απ΄ όλα, από την (2.5.1) και την τελική συνθήκη της (2.2.12) $Y(T) = g$ έχουμε:

$$Y(T) = P(T)X(T) + p(T) \tag{2.5.2}$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(T) = 0$ και $p(t) = g$, από τη στιγμή που $g \in L^2_{F_T}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ και $p(\cdot)$ απαιτείται να είναι $\{F_t\}_{t \geq 0}$-προσαρμοσμένη, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η $p(\cdot)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dp(t) = a(t)dt + q(t)dW(t), & t \in [0, T], \\ p(T) = g \end{cases} \tag{2.5.3}$$

με $a(\cdot), q(\cdot) \in L^2_F(0, T; \mathbb{R}^m)$. Στη συνέχεια από τη φόρμουλα του Itô έχουμε:

$$dY = \{\dot{P}X + P(AX + BY + CZ) + a\}dt + \{PA_1X + PB_1Y + PC_1Z + q\}dW(t) \Leftrightarrow \tag{2.5.4}$$

$$dY = \{[(\dot{P} + PA)X + PBY + PCZ + a]\}dt + \{[PA_1 + PB_1P]X + PC_1Z + PB_1p + q\}dW \Leftrightarrow \tag{2.5.5}$$

με $Y = PX + p$. Συνεπώς:

$$dY = \{[\dot{P} + PA + PBP]X + PCZ + PBp + a\}dt + \{[PA_1 + PB_1P]X + q\}dW. \tag{2.5.6}$$

Τώρα αν συγκρίνουμε την (2.5.6) με την δεύτερη εξίσωση της (2.2.12) καταλήγουμε στην:

$$(\dot{P} + PA + PBP)X + PCZ + PBp + a = [\hat{A} + \hat{B}P]X + \hat{C}Z + \hat{B}p \tag{2.5.7}$$

και στην:

$$(PA_1 + PB_1P)X + PC_1Z + PB_1p + q = Z. \tag{2.5.8}$$

Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι $I - PC_1$ είναι πίνακας αναστρέψιμος, από την (2.5.8) έχουμε:

$$Z = (I - PC_1)^{-1}\{PA_1 + PB_1P)X + PB_1p + q\}. \tag{2.5.9}$$

Συνεπώς η (2.5.7) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(\dot{P} + PA + PBP)X + PCZ + PBp + a - [\hat{A} + \hat{B}P]X + \hat{C}Z + \hat{B}p = 0. \tag{2.5.10}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την (2.5.9) παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$0 = [\dot{P} + PA + PBP - \hat{A} - \hat{B}P + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}(PA_1 + PB_1P)]x + [PB - \hat{B} + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}PB_1]p + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}q + a \tag{2.5.11}$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την ακόλουθη ΣΔΕ για την $P(\cdot)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^{m\times n}$

$$\begin{aligned} &\dot{P} + PA + PBP - \hat{A} - \hat{B}P + (PC - \hat{C}(I - PC_1)^{-1}(PA_1 + PB_1P) = 0 \quad t \in [0,T] \\ &P(T) = 0 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στην (2.5.12) ως μια εξίσωση τύπου Riccati. Συνεπώς αν θεωρήσουμε ότι η (2.5.12) έχει λύση $P(\cdot)$ στο διάστημα [0,T] τέτοια ώστε $[I - P(t)C_1]^-1$ είναι φραγμένο για $t \in [0,T]$ τότε η (2.5.11) δίνει:

$$a = -[PB - \hat{B} + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}PB_1]p - (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}q. \tag{2.5.13}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω με την (2.5.3), παρατηρούμε ότι μπορούμε να εισάγουμε την ακόλουθη ΟΣΔΕ:

$$\begin{aligned} &dp = -\{[PB - \hat{B} + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}PB_1]p + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}q\}dt + qdW(t) \\ &p(T) = g \qquad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Όταν η (2.5.12) έχει λύση $P(\cdot)$ τέτοια ώστε $[I - P(t)C_1]^-1$ είναι φραγμένο για $t \in [0,T]$, τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η ΟΣΔΕ (2.5.14) έχει και αυτή με τη σειρά της μοναδική λύση την $(p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{N}[0,T]$ Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} &\tilde{A} = A + BP + C(I - PC_1)^{-1}(PA_1 + PB_1P) \\ &\tilde{A}_1 = A_1 + B_1P + C_1(I - PC_1)^{-1}(PA_1 + PB_1P) \\ &\tilde{b} = Bp + C(I - PC_1)^{-1}(PB_1p + q) \\ &\tilde{\sigma} = B_1p + C_1(I - PC_1)^{-1}(PB_1p + q) \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Όπως είναι ξεκάθαρο $\tilde{A}$ και $\tilde{A}_1$ είναι χρονοεξαρτώμενες πινακοσυναρτήσεις, ενώ $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$ είναι $\{F_t\}_{t>0}$ προσαρμοσμένες διαδικασίες.
Συνεπώς η ακόλουθη ΣΔΕ επιδέχεται μοναδική ισχυρή λύση:

$$\begin{aligned} &dX = (\tilde{A}X + \tilde{b})dt + (\tilde{A}_1X + \tilde{\sigma})dW, \qquad t \in [0,T] \\ &X(0) = x \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Θεωρημα **2.5.1.** *Έστω ότι (2.5.12) έχει λύση $P(\cdot)$ τέτοια ώστε $[I - P(t)C_1]^-1$ είναι φραγμένο για $t \in [0,T]$. Τότε η ΕΟΣΔΕ (2.2.12) επιδέχεται μοναδική προσαρμοσμένη λύση $(X, Y, Z) \in \mathcal{M}[0,T]$ πράγμα το οποίο καθορίζεται από τις (2.5.16), (2.5.1) και (2.5.9).*

Απόδειξη
Καταρχήν ένας ευθύς υπολογισμός μας δείχνει ότι η διαδικασία (X, Y, Z) καθορισμένη από τις (2.5.16), (2.5.1) και (2.5.9) είναι προσαρμοσμένη λύση της (2.2.12). Θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα.

