

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



**Προσδιορισμός του λόγου M/R μέσω αριθμητικής επίλυσης
των εξισώσεων Tolman-Oppenheimer-Volkov για μη
περιστρεφόμενους σφαιρικά συμμετρικούς αστέρες νετρονίων
και λευκούς νάνους στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας**

Διπλωματική Εργασία

Τζανετάτος Δημήτριος

Επιβλέπων: Κουτσούμπας Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα 2014

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματική εργασίας αφορά την εφαρμογή των εξισώσεων της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας στο στάδιο ζωής μαζικών αστερών όπου έχουν εξαντλήσει όλο τους το πυρηνικό καύσιμο και υπόκεινται σε βαρυτική κατάρρευση. Η κατάληξη τέτοιων σωμάτων μπορεί να είναι μια κατάσταση ισορροπίας η οποία είναι ένας λευκός νάνος ή ένας αστέρας νετρονίων. Οι υπολογισμοί των εξισώσεων της εργασίας γίνονται με τις εξής παραδοχές: ο αστέρας είναι στατικός, αφόρτιστος, μη περιστρεφόμενος και σφαιρικά συμμετρικός. Οι εξισώσεις του Einstein οδηγούν σε δύο μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2^{ης} τάξης *σχετικιστικής υδροστατικής ισορροπίας* με τρεις αγνώστους ως προς τη μεταβλητή r της απόστασης από το κέντρο του αστέρα: τη μάζα του αστέρα, την εσωτερική του πίεση οι οποίες αν συνδυαστούν με μια κατάλληλη καταστατική εξίσωση πυκνότητας-πίεσης στο εσωτερικό του αστέρα οδηγούν σε ένα κλειστό και επιλύσιμο σύστημα εξισώσεων, το οποίο λέγεται Tolman-Oppenheimer-Volkov Equations. Λόγω του ότι η αναλυτική επίλυσή του είναι, προς το παρόν, εξαιρετικά δύσκολη, χρησιμοποιήθηκε η εξής μέθοδος: οι λύσεις θεωρήθηκαν προσεγγιστικά με μια γενική πολυωνυμική μορφή και έπειτα επιλύθηκε το σύστημα υπολογιστικά με τη βοήθεια της Mathematica. Λόγω της διαφορικής μορφής των εξισώσεων υπάρχει ελευθερία κάποιας σταθερής παραμέτρου η οποία στην εργασία αυτή θεωρήθηκε ως η κεντρική πυκνότητα του αστέρα. Έτσι, ολοκληρώνοντας το σύστημα TOV για διάφορες κεντρικές πυκνότητες, προκύπτει μια μονο-παραμετρική οικογένεια καταστάσεων ισορροπίας $M(\rho_c)$, $R(\rho_c)$ με παράμετρο την κεντρική πυκνότητα. Οι τιμές που υπολογίστηκαν δεν αναφέρονται σε φυσικές μονάδες αλλά δείχνουν τη γενική εξάρτηση των παραπάνω μεγεθών. Τέλος, η εργασία στο σύνολό της είναι βιβλιογραφική χωρίς κάποια πραγματικά πειραματικά δεδομένα.

Λέξεις-φράσεις κλειδιά: αστέρας νετρονίων, λευκός νάνος, γενικά συναλλοίωτοι νόμοι, τανυστική ανάλυση, μη ευκλείδειες γεωμετρίες, Lorentzian γεωμετρία, αρχή της ισοδυναμίας, Riemannian γεωμετρία, τανυστής καμπυλότητας Riemann, τανυστής της ύλης, εξισώσεις πεδίου Einstein, εξισώσεις Tolman-Oppenheimer-Volkov, λύσεις Riemannian γεωμετρίας Schwarzschild, μη περιστρεφόμενοι, σχετικιστικοί, σφαιρικοί αστέρες.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον αναπληρωτή καθηγητή Γεώργιο Κουτσούμπα για την άριστη συνεργασία και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη	ii
Ευχαριστίες	iii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
Εισαγωγή.....	1
A) Αστέρες Νετρονίων	2
1.1 Γενικά.....	2
1.2 Προέλευση	4
1.3 Δομή.....	6
B) Η Θεωρία της Σχετικότητας.....	8
1.4 Οι νόμοι του Νεύτωνα έχουν περιορισμένη ισχύ.....	8
1.5 Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας	10
1.6 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.....	15
1.6.1 Εισαγωγή.....	15
1.6.2 Αρχή της ισοδυναμίας.....	16
1.7 Τα Κλασσικά Πειράματα	23
1.7.1 Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή	23
1.7.2 Καμπύλωση του Φωτός.....	24
1.7.3 Καθυστερήσεις αντανάκλασεων από <i>radar</i>	25
1.7.4 Βαρυτική Μετατόπιση στο Ερυθρό	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	27
Εισαγωγή.....	27
2.1 Γενικά συναλλοίωτες εξισώσεις.....	28
2.2 Ορισμοί - Μετασχηματισμοί τανυστών	30
2.3 Τανυστική Άλγεβρα	34
2.4 Μετρικοί Χώροι - Μετρικός Τανυστής.....	35
2.5 Εξισώσεις κίνησης σωματιδίων - Η $1^{\text{η}}$ παράγωγος του μετρικού τανυστή	41
2.6 Το νευτώνειο όριο	50
2.7 Συναλλοίωτη Παράγωγος.....	51
2.8 Απόκλιση ανταλλοίωτου διανύσματος	54

2.9 Παράλληλη Μετατόπιση Κατά Μήκος Καμπύλης	56
2.10 Τανυστής <i>Riemann</i>	58
2.11 Παράλληλη Μεταφορά κατά Μήκος Κυκλικής Διαδρομής	63
2.12 Γεωδαισιακή Απόκλιση.....	65
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	68
Εισαγωγή.....	68
3.1 Τανυστής της ύλης	68
3.2 Μερικές ειδικές περιπτώσεις του $T^{\alpha\beta}$	74
3.3 Διατήρηση ενέργειας-ορμής στον επίπεδο χωροχρόνο της <i>EΘΣ</i>	76
3.4 Ο τανυστής της ύλης σε καμπύλους χώρους της <i>ΓΘΣ</i> - τοπική διατήρηση ενέργειας-ορμής	79
3.5 Εξισώσεις πεδίου Einstein.....	80
3.6 Εξισώσεις Einstein στο κενό	87
3.7 Εξίσωση κατάστασης σε αστέρες νετρονίων και λευκούς νάνους	91
A) Θερμική πίεση	92
B) Πίεση <i>Fermi</i>	92
Λευκοί Νάνοι.....	95
Αστέρες Νετρονίων	100
3.8 Πιο ρεαλιστικά μοντέλα	104
3.9 Εισάγοντας πυρηνικά δυναμικά στην καταστατική εξίσωση	105
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	113
Εισαγωγή.....	113
4.1 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου <i>Einstein</i> περίξ του αστέρα	113
4.2 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου <i>Einstein</i> στο εσωτερικό μη σχετικιστικού πολυτροπικού αστέρα	117
4.3 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου <i>Einstein</i> σε σχετικιστικά πολύτροπα	126
4.4 Επίλυση των εξισώσεων Tollman-Oppenheimer-Volkoff.....	131
A) Μοντέλο σταθερής πυκνότητας	131
B) Μοντέλο πολυτροπικής πίεσης.....	132
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	167
Βιβλιογραφία	174

Παράρτημα.....	174
----------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετώνται οι εξισώσεις που περιγράφουν τη δομή και τη δυναμική των αστέρων στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σκοπός είναι ο ποσοτικός προσδιορισμός των βασικών χαρακτηριστικών μη περιστρεφόμενων, σφαιρικά συμμετρικών, σχετικιστικών άστρων τα οποία συγκρατούνται σε υδροστατική ισορροπία. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι πιο μαζικοί λευκοί νάνοι και οι αστέρες νετρονίων. Σχετικιστικά ονομάζονται αντικείμενα που είναι τόσο πυκνά ώστε το ισχυρότατο βαρυτικό πεδίο τους και τα φυσικά φαινόμενα που αυτό προκαλεί να μην εξηγούνται από την Κλασική Φυσική και τους νόμους του *Newton* αλλά άπτονται των ορίων της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του *Einstein*. Λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein*, μέσω υπολογιστικού προγράμματος της *Mathematica* θα εξετάσουμε τις σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των ιδιζόντων μεγεθών του αστέρα: της μάζας, της ακτίνας και της πίεσης στο εσωτερικό του. Η χρήση του προγράμματος γίνεται λόγω αδυναμίας εξεύρεσης αναλυτικών λύσεων των μη - γραμμικών διαφορικών εξισώσεων *Einstein*, οπότε για την επίλυσή τους θα χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικές μέθοδοι. Το μοντέλο μας θα περιλαμβάνει μόνο με την ειδική - μη ρεαλιστική - περίπτωση των μη περιστρεφόμενων σφαιρικά συμμετρικών άστρων οπότε θα αγνοηθεί κάθε συνεισφορά από *περιστροφικές κινήσεις και μαγνητικά πεδία* στις εξισώσεις.

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού θα δοθεί μία εικόνα για την προέλευση, την φύση και την δομή ενός αστέρα νετρονίων, ο οποίος είναι και το βασικό σχετικιστικό άστρο, ενώ στην δεύτερη, θα εξηγηθούν οι λόγοι για τους οποίους στο όριο των υπέρπυκνων ουρανίων σωμάτων πρέπει να εγκαταλείψουμε τους νόμους της νευτώνειας βαρυτικής θεωρίας, αλλά οι κατάλληλοι είναι οι διορθωτικοί νόμοι της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

A) Αστέρες Νετρονίων

1.1 Γενικά

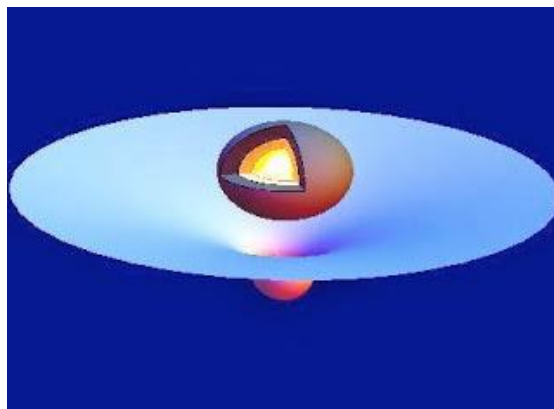
Ο αστέρας νετρονίων είναι συνήθως το αποτέλεσμα της κατάρρευσης ενός άστρου, που συμβαίνει όταν αυτό έχει πλέον εξαντλήσει όλο το πυρηνικό καύσιμο, με αποτέλεσμα η πίεση στο εσωτερικό του να μην μπορεί πια να αντισταθεί στην βαρύτητα. Το αποτέλεσμα της κατάρρευσης είναι κάποια στιγμή τα εξωτερικά στρώματα του άστρου να εκραγούν ως ένα θεαματικό *supernova* (εικόνα 1.1.1), ενώ ο πυρήνας του άστρου συμπιέζεται σε τέτοιο βαθμό που τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να ενώνονται με τα πρωτόνια σχηματίζοντας νετρόνια, ώσπου το τελικό αντικείμενο να είναι μία υπέρ συμπαγής σφαίρα που αποτελείται κυρίως από νετρόνια και έχει ακτίνα της τάξης των 10km . Ένας αστέρας νετρονίων με λίγα λόγια, είναι σαν ένας τεράστιος ατομικός πυρήνας, όπου η δύναμη που τον συγκρατεί και τον διαμορφώνει είναι η δύναμη της βαρύτητας.



Εικόνα 1.1.1: Neutron star, “*Eye of the cat*”

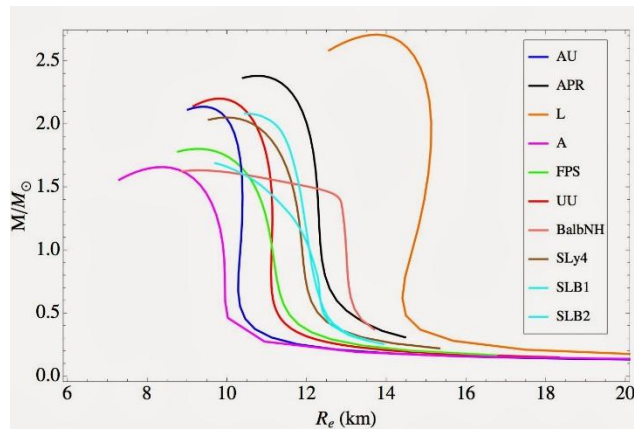
Για να περιγράψει λοιπόν κανείς έναν αστέρα νετρονίων και το χωροχρόνο (εικόνα 1.1.2) γύρω από αυτόν, χρειάζεται να λύσει τις εξισώσεις πεδίου της γενικής σχετικότητας, οι οποίες περιγράφουν το πως διαμορφώνεται η γεωμετρία και άρα η βαρύτητα από την ύλη, τις σχετικιστικές υδροδυναμικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν το πως κινείται αυτή η ύλη, δηλαδή το ρευστό από το οποίο αποτελείται ο

αστέρας, και τέλος χρειάζεται και μια καταστατική εξίσωση για την ύλη, η οποία έχει τις πληροφορίες για τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του υλικού από το οποίο αποτελείται ο αστέρας και πιο συγκεκριμένα περιγράφει το πως συμπεριφέρεται η πίεση του ρευστού δεδομένης της πυκνότητάς του. Το σύνολο λοιπόν αυτών των εξισώσεων πρέπει να λυθεί παντού, μέσα στο άστρο και έξω από αυτό, για να πάρει κανείς τελικά την περιγραφή της δομής του αστέρα νετρονίων και του χωροχρόνου γύρω από αυτόν.



Εικόνα 1.1.2: Χωροχρόνος γύρω από έναν αστέρα νετρονίων

Το σύστημα τώρα αυτών των εξισώσεων είναι αρκετά περίπλοκο και η λύση του μπορεί να γίνει μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Πέρα όμως από την περιπλοκότητα των εξισώσεων πεδίου και των εξισώσεων της υδροδυναμικής, υπάρχει και μία ακόμα δυσκολία στο όλο πρόβλημα, και αυτή είναι ότι η καταστατική εξίσωση της ύλης στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων, δεν είναι πολύ καλά γνωστή. Στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων, υπάρχουν περιοχές όπου η πυκνότητα ξεπερνά την πυκνότητα που βρίσκει κανείς στο εσωτερικό των ατομικών πυρήνων και οι ιδιότητες της ύλης σε αυτές τις πυκνότητες δεν έχει διερευνηθεί ακόμα επαρκώς στο εργαστήριο, ενώ ακόμα και η θεωρητική περιγραφή είναι αρκετά δύσκολη και περίπλοκη. Ένας από τους στόχους του *LHC* είναι να διερευνήσει τις ιδιότητες της ύλης κοντά σε τέτοιες πυκνότητες. Έτσι, λοιπόν, με βάση διάφορα θεωρητικά μοντέλα, υπάρχει ένα πλήθος από καταστατικές εξισώσεις που έχουν προταθεί για να περιγράψουν το εσωτερικό των αστέρων νετρονίων. Και αυτή η ποικιλία έχει ως αποτέλεσμα αρκετή αβεβαιότητα στις μακροσκοπικές ιδιότητες των αστέρων νετρονίων, όπως είναι η μάζα τους και η ακτίνα τους για παράδειγμα.



Σχήμα 1.1.1: Μάζα συναρτήσει της ακτίνας

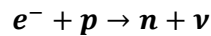
Το παραπάνω σχήμα δείχνει αυτό ακριβώς. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιστοιχούν σε οικογένειες μη περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, οι οποίες έχουν κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας διαφορετικές ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις, όπου αυτό που αλλάζει κατά μήκος της κάθε καμπύλης είναι η πυκνότητα του υλικού στο κέντρο του αστερά νετρονίων. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις οδηγούν σε άστρα με διαφορετικές μάζες και ακτίνες (ο οριζόντιος άξονας είναι η ακτίνα σε χιλιόμετρα και ο κατακόρυφος είναι η μάζα σε μάζες Ήλιου).

Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ακόμα ότι μια πιθανή μέτρηση της μάζας και της ακτίνας αρκετών αστέρων νετρονίων, θα μπορούσαν να μας δώσουν μια εκτίμηση για το ποια ή ποιες καταστατικές εξισώσεις από αυτές που έχουν προταθεί, είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα και μπορεί να περιγράψει με καλύτερη ακρίβεια την ύλη στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων.

1.2 Προέλευση

Ένα άστρο νετρονίων προέρχεται από την έκρηξη εξαιτίας της βαρυτικής κατάρρευσης ενός άστρου μεγάλης μάζας $\sim 10 - 50$ ηλιακές μάζες. Κατά τη διάρκεια της ζωής του διατηρεί το μέγεθός του εξαιτίας δύο αντισταθμιστικών δυνάμεων, της βαρύτητας με κατεύθυνση προς το κέντρο και της πίεσης λόγω των εξώθερμων πυρηνικών αντιδράσεων σύντηξης με αντίθετη κατεύθυνση. Προς το τέλος της ζωής του ο ρυθμός πυρηνικών αντιδράσεων πέφτει εκθετικά με το χρόνο και έτσι η βαρύτητα κερδίζει συνεχώς έδαφος υπερνικώντας την πίεση. Ως αποτέλεσμα, το άστρο συμπιέζεται με

εκρηκτική αύξηση της πίεσης και ταυτόχρονη μείωση του μεγέθους του. Η θερμοκρασία του αυξάνεται πάλι και έτσι, επιταχύνονται οι αντιδράσεις σύντηξης στο κέντρο το οποίο μετατρέπεται σιγά – σιγά σε μια συμπαγή σφαίρα από σίδηρο. Σε πυκνότητες μεγαλύτερες από είναι ενεργειακά προτιμότερο για τα δέσμια στους πυρήνες πρωτόνια να απορροφήσουν ένα ελεύθερο (λόγω ενεργειακών ιονισμών) σχετικιστικό ηλεκτρόνιο και να μετατραπούν σε νετρόνιο μέσω της αντίστροφης β – διάσπασης:



Μόλις η πυκνότητα στο κέντρο φτάσει τα $4 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$ οι πυρήνες «αισθάνονται» έντονα την ηλεκτροστατική τους άπωση μετατρέποντας τον πυρήνα σε ένα εξαιρετικά ασυμπίεστο υλικό, αποτελούμενο σχεδόν αποκλειστικά από νετρόνια, χιλιάδες φορές πιο σκληρό από κάθε γήινη κατάσταση ύλης. Τα καταρρέοντα λόγω βαρύτητας υπερκείμενα στρώματα, τα οποία αποτελούνται ακόμα κατά 85% από υδρογόνο, προσκρούουν με ταχύτητες χιλιάδων χιλιομέτρων την ώρα στον ανένδοτο πυρήνα και αναπηδούν συναντώντας τα επόμενα στρώματα προκαλώντας βίαιες κινήσεις με ταυτόχρονη αύξηση πίεσης και θερμοκρασίας (εκατομμυρίων βαθμών °C). Το αποτέλεσμα των κινήσεων αυτών είναι η δημιουργία ενός ωστικού κρουστικού κύματος το οποίο φθάνει στα εξωτερικά στρώματα όπου η πίεση είναι πολύ μικρότερη, και τα εκτινάσσει στο διάστημα με υπερβολικές ταχύτητες αυξάνοντας παράλληλα τη φωτεινότητα του άστρου κατά εκατομμύρια φορές. Έτσι το υπόλοιπο, μεγάλης μάζας, άστρο διαλύεται από την έκρηξη (λόγω της ισοδυναμίας ενέργειας-μάζας, $E = mc^2$) ενώ παραμένει μία σταθερή κατάσταση ύλης συμπιεζόμενη από το ίδιο της το βάρος. Σε αυτή την εναπομένουσα κατάσταση η βαρύτητα αντισταθμίζεται από την *απαγορευτική αρχή του Pauli*, όπου τα νετρόνια απαγορεύεται να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση στον ίδιο χώρο αυξάνοντας έτσι την κινητική τους ενέργεια. Έτσι έχουμε τον σχηματισμό μιας εξαιρετικά συμπιεσμένης ύλης άφθονης σε νετρόνια και σε μικρότερο βαθμό πρωτόνια και ηλεκτρόνια (ώστε να διατηρείται η ηλεκτρική ουδετερότητα) δημιουργώντας ένα τεράστιο «ατομικό πυρήνα» αποτελούμενο από $\sim 10^{57}$ νετρόνια ή αλλιώς, έναν *αστέρα νετρονίων*.

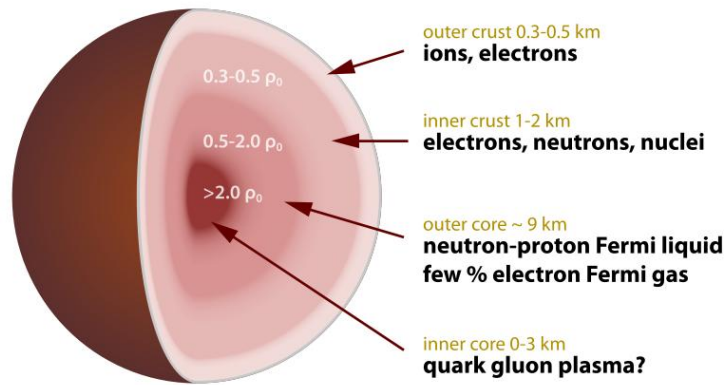
1.3 Δομή

Η ατμόσφαιρα ενός συνηθισμένου άστρου νετρονίων δεν ξεπερνά σε πάχος τα λίγα cm και ο φλοιός τις μερικές εκατοντάδες μέτρα. Αποτελείται από ατομικούς πυρήνες, κυρίως Fe και ελαφρότερων στοιχείων στο άνω τμήμα του, ενώ στο κατώτερο, από βαρύτερους πυρήνες και ελεύθερα ηλεκτρόνια για να διατηρούν την ηλεκτρική ουδετερότητα του αστέρα. Τα ηλεκτρόνια αυτά καλούνται *εκφυλισμένα* διότι βρίσκονται τόσο κοντά μεταξύ τους ώστε να είναι αναγκασμένα να καταλαμβάνουν όλο και μεγαλύτερες ενεργειακές στάθμες εξαιτίας της απαγορευτικής αρχής του *Pauli*. Η τελευταία στάθμη ονομάζεται *ενέργεια Fermi* και αρκετά υψηλή ώστε να ευνοούνται καταστάσεις υπεραγωγιμότητας και υπερρευστότητας στην περιοχή.

Σε μεγαλύτερο βάθος στο εσωτερικό, η πυκνότητα ξεπερνά τα $4 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$ όπου οι εξαιρετικά υψηλές πιέσεις αυξάνουν σε τέτοιο βαθμό την κινητική ενέργεια των νετρονίων ώστε μερικά από αυτά να διαφεύγουν από τους πυρήνες (*neutron drip*) και τα εναπομείναντα πρωτόνια να αλληλεπιδρούν ασθενώς (οι καταστάσεις πλέον είναι *μη δέσμιες*) με τα ηλεκτρόνια που έλκουν δίπλα τους παράγοντας έτσι νετρόνια. Έτσι κυριαρχούν τα ελεύθερα νετρόνια με ένα ποσοστό 5 – 10% της μάζας του στρώματος να καταλαμβάνεται ακόμη από πρωτόνια - ηλεκτρόνια.

Ακόμη πιο κοντά στον αστρικό πυρήνα σε πυκνότητες 10^{12} gr/cm^3 τα νετρόνια ενώνονται γραμμικά ή και πλευρικά, ενώ ακόμη βαθύτερα, φαίνεται ότι σχηματίζεται μία αδιάσπαστη μάζα ενωμένων νετρονίων που τα κουάρκ τους εφάπτονται.

Τέλος, στις κεντρικές περιοχές όπου η πυκνότητα ξεπερνά τα $2 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$ τα κουάρκ φαίνεται ότι παύουν να σχηματίζουν νετρόνια και ανασυνδυάζονται σε πραγματικά εξωτικές οντότητες, όπως συμπυκνώσεις πιονίων, σωματίδια λάμδα, ή άμορφο πλάσμα κουάρκ - γλουονίων (εικόνα 1.3.1). Η αδυναμία αναπαραγωγής τέτοιων μορφών ύλης στο εργαστήριο οδηγεί στην δυσκολία κατανόησης του τι ακριβώς συμβαίνει στα βάθη του εσωτερικού ενός άστρου νετρονίων και αυτή είναι και η μεγάλη πρόκληση των φυσικών που ασχολούνται με τα ουράνια αυτά σώματα.



Εικόνα 1.3.1: Δομή αστέρα νετρονίων

Στη πορεία μας προς το κέντρο του αστέρα νετρονίων συναντάμε περιοχές όπου οι ιδιότητες της ύλης περιγράφονται από τις κβαντοηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων ακριβώς όπως αυτές των σωμάτων στη Γη, σε μεγαλύτερες πυκνότητες, περιοχές που καθορίζονται από την αρχή του *Pauli* και τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, ακόμα πιο μέσα, και τέλος περιοχές όπου ηλεκτρόνια και πρωτόνια έχουν εξαφανιστεί σχηματίζοντας μόνο έναν τεράστιο ατομικό πυρήνα ο οποίος αποτελείται από 10^{57} νετρόνια και περιγράφεται από τις δυνάμεις της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Κατά τη διάρκεια, βέβαια, αυτής της πορείας η βαρύτητα είναι πανταχού παρούσα και παίζει καθοριστικό ρόλο στα φαινόμενα τα οποία διαδραματίζονται εκεί.

Συνεπώς για την πλήρη περιγραφή των φαινομένων στα άστρα νετρονίων χρειαζόμαστε γνώσεις από όλους σχεδόν τους κλάδους της Φυσικής. Κυρίαρχη θέση βέβαια θα παίζει η βαρύτητα αφού είναι η μόνη δύναμη που μπορεί να συμπιέσει το άστρο σε τόσο μικρή ακτίνα. Από την άλλη μεριά η αντισταθμίζουσα δύναμη θα έχει σίγουρα να κάνει με τη πίεση και την πυκνότητα του άστρου στο εσωτερικό του όποτε αυτό ακριβώς είναι που θα αναζητήσουμε για την ισορροπία του, μία κατάλληλη θεωρία για την βαρύτητα και μία κατάλληλη εξίσωση κατάστασης στο εσωτερικό του.

B) Η Θεωρία της Σχετικότητας

1.4 Οι νόμοι του Νεύτωνα έχουν περιορισμένη ισχύ

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα κάνουμε μια εισαγωγή στη Θεωρία της Σχετικότητας - Ειδική και Γενική - εξηγώντας βασικά τους λόγους για τους οποίους οι νόμοι του *Newton* δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα στην περίπτωση μας.

Όλοι οι νόμοι της Φυσικής πρέπει αξιωματικά να ικανοποιούν την εξής πρόταση:

«Εάν ένας νόμος ισχύει σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τότε ο ίδιος νόμος θα πρέπει να ισχύει και σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα διατηρώντας τη μορφή του αναλλοίωτη».

Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως *αρχή της σχετικότητας*.

Ας εξετάσουμε ως προς την αρχή αυτή τους νόμους κίνησης των σωμάτων στη νευτώνεια μηχανική οι οποίοι αποτελούν σχέσεις μεταβολής των συντεταγμένων του σώματος στο επιλεγθέν σύστημα αναφοράς. Ο 2^{ος} νόμος του *Newton* σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων $K(x, y, z, t)$ γράφεται

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \quad (1.4.1)$$

Εκτελώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + ut \\ t &\rightarrow t' = t \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

μεταφερόμαστε στο νέο σύστημα $K'(x', y, z, t)$ το οποίο κινείται ομοιόμορφα κατά τον άξονα x με ταχύτητα u . Ο ίδιος νόμος στο K' γίνεται

$$\vec{F}' = m \frac{d^2(\vec{x}' - \vec{u}t)}{dt'^2} = m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} \quad (1.4.3)$$

Συγκρίνοντας τις (1.4.2) και (1.4.3) παρατηρούμε ότι ο νόμος διατηρεί τη μορφή του στα δύο συστήματα. Άρα, είναι συνεπής με την παραπάνω αρχή για μετασχηματισμούς τέτοιου είδους οι οποίοι ανήκουν στη γενικότερη κατηγορία των *μετασχηματισμών Γαλιλαίου* και θα τους δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω.

Αν όμως μετασχηματίσουμε - μη γραμμικά - στο $K''(x'', y, z, t)$, για παράδειγμα,

$$x \rightarrow x'' = x + ut^2, \quad u = \text{σταθ}$$

$$t \rightarrow t'' = t \quad (1.4.4)$$

θα πάρουμε

$$\vec{F}'' = m \frac{d^2 \vec{x}''}{dt''^2} + \text{const.} \quad (1.4.5)$$

Συμπεραίνουμε ότι κάτω από μη γραμμικούς μετασχηματισμών «αλλοιώνεται» η μορφή του νόμου, ενώ είναι προφανές ότι το ίδιο θα ισχύει για άπειρες περιπτώσεις μη γαλιλαϊκών μετασχηματισμών. Τα ίδια ακριβώς θα πρέπει να ισχύουν και για τον νόμο της βαρύτητας του *Newton*, αφού η F μπορεί να είναι βαρυτική, καταδεικνύοντας έτσι την εμφάνιση νέων δυναμικών όρων όπως η σταθερά της (1.4.5) οι οποίοι λέγονται γενικά *κινηματικές δυνάμεις*. Αξιοματικά και μόνο λοιπόν, πρέπει να βρεθούν διαφορετικές εξισώσεις που να επαληθεύουν την παραπάνω αρχή. *Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι οι νόμοι του Newton δίνουν, ακόμα και με την κλασική τους μορφή, αποτελέσματα τα οποία συνάδουν με τις παρατηρήσεις, απλώς δεν έχουν το χαρακτηριστικό της παγκοσμιότητας όπως θα έπρεπε. Η ουσία όμως είναι πραγματικά πιο εντυπωσιακή και έχει να κάνει με την μη ορθότητά τους ως προς τις προβλέψεις η οποία και έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά.*

Ο νόμος του *Newton* για τη βαρύτητα,

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{(r_2 - r_1)^2} \hat{r} \quad (1.4.6)$$

είναι ένας, αρκετά καλά, πειραματικά ελεγμένος νόμος πάνω στην Γη αλλά και στην γειτονιά του Ηλιακού μας συστήματος. Μια προσεκτικότερη παρατήρηση του νόμου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ζητούμενη βαρυτική δύναμη εξαρτάται από την τιμή της απόστασης $|r_2 - r_1|$. Αυτή υπολογίζεται σχετικά εύκολα είτε με γεωμετρικούς υπολογισμούς είτε από άμεση μέτρηση. Κάνουμε το υποθετικό σενάριο ότι σε μια άλλη περιοχή του Σύμπαντος η γεωμετρία του χώρου δεν είναι ευκλείδεια, π.χ. ότι αντί για το πυθαγόρειο θεώρημα $x^2 + y^2 = z^2$ ισχύει μια άλλη σχέση έστω $x^2 + y^2 < z^2$ και ότι εμείς όμως δεν το ξέρουμε αυτό (και πώς να το ξέρουμε άλλωστε). Τότε αν κάποιος εκτελέσει ένα *πείραμα* μέτρησης της βαρύτητας εκεί θα βρει σίγουρα διαφορετικά αποτελέσματα από εμάς που θα εφαρμόσουμε απλώς την (1.4.6), ακριβώς γιατί θα έχουμε διαφορετικές τιμές της ποσότητας $|r_2 - r_1|$. Προφανώς ο νόμος του *Newton* δεν μπορεί να προβλέψει σωστά τα φαινόμενα και αυτό συμβαίνει επειδή δεν συνυπολογίζει την υποτιθέμενη μεταβολή των *μετρικών ιδιοτήτων* των συντεταγμένων – θεωρεί ότι παντού ο χώρος είναι επίπεδος. Στο τέλος θα δούμε ότι αυτή η

«ελαστικότητα» των συντεταγμένων είναι αναπόφευκτη και επομένως ο κλαστικός νόμος βαρύτητας θα ισχύει μόνο στις κατά προσέγγιση «γήινες» γειτονιές του σύμπαντος. Αυτός λοιπόν είναι ο λόγος για τον οποίο θα τον εγκαταλείψουμε για την περίπτωση των άστρων νετρονίων, γιατί στην δική τους γειτονιά η γεωμετρία του χωροχρόνου απέχει έντονα από την δεδομένη ευκλείδεια!

Σε γενικές γραμμές, οι νόμοι του *Newton* δεν υπακούουν σε δύο βασικές αρχές:

1. Στη σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός
2. Στην αρχή της ισοδυναμίας

και αυτό γιατί και οι δύο δεν συναντώνται εύκολα στα όρια της Γης.

1.5 Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Η πρώτη αμφισβήτηση της θεώρησης ενός απόλυτου τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου και της ανεξάρτητης συντεταγμένης του χρόνου ήρθε σαν αποτέλεσμα της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός και δεν έχει να κάνει με περιοχές του χώρου αλλά με συστήματα συντεταγμένων.

Υπάρχει μια κατηγορία συστημάτων αναφοράς τα οποία χαρακτηρίζονται από την εξής ιδιότητα: εάν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη τότε αυτό θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα. Αυτά ονομάζονται *αδρανειακά συστήματα αναφοράς (ΑΣΑ)*. Έστω, λοιπόν, δύο αδρανειακά συστήματα $K(x, y, z, t)$ και $K'(x', y', z', t')$, τα οποία κινούνται ομοιόμορφα μεταξύ τους με σχετική ταχύτητα u κατά την διεύθυνση του x -άξονα. Τότε, σύμφωνα με τον Γαλιλαίο οι συντεταγμένες τους θα συνδέονται μέσω των μετασχηματισμών,

$$\begin{aligned}x' &= x + ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t \quad (1.5.1)\end{aligned}$$

Επομένως, οι συνιστώσες ταχύτητας (v^x, v^y, v^z) ενός κινούμενου σωματιδίου στο K θα μετασχηματίζονται στο K' ως εξής

$$(v^{x'}, v^{y'}, v^{z'}) = (v^x + u, v^y, v^z) \quad (1.5.2)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως *κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Νεύτωνα*. Έστω τώρα ότι το σωματίδιο αυτό είναι ένα φωτόνιο. Τότε αν στο σύστημα K η ταχύτητα του φωτονίου είναι c , στο K' θα είναι $c + u$ σύμφωνα με την (1.5.2). Οι λύσεις των εξισώσεων του *Maxwell*, όμως, προβλέπουν ότι το κενό «επιτρέπει» την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (φωτονίων) με την πολύ συγκεκριμένη ταχύτητα

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (1.5.3)$$

Η τιμή της (1.5.3) είναι προφανώς σταθερή σε κάθε σύστημα αναφοράς, συνεπώς πρέπει είτε να τροποποιηθούν οι εξισώσεις *Maxwell* είτε οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου και η πρόσθεση ταχυτήτων του *Newton*. Την απάντηση έδωσε το διάσημο πείραμα *Michelson-Morley* (1887) το οποίο έψαχνε να βρει ακριβώς αυτό το ξεχωριστό σύστημα (τον «αιθέρα») που το φως είχε την ταχύτητα c αλλά και διαφορές στην ταχύτητα του φωτός σε άλλα συστήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το φως διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και έτσι οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου δεν είναι σωστοί - τουλάχιστον για σώματα που κινούνται με ταχύτητα $u \approx c$. Επίσης, οι σωστοί μετασχηματισμοί αδρανειακών συστημάτων συντεταγμένων θα πρέπει να αφήνουν τις εξισώσεις *Maxwell* και την ταχύτητα του φωτός αναλλοίωτες. Η νέα αυτή ομάδα μετασχηματισμών των χωροχρονικών συντεταγμένων x, y, z, t ονομάζεται ομάδα μετασχηματισμών *Lorentz* και υπό μορφή πινάκων δίνεται από την σχέση:

$$X' = LX + b \quad (1.5.4)$$

όπου X ο πίνακας – στήλη (x, y, z, t) και L ένας 4×4 πίνακας με την ιδιότητα,

$$L^T \eta L = \eta, \quad \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.5.5)$$

Μια πιο οικεία σχέση των χωροχρονικών συντεταγμένων $A\Sigma A$, (1.5.4), είναι

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - ux) \quad , \quad \gamma \equiv (1 - u^2)^{-1/2} \\ x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Όπως επαληθεύεται εύκολα, οι νόμοι του *Maxwell* για τον Ηλεκτρομαγνητισμό είναι αναλλοίωτοι μόνο κάτω από *Lorentz* - μετασχηματισμούς οπότε είναι συνεπείς με την ειδική αρχή της σχετικότητας όπως ονομάζεται η αρχή της σχετικότητας όταν

αναφέρεται σε αδρανειακά συστήματα. Αφού είμαστε σίγουροι τώρα ότι αυτοί είναι οι σωστοί μετασχηματισμοί το επόμενο βήμα είναι να εφαρμοστούν και στους υπόλοιπους φυσικούς νόμους έτσι ώστε να τους αφήνουν αναλλοίωτους (*κριτήριο της σχετικότητας*). Ο επόμενος προφανώς νόμος που θα έπρεπε να είναι *Lorentz*-αναλλοίωτος δεν μπορούσε να ήταν άλλος από τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής και βαρύτητας. Η νευτώνεια μηχανική, όπως είδαμε, ορίζει μια οικογένεια συστημάτων αναφοράς, τα αδρανειακά συστήματα, στα οποία οι νόμοι της φυσικής παίρνουν την μορφή που έχουν στα *Principia*. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις για ένα σύστημα σωματιδίων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά είναι

$$m_N \frac{d^2 x_N}{dt^2} = G \sum_N \frac{m_N m_M (x_M - x_N)}{|x_M - x_N|^3} \quad (1.5.7)$$

όπου m_N η μάζα του N σωματιδίου και x_N το Καρτεσιανό διάνυσμα θέσης του στο χρόνο t . Είναι απλό να ελέγξουμε ότι αυτές οι εξισώσεις έχουν την ίδια μορφή όταν γράφονται στις νέες χωροχρονικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} x' &= R x + v t + a \\ t' &= t + \tau \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Όπου v , a και τ πραγματικές διανυσματικές ή βαθμωτές σταθερές και R ένας ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. (Αν οι O και O' αναφέρονται στο αρχικό και τελικό σύστημα συντεταγμένων αντίστοιχα, τότε το O' βλέπει το O σύστημα στραμμένο από τον R , κινούμενο με μια ταχύτητα v , μετατοπισμένο για $t = 0$ κατά a , και το O' «βλέπει» το ρολόι του O να υπολείπεται κατά χρόνο τ). Οι μετασχηματισμοί (1.5.7) σχηματίζουν μια ομάδα 10 παραμέτρων (3 Ευκλείδειων γωνιών στον R , συν τρεις συνιστώσες για το v και τρεις για το a , συν μία για το t) η οποία σήμερα καλείται *ομάδα του Γαλιλαίου* και το αναλλοίωτο των νόμων της κίνησης κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς αναλλοίωτο του Γαλιλαίου, ή Αρχή της Σχετικότητας του Γαλιλαίου. Η διαφορά από εκείνους της (1.5.4) βρίσκεται στην απαίτηση (1.5.5) την οποία δεν πληρούν.

Όμως υπάρχουν πάρα πολλοί μετασχηματισμοί που δεν αφήνουν τις εξισώσεις της κίνησης αναλλοίωτες. Για παράδειγμα, η (1.5.7) δεν διατηρεί την μορφή της αν την μετασχηματίσουμε σε ένα επιταχυνόμενο ή περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή, αν επιτρέψουμε στο v ή στο R να εξαρτάται από το t . Αυτό που μας ενδιαφέρει

προς το παρόν είναι ότι η (1.5.7) δεν παραμένει αναλλοίωτη ούτε κάτω από *Lorentz* μετασχηματισμούς όπως είναι εύκολο να δειχθεί κάνοντας την αντικατάσταση (1.5.6). Έτσι ο *Einstein* πρότεινε ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου (1.5.8) θα έπρεπε να αντικατασταθούν από έναν διαφορετικό χωροχρονικό μετασχηματισμό 10 παραμέτρων, τους μετασχηματισμούς του *Lorentz*, κάτω από τους οποίους οι εξισώσεις *Maxwell*, η ταχύτητα του φωτός και οι νόμοι κίνησης ικανοποιούν την ειδική αρχή της σχετικότητας. Έτσι, το 1905, οδηγήθηκε σε μια νέα θεώρηση του χώρου και του χρόνου, τον τετραδιάστατο χωροχρόνο, όπου οι εξισώσεις οδηγούσαν στην οριστική εγκατάλειψη:

1. της ανεξαρτησίας χώρου-χρόνου
2. του απόλυτου χρόνου και
3. του επίπεδου ευκλείδειου χώρου

Η θεωρία αυτή ονομάστηκε *Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ)*.

Παραθέτουμε στον παρακάτω πίνακα τις βασικές σχέσεις και μερικά σημαντικά αποτελέσματα της:

Αποτελέσματα ΕΘΣ

Διανύσματα \rightarrow Τετραδιανύσματα: $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$

$$1\text{ος νόμος του Newton: } du^i/d\tau = 0$$

$$2\text{ος νόμος του Newton: } m du^i/d\tau = f^i$$

$$\text{Προωθήσεις Lorentz: } t' = \gamma(t - ux) \quad , \quad \gamma \equiv (1 - u^2)^{-1/2}$$

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\text{Στοιχείο Μήκους Επίπεδου Χωροχρόνου: } ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\text{Ιδιοχρόνος: } d\tau^2 = -ds^2/c^2$$

$$\text{Διαστολή του χρόνου: } dt = dt' \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

Σχετικότητα του ταυτόχρονου: αν ισχύει $\Delta t' = 0$ στο (ct', x') σύστημα τότε, $\Delta t = \gamma(v/c^2)\Delta x'$, σε ένα αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα u κατά την x -διεύθυνση.

$$\text{Συστολή του Μήκους: } dl = dl' \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$$

Σχετικιστική Πρόσθεση Ταχυτήτων: $v^{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v^x - u}{1 - uv^x/c^2}$, για σωματίδιο κινούμενο με ταχύτητα u κατά την x -διεύθυνση.

$$\text{Σχετικιστική ισοδυναμία μάζας – ενέργειας: } E = mc^2$$

$$\text{Τετράνυσμα Ενέργειας-Ορμής: } P^\mu = (E, \mathbf{P})$$

Ωστόσο, αν και η τροποποίηση στην οποία έχει επιβάλλει την θεωρία του χώρου και του χρόνου η ΕΘΣ, έχει πράγματι μακρά αποβλέπουσες επιπτώσεις, υπάρχει ένα ακόμα σημαντικό σημείο που έχει μείνει ανεπηρέαστο. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι νόμοι της Φυσικής, στην μορφή που τους έδωσαν οι *Maxwell* και *Einstein*, ισχύουν μόνο στην περιορισμένη κατηγορία των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Εάν επιλέξουμε κάποιον γενικό μετασχηματισμό οι εξισώσεις της ΕΘΣ δεν παραμένουν αναλλοίωτες. Επόμενη είναι λοιπόν η επέκταση σε μια αρχή γενικής σχετικότητας των φυσικών νόμων, η οποία οδήγησε στην *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ)* και σε μια

θεώρηση που δεν μπορεί να συνεχίσει να εμμένει σε αυτήν την απλή φυσική ερμηνεία του χωροχρόνου.

1.6 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

1.6.1 Εισαγωγή

Η δεύτερη και οριστική αμφισβήτηση περί του απόλυτου χώρου έχει τη βάση της στην αρχή της ισοδυναμίας. Το υποθετικό σενάριο το οποίο αναφέραμε καθίσταται πραγματικό και ενδεχομένως αναπόφευκτο.

Η ομάδα των μετασχηματισμών *Lorentz* δεν είναι σε καμία περίπτωση μεγαλύτερη από την από την ομάδα του Γαλιλαίου συνεπώς η αρχή της σχετικότητας δεν μπορεί να πηγάζει από την ειδική αρχή της σχετικότητας απεναντίας την παράγει. Θα χρειαστούν άλλες εξισώσεις οι οποίες θα είναι αναλλοίωτες κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς, ώστε να περιγράφουν φαινόμενα από κάθε είδους κινούμενο, περιστρεφόμενο ή επιταχυνόμενο παρατηρητή και οι *Lorentz* αναλλοίωτες θα είναι απλώς μια υποομάδα τους. Αυτός είναι ο δρόμος προς την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Όπως συμπέρανε ο ίδιος ο *Einstein*: «οποιαδήποτε τοποθέτηση συντεταγμένων στο χωροχρονικό συνεχές με έναν καθορισμένο τρόπο, ώστε να μπορούμε να περιγράψουμε με έναν ιδιαίτερα απλό φορμαλισμό τους νόμους της φύσης, οφείλει να καταρρεύσει. Έτσι, πρέπει να θεωρούμε όλα τα συστήματα συντεταγμένων κατάλληλα για την περιγραφή της φύσης πράγμα που οδηγεί στην ανάγκη για επέκταση της ειδικής αρχής της σχετικότητας και στην απαίτηση μιας γενικής συμμεταβλητότητας των εξισώσεων στους νόμους περιγραφής των φαινομένων...Οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να είναι τέτοιας φύσης ώστε να εφαρμόζονται σε συστήματα αναφοράς που κινούνται με οποιοδήποτε τρόπο...». Οι εξισώσεις που εκφράζουν τέτοιους νόμους λέγονται *γενικά συναλλοίωτες* και έχουν ως βασικό χαρακτηριστικό ότι παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις μεταβολές των συντεταγμένων από το ένα σύστημα στο άλλο. Η *ΓΘΣ* είναι μια *γενικά συναλλοίωτη σχετικιστική βαρυτική θεωρία*. Πέραν αυτού, ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του *Newton* είχε άλλη μία αδυναμία όπως προέκυπτε βάσει της *ΕΘΣ*: προέβλεπε ακαριαία δράσης της βαρυτικής δύναμης σε αντίθεση με το παγκόσμιο όριο ταχύτητας του φωτός.

Ο *Einstein* και άλλοι Φυσικοί (όπως οι *Nodström* και *Abraham*) προσπάθησαν να βρουν τις σχετικιστικές εξισώσεις πεδίου για τη βαρύτητα οι οποίες θα προέκυπταν από ένα βαθμωτό βαρυτικό δυναμικό όπως στη νευτώνεια θεωρία. Όλες οι προσπάθειες απέβησαν άκαρπες και το 1907 έγινε το πρώτο καθοριστικό βήμα όταν ο *Einstein* κατάφερε να συνδυάσει το πειραματικό γεγονός της ισότητας βαρυτικής και αδρανειακής μάζας των σωμάτων με μια κατάλληλη θεώρηση για την βαρύτητα, εισάγοντας την «*Αρχή της Ισοδυναμίας Βαρύτητας και Αδράνειας*». Η αρχή αυτή, όπως θα δούμε στο 2^ο κεφάλαιο, καθορίζει τα αποτελέσματα της βαρύτητας σε τυχαία φυσικά συστήματα αλλά δεν καθορίζει τις εξισώσεις πεδίου για την ίδια τη βαρύτητα. Μέσω της αρχής αυτής το πρόβλημα μετατράπηκε από δυναμικό σε γεωμετρικό και έτσι μπόρεσαν να εξαχθούν οι επιθυμητές εξισώσεις - με μόνη διαφορά ότι το ρόλο του πεδίου θα παίζει μια γεωμετρική ποσότητα και όχι το βαρυτικό δυναμικό Φ ! Με άλλα λόγια, αφού η βαρύτητα μπορεί να περιγραφεί εξίσου καλά με γεωμετρικούς όρους ο *Einstein* στράφηκε στο καθαρά μαθηματικό πρόβλημα της εξεύρεσης των σωστών, γενικά συναλλοιώτων, πεδιακών εξισώσεων για την βαρύτητα στις κατάλληλες γεωμετρίες. Το ευτύχημα ήταν ο συγκεκριμένος τομέας της γεωμετρίας είχε ήδη μελετηθεί και επιλυθεί από τους *Gauss*, *Riemann*, *Lobachevski* και άλλους μαθηματικούς από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Έτσι, προς τα τέλη του 1913, μια συνεργασία με τον μαθηματικό *M. Grossman* οδήγησε τον *Einstein* στην άποψη ότι αντί για ένα βαθμωτό βαρυτικό πεδίο που υπεισέρχεται στην εξίσωση *Laplace* $\nabla^2\Phi = 0$ θα έχουμε ένα που αναπαρίσταται από τις 10 συνιστώσες του *μετρικού τανυστή* στη Ριμάνεια χωροχρονική γεωμετρία. Τώρα θα δούμε την αρχή της ισοδυναμίας και τη γεωμετρική της σύνδεση με τις τέσσερις συντεταγμένες του χωροχρόνου.

1.6.2 Αρχή της ισοδυναμίας

Ο 2^{ος} νόμος του *Newton*,

$$\mathbb{F} = m_I \mathbb{a} \quad (1.6.2.1)$$

συνδέει τη δύναμη (βαρυτική, ηλεκτρομαγνητική, κτλ.) με την επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα μέσω μιας σταθεράς αναλογίας η οποία καλείται *μάζα αδρανείας* του

σώματος. Συγκεκριμένα, όταν μιλάμε για τη βαρύτητα ισχύει, ακόμα, ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του *Newton*

$$\mathcal{W} = (-\nabla\Phi)m_G = m_G\mathcal{G} \quad (1.6.2.2)$$

Η (1.6.2.2) συνδέει την ελκτική δύναμη του βάρους μεταξύ δύο σωμάτων με τη μεταβολή του βαρυτικού πεδίου μέσω μιας σταθεράς αναλογίας που λέγεται *βαρυτική μάζα*. Οι δύο αυτοί νόμοι μοιάζουν τελείως ανεξάρτητοι μεταξύ τους όμως απεδείχθη ότι έχουν ένα κοινό το οποίο είναι και η ουσία της αρχής της ισοδυναμίας. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.6.2.1) και (1.6.2.2) για ένα σωματίδιο κινούμενο μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας παίρνει κανείς τη σχέση

$$\mathcal{G} = \frac{m_G}{m_I} \mathcal{G} \quad (1.6.2.3)$$

Η ανακάλυψη του Γαλιλαίου ότι όλα τα σώματα «πέφτουν» με τον ίδιο ρυθμό σε ένα βαρυτικό πεδίο – ίσο με την επιτάχυνση του βαρυτικού πεδίου \mathcal{G} - ανεξάρτητα από την μάζα ή την σύστασή τους, συνεπάγεται από την (1.6.2.3) ότι

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} \Leftrightarrow m_G = m_I \quad (1.6.2.4)$$

Μπορεί λοιπόν να συμπεράνει κανείς ότι αδρανειακή και βαρυτική μάζα είναι ίσες. Πράγματι, σύγχρονα και πιο ακριβή πειράματα (*Dicke, Roll, κ.ά.*)¹ έχουν επαληθεύσει την ασθενή αρχή με ένα άνω όριο στην απόκλιση $\eta = (-0.2 \pm 2.8) \times 10^{-12}$.

Το γεγονός ότι η μεταβολή του βαρυτικού πεδίου, και μόνο αυτού, προκαλεί πάντα την ίδια επιτάχυνση στα σώματα ανεξάρτητα από τη μάζα τους μόνο τυχαίο δεν έμοιαζε στον *Einstein* ο οποίος εξέλαβε αυτή την ισότητα ως κάτι παραπάνω από μια απλή σύμπτωση. Συμπέρανε ότι αν και οι έννοιες βαρύτητα και επιτάχυνση έχουν διαφορετικό φυσικό νόημα, και άρα θα περιγράφονται από διαφορετικές εξισώσεις, πρέπει να παραδεχτούμε ότι τα αποτελέσματά τους είναι εντελώς μη διακρίσιμα, τουλάχιστον στην περίπτωση αντικειμένων με μάζα. Τα παραπάνω μπορούν να εξηγηθούν με το εξής παράδειγμα:

Θεωρούμε ένα σύστημα N σωματιδίων τα οποία κινούνται με μη σχετικιστικές ταχύτητες κάτω από την επίδραση δυνάμεων της μορφής $\mathcal{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$ (π.χ. ηλεκτροστατικές ή βαρυτικές δυνάμεις), ως προς κάποιο σύστημα $O(x, y, z, t)$, και ενός εξωτερικού βαρυτικού πεδίου \mathcal{G} . Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_principle#Tests_of_the_weak_equivalence_principle

$$m_{I,N} \frac{d^2 \mathfrak{x}_N}{dt^2} = m_{G,N} \mathfrak{g} + \sum_M \mathbb{F}(\mathfrak{x}_N - \mathfrak{x}_M) \quad (1.6.2.5)$$

Εκτελώντας έναν επιταχυνόμενο - μη Γαλιλαϊκό - μετασχηματισμό στο σύστημα στο τονούμενο σύστημα για την (1.6.2.5),

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}' &= \mathfrak{x} - \frac{1}{2} \mathfrak{g} t^2 \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.6.2.6)$$

παρατηρούμε ότι το \mathfrak{g} ακυρώνεται από μια αδρανειακή δύναμη ακριβώς λόγω της ισότητας $m_G = m_I$ οπότε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται,

$$m_N \frac{d^2 \mathfrak{x}'_N}{dt'^2} = \sum_M \mathbb{F}(\mathfrak{x}'_N - \mathfrak{x}'_M) \quad (1.6.2.7)$$

Τότε ο αρχικός παρατηρητής O που χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες \mathfrak{x} και ο φίλος του O' που εκτελεί ελεύθερη πτώση και χρησιμοποιεί τις \mathfrak{x}' δεν θα διαπιστώσουν καμία διαφορά στους νόμους της μηχανικής, εκτός του ότι ο O θα λέει ότι υπάρχει ένα βαρυτικό πεδίο ενώ ο O' όχι. Η Αρχή της Ισοδυναμίας λέει ότι αυτή η αναίρεση της βαρύτητας από την αδρανειακή δύναμη (και επομένως η ισοδυναμία τους) επιτυγχάνεται για όλα τα συστήματα που εκτελούν ελεύθερη πτώση. Μάλιστα, η αρχή επεκτείνεται λέγοντας ότι *δεν υπάρχει κανένα απολύτως πείραμα οποιουδήποτε φυσικού συστήματος (ακόμα και με άμαζα σωματίδια όπως φωτόνια ή τα νετρίνα) που να διακρίνει τις δύο παραπάνω καταστάσεις - ως προς τα αποτελέσματα είναι πλήρως ισοδύναμες (πρόκειται για την Ισχυρή Αρχή της Ισοδυναμίας)*. Από την άλλη, παρατηρούμε ότι προσθέτοντας ηλεκτροστατικούς ή γενικά μη βαρυτικούς όρους στην (1.6.2.5) αυτοί δεν ακυρώνουν κανένα μετασχηματισμό διότι οι μεταβολές εξαρτώνται από το εκάστοτε μη – βαρυτικό φορτίο.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε βέβαια να παρατηρήσουμε από την (1.6.2.5) ότι οι αδρανειακές δυνάμεις δεν αναιρούν ακριβώς τα βαρυτικά πεδία για συστήματα που εκτελούν ελεύθερη πτώση σε ανομοιογενή ή χρονοεξαρτώμενα βαρυτικά πεδία όπως επίσης και σε ομοιογενή όταν η κίνηση του υπό μελέτη συστήματος διαρκεί αρκετά ώστε να γίνει διακρίσιμη η ακτινική κίνηση λόγω βαρύτητας (το φαινόμενο λέγεται νευτώνεια απόκλιση και θα το ξαναδούμε στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου 2). Ωστόσο μπορούμε ακόμα να περιμένουμε μία κατά προσέγγιση αναίρεση αν εστιάσουμε την προσοχή μας σε μια μικρή περιοχή του χωροχρόνου, όπου το πεδίο

μεταβάλλεται πολύ λίγο. Έτσι φτάνουμε στην διατύπωση της Αρχής της Ισοδυναμίας του Αϊνστάιν ως εξής:

Σε κάθε χωροχρονικό σημείο σε ένα τυχαίο βαρυτικό πεδίο είναι δυνατόν να επιλέξουμε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς τέτοιο, ώστε σε μία αρκετά μικρή περιοχή του εν λόγω σημείου οι νόμοι της φύσης να έχουν την ίδια μορφή όπως σε ένα μη επιταχυνόμενο Καρτεσιανό σύστημα εν τη απουσία της βαρύτητας.

Οι συνέπειες της αρχής είναι εντυπωσιακές και θα μας οδηγήσουν στην γεωμετρική περιγραφή της βαρύτητας. Ας δούμε μια εφαρμογή της μέσω του παρακάτω πειράματος:

Πείραμα - Εφαρμογή της (ισχυρής) Αρχής της Ισοδυναμίας

Έστω δύο παρατηρητές, A και B, μέσα σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας επιτάχυνσης g με τον A να βρίσκεται σε ύψος h πάνω από τον B. Ο A εκπέμπει φωτεινά σήματα στον B σε ίσα χρονικά διαστήματα, $\Delta\tau_A$, σύμφωνα με το ρολόι του. Το ερώτημα είναι με ποιο ρυθμό, $\Delta\tau_B$, τα λαμβάνει ο B σύμφωνα με το δικό του ρολόι. Ο *Newton*, όπως και η *EΘΣ*, προβλέπουν ξεκάθαρα ότι $\Delta\tau_A = \Delta\tau_B$. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας όμως τα πράγματα δεν είναι ακριβώς έτσι. Τα ίδια αποτελέσματα θα πρέπει να πάρουμε, τοπικά, από το ισοδύναμο πείραμα όπου οι δύο ερευνητές βρίσκονται μακριά από βαρυτικά πεδία, μέσα σε ένα διαστημόπλοιο το οποίο επιταχύνεται με επιτάχυνση g , σε απόσταση h μεταξύ τους. Εξαιτίας αυτής της επιτάχυνσης ο B θα λαμβάνει τα σήματα όλο και πιο γρήγορα και έτσι τα ρολόγια τους θα δείχνουν διαφορετικούς χρόνους, $\Delta\tau_A \neq \Delta\tau_B$. Ποσοτικά και με τις παραδοχές, για χάριν απλότητας, ότι οι ποσότητες

$(v/c)^2$ και $\left(\frac{gh}{c^2}\right)^2$ είναι αμελητέες έτσι ώστε να μην υφίστανται μετρήσιμες συστολές *Lorentz* και το διαστημόπλοιο μας να μην επιταχύνεται σε σχετικιστικές ταχύτητες στο μικρό χρονικό μας διάστημα, δεν είναι δύσκολο να καταλήξουμε με την νευτώνεια μηχανική στην εξής σχέση:

$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad \text{Π.2.1}$$

Δηλαδή το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών λήψεων των παλμών είναι μικρότερο κατά έναν παράγοντα $\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)$ από το αντίστοιχο διάστημα εκπομπής. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και στην περίπτωση ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου. Έτσι, αφού οι ρυθμοί εκπομπής και λήψης είναι $1/\Delta\tau_A$ και $1/\Delta\tau_B$ αντίστοιχα και η διαφορά βαρυτικού δυναμικού μεταξύ των A και B ισούται με

$$\Phi_A - \Phi_B = gh \quad \text{Π.2.2}$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{\Delta\tau_B} = \left(1 + \frac{\Phi_A - \Phi_B}{c^2}\right) \frac{1}{\Delta\tau_A} \quad \text{Π.2.3}$$

Έτσι σε κάθε σημείο που είναι κοντύτερα στο κέντρο της Γης τα ρολόγια θα μετρούν «ταχύτερα». Αυτή ακριβώς είναι και η απάντηση στο υποθετικό σενάριο ότι η χρονική συντεταγμένη μπορεί να διαφέρει από περιοχή σε περιοχή και αυτό όπως βλέπουμε από την Π.2.3 εξαρτάται από την ποσότητα $\Phi_A - \Phi_B/c^2$.

