Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Προβλήματα Βελτιστοποίησης Επιρροής και Εσόδων σε Κοινωνικά Δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΛΕΝΗ Δ. ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων: Ευάγγελος Μαρκάκης
Επ. Καθηγητής Ο.Π.Α.

Αθήνα, Ιούνιος 2015

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Προβλήματα Βελτιστοποίησης Επιρροής και Εσόδων σε Κοινωνικά Δίκτυα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΛΕΝΗ Δ. ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων: Ευάγγελος Μαρκάκης
Επ. Καθηγητής Ο.Π.Α.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Ιουνίου 2015.

....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ευάγγελος Μαρκάκης Επ. Καθηγητής Ο.Π.Α.	Αριστείδης Παγουρτζής Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2015

....

Ελένη Δ. Ευαγγελάτου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε αλγοριθμικά προβλήματα που προκύπτουν στα κοινωνικά δίκτυα και σχετίζονται με την διάδοση και την αγορά προϊόντων ή τεχνολογιών ανάμεσα στους χρήστες ενός τέτοιου δικτύου. Τα κοινωνικά δίκτυα έχουν σήμερα πολύ μεγάλη σημασία, καθώς η πρόσβαση στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης είναι πλέον ευρέως διαδεδομένη.

Ένα από τα προβλήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον είναι η μαθηματική μοντελοποίηση και η κατανόηση για το πώς διαδίδεται μία πληροφορία, μία ιδέα ή η υιοθέτηση μιας νέας τεχνολογίας σε ένα κοινωνικό δίκτυο. Άμεσα σχετιζόμενο με τις διαδικασίες διάχυσης προϊόντων σε ένα δίκτυο είναι και η σχεδίαση στρατηγικών για την αποτελεσματική προώθηση ενός προϊόντος με σκοπό την μεγιστοποίηση των εσόδων του πωλητή.

Η διάσταση που διαφοροποιεί τα κοινωνικά δίκτυα και τα προβλήματα που μελετώνται πάνω σε αυτά είναι ακριβώς οι διαπροσωπικές σχέσεις μεταξύ των ανθρώπων: οι άνθρωποι επηρεάζουν και επηρεάζονται από το περιβάλλον τους, το οποίο μπορεί να αποτελείται από τους φίλους μας, τους συγγενείς μας ή τους συναδέλφους μας. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν έχοντας υπόψη ότι ο κάθε χρήστης (δηλαδή κάθε κόμβος) επηρεάζεται στη λήψη αποφάσεων από τη "γειτονιά" του στο γράφημα του δικτύου.

Το πρώτο μέρος της εργασίας αποτελεί μία εισαγωγή στα κοινωνικά δίκτυα και παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών τους. Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε κυρίως σε προβλήματα μεγιστοποίησης εσόδων ενός πωλητή από την προώθηση προϊόντων σε ένα κοινωνικό δίκτυο. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε περισσότερο τη σχεδίαση στρατηγικών για την τιμολόγηση ενός προϊόντος προς τους χρήστες και θα παρουσιάσουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους για διάφορα σενάρια. Όπως θα δείξουμε, σε αρκετές περιπτώσεις μπορούμε να έχουμε αλγορίθμους με σταθερό λόγο προσέγγισης της βέλτιστης λύσης. Τέλος, θα προτείνουμε και ορισμένες ιδέες που πιθανόν να βοηθήσουν στην σχεδίαση βελτιωμένων αλγορίθμων για τα προβλήματα αυτά.

Λέξεις κλειδιά

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων, Κοινωνικά Δίκτυα, Μεγιστοποίηση Εσόδων

Abstract

In this dessertation we are going to study algorithmic problems that emerge in social networks and are related to the spread and commerce of products or a new technology that is adopted by users of such networks. Today, social networks are of great importance, due to the wide use of social media.

One of the problems that we are particularly interested in is the modelling and the comprehension of how information, ideas, new technologies are spread in a social network. Directly related to the spread in a social network, is the design of strategies for efficient marketing of products, with an objective of maximizing the revenue of the seller.

What makes the study of social networks unique, is exactly the relations between people: people do influence each other, and are influenced by their surroundings, which can be their friends, their families or colleagues. That gives us the oppurtunity to model those interesting problems, taking into account that every user (or node) is influenced by his “neighborhood” in the graph of the social network.

The first part of the dissertation is an introduction to social networks and their main characteristics. Then, we going to focus on problems of revenue maximization of a seller from marketing products in a social networks. More specifically, we will study the design of strategies for pricing of products for the users and we are going to present som approximation algorithms for some case studies. We will show that in many cases, we can have constant approximation algorithms. Finally, we are going to reccommend some ideas that might help in the design of optimized algorithms for those kinds of problems.

Key words

Algorithmic Game Theory, Social Networks, Revenue Maximization

Ευχαριστίες

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά και όσους μου έδωσαν έμπνευση και δύναμη να συνεχίσω και να προσπαθώ κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, γενικότερα.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Μαρκάκη, για την καθοδήγησή του, την υπομονή του, και τον χρόνο που αφιέρωσε προκειμένου να μου υποδείξει το κατάλληλο προς μελέτη υλικό, αλλά και να διαβεβαιωθεί ότι όλες μου οι απορίες είχαν λυθεί και να μου εξηγήσει ό,τι δεν ήταν άμεσα κατανοητό. Η ακρίβεια και ο επιστημονικός τρόπος σκέψης του, αποτέλεσαν για μένα δύο πολύ σημαντικά στοιχεία προς μίμηση, αλλά εκτίμω εξίσου και τον χαρακτήρα του και ιδίως την υποστήριξη και ενθάρρυνση που μου παρείχε ώστε να ξεπεράσω τα εμπόδια που συνάντησα κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου.

Φυσικά, θα ήταν μεγάλη παράλειψη αν δεν ανέφερα ότι και η συμβολή του καθηγητή μου κ. Φωτάκη ήταν καθοριστική. Ο κ. Φωτάκης καθώς ήταν ο πρώτος καθηγητής στον οποίο μίλησα για τα επιστημονικά μου ενδιαφέροντα, με ενθάρρυνε πάρα πολύ να συνεχίσω και μου έδωσε πολλές και καλές συμβουλές για το σε ποιά κατεύθυνση θα μπορούσα να οδηγήσω τις ιδέες μου για τη διπλωματική. Τους ευχαριστώ πάρα πολύ και τους δύο καθηγητές μου, από τα βάθη της καρδιάς μου, για τη συμβολή τους σε ένα σε ένα τόσο σημαντικό στάδιο των σπουδών μου.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου κ. Ζάχο και κ. Παγουρτζή που πάντα ενδιαφέρονται ειλικρινά για όλους τους φοιτητές και δημιουργούν ένα ευχάριστο κλίμα συνεργασίας στο Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης των υπολογιστών (CoReLab). Γενικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του CoReLab, για την συναδελφικότητά τους και το γεγονός ότι είχα φίλους που μπορούσα να συζητήσω μαζί τους και να μοιραστούμε τις ιδέες μας και έτσι είχα την ευκαιρία και εγώ να γνωρίσω ένα διαφορετικό ερευνητικό φάσμα της Επιστήμης των Υπολογιστών, σε σχέση από αυτό που μελέτησα στην παρούσα εργασία.

Ευχαριστώ ακόμη πάρα πολύ, την οικογένειά μου για την στήριξη που μου παρείχαν καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, και σε κάθε επίπεδο. Ευχαριστώ πάρα πολύ τους γονείς μου, καθώς έκαναν ουσιαστική επένδυση στη μόρφωσή μου και φρόντιζαν πάντα να έχω όλα τα βιβλία που χρειαζόμουν, να μάθω όσες ξένες γλώσσες ήταν εφικτό, και γενικά να έχω όλα τα εφόδια για να μπορώ να διαβάζω. Ο πατέρας μου, Διονύσης, είναι καθηγητής στο Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, και ήταν ο πρώτος που με εισήγαγε στον κόσμο της Γνώσης και μου εξήγησε από πολύ μικρή ηλικία τι σημαίνει η έρευνα, η μελέτη και οι σπουδές. Η μητέρα μου, Άσπα, ήταν αυτή που επιμελήθηκε τα πρώτα στάδια της μόρφωσής μου και υπομονετικά κάθε μέρα σιγουρευόταν ότι πάω διαβασμένη στο σχολείο μου. Η αδερφή μου, Βιργινία, αποτέλεσε επίσης ένα πρότυπο για μένα και χάραξε μία πορεία με πολλές επιτυχίες, όπου και εγώ βάδισα μετά με την σειρά μου στα βήματά της, με τον δικό μου τρόπο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω πάρα πολύ όλους τους φίλους μου με τους οποίους πορεύτηκα μαζί στη σχολή, αλλά και φίλους εκτός της σχολής, που περάσαμε μαζί πολλές ευχάριστες αλλά και δυσάρεστες στιγμές της ζώης μας. Συγκεκριμένα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο μου Βασίλη, τη φίλη μου Τίνα, τον Γρηγόρη, τη Σοφία, τη Βάσω, τη Βάλια, τον Γιώργο, τη Μαρία, τον Νίκο, την Πωλίνα, την Έλενα, την Ειρήνη, τη Λυδία, τον Ορέστη Α., τον Ορέστη Β., τον Νικόλα, τον Μανώλη, τον Θοδωρή, τη Κατερίνα, τη Θάλεια, και πολλούς ακόμη που ίσως αυτή στιγμή ίσως μου διαφεύγουν αυτή τη στιγμή. Σας ευχαριστώ πάρα πολύ όλους, οικογένεια, καθηγητές, συναδέλφους και φίλους, μέσα από την καρδιά μου!

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η σημασία των κοινωνικών δικτύων

Η μελέτη των κοινωνικών δικτύων έγκειται ουσιαστικά στην μελέτη του τρόπου με τον οποίο τα άτομα συνδέονται, και το πώς οι σχηματισμοί των σχέσεων των ανθρώπων μπορεί να έχουν επίδραση στην κοινωνία, την οικονομία, την τεχνολογία και σε άλλους τομείς της ζωής γενικότερα.

Τα κοινωνικά δίκτυα παρουσιάζουν οικονομικό ενδιαφέρον διότι υπάρχει ενδιαφέρον για τις εμπορικές συναλλαγές και τα οικονομικά δίκτυα, όπως για παράδειγμα το χρηματιστήριο. Στη σημερινή εποχή πολλές αγορές είναι αποκεντρωμένες. Επίσης, οι οικονομολόγοι ενδιαφέρονται και για την δομή των δικτύων, αλλά και για τις συμπεριφορές των ατόμων στα κοινωνικά δίκτυα, καθώς οι συμπεριφορές αυτές έχουν ως αποτέλεσμα να παρατηρούνται διάφορα μικροοικονομικά και μακροοικονομικά φαινόμενα.

Παλαιότερα, δεν δόθηκε τόση μεγάλη σημασία στην μελέτη των κοινωνικών δικτύων, αν και κοινωνικά δίκτυα υπήρχαν πάντα, πριν ακόμη την ευρεία διάδοση των μέσων κοινωνικής δικτύωσης, από τότε που οι άνθρωποι ζούσαν σε μικρές ομάδες. Ένα κοινωνικό δίκτυο μπορεί να είναι τόσο απλό, όσο οι σχέσεις μας με τους φίλους μας, χωρίς αυτές να είναι αναγκαστικά καταγεγραμμένες κάπου στον παγκόσμιο ιστό.

Τα κοινωνικά δίκτυα παρουσιάζουν ενδιαφέρον και από την πλευρά της πληροφορικής, καθώς ο τρόπος που δρα μία εταιρεία ή ακόμη και ένα άτομο μέσα σε ένα κοινωνικό δίκτυο, μπορεί να έχει πολύ μεγάλη επιρροή στους άλλους. Έτσι, μας ενδιαφέρουν πάρα πολύ τα κίνητρα που μπορεί να έχουν οι άνθρωποι. Τα μέλη ενός κοινωνικού δικτύου, στη συνέχεια της διπλωματικής θα τους αναφέρουμε και ως παίκτες ή κόμβους, και το κοινωνικό δίκτυο θα μοντελοποιείται από ένα γράφημα.

Θα μοντελοποιήσουμε τον πραγματικό κόσμο με απλά μαθηματικά μοντέλα, που μπορεί να μην περιγράφουν κάθε πλευρά των ανθρωπίνων σχέσεων, αλλά από την άλλη, θα μας επιτρέψουν να σκεφτούμε βασικούς τρόπους που οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων συμβαίνουν. Οι καταστάσεις που μπορεί να μοντελοποιούν γενικά τα κοινωνικά δίκτυα είναι φιλίες, σχέσεις μεταξύ καταναλωτών και πωλητών, την υιοθέτηση μίας καινούργιας τεχνολογίας ή ακόμη και την διάδοση ασθενειών.

1.2 Η πορεία της διπλωματικής

Στην παρούσα διπλωματική, θα μελετήσουμε αρχικά τα προβλήματα διάδοσης πληροφορίας. Στα προβλήματα αυτά αναζητούμε τρόπους με τους οποίους θα γίνει ουσιαστικά διάχυση μίας πληροφορίας ή ιδέας σε ένα κοινωνικό δίκτυο, και με σκοπό αυτή να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη.

Αρχικά προτάθηκαν ιδέες, όπου θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την επιρροή κάθε ατόμου στο περιβάλλον του και να επιλέξουμε αυτόν με την μεγαλύτερη επιρροή για να βοηθήσει στη διάδοση της ιδέας.

Παρατηρήθηκε όμως, ότι αυτός ο τρόπος μπορεί να μην είναι ο καλύτερος, και αντί αυτού, θα μπορούσαμε να διαλέξουμε πιο προσεκτικά ένα σύνολο ανθρώπων που θα ήταν αυτοί που θα βοηθούσαν στην διάδοση της ιδέας στο κοινωνικό δίκτυο. Τα αποτελέσματα είναι πάρα πολύ ενδιαφέροντα, και θα τα δούμε στη συνέχεια.

Αργότερα, θα δούμε ότι ορισμένες επιστημονικές εργασίες βασίστηκαν στο γεγονός ότι υπάρχει η επιρροή ενός ατόμου στο άλλο, αλλά ίσως ο αντικειμενικός σκοπός να ήταν πιο ξεκάθαρο για έναν πωλητή, να είναι η μεγιστοποίηση εσόδων. Μπορεί βέβαια και η διάδοση της πληροφορίας για ένα προϊόν να έχει και ως αποτέλεσμα αύξηση των εσόδων, όμως η σχέση αυτή δεν είναι τελείως ξεκάθαρη, καθώς θα πρέπει να εισάγουμε και την έννοια της τιμής του προϊόντος. Αυτά τα μοντέλα αφορούν λοιπόν τα δίκτυα όπου υπάρχουν καταναλωτές και πωλητές, και οι πωλητές θέλουν να προωθήσουν το προϊόν τους στους υποψήφιους αγοραστές τους.

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανθρώπων μπορεί να μην είναι πάντοτε θετικές για έναν πωλητή. Επομένως, θα εξετάσουμε και προβλήματα όπου ο πωλητής επιδιώκει να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του, υπό την παρουσία αρνητικών για εκείνον αλληλεπιδράσεων μεταξύ των καταναλωτών.

Κεφάλαιο 2

Χαρακτηριστικά Κοινωνικών Δικτύων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποια βασικά και ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των κοινωνικών δικτύων. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε μοντέλα για τον σχηματισμό των κοινωνικών δικτύων, το φαινόμενο του "μικρού κόσμου" και τις σχέσεις μεταξύ των ατόμων του κοινωνικού δικτύου καθώς επίσης τη συσταδοποίηση. Τα κοινωνικά δίκτυα μπορεί να μοντελοποιούνται ως γράφοι, έχουν όμως αρκετές διαφορές από ένα δίκτυο με γράφο που σχηματίζεται με τυχαίο τρόπο. Για να καταδείξουμε τις διαφορές, θα αναλύσουμε πρώτα τις ιδιότητες ενός τυχαίου δικτύου το οποίο θα χρησιμεύσει και ως σημείο αναφοράς για σύγκριση με μοντέλα που ταιριάζουν καλύτερα σε κοινωνικά δίκτυα.

2.1 Το Μοντέλο Τυχαίων Δικτύων $G(n, p)$

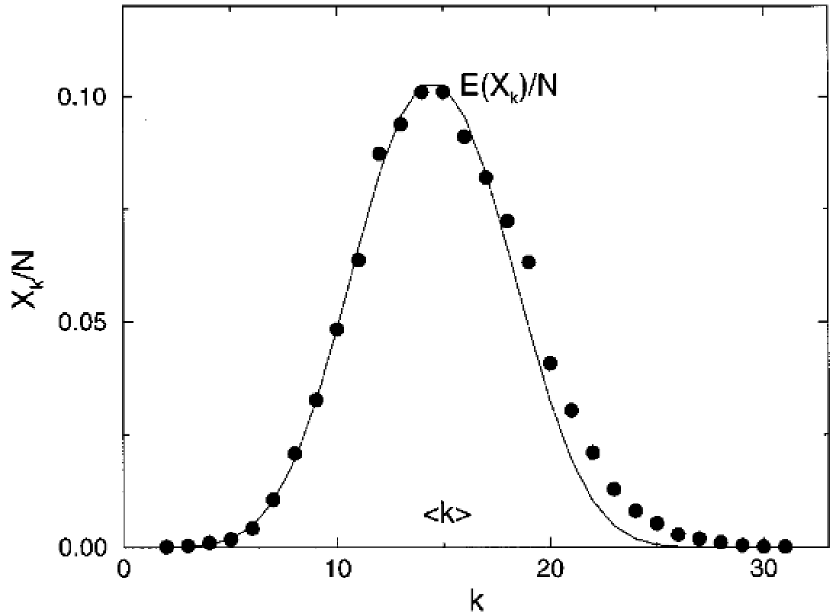
Τα τυχαία δίκτυα (random networks) μελετήθηκαν από τους Erdős και Renyi (1959, 1960) [19], [20] και γι'αυτό ονομάζονται και Erdős-Renyi δίκτυα. Μελετήθηκαν περισσότερο για τη Θεωρία Γραφημάτων και αναπτύχθηκαν ως ένας τρόπος παραγωγής όλων των γράφων. Στα δίκτυα αυτά, η κάθε ακμή σχηματίζεται με πιθανότητα p και ανεξάρτητα από τις άλλες. Συμβολίζονται με $G(n, p)$ (ή E-R), όπου n το πλήθος των κόμβων και p η πιθανότητα σχηματισμού μίας ακμής μεταξύ των κόμβων.

Τα τυχαία δίκτυα εκτός από Erdős-Renyi λέγονται και Bernoulli ή Poisson για τον εξής λόγο: η πιθανότητα ένας κόμβος να συνδέεται με ακριβώς d ακμές είναι διωνυμική και ίση με:

$$\frac{(n-1)!}{d!(n-d-1)!}\, p^d\, (1-p)^{n-d-1}$$

γιατί έχουμε να εξετάσουμε με πόσους τρόπους ένας κόμβος συνδέται με άλλους d από τους (n-1) δηλ. $\binom{n-1}{d} = \frac{(n-1)!}{d!(n-d-1)!}$ επί την πιθανότητα να σχηματιστεί η ακμή για d κόμβους άρα p^d και ακόμη επί την πιθανότητα να μην σχηματιστεί ακμή για τους εναπομένοντες κόμβους: $(1-p)^{n-d-1}$. Για μεγάλο n και μικρή πιθανότητα p, η κατανομή των βαθμών των κόμβων είναι προσεγγιστικά μια κατανομή Poisson:

$$\frac{(n-1)^d}{d!}\; p^d\; e^{-(n-d)p}$$



Σχήμα 2.1: Η κατανομή των βαθμών που προκύπτει από προσομοίωση τυχαίου γράφου, με $n = 10000$ κόμβους και $p = 0.0015$. Ο οριζόντιος άξονας, k, είναι οι βαθμοί και ο κάθετος είναι το X_k/n, όπου X_k είναι το πλήθος των κόμβων με βαθμό k. Η συνεχής γραμμή είναι η κατανομή Poisson. Παρατηρούμε ότι η απόκλιση είναι μικρή. [13]

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το δίκτυο σχηματίζεται κατά περιόδους, δηλαδή δεν υπάρχουν όλοι οι κόμβοι από την αρχή, τότε παίρνουμε ένα μοντέλο όχι για στατικό δίκτυο, αλλά για τυχαίο που μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου. Θεωρούμε δηλαδή ότι δημιουργούνται κόμβοι σταδιακά με το πέρασμα χρονικών περιόδων και το μοντέλο αυτό διαφέρει όπως θα δούμε από το προηγούμενο. Θεωρούμε λοιπόν ότι αρχικά έχουμε m κόμβους πλήρως συνδεδεμένους, χωρίς βλάβη της γενικότητας, και την πρώτη χρονική περίοδο δημιουργείται ένας κόμβος ο οποίος σχηματίζει m συνδέσεις (ακμές) με τους ήδη υπάρχοντες (τυχαία και ομοιόμορφα -uniformly at random). Επομένως, ένας ήδη υπάρχων κόμβος έχει πιθανότητα $\frac{m}{t}$ να αποκτήσει μία καινούργια ακμή για κάθε περίοδο. Επομένως όσο περισσότεροι κόμβοι υπάρχουν με την πάροδο του χρόνου, τόσο μικραίνει η πιθανότητα για τον καθένα να λάβει νέες συνδέσεις προς άλλους. Ο αναμενόμενος βαθμός ενός κόμβου i που δημιουργείται τη χρονική περίοδο i, με $m < i < t$, δηλαδή αφότου υπήρχαν οι m αρχικοί και πριν από χρόνο t είναι:

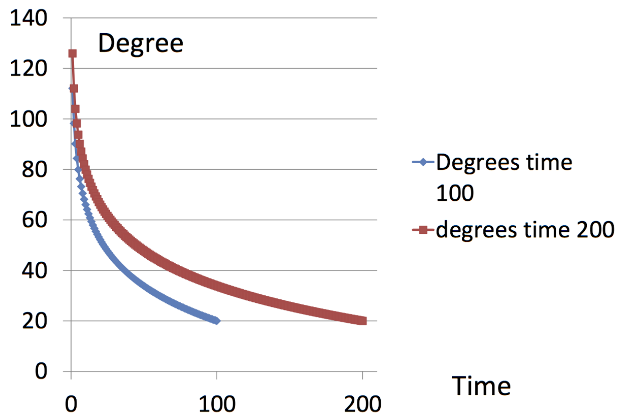
$$m + \frac{m}{i+1} + \frac{m}{i+2} + \cdots + \frac{m}{t}$$

(καθώς ο χρόνος ξεκινά από το 0 και άρα υπάρχουν $i+1$ κόμβοι τη χρονική στιγμή t). Αυτό μπορεί να προσεγγισθεί ως αρμονικός αριθμός, δηλαδή ο αναμενόμενος βαθμός του κόμβου είναι:

$$m\left(1+log\left(\frac{t}{i}\right)\right)$$

Επομένως οι κόμβοι με βαθμό μικρότερο από d είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει: $m\left(1+log\left(\frac{t}{i}\right)\right) < d$, ή λύνοντας ως προς i, $i > te^{\frac{-(d-m)}{m}}$, και άρα για να βρούμε την κατανομή:

$$F_t(d) = \frac{t-i}{t} = \frac{t-te^{\frac{-(d-m)}{m}}}{t} = 1-e^{\frac{-(d-m)}{m}}$$

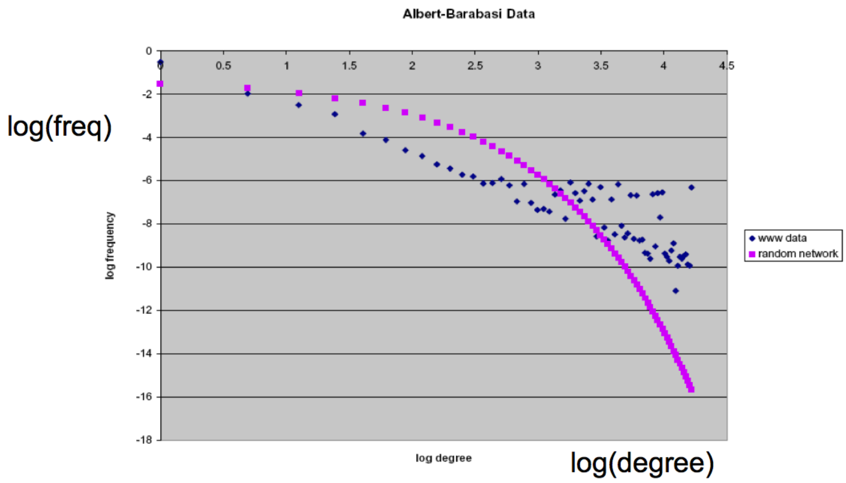


Σχήμα 2.2: Παρατηρούμε ότι οι παλαιότεροι κόμβοι έχουν περισσότερες συνδέσεις. Όσο περισσότεροι κόμβοι δημιουργούνται με το πέρασμα του χρόνου, τόσο πιο δύσκολο είναι να αποκτήσει ένας κόμβος περισσότερες συνδέσεις και άρα να αυξήσει το βαθμό του. [24]

2.2 Το Μοντέλο Επιλεκτικής Προσάρτησης

Το μοντέλο αυτό (Preferential Attachment) αναπτύχθηκε κατά περιόδους από πολλούς επιστήμονες, όπως αρχικά από τον Udny Yule το 1925 [46] για να εξηγήσει την κατανομή power-law του αριθμού ειδών ανά γένος φυτού, τον Herbert Simon το 1955 [42] για την περιγραφή της κατανομής μεγέθους πόλεων και άλλα φαινόμενα, τον Derek J. de Solla Price το 1976 [17] για την κατανομή των επιστημονικών δημοσιεύσεων σε σχέσεις με τους συγγραφείς. Η εφαρμογή του preferential attachment μοντέλου για το δίκτυο του παγκόσμιου ιστού (World Wide Web) προτάθηκε από τους Albert-László Barabási και Réka Albert το 1999 [40], οι οποίοι πρότειναν το μοντέλο αυτό και για τη διαδικασία σχηματισμού δικτύων γενικότερα.

Η ανάγκη η οποία οδήγησε στην ανάπτυξη του μοντέλου είναι η παρατήρηση ότι στα πραγματικά δίκτυα η κατανομή των βαθμών των κόμβων δεν ακολουθεί μία τυχαία ομοιόμορφη κατανομή, αλλά παρουσιάζονται λιγότεροι κόμβοι με μεγάλης τάξης βαθμό και πολλοί κόμβοι με μικρής τάξης βαθμό σε σχέση με μία τυχαία ομοιόμορφη κατανομή. Αυτό το φαινόμενο για τη μεγάλη διαφορά στα άκρα απαντάται στη βιβλιογραφία ως “fat tails”. Η κύρια ιδέα του μοντέλου είναι ότι ένας κόμβος που δημιουργείται ή εισέρχεται σε ένα καινούργιο δίκτυο σχηματίζει ακμές με τους κόμβους του ήδη υπάρχοντος δικτύου με πιθανότητα η οποία είναι ανάλογη προς τον βαθμό των υπαρχόντων κόμβων. Με άλλα λόγια, ένας κόμβος προτιμά να “προσαρτηθεί” σε κόμβους που ήδη είναι “δημοφιλείς”. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παρατηρείται το φαινόμενο γνωστό στη βιβλιογραφία “the rich get richer”, καθώς όσο ένας κόμβος έχει μεγάλο βαθμό γίνεται όλο και πιο πιθανό να αποκτήσει και άλλους, νέους γείτονες με αποτέλεσμα ο βαθμός του να αυξάνεται.



