ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πρώιμα Ιστορικά Ευρήματα που Οδήγησαν στην Διατύπωση της Υπόθεσης Riemann και οι Σύγχρονες Εξελίξεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΟΓΙΑΤΖΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

<u>ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ</u> : ΑΡΓΥΡΗΣ ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

<u>ΕΠΙΤΡΟΠΗ</u>: ΨΑΡΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ, ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ ΠΕΤΡΟΣ

Αθήνα, Οκτώβρης 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πρώιμα Ιστορικά Ευρήματα που Οδήγησαν στην Διατύπωση της Υπόθεσης Riemann και οι Σύγχρονες Εξελίξεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΟΓΙΑΤΖΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΑΡΓΥΡΗΣ ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη …………………… 2015

……… ………. ………

Αθήνα, Οκτώβρης 2015

Αφιέρωση

Αφιερώνω τη διπλωματική εργασία μου στην μητέρα και στον πατερά μου, τους δυο βασικούς πυλώνες στήριξης μου κατά την διάρκεια της φοίτησης μου, καθώς και στην υπόλοιπη οικογένεια. Στην αγαπημένη μου γιαγιά Χρυσούλα. Στην Γιώτα για την ψυχολογική υποστήριξη και κατανόηση την περίοδο εκπόνησης της έρευνας μου.

Ευχαριστίες

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Αργύρη Φελλούρη για την αρωγή του και την αποδοχή του, παρόλο που η διπλωματική εργασία θα συγγραφόταν εξολοκλήρου στη Ρόδο, τον τόπο διαμονής μου.

Περίληψη

Η Riemann υπόθεση έχει υπάρξει το ιερό δισκοπότηρο των μαθηματικών τον τελευταίο ενάμιση αιώνα. Ο Bernhard Riemann, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του $19_{ου}$ αιώνα, διατύπωσε την υπόθεση του το 1859. Η υπόθεση αυτή δημιουργεί μια πολύ συγκεκριμένη σύνδεση, μεταξύ των πρώτων αριθμών και των μηδενικών μιας αναλυτικής συνάρτησης, δυο μαθηματικών αντικειμένων που μέχρι τότε εμφανίζονταν ασύνδετα μεταξύ τους. Μια απόδειξη της υπόθεσης Riemann θα μας οδηγούσε σε μια πρωτοφανή ενδοσκόπηση της θεωρίας αριθμών και συγκεκριμένα στην φύση των πρώτων αριθμών. Η υπόθεση Riemann έχει αντισταθεί στην εύρεση απόδειξης ή κατάρριψης εδώ και 156 χρόνια, ενώ έχουν ασχοληθεί με αυτήν οι λαμπρότεροι επιστήμονες.

Η σημασία της απόδειξης είναι πάρα πολύ μεγάλη καθώς εκτός της κατανομής των πρώτων αριθμών που επηρεάζει άμεσα, υπάρχει ένας μεγάλος όγκος αρκετά ισχυρών μαθηματικών προτάσεων που ξεκινάνε με την διατύπωση ‘‘Έστω ότι η Riemann υπόθεση είναι αληθής, τότε…’’ και οι οποίες θα αποδειχθούν όλες ταυτόχρονα αληθείς.

Η διπλωματική αυτή εργασία, πραγματεύεται τη κατανόηση της υπόθεσης Riemann και την ιστορική της διαδρομή.

Abstract

The Riemann hypothesis has been the holy grail of mathematics for the last one and a half century. Bernhard Riemann, one of the greatest mathematicians of the 19th century, made his hypothesis in 1859. The hypothesis raises a very specific link between Prime numbers and zeros of an analytic function, two mathematical objects that previously appeared disconnected. A proof of the Riemann hypothesis would lead us into an unprecedented introspection in number theory and particularly the nature of prime numbers. The Riemann hypothesis has resisted in finding proof or falsification for the last 156 years even though the brightest scientists have tackled it.

The importance of proof is tremendous as beside the distribution of primes that it affects directly, there is a large volume of quite strong mathematical statements beginning with the words ‘‘If the Riemann hypothesis is true, then…’’ and they will all be proved.

This essay deals with understanding the Riemann hypothesis and its historical path.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τον Αύγουστο του 1859, ο Bernhard Riemann γίνεται καθηγητής του Gottingen αλλά και επίτιμο μέλος της ακαδημίας του Βερολίνου, μεγάλη τιμή για έναν νεαρό μαθηματικό μόλις 32 χρόνων. Όπως συνηθιζόταν σε αυτές τις περιπτώσεις ο Riemann παρουσίασε ένα επιστημονικό σύγγραμμα ως δείγμα της έρευνας του. Ο τίτλος του ήταν "On the Number of Prime Numbers Less Than a Given Magnitude"{Περί τον αριθμό των πρώτων αριθμών κάτω από μια δοσμένη ποσότητα}.Σε αυτό το σύγγραμμα ο Riemann ασχολείται με το μοτίβο εμφάνισης πρώτων αριθμών μέχρι έναν συγκεκριμένο αριθμό. Βασικό αποτέλεσμα του ήταν η συσχέτιση της κατανομής των πρώτων αριθμών με τα μηδενικά μιας μιγαδικής συνάρτησης, συγκεκριμένα της ζ συνάρτησης. Χρησιμοποιεί για να φτάσει σε αυτό το αποτέλεσμα τα πιο σύγχρονα μαθηματικά της εποχής, δημιουργώντας χρήσιμα εργαλεία τα οποία αποτέλεσαν την βάση για την ανάπτυξη της αναλυτικής θεωρίας αριθμών αλλά και βοήθησαν να αποδειχθεί αργότερα, το 1896, από τον Hadamard και τον de la Vallee Poussin αυτό που σήμερα ονομάζουμε θεώρημα των πρώτων αριθμών. Ο Riemann ήταν ο πρώτος που μελέτησε την ζ συνάρτηση ως μιγαδική συνάρτηση.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση της ζ συνάρτησης και των ιδιοτήτων της, η διατύπωση της υπόθεσης Riemann {Riemann Hypothesis} και του θεωρήματος των πρώτων αριθμών {Prime number theorem}, καθώς και μια πρώτη προσέγγιση της σχέσης μεταξύ τους. Επιπρόσθετα παρουσιάζεται η αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός από το $s=1$, τον απλό πόλο της, αλλά και τη συναρτησιακή της εξίσωση. Ακολουθεί η διατύπωση της θεωρίας που μας επιτρέπει να ελέγχουμε την υπόθεση Riemann ανά περιοχές, καθώς και το θεώρημα του Hardy. Θεωρήθηκε αναγκαία η εισαγωγή δυο επιπλέον υποενοτήτων, που αφορούν τον συμβολισμό του Landau και τη γάμμα συνάρτησης, αντίστοιχα. Στόχος των παραπάνω υποενοτήτων είναι η παροχή του βασικού μαθηματικού υπόβαθρου που απαιτείται για την κατανόηση της υπόθεσης Riemann αλλά και της σχέση της με την κατανομή των πρώτων αριθμών.

1.2 ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΤΗΣ

Ορίζουμε την ζ συνάρτηση του Riemann, για R(s) > 1 ως εξής :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

όπου s μιγαδικός και R(s) είναι το πραγματικό μέρος του s.

Έχοντας ορίσει την ζ συνάρτηση μπορούμε να διατυπώσουμε την διάσημη υπόθεση Riemann {Riemann Hypothesis, RH} ως εξής : Κάθε μη τετριμμένο μηδενικό της ζ συνάρτησης, έχει πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

Παρατηρείται ότι για $R(s) \leq 1$ η ζ δεν ορίζεται, διότι η σειρά αποκλίνει. Επομένως για να κατανοήσουμε την διατύπωση της, πρέπει να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της ζ συνάρτησης μέσο της αναλυτικής συνέχισης της, αλλά και να παραθέσουμε την έννοια του μη τετριμμένου μηδενικού για τη ζ συνάρτηση.

Πριν παρουσιαστούν οι μαθηματικοί όροι και η αναγκαία θεωρία που οδηγούν σε μια πιο βαθιά κατανόηση υπόθεσης Riemann, όπως αυτή διατυπώθηκε παραπάνω, επιχειρείται μια πιο απλή προσέγγιση της, μελετώντας μια ισοδύναμη διατύπωση της. Αυτή είναι η εξής : ‘‘Ο αριθμός των ακεραίων με μονό αριθμό πρώτων παραγόντων είναι ίδιος με τον αριθμό των ακεραίων που έχουν ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων’’. Η διατύπωση αυτή απορρέει από την συνάρτηση λάμδα του Liouville, η οποία παίρνει δυο τιμές 1 και -1, ανάλογα με τον αριθμό των πρώτων παραγόντων του ορίσματός της.

Ορισμός 1.1: Η συνάρτηση **λάμδα του Liouville** ορίζεται ως :

$$\lambda(n) := (-1)^{w(n)} \tag{1.2}$$

όπου w(n) : είναι ο αριθμός των πρώτων παραγόντων του n υπολογισμένης της πολλαπλότητας. Ορίζεται ότι λ(1)=1.

Παρατηρούμε ότι αν το w(n) είναι άρτιος τότε η συνάρτηση λ δίνει 1, ενώ αν ο w(n) είναι περιττός, τότε η συνάρτηση λ δίνει -1. Προκύπτει επίσης ότι η συνάρτηση λ για οποιονδήποτε p πρώτο αριθμό [1] μας δίνει αποτέλεσμα -1. Επιπλέον η συνάρτηση λ είναι μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση, δηλαδή για κάθε $x, y \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι λ(xy) = λ(x)λ(y).

Θεώρημα 1.1 : Η Riemann υπόθεση είναι ισοδύναμη με την παρακάτω πρόταση:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει ότι

[1] *Ορισμός* : Ένας ακέραιος p μεγαλύτερος της μονάδας καλείται πρώτος αν διαιρείται ακριβώς μόνο από τον εαυτό του και την μονάδα.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(1)+\lambda(2)+...+\lambda(\mathrm{n}-1)+\lambda(\mathrm{n})}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}=0 \tag{1.3}$$

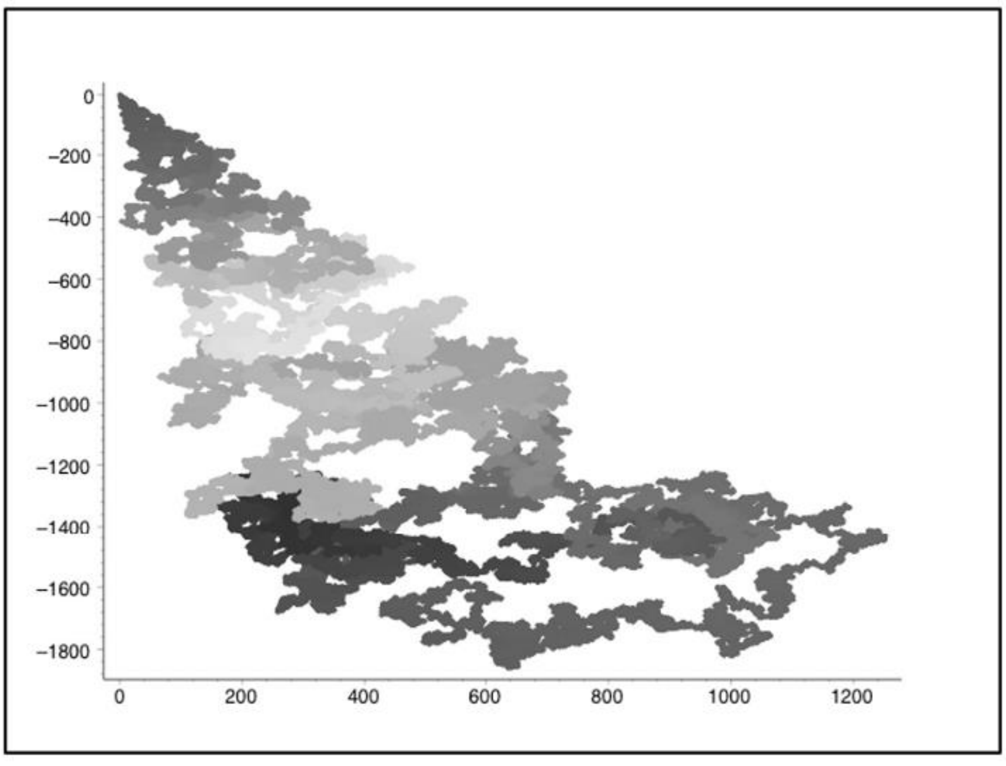
Επομένως η ισοδυναμία της υπόθεσης Riemann εκφράζει ότι κάθε ακέραιος έχει ίσες πιθανότητες να έχει περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων ή να έχει άρτιο αριθμό πρώτων παραγόντων.

Η σύνδεση της συνάρτησης λάμδα με την υπόθεση του Riemann έγινε το 1899 από τον Landau στην διδακτορική διατριβή του. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την ισοδυναμία της υπόθεσης Riemann με μια πιο διαισθητική και στοιχειώδη δήλωση, ως εξής :

Η ακολουθία

$$\{\lambda(\mathrm{i})\}_{i=1}^{\infty}=\{1,-1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,..,..\}$$

συμπεριφέρεται σαν μια τυχαία ακολουθία του 1 και του -1, όπου η διαφορά μεταξύ των αριθμών εμφάνισης του 1 και του -1, δεν είναι πολύ μεγαλύτερη της ρίζας του αριθμού των όρων της ακολουθίας. Ακολουθεί το γράφημα της ακολουθίας $\{\lambda(\mathrm{i})\}_{i=1}^{\infty}$ που αναφέρεται στην μαθηματική βιβλιογραφία ως ‘‘τυχαίος περίπατος’’ {random walk}.



Γράφημα 1.1 : Η ακολουθία $\{\lambda(\mathrm{i})\}_{i=1}^{\infty}$ παρίσταται ως ‘‘τυχαίος περίπατος’’, όπου τα βήματα είναι (±1,±1), οι όροι της ακολουθίας ανά ζεύγη.

1.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΤΟΥ

Η θεωρία αριθμών έχει ως κύριο αντικείμενο της, την έρευνα των πρώτων αριθμών. Οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν μια ερευνητικά ενεργή περιοχή των μαθηματικών. Σήμερα χρησιμοποιούνται σε τομείς όπως η τεχνολογία πληροφοριών, που είναι ένας από τους πιο σημαντικούς κλάδους της πληροφορικής, παράλληλα συμβάλουν σε διάφορες γενικεύσεις πολλών κλάδων των μαθηματικών, για παράδειγμα στην Άλγεβρα. Από την στιγμή της εμφάνισης τους οι πρώτοι αριθμοί είχαν κεντρίσει το ενδιαφέρον πολλών σπουδαίων μαθηματικών αλλά και ερασιτεχνών, που αγαπούσαν τα μαθηματικά. Έτσι μελετηθήκαν σε βάθος οι ιδιότητες τους, οι μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να τους εντοπίσουμε αναμεσά στους σύνθετους αριθμούς, αλλά και θεωρήματα που σχετίζονται άμεσα μαζί τους.

Το Θεώρημα πρώτων αριθμών {Prime Number Theorem, PNT} είναι το θεώρημα, το οποίο μας επιτρέπει να κατανοήσουμε την κατανομή των πρώτων αριθμών, δηλαδή τη στατιστική συμπροφορά τους. Πριν την διατύπωση του θεωρήματος θα ορίσουμε την συνάρτηση π(x), όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

<u>*Ορισμος1.2*</u>: Ορίζουμε την π(x) ως εξής :

$$\pi(\mathrm{x}) := \sum_{\substack{p \le x \\ p:\pi\rho\omega\tau o\varsigma}} 1 \text{, όπου x θετικός ακέραιος.} \tag{1.4}$$

Επομένως εξ' ορισμού αν στη συνάρτηση μας εισάγουμε έναν x θετικό ακέραιο, εκφράζει την ποσότητα των πρώτων αριθμών που υπάρχουν μέχρι τον αριθμό x, μετρώντας και τον ίδιο τον x αν τυγχάνει να είναι πρώτος. Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το PNT.

<u>*Θεώρημα 1.2*</u> : (Θεώρημα πρώτων αριθμών) : Αν π(x), ο αριθμός των πρώτων αριθμών μέχρι και το x ,όπου x θετικός ακέραιος. Τότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(\mathrm{x})}{x/\log x} = 1 \tag{1.5}$$

Ασυμπτωτικά [1] όπως είχε υποθέσει ο Gauss ισχύει ότι

$$\pi(\mathrm{x}) \sim \frac{x}{\log x} \tag{1.6}$$

Το θεώρημα πρώτων αριθμών όπως και η υπόθεση Riemann, μπορεί να διατυπωθεί σε όρους της συνάρτησης λάμδα, γεγονός που οφείλεται επίσης στο διδακτορικό του Landau το 1899.

Το θεώρημα πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την παρακάτω μαθηματική έκφραση :

---

[1] Ορισμός της ασυμπτωτικής σχέσης ‘‘~’’ δίνεται στην ενότητα 1.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(1)+\lambda(2)+...+\lambda(\mathrm{n}-1)+\lambda(\mathrm{n})}{n}=0 \qquad (1.7)$$

Παρατηρώντας την ισοδυναμία του PNT (1.7) και της HR (1.3) μπορούμε να πούμε ότι, το PNT είναι μια συγγενικά αδύναμη δήλωση της ισοδυναμίας της HR, δηλαδή, μια συγγενικά αδύναμη δήλωση στο γεγονός ότι ένας θετικός ακέραιος, έχει ίσες πιθανότητες να έχει μονό ή ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων.

Συγκεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στην κατανόηση του PNT καθώς συνδέεται από την εργασία του Riemann με τα μηδενικά της ζ συνάρτησης, επομένως με την HR.

1.4 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΤΟΥ LANDAU

Σε αυτή την υποενότητα θα αναφερθούμε στα σύμβολα (O,o,~), που έγιναν γνωστά από τον μαθηματικό Edmund Landau (1877 – 1938) το 1909. Τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στην θεωρία αριθμών και εισέρχονται όλο και σε περισσοτέρους κλάδους των μαθηματικών, επιπλέον χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην επιστήμη των υπολογιστών. Στην θεωρία αριθμών χρησιμοποιούνται κυρίως για να εκτιμούν σφάλματα, που προκύπτουν κατά την ασυμπτωτική προσέγγιση αριθμητικών συναρτήσεων. Στην επιστήμη των υπολογιστών οι συμβολισμοί αυτοί χρησιμοποιούνται κυρίως στις συναρτήσεις πολυπλοκότητας χρόνου και χώρου, που αποτελούν δείκτες μετρήσεως της αποτελεσματικότητας ενός αλγορίθμου.

ΤΟ ΜΕΓΑΛΟ Ο

Η συνάρτηση Ο έγινε γνωστή από το βιβλίο του Edmund Landau το 1909 το ‘‘Handbach der Lehre Verteilung der Primzahlen’’ {Εγχειρίδιο της θεωρίας της κατανομής των πρώτων αριθμών}, ένα από τα κλασσικά βιβλία θεωρίας αριθμών. Στο περιεχόμενο του είναι μαζεμένες όλες οι γνώσεις για την κατανομή των πρώτων, μέχρι την χρονολογία δημοσιεύσεις του. Μάλιστα συναντάμε και την περίφημη υπόθεση Riemann στην σελίδα 33. Το βιβλίο αυτό λόγο της αναλυτικής και συστηματικής παρουσίασης των θεμάτων με τρόπο ελκυστικό και σαφή, δίνοντας έμφαση στην αναλυτική θεωρία αριθμών, καθιερώθηκε εύκολα στον τομέα του.

Το μεγάλο Ο όμως δεν ήταν επινόηση του Edmund Landau όπως λανθασμένα πιστεύεται από πολλούς μαθηματικούς, είναι εφεύρεση του Paul Bachmann. Χρησιμοποιήθηκε από τον Bachmann για πρώτη φορά το 1894. Είναι εξαιρετικά άδικο που η αναφορά στο μεγάλο Ο γίνεται ως ‘‘το μεγάλο Ο του Landau’’.

Το μεγάλο Ο είναι ένας τρόπος να θέσουμε πάνω και κάτω φράγμα στις τιμές μιας συνάρτησης από κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο μιας άλλης συνάρτησης, για όλο το πεδίο ορισμού της πρώτης συνάρτησης, ακόμα και αν προσεγγίζει το άπειρο.

Ορισμός 1.3 : Έστω α ένας πραγματικός αριθμός ή το +∞ ή το -∞. και έστω f(x) και g(x) δυο πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποια γειτονιά του α[1], με την g(x) θετική συνάρτηση. Λέμε ότι η f(x) είναι το μεγάλο O της g(x) και αυτό το συμβολίζουμε ως

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) \tag{1.8}$$

αν υπάρχει μια σταθερά K > 0 και μια γειτονιά N(α) του α, τέτοια ώστε

$$|f(\mathrm{x})| \le K \cdot g(\mathrm{x}), \forall x \in N(\alpha)$$

Για παράδειγμα $f(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(1)$ σημαίνει ότι η f(x) είναι φραγμένη κατά απόλυτη τιμή, σε κατάλληλη γειτονιά του α.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ Ο

i. Αν $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{O}(\mathbf{g}_i(\mathbf{x}))$, $\mathrm{i} = (1, 2)$ τότε :

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x}) + \mathrm{f}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}_1(\mathrm{x}) + g_2(\mathrm{x}))$$

$$\mathrm{f}_1(\mathrm{x})\,\mathrm{f}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}_1(\mathrm{x})\,\mathrm{g}_2(\mathrm{x}))$$

ii. Αν c είναι μια σταθερά και ισχύει ότι :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$$

Τότε

$$\mathrm{cf}(\mathrm{x}) = \mathrm{O}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$$

ΤΟ ΜΙΚΡΟ ο ΤΟΥ LANDAU

Το μικρό ο του ορίσθηκε και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον ίδιο τον Landau.

Ορισμός 1.4 : Έστω f(x) και g(x) πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σε μια γειτονιά του α και έστω ότι η g(x) είναι θετική συνάρτηση. Τότε λέμε ότι το f(x) είναι το μικρό ο του g(x) και αυτό το συμβολίζουμε ως

---

[1] Με τον όρο γειτονιά του α εννοούμε κάθε σύνολο N(α), που περιέχει ένα ανοιχτό διάστημα (α – ε,α +ε). Με τον όρο γειτονιά του +∞ εννοούμε κάθε σύνολο N(+∞) που περιέχει ένα διάστημα (M , +∞). Με τον όρο γειτονιά του -∞ εννοούμε κάθε σύνολο N(-∞) που περιέχει ένα διάστημα (-∞ , -m).

$$f(x) = o(g(x))$$

αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ o</u>

Αν $f_i(x) = O(g_i(x))$, $i = (1, 2)$ τότε ισχύει ότι :

$$f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x))$$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Ορίζουμε την ασυμπτωτική ισοδυναμία μεταξύ δυο συναρτήσεων, την οποία συμβολίζουμε με ‘‘~’’ ως εξής:

<u>Ορισμός 1.5</u> : Έστω δυο πραγματικές συναρτήσεις f , g που ορίζονται σε μια γειτονιά ενός πραγματικού αριθμού α ή στην γειτονιά του +∞ ή -∞. Λέμε ότι η f είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη της g και το συμβολίζουμε ως :

$$f \sim g$$

αν

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = 1$$

<u>Ιδιότητες της ~</u> : Αν f , g , h συναρτήσεις που ορίζονται στην γειτονιά ενός πραγματικού αριθμού α τότε ισχύουν τα παρακάτω :

i. $f \sim f$ (ανακλαστική ιδιότητα)

ii. Αν $f \sim g$ τότε $g \sim f$ (συμμετρική ιδιότητα)

iii. Αν $f \sim g$ και $g \sim h$ τότε $f \sim h$ (μεταβατική ιδιότητα)

1.5 ΓΑΜΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η Γάμμα συνάρτηση είναι μια πολύ σημαντική συνάρτηση, για την υπόθεση Riemann. Αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι η αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης, δηλαδή η επέκταση του πεδίου ορισμού της ζ, προκύπτει μέσο της χρήσης της γάμμα συνάρτησης. Επίσης η συναρτησιακή εξίσωση της ζ συνάρτησης εμπεριέχει την γάμμα συνάρτηση. Κάποια μηδενικά της ζ συνάρτησης, όπως θα δούμε αναλυτικά αργότερα, οφείλονται αποκλειστικά στην γάμμα συνάρτηση. Τα συγκεκριμένα μηδενικά θα τα ονομάσουμε τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης.

Ορισμος1.6 : Η παρακάτω συνάρτηση

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad \text{, όπου } s \text{ πραγματικό} \tag{1.9}$$

ονομάζεται **γάμμα συνάρτηση**.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα που ορίζει την γάμμα συνάρτηση μελετήθηκε διεξοδικά από τον Euler. Αποδεικνύεται ότι αν s είναι μιγαδικό το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $R(s) > 0$ και ορίζει την αναλυτική συνάρτηση Γ(s) για s μιγαδικό.

Πορισμα1.1 : Η συνάρτηση γάμμα είναι δυνατόν να επεκταθεί μέσω της σχέσεως

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(s+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$$

ως μερόμορφη συνάρτηση [1] στο αριστερό ημιεπίπεδο $\operatorname{Re} s \le 0$. Τα σημεία $0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ είναι απλοί πόλοι της και δίνουν υπόλοιπο $\frac{(-1)^n}{n!}$. [Για την απόδειξη αυτού του πορίσματος παραπέμπουμε στην σελ.473 του βιβλίου ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ του καθηγητή Δ.Χ.Κραββαρίτη].

[1] Μερόμορφη συνάρτηση : Είναι μια μιγαδική συνάρτηση που είναι ολόμορφη σε όλο το σύνολο που ορίζεται εκτός από τους πόλους της. Αναλυτικός ορισμός της μερόμορφης και της ολόμορφης συνάρτησης υπάρχει στην σελίδα 15.

Βασικές ιδιότητες της Γάμμα συνάρτησης

1. $\underline{\Gamma(1)=1}$

Απόδειξη: $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=1$

2. $\underline{\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}}$

Απόδειξη: $\Gamma(1/2)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt \underset{dt=2xdx}{\overset{t=x^2}{\Leftrightarrow}} \Gamma(1/2)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

3. $\underline{\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)}$

Απόδειξη: Για $R(s)\ >0$ έχω ότι

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s}dt=\left[-t^{s}e^{-t}\right]_0^{\infty}+s\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt=s\Gamma(s)$$

Λόγο της αναλυτικής συνέχισης της Γ, η σχέση ισχύει για κάθε s εκτός από $0,-1,-2,-3,\ldots$

4. $\underline{\Gamma(s+n)=s(s+1)\ldots(s+n-1)\Gamma(s)\ ,\ (n>1\in Z)}$

Απόδειξη: Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα 3, n φορές τότε :

$$\begin{aligned}\Gamma(s+n)&=(s+n-1)\Gamma(s+n-1)=\\&=(s+n-1)(s+n-2)\Gamma(s+n-2)=\ldots=\\&=(s+n-1)(s+n-2)\ldots(s+1)s\Gamma(s)\end{aligned}$$

Άρα $\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$, οπότε ορίζεται η Γ(s) στην λωρίδα $-n<R(s)\leq 1$.

5. $\Gamma(n+1)=n!$

Απόδειξη: Θέτω $s=1$ στην 4 ιδιότητα τότε προκύπτει ότι

$$\Gamma(n+1)=n(n+1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n!$$

1.6 Η ζ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΩΣ ΣΕΙΡΑ DIRICHLET ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΗΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Στόχος της υποενότητας αυτής, είναι να μελετήσουμε την σειρά, από την οποία ορίζεται η ζ συνάρτηση του Riemann και να διατυπώσουμε, βασικά θεωρήματα που ισχύουν για αυτήν, αλλά και τις ιδιότητες της. Επομένως γνωρίζοντας εμπειρικά την ζ συνάρτηση, θα γνωρίσουμε καλύτερα την υπόθεση Riemann.

Έστω s = σ + it με σ, $t \in \mathbb{R}$. Οι σειρές της παρακάτω μορφής ονομάζονται σειρές Dirichlet προς τιμήν του μεγάλου μαθηματικού Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1.10}$$

Αν το $a_n = 1$ για n = 1,2,3,… τότε έχω ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots \tag{1.11}$$

Επομένως η συνάρτηση ζ είναι μια σειρά Dirichlet και μάλιστα η πιο γνωστή από όλες. Αν τώρα θέσουμε το s = 1 προκύπτει η παρακάτω σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{1.12}$$

Η σειρά (1.12) είναι η γνωστή σε όλους μας, αρμονική σειρά πρώτης τάξης. Από μια πρώτη ματιά στην (1.12) μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι αποκλίνει. Αναλυτική απόδειξη της απόκλισης της παρουσιάζεται στο δεύτερο κεφάλαιο.

Εστιάζουμε στην μελέτη της σύγκλισης της σειράς (1.11) με χρήση του κριτηρίου Weierstrass για την σύγκλιση σειρών.

<u>Κριτήριο Weierstrass</u> : Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ορισμένη στο $A \subset \mathbb{C}$ και η συγκλίνουσα σειρά θετικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ τέτοια, ώστε να ισχύει ότι $|f_n(z)| \le a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $z \in A$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Άρα για την (1.11) προκύπτει ότι : $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{\left|n^{\sigma+it}\right|} = \frac{1}{\left|n^{\sigma}\right| \bullet \left|n^{it}\right|} = \frac{1}{n^{\sigma}}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει όταν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$, η οποία συγκλίνει όταν το σ > 1 (αποδεικνύεται στο δεύτερο κεφάλαιο στην σελ 40 που αφορά τις αρμονικές σειρές p-τάξης).

Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει για σ > 1 και ορίζει την ζ συνάρτηση, $\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, σ > 1.

Ο Leonhard Euler (1707-1783) ήταν ο πρώτος που πραγματοποίησε μια ουσιαστική ανάλυση πάνω στην συγκεκριμένη σειρά Dirichlet. Ωστόσο η ανάλυση του είναι περιορισμένη καθώς μελετάει την ζ συνάρτηση για s πραγματικό αριθμό, δηλαδή ως μια πραγματική συνάρτηση. Ήταν επίσης ο πρώτος που υπολόγισε με μεγάλη ακρίβεια μερικές τιμές της, συγκεκριμένα για $s = 2, 3, \ldots, 16$. Ανάμεσα τους είναι και η πιο γνωστή τιμή της ζ, η $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Η πιο μεγάλη συνεισφορά του Euler στην θεωρία της ζ συνάρτησης είναι το Γινόμενο Euler, αφού ισχύει ακόμα και αν η ζ είναι μιγαδική συνάρτηση , όπως την θεώρησε μετέπειτα ο Riemann (1826 -1866).

Θεώρημα 1.4 (Γινόμενο Euler) : Για s = σ + it και σ > 1 έχουμε ότι

$$\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \ \sigma > 1 \tag{1.13}$$

όπου p πρώτος.

Ο Euler με αυτή την μαθηματική έκφραση πετυχαίνει την συσχέτιση της ζ συνάρτησης με τους πρώτους αριθμούς, μέσω ενός γινομένου, του διάσημου γινομένου Euler. Συνδέει επομένως τις ιδιότητες της ζ με τις ιδιότητες των πρώτων αριθμών. Το σημαντικό αυτό εύρημα αποτελεί το σημείο εκκίνησης του επιστημονικού συγγράμματος του Riemann το 1859 πάνω στην μελέτη της κατανομής των πρώτων αριθμών. Αναλυτικά και διεξοδικά το έργο του Euler παρουσιάζεται στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας, το οποίο περιλαμβάνει και την απόδειξη του θεωρήματος 1.4. Στο σημείο αυτό θα αρκεστούμε μόνο στην μελέτη της σύγκλισης της (1.13) σχέσης, η οποία επιτυγχάνεται όπως βλέπουμε από το θεώρημα 1.4 για σ > 1.

Ισχύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει για $\sigma > 1$.

Επεκτείνοντας κάθε παράγοντα του γινομένου προκύπτει ότι: $\prod\left(1+\frac{1}{p^{s}}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right)$

Πολλαπλασιάζοντας από το Θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής προκύπτει ότι:

$$\prod_{p\leq p}\left(1+\frac{1}{p^{s}}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right)=1+\frac{1}{n_1^{s}}+\frac{1}{n_2^{s}}+\ldots$$

όπου n_1, n_2 είναι εκείνοι οι ακέραιοι, των οποίων κανένας πρώτος παράγοντας δεν υπερβαίνει το P. Αφού όλοι οι ακέραιοι είναι μικρότεροι ίσοι του P ισχύει ότι :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}-\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}-1-\frac{1}{n_1^{s}}-\frac{1}{n_2^{s}}-\ldots\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{(P+1)^{\sigma}}+\frac{1}{(\mathrm{P}+2)^{\sigma}}+\ldots\to 0,\ \text{καθώς το P}\to\infty,\ \text{αν } \sigma>1.$$

Επομένως (1.13) ισχύει για σ > 1.

Στο θεώρημα 1.4 εφόσον συγκλίνει η σειρά για $R(s)>1$ θα συγκλίνει και το άπειρο γινόμενο των πρώτων. Όμως ένα άπειρο γινόμενο που συγκλίνει δεν μηδενίζεται ποτέ, έτσι λοιπόν προκύπτει το επόμενο θεώρημα για το μηδενισμό της ζ, ως συνέπεια του θεωρήματος 1.4.

<u>Θεώρημα 1.5</u> : Για κάθε s ϵ C με $R(s)>1$, έχουμε ότι $\zeta(\mathrm{s})\neq 0$.

Με την βοήθεια του θεωρήματος 1.5 αντιλαμβανόμαστε ότι η συνάρτηση ζ του Riemann δεν πρόκειται να μηδενιστεί για κανένα μιγαδικό όρισμα της, όσο το πραγματικό μέρος του ορίσματός της είναι μεγαλύτερο του 1. Επομένως όταν αναζητήσουμε τα μηδενικά της ζ συνάρτησης, αρκεί να ερευνήσουμε την περιοχή όπου το R(s) ≤ 1.

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τρείς σχέσεις που χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά κατά την μελέτη της ζ συνάρτησης.

Λογαριθμίζοντας την ζ προκύπτει ότι :

$$\log\zeta(\mathrm{s})=-\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right),\ \ \sigma>1. \tag{1.14}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την συνάρτηση π(x) (1.4) προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}\log\zeta(\mathrm{s}) &= -\sum_{n=2}^{\infty}\{\pi(\mathrm{n})-\pi(\mathrm{n}-1)\}\log\left(1-\frac{1}{n^{s}}\right)\\ &= -\sum_{n=2}^{\infty}\pi(\mathrm{n})\left[\log\left(1-\frac{1}{n^{s}}\right)-\log\left(1-\frac{1}{(\mathrm{n}+1)^{s}}\right)\right]\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\pi(\mathrm{n})\int_{n}^{n+1}\frac{s}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{s}-1)}\,dx\end{aligned}$$

Οπότε :

$$\log\zeta(s) = \mathrm{s}\int_{2}^{\infty}\frac{\pi(\mathrm{x})}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^{s}-1)}\,dx \ \ , \ \ \sigma > 1 \tag{1.15}$$

Η σχέση αυτή συνδέει τον λογάριθμο της ζ συνάρτησης, με την συνάρτηση π(x), δηλαδή με το πλήθος των πρώτων αριθμών.

Η δεύτερη σχέση προκύπτει κατά τη παραγώγιση της σχέσης (1.14) αναλυτικά ισχύει ότι :

$$[\log\zeta(\mathrm{s})]' = \left[-\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^{2}}\right)\right]' \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(\mathrm{s})} = \sum_{p}\frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} \overset{*}{=} \sum_{p}\sum_{m}\frac{\log p}{p^{ms}}$$

ή

$$\frac{\zeta'(\mathrm{s})}{\zeta(\mathrm{s})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(\mathrm{n})^{**}}{n^{s}} \quad \sigma > 1 \tag{1.16}$$

*Χρησιμοποιούμε την γνωστή μας Maclaurin σειρά $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m}$, $|z| < 1$

θέτοντας όπου z = p^{-s} διότι $\left|p^{-s}\right| = p^{-\sigma} < 1$.

**Όπου Λ(n) είναι η συνάρτηση Mangoldt και ορίζεται ως εξής

$$\Lambda(\mathrm{n}) := \begin{cases}\log p, \text{αν το n είναι δύναμη πρώτου αριθμού p}\\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\end{cases} \tag{1.17}$$

Η σχέση (1.16) που μας προέκυψε συνδέει την ζ συνάρτηση και την παράγωγο της με τη συνάρτηση Mangoldt.

Η τρίτη σχέση που ισχύει για την ζ συνάρτησης είναι : $\zeta^2(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(\mathrm{n})}{n^s}$, $\sigma > 1$

όπου d(n) δηλώνει τον αριθμό των διαιρετών του n, συμπεριλαμβανομένου του 1 και του n.

Απόδειξη

$$\zeta^2(\mathrm{s}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^s} \cdot \sum_{mn=\mu} 1$$

Πιο γενικά ισχύει ότι :
$$\zeta^k(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(\mathrm{n})}{n^s} \quad , \quad \sigma > 1 \tag{1.18}$$

όπου το $\kappa = 2,3,4,\ldots$ και $d_k(\mathrm{n})$ είναι ο αριθμός των τροπών να εκφραστεί το n ως γινόμενο κ παραγόντων.

1.7 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΙΣΗΣ ΤΗΣ ζ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια άκρος ενδιαφέρουσα απόδειξη περί της αναλυτικής συνέχισης της ζ συνάρτησης, έγινε το 1859 από τον ευρηματικό μαθηματικό Riemann, ο οποίος μελέτησε την ζ συνάρτηση, ως μια μιγαδική συνάρτηση που ορίζεται για μιγαδικό s, με R(s) > 1. O Riemann παρουσιάζει για πρώτη φορά την αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης σε όλο το C/{1} , με απλό πόλο στο 1 και υπόλοιπο 1. Σημείο εκκίνησης του είναι η γάμμα συνάρτηση.

Η αναλυτική συνέχιση μιας συνάρτησης είναι μια μαθηματική τεχνική κατά την οποία καταφέρνουμε να επεκτείνουμε το όρισμα μιας συνάρτησης κάτω από ορισμένες συνθήκες. Πολλές φορές επιτυγχάνουμε, με την επέκταση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, τον καθορισμό περαιτέρω τιμών της συνάρτησης.

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική απόδειξη από αυτήν του Riemann, η οποία οδηγεί στην αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης. Η αναλυτική συνέχιση θα παρουσιαστεί σταδιακά. Στην αρχή θα επεκτείνουμε αναλυτικά την ζ συνάρτηση για R(s) > 0 και έπειτα θα την επεκτείνουμε αναλυτικά σε όλο το $C/\{1\}$.

Ορισμός 1.7 : Έστω f_1, f_2 ολόμορφες συναρτήσεις [1] ορισμένες στα ανοιχτά και συνεκτικά σύνολα D_1 , D_2 αντίστοιχα , ώστε $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$. Αν $f_1 = f_2$ στο $D_1 \cap D_2$, τότε η f_1 ονομάζεται αναλυτική συνέχιση της f_2 στο D_1 και η f_2 αναλυτική συνέχιση της f_1 στο D_2 (δηλαδή ισχύει ότι $f_1 = f_2$ στο $D_1 \cup D_2$).

Ορισμός 1.8 : Μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο D ονομάζεται μερόμορφη συνάρτηση, αν η μιγαδική συνάρτηση είναι ολόμορφη σε όλο το D εκτός από μια σειρά μεμονωμένων σημείων (τους πόλους της συνάρτησης).

Επομένως αν βρούμε μια μερόμορφη συνάρτηση στο C με απλό πόλο το 1 που συμφωνεί με την σειρά Dirichlet που εξετάζουμε σε όλο το όρισμα της, θα έχουμε πέτυχει μια αναλυτική συνέχιση της, δηλαδή θα έχουμε ορίσει την ζ στο $C/\{1\}$.

Επεκτείνουμε τώρα αναλυτικά την ζ για s > 0. Έστω $s=\sigma+it$ με $\sigma, t \in R$ όταν το $s \in C$, για $R(\mathrm{s})>1$ έχω ότι

$$\zeta(\mathrm{s})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)=s\sum_{n=1}^{\infty}n\int_n^{n+1}x^{-s-1}dx.$$

Έστω x = [x] – {x} , όπου το [x] είναι το ακέραιο μέρος του x και {x} το δεκαδικό μέρος του x. Καθώς το [x] είναι ίσο με το n για κάθε $\mathrm{x}\in[n,n+1)$ έχουμε ότι

$$\zeta(\mathrm{s})=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}[\mathrm{x}]\,\mathrm{x}^{-s-1}\,dx=s\int_1^{\infty}[\mathrm{x}]\mathrm{x}^{-s-1}dx.$$

Αντικαθιστώντας $[x] = x - \{x\}$ έχουμε ότι

$$\zeta(\mathrm{s})=\mathrm{s}\int_1^{\infty}\mathrm{x}^{-s}dx-s\int_1^{\infty}\{\mathrm{x}\}\,\mathrm{x}^{-s-1}\,dx$$

$$=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\{\mathrm{x}\}\mathrm{x}^{-s-1}dx \quad \sigma>1. \tag{1.19}$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα στην σχέση (1.19) ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση του s στην περιοχή όπου το $R(s) > 0$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα αν παρατηρήσουμε

[1] Ολόμορφη συνάρτηση : Μια συνάρτηση $f(\mathrm{z})$ ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο D ονομάζεται ολόμορφη στο D αν και μόνον αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του D.

προσεκτικά το γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ισχύει ότι $0 \le \{x\} < 1$, άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\sigma > 0$, καθώς το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \mathrm{x}^{-\sigma-1} dx$ συγκλίνει. Η μερόμορφη συνάρτηση στην δεξιά πλευρά της σχέσης (1.19) δίνει την αναλυτική συνέχιση της ζ(s) συνάρτηση στην περιοχή όπου $R(s) > 0$, και ο όρος $\frac{s}{s-1}$ δίνει τον απλό πόλο της ζ(s) στο $s=1$με υπόλοιπο 1. Έτσι έχουμε πετύχει τον σκοπό του πρώτου σταδίου, τον ορισμό της ζ συνάρτησης για μια ευρύτερη περιοχή για $R(s) > 0$.