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= PX + p \\ \bar{Z} &= (I - PC_1)^{-1}[(PA_1 + PB_1P)X + PB_1p + q]. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Όπου P και (p, q) είναι προσαρμοσμένες των (2.5.12) και (2.5.14) αντίστοιχα. Επίσης $\hat{Y} = Y - \bar{Y}$ και $\hat{Z} = Z - \bar{Z}$. Στη συνέχεια ένας ευθύς υπολογισμός δείχνει ότι:

$$\begin{aligned} &d\hat{Y} = [(PB - \hat{B})\hat{Y} + (PC - \hat{C})\hat{Z}]dt + [PB_1\hat{Y} - (I - PC_1)\hat{Z}dW(t) \\ &\hat{Y}(T) = 0. \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Τώρα από το γεγονός ότι η (2.5.12) έχει λύση $P(\cdot)$ τέτοια ώστε $[I - P(t)C_1]^-1$ είναι φραγμένο για $t \in [0, T]$ μπορούμε να θέσουμε:

$$\tilde{Z} = PB_1\hat{Y} - (I - PC_1)\hat{Z}, \tag{2.5.19}$$

έτσι ώστε να πάρουμε την παρακάτω ισοδύναμη με την (2.5.18) ΟΣΔΕ:

$$\begin{aligned} d\hat{Y} = \{&[PB - \hat{B} + (PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}PB_1]\hat{Y} \\ &-(PC - \hat{C})(I - PC_1)^{-1}\hat{Z}\} + \tilde{Z}dW(t) \\ \hat{Y}(T) = 0&. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Μια τέτοια ΟΣΔΕ επιδέχεται μοναδική προσαρμοσμένη λύση $(\hat{Y}, \tilde{Z}) = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και $\hat{Z} = 0$. Συνεπώς από την (2.5.17) έχουμε:

$$\begin{aligned} Y &= PX + p \\ Z &= (I - PC_1)^{-1}[(PA_1 + PB_1P)X + PB_1p + q]. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε προσαρμοσμένη λύση (X, Y, Z) της (2.2.12) θα πρέπει να ικανοποιεί την (2.5.21).
Συνεπώς αποδεικνύεται και η μοναδικότητα της λύσης.□

Προταση **2.5.2.** *Έστω ότι* (2.5.12) *έχει λύση* $P(\cdot)$ *τέτοια ώστε* $[I - P(t)C_1]^-1$ *είναι φραγμένο για* $t \in [T_0, T]$ *με* $T_0 \geq 0$. *Τότε για κάθε* $\tilde{T} \in [0, T - T_0]$, *η γραμμική ΕΟΣΔΕ* (2.2.12) *έχει μοναδική λύση στο διάστημα* $[0, \tilde{T}]$.

(Απόδειξη βλ.[1](p.48))
Στην περίπτωση που $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1$, από το θεώρημα (2.3.2) το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.3.10) της ΣΔΕ, στο διάστημα $[0, \tilde{T}]$ έχει λύση για όλα τα $g \in \mathbb{R}^m$, από τα οποία αναγκαία και ικανή είναι:

$$det\{(0, I)e^{\mathcal{A}t}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\} > 0, \qquad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T]. \tag{2.5.22}$$

Έτσι, η επιλυσιμότητα της (2.5.12), εξίσωση τύπου Riccati, είναι μόνο ικανή συνθήκη για την επιλυσιμότητα της (2.2.12) Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, θα συγκεντρωθούμε στην περίπτωση που $\mathcal{C} = 0$ και χωρίς να θεωρούμε ότι $\mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 = 0$ Σε αυτή την περίπτωση (2.5.12) γίνεται:

$$\begin{aligned} &\dot{P} + PA + PBP - \hat{A} - \hat{B}P = 0 \\ &P(T) = 0, \qquad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

Και έτσι η ΟΣΔΕ (2.5.14) υποβιβάζεται στην:

$$\begin{aligned} &dp = [\hat{B} - PB]pdt + qdW(t) \\ &p(T) = g \qquad t \in [0, T] \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Κεφάλαιο 3

Μεθοδος του Βελτιστου Ελεγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την επιλυσιμότητα της ακόλουθης μη γραμμικής ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = h(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + Z(t)dW(t) \\ X(0) = x, \quad Y(T) = g(X(T)). \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις b, σ, h και g είναι όλες ντετερμινιστικές, π.χ. δεν εξαρτώνται εκπεφρασμένα από ένα $\omega \in \Omega$, και $T > 0$ είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Συνεπώς έχουμε μια ΕΟΣΔΕ με πιθανώς μεγάλη μεν πεπερασμένη δε χρονική διάρκεια. Όπως είδαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες Lipschitz η (3.0.1) επιδέχεται μια μοναδική λύση $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0, T]$, υπό την προϋπόθεση ότι $T > 0$ είναι σχετικά μικρό. Αλλά, γενικά για $T > 0$, έχουμε δει ότι ακόμα και αν b, σ, h και g είναι όλες αφινικές ως προς τις μεταβλητές Χ,Υ και Ζ, δηλαδή της μορφής $c1X + c2Y + c3Z + c4$, με $c1 + c2 + c3 + c4 = 1$ το σύστημα (3.0.1) δεν είναι απαραίτητα επιλύσιμο. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με μια μέθοδο χρησιμοποιώντας τη θεωρία του βέλτιστου ελέγχου για να μελετήσουμε την επιλυσιμότητα της (3.0.1) σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Αναφερόμαστε σε αυτή την προσέγγιση ως τη *μέθοδος του βέλτιστου ελέγχου.*

3.1 Επιλυσιμοτητα και το Σχετικο Προβλημα Βελτιστου Ελεγχου

3.1.1 Ενα Προβλημα Βελτιστου Ελεγχου

Αρχικά θα κάνουμε μια εισαγωγή στην επιλυσιμότητα της (3.0.1). Υποθέτουμε ότι $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0, T]$ είναι προσαρμοσμένη λύση της (3.0.1). Θέτοντας $y = Y(0) \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $(X(\cdot), Y(\cdot))$ ικανοποιεί την παρακάτω ΕΣΔΕ:

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + \sigma(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dW(t) \\ dY(t) = h(t, X(t), Y(t), Z(t))\ dt + Z(t)dW(t) \\ X(0) = x, \quad Y(0) = y, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