Η μεταβολή λοιπόν στις τιμές των ρολογιών – ή αλλιώς στη χρονική συντεταγμένη - σε δύο διαφορετικά σημεία του χωροχρόνου είναι δεδομένη· πως όμως εξηγείται αυτή η διαφορά; Η μέχρι τώρα θεωρία για την βαρύτητα δεν μπορεί να δώσει καμία εξήγηση του φαινομένου πρώτον γιατί το βαρυτικό πεδίο της Γης δεν αλληλεπιδρά με τα άμαζα φωτόνια και δεύτερον δεν θα μπορούσε να δικαιολογήσει την διαφορά στους χρόνους. Εδώ ακριβώς έγκειται η τεράστια σημασία της αρχής της ισοδυναμίας και η σύνδεσή της με την γεωμετρία του χωροχρονικού συνεχούς. Μια πιθανή εξήγηση, λοιπόν, είναι ότι η γεωμετρία δεν είναι η ίδια παντού στον χώρο, για παράδειγμα αλλού καμπυλώνεται πολύ και αλλού λιγότερο, ώστε οι μετρικές σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις συντεταγμένες να διαφέρουν από σημείο σε σημείο με τέτοιο τρόπο ώστε να παίρνουμε τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Αυτό βέβαια μένει να ελεγχθεί.

Ίσως τα παραπάνω γίνονται πιο κατανοητά με το εξής γεωμετρικό ανάλογο: Παίρνουμε ένα ξεφουσκωτο μπαλόνι και σημειώνουμε πάνω τα σημεία A, B, Γ, Δ . Τα A και B βρίσκονται στην μέση του μπαλονιού ενώ τα Γ και Δ κοντά σε έναν από τους δύο πόλους έτσι ώστε $AB = \Gamma\Delta$. Φουσκώνοντας το μπαλόνι παρατηρούμε ότι η νέα σχέση των μηκών των τμημάτων θα είναι προφανώς $AB > \Gamma\Delta$. Το γεγονός αυτό οφείλεται αποκλειστικά στις ιδιότητες της γεωμετρίας του σφαιρικού σχήματος που παίρνει το μπαλόνι (δεν θα είναι ίδια η αιτία βέβαια αλλά αυτό δεν μας απασχολεί προς το παρόν). Ανάλογα μπορούμε να εξηγήσουμε μεταβολές των μηκών των συντεταγμένων με βάση την γεωμετρία γύρω από κάθε σημείο του χωροχρόνου. Πραγματικά, μία ριζοσπαστική ιδέα!

Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι αν ο χωροχρόνος ήταν επίπεδος παντού τότε οι αποστάσεις αναγκαστικά θα ήταν ίσες και δεν θα παρατηρούνταν καμιά αλλαγή στα μετρητικά μας όργανα. Αυτό ισχύει όταν η μεταβολή $\Phi_A - \Phi_B$ στη σχέση Π.2.3 τείνει στο μηδέν, δηλαδή σε ασθενή γενικά βαρυτικά πεδία όπως προκύπτει από την (1.6.2).

Ολοκληρώνουμε, χάριν πληρότητας, δίνοντας απευθείας την κατάλληλη σχέση για τη γεωμετρία μέσω του στοιχείου μήκους (το οποίο και αρκεί) που εξηγεί την παραπάνω διαφορά εκπομπής και λήψης. Να σημειώσουμε ότι αυτή η γεωμετρική αντιμετώπιση της βαρύτητας προβλέπει τις εξισώσεις κίνησης σε ένα νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό $\Phi(x)$ στο όριο όπου $|dx/dt| = u \ll c$ σε έναν χώρο *Minkofski*. Επιστρέφοντας, προφανώς δεν θα χρησιμοποιήσουμε το στοιχείο μήκους της ειδικής σχετικότητας, $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, ενώ αν θέσουμε:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.6.2.8)$$

Τότε σύμφωνα με το πλαίσιο 1 ο ιδιοχρόνος που μετρά ο A ανάμεσα στους δύο παλμούς με, ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0, \Delta t$), είναι

$$\Delta\tau_A = \left(1 + \frac{\Phi_A}{c^2}\right)\Delta t \quad (1.6.2.9)$$

ενώ ο ιδιοχρόνος που περνά για τον B είναι ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0, \Delta t$)

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Phi_B}{c^2}\right)\Delta t \quad (1.6.2.10)$$

Απαλείφοντας το Δt από τις δύο αυτές εξισώσεις καταλήγουμε στην

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Phi_B\Phi_A}{c^2}\right)\Delta\tau_A \quad (1.6.2.11)$$

από την οποία καταλήγει κανείς στη ζητούμενη σχέση Π.2.3.

Η διαφορά λοιπόν προβλέπεται από τη νέα θεωρία βαρύτητας. Αντίστοιχα, μια γενικά καμπυλωμένη γεωμετρία θα εξηγεί και τις καμπυλόγραμμες τροχιές σωμάτων όχι μέσω ενός βαρυτικού δυναμικού αλλά εξαιτίας των μετρικών ιδιοτήτων της. Έτσι εξήγησε και ο *Einstein* την παρατηρούμενη ανεξαρτησία της τροχιάς ενός σωματιδίου από την μάζα ή την σύστασή του (θεωρώντας το αμελητέα πηγή στρέβλωσης) χωρίς δυναμικούς όρους - σωματίδια με τις ίδιες αρχικές συνθήκες εκτελούν την ίδια κίνηση λόγω του ότι κινούνται στην ίδια περιοχή του χωροχρόνου.

Η αρχή της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός και η αρχή της ισοδυναμίας μπορούν να εξηγήσουν επίσης το γιατί οι νόμοι του *Newton* δίνουν αποτελέσματα σε εξαιρετική συμφωνία με τις παρατηρήσεις. Η απάντηση είναι ότι οι νόμοι αυτοί ισχύουν προσεγγιστικά σε δύο περιπτώσεις οι οποίες πληρούνται στη χωροχρονική γειτονιά της Γης:

1. σε συστήματα που κινούνται με συγκριτικά μικρές ταχύτητες $u \ll c$ έτσι ώστε οι σχέσεις του πλαισίου 1 να ανάγονται στις κλασικές του *Newton* και
2. σε συστήματα όπου τα πεδία βαρύτητας είναι τόσο ασθενή έτσι ώστε η μετρική (1.6.2.8), ή κάθε γενική μετρική, να ανάγεται στην $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ και σε συνδυασμό με την περίπτωση 1 δίνει πάλι τους νόμους του *Newton*.

Η βαρύτητα από πολύ ισχυρά πεδία ονομάζεται *σχετικιστική βαρύτητα* και αποτελεί τη δύναμη η οποία είναι υπεύθυνη για τη βαρυτική κατάρρευση των μαζικών λευκών νάνων και των αστέρων νετρονίων.

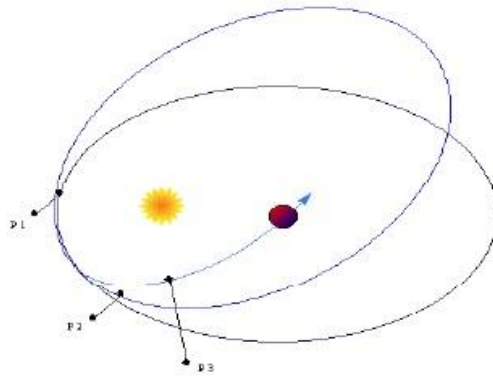
Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο περιγραφής τέτοιων γεωμετριών το οποίο θα γίνει στη βάση γενικώς συναλλοίωτων νόμων.

1.7 Τα Κλασσικά Πειράματα

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο 1 δίνοντας τις κλασσικές - επιτυχείς - δοκιμασίες προβλέψεις της Γενικής Σχετικότητας:

1.7.1 Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή

Δέσμιες τροχιές στα πλαίσια των νόμων του *Kepler* είναι ελλειπτικές και επομένως είναι κλειστές περιοδικές τροχιές. Διαταραχές από άλλες πηγές όμως μπορούν να καταστρέψουν αυτή την απλή εικόνα. Η ανάλυση όλων των πηγών που διαταράσσουν τις τροχιές, σύμφωνα με την νευτώνεια θεωρία, δίνει μια μετάπτωση του περιηλίου της τάξης 5558 *arcsecs* ανά αιώνα. Η μετρούμενη όμως μετάπτωση ήταν υπολογισμένη με ακρίβεια στα 5601 *arcsecs* ανά αιώνα, υπήρχε δηλαδή μια απόκλιση της θεωρίας με την παρατήρηση 43 *arcsecs* ανά αιώνα. Για ασθενές πεδίο βαρύτητας, από την Γενική Σχετικότητα προκύπτουν γραμμικοί όροι που συμφωνούν με τη νευτώνεια πρόβλεψη, συν μη γραμμικές διορθώσεις που είναι μικρές αλλά μετρήσιμες. Συγκεκριμένα οδήγησε σε μια πρόβλεψη 43,03 *arcsecs* επιπλέον (σε σχέση με την νευτώνεια πρόβλεψη) ανά αιώνα. Αυτό είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις παρατηρήσεις.



Εικόνα 1.7.1.1: Πλανητική μετάπτωση

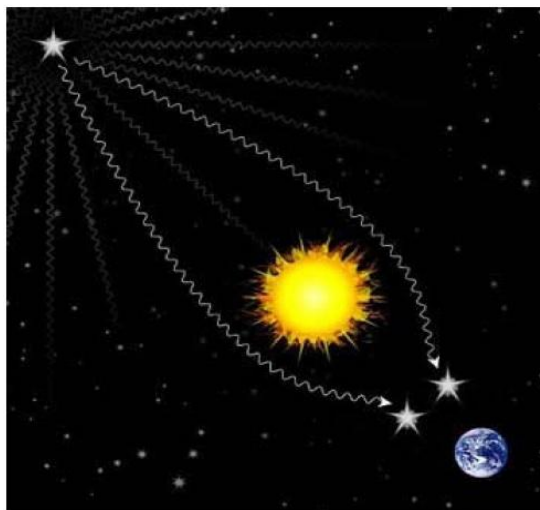
1.7.2 Καμπύλωση του Φωτός

Όπως είδαμε, από την αρχή της ισοδυναμίας προκύπτει ότι οι τροχιές φωτεινών ακτίνων καμπυλώνονται στην περιοχή αντικειμένων με μάζα. Επειδή το φαινόμενο αυτό είναι πολύ ασθενές, μπορεί να γίνει αντιληπτό μόνο για φωτεινές ακτίνες από μακρινά άστρα που περνούν πολύ κοντά από την επιφάνεια του Ήλιου. Όμως η μεγάλη λαμπρότητα του Ήλιου δυσκολεύει την παρατήρηση φωτός από μακρινά άστρα που περνούν κοντά από την επιφάνειά του. Ευτυχώς κατά την διάρκεια των ηλιακών εκλείψεων ο Ήλιος καλύπτεται και έτσι είναι δυνατόν να μελετηθεί η φαινομενική μετακίνηση των αστεριών πίσω από αυτόν. Η σχέση που δίνει την καμπύλωση των φωτεινών τροχιών είναι

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 r_c}$$

όπου r_c είναι η απόσταση μέγιστης προσέγγισης. Μια φωτεινή ακτίνα που περνά οριακά κοντά από την επιφάνεια του Ήλιου προβλέπεται να αλλάξει πορεία κατά 1.75 arcsecs . Η νευτώνεια θεωρία προβλέπει επίσης αλλαγή πορείας της δέσμης λόγω βαρύτητας αλλά στην μισή γωνία από αυτή της ΓΘΣ. Ένα διάσημο ταξίδι που οργανώθηκε από τον *Eddington* το 1919 επιδίωξε να επιβεβαιώσει την πρόβλεψη της Γενικής Σχετικότητας, και θεωρήθηκε ότι το πέτυχε αν και στην πραγματικότητα το πειραματικό αποτέλεσμα ήταν αρκετά αμφίβολο. Η πρόβλεψη της Γενικής Σχετικότητας έχει πλέον επιβεβαιωθεί

με ακρίβεια πολύ καλύτερη από 10% ώστε μπορεί πλέον με αρκετή σιγουριά να αποκλείσει τη νευτώνεια πρόβλεψη.



Εικόνα 1.7.2.1: Καμπύλωση του φωτός

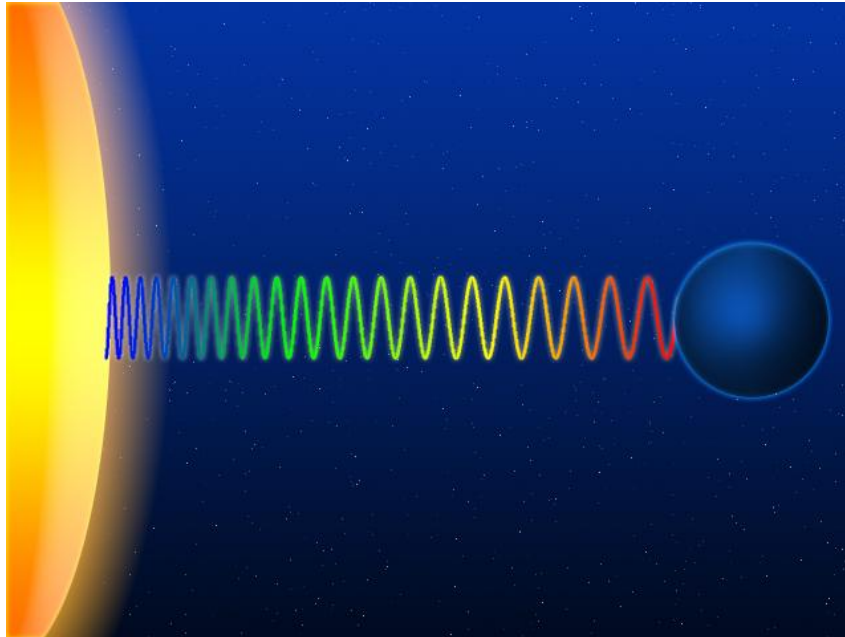
1.7.3 Καθυστερήσεις αντανάκλασεων από *radar*

Το τρίτο κλασσικό πείραμα με σκοπό να ελέγξει την Γενική Σχετικότητα επινοήθηκε το 1964 από τον *Shapiro*. Ανακάλυψε ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό σήμα που ανακλάται σε πλανήτη καθυστερεί να επιστρέψει στη Γη όταν η τροχιά του σήματος περνά κοντά από αντικείμενο με μεγάλη μάζα. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στην χρονική διαστολή που προβλέπεται από το στοιχείο μήκους του *Schwarzschild*. Σύγχρονες εκδόσεις αυτού του πειράματος παρέχουν την πιο ακριβή επιβεβαίωση της Γενικής Σχετικότητας με ακρίβεια της τάξης του 0.1%.

1.7.4 Βαρυτική Μετατόπιση στο Ερυθρό

Φωτόνια που εξέρχονται από βαρυτικό πεδίο υφίστανται ελάττωση της συχνότητας τους ανάλογη της έντασης του πεδίου στο σημείο εκπομπής τους. Για παράδειγμα φωτόνια που εκπέμπονται από την επιφάνεια του ήλιου θα υφίστανται μια μετάθεση

προς το ερυθρό της τάξης του $\Delta\lambda/\lambda \approx 2 \times 10^{-6}$ ενώ από την επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων $\Delta\lambda/\lambda \approx 0.2$ δηλαδή ~ 100000 παραπάνω!



Εικόνα 1.7.4.1: Βαρυτική Μετατόπιση στο Ερυθρό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεμελιώσουμε ένα γενικό μαθηματικό φορμαλισμό ο οποίος είναι απαραίτητος για την περιγραφή *συναλλοίωτων* νόμων και άπτεται του πεδίου της Τανυστικής Ανάλυσης. Σκοπός είναι να βρούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα αποτελέσματα της επίδρασης της βαρύτητας στην γεωμετρία του χωροχρόνου, τα οποία συνδέονται άρρηκτα με την *αρχή της ισοδυναμίας*. Γενικά, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να αναπτύξει τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ο πρώτος, ο οποίος συνδέεται με ιστορική εξέλιξη της θεωρίας, ακολουθεί μια διαδικασία ανάπτυξης γεωμετρικών χώρων με καμπύλη *Lorentzian* γεωμετρία την οποία συνδέει με τα φυσικά φαινόμενα βαρύτητας. Ο δεύτερος, τον οποίο ακολουθήσαμε εδώ, «βλέπει» τη Γενική Σχετικότητα σαν μια θεωρία βαρύτητας της οποίας η σύνδεση με τη γεωμετρία ανακύπτει από τις ιδιόμορφες εμπειρικές ιδιότητες της βαρύτητας, ιδιότητες που συνοψίζονται στην Αρχή της Ισοδυναμίας Βαρύτητας και Επιτάχυνσης του *Einstein*. Έτσι, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: θα γράψουμε πρώτα τις εξισώσεις κίνησης ενός *ελεύθερου* σώματος στο τοπικό αδρανειακό σύστημα. Για να ισχύουν όμως οι νόμοι αυτοί σε κάθε σύστημα συντεταγμένων θα πρέπει να έχουν συναλλοίωτη μορφή και σε αυτό θα μας βοηθήσει η Ανάλυση Τανυστών. Εν συνεχεία, λόγω της αρχής της ισοδυναμίας οι ίδιοι νόμοι θα περιγράφουν τα αποτελέσματα της βαρύτητας με τη διαφορά ότι τώρα θα εξηγούνται, ισοδύναμα, στη βάση μη επίπεδων γεωμετριών. Και αυτό το -γεωμετρικό- πρόβλημα έχει αντιμετωπιστεί πλήρως από τους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα (*Riemann, Hamilton* και *Ricci*). Έτσι ο *Einstein* βρήκε μια εφαρμογή των παραπάνω μαθηματικών εννοιών στον φυσικό μας κόσμο και ειδικά στο νόμο της βαρύτητας. Για να μετατρέψει το πρόβλημα από μαθηματικά αφηρημένο σε πραγματικές φυσικές καταστάσεις, στηρίχτηκε στην παραπάνω αρχή και στην φυσική απαίτηση *οι εξισώσεις να ανάγονται σε εκείνες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας εν τη απουσία βαρύτητας*. Φτιάχνοντας λοιπόν συναλλοίωτες εξισώσεις αυτές θα περιγράφουν γενικώς επιταχυνόμενα συστήματα συντεταγμένων και επειδή η βαρύτητα είναι «ισοδύναμη» της επιτάχυνσης οι εξισώσεις που θα έχουμε κάνοντας

τους μετασχηματισμούς θα περιγράψουν και την επίδραση της βαρύτητας στα συστήματα αυτά. Στις εξισώσεις αυτές θα εμφανίζονται οι όροι βαρυτικού πεδίου, ενώ ο τελικός διαχωρισμός ανάμεσα σε επιτάχυνση ή βαρύτητα θα εξαρτάται από το εάν η μετρική του χώρου μας μπορεί με κάποιο μετασχηματισμό να δώσει την μετρική $\eta_{\mu\nu}$ του επίπεδου χώρου, οπότε είναι θέμα επιλογής συστήματος συντεταγμένων, ή αν όχι ο χώρος είναι εγγενώς καμπύλος, επομένως υπάρχει φυσικό βαρυτικό πεδίο.

2.1 Γενικά συναλλοίωτες εξισώσεις

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο οι μετασχηματισμοί που συνδέουν τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων, εξαιτίας της αρχής της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός, είναι οι μετασχηματισμοί *Lorentz*, (1.2.8), ή σε πιο οικεία μορφή:

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - ux) \\x' &= \gamma(x - ut) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

Εκτελώντας έναν τέτοιο μετασχηματισμό στον δεύτερο νόμο του *Newton* $\mathbb{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$ θα πάρουμε έναν νόμο της μορφής,

$$\mathbb{F}' = f\left(\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2}, u\right) \quad (2.1.2)$$

Δηλαδή λόγω εμφάνισης όρων της ταχύτητας δεν παραμένει αναλλοίωτος. Αν συνεχίσουμε να εμμένουμε στην περιγραφή του νόμου με βάση την διανυσματική ανάλυση δεν θα καταφέρουμε να φτιάξουμε αναλλοίωτες εξισώσεις πρώτον γιατί έχει «προστεθεί» μία παραπάνω συντεταγμένη - αυτή του χρόνου - και δεύτερον διότι έχει αλλάξει ο νόμος μετασχηματισμού των συντεταγμένων. Μάλιστα το αναλλοίωτο διάστημα, ds^2 , δεν δίνεται από τη γενικευμένη πυθαγόρεια σχέση,

$$ds^2 = \sum_i dx^{i^2}$$

αλλά από την,

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1.3)$$

Έτσι, όπως και στη περίπτωση των διανυσμάτων, τα νέα μαθηματικά «εργαλεία» θα πρέπει να ακολουθούν τους μετασχηματισμούς οι οποίοι εδώ είναι οι μετασχηματισμοί

Lorentz. Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται *τετραδιανύσματα* και για τον συγκεκριμένο νόμο πρέπει να έχουν τις εξής ιδιότητες:

(A) να ανάγονται στην $\mathbb{P} = m\mathbb{P}$ σε κάθε *ΑΣΑ* που κινείται με ταχύτητα $u \ll c$.

(B) να διατηρούν την μορφή των εξισώσεων κάτω από μετασχηματισμούς *Lorentz*.

(Γ) να ανάγονται στην $d\mathbb{P}/dt = 0$ όταν δεν ασκούνται δυνάμεις σε κάθε *ΑΣΑ* (αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος κάτω από *Lorentz*-μετασχηματισμούς σε αντίθεση με τον δεύτερο).

Επεκτείνοντας σε γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, που είναι το ζητούμενο αναλλοίωτο, φτάνει κανείς στο συμπέρασμα ότι ούτε τα τετραδιανύσματα διατηρούν αναλλοίωτη την μορφή των εξισώσεων αλλά όπως πριν εισέρχονται νέοι όροι μετά τους μετασχηματισμούς (όπως ο μετρικός τανυστής και τα σύμβολα *Christoffel* τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω). Γεννάται λοιπόν το ερώτημα αρχής: υπάρχουν τα αντικείμενα αυτά τα οποία να είναι οσονδήποτε διαστάσεων και να μετασχηματίζονται με οποιονδήποτε γενικό τρόπο; Η απάντηση είναι ναι και έχουν τη γενική ονομασία *τανυστές*. Η διαφορά όμως με πριν είναι ότι δεν απαιτούμε αυτοί οι νέοι όροι να εξαφανιστούν στο τέλος και επομένως δεν επιβάλλουμε κανένα περιορισμό στην αρχική εξίσωση αντιθέτως, ίσως, εκμεταλλευόμαστε την παρουσία τους για να αναπαραστήσουμε τα βαρυτικά πεδία. Έτσι, ενώ η (2.1.3) είναι μια ισότητα που παραμένει αναλλοίωτη μόνο κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών δεν θα αναζητήσουμε ένα νέο ds^2 που θα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς αλλά αντίθετα συνυπολογίζουμε τις αλλοιώσεις αυτές των συστημάτων αναφοράς για να υπολογίσουμε τα βαρυτικά πεδία. Να το θέσουμε απλά: Η αρχή συναλλοιότητας δεν είναι μια αρχή αναλλοιώτου, όπως η αρχή του Γαλιλαίου ή της Ειδικής Σχετικότητας, αλλά αντί αυτού μια πρόταση για την επίδραση της βαρύτητας και για τίποτα άλλο. Οι φυσικές ποσότητες περιγράφονται πλέον μέσω των τανυστών και οι αντίστοιχες εξισώσεις ονομάζονται *τανυστικές εξισώσεις*.

2.2 Ορισμοί - Μετασχηματισμοί τανυστών

Προκειμένου να βρούμε εξισώσεις που παραμένουν αναλλοίωτες μπροστά σε γενικούς μετασχηματισμούς θα βρούμε πως μετασχηματίζονται οι τανυστές. Όλη η γενική θεωρία της σχετικότητας στηρίζεται στην εύρεση γενικών σχέσεων μετασχηματισμού των τανυστών.

Ο απλούστερος κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός ενός βαθμωτού μεγέθους το οποίο απλά δεν μεταβάλλεται κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό. Παράδειγμα βαθμωτού είναι οι καθαροί αριθμοί όπως το μηδέν ή ο ιδιοχρόνος dt που είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα και στην $\Gamma\Theta\Sigma$.

Ο επόμενος απλούστερος κανόνας μετασχηματισμού είναι αυτός του διαφορικού των συντεταγμένων dx^μ το οποίο κάτω από ένα μετασχηματισμό:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad (2.2.1)$$

μετασχηματίζεται ως εξής:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.2.2)$$

Κάθε μέγεθος που μετασχηματίζεται όπως η (2.2.2) ονομάζεται ανταλλοίωτο τετραδιανύσμα και έτσι οι συντεταγμένες τους υπακούν στον νόμο μετασχηματισμού:

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (2.2.3)$$

Τέτοια παραδείγματα είναι οι συντεταγμένες, η τετραταχύτητα, η τετραορμή ή το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης του χώρου $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, αφού,

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu$$

Το επόμενο παράδειγμα προκύπτει άμεσα από τα ανταλλοίωτα τετραδιανύσματα. Είναι γνωστό ότι στους νόμους της Φυσικής εκτός από τα διανυσματικά μεγέθη είναι εξίσου

χρήσιμα και τα βαθμωτά όπως για παράδειγμα το έργο W ή το ρεύμα I . Ένα βαθμωτό μπορεί προκύψει ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, π.χ., $W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Συνεπώς, και στην τανυστική ανάλυση θα χρειαστούμε μια ανάλογη σχέση,

$$\text{Μέγεθος} \times \text{Αναλλοίωτο Διάνυσμα} = \text{Βαθμωτό}$$

Τα μεγέθη αυτά καλούνται συναλλοίωτα τετραδιανύσματα και οι συνιστώσες τους ορίζονται ως,

$$\sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu} = \text{Αναλλοίωτο} \quad (2.2.4)$$

Ο νόμος μετασχηματισμού ενός συναλλοίωτου τετραδιανύσματος έπεται από αυτόν τον ορισμό. Αντικαθιστώντας το B^{ν} στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης,

$$\sum_{\sigma} A'_{\sigma} B'^{\sigma} = \sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu}$$

σε συνδυασμό με την αντίστροφη (2.2.3),

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} B'^{\sigma}$$

λαμβάνουμε:

$$\sum_{\sigma} B'^{\sigma} \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B'^{\sigma} A'_{\sigma}$$

Έτσι, αφού τα B^{ν} είναι αυθαίρετα έπεται ο νόμος μετασχηματισμού:

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} A_{\nu} \quad (2.2.5)$$

Για παράδειγμα, αν φ είναι ένα βαθμωτό πεδίο, τότε το $\partial\varphi/\partial x^{\mu}$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, επειδή στο μετασχηματισμένο σύστημα συντεταγμένων η κλίση είναι,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}} \quad (2.2.6)$$

σε συμφωνία με την (2.2.5).

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις:

- η διαφορά ανταλλοίωτων – συναλλοίωτων τετραδιανυσμάτων έγκειται μόνο στον νόμο μετασχηματισμού τους
- είναι και οι δύο τανυστές ακολουθώντας τους *Ricci* και *Levi-Civita* ο ανταλλοίωτος χαρακτήρας δηλώνεται με πάνω δείκτη και ο συναλλοίωτος με κάτω δείκτη.
- τα βαθμωτά αποτελούν τανυστές μηδενικής τάξης, ενώ τα ανταλλοίωτα και τα συναλλοίωτα τανυστές πρώτης τάξης.
- οι όροι ανταλλοίωτος και συναλλοίωτος προέκυψαν από το πώς μετασχηματίζονται σε σχέση με τις συντεταγμένες – τα ανταλλοίωτα αντίθετα και τα συναλλοίωτα ακριβώς όπως αυτές.

Συνεχίζοντας, μπορούμε να σχηματίσουμε έναν ανταλλοίωτο τανυστή δεύτερης τάξης, μέσω μιας εξωτερικής αλγεβρικής πράξης πολλαπλασιασμού, σχηματίζοντας τα 16 γινόμενα $A^{\mu\nu}$ των συνιστωσών A^μ και B^ν δύο ανταλλοίωτων τετραδιανυσμάτων

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \quad (2.2.7)$$

τότε από τις (2.2.6) και (2.2.3) προκύπτει ότι οι συνιστώσες $A^{\mu\nu}$ ικανοποιούν τον νόμο μετασχηματισμού:

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} A^{\mu\nu} \quad (2.2.8)$$

Έτσι, ανταλλοίωτος τανυστής είναι ένα μέγεθος με 16 συνιστώσες οι οποίες μετασχηματίζονται όπως η (2.2.7).

Ομοίως, ένας συναλλοίωτος τανυστής προκύπτει από την σχέση

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu \quad (2.2.9)$$

και μετασχηματίζεται,

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} A_{\mu\nu} \quad (2.2.10)$$

Βέβαια, δεν είναι ανάγκη όλοι αυτοί οι τανυστές να σχηματίζονται από γινόμενα κάποιων 4-διανυσμάτων.

Έτσι, φτάνουμε στον κανόνα μετασχηματισμού ενός γενικού τανυστή, όπου για παράδειγμα ένας τανυστής $T_\nu^{\mu\lambda}$, κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων

$x^\mu \rightarrow x'^\mu$, θα μετασχηματίζεται σύμφωνα με την:

$$T'_\nu{}^{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T_\rho{}^{\kappa\sigma} \quad (2.2.11)$$

Αν όλοι δείκτες είναι πάνω τότε ο τανυστής καλείται αναλλοίωτος, αν όλοι οι δείκτες είναι κάτω τότε ο τανυστής καλείται συναλλοίωτος, ενώ αλλιώς καλείται μικτός. Παραδείγματα τανυστών θα δούμε στη συνέχεια αρκετά.

Έχοντας ορίσει τα μαθηματικά αντικείμενα μέσω των νόμων μετασχηματισμού τους μπορούμε να σχηματίζουμε ισότητες τανυστών που θα είναι αναλλοίωτες κάτω από ένα γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων. Για παράδειγμα αν $A_\nu^{\mu\lambda}$ και $B_\nu^{\mu\lambda}$ είναι δύο τανυστές που μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα (2.2.10) και αν στο σύστημα x^μ ισχύει $A_\nu^{\mu\lambda} = B_\nu^{\mu\lambda}$, τότε προφανώς θα ισχύει και $A'_\nu{}^{\mu\lambda} = B'_\nu{}^{\mu\lambda}$ σε κάθε σύστημα συντεταγμένων x'^μ . Ισοδύναμα, *αν όλες οι συνιστώσες ενός τανυστή μηδενίζονται σε κάποιο επιλεγμένο σύστημα, τότε μηδενίζονται όλες τους και στο νέο σύστημα-οι εξισώσεις μετασχηματισμού των συνιστωσών είναι γραμμικές και ομογενείς*. Αντίθετα, μια πρόταση που δεν είναι ισότητα μεταξύ τανυστών ίδιου τύπου (π.χ. $T_\nu^\mu = 5$ ή $V^\mu = U_\mu$) μπορεί να είναι αριθμητικά σωστή σε μια περιορισμένη κατηγορία συστημάτων, αλλά όχι σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Οι τανυστές αυτοί, πλέον, θα αναπαριστούν τα φυσικά μεγέθη.

2.3 Τανυστική Άλγεβρα

Συνεχίζουμε ορίζοντας τις βασικές αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα στους τανυστές οι οποίες μπορούν να συνδυαστούν και περαιτέρω:

(A) **Γραμμικοί Συνδυασμοί.** Ένας γραμμικός συνδυασμός τανυστών ίδιας τάξης, με τους ίδιους πάνω και κάτω δείκτες και ορισμένων στο ίδιο σημείο του χώρου είναι ένας τανυστής με αυτούς τους δείκτες. Για παράδειγμα, έστω A_ν^μ και B_ν^μ μικτοί τανυστές, και επίσης,

$$T_\nu^\mu = aA_\nu^\mu + bB_\nu^\mu$$

όπου a και b βαθμωτά. Τότε ο T_ν^μ είναι τανυστής επειδή,

$$T'_\nu{}^\mu \equiv aA'_\nu{}^\mu + bB'_\nu{}^\mu = a \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_\sigma^\rho + b \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B_\sigma^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T_\sigma^\rho$$

(B) **Εσωτερικά Γινόμενα.** Το γινόμενο των συνιστωσών δύο τανυστών (ορισμένων στο ίδιο σημείο) παράγει έναν τανυστή, του οποίου οι πάνω και κάτω δείκτες συνίστανται σε όλους τους πάνω και κάτω δείκτες των δύο αρχικών τανυστών. Για παράδειγμα, αν A_ν^μ και B^ρ δύο τανυστές και

$$T_\nu^{\mu\rho} = A_\nu^\mu B^\rho$$

τότε ο $T_\nu^{\mu\rho}$ είναι ένας τανυστής, επειδή

$$T'_\nu{}^{\mu\rho} \equiv A'_\nu{}^\mu B'^\rho = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} A_\kappa^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} B^\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} T_\kappa^{\lambda\sigma}$$

(Γ) **Συστολή.** Εξισώνοντας έναν πάνω και ένα κάτω δείκτη και αθροίζοντας κατά τις τέσσερις τιμές τους παίρνουμε έναν νέο τανυστή με τους δύο δείκτες απόντες. Για παράδειγμα αν ο $T_\nu^{\mu\rho\sigma}$ είναι ένας τανυστής και

$$T^{\mu\rho} = T_\nu^{\mu\rho\nu}$$

τότε και ο $T^{\mu\rho}$ είναι ένας τανυστής επειδή,

$$T'^{\mu\rho} \equiv T'_\nu{}^{\mu\rho\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} T_\lambda^{\kappa\eta\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} T_\lambda^{\kappa\eta\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} T^{\kappa\eta}$$

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες (B) και (T) παίρνουμε το λεγόμενο *κατέβασμα ή ανέβασμα δείκτη* όπου γίνεται αντικατάσταση ενός ανταλλοίωτου δείκτη με ένα συναλλοίωτο ή το αντίστοιχο. Αν για παράδειγμα ο $T_{\sigma}^{\mu\rho}$ είναι ένας τανυστής και ορίσουμε τη *γραμμική απεικόνιση*:

$$S_{\nu\sigma}^{\rho} \equiv f_{\mu\nu} T_{\sigma}^{\mu\rho}$$

τότε από τους κανόνες ο $S_{\nu\sigma}^{\rho}$ θα είναι τανυστής. Ομοίως, αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο ενός συναλλοίωτου ή μικτού τανυστή T με τον αντίστροφο τανυστή $f^{\mu\nu}$, και συστειλούμε τον δείκτη μ με έναν από τους συναλλοίωτους δείκτες του T , παίρνουμε έναν νέο τανυστή στον οποίο ο συναλλοίωτος δείκτης έχει αντικατασταθεί από ένα ανταλλοίωτο δείκτη ν .

(Δ) **Συμμετρία.** Υπάρχει η έννοια της συμμετρίας/αντισυμμετρίας ενός ανταλλοίωτου τανυστή $2^{\text{ης}}$ τάξης $T^{\alpha\beta}$ σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων x^{μ} αν

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \rightarrow \text{συμμετρικός}$$

$$T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha} \rightarrow \text{αντισυμμετρικός}$$

Επίσης αν ένας τανυστής $2^{\text{ης}}$ τάξης είναι συμμετρικός/αντισυμμετρικός στο σύστημα x^{μ} τότε θα είναι συμμετρικός/αντισυμμετρικός και σε κάθε άλλο σύστημα x'^{μ} . Οι συμμετρικοί τανυστές $2^{\text{ης}}$ τάξης σε έναν n -διάστατο χώρο χαρακτηρίζονται από $n(n+1)/2$ ανεξάρτητες συνιστώσες, ενώ οι αντίστοιχοι αντισυμμετρικοί έχουν $n(n-1)/2$ ανεξάρτητες συνιστώσες.

Μία ακόμα πολύ χρήσιμη πράξη είναι προφανώς αυτή της διαφορίσης η οποία όμως θα παρουσιαστεί ξεχωριστά σε επόμενη ενότητα καθώς έχει την ιδιαιτερότητα να μην δίνει πάντα κάποιο τανυστή.

2.4 Μετρικοί Χώροι - Μετρικός Τανυστής

Είδαμε στην παράγραφο 1.3 ότι η εξήγηση της διαφοράς των ρυθμών εκπομπής και λήψης σημάτων σε δύο διαφορετικά βαρυτικά δυναμικά είναι μάλλον γεωμετρική παρά δυναμική. Άρα, χρειάζεται να στραφούμε σε αυτό το καθαρά μαθηματικό έργο της γεωμετρικής περιγραφής χώρων. Οι χώροι αυτοί ονομάζονται *μετρικοί χώροι*. Για την περιγραφή τους απαιτείται πρώτον ένα σύστημα N -συντεταγμένων για την "1-1" αναπαράσταση όλων των σημείων και δεύτερον ο καθορισμός ενός στοιχείου μήκους,

που να δίνει την απόσταση ds^2 , μεταξύ γειτονικών σημείων τα οποία διαχωρίζονται από διαστήματα dx^α .

Ιστορικά, ο πρώτος χώρος που ορίστηκε αφορούσε την ευκλείδεια δισδιάστατη γεωμετρία με χωρικές συντεταγμένες, έστω x^1, x^2 και την απόσταση μεταξύ δύο σημείων (x^1, x^2) και (X^1, X^2) να δίνεται από την

$$d = [(x^1 - X^1)^2 + (x^2 - X^2)^2]^{1/2} \quad (2.4.1)$$

σύμφωνα με το *Πυθαγόρειο Θεώρημα* και την *Αναλυτική Καρτεσιανή Γεωμετρία*. Ήταν ο *Gauss* ο πρώτος που αποφάσισε να δεχτεί μία μη-ευκλείδεια γεωμετρία (πάλι στις δύο διαστάσεις) δηλαδή έναν χώρο όπου η απόσταση δύο σημείων δεν δίνεται από την παραπάνω σχέση. Το 1870 μια παρόμοια αναλυτική γεωμετρία κατασκευάστηκε από τον *Felix Klein* για την μη ευκλείδεια γεωμετρία των *Gauss*, *Bolyai* και *Lobachevski* σύμφωνα με την οποία ένα σημείο αναπαρίσταται από ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x_1, x_2) με:

$$x_1^2 + x_2^2 < 1 \quad (2.4.2)$$

και η απόσταση $d(x, X)$ μεταξύ δύο σημείων x, X ορίζεται σαν μια συνάρτηση εξαρτώμενη από τις θέσεις των σημείων και όχι μόνο από την διαφορά των συντεταγμένων τους. Ο *Gauss* επίσης απέδειξε ότι ο επίπεδος γεωμετρικός χώρος του ήταν δυνατό να οριστεί σαν μια *κανονική καμπύλη επιφάνεια* εμβαπτισμένη μέσα στον επίπεδο τρισδιάστατο χώρο, αλλά εξίσου καλά μπορούσε να οριστεί μέσα σε καμπύλους χώρους τους οποίους για να περιγράψει χρειαζόταν μόνο η μετρική συνάρτηση $d(x, X)$ η οποία δίνει την απόσταση μεταξύ των σημείων x και X κατά μήκος της συντομότερης μεταξύ τους διαδρομής πάνω στην επιφάνεια. Έτσι χαρακτήρισε τους χώρους αυτούς από μια *εγγενή* καμπυλότητα για να τους ξεχωρίσει από εκείνους που περιγράφονται με τη βοήθεια ανώτερων διαστάσεων. Σε έναν καμπύλο χώρο δεν υπάρχει κανένα ευκλείδειο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο πεπεραμένες αποστάσεις να δίνονται από την (2.4.1). *Είναι όμως η μετρική συνάρτηση $d(x, X)$ ικανή από μόνη της να μας υποδείξει την καμπυλότητα του χώρου;* Ο *Gauss* υπέθεσε ότι σε κάθε απείρως μικρή περιοχή του χώρου είναι δυνατόν να βρεθεί ένα τοπικό Ευκλείδειο σύστημα συντεταγμένων ξ^1, ξ^2 τέτοιο ώστε η απόσταση μεταξύ δύο σημείων με συντεταγμένες (ξ^1, ξ^2) και $(\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$ να ικανοποιεί το πυθαγόρειο θεώρημα. Εδώ βλέπουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στις έννοιες *καμπύλος χώρος* –

τοπικά επίπεδος χώρος και μη αδρανειακά συστήματα – τοπικά αδρανειακά συστήματα. Μπορούμε να πούμε ότι η αρχή της ισοδυναμίας αντιστοιχεί στη γεωμετρική δήλωση ότι κάθε ομαλή επιφάνεια μπορεί σε αρκετά μικρή περιοχή να προσεγγισθεί με ένα επίπεδο.

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 \quad (2.4.3)$$

Μετασχηματίζοντας σε νέες συντεταγμένες, έστω (x^1, x^2) και γνωρίζοντας την σχέση μετασχηματισμού των συντεταγμένων στα δύο συστήματα εύκολα υπολογίζουμε ότι η απόσταση ds μεταξύ των σημείων (x^1, x^2) και $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ στο νέο σύστημα δίνεται από την:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_1^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_2^2 \quad (2.4.4)$$

σχέση η οποία προφανώς και δεν υποδεικνύει την κλασσική απόσταση στο επίπεδο. Έτσι, αν και οι μετρικές συναρτήσεις g_{ij} καθορίζουν την γεωμετρία του χώρου ωστόσο από μόνες τους δεν αρκούν για την ταυτοποίησή του καθώς οι (2.4.2) και (2.4.3) αν και εμφανώς διαφορετικές περιγράφουν την ίδια ακριβώς γεωμετρία! Η μορφή των g_{ij} είναι αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για μη-Ευκλείδεια γεωμετρία. Το ικανό που χρειαζόμαστε, και αποσυνδέει τη γεωμετρία του χώρου από το επιλεγθέν σύστημα συντεταγμένων, αποδεικνύεται ότι για τις δύο διαστάσεις είναι μια συνάρτηση την οποία υπολόγισε ο *Gauss* και φέρει το όνομά του, η *καμπυλότητα Gauss K*,

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2g_{22}} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \right\}$$

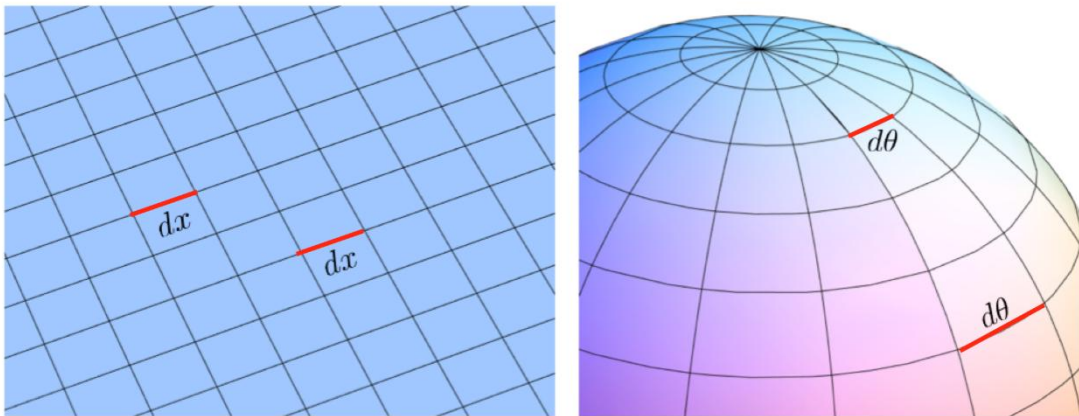
(2.4.5)

Το K εξαρτάται:

- την θέση του σημείου (x^1, x^2) .
- αποκλειστικά από την μετρική g_{ij} και τις δύο πρώτες παραγώγους της.

Έτσι, όσο διεστραμμένη κι αν είναι η επιλογή μας για το σύστημα συντεταγμένων, οι μετρικές ιδιότητες του χώρου θα φανούν από απευθείας υπολογισμό του K . Για να καταλάβουμε διαισθητικά τη διαφορά δύο μετρικών οι οποίες περιγράφουν τον ίδιο χώρο και την ανεξαρτησία της εγγενούς καμπυλότητας του χώρου από σύστημα

συντεταγμένων ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα: Ένας κώνος ή ένας κύλινδρος έχουν τις ίδιες *μετρικές ιδιότητες*, με ένα επίπεδο αφού ένα επίπεδο μπορεί να διπλωθεί χωρίς να τεντωθεί ή να σχιστεί (δηλ., χωρίς να «παραμορφωθούν» οι μετρικές σχέσεις) σχηματίζοντας έναν κύλινδρο. Από την άλλη, μια σφαίρα δεν μπορεί ποτέ να ξεδιπλωθεί σε ένα επίπεδο χωρίς παραμόρφωση και επομένως οι μετρικές της ιδιότητες διαφέρουν από αυτές του επιπέδου (εικόνα 2.4.1). Προς ολοκλήρωση αυτού του μαθηματικού οικοδομήματος, το 1854 ο *Riemann* βρήκε την αντίστοιχη συνάρτηση *Gauss* (που σε αυτή την περίπτωση δεν είναι μία) σε γενικούς χώρους N -διαστάσεων η οποία είναι γνωστή ως *καμπυλότητα Riemann*. Ο *Riemann* χρησιμοποίησε την ανάλυση τανυστών και απέδειξε ότι *η γεωμετρία ενός μετρικού χώρου μπορεί να περιγραφεί μόνο από τον μετρικό τανυστή και τις πρώτες παραγώγους των συνιστωσών του*. Έτσι, ο *Einstein* βρήκε πρόσφορο έδαφος για να περιγράψει τη βαρύτητα σαν μια γεωμετρική στρέβλωση προσαρμόζοντας την *ριμάνεια καμπυλότητα N -διαστάσεων* στις τέσσερις διαστάσεις του χωροχρόνου, καθώς και τα δύο περιγράφονταν από την κοινή γλώσσα της Ανάλυσης Τανυστών.



Εικόνα 2.4.1: Επίπεδος και καμπύλος χώρος

Από τώρα και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την εύρεση της καμπυλότητας *Riemann* στις χωροχρονικές συντεταγμένες (t, x, y, z) . Η ποσότητα αυτή θα πρέπει να έχει την μορφή ενός τανυστή για τους λόγους που έχουμε εξηγήσει και γι' αυτό θα αναζητηθεί πρώτα κάποιος *μετρικός τανυστής*. Η συλλογιστική πορεία που θα ακολουθήσουμε σε όλα τα παρακάτω συνοψίζεται στο εξής απλό διάγραμμα:

$$\text{εξισώσεις } E\theta\Sigma \xrightarrow{\text{τυχαίος μετασχηματισμός}} \text{εξισώσεις } \Gamma\theta\Sigma$$

Θεωρούμε μια περιοχή γύρω από ένα σημείο P ενός τυχαία καμπυλωμένου χωροχρόνου. Εκμεταλλευόμενοι την αρχή της ισοδυναμίας, στο τοπικό αδρανειακό σύστημα, έστω ξ^α , θα ισχύουν οι νόμοι της ειδικής σχετικότητας, επομένως το στοιχείο μήκους εκεί δίνεται από την

$$ds^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 \quad (2.4.6)$$

Η σχέση αυτή αντιπροσωπεύει την τοπική μηδενική καμπυλότητα του χωροχρόνου και σε ένα τέτοιο σύστημα όλες οι τροχιές ελεύθερων σωματιδίων είναι ευθείες γραμμές. Η (2.4.6) χρησιμοποιώντας την σύμβαση άθροισης του Einstein, όπου οι επαναλαμβανόμενοι πάνω-κάτω δείκτες αθροίζονται, γράφεται:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.4.7)$$

όπου,

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1)$$

είναι συμμετρικός πίνακας ο οποίος μας δίνει τη μετρική του επίπεδου χωροχρόνου.

Μετασχηματίζοντας τώρα σε ένα νέο σύστημα x^μ το στοιχείο μήκους και η μετρική γίνονται:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu}(x^i) dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.8)$$

$$g_{\mu\nu}(x^i) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.4.9)$$

Η (2.4.8) εκφράζει τις μετρικές σχέσεις στα διάφορα συστήματα αναφοράς όπου οι κινήσεις των ελεύθερων σωμάτων, πλέον, θα είναι γενικώς καμπυλόγραμμες και αναγκαστικά θα ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα βαρυτικών ή κινηματικών δυνάμεων σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας. Από την (2.4.9) παρατηρούμε ότι ο $g_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός πίνακας δηλαδή $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ και ότι εξαρτάται από την σχέση μετασχηματισμού του τυχαίου συστήματος με το τοπικό. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής, αρκεί να δείξουμε ότι επαληθεύει τη (2.2.10).

Έτσι, σε ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων x'^μ ο μετρικός τανυστής είναι,

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

και επομένως,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (2.4.10)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι ο $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συναλλοίωτος συμμετρικός τανυστής. Ο αντίστροφός του είναι ο ανταλλοίωτος μετρικός τανυστής $g^{\mu\nu}$ και προκύπτει αν ορίσουμε τον $g^{\lambda\mu}$ έτσι ώστε,

$$g^{\nu\mu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu \quad (2.4.11)$$

όπου δ_λ^ν ο μικτός τανυστής του δέλτα του *Kronecker*.

Επίσης λόγω της σχέσης (2.4.8) ισχύει η παρακάτω πολύ χρήσιμη πρόταση - ιδιότητα του μετρικού τανυστή:

Εφόσον το dx^ν είναι ανταλλοίωτο διάνυσμα και το ds^2 βαθμωτό τότε το $g_{\mu\nu} dx^\mu$ θα πρέπει να είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα, δηλαδή η σχέση

$$g_{\mu\nu} dx^\mu = \text{συναλλοίωτο} \quad (2.4.12)$$

δείχνει ότι ο $g_{\mu\nu}$ μετατρέπει το ανταλλοίωτο διάνυσμα της συντεταγμένης x^μ στο αντίστοιχο διάνυσμα συναλλοίωτης συντεταγμένης, όπως επίσης εύκολα δείχνεται ότι ο $g^{\mu\nu}$ κάνει την αντίστροφη μετατροπή. Λέμε τότε ότι ο μετρικός τανυστής *κατεβάζει* ή *ανεβάζει* δείκτες, αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Αφού $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \text{βαθμωτό}$ τότε:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu - g_{\mu\nu} dx^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = 0 \\ &\Rightarrow \left(g'_{\mu\nu} dx'^\mu - g_{\mu\nu} dx^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) dx'^\nu = 0 \Rightarrow g'_{\mu\nu} dx'^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \end{aligned}$$

Επομένως, το $g_{\mu\nu} dx^\mu$ είναι μια συναλλοίωτη ποσότητα.

Ο $g_{\mu\nu}$ λοιπόν είναι ο συναλλοίωτος τανυστής που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε το στοιχείο μήκους του συστήματος συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει και όπως είπαμε οι πρώτες παράγωγοί του θα δίνουν τον τανυστή καμπυλότητας *Riemann-Christoffel*, όπως ονομάζεται. Από μόνος του, όπως είπαμε, ο μετρικός τανυστής δεν

μπορεί να περιγράψει αυτή την ενδογενή καμπυλότητα του χωροχρόνου γιατί πάντα μπορούμε να βρούμε σε κάθε σημείο του, P , ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, ως απόρροια της αρχής της ισοδυναμίας. Από την άλλη αποδεικνύεται επίσης ότι για κάθε σημείο P υπάρχει σύστημα τέτοιο ώστε $g'_{\mu\nu} = 0$ (στην ουσία, αυτό λέει η IAI^2). Συνεπώς σε αυτό το σύστημα ο ζητούμενος τανυστής θα ισούται με τον μετρικό τανυστή (εδώ υποθέτουμε ότι ο τανυστής μπορεί να γραφεί σαν υπέρθεση των g και g') και επειδή ακριβώς είναι τανυστής θα ισούται σε κάθε σύστημα με τον $g_{\mu\nu}$, οπότε απορρίπτεται επίσης. Η επόμενη περίπτωση είναι αυτή ενός τανυστή που αποτελείται από τον $g_{\mu\nu}$ και τις δύο πρώτες παραγώγους του. Όπως θα δούμε αυτός είναι και ο ζητούμενος τανυστής που δίνει την καμπυλότητα των τεσσάρων συντεταγμένων και εξηγεί, εν τέλει, τις καμπυλόγραμμες τροχιές των σωμάτων και αυτό οφείλεται στο ότι δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο σύστημα συντεταγμένων που να μηδενίζει πρώτες και δεύτερες παράγωγους ταυτόχρονα αναλογικά με τα προηγούμενα. Για να «χτίσουμε» τον τανυστή *Riemann-Christoffel* θα πάμε αντίστροφα² θα υπολογίσουμε πρώτα τις ποσότητες που περιγράφουν τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων σε μη αδρανειακά συστήματα και έπειτα από αυτές θα προκύψει η ενδογενής καμπυλότητα του χωροχρόνου.

2.5 Εξισώσεις κίνησης σωματιδίων - Η 1^η παράγωγος του μετρικού τανυστή

Στην ενότητα αυτή θα γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης σε συναλλοίωτη μορφή ενός ελεύθερου (υπόκειται μόνο σε τοπικά βαρυτικές δυνάμεις τοπικά ομοιόμορφων πεδίων) δοκιμαστικού (δεν επηρεάζει την γεωμετρία του χωροχρόνου) σωματιδίου από όπου θα φανεί και η εξάρτησή τους από την πρώτη παράγωγο του μετρικού τανυστή. Μπορούμε με δύο τρόπους να εξάγουμε τις εξισώσεις αυτές² είτε γεωμετρικά, με χρήση των *γεωδαιτικών γραμμών*, είτε δυναμικά με χρήση της αρχής της ισοδυναμίας. Οι εξισώσεις των γεωδαιτικών θα αποτελέσουν τις εξισώσεις κίνησης σωμάτων και

² Normal frames and the validity of equivalence principle, Bozhidar Z. Iliev.

φωτεινών ακτίνων στις πραγματικές λύσεις - γεωμετρίες των εξισώσεων *Einstein*. Παρουσιάζουμε και τους δύο τρόπους:

A) Είναι γνωστό, από την *Κλασική Μηχανική*, ότι οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου μπορούν να εξαχθούν χωρίς αξιώματα δυνάμεων, αλλά μέσω της *αρχής ελάχιστης δράσης* και της συνάρτησης της *Λαγκρανζιανής*. Μία ανάλογη *διαταρακτική αρχή* εφαρμόζεται στην κίνηση ελεύθερου σωματιδίου στην *EΘΣ* καθώς και στην *ΓΘΣ*. Οι παραπάνω ορολογίες θα αποσαφηνιστούν στα επόμενα. Ας δούμε τη μορφή που παίρνει η αρχή αυτή στις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

Αρχή των Μεταβολών στη Νευτώνεια Μηχανική

Ένα σωματίδιο κινείται μεταξύ ενός σημείου στο χώρο μιας χρονικής στιγμής και ενός άλλου σημείου στο χώρο μεταγενέστερης χρονικής στιγμής έτσι ώστε η δράση του να παρουσιάζει ακρότατο σε αυτό το διάστημα.

Αρχή των Μεταβολών για την Κίνηση Ελεύθερου Σωματιδίου στην Ειδική Σχετικότητα

Η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου σωματιδίου μεταξύ δύο χρονοειδώς χωρισμένων σημείων παρουσιάζει ακρότατο στον ιδιοχρόνο μεταξύ τους.

Αρχή των Μεταβολών για την Κίνηση Ελεύθερου Δοκιμαστικού Σωματιδίου στην Γενική Σχετικότητα

Η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου δοκιμαστικού σωματιδίου μεταξύ δύο χρονοειδώς διαχωρισμένων σημείων οδηγεί σε τοπικό ακρότατο του ιδιοχρόνου μεταξύ τους.

Η τελευταία, που αναφέρεται στην *ΓΘΣ*, διαφέρει από την δεύτερη της ειδικής, πρώτο, στον όρο *δοκιμαστικό* για να κάνει σαφές ότι το σωματίδιο δεν αποτελεί σημαντική

πηγή στρέβλωσης (όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3) του χωροχρόνου, δεύτερο, στον όρο *τοπικό* έτσι ώστε να ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας και τρίτο στην αντικατάσταση του ιδιοχρόνου από την επίπεδη μετρική $\eta_{\alpha\beta}$ στην γενική $g_{\mu\nu}(x^i)$. Η λαγκρανζιανή λοιπόν διατύπωση των εξισώσεων κίνησης «λέει» ότι ένα σωματίδιο που εκτελεί *ελεύθερη πτώση* μέσα σε έναν καμπυλωμένο χωρόχρονο μετρικής $g_{\mu\nu}$ θα κινηθεί κατά μήκος της ελάχιστης δυνατής διαδρομής μεταξύ δύο σημείων, με το «μήκος» να μετριέται από τον ιδιοχρόνο. Τέτοιες διαδρομές καλούνται *γεωδαιτικές*.

Έστω δύο σημεία του τετραδιάστατου χωροχρόνου P και P' στο σύστημα x^μ . Τότε η απόσταση μεταξύ τους δίνεται από την σχέση:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.1)$$

ή ως προς τον ιδιοχρόνο:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.2)$$

Για να βρούμε την ελάχιστη γραμμή από το P στο P' θεωρούμε την παρακάτω μεταβολική αρχή:

Από την (2.4.2) έχουμε:

$$\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda \quad (2.5.3)$$

Απειροστές μεταβολές στον ιδιοχρόνο θα δώσουν:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

Έτσι η διαταράσσοντας την (2.5.3) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \tau + \delta\tau &= \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda = \\ &= \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} \left[1 + \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1} \times \left(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) \right]^{1/2} d\lambda \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Όπότε η μεταβολή $\delta\tau$, αναπτύσσοντας τη ρίζα και αφού το δx^σ θεωρείται πολύ μικρό, είναι:

$$\delta\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} \left(-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda} \right) d\lambda$$

Αλλάζοντας παράμετρο από την (2.5.3),

$$d\lambda = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} d\tau$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \int \left(-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma - g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau} \right) d\tau \\ &= \int \left(-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \right) \delta x^\sigma d\tau \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

όπου στην τελευταία σειρά κάναμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και θεωρήσαμε ότι στα άκρα της καμπύλης μας x^μ ισχύει $\delta x^\mu = 0$.

Απαιτώντας τώρα την συνθήκη ακροτάτου θα έχουμε $\delta\tau = 0$ ή λόγω της (2.5.5)

$$-\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu g_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $dg_{\mu\sigma}/d\tau = (dx^\nu/d\tau) \partial_\nu g_{\mu\sigma}$.

Αναδιατάσσοντας λίγο τους όρους παίρνουμε,

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(-\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

και τέλος ανεβάζοντας τους δείκτες της μετρικής προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.5.6)$$

Από την σχέση αυτή παρατηρούμε ότι το σώμα θα έχει μη μηδενική επιτάχυνση ως προς κάποιο τυχαίο σύστημα x^μ αν και μόνο αν ισχύει $g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \neq 0$. Η επιτάχυνση αυτή θα έχει αναγκαστικά «διττή φύση» καθώς όπως είπαμε δεν υπάρχει κάποιος τρόπος με τον οποίο να είμαστε σίγουροι αν οφείλεται σε βαρυτικό πεδίο ή όχι.

B) Στην δεύτερη περίπτωση θα εξάγουμε την εξίσωση κίνησης (2.5.6) με τη βοήθεια της αρχής της ισοδυναμίας, στη λογική της επέκτασης από το τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε γενικά συστήματα.