Στο επόμενο και τελικό στάδιο θα επιχειρήσουμε την αναλυτική συνέχιση της ζ(s) σε όλο το $C/\{1\}$. Έστω $s=\sigma+it$. Η Γ συνάρτηση για $\frac{s}{2}$ μας δίνει

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \quad , \quad \sigma > 1.$$

Θέτουμε σε αυτό το σημείο $t = n^2 \pi x$. Επομένως $dt = n^2 \pi dx$, αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} \cdot (n^2 \pi x)^{\frac{s}{2}-1} \cdot (n^2 \pi)\, \mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x} \cdot \mathrm{n}^s \, \pi^{\frac{s}{2}} \, \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} dx =$$

$$= \mathrm{n}^s \, \pi^{\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \mathrm{n}^{-s} = \int_0^{\infty} \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx$$

Παίρνοντας το άθροισμα από n = 1 μέχρι το n = ∞ και στα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει στο αριστερό μέλος, η συνάρτηση ζ , για $\sigma > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\, \mathrm{n}^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2 \pi x} dx$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \right) dx$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(\mathrm{s}) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1} \psi(\mathrm{x}) dx \qquad (1.20)$$

όπου $\psi(\mathrm{x}) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$.

Κρίνεται αναγκαίο να δώσουμε τον ορισμό της θήτα συνάρτησης του Jacobi, διότι η βασική ιδιότητα της θα μας οδηγήσει στην μερόμορφη συνάρτηση της ζ, που ορίζεται σε όλο το C εκτός του 1. Η θ συνάρτηση ορίζεται ως εξής :

$$\theta(\mathrm{x}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$$

Η βασική της ιδιότητα της θήτα συνάρτησης του Jacobi είναι η παρακάτω.

$$\theta(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}} \theta\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \qquad (1.21)$$

[Για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης μπορούμε να ανατρέξουμε στην σελ.101 του Lectures on The Riemann Zeta–Function By K. Chandrasekharan]. Με βάση τον ορισμό των δυο προηγούμενων συναρτήσεων ψ και θ προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\psi(\mathrm{x}) = \frac{\theta(\mathrm{x}) - 1}{2} \qquad (1.22)$$

Από την (1.21) και την (1.22) προκύπτει ότι

$$2\psi(\mathrm{x}) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right) \Leftrightarrow \psi(\mathrm{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \psi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) \qquad (1.23)$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (1.23) στην σχέση (1.20) προκύπτει ότι

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(\mathrm{s})=\int_0^\infty \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\psi\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2x^{1/2}}-\frac{1}{2}\right)dx \tag{1.24}$$

Στην συνέχεια σπάμε το ολοκλήρωμα από το 0 ως το ∞ σε δυο ολοκληρώματα. Επομένως το δεύτερο μέλος της (1.24) θα γίνει ίσο με το άθροισμα του ολοκληρώματος από το 0 έως το 1 και του ολοκληρώματος από 1 έως ∞. Αρα εχω ότι

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s})=\int_0^1 \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_1^\infty \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1}\psi(\mathrm{x})dx$$

$$=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_0^1 \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)\mathrm{dx}+\int_1^\infty \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-1}\psi(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

Αν στο πρώτο ολοκλήρωμα θέσουμε $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$ έχω ότι $dx=-\frac{1}{\mathrm{x}^2}dx$ και τα όρια του ολοκληρώματος ορίζονται πλέον από ∞ ως 1. Δηλαδή έχω ότι

$$\int_0^1 \mathrm{x}^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\psi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)dx=-\int_\infty^1 \mathrm{x}^{-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}-2}\psi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=-\int_\infty^1 \mathrm{x}^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\psi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int_1^\infty \mathrm{x}^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\psi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \tag{1.25}$$

Οπότε από την χρήση της (1.25), η προηγούμενη σχέση μου γίνεται

$$\overset{(1.25)}{=}\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\,\mathrm{s}}+\int_1^\infty\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\overset{(1.22)}{=}$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\,\mathrm{s}}+\int_1^\infty\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\cdot\left(\frac{\theta(\mathrm{x})-1}{2}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s})=\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\,\mathrm{s}}+\int_1^\infty\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\cdot\left(\frac{\theta(\mathrm{x})-1}{2}\right)dx \tag{1.26}$$

Λύνοντας την (1.26) ως προς ζ καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\boxed{\zeta(\mathrm{s})=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left\{\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\mathrm{s}}+\int_{1}^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\cdot\left(\frac{\theta(\mathrm{x})-1}{2}\right)dx\right\}.} \tag{1.27}$$

Παρατηρώντας την σχέση (1.27) βλέπουμε ότι λόγο της εκθετικής μείωσης της θ(x) το γενικευμένο ολοκλήρωμα της συγκλίνει για κάθε $s \in C$, επομένως ορίζει μια ακέραια συνάρτηση[1] στο C. Επιπλέον αντιλαμβανόμαστε ότι η (1.27) εκπληρώνει το δεύτερο στάδιο της αναζήτησης μας , την αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης σε όλο το C με εξαίρεση το $s=1$. Επομένως με τον τύπο (1.27) μπορούμε να πάρουμε τιμές της ζ συνάρτησης για κάθε s μιγαδικό εκτός από το s = 1 και αυτό γιατί το s = 1 είναι απλός πόλος της. Λόγο της δυσκολίας που υπάρχει στην εύρεση τιμών της ζ συνάρτησης, χρησιμοποιούμε κάποιες γνωστές μεθόδους, που μας δίνουν προσεγγίσεις των τιμών της ζ συνάρτησής. Δυο από αυτές είναι το Euler–MacLaurin άθροισμα και η Riemann–Siegel φόρμουλα.

Μετά από αυτή απόδειξη μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα για την συνάρτηση (1.27).

Θεώρημα 1.6 : Η συνάρτηση

$$\zeta(\mathrm{s})=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left\{\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\mathrm{s}}+\int_{1}^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\cdot\left(\frac{\theta(\mathrm{x})-1}{2}\right)dx\right\}$$

είναι μια μερόμορφη συνάρτηση με απλό πόλο στο $s=1$ και υπόλοιπο 1.

[Παραπέμπουμε στο βιβλίο Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση του καθηγητή Ε.Μ.Π Δ.Χ.Κραββαρίτη σελίδα 234-245 για την κατανόηση του όρου ‘‘απλός πόλος’’ μιας μιγαδικής συνάρτησης καθώς και στην σελίδα 248 για την κατανόηση του όρου ‘‘υπόλοιπο’’].

1.8 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ζ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΗΣ

Υπό την αναλυτική συνέχιση της ζ συνάρτησης μπορούμε πλέον να συμπεριλάβουμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς στην μελέτη των μηδενικών της ζ συνάρτησης, εκτός από τον $s=1$. Τα μηδενικά της συνάρτησης είναι σημαντικά, γιατί κωδικοποιούν πληροφορίες για τους πρώτους αριθμούς.

[1] Ακέραια συνάρτηση ονομάζεται μια μιγαδική συνάρτηση που είναι ολόμορφη πάνω στο C.

Το ενδιαφέρον κατά την μελέτη της ζ συνάρτησης επικεντρώνεται στα μηδενικά που βρίσκονται στην λωρίδα $0 \le R(\mathrm{s}) \le 1$, τα οποία ονομάζουμε μη τετριμμένα μηδενικά της, αν και η ζ συνάρτηση έχει άπειρα μηδενικά. Τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ είναι τα μηδενικά στα οποία αναφέρεται η υπόθεση Riemann. Όλα τα αλλά μηδενικά, τα θεωρούμε δευτερευούσης αξίας διότι αποκλείονται από την υπόθεση Riemann.

Πριν αναλύσουμε περισσότερα πράγματα για τα μηδενικά της ζ συνάρτησης θα αναπτύξουμε την συναρτησιακή εξίσωση της ζ συνάρτησης.

Παρατηρώντας τον τύπο (1.27) διαπιστώνουμε ότι η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει μια συναρτησιακή εξίσωση για την ζ συνάρτηση. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι ο όρος $\frac{1}{(s-1)\mathrm{s}}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα στην σχέση (1.27) είναι αμετάβλητα από την αντικατάσταση του s με $1-s$. Ως εκ τούτου προκύπτει το παρακάτω θεώρημα για συναρτησιακή εξίσωση της ζ.

<u>*Θεώρημα 1.7*</u> (Συναρτησιακή εξίσωση) : Για κάθε $s \in C$,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Για λογούς ευκολίας και σαφήνειας ορίζουμε την συνάρτηση

$$\xi(\mathrm{s}) := \frac{s}{2}(\mathrm{s}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s}). \tag{1.28}$$

Λόγο της (1.27) η ξ είναι μια ακέραια συνάρτηση και ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$\xi(\mathrm{s}) = \xi(1-s). \tag{1.29}$$

Επομένως η ξ (όπως και η ζ) είναι συμμετρική γύρω από την κάθετη γραμμή $\boldsymbol{R(\mathrm{s}) = \frac{1}{2}}$.

Αφού παραθέσαμε την συναρτησιακή εξίσωση της ζ , αλλά και τον ορισμό της ξ συνάρτησης θα προχωρήσουμε σε μια πιο βαθιά ανάλυση των μηδενικών της ζ.

Από το Πόρισμα 1.1 για την γάμμα συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι η Γ(s) έχει απλούς πόλους στα σημεία $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$, έτσι από την (1.27) προκύπτει ότι η ζ(s) συνάρτηση έχει απλά μηδενικά στα σημεία $s = -2, -4, \ldots$, με εξαίρεση τον απλό πόλο της Γ(s) στο $s = 0$, ο οποίος δεν προκαλεί μηδενισμό της ζητά συνάρτησης αφού ακυρώνεται από τον όρο $\frac{1}{(\mathrm{s}-1)\mathrm{s}}$ της σχέσης (1.27). Τα μηδενικά της ζ(s), που πηγάζουν από τους απλούς πόλους της γάμμα συνάρτησης τα ονομάζουμε τετριμμένα της ζ(s) συνάρτησης.

Από το θεώρημα 1.5 και από την συναρτησιακή εξίσωση της ζ(s) προκύπτει ότι τα υπόλοιπα μηδενικά της ζ(s) βρίσκονται στην λωρίδα $0 \le R(\mathrm{s}) \le 1$. Τα μηδενικά αυτά, τα ονομάζουμε μη τετριμμένα μηδενικά της ζ(s) συνάρτησης και συγκεντρώνουν όλο το ενδιαφέρον, διότι σε αυτά τα μη τετριμμένα μηδενικά αναφέρεται η υπόθεση Riemann. Τα μηδενικά της ξ(s) είναι ακριβώς μη τετριμμένα μηδενικά της ζ(s), ως εκ' τούτου είναι συμμετρικά ως προς την κάθετη γραμμή $R(\mathrm{s}) = \frac{1}{2}$. Επίσης από την (1.27) παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικά και ως προς τον πραγματικό άξονα.

Συγκεντρωτικά, το ακόλουθο θεώρημα μας παρουσιάζει τα πιο σημαντικά σημεία της θεωρίας της ζ(s) συνάρτησης που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα.

<u>Θεώρημα 1.8</u> : Η συνάρτηση ζ(s) ικανοποιεί τα ακόλουθα :

- Η ζ(s) δεν έχει μηδενικά για $R(\mathrm{s}) > 1$.
- Ο μόνος πόλος της ζ(s) είναι στο $s = 1$, όπου έχει υπόλοιπο 1 και είναι απλός.
- Η ζ(s) έχει τετριμμένα μηδενικά στα σημεία $s = -2, -4, -6, -8, \dots,$.
- Τα μη τετριμμένα μηδενικά βρίσκονται στην λωρίδα $0 \le R(\mathrm{s}) \le 1$ και είναι συμμετρικά ως προς την κάθετη γραμμή $R(\mathrm{s}) = \frac{1}{2}$ και ως προς τον πραγματικό άξονα $\mathrm{I(s)} = 0$.
- Τα μηδενικά της ξ(s) είναι ακριβώς τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ(s).

Είναι αναγκαίο να διατυπώσουμε σε αυτό το σημείο δυο μαθηματικούς όρους που θα χρησιμοποιούμε συχνά παρακάτω στην εργασία. Ο πρώτος όρος είναι, η ‘‘**κρίσιμη λωρίδα**’’ με την οποία πάντα θα εννοούμε την λωρίδα $0 \le R(\mathrm{s}) \le 1$ και ο δεύτερος όρος είναι ο όρος ‘‘**κρίσιμη γραμμή**’’, με τον οποίο πάντα θα εννοούμε την γραμμή $R(\mathrm{s}) = \frac{1}{2}$.

Ο διορατικός μαθηματικός Riemann, εκτός της θρυλικής υπόθεσης που πρότεινε στην εργασία του για την ζ συνάρτηση, υπέθεσε και έναν ασυμπτωτικό τύπο, για τον αριθμό των μηδενικών της ζ(s) συνάρτησης. Συμβολίζουμε με $N(\mathrm{T})$ τον αριθμό των μηδενικών της ζ(s) συνάρτησης στην κρίσιμη λωρίδα με $0 \le I(\mathrm{s}) < \mathrm{T}$. Ο ασυμπτωτικός τύπος για τα μηδενικά είναι :

$$N(\mathrm{T}) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log \mathrm{T}).$$

Ακολουθεί ένα σημαντικό θεώρημα, από το οποίο ξεκίνησε η απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών και το οποίο μας επιτρέπει να εξαιρέσουμε, την γραμμή $R(\mathrm{s}) = 1$ από την περιοχή μηδενισμών της ζ συνάρτησης.

<u>Θεώρημα 1.9</u> : Για κάθε $t \in R,\ \zeta(1+it) \neq 0.$

Απόδειξη : Για $s = \sigma + it$ με σ > 1 λόγο του γινομένου του Euler ισχύει ότι :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{1.30}$$

Λογαριθμίζοντας και τις δυο πλευρές της σχέσης (1.30) προκύπτει ότι :

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την σειρά Maclaurin $\log(1-s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{s^m}{n}$ προκύπτει ότι :

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} p^{-sm}$$

$$= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma m} p^{-im\mathrm{t}}$$

$$= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} n^{-1} p^{-\sigma m} e^{-\mathrm{imt}\log p} \tag{1.31}$$

Το πραγματικό μέρος του $\log \zeta(s)$ είναι :

$$R(\log \zeta(s)) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} p^{-\sigma m} \cos(\mathrm{mtlog(p)}). \tag{1.32}$$

Έχω λοιπόν ότι :

$$3R(\log\zeta(\sigma))+4R(\log\zeta(\sigma+it))+\mathrm{R}(\log(\sigma+2\,\mathrm{ti}))\overset{1.32}{=}$$

$$=3\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-\sigma m}+4\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-\sigma m}\cos(\mathrm{mtlog(p)})+$$

$$+\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-\sigma m}\cos(2m\,\mathrm{tlog(p)})=$$

$$=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}p^{-\sigma m}\left(3+4\cos(\mathrm{mtlog(p)})+\cos(2m\,\mathrm{tlog(p)})\right)$$

Με χρήση της σχέσης $\log\mathrm{S}=\log|S|+i\arg(\mathrm{S})$ και της παρακάτω ανίσωσης

$$2(1+\cos\theta)^2=3+4\cos\theta+\cos(2\theta)\geq 0$$

η οποία ισχύει για κάθε $\theta\in R$. Προκύπτει ότι :

$$3\log|\zeta(\sigma)|+4\log|\zeta(\sigma+it)|+\log|\zeta(\sigma+2\,\mathrm{ti})|\geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$|\zeta(\sigma)|^3+|\zeta(\sigma+it)|^4+|\zeta(\sigma+2\,\mathrm{ti})|\geq 1. \qquad (1.33)$$

Αφού η ζ(σ) έχει απλό πόλο στο σ = 1 με υπόλοιπο 1, η σειρά Laurent[1] της ζ(σ) στο σ = 1 είναι

$$\zeta(\sigma)=\frac{1}{1-\sigma}+\alpha_0+\alpha_1(\sigma-1)+\alpha_2(\sigma-1)^2+\ldots=\frac{1}{1-\sigma}+g(\sigma)$$

όπου $g(\sigma)$ είναι αναλυτική στο $\sigma=1$. Επομένως για $1<\sigma\leq 2$ έχουμε ότι $|g(\sigma)|\leq \mathrm{A}_0$ για κάποιο $\mathrm{A}_0>0$ επομένως $|\zeta(\sigma)|=\dfrac{1}{1-\sigma}+\mathrm{A}_0$.

Για να αποδειχθεί ότι $\zeta(1+it)\neq 0$, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η ανισότητα (1.33). Έστω ότι υπάρχει μηδενικό στο σημείο $1+it$, για $\mathrm{t}\in\mathrm{R}$ δηλαδή $\zeta(1+\mathrm{it})=0$ για $\mathrm{t}\in\mathrm{R}$, $\mathrm{t}\neq 0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει ότι :

[1] Παραπέμπουμε στη σελίδα 225 του βιβλίου ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ του Δ.Χ Κραββαρίτη, για την θεωρία των σειρών Laurent.

$$
\begin{aligned}
|\zeta(\sigma+it)| &= |\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)| = \\
&= |\sigma-1||\zeta'(\sigma_0+it)|, \text{ για } 1<\sigma_0<\sigma \\
&\le \mathrm{A}_1(\sigma-1)
\end{aligned}
$$

όπου το A_1 είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το t. Καθώς το σ τείνει στο 1 ισχύει ότι $|\zeta(\sigma+2it)|<A_2$,όπου το A_2 εξαρτάται και αυτό αποκλειστικά από το t. Επομένως για κάποιο συγκεκριμένο t προκύπτει ότι :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\sigma\to1^+}|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2\,\mathrm{ti})| \le \\
&\le \lim_{\sigma\to1^+}\left(\frac{1}{1-\sigma}+\mathrm{A}_0\right)^3 \mathrm{A}_1{}^4(\sigma-1)^4\mathrm{A}_2 = 0
\end{aligned}
$$

Άτοπο, διότι πρέπει να ισχύει η (1.33), δηλαδή η τιμή της έκφρασης αυτής, πρέπει είναι υποχρεωτικά μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας. Επομένως καταλήγουμε ότι $\zeta(1+\mathrm{it})\neq0$.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΤΗΣ ζ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια απόδειξη ότι τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης έχουν πραγματικό μέρος $1/2$ ή μια απόδειξη ότι τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης βρίσκονται εκτός της προκαθορισμένης περιοχής, κρίνετε εξαιρετικά δύσκολη. Ωστόσο μπορούμε να συγκεντρώσουμε αποδεικτικά στοιχεία υπερ της υπόθεσης HR, μετρώντας μηδενικά. Είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε εργαλεία που μας επιτρέπουν να μετρήσουμε την αριθμό των μηδενικών στην κρίσιμη λωρίδα με φανταστικό μέρος $|\mathrm{I(s)}|<T$, όπου T θετικός πραγματικός αριθμός. Μόλις μάθουμε ποσά μηδενικά έχουμε σε μια συγκεκριμένη περιοχή, μπορούμε να ελέγξουμε την HR σε αυτή την περιοχή υπολογιστικά. Τώρα θα γνωρίσουμε τη θεωρία που μας επιτρέπει τη μέτρηση των μηδενικών.

Αρχικά ξεκινάμε με την ‘‘Αρχή του ορίσματος’’ { The Argument Principle } της μιγαδικής ανάλυσης, η οποία αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μέτρηση των μηδενικών και των πόλων μιας μερομορφικής συνάρτησης σε μια καθορισμένη περιοχή.

<u>*Θεώρημα 1.10*</u> : (Αρχή του ορίσματος) : Έστω f μια μερόμορφη συνάρτηση στο απλό και συνεκτικό πεδίο D και C μια απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του D, ώστε η f να είναι αναλυτική και να μην μηδενίζεται στο C. Τότε ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg(\mathrm{f(s)}) = \mathrm{Z} - P$$

όπου Z είναι ο αριθμός των μηδενικών, P ο αριθμός των πόλων της f(s) στο εσωτερικό της C υπολογισμένης της πολλαπλότητας και $\Delta_C \arg(\mathrm{f(s)})$ είναι η μεταβολή του ορίσματος της f(s) όταν η C διαγράφεται κατά την θετική φορά. [Παραπέμπουμε στην σελίδα 301 του βιβλίου Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση του καθηγητή Δ.Χ. Κραββαρίτη]

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα μετράμε τα μηδενικά της ζ(s) συνάρτησης στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς $s=\sigma+it$ με $0<\sigma<1$ και $0\le t<T$. Τον αριθμό των μηδενικών αυτών τον συμβολίζουμε με N(T).

$$N(\mathrm{T}) := \#\{\mathrm{s}=\sigma+\mathrm{it} : 0<\sigma<1, 0\le t<T, \zeta(\sigma+it)=0\}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί, διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Riemann αλλά αποδείχθηκε αργότερα από τον von Mangoldt. Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος στηρίζεται κυρίως στην εφαρμογή της Αρχής του ορίσματος.

<u>*Θεώρημα 1.11*</u> : Για την ζ συνάρτηση έχω ότι

$$\mathrm{N(T)} = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log\mathrm{T})$$

όπου T θετικός πραγματικός αριθμός. [Παραπέμπουμε για την απόδειξη του θεωρήματος στην σελίδα 19 του βιβλίου ‘‘The Riemann Hypothesis’’ των Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney και Andrea Weirathmueller].

Σε αυτό το σημείο έχουμε το θεωρητικό υπόβαθρο να εξετάσουμε την υπόθεση Riemann υπολογιστικά. Μπορούμε να προσαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να μας δώσουν μια μέθοδο μέτρησης των μηδενικών της ζ στην κρίσιμη λωρίδα μέχρι οποιοδήποτε επιθυμητό ύψος. Αυτό, σε συνδυασμό με τις μεθόδους που προσεγγίζουν τις τιμές της $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ (π.χ. όπως αναφέραμε και παραπάνω το άθροισμα Euler–MacLaurin ή η φόρμουλα Riemann–Siegel) επιτρέπουν τον έλεγχο της υπόθεσης Riemann και έχει οδηγήσει σε πολλά αποδεικτικά στοιχεία υπερ της υπόθεση Riemann.

O Hardy μεγάλος λάτρης της υπόθεσης Riemann το 1914 απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα περί του πλήθους των μηδενικών της ζ συνάρτησης.

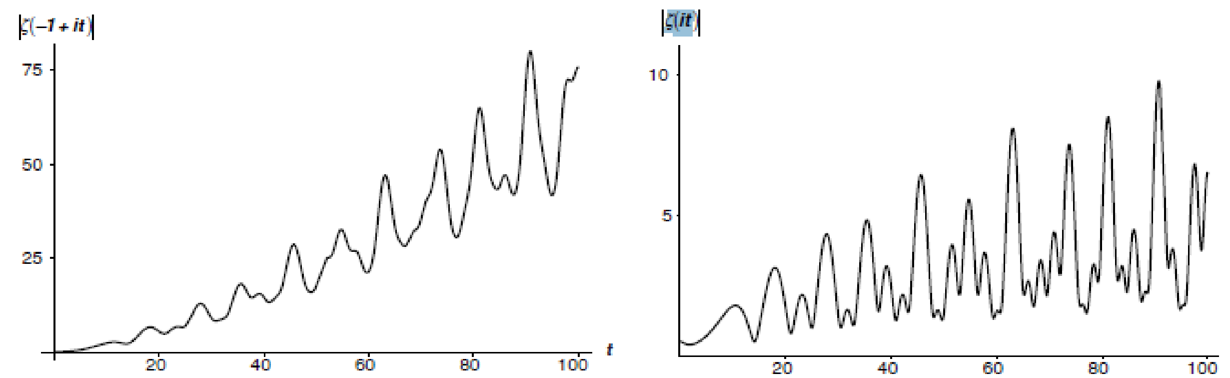
<u>*Θεωρημα1.12*</u> : (Θεώρημα Hardy) : Υπάρχουν άπειρα πολλά μηδενικά της ζ συνάρτησης στην κρίσιμη γραμμή.

[Παραπέμπουμε στην σελίδα 24 για την απόδειξη του, στο βιβλίο ‘‘The Riemann Hypothesis’’ των Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney και Andrea Weirathmueller].

Το θεώρημα του Hardy μας πληροφορεί ότι τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης είναι απείρως πολλά, όπως απείρως πολλά είναι και τα τετριμμένα μηδενικά της. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από το θεώρημα του Hardy, ενίσχυσαν την αληθοφάνεια της υπόθεσης.

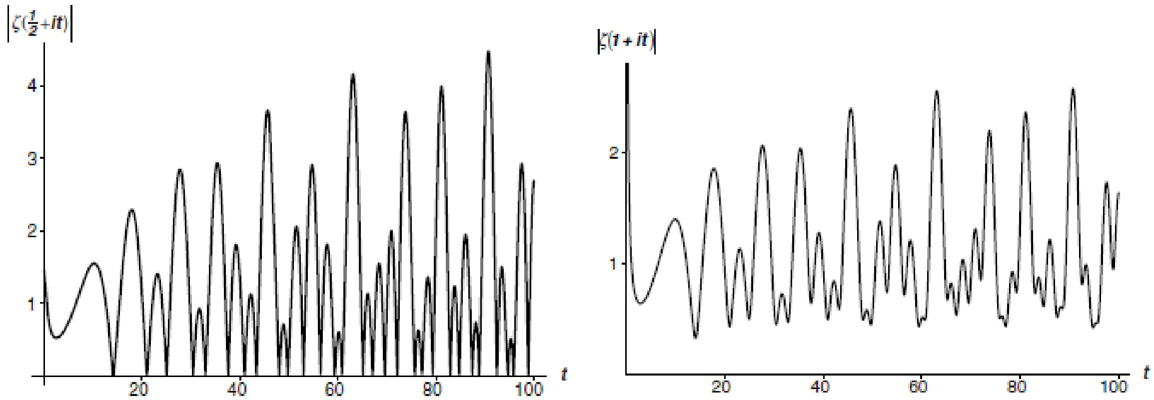
1.9 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΤΗΣ $\zeta(s)$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παρουσιάζονται ορισμένα γραφήματα της ζ(s) συνάρτησης, όπου $s=\sigma+it, t\in\Re$,για ορισμένες αντιπροσωπευτικές τιμές του σ. Τα γραφήματα αυτά βοηθούν στην κατανόηση της συμπεριφοράς της ζ συνάρτησης.



<u>Γράφημα 1.3</u> : Η γραφική παράσταση της $|\zeta(s)|$ *για* $s=-1+it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Αριστερά), η γραφική παράσταση της* $|\zeta(s)|$ *για* $s=it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Δεξιά). {πηγή Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics του John Derbyshire}*

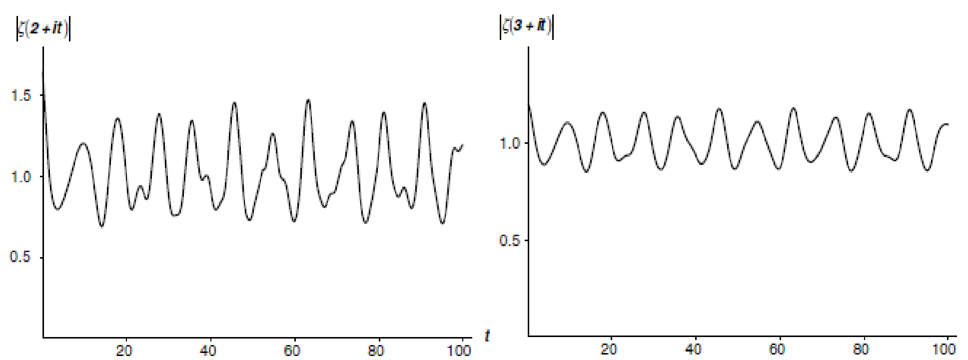
Παρατηρείται ότι καθώς το t αυξάνεται δεν παρουσιάζονται μηδενικά της ζ και στο αριστερό και στο δεξί γράφημα.



Γράφημα 1.4 : *Η γραφική παράσταση της* $|\zeta(s)|$ *για* $s=\frac{1}{2}+it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Αριστερά), η γραφική παράσταση της* $|\zeta(s)|$ *για* $s=1+it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Δεξιά). {πηγή Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics του John Derbyshire}*

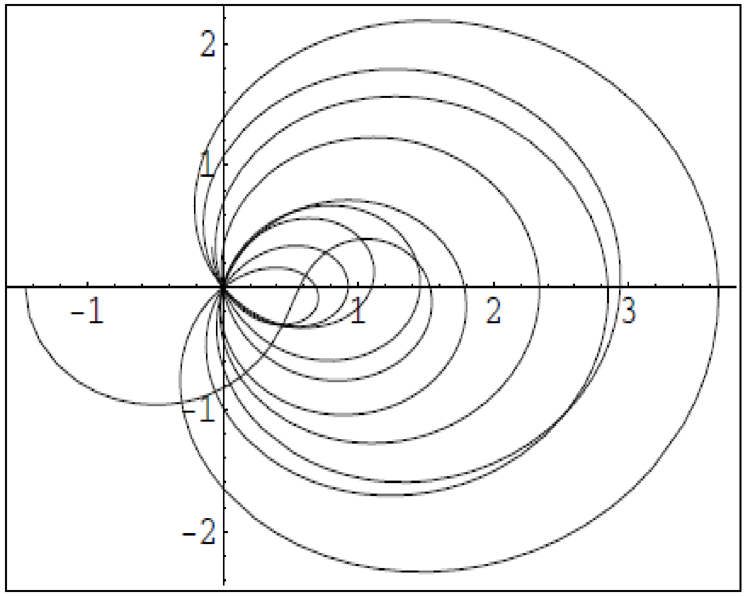
Παρατηρούμε δυο καίρια γραφήματα της ζ συνάρτησης. Στο αριστερό γράφημα βλέπουμε τις τιμές της |ζ(s)| συνάρτησης, έχοντας ως όρισμα εάν μικρό τμήμα της κρίσιμης γραμμής. Παρατηρούμε την εμφάνιση αρκετών μηδενικών της ζ συνάρτησης.

Στο δεξί γράφημα βλέπουμε τιμές της |ζ(s)| συνάρτησης, με όρισμα ένα μικρό τμήμα της γραμμής $s=1+it$. Παρατηρείται ότι δεν παρουσιάζεται κανένα μηδενικό της ζ συνάρτησης. Η συγκεκριμένη γραμμή θεωρείται σημαντική, αφού αποδεικνύεται ότι δεν μηδενίζεται η ζ συνάρτηση πάνω στην συγκεκριμένη γραμμή και αυτό είναι το εναρκτήριο σημείο της απόδειξης του θεωρήματος των πρώτων αριθμών.



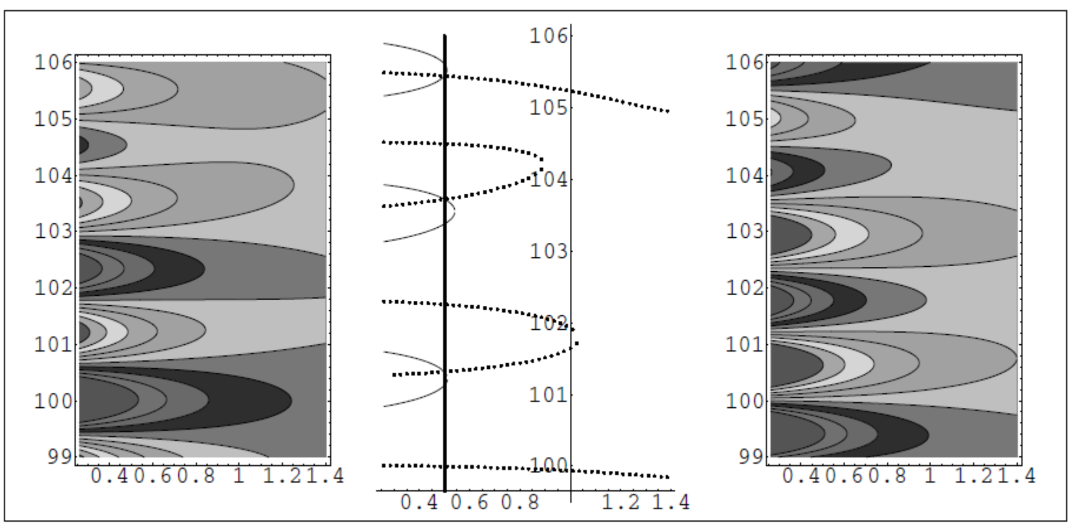
Γράφημα 1.5 : *Η γραφική παράσταση της* $|\zeta(s)|$ *για* $s=2+it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Αριστερά), η γραφική παράσταση της* $|\zeta(s)|$ *για* $s=3+it$ *με* $0\le t\le 100$ *(Δεξιά). {πηγή Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics του John Derbyshire}*

Στο δεξί αλλά και στο αριστερό γράφημα δεν παρατηρούμε κάποιο μηδενισμό της ζ συνάρτησης καθώς το t αυξάνεται.



<u>Γράφημα 1.6</u> : *Αναπαράσταση της* $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ *για* $0<t<50$.

Παρατηρούμε την γραφική παράσταση των μιγαδικών τιμών της ζ συνάρτησης που προέρχεται από ένα μικρό τμήμα της κρίσιμης γραμμής και στο οποίο είναι εμφανή τα πολλά μηδενικά που προκύπτουν πάρα το μικρό μήκος της κρίσιμης γραμμής που έχει χρησιμοποιηθεί ως όρισμα.



<u>Γράφημα 1.7</u> : *Contour plot του* $\Re\zeta(\mathrm{s})$ *{αριστερή}, Καμπύλες του* $\Re\zeta(\mathrm{s})=0$ *(συνεχομένη γραμμή) και του* $\Im\zeta(\mathrm{s})=0$ *(διακεκομμένη γραμμή){στην μέση}, Contour plot του* $\Im\zeta(\mathrm{s})$ *{αριστερά}. Στο μεσαίο γράφημα τα κοινά σημεία των καμπυλών από το δεξί και το αριστερό contour plot της ζ αντιπροσωπεύουν τα μηδενικά της ζ συνάρτησης και όπως παρατηρούμε προκύπτουν ακριβώς πάνω στην καθετή γραμμή* $\frac{1}{2}$

1.10 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ολοκληρώνοντας το πρώτο κεφάλαιο, γνωρίζουμε πλέον την πιο απλή διατύπωση της υπόθεσης Riemann, το θεώρημα των πρώτων αριθμών, τους συμβολισμούς του Landau, την στοιχειώδη θεωρία της γάμμα συνάρτησης, την βασική θεωρία της ζ συνάρτησης καθώς και την αναλυτική συνέχιση της, την θεωρία πάνω στα μηδενικά της ζ συνάρτησης και το θεώρημα του Hardy.

Με αυτές τις βασικές γνώσεις θα προχωρήσουμε στα επόμενα δυο κεφάλαια, που αποτελούν μια ιστορική αναδρομή στην υπόθεση Riemann, όσο αναφορά τα μαθηματικά ευρήματα που οδήγησαν στην υπόθεση, αλλά και τις εξελίξεις που αφορούν την υπόθεση Riemann.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΟΔΗΓΗΣΑΝ ΣΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ RIEMANN

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το δεύτερο κεφάλαιο που παρουσιάζεται παρακάτω, είναι ένα από τα πιο σημαντικά κεφάλαια της εργασίας. Παραθέτει τα μαθηματικά ευρήματα που προϋπήρχαν της εργασίας του Riemann και τα οποία δημιούργησαν το κατάλληλο γνωσιακό κλίμα, ώστε μια μεγάλη διορατική μαθηματική προσωπικότητα όπως Riemann, να καταφέρει να συγγράψει την παγκοσμίως γνωστή εργασία του, περί της κατανομής των πρώτων αριθμών.

Συγκεκριμένα η δομή του δεύτερου κεφαλαίου θα παρουσιαστεί σε δυο κύρια μέρη. Στο πρώτο μέρος, παρουσιάζονται σε ένα συνοπτικό χρονοδιάγραμμα όλα εκείνα τα σημαντικά ιστορικά ευρήματα που οδήγησαν στην εργασία του Riemann.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα αναπτυχθούν, τα πιο σημαντικά μαθηματικά ευρήματα του χρονοδιαγράμματος.

Η λέξη ‘‘***ιστορικά***’’ που περιέχει ο τίτλος του κεφαλαίου μας, μας ωθεί κατά τη μελέτη των μαθηματικών ευρημάτων που οδηγούν στην HR, να μελετήσουμε και την ανθρώπινη δραστηριότητα. Επομένως θα γνωρίσουμε και τον άνθρωπο που κρύβεται πίσω από το ιστορικό εύρημα, διότι ορισμός της ‘‘***Ιστορίας***’’ είναι η συστηματική μελέτη του παρελθόντος εστιασμένη κυρίως στην ανθρώπινη δραστηριότητα έως την παρούσα εποχή. Με πολύ σεβασμό λοιπόν θα ρίξουμε φως στις ζωές των μεγάλων μαθηματικών, των οποίων τα ευρήματα θα αναλυθούν σε βάθος.

2.2 ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

- 300 π.Χ.. Εμφανίζονται στην αρχαία Ελλάδα τα ‘‘Στοιχεία’’ του Ευκλείδη.
- 230 π.Χ.. Ο Ερατοσθένης ανακαλύπτει το περίφημο ‘‘κόσκινο του Ερατοσθένη’’.
- 1350. Ο Nicola Oresme αποδεικνύει ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει σε κανένα πραγματικό αριθμό.
- 1737. Euler απέδειξε το διάσημο ‘‘Γινόμενο Euler’’ για πραγματικό s > 1.
- 1738. O Euler ανακαλύπτει την “Αθροιστική Μέθοδο Euler-Maclaurin”.
- 1742. O Maclaurin εφευρίσκει την αθροιστική μέθοδο Euler-Maclaurin. O Goldbach προτείνει τις εικασίες του στον Euler σε μία επιστολή.
- 1792. O Gauss προτείνει αυτό που μετά γίνεται το θεώρημα πρώτων αριθμών.
- 1802. O Haros ανακαλύπτει και αποδεικνύει αποτελέσματα σχετικά με τις γενικές ιδιότητες των σειρών Farey.
- 1814.Ο μαθηματικός A.L.Cauchy στην εργασία του το 1814 δημιουργεί την αρχή της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων, έτσι δημιουργείται ο κλάδος της μιγαδικής ανάλυσης.
- 1816. O Farey ανακαλύπτει τις σειρές Farey και πιστώνεται την εφεύρεση τους. Στα κάπως άδικα λόγια του Hardy << O Farey είναι αθάνατος επειδή απέτυχε να καταλάβει ένα θεώρημα του Haros, το οποίο αποδείχθηκε 14 χρόνια πριν.>>
- 1837. Δημιουργία της Αναλυτικής θεωρίας αριθμών, η οποία πιστώνεται στον Dirichlet.
- 1845. O Bertrand υποθέτει ότι για κάθε α > 1 υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα στο α και 2α.
- 1850. O Chebyshev αποδεικνύει την υπόθεση του Bertrand, χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μεθόδους.

2.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

300 π.Χ. Οι αρχαίοι Έλληνες ιστορικά θεωρούνται οι πρώτοι που μελέτησαν τους πρώτους αριθμούς με μεγάλη μαθηματική αυστηρότητα. Αρχικά οι μαθηματικοί της σχολής του Πυθαγόρα (500-300 π.Χ.) ενδιαφέρθηκαν για τις μυστικιστικές και αριθμητικές ιδιότητες των αριθμών, ενώ φαίνεται ότι κατανοούσαν πλήρως την ιδέα των πρώτων αριθμών.

Στα μαθηματικά πρώτος αριθμός (ή απλά πρώτος) είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας με την ιδιότητα, οι μόνοι φυσικοί διαιρέτες του να είναι η μονάδα και ο εαυτός του. Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας, ο οποίος δεν είναι πρώτος αριθμός ονομάζεται σύνθετος αριθμός.

Η μελέτη και η γνώση των πρώτων αριθμών αποδεικνύεται μέσα από το πιο σημαντικό έργο στην ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών τα ‘‘Στοιχεία’’ του Ευκλείδη. Παρά τη μεγάλη του φήμη, ελάχιστα είναι γνωστά για την ζωή του Ευκλείδη. Τα ‘‘Στοιχεία’’ αποτελούνται από 13 βιβλία και προβάλουν μια συλλογή ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων που ορίζουν τη μαθηματική σκέψη από τότε μέχρι και σήμερα. Τα περιεχόμενα καλύπτουν την ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά και την αρχαιοελληνική θεωρία των αριθμών, καθώς και ένα αλγεβρικό σύστημα που έγινε γνωστό ως ‘‘γεωμετρική άλγεβρα’’ και το οποίο είναι αρκετά ισχυρό ώστε να επιλύει πολλά αλγεβρικά προβλήματα. Το έργο του Ευκλείδη παρέχει όλη την μαθηματική γνώση της εποχής του, ενώ προσφέρει δυο σημαντικά θεωρήματα που σχετίζονται με τους πρώτους αριθμούς. Το πρώτο είναι το ακόλουθο :

<< Εάν ελάχιστος αριθμός υπό πρώτων αριθμών μετρήται, υπ' ουδενός άλλου πρώτου αριθμού μετρηθήσεται παρέξ των εξ αρχής μετρούντων >>.

Δηλαδή ότι κάθε ακέραιος αναλύεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Το δεύτερο είναι το ακόλουθο :

<< Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών >>.

Δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε δεδομένο πλήθος πρώτων αριθμών.

Τα στοιχεία αυτά δείχνουν την μεγάλη κατανόηση που είχαν οι αρχαίοι Έλληνες για τους πρώτους αριθμούς και την σημασία τους.

230π.Χ. Ο Ερατοσθένης της Κυρήνης γεννήθηκε το 276 π.Χ., όπως κάθε Έλληνας της περιοχής διδάχθηκε αρχικά σε μια τοπική σχολή της Κυρήνης, στην συνεχεία ταξίδεψε και συνέχισε τις σπουδές του στην Αθηνά. Γύρω στο 245 π.Χ. ο φαραώ Πτολεμαίος Γ του προσφέρει την θέση του βιβλιοθηκάριου στην βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας. Μετά από τρία χρονιά δέχεται την θέση και ταξιδεύει στην Αλεξάνδρεια, όπου έζησε για το υπόλοιπο της ζωής του.

Ο Ερατοσθένης έμεινε γνωστός μέχρι σήμερα για δυο κύριους λόγους, ο πρώτος λόγος ήταν το έργο του πάνω στην γεωγραφία, για το οποίο θεωρήθηκε ο πατέρας της ορολογίας της γεωγραφίας και ο δεύτερος λόγος είναι η ανακάλυψη ενός αλγορίθμου που εντοπίζει όλους τους πρώτους αριθμούς που μεσολαβούν μέχρι έναν συγκεκριμένο αριθμό. Ο αλγόριθμος αυτός ονομάστηκε ‘‘κόσκινο του Ερατοσθένη’’.

ΚΟΣΚΙΝΟ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ

Αλγόριθμος: Καταγράφουμε όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 2 μέχρι και έναν συγκεκριμένο αριθμό, μέχρι τον οποίο θέλουμε να εντοπιστούν οι πρώτοι αριθμοί. Έπειτα ξεκινάμε από το 2 και διαγράφουμε κάθε αριθμό που βρίσκεται ανά 2 θέσης από το 2. Εν συνεχεία μεταβαίνουμε στον ακριβώς επόμενο μεγαλύτερο αριθμό n που δεν έχει διαγραφεί και διαγράφουμε τους αριθμούς ανά n θέσεις από το n. Συνεχίζουμε το προηγούμενο βήμα μέχρι τον τελευταίο αριθμό του πίνακα.