με $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T] \triangleq L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ να είναι κατάλληλη διαδικασία. Σημειώνουμε περαιτέρω ότι y και $Z(\cdot)$ πρέπει να είναι διαλεγμένες προσεκτικά ώστε η λύση $(X(\cdot), Y(\cdot))$ της (3.1.1) να ικανοποιεί την παρακάτω τελική συνθήκη:

$$Y(T) = g(X(T)). \tag{3.1.2}$$

Παρ΄ όλα αυτά, αν μπορούμε να βρούμε ένα $Y \in \mathbb{R}$ και ένα $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T]$, τέτοιο ώστε η (3.1.1) να επιδέχεται μια ισχυρή λύση $(X(\cdot), Y(\cdot))$ και να ικανοποιείται η τελική συνθήκη (3.1.2), τότε η $(X(\cdot), Y(\cdot), Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση της (3.0.1). Έτσι, η (3.0.1) είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν κάποιος μπορεί να βρει ένα $y \in \mathbb{R}$ και ένα $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T]$, τέτοιο ώστε η (3.1.1) να επιδέχεται μια ισχυρή λύση $(X(\cdot), Y(\cdot))$ η οποία όμως να ικανοποιεί και την (3.1.2). Την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να τη δούμε και από μια άλλη οπτική, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Στοχαστικού Ελέγχου. Ας ονομάσουμε την (3.1.1) ένα *σύστημα στοχαστικού ελέγχου* με $(X(\cdot), Y(\cdot))$ να είναι η *διαδικασία κατάστασης*, $Z(\cdot)$ να είναι η *διαδικασία ελέγχου*, και $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ να είναι η *αρχική κατάσταση*. Τότε η επιλυσιμότητα του (3.0.1) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο πρόβλημα *ελεγξιμότητας* για την (3.1.1) με *στόχο*:

$$\mathcal{T} = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{3.1.3}$$

Πρόβλημα (Ε). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί $y \in \mathbb{R}$ και ένας έλεγχος $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T]$, τέτοιος ώστε

$$(X(T), Y(T)) \in \mathcal{T}, \qquad \sigma.\beta. \tag{3.1.4}$$

Το να έχει λύση το Πρόβλημα (Ε) σημαίνει ότι η κατάσταση $(X(t), Y(t))$ του συστήματος (3.1.1) μπορεί να μετατραπεί από $x \times \mathbb{R}$ (σε χρόνο $t = 0$) στο στόχο $\mathcal{T}$, ο οποίος δίνεται από την (3.1.3), σε χρόνο $t = T$, σχεδόν βεβαίως, διαλέγοντας κατάλληλο έλεγχο $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T]$.
Αν και στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με τα παραπάνω αλλά για γραμμικές ΕΟΣΔΕ, επισημαίνουμε ότι στη μη γραμμική περίπτωση το πρόβλημα γίνεται εξαιρετικά δύσκολο. Παρ΄ όλα αυτά η παραπάνω τυποποίηση οδηγεί στο να θεωρήσουμε ένα σχετικό πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου το οποίο υποβιβάζει το πρόβλημα επιλυσιμότητας της αρχικής ΕΟΣΔΕ σε άλλα σχετικά με αυτήν και συνάμα πιο εύκολα, τα οποία μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε και ξεχωριστά. Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε το σχετικό με την (3.0.1) πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου.
Θεωρούμε το σύστημα στοχαστικού ελέγχου (3.1.1) και κάνουμε την παρακάτω υπόθεση:
(Υ1) Έστω ότι $b(t,x,y,z), \sigma(t,x,y,z), h(t,x,y,z)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς και υπάρχει σταθερά $L > 0$, τέτοια ώστε για $\phi = b, \sigma, h, g$, ισχύει ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\phi(t,x,y,z) - \phi(t,\bar{x},\bar{y},\bar{z}| \le L(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|) \\ |\phi(t,0,0,0)|, |\sigma(t,x,y,0| \le L, \\ \qquad \text{για κάθε} \qquad t \in [0,T],\ x,\bar{x} \in \mathbb{R},\ y,\bar{y} \in \mathbb{R},\ z,\bar{z} \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{3.1.5}$$

Υπό την παραπάνω (Υ1), βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, και $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[0,T]$, η (3.1.1) επιδέχεται μια μοναδική ισχυρή λύση, την οποία συμβολίζουμε ως

$$(X(\cdot), Y(\cdot)) \equiv (X(\cdot; x, y, Z(\cdot)), Y(\cdot; x, y, Z(\cdot))),$$

η οποία υποδεικνύει την εξάρτηση από τα $(x, y, Z(\cdot))$. Στη συνέχεια, θα εισαγάγουμε ένα συναρτησιακό, το λεγόμενο συναρτησιακό κόστους. Ο σκοπός αυτής της εισαγωγής, είναι για να επιβάλουμε ένα είδος ποινής όταν η διαφορά $Y(T) - g(X(T))$ γίνεται μεγάλη. Σε αυτό το σημείο, ορίζουμε:

$$f(x,y) = \sqrt{1 + |y - g(x)|^2} - 1, \qquad \text{για κάθε} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{3.1.6}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι η f είναι τόσο ομαλή όσο και η g, και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} f(x,y) \geq 0, & \text{για κάθε} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ f(x,y) = 0, & \text{αν και μόνο αν} \quad y = g(x). \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Στην περίπτωση που η (Υ1) ισχύει, έχουμε

$$\begin{gathered} |f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})| \leq L(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \\ \text{για κάθε} \quad (x,y), (\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε το συναρτησιακό κόστους ως εξής:

$$J(x, y, Z(\cdot)) \triangleq E[f(X(T; x, y, Z(\cdot)), Y(T; x, y, Z(\cdot)))]. \tag{3.1.9}$$

Στη συνέχεια ακολουθεί το πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου που σχετίζεται με την (3.0.1). //
Πρόβλημα (ΒΕ). Για κάθε δοθέν $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ να βρεθεί ένα $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[0, T]$ τέτοιο ώστε:

$$\bar{V}(x,y) \triangleq \inf_{Z \in \mathfrak{Z}[0,T]} J(x, y; Z(\cdot)) = J(x, y; \bar{Z}(\cdot)). \tag{3.1.10}$$

Οποιοδήποτε $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[0, T]$ που ικανοποιεί την (3.1.10) αποκαλείται *βέλτιστος έλεγχος* και η αντίστοιχη διαδικασία κατάστασης

$$(\bar{X}(\cdot), \bar{Y}(\cdot)) \triangleq (X(\cdot; x, y, \bar{Z}(\cdot)), Y(\cdot; x, y, \bar{Z}(\cdot)))$$

αποκαλείται *βέλτιστη διαδικασία κατάστασης*. Κάποιες φορές, η $(\bar{X}(\cdot), \bar{Y}(\cdot), \bar{Z}(\cdot))$ αναφέρεται και σαν βέλτιστη τριπλέτα του Προβλήματος (ΒΕ).