Σχήμα 2.3: Κατανομή των βαθμών για το WWW, Albert, Barabási, Jeong (1999) [40]. Τα στοιχεία με μπλε χρώμα αποτελούν πραγματικά δεδομένα. Τα άλλα στοιχεία δείχνουν την πρόβλεψη που κάνει το μοντέλο $G(n, p)$. Παρατηρούμε ότι αποκλίνει.

Συγκεκριμένα, έστω ότι οι νέοι κόμβοι που εισέρχονται στο δίκτυο σχηματίζουν m ακμές σε υπάρχοντες κόμβους. Υποθέτουμε ότι οι νέοι κόμβοι έρχονται σταδιακά, οπότε σε χρόνο t δημιουργούνται $t \cdot m$ νέες ακμές συνολικά. Άρα ο συνολικός βαθμός των κόμβων είναι $2 \cdot t \cdot m$ (διότι για κάθε link υπάρχουν δύο κόμβοι). Η πιθανότητα προσάρτησης σε έναν τυχαίο κόμβο i είναι:

$$\frac{d_i(t)}{2tm}$$

δηλαδή ανάλογη με τον βαθμό του κόμβου σε σχέση με τον συνολοικό βαθμό των κόμβων στο δίκτυο.

Η κατανομή των αναμενόμενων βαθμών των κόμβων, αν θεωρήσουμε συνεχή τη μεταβλητή του χρόνου, είναι:

$$\frac{d\ d_i(t)}{dt} = m\left(\frac{d_i(t)}{2tm}\right) \text{ και αρχική συνθήκη } d_i(t) = m$$

καθώς υποθέσαμε ότι όταν ένας κόμβος δημιουργείται, σχηματίζει m συνδέσεις (ακμές) προς άλλους για την αρχική συνθήκη, και η παράγωγος, η οποία εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του βαθμού ενός κόμβου, είναι ο ρυθμός με τον οποίο παίρνει καινούργιες συνδέσεις, που είναι ανάλογος με τον βαθμό του κόμβου σε σχέση με τον συνολικό βαθμό. Επομένως, κάνοντας τις πράξεις, ο αναμενόμενος βαθμός για έναν κόμβο είναι:

$$d_i = m\left(\frac{t}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα για τους κόμβους που έχουν αναμενόμενο βαθμό μικρότερο του d σε κάποια χρονική περίοδο t ισχύει

$$m\left(\frac{t}{i}\right)^{\frac{1}{2}} < d \ \Rightarrow \ i > t\frac{m^2}{d^2}$$

Άρα για να βρούμε το κλάσμα των κόμβων που έχουν βαθμό μεγαλύτερο από d:

$$F_t(d) = \frac{t-i}{t} = \frac{t - t\frac{m^2}{d^2}}{t} = 1 - \frac{m^2}{d^2}$$

που μας δίνει τη συνάρτηση κατανομής. Αν την παραγωγίσουμε, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

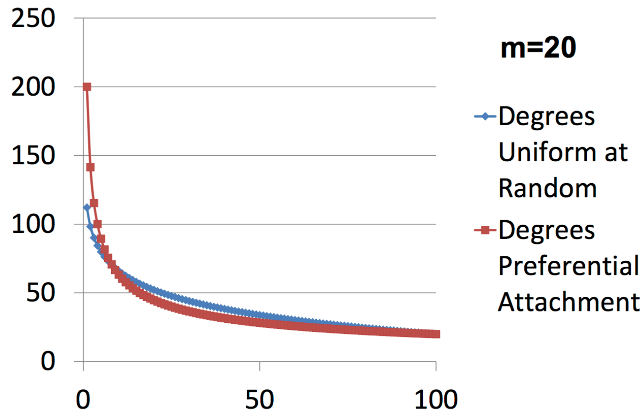
$$f_t(d) = \frac{2m^2}{d^3}$$

Παρατηρούμε ότι το d^{-3} είναι ο λόγος που το μοντέλο αυτό αναφέρεται και ως "power law", καθώς εξαρτάται από το αντίστροφο της τρίτης δύναμης του βαθμού των κόμβων. Γενικά, στην πράξη παρατηρώνται κατανομές ανάλογες του d^{-k}, με $k \in [2, 3]$.

2.3 Υβριδικά Μοντέλα Σχηματισμού Δικτύων

Τα υβριδικά μοντέλα είναι ουσιαστικά ένας συνδυασμός μοντέλων που σχηματίστηκαν τυχαία και ομοιόμορφα με το μοντέλο επιλεκτικής προσάρτησης. Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε ένα μοντέλο όπου ένα μέρος α των συνδέσεων ενός νέου κόμβου σχηματίστηκε τυχαία και ομοιόμορφα (uniformly at random), και το υπόλοιπο $1-\alpha$ με βάση το κριτήριο preferntial attachment. Πιο συγκεκριμένα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το $1-\alpha$ είναι συνδέσεις με κόμβους από την γειτονιά του κόμβου με τον οποίο συνδέθηκε τυχαία (ουσιαστικά με "φίλους φίλων"), καθώς στα κοινωνικά δίκτυα παρατηρούμε την ιδιότητα της τριαδικής κλειστότητας (την οποία θα δούμε στη συνέχεια). Το μοντέλο αυτό ("friends of friends") αναπτύχθηκε από τους Jackson-Rogers το 2007. Συγκεκριμένα:

$$\frac{dd_i(t)}{dt} = \alpha\frac{m}{t} + (1-\alpha)\frac{d_i(t)}{2t}, \text{ με αρχική συνθήκη } d_t(t) = m$$



Σχήμα 2.4: Ο κάθετος άξονας εκφράζει τους βαθμούς και ο οριζόντιος τους κόμβους που δημιουργήθηκαν με τον χρόνο. Το μοντέλο preferential attachment έχει πιο έντονη κυρτότητα και οι αρχικοί κόμβοι έχουν μεγαλύτερο βαθμό, ενώ οι καινούργιοι έχουν μικρότερο βαθμό. [24]

Το οποίο μετά από μερικές πράξεις δίνει τελικά κατανομή:

$$F(d) = 1 - \left(\frac{(m + \alpha m x)}{(d + \alpha m x)}\right)^{x}, \text{ όπου } x = \frac{2}{(1-\alpha)}$$

Άλλα μοντέλα είναι τα λεγόμενα Block Models, όπου ουσιαστικά επεκτείνουν τα E-R δίκτυα ώστε οι πιθανότητες να εξαρτώνται από κοινά χαρακτηριστικά των κόμβων, αλλά και άλλα όπως τα ERGMs (Exponential Random Graph Models), SERGMs (Statistical Random Graph Models), SUGMs (Subgraph Generation Models), που ουσιαστικά στηρίζονται στη χρήση τοπικών χαρακτηριστικών κοινωνικών δικτύων. Για παράδειγμα στα ERGMs, η πιθανότητα σχηματισμού μίας ακμής εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των κόμβων αλλά και το αν οι κόμβοι έχουν κοινούς φίλους ($p \sim (\beta_L \# links(G) + \beta_T \# triangles(G))$) [25].

2.4 Τριαδική κλειστότητα και Συσταδοποίηση

Στα τυχαία δίκτυα είδαμε ότι οι ακμές μεταξύ των κόμβων σχηματίζονται με τυχαίο τρόπο, όμως στα πραγματικά κοινωνικά δίκτυα οι ακμές δεν σχηματίζονται τόσο τυχαία. Πολύ συχνά στα κοινωνικά δίκτυα απαντάται το φαινόμενο όταν έχουμε δύο άτομα που αρχικά δεν γνωρίζονται, έχουν όμως έναν κοινό φίλο, τότε να γίνονται φίλοι και μεταξύ τους σε μετέπειτα χρονική στιγμή. Αναφερόμαστε σε αυτήν την αρχή ως τριαδική κλειστότητα (triadic closure), και έτσι παρατηρούμε να σχηματίζονται "τρίγωνα" μεταξύ των ατόμων. Οι δομικές αυτές μονάδες των τριγώνων έχουν ως αποτέλεσμα στο κοινωνικό δίκτυο να δημιουργούνται συστάδες ατόμων με κοινά χαρακτηριστικά (clusters).

Ορίζουμε ως συντελεστή συσταδοποίησης (clustering coefficient) το ποσοστό των τριγώνων που βλέπουμε και πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 2.4.1. ***Συντελεστής συσταδοποίησης για τον κόμβο*** *i και γράφο $G = (V, E)$ είναι το κλάσμα:*

$$Cl_i(G) = \frac{\#\{(k,j) \in E | k, j \ in \ N_i(G)\}}{\#\{(k,j) | k, j \ in \ N_i(G)\}}$$

όπου $N_i(G)$ είναι η γειτονιά του κόμβου i στον γράφο G.

Γενικά ο συντελεστής ενός κόμβου ποικίλει από 0 (όταν κανένας σπό τους φίλους του δεν είναι φίλοι μεταξύ τους) έως 1 (όταν όλοι οι φίλοι του είναι και φίλοι μεταξύ τους).

Έχουμε όμως δύο ακόμη ορισμούς που αφορούν συνολικά έναν γράφο $G = (V, E)$ και όχι έναν κόμβο του αποκλειστικά.

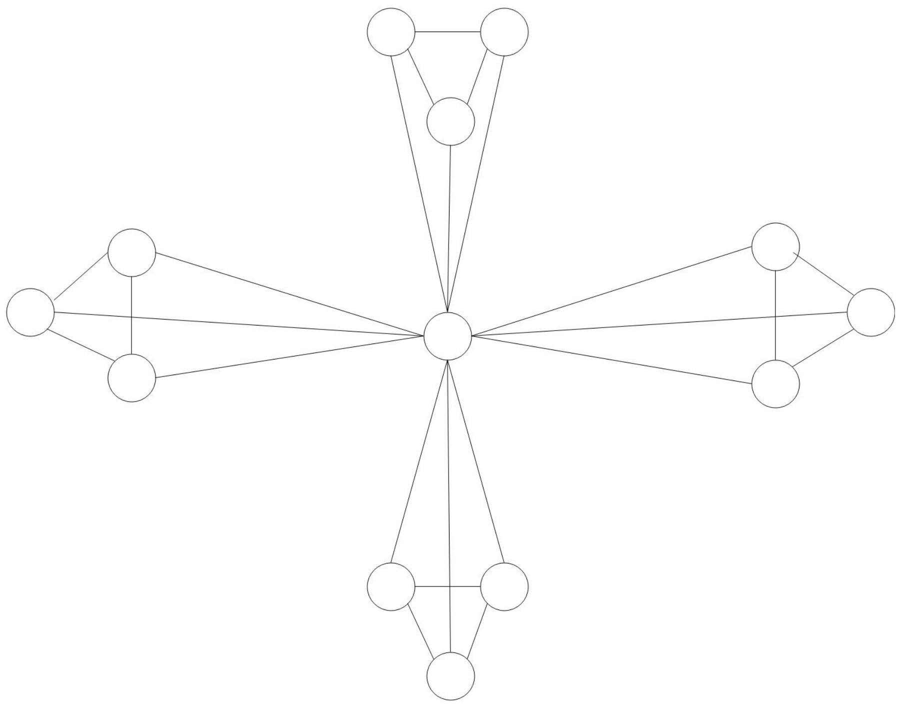
Ορισμός 2.4.2. *Ο* ***μέσος συντελεστής συσταδοποίησης (average clustering coefficient)*** *γράφου με n κόμβους:*

$$avgCl_i(G) = \frac{\sum_i Cl_i(G)}{n}$$

Ορισμός 2.4.3. ***Συντελεστής συνολικής συσταδοποίησης (overall clustering coefficient)*** *ενός γράφου G:*

$$Cl(G) = \frac{\sum_i \#\{(k,j) \in E | k,j \ in \ N_i(G)\}}{\sum_i \#\{(k,j) | k,j \ in \ N_i(G)\}}$$

Οι δύο τελευταίοι αυτοί ορισμοί μετρούν δύο διαφορετικά φαινόμενα σε έναν γράφο. Για παράδειγμα στην παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 2.5: Γράφημα με συστάδες

Ο μέσος συντελεστής συσταδοποίησης τείνει στο 1 ενώ ο συνολικός τείνει στο 0.

Παρατηρούμε ότι ο μέσος συντελεστής συσταδοποίησης σ'ένα τυχαίο δίκτυο σύμφωνα με το $G(n,p)$, καθώς $n \to \infty$ και ο μέγιστος βαθμός κόμβου που απαντάται είναι φραγμένος, τότε ο μέσος αλλά και ο συνολικός συντελεστής συσταδοποίησης τείνει στο 0. Συγκεκριμένα ο $Cl(G)$ είναι απλά p (η πιθανότητα σχηματισμού ακμής σε τυχαίο γράφο.

Στα τυχαία δίκτυα δηλαδή η πιθανότητα να σχηματιστεί τρίτη ακμή που κλείνει τρίγωνο, αγνοεί τελείως τις υπόλοιπες πληροφορίες, ότι δηλαδή υπάρχουν οι δύο άλλες ακμές του τριγώνου.

Ο σχηματισμός τριγώνων στις σχέσεις μεταξύ των ανθρώπων έχει παρατηρηθεί ότι τις κάνει πιο αξιόπιστες (supported). Μία πολύ ενδιαφέρουσα καταγραφή ενός κοινωνικού δικτύου αποτελούμενο από 75 αγροτικές περιοχές της Karnataka Ινδίας έγινε από τους Banerjee, Chandrasekhar, Duflo, Jackson [15]. Κατέγραψαν τις διαπροσωπικές σχέσεις και παρατήρησαν ότι όταν ρωτούσαν τους ανθρώπους ερωτήσεις όπως "ποιούς θα δανείζατε;" οι περισσότεροι δάνειζαν σε ανθρώπους που είχαν τουλάχιστον ένα κοινό γνωστό. Οι σχέσεις τους δηλαδή ήταν πιο αξιόπιστες λόγω του κοινού γνωστού.

Όσον αφορά το πού οφείλεται η συσταδοποίηση (clustering), που είναι κάτι που έχει μελετηθεί και από κοινωνιολόγους (Lazarsfeld and Merton 1954 [37], Blau 1964 [38],1977 [39] κ.α.), σχετίζεται άμεσα με το φαινόμενο της **ομοιοφιλίας (homophily)**. Η ηλικία, η φυλή, το φύλο, η θρησκεία, το επάγγελμα μπορεί να είναι κάποια χαρακτηριστικά που ουσιαστικά ενώνουν τους ανθρώπους. Οι άνθρωποι τείνουν να κάνουν παρέα με τους ομοίους τους και έτσι εξηγείται το ότι σχηματίζονται συστάδες (clusters) σε έναν γράφο. Όταν λοιπόν συνυπολογίζουμε και τις κοινές δραστηριότητες των ανθρώπων μιλάμε για social affiliation networks, και εκεί μπορεί να έχουμε δημιουργία ακμής (φιλία) λόγω του ότι τα άτομα γνωρίστηκαν σε κοινή δραστηριότητα (foci closure) ή ότι το ένα άτομο ήταν ήδη φίλος με άλλον που άρχισε αυτήν την δραστηριότητα και έτσι την άρχισε και αυτός (membreship closure).

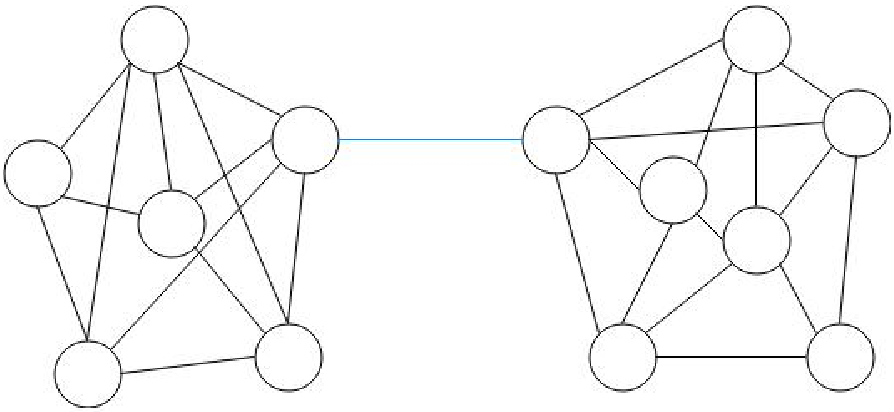
Γνωρίζουμε φυσικά ότι ο καθένας μπορεί να έχει πολλούς γνωστούς (άτομα με τα οποία η επικοινωνία είναι πιο σπάνια) σε σχέση με κοντινούς φίλους (άτομα με τα οποία η επικοινωνία είναι πιο συχνή). Επομένως αναμένουμε μία διαφοροποίηση στις ακμές του γράφου ενός κοινωνικού δικτύου και αυτό ακριβώς είναι το θέμα της επόμενης ενότητας.

2.5 Γέφυρες, Ισχυροί και ασθενείς δεσμοί

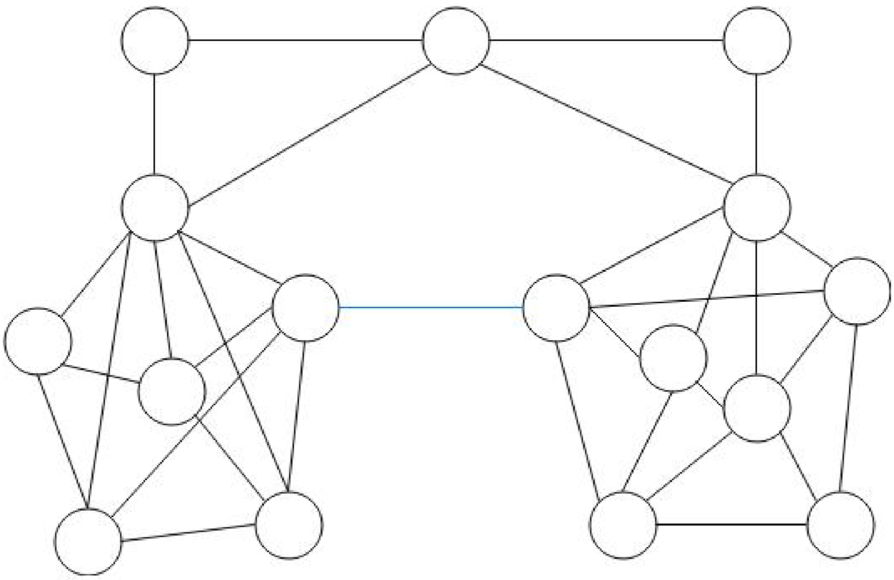
Σε ένα κοινωνικό δίκτυο συχνά αναφερόμαστε με τους όρους ασθενείς και ισχυρούς δεσμούς όταν θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τις ακμές μεταξύ των ατόμων (κόμβων). Ασθενείς δεσμοί (weak ties) είναι οι ακμές στις οποίες οι κόμβοι δεν επικοινωνούν συχνά, ενώ ισχυροί δεσμοί (strong ties) είναι οι δεσμοί που η επικοινωνία είναι πιο συχνή. [16]

Ορισμός 2.5.1. ***Γέφυρα (bridge)*** *είναι μία ακμή της οποίας η αφαίρεση από τον γράφο έχει ως αποτέλεσμα ο γράφος να χωρίζεται σε δύο ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.*

Ορισμός 2.5.2. ***Τοπική Γέφυρα (local bridge)*** *είναι μία ακμή η οποία ενώνει δύο κόμβους που δεν έχουν άλλον κοινό φίλο, δηλ. η αφαίρεση της οποίας αυξάνει την απόσταση μεταξύ των κόμβων που ενώνει σε αυστηρά περισσότερα από δύο βήματα (hops).*



Σχήμα 2.6: Η ακμή με μπλε χρώμα είναι γέφυρα



Σχήμα 2.7: Η ακμή με μπλε χρώμα είναι πλέον τοπική γέφυρα

Ουσιαστικά οι κόμβοι που ενώνονται με τοπική γέφυρα δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Επίσης παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της τοπικής γέφυρας προκύπτει και η (καθολική) γέφυρα, καθώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όταν το μονοπάτι που προκύπτει από την αφαίρεση της τοπικής είναι άπειρο, τότε πρακτικά ο γράφος έχει διαχωριστεί σε δύο μέρη.

Ορισμός 2.5.3. *Ένας κόμβος ικανοποιεί την ιδιότητα της* ***ισχυρής τριαδικής κλειστότητας (strong triadic closure)*** *όταν στη γειτονιά του υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τους οποίους έχει ισχυρούς δεσμούς, και οποιαδήποτε τοπική γέφυρα έχει, τότε αυτή είναι ασθενής δεσμός.*

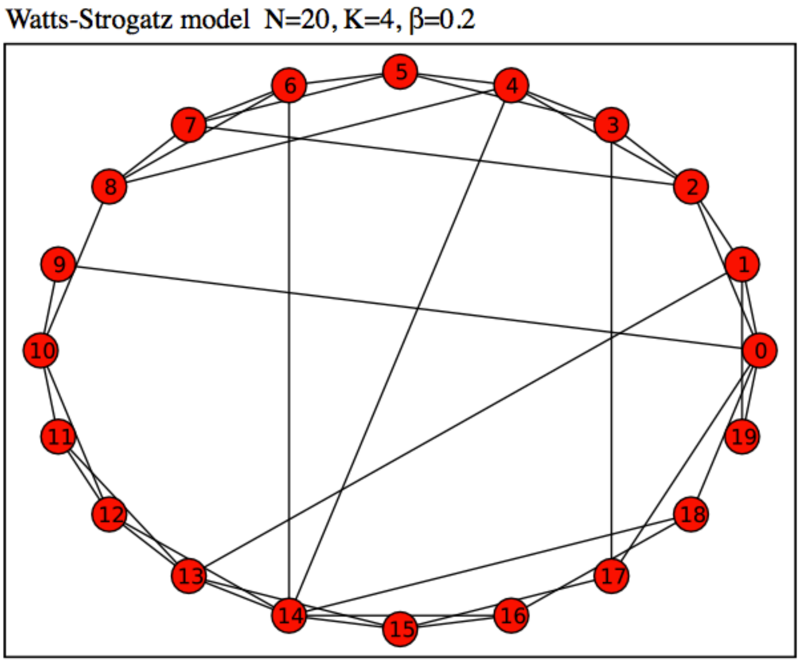
Η σημασία των ισχυρών και των ασθενών δεσμών είναι μεγάλη. Σε περιοχές του γράφου όπου υπάρχουν πολλοί και πυκνοί ισχυροί δεσμοί, τα άτομα τείνουν να έχουν τις ίδιες περίπου πληροφορίες και γνώσεις με τα άτομα της συστάδας τους. Αντίθετα, τα άτομα που έχουν πολλούς ασθενείς δεσμούς τείνουν να συγκεντρώνουν πληροφορίες από πολλά και διάφορα μέρη του γράφου, και ενδεχομένως να είναι σε θέση ισχύος με την έννοια ότι ελέγχουν την ροή πληροφορίας από και προς τα διάφορα μέρη ενός δικτύου [29]. Γι'αυτό άλλωστε έχει παρατηρηθεί και το φαινόμενο όταν ψάχνει κάποιος για μία θέση εργασίας, η πληροφόρηση για κάποια θέση να μην έρχεται από το κοντινό του περιβάλλον, αλλά από κάποιον γνωστό του, δηλ. από έναν ασθενή δεσμό. Επίσης οι γέφυρες σε έναν γράφο είναι πολύ σημαντικές καθώς παρέχουν συντομότερα μονοπάτια για τα διάφορα μέρη ενός γράφου και έτσι οι αποστάσεις σε έναν γράφο κοινωνικού δικτύου είναι σχετικά μικρές.

2.6 Το φαινόμενο του μικρού κόσμου

Το γεγονός ότι στα κοινωνικά δίκτυα εμφανίζονται πολλές συστάδες, δηλαδή πυκνές περιοχές που είναι πολύ στενά συδεδεμένες μεταξύ τους, αλλά και τοπικές και καθολικές γέφυρες, έχει ως αποτέλεσμα τα κοινωνικά δίκτυα να εμφανίζουν μεν μία μεγάλη συνεκτική συνιστώσα και πολλές άλλες αλλά μικρές, και η διάμετρος των κοινωνικών δικτύων να είναι σχετικά μικρή. Με τον όρο διάμετρο ενός γράφου εννοούμε το μεγαλύτερο συντομότερο μονοπάτι από κάθε κόμβο προς κάθε άλλον. Παρατηρούμε δηλαδή ότι με τις καθολικές και τοπικές γέφυρες στα κοινωνικά δίκτυα έχουμε πρόσβαση σε σημεία του γράφου που αλλιώς θα έπαιρνε μεγάλο αριθμό βημάτων για να τα φτάσουμε. Αυτό το φαινόμενο αυτό απαντάται και είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως "small world phenomenon".

Ένα μοντέλο που έχει προέλθει από τους Duncan Watts και Steve Strogatz [45], το 1998, το οποίο συνδυάζει το υψηλό clustering coefficient και μικρή διάμετρο είναι το λεγόμενο Rewired lattice (ή αλλιώς Watts and Strogatz model). Η βασική ιδέα είναι ότι έχουμε ένα lattice σε σχήμα δακτυλίου και με τυχαίο τρόπο επιλέγουμε ορισμένες ακμές και τις συνδέουμε με άλλους κόμβους που δεν είναι στην γειτονιά του κόμβου. Έτσι ξεκινάμε με ένα μοντέλο με μεγάλο συντελεστή συσταδοποίησης και μεγάλη διάμετρο, αλλά όταν έχουμε αλλάξει αρκετές ακμές (rewire) τότε αποκτούμε και το χαρακτηριστικό της μικρής διαμέτρου.

Μια άλλη εκδήλωση του "small world phenomenon" απαντάται στη βιβλιογραφία και ως "six degrees of separation"("απόσταση έξι βημάτων"), αλλά με τη διαφορά ότι ο καθένας μπορεί με έξι περίπου ενδιάμεσα βήματα να "φτάσει" οποιοδήποτε άλλο άτομο μέσα στον



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα Rewired lattice [8]

κόσμο. Αυτός ο όρος προέκυψε μετά από ένα πείραμα του κοινωνικού ψυχολόγου Stanley Milgram, το 1967 [33] ο οποίος ήθελε να καταγράψει με ένα πείραμα, μία αλληλουχία επικοινωνίας στις ΗΠΑ. Στο πείραμα ο Milgram έστειλε ταχυδρομικώς διάφορα γράμματα σε 160 τυχαία άτομα στην πολιτεία Nebraska, και τους ζητούσε να προωθήσουν το γράμμα σε έναν φίλο ή γνωστό που ήξεραν αυτοπροσώπως, και ο οποίος θα προωθούσε με τη σειρά του το γράμμα, με σκοπό να φτάσει τελικά σε ένα καθορισμένο άτομο στη Βοστώνη. Από τα γράμματα, έφτασαν όλα στον καθορισμένο παραλήπτη εκτός από 64. Ωστόσο, ο Milgram κατέγραψε τις αλυσίδες επικοινωνίας που σχηματίστηκαν και παρατήρησε ότι η μέση τιμή ήταν 5 ενδιάμεσοι κόμβοι/άτομα, με αποτέλεσμα να έχουμε απόσταση 6 βημάτων από τον αρχικό αποστολέα μέχρι τον καθορισμένο παραλήπτη.