Θεωρούμε ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση βαρυτικής δύναμης. Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων ξ^α το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση και εκεί οι εξισώσεις κίνησης ταυτίζονται με αυτές ενός «ακίνητου» συστήματος εντός του βαρυτικού πεδίου (εδώ φαίνεται και η μεγάλη σημασία της ισότητας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας!). Στο ξ^α οι τροχιά είναι ευθεία γραμμή στον χωροχρόνο:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.5.7)$$

όπου $d\tau$ ο ιδιοχρόνος

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.5.8)$$

Υποθέτοντας πάλι το τυχαίο σύστημα συντεταγμένων x^μ , οι συνιστώσες ελεύθερης πτώσης ξ^α είναι συναρτήσεις των x^μ και η εξίσωση (2.5.7) γίνεται,

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.5.9)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ και χρησιμοποιώντας τον κανόνα γινομένου,

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.5.10)$$

η (2.5.9) γράφεται,

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.5.11)$$

όπου οι ποσότητες $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ ονομάζονται *συνδέσεις ή σύμβολα Christoffel*, και είναι εξ' ορισμού:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.5.12)$$

Ο ιδιοχρόνος μπορεί επίσης να περιγραφεί σε τυχόν σύστημα συντεταγμένων ως:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.5.13)$$

ή κατά τα γνωστά

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5.14)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ ο μετρικός τανυστής

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.5.15)$$

Η εξίσωση κίνησης (2.5.11) στο σύστημα x^μ είναι γενικά μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Η μορφή της μας δείχνει ότι αν $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \neq 0$ το σωματίδιο δεν κινείται σε ευθεία γραμμή αλλά σε μια καμπυλόγραμμη, π.χ. πολυωνυμική ή εκθετική, ενώ τα Γ 's καθορίζουν τον βαθμό απόκλισης από την ομοιομορφία αυτή. Συγκρίνοντας τώρα την (2.5.11) με τον νευτώνειο νόμο κίνησης,

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \nabla \Phi$$

εύκολα μπορεί να υποθέσει κανείς ότι οι συνδέσεις θα αποτελούν τις συνιστώσες του βαρυτικού πεδίου στη γλώσσα του νέου φορμαλισμού αφού ένας μηδενισμός τους συνεπάγεται αυτομάτως και μηδενικό βαρυτικό πεδίο. Έτσι, κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση θα εξηγηθεί εξίσου μέσω της βαρύτητας ή της επιτάχυνσης. Ωστόσο, είναι σαφές από την (2.5.12) ότι ο μηδενισμός ή μη των Γ 's εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων οπότε δεν μπορούν να είναι οι ποσότητες που περιγράφουν την καμπυλότητα ενός χώρου.

Θα εξετάσουμε τώρα αν οι σχέσεις (2.5.11) και (2.5.14) πληρούν το αξίωμα της γενικής συναλλοιωτότητας. Πρώτα, παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις είναι αληθείς υπό την απουσία της βαρύτητας, επειδή θέτοντας την $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ ίση με μηδέν και τον $g_{\mu\nu}$ ίσο με $\eta_{\mu\nu}$ παίρνουμε

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = 0 \quad d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

και αυτές είναι οι σωστές εξισώσεις στην Ειδική Σχετικότητα. Έπειτα, θα χρειαστεί να εξετάσουμε αν η μορφή των εξισώσεων κάτω από ένα γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων παραμένει αναλλοίωτη. Γι' αυτό θα υπολογίσουμε χωριστά στο νέο σύστημα τους δύο όρους της (2.5.11) και θα τους προσθέσουμε. Για τον πρώτο παίρνουμε,

$$\frac{d^2x'^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \quad (2.5.16)$$

Ενώ μετασχηματίζοντας τα Γ 's και πολλαπλασιάζοντας με τον όρο $(dx'^{\mu}/d\tau)(dx'^{\nu}/d\tau)$ διαδοχικά παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Οπότε,

$$\Gamma'^{\mu}_{\sigma\tau} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\tau}}{d\tau} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} - \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (2.5.18)$$

Τώρα προσθέτοντας τις (2.5.16) και (2.5.18) παίρνουμε,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{d^2 x^{\kappa}}{d\tau^2} + \Gamma^{\kappa}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \right) \quad (2.5.19)$$

δηλαδή το αριστερό μέλος της (2.5.19) είναι ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα με νόμο μετασχηματισμού σε τυχαίο σύστημα την παραπάνω σχέση. Άρα, ο νόμος κίνησης γραμμένος στη μορφή (2.5.11) είναι ένας γενικά συναλλοίωτος νόμος και δίνει την επιτάχυνση ως προς το καθένα σύστημα συντεταγμένων. Έτσι η σχέση (2.5.19) δείχνει πως τα Γ 's συνδέουν τις μετρούμενες από το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων επιταχύνσεις και γι' αυτό δικαιολογημένα καλούνται συνδέσεις, ενώ όπως προκύπτει από την (2.5.17) δεν είναι γενικά τανυστές παρά μόνο σε μια κατηγορία γραμμικών μετασχηματισμών.

Τώρα, εφόσον τα σύμβολα *Christoffel* αναπαριστούν το βαρυτικό πεδίο που προκαλεί την καμπύλωση και οι παράγωγοι του μετρικού τανυστή περιγράφουν την ίδια καμπύλωση, βάσει του θεωρήματος του *Riemann*, αναζητούμε έναν ορισμό των Γ 's συναρτήσει του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ και της πρώτης παραγώγου του. Αυτή η σχέση δεν περιμένουμε να υπολογίζει την καμπυλότητα *Riemann*. Αυτό για τους εξής λόγους:

α) τα Γ 's δεν είναι τανυστές

β) εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων

γ) δίνονται από την 1^η παράγωγο του $g_{\mu\nu}$, όπως θα δούμε αμέσως τώρα.

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο του $g_{\mu\nu}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.5.20) \end{aligned}$$

Οπότε το άθροισμα $\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\kappa\mu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} g'_{\mu\nu}$ είναι,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\kappa\mu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} g'_{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \right) + 2g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \quad (2.5.21) \end{aligned}$$

Έτσι από τις (2.5.20) και (2.5.21) έχουμε

$$\{\lambda, \mu\nu\} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \{\rho, \tau\sigma\} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (2.5.22)$$

Όπου,

$$\{\lambda, \mu\nu\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \quad (2.5.23)$$

Αφαιρώντας την (2.5.22) από την (2.5.17), βλέπουμε ότι η $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \{\lambda, \mu\nu\}$ είναι τανυστής:

$$(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \{\lambda, \mu\nu\})' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} (\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \{\rho, \tau\sigma\}) \quad (2.5.24)$$

Η αρχή της ισοδυναμίας μας λέει ότι υπάρχει ένα ειδικό σύστημα συντεταγμένων ξ_P , στη γειτονιά ενός δοθέντος σημείου P , στο οποίο τα φαινόμενα της βαρύτητας είναι απόντα. Σε αυτό το σύστημα δεν μπορούν να υπάρξουν βαρυτικές δυνάμεις σε ένα ελεύθερο σωματίο, επομένως η $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ εξαφανίζεται αλλά και η παράγωγος του $g_{\mu\nu}$ εξαφανίζεται εφόσον $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ στο σύστημα αυτό. Επομένως, το $\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \{\rho, \tau\sigma\}$ είναι μηδέν στα τοπικά αδρανειακά συστήματα, και αφού είναι τανυστής, θα πρέπει να εξαφανίζεται σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, δηλαδή

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \{\lambda, \mu\nu\}, \text{ παντού} \quad (2.5.25)$$

Συμπερασματικά, λοιπόν, οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται μόνο από τα σύμβολα *Christoffel* και κατ' επέκταση από τα g_{ij} και τις πρώτες παραγώγους τους.

2.6 Το νευτώνειο όριο

Η ενότητα αυτή παρουσιάζεται για δύο λόγους. Πρώτον για να δούμε πως παράγονται οι νόμοι του *Newton* από άλλους γενικότερους και δεύτερον γιατί θα μας χρειαστεί στην κατάστρωση της εξίσωσης *Einstein* η οποία πρέπει πάλι να καταλήγει στα αποτελέσματα αυτού του ορίου. Όλη η προηγούμενη διατύπωση συναλλοίωτων νόμων θα πρέπει να συμπίπτει με τους νόμους του *Newton* στο όριο ενός σωματιδίου που κινείται αργά ($u_{\sigma\omega\mu} \ll c$) σε ένα ασθενές βαρυτικό πεδίο. Τότε, μπορούμε να αγνοήσουμε την $d\mathfrak{x}/dt$ ως προς dt/dt και να γράψουμε την (2.5.11) σαν:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 = 0 \quad (2.6.1)$$

Αφού το πεδίο είναι στατικό, όλες οι χρονικές παράγωγοι του $g_{\mu\nu}$ μηδενίζονται και επομένως από την (2.5.25) λαμβάνουμε,

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \quad (2.6.2)$$

Τελικά, αφού το πεδίο είναι ασθενές, μπορούμε να υιοθετήσουμε ένα σχεδόν Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οπότε η μετρική δίνεται προσεγγιστικά από την,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} \ll 1 \quad (2.6.3)$$

και έτσι ως προς πρώτη τάξη του $h_{\alpha\beta}$ η (2.6.2) γίνεται:

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \quad (2.6.4)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στις εξισώσεις κίνησης (2.6.1) παίρνουμε:

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 \nabla h_{00} = 0 \quad (2.6.5)$$

$$\frac{d^2 t}{dt^2} = 0 \quad (2.6.6)$$

Η λύση της δεύτερης εξίσωσης είναι ότι η dt/dt ισούται με μια σταθερά και έτσι διαιρώντας την εξίσωση με $(dt/dt)^2$, βρίσκουμε,

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (2.6.7)$$

Το αντίστοιχο νευτώνειο αποτέλεσμα είναι,

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = -\nabla \varphi \quad (2.6.8)$$

όπου φ το βαρυτικό δυναμικό, το οποίο για απόσταση r από το κέντρο ενός σφαιρικού σώματος μάζας M έχει την μορφή:

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \quad (2.6.9)$$

Συγκρίνοντας τις (2.6.8) και (2.6.9), συμπεραίνουμε ότι:

$$h_{00} = -2\varphi + \text{const} \quad (2.6.10)$$

Χρειαζόμαστε λοιπόν μια συνθήκη για τον υπολογισμό της παραπάνω σταθερής. Αυτή έπεται από το γεγονός ότι σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή βαρυτικού δυναμικού ο χώρος τείνει στον επίπεδο χώρο *Minkowski*. Έτσι μηδενίζοντας το h_{00} και το φ στο άπειρο, βρίσκουμε ότι η σταθερά είναι μηδέν, άρα, $h_{00} = -2\varphi$. Επιστρέφοντας τώρα στην μετρική (2.6.3) προκύπτει ότι:

$$g_{00} = -1 + 2\varphi \quad (2.6.11)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα φανεί χρήσιμο στον προσδιορισμό του *τανυστή καμπυλότητας Einstein* τρίτο κεφάλαιο.

Το βαρυτικό δυναμικό φ στην επιφάνεια ενός πρωτονίου είναι της τάξης 10^{-39} , στην επιφάνεια της Γης 10^{-9} , στην επιφάνεια του Ηλίου 10^{-6} και στην επιφάνεια ενός λευκού νάνου 10^{-4} με αποτέλεσμα τελικά, η παραμόρφωση του $g_{\mu\nu}$ που παράγεται από την βαρύτητα είναι γενικώς πολύ μικρή.

2.7 Συναλλοίωτη Παράγωγος

Έχουμε ήδη κάνει χρήση της μερικής παραγώγου του μετρικού τανυστή. Η πράξη αυτή προφανώς και έχει νόημα δηλώνοντας τη μεταβολή του μεγέθους αυτού ως προς κάποια κατεύθυνση του χώρου. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο από την παραγωγή ενός τανυστή να προκύψει πάλι τανυστής. Πράγματι, έστω το ανταλλοίωτο διάνυσμα V^μ με νόμο μετασχηματισμού:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (2.7.1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x'^λ παίρνουμε:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \quad (2.7.2)$$

Ο πρώτος ήταν αυτός που θα περιμέναμε ενώ ο δεύτερος καταστρέφει την τανυστική συμπεριφορά. Έτσι στην προσπάθειά μας να δώσουμε σε όλους τους φυσικούς νόμους (στους οποίους η διαφορίση είναι η κατεξοχήν χρήσιμη πράξη) γενικά συναλλοίωτη μορφή είναι ανάγκη να εξάγουμε και μια αντίστοιχη πράξη παραγώγισης - τη *συναλλοίωτη παράγωγο* τανυστών.

Παρόλο που η $\partial V^\mu / \partial x^\lambda$ δεν είναι τανυστής, μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε έναν τανυστή παρατηρώντας ότι ο ανομοιογενής όρος της (2.7.2) είναι ίδιος με αυτόν της (2.5.18). Λόγω της σχέσης,

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\lambda \quad (2.7.3)$$

ο όρος αυτός γράφεται:

$$\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (2.7.4)$$

Αντικαθιστώντας τη (2.7.4) στην (2.5.18) λαμβάνουμε,

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (2.7.5)$$

και χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (2.7.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'^\kappa &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} \right) \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\eta} V^\eta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma \quad (2.7.6) \end{aligned}$$

Έτσι, προσθέτοντας τις (2.7.2) και (2.7.6), παρατηρούμε ότι ο ανομοιογενής όρος αναιρείται οπότε παίρνουμε:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} V'^\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma \right) \quad (2.7.7)$$

Θέτοντας την ποσότητα $\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma$ με,

$$V^\mu_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa \quad (2.7.8)$$

η (2.7.7) γράφεται:

$$V'^\mu_{;\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu_{;\rho} \quad (2.7.9)$$

Από την τελευταία είναι σαφές ότι το $V_{;\lambda}^{\mu}$ είναι τανυστής και έτσι οδηγούμαστε να ορίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο από τη σχέση (2.7.8).

Αναλόγως μπορεί να οριστεί και η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου διανύσματος ή γενικά ενός τανυστή, T_{β}^{α} , ως εξής:

$$T_{\beta;\nu}^{\alpha} = \frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} T_{\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} T_{\lambda}^{\alpha} \quad (2.7.10)$$

Γενικά η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς x^{ρ} ενός τανυστή T_{\dots} είναι ίση με $\partial T_{\dots}/\partial x^{\rho}$, συν έναν όρο για κάθε ανταλλοίωτο δείκτη μ , της $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ πολλαπλασιασμένη με T και αντικαθιστώντας το μ με ν , μείον έναν όρο, για κάθε συναλλοίωτο δείκτη λ , της πολλαπλασιασμένης $\Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa}$ με T αντικαθιστώντας το λ με κ . Να σημειώσουμε εδώ το γεγονός ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν, επειδή εξαφανίζεται στα τοπικά αδρανειακά συστήματα, όπου η $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ και ο $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\lambda}$ είναι μηδέν και λόγω της τανυστικής του ιδιότητας θα είναι μηδέν σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

Η έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου φαίνεται από τον ορισμό της:

$$V_{;\lambda}^{\mu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa}$$

Η συνολική μεταβολή των συνιστωσών ενός τανυστή κατά την παράλληλη μεταφορά του είναι το αλγεβρικό άθροισμα των μεταβολών:

- 1) λόγω του πεδίου του τανυστή
- 2) λόγω των συνδέσεων του χώρου ως προς το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων

Ουσιαστικά τα Γ s είναι οι συνδέσεις μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων ενώ ταυτοχρόνως είναι και συνδέσεις του χώρου.

Τέλος, από την (2.7.8) βλέπουμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ανάγεται στην κανονική παράγωγο σε όλα τα τοπικά αδρανειακά συστήματα όπου ισχύουν οι νόμοι της ειδικής σχετικότητας.

Η σημασία της συναλλοίωτης παραγώγου ανακύπτει από δύο ιδιότητές της: Μετατρέπει τανυστές σε άλλους τανυστές και γίνεται η κανονική παράγωγος, όταν $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = 0$, δηλαδή όταν η βαρύτητα είναι απύσχα.

Έχουμε στη διάθεσή μας τώρα ό,τι χρειαζόμαστε για να καταστρώσουμε γενικά συναλλοιώτους νόμους. Όλα τα παραπάνω προτείνουν τον ακόλουθο αλγόριθμο για να εκτιμούμε τα αποτελέσματα της βαρύτητας στα φυσικά συστήματα: Γράφουμε τις κατάλληλες εξισώσεις της Ειδικής Σχετικότητας που ισχύουν εν τη απουσία της βαρύτητας, αντικαθιστούμε το $\eta_{\mu\nu}$ με τον $g_{\mu\nu}$, και όλες τις παραγώγους με τις συναλλοιώτες παραγώγους. Οι προκύπτουσες εξισώσεις θα είναι γενικώς συναλλοιώτες και αληθείς εν τη απουσία της βαρύτητας, και επομένως, σύμφωνα με την αρχή της γενικής συναλλοιώτητας, θα είναι αληθείς και με την παρουσία των βαρυτικών πεδίων, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δουλεύουμε σε μια χωροχρονική κλίμακα αρκετά μικρή συγκριτικά με την κλίμακα του βαρυτικού πεδίου.

2.8 Απόκλιση ανταλλοιώτου διανύσματος

Στην ενότητα αυτή θα εξάγουμε την συναλλοιώτη μορφή του θεωρήματος της απόκλισης του *Gauss* ως μια εφαρμογή της συναλλοιώτης παραγώγου. Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας θα χρειαστούν στο επόμενο κεφάλαιο όταν θα ολοκληρώσουμε μεγέθη όπως η *πυκνότητα ενέργειας*. Η κλασσική μορφή του θεωρήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\int V_{,\alpha}^{\alpha} dV = \oint V^{\alpha} \eta_{\alpha} dS \quad (2.8.1)$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο που είπαμε στην ενότητα 2.7 για να βρούμε την συναλλοιώτη μορφή της (2.8.1) θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τα μεγέθη της με τα αντίστοιχα συναλλοιώτα. Πρώτα θα υπολογίσουμε τον όγκο και μετά την απόκλιση διανύσματος.

Το στοιχείο όγκου της (2.8.1) είναι ένα βαθμωτό μέγεθος συνεπώς το αντίστοιχο συναλλοιώτο θα πρέπει να είναι επίσης αναλλοιώτο κάτω από όλους τους μετασχηματισμούς. Η τετραδιάστατη μορφή του σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (x^0, x^1, x^2, x^3) είναι:

$$d\tau = \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.8.2)$$

Ο νόμος μετασχηματισμού του σύμφωνα με το θεώρημα του *Jacobi*³ είναι,

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \right| d\tau \quad (2.8.3)$$

από όπου φαίνεται ότι δεν είναι πλέον βαθμωτή ποσότητα.

Επίσης η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g = |g_{\mu\nu}|$ μετασχηματίζεται ως,

$$g' = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} g_{\mu\nu} \right| = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \right| \left| \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \right|^2 g \quad (2.8.4)$$

ή

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \right| \sqrt{g} \quad (2.8.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (2.8.3) και (2.8.5) συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα $\sqrt{g}d\tau$ είναι το ζητούμενο αναλλοίωτο βαθμωτό μέγεθος του τετραδιάστατου όγκου. Ισοδύναμα χρησιμοποιείται το $\sqrt{-g}$ αντί του \sqrt{g} για να μην έχουμε μιγαδικές ποσότητες λόγω του υπερβολικού χαρακτήρα της μετρικής.

Η συναλλοίωτη απόκλιση ενός ανταλλοίωτου διανύσματος είναι,

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda} \quad (2.8.6)$$

όπου

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}}$$

Από τον κανόνα για τη διαφορίση των οριζουσών⁴,

$$g_{,\lambda} \equiv dg = g^{\mu\rho} g dg_{\mu\rho} = g g^{\mu\rho} g_{\mu\rho,\lambda} \quad (2.8.7)$$

παίρνουμε:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g_{,\lambda} g^{-1} = \frac{(\sqrt{g})_{,\lambda}}{\sqrt{g}} = (\ln \sqrt{g})_{,\lambda} \quad (2.8.8)$$

Άρα η (2.8.6) δίνει:

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} V^{\mu}) \quad (2.8.9)$$

³ Albert Einstein, *Η θεμελίωση της γενικής θεωρίας της Σχετικότητας*, Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1999, σελ. 52.

⁴ Albert Einstein, *Η θεμελίωση της γενικής θεωρίας της Σχετικότητας*, Εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1999, σελ. 65-66.

Έτσι για ένα τυχαίο τετραδιάνυσμα V^μ , συνάγουμε το *συναλλοίωτο θεώρημα Gauss*

$$\int V_{;\mu}^\mu \sqrt{g} d^4x = \int (\sqrt{g} V^\mu)_{;\mu} d^4x = \oint V^\nu \hat{n}_\nu \sqrt{g} d^3x \quad \text{θεώρημα Gauss στην } \Gamma\Theta\Sigma \quad (2.8.10)$$

Σε ανάλογα αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε παίρνοντας την απόκλιση ενός ανταλλοίωτου τανυστή 2^{ης} τάξης όπου από τις σχέσεις,

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$$

και

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda}$$

βρίσκουμε ότι,

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (2.8.11)$$

ή αν θέσουμε όπου g το $-g$ ώστε η ποσότητα \sqrt{g} να είναι πάντα πραγματική παίρνουμε:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (2.8.12)$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι μόνο όταν ο δεύτερος όρος της είναι μηδέν έχουμε έναν νόμο διατήρησης όπως αυτός της (2.8.10), ενώ στην γενική περίπτωση η ποσότητα δεν διατηρείται. Αυτό το συμπέρασμα θα μας φανεί πού χρήσιμο όταν θα μιλάμε για τον *τανυστή τάσης-ενέργειας* για να αποδείξουμε τη μη διατήρηση της ενέργειας στην $\Gamma\Theta\Sigma$, παρά μόνο στο τοπικό αδρανειακό σύστημα.

2.9 Παράλληλη Μετατόπιση Κατά Μήκος Καμπύλης

Ψάχνουμε το ισοδύναμο ενός διανύσματος το οποίο μετατοπίζεται από ένα σημείο του χωροχρόνου σε ένα άλλο γειτονικό κατά μήκος μιας μη κλειστής καμπύλης.

Στις ορθογώνιες συντεταγμένες του επίπεδου χώρου, ή του τοπικού αδρανειακού συστήματος αναφοράς στον καμπυλωμένο χωροχρόνο, το ζητούμενο διάνυσμα θα είχε ακριβώς τις ίδιες συνιστώσες αλλά όπως θα δούμε σε γενικά συστήματα συντεταγμένων ή χώρους οι συνιστώσες του ισοδυνάμου διανύσματος μεταβάλλονται

κατά τη μεταφορά σαν αποτέλεσμα της εξάρτησης τους από το σημείο εφαρμογής. Η μεταβολή αυτή είναι πάλι συνάρτηση των συμβόλων *Christoffel*.

Ξεκινάμε, λοιπόν, θεωρώντας τανυστές $T(\tau)$ που ορίζονται μόνο πάνω σε μια καμπύλη $x^\mu(\tau)$ (όπως η ορμή $P^\mu(\tau)$ ή το σπιν $S^\mu(\tau)$ ενός σωματιδίου), με τ την παράμετρο της καμπύλης. Έστω ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα $A^\mu(\tau)$, με κανόνα μετασχηματισμού,

$$A'^\mu(\tau) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(\tau) \quad (2.9.1)$$

όπου η μερική παράγωγος $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ θα πρέπει να υπολογιστεί σαν $x^\mu = x^\mu(\tau)$, δηλαδή να εξαρτάται από την τ . Τότε, παραγωγίζοντας ως προς τ , βρίσκουμε:

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dA^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu(\tau) \quad (2.9.2)$$

Η δεύτερη παράγωγος $\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}$ είναι η ίδια με αυτή που ευθύνεται για ανομοιογενή όρο στο κανόνα μετασχηματισμού (2.5.18) της σύνδεσης, και έτσι οδηγούμαστε στο να ορίσουμε την *συναλλοίωτη παράγωγο κατά μήκος της καμπύλης* $x^\mu(\tau)$ σαν:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu \quad (2.9.3)$$

Έτσι, οι εξισώσεις (2.9.1) - (2.9.3) δείχνουν ότι το αντικείμενο αυτό είναι διάνυσμα:

$$\frac{DA'^\mu}{D\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{DA^\nu}{D\tau} \quad (2.9.4)$$

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε την *συναλλοίωτη παράγωγο κατά μήκος μιας καμπύλης ενός συναλλοίωτου διανύσματος*:

$$\frac{DB_\mu}{D\tau} \equiv \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} B_\lambda \quad (2.9.5)$$

αλλά και τη *συναλλοίωτη παράγωγο κατά μήκος μιας καμπύλης ενός γενικού τανυστή* $T(\tau)$ προσθέτοντας στην $\frac{dT}{d\tau}$ έναν όρο όπως αυτόν στην (2.9.3) για κάθε πάνω δείκτη και αφαιρώντας έναν όρο όπως αυτόν στην (2.9.5) για κάθε κάτω δείκτη. Για παράδειγμα:

$$\frac{DT_\nu^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dT_\nu^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} T_\nu^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \frac{dx^\lambda}{d\tau} T_\sigma^\mu \quad (2.9.6)$$

Έστω τώρα το διάνυσμα ενός σωματιδίου που μεταφέρεται κατά μήκος μιας καμπύλης $x^\mu(\tau)$ του οποίου οι συντεταγμένες δεν μεταβάλλονται ως προς τ αν περιγράφονται στο τοπικό αδρανειακό σύστημα του σωματιδίου. Τότε, η (2.9.3) δίνει,

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0 \quad (2.9.7)$$

και επειδή πρόκειται για μια συναλλοίωτη πρόταση που ισχύει στο TAS αυτή θα ισχύει σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων, έτσι θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu \quad (2.9.8)$$

Η σχέση (2.9.7), ή ισοδύναμα η τελευταία, μας δίνει τον ορισμό της παράλληλης μεταφοράς ενός διανύσματος κάτω από την εξής διατύπωση: λέμε ότι ένα διάνυσμα A^μ μετατοπίζεται παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης, $x^\mu(\tau)$, αν και μόνο αν μηδενίζεται η συναλλοίωτη παράγωγός του κατά μήκος της καμπύλης αυτής.

Επίσης από την (2.9.5) συνάγεται η αντίστοιχη σχέση της (2.9.8) για ένα συναλλοίωτο διάνυσμα S_μ , το οποίο ορίζεται σε ένα σημείο P και το μεταφέρουμε σε ένα κοντινό σημείο P' . Η απειροστή μεταβολή που θα υποστεί υπολογίζεται από την σχέση,

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} S_\mu \quad (2.9.9)$$

Συνεπώς το μέτρο της μεταβολής του διανύσματος εξαρτάται μόνο από τις συναρτήσεις των Γ 's και το σημείο στο οποίο θέλουμε να το μεταφέρουμε. Αυτό κάνει ακόμα πιο κατανοητή την έννοια των συνδέσεων.

Από την μεταφορά ενός διανύσματος και μόνο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για την γεωμετρία του χώρου εφόσον οι συνδέσεις δεν μηδενίζονται ακόμη και σε επίπεδους χώρους. Τα σύμβολα *Christoffel* είναι απλώς η διαφορά στις τιμές των συνιστωσών ενός μεγέθους εξαιτίας του συστήματος αναφοράς που έχουμε επιλέξει. Ο τανυστής *Riemann-Christoffel* εξαρτάται από τα Γ 's και αποτελεί τη μοναδική ποσότητα που εξασφαλίζει την ενδογενή καμπυλότητα ενός χώρου, δηλαδή την παρουσία βαρυντικού πεδίου. Με αυτόν θα ασχοληθούμε αμέσως τώρα.

2.10 Τανυστής *Riemann*

Σε αυτή την ενότητα γίνεται η σύνδεση που επιφέρει η αρχή της ισοδυναμίας ανάμεσα στη μαθηματική περιγραφή χώρων με ενδογενή καμπυλότητα και τη μαθηματική

περιγραφή γενικώς επιταχυνόμενων συστημάτων. Η κοινή συνισταμένη μεταξύ τους είναι η τανυστική ανάλυση.

Η αλλαγή των γεωμετρικών σχέσεων είναι μια ενδογενής ιδιότητα του σύμπαντος η οποία οφείλεται στη μεταβολή της συγκέντρωσης ύλης-ενέργειας στις διάφορες περιοχές του. Η σχέση αυτή αιτίου - αποτελέσματος μπορεί να ποσοτικοποιηθεί ως εξής:

$$(\text{μέτρο τοπικής χωροχρονικής καμπυλότητας}) = (\text{μέτρο πυκνότητας ύλης} - \text{ενέργειας}) \quad (2.10.1)$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης αναφέρεται στο αποτέλεσμα και περιγράφεται από τον τανυστή *Riemann* ενώ το δεύτερο αναφέρεται στο αίτιο της βαρύτητας και περιγράφεται, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, από τον τανυστή ύλης - ενέργειας. Στην ενότητα (2.4) είδαμε ότι ο *Gauss* όρισε την καμπυλότητα ως το πραγματικό μέτρο της απόκλισης μιας δισδιάστατης γεωμετρίας από αυτήν του Ευκλείδη. Βρήκε μια συνάρτηση η οποία έδινε την εγγενή καμπυλότητα του δισδιάστατου χώρου ανεξάρτητα, δηλαδή, από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων και απέδειξε ότι η συνάρτηση αυτή αποτελούταν μόνο τους μετρικούς συντελεστές g_{ij} και τις παραγώγους τους (1^η και 2^η). Συνεχίζοντας, ο *Riemann* υπολόγισε τον τανυστή που έδινε την εγγενή καμπυλότητα ενός N - διάστατου χώρου πάλι με συναρτήσεις του μετρικού τανυστή και των πρώτων παραγώγων του ο οποίος για $N = 2$ έπρεπε να επιστρέφει την καμπυλότητα του *Gauss*. Οι δύο παραπάνω «μορφές» μετρικού τανυστή (*Riemann*, *Gauss*) έχουν την ιδιότητα να καταλήγουν, τοπικά, σε μια γενικευμένη πυθαγόρεια σχέση συντεταγμένων και γι' αυτό, μαθηματικά, χαρακτηρίζονται ως θετικά ορισμένες (έχουν θετική υπογραφή και το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνεται από την κλασσική σχέση). Όπως είδαμε όμως η τοπική σχέση «μήκους» στην Ειδική σχετικότητα, $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, διαφέρει από την πυθαγόρεια ως προς ένα μόνο πρόσημο « - ». Αυτό επιφέρει, αν και όχι πολλές, αλλαγές στη μαθηματική περιγραφή τέτοιων χώρων οι οποίοι δεν είναι πλέον *Riemannian* χώροι αλλά *Lorentzian* και με αυτούς ασχολείται αναγκαστικά η Σχετικότητα. Ας τα δούμε όμως αναλυτικά.

Στο τέλος της ενότητας (2.4) είχαμε αποκλείσει την πιθανότητα ο ζητούμενος τανυστής να αποτελείται από τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ και των πρώτων

παραγώγων τους μόνο. Η επόμενη απλούστερη πιθανότητα είναι να κατασκευάσουμε ένα τανυστή από το μετρικό τανυστή, τις πρώτες και δεύτερες παράγωγούς του. Είναι λογικό να αναζητηθεί μια τέτοια σχέση μέσω των Γ 's, καθώς αυτά:

- 1) είναι συναρτήσεις των πρώτων και των μηδενικών παραγώγων του $g_{\mu\nu}$ και επίσης
- 2) αποτελούν τις ποσότητες που αναπαριστούν το βαρυτικό πεδίο το οποίο προκαλεί την καμπύλωση.

Ας θυμηθούμε τον νόμο μετασχηματισμού για την συγγενή σύνδεση:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} - \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \quad (2.10.2)$$

(Αυτή είναι η εξίσωση (2.5.18), με της αρχικές και τελικές συντεταγμένες αλλαγμένες). Ο ανομοιογενής όρος στο δεξιό μέλος είναι αυτός που εμποδίζει το $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ να είναι τανυστής. Επομένως ας τον απομονώσουμε,

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \quad (2.10.3)$$

Για να ξεφορτωθούμε το αριστερό μέλος χρησιμοποιούμε την μεταθετικότητα των μερικών παραγώγων. Η παραγώγιση ως προς x^{κ} δίνει,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \right) - \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma'_{\eta\xi}{}^{\sigma} \right) \\ &\quad - \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\eta} - \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}} \Gamma'_{\eta\xi}{}^{\rho} \right) + \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} \end{aligned}$$

ή αν μαζέψουμε τους όμοιους όρους και πειράζουμε λίγο τους δείκτες:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} - \Gamma'_{\rho\lambda}{}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma'_{\lambda\sigma}{}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\ &\quad - \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \right) \end{aligned}$$

Αφαιρώντας, τώρα, την ίδια ισότητα εναλλάσσοντας τα ν και κ , βρίσκουμε ότι όλοι οι όροι που περιέχουν γινόμενα των Γ και Γ' εξαφανίζονται, αφήνοντας

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma'_{\rho\eta}{}^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma'_{\lambda\sigma}{}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \Gamma'_{\lambda\eta}{}^{\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Η τελευταία μπορεί να γραφεί σαν ένας κανόνας μετασχηματισμού του μικτού τανυστή,

$$R^{\tau}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \quad (2.10.4)$$

όπου:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\mu} \quad (2.10.5)$$

Η μαθηματική σημασία του $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ είναι η εξής: Αν το συνεχές είναι τέτοιας γεωμετρίας ώστε να υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο είναι σταθερές οι ποσότητες $g_{\mu\nu}$, τότε το δεξί μέλος της (2.10.5) μηδενίζεται και έτσι μηδενίζονται όλες οι ποσότητες $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$. Αν επιλέξουμε οποιοδήποτε νέο σύστημα συντεταγμένων στην θέση των αρχικών συντεταγμένων, οι ποσότητες $g_{\mu\nu}$ που αναφέρονται σε αυτό το νέο σύστημα δεν θα είναι σταθερές, άλλα, εξαιτίας του τανυστικού χαρακτήρα τους, οι μετασχηματισθείσες συνιστώσες των $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$ θα συνεχίσουν να είναι μηδέν και στο νέο σύστημα. Έτσι, ο μηδενισμός του τανυστή *Riemann-Christoffel* αποτελεί μία αναγκαία συνθήκη (και αποδεικνύεται ότι είναι και ικανή) ώστε, με μία κατάλληλη επιλογή του συστήματος αναφοράς, να μπορούν να είναι σταθερές οι ποσότητες $g_{\mu\nu}$. Στο πρόβλημά μας, αυτή η αναφορά αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία, με μία κατάλληλη επιλογή του συστήματος αναφοράς, η ειδική σχετικότητα διατηρεί την ισχύ της σε μια πεπερασμένη περιοχή του συνεχούς και σε αυτή την περιοχή ο χωροχρόνος είναι γεωμετρικά επίπεδος. Κατά προσέγγιση, μια τέτοια περιοχή είναι και αυτή του ηλιακού μας συστήματος γι' αυτό οι νόμοι του *Newton* κάνουν σωστές προβλέψεις στις κινήσεις των πλανητών και των δορυφόρων σε συνδυασμό με τις μικρές σχετικά ταχύτητές τους της τάξης του 1/10 της ταχύτητας του φωτός.

Θα ολοκληρώσουμε την ενότητα αυτή για τον τανυστή *Riemann-Christoffel* παρουσιάζοντας κάποιες επίσης χρήσιμες μορφές του, τις βασικές αλγεβρικές του ιδιότητες και μερικές γενικές παρατηρήσεις.

Συστέλλοντας την (2.10.5) παίρνουμε την πλήρη συναλλοίωτη μορφή του $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) + g_{\eta\sigma} (\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) \quad (2.10.6)$$

Από την (2.10.6) μπορούμε να συνάγουμε τις αλγεβρικές ιδιότητες του τανυστή καμπυλότητας:

(A) Συμμετρία: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$ (2.10.7)

(B) Αντισυμμετρία: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$ (2.10.10)

(Γ) Κυκλικότητα: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$ (2.10.11)

Ενώ συστέλλοντας ως προς λ και ν προκύπτει ο συμμετρικός (λόγω της (A)) *τανυστής Ricci*:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\kappa\mu} \quad (2.10.12)$$

Επίσης, αποδεικνύεται από τις αλγεβρικές ιδιότητες του $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ ότι είναι ο μοναδικός πραγματικός *τανυστής* $2^{\text{ης}}$ τάξης που μπορεί να προκύψει από τον *τανυστή Riemann*. Η συμμετρία του *τανυστή Ricci* θα φανεί πολύ χρήσιμη, όπως θα δούμε, για την εξίσωση *Einstein* στο επόμενο κεφάλαιο.

Τέλος, χρήσιμες θα φανούν και οι διαφορικές ταυτότητες των $R_{\mu\kappa}$, γνωστές ως *ταυτότητες Bianchi* οι οποίες προκύπτουν ως εξής:

Σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα, όπου όλα τα Γ 's είναι μηδέν, η (2.10.5) δίνει

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.10.13)$$

και διαφορίζοντας τη (2.10.6) παίρνουμε,

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) \quad (2.10.14)$$

Μεταθέτοντας τα ν, κ και η κυκλικά παίρνουμε τις ταυτότητες του *Bianchi*:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} = 0 \quad (2.10.15)$$

Αυτές οι εξισώσεις είναι προφανώς συναλλοιώτες και, αφού ισχύουν σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα, θα ισχύουν γενικά. Συστέλλοντας την (2.10.15) ώστε να έχουμε τον *τανυστή Ricci* και ενθυμούμενοι ότι οι συναλλοιώτες παράγωγοι του $g^{\lambda\nu}$ μηδενίζονται, θα βρούμε ότι,

$$R_{\mu\kappa;\eta} + R_{\mu\eta;\kappa} + R_{\mu\kappa\eta;\nu}^{\lambda} = 0 \quad (2.10.16)$$

ενώ συστέλλοντας ξανά παίρνουμε,

$$R_{;\eta} + R_{\eta;\mu}^{\mu} + R_{\eta;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.10.17)$$

ή

$$R_{\eta}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^{\mu} R_{;\mu} = 0 \quad (2.10.18)$$

Μια ισοδύναμη, αλλά πιο κοινή μορφή είναι:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\mu} = 0 \quad (2.10.19)$$

2.11 Παράλληλη Μεταφορά κατά Μήκος Κυκλικής Διαδρομής

Εδώ θα συνεχίσουμε την συζήτηση της ενότητας 2.9 έτσι ώστε να βρούμε κάποια γεωμετρική αναπαράσταση της καμπυλότητας *Riemann*. Θα επεκτείνουμε την παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της μη κλειστής καμπύλης x^{μ} που λέγαμε εκεί απλώς «κλείνοντάς» την και θα δείξουμε ότι αυτό και μόνο είναι ικανό να εγγυηθεί την ύπαρξη καμπυλότητας του χώρου, πράγμα το οποίο δεν έκανε η ανοιχτή καμπύλη. Έτσι ολοκληρώνοντας την διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (2.9.9), βρίσκουμε την συνολική μεταβολή ενός διανύσματος S_{μ} , το οποίο μετατοπίζεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C . Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό εργαζόμενοι ανάλογα με την μέθοδο απόδειξης του *θεωρήματος του Stokes*.

Θεωρούμε την καμπύλη C σαν το όριο κάποιας δισδιάστατης επιφάνειας A και διαμερίζουμε την A σε μικρά κελιά που φράζονται από τις μικρές καμπύλες C_N , όπως στο σχήμα. Η μεταβολή του S_{μ} , όταν μετατοπίζεται παράλληλα γύρω από την C , μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα των μεταβολών του S_{μ} όταν μετατοπίζεται γύρω από αυτές τις μικρές καμπύλες

$$\Delta S_{\mu} = \sum_N \Delta_N S_{\mu} \quad (2.11.1)$$

επειδή η μεταβολή του S_{μ} γύρω από κάθε εσωτερικό κελί αναιρείται από τις μεταβολές γύρω από τα γειτονικά κελιά, αφήνοντας έτσι μόνο την συνεισφορά από τα συνοριακά κελιά που φτιάχνουν την C . Αν η καμπύλη είναι αρκετά μικρή μπορούμε να αναπτύξουμε κατά *Taylor* το $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x)$, κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης, γύρω από κάποιο σημείο $X \equiv x(\tau_0)$ της καμπύλης:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x) = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + \dots \quad (2.11.2)$$

Τότε η (2.8.9) ως πρώτη τάξη του $x^{\mu} - X^{\mu}$, δίνει,

$$S_{\mu}(\tau) = S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X)(x^{\nu}(\tau) - X^{\nu}(\tau))S_{\mu}(\tau_0) + \dots \quad (2.11.3)$$

και χρησιμοποιώντας τις (2.11.2), (2.11.3) στην (2.10.9) παίρνουμε μια ισότητα δεύτερης τάξης,

$$S_{\mu}(\tau) \cong S_{\mu}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + \dots \right] \times \left[S_{\lambda}(\tau_0) + S_{\sigma}(\tau_0) \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X)(x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}(\tau)) + \dots \right] \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau$$

ή αν παραβλέψουμε τους όρους τρίτης ή μεγαλύτερης τάξης ως προς $x - X$:

$$S_{\mu}(\tau) \cong S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) S_{\lambda}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau + \left[\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(X) + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X) \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) \right] S_{\sigma}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} (x^{\rho} - X^{\rho}) \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau \quad (2.11.4)$$

Αν η $x^{\mu}(\tau)$ επιστρέφει στην αρχική της τιμή X^{μ} για κάποιο $\tau = \tau_1$, τότε προφανώς

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau = 0 \quad (2.11.5)$$

και έτσι η μεταβολή του S_{μ} όταν μετατοπίζεται παράλληλα κατά μήκος «μικρής» κλειστής καμπύλης $x^{\mu}(\tau)$ είναι δεύτερης τάξης:

$$\Delta S_{\mu} \equiv S_{\mu}(\tau_1) - S_{\mu}(\tau_0) = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(X) + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X) \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau \quad (2.11.6)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν εξαφανίζεται γενικά. Παρόλα αυτά είναι πάντα αντισυμμετρικό στους ρ, ν όπως μπορεί να δειχθεί με μερική ολοκλήρωση

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} (x^{\rho} x^{\nu}) d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\nu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} d\tau = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\nu} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} d\tau \quad (2.11.7)$$

Έτσι ο συντελεστής αυτού του ολοκληρώματος στην (2.11.6) μπορεί να αντικατασταθεί από αντισυμμετρικό του κομμάτι, το οποίο ισούται απλά με τον μισό τανυστή καμπυλότητας:

$$\Delta S_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} S_\sigma \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau \quad (2.11.8)$$

Αν μπορούσαμε λοιπόν να δώσουμε έναν γεωμετρικό ορισμό της καμπυλότητας αυτός ήταν ο εξής: μια περιοχή του χώρου δεν είναι επίπεδη αν και μόνο αν μεταφέροντας ένα διάνυσμα κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής εντός της περιοχής αυτής οι συνιστώσες του διανύσματος αλλάζουν. Μάλιστα ο βαθμός απόκλισης από τον επίπεδο χώρο και τις ιδιότητές του καθώς και το μέτρο μεταβολής των συνιστωσών του διανύσματος εξαρτώνται μόνο από τις συνιστώσες του τανυστή *Riemann* στην περιοχή του εκάστοτε σημείου.

2.12 Γεωδαισιακή Απόκλιση

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση του τανυστή καμπυλότητας *Riemann* με την περιγραφή των αποτελεσμάτων της βαρύτητας σε φυσικά γήινα συστήματα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, στις εξισώσεις (1.6.5) - (1.6.7) περιγράψαμε τις εξισώσεις κίνησης N σωματιδίων που υπόκεινται σε βαρυτικές δυνάμεις ώστε να εισάγουμε την έννοια της αρχής της ισοδυναμίας. Εκεί, θεωρήσαμε σιωπηρά ότι τα διανύσματα \mathfrak{X} και \mathfrak{P} παραμένουν παράλληλα κατά την διάρκεια της κίνησης και αυτό όντως ισχύει αλλά μόνο για σχετικά «σύντομες» κινήσεις. Όπως γνωρίζουμε το \mathfrak{P} έχει ακτινική διεύθυνση από το κάθε σώμα προς το κέντρο της Γης, ενώ το \mathfrak{X} αποτελεί έναν μετασχηματισμό του συστήματος των σωματιδίων οπότε είναι κοινός για όλα τα σώματα, χωρίς δηλαδή να συγκλίνει σε κάποιο σημείο. Γι' αυτό τον λόγο οι δύο όροι της εξίσωσης (1.6.5) δεν αναιρούνται. Αυτή λοιπόν η απόκλιση της τροχιάς ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα γειτονικά σωματίδια εξηγείται με την νευτώνεια μηχανική και ονομάζεται *νευτώνεια απόκλιση* ενώ με όρους γενικής σχετικότητας *γεωδαιτική απόκλιση* και εξηγείται επίσης από τον τανυστή καμπυλότητας *Riemann*.

Θεωρούμε ένα ζευγάρι κοντινών σωμάτων που εκτελούν ελεύθερη πτώση και ταξιδεύουν σε τροχιές x^μ και $x^\mu + \delta x^\mu$. οι εξισώσεις κίνησης των σωμάτων είναι

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (2.12.1)$$

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2} (x^\mu + \delta x^\mu) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (x + \delta x) \frac{d}{d\tau} (x^\nu + \delta x^\nu) \frac{d}{d\tau} (x^\lambda + \delta x^\lambda) \quad (2.12.2)$$

Υπολογίζοντας την διαφορά μεταξύ των δύο ισοτήτων, ως προς πρώτη τάξη του δx^μ , παίρνουμε,

$$0 = \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial \Gamma_{\nu\lambda}^\mu}{\partial x^\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + 2\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\delta x^\lambda}{d\tau} \quad (2.12.3)$$

ή με όρους συναλλοίωτων παραγώγων κατά μήκος της καμπύλης $x^\mu(\tau)$:

$$\frac{D^2}{D\tau^2} \delta x^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (2.12.4)$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει την επιτάχυνση της απόκλισης δx^λ δύο σωματιδίων. Λόγω παρουσίας του τανυστή καμπυλότητας γίνεται αντιληπτή η ύπαρξη βαρυτικού πεδίου για κάποιον που εκτελεί ελεύθερη πτώση μαζί με το ζεύγος σωματιδίων. Αυτό όμως δεν αποτελεί παραβίαση της αρχής της ισοδυναμίας επειδή τα αποτελέσματα στο δεξιό μέλος της (2.12.4) γίνονται αμελητέα, όταν οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερες από την *χαρακτηριστική διάσταση του πεδίου*. Τέλος, αν αντιπαραβάλλουμε την αντίστοιχη νευτώνεια απόκλιση,

$$\frac{d^2 \chi^i}{dt^2} = -\delta_{ij} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \right) \chi^k \quad (2.12.5)$$

παρατηρούμε ότι ενώ στη (2.12.5) ο παράγοντας $-\delta_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}$, ο οποίος χαρακτηρίζει τις *παλιρροϊκές δυνάμεις*, δηλώνει μόνο ακτινικές κινήσεις προς το κέντρο λόγω του δ_{ij} και της $\Phi = \Phi(r)$, ο αντίστοιχος στη (2.10.5) τανυστής *Riemann*, $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Οι ακτινικές κινήσεις συνεπώς στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δεν αποτελούν παρά *ειδικές λύσεις των εξισώσεων πεδίου*.

Αυτό στην ουσία οφείλεται στο γεγονός ότι η πράξη της παραγωγίσης περιλαμβάνει τη διαφορά δύο τανυστών σε γειτονικά σημεία του χωροχρόνου η οποία όμως ορίζεται στο *ίδιο σημείο*. Στις ορθογώνιες συντεταγμένες του επίπεδου χώρου αυτό λύνεται εύκολα μεταφέροντας το ένα διάνυσμα ώστε η αρχή του να συμπέσει με την αρχή του άλλου. Κατά την μεταφορά δεν «αλλοιώνονται» οι συνιστώσες των διανυσμάτων αφού

μεταφέρονται παράλληλα με τις συντεταγμένες του συστήματος και τελικώς το αποτέλεσμα θα είναι πάλι διάνυσμα. Σε ένα γενικά καμπυλωμένο χώρο όμως ή ακόμα και στο επίπεδο σε μη ορθογώνιες συντεταγμένες (π.χ. σε πολικές) η παραλληλία αυτή παύει να υφίσταται οπότε δεν μπορεί να οριστεί και πράξη διαφορίσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το α' μέλος των εξίσωσης *Einstein* για μια σχετικιστική θεωρία βαρύτητας, η οποία, γενικά, έχει την εξής μορφή:

$$\text{χωροχρονική καμπυλότητα} = \text{μέτρο πυκνότητας ύλης} - \text{ενέργειας} \quad (3.1.1)$$

Η ύπαρξη ή όχι του πεδίου βαρύτητας εξακριβώνεται, αμφιμονοσήμαντα, από τον μηδενισμό ή μη του συναλλοίωτου τανυστή *Riemann*, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, ενώ η ένταση του πεδίου υπολογίζεται από τις συνιστώσες καμπυλότητας του τανυστή αυτού στην εκάστοτε θέση, δηλαδή από τις τιμές των συναρτήσεων του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$, και των δύο πρώτων παραγώγων, του στη θέση αυτή. Ο $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ είναι ένας τανυστής 4^{ης} τάξης, συνεπώς έχει $4^4 = 256$ συνιστώσες οι οποίες όμως λόγω των συμμετριών που αναφέραμε δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα, προκύπτουν μόνο 20 ανεξάρτητες συνιστώσες οι οποίες δεν μηδενίζονται σε κανένα σύστημα συντεταγμένων (αν μηδενίζονταν έστω σε ένα θα ήταν μηδέν παντού λόγω του τανυστικού τους χαρακτήρα) και αυτές είναι που προσδιορίζουν πλήρως το βαρυτικό πεδίο με την έννοια της καμπύλωσης του χωροχρόνου.

3.1 Τανυστής της ύλης

Σε αυτό το κεφαλαίο περνάμε στο β' μέλος της (3.1.1) και θα υπολογίσουμε το αίτιο της καμπυλότητας το οποίο είναι η συγκέντρωση ύλης σε μια περιοχή του χώρου, ή λόγω της ισοδυναμίας μάζας - ενέργειας του *Einstein*, $E = mc^2$, η *συγκέντρωση ενέργειας* στην περιοχή αυτή. Τα δύο μέλη της (3.1.1) βρίσκονται σε δυναμική εξάρτηση μεταξύ τους και αυτό αποτυπώνεται στη φράση του *John Wheeler* ότι:

«...ο χωροχρόνος λέει στην ύλη πώς να κινηθεί, ενώ η ύλη λέει στον χωροχρόνο πώς να καμπυλωθεί...».

Είναι προφανές ότι στις τανυστικές μας εξισώσεις η ενέργεια δεν μπορεί παρά να αναπαρίσταται από κάποιον τανυστή ο οποίος καλείται *τανυστής τάσης - ενέργειας ή τανυστής ύλης*. Συνεχίζοντας στο ίδιο ύφος με τα προηγούμενα, θα γράψουμε τις εξισώσεις στην κλασσική Νευτώνεια θεωρία, οι οποίες θα τροποποιηθούν στην *EΘΣ* και θα γενικευτούν εν τέλει στην *ΓΘΣ*.

Η Νευτώνεια αντίληψη για την μορφή του βαρυτικού πεδίου ενός συστήματος, Σ , n σωματιδίων ('νέφος') με πυκνότητα μάζας ρ καθορίζεται από την εξίσωση *Poisson*

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \frac{m_0 N}{V} \quad (3.1.2)$$

όπου

Φ : το βαρυτικό δυναμικό

$\rho = m_0 N/V$: η πυκνότητα μάζας του συστήματος

m_0 : η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου

N : ο αριθμός των σωματιδίων του συστήματος

V : ο όγκος του συστήματος

Η ποσότητα $\rho = m_0 N/V$ στο β' μέλος της (3.1.2) είναι η *πηγή* του βαρυτικού πεδίου και θα προσπαθήσουμε να την μετατρέψουμε σε μια γενικά συναλλοίωτη σχέση.

Στην πράξη η σχέση αυτή αναιρείται από την ειδική σχετικότητα αφού δεν είναι *Lorentz* αναλλοίωτη, ενώ η πηγή του πεδίου αντικαθίσταται από τη συνολική *πυκνότητα ενέργειας* του συστήματος. Για να το καταλάβουμε, θεωρούμε έναν αδρανειακό παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} ως προς Σ .

Οι τιμές των παραπάνω μεγεθών στο σύστημα του παρατηρητή δίνονται μέσω των σχετικιστικών αντικαταστάσεων,

$$m_0 \rightarrow m_0 \gamma$$

$$V \rightarrow V/\gamma$$

$$\gamma \equiv (1 - u^2)^{-1/2}, \quad c = 1$$

Βάζοντάς τα όλα στην (3.1.2) το β' μέλος γίνεται,

$$4\pi G \frac{m_0 N}{V} \gamma^2 = 4\pi G \frac{m_0 N}{V} (1 - u^2)^{-1} \quad (3.1.3)$$

σχέση η οποία προφανώς δεν είναι αναλλοίωτη αφού εξαρτάται από την ταχύτητα u . Δημιουργείται έτσι, πάλι, η ανάγκη έκφρασης της ενέργειας με τρόπο που να μην εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και αυτό γίνεται μόνο αν εκφράσουμε την ενεργειακή κατάσταση του συστήματος με τη μορφή τανυστή.

Μπορούμε να βρούμε μια τέτοια σχετικιστικά αναλλοίωτη σχέση που θα δίνει την πυκνότητα ενέργειας με βάση ορισμένες απλές υποθέσεις.

Ο τανυστής τάσης-ενέργειας, αποτελεί το άθροισμα όλων των μορφών ενέργειας σε μια περιοχή του χωροχρόνου, όπως η ενέργεια ηλεκτρομαγνητικού και βαρυτικού πεδίου, η ενέργεια ηρεμίας, ενέργεια ιδιοπεριστροφής (σπιν), κ.λπ.. Στην χαμιλτονιανή του συστήματος μας δεν θα μας απασχολήσουν ενεργειακοί όροι σπιν ή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (ασχολούμαστε με μη περιστρεφόμενα ηλεκτρικά ουδέτερα άστρα), άρα μπορούμε να έχουμε μόνο όρους μάζας, κινητικούς όρους και όρους βαρυτικού πεδίου.

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας όμως, δεν προβλέπονται ενεργειακές συνιστώσες βαρυτικού πεδίου διότι αυτές μηδενίζονται σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Ο λόγος βρίσκεται πάλι στην αρχή της ισοδυναμίας:

Η πυκνότητα ενέργειας του νευτώνειου βαρυτικού πεδίου, θα δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$\varepsilon_{Newt}(\mathfrak{x}) = -\frac{1}{8\pi G} [\nabla\Phi(\mathfrak{x})]^2 = -\frac{1}{8\pi G} [\mathfrak{g}(\mathfrak{x})]^2 \quad (3.1.4)$$

όπου $\Phi(\mathfrak{x})$ το νευτώνειο δυναμικό και $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ το νευτώνειο πεδίο βαρύτητας. Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, το $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ θα πρέπει να αναζητηθεί ως μια συνάρτηση από

τις πρώτες παραγώγους του $g_{\mu\nu}$. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλει να είναι ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων, όμως όλες οι πρώτες παράγωγοι του μετρικού τανυστή μηδενίζονται στο τοπικό αδρανειακό σύστημα. Συνεπώς, η έννοια της πυκνότητας βαρυτικής ενέργειας στην $E\Theta\Sigma$ ή της τοπικής πυκνότητας βαρυτικής ενέργειας στη $\Gamma\Theta\Sigma$ δεν υφίσταται. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με την αρχή της ισοδυναμίας στην οποία *δεν υφίστανται αποτελέσματα της βαρύτητας σε κάθε τοπικό εργαστήριο αρκούντως μικρού μεγέθους το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση για μια αρκούντως μικρή χρονική περίοδο.*

Καταλήγουμε στο γεγονός ότι, στην $E\Theta\Sigma$, όλη η πληροφορία για τις μορφές ενέργειας μιας περιοχής θα συμπεριλαμβάνεται στο γνωστό τετράνυσμα της ορμής

$$P^\alpha = (E, \mathbf{P}) \quad (3.1.5)$$

Επειδή χρειαζόμαστε την πυκνότητα του παραπάνω μεγέθους θα πρέπει αυτή να οριστεί στις τέσσερις διαστάσεις του χωροχρόνου ή, ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε έναν *τετραόγκο* ΔV^α ώστε το πηλίκο να δίνει την πυκνότητα. Είναι βολικό να ορίσουμε το ΔV^α ως μια *''υπερεπιφάνεια''* στις τρεις διαστάσεις προσανατολισμένη προς την τέταρτη ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται μια *''κανονική επιφάνεια''* στη διανυσματική ανάλυση (ως το διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων με κατεύθυνση προς την τρίτη διάσταση και μέτρο το εμβαδό που σχηματίζεται από τα διανύσματα αυτά). Έτσι, ο όγκος θα δίνεται από μια σχέση της μορφής,

$$V_\beta = n_\beta \Delta V \quad (3.1.6)$$

όπου n_β το συναλλοίωτο κάθετο τετράνυσμα (όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίο) προσανατολισμού του όγκου και ΔV το μέτρο του το οποίο μπορεί να συνίσταται από τις τρεις χωρικές διαστάσεις αλλά και από δύο χωρικές και μια χρονική προφανώς. Να σημειώσουμε εδώ ότι ο λόγος που θεωρήσαμε το V_β συναλλοίωτο και όχι ανταλλοίωτο διάνυσμα είναι ο εξής:

το n_β ορίζεται ώστε να είναι σε κάθε σημείο κάθετο με κάθε εφαπτομενικό διάνυσμα t της υπέρ-επιφάνειας, δηλαδή:

$$n \cdot t = 0 \quad (3.1.7)$$

Και εφόσον το εφαπτομενικό διάνυσμα μετασχηματίζεται ως ανταλλοίωτο για να ισχύει η (3.1.7) θα πρέπει το n να είναι συναλλοίωτο.

Επιστρέφοντας, ο προφανής τρόπος έτσι ώστε να συνδυάσουμε κατάλληλα τις (3.1.5) και (3.1.6) είναι ο εξής:

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha\beta} \eta_\beta \Delta V \quad (3.1.8)$$

δηλαδή μέσω ενός *ανταλλοίωτου τανυστή 2^{ης} τάξης*. Η ποσότητα αυτή συνεπώς θα αποτελεί τον ζητούμενο *τανυστή ενέργειας-ορμής*, αφού περιέχει όλη την πληροφορία για την πυκνότητα ενέργειας.

Θα εξετάσουμε τώρα την σημασία των 16 συνιστώσων του T^{ij} . Για αυτό θα χρειαστεί να θεωρήσουμε τις δύο υπό εξέταση περιπτώσεις:

- 1) Ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς όπου ο τρισδιάστατη «υπερεπιφάνεια» ΔV ηρεμεί ως προς αυτό (*χωροειδής επιφάνεια*). Εκεί κάθε διάνυσμα της μορφής $t^\alpha = (0, \vec{t})$ είναι εφαπτομενικό στην επιφάνεια $t = const$ οπότε το κάθετο διάνυσμα n στην επιφάνεια που ικανοποιεί την (3.1.7) είναι το $n = (1, 0, 0, 0)$.