Έχουμε δει ότι η βελτιστοποίηση στο Πρόβλημα (ΒΕ) εξαρτάται από την αρχική κατάσταση (x, y). Συνάμα ο αριθμός $\bar{V}(x, y)$ ονομάζεται βέλτιστη συνάρτηση κόστους του Προβλήματος (ΒΕ). Από τον ορισμό, έχουμε ότι:

$$\bar{V}(x,y) \geq 0, \qquad \text{για κάθε} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{3.1.11}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο παραπάνω πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, μπορούμε να διαλέξουμε κάποια άλλη συνάρτηση f που να έχει παρόμοιες ιδιότητες με την (3.1.7). Παρ΄ όλα αυτά για ακρίβεια και ευκολία, διαλέγουμε την f να είναι στη μορφή (3.1.6).

Στη συνέχεια, εισάγουμε το παρακάτω:

$$\mathcal{N}(\bar{V}) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \bar{V}(x,y) = 0\}. \tag{3.1.12}$$

Ίο παραπάνω σύνολο καλείται κομβικό σύνολο της συνάρτησης $\bar{V}$. Έχουμε τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Προταση **3.1.1.** *Για $x \in \mathbb{R}$,η ΕΟΣΔΕ* (3.0.1) *επιδέχεται μια προσαρμοσμένη λύση αν και μόνο αν*

$$\mathcal{N}(\bar{V})\bigcap[\{x\} \times \mathbb{R}] \neq \emptyset \tag{3.1.13}$$

και για κάποιο $(x,y) \in \mathcal{N}(\bar{V})$, να υπάρχει ένας βέλτιστος έλεγχος $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[0,T]$ τέτοιος ώστε:

$$\bar{V}(x,y) = J(x,y;\bar{Z}(\cdot)) = 0. \tag{3.1.14}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $(X(\cdot),Y(\cdot),Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση του συστήματος (3.0.1). Έστω επίσης $y = Y(0) \in \mathbb{R}$. Τότε (3.1.14) ισχύει, το οποίο μας δίνει ένα ζεύγος $(x,y) \in \mathcal{N}(\bar{V})$ και συνεπώς ικανοποιείται και η συνθήκη (3.1.13).

Αντιστρόφως, αν (3.1.14) ισχύει για κάποιο ζεύγος $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[0,T]$, τότε $(X(\cdot),Y(\cdot),\bar{Z}(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση του (3.0.1). □

Υπό το φως της Πρότασης 1.1, προτείνουμε την παρακάτω διαδικασία για την επίλυση της ΕΟΣΔΕ (3.0.1):

(i) Προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $\bar{V}(x,y)$

(ii) Βρίσκουμε το κομβικό σύνολο $\mathcal{N}(\bar{V})$ της $\bar{V}$, και περιορίζουμε το $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιείται η (3.1.13)

(iii) Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την (3.1.13), έστω $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(x,y) \in \mathcal{N}(\bar{V})$. Στη συνέχεια βρίσκουμε ένα βέλτιστο έλεγχο $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[0,T]$ του προβλήματος (BE) με αρχική κατάσταση (x,y). Τότε η Βέλτιστη τριπλέτα $(X(\cdot),Y(\cdot),Z(\cdot)) \in \mathcal{M}[0,T]$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση του (3.0.1).

Όπως θα δούμε, από τα παραπάνω, το (i) είναι ένα πρόβλημα ΜΔΕ, το (ii) είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πάνω στο $\mathbb{R}$ και το (iii) είναι ένα πρόβλημα ύπαρξης ή μη βέλτιστου ελέγχου. Έτσι το πρόβλημα επιλυσιμότητας της αρχικής ΕΟΣΔΕ έχει υποβιβαστεί στα τρία παραπάνω βήματα, τα οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια ξεχωριστά.

3.2 Η Μεθοδος Δυναμικου Προγραμματισμου και η εξισωση Hamilton-Jacobi-Bellman

Τώρα θα μελετήσουμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που σχετίζεται με την (3.0.1), μέσω της *μεθόδου δυναμικού προγραμματισμού του* Bellman. Σε αυτό το σημείο, θέτουμε $s \in [0,T)$ και θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα ελέγχου.

$$\begin{cases} dX(t) = b(t,X(t),Y(t),Z(t))\,dt + \sigma(t,X(t),Y(t),Z(t))\,dW(t), \\ dY(t) = h(t,X(t),Y(t),Z(t))\,dt + Z(t)dW(t), \qquad t \in [s,T], \\ X(s) = x, \quad\; Y(s) = y. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Σημειώνουμε ότι υπό την υπόθεση (Υ1) από την προηγούμενη ενότητα, για κάθε $(s,x,y) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και $\bar{Z} \in \mathfrak{Z}[s,T] \triangleq L^2_{\mathcal{F}}(s,T;\mathbb{R})$, η εξίσωση (3.2.1) επιδέχεται μια μοναδική ισχυρή λύση, της μορφής $(X(\cdot), Y(\cdot) \equiv (X(\cdot; s, x, y, Z(\cdot)), Y(\cdot; s, x, y, Z(\cdot)))$. Στη συνέχεια, ορίζουμε το συναρτησιακό κόστους ως εξής:

$$J(s, x, y; Z(\cdot)) \triangleq E[f(X(T; s, x, y, Z(\cdot)), Y(T; s, x, y, Z(\cdot)))], \tag{3.2.2}$$

με f ορισμένο βάση της (3.1.6). Παρόμοια με το Πρόβλημα (ΒΕ), θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου.

Πρόβλημα$(BE)_s$**.** για οποιαδήποτε δεδομένα $(s, x, y) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, να βρεθεί ένα $\bar{Z}(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s, T]$, τέτοιο ώστε:

$$V(s, x, y) \triangleq \inf_{Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s,T]} J(s, x, y, Z(\cdot)) = J(s, x, y, \bar{Z}(\cdot)). \tag{3.2.3}$$

Επίσης ορίζουμε:

$$V(T, x, y) = f(x, y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{3.2.4}$$

Η συνάρτηση $V(\cdot, \cdot, \cdot)$ που ορίζεται από τις (3.2.3)-(3.2.4) ονομάζεται συνάρτηση αξίας της παραπάνω οικογένειας προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου με παράμετρο το $s \in [0, T)$. Είναι ξεκάθαρο ότι όταν $s = 0$ το Πρόβλημα$(BE)_s$ υποβιβάζεται στο Πρόβλημα(ΒΕ) που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Με άλλα λόγια , έχουμε ενσωματώσει το Πρόβλημα(ΒΕ) σε μια οικογένεια από προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Σημειώνουμε ότι αυτή η οικογένεια προβλημάτων περιέχει κάποια πολύ χρήσιμη *δυναμική* πληροφορία, λόγω του ότι επιτρέπει την αρχική χρονική στιγμή $s \in [0, T)$ να ποικίλει, και αυτό είναι πολύ καθοριστικό στην προσέγγιση του δυναμικού προγραμματισμού. Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι

$$V(0, x, y) = \bar{V}(x, y), \qquad \text{για κάθε} (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{3.2.5}$$