Ένα μικρό παράδειγμα για καλύτερη κατανόηση. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το 26 τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα κατά τον αλγόριθμο του Ερατοσθένη.

1) Γράφω όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 2 μέχρι το 26 (πίνακας 1).
2) Στο δεύτερο βήμα κρατώντας το 2 διαγράφω κάθε δεύτερο αριθμό μετά το 2 (πίνακας 2).

1

2	3	4	5	6
7	8	9	10	11
12	13	14	15	16
17	18	19	20	21
22	23	24	25	26

2

2	3	.	5	.
7	.	9	.	11
.	13	.	15	.
17	.	19	.	21
.	23	.	25	.

3) Το επόμενο νούμερο που δεν διαγράφουμε μετά το 2 είναι το 3. Διαγράφουμε κάθε τρίτο αριθμό μετά το 3 αν δεν έχει είδη διαγραφεί (πίνακας 3).
4) Το επόμενο νούμερο που δεν διαγράφεται μετά το 3 είναι το 5. Διαγράφουμε κάθε πέμπτο αριθμό μετά το 5 αν δεν έχει είδη διαγραφεί (πίνακας 4).
5) Συνεχίζουμε στο επόμενο νούμερο που έχει μείνει και δεν διαγράφεται και αυτό είναι το 7. Διαγράφεται κάθε έβδομος αριθμός μετά το 7, όμως όλοι έχουν είδη διαγραφεί (πίνακας 5).Επαναλαμβάνοντας αυτό το βήμα μέχρι τον τελευταίο αριθμό που θα μείνει δεν διαγράφεται πλέον κανένας αριθμός και καταλήγω σε έναν πίνακα που περιέχει μόνο τους πρώτους αριθμούς (πίνακας 5).

2	3	.	5	.
7	.	.	.	11
.	13	.	.	.
17	.	19	.	.
.	23	.	25	.

[3]

2	3	.	5	.
7	.	.	.	11
.	13	.	15	.
17	.	.	.	21
.	23	.	25	.

[4]

2	3	.	5	.
7	.	.	.	11
.	13	.	.	.
17	.	19	.	.
.	23	.	.	.

[5]

Έχω καταλήξει ότι πρώτοι αριθμοί μέχρι και το 26 είναι 9 σε αριθμό και είναι οι 2,3,5,7,11,13,17,19,23.

Ο Ερατοσθένης ανακάλυψε μια πολύ εύκολη μέθοδο εντοπισμού των πρώτων αριθμών, η οποία όμως είναι πολύ χρονοβόρα όταν ψάχνουμε πόσοι πρώτοι υπάρχουν μέχρι ένα συγκεκριμένο πολύ μεγάλο αριθμό, γιατί δεν εντοπίζει μόνο τον αριθμό τους αλλά και το ποιοι ακριβώς είναι αυτοί οι πρώτοι αριθμοί.

Ο Ερατοσθένης της Κυρήνης αφήνοντας ένα σημαντικό έργο στην γεωγραφία αλλά και σημαντικές συνεισφορές στα μαθηματικά και την αστρονομία πεθαίνει σε ηλικία 82 ετών, το 194 π.Χ.

1350 Μελετώντας ιστορικά την σύγκλιση της αρμονικής σειράς μέχρι σήμερα μπορούμε να συλλέξουμε ένα μεγάλο αριθμό αποδείξεων, οι οποίες αποδεικνύουν ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει σε κανένα πραγματικό αριθμό. Εκτιμάται ότι ο αριθμός αυτών των αποδείξεων είναι περίπου 42. Παραθέτονται σε αυτή την μελέτη οι πέντε πιο σημαντικές. Η πρώτη απόδειξη υπήρξε μόλις τον 14 αιώνα από τον Nicola Oresme αλλά χάθηκε μετά τον μεσαίωνα και δεν έγινε ευρέως γνωστή, εν συνεχεία υπήρξαν απόδειξη του Pietro Mongoli και οι δυο αποδείξεις των αδερφών Bernoulli, οι οποίες έκαναν διάσημη την μη σύγκλιση της αρμονικής σειράς σε πραγματικό αριθμό στο ευρύ επιστημονικό κόσμο. Σήμερα η πιο ευρέως διαδεδομένη απόδειξη που βρίσκουμε στα περισσότερα σύγχρονα μαθηματικά βιβλία βασίζεται στο κριτήριο του ολοκληρώματος.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ που μελετάμε σε αυτό το εδάφιο ονομάστηκε ‘‘αρμονική σειρά’’, διότι κάθε όρος της μετά τον πρώτο είναι αρμονικός μέσος των δυο κοντινότερων, ως προς αυτόν, όρων της ακολουθίας. Ο αρμονικός μέσος είναι γνωστός από τα χρόνια του Πυθαγόρα όπου σύμφωνα με τον Πρόκλο, όταν επισκέφτηκε σε ένα ταξίδι του την μεσοποτάμια ο Πυθαγόρας έμαθε τα πάντα για τους τρεις μέσους, τον αριθμητικό, τον γεωμετρικό και τον αρμονικό μέσο. Ο Πυθαγόρας σύνδεσε τον τελευταίο από τους τρεις μέσους με την αρμονία της μουσικής, γι’ αυτό και ονομάστηκε ‘‘αρμονικός μέσος’’ και συμβολίζεται με ‘‘*H*’’ ενώ ορίζεται από τον τύπο $H=\frac{2ab}{a+b}$ ή ισοδύναμα $\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Εξετάζοντας τον αρμονικό μέσο της σειράς που μελετάμε προκύπτει ότι κάθε όρος της $\frac{1}{n}$ είναι αρμονικός μέσος των όρων $\frac{1}{n-1}$ και $\frac{1}{n+1}$ για n > 1, όπως αναφέραμε παραπάνω.

Ο Nicola Oresme στον οποίο οφείλουμε απ’ όσο γνωρίζουμε μέχρι σήμερα την πρώτη απόδειξη για την αρμονική σειρά, θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους λόγιους του 14^{ου} αιώνα. Ο Oresme ήταν φιλόσοφος ο οποίος όμως, είχε γράψει αρκετά έργα μεγάλης επιρροής στα οικονομικά, στα μαθηματικά, στην αστρονομία, στην φιλοσοφία αλλά και στην θεολογία.

Γεννήθηκε το 1320 στο χωριό της Allemagne στη Γαλλία, σπούδασε φιλοσοφία στο πανεπιστήμιο του Παρισιού και έπειτα θεολογία. Πέθανε το 1382 αφήνοντας πίσω του αρκετά σημαντικά έργα, αναμεσά τους την πρώτη απόδειξη ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

Η κεντρική ιδέα της απόδειξης του είναι ότι αν χωριστούν οι όροι της σειράς σε συγκεκριμένα γκρουπ, τότε το ελάχιστο άθροισμα του κάθε γκρουπ θα ήταν $\frac{1}{2}$ οπότε η αρχική αρμονική σειρά θα ήταν μεγαλύτερη από την σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$, η οποία απειρίζεται θετικά άρα και η αρμονική σειρά θα απειρίζεται θετικά, ακολουθεί η απόδειξη.

Απόδειξη.(Oresme) Έστω H είναι η αρμονική σειρά και $\{H_{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$ μια υπακολουθία της. Τότε

$$H_1 = 1 = 1 + 0\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$H_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) =$$

$$= 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Γενικά ισχύει ότι $H_{2^k} \geq 1 + k\left(\frac{1}{2}\right)$. Δεδομένου ότι η υπακολουθία είναι γνησίως αύξουσα χωρίς άνω φράγμα, απειρίζεται θετικά και επομένως η αρμονική ακολουθία απειρίζεται θετικά και αυτή.

Η απόδειξη του Oresme χάθηκε μέσα στον χρόνο και ξανά αποδείχθηκε το 17 αιώνα. Πρώτα εμφανίστηκε η απόδειξη του Pietro Mongoli και εν συνεχεία η αποδείξεις των Jacob και Johan Bernoulli.

Ο Pietro Mongoli παρατήρησε το 1672 ότι $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα πετυχαίνει την απόδειξη του.

<u>Απόδειξη</u> : (Pietro Mongoli)

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα έχω ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} > \frac{2}{9}$ κ.ο.κ.

Υποθέτουμε ότι η αρμονική ακολουθία συγκλίνει στο άθροισμα S. Τότε

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \ldots > 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \frac{3}{9} + \ldots = 1 + S.$$

Η σχέση $S = 1 + S$ οδηγεί σε άτοπο για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και ικανοποιείται μόνο αν το S απειρίζεται και αφού η σειρά είναι γνησίως αύξουσα απειρίζεται θετικά.

Η επόμενη απόδειξη που ακολουθεί δόθηκε από τον Jacob Bernoulli το 1689 στο βιβλίο του ‘‘Tractatus de seriebus infinitis’’. Η απόδειξη που θα δοθεί είναι παρόμοια με αυτή που δίνετε από τον Dunham στο βιβλίο του ‘‘Euler: The Master of Us All’’ το 1999.

<u>Απόδειξη</u> : (Jacob Bernoulli) Αρχικά παρατήρησε ότι αν το c είναι ακέραιος και c > 1, τότε

$$\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\ldots+\frac{1}{c^2}\geq\left(c^2-c\right)\frac{1}{c^2}=1-\frac{1}{c}.$$

Προσθέτοντας το $\frac{1}{c}$ και στα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτει

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\ldots+\frac{1}{c^2}\geq 1.$$

Επόμενος $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{26}+\cdots+\frac{1}{676}\right)+\cdots\geq 1+1+1+1+\cdots.$

Άρα η αρμονική σειρά απειρίζεται θετικά.

Ο Jacob Bernoulli έδωσε άλλη μια απόδειξη ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό, την οποία όμως πίστωσε στον αδερφό του Johan Bernoulli. Περισσότερες πληροφορίες για την ιστορία αυτής της απόδειξη υπάρχουν στο έργο του Dunham (1987, 1990). Παρουσιάζεται εδώ μια μοντέρνα μορφή της απόδειξης του Johan Bernoulli.

<u>Απόδειξη</u> : (Johan Bernoulli) Για την παρακάτω σειρά ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Παρατηρείται ότι λόγο της μορφής στην οποία γράφεται η παραπάνω σειρά συγκλίνει στο 1. Αν αρχίσουμε το άθροισμα από έναν ακέραιο αριθμό k τότε προκύπτει το παρακάτω:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{k}\ ,\ k=1,2,3,\ldots$$

Υποθέτουμε ότι η αρμονική σειρά συγκλίνει στο άθροισμα S. Τότε :

$$
\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}+\frac{7}{56}+\cdots \\
&= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\right)+\cdots \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = 1+S
\end{aligned}
$$

Για S πραγματικό αριθμό οδηγούμαστε σε άτοπο, διότι κανένας πραγματικός αριθμός δεν επαληθεύει την σχέση στην οποία καταλήξαμε. Αφού η αρμονική σειρά είναι γνησίως αύξουσα και η παραπάνω σχέση επαληθεύεται για S άπειρο καταλήγουμε ότι η αρμονική σειρά απειρίζεται θετικά.

Μια γενίκευση της αρμονικής σειράς που μελετήσαμε παραπάνω είναι οι αρμονικές σειρές p-τάξης. Μια αρμονική σειρά p–τάξης είναι οποιαδήποτε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$ οπού p πραγματικός αριθμός. Στις μέρες μας είναι γνωστό το παρακάτω σημαντικό θεώρημα για αυτές τις σειρές.

<u>*Θεώρημα 2.1*</u> : Η αρμονική σειρά p–τάξης

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$$

απειρίζεται θετικά για $p \le 1$ και συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ για $p > 1$.

<u>Απόδειξη</u>

- Αν το $p=1$ έχω την απλή αρμονική σειρά, η οποία μπορεί να αποδειχθεί ότι απειρίζεται θετικά με οποιαδήποτε από τις προηγούμενες αποδείξεις που παραθέσαμε.

- Αν το $p<1$, τότε για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}$ ισχύει $0<n^p \le n$ δηλαδή $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

Θέτουμε $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ και $T_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$. Τότε προκύπτει $S_n < T_n$ και το $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Επομένως $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Άρα τελικά έχω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

- Αν το $p > 1$, θέτοντας $T_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ λαμβάνουμε ότι $T_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και επίσης $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^p} > 0.$ Επομένως η ακολουθία T_n είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{11^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{13^p} + \frac{1}{14^p} + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots <$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \cdots$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε μια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο άπειρων όρων με πρώτο όρο το 1 και λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$, όπου $0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1$. Έχουμε ότι:

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \frac{1}{(2^{p-1})^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\mathrm{p}-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} \in \mathbb{R}$$

Αφού T_n είναι φραγμένη και γνησίως αύξουσα θα συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p > 1$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σειρές p-τάξης μελετήθηκαν πριν τα χρονιά του Riemann και δόθηκαν κάποια σημαντικά αποτελέσματα κυρίως από τον Euler, ο οποίος κατάφερε να υπολογίσει τις τιμές για $p = 2, 3, \ldots, 15, 16$. Το μεγάλο βήμα για την επίλυση του θεωρήματος των πρώτων αριθμών αλλά και για την καταγραφή της υπόθεσης Riemann έγινε όταν ο πρωτοπόρος Riemann αντικατέστησε το πραγματικό p με ένα μιγαδικό s και όρισε την μιγαδική συνάρτηση ζ(s).

1737 Ο Leonhard Euler (1707–1783) είναι ο άνθρωπος που μας έδωσε το 1737 ίσως ένα από τα πιο σημαντικά ιστορικά ευρήματα από το οποίο ξεκίνησε ο Riemann τη διάσημη εργασία του, με την τρανή υπόθεση του. Το εύρημα αυτό είναι το περίφημο ‘‘Γινόμενο Euler’’. Ο Euler πιστεύεται ότι ήταν η πιο μεγάλη μαθηματική προσωπικότητα του $18^{ου}$ αιώνα και αποδεδειγμένα ένας από τους πιο παραγωγικούς επιστήμονες στην ιστορία.

Ο Euler θεωρείται από τον επιστημονικό κόσμο πρώτης τάξεως μαθηματική διάνοια και μάλιστα ο πιο σημαντικός επιστήμονας που έβγαλε ποτέ η Ελβετία. Αξίζει να αναφερθεί ότι είναι ο μόνος μαθηματικός που δυο αριθμοί έχουν πάρει όνομα προς τιμήν του, ο αριθμός e ($\approx$2,71828) και η σταθερά Euler-Mascheroni γ ($\gamma \approx 0.57721$), για την οποία ακόμα δεν γνωρίζουμε αν είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Ο Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας στις 15 Απριλίου το 1707, ο πατέρας του λεγόταν Paul Euler, ο οποίος ήταν κληρικός. Ο Euler είχε δυο μικρότερες αδερφές και τα περισσότερα από τα παιδικά του χρόνια τα έζησε στην πόλη του Riehen.

Η πρώτη επίσημη εκπαίδευση για τον Euler έγινε στην ηλικία των 13 ετών όταν γράφτηκε στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Απέκτησε το master του στην φιλοσοφία το 1723. Χάρη στον πατέρα του και κατόπιν καθοδήγησης του, άρχισε να σπουδάζει θεολογία προκειμένου να ακολουθήσει και ο ίδιος το επάγγελμα του κληρικού. Εκείνη την περίοδο όμως μεσολαβεί ένα αξιοσημείωτο γεγονός το οποίο στρέφει τον Euler στα μαθηματικά και την φυσική. Ο τρανός Johann Bernoulli (ο οποίος τότε θεωρείτο ο πιο κάλος μαθηματικός της Ευρώπης) λόγο της οικογενειακής φιλίας με τον Paul Euler αναλαμβάνει να κάνει μαθήματα στον νεαρό Euler. Μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα ανακαλύπτει το τεράστιο μαθηματικό ταλέντο του και πείθει ο ίδιος τον πατερά του ότι θα γινόταν ένας εξαίρετος μαθηματικός.

Το 1726 αφού ολοκλήρωσε την διατριβή του με θέμα την διάδοση του ήχου, έκανε αίτηση στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Το ίδιο έτος περιμένοντας απάντηση από το πανεπιστήμιο, ο Euler δέχεται πρόταση για μια θέση στην ρωσική ακαδημία επιστημών της Αγίας Πετρούπολης. Για την θέση αυτή τον πρότεινε ο γιος του μέντορα του ο Daniel Bernoulli. Ο Euler περιμένοντας την απάντηση του πανεπιστήμιου της Βασιλείας αργεί να δεχτεί την θέση στην Ρωσία, την οποία στην συνέχεια δέχεται διότι απορρίπτεται η αίτηση του από το πανεπιστήμιου της πατρίδας του. Φτάνει τελικά στην Αγιά Πετρούπολη στις 17 Μάιου του 1727 ένα μήνα μετά τα εικοστά του γενέθλια. Έτσι η Ελβετία χάνει ένα μεγάλο μαθηματικό ταλέντο από το πανεπιστήμιο της ενώ η Ρωσία κερδίζει τον Euler και το έργο του για τα επόμενα 13 ολόκληρα χρόνια. Το 1733 είχε αποκτήσει πια την έδρα των μαθηματικών της Αγίας Πετρούπολης και εκείνη την χρονιά παντρεύτηκε για πρώτη φορά.

Το 1734 ο Euler λύνει το διάσημο πρόβλημα Basel, ένα πρόβλημα που υπήρχε άλυτο από το 1644 όταν διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Ιταλό μαθηματικό Petrola Mengoli, το οποίο αν το παρατηρήσουμε προσεκτικά είναι η τιμή της ζ συνάρτησης για $s = 2$ και επομένως χρήζει λίγης περισσότερης ανάλυσης.

Πρόβλημα Basel

Να βρεθεί η κλειστή μορφή της παρακάτω άπειρης σειράς

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

Ο Euler απέδειξε ότι

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

<u>Απόδειξη</u>

Στην απόδειξη που ακολουθεί χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο:

$$\sin z = z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)=z\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Ο παραπάνω τύπος επεκτείνει το sinz σε μορφή γινομένου. Η κεντρική ιδέα της επέκτασης είναι η αντιμετώπιση του sinz σαν ένα πολυώνυμο με άπειρες ρίζες στα σημεία $z=n\pi, n\in\mathbb{N}$. [Παραπέμπουμε στο βιβλίο ‘‘ΒΑΣΙΚΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ’’ των Marsden και Hoffman στο κεφάλαιο 7, παράδειγμα 7.1 για την πλήρη απόδειξη του τύπου]

Το ανάπτυγμα Maclaurin του sinz είναι $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z\in\mathbb{C}$ επόμενος αν συγκρίνω τους συντελεστές του z^3 προκύπτει ότι:

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\pi^2}=-\frac{1}{3!}\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3!}\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Άρα καταλήγω όπως και ο Euler ότι $\zeta(2)=\pi^2/6$.Ο Euler δεν έμεινε μόνο σε αυτόν τον υπολογισμό, αλλά υπολόγισε ακόμα τιμές τις ζ για $s=3,4,\ldots,16$.

Μερικά χρόνια αργότερα το 1737 ο Euler δεχόμενος ότι η αρμονική συνάρτηση αποκλίνει (απειρίζεται θετικά) αποδεικνύει ότι το άθροισμα των αντίστροφων πρώτων αριθμών αποκλίνει (απειρίζεται θετικά) και αυτό, δηλαδή αποδεικνύει ότι η πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος και συνεχίζει διατυπώνοντας το θεώρημα που έμεινε γνωστό σαν ‘‘Γινόμενο Euler’’ (λίγο διαφορετικό από ότι το έχουμε συνηθίσει να το εντοπίζουμε στη μαθηματική βιβλιογραφία) συνδέοντας τους πρώτους αριθμούς με ιδέες της ανάλυσης, στην εργασία του ‘‘Variae observationes circa series infinitas''. Η εργασία του δημοσιεύτηκε από την ακαδημία του St.Peterburg το 1737, ο τίτλος του είναι γραμμένος στα λατινικά και μια ακριβής μετάφραση του είναι η ακόλουθη ''Διάφορες παρατηρήσεις στις άπειρες σειρές''. Το 8 θεώρημα της εργασίας είναι το ''Γινόμενο Euler''. Ακολουθεί η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος στα λατινικά όπως το έγραψε ο ίδιος ο Euler.

THEOREMA 8

Si ex serie numerorum primorum sequens formetur expression

{Εάν από τη σειρά των πρώτων αριθμών, η έκφραση που ακολουθεί πάρει την μορφή}

$$\frac{2^n \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 7^n \cdot 11^n \cdot \ etc.}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1) \ \text{etc.}}$$

erit eius valor aequalis summae huius seriei

{η τιμή της θα είναι ίση με το άθροισμα της σειράς}

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+etc.$$

Τελειώνοντας την ιστορική αναφορά στην εργασία του Euler, κρίνεται αναγκαίο να παρουσιαστεί η αρκετά κομψή απόδειξη του ''Γινόμενο Euler'', κατά την οποία ο Euler ακολουθεί μια διαδικασία που θυμίζει το κόσκινο του Ερατοσθένη. Το ''Γινόμενο Euler'' είναι ένας τρόπος που βρήκε ο Euler να εκφράσει το κόσκινο του Ερατοσθένη στην ''γλώσσα'' της ανάλυσης.

Η σπουδαιότητα του γινομένου που μελετάμε είναι ανυπολόγιστη διότι συνδέει τις ιδιότητες της ζ συνάρτηση με τις ιδιότητες των πρώτων αριθμών, ενώ μέσα από την μελέτη της ζ συνάρτησης μπορούμε να εξάγουμε πολύ σημαντικά αποτελέσματα για την κατανομή των πρώτων αριθμών (εργασία Riemann).

Η απόδειξη του Γινομένου Euler : Για κάθε $s>1$ έχουμε ότι:

$$\zeta(\mathrm{s})=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{11^s}+\dots \quad (2.1)$$

Παρατηρώντας την ζ(s) βλέπουμε ότι περιλαμβάνει όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς, πράγμα που αποτελεί κοινό στοιχείο με το ξεκίνημα της περίφημης μεθόδου του Ερατοσθένη. Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ περιλαμβάνεται και το 1. Πολλαπλασιάζοντας την (2.1) με $\frac{1}{2^s}$ προκύπτει η παρακάτω σχέση.

$$\frac{1}{2^s}\zeta(\mathrm{s})=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{14^s}+\frac{1}{16^s}+\frac{1}{18^s}+\dots \qquad (2.2)$$

Αφαιρώντας την (2.2) από την (2.1) και βγάζοντας κοινό παράγοντα στο πρώτο μέλος την ζ(s) προκύπτει η παρακάτω σχέση.

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\dots \qquad (2.3)$$

Κατά την αφαίρεση στο δεξί μέλος της (2.3) εξαφανίζονται όλοι οι όροι με ζυγό παρονομαστή εις στην δύναμη του s, επόμενος στο δεξί μέλος της σχέσης (2.3) προκύπτει ένα άθροισμα από όρους με περιττό παρονομαστή εις την s δύναμη. Στο επόμενο βήμα πολλαπλασιάζεται η σχέση (2.3) με το $\frac{1}{3^s}$,ένα βήμα το οποίο προέρχεται και αυτό από την λογική ακολουθία του κόσκινου του Ερατοσθένη, διότι το 3 είναι ο πιο μικρός πρώτος στο δεύτερο μέλος.

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\frac{1}{27^s}+\frac{1}{33^s}+\frac{1}{39^s}+\frac{1}{45^s}+\frac{1}{51^s}+\dots \qquad (2.4)$$

Αφαιρείται στην συνέχεια η (2.4) από την (2.3) και βγαίνει κοινός παράγοντας στο πρώτο μέλος το $\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})$,επομένως προκύπτει η παρακάτω σχέση.

$$\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{29^s}+\dots$$

(2.5)

Στην σχέση (2.5) στο δεξί μέλος έχει εξαφανιστεί κάθε όρος του αθροίσματος όπου ο παρονομαστής του ήταν πολλαπλάσιο του 3 εις την s δύναμη. Τώρα ο όρος $\frac{1}{5^s}$ είναι ο όρος με τον μικρότερο πρώτο αριθμό στον παρονομαστή του εις την δύναμη s, επομένως πολλαπλασιάζεται η (2.5) με το $\frac{1}{5^s}$.

$$\frac{1}{5^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\frac{1}{65^s}+\frac{1}{85^s}+\frac{1}{95^s}+\frac{1}{115^s}+\ldots$$

(2.6)

Αφαιρώντας την (2.6) από την (2.5) προκύπτει η παρακάτω σχέση.

$$\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{29^s}+\frac{1}{31^s}+\ldots$$

(2.7)

Στην (2.7) παρατηρείται ότι στο δεξί μέλος λείπουν όλοι οι όροι του αθροίσματος που ήταν πολλαπλάσια του 5 εις την s δύναμη. Ο μικρότερος πρώτος αριθμός σε παρονομαστή κάποιου όρου που είναι υψωμένος στην s αυτή την φορά είναι το 7. Επόμενος πολλαπλασιάζεται η (2.7) με το $\frac{1}{7^s}$. Οι ομοιότητες της διαδικασίας που ακολουθήσαμε μέχρι εδώ είναι πολλές σε σχέση με την λογική που ακολουθεί η μέθοδος του Ερατοσθένη, για να τις κατανοήσουμε απολυτά αρκεί να δούμε απλά την διαφορά τους. Στην μέθοδο του Ερατοσθένη επιλέγουμε να μείνουν οι πρώτοι αριθμοί από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να εξαφανιστούν τα πολλαπλάσια τους, ενώ στην διαδικασία που ακολουθήσαμε τώρα εντοπίζουμε στο δεξί μέλος σχέσης, τους πρώτους αριθμούς που είναι υψωμένη στην s στον παρονομαστή των όρων του αθροίσματος και τους εξαφανίζουμε από το άθροισμα μαζί με τα πολλαπλάσια τους. Αν συνεχιστεί αυτή η διαδικασία μέχρι κάποιον μεγάλο πρώτο αριθμό π.χ. τον 997 θα έχουμε ότι:

$$\left(1-\frac{1}{997^s}\right)\left(1-\frac{1}{991^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=1+\frac{1}{1009^s}+\frac{1}{1013^s}+\frac{1}{1019^s}+\frac{1}{1021^s}+\ldots$$

(2.8)

Από την (2.8) παρατηρούμε ότι αν συνεχιστεί αυτή η διαδικασία επ’ άπειρων (αυτό μπορεί να γίνει διότι ο αριθμός των πρώτων είναι άπειρος) για κάθε $s>1$ το δεξί μέλος της θα τείνει στην τιμή 1, διότι οι παρονομαστές των κλασμάτων μεγαλώνουν τόσο ώστε τα κλάσματα να τείνουν στο 0 ενώ στο αριστερό μέλος της θα δημιουργηθεί ένα γινόμενο που περιλαμβάνει όλους τους πρώτους αριθμούς. Επόμενος :

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(\mathrm{s})=1\Leftrightarrow\zeta(\mathrm{s})=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\text{ για κάθε } s>1. \qquad (2.9)$$

Έτσι με μια διαδικασία παραπλήσια της μεθόδου του Ερατοσθένη, ο Euler φτάνει στην απόδειξη του διάσημου γινομένου του, το οποίο αποτελεί την πρώτη σχέση με την οποία ξεκινάει ο Riemann την οχτασέλιδη εργασία του και μας χαρίζει την υπόθεση Riemann.

Ο Euler το 1741 εγκαταλείπει την Ρωσία αφού του δίνεται η ευκαιρία μεταβεί στο Βερολίνο και να αναλάβει την θέση του Director of Mathematics στην ακαδημία του Βερολίνου. Έμεινε στο Βερολίνο για 25 ολόκληρα χρόνια και έπειτα επέστρεψε στην Ρωσία, οπού όλα αυτά τα χρόνια κρατούσε την θέση του κενή, εργάστηκε εκεί τα τελευταία 17 χρόνια της ζωής του.

Μέσα από την δουλειά του και παρατηρώντας την ζωή του μπορούμε να τον περιγράψουμε εν συντομία ως ένα άνθρωπο ιδιαίτερα εργατικό, πιστό, ευφυή αλλά παράλληλα απλό στον τρόπο ζωής του, στην ομιλία του και αφοσιωμένο στην οικογένεια του. Τα περισσότερα χειρόγραφα του ήταν γραμμένα στα λατινικά, σύντομα και ξεκάθαρα. Σήμερα από την δουλειά του έχουμε 29 τόμους που αφορούν τα μαθηματικά, 31 τόμους μηχανικής, 13 τόμους φυσικής και διασώζεται επίσης και ένα μεγάλο κομμάτι από την αλληλογραφία του. Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι στα 30 του χρόνια έχασε την όραση από το ένα μάτι και είχε τυφλωθεί τελείως ως τα 60 του χρόνια, παρόλα αυτά συνέχισε να είναι παραγωγικότατος μέχρι το τέλος του.

1738 & 1742 Οι μαθηματικοί Euler και Colin Maclaurin (1698–1746) ανακαλύπτουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο της αριθμητικής ανάλυσης, την αθροιστική μέθοδο Euler-Maclaurin. Ο Euler την ανακαλύπτει πρώτος το 1738 και 4 χρόνια αργότερα ανακαλύπτεται και από τον C.Maclaurin, το 1742.

Η αθροιστική μέθοδος Euler-Maclaurin αποτελεί μια δυναμική σύνδεση, ανάμεσα στο άθροισμα και το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης. Συγκεκριμένα επιτρέπει την εκτίμηση πεπερασμένων ή άπειρων αθροισμάτων, χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα αλλά και το αντίθετο, επιτρέπει την εκτίμηση ολοκληρωμάτων χρησιμοποιώντας πεπερασμένα αθροίσματα. Κατά την εκτίμηση ενός αθροίσματος ή ενός ολοκληρώματος προκύπτει πάντα ένας όρος σφάλματος, ο οποίος περιέχει αριθμούς Bernoulli.

Ωστόσο ο Euler και ο C.Maclaurin δεν κατάφεραν να ανακαλύψουν τον όρο σφάλματος που αναφέραμε παραπάνω. Ο όρος σφάλματος ή όρος υπολοίπου όπως συνηθίζουμε να τον αποκαλούμε, εισήχθη αργότερα από τον Γάλλο μαθηματικό Siméon Denis Poisson (1781–1840). Ο Euler χρησιμοποίησε την μέθοδο του για να υπολογίσει άπειρες σειρές που συγκλίνουν αργά, ενώ ο Maclaurin την χρησιμοποίησε για να υπολογίσει ολοκληρώματα.

Αθροιστική μέθοδος Euler-Maclaurin. Έστω α, β ακέραιοι με $\alpha < \beta$ και $f:[\alpha, \beta] \to R$ συνεχής. Για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, αν η f είναι μια C^{k+1} συνάρτηση τότε ισχύει ότι

$$\sum_{a<n\leq\beta} \mathrm{f}(n) = \int_a^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1} B_{r+1}}{(r+1)!}\left(\mathrm{f}^{(\mathrm{r})}(\beta) - \mathrm{f}^{(\mathrm{r})}(\alpha)\right) + \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^\beta B_{k+1}(\{\mathrm{x}\})\,\mathrm{f}^{(k+1)}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

(2.10)

οπού B_k είναι ο k -ιοστός αριθμός Bernoulli και $B_k(\{\mathrm{x}\})$ το k -ιοστό πολυώνυμο Bernoulli ενώ το {x} είναι το δεκαδικό μέρος του x.

Για την κατανόηση της σχέσης (2.1) κρίνεται αναγκαίο να παραθέσουμε τον ορισμό των αριθμών Bernoulli και των πολυώνυμων Bernoulli καθώς και μερικές βασικές ιδιότητες τους.

Ορισμός 2.1 : Οι αριθμός Bernoulli B_k, ορίζονται από την γενέτειρα συνάρτηση

$$\frac{\mathrm{x}}{e^{\mathrm{x}} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k \mathrm{x}^k}{k!} \;, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Οι τρεις πρώτοι αριθμοί Bernoulli είναι : $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}$

Ορισμός 2.2 : Αν B_k είναι αριθμοί Bernoulli, τα πολυώνυμα $B_k(\mathrm{x})$ που ικανοποιούν τα παρακάτω ονομάζονται πολυώνυμα Bernoulli.

i) $B_0(\mathrm{x}) = 1$

ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} B_k(\mathrm{x}) = kB_{k-1}(\mathrm{x}) \qquad (k \geq 1)$

iii) $\int_0^1 B_k(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 0 \qquad (k \geq 1)$

Από τον ορισμό που δώσαμε προηγούμενος προκύπτουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες για τα πολυώνυμα Bernoulli. Οι πιο σημαντικές είναι :

α) $B_k(\mathrm{x}) = k\int_0^x B_{k-1}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} + B_k \quad (k \geq 1)$

β) $B_k(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_{k-j}\mathrm{x}^j$

γ) $B_k(0) = B_k$

δ) $B_k(1-\mathrm{x}) = (-1)^k B_k(\mathrm{x}) \quad (k \geq 1)$

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε την αθροιστική μέθοδο Euler-Maclaurin για την ζ συνάρτηση που είναι άμεσα συνδεδεμένη με την υπόθεση Riemann. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο χρειάζεται αυτή η μέθοδος για την επαλήθευση της HR ένα περιοχές.

Για N > 1 ακέραιο έχουμε ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s} + \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^s} \overset{2.1}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s} + \int_N^{\infty}\mathrm{x}^{-s}\mathrm{dx} + B_1\mathrm{N}^{-s} - s\int_N^{\infty} B_1(\{\mathrm{x}\})\,\mathrm{x}^{-s-1}\,\mathrm{dx} \overset{*}{=}$$

*Στην παραπάνω σχέση βρίσκοντας την τιμή του πρώτου ολοκληρώματος και στην συνέχεια αντικαθιστώντας όπου $B_1 = -\frac{1}{2}$ και πραγματοποιώντας διαδοχικές ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στο τρίτο ολοκλήρωμα, αφού εφαρμοστεί πριν την κάθε ολοκλήρωση κατά παράγοντες η (ii) ιδιότητα $\left(\frac{B_\kappa'(\mathrm{x})}{\kappa} = B_{\kappa-1}(\mathrm{x})\right)$ που πρέπει να πληρούν τα πολυώνυμα Bernoulli προκύπτει ότι :

$$\overset{*}{=} \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}N^{-s} + \frac{B_2}{2}sN^{-s-1} + \ldots\ldots + \frac{B_{2u}}{(2\mathrm{u})!}s(s+1)\cdots(s+2\mathrm{u}-2)\,\mathrm{N}^{-s-2u+1} + R_{2u}$$

(2.11)

όπου το R_{2u} είναι ο όρος σφάλματος και είναι ο ακόλουθος:

$$R_{2u} = -\frac{s(s+1)\cdots(s+2u-1)}{(2\mathrm{u})!}\int_N^{\infty} B_{2u}(\{\mathrm{x}\})\,\mathrm{x}^{-s-2u}\,\mathrm{dx}. \qquad (2.12)$$

Αν το N είναι μεγάλο, δηλαδή το N είναι της τάξης του $O|s|$ τότε το υπόλοιπο R_{2u} έχει το παρακάτω άνω φράγμα.

$$|R_{2u}| \leq \left| \frac{s(s+1)\cdots(s+2u+1)B_{2(u+1)}N^{-\sigma-2u-1}}{2(u+1)!(\sigma+2u+1)} \right| \tag{2.13}$$

Χρησιμοποιώντας την αθροιστική μέθοδο Euler-Maclaurin για υπολογισμό των τιμών της ζ συνάρτησης παρατηρήθηκε ότι προκύπτει μεγάλο υπόλοιπο, ωστόσο οι τιμές της ζ συνάρτησης προσεγγίζονται ικανοποιητικά.

Ο Euler με την αθροιστική μέθοδο του, υπολόγισε τιμές της ζ(s) συνάρτησης για $s = 2,3,4,...,15,16$. Την αθροιστική μέθοδο Euler-Maclaurin χρησιμοποίησαν και μεταγενέστεροι μαθηματικοί όπως ο Gram, Backlund και ο Hutchinson για να επιβεβαιώσουν την υπόθεση Riemann για $t \leq 50, t \leq 200$ και $t \leq 300$ αντίστοιχα, όπου $s = 1/2 + it$.

1792 Μια μεγάλη μαθηματική διάνοια γεννιέται στης 30 Απριλίου του 1777 στο Brunswick της Γερμανίας, ο Carl Friedrich Gauss. Ο μαθηματικός Gauss συνεισέφερε σε πολλά επιστημονικά πεδία όπως τη θεωρία αριθμών, την άλγεβρα, τη στατιστική, την ανάλυση, την διαφορική γεωμετρία, τη γεωδαισία, τη γεωφυσική, τη μηχανική, την ηλεκτροστατιστική, την αστρονομία, τη θεωρία πινάκων και την οπτική. Αποκαλείται από πολλούς επιστήμονες ως ‘‘ο πρίγκιπας των μαθηματικών’’ αλλά και ως ‘‘ο μεγαλύτερος μαθηματικός μετά των Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη’’. Ήταν ένας από τους μεγαλύτερους Γερμανούς μαθηματικούς όλων των εποχών και ένας από τους δυο η τρεις σπουδαιότερους των νεότερων χρόνων. Στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε κυρίως με την έρευνα του στους πρώτους αριθμούς οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με την εκπόνηση της εργασίας του Riemann αφού συνδέονται με την ζ συνάρτηση.

Καμία από τις παραπάνω περίγραφες δεν θεωρείται υπερβολή αν αναλογιστεί κάνεις ότι ήταν ένα παιδί θαύμα, αφού σε ηλικία 3 ετών εντόπισε λάθος του πατερά του, σε αριθμητικούς υπολογισμούς ενώ στην ηλικία των 7 εξέπληξε τους δάσκαλους του, αθροίζοντας πολύ γρηγορά τους ακέραιους από το 1 μέχρι 100, αφού ανακάλυψε ότι οι αριθμοί αυτοί σχηματίσουν 50 ζεύγη με άθροισμα 101 επομένως αμέσως απάντησε ότι το άθροισμα ήταν 5050. Στην ηλικία των 12 ετών ενώ φοιτούσε στο γυμνάσιο άρχισε ήδη να ασκεί κριτική στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Ο Gauss προερχόταν από μια φτωχή οικογένεια ταπεινής καταγωγής, όμως λόγο των τρομερών μαθηματικών ικανοτήτων του τράβηξε την προσοχή του Δούκα του Brunswick, ο οποίος τον έστειλε αρχικά στο κολλέγιο της Carolinum από το 1792 μέχρι 1795 (το σημερινό Braunschweig πανεπιστήμιο τεχνολογίας) και έπειτα στο διάσημο Πανεπιστήμιο του Gottinger όπου φοίτησε μέχρι το 1798. Ο Gauss ανακάλυψε σημαντικά θεωρήματα ενώ ήταν ακόμα φοιτητής. Μετά τον θάνατο του Δούκα ο Gauss αναγκάστηκε να δεχτεί το 1807 την θέση που του είχε προταθεί από το πανεπιστήμιο Gottinger, όπου έμεινε μέχρι τον θάνατο του το 1855.

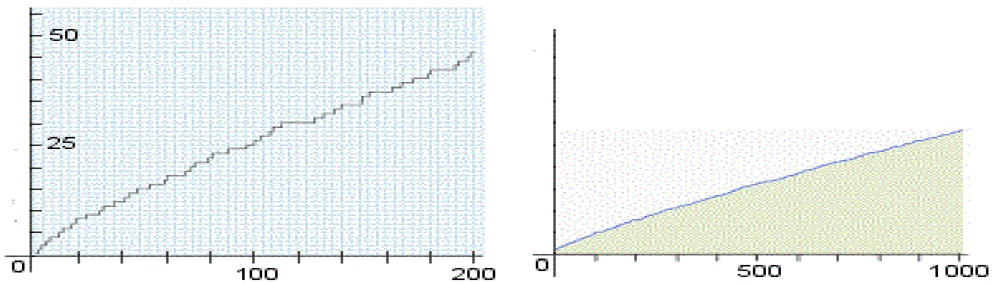
Ο Gauss ήταν ένας σκληρά εργαζόμενος μαθηματικός και πλήρως αφοσιωμένος στην επιστήμη του, παρόλα αυτά είχε κατηγορηθεί ότι ήταν πολύ αυστηρός, δεν του άρεσαν οι συνεργασίες με άλλους μαθηματικούς, δεν στήριζε τους νέους μαθηματικούς που τον ακολουθούσαν και πάρα το γεγονός ότι δίδαξε στο Gottinger δεν του άρεσε καθόλου η διδασκαλία. Θα ήταν σημαντική ιστορική παράληψη να μην αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι αρκετοί φοιτητές του έγιναν μαθηματικοί με πολύ σημαντική επιρροή στα μαθηματικά ανάμεσα τους οι Richard Dedekind, Friedrich Bessel και ο Bernhard Riemann. Αξίζει να αναφέρουμε ότι Gauss μετά από μια διάλεξη του Riemann το 1854, το θέμα της οποίας είχε ορίσει ο ίδιος, σύμφωνα με τον φυσικό του Gottinger, Wilhelm Eduard Weber, επαινούσε συνεχώς και ήταν ενθουσιασμένος με τον Riemann.

Ο Gauss σαν επιστήμονας είχε την ιδιαιτερότητα να δημοσιεύει πολύ λίγα σε σχέση με τις θεωρίες, τα θεωρήματα και τις προτάσεις που ανακάλυπτε και κατέγραφε ανελλιπώς στο ημερολόγιο του. Οι λόγοι της ιδιαιτερότητας αυτής ήταν δυο, ο πρώτος ήταν ότι δεν ήταν άνθρωπος που κυνηγούσε την κοινωνική καταξίωση και τον πλούτο και ο δεύτερος είναι η τάση που είχε προς την τελειότητα, δεν παρουσίαζε ποτέ κάτι που δεν ήταν σε τέλεια μορφή. Χαρακτηριστικά ο Eric Temple Bell ιστορικός των μαθηματικών εκτιμά ότι αν ο Gauss είχε γνωστοποιήσει όλες του τις ανακαλύψεις, τα μαθηματικά θα είχαν προχωρήσει κατά 50 χρόνια (Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré, Νέα Υόρκη 1986: Simon and Schuster, σελ. 218-269).