Με αυτή την εκλογή η (3.1.8) γίνεται

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.1.9)$$

η πυκνότητα ενέργειας ορίζεται ως $\varepsilon \equiv \Delta p^t / \Delta V = T^{tt}$, ενώ η πυκνότητα ορμής ως $\pi^i \equiv \Delta p^i / \Delta V = T^{it}$. Οπότε η σημασία τεσσάρων εκ των συνιστωσών του τανυστή τάσης-ενέργειας γίνεται άμεσα φανερή:

$$T^{tt} = \frac{\Delta p^t}{\Delta V} = (\text{πυκνότητα ενέργειας}) \equiv \varepsilon$$

$$T^{it} = \frac{\Delta p^i}{\Delta V} = (\text{πυκνότητα ορμής στην κατεύθυνση } i) \equiv \pi^i \quad (3.1.10)$$

2) Ένα αδρανειακό σύστημα όπου η επιφάνειά μας κινείται π.χ. στην διεύθυνση του άξονα x (λέγεται *χρονοειδής επιφάνεια*) οπότε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα τώρα θα είναι $n = (0,1,0,0)$ με κατεύθυνση τον άξονα x . Έστω, λοιπόν, ένας τρισδιάστατος όγκος που διαμερίζεται από τα διαστήματα συντεταγμένων Δy , Δz και Δt . Η αντίστοιχη της (3.1.9) σχέσης θα είναι τότε

$$\Delta p^\alpha = T^{\alpha x} \Delta y \Delta z \Delta t \quad (3.1.11)$$

Η χρονική συνιστώσα αυτής της εξίσωσης είναι

$$T^{tx} = \frac{\Delta p^t}{\Delta A \Delta t} \quad (3.1.12)$$

όπου ΔA είναι η επιφάνεια $\Delta y \Delta z$. Η συνιστώσα T^{tx} , επομένως, εκφράζει τη ροή ενέργειας κατά την κατεύθυνση x ή ισοδύναμα με την πυκνότητα ορμής. Αυτή η ισοδυναμία προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} (\text{ροή ενέργειας}) dA dt &= (\text{πυκνότητα ενέργειας}) V dA dt \\ &= (\text{πυκνότητα ορμής}) dA dt, \text{ αφού για κάθε σωματίδιο, (ενέργεια)} V \\ &= m \gamma V = (\text{ορμή}) \end{aligned}$$

Άρα οι (3.1.12) και (3.1.10) θα ταυτίζονται οπότε συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής $T^{\alpha\beta}$ είναι συμμετρικός, πράγμα το οποίο θα φανεί πολύ σημαντικό προς την εξεύρεση του τελικού τανυστή ύλης.

Οι χωρικοί όροι της (3.1.10) μπορούν να γραφούν ως

$$T^{ix} = \frac{\Delta p^i / \Delta t}{\Delta A} \quad (3.1.13)$$

Ο αριθμητής $\Delta p^i / \Delta t$, ρυθμός μεταβολής της ορμής εκφράζει δύναμη. Έτσι, από την (3.1.13), ο T^{ix} αναπαριστά την i συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται σε μια επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα της οποίας έχει διεύθυνση κατά x . Γενικεύοντας, για τις συνιστώσες της δύναμης \mathbb{F} που ασκείται σε μια επιφάνεια εμβαδού ΔA και με κάθετο διάνυσμα το \mathbb{n} , μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta F^i = T^{ij} n_j \Delta A$$

Έτσι,

η i – συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας

$$T^{ij} = \text{που εφαρμόζεται σε επιφάνεια με κάθετο διάνυσμα} \quad (3.1.14)$$

στην κατεύθυνση j

Στην κλασσική μηχανική η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας καλείται *τάση* και T^{ij} είναι ο *τανυστής τάσης*. Από τις (3.1.14), (3.1.12) και (3.1.10) αποκτούμε μια πλήρη εικόνα των συνιστωσών του τανυστή ενέργειας-ορμής.

Συνοψίζοντας, στο εν λόγω αδρανειακό σύστημα αναφοράς, οι συνιστώσες του $T^{\alpha\beta}$ ορίζονται από την

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \text{πυκνότητα ενέργειας} & \text{ροή ενέργειας} \\ \text{πυκνότητα ορμής} & \text{τανυστής μηχανικής τάσης} \end{pmatrix} \text{ ή}$$

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{xt} & T^{yt} & T^{zt} \\ T^{tx} & T^{xx} & T^{yx} & T^{zx} \\ T^{ty} & T^{xy} & T^{yy} & T^{zy} \\ T^{tz} & T^{xz} & T^{yz} & T^{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1.15).$$

3.2 Μερικές ειδικές περιπτώσεις του $T^{\alpha\beta}$

Από την (3.1.15) δίνουμε σαν παράδειγμα μερικές μορφές που παίρνει ο τανυστής της ύλης στην $E\Theta\Sigma$ σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- (1) **Ακίνητος κονιορτός.** Θεωρούμε ένα σύνολο n σωματιδίων, μάζας m το καθένα, μέσα σε έναν όγκο V . Τα σωματίδια κινούνται σε ευθύγραμμες παράλληλες μεταξύ τους κοσμικές γραμμές. Αν οι κοσμικές τους γραμμές είναι παράλληλες στον άξονα t ενός αδρανειακού παρατηρητή τότε ο κονιορτός λέγεται ακίνητος και περιγράφεται από το τετράνυσμα ταχύτητας $v^\mu = (1,0,0,0)$. Στην περίπτω-

ση αυτή δεν υπάρχει ορμή άρα μηδενίζονται οι συνιστώσες της (3.1.15)
 $T^{it} = T^{ti} = T^{ij} = 0$. Το μόνο μη μηδενικό στοιχείο είναι το T^{tt} :

$$T^{tt} = \frac{nm_0}{V} = \rho_0 = \text{η πυκνότητα μάζας ηρεμίας (σταθερή παντού)}$$

Έτσι ο ταυνοστής ύλης γράφεται,

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 v^\alpha v^\beta \quad (3.2.1)$$

- (2) **Κονιορτός σταθερής ταχύτητας.** Θεωρούμε το προηγούμενο σύστημα μόνον που τώρα δεν είναι ακίνητος ως προς τον παρατηρητή. Οπότε θα περιγράφεται από την τετραταχύτητα $v^\alpha = \gamma(1, v^x, v^y, v^z)$ και ο ταυνοστής τάσης-ενέργειας θα είναι,

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 v^\alpha v^\beta = \rho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & v^x & v^y & v^z \\ v^x & v^{x^2} & v^x v^y & v^x v^z \\ v^y & v^y v^x & v^{y^2} & v^y v^z \\ v^z & v^z v^x & v^z v^y & v^{z^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

Τα 9 στοιχεία του ταυνοστή, χωρίς την 1^η σειρά και 1^η στήλη, αποτελούν τον γνωστό ταυνοστή τάσεων στις 3 διαστάσεις και δίνουν τις διατμητικές και εγκάρσιες τάσεις του συστήματος.

- (3) **Μονοενεργειακό ρευστό.** Στην περίπτωση αυτή όλα τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου v , αλλά τυχαίων κατευθύνσεων, και δεχόμαστε ότι δεν αλληλεπιδρούν με κανένα τρόπο. Έτσι η (3.2.2) παίρνει τη μορφή,

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 \gamma^2 \text{diag}(1, v^2/3, v^2/3, v^2/3) \quad (3.2.3)$$

Εδώ έχουμε την εμφάνιση μιας ιστροπικής τάσης, της πίεσης $p = \frac{1}{3} \rho_0 \gamma^2 v^2$.

- (4) **Στάσιμο ιδανικό ρευστό.** Τα σωματίδια εξακολουθούν να μην αλληλεπιδρούν και να κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις με την ίδια πιθανότητα, αλλά τώρα τα μέτρα v των ταχυτήτων τους έχουν μια κατανομή (κατανομή Maxwell). Έτσι, υπολογίζοντας τον μέσο όρο του ταυνοστή (3.2.3), στο σύστημα όπου το ρευστό βρίσκεται σε ηρεμία, για την κατανομή αυτή των v βρίσκουμε,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & p \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

όπου ρ και p η μέση πυκνότητα ενέργειας και η μέση πίεση αντίστοιχα. Τα μεγέθη εξαρτώνται μεταξύ τους από μια κατάλληλη καταστατική εξίσωση, όπως στα ιδανικά αέρια. Η (3.2.4) μπορεί να γραφεί ως,

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)v^\alpha v^\beta + p\eta^{\alpha\beta} \quad (3.2.5),$$

όπου $v^\alpha = (1,0,0,0)$ και αφού πρόκειται για μια ταυστική εξίσωση η ίδια θα ισχύει και σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς κινούμενο με ταχύτητα v . Η τάση-ενέργεια του ιδανικού ρευστού χρησιμοποιείται συχνά στην μοντελοποίηση της ύλης σε ένα πλήθος διαφορετικών περιπτώσεων, στο εσωτερικό των άστρων νετρονίων και των λευκών νάνων ή όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα στην ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου.

(5) **Ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου.** Για την ακτινοβολία σε στατιστική ισορροπία η εξίσωση κατάστασης είναι $p = \frac{\rho}{3}$, όπου p η πίεση ακτινοβολίας και ρ η πυκνότητα ενέργειας. Ο ταυστής της ύλης (3.2.5) τότε γίνεται

$$T^{\alpha\beta} = \frac{4}{3}\rho v^\alpha v^\beta - \frac{1}{3}\rho\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\rho}{3} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\rho}{3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\rho}{3} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

3.3 Διατήρηση ενέργειας-ορμής στον επίπεδο χωροχρόνο της $E\Theta\Sigma$

Όλη η παραπάνω παρουσίαση του ταυστή πυκνότητας ενέργειας-ορμής έγινε στα πλαίσια της $E\Theta\Sigma$ καθώς οι συνιστώσες του ταυστή υπολογίστηκαν από την σχέση (3.1.5), δηλαδή μέσω του *Lorentz* αναλλοίωτου ανταλλοίωτου τετρανύσματος της ορμής. Στην ενότητα αυτή, και μόνο για λόγους πληρότητας αφού δεν θα χρειαστούμε τα αποτελέσματα στην συνέχεια, θα εξάγουμε τους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής στον επίπεδο χωροχρόνο της $E\Theta\Sigma$ μέσω του ταυστή αυτού η οποία επεκτείνεται, τοπικά, στην $\Gamma\Theta\Sigma$. Όπως γνωρίζουμε, στη μηχανική κάθε αρχή διατήρησης έχει τη ρίζα της σε μια υποκείμενη συμμετρία ή στο αναλλοίωτο μιας *λαγκρανζιανής*. Το εν λόγω θεώρημα είναι γνωστό ως *θεώρημα της Noether*. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις *Euler-Lagrange* (αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτου) της $E\Theta\Sigma$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (t, x, y, z) έχουμε,

$$-\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^a/d\tau)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad (3.3.1)$$

όπου,

$$L = \left(-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right)^{1/2} \quad (3.3.2)$$

Από την (3.3.1) παρατηρούμε ότι η ανεξαρτησία της λαγκρανζιανής από μια μεταβλητή x^a (πρώτο ολοκλήρωμα) συνεπάγεται,

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} = 0$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^a/d\tau)} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial(dx^a/d\tau)} &= \text{σταθ.} \end{aligned}$$

Δηλαδή ένα νόμο διατήρησης ως προς την γενικευμένη ορμή,

$$\dot{x}^a \equiv dx^a/d\tau$$

της συντεταγμένης x^a .

Έτσι, αφού η τετραορμή είναι:

$$p^\mu = mv^\mu = m\dot{x}^a = m \left(\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \right) = (E, p^x, p^y, p^z)$$

θα ισχύει,

$$\dot{t} = \gamma = E/m \quad (3.3.3)$$

και από τις (3.3.1) και (3.3.2),

$$\dot{t} = \text{const.} \quad (3.3.4)$$

άρα από (3.3.3) και (3.3.4):

$$E = \text{const.} \quad (3.3.5)$$

Δηλαδή η ενέργεια είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα στην $E\Theta\Sigma$. Τα ίδια ακριβώς προκύπτουν και για τις υπόλοιπες συνιστώσες τις τετραορμής οι οποίες συνεπάγονται διατήρηση του διανύσματος της ορμής

$$p = \text{const.}$$

κατά τις κατευθύνσεις των αξόνων x, y, z .

Θα δούμε τώρα ότι οι παραπάνω νόμοι διατήρησης ενέργειας – ορμής μπορούν να προκύψουν απευθείας από την μερική διαφορίση του τανυστή ενέργειας-ορμής μέσω της σχέσης,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{επίπεδος χωροχρόνος } E\theta\Sigma) \quad (3.3.6)$$

Λαμβάνοντας τη χρονική συνιστώσα της (3.3.6) έχουμε,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathfrak{P} = 0 \quad (3.3.7)$$

Με ολοκλήρωση σε έναν μικρό όγκο V στο χώρο και χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss παίρνουμε,

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon d^3x + \int_{\partial V} \nabla \cdot \mathfrak{P} = 0 \quad (3.3.8)$$

που δεν είναι άλλη από την γνωστή εξίσωση συνέχειας. Ο πρώτος όρος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας στο εσωτερικό του όγκου και ο δεύτερος η ροή ενέργειας (\equiv πυκνότητα ορμής) που εξέρχεται από τον όγκο αυτό στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται τη διατήρηση της ενέργειας.

Οι τρεις χωρικές συνιστώσες της (3.3.6) γράφονται ως:

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t} = -\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} \equiv \varphi^i \quad (3.3.9)$$

Η χρονική μεταβολή της ορμής εκφράζει δύναμη και είναι ίση και αντίθετη με μια συνιστώσα πυκνότητας δύναμης την οποία συμβολίσαμε με φ^i . Ολοκληρώνοντας το φ^i για ένα μικρό όγκο στο χώρο λαμβάνουμε την συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον όγκο αυτό και βάσει της (3.3.9) παίρνουμε την σύνδεσή της με τον τανυστή τάσης-ενέργειας. Η σχέση αυτή συνεπάγεται την διατήρηση της ορμής όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.

3.4 Ο τανυστής της ύλης σε καμπύλους χώρους της ΓΘΣ - τοπική διατήρηση ενέργειας-ορμής

Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα του τανυστή ύλης $T^{\alpha\beta}$, από τον επίπεδο χωροχρόνο *Minkowski* σε γενικά καμπύλους χωροχρόνους, αφού στην ουσία είπαμε ο $T^{\alpha\beta}$ θα αποτελέσει την πηγή καμπυλότητας στην εξίσωση του *Einstein*. Θα επικαλεστούμε για μια ακόμη φορά την αρχή της ισοδυναμίας και σύμφωνα με τον καθιερωμένο «αλγόριθμο» της παράγραφου 2.5 η γενίκευση γίνεται κάτω από τις αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta} &\rightarrow g_{\mu\nu} \\ \partial_\mu &\rightarrow D_\mu\end{aligned}$$

Για παράδειγμα σε ένα ιδανικό ρευστό η προφανής γενίκευση της σχέσης,

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)v^\alpha v^\beta + p\eta^{\alpha\beta}$$

είναι:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)v^\mu v^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (3.4.1)$$

Ενώ η διατήρηση της ενέργειας-ορμής στην *EΘΣ*,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

γράφεται ως:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4.2)$$

ή πιο αναλυτικά, μέσω των κανόνων της συναλλοίωτης παραγώγου,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\alpha\mu} = 0 \quad (3.4.3)$$

Η τελευταία δεν αποτελεί νόμο διατήρησης όπως η (3.3.6). Η ενέργεια της ύλης παρουσία δυναμικής χωροχρονικής καμπυλότητας δεν διατηρείται αλλά μεταβάλλεται σε αντίδραση προς αυτήν.

Η (3.4.3) χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (2.8.11) του προηγούμενου κεφαλαίου,

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$$

γράφεται στη μορφή:

$$\partial_\nu \{T^{\mu\nu} \sqrt{-g}\} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} \sqrt{-g} = 0 \quad (3.4.4)$$

Η (3.4.4) λόγω παρουσίας του $\sqrt{-g}$ έχει πλέον την κατάλληλη μορφή για μια συναλλοίωτη μορφή του νόμου του *Gauss* και μας λέει το εξής: στην περίπτωση που ο δεύτερος όρος είναι απών, δηλαδή στον επίπεδο χωροχρόνο της *EΘΣ*, έχουμε έναν νόμο διατήρησης και μάλιστα επανερχόμαστε στον προηγούμενο $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$. Αλλιώς λόγω των συμβόλων *Christoffel* ανακύπτουν *κινηματικές δυνάμεις* $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$ που δρουν στην κατανομή της ύλης και συνεπώς στους νόμους διατήρησης.

Συνεπώς, στην *ΓΘΣ*, η *ενέργεια-ορμή* αλλά και *ούτε καμιά άλλη ποσότητα (στροφορμή, κ.λπ.)* δεν διατηρείται.

Η σχέση

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

αποτελεί την *τοπική διατήρηση της ενέργειας-ορμής* ακριβώς επειδή ανάγεται στον νόμο διατήρησης (3.3.6) σε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα.

3.5 Εξισώσεις πεδίου Einstein

Είμαστε τώρα σε θέση να εξάγουμε τις εξισώσεις *Einstein* ξεκινώντας από την πλέον γενική έκφρασή τους (3.1.1):

$$\text{χωροχρονική καμπυλότητα} = \text{μέτρο πυκνότητας ύλης} - \text{ενέργειας}$$

Η σχέση αυτή θέτει σε μια δυναμική εξάρτηση το μέτρο παρουσίας της ενέργειας - ύλης σε μια περιοχή του χωροχρόνου με την γεωμετρία του στην περιοχή αυτή. Στην κλασική σχετικότητα (σε σχέση με τις εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας) οι δύο αυτοί παράγοντες μελετώνται χωριστά υπό την έννοια ότι το κομμάτι των εξισώσεων που έχει τα πεδία της ύλης περιέχει μόνο όρους που έχουν να κάνουν με το πώς συνδέεται η μετρική με τα υλικά πεδία ενώ το κομμάτι των εξισώσεων που έχει να κάνει με τη γεωμετρία περιέχει μόνο όρους που έχουν να κάνουν με την καμπυλότητα του χωροχρόνου.

Έτσι, το αριστερό μέλος της θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση του τανυστή καμπυλότητας $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ και το δεξί του τανυστή της ύλης $T_{\mu\nu}$.

Εξαρχής, γίνεται φανερό ότι η ζητούμενη σχέση θα πρέπει να ικανοποιεί κάποια βασικά ταυτοτικά στοιχεία:

- Θα είναι μια τανυστική εξίσωση έτσι ώστε να πληροί την απαίτηση της γενικής συναλλοίωτητας.
- Κάθε παραγωγή θα πρέπει να αντικαθίσταται από την συναλλοίωτη παράγωγο.
- Θα πρέπει να αναπαράγει τις εξισώσεις της $E\Theta\Sigma$ στο όριο που η καμπυλότητα μηδενίζεται, δηλαδή για ασθενή πεδία θα ισχύει

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\alpha\beta}, R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \rightarrow 0$$

Τα συστατικά που διαθέτουμε για την κατασκευή της εξίσωσης είναι:

- Για την καμπυλότητα: $g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}, R_{\mu\nu}, R$
- Για την ύλη: $T^{\mu\nu}$

Αμέσως προκύπτουν ορισμένοι φυσικοί περιορισμοί των εξισώσεων:

(A) Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή Riemann $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$.

Αυτό για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι γιατί ο τανυστής ύλης είναι 2^{15} τάξης ενώ ο τανυστής Riemann είναι 4^{15} . Έτσι δεν θα προκύπτει τανυστική εξίσωση. Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί να μην χρησιμοποιήσουμε τον τανυστή της ύλης όμως από αυτό θα προκύπταν δύο προβλήματα. Πρώτον, ότι θα αντιστρέψαμε την φορά της αιτιακής σχέσης $\text{ύλη} \rightarrow \text{καμπυλότητα}$ και αφού ξέρουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης Einstein δεν είναι παρά οι συναρτήσεις του μετρικού τανυστή 2^{15} τάξης $g_{\mu\nu}$, θα αναμέναμε μια δευτεροβάθμια τανυστική εξίσωση. Δεύτερον, στον κενό χώρο ισχύει $T^{\mu\nu} = 0$. Αν ο τανυστής

Riemann ήταν στην εξίσωση θα ήταν ίσος με το μηδέν σε κάθε σημείο που δεν υπάρχει ύλη. Έτσι δεν θα υπήρχε καμπυλότητα στον κενό χώρο πράγμα το οποίο δεν ισχύει παρατηρησιακά. Μια δοκιμαστική μάζα στον κενό χώρο γύρω από μια άλλη μάζα - πηγή υπόκειται σε βαρυτικές δυνάμεις και επομένως οφείλει να υπάρχει καμπυλότητα εκεί. Αρά θα χρησιμοποιήσουμε έναν τανυστή 2^{ns} τάξης που όμως θα προκύπτει από τον τανυστή *Riemann* αλλιώς δεν θα συμπεριλάβουμε καμία πληροφορία για την καμπυλότητα. Έτσι, επιλέγουμε τον τανυστή $G_{\mu\nu}$ ο οποίος θα αποτελεί κάποια συστολή του $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$.

(B) Ο $G_{\mu\nu}$ περιέχει μόνο όρους που είναι είτε γραμμικοί ως προς τις δεύτερες παραγώγους, είτε τετραγωνικοί στις πρώτες παραγώγους της μετρικής.

Αν γράψουμε ως $G_{\mu\nu}$ τον τανυστή στο a' μέλος τότε αυτός θα είναι συνάρτηση του $g_{\mu\nu}$ και των 2 πρώτων παραγώγων του. Αυτό βέβαια δεν μας περιορίζει να έχουμε όρους τάξης παραγωγίσις μόνο μέχρι $N = 2$ για τον $g_{\mu\nu}$, αλλά θα πρέπει συνολικά ο $G_{\mu\nu}$ να έχει διαστάσεις 2^{ns} παραγώγου του $g_{\mu\nu}$. Αυτό μπορεί να προβλεφθεί αν κάθε όρος με $N \neq 2$ πολλαπλασιαστεί με μια σταθερά διάστασης χωροχρονικού μήκους στην $N-2$ δύναμη. Τέτοιοι όροι θα γίνονται αμελητέοι σε πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές χωροχρονικές κλίμακες (ανάλογα με την τιμή του N) και για να αντιμετωπιστεί αυτή η ασάφεια θεωρούμε, κάπως αυθαίρετα βέβαια, ότι οι εξισώσεις βαρυτικού πεδίου είναι μοναδικές στην κλίμακα. Έτσι ο $G_{\mu\nu}$ αποτελείται μόνο από όρους παραγώγων της μετρικής $N=2$ τάξης.

(Γ) Ο $G_{\mu\nu}$ θα διατηρείται στην συναλλοίωτη μορφή του.

Αφού διατηρείται ο $T_{\mu\nu}$ - (3.4.2) - θα πρέπει να ισχύει:

$$G_{\mu\nu;\nu} = 0 \quad (3.5.1)$$

Η σχέση αυτή μας εξασφαλίζει ότι ο $G_{\mu\nu}$ δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από τον τανυστή *Ricci* αφού η συναλλοίωτη παράγωγος του τελευταίου δεν μηδενίζεται, $R_{;\nu}^{\mu\nu} \neq 0$.

(Δ) Ο $G_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής.

Λόγω συμμετρίας του $T_{\mu\nu}$, θα είναι

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad (3.5.2)$$

(Ε) Στο όριο ενός ασθενούς στατικού πεδίου που παράγεται από μη σχετικιστική ύλη θα ισχύει προσεγγιστικά $G_{00} \cong \nabla^2 g_{00}$.

Αν θυμηθούμε τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.6 το νευτώνειο όριο μιας ασθενούς στατικής χωροχρονικής καμπυλότητας που παράγεται από μη σχετικιστική μάζα πυκνότητας ρ , η συνιστώσα του χρόνου του μετρικού τανυστή δίνεται κατά προσέγγιση από την σχέση (2.6.11):

$$g_{00} \cong -1 + 2\varphi \quad (3.5.3)$$

Εδώ το φ είναι το Νευτώνειο δυναμικό και ορίζεται από την εξίσωση του *Poisson*,

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho \quad (3.5.4)$$

όπου G η παγκόσμια σταθερά, ίση με 6.670×10^{-8} σε *c.g.s.*. Επιπλέον, ο τανυστής της πυκνότητας ενέργειας T_{00} για μη σχετικιστική ύλη, όπου η πυκνότητα ενέργειας ισούται απλά με την πυκνότητα μάζας ηρεμίας $\rho_0 = \rho$, είναι:

$$T_{00} \cong \rho \quad (3.5.5)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.5.3) - (3.5.5), έχουμε:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (3.5.6)$$

Συνεπώς η συνιστώσα G_{00} θα μεταπίπτει στην $\nabla^2 g_{00}$. Αυτή η εξίσωση πεδίου υποτίθεται ότι ισχύει μόνο για ασθενή πεδία που παράγονται από μη σχετικιστική ύλη και δεν είναι ούτε καν *Lorentz* αναλλοίωτη.

Αυτές είναι και όλες οι ιδιότητες που χρειάζονται για να ορίσουμε τον $G_{\mu\nu}$. Από την τελευταία εξίσωση μπορούμε να μαντέψουμε ότι οι εξισώσεις ασθενούς πεδίου για μια γενική κατανομή $T_{\alpha\beta}$ ενέργειας και ορμής έχουν τη μορφή:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (3.5.7)$$

Από την αρχή της ισοδυναμίας συνάγεται ότι οι εξισώσεις που καθορίζουν τα βαρυτικά πεδία πρέπει να είναι,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.5.8)$$

όπου ο $G_{\mu\nu}$ είναι ένας τανυστής που μεταπίπτει στον $G_{\alpha\beta}$ για ασθενή πεδία.

Είδαμε στην ενότητα 2.10 ότι ο πιο γενικός τρόπος να κατασκευάσουμε ένα πεδίο που να ικανοποιεί τις (A) και (B) είναι με συστολή από τον τανυστή καμπυλότητας $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$. Η αντισυμμετρική ιδιότητα του τανυστή *Riemann* δείχνει ότι υπάρχουν μόνο δύο τανυστές που μπορούν να κατασκευαστούν συστέλλοντας τον $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$. Τα μεγέθη αυτά είναι ο τανυστής του *Ricci* $R_{\mu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}$ και η βαθμωτή καμπυλότητα $R = R_{\mu}^{\mu}$. Αυτό δικαιολογεί την κάπως αυθαίρετη επιλογή μας για τα συστατικά της εξίσωσης *Einstein*. Επομένως, οι (A) και (B) απαιτούν ο $G_{\mu\nu}$ να έχει την γενική μορφή:

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (3.5.9)$$

όπου C_1 και C_2 σταθερές. Ο τανυστής αυτός είναι αυτόματα συμμετρικός και έτσι η (Γ) δεν μας λέει τίποτα καινούριο. Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες του *Bianchi* (2.1.0.19), παίρνουμε την συναλλοίωτη παράγωγο του $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu} \quad (3.5.10)$$

Από την (Δ) έχουμε μόνο δύο δυνατότητες: είτε $C_2 = -C_1/2$ είτε ο $R_{;\nu}$ μηδενίζεται παντού. Μπορούμε να απορρίψουμε την δεύτερη περίπτωση, επειδή οι (3.5.8) και (3.5.9) δίνουν:

$$G_{\mu}^{\mu} = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu} \quad (3.5.11)$$

Έτσι αν η $R_{;ν} \equiv \partial R / \partial x^\nu$ μηδενίζεται, το ίδιο θα κάνει και η $\partial T_\mu^\mu / \partial x^\nu$, και αυτό δεν μπορεί να ισχύει στην περίπτωση μιας ανομοιογενούς μη – σχετικιστικής ύλης. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $C_2 = -C_1/2$ και έτσι η (3.5.9) γίνεται:

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \quad (3.5.12)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (E) για να υπολογίσουμε την σταθερά C_1 . Σε ένα μη σχετικιστικό σύστημα ισχύει πάντα $T_{ij} \ll T_{00}$, και έτσι μας απασχολεί η περίπτωση όπου $G_{ij} \ll G_{00}$ ή αν χρησιμοποιήσουμε την (3.5.12):

$$R_{ij} \cong \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (3.5.13)$$

Επιπλέον, σε ένα ασθενές πεδίο ισχύει $g_{\alpha\beta} \cong \eta_{\alpha\beta}$. Η βαθμωτή καμπυλότητα δίνεται, επομένως, από την,

$$R \cong R_{\kappa\kappa} - R_{00} \cong \frac{3}{2} R - R_{00} \quad (3.5.14)$$

ή,

$$R \cong 2R_{00} \quad (3.5.15)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (3.5.15) και (3.5.12), βρίσκουμε:

$$G_{00} \cong 2C_1 R_{00} \quad (3.5.16)$$

Για να υπολογίσουμε τον R_{00} για ένα ασθενές πεδίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γραμμικό μέρος του $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ που δίνεται από την εξίσωση (2.10.6) ως:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad (3.5.17)$$

Όταν το πεδίο είναι στατικό όλες οι χρονικές παράγωγοι εξαφανίζονται και οι συνιστώσες που χρειαζόμαστε γίνονται:

$$R_{0000} \cong 0 \quad R_{i0j0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j}$$

Έτσι η (3.5.16) δίνει,

$$G_{00} \cong 2C_1(R_{i0j0} - R_{0000}) \cong C_1 \nabla^2 g_{00} \quad (3.5.18)$$

και συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την απαίτηση (E) τότε αυτή ικανοποιείται μόνο για $C_1 = 1$.

Θέτοντας $C_1 = 1$ στην (3.5.12) ολοκληρώνουμε τον υπολογισμό του $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.5.19)$$

Η έκφραση αυτή με την (3.5.8), δίνει τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.5.20)$$

Μια εναλλακτική μορφή, που κάποιες φορές είναι χρήσιμη, δίνεται συστέλλοντας την (3.2.20) με τον $g^{\mu\nu}$, παίρνουμε,

$$R - 2R = -8\pi G T_{\mu}^{\mu} \quad (3.5.21)$$

ή,

$$R = 8\pi G T_{\mu}^{\mu} \quad (3.5.22)$$

και χρησιμοποιώντας την έκφραση αυτή στην (3.5.22), παίρνουμε:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\lambda}^{\lambda} \right) \quad (3.5.23)$$

Φυσικά, μπορούμε να πάμε προς τα πίσω, και έτσι οι (3.5.20) και (3.5.23) θα πρέπει να θεωρούνται σαν μια τελείως ισοδύναμη μορφή των εξισώσεων πεδίου του *Einstein*.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι λόγω της (3.5.1) και της (3.3.6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 &\rightarrow \nabla_{\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \text{const.} \end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \text{const.} = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε έναν όρο στην εξίσωση *Einstein* του οποίου η συναλλοίωτη παράγωγος να μηδενίζεται. Ο όρος αυτός θα πρέπει να είναι είτε η μετρική είτε όρος $1^{\text{ης}}$ μερικής παραγώγου της μετρικής, επεκτείνοντας έτσι την απαίτηση (B). Σύμφωνα με αυτά που είπαμε στην ενότητα με τον τανυστή *Riemann* η $1^{\text{η}}$ παράγωγος του $g_{\mu\nu}$ μηδενίζεται ταυτοτικά καθώς μηδενίζεται στο τοπικό σύστημα αναφοράς, ενώ η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν αφού μηδενίζεται στο *TAS* (όπου $g' = \Gamma s = 0$). Έτσι μπορούμε να έχουμε ένα νέο όρο στην εξίσωση *Einstein*, τον $\Lambda g_{\mu\nu}$ η οποία τότε γράφεται,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.5.24)$$

Η σταθερά Λ (προκύπτει εύκολα ότι $\Lambda = R/4$) είχε εισαχθεί αρχικά από τον *Einstein* για κοσμολογικούς λόγους και αντιπροσώπευε την *ενέργεια του κενού* με σκοπό την εξουδετέρωση της ελκτικής βαρύτητας της ύλης και να προκύπτει ένα *στατικό* σύμπαν. Μετέπειτα παρατηρήσεις έδειξαν ότι κοσμολογική σταθερά πρέπει να τεθεί ίση με μηδέν προς χάριν της διαστολής του σύμπαντος.

3.6 Εξισώσεις Einstein στο κενό

Σε περιοχές του χωροχρόνου όπου δεν υπάρχει ύλη, με την γενικευμένη έννοια του όρου, οι εξισώσεις (3.5.20) παίρνουν την ειδική μορφή,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (3.6.1)$$

ή ισοδύναμα από την (3.5.23):

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.6.2) \text{ (Ricci flatness)}$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι ο τανυστής καμπυλότητας *Ricci* μηδενίζεται όπου απουσιάζει η ύλη. Το ίδιο όμως δεν είναι υποχρεωτικό να ισχύει και για τον τανυστή του οποίου η συστολή είναι ο τανυστής *Ricci*, δηλαδή τον τανυστή *Riemann*, και από

εδώ φαίνεται η σημασία της συστολής τανυστών μέσω εσωτερικών γινομένων όπως περιγράψαμε στην ενότητα με τις αλγεβρικές πράξεις μεταξύ τανυστών. Η συστολή,

$$g_{\lambda\gamma} R_{\mu\kappa\nu}^{\gamma} = R_{\lambda\mu\kappa\nu} \rightarrow g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\nu} \quad (3.6.3)$$

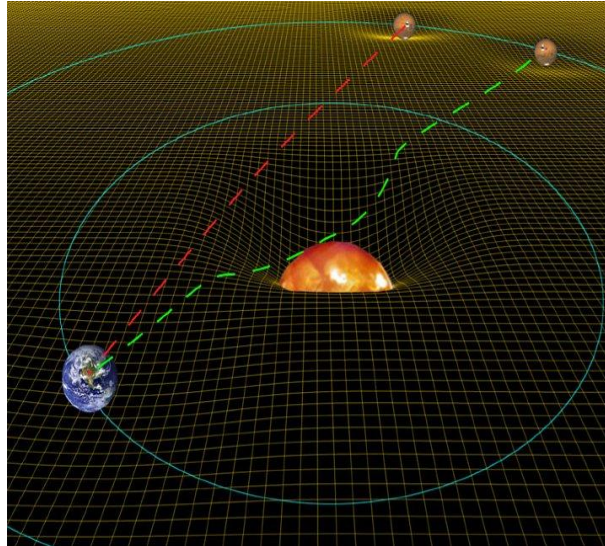
δείχνει ακριβώς μια αναπαράσταση του τανυστή σε έναν χώρο λιγότερων διαστάσεων, ακριβώς όπως το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων στον πραγματικό (στον R^n) επίπεδο χώρο αποτελεί αναπαράσταση του διανύσματος στην ευθεία των αριθμών. Για παράδειγμα, αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων του $R^3 \ni = (3,2,1)$ και $\nabla = (1, -3,3)$ ή αλλιώς ότι συστέλλουμε το ∇ με το ∇

$$(3,2,1) \cdot (1, -3,3) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

Αν τώρα θεωρήσουμε γνωστό το αποτέλεσμα 0 και το πρώτο διάνυσμα $(3,2,1)$ δεν μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα το δεύτερο αφού η εξίσωση $(3,2,1) \cdot (x, y, z) = 0$ έχει πλέον τρεις βαθμούς ελευθερίας έναν για κάθε κατεύθυνση. Δηλαδή έχει χαθεί σίγουρα πληροφορία για το ∇ κατά την συστολή του. Ανάλογα, αλλά με διαφορετικό αριθμό διαστάσεων, στην συστολή του συσταλμένου τανυστή *Riemann* $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$ (3.6.3),

$$g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\nu}$$

το γεγονός ότι $R_{\mu\nu} = 0$ δεν μηδενίζει αυτόματα τις συνιστώσες του $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$ παρόλα αυτά αποτελεί μια λύση τους (ένα ακόμα παράδειγμα βρίσκεται μέσω της έκφρασης του στοιχείου μήκους για φωτοειδώς χωρισμένα γεγονότα, $ds^2 = g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0$, όπου το γινόμενο $u^{\alpha} u^{\beta}$ δεν είναι μηδέν). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στον κενό χώρο θα έχουμε οπωσδήποτε $R_{\mu\nu} = 0$ αλλά όχι απαραίτητα $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$ δηλαδή το κενό θα έχει καμπυλότητα (ο επίπεδος χώρος *Minkowski* μπορεί να είναι απλώς μια από τις λύσεις των εξισώσεων *Einstein* στο κενό). Αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα της απόκλισης μιας δέσμης φωτός στην περιοχή γύρω από κάποιο μαζικό ουράνιο σώμα, η οποία θεωρείται κενή ύλης.



Σχήμα 3.2.1: Απόκλιση του φωτός στο κενό λόγω στρέβλωσης του χωροχρόνου.

Να σημειώσουμε όμως ότι το αντίστροφο ισχύει, δηλαδή:

$$R_{\lambda\mu\kappa\nu} = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.6.4)$$

Οπότε, σε χώρο απολύτως επίπεδο δεν μπορεί να υπάρχει ύλη - η ύλη θα προκαλέσει καμπύλωση όπως απαιτεί η αρχή της ισοδυναμίας. Τέλος, θα κάνουμε κάποια σχόλια πάνω στην εξίσωση *Einstein*.

Οι συνιστώσες της εξίσωσης του *Einstein* απαρτίζονται από 10 μερικές διαφορικές εξισώσεις για τους συντελεστές $g_{\alpha\beta}(x)$, που καθορίζουν τις πηγές καμπυλότητας $T_{\alpha\beta}(x)$. Αποτελούν το ανάλογο των εξισώσεων *Maxwell*, οι οποίες καθορίζουν τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά δοθέντων των φορτίων και των πυκνοτήτων ρεύματος. Σε αντιδιαστολή όμως με τις τελευταίες, οι διαφορικές εξισώσεις της θεωρίας *Einstein* δεν είναι γραμμικές. Η μη γραμμικότητα αυτή είναι εμφανής όταν τις γράψουμε στη μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

Στο αριστερό μέλος έχουμε έναν τανυστή 2^{ης} τάξης με συνιστώσες τις μερικές παραγώγους και τον ίδιο τον μετρικό τανυστή και στο δεξί έναν ανάλογο τανυστή για μια πηγή πυκνότητας ενέργειας στην υπό μελέτη περιοχή. Αν γράψουμε αναλυτικά τον τανυστή *Einstein* $G_{\mu\nu}$ παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta}R_{\gamma\zeta} = \left(\delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\zeta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta}\right)R_{\gamma\zeta} \\
&= \left(\delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\zeta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\zeta}\right)\left(\Gamma_{\gamma\zeta,\varepsilon}^{\varepsilon} - \Gamma_{\gamma\varepsilon,\zeta}^{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon\sigma}^{\varepsilon}\Gamma_{\gamma\zeta}^{\sigma} - \Gamma_{\zeta\sigma}^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\gamma}^{\sigma}\right) \quad (3.6.5)
\end{aligned}$$

όπου ο $R_{\alpha\beta}$ προκύπτει με συστολή του $R_{\alpha\gamma\beta}^{\delta}$ ως εξής, $R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma}$, και από τον ορισμό του τανυστή *Riemann* σαν συνάρτηση μόνο των Γ 's (2.10.5) έπεται το παραπάνω.

Η μη γραμμικότητα μιας διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από την δύναμη της εξαρτημένης μεταβλητής της, για να είναι γραμμική θα πρέπει αυτή και οι παράγωγοι της να είναι $1^{\text{ης}}$ τάξης. Η εξαρτημένη μεταβλητή στην δική μας διαφορική είναι προφανώς η μετρική. Έτσι, στην τελευταία σχέση από το γινόμενο των Γ 's (και όχι μόνο) παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις του *Einstein* είναι μη γραμμικές και διαφορικές.

Επίσης, έχουμε αναφέρει ότι ο τανυστής *Ricci* όπως και ο μετρικός είναι συμμετρικοί με αποτέλεσμα ο $G_{\mu\nu}$ να κληρονομεί αυτή την συμμετρία επομένως, οι συνολικά 16 συνιστώσες του να μην είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και έτσι, μόνο οι 10 να παραμένουν όσες ακριβώς είναι και οι ανεξάρτητες συνιστώσες του μετρικού τανυστή. Το πρόβλημά μας μοιάζει να έχει ακριβή λύση ενός συστήματος 10 εξισώσεων με 10 αγνώστους, όμως είναι παραμετρικό. Παρόλο που είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα, τα 10 $G_{\mu\nu}$ σχετίζονται με τέσσερις διαφορικές ταυτότητες, τις ταυτότητες του *Bianchi*:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$$

Έτσι δεν υπάρχουν 10 λειτουργικά ανεξάρτητες εξισώσεις, αλλά μόνο $10 - 4 = 6$, αφήνοντας μας με τέσσερις βαθμούς ελευθερίας για τους 10 άγνωστους $g_{\mu\nu}$. Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στο γεγονός ότι αν ο $g_{\mu\nu}$ είναι μια λύση των εξισώσεων του *Einstein*, τότε θα είναι και λύση ο $g'_{\mu\nu}$, που καθορίζεται από τον $g_{\mu\nu}$ με έναν γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων $x \rightarrow x'$. Τέτοιοι μετασχηματισμοί συντεταγμένων περιέχουν τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις $x'^{\mu}(x)$ που απλά δίνουν στις λύσεις των (3.5.20) τέσσερις βαθμούς ελευθερίας. Η αυθαιρεσία των εξισώσεων *Einstein* γίνεται κατανοητή και στα πλαίσια του γνωστού προβλήματος αρχικών τιμών του *Cauchy* σε συνδυασμό με τις ταυτότητες *Bianchi*.

3.7 Εξίσωση κατάστασης σε αστέρες νετρονίων και λευκούς νάνους

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την εξαγωγή των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφεται η σχετικιστική βαρύτητα της ύλης. Θεωρώντας την ύλη αυτή στο εσωτερικό ενός αστέρα νετρονίων ή ενός λευκού νάνου η γεωμετρία του εκεί χωροχρονικού συνεχούς έχει σαν αποτέλεσμα την ακτινική κίνησή της προς το κέντρο του σφαιρικού αστρικού «πτώματος». Το ερώτημα που εξετάζεται εδώ είναι ποιος αντισταθμιστικός παράγοντας - στην ουσία ποια μορφή πίεσης - εξισορροπεί την έλξη αυτή. Αρχικά θα περιγράψουμε που οφείλεται και έπειτα θα εξάγουμε μια όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστική εξίσωση περιγραφής της. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται *εξίσωσης κατάστασης* και είναι παρόμοια με την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων. Συνεπώς, θα προκύψει μια συνάρτηση της *πίεσης* των σωματιδίων του αστέρα με την *συνολική πυκνότητα ενέργειας* που οφείλεται στα διάφορα δυναμικά, στα εκάστοτε στρώματά του. Στο επόμενο κεφάλαιο θα συνδυάσουμε αυτή την σχέση με τις εξισώσεις *Einstein* εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι και στα δύο εμφανίζεται ο όρος της πυκνότητας ενέργειας.

Για να βρίσκεται το άστρο σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας πρέπει, καταρχήν, η ολική ενεργειακή κατάσταση της ύλης να είναι ελάχιστη. Η συνάρτηση ολικής ενέργειας μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των επιμέρους δυναμικών,

$$E_{ολ} = U_{θερ} + U_{Fermi} + U_{πυρ} + U_{βαρ} \quad (3.7.1)$$

με συνεισφορές από τέσσερα δυναμικά:

- A) Δυναμικό λόγω θερμικής κίνησης.
- B) Δυναμικό κβαντομηχανικής φύσης που οφείλεται στην ενέργεια *Fermi* των σωματιδίων της ύλης.
- Γ) Πυρηνικό δυναμικό.
- Δ) Βαρυτικό δυναμικό.

Η ισορροπία απαιτεί:

$$\frac{dE_{ολ}}{dN} = 0$$

όπου N ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων. Ισοδύναμα, αν θέλουμε μια έκφραση για την πυκνότητα ενέργειας η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{dE_{ολ}}{dn} = 0$$

όπου dn η πυκνότητα σωματιδίων.

Μέχρι το τέλος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό των παραπάνω δυναμικών ώστε να πάρουμε την κατά το δυνατόν «καλύτερη» εξίσωση κατάστασης στο εσωτερικό του αστέρα.

A) Θερμική πίεση

Τα άστρα νετρονίων και οι λευκοί νάνοι, όπως αναφέραμε, προκύπτουν ως οι εναπομένουσες καταστάσεις αστέρων που έχουν εξαντλήσει όλο τους το πυρηνικό καύσιμο και συνεπώς δεν μπορούν να παράγουν καμιά, θερμικής μορφής, υψηλή πίεση που να εμποδίσει την προς το εσωτερικό του αστέρα βαρύτητα – πίεση η οποία ήταν ικανή κατά το προηγούμενο διάστημα της ζωής του άστρου να το συγκρατεί σε καθορισμένο σχήμα και μέγεθος. Έτσι, το άστρο συρρικνώνεται διαρκώς με αποτέλεσμα την αύξηση της πυκνότητας του και κατά συνέπεια, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του λευκού νάνου ή τα νετρόνια του αστέρα νετρονίων συμπίεζονται όλο και πιο κοντά μεταξύ τους φθάνοντας έτσι σε κατάσταση *εκφυλισμού*, αρχίζοντας έτσι να συμπεριφέρονται ως «κβαντικό αέριο» και να καταλαμβάνουν τα ελάχιστα δυνατά ενεργειακά επίπεδα που είναι διαθέσιμα. Το άστρο ψύχεται και τελικώς αναλαμβάνει δράση η *απαγορευτική αρχή του Pauli*, ενώ η πίεση των εκφυλισμένων σωματιδίων του αστέρα είναι πλέον η υπεύθυνη για την σταθερότητα του άστρου. Ένας ακόμα λόγος που η θερμική πίεση είναι αμελητέα έχει να κάνει με το γεγονός ότι τα σωματίδια αυτά ακόμα και σε μηδενικές θερμοκρασίες έχουν λόγω της πίεσης *Fermi* τεράστιες ταχύτητες, κοντά στην ταχύτητα του φωτός, οπότε απαγορεύεται να αυξήσουν περαιτέρω την κινητική τους κατάσταση και συνεπώς η συνολική πίεση προσεγγίζεται μόνο από την πίεση *Fermi*. Ας δούμε όμως τα παραπάνω με περισσότερες λεπτομέρειες.

B) Πίεση *Fermi*

Στο εσωτερικό ενός αστέρα και κυρίως στο πυρήνα του δεν εμφανίζονται μόρια ή άτομα αλλά ελεύθερα ηλεκτρόνια πρωτόνια και νετρόνια τα οποία κινούνται με ταχύτητες

ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ως μη σχετικιστικά (*nonrelativistic*), αλλά κυρίως, ως σχετικιστικά (*relativistic*) ή ακόμα και άκρως σχετικιστικά (*ultrarelativistic*). Έτσι η ύλη αυτή βρίσκεται σε αέρια μορφή και γι' αυτό χαρακτηρίζεται ως ένα αέριο ηλεκτρονίων πρωτονίων και νετρονίων. Τα σωματίδια αυτά διέπονται από κανόνες ανάλογους της στατιστικής των αερίων, μόνο που τώρα τα σωματίδια του αερίου δεν είναι τα κλασσικά μόρια αλλά τα στοιχειώδη σωματίδια που αναφέρθηκαν τα οποία όπως γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική ανήκουν στην κατηγορία των φερμιονίων καθώς έχουν κβαντικό αριθμό σπιν, $S = \pm \frac{1}{2}$. Η κατάσταση λοιπόν της ύλης μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αέριο φερμιονίων. Τα φερμιόνια περιγράφονται από την κατανομή *Fermi-Dirac* σύμφωνα με τη σχέση,

$$F_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/kT} \quad (3.7.2)$$

όπου $F_{FD}(E)$ είναι η πιθανότητα κατάληψης της ενεργειακής κατάστασης στην τιμή E , kT είναι όρος θερμικής ενέργειας και E_F η ενέργεια *Fermi* του αερίου (είναι η ενεργειακά υψηλότερη στάθμη που μπορούν να καταλάβουν τα φερμιόνια του αερίου της οποίας η σημασία θα φανεί σε λίγο).

Πέραν του φερμιονιμικού αερίου θα κάνουμε και μια δεύτερη παραδοχή η οποία έχει να κάνει με την θερμοκρασία του αστέρα. Έχουμε πει ότι στο εσωτερικό ενός αστρικού πτώματος δεν συντελούνται πλέον «αρκετές» αντιδράσεις και έτσι δεν μπορεί παραχθεί η απαιτούμενη θερμότητα από αυτές. Το άστρο στην εξέλιξή του γίνεται ολοένα και πιο «ψυχρό». Θα απλουστεύσουμε λοιπόν το μοντέλο μας σε μηδενική σχετική θερμοκρασία και θα βρούμε έτσι την ελάχιστη πίεση που ασκεί το αέριο στα υπερκείμενα στρώματα. Έτσι, για $T \rightarrow 0$ K η (3.7.2) δίνει,

$$\frac{E - E_F}{kT} = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } E < E_F \\ \infty, & \text{αν } E > E_F \end{cases} \quad \text{ή} \quad F_{FD}(E) = \begin{cases} 1, & \text{αν } E < E_F \\ 0, & \text{αν } E > E_F \end{cases}$$

δηλαδή η πιθανότητα κατάληψης κατάστασης ενέργειας πάνω από την E_F είναι 0 ενώ κάτω είναι μονάδα. Η προσέγγιση αυτή θα γίνει και μαθηματικά πιο αυστηρή όταν θα μιλάμε για τους λευκούς νάνους σε λίγο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα φερμιόνια του αστέρα τείνουν να καταλάβουν τις ελάχιστες δυνατές κβαντικές ενεργειακές καταστάσεις και το αέριο σε αυτή την κατάσταση καλείται *πλήρως εκφυλισμένο αέριο (fully degenerate gas)*. Εδώ ξεκινά να κάνει την

εμφάνιση της η *απαγορευτική αρχή του Pauli* η οποία αντιτίθεται σε αυτή την τάση των φερμιονίων καθώς απαγορεύει σε δύο φερμιόνια να βρίσκονται στην ίδια κβαντική ενεργειακή κατάσταση στον ίδιο χώρο. Και επειδή ακριβώς είναι φερμιόνια με σπιν $\frac{1}{2}$ μόνο δύο αρκούν για να γεμίσουν την κάθε ενεργειακή στάθμη, τα υπόλοιπα κατανέμονται στις αμέσως επόμενες επιτρεπτές όπως υπαγορεύεται από τους κανόνες της κβαντομηχανικής, ενώ η τελευταία στάθμη αντιστοιχεί στην τιμή της *ορμής Fermi*, p_F .

Στο «κλασσικό» κβαντομηχανικό κουτί όγκου V οι μόνες επιτρεπόμενες τιμές της ορμής που μπορεί να πάρει ένα φερμιόνιο, είτε είναι σχετικιστικό είτε όχι, είναι,

$$p_k = \frac{k\pi\hbar}{V}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7.3)$$

και έτσι η χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση του κουτιού με N σωματίδια έχει συνολική ενέργεια,

$$E = \sum_{k=1}^{N/2} 2E_k(p) \quad (3.7.4)$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση ενέργειας-ορμής, σχετικιστική ή μη.

Με βάση την τελευταία μπορούμε να κάνουμε και την τρίτη παραδοχή, ότι καθώς το σωματίδιο πιέζεται λόγω βαρύτητας σε μικρότερους όγκους, τα επίπεδα ορμής απομακρύνονται όλο και περισσότερο με αποτέλεσμα η πίεση *Fermi* των φερμιονίων να γίνεται ακόμη μεγαλύτερη. Έτσι, οι τρεις παραδοχές σχηματίζουν συνοπτικά μια θεώρηση για την κατάσταση της ύλης ως ένα κβαντικό αέριο πλήρως εκφυλισμένων φερμιονίων, η πίεση των οποίων ενισχύεται τόσο από τις χαμηλές θερμοκρασίες όσο και από τις εξαιρετικά υψηλές πυκνότητες. Έτσι, ακόμα και σε μηδενική θερμοκρασία, ακόμα και εάν δεν υφίσταται δυναμική αλληλεπίδραση (δεν έχουμε λάβει υπόψιν μας ακόμη πυρηνικά δυναμικά) μεταξύ των φερμιονίων, υπάρχει κάποια πίεση που πηγάζει από την αρχή του *Pauli*. Αυτή την πίεση θα υπολογίσουμε συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας για να πάρουμε μια αρκετά ρεαλιστική προσέγγιση της δυναμικής στο εσωτερικό του αστέρα.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την εξίσωση κατάστασης στους τους λευκούς νάνους όπου ο εκφυλισμός εμφανίζεται κυρίως στα ηλεκτρόνια και έπειτα θα επεκταθούμε στους αστέρες νετρονίων και τα νετρόνια.

Λευκοί Νάνοι

Στο όριο των πολύ μεγάλων αριθμών ηλεκτρονίων N τα αθροίσματα όπως της (3.7.4) αντικαθίστανται από ολοκληρώματα. Τότε, λόγω της (3.7.3), η πυκνότητα καταστάσεων dn που είναι επιτρεπτές στο διάστημα p και $p + dp$, δίνεται από την σχέση:

$$dn = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (3.7.5)$$

Ολοκληρώνοντας, λόγω των δύο καταστάσεων για κάθε στάθμη, παίρνουμε τον συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων μέχρι την στάθμη *Fermi*:

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.7.6)$$

Η σταθερά p_F , λόγω της (3.7.6), εξαρτάται από την συνολική μάζα του άστρου και μπορεί να είναι μια «ελεύθερη» παράμετρος στους υπολογισμούς μας. Συνεπώς, με τη βοήθεια της σχέσης αυτής μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική πυκνότητα ενέργειας *Fermi* των ηλεκτρονίων του αστέρα,

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(p_F) &= E \cdot n = \varepsilon_e(p_F) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} p^2 dp \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} (u^2 + 1)^{1/2} u^2 du \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \sinh^{-1}(x)] \quad (3.7.7) \end{aligned}$$

όπου η ποσότητα x εκφράζει τον βαθμό στον οποίο τα ηλεκτρόνια είναι σχετικιστικά.

Ενεργειακή συνεισφορά στην πυκνότητα επίσης υπάρχει από τα νουκλεόνια του αστέρα (πρωτόνια και νετρόνια) λόγω της πολύ μεγαλύτερης μάζας ηρεμίας τους από ηλεκτρόνια, $m_n \approx 1\text{GeV} \approx 2 \times 10^3 m_e$. Αυτή από τη σχέση μάζας-ενέργειας του *Einstein* είναι,

$$\varepsilon_n = \rho c^2 \quad (3.7.8)$$

όπου ρ η πυκνότητα των νουκλεονίων του αστέρα,

$$\rho = n m_N A/Z \quad (3.7.9)$$

αφού τα ηλεκτρόνια είναι ισάριθμα με τα πρωτόνια ενώ ο συντελεστής A/Z είναι περίπου ίσος με 2 σε συμμετρική ύλη. Από τις (3.7.6) και (3.7.9) υπολογίζουμε την p_F συναρτήσει της του ρ :

$$p_F = \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_n A} \right)^{1/3} \quad (3.7.10)$$

Η σύνδεση αυτή της ορμής *Fermi* των ηλεκτρονίων με την πυκνότητα των νουκλεονίων πηγάζει από την απαίτηση της ηλεκτρικής ουδετερότητας του αστέρα καθώς και της ισορροπίας των αντιδράσεων- β (*β -equilibrium*).

Έτσι, η συνολική πυκνότητα ενέργειας είναι το άθροισμα

$$\varepsilon(p_F) = \frac{nm_n A}{Z} + \varepsilon_e(p_F) \quad (3.7.11)$$

Κάνοντας μερικούς υπολογισμούς μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το γεγονός ότι ο 1^{05} όρος της (3.7.11) είναι συγκριτικά μεγαλύτερος από τον 2^0 και έτσι είναι αυτός που επικρατεί στους λευκούς νάνους.

Έτσι, θεωρώντας το σχετικιστικό όριο $p_F \gg m_e$ το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα

$$\varepsilon_e = \frac{c^2 p_F^4}{4\pi^2 \hbar^3}$$

Οπότε:

$$\frac{2m_n c^2 p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} > \frac{c^2 p_F^4}{4\pi^2 \hbar^3} \Rightarrow$$

$$\frac{2m_n}{3} > \frac{p_F}{4}$$

Που ισχύει καθώς η μάζα των νουκλεονίων είναι $\approx 1\text{GeV}$ ενώ η ενέργεια *Fermi* για έναν «τυπικό» λευκό νάνο με είναι της τάξης $\approx 0.3\text{MeV}$. Αυτό δεν πρέπει να συνδέεται με το ότι η πίεση οφείλεται κυρίως στην ενέργεια ηρεμίας των νουκλεονίων παρά στην πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων καθώς όπως θα δούμε στην συνέχεια η πίεση είναι η μεταβολή της πυκνότητας ενέργειας και εκεί οι όροι ηρεμίας νουκλεονίων θα απλοποιηθούν.

Επίσης, από τις σχέσεις,

$$E_F = \sqrt{m_e^2 + p_F^2}$$

$$p_F \gg m_e$$

$$T = E/k_B = \frac{m_e}{k_B} \frac{0.5 \text{ MeV}}{k_B} \cong 6 \times 10^9 \text{ K}$$

και το γεγονός ότι από αναλύσεις των παρατηρησιακών δεδομένων μια τυπική θερμοκρασία στο εσωτερικό ενός λευκού νάνου είναι $\approx 10^6 - 10^7 \text{ K}$ συνάγεται το γεγονός ότι όντως ο αστέρας παραμένει ψυχρός ώστε το αέριο να παραμένει εκφυλισμένο, δηλαδή στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση.

Για να βρούμε, τώρα, την επιθυμητή εξίσωση κατάστασης θα πρέπει να έχουμε και μια σχέση για την πίεση του αερίου, οπότε μια προφανής και σίγουρη απαίτηση έρχεται από τη θερμοδυναμική.

Από τον 1^ο νόμο $dU = dQ - pdV$ και την θερμοκρασία σταθερή στα $T = 0$ λαμβάνουμε (όπου $dQ = 0$ λόγω $dT = 0$)

$$P = \left[-\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{T=0} = n^2 \frac{d(\varepsilon/n)}{dn} = n \frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon = n\mu - \varepsilon \quad (3.7.12)$$

όπου το ε δίνεται από την (3.7.11) και η ποσότητα $\mu = \frac{d\varepsilon}{dn}$ είναι γνωστή ως *χημικό δυναμικό* και έχει να κάνει με τον βαθμό αντίδρασης ενός σωματιδίου με την ύλη λόγω ενεργειακής προτίμησης.

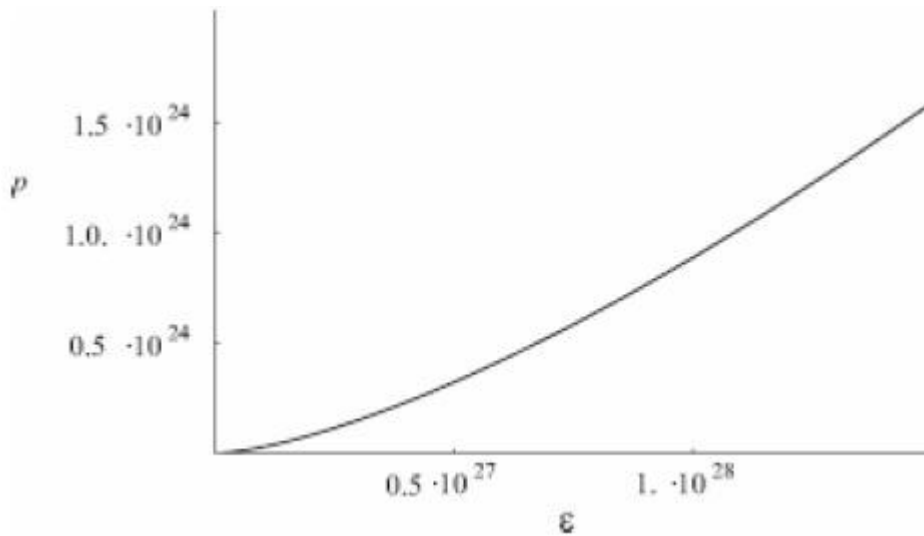
Έτσι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.7.10), (3.7.11) και (3.7.12) υπολογίζουμε την πίεση,

$$\begin{aligned} P(p_F) &= \int_0^{p_F} n^2 \frac{d(\varepsilon/n)}{dn} dn = n(p_F)\varepsilon(p_F) - 2 \int_0^{p_F} \varepsilon dn \\ &= n^2(p_F) \frac{nm_n A}{Z} + n(p_F)\varepsilon_e(p_F) - \int_0^{p_F} \frac{2nm_n A}{Z} dn - \int_0^{p_F} 2\varepsilon dn = n^2(p_F)E_F - \int_0^{p_F} 2E ndn \\ &= n^2(p_F)E_F - \int_0^{p_F} 2Ed(n^2) = n^2(p_F)E_F - n^2(p_F)E_F + 2 \int_0^{p_F} n^2 \frac{dE(p)}{p^2 dp} dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{p_F} n^2 \frac{d}{p^2 dp} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} dp = 4c^2 \int_0^{p_F} \frac{n^2 p}{p^2} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{-1/2} dp \\
&= \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{-1/2} p^4 dp = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} (u^2 + 1)^{-1/2} u^4 du \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} - 3\sinh^{-1}(x)] \quad (3.7.13)
\end{aligned}$$

όπου $x = \frac{p_F}{m_e c}$ επίσης.