Συνεπώς, αν μπορούμε να καθορίσουμε ένα $V(s, x, y)$, το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και για το $\bar{V}(x, y)$. Ας θυμηθούμε επίσης ότι ονομάσαμε την $\bar{V}(x, y)$ βέλτιστη συνάρτηση κόστους του Προβλήματος (ΒΕ), κρατώντας το όνομα συνάρτηση αξίας για την $V(s, x, y)$ λόγω ευκολίας. Το ακόλουθο θεώρημα είναι γνωστό και ως *Αρχή βελτιστοποίησης του Bellman.*

<u>Θεωρημα</u> **3.2.1.** *Για οποιαδήποτε* $0 \leq s \leq \widehat{s} \leq T$, *και* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *ισχύει ότι:*

$$V(s, x, y) = \inf_{Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s,T]} E[V(\widehat{s}, X(\widehat{s}; s, x, y, Z(\cdot)), Y(\widehat{s}; s, x, y, Z(\cdot)))]. \tag{3.2.6}$$

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα σκαρίφημα της απόδειξης:

Σκαρίφημα Απόδειξης. Αρχικά συμβολίζουμε το δεξί μέλος της (3.2.6) με $\widehat{V}(s, x, y)$.
Για οποιαδήποτε $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s, T]$, από τον ορισμό (3.2.3), έχουμε:

$$\begin{aligned} V(s, x, y) &\leq J(s, x, y; Z(\cdot)) \\ &= E[J(\widehat{s}, X(\widehat{s}; s, x, y, Z(\cdot)), Y(\widehat{s}; s, x, y, Z(\cdot)), Z(\cdot)]. \end{aligned}$$

Συνεπώς, παίρνοντας infimum στο $Z(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s, T]$ καταλήγουμε στην παρακάτω:

$$V(s, x, y) \leq \widehat{V}(s, x, y) \tag{3.2.7}$$

Αντιστρόφως για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $Z_\varepsilon(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s,T]$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} V(s,x,y)+\varepsilon \geq\ & J(s,x,y;Z_\varepsilon(\cdot)) \\ &= E[J(\widehat{s},X(\widehat{s};s,x,y,Z_\varepsilon(\cdot)),Y(\widehat{s};s,x,y,Z_\varepsilon(\cdot)),Z_\varepsilon(\cdot))] \\ &\geq E[V(\widehat{s},X(\widehat{s};s,x,y,Z_\varepsilon(\cdot)),Y(\widehat{s};s,x,y,Z_\varepsilon(\cdot)),Z_\varepsilon(\cdot))] \\ &\geq \widehat{V}(s,x,y). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.7) και (3.2.8) καταλήγουμε στο ότι:

$$V(s,x,y) = \widehat{V}(s,x,y)$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια εισάγουμε τη Χαμιλτονιανή για το παραπάνω πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s,x,y,q,Q,z) \triangleq \left\{\left\langle q, \begin{pmatrix} b(s,x,y,z) \\ h(s,x,y,z)\end{pmatrix}\right\rangle + +\frac{1}{2}(\sigma\ z)^T Q \begin{pmatrix}\sigma \\ z\end{pmatrix}\right\} \\ \forall\,(s,x,y,q,Q,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

και

$$\begin{aligned} H(s,x,y,q,Q) = \inf_{z\in\mathbb{R}} \mathcal{H}(s,x,y,q,Q,z) \\ \text{για κάθε} \quad (s,x,y,q,Q) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times S^2 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

όπου S είναι το σύνολο όλων των 2×2 συμμετρικών πινάκων. Παρατηρούμε ότι αφού το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές, η συνάρτηση H δεν είναι κατ᾽ ανάγκη ορισμένη παντού. Έστω

$$\mathcal{D}(H) \triangleq \{(s,x,y,q,Q) \mid H(s,x,y,q,Q) > -\infty\}. \tag{3.2.11}$$

Από το παραπάνω Θεώρημα 3.2.1, καταλήγουμε φορμαλιστικά σε μια ΜΔΕ, την οποία η συνάρτηση αξίας $V(\cdot,\cdot,\cdot)$ θα πρέπει να ικανοποιεί.

Πρόταση **3.2.2.** *Έστω ότι $V(s,x,y)$ είναι ομαλή, δηλαδή απείρως παραγωγίσιμη (μιας και έχουμε να κάνουμε με συνάρτηση τριών μεταβλητών, υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι) και H είναι συνεχής στο $Int\mathcal{D}(H)$. Τότε ισχύει:*

$$V_s(s,x,y) + H(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y)) = 0 \tag{3.2.12}$$

για όλα τα $(s,x,y) \in [0,T)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *τέτοια ώστε:*

$$(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y)) \in Int\mathcal{D}(H), \tag{3.2.13}$$

όπου:

$$DV = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}, \qquad D^2V = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{xy} & V_{yy} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη. Έστω $(s,x,y) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η (3.2.13) να ισχύει. Για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{R}$, έστω ότι $(X(\cdot), Y(\cdot))$ είναι η λύση του αρχικού προβλήματος (3.2.1) που αντιστοιχεί στα (s,x,y) και $Z(\cdot) \equiv z$. Τότε, από την (3.2.6) και τη φόρμουλα του Itô, έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\left[\frac{V(\hat{s}, X(\hat{s}), Y(\hat{s})) - V(s,x,y)}{\hat{s}-s}\right] \\ &\to V_s(s,x,y) + \mathcal{H}(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y),z). \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Παίρνοντας infimum στην $z \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι:

$$V_s(s,x,y) + H(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y)) \geq 0. \tag{3.2.15}$$

Αντιστρόφως, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και $\hat{s} \in (s,T)$, από την (3.2.6), υπάρχει ένα $Z(\cdot) \equiv Z_\varepsilon(\cdot) \in \mathfrak{Z}[s,T]$, με την αντίστοιχη κατάσταση να είναι το ζεύγος $(X(\cdot),Y(\cdot))$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq E\left[\frac{V(\hat{s}, X(\hat{s}), Y(\hat{s})) - V(s,x,y)}{\hat{s}-s}\right] \\ &= \frac{1}{\hat{s}-s} E\left[\int_s^{\hat{s}} \{V_s(t,X(t),Y(t)) \right. \\ &\left. + \mathcal{H}(t,X(t),Y(t),DV(t,X(t),Y(t)),D^2V(t,X(t),Y(t)))\}\, dt\right] \\ &\geq \frac{1}{\hat{s}-s} E\left[\int_s^{\hat{s}} \{V_s(t,X(t),Y(t)) \right. \\ &\left. + H(t,X(t),Y(t),DV(t,X(t),Y(t)),D^2V(t,X(t),Y(t)))\}\, dt\right] \\ &\to V_s(s,x,y) + H(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y)). \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε την (3.2.13) και την υπόθεση ότι η H είναι συνεχείς στο $Int\mathcal{D}(H)$. Συνδυάζοντας τις (3.2.15) και (3.2.16) καταλήγουμε στην (4.1.1). □