Παρόμοια πειράματα έγιναν και αργότερα, όπως του Duncan Watts το 2003 με emails [36], όπου βρέθηκε και πάλι ο μέσος όρος των ενδιάμεσων κόμβων να είναι περίπου 6 . Το 2007 μια μελέτη των Jure Leskovec and Eric Horvitz [28] σε δεδομένα από συνομιλίες μέσω Microsoft Messenger, έδειξε ότι και ο μέσος όρων του μήκους των μονοπατιών μεταξύ των χρηστών ήταν 6.

Κεφάλαιο 3

Διάχυση και Επιρροή στα Κοινωνικά Δίκτυα

Στα κοινωνικά δίκτυα πολλές φορές θα θέλαμε να μετρήσουμε την επιρροή των κόμβων σε ένα κοινωνικό δίκτυο, δηλαδή να μετρήσουμε πόσο σημαντικοί είναι μέσα στο δίκτυο. Αυτό έχει χρήσιμες εφαρμογές στη διάχυση πληροφορίας σε ένα κοινωνικό δίκτυο ή την υιοθέτηση μίας καινούργιας τεχνολογίας, καθώς οι σημαντικοί κόμβοι ενδέχεται να μας διευκολύνουν ως ένα αρχικό σύνολο απ'όπου ξεκινά η διάδοση της πληροφορίας. Για να μετρήσουμε την σημαντικότητα ενός κόμβου, ανατίθεται σε κάθε κόμβο μία μέτρηση, ή αλλιώς ένα σκορ, και γίνεται σύγκριση ανάμεσα σε αυτά. Η μέτρηση μπορεί να γίνει με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους. Στη βιβλιογραφία οι τρόποι μέτρησης της σημαντικότητας ενός κόμβου κοινωνικού δικτύου είναι γνωστοί ως μέτρα κεντρικότητας (centrality measures). Το καθένα εκφράζει μία διαφορετική πλευρά του πόσο σημαντικός είναι τελικά ένας κόμβος για το κοινωνικό δίκτυο. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποια μοντέλα όπου μας ενδιαφέρει να έχουμε μέγιστη διάχυση της πληροφορίας.

3.1 Μέτρα κεντρικότητας

3.1.1 Κεντρικότητα Βαθμού

Η κεντρικότητα βαθμού (degree centrality) εκφράζει το πόσο διασυνδεδεμένος είναι ένας κόμβος στο κοινωνικό δίκτυο. Ο βαθμός του κόμβου να υπενθυμίσουμε ότι ορίζεται ως το πλήθος των κόμβων για τους οποίους υπάρχει απευθείας ακμή, ουσιαστικά δηλαδή είναι το πλήθος των γειτόνων του κόμβου. Μπορούμε επίσης να το κανονικοποιήσουμε με $(n-1)$ όπου n το πλήθος των κόμβων όλου του δικτύου αν θέλουμε να εκφράζουμε τους βαθμούς στο διάστημα $[0,1]$.

Η κεντρικότητα ενός κόμβου λοιπόν είναι:

$$\frac{d_i}{n-1}$$

όπου d_i είναι ο βαθμός του κόμβου.

3.1.2 Κεντρικότητα Εγγύτητας

Η κεντρικότητα εγγύτητας (closeness centrality) εκφράζει τη σχετική απόσταση από τους άλλους κόμβους.

Ορίζεται ως το αντίστροφο της μέσης απόστασης μεταξύ του i και οποιοδήποτε άλλου κόμβου:

$$\frac{(n-1)}{\sum_j l(i,j)}$$

όπου $l(i,j)$ το μήκος του συντομοτέρου μονοπατιού μεταξύ δύο κόμβων i και j.

3.1.3 Κεντρικότητα Φθίνουσα

Η λεγόμενη decay centrality (φθίνουσα κεντρικότητα) εκφράζει το σχετικά πόσους κόμβους μπορεί να προσεγγίσει ένας κόμβος καθώς όμως ουσιαστικά φθίνει η επικοινωνία του με αυτούς με παράμετρο δ. Έχουμε $0 < \delta < 1$. Όταν δ είναι ίσο με 1 τον αφήνουμε να προσεγγίσει όλους τους κόμβους που βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Όταν το δ ισούται με 0, τότε αυτό το μέτρο εκφυλλίζεται στο degree centrality. Ουσιαστικά δηλαδή μετράει τις αποστάσεις με εκθετικό τρόπο.

Για δεδομένο γράφο g, ορίζεται ως:

$$C_i^d(G) = \sum_{j \neq i} \delta^{l(i,j)}$$

Μπορούμε επίσης να κανονικοποιήσουμε το μέτρο αυτό με $(n-1)\delta$ που είναι το μικρότερο δυνατό που φθίνει το μέτρο αυτό για n κόμβους στο γράφημα. Δηλ. έχουμε με την κανονικοποίηση:

$$C_i^d(G) = \frac{\sum_{j \neq i} \delta^{l(i,j)}}{(n-1)\delta}$$

3.1.4 Κεντρικότητα ως Ενδιάμεσος

Η κεντρικότητα αυτή εκφράζει το πόσο λειτουργεί ένας κόμβος ως ενδιάμεσος μεταξύ άλλων ζευγών κόμβων. Πιο συγκεκριμένα εκφράζει το σε πόσα συντομότερα μονοπάτια υπάρχει ο κόμβος k μεταξύ των κόμβων i και j. Είναι γνωστή σαν Betweeness ή Freeman centrality.

Επομένως αν $P(i,j)$ το πλήθος των συντομοτέρων μονοπατιών μεταξύ i και j και συμβολίσουμε με $P_k(i,j)$ το πλήθος των συντομοτέρων μονοπατιών μεταξύ του i και j στα οποία υπάρχει ο k (ως ενδιάμεσος κόμβος), τότε ορίζουμε την κεντρικότητα ως ενδιαμέσου:

$$\sum_{i,j \neq k} \frac{\frac{P_k(i,j)}{P(i,j)}}{\binom{n-1}{2}}$$

Ο παρανομαστής $\binom{n-1}{2}$ είναι για λόγους κανονικοποίησης.

3.1.5 Κεντρικότητα Ιδιοδιανύσματος

Η κεντρικότητα ιδιοδιανύσματος (eigenvector centrality) ουσιαστικά να εκφράζει την σημαντικότητα ενός κόμβου λόγω της σύνδεσής του με σημαντικούς κόμβους. Από αυτήν την αυτοαναφορική ιδιότητα πηγάζει το γεγονός ότι αυτό το μέτρο σχετίζεται άμεσα με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με C_i την κεντρικότητα ιδιοδιανύσματος του κόμβου i τότε αυτή πρέπει να είναι ανάλογη με το άθροισμα των κεντρικοτήτων ιδιοδιανύσματος των γειτόνων του i. Δηλαδή, αν ο πίνακας γειτνίασης του γράφου είναι A, τότε για τη η κεντρικότητα ιδιοδιανύσματος C_i για τον κόμβο i ισχύει:

$$\lambda C_i = \sum_{j \in N(i)} A_{ij} C_j$$

όπου $N(i)$ η γειτονιά του i, και το λ είναι ένας παράγοντας αναλογίας.

Αν γράψουμε σε διανυσματική μορφή την παραπάνω σχέση, δηλαδή με $\vec{C}$ το οποίο περιλαμβάνει τις κεντρικότητες ιδιοδιανύσματος όλων των κόμβων, προκύπτει:

$$\lambda \vec{C} = A\ \vec{C}$$

Άρα, το $\vec{C}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, και λ είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Επομένως, έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους και άρα έχουμε μέχρι n διαφορετικές λύσεις. Για να λύσουμε, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Perron-Frobenius. Το $\vec{C}$ είναι ιδιοδιάνυσμα και σύμφωνα με το θεώρημα πρέπει να κοιτάξουμε το ιδιοδιάνυσμα με την αντίστοιχη μεγαλύτερη ιδιοτιμή, διότι ενδιαφερόμαστε για μη αρνητικές και πραγματικές τιμές για τις κεντρικότητες.

3.2 Το Μοντέλο Threshold

Πολλές φορές στα κοινωνικά δίκτυα μας ενδιαφέρει να παίρνουμε αποφάσεις και να μιμούμαστε συμπεριφορές των κοντινών μας γειτόνων παρά όλου του κοινωνικού δικτύου που βρισκόμαστε. Επομένως θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το πώς μία νέα ιδέα ή μία νέα τεχνολογία διαδίδεται σε ένα δίκτυο, όπου τότε θα μας ενδιαφέρει να έχουμε για παράδειγμα συμβατότητα στις δικές μας συσκευές με αυτές των φίλων μας. Το μοντέλο threshold για την επιρροή μπορεί να προκύψει από ορθολογική λήψη αποφάσεων. Συγκεκριμένα, προκύπτει όταν οι άνθρωποι παίζουν ένα παίγνιο συντονισμού (coordination game). Έστω για δύο τεχνολογίες X και Y με οφέλη x όταν και οι δύο επιλέγουν X και y όταν και οι δύο επιλέγουν Y. Το παίγνιο αυτό έχει δύο σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές (PSNE).

A \ B	X	Y
X	x,x	0
Y	0	y,y

Επομένως εφόσον ένας κόμβος έχει d γείτονες και ένα κλάσμα από αυτούς επιλέγουν X ενώ κλάσμα (1-p) επιλέγει Y, τότε έχουμε συνολικό όφελος $p \cdot d \cdot x$ και $(1-p) \cdot d \cdot y$ στην άλλη. Επομένως ο παίκτης A υιοθετεί ορθολογικά την X εφόσον $pdx \geq (1-p)dy$. Άρα ο παίκτης A υιοθετεί την X όταν $p \geq \frac{y}{(x+y)}$. Μπορούμε να θέσουμε $q = \frac{y}{(x+y)}$ και αυτό αποτελεί το κρίσιμο κλάσμα των φίλων/γειτόνων μας που είναι το λεγόμενο threshold (κατώφλι). Παρατηρούμε ότι πολύ στενά συνδεδεμένες συνεκτικές συνιστώσες του γράφου αποτελούν εμπόδιο στην διάδοση μίας ιδέας.

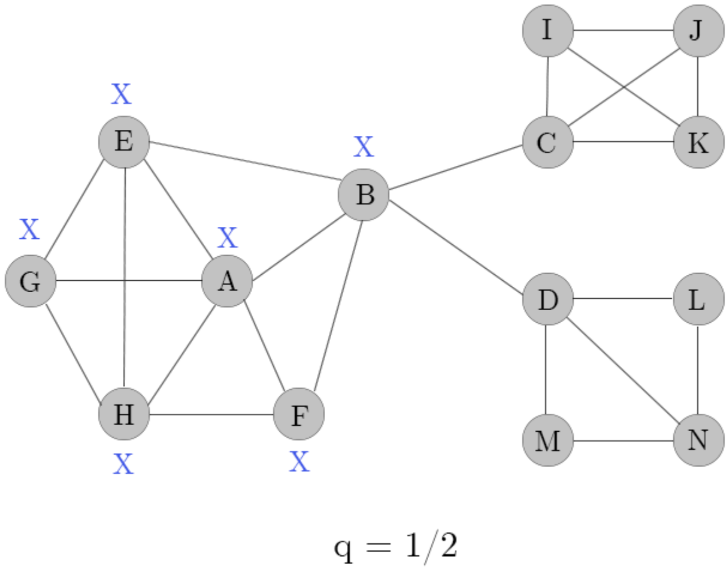
Ένα σύνολο είναι $r - dense$ όταν για κάθε κόμβο μέσα στο S, περισσότεροι από r-κλάσμα των γειτόνων του κόμβου είναι μέσα στο S. Επομένως αν το S είναι (1-q)-dense συστάδα και κανένας μέσα στο S δεν έχει υιοθετήσει την τεχνολογία X , τότε δε θα έχουμε διάδοση με κατώφλι (threshold) q μέσα στο S. Τέτοιο παράδειγμα βλέπουμε στο σχήμα 3.1.

Με αφετηρία την προηγούμενη παιγνιοθεωρητική ανάλυση, μπορούμε να ορίσουμε το Linear Threshold μοντέλο. Οι Granovetter [30] και Schelling [43] ήταν οι πρώτοι που πρότειναν μοντέλα threshold. Από τότε έχουν προταθεί πολλά μοντέλα της ίδιας λογικής (πχ. [31], [32]), όμως το μοντέλο Linear Threshold αποτελεί τον πυρήνα αυτών των μοντέλων.

Στο μοντέλο αυτό λοιπόν ένας κόμβος v επηρεάζεται από τους γειτονικούς του κόμβους w, με έναν συντελεστή βάρους $b_{v,w}$ τέτοιο ώστε:

$$\sum_{w \text{ neighbor of } v} b_{v,w} \leq 1$$

Επίσης, κάθε κόμβος έχει (επιλέγει) ένα κατώφλι (threshold) θ_v το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό το κατώφλι εκφράζει το σταθμισμένο μέρος των



Σχήμα 3.1: Η διάδοση της ιδέας/τεχνολογίας X, με αρχικούς κόμβους G και A που έχουν ήδη επηρεαστεί, και $q = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι σταματά η διάδοση σε αυτό το σημείο. [6]

γειτόνων του v που πρέπει να γίνουν ενεργοί (με την έννοια να υιοθετήσουν την ιδέα ή την τεχνολογία που διαδίδεται), ώστε και ο ίδιος ο κόμβος v να γίνει ενεργός. Το κατώφλι αυτό εκφράζει το πόσο μεγάλη προσπάθεια πρέπει να κάνουμε για να πείσουμε έναν κόμβο να αγοράσει ένα προϊόν ή να υιοθετήσει μία ιδέα ή μία τεχνολογία.

Δεδομένης μίας τυχαίας επιλογής από κατώφλια και ένα αρχικό σύνολο ενεργών κόμβων, A_0, η διαδικασία της διάχυσης εξελίσσεται ντετερμινιστικά σε διακριτά βήματα: στο βήμα t, όλοι οι κόμβοι που ήταν ενεργοί στο βήμα $t-1$ εξακολουθούν ακόμη να είναι, και σε αυτό το βήμα επίσης ενεργοποιείται κάθε κόμβος v για τον οποίο ισχύει:

$$\sum_{w \text{active neighbor of} v} b_{v,w} \geq \theta_v$$

Μπορούμε πλέον να δούμε το γενικό threshold μοντέλο (General Threshold Model). Κάθε κόμβος έχει μία ειδική συνάρτηση ενεργοποίησης f_v, η οποία είναι τυχαία και μονότονη, και η οποία αντιστοιχίζει υποσύνολα των γειτόνων του v στο διάστημα $[0,1]$, με την προϋπόθεση ότι $f_v(\emptyset) = 0$. Ο κάθε κόμβος v επιλέγει ένα κατώφλι θ_v ομοιόμορφα και τυχαία από το διάστημα $[0,1]$. Ο κόμβος v ενεργοποιείται στο βήμα t εάν:

$$f_v(S) \geq \theta_v$$

όπου S το σύνολο των γειτόνων του v που ήταν ενεργοί στο βήμα $t-1$. Παρατηρούμε ότι το Linear Threshold μοντέλο είναι ειδική περίπτωση όταν η f_v έχει την ειδική μορφή $F_v = \sum_{u \text{ neighbor of } v} b_{v,u} \leq 1$.

3.3 Το Μοντέλο Independent Cascade

Το Independent Cascade μοντέλο αναπτύχθηκε από τους Goldenberg, Libai και Muller (2001) για marketing [10] [11]. Να σημειώσουμε ότι υπάρχουν πολλών ειδών Cascade μοντέλα, τα οποία μπορεί για παράδειγμα να μοντελοποιούν το φαινόμενο του κοπαδισμού [16]. Γενικότερα όμως, χρησιμοποιούμε τα cascade μοντέλα όπου υπάρχουν άνθρωποι οι οποίοι παίρνουν αποφάσεις ακολουθιακά, με βάση τις ιδιωτικές τους πληροφορίες και τις παρατηρήσεις τους από το περιβάλλον γύρω τους.

Στο μοντέλο Independent Cascade αρχίζουμε με ένα αρχικό σύνολο κόμβων A_0 από το οποίο θεωρούμε ότι ξεκινάει η διάδοση πληροφορίας στο κοινωνικό δίκτυο. Είναι δηλαδή ένα αρχικό σετ επιρροής. Θα λέμε ότι ένας κόμβος v γίνεται ενεργός αν έχει επηρεαστεί από την πληροφορία που διαδίδεται. Η διαδικασία για διάδοση της πληροφορίας στα κοινωνικά δίκτυα θεωρούμε ότι προχωράει σε διακριτά βήματα σύμφωνα με τον επόμενο τυχαιοποιημένο αλγόριθμο. Όταν ένας κόμβος v γίνεται ενεργός στο βήμα t, έχει μία και μοναδική ευκαιρία να επηρεάσει κάθε έναν από τους γείτονές του ο οποίος δεν έχει γίνει ακόμα ενεργός. Επιτυγχάνει, κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, με πιθανότητα $p_{v,w}$. Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το πόσο πολύ επηρεάζει ένας άνθρωπος έναν γειτονικό του. Αυτή η παράμετρος του συστήματος είναι ανεξάρτητη του ιστορικού της διάδοσης πληροφορίας. Επομένως, αν ο v επιτύχει τότε ο κόμβος w θα γίνει και αυτός ενεργός στον χρόνο $t+1$. Αν όμως αποτύχει, τότε ο κόμβος v αποτύχει να επηρεάσει τον w τότε δεν μπορεί να κάνει και άλλες προσπάθειες να τον επηρεάσει. Η διαδικασία αυτή τρέχει έως ότου δεν είναι δυνατή περαιτέρω ενεργοποίηση κόμβων.

Μπορούμε πλέον να παρουσιάσουμε πλέον το γενικό cascade μοντέλο (General Cascade Model). Στο γενικό cascade μοντέλο, ένας κόμβος u επιτυγχάνει να ενεργοποιήσει (επηρεάσει) έναν γειτονικό του κόμβο v με πιθανότητα η οποία εξαρτάται από το σύνολο των γειτόνων του v οι οποίοι έχουν ήδη προσπαθήσει να ενεργοποιήσουν τον v. Επομένως, πρέπει να ορίσουμε μία αύξουσα συνάρτηση $p_v(u, S) \in [0, 1]$, όπου το S και το $\{u\}$ είναι ανεξάρτητα σύνολα γειτόνων του v.

Σε αναλογία με το Independent Cascade μοντέλο, όταν ο u επιχειρήσει να ενεργοποιήσει τον v, πετυχαίνει με πιθανότητα $p_v(u, S)$, όπου S το σύνολο των γειτόνων που έχουν ήδη προσπαθήσει και αποτύχει να ενεργοποιήσουν τον v. Παρατηρούμε ότι το Independent Cascade μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του γενικού, όταν το $p_v(u, S)$ είναι μία σταθερά $p_{u,v}$, ανεξάρτητη του S.

Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε cascade μοντέλα με αύξουσες συναρτήσεις που δεν εξαρτώνται από την σειρά προσπαθειών, με την έννοια ότι αν έστω οι γείτονες $u_1, u_2, \ldots, u_l$ προσπαθούν να ενεργοποιήσουν τον v, η πιθανότητα ο v να γίνει ενεργός μετά το πέρας των l προσπαθειών, δεν εξαρτάται από την σειρά με την οποία γίνονται αυτές οι προσπάθειες.

3.4 Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης επιρροής

Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της επιρροής σε ένα κοινωνικό δίκτυο, δεδομένου ενός αρχικού συνόλου A_0 επηρεασμένων κόμβων, διατυπώθηκε από τους Domingos και Richardson [41] αλλά μελετήθηκε από τους D. Kempe, J. Kleinberg και É. Tardos [27]. Στο πρόβλημα αυτό θέλουμε να μεγιστοποίήσουμε την επιρροή όχι απλώς διαλέγοντας έναν κόμβο με το μεγαλύτερο μέτρο κάποιας κεντρικότητας, αλλά να διαλέξουμε προσεκτικά ένα σετ κόμβων με τους οποίους θα προσπαθήσουμε να μεγιστοποιήσουμε την διάδοση. Ως διαδικασίες μετάδοσης της πληροφορίας θα θεωρήσουμε τα δύο μοντέλα που περιγράφηκαν στις δύο προηγούμενες ενότητες.

Μία πιο μαθηματική διατύπωση για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της επιρροής, είναι η εξής: έχουμε μία αντικειμενική συνάρτηση $\sigma(S)$ και το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ότι διαθέτουμε ένα "budget" k κόμβων που μπορούμε να επιλέξουμε αρχικά ως το αρχικό σετ $S = A_0$, και πρέπει να επιλέξουμε k κόμβους έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμετην $\sigma(S)$. Το πρόβλημα αυτό δυστυχώς αποδεικνύεται ότι είναι NP-hard. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει προσεγγιστικός άπληστος αλγόριθμος. Ο αλγόριθμος που πρότειναν οι συγγραφείς είναι ο εξής:

Algorithm 1 Άπληστος προσεγγιστικός αλγόριθμος

Start with an empty set S

for k iterations **do**

Add node v to S so that it maximizes $\sigma(S+v) - \sigma(S)$

Δηλαδή προσθέτουμε κάθε φορά στο S τον κόμβο που σε αυτό το σημείο μεγιστοποιεί το οριακό κέρδος (marginal gain).

Ο αλγόριθμος αυτός αποδεικνύεται ότι αποτελεί $(1 - \frac{1}{e})$-προσέγγιση του βέλτιστου. Δηλαδή, το τελικό σετ είναι τουλάχιστον $(1 - \frac{1}{e}) > 63\%$ του αριθμού των κόμβων που οποιοδήποτε σετ S k-μεγέθους θα μπορούσε να ενεργοποιήσει.

Απόδειξη. Η βασική απόδειξη για τον άπληστο αλγόριθμο βασίζεται σε δύο βήματα:

Βήμα 1: Η συνάρτηση σ έχει τις εξής ιδιότητες:

- είναι μη αρνητική (προφανές).
- είναι μονότονη (καθώς αν ξεκινήσουμε με περισσότερους κόμβους στο αρχικό σετ, τότε αυτό μόνο να βοηθήσει τη διάδοση μπορεί, προφανώς). Επομένως $\sigma(S+v) \geq \sigma(S)$.

- είναι submodular, δηλαδή ικανοποιεί τον λεγόμενο law of diminishing returns. Έστω ένα σύνολο και ένα μικρότερο σύνολο που περιέχεται στο πρώτο. Θέλουμε να εξετάσουμε τι αποτέλεσμα θα έχει η πρόσθεση ενός ακόμη κόμβου και στα δύο αυτά σύνολα. Δηλαδή:

  $\sigma : 2^N \rightarrow \Re$ είναι submodular αν και μόνο αν για$\forall S \subset T \subset N, \forall v \in N \setminus T$ ισχύει

  $$\sigma(S + v) - \sigma(S) \geq \sigma(T + v) - \sigma(T)$$

  Οι αποδείξεις θα γίνουν χωριστά για το κάθε μοντέλο στη συνέχεια.

Βήμα 2: Από το θεώρημα των Nemhauser, Wosley, Fisher, ο άπληστος αλγόριθμος είναι μία $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon')$ προσέγγιση όταν η συνάρτηση σ είναι μονότονη και submodular. □

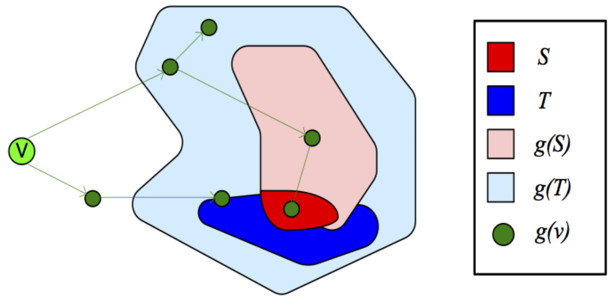
Απόδειξη για το Independent Cascade μοντέλο:

Μπορούμε να θεωρήσουμε τις ακμές με τα βάρη ως το αποτέλεσμα ρίψης ενός νομίσματος με bias το βάρος της ακμής (για παράδειγμα αν το βάρος της ακμής είναι 0.6, θεωρούμε ότι με πιθανότητα 60% to νόμισμα θα φέρει γράμματα και κορώνα με 40%). Μπορούμε δηλαδή να έχουμε σε ένα μαύρο κουτί το αποτέλεσμα της ρίψης και το οποίο δε το γνωρίζουμε, αλλά ξέρουμε το bias με το οποίο ερρίφθη. Μία από τις μεγάλες βασικές ιδέες σε αυτό το paper που είχαν οι συγγραφείς είναι ότι, αφού σε κάθε ενεργοποίηση κάποιου κόμβου ένα τέτοιο νόμισμα ρίπτεται, αντί αυτού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε κάνει όλες τις ρίψεις των νομισμάτων από πριν εξ αρχής, και μόλις χρειαστούμε τα αποτελέσματα θα τα έχουμε διαθέσιμα. Επομένως στο τέλος της διαδικασίας, ένας κόμβος θα είναι reachable από το αρχικό σετ αν υπάρχει μονοπάτι διαδοχικών κόμβων που το αποτέλεσμα ρίψης του νομίσματος έδειξε ότι θα ενεργοποιηθούν. Θέλουμε να αποδείξουμε λοιπόν την ιδιότητα της submodularity για τον γράφο αυτόν ακριβώς που προέκυψε από τα διαδοχικά μονοπάτια που αναφέραμε μόλις. Έστω G ο γράφος και $g(S)$ οι κόμβοι που είναι reachable από το S στον G. Θέλουμε δηλαδή να αποδείξουμε ότι

$$g(T + v) = g(T) \subseteq g(S + v) - g(S), \text{ όταν } S \subseteq T$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2 όταν προσθέτουμε έναν ακόμη κόμβο v, τότε θα συμβεί κάτι από τα επόμενα:

- υπάρχουν κόμβοι που ήταν ήδη reachable και από το S και το T, επομένως είτε προσθέσουμε τον v στο S είτε στο T, οπότε δεν προστίθενται σε κανένα από τα δύο μέλη της ανίσωσης.
- υπάρχουν κόμβοι που βρίσκονται τελείως εκτός του γαλάζιου συνόλου, δηλαδή, γίνονται περισσότερα στοιχεία reachable και για τα δύο σύνολα, και έτσι το πλήθος των νέων προστίθεται και στα δύο μέλη της ανίσωσης.
- και τέλος έχουμε τα στοιχεία που βρίσκονται μέσα στην γαλάζια περιοχή αλλά όχι στην ροζ, και έτσι προστίθενται στην μία πλευρά της ανίσωσης αλλά όχι στην άλλη.