Η τελευταία σχέση είναι αυτή που δίνει την πίεση των φερμιονίων συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειάς τους. Όντως, η σταθερά $\frac{m_e^4 c^5}{\hbar^3} = \frac{(m_e c^2)^4}{c^3 \hbar^3}$ έχει μονάδες $\frac{(\text{joule})^4}{\text{m}^3 (\text{joule})^3} = \frac{J}{\text{m}^3}$ και είναι ίση με στο σύστημα cgs^5 , ενώ το x είναι συνάρτηση του ρ λόγω της (3.7.10). Χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα όπως το *Mathematica* θα πάρει κανείς ένα γράφημα όπως το επόμενο⁶, της καταστατικής εξίσωσης $\varepsilon = \varepsilon(P)$ για διάφορες τιμές της ορμής $Fermi$ $0 \leq p_F \leq 2m_e$,



Διάγραμμα 3.3.1: Πίεση συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας άστρου που περιγράφεται από το μοντέλο ελεύθερων ηλεκτρονίων Fermi.

⁵ Neutron stars for undergraduates, R.Silbar and S.Reddy

⁶ Neutron stars for undergraduates, R.Silbar and S.Reddy

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η καμπύλη μας προσεγγίζει πολύ την καμπύλη $P = \varepsilon^{4/3}$, γεγονός το οποίο έχει εξήγηση όπως θα δούμε.

Θεωρούμε την σχετικιστική περίπτωση $p_F \gg m_e$. Τότε η (3.7.13) δίνει:

$$\begin{aligned} P(p_F) &= \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_e c}} u^3 du = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} (p_F/m_e c)^4 \\ &= \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z \rho}{m_n A} \right)^{4/3} \approx K_{rel} \varepsilon^{4/3} \quad (3.7.14) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (3.7.8) και (3.7.10) και επίσης:

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z}{A m_n c^2} \right)^{4/3} \approx 4.93 \times 10^{14} \text{ (cgs)} \quad (3.7.15)$$

Αστέρια με την παραπάνω απλή εξίσωση κατάστασης της μορφής $P = K\varepsilon^\gamma$ ονομάζονται *πολύτροπα* οπότε ένα σχετικιστικό αέριο φερμιονίων περιγράφεται από μια πολυτροπική εξίσωση με $\gamma=4/3$.

Στο μη σχετικιστικό όριο μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων όπου $p_F \ll m_e$ επικρατεί πάλι μια παρόμοια πολυτροπική σχέση η οποία βρίσκεται ότι είναι:

$$P(p_F) = K_{nonrel} \varepsilon^{5/3} \quad (3.7.16)$$

με

$$K_{nonrel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 Z}{A m_n c^2} \right)^{5/3} \approx 3.16 \times 10^{12} \text{ (cgs)} \quad (3.7.17)$$

με το $\gamma=5/3$ λίγο μεγαλύτερο και την καταστατική λίγο πιο «σκληρή».

Η παράμετρος γ ονομάζεται *παράμετρος σκληρότητας (stiffness)* και ορίζεται γενικά ως

$$\gamma \equiv \frac{\varepsilon + p}{p} \frac{dp}{d\varepsilon} \quad (3.7.18)$$

Όπως φαίνεται από τον ορισμό αυτό εκφράζει το πόσο «σκληρά» αντιδρούν (πιέζουν) τα φερμιόνια σε μια αύξηση της πυκνότητας ενέργειας. Το γεγονός ότι $\gamma_{nonrel} > \gamma_{rel}$ εξηγείται μέσω της σχέσης ενέργειας - ορμής $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ από όπου φαίνεται ότι

όσο πάμε σε μεγαλύτερες ενέργειες τόσο «δυσκολεύει» η μεταβολή τους. Περισσότερα για το γ θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Αστέρες Νετρονίων

Όπως και στην περίπτωση των λευκών νάνων έτσι και στους αστέρες νετρονίων τίθεται πάλι το ερώτημα ποιος παράγοντας αντισταθμίζει την πίεση της βαρύτητας. Και σε αυτή την περίπτωση η μορφή πίεσης είναι μια πίεση *Fermi* η οποία όμως δεν προέρχεται πλέον από εκφυλισμένα ηλεκτρόνια αλλά από τα εκφυλισμένα νετρόνια. Σε έναν λευκό νάνο η πίεση των e^- εκφράζεται μέσω της παραμέτρου σκληρότητας γ στην καταστατική η οποία στο μη σχετικιστικό όριο έχει τιμή και πέφτει συνεχώς όσο πάμε σε μεγαλύτερες πιέσεις μέχρι τα ηλεκτρόνια να μετατραπούν σε σχετικιστικά με κινητικές ενέργειες $\sim m_e c^2 \sim .5 MeV$, όπου παίρνει την τιμή. Ωστόσο, σε ακόμα μεγαλύτερες βαρυτικές δυνάμεις ο παράγοντας $\frac{GM}{Rc^2}$ «πλησιάζει» την μονάδα, η βαρυτική έλξη γίνεται σχετικιστική, με αποτέλεσμα η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας του αστέρα να γίνονται τόσο μεγάλες, ώστε τα ηλεκτρόνια να μην αντέχουν άλλο βάρος και όταν, τυπικά, η ενέργειά τους φθάσει περίπου στο ενεργειακό κατώφλι διαφοράς μάζας νετρονίου-πρωτονίου ($m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3 MeV$) να διευκολύνεται η πραγματοποίηση αντίστροφων β -διασπάσεων $e^- + p \rightarrow n + \nu$ στο εσωτερικό του αστέρα. Έτσι, η ύλη γίνεται ολοένα και πλουσιότερη σε νετρόνια τα οποία λόγω της μάζας στον παρονομαστή του σχετικιστικού παράγοντα $x = \frac{pF}{m_n \cdot c}$ γίνονται σχετικιστικά σε πολύ μεγαλύτερες πιέσεις ή πυκνότητες από αυτές των ηλεκτρονίων. Κάποια στιγμή η πυκνότητα των νετρονίων εξισώνεται με την πυρηνική πυκνότητα σχηματίζοντας έτσι ένα ομοιόμορφο ρευστό που αποτελείται κυρίως από νετρόνια και σε μικρότερο βαθμό από ίσο αριθμό πρωτονίων-ηλεκτρονίων. Σε αυτή την περιοχή τα νετρόνια συγκεντρώνονται σε διαστήματα συγκρίσιμα και τελικά μικρότερα από την κλίμακα $10^{-13} cm$, στην οποία λαμβάνουν χώρα οι πυρηνικές δυνάμεις της ισχυρής αλληλεπίδρασης, μέσω δυναμικών του *Yukawa*. Οι δυνάμεις αυτές συνεισφέρουν σε μεγάλο βαθμό στην πυκνότητες ενέργειας των νετρονίων και συνεπώς στην εξίσωση κατάστασης στους αστέρες αυτούς. Οι εξισώσεις που θα λύσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο δεν θα συμπεριλαμβάνουν τέτοια δυναμικά, οπότε θα ασχοληθούμε με την μη ρεαλιστική περίπτωση των μη αλληλεπιδρώντων νετρονίων σε αστέρες που αποτελούνται μόνο από νετρόνια (*pure neutron star*) και η μο-

ναδική πηγή πίεσης είναι η αρχή του *Pauli* των εκφυλισμένων αυτώ σωματιδίων. Ωστόσο, ακόμα και έτσι παίρνουμε μια σημαντική πρώτη προσέγγιση που θέτει όρια στην μάζα που μπορεί να «αντέξει» ένας αστέρας νετρονίων. Τέλος, στο τέλος του κεφαλαίου θα αναφερθούμε συνοπτικά στις ενεργειακές συνεισφορές από την ισχυρή αλληλεπίδραση αλλά και από τα άλλα φερμιόνια στην εξίσωση κατάστασης.

Για έναν αμιγή λοιπόν αστέρα νετρονίων δεν θα έχουμε μεγάλες αλλαγές από τις προηγούμενες σχέσεις αφού η αρχή του *Pauli* έχει την ίδια ισχύ για όλα τα φερμιόνια. Οι δύο περιπτώσεις μη σχετικιστικών και σχετικιστικών νετρονίων αντίστοιχα γράφονται,

$p_F \ll m_n$:

$$P(p_F) = K_{nonrel} \varepsilon^{5/3} \quad (3.7.19)$$

όπου λόγω της (3.3.18),

$$K_{nonrel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_n c^2} \right)^{5/3} \approx 5.38 \times 10^9 \text{ (cgs)} \quad (3.7.20)$$

$p_F \gg m_n$:

Από την σχέση (3.7.7) για νετρόνια και την (3.7.13) παίρνουμε μια «κλασσική» εξίσωση κατάστασης για σχετικιστικό αέριο,

$$P(p_F) = 3\varepsilon \implies \varepsilon = P(p_F)/3 \quad (3.7.21)$$

Τα νετρόνια τώρα είναι σχετικιστικά και η πυκνότητα ενέργειας οφείλεται κυρίως στην πίεση *Fermi* των νετρονίων $\varepsilon_n(p_F)$ παρά στην ενέργεια ηρεμίας τους $\varepsilon = \rho c^2$.

Μέγιστη μάζα σχετικιστικών αστέρων – γιατί είναι δεδομένη:

Με την ενότητα αυτή ουσιαστικά ολοκληρώνουμε ό,τι στοιχεία πρέπει να έχουμε για τον καθορισμό της μάζας, του μεγέθους αλλά και άλλων βασικών μεγεθών των σχετικιστικών αστέρων. Θα δώσουμε μια εκτίμηση της μέγιστης μάζας για έναν λευκό νάνο για την οποία η βαρύτητα μπορεί να εξισορροπηθεί από την πίεση *Fermi*. Τα ίδια επιχειρήματα εφαρμόζονται και στην περίπτωση των άστρων νετρονίων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μια σχέση μάζας-ακτίνας μπορεί να βρεθεί συγκρίνοντας τη βαρυτική ενέργεια με την ενέργεια *Fermi*, μιας σφαιρικής δομής ακτίνας R που συνίσταται από A ηλεκτρόνια και ισάριθμα πρωτόνια. Όπως είδαμε τα βαρύτερα πρωτόνια παρέχουν το μεγαλύτερο ποσοστό μάζας ενώ τα ηλεκτρόνια παρέχουν το μεγαλύτερο

ποσοστό πίεσης. Εξαιτίας της αρχής του *Pauli* κάθε ηλεκτρόνιο καταλαμβάνει έναν όγκο χαρακτηριστικού μεγέθους λ (μήκος κύματος *Fermi*) τέτοιο ώστε η σφαιρικός όγκος να περιέχει A ηλεκτρόνια. Έτσι, το χαρακτηριστικό μήκος κύματός τους είναι της τάξης $\lambda \sim R/A^{1/3}$, όπου R ακτίνα του αστέρα. Από την εξίσωση *de Broglie*, παίρνουμε την χαρακτηριστική ορμή των ηλεκτρονίων,

$$p_F \sim \frac{\hbar}{\lambda} \sim A^{1/3} \hbar / R \quad (3.7.22)$$

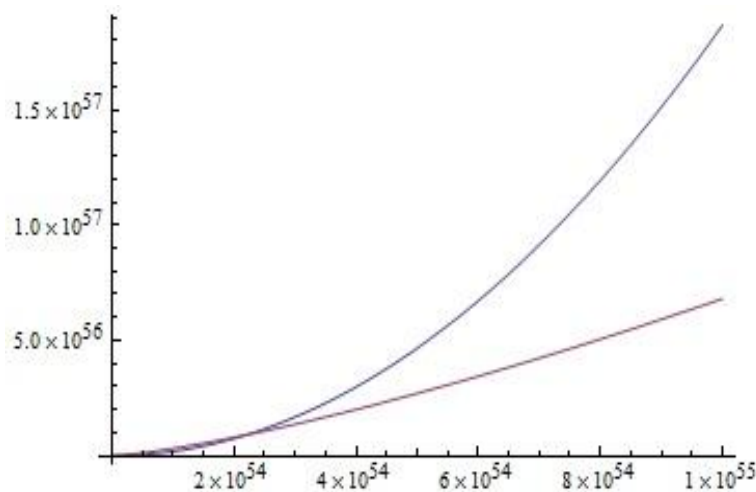
Εάν η σφαίρα συμπιεστεί, η ακτίνα R συρρικνώνεται, η ορμή p_F αυξάνεται με ταυτόχρονη αύξηση και της ενέργειας των ηλεκτρονίων και επομένως απαιτείται παραγωγή έργου για περαιτέρω συμπίεση. Για λόγους απλότητας, υποθέτουμε ότι η συμπίεση πραγματοποιείται μέχρι το σημείο που τα ηλεκτρόνια γίνονται σχετικιστικά και οι επιμέρους ενέργειές τους είναι. Η υπόθεση αυτή αποδεικνύεται, όπως είδαμε, αληθής για τους λευκούς νάνους μεγάλης μάζας. Έτσι η συνολική ενέργεια *Fermi* είναι

$$E_F \sim A(p_F c) \sim A^{4/3} \hbar c / R \quad (3.7.23)$$

Τα πρωτόνια παρέχουν την περισσότερη (αρνητική) βαρυτική ενέργεια,

$$E_G \sim -G(m_p A)^2 / R \quad (3.7.24)$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο ενέργειες μεταβάλλονται σύμφωνα με το $1/R$. Σχεδιάζουμε έτσι ένα απλό γράφημα (πάλι με τη *Mathematica*) των ενεργειών E_F (κόκκινη γραμμή) και E_G (μπλε γραμμή) σαν συνάρτηση του A παίρνουμε:



Διάγραμμα 3.3.2: Συναρτήσεις της E_F και της E_G των νουκλεονίων ενός αστέρα νετρονίων συναρτήσει του αριθμού των νουκλεονίων, το οποίο έγινε με τη *Mathematica*.

Αυτό που βλέπουμε είναι ότι όταν το πλήθος A είναι αρκετά μεγάλο η συνολική ενέργεια είναι αρνητική και επομένως είναι ενεργειακά προτιμότερο για την δομή να καταρρεύσει. Η κρίσιμη τιμή του A , όπως φαίνεται από το διάγραμμα, είναι $\sim 10^{54}$ νουκλεόνια, όπου η πολύ μεγάλη αυτή τιμή οφείλεται στη σχέση $\hbar c \gg Gm_p^2$.

Η τάξη μεγέθους της κρίσιμης μάζας είναι:

$$M_{crit} \sim m_p A_{crit} \sim M_{\odot} \quad (3.7.25)$$

Η ακριβής τιμή της κρίσιμης μάζας ονομάζεται *μάζα Chandrasekar* και είναι περίπου $1.4M_{\odot}$ και θα την υπολογίσουμε ακριβώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Εξετάζουμε τώρα το ερώτημα της επικεφαλίδας, δηλαδή αν υπάρχει όντως κάποια φυσική απαίτηση, ανεξάρτητα από τους υπολογισμούς που έτσι και αλλιώς είναι τάξης μεγέθους και λίγο-πολύ αβέβαιοι, η οποία να επιβάλλει σε συμπαγή αντικείμενα όπως τα εν λόγω άστρα να έχουν *άνω όριο* μάζας πέρα από το οποίο καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας δεν είναι δυνατές. Καθώς αυξάνουμε την μάζα του αστέρα αυξάνεται η πυκνότητα ενέργειάς και η πίεσή του. Η αύξηση της πυκνότητας αυξάνει ακόμα πιο πολύ την βαρυτική έλξη οπότε για να μην έχουμε κατάρρευση θα πρέπει να αυξηθεί αναλόγως και η πίεση. Μία γνωστή σχέση της κλασικής μηχανικής, η οποία αποτελεί τον νόμο *Newton-Laplace*, συνδέει την *πίεση* και την *πυκνότητα* ενός ρευστού με την *ταχύτητα του ήχου* διαμέσου του οποίου αυτός διαδίδεται. Η ταχύτητα του ήχου είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται μια διαταραχή πίεσης απειροστού πλάτους διαμέσου ενός ρευστού. Υπενθυμίζοντας λοιπόν τον νόμο *Newton-Laplace* η ταχύτητα αυτή δίνεται από την σχέση

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.7.26)$$

όπου ρ η πυκνότητα ενέργειας που ενδιαφέρει στην περίπτωση μας. Έτσι,

$$\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{dp}{d\rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} \quad (T = \text{σταθ.}) \quad (3.7.27)$$

Από το αξίωμα λοιπόν της ειδικής σχετικότητας για την ταχύτητα του φωτός θα πρέπει $\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 < 1$ δηλαδή υπάρχει ένα *άνω όριο* στην ταχύτητα του ήχου το οποίο από την (3.7.24) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα *άνω όριο* στην πυκνότητα ενέργειας που μπορεί να αντέξει ο αστέρας. Έτσι, κάθε αύξηση της πυκνότητας πέρα από αυτό το όριο θα

συνεισφέρει στην αύξηση της βαρυτικής έλξης αλλά όχι στην αύξηση της πίεσης που το συγκρατεί υποδεικνύοντας έτσι το όριο της μάζας του αστέρα. Για παράδειγμα, το όριο που θέτει σε έναν λευκό νάνο στη σχετικιστική περίπτωση είναι:

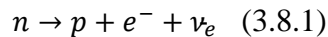
$$c_s^2 = c^2 \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = c^2 \Rightarrow \frac{4k}{3} \rho_{cr}^{\frac{1}{3}} = c^2 \Rightarrow \rho_{cr} \approx 2 \times 10^{18} \text{ (cgs)}$$

Πυκνότητα πολύ μεγαλύτερη από μια μέση τιμή $\sim 10^7$. Επίσης, υπάρχουν σχετικιστικές διορθώσεις σε αυτό το όριο καθώς η νευτώνεια προσέγγιση όπως είδαμε δεν είναι η κατάλληλη για τέτοιες πυκνότητες οι οποίες περιορίζουν και άλλο το όριο *Chandrasekar*.

3.8 Πιο ρεαλιστικά μοντέλα

Στις δύο τελευταίες ενότητες του κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε με πιο ολοκληρωμένα μοντέλα πίεσης στην καταστατική και όχι το απλοποιημένο – μη ρεαλιστικό – μοντέλο πίεσης *Fermi*.

Η πρώτη διόρθωση έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι αστέρες νετρονίων δεν μπορούν να αποτελούνται μόνο από νετρόνια (*pure neutron stars*), όπως θεωρήσαμε για ευκολία, αλλά και από ένα μικρό κλάσμα πρωτονίων-ηλεκτρονίων. Ένα ελεύθερο νετρόνιο διασπάται ασθενώς μέσω της αντίδρασης,



με μέσο χρόνο ζωής περίπου 15 min. Αυτό που συγκρατεί την β-διάσπαση να συμβεί στο εσωτερικό του άστρου καθώς και στο εσωτερικό των ατομικών πυρήνων είναι πάλι η απαγορευτική αρχή του *Pauli*. Έτσι, σε θεωρητικό επίπεδο, τα προϊόντα της αντίδρασης (3.7.19) έχουν χαμηλές κινητικές ενέργειες ($m_n - m_p - m_e = 0.778 \text{ MeV}$) το μεγαλύτερο ποσοστό των οποίων καταλαμβάνουν τα e^- και τα ν_e . Έτσι, αν όλα τα διαθέσιμα – χαμηλά - ενεργειακά επίπεδα των p είναι ήδη κατειλημμένα από τα υπάρχοντα p η αρχή του *Pauli* απαγορεύει στην διάσπαση να συμβεί. Καταστάσεις πρωτονίου-νετρονίου είναι *δέσμιε* ενώ καταστάσεις πρωτονίου-πρωτονίου ή νετρονίου-νετρονίου καλούνται *μη δέσμιες καταστάσεις*. Επίσης, για τα e^- μπορεί να ειπωθεί κάτι ανάλογο αλλά σε κάθε περίπτωση είναι απαραίτητα για την ηλεκτρική ουδετερότητα του αστέρα. Συνεπώς, ο αστέρας δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από νετρόνια.

Άλλος ένας περιορισμός (*constraint*) εκτός από την ηλεκτρική ουδετερότητα, είναι η ισορροπία των αντιδράσεων β. Αυτό σημαίνει ότι όσα n διασπώνται μέσω της (3.8.1) τόσα n πρέπει να παράγονται από την αντίστροφη διαδικασία, $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$. Η ισορροπία μπορεί να εκφραστεί ενεργειακά μέσω των χημικών δυναμικών που συναντήσαμε στην σχέση (3.7.12) $\mu_i = \frac{d\varepsilon_i}{dn_i}$ όπου ο δείκτης i αναφέρεται στα επιμέρους n , p και e^- . Έτσι, λόγω του 2^{ου} θερμοδυναμικού νόμου, η *ελεύθερη Gibbs*⁷ θα πρέπει να είναι αρνητική όταν πραγματοποιείται η αντίδραση (3.8.1) και μηδέν σε ισορροπία, οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (3.8.2)$$

Μέσω των σχέσεων (3.7.3), (3.7.9), (3.7.11) και (3.8.2) θα πάρουμε μια πιο «σωστή» έκφραση για την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση που θα εξαρτάται από τις επιμέρους ενέργειες και πιέσεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tot} &= \sum_{i=n,p,e} \varepsilon_i \\ P_{tot} &= \sum_{i=n,p,e} P_i \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

3.9 Εισάγοντας πυρηνικά δυναμικά στην καταστατική εξίσωση

Τέλος, στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον τρίτο παράγοντα ενεργειακών δυναμικών της (3.7.1) που οφείλονται στις πυρηνικές ισχυρές αλληλεπιδράσεις «*νουκλεονίου – νουκλεονίου*». Οι τελευταίες είναι σημαντικές για τον προσδιορισμό της μέγιστης μάζας του αστέρα καθώς όπως θα δούμε συνεισφέρουν στην συνολική πίεση που ανθίσταται στη βαρύτητα. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό μοντέλο *εκτεταμένου* πυρηνικού δυναμικού (δηλ. $A \rightarrow \infty$) που θα αναπαράγει τα γενικά χαρακτηριστικά της πυρηνικής ύλης. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στις σχέσεις του ημιεμπειρικού τύπου μάζας των *Bethe-Weizsäcker* και του δυναμικού νουκλεονίων όπως υπολογίστηκε από τον *Prakash*⁸. Οι κατάλληλες μονάδες σε αυτή την περιοχή αποστάσεων και ενέργειας είναι το $1fm$ ($10^{-13}cm$) και το $1MeV$ αντίστοιχα.

Ο ημιεμπειρικός τύπος μάζας,

⁷ http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_free_energy

⁸ M. Prakash, “Equation of state”, in *The Nuclear Equation of State* (World Scientific, 1996)

$$BE = E_{Vol}A - E_{Surf}A^{\frac{2}{3}} - E_{Sym}\frac{(N-Z)^2}{A} - \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R_A} + E_{Pair} \quad (3.9.1)$$

δίνει την ενέργεια σύνδεσης των νουκλεονίων σε έναν πυρήνα. Στο όριο της εκτεταμένης πυρηνικής ύλης, $A \rightarrow \infty$, γίνονται αμελητέοι, ο επιφανειακός όρος $E_{Surf}A^{\frac{2}{3}}$, το δυναμικό *Coulomb* $\frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R_A}$ (γιατί τα απομακρυσμένα p παύουν να συνεισφέρουν στο δυναμικό) καθώς και η ενέργεια ζευγαρώματος $E_{Pair} \sim A^{-1}$. Έτσι η παραπάνω «φόρμουλα» περιορίζεται στην ενέργεια όγκου (είναι η ενέργεια λόγω ισχυρής αλληλεπίδρασης των νουκλεονίων) και στην ενέργεια συμμετρίας $E_{Sym}\frac{(N-Z)^2}{A}$ η οποία έχει να κάνει με την τάση του πυρήνα να έχει ίσο αριθμό πρωτονίων-νετρονίων, βάσει αυτών που είπαμε για τις δέσμιες καταστάσεις. Το μοντέλο μας θα ολοκληρωθεί με τρία δεδομένα από φαινομενολογικές πειραματικές μετρήσεις.

Πρώτον, θα θεωρήσουμε ότι στην συνολική ενέργεια συνεισφέρει ένας ακόμη όρος συμπίεσης των νουκλεονίων, γνωστός ως *πυρηνική συμπίεσιότητα* (*nuclear compressibility*) ο οποίος έχει τιμή 200 – 400 MeV και γενικά ορίζεται ως εξής:

$$K(n) = 9\frac{d^2P(n)}{dn^2} \quad (3.9.2)$$

Αποτελεί δηλαδή την κλίση της πίεσης ως προς την πυκνότητα. Χρησιμοποιώντας την (3.7.12) προκύπτει ότι,

$$K(n) = 9\left[n^2\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\epsilon}{n}\right) + 2n\frac{d}{dn}\left(\frac{\epsilon}{n}\right)\right] \quad (3.9.3)$$

όπου ισχύει ο ίδιος συμβολισμός με τα προηγούμενα. Τα άλλα δύο δεδομένα σχετίζονται μεταξύ τους και είναι το γεγονός ότι η ενέργεια σύνδεσης έχει ελάχιστο

$$BE_{min} = -16MeV \quad (3.9.4)$$

όταν η πυκνότητα νουκλεονίων είναι,

$$n = 0.16 \text{ nucleons}/fm^3 \quad (3.9.5)$$

για συμμετρική ($N = Z$) ύλη. Έτσι για την καταστατική θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις ποσότητες της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης λόγω πυρηνικού δυναμικού. Θα ασχοληθούμε πρώτα με την απλούστερη περίπτωση $N = Z$ και έπειτα θα επεκταθούμε στην περισσότερο ρεαλιστική $N \neq Z$.

Περίπτωση $N=Z$.

Η μέση ενέργεια ανά νουκλεόνιο γράφεται:

$$\frac{E(n)}{A} = \frac{\varepsilon(n)}{n} \quad (3.9.6)$$

Οι σχέσεις (3.9.4) - (3.9.6) τώρα δίνουν:

$$BE \equiv \frac{\varepsilon(n)}{n} - m_n = -16MeV \quad n = n_0 \quad (3.9.7)$$

$$\frac{d}{dn} \left[\frac{E(n)}{A} \right] = \frac{d}{dn} \left[\frac{\varepsilon(n)}{n} \right] = 0 \quad n = n_0 \quad (3.9.8)$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι η θετική καμπυλότητα και το ελάχιστο της πυκνότητας ενέργειας $\varepsilon(n)$ στο n_0 σχετίζεται με την συμπίεσιότητα K λόγω των (3.9.3) και (3.9.8).

Επίσης, ακολουθώντας το μοντέλο του *Prakash* η πυκνότητα ενέργειας ανά νουκλεόνιο είναι ίση με:

$$\frac{\varepsilon(n)}{n} = m_n + \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 p_F^2}{2m_n} + \frac{\alpha}{2} u + \frac{\beta}{\sigma+1} u^\sigma \quad (3.9.9)$$

όπου $u = n/n_0$, σ είναι μια αδιάστατη σταθερά και τα α και β είναι σταθερές σε μονάδες MeV και πρέπει να προσδιοριστούν.

Η παραπάνω σχέση είναι μια μορφή της σχετικιστικής ενέργειας,

$$E^2 = m^2 + p^2$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι είναι της είναι η μάζα ηρεμίας και η μέση κινητική ενέργεια *Fermi* ενώ έχουν προστεθεί δύο επιπλέον όροι που αντιπροσωπεύουν τα πυρηνικά δυναμικά της ύλης. Το p_F είναι η ορμή *Fermi* του νουκλεονίου για την τιμή $n = n_0$ και υπολογίζεται απευθείας από την (3.7.6) $p_F^0 = 263 MeV$. Επίσης χρησιμοποιώντας την σχέση,

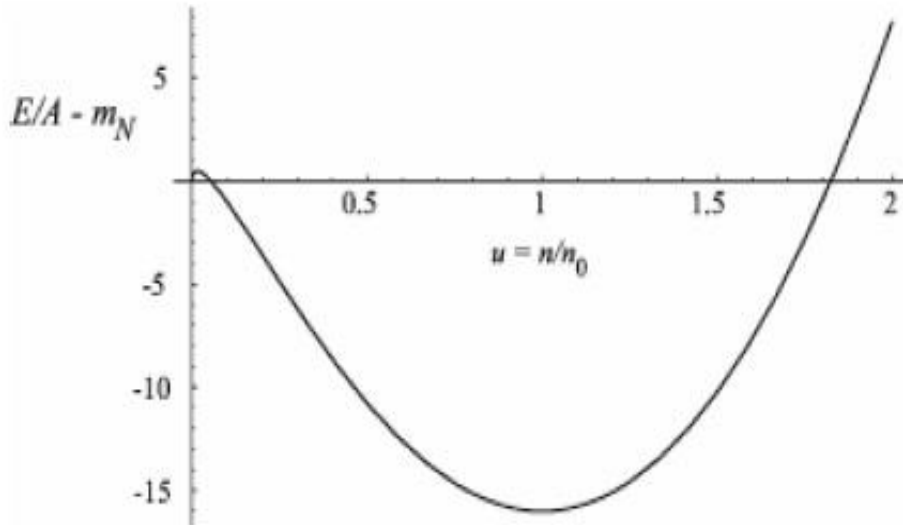
$$n = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

μπορούμε να εκφράσουμε και τον όρο της κινητικής ενέργειας $\frac{3}{5} \frac{\hbar^2 p_F^2}{2m_n}$ συναρτήσει του u ως $E_F^0 u^{2/3}$. Για την παραπάνω τιμή της p_F η κινητική ενέργεια υπολογίζεται στα $22.1 MeV$.

Από το σύστημα λοιπόν των εξισώσεων (3.9.6) - (3.9.9) και βάζοντας όλες τις τιμές που έχουμε ($BE = -16 MeV, K_0 = 400 MeV, E_F^0 = 22.1 MeV$) υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων A, B και σ :

$$A = -122.2 \text{ MeV}, \quad B = 65.39 \text{ MeV}, \quad \sigma = 2.112$$

Έτσι παίρνουμε την γραφική παράσταση του σχήματος (3.3.3)⁹ του BE ως συνάρτηση της πυκνότητας n .



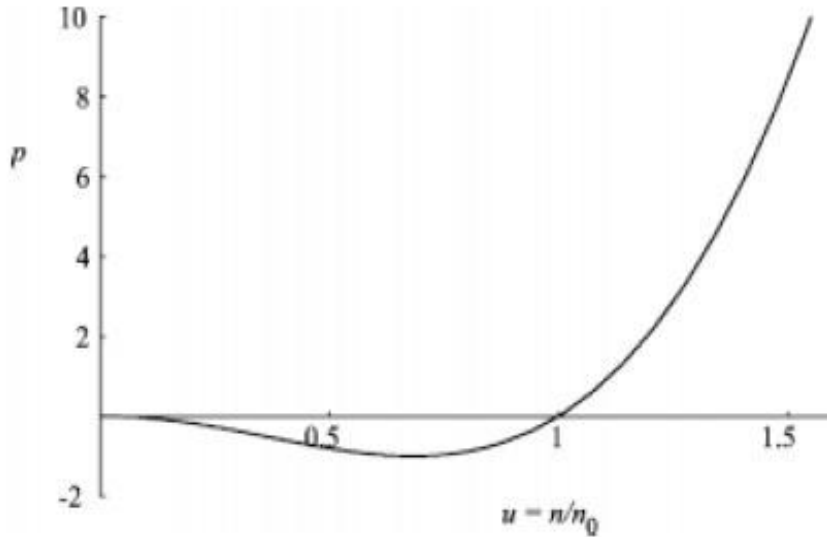
Διάγραμμα 3.3.3: Μέση ενέργεια/νουκλεόνιο, σε MeV, (μείον την ενέργεια ηρεμίας) συναρτήσει της αδιάστατης σταθεράς n/n_0 . Για $n=n_0=0.16$ nucleons/fm³ είναι ελάχιστη με «βάθος» -16 MeV. Το μέτρο της καμπυλότητας εξαρτάται από το K το οποίο εδώ είναι 400 MeV .

Τέλος, βρίσκει κανείς τη σχέση που συνδέει πίεση και πυκνότητα ενέργειας από τις σχέσεις (3.9.2) και (3.9.9):

$$P(n) = n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right) = n_0 \left(\frac{2}{3} E_F^0 u^{5/3} + \frac{\alpha}{2} u^2 + \frac{\beta \sigma}{\sigma+1} u^{\sigma+1} \right) \quad (3.9.10)$$

Η γραφική παράσταση $P - n$ είναι αυτή του παρακάτω σχήματος,

⁹ Neutron stars for undergraduates, R.Silbar and S.Reddy



Διάγραμμα 3.3.4: Πίεση συναρτήσει της πυκνότητας των νουκλεονίων $u=n/n_0$. Σύμφωνα με τον 1^ο θερμοδυναμικό νόμο, η πίεση είναι η μεταβολή της ενέργειας ανά μονάδα όγκου, οπότε το διάγραμμα αυτό θα είναι η παράγωγος του προηγούμενου.

Από τις σχέσεις της πίεσης και της πυκνότητας ενέργειας παρατηρούμε ότι σε πολύ μεγάλες συγκεντρώσεις, $n \gg n_0$, επικρατούν οι όροι:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\sigma+1} u^{\sigma+1} n_0 & \text{ για το } \varepsilon(n) \\ \frac{B\sigma}{\sigma+1} u^{\sigma+1} n_0 & \text{ για το } p(n) \end{aligned}$$

Συνεπώς για $\sigma = 2.112$ προσεγγίζεται πολύ καλά η σχέση που είχαμε βρει για σχετικιστικά νετρόνια (3.7.21). Αυτό φαίνεται και από την γραφικές μας παραστάσεις.

Περίπτωση $N \neq Z$.

Η προηγούμενη περίπτωση προφανώς και δεν μπορεί να είναι ρεαλιστική για έναν αστέρα νετρονίων αφού εκεί θα ισχύει σίγουρα $N \gg Z$. Το μοντέλο μας όμως μας βοηθάει γιατί το μόνο που έχουμε να προσθέσουμε στα προηγούμενα είναι η ενεργειακό δυναμικό συμμετρίας (ασυμμετρίας στην ουσία). Εδώ δεν θα αναλυτικά οι υπολογισμοί (δεν απέχουν πολύ από τα προηγούμενα) αλλά θα παραθέσουμε τα βασικά στοιχεία του μοντέλου δίνοντας στο τέλος πάλι το ζητούμενο γράφημα $P - \varepsilon$. Η συνολική ενέργεια ανά νουκλεόνιο τώρα γράφεται ως,

$$E(n, a) = E(n, 0) + a^2 S(n) \quad (3.9.11)$$

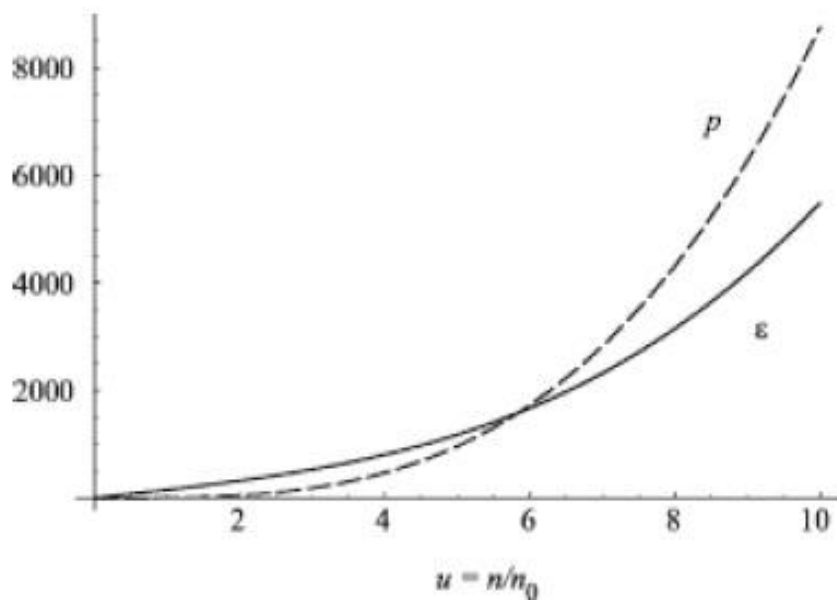
Όπου $E(n, 0)$ η ενέργεια συμμετρικής ύλης και είναι η σταθερά που δηλώνει την ασυμμετρία της δομής. Ο ενεργειακός όρος $S(n)$ έχει να κάνει με το λεγόμενο σπάσιμο συμμετρίας *isospin* (*isospin-symmetry breaking*) των νουκλεονίων ενός πυρήνα όταν και εμφανίζεται κάθε φορά που ο αριθμός των πρωτονίων είναι διαφορετικός από αυτό των νετρονίων. Προφανώς ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις *Coulomb* προκαλούν σπάσιμο στην συμμετρία των δυναμικών των δύο περιπτώσεων (αναφερόμαστε σε ισοβαρείς πυρήνες) αλλά διαφορές στο δυναμικό προκαλούνται και λόγω της απαγορευτικής αρχής του *Pauli*, καθώς απαγορεύει μόνο σε δύο ταυτόσημα φερμιόνια να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση και όχι σε δύο διαφορετικά. Αυτή η πρόσθετη ενέργεια, λοιπόν, ακολουθώντας πάλι τον *Prakash* δίνεται από τη σχέση:

$$S(u) = \left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) \frac{3}{5} E_F^0 \left(u^{\frac{2}{3}} - F(u)\right) + S_0 F(u) \quad (3.9.12)$$

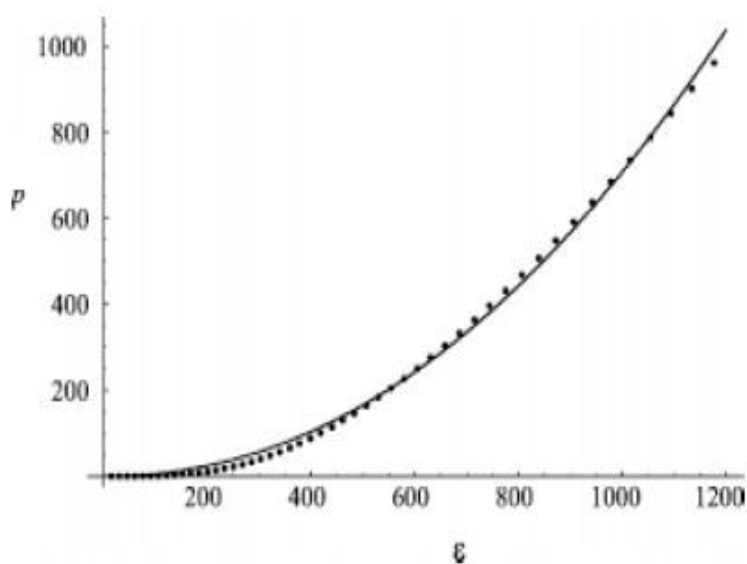
Όπου S_0 είναι η ενέργεια συμμετρίας για $n = n_0$ ή $u = 1$ και $F(u)$ μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις:

$$F(1) = 1 \quad \text{και} \quad F(0) = 0$$

Χωρίς να μπούμε άλλο σε λεπτομέρειες δίνουμε τα δύο παρακάτω γραφήματα της πίεσης και της πυκνότητας της ενέργειας συναρτήσει του u και της πίεσης που οφείλεται στα νουκλεόνια ασύμμετρης ύλης σαν συνάρτηση της συνολικής πυκνότητας ενέργειάς τους, $P = P(\varepsilon)$:



Διάγραμμα 3.3.5: Πίεση (διακεκομμένη γραμμή) και ενέργεια (συνεχόμενη γραμμή) για μία "αμιγή" ύλη νετρονίων συναρτήσει του $u = n/n_0$. Ο κατακόρυφος άξονας είναι σε MeV/fm^3 και το K είναι και εδώ 400 MeV .



Διάγραμμα 3.3.6: Καταστατική εξίσωση για καθαρή νετρονική ύλη ($\alpha = 1$). Οι μονάδες και για τα δύο μεγέθη είναι MeV/fm^3 . $K=400\text{MeV}$.

Παρατηρούμε ότι η πίεση είναι πάντα θετική, και γνησίως αύξουσα με την ενέργεια. Από το διάγραμμα (3.3.5) βλέπουμε ότι όσο $u < 6$ η πίεση βρίσκεται χαμηλότερα από

την ενέργεια, στα $u = 6$ είναι ίσες ενώ για $u > 6$ η πίεση γίνεται μεγαλύτερη της ενέργειας. Η συμπεριφορά αυτή αντανακλά το γεγονός ότι σε χαμηλές πυκνότητες υπερισχύει ενεργειακά η μάζα της ενέργειας *Fermi* των νουκλεονίων ενώ όσο αυξάνεται η πυκνότητα όπως είδαμε αυξάνεται και η ενέργεια *Fermi* ασκώντας τελικά μεγαλύτερες πιέσεις *Fermi*.

Έτσι ολοκληρώνεται η ανάλυση για την περιγραφή της κατάλληλης εξίσωσης κατάστασης στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων και των λευκών νάνων, εξίσωση η οποία σε συνδυασμό με τις εξισώσεις *Einstein* για την βαρύτητα θα μας βοηθήσει στο επόμενο κεφάλαιο να εκφράσουμε την συνολική μάζα του αστήρα σαν συνάρτηση της ακτίνας του $M = M(R)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι να βρούμε κάποια εξάρτηση της μάζας των αστέρων νετρονίων ή των λευκών νάνων από την ακτίνα τους καθώς και μία εκτίμηση των ορίων της μάζας αυτής όπως είναι το όριο *Chandrasekar*. Έτσι χρειάστηκε να αναπτύξουμε τις αρχές της *Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας* αφού, όπως εξηγήσαμε, ένας απλός νευτώνειος υπολογισμός θα οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα (όπως η αδυναμία εξήγησης του *περιηλίου του Ερμή*). Η κατάληξη της θεωρίας ήταν οι *εξισώσεις Einstein* των οποίων οι λύσεις αν συνδυαστούν με μια κατάλληλη *εξίσωση κατάστασης*, που να ισχύει στο εσωτερικό του αστερά, και κάποιες ακόμη φυσικές παραδοχές είναι ικανές να μας δώσουν την ζητούμενη εξάρτηση των παραπάνω μεγεθών. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε το σύστημα εξισώσεων στο εσωτερικό και το εξωτερικό ενός σχετικιστικού αστερά κάνοντας αναφορά και στην νευτώνεια περίπτωση.

Οι εξισώσεις *Einstein* είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν την γενική επίλυσή τους. Ωστόσο, αν θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές «συμμετρίες» προερχόμενες από συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές τότε είναι δυνατή η εξεύρεση λύσεων που αναπαριστούν το χωροχρόνο γύρω αλλά και εντός των αστρικών αντικειμένων που μελετούμε. Θα χωρίσουμε την λύση σε δύο διακριτές περιοχές, μέσα και έξω από το θεωρούμενο ως σύστημα του αστερά.

4.1 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου *Einstein* περίξ του αστερά

Το κλασσικό - νευτώνειο δυναμικό είναι η λύση της εξίσωσης *Poisson*. Περνώντας το σχετικιστικό όριο το αντίστοιχο μέγεθος είναι η γεωμετρία του χωροχρόνου έξω από το άστρο η οποία περιγράφεται από τη μετρική. Ξεκινάμε από την πλέον γενική μετρική στον γνωστό χώρο (t, x, y, z) για την οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα και προσπαθούμε να

την προσδιορίσουμε. Πρώτα απ' όλα εκμεταλλευόμαστε την σφαιρική συμμετρία και την χρονική ανεξαρτησία του προβλήματος. Η μετρική μιας τέτοιας πηγής πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τη χρονική συντεταγμένη t και επιπροσθέτως, στο στοιχείο μήκους δεν θα πρέπει να υπάρχουν όροι της μορφής $dx^i dt$, αφού αλλάζουν πρόσημο κάτω από το μετασχηματισμό $t \rightarrow -t$. Η σφαιρική συμμετρία συνεπάγεται ότι ο χώρος – οι υπερσφαίρες σταθερού t – απλουστεύεται σε μια οικογένεια δισδιάστατων σφαιρών όπου καθεμία προσδιορίζεται από μια ακτινική συνιστώσα r , η οποία μπορεί να οριστεί ως μια - ένα προς ένα - συνάρτηση της επιφάνεια της εκάστοτε σφαίρας. Ορίζουμε τώρα τις γνώριμες πολικές συντεταγμένες θ και φ για τις σφαίρες αυτές ώστε η εσωτερική γεωμετρία να δίνεται από το στοιχείο μήκους επίπεδου χώρου, $d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Η σφαιρική συμμετρία συνεπάγεται ότι οι αντικαταστάσεις $\theta \rightarrow -\theta$ και $\varphi \rightarrow -\varphi$ θα πρέπει να αφήνουν αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους ds^2 οπότε θα αποκλειστούν και οι όροι $d\theta dr$ $d\varphi dr$ από την μετρική. Με βάση τα παραπάνω επιχειρήματα καταλήγουμε ότι το στοιχείο μήκους μιας στατικής, σφαιρικά συμμετρικής πηγής καμπυλότητας θα έχει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.1.1)$$

όπου οι όροι $g_{tt}(r)$ και $g_{rr}(r)$ εξαρτώνται μόνο από το r .

Η γεωμετρία (4.1.1) είναι μια οικογένεια καμπυλών η οποία ονομάζεται *μετρική Schwarzschild*. και αποτελεί την πιο γενική λύση των εξισώσεων *Einstein* για μια στατική, σφαιρικά συμμετρική κατανομή ύλης. Για να δειχτεί αυτό αρκεί να την αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις *Einstein* και να υπολογίσουμε τα $e^{\nu(r)}$ και $e^{\lambda(r)}$. Μάλιστα, θα δείξουμε ότι μια μετρική αυτής της μορφής θα ισχύει και στο εσωτερικό αλλά και στο εξωτερικό της κατανομής, όπου απλώς θα διαφέρουν οι συναρτήσεις $g_{tt}(r)$ και $g_{rr}(r)$.

Έξω από την κατανομή οι άγνωστες συναρτήσεις $e^{\nu(r)}$ και $e^{\lambda(r)}$ προσδιορίζονται από τις εξισώσεις *Einstein* στο κενό, δηλαδή από την λύση της εξίσωσης *Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.2)$$

Ξεκινάμε, υπολογίζοντας τα *σύμβολα Christoffel* για την μετρική της (4.1.1) που μας ενδιαφέρει,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[-e^{v(r)}, e^{\lambda(r)}, r^2, r^2 \sin^2 \theta]$$

από την λαγκρανζιανή του προβλήματος,

$$L = -e^{v(r)} \dot{t}^2 + e^{\lambda(r)} \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (4.1.3)$$

όπου η «τελεία» αναφέρεται στην παραγωγή ως προς την επιλεγθείσα παράμετρο που εδώ είναι ο ιδιοχρόνος τ .

Έτσι, από την σχέση (2.5.23),

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

προκύπτουν τα εννιά μόνα μη μηδενικά σύμβολα *Christoffel*:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{v'}{2} e^{v-\lambda} & \Gamma_{01}^0 &= \frac{v'}{2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 &= \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

όπου ο «τόνος» υπονοεί ακτινική παραγωγή.

Ενδεικτικά, υπολογίζουμε το Γ_{01}^0 από την (2.5.23),

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} (-e^{-v(r)}) (-e^{v(r)})' = \frac{1}{2} e^{-v(r)} e^{v(r)} v'(r) \Rightarrow \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} v(r)'$$

οπότε οι συνιστώσες του τανυστή *Ricci* θα είναι:

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{v-\lambda} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'}{r} \right] \\ R_{11} &= -\frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4} + \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'}{r} \\ R_{22} &= -e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right] \\ R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22} \end{aligned}$$

Οι ζητούμενοι τώρα συντελεστές $e^{v(r)}$ και $e^{\lambda(r)}$ τώρα προσδιορίζονται από τις συνθήκες (4.1.2), $R_{\mu\nu} = 0$.

Από το άθροισμα $R_{11} + e^{\lambda-v} R_{00} = 0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad (4.1.4)$$

Επίσης από την $R_{22} = 0$ αναγόμεσθε στη σχέση:

$$\nu' - \lambda' = \frac{2}{r}(e^\lambda - 1) \quad (4.1.5)$$

Άρα,

$$\nu' = \frac{1}{r}(e^\lambda - 1) \quad (4.1.6)$$

$$\lambda' = -\frac{1}{r}(e^\lambda - 1) \quad (4.1.7)$$

Από τις (4.1.6) και (4.1.7) έχουμε:

$$\nu' = -\lambda' \Rightarrow \nu = \lambda + B \quad (4.1.8)$$

Λύνοντας την (4.1.7) είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η συνάρτηση $\lambda(r)$. Κάνουμε για ευκολία την αντικατάσταση $f = e^{-\lambda}$ οπότε η τελευταία γράφεται ως,

$$rf' + f = 1 \quad (4.1.9)$$

που έχει προφανή λύση,

$$f = e^{-\lambda} = 1 - \frac{A}{r} \quad (4.1.10)$$

όπου A είναι η σταθερά ολοκλήρωσης και θα προσδιοριστεί από τις οριακές συνθήκες. Στην συγκεκριμένη περίπτωση για $r \rightarrow \infty$ θα πρέπει η λύση που βρήκαμε να ανάγεται στην νευτώνεια που όπως δείξαμε στις σχέσεις (3.7.22) και (3.7.23) είναι,

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}U(r)$$

με $U(r)$ να είναι το νευτώνειο δυναμικό που για σφαιρική συμμετρία είναι:

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \quad (4.1.11)$$

Άρα,

$$A = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.1.12)$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις (4.1.1), (4.1.8), (4.1.10) και (4.1.11) παίρνουμε:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 + \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} + B\right] dr^2 + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Συγκρίνοντας τη μετρική με τη συνήθη επίπεδη μετρική των πολικών συντεταγμένων,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

για μεγάλα r (που πρέπει να συμπίπτουν) διαπιστώνουμε ότι $B=0$. Έτσι, $e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)}$ και τελικά η λύση *Schwarzschild* στην περιοχή έξω από τον αστέρα λαμβάνει τη μορφή:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.1.13)$$

Η ποσότητα $\frac{2GM}{rc^2}$ όπως φαίνεται προσδιορίζει την απόκλιση από την μετρική του επιπέδου χωροχρόνου *Minkowski*. Π.χ. για τον Ήλιο λαμβάνει την τιμή $\approx 4 \times 10^{-6}$ ενώ για έναν αστέρα νετρονίων είναι της τάξης $\sim 0.3 - 0.5$. Άρα, οι διορθώσεις της ΓΘΣ ακόμη και στην επιφάνεια του Ήλιου ($r = R$) παραμένουν μικρές ενώ για έναν τυπικό αστέρα νετρονίων αναμένονται παρατηρησιακά σημαντικές. Τέλος, στο εξής θα χρησιμοποιούμε γεωμετροποιημένες ($G = c = 1$) οπότε ο όρος $\frac{2GM}{rc^2}$ γράφεται $\frac{2M}{r}$.

4.2 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου *Einstein* στο εσωτερικό μη σχετικιστικού πολυτροπικού αστέρα

Αν και η εξίσωση κατάστασης στο εσωτερικό *συμπαγών* αντικειμένων όπως οι αστέρες νετρονίων είναι σε μεγάλο βαθμό άγνωστη, είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι μια πολυτροπική σχέση περιγράφει μάλλον ικανοποιητικά την κατάσταση της ύλης. Τα αντικείμενα αυτά γενικά χαρακτηρίζονται ως *πολύτροπα*, ενώ διακρίνονται σε *νευτώνεια* και σε *σχετικιστικά πολύτροπα*, ανάλογα με την τιμή του παράγοντα GM/c^2R . Θα θεωρήσουμε ότι το σώμα βρίσκεται σε *υδροστατική ισορροπία* οπότε θα περιοριστούμε στην μη ρεαλιστική περίπτωση στην οποία αγνοούνται οι εσωτερικές του κινήσεις.

Η εσωτερική δομή ενός νευτωνικού πολυτρόπου που ισορροπεί καθορίζεται από την εξίσωση των *Lane-Emden*. Αυτή προκύπτει από τις σχέσεις (4.2.2) και (4.2.3):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (4.2.1)$$

$$dm(r) = 4\pi\rho(r)r^2 dr \quad (4.2.2)$$

όπου $P(r), \rho(r)$ είναι η πίεση και η πυκνότητα σε ακτίνα r και $m(r)$ η συνολική μάζα της ύλης εντός της ακτίνας αυτής. Η πρώτη εκφράζει ακριβώς την ισορροπία, όπου η διαφορά στην πίεση των δύο επιφανειών ενός στρώματος πρέπει να ισούται με το βάρος του στρώματος, ενώ η 2^η την εξίσωση συνέχειας της μάζας. Θεωρώντας τώρα την πολυτροπική καταστατική,

$$P = K\rho^\gamma, \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (4.2.3)$$

όπου το n ονομάζεται πολυτροπικός δείκτης και το K είναι μια σταθερά που μπορεί να προσδιοριστεί από κάποια συνθήκη πίεσης και πυκνότητας στην περιοχή του κέντρου, του αστέρα ($r \ll R$), έχουμε ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων δομής, καθώς λέγονται, του αστέρα.

Διαφορίζοντας την (4.14) και χρησιμοποιώντας την (4.15) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= \frac{2Gm}{r^3} - \frac{G}{r^2} \frac{dm}{dr} = -\frac{2}{\rho r} \frac{dP}{dr} - 4\pi G \rho \stackrel{\times r^2}{\implies} \\ r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) + \frac{2r}{\rho} \frac{dP}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho \stackrel{\div r^2}{\implies} \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) &= -4\pi G \rho \implies \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{n+1}{n} K \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

Όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η (4.2.3). Σ' αυτό το σημείο είναι βολικό να αντικαταστήσουμε την πυκνότητα ρ μέσω μιας αδιάστατης μεταβλητής υψωμένης σε n -οστή δύναμη, έστω θ , και να την εκφράσουμε με τη βοήθεια μιας παραμέτρου, της τιμής της πυκνότητας στο κέντρο του αστέρα, για παράδειγμα,

$$\rho = \rho_c \theta^n$$

Έτσι η πίεση μέσω της (4.2.3) γράφεται ως:

$$P = K \rho_c^{1 + \frac{1}{n}} \theta^{n+1}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις η (4.2.4) γίνεται:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K \rho_c^{1/n} (n+1) \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G \rho_c \theta^n$$

Τελικά συλλέγοντας τις σταθερές της εξίσωσης ως μια συνάρτηση,

$$a^2 = \frac{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}}{(n+1)K}$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $r = \frac{\xi}{a}$, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0 \quad (4.2.5)$$

Η εξίσωση (4.2.5) είναι η σχέση *Lane–Emden* και περιγράφει την δομή ενός μη σχετικιστικού αστέρα με πολυτροπικό δείκτη n και αρχικές συνθήκες στο κέντρο του

$$\theta(0) = 1$$

$$\theta'(0) = 0$$

Η πρώτη συνθήκη προκύπτει από το γεγονός ότι για $r \rightarrow 0$ ισχύει $\rho \rightarrow \rho_c$ ενώ η δεύτερη οφείλεται στο φυσικό γεγονός ότι η μεταβολή της πίεσης στο κέντρο είναι πρακτικά μηδέν (αφού η μάζα σε τόσο μικρή ακτίνα είναι αμελητέα).

Η (4.2.5) γενικά δεν λύνεται αναλυτικά, όμως προκύπτει ότι υπάρχουν τρεις τιμές του n για τις οποίες γίνεται αυτό: $n = 0, 1, 5$. Και για τις τρεις αυτές τιμές όπως και για κάθε $n < 5$ η συνάρτηση $\theta(\xi)$ είναι μονότονα φθίνουσα ώσπου να μηδενιστεί σε κάποιο $\xi = \xi_1$. Στην τιμή αυτή του ξ αντιστοιχεί η επιφάνεια του άστρου το οποίο θα έχει ακτίνα,

$$R = a\xi_1 = \left(\frac{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}}{(n+1)K} \right)^{1/2} \xi_1 \quad (4.2.6)$$

ενώ η μάζα του άστρου θα είναι:

$$M = \int_0^R 4\pi \rho r^2 dr = \int_0^{\xi_1} 4\pi \rho_c a^3 \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi = 4\pi \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \quad (4.2.7)$$

Από τις (4.2.6) και (4.2.7) παίρνουμε τη σχέση που δίνει την μάζα ως συνάρτηση της ακτίνας:

$$M(R) = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{3-n}{1-n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \quad (4.2.8)$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των μεταβλητών ξ_1 και $\theta'(\xi_1)$ για κάποιες τιμές του πολυτροπικού δείκτη n .

Πίνακας 4.2.1: Σταθερές Lane-Emden

n	γ	ξ_1	$\xi_1^2 \theta'(\xi_1) $
0	∞	2.4494	4.8988
0.5	3	2.7528	3.7871
1.0	2	3.14159	3.14159
1.5	5/3	3.65375	2.71406
2.0	3/2	4.35287	2.41105
2.5	1.4	5.35528	2.18720
3.0	4/3	6.89685	2.01824
4.0	5/4	14.97155	1.79723
4.5	1.22	31.83646	1.73780
5.0	1.2	∞	1.73205

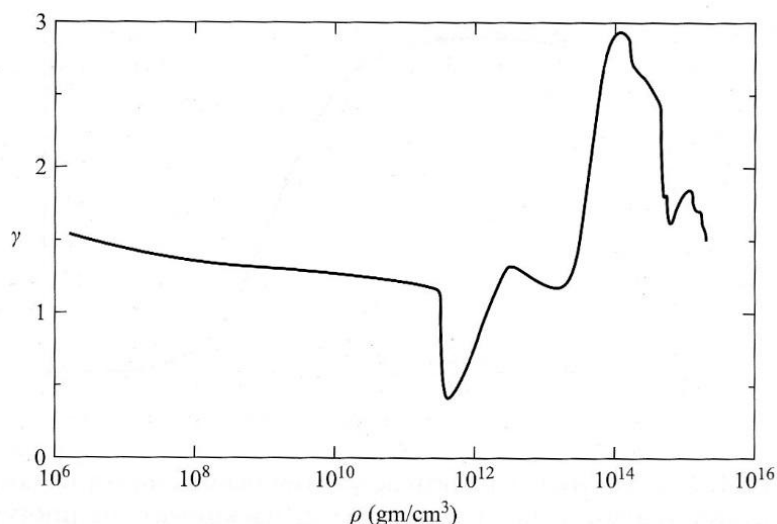
Θα σταθούμε στις σχέσεις (4.2.6)-(4.2.8) για να δούμε κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά που προκύπτουν άμεσα από αυτές. Θεωρώντας ένα πολυτροπικό μοντέλο μη σχετικιστικών ηλεκτρονίων, που όπως είπαμε εφαρμόζεται για έναν λευκό νάνο χαμηλής μάζας, η παράμετρος σκληρότητας γ προσεγγίζει την τιμή άρα ο πολυτροπικός δείκτης γίνεται . Για αυτές τιμές από την (4.2.8) παίρνουμε

$$MR^3 = \text{const.} \quad (4.2.9)$$

Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με την συμπεριφορά των κλασικών άστρων. Αυξάνοντας τη μάζα η ακτίνα του αστέρα μειώνεται ανάλογα με το $\sim R^3$. Αυτό σημαίνει ότι μεγαλύτερη μάζα ενός λευκού νάνου υπερνικά την έως τότε πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων και θα «συναντήσει» κατάσταση ισορροπίας σε μικρότερη ακτίνα οπότε θα τον συμπιέζει περαιτέρω.