Η ιδιαιτερότητα του αυτή δημιούργησε αρκετά προβλήματα, ένα από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα υπήρξε το 1809, όταν σε ένα βιβλίο του ισχυρίστηκε ότι από το 1794 είχε ανακαλύψει την μέθοδο ‘‘των ελαχίστων τετραγώνων’’ μια μέθοδο που ο Γάλλος μαθηματικός Adrien-Marie Legendre είχε ανακαλύψει και δημοσιοποιήσει πολύ αργότερα, το 1806. Το γεγονός εξόργισε το Γάλλο μαθηματικό Legendre. Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία για την αλήθεια των όσων ισχυρίστηκε ο Gauss στο βιβλίο του καθώς προσκόμισε αδιάσειστα στοιχεία και τελικά η μέθοδος πιστώθηκε στον Gauss, ένα γεγονός που δημιούργησε μια άτυπη κόντρα μεταξύ των δυο μαθηματικών.

Ο Adrien-Marie Legendre (1752-1833) έζησε στα χρόνια του μεγάλου Gauss ήταν ένας φημισμένος Γάλλος μαθηματικός ο οποίος κατά την διάρκεια της ζωής του χάρισε σημαντικές συνεισφορές στα μαθηματικά, από τις πιο γνωστές είναι τα πολυώνυμα Legendre και ο μετασχηματισμός Legendre που πήραν το όνομα του μετά το θάνατο του, καθώς και το έργο του στη θεωρία ελλειπτικών συναρτήσεων.

Στην ηλικία των 14 χρόνων ο Gauss στον ελεύθερο χρόνο του άρχισε να μετράει τους πρώτους αριθμούς ανά μπλοκ των 1000. Προσέγγισε το πρόβλημα της εμφάνισης των πρώτων αριθμών γραφικά, σημειώνοντας στον x΄x άξονα τους ακέραιους αριθμούς και στον y΄y τον αριθμό των πρώτων αριθμών.



Γράφημα 2.1: Πυκνότητα πρώτων μέχρι το 200(εικόνα αριστερά).Πυκνότητα πρώτων μέχρι το 1000(εικόνα δεξιά).

Ο Gauss το 1791 πρότεινε με καθαρά εμπειρικό τρόπο την ασυμπτωτική προσέγγιση των πρώτων αριθμών μέχρι τον Ν-ιοστό ακέραιο αριθμό, $\pi(N) \sim \dfrac{N}{\log N}$, διατυπώνοντας το θεώρημα των πρώτων αριθμών όπως παρουσιάστηκε στο 1 κεφάλαιο. Ο Gauss δεν δημοσίευσε την ερευνά του πάνω στους πρώτους αριθμούς διότι δεν ήταν σε τέλεια μορφή (πιθανότατα διότι δεν περικλείε κάποια απόδειξη), αλλά την κατέγραψε στο προσωπικό του ημερολόγιο όπως κάθε εργασία του. Το έργο του στους πρώτους αριθμούς έγινε γνωστό πολλά χρόνια αργότερα το 1849, καθώς αλληλογραφούσε με τον αστρονόμο Johann Franz Encke. Ο Encke σε μια από τις επιστολές του, έκανε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την συχνότητα των πρώτων αριθμών και ο Gauss του απάντησε με μια επιστολή που επιβεβαιώνει τα όσα αναφέρθηκαν περί της ενασχόλησής του από το 1792. Παρατίθεται σε αυτό το σημείο ένα απόσπασμα της, το οποίο αποτελεί ένα σημαντικό ιστορικό στοιχείο.

<< *Στον Διακεκριμένο μου φίλο,*

Οι παρατηρήσεις σου για τη συχνότητα των πρώτων αριθμών ήταν ενδιαφέρον για εμένα με περισσοτέρους τρόπους από έναν. Μου θύμισε την δική μου προσπάθεια σε αυτό τον τομέα, η οποία ξεκίνησε στο πολύ μακρινό παρελθόν, 1792 ή το 1793…Ακόμη και πριν ξεκινήσω τις λεπτομερείς μου έρευνες σε υψηλότερη αριθμητική, μια από τις πρώτες εργασίες μου ήταν να στρέψω την προσοχή μου στην μείωση της συχνότητας των πρώτων αριθμών, κατά την οποία μέτρησα τους πρώτους αριθμούς σε αρκετά πολλά μπλοκ των χίλιων και κατέγραψα τα αποτελέσματα…σύντομα διαπίστωσα ότι πίσω από όλες αυτές τις διακυμάνσεις, αυτή η συχνότητα είναι κατά μέσο ορό αντιστρόφως ανάλογη του λογάριθμου, έτσι ώστε ο αριθμός των πρώτων κάτω από ένα δεδομένο Ν είναι περίπου ίσος με

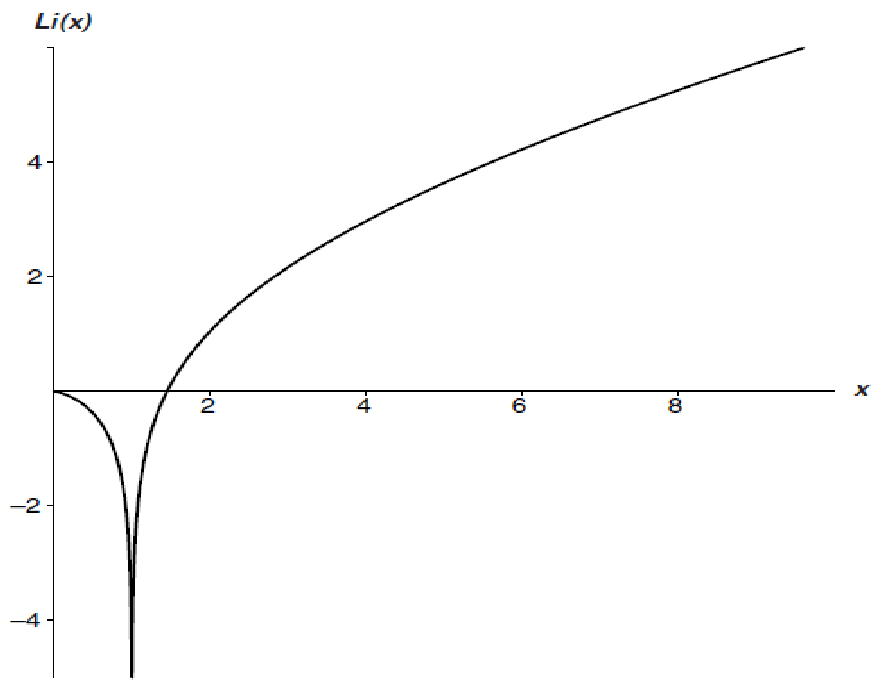
$$\int \frac{dn}{\log(n)} \qquad (2.14)$$

>>

Στην επιστολή αυτή φαίνεται ότι ο Gauss μετά την πρώτη εμπειρική ασυμπτωτική προσέγγιση του, προχωράει σε μια νέα βελτιωμένη προσέγγιση για την εμφάνιση των πρώτων αριθμών. Παρότι δεν υπάρχουν όρια στο ολοκλήρωμα, ο Gauss ολοκλήρωνε από 2 μέχρι x, όπου x ο αριθμός μέχρι τον οποίο θέλουμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό των πρώτων. Η δεύτερη προσέγγιση του ονομάστηκε ‘‘λογαριθμική ολοκληρωτική συνάρτηση’’ και συμβολίζεται με Li(x).

$$Li(\mathrm{x}) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\log(\mathrm{t})} \tag{2.15}$$

Για την καλύτερη κατανόηση της Li(x) ακολουθεί η γραφική της παράσταση.



Γράφημα 2.2: Η γραφική παράσταση της Li(x)

Σε αυτό το σημείο κρίνετε αναγκαίο να παρατεθεί ένα ιστορικό εύρημα από την εργασία του Gauss στο οποίο χρησιμοποιεί τη νέα προσέγγιση του.

x	Count of primes $< x$	$\int \frac{dn}{\log n}$	Difference
500,000	41,556	41,606.4	50.4
1,000,000	78,501	78,627.5	126.5
1,500,000	114,112	114,263.1	151.1
2,000,000	148,883	149,054.8	171.8
2,500,000	183,016	183,245.0	229.0
3,000,000	216,745	216,970.6	225.6

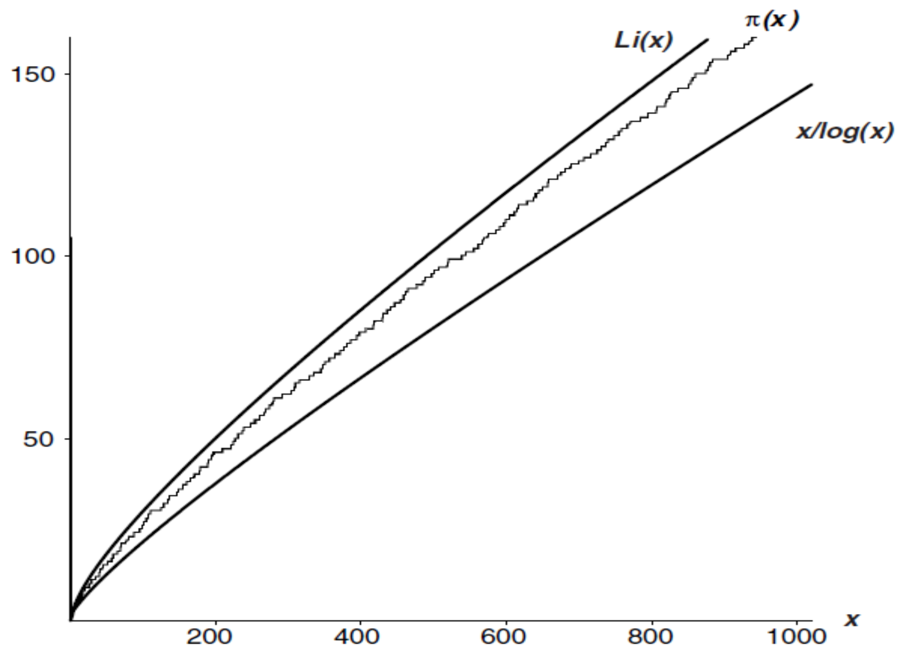
[a]From Gauss

Πίνακα 2.1 : Ο παραπάνω πίνακας προέρχεται από το έργο του Gauss σύμφωνα με το βιβλίο Riemann's Zeta Function του H.M. Edwards.

Η Li(x) χαρακτηρίστηκε βελτιωμένη, διότι είναι μια καλύτερη προσέγγιση του αριθμού των πρώτων μέχρι έναν συγκεκριμένο ακέραιο αριθμό Ν, παρά της $\frac{x}{\log(x)}$ προσέγγισης. Ακολουθεί ένας συγκριτικός πίνακας και ένα γράφημα που επιβεβαιώνει τον παραπάνω ισχυρισμό.

N	$\pi(N)$	$\frac{N}{\log N} - \pi(N)$	$Li(N) - \pi(N)$
100,000,000	5,761,455	−332,774	754
1,000,000,000	50,847,534	−2,592,592	1,701
10,000,000,000	455,052,511	−20,758,030	3,104
100,000,000,000	4,118,054,813	−169,923,160	11,588
1,000,000,000,000	37,607,912,018	−1,416,706,193	38,263
10,000,000,000,000	346,065,536,839	−11,992,858,452	108,971
100,000,000,000,000	3,204,941,750,802	−102,838,308,636	314,890

Πίνακας 2.2 : Συγκριτικός πίνακας της Li(N) με την $N/\log(N)$ *προσέγγιση.*



<u>Γράφημα 2.2</u> :Οι γραφικές παραστάσεις των προσεγγίσεων του Gauss σε σχέση με την γραφική παράσταση του πραγματικού αριθμού των πρώτων π(x)

<u>Θεώρημα 2.2</u> : (Βελτιωμένο θεώρημα πρώτων αριθμών) Έστω x ακέραιος αριθμός τότε

$$\pi(\mathrm{x}) \sim Li(\mathrm{x}) \tag{2.16}$$

όπου π(x) ο αριθμός των πρώτων μέχρι το x και Li(x) η λογαριθμική ολοκληρωτική συνάρτηση.

Λόγο της ιδιαιτερότητας του Gauss, η πρώτη δημοσιευμένη δουλειά στη θεωρία των πρώτων αριθμών που προσεγγίζει το PNT εμφανίζεται το 1798 από τον Adrien-Marie Legendre, στο βιβλίο του ‘‘Πραγματεία στην θεωρία αριθμών’’. Μέσα σε αυτό το βιβλίο υποθέτει με βάση κάποιους πρώτους αριθμούς που είχε μετρήσει ότι:

$$\pi(\mathrm{x}) \sim \frac{x}{A\log x + B} \tag{2.17}$$

για κάποιους αριθμούς A,B που προσδιορίζονται ανάλογα το x. Σε μεταγενέστερη έκδοση του βιβλίου του επαναπροσδιορίζει την υπόθεση του (την οποία δεν μπορούσε να αποδείξει) σε

$$\pi(\mathrm{x}) \sim \frac{x}{\log x - \mathrm{A}} \tag{2.18}$$

όπου το A, για πολύ μεγάλο x πλησιάζει κοντά στο νούμερο 1,08366.

Ο Gauss αναφέρει τις υποθέσεις του Legendre σε επιστολή του μπρος τον Encke και μάλιστα επικρίνει την τιμή 1.08366. Καθόλη τη διάρκεια της ζωής του ο Gauss δεν έπαψε να ασχολείται με την ασυμπτωτική προσέγγιση του, αφού έλεγχε κάθε δημοσιευμένο πίνακα πρώτων της εποχής του επιβεβαιώνοντας την υπόθεση του, επίσης συνέχισε να μετράει πρώτους αριθμούς στον ελεύθερο χρόνο του (εκτιμάται ότι έφτασε να μετρήσει τους πρώτους μέχρι το 3.000.000).

Το 1838 εμφανίζεται άλλη μια ασυμπτωτική προσέγγιση, η ανακοίνωση της αποδίδεται στο μεγάλο μαθηματικό Dirichlet (1805 - 1859), την οποία γνωστοποίησε γραπτός και στον Gauss, όμως δεν υπήρχε και πάλι κάποια απόδειξη του ισχυρισμού του και δεν δημοσιεύτηκε ποτέ επίσημα.

$$\sum^{x} \frac{1}{\log n}\ ,\ n \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

[Περισσότερες πληροφορίες για τον διακεκριμένο μαθηματικό Dirichlet υπάρχουν στο ιστορικό εύρημα του 1837]

Μετα το 1838 εμφανίζονται δυο πολύ σημαντικές εργασίες του μεγάλου Ρώσου μαθηματικού Pafnuty Lvovich Chebyshev. Το έργο του αποτελεί την μια μελέτη της συνάρτησης π(x) με στοιχειώδεις μεθόδους (χωρίς τη χρήση μιγαδικής ανάλυσης), αν και η απόδειξη του PNT τελικά δεν επιτυγχάνεται από τον Chebyshev, οι εργασίες του δίνουν σημαντικά αποτελέσματα. Οι εργασίες του διακεκριμένου Chebyshev είχαν μελετηθεί σε βάθος από τον Riemann, έτσι εξηγείται και η επιρροή που είχε δεχτεί ο Riemann σε αρκετά σημεία της εργασίας του από το έργο του Ρώσου.

Ο Chebyshev γεννήθηκε στης 16 Μάιου του 1821 στο χωριό της Ρωσίας Akatovo. Η μόρφωση του ξεκινάει από το σπίτι του, όπου έκανε μάθημα μαζί με την μητέρα του και την ξαδέρφη του. Έμαθε από αρκετά μικρή ηλικία γαλλικά γεγονός που τον βοήθησε στην επικοινωνία του με άλλους μαθηματικούς αργότερα. Λόγο ενός προβλήματος στο πόδι του δεν μπορούσε να ακολουθήσει τα παιδιά της ηλικίας του και έτσι αφοσιώθηκε πλήρως στις σπουδές του. Σπούδασε μαθηματικά στο πανεπιστήμιο της Μόσχας όπου πήρε το πτυχίο του το 1841. Αργότερα μετακόμισε στην Αγιά Πετρούπολη όπου ίδρυσε ένα από τα πιο σημαντικά σχολεία μαθηματικών της Ρωσίας. Θεωρείται από την επιστημονική κοινότητα ‘‘ο Πατέρας τον μαθηματικών της Ρωσίας’’. Προς τιμή του έχει δοθεί το όνομα του σε ένα ρωσικό ερευνητικό κέντρο, σε ένα σεληνιακό κρατήρα αλλά και σε έναν αστεροειδή.

Η πρώτη εργασία του Chebyshev πάνω στο PNT δημοσιεύεται το 1849 με τίτλο ‘‘On the function that Determines the Totality of Prime Numbers Less Than a Given Limit’’ ενώ η δεύτερη το 1850. Ακολουθούν τα δυο πιο σημαντικά αποτελέσματα αυτών των εργασιών.

Πρώτο αποτέλεσμα Chebyshev

Αν το $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(\mathrm{x})}{\mathrm{x}/\log \mathrm{x}}$ υπάρχει, τότε είναι απαραίτητα ίσο με 1.

Το δεύτερο και σημαντικότερο αποτέλεσμα ήταν μια ανισότητα στην οποία εντοπίζει το άνω και κάτω φράγμα της π(x).

Δεύτερο αποτέλεσμα Chebyshev

$$0,92129\frac{\mathrm{x}}{\log \mathrm{x}} \le \pi(\mathrm{x}) \le 1,1056\frac{\mathrm{x}}{\log \mathrm{x}} \tag{2.20}$$

Δηλαδή το σχετικό σφάλμα της προσέγγισης $\frac{\mathrm{x}}{\log \mathrm{x}}$ είναι πάντα μικρότερο του 11%.

Ο Chebyshev στην πρώτη εργασία, παίρνει λογάριθμο στο γινόμενο Euler και αυτό είναι το σημείο εκκίνησης του και στην συνέχεια αποδεικνύει τον παρακάτω ολοκληρωτικό τύπο.

$$\zeta(\mathrm{s})-1-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{s})}\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^{s-1}dx.$$

Ο Chebyshev στην δεύτερη εργασία του εισάγει δυο νέες συναρτήσεις για να μελετήσει τη π(x) τις :

$$\Theta(\mathrm{x})=\sum_{p\le x}\log p$$

$$\Psi(\mathrm{x})=\Theta(\mathrm{x})+\Theta(\sqrt{x})+\Theta(\sqrt[3]{x})+\ldots$$

αλλά απέδειξε και την ταυτότητα

$$\sum_{n\le x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)=\log[\mathrm{x}]!.$$

Μετα το φανταστικό έργο του Chebyshev η επόμενη σημαντική εργασία πάνω στο θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι αυτή του Riemann το 1859, όπου με τις πρωτότυπες μεθόδους που χρησιμοποιεί ανοίγει το δρόμο ώστε τελικά το 1896 να αποδειχθεί το PNT από δυο κορυφαίους μαθηματικούς, τον Hadamard και τον de la Valee Poussin ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον.

1814 Ο Augustin-Louis Cauchy γεννήθηκε 21 Αυγούστου το 1789, ήταν ένας από τους πιο μεγάλους Γάλλους μαθηματικούς της ιστορίας. Αντιμετώπισε τα μαθηματικά με την απόλυτη αυστηρότητα που τους αρμόζει και όρισε εκ’ νέου αρκετά θεωρήματα του απειροστικού λογισμού με αυστηρή διατύπωση, ενώ τα απόδειξε και με την ίδια αυστηρότητα. Ήταν επίσης ο πρώτος που ασχολήθηκε με την μελέτη των αντιμεταθετικών ομάδων της αφηρημένης Άλγεβρας. Περιλαμβάνεται επίσης στη λίστα των πρωτοπόρων των μαθηματικών στο κλάδο της μαθηματικής ανάλυσης. Πέθανε στα 68 του χρόνια το 1857 αφήνοντας πίσω του ένα σημαντικό μαθηματικό έργο.

Ο Cauchy εισήγαγε πολύ σημαντικά θεωρήματα στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, το πιο σημαντικό του θεώρημα παρουσιάστηκε σε μια εργασία του το 1814, το οποίο και θα διατυπώσουμε παρακάτω. Η εργασία αυτή είναι σημαντική διότι ήταν η τελευταία και πιο πρωτοποριακή εργασία, γνωστή στην εποχή του Riemann, πάνω στις μιγαδικές συναρτήσεις πριν γραφτεί η εργασία του Riemann το 1859. Ο Cauchy σε αυτή την εργασία θέτει τις αρχές της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων και γι’ αυτό θεωρείται σήμερα από πολλούς μαθηματικούς ‘‘πατέρας’’ της μιγαδικής ανάλυσης.

Πριν προχωρήσουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες για την εργασία του Cauchy, θεωρείται απαραίτητη η ιστορική γνώση για την περίοδο εμφάνισης των μιγαδικών αριθμών, οι οποίοι προέκυψαν από την ανάγκη να λυθούν οι κυβικές εξισώσεις, αλλά κυρίως η γνώση των βασικών σταδίων εξέλιξης τους μέχρι την εργασία του Cauchy και τη γέννηση της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων.

Οι σπόροι των φανταστικών αριθμών φυτευτήκαν το 12 αιώνα. Εκείνη την εποχή εισήχθη στην Ιταλία μέσο μιας λατινικής μετάφρασης του βιβλίο της Άλγεβρας του Πέρση Al-Khwarizmi, όπου περιείχε την πρώτη συστηματική λύση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, την εξάπλωση αυτή της αραβικής γνώσης βοήθησε και το έργο του Leonardo da Pisa (Fibonacci)(1170-1250). Μέσα στο έργο του μαθηματικού Leonardo da Pisa που δημοσιεύτηκε το 1225 εντοπίζουμε και μια προσεγγιστική λύση της κυβικής εξίσωσης $x^3+2x^2+10x=20$,για την οποία έδειξε ότι δεν υπάρχει συγκεκριμένος τύπος για μια ακριβή λύση της.

Στο τέλος του 14 αιώνα εμφανίζονται στη Φλωρεντία δυο ανώνυμα χειρόγραφα τα οποία μέσο της γραμμικής αλλαγής μεταβλητής $x' = x + \frac{1}{3}a$, μετατρέπουν τη γενική γραμμική κυβική εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ στην απλούστερη $x^3 + px + q = 0$. Για θετικούς συντελεστές και θετικά x, προκύπτουν οι παρακάτω μορφές που έμειναν γνωστές ως ‘‘υποβαθμισμένες κυβικές εξισώσεις’’ {depressed cubic equations} :

(1) $x^3 + px = q$

(2) $x^3 = px + q$

(3) $x^3 + q = px$

Στης αρχές του 16ου αιώνα ο καθηγητής του Πανεπιστήμιου της Μπολόνιας, Scipione del Ferro γίνετε ο πρώτος μαθηματικός που δίνει τη λύση της (1) , $x = \sqrt[3]{q/2+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q/2-\sqrt{\Delta}}$, όπου $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

Μετα το θάνατο του del Ferro ο τύπος για την λύση της (1) εξίσωσης ανακαλύπτεται εκ νέου από το μαθηματικό Niccolò Fontana Tartaglia (1499/1500-1557), ο οποίος τον εκμυστηρεύτηκε αργότερα στον Gerolamo Cardano (1501-1576) με την προϋπόθεση να μην τον δημοσιεύσει. Αργότερα ο Cardano μελετώντας χειρόγραφα του del Ferro διαπιστώνει ότι η ίδια φόρμουλα λύσης που του εκμυστηρεύτηκε ο Tartaglia, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον διακεκριμένο μαθηματικό del Ferro. Έτσι αποφασίζει και δημοσιεύει στο έργο του ‘‘Ars Magna’’ το 1545 τις λύσεις των (1),(2),(3) υποβαθμισμένων κυβικών εξισώσεων, αναφέροντας ότι δεν ανακαλύφθηκε από τον ίδιο η φόρμουλα λύσης αλλά από τον del Ferro και αργότερα ανεξάρτητα ξανά ανακαλύφθηκε από τον Tartaglia. Όμως μέχρι και σήμερα η φόρμουλα έμεινε γνωστή άδικα σαν ‘‘η φόρμουλα του Cardano’’ . Ο Cardano κατά την καταγραφή της λύσης της (2) εξίσωσης (της δεύτερης υποβαθμισμένης κυβικής εξίσωσης) παρόλο που υπάρχει ενδεχόμενο να προκύψει αρνητικό Δ και κατ’ επέκταση αρνητική ρίζα, αποφεύγει να αναφερθεί σε αυτή τη περίπτωση στο ‘‘Ars Magna’’. Η περίπτωση αυτή έμεινε γνωστή ως ‘‘casus irreducibilis’’. Σύμφωνα με την πηγή ‘‘B. L. van der Waerden, A History of Algebra, Springer Verlag, NY 1985’’, ο Cardano είναι ο πρώτος που εισάγει το μιγαδικό αριθμό $a+\sqrt{-b}$ αλλά είχε πολλές αμφιβολίες για αυτό.

Μετα τον Cardano ο Ιταλός μαθηματικός Rafael Bombelli (1526-1572) συγγράφει το 1572 το έργο του ‘‘l’Algebra’’ που αποτελείται από τρία βιβλία. Μέσα στο έργο αυτό ο Bombelli εισάγει τον συμβολισμό $\sqrt{-1}$ και τον ονομάζει “pi´u di meno”. Κατά την περιγραφή των κυβικών εξισώσεων ακολουθείται η ανάλυση του Cardano, όμως σε αυτό το έργο αναλύεται και η περίπτωση ‘‘casus irreducibilis’’ (περίπτωση αρνητικής ρίζας, Δ<0).

Συγκεκριμένα ο Bombelli θεωρεί την εξίσωση $x^3 = 15x + 4$ για την οποία η φόρμουλα του Cardano δίνει $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Ο Bombelli παρατηρεί αρχικά ότι μια λύση είναι το x = 4 και σπεύδει να ερμηνεύσει την λύση Cardano ως μια άλλη έκφραση του x = 4. Θέτει αρχικά $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+bi$ και επόμενος ακολουθεί ότι $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-bi$. Μετα από αλγεβρικούς χειρισμούς βρίσκει ότι $a = 2$, $b = 1$. Επομένως $x = a+bi+a-bi = 2a = 4$. Ο Bombelli μετά από αυτή τη λύση σχολιάζει ‘‘Στην αρχή το πράγμα έδειχνε να βασίζεται περισσότερο στη σοφία πάρα στην αλήθεια, αλλά έψαξα μέχρι να βρω την απόδειξη’’. Με την μελέτη του αυτή, έχει ξεχωρίσει ως κεντρική φιγούρα για την κατανόηση των φανταστικών αριθμών.

Έπειτα από κάποια χρόνια το 1637 εμφανίζεται η πραγματεία του Γάλλου φιλοσόφου και μαθηματικού Rene Descartes(1596-1650) με τίτλο “ La Géométrie ”. Στην πραγματεία αυτή εισάγεται για πρώτη φορά υποτιμητικά ο όρος ‘‘φανταστικοί αριθμοί’’ (για εκείνους τους αριθμούς που αν υψωθούν στο τετράγωνο δίνουν αρνητικό αριθμό) καθώς εκτιμά ότι οι φανταστικοί αριθμοί δεν μπορούν να έχουν γεωμετρική ερμηνεία.

Αρκετά χρονιά αργότερα ο μεγάλος μαθηματικός Euler (1707-1783) εισήγαγε το πασίγνωστο σύμβολο $i=\sqrt{-1}$, που έχει μείνει και χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα σε οποιοδήποτε βιβλίο η κείμενο αναφέρεται στους μιγαδικούς αριθμούς. Επιπλέον φαντάστηκε τους μιγαδικούς αριθμούς ως σημεία με ορθογώνιες συντεταγμένες, αλλά δεν έδωσε κάποια ικανοποιητική βάση για τους μιγαδικούς αριθμούς. Ο Euler επινόησε τον μαθηματικό τύπο $x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ και οπτικοποίησε τις ρίζες της εξίσωσης $z^n=1$ ως κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου. Επίσης όρισε την μιγαδική εκθετική συνάρτηση και απέδειξε τον τύπο $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Εν συνέχεια το 1799 πια σε μια εργασία του ο Νορβηγός μαθηματικός Caspar Wessel (1745-1818) περιγράφει για πρώτη φορά τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών σαν σημεία του μιγαδικού επιπέδου, αντιμετωπίζει τους μιγαδικούς αριθμούς σαν διανύσματα (χωρίς να αναφέρει τον όρο διάνυσμα).

Το επόμενο πολύ σημαντικό στάδιο της ιστορική εξέλιξης των μιγαδικών αριθμών επιτυγχάνεται από τον Jean-Robert Argand (1768-1822). Ο Argand ήταν ένας Παριζιάνος λογιστής για τον οποίο δεν είναι γνωστό αν είχε μαθηματική εκπαίδευση. Ο Argand κατάφερε να θέσει τις βάσεις των μιγαδικών αριθμών στο δοκίμιο του με τίτλο ‘‘Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities” {Δοκίμιο σχετικά με την γεωμετρική ερμηνεία των φανταστικών ποσοτήτων}.

Το 1831 ο William Rowan Hamilton (1805-1865) ορίζει πράξεις μεταξύ διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, συγκεκριμένα όρισε $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ και $(a,b)(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$. Αυτό είναι στη πραγματικότητα ο αλγεβρικός ορισμός των μιγαδικών αριθμών.

Ο όρος ‘‘μιγαδικοί αριθμοί’’ προήλθε από τον Γερμανό μαθηματικό Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Επίσης υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Gauss είχε στην κατοχή του από το 1796 την γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών όμως δεν την εξέδωσε μέχρι το 1831 όταν και υπέβαλε τις ιδέες του στο Royal Society of Gottingen. Το 1811 ο Gauss σε μια επιστολή προς τον Bessel αναφέρει το θεώρημα που αργότερα γίνετε γνωστό ως ‘‘θεώρημα Cauchy’’, αυτό όμως έμεινε αδημοσίευτο και αργότερα ξανά ανακαλύφθηκε από τον Cauchy και τον Weierstrass.

Μετα το Gauss φτάνουμε στον τελευταίο ιστορικό σταθμό εξελίξεις των μιγαδικών αριθμών πριν από την εργασία του Riemann, τη δημιουργία της μιγαδικής ανάλυσης ως ξεχωριστό κλάδο των μαθηματικών μέσα από την εργασία του Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Η εργασία του Cauchy είχε ως κεντρικό θέμα τον ορισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων και αποτέλεσε την αρχή της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων, το οποίο κατατέθηκε από τον ίδιο το

1814 στο French Academie des Sciences. Θεωρείται πολύ σημαντική εργασία για δυο κυρίους λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι αν και δεν περιέχει τον ακριβή ορισμό της αναλυτικής (ή ολόμορφης) συνάρτησης που είναι βασική έννοια της μιγαδικής ανάλυσης, η έννοια του όρου της αναλυτικής συνάρτησης είναι εμφανής σε όλη την έκταση της εργασίας του. Ο δεύτερος λόγος είναι η διατύπωση και η απόδειξη ενός από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της σημερινής μιγαδικής ανάλυσης, του ‘‘θεωρήματος του Cauchy’’ το οποίο θεωρείται μια από τις πιο σημαντικές συνεισφορές του Cauchy στα μαθηματικά. Το θεώρημα του Cauchy δόθηκε στην πλήρη μορφή του, από τον ίδιο το 1825.

Θεώρημα 2.3 : (Cauchy) : Έστω f μια ολόμορφη συνάρτηση σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο D με f' συνεχή στο D. Τότε για κάθε απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη C μέσα στο D ισχύει

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{2.21}$$

Το παραπάνω θεώρημα και η παραδοχή των μελετητών ότι ο Cauchy χρησιμοποίησε την έννοια της αναλυτικής συνάρτησης χωρίς όμως αυτή να έχει οριστεί ακόμα επίσημα, χαρακτηρίζουν την εργασία του Cauchy πρωτοποριακή και την τοποθετούν σε εξέχουσα θέση ανάμεσα στις εργασίες που σχετίζονται με την μιγαδική ανάλυση.

Η επόμενη μεγάλη συμβολή του Cauchy έρχεται το 1826 όταν εισάγει τον επίσημο ορισμό του υπολοίπου μιας μιγαδικής συνάρτησης. Ο ορισμός του αυτός σχετίζεται με μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν πόλους, δηλαδή σημεία που απειρίζουν θετικά ή αρνητικά τη μιγαδική συνάρτηση. Έστω f(z) μια μιγαδική συνάρτηση, η οποία μπορεί να γραφεί σε μια γειτονιά του z_0 ως :

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{B_1}{z - z_0} + \ldots + \frac{B_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{, όπου } B_i, z_0, a \in C$$

όπου φ(z) αναλυτική, τότε η f έχει πόλο τάξης n στο z_0. Για n = 1 έχω απλό πόλο. Ο Cauchy ονόμασε το B_1 υπόλοιπο της f(z) στο z_0.

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Έπειτα το 1831 καταθέτει δυο ακόμα εργασίες στην Academy of Sciences of Turin. Η πρώτη εργασία περιέχει ένα τύπο που μένει γνωστός μέχρι και σήμερα ως ο ‘‘ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy’’

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

όπου f αναλυτική συνάρτηση στο απλά συνεκτικό πεδίο D και C μια απλή, κλειστή τμηματικά λεία θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που βρίσκεται μέσα στο D και z_0 εσωτερικό σημείο της C.

Η δεύτερη εργασία του Cauchy παρουσιάζει το θεώρημα υπολοίπου, το οποίο διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.4 : (Ολοκληρωτικών υπολοίπων): Αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική στο απλά συνεκτικό πεδίο D εκτός από τα σημεία $z_1,z_2,\ldots,z_n$ και C μια απλή, κλειστή τμηματικά λεία θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του D που έχει στο εσωτερικό της τα σημεία αυτά, τότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\mathrm{z})\,\mathrm{dz} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, s(\mathrm{f},\mathrm{z}_k)\,.$$

Σύμφωνα με το βιβλίο του Frank Smithies «Cauchy και η δημιουργία της Θεωρίας της Μιγαδικής Ανάλυσης, Cambridge University Press, 1997, 177 σελ.», ο Augustin-Louis Cauchy παρουσίασε το 1831 ένα παρόμοιο θεώρημα με αυτό που σήμερα ονομάζουμε ''Αρχή του ορίσματος'' {The Argument Principle} αναφέροντας μόνο μηδενικά και όχι πόλους. Δυο χρόνια πριν τον θάνατο του το 1855 δημοσίευσε μια εργασία στην οποία βελτιώνει το θεώρημα του, το οποίο εμπλέκει πλέον και τους πόλους και τα μηδενικά μιας μιγαδικής συνάρτησης.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι μερικά χρονιά πριν την εργασία του Riemann, ο Cauchy δίνει αρκετά σημαντικά θεωρήματα για τις μιγαδικές συναρτήσεις και χρησιμοποιεί την έννοια της αναλυτικής συνάρτησης στις εργασίες του, χωρίς να την έχει ορίσει σαν όρο, έτσι το έργο του Cauchy θέτει την αρχή της θεωρίας της μιγαδικής συνάρτησης. Από την στιγμή που ορίσθηκε η αρχή αυτής της θεωρίας ακολούθησαν πολλές μαθηματικές συμβολές, όπως θεωρήματα, πορίσματα, ορισμοί από διάφορους μεγάλους μαθηματικούς ώστε σήμερα να έχουμε την τελική μορφή της μιγαδικής ανάλυσης. Η αμέσως επόμενη μεγάλη μαθηματική συμβολή πάνω στις μιγαδικές συνάρτησης έγινε το 1859 από την εργασία του Riemann, όπου πραγματοποιήθηκε μια εκτενή ανάλυση της μιγαδικής συνάρτησης πλέον ζ(s).

1837 Το ιστορικό εύρημα που επιτεύχθηκε το 1837 και εξετάζεται σε αυτό το σημείο της μελέτης, εκπονείται από μια μαθηματική προσωπικότητα, η οποία φαίνεται να επηρέασε περισσότερο από οποιονδήποτε άλλο μαθηματικό τον Riemann, αυτός είναι ο Γερμανός μαθηματικός Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Ο Riemann ήταν φοιτητής του Dirichlet και θεωρούσε ότι ήταν ο δεύτερος σπουδαιότερος μαθηματικός εν ζωή μετά τον Gauss (όπως έχουμε αναφέρει ήταν και φοιτητής του Gauss).

Ο Dirichlet έζησε από το 1805 έως το 1859, ήταν Γερμανός μαθηματικός και καταγόταν από μια μικρή πόλη κοντά στη Κολονία, όπου και μορφώθηκε. Νεαρός ήταν τρομερά επιμελής μαθητής αφού στα 16 του χρόνια είχε αποκτήσει όλες τις απαραίτητες γνώσεις που χρειαζόταν για να εισαχθεί στο Πανεπιστήμιο.

Μετα το πρώτο πτυχίο του σε γερμανικό πανεπιστήμιο, αναζητώντας υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών γνώσεων μεταβαίνει στο Παρίσι, το Μάιο του 1822 και μένει μέχρι το 1825. Εκείνη την περίοδο το Παρίσι ήταν ο αγαπημένος προορισμός όλων των ανθρώπων που λάτρευαν τα μαθηματικά, καθώς θεωρείτο μέχρι εκείνη την εποχή το παγκόσμιο κέντρο των μαθηματικών γνώσεων. Ο Dirichlet στο Παρίσι παρακολούθησε διαλέξεις πολύ σημαντικών μαθηματικών της εποχής, του Fourier, Laplace, Legendre και του Poisson. Κατά την διάρκεια του ταξιδιού του δεν αποχωρίστηκε καθόλου το αγαπημένο μαθηματικό του βιβλίο ‘‘Disquisitiones Arithmeticae’’{Αριθμητικές έρευνες}, ένα σπουδαίο βιβλίο του Gauss που εκδόθηκε το 1801, το οποίο περιέχει τις συνεισφορές του Gauss στη θεωρία αριθμών αλλά και όλες τις προγενέστερες γνώσεις όσο αφορά τη θεωρία αριθμών.

Το 1827 στα 22 του χρόνια ο Dirichlet επιστρέφει στη Γερμάνια για να διδάξει στο πανεπιστήμιο της Breslau. Κέρδισε τη θέση αυτή με τη βοήθεια του Alexander von Humboldt. Ο Dirichlet δεν είχε πραγματοποιήσει τη διδακτορική διατριβή που χρειαζόταν για να διδάξει, όμως αντί αυτής κατέθεσε το σημαντικό υπόμνημα που είχε γράψει πάνω στο θεώρημα Fermat. Το πανεπιστήμιο αποφάσισε να παράκαμψη αυτό το πρόβλημα και τον έχρησε επίτιμο διδάκτορα του το Φεβρουάριο του 1827. Στο πανεπιστήμιο της Breslau ο Dirichlet συνεχίζει την έρευνα πάνω στη θεωρία αριθμών και δημοσιεύει αρκετές σημαντικές ανακαλύψεις πάνω στο ‘‘biquadratic reciprocity law’’ {νόμο της διτετραγωνικής αμοιβαιότητας} , που αποτελούσε βασικό αντικείμενο έρευνας του Gauss στο βιβλίο του ‘‘Disquisitiones Arithmeticae’’.

Ο Dirichlet δυσαρεστημένος από το επίπεδο των μαθηματικών του πανεπιστήμιου της Breslau το εγκαταλείπει για το πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου έμεινε και για το μεγαλύτερο μέρος της καριέρας του, από το 1828 μέχρι το 1855. Αναμεσά στους φοιτητές του εκεί συναντάει ένα ντροπαλό αλλά ιδιαίτερα ιδιοφυή νεαρό, τον Bernhard Riemann, ο οποίος είχε έρθει από το πανεπιστήμιο του Gottingen αναζητώντας ανώτερη μαθηματική εκπαίδευση.

Εκείνη την εποχή ο Dirichlet εμπνευσμένος από το γινόμενο του Euler (το οποίο είχε εμφανιστεί 100 χρόνια πριν) και χρησιμοποιώντας μια μορφή μαθηματικών που οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στο Gauss και στο βιβλίο του Disquisitiones Arithmeticae, το 1837 καταφέρνει να συνδυάσει ιδέες από την ανάλυση και την αριθμητική και να αποδείξει ένα σημαντικό θεώρημα των πρώτων αριθμών, το οποίο είχε υποθέσει αλλά δεν είχε αποδείξει ποτέ ο Gauss. Η προσπάθεια του αυτή καταγράφεται το 1837 στην ευρέως γνωστή εργασία του με τίτλο ‘‘Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetishe Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthalt’’ { Απόδειξη της θεωρίας ότι κάθε αριθμητική ακολουθία χωρίς όριο, της οποίας ο πρώτος όρος και η διαφορά, είναι ολόκληροι αριθμοί, χωρίς κοινό παράγοντα, περιέχει άπειρα πολλούς πρώτους αριθμούς }. Ακολουθεί η διατύπωση του θεωρήματος που απέδειξε ο Dirichlet.

<u>Θεώρημα 2.5</u> : (Θεώρημα Dirichlet) : Για δυο θετικούς ακέραιους q, α με (α,q) = 1, υπάρχουν άπειροι πολλοί πρώτοι αριθμοί ισοϋπόλοιποι του α modulo q. Ισοδύναμα, κάθε αριθμητική ακολουθία

$$\{\mathrm{qn}+\alpha : n=0,1,2,...\}, \quad q,a\in\mathbb{N}^{+},(\alpha,\mathrm{q})=1\}, \text{ περιέχει απείρως πολλούς πρώτους.} \tag{2.22}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος του Dirichlet ήρθε με την εισαγωγή κάποιων εργαλείων της ανάλυσης, τα οποία εισήχθησαν από τον Dirichlet και πήραν το όνομα του. Συγκεκριμένα αυτά ήταν οι χαρακτήρες Dirichlet και οι Dirichlet L-συναρτήσεις. Οι χαρακτήρες Dirichlet είναι συγκεκριμένες αριθμητικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούνται για να εξαχθούν όροι που ανήκουν σε κάποια συγκεκριμένη αριθμητική πρόοδο από ένα άθροισμα. Οι Dirichlet L-συναρτήσεις είναι οι Dirichlet σειρές, οι οποίες σχετίζονται με τους χαρακτήρες Dirichlet. Οι αναλυτικές ιδιότητες των σειρών Dirichlet, και ιδιαίτερα ο υπολογισμός των μηδενικών τους διαδραματίζουν έναν ρολό ‘‘κλειδί’’ στην απόδειξη του θεωρήματος του Dirichlet.

Θα συνεχίσουμε σε αυτό το σημείο δίνοντας τον πλήρη ορισμό των εργαλείων που εισήχθησαν από τον Dirichlet αλλά και απαραίτητα θεωρήματα και λήμματα μέσα από τα οποία καταλήγουμε στην περίφημη απόδειξη του Dirichlet.