Η εξίσωση (3.2.12) καλείται *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB για συντομία) η οποία είναι μια εξίσωση που σχετίζεται με το πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου. Θεωρητικά, κάποιος μπορεί να καθορίσει την συνάρτηση τιμής $V(\cdot,\cdot,\cdot)$ επιλύοντας τις (3.2.12)-(3.2.13) μαζί με την τελική συνθήκη (3.2.4). Όμως, επειδή το $\mathcal{D}(H)$ μπορεί να είναι ένα πολύ πολύπλοκο σύνολο, η επίλυση των (3.2.12)-(3.2.13) μαζί με την (3.2.4) είναι πολύ δύσκολη. Συνεπώς, πολλά πρέπει να γίνουν έτσι ώστε να καθορίσουμε κατάλληλη για επίλυση συνάρτηση τιμής V.

3.3 Μια Ειδικη Περιπτωση

Από γνωστή πρόταση έχουμε δει ότι αν ισχύει η (3.1.13) τότε το πρόβλημα (3.0.1) είναι σχεδόν επιλύσιμο. Συνεπώς, η (3.1.13) είναι ένα σημαντικό βήμα για την επίλυση του (3.0.1) βάσει της Πρότασης 1.1. Σε αυτή την ενότητα, θα αναζητήσουμε συνθήκες υπό τις οποίες η (3.1.13) ισχύει. Επιπλέον, θέλουμε να κατασκευάσουμε το κομβικό σύνολο $\mathcal{N}(\bar{V})$ για κάποιες ειδικές και ενδιαφέρουσες περιπτώσεις. Στη συνέχεια, θα περιοριστούμε στην παρακάτω ΕΟΣΔΕ:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX(t) = b(t,X(t),Y(t))\; dt + \sigma(t,X(t),Y(t))\; dW(t), \\ dY(t) = h(t,X(t),Y(t))\; dt + Z(t) dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ X(0) = x, \quad Y(T) = g(X(T)). \end{array} \right. \tag{3.3.1}$$

Η διαφορά μεταξύ των (3.0.1) και (3.3.1) είναι ότι στην (3.3.1), οι συναρτήσεις b, σ και h είναι όλες ανεξάρτητες του Z. Για να μελετήσουμε το σύνολο $\mathcal{N}(\bar{V})$, εισάγουμε το κομβικό σύνολο της συνάρτησης τιμής $V(s,x,y)$ ως εξής:

$$\mathcal{N}(V) = \{(s,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid V(s,x,y) = 0\}. \tag{3.3.2}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι,

$$\{0\} \times \mathcal{N}(\bar{V}) = \mathcal{N}(V) \bigcap [\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}]. \tag{3.3.3}$$

Παρακάτω θα μελετήσουμε το $\mathcal{N}(V)$, το οποίο θα μας δώσει αυτομάτως την πληροφορία για το $\mathcal{N}(\bar{V})$ το οποίο αναζητούμε.

Αρχικά ας κάνουμε μια παρατήρηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\theta : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$V(s,x,\theta(s,x)) = 0, \qquad \text{για κάθε} \quad (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \tag{3.3.4}$$

τότε ισχύει:

$$\{(s,x,\theta(s,x)) \mid (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{N}(V). \tag{3.3.5}$$

Συγκεκριμένα,

$$(x, \theta(0,x)) \in \mathcal{N}(\bar{V}), \qquad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3.6}$$

Το παραπάνω μας δείχνει, αν μη τι άλλο, ότι το κομβικό σύνολο $\mathcal{N}(\bar{V})$ δεν είναι κενό. Συνεπώς, το να βρούμε έναν τρόπο για να καθορίσουμε συγκεκριμένα το $\theta(s,x)$ μας είναι πολύ χρήσιμο. Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι και η V και η θ είναι ομαλές και θα βρούμε μια εξίσωση η οποία ικανοποιείται από την θ έτσι ώστε η (3.3.4) να ισχύει. Σε αυτό το σημείο λοιπόν ορίζουμε:

$$w(s,x) = V(s,x,\theta(s,x)), \qquad \text{για κάθε} \quad (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}. \tag{3.3.7}$$

Διαφορίζοντας το παραπάνω καταλήγουμε :

$$\begin{cases} w_s = V_s + V_y \cdot \theta_s, \\ w_x = V_x + V_y \theta_x, \\ w_{xx} = V_{xx} + V_{xy}\theta_x + V_{yx}\theta_x + V_y\theta_{xx} + V_{yy}\theta_x\theta_x, \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι

$$\sigma^2 w_{xx} = \sigma^2 \left[V_{xx} + 2V_{xy}\theta_x + \theta_x^2 V_{yy} + V_y \theta_{xx} \right] \tag{3.3.9}$$

όπου σημειώνουμε ότι V_{xy} είναι ένας μονοδιάστατος πίνακας και θ_x επίσης. Τότε από την

(3.2.12):

$$\begin{aligned}
0 &= V_s + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + bV_x + hV_y \\
&\frac{1}{2}\inf_{z\in\mathbb{R}}\left[V_{xy}\sigma z + V_{xy}z\sigma + V_{yy}z^2\right] = \\
&= w_s - V_y\theta_s + \frac{1}{2}\left[\sigma^2\left(w_{xx} - 2V_{xy}\theta_x - \theta_x^2 V_{yy}\right)\right] + \\
&+b(w_x - \theta_x V_y) + hV_y - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{xx}V_y \\
&+\frac{1}{2}\inf_{z\in\mathbb{R}}\left[V_{xy}\sigma z + V_{xy}z\sigma + V_{yy}z^2\right] = \\
&= \left\{w_s + \frac{1}{2}\sigma^2 w_{xx} + bw_x - V_y\left(\theta_s + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{xx} + \theta_x b - h\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\inf_{z\in\mathbb{R}}\left[2(z-\theta_x\sigma)\sigma V_{xy} + (z^2 - \theta_x^2\sigma^2)V_{yy}\right] \geq 0
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση θ είναι λύση του ακόλουθου συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} \theta_s + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{xx} + \theta_x b - h = 0, \quad (s,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ \theta\mid_{s=T} = g \end{aligned}\right\} \tag{3.3.11}$$