Αν συνεχίσουμε τώρα να αυξάνουμε τη μάζα το ίδιο θα κάνει και η μεταβολή , λόγω απαίτησης υδροστατικής ισορροπίας, οπότε θα αυξηθεί και η πίεση. Έτσι τα ηλεκτρόνια του αστέρα γίνονται όλο και πιο σχετικιστικά, η σχέση πίεσης με την πυκνότητα γίνεται πιο μαλακή, με το γ να «πέφτει» σταδιακά μέχρι την τιμή $\gamma=4/3$ (που αντιστοιχεί σε $n=3$) οπότε η παραπάνω σχέση δίνει,

$$M = \text{const.} \quad (4.2.10)$$



Διάγραμμα 4.2.1: Παράμετρος σκληρότητας γ συναρτήσει της κεντρικής πυκνότητας του αστέρα. Το γράφημα ξεκινά από τα 10^6 gr/cm^3 , έπειτα το γ πέφτει σταδιακά έως τα 10^{11} περίπου όπου η καταστατική «μαλακώνει» απότομα λόγω του φαινομένου neutron drip. Σε ακόμη μεγαλύτερες πυκνότητες τα ισχυρά πυρηνικά δυναμικά κάνουν τις μεταβολές αυτές τόσο απότομες όσο και αβέβαιες.

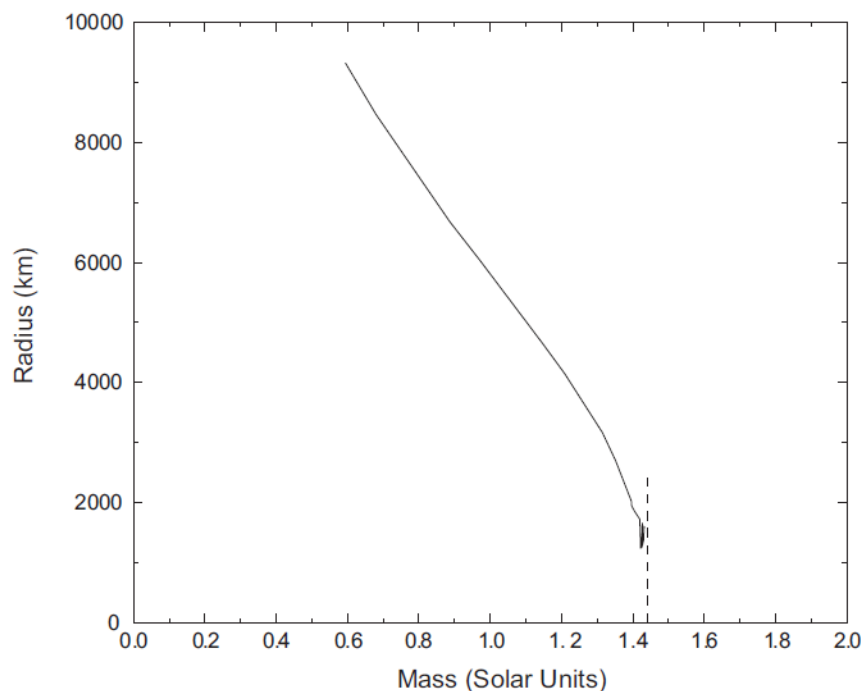
Από το διάγραμμα παρατηρούμε την συνεχή πτώση του γ από ∞ ενώ η συνάρτηση παρουσιάζει απότομες μεταβολές σε μεγαλύτερες πυκνότητες όπου συνεισφέρουν σημαντικά τα πυρηνικά δυναμικά. Επομένως, για τον συγκεκριμένο πολύτροπο με δείκτη $n = 3$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα και την μάζα *Chandrasekar* από τις σχέσεις (4.2.6) και (4.2.7) παίρνοντας τις τιμές ξ_1 και $\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$ από τον παραπάνω πίνακα οι οποίες υπολογίστηκαν αριθμητικά. Έτσι βρίσκουμε,

$$R_{Ch} = a\xi_1 = 3.347 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ gcm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (4.2.11)$$

$$M_{Ch} = 1.457 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_{\odot} \approx 1.4 M_{\odot} \quad (4.2.12)$$

όπου το K υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο από τη σχέση (3.7.15) και $\mu_e = \frac{A}{Z}$. Επίσης από την σχέση για την ακτίνα βλέπουμε ότι για μια δεδομένη τιμή μάζας ίση με την μάζα *Chandrasekar* η ακτίνα εξαρτάται από την κεντρική πυκνότητα του αστέρα και μάλιστα μειώνεται με την αύξηση της πυκνότητας εκεί, ενώ η μάζα είναι ανεξάρτητη από την κεντρική πυκνότητα όπως προκύπτει και από την (4.2.7).

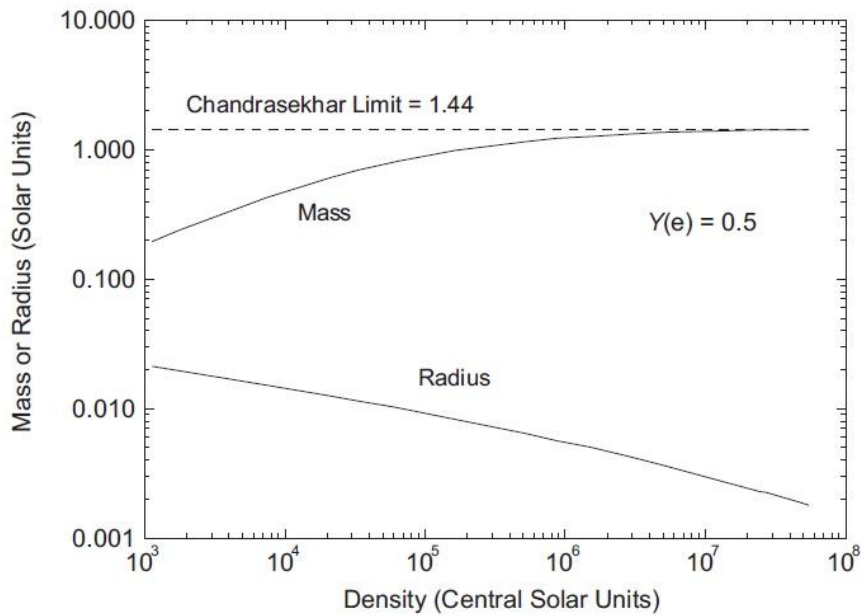
Από το αποτέλεσμα αυτό φτάνουμε στο ακόμα πιο σημαντικό συμπέρασμα ότι φθάνοντας τα ηλεκτρόνια στο σχετικιστικό τους όριο η μάζα γίνεται ανεξάρτητη τόσο της ακτίνας αλλά και της κεντρικής πυκνότητας του αστέρα, ενώ παράλληλα η τιμή αυτή είναι και ένα άνω όριο μάζας του λευκού νάνου. Πέρα από την μάζα αυτή ο λευκός νάνος θα καταρρεύσει με αποτέλεσμα τον σχηματισμό ενός αστέρα νετρονίων, όπου τα νετρόνια είναι πλέον οι πηγές αντιστάθμισης της βαρύτητας και τα οποία δεν έχουν γίνει ακόμα σχετικιστικά (λόγω της αντίστροφης εξάρτησης ταχύτητας - μάζας). Το όριο αυτό ονομάζεται *όριο Chandrashekar* και υπολογίστηκε περίπου στην $\sim 1M_{\odot}$ στην ενότητα 3.3 στη βάση μιας «ευριστικής», καθώς λέγεται, μεθόδου. Τα παραπάνω ποιοτικά συμπεράσματα φαίνονται στο διάγραμμα 4.2.2¹⁰ μάζας - ακτίνας για ένα τυπικό λευκό νάνο με όριο *Chandrashekar* περίπου στις 1.4 ηλιακές μάζες, όπως προκύπτει από ακριβέστερους υπολογισμούς.



Διάγραμμα 4.2.2: Ευσταθείς καταστάσεις λευκών νάνων-Όριο μάζας Chandrashekar.

¹⁰ http://eagle.phys.utk.edu/guidry/astro615/lectures/lecture_ch11.pdf/Figure11.1

Επίσης, στο διάγραμμα 4.2.3¹¹ παρουσιάζονται οι μεταβολές της μάζας και της ακτίνας συναρτήσει της κεντρικής του πυκνότητας,



Εικόνα 4.2.3: Μεταβολές μάζας και ακτίνας για λευκούς νάνους συναρτήσει της κεντρικής πυκνότητάς τους.

Συνεχίζοντας τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή της οριακής πριν την κατάρρευση μάζας *Chanrashekar* θα δούμε γιατί η θεώρηση μη σχετικιστικών ηλεκτρονίων δεν μπορεί να προβλέψει καμιά μέγιστη τιμή μάζας για λευκούς νάνους σε αντίθεση με την σχετικιστική της αντικατάσταση. Έτσι, θεωρώντας μια σφαιρική ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρονίων, πρωτονίων και νετρονίων όπου η πίεση οφείλεται στο αέριο πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, η συνολική ενέργεια του λευκού νάνου είναι:

$$E = E_F + U \quad (4.2.13)$$

όπου,

$$U \sim -\frac{M^2}{R}$$

¹¹ http://eagle.phys.utk.edu/guidry/astro615/lectures/lecture_ch11.pdf/Figure11.2

η δυναμική ενέργεια, η οποία οφείλεται κυρίως στα νουκλεόνια και η συνολική ενέργεια E_F από τα ηλεκτρόνια υπολογίζεται σε τάξη μεγέθους ως εξής:

$$E_F = N \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{M}{2m_p} \frac{\hbar^2 M^{2/3}}{R^2} \approx \frac{M^{5/3}}{R^2}$$

Για ισορροπία θα πρέπει $\partial E / \partial R = 0$ οπότε η (4.2.13) δίνει μια εξάρτηση,

$$MR^3 = \text{const.}$$

Άρα, στη μη σχετικιστική περίπτωση οι καταστάσεις ισορροπίας είναι θεωρητικά άπειρες με τα M και R να προκύπτουν από την σχέση αυτή. Αντιθέτως, στη σχετικιστική περίπτωση η ισορροπία $\partial E / \partial R = 0$ δίνει μια και μοναδική τιμή μάζας, η οποία προκύπτει ανεξάρτητη της ακτίνας, όπως προκύπτει από την (4.2.1).

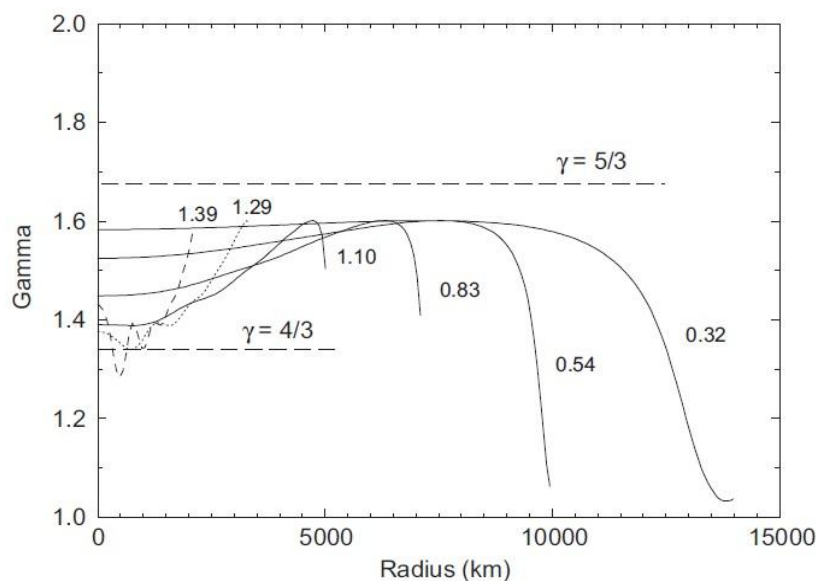
Ένα ακόμα χρήσιμο χαρακτηριστικό για τη μελέτη της συμπεριφοράς πολυτροπικών άστρων που περιγράφονται από μη σχετικιστική υδροστατική ισορροπία είναι η παράμετρος σκληρότητας γ η οποία θα φανεί χρήσιμη και στην σχετικιστική περίπτωση. Ξεκινώντας από την εξίσωση κατάστασης $P = K\rho^\gamma$ έχουμε,

$$\frac{dP}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \rightarrow \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{\rho}{P} K\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{K\rho^\gamma}{P} = \gamma$$

έτσι μπορούμε να ορίσουμε το γ για μια γενική εξίσωση κατάστασης $P(\rho)$:

$$\gamma \equiv \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} = \frac{d \ln P}{d \ln \rho} \quad (4.2.14)$$

Το παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζει το γ σαν συνάρτηση της ακτίνας όπως υπολογίζεται αριθμητικά από τη λογαριθμική σχέση (4.2.14) για έναν λευκό νάνο.



Διάγραμμα 4.2.4: Η παράμετρος γ συναρτήσει της ακτίνας σε καταστάσεις αστέρων ευσταθούς ισορροπίας για διάφορες τιμές της μάζας (σε ηλιακές μάζες). Για μικρότερες του ορίου Chandrashekar μάζες το γ σταθεροποιείται στις κεντρικές περιοχές. Στις 1.4 ηλιακές μάζες το γ έχει απότομες μεταβολές ωθώντας έτσι σε αστρική αστάθεια.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι καθώς πάμε προς το κέντρο το γ σταθεροποιείται σε μια τιμή η οποία ανάλογα με την μάζα παίρνει διαφορετικές τιμές. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται από την (4.2.14) και το ότι $\theta'(\xi \rightarrow 0) = 0$, δηλαδή κοντά στο κέντρο δεν μεταβάλλονται τα P και ρ και το γ σταθεροποιείται. Επίσης, όπως βλέπουμε, για μάζα κοντά στο όριο *Chanrashekar* η παράμετρος σκληρότητας παίρνει αρκετές διακυμάνσεις κοντά στο κέντρο οπότε ένα τέτοιο άστρο αποκλείεται να είναι σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, ακριβώς όπως προκύπτει και από τα προηγούμενα. Τέλος μπορεί να διακρίνει κανείς και την αντίστροφη εξάρτηση της μάζας με την ακτίνα του λευκού νάνου.

4.3 Λύσεις των εξισώσεων πεδίου *Einstein* σε σχετικιστικά πολύτροπα

Σε αυτή την ενότητα είναι και τα πιο ενδιαφέροντα συμπεράσματα-παρατηρήσεις της θεωρίας. Θα εξετάσουμε τα σχετικιστικά πολύτροπα δηλαδή άστρα τα οποία είναι τόσο πυκνά ώστε οι «καμπυλώσεις» του χωροχρόνου που προκαλούν, $\sim GM/c^2R$, να μην είναι αμελητέες με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον νευτώνειο φορμαλισμό της προηγούμενης παραγράφου. Τα κατεξοχήν σχετικιστικά ουράνια σώματα είναι οι αστέρες νετρονίων. Έτσι θα εξαχθούν οι νέες εξισώσεις δομής (*equations of structure*) που θα καθορίζουν τις ιδιότητες στο εσωτερικό ενός σχετικιστικού άστρου, το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία μεταξύ της δύναμης συμπίεσης της σχετικιστικής βαρύτητας και της αντίστασης που εξασκεί η πίεση εκφυλισμού του φερμιονιμικού αερίου. Υποθέτουμε ότι η καταστατική εξίσωση $p = p(\rho)$ είναι γνωστή και έχει τη μορφή που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης, η μετρική στο εσωτερικό θα είναι πάλι της μορφής (4.1), αφού οι παραδοχές που κάναμε δεν είχαν να κάνουν με το κενό

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Εδώ όμως θα έχουμε να κάνουμε τις λύσεις των εξισώσεων *Einstein* όχι στο κενό αλλά εντός ύλης και μάλιστα σε εξαιρετικά υψηλές πυκνότητες ύλης-ενέργειας. Υποθέτοντας επίσης ότι η ύλη, από την οποία είναι σχηματισμένο το άστρο, συνίσταται από ιδανικό ρευστό αγνοώντας την *θερμική αγωγιμότητα* και το *ιζώδες* (τα οποία παράγονται από τις πυρηνικές αλληλεπιδράσεις) ο τανυστής ενέργειας-ορμής, όπως δόθηκε στην (3.3.9), είναι:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p \quad \text{όπου} \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.3.1)$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων *Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.3.2)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p \quad (4.3.3)$$

Το βαθμωτό του *Ricci*, R , υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} \\
&= -e^\nu e^{2\nu} \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{v'}{r} \right) + e^\nu \left(-\frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{2} - \frac{v'}{r} \right) \\
&\quad + 2r^{-2}[-e^\nu(1 + rv') + 1] \\
&= -2e^\nu \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{v'}{r} \right) + 2r^{-2}[-e^\nu(1 + rv') + 1]
\end{aligned}$$

Τώρα, οι εκφράσεις που θέλουμε για την μάζα, την πίεση και την πυκνότητα υπεισέρχονται στις εξισώσεις (4.3.2) και (4.3.3). Υπολογίζουμε χωριστά τα δύο μέλη της πρώτης. Ενδεικτικά πάλι θα υπολογίσουμε μία από τις συνιστώσες και τις υπόλοιπες θα τις πάρουμε έτοιμες με χρήση της *Mathematica*,

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R \\
&= e^{2\nu} \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{v'}{r} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}(-e^\nu) \left\{ -2e^\nu \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{v'}{r} \right) + 2r^{-2}[-e^\nu(1 + rv') + 1] \right\} \\
&= e^\nu r^{-2}[-e^\nu(1 + rv') + 1] = \frac{e^\nu}{r^2}[r(1 - e^\nu)]'
\end{aligned}$$

Οι συνιστώσες του ταυνοστή τάσης-ενέργειας βρίσκονται εύκολα από την (4.3.3):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p \Rightarrow T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}p \quad (4.3.4)$$

Έτσι,

$$T_{tt} = (\rho + p)u_t u_t + g_{tt}p = (\rho + p)e^\nu(-e^\nu)p = -\rho e^\nu = -g_{tt} \cdot \rho$$

όπου το u_t υπολογίζεται από την σχέση,

$$\begin{aligned}
ds^2 = -dt^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \Rightarrow -1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \Rightarrow g_{tt}(u^t)^2 = -1 \Rightarrow -e^\nu(u^t)^2 = -1 \Rightarrow u^t \\
&= e^{-\nu/2} \Rightarrow u_t = g_{tt}u^t = -e^{\nu/2}
\end{aligned}$$

θεωρώντας στατική λύση του αστέρα δηλαδή ότι είναι μηδενικές οι εσωτερικές κινήσεις των στρωμάτων του ώστε να ισχύει $u_\mu = \left(-e^{\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0\right)$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τα T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, και $T_{\varphi\varphi}$ και συγκεντρωτικά παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.3.1: Μη μηδενικές συνιστώσες των τανυστικών εξισώσεων Einstein

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΝΥΣΤΗ <i>EINSTEIN</i>	ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΝΥΣΤΗ ΤΑΣΗΣ-ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
$G_{tt} = \frac{e^\nu}{r^2} [r(1 - e^\nu)]'$	$T_{tt} = -g_{tt}\rho$
$G_{rr} = -\frac{e^{-\nu}}{r^2} (1 - e^\nu) + \frac{1}{r} \nu'$	$T_{rr} = g_{rr}p$
$G_{\theta\theta} = r^2 e^\nu \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} \right)$	$T_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}p$
$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta$	$T_{\phi\phi} = g_{\phi\phi}p$

Από τις τιμές του πίνακα και τις $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ (σε γεωμετροποιημένες μονάδες, $G = c = 1$) βρίσκουμε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) , & (\mu = \nu = t) & (4.3.5) \\ \frac{dv(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r[r - 2m(r)]} , & (\mu = \nu = r) & (4.3.6) \end{cases}$$

Οι υπόλοιπες εξισώσεις $G_{\theta\theta} = 8\pi T_{\theta\theta}$ και $G_{\phi\phi} = 8\pi T_{\phi\phi}$ περιέχουν δεύτερες παραγώγους οπότε δεν θα μας χρειαστούν σε πρώτη προσέγγιση. Η (4.3.5) είναι μια εύλογη σχέση για την μάζα του αστέρα ενώ η (4.3.6) συσχετίζει τη μάζα με την πίεση αλλά χωρίς να πληροφορεί για την εξάρτηση της μεταβολής τους. Γι' αυτό θα κάνουμε χρήση μιας ακόμα εξίσωσης, της διατήρησης της συναλλοίωτης παραγώγου του τανυστή τάσης-ενέργειας. Ο νόμος συναλλοίωτης διατήρησης του $T^{\mu\nu}$ (3.4.2) λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} T_{\nu;}^{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\delta}^\mu T^{\delta\nu} + \Gamma_{\nu\delta}^\nu T^{\delta\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\nu} [(\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p] + \Gamma_{\nu\delta}^\mu [(\rho + p)u^\delta u^\nu + g^{\delta\nu}p] + \Gamma_{\nu\delta}^\nu [(\rho + p)u^\delta u^\mu + g^{\delta\mu}p] = 0 \Rightarrow^{(1)} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [(\rho + p)u^\mu u^\nu] + \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \\ \Gamma_{\nu\delta}^\mu (\rho + p)u^\delta u^\nu + \Gamma_{\nu\delta}^\nu (\rho + p)u^\delta u^\mu = 0 &\Rightarrow^{(2)} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\delta}^\mu (\rho + p)u^\delta u^\nu = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = \\ -\Gamma_{00}^\mu (\rho + p)u^0 u^0 &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \nu' (\rho + p) e^\nu \Rightarrow^{(3)} g_{\mu\lambda} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \nu' (\rho + p) e^\nu g_{\mu\lambda} \Rightarrow \\ \frac{\partial p}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial x^\lambda} (\rho + p) e^\nu g_{\mu\lambda} &\Rightarrow^{(4)} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} (\rho + p) e^\nu g_{rr} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} (\rho + p) \Rightarrow \frac{dp}{dr} = \\ -\frac{(\rho+p)}{2} \frac{d\nu}{dr} & (4.3.7) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν τα εξής:

$$(1) \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\delta}^\mu g^{\delta\nu} + \Gamma_{\nu\delta}^\nu g^{\delta\mu} \right) p = g_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$$

$$(2) \frac{\partial}{\partial x^\nu} [(\rho + p)u^\mu u^\nu] = 0, \text{ για στατική λύση (αγνοώντας εσωτερικές κινήσεις του αστέρα)}$$

$$(3) \text{ Πολλαπλασιάσαμε την εξίσωση με } g_{\mu\lambda}$$

$$(4) \text{ Το μόνο } g_{ij} \text{ που «σώνεται» είναι το } g_{11} \equiv g_{rr}$$

Η (4.3.7) είναι η σχετικιστική μορφή της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας. Αν το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές τότε,

$$g_{00} = e^\nu \approx 1 + 2U \quad \text{και} \quad \rho \gg p$$

που οδηγεί πάλι στην κλασσική μορφή υδροστατικής ισορροπίας,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial U}{\partial r}$$

όπως έπρεπε.

Από τις (4.3.6) και (4.3.7) λαμβάνουμε:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)[m(r)+4\pi r^3 p]}{r[r-2m(r)]} \quad (4.3.8)$$

Η τελευταία είναι γνωστή ως εξίσωση *Tollman-Oppenheimer-Volkoff* (*Tollman-Oppenheimer-Volkoff equation*) και περιγράφει την δομή ενός στατικού και σφαιρικά συμμετρικού αστέρα με υδροστατική ισορροπία σε γεωμετροποιημένες μονάδες. Από την (4.3.8) φθάνουμε στο εντυπωσιακό συμπέρασμα ότι στο «βάρος» κάθε στρώματος του αστέρα δεν συνεισφέρει μόνο η ποσότητα της ύλης, ή η μάζα, που περικλείεται αλλά και η πίεση της ύλης αυτής! Μάλιστα, άστρα πιο πυκνά και συνεπώς με μεγαλύτερο p αναμένεται να ασκούν μεγαλύτερη βαρυτική έλξη από αυτή της νευτώνειας προσέγγισης, πράγμα το οποίο μπορεί να ανιχνευτεί σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Τελικώς, προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων δομής (*equations of structure*),

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (4.3.9a)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[\rho(r)+p(r)][m(r)+4\pi r^3 p]}{r[r-2m(r)]} \quad (4.3.9\beta)$$

που αν ολοκληρωθούν μαζί με την πολυτροπική εξίσωση κατάστασης,

$$p = k\rho^\gamma \quad (4.9.3\gamma)$$

θα δώσουν το μέγεθος του αστέρα καθώς και την δομή στο εσωτερικό του. Το σύστημα δεν λύνεται, εν γένει, αναλυτικά γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε έναν κώδικα αριθμητικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων (4.3.9) της *Mathematica*.

Πριν προχωρήσουμε στην αριθμητική λύση είναι χρήσιμο να επαναφέρουμε τους όρους G και c στην (4.3.8) για την καλύτερη κατανόηση των μεγεθών της και για να την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη νευτώνεια. Έτσι,

$$m \rightarrow \frac{Gm}{c^2}, \quad \rho \rightarrow \frac{G\rho}{c^4}, \quad P \rightarrow \frac{GP}{c^4}.$$

Από τις (4.3.9) η 1^η δεν μεταβάλλεται ενώ η δεύτερη ξαναγράφεται ως:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \times \left[1 + \frac{P(r)}{\varepsilon(r)}\right] \times \left[1 + \frac{4\pi r^3 p P(r)}{M(r)c^2}\right] \times \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1} \quad (4.3.10)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\varepsilon(r) = \rho(r)c^2$.

Ο παράγοντας χωρίς τις αγκύλες είναι ακριβώς ο νευτώνειος της μη σχετικιστικής περίπτωσης. Οι δύο επόμενοι αντιπροσωπεύουν διορθώσεις της $E\Theta\Sigma$ και είναι της τάξης του u^2/c^2 . Η πίεση $P(r)$ μεταβάλλεται σαν συνάρτηση του $p_F^2/2m$ ενώ τα $\varepsilon(r)$ και $M(r)c^2$ σαν το mc^2 , με αποτέλεσμα οι παράγοντες αυτοί να συγκλίνουν στην μονάδα στο μη σχετικιστικό όριο. Η τελευταία αγκύλη, λόγω του όρου $\frac{GM(r)}{c^2 r}$, είναι ένας παράγοντας διόρθωσης στη γενική σχετικότητα και εμφανίζεται όπως παρατηρούμε στον ακτινικό όρο της μετρικής (4.1.13). Παρατηρούμε ότι όλοι αυτοί οι παράγοντες είναι θετικοί (το οποίο είναι και λογικό) οπότε είναι σαν, στην $\Gamma\Theta\Sigma$, η τιμή της νευτώνειας βαρύτητας να είναι μεγαλύτερη σε κάθε τιμή της απόστασης r δηλαδή η ίδια μάζα να έχει μεγαλύτερο βάρος. Έτσι, οι εξισώσεις (4.9.3) ή οι ισοδύναμες τους περιγράφουν την κατάσταση ισορροπίας ανάμεσα στην βαρυτική κατάρρευση και την εσωτερική πίεση, η οποία εξαρτάται πάλι από μια εξίσωση κατάστασης. Αυτές οι μη γραμμικές εξισώσεις δομής για τα $P(r)$ και $M(r)$ μπορούν να συνδυαστούν ολοκληρώνοντας από μια «αρχή» κοντά στο κέντρο $r = 0$ (λόγω του r στον

παρονομαστή) μέχρι την ακτίνα R όπου $P(r) = 0$ και να δώσουν έτσι τη συνολική μάζα του αστέρα $M = M(r)$, για κάποια αρχική τιμή $P(0) = P_c$. Στα αμέσως επόμενα θα δώσουμε δύο μοντέλα – λύσεις για σφαιρικά άστρα, ένα απλό αλλά μη ρεαλιστικό της σταθερής πυκνότητας κατά μήκος του αστέρα που όμως έχουν οι *TOV* εξισώσεις έχουν αναλυτική λύση και μπορούν να προβλέψουν κάποια ποσοτικά κάποια χαρακτηριστικά του και το πιο ρεαλιστικό μοντέλο της πολυτροπικής πίεσης.

4.4 Επίλυση των εξισώσεων **Tollman-Oppenheimer-Volkoff**

A) Μοντέλο σταθερής πυκνότητας

Η καταστατική εξίσωση δίνεται από την $\rho = \text{σταθ}$. Άρα από το σύστημα των εξισώσεων (4.3.9) έχουμε:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \Rightarrow$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad r \leq R \quad (4.4.1)$$

Και αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση *Oppenheimer-Volkoff* θα πάρουμε:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(\rho + P)(\rho + 3P)}{1 - \frac{8}{3}\pi r^2 \rho} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{(\rho + P)(\rho + 3P)} = \frac{4\pi r}{3 - 8\pi r^2 \rho} dr$$

Η παραπάνω εξίσωση ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει:

$$\ln\left(\frac{\rho+3P}{\rho+P}\right) = \ln\left(\frac{\rho+3P_c}{\rho+P_c}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \quad (4.4.2)$$

Όπου P_c η κεντρική πίεση του αστέρα. Η (4.4.2) μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\frac{\rho+3P}{\rho+P} = \frac{\rho+3P_c}{\rho+P_c} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.3)$$

Από την τελευταία υπολογίζεται η ακτίνα του άστρου, όπου στην επιφάνεια θα έχουμε $r = R$ και $p(R) = 0$,

$$1 = \frac{\rho + 3P_c}{\rho + P_c} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\rho + 3P_c}{\rho + P_c}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{R} \Rightarrow$$

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} \left[1 - \left(\frac{\rho + P_c}{\rho + 3P_c}\right)^2\right] \quad (4.4.4)$$

Η τελευταία δίνει την ακτίνα συναρτήσει της κεντρικής πίεσης και της πυκνότητας. Επίσης, από τη σχέση (4.4.4) μπορούμε να έχουμε την κεντρική πίεση ως συνάρτηση της μάζας και της ακτίνας του αστέρα:

$$P_c = \rho \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (4.4.5)$$

Καθώς και την πίεση ως συνάρτηση του r ,

$$P(r) = \rho \frac{\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{3 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.4.6)$$

Όπως θα περίμενε κανείς, από την (4.4.4) φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερο είναι ένα άστρο, τόσο μεγαλύτερη γίνεται και η κεντρική πίεση. Ωστόσο, ο αστέρας δεν μπορεί να υπερβεί κάποιο κρίσιμο μέγεθος και αυτό γιατί καθώς $P_c \rightarrow \infty$ το δεξιό μέλος παραμένει πεπερασμένο οντως το R δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή $R_{max} \equiv 1/\sqrt{3\pi\rho}$ όσο μεγάλη και αν είναι η κεντρική πίεση και η αντίστοιχη μέγιστη μάζα είναι $M_{max} \equiv 4R_{max}/9$. Πρόκειται για μια ειδική περίπτωση ενός γενικού αποτελέσματος ότι όλες ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις θέτουν ένα άνω όριο στην μάζα ενός στατικού αστέρα. Οποιαδήποτε προσπάθεια να χωρέσουμε μεγαλύτερη μάζα μέσα σε έναν όγκο από όσο μπορεί αυτός να πάρει θα κάνει ανέφικτη κάθε ευσταθή διάταξη και θα ακολουθήσει **βαρυντική κατάρρευση**.

B) Μοντέλο πολυτροπικής πίεσης

Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο είναι όπως είδαμε αυτό που θεωρεί μια καταστατική της μορφής

$$P = K\rho^\gamma$$

όπου τα K και Γ είναι σταθερές. Μια τέτοια κατάσταση προκύπτει όπως είδαμε στην παράγραφο 3.3 όταν δεν έχουμε σημαντική μεταφορά εντροπίας (θεωρήσαμε αδιαβατική συμπίεση με $dQ = 0$) καθώς επίσης δεν θα έχουμε και παραγωγή ενέργειας στο εσωτερικό του αστέρα. Στην νευτώνεια προσέγγιση του βαρυτικού που είδαμε παραπάνω η εξίσωση *Lane-Emden* ήταν αρκετά απλή και δεν ήταν δύσκολο να βρεθούν και αναλυτικές λύσεις ισορροπίας. Στη σχετικιστική προσέγγιση όμως οι *TOV* εξισώσεις, οι οποίες είναι αρκετά περίπλοκες, αντικαθιστούν την εξίσωση *Poisson* και σε κάθε περίπτωση η λύση δίνεται αριθμητικά. Το πρόγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία αυτή δέχεται ως εισόδους τις εξισώσεις *TOV*. Πριν προχωρήσουμε στην αριθμητική επίλυσή του θα παραθέσουμε απλώς την σχετικιστική μορφή της εξίσωσης *Lane-Emden* όπως υπολογίστηκε το 1964 από τον *Tooper*.

Το σύστημα των εξισώσεων,

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[\rho(r)+p(r)][m(r)+4\pi r^3 p]}{r[r-2m(r)]}$$

$$p = p(\rho)$$

μπορεί να γραφτεί με την βοήθεια της παραμέτρου της κεντρικής πυκνότητας εισάγοντας τις νέες αδιάστατες μεταβλητές (παρόμοια με τα προηγούμενα):

$$\xi = Ar$$

$$v(\xi) = \frac{A^3}{4\pi\rho_c} m(r)$$

$$\theta^n(\xi) = \frac{\rho}{\rho_c}$$

Έτσι το παραπάνω σύστημα γράφεται ως:

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n \quad (4.4.7)$$

$$-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \frac{(v+\sigma\theta\xi dv/d\xi)(1+\sigma\theta)}{1-2\sigma(n+1)v/\xi} \quad (4.4.8)$$

όπου και P_c η κεντρική πίεση. στο μη σχετικιστικό όριο $\sigma \rightarrow 0$ οι ξαναδίνουν την *Lane-Emden*. Οι αντίστοιχες λύσεις προκύπτουν από ολοκλήρωση των (4.4.7) και (4.4.8) με

αρχικές συνθήκες $\theta(0) = 1$ και $\nu(0) = 0$, ενώ η ακτίνα του αστέρα βρίσκεται στον πρώτο μηδενισμό του $\theta(\xi)$ στο ξ_1 . Έτσι, με δοσμένες τις τιμές των n και σ μπορεί κανείς δίνοντας τιμές στο ρ_c να βρίσκει τις υπόλοιπες παραμέτρους του αστέρα.

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων δομής με τη *Mathematica*:

Οι εξισώσεις δομής που συνθέτουν έναν λευκό νάνο ή έναν αστέρα νετρονίων (4.3.9) αποτελούν ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και είναι πολύ πιο βολικό να τις επιλύσει κανείς μέσω τυπικών αριθμητικών αλγορίθμων και «πακέτων» όπως η *Mathematica*. Σκοπός μας είναι να βρούμε κάποιο νόμο εξάρτησης της μάζας και της ακτίνας του αστέρα και να υπολογίσουμε το όριο *Chandrasekar* (*Chandrasekar limit*) στην μάζα τους, όπως έγινε και στην περίπτωση της σταθερής πυκνότητας. Σε γενικές γραμμές η πορεία μας θα επικεντρωθεί στα εξής:

1. Ξεκινάμε από το κέντρο του άστρου $r = 0$ με μια τιμή για την πυκνότητα ρ_c του πυρήνα. Η πίεση p_c στην ίδια θέση προσδιορίζεται από την εξίσωση κατάστασης $p_c = p(\rho_c)$. Η τιμή του $m(r)$ σε αυτή τη θέση θα πρέπει να είναι μηδενική, ώστε να εξασφαλίζεται η τοπικά επίπεδη γεωμετρία και οι αντίστοιχοι νόμοι διατήρησης στη γειτονιά του κέντρου του άστρου.
2. Ολοκληρώνουμε τις πεπλεγμένες εξισώσεις δομής ακτινικά προς τα έξω με αυτές τις οριακές συνθήκες αλλά ξεκινώντας λίγο πιο μέσα από το $r = 0$ λόγω της παρουσίας του r στον παρονομαστή στην εξίσωση $O-V$. Η (4.3.9β) έπεται ότι , οπότε η πίεση ελαττώνεται σταθερά. Το ίδιο συμβαίνει και με την πυκνότητα λόγω της (4.3.9γ). Η μάζα, $m(r)$ απεναντίας, αυξάνεται μέχρι σταθερά. Τελικά, φτάνουμε σε μια ακτίνα R , όπου η πίεση μηδενίζεται, $p(R) = 0$. Πρόκειται για την επιφάνεια του άστρου, όπου δεν απαιτείται κανένα βάρος εξωτερικής ύλης για να συγκρατήσει στη θέση του τον τελευταίο μικρό όγκο του ρευστού. Η τιμή του $m(R)$ στην επιφάνεια ταυτίζεται με τη συνολική μάζα του άστρου M .
3. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για διάφορες τιμές του ρ_c για να βρούμε την οικογένεια των σφαιρικών άστρων τα οποία είναι σχηματισμένα από ύλη με τη δοθείσα καταστατική εξίσωση.

Για λευκούς νάνους η καταστατική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι:

$$\text{ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ} \rightarrow p = k\rho^{4/3} \quad (4.4.9)$$

Ενώ για τους αστέρες νετρονίων αντίστοιχα:

$$\text{ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ} \rightarrow \begin{cases} p = k\rho^{4/3}, \rho \leq \rho_* \\ p = \frac{\rho}{3}, \rho \geq \rho_* \end{cases} \quad (4.4.10)$$

όπου $\rho_* = 1/(27k)^3$ είναι μια κρίσιμη τιμή της πυκνότητας ενέργειας και θα καθοριστεί σε λίγο.

Μία μέθοδος αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων δομής είναι προσέγγιση των συναρτήσεων με τη βοήθεια του πολυωνυμικού αναπτύγματος *Taylor*. Έτσι, είναι βολικό αλλά και λογικό, αφού στην περίπτωση μας έχουμε διαφορικές σχέσεις των μεγεθών που εξετάζουμε (το πολυώνυμο *Taylor* είναι συνάρτηση των παραγώγων), να αναπτύξουμε τα μεγέθη αυτά κατά *Taylor* και έπειτα να επιλύσουμε τις εξισώσεις που θα προκύψουν. Ξεκινάμε με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} m = \sum m_k r^k \\ P = \sum P_k r^k \\ \rho = \sum \rho_k r^k \end{cases}$$

Γράφοντας αναλυτικά την $m(r)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} m(r) &= m(\varepsilon) + m'(\varepsilon)r + \frac{m''(\varepsilon)}{2}r^2 + \frac{m'''(\varepsilon)}{6}r^3 + \dots \\ \rho(r) &= \rho(\varepsilon) + \rho'(\varepsilon)r + \frac{\rho''(\varepsilon)}{2}r^2 + \frac{\rho'''(\varepsilon)}{6}r^3 + \dots \end{aligned}$$

έτσι η (4.3.9α) δίνει:

$$\begin{aligned} m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r) &\Rightarrow m'(\varepsilon) + m''(\varepsilon)r + \frac{1}{2}m'''(\varepsilon)r^2 + \frac{1}{6}m^{(4)}(\varepsilon)r^3 + \frac{1}{24}m^{(5)}(\varepsilon)r^4 \\ &= 4\pi r^2 \left[\rho(\varepsilon) + \rho'(\varepsilon)r + \frac{1}{2}\rho''(\varepsilon)r^2 + \frac{1}{6}\rho'''(\varepsilon)r^3 \right] \end{aligned}$$

Όπου κρατήσαμε μόνο τους πρώτους όρους και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων καταλήγουμε,

$$\begin{aligned} m'(\varepsilon) &= 0, \quad m''(\varepsilon) = 0, \quad m'''(\varepsilon) = 4\pi\rho(\varepsilon), \quad m^{(4)}(\varepsilon) = 4\pi\rho'(\varepsilon) = 0, \quad m^{(5)}(\varepsilon) \\ &= 48\pi\rho''(\varepsilon) \neq 0 \end{aligned}$$

όπου για το $m^{(4)}$ χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι στο κέντρο ισχύει $dp/dr = 0$.

Άρα, η μάζα απλοποιείται στη σχέση,

$$m(r) = m_3 r^3 + m_5 r^5 \quad (4.4.11)$$

όπου τα m_3 και m_5 συντελεστές που θα προσδιοριστούν.

Έτσι από τα αναπτύγματα για την πίεση και την πυκνότητα και από την σχέση που δίνει τη μάζα,

$$M(r) = \int 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (4.4.12)$$

προκύπτουν οι σχέσεις:

$$p(r) = p_0 + p_2 r^2$$

$$\text{και} \quad \rho(r) = \rho_0 + \rho_2 r^2 \quad (4.4.13)$$

όπου p_0 και ρ_0 είναι οι τιμές της πίεσης και της πυκνότητας αντίστοιχα στην περιοχή του κέντρου. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις τις εκφράσεις αυτές μπορούμε να βρούμε τα m_3 , m_5 , p_2 , ρ_2 συναρτήσει των ρ_0 και $p_0 = p(\rho_0)$. Ο υπολογισμός είναι εύκολος και γίνεται στα ενδιάμεσα σχόλια του προγράμματος που παραθέτουμε. Τελικά, τα μεγέθη για μια σχέση μας γράφονται σε πολωνυμική μορφή για $n = 3$ ως εξής:

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3} r^3 - \frac{2\pi^2 \left(3k^2 \rho_0^{\frac{7}{3}} + 4k\rho_0^2 + \rho_0^{\frac{5}{3}} \right)}{5k} r^5 \quad (4.4.14\alpha)$$

$$p(r) = k\rho_0^{\frac{4}{3}} - \frac{2\pi \left(3k^2 \rho_0^{\frac{8}{3}} + 4k\rho_0^{\frac{7}{3}} + \rho_0^2 \right)}{3} r^2 \quad (4.4.14\beta)$$

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\pi \left(3k^2 \rho_0^{\frac{7}{3}} + 4k\rho_0^2 + \rho_0^{\frac{5}{3}} \right)}{2k} r^2 \quad (4.4.14\gamma)$$

όπου τα μεγέθη μας είναι εκπεφρασμένα πλέον σαν συνάρτηση μόνο της κεντρικής πυκνότητας ρ_0 . Οπότε αυτό που κάνουμε είναι να παρατηρήσουμε τις μεταβολές των $M - R$ για διάφορες τιμές της κεντρικής πυκνότητας, για τους λευκούς νάνους και τα άστρα νετρονίων.

Αρχικά, θα πρέπει να ορίσουμε κάποια τιμή για το k . Η τιμή αυτή είναι λίγο-πολύ γνωστή και δίνεται από τις (3.7.15) και (3.7.17), αλλά αφού επί της ουσίας εξετάζουμε τις σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των μεγεθών χωρίς μονάδες ή τιμές που αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα ξεκινάμε με μια τιμή που να «δουλεύει» το

πρόγραμμα $k = 0.01$, στην οποία καταλήξαμε έπειτα από αρκετές δοκιμές. Το k πρέπει να είναι γενικά μικρό αφού στη σχέση $P = k\rho^{\gamma}$ η πίεση πρέπει να είναι συγκριτικά μικρότερη από την πυκνότητα ενέργειας, τουλάχιστον για το όριο των λευκών νάνων. Εκεί αναμένεται μια σχεδόν νευτώνεια σχέση ισορροπίας και γι' αυτό στη σχέση (4.3.10) θα έχουμε $\rho \ll P$. Μια σύντομη περιγραφή των διαδικασιών όσο αυξάνεται η πυκνότητα δίνεται στον επόμενο πίνακα:

Πίνακας 4.4.1: Διαδικασίες οι οποίες λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό των άστρων ανάλογα με την πυκνότητα.

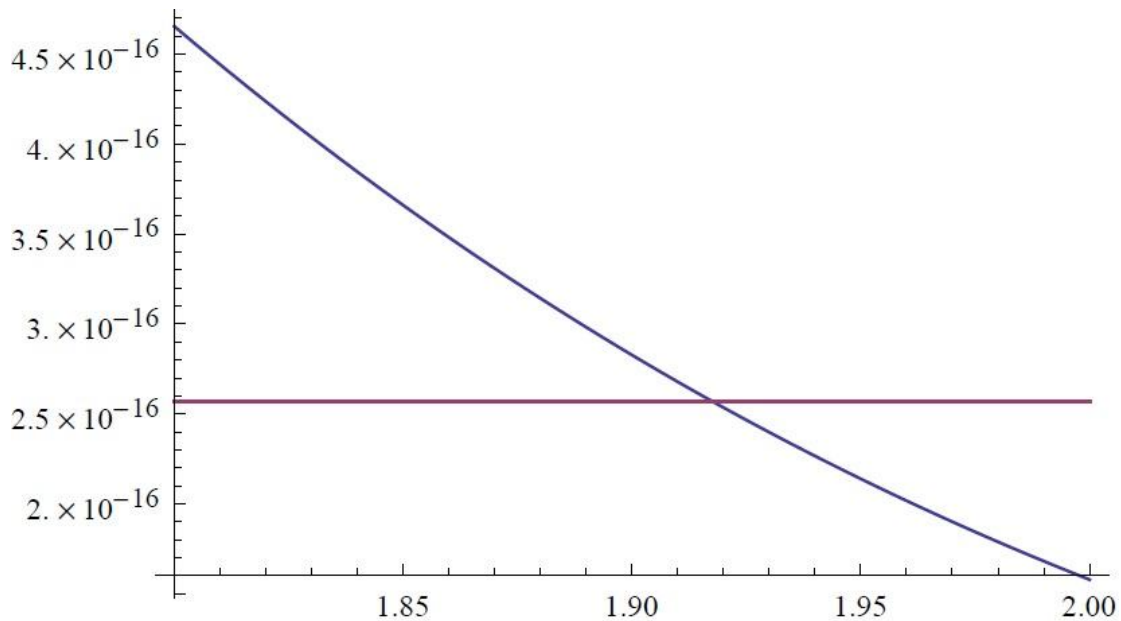
Πυκνότητα ($gr \cdot cm^{-3}$)	Σύσταση
	Ατομικοί πυρήνες & μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια
10^6	Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
	Ατομικοί πυρήνες & σχετικιστικά ηλεκτρόνια
10^9	Ουδετεροποίηση
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια & σχετικιστικά ηλεκτρόνια
4×10^{11}	Εκροή νετρονίων από τους πυρήνες (neutron drip)
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια & σχετικιστικά ηλεκτρόνια & νετρόνια
4×10^{12}	Πίεση από εκφυλισμένα νετρόνια
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια & σχετικιστικά ηλεκτρόνια & υπέρρευστα νετρόνια
2×10^{14}	Αποσύνθεση πυρήνων
	Υπεραγώγιμα πρωτόνια & υπέρρευστα νετρόνια & σχετικιστικά ηλεκτρόνια
4×10^{14}	Παραγωγή πιονίων
	Υπεραγώγιμα πρωτόνια & υπέρρευστα νετρόνια & σχετικιστικά ηλεκτρόνια & άλλα στοιχειώδη σωματίδια (πιόνια, ...)
6×10^{15}	Πίεση από σχετικιστικά νετρόνια

Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα αστρικό μοντέλο με μικρή κεντρική πυκνότητα $\rho_c = 1.1 \times 10^{-7}$. Ο πολυτροπικός δείκτης n σε αυτή την περιοχή είναι $n = 1.5$ οπότε . Έτσι, από την αριθμητική ολοκλήρωση προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα 4.4.3.

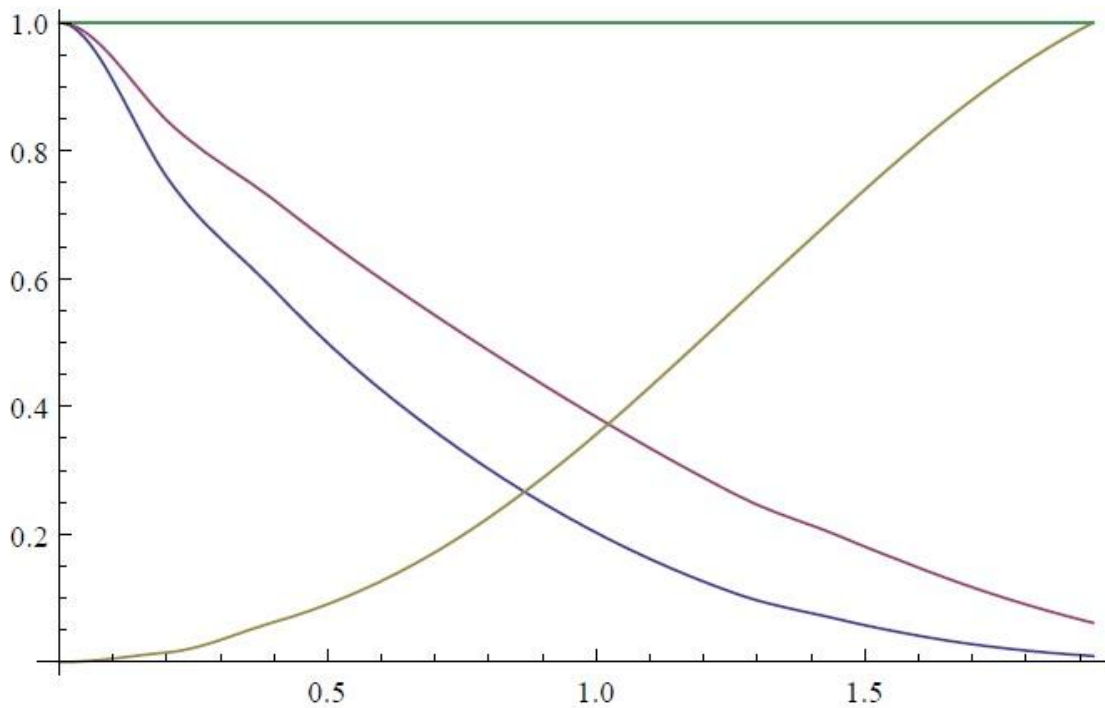
Πίνακας 4.4.3

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	$3 \cdot 10^{-12}$	1.1×10^{-7}	2.6×10^{-14}	1.925	8.3×10^{-7}	4.3×10^{-5}

Τα παραπάνω στοιχεία απεικονίζονται στα διαγράμματα:



Η οριζόντια γραμμή στον κώδικα αναφέρεται ως *rho cut* στον κώδικα και η χρήση της έγινε για τον εξής λόγο. Προκειμένου να υπολογιστεί η μάζα του αστέρα πρέπει πρώτα να βρει κανείς το πώς προσδιορίζεται η ακτίνα του. Έτσι, αντί για την ιδανική λύση η ολοκλήρωση να σταματήσει στο r για το οποίο η τιμή της μάζας γίνεται μιγαδική, επιλέχθηκε μια πιο «φυσικίζουσα» λύση στην οποία ως ακτίνα θεωρήθηκε η απόσταση στην οποία η αρχική τιμή πίεσης ρ_0 «έπεσε» στο της, τιμή τυχαία αλλά σταθερή σε κάθε βήμα υπολογισμού.



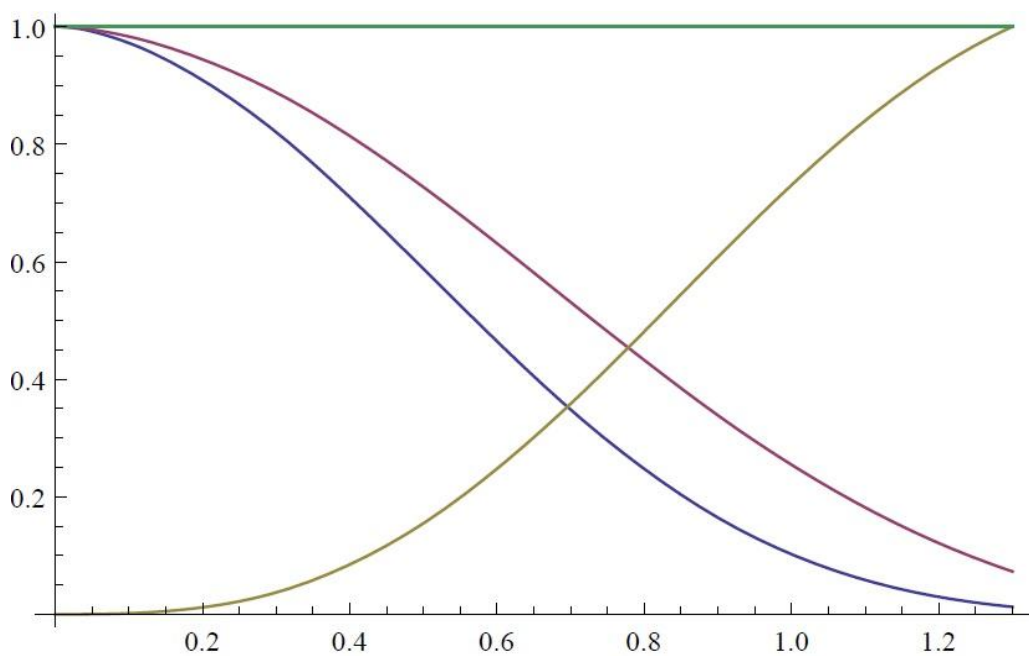
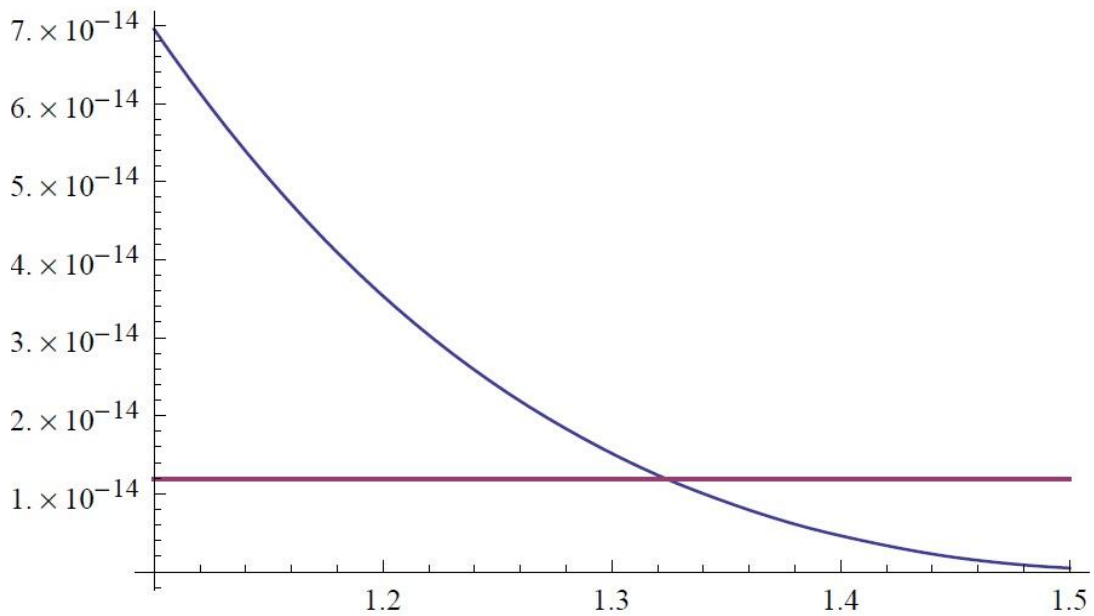
Το άστρο που μελετάμε με την συγκεκριμένη κεντρική πυκνότητα είναι ένας λευκός νάνος και αυτό που το συγκρατεί από την κατάρρευση είναι η πίεση των εκφυλισμένων μη σχετικιστικών ηλεκτρονίων που δίνεται από την σχέση. Παρατηρούμε ότι η κεντρική πίεση είναι 7 τάξεις μεγέθους μικρότερη από την αντίστοιχη πυκνότητα που είναι μια καλή προσέγγιση για τον παραπάνω λευκό νάνο. Επίσης παρατηρούμε ότι ο σχετικιστικός παράγοντας αποκλίνει ελάχιστα από την μονάδα και έτσι επιβεβαιώνεται ότι ο συγκεκριμένος λευκός νάνος συμπεριφέρεται σε ικανοποιητικό βαθμό ως νευτώνειο άστρο και έτσι η ισορροπία του περιγράφεται από την κλασσική μηχανική και τις εξισώσεις *Lane-Emden*.

Αυξάνοντας την κεντρική πυκνότητα σε $\rho_0 = 1.1 \times 10^{-6}$ το άστρο εξακολουθεί να είναι λευκός νάνος και η αριθμητική ολοκλήρωση δίνει τον πίνακα 4.2.2

Πίνακας 4.4.4

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	$3 \cdot 10^{-11}$	1.1×10^{-6}	1.19×10^{-12}	1.31	$2.76 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-6}$

Οπότε παίρνουμε τα αντίστοιχα γραφήματα,



Η κεντρική πυκνότητα αυξήθηκε (δεκαπλασιάστηκε), η κεντρική πίεση όμως αυξήθηκε περισσότερο, πράγμα το οποίο δείχνει ότι τα ηλεκτρόνια γίνονται πιο σχετικιστικά και καταλαμβάνουν όλο και μεγαλύτερο μέρος από την συνολική πυκνότητα ενέργειας. Παρατηρούμε επίσης ότι η ακτίνα του άστρου μειώθηκε ενώ η μάζα του αυξήθηκε. Η αντίστροφη αυτή σχέση εξάρτησης καταδεικνύει την $MR^3 = σταθ.$ που συναντήσαμε

σαν λύση στις *Lane-Emden* εξισώσεις, όπου καθώς προχωράμε προς πιο πυκνές καταστάσεις το άστρο μικρότερη ακτίνα και ως αποτέλεσμα μεγαλύτερη μάζα. Θα σταθούμε λίγο περισσότερο σε αυτό. Η ακτίνα για τις δύο περιπτώσεις που πήραμε στους πίνακες 4.4.3 και 4.4.4 είναι, αντίστοιχα, η λύση των εξισώσεων,

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-12}:$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{100} = p_0 + p_2 r^2 &\Rightarrow 2.57 \cdot 10^{-16} = 2.57 \cdot 10^{-14} - 2.59 \cdot 10^{-14} r^2 \Rightarrow r^2 \\ &= \frac{2.57 \cdot 10^{-14} - 2.57 \cdot 10^{-16}}{2.59 \cdot 10^{-14}} \end{aligned}$$

$$\alpha = 3 \cdot 10^{-11}:$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{100} = p_0 + p_2 r^2 &\Rightarrow 1.19 \cdot 10^{-14} = 1.19 \cdot 10^{-12} - 2.59 \cdot 10^{-12} r^2 \Rightarrow r^2 \\ &= \frac{1.19 \cdot 10^{-12} - 1.19 \cdot 10^{-14}}{2.59 \cdot 10^{-12}} = \frac{1.19 \cdot 10^{-14} - 1.19 \cdot 10^{-16}}{2.59 \cdot 10^{-14}} \end{aligned}$$

το οποίο είναι εμφανώς μικρότερο από την άλλη περίπτωση. Οι τιμές για τα p_0 και p_2 υπολογίστηκαν απευθείας από το *Mathematica*. Αυτή η «σμίκρυνση» λοιπόν του μεγέθους του αστέρα αναμένεται γενικά μονότονη με το α (θα αλλάξει όμως για διαφορετική τιμή του k ή του n όπως θα δούμε αργότερα).

Τώρα για τη μάζα του άστρου όπως είδαμε δίνεται από την (4.4.14α) για $n=1.5$,

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3} r^3 - \frac{2\pi^2 \left(3k^2 \rho_0^{\frac{8}{3}} + 4k\rho_0^{\frac{7}{3}} + \rho_0^2 \right)}{5k} r^5 \quad (4.4.15)$$

Έτσι, αν αυξήσουμε την κεντρική πυκνότητα, όπως βλέπουμε οι συντελεστές m_3 , m_5 αυξάνονται με τον δεύτερο όμως να υφίσταται μεγαλύτερη αύξηση, οπότε θα αναμένεται μείωση στη ολική μάζα. Ωστόσο, λόγω του προηγούμενου αποτελέσματος η (4.4.15) θα ολοκληρωθεί μέχρι μια μικρότερη τιμή για την ακτίνα οπότε η «ισχυρή» δύναμη r^5 θα μειώσει τον αρνητικό όρο συνολικά με αποτέλεσμα να έχουμε ελαφρώς αυξημένη μάζα.