Σχήμα 3.2: Γραφική απόδειξη submodularity για το independent cascade μοντέλο. [5]

Επομένως, αποδείξαμε με γραφικό τρόπο ότι για έναν στατικό γράφο ισχύει η ιδιότητα submodularity. Μένει πλέον να αποδείξουμε ότι για όλα τα δυνατά στατικά γραφήματα που μπορεί να προκύψουν κατά τη διάρκεια διάδοσης έχουμε ότι:

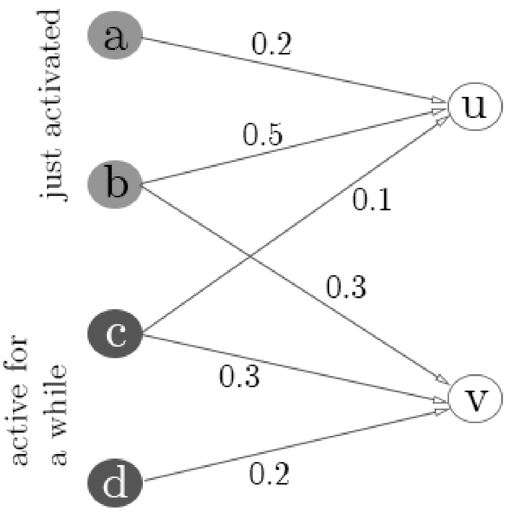
$$\sigma(S) = \sum_{G} Pr(\text{G is a reachable graph}) \cdot g_G(S)$$

δηλαδή παίρνουμε το άθροισμα πάνω σε όλα τα πιθανά στατικά γραφήματα που μπορεί να προκύψουν από όλες τις τυχαίες επιλογές και πολλαπλασιάζουμε επί τον αριθμό των κόμβων που είναι τελικά reached στο τέλος της διαδικασίας. Αποδείξαμε προηγουμένως ότι η συνάρτηση $g(S)$ είναι submodular. Όμως ο γραμμικός συνδυασμός submodular συναρτήσεων είναι και αυτός submodular, άρα και η σ είναι submodular.

Απόδειξη για το Linear Threshold Μοντέλο

Στο μοντέλο αυτό θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μία παρόμοια ιδέα για τα στατικά γραφήματα. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα βοηθητικό μοντέλο, το Trigger Graph μοντέλο. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι είναι ισοδύναμο με το Linear Threshold. Στο μοντέλο Trigger, κάθε κόμβος επιλέγει να επηρεαστεί το πολύ από μία εισερχόμενη ακμή με πιθανότητα ανάλογη προς το βάρος της ακμής. Τα μοντέλα αυτά ξεκινούν σίγουρα από την ίδια κατάσταση (γιατί το αρχικό σετ είναι το ίδιο και για τα δύο) και κάθε χρονική στιγμή η κατανομή είναι η ίδια, άρα και όταν η διαδικασία τελειώσει. Το trigger μοντέλο όμως είναι σαν να έχουμε κατασκευάσει τα στατικά γραφήματα με τα μονοπάτια ενεργών κόμβων στα οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως. Για να διευκρινίσουμε την ισοδυναμία των trigger και linear threshold μοντέλων, με ένα παράδειγμα, έστω ένα κομμάτι από στιγμιότυπο γράφου όπου έχουμε κάποια διάδοση.

Έστω για το linear threshold μοντέλο. Την τρέχουσα στιγμή ξέρουμε ότι ο u είναι μη ενεργός, άρα το κατώφλι του είναι μεγαλύτερο από 0.1 (αλλιώς θα ήταν ήδη ενεργός λόγω του c). Άρα το κατώφλι του u είναι ομοιόμορφα τυχαία κατανεμημένο στο διάστημα [0.1, 1]. Στην περίπτωση που ο u ενεργοποιηθεί, τότε το κατώφλι του πρέπει να ανήκει στο [0.1, 0.8]. Άρα η πιθανότητα ενεργοποίησής του είναι $\frac{0.8-0.1}{1-0.1} = \frac{0.7}{0.9}$. Παρομοίως για τον v, η



Σχήμα 3.3: Στιγμιότυπο σε linear threshold-trigger μοντέλο.

πιθανότητα ενεργοποίησής του είναι $\frac{0.8-0.5}{1-0.5} = \frac{0.3}{0.5}$ και επειδή τα κατώφλια ήταν ανεξάρτητα, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ τους, οι ενεργοποιήσεις εξακολουθούν να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Έστω για το μοντέλο Trigger. Για τον u ξέρουμε ότι δεν έχει επιλέξει να ενεργοποιηθεί λόγω του c, άρα θα ενεργοποιηθεί αν επιλέξει a ή b. Η πιθανότητα αυτή είναι 0.7, δεδομένου ότι δεν επέλεξε τον c, άρα $\frac{0.7}{0.9}$. Παρομοίως για τον v, γνωρίζουμε ότι δεν ενεργοποιήθηκε από τον c ή τον d, άρα η πιθανότητα ενεργοποίησής του είναι $\frac{0.3}{0.5}$.

Τα δύο μοντέλα General Linear Threshold και General Independent Cascade είναι ισοδύναμα, με την έννοια ότι δοθέντος ενός συνόλου συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε τις πιθανότητες p έτσι ώστε τη κατανομή που ακολουθεί το αποτέλεσμα να είναι η ίδια από το ένα μοντέλο στο άλλο και αντιστρόφως. Δυστυχώς, στη γενική περίπτωση είναι NP-hard να προσεγίσουμε την συνάρτηση μεγιστοποίησης επιρροής εντός ενός παράγοντα $n^{1-\epsilon}$ με $\epsilon > 0$ (με αναγωγή από το set cover).

Τώρα αν επιστρέψουμε στο αρχικό σετ, παρατηρούμε ότι παραμένει το πρόβλημα να επιλέξουμε τον κόμβο που μεγιστοποιεί την διάδοση κάθε φορά, και αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίζουμε την συνάρτηση σ. Για τον λόγο αυτό, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να πάρουμε δείγματα, και να επαναλάβουμε με ρίψεις νομισμάτων ικανοποιητικές φορές το πείραμα και έτσι παίρνουμε τελικά $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon'$ προσέγγιση. Μπορούμε δηλαδή να πάμε όσο κοντά στο $(1 - \frac{1}{e}$ θέλουμε αλλά όχι ακριβώς (αποδεικνύεται με το ότι η αναμενόμενη συνάρτηση ενεργοποίησης ικανοποιεί την submodularity ιδιότητα και είναι μονότονη, και ότι ο hill climbing παρέχει προσέγγιση $(1 - \frac{1}{e} - \epsilon'$ για τις submodular και μονότονες συναρτήσεις. Είναι ανάλογο του θεωρήματος των Nemhauser, Wosley και Fisher [34]).

3.4.1 Σύγκριση άπληστου αλγορίθμου με άλλες μεθόδους

Η επίδοση του greedy αλγορίθμου στο linear threshold μοντέλο, σε σχέση με την επιλογή του κόμβου με τον μεγαλύτερο βαθμό παρατηρήθηκε ότι είναι καλύτερη κατά περίπου 18%. Γίνεται επίσης σύγκριση με την επιλογή τυχαίων κόμβων στο δίκτυο (random), η οποία έχει την χειρότερη επίδοση και με το μέτρο της κεντρικότητας εγγύτητας. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί και διαισθητικά, καθώς σε κεντρικούς κόμβους ή κόμβους που έχουν μεγάλους βαθμούς, μπορεί να βρίσκονται στην ίδια συστάδα του γράφου και επομένως το να τους λάβουμε υπόψη στο αρχικό σύνολο ενεργοποίησης (activation set) δεν είναι απαραίτητο.

3.4.2 Σχετική έρευνα

Η εργασία [27] αποτέλεσε την αφετηρία για πολλές ακόμη ερευνητικές εργασίες. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε περαιτέρω το εξής πρόβλημα: Μπορούμε να έχουμε δύο ή περισσότερες εταιρείες (ή γενικότερα παίκτες), οι οποίες βρίσκονται σε ανταγωνισμό μεταξύ τους, και η κάθε μία επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την επιρροή της μέσα σε ένα κοινωνικό δίκτυο. Εργασίες που βασίζονται πάνω σε αυτήν την ιδέα και οι οποίες είναι αξιοσημείωτες είναι οι εξής: "Competitive Influence Maximization in Social Networks" των Bharati, Kempe και Salek [2], "Threshold models for competitive influence in social networks" των Borodin, Filmus, Oren [7], "Competitive contagion in networks" των Goyal και Kearns [1], "A game-theoretic analysis of a competitive diffusion process over social networks" από τους Τζούμα, Αμανατίδη και Μαρκάκη [3], και "Influence Maximization in Switching-Selection Threshold Models" από τους Φωτάκη, Λυκούρη, Μαρκάκη και Obraztsova [4].

Κεφάλαιο 4

Μεγιστοποίηση Εσόδων σε Κοινωνικά Δίκτυα - Θετικές Εξωτερικότητες

Ένας ακόμη τρόπος να μελετηθούν τα κοινωνικά δίκτυα είναι με βάση το κριτήριο μεγιστοποίησης εσόδων (revenue maximization), και όχι αυτό της μεγιστοποίησης επιρροής, καθώς το κριτήριο μεγιστοποίησης εσόδων είναι ένας πιο φυσιολογικός τρόπος γιατί σε πολλά προβλήματα δε μας νοιάζει τόσο να έχουμε μεγάλη διάχυση και επιρροή όσο μεγιστοποίηση των κερδών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε διάφορα μοντέλα που αναπτύχθηκαν και μελετήθηκαν με βάση το κριτήριο μεγιστοποίησης εσόδων. Να σημειωθεί ότι μερικές φορές θα χρησιμοποιείται η λέξη "κέρδος" αντί για την λέξη "έσοδα" χωρίς διάκριση, καθώς στα μοντέλα που αναφέρονται δεν μας απασχολεί το κόστος ή θεωρούμε ότι το έχουμε ήδη ενσωματώσει στις προσφερόμενες τιμές.

4.1 Βέλτιστες στρατηγικές προώθησης αγαθών σε κοινωνικά δίκτυα - Influence and Exploit στρατηγική

Το ακόλουθο μοντέλο (Optimal Marketing Strategies over Social Networks) προτάθηκε από τους J. Hartline, V. Mirrokni και M. Sundararajan το 2008. [26]. Το μοντέλο αυτό αφορά πωλήσεις ψηφιακών αγαθών ή υπηρεσιών, όπου το κόστος παραγωγής πολλαπλών αντιτύπων είναι μηδενικό.

4.1.1 Βασικές Ιδέες

Βασικές παρατηρήσεις στις οποίες στηρίζεται το μοντέλο είναι ότι προκειμένου να διαδοθεί περισσότερο ένα αγαθό, ο πωλητής το προσφέρει με έκπτωση σε ορισμένους κόμβους του κοινωνικού δικτύου. Αυτοί με τη σειρά τους θα επηρεάσουν θετικά τους γειτονικούς τους κόμβους, με αποτέλεσμα οι γειτονικοί κόμβοι να έχουν μεγαλύτερη προθυμία να αγοράσουν το προϊόν. Επίσης, θα ήταν δυνατόν ο πωλητής να προσφέρει ακόμα και δωρεάν το προϊόν στους ασκώντες επιρροή κόμβους, αλλά το συγκεκριμένο μοντέλο μελετά το ότι μπορεί αντί αυτού να κάνει έκπτωση (discounts) και γενικά το πόσο μεγάλες είναι οι εκπτώσεις που μπορούν να προσφερθούν. Πρόκειται δηλαδή για "έξυπνη" στρατηγική προώθησης του προϊόντος.

Στο μοντέλο λαμβάνεται υπόψη η σειρά με την οποία προσεγγίζονται οι υποψήφιοι αγοραστές (οι οποίοι αγοράζουν με έκπτωση). Αυτό συμβαίνει διότι η σειρά με την οποία προσεγγίζονται επηρεάζει τα externalities ("εξωτερικότητες") που δημιουργούνται στο δίκτυο. Με τον όρο "εξωτερικότητες" εννοούμε ότι επηρεάζουν τη γνώμη των χρηστών που δεν έχουν αποκτήσει ακόμα το προϊόν. Επίσης θεωρείται ότι μερικοί κόμβοι έχουν γενικά μεγαλύτερη επιρροή στο περιβάλλον τους απ'ό,τι άλλοι (opinion leaders).

Η κύρια ιδέα είναι ότι θέλουμε να προσφέρουμε καλύτερες τιμές (προσφορές) σε κόμβους που επηρεάζουν πολύ άλλους κόμβους (θετικά πάντα για το συγκεκριμένο μοντέλο), και θέλουμε αυτοί οι κόμβοι να αγοράσουν το αγαθό όσο πιο νωρίς στην ακολουθία γίνεται. Οι στρατηγικές αυτές είναι γνωστές ως "influence and exploit" . Η στρατηγική πώλησης, λοιπόν, έγκειται στο να προσδιορίσουμε την σειρά επίσκεψης των κόμβων και τις τιμές που θα προσφέρουμε.

4.1.2 Υποθέσεις και Ορισμοί

Έστω ότι έχουμε έναν πωλητή και ένα σύνολο V από υποψήφιους αγοραστές. Λαμβάνουμε υπόψη μια θετική εξωτερικότητα που δημιουργείται, ότι η απόφαση ενός υποψηφίου αγοραστή εξαρτάται από το πόσοι άλλοι κατέχουν το αγαθό, αλλά και φυσικά την τιμή του αγαθού. Για να εκφράσουμε μαθηματικά την externality θεωρούμε μία συνολοσυνάρτηση $\upsilon_i : 2^V \to \mathbb{R}^+$, η οποία ουσιαστικά εκφράζει την αξία που προσδίδει ένας κόμβος σε ένα αγαθό εξαιτίας του ότι επηρεάζεται από τους γύρω του που έχουν ήδη στην κατοχή τους το προϊόν (το οποίο σύνολο όσων έχουν ήδη αγοράσει συμβολίζεται με $S \subseteq V$). Μία ακόμη παραδοχή που κάνουμε είναι ότι οι εν δυνάμει αγοραστές θεωρούνται "μυωπικοί", με την έννοια ότι δέχονται επιρροή μόνο από όσους έχουν ήδη αγοράσει το προϊόν. Για τις συναρτήσεις υ_i θεωρούμε ότι η ακριβής τιμή τους δεν είναι γνωστή, αλλά όμως ότι ακολουθούν μία γνωστή κατανομή F (δηλ. ότι $F(t)$ είναι η πιθανότητα η αξία του αγοραστή να είναι μικρότερη από t).

Ένας *γύρος* (*run*) μιας στατηγικής marketing αποτελείται από μία ακολουθία προσφορών, μία για κάθε αγοραστή στο V μαζί με ένα σύνολο από τιμές που έχουν γίνει αποδεκτές και τιμές που έχουν απορριφθεί. Τα έσοδα από έναν τέτοιο γύρο είναι το άθροισμα των πληρωμών από τις προσφορές που έγιναν αποδεκτές. Ο αγοραστής αποδέχεται την προσφορά όταν $\upsilon_i \geq p$.

Ορισμός 4.1.1 (Βέλτιστη τιμή). *Έστω ότι για κάθε i, η υ_i ακολουθεί την κατανομή F. Η βέλτιστη τιμή p^* μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα έσοδα που προσκομίζουμε από τον αγοραστή i, δηλαδή η τιμή p^* μεγιστοποιεί το $p(1 - F(p))$. Τα αναμενόμενα βέλτιστα έσοδα είναι $p^*(1 - F(p^*))$.*

Επίσης θεωρούμε συναρτήσεις εσόδων ειδικά για τον κάθε κόμβο-παίκτη (player specific), και τη συμβολίζουμε με $R_i(S)$, υποδηλώνοντας τα έσοδα που μπορούμε να εξάγουμε από τον κόμβο i όταν έχουν ήδη τα μέλη του S αγοράσει το προϊόν. Θεωρούμε ακόμη ότι οι συναρτήσεις κέρδους R_i είναι μη αρνητικές, μονότονες (δηλαδή για όλα τα i και $A \subseteq B \subseteq V \backslash i, R_i(A) \leq R_i(B)$) και submodular (δηλ. για όλα τα i και για όλα τα $A \subset V$ και $B \subset V \backslash \{A\}, R_i(A \cup B) + R_i(A \cap B) \leq R_i(A) + R_i(B)$) ή αλλιώς υπακούει στον λεγόμενο νόμο των diminishing returns. Από την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις εσόδων είναι μονότονες συνεπάγεται η επόμενη παρατήρηση.

Παρατήρηση 4.1.1. *Τα έσοδα από τη βέλτιστη στρατηγική πώλησης μπορεί να είναι το πολύ* $\sum_{i \in V} R_i(V)$.

4.1.3 Συμμετρική περίπτωση

Υποθέτουμε ότι οι εν δυνάμει αγοραστές είναι εντελώς συμμετρικοί, δηλαδή έχουν την ίδια επιρροή ο ένας στον άλλον και τις ίδιες αξίες v_i για το αγαθό γενικά. Οι συναρτήσεις $v_i(S)$ είναι επιλεγμένες (drawn) από την κατανομή έστω F_k με ($k = |S|$). Παρατηρούμε ότι αυτή η κατανομή δεν εξαρτάται από τον κόμβο i διότι είμαστε στη συμμετρική περίπτωση. Τα αναμενόμενα έσοδα είναι:

$$R(k,t) = (1 - F_k(p))[p + R(k+1, t-1)] + F_k(p)[R(k, t-1)] \tag{4.1}$$

όπου k είναι το πλήθος των ατόμων που έχουν αγοράσει το αγαθό και t το πλήθος των ατόμων που απομένουν ως υποψήφιοι αγοραστές. Η σχέση προκύπτει ως εξής: ο πρώτος όρος $(1 - F_k(p))[p + R(k+1, t-1)]$ είναι το κέρδος για το ενδεχόμενο ο αγοραστής να αποδεχτεί την προσφορά δηλ. η $v_i \geq p$ και επομένως με πιθανότητα $(1 - F_k(p))$. Τότε δηλαδή τα έσοδα είναι η τιμή που προσφέρουμε p συν ό,τι έσοδα είχαμε από τους προηγούμενους και με το επόμενο σύνολο που έχουμε να εξετάσουμε να μικραίνει κατά 1, δηλ. $R(k+1, t-1)$. Ο δεύτερος όρος προκύπτει από την περίπτωση που ο τρέχων κόμβος δεν αγοράσει τελικά το αγαθό, δηλ. με πιθανότητα $F_k(p)$ και τότε τα έσοδα παραμένουν ως είχαν για όσους έχουν αγοράσει έως τώρα με τη διαφορά ότι έχουμε εξετάσει έναν ακόμη κόμβο (δηλ. $R(k, t-1)$). Σημειώνουμε επίσης, όπως είναι λογικό $R(k, 0) = 0$.

Η βέλτιστη τιμή μπορεί να βρεθεί αν διαφορίσουμε την παραπάνω σχέση, οπότε έχουμε:

$$f_k(p)(R(k, t-1) - R(k+1, t-1) - p) + 1 - F_k(p) = 0$$

Θέτοντας $p(k,t)$ την τιμή τέτοια ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να λύσουμε την 4.1 ως ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού σε χρόνο τετραγωνικό σε σχέση με των αριθμό των αγοραστών. Έτσι, βρίσκουμε τη βέλτιστη στρατηγική πώλησης.

Λήμμα 4.1.1. *Στη συμμετρική περίπτωση η βέλτιστη στρατηγική μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

4.1.4 Γενική περίπτωση

Στη γενική περίπτωση θα δούμε ότι η κλάση του προβλήματος της βέλτιστης στρατηγικής πώλησης είναι NP-hard ακόμη και αν δεν υπάρχει αβεβαιότητα στις συναρτήσεις $v_i(S)$ και να θεωρούνται γνωστές. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, έστω ότι είναι όντως γνωστές και άρα γνωρίζουμε τι τιμές θα πρέπει να προσφέρουμε και έτσι το μόνο ζητούμενο είναι η σειρά με την οποία θα επισκεφθούμε τους κόμβους. Μοντελοποιούμε το κοινωνικό δίκτυο με κατευθυνόμενο γράφο όπου οι κόμβοι είναι τα άτομα-αγοραστές και οι κατευθυνόμενες ακμές w_{ij} εκφράζουν βάρη, δηλ. το πόση επιρροή έχει ο ο κόμβος j στον i. Έτσι η συνάρτηση v_i εκφράζεται ως το άθροισμα

$$v_i = w_{ii} + \sum_{jinS} w_{ij}$$

με w_{ii} να είναι η αξία που έχει ένας αγοραστής για το προϊόν χωρίς να επηρεάζεται από κανέναν άλλον.

Λήμμα 4.1.2. *Το πρόβλημα της εύρεσης βέλτιστης στρατηγικής πώλησης είναι NP-hard ακόμα και για πλήρη πληροφόρηση για την αξία που προσδίδουν οι καταναλωτές στο προϊόν.*

Απόδειξη. Για αποδειχθεί, θα ανάγουμε το πρόβλημα στο maximum feedback arc set problem, για την ακρίβεια σε ένα instance του. Σε ένα instance του προβλήματος maximum feedback arc set, δοθέντος ενός κατευθυνόμενου γράφου με βάρη, θέλουμε να διατάξουμε τους κόμβους του γράφου έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό βάρος των ακμών που έχουν κατεύθυνση προς τα πίσω στη διάταξη. Έστω ότι οι κόμβοι του γράφου είναι το σύνολο των αγοραστών, και τα βάρη των ακμών τα βάρη w_{ij}. Έστω ότι $w_{ij} = 0$ για τις ακμές του instance που δεν υπάρχουν στο δικό μας γράφο. Ορίζουμε την τιμολόγηση στους κόμβους, για δεδομένη διάταξη των κόμβων να είναι για τον παίκτη i το άθροισμα $\sum_{j \in S \cup \{i\}} w_{ji}$, όπου S το σύνολο των κόμβων που έχουμε επισκεφθεί πριν τον i. Επομένως, για δεδομένη διάταξη σ τα έσοδα από μία τέτοια τιμολόγηση είναι ίσο με τα βάρη του feedback arc set όταν οι κόμβοι του είναι διατεταγμένοι με την ανάποδη διάταξη από αυτή του σ. Επομένως η βέλτιστη στρατηγική πώλησης είναι ισοδύναμο πρόβλημα με το maximum feedback arc-set. □

4.1.5 Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι

Παρακινούμενοι από αρνητικό αποτέλεσμα της προηγούμενης παραγράφου, γνωρίζουμε ότι υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος για το maximum feedback arc-set πρόβλημα ο οποίος δίνει $\frac{1}{2}$-προσέγγιση.

Αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης $\frac{1}{4}$

Παρατήρηση 4.1.2. *Δεδομένης οποιασδήποτε submodular συνάρτησης εσόδων R_i, τα αναμενόμενα έσοδα από τη βέλτιστη στρατηγική πώλησης "influence and exploit" είναι τουλάχιστον $\frac{1}{4}$ των βελτίστων εσόδων.*

Απόδειξη. Έστω σύνολο A το σύνολο που επιλέγουμε αρχικά να παρέχουμε δωρεάν (ως έκπτωση/προσφορά) το αγαθό. Επιλέγουμε το A να είναι τυχαίο υποσύνολο των αγοραστών, όπου κάθε παίκτης επιλέγεται ανεξάρτητα με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Χρειαζόμαστε αρχικά την εξής ιδιότητα: για μονότονη submodular συνάρτηση $f : 2^V \to \mathbb{R}$ και υποσύνολο $S \subset V$, τότε αν επιλέξουμε τυχαίο σύνολο S' επιλέγοντας ανεξάρτητα και με πιθανότητα τουλάχιστον p, τότε ισχύει ότι $E[f(S')] \geq f(S)$.

Επομένως τα αναμενόμενα έσοδα από την "influence and exploit" είναι τουλάχιστον:

$$\sum_{i \in V \setminus A} R_i(A) = \sum_{i \in V \setminus A} \frac{R_i(V)}{2}$$

Επίσης επειδή κάθε αγοραστής συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο $V \setminus A$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, τα αναμενόμενα έσοδα της στρατηγικής είναι τουλάχιστον $\sum_{i \in V \setminus A} \frac{R_i(V)}{4}$. Επίσης από την παρατήρηση 4.1.1 συμπεραίνουμε ότι το αναμενόμενα έσοδα από την στρατηγική αυτή είναι $\frac{1}{4}$-προσέγγιση των βελτίστων εσόδων. □

Αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 0.4

Θα περιγράψουμε μία καλύτερη προσέγγιση από την προηγούμενη, και γι'αυτό τον λόγο ψάχνουμε να βρούμε ένα αρχικό σύνολο A στο οποίο θα δώσουμε δωρεάν το προϊόν έτσι ώστε τα έσοδα από τους υπόλουπους κόμβους να μεγιστοποιούνται. Με άλλα λόγια θέλουμε να βρούμε το σύνολο A που μεγιστοποιεί το $g(A)$, που είναι τα αναμενόμενα έσοδα από την "influence and exploit" στρατηγική όταν προσφέρουμε δωρεάν το προϊόν στο σύνολο A ως αρχικό βήμα της στρατηγικής. Υπολογίζουμε το A που μας δίνει καλή προσέγγιση

Θεώρημα 4.1.1. *Υπάρχει ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος που υπολογίζει το αρχικό σύνολο A, έτσι ώστε τα έσοδα από την "influence and exploit" στρατηγική με αρχικό σύνολο το A, να αποδίδει τουλάχιστον το $\frac{1}{3}$ του εσόδου με τη βέλτιστη "influence and exploit" στρατηγική. Επιπλέον υπάρχει ένας τυχαιοποιημένος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που δίδει αλγόριθμο με 0.4-προσέγγιση για τη βέλτιστη "influence and exploit" στρατηγική.*

Παρακάτω περιγράφεται ο ντετερμινιστικός αλγόριθμος που αναφέρεται στο προηγούμενο θεώρημα. Βασίζεται στην τοπική αναζήτηση (local search). Η απόδειξη προκύπτει από ένα γενικότερο αποτέλεσμα από τους Feige, Mirrokni και Vondrak. [44] για μεγιστοποίηση μη-μονότονων submodular συναρτήσεων.

1. Αρχικοποίηση του συνόλου A $= \upsilon$, με το μονοσύνολο υ το οποίο έχει την μέγιστη τιμή $g(\{\upsilon\})$ ανάμεσα σε όλα τα δυνατά.

2. Αν κανένα από τα επόμενα βήματα δεν αρμόζει (δηλ. δεν υπάρχει βελτίωση σε τοπικό επίπεδο), τότε θέτουμε ως αποτέλεσμα το καλύτερο από τα A ή $\bar{A}$.

3. Για οποιονδήποτε αγοραστή $i \in V \setminus A$, αν $g(A \cup \{i\}) > (1 + \frac{\epsilon}{n^2})g(A)$, δηλαδή προσθέτουμε στο A το στοιχείο στο A που μεγιστοποιεί τα έσοδα, τότε θέτουμε $A := A \cup \{i\}$ και επιστροφή στο βήμα 2.

4. Για οποιονδήποτε αγοραστή $i \in A$, αν $g(A \setminus \{i\} > (1 + \frac{\epsilon}{n^2})g(A)$, δηλ. διαγράφοντας ένα στοιχείο από το A, αυξάνεται το εισόδημα, τότε θέτουμε $A := A \setminus \{i\}$ και επιστροφή στο βήμα 2.