<u>ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ DIRICHLET</u>

<u>Ορισμός 2.3</u> : (Χαρακτήρες Dirichlet) : Έστω q θετικός ακέραιος. Ένας Dirichlet χαρακτήρας modulo q, είναι μια αριθμητική συνάρτηση χ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

i) χ είναι περιοδικό modulo q, δηλαδή $\chi(\mathrm{n}+\mathrm{q})=\chi(\mathrm{n})$ για καθε $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$.

ii) χ είναι απολύτως πολλαπλασιαστικό, δηλαδή
$\chi(\mathrm{nm})=\chi(\mathrm{n})\chi(\mathrm{m})$ για κάθε $\mathrm{n,m}\in\mathbb{N}$ και $\chi(1)=1$.

iii) $\chi(\mathrm{n})\neq 0$ αν και μονον αν $(n,\mathrm{q})=1$.

Η αριθμητική συνάρτηση $\chi_0=\chi_{0,\mathrm{q}}$ ορίζεται ως $\chi_0(\mathrm{n})=1$ αν $(n,q)=1$ και ως $\chi_0(\mathrm{n})=0$ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Αυτή η αριθμητική συνάρτηση ονομάζεται <u>πρωταρχικός χαρακτήρας modulo q</u>.

<u>Θεώρημα 2.7</u> : (Στοιχειώδης ιδιότητες των Dirichlet χαρακτήρων) : Έστω q θετικός ακέραιος αριθμός, τότε :

i) Οι τιμές των Dirichlet χαρακτήρων χ modulo q είναι ή $\chi(\mathrm{n})=0$ είτε $\chi(\mathrm{n})=\mathrm{e}^{2\pi i\nu/\phi(\mathrm{q})}$ για κάποιο $\nu\in\mathbb{N}$.

ii) Οι χαρακτήρες modulo q σχηματίζουν μια ομάδα η οποία είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή $\chi_1\chi_2(\mathrm{n}) = \chi_1(n)\chi_2(n)$. Ο πρωταρχικός χαρακτήρας χ_0 είναι το ουδέτερο στοιχείο αυτής της ομάδας, και ο αντίθετος ενός χαρακτήρα χ δίνεται από τον χαρακτήρα $\overline{\chi}$ που ορίζεται ως $\overline{\chi}(\mathrm{n}) = \overline{\chi(\mathrm{n})}$.

Για να αντλήσουμε περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες της ομάδας χαρακτήρων, χρειαζόμαστε ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα από την άλγεβρα, το παρακάτω λήμμα.

<u>*Λήμμα 2.1*</u> : (Βασικό θεώρημα των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων) : Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων. Δηλαδή για κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα G υπάρχουν $g_1,\ldots,g_r \in G$ αντίστοιχων τάξεων $h_1,\ldots,h_r$ έτσι ώστε κάθε στοιχείο $g \in G$ να έχει μοναδική αναπαράσταση $g = \prod_{i=1}^{r} g_i^{\nu_i}$ με $0 \le \nu_i < h_i$. Επιπλέον έχουμε

$$\prod_{i=1}^{r} h_i = |G|.$$

Αν αντί για μια γενικά αβελιανή ομάδα G έχουμε την πολλαπλασιαστική αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Z}/\mathrm{q}\mathbb{Z})$ των κλάσεων υπολοίπου modulo q στο βασικό θεώρημα της άλγεβρας για τις πεπερασμένες αβελιανές ομάδες έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

<u>*Λήμμα 2.2*</u> : (Βασικό θεώρημα για της κλάσεις υπολοίπου modulo q) : Έστω q θετικός ακέραιος αριθμός. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $g_1,\ldots,g_r$ όλοι σχετικά πρώτοι με το q και αντίστοιχων τάξεων $h_1,\ldots,h_r$ modulo q (δηλαδή το h_i είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος h τέτοιος ώστε $g_i^h \equiv 1 \bmod q$) με την ακόλουθη ιδιότητα : Για κάθε ακέραιο n με $(\mathrm{n},\mathrm{q}) = 1$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος ν_i με $0 \le \nu_i < h_i$, τέτοιο ώστε $n = \prod_{i=1}^{r} g_i^{\nu_i} \bmod q$. Επιπλέον ισχύει ότι $\prod_{i=1}^{r} h_i = \phi(\mathrm{q})$.

Η κύρια εφαρμογή του προηγούμενο λήμματος δίνεται στο ακόλουθο λήμμα.

<u>*Λήμμα 2.3*</u> : (Αριθμός χαρακτήρων modulo q) : Έστω q θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχουν ακριβώς $\phi(\mathrm{q})$ Dirichlet χαρακτήρες modulo q. Επιπλέον για κάθε ακέραιο α με $(\alpha,\mathrm{q}) = 1$ και α $\not\equiv 1 \bmod q$ υπάρχει χαρακτήρας χ με $\chi(\alpha) \ne 1$.

Ακολουθεί ένα βασικό θεώρημα των χαρακτήρων Dirichlet που θα χρησιμοποιηθεί και στην απόδειξη του θεωρήματος Dirichlet.

Θεώρημα 2.8 : (Σχέσεις ορθογωνιότητας των χαρακτήρων Dirichlet) : Έστω q θετικός ακέραιος αριθμός.

i) Για κάθε Dirichlet χαρακτήρα χ modulo q ισχύει ότι

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \chi(\alpha) = \begin{cases} \phi(\mathrm{q}) & \text{αν } \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου χ_0 είναι ο πρωταρχικός χαρακτήρας modulo q.

ii) Για κάθε ακέραιο $\alpha \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(\alpha) = \begin{cases} \phi(\mathrm{q}) & \alpha \equiv 1 \bmod \mathrm{q}, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου το άθροισμα τρέχει πάνω σε όλους τους Dirichlet χαρακτήρες modulo q.

iii) Για κάθε Dirichlet χαρακτήρες χ_1, χ_2 modulo q ισχύει ότι

$$\sum_{\alpha=1}^{q} \chi_1(\alpha)\overline{\chi_2(\alpha)} = \begin{cases} \phi(\mathrm{q}) & \text{αν } \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

iv) Για κάθε ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(\alpha_1)\overline{\chi(\alpha_2)} = \begin{cases} \phi(\mathrm{q}) & \text{αν } \alpha_1 \equiv \alpha_2 \bmod \mathrm{q} \text{ και } (\alpha_1,\mathrm{q})=1, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου το άθροισμα τρέχει πάνω σε όλους τους Dirichlet χαρακτήρες modulo q.

Η τελευταία αναφορά στους Dirichlet χαρακτήρες είναι ένα πόρισμα που βγαίνει από το (i) του προηγουμένου θεωρήματος.

Πόρισμα 2.1 : (Συνάρτηση αθροίσματος των χαρακτήρων) : Έστω q θετικός ακέραιος και χ ένας χαρακτήρας modulo q.

i Αν χ δεν είναι ο πρωταρχικός χαρακτήρας χ_0 modulo q ,τότε

$$\left|\sum_{n\le x} \chi(\mathrm{n})\right| \le \phi(\mathrm{q}) \qquad (\mathrm{x} \ge 1).$$

ii Αν $\chi = \chi_0$, τότε

$$\left|\sum_{n\le x} \chi(\mathrm{n}) - \frac{\phi(\mathrm{q})}{q} x\right| \le 2\phi(\mathrm{q}) \qquad (\mathrm{x} \ge 1).$$

DIRICHLET L-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 2.4 : Έστω χ ένας Dirichlet χαρακτήρας και έστω μια Dirichlet σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathrm{n})}{n^s}$ που σχετίζεται με αυτόν, η συνάρτηση που ορίζεται ως $\boldsymbol{L}(\mathbf{s}, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathbf{n})}{n^s}$ καλείται Dirichlet L-συνάρτηση, όπου s μιγαδικός αριθμός.

Η αναλυτική συμπεριφορά των Dirichlet L-συναρτήσεων διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος του Dirichlet. Το παρακάτω θεώρημα συγκεντρώνει το κύριες αναλυτικές ιδιότητες των L-συναρτήσεων που χρειάζονται για την απόδειξη του θεωρήματος Dirichlet. Η βασική ιδιότητα, στην οποία βασίζεται η επιτυχία της απόδειξης, είναι η τελευταία, η οποία υποστηρίζει ότι οι L-συναρτήσεις δεν μηδενίζονται στο σημείο s = 1. Αυτή είναι και η ιδιότητα με την πιο δύσκολη απόδειξη.

Θεώρημα 2.9 : (Αναλυτικές ιδιότητες των L-συναρτήσεων) : Έστω χ Dirichlet χαρακτήρας modulo q, και έστω $L(\mathrm{s}, \chi)$ η Dirichlet L-συνάρτηση που σχετίζεται με αυτόν.

i) Αν $\chi \neq \chi_0$, όπου χ_0 είναι ο πρωταρχικός χαρακτήρας modulo q, τότε η $L(\mathrm{s}, \chi)$ είναι αναλυτική στο μισό επίπεδο, σ > 0.

ii) Αν $\chi = \chi_0$, τότε $L(\mathrm{s}, \chi)$ έχει απλό πόλο στο s = 1 με υπόλοιπο $\phi(\mathrm{q})/q$, και είναι αναλυτική για όλα τα σημεία του μισού επιπέδου σ > 0.

iii) Αν $\chi \neq \chi_0$, τότε $L(1, \chi) \neq 0$.

Στηριζόμενος ο Dirichlet στα μαθηματικά εργαλεία που εισήγαγε και κυρίως όπως αναφέραμε στη ιδιότητα ότι μια L-συνάρτηση δεν μηδενίζεται στο s = 1, επιτυγχάνει την απόδειξη του θεωρήματος 2.5 (θεώρημα Dirichlet). Η χρήση της μιγαδικής ανάλυσης ήταν απαραίτητη για την απόδειξη του Dirichlet, γεγονός που τόνισε την δύναμη των εργαλείων της μιγαδικής ανάλυσης, άλλα και τη δύναμη της καινοτομίας που χρησιμοποίησε, δηλαδή τη δύναμη της μετατροπής πραγματικών συναρτήσεων της θεωρίας αριθμών σε μιγαδικές συναρτήσεις. Αυτή τη δύναμη των μιγαδικών συναρτήσεων εντυπωσιάζει τον Riemann, όπου σαν φοιτητής του Dirichlet γνώριζε τα πάντα για το έργο του καθηγητή του.

Η εργασία του Dirichlet το 1837 δημιουργεί μια μεγάλη συγχώνευση μεταξύ της αριθμητικής και της ανάλυσης, μεταξύ της αρίθμησης και της μέτρησης η οποία ήρθε σαν αποτέλεσμα μιας έρευνας πάνω στους πρώτους αριθμούς από τον διακεκριμένο μαθηματικό Dirichlet. Η εργασία αυτή σε γενικές γραμμές με το συνδυασμό ιδεών της ανάλυσης και της αριθμητικής θεωρείται η αυστηρή αρχή της αναλυτικής θεωρίας αριθμών, ως νέου κλάδου των μαθηματικών.

Το 1855 πεθαίνει ο Gauss και την θέση του στο πανεπιστήμιο του Gottingen αναλαμβάνει ο Dirichlet. Η θέση στο πανεπιστήμιο του Gottingen ήταν ο τελευταίος σταθμός της καριέρας του Dirichlet, αφού το 1859 πεθαίνει.

Η αναλυτική θεωρία αριθμών βρίσκεται στην πλήρη δόξα της 22 χρόνια μετα το 1837, στην εργασία του Riemann.

1850 Ο Chebyshev αποδεικνύει την υπόθεση του Bertrand, μέσα από το δεύτερο αποτέλεσμα του που υπήρξε στην εργασία του το 1850, την ανισότητα (2.20), επομένως καταλήγει στην επιβεβαίωση της υπόθεσης του Bertrand, δηλαδή ότι για κάθε α > 1 υπάρχει πάντα ένας πρώτος αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα στο α και 2α.

2.4 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ο κυρίαρχος στόχος του δευτέρου κεφαλαίου έχει επιτευχθεί, εφόσον πια γνωρίζουμε όλα εκείνα τα άμεσα η έμμεσα μαθηματικά ευρήματα που επιτεύχθηκαν πριν από την συγγραφή της εργασίας του Riemann και ανοικοδόμησαν μαθηματικά εργαλεία και γνώσεις που χρησιμοποίησε ο Riemann και σχηματίζουν την εικόνα των μαθηματικών της εποχής. Επομένως θα γίνει εμφανής η πρωτοτυπία της εργασίας του Riemann σύμφωνα με τα μαθηματικά της εποχής του.

Λόγο της ιστορικής πτυχής της εργασίας μελετήθηκαν οι μεγάλοι μαθηματικοί που επηρέασαν κατά κύριο λόγο τον Riemann και κατ' επέκταση την εργασία του. Επισημάνθηκε η προσπάθεια καταγραφής του μοτίβου εμφάνισης των πρώτων αριθμών από τους αρχαίους χρόνους όπου και ορίστηκαν. Δόθηκε έμφαση στην αρχή της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων από τον Cauchy, αφού η εργασία του Riemann είναι μια εκτενή μελέτη της μιγαδικής συνάρτησης ζ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ RIEMANN

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί ένα χρονοδιάγραμμα, το οποίο ξεκινάει από τη χρονολογία που δημοσιοποιείται η διάσημη εργασία του Riemann και συνεχίζει δίνοντας όλες τις εξελίξεις που έχουν υπάρξει μέχρι σήμερα ανά χρονολογία πάνω στην υπόθεση Riemann, προβάλλοντας το μαθηματικό έργο διάφορων μελετητών της υπόθεσης . Στη συνέχεια αναλύεται σε μεγαλύτερο βαθμό το πρωτοποριακό περιεχόμενο της διάσημης εργασίας του Riemann και επιπλέον μερικές σημαντικές εξελίξεις που είχαμε μετα το 1859 πάνω στη υπόθεση Riemann.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι ο αναγνώστης μέσα από το χρονοδιάγραμμα να έχει μια σαφή εικόνα των εξελίξεων πάνω στην υπόθεση Riemann μέχρι και σήμερα, αλλά και να αποκτήσει βαθύτερη γνώση περί του περιεχομένου της εργασίας του Riemann. Το χρονοδιάγραμμα περιλαμβάνει κάποιες αναφορές στην γενικευμένη υπόθεση Riemann, την οποία δεν θα ορίσουμε και δεν θα εξετάσουμε περεταίρω αφού η μελέτη μας συγκεντρώνεται αποκλειστικά στην κλασική υπόθεση Riemann. Τέλος επιχειρείται μια ανάλυση μερικών εξελίξεων της υπόθεσης Riemann, ώστε αυτές να κατανοηθούν πλήρως από τον αναγνώστη.

3.2 ΧΡΟΝΟΔΙΑΓΡΑΜΑ

Παρουσιάζεται το χρονοδιάγραμμα των ιστορικών σημαντικών εξελίξεων από την εργασία του Riemann μέχρι σήμερα πάνω στην HR, το οποίο επιπλέον προσφέρει μια συνοπτική ανάλυση των ιστορικών αυτών εξελίξεων.

- **1859**. Ο Riemann δημοσιεύει το ‘‘Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse’’, στο οποίο διατυπώνει την υπόθεση του. Η πρότυπη δήλωση της υπόθεσης είναι η ακόλουθη.

  << Μπορούμε να βρούμε τώρα προσεγγιστικά τον αριθμό των πραγματικών ριζών μέσα σε αυτά τα όρια, και είναι πολύ πιθανόν όλες οι ρίζες να είναι πραγματικές. Σιγουρά κάποιος θα επιθυμούσε μια πιο αυστηρή απόδειξη εδώ, όμως έχω βάλει στην άκρη προς το παρόν την αναζήτηση γι’ αυτό, μετα από κάποιες φευγαλέες μάταιες απόπειρες, καθώς δεν είναι απαραίτητη για τον στόχο της έρευνας μου. >>

  Η εργασία του Riemann εισάγει τη διάσημη συναρτησιακή εξίσωση

  $$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s})=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

  Η εργασία του είναι μια ενδελεχή έρευνα της συνάρτησης ζ(s), ενώ το κεντρικό της αποτέλεσμα είναι η σύνδεση των μηδενικών της ζ(s) συνάρτησης με την συνάρτηση π(x), δηλαδή της συνάρτησης καταμέτρησης των πρώτων μέχρι έναν δεδομένο αριθμό x. Ένα μέρος από το έργο του Riemann, το οποίο δεν είχε δημοσιευθεί, αγνοήθηκε από τους περισσοτέρους μαθηματικούς μετα το θάνατο του, όμως η μελέτη του Carl Ludwig Siegel (1896-1981) στην εργασία του Riemann και στα ιδιωτικά έγγραφα του, έφερε ξανά στο προσκήνιο την υπόθεση Riemann.

- **1885**. Ο Stieltjes ισχυρίστηκε ότι έχει μια απόδειξη γι’ αυτό που αργότερα ονομάστηκε εικασία Merten. Η απόδειξη του παρόλα αυτά δεν δημοσιεύτηκε ποτέ, ούτε βρέθηκε στα προσωπικά έγγραφα του μετα τον θάνατο του. Η εικασία Merten συνεπάγει την υπόθεση Riemann. Αυτή η δήλωση του Stieltjes θεωρείται ότι είναι η πρώτη αποτυχημένη απόπειρα να λυθεί η υπόθεση Riemann.

- **1890**. Αυτή τη χρονική περίοδο ο Lindelof προτείνει την εικασία Lindelof. Αυτή η εικασία αφορά την κατανομή των μηδενικών της ζ(s) συνάρτησης, η οποία μέχρι σήμερα δεν έχει αποδειχθεί ακόμα.

- **1896**. Ο Hadamard και ο de la Vallee Poussin ανεξάρτητα αποδεικνύουν το θεώρημα πρώτων αριθμών. Η απόδειξη στηρίζεται στο γεγονός ότι η ζ(s) συνάρτηση δεν έχει μηδενικά για $s = 1 + it$ για καθε $t \in \Re$.

- **1897**. Ο Mertens δημοσιεύει την υπόθεση του. Η υπόθεση αυτή διαψεύδεται από μια απόδειξη του Odlyzko και του te Riele το 1985.

- **1901**. Ο Von Koch αποδεικνύει ότι η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την παρακάτω μαθηματική δήλωση.

$$\pi(\mathrm{x}) = \int_2^{\mathrm{x}} \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{\mathrm{x}} \log(\mathrm{x}))$$

- **1903**. Ο Gram υπολογίζει τα πρώτα 15 μηδενικά της ζ(s) στην κρίσιμη γραμμή.

- **1903**. Την δεκαετία που ακολουθεί μετα το 1903, ο Gram, ο Backlund, και ο Hutchinson ανεξάρτητα χρησιμοποιούν το άθροισμα Euler–Maclaurin για να υπολογίσουν τιμές της ζ(s) και να επαληθεύσουν την υπόθεση Riemann για $\mathrm{I(s)} \leq 300$.

- **1905**. Ο Hans Carl Friedrich von Mangoldt αποδεικνύει την προσέγγιση που έδωσε ο Riemann στην εργασία του το 1859, όσο αναφορά τον αριθμό των μηδενικών της ζ συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα

$$N(\mathrm{T}) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log \mathrm{T})$$

  Η φόρμουλα αυτή ονομάστηκε Riemann–von Mangoldt φόρμουλα προς τιμή των δυο αυτών μεγάλων μαθηματικών.

- **1912**. Ο Backlund ανάπτυξε μια μέθοδο προσδιορισμού των αριθμών των μηδενικών της ζ(s) στην κρίσιμη λωρίδα $0 < \Re(\mathrm{s}) < 1$ μέχρι ένα δοσμένο ύψος. Αυτή η μέθοδο χρησιμοποιείται από το 1932.

- **1914**. Το 1914 συμβαίνουν τέσσερις ιστορικές εξελίξεις που σχετίζονται άμεσα με την υπόθεση Riemann. (i) Ο Hardy αποδεικνύει ότι άπειρα πολλά μηδενικά της ζ συνάρτησης βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη γραμμή. (ii) Ο Backlund υπολογίζει 79 μηδενικά της ζ(s) στη κρίσιμη γραμμή. (iii) Ο Littlewood αποδεικνύει ότι $\pi(\mathrm{n}) < Li(\mathrm{n})$ αποτυγχάνει για άπειρα πολλά n. (iv) Ο Bohr και ο Landau αποδεικνύουν ότι αν $N(\sigma, \mathrm{T})$ είναι ο αριθμός των μηδενικών της ζ(s) στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $0 \le I(s) \le T$, $\sigma \le \Re(s) \le 1$, τότε $N(\sigma, T) = O(T)$, για οποιοδήποτε σταθερό $\sigma \ge \frac{1}{2}$.

- **1919**. Ο Polya υποθέτει ότι $L(x) \le 0$ για $x \ge 2$, όπου $L(x) := \sum_{n=1}^{x} \lambda(n)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση Liouville και $\lambda(n)$ είναι η συνάρτηση Liouville. Η εικασία αποδείχθηκε ψευδής μετα από 39 χρονιά από τον Haselgrove.

- **1920**. Ο Carlson αποδεικνύει το θεώρημα πυκνότητας.

<u>*Θεώρημα 3.1*</u> : (Το θεώρημα πυκνότητας) : Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$, ισχύει ότι $N(\sigma, T) = O(T^{4\sigma(1-\sigma)+\varepsilon})$.

- **1922**. Ο Hardy και ο Littlewood αποδεικνύουν ότι η γενική υπόθεση Riemann συνεπάγει την αδύναμη υπόθεση Goldbach.

- **1923**. Ο Hardy και ο Littlewood απέδειξαν ότι αν ισχύει η γενική υπόθεση Riemann, τότε σχεδόν όλοι οι ζυγοί αριθμοί είναι άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Πιο συγκεκριμένα αν $E(N)$ είναι ο αριθμός των ζυγών ακέραιων μικρότερων του N, οπού N δεν είναι ίσος με άθροισμα δυο πρώτων αριθμών, τότε $E(N) \ll N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

- **1924**. Ο Franel και ο Landau ανακάλυψαν μια ισοδυναμία της HR που περιέχει τη σειρά Farey.

- **1925**. Ο Hutchinson υπολογίζει τα πρώτα 138 μηδενικά της ζ(s) στην κρίσιμη γραμμή.

- **1928**. Ο Littlewood αποδεικνύει ότι η γενικευμένη υπόθεση Riemann φράσει τη $L(1, \chi_D)$ όπως ακολουθεί

$$\frac{1}{\log\log D} \ll |L(1, \chi_D)| \ll \log\log D.$$

- **1932**. Ο Carl Ludwig Siegel διαβάζει όλες τις προσωπικές σημειώσεις του Riemann, αλλά και όλες τις δημοσιεύσεις του. Εντοπίζει ανάμεσα σε πολλά άλλα, μια φόρμουλα η οποία υπολογίζει τις τιμές της ζ(s) συνάρτησης και είναι πιο αποτελεσματική από το άθροισμα Euler-Maclaurin. Η μέθοδος αναφέρεται μέχρι σήμερα ως ‘‘η φόρμουλα

Riemann–Siegel'' και χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Οι μελετητές που ασχολούνται με την HR αναφέρουν, πως ο Siegel ήταν αυτός που αναζωογόνησε την HR δίνοντας σημαντικά αποτελέσματα μέσα από την μελέτη του για την ζ συνάρτηση.

- **1934**. Ο Speiser δείχνει ότι η HR είναι ισοδύναμη με τον μη μηδενισμό της $\zeta'(s)$ στο $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

- **1935**. Ο Titchmarsh υπολογίζει τα πρώτα 1041 μηδενικά της ζ(s) πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1937**. Ο Vinogradov αποδεικνύει ότι το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο συνδέεται με την εικασία Goldbach χωρίς να περιλαμβάνει κάποια προσέγγιση για την HR.

  Θεώρημα 3.2 : Κάθε αρκετά μεγάλος μονός αριθμός είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.

- **1940**. Ο Ingham δείχνει ότι $N(\sigma, T) = (T^{3\left(\frac{1-\sigma}{2-\sigma}\right)} \log^5 T)$, η οποία μέχρι και σήμερα είναι η καλύτερη προσέγγιση που έχουμε για των αριθμό των μηδενικών για $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}$.
- **1941**. Ο Weil αποδεικνύει ότι η υπόθεση Riemann είναι αληθής στα σώματα συναρτήσεων {function field}.

- **1942**. Το 1942 ο Ingham δημοσιεύει μια εργασία, η οποία βασίστηκε πάνω στις υποθέσεις του Mertens και του Polya. Το περιεχόμενο της αποδεικνύει ότι και οι δυο εικασίες συνεπάγουν την αλήθεια της υπόθεσης Riemann, την απλότητα των μηδενικών της ζ συνάρτησης και επιπλέον υποδηλώνουν μια γραμμική εξάρτηση μεταξύ των φανταστικών μερών των ορισμάτων των μηδενικών της ζ συνάρτησης. Την ιδιά χρονιά ο Selberg αποδεικνύει ότι ένα θετικό ποσοστό των μηδενικών της ζ συνάρτησης βρίσκονται πάνω στη κρίσιμη γραμμή.

- **1943**. Ο Alan Turing το 1943 δημοσιεύει δυο σημαντικές εξελίξεις. Η πρώτη ήταν ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό των τιμών της ζ(s) συνάρτησης, ενώ η δεύτερη ήταν μια μέθοδος υπολογισμού του N(T), η οποία δίνει ένα εργαλείο για επαλήθευση της HR μέχρι ένα δεδομένο ύψος.

- **1945**. Ο Hans Rademacher παρουσιάζει μια απόδειξη της υπόθεσης Riemann, στο Transactions of the American Mathematical Society. Η απόδειξη του θεωρείται εσφαλμένη κατά την εξέταση της και αποσύρεται.

- **1948**. Ο Turan δείχνει ότι αν για κάθε N αρκετά μεγάλο, το N-ιοστό μερικό άθροισμα της ζ(s) δεν μηδενίζεται για σ >1, τότε η HR θα ισχύει.

- **1949**. Ο Selberg και ο Erdos, στηριζόμενοι στο έργο του Selberg, και οι δυο ανακαλύπτουν ‘‘στοιχειώδεις’’ αποδείξεις του θεωρήματος των πρώτων αριθμών.
- **1951**. Ο Titchmarsh εξετάζει σε βάθος μερικές επιπτώσεις μιας απόδειξης της υπόθεσης Riemann, συγκεκριμένα εξετάζει πιο στενά φράγματα για τη ζ(s), καθώς και για τις συναρτήσεις $S(T), S_1(T)$.

- **1953**. Ο Turing υπολογίζει τα πρώτα 1104 μηδενικά της ζ(s) συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1955**. Ο Skewes εντοπίζει και βάζει φράγμα στον πρώτο ακέραιο n για τον οποίο $\pi(n) < Li(n)$ αποτυγχάνει. Αυτό το φράγμα βελτιώνεται στο μέλλον, όμως το όνομα του παρέμεινε ‘‘Αριθμός Skewes’’. Ενώ την ιδιά χρονιά ο Beurling ανακαλύπτει μια ισοδυναμία της HR, η οποία είναι γνωστή ως ‘‘Nyman–Beurling ισοδυναμία’’

- **1956**. Ο Lehmer υπολογίζει τα πρώτα 15.000 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στη κρίσιμη γραμμή ,και αργότερα το ίδιο έτος τα πρώτα 25.000 μηδενικά της.

- **1958**. Ο Haselgrove αποδεικνύει ότι υπόθεση Polya είναι ψευδής.

- **1966**. Ο Lehman βελτιώνει το φράγμα του Skewes και υπολογίζει και τα πρώτα 250.000 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1968**. Ο Rosser, ο Yohe, και ο Schoenfeld υπολόγισαν τα πρώτα 3.500.000 μηδενικά της ζ(s) πάνω στην κρίσιμη γραμμή. Την ιδιά χρονιά ο Louis de Branges κάνει την πρώτη του προσπάθεια να αποδείξει την HR. Οι υπόλοιπες προσπάθειες του εμφανίζονται το 1986, 1992 και το 1994.

- **1973**. Ο Montgomery υποθέτει ότι συσχέτιση των μηδενικών της ζ συνάρτησης είναι $1-\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$. Την ιδιά χρονιά ο Chen αποδεικνύει ότι κάθε αρκετά μεγάλος ζυγός ακέραιος είναι το άθροισμα ενός πρώτου αριθμού και ενός αριθμού που είναι γινόμενο το πολύ δυο πρώτων αριθμών.

- **1977**. Ο Redheffer δείχνει ότι η HR είναι ισοδύναμη με την έκφραση $\det(R_n)=O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ για κάθε ε > 0, όπου R_n ένας n×n πίνακας ορισμένος ως $R_n(i,j)=\begin{cases}1 \text{ αν } j=1 \text{ ή αν } i|j\\ 0 \text{ αλλιώς.}\end{cases}$

  Τον ίδιο χρόνο ο Brent υπολογίζει τα πρώτα 40.000.000 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1979.** Δυο χρονιά αργότερα το 1979 ο Brent υπολογίζει τα πρώτα 81.000.001 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1982**. Το 1982 υπολογίζονται τα πρώτα 200.000.001 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή από μια ομάδα ερευνητών, την οποία αποτελούσαν ο Brent, ο van de Lune, ο te Riel και ο Winter.

- **1983**. Το 1983 υπολογίζονται τα πρώτα 300.000.001 μηδενικά της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή από τον Van de Lune και τον te Riele. Το μεγάλο όμως επίτευγμα εκείνη την χρονιά προήλθε από τον Montgomery, ο οποίος απέδειξε ότι η προσέγγιση που έγινε το 1948 από τον Turan δεν οδηγεί σε απόδειξη της HR. Συγκεκριμένα έδειξε ότι για κάθε θετικό $c<\frac{4}{\pi}-1$, το N-οστό μερικό άθροισμα της ζ έχει μηδενικό στο ημιεπίπεδο $\sigma>1+c\frac{\log\log N}{N}$.

- **1985**. Αποδεικνύεται ότι υπόθεση Mertens είναι ψευδής από τον Odlyzko και τον te Riele.

- **1986**. Υπολογίζονται τα πρώτα 1.500.000.001 μηδενικά της ζ(s) πάνω στην κρίσιμη γραμμή από τους Van de Lune, te Riele και Winter.

- **1987**. Ο Te Riele μικραίνει τον αριθμό Skewes.

- **1988**. Ανακαλύπτεται και δημοσιεύεται ένας εξαιρετικός αλγόριθμος υπολογισμού των τιμών της $\zeta(s)$ από τον Odlyzko και τον Schonhage, ο οποίος ονομάστηκε ''αλγόριθμος Odlyzko–Schonhage'' προς τιμήν τους. Ο αλγόριθμος αυτός είναι σήμερα ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος για να προσδιορίζει τιμές, για κάθε $t \in \Re$ για το οποίο $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{it})=0$. Ο νέος αλγόριθμος υπολογίζει τα πρώτα n μηδενικά της $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{it})$ σε $\mathrm{O}(\mathrm{n}^{1+\varepsilon})$, ενώ η προηγούμενοι από αυτόν σε $O(\mathrm{n}^{\frac{3}{2}})$. Την ιδιά χρονιά οι Barratt, Forcade, και Pollington χρησιμοποιώντας τους πίνακες Redheffer, οδηγούνται σε μια νέα ισοδυναμία της HR, όπου οι οροί της προέρχονται από την θεωρία γραφημάτων.

- **1989**. Υπολογίζονται 175 εκατομμύρια μηδενικά της ζ συνάρτησης γύρο από το ύψος $t=10^{20}$ από τον Odlyzko. Μια πιο σημαντική εξέλιξη εμφανίζεται λίγο αργότερα την ίδια χρονιά από τον Conrey, αποδεικνύει ότι πάνω από το 40% των μη τετριμμένων μηδενικών της $\zeta(\mathrm{s})$ βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

- **1993**. Ο Alcantara-Bode δείχνει ότι η HR είναι αληθής αν και μόνον αν ο ολοκληρωτικός τελεστής στο $L^2(0,1)$ είναι αμφιμονότιμος (1-1).

- **1994**. Ο Verjovsky αποδεικνύει ότι HR είναι ισοδύναμη με ένα πρόβλημα, το οποίο αφορά τον ρυθμό σύγκλισης ορισμένων διακριτών μέτρων.

- **1995**. Ο Volchkov αποδεικνύει ότι HR είναι ισοδύναμη με την δήλωση :

$$\int_0^\infty (1-12t^2)(1+4\mathrm{t}^2)^{-3}\int_{1/2}^\infty \log\zeta\left|(\sigma+it)\right| \, d\sigma dt=\frac{\pi(3-\gamma)}{32}$$

  όπου γ η σταθερά Euler (γ = 0.57721). Την ίδια χρονιά ο Amoroso αποδεικνύει ότι η δήλωση ότι η $\zeta(\mathrm{s})$ δεν μηδενίζεται για $\Re(\mathrm{z}) \geq \lambda+\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την δήλωση ότι

$$\tilde{\mathrm{h}}(\mathrm{F}_N) \ll N^{\lambda+\varepsilon} \text{, όπου } \tilde{h}(\mathrm{F}_N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|F_N(\mathrm{e}^{i\theta})\right| d\theta \text{ και } F_N(\mathrm{z})=\prod\nolimits_{n\le N}\Phi_n(\mathrm{z}),$$

  όπου $\Phi_n(\mathrm{z})$ δηλώνει το n-οστό κυκλοτομικό πολυώνυμο και $\log^+(\mathrm{x})=\max(0,\log\mathrm{x})$.

- **2000**. Ο Conrey και ο Li υποστήριξαν ότι η προσέγγιση του de Branges δεν μπορεί να οδηγήσει σε μια απόδειξη της HR. Παράλληλα ο Bays και ο Hudson καταφέρνουν να μειώσουν περισσότερο τον αριθμό Skewes. Την ίδια χρονιά το Clay Mathematics Institute εισάγει την υπόθεση Riemann σε μια λίστα εφτά μεγάλων προβλημάτων, τα οποία ονόμασε “Millennium Prize Problems”. Κάθε μια απόδειξη εκ των εφτά προβλημάτων αξίζει ένα εκατομμύριο δολάρια.

- **2001**. Ο Van de Lune υπολογίζει τα πρώτα 10.000.000.000 μηδενικά της $\zeta(s)$ στην κρίσιμη γραμμή.

- **2004**. Ο Wedeniwski υπολογίζει τα πρώτα 900.000.000.000 μηδενικά της $\zeta(s)$ στην κρίσιμη γραμμή, ενώ λίγο αργότερα τον ίδιο χρόνο δημοσιεύεται η εργασία του Gourdon, κατά την οποία εντοπίζονται τα πρώτα 10.000.000.000.000 μηδενικά της $\zeta(s)$ στην κρίσιμη γραμμή.

Μέσα στο χρονοδιάγραμμα εντοπίζουμε κορυφαίους μαθηματικούς που έχουν ασχοληθεί με την HR και έχουν δώσει σημαντικά νέα στοιχεία για την HR την οποία όμως δεν κατόρθωσε κανείς μέχρι σήμερα, να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει. Μελετώντας την ιστορία των εξελίξεων της HR δεν μπορούμε να μην αναφέρουμε την δήλωση του ερευνητή H. M. Edwards, η οποία αποσαφηνίζει την κατάσταση.

<< Ο Hilbert περιλαμβάνει το πρόβλημα της απόδειξης της HR στη λίστα του, με τα πιο σημαντικά άλυτα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά το 1900 και η προσπάθεια να λυθεί αυτό το πρόβλημα έχει απασχολήσει τους καλυτέρους μαθηματικούς του 20ου αιώνα, οι οποίοι κατέβαλαν τις καλύτερες προσπάθειες τους. Τώρα είναι αναμφισβήτητα το πιο διάσημο πρόβλημα των μαθηματικών και συνεχίζει να προσελκύει την προσοχή των καλύτερων μαθηματικών, όχι μόνο γιατί είναι άλυτο για τόσο πολύ καιρό αλλά και γιατί φαίνεται να είναι προκλητικά ευάλωτο και επειδή η λύση του πιθανόν να φέρει στο φως νέες τεχνικές μεγάλης σημασίας. >>

H. M.Edwards

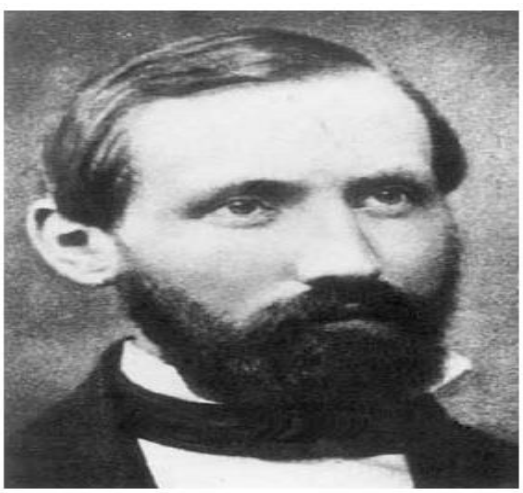
Η δήλωση του ερευνητή H. M. Edwards αλλά και η προσεκτική παρατήρηση του παραπάνω χρονοδιαγράμματος εξάγει μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την HR. Η HR έμεινε για δεκαετίες απαρατήρητη από τους μαθηματικούς της εποχής μετα το 1859, ενώ αρχίζει να τραβάει την προσοχή των μαθηματικών μετα το 1896, όπου ο Hadamard και ο de la Vallee Poussin στηριζόμενοι στην εργασία του Riemann καταφέρνουν να αποδείξουν το θεώρημα των πρώτων αριθμών. Η HR όμως τραβάει τη μέγιστη προσοχή των μαθηματικών μετα το 1900, όταν ο Hilbert περιλαμβάνει την HR στα τα πιο σημαντικά άλυτα προβλήματα που αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά εκείνη την εποχή. Έτσι μετα το 1900 παρατηρούμε πολλές εξελίξεις που σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με την υπόθεση Riemann ή την συνάρτηση ζ. Η HR πλέον είναι ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα και η μια απόδειξη δεν εξάπτει απλά την φαντασία των μαθηματικών αλλά έχει γίνει εμμονή, για τα περισσότερα μεγάλα μαθηματικά μυαλά του 20ου αιώνα. Από το 1900 μέχρι σήμερα πάρα το μεγάλο ενδιαφέρον των μαθηματικών, δεν είχαμε καμία απόδειξη της ισχύς της HR, όμως το 2004 παρατηρούμε ένα ακόμα στοιχείο που δείχνει υπερ της υπόθεσης Riemann ο Gourdon αποδεικνύει ότι τα πρώτα 10.000.000.000.000 μηδενικά της ζ(s) βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη γραμμή. Όλα αυτά τα χρόνια η υπόθεση Riemann μένει ανοιχτή, σε συνδυασμό με την σπουδαιότητα της κατανομής των πρώτων αριθμών, δεν θα ήταν υπερβολή να χαρακτηριστεί ως το σημαντικότερο άλυτο πρόβλημα των καθαρών μαθηματικών.

3.3 Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ RIEMANN ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ

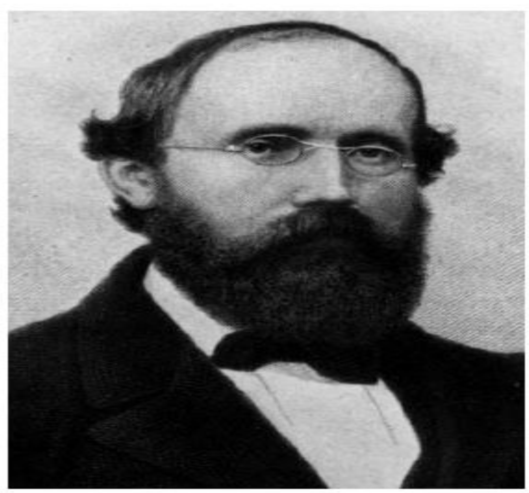
Bernhard Riemann

1859 Το 1859 παρουσιάζεται η περίφημη εργασία του Bernhard Riemann, μέσα στην οποία είναι διατυπωμένη η διάσημη υπόθεση Riemann, αξίζει να τονίσουμε ότι ήταν η πρώτη και η τελευταία επιστημονική μελέτη του Riemann στην θεωρία αριθμών, κάτι εντελώς αντιφατικό με το βαθύ μαθηματικό υπόβαθρο της, την πρωτοτυπία των μεθόδων που χρησιμοποιούνται, αλλά και την διατύπωση μιας τόσο στοχευμένης υπόθεσης στο εσωτερικό της, της υπόθεσης Riemann όπως ονομάστηκε μετέπειτα, την οποία μέχρι και σήμερα στηρίζουν όλα τα εμπειρικά στοιχεία που έχουν εντοπιστεί από τους ερευνητές της.

Πριν αναλύσουμε το περιεχόμενο της εργασίας του Riemann και πως ο ίδιος διατυπώνει την υπόθεση του, κρίνετε αναγκαίο να παρουσιάσουμε την ζωή, την προσωπικότητα και την καριέρα του μεγάλου μαθηματικού Bernhard Riemann διότι αποτελεί την κεντρική μαθηματική προσωπικότητα της ιστορικής μας μελέτης πάνω στην HR.



Riemann, στην αρχή της δεκαετίας του 1850.



Riemann, το 1863.

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann γεννήθηκε στης 17 Σεπτέμβριου του 1826 στο χωριό Breselenz της Βασιλείας του Αννόβερου. Ο πατέρας του Riemann ήταν πάστορας της εκκλησίας των λουθηρανών και βετεράνος των πολέμων εναντίον του Ναπολέοντα, η μητέρα του Riemann πέθανε όταν ο Riemann ήταν ακόμα σε παιδική ηλικία. Ο Riemann ήταν το δεύτερο παιδί της οικογενείας και είχε συνολικά πέντε αδέλφια, ιδιαίτερη αδυναμία είχε στην μεγαλύτερη αδερφή του Ida. Η οικογένεια του έζησε μέσα στη φτώχεια σε συνθήκες έλλειψης ακόμα και του φαγητού, τα τέσσερα από τα αδέρφια του πιθανότατα πέθαναν εξαιτίας της φτώχειας. Από τα παιδιά της οικογένειας μόνο η Ida και ο Riemann έζησαν μια κανονική διάρκεια ζωής. Τις πρώτες γνώσεις του ο Riemann τις διδάχθηκε από τον πατερά του και τον δάσκαλο του χωριού. Στην ηλικία των δεκατεσσάρων πήγε γυμνάσιο στο Αννόβερο, 80 μίλια μακριά από το χωριό του, όπου εκεί διέμενε με τον παππού του. Μετα το θάνατο της γιαγιάς του άλλαξε γυμνάσιο, το νέο του σχολείο ήταν πιο κοντά στο χωριό του και έτσι επισκεπτόταν το σπίτι του πιο συχνά, γεγονός που άλλαξε την ψυχολογία του αφού ήταν πολύ δεμένος με την οικογένεια του. Ο Riemann δεν διέπρεπε στο σχολείο, διότι το μυαλό του απορροφούσε μόνο ότι τον ενδιάφερε και αυτό ήταν μόνο τα μαθηματικά. Με την βοήθεια ενός καθηγητή του που τον είχε ξεχωρίσει ανάμεσα στους μαθητές του, άρχισε να βελτιώνεται και τελικά το 1846 έγινε δεκτός στο πανεπιστήμιο του Gottingen, ως φοιτητής της θεολογίας. Αρχικά σχεδίαζε να γίνει πάστορας όπως ο πατέρας του. Στο Gottingen ο νεαρός Riemann συνάντησε μια κορυφαία μαθηματική προσωπικότητα της εποχής του τον Gauss, ο οποίος τότε ήταν 69 ετών και είδη γνωστός για το μεγάλο μαθηματικό έργο του, ενώ δίδασκε ελάχιστα αφού θεωρούσε την διδασκαλία χάσιμο χρόνου. Η αγάπη του Riemann για τα μαθηματικά αλλά και η προσωπικότητα του Gauss που εντυπωσίασε τον Riemann, οδήγησαν τον Riemann στην παρακολούθηση διαλέξεων του Gauss με θέμα την ‘‘Γραμμική Άλγεβρα’’ αλλά και των διαλέξεων του Moritz Stern με θέμα την ‘‘Θεωρία συναρτήσεων’’. Ενώ ήταν είδη φοιτητής της θεολογίας ο Riemann εξομολογείται την αγάπη του για τα μαθηματικά στον πατερά και με την ευλογιά του στρέφεται προς τα μαθηματικά.