Επίσης, το άστρο συμπεριφέρεται πάλι ως νευτώνειο με τον σχετικιστικό παράγοντα να παραμένει πολύ κοντά στη μονάδα (πράσινη γραμμή).

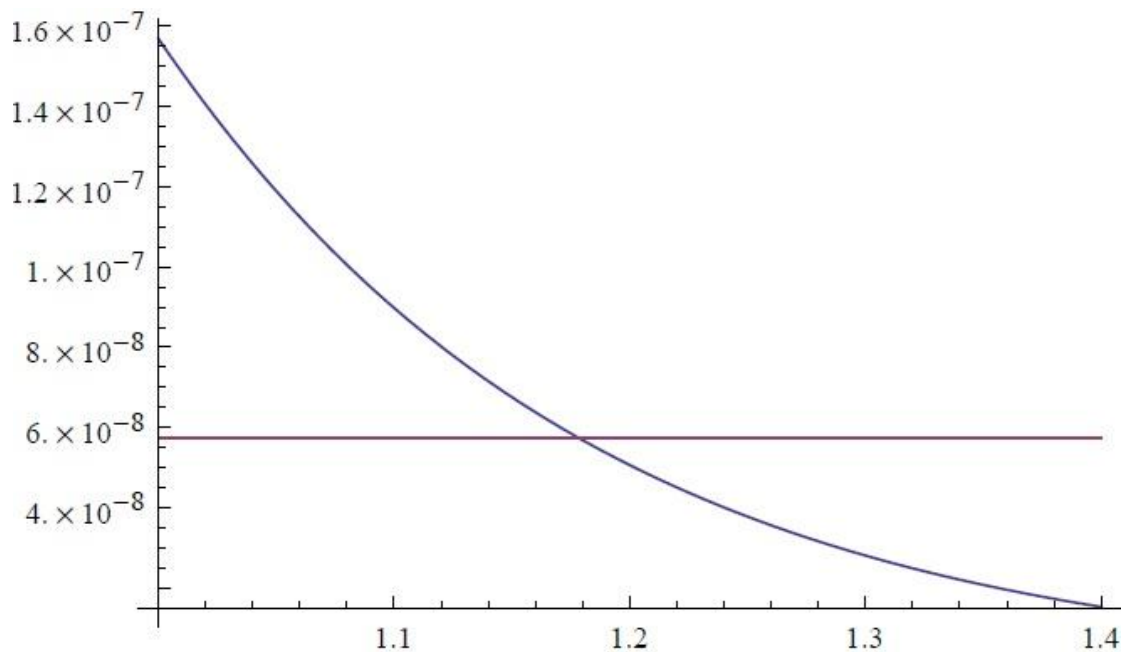
Αν αυξήσουμε και άλλο την κεντρική πυκνότητα και πάμε στην $\rho_0 \approx 3.7 \times 10^{-3}$ (οι τιμές είναι παραδειγματικές και προέκυψαν από εκεί που το πρόγραμμα περιγράφει πιο

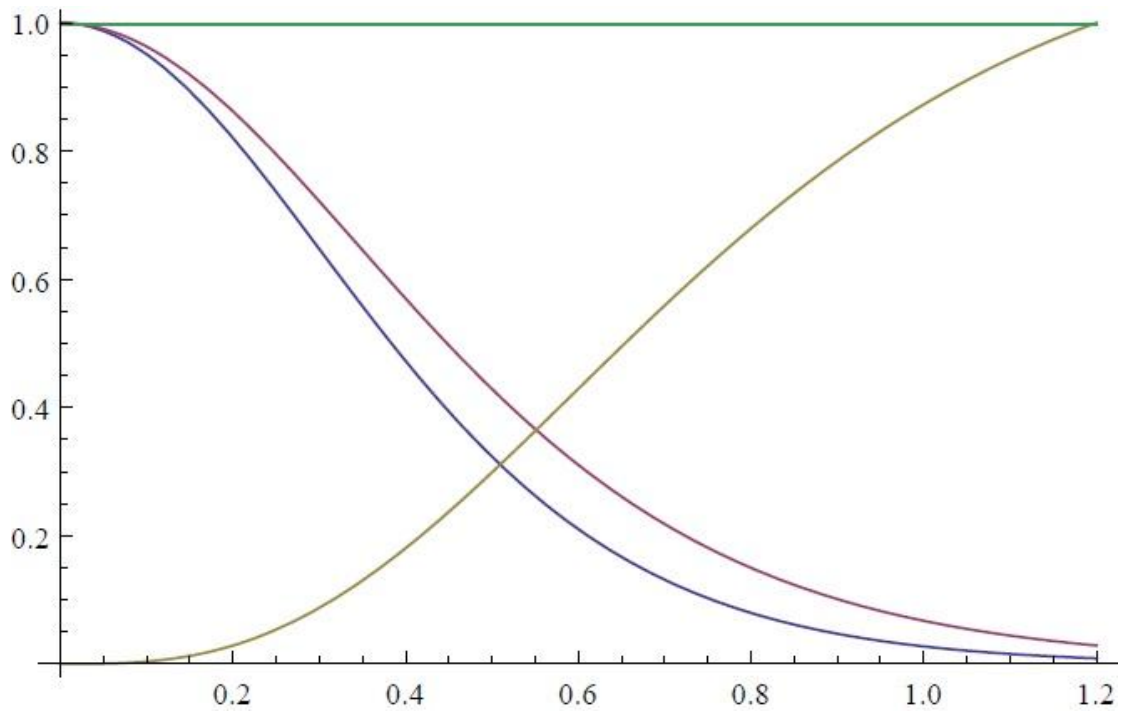
ταιριαστά με τη θεωρία τις παρατηρήσεις) τότε περνάμε στην περιοχή των πυκνοτήτων όπου το αέριο των ηλεκτρονίων γίνεται σχετικιστικό και η καταστατική που το περιγράφει είναι η σχέση (4.4.9). Κρατάμε το ίδιο k αν και όπως είδαμε έχει διαφορετική τιμή από αυτή του μη σχετικιστικού φερμιονιμικού αερίου. Ούτως ή άλλως μας ενδιαφέρουν μόνο οι εξαρτήσεις των μεγεθών και παρακάτω θα δούμε τι μεταβολές θα προκαλέσει μια αλλαγή στο k , δηλαδή την εξάρτηση του k και από αυτό. Έτσι παίρνουμε τον πίνακα 4.4.5:

Πίνακας 4.4.5

k	A	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	10^{-7}	3.7×10^{-3}	5.7×10^{-6}	1.2	0.00394	0.000328

Και τις γραφικές παραστάσεις:

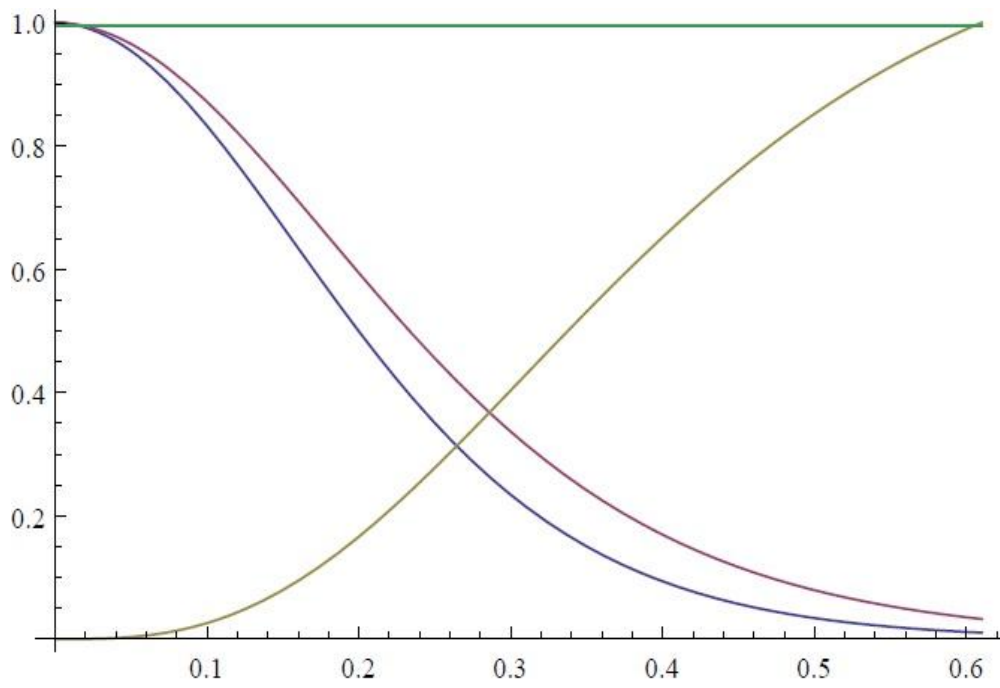
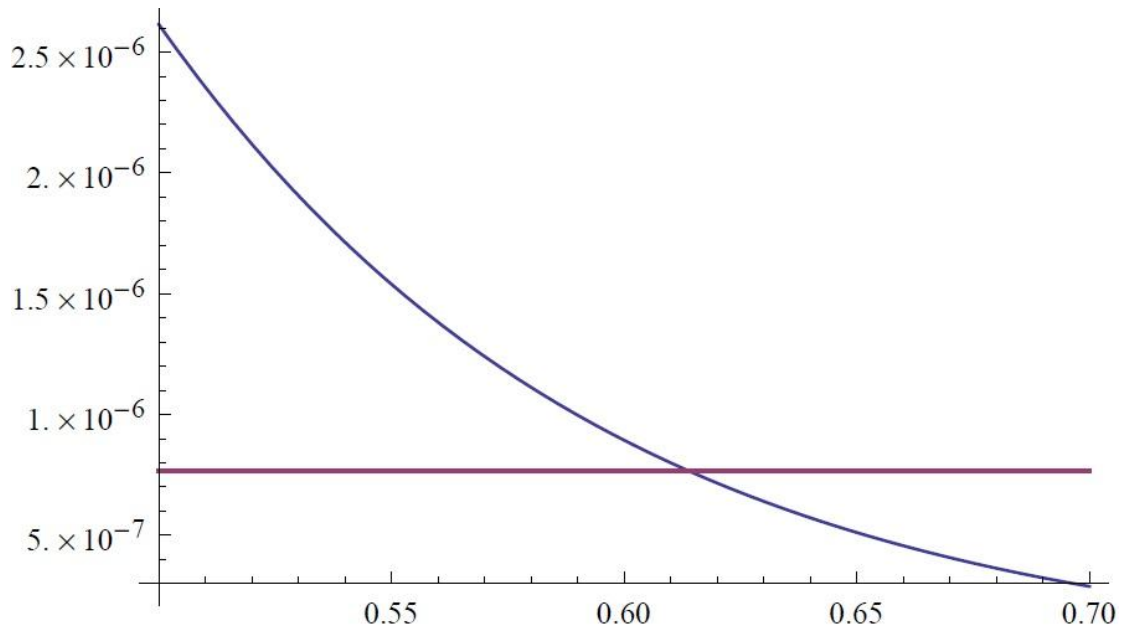




Παίρνοντας δύο ακόμα κοντινές τιμές για την κεντρική πυκνότητα έχουμε τους παρακάτω πίνακες:

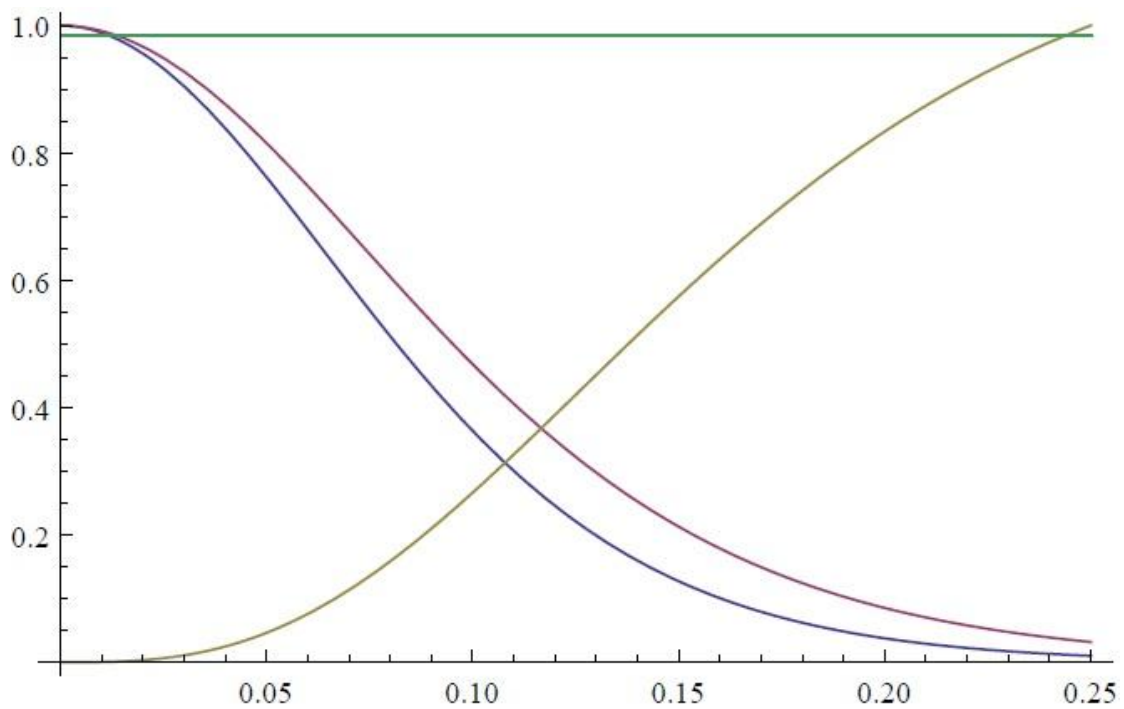
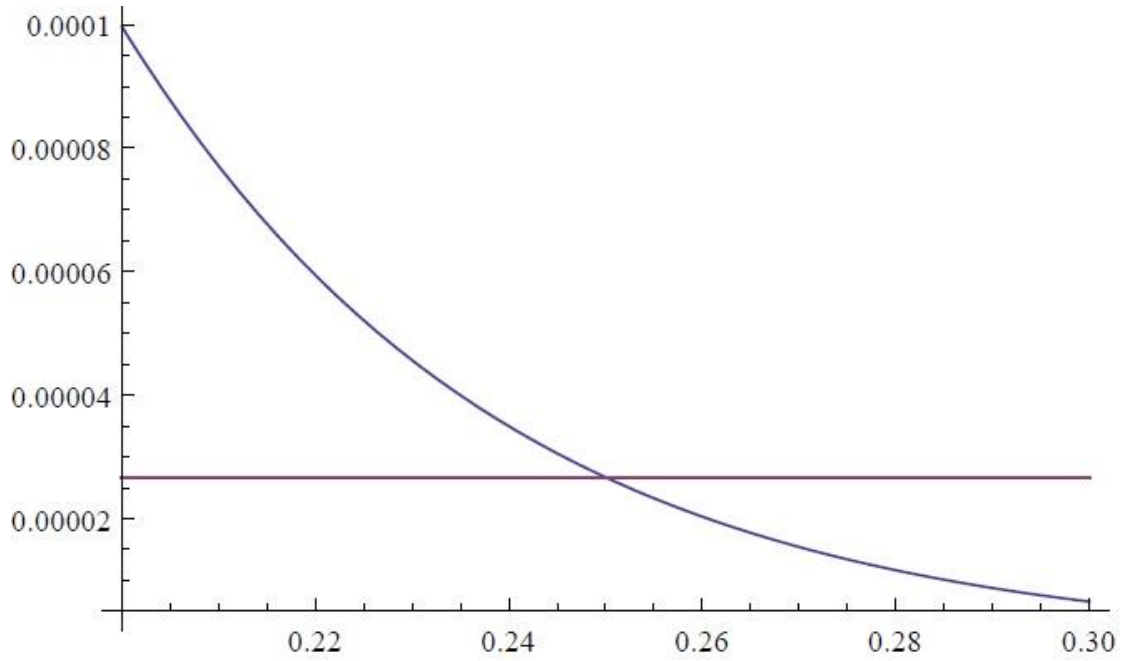
Πίνακας 4.4.6

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	7×10^{-7}	0.026	7.7×10^{-5}	0.61	0.003838	0.0063



Πίνακας 4.4.7

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	10^{-5}	0.37	0.0027	0.25	0.003726	0.0149



Από τους παραπάνω πίνακες το όριο στη μάζα είναι εμφανές. Πρόκειται για το *Chandrasekar mass limit* με την αντίστοιχη ακτίνα $r = 1.2$. Ουσιαστικά, είναι η τιμή της μάζας πέρα από την οποία ο υπολογισμός καταρρέει, δηλαδή, δεν μπορεί να υπάρξει ανάλογη με τη μάζα διαφορά πίεσης στον αστέρα με την δεδομένη καταστατική εξίσωση. Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι το όριο *Chandrasekar* είναι ένα αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στην εξίσωση κατάστασης που θεωρούμε, γι' αυτό και είναι πολύ σημαντική. Εδώ θα σχολιάσουμε λίγο και την σημαντική αύξηση της ακτίνας παρόλο που η κεντρική πυκνότητα αυξήθηκε. Μάλιστα η αύξηση αυτή παρατηρείται πάνω στην αλλαγή της καταστατικής ενώ μετά συνεχίζει όπως πριν να μειώνεται. Η απάντηση δίνεται και πάλι από την σχέση για το p_2 το οποίο είναι στην ουσία ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης με την απόσταση απ' το κέντρο. Έτσι, συγκρίνοντας τα r από την (4.4.14β) για τις δύο καταστατικές (για ευκολία θεωρούμε το ίδιο ρ_0 που είναι εφικτό μόνο στο όριο σχετικιστικό-μη σχετικιστικό) είναι σαφές ότι για την ίδια κεντρική πυκνότητα θα έχουμε μικρότερη ακτίνα στη μη-σχετικιστική περίπτωση. Παρατηρούμε δηλαδή ότι μια ελάττωση του γ της καταστατικής έχει αντίστοιχα αποτελέσματα με μια μείωση στην κεντρική πυκνότητα ρ_0 - την αύξηση στην ακτίνα του αστέρα. Θεωρητικά αυτό αντανακλά το γεγονός ότι η εξάρτηση της πίεσης του αερίου από την πυκνότητα ενέργειας είναι πιο «ισχυρή» στην περίπτωση των μη σχετικιστικών ηλεκτρονίων αφού τα σχετικιστικά έχουν την τάση να μην μπορούν να αλλάξουν εύκολα την κινητική τους κατάσταση (λόγω της $u \sim c$). Έτσι αυτά δεν μπορούν να συμπιεστούν άλλο και η μάζα κατανέμεται σε μεγαλύτερες ακτίνες αφού είναι ενεργειακά προτιμότερο.

Επίσης συνεχίζουμε να παρατηρούμε μια μονότονη εξάρτηση της ακτίνας με την κεντρική πυκνότητα: όσο αυξάνεται η κεντρική πυκνότητα τόσο μειώνεται η ακτίνα του αστέρα. Παρατηρείται μια ακόμα μονότονη αύξηση του r με την κεντρική πυκνότητα, οπότε τα σχετικιστικά φαινόμενα γίνονται πιο έντονα σε μεγάλες πυκνότητες όπως αναμενόταν, όμως το άστρο παραμένει ακόμα νευτώνειο, καθώς και μια συνεχής αύξηση του ποσοστού (ανάλογη με την καταστατική) με το ρ_0 .

Καθώς προχωράμε πυκνώνοντας το κέντρο θα παρατηρήσουμε ότι η μάζα και η ακτίνα μειώνονται αισθητά. Για την ακτίνα αυτό όπως είπαμε ήταν αναμενόμενο, η μάζα όμως

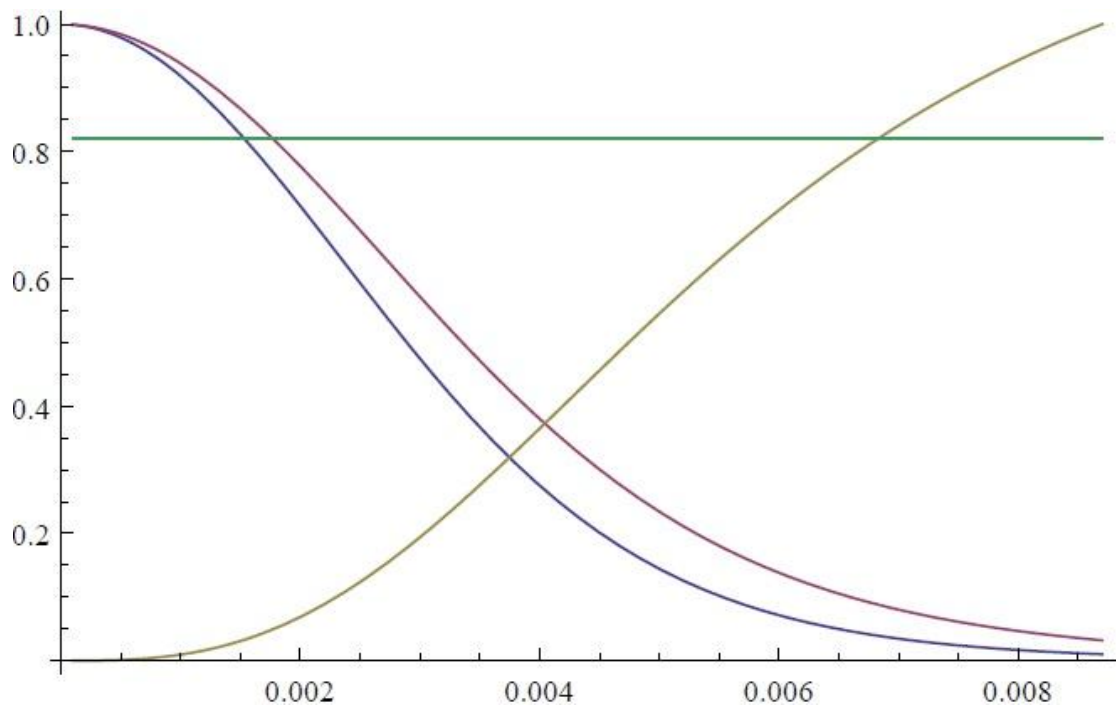
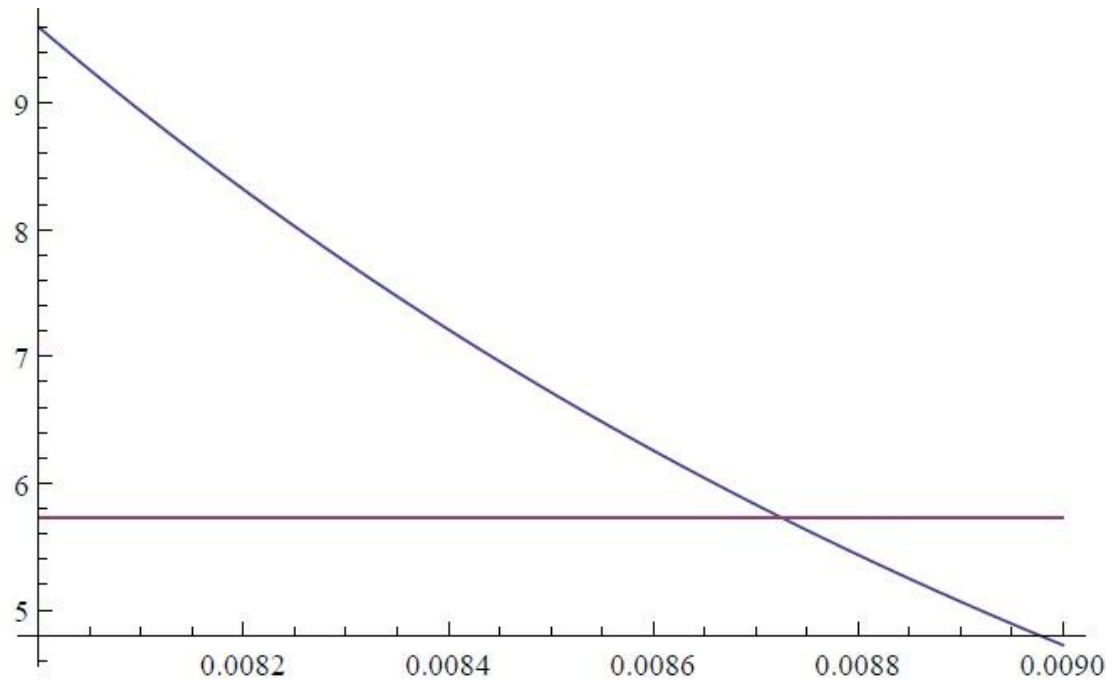
παρουσιάζει ένα σημείο καμπής στο $r = 1.2$ και έπειτα «πέφτει», σε αντίθεση με την προηγούμενη περιοχή πυκνοτήτων. Μια εξήγηση γι' αυτό θα μπορούσε να είναι η εξής:

Η μάζα του δεν μπορεί να ανέβει άλλο λόγω καταστατικής. Δεν μπορεί όμως και να παραμείνει στάσιμη καθώς η ακτίνα μειώνεται γιατί αυτό επιφέρει μια αύξηση του στην εξίσωση (4.2.24) τέτοια που αναγκαστικά ο παράγοντας της μάζας πρέπει να μειωθεί για να επέλθει ισορροπία του συστήματος. Ουσιαστικά το αστέρι γίνεται πιο σχετικιστικό και αυτό όπως είδαμε επηρεάζει το βαρυτικό πεδίο πέρα από τη μάζα – συμπεριφέρεται ως πιο μαζικό. Επίσης, θα μπορούσε να προσθέσει κανείς το γεγονός ότι καθώς ο αστέρας μειώνει την ακτίνα του αναγκαστικά «περικλείει» και λιγότερη μάζα.

Καθώς αυξάνεται και άλλο η κεντρική πυκνότητα πάμε σε μια περιοχή πυκνοτήτων όπου κυριαρχεί η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, όμως βρισκόμαστε στη φάση όπου έχει αρχίσει να πραγματοποιείται η ουδετεροποίηση του πυρήνα ενώ είμαστε λίγο πριν τη φάση εκροής νετρονίων από τους πυρήνες. Υπό αυτή την έννοια η περιοχή είναι επικίνδυνη για μελέτη και συμπεράσματα. Γι' αυτό θα θεωρήσουμε τις εδώ πυκνότητες ως μια οριακή περίπτωση παροχής πίεσης από ηλεκτρόνια και θα κρατήσουμε την ίδια καταστατική εξίσωση. Αυτά φαίνονται στο επόμενο διάγραμμα:

Πίνακας 4.4.8

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	0.1	3703.7	573.036	0.0087	0.0015575	0.179025



όπου η κεντρική πυκνότητα είναι αρκετά υψηλή και συγκρίσιμη με την κεντρική πίεση.
 Η μάζα και η ακτίνα έχουν πέσει αισθητά σε αντίθεση με την πυκνότητα.

Όσο αυξάνουμε και άλλο το ρ_0 περνάμε την κρίσιμη πυκνότητα ρ_{star} , την οποία είδαμε παραπάνω. Αυτή προσδιορίζεται από την οριακή απαίτηση όπου η πίεση στο κέντρο οφείλεται σε πλήρως σχετικιστικά νετρόνια. Περνώντας λοιπόν σε αυτή τη φάση η εξίσωση κατάστασης στο κέντρο δίνεται από την σχέση $P = \rho/3$ και έτσι το ρ_{star} είναι:

$$k\rho_*^{4/3} = \frac{\rho_*}{3} \Rightarrow \rho_* = \frac{1}{27k^3} \quad (4.4.16)$$

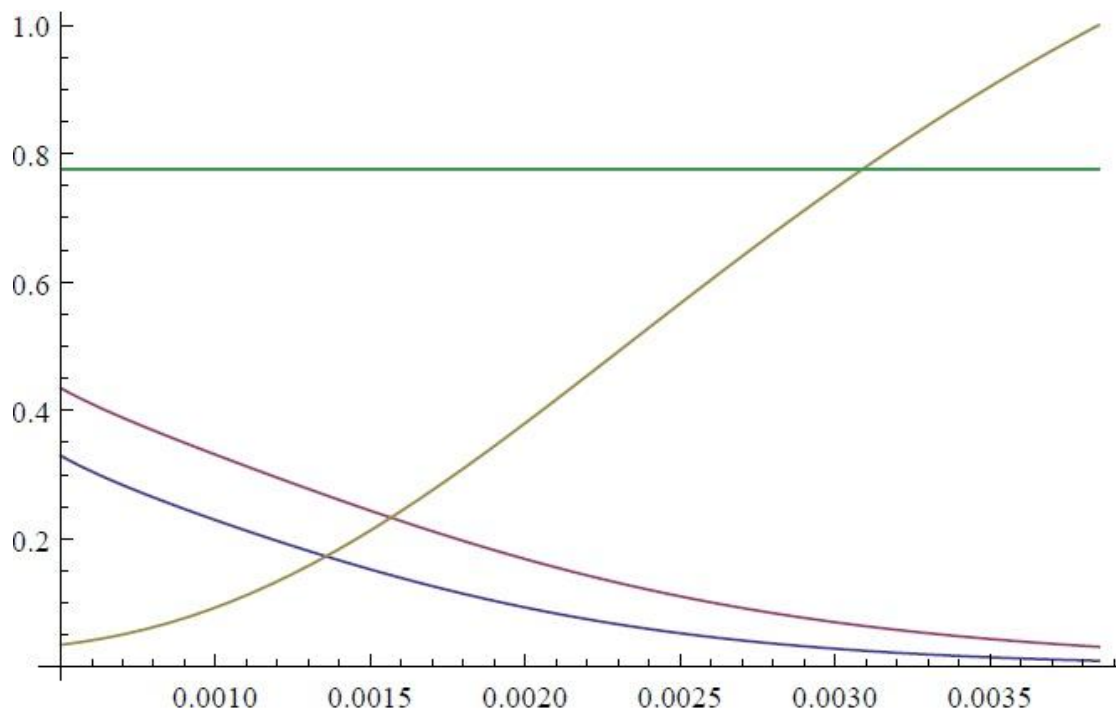
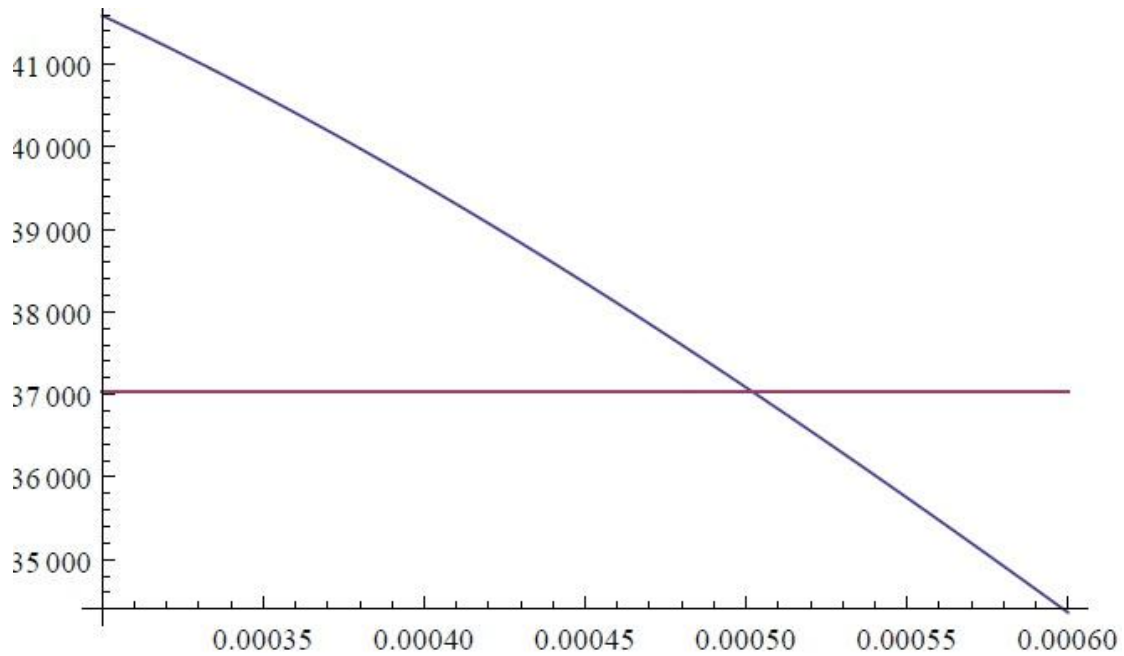
Πέρα από την πυκνότητα αυτή η αριθμητική ολοκλήρωση για μικρό r μπορεί να ξεκινήσει με την $P = \rho/3$ και όταν τα p και ρ πέσουν αρκετά (κάτω από το ρ_{star}) να αλλάξει στην όπου θεωρείται ότι η εκεί πίεση οφείλεται ακόμα στα σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Η ολοκλήρωση θα σταματήσει πάλι στην τιμή όπου $p = \rho/100$.

Ξεκινάμε λοιπόν με $\rho_0 = \alpha\rho_*$ όπου $\alpha = 1.2, 10., 50., 500.$ και 5000 και υπολογίζουμε M και R .

Για $\alpha = 1.2$ παίρνουμε τον πίνακα:

Πίνακας 4.4.9

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	1.2	44444	14814	0.00385	0.0008	0.246022

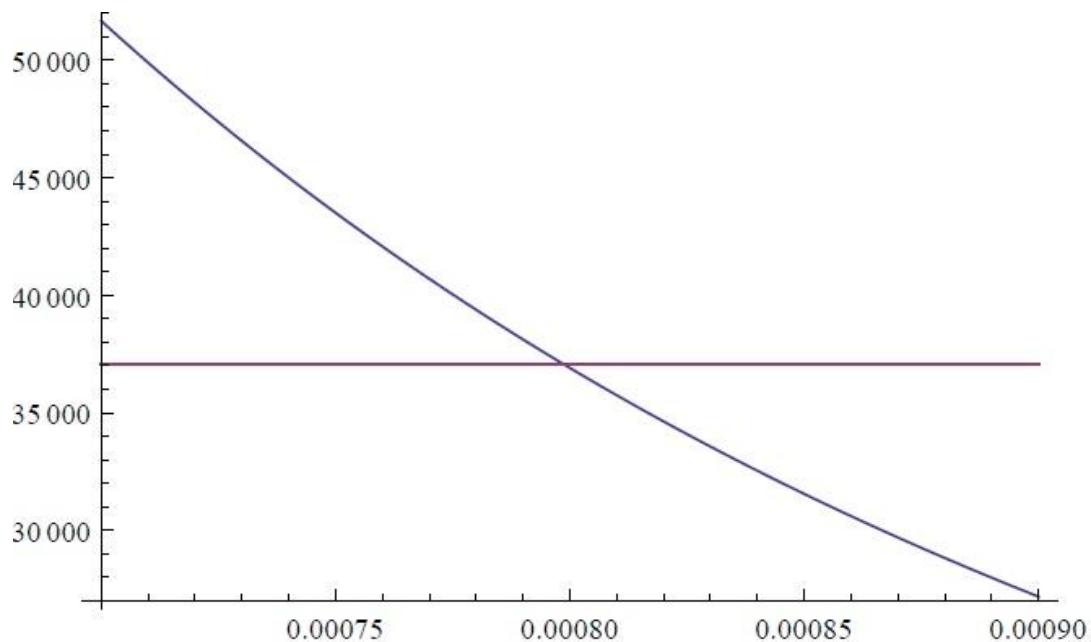


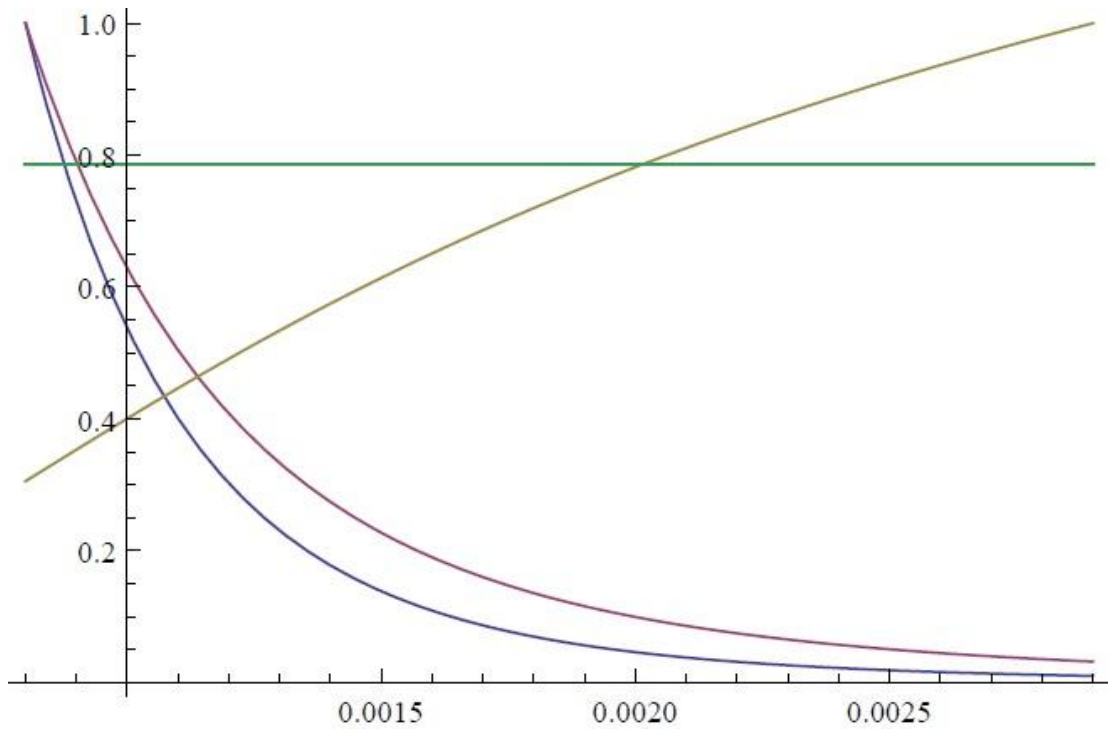
όπου R και M είναι οι συνολική μάζα και ακτίνα του αστέρα νετρονίων. Εδώ παρατηρούμε μια συνέχεια στην προηγούμενη μεταβολή των μεγεθών, πράγμα το οποίο δικαιολογείται εν μέρει διότι στο μεγαλύτερο μέρος του το άστρο κυριαρχείται από εκφυλισμένα σχετικιστικά ηλεκτρόνια ακόμα. Η αλλαγή στην καταστατική έγινε στο $R = 0.0005$, δηλαδή μόλις κατά το $2/1000$ του όγκου του αστέρα.

Αυξάνουμε και άλλο το ρ_0 και παίρνουμε την ελάχιστη δυνατή ακτίνα για τον αστέρα στα 0.0029. Η ελάχιστη αυτή τιμή για την ακτίνα μπορεί να δικαιολογηθεί εν μέρει, αλλά και να σχετίζεται με την οριακή τιμή που προβλέπεται για το M/R (περίπου 0.44). Στην ουσία αποκλείονται μικρότερες ακτίνες για τον εξής λόγο: για να ισορροπήσει το άστρο καθώς το M/R μεγαλώνει θα πρέπει να μειώνεται η μάζα του. Η μάζα όμως δεν μειώνεται με τον ίδιο ρυθμό που μειώνεται το r (η μάζα μειώνεται με το r^3 !) οπότε κάποια στιγμή η ακτίνα πρέπει να έχει ελάχιστες διακυμάνσεις. Αυτό φαίνεται από τους δύο τελευταίους πίνακες όπως και σε αυτούς που ακολουθούν όπου το μικραίνει.

Πίνακας 4.4.10

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	10	370370	123457	0.00290	0.00063	0.214886

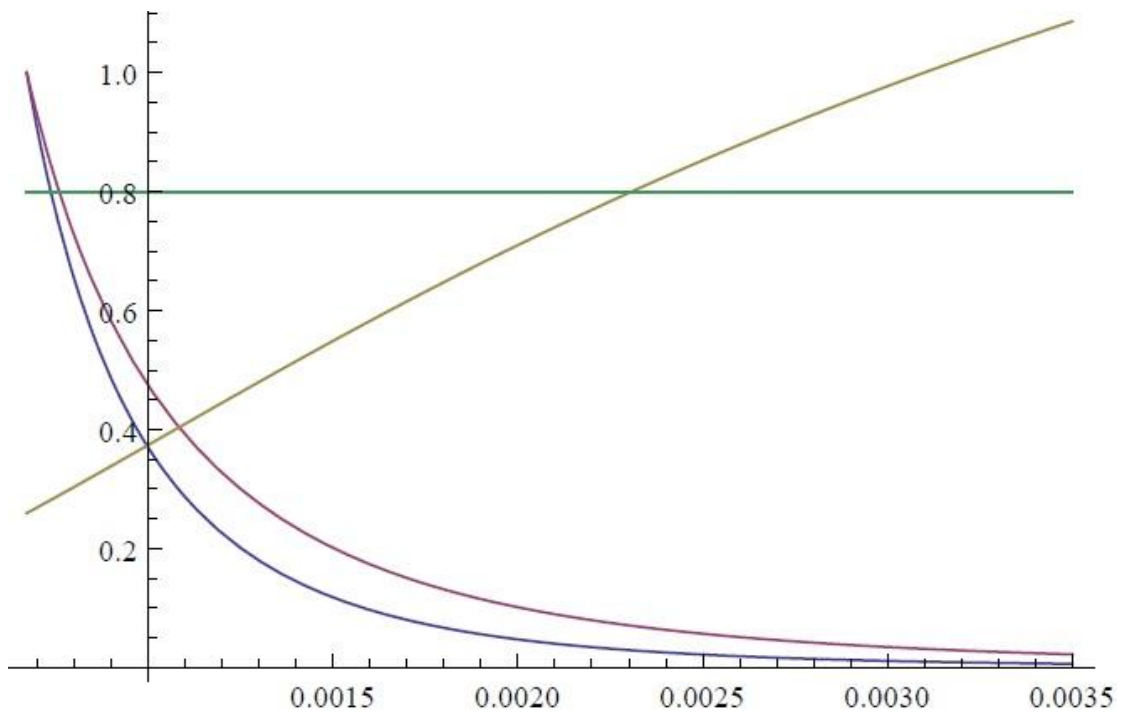
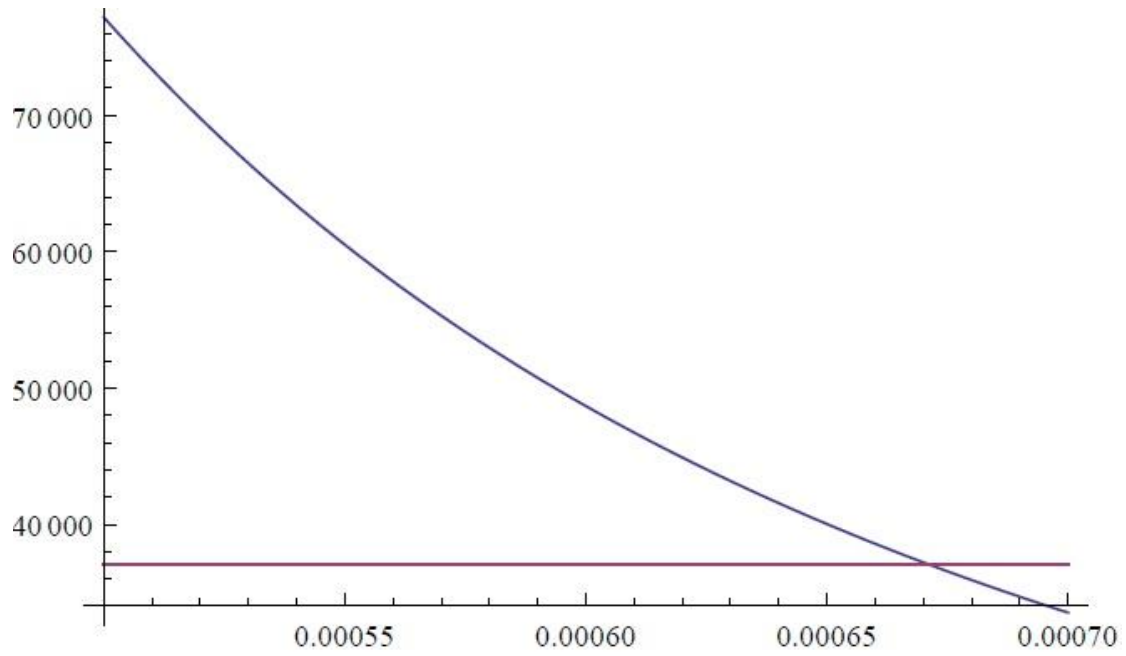




Λίγο μετά (ως προς την τιμή της κεντρικής πυκνότητας) την r_{min} έρχεται και το M_{min} για $a = 50$. Το άστρο έχει ένα κάτω όριο στη μάζα και αυτό δικαιολογείται καθώς σε τόσο υψηλές πυκνότητες οι πιέσεις είναι πολύ μεγάλες κυρίως στο κέντρο οπότε πρέπει να υπάρχει και η απαιτούμενη υπερκείμενη μάζα στον εξωτερικό πυρήνα που να τις αντισταθμίζει. Οπότε από την αριθμητική ολοκλήρωση παίρνουμε τις παρακάτω τιμές:

Πίνακας 4.4.11

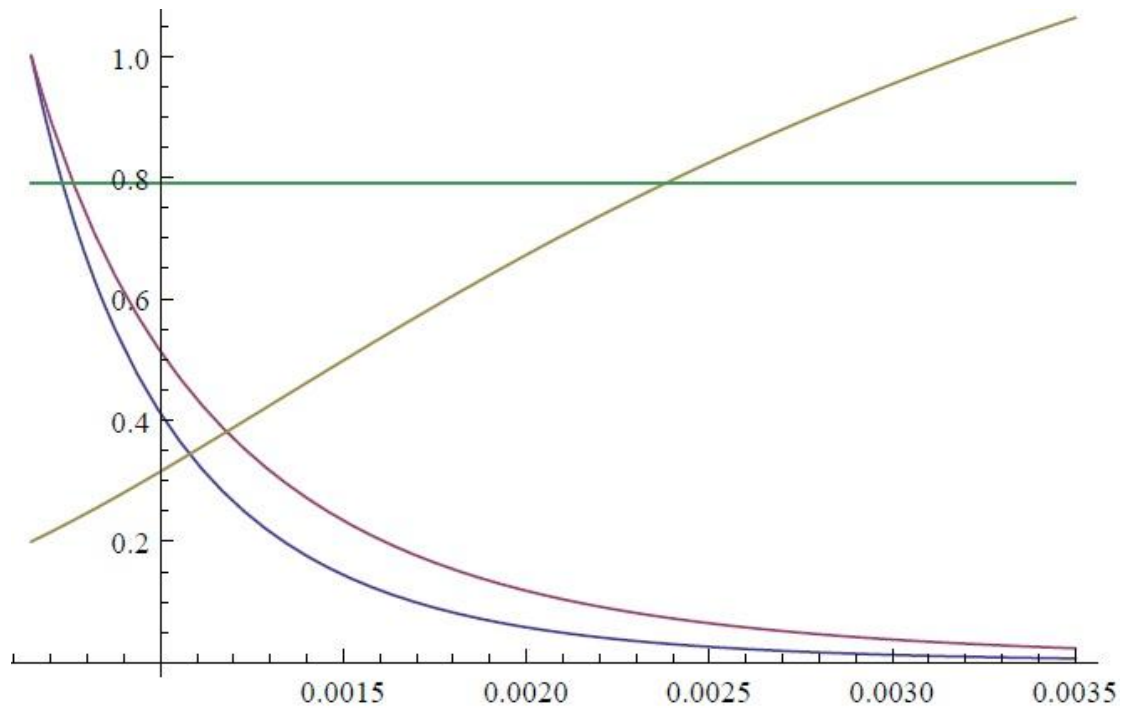
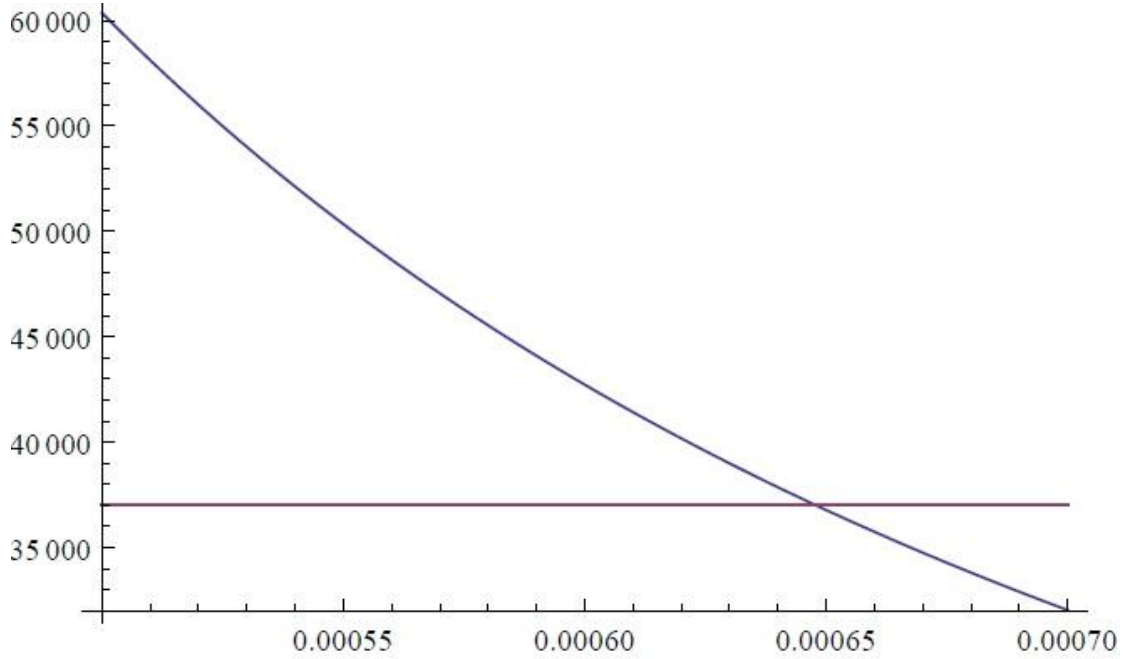
k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	50	1.85×10^6	617284	0.0031	0.00062	0.200749



Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση έχουμε δύο τελευταίους πίνακες:

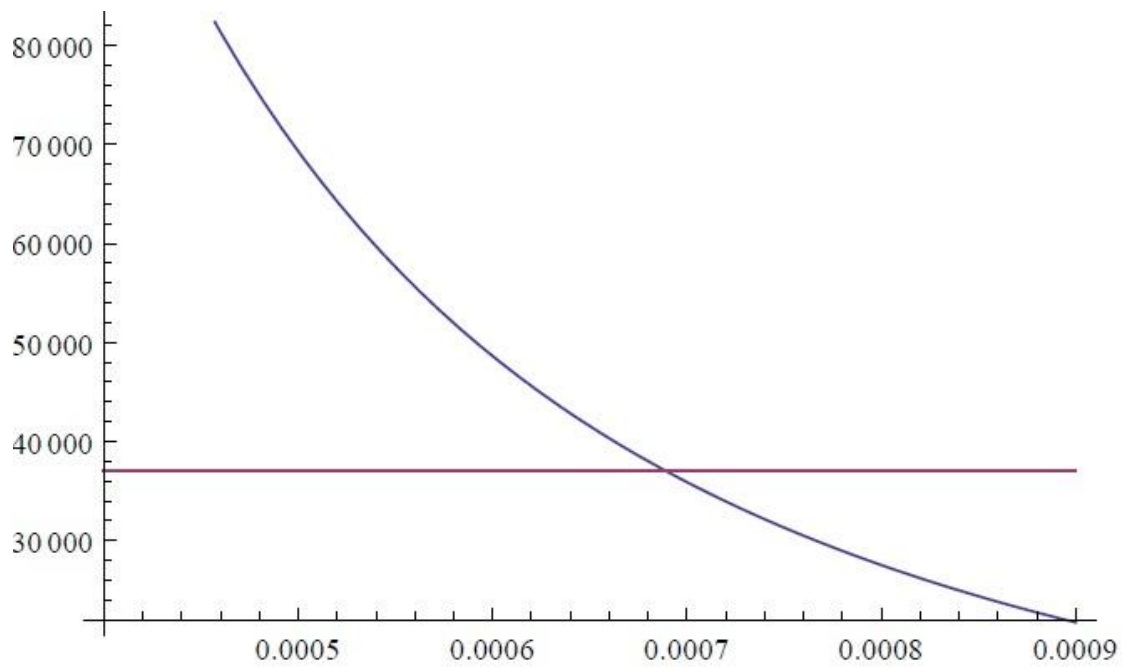
Πίνακας 4.4.12

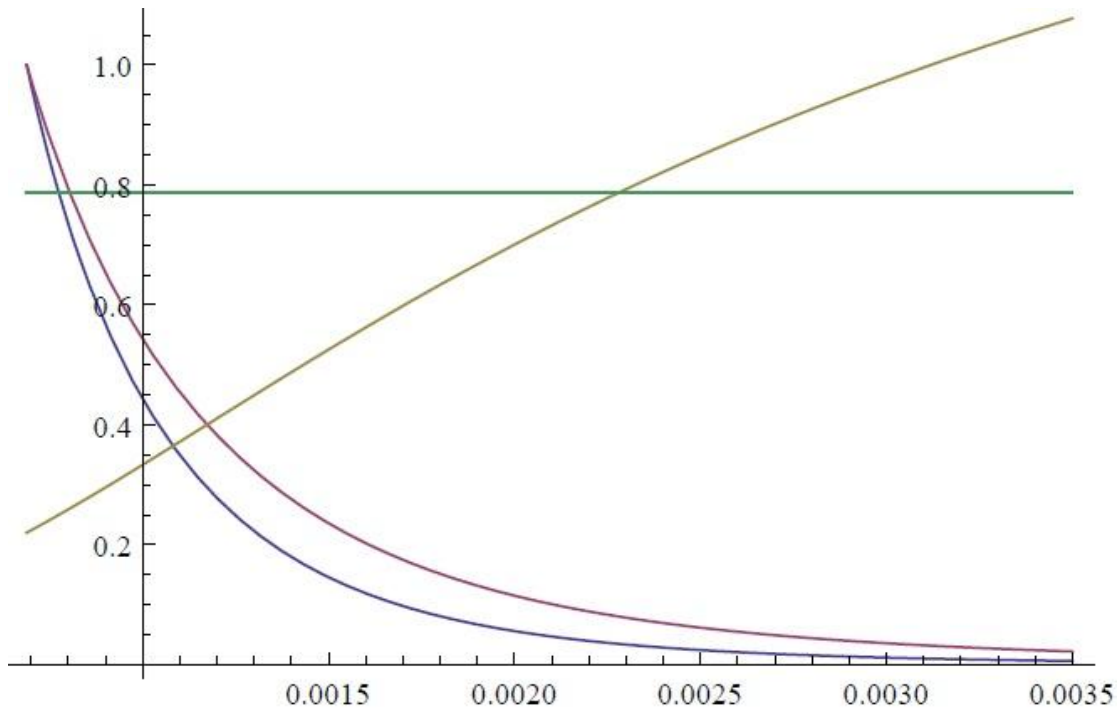
k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	500	1.85×10^7	6.17×10^6	0.0032	0.000672	0.210583



Πίνακας 4.4.13

k	a	ρ_0	ρ_0	R	M	M/R
0.01	5000	1.85×10^8	6.17×10^7	0.00312	0.00066	0.212035





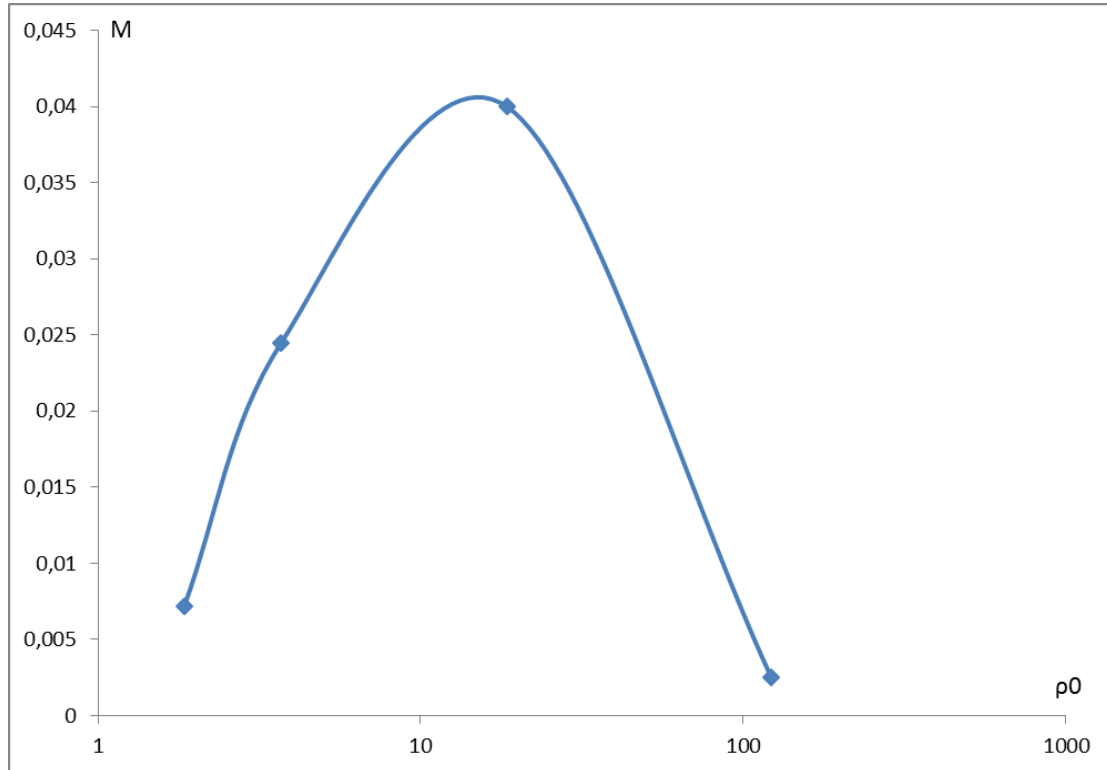
Είναι σημαντικό το γεγονός ότι οι μάζες έχουν μια ακόμα ανοδική πορεία προς ένα ακόμα μέγιστο στα 0.00067. Βρίσκουμε λοιπόν κάτι ανάλογο με το όριο *Chandrasekar* των λευκών νάνων. Το όριο αυτό λέγεται όριο *Oppenheimer-Volkoff* και δεν οφείλεται στην αλλαγή καταστατικής εξίσωσης. Μια ποιοτική εξήγηση του φαινομένου είναι ακριβώς ότι κάνει έντονη την παρουσία του ο σχετικιστικός παράγοντας καθώς αυξάνεται η κεντρική πυκνότητα του άστρου και έτσι αρχίζει να συνεισφέρει στην μάζα του άστρου και η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση της ύλης στο εσωτερικό του με αποτέλεσμα να χρειάζεται λιγότερη μάζα για να εξισορροπήσει την βαρύτητα και να φθάσει σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας.