Επειδή σε κάθε βήμα της τοπικής αναζήτησης, τα αναμενόμενα έσοδα βελτιώνονται κατά έναν παράγοντα $(1 + \frac{\epsilon}{n^2})$ και η αρχική τιμή του g(A) είναι τουλάχιστον $\frac{1}{n}$ της μέγιστης αξίας, το πλήθος των τοπικών βελτιώσεων του αλγορίθμου είναι το πολύ $log_{(1+\frac{\epsilon}{n^2})}n = \mathcal{O}(\frac{n^3}{\epsilon})$ και αυτό παρέχει και εξήγηση γιατί ο αλγόριθμος τερματίζει πάντα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω συνάρτηση $g(\cdot)$ μη-αρνητική και submodular. Έστω M η μέγιστη τιμή της submodular συνολο-συνάρτησης. Τότε ο ντετερμινιστικός αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης βρίσκει σύνολο A τέτοιο ώστε $g(A) \geq \frac{1}{3}M$. Επιπλέον υπάρχει τυχαιοποιημένος αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης που βρίσκει το σύνολο A έτσι ώστε $g(A) \geq \frac{2}{5}M$.*

Η συνάρτηση g είναι submodular καθώς εκφράζει έσοδα: $g(A) = \sum_{i \in V \setminus A} R_i(A)$.

4.2 Αποδοτικότητα και γενίκευση των Influence-and-Exploit στατηγικών

Σε δημοσίευση των Δ. Φωτάκη και Π. Συμινελάκη [18], το πρόβλημα της μεγιστοποίησης εσόδων σε κοινωνικά δίκτυα μελετήθηκε υπό θετικές εξωτερικότητες σε μεγαλύτερο βάθος και με περισσότερα αποτελέσματα σε σχέση με την αποδοτικότητα των αλγορίθμων Influence-and-Exploit. Σε αυτά τα μοντέλα, όπως και πριν θεωρούμε ότι έχουμε ένα γράφημα με κόμβους που αντιπροσωπεύουν τους υποψήφιους αγοραστές και τον πωλητή, ο οποίος προσεγγίζει με μία σειρά τους κόμβους και τιμολογεί καθέναν από αυτούς έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του, δεδομένου ότι όσο περισσότεροι αγοράζουν ένα προϊόν, τόσο περισσότερο αυξάνεται η αξία των υποψήφιων αγοραστών για το προϊόν.

4.2.1 Βασικές Ιδέες

Το προηγούμενο μοντέλο είδαμε ότι τιμολογούσε τους κόμβους που άνηκαν στο Exploit Set με την μυωπική τιμή. Είδαμε ότι η μυωπική τιμή αυτή σχετίζεται άμεσα με μία πιθανότητα τιμολόγησης (pricing probability), που είναι η πιθανότητα με την οποία ένας αγοραστής αποδέχεται την τιμή του προϊόντος που του προσφέρει ο πωλητής. Είδαμε ότι για το Uniform Additive μοντέλο ήταν $\frac{1}{2}$. Γενικά κάθε τιμή θεωρούμε ότι σχετίζεται με μία πιθανότητα τιμολόγησης. Η σημαντική διαφορά σε αυτήν την εργασία είναι η παρατήρηση ότι υπάρχει μία αισθητή βελτίωση της αποδοτικότητας των Influence-and-Exploit στρατηγικών όταν η πιθανότητα τιμολόγησης επιλεχθεί προσεκτικά ώστε να ανήκει στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$, όπου για την τιμή 1 ένας κόμβος παίρνει το προϊόν δωρεάν, και όταν είναι $\frac{1}{2}$ ο κόμβος παίρνει το προϊόν με την μυωπική τιμή. Η μυωπική τιμή με άλλα λόγια αγνοεί τις θετικές εξωτερικότητες που έχει ένας κόμβος ως προς τους γειτονικούς του. Έτσι, σε αυτήν την εργασία μελετώνται και γενικότερα οι στατηγικές marketing με τις οποίες έχουμε μία σειρά (ακολουθία ή μετάθεση/αντιμετάθεση) και ένα διάνυσμα τιμών για τον κάθε ένα, που αντιστοιχίζεται με ένα διάνυσμα πιθανοτήτων τιμολόγησης ίσης διάστασης (n, όσο το πλήθος των κόμβων του δικτύου).

Ακόμη γίνεται σύνδεση του προβλήματος με το πρόβλημα MAX-CUT στο οποίο θέλουμε να βρούμε μία τομή του γράφου έτσι ώστε το πλήθος των ακμών μεταξύ των δύο μερών του γράφου να γίνεται μέγιστο, το οποίο φαίνεται να είναι μία καλή στρατηγική Influence-and-Exploit. Μια ακόμα σπουδαία ιδέα είναι η γενίκευση των στρατηγικών Influence-and-Exploit.

4.2.2 Υποθέσεις και Ορισμοί

Ασχολούμαστε με το Uniform Additive μοντέλο που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Συμβολίζουμε το γράφημά μας με $G(V, E, w)$ για ένα σετ από δυνητικούς αγοραστές V. Οι ακμές του γράφου έχουν βάρη w_{ij} που εκφράζουν το πόσο ένας κόμβος i επηρεάζει έναν άλλον j (θεωρούμε ότι αν οι ακμές $(i, j) \notin E$, τότε "υπάρχουν" αλλά έχουν βάρος $w_{ij} = 0$). Η συνάρτηση $v_i(S)$ του κάθε κόμβου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, \sum_{j \in S \cup \{i\}} w_{ji}]$, δηλαδή από 0 έως το άθροισμα των επιρροών που δέχεται ένας κόμβος i από το περιβάλλον του (το S είναι το σύνολο των γειτόνων του κόμβου που έχουν το προϊόν). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το Uniform Additive μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως μία επέκταση του Linear Threshold μοντέλου που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μια στρατηγική marketing $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x})$, όπου $\boldsymbol{\pi}$ είναι μία συγεκριμένη σειρά (permutation) των αγοραστών και $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ το διάνυσμα των τιμών.

Στο Uniform Additive μοντέλο η τιμή δίνεται από τη σχέση $x_p = (1 - p) \sum_{j \in S \cup \{i\}} w_{ji}$, ώστε να εξαρτάται από την επιρροή των γειτόνων και όσο μεγαλώνει η pricing πιθανότητα p, τόσο να μειώνεται η τιμή. Μπορούμε λοιπόν να περιγράφουμε το μοντέλο μας με την πιθανότητα p αντί για την τιμή x. Τα αναμενόμενα έσοδα για τον κόμβο είναι η πιθανότητα p επί την τιμή x_p, και άρα συνολικά τα αναμενόμενα έσοδα από μία στρατηγική $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x})$ είναι το άθροισμα για όλους τους κόμβους:

$$R(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i \in V} p_i(1 - p_i) \left(w_{ii} + \sum_{j : \pi_j < \pi_i} p_j w_{ji} \right)$$

4.2.3 Βασικά αποτελέσματα

Παρατηρούμε ότι η μεγιστοποίηση εσόδων έχει διττή φύση, δηλαδή την βέλτιστη ακολουθία επίσκεψης των κόμβων αλλά και τις βέλτιστες πιθανότητες τιμολόγησης. Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι το πρόβλημα αυτό είναι NP-hard. Όταν όμως, μας δίνονται οι πιθανότητες τιμολόγησης, και το γράφημα είναι μη-κατευθυνόμενο αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι υπολογίσιμο και μάλιστα εύκολα.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω γράφος $G(V, E, w)$ μη-κατευθυνόμενος και $\boldsymbol{p}$ οποιοδήποτε διάνυσμα πιθανοτήτων τιμολόγησης. Τότε, το να προσεγγίσουμε τους υποψήφιους αγοραστές σε μη αύξουσα σειρά των πιθανοτήτων τιμολόγησής τους, μεγιστοποιεί τα έσοδα που αποφέρει ο γράφος G υπό το διάνυσμα $\boldsymbol{p}$.*

Απόδειξη. Έστω η βέλτιστη ακολουθία $\boldsymbol{\pi}$ για δεδομένο $\boldsymbol{p}$, ότι έχει το ελάχιστο αριθμό ζευγών i_1, i_2 που εμφανίζονται με $p_{i_1} < p_{i_2}$ και $\pi_{i_1} < \pi_{i_2}$. Αν υπάρχει έστω και ένα τέτοιο ζεύγος τότε μπορούμε να βρούμε ένα ακόμη το i και j με $p_i < p_j$ τέτοιο ώστε το i να εμφανίζεται ακριβώς πριν το j στην ακολουθία π. Αν όμως εναλλάξουμε τις θέσεις των i και j τότε έχουμε αλλαγή στα αναμενόμενα έσοδα που είναι ίση με $p_i p_j w_{ij}(p_j - p_i) \geq 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι είναι δυνατή αύξηση στα έσοδα και άρα τα έσοδα που υποθέσαμε ότι είχε τέτοια ακολουθία δεν ήταν βέλτιστα. □

Ωστόσο, όταν το διάνυσμα p δεν δίνεται, ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.2. *Το πρόβλημα του υπολογισμού της βέλτιστης marketing στρατηγικής για τη μεγιστοποίηση εσόδων σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, είναι NP-hard.*

Στην προηγούμενη ενότητα είχε αποδειχθεί ότι το πρόβλημα είναι NP-hard αλλά όχι και για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Η απόδειξη του λήμματος αυτού βασίζεται σε αναγωγή από το monotone One-in-three 3SAT πρόβλημα.

Στρατηγικές Influence-and-Exploit

Μπορούμε να συμβολίσουμε με $IE(A,p)$ την στρατηγική inluence-and-exploit με influence set το A και p το διάνυσμα πιθανοτήτων τιμολόγησης. Επίσης χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τον συμβολισμό $IE(q,p)$ με το q να συμβολίζει την πιθανότητα ένας κόμβος να επιλεγεί στο σετ επιρροής A. Το αποτέλεσμα του NP-hardness που είδαμε στο μοντέλο των Hartline et al ωστόσο, δεν αφορούσε πιθανότητες τιμολόγησης που κυμαίνονται στο $[\frac{1}{2},1)$.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω $p \in [\frac{1}{2},1)$ οποιαδήποτε σταθερή πιθανότητα τιμολόγησης. Το πρόβλημα εύρεσης της καλύτερης IE στρατηγικής με πιθανότητα τιμολόγησης p είναι NP-hard ακόμη και για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.*

Η απόδειξη βασίζεται και πάλι στο monotone One-in-three 3SAT.

Αποδοτικότητα των Influence-and-Exploit στρατηγικών

Σε αυτήν την παράγραφο συνοψίζουμε δύο πολύ βασικά αποτελέσματα σχετικά με την αποδοτικότητα των IE στρατηγικών.

Θεώρημα 4.2.1. *Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο κοινωνικό δίκτυο, υπάρχει μία IE στρατηγική με πιθανότητα τιμολόγησης 0.586, η οποία αποφέρει έσοδα τουλάχιστον 0.9111 επί των μέγιστων εσόδων.*

Η απόδειξη βασίζεται σε randomized rounding.

Θεώρημα 4.2.2. *Σε κάθε κατευθυνόμενο κοινωνικό δίκτυο, υπάρχει μια IE στρατηγική με πιθανότητα τιμολόγησης $\frac{2}{3}$ της οποίας τα αναμενόμενα έσοδα είναι τουλάχιστον 0.55289 επί των μέγιστων εσόδων.*

Γενικευμένες Στρατηγικές Influence-and-Exploit

Παρατηρούμε ότι στην αρχική εργασία των Hartline et al [26], είχαμε ουσιαστικά δύο κλάσεις τιμολόγησης, το influence set και το exploit set, όπου οι μεν έπαιρναν το προϊόν δωρεάν και οι δε αγόραζαν με την μυωπική τιμή. Σε γενίκευση αυτής της στρατηγικής και από την ιδέα ότι οι μεγάλες τομές στα γραφήματα παράγουν μεγάλα έσοδα, οι Δ. Φωτάκης και Π. Συμινελάκης ανέπτυξαν τις γενικευμένες στρατηγικές Influence-and-Exploit, με K κλάσεις τιμολόγησης, $K \geq 2$. Κάθε κλάση $k = 1, \ldots, K$ σχετίζεται άμεσα με μία πιθανότητα τιμολόγησης $p_k = 1 - \frac{k-1}{2(K-1)}$ και ο κάθε κόμβος ανατίθεται στην κλάση k ανεξάρτητα, με πιθανότητα q_k (και φυσικά ισχύει $\sum_{k=1}^{K} q_k = 1$). Η σειρά με την οποία προσεγγίζονται οι κόμβοι είναι μη-αύξουσα ως προς την πιθανότητα τιμολόγησής τους (δηλ. πρώτα προσεγγίζονται οι της κλάσης k, μετά της k+1, κοκ) και εντός της ίδιας κλάσης με τυχαία σειρά. Επομένως με $IE(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ με τα $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ να είναι διανύσματα μεγέθους K, συμβολίζουμε τις γενικευμένες στρατηγικές.

Εδώ έχουμε δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα:

Θεώρημα 4.2.3. *Για κάθε μη-κατευθυνόμενο κοινωνικό δίκτυο G, η γενικευμένη IE στρατηγική με* $K = 6$ *κλάσεις τιμολόγησης και διάνυσμα* $\boldsymbol{q} = (0.183, 0.075, 0.075, 0.175, 0.261, 0.231$ *προσεγγίζει τα μέγιστα έσοδα από το G εντός ενός παράγοντα 0.7032.*

Θεώρημα 4.2.4. *Για κάθε κατευθυνόμενο κοινωνικό δίκτυο G, η γενικευμένη στρατηγική με K=6 κλάσεις τιμολόγησης και διάνυσμα* $\boldsymbol{q} = (0.183, 0.075, 0.075, 0.175, 0.261, 0.231)$ *προσεγγίζει τα βέλτιστα έσοδα εντός παράγοντα 0.3516.*

4.3 Επαναληπτική Τιμολόγηση

Εκτός των μοντέλων που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, υπάρχουν και τα μοντέλα επαναληπτικής τιμολόγησης.

4.3.1 Βέλτιστη επαναληπτική τιμολόγηση

Βασικές Ιδέες

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε από τους H. Akhlaghpour, M. Ghodsi, N. Haghpanah, H. Mahini, V. Mirrokni, A. Nikzad [23]. Στόχος είναι όπως και πριν, η μεγιστοποίηση εσόδων σε κοινωνικά δίκτυα, υπό την παρουσία θετικών εξωτερικοτήτων (positive externalities). Στο μοντέλο αυτό, η αξία που έχει ένας αγοραστής για το προϊόν εξαρτάται από την τιμή του προϊόντος καθώς επίσης και το σύνολο των υπολοίπων πελατών που έχουν ήδη αγοράσει το προϊόν. Θεωρείται δηλαδή, ότι όσοι έχουν ήδη αγοράσει το προϊόν επηρεάζουν θετικά τους υπόλοιπους. Επίσης, οι τιμές που προσφέρονται αλλάζουν ανά χρονικές περιόδους. Αυτό μπορεί να γίνει όμως με δύο τρόπους: στον έναν θεωρούμε ότι οι αλλαγές γίνονται πολύ αργά και επομένως η νέα τιμή και οι επιρροές μπορούν να διαδοθούν εντός του "γύρου" (της χρονικής περιόδου), και με τον άλλον τρόπο θεωρούμε ότι οι τιμές αλλάζουν πολύ γρήγορα και άρα η θετική επιρροή θα ασκηθεί στην επόμενη χρονική περίοδο.

Υποθέσεις και Ορισμοί

Θεωρούμε ότι η αξία που έχει ένας αγοραστής i για το προϊόν είναι μία συνάρτηση όσων το έχουν ήδη, δηλαδή $v_i : 2^V \to R$ ή αλλιώς $v_i(S)$, όπου S το σύνολο όσων το έχουν αγοράσει. Ο πωλητής έχει γνώση μόνο της κατανομής των συναρτήσεων v_i και θεωρούμε ότι ένας αγοραστής αγοράζει στο βήμα t μόνο όταν $v_i(S_t) - p_t \geq 0$, όπου p_t η τιμή που προσφέρεται τη χρονική περίοδο t και S_t το σύνολο όσων έχουν αγοράσει μέχρι τη χρονική στιγμή t. Συμβολίζουμε με $B^1(S,p) = \{i|v_i(S) \geq p\} \cup S$, το σύνολο των παικτών που θέλουν άμεσα να αγοράσουν το προϊόν ή το κατέχουν ήδη. Γενικά, θεωρούμε ότι οι υποψήφιοι αγοραστές είναι μυωπικοί και "ανυπόμονοι" με την έννοια ότι μόλις τους προσφερθεί τιμή το πολύ ίση με την αξία που έχουν για το προϊόν, τότε αγοράζουν, και δεν περιμένουν να δουν άλλη προσφερόμενη τιμή σε άλλη χρονική στιγμή. Οι δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επαναληπτική τιμολόγηση είναι οι εξής:

Ορισμός 4.3.1. *Το **πρόβλημα Basic(k)**: ο στόχος μας είναι να βρεθεί μία ακολουθία τιμών $p_1, \ldots, p_k$ k τιμών σε k διαδοχικά βήματα. Ένας αγοραστής αποφασίζει για το αν θα αγοράσει σε ένα χρονικό βήμα εάν η αξία που έχει για το προϊόν είναι μεγαλύτερη ή ίση της προσφερόμενης τιμής. Επίσης η απόφαση του καταναλωτή για αγορά επηρεάζει άμεσα τις αξίες των άλλων καταναλωτών για το προϊόν, στο ίδιο χρονικό βήμα. Πιο συγκεκριμένα, ένα χρονικό βήμα θεωρούμε ότι έχει τελειώσει μόνο όταν δεν υπάρχουν άλλοι υποψήφιοι αγοραστές με προθυμία προς αγορά.*

Ορισμός 4.3.2. *Το **πρόβλημα Rapid(k)**: δοθέντος ενός αριθμού k, το Rapid(k) πρόβλημα είναι η σχεδίαση μίας πολιτικής τιμολόγησης για k διαδοχικά χρονικά βήματα. Η πολιτική τιμολόγησης αποτελείται από μία δημόσια τιμή που ανακοινώνεται στην αρχή του χρονικού βήματος i για κάθε $1 \leq i \leq k$, και κάθε παίκτης αποφασίζει αν θα αγοράσει ή όχι, με βάση την τιμή και την αξία που έχει για το προϊόν, όχι όμως την απόφαση άλλων παικτών στον ίδιο γύρο (οι αποφάσεις σε προηγούμενους γύρους όμως, μπορούν να ληφθούν υπόψη).*

Βασικά Αποτελέσματα

Έχουμε τα ακόλουθα βασικά αποτελέσματα για τα δύο προηγούμενα προβλήματα, όπου το Basic(k) μεν μπορεί να λυθεί πολυωνυμικά (μάλιστα για το Bayesian setting του προβλήματος υπάρχει FPTAS), ενώ το Rapid(k) δεν είναι δυνατό να προσεγγισθεί εντός οποιουδήποτε εύλογου προσεγγιστικού παράγοντα, εκτός και αν P=NP.

Για το Basic(k) πρόλημα, θα ορίσουμε $B^1(S,p) = \{i | v_i(S) \geq p\} \cup S$. Δηλαδή, υποθέτουμε ένα χρονικό βήμα όπου στην αρχή του θέτουμε τιμή p, και S το σύνολο των αγοραστών που έχουν ήδη το προϊόν. Επομένως το σύνολο $B^1(S,p)$ είναι οι αγοραστές που θέλουν άμεσα να αγοράσουν το προϊόν, ή το έχουν ήδη (και με το τέλος του χρονικού βήματος θα είναι ουσιαστικά όλοι όσοι έχουν το προϊόν). Άρα, αναδρομικά μπορούμε να ορίσουμε για το βήμα k, $B^k(S,p) = B^1(B^{k-1}(S,p),p)$, και με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $B^k(S,p)$ είναι όσοι θα έχουν το προϊόν σε αυτό το βήμα.

Έστω $B(S,p) = B^{\hat{k}}(S,p)$, όπου $\hat{k} = max\{k | B^k(S,p) - B^{k-1}(S,p) \neq \emptyset\}$, εφόσον όλοι οι αγοραστές στο σύνολο $B(S,p)$ θα έχουν το προϊόν πριν τελειώσει το χρονικό βήμα. Επίσης, παρατηρούμε ότι το $B(S,p)$ δεν εξαρτάται από την σειρά που οι υποψήφιοι αγοραστές επιλέγουν να αγοράσουν.

Αρχικά λύνουμε το Basic(1) πρόβλημα:

Λήμμα 4.3.1. *Για κάθε α και b τέτοια ώστε $\alpha < b$, ισχύει ότι $B(\emptyset, b) \subseteq B(\emptyset, \alpha)$.*

Για το $Basic(1)$ πρόβλημα θέλουμε να βρούμε τιμή p_1 τέτοια ώστε $p_1 \cdot |B(\emptyset, p_1)|$ να μεγιστοποιείται. Έστω $\beta_i = supp | i \in B(\emptyset, p)$ και $\beta = \beta_i | 1 \leq i \leq n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$. Με βάση το λήμμα 4.3.1, ο κόμβος i θα αγοράσει το προϊόν αν και μόνο αν η τιμή του είναι μικρότερη ή ίση με β_i.

Λήμμα 4.3.2. *Η βέλτιστη τιμή p_1 βρίσκεται στο σύνολο β.*

Για να βρούμε την τιμή p_1 εφαρμόζουμε τον εξής αλγόριθμο: βρίσκουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου β και υπολογίζουμε το κέρδος $\beta_i \cdot B(\emptyset, \beta_i)$ κάθε στοιχείου, ώστε να βρούμε πού μεγιστοποιείται. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, αποθηκεύουμε το σύνολο S όσων έχουν ήδη αγοράσει το προϊόν και μία καθολική τιμή g. Στην αρχή, $S = \emptyset$, και $g = \infty$. Ο αλγόριθμος αποτελείται από $|\beta|$ βήματα. Στπ iοστό βήμα, θέτουμε την τιμή ίση με τη μέγιστη αξία που έχουν οι υπόλοιποι παίκτες για το προϊόν, λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο επιρροής S. Τότε μπορούμε να ανανεώσουμε την κατάσταση του δικτύου έως ότου σταθεροποιηθεί και μεταβεί στο επόμενο βήμα. Ισχυριζόμαστε ότι στο τέλος του i-οστού βήματος, το σύνολο που έχει το προϊόν είναι $B(\emptyset, \beta_i)$, και ότι η μέγιστη αξία που έχουν οι εναπομείναντες αγοραστές για το προϊόν είναι β_{i+1}.
Γενίκευση για το Basic(k) πρόβλημα. Βασική επιδίωξή μας είναι να λύσουμε το Basic(k) πρόβλημα εκτελώντας τον αλγόριθμο για το Basic(1), που αποτελείται από m βήματα, και με χρήση δυναμικού προγραμματισμού. Θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη ακολουθία $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, ώστε να μεγιστοποιείται το $\sum_{i=1}^{k} |B(\emptyset, p_i) - B(\emptyset, p_{i-1})| p_i$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει και αποδεικνύεται παρόμοια με το λήμμα 4.3.2. Επομένως το πρόβλημα Basic(k) μπορεί να μεγιστοποιηθεί με χρήση δυναμικού προγραμματισμού.

Όσον αφορά το πιθανοτικό Basic(k) πρόβλημα, όπου το διάστημα των τιμών είναι πλέον συνεχές, μπορούμε να διακριτοποιήσουμε τον χώρο των τιμών και να εφαρμόσουμε μία τεχνική δειγματοληψίας. Έτσι βρίσκουμε το FPTAS για το πιθανοτικό (Bayesian) πρόβλημα Basic(k).

Όσον αφορά το Rapid(k) πρόβλημα, το κύριο αποτέλεσμα που έχουμε είναι το εξής:

Θεώρημα 4.3.1. *Το πρόβλημα Rapid(k) με αθροιστικές συναρτήσεις επιρροής, δε μπορεί να προσεγγισθεί εντός κανενός πολλαπλαστιαστικού παράγοντα, εκτός αν P=NP.*

Κεφάλαιο 5

Μεγιστοποίηση Εσόδων σε Κοινωνικά Δίκτυα - Αρνητικές Εξωτερικότητες

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα που είδαμε, όπου έχουμε θετικές εξωτερικότητες για τον πωλητή, θα δούμε παρακάτω κάποια μοντέλα τα οποία βασίστηκαν σε αρνητικές εξωτερικότητες, δηλαδή η επιρροή που ασκεί ο ένας αγοραστής στον άλλον είναι αρνητική. Ιδιαίτερη έμφαση θα δώσουμε στο μοντέλο της πρώτης ενότητας που ακολουθεί, καθώς μελετά προβλήματα διαφοροποίησης της προσφερόμενης τιμής, αλλά αυτή τη φορά όχι χρονικά, αλλά τοπολογικά στο δίκτυο και ο χρόνος δεν μας απασχολεί ως παράμετρος.

5.1 Διαφοροποίηση τιμής με αποστροφή στις ανισότητες σε κοινωνικά δίκτυα

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε από τους Alon, Mansour και Tennenholtz και δημοσιεύθηκε το 2013 (Differential Pricing with Inequity Aversion in Social Networks) [35]. Ενώ στις περισσότερες εργασίες που προηγήθηκαν πραγματεύονταν θετικές εξωτερικότητες (externalities), η εργασία αυτή πραγματεύεται αρνητικές εξωτερικότητες, πάντα μέσα στο πλαίσιο της μεγιστοποίησης των εσόδων για τον πωλητή. Υπάρχουν πολλών ειδών αρνητικές εξωτερικότητες, όπως για παράδειγμα όταν σε μία ήσυχη γειτονιά μιας πόλης ένας εγκληματίας αγοράσει κάποιο σπίτι, οπότε και μειώνεται η οικονομική αξία της γειτονιάς του και συνεπώς του κάθε γείτονά του. Στη δημοσίευση αυτή υπάρχει ένα διαφορετικό είδος αρνητικής εξωτερικότητας, και συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε το φαινόμενο που έχει παρατηρηθεί όταν σημαντικές διαφορές στην τιμή, όπως για παράδειγμα κάποια έκπτωση για νέους πελάτες έχει αρνητικό αποτέλεσμα σε άλλους και τους κάνει να διαμαρτύρονται για τη διαφορά στην τιμή και πιθανόν να μην θέλουν πλέον να είναι αγοραστές, κάτι το οποίο ο πωλητής σε καμία περίπτωση δεν θέλει, εξ ου και το όνομα "αποστροφή στις ανισότητες".

5.1.1 Βασικές Ιδέες

Σε ένα κοινωνικό δίκτυο υπάρχουν κόμβοι οι οποίοι θεωρούμε ότι έχουν μία αξία (value) για ένα προϊόν, και θεωρούμε ότι μπορούμε να εξάγουμε έσοδα από τον κάθε κόμβο, δηλαδή υπάρχει μία συνάρτηση που αντιστοιχίζει μία τιμή (που θα προσφερθεί στον κόμβο) σε κάποια έσοδα. Επομένως για να μην έχουμε μεγάλες ανισότητες στην τιμολόγηση των κόμβων, προσθέτουμε επιπλέον τον περιορισμό ότι γειτονικοί κόμβοι πρέπει να μην διαφέρουν πολύ στις τιμές που θα λάβουν. Επομένως μελετάμε την μεγιστοποίηση των εσόδων για την περίπτωση που οι τιμές σε γειτονικούς κόμβους δεν διαφέρουν και πολύ, το οποίο θα δούμε στη συνέχεια πώς μοντελοποιείται. Μια επίσης πρωτότυπη ιδέα που πραγματεύεται η δημοσίευση είναι να καταργήσουμε ουσιαστικά κάποιους κόμβους από τον γράφο, και να μην έχουμε έσοδα από αυτούς. Πρόκειται ουσιαστικά για την περίπτωση όπου δεν γίνονται προσφορές προϊόντων σε μερικούς κόμβους και επομένως δεν είναι δυνατόν κάποιος γειτονικός κόμβος να τους "ζηλέψει".