τότε έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} w_s + \frac{1}{2}\sigma^2 w_{xx} + bw_x \geq 0, \\ w\mid_{s=T} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.3.12}$$

και από την αρχή του μεγίστου καταλήγουμε ότι ισχύει:

$$0 \geq w(s,x) \equiv V(s,x,\theta(s,x)) \geq 0, \quad \forall (s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}. \tag{3.3.13}$$

Επίσης τότε έχουμε αναγκαστικά ότι: $\inf_{z\in\mathbb{R}}[2(z-\theta_x\sigma)\sigma V_{xy} + (z^2 - \theta_x^2\sigma^2)V_{yy}] = 0$, έτσι προκύπτει ότι $z = \sigma\theta_x$ και βρίσκουμε τον έλεγχο z του προβλήματος.
Τα παραπάνω μας δίνουν την (3.3.4), και όλα μαζί μας δίνουν την απόδειξη της παρακάτω πρότασης που κλείνει το κεφάλαιο 3 :

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> **3.3.1.** *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση αξίας V είναι ομαλή και θ είναι μια κλασσική λύση της εξίσωσης* (3.3.11), *τότε η* (3.3.4) *ισχύει.*

Κεφάλαιο 4

Μαθηματικες Εφαρμογες

Στο κεφάλαιο αυτό, που κλείνει και την εν λόγω διπλωματική θα παραθέσουμε με ανάπτυξη δυο κλασσικές περιπτώσεις ΕΟΣΔΕ τις οποίες και θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε βάση της πρότασης (3.3.0). Πρόκειται για την (3.0.1) αλλά με $b, h = 0$, σ σταθερό και $X_0 = 0$, καθώς επίσης και το πολύ σημαντικό μοντέλο των Black-Scholes για αποτίμηση option.

4.1 Τετριμμενο προβλημα ΕΟΣΔΕ

Αρχικά για την (3.0.1) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} dX_t = \sigma dW_t \\ dY_t = z_t dW_t \\ X_0 = 0, Y_T = g(X_T) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X_t = \sigma W_t \\ Y_t = g(X_T - \int\limits_t^T z_t dW_t \end{array}\right. \tag{4.1.1}$$

$$V_s(s,x,y) + H(s,x,y,DV(s,x,y),D^2V(s,x,y)) = 0 \tag{4.1.2}$$

εργαζόμαστε ως εξής:
Λόγω της HJB η Χαμιλτονιανή του προβλήματος μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση η οποία μοιάζει αλλά δεν είναι η κλασσική εξίσωση θερμότητας, μια ΜΔΕ δηλαδή αφού $b, h = 0$.

$$\begin{cases} \theta_s + \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{xx} = 0 & (s,t) \in \mathbb{R} \times [0,T) \\ & \theta(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Μια θεμελιώδης λύσης του προβλήματος είναι η παρακάτω:

$$\Phi(x,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ks}} exp\left(-\frac{x^2}{4ks}\right) \tag{4.1.4}$$

Από την παραπάνω προκύπτει η γενική λύση σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\theta(s,x) = \int \Phi(x-y,s)g(y)dy \tag{4.1.5}$$

Βάσει των παραπάνω και με το μετασχηματισμό $s \to T - s'$ προκύπτει η γνωστή μας ομογενής εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} \theta_s = k\theta_{xx} & (x,s) \in \mathbb{R} \times [0,T) \\ & \theta(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{4.1.6}$$

με λύση την παρακάτω:

$$\theta(s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ks}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4ks}\right) g(y)dy \tag{4.1.7}$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$\begin{cases} w_s + \frac{1}{2}\sigma^2 w_{xx} \geq 0, \\ w(T,x) = 0. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Τώρα βάσει της αρχής του μεγίστου ισχύει ότι: $0 \geq w(s,x) \equiv V(s,x,\theta(s,x)) \geq 0$. Συνεπώς η συνάρτηση αξίας είναι βάση της (3.3.11) $V(s,x,\theta(s,x)) = 0$ και άρα $Y_t = \theta(t, X_t)$. Υπολογίσαμε λοιπόν την $E[g(w_T)|\mathscr{F}_t]$.

4.2 Το μοντελο Black-Scholes

Τώρα θα ασχοληθούμε με πιο γενικά μοντέλα αγορών στα οποία οι παράμετροι είναι τυχαίοι. Για να μελετήσουμε αυτή τη "χαλάρωση" θα ασχοληθούμε με τον στάνταρ κόσμο του "μικρού επενδυτή". Υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις τιμής είναι οι εξής:

$$\begin{cases} dP(t) = P(t)[b(t)dt + \sigma(t)dW(t)], & \text{δυναμική μετοχής} \\ dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, & \text{δυναμική προϊόντος χωρίς κίνδυνο} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

όπου r, b και σ υποθέτουμε πώς είναι φραγμένες, προοδευτικά μετρήσιμες στοχαστικές διαδικασίες. Επίσης υποθέτουμε ότι σ είναι φραγμένη και μακριά από το μηδέν καθώς και ότι η P και η W είναι μονοδιάστατες. Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο που στην ωρίμανσή του T έχει αξία $g(P(T))$, όπου g είναι μια γνωστή συνάρτηση. (Π.χ. $g(x) = (x-k)^+$ για ένα δικαίωμα αγοράς ή $g(x) = (k-x)^+$ για ένα δικαίωμα πώλησης). Για να το πετύχουμε αυτό, θέλουμε να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που θα είναι αυτοχρηματοδοτούμενο κ η αξία του στην ωρίμανση θα είναι $U(T) = g(P(T))$, αν την στιγμή t έχουμε επενδύσει $\Pi(t)$ στη μετοχή και $U(t) - \Pi(t)$ στο προϊόν χωρίς κίνδυνο. Η συνθήκη αυτοχρηματοδότησης είναι:

$$dU(t) = \frac{\Pi(t)}{P(t)}\, dP(t) + \frac{U(t) - \Pi(t)}{P_0(t)}\, dP_0(t), \tag{4.2.2}$$

όπου $\frac{\Pi(t)}{P(t)}$ είναι οι μετοχές τη στιγμή t και $\frac{U(t) - \Pi(t)}{P_0(t)}$ τα προϊόντα χωρίς κίνδυνο τη στιγμή t. Δηλαδή η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου μας στο διάστημα $(t, t+dt)$, οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της αξίας των προϊόντων του στο ίδιο διάστημα και όχι στο ότι