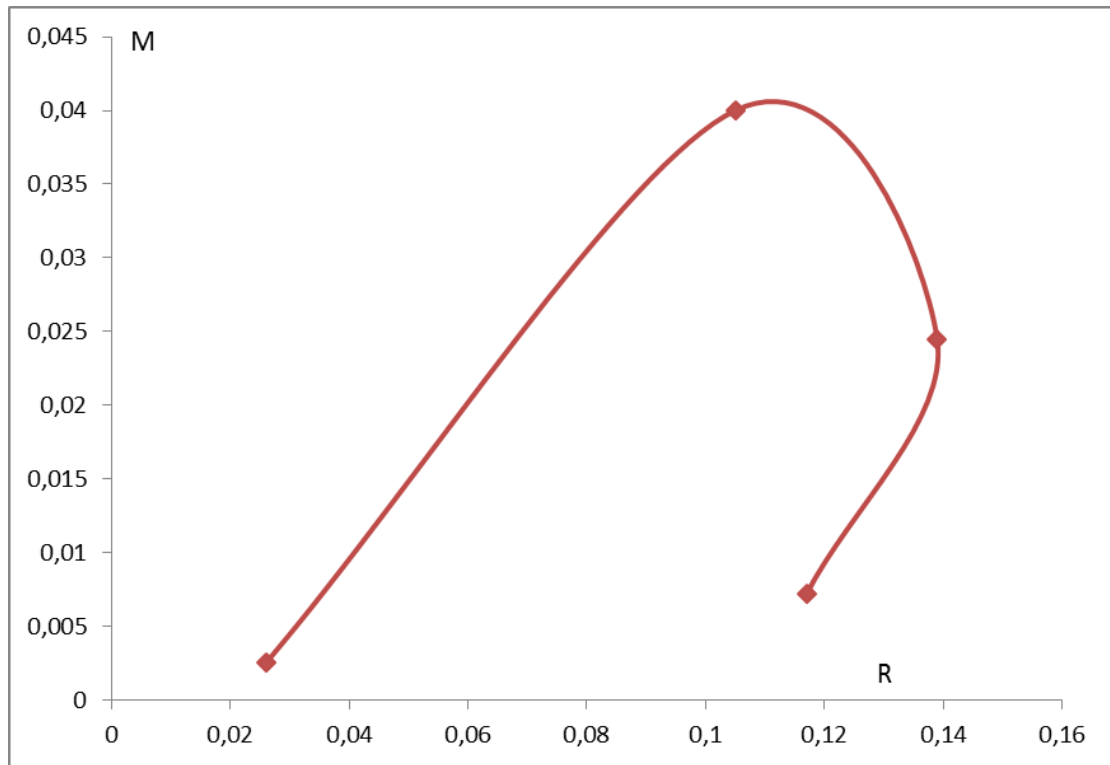
Ολοκληρώνοντας θα κάνουμε μια σύγκριση των παραπάνω αποτελεσμάτων για την εξάρτηση των M , R και της οριακής μάζας από την κεντρική πυκνότητα παίρνοντας διαφορετικές τιμές των παραμέτρων n και k . Σε όλα τα επόμενα τα διαγράμματα, τα οποία έγιναν με τη βοήθεια του *EXCELL*, χρησιμοποιήσαμε την ίδια καταστατική για όλες τις τιμές χωρίς να αλλάζουμε αναλόγως την πυκνότητα όπως πριν.

$$n = 0.5, k = 0.01$$

ρ_c	R	$M(R)$
----------	-----	--------

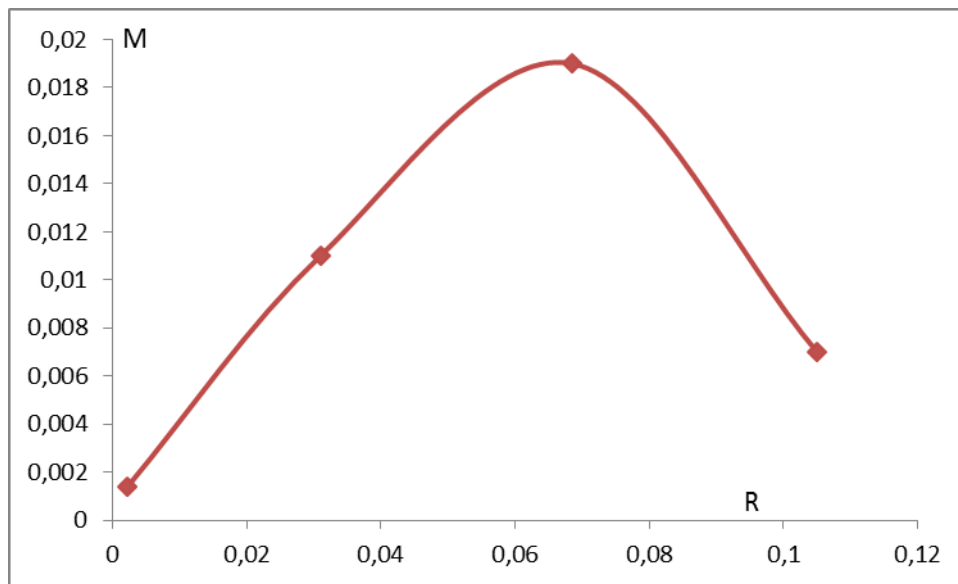
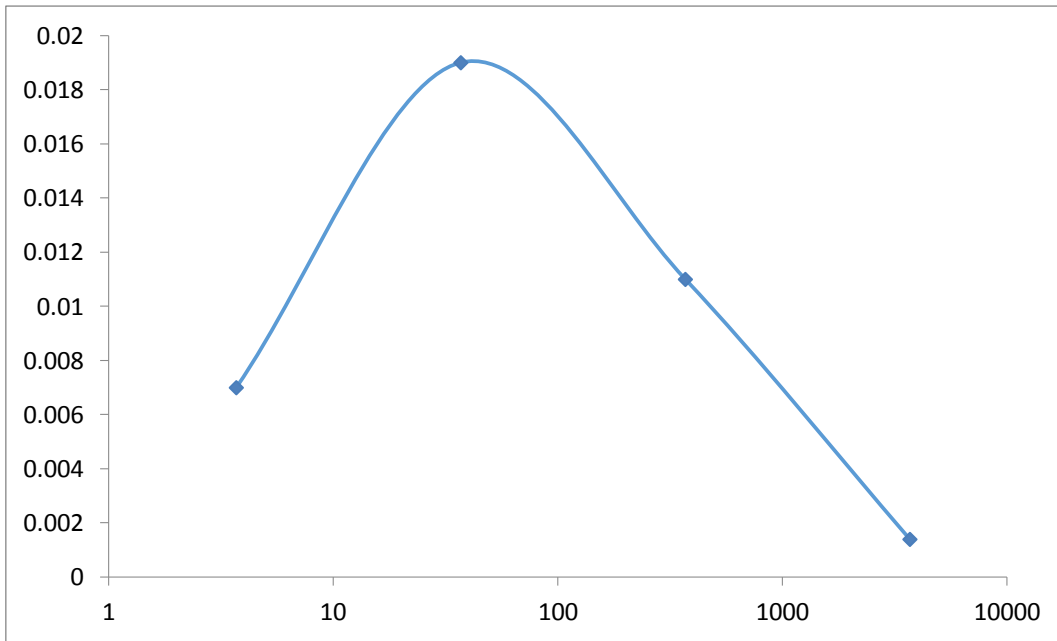
1.85	0.117	0.0072
3.7	0.139	0.0245
18.5	0.105	0.04
122	0.026	0.0054





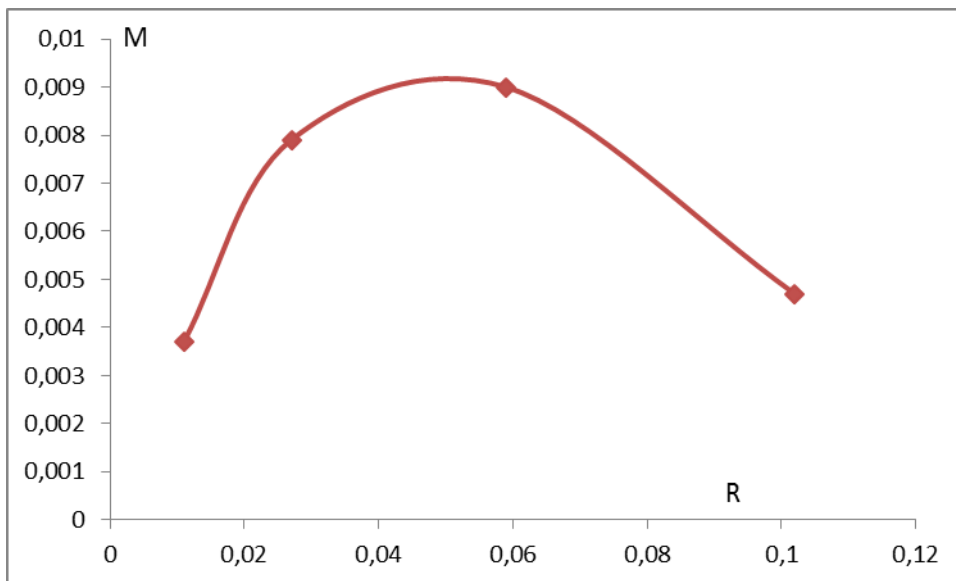
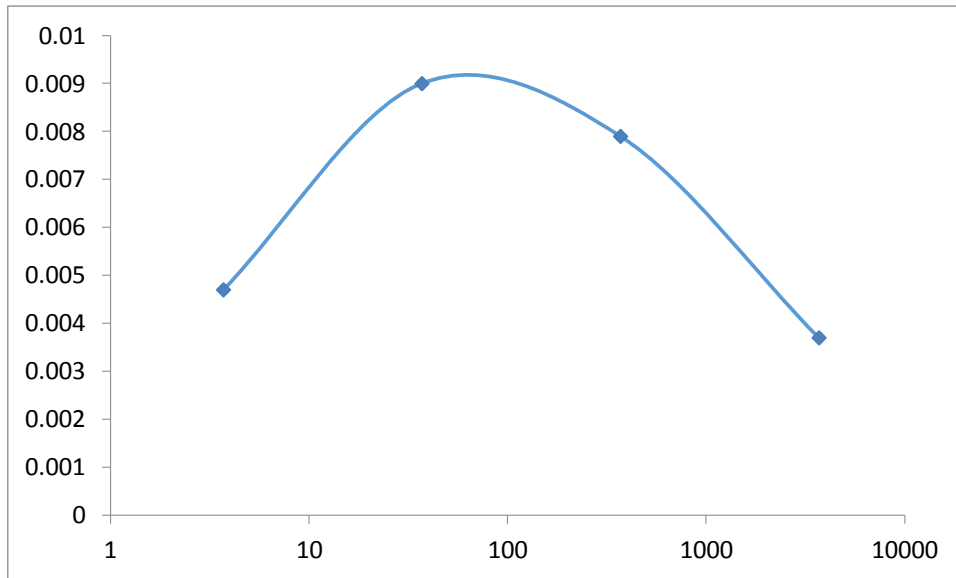
$$n = 1, k = 0.01$$

ρ_c	R	$M(R)$
3.7	0.105	0.007
37	0.069	0.019
370	0.031	0.011
3700	0.0023	0.0014



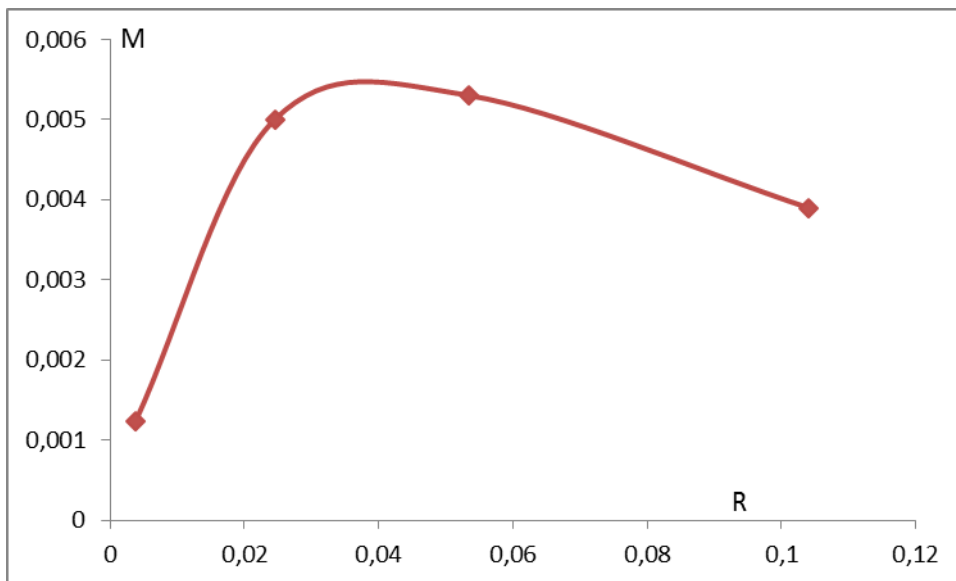
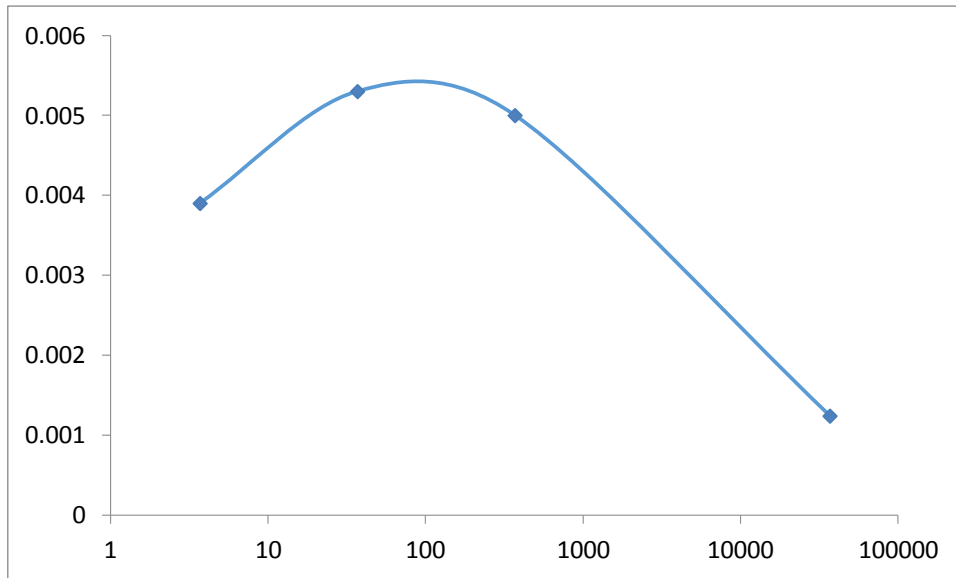
$$n = 1.5, k = 0.01$$

ρ_c	R	$M(R)$
3.7	0.102	0.0047
37	0.059	0.009
370	0.027	0.0079
3700	0.011	0.37



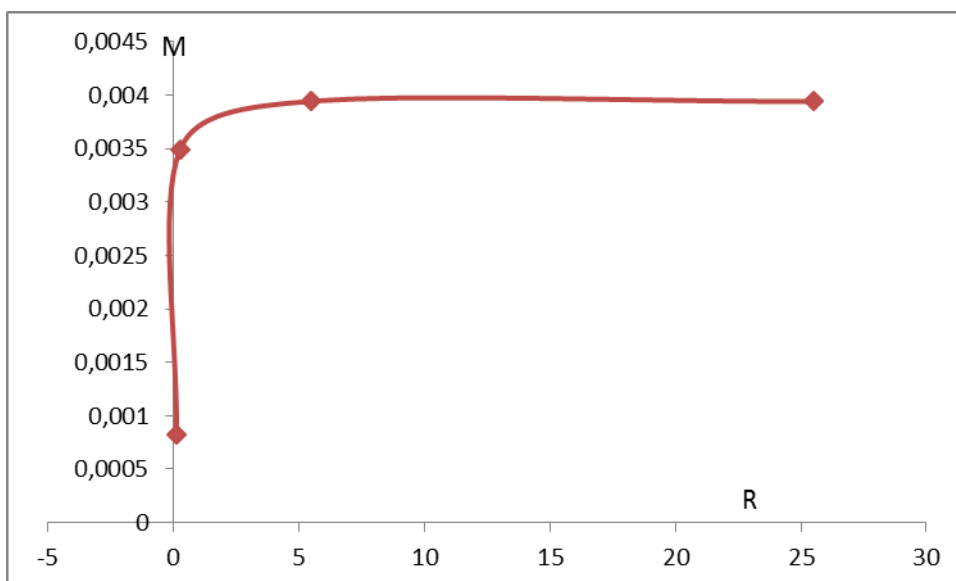
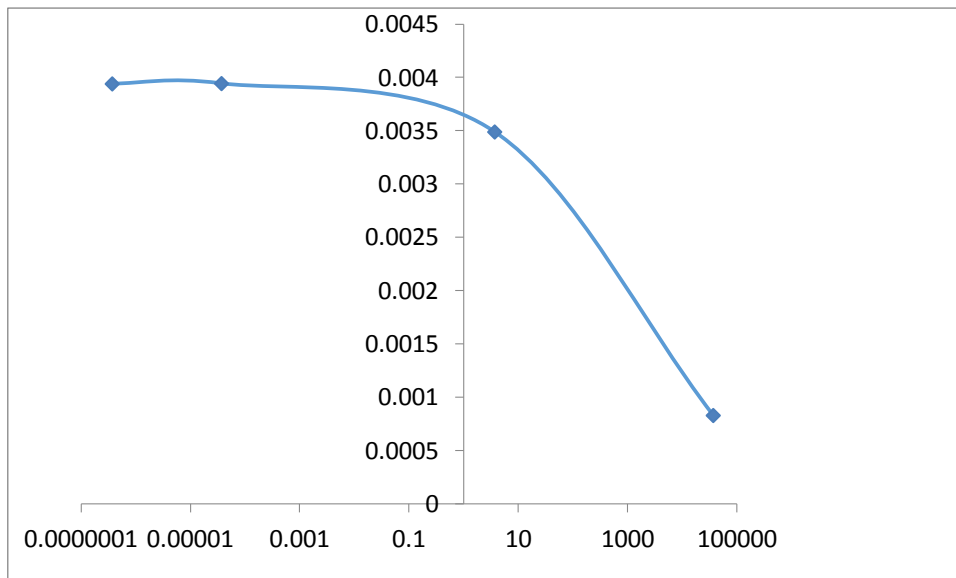
$$n = 2, k = 0.01$$

ρ_c	R	$M(R)$
3.7	0.104	0.0039
37	0.053	0.0053
370	0.025	0.005
37000	0.0038	0.0024



$$n = 3, k = 0.01$$

ρ_c	R	$M(R)$
3.7×10^{-7}	1.2	0.003941
3.7×10^{-5}	5.5	0.003944
3.7	0.25	0.00349
37000	0.11	0.00083



Παρατηρούμε αλλαγές στο όριο μάζας του αστέρα και της αντίστοιχης ακτίνας του, ανάλογα με το πολύτροπο που χρησιμοποιούμε, ακόμα και τάξης μεγέθους, όμως σε όλα τα n βρίσκεται ένα τέτοιο όριο. Επίσης στα μικρά n παρατηρείται μια «συμμετρία» γύρω από την οριακή μάζα ενώ στα μεγαλύτερα το όριο αυτό προσεγγίζεται «εφαπτομενικά».

Θα συγκρίνουμε τώρα τα βασικά μας αποτελέσματα για δύο ακόμα τιμές του k μια για μικρότερο και μια για μεγαλύτερο και σχετικιστικό πολύτροπο. Δεδομένου ότι η σταθερά αυτή δίνεται (για το σχετικιστικό) από την σχέση (3.7.17),

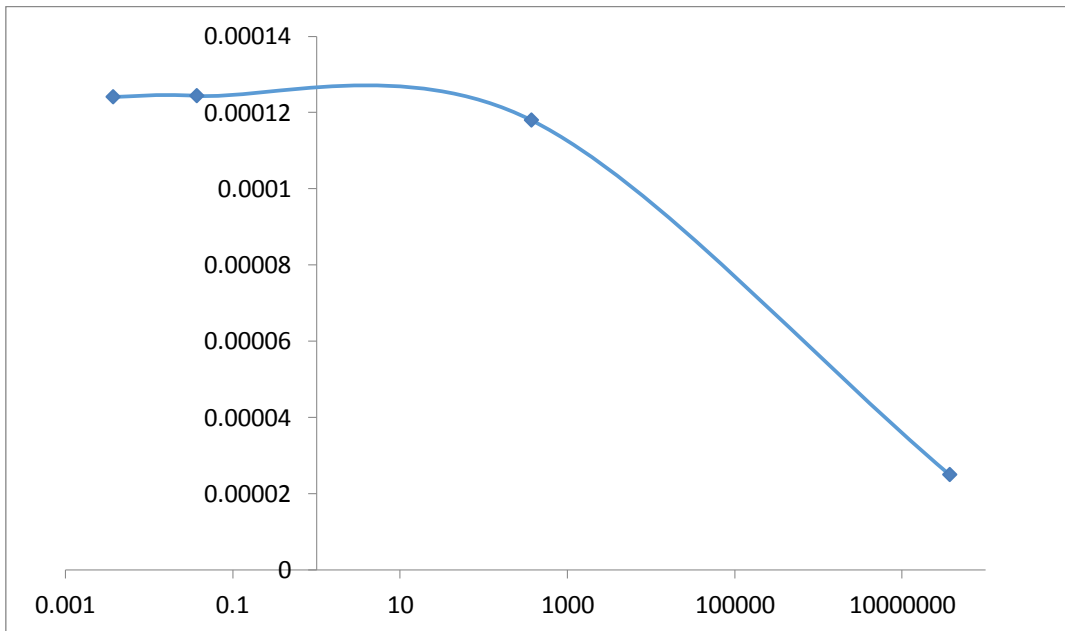
$$k = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_n c^2} \right) \quad (4.4.17)$$

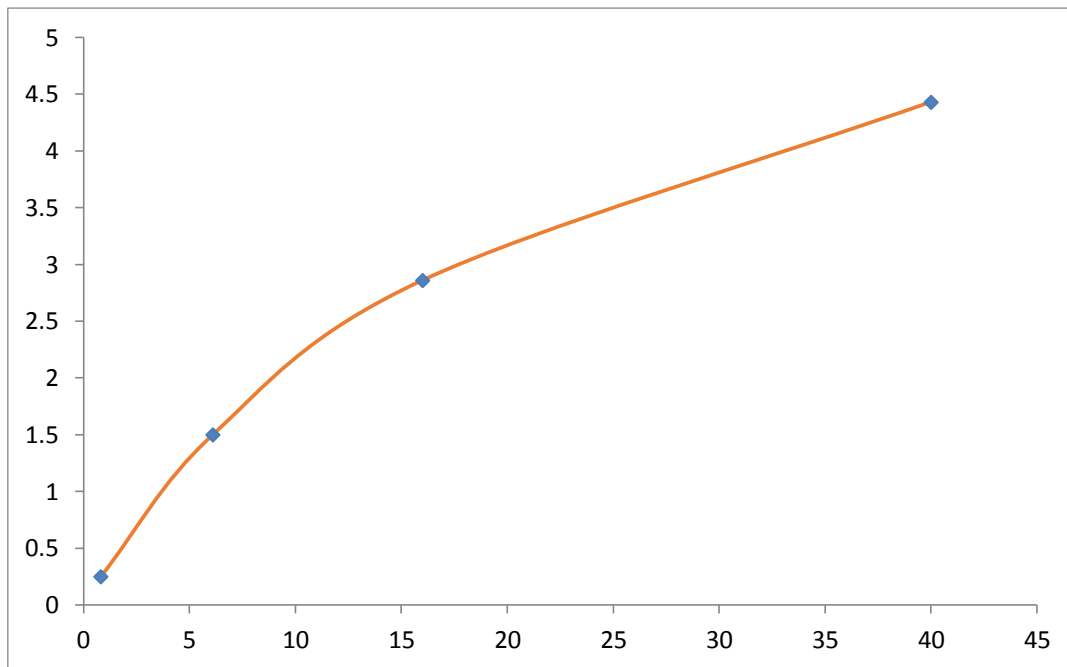
αυτός είναι ένας τρόπος να βρούμε την εξάρτηση της μάζας και της ακτίνας του αστέρα από τα επιμέρους μεγέθη της (4.4.17). Ξεκινάμε με την ίδια κεντρική πυκνότητα και συγκρίνουμε τις αλλαγές που προκύπτουν για τη μάζα και την ακτίνα:

$$n = 3, k = 0.001$$

$$n = 3, k = 1.5$$

ρ_c	R	$M(R)$	ρ_c	R	$M(R)$
0.0037	0.375	0.0001241	0.00011	40	4.43
0.037	0.174	0.0001244	0.0011	16	2.86
370	0.0079	0.000118	0.011	6.1	1.5
3.7×10^6	0.000105	0.000025	1.1	0.81	0.25





Όπως παρατηρούμε όταν το k είναι μεγαλύτερο για την ίδια τιμή κεντρικής πυκνότητας απαιτείται μεγαλύτερη μάζα, ακτίνα και πυκνότητα από τον αστέρα για ισορροπία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για μια δεδομένη πυκνότητα στο κέντρο η πίεση εκεί είναι ανάλογη του k όπως μπορεί να φανεί από το αντίστοιχο p_0 . Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται περισσότερη μάζα για να αντισταθμίσει την πίεση αυτή και συνεπώς μεγαλύτερη ακτίνα για τους λόγους τους οποίους έχουν εξηγηθεί. Επίσης, στο τελευταίο διάγραμμα παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κανένα όριο στη μάζα. Όσο μικραίνει η κεντρική πυκνότητα τόσο μεγαλώνουν ακτίνα και μάζα. Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι στα νευτώνεια άστρα, όπου ισχύει $p \ll \rho$, δεν αναμένεται κάποιο όριο στη μάζα.

Τελικές παρατηρήσεις

Αναπτύξαμε έναν απλό κώδικα στη *Mathematica* για να λύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις δομής των λευκών νάνων και των αστέρων νετρονίων. Είδαμε ότι ένας λευκός νάνος μπορεί να περιγραφεί με ένα πολυτροπικό μοντέλο δείκτη $n = 3$. Οι τυπικές τιμές για έναν λευκό νάνο στη μάζα, την ακτίνα και την κεντρική πυκνότητα είναι $1.4M_{\odot}$, $1/70R_{\odot}$ και αντίστοιχα. Γι' αυτές τις τιμές ο αστέρας χαρακτηρίζεται ως

μη σχετικιστικός και η νευτώνεια θεώρηση είναι ικανοποιητική. Η πίεση των πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων παρέχει την απαραίτητη αντίσταση προς την βαρυτική κατάρρευση και είναι της . Για το συγκεκριμένο μοντέλο υπάρχει ένα άνω όριο στη μάζα των λευκών νάνων, το όριο *Chandrasekhar*, το οποίο προσδιορίζεται γύρω στις $1.4M_{\odot}$ και ακτίνα της τάξης των $10^4 km$. Έτσι, αφού ένα άστρο μικρής ή μεσαίας μάζας έχει τελειώσει την καύσιμη ύλη του (υδρογόνο και ήλιο) θα καταλήξει ως ένας λευκός νάνος αν η μάζα του, τότε, είναι κάτω από το όριο *Chandrasekhar* υποστηριζόμενο από την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων. Αν όμως σε εκείνο το στάδιο έχει μεγαλύτερη μάζα τότε τα ηλεκτρόνια δεν αντέχουν την πίεση, το άστρο γίνεται πολύ πυκνό και η κατάρρευση είναι αναπόφευκτη. Η κατάληξή του τότε είναι είτε ένας αστέρας νετρονίων είτε μια μαύρη τρύπα. Έως τώρα, δεν υπάρχουν παρατηρησιακά δεδομένα λευκού νάνου με μεγαλύτερη μάζα από την οριακή.

Περνώντας έτσι στους σχετικιστικούς αστέρες νετρονίων η καταστατική αλλάζει και προσεγγίζεται πλέον από μια σχέση της , δηλαδή ως ένα πολύτροπο με πολυτροπικό δείκτη $n \rightarrow \infty$. Η πίεση πλέον οφείλεται στα σχετικιστικά νετρόνια κοντά στο κέντρο και στα σχετικιστικά ηλεκτρόνια στην υπόλοιπη περιοχή. Εδώ είναι πολύ σημαντικό ότι μερικές καταστάσεις μπορεί να αποτελούν λύσεις υδροστατικής ισορροπίας των εξισώσεων δομής του αστέρα όμως να μην αντιστοιχούν σε καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας και έτσι να αποκλείονται από τις προβλέψεις. Η πρώτη συνθήκη για ευστάθεια έχει ήδη σχολιαστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι αυτή του ορίου της ταχύτητας του φωτός (*αρχή της αιτιότητας*). Η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων δίνεται από την σχέση $v_s^2 = \partial p / \partial \rho$. Στο κέντρο του αστέρα, όπου ο λόγος $p_c / \rho_c c^2$ γίνεται μέγιστος, έχουμε:

$$v_s^2 = c^2 \gamma \sigma$$

όπου $\sigma = p_c / (\rho_c c^2)$.

Οπότε πρέπει $\sigma > 1/\gamma$, πράγμα το οποίο ισχύει για τις καταστατικές που πήραμε. Η δεύτερη, απαραίτητη για ευστάθεια, είναι η εξής λογική συνθήκη:

$$\frac{dm}{d\rho_c} > 0$$

Η σχέση αυτή μας λέει απλά ότι για να αυξηθεί η κεντρική πυκνότητα πρέπει να υποστηρίζεται αναγκαστικά από μεγαλύτερη μάζα, αλλιώς δεν υπάρχει λόγος να γίνει πιο πυκνό. Έτσι, όπως βλέπουμε από τους πίνακες οι περιοχές του ρ_c στις οποίες η μάζα φθίνει δεν αποτελούν ευσταθείς λύσεις και πρέπει επίσης να αποκλειστούν. Τέλος, αν συνυπολογίσουμε:

- 1) πυρηνικά δυναμικά όπως αυτά που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο τα οποία γενικά ανεβάζουν το όριο μάζας των άστρων νετρονίων λόγω του συντελεστή συμπίεσης K
- 2) πιο «σωστές» καταστατικές που προκύπτουν ως υπέρθεση των περιπτώσεων που θεωρήσαμε
- 3) ίσως κάποιο βαθμό μη πλήρους εκφυλισμού των φερμιονίων
- 4) τις εσωτερικές κινήσεις του αστέρα όπως οι ταλαντώσεις τις οποίες αγνοήσαμε (λόγω υδροστατικής ισορροπίας)
- 5) την θερμική αγωγιμότητα ή το ιξώδες του αστέρα
- 6) καθώς και την πολύ σημαντική ενέργεια λόγω περιστροφής (*Hartle 1978*) του αστέρα.

το παραπάνω όριο προσδιορίζεται έως και τα $4M_{\odot}$.

Τα στοιχεία αυτά ολοκληρώνουν την μελέτη της υδροστατικής ισορροπίας των σχετικιστικών συμπαγών αστέρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το τελευταίο κεφάλαιο αντιστοιχεί στον επίλογο της εργασίας. Θα περιγράψουμε συνοπτικά τα προηγούμενα και θα αναφέρουμε κάποια γενικά χαρακτηριστικά του αστροφυσικού φαινομένου που μελετήθηκε τα οποία δεν λήφθηκαν υπόψιν. Τέλος, θα αναφερθούν τελευταία νέα και μελέτες σχετικές με το θέμα καθώς και διάφορα προβλήματα τα οποία παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Τον Οκτώβριο του 2014 συμπληρώνονται 47 χρόνια από την παρατηρησιακή ανακάλυψη του πρώτου άστρου νετρονίων - του *pulsar CP 1919+21*. Τα αντικείμενα αυτά παρουσιάζουν ακόμα μεγάλο ενδιαφέρον για την κοινότητα των αστροφυσικών και των θεωρητικών φυσικών καθώς είναι οι απτές αποδείξεις για την ισχύ της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας ως μια συνεπή θεωρία για τη βαρύτητα. Εκτός όμως από τις ακραίες βαρυτικές συνθήκες εκεί μπορεί να συναντήσει κανείς εξωπραγματικές καταστάσεις ύλης και ίσως άγνωστα για τη Γη υποατομικά σωματίδια ή ακόμα και δυνάμεις. Δεν είναι τυχαίο που τα άστρα νετρονίων χαρακτηρίζονται ως *κοσμικά εργαστήρια* καθώς είναι το πιο μαζικό παρατηρησιακό αντικείμενο από το οποίο μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες, δεδομένου ότι οι μαύρες τρύπες μπορούν να ανιχνευθούν μόνο εμμέσως.

Στην ουσία, η εργασία επικεντρώθηκε αριθμητική στην επίλυση των εξισώσεων Einstein με συγκεκριμένες παραδοχές για το υπό μελέτη πρόβλημα με σκοπό την ανάλυση των φυσικών νόμων σε αυτό. Από αυτές προέκυψε μια πολύ σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δύο επικρατέστερες θεωρίες βαρύτητας - τους νόμους του Newton και τους νόμους της $ΓΘΣ$ - η οποία ανακύπτει όταν τα βαρυτικά πεδία είναι εξαιρετικά έντονα, δηλαδή οφείλονται σε αντικείμενα με σχετικιστικό παράγοντα $GM/Rc^2 \sim 1$. Έτσι, ενώ η νευτώνεια δεν θέτει κανένα όριο στη μάζα του άστρου η $ΓΘΣ$ το απαιτεί και αυτή η διαφορά δεν μπορεί να είναι καθόλου αμελητέα ως προς την ισχύ των δύο θεωριών.

Υπάρχουν, επίσης, χαρακτηριστικά και ιδιότητες των αντικειμένων αυτών τα οποία δεν συζητήθηκαν καθόλου ή αναφέρθηκαν απλώς, αλλά είναι εξίσου ενδιαφέροντα. Για παράδειγμα, υπάρχουν θεωρητικά μοντέλα τα οποία προβλέπουν τη θερμική

αγωγιμότητα του αστέρα και πιο συγκεκριμένα στην περιοχή του φλοιού. Έτσι, μετρώντας την επιφανειακή θερμοκρασία θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει τις θερμοκρασίες στο κέντρο. Αυτό με τη σειρά του θα δώσει σίγουρα πληροφορίες για την κατάσταση και το είδος της ύλης εκεί. Όμως, τα άστρα αυτά είναι τόσο μικρά, με ακτίνες περί τα 10 km, ώστε μόλις που μπορούν να ανιχνευθούν τα εγγύτερα από αυτά με παρατηρήσεις ακτίνων X ή γ από διαστημικές αποστολές όπως ο γερμανικός σταθμός *ROSAT* ή του *Chandra X-ray Observatory*. Ωστόσο, ανακύπτουν και άλλες δυσκολίες, γιατί σε τόσο ισχυρά μαγνητικά πεδία η ατμόσφαιρα γίνεται τόσο αδιαφανής στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και ουσιαστικά παρατηρούμε αυτή και όχι τον φλοιό υποεκτιμώντας την επιφανειακή θερμοκρασία.

Θεωρητικό ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζει το γεγονός ότι τα λίγα παρατηρησιακά δεδομένα υποδεικνύουν μια κατάσταση υπερρευστότητας στο εσωτερικό των *ουδέτερων άστρων*. Το φερμιονικό ρευστό παρουσιάζει μηδενικές εσωτερικές τριβές και ιξώδες πράγμα εξωπραγματικό για οποιαδήποτε γήινη κατάσταση. Αυτή η κατάσταση της ύλης δεν μπορεί να εξηγηθεί από την Κλασική Φυσική και περιγράφεται με επιτυχία από την Κβαντομηχανική. Έτσι, συναντάται σε μορφές οι οποίες ονομάζονται «*συμπυκνώματα Bose-Einstein*» και οι παράδοξες ιδιότητες της οφείλονται στο ότι τα σωματίδια τα οποία τις αποτελούν είναι μποζόνια, έχουν δηλαδή ακέραιο σπιν και ακολουθούν την στατιστική Bose-Einstein κατά την οποία τα γειτονικά σώματα έχουν την τάση να αποκτούν και να διατηρούν την ίδια κβαντική κατάσταση κατά την κίνησή τους σε αντίθεση με τα φερμιόνια τα οποία φέρουν κβαντικό αριθμό σπιν 1/2. Τα σωματίδια βέβαια του αστέρα είναι φερμιόνια, όμως, σε εξαιρετικά υψηλές ενεργειακές πυκνότητες αναμένεται θεωρητικώς να αθροίζουν τα σπιν τους δίνοντας συνολικό σπιν μονάδα οπότε σχηματίζουν τα λεγόμενα «ζεύγη Cooper» τα οποία πλέον είναι μποζόνια και συμπεριφέρονται αναλόγως. Ακόμα βαθύτερα, τα υλικά γίνονται όλο και πιο άγνωστα. Στην κεντρική περιοχή εκτιμάται η ύπαρξη ενός *πλάσματος κουάρκ - γκλουονίων*, των θεμελιωδών δηλαδή συστατικών της ύλης. Προς αυτή την κατεύθυνση εργάζονται από κοινού κοσμολόγοι και φυσικοί υψηλών ενεργειών προσπαθώντας να «αναπαράγουν» στους ισχυρούς επιταχυντές, όπως ο *RHIC* του *Brookhaven* και ο *LHC* στο *CERN*, τα σωματίδια αυτά. Η φυσική η οποία περιγράφει τέτοιες αλληλεπιδράσεις είναι η λεγόμενη Κβαντική Χρωμοδυναμική

η οποία γενικότερα προσπαθεί να κατασκευάσει ένα «διάγραμμα φάσεων» για την ασυνήθιστη ύλη των ακραίων πυκνοτήτων, πιέσεων και θερμοκρασιών.

Σημαντικές πληροφορίες, επίσης, αντλούμε από τους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων - τα pulsars - οι οποίοι διευκολύνουν στον εντοπισμό τους. Γενικώς, αναμένεται μια επιβράδυνση με την πάροδο του χρόνου επειδή τα ισχυρά μαγνητικά πεδία ασκούν αντίθετες ροπές οι οποίες σχετίζονται με την εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η αύξηση της περιόδου περιστροφής επηρεάζει τη συχνότητα της ακτινοβολίας και έτσι μια τέτοια συμπεριφορά μπορεί να αποτελεί ένδειξη παρουσίας του αστέρα. Υπάρχουν ακόμα περιπτώσεις επιταχυνόμενων περιστροφικών κινήσεων τα λεγόμενα *glitches*. Πιστεύεται ότι οφείλονται σε μια σύζευξη κατά την κίνηση του εσωτερικού, το οποίο περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα, με τα υπερκείμενα στρώματα του φλοιού, τα οποία επιβραδύνονται λόγω του μαγνητικού πεδίου μειώνοντας έτσι το χρόνο της παρατηρήσιμης περιόδου. Όλα αυτά βέβαια ισχύουν σε μεμονωμένα άστρα νετρονίων. Ο κοντινός μας Σείριος θεωρείται ότι είναι συνοδός ενός αστέρα νετρονίων το οποίο σημαίνει ότι το κατά 10 τάξεις μεγέθους ισχυρότερο βαρυτικό πεδίο του αστέρα έλκει έντονα τα εξωτερικά στρώματα του συνοδού του με αποτέλεσμα να του αποσπά ύλη μειώνοντας την περίοδό του ακόμα και κατά μία τάξη μεγέθους.

Τέλος, υπάρχει μια μελέτη με πρόσφατα δεδομένα πάνω στο αντικείμενο η οποία μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη διότι παρακάμπτει το δύσκολο κομμάτι της εύρεσης εξίσωσης κατάστασης της υπέρ-πυκνής ύλης. Η εργασία, η οποία δημοσιεύεται στο περιοδικό *Physical Review Letters*¹² (2014), αποτελεί μια επέκταση του «*no - hair theorem*» των μελανών οπών σε περιστρεφόμενους και μη αστέρες νετρονίων. Σε γενικές γραμμές, η περιγραφή της γεωμετρίας του χωροχρόνου μέσα και έξω από το άστρο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός σχετικιστικού πολυπολικού αναπτύγματος, κατά αντιστοιχία με τις γνωστές πολυπολικές ροπές ηλεκτρομαγνητικών πεδίων τα οποία έχουν προκύψει από περίπλοκες κατανομές φορτίου και ρευμάτων. Εδώ τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα καθώς οι εξισώσεις του Einstein είναι μη γραμμικές το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορεί να φτιάχνει λύσεις των εξισώσεων απλά προσθέτοντας

¹² [Effectively universal behavior of rotating neutron stars in general relativity makes them even simpler than their Newtonian counterparts](http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.112.121101)
(<http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.112.121101>)

άλλες λύσεις. Ωστόσο, μπορεί να βρεθεί το ανάπτυγμα όλοι οι όροι του οποίου μάλιστα εξαρτώνται μόνο από δύο παραμέτρους - την μάζα και την στροφορμή. Το συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι: α) τα πολύπολα σχετίζονται μεταξύ τους β) με τρόπο ανεξάρτητο της καταστατικής και συνεπώς μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν χωροχρόνο για το εξωτερικό των αστερών νετρονίων που και αυτός να είναι ανεξάρτητος της καταστατικής εξίσωσης. Αυτό μπορεί να έχει εφαρμογή στη μελέτη αστροφυσικών διαδικασιών στο περιβάλλον των αστερών νετρονίων με τρόπο που να μην εξαρτάται από την καταστατική, παρακάμπτοντας έτσι τον μεγάλο αυτό παράγοντα αβεβαιότητας. Αν και η συσχέτιση των παραμέτρων να είναι ανεξάρτητη της καταστατικής, οι τιμές των πολυπολικών ροπών (το μέτρο τους) δεν είναι, για παράδειγμα η μάζα εξαρτάται από την καταστατική. Όμως, η όλη διαδικασία θα μπορεί να λειτουργήσει αντίστροφα και απ' τα δεδομένα να δούμε ποια είναι η καταστατική εξίσωση των αστερών νετρονίων.

Αυτά και όλα τα άλλα συμπεράσματα που αναφέραμε στα κεφάλαια ελέγχονται από τεράστια τηλεσκόπια και ανιχνευτές πάνω, μέσα και έξω από τη Γη όπως το τηλεσκόπιο ακτίνων-X *ROSAT* και το *LIGO* (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) που ανιχνεύει κύματα βαρύτητας από ισχυρές πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας, όπως τα δυαδικά συστήματα αστερών νετρονίων ή μελανών οπών.



Βιβλιογραφία

- Καδιανάκης Ν., Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών, ΑΘΗΝΑ 2013.
- Κόκκοτας Δ. Κώστας, Σημειώσεις στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Φεβρουάριος 2008.
- Κόκκοτας Δ. Κώστας, Διαλέξεις: Relativistic Stars, July 2009.
- Μανιμάνης Βασίλης, «Άστρα νετρονίων-τι κρύβεται στο εσωτερικό τους», *Περισκόπιο της Επιστήμης*, Τεύχος 310, Δεκέμβριος 2006.
- Μαστιχιάδης Απόστολος, Φυσική των Αστέρων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2013-14.
- Ξένου Στέλλα, Πτυχιακή Εργασία: Διαδικασία Ψύξης των Αστέρων Νετρονίων, Α.Π.Θ., 2012.
- Παππάς Γιώργος, Πτυχιακή Εργασία: Σχετικιστική Βαρυτική Κατάρρευση Σφαιρικά Συμμετρικών Αστέρων.
- Τραχανάς Στέφανος, *Mathematica και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Οκτώβριος 2004.
- Χριστοδουλάκης Θ. και Κορφιάτης Ε., Σημειώσεις Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Αθήνα 2002.
- Albert Einstein, *Η θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας*, Μετάφραση: Θάνος Χριστακόπουλος, εκδ. Τροχαλία, Μάιος 1999.
- Bozhidar Z. Iliev, “Normal frames and the validity of the equivalence principle”, (<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9709053.pdf>).
- F. M. Araujo, C.B.M.H Chirenti, “Newtonian and relativistic polytropes”, 4th School on Cosmic Rays and Astrophysics August 25- September 04, 2010.

George W. Collins, “Relativistic Stellar Structure”,
(<http://ads.harvard.edu/books/1989fsa..book/AbookC06.pdf>).

J. B. Hartle, *Gravity*, Addison Wesley, December 2003.

J. M. Lattimer and M. Prakash, “Neutron Star and the Equation of State”, *The Astrophysical Journal*, November 2000.

Jolien Creighton, *Lectures Notes: Relativistic Stars*, University of Wisconsin-Milwaukee, July 16, 2012.

Richard R. Silbar and Sanjay Reddy, “Neutron stars for undergraduates”,
(<http://afsws.rpi.edu/dept/phys/Courses/ASTR2050/NeutStarsAJP.pdf>).

Robin Kerrod, «Hubble, ο καθρέφτης του σύμπαντος», εκδ. Σαββάλας.

S. L. Shapiro and S.A. Teukolsky, “Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars”.

Stephen K N Portillo, “Neutron Star Core Equations of State and the Maximum Neutron Star Mass”.

Steven Weinberg, “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”, John Wiley & Sons, 1972.

Valeria Ferrari and Leonardo Gualtieri, “General Relativity”, 2011-2012.

<http://www.ira.inaf.it/~ddallaca/EoS.pdf>

http://www.int.washington.edu/PHYS554/2011/chapter8_11.pdf

<http://www.astro.sunysb.edu/lattimer/PHY521/compact.pdf>

http://ruelle.phys.unsw.edu.au/~gary/PHYS3020_files/SM3_9.pdf

http://eagle.phys.utk.edu/guidry/astro615/lectures/lecture_ch11.pdf

http://isi.ssl.berkeley.edu/~rogerg/education/astro160_problems_solutions.pdf

<http://en.wikipedia.org>.

<https://www.library.cornell.edu/>.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Υπολογιστικός κώδικας του Mathematica

Στο παράρτημα που ακολουθεί, παρουσιάζεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε κατά την εκπόνηση της εργασίας στο πρόγραμμα Wolfram Mathematica 9.0.0. Δημιουργήθηκαν δύο αρχεία (*small_alpha*, *large_alpha*) των οποίων η διαφορά έγκειται στην αλλαγή της εξίσωσης κατάστασης από kr^γ σε , ανάλογα με το αν η κεντρική πυκνότητα του αστέρα είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την κρίσιμη πυκνότητα *rhostar* που υπολογίστηκε.

Το “*small_alpha*” κάνει υπολογισμούς με την πρώτη καταστατική αναπαριστώντας κυρίως λευκούς νάνους που υποστηρίζονται από την πίεση Fermi εκφυλισμένων σχετικιστικών ηλεκτρονίων στο μεγαλύτερο μέρος του όγκου τους. Ο σχετικιστικός παράγοντας είναι ακόμη αρκετά μικρότερος της μονάδας γι' αυτό και χαρακτηρίζονται ως μη σχετικιστικοί αστέρες.

Το “*large_alpha*” χρησιμοποιεί τη δεύτερη στην περιοχή με πυκνότητα μεγαλύτερη του *rhostar* (κοντά στο κέντρο) και όταν πέσει κάτω από την τιμή αυτή αλλάζει πάλι στην πρώτη μέχρι την επιφάνειά του (σχεδόν). Αυτό το άστρο συγκρατείται στο εσωτερικό από την πίεση Fermi σχετικιστικών νετρονίων ενώ το υπόλοιπο συνεχίζει να κυριαρχείται από σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Ο σχετικιστικός παράγοντας τώρα είναι κοντά στη μονάδα και αυτές οι καταστάσεις ισορροπίας είναι ένα στάδιο πριν την κατάρρευση σε μελανή οπή χαρακτηρίζοντας έτσι τους αστέρες νετρονίων.

(small_alpha)

mm=m3*r^3+m5*r^5; dmm=D[mm,r]; pp=p0+p2*r^2; dpp=D[pp,r];
rho=rho0+rho2*r^2; drho=D[rho,r];

smm=Normal[Series[dmm-4*Pi*r^2*rho,{r,0,5}]]

(* Equations: m'[r]-4*Pi*r^2*rho[r]=0, ((r*(r-
2*m[r]))*p'[r]+(rho[r]+p[r])*(m[r]+4*Pi*r^3*p[r]))=0 *)

(* since rho is regular at r=0 m should begin with r^3. *)

spp=Normal[Series[(r*(r-2*mm))*dpp+(rho+pp)*(mm+4*Pi*r^3*pp),{r,0,4}]]

(* since the second parenthesis is at least r^3, and the coefficient of dp starts with r^2,
dp should be at least r, so p should contain r^2 ... plus the constant term. If p depends
on r^2, rather than r, the same should hold for rho. *)

-1.734723475976807 × 10⁻¹⁸r⁴

-2.168404344971009 × 10⁻¹⁹r³

smm/.{m3-> 4 * Pi * rho0/3 , m5-> 4 * Pi * rho2/5}

-1.734723475976807 × 10⁻¹⁸r⁴

rp2 = Simplify[spp/.{m3-> 4 * Pi * rho0/3 , m5-> 4 * Pi * rho2/5}]; Solve[rp2 =
= 0, p2]; Simplify[spp/.{m3-> 4 * Pi * rho0/3 , m5-> 4 * Pi * rho2/5 , p2
-> - $\frac{2}{3}\pi(3p0^2 + 4p0\rho0 + \rho0^2)$]]

Solve::ivar: -0.000407594 is not a valid variable. >>

-2.168404344971009 × 10⁻¹⁹r³

$$\begin{aligned}
(*p = p(\rho) = p_0 + pp_0 * (\rho - \rho_0) = p_0 + pp_0 * \rho_2 * r^2 = p_0 + p_2 * r^2 == \\
> p_2 = pp_0 * \rho_2. p = k\rho^{(4/3)} ==> pp_0 \\
= 4 * k * \rho_0^{(1/3)}/3. \rho_2 = p_2/pp_0 \\
= p_2 * 3 * \rho_0^{(-1/3)}/(4 * k) *)
\end{aligned}$$

```

k=1.5;rhoStar=1/(27*k^3); alpha=0.8;rho0=alpha*rhoStar; p0=k*rho0^(4/3); p2=-
(2/3) π (3 p0^2+4 p0 rho0+rho0^2); rho2= p2*3*rho0^(-1/3)/(4*k);
m3=4*Pi*rho0/3;m5=4*Pi*rho2/5; rho[r_]=(p[r]/k)^(3/4);eq1=(m'[r]-
4*Pi*r^2*rho[r]);
eq2=((r*(r-2*m[r]))*p'[r]+(rho[r]+p[r])*(m[r]+4*Pi*r^3*p[r])); Print[p0," ",p2];
Print[rho0," ",rho2];Print[m3," ",m5]; rsmall=0.01;

```

```

rlarge=50.;s=NDSolve[{eq1==0,eq2==0,m[rsmall]==m3*rsmall^3+m5*rsmall^5,p[
rsmall]==p0+p2*rsmall^2},{m,p},{r,rsmall,rlarge}]

```

```

Plot[(m[r]/.s),{r,rsmall,rlarge}]

```

```

Plot[p[r]/.s,{r,rsmall,rlarge}]

```

```

0.0027166134920093084"" - 0.0004075937013394682

```

```

0.008779149519890261"" - 0.0009879007608047758

```

```

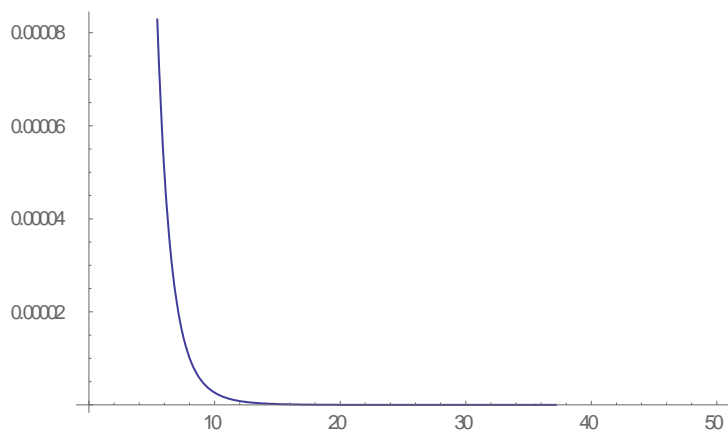
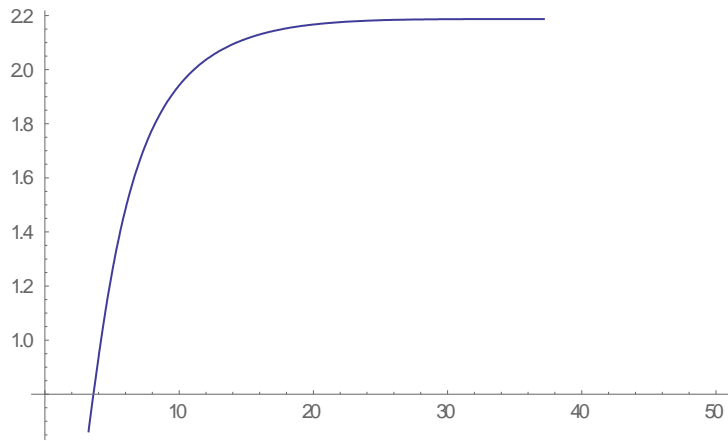
0.03677401551527147"" - 0.002482865418096041

```

```

{{m → InterpolatingFunction[{{0.01,50.}}, " <> "], p
→ InterpolatingFunction[{{0.01,50.}}, " <> "]}}

```



$m[50]/.s[[1]]$

$$2.1869484024632757 - 8.891263683222471 \times 10^{-9}i$$

(large_alpha)

```
k=1.5;rhostar=1/(27*k^3); alpha=0.8;rho0=alpha*rhostar; p0=k*rho0^(4/3); p2=-
(2/3) π (3 p0^2+4 p0 rho0+rho0^2); rho2= p2*3*rho0^(-1/3)/(4*k);
m3=4*Pi*rho0/3;m5=4*Pi*rho2/5; rho[r_]=(p[r]/k)^(3/4);eq1=(m'[r]-
4*Pi*r^2*rho[r]);
eq2=((r*(r-2*m[r]))*p'[r]+(rho[r]+p[r])*(m[r]+4*Pi*r^3*p[r])); Print[p0," ",p2];
Print[rho0," ",rho2];Print[m3," ",m5]; rsmall=0.01;

rlarge=42.;s=NDSolve[{eq1==0,eq2==0,m[rsmall]==m3*rsmall^3+m5*rsmall^5,p[
rsmall]==p0+p2*rsmall^2},{m,p},{r,rsmall,rlarge}]
```

```
Plot[(m[r]/.s),{r,rsmall,rlarge}]
```

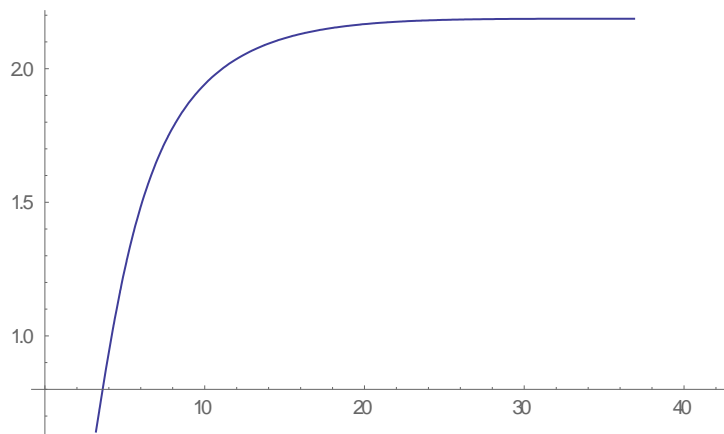
```
Plot[p[r]/.s,{r,rsmall,rlarge}]
```

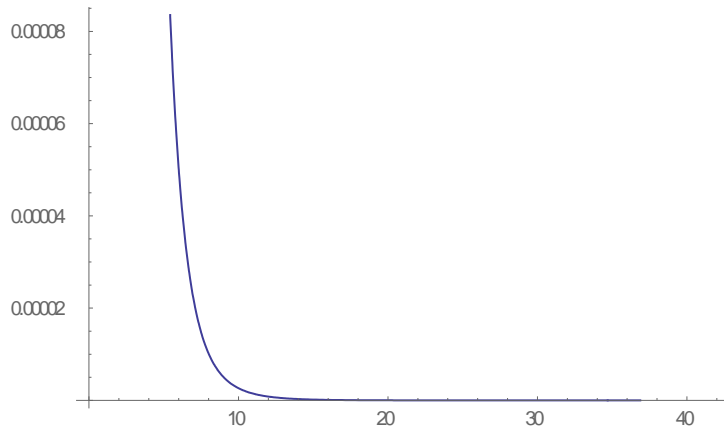
```
0.0027166134920093084"" - 0.0004075937013394682
```

```
0.008779149519890261"" - 0.0009879007608047758
```

```
0.03677401551527147"" - 0.002482865418096041
```

```
{{m → InterpolatingFunction[{{0.01,42.}}, " <> "], p
→ InterpolatingFunction[{{0.01,42.}}, " <> "]}}
```





**alpha=1.2; k=1.5; rhostar=1/(27*k^3); rho0=alpha*rhostar; p0=rho0/3; p2=-(2/3) π
(3 p0^2+4 p0 rho0+rho0^2); rho2=3.*p2; m3=4*Pi*rho0/3; m5=4*Pi*rho2/5;**

rho[r_]=3.*p[r]; rsmall=0.01; rlarge=10.;

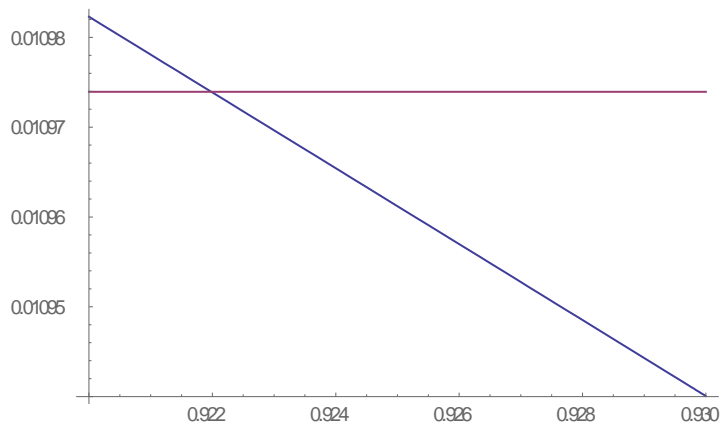
eq1=(m'[r]-4*Pi*r^2*rho[r]);

eq2=((r*(r-2*m[r]))*p'[r]+(rho[r]+p[r])*(m[r]+4*Pi*r^3*p[r]));

s1=NDSolve[{eq1==0,eq2==0,m[rsmall]==m3*rsmall^3+m5*rsmall^5,p[rsmall]==p0+p2*rsmall^2},{m,p},{r,rsmall,1.0}]

{{m → InterpolatingFunction[{{0.01,1.}}, " <> "], p → InterpolatingFunction[{{0.01,1.}}, " <> "]]}

Plot[{rho[r]/.s1,rhostar},{r,0.92,0.93}]



rho[0.922]/.s1[[1]]

0.010973868319819743

$p[0.922]/.s1[[1]]$

0.003657956106606581

$m[0.922]/.s1[[1]]$

0.03876330554751743

k=1.5; rhostar=1/(27*k^3); pp0=0.003657956106606581;

mm0=0.03876330554751743; rrho0=0.010973868319819743;

rrho[r_]=(pp[r]/k)^(3/4); eq1=mm'[r]-4*Pi*r^2*rrho[r];

eq2=((r*(r-2*mm[r]))*pp'[r]+(rrho[r]+pp[r])*(mm[r]+4*Pi*r^3*pp[r]));

rsmall=0.922; rlarge=40.; s=NDSolve[{eq1==0, eq2==0, mm[rsmall]==mm0, pp[rsmall]==pp0}, {mm, pp}, {r, rsmall, rlarge}]

Plot[mm[r]/.s, {r, rsmall, rlarge}]

Plot[pp[r]/.s, {r, rsmall, rlarge}]

{mm → InterpolatingFunction[{{0.922, 40.}}, " <> "], pp
→ InterpolatingFunction[{{0.922, 40.}}, " <> "]]}