5.1.2 Υποθέσεις και Ορισμοί

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα γράφημα $G(V, E)$ και ένα πεπερασμένο σύνολο υποψήφιων τιμών $P = \{0, 1, \ldots, l\}$. Η συνάρτηση εσόδων για κάθε κόμβο v συμβολίζεται με R_v και αντιστοιχίζει μία τιμή $p_v \in P$ που δίνεται στον κόμβο v στα συνολικά έσοδα που κερδίζει ο πωλητής. Τα συνολικά έσοδα του πωλητή είναι άρα:

$$R(p) = \sum_{v \in V} R_v(p_v)$$

όπου p το διάνυσμα των τιμών, που κάθε στοιχείο του είναι η τιμή που προσφέρεται στον αντίστοιχο κόμβο. Αν δεν είχαμε τους περιορισμούς για μικρή διαφορά στις τιμές το πρόβλημα της μεγιστοποίησης των συνολικών εσόδων, θα ήταν απλά η μεγιστοποίηση κάθε επιμέρους συνάρτησης R_v. Με τους περιορισμούς όμως το πρόβλημα γίνεται πιο περίπλοκο. Παρακάτω περιγράφονται τα τρία μοντέλα που αναπτύχθηκαν σε αυτή τη δημοσίευση.

- *Μοντέλο Ι : Φραγμένες διαφορές τιμολόγησης (Bounded differences pricing).* Θεωρούμε ότι έχουμε ένα διάνυσμα α το οποίο βάζει στην κάθε ακμή του γράφου έναν μη αρνητικό αριθμό, δηλαδή $\alpha(v, w) \geq 0$ για ακμή $(v, w) \in E$. Ένα διάνυσμα τιμολόγησης p θα λέμε ότι είναι εφικτό ως προς έναν γράφο G και ένα διάνυσμα α, για κάθε ακμή $(v, w) \in E$, όταν ικανοποιείται ο περιορισμός $|p_v - p_w| \leq \alpha(v, w)$. Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε ένα εφικτό διάνυσμα τιμών p το οποίο μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα. Επίσης εφόσον οι τιμές είναι ακέραιοι αριθμοί θεωρούμε ότι και τα $\alpha(v, w)$ είναι επίσης ακέραιοι.

- *Μοντέλο ΙΙ : Φραγμένες διαφορές τιμολόγησης με ασυνέχειες (Bounded differences pricing with discontinuities).* Πρόκειται για μία προέκταση βασικά του προηγούμενου μοντέλου, όπου όμως προσθέτουμε επιπλέον την ειδική τιμή $\perp$ στο σύνολο τιμών P, και σε όσους κόμβους ανατεθεί αυτή η ειδική τιμή, εξ ορισμού έχουμε ότι $R_v(\perp) = 0$. Ακόμη, αν ανατεθεί αυτή η ειδική τιμή σε έναν κόμβο v θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί της μορφής $|p_v - p_w| \leq \alpha(v, w)$, δηλαδή αυτό ισχύει μόνο όταν $p_v, p_w \neq \perp$.

- *Μοντέλο III : Σταθερές/συγκεκριμένες τιμές με ασυνέχειες (Fixed prices with discontinuities).* Πρόκειται για μία ειδική περίπτωση του μοντέλου II, όπου $\alpha(v, w) = 0$ για κάθε $(v, w) \in E$.

5.1.3 Βασικά Αποτελέσματα

Μοντέλο I

Αρχικά, θεωρούμε ότι έχουμε συναρτήσεις εσόδων κόμβων κυρτές και συνεχείς. Για το ακόλουθο κυρτό πρόγραμμα, θεωρούμε για απλότητα ότι οι τιμές είναι συνεχείς, δηλ. ανήκουν στο διάστημα $[0, l]$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $R_v(\cdot)$ είναι κυρτές τότε μπορούμε να γράψουμε το ακόλουθο κυρτό πρόγραμμα το οποίο μπορεί να λυθεί αποδοτικά.

Algorithm 2 ConvexProg

$max \sum_{v \in V} R_v(p_v)$

υπό τους περιορισμούς

$\forall (v, w) \in E : p_v - p_w \leq \alpha(v, w)$ και $p_w - p_v \leq \alpha(v, w)$

Θεώρημα 5.1.1. *Αν οι συναρτήσεις $R_v(\cdot)$ είναι κυρτές, τότε υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που υπολογίζει τις βέλτιστες τιμές.*

Το πρόβλημά μας όμως είναι ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό των βέλτιστων εσόδων για οποιαδήποτε συνάρτηση R_v και για οποιοδήποτε γράφο. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία κλασματική λύση στο πρόβλημά μας. Συγκεκριμένα, ότι έχουμε για τον κάθε κόμβο ένα διάνυσμα $p_v(i)$ (διάστασης l), όπου $i \in P$. Ουσιαστικά τα $p_v(i)$ εκφράζουν πιθανότητες με τις οποίες ένας κόμβος παίρνει το προϊόν σε τιμή i. Έχουμε δηλαδή $p_v(i) \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{l} p_v(i) = 1$.

Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της χαλάρωσης ακέραιων προγραμμάτων σε γραμμικά προγράμματα. Θα δούμε ότι η βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος είναι ακέραια και επομένως δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια στρογγυλοποίηση, και με την διατύπωση του γραμμικού προγράμματος έχουμε και τη λύση του ακέραιου απευθείας.

Στην κλασματική σκοπιά του προβλήματος λοιπόν, πρέπει να εκφράσουμε με κάποιον τρόπο ότι οι διαφορές στην τιμή γειτονικών κόμβων πρέπει να είναι φραγμένες από έναν αριθμό. Είχαμε προηγουμένως διατυπώσει αυτόν τον περιορισμό ως $|p_v - p_w| \leq \alpha(v, w)$, και λέγαμε ότι τότε οι τιμές είναι *συμβατές* μεταξύ τους. Τώρα όμως χρειαζόμαστε μία διαφορετική διατύπωση που να αφορά τις κατανομές πιθανοτήτων των τιμών, δηλαδή ότι μπορούμε να “μετακινούμε” τις τιμές σε απόσταση το πολύ $\alpha(v, w)$ και το διάνυσμα p_v να μετασχηματίζεται σε p_w.

Αυτό φυσικά, μπορεί να το κάνει ένας κατάλληλος πίνακας. Αυτός ο πίνακας είναι στοχαστικός (κατά γραμμή), έχει διαστάσεις $l \times l$, συμβολίζεται με $M_{v,w}[i, j]$ και είναι τέτοιος ώστε:

1. εάν $|i-j| > \alpha(\upsilon, w)$, τότε $M_{\upsilon,w}[i,j] = 0$, και

2. ισχύει $M_{\upsilon,w} p_\upsilon = p_w$.

Θα λέμε ότι τα διανύσματα p_υ και p_w είναι *συμβατά κατά πίνακα* αν υπάρχει ο παραπάνω πίνακας M για τα διανύσματα αυτά.

Μία ισοδύναμη διατύπωση για τους περιορισμούς είναι η ακόλουθη: τα διανύσματα p_υ και p_w είναι *συμβατά ως προς κατώφλι* ("threshold compatible"), εάν για κάθε k ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_\upsilon(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_w(i)$$

και

$$\sum_{i=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_w(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_\upsilon(i)$$

Παρακάτω αποδεικνύουμε αυτόν τον ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 5.1.1. *Τα διανύσματα τιμής p_υ και p_w είναι συμβατά ως προς κατώφλι αν και μόνο αν είναι συμβατά κατά πίνακα.*

Απόδειξη. Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι αν τα διανύσματα τιμής p_υ και p_w είναι συμβατά κατά πίνακα τότε θα είναι και συμβατά ως προς κατώφλι. Αυτό προκύπτει εύκολα ως εξής:

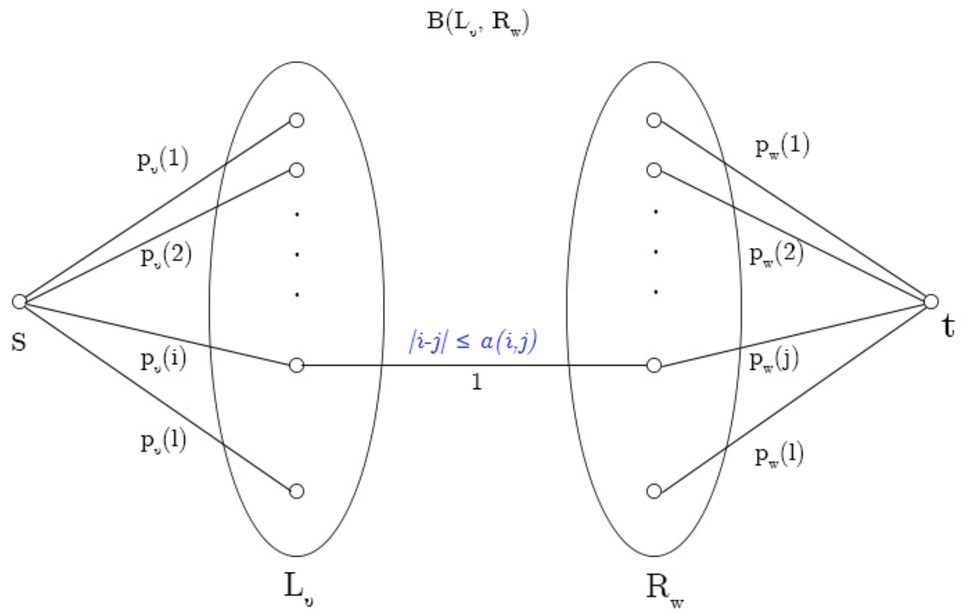
$$\sum_{i=1}^{k} p_w(i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij} p_\upsilon(j) \leq \sum_{j=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_\upsilon(j)$$

επειδή ο M είναι στοχαστικός καθώς επίσης ο μετρητής του αθροίσματος στο δεξί μέλος της ανίσωσης έχει μεγαλύτερο εύρος $(+\alpha)$. Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι αν τα διανύσματα είναι συμβατά ως προς κατώφλι, τότε είναι και συμβατά κατά πίνακα. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε έναν διμερή γράφο $B(L_\upsilon, R_w)$, όπου $L_\upsilon = R_w = P$.

Στον γράφο αυτόν υπάρχει ακμή από τον κόμβο $i \in L_\upsilon$ προς $j \in L_w$, αν $|i-j| \leq \alpha(\upsilon, w)$ και κάθε τέτοια ακμή έχει άπειρη χωρητικότητα. Στην πραγματικότητα χωρητικότητα ίση με τη μονάδα μας είναι αρκετή, καθώς τα p_υ και p_w εκφράζουν πιθανότητες και είναι οι χωρητικότητες των ακμών που συνδέουν τον κόμβο-πηγή (source node) με τα στοιχεία του L_υ και αντίστοιχα τα L_w με τον κόμβο-καταβόθρα (sink node). Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα τιμής p_υ και p_w είναι συμβατά κατά πίνακα αν και μόνο αν υπάρχει ροή μεγέθους 1 στον γράφο B, από το s στο t.

Επομένως αν δείξουμε ότι αν δεν υπάρχει ροή μεγέθους 1, τότε και τα διανύσματα δεν θα είναι συμβατά ως προς κατώφλι, είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε ότι αν τα διανύσματα είναι συμβατά ως προς κατώφλι τότε έχουμε ροή μεγέθους 1 (δηλ. είναι συμβατά κατά πίνακα).

Έστω η ελάχιστη τομή στο γράφημα (minimum cut). Υποθέτουμε ότι η τομή αυτή έχει τιμή αυστηρά μικρότερη από τη μονάδα. Προφανώς η τομή αυτή δε μπορεί να περιλαμβάνει



Σχήμα 5.1: Ο διμερής γράφος B

οποιαδήποτε ακμή ενώνει το L_υ με το L_w γιατί είπαμε ότι κάθε τέτοια ακμή έχει χωρητικότητα 1. Επομένως μία τέτοια ελάχιστη τομή ορίζει δύο υποσύνολα των κόμβων, το $S_\upsilon \subset L_\upsilon$ και $S_w = N(S_\upsilon)$, όπου $N(S) = \{j : (i, j) \in E$, για κάποιο $i \in S\}$. Επειδή η τομή έχει τιμή μικρότερη της μονάδας, έχουμε ότι:

$$\sum_{i \in S_\upsilon} p_\upsilon(i) > \sum_{j \in S_w} p_w(j)$$

Τα σύνολα S_υ και S_w είναι διαστήματα (intervals), καθώς το S_υ είναι ένωση από διαστήματα. Έστω ότι $S_\upsilon = [\beta_1, \beta_2]$ και $S_w = [\beta_1 - \alpha(\upsilon, w), \beta_2 + \alpha(\upsilon, w)]$. Επομένως η προηγούμενη ανίσωση γράφεται ως:

$$\sum_{i=\beta_1}^{\beta_2} p_\upsilon(i) > \sum_{i=\beta_1-\alpha(\upsilon,w)}^{\beta_2+\alpha(\upsilon,w)} p_w(i)$$

Επομένως:

$$\sum_{i=1}^{\beta_2} p_\upsilon(i) > \sum_{i=1}^{\beta_2+\alpha(\upsilon,w)} p_w(i) \tag{5.1}$$

Για να ήταν συμβατά ως προς κατώφλι θα θέλαμε:

$$\sum_{i=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_\upsilon(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_w(i)$$

ή αν αντικαταστήσουμε με το $k = \beta_1 - \alpha(\upsilon, w) - 1$:

$$\sum_{i=1}^{\beta_1-1} p_\upsilon(i) \geq \sum_{i=1}^{\beta_1-\alpha(\upsilon,w)-1} p_w(i) \tag{5.2}$$

Από τις (4.1) και (4.2) βλέπουμε ότι τα διανύσματα δεν είναι συμβατά ως προς κατώφλι. □

Επομένως μπορούμε να διατυπώσουμε πλέον το γραμμικό πρόγραμμα για την κλασματική περίπτωση, ως εξής:

Παρατηρούμε ότι τα έσοδα πλέον είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων για την κάθε τιμή επί τα έσοδα για αυτήν την τιμή. Επίσης διατυπώσαμε τη διαφορά με τη συμβατότητα ως προς κατώφλι αντί για την συμβατότητα κατά πίνακα, αφού είδαμε ότι είναι ισοδύναμα.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να αποδείξουμε ότι το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα έχει ακέραια λύση.

ΤΡΟΠΟΣ Α

Algorithm 3 LP1

$max \sum_{v \in V} R_v(i) p_v(i)$

such that:

$\forall (v, w) \in E \forall k \in P : \sum_{i=1}^{k+\alpha(v,w)} p_v(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_w(i)$ and $\sum_{i=1}^{k+\alpha(v,w)} p_w(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_v(i)$

$\forall v \in V \ \forall k : p_v(k) \geq 0$

$\forall v \in V \ \sum_k p_v(k) = 1$

Ισχυρισμός 5.1.2. *Το γραμμικό πρόγραμμα LP1 βρίσκει μία κλασματική λύση η οποία είναι ένα άνω φράγμα της βέλτιστης τιμολόγησης με φραγμένες διαφορές.*

Παρακάτω θα δείξουμε ότι τελικώς η βέλτιστη λύση του κλασματικού προβλήματος είναι η ίδια με την βέλτιστη λύση του αντίστοιχου ακέραιου προγράμματος, δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιο χάσμα (integrality gap).

Έστω ότι έχουμε την βέλτιστη κλασματική λύση και έχουμε το διάνυσμα $p_v(i)$ για τον κόμβο v. Έστω ότι $price(v)$ η μικρότερη μη αρνητική τιμή, η οποία έχει θετική πιθανότητα στο διανύσμα p_v. Δηλαδή: $price(v) = min\{i : p_v(i) > 0\}$. Αποδεικνύουμε καταρχάς ότι το σύνολο των $price(\cdot)$ είναι εφικτό (feasible) σύνολο λύσεων.

Ισχυρισμός 5.1.3. *Για κάθε ακμή $(v, w) \in E$, έχουμε ότι $|price(v) - price(w)| \leq \alpha(v, w)$.*

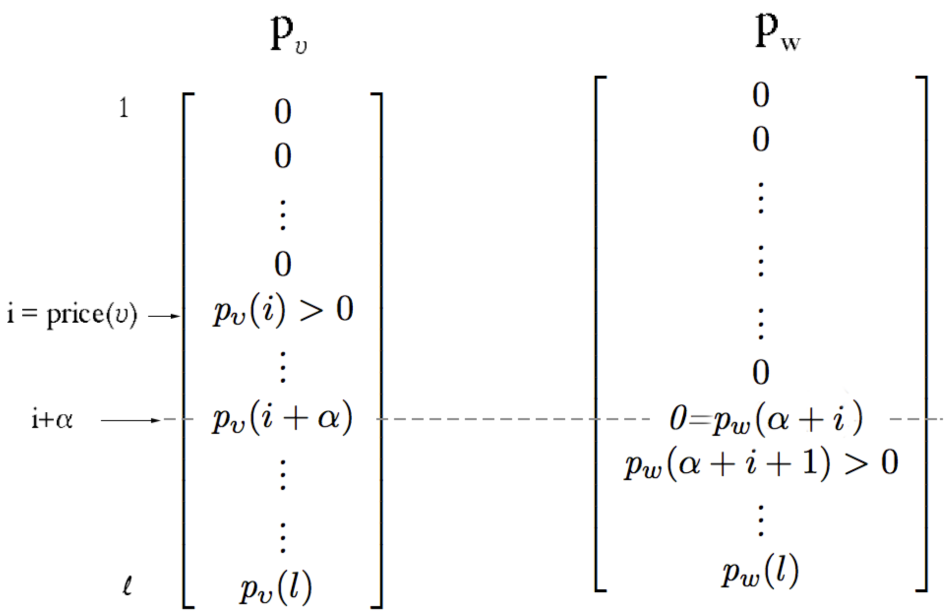
Απόδειξη Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι δηλαδή το παραπάνω δεν ισχύει για την ακμή $(v, w) \in E$ και ότι ισχύει $price(v) < price(w) - \alpha(v, w)$. Τότε έστω $i = price(v)$. Από τον τρόπο που ορίσαμε τα $price(\cdot)$, έχουμε ότι $p_v(i) > 0$ και για κάθε $j \leq i + \alpha(v, w)$, έχουμε $p_w(j) = 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή το $price(w)$ είναι η μικρότερη τιμή στην οποία αντιστοιχεί θετική πιθανότητα και επειδή έχουμε υποθέσει το αντίθετο, ότι δηλαδή $price(v) < price(w) - \alpha(v, w)$, έχουμε $price(v) + \alpha(v, w) < price(w)$, άρα $i + \alpha < price(w)$. Έτσι δηλαδή για όλα τα $j < price(w)$, τα $p_w(j) = 0$. Σχηματικά δηλαδή η εικόνα θα είναι:

Για την περίπτωση όμως όπου $k = i$, δε θα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{k+\alpha(v,w)} p_w(i) \geq \sum_{i=1}^{k} p_v(i)$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι τα p_v και p_w είναι μέρος της εφικτής λύσης. Άρα η υπόθεσή μας δεν ισχύει, και έτσι αποδείξαμε ότι τα $price(v)$ ικανοποιούν τους περιορισμούς και άρα είναι μέρος της εφικτής περιοχής των λύσεων. □

Θεώρημα 5.1.2. *Οι τιμές $price(v)$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος φραγμένων διαφορών τιμολόγησης.*

Απόδειξη. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι οι τιμές $price(v)$ αποτελούν εφικτή λύση. Έστω ότι ϵ θετικός αριθμός μικρότερος από το κάθε μικρότερο $p_v(i)$, δηλαδή $0 < \epsilon < min_{i,v:p_v(i)>0} p_v(i)$, και ότι η βέλτιστη τιμή δεν είναι η $price(v)$, αλλά η κλασματική λύση p_v (για τον κάθε κόμβο v). Μπορούμε να εκφράσουμε την κλασματική λύση p_v:

$$p_v = \epsilon I\{price(v)\} + p_v - \epsilon I\{price(v)\}$$



Σχήμα 5.2: Σύμφωνα με την υπόθεση $price(\upsilon) < price(w) - \alpha(\upsilon, w)$, έτσι θα είναι η εικόνα για τα p_υ και p_w

ή αλλιώς ως κυρτό συνδυασμό συνδυασμό:

$$p_\upsilon(i) = \epsilon I\{price(\upsilon)\} + (1-\epsilon)p'_\upsilon(i)$$

όπου

$$p'_\upsilon(i) = \frac{p_\upsilon(i) - \epsilon I\{i = price(\upsilon)\}}{1-\epsilon}$$

Παρατηρούμε ότι η $p'_\upsilon(i)$ είναι εφικτή λύση καθώς παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί της threshold-συμβατότητας εφόσον αφαιρούμε ϵ και από τις δύο πλευρές της ανίσωσης, και επειδή τα $price(\upsilon)$ και $price(w)$ είναι οι μικρότερες τιμές με μη αρνητική πιθανότητα. Όμως παρατηρούμε ότι το $p'_\upsilon(i)$ έχει αυστηρώς μεγαλύτερη τιμή από το $p_\upsilon(i)$, από τον τρόπο που ορίστηκε το $p'_\upsilon(i)$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι το p_υ είναι η βέλτιστη κλασματική λύση. □ □

Επομένως, παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση του LinearProg1 είναι ακέραια, και άρα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 5.1.2.1. *Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνιμικού χρόνου ο οποίος υπολογίζει τη βέλτιστη πολιτική τιμολόγησης για το πρόβλημα με τις φραγμένες διαφορές τιμολόγησης.*

ΤΡΟΠΟΣ Β

Μία άλλη μέθοδος είναι να δείξουμε ότι για το γραμμικό πρόγραμμα LP1 οι περιορισμοί μπορούν να γραφτούν στη μορφή $Ax \leq b$ όπου ο A είναι πίνακας totally unimodular (TU). Οι TU πίνακες είναι εκείνοι στους οποίους κάθε τετραγωνικός υποπίνακάς τους έχει ορίζουσα ίση με 0,1 ή -1.

Θέλουμε να αποδείξουμε αυτό, γιατί εφόσον το b είναι διάνυσμα από ακεραίους, κάθε ακμή του πολυτόπου $Ax \leq b$ είναι ακέραια και άρα η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι ακέραιο πολύεδρο. Άρα αποδεικνύοντας ότι οι περιορισμοί του LP1 σχηματίζουν έναν TU πίνακα, τότε ξέρουμε αυτόματα ότι η βέλτιστη λύση είναι ακέραια.

Θεωρούμε αντίστοιχα με τις x μεταβλητές ότι εδώ οι μεταβλητές μας είναι τα $p_\upsilon(k)$, με $\upsilon \in V$ και $k = 1, 2, ..l$, αρα έχουμε nl μεταβλητές συνολικά (με n το πλήθος των κόμβων του γραφήματος). Ξαναγράφουμε τους περιορισμούς του LinearProg1 στη μορφή:

1. $\forall(\upsilon, w) \in E, \forall k : \sum_{i=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_\upsilon(i) - \sum_{i=1}^{k} p_w(i) \geq 0$
2. $\forall(\upsilon, w) \in E, \forall k : \sum_{i=1}^{k+\alpha(\upsilon,w)} p_w(i) - \sum_{i=1}^{k} p_\upsilon(i) \geq 0$
3. $\forall \upsilon \in V, \forall k : p_\upsilon(k) \geq 0$
4. $\forall \upsilon \in V : \sum_k p_\upsilon(k) = 1$

Για να αποδείξουμε ότι ο A είναι TU, θα χρησιμοποιήσουμε ένα θεώρημα του A. Ghouila-Houri [21] που λέει ότι:

Ένας πίνακας A είναι totally unimodular αν και μόνο αν για κάθε μη κενό υποσύνολο των στηλών του, υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των στηλών αυτών, με συντελεστές $\{-1, 1\}$ έτσι ώστε το διάνυσμα που προκύπτει να έχει στοιχεία από το σύνολο $\{0, 1, -1\}$.

Θεώρημα 5.1.3. *Ο πίνακας A που προκύπτει από τους περιορισμούς του LP1 είναι totally unimodular.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη πρέπει να σκεφτούμε τη δομή του πίνακα A. Ο πίνακας A έχει διαστάσεις $m \times nl$, όπου m το πλήθος των ανισοτήτων και nl το πλήθος των μεταβλητών.

$$
\begin{array}{cccc}
p_{\upsilon1}(1) & p_{\upsilon1}(\ell) & p_{\upsilon2}(1) & p_{\upsilon2}(\ell) \qquad p_{w}(1)
\end{array}
$$

$$
m \quad
\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & \ldots & & 0 & & \cdots & & & & & \cdots & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{array}\right]
$$

Σχήμα 5.3: Ο πίνακας A (totally unimodular)

Οι γραμμές του πίνακα είναι όσες το πλήθος των ανισοτήτων, δηλαδή m. Ο πίνακας A μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει χωρισμένες τις στήλες του ανά blocks, όπου το κάθε block έχει l στοιχεία (όσες και οι πιθανές τιμές) και έχουμε n blocks. Θεωρούμε αύξουσα σειρά με το k, δηλαδή ότι το διάνυσμα μεταβλητών πάει με τη σειρά: $p_{\upsilon 1}(1), \ldots, p_{\upsilon 1}(l)$, $p_{\upsilon 2}(1), \ldots, p_{\upsilon 2}(l), \ldots$ κλπ. Για κάθε ομάδα ανισοτήτων της ομάδας (1) και (2) θα έχουμε ότι σε ένα block υπάρχουν μονάδες, ενώ σε άλλο θα υπάρχουν -1. Οι ανισότητες της ομάδας (3) θα έχουν μία μονάδα στην θέση που αντιστοιχεί στην μεταβλητή και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία θα είναι μηδενικά. Οι ανισότητες της ομάδας (4) θα έχουν σε ένα ολόκληρο block μονάδες και στα υπόλοιπα μηδενικά.

Υποθέτουμε ένα μη κενό υποσύνολο των στηλών του A. Θεωρούμε ότι σε κάθε στήλη του S αναθέτουμε ένα πρόσημο: + και - εναλλάξ για στήλες που ανήκουν εντός του ίδιου block του A (στο επόμενο block, πάλι αναθέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, + και -). Πολλαπλασιάζουμε τη στήλη με το πρόσημο.

- Στις γραμμές του A που αντιστοιχούν στην ομάδα (3), θα προκύψει σίγουρα 1 ή -1, αν η αντίστοιχη στήλη του μη μηδενικού στοιχείου επιλεγεί στο S.
- Στις γραμμές του A που αντιστοιχούν στην ομάδα (4), έχουμε ένα block με μονάδες και πολλαπλασιάζουμε με μία σειρά εναλλαγών προσήμων $(+1, -1, +1, -1, \cdots)$ οπότε το άθροισμα θα προκύψει 0 ή 1 (ανάλογα με το αν έγινε περιττό ή άρτιο πλήθος πράξεων).
- Για τις γραμμές που αντιστοιχούν στην ομάδα (1) ή (2), τότε θα έχουμε από το block με τα +1 άθροισμα 0 ή 1, κατά την προηγούμενη περίπτωση, και θα έχουμε για το block των -1 με την ίδια λογική άθροισμα είτε 0 είτε -1. Άρα το άθροισμα των τιμών θα είναι είτε -1, είτε 0, είτε 1.