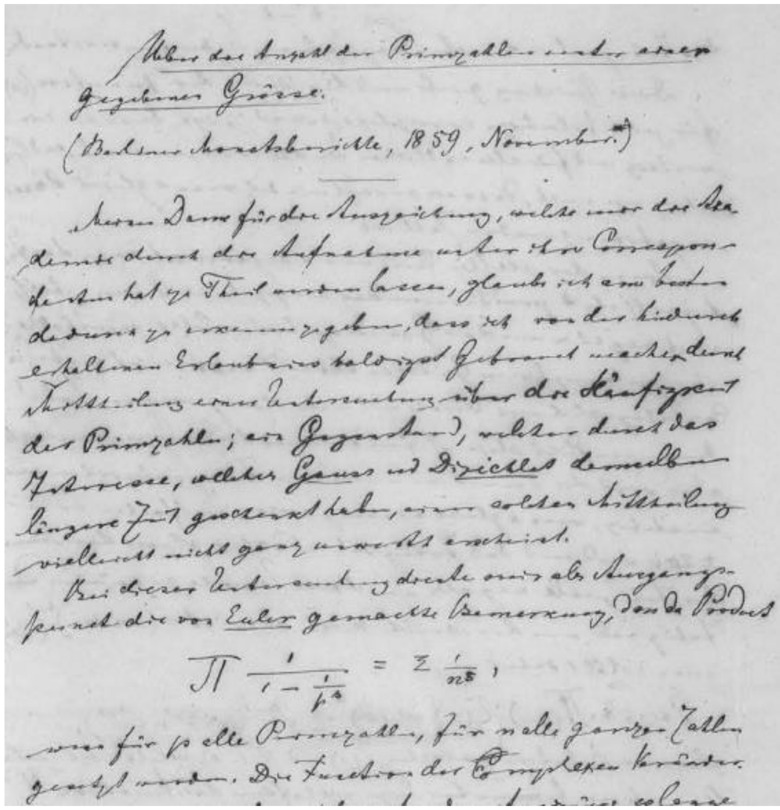
Όσο αναφορά την προσωπικότητα του Riemann δεν υπάρχουν αρκετές ιστορικές πήγες, αντλούμε πληροφορίες μόνο από την αλληλογραφία του και ένα υπόμνημα 17 σελίδων που έγραψε ο φίλος του Richard Dedekind προς τιμήν του, 10 χρόνια μετα το θάνατο του. Μέσα από αυτές τις δυο ιστορικές πήγες θα σκιαγραφήσουμε την ενδιαφέρουσα προσωπικότητα του Riemann. Ο Riemann περιγράφεται ως ένας εξαιρετικά ντροπαλός άνθρωπος, που απέφευγε τις ανθρώπινες συναναστροφές. Οι μόνοι στενοί δεσμοί που είχε ήταν με την οικογένεια του, ενώ οι υπόλοιπες ανθρώπινες επαφές του ήταν μόνο με μαθηματικούς. Υπέφερε σε όλη την ζωή του από νοσταλγία για την οικογένεια του. Ήταν πάρα πολύ θρήσκος, συγκεκριμένα πίστευε ότι το νόημα της θρησκεία ήταν η ‘‘καθημερινή αυτοεξέταση ενώπιον του προσώπου του Θεού’’. Οι σκέψεις του, οι μελέτες του αλλά και η ζωή του, ήταν πάντα κάτω από την επιρροή μιας βαθιάς φιλοσοφικής προσέγγισης που είχε αναπτύξει για το καθένα από αυτά αντίστοιχα. Ήταν υποχόνδριος με περιόδους βαθιάς κατάθλιψης και φιλάσθενος, λόγο της πολύ λιτής διατροφής που είχε στα παιδικά του χρόνια εξαιτίας της φτώχειας. Όσοι δεν τον γνώριζαν καλά μιλούσαν για μια ζοφερή, καταθλιπτική φιγούρα, ωστόσο αυτό ήταν απλά μόνο η εξωτερική εικόνα του, στην πραγματικότητα είχε ένα υπέρλαμπρο μυαλό και μια έμφυτη γενναιότητα.

Το 1846 μεταφέρεται στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Έπειτα από δυο πολύ σημαντικά χρόνια μελέτης, υπό τις οδηγίες των πιο λαμπρών μαθηματικών μυαλών της Γερμανίας, που εκείνη την εποχή ήταν στο συγκεκριμένο πανεπιστήμιο, ο Riemann φτάνει σε πλήρη ωριμότητα σαν μαθηματικός. Γυρίζει έπειτα το 1849 στο πανεπιστήμιο του Gottingen, όπου αρχίζει να εργάζεται για το διδακτορικό του, το οποίο ολοκλήρωσε μετα από 2 χρόνια στην ηλικία των 25 ετών, υποβάλλοντας μια διατριβή πάνω στην θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Τρία χρόνια αργότερα έγινε λέκτορας στο πανεπιστήμιο του Gottingen και αναπληρωτής καθηγητής το 1857, αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι ήταν και η πρώτη του δουλειά με μισθό. Η διδακτορική διατριβή του, ενώ σήμερα πια θεωρείται ένα κλασσικό έργο των μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα, στην εποχή του δεν είχε τραβήξει αρκετή προσοχή από τους συνάδελφους του, παρόλο που ο Gauss τον επικρότησε δημόσια για την διατριβή του. Στις αρχές της δεκαετίας του 1850 ο Riemann έμεινε άγνωστος καθώς δούλευε κάτω από την σκιά του είδη καταξιωμένου Gauss, επομένως οι εργασίες του εκείνη την περίοδο παρέμειναν σχεδόν άγνωστες και δημοσιεύτηκαν μετα τον θάνατο του. Η φήμη του άρχισε να χτίζεται μέσα από τις διαλέξεις του, όμως ακόμα και αυτές ήταν αρκετά μπροστά από την εποχή του με αποτέλεσμα να μην εκτιμηθούν ιδιαίτερα. Η αναγνώριση του ανάμεσα στους μαθηματικούς της εποχής του ήρθε το 1857, όταν εκδόθηκε η εργασία του με τίτλο ‘‘Theory of Abelian Functions’’ , η οποία θεωρήθηκε βασική συνεισφορά στα μαθηματικά. Τον επόμενο χρόνο το όνομα του ήταν γνωστό σε όλους τους μαθηματικούς της Ευρώπης. Το 1859 ο Riemann παίρνει προαγωγή και γίνεται καθηγητής στο Gottingen. Την ιδιά χρονιά με μεγαλύτερο εισόδημα πλέον καταφέρνει να παντρευτεί την καλύτερη φίλη της αδερφής του, την Elise Koch. Τον Αύγουστο του 1859 λίγο πριν κλείσει τα 33 του χρόνια λαμβάνει την ιδιαίτερη τιμή να εκλεγεί μέλος της Ακαδημίας του Βερολίνου[1]. Η Ακαδημία βάσισε την εκλογή του Riemann στις δυο πιο γνωστές δημοσιεύσεις του, την διδακτορική διατριβή του το 1851 και στην εργασία του το 1857, από το οποίο απέκτησε την φήμη του. Ήταν παράδοση σε τέτοιες περιπτώσεις να παρατεθεί από το νέο μέλος μια εργασία στην οποία να εκθέτει την έρευνα του κατά την συγκεκριμένη περίοδο της εκλογής του στην Ακαδημία. Ο Riemann παραθέτει στην Ακαδημία την εργασία του με τον τίτλο ‘‘Περί τον αριθμό των πρώτων αριθμών κάτω από μια δοσμένη ποσότητα’’.

ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΣΗΜΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ RIEMANN (1859)

Οι πληροφορίες που θα καταγραφούν παρακάτω για το ακριβές περιεχόμενο της εργασίας του Riemann, συλλέγονται κυρίως από δυο ιστορικές πήγες. Η πρώτη είναι η ακριβής μετάφραση της εργασίας του Riemann από τα Γερμανικά στα Αγγλικά από τον μαθηματικό David R.Wilkins το 1998 και η δεύτερη είναι το επίσημο επιστημονικό έγγραφο της περιγραφής της υπόθεση Riemann από τον Enrico Bombieri το 2000 εκ μέρους του Clay Mathematics Institute, όταν η HR εισήχθη στα 7 προβλήματα της χιλιετίας του CMI.

[1] Η Ακαδημία λειτουργούσε με μοναδικό σκοπό την έρευνα ενώ το Πανεπιστήμιο είχε κύριο στόχο την διδασκαλία.



Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.
(Berliner Monatsberichte, 1859, November)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränder-

Εικόνα 3.1 : Η αρχή της εργασίας του Riemann το 1859 {πρωτότυπο}.

Στην εργασία του ο Riemann αρχικά ευχαριστεί για την ιδιαίτερη τιμή που δέχτηκε από την Ακαδημία του Βερολίνου και αναγγέλλει την παρουσίαση εκ μέρους του, μιας έρευνας πάνω στην συσσώρευση των πρώτων αριθμών, ένα θέμα που όπως τονίζει είχε τραβήξει το ενδιαφέρον του Gauss και του Dirichlet για μεγάλη χρονική περίοδο.

- ✓ Το σημείο εκκίνησης της έρευνας του είναι το Γινόμενο Euler $\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$, όπου p όλοι πρώτοι και n όλοι οι ολόκληροι αριθμοί (Παρατηρείται ότι είναι η πρώτη σχέση που εισάγει από την εικόνα 3.1). Παρατηρεί ότι τα δυο μέλη συγκλίνουν για $\Re(s) > 1$ και ορίζει ως $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}, \Re(s) > 1$. Η καινοτομία της έρευνας του γίνεται εμφανείς από την αρχή αφού μελετάει την ζ συνάρτηση ως μια μιγαδική συνάρτηση.

- ✓ Τονίζει έπειτα ότι είναι εφικτό να βρεθεί μια έκφραση της $\zeta(s)$, η οποία να ισχύει πάντοτε. Για να εντοπίσει την συγκεκριμένη έκφραση, ξεκινάει από την σχέση

$\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{\Pi(\mathrm{s}-1)}{n^s}$ η οποία βασίζεται στο ολοκλήρωμα του Euler $n! = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx,$ n=1,2,... ,το οποίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για n > -1 .Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποίησε την αναπαράσταση του Gauss για το προηγούμενο ολοκλήρωμα την $\Pi(\mathrm{s}) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx,$ s > -1 , αφού παρατήρησε ότι η Π(s) ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς με $\Re(\mathrm{s}) > -1$ και ισχύει ότι $\Pi(\mathrm{s}) = \mathrm{s}!$ όταν το $s \in \mathbb{N}$. Σε αυτή ο Riemann αντικατέστησε το x με nx και πήρε την σχέση με την οποία ξεκινάει την προσπάθεια του για την επέκταση της ζ συνάρτησης. Τελικά καταλήγει στη σχέση $2\sin\pi s\Pi(\mathrm{s}-1)\zeta(\mathrm{s}) = \mathrm{i}\int_\infty^\infty \frac{(-\mathrm{x})^{s-1}dx}{e^x - 1}$, η οποία όπως αναφέρει ο ίδιος ο Riemann δίνει τις τιμές της $\zeta(s)$ συνάρτησης για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς s εκτός από το την τιμή της $\zeta(s)$ για $s = 1$(Αφού το s = 1 είναι ένας απλός πόλος της ζ {κεφάλαιο 1}) και μηδενίζεται αν το s είναι ίσο με οποιονδήποτε αρνητικό ζυγό ακέραιο.

Αντίστοιχα ο Bombieri τονίζει ότι ενώ η ζ συνάρτηση οριζόταν μόνο για $\Re(\mathrm{s}) > 1$ ο Riemann κατάφερε να επεκτείνει την ζ συνάρτηση σε όλο το C/{1 } ως μια μερόμορφη συνάρτηση με έναν απλό πόλο στο s = 1 με υπόλοιπο 1.

- ✓ Εν συνεχεία ο Riemann παρατηρεί μια σχέση μεταξύ της $\zeta(s)$ και της $\zeta(1-s)$. Χαρακτηρίστηκα ο ίδιος γράφει << Επομένως μια σχέση μεταξύ της $\zeta(s)$ και της $\zeta(1-s)$, η οποία, προκύπτει μέσο των ιδιοτήτων της συνάρτησης $\Pi(s)$, μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(\mathrm{s}) \tag{3.1}$$

μένει αμετάβλητη όταν αντικατασταθεί το s από το 1- s. >>

Ισοδύναμα ο Bombieri στο επιστημονικό έγγραφο του αναφέρει ότι ο Riemann παρατήρησε ότι η ζ συνάρτηση ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s}) = \pi^{-(1-\mathrm{s})/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{3.2}$$

Η (3.2) είναι εκφρασμένη πια ως προς την συνάρτηση Γ(s) και όχι ως προς την Π(s), η οποία χρησιμοποιήθηκε από τον Riemann το 1859. Σήμερα χρησιμοποιείται η σχέση (3.2) σε όλη τη σύγχρονη μαθηματική βιβλιογραφία που αναφέρεται στην υπόθεση Riemann (παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 1, σελ. 9 για τη μελέτη της Γ συνάρτησης).

- ✓ Ο Riemann στην εργασία του εισάγει την συνάρτηση

$$\xi(\mathrm{t})=\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(\mathrm{s}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(\mathrm{s}) \text{ , όπου } s=\frac{1}{2}+ti\,. \tag{3.3}$$

Χρησιμοποιεί τη συνάρτηση για να αποφύγει δυσκολίες που προκύπτουν κατά την μελέτη των μηδενικών της ζ(s) από τον πόλο της, στο $s=1$. Εξ ορισμού της η ξ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση και τα μηδενικά της συμπίπτουν με τα μηδενικά της ζ συνάρτησης.

Ισοδύναμα ο Bombieri κατά την περιγραφή της HR εισάγει την συνάρτηση ξ(t), αλλά την αποτυπώνει εκφρασμένη και αυτή ως προς την συνάρτηση Γ(s).

$$\xi(\mathrm{t})=\frac{1}{2}s(\mathrm{s}-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s}) \text{ , όπου } s=\frac{1}{2}+ti\,. \tag{3.4}$$

Η σχέση (3.4) ακολουθείται από όλη την σύγχρονη μαθηματική βιβλιογραφία πάνω στην HR.

Για την $\xi(t)$ ο Riemann αναφέρει ότι δίνει πάντα πεπερασμένες τιμές για οποιαδήποτε πεπερασμένο όρισμα t. Επίσης οδηγείται στο συμπέρασμα ότι η ξ(t) μπορεί να μηδενιστεί μόνο αν το φανταστικό μέρος του t βρίσκεται μεταξύ του $\frac{1}{2}i$ και του $-\frac{1}{2}i$.

- ✓ Ο Riemann (όπως αναφέρει και ο Bombieri) καταλήγει ότι ο αριθμός των μηδενικών της $\boldsymbol{\xi(t)}$

των οποίων το πραγματικό μέρος του t βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και το T είναι προσεγγιστικά

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi} \tag{3.5}$$

και συνεχίζει σκιαγραφώντας μια απόδειξη πάνω σε αυτή την προσέγγιση [Η προσέγγιση αυτή αποδεικνύεται το 1905 από τον μαθηματικό von Mangoldt]. Συνεχίζει τονίζοντας ότι πράγματι μπορεί να εντοπίσει κάποιος πολλά πραγματικά μηδενικά της $\boldsymbol{\xi(t)}$ και είναι πολύ πιθανό όλα τα μηδενικά να είναι πραγματικά. <u>Η δήλωση του ότι όλα τα μηδενικά της ξ(t) είναι πραγματικά είναι η υπόθεση Riemann</u>. Αφού αν αυτό ισχύει τότε κάθε $s=\frac{1}{2}+ai$, όπου α πραγματικός ρίζα της $\boldsymbol{\xi(t)}$, θα είναι μηδενικό της $\zeta(\mathrm{s})$. Αρά η υπόθεση Riemann του εκφρασμένη ως προς την ζ συνάρτηση είναι

<u>Υπόθεση Riemann</u> : *Τα μη τετριμμένα μηδενικά της $\zeta(\mathrm{s})$ έχουν πραγματικό μέρος ίσο με* $\frac{1}{2}$

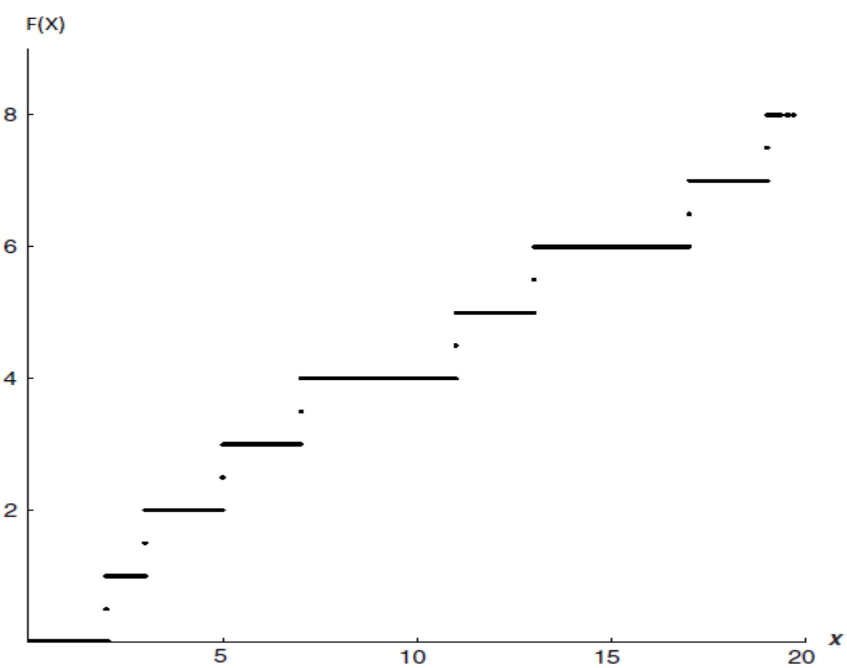
Καμία αναφορά από τον Riemann δεν γίνεται για τα τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης που προκύπτουν άμεσα από την Π(s) ή τη Γ(s) μέσο της επέκτασης της ζ συνάρτησης σε όλο το C/{1}.

Χαρακτηριστικά ο Bombieri αναφέρει μετα την διατύπωση της υπόθεσης Riemann <<Κατά την άποψη πολλών μαθηματικών η υπόθεση Riemann είναι ίσως σήμερα (2000) το πιο σημαντικό ανοιχτό πρόβλημα των καθαρών μαθηματικών>>. Η υπόθεση σήμερα 15 χρόνια μετα το έγγραφο του Bombieri μετράει 156 χρόνια ζωής, μέσα σε όλα αυτά τα χρόνια κάθε προσπάθεια απόδειξης της έπεσε στο κενό, αντίστοιχα όμως και κάθε προσπάθεια διάψευσης της.

✓ Στην ο Riemann εισάγει μια ακόμα συνάρτηση, την F(x). Η συνάρτηση F(x) που εισάγει δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια λίγο τροποποιημένη μορφή της π(x). Η F(x) ως

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} \pi(\mathrm{x}) & , \text{αν } \mathrm{x} \in \Re^{+}/\text{Primes} \\ \pi(\mathrm{x}) - \dfrac{1}{2} & , \text{αν } \mathrm{x} \in \text{Primes} \end{cases} \tag{3.6}$$

Παρατηρούμε ότι η F(x) του Riemann είναι μια αμφιμονοσήμαντη (1-1) συνάρτηση. Ακολουθεί το γράφημα της για $0 \le \mathrm{x} \le 20$.



Γράφημα 3.1 : Γράφημα της F(x) για $0 \le \mathrm{x} \le 20$. *[Από το βιβλίο PRIME OBSESSION, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics του John Derbyshire (Χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός του Riemann για την συνάρτηση στον άξονα y'y και όχι του Derbyshire)].*

Παρατηρώντας το γράφημα ευκολά διακρίνουμε ότι η F(x) είναι μια step function.

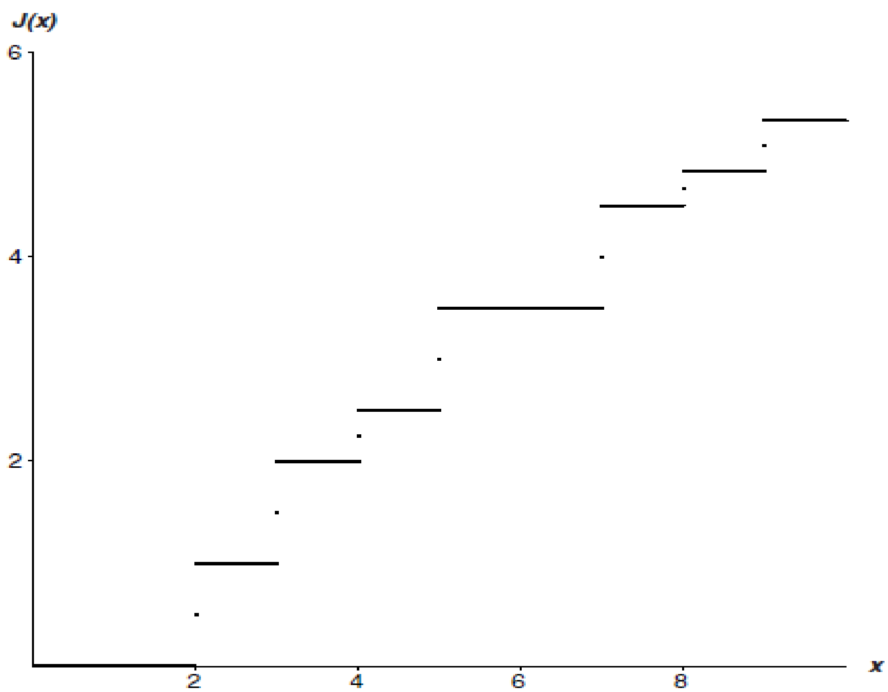
✓ O Riemann με την βοήθεια της F(x) εισάγει μια ακόμα συνάρτηση, την οποία συμβολίζει με

f(x). Η συνάρτηση f(x) είναι μια συνάρτηση κλειδί για την έρευνας του, καθώς τον οδηγεί στο κεντρικό αποτέλεσμα της έρευνα του περί της κατανομή των πρώτων αριθμών. Τη συνάρτηση αυτή θα την συμβολίσουμε με J(x) ακολουθώντας τον συμβολισμό που χρησιμοποίησε ο Harold Edwards.

Για κάθε x μη αρνητικό πραγματικό αριθμό, ορίζεται η J(x) ως

$$J(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{F}\left(\mathrm{x}^{1/n}\right) \qquad (3.7)$$

Ακολουθεί ένα γράφημα της ώστε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τη J(x).



<u>Γράφημα 3.2</u> : Γράφημα της J(x) για $0 \le x \le 10$. *[Από το βιβλίο PRIME OBSESSION, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics του John Derbyshire].*

Ευκολά διακρίνουμε ότι η J(x) έχει κάποια χαρακτηριστικά της F(x). Συγκεκριμένα είναι και αυτή μια step function αλλά και στα σημεία όπου υπάρχουν άλματα, η τιμή της είναι ίση με το μισό του άλματος, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της F(x). Παρατηρείται επίσης ότι όταν το x είναι πρώτος η J(x) αυξάνεται κατά $\frac{1}{2}$, όταν το x είναι το τετράγωνο κάποιου πρώτου η J(x) αυξάνεται κατά $\frac{1}{2}$, όταν το x είναι ο κύβος ενός πρώτου τότε η J(x) αυξάνεται κατά $\frac{1}{3}$ κ.ο.κ..

Ο Riemann συνεχίζει στην εργασία του χρησιμοποιώντας την αντιστροφή Mobius και εκφράζοντας τη σχέση (3.7) ως προς την F(x) ως εξής

$$F(\mathrm{x}) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} J\left(\mathrm{x}^{1/m}\right) \tag{3.8}$$

όπου το m του αθροίσματος παίρνει τιμές όλους εκείνους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι δεν διαιρούνται από κανένα τετράγωνο φυσικού αριθμού εκτός από το 1, ενώ το μ δηλώνει τον αριθμό των πρώτων παραγόντων του m.

Ισοδύναμα μπορούμε να συναντήσουμε την (3.8) εκφρασμένη με την βοήθεια της συνάρτησης Mobius

$$F(\mathrm{x}) = \sum \frac{\mu(\mathrm{n})}{n} J\left(\mathrm{x}^{1/n}\right) \tag{3.9}$$

όπου μ(n) η συνάρτηση Mobius.

$$\mu(\mathrm{n}) := \begin{cases} 0 & \text{αν το n έχει τετράγωνο παράγοντα,} \\ 1 & \text{αν το n =1,} \\ (-1)^k & \text{αν το n ειναι γινόμενο κ διαφορετικών πρώτων} \end{cases}$$

✓ Ο Riemann στην συνέχεια έχοντας ως αφετηρία για ακόμη μια φορά το γινόμενο Euler ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα οδηγείται σε μια σχέση μεταξύ της ζ συνάρτησης και της J συνάρτησης.

$$\zeta(\mathrm{s}) = \prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \overset{\text{Λογαριθμίζοντας}}{\Leftrightarrow} \log\zeta(\mathrm{s}) = -\sum \log(1-\mathrm{p}^{-s}) \overset{\substack{\text{Ανάπτυγμα} \\ \text{Maclaurin}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \log\zeta(\mathrm{s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s} + \ldots \Leftrightarrow$$

Στην συνέχεια αντικαθιστά όπου p^{-s} το $s\int_p^{\infty} \mathrm{x}^{-s-1}d\mathrm{x}$, p^{-2s} το $s\int_{p^2}^{\infty} \mathrm{x}^{-s-1}d\mathrm{x}$ κ.ο.κ. επομένως

$$\Leftrightarrow \log\zeta(\mathrm{s}) = \sum s\int_p^{\infty} \mathrm{x}^{-s-1}d\mathrm{x} + \frac{1}{2}\sum s\int_{p^2}^{\infty} \mathrm{x}^{-s-1}d\mathrm{x} + \frac{1}{3}\sum s\int_{p^3}^{\infty} \mathrm{x}^{-s-1}d\mathrm{x} + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{s}\log\zeta(s) = \int_0^{\infty} J(x)\, x^{-s-1}\, dx} \tag{3.10}$$

Η σχέση (3.10) στην οποία καταλήγει ο Riemann είναι το γινόμενο Euler στην εκδοχή που υπαγορεύεται από τον ολοκληρωτικό λογισμό. Το αποτέλεσμα (3.10) ξεχωρίζει αφού οδηγεί τον Riemann στο κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας του, αλλά ταυτόχρονα υποβάλει το αναδιατυπωμένο γινόμενο Euler στην σφαίρα επιρροής ισχυρών μαθηματικών εργαλείων του λογισμού του 19^{ου} αιώνα.

- ✓ Ο Riemann ξεκινώντας από τη (3.10), κάνοντας χρήση του θεωρήματος Fourier καταφέρνει

μέσα από μια αρκετά δύσκολη μαθηματική διαδικασία να εκφράσει τη συνάρτηση (3.10) ως προς τη J(x). Αυτή η συνάρτηση αποτελεί και το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας του.

$$\boxed{J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}} \tag{3.11}$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην απόδειξη της έκφρασης της J(x) που έδωσε ο Riemann υπήρχαν κάποια ασαφή σημεία, η αυστηρή και πλήρης απόδειξη ήρθε από τον Mangoldt το 1895.

Ο πρώτος ορός στο δεύτερο μέλος της ισότητας καλείται κύριος όρος {principal term}, ο δεύτερος όρος αναφέρθηκε από τον Riemann στον πληθυντικό ως περιοδικοί οροί {periodic terms}, ο τρίτος όρος είναι το $log 2 = 0,69314718055994...$ και ο τέταρτος όρος είναι απλά η περιοχή κάτω από την καμπύλη $\dfrac{1}{t(t^2-1)\log t}$, από το όρισμα x της J(x) ως το άπειρο, ο τέταρτος όρος έχει σημασία για $x \geq 2$, αφού για x<2 η J(x) μηδενίζεται. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να προσφέρει στη J(x) ο τελευταίος όρος είναι 0,1400101011432869…, επομένως ο τρίτος και τέταρτος όρος μαζί κυμαίνονται από -0,6931…μέχρι -0,5531…, δεδομένου ότι το επίκεντρο της μελέτης είναι η π(x) , η οποία παρουσιάζει ενδιαφέρον για πολύ μεγάλες τιμές, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος κρίνονται αρκετά ασήμαντοι.

Ο πρώτος όρος είναι η προσέγγιση του αριθμού των πρώτων αριθμών μέχρι και το x (Κεφάλαιο 2, σελ.49, (2.15)), η οποία εισήχθη από τον Gauss, συγκεκριμένα $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$. Ο δεύτερος όρος ο οποίος είναι και ο εντυπωσιακότερος όλων, εμφανίζει το σύμβολο ‘‘ρ’’, το οποίο είναι το ελληνικό ρο και συμβολίζει τις ρίζες, συγκεκριμένα όλες τις μη τετριμμένες ρίζες της εξίσωσης ζ(s). Ο Riemann κατάφερε μέσο της πολύπλοκης μαθηματικής διαδικασίας που ακολουθήσε να μετατρέψει την συνάρτηση ζ σε μια λίγο διαφορετική συνάρτηση (μια ολοκληρωτική συνάρτηση) της οποίας τα μηδενικά της είναι ακριβώς τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης , ενώ τα τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης εξαφανίστηκαν κατά την διάρκεια της αντιστροφής της (3.10). Επομένως η έκφραση της J(x) στην οποία κατέληξε παρατήρησε ότι εξαρτάται άμεσα από τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης.

Έμεσα από τους τύπους (3.9) και (3.11) ο Riemann φτάνει στον στόχο του, καταφέρνει να αποδείξει ότι η κατανομή των πρώτων αριθμών εξαρτάται από τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης, τα οποία όπως είχε υποθέσει ο ίδιος είχαν όλα πραγματικό μέρος $\frac{1}{2}$.

Αν προχωρήσουμε σε αντικατάσταση του τύπου (3.11) στον (3.9) προκύπτει

$$F(x)=\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n}Li(x^{1/n})-\sum_{n}\sum_{\rho}\frac{\mu(n)}{n}Li(x^{\rho/n})-\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n}\log 2+\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n}\int_{x}^{\infty}\frac{dt}{t(t^{2}-1)\log t} \quad (3.12)$$

Ο Riemann δεν προχώρησε στην εργασία του σε μια τέτοια αντικατάσταση, επομένως δεν χρησιμοποίησε αυτή την ρητή φόρμουλα για να δώσει έναν ασυπτωτικό τύπο για την π(x), ένα γεγονός που αρχικά μας εκπλήσσει, παρατηρώντας όμως την (3.12) καταλαβαίνουμε ότι υπολογισμός των ορών της και κυρίως του δεύτερος όρου της είναι πάρα πολύ δύσκολος, είναι ένας όρος που περιλαμβάνει όλα τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ(s). Θεωρητικά αυτό είναι πάρα πολύ σημαντικό αφού δείχνει ότι η π(x) εξαρτάται από όλα τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ(s). Ωστόσο πρακτικά αν θέλουμε να ασχοληθούμε με αυτόν τον όρο-άθροισμα, απαιτείται η ακριβής γνώση της θέσης των μη τετριμμένων μηδενικών της ζ(s). Η γνώση μας ακόμα και σήμερα είναι πολύ περιορισμένη πάνω σε αυτό τον τομέα και ο Riemann στην εποχή του γνώριζε πολύ λιγότερα πάρα το εμπνευσμένο προαίσθημα του και την πρωτοτυπία της μελέτης του.

- ✓ Ο Riemann στο τέλος της εργασίας του παρατηρεί ότι, το αποτέλεσμα του, εξηγεί το γεγονός

ότι ο αριθμός των πρώτων αριθμών κάτω από μια δεδομένη ποσότητα x μεγαλώνει πιο αργά από το λογαριθμικό ολοκλήρωμα που είχε χρησιμοποιηθεί από τον Gauss και τον Goldschmidt. Ο λόγος αυτός δεν είναι άλλος από τους περιοδικούς όρους, στους οποίους οφείλεται η αύξηση ή η μείωση της πυκνότητας των πρώτων αριθμών από τόπο σε τόπο.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ RIEMANN

Τίτλος : On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude

Συγγραφέας : Riemann   Σελίδες : 10

Περιεχόμενο : Μελέτη της συνάρτησης μέτρησης των πρώτων αριθμών με αναλυτικές μεθόδους. Η μοναδική εργασία που δημοσίευσε ο Riemann στη θεωρία αριθμών, περιέχει ιδέες που επηρέασαν χιλιάδες ερευνητές κατά το τέλος του $19^{ου}$ αιώνα έως και σήμερα. Το έγγραφο αποτελείται από ορισμούς, ευρηματικά επιχειρήματα, σκίτσα αποδείξεων καθώς και την εφαρμογή ισχυρών αναλυτικών μεθόδων. Όλα αυτά έχουν γίνει βασικές έννοιες και εργαλεία της σύγχρονης αναλυτικής θεωρίας αριθμών. Επιπλέον περιέχει στο εσωτερικό του την πιο διάσημη υπόθεση των καθαρών μαθηματικών, η οποία ούτε έχει διαψευθεί ούτε έχει επαληθευτεί μέχρι σήμερα και αποδεικνύει ότι αυτή αποτελεί και το κλειδί για την κατανόηση της κατανομής των πρώτων αριθμών.

Σε αυτό το σημείο ας επιστρέψουμε ξανά στην ζωή του μεγάλου μαθηματικού Riemann αφού πλέον είχε παρουσιάσει τη διάσημη εργασία του το 1859. Τα επόμενα χρόνια ο Riemann δεν σταμάτησε τις έρευνες του, αλλά τις κατεύθυνε σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Παρόλο που πέθανε στην μικρή ηλικία των 39 ετών, άφησε μεγάλη συμβολή σε αρκετούς κλάδους των μαθηματικών, την Ανάλυση, την Τοπολογία, τη Διαφορική Γεωμετρία και προώθησε τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία. Το μεγαλύτερο επίτευγμα του παρουσιάζεται στο μαθηματικό πεδίο της διαφορικής γεωμετρίας, ο τανυστείς καμπυλότητας Riemann (ή τανυστείς Riemann–Christoffel), η σπουδαιότητα του αναμφισβήτητη, αφού σήμερα είναι κεντρικό μαθηματικό εργαλείο στη θεωρία της γενικής σχετικότητας και της μοντέρνας θεωρίας της βαρύτητας. Κατά τον D. Struik <<Με τον Riemann φτάνουμε στον άνθρωπο που επηρέασε περισσότερο από κάθε άλλον την πορεία των σύγχρονων Μαθηματικών>>. O Riemann πέθανε στης 20 Ιουλίου το 1866 από φυματίωση, κατά την διάρκεια του τρίτου του ταξιδιού στην Ιταλία, στη Σελάσκα, στις ακτές της Λίμνης Ματζόρε, όπου παραθέριζε εξαιτίας του καλού κλίματος για την πάθησή του. Τάφηκε στο Μπιγκαντσόλο (Biganzolo) της Βερμπανίας.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΕΞΕΛΙΞΕΩΝ

1859-1932 Μετα το 1859, η εργασία του Riemann δεν λαμβάνει το μαθηματικό ενδιαφέρον που θα της αναλογούσε με κριτήριο το υπέροχο περιεχόμενο της. Κορυφαίοι ιστορικοί μαθηματικοί ερευνητές χαρακτηρίζουν αυτό το γεγονός φυσιολογικό, αφού η έλλειψη ενδιαφέροντος μπορεί να δικαιολογηθεί άμεσα, διότι η εργασία του είναι αρκετά μπροστά από την εποχή του. Η πρωτοτυπία των τεχνικών που ακολουθεί και η εκτεταμένη μιγαδική ανάλυση λειτουργούν ως αποτρεπτικοί παράγοντες. Η μιγαδική ανάλυση ως κλάδος των μαθηματικών γεννιέται εκείνη την εποχή από τον Riemann και τον Cauchy, επομένως είναι φυσιολογικό οι περισσότεροι μαθηματικοί της εποχής να μην μπορούν να ακολουθήσουν μια τέτοια ανάλυση.

Η εργασία του Riemann μένει στο περιθώριο μέχρι το 1896 (37 χρόνια) με πολύ λίγους μαθηματικούς να έχουν ασχοληθεί με το περιεχόμενο της. Το 1896 μετα την απόδειξη του θεωρήματος πρώτων αριθμών από τον Hadamard και τον de la Valee Poussin ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, η εργασία του Riemann τίθεται στο επίκεντρο των ερευνών των περισσοτέρων μαθηματικών, διότι και οι δυο μαθηματικοί στηρίζουν τις αποδείξεις τους στην τεκμηρίωση ότι η μιγαδική συνάρτηση ζ(s) δεν μηδενίζεται για $s = 1 + it$, $\forall t \in \Re$. Ένα γεγονός που στρέφει την μαθηματική έρευνα της εποχής στην ερευνά του Riemann και έμμεσα στον εντοπισμό και την έρευνα της υπόθεσης Riemann.

Από το 1859 έως το 1932, μαθηματικοί προσπαθούν να εξακριβώσουν αν ισχύει η υπόθεση Rieman, εντοπίζοντας τα μηδενικά της ζ, έχουν εντοπιστεί μέχρι το 1932 τα πρώτα 138 μηδενικά που επαληθεύουν όλα την HR με χρήση της εκτίμησης Euler-Maclaurin. Για την μελέτη των μηδενικών της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή εισάγεται μια ακόμη συνάρτηση η Z(t), η οποία είναι γνωστή σήμερα ως συνάρτηση Hardy ή συνάρτηση Z Riemann-Siegel. Η Z(t) ορίζεται μέσο της ξ(s) συνάρτησης του Riemann, μέσα από την ακόλουθη ανάλυση.

$$\begin{aligned}\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) &= \left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+it\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \\ &= \left[e^{\Re\log\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})}\cdot\pi^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{-t^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\right]\bullet\left[e^{i\Im\log\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})}\cdot\pi^{-\frac{it}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right].\end{aligned}$$

Εφόσον ο πρώτος παράγοντας είναι πάντα αρνητικός, το πρόσημο της ξ εξαρτάται αποκλείστηκα από το πρόσημο του δευτέρου παράγοντα. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση Hardy ως

$$\mathbf{Z(t)}=\mathbf{e}^{i\theta(\mathrm{t})}\,\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right),\ \text{οπου } \theta(\mathrm{t})=\Im\left(\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right)-\frac{t}{2}\log\pi \tag{3.13}$$

Η $\theta(\mathrm{t})$ συνάρτηση προσεγγίζεται από την ασυμπτωτική επέκταση

$$\theta(\mathrm{t})=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}+\ldots \tag{3.14}$$

Η οποία δεν συγκλίνει αλλά οι οροί της μειώνονται πολύ γρήγορα για μεγάλα t.

Μέσα από τον ορισμό της, η Z(t) είναι ξεκάθαρο ότι έχει ακριβώς το αντίθετο πρόσημο από την $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Μελετώντας την αλλαγή προσήμου κατά μικρά διάστημα της Z(t) ή της ξ(t) προσδιορίζεται ο αριθμός των μηδενικών της ζ συνάρτησης στην κρίσιμη γραμμή.

Οι σημαντικότερες εξελίξεις οι οποίες χρήζουν μεγαλύτερης ανάλυσης για την περίοδο από 1859 έως το 1932 που αφορούν την HR είναι οι ακόλουθες, η φόρμουλα Riemann-Siegel και ο νομός Gram.

ΦΟΡΜΟΥΛΑ RIEMANN-SIEGEL

Ο Carl Siegel (1896-1981) ήταν Γερμανός μαθηματικός με ειδίκευση πάνω στην θεωρία των αριθμών, είχε παρακολουθήσει ειδικά σεμινάρια υψηλού επιπέδου, μελέτης της ιστορίας των μαθηματικών από πρωτότυπες πήγες, γεγονός που πιστοποιεί την αγάπη του για την ιστορία των μαθηματικών. Ο Siegel υπήρξε βοηθός διδασκαλίας και έρευνας στο πανεπιστήμιο του Göttingen. Σαν λάτρης της ιστορίας με αγάπη στην θεωρία των αριθμών, μελέτησε εξονυχιστικά όλα τα ιδιωτικά και δημοσιευμένα χειρόγραφα του Riemann, στη βιβλιοθήκη του Göttingen και εντόπισε ανάμεσά τους μια φόρμουλα την οποία μετα από επεξεργασία δημοσίευσε το 1932 και έγινε γνωστή ως η ‘‘φόρμουλα Riemann-Siegel’’. Η συγκεκριμένη φόρμουλα προσέφερε μια πιο γρήγορη και καλύτερη προσέγγιση των τιμών της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή σε σχέση με τη μέθοδο Euler-Maclaurin για μεγάλα t. Επιπλέον δημιούργησε τη μέθοδο Riemann-Siegel, η οποία μέσα από την μελέτη της αλλαγής του πρόσημου της συνάρτησης Riemann-Siegel $Z(t)$, εντοπίζει τον αριθμό των μηδενικών της ζ συνάρτησης πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

<u>Θεώρημα 3.3</u> : (Προσεγγιστική συναρτησιακή εξίσωση της ζ) Έστω $x,y \in R^{+}$ με $2\pi xy=|t|$ τότε για $s=\sigma+it$ με $0\le\sigma\le1$ έχω

$$\zeta(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^{s}}+\chi(s)\sum_{n\le y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma})+O(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\,y^{\sigma-1}) \tag{3.15}$$

όπου $\chi(s)=2^{s}\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)$.