αυξήσαμε την επένδυσή μας ή καταναλώσαμε μέρος του.
Άρα

$$\begin{aligned} dU(t) &= \Pi(t)(b(t)dt + \sigma(t)dW(t)) + (U(t) - \Pi(t))r(t)dt \;\Leftrightarrow \\ dU(t) &= U(t)r(t)dt + \Pi(t)\sigma(t)(dW(t) + \frac{b(t) - r(t)}{\sigma(t)}dt) \;\Leftrightarrow \\ dU(t) &= U(t)r(t)dt + Z(t)d\widetilde{W}(t) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

όπου $d\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \frac{b(s) - r(s)}{\sigma(s)}$ και $Z(t) = \Pi(t)\sigma(t)$. *Σημείωση:* Με την αλλαγή μέτρου του θεωρήματος Girsanov η $\widetilde{W}$ είναι μια κίνηση Brown κάτω από το νέο μέτρο.
Επιπλέον η U ικανοποιεί την τελική συνθήκη $U(T) = g(P(T))$. Με την εισαγωγή της $\widetilde{W}$ η εξίσωση για την P γίνεται:

$$dP(t) = P(t)b(t)dt + P(t)(\sigma(t)d\widetilde{W}(t) - (b(t) - r(t))dt) = P(t)(r(t)dt + \sigma(t)\widetilde{W}(t)).$$

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε την ΕΟΣΔΕ:

$$\begin{cases} dP(t) = P(t)r(t)dt + \sigma(t)P(t)d\widetilde{W}(t) \\ dU(t) = U(t)r(t)dt + Z(t)d\widetilde{W}(t) \\ P(0) = P_0 \qquad U(T) = g(P(T)), \end{cases} \tag{4.2.4}$$

και η $U(0)$ θα μας δίνει την παρούσα αξία του παραγώγου. Παρατηρούμε ότι με το μετασχηματισμό $d\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \frac{b(s) - r(s)}{\sigma(s)}$, η ΕΟΣΔΕ (4.2.4) είναι της ειδικής μορφής που αναλύσαμε στο τελευταίο κεφάλαιο (οι συντελεστές b, σ, h δεν εξαρτώνται από την $Z(t)$). Επιπλέον αλλάζοντας το μέτρο πιθανότητας σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Girsanov η $\widetilde{W}$ είναι μια κίνηση Brown κάτω από το καινούργιο μέτρο (το αδιάφορο κινδύνου (risk neutral) μέτρο πιθανότητας, ή το ισοδύναμο martingale μέτρο, όπως αναφέρεται.)
Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε, αν η $V(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λύνει το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2(s)p^2\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}(s,p) + r(t)p\frac{\partial V}{\partial p}(s,p) - r(t)V(s,p) = 0 \\ V(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{4.2.5}$$

τότε η λύση της ΕΟΣΔΕ θα είναι η $U(t) = V(t, P(t))$ ενώ ο έλεγχος που χρειάζεται να ασκήσουμε για να έχουμε $U(T) = g(P(T))$ δίνεται από την:

$$Z(t) = \sigma(t)P(t)\frac{\partial V}{\partial p}(t, P(t)) \;\Leftrightarrow\; \Pi(t) = P(t)\frac{\partial V}{\partial p}(t, P(t)). \tag{4.2.6}$$

Άρα θα πρέπει να έχουμε $\frac{\partial V}{\partial p}(t, P(t))$ μετοχές στο χρηματοφυλάκιο μας ανά πάσα στιγμή t.
Για την επίλυση τώρα του μοντέλου Black-Scholes και για r, σ σταθερά εργαζόμαστε ως εξής:

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος σαν τελεστής είναι:

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - r\right), \tag{4.2.7}$$

και λόγω της HJB, προκύπτει από την εξίσωση Black-Scholes η παρακάτω:

$$\begin{cases} V_s + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} + rxV_x - rV = 0 & (t,x) \in [0,T) \times (0,\infty), \\ & V(T,x) = g(x), \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Κάνοντας τον μετασχηματισμό $x = e^y$, και $s = T - \tau$, έχουμε:

$$x\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial s} \to \frac{\partial}{\partial \tau}, \qquad x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}$$

και έτσι προκύπτει η παρακάτω εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial y} + rV = 0. \tag{4.2.9}$$

Τώρα αν αντικαταστήσουμε την $V(y,\tau)$ στην εξίσωση (4.2.9) με την $v = e^{r\tau}V$, προκύπτει η:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{4.2.10}$$

Τελικά, θέτοντας $w = y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$ καταφέρνουμε να περιορίσουμε την παραπάνω εξίσωση στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2}, \tag{4.2.11}$$

η οποία δεν είναι άλλη από την γνωστή μας εξίσωση θερμότητας. Η συνάρτηση $v(w,\tau)$ ορίζεται για $w \in \mathbb{R}$ και $\tau \in [0,T]$, και η τελική συνθήκη της (4.2.8) μετατρέπεται στην αρχική συνθήκη:

$$v(w,0) = v_0(w) = max(e^{\frac{1}{2}(a+1)w} - e^{\frac{1}{2}(a-1)w}, 0),$$

όπου $a = \frac{2r}{\sigma^2}$. Η λύση της εξίσωσης θερμότητας δίνεται από τη γνωστή φόρμουλα:

$$v(w,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\overline{s})exp\left(-\frac{(w-\overline{s})^2}{2\sigma^2\tau}\right)ds. \tag{4.2.12}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον ανάποδο μετασχηματισμό, καταλήγουμε στην:

$$V(s,x,\theta(s,x)) = e^{-rt}v, \tag{4.2.13}$$

η οποία είναι και η τελική λύση της συνάρτησης τιμής για το μοντέλο Black-Scholes.

Βιβλιογραφία

[1] Jin Ma, Jiongmin Yong *"Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007)

[2] Jiongmin Yong, Xun Yu Zhou *"Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations"*, Springer-Verlag New York (1999)

[3] Ιωάννης Σπηλιώτης *"Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά"*, Εκδόσεις Συμεών Αθήνα (2004)

[4] Κώσταντίνος Λιάσκος *"Στοχαστική Ανάλυση σε χώρους Hilbert και Εφαρμογές στις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Προσθετικό Θόρυβο "*, Διπλωματική Εργασία Μεταπτυχιακού ΕΚΠΑ (2004)

[5] Δημήτρης Χελιώτης *"Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό"*, Σημειώσεις

[6] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος *"Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική Τόμος Ι: Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση"*, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου (2003)