$\square$

Παρατηρήσεις Με βάση την απόδειξη με τον TU πίνακα A για το μοντέλο των φραγμένων διαφορών τιμολόγησης, μπορούμε να εξάγουμε μερικά συμπεράσματα που γενικεύουν τις υποθέσεις που είχαμε κάνει για το μοντέλο των φραγμένων διαφορών τιμολόγησης.

1. Μπορούμε να προσθέσουμε περιορισμούς της μορφής $\sum_{i=\beta_v}^{\gamma_v} p_v(i) = 0$ (ή ίσο με 1), δηλαδή να πάρουμε μερικές διαδοχικές τιμές σε ένα μπλοκ μόνο και να απαγορεύσουμε τις τιμές εκεί (ή αντίστοιχα να τις περιορίσουμε εκεί), και έχουμε πάλι την ίδια απόδειξη με τον πίνακα TU.
2. Μπορούμε να εισάγουμε περιορισμούς της μορφής $p_v(i) = 0$ για κάθε κόμβο v και για κάθε τιμή i που επιθυμούμε και έτσι να έχουμε ότι ο κάθε κόμβος παίρνει τιμές από ένα υποσύνολο του P, και έχουμε πάλι την ίδια απόδειξη.
3. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το α δεν είναι συμμετρικό, δηλαδή $\alpha(v, w) \neq \alpha(w, v)$ και έτσι να αναφερόμαστε σε κατευθυνόμενο γράφο κοινωνικού δικτύου, και η προηγούμενη απόδειξη ισχύει πάλι.

Γραφήματα Expanders Για τα γραφήματα που είναι expanders, δηλαδή γράφοι με την ιδιότητα ότι αν τους διατρέχαμε με BFS και σχηματίζαμε το δέντρο BFS, αυτό θα είχε μικρό ύψος σε σχέση με το πλάτος του, έχουμε πιο συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Ορισμός 5.1.1. *Θα λέμε ότι ένας γράφος $G(V, E)$ έχει expansion λ αν για κάθε σύνολο $S \subset V$ τέτοιο ώστε $|S| \leq \frac{|V|}{2}$, έχουμε ότι $|N(S)| \geq (1 + \lambda)|S|$, όπου $N(S) = \{v | \exists w \in S, (w, v) \in E\}$.*

Θεώρημα 5.1.4. *Δοθέντος ενός γράφου $G(V, E)$ με n κόμβους και expansion λ, για κάθε ανάθεση ακέραιων αριθμών στους κόμβους ($p : V \to Z$), τέτοια ώστε $|p(v) - p(w)| \leq 1$ αν* *υπάρχει ακμή $(\upsilon, w) \in E$, τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση: Υπάρχει τιμή i τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ όλοι οι κόμβοι υ, αλλά το πολύ ϵn κόμβοι, έχουν $p(\upsilon) \in [\, i-k, i+k]$, όπου $k = O(\frac{1}{\lambda} ln \frac{1}{\epsilon})$*

Αυτό σημαίνει με άλλα λόγια ότι μία σταθερή τιμή είναι κοντά (αποτελεί καλή προσέγγιση) για συναρτήσεις εσόδων (single-value) σε γραφήματα που είναι expanders.

Πόρισμα 5.1.4.1. *Υποθέτουμε ότι ένας γράφος G είναι expander και τα έσοδα R_υ είναι συναρτήσεις, και έχουμε $\alpha(\upsilon, \upsilon) = 1$ για κάθε ακμή. Αν έστω OPT είναι η βέλτιστη τιμή για το μοντέλο φραγμένων διαφορών, τότε υπάρχει μία μόνο τιμή τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση:*

$$OPT - \sum_{\upsilon \in V} R_\upsilon(p) = O(\frac{n}{\lambda} lnl)$$

όπου $l = \frac{1}{\epsilon}$

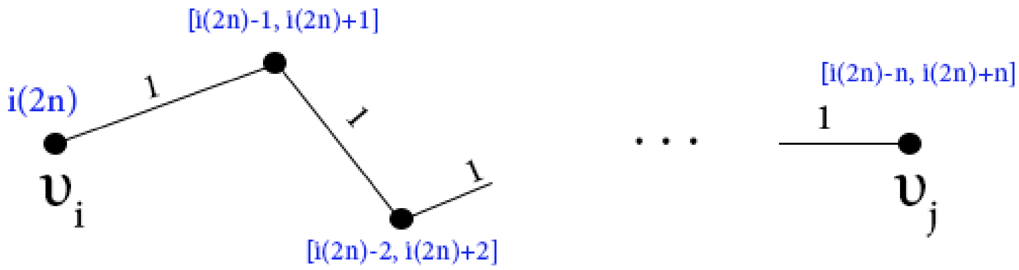
Μοντέλο ΙΙ

Στο μοντέλο αυτό εισάγουμε ασυνέχειες στο γράφημα. Δηλαδή, αναθέτουμε σε κάποιους κόμβους την ειδική τιμή $\perp$ και εξ ορισμού δεν λαμβάνουμε έσοδα από αυτούς τους κόμβους. Για τους κόμβους βέβαια με τιμή $\perp$, έχουμε από την άλλη, την ευχέρεια να μην ικανοποιήσουμε τους περιορισμούς όπου γειτονικοί κόμβοι έχουν φραγμένες διαφορές στην τιμή. Διαισθητικά, αφετηρία για την ανάπτυξη του μοντέλου ΙΙ είναι το γεγονός ότι με το μοντέλο Ι δεν μπορούμε να έχουμε πολύ μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή από κόμβο σε κόμβο, με αποτέλεσμα το εύρος των τιμών να συγκεντρώνεται γύρω από μία τιμή για όλους τους κόμβους. Επίσης, το μοντέλο αυτό, σε αντίθεση με το προηγούμενο, αποδεικνύεται ότι είναι NP-hard.

Λήμμα 5.1.1. *Για κάθε γράφημα G(V,E), υπάρχει ένα σύνολο συναρτήσεων εσόδων, τέτοιες ώστε για $\alpha(u, \upsilon) = 1$ για κάθε ακμή, τα συνολικά έσοδα από την τιμολόγηση φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες, είναι ίσα με το μέγιστο μέγεθος του independent set στο G(V,E).*

Απόδειξη. Για την αναγωγή πρέπει πρώτα να ορίσουμε τη συνάρτηση εσόδων. Έστω ότι για τον κόμβο υ_i έχουμε ότι για τιμή ίση με $i(2n)$ έχουμε $R_{\upsilon_i}(i(2n)) = 1$, όπου n ο αριθμός των κόμβων, και για όλες τις άλλες τιμές $R_{\upsilon_i}(p) = 0$. Μπορούμε έπειτα να βγάλουμε όλες τις ακμές $(, w)$ που το ένα άκρο τους έχει την ειδική τιμή $\perp$, δηλαδή $p_\upsilon =\perp$ ή $p_w =\perp$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος που απομένει μπορεί να αποφέρει έσοδα το πολύ 1. Εάν οι κόμβοι υ_i και υ_j είναι συνδεδεμένοι με μονοπάτι (δηλαδή ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα) (σχήμα 5.4) και ο κόμβος υ_i έχει έσοδα 1, τότε σίγουρα $p_{\upsilon_i} = i(2n)$. Επειδή $\alpha(u, \upsilon) = 1$ και έχουμε το πολύ n κόμβους, η τιμή στον κόμβο υ_j πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα $[\, i(2n) - n, i(2n) + n]$, το οποίο όμως δεν περιέχει την τιμή $j(2n)$ και άρα $R_{\upsilon_j} = 0$.

Επομένως είναι σαν να ψάχνουμε κόμβους για να τους βάλουμε στο ίδιο σύνολο, χωρίς να "γειτνιάζουν". Άρα το να υπολογίσουμε τα μέγιστα συνολικά έσοδα είναι σα να υπολογίζουμε το μέγεθος του maximum independent set του γράφου, πρόβλημα που είναι NP-hard. □



Σχήμα 5.4: Περίπτωση που υπάρχει μονοπάτι από τον i στον j, για το λήμμα 5.1.1

Επομένως, με βάση γνωστά αποτελέσματα για approximability του max independent set, ισχύει ότι:

Θεώρημα *Το να υπολογίσουμε τη βέλτιστη τιμολόγηση φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες σε έναν γράφο n κόμβων είναι NP-complete και είναι hard-to-approximate (δύσκολο να βρεθεί προσέγγιση) εντός ενός παράγοντα $n^{1-\epsilon}$ με $\epsilon > 0$, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν πολυωνυμικοί τυχαιοποιημένοι αλγόριθμοι για το NP.*

Επειδή η προηγούμενη αναγωγή δε χρησιμοποιεί πολύ φυσικές συναρτήσεις εσόδων, παρακάτω θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο αποδεικνύει το NP-hardness για συναρτήσεις εσόδων που είναι συναρτήσεις με την αυστηρά μαθηματική έννοια (single value).

Θεώρημα 5.1.5. *Το πρόβλημα του υπολογισμού της βέλτιστης τιμολόγησης φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες είναι NP-complete ακόμα και για συναρτήσεις εσόδων που είναι single value ή σταθερές.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος στηρίζεται σε αναγωγή από το Multiway cut problem (ή αλλιώς Multiterminal cut problem). Σε αυτό το πρόβλημα έχουμε ένα γράφημα $G(V, E)$ και ένα συγκεκριμένο σύνολο $S \subseteq V$ που αποτελείται από k κορυφές τις οποίες ονομάζουμε τερματικούς κόμβους (terminals), δηλ. $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$. Η λεγόμενη multiway cut είναι η τομή η οποία αφήνει καθέναν από τους κόμβους του S σε ξεχωριστή συνεκτική συνιστώσα. Στο Minimum multiway cut πρόβλημα, θέλουμε να αφαιρέσουμε τον ελάχιστο αριθμό ακμών (τις ακμές της τομής), το οποίο αφήνει τα στοιχεία του S σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

Για την αναγωγή, έστω $G = (V, E)$ και $S = \{\upsilon_2, \ldots, \upsilon_k\}$ ένα στιγμιότυπο του multiway cut προβλήματος, και έστω $|V| = n$. Κατασκευάζουμε έναν γράφο H που προκύπτει από το G ως εξής: αντικαθιστούμε κάθε ακμή του G με ένα μονοπάτι μήκους 2, και η μεσαία κορυφή που προστίθεται συμβολίζεται με e (κάνουμε δηλαδή τη διαδικασία που είναι γνωστή και ως 1-subdivision του G). Επομένως ο αριθμός των κορυφών του H είναι $|V| + |E|$ (γιατί τα e είναι όσα και οι ακμές, δηλ. $|E|$), και οι ακμές είναι $2|E|$. Απαιτούμε οι γειτονικοί κόμβοι να έχουν διαφορά στην τιμή το πολύ 1, δηλ. απαιτούμε $\alpha = 1$ για κάθε ακμή.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις εσόδων για κάθε κορυφή του γραφήματος H:

- Για κάθε κορυφή e που προήλθε από ακμή του G, έχουμε: $R_e = \begin{cases} 1 & \text{if prescribed price} \\ 0 & \text{if } p = \perp \end{cases}$

- Για κάθε κορυφή που προήλθε από το G εκτός των τερματικών κόμβων, δηλ. $\upsilon \in V \backslash S$, έχουμε: $R_\upsilon = \begin{cases} n^2 & \text{if prescribed price} \\ 0 & \text{if } p = \perp \end{cases}$

- Για κάθε κορυφή στους τερματικούς κόμβους, δηλ. $\upsilon_i \in S$ ορίζουμε: $r_i = 10i \cdot n^2$. Έχουμε: $R_{\upsilon \in S} = \begin{cases} p_i & \text{if } p_i \leq r_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Εδώ να σημειώσουμε ότι $n^2 > |E|$ επομένως σε ακμές $\upsilon \in V \backslash S$ δεν αναθέτουμε $\perp$, γιατί μπορούμε πολύ απλά να διώξουμε όλες της μορφής e και άρα να απομονώσουμε τις ακμές σε ό,τι απομένει από το H και έτσι να έχουμε απώλεια μόνο $|E|$ στα συνολικά έσοδα.

Παρατηρούμε ότι μία πιθανή λύση είναι να δώσουμε την ειδική τιμή $\perp$ σε ένα σύνολο από τις ακμές του H έτσι ώστε αυτό να ανταποκρίνεται στις λιγότερες δυνατές ακμές του G των οποίων η αφαίρεση διαχωρίζει τους κόμβους που ανήκουν στο S.

Τότε μπορούμε να θέσουμε στις εναπομείνουσες συνιστώσες των τερματικών κόμβων υ_i την τιμή $r_i = 10i \cdot n^2$. Αυτό αποτελεί και το βέλτιστο, δηλαδή τα μέγιστα έσοδα που μπορούμε να πάρουμε από το δίκτυο. Αν 2 κορυφές του S απομένουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, τότε έχουμε μεγάλες απώλειες στα έσοδα γιατί η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρότερη από $2n$ (καθώς είναι μικρότερη από n στον G γράφο). Επίσης αν θέσουμε $\perp$ σε μία κορυφή του H που αντιστοιχεί σε κορυφή του G (και όχι ακμή e), τότε πάλι χάνουμε πολλά και άρα αυτό δεν μπορεί να γίνει στη βέλτιστη λύση. Επομένως τα μέγιστα δυνατά έσοδα είναι ακριβώς:

$$R = |E| + n^2(|V| - k) + \sum_{i=1}^{k} 10in^2 - f$$

όπου f είναι ο ελάχιστον αριθμός ακμών οπου πρέπει να αφαιρεθούν ώστε να διαχωριστούν όλες οι ακμές του S. Δηλαδή έχουμε $|E| \cdot 1$ για τις κορυφές e, συν $n^2 \cdot (|V| - k)$ για τις κορυφές του G που είναι μη τερματικοί κόμβοι, και $\sum_{i=1}^{k} 10in^2 - f$ για τους υπόλοιπους κόμβους. Έτσι ολοκληρώνεται η αναγωγή από το Multiterminal cut πρόβλημα. □

Ειδικές περιπτώσεις

Μπορεί γενικά το πρόβλημα να είναι NP-hard, υπάρχουν όμως ειδικές περιπτώσεις που υπάρχουν ακριβείς αλγόριθμοι. Συγκεκριμένα, έχουμε αποτελέσματα για γράφους που είναι δέντρα:
Θεώρημα *Υπάρχει $O(nl)$ αλγόριθμος που υπολογίζει τη βέλτιστη τιμολόγηση φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες, όταν το γράφημα $G(V, E)$ είναι δέντρο.*

Η απόδειξη στηρίζεται σε δυναμικό προγραμματισμό. Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί για γράφους που έχουν την ιδιότητα να έχουν φραγμένο ένα μέγεθος που ονομάζεται treewidth. Σε αυτήν την περίπτωση, όταν $treewidth = k$, τότε υπάρχει αλγόριθμος με πολυπλοκότητα $O(n^k l^k)$ και η απόδειξη στηρίζεται επίσης στον δυναμικό προγραμματισμό.
Προσεγγίσεις

Ένας πρώτος και γενικός προσεγγιστικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί τον μέγιστο βαθμό γραφήματος.

Θεώρημα 5.1.6. *Για γράφο $G(V, E)$ με μέγιστο βαθμό κόμβου D, η τιμολόγηση φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες μπορεί να προσεγγισθεί εντός ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα $D + 1$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη χρησιμοποιεί έναν άπληστο αλγόριθμο. Για κάθε κόμβο υ, έστω $R_\upsilon^{max} = max_p\{R_\upsilon(p)\}$ το μέγιστο κέρδος (έσοδα) που μπορούμε να αντλήσουμε από τον υ και $p_\upsilon^{max} = argmax R_\upsilon(p)$.

Algorithm 4 Προσεγγιστικός άπληστος αλγόριθμος

Παίρνουμε τον κόμβο με το μέγιστο R_υ^{max} (δηλ. τον κόμβο που αποφέρει τα περισσότερα δυνατά κέρδη).

Θέτουμε στον κόμβο υ την τιμή p_υ^{max}.

Αναθέτουμε σε όλους τους γείτονες w του υ την ειδική τιμή, δηλαδή: $p_w = \perp$.

Ισχυριζόμαστε ότι ο αλγόριθμος δίνει τουλάχιστον $\frac{\sum_{\upsilon \in V} R_\upsilon^{max}}{D+1}$ όφελος. Η απόδειξη στηρίζεται στην παρατήρηση ότι αφού διαλέξαμε αρχικά τον κόμβο που αποφέρει τα μέγιστα έσοδα, τότε θα πρέπει

$$R_\upsilon^{max} \geq R_w^{max}$$

(ακόμη και για κάθε γειτονικό κόμβο που δεν του έχει ήδη ανατεθεί $\perp$ από τον αλγόριθμο). Επομένως, αν αθροίσουμε για όλους τους γείτονες θα έχουμε:

$$D \cdot R_\upsilon^{max} \geq \sum_{w \in N(\upsilon)} R_w^{max}$$

Τελικά τα έσοδα που παίρνουμε είναι τουλάχιστον $\frac{\sum_\upsilon R_\upsilon^{max}}{D+1}$.

□

Ένας δεύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος αφορά μία πιο ειδική περίπτωση, η οποία είναι γραφήματα με fixed excluded minors.

Θεώρημα *Για κάθε γράφημα $G(V, E)$ με έναν σταθερό excluded minor γράφο (και ειδικά για ένα επίπεδο γράφο), το μοντέλο τιμολόγησης φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες μπορεί να προσεγγισθεί εντός ενός προσθετικού παράγοντα ϵMn, όπου M είναι τα μέγιστα έσοδα που μπορούμε να πάρουμε από έναν κόμβο και $\epsilon > 0$ μία τυχαία σταθερή και θετική*

Στοχαστικό Μοντέλο

Υποθέτουμε ότι κάθε κόμβος, έχει single value συνάρτηση εσόδων. Αυτό υπονοεί ότι ο κόμβος υ έχει αξία για το προϊόν $val(\upsilon)$. Για τον κόμβο αυτόν η συνάρτηση εσόδων έχει ως εξής: $R_\upsilon(p) = \begin{cases} p & \text{if } p \leq val(\upsilon) \\ 0 & \text{if } p > val(\upsilon) \end{cases}$ Στο στοχαστικό μοντέλο λοιπόν θεωρούμε ότι η αξία $val(\upsilon)$ είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 1]$. Τα αποτελέσματα που έχουμε είναι ότι όσον αφορά το μοντέλο I, δεν έχουμε σημαντική αύξηση στα έσοδα σε σχέση με το να τιμολογούσαμε με μία μόνο τιμή. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε συνεκτικό γράφο και κάθε κατανομή των $val(\upsilon)$, με την ποϋπόθεση ότι έχει δειγματοληφθεί ανεξάρτητα και ότι όλοι οι κόμβοι έχουν την ίδια κατανομή.

Σε αντίθεση, το μοντέλο II έχει διαφορές μεταξύ της βέλτιστης τιμολόγησης με σταθερή τιμή και της βέλτιστης τιμολόγησης με ασυνέχειες.

Πόρισμα 5.1.6.1. *Για κάθε συνεκτικό γράφημα G(V,E) με ομοιόμορφο $\alpha = \epsilon$, τα βέλτιστα αναμενόμενα έσοδα τιμολόγησης φραγμένων διαφορών είναι ανά κόμβο το πολύ* $0.25 + O(\epsilon^{1/3})$.

5.2 Επαναληπτική τιμολόγηση με αρνητικές εξωτερικότητες

5.2.1 Κύρια Ιδέα του Μοντέλου

Το μοντέλο αυτό, από τους Z.Cao, X. Chen. X. Hu, C. Wang [47], και εξετάζονται οι αρνητικές εξωτερικότητες (ουσιαστικά αρνητικές αλληλεπιδράσεις) μεταξύ των παικτών, σε προβλήματα επαναληπτικής τιμολόγησης, με αντικειμενικό σκοπό την μεγιστοποίηση του κέρσους ενός μονοπωλητή. Η αρνητική επίδραση που θεωρείται σε αυτό το μοντέλο είναι η εξής: η αγορά ενός προϊόντος θεωρείται ότι δε γίνεται απλά για την κάλυψηα αναγκών, αλλά ασκεί ένα είδος "επίδειξης" πάνω στους άλλους παίκτες που δεν έχουν ακόμη το προϊόν (invidious consumption). Το κίνητρο λοιπόν για αγορά μειώνεται καθώς περισσότεροι κόμβοι στη γειτονιά ενός παίκτη αγοράζουν το προϊόν, και γι'αυτό λέμε ότι έχουμε αρνητική εξωτερικότητα. Η τιμολόγηση εξελίσσεται σε γύρους, και η ίδια τιμή για όλους όσους δεν έχουν το προϊόν προσφέρεται σε κάθε βήμα.

5.2.2 Υποθέσεις και Ορισμοί

Θεωρούμε ότι οι αξίες που έχουν οι παίκτες για το προϊόν αποτελούνται από ένα εγγενές μέρος (intrinsic value), που είναι η αξία για το προϊόν χωρίς επιρροές από άλλους και ένα εξωγενές μέρος (external value) που είναι ο σταθμισμένος αριθμός ατόμων (δηλαδή με βάρη) που δεν έχουν το προϊόν. Φορμαλιστικά: $\nu(i) + w_i(Q)$, όπου Q είναι το σύνολο των παικτών που δεν έχουν ήδη αγοράσει. Θεωρούμε επίσης ότι έχουμε μυωπικούς αγοραστές, με την έννοια ότι μόλις τους προσφερθεί τιμή η οποία είναι μικρότερη ή ίση της αξίας που έχουν για το προϊόν, τότε σίγουρα θα το αγοράσουν. Επίσης στο συγκεκριμένο μοντέλο θεωρούμε ότι έχουμε πλήρη πληροφορία για τις εγγενείς αξίες των καταναλωτών. Επίσης, ο πωλητής ανακοινώνει τιμές $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ με τη σειρά, σε χρόνους $1, 2, \ldots, \tau$. Υποθέτουμε ότι μόλις ανακοινωθεί η τιμή όλες οι κινήσεις των παικτών γίνονται ταυτόχρονα. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται και PNC, από το *Pricing with Negative Externalities and Complete Information.*

5.2.3 Βασικά Αποτελέσματα

Με αναγωγή από το 3-OCC-3SAT αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 5.2.1. *Στο μοντέλο PNC το πρόβλημα υπολογισμού της βέλτιστης ακολουθίας τιμολόγησης είναι NP-hard, ακόμη και αν όλες οι εγγενείς τιμές των παικτών είναι μηδενικές.*

Ωστόσο, υπάρχει προσεγγιστικός άπληστος αλγόριθμος που παρατίθεται παρακάτω (αλγόριθμος 5). Με $B(p_t)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κόμβων που αγοράζουν το προϊόν το προϊόν σε τιμή p_t (τη χρονική τιμή t). Για κάθε υποδίκτυο H του G, και για κάθε $i \in V(H)$, όπου $V(H)$ είναι το σύνολο των κόμβων του H, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $d_H^w(i)$ για να ορίσουμε $d_H^w(i) = \sum_{j \in V(H)} w_{ij}$, δηλαδή τον σταθμισμένο βαθμό του κόμβου i στο H. Για κάθε πραγματική συνάρτηση f και για κάθε μη κενό υποσύνολο S του πεδίου ορισμού της, έστω $f(S) = \sum_{s \in S} f(s)$.

Algorithm 5 Προσεγγιστικός για το PNC μοντέλο

Είσοδος: Δίκτυο G=(V,E) με συναρτήσεις βάρους $w \in Z_+^{V \times V}$, και εγγενείς συναρτήσεις $v \in R_+^V$.
Έξοδος: Ακολουθία **p** τιμών =0

```
G_0 ← G, t ← 0
while V(G_t) ≠ ∅ do
    t ← t + 1
    p_t ← max{v(i) + d^w_{G_{t-1}}(i) : i ∈ V(G_{t-1})}
    G_t ← G_{t-1} \B(p_t)
Έξοδος p ← (p_1, p_2, ..., p_t)
```

Θεώρημα 5.2.2. *Ο αλγόριθμος 5 δίνει 2-approximation σε $O(n^2)$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{p}^*$ ένα βέλτιστο διάνυσμα τιμών, και $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_\tau)$ το διάνυσμα τιμών που παράγεται από τον αλγόριθμο. Εφόσον κάθε ακμή $(i, j) \in E$ μπορεί να συνεισφέρει το πολύ $2w_{ij}$ στην συνολική αξία που έχουν οι καταναλωτές για το προϊόν (w_{ij} για κάθε κόμβο i και j), μπορούμε να δούμε ότι:

$$R(\mathbf{p}^*) \leq \nu(V) + 2w(E)$$

Από τον τρόπο που ορίζονται τα p_t στον αλγόριμο 5, έχουμε ότι $B(p_t) = argmax\{\nu(i) + d^w_{G_{t-1}}(i) : i \in V(G_{t-1})\}$. Επομένως, κάθε ακμή $(i,j) \in E(G_{t-1}$ (με $i \in B(p_t)$), συμβάλλει κατά w_{ij} στη συνολική αξία του i, αποδίδοντας έσοδα:

$$p_t|B(p_t)| = \nu(B(p_t)) + \sum_{i\in B(p_t)} d^w_{G_{t-1}}(i) \geq \nu(B(p_t)) + w(E(G_{t-1}) - E(G_t))$$

για κάθε $t \in [\,\tau\,]$. Επομένως:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{p}) = \sum_{t=1}^{\tau} p_t \cdot |B(p_t)| &\geq \sum_{t=1}^{\tau} \nu(B(p_t)) + \sum_{t=1}^{\tau} w(E(G_{t-1}) - E(G_t)) \\ &= \nu(\cup_{t=1}^{\tau} B(p_t)) + \sum_{t=1}^{\tau} w(E(G_{t-1})) - w(E(G_t)) \\ &= \nu(V) + w(E(G_0)) - w(E(G_\tau)) \\ &= \nu(V) + w(E) \end{aligned}$$

όπου $G_0 = G$ και $G_\tau = \emptyset$ εξασφαλίζονται από τα βήματα 1 και 2. Άρα:

$$\frac{R(\mathbf{p}*)}{R(\mathbf{p})} \leq \frac{\nu(V) + 2w(E)}{\nu(V) + w(E)} \leq 2$$

όπου βλέπουμε ότι έχουμε λόγο προσέγγισης ίσο με 2.

Όσον αφορά την πολυπλοκότητα, παρατηρούμε ότι έχουμε $O(n^2)$ χρόνο εκτέλεσης, καθώς ο βρόχος while εκτελείται $\tau \leq n$ φορές, και κάθε επανάληψη χρειάζεται χρόνο $O(n)$. □

Επίσης αποδεικνύεται ότι το να γίνει η τιμολόγηση με μία μόνο τιμή (και όχι επαναληπτική τιμολόγηση) μπορεί να είναι χειρότερο της τάξης του $ln(ln(n))$. παρόλαυτά, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για προσεγγιστικούς αλγορίθμους για ειδικές περιπτώσεις (σε γράφους χωρίς βάρη και με ομοιόμορφες εγγενείς αξίες), αν χρησιμοποιήσουμε ως προσέγγιση της επαναληπτικής τιμολόγησης μία και μόνο τιμή.