Η προσεγγιστική συναρτησιακή εξίσωση που παρουσιάστηκε χρησιμοποιείτε για τον υπολογισμό $Z(t)$ με τον ακόλουθο τρόπο.

Θέτω $x=y=\sqrt{|t|/2\pi}$ τότε έχω

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n^{s}}+\chi(s)\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n^{1-s}}+E_m(s)\text{, όπου } E_m(s)=O(|t|^{-\sigma/2}) \tag{3.16}$$

Για $s=\frac{1}{2}+it$ και πολλαπλασιάζοντας με $e^{i\theta(t)}$ προκύπτει η $Z(t)$ ως ακόλουθος

$$Z(t)=e^{i\theta(t)}\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}+e^{-i\theta(t)}\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-it}}+O(t^{-\frac{1}{4}})=2\sum_{n=1}^{[x]}\frac{\cos(\theta(t)-t\log n)}{n^{1/2}}+O(t^{-\frac{1}{4}}) \tag{3.17}$$

Αυτή είναι η βάση της φόρμουλας Riemann-Siegel. Σε αυτό το σημείο το μόνο που απαιτείται για να προσεγγιστεί η $Z(t)$ είναι μια πιο ακριβής φόρμουλα για το σφάλμα.

Φόρμουλα Riemann–Siegel : Για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$Z(t) = 2\sum_{n=1}^{[x]} \frac{\cos(\theta(\mathrm{t}) - \mathrm{tlogn})}{n^{1/2}} + \frac{e^{-i\theta(\mathrm{t})} e^{-t\pi/2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}+it} e^{-i\pi/4}(1 - ie^{-t\pi})} \int_{C_N} \frac{(-\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}+it} e^{-N\mathrm{x}}}{e^{\mathrm{x}} - 1} dx \quad (3.18)$$

όπου C_N είναι θετική προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη που περιέχει όλα τα σημεία $\pm 2\pi iN, \pm 2\pi i(\mathrm{N}-1), \ldots, \pm 2\pi \mathrm{i}$, και 0. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια σειρά και μια αριθμητική προσέγγιση του παραπάνω ολοκληρώματος για να πραγματοποιήσει μια χρήσιμη προσέγγιση του $\mathrm{Z}(t)$ και επόμενος του $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right)$.

Ο ΝΟΜΟΣ GRAM

Για την συνάρτηση Riemann-Siegel $\mathrm{Z}(t)$ ισχύει ότι :

$$\mathrm{Z(t)} = \mathrm{e}^{i\theta(\mathrm{t})} \zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right) \Leftrightarrow \zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right) = \mathrm{e}^{-i\theta(\mathrm{t})}\, \mathrm{Z(t)} = \mathrm{Z(t)}\cos\theta(\mathrm{t}) - i\mathrm{Z(t)}\sin\theta(\mathrm{t})$$

Επομένως $I\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right)\right) = -\mathrm{Z(t)}\sin\theta(\mathrm{t})$. Οπότε η αλλαγή προσήμου της $\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{it}\right)$ εξαρτάται από την $\mathrm{Z}(t)$ και το $\sin\theta(\mathrm{t})$. Ο Gram όρισε ως σημεία Gram τις ρίζες του $\sin\theta(\mathrm{t})$.

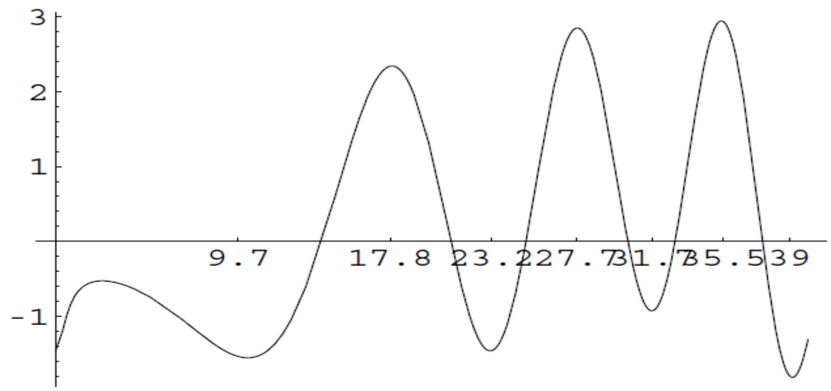
Ορισμός : (Σημείο Gram) : Το νιοστό σημείο Gram συμβολίζεται ως g_n και είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την σχέση $\theta(g_n) = \mathrm{n}\,\pi$.

Νόμος Gram : Η τάση που επικρατεί τα μηδενικά της $\mathrm{Z}(t)$ συνάρτησης να εναλλάσσονται με τα σημεία Gram. Εκφρασμένος με μεγαλύτερη ακρίβεια, η $\mathrm{Z}(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $(-1)^n \mathrm{Z}(\mathrm{g}_n) > 0$ για κάθε σημείο Gram.

Αν και ο νόμος ονομάζεται νόμος Gram διατυπώθηκε πρώτα από τον Hutchinson. Ο άνωθεν νόμος θα ήταν πιο σωστό να ονομάζεται ‘‘αδύναμος νόμος Gram’’, διότι ο Hutchinson το 1925 όταν χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον ορό ‘‘νόμος Gram’’ αναφερόταν σε μια πιο ισχυρή μαθηματική δήλωση, κατά την οποία έπρεπε να υπάρχουν ακριβώς $n+1$ μηδενικά της $\mathrm{Z}(t)$ μεταξύ του 0 και του g_n σημείου.

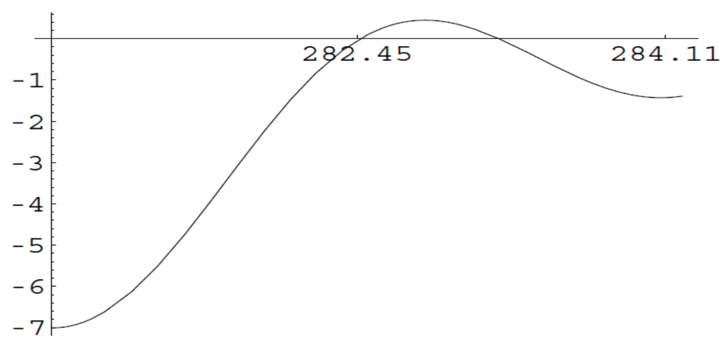
Ο νόμος Gram έχει αποδειχθεί ότι αποτυγχάνει για απείρως πολλά g_n σημεία Gram. Για μέτριες τιμές του t οι εξαιρέσεις για τις οποίες δεν ισχύει είναι εκπληκτικά λίγες. Παρόλο που ο νόμος αποτυγχάνει παρείχε ένα χρήσιμο εργαλείο εκκίνησης του εντοπισμού των μηδενικών της $\mathrm{Z}(t)$.

Εικονογράφηση νόμου Gram



Γράφημα 3.3 : Γραφική παράσταση της $Z(\mathrm{t})$ για $t \in [0, 40]$ {-}, παράλληλη σημείωση στον οριζόντιο άξονα των ακολουθών σημείων Gram $g_{-1} = 9.7, g_0 = 17.8, g_1 = 23.2, g_2 = 27.7, g_3 = 31.7, g_4 = 35.5, g_5 = 39.0$ {|}. [πηγή Separation of the complex zeros of the Riemann zeta function, Herman te Riele].

Πρώτη παραβίαση νόμου Gram



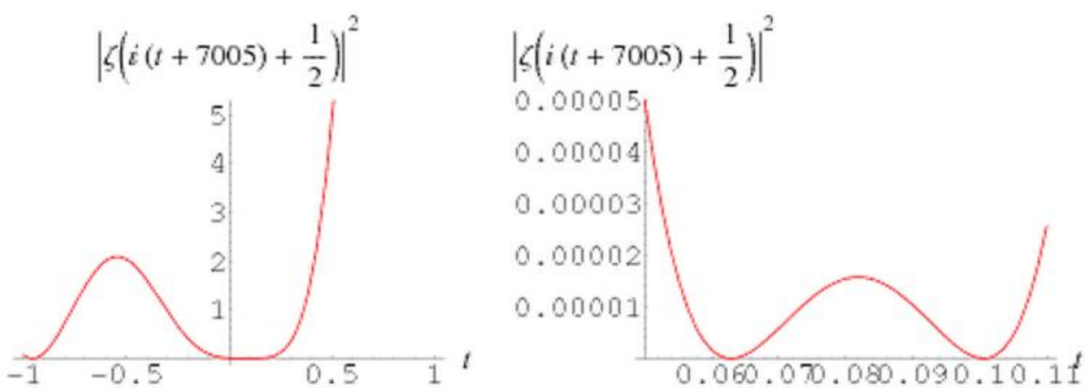
Γράφημα 3.4 : Γραφική παράσταση της $Z(\mathrm{t})$ για $t \in [280.8, 284.2]$ {━}, παράλληλη σημείωση στον οριζόντιο άξονα των ακολουθών σημείων Gram, $g_{125} = 280.80, g_{126} = 282.45, g_{127} = 284.11$ {|}.

Παρατηρούμε στο γράφημα 3.4 ότι αναμεσά στα σημεία Gram g_{125} $\kappa\alpha\iota$ g_{126} η Z(t) δεν μηδενίζεται, ενώ υπάρχουν δυο μηδενισμοί της *Z(t)* αναμεσά στα σημεία g_{126} $\kappa\alpha\iota$ g_{127} επόμενος ο νόμος Gram παραβιάζεται.

1933-2004 Τα 71 χρόνια που ακολουθήσαν μετα το 1933, πραγματοποιήθηκαν πάρα πολλές έρευνες από διάσημους μαθηματικούς γύρω από την υπόθεση Riemann, κατά τις οποίες προέκυψαν πολλές σημαντικές εξελίξεις και γνώσεις που σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με την HR. Αξίζει να αναφερθεί η τεράστια συμβολή των υπολογιστών μέχρι σήμερα στην επικράτηση της πεποίθησης αναμεσά στους μαθηματικούς ότι η HR είναι αληθής. Το 1953 όπου έγινε ο πρώτος υπολογισμός από ψηφιακό υπολογιστή, είχαν εντοπιστεί μόλις τα πρώτα 1.104 μηδενικά που όλα επαλήθευαν την HR, το επίτευγμα αυτό χρεώνεται στον μαθηματικό Alan Turing. Μετα το 1953 με την βοήθεια των υπολογιστών και την χρήση νέων αλγορίθμων και στην πάροδο 71 χρόνων εντοπίστηκαν τα πρώτα 10.000.000.000.000 μηδενικά που όλα επαληθεύουν την HR, το επίτευγμα αυτό οφείλεται στον X. Gourdon το 2004 {Περισσότερες πληροφορίες στο 5 κεφάλαιο}. Σε αυτό το χορείο θα περιοριστούμε στην ανάλυση τεσσάρων εξελίξεων που σχετίζονται με την HR, οι οποίες είναι : το φαινόμενο Lehmer (1956), ο νόμος Rosser (1969), θεώρημα Littlewood-Turing και τέλος ο αλγόριθμος του Odlysko-Schönhage (1988).

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ LEHMER

Ο μαθηματικός Lehmer στο έργου του ‘‘On the Roots of the Riemann Zeta-Function’’ {Σχετικά με τις ρίζες της Riemann ζήτα συνάρτησης} το 1956 ανακάλυψε περιπτώσεις όπου τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης είναι πάρα πολύ κοντά μεταξύ τους, τόσο ώστε να είναι ασυνήθιστα δύσκολο να βρεθεί η αλλαγή προσήμου μεταξύ τους. Η εμφάνιση τέτοιων περιπτώσεων ονομάστηκε φαινόμενο Lehmer. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το ζευγάρι των μη τετριμμένων μηδενικών της $\zeta(\frac{1}{2}+(7005+t)\mathrm{i})$ για $t_1 \approx 0,06286617...$ και $t_2 \approx 0,1005646...$ όπου διαφέρουν περίπου μόνο κατά 0.04.



Γράφημα 3.5 : Παρατηρούμε την εμφάνιση του φαινομένου Lehmer. {http://mathworld.wolfram.com/}

Το φαινόμενο Lehmer χρησιμοποιείται σήμερα ως ένα από τα επιχειρήματα αμφισβήτησης της υπόθεσης Riemann.

Ο ΝΟΜΟΣ ROSSER

Ο νόμος Rosser είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τον νομό Gram, για τη διατύπωση του θα χρειαστούμε την έννοια του καλού σημείο Gram και του μπλοκ του Gram, η τελευταία έννοια διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Rosser πάρα το παραπλανητικό όνομα της. Καλό σημείο Gram g_n είναι το σημείο Gram για το οποίο ισχύει ότι $(-1)^n Z(g_n) > 0$, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το αντίστοιχο σημείο Gram g_n ονομάζεται κακό σημείο Gram. Ο Rosser όρισε ως μπλοκ Gram μήκους K, όπου $K \geq 1$ το διάστημα $B_j = [g_j, g_{j+k})$, όπου τα g_j, g_{j+k} είναι καλά σημεία Gram, ενώ όλα τα σημεία Gram $g_{j+1},...,g_{j+k-1}$ που μεσολαβούν μεταξύ τους είναι κακά σημεία Gram. Το μπλοκ Gram εισήχθησαν ώστε να ασχοληθούν με τις εξαιρέσεις του νόμου Gram και οδήγησαν τον Rosser στην διατύπωση του νόμου Rosser το 1969.

<u>**Νόμος ROSSER**</u> : Κάθε μπλοκ Gram μήκους K περιέχει ακριβώς K μηδενικά της Z(t).

Ο Αυστραλός μαθηματικός Richard Brent εντόπισε την πρώτη εξαίρεση του νόμου Rosser, αυτή ήταν στο Gram μπλοκ μήκους 2: $B_j = [g_j, g_{j+2})$, $j = 13999525$. Αυτό το Gram μπλοκ δεν περιέχει καθόλου μηδενικά, όμως ακολουθείται από το Gram μπλοκ $B_j = [g_{j+2}, g_{j+3})$ το οποίο περιέχει τρία μηδενικά της Z(t) {Ακολουθεί γραφική παράσταση}. Αργότερα ο Lehman το 1970 αποδεικνύει ότι ο νόμος Rosser αποτυγχάνει πολύ σπάνια. Παραμένει όμως ένα χρήσιμο εργαλείο για την μέτρηση των μηδενικών της ζ συνάρτησης στην κρίσιμη γραμμή.

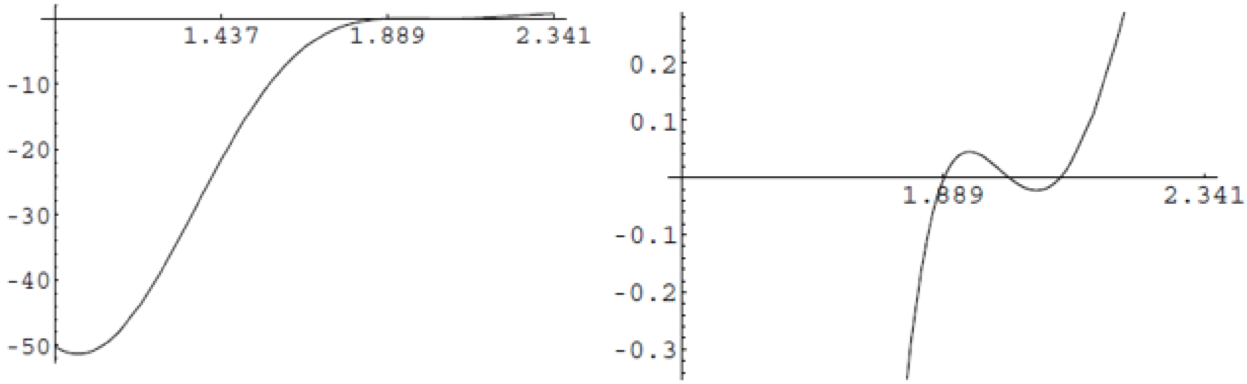
<u>**Μοτίβο προσήμου της Z(t) σε ένα Gram μπλοκ μήκους 8**</u>

Έστω e ένας ζυγός θετικός ακέραιος αριθμός.

n	e	e+1	e+2	e+3	e+4	e+5	e+6	e+7	e+8
$(-1)^n Z(g_n)$	+	-	-	-	-	-	-	-	+
$(-1)^n$	+	-	+	-	+	-	+	-	+
$Z(g_n)$	+	+	-	+	-	+	-	+	+

Πρώτη παραβίαση του νόμου ROSSER

$$Z(g_{13999525}, g_{13999526}, g_{13999527}, g_{13999528}) =$$
$$= Z(6820050.985, 6820051.437, 6820051.889, 6820052.341) =$$
$$= (-50.2, -21.62, -0.0045, +0.752)$$



Γράφημα 3.6 : Στο αριστερό γράφημα παρατηρούμε ότι η Z(t) δεν μηδενίζεται για $0.985 \le t \le 1.889$ *,δηλαδή δεν υπάρχει κανένα μηδενικό στο Gram μπλοκ* $B_j = [g_j, g_{j+2})$ όπου $j = 13999525$ *μήκους 2,επομενος παραβιάζεται ο νομός του Rosser σύμφωνα με τον οποίο έπρεπε να υπάρχουν δυο μηδενικά της Z(t). Στο δεξί γράφημα παρατηρούμε η Z(t) μηδενίζεται τρεις φορές για* $1.889 \le t \le 2.341$*, δηλαδή υπάρχουν τρία μηδενικά στο Gram μπλοκ* $B_j = [g_{j+2}, g_{j+3})$ όπου $j = 13999525$ *μήκους 1 αρά και εδώ παραβιάζεται ο νομός Rosser αφού θα έπρεπε να υπάρχει μόνο ένα μηδενικό σε αυτό το μπλοκ { πηγή Separation of the complex zeros of the Riemann zeta function, Herman te Riele }.*

ΘΕΩΡΗΜΑ LITTLEWOOD-TURING

Ορίζουμε την συνάρτηση $S(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)$, όπου το Arg προσδιορίζεται με συνεχή μεταβολή κατά μήκος των ευθείων, 2 ,$2+it$ και $\frac{1}{2}+it$, με $S(0)=0$, ενώ αν t είναι τόσο ώστε $\zeta(\sigma+it)=0$ ορίζουμε ότι $S(t) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(S(t-\varepsilon)+S(t+\varepsilon)\right)$. Έστω N(T) ο αριθμός των μηδενικών (μετρημένης της πολλαπλότητας) της ζ(s) στην περιοχή $0 < I(s) \le T$ και

$$S(t) = N(t) - 1 - \theta(t)/\pi \tag{3.19}$$

Αποδεικνύεται ότι ο νομός Gram ισχύει για $|S(t)| < 1$, ενώ ο νομός Rosser ισχύει για $|S(t)| < 2$. Επομένως η ισχύει των παραπάνω νόμων είναι στενά συνδεδεμένοι με της τιμές της $S(t)$.

Ο Turing έδειξε ότι το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο βασιζόταν στην ιδέα του Littlewood μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να θέσει όριο στην $N(t)$ για ορισμένες τιμές του t. Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε την εκδοχή του θεωρήματος από τον Lehman, διότι ο Turing χρησιμοποίησε ως σταθερές Α,Β μεγαλύτερες από όσο χρειαζόταν και η απόδειξη του ήταν λανθασμένη.

Θεώρημα 3.4 : Αν $A = 0.114, B = 1.71, C = 168\pi, \kappa\alpha\iota$ C<u<υ,τοτε

$$\left|\int_u^{\upsilon} S(t)\,dt\right| < A\log\upsilon + B \ .$$

Το Θεώρημα 3.4 έχει ως άμεση συνέπεια το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο είναι εξαιρετικά βολικό για αλγορίθμους που στηρίζονται στην χρήση των Gram μπλοκ, για των εντοπισμό των μηδενικών πάνω στην κρίσιμη γραμμή.

Θεώρημα 3.5 : (Θεώρημα Littlewood-Turing) Αν Κ συνεχόμενα Gram μπλοκ, με ένωση το διάστημα $[g_n, g_p)$,τα οποία ικανοποιούν τον νόμο Rosser με $K \geq 0.0061[\log(g_p)]^2 + 0.08\log(g_p)$ τότε

$$\text{(i)}\ N(g_n) \leq n+1 \ \text{και}\ \text{(ii)}\ N(g_p) \geq p+1 .$$

[Την απόδειξη του Θεώρημα Littlewood-Turing την εντοπίζουμε στην σελ. 1364 του βιβλίου ‘‘On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip’’, του Richard P.Brent].

Η σημασία του παραπάνω θεωρήματος είναι μεγάλη διότι οδηγεί σε υπολογιστικά εφικτούς μεθόδους επαλήθευσης της υπόθεσης Riemann μέχρι ένα επιθυμητό ύψος.

Ακολουθεί η περιγραφή της υπολογιστικής μεθόδου που εισήχθη από τον Lehmer για την επαλήθευση της HR, όπως την παρουσιαζει ο Brent στο βιβλίο του ‘‘On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip’’ το - και καταφέρνει να επαληθεύσει την HR για τα πρώτα 75.000.000 μηδενικά της ζ . Η μέθοδο έχει ως βασικό της πυλώνα το Θεώρημα Littlewood-Turing.

Υπολογιστική Μέθοδος

Το πρώτο μέρος της υπολογιστικής επαλήθευσης των $H(n+1)$ είναι η εύρεση της θέσης των n+1 αλλαγών πρόσημου της $Z(t)$ στο (g_{-1}, g_n).

Έστω ότι έχουν βρεθεί $j+1$αλλαγές στο (g_{-1}, g_j), όπου g_j καλό σημείο Gram. Τότε η μέθοδος υπολογίζει τις τιμές $Z(g_{j+1}), Z(g_{j+2}), Z(g_{j+3}),...$ μέχρι να εντοπίσει το επόμενο σημείο Gram (έστω g_{j+k}) μετα το g_n.

Τότε η μέθοδος υπολογίζει τη Z(t) για $t \in B_j = [g_j g_{j+k})$ έως ότου είτε

Α) να βρεθούν Κ αλλαγές προσήμου στο B_j και τότε το j αντικαθίσταται από το j+k και η μέθοδος ξανά ξεκινάει από τον εντοπισμό του επομένου Gram σημείου μετα το B_{j+k} και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι το g_n.

Β) Είτε μετα από ένα μεγάλο αριθμό υπολογισμών της Z(t), το πρόγραμμα σύμφωνα με την μέθοδο θα σταματήσει.

Η περίπτωση Β) μπορεί να προκύψει είτε στην περίπτωση όπου η Z(t) παρουσιάζει φαινόμενο Lehmer, είτε γιατί στο B_j δεν ικανοποιείται ο νομός Rosser. Τελικά με αυτό τον τρόπο η μέθοδος εντοπίζει n+1 αναγκαίες αλλαγές πρόσημου, επομένως ισχύει ότι $N(g_n) \geq n+1$. Η μέθοδος όμως δεν σταματάει εδώ συνεχίζει και δείχνει ότι υπάρχουν 4 Gram μπλοκ στο $[g_n, g_{n+5})$ και ότι ισχύει για όλα ο νομός Rule, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Littlewood-Turing $N(g_n) \geq n+1$. Άρα τελικά ισχύει ότι $N(g_n) = n+1$ και επομένως η H(n+1) ισχύει.

Κατά την προσπάθεια επαλήθευσης των 75.000.000 πρώτων μηδενικών της ζ, ο Brent παρατήρησε ότι η περίπτωση σημειώθηκε μόλις 15 φορές, ενώ στην περίπτωση όπου ένα B_j παρουσίαζε κ-2 μηδενικά τότε το επόμενο ή το προηγούμενο Gram μπλοκ μήκους κ' περιείχε $\kappa'+2$ μηδενικά της Z(t). Επίσης παρουσίασε τον ακόλουθο πίνακα για το S(t).

Exceptions to Rosser's rule

n	Type	Extreme S(t)
13,999,525	1	−2.004138
30,783,329	1	−2.002594
30,930,927	2	+2.050625
37,592,215	1	−2.076426
40,870,156	1	−2.003797
43,628,107	1	−2.024243
46,082,042	1	−2.031132
46,875,667	1	−2.004600
49,624,541	2	+2.001841
50,799,238	1	−2.028778
55,221,454	2	+2.024216
56,948,780	2	+2.017714
60,515,663	1	−2.008143
61,331,766	3	−2.054298
69,784,844	2	+2.063683

<u>*Type 1*</u> is block B_n of length 2 with no zeros, immediately followed by block B_{n+2} of length 1 with 3 zeros.

<u>*Type 2*</u> is block B_n of length 2 with no zeros, immediately preceded by block B_{n-1} of length 1 with 3 zeros.

<u>*Type 3*</u> is block B_n of length 2 with no zeros, immediately followed by block B_{n+2} of length 2 with 4 zeros.

All exceptions to Rosser's rule up to $B_{75,000,000}$ are included.

<u>Πίνακας 3.1</u> *: Παρατηρούμε ότι όλες οι εξαιρέσεις του νομού Rosser μέχρι το $B_{75.000.000}$ προκύπτουν όταν το* $S(t) > |2|$ *.[Προέρχεται από το βιβλίο του Brent ''On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip'']*

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ODLYZKO-SCHONHAGE

Ο αλγόριθμος Odlysko-Schönhage είναι σήμερα ο πιο αποτελεσματικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό τιμών του $t \in \Re$ για τις οποίες $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=0$. Το πιο δύσκολο υπολογιστικά κομμάτι όταν χρησιμοποιηθεί η φόρμουλα Riemann-Siegel είναι υπολογισμοί της μορφής

$$g(\mathrm{t})=\sum_{k=1}^{M} k^{-it} \quad .$$

Ο αλγόριθμος περιέχει τον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform) για να μετατρέπει τέτοια αθροίσματα σε ρητές συναρτήσεις. Με τον αλγόριθμο υπολογισμού που προσέφεραν οι Odlyzko και Schonhage υπολογίζονται γρήγορα οι τιμές αυτών των συναρτήσεων. Ο αλγόριθμος υπολογίζει τα πρώτα n μηδενικά της $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ σε $\mathrm{O}(\mathrm{n}^{1+\varepsilon})$ αντίθετα με άλλους μεθόδους που χρειάζονται $O(\mathrm{n}^{3/2})$. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκτός από τον υπολογισμό τιμών της ζ και για τον υπολογισμό άλλων συναρτήσεων, οι οποίες όμως δίνονται από Dirichlet σειρές. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο X Gourdon το 2004 χρησιμοποίησε τον αλγόριθμο Odlyzko-Schonhage για την επαλήθευση των πρώτων 10^{13} μηδενικών της HR.

3.4 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Το τρίτο κεφάλαιο είναι ένα από τα πιο σημαντικά κεφάλαια της εργασίας, καθώς ξεκινάει με την παρουσιάσει του μεγάλου μας μαθηματικού Riemann και έπειτα παρουσιάζει το περιεχόμενο της εργασίας του, με την πλούσια μιγαδική ανάλυση και την πρωτοτυπία των μεθόδων του, καθώς ο ίδιος είναι ο ένας εκ των πατέρων της μιγαδικής ανάλυσης.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται όλες οι εξελίξεις που αφορούν την υπόθεση Riemann σε ένα χρονοδιάγραμμα από το 1859 μέχρι το 2004, με μια μικρή ανάλυση του περιεχομένου τους. Τέλος χωρίζονται οι εξελίξεις μετα το 1859 σε δυο χρονικές περιόδους, τις εξελίξεις από 1859 έως το 1932 και αντίστοιχα στις εξελίξεις από το 1933 μέχρι το 2004 όπου επιλέγονται κάποιες για περεταίρω ανάλυση. Στην πρώτη περίοδο αναλύεται η φόρμουλα Riemann Siegel και ο νομός Gram ενώ στην δεύτερη χρονική περίοδο το φαινόμενο Lehmer, ο νομός Rosser, το θεώρημα Littlewood-Turing και ο αλγόριθμος Odlyzko-Schonhage.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ RIEMANN

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν όλες οι ισοδύναμες μορφές της υπόθεσης Riemann που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα. Μια επιβεβαίωση υπό μορφή απόδειξης σε οποιαδήποτε από αυτές τις ισοδυναμίες, έμμεσα θα επαλήθευε την υπόθεση Riemann, αντίστοιχα μια αποδείξιμη απόρριψη μια εξ' αυτών, θα απόρριπτε την υπόθεση Riemann. Υπό συνεχή μελέτη έχουν τεθεί οι ισοδυναμίες της υπόθεσης Riemann, καθώς μέχρι σήμερα μια ευθεία απόδειξη της υπόθεσης Riemann υπήρξε αδύνατη. Οι ισοδυναμίες αυτές χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες, τις ισοδυναμίες στην θεωρία αριθμών, τις αναλυτικές ισοδυναμίες και τις άλλες ισοδυναμίες. Οι ισοδυναμίες στην θεωρία αριθμών είναι ισοδυναμίες που προκύπτουν καθαρά μέσω της θεωρίας αριθμών. Οι αναλυτικές ισοδυναμίες είναι ισοδυναμίες που είναι στενά συνδεδεμένες με τις αναλυτικές ιδιότητες της συνάρτησης ζ και άλλων συναρτήσεων, ενώ στις άλλες ισοδυναμίες τοποθετούμε ισοδυναμίες που είναι εντελώς διεπιστημονικές.

4.2 ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μια ισοδυναμία της υπόθεσης Riemann μέσω της θεωρίας αριθμών, παρέχει μια φυσική μέθοδο εξήγησης της υπόθεσης Riemann σε μη μαθηματικούς, χωρίς να καταλήγει σε μιγαδική ανάλυση. Αν και κάποια τέτοια ισοδυναμία είναι απίθανο να καταλήξει απευθείας σε μια λύση, παρέχει μια αίσθηση του ποσό περίπλοκα είναι συνδεδεμένη η ζ συνάρτηση με τους πρώτους αριθμούς.

1) Η πρώτη ισοδυναμία που προέρχεται από τη θεωρία αριθμών, είναι η ισοδυναμία που δώσαμε στο πρώτο κεφάλαιο στην προσπάθεια να εξηγήσουμε όσο πιο απλά γίνεται την υπόθεση Riemann. Συγκεκριμένα είχαμε ορίσει την συνάρτηση Liouville $\lambda(\mathrm{n})=(-1)^{w(\mathrm{n})}$, όπου $w(\mathrm{n})$ είναι ο αριθμός των πρώτων παραγόντων του n, μετρημένης της πολλαπλότητας. Η συνάρτηση αυτή οδηγεί, όπως είχαμε αναφέρει, στην παρακάτω ισοδυναμία.

<u>Ισοδυναμία 1</u>

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση, ότι για κάθε ε > 0 ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda(1)+\lambda(2)+\ldots+\lambda(\mathrm{n}-1)+\lambda(\mathrm{n})}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}=0$$

Δηλαδή, **<u>κάθε ακέραιος έχει ίση πιθανότητα να έχει μονό ή ζυγό αριθμό διακεκριμένων πρώτων παραγόντων</u>**.

2) Η ισοδυναμία που θα παρουσιαστεί σε αυτό το σημείο έχει μεγάλη ιστορία. Υπενθυμίζουμε ότι το PNT εκφράζεται ως $\pi(\mathrm{x}) \sim \mathrm{Li}(\mathrm{x})$, όπου $\mathrm{Li}(\mathrm{x})$ η λογαριθμική ολοκληρωτική συνάρτηση, την οποία είχαμε ορίσει ως $\mathrm{Li}(\mathrm{x}) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ και $\pi(\mathrm{x})$ η συνάρτηση που μετράει τους πρώτους αριθμούς μέχρι τον αριθμό που παίρνει ως όρισμα της.

<u>Ισοδυναμία 2</u>

Ο ισχυρισμός ότι $\pi(\mathrm{x}) = \mathrm{Li}(\mathrm{x}) + \mathrm{O}(\sqrt{\mathrm{x}}\log \mathrm{x})$ είναι ισοδύναμος με την υπόθεση Riemann.

3) Η επόμενη ισοδυναμία περιέχει τη συνάρτηση Merten, για την οποία θα χρειαστούμε τον ορισμό της συνάρτησης Mobius.

<u>Ορισμός 4.1</u> : Η συνάρτηση Mobius, μ(n), ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\mu(\mathrm{n}) := \begin{cases} 0 & \text{αν το n έχει τετράγωνο παράγοντα,} \\ 1 & \text{αν το n} = 1, \\ (-1)^k & \text{αν το n είναι γινόμενο κ διαφορετικών πρώτων} \end{cases}$$

<u>Ορισμος4.2</u> : Η συνάρτηση Merten, η οποία συμβολίζεται με $\mathrm{M}(\mathrm{x})$, ορίζεται ως

$$\mathrm{M}(\mathrm{x}) := \sum_{n \le x} \mu(\mathrm{n}), \quad \text{όπου x πραγματικός αριθμός.}$$

<u>Ισοδυναμία 3</u>

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση $\mathrm{M}(\mathrm{x}) = O(\mathrm{x}^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ για κάθε ε > 0.

4) Η τέταρτη ισοδυναμία είναι μια αναδιατύπωση της υπόθεσης Riemann σε όρους της συνάρτησης αθροίσματος διαιρετών.

<u>Ορισμός 4.3</u> : Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση αθροίσματος διαιρετών ορίζεται ως

$$\sigma(\mathrm{n}) = \sum_{d|n} d \; .$$

Ακολουθεί η ισοδυναμία, η οποία οφείλεται στον μαθηματικό Robin.

Ισοδυναμία 4

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση, ότι για κάθε $n > 5040$ ισχύει ότι $\sigma(\mathrm{n}) < e^{\gamma} n \log\log n$, όπου γ σταθερά Euler[1].

5) Ο μαθηματικός Lagarias με βάση το έργο του Robin, κατάληξε σε μια νέα ισοδυναμία της υπόθεσης Riemann, που εμπεριέχει και αυτή τη συνάρτηση αθροίσματος διαιρετών, άλλα και τους n-οστούς αρμονικούς αριθμούς.

Ορισμός 4.4: Ο n-οστος αρμονικός αριθμός ορίζεται ως

$$H_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} .$$

Ισοδυναμία 5

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση $\sigma(\mathrm{n}) \leq H_n + \exp(H_n)\log(H_n)$, για κάθε $n \geq 1$, όπου ισχύει η ισότητα μόνο για $n = 1$.

Το ενδιαφέρον της ισοδυναμίας του Lagarias είναι ότι ισχύει για όλα τα $n \geq 1$. Ο μαθηματικός Eric Rains έχει αποδείξει ότι ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία για $1 < n < 5040$.

6) Χρησιμοποιώντας τη Merten συνάρτηση, η προηγούμενη ισοδυναμία μπορεί να αναδιατυπωθεί σε όρους της σειράς Farey. Ο όρος ‘‘σειρά Farey’’ είναι εντελώς παραπλανητικός διότι δεν ανακαλύφθηκε από τον Farey και δεν είναι σειρά. Η σειρά Farey ανακαλύφθηκε από τον μαθηματικό Haros, δίδεται παρακάτω ο ορισμός της.

Ορισμός 4.5 : Η σειρά Farey F_n της τάξης n, είναι το σύνολο των ρητών $\frac{\alpha}{b}$ με $0 \leq \alpha \leq b \leq n$ και $(\alpha, \mathrm{b}) = 1$, διατεταγμένη σε αύξουσα σειρά. Συμβολίζεται ο j-οστος όρος της F_n ως $F_n(\mathrm{j})$.

Παρατήρηση Λόγο του ορισμού της σειράς Farey, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός m των όρων της σειράς Farey τάξης n είναι $m = 1 + \sum_{j=1}^{n} \phi(\mathrm{j})$, όπου $\phi(\mathrm{j})$ η συνάρτηση Euler.

[1] Η σταθερά Euler είναι γ = 0.577.

Ισοδυναμία 6 Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση $\sum_{j=1}^{m}\left|F_n(\mathrm{j})-\frac{j}{m}\right|=O(\mathrm{n}^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, όπου ε > 0 και $m=\#\{\mathrm{F}_n\}$.

4.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Στις αναλυτικές ισοδυναμίες θα εξετάσουμε ισοδυναμίες της υπόθεσης Riemann μου συνδέονται άμεσα με τις αναλυτικές ιδιότητες της ζ συνάρτησης. Οι ισοδυναμίες αυτές ποικίλουν, από ισοδυναμίες που προκύπτουν άμεσα ως επίπτωση του ορισμού της ζ συνάρτησης ως και σε άλλες πιο δυσνόητες αναδιατυπώσεις. Γενικά οι ισοδυναμίες που θα παρουσιαστούν εδώ θεωρούνται κλασσικές και προέκυψαν κατά την διάρκεια της έρευνας των ιδιοτήτων της ζ συνάρτησης.

1) Η πρώτη ισοδυναμία αυτής της ενότητας, είναι μια επαναδιατύπωση της ζ συνάρτησης σε όρους της συνάρτησης Dirichlet ή εναλλασσόμενης ζ συνάρτησης όπως είναι γνωστή στο ευρύ κοινό.

Ισοδυναμία 7

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη της δήλωσης ότι όλα τα μηδενικά της Dirichlet $\eta(\mathrm{s})$ συνάρτησης, $\eta(\mathrm{s}):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}=(1-2^{1-s})\zeta(\mathrm{s})$, για τα οποία ισχύει ότι $0<R(\mathrm{s})<1$ βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη γραμμή $R(\mathrm{s})=\frac{1}{2}$.

2) Η εξέταση της σύγκλισης της συνάρτησης $\frac{1}{\zeta(\mathrm{s})}$ μας χαρίζει την παρακάτω ισοδυναμία.

Ισοδυναμία 8

Η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(\mathrm{n})}{n^s}$, για $R(\mathrm{s})>\frac{1}{2}$ είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για την υπόθεση Riemann.

Αξίζει να αναφερθεί ότι για $R(\mathrm{s})>1$ ισχύει ότι $\frac{1}{\zeta(\mathrm{s})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(\mathrm{n})}{n^s}$.

3) Μέσο της μελέτης της πρώτης παραγώγου, φθάσαμε σε ακόμη μια ισοδυναμία.

Ισοδυναμία 9

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με τον μη μηδενισμό της $\zeta'(\mathrm{s})$ συνάρτησης στην περιοχή $0 < R(\mathrm{s}) < \frac{1}{2}$.

4) Η επόμενη ισοδυναμία που αποδίδεται στον Lagarias, εμπεριέχει την συνάρτηση ξ(s) (1.28) την οποία είχαμε ορίσει στο πρώτο κεφάλαιο ως $\xi(\mathrm{s}) = \frac{s}{2}(\mathrm{s}-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(\mathrm{s})$.

Ισοδυναμία 10

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση ότι $R\left(\frac{\xi'(\mathrm{s})}{\xi(\mathrm{s})}\right) > 0$.

5) Με την συνέχεια του έργου των μαθηματικών πάνω στην ξ(s), ορίστηκε η συνάρτηση λ_n ως $\lambda_n := \frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\frac{d^n}{ds^n}(\mathrm{s}^{n-1}\log\xi(\mathrm{s}))$,η οποία οδήγησε σε μια νέα ισοδυναμία της HR.

Ισοδυναμία 11

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη με την δήλωση ότι όλες οι τιμές της λ_n για $n \geq 1$ είναι μη αρνητικές.

6) Καθώς η υπόθεση Riemann σχετίζεται με τα μηδενικά της ζ συνάρτησης, δεν μας εκπλήσσει το γεγονός ότι η HR μπορεί να αναδιατυπωθεί σε άλλες δηλώσεις, που να περιέχουν και αυτές τα μηδενικά της ζ συνάρτησης, όπως οι δυο ισοδυναμίες που ακολουθούν.

Ισοδυναμία 12

Η υπόθεση Riemann είναι ισοδύναμη της ακόλουθης δήλωσης:

$$\lambda_n |_{s=1} = \sum_{\rho}\left(1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right) > 0 \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots ,$$

όπου το ρ τρέχει πάνω στα μιγαδικά μηδενικά της ζ(s).

Ισοδυναμία 13

Η υπόθεση Riemann είναι αληθής αν και μόνον αν $\mathrm{I} := \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\log(|\zeta(s)|)}{|s|^2} dt = 0,$ όπου $s=\sigma+it$. Αυτό το ολοκλήρωμα είναι ακριβώς ίσο με $\mathrm{I} = 2\pi \sum_{\mathrm{R}(\rho)>\frac{1}{2}} \log\left|\frac{\rho}{1-\rho}\right|$, όπου ρ είναι τα μηδενικά της ζ(s) στην περιοχή που αναφέρεται το άθροισμα.

7) Στον Hardy και στον Littlewood αποδίδεται η παρακάτω ισοδυναμία της HR, η οποία σχετίζεται με τιμές της ζ συνάρτησης, για περιττούς ακέραιους.

Ισοδυναμία 14

Η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνον αν $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{x})^{\kappa}}{\kappa!\,\zeta(2\kappa+1)} = O(\mathrm{x}^{-\frac{1}{4}}),$ καθώς $\mathrm{x} \to \infty$.

8) Θα προχωρήσουμε σε μια πιο περιπλοκή ισοδυναμία της HR για την οποία θα χρειαστούμε κάποιες επιπλέον συναρτήσεις.

Ορίζουμε για αρχή την συνάρτηση Ξ ως, $\Xi(\mathrm{iz}) := \frac{1}{2}\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\pi^{-z/2-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)$.

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο ότι $\Xi\left(\frac{z}{2}\right)\Big/8$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\Phi(\mathrm{t})$, όπου $\Phi(\mathrm{t}) := \sum_{n=1}^{\infty}(2\pi^2 n^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t})e^{-\pi n^2 e^{4t}}$, *για* $\mathrm{t}\in\mathrm{R}$ και $\mathrm{t}\geq 0$. Τώρα είμαστε έτοιμοι να ασχοληθούμε με την συνάρτηση που μας ενδιαφέρει πραγματικά, η οποία είναι η $\mathrm{H}(\lambda,\mathrm{z}) := \mathrm{F}_t[\Phi(\mathrm{t})e^{\lambda t^2}]$,όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ *και* $\mathrm{z}\in\mathbb{C}$,δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier της $\Phi(\mathrm{t})e^{\lambda t^2}$. Είναι εμφανές ότι $\mathrm{H}(0,\mathrm{z}) = \Xi\left(\frac{\mathrm{z}}{2}\right)/8$. Αποδείχθηκε από τον de Bruijn ότι η $\mathrm{H}(\lambda,\mathrm{z})$ έχει μόνο πραγματικά μηδενικά, για $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Επιπλέον έχει ορισθεί μια σταθερά Λ, τέτοια ώστε αν $\mathrm{H}(\lambda,\mathrm{z}) = 0$, τότε ο z είναι πραγματικός αν και μόνον αν $\lambda \geq \Lambda$. Η τιμή της Λ ονομάζεται Bruijn-Newman σταθερά, μέσο αυτής έρχεται η παρακάτω ισοδυναμία.