Θεώρημα 5.2.3. *Η τιμολόγηση με μία και μόνο τιμή, αποτελεί καλή προσέγγιση της επαναληπτικής τιμολόγησης με αρνητικές εξωτερικότητες για τις παρακάτω περιπτώσεις:*

- *λόγος προσέγγισης* $ln(n)$ *για γενικά δίκτυα*
- *λόγος προσέγγισης* 1.5 *για δίκτυα forest*
- *λόγος προσέγγισης* $(1+\epsilon)$ *για E-R δίκτυα*
- *λόγος προσέγγισης* 2 *για δίκτυα επιλεκτικής προσάρτησης*

Παρακάτω θα δούμε ενδεικτικά την απόδειξη για τα γραφήματα forest.

Απόδειξη. Για τα γραφήματα forest. Έστω γράφημα forest $G = G_0$ αποτελούμενο από k συνιστώσες (δέντρα): $G_h = (V_h, E_h)$, $h = 1, \ldots, k$. Έστω ℓ_h ο αριθμός των φύλλων στο G_h. Να σημειώσουμε ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{k} OPT(G_i) \geq OPT(G_0)$, και

$$\begin{aligned} p|B(p)| &\geq max\{|B(1)|, 2|B(2)|\} = max\{|V_0|, 2(|V_0| - \ell_0)\} \\ &\geq \frac{2}{3}(2|V_0| - \ell_0) = \frac{2}{3}\left(2\sum_{i=1}^{k}|V_i| - \sum_{i=1}^{k}\ell_i\right) \end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $OPT(G_i) \leq 2|V_i| - \ell_i$, για κάθε $i \in [k]$, έτσι ώστε να έχουμε λόγο προσέγγισης το πολύ 1.5 .

Αν G_i είναι ένα γράφημα star ή αποτελείται από μία μόνο ακμή, τότε ισχύει ότι $OPT(G_i) \leq 2|V_i| - \ell_i$. Ας υποθέσουμε ότι G_i δεν είναι ούτε μία ακμή, και έστω G_i' το δέντρο που παίρνουμε από το G_i με την αφαίρεση όλων των φύλλων του. Προφανώς, $d_{G_i'}(v) \leq d_{G_i}(v)$ για κάθε κόμβο που δεν είναι φύλλο του G_i'.

Έστω $\mathbf{p}$ το βέλτιστο διάνυσμα τιμών για το G_i. Ας αναλλογιστούμε τι ισχύει για ένα τυχαίο κόμβο-φύλλο του G_i'. Έστω $L(u)$ το σύνολο των φύλλων που είναι γείτονες του u στο G_i. Σύμφωνα με το διάνυσμα τιμών $\mathbf{p}$, είτε ο u αγοράζει πριν από όλους τους κόμβους στο $L(u)$, σε τιμή μεγαλύτερη του 1, είτε όλοι οι κόμβοι που ανήκουν στο $\{u\} \cup L(u)$ αγοράζουν στην τιμή 1. Επειδή ο u έχει τουλάχιστον έναν γείτονα που δεν είναι φύλλο στο G_i, είναι εύκολο να δούμε ότι σε κάθε περίπτωση, το συνολικό ποσό που πληρώνουν οι κόμβοι στο $\{u\} \cup L(u)$ είναι άνω φραγμένο από το $d_{G_i}(u) \leq d_{G_i'}(u) + |L(u)|$. Επομένως:

$$\begin{aligned} OPT(G_i) &\leq \sum_{\text{non-leaf node } v \text{ pf } G_i'} d_{G_i}(v) + \sum_{\text{leaf node } u \text{ of } G_i'} (d_{G_i'}(u) + |L(u)|) \\ &= \sum_{\text{non-leaf node } v \text{ pf } G_i'} d_{G_i'}(v) + \sum_{\text{leaf node } u \text{ of } G_i'} (d_{G_i'}(u) + |L(u)|) \\ &= \ell_i + \sum_{v \in V_i} d_{G_i'}(v) \\ &= \ell_i + 2(|V_i| - \ell_i - 1) \\ &< 2|V_i| - \ell_i \end{aligned}$$

$\square$

Κεφάλαιο 6

Ανοικτά Προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε μερικά ανοικτά προβλήματα για την μεγιστοποίηση εσόδων σε κοινωνικά δίκτυα. Αυτό είναι πολύ σημαντικός παράγοντας, καθώς επικρατεί ακόμα και σήμερα η άποψη ότι δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμα το εύρος για εξαγωγή εσόδων των κοινωνικών δικτύων.

6.1 Μοντέλα με άλλα είδη εξωτερικοτήτων

Στη βιβλιογραφία γενικότερα υπάρχουν περισσότερα μοντέλα για θετικές εξωτερικότητες σε σχέση με τις αρνητικές. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να μελετήσει και άλλα μοντέλα στα κοινωνικά δίκτυα που αντιμετωπίζουν διαφορετικής φύσης εξωτερικότητες, που είναι γνωστές στους οικονομολόγους. Για παράδειγμα, είδαμε ότι ένα είδος αρνητικής εξωτερικότητας ήταν η αποστροφή στις άνισες τιμές. Θα μπορούσαμε λοιπόν να μελετήσουμε φαινόμενα όπως:

- veblen effect, το οποίο αναφέρεται σε αγαθά πολυτελείας. Συγκεκριμένα, η ζήτηση για το αγαθό μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η τιμή του. [22]
- snob effect, όπου η ζήτηση για συγκεκριμένο αγαθό από πιο εύπορα άτομα είναι αντιστρόφως ανάλογη της ζήτησης του αγαθού από άτομα λιγότερο εύπορα. [14]
- congestion effect, όπου έχουμε παίγνια με κέρδη που εξαρτώνται από τις προτιμήσεις των καταναλωτών και μία παράμετρο συμφόρησης (congestion parameter). [9]

6.2 Μοντέλα με περισσότερους πωλητές

Θα μπορούσαμε ακόμη, να εξετάσουμε μοντέλα μεγιστοποίησης εσόδων, όπου αντί να έχουμε έναν πωλητή και συνεπώς έχουμε μονοπώλιο, να εξετάσουμε πώς θα ήταν ένα μοντέλο όπου έχουμε 2 πωλητές (και συνεπώς έχουμε ολιγοπώλιο) όταν ο αντικειμενικός τους σκοπός είναι η μεγιστοποίηση των εσόδων και λαμβάνουμε υπόψη τις εξωτερικότητες που παρουσιάζονται στα κοινωνικά δίκτυα. Στην ίδια λογική, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε και περιπτώσεις που έχουμε πολλούς πωλητές (δηλαδή πλέον έχουμε ανταγωνισμό), και οι οποίοι επιδιώκουν την μεγιστοποίηση εσόδων λαμβάνοντας υπόψη τις εξωτερικότητες του δικτύου, και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με βάση την κλασσική μικροοικονομική θεωρία.

6.3 Άλλα προβλήματα διαφοροποιημένης τιμολόγησης

Θα ήταν ακόμη μία καλή ιδέα, να εξετάσει κανείς τι γίνεται όταν έχουμε διαφοροποίηση της τιμής τόσο τοπολογικά, ανά πάσα στιγμή σε ένα κοινωνικό δίκτυο, όπως η διαφοροποίηση τιμών με αποστροφή στις ανισότητες [35], μαζί με επαναληπτική τιμολόγηση, όπου δηλαδή οι τιμές αλλάζουν και ανά περιόδους, όπως είδαμε προηγούμενα [23]. Φυσικά, θα ήταν πιο εύλογο οι δύο παράμετροι αλλαγής τιμής να αντιμετώπιζαν το ίδιο είδος εξωτερικότητας, όμως ενδιαφέρουσα θα ήταν και η περίπτωση να αλλάζουν λόγω διαφορετικών εξωτερικοτήτων και έτσι να έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με πολλούς παράγοντες.

6.4 Μοντέλα εξειδικευμένα σε μορφή δικτύων

Θα μπορούσαμε φυσικά, να εξετάσουμε κάποια από τα μοντέλα που είδαμε προηγουμένως πάνω σε ειδικές μορφές δικτύων, όπως για παράδειγμα το δίκτυο preferential attachment που είδαμε ή κάποιο άλλο υβριδικό μοντέλο δικτύων. Είδαμε ήδη ότι ορισμένα μοντέλα έχουν μελετηθεί και για πιο ειδικές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στην εργασία [47], όπου είδαμε πιο συγκεκριμένες προσεγγίσεις για κοινωνικά δίκτυα ειδικής μορφής.

6.5 Μελέτη του προβλήματος Remarketing

Στη σύγχρονη μελέτη προβλημάτων στο μάρκετινγκ, έχει παρατηρηθεί στην πράξη ότι η τακτική "Remarketing" είναι μία από τις πιο προσοδοφόρες. Σε αυτήν την τακτική, ο πωλητής (ή διαφημιστής) επισκέπτεται έναν κόμβο παραπάνω από μία φορά, και το αποτέλεσμα που παρατηρείται είναι ότι ο κόμβος μπορεί να μην αγοράσει κατά την πρώτη επίσκεψη, όμως στις επόμενες η πιθανότητα να προβεί σε αγορά αυξάνεται. Αυτό πιθανόν να μπορούσε να μοντελοποιηθεί με temporal γραφήματα, όπου οι κόμβοι έχουν κατώφλια τα οποία με τις επανειλημμένες επισκέψεις μικραίνουν. Θα ήταν χρήσιμο λοιπόν, να μελετήσουμε προβλήματα όπου πρέπει να βρούμε μία σειρά επίσκεψης των κόμβων και με τον ελάχιστο αριθμό επισκέψεων στους κόμβους να επιτύχουμε μεγιστοποίηση των εσόδων.

6.6 Μερικές ιδέες για προσέγγιση του προβλήματος της διαφοροποιημένης τιμολόγησης με αποστροφή στις ανισότητες

Σε αυτήν την ενότητα θα προτείνουμε δύο ιδέες, που πιθανόν να βοηθήσουν στον σχεδιασμό προσεγγιστικών αλγορίθμων για το πρόβλημα μεγιστοποίησης εσόδων με αποστροφή στις ανισότητες της τιμής.

Ο υπάρχων προσεγγιστικός αλγόριθμος έχει λόγο προσέγγισης $D+1$, όπου D ο μέγιστος βαθμός κόμβου που υπάρχει στο δίκτυο. [35]. Αυτή η προσέγγιση παρατηρούμε ότι δεν είναι πολύ καλή, με την έννοια ότι ο βαθμός δικτύου μπορεί να είναι για παράδειγμα της τάξης $|V|$, όπου V το σύνολο των κόμβων του γράφου, καθώς μπορεί να έχουμε ένα star-γράφημα ή ένας κόμβος πολύ κεντρικός ο οποίος συνδέεται με το μεγαλύτερο μέρος των κόμβων του γράφου. Θα θέλαμε επομένως αν ήταν δυνατό να βρούμε αλγορίθμους, οι οποίοι θα μας επιτρέψουν να έχουμε καλύτερο λόγο προσέγγισης.

6.6.1 Μία μακροσκοπική ιδέα

θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τον γράφο σε μερικές βασικές συστάδες (clusters), πιθανόν με έναν αλγόριθμο όπως ο Newman-Girvan [12], και έπειτα να θεωρήσουμε ότι στο "σύνορο" κάθε συστάδας, δηλαδή στους κόμβους που αποτελούν γέφυρες προς άλλα μέρη (συστάδες) του δικτύου, δίνουμε την ειδική τιμή $\perp$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να έχουμε κάτι σαν "γεωγραφική" απομόνωση των συστάδων του δικτύου και μέσα στη κάθε συστάδα να εφαρμόσουμε είτε διαφοροποίηση τιμής με φραγμένες διαφορές είτε μία σταθερή τιμή, ώστε και στις δύο περιπτώσεις να αποφεύγουμε την αρνητική εξωτερικότητα, η οποία είναι και το ζητούμενο του μοντέλου.

6.6.2 Μία μικροσκοπική ιδέα

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε έναν άπληστο αλγόριθμο, σε παραπλήσια λογική με τον προτεινόμενο των Tennenholtz et al, που όμως θα έχει την ιδιότητα να μην θέτει την τιμή $\perp$ σε όλους τους γείτονες του εκάστοτε "πλουσιότερου" κόμβου πάντα. Αφετηρία για αυτή τη σκέψη είναι ότι μπορεί να έχουμε την εξής περίπτωση:

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το άθροισμα των αξιών των γειτόνων του κόμβου είναι μεγαλύτερο από την αξία του κόμβου για το προϊόν:

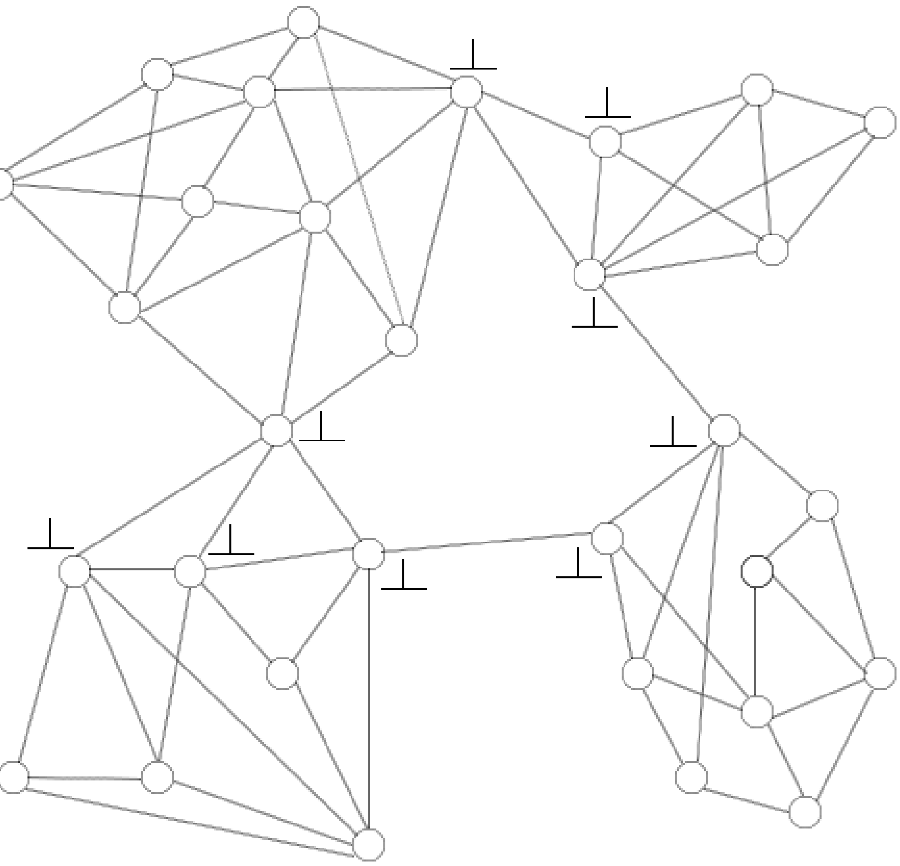
$$\sum_{i \in Neighbor(R)} v_i = 483 > v_R = 100$$

Στην περίπτωση αυτή δηλαδή, παρατηρούμε ότι θα συνέφερε πιθανόν να πάρει την τιμή $\perp$ ο κόμβος R και όχι οι γείτονές του.

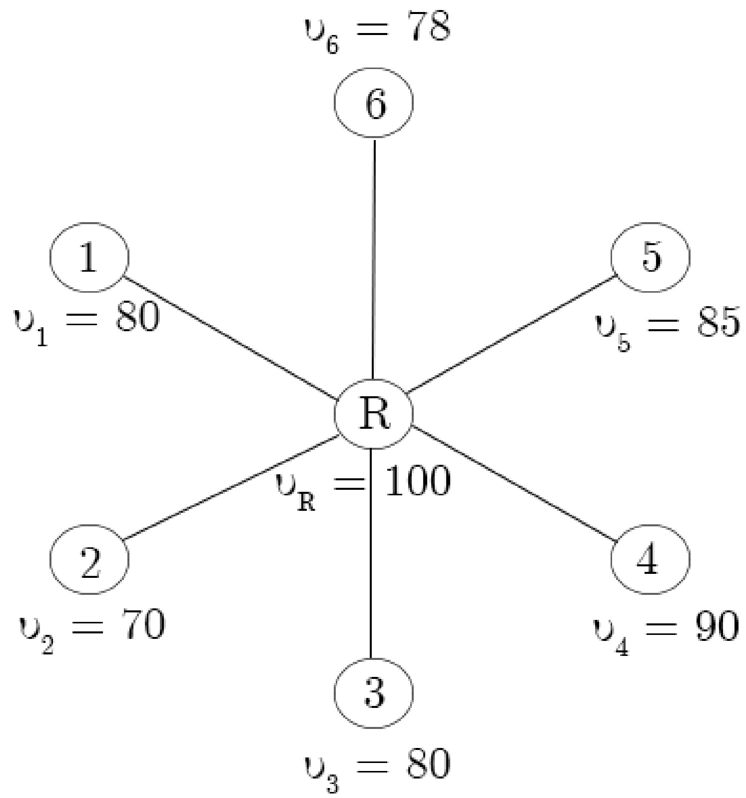
Μία ακόμη παρατήρηση είναι η εξής: μπορεί στο μοντέλο φραγμένων διαφορών με ασυνέχειες, ο κόμβος R να έχει την μεγαλύτερη τιμή, όμως οι γείτονές του είναι πιθανόν να είναι πιο ανεκτικοί στις διαφορές, δηλαδή για παράδειγμα, η παράμετρος α να είναι αρκετά μεγάλη και να μην προξενείται σε όλους τους κόμβους το φαινόμενο της αποστροφής στις ανισότητες.

Επομένως, θα συνέφερε να δίναμε την τιμή $\perp$ μόνο σε γείτονες i του R, οι οποίοι έχουν v_i αρκετά μικρό, ώστε το βάρος α της ακμής που τον συνδέει με τον R να μην καλύπτει τη διαφορά αυτή.

Στο σημείο αυτό όμως, αν πρόκειται να λάβουμε υπόψη και τις δύο αυτές ιδέες, πρέπει να προσέξουμε ότι έχουμε ένα δίλημμα ανάμεσα στο αν θα δώσουμε την τιμή $\perp$ τελικά στον R, ή στους γείτονές του, αλλά και μέχρι ποιό σημείο συμφέρει αυτό.



Σχήμα 6.1: Χωρισμός του γράφου σε συστάδες και ανάθεση τιμής $\perp$ στους κόμβους-γέφυρες



Σχήμα 6.2: Περίπτωση όπου το άθροισμα των αξιών των γειτόνων του κόμβου για το προϊόν είναι μεγαλύτερο από την αξία του κόμβου

Επομένως, διατυπώνουμε τον παρακάτω αλγόριθμο για γράφημα $G = (V, E)$, για το μοντέλο τιμολόγησης με φραγμένες διαφορές και ασυνέχειες:

Algorithm 6 My algorithm - Rich vs Poor

Sort nodes according to their valuations (from bigger to lower)
for each node in sorted_set and if node $\neq\perp$ **do**
  for every $w \in Neighbor(node)$ and $node \neq\perp$ **do**
    if $(v_{node} - v_w - \alpha(v, w)) \geq v_w$ **then**
      $w = candidate$
    sum_of_neighbors$+= v_w$
  if sum_of_neighbors $\geq v_{node}$ **then**
    $p_{node} =\perp$
    $p_{neighbors} = their\_valuations$
  else
    if candidate_set $\neq \emptyset$ **then**
      for all $w \in Neighbor(node)$ and $w == candidate$ **do**
        $p_w =\perp$
for $n \in G$ and $p_n \neq\perp$ **do**
  $Revenue+ = p_n$

Αυτό που κάνουμε δηλαδή είναι να εξετάζουμε καταρχάς εάν ένας κόμβος, με βάση την αξία που έχει για το προϊόν και την διαφορά α, είναι υποψήφιος για αφαίρεση, και άρα εισάγουμε την κατάσταση $Candidate$. Ασχέτως, όμως, αν είναι υποψήφιος, πρέπει να μετρήσουμε το άθροισμα των αξιών των γειτόνων του κόμβου R, για να διαλέξουμε σε δεύτερη φάση αν συμφέρει να διώξουμε τον R ή τους γείτονες που δημιουργούν το πρόβλημα (γ'αυτό ονομάσαμε τον αλγόριθμο Rich vs Poor). Μετά από αυτή τη διαδικασία λοιπόν, αποφασίζουμε ποιούς κόμβους θα κρατήσουμε και θέτουμε ως τιμή την αξία που έχουν το προϊόν, που είναι η μέγιστη τιμή που μπορούμε να τους προσφέρουμε. Τα έσοδα τελικά λοιπόν, είναι το άθροισμα των τιμών όλων των κόμβων που δεν τους ανατέθηκε $\perp$ στο προηγούμενο βήμα.

Μερικές παρατηρήσεις σε αυτόν τον αλγόριθμο:

- Σίγουρα, επειδή εξετάζουμε τους κόμβους με τη σειρά "richest-to-poorest", αποκλείεται να συναντήσουμε γειτονικό κόμβο με μεγαλύτερη αξία για το προϊόν.
- Άπαξ και θέσουμε την ειδική τιμή $\perp$ σε έναν κόμβο, αυτό δεν μπορεί να αλλάξει.
- Μπορεί όμως ένας κόμβος να έχει τιμή $\neq\perp$, και σε κάποια επόμενη εκτέλεση του αλγορίθμου να την πάρει.

Βιβλιογραφία

[1] Competitive contagion in networks. Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '12), pages 759–774.

[2] Competitive influence maximization in social networks. International Workshop on Internet and Network Economics (WINE 2007), pages 306–311.

[3] A game-theoretic analysis of a competitive diffusion process over social networks. Proceedings of the 8th international conference on Internet and Network Economics (WINE '12), pages 1–14.

[4] Influence maximization in switching-selection threshold models. The 7th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT 2014), pages 122–133.

[5] Maximizing the spread of influence. http://www.cs.cmu.edu/ xiaonanz/Maximizing-the-Spread-of-Influence.ppt.

[6] Networks, crowds and markets, edx. Module Six, Social Contagion, https://courses.edx.org/courses/CornellX/INFO2040x_Spring2015.

[7] Threshold models for competitive influence in social networks. Proceedings of the 6th international conference on Internet and network economics (WINE '10), pages 539–550.

[8] Watts and strogatz model. https://en.wikipedia.org/wiki/Watts_and_Strogatz_model.

[9] Congestion effects in a public-good economy. *Journal of Economics*, 66:189–204, 1997.

[10] Talk of the network: A complex systems look at the underlying process of word-of-mouth. *Marketing Letters*, 12:211–223, 2001.

[11] Using complex systems analysis to advance marketing theory development. *Academy of Marketing Theory Development Science Review*, 9:1–18, 2001.

[12] Community structure in social and biological networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 99:7821–7826, 2002.

[13] Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74:47–97, 2002.

[14] Luxury consumption factors. *Journal of Fashion Marketing and Management: An International Journal*, 13:231–245, 2009.

[15] Abhijit V. Banerjee, Arun G. Chandrasekhar, Esther Duflo, and Matthew O. Jackson. The diffusion of microfinance. *Science*, 341, 2013.

[16] Jon Kleinberg David Easley. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*. Cambridge University Press, 2010.

[17] Derek J. de Solla Price. A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the American Society for Information Science*, 27:292–306, 1976.

[18] Paris Siminelakis Dimitris Fotakis. On the efficiency of influence-and-exploit strategies for revenue maximization under positive externalities. WINE'12 Proceedings of the 8th international conference on Internet and Network Economics, pages Pages 270–283.

[19] P. Erdős and A. Renyi. On random graphs. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.

[20] P. Erdős and A. Renyi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, 12:261–267, 1960.

[21] A. Ghouila-Houri. Caracterisation des matrices totalement unimodulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, page 1192–1194, 1962.

[22] Leibenstein H. Bandwagon, snob, and veblen effects in the theory of consumers' demand. *The Quarterly Journal of Economics*, 64:183–207, 1950.

[23] N. Haghpanah H. Mahini V. Mirrokni A. Nikzad H. Akhlaghpour, M. Ghodsi. Optimal iterative pricing over social networks. WINE '10, pages 415–423.

[24] Matthew Jackson. Social and economic networks: Models and analysis. https://www.coursera.org/course/networksonline.

[25] Matthew O. Jackson. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2010.

[26] Mukund Sundararajan Jason Hartline, Vahab S. Mirrokni. Optimal marketing strategies over social networks. Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web, pages 189–198.

[27] David Kempe, Jon Kleinberg, and Éva Tardos. Maximizing the spread of influence through a social network. Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, pages 137–146.

[28] Jure Leskovec and Eric Horvitz. Planetary-scale views on a large instant-messaging network. Proceedings of the 17th international conference on World Wide Web, pages 915–924.

[29] Granovetter M. The strength of weak ties. *American Journal of Sociology*, 78:1360–1380, 1973.

[30] Granovetter M. Threshold models of collective behavior. *American Journal of Sociology*, 83:1420–1443, 1978.

[31] Macy M. Chains of cooperation: Threshold effects in collective action. *American Sociological Review*, 56:730–747, 1991.

[32] Willer R. Macy M. From factors to actors: computational sociology and agent-based modeling. *Annual Review of Sociology*, 28:143–166, 2002.

[33] S. Milgram. The small-world problem. *Psychology Today*, 2:60–67, 1967.

[34] Fisher M. Nemhauser G., Wolsey L. An analysis of the approximations for maximizing submodular set functions. *Mathematical Programming*, 14:265–294, 1978.

[35] Moshe Tenneholtz Noga Alon, Yishay Mansour. Differential pricing with inequity aversion in social networks. EC'13, pages 9–24.

[36] Duncan J. Watts Peter Sheridan Dodds, Roby Muhamad. An experimental study of search in global social networks. *Science*, 301:827–829, 2003.

[37] Lazarsfeld P.F. and edited by M. Berger R.K. Merton. *Friendship as a social process: a substantive and methodological analysis*. Van Nostrand, 1954.

[38] Blau P.M. *Exchange and Power in Social Life*. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1964.

[39] Blau P.M. *Inequality and Heterogeneity*. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1977.

[40] A.-L. Barabási R. Albert, H. Jeong. Diameter of the world wide web. *Nature*, 401:130–131, 1999.

[41] Domingos P. RichardsonM. Mining knowledge-sharing sites for viral marketing. Eighth Intl. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining, pages 61–70, 2002.

[42] Herbert Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, 42:425–440, 1955.

[43] Schelling T. *Micromotives and Macrobehavior*. Norton, 1978.

[44] Vahab S. Mirrokni Uriel Feige and Jan Vondrák. Maximizing non-monotone submodular functions. FOCS 2007, pages 461–471.

[45] S. H. Watts D. J., Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.

[46] Udny Yule. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of dr. j. c. willis, f.r.s. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, page 402–410, 1925.

[47] Xiaodong Hu Changjun Wang Zhigang Cao, Xujin Chen. Pricing in social networks with negative externalities. ArXiv, Oct. 2014.