Ισοδυναμία 15

Η HR είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι $\Lambda \le 0$.

Υπάρχουν αρκετά κάτω φράγματα για το Λ, τα καλυτέρα που έχουν ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα είναι το $-2.7 \cdot 10^{-9}$ από τον Odlyzko το 2000 και το τελευταίο $-1.1 \cdot 10^{-12}$ το 2011.

9) Ο μαθηματικός Salem το 1953 δίνει το ακόλουθο κριτήριο για την αλήθεια της HR.

Ισοδυναμία 16

Η HR ισχύει, αν, και μόνον αν, η ολοκληρωτική εξίσωση $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma y}\varphi(\mathrm{y})}{e^{x-y}+1}dy = 0$, δεν έχει καμία φραγμένη λύση $\varphi(\mathrm{y})$, εκτός της τετριμμένης $\varphi(\mathrm{y}) = 0$, για $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

10) Ακολουθεί μια κομψή ισοδυναμία που οφείλεται στον Volchkov, η οποία συνδέει τα μηδενικά της συνάρτησης ζ με την σταθερά Euler γ.

Ισοδυναμία 17

Η HR είναι ισοδύναμη με την δήλωση ότι

$$\int_0^\infty (1-12\mathrm{t}^2)(1+4\mathrm{t}^2)^{-3}\int_{1/2}^\infty \log\left|\zeta(\sigma+it)\right| \, d\sigma dt = \pi(3-\gamma)/32$$, όπου γ η σταθερά Euler

11) Ο Julio Alac´antara–Bode, δουλεύοντας πάνω στο έργο του Beurling, επαναδιατύπωσε την HR χρησιμοποιώντας τον Hilbert–Schmidt ολοκληρωτικό τελεστή. Ο Hilbert–Schmidt ολοκληρωτικός τελεστής στο $\mathrm{L}^2(0,1)$[1] δίνεται από $[\mathrm{A}f](\theta) := \int_0^1 f(\mathrm{x})\left\{\frac{\theta}{\mathrm{x}}\right\}d\mathrm{x}$, όπου ‘‘{}’’ το δεκαδικό μέρος του αριθμού που περικλείει.

Ισοδυναμία 18

Η HR είναι αληθής αν και αν μόνον ο Hilbert–Schmidt τελεστής A είναι αμφιμονοσήμαντος.

[1] Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο (0,1)

4.4 ΑΛΛΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ

1) Η πρώτη ισοδυναμία σε αυτή την υποενότητα οφείλεται στον Redheffer. Αρχικά πρέπει να ορίσουμε τον πίνακα Redheffer τάξης n.

$$R_n(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ \mathrm{j}=1 \text{ ή αν } \mathrm{i} \mid \mathrm{j}, \\ 0 & \text{αλλιως.} \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι $\det R_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \mu(\kappa)$, με χρήση της αυτής της σχέσης προκύπτει η παρακάτω ισοδυναμία.

<u>Ισοδυναμία 19</u>

Η HR είναι αληθής αν και μόνον αν $\det(\mathrm{R}_n) = \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ για καθε $\varepsilon > 0$.

2) Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες Redheffer ώστε να μεταφράσουμε την HR στην γλώσσα της θεωρίας γραφημάτων. Θέτουμε $B_n := R_n - I_n$, όπου I_n ο ταυτοτικός πίνακας nxn. Έστω G_n το κατευθυνόμενο γράφημα, του οποίου ο πίνακας γειτνίασης είναι ο B_n . Τέλος ορίζουμε το γράφημα $\overline{G_n}$ να είναι το γράφημα που επιτυγχάνεται αν προσθέσουμε έναν βρόγχο στον κόμβο 1 της Gn. Τώρα μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την HR σε όρους των κύκλων του $\overline{G_n}$.

<u>Ισοδυναμία 20</u>

Η ακόλουθη δήλωση είναι ισοδύναμη της HR,

$$\left| \#\{\textit{περιττοί} \text{ κύκλοι του } \overline{G_n}\} - \#\{\textit{ζυγοί} \text{ κύκλοι } \overline{G_n}\} \right| = \mathrm{O}(\mathrm{n}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 .$$

3) Η Nyman–Beurling ισοδυναμία μεταφράζει την RH σε μια δήλωση που αφορά την γραμμική θήκη ενός συνόλου συναρτήσεων.

<u>Ισοδυναμία 21</u>

Η κλειστή γραμμική θήκη του $\{\rho_\alpha(\mathrm{t}) : 0 < a < 1\}$ είναι ο $L^2(0,1)$ αν και μόνον αν η RH είναι αληθής, όπου $\rho_\alpha(\mathrm{t}) := \left\{\frac{a}{t}\right\} - a\left\{\frac{1}{t}\right\}$

όπου ‘‘{ }’’ το δεκαδικό μέρος του αριθμού που περικλείει και $L^2(0,1)$ είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο (0,1).

4) Η προτελευταία ισοδυναμία προκύπτει από την επαναδιατύπωση της HR σε όρους ενός προβλήματος, που αφορά την τάξη των στοιχείων μιας ομάδας.

<u>Ισοδυναμία 22</u>

Η RH είναι ισοδύναμη με την δήλωση, για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι $\log g(\mathrm{n}) < \frac{1}{\sqrt{Li(\mathrm{n})}}$, όπου $g(\mathrm{n})$ είναι η μέγιστη τάξη των στοιχείων της συμμετρικής ομάδας S_n βαθμού n.

4.5 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Γνωρίζοντας σχεδόν όλες τις ισοδυναμίες της υπόθεσης Riemann από αυτό το κεφάλαιο, κατανοούμε ότι υπάρχουν πολλοί οδοί διαθέσιμοι ώστε να αντιμετωπιστεί από έναν μαθηματικό η υπόθεση Riemann. Μια ευθεία απόδειξη της υπόθεσης Riemann μέχρι και σήμερα θεωρείται σχεδόν αδύνατη. Μια έμμεση απόδειξη μέσο κάποιας ισοδυναμίας, αντιλαμβανόμαστε ότι χρειάζεται εξειδικευμένες γνώσεις και αρκετά προχωρημένα μαθηματικά ώστε να κατανοηθεί πλήρως και ενδεχόμενος να υπάρξει έπειτα κάποια απόδειξη της. Καμία ισοδυναμία από αυτές που έχουν μελετηθεί μέχρι και σήμερα δεν έχει αποδειχθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5 ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΥ ΔΕΙΧΝΟΥΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του περιεχομένου του πέμπτου κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε μια ενδιαφέρουσα φράση του διάσημου μαθηματικού Ron Graham για την υπόθεση Riemann.

<<Θα ήταν απογοητευτικό αν στο μέλλον κάποια στιγμή, μπορούσες να ρωτήσεις έναν υπολογιστή αν η υπόθεση Riemann είναι αληθής και να απαντούσε ‘‘Ναι είναι αληθής, άλλα δεν είσαι σε θέση να καταλάβεις την απόδειξη.>>

Ron Graham

Η εικασία του Riemann έχει αντέξει και είναι ευρέως πιστευτή από τους περισσότερους μαθηματικούς για πάνω από έναν αιώνα. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους η εικασία αυτή παραμένει τόσο χρόνια και παράλληλα έχει κινήσει κατά καιρούς το ενδιαφέρον πολλών σημαντικών μαθηματικών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί η πιο άμεση μορφή αποδεικτικών στοιχείων της υπόθεσης Riemann, τα εμπειρικά στοιχεία. Τα επιχειρήματα υπέρ της HR συχνά περιλαμβάνουν σημαντικά συμπεράσματα της αλλά κυρίως απευθύνουν και έκκληση προς την μαθηματική ομορφιά. Μετα την έλευση των ισχυρών υπολογιστικών εργαλείων, οι μαθηματικοί στράφηκαν περισσότερο σε υπολογιστικά στοιχεία για να υποστηρίξουν διάφορες εικασίες, αναμεσά σε αυτές είναι και η HR. Είναι αδύνατο να ελεγχθεί η υπόθεση HR με κάποιον άμεσο υπολογισμό. Ωστόσο τα υπολογιστικά στοιχεία βοηθούν στη διατήρηση της υπόθεσης, ώστε οι μαθηματικοί να ερευνούν την HR και ενδεχομένως μέσο μιας κατάλληλης οδού να οδηγηθούν πιθανότατα σε μια απόδειξη της. Επίσης μας επιτρέπουν να αποδείξουμε αποτελέσματα που είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την HR. Τέλος τα αριθμητικά στοιχεία μας δίνουν την ευκαιρία να αναπτύξουμε νέες ιδέες για μια προσπάθεια επιβεβαίωσης της HR.

5.2 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Στο πρώτο κεφάλαιο όπου παρουσιάστηκε αναλυτικά η επίτευξη της αναλυτικής συνέχισης της ζ συνάρτησης έγινε αντιληπτό ότι η μέτρηση των μηδενικών της ζ δεν είναι εύκολη υπόθεση. Τα μαθηματικά εργαλεία που χρειαζόμαστε για την μέτρηση των μηδενικών βρίσκονται στο πρώτο κεφάλαιο. Ωστόσο για μια επαλήθευση της υπόθεσης Riemann δεν αρκεί μόνο να υπολογίσουμε τα μηδενικά της ζ συνάρτησης. Μια αυστηρή επαλήθευση της υπόθεσης Riemann σε ένα δεδομένο διάστημα μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον τρόπο που ακολουθεί.

Αρχικά θα διατυπώσουμε το θεώρημα υπολοίπων του Cauchy.

Θεώρημα 5.1 : (θεώρημα υπολοίπων του Cauchy): Αν μια συνάρτηση f είναι ολόμορφη στο απλά συνεκτικό πεδίο D εκτός από τα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ και C μια απλή, κλειστή τμηματικά λεία θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του D που έχει στο εσωτερικό της τα σημεία αυτά, τότε

$$\int_C \mathrm{f(z)dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, s_{z=z_k} \mathrm{f(z)}$$

όπου $\mathrm{Re}\, s_{z=z_k} \mathrm{f(z)}$ το υπόλοιπο της $\mathrm{f(z)}$ στον πόλο $z = z_k$.

Έστω $s = \frac{1}{2} + it$, όπου $t \in \mathbb{R}$ και έστω $\mathrm{N_1(T)}$ ο αριθμός των μηδενικών της $\zeta(\mathrm{s})$ στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ με κορυφές στα σημεία $-1-iT, 2-iT, 2+iT, -1+iT$ (Αποδεικνύεται ότι $\mathrm{N_1(T) = 2N(T)}$, όπου $\mathrm{N(T)}$ το είχαμε ορίσει στο πρώτο κεφάλαιο).

Με χρήση του θεωρήματος 5.1 για την ζ(s), δεδομένου ότι η ζ(s) έχει έναν απλό πόλο στο 1 οδηγούμαστε στην σχέση :

$$\mathrm{N_1(T)} - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{dR} -\frac{\zeta'(\mathrm{s})}{\zeta(\mathrm{s})} ds \tag{5.1}$$

όσο το T δεν είναι φανταστικό μέρος κάποιου μηδενικού της ζ(s). Ο όρος -1 που εμφανίζεται αριστερά στην παραπάνω σχέση ανταποκρίνεται στον πόλο της ζ στο $s = 1$. Η $\zeta(\mathrm{s})$ *και* $\zeta'(\mathrm{s})$ μπορούν να υπολογιστούν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια, χρησιμοποιώντας την Riemann–Siegel φόρμουλα ή το άθροισμα Euler–Maclaurin. Το $\mathrm{N_1(T)}$ τελικά προσδιορίζεται στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα του (5.1) τύπου στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό.

Στην εργασία του ο Riemann το 1859 εισάγει την συνάρτηση ξ(t) όπως ήδη έχουμε αναφέρει και είχαμε ορίσει ως

$$\xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \qquad (5.2)$$

η οποία είναι αναλυτική παντού στο $\mathbb{C}$ και έχει μηδενικά για φανταστικό μέρος του s ανάμεσα στο $-\frac{1}{2}$ και στο $\frac{1}{2}$. Riemann υπόθεσε ότι όλα τα α που μηδενίζουν την $\xi(t)$ είναι πραγματικά και μάλιστα στην μορφή $\frac{1}{2}+i\alpha$ αποτελούν τα μη τετριμμένα μηδενικά της συνάρτησης ζ.

Έστω $\hat{t}$ μια πραγματική μεταβλητή. Μέσο του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, αφού η $\xi(\hat{t})$ είναι συνεχής και πραγματική συνάρτηση, θα υπάρχει πάντα ένα μηδενικό περιττής τάξης, μεταξύ κάθε δυο σημείων όπου η $\xi(\hat{t})$ αλλάζει πρόσημο. Εάν ο αριθμός αλλαγής προσήμου της $\xi(\hat{t})$ στο $[-T,T]$ είναι ίσος με $N_1(T)$, τότε όλα τα μηδενικά της $\zeta(s)$ στο $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ είναι απλά και βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη γραμμή. Έχει επαληθευτεί ότι τα πρώτα δέκα τρισεκατομμύρια μηδενικά είναι απλά και ικανοποιούν την υπόθεση Riemann.

Υπόθεση 5.1 : Όλα τα μηδενικά της ζ(s) είναι απλά.

Η υπόθεση αυτή πιστεύεται από τους περισσότερους μαθηματικούς που ασχολούνται με την υπόθεση Riemann, παρόλα αυτά αν η υπόθεση αυτή αποδειχθεί εσφαλμένη δεν επηρεάζει την υπόθεση Riemann. Ωστόσο αν υπάρχουν μηδενικά μεγαλύτερης τάξης θα δημιουργήσουν προβλήματα σε πολλές υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα.

5.3 ΜΙΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Οι πρώτοι υπολογισμοί μηδενικών της ζ συνάρτησης πραγματοποιηθήκαν από τον ίδιο τον Riemann, πριν την παρουσίαση της διάσημης εργασίας του. Τους υπολογισμούς αυτούς δεν τους δημοσίευσε ποτέ, όμως ήταν αυτοί οι οποίοι αποτέλεσαν στην πραγματικότητα τη βάση της διάσημης υπόθεσης του. Ο Siegel μελετώντας τις σημειώσεις του Riemann, αποκάλυψε όχι μόνο ότι ο Riemann είχε εκτελέσει κάποιους υπολογισμούς της $\zeta(s)$, αλλά και τη λαμπρή μέθοδο που χρησιμοποίησε. Ο τύπος του Riemann δημοσιεύτηκε την δεκαετία του 1930 και έγινε γνωστός ως ο τύπος Riemann-Siegel. Αυτό ο τύπος έχει αποτελέσει την βάση όλων των υπολογισμών μεγάλης κλίμακας της ζ συνάρτησης.

Σε αυτό το σημείο εισάγεται ένας πίνακας που περιγράφει την ιστορική εξέλιξη πάνω στο πλήθος των n πρώτων μηδενικών που επαληθεύουν την υπόθεση Riemann από το 1859 μέχρι 2004 και αποτελούν ένα εντυπωσιακό σώμα εμπειρικών στοιχείων υπέρ της HR.

ΕΤΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΚΑΝ ΑΠΟ
1859	3	B. Riemann
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchinson
1935	1041	E. C. Titchmarsh
1953	1,104	A. M. Turing
1956	15,000	D. H. Lehmer
1956	25,000	D. H. Lehmer
1958	35,337	N. A. Meller
1966	250,000	R. S. Lehman
1968	3,500,000	J. B. Rosser, et al.
1977	40,000,000	R. P. Brent
1979	81,000,001	R. P. Brent
1982	200,000,001	R. P. Brent, et al
1983	300,000,001	J. van de Lune, H. J. J. te Riele
1986	1,500,000,001	J. van de Lune, et al
2001	10,000,000,000	J. van de Lune (ΜΗ ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΕΝΑ)
2004	900,000,000,000	S. Wedeniwski
2004	10,000,000,000,000	X. Gourdon

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η τελευταία προσπάθεια για εύρεση μηδενικών της ζ(s) και επαλήθευσης της HR με το χέρι έγινε το 1935 από τον Tichmarsh, ενώ ο Turing δημιούργησε για αυτό τον σκοπό μια αναλογική συσκευή με την βοήθεια της οποίας εντόπισε και επαλήθευσε τα πρώτα 1.104 μηδενικά. Το μεγάλο βήμα γίνεται με την χρήση ψηφιακού υπολογιστή, όπου ο Lehmer επαληθεύει την υπόθεση για τα πρώτα 15.000 μηδενικά. Το εκπληκτικό αποτέλεσμα του X.Gourdon που επιτεύχθηκε το 2004, οφείλεται στην χρήση ενός αλγορίθμου που δημιουργήθηκε από τον Odlyzko και ο Schönhage. Με τον αλγόριθμο Odlyzko-Schönhage ο X.Gourdon επαλήθευσε την HR για τα πρώτα 10^{13} μηδενικά.

Επιπλέον εμπειρικά στοιχεία υπέρ της HR χάρισε ο μαθηματικός A.M.Odlyzko μέσα από την εκτεταμένη έρευνα του. Συγκεκριμένα το 1987 εντόπισε μερικά μηδενικά σε ασυνήθιστα μεγάλο ύψος, περίπου 10^{12}. Ενώ αργότερα το 1992 με χρήση της μεθόδου του (Odlyzko-Schönhage), για πρώτη φορά υπολόγισε 175 εκατομμύρια μηδενικά σε ύψη περίπου 10^{20} και μερικά σε ύψος περίπου 2×10^{20}. Η τελευταία στον τομέα αυτό δημοσιεύεται το 1998, όπου με χρήση της μεθόδου του (Odlyzko-Schönhage) υπολόγισε 10 χιλιάδες μηδενικά σε ακόμα μεγαλύτερο ύψος περίπου 10^{21} . Όλα τα μηδενικά της έρευνας του επαληθεύουν την υπόθεση Riemann πάρα το μεγάλο ύψος στο οποίο επιτυγχάνονται. Ο Odlyzko έχει δημοσιεύσει το υψηλότερο μη τετριμμένο μηδενικό της ζ(s), συγκεκριμένα το 10.000.000.000.000.000.010.000-οστο για $s=\frac{1}{2}+1.370.919.909.931.995.309.568,33539i$.

Όσο και αν εντυπωσιαζόμαστε από τα εμπειρικά στοιχεία υπέρ της HR υπάρχουν λόγοι για τους οποίους πρέπει να είμαστε δύσπιστοι ως προς αυτά. Η HR είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι για t πραγματικό, όλα τα τοπικά μέγιστα της $\xi(\mathrm{t})$ είναι θετικά και όλα τα τοπικά ελάχιστα της $\xi(\mathrm{t})$ είναι αρνητικά. Έχει προταθεί ότι ένα αντιπαράδειγμα της HR, αν υπάρχει, θα μπορούσε να βρεθεί σε μια γειτονιά μη συνηθισμένων μεγάλων κορυφών της $\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|$. Τέτοιες κορυφές μπορεί να προκύψουν μόνο σε πολύ μεγάλα ύψη. Το γεγονός αυτό, μεταξύ άλλων, αποθαρρύνει τους μαθηματικούς να πεισθούν περί της υπόθεσης αποκλειστικά από τον παραπάνω πίνακα.

5.4 ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

<< Πως η συνάρτηση ζήτα του Riemann μιμείται τόσο πειστικά ένα κβαντικό σύστημα χωρίς να είναι ένα από αυτά; >>

M. Berry

Μια από τις τρέχουσες ιδέες που σχετίζονται με την υπόθεση Riemann, είναι η ιδέα ότι όλα τα μηδενικά της ζ συνάρτησης μπορούν να ερμηνευτούν ως ιδιοτιμές συγκεκριμένων πινάκων. Αυτός ο τρόπος σκέψης είναι ελκυστικός και πιθανόν ένας κάλος τρόπος να αντιμετωπίσουμε την HR, αφού δίνει μια πιθανή σύνδεση της με ένα φυσικό φαινόμενο.

Η σύνδεση μεταξύ της HR και των τυχαίων πινάκων έχει τις ρίζες της στο έργο του Hilbert και του Polya. Ο Hilbert και ο Polya, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ερεύνησαν εάν στα μηδενικά $\frac{1}{2}+i\gamma_j$ του ζ(s), ο αριθμός γ_j ανήκει σε ένα σύνολο ιδιοτιμών ενός ερμητιανού τελεστή. Μια τέτοια προσέγγιση όχι μόνο θα επιβεβαίωνε την υπόθεση ότι οι αριθμοί γ_j είναι πραγματικοί, αλλά θα συνέδεε τα μηδενικά με ιδέες από την φυσική, δίνοντας ένα ‘‘φυσικό’’ λόγο γιατί τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ βρίσκονται στη κρίσιμη γραμμή.

Εμπειρικά στοιχεία πάνω στην υπόθεση Riemann δείχνουν ότι τα μηδενικά της συνάρτησης Riemann πράγματι κατανέμονται όπως και οι ιδιοτιμές συγκεκριμένων συνόλων τυχαίων πινάκων, πιο συγκεκριμένα του Γκαουσιανού μοναδιακού συνόλου {Gaussian unitary ensemble (GUE)}. Αυτό υποδηλώνει ότι η θεωρία τυχαίων πινάκων ίσως προβάλει ένα δρόμο προς την απόδειξη της RH.

Η σύνδεση των μηδενικών της ζ συνάρτησης με τις ιδιοτιμές από τον Hilbert και τον Polya εξελίχθηκε μέσα από το έργο του Montgomery και του Dyson.

Έχουμε παρουσιάσει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο αριθμός των μηδενικών της ζ(s), στην κρίσιμη λωρίδα με $0 \le I(\mathrm{s}) < T$ δίνεται από τον τύπο :

$$\mathrm{N(T)} = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \mathrm{O}(\log T). \qquad (5.3)$$

Έστω ότι τα φανταστικά μέρη των πρώτων n μηδενικών πάνω σε πραγματικό άξονα είναι

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \ldots \leq \gamma_n,$$

διατεταγμένα σύμφωνα με την αύξηση του ύψους στο οποίο βρίσκονται (αν δυο μηδενικά είναι ίσα στο φανταστικό μέρος τους, τότε κατατάσσονται σύμφωνα με το πραγματικό τους μέρος από το μικρότερο στο μεγαλύτερο όπως αυτά εντοπίζονται). Από τη σχέση (5.3) προκύπτει

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log n}.$$

Υπό την HR, ο Montgomery μελέτησε τα κενά $\delta_j = \gamma_{j+1} - \gamma_j$ μεταξύ διαδοχικών μηδενικών, αρχικά τα κανονικοποίησε ώστε να έχουν μέσο μήκος 1, ασυπτωτικά. Η κανονικοποίηση των κενών συμβολίζεται με $\hat{\delta}_j$ και δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\delta}_j = \hat{\gamma}_{j+1} - \hat{\gamma}_j, \text{ όπου } \hat{\gamma}_n = N(\gamma_n).$$

Ενώ η διαφορά $\hat{\gamma}_{j+k} - \hat{\gamma}_j$ είναι γνωστή ως k-ιοστό διαδοχικό κενό.

Έστω α και β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με $\alpha < \beta$. Έστω $\hat{\gamma}_1 \leq \ldots \leq \hat{\gamma}_n$ είναι τα μη τετριμμένα μηδενικά της ζ συνάρτησης κατά μήκος $\sigma = \frac{1}{2}$, κανονικοποιημένα όπως έχουμε περιγράψει προηγουμένως. Ο αριθμός των k-ιοστών διαδοχικών κενών στο [α,β] δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\#\{(\mathrm{j,k}) : 1 \leq j \leq n,\ k \geq 0,\ (\hat{\gamma}_{j+k} - \hat{\gamma}_j) \in [\alpha, \beta]}{n}. \qquad (5.4)$$

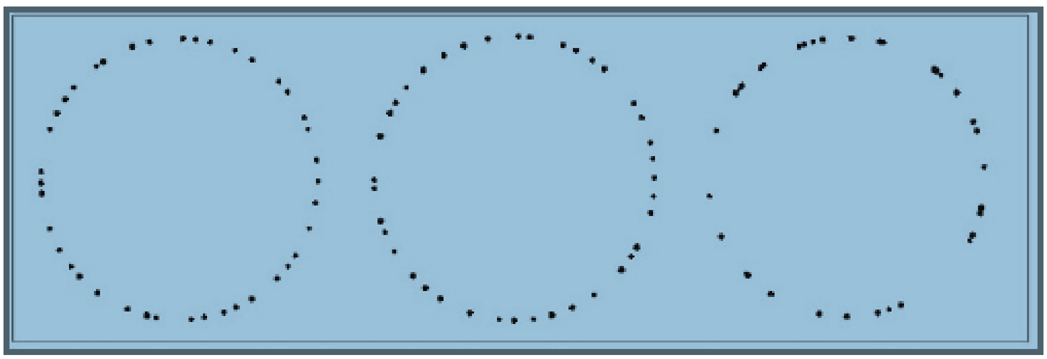
Ο Montgomery υπέθεσε τη δεκαετία του 1970 ότι ο αριθμός των k-ιοστών συνεχόμενων κενών στο [α,β] συμπεριφέρεται ασυπτωτικά ως εξής.

<u>*Υπόθεση 5.1*</u> : (Υπόθεση συσχέτισης ζεύγους του Montgomery) :

$$\frac{\#\{(j,k):1\leq j\leq n,\ k\geq 0,\ (\hat{\gamma}_{j+k}-\hat{\gamma}_j)\in[\alpha,\beta]\}}{n}\sim\int_{\alpha}^{\beta}1-\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}dx, \qquad (5.5)$$

καθώς το $n\to\infty$.

Η υπόθεση αυτή στηρίζεται σε αποτελέσματα, τα οποία είναι αποδείξιμα αν υποθέσουμε την αλήθεια της υπόθεσης Riemann.



Γράφημα 5.1 : Οι ιδιοτιμές ενός τυχαίου 40×40 μοναδιακού πίνακα, 40 συνεχόμενα μηδενικά της ζ(s) σε τέτοια κλίμακα ώστε να τυλίξουν μια φορά έναν κύκλο και 40 τυχαία σημεία ενός μοναδιαίου κύκλου.

Η συνάρτηση

$$1-\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \qquad (5.6)$$

ονομάζεται συνάρτηση συσχέτισης ζεύγους των μηδενικών της ζ συνάρτησης.

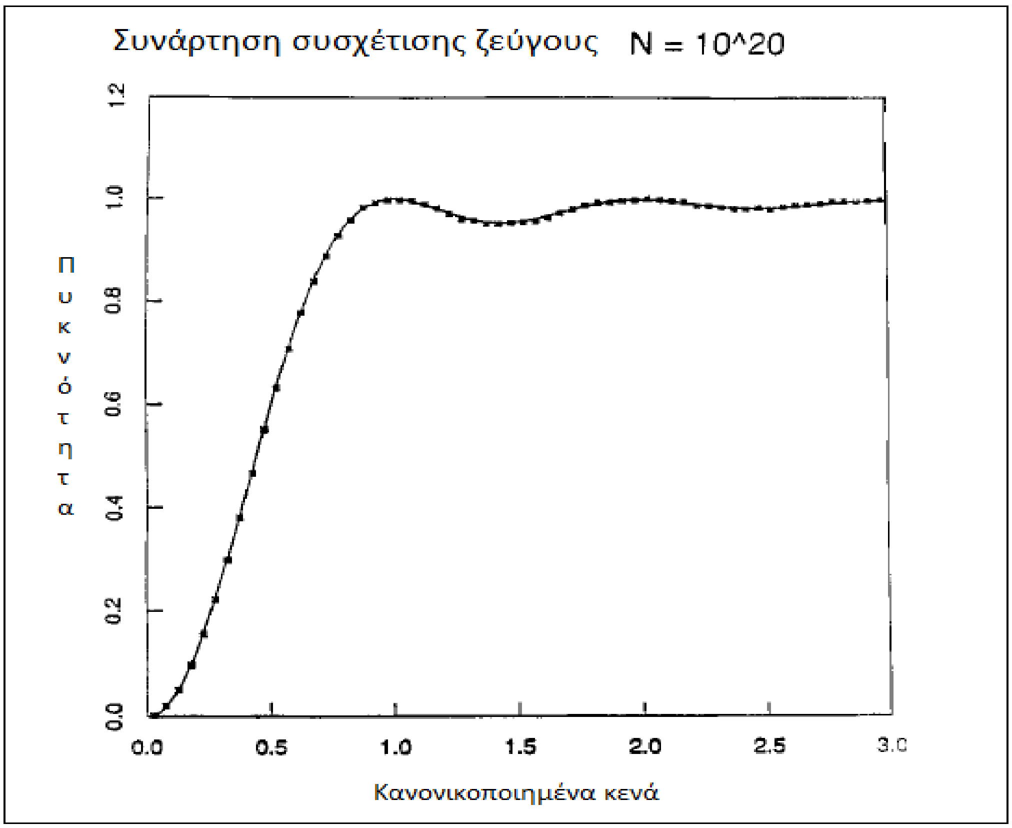
Μέρος της ιστορίας της HR και των τυχαίων πινάκων είναι η σημαντική ιστορική συνάντηση του μαθηματικού Hugh Montgomery και του φυσικού Freeman Dyson στο Princeton. Ο Montgomery έδειξε στον Dyson τη συνάρτηση συσχέτισης ζεύγους της ζ συνάρτησης και ο Dyson αναγνώρισε σε αυτή τη συνάρτηση συσχέτισης ζεύγους για κατάλληλα κανονικοποιημένες ιδιοτιμές του GUE, ένα μαθηματικό εργαλείο της θεωρίας τυχαίων πινάκων με το οποίο ασχολήθηκε ο ίδιος για αρκετά χρονιά κατά την έρευνα του στα κβαντικά δυναμικά συστήματα, καθώς με το GUE ήταν δυνατή η μοντελοποίηση ορισμένων κβαντικών δυναμικών συστημάτων, συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές του GUE αποδείχθηκαν άριστη εφαρμογή για τα επίπεδα ενέργειας που παρατηρήθηκαν σε πειράματα. Μέσα από τη παρατήρηση του Dyson, ο Montgomery ανασκεύασε την εικασία του.

<u>Υπόθεση 5.2</u> : (Montgomery-Odlyzko νόμος) : Η κατανομή των κενών μεταξύ μη τετριμμένων μηδενικών της ζ συνάρτησης του Riemann είναι στατιστικά ταυτόσημη με την κατανομή των κενών μεταξύ των ιδιοτιμών του Γκαουσιανού μοναδιακού συνόλου.

Στις αρχές του 1980, ο Odlyzko επαλήθευσε την HR σε ένα μεγάλο διάστημα στο ύψος του 10^{20} μηδενικού της ζ συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας τη κανονικοποίηση

$$\hat{\delta}_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\frac{\log(\gamma_n/2\pi)}{2\pi},$$

ο Odlyzko υπολόγισε τον συσχετισμό ζεύγους των μηδενικών της ζ(s) σε αυτό το διάστημα. Η ακόλουθη γραφική παράσταση εμπεριέχει τη συνάρτηση συσχέτισης ζεύγους του GUE και τα εμπειρικά στοιχεία της ζ(s) από το έργο του Odlyzko.



<u>Γράφημα 5.1</u>: Η συνάρτηση συσχέτισης ζεύγους του GUE (▬) και των 8×10^6 μηδενικών κοντά στο 10^{20}-οστο μηδενικό της ζ(s) πάνω σε πραγματικό άξονα (■). {Γράφημα του Odlyzko}

Τα αποτελέσματα της δουλείας του Odlyzko εκδόθηκαν σε μια εργασία του το 1987 με τίτλο ‘‘Η κατανομή των κενών μεταξύ των μηδενικών της ζ συνάρτησης’’, ο ίδιος χαρακτήρισε τα αποτελέσματα του αρκετά αλλά όχι απόλυτα συνεπή με την τις προβλέψεις του GUE. Διότι κάποια ζεύγη μηδενικών προέκυψαν πολύ κοντά μεταξύ τους σε σχέση με την απόσταση που το μοντέλο GUE προέβλεπε. Τα μηδενικά στο $\frac{1}{2}+(7005+t)\mathrm{i}$ για $t \approx 0.06286617$ και $\mathrm{t} \approx 0.1005646$ σχηματίζουν ένα τέτοιο ζευγάρι. Η εμφάνιση τέτοιων κοντινών μη τετριμμένων μηδενικών είναι γνωστή ως Lehmer φαινόμενο.

5.5 Ο SKEWES ΑΡΙΘΜΟΣ

Έχουμε τονίσει ότι υπάρχουν λόγοι να ανησυχούμε για τα υπολογιστικά στοιχεία υπέρ της HR. Ένα καλό παράδειγμα για τη παραπλανητική φύση των αριθμητικών δεδομένων, που αποτελεί ταυτόχρονα προειδοποίηση σε αυτούς που πιστεύουν τυφλά στα αριθμητικά στοιχεία είναι ο διάσημος αριθμός Skewes.

Ο αριθμός Skewes, είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός n για τον οποίο ισχύει ότι $\pi(\mathrm{n}) \geq \mathrm{Li}(\mathrm{n})$. Γνωρίζουμε από προηγούμενο κεφάλαιο ότι το PNT μας δίνει ότι $\pi(\mathrm{n}) \sim \mathrm{Li}(\mathrm{n})$ για $n \to \infty$. Προκαταρκτικοί υπολογισμοί έδειχναν ότι $\pi(\mathrm{n}) < \mathrm{Li}(\mathrm{n})$ για όλα τα n, όπως είχε υποτεθεί από πολλούς μαθηματικούς, ανάμεσα σε αυτούς ο Riemann και ο Gauss. Όμως η υπόθεση αυτή διαψεύσθηκε το 1912 από τον Littlewood, όταν έδειξε ότι η ανισότητα αυτή αποτυγχάνει για κάποια n. Δυο χρόνια αργότερα ο Littlewood δημοσιεύει μια εργασία, στην οποία περιέχεται η απόδειξη ότι η ανισότητα $\pi(\mathrm{n}) < \mathrm{Li}(\mathrm{n})$, που πολλοί μαθηματικοί είχαν στηρίξει ανάμεσα τους και ο Gauss (δίνοντας έμφαση στα αριθμητικά στοιχεία που είχαν στα χέρια τους) ότι αποτυγχάνει για απείρως πολλά n και η υπόθεση τους καταρρίπτεται ολοκληρωτικά.

Η ισχυρή σύνδεση μεταξύ του PNT και της HR έχει ως συνέπεια της, τα φράγματα του αριθμού Skewes να εξαρτώνται από την εγκυρότητα της υπόθεσης Riemann. Τα παρακάτω φράγματα εντοπίστηκαν όλα υποθέτοντας την αλήθεια της HR. Το 1933 ο μαθητής του Littlewood, Skewes έδωσε το άνω φράγμα $\boldsymbol{n} \leq \mathbf{10}^{10^{10^{10^{34}}}}$. Το 1966, ο Lehman απέδειξε ότι υπάρχουν παραπάνω από 10^{500} ακέραιοι ανάμεσα στο 1.53×10^{1165} και στο 1.65×10^{1165} για τα οποία η ανισότητα αποτυγχάνει. Το 1987 χρησιμοποιώντας μια καλύτερη προσέγγιση της ζ(s), ο te Riele αποδεικνύει ότι υπάρχουν τουλάχιστον 10^{180} ακέραιοι στο $[6.627\times10^{370}, 6.687\times10^{370}]$ για τους οποίους η ανισότητα αποτυγχάνει. Το άνω φράγμα βελτιώθηκε ακόμα περισσότερο στο 1.39×10^{316} από τους μαθηματικούς Bays και Hudson το 2000.

Ο Skewes έδωσε και ένα άνω φράγμα το οποίο δεν απαιτεί την υπόθεση Riemann. Αρχικά υπέθεσε την ακολουθεί πρόταση.

Υπόθεση Η : Κάθε μιγαδικό μηδενικό $s=\sigma+it$ της συνάρτησης ζ(s) ικανοποιεί την σχέση

$$\sigma-\frac{1}{2} \leq \mathrm{X}^{-3}\log^{-2}(\mathrm{X}) \text{ υπό την προϋπόθεση } |t| < X^{3}.$$

Το 1955 ο Skewes υποθέτοντας την άρνηση της υπόθεσης H, υπολόγισε το άνω φράγμα $n \leq 10^{10^{10^{10^3}}}$.

Τα καλύτερα άνω φράγματα του αριθμού Skewes βρίσκονται πολύ πιο πέρα από τα όρια της υπολογιστικής μας ισχύς. Ένα αντιπαράδειγμα λοιπόν της υπόθεσης Riemann είναι πολύ πιθανόν να βρίσκεται έξω από τα όρια της υπολογιστικής μας ισχύς, και ως εκ τούτου όλα τα εμπειρικά στοιχεία που προκύπτουν μέσο των προσπαθειών μας για επιβεβαίωση της υπόθεσης Riemann ανά διαστήματα σε διάφορα ύψη, μπορεί να δημιουργούν θετικές ενδείξεις για μια ψευδή υπόθεση. Προς αυτή την κατεύθυνση έχουμε την ακόλουθη τοποθέτηση.

Για πολλούς πρακτικούς λογούς , η συνάρτηση ζ του Riemann δεν δείχνει την αλήθεια της στην περιοχή που είναι διαθέσιμη για αριθμητικές έρευνες. Πρέπει να πάμε μέχρι το ύψος 10^{10000}, τότε θα είμαστε πιο πολύ πεπεισμένοι για αυτήν, αν τα στοιχεία δείχνουν ακόμα έντονα προς την κατεύθυνση της υπόθεσης Riemann. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι σίγουρα πολύ εντυπωσιακοί και ένας θρίαμβος των υπολογιστών και της αριθμητικής ανάλυσης, αλλά είναι πεπερασμένης εμβέλειας. Η υπόθεση Riemann είναι ένα πολύ λεπτός μηχανισμός. Δουλεύει για όλα τα μηδενικά της ζ που έχουμε καταφέρει να υπολογίσουμε, αλλά δεν μπορούμε να βεβαιωθούμε αριθμητικά για τα άπειρα μηδενικά της, επομένως άλλοι θεωρητικοί τρόποι προσέγγισης της υπόθεσης πρέπει να βρεθούν, και προς το παρόν δεν επαρκούν για να δώσουν μια θετική κατάληξη.

Aleksandar Ivic

5.6 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάστηκε πως μπορεί να ελεγχθεί σε ένα διάστημα η υπόθεση Riemann και γνωρίσαμε ένα μεγάλο όγκο εμπειρικών στοιχείων που έχουν προκύψει από το 1859 μέχρι το 2004. Όλα τα εμπειρικά στοιχεία που έχουν προκύψει, δείχνουν την αλήθεια της υπόθεσης Riemann. Όμως οι αριθμητικοί υπολογισμοί μέσο των υπολογιστών είναι περιορισμένης εμβέλειας και κατ' επέκταση τα εμπειρικά στοιχεία που προκύπτουν πάνω στην RH είναι περιορισμένα.

Αναφέρθηκε ότι δεν υπάρχει άμεσος αριθμητικός υπολογισμός που να μπορεί να επαληθεύσει την HR για τα άπειρα μηδενικά της. Επομένως δεν είμαστε σε θέση να πειστούμε μόνο από τα εμπειρικά στοιχεία για την αλήθεια της HR, όσο εντυπωσιακά και αν φαίνονται.

Παρουσιάστηκε η σύνδεση μέσο των αριθμητικών υπολογισμών των μηδενικών της ζ συνάρτησης αλλά και των διαστημάτων μεταξύ των μηδενικών της με τις ιδιοτιμές τυχαίων πινάκων και τα διαστήματα μεταξύ των ιδιοτιμών των τυχαίων πινάκων (συγκεκριμένα GUE) αντίστοιχα. Η θεωρία αυτή δίνει έναν επιπλέον τρόπο, μέσο του οποίου ίσως μπορεί να αντιμετωπιστεί η HR.

Τέλος αναλύθηκε ένα παράδειγμα υπόθεσης, που ενώ στηρίχθηκε ολοκληρωτικά πάνω στους αριθμητικούς υπολογισμούς των υπολογιστών και έπεισε πολλούς και μαθηματικούς για την αλήθεια της, αποδείχθηκε λανθασμένη αρχικά από τον Littlewood και εν συνεχεία προέκυψε ο Skewes αριθμός, το άνω φράγμα μετά από το οποίο αποτυγχάνει αυτή η υπόθεση.

Συμπεραίνουμε ότι τα εμπειρικά στοιχεία είναι απαραίτητα για την διατήρηση την υπόθεσης μέσα στο χρόνο και παράλληλα προσφέρουν έναν ακόμα τρόπο να αντιμετωπιστεί η υπόθεση Riemann όμως σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να στηριχθούμε μόνο σε αυτά.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1	**Peter Borwein, Stephen Choi, Brendan Rooney, Andrea Weirathmueller,** The Riemann Hypothesis **A Resource for the Afficianado and Virtuoso Alike, Canadian Mathematical Society, Springer, 2008**
2	John Derbyshire, **Prime Obsession** Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics, Joseph Henry Press, Washington, D.C, 2003
4	Δ.Χ.Κραββαρίτη καθηγητή Ε.Μ.Π., Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Σημεών, Αθήνα, 2006
5	Hanh Nguyen, Alex Barnett, Computation of Riemann ζ function, Math 56: Computational and Experimental Math Final project, Dartmouth College, Hanover, 31 Μαΐου 2013
6	Μαρκέλλα Δ. Ευθυμίου, Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων αριθμών, Διπλωματική Εργασία, Επιβλέπων Ιωάννης Σαραντόπουλος, Αθήνα, Ιούλιος 2011
7	Kuat Yessenov, Prof. Victor Kac, Euler-Maclaurin Formula, Seminar in Algebra and Number Theory, 2005
8	Steven J. Kifowit, Terra A. Stamps ,The Harmonic Series Diverges Again and Again, Prairie State College, 2006
9	Steven J. Kifowit, More Proofs of Divergence of the Harmonic Series, Prairie State College, 2013
10	K. Chandrasekharan, Lectures on The Riemann Zeta–Function, Tata Institute of Fundamental Research, 1953
11	Orlando Merino, A Short History of Complex Numbers, University of Rhode Island, January, 2006
12	Herman te Riele, Separation of the complex zeros of the Riemann zeta function, CWI, Amsterdam,Symposium Computing by the Numbers: Algorithms, Precision, and Complexity, Berlin, 2006
13	Richard P. Brent, On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip, Σελίδες 1361-1372, 1979
14	YURI TSCHINKEL ,ABOUT THE COVER: ON THE DISTRIBUTION OF PRIMES-GAUSS’ TABLES,
15	Paul Nahin, Reviewed by Brian E. Blank, An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998
16	On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groosse.) Bernhard Riemann [Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.] Translated by David R. Wilkins

<u>Διαδικτυακοί Τόποι</u>

1	http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/
2	http://mathworld.wolfram.com/
3	http://www.storyofmathematics.com/
4	https://en.wikipedia